

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA MECÁNICA TERMOFLUIDOS

DESARROLLO DEL MÉTODO COMPLETAMENTE INCOMPRESIBLE SPH PARA EL ANÁLISIS DE FLUJO ALREDEDOR DE CUERPOS SÓLIDOS EN MOVIMIENTO

TESIS
QUE PARA OBTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
ING. ADÁN GALINDO MARTÍNEZ

TUTOR:
DR. RUBÉN ÁVILA RODRÍGUEZ

FACULTAD DE INGENIERÍA

CIUDAD DE MÉXICO, MARZO 2018

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Cervantes De Gortari Jaime G.

Secretario: Dr. Solorio Ordaz Francisco J.

1^{er} Vocal: Dr. Ávila Rodríguez Rubén

2^{do} Vocal: Dr. Vicente y Rodríguez William

3^{er} Vocal: Dr. Naude De La Llave Jorge L.

Lugar donde se realizó la tesis: Facultad de Ingenieria

TUTOR DE TESIS:
Dr. Rubén Ávila Rodriguez

FIRMA

Índice general

1. Introducción **5**
- 1.0.1. Ventajas y desventajas del método SPH . . . 10

2. Modelo matemático débilmente compresible **14**
- 2.0.1. Ecuación de estado . . . 14

3. Modelo matemático completamente incompresible **15**
- 3.0.1. Ecuación de Poisson . . . 15
- 3.0.2. Reformulación de la Divergencia . . . 18

4. Modelo matemático general **23**
- 4.0.1. El método SPH . . . 23
- 4.0.2. Función Kernel . . . 24
- 4.0.3. Ecuación de continuidad . . . 27
- 4.0.4. Ecuación de cantidad de movimiento . . . 27
- 4.0.5. Modelo de viscosidad . . . 28
- 4.0.6. Vorticidad . . . 28
- 4.0.7. Condiciones de frontera . . . 30
- 4.0.8. Modelo de respulsión para fronteras fijas . . . 32
- 4.0.9. Modelo de respulsión para objetos móviles . . . 33

5. Algoritmo numérico del método SPH completamente incompresible **35**
- 5.0.1. Metodología . . . 35

6. Resultados **43**
- 6.0.1. Cavidad con velocidad en la pared . . . 43
- 6.0.2. Comparación de la cavidad con velocidad en una pared . . . 44
- 6.0.3. Comparación de la cavidad con velocidad en dos paredes . . . 45
- 6.0.4. Estudio de cuerpos sólidos en movimiento . . . 52
- 6.0.5. Movimiento de organismos acuáticos oscilantes . . . 57
- 6.0.6. Incorporación del perfil aerodinámico al movimiento de oscilación . . . 59
- 6.0.7. Introducción del perfil con oscilación en el medio fluido . . . 62
- 6.0.8. Dos perfiles con oscilación en el medio fluido . . . 63
- 6.0.9. Cuatro perfiles alineados . . . 64
- 6.0.10. Vorticidad . . . 65
- 6.0.11. Cuatro perfiles desfasados . . . 67
- 6.0.12. Vorticidad . . . 68

7. Conclusiones y trabajo a futuro **70**

8. Apendices **72**
8.0.1. Apendice A: Método numérico MLS 72
8.0.2. Apendice B: FEM (Finit Element Method) 78
8.0.3. Apendice C: Algoritmo LEAPFROG de paso de tiempo 81
8.0.4. Apendice D: Números adimensionales 84

Capítulo 1

Introducción

La Dinámica de fluidos computacional (CFD por sus siglas en inglés: Computational Fluid Dynamic), es una de las ramas más conocidas de la mecánica de fluidos, ésta utiliza métodos numéricos y algoritmos para resolver problemas sobre el flujo de fluidos, utilizando computadoras para realizar millones de cálculos para simular la interacción de los líquidos y los gases con superficies complejas generalmente encontradas en problemas comunes de la ingeniería.

La idea clave de las simulaciones numéricas es traducir aspectos de un problema físico en un modelo numérico. Por lo tanto, la simulación numérica se puede utilizar en lugar de realizar experimentos costosos y grandes. Su papel es cada vez más importante en ingeniería, ya que es una herramienta adecuada para resolver problemas complejos que de manera analítica o experimental serían muy complicados o imposibles.

En la mecánica fluidos existen diversas maneras de analizar los fenómenos pero todas ellas basadas en dos esquemas importantes: el esquema Euleriano y el Lagrangiano. En el esquema Lagrangiano, el punto de observación o punto de análisis se mueve con el elemento de fluido, con el observador moviéndose con una velocidad idéntica al elemento del fluido, representado dicho punto normalmente por partículas, mientras que en el concepto Euleriano el observador mantiene una posición fija sin moverse, en este esquema, todas las cantidades se encuentran en función de sus posiciones y del tiempo. De la misma manera, las implementaciones correspondientes de la dinámica de fluidos computacional, también se clasifican en los métodos basados en los esquemas explicados, éste último ha sido bien estudiado por más de medio siglo y se aplica ampliamente en la mecánica de fluidos así como en la mecánica de sólidos.

La descripción Euleriana se representa típicamente por los métodos de los elementos finitos, (FEM conocido por su nombre en inglés: Finit Element Method) Zienkiewicz y Taylor [23] y Liu y Quek [24], el método de volúmenes finitos, (FEM conocido por su nombre en inglés: Finit Volume Method) o el método de diferencias finitas (FDM conocido como: Finit Difference Method), entre muchos otros pero siendo estos los más conocidos y utilizados.

En estos métodos, la discretización del dominio se realiza mediante un conjunto de puntos que se fijan a la forma del dominio físico, conectados entre si y creando una malla computacional que lo cubre y permanece fija a él en todo momento. Cada punto del material es conocido y definido por las coodenadas de dicha malla en un sistema de referencia fijo. En ellos, las ecuaciones que rigen la mecánica de fluidos son resueltas para obtener: posición, velocidad, cantidad de movimiento, energía, etc. En algunos casos la malla puede llegar a deformarse si existe una ley de movimiento impuesta y el dominio del problema lo requiere. Sin embargo, las deformaciones grandes son difíciles de manejar. Debido a esto, los métodos Eulerianos contienen grandes dificultades en el análisis de fenómenos con movimiento y deformación de cuerpos sólidos. Por otro lado, los métodos Lagrangianos son adecuados para resolver dichos problemas de mecánica de sólidos y mecánca de fluidos, donde la deformación de cuerpos sólidos es grande.

Métodos basados en malla

Los métodos numéricos basados en mallas presentan dificultades en algunos aspectos que limitan sus aplicaciones en muchos problemas complejos. Una de las principales limitaciones es la generación de la malla, que no siempre es un proceso sencillo y puede constituir una tarea costosa, tanto en términos de tiempo de cálculo, como en complejidad matemática para gener la discretización del dominio, que en algunos casos puede ser más complicado que encontrar la solución misma al problema, además de que las ecuaciones requieren una reformulación matemática compleja.

Se puede ver una pequeña comparación entre ambos métodos.

Método	**Método**

- Método de partículas suavizadas → Respresentación Integral
- Método de punto finito → Representación por diferencia finitas
- Método del punto finito → Aproximación por el método MLS y Galerkin
- Método de elemetos difusivos → Aproximación por el método MLS y Galerkin
- Método de nube → Representación integral y de Galerkin
- Métodos libres de malla → Representación diferencial
- Método de punto de interpolación → Aproximación basada en polinomios
- Método libre de malla forma débil → Aproximación por el método MLS

Métodos de partículas libres de malla

Los métodos de partículas, los cuales son los mayores representantes de los métodos sin malla, tratan el sistema como un conjunto de partículas que representa un objeto físico. Para problemas de dinámica de fluidos computacional, las variables tales como: velocidad, cantidad de movimiento, energía y posición se calculan en cada partícula.

Algunos métodos libres de partículas:

- Dinámica molecular
- Monte Carlo
- Simulación directa Monte carlo
- Dinámica de Partículas Disipativas
- Ecuaciones de Lattice Boltztman
- Partículas en Celdas
- Marcadores y Celdas
- Fluido en Celdas
- Movimiento de Partículas Semi Implícito
- Métodos de Elementos Discretos
- Método de vórtices
- Hidrodinámica de Partículas Suavizadas

El método de hidrodinámica de partículas suavizadas (SPH por su nombre en inglés: Smoothed Particle Hydrodynamics), es un método puramente Lagrangiano, desarrollado durante los años setenta como un intento de modelar los problemas de Astrofísica, donde las fronteras del dominio son una limitación para los métodos basados en mallas.

Se ha utilizado en una amplia variedad de aplicaciones Astrofísica y problemas dinámicos, en la ingeniería costera, así como en la mecánica de sólidos. El método SPH es capaz de lidiar con problemas con superficie libre y límites deformables, especialmente la propagación de ondas y la simulación de sólidos inmersos en fluidos.

El modelo SPH, como uno de los métodos de partículas libres de malla más antiguos, se acerca rápidamente a una etapa avanzada. Con las continuas mejoras y modificaciones, la precisión, la estabilidad y la adaptabilidad del modelo han alcanzado un nivel aceptable para aplicaciones de ingeniería práctica.

Las ventajas principales del método SPH surgen directamente de su naturaleza Lagrangiana. Ésto puede abordar las dificultades relacionadas con la falta de simetría o grandes vacíos de manera más eficiente que los métodos Eulerianos pueden lograr. No existen restricciones impuestas ni en la geometría del sistema ni en qué tan lejos puede evolucionar a partir de las condiciones iniciales. Como no existe malla que distorsionar, el método puede manejar grandes deformaciones en un marco Lagrangiano puro. Por lo tanto, la interfaz natural se sigue de forma simple y el comportamiento constitutivo complejo puede ser implementado de manera simple y precisa.

La base del método SPH es la teoría de la interpolación. Las leyes de conservación de la dinámica de fluidos y de medios continuos, en forma de ecuaciones diferenciales parciales, en su forma de partículas por ecuaciones integrales a través del uso de una función de interpolación generalmente conocida como kernel. Computacionalmente, la información solo se conoce en puntos discretos, por lo que las integrales se evalúan como sumas sobre puntos vecinos.

1.0.1. Ventajas y desventajas del método SPH

Ventajas

La naturaleza lagrangiana del método SPH proporciona algunas ventajas cuando se compara con las limitaciones habituales en los métodos Eulerianos.

- El número de partículas aumenta en las regiones donde está presente el fluido, de tal forma que el esfuerzo computacional se concentra principalmente en esas regiones, así que no se desperdicia tiempo calculando áreas vacías.

- No existen restricciones impuestas ni a la geometría del sistema ni a lo lejos que puede evolucionar de las condiciones iniciales, de modo que las condiciones iniciales se pueden programar fácilmente sin necesidad de complicados algoritmos de mallado como los utilizados en los métodos basados en mallas.

- Es sencillo incluir diversos fenómenos físicos, ya que su implementación en el código numérico es sencillo.

Desventajas

Sin embargo, el método también presenta algunas limitaciones.

- Puede existor penetración de partículas fluidas en los límites.

- El método de interpolación utilizado en SPH es muy simple y se verá muy afectado por el desorden de partículas. SPH da resultados razonables para los gradientes de primer orden, aunque Bonet y Lok [25] recomiendan correcciones de gradiente, pero pueden ser peores para derivadas de orden superior. A veces, es necesario utilizar técnicas especiales cuando se incluyen derivadas secundarias.

- El método es típicamente más lento computacionalmente en comparación con otros métodos modernos basados en mallas, ya que el paso del tiempo se basa en una velocidad de sonido en el fluido, aunque se han desarrollado nuevas investigaciones durante los últimos años para superar estas limitaciones.

- A menudo se utiliza un kernel con simetría esférica. La distribución de los vecinos de partículas debe ser aproximadamente isótropa para la forma de interpolación para funcionar correctamente, lo que no se cumple en los procesos astrofísicos que implican la formación.

Aplicaciones del SPH

SPH fue desarrollado como un intento de modelar una gama de fenónemos específicos de la física, evitando las limitaciones de los métodos basados en el esquema Euleriano. Fue primeramente aplicado hace treinta años para resolver problemas de astrofísica Lucy Gindold Monaghan [26], debido a que el movimiento colectivo de esos cuerpos semeja el flujo en un fluido por lo tanto puede ser modelado bajo las ecuaciones que gobiernan la mecánica clásica de Newton. El método ha probado ser lo suficientemente robusto para aplicarlo en un amplio y variado campo de investigación:

- **Astrofísica**

  - Stellar collisions: [Faber and Rasio, 2000]; [Faber and Manor, 2001]; [Benz, 1988]; [Benz, 1990]; [Monaghan, 1992]; [Frederic and James, 1999]

  - Moon formation and impacts problems: [Benz, 1989]

- **Magneto-hidrodinámica**

  - Magnetic collapse of gas clouds: [Habe, 1989]

  - Alfvenic waves propagation: [Phillips and Monaghan, 1985]

- **Mecánica de sólidos**

  - Fractures simulation: [Benz and Asphaug, 1993]

  - Impacts of solids simulation: [Benz and Asphaug, 1994]

- **Mecánica de fluidos**

  - Multi-phase flows: [Monaghan and Kocharyan, 1995]

  - Heat conduction: [Chen et al., 1999]

  Además, algunas de las aplicaciones en el ambito de la mecánica de fluidos son: Generación de olas, suspención y transporte de sedimentos, rompimiento e impacto de olas en estructuras oceánicas, así como El método SPH completamente incompresible desarrollado en este trabajo.

Aspectos importantes del método SPH

En [5, 13, 14], se demostró que las distribuciones de partículas cada vez más irregulares exhiben errores numéricos en los resultados. Fang y Parriaux [10] señalaron que podría existir una matriz mal acondicionada en el sistema lineal, con aumento de la no uniformidad de la distribución de partículas, ésto derivada de los fallos en calculos de la presión.

En [7], Monaghan señaló la inestabilidad a la tracción en los resultados SPH y el agrupamiento de partículas. El agrupamiento es particularmente notable en materiales que tienen una ecuación de estado que puede dar lugar a presiones negativas, pero puede ocurrir en el fluido donde la presión es siempre positiva.

A partir del perfil de la sección transversal de la primera derivada (figura 4.2) se puede deducir que las partículas se acercan entre si dentro de un cierto rango de distancia, la interacción entre ellas no aumenta, sino se reduce. Este comportamiento no físico de la función kernel introduce un error en las simulaciones, como en el gradiente de presión, o el operador laplaciano, y provoca el fenómeno de agrupación de partículas, resultando en predicciones no físicas.

Por estos motivos, este trabajo propone la creación del metodo COMPLETAMENTE incompresible, el cual evita dichos problemas derivados de la tracción de las partículas y los problemas derivados del uso de una ecuación de estado, esto mediante a solución de las ecuaciones de segundo orden por medio del método de elemento finito, el cual utiliza el esquema Euleriano el cual evita el tratamiento de las segundas derivadas mediante los operadores SPH para poder proporcionar una solución más exacta.

Trabajos recientes

En la actualidad algunos autores han abordado el desarrollo de métodos completamente incompresibles basados en un esquema puramente lagrangianos, un ejemplo es S. Jahangiri Mamouri [18], donde utilizan operadores diferenciales de segundo orden mediante la formulación del método SPH para integrar la ecuación de Poisson con resultados, que por lo comentado en las desventajas de tratar con operadores diferenciales de orden mayor a uno pierden precisión en el campo de presión y genera resultados poco cercanos a la realidad.

También Rui Xu [37] desarrolló un método ISPH, el cual mostró buenos resultados pero a números de Reynolds de orden máximo de $Re = 1000$ y con una baja convergencia del método y alto costo computacional.

Objetivos

Una vez definidos los puntos importantes del método SPH, y algunas de sus aplicaciones, ventajas y desventajas, ahora definiremos los objetivos planteados para este trabajo.

Como se ha comentado en la introducción, una de las limitaciones importantes del método es la utilización de una ecuación de estado, la cual nos da una aproximación muy buena del campo de presión pero con algunas limitaciones en ciertos puntos importantes de la simulación numérica. Debido a esto, el primer objetivo de este trabajo es crear el método completamente incompresible haciendo uso del método de elementos finitos para resolver la ecuación de Poisson, por lo que se busca generar un método que acople la solución de posición, velocidad, aceleración, etc encontradas mediante el método SPH en conjunto con la solución del campo de presión utilizando el método de los elementos finitos. Dicho acomplamiento se explicará paso a paso en los capitulos siguientes y los resultados obtenidos mediante esta nueva forma de solución serán presentados posteriormente.

El segudo objetivo de este trabajo es generar una introducción al estudio de elementos sólidos deformables mediante el método SPH, los cuales hasta ahora sólo se han limitado a la interacción de objetos móviles em medios fluidos donde parten de mallas móviles generadas mediante malladores especializados Lamas, M. I; Rodrıguez, C. G; Rodrıguez [13], y que elevan de manera significativa la complejidad de las simulaciones y de manera directa el tiempo de cálculo.

Capítulo 2

Modelo matemático débilmente compresible

2.0.1. Ecuación de estado

El fluido en el formalismo de SPH es tratado como débilmente compresible, ésto facilíta el uso de una ecuación de estado para determinar la presión, que es mucho más rapido que resolver una ecuación como la ecuación de Poisson. Así la compresibilidad es ajustada para disminuir la velocidad del sonido de modo que el paso del tiempo en el modelo (usando una condición basada en la velocidad del sonido) sea razonable. Otra limitación de la compresibilidad se impone por el hecho de que la velocidad del sonido debe ser aproximadamente diez veces más rápido que la velocidad máxima del fluido, manteniendo así las variaciones del 1 %.

Siguiendo Monaghan[6] y Batchelor[29], la relación entre la presión y la densidad se expresa de la siguiente manera:

$$P = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} - 1\right] \tag{2.0.1}$$

donde y $B = c_0^2\frac{\rho_0}{\gamma}$, $\rho_0 = 1000 \;\; kg/m^3$ usualmente tomada como la densidad de referencia del diámetro en la superficie libre y $c_0 = c(\rho) = \sqrt{(\partial P/\partial\rho)}\|_{\rho_0}$, la velocidad del sonido a la densidad de referencia.

El parámetro B es una constante relacionada con el módulo de Bulk, γ es la constante politrópica, usualmente entre 1 y 7, el término -1 en la ecuación de estado es para obtener una presión cero en la superficie.

Por medio de la ecuación 2.0.1, la presión es determinada en el modelo débilmente compresible, el cual ha sido ampliamente usado en el método SPH.

Capítulo 3

Modelo matemático completamente incompresible

3.0.1. Ecuación de Poisson

Como es sabido, la ecuación de Poisson es generalmente usada para encontrar el campo de presiones en los esquemas Eulerianos, dicha ecuación es expresada de la siguiente manera. Como ya conocemos la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{3.0.1}$$

La ecuación de momentum.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{3.0.2}$$

Considerando que $\rho =$ constante, ambas ecuaciones las podemos expresar de la siguiente manera:

Continuidad en dos dimensiones.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3.0.3}$$

Y la ecuación de cantidad de movimiento en dos dimensiones.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = --\frac{1}{}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{3.0.4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = --\frac{1}{}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{3.0.5}$$

Ahora tomarémos la de la ecuación de cantidad de movimiento, si $\mathbf{M}$ es el "vector"de las ecuaciones de cantidad de movimiento, entonces la divergencia es:

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = \frac{\partial}{\partial x} M_x + \frac{\partial}{\partial y} M_y \tag{3.0.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} M_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \nu\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right) \tag{3.0.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} M_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \nu\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right) \tag{3.0.8}$$

Sumando las parte izquierdas LI.

$$\frac{\partial}{\partial x} M_x + \frac{\partial}{\partial y} M_y = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v\frac{\partial^2}{\partial y^2} = LD \tag{3.0.9}$$

Reorganizando los términos.

$$\frac{\partial}{\partial x} M_x + \frac{\partial}{\partial y} M_y = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = LD \tag{3.0.10}$$

Ahora aplicando la ecuación de conservación.

$$\frac{\partial}{\partial x} M_x + \frac{\partial}{\partial y} M_y = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = LD \tag{3.0.11}$$

Y la parte derecha de la ecuación LD.

$$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) + \nu\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right) = LI \tag{3.0.12}$$

Reorganizando ahora este lado de la ecuación.

$$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2}{^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial y}\right)\right) = LI \tag{3.0.13}$$

Aplicando también la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

$$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = LI \tag{3.0.14}$$

Ahora colocando ambos lados de la ecuación, LI y LD.

$$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \tag{3.0.15}$$

Y en forma vectorial:

$$-\frac{\nabla^2 P}{\rho} = f \tag{3.0.16}$$

$$f = \nabla \cdot \mathbf{V} \tag{3.0.17}$$

Donde f es el término fuente que necesitamos en la ecuación de Poisson para poder calcular la solución. En este trabajo este término fuente es igualado a la divergencia de la velocidad de las partículas, de esta manera encontraremos la presión en términos de la velocidad de las partículas.

Algoritmo incompresible SPH

Un paso crucial en la solución de problemas de flujo de fluidos incompresibles es idear una estrategia adecuada para manejar el acoplamiento entre los campos de presión y velocidad. El método de proyección introducido por Lee Es et al.[16] ofrece un algoritmo eficiente para este propósito. Cummins y Rudman [17] extendieron la proyección método para el contexto del método SPH. En este trabajo, su método se utiliza como un algoritmo subyacente. El método emplea un campo de velocidad intermedio, $\mathbf{V}_i^*$, que se calcula utilizando la ecuación de cantidad de movimiento sin el término de gradiente de presión.

$$\mathbf{V}_i^* = \mathbf{V}_i^n + \left(\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{V}_i^n + \mathbf{G}_i^n\right)\Delta t \tag{3.0.18}$$

Donde Δt es el tamaño de paso de tiempo y los superindices n y $n+1$ se refieren al tiempo t y $t+\Delta t$, respectivamente. Entonces, el campo de velocidad en el tiempo $n+1$ se calcula aplicando el término de gradiente de presión para corregir $\mathbf{V}_i^*$:

$$\mathbf{V}_i^{n+1} = \mathbf{V}_i^* - \frac{\Delta t}{\rho}\nabla P_i^{n+1} \tag{3.0.19}$$

Como esta distribución de velocidades debe satisfacer la restricción de incompresibilidad y la ecuación de conservación, su divergencia debe desaparecer. Esto lleva a:

$$\nabla\cdot\mathbf{V}_i^{n+1} = \nabla\cdot\mathbf{V}_i^* - \nabla\cdot\left(\frac{\Delta t}{\rho}\nabla P_i^{n+1}\right) \tag{3.0.20}$$

Que proporciona una ecuación de Poisson para la presión en el tiempo $n+1$ como:

$$\frac{\nabla^2 P^{n+1}}{\rho} = \frac{\nabla\cdot\mathbf{V}_i^*}{\Delta t} \tag{3.0.21}$$

3.0.2. Reformulación de la Divergencia

De acuerdo con la ecuación 3.0.21, el término fuente es igualado a la divergencia de la velocidad, por lo que la formulación de la divergencia deberá ser redefinida de la siguiente manera a diferencia de la formulación que presenta Monahan.

La nueva formulación de la divergencia deacuerdo con S. Jahangiri Mamouri [18], se presenta a continuación en la cuál se generó el estudio del método completamente incompresible SPH mediante la formulación de la ecuación de Poisson en la terminología SPH, con la implementación de fronteras fijas y móviles.

Donde definimos la divergencia del vector de velocidades como:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{B}_i \cdot \nabla W_{ij}) \cdot (u_j - u_i) = 0$$

$$\nabla \cdot u_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{B}_i \cdot \nabla W_{ij}) \cdot (u_j - u_i) = 0 \tag{3.0.22}$$

Donde $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, además.

$$\mathbf{B}_i = -\left[\sum_j \omega_j r_{ij} \nabla W_{ij}\right]^{-1}$$

Donde $\mathbf{B}_i$ es un tensor renormalizado.

$$\mathbf{B}_i = -\left[\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} r_{ij} \nabla W_{ij}\right]^{-1}$$

$$\mathbf{B}_i = -\left[\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} r_{ij} \bigotimes \nabla W_{ij}\right]^{-1} \tag{3.0.23}$$

$$\mathbf{B}_i = -\left[\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} r_{ij} \mathbf{i}_l \bigotimes \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_m} \mathbf{i}_m\right]^{-1} \tag{3.0.24}$$

$$\mathbf{B}_i = -\left[\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} r_{ijl} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_m} \mathbf{i}_m \bigotimes \mathbf{i}_l\right]^{-1} \tag{3.0.25}$$

$$\mathbf{B}_i = -\left[\sum_j \frac{m_j}{\rho_j}\left(r_{ij1}\frac{\partial}{\partial x_m}W_{ij}\mathbf{i}_1\bigotimes\mathbf{i}_m + r_{ij2}\frac{\partial}{\partial x_m}W_{ij}\mathbf{i}_2\bigotimes\mathbf{i}_m + r_{ij3}\frac{\partial}{\partial x_m}W_{ij}\mathbf{i}_3\bigotimes\mathbf{i}_m\right)\right]^{-1} \tag{3.0.26}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_i = -\Bigg[\sum_j \frac{m_j}{\rho_j}\Bigg(& r_{ij1}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1}\mathbf{i}_1\bigotimes\mathbf{i}_1 + r_{ij2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2}\mathbf{i}_1\bigotimes\mathbf{i}_2 + r_{ij3}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2}\mathbf{i}_1\bigotimes\mathbf{i}_3 \\ &+ r_{ij2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1}\mathbf{i}_1\bigotimes\mathbf{i}_2 + r_{ij2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2}\mathbf{i}_2\bigotimes\mathbf{i}_2 + r_{ij3}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_3}\mathbf{i}_2\bigotimes\mathbf{i}_3 \\ &+ r_{ij3}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1}\mathbf{i}_3\bigotimes\mathbf{i}_1 + r_{ij2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2}\mathbf{i}_3\bigotimes\mathbf{i}_2 + r_{ij3}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_3}\mathbf{i}_3\bigotimes\mathbf{i}_3\ \Bigg)^{-1}\end{aligned} \tag{3.0.27}$$

Definiéndolo en forma matricial como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} r_{ij1}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} & \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} r_{ij1}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2} \\ \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} r_{ij2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} & \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} r_{ij2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{3.0.28}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dx_{ij1}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} & \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dx_{ij1}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2} \\ \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dy_{ij2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} & \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dy_{ij2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{3.0.29}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \begin{bmatrix} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dx_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} & \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dx_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2} \\ \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dy_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} & \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dy_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} \end{bmatrix} \cdot [u_{ji}\ \ v_{ji}] \tag{3.0.30}$$

Donde definimos:

$$dx_{ij} = x_i - x_j \quad ; \quad dy_{ij} = y_i - y_j \quad ; \quad u_{ij} = u_i - u_j \quad ; \quad v_{ij} = v_i - v_j$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \begin{bmatrix} \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dx_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1}\right)^{-1} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} & \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dx_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2}\right)^{-1} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2} \\ \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dy_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1}\right)^{-1} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} & \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dy_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2}\right)^{-1} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot [u_{ij} \;\; v_{ij}] \tag{3.0.31}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \cdot [u_{ij} \;\; v_{ij}] \begin{bmatrix} \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dx_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1}\right)^{-1} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} & \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dx_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2}\right)^{-1} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2} \\ \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dy_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1}\right)^{-1} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} & \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dy_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2}\right)^{-1} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{3.0.32}$$

$$(\nabla \cdot u)_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \left[u_{ji} A \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} + u_{ji} B \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2} + u_{ji} C \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} u_{ji} D \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2} \right] \tag{3.0.33}$$

De esta manera llegamos a la definición de la divergencia como:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \left[u_{ji} A \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} + u_{ji} B \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2} + u_{ji} C \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} u_{ji} D \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2} \right] \tag{3.0.34}$$

Donde los términos A, B, C y D se expresan de la siguiente manera:

$$A = \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dx_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} \right)^{-1} \tag{3.0.35}$$

$$B = \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dx_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2} \right)^{-1} \tag{3.0.36}$$

$$C = \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dy_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_1} \right)^{-1} \tag{3.0.37}$$

$$D = \left(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} dy_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_2} \right)^{-1} \tag{3.0.38}$$

Esta nueva formulación, como se mencionó anteriormente, se genera incorporado en el término fuente que es agregado a la ecuación de Poisson y es implementada directamente en el código numérico.

Capítulo 4

Modelo matemático general

El método SPH tiene algunas propiedades singulares sustancialmente diferentes a las de otros modelos actualmente en uso. En primer lugar y aunque la mayoría de las aplicaciones de SPH se han desarrollado para problemas de mecánica de fluidos, el principio sobre el que se sustenta el método puede ser considerado una técnica genérica para la solución numérica de modelos matemáticos de medios continuos, alternativa a otras como los métodos de diferencias finitas, elementos finitos, volúmenes finitos, etc. SPH es el exponente más robusto de los denominados "Métodos sin Malla" (meshless methods) que algunos autores señalan como la próxima generación de métodos numéricos. Como resultado, el método puede tratar de forma muy poco restrictiva flujos con grandes deformaciones de la superficie libre, incluyendo rotura y fragmentación, incorporando también de forma natural y sencilla la dinámica de sólidos y contornos interactuando con el fluido. En particular y en relación con el objeto del presente trabajo, resulta particularmente apropiado para simular la interacción de cuerpos sólidos inmersos en un fluido.

4.0.1. El método SPH

Dentro de la metodología SPH, las funciones vectoriales se expresan en primera instancia como una convolución de dos funciones particulares, de forma similar que como lo hace la teoría de elementos finitos, las ecuaciones diferenciales parciales se toman como funciones lineales.

El métodos de interpolación SPH se basa en la teoría de los interpolandos integrales. El principio fundamental es aproximar cualquier función $A(r)$ por:

$$A(r) = \int_{\Omega} A(r_a) W(r_a - r_b, h) dr_b \tag{4.0.1}$$

Donde r_a es el vector de posición, W es la función de peso o kernel, h es la distancia de interacción llamada distancia de suavizado, que controla el dominio Ω. El valor de h debería ser mayor que la distancia inicial de separación entre partículas.

La expresión (3.0.1) en notación discreta lleva a la siguiente aproximación de la función en la posición de la partícula.

$$A_a = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} W_{ab} \tag{4.0.2}$$

Donde la sumatoria se realiza sobre las partículas vecinas b, que se encuentran en la región de soporte compacto de la función kernel. La masa y la densidad de las partículas se denotan como m_b y ρ_a, respectivamente y $W_{ab} = W(r_a - r_b, h)$ es la función de peso o kernel. Una de las ventajas de la aproximación usando la aproximación SPH es que la derivada de la función se calcula analíticamente. Sin embargo, en el método de las diferencias finitas las derivadas se calculan por los puntos vecinos usando el espacio entre ellos, lo cual sería muy complicado para partículas distribuídas de forma irregular como en el caso SPH. Las derivadas de estos interpolandos pueden obtenerse por diferenciación ordinaria.

$$\nabla A_a(r) \approx \int_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} \nabla W_{ab} \tag{4.0.3}$$

$$\nabla \cdot A_a(r) \approx \int_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} \cdot \nabla W_{ab} \tag{4.0.4}$$

Definiendo los operadores como:

$$\nabla A_a(r) = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} \nabla W_{ab} \tag{4.0.5}$$

$$\nabla \cdot A_a(r) = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} \cdot \nabla W_{ab} \tag{4.0.6}$$

4.0.2. Función Kernel

El rendimiento de un modelo SPH depende de la elección de la funciones kernel. Éstas deben satisfacer diferentes condiciones tales como; ser positiva, tener soporte compacto y estar normalizadas. También W_{ab} debe ser monotónicamente decreciente con el incremento de la distancia y comportarse como una función delta cuando la distancia de suavizado tiende a cero.

Es decir la función kernel debe tener las siguientes características;

- Definida positiva.

$$W(r_a - r_b, h) \geqslant 0 \tag{4.0.7}$$

Dentro del dominio Ω

- Soporte compacto.

$$W(r_a - r_b, h) = 0 \tag{4.0.8}$$

Fuera del dominio Ω

- Normalizada

$$\int_{\Omega} W(r_a - r_b, h) dr_b = 1 \tag{4.0.9}$$

- Comportamiento como función delta.

$$\lim_{h \to 0} W(r_a - r_b, h) dr_b = \delta(r_a - r_b) \tag{4.0.10}$$

- Comportamiento monotónicamente decreciente sobre $W(r_a - r_b, h)$.

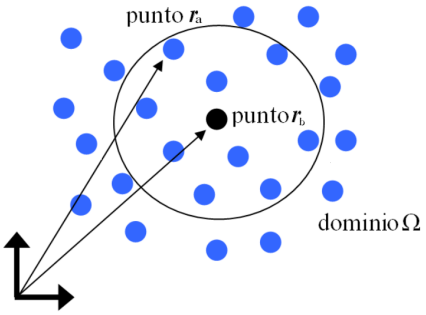


Figura 4.1: Gráfica del dominio de influencia de la función kernel.

Todos los tipos de kernel dependen de la distancia de suavizado h y de la distancia adimensional dada por $q = r_{ab}/h$, donde r_{ab} es la distancia entre las partículas a y b $r_{ab} = r_a - r_b$. El parámetro h controla el tamaño del área alrededor de la partícula a donde la distribución del resto de partículas no pueda ser despreciada.

Existen diversos tipos de funciones kernel y debido a esto la presición de la interpolación SPH aumenta con el orden de los polinomios usados para definir cada kernel, sin embargo el tiempo de computo también aumenta.

El kernel usado en este trabajo será el llamado cubic-spline de tercer orden, el cual se define de la siguiente manera dentro los intervalo:

$$f(x) = \alpha_D \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3 & \text{si } 0 \leq q \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2-q)^3 & \text{si } 1 \leq q \leq 2 \\ 0 & \text{si } q \geq 2 \end{cases} \tag{4.0.11}$$

Donde $q = r/h$ y α_d es $10/(7\pi h^2)$ en 2D y $1/(\pi h^3)$ en 3D.

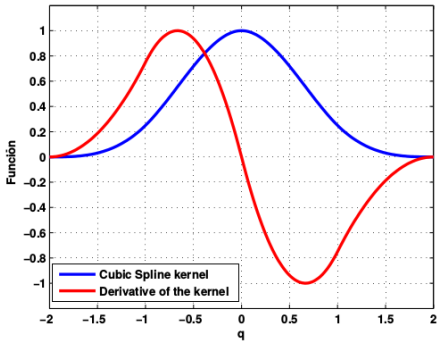


Figura 4.2: Gráfica de la función kernel y su derivada.

4.0.3. Ecuación de continuidad

Una práctica normal en el SPH es encontrar la densidad de suavisado sumando sobre todas las partículas.

$$\rho = \sum_b m_b W_{ab} \tag{4.0.12}$$

Los cambios en la densidad del fluido se calculan de la siguiente forma:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \tag{4.0.13}$$

Y usando los interpolandos de las partículas SPH para el lado derecho, la tasa de cambio de la densidad de la partícula a se convierte en:

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \sum m_b \mathbf{v}_{ab} \nabla_a W_{ab} \tag{4.0.14}$$

Se usa un diferencial temporal en lugar de un sumatorio ponderado de los términos de masa propuesto por Monaghan [6], ya que el sumatorio ponderado resulta en una disminución de la densidad cerca de las zonas de contacto entre diferentes fluidos, cerca de la superficie y de los contornos.

4.0.4. Ecuación de cantidad de movimiento

La ecuación de cantidad de movimiento en un campo continuo se expresa como:

$$\frac{D\mathbf{v}_a}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g} + \Theta \tag{4.0.15}$$

donde $\mathbf{v}$ es el vector de velocidad, P y ρ son la presión y la densidad respectivamente, $\mathbf{g} = (0, 0, -9{,}81) m/s^2$ es la aceleración gravitacional y Θ se refiere a los términos de difusión.

4.0.5. Modelo de viscosidad

La ecuación de cantidad de movimiento con viscosidad laminar se escribe como:

$$\frac{D\mathbf{v}_a}{Dt} = \frac{1}{\rho}\nabla P + \mathbf{g} + \nu_0 \nabla^2 \mathbf{v} \tag{4.0.16}$$

El término laminar se simplifica según Morris [27] y Lo y Shao [28] a :

$$(\nu_0 \nabla^2 \mathbf{v})_a = \sum_b m_b \left(\frac{4\nu_0 \mathbf{r}_{ab} \nabla_a W_{ab}}{(\rho_a + \rho_b)\|\mathbf{r}_{ab}\|^2} \right) \mathbf{v}_{ab} \tag{4.0.17}$$

Donde ν_0 es el término de viscosidad cinética del fluido en el caso del agua. De este modo, usando la notación de SPH, la ecuación de cantidad de movimiento queda expresada de la forma:

$$\frac{D\mathbf{v}_a}{Dt} = \frac{1}{\rho}\nabla P + \mathbf{g} + \sum_b m_b \left(\frac{4\nu_0 \mathbf{r}_{ab} \nabla_a W_{ab}}{(\rho_a + \rho_b)\|\mathbf{r}_{ab}\|^2} \right) \mathbf{v}_{ab} \tag{4.0.18}$$

Entonces la ecuación (4.0.14) puede ser escrita en notación SPH.

$$\frac{D\mathbf{v}_a}{Dt} = -\sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab} + \mathbf{g} + \sum_b m_b \left(\frac{4\nu_0 \mathbf{r}_{ab} \nabla_a W_{ab}}{(\rho_a + \rho_b)\|\mathbf{r}_{ab}\|^2} \right) \mathbf{v}_{ab} \tag{4.0.19}$$

4.0.6. Vorticidad

La vorticidad de un campo vectorial expresada en la notación SPH se escribe de la siguiente manera:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{i}_1 & \hat{i}_2 & \hat{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \tag{4.0.20}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \hat{i}_1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) - \hat{i}_2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) + \hat{i}_3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \tag{4.0.21}$$

Para el caso de dos dimensiones, la ecuación anterior se simplifica a:

$$\hat{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \hat{i}_3 \tag{4.0.22}$$

$$\hat{\omega} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \hat{i}_3 \tag{4.0.23}$$

Donde

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \sum_{p=1}^{N} v_{2_N} \left(\frac{dw_{ij}}{dx_1} \right) \tag{4.0.24}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \sum_{p=1}^{N} v_{1_N} \left(\frac{dw_{ij}}{dx_2} \right) \tag{4.0.25}$$

$$\hat{\omega} = \left(\sum_{p=1}^{N} v_{2_N} \left(\frac{dw_{ij}}{dx_1} \right) - \sum_{p=1}^{N} v_{1_N} \left(\frac{dw_{ij}}{dx_2} \right) \right) \tag{4.0.26}$$

4.0.7. Condiciones de frontera

El método SPH frecuentemente utiliza partículas estáticas virtuales para corregir las deficiencias integrales que ocurren cerca de las fronteras. Estas partículas virtuales, aunque son útiles en la mayoría de los casos, pueden ser difíciles de implementar para objetos que experimentan grandes deformaciones. Como alternativa a las partículas virtuales, se presenta un algoritmo de fuerza repulsiva que emúla indirectamente la presencia de las partículas virtuales en la ecuación de cantidad de movimiento del método SPH.

Las condiciones de contorno no aparecen de manera natural en el formalismo SPH. Cuando una partícula se aproxima a un límite sólido, en las sumatorias ecuación (4.0.19) sólo las partículas situadas dentro del sistema intervienen sin ninguna interacción desde fuera. Esta contribución puede generar efectos no realistas, debido a la diferente naturaleza de las variables a resolver, ya que algunas como la velocidad, caen a cero cuando se acercan a los límites, mientras que otros, como la densidad, no lo hace. Las diferentes soluciones para evitar este tipo de problemas de frontera consisten en la creación de muchas partículas que caracterizan los límites del sistema. Básicamente, tres diferentes tipos de partículas pueden ser distinguidas, a continuación se mencionarán algunas:

- Partículas fantasma. Libersky y Petscheck [34]
  Consideradas partículas límite cuyas propiedades, incluyendo su posición, varían cada paso del tiempo. Cuando una partícula real está cerca de un límite (a una distancia menor que la longitud de suavizado del kernel), entonces una partícula virtual (fantasma) es generada fuera del sistema. Ambas partículas tienen la misma densidad y presión, pero a velocidad opuesta. Por lo tanto, el número de partículas límite varía en cada paso de tiempo, que complica su implementación en el código. Este método también fue utilizado por Colagrossi y Landrini [30].

- Partículas dinámicas.
  Estas partículas verifícan las mismas ecuaciones de continuidad y de estado como las partículas de fluido, pero su posición permanece sin cambios o es impuesta externamente. Una ventaja interesante de estas partículas es su simplicidad computacional, ya que pueden calcularse dentro de los mismos ciclos de las partículas de fluido con un considerable ahorro de tiempo computacional. Estas partículas fueron presentadas en Dalrymple y Knio [35].

- Partículas repulsivas.
  Estos tipos de límites se deben a Monaghan [6]. En este caso las partículas que constituyen la frontera ejercen fuerzas centrales sobre las partículas fluídas, en analogía con las fuerzas entre moléculas. Por lo tanto, para un partícula de la frontera y una partícula de fluido separadas una distancia r, la fuerza por unidad de masa tiene la forma dada por el potencial de Lennard-Jones. En una forma similar, otros autores Peskin [36] se expresan estas fuerzas asumiendo la existencia de fuerzas en los límites que pueden ser descritas por una función delta. Este método fue refinado por medio de un proceso de interpolación, minimizando el inter-espaciamiento de las partículas de la frontera en la fuerza de repulsión de la pared. Una nueva revisión se hizo en Monaghan [7].

  Es este trabajo solo se hará uso de las partículas dinámicas y las partículas repulsivas, donde estas segundas son inportantes para generar el movimiento de los cuerpos sólidos en movimiento.

Una parte importante en la simulación de fluidos es la precisión con la que los efectos de las fuerzas externas son reproducidos, ya que la forma en que se modelan dichas fuerzas nos dará la confiabilidad en los resultados, por esta mismo razón algúnas de las formas para modelar dichos fenómenos han cambiado a lo largo del tiempo. Se han creado modelos que se acercan más a la realidad y recrean la física de un problema con mayor exactitud.

En este capitulo trataremos el tema del modelo de repulsión que fue primeramente incorporado en al codigo original de SPH, el cual fue modificado para generar mayor confianza en los resultados propuestos en esta trabajo.

A pesar de que el modelo matemático de la superficie libre en SPH no requieren un tratamiento especial, las fronteras sólidas sí lo requieren, ya que el método SPH unicamente trabaja con partículas que interactúan unas con otras.

4.0.8. Modelo de respulsión para fronteras fijas

El modelo de repulsión de partículas usado e implementado en este trabajo, el cual está basado en el tratamiento numérico de los vectores normales a la superficie de las partículas sólidas que constituyen las fonteras del elemento deformables.

Alinearemos los vectores de las partículas que se acercan a las paredes sólidas con un nuevo sistema de referencia para poder encontrar los ángulos entre las partículas de fluido y las de los sólidos. Para esto necesitamos definir una matriz de rotación para poder colocar los vectores de las partículas con un nuevo sistema de referencia. Una vez encontrado el ángulo de interacción podrémos repeler la partícula con el mismo ángulo de incidencia, es decir, el ángulo inicial de la partícula y el elemento sólido.

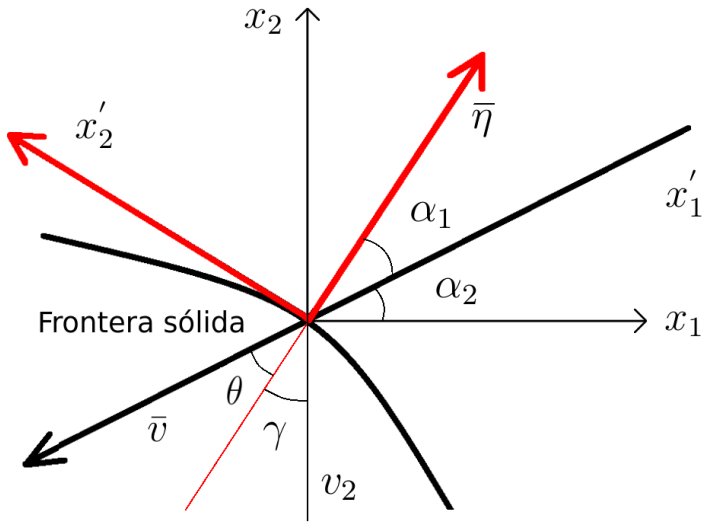


Figura 4.3: Esquema del nuevo sistema de referencia para repeler partículas.

El perimer paso es definir una matriz de rotación la cual usaremos para definir un nuevo sistema de referencia, este nuevo sistema de referencia se alineará con el ángulo de incidencia con el cual la partícula llega a la frontera fija.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} cos(\alpha_1) & cos(\alpha_2) & 0 \\ cos(90+\alpha_2) & cos(\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y la traspuesta de la matriz de rotación

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} cos(\alpha_1) & cos(90+\alpha_2) & 0 \\ cos(\alpha_2) & cos(\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La cual al ser multiplicada por el vector de la partícula generará un vector en un nuevo sistema dereferencia, el vector $\mathbf{v} = v\mathbf{i}_i = v_1 i_1 + v_2 i_2$ en dos dimensiones.

Entonces el vector generado en el nuevo sistema está definido por:

$$\mathbf{v}\text{'}=\mathbf{A}\mathbf{v}=\begin{bmatrix} cos(\alpha_1) & cos\alpha_2 & 0 \\ cos(90+\alpha_2) & cos\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1' = v_1 cos(\alpha_1) + v_2 cos(\alpha_2)$$

$$v_2' = v_1 cos(90+\alpha_2) + v_2 cos(\alpha_1)$$

Donde encontraremos los valores de α_1 y α_2 para poder repeler las partículas que se acercan a las fronteras sólidas con el mismo ángulo de incidencia.

$$cos(\theta) = \frac{\bar{v}\cdot\bar{\eta}}{|\bar{v}||\bar{\eta}|} \quad \rightarrow \quad cos(\bar{\theta}) = \frac{\bar{v}\cdot\bar{\eta}}{|\bar{v}|}$$

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{\eta}}{|\bar{v}|}\right)$$

$$\theta + \gamma = 90 \quad \rightarrow \quad \gamma = 90 - \theta$$

$$\gamma = 90 - cos^{-1}\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{\eta}}{|\bar{v}|}\right)$$

De esta manera γ es el ángulo con el cual las partículas serán repelidas con respecto a la frontera sólida fija.

4.0.9. Modelo de respulsión para objetos móviles

Como se vio en el modelo anterior, las principales características en la repulsión de las particulas son el vector normal a la superficie y el vector de velocidad asociado a la partícula, tomando en cuenta que el objeto contra el que interactuan esta estático, implica que no tiene un vector normal variable en el tiempo. Ahora si analizámos el caso donde dicho vector normal a la superficie esta cabiando en el tiempo, lo que pasaría con un cuerpo móvil, es decir que cada paso de tiempo su vector tanto normal como velocidad cambian.

Para este caso necesitamos implementar un modelo diferente de repulsión.
Este modelo de repulsión está basado en la siguiente condición:

$$\text{Si} \quad \bar{v}_{fish}\cdot\bar{\eta} > 0$$

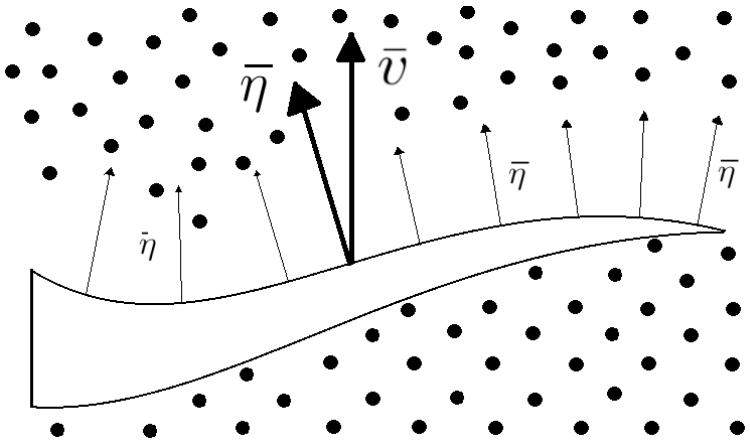


Figura 4.4: Procedimiento para la repulsión de las partículas.

Lo que resulta en un vector $\bar{v}_p = v_\eta \eta_1 \bar{\mathbf{i}_1} + v_\eta \eta_2 \bar{\mathbf{i}_2}$, si esta condición del producto punto es mayor a cero, implica que la velocidad del objeto móvil se mueve en dirección positiva al eje y, por lo tanto las partículas que se encuentran a su alrededor deben de adquirir su velocidad por la condición de no deslizamineto.

De la misma manera, si el resultado del producto vectorial entre los vectores

$$\text{Si} \qquad \bar{\eta} \cdot \bar{v}_{fish} < 0$$

Entonces la velocidad del objeto móvil se encuentra en dirección negativa al eje y, por lo tanto las partículas que se encuentren por debajo del objeto móvil deberán adquirir esa velocidad en dirección negativa y acoplarse a la pared del objeto por la condición de no deslizamiento.

El cual es el ángulo con el que las parículas son repelidas y la velocidad con la que inicialmente se proyectaron sobre la superficie sólida.

Capítulo 5

Algoritmo numérico del método SPH completamente incompresible

5.0.1. Metodología

En este capítulo se presentará la metodología seguida en el cálculo de la solución, esto mediante un método SPH el cual ha sido adaptado para poder resolver la ecuación de Poisson presentada en el capítulo 3, encontrando la presión mediante el método de elementos finitos, es decir, el problema de flujo completamente incompresible a diferencia del débilmente compresible que es usualmente usado en el método SPH. Esto implica que las modificaciones al método lo convierten en un método híbrido que adapta el esquema Lagrangiano para el cálculo de todas las propiedades a excepción el de la presión, la cual es calculada mediante el esquema Euleriano para poder presentar el acoplamiento de ambos esquemas en una sola solución.

A continuación se definen los pasos que realiza el código numérico detallando el procedimiento llevado a cabo mediante el proceso de cómputo.

Paso 1: Definir el dominio

El primer paso en el cálculo es definir las condiciones iniciales del problema, es decir, definir las partículas que interactúan en el problema y que son el dominio del fenómeno físico. Este dominio, definido completamente por partículas, contendrá el número total de partículas que entrarán en el cálculo, el cual es fijo y no varía durante el proceso.

Definir el dominio computacional implica definir el dominio del SPH que comprende el número, ubicación de las partículas y características de las fronteras.
En este dominio se llevará a cabo el cálculo de las propiedades de la velocidad, así como la divergencia que se incorporará primeramente al término fuente, el cual es igualado a la ecuación de Poisson en el esquema Euleriano mediante el método de los elementos finitos.

Este primer paso localiza todas las partículas en el dominio computacional mediante el algoritmo del árbol Barnes and Hut [19] y se identificará a cada partícula y se asignará un identificador numérico, es decir, aquellas partículas que forman parte de la frontera, cuerpos sólidos fijos y móviles tendrán una característica que las diferenciaán de las partículas que componen el fluido.

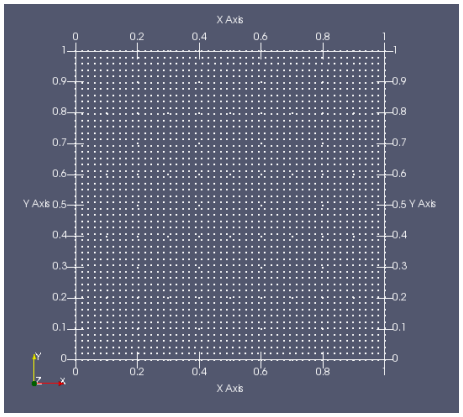


Figura 5.1: Definición del dominio de SPH por medio de partículas.

Paso 2: Definir las partículas FEM

En este segundo paso introduciremos una serie de partículas que definiremos como "partículas FEM", estas partículas se introducirán en el dominio y tendran una distrubición definida y no aleatoria a diferencia de las partículas SPH. Además estarán distribuidas de manera que crean una malla, la cual se utiliza para llevar a cabo el álculo de la presión mediante el método de elementos finitos, dicha malla no contienen la complejidad de otras mallas de elemento finito, ya que están estructuradas de manera más sencilla en una cuadrícula simple.

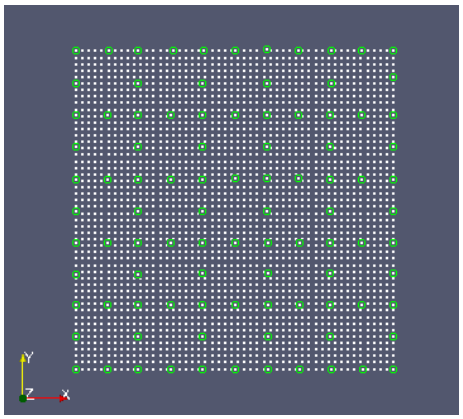
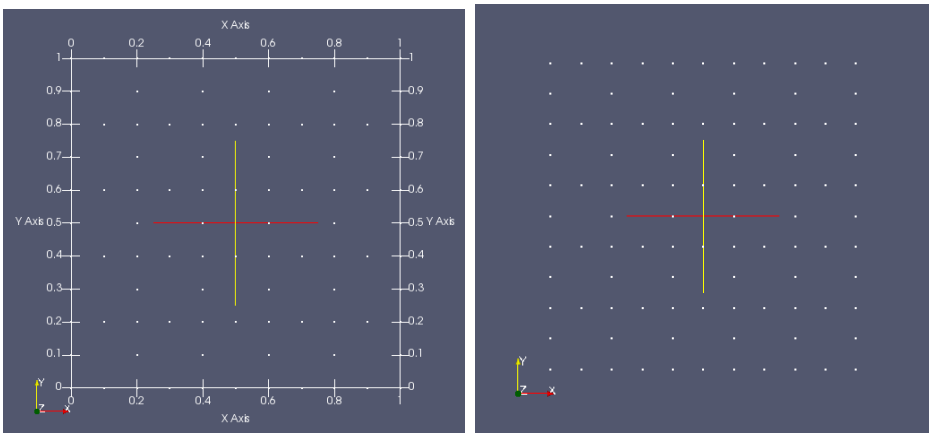


Figura 5.2: Generación de una malla de elementos finitos dentro del dominio SPH.

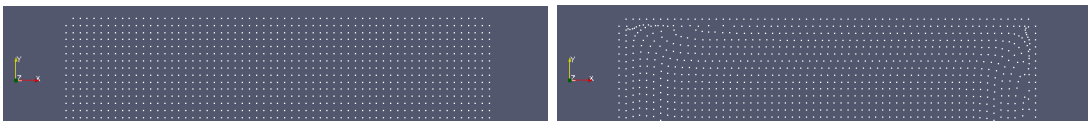
Esta malla generada especialmente para este trabajo no fue creada mediante ningun software especializado de mallado, sino mediante simples puntos impustos por el autor que cumplen condiciones sencillas como: número de elementos, número de celdas y conectividad entre las celdas. Conteniendo 8 puntos por celda, sin limitación en el número de celdas en el dominio. Esta malla puede crearse de manera rápida y adaptada a cualquier geometría, como cualquier malla utilizada en el método de elemetos finitos, con la diferencia de que podemos deformarla en el dominio con leyes de movimiento simples y lineales, lo cual la hace de extremadamente simple y sencilla de programar generar.



(a) Paso de tiempo 1 (b) Paso de tiempo n

Paso 3: Inicio del cálculo mediante SPH

Este paso es el que da inicio al cálculo de las variables mediante el método SPH. En el primer paso de tiempo se calcula la velocidad y desplazamiento mediante las ecuaciones mostradas en la capítulo 4, además también se calcula la divergencia de las partículas para integrarla al término fuente de la ecuación de Poisson visto también en el capíto 4.



(c) t = 1 (d) t = 10

Paso 4: Interpolar la información de las partículas SPH a las partículas FEM

Ahora se interpolarán las propiedades de las partículas calculadas en el paso 3, mediante el método MLS(por sus siglas eninglés: Moving Least Square, que se encuentra en el apendice A), el cual llevará las información de las partículas SPH a las partículas FEM, esto mediante el algoritmo del árbol Barnes and Hut [19]. Para lograr interpolar estas propiedades es necesario idenfiticar cada partícula FEM en el árbol, hacer uso del kernel e identificar a las partículas más cercanas dentro de la distancia de suavizado h del método SPH a la partícula FEM. Una vez identificadas estas partículas SPH se utiiza el método MLS para interpolar las propiedades calculadas en el paso 3.

En este punto todas las partículas, tanto SPH como FEM contienen la información que es requerida en el cálculo del siguiente paso de tiempo, visto en el apendice D. La diferencia entre unas partículas y otras es que las partículas SPH contienen la información ya calculada, además de que su ubicación cambió debido al cálculo de la nueva posición. Las partículas FEM, contienen la misma información a diferencia de que su ubicación nunca cambia ya que solo se interpolan las propiedades, pero nunca se calcula su desplazamiento, de manera similar a las partículas fantasma explicadas en el capítulo 4.

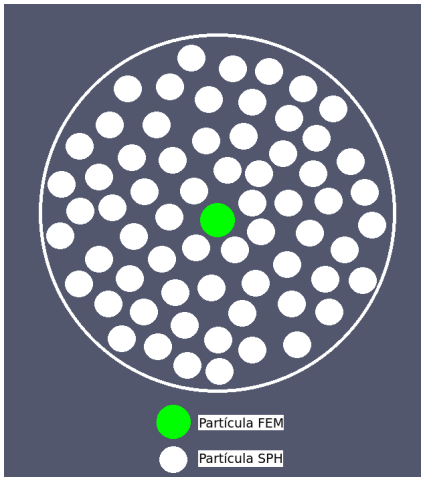


Figura 5.3: Partícula FEM(verde) dentro del dominio de partículas SPH(blancas).

Hay que hacer notar este paso ya que es la principal ventaja e implementación de ambos métodos yace aquí. Podemos conocer y adquirir las propiedades calculadas mediante el método SPH e interpolarlas a las partículas conocidas como paertículasFEM, las cuales siempre permanecen en una posición fija, lo que nos permite mapear el espacio de una manera más simple para poder calcular la presión con un modelo completamente incompresible, a diferencia de los modelos cuasi-incompresibles mediante una ecuación de estado presentada en la capítulo 2.

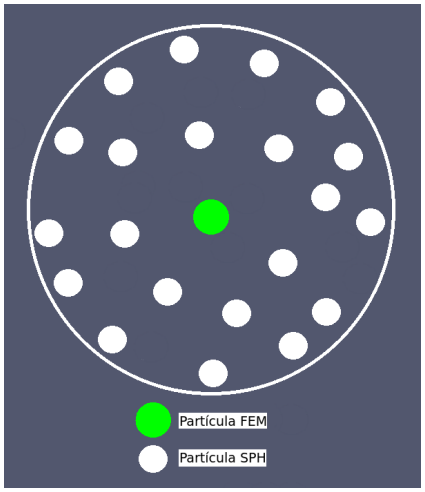


Figura 5.4: Interpolación de las propiedades de las partículas SPH a las FEM.

De esta manera tenemos las propiedades del dominio, ubicadas en los puntos que nos conviene para su cálculo.

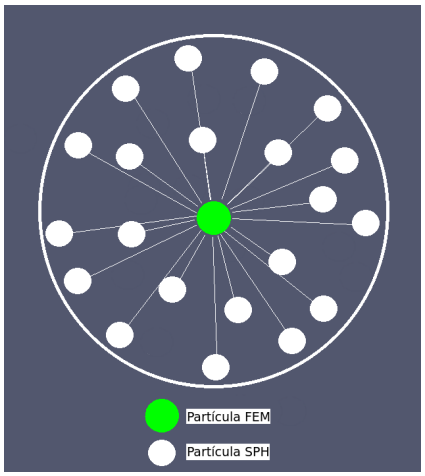


Figura 5.5: Interpolación de las propiedades de las partículas SPH a las FEM.

Paso 5: Cálculo de la presión mediante el método de elemento finito

Ahora que ya tenemos partículas ubicadas en las posiciones que deseamos y además conocemos sus propiedades mediante la interpolación del paso aterior, podemos encontrar su presión por medio del método de los elementos finitos, que como ya se había comentado, la nueva distribución de las partículas sembradas de forma artificial nos permite hacer el cálculo, el cual usa funciones de interpolación analíticas sencillas para conocer la solución de la presión resolviendo la ecuación de Poisson.

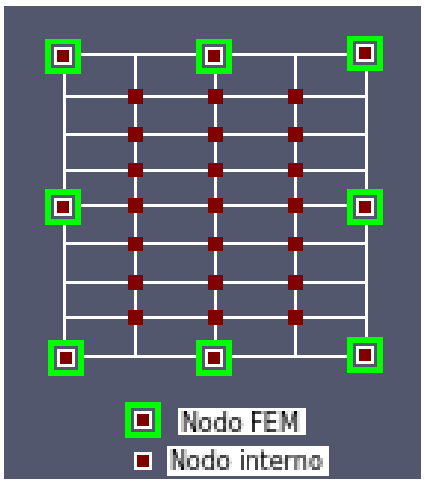


Figura 5.6: Interpolación de la solución de la presión a la malla interna de FEM.

Una vez resuelta la ecuación de Poisson mediante el método de los elementos finitos, se genera un conjunto de nodos internos a los nodos de los elementos FEM, esto para crear mayor número de puntos e interpolar la información de la presión calculada en los nodos FEM a los nuevos nodos internos, con el objetivo de generar mayor soporte de la solución en el dominio sin la necesidad de resolver la ecuación Poisson en más puntos.

Ahora las partículas internas adquieren las propiedades de los nodos FEM por medio de la interpolación del método MLS, en este punto del proceso todas las partículas crean un dominio uniforme y de mayor soporte.

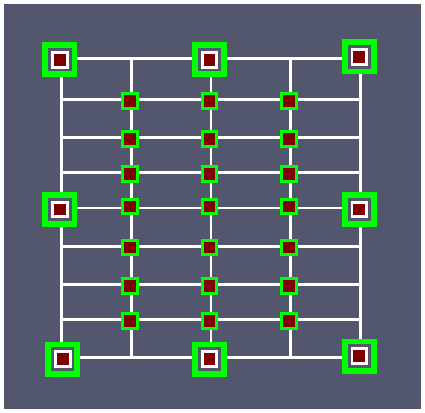


Figura 5.7: Dominio de partículas con la información de presión.

Paso 6: Interpolación de la presión a las partículas FEM a SPH

Cuando la información de la presión se encuentra tanto en los nodos FEM, así como en los nuevos nodos internos, se crea el proceso inverso al paso 4, es decir, se interpolará la información de presión a las partículas SPH por medio de la técnica MLS, de esta manera ahora las partículas SPH cuentan con toda la información necesaria, incluyendo la presión.

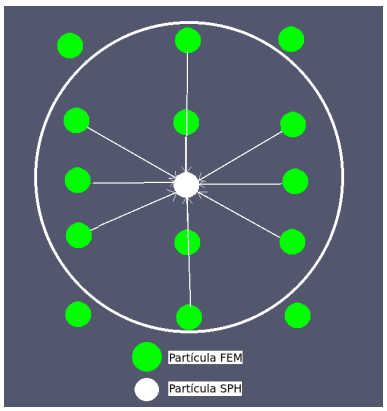


Figura 5.8: Interpolación de las propiedades de las partículas FEM a las partículas SPH.

Diagrama del proceso de cálculo

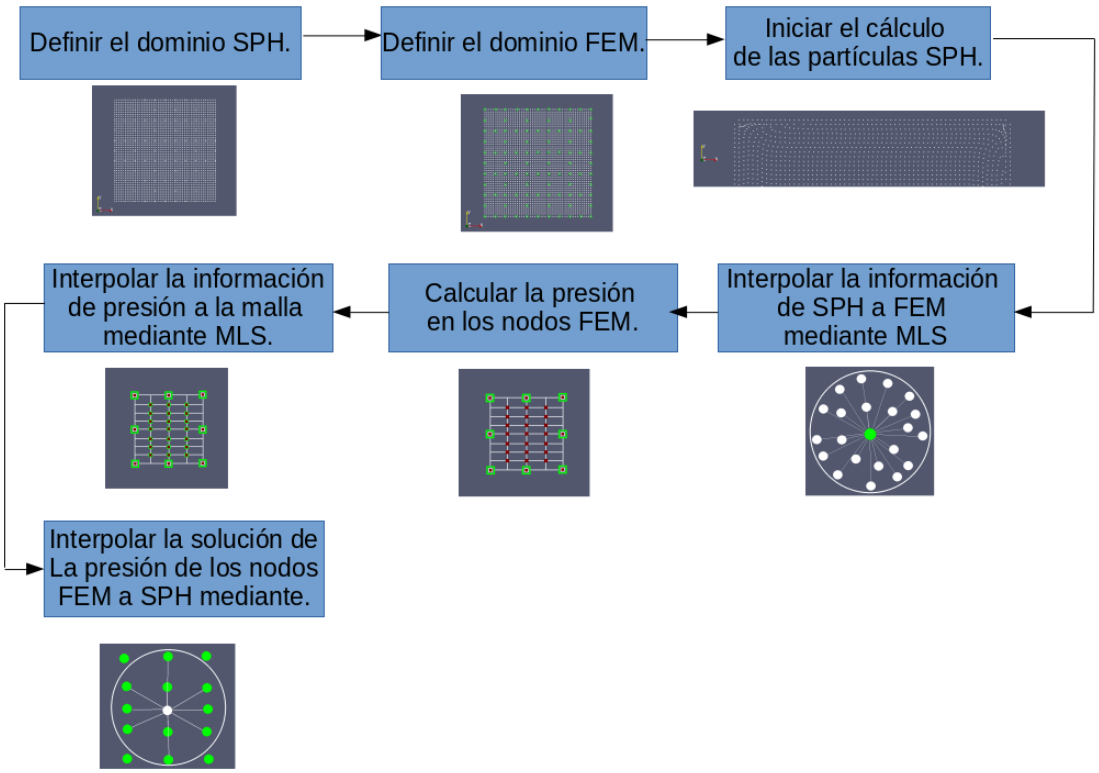


Figura 5.9: Diagrama del proceso del cálculo dentro del código SPH.

Capítulo 6

Resultados

En este capítulo presentaremos los resultados del código SPH completamente compresible con otros métodos mediante el estudio de casos de estudio literatura técnica. La precisión del método SPH completamente incompresible se analizará a través de un estudio de referencia. La cavidad con velocidad en la tapa o "lid-driven cavity", normalmente cavidades cuadradas o cilindros circulares, a menudo se utilizan como casos de prueba de referencia para evaluar nuevos códigos y algoritmos. Aquí, la cavidad accionada por la tapa, en varios números de Reynolds, es simulada.

6.0.1. Cavidad con velocidad en la pared

El caso de la cavidad con una pared móvil se ha usado durante mucho tiempo como prueba o caso de validación para nuevos algoritmos numéricos. Un buen conjunto de datos para la comparación son encontrados en D. Arumuga Perumal [21], donde los datos se enumeran en una tabla para diferentes números de Reynolds. La geometría bidimensional se muestra en la figura 6.1. A menudo se simula como una cavidad estable, en este tipo de simulaciones, el fluido se acelera por la tapa en la parte superior,debido a la condición de no deslizamiento de la cavidad a un estado estacionario.

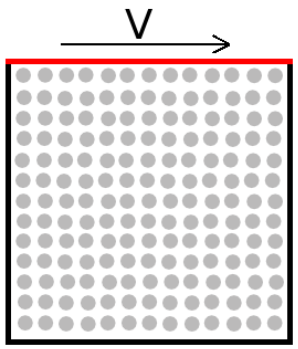


Figura 6.1: Diagrama de la dirección de la velocidad flujo.

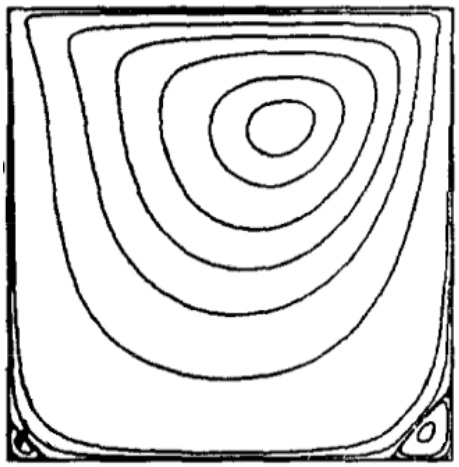
De esta manera calcularemos el número de Reynolds como:

$$Re = \frac{UL}{\nu} \tag{6.0.1}$$

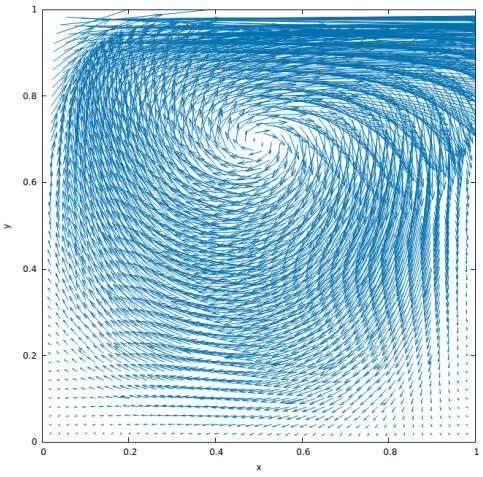
Donde U y L son fijadas como 1 $\frac{m}{s}$ y 1 m. Se presentan tres simulaciones con diferente número de Reynolds, $Re = 100$, $Re = 400$ y $Re = 1000$

6.0.2. Comparación de la cavidad con velocidad en una pared

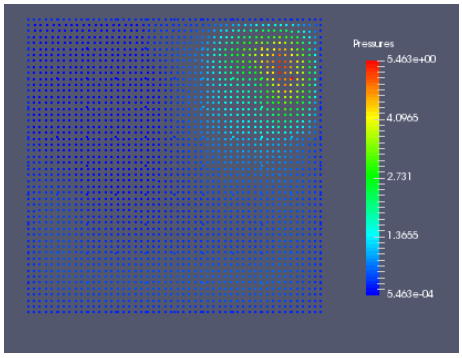
El primer caso de comparación se centra en una cavidad en la cual existe velocidad en una de las paredes, la cual genera un efecto tanto de presión como de velocidad. Como se explica en el diagrama 6.1, la tapa de la caja tiene un pared móvil que se mueve con una velocidad constante de 1 $\frac{m}{s}$ y el efecto de esta velocidad sobre el fluido con $Re = 100$ se representa mediante las siguientes imágenes



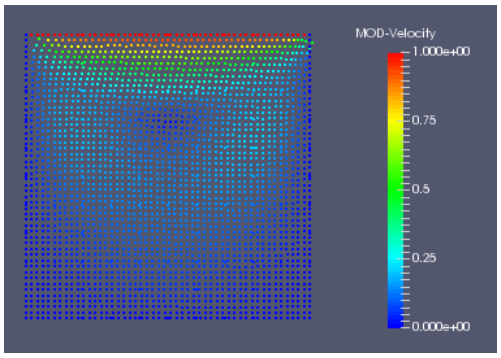
(a) Lineas de flujo, Shuling and Qisu(32)



(b) Vectores de velocidad



(c) Presión



(d) Velocidad

Donde podemos ver en la figura (c) que la mayor presión se genera en la esquina superior derecha, donde existe mayor acumulación de partículas y la velocidad es representada color rojo en la figura (d).

6.0.3. Comparación de la cavidad con velocidad en dos paredes

Un flujo viscoso incompresible en una cavidad cuadrada cuyas paredes superior e inferior se mueven en la misma dirección (movimiento paralelo) u opuesto (movimiento antiparalelo) con una velocidad uniforme es el problema investigado en el presente documento. En el caso del movimiento paralelo de la pared, existe una capa de de flujo cortante libre a medio camino entre las paredes superior e inferior, aparte de las capas de flujo cortante limitadas a la pared, mientras que en el caso de movimiento de la pared antiparalelo, solo existen capas de corte limitadas en la pared.

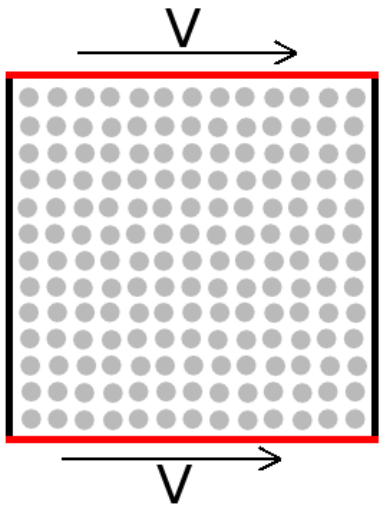


Figura 6.2: Diagrama de la dirección de la velocidad flujo paralelo.

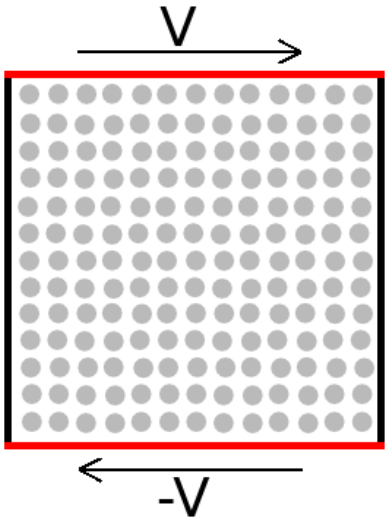
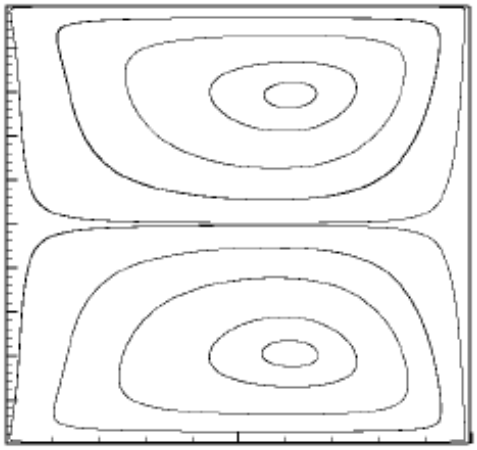


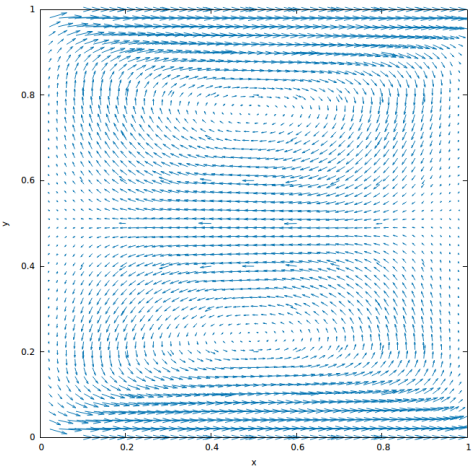
Figura 6.3: Diagrama de la dirección de la velocidad flujo antiparalelo.

Movimiento paralelo de las paredes Re=100

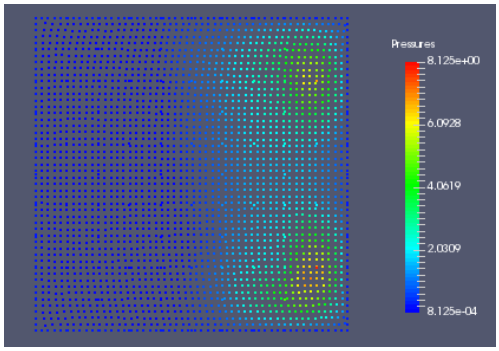
En la Figuras a y b se muestra la comparación del patrón de línea de corriente y los vectores velocidad para el movimiento paralelo de la pared en $R = 100$ con las paredes superior e inferior moviéndose de izquierda a derecha. Se observan dos vórtices primarios contrarrotatorios simétricos entre sí formando una capa de flujo cortante libre entre ellos. A este número de Reynolds, los núcleos de los vórtices primarios se ven algo alejados de los centros de las mitades superior e inferior de la cavidad accionada por la tapa, hacia la esquina superior derecha y las esquinas inferiores derechas, respectivamente.



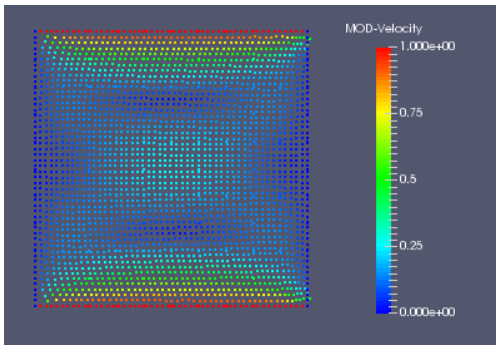
(a) Lineas de flujo, Shuling and Qisu(32)



(b) Vectores de velocidad



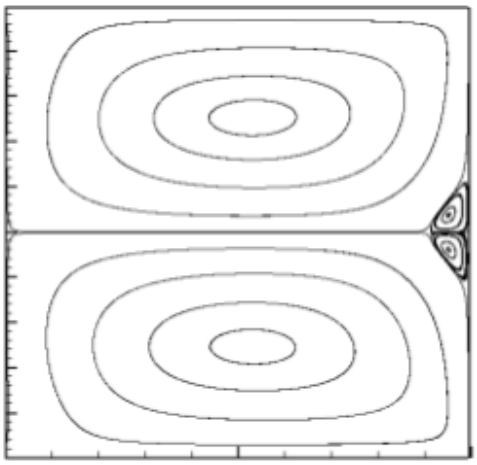
(c) Presión



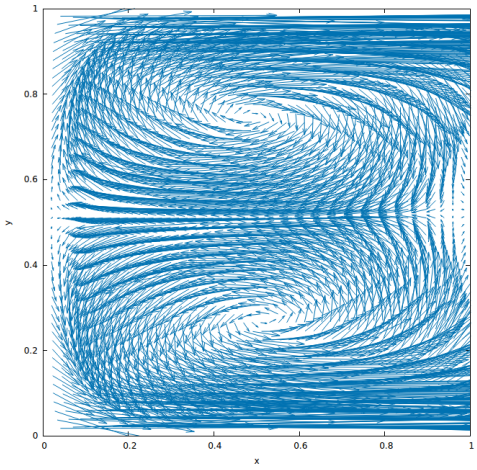
(d) Velocidad

Movimiento paralelo de las paredes Re=1000

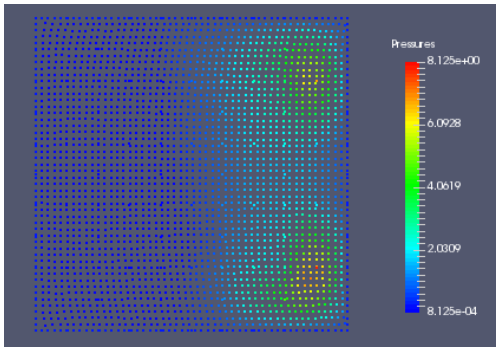
En el movimiento paralelo de las paredes, el núcleo los vórtices se generan de manera más centrada minetras que dos pequeños vórtices de circulación de fluido en dirección contraria, se generan en las paredes donde hacía donde los fluidos convergen, y es la zona donde se genera la concentración del perfil de presión.



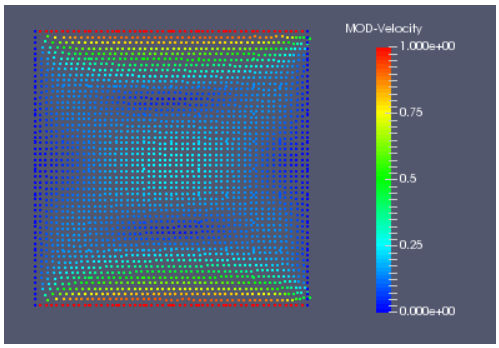
(e) Lineas de flujo, Shuling and Qisu (32)



(f) Vectores de velocidad



(g) Presión

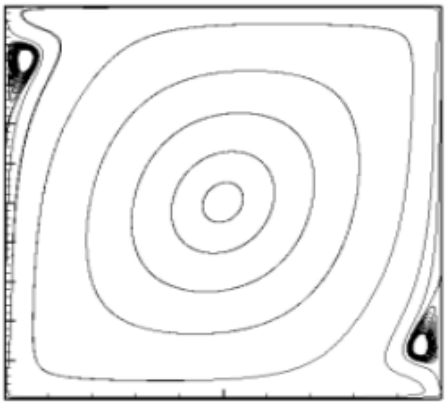


(h) Velocidad

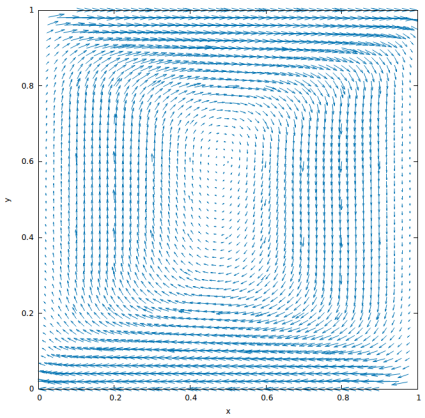
Movimiento antiparalelo de las paredes Re=1000

En la Figura (i) se muestra la comparación del patrón de líneas de corriente y los vectores velocidad para el movimiento pantiaralelo de la pared en $Re = 100$ con la pared superior e inferior moviéndose de izquierda a derecha y la pared inferior moviendose de derecha aizquierda.

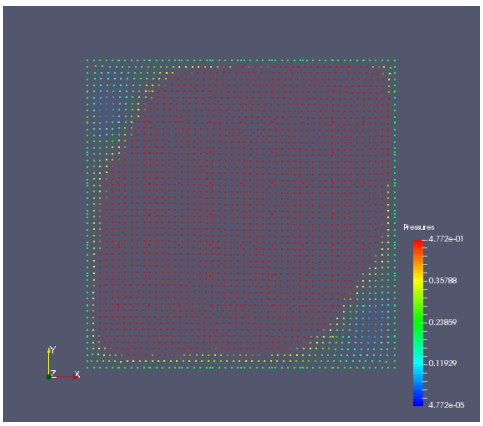
Se observan dos vórtices primarios contrarrotatorios simétricos entre sí formando una capa de flujo cortante libre entre ellos. En este número de Reynolds, los núcleos de vórtice primario se ven algo alejados de los centros de las mitades superior e inferior de la cavidad accionada por la tapa hacia la esquina superior derecha y las esquinas inferiores derechas, respectivamente.



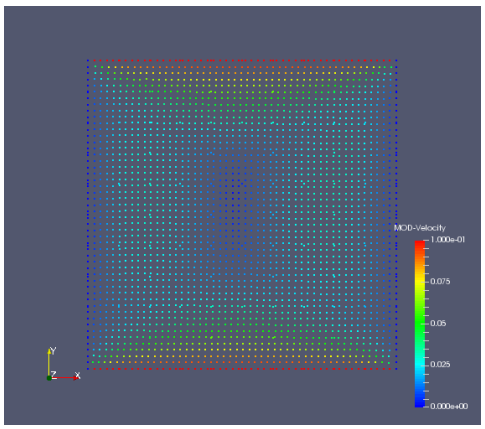
(i) Lineas de flujo, Shuling and Qisu (32)



(j) Vectores de velocidad



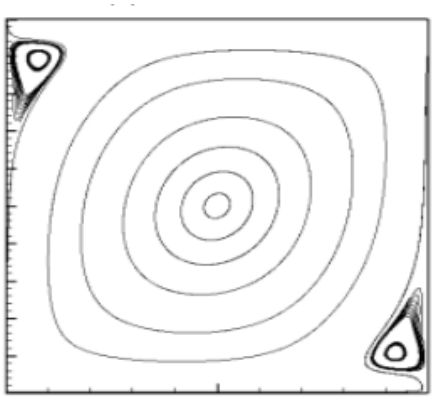
(k) Presión



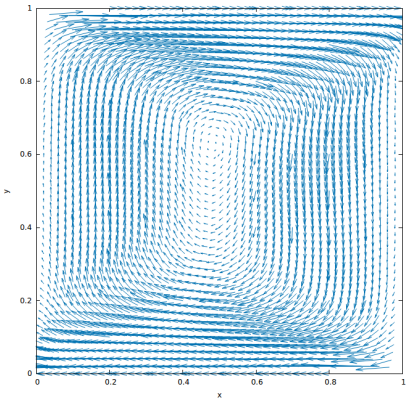
(l) Velocidad

En este caso la presión se cula de manera más pronunciada en las esquinas y en el centro de la cavidad, a diferencia del flujo paralelo donde solo se concentraba en las equinas de mayos concentración de partículas.

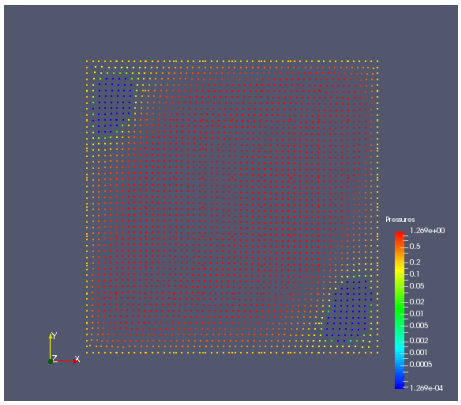
Movimiento antiparalelo de las paredes Re=2000



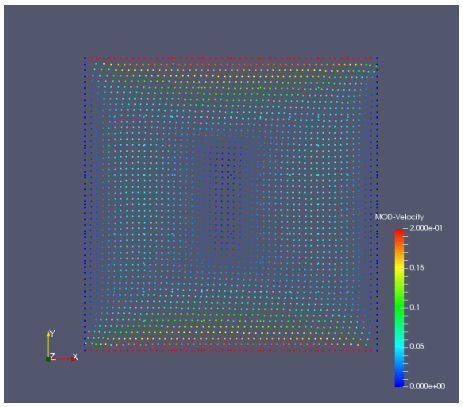
(m) Lineas de flujo, Shuling and Qisu(32)



(n) Vectores de velocidad



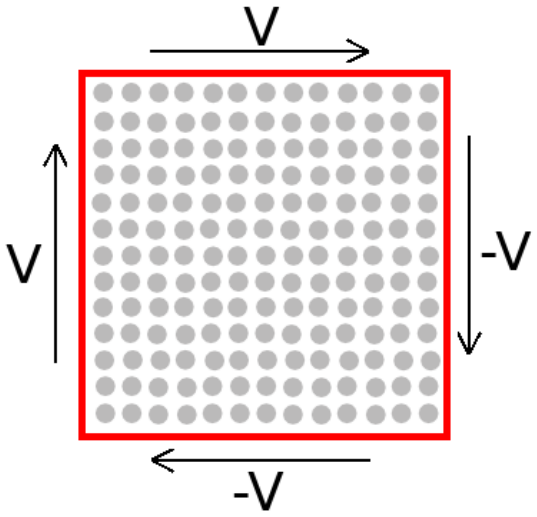
(ñ) Presión



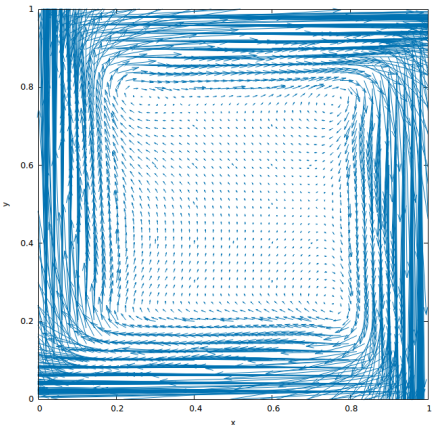
(o) Velocidad

En el caso de la presión podemos observar una zona de baja presión en las esquinas en comparación con las zonas donde las partículas de fluido se agrupan y chocan con la pared

Movimiento en las cuatro paredes Re=1000

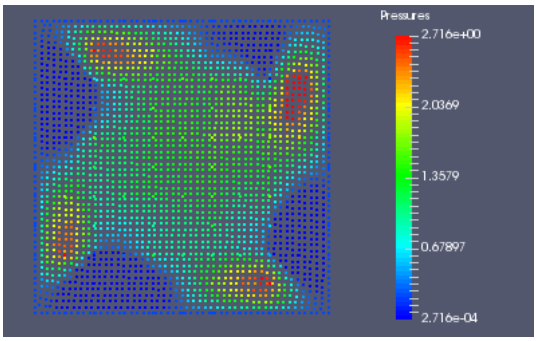


(p) Diagrama

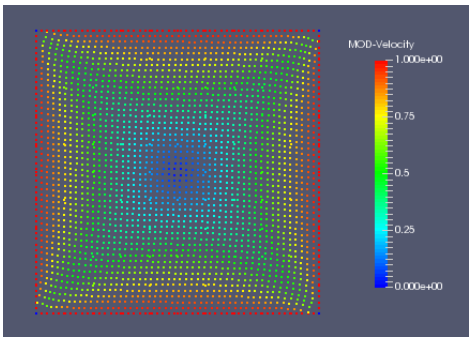


(q) Vectores de velocidad

En la figura (p) se ilustra el movimiento con el sentido de las paredes, se muestran los vectores de velocidad en los cuales se observan las zonas con mayor velocidad, es decir, las partículas que están en contacto con las paredes y zonas pequeñas con vortices.



(r) Presión



(s) Velocidad

En la figura (r) se observan las zonas donde la presión aumenta, las cuales son simétricas de la misma manera que la magnitud de la velocidad en la figura (s).

Movimiento en las cuatro paredes Re=2500

En este caso se incorpora un bloque fijo en la parte central del dominio, se genera un comportamiento similar al caso anterior. La principal importancia de este caso es que se alcanzo un número de Reynolds de 2500 lo cual es mayor reportado por diversos autores, los cuales solo alcanzan numero del orden de 1000.

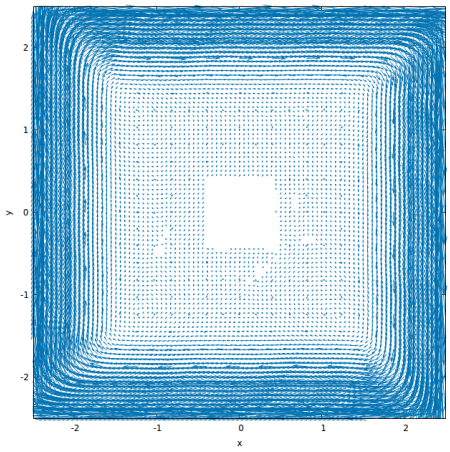
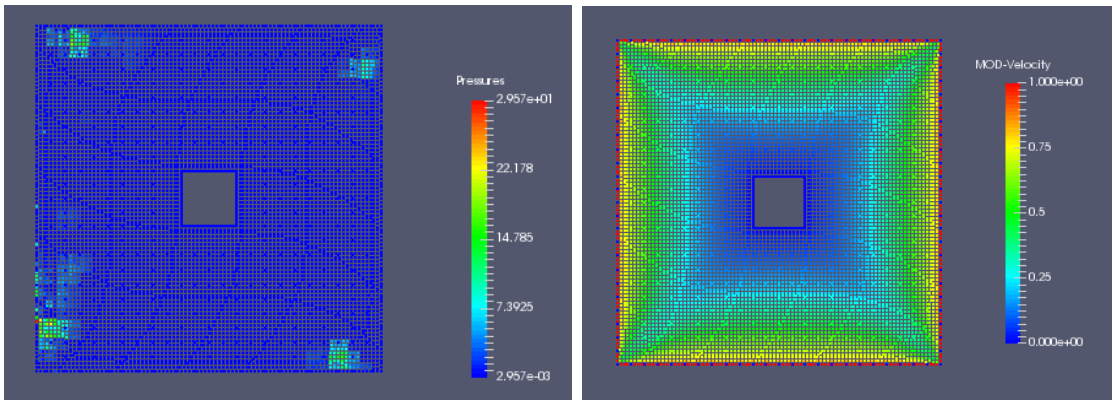


Figura 6.4: Vectores de velocidad en una cavidad con velocidad en las cuatro paredes.



(a) Presión (b) Velocidad

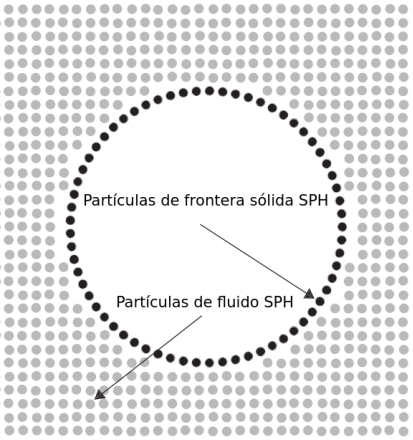
DE la misma forma se analiza la presión que se incrementa en las zonas donde las partículas chocan con las paredes del dominio de forma simétrica de la misma manera que la magnitud de la velocidad se desarrolla desde la parte exterior, es decir, desde las pasrtículas que están en contacto con las paredes.

6.0.4. Estudio de cuerpos sólidos en movimiento

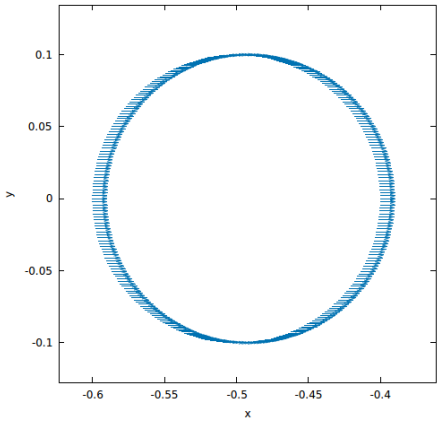
El siguiente paso en este trabajo es la la simulación de cuerpos sólidos en movimiento utilizando como primera aproximación el método débilmente compresible y posteriormente el estudio de un nuevo caso utilizando el método SPH completamente incompresible.
Los resultados se presentan como primer caso, la simulación del movimiento de una esfera.

Esfera en movimiento

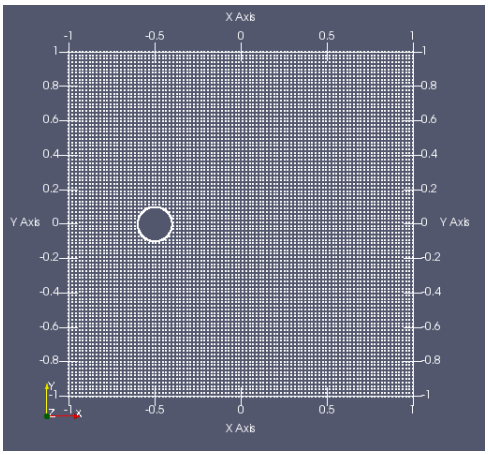
El siguiente caso de estudio es el de una esfera con radio de 1 unidad inmersa en un fluido, la cual se desplaza con velocidad constante en la dirección horizontal, la velocidad de la esfera es $v = 0{,}1m/s$ con $Re = 1000$.



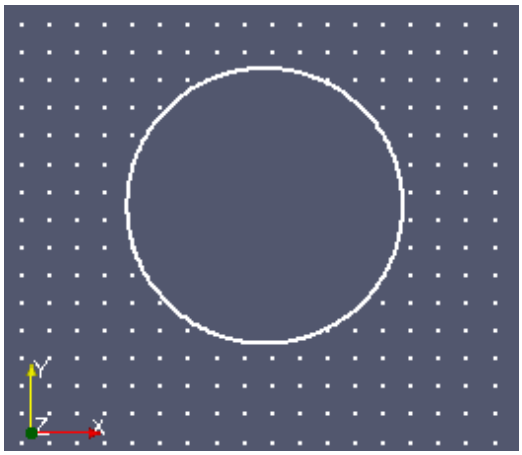
(c) Esfera en el medio fluido.



(d) Vectores de velocidad de la esfera.



(e) Esfera en el medio fluido.



(f) Esfera en el medio fluido.

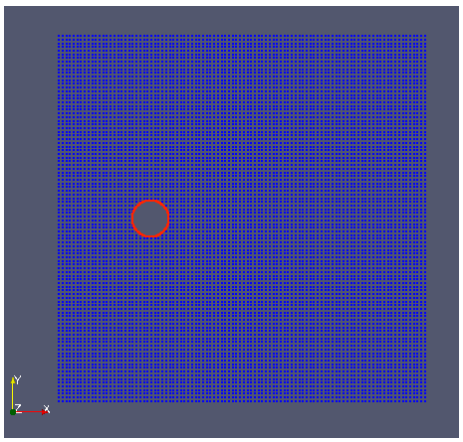
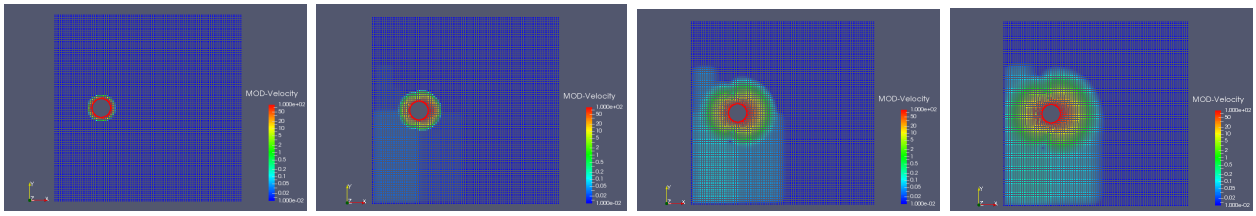
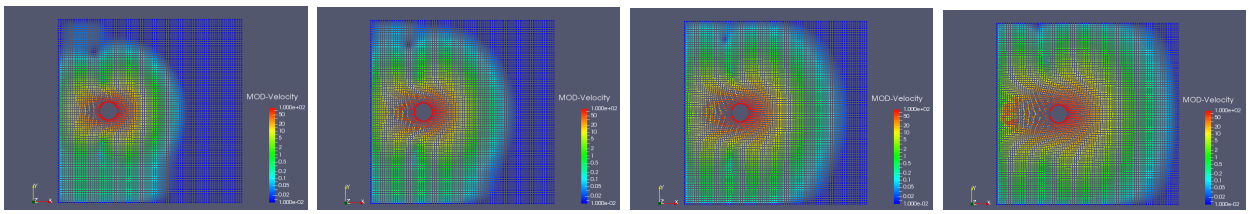


Figura 6.5: Incorporación de una esfera sumergida en un medio fluido en el tiempo 0.



(a) t = 0.03 s (b) t = 0.06 s (c) t = 0.09 s (d) t = 0.12 s



(e) t = 0.15 s (f) t = 0.18 s (g) t = 0.21 s (h) t = 0.24 s

En las imagenes se muestra la evolución de la magnitud de la velocidad conforme pasa el tiempo en la simulación. Las partículas incrementan el color de azul a rojo lo que implica un aumento en la velocidad cercanas a la esfera.

Bloque en movimiento

En este caso al igual que en los casos de cavidades con paredes móviles se usa el método completamente incompresible, en el cual se analizan pricipalmente la presión obtenida, y son el principal aporte de este trabajo al método SPH. El cubo tiene una dimensión de unitaria y una velocidad $v = 0{,}1m/s$ en dirección positiva en el eje x y $Re = 1000$, se presentan los resultados de velocidad y presión.

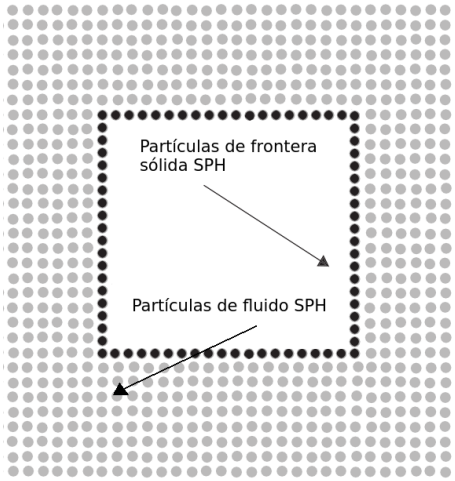
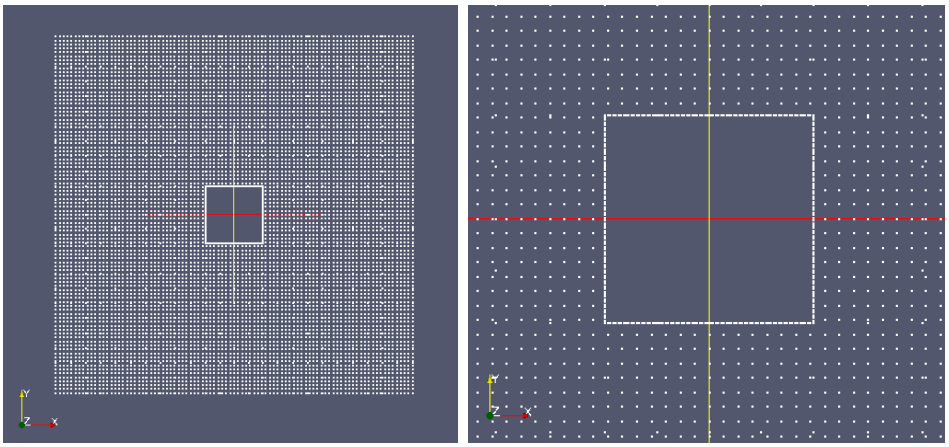


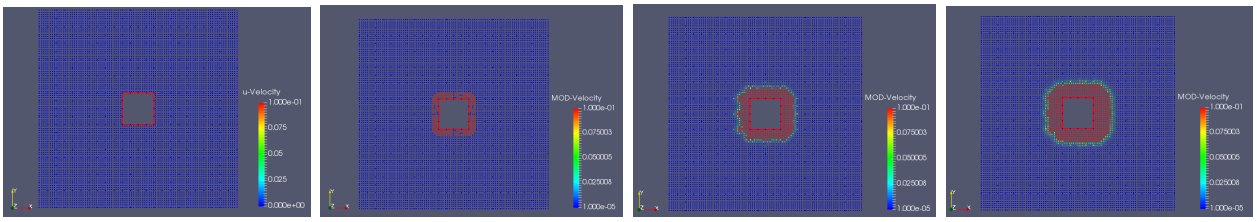
Figura 6.6: Incorporación de una esfera en el medio fluido.



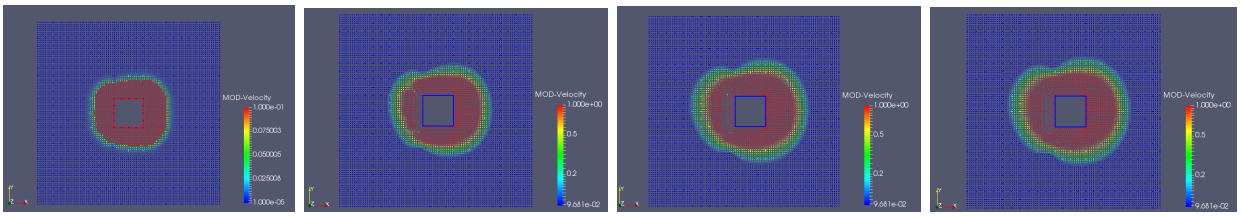
(a) (b)

Velocidad

En las imagenes se aprecia el incremento de la magnitud de la velocidad en las parrículas que se encuentran en contacto con el cubo.

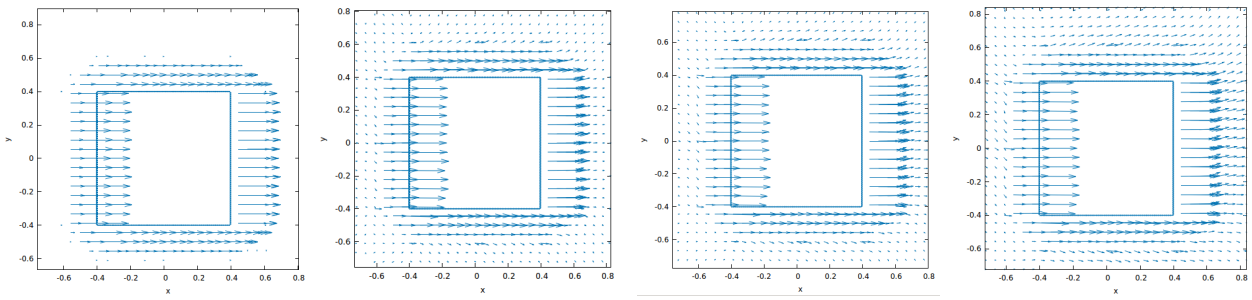


(c) t=0.1 (d) t=0.3 (e) t=0.5 (f) t=0.7



(g) t=0.9 (h) t=1.2 (i) t=1.5 (j) t=1.7

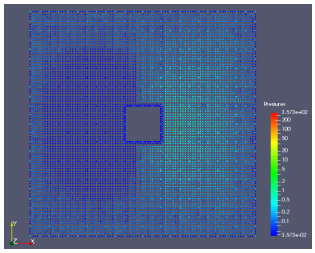
Los vectores de velocidad en los primeros pasos de tiempo muestran la repulsión de las partículas que están a la derecha del bloque en la dirección del movimiento y la atracción de las partículas que están al lado a la izquierda, las cuales por la viscosidad siguen la interfaz del boque.



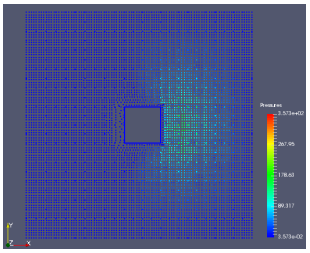
(k) t=0.2 (l) t=0.9 (m) t=1.2 (n) t=1.5

Presión

En la simulación se puede observar que los colores intensos significan un aumento de la presión en la parte delantera del bloque que implica que en la zona donde las partículas se encuentran en movimiento positivo en el eje x, la presión aumenta y detrás del cubo existe una disminución de la presión generando un efecto de succión mínimo devido a la baja velocidad del cuerpo sólido en movimiento.



(ñ) t=0.01



(o) t=0.03

6.0.5. Movimiento de organismos acuáticos oscilantes

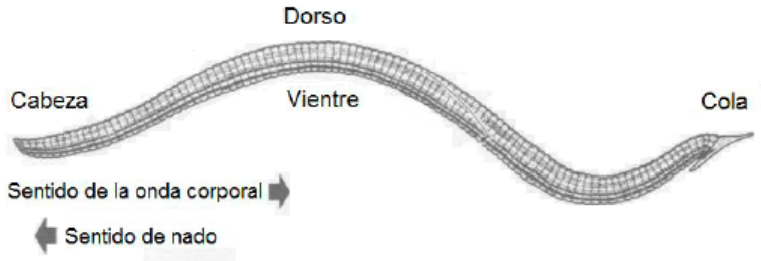
Una gran parte de los organismos acuáticos se desplazan mediante movimientos peristálticos generando ondas viajeras a través de sus cuerpos flexibles. El movimiento realizado por animales durante el nado ha sido estudiado desde la decada de los 30's. Sin embargo, los intentos para analizar el nado desde el punto de vsita hidrodinámico no prosperaron en ese momento por que sólo se habian realizado estudios fluidodinámicos sobre cuerpos rígidos y, en general, no hay forma de que experimentos realizados con cuerpos rígidos puedan usarse para predecir las fuerzas que actúan sobre cuerpos flexibles.

Como señala Tytell et al. [22], diversos animales acuáticos nadan en formas diferentes. Para categorizar esta diversidad, un primer agrupamiento distingue entre los animales que usan todo su cuerpo (anguiliforme) en cual será el principal usado de este trabajo, y los que usa una aleta caudal para su propulsión (caranguiformes). En particular, los nadadores anguiliformes tienden a ser alargados con poco o ningún estrechamiento en el extremo posterior y han sido históricamente menos estudiados que los carangiformes.

El análisis de las formas ondulatorias de nado requiere el conocimiento de las fuerzas del fluido actuando sobre el cuerpo del animal durante el nado. Hace más de cuarenta años, cuando las capacidades actuales de cálculo computacional no estaban disponibles, no era posible estimar las fuerzas del fluido por simulación numérica de su movimiento, motivando así los trabajos experimentales de Taylor y Lighthill et al. En particular, el trabajo de Taylor con altos números de Reynolds (fuerzas inerciales mucho mayores que la viscosidad) en el nado ondulatorio de sanguijuelas fue pionero para los trabajos posteriores en el área.

Recreación del movimiento ondulatorio

La descripción del nado anguiliforme se aplica tanto a las anguilas (de las que se deriva el nombre del modo de nado) como a los flagelados, los nematodes, las sanguijuelas y las lampresas.



Esquema del cuerpo de una sanguijuela.

Se han realizado investigaciones experimentales sobre el nado de la sanguijuela. En particular los efectos de escala en la cinemática y la dinámica del nado (Jordan et al, 1998). Según estas observaciones, el nado mediante la ondulación de todo cuerpo es un modo de locomoción común en organismos en amplios rangosde taxonomía y tamaño, pero a pesar de esta diversidad, parece haber una constante en la cinemática de nado. La onda propulsora crece en amplitud al moverse de la cabeza a la cola. La relación entre la velocidad de la onda propulsora hacia atrás y la velocidad de nado hacia adelante está en el rango 2-4 y hay generalmente entre 1 y 1,5 ondas propulsoras en el cuerpo durante el nado.

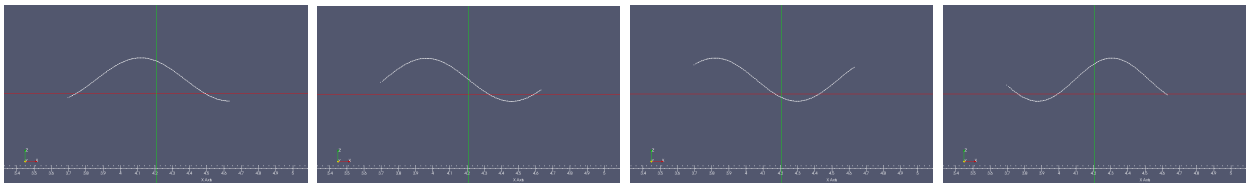
La sanguijuela nada haciendo ondular en la dirección vertical su cuerpo aplanado y extendido, para formar una onda corporal que viaja en la dirección antero-posterior. Cuando ondula en el agua, la sanguijuela controla su orientación para mantener la cara ventral hacia abajo. Las

crestas viajeras de la onda se producen por un ritmo metacrónico de constracción de segmentos sucesivos de la pared corporal ventral y los valles se producen por un ritmo metacrónico de contracción de la pared corporal dorsal, similar pero antifásico. Como fue notado por Leonardo da Vinci, las fuerzas ejercidas contra el agua por estos cambios en la forma del cuerpo proveen la propulsión que conduce al animal a través del medio fluido.

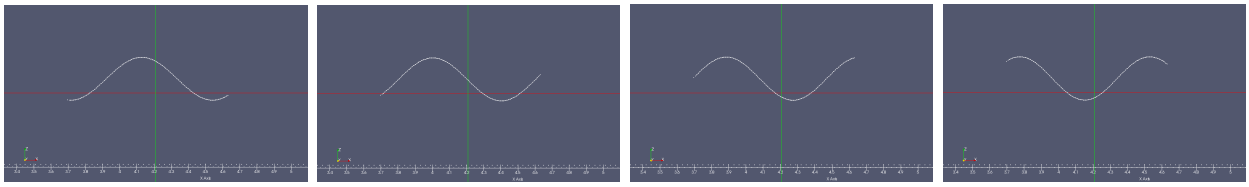
Introducción del perfil en el medio fluido

La primera aproximación realizada al incorporar el cuerpo oscilante se realizo mediante el software libre (SPHYSICS) en el cual se incluyó una simple función de senos y cosenos para generar un filamento que se mueve de manera oscilante dentro del medio fluido.

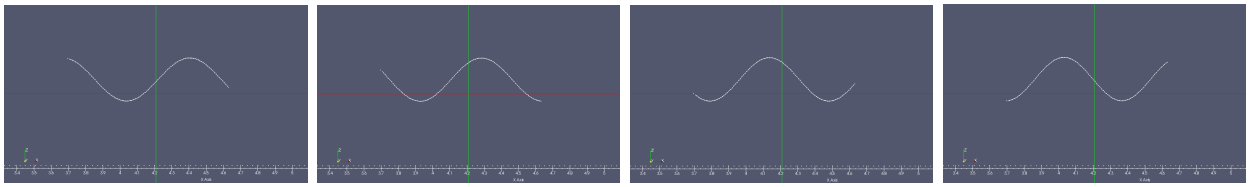
En las siguientes figuras se ilustra la simulación de la forma que toma el cuerpo de la anguila en función del tiempo.



(p) t = 0.15 s (q) t = 0.30 s (r) t = 0.45 s (s) t = 0.60 s

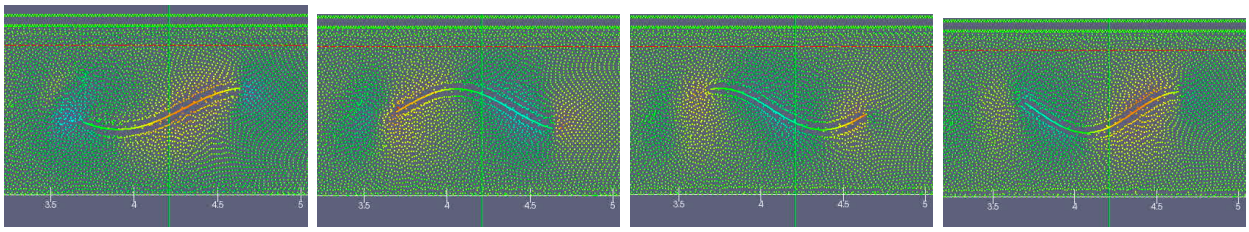


(t) t = 0.75 s (u) t = 0.90 s (v) t = 0.105 s (w) t = 0.120 s

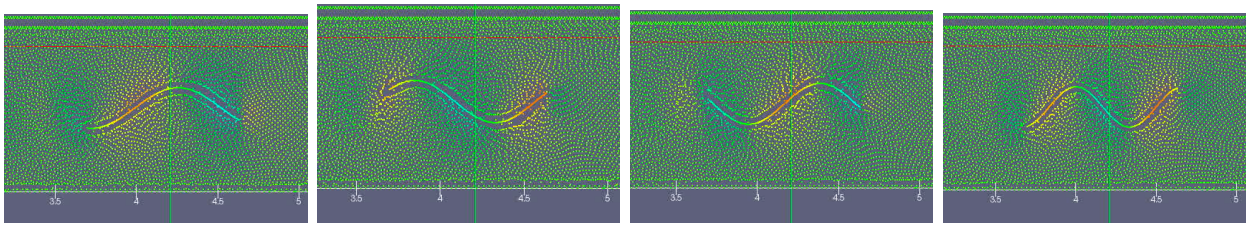


(x) t = 0.15 s (y) t = 0.30 s (z) t = 0.45 s () t = 0.60 s

Estas primeras prueban dieron como resulado un filamento que al carecer de cuerpo o estructura tiene una interacción complicada con el medio medio fluido.



() t = 0.15 s () t = 0.30 s () t = 0.45 s () t = 0.45 s



() t = 0.15 s () t = 0.30 s () t = 0.45 s () t = 0.45 s

El siguiente paso fue incorporar la información del modelo matemático del nado de un organismos acuático reportado en (Lamas, M. I.; Rodríguez, C. G.; Rodríguez, J. D. Optimización de la eficiencia de un propulsor biométrico marino) el cual se realizo el estudio de la eficiencia del nado de organismos acuáticos.

Con esta información y generando el movimiento del nado mediante la ecuación.

$$F(x) = \frac{Ax}{L} sen\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \tag{6.0.2}$$

Donde:
A: es la amplitud máxima de la onda
λ: es la Longitud de onda
T: el periodo

6.0.6. Incorporación del perfil aerodinámico al movimiento de oscilación

Para incorporar el cuerpo de un organismo acuaático al movimiento de oscilación incorporarémos la ecuación de un perfil aerodinámico NACA, el cual puede acoplarse a la ecuación de oscilación, las ecuaciones necesarias para crear este perfil son las siguientes:

$$Y_+ = \frac{Ax}{L} sen[2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T})] + Y_t \tag{6.0.3}$$

$$Y_- = \frac{Ax}{L} sen[2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T})] - Y_t \tag{6.0.4}$$

Donde

$$Y_t = \frac{c}{0{,}2}(0{,}2969\sqrt{x} - 0{,}1260x - 0{,}3516x^2 + 0{,}2843x^3 - 0{,}1015x^4) \tag{6.0.5}$$

La cual, al incorporarla a la ecuación de oscilación genera para la parte positiva del cuerpo:

$$Y_+ = \frac{Ax}{L} sen[2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T})] + \frac{c}{0{,}2}(0{,}2969\sqrt{x} - 0{,}1260x - 0{,}3516x^2 + 0{,}2843x^3 - 0{,}1015x^4) \tag{6.0.6}$$

Y para la parte negativa:

$$Y_- = \frac{Ax}{L} sen[2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T})] - \frac{c}{0{,}2}(0{,}2969\sqrt{x} - 0{,}1260x - 0{,}3516x^2 + 0{,}2843x^3 - 0{,}1015x^4) \tag{6.0.7}$$

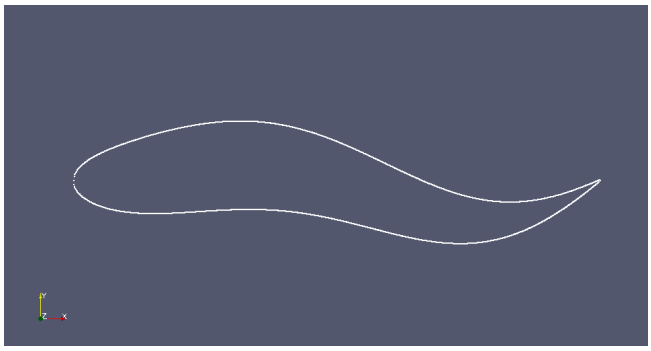


Figura 6.7: Cuempo con movimiento oscilatorio.

El conjunto de estas ecuaciones genera el cuerpo de un organismo acuático el cual se impulsa mediante la ecuación de oscilación estudiada por Lamas galdo et al.[4].



(a) t = 0.15 s



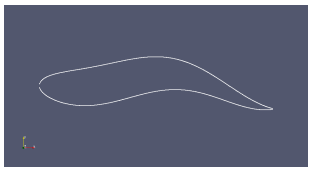
(b) t = 0.30 s



(c) t = 0.45 s



(d) t = 0.45 s



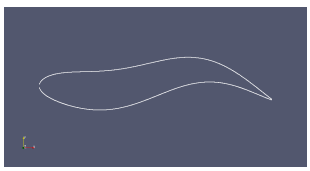
(e) t = 0.15 s



(f) t = 0.30 s



(g) t = 0.45 s



(h) t = 0.45 s

6.0.7. Introducción del perfil con oscilación en el medio fluido

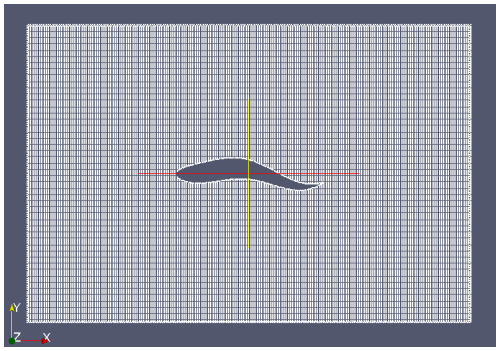
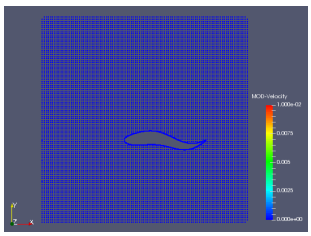


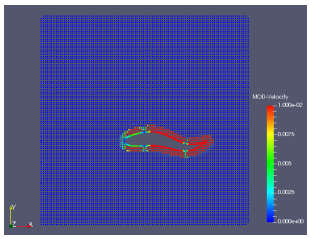
Figura 6.8: Perfil aerodinámico con movimiento oscilatorio en un medio fluido.

Al iniciar la simulación la velocidad del fluido se acopla a las paredes del sólido y adquiere su velocidad.

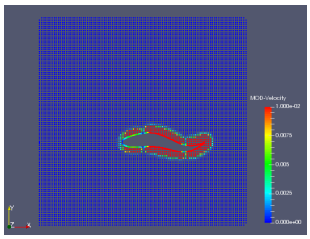
Se puede demostrar mediante las siguientes imágenes el desarrollo de la velocidad.



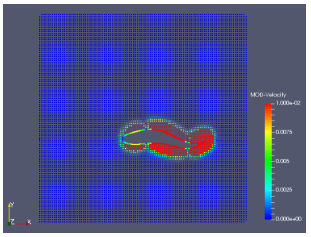
(a) t = 0.0 s



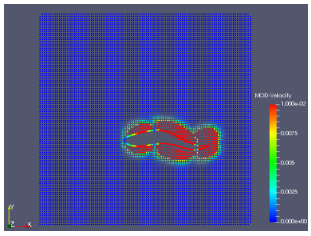
(b) t = 0.05 s



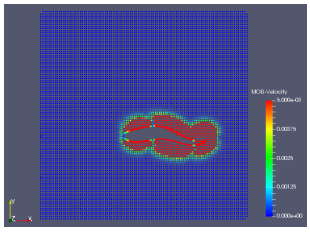
(c) t = 0.1 s



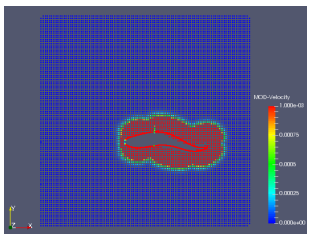
(d) t = 0.15 s



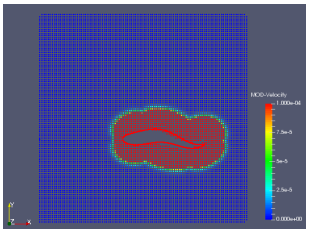
(e) t = 0.2 s



(f) t = 0.25 s



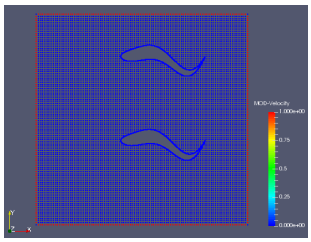
(g) t = 0.3 s



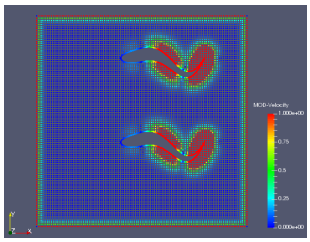
(h) t = 0.35 s

6.0.8. Dos perfiles con oscilación en el medio fluido

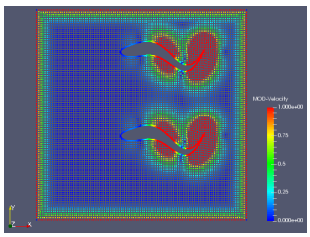
La incorporación de dos perfiles con oscilación y paredes moviles



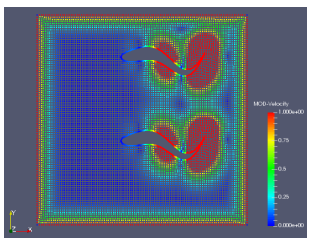
(i) t = 0.0 s



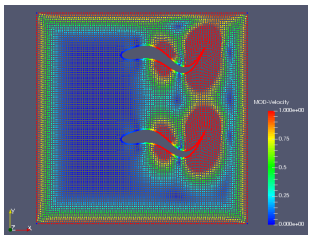
(j) t = 0.05 s



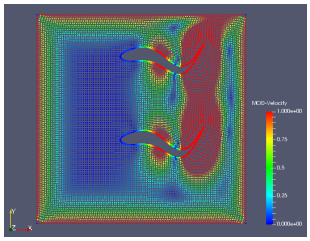
(k) t = 0.1 s



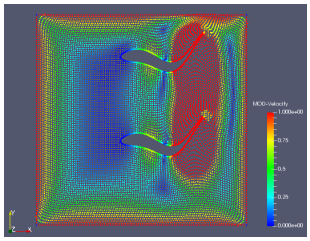
(l) t = 0.15 s



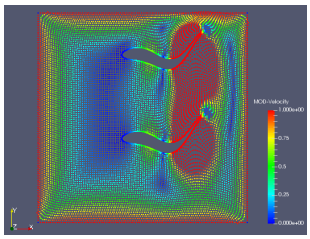
(m) t = 0.2 s



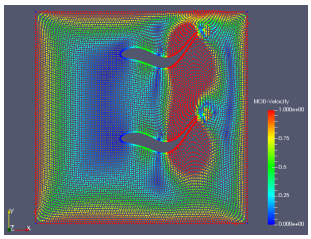
(n) t = 0.25 s



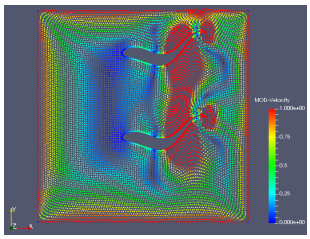
(ñ) t = 0.3 s



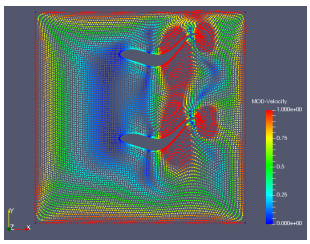
(o) t = 0.35 s



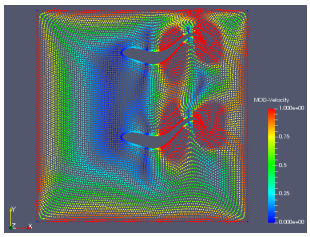
(p) t = 0.35 s



(q) t = 0.35 s



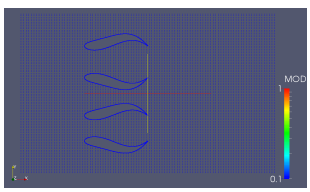
(r) t = 0.40 s



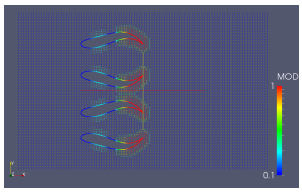
(s) t = 0.45 s

6.0.9. Cuatro perfiles alineados

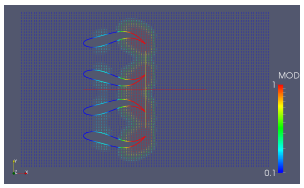
Se probó la simulación utilizando cuatro perfiles inmersos en el medio fluido, dos de ellos con diferentes parámetros de oscilación y amplitud y desfasados del origen. Los resultados obtenidos son los siguientes:



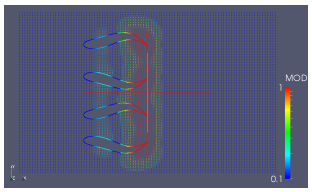
(t) t = 0.25 s



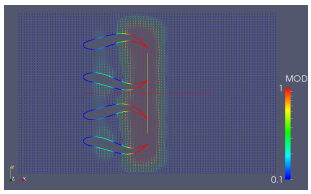
(u) t = 0.30 s



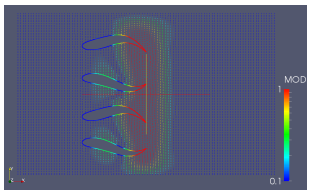
(v) t = 0.35 s



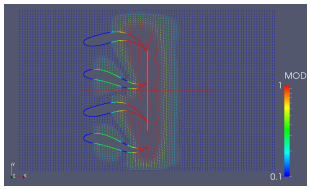
(w) t = 0.40 s



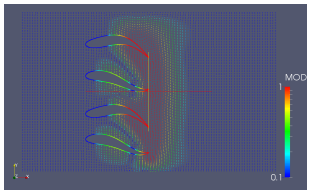
(x) t = 0.45 s



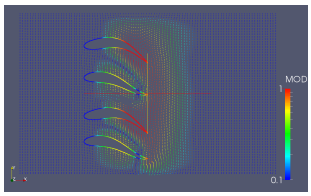
(y) t = 0.0 s



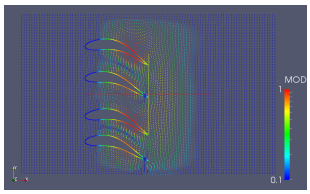
(z) t = 0.05 s



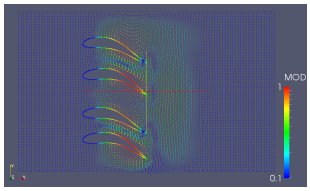
() t = 0.1 s



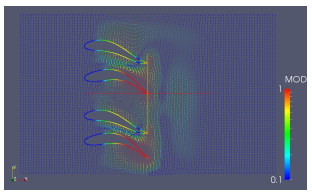
() t = 0.15 s



() t = 0.2 s



() t = 0.25 s

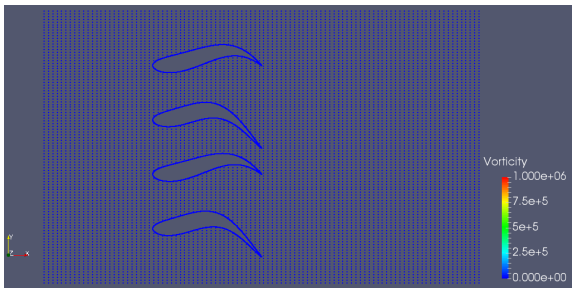


() t = 0.3 s

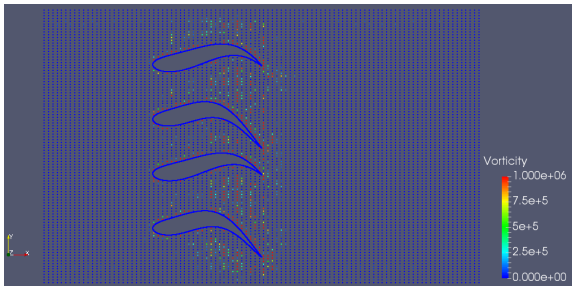
6.0.10. Vorticidad

Se calculó la vorticidad deacuerdo con la sección (4.0.23) donde se calcula la vorticidad en dos dimensiones.

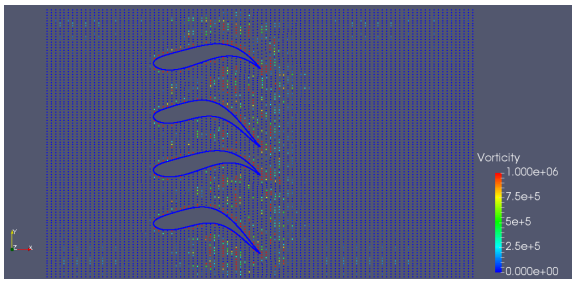
Donde los puntos con mayor vorticidad son coloreados en rojo, es decir, en la parte de trasera de los perfiles, es donde se genera la mayor vorticidad, esta escala es aumentada para poder ver con mayor color los puntos con mayor vorticidad.



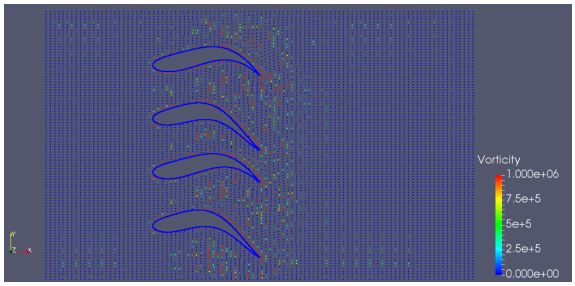
() t = 0.0 s



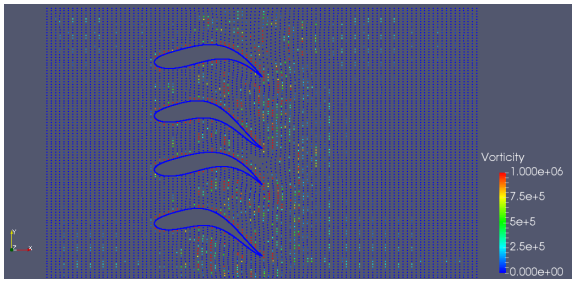
() t = 0.5 s



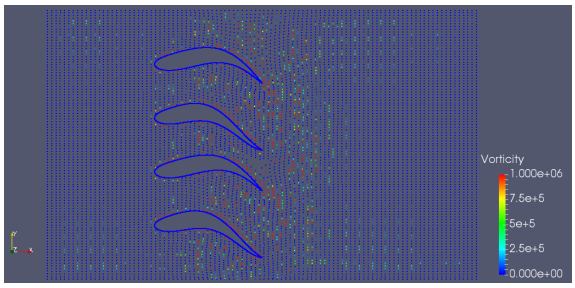
() t = 0.10 s



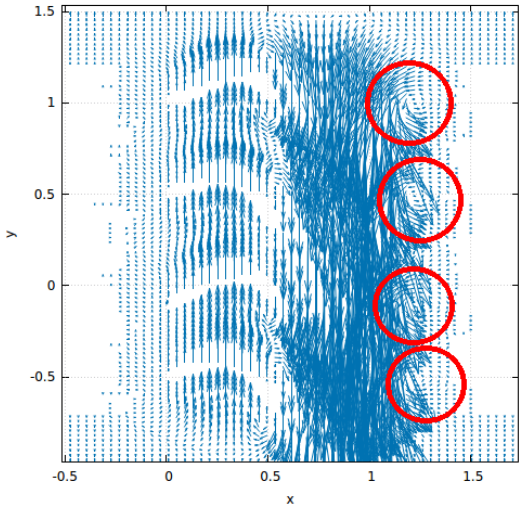
() t = 0.15 s



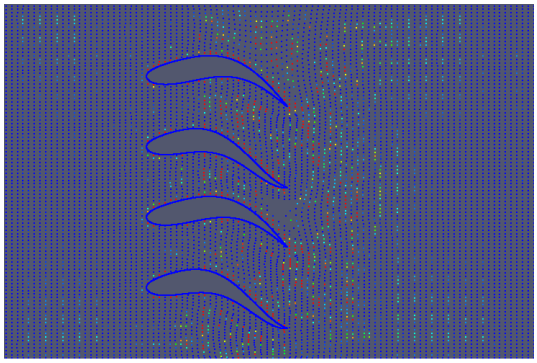
() t = 0.20 s



() t = 0.25 s



() Vectores de velocidad

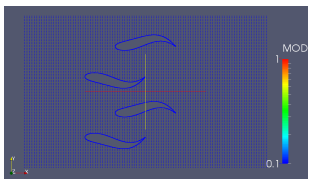


() Magnitud de la vorticidad

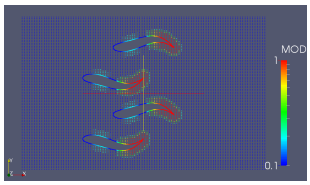
Donde coinciden los puntos con mayor vorticidad, es decir, los puntos en rojo con las zonas donde los vectores de velocidad indican generación de vortices.

6.0.11. Cuatro perfiles desfasados

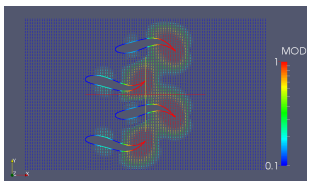
Se probó la simulación utilizando cuatro perfiles inmersos en el medio fluido, dos de ellos con diferentes parámetros de oscilación y amplitud y desfasados del origen. Los resultados obtenidos son los siguientes:



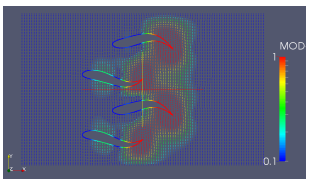
() t = 0.35 s



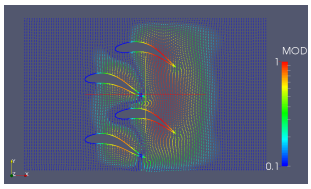
() t = 0.35 s



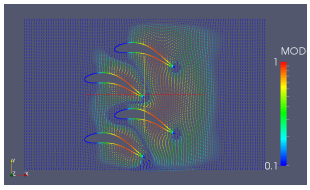
() t = 0.45 s



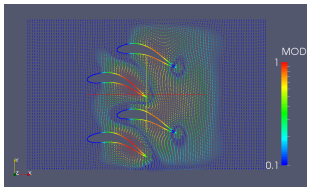
() t = 0.0 s



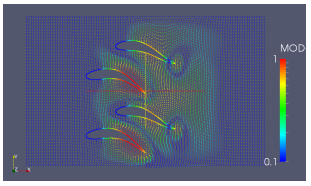
() t = 0.2 s



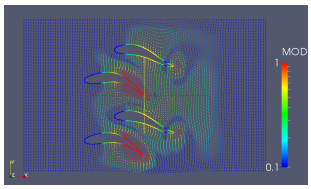
() t = 0.25 s



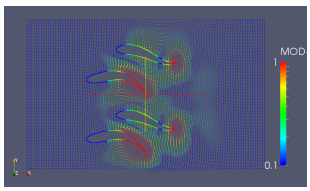
() t = 0.3 s



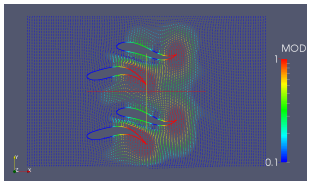
() t = 0.35 s



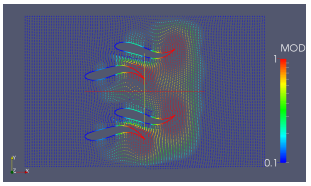
() t = 0.2 s



() t = 0.25 s

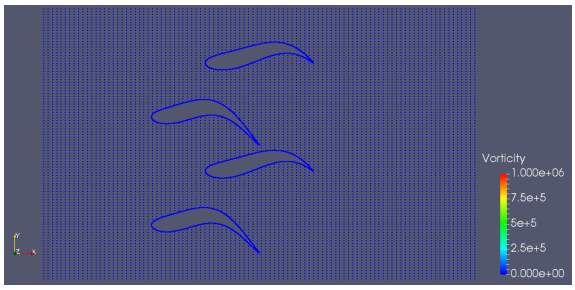


() t = 0.3 s

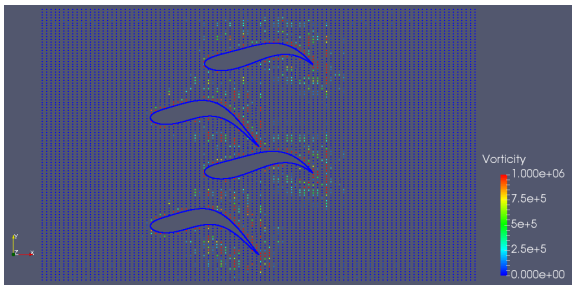


() t = 0.35 s

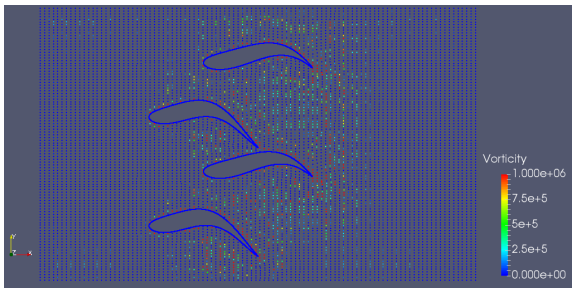
6.0.12. Vorticidad



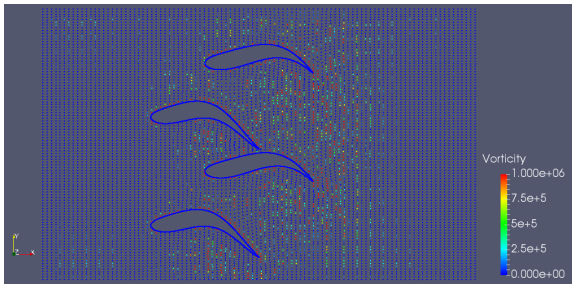
() t = 0.0 s



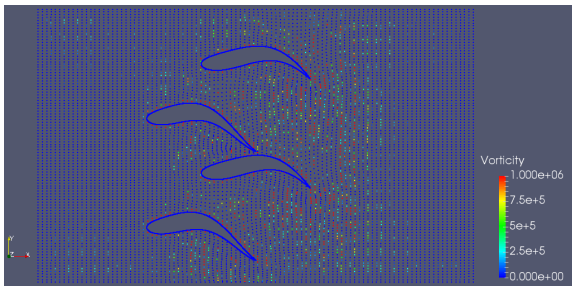
() t = 0.5 s



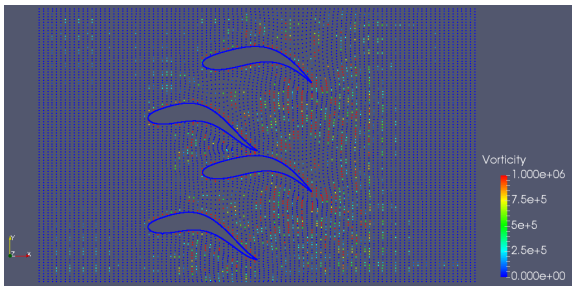
() t = 0.10 s



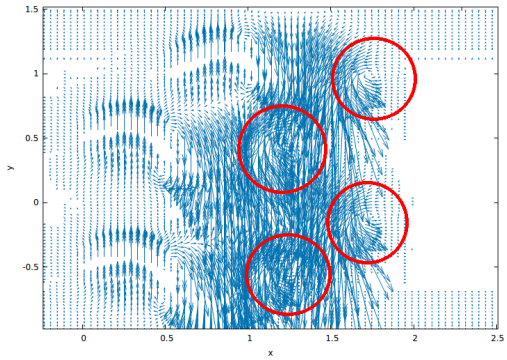
() t = 0.15 s



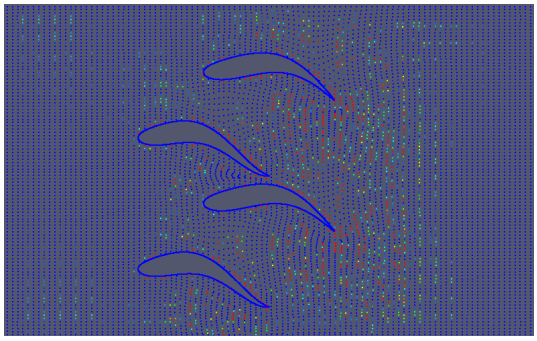
() t = 0.20 s



() t = 0.25 s



() Vectores de velocidad



() Magnitud de la vorticidad

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo a futuro

Los resultados presentados en este trabajo, los cuales han sido comparados con casos ampliamente estudiados, computacionalmente y experimentalmente, mostraron diversas conclusiones las cuales pueden dividirse en diferentes puntos.

En el primer de ellos, podemos hacer énfasis entre la diferencia del método completamente incompresible desarrollado en este trabajo y los métodos convencionales, el cual toma ambos esquemas, Lagrangiano y Euleriano, y que éste muestra las ventajas contra otros métodos meramente basados en un sólo esquema y que estas adaptaciones fueron implementadas para el caso de simulaciones de cuerpos sólidos en movimiento y que los estudios actuales se han limitado a estudiar aquellos cuerpos sin deformaciones.

Existe diversos estudios mediante métodos basados en malla que deforman el cuerpo pero todos ellos con una deformación muy limitada y completamente definida por la máxima deformación que la malla puede proporcionar poniendo en riesgo el tiempo de cálculo, Lamas y Rodríguez [4] entre muchos otros, de ésto podemos decir que el método SPH con las adaptaciones hechas en este trabajo puede contener mayores deformaciones en cuerpos sólidos que hasta la fecha no se han generado estudios como el de los organismos acuaticos el cual se puede llevar hasta un número muy alto de elementos deformables, tales coom un cardunen de peces, de lo cual no existe un estudio similiar en la actualidad llevado a cabo mediante la metodología SPH.

El siguiente punto inportante en este trabajo es la incorporación del esquema Euleriano, el cual nos permite fortalecer las áreas débiles que el método SPH puede tener y así generar un método que hace uso de ambos esquemas para generar un nuevo método con fortalezas que nos proveen resultados más exactos para la simulación de cuerpos sólidos en movimiento. Dichas simulaciones mostraron gran similitud para números de Reynolds relativamente altos, ya que a grandes números de Reynolds el método pierde exactitud ya que normalnte los casos estudiados son en zonas costeras donde las velocidades son muy bajas, lo que significa que el método completamente incompresible tiene la estabilidad suficiente para un número de Reynolds mayor a 2500, esto siignifica un aporte considerable al método SPH.

Por estos motivos, el método completamente incompresible genera un avance significativo y una nueva forma de atacar los problemas, que por algún tiempo habían sido limitados a cuerpos sólidos con movimiento limitado y de poca deformación, como la interacción de cuerpos sólidos deformables con liquidos.

Por lo tanto este trabajo puede ser considerado el inicio del estudio de un gran número de cuerpos sólidos con grandes deformaciónes y su interacción con fluidos a números de Reynold relativamente altos para el estudio de campos de presión, vorticidad e interacción sólido líquido en un ambiente menos restringido.

Trabajo a futuro

En el código SPH que proviene de las aplicaciones de astrofísica, existe una fuerza de gran magnitud que actúa sobre todas las partículas genera una reacción que equilibra las fuerzas en el sistema y que su efecto actúa mas allá de la influencia del dominio de soporte de la función del kernel, dicha fuerza hasta la actualidad sigue en proceso de modelación por su complejidad de comprensión adaptación. Esta fuerza puede y eventualmente será incorporada a los modelos que tratan las ecuaciones de la mecánica de fluidos para poder llevar las aplicaciones más allá de lo que hasta ahora se ha logrado.

Capítulo 8

Apendices

8.0.1. Apendice A: Método numérico MLS

Técnica "Moving Least Squares Interpolation"

La técnica MLS es un esquema de interpolación que es usado para interpolar información con una considerable presición. Esta técnica numérica nos permite aproximar una función $u(x)$ en un dominio ω usando la información proveída por un número de nodos dispersos en $\mathbf{x}_i$ donde $i = 1, 2, 3...N$ los cuales son los vecinos del punto estimado $\mathbf{x}$. La aproximación MLS $u^\delta(\mathbf{x})$ de la función $u(\mathbf{x})$ es escrita de la siguiente manera:

$$u^\delta(\mathbf{x}) = a_1(\mathbf{x}) + a_2\mathbf{x}x + a_3\mathbf{x}y + a_4\mathbf{x}x^2 + a_5\mathbf{x}xy + a_6\mathbf{x}y^2. \tag{8.0.1}$$

O en forma vectorial

$$u^\delta(\mathbf{x}) = [1 \;\; x \;\; y \;\; x^2 \;\; xy \;\; y^2] \begin{bmatrix} a_1(\mathbf{x}) \\ a_2(\mathbf{x}) \\ a_3(\mathbf{x}) \\ a_4(\mathbf{x}) \\ a_5(\mathbf{x}) \\ a_6(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{8.0.2}$$

La ecuación anterior tambien puede ser ecrita como:

$$u^\delta(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T\mathbf{x} \cdot a(\mathbf{x}). \tag{8.0.3}$$

donde

$$\mathbf{P}^T\mathbf{x} = [1 \;\; x \;\; y \;\; x^2 \;\; xy \;\; y^2]. \tag{8.0.4}$$

y

$$a(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_1(\mathbf{x}) \\ a_2(\mathbf{x}) \\ a_3(\mathbf{x}) \\ a_4(\mathbf{x}) \\ a_5(\mathbf{x}) \\ a_6(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{8.0.5}$$

En el método MLS los coeficientes $a_j(\mathbf{x})$ son determinados minimizando una norma discreta ponderada L2

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{i}^{N} W_i(\mathbf{x})[\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \cdot a(\mathbf{x}) - u_i]^2. \tag{8.0.6}$$

Donde $W_i(\mathbf{x})$ es la función de peso asociada con el nodo i, y N es el número de nodos (partículas vecinas) en el dominio ω.
Para generar las funciones de forma del método MLS el proceso para obtener los coeficientes $a_j(\mathbf{x})$ es el siguiente. Consideremos un dominio de dos dimensiones (x, y), en los cuales hay $N = 3$ nodos. Para generar las funciones de forma ϕ_i del método MLS, usaremos un monómio de orden 3, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$J(\mathbf{x}) = W_1(\mathbf{x})[a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + u_1]^2 + W_2(\mathbf{x})[a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 + u_2]^2 + \mathrm{W_3(\mathbf{x})}[a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 + u_3]^2 \tag{8.0.7}$$

Si tomamos la derivada de la ecuación anterior con respecto a cada coeficiente a_i tenemos:

$$\frac{\partial J(x,y)}{\partial a_1} = 2W_1(\mathbf{x})[a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 - u_1] + 2W_2(\mathbf{x})[a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 - u_2] + 2\mathrm{W_1(\mathbf{x})}[a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 - u_3] = 0 \tag{8.0.8}$$

$$\frac{\partial J(x,y)}{\partial a_2} = 2W_1x_1(\mathbf{x})[a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 - u_1] + 2W_2(\mathbf{x})x_2[a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 - u_2] + 2\mathrm{W_1(\mathbf{x})}x_3[a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 - u_3] = 0 \tag{8.0.9}$$

$$\frac{\partial J(x,y)}{\partial a_3} = 2W_1 y_1(\mathbf{x})[a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 - u_1] + 2W_2(\mathbf{x}) y_2[a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 - u_2] +$$

$$2\ \mathrm{W}_1(\mathbf{x}) y_3[a_1 + a_2 x_3 + a_3 y_3 - u_3] = 0 \tag{8.0.10}$$

Las dos ecuaciones anteriores (derivada con respecto a $a1$ y $a3$) pueden ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} 2\hat{W}_1(\mathbf{x}) + 2\hat{W}_3(\mathbf{x}) + 2\hat{W}_3(\mathbf{x}) & 2\hat{W}_1(\mathbf{x})x_1 + 2\hat{W}_3(\mathbf{x})x_2 + 2\hat{W}_3(\mathbf{x})x_3 & 2\hat{W}_1(\mathbf{x})y_1 + 2\hat{W}_3(\mathbf{x})y_2 + 2\hat{W}_3(\mathbf{x})y_3 \\ 2\hat{W}_1(\mathbf{x})x_1 + 2\hat{W}_3(\mathbf{x})x_2 + 2\hat{W}_3(\mathbf{x})x_3 & 2\hat{W}_1(\mathbf{x})x_1^2 + 2\hat{W}_3(\mathbf{x})x_2^2 + 2\hat{W}_3(\mathbf{x})x_3^2 & 2\hat{W}_1(\mathbf{x})y_1x_1 + 2\hat{W}_3(\mathbf{x})y_2x_2 + 2\hat{W}_3(\mathbf{x})y_3x_3 \\ 2\hat{W}_1(\mathbf{x})y_1 + 2\hat{W}_3(\mathbf{x})y_2 + 2\hat{W}_3(\mathbf{x})y_3 & 2\hat{W}_1(\mathbf{x})y_1x_1 + 2\hat{W}_3(\mathbf{x})y_2x_2 + 2\hat{W}_3(\mathbf{x})y_3x_3 & 2\hat{W}_3(\mathbf{x})y_1^2 + 2\hat{W}_3(\mathbf{x})y_2^2 + 2\hat{W}_3(\mathbf{x})y_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2\hat{W}_1(\mathbf{x}) & 2\hat{W}_2(\mathbf{x}) & 2\hat{W}_3(\mathbf{x}) \\ 2\hat{W}_1(\mathbf{x})x_1 & 2\hat{W}_2(\mathbf{x})x_2 & 2\hat{W}_2(\mathbf{x})x_2 \\ 2\hat{W}_1(\mathbf{x})y_1 & 2\hat{W}_2(\mathbf{x})y_2 & 2\hat{W}_3(\mathbf{x})y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{8.0.11}$$

La ecuación anterior se escribe como:

$$\begin{bmatrix} \hat{W}_1(\mathbf{x}) & \hat{W}_2(\mathbf{x}) & \hat{W}_3(\mathbf{x}) \\ \hat{W}_1(\mathbf{x})x_1 & \hat{W}_2(\mathbf{x})x_2 & \hat{W}_2(\mathbf{x})x_2 \\ \hat{W}_1(\mathbf{x})y_1 & \hat{W}_2(\mathbf{x})y_2 & \hat{W}_3(\mathbf{x})y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{W}_1(\mathbf{x}) & \hat{W}_2(\mathbf{x}) & \hat{W}_3(\mathbf{x}) \\ \hat{W}_1(\mathbf{x})x_1 & \hat{W}_2(\mathbf{x})x_2 & \hat{W}_2(\mathbf{x})x_2 \\ \hat{W}_1(\mathbf{x})y_1 & \hat{W}_2(\mathbf{x})y_2 & \hat{W}_3(\mathbf{x})y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{8.0.12}$$

Resolviendo la ecuación anterior para obtener el coeficiente desconocido a_i obtenemos:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} \hat{W}_1(\mathbf{x}) & \hat{W}_2(\mathbf{x}) & \hat{W}_3(\mathbf{x}) \\ \hat{W}_1(\mathbf{x})x_1 & \hat{W}_2(\mathbf{x})x_2 & \hat{W}_2(\mathbf{x})x_2 \\ \hat{W}_1(\mathbf{x})y_1 & \hat{W}_2(\mathbf{x})y_2 & \hat{W}_3(\mathbf{x})y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \hat{W}_1(\mathbf{x}) & \hat{W}_2(\mathbf{x}) & \hat{W}_3(\mathbf{x}) \\ \hat{W}_1(\mathbf{x})x_1 & \hat{W}_2(\mathbf{x})x_2 & \hat{W}_2(\mathbf{x})x_2 \\ \hat{W}_1(\mathbf{x})y_1 & \hat{W}_2(\mathbf{x})y_2 & \hat{W}_3(\mathbf{x})y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{8.0.13}$$

O de otra manera:

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \tag{8.0.14}$$

Donde

$$\mathbf{M}^{-1} = \left[\begin{bmatrix} \hat{W}_1(\mathbf{x}) & \hat{W}_2(\mathbf{x}) & \hat{W}_3(\mathbf{x}) \\ \hat{W}_1(\mathbf{x})x_1 & \hat{W}_2(\mathbf{x})x_2 & \hat{W}_2(\mathbf{x})x_2 \\ \hat{W}_1(\mathbf{x})y_1 & \hat{W}_2(\mathbf{x})y_2 & \hat{W}_3(\mathbf{x})y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \right]^{-1} \tag{8.0.15}$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \hat{W}_1(\mathbf{x}) & \hat{W}_2(\mathbf{x}) & \hat{W}_3(\mathbf{x}) \\ \hat{W}_1(\mathbf{x})x_1 & \hat{W}_2(\mathbf{x})x_2 & \hat{W}_2(\mathbf{x})x_2 \\ \hat{W}_1(\mathbf{x})y_1 & \hat{W}_2(\mathbf{x})y_2 & \hat{W}_3(\mathbf{x})y_3 \end{bmatrix}^{-1} \tag{8.0.16}$$

Y

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{8.0.17}$$

Usando la ecuación de a en la cuación de $u^{\delta}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x})$ tenemos

$$u^{\delta}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \tag{8.0.18}$$

Donde

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1 \quad x \quad y] \tag{8.0.19}$$

La ecuación de $u^{\delta}(\mathbf{x})$ se puede definir como:

$$u^{\delta}(\mathbf{x}) = \phi^T \cdot \mathbf{u} \tag{8.0.20}$$

Donde

$$\phi^T = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \tag{8.0.21}$$

Es el vector de funciones de forma, los cuales son llamados "las funciones de interpolación de MLS". En la ecuación anterior las funciones de peso $\hat{W}_i$ son representadas como

$$\hat{W}_1 = \hat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1), \quad \hat{W}_2 = \hat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2), \quad \hat{W}_3 = \hat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3) \tag{8.0.22}$$

Donde $\mathbf{x}$ es el vector de posición donde nosotros queremos interpolar la función $\mathbf{u}$, la cual es desconocida en los puntos $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,$\mathbf{x}_3$. En investigaciones se ha usado la función de peso de cuarto orden de un dominio compacto, dado por:

$$\hat{W}_i(\mathbf{x}) = \hat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = 0 \tag{8.0.23}$$

donde $q = \dfrac{|x - x_i|}{\rho_{mf}} > 1$, ó

$$\hat{W}_i(\mathbf{x}) = \hat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = 1 - 6q^2 + 8q^3 - 3q^4 \tag{8.0.24}$$

donde $q = \dfrac{|x - x_i|}{\rho_{mf}} < 1$,

Derivadas de las funciones de peso

Si tomamos la derivada a lo largo de la dirección k de la función u^{δ} dado por la ecuacion (anterior), entonces tenemos.

$$\frac{\partial u^{\delta}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathbf{P}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B})\cdot\mathbf{u} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial x_k}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{P}^T\frac{\partial \mathbf{M}^{-1}}{\partial x_k}\mathbf{B} + \mathbf{P}^T\mathbf{M}^{-1}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_k}\right)\cdot\mathbf{u} \tag{8.0.25}$$

La derivada de la matríz $\mathbf{M}^{-1}$ está dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{M}^{-1}}{\partial x_k} = -\mathbf{M}^{-1}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_k}\mathbf{M}^{-1} \tag{8.0.26}$$

La expresión de la derivada de la matríz $\mathbf{M}$ a lo largo de la dirección k, de la manera que sigue:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left[\begin{array}{ccc} \hat{W}_1(\mathbf{x}) & \hat{W}_2(\mathbf{x}) & \hat{W}_3(\mathbf{x}) \\ \hat{W}_1(\mathbf{x})x_1 & \hat{W}_2(\mathbf{x})x_2 & \hat{W}_2(\mathbf{x})x_2 \\ \hat{W}_1(\mathbf{x})y_1 & \hat{W}_2(\mathbf{x})y_2 & \hat{W}_3(\mathbf{x})y_3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{array}\right]\right]^{-1} \tag{8.0.27}$$

O de otra manera:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_k} = \left[\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial \hat{W}_1}{\partial x_k} & \dfrac{\partial \hat{W}_2}{\partial x_k} & \dfrac{\partial \hat{W}_3}{\partial x_k} \\ x_1\dfrac{\partial \hat{W}_1}{\partial x_k} & x_2\dfrac{\partial \hat{W}_2}{\partial x_k} & x_3\dfrac{\partial \hat{W}_3}{\partial x_k} \\ y_1\dfrac{\partial \hat{W}_1}{\partial x_k} & y_2\dfrac{\partial \hat{W}_2}{\partial x_k} & y_3\dfrac{\partial \hat{W}_3}{\partial x_k} \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{array}\right] \tag{8.0.28}$$

por lo tanto, necesitamos encontrar la expresión para la derivada a lo largo de la dirección k de la función de peso $\hat{W}_i$. Antes de desarrollar la expresión para la derivada de la función de peso $\hat{W}_i$, debemos mencionar que la función de peso se obtiene por el producto tensorial de las funciones de peso definidas a lo largo de cada dirección del sistema de coordenadas, por lo tanto tenemos

$$\hat{W}_i = \hat{W}_{xi}\cdot\hat{W}_{yi}\cdot\hat{W}_{zi} \tag{8.0.29}$$

$$\hat{W}_{xi} = \hat{W}_{x-xi} = 16q_x^2 + 8q_x^3 3q_x^4, 95 \tag{8.0.30}$$

$$\hat{W}_{yi} = \hat{W}_{y-yi} = 16q_y^2 + 8q_y^3 3q_y^4, \tag{8.0.31}$$

$$\hat{W}_{zi} = \hat{W}_{z-zi} = 16q_z^2 + 8q_z^3 3q_z^4, 97 \tag{8.0.32}$$

$$q_x = \frac{|x - x_i|}{\rho_m f_x}, \quad q_y = \frac{|y - y_i|}{\rho_m f_y}, \quad q_z = \frac{|z - z_i|}{\rho_m f_z} 98 \tag{8.0.33}$$

Como es habitual, las expresiones (95) - (97) se aplican cuando los valores de q_x, q_y y q_z son inferiores a uno; de lo contrario, los valores de $\hat{W}_{x-xi}$, $\hat{W}_{y-yi}$ y $\hat{W}_{z-zi}$ son iguales a cero. Ahora podemos formular la derivada de la función de ponderación $\hat{W}_i$ a lo largo de las tres direcciones del sistema de coordenadas.

$$\frac{\partial \hat{W}_i}{\partial x} = \frac{d\hat{W}_{xi}}{dx} \cdot \hat{W}_{yi} \cdot \hat{W}_{zi} \tag{8.0.34}$$

$$\frac{\partial \hat{W}_i}{\partial y} = \hat{W}_{xi} \cdot \frac{d\hat{W}_{yi}}{dy} \cdot \hat{W}_{zi} \tag{8.0.35}$$

$$\frac{\partial \hat{W}_i}{\partial z} = \hat{W}_{xi} \cdot \hat{W}_{yi} \cdot \frac{d\hat{W}_{zi}}{dz} \tag{8.0.36}$$

Donde

$$\frac{d\hat{W}_{xi}}{dx} = \frac{d\hat{W}_{xi}}{dq_x} \cdot \frac{dq_x}{dx} 102 \tag{8.0.37}$$

$$\frac{d\hat{W}_{yi}}{dy} = \frac{d\hat{W}_{yi}}{dq_y} \cdot \frac{dq_y}{dy} 103 \tag{8.0.38}$$

$$\frac{d\hat{W}_{zi}}{dz} = \frac{d\hat{W}_{zi}}{dq_z} \cdot \frac{dq_z}{dz} 104 \tag{8.0.39}$$

Usando las ecuaciones 95 a 98 en las ecuaciones 102a 104, obtenemos

$$\frac{\hat{W}_{xi}}{dx} = (-12q_x + 24q_x^2 - 12q_x^3) \cdot \left(\frac{1}{\rho_m f_x} \frac{(x - x_i)}{|x - x_i|} \right) \tag{8.0.40}$$

$$\frac{\hat{W}_{yi}}{dy} = (-12q_y + 24q_y^2 - 12q_y^3) \cdot \left(\frac{1}{\rho_m f_y} \frac{(y - y_i)}{|y - y_i|} \right) \tag{8.0.41}$$

$$\frac{\hat{W}_{zi}}{dz} = (-12q_z + 24q_z^2 - 12q_z^3) \cdot \left(\frac{1}{\rho_m f_z} \frac{(z - z_i)}{|z - z_i|} \right) \tag{8.0.42}$$

Para encontrar las derivadas dq_x/dx, dq_y/dy y dq_z/dz hemos usado la regla:

$$\frac{d|u|}{dx} = \frac{u}{|u|} \frac{du}{dx} \tag{8.0.43}$$

Donde $u(x) \neq 0$.

8.0.2. Apendice B: FEM (Finit Element Method)

En este apendice se dará una breve introducción al método FEM (Finit Element Method), el cual no busca explicar a fondo las capacidades y características, si no dar una simple guía de los paso que sigue el método para la resolución del problema.

Considere la PDE.

$$L[u(\hat{r})] = f(\hat{r}) \tag{8.0.44}$$

definido en un dominio Ω, dónde $L[\cdot]$ representa un operador diferencial lineal, $u(\hat{r})$ es la función desconocida a determinar, y $f(\hat{r})$ es una función de fuente dada. El método de elementos finitos consiste en discretizar el problema continuo (4.1), de modo que la solución aproximada se puede encontrar resolviendo un sistema algebraico de ecuaciones.

Dos métodos principales para obtener la solución aproximada son el método de Ritz y el método de Galerkin [152].

El método Ritz se basa en una formulación variacional de la PDE, que corresponde a un problema de minimización de un funcional [152]. Ya que eEl método de Galerkin permite formulaciones variacionales más generales [152], el enfoque de Galerkin se utiliza a lo largo de este trabajo.

Multiplicando (9.0.44) por una función $v(\hat{v})$, que se denomina función de prueba, y la integración sobre el dominio de simulación proporciona la formulación variacional.

$$\int_{\Omega} v(\hat{r}) L[u(\hat{r})] d\Omega = \int_{\Omega} v(\hat{r}) f(\hat{r}) d\Omega \tag{8.0.45}$$

Usando la notación

$$(a, b) = \int_{\Omega} a(\hat{r}) b(\hat{r}) d\Omega \tag{8.0.46}$$

La ecuación (9.0.45) puede ser escrita como:

$$(L[u], v) = (f, v) \tag{8.0.47}$$

Para obtener el problema discreto correspondiente, el dominio de simulación,Ω, se divide en un conjunto de elementos m, T_1, T_2...,T_m, que no se sobreponen, es decir: $\forall_i \neq j : T_{i \cap T_j = 0}$. La malla obtenida por dicha discretización de dominio está representada por

$$T_h(\Omega) = \cup_{i \to 1}^{m} T_i \tag{8.0.48}$$

Además, uno define un conjunto P de puntos de una malla, tamnién llamados nodos, con cada punto $p_k \in P$, siendo descritos por un único indice $k_1, 2, ..., N$, donde N es el úmero total de puntos de la malla.

La solución aproximada, $u_h(\hat{r})$, para la función deonocida, $u(\hat{r})$, está dada por(REFERENCIA)

$$u_h(\hat{r}) = \sum_{i \to 1}^{N} u_i N_i(\hat{r}) \tag{8.0.49}$$

Donde $N_j(\hat{r})$ son las llamadas funciones bases o funciones de forma. La aproximación (L[u],v) es determinada por los coeficientes u_i, que representan el valor de la función desconocida en el nodo i. En el nodo i, donde el punto esta dado por las coordenadas de $\hat{r}_i$, la función base o de forma debe satisfacer la siguiente condición.

$$N_j(\hat{r}_i) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, ..., N. \tag{8.0.50}$$

Normalmente las funciones son elegídas como polinomios de bajo orden. Sustituyendo (9.0.50) en (9.0.48) y eligiendo $v = N_j(\hat{r})$ obtenemos:

$$\left(L\left[\sum_{i=1}^{N} u_i N_i \right], N_j \right), \qquad j = 1, ..., N. \tag{8.0.51}$$

Y debido a que $L[\cdot]$ es un operador lineal y los coeficientes u_i, son constantes podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i (L[N_i], N_j) = (f.N_j) \qquad j = 1, ..., N. \tag{8.0.52}$$

La ecuación (9.0.53) es en realidad un sistema de N ecuaciones con N incognitas, $u_1, u_2, ..., u_N$. Por lo tanto puede ser escrita en notaciòn matricial:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \tag{8.0.53}$$

Donde $\mathbf{A} = (a_{ij})$ es llamada la matriz de rigidez, y está dada por los elementos

$$a_{ij} = (L[N_i], N_j) = \int_{\Omega} f(\hat{r}) N_j(\hat{r}) d\Omega \qquad j = 1, ..., N. \tag{8.0.54}$$

$\mathbf{X} = (u_1, ..., u_N)T$ es el vector de incognitas y $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_N)T$ es el vector de carga, dado por

$$b_j = (f, N_i) = \int_{\Omega} L[N_i(\hat{r})], N_j(\hat{r}) d\Omega \qquad i, j = 1, ..., N. \tag{8.0.55}$$

Aplicando el método de elemento finito para resolver una ecuación direncial parcial, nos lleva a un sistema de ecuaciones algebraicas. Para resolver este sistema de ecuaciones, la matriz de rigidez $\mathbf{A}$, el vector de carga, $\mathbf{v}$, tienen que ser determinados. Sin embargo en lugar de calcularlos directamente (9.0.55) y (9.0.56) en la practica son calculadas suponiendo la contribución de diferentes elementos.

$$a_{ij} = \sum_{TT_h(\Omega)} (L[N_i], N_j)_T = \sum_{T \in T_h(\Omega)} \int_T L[N_i(\hat{r})], N_j)(\hat{r}) d\Omega, \qquad i, j = 1, ..., N. \tag{8.0.56}$$

$$b_j = \sum_{TT_h(\Omega)} (f, N_j)_T = \sum_{T \in T_h(\Omega)} \int_T f(\hat{r}) N_j)(\hat{r}) d\Omega, \qquad i, j = 1, ..., N. \tag{8.0.57}$$

Notemos que $(L[N_i], N_j)_T = 0$ a menos que tanto N_i y N_j pertenezcan al mismo elemento T. Entonces el cálculo de (9.0.56) y (9.0.57) pueden ser limitados a los nodos de T, entonces $i, j = 1, ..., N_v$, donde N_v es el número de vertices del elemento, de esta manera, para cada elemento $T \in T_h(\Omega)$, se obtiene una matriz $N_v N_v$ la cual es llamada la matriz de rigidez o matriz nucleo. Entonces el sistema general de la matriz $\mathbf{A}$, puede ser calculado, primero calculando la matriz de rigidez de cada elemento $T \in T_h(\Omega)$ y despues sumando las contribuciones de cada elemento deacuerdo con (9.0.56), el vector del lado derecho, $\mathbf{b}$, es calculado de la misma manera.

Este proceso de construir sistema de matrices generales es llamado ensamble. La principal ventaja del proceso de ensable es que simpolifica de manera significatíva el cálculo del sistema de matrices y el lado derecho del vector de carga

8.0.3. Apendice C: Algoritmo LEAPFROG de paso de tiempo

La solución numérica de las ecuaciones diferenciales requieren que sean transformadas en ecuaciones algebráicas. Esto se logra por meido de un método poco familiar en diferencias finitas. Las variables continuas son representadas en un conjunto finito de puntos y las derivadas son aproximadas por diferencias entre valores y los valores en los puntos adyacentes.

Con frecuencia se obtiene información dinámica detallada sobre la interacción de sistemas clásicos de simulaciones "Dinámica molecular"(MD), que requieren la integración de las ecuaciones de movimiento de Newton.

Uno podría estar interesado, por ejemplo, en seguir el movimiento de las partículas en un fluido. Otro ejemplo sería, los astrónomos querían integrar el movimiento del sistema solar durante un largo período de tiempo o considerar la evolución de una galaxia siguiendo los movimientos de sus estrellas constituyentes. (En un entorno astronómico, "dinámica molecular"son llamadas simulaciones de "N-cuerpo".) En este tipo de simulaciones, el paso de tiempo es calculado mediante un algoritmo llamado "leapfrog", que es particularmente adecuado para estas simulaciones porque (i) es simple, y (ii) tiene una especie de estabilidad "global"(en Jargon, el algoritmo es "simplectic").

El algoritmo LEAPFROG de paso de tiempo

Ya hemos visto en nuestra discusión de la diferenciación numérica y de la integración numérica (Método de punto medio) que la pendiente de un acorde entre dos puntos en una función, (x_0, f_0) y (x_1, f_1), es una mejor aproximación de la derivada en el punto medio, $f'_{1/2}$, que incluso al final. Podemos utilizar la misma idea en un método simple y elegante para integrar las leyes del movimiento de Newton, el cuál tiene la ventaja de la propiedad de que la ecuación para $\frac{dx}{dt}$ no implica x en sí misma y la ecuación para $\frac{dv}{dt}$ (donde v es la velocidad) no implica v (suponiendo fuerzas independientes de la velocidad). Más precisamente, para un solo grado de libertad, las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{8.0.58}$$

$$\frac{dv}{dt} = F(x) \left(= -\frac{dU(x)}{dx} \right) \tag{8.0.59}$$

Donde F(x) es la fuerza sobre la partícula cuando está en x, $U(x)$ es la energía potencial, y por facilidad establecemos la masa igual a uno. (Para colocar la masa de nuevo remplazamos F por $\frac{F}{m}$ de vuelta.)

El método de Euler podría aproximarse por:

$$x_1 = x_0 + hv_0, \tag{8.0.60}$$

donde h es el intervalo entre pasos de tiempo. Una mejor aproximación podría ser remplazando v por valor en el punto medio del intervalo, es decir:

$$x_1 = x_0 + hv_{1/2}. \tag{8.0.61}$$

Podríamos penzar que es un error, ya que no conocemos $v_{1/2}$, tomando esto como cierto por ahora y asumiendo que podemos obtener $v_{1/2}$ de alguna manera. Entonces podríamos aplicar de la misma manera la regla del punto medio a la ecuación 2 de esta sección, en el paso v en el tiempo, de la manera:

$$v_{3/2} = v_{1/2} + hF(x_1), \tag{8.0.62}$$

Ésto apartir de que conocemos x_1. Entonces podemos avanzar en x con $x_2 = x_1 + hv_{3/2}$ y así sucesivamente. Entonces, una vez que hemos comenzado x_0 and $v_{1/2}$ podemos continuar con x y v "leapfrogging"(saltando) sobre cada uno como se muestra en la figura

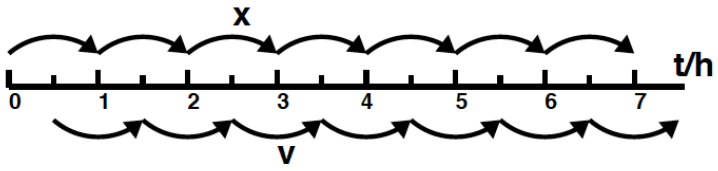


Figura 8.1: Salto en el paso de tiempo "leapfrogging".

Las ecuaciones básicas de integración para el algorítmo de leapfrog son:

$$x_{n+1} = x_n + hv_{n+1/2}, \tag{8.0.63}$$

$$v_{n+3/2} = v_{n+1/2} + hF(x_{n+1}) \qquad (leapfrog) \tag{8.0.64}$$

El interés en el método leapfrog yace en la simplicidad del código y la conservación de cantidades físicas de interés en los sistemas, como son la energía y momento angular únicos de orden 2 que presentan la conservación de las mencionadas cantidades físicas, citando por ejemplo el método de Runge-Kutta de orden 2 que diverge en energía.

Método que no puede arrancar por si solo, falta de paso inicial en velocidades se acostumbra en esa situación realizar un paso según Euler y calcular la primera velocidad según:

$$v_{1/2} = v_0 + a(x_0)\frac{h}{2} \tag{8.0.65}$$

Lo cual agrega un error de orden menor, como el esperado en Euler, pero dado que incursionamos en ese método sólo una vez, no presenta problemas en el momento de la integración. Debemos tener en cuenta que al momento del cálculo de cantidades como energía o momento angular, se precisa evaluar las posiciones y velocidades en un mismo instante, por lo tanto es necesario correr los valores de posición o velocidad para que estén evaluados en un mismo tiempo.

Dado un paso n y una velocidad en $v_{n+1/2}$, *retrasar* la velocidad con los datos conocidos de aceleración y posiciónen el paso n, como

$$v_n = v_{1/2} - a(x_0)\frac{dt}{2} \tag{8.0.66}$$

Considerar una variación del método Verlet conocida como Velocidad Verlet. En este método, velocidades y posiciones pueden ser conocidas a iguales intervalos de tiempo según:

$$v_n = v_{1/2} - a(x_0)\frac{dt}{2} \tag{8.0.67}$$

$$x_{n+1} + x_n + hv_{n+1/2} \tag{8.0.68}$$

$$v_{n+1} = v_{n+1/2} + \frac{1}{2}ha(x_{n+1}) \tag{8.0.69}$$

Beneficios del método:

-Método simple para resolución de sistemas conservativos

-Preservación de la energía o momento angular, veremos que estos oscilan entorno al valor real proveniente de la solución analítica acotados por un error global de orden 2 para nuestros métodos.

-Reversibilidad Temporal.

-Método eficiente de orden 2.

-Descripción cualitativa del comportamiento del sistema de estudio, útil como primera aproximación al problema.

8.0.4. Apendice D: Números adimensionales

- Reynolds
  El número de Reynolds es un parámetro crucial para las cargas del viento en secciones circulares. La descripción siguiente a los cilindros estacionarios.

$$Re = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{VD}{\nu}.$$

Es válido en aquellos flujos a poca donde las fuerzas viscosas son las más importantes, interviene en fenómenos donde no hay superficies libre; es decir, problemas sujetos a presión. El desprendimiento del vórtice de un cilindro circular liso en un flujo subsónico constante es función del número de Reynolds. Este se basa en la velocidad libre V de la corriente y el diámetro D del cilindro'
Un número de Reynolds grande indica una influencia marcada de las fuerzas de inercia sobre las viscosas.
Se usa a menudo como un criterio se semejanza en las pruebas de modelos de naves aéreas, cuerpos sumergidos en un flujo, medidores de gasto y transiciones en conductos, en los cuales las características del flujo están sujetas a efectos viscosos.

Formación de las estelas con diferentes números de Reynolds en esferas circulares

Los regímenes principales del desprendimiento del vórtice de un cilindro circular liso, resumidos por Lienhard (1966)

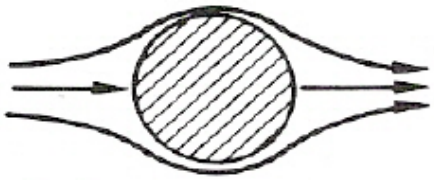


Figura 8.2: Re < 5.

El flujo del fluido sigue el contorno del cilindro.

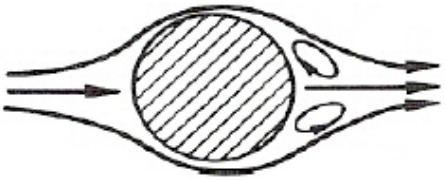


Figura 8.3: $5 \leqslant$Re < 40.

El flujo se separa em la parte posterior del cilindro y un par simétrico de vórtices se forman en la estela cercana.

La longitud de l;a estela de los vórtices auenta linealmente con el número de Reynolds, alcanzando una distancia de tres diámetros del cilindro en un número de Reynolds de 45 (Nishioka y Sato, 1978). Mientras que el número de Reynolds aumenta, la estela comienza a ser inestable (Huerre y Monkewitz, 1990) y uno de los vórtices se rompe lejos (Friehe,

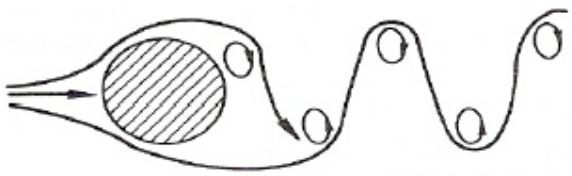


Figura 8.4: 40 $\leqslant$Re $<$ 90 y 90 $\leqslant$Re $<$ 150.

1980). Una estela periódica laminar de vórtives escalonados de signos opuestos se forma (calle de vórtices de Von Karman).
Intervalos en los cuales la calle del vórtice es laminar.

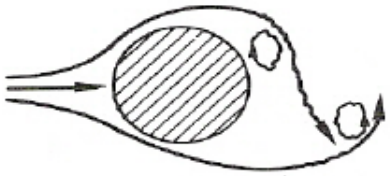


Figura 8.5: 150 $\leqslant$Re $<$ 300 y 300 $\leqslant$Re $<$ 3x10^5

Roshko (1954) encontró que los vórtices que se rompen lejos del cilindro llegan a ser turbulentos (primer intervalo 150 $\leqslant Re <$ 300), aunque la capa de límite en el cilindro sigue siendo laminar (intervalo de transición a turbulencia en el vórtice)
La calle del vórtice es completamente turbulenta (segundo intervalo 300 $< 3x10^5$).
El n úmero de Reynolds en el intervalo 300 $< Re < 1{,}5x10^5$ es llamado subcrítico. Las capas límite laminares se separan en cerca de 80 grados detrás de la nariz del cilindro y el desprendimiento del vórtice es fuerte y periódico.

En el intervalo de transición, $1{,}5x10^5 < Re < 3{,}5x10^6$, la capa límite del cilindro se convierte en turbulenta, el movimiento de los puntos de separación es de 140 grados detrás del cilindro, y el coeficiente de retardo baja a 0.3 (Farell, 1981). En el rango de transición, las burbujas de la separación y los efectos tridimensionales interrumpen el proceso regular del desprendimiento y ensachan el espectro de las frecuencias del desprendimiento para las superficies cilíndricas lisas (Bearman, 1969; Jones, 1969; Farell y Blessman, 1983; Achenbach y Heinecke, 1981).

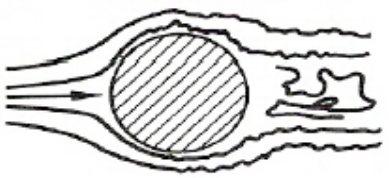


Figura 8.6: 3x$10^5\leqslant$Re $<$ 3.5x10^6

La capa límite laminar ha experimentado la transición turbulenta y la estela es más estrecha y desorganizada.

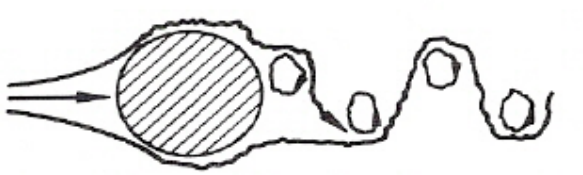


Figura 8.7: $3.5^6 \geqslant$Re

Rango supercrítico, el establecimiento de la turbulencia en la calle del vórtice (Roshko, 1961).

- Número de Strouhal
  El número de Strouhal caracteríza la configuración vorticosa correspondiente a cada sección transversal, para una velocidad del viento dada.

$$S = \frac{f_s D}{V_\infty}$$

  El número de Strouhal S es un parámetro adimensional, constante entre la frecuencia de formación o desprendiemiento del vórtice f_s y la velocidad libre del flujo de la corriente duera de la estela V_∞ dividida por el diámetro del cilindro D. V_∞ y D deben tener unidades constantes, es decir, si D está en metros, después V_∞ deberá estar en metros por segundo, o si D está en pulgadas, V_∞ deberá estar en pulgadas por segundo.

  Este número es importante en flujos relacionados con la formación de vórtices, movimientos de ondas de vibración en cuerpos colocados en un flujo.

  El número de Strouhal para una sección circular, se mantiene constante, aproximadamente igual a 0.2, hasta $Re = 2x10^5$, valor próximo al que corresponde a la contracción de la estela, que es de $3x10^5$. A partir de este valor, S vuelve a crecer rápidamente, y alcanza el valor máximo de 0.43 para $Re = 1{,}5x10^6$, después disminuye.

Bibliografía

[1] Jaime Cervantes de Gortari. *El despazamiento ondulatorio de los peces: analogía con el pandeo de columnas sólidas y fluidas.* SOMIM México, 2004.

[2] G.J. Doisenbant, J.M. Cabaleiro, G.O. Artana. *Mecanismo de propulsión de cuerpos flexibles con movimiento peristáltico.* Laboratorio de Fluidodinámica - Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires - Argentina.

[3] Von Karman, T. y Burges, J.M. *Aerodynamics Selected Topics in the Light of Their Historicak Development.* Dover Publications, INC, Mineola, New York, 1954.

[4] Lamas, M. I.; Rodríguez, C. G.; Rodríguez, J. D. *.ºptimization of the efficiency of a biomimetic marine propulsor using CFDÏngeniería e Investigación.* Vol. 34, no. 1, pp. 17 – 21, 2014.

[5] S. Børve, M. Omang and J. Trulsen. *Regularized smoothed particle hydrodynamics with improved multi-resolution handling.* Journal of Computational Physics, 208: 345 - 367, 2005.

[6] J.J. Monaghan.*Smoothed particle hydrodynamic.* 1992.30.

[7] J.J. Monaghan.*SPH without a tensile instability.* Journal of Computational Physics, 159: 290 - 311, 2000..

[8] S. Jahangiri Mamouri, R. Fatehi and M. T. Manzari.*A consistent incompressible SPH method for internal flows with fixed and moving boundaries.* 6 December 2015.

[9] S. Børve, M. Omang and J. Trulsen. Regularized.*smoothed particle hydrodynamics with improved multi-resolution handling.* Journal of Computational Physics, 208: 345 - 367, 2005.

[10] J. Fang and A. Parriaux.*A regularized Lagrangian finite point method for the simulation of incompressible viscous flows.* Journal of Computational Physics, 227: 8894 - 8908, 2008.

[11] X. Y. Hu and N. A. Adams.*An incompressible multi-phase SPH method.* Journal of Computational Physics, 227: 264 - 278, 2007.

[12] [32]U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T.Shin.*High-Re solutions for incompress- ible flow using the Navier-Stokes equations and multigrid method.* Journal of Computational Physics, 48: 387. - 411, 1982.

[13] Lamas, M. I.; Rodríguez, C. G.; Rodríguez, J. D.*Optimization of the efficiency of a biomimetic marine propulsor using CFDÏngeniería e Investigación.* Vol. 34, no. 1, pp. 17 – 21, 2014.

[14] J. Fang and A. Parriaux.*A regularized Lagrangian finite point method for the simulation of incompressible viscous flows.* Journal of Computational Physics, 227: 8894 - 8908, 2008.

[15] X. Y. Hu and N. A. Adams.*An incompressible multi-phase SPH method.* Journal of Computational Physics, 227: 264 - 278, 2007.

[16] Lee ES, Moulinec C, Xu R, Violeau D, Laurence D, Stansby P.*Comparisons of weakly compressible and truly incompressible algorithms for the SPH mesh free particle method.* Journal of Computational Physics 2008; 227(10): 8417–8436.

[17] Cummins SJ, Rudman M.*An SPH Projection Method.* Journal of Computational Physics 1999; 152(2):584–607.

[18] S. Jahangiri Mamouri, R. Fatehi and M. T. Manzari.*A consistent incompressible SPH method for internal flows with fixed and moving boundaries.* International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2016; 81:589–610.

[19] Barnes and Hut.*Hierarchical Tree Method.* Nature 324, 446, 1986.

[20] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin.*High-Re solutions for incompress- ible flow using the Navier-Stokes equations and multigrid method.* Journal of Computational Physics, 48: 387 - 411, 1982.

[21] D. Arumuga Perumal A. K. Dass.*Simulation of flow in two-sided lid-driven square cavities by the lattice Boltzmann method.* Indian Institute of Technology Guwahati, Guwahati 781039, India.

[22] George V.LauderEric D.Tytell.*Hydrodynamics of Undulatory Propulsion.*

[23] O.C. Zienkiewicz, CBE, FRS, FREng.*The Finite Element Method.* Department of Civil and Environmental Engineering University of California at Berkeley Berkeley, California.

[24] Liu y Quek.*The Finite Element Method.* Department of Mechanical Engineering, National University of Singapore 2003.

[25] Bonet, J. and Lok T.-S.L.*Variational and Momentum Preservation Aspects of Smoothed Particle Hydrodynamic Formulations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 180, 97-115.

[26] Lucy, Gingold Monaghan. *Theory and application to non-spherical stars.* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 181, Nov. 1977, p. 375-389.

[27] Morris and Dalrymple.*Numerical modeling of water waves with the SPH method.* Department of Civil Engineering, Johns Hopkins University, 3400 N Charles Street, Baltimore, MD 21218, USA.

[28] Lo y Shao.*Simulation of near-shore solitary wave mechanics by an incompressible SPH method.* Division of Environmental and Water Resources Engineering, School of Civil and Environmental Engineering, Nanyang Technological University, Singapore, Singapore 639798.

[29] Batchelor, G. K.*Introduction to fluid dynamics.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K., 1974.

[30] Colagrossi, A., Landrini, M., 2003.*Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle Hydrodynamics.* Journal of Computational Physics 191, pp. 448-475.

[31] Gómez-Gesteira, Dalrymple y Crespo.*State-of-the-art of classical SPH for free-surface flows.* Journal of Hydraulic Research Vol. 48 Extra Issue (2010), pp. 6–27.

[32] Shuling Hou and Qisu Zou.*Simulation of Cavity Flow Using Lattice Boltzmann Method.* Center for Nonlinear Studies and Theoretical Division , Los Alamos National Laboratory, Los Alamos.

[33] Liu and Liu, 2003, Liu, G. R. and Liu, M. B. (2003).*Smoothed Particle Hydrodynamics: a meshfree particle method.* World Scientific.

[34] Libersky and Petscheck.*Libersky, L. D. and Petscheck, A. G. (1991). Smoothed Particle Hydrodynamics with strength of materials. In Trease, H, F. J. and Crowley, W. S.-V., editors, Proceedings of the Next Free Lagrange Conference.* volume 395, pages 248–257, 1991.

[35] Dalrymple and Knio.*SPH Modelling of Water Waves. Proc. Coastal Dynamics, Lund.* pages 779–787.

[36] Peskin.*Numerical analysis of blood flow in the heart.* Journal Computational Physics, 25:220– 252.

[37] Rui Xu *An Improved Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics Method and Its Application in Free-Surface Simulations* University of Manchester, School of Mechanical, Aerospace and Civil Engineering, 2009.