INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

Ramón Cervantes Beltrán ★

Víctor Porras Silva ★

JUNIO 1982

★ Profesores - investigadores de las Secciones de Estructuras y Mecánica de Suelos, de la División de Estudios de Posgrado.

BIBLIOTECA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO
PFI

1.	INTRODUCCION	1
1.1	*Generalidades*	1
1.2	*Ecuaciones de equilibrio de la elastodinámica*	2
1.2.1	Principio de la conservación de la cantidad de movimiento en su forma local o primeras ecuaciones de Cauchy del movimiento	3
1.2.2	Tensor de deformaciones	6
1.2.3	Ecuaciones constitutivas	7
1.2.4	Ecuaciones de campo	11
1.3	*Ecuaciones de equilibrio para varias geometrías*	13
1.3.1	Estados planos	13
1.3.1.1	Estado plano de deformaciones	14
1.3.1.2	Estado plano de esfuerzos	16
1.3.1.3	Relación entre los estados planos	18
1.3.2	Sólidos axisimétricos o de revolución	19
1.3.2.1	Tensor de deformaciones	19
1.3.2.2	Ecuaciones constitutivas	20
1.3.2.3	Ecuaciones de Cauchy del movimiento	20
1.3.2.4	Ecuaciones de campo	21
1.3.2.5	Representación de las cargas arbitrarias mediante series de Fourier	22
1.3.2.6	Sólidos axisimétricos con carga axial	22
1.3.3	Otras geometrías	25
1.4	*Métodos aproximados para la solución de las ecuaciones de equilibrio*	25
1.4.1	Métodos de las funciones de prueba	26
1.4.2	Métodos de los residuos pesados	26
1.4.3	Métodos de Galerkin	27
1.4.4	Métodos variacionales	27

CIB 2168

1.4.5	Método de Rayleigh	28
2.	ELEMENTOS FINITOS DE UN MEDIO CONTINUO. ENFOQUE DE DESPLAZAMIENTOS	29
2.1	*Modelo discreto tipo*	29
2.2	*Principio del trabajo virtual en la teoría de la elasticidad lineal*	31
2.3	*Ecuación de equilibrio de los elementos finitos*	32
2.3.1	Definición de la geometría	32
2.3.2	Aproximación de la solución	32
2.3.3	Componentes del tensor de deformaciones	35
2.3.4	Ecuación constitutiva	36
2.3.5	Equilibrio dinámico	37
2.3.6	Equilibrio estático	40
2.3.7	Propiedades de las matrices de rigideces y de masas	40
2.3.8	Matriz de masas concentradas (diagonal)	41
2.4	*Ecuación de equilibrio del medio continuo global*	42
2.4.1	Ensamble de las ecuaciones	43
2.4.2	Condiciones de frontera	45
2.4.3	Matriz de amortiguamiento	46
2.4.4	Condiciones iniciales	47
2.4.5	Equilibrio estático	47
2.4.6	Solución de las ecuaciones de equilibrio	47
3.	FUNCIONES DE INTERPOLACION DE ELEMENTOS FINITOS	49
3.1	*Generalidades*	49
3.2	*Elementos unidimensionales*	51
3.2.1	Elementos convencionales	51
3.2.1.1	Interpolación lineal	51

3.2.1.2	Interpolación lineal normalizada	52
3.2.1.3	Interpolación cuadrática	54
3.2.1.4	Interpolación cuadrática normalizada	55
3.2.1.5	Interpolación en coordenadas naturales	56
3.2.2	Elementos con polinomios de Lagrange	57
3.2.2.1	Interpolación lineal	58
3.2.2.2	Interpolación cuadrática	58
3.2.3	Elementos con polinomios de Hermite	60
3.3	*Elementos bidimensionales*	61
3.3.1	Elemento triangular lineal en coordenadas cartesianas	62
3.3.2	Elementos triangulares en coordenadas naturales	63
3.3.2.1	Interpolación lineal	64
3.3.2.2	Interpolación cuadrática	64
3.3.2.3	Interpolación cúbica	65
3.3.3	Referencias para elementos rectangulares	66
3.3.4	Familia lagrangiana para elementos rectangulares	66
3.3.5	Familia Serendipity para elementos rectangulares	67
3.3.5.1	Interpolación lineal	67
3.3.5.2	Interpolación cuadrática	67
3.3.5.3	Interpolación cúbica	68
3.4	*Elementos tridimensionales*	68
3.4.1	Elemento tetraedro lineal en coordenadas cartesianas	69
3.4.2	Elementos tetraedros en coordenadas naturales	72
3.4.2.1	Interpolación lineal	73
3.4.2.2	Interpolación cuadrática	73
3.4.2.3	Interpolación cúbica	73
3.4.3	Familia lagrangiana para prismas rectangulares	74

3.4.4	Familia Serendipity para prismas rectangulares	75
3.4.4.1	Interpolación lineal	75
3.4.4.2	Interpolación cuadrática	75
3.4.4.3	Interpolación cúbica	76
3.4.5	Elementos anillos axisimétricos	76
3.5	*Elementos isoparamétricos*	76
3.5.1	Transformación de coordenadas mediante funciones de forma	77
3.5.2	Derivadas de las funciones de forma	80
3.5.3	Integración en coordenadas locales	82
3.5.3.1	Integración numérica para rectángulos y prismas rectangulares	83
3.5.3.2	Integración numérica para triángulos y tetraedros	83
4.	ASPECTOS NUMERICOS DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO FINITO	86
4.1	*Solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales*	87
4.1.1	Métodos directos generales	87
4.1.1.1	Método de Gauss	88
4.1.1.2	Método de Crout	88
4.1.2	Métodos directos para matrices simétricas	88
4.1.2.1	Método de Gauss modificado	89
4.1.2.2	Método de Crout modificado	90
4.1.2.3	Método de Cholesky	92
4.1.2.4	Selección y organización del método de solución	92
4.1.3	Organización de las ecuaciones de equilibrio	93
4.1.3.1	Arreglos cuadrados	94
4.1.3.2	Arreglos rectangulares (en banda)	94
4.1.4	Arreglos unidimensionales (en silueta)	95

4.2 .	*Solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden*	96
4.2.1	Introducción	96
4.2.2	Método beta de Newmark	99
4.3	*Esquema simple para organizar un programa de computadora*	101
5.	DESARROLLO PASO A PASO DE UN EJEMPLO DE APLICACION DEL ELEMENTO FINITO	104
5.1	*Formulación del problema*	104
5.2	*Elemento finito seleccionado*	104
5.3	*Componentes del elemento finito tipo*	105
5.3.1	Vector de desplazamientos nodales del elemento, $\underline{u}^e$	105
5.3.2	Funciones de forma, $N_m(\xi,\eta)$, en coordenadas locales	105
5.3.3	Relación entre los sistemas de referencia global (x,y) y local (ξ,η)	106
5.3.4	Aproximación de los desplazamientos	106
5.3.5	Tensor de deformaciones	107
5.3.6	Derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas globales	107
5.3.7	Derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas locales	109
5.3.8	Derivadas de las coordenadas globales respecto a las coordenadas locales	110
5.3.9	Matriz de masas	110
5.3.10	Integración numérica de la matriz de masas	112
5.3.11	Matriz de rigideces	113
5.3.12	Vector de cargas	115
5.4	*Ordenamiento de las ecuaciones de equilibrio de la estructura*	117
5.5	*Matriz de rigideces del elemento finito número uno*	121
5.5.1	Matriz de rigideces para el primer punto de integración numérica	121

5.5.1.1	Funciones de forma	122
5.5.1.2	Derivadas de las funciones de forma respecto a sus coordenadas locales	122
5.5.1.3	Derivadas de las coordenadas globales respecto a las coordenadas locales	123
5.5.1.4	Jacobiano de la transformación	123
5.5.1.5	Derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas globales	123
5.5.1.6	Matriz de deformaciones	124
5.5.1.7	Matriz de rigideces	124
5.5.2	Matrices de rigideces para los restantes puntos de integración numérica	125
5.5.3	Matriz de rigideces del elemento	125
5.6	*Matriz de masas del elemento finito número uno*	125
5.7	*Vector de fuerzas de cuerpo del elemento finito número uno*	130
5.8	*Matrices de esfuerzos para algunos puntos del elemento finito número uno*	132
5.9	*Ecuaciones de equilibrio de los elementos finitos restantes*	135
5.10	*Ecuaciones de equilibrio de la estructura*	135
5.10.1	Ensamble de la matriz de rigideces	136
5.10.2	Ensamble de la matriz de masas	137
5.10.3	Ensamble del vector de cargas	137
5.11	*Obtención de los elementos cinemáticos de la estructura*	140
5.12	*Obtención de los elementos mecánicos de la estructura*	143
5.13	*Aproximación de la solución*	143
6.	BIBLIOGRAFIA	146
7.	TABLAS	149
8.	FIGURAS	158

1 INTRODUCCION

1.1 Generalidades

El método del elemento finito es un método aproximado para resolver ecuaciones diferenciales de problemas de valores en la frontera o de valores en la frontera e iniciales, que se presentan en ingeniería y en la física matemática. Esquemáticamente, la secuencia del método del elemento finito se puede resumir en los pasos siguientes:

1) El medio continuo (dominio de las variables de las ecuaciones diferenciales) se divide en varias regiones, denominados elementos finitos, de formas convenientes (líneas, triángulos, cuadriláteros, tetraedros, hexaedros, etc.).

2) Mediante una selección apropiada de ciertos puntos de los elementos finitos, denominados puntos nodales, las variables de la ecuación diferencial se aproximan mediante una combinación lineal de funciones de interpola-

·ción (conocidas), seleccionadas adecuadamente, y de los valores (desconocidos) de las variables, y en algunos casos de sus derivadas, especificados en los puntos nodales.

3) Mediante el uso de los métodos variacionales o de los residuos pesados las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema, se transforman en ecuaciones del elemento finito que gobiernan, en forma aislada, a todos los elementos finitos.

4) Los elementos finitos aislados se agrupan para formar un sistema global de ecuaciones diferenciales (en el problema de valores en la frontera e iniciales) o de ecuaciones algebraicas (en el problema de valores en la frontera), con sus propias condiciones de frontera o condiciones iniciales.

5) Los valores de las variables de las ecuaciones diferenciales quedan definidos al resolver los sistemas de ecuaciones correspondientes.

El objetivo de este curso consiste en discutir, brevemente, los fundamentos del método del elemento finito y sus aplicaciones a la ingeniería estructural. Básicamente, se utilizan las ecuaciones de equilibrio de la teoría de la elasticidad lineal.

1.2 Ecuaciones de equilibrio de la elastodinámica

Para poder estudiar el comportamiento de las estructuras es necesario establecer su modelación, ya sea experimental o matemática. La modelación que forma parte de este tema es la matemática y consiste en expresar, en un lenguaje formal o matemático, las leyes que gobiernan el comportamiento.

Toda estructura queda definida por los conceptos siguientes:

1) Geometría

2) Material

3) Cargas

Las leyes que gobiernan los conceptos anteriores son las leyes de la mecánica, y en especial las correspondientes a la mecánica del medio continuo. Las estructuras que se estudian en este tema son las que se construyen con un material sólido, elástico, lineal e isótropo. Las leyes que gobiernan a tales estructuras forman la base de la teoría de la elasticidad lineal y las ecuaciones correspondientes a cualquier punto de la estructura, asociadas a un sistema de referencia cartesiano (x_i ó x, y, z de la Fig 1.1), resultan ser:

1.2.1 Principio de la conservación de la cantidad de movimiento en su forma local o primeras ecuaciones de Cauchy del movimiento

a) En notación indicial

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho a_i \qquad (1.2.1)$$

donde:

σ_{ij} son los componentes del tensor de esfuerzos de Cauchy, simétrico, que en forma matricial se puede expresar como:

$$\left(\sigma_{ij}\right) = \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \underline{\sigma}\,(x_i, t) \qquad (1.2.2)$$

f_i son los componentes del vector fuerzas de cuerpo por unidad de masa cuya expresión es:

$$\left(f_i \right) = \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \underline{f}\,(x_i, t) \tag{1.2.3}$$

a_i son los componentes del vector aceleración indicados como:

$$\left(a_i \right) = \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \underline{a}\,(x_i, t) \tag{1.2.4}$$

El vector aceleración se puede expresar en función del vector de velocidades $\underline{v}$, del vector de posición $\underline{p}$ ($\underline{p} = x_i\ \underline{i}_i$) y del vector de desplazamientos, $\underline{u}$, como se indica a continuación

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2\underline{p}}{dt^2} = \frac{d^2\underline{u}}{dt^2} \tag{1.2.5}$$

que en forma de sus componentes resulta ser

$$\underline{a} = \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \ , \ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \ , \ \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right)^T \tag{1.2.6}$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \underline{u}\,(x_i, t) \tag{1.2.7}$$

$\rho = \rho\ (x_i, t)$ es la densidad de masa por unidad de volumen.

La letra T de la ec 1.2.6 indica transpuesta, ya que el vector $\underline{a}$ se escribe como un vector renglón.

b) En notación tradicional, las primeras ecuaciones de Cauchy del movimiento resultan ser:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho\, f_x = \rho\, a_x \qquad (1.2.8)1$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho\, f_y = \rho\, a_y \qquad (1.2.8)2$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho\, f_z = \rho\, a_z \qquad (1.2.8)3$$

donde los elementos del tensor $\underline{\sigma}$ y los vectores $\underline{f}$ y $\underline{a}$ resultan ser:

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \underline{\sigma}\ (x,y,z,t) \qquad (1.2.9)$$

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \underline{f}\ (x,y,z,t) \qquad (1.2.10)$$

$$\underline{a} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ , \ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \ , \ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)^T = \underline{a}\ (x,y,z,t) \qquad (1.2.11)$$

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \underline{u}\,(x,y,z,t) \qquad (1.2.12)$$

1.2.2 Tensor de deformaciones

La métrica utilizada para medir el cambio geométrico del cuerpo resulta ser:

a) en notación indicial

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2}\,(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \qquad (1.2.13)$$

donde:

e_{ij} son los componentes del tensor de deformaciones, simétrico, que en forma matricial se indica como:

$$\left[e_{ij}\right] = \underline{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} = \underline{e}\,(x_i,t) \qquad (1.2.14)$$

En la primera forma de la ec 1.2.13 se utiliza la convención de derivadas parciales mediante una coma.

b) en notación tradicional

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (1.2.15)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1.2.16)$$

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.2.17}$$

$$\gamma_{xy} = 2e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.2.18}$$

$$\gamma_{yz} = 2e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{1.2.19}$$

$$\gamma_{zx} = 2e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.2.20}$$

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} = \underline{e}\,(x,y,z,t) \tag{1.2.21}$$

1.2.3 Ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones constitutivas del material sólido, elástico, lineal e isótropo están dadas por las ecuaciones de Hooke-Cauchy, conocida también como la Ley de Hooke generalizada.

a) en notación indicial

$$\sigma_{k\ell} = \lambda\, e_{mm}\, \delta_{k\ell} + 2\mu\, e_{k\ell} \tag{1.2.22}$$

o bien

$$e_{k\ell} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\, \sigma_{mm}\, \delta_{k\ell} + \frac{1}{2\mu}\, \sigma_{k\ell} \tag{1.2.23}$$

donde:

λ y μ son las constantes elásticas de Lamé y $\delta_{k\ell}$ es la delta de Kronecker.

Las constantes de Lamé están relacionadas con las constantes de laboratorio, denominadas módulos de Young o de elasticidad E y relación de Poisson ν, mediante las expresiones siguientes:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{1.2.24}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.2.25}$$

donde a

G se le conoce con el nombre de módulo de rigidez al cortante.

Con base en las ecs 1.2.24 y 1.2.25, las ecs 1.2.22 y 1.2.23 se pueden escribir como:

$$\sigma_{k\ell} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-2\nu)\, e_{k\ell} + \nu e_{mm}\, \delta_{k\ell} \right] \tag{1.2.26}$$

$$e_{k\ell} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu)\, \sigma_{k\ell} - \nu\, \sigma_{mm}\, \delta_{k\ell} \right] \tag{1.2.27}$$

b) en notación tradicional

Las ecs 1.2.26 y 1.2.27 se pueden escribir como

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\, e_{xx} + \nu\, (e_{yy}+e_{zz}) \right] \tag{1.2.28}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\, e_{yy} + \nu\, (e_{zz}+e_{xx}) \right] \tag{1.2.29}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\, e_{zz} + \nu\, (e_{xx}+e_{yy}) \right] \qquad (1.2.30)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\, \gamma_{xy} = G\, \gamma_{xy} \qquad (1.2.31)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\, \gamma_{yz} = G\, \gamma_{yz} \qquad (1.2.32)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\, \gamma_{zx} = G\, \gamma_{zx} \qquad (1.2.33)$$

$$e_{xx} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu\, (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] \qquad (1.2.34)$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - \nu\, (\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) \right] \qquad (1.2.35)$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{zz} - \nu\, (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] \qquad (1.2.36)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\, \sigma_{xy} = \frac{1}{G}\, \sigma_{xy} \qquad (1.2.37)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\, \sigma_{yz} = \frac{1}{G}\, \sigma_{yz} \qquad (1.2.38)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E}\, \sigma_{zx} = \frac{1}{G}\, \sigma_{zx} \qquad (1.2.39)$$

Las ecs 1.2.28 a 1.2.33 se pueden agrupar en forma matricial, según se indica a continuación:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{1.2.40}$$

que en forma simbólica se puede escribir como

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\,\underline{e} \tag{1.2.41}$$

donde:

$\underline{\sigma}$ y $\underline{e}$ son los vectores de esfuerzos y de deformaciones, respectivamente, y

$\underline{D}$ es la matriz de coeficientes elásticos, cuyas expresiones son:

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{1.2.42}$$

$$\underline{e} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{1.2.43}$$

$$\underline{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{pmatrix} \qquad (1.2.44)$$

También las ecs 1.2.34 a 1.2.39, al agruparse en forma matricial, se pueden escribir de la siguiente forma

$$\underline{e} = \underline{D}^{-1}\ \underline{\sigma} \qquad (1.2.45)$$

$$\underline{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \qquad (1.2.46)$$

1.2.4 Ecuaciones de campo

Las ecuaciones de campo son las ecuaciones de movimiento o equilibrio dinámico (ecs 1.2.1 ó 1.2.8) expresadas en función de los componentes del vector desplazamiento. Se les conocen también con el nombre de ecuaciones de campo de Navier y son:

a) en notación indicial

Estas ecuaciones se obtienen al sustituir las ecs 1.2.13 en las ecs 1.2.22 y el resultado obtenido se sustituye en la ec 1.2.1; y resulta:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_\ell^2} + \rho f_k = \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \qquad (1.2.47)$$

b) en notación vectorial

Con base en la definición del operador gradiente $\underline{\nabla}$, las ecs 1.2.47 se pueden escribir como:

$$(\lambda+2\mu)\,\underline{\nabla}\,(\underline{\nabla}\cdot\underline{u}) - \mu\,\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\times\underline{u} + \rho\underline{f} = \rho\ddot{\underline{u}} \qquad (1.2.48)$$

donde:

$\underline{\nabla}$, el operador gradiente, queda definido por

$$\underline{\nabla} = \underline{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (1.2.49)$$

c) en notación tradicional

En este caso, las ecuaciones de campo se pueden escribir directamente al interpretar las ecs 1.2.47 o las ecs 1.2.48. También se pueden obtener al sustituir las ecs 1.2.15 a 1.2.20 en las ecs 1.2.28 a 1.2.33; y el resultado obtenido se sustituye en las ecs 1.2.8. Las ecuaciones resultantes se indican a continuación:

$$G\left[\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] + \rho f_x = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1.2.50a)$$

$$G\left[\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] + \rho f_y = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (1.2.50b)$$

$$G\left[\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] + \rho f_z = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (1.2.50c)$$

donde:

∇^2 es el operador de Laplace definido con

$$\nabla^2 = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (1.2.51)$$

1.3 Ecuaciones de equilibrio para varias geometrías

Las ecuaciones de equilibrio (ecs 1.2.47 ó 1.2.48 ó 1.2.50) son válidas para cualquier punto de cualquier estructura de forma arbitraria, pero construídas con un material sólido, elástico, lineal e isótropo (estructuras modeladas con la teoría de la elasticidad lineal). De acuerdo con lo indicado en el inciso 1.2, la geometría de la estructura influye sensiblemente en la forma final de las ecuaciones de equilibrio. En este inciso, se bosquejan los modelos estructurales de la elasticidad lineal para varias geometrías adicionales a la geometría arbitraria (tridimensional), que se indicó en el inciso anterior.

1.3.1 Estados planos

En este modelo estructural, la geometría se puede considerar en un plano y el problema matemático es bidimensional.

1.3.1.1 Estado plano de deformaciones

En la Fig 1.2 se muestran algunas estructuras que poseen las siguientes características:

a) la geometría corresponde a un cuerpo alargado y prismático, de tal manera que para definirla basta especificar la sección correspondiente a un plano perpendicular al eje

b) las cargas que actúan a lo largo del eje son tales que basta con definirlas, también, en un plano perpendicular al eje.

De acuerdo con las características anteriores, la estructura queda definida en un plano (Fig 1.3) de espesor unitario; todas las variables que aparecen en las ecuaciones de equilibrio son independientes de la variable z (a lo largo del eje), y el desplazamiento, w, en tal dirección es nulo, es decir:

$$u = u\,(x,y,t) \tag{1.3.1}$$

$$v = v\,(x,y,t) \tag{1.3.2}$$

$$w = 0 \tag{1.3.3}$$

A continuación se describe el efecto de las ecs 1.3.1 a 1.3.3 en las ecuaciones de equilibrio de la estructura.

a) tensor de deformaciones

Al sustituir las ecs 1.3.1 a 1.3.3 en las ecs 1.2.15 a 1.2.20 se obtiene

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.3.4}$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.3.5}$$

$$\gamma_{xy} = 2\, e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1.3.6)$$

$$e_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \qquad (1.3.7)$$

b) ecuaciones constitutivas

Al sustituir las ecs 1.3.4 a 1.3.7 en las ecs 1.2.28 a 1.2.33, y al ordenar el resultado en forma matricial se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (1.3.8)$$

$$\sigma_{zz} = \nu\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \qquad (1.3.9)$$

La ec 1.3.8 se puede escribir en forma simbólica como:

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\,\underline{e} \qquad (1.3.10)$$

donde:

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (1.3.11) \qquad \underline{e} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (1.3.12)$$

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{pmatrix} \tag{1.3.13}$$

c) ecuaciones de Cauchy del movimiento

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.3.14}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.3.15}$$

d) ecuaciones de campo

Al sustituir las ecs 1.3.4 a 1.3.7 en la ec 1.3.8 y el resultado en las ecs 1.3.14 y 1.3.15, se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{1-2\nu} G \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.3.16}$$

$$G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{1-2\nu} G \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \rho f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.3.17}$$

1.3.1.2 Estado plano de esfuerzos

Si las estructuras descritas en el estado plano de deformaciones, en vez de ser alargadas, son extraordinariamente delgadas (Fig 1.4), se puede aseverar que los componentes del tensor esfuerzo, asociados a la dirección del espesor, son nulos; es decir:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \tag{1.3.18}$$

Al sustituir las ecs 1.3.18 en las ecs 1.2.34 a 1.2.39, y reordenarlas, se obtiene:

$$e_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\, \sigma_{yy} \right) \tag{1.3.19}$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\, \sigma_{xx} \right) \tag{1.3.20}$$

$$\gamma_{xy} = 2\, e_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\, \sigma_{xy} \tag{1.3.21}$$

$$e_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}\,(e_{xx} + e_{yy}) \tag{1.3.22}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \tag{1.3.23}$$

A continuación, se resumen las ecuaciones de equilibrio para los estados planos de esfuerzo.

a) tensor de deformaciones

Queda igual que las deformaciones planas (ecs 1.3.4 a 1.3.7), excepto que existe la deformación e_{zz} dada por la ec 1.3.22

b) ecuaciones constitutivas

Al poner en forma matricial las ecs 1.3.19 a 1.3.21 se transforman en

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \tag{1.3.24}$$

La ec 1.3.24, en forma simbólica, se puede escribir como se indica en la ec 1.3.10; donde los vectores $\underline{\sigma}$ y $\underline{e}$ están dados por las ecs 1.3.11 y 1.3.12 y la matriz $\underline{D}$ se indica a continuación:

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{pmatrix} \qquad (1.3.25)$$

c) ecuaciones de Cauchy del movimiento

Quedan iguales a las de las deformaciones planas.

d) ecuaciones de campo

$$G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} G \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1.3.26)$$

$$G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} G \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \rho f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (1.3.27)$$

1.3.1.3 Relación entre los estados planos

Se puede demostrar fácilmente que la ec 1.3.24 se transforma en la ec 1.3.13 si se efectúa la sustitución indicada a continuación

$$E = \frac{E}{1-\nu^2} \qquad (1.3.28)$$

$$\nu = \frac{\nu}{1-\nu} \qquad (1.3.29)$$

Por tanto, se puede concluir que si se tiene resuelto el modelo matemático correspondiente al estado plano de esfuerzos, se puede tener también el corres

pondiente al estado plano de deformaciones, si el espesor se hace unitario y se efectúa la transformación indicada por las ecs 1.3.28 y 1.3.29.

1.3.2 Sólidos axisimétricos o de revolución

Existen estructuras cuya geometría queda definida mediante un cuerpo de revolución por lo que existe simetría geométrica respecto al eje de revolución. Si también existe simetría del material respecto al mismo eje de la simetría geométrica, entonces el sólido es axisimétrico y las variables de la teoría de la elasticidad para tales cuerpos conviene expresarlas en un sistema de referencia cilíndrico, como el que se muestra en la Fig 1.5.

1.3.2.1 Tensor de deformaciones

Los componentes del tensor de deformaciones se muestran en la Fig 1.6 y en relación con el vector de desplazamientos, sus expresiones se indican a continuación:

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \tag{1.3.30}$$

$$e_{zz} = \frac{\partial v}{\partial z} \tag{1.3.31}$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \tag{1.3.32}$$

$$\gamma_{rz} = 2\, e_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \tag{1.3.33}$$

$$\gamma_{r\theta} = 2\, e_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \tag{1.3.34}$$

$$\gamma_{z\theta} = 2\, e_{z\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.3.35}$$

donde:

$u = u(r,z,\theta)$, $v = v(r,z,\theta)$ y $w=w(r,z,\theta)$ son los componentes del vector desplazamiento, $\underline{u}$, en la dirección radial, r, axial, z, y tangencial, θ, respectivamente.

1.3.2.2 Ecuaciones constitutivas

Los componentes del tensor esfuerzo asociado al sistema de referencia se muestran en la Fig 1.6. La ecuación constitutiva está dada por la ec 1.2.41 en donde los vectores de esfuerzo y de deformaciones se indican a continuación:

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{z\theta} \end{pmatrix} \qquad (1.3.36) \qquad \underline{e} = \begin{pmatrix} e_{rr} \\ e_{zz} \\ e_{\theta\theta} \\ e_{rz} \\ e_{r\theta} \\ e_{z\theta} \end{pmatrix} \qquad (1.3.37)$$

1.3.2.3 Ecuaciones de Cauchy del movimiento

Las ecuaciones de Cauchy para la referencia cilíndrica resultan ser:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho f_r = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1.3.38)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (1.3.39)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + \rho f_{\theta} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (1.3.40)$$

1.3.2.4 Ecuaciones de campo

Al sustituir las ecs 1.3.30 a 1.3.35 en la ecuación constitutiva, de forma similar a la ec 1.2.41, el resultado se sustituye en las ecs 1.3.38 a 1.3.40, y se obtienen las ecuaciones de campo indicadas a continuación

$$G\left\{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}(\text{div } \underline{u}) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\right]\right\}$$

$$+ \rho f_r = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1.3.41)$$

$$G\left\{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}(\text{div } \underline{u}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r}\right)\right]\right\}$$

$$+ \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (1.3.42)$$

$$G\left\{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\text{div } \underline{u}) + \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rw) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}$$

$$+ \rho f_{\theta} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (1.3.43)$$

$$\text{div } \underline{u} = e_{rr} + e_{zz} + e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \qquad (1.3.44)$$

1.3.2.5 Representación de las cargas arbitrarias mediante series de Fourier

Al descomponer las cargas actuantes sobre el sólido axisimétrico, mediante series de Fourier, respecto a la variable tangencial, θ, el problema tridimensional se transforma en varios problemas bidimensionales en las variables radial, r, y axial, z. El número de problemas bidimensionales corresponde al número de elementos utilizados en la serie de Fourier.

1.3.2.6 Sólidos axisimétricos con carga axial

Para cargas actuantes con simetría axial, únicamente, existe un término de la serie de Fourier, y los componentes del vector desplazamiento resultan ser

$$u = u(r,z) \tag{1.3.45}$$

$$v = v(r,z) \tag{1.3.46}$$

$$w = 0 \tag{1.3.47}$$

La influencia de las ecs 1.3.45 a 1.3.47 en las ecuaciones de equilibrio para estas estructuras se resume a continuación:

Al sustituir las ecs 1.3.45 a 1.3.47 en las ecs 1.3.30 a 1.3.35, se obtienen las expresiones siguientes:

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \tag{1.3.48}$$

$$e_{zz} = \frac{\partial v}{\partial z} \tag{1.3.49}$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} u \tag{1.3.50}$$

$$\gamma_r = 2e_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \qquad (1.3.51)$$

$$\gamma_r = \gamma_{z\theta} = 0 \qquad (1.3.52)$$

b) ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones constitutivas (ec 1.2.40) se reducen a la expresión siguiente

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{rr} \\ e_{zz} \\ e_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} \qquad (1.3.53)$$

en donde los elementos de la ecuación constitutiva escrita en forma simbólica (ec 1.2.41) resultan ser

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} \qquad (1.3.54) \qquad \underline{e} = \begin{bmatrix} e_{rr} \\ e_{zz} \\ e_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} \qquad (1.3.55)$$

$$\underline{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \tag{1.3.56}$$

c) ecuaciones de Cauchy

Las dos ecuaciones de Cauchy del movimiento que resultan se indican a continuación:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho f_r = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.3.57}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.3.58}$$

d) ecuaciones de campo

Al sustituir las ecs 1.3.45 a 1.3.47 en las ecs 1.3.41 a 1.3.44 se obtienen las expresiones siguientes:

$$G\left\{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}(\text{div } \underline{u}) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r}\right)\right\} + \rho f_r = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.3.59}$$

$$G\left\{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}(\text{div } \underline{u}) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r}\right)\right]\right\} + \rho f_z = \rho \frac{\partial v}{\partial t^2} \tag{1.3.60}$$

$$\text{div } \underline{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial v}{\partial z} \qquad (1.3.61)$$

1.3.3 Otras geometrías

Existen varias geometrías que se utilizan para modelar las estructuras como son barras, placas y cascarones. La determinación de las ecuaciones de equilibrio resulta un poco más laboriosa que las geometrías discutidas, razón por la que no se indicará en este resumen.

1.4 Métodos aproximados para la solución de las ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio resumidas en los incisos anteriores se pueden escribir, en forma matricial, como se indica a continuación

$$\underline{A}\,\underline{u} = \underline{f} \qquad \text{en } \Omega \qquad (1.4.1)$$

$$\underline{B}\,\underline{u} = \underline{g} \qquad \text{en } \Gamma \qquad (1.4.2)$$

donde los componentes de las matrices $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son operadores diferenciales, los componentes del vector $\underline{u}$ son las funciones incógnitas del problema, y los componentes de los vectores $\underline{f}$ y $\underline{g}$ son funciones conocidas. La ec 1.4.1 representa el equilibrio en cualquier punto interior de la estructura (región Ω), y la ec 1.4.2 las correspondientes condiciones de frontera (región Γ).

Para fines de explicación, y por facilidad, las ecs 1.4.1 y 1.4.2, se consideran como ecuaciones escalares, es decir,

$$Au = f \qquad \text{en } \Omega \qquad (1.4.3)$$

$$Bu = g \qquad \text{en } \Gamma \qquad (1.4.4)$$

1.4.1 Métodos de las funciones de prueba

De los métodos aproximados existentes para resolver las ecs 1.4.1 y 1.4.2 (1.4.3 y 1.4.4), los que utilizan soluciones mediante funciones de prueba son los que, en el campo numérico, se aplican con gran éxito.

En estos métodos, la solución buscada, u, es aproximada mediante la prueba, $\tilde{u}$, de la siguiente forma:

$$\tilde{u} = \sum_{r=1}^{M} C_r \phi_r \tag{1.4.5}$$

donde ϕ_r son M funciones conocidas, linealmente independientes, que existen en la región $\Omega + \Gamma$; y los coeficientes C_r son parámetros desconocidos que se determinarán con algún criterio.

1.4.2 Métodos de los residuos pesados

Para explicar estos métodos, la ec 1.4.3 se escribe como se indica a continuación:

$$Au - f = 0 \tag{1.4.6}$$

Al sustituir en la ec 1.4.6 el valor aproximado de $u(\tilde{u})$, dado por la ec 1.4.5, se obtiene un error o residuo, ε, dado por

$$\varepsilon = A\tilde{u} - f \tag{1.4.7}$$

La selección de las funciones de pruebas, ϕ_r, de la ec 1.4.5, se hace de tal manera que satisfagan las condiciones de frontera (en Γ) mientras que los coeficientes, C_r, de la solución aproximada se cuantifican de tal manera que, el error, dado por la ec 1.4.7, sea mínimo o pequeño en algún contexto.

En forma generalizada, una función pesada de los residuos W $f(\varepsilon)$, es la que debe satisfacer el criterio de pequeñez, donde, W es la función de peso y $f(\varepsilon)$ es la función residual, tal que, $f(\varepsilon) = 0$, para $\varepsilon=0$. El criterio de pequeñez para todos los métodos de los residuos se puede expresar como:

$$\int_{\Omega} W\, f(\varepsilon)\, d\Omega = 0 \qquad (1.4.8)$$

La condición dada por la ec 1.4.8 para operadores lineales (que es el caso de la teoría de la elasticidad lineal) conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales para todos los métodos que actualmente se usan (subdominio, mínimos cuadrados, Galerkin, etc.)

1.4.3 Métodos de Galerkin

El método de Galerkin, conocido también como de Bubnov-Galerkin, consiste en hacer que el error, ε, sea ortogonal a las funciones de prueba, ϕ_r, en el dominio de la estructura (en Ω), es decir, que las funciones de peso sean las funciones de prueba, como se indica a continuación:

$$\int_{\Omega} \phi_r\, \varepsilon\, d\Omega = 0 \qquad (1.4.9)$$

1.4.4 Métodos variacionales

En estos métodos, se busca que la solución de la ec 1.4.3 proporcione un valor extremal a la funcional, $I(u)$, que es una integral de u y sus derivadas sobre el dominio de la estructura ($\Omega + \Gamma$).

Entonces, si se conoce la funcional, $I(u)$, los métodos variacionales se pueden establecer de la siguiente forma:

$$I(u) = \text{valor extremal} \tag{1.4.10}$$

$$B(u) = g \tag{1.4.11}$$

en donde la ec. 1.4.11 establece las condiciones de frontera esenciales o principales.

De acuerdo con las ecs 1.4.10 a 1.4.11, los métodos variacionales utilizan la solución aproximada dada por la ec 1.4.5 en donde las funciones de prueba, ϕ_r, satisfacen las condiciones de frontera esenciales (ec 1.4.11) y los coeficientes, C_r, se determinan de tal manera que se satisfaga la ec 1.4.10. En los métodos variacionales se puede utilizar, en vez de la funcional, una ecuación variacional. Se puede afirmar que si el operador (A) del sistema por resolver es lineal, simétrico, positivo definido, el valor estacionario es un mínimo absoluto.

1.4.5 Método de Rayleigh

De todos los métodos variacionales (diferencias finitas, Kantorovich, Trefftz, etc.) el que actualmente tiene mayores aplicaciones es el método de Rayleigh, también conocido en el nombre de Ritz o Rayleigh-Ritz.

Este método consiste en sustituir directamente la solución aproximada dada por la ec 1.4.5, en la funcional $I(\tilde{u})$ y aplicar la condición de extremo, en función de los parámetros C_r, como se indica a continuación:

$$\frac{\partial}{\partial C_r} I(\tilde{u}) = 0 \tag{1.4.12}$$

En caso de utilizarse la ecuación variacional, la ec. 1.4.5 se sustituye directamente en ella.

2. ELEMENTOS FINITOS DE UN MEDIO CONTINUO. ENFOQUE DE DESPLAZAMIENTOS

En la formulación del método del elemento finito los parámetros C_r, que aparecen en los métodos de las funciones de prueba (inciso 1.4.1), se pueden asociar a valores generalizados de la incógnita u (desplazamientos y sus derivadas) en los puntos nodales, o bien, a otros conceptos relacionados con tales valores (fuerzas o esfuerzos generalizados, o combinaciones entre desplazamientos y fuerzas generalizadas). En este resumen únicamente se consideran como incógnitas los valores generalizados de u, y recibe el nombre de enfoque de desplazamientos.

2.1 Modelo discreto tipo

En el análisis de las estructuras esqueletales (armaduras, marcos, etc.) se establecen las ecuaciones de equilibrio con base en las correspondientes ecuaciones de equilibrio de cada una de las barras que las forman. Lo mis-

mo sucede con otros sistemas, no necesariamente estructurales, en donde se puede efectuar una discretización *a priori*.

En los medios continuos, generalmente, es muy difícil asociarles, a primera vista, un modelo discreto para su representación racional y, por tanto, para establecer sus ecuaciones. La forma de realizarlo se indica a continuación, con ayuda de la Fig. 2.1:

a) el medio continuo se divide en un número finito de regiones, de formas apropiadas, mediante líneas o superficies. A estas regiones se les denomina elementos finitos (de forma triangular en la Fig 2.1)

b) los elementos finitos se supone que están interconectados en un número finito de puntos nodales, situados sobre las fronteras de los elementos (círculos pequeños en la Fig 2.1). Los desplazamientos de los puntos nodales son las incógnitas básicas del problema

c) se define, en forma única, el campo de desplazamientos en cualquier punto del elemento finito en función de los desplazamientos en los puntos nodales (interpolación)

d) con el campo de desplazamientos conocido se pueden definir, también en forma única, los campos de deformaciones (tensor de deformaciones), y de esfuerzos (tensor de esfuerzos) en función de los desplazamientos de los puntos nodales

e) se determina el sistema de fuerzas concentradas, en los puntos nodales, que equilibre los esfuerzos en las fronteras y cualquier fuerza concentrada o distribuida que actúe en los puntos del elemento. Estas fuerzas equilibrantes también resultan en función de los desplazamientos en los

puntos nodales, y su relación conduce al concepto de matriz de rigideces.

2.2 *Principio del trabajo virtual en la teoría de la elasticidad lineal*

Como se indicó en la solución aproximada de las ecuaciones de equilibrio con los métodos variacionales, se puede utilizar una ecuación variacional en vez de una funcional. En las ecuaciones de la elasticidad lineal, la ecuación variacional está dada por el principio del trabajo virtual, del cual se obtienen las ecuaciones de Cauchy del movimiento, y su expresión, en notación inicial, resulta ser:

$$\int_\Omega \sigma_{kl}\ \delta e_{kl}\ d\Omega + \int_\Omega \rho\ \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\ \delta u_k\ d\Omega = \oint_\Gamma \sigma_{(\underline{n})k}\ du_k\ d\Gamma$$

$$+ \int_\Omega \rho f_k\ \delta u_k\ d\Omega \qquad (2.2.1)$$

en donde, el símbolo, δ, indica la primera variación que opera sobre las cantidades que le preceden, $\sigma_{(\underline{n})k}$, son los componentes de las cargas que por unidad de superficie actúan sobre la frontera del cuerpo y los elementos restantes se definieron en el capítulo anterior.

En notación matricial, la ec 2.2.1 se puede escribir como:

$$\int_\Omega \delta\underline{e}^T\ \underline{\sigma} d\Omega + \int_\Omega \delta\underline{u}^T\ \rho\ \underline{\ddot{u}}\ d\Omega = \oint_\Gamma \delta\ \underline{u}^T\ \underline{\delta}_{(\underline{n})}\ d\Gamma$$

$$+ \int_\Omega \rho\delta\ \underline{u}^T\ \underline{f}\ d\Omega \qquad (2.2.2)$$

2.3 *Ecuación de equilibrio de los elementos finitos*

A fin de ejemplificar el procedimiento para establecer las ecuaciones de equilibrio del modelo discreto tipo de los medios continuos (elemento finito) se hace referencia a la Fig 2.1, que corresponde a un estado plano de esfuerzos.

2.3.1 Definición de la geometría

De acuerdo con el punto (a) del inciso 2.1, en la Fig 2.1 se muestra la región de la estructura, la división en regiones triangulares y la definición de los puntos nodales. Desde luego que la geometría de los elementos finitos no es única, ni tampoco la definición de los puntos nodales. En el capítulo 3 se presentan otras geometrías que se pueden utilizar en regiones bidimensionales.

2.3.2 Aproximación de la solución

La formulación del elemento finito, a diferencia de los métodos de las funciones de prueba tradicionales, aproxima la solución en cada una de las regiones correspondientes a los elementos finitos. Entonces, la aproximación en la región global de la estructura es seccionalmente continua. Desde luego que esta aproximación debe proporcionar desplazamientos compatibles en las fronteras con los elementos vecinos.

En la Fig 2.1 el elemento finito, e, representa a cualquier elemento en que se dividió la región. A él le corresponden los conceptos siguientes.

Los componentes del vector desplazamientos asociados a cualquier punto del elemento son dos; u= u(x,y,t) paralelo al eje x y v = v(x,y,t) paralelo al eje y. La representación vectorial resulta ser:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underline{u}\,(x, y, t) \qquad (2.3.1)$$

De acuerdo con el punto (b) del inciso 2.1, los puntos nodales del elemento finito se etiquetan con las letras i, j, m, que pueden representar a cualquier dígito entero con los que se numeran los puntos nodales de la estructura.

Entonces, los vectores de desplazamiento de los puntos nodales son:

$$\underline{u}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \underline{u}_i(t) \; ; \; \underline{u}_j = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \underline{u}_j(t) \; ; \; \underline{u}_m \begin{bmatrix} u_m \\ v_m \end{bmatrix} = \underline{u}_m(t) \qquad (2.3.2)$$

Con las ecs 2.3.2 se puede formar un solo vector denominado vector de desplazamientos nodales del elemento, según se indica a continuación.

$$\underline{u}^e = \begin{bmatrix} \underline{u}_i \\ \underline{u}_j \\ \underline{u}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} = \underline{u}^e\,(t) \qquad (2.3.3)$$

Con base en la ec 2.3.2, la ec 1.4.5 para el elemento triangular de la Fig 2.1 se puede escribir como:

$$\tilde{u} = N_i\, u_i + N_j\, u_j + N_m\, u_m = \tilde{u}(x, y, t) \tag{2.3.4}$$

$$\tilde{v} = N_i\, v_i + N_j\, v_j + N_m\, v_m = \tilde{v}(x, y, t) \tag{2.3.5}$$

donde las funciones $N_i = N_i\,(x,y)$, $N_j = N_j(x,y)$ y $N_m = N_m(x,y)$ reciben el nombre de funciones de forma. En el capítulo 3 se presentan las expresiones correspondientes a varias geometrías de elementos finitos.

Las ecs 2.3.4 y 2.3.5 se pueden escribir en forma matricial como se indica a continuación

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} \tag{2.3.6}$$

$$\underline{\tilde{u}} = \begin{bmatrix} \underline{N}_i, \underline{N}_j, \underline{N}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_i \\ \underline{u}_j \\ \underline{u}_m \end{bmatrix} = \underline{N}\, \underline{u}^e \tag{2.3.7}$$

donde

$$\underline{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{N}_j = \begin{bmatrix} N_j & 0 \\ 0 & N_j \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{N}_m = \begin{bmatrix} N_m & 0 \\ 0 & N_m \end{bmatrix} \tag{2.3.8}$$

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} \underline{N}_i, \underline{N}_j, \underline{N}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \tag{2.3.9}$$

2.3.3 Componentes del tensor de deformaciones

Al sustituir las ecs 1.3.4 a 1.3.6 en la ec 1.3.12 se obtiene

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underline{L}\ \underline{u} \tag{2.3.10}$$

en donde se utilizó la ec 2.3.1, y la matriz de operadores, $\underline{L}$, de acuerdo con la ec 2.3.10 resulta ser

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2.3.11}$$

Al sustituir la ec 2.3.7 en la ec 2.3.10 resulta ser

$$\underline{e} = \underline{L}\ \underline{N}\ \underline{u}^e = \underline{B}\ \underline{u}^e \tag{2.3.12}$$

donde, la matriz de deformaciones, $\underline{B}$, es:

$$\underline{B} = \underline{L}\,\underline{N} \tag{2.3.13}$$

Al sustituir las ecs 2.3.9 y 2.3.11 en la ec 2.3.13, se obtiene la forma explícita de la matriz $\underline{B}$ para el elemento considerado

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2.3.14}$$

2.3.4 Ecuación constitutiva

De acuerdo con la ec 1.3.22, la ecuación constitutiva para un material libre de esfuerzos y deformaciones iniciales se escribe como:

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\,\underline{e} \tag{2.3.15}$$

Si se considera que el material está sometido a esfuerzos iniciales, $\underline{\sigma}_o$ y a deformaciones iniciales, $\underline{e}_0$, la ecuación 2.3.15 se modifica como se indica a continuación

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\,(\underline{e} - \underline{e}_0) + \underline{\sigma}_0 \tag{2.3.16}$$

2.3.5 Equilibrio dinámico

La expresión del principio del trabajo virtual, dada por la ec 2.2.2, es válida para la región completa de la estructura. Cuando se aplica a la región de un elemento finito ($\Omega_e + \Gamma_e$), su expresión resulta ser:

$$\int_{\Omega^e} \delta \underline{e}^T \, \underline{\sigma} \; d\Omega + \int_{\Omega^e} \delta \underline{u}^T \, \rho \ddot{\underline{u}} \, d\Omega = \oint_{\Gamma^e} \delta \underline{u}^T \, \underline{\sigma}_{(\underline{n})} \, d\Gamma$$

$$+ \int_{\Omega^e} \delta \underline{u}^T \, \underline{f} \, d\Omega \qquad (2.3.17)$$

en donde los elementos del integrando deben referirse al elemento finito; y de acuerdo con los desarrollos anteriores se cuantifican a continuación, al tomar en cuenta que la variación se deben considerar únicamente en el vector de desplazamientos nodales, $\underline{u}^e$.

$$\delta \, \underline{e}^T = \delta(\underline{u}^{eT} \, \underline{B}^T) = \delta \underline{u}^{eT} \, \underline{B}^T \qquad (2.3.18)$$

$$\delta \, \underline{u}^T \approx \delta \, \underline{\tilde{u}}^T = \delta(\underline{u}^{eT} \, N^T) = \delta \underline{u}^{eT} \, N^T \qquad (2.3.19)$$

$$\ddot{\underline{u}} \approx \ddot{\underline{\tilde{u}}} = \underline{N} \, \ddot{\underline{u}}^e \qquad (2.3.20)$$

Al sustituir las ecs 2.3.18 a 2.3.20 en la ec 2.3.17, y al recordar que los componentes del vector de desplazamientos nodales son independientes de las variables espaciales (salen fuera de los integrandos) se obtiene la expresión siguiente:

$$\delta \underline{u}^{eT} \left[\int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{\sigma} \, d\Omega + \left(\int_{\Omega^e} \rho \, \underline{N}^T \underline{N} \, d\Omega \right) \underline{\ddot{U}}^e \right] = \delta \, \underline{u}^{eT} \left(\oint_{\Gamma^e} \underline{N}^T \, \underline{\sigma}_{(\underline{n})} \, d\Gamma \right.$$

$$\left. + \int_{\Omega^e} \underline{N}^T \, \underline{f}^T \, d\Omega \right) \qquad (2.3.21)$$

Para que la ec 2.3.21 sea válida para cualquier variación del vector de desplazamientos nodales ($\delta \underline{u}^{eT}$), se debe cumplir que

$$\int_{\Omega^e} \underline{B}^T \, \sigma \, d\Omega + \underline{M}^e \, \underline{\ddot{U}}^e = \underline{f}_s^e + f_c^e \qquad (2.3.22)$$

donde, la matriz de masas, $\underline{M}^e$, del elemento e, está dado por

$$\underline{M}^e = \int_{\Omega^e} \rho \underline{N}^T \, \underline{N} \, d\Omega \qquad (2.3.23)$$

$\underline{f}_s^e$ y $\underline{f}_c^e$ son los vectores de fuerzas del elemento debido a las fuerzas de superficie y de cuerpo, respectivamente, que actúan sobre el elemento, es decir

$$\underline{f}_s^e = \oint_{\Gamma^e} \underline{N}^T \, \underline{\sigma}_{(\underline{n})} \, d\Gamma \qquad (2.3.24)$$

$$\underline{f}_c^e = \int_{\Omega^e} \underline{N}^T \, \underline{f} \, d\Omega \qquad (2.3.25)$$

Al sustituir la ec 2.3.16 en la integral de la ec 2.3.22 se obtiene

$$\int_{\Omega^e} \underline{B}^T \, \underline{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \, \underline{D} \, \underline{e} \, d\Omega - \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \, \underline{D} \, \underline{e}_o \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \, \underline{\sigma}_o \, d\Omega$$

$$= \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \, \underline{D} \, \underline{e} \, d\Omega - \underline{f}_{e_o}^e + \underline{f}_{\sigma_o}^e \qquad (2.3.26)$$

donde $\underline{f}^e_{e_o}$ y $\underline{f}^e_{\sigma_o}$ son los vectores de fuerzas del elemento debidas a la deformación inicial, $\underline{e}_o$, y al esfuerzo inicial, $\underline{\sigma}_o$, respectivamente, en el elemento finito, y resultan ser

$$\underline{f}^e_{e_o} = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D}\, \underline{e}_o \, d\Omega \tag{2.3.27}$$

$$\underline{f}^e_{\sigma_o} = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{\sigma}_o \, d\Omega \tag{2.3.28}$$

Al sustituir la ec 2.3.12 en la ec 2.3.26 resulta

$$\int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{\sigma} \, d\Omega = \left(\int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D}\, \underline{B}\, d\Omega\right) \underline{u}^e - \underline{f}^e_{e_o} + \underline{f}^e_{\sigma_o}$$

$$= \underline{K}^e \underline{u}^e - \underline{f}^e_{e_o} + \underline{f}^e_{\sigma_o} \tag{2.3.29}$$

donde la matriz de rigideces $\underline{K}^e$, del elemento finito, e, resulta ser:

$$\underline{K}^e = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D}\, \underline{B} \, d\Omega \tag{2.3.30}$$

Al sustituir la ec 2.3.29 en la ec 2.3.22 se obtiene

$$\underline{M}^e \ddot{\underline{u}}^e + \underline{K}^e \underline{u}^e = \underline{f}^e \tag{2.3.31}$$

donde el vector de fuerzas externas, $\underline{f}^e$, del elemento, e, se indica a continuación

$$\underline{f}^e = \underline{f}^e_s + \underline{f}^e_c + \underline{f}^e_{e_o} - \underline{f}^e_{\sigma_o} \tag{2.3.32}$$

2.3.6 Equilibrio estático

Cuando las fuerzas que actúan sobre el elemento son independientes del tiempo (cargas estáticas), se debe cumplir la relación siguiente

$$\underline{\ddot{u}}^e = \underline{0} \tag{2.3.33}$$

Al sustituir la ec 2.3.33 en la ec 2.3.31 se obtiene la ecuación de equilibrio estático del elemento finito, que resulta ser:

$$\underline{K}^e \, \underline{u}^e = \underline{f}^e \tag{2.3.34}$$

2.3.7 Propiedades de las matrices de rigideces y de masas

Al calcular la transpuesta de la matriz de rigideces (ec 2.3.30) se obtiene

$$(\underline{K}^e)^T = (\int_{\Omega^e} \underline{B}^T \, \underline{D} \, \underline{B} \, d\Omega)^T = \int_{\Omega^e} (\underline{B}^T \underline{D} \, \underline{B})^T \, d\Omega = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \, \underline{D}^T \, (\underline{B}^T)^T \, d\Omega \tag{2.3.35}$$

Al observar las diversas formas de ecuaciones constitutivas para las geometrías consideradas se concluye que la matriz de coeficientes elásticos es simétrica, es decir

$$\underline{D}^T = \underline{D} \tag{2.3.36}$$

además, se debe cumplir que

$$(\underline{B}^T)^T = \underline{B} \tag{2.3.37}$$

Al sustituir las ecs 2.3.36 y 2.3.37 en la ec 2.3.35 y considerar además la ec 2.3.30, resulta que:

$$(\underline{K}^e)^T = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, d\Omega = \underline{K}^e \qquad (2.3.38)$$

De la ec 2.3.38 se concluye que la matriz de rigideces de los elementos finitos, para los medios continuos de la elasticidad lineal, es simétrica.

Al calcular la transpuesta de la matriz de masas (ec 2.3.23) se obtiene

$$(\underline{M}^e)^T = (\int_{\Omega^e} \rho \, \underline{N}^T \underline{N} \, d\Omega)^T = \int_{\Omega^e} \rho (\underline{N}^T \underline{N})^T \, d\Omega = \int_{\Omega^e} \rho \, \underline{N}^T (\underline{N}^T)^T \, d\Omega$$

$$= \int_{\Omega^e} \rho \, \underline{N}^T \underline{N} \, d\Omega = \underline{M}^e \qquad (2.3.39)$$

De la ec 2.3.39 se concluye que la matriz de masas de los elementos finitos, para los medios continuos de la elasticidad lineal, es simétrica.

2.3.8 Matriz de masas concentradas (diagonal)

La matriz de masas del elemento finito, dado por la ec 2.3.23, se le denomina matriz de masas consistente, ya que es la que resulta en forma natural en el proceso de discretización en el método del elemento finito. La matriz de masas consistente generalmente no es diagonal.

Sin embargo, por conveniencias numéricas, se utiliza con mucha frecuencia el uso de matrices diagonales formadas de tal manera que las masas asociadas a los puntos se consideren concentradas. El proceso de concentración no es único y se han utilizado los que a continuación se enumeran:

a) concentración de masas mediante conceptos físicos, por ejemplo, el de áreas o volúmenes tributarios

b) concentración mediante nuevas funciones de forma definidas de tal manera

que se anulen los términos fuera de la diagonal de la matriz de masas consistente

c) concentración mediante el escalamiento de los elementos de la diagonal principal de la matriz de masas consistente, de tal manera que se preserve la masa total del elemento

d) concentración mediante la integración numérica de la matriz de masas consistente, al seleccionar a los puntos nodales como puntos de muestreo

El procedimiento del inciso d conduce a coeficientes negativos de la matriz de masas diagonal. Independientemente del procedimiento seguido, la matriz de masas concentrada o diagonal resulta ser la forma mostrada a continuación (para el elemento triangular)

$$\underline{M}^e = \begin{bmatrix} M_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_m \end{bmatrix} \qquad (2.3.40)$$

donde M_i, M_j, M_m son los valores de las masas concentradas en los puntos nodales respectivos

2.4 Ecuación de equilibrio del medio continuo global

Si una estructura está en equilibrio, cualquier parte de ella también lo está; la inversa, también es cierta. Entonces, si se tiene garantizado el

equilibrio de todos los elementos finitos en que se discretizó el medio continuo, se puede establecer el equilibrio del medio continuo global.

2.4.1 Ensamble de las ecuaciones

A fin de llevar a cabo, sistemáticamente, el establecimiento de las ecuaciones de equilibrio del medio continuo global, se procede a numerar, en forma secuencial, los elementos finitos y los puntos nodales que resultan de la definición de la geometría según el inciso 2.3.1 (ver Fig 2.2)

De acuerdo con lo aseverado en el inciso 2.3, el equilibrio de la estructura mostrada en la Fig 2.2 se puede establecer, al utilizar la ec 2.3.31, como se indica a continuación

$$\underline{M}^{(1)}\,\underline{\ddot{u}}^{(1)} + \underline{K}^{(1)}\,\underline{u}^{(1)} = \underline{f}^{(1)} \qquad (2.4.1)1$$

$$\underline{M}^{(2)}\,\underline{\ddot{u}}^{(2)} + \underline{K}^{(2)}\,\underline{u}^{(2)} = \underline{f}^{(2)} \qquad (2.4.1)2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\underline{M}^{(33)}\,\underline{\ddot{u}}^{(33)} + \underline{K}^{(33)}\,\underline{u}^{(33)} = \underline{f}^{(33)} \qquad (2.4.1)3$$

En las ecuaciones anteriores, el número indicado en los paréntesis corresponde al número del elemento. En forma condensada, las ecs 2.4.1 se pueden escribir como

$$\sum_{e=1}^{33} \underline{M}^{(e)}\,\underline{\ddot{u}}^{(e)} + \sum_{e=1}^{33} \underline{K}^{(e)}\,\underline{u}^{(e)} = \sum_{e=1}^{33} \underline{f}^{(e)} \qquad (2.4.2)$$

Las ecs 2.4.1 ó 2.4.2 se pueden reordenar, de acuerdo con las observaciones indicadas a continuación.

En la Fig 2.2 se puede observar que los desplazamientos del punto nodal 12,

(u_{12} y v_{12}), así como sus segundas derivadas respecto al tiempo, ($\ddot{u}_{12}$ y $\ddot{v}_{12}$), aparecen en las correspondientes ecuaciones de equilibrio de los elementos finitos indicados con los números, 11, 12, 13, 18, 19, 20 y 21.

La observación anterior conduce a aseverar que el número de ecuaciones en que se pueden agrupar las ecuaciones 2.4.1 ó 2.4.2 es igual al número de puntos nodales multiplicado por el número de grados de libertad asociado a cada punto nodal. Entonces, las ecuaciones de equilibrio ordenadas se pueden escribir como

$$\underline{\overline{M}}\,\underline{\ddot{U}} + \underline{\overline{K}}\,\underline{U} = \underline{\overline{P}} \qquad (2.4.3)$$

donde las matrices $\underline{\overline{M}}$ y $\underline{\overline{K}}$, se conocen con los nombres de matrices de masas y de rigideces de la estructura, y el vector $\underline{\overline{P}}$, es el vector de cargas de la estructura. El ordenamiento de las matrices y vector anteriores se expresa, simbólicamente, a continuación

$$\underline{\overline{M}} = \sum_{e=1}^{33} \underline{M}^{(e)} \qquad (2.4.4)$$

$$\underline{\overline{K}} = \sum_{e=1}^{33} \underline{K}^{(e)} \qquad (2.4.5)$$

$$\underline{\overline{P}} = \sum_{e=1}^{33} \underline{f}^{(e)} = \underline{\overline{P}}(t) \qquad (2.4.6)$$

El vector, $\underline{U}$, de la ecuación de equilibrio de la estructura (ec 2.4.3), es el vector de desplazamientos de la estructura y se construye con los vectores desplazamiento de cada punto nodal según se indica en la ec 2.4.7. El vector de aceleraciones de la estructura, $\underline{\ddot{U}}$, representa las segundas derivadas res-

pecto al tiempo del vector $\underline{U}$.

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_{25} \\ v_{25} \end{bmatrix} = \underline{U}(t) \qquad (2.4.7)$$

El procedimiento sistematizado para llevar a cabo las ecs 2.4.4 a 2.4.6 es igual al que se utiliza en las estructuras esqueletales.

2.4.2 Condiciones de frontera

Las ecuaciones de movimiento de la estructura (ecs 2.4.3) deben satisfacer valores prescritos de algunos componentes del vector $\underline{U}$. Tales valores conocidos definen las condiciones de frontera.

En la Fig 2.2, del ejemplo seguido, los valores de los desplazamientos de los puntos nodales 2,9 y 25 son nulos. Esto se indica a continuación como

$$\underline{u}_2 = \underline{0} \qquad (2.4.8)1$$

$$\underline{u}_9 = \underline{0} \qquad (2.4.8)2$$

$$\underline{u}_{25} = \underline{0} \qquad (2.4.8)3$$

Al hacer que las ecuaciones de movimiento (ec 2.4.3) satisfagan las condiciones de frontera, indicadas por las ecs 2.4.8, se obtienen las ecuaciones

siguientes:

$$\underline{M}\,\underline{\ddot{u}} + \underline{K}\,\underline{u} = \underline{P} \qquad (2.4.9)$$

en la ec 2.4.9 se puede observar que las condiciones de frontera (ecs 2.4.8) inciden en las matrices de masas $\overline{M}$ y de rigideces $\overline{K}$ y en el vector de cargas $\overline{P}$, que se transforman en $\underline{M}$, $\underline{K}$ y $\underline{P}$, respectivamente.

La forma sistemática de introducir las condiciones de frontera en las ecuaciones de movimiento es igual a como se hace en las estructuras esqueletales.

2.4.3 Matriz de amortiguamiento

Aunque el modelo matemático de los sólidos, elásticos lineales no considera efectos disipativos, al utilizarse en la modelación de las estructuras reales se le adiciona a la ecuación de equilibrio dinámico de la estructura (ec 2.4.9) un término correspondiente a las fuerzas disipativas del tipo viscoso lineal, y se transforma en:

$$\underline{M}\,\underline{\ddot{U}} + \underline{C}\,\underline{\dot{U}} + \underline{K}\,\underline{U} = P \qquad (2.4.10)$$

donde $\underline{\dot{U}}$ es el vector de velocidades de la estructura, primera derivada respecto al tiempo de $\underline{U}$, y $\underline{C}$ es la matriz de amortiguamientos de la estructura, generalmente cuantificada con el criterio de Rayleigh, mediante la ecuación siguiente

$$\underline{C} = \alpha\underline{M} + \mu\,\underline{K} \qquad (2.4.11)$$

α y μ son coeficientes que se determinan experimentalmente

2.4.4 Condiciones iniciales

Para poder integrar las ecuaciones de equilibrio dinâmico (ec 2.4.10) se requiere especificar el origen del movimiento, a partir del cual se desea cuantificar. Este origen del movimiento se conoce con el nombre de condiciones iniciales y queda establecido al especificar los vectores de desplazamiento $\underline{U}_o$ y de velocidad $\underline{\dot{U}}_o$ en el origen del movimiento (en el tiempo, t=o), es decir

$$\underline{U}\Big|_{t=o} = \underline{U}_o \qquad (2.4.12)$$

$$\underline{\dot{U}}\Big|_{t=o} = \underline{\dot{U}}_o \qquad (2.4.13)$$

2.4.5 Equilibrio estático

El equilibrio estático de las estructuras es un caso particular del movimiento, y es aquel en que el vector de cargas $\underline{P}$ y el vector desplazamientos $\underline{U}$ son independientes del tiempo. Al imponer esta condición a las ecuaciones de equilibrio dinámico (ec 2.4.10), se transforman en las ecuaciones siguientes

$$\underline{K}\,\underline{U} = \underline{P} \qquad (2.4.14)$$

2.4.6 Solución de las ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio estático (ec 2.4.14) resultan ser un sistema de ecuaciones algebraicas, lineales, simétricas no homogéneas. Su solución se obtiene según los métodos descritos en el capítulo 4. Con el vector de desplazamientos de la estructura conocido, ($\underline{U}$), se calculan cada uno de los vecto-

res de desplazamientos nodales de los elementos finitos ($\underline{u}^e$) y se procede a cuantificar para cada elemento, en los puntos deseados, los siguientes conceptos:

a) los componentes del tensor de deformaciones, mediante las ecs 2.3.12 y 2.3.14

b) los componentes del tensor esfuerzo, mediante la ec 2.3.16

Las ecuaciones de equilibrio dinámico (ec 2.4.10) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, de segundo orden, lineales, no homogéneas, acopladas, cuya solución se indica en el capítulo 4. Conocidos los vectores de desplazamientos ($\underline{U}$), de velocidades ($\dot{\underline{U}}$) y de aceleraciones ($\ddot{\underline{U}}$) se procede como en el caso del problema estático a cuantificar los valores de los componentes de los tensores de esfuerzos y de deformaciones durante el movimiento.

3. FUNCIONES DE INTERPOLACION DE ELEMENTOS FINITOS

3.1 Generalidades

En capítulos anteriores se indicó que las ecuaciones del elemento finito se obtienen mediante los métodos variacionales (Rayleigh-Ritz) o de los residuos pesados (Galerkin). Sin embargo, existen algunas diferencias básicas en relación con el método del elemento finito ya que se caracteriza por:

1) La representación funcional global de una variable consiste de un ensamble de representaciones funcionales locales. Las integrales globales sobre el dominio de la estructura, Ω , se establecen en función de un ensamble de integrales sobre dominios locales, Ω_e , de elementos finitos disjuntos.

2) Si se utiliza el método de Rayleigh-Ritz, el principio variacional global se construye como un ensamble de los principios variacionales aplicados a cada elemento finito.

3) .Si se utiliza el método de Galerkin, las funciones de interpolación del elemento finito actúan como funciones de peso en la integral de Galerkin.

En general, el paso más crucial en el método del elemento finito consiste en la selección de funciones de interpolación adecuadas. Deben satisfacer ciertos criterios para que se logre la convergencia de la solución aproximada a la solución exacta de la ecuación diferencial en cuestión.

La interpolación en elementos finitos se caracteriza por la forma del elemento y el orden de aproximación. En general, la selección de un elemento finito depende de:

a) la geometría del dominio global
b) el grado de aproximación deseado en la solución
c) la facilidad de integración sobre el dominio del elemento.

El dominio global donde se desean integrar las ecuaciones diferenciales puede ser unidimensional, bidimensional o tridimensional. En la Fig. 3.1 se indican las geometrías de algunos elementos finitos correspondientes a los dominios globales indicados.

En general, las funciones de interpolación son polinomios de varios grados; pero también se pueden utilizar productos de polinomios con funciones exponciales o trigonométricas. Si se utilizan polinomios lineales, únicamente se requieren los puntos nodales de las esquinas de los elementos finitos (Fig. 3.1); mientras que si se desean polinomios cuadráticos, se deben adicionar puntos nodales comprendidos en las fronteras de los elementos (Fig. 3.2). Desde luego que se pueden utilizar aproximaciones con polinomios de orden superior, pero se necesitan adicionar puntos nodales.

3.2. *Elementos unidimensionales*

Se presentan varios elementos que dependen básicamente del polinomio utilizado para la interpolación.

3.2.1 Elementos convencionales

La expansión polinómica de la variable unidimensional, u=u(x), se puede indicar como:

$$u = a_0 + a_i x^i \qquad i = 1,2, \ldots, n \tag{3.2.1}$$

3.2.1.1 Interpolación lineal

En este caso, la ec 3.1.1 resulta ser

$$u = a_0 + a_1 x \tag{3.2.2}$$

para poder expresar el valor de u, en función de los valores en los puntos nodales (Fig. 3.3) se necesita valuar la ec 3.2.2 en tales puntos, como se indica a continuación

$$u_1 = u\Big|_{x = 0} \tag{3.2.3}$$

$$u_2 = u\Big|_{x = \ell} \tag{3.2.4}$$

Al sustituir la ec 3.2.2 en la ec 3.2.3 se obtiene

$$u_1 = a_0 \tag{3.2.5}$$

Al sustituir la ec 3.2.2 en la ec 3.2.4 resulta

$$u_2 = a_0 + a_1 \ell \tag{3.2.6}$$

De las ecs 3.2.5 y 3.2.6 se obtienen

$$a_0 = u_1 \tag{3.2.7}$$

$$a_1 = \frac{1}{\ell}(u_2 - u_1) \tag{3.2.8}$$

Al sustituir las ecs 3.2.7 y 3.2.8 en la ec 3.2.2 resulta

$$u = (1 - \frac{x}{\ell})\, u_1 + \frac{x}{\ell}\, u_2 = N_i\, u_i \qquad i = 1,2 \tag{3.2.9}$$

donde:

N_i se denominan funciones de interpolación y sus expresiones son:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{\ell} \tag{3.2.10}$$

$$N_2 = \frac{x}{\ell} \tag{3.2.11}$$

3.2.1.2 Interpolación lineal normalizada

Si el sistema de referencia se selecciona como se indica en la Fig. 3.4, se define una nueva variable adimensional como se indica a continuación

$$\xi = \frac{x}{h} \tag{3.2.12}$$

donde:

$h = \frac{1}{2}\ell$ y, de acuerdo con la ec 3.2.12, se puede indicar el siguiente comportamiento de la variable ξ:

$\xi = 0$	en el centro del elemento	(3.2.13)1
$\xi = -1$	en el punto nodal 1	(3.2.13)2
$\xi = 1$	en el punto nodal 2	(3.2.13)3

Con base en la variable ξ , la ec 3.2.1 se puede escribir como:

$$u = a_0 + a_1 \xi^1 \tag{3.2.14}$$

y para el caso lineal se reduce a

$$u = a_0 + a_1 \xi \tag{3.2.15}$$

en donde las condiciones de frontera dadas por las ecs 3.2.3 y 3.2.4 se indican a continuación:

$$u\Big|_{\xi = -1} = u_1 \tag{3.2.16}$$

$$u\Big|_{\xi = 1} = u_2 \tag{3.2.17}$$

Al seguir la secuencia indicada en el inciso anterior, las constantes a_0 y a_1 de la ec 3.2.15, al utilizar las ecs 3.2.16 y 3.1.17, resultan ser:

$$a_0 = \frac{1}{2} (u_1 + u_2) \tag{3.2.18}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} (u_2 - u_1) \tag{3.2.19}$$

y la ec 3.2.15 se puede escribir como

$$u = \frac{1}{2} (1 - \xi)\, u_1 + \frac{1}{2} (1 + \xi)\, u_2 = N_i\, u_i \quad i = 1,2 \tag{3.2.20}$$

en donde las funciones de interpolación, N_i ,resultan ser:

$$N_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi) \tag{3.2.21}$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi) \tag{3.2.22}$$

3.2.1.3 Interpolación cuadrática

En este caso, la ec 3.1.1 toma la forma siguiente:

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{3.2.23}$$

y para poder cuantificar las tres constantes, a_0, a_1 y a_2, se requiere conocer el valor de u en otro punto adicional a los extremos, como se indica en la Fig. 3.5, en donde el punto adicional se seleccionará en el centro del elemento.

De acuerdo con la Fig. 3.5, las condiciones de frontera resultan ser

$$u\Big|_{x=0} = u_1 \tag{3.2.24)1}$$

$$u\Big|_{x=\frac{\ell}{2}} = u_2 \tag{3.2.24)2}$$

$$u\Big|_{x=\ell} = u_3 \tag{3.2.24)3}$$

Al hacer que la ec 3.2.23 satisfaga las condiciones establecidas en las ecs 3.2.24 se obtienen las ecuaciones siguientes

$$u_1 = a_0 \tag{3.2.25)1}$$

$$u_2 = a_0 + \frac{1}{2}\ell a_1 + \frac{1}{4}\ell^2 a_2 \tag{3.2.25)2}$$

$$u_3 = a_0 + \ell a_1 + \ell^2 a_2 \tag{3.2.25)3}$$

El sistema de ecuaciones anterior (ecs 3.2.25) se puede escribir en forma matricial como se indica a continuación

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}\ell & \frac{1}{4}\ell^2 \\ 1 & \ell & \ell^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad (3.2.26)$$

Y su solución resulta ser

$$a_0 = a_1 \qquad (3.2.27)1$$

$$a_1 = \frac{1}{\ell}(-3\,u_1 + 4\,u_2 - u_3) \qquad (3.2.27)2$$

$$a_2 = \frac{2}{\ell^2}(u_1 - 2\,u_2 + u_3) \qquad (3.2.27)3$$

y la ec 3.2.23 se puede escribir como

$$u = \left[1-3\left(\frac{x}{\ell}\right)+2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]u_1 + 4\left(\frac{x}{\ell}\right)\left(1-\frac{x}{\ell}\right)u_2 + \frac{x}{\ell}\left[-1+2\left(\frac{x}{\ell}\right)\right]u_3 \qquad (3.2.28)$$

o bien

$$u = N_i\,u_i \qquad i = 1,2,3 \qquad (3.2.29)$$

$$N_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right) + 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \qquad (3.2.30)$$

$$N_2 = 4\left(\frac{x}{\ell}\right)\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \qquad (3.2.31)$$

$$N_3 = \left(\frac{x}{\ell}\right)\left[-1 + 2\left(\frac{x}{\ell}\right)\right] \qquad (3.2.32)$$

3.2.1.4 Interpolación cuadrática normalizada

Si el sistema de referencia se selecciona con la variable normalizada indicada en el inciso 3.2.1.2, según se muestra en la Fig. 3.6, la ec 3.2.23 se puede escribir como:

$$u = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 \qquad (3.2.33)$$

Con las condiciones de frontera dadas a continuación

$$u\Big|_{\xi=-1} = u_1 \qquad (3.2.34)1$$

$$u\Big|_{\xi=0} = u_2 \qquad (3.2.34)2$$

$$u\Big|_{\xi=1} = u_3 \qquad (3.2.34)3$$

Al seguir el procedimiento utilizado para cuantificar los coeficientes a_0, a_1 y a_2, la ec 3.2.33 se puede escribir como

$$u = N_i \, u_i \qquad (3.2.35)$$

donde

$$N_1 = \frac{1}{2} \xi \, (\xi - 1) \qquad (3.2.36)$$

$$N_2 = 1 - \xi^2 \qquad (3.2.37)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \xi \, (\xi + 1) \qquad (3.2.38)$$

3.2.1.5 Interpolación en coordenadas naturales

Si las funciones de interpolación se obtienen en función de variables espaciales adimensionales o normalizadas, entonces al sistema normalizado se le denomina sistema coordenado natural.

Como puede observarse, en los incisos 3.2.1.1. a 3.2.1.4 se han logrado expresar y las funciones de interpolación en términos de variables adimensionales

(que pueden ser x/ℓ o bien $\xi=x/h$) y en ambos casos se puede definir sistemas coordenados naturales, pero con orígenes diferentes.

3.2.2 Elementos con polinomios de Lagrange

A fin de evitar la solución de ecuaciones que se presentan en la determinación de los coeficientes del polinomio de interpolación utilizado en el inciso 3.2.1, se puede utilizar el criterio de la interpolación lagrangiana, expresada como

$$u = \ell_i \, u_i = N_i \, u_i \tag{3.2.39}$$

en donde ℓ_i representa a las funciones de interpolación de Lagrange, cuyas expresiones son:

$$\ell_i^n = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \tag{3.2.40}$$

en donde con el símbolo π se indica el producto de los binomios $x-x_j$ y x_i-x_j sobre el rango de j.

En esta interpolación, la longitud del elemento se divide en segmentos de igual tamaño por los n puntos nodales, donde $n=m+1$ y m es el orden de aproximación.

Si la ec 3.2.40 se expresa en función de la variable adimensional $\xi=x/\ell$, se puede escribir como:

$$\ell_i^n = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \tag{3.2.41}$$

En la Fig. 3.7 se muestra esquemáticamente la división de la región del elemento para las ecs 3.2.40 y 3.2.41. A continuación, se ejemplifica el uso de

la interpolación de Lagrange para diversos órdenes de aproximación.

3.2.2.1 Interpolación lineal

En este caso, el orden m=1 y el número de puntos n=2 , según se indica en la Fig. 3.8. La interpolación de Lagrange, para diversas referencias, se indica a continuación.

a) Variable no normalizada, referencia mostrada en la Fig. 3.8a

$$N_1 = \ell_1^2 = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x-\ell}{0-\ell} = 1 - \frac{x}{\ell} \qquad (3.2.42)$$

$$N_2 = \ell_2^2 = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-0}{\ell-0} = \frac{x}{\ell} \qquad (3.2.43)$$

b) Variable normalizada, referencia mostrada en la Fig. 3.8b

$$N_1 = \ell_1^2 = \frac{\xi-\xi_2}{\xi_1-\xi_2} = \frac{\xi-1}{0-1} = 1 - \xi \qquad (3.2.44)$$

$$N_2 = \ell_2^2 = \frac{\xi-\xi_1}{\xi_2-\xi_1} = \frac{\xi-0}{1-0} = \xi \qquad (3.2.45)$$

c) Variable normalizada, referencia mostrada en la Fig. 3.8c

$$N_1 = \ell_1^2 = \frac{\xi-\xi_1}{\xi_1-\xi_2} = \frac{\xi-1}{(-1)-1} = \frac{1}{2}(1-\xi) \qquad (3.2.46)1$$

$$N_2 = \ell_2^2 = \frac{\xi-\xi_1}{\xi_2-\xi_1} = \frac{\xi-(-1)}{1-(-1)} = \frac{1}{2}(1+\xi) \qquad (3.2.46)2$$

3.2.2.2 Interpolación cuadrática

El orden m=2 y el número de puntos n=3 , se indican en la Fig. 3.9 y las expresiones para sus correspondientes variables se indican a continuación.

a) .Variable no normalizada, referencia mostrada en la Fig. 3.9a

$$N_1 = \ell_1^3 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-\ell)}{(0-\frac{\ell}{2})(0-\ell)} = 1-3\frac{x}{\ell}+2(\frac{x}{\ell})^2 \qquad (3.2.47)$$

$$N_2 = \ell_2^3 = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\ell)}{(\frac{\ell}{2}-0)(\frac{\ell}{2}-\ell)} = 4\frac{x}{\ell}\left[1-\frac{x}{\ell}\right] \qquad (3.2.48)$$

$$N_3 = \ell_3^2 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-\ell/2)}{(\ell-0)(\ell-/2)} = (\frac{x}{\ell})\left[2\frac{x}{\ell}-1\right] \qquad (3.2.49)$$

b) Variable normalizada, referencia mostrada en la Fig. 3.9b

$$N_1 = \ell_1^3 = \frac{(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)} = \frac{(\xi-\frac{1}{2})(\xi-1)}{(0-\frac{1}{2})(0-1)} = 2(\xi-\frac{1}{2})(\xi-1) \qquad (3.2.50)$$

$$N_2 = \ell_2^3 = \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_3)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)} = \frac{(\xi-0)(\xi-1)}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)} = -4\xi(\xi-1) \qquad (3.2.51)$$

$$N_3 = \ell_3^3 = \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)} = \frac{(\xi-0)(\xi-\frac{1}{2})}{(1-0)(1-\frac{1}{2})} = 2\xi(\xi-\frac{1}{2}) \qquad (3.2.52)$$

c) Variable normalizada, referencia mostrada en la Fig. 3.9c

Las expresiones son iguales a los primeros términos de las correspondientes ecs 3.2.50 a 3.2.52, pero el valor de las coordenadas en los puntos nodales cambian, y se indica a continuación

$$N_1 = \ell_1^3 = \frac{(\xi-0)(\xi-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \qquad (3.2.53)$$

$$N_2 = \ell_2^3 = \frac{[\xi-(-1)][\xi-1]}{[0-(-1)][0-1]} = 1-\xi^2 \qquad (3.2.54)$$

$$N_3 = \ell_3^3 = \frac{[\xi-(-1)][\xi - 0]}{[1-(-1)][1 - 0]} = \frac{1}{2}\,\xi(\xi+1) \qquad (3.2.55)$$

Como era de esperarse, las ecs 3.2.42 a 3.2.52 coinciden con sus casos correspondientes a las ecuaciones obtenidas en el inciso 3.2.1.

3.2.3 Elementos con polinomios de Hermite

En las interpolaciones donde se desea, además de la continuidad de la función, la continuidad de las derivadas de la misma, es recomendable el uso de las funciones de interpolación de Hermite.

A fin de ejemplificar el uso de la interpolación de Hermite, se describe el caso del elemento finito con dos puntos nodales y primeras derivadas continuas, en función de la variable normalizada, $\xi = x/\ell$

$$u(\xi) = h_i^0\,(\xi)\,u_i^0 + h_i^1\,(\xi)\,u_i^1 \qquad i=1,2 \qquad (3.2.56)$$

que puede escribirse como

$$u(\xi) = N_i\,u_i \qquad i = 1,2,3,4 \qquad (3.2.57)$$

donde:

h_i^0 y h_i^1 son polinomios de Hermite, (Fig. 3.10) cuyas expresiones son:

$$N_1 = h_1^0 = 1 - 3\,\xi^2 + 2\,\xi^3 \qquad (3.2.58)$$

$$N_2 = h_2^0 = 3\,\xi^2 - 2\,\xi^3 \qquad (3.2.59)$$

$$N_3 = h_1^1 = \xi - 2\,\xi^2 + \xi^3 \qquad (3.2.60)$$

$$N_4 = h_2^1 = \xi^3 - \xi^2 \qquad (3.2.61)$$

$$u_1 = u\Big|_{\xi=0} = u_1^0 \tag{3.2.62}$$

$$u_2 = u\Big|_{\xi=1} = u_2^0 \tag{3.2.63}$$

$$u_3 = \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} = u_1^1 \tag{3.2.64}$$

$$u_4 = \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1} = u_2^1 \tag{3.2.65}$$

Desde luego que se puede considerar continuidad en derivadas de orden superior pero se requerirán polinomios de Hermite, también, de orden superior.

3.3 *Elementos bidimensionales*

Como se indica en la Fig. 3.1, las geometrías de los elementos finitos bidimensionales más usados son el triángulo, el rectángulo y el cuadrilátero general. En este inciso se bosquejan las funciones de interpolación asociadas al triángulo y al rectángulo con lados lineales. En el inciso 3.5, se considera la posibilidad de extender estos conceptos a geometrías planas más complejas (cuadriláteros generales con lados curvos).

En la expansión polinómica de los elementos finitos se busca el máximo orden del polinomio completo correspondiente a un número mínimo de grados de libertad (puntos nodales). Para determinar el número de términos que se presentan en un polinomio de dos variables, es conveniente utilizar el triángulo de Pascal, mostrado en la Fig. 3.11.

3.3.1 Elemento triangular lineal en coordenadas cartesianas

La representación polinómica más simple de la función $u = u(x,y)$ es la lineal (ver Fig. 3.12) y su expresión es

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \tag{3.2.1}$$

las condiciones de frontera correspondiente en los puntos nodales resultan ser

$$u\Big|_{\substack{x=x_i\\y=y_i}} = u_i \; ; \quad u\Big|_{\substack{x=x_j\\y=y_j}} = u_j \; ; \quad u\Big|_{\substack{x=x_m\\y=y_m}} = u_m \tag{3.3.2}$$

Al hacer que la ec 3.3.1 satisfaga las ecs 3.3.2 se obtiene

$$u = \frac{1}{2\Delta}\left\{(a_i+b_i x+c_i y)u_i+(a_j+b_j x+c_j y)u_j+(a_m+b_m x+c_m y)u_m\right\} \tag{3.3.3}$$

donde

$$a_i = x_j\, y_m - x_m\, y_j \tag{3.3.4}$$

$$b_i = y_i - y_m = y_{jm} \tag{3.3.5}$$

$$c_i = x_m - x_j = x_{mj} \tag{3.3.6}$$

y los coeficientes a_j, a_m, b_j, b_m, c_j y c_m se obtienen mediante permutación cíclica de los subíndices en las ecs 3.3.4 a 3.3.6.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2\, A_{ijm} \tag{3.3.7}$$

el área del triángulo ijm se indica con A_{ijm}.

La ec 3.3.3 se puede escribir como

$$u = N_k \, u_k \qquad k = 1, 2, 3 \tag{3.3.8}$$

que en forma matricial resulta ser

$$u = \underline{N} \, \underline{u} \tag{3.3.9}$$

donde:

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix}_{(1x3)} \tag{3.3.11}$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix}_{(3x1)} \tag{3.3.12}$$

y las funciones de forma

$$N_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \tag{3.3.13}$$

3.3.2 Elementos triangulares en coordenadas naturales

Como el número de términos que aparecen en un polinomio completo determina el número de puntos nodales requeridos, con base en el triángulo de Pascal, en la Fig. 3.13 se muestran los puntos nodales requeridos para los polinomios de interpolación lineal, cuadrática y cúbica del elemento triangular.

En lugar de proceder como en el inciso 3.3.1, se utiliza el concepto de coordenadas naturales que conduce a las coordenadas de área, L_1, L_2 y L_3 (Fig. 3.14),

cuya relación con las coordenadas cartesianas está dada por

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \tag{3.3.14}$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \tag{3.3.15}$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3 \tag{3.3.16}$$

donde la ec 3.3.16 establece que las coordenadas de área L_i son linealmente dependientes.

Otra forma alternativa de definir las coordenadas de área se indican a continuación (ver Fig. 3.14)

$$L_1 = A_{p23}/A_{123} \tag{3.3.17}$$

$$L_2 = A_{p31}/A_{123} \tag{3.3.18}$$

$$L_3 = A_{p12}/A_{123} \tag{3.3.19}$$

Las funciones de forma N_i para los elementos triangulares de la Fig. 3.14 resultan ser:

3.3.2.1 Interpolación lineal

Serequieren únicamente los 3 puntos nodales sobre los vértices

$$N_i = L_i \qquad i = 1,2,3 \tag{3.3.20}$$

3.3.2.2 Interpolación cuadrática

Se requieren 3 puntos nodales sobre los vértices y 3 puntos nodales sobre los lados.

a) Para los puntos en los vértices

$$N_i = (2\ L_i - 1)L_i \qquad i=1,2,3 \qquad (3.3.21)$$

b) Para los puntos sobre los lados, localizados al centro

$$N_4 = 4L_1\ L_2 \qquad (3.3.22)1$$

$$N_5 = 4L_2\ L_3 \qquad (3.3.22)2$$

$$N_6 = 4L_3\ L_1 \qquad (3.3.22)3$$

3.3.2.3 Interpolación cúbica

Se requieren 3 puntos nodales sobre los vértices, 6 puntos nodales sobre los lados y un punto nodal interior alineado con los puntos nodales de los lados.

a) Para los puntos en los vértices

$$N_i = \frac{1}{2}(3L_i - 1)(3L_i - 2)\ L_i \qquad i=1,2,3 \qquad (3.3.23)$$

b) Para los puntos sobre los lados, localizados al tercio

$$N_4 = \frac{9}{2}\ L_1\ L_2\ (3L_1 - 1) \qquad (3.3.24)1$$

$$N_5 = \frac{9}{2}\ L_1\ L_2\ (3L_2 - 1) \qquad (3.3.24)2$$

$$N_6 = \frac{9}{2}\ L_2\ L_3\ (3L_2 - 1) \qquad (3.3.24)3$$

$$N_7 = \frac{9}{2}\ L_2\ L_3\ (3L_3 - 1) \qquad (3.3.24)4$$

$$N_8 = \frac{9}{2}\ L_3\ L_1\ (3L_3 - 1) \qquad (3.3.24)5$$

$$N_9 = \frac{9}{2} L_3 L_1 (3L_1 - 1) \qquad (3.3.24)6$$

c) Para el punto interior

$$N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3 \qquad (3.3.25)$$

3.3.3 Referencias para elementos rectangulares

Para esta geometría es conveniente usar coordenadas normalizadas y la forma de seleccionarlas se indica en la Fig. 3.15.

Debido a la geometría del rectángulo, las funciones de forma se pueden generar, sistemáticamente, mediante productos de polinomios en las dos coordenadas.

3.3.4 Familia lagrangiana para elementos rectangulares

Si las funciones de interpolación se construyen con los polinomios de Lagrange (ec 3.2.41), se pueden escribir como

$$N_i(\xi,\eta) = \ell_j^m (\xi)\ \ell_k^n (\eta) \qquad (3.3.26)$$

donde:

N_i es la función de interpolación para cualquier punto nodal i

ℓ_j^m corresponde al polinomio de Lagrange para la variable ξ que pasa por m puntos nodales j, localizados en líneas definidas mediante η = constante y

ℓ_k^n es el polinomio de Lagrange para la variable η que pasa por n puntos nodales k, localizados mediante ξ = constante.

En la Fig. 3.16 se muestran los puntos nodales requeridos para algunos miembros de la familia de Lagrange. El uso de estas funciones está muy limitado, tanto por el número de puntos nodales requeridos como por el número de términos parásitos que resultan en los polinomios, N_i.

3.3.5 Familia Serendipity para elementos rectangulares

Las funciones de interpolación de esta familia se obtuvieron, originalmente, por inspección; y por esta razón, Zienkiewicz les asignó el nombre de Serendipity, en similitud con la princesa de Serendip de la novela de Horace Walpole, famosa por sus descubrimientos casuales.

Esta familia se originó por la conveniencia de que las funciones de interpolación dependan de puntos nodales localizados sobre los lados del elemento, como puede verse en la Fig. 3.17. Es necesario aseverar que las funciones generadas por los puntos localizados sobre los lados, generan polinomios completos hasta el grado tres; para aproximaciones cuartas o más, es necesario adicionar nodos interiores.

Las funciones de forma para varias aproximaciones se indican a continuación:

3.3.5.1 Interpolación lineal

Se requieren únicamente los 4 puntos nodales sobre las esquinas

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\,\xi_i)(1 + \eta\,\eta_i) \qquad i=1,2,3,4 \qquad (3.3.27)$$

3.3.5.2 Interpolación cuadrática

Se requieren 4 puntos nodales sobre las esquinas y 4 puntos nodales sobre los lados.

a) Para puntos sobre las esquinas

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\,\xi_i)(1 + \eta\,\eta_i)(\xi\,\xi_i + \eta\,\eta_i - 1) \qquad i=1,2,3,4 \qquad (3.3.28)$$

b) Para los puntos sobre los lados, localizados al centro

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\,\eta_i) \quad \text{para} \quad \xi_i = 0 \qquad i=5,7 \qquad (3.3.29)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi\,\xi_i)(1 - \eta^2) \quad \text{para} \quad \eta_i = 0 \qquad i=6,8 \qquad (3.3.30)$$

3.3.5.3 Interpolación cúbica

Se requieren 4 puntos nodales sobre las esquinas y 8 puntos nodales sobre los lados.

a) Para puntos sobre las esquinas

$$N_i = \frac{1}{32}(1 + \xi\,\xi_i)(1 + \eta\,\eta_i)\left[9(\xi^2 + \eta^2) - 10\right] \qquad i=1,2,3,4 \qquad (3.3.31)$$

b) Para los puntos sobre los lados, localizados al tercio

$$N_i = \frac{9}{32}(1+\xi\,\xi_i)(1-\eta^2)(1+9\eta\,\eta_i) \text{ para } \xi_i=\pm 1 \text{ y } \eta_i=\pm\frac{1}{3} \quad i=7,8,11,12 \qquad (3.3.32)$$

$$N_i = \frac{9}{32}(1+\eta\,\eta_i)(1-\xi^2)(1+9\xi\,\xi_i) \text{ para } \eta_i=\pm 1 \text{ y } \xi_i=\pm\frac{1}{3} \quad i=5,6,9,10 \qquad (3.3.33)$$

3.4 Elementos tridimensionales

Al igual que en el inciso 3.4, se bosquejan las funciones de interpolación para las geometrías simples formadas con superficies planas ya que en el inciso 3.5 se extienden estas funciones a geometrías más generales, como el hexaedro.

3.4.1 Elemento tetraedro lineal en coordenadas cartesianas

La función tridimensional $u=u(x,y,z)$ se puede representar en forma de polinomios lineales como se indica a continuación

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \tag{3.4.1}$$

Las condiciones de frontera, correspondientes a los puntos nodales (ver Fig. 3.18), resultan ser

$$u\Big|_{\substack{x=x_i\\y=y_i\\z=z_i}} = u_i \;;\quad u\Big|_{\substack{x=x_j\\y=y_j\\z=z_j}} = u_j \;;\quad u\Big|_{\substack{x=x_m\\y=y_m\\z=z_m}} = u_m \;;\quad u\Big|_{\substack{x=x_p\\y=y_p\\z=z_p}} = u_p \tag{3.4.2}$$

Al hacer que la ec 3.4.1 satisfaga las ecs 3.4.2 resulta:

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y + d_i z$$

$$N_j = a_j + b_j x + c_j y + d_j z$$

$$N_m = a_m + b_m x + c_m y + d_m z$$

$$N_p = a_p + b_p x + c_p y + d_p z$$

$$u = \frac{1}{V_{ijmp}} (N_i\, u_i + N_j\, u_j + N_m\, u_m + N_p\, u_p) \tag{3.4.3}$$

donde:

V_{ijmp} es el volumen del tetraedro formado con los puntos nodales i,j,m y p , y se cuantifica mediante

$$V_{ijmp} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \qquad (3.4.4)$$

y los coeficientes a_i, b_i, c_i y d_i se cuantifican como se indica a continuación:

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \qquad (3.4.5)$$

$$b_i = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix} \qquad (3.4.6)$$

$$c_i = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix} \qquad (3.4.7)$$

$$d_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \qquad (3.4.8)$$

Las otras constantes ($a_j, b_j, c_j, d_j, a_m, b_m, c_m, d_m, a_p, b_p, c_p$ y d_p) se definen enteramente en forma similar a las correspondientes constantes a_i, b_i, c_i y d_i, mediante un intercambio cíclico de los subíndices en el orden p,i,j,m, con la convención establecida en la Fig. 3.18.

La ec 3.4.3 se puede escribir, con las notaciones indicial y matricial, como se indica a continuación:

$$u = N_k \, u_k \qquad k = i, j, m, p \qquad (3.4.9)$$

$$u = \underline{N}_N \, \underline{u}_N \qquad (3.4.10)$$

donde:

$$\underline{N}_N = \left[N_i \quad N_j \quad N_m \quad N_p \right]_{(1x4)} \qquad (3.4.11)$$

$$\underline{u}_N = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \\ u_p \end{Bmatrix}_{(4x1)} \qquad (3.4.12)$$

y las funciones de forma, N_k

$$N_k = (a_k + b_k x + c_k y + d_k z)/6 \, V_{ijmp} \quad k = i,j,m,p \qquad (3.4.13)$$

3.4.2 Elementos tetraedros en coordenadas naturales

De manera similar al elemento triangular bidimensional, el número de puntos nodales requeridos para definir polinomios completos, así como el tetraedro de Pascal, se muestra en la Fig. 3.19.

Las coordenadas naturales del tetraedro se denominan coordenadas de volumen, L_i; i=1,2,3,4, cuya relación con las coordenadas cartesianas resulta ser (Fig. 3.20).

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4 \qquad (3.4.14)$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4 \qquad (3.4.15)$$

$$z = L_1 z_1 + L_2 z_2 + L_3 z_3 + L_4 z_4 \qquad (3.4.16)$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \qquad (3.4.17)$$

La forma alternativa para definir las coordenadas de volumen se indica a continuación (Fig. 3.20)

$$L_1 = V_{p234}/V_{1234} \qquad (3.4.18)$$

$$L_2 = V_{p134}/V_{1234} \qquad (3.4.19)$$

$$L_3 = V_{p124}/V_{1234} \qquad (3.4.20)$$

$$L_4 = V_{p123}/V_{1234} \qquad (3.4.21)$$

Las funciones de forma N_i , para los elementos tetraedros de la Fig. 3.19, se indican a continuación:

3.4.2.1 Interpolación lineal

Se requieren únicamente los 4 puntos nodales sobre los vértices.

$$N_i = L_i \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{3.4.22}$$

3.4.2.2 Interpolación cuadrática

Se requieren 4 puntos nodales sobre los vértices y 6 puntos nodales sobre las aristas, que en este caso se suponen localizadas al centro.

a) Para los puntos en los vértices

$$N_k = (2\, L_k - 1)L_k \qquad k = 1, 2, 3, 4 \tag{3.4.23}$$

b) Para los puntos del centro de las aristas

$$N_5 = 4\, L_1\, L_2 \tag{3.4.24}$$

.

.

.

$$N_{10} = 4\, L_2\, L_4 \tag{3.4.25}$$

3.4.2.3 Interpolación cúbica

Se requieren 4 puntos nodales sobre las esquinas, 12 puntos nodales sobre las aristas localizadas a los tercios y 4 puntos nodales sobre las caras, alineados con los puntos nodales de las aristas.

a) Para los puntos en los vértices

$$N_i = \frac{1}{2}(3\, L_i - 1)(3\, L_i - 2)L_i \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{3.4.26}$$

b) Para los puntos sobre las aristas

$$N_5 = \frac{9}{2} \quad L_1 L_2 (3 L_1 - 1) \tag{3.4.27}$$

$$N_6 = \frac{9}{2} \quad L_1 L_2 (3 L_2 - 1) \tag{3.4.28}$$

.
.
.

c) Para los puntos sobre las caras

$$N_{17} = 27 L_1 L_2 L_3 \tag{3.4.29}$$

$$N_{18} = 27 L_1 L_2 L_4 \tag{3.4.30}$$

.
.
.

3.4.3 Familia lagrangiana para prismas rectangulares

Las funciones de interpolación, N_i , se construyen directamente con el producto de tres polinomios de Lagrange, como se indica a continuación:

$$N_i(\xi,\eta,\zeta) = \ell_K^m (\xi)\ \ell_L^n (\eta)\ \ell_M^p (\zeta) \tag{3.4.31}$$

donde: ξ,η y ζ son las variables normalizadas y m,n y p son las subdivisiones a lo largo de cada arista (ver Fig. 3.21). Al igual que en los elementos bidimensionales, la aplicación práctica de estos elementos es casi nula por su ineficiencia.

3.4.4 Familia Serendipity para prismas rectangulares

Se obtiene con razonamientos enteramente similares a los usados en los elementos bidimensionales. En la Fig. 3.22 se muestran los puntos nodales asociados a los elementos cuyas funciones de interpolación se indican a continuación:

3.4.4.1 Interpolación lineal

Se requieren únicamente 8 puntos nodales sobre las esquinas.

$$N_i = \frac{1}{8}\ (1 + \xi\ \xi_i)(1 + \eta\ \eta_i)(1 + \zeta\ \zeta_i) \quad i=1,\ldots,8 \quad (3.4.32)$$

3.4.4.2 Interpolación cuadrática

Se requieren 8 puntos nodales sobre las esquinas y 16 puntos nodales sobre las aristas que se seleccionaron en los puntos medios.

a) Para los puntos sobre las esquinas

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\ \xi_i)(1 + \eta\ \eta_i)(1 + \zeta\ \zeta_i)(\xi\ \xi_i + \eta\ \eta_i + \zeta\ \zeta_i - 2) \quad i=1,2,3,\ldots,8 \quad (3.4.33)$$

b) Para los puntos sobre las aristas

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta\ \eta_i)(1 + \zeta\ \zeta_i) \qquad i=9,10,11,12$$

$$\forall \quad \xi_i = 0\ ; \quad \eta_i = \pm 1\ ; \quad \zeta_i = \pm 1 \quad (3.4.34)$$

.
.
.

3.4.4.3 Interpolación cúbica

Se requieren 8 puntos nodales sobre las esquinas y 24 puntos nodales sobre las aristas que se localizaron a los tercios.

a) Para puntos sobre las esquinas

$$N_i=\frac{1}{64}(1+\xi\ \xi_i)(1+\eta\ \eta_i)(1+\zeta\ \zeta_i)\left[9(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-19\right] \quad i=1,2,\ldots 8 \qquad (3.4.35)$$

b) Para los puntos sobre las aristas

$$N_i = \frac{9}{64}(1-\xi^2)(1+9\ \xi\ \xi_i)(1+\eta\ \eta_i)(1+\zeta\ \zeta_i) \quad i=9,\ldots,16 \qquad (3.4.36)$$

$$\forall \quad \xi = \pm \frac{1}{3}\ ; \quad \eta_i = \pm 1\ ; \quad \zeta_i = \pm 1$$

.
.
.

3.4.5 Elementos anillos axisimétricos

Si la geometría del cuerpo es la de un sólido de revolución o axisimétrico (ver Fig. 1.5), la configuración tridimensional se puede reducir a una bidimensional debido a la posibilidad de eliminar la variable angular. Entonces, se pueden utilizar los elementos finitos del inciso 3.3, pero con las variables asociadas a los ejes radial y axial.

3.5 *Elementos isoparamétricos*

Para que cualquier geometría, relativamente compleja, se pueda representar con un número pequeño de elementos, se necesitan elementos finitos con formas más complejas que las descritas en los incisos 3.2 a 3.4. En este inciso se tratan geometrías distorsionadas (lados y superficies curvas) de los elementos de forma simple que conduzcan a geometrías arbitrarias, según se puede

observar en la Fig. 3.23, en donde los puntos asociados a las regiones regulares mapean a puntos de las regiones irregulares. En este mapeo, la referencia original del elemento se transforma en una referencia curvilínea. Si el mapeo es uno a uno, se puede establecer una correspondencia entre las coordenadas cartesianas y las curvilíneas de la forma siguiente (caso tridimensional).

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = f \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = f \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} \tag{3.5.1}$$

Una vez establecida la relación dada por la ec 3.5.1, las funciones de forma se pueden especificar en las coordenadas locales y, mediante una serie de transformaciones, determinar los elementos correspondientes a una referencia arbitraria.

3.5.1 Transformación de coordenadas mediante funciones de forma

Si $N_i' = N_i'(\xi,\eta,\zeta)$ son las funciones de forma del elemento en las coordenadas locales (no deformadas), se puede escribir la relación siguiente:

$$x = N_1'x_1 + \ldots + N_m'x_m = N_i'x_i = \begin{pmatrix} N_1', \ldots, N_m' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{Bmatrix} = \underline{N}' \, \underline{x} \tag{3.5.2}$$

$$y = N_1' y_1 + \ldots + N_m' y_m = N_i' y_i = \left(N_1' , \ldots , N_m' \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix} = \underline{N}' \, \underline{y} \qquad (3.5.3)$$

$$z = N_1' z_1 + \ldots + N_m' z_m = N_i' z_i = \left(N_1' , \ldots , N_m' \right) \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_m \end{pmatrix} = \underline{N}' \, \underline{z} \qquad (3.5.4)$$

donde:

x, y, z son las coordenadas en la referencia cartesiana de cualquier punto localizado en el elemento deformado, y

x_i, y_i, z_i $(i = 1,m)$ son las correspondientes coordenadas cartesianas de los m puntos seleccionados apropiadamente sobre la frontera del elemento.

Para asegurar la continuidad entre las fronteras de los elementos mapeados, basta con asegurar que las funciones de forma, N_i' , garanticen la continuidad de los elementos en la configuración no deformada.

La representación de la variable de campo, función u , definida en la región del elemento y en términos de las coordenadas curvilíneas (ξ,η,ζ) y las funciones de forma, resulta ser:

$$u = N_i(\xi,\eta,\zeta) \, u_i = \left(N_1 , \ldots , N_n \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} = \underline{N} \, \underline{u} \qquad (3.5.5)$$

donde:

u_i, i=1,n son los valores de la variable u, en los n puntos nodales del elemento.

Para asegurar la continuidad de la función u (ec 3.5.5), basta con asegurar que las funciones de forma $N_i(\xi,\eta,\zeta)$ utilizadas, garanticen la continuidad de u en las coordenadas del elemento no deformado.

Los puntos nodales n utilizados para definir la interpolación de la función u(ec 3.5.5) pueden estar o no relacionados con los m puntos empleados para definir la geometría del elemento (ecs 3.5.2 a 3.5.4). En la Fig. 3.24 se muestran las relaciones que se pueden presentar para un elemento plano (cuadrilátero con lados curvos) en donde las funciones de forma N_i', i=1,8, para definir la geometría del elemento (ecs 3.5.2 a 3.5.4) son cuadráticas; mientras que las funciones de forma N_i , para definir la función u (ec 3.5.5) pueden ser lineal (i=1,4), cuadrática (i=1,8) o cúbica (i=1,12).

Se llaman elementos isoparamétricos cuando se utilizan los mismos puntos para definir a la geometría y a la función (n=m) y, por tanto, las funciones de forma son las mismas, es decir

$$N_i = N_i' \qquad i=1,\ldots,n \qquad (3.5.6)$$

En la actualidad son los elementos de uso más generalizado.

Se llaman elementos subparamétricos cuando n>m y elementos superparamétricos cuando n<m .

3.5.2 Derivadas de las funciones de forma

Considérese el sistema de referencia local ξ,η,ζ y su correspondiente sistema de referencia global x,y,z; las derivadas parciales de las funciones de forma N_i, respecto a las variables locales, por la regla de la cadena, se pueden expresar como:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi} \tag{3.5.7}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta} \tag{3.5.8}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \zeta} \tag{3.5.9}$$

Las ecs 3.5.7 a 3.5.9 se pueden expresar en forma matricial, según se indica a continuación:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \underline{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{3.5.10}$$

donde:

$\underline{J}$ denominada matriz jacobiana, se puede cuantificar explícitamente con base en las ecs 3.5.2 a 3.5.4, ya que, por la ec 3.5.6, se conocen las funciones de forma en la referencia local (elementos isoparamétricos). La expresión de $\underline{J}$ resulta ser:

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{pmatrix} \qquad (3.5.11)$$

En la ec 3.5.10 se puede conocer el término de la izquierda, ya que se conocen las N_i, por lo que se puede escribir la ecuación siguiente

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \qquad (3.5.12)$$

Para que exista $\underline{J}^{-1}$ es necesario que el jacobiano (det $\underline{J}$) de la transformación sea diferente de cero, es decir

$$\det \underline{J} = |\underline{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} \right| \neq 0 \qquad (3.5.13)$$

3.5.3 Integración en coordenadas locales

En el método del elemento finito es muy frecuente cuantificar integrales sobre regiones de los diversos elementos finitos, como las indicadas a continuación:

$$V_I = \int_V G_V \, dV = \int_V G_V(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \tag{3.5.14}$$

$$A_I = \int_A G_A \, dA = \int_A G_A(x,y) \, dx \, dy \tag{3.5.15}$$

$$L_I = \int_L G_L \, dX = \int_L G_L(x) \, dx \tag{3.5.16}$$

Debido a la complejidad, tanto de los integrandos como de las regiones de integración, es conveniente establecer las integrales anteriores en función de las coordenadas naturales, y quedan como se indica a continuación:

$$V_I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \overline{G}_V(\xi,\eta,\zeta) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \tag{3.5.17}$$

$$A_I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \overline{G}_A(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta \tag{3.5.18}$$

$$L_I = \int_{-1}^{1} \overline{G}_L(\xi) \, d\xi \tag{3.5.19}$$

Aunque las regiones de integración de las ecs 3.5.17 a 3.5.19 están bien definidas las funciones $\overline{G}_V$, $\overline{G}_A$ y $\overline{G}_L$ resultan, en general, sumamente comple

jas de tal manera que, para llevar a cabo las integraciones es necesario un método numérico que sea una aproximación al problema.

3.5.3.1 Integración numérica para rectángulos y prismas rectangulares

La cuadratura recomendable es la gaussiana en donde el error es del orden $0(\Delta^{2n})$. Con esta cuadratura, las ecs 3.5.17 a 3.5.19 se transforman en las siguientes:

$$V_I = \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} H_i H_j H_m \overline{G}_V (\xi_i, \eta_j, \zeta_m) \qquad (3.5.20)$$

$$A_I = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} H_i H_j \overline{G}_A (\xi_i, \eta_j) \qquad (3.5.21)$$

$$L_I = \sum_{i=1}^{n} H_i \overline{G}_L (\xi_i) \qquad (3.5.22)$$

donde:

H_i son los coeficientes de peso asociado a las abscisas ξ_i, por donde se hace pasar la aproximación polinómica; cuyos valores se indican en la tabla 3.1.

3.5.3.2 Integración numérica para triángulos y tetraedros

Las coordenadas locales de estos elementos difieren, respecto a las del inciso 3.5.3.2, en los siguientes puntos

i) son linealmente dependientes y son mayores en número (uno más) que las coordenadas cartesianas

ii) los límites de variación son diferentes, ya que varían de 0 a 1

A fin de continuar con el uso de las ecs 3.5.7 a 3.5.13, se puede hacer el siguiente cambio de variables (para el caso tridimensional):

$$\xi = L_1 \tag{3.5.23}$$

$$\eta = L_2 \tag{3.5.24}$$

$$\zeta = L_3 \tag{3.5.25}$$

$$1 - \xi - \eta - \zeta = L_4 \tag{3.5.26}$$

Como las funciones de forma N_i están dadas en función de las variables L_i, el cálculo de sus derivadas se pueden efectuar con expresiones de la forma siguiente:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_4}\frac{\partial L_4}{\partial \xi} \tag{3.5.27}$$

Al utilizar las ecs 3.5.23 a 3.5.26 en la ec 3.5.27, resulta

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \tag{3.5.28}$$

De manera similar, se pueden obtener las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \tag{3.5.29}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_3} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \tag{3.5.30}$$

Las ecs 3.5.17 y 3.5.18 se adaptan a los correspondientes límites de integración y son:

$$V_I = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \int_0^{1-\eta-\zeta} \bar{G}_V(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} \bar{G}_V(L_1,L_2,L_3,L_4)\,dL_1\,dL_2\,dL_3 \tag{3.5.31}$$

$$A_I = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \bar{G}_A(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \bar{G}_A(L_1,L_2,L_3)\,dL_1\,dL_2 \tag{3.5.32}$$

La aproximación numérica de las ecs 3.5.31 y 3.5.32, mediante la fórmula de Hammer, se indica a continuación:

$$V_I = \sum_{i=1}^{n} (\bar{G}_V)_i \, W_i^V \tag{3.5.33}$$

$$A_I = \sum_{i=1}^{n} (\bar{G}_A)_i \, W_i^A \tag{3.5.34}$$

donde el límite de la sumatoria n representa los puntos de integración considerados (ver tablas 3.2 y 3.3). El símbolo $(\ )_i$ indica el valor de la función limitada por el paréntesis en las coordenadas de los puntos de integración (ver tablas 3.2 y 3.3), y W_i^V y W_i^A son los factores de peso correspondientes. En las tablas 3.2 y 3.3 se especifican todos los elementos para el uso de las fórmulas de Hammer.

4. ASPECTOS NUMERICOS DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO FINITO

Con base en los desarrollos de los capítulos anteriores, se puede aseverar que para poder aplicar el método del elemento finito en la solución de los problemas que se presentan en la práctica profesional, es necesario el uso de una computadora digital. Por tanto, se requiere desarrollar programas de computadora que, con la información de la geometría, el material y las cargas, se construyan y se resuelvan las ecuaciones de equilibrio correspondientes, y se determinen, además, los elementos requeridos para el análisis y el diseño de las estructuras.

En este capítulo se resumen los aspectos numéricos que forman parte de los algoritmos asociados al método del elemento finito y que, desde el punto de vista de la computación, controlan la eficiencia de los programas de computadoras asociados a los algoritmos en cuestión.

4.1 Solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales

El modelo matemático correspondiente al sistema de ecuaciones algebraicas lineales se acostumbra representar como:

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b} \tag{4.1.1}$$

donde $\underline{A}$ es la matriz de coeficientes (de rigideces, $\underline{K}$, en nuestro caso) cuadrada, de n renglones por n columnas, $\underline{b}$ el vector de cargas ($\underline{P}$ en nuestro caso) y $\underline{x}$ el vector incógnita (los desplazamientos $\underline{U}$, en nuestro caso).

Los métodos de solución para resolver el modelo matemático dado por la ec 4.1.1, conforman dos grandes grupos y son: los métodos directos y los métodos iterativos. Los que actualmente se encuentran en uso en el método del elemento finito son los directos y, de este grupo, los denominados compactos, descritos a continuación.

4.1.1 Métodos directos generales

En el álgebra lineal se demuestra que cualquier matriz $\underline{A}$, no singular, se puede descomponer en el producto de dos matrices triangulares, una inferior $\underline{L}$ y otra superior $\underline{U}$, con la condición de que alguna de ellas esté normalizada (los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad). Entonces, se puede escribir lo siguiente:

$$\underline{A} = \underline{L}\,\underline{U} \tag{4.1.2}$$

Las matrices triangulares $\underline{L}$ y $\underline{U}$, se cuantifican con la ec 4.1.2 y a tal proceso se denomina triangulación. Al sustituir la ec 4.1.2 en la ec 4.1.1 se obtiene

$$\underline{L}\,\underline{U}\,\underline{x} = \underline{b} \tag{4.1.3}$$

La ec 4.1.3 se puede escribir como

$$\underline{L}\,\underline{y} = \underline{b} \qquad (4.1.4)$$

donde

$$\underline{U}\,\underline{x} = \underline{Y} \qquad (4.1.5)$$

Las ecs 4.1.4 y 4.1.5, conocidas como sustitución hacia adelante y sustitución hacia atrás, respectivamente, establecen que el proceso de triangulación (ec 4.1.2) transforma el sistema original, que es arbitrario (ec 4.1.1), en dos sistemas triangulares (ecs 4.1.4 y 4.1.5) que son mucho más simples de resolver.

De acuerdo con las dos posibilidades para seleccionar la matriz normalizada, se obtienen los dos métodos siguientes.

4.1.1.1 Método de Gauss

El método de eliminación de Gauss, en forma compacta, se obtiene cuando la matriz triangular interior está normalizada, es decir

$$L_{ii}=1 \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (4.1.6)$$

4.1.1.2 Método de Crout

El método de Crout, en forma compacta, se obtiene cuando la matriz normalizada es la triangular superior, o sea

$$U_{ii} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (4.1.7)$$

4.1.2 Métodos directos para matrices simétricas

Si la matriz de coeficientes es simétrica, es decir,

$$\underline{A}^T = \underline{A} \tag{4.1.8}$$

los métodos de Gauss y de Crout se pueden modificar para tomar en cuenta tal situación. Para ello, la ec 4.1.2, con base en la matriz identidad, $\underline{I}$, se puede escribir como:

$$\underline{A} = \underline{L}\ \underline{I}\ \underline{U} = \underline{L}\ \underline{D}\ \underline{D}^{-1}\ \underline{U} = \underline{L}\ \underline{D}^{-1}\ \underline{D}\ \underline{U} \tag{4.1.9}$$

donde $\underline{D}$ es una matriz diagonal, formada con la diagonal de $\underline{U}$, en el método de Gauss, o bien con la diagonal de $\underline{L}$, en el método de Crout.

4.1.2.1 Método de Gauss modificado.

Si la ec 4.1.9 queda arreglada como:

$$A = \underline{L}\ \underline{D}\ \underline{D}^{-1}\ \underline{U} = \underline{L}\ \underline{D}\ \overline{\underline{U}} \tag{4.1.10}$$

donde

$$\overline{\underline{U}} = \overline{\underline{D}}^{1}\ \underline{U} \tag{4.1.11}$$

Al hacer que la ec 4,1,10 satisfaga la condición de simetría (ec 4.1.8) Se obtiene que

$$\overline{\underline{U}}^T\ \underline{D}\ \underline{L}^T = \underline{L}\ \underline{D}\ \overline{\underline{U}} \tag{4.1.12}$$

de donde se concluye lo siguiente

$$\overline{\underline{U}} = \underline{L}^T \tag{4.1.13}$$

Al sustituir la ec 4.1.13 en la ec 4.1.10 se obtiene el proceso de triangulación para el método de Gauss modificado para matrices simétricas y resulta

ser

$$\underline{A} = \underline{L}\,\underline{D}\,\underline{L}^T \tag{4.1.14}$$

La ec 4.1.14 establece que el proceso de triangulación queda definido por una matriz triangular inferior normalizada y una matriz diagonal.

El proceso de sustitución se obtiene al sustituir la ec 4.1.14 en la 4.1.1 y resulta

$$\underline{L}\,\underline{D}\,\underline{L}^T\,\underline{x} = \underline{b} \tag{4.1.15}$$

La ec 4.1.15 se puede escribir como

$$\underline{L}\,\underline{y} = \underline{b} \tag{4.1.16}$$

$$\underline{D}\,\underline{L}^T\,\underline{x} = \underline{y} \tag{4.1.17}$$

La ec 4.1.16 es la sustitución hacia adelante y la ec 4.1.17 la sustitución hacia atrás.

4.1.2.2 Método de Crout modificado

Si la ec 4.1.9 queda arreglada como

$$\underline{A} = \underline{L}\,\underline{D}^{-1}\,\underline{D}\,\underline{U} = \overline{\underline{L}}\,\underline{D}\,\underline{U} \tag{4.1.18}$$

donde

$$\overline{\underline{L}} = \underline{L}\,\underline{D}^{-1} \tag{4.1.19}$$

Al hacer que la ec 4.1.18 satisfaga la condición de simetría (ec 4.1.8),

resulta que

$$\underline{U}^T \underline{D} \underline{L}^{-T} = \underline{L} \underline{D} \underline{U} \qquad (4.1.20)$$

la ec 4.1.20 establece que

$$\underline{L} = \underline{U}^T \qquad (4.1.21)$$

Al sustituir la ec 4.1.21 en la ec 4.1.18 se obtiene el proceso de triangulación para el método de Crout modificado para matrices, que se indica como

$$\underline{A} = \underline{U}^T \underline{D} \underline{U} \qquad (4.1.22)$$

La ec 4.1.22 establece que el proceso de triangulación queda definido por una matriz triangular superior normalizada y una matriz diagonal.

Al comparar las ecs 4.1.14 y 4.1.22, que definen los procesos de triangulación para los métodos de Gauss y de Crout modificados para matrices simétricas, se puede concluir que no existe diferencia entre ellos por lo que puede llamársele método de Gauss-Crout.

De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones de sustitución hacia adelante y hacia atrás, en notación de matriz triangular superior normalizada, se pueden escribir como se indica a continuación (ya que $\underline{U} = \underline{L}^T$)

$$\underline{U}^T \underline{y} = \underline{b} \qquad (4.1.23)$$

$$\underline{D} \underline{U} \underline{x} = \underline{y} \qquad (4.1.24)$$

4.1.2.3 Método de Cholesky

Se puede considerar como una variante del método de Gauss-Crout, para el caso en que la matriz $\underline{A}$ sea positiva definida. Entonces la ec 4.1.22 se puede escribir como

$$\underline{A} = \underline{U}^T \underline{D}^{1/2} \underline{D}^{1/2} \underline{U} = \overline{\underline{U}}^T \overline{\underline{U}} \qquad (4.1.25)$$

donde la matriz triangular $\overline{\underline{U}} = D^{1/2} \underline{U}$, ya no está normalizada.

Las sustituciones hacia adelante y hacia atrás se obtienen al sustituir la ec 4.1.25 en la ec 4.1.1 y resultan ser:

$$\overline{\underline{U}}^T \underline{y} = \underline{b} \qquad (4.1.26)$$

$$\overline{\underline{U}} \ \underline{x} = \underline{y} \qquad (4.1.27)$$

4.1.2.4 Selección y organización del método de solución

La selección del método debe hacerse con base en el menor número de operaciones consumidoras de tiempo en la computadora. Para matrices simétricas, que es el caso de interés, el método de Gauss-Crout, ordenado en forma inteligente, efectúa menos operaciones que el de Cholesky y es el que se recomienda. Su algoritmo, para matrices cuadradas, se resume en la tabla 4.1

Aunque en los desarrollos de las ecuaciones de los métodos de solución se emplearon varios arreglos matriciales y vectoriales, en la computadora se debe utilizar el menor número de ellos ya que, en general, la capacidad de la memoria rápida está limitada. En la tabla 4.1 se presentan las subrutinas del algoritmo de Gauss-Crout donde se utiliza un arreglo matricial y un arreglo vectorial, por las razones indicadas a continuación

a) la matriz diagonal, $\underline{D}$, se guarda en la diagonal de la matriz original $\underline{A}$ y la matriz triangular superior normalizada se guarda en el triángulo superior de la matriz original $\underline{A}$. Lo anterior se puede observar en la subrutina TGCCEV de la tabla 4.1, en donde se entra con la matriz original $\underline{A}$.

b) el vector $\underline{y}$ se guarda en el vector $\underline{b}$ (sustitución hacia adelante) y al final, el vector $\underline{x}$ es el que queda guardado en el vector $\underline{b}$ (sustitución hacia atrás). Lo anterior se indica en la subrutina SGCCEV de la tabla 4.1, donde se entra con la matriz triangularizada y el vector de cargas.

Otro aspecto relacionado con la organización del método de solución consiste en cómo se llevan a cabo las operaciones matriciales de los algoritmos. Como una recomendación *a priori*, que se justifica en el inciso 4.1.3, conviene realizar por columnas las operaciones con las matrices; en las subrutinas de la tabla 4.1 se incluye esta recomendación.

4.1.3 Organización de las ecuaciones de equilibrio

El ordenamiento de las ecuaciones de equilibrio depende de la numeración de los puntos nodales y a la vez determina la configuración de los coeficientes de la matriz $\underline{A}$, que es de la forma mostrada en la Fig. 4.1, para matrices simétricas. De acuerdo con la Fig. 4.1, la información correspondiente al arreglo matricial $\underline{A}$ se puede manipular con menor o mayor eficiencia, tanto operativa como de capacidad, si se guarda en los arreglos descritos a continuación. Para comparar la eficiencia se utiliza un sistema de 54 ecuaciones.

4.1.3.1 Arreglos cuadrados

Este arreglo es el más elemental (Fig 4.1) y, de hecho, los algoritmos de la tabla 4.1 están desarrollados para estos arreglos. A continuación se resumen sus desventajas numéricas

a) existe gran desperdicio de espacio en la memoria rápida porque, al menos se almacenan los $\frac{1}{2}$ n (n-1) elementos que no se utilizan, ya que no se opera con ellos (cantidades bajo la diagonal principal de la Fig 4.1)

b) existe otro desperdicio de espacio al guardar cantidades nulas, localizadas arriba de los contornos mostrados en la Fig 4.1. Como con estas cantidades sí se opera, también existe desperdicio de tiempo.

La localización de los elementos en estos arreglos es directa. En la Tab 4.2 se muestran los tiempos y localidades requeridos para la solución de sistema de ecuaciones cuando se utilizan los arreglos cuadrados para los métodos generales (Gauss y Crout) y los modificados para matrices simétricas (Gauss-Crout y Cholesky). Para el método de Gauss-Crout se utilizan dos versiones, la simple (V-s), que es la que resulta directamente, y la eficiente (V-E), que utiliza un ordenamiento de las operaciones en el algoritmo directo. La diferencia en tiempos y en espacio es significativa.

4.1.3.2 Arreglos rectangulares (en banda)

En la Fig 4.2 se muestran los coeficientes que definen la matriz A, comprendidos entre la banda limitada por la diagonal principal y el contorno de banda, indicados en la Fig 4.1. Estos coeficientes forman un arreglo rectangular denominado arreglo en banda, cuyas desventajas se resumen a continuación.

a) subsiste el desperdicio de espacio, porque se almacenan elementos que no existen en la matriz A, como son los ceros que aparecen en el triángulo inferior derecho de la Fig 4.2 con los cuales, desde luego, no se opera

b) existe otro desperdicio de espacio al guardar los ceros que existen entre los contornos de silueta y de banda, mostrados en la Fig 4.1. Puesto que con estos ceros sí se opera, también existe desperdicio de tiempo.

Para la localización de los elementos de este arreglo, en relación con el arreglo cuadrado, no se requiere información adicional al ancho de banda, y se puede definir una relación que identifique las columnas, ya que son las únicas que se distorsionan.

En la tabla 4.2 se muestran los tiempos y localidades requeridas para el caso del arreglo en banda. En este ejemplo (ancho de banda igual a 37), la reducción en tiempos no es tan significativa, como lo es en el número de localidades, en relación con el arreglo cuadrado.

4.1.4. Arreglos unidimensionales (en silueta)

En la Fig 4.3 se muestran los coeficientes que definen a la matriz A, comprendidos entre la diagonal principal y el contorno de silueta, indicado en la Fig 4.1. Estos coeficientes forman un arreglo unidimensional, al colocar las columnas una tras otra.

En este arreglo no se puede hablar de desperdicio de espacio ni operativo, ya que se eliminan todos los ceros no operativos y, por tanto, es el arreglo más eficiente que hasta la fecha se ha logrado. Para la localización de

los elementos, en este arreglo en relación con el arreglo cuadrado, se requiere un arreglo adicional (como el IA mostrado en la Fig 4.3) en donde se especifique la localización del elemento de la diagonal principal correspondiente a cada columna. Con este arreglo se puede definir una relación que identifique tanto a los renglones como a las columnas distorsionadas al pasar al arreglo unidimensional.

Los tiempos y localidades requeridos cuando se utiliza este arreglo se muestran en la tabla 4.2. Se puede observar la gran reducción de localidades así como del tiempo de computación, razones por lo que este tipo de arreglo es el más recomendable.

4.2 *Solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden*

4.2.1 Introducción

El modelo matemático correspondiente a las ecuaciones de equilibrio dinámico de los medios continuos modelados con la teoría de la elasticidad se indica con las ecs 2.4.10 a 2.4.13.

La solución de las ecs 2.4.10 puede obtenerse mediante la aplicación de los procedimientos clásicos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Sin embargo, tales métodos resultan, en general, ineficientes para los sistemas estructurales. Por tal razón, se han desarrollado técnicas especiales que toman en cuenta las características de las matrices K, C y M, para mejorar la eficiencia del método de solución. Tales procedimientos conducen a dos clases de métodos denominados directos y de superposición modal. Los métodos directos integran la ec 2.4.10 en forma directa, sin ningu-

na transformación. Los que interesan son los de paso simple, y se basan en las siguientes ideas:

1) Se satisface el equilibrio únicamente en puntos discretos a intervalos Δt, denominado paso de integración (Fig. 4.4)
2) Se supone conocida la variación, en el intervalo Δt, de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

Las ideas anteriores conducen a métodos aproximados, y la aproximación y el costo de cada método dependen de la variación que se elija. Los métodos directos que se utilizan con mayor frecuencia se enlistan a continuación:

a) método de diferencias centrales
b) método de Houbolt
c) método theta de Wilson
d) método beta de Newmark
e) método alfa de Hilber
f) método cúbico de Argyris

La diferencia básica entre estos métodos se encuentra en la forma en que se aproxima la respuesta en el intervalo Δt.

En los métodos de diferencias centrales y de Houbolt, se emplea una aproximación de las aceleraciones y velocidades en términos de los desplazamientos, mediante diferencias finitas.

En el método theta de Wilson, se supone una variación lineal en el intervalo $[t, t + \theta\Delta t]$, donde el parámetro $\theta > 1$, controla la convergencia y estabilidad del método.

En el método beta de Newmark, se generaliza la variación lineal de la

aceleración mediante dos parámetros γ y β

En el método alfa de Hilber se emplea la misma aproximación que el beta de Newmark, pero introduce un término perturbador que se controla mediante un parámetro α.

El método cúbico de Argyris aproxima la fuerza de inercia mediante una variación cúbica en el intervalo Δt

El propósito que se persigue en cualquier método de integración numérica es que el método sea eficiente en el contexto de una buena aproximación a un bajo costo.

Es necesario hacer notar que entre más pequeño se elija el tamaño del paso de integración (Δt) mejor será la aproximación; sin embargo, el costo del tiempo de computación resulta mayor, ya que éste es directamente proporcional al número de pasos de integración. Entonces, la eficiencia de un método depende de la elección apropiada del paso de integración, Δt, para el cual el método converge a la solución.

La convergencia de un método se puede probar al satisfacer las condiciones de consistencia y estabilidad. Además se ha observado que cuando el tamaño del paso es grande, comparado con el período más corto del sistema, la solución aproximada, no obstante satisfacer el criterio de estabilidad, presenta errores significativos en las amplitudes correspondientes a los primeros pasos de integración. Este fenómeno se conoce con el nombre de excedencia y debe investigarse que no se presente en el método seleccionado.

En el método de superposición modal, el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (ec 2.4.10) se transforma en n ecuaciones de un grado de libertad,

desacopladas (n es el número de grados de libertad de la ec 2.4.10). La transformación que se emplea para desacoplar las ecuaciones se determina al resolver el correspondiente problema de vibración libre de la ec 2.4.10 (cuando $\underline{C} = \underline{0}$ y $\underline{P} = \underline{0}$) que conduce a un problema de valores característicos. En el espacio transformado (denominado natural) se integran por separado las ecuaciones desacopladas, cuya solución se transforma al espacio original.

El método directo que se describe en este resumen, y cuyo uso se recomienda, es el método beta de Newmark, para $\beta=1/4$ y $\gamma= \frac{1}{2}$, ya que es incondicionalmente estable, se obtiene buena aproximación y no presenta el fenómeno de excedencia. El método de superposición modal también se recomienda como método eficiente para obtener la respuesta de sistemas lineales

4.2.2 Método beta de Newmark

Al considerar que la variación de la aceleración relativa, asociada a cada grado de libertad, tiene una variación lineal en el intervalo de integración $[t_0, t_1]$, como se indica en la Fig. 4.4, se obtienen las expresiones siguientes:

$$\underline{\ddot{U}}_1 = \underline{\ddot{U}}_1 \qquad (4.2.1)$$

$$\underline{\dot{U}}_1 = \underline{\dot{U}}_o + \frac{1}{2} \Delta t \, (\underline{\ddot{U}}_o + \underline{\ddot{U}}_1) \qquad (4.2.2)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_o + \Delta t \, \underline{\dot{U}}_o + \frac{1}{6} \Delta t^2 (2\underline{\ddot{U}}_o + \underline{\ddot{U}}_1) \qquad (4.2.3)$$

Con base en las ecs 4.2.2 y 4.2.3, Newmark propone la aproximación siguiente:

$$\underline{\dot{U}}_1 = \underline{\dot{U}}_o + (1-\gamma)\Delta t\ \underline{\ddot{U}}_o + \gamma\ \Delta t\ \underline{\ddot{U}}_1 \qquad (4.2.4)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_o + \Delta t\ \underline{\dot{U}}_o + (\tfrac{1}{2} - \beta)\Delta t^2\ \underline{\ddot{U}}_o + \beta\ \Delta t^2\ \underline{\ddot{U}}_1 \qquad (4.2.5)$$

El parámetro β está relacionado con la estabilidad del método (para $\beta = 1/4$, es incondicionalmente estable) y el parámetro γ está relacionado con la estabilidad y convergencia del método debido al amortiguamiento matemático que puede inducirse (para $\gamma = 1/2$, no existe amortiguamiento matemático). Para el caso en que $\beta=1/6$ y $\gamma = 1/2$, las ecs 4.2.4. y 4.2.5. son iguales a las ecs 4.2.2 y 4.2.3, respectivamente.

Al definir los vectores $\underline{a}$ y $\underline{b}$, como se indica a continuación:

$$\underline{a} = \underline{\ddot{U}}_o + (1-\gamma)\ \Delta t\ \underline{\ddot{U}}_o \qquad (4.2.6)$$

$$\underline{b} = \underline{U}_o + \Delta t\ \underline{\dot{U}}_o + (\tfrac{1}{2} - \beta)\ \Delta t^2\ \underline{\ddot{U}}_o \qquad (4.2.7)$$

las ecs 4.2.4 y 4.2.5 se escriben como sigue:

$$\underline{\dot{U}}_1 = \underline{a} + \gamma\ \Delta t\ \underline{\ddot{U}}_1 \qquad (4.2.8)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{b} + \beta\ \Delta t^2\ \underline{\ddot{U}}_1 \qquad (4.2.9)$$

Al valuar las ecuaciones de movimiento (ec 2.4.10) al final del intervalo ($t = t_1$) y en la ecuación resultante se sustituyen las ecs 4.2.8 y 4.2.9, se obtiene la siguiente expresión:

$$\underline{M}\ \underline{\ddot{U}}_1 + \underline{C}(\underline{a} + \gamma\ \Delta t\ \underline{\ddot{U}}_1) + \underline{K}(\underline{b} + \beta\ \Delta t^2\ \underline{\ddot{U}}_1) = \underline{P}_1 \qquad (4.2.10)$$

que puede escribirse como

$$\underline{K}^* \ddot{\underline{U}}_1 = \underline{r} \qquad (4.2.11)$$

donde

$$\underline{K}^* = \underline{M} + \gamma \Delta t \underline{C} + \beta \Delta t^2 \underline{K} \qquad (4.2.12)$$

$$\underline{r} = \underline{P}_1 - \underline{C}\,\underline{a} - \underline{K}\,\underline{b} \qquad (4.2.13)$$

La ecuación que gobierna la aceleración al final del paso es un sistema de ecuaciones algebraicas, lineales, como los descritos en el inciso 4.1. Puesto que las matrices $\underline{M}$, $\underline{C}$ y $\underline{K}$ son simétricas, $\underline{K}^*$ también lo es. Si el tamaño del paso (Δt) se conserva constante durante el proceso de integración, y puesto que las matrices $\underline{M}$, $\underline{C}$ y $\underline{K}$ son constantes, $\underline{K}^*$ también resulta constante.

Al sustituir la ec 2.4.11 en las ecs 4.2.12 y 4.2.13 se obtienen las expresiones siguientes:

$$\underline{K}^* = (1+\gamma \Delta t\alpha)\underline{M} + (\gamma \Delta t\mu + \beta \Delta t^2)\underline{K} \qquad (4.2.14)$$

$$\underline{r} = \underline{P}_1 - \alpha \underline{M}\,\underline{a} - \underline{K}(\mu\,\underline{a} + \underline{b}) \qquad (4.2.15)$$

La forma sistemática para utilizar el método de Newmark se muestra en la tabla 4.3

4.3 Esquema simple para organizar un programa de computadora

En la Fig. 4.5 se muestran, en forma esquemática, los aspectos más relevantes para construir un programa de computadora simple, basado en el método del elemento finito, para cargas estáticas. Una secuencia a seguir para construir

el programa de computadora puede ser la siguiente:

a) se define el modelo matemático que se va a resolver. Para ello se procede como se bosqueja en el capítulo 1.

b) se especifica la forma de cómo manipular los parámetros que definen a los materiales con que se va a construir la estructura. De acuerdo con las ecuaciones constitutivas del capítulo 1, son: E, ν y ρ. Esto se define en el bloque indicado con MATERIALES.

c) se establece cómo definir la geometría y condiciones de frontera de la estructura por resolver. Queda definida al conocer las coordenadas de los puntos nodales en que se idealiza la estructura, y sus condiciones cinemáticas, según el capítulo 2. Esto se realiza en el bloque llamado COORDENADAS.

d) se especifica la información necesaria para establecer las ecuaciones de equilibrio de cada uno de los elementos de la estructura (por ejemplo: puntos nodales, material, geometría, funciones de interpolación, etc). Con tal información se puede construir la matriz de rigideces de cada elemento, según se indica en los capítulos 2 y 3. Todo lo anterior se realiza en el bloque indicado por ELEMENTOS.

e) se indica la forma de realizar el ensamble de la matríz de rigideces, $\underline{K}$, como se especifica en el capítulo 2, y se lleva a cabo la triangulación (Cap. 4). Esta actividad queda indicada en el bloque denominado ENSAMBLE.

f) se sistematiza la forma de cuantificar el vector de cargas con opción a varias condiciones de cargas. Las fuerzas debidas a esfuerzos y deformaciones iniciales, peso propio, y cargas de superficie en los elementos finitos (capítulos 2 y 3) es conveniente cuantificarlos en el bloque

ELEMENTOS. En el bloque CARGAS se especifican las cargas concentradas que actúan en los puntos nodales y se llevan a cabo las operaciones indicadas, de acuerdo con los capítulos 2 y 4.

Es muy recomendable que los bloques mostrados funcionen como subrutinas controladas por un programa principal que permita el dimensionamiento eficiente de los arreglos que se utilicen en las subrutinas.

Desde luego que el esquema simplista de la Fig. 4.5 puede tener muchas variantes que dependerán de la experiencia numérica de quienes las elaboren.

5. DESARROLLO PASO A PASO DE UN EJEMPLO DE APLICACION DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO

5.1 *Formulación del problema*

Obtenga con el método del elemento finito los elementos mecánicos y cinemáticos de la estructura mostrada en la Fig. 5.1.

De acuerdo con la geometría mostrada en la Fig. 5.1, el modelo estructural corresponde a un estado plano de esfuerzos (inciso 1.3.1.2) y coincide con el modelo utilizado para ejemplificar el capítulo 2.

5.2 *Elemento finito seleccionado*

El elemento finito seleccionado es el cuadrilátero isoparamétrico lineal (4 puntos nodales). Debido a la geometría de la estructura, los elementos finitos utilizados resultan ser rectángulos, según se muestran en la Fig. 5.2.

5.3 . *Componentes del elemento finito tipo*

A fin de establecer las ecuaciones de equilibrio de cada uno de los elementos finitos en que se discretizó la estructura, es conveniente hacer referencia a un elemento tipo, que se describe a continuación, y se representa en la Fig. 5.3 (para un cuadrilátero general con 4 puntos nodales).

5.3.1 Vector de desplazamientos nodales del elemento, $\underline{u}^e$

De acuerdo con el inciso 2.3.2 se puede escribir

$$\underline{u}^e = \begin{Bmatrix} \underline{u}_i \\ \underline{u}_j \\ \underline{u}_k \\ \underline{u}_\ell \end{Bmatrix}_{(8x1)} \qquad \underline{u}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}_{(2x1)} \text{, etc.} \qquad (5.3.1)$$

5.3.2 Funciones de forma, $N_m(\xi,\eta)$, en coordenadas locales

Están dadas por la ec 3.3.27 y resultan ser

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\,\xi_i)(1+\eta\,\eta_i) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad (5.3.2)$$

$$N_j = \frac{1}{4}(1+\xi\ \xi_j)(1+\eta\ \eta_j) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \qquad (5.3.3)$$

$$N_k = \frac{1}{4}(1+\xi\ \xi_k)(1+\eta\ \eta_k) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad (5.3.4)$$

$$N_\ell = \frac{1}{4}(1+\xi\ \xi_\ell)(1+\eta\ \eta_\ell) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \qquad (5.3.5)$$

5.3.3 Relación entre los sistemas de referencia global (x,y) y local (ξ,η)

Están dadas por las ecs 3.5.2, 3.5.3 y 3.5.6. Para los elementos isoparamétricos lineales resultan ser:

$$x = \sum_{i,j,k,\ell} N_m X_m = N_i X_i + N_j X_j + N_k X_k + N_\ell X_\ell \qquad (5.3.6)$$

$$y = \sum_{i,j,k,\ell} N_m Y_m = N_i Y_i + N_j Y_j + N_k Y_k + N_\ell Y_\ell \qquad (5.3.7)$$

5.3.4 Aproximación de los desplazamientos

$$\tilde{u} = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k + N_\ell u_\ell \approx u \qquad (5.3.8)$$

$$\tilde{v} = N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k + N_\ell v_\ell \approx v \qquad (5.3.9)$$

que en forma matricial resulta ser

$$\underline{u} = \underline{N}\ \underline{u}^e \qquad (5.3.10)$$

donde:

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_\ell & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_\ell \end{pmatrix}_{(2x8)} \qquad (5.3.11)$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{(2x1)} \qquad (5.3.12)$$

5.3.5 Tensor de deformaciones

De acuerdo con la ec 2.3.12

$$\underline{e} = \underline{B}\,\underline{u}^{e} \tag{5.3.13}$$

donde la matriz de deformaciones $\underline{B}$ resulta ser

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_\ell}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_\ell}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial N_\ell}{\partial y} & \frac{\partial N_\ell}{\partial x} \end{bmatrix}_{(3x8)} \tag{5.3.14}$$

5.3.6 Derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas globales

De acuerdo con la ec 3.5.12 se puede escribir

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{5.3.15}$$

donde la matriz jacobiana, $\underline{J}$, para el problema plano, resulta ser

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x,_\xi & y,_\xi \\ x,_\eta & y,_\eta \end{bmatrix} \tag{5.3.16}$$

$\underline{J}^{-1}$ se puede escribir como

$$\underline{J}^{-1} = \frac{1}{J}\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} = \frac{1}{J}\begin{pmatrix} y,_{\eta} & -y,_{\xi} \\ -x,_{\eta} & x,_{\xi} \end{pmatrix} \tag{5.3.17}$$

El jacobiano de la transformación, J , resulta ser

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = x,_{\xi}\, y,_{\eta} - x,_{\eta}\, y,_{\xi} \tag{5.3.18}$$

Entonces, explícitamente, los operadores derivadas respecto a las coordenadas locales quedan

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J}\left(y,_{\eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - y,_{\xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) \tag{5.3.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{J}\left(-x,_{\eta}\frac{\partial}{\partial \xi} + x,_{\xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) \tag{5.3.20}$$

Para las funciones de forma, N_m, se tienen las expresiones siguientes:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = N_{i,x} = \frac{1}{J}\left(y,_{\eta}\, N_{i,\xi} - y,_{\xi}\, N_{i,\eta}\right) \tag{5.3.21}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = N_{i,y} = \frac{1}{J}\left(-x,_{\eta}\, N_{i,\xi} + x,_{\xi}\, N_{i,\eta}\right) \tag{5.3.22}$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} = N_{j,x} = \frac{1}{J}\left(y,_{\eta}\, N_{j,\xi} - y,_{\xi}\, N_{j,\eta}\right) \tag{5.3.23}$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial y} = N_{j,y} = \frac{1}{J}\left(-x,_{\eta}\, N_{j,\xi} + x,_{\xi}\, N_{j,\eta}\right) \tag{5.3.24}$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial x} = N_{k,x} = \frac{1}{J} (y,_\eta N_{k,\xi} - y,_\xi N_{k,\eta}) \qquad (5.3.25)$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial y} = N_{k,y} = \frac{1}{J} (-x,_\eta N_{k,\xi} + x,_\xi N_{k,\eta}) \qquad (5.3.26)$$

$$\frac{\partial N_\ell}{\partial x} = N_{\ell,x} = \frac{1}{J} (y,_\eta N_{\ell,\xi} - y,_\xi N_{\ell,\eta}) \qquad (5.3.27)$$

$$\frac{\partial N_\ell}{\partial y} = N_{\ell,y} = \frac{1}{J} (-x,_\eta N_{\ell,\xi} + x,_\xi N_{\ell,\eta}) \qquad (5.3.28)$$

5.3.7 Derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas locales

De acuerdo con las expresiones de las funciones de forma, $\underline{N}$, dadas en el inciso 5.3.2 se obtienen las expresiones siguientes

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = N_{i,\xi} = - \frac{1}{4} (1-\eta) \qquad (5.3.29)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = N_{i,\eta} = - \frac{1}{4} (1-\xi) \qquad (5.3.30)$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial \xi} = N_{j,\xi} = \frac{1}{4} (1-\eta) \qquad (5.3.31)$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial \eta} = N_{j,\eta} = - \frac{1}{4} (1+\xi) \qquad (5.3.32)$$

$$\frac{N_k}{\partial \xi} = N_{k,\xi} = \frac{1}{4} (1+\eta) \qquad (5.3.33)$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial \eta} = N_{k,\eta} = \frac{1}{4} (1+\xi) \qquad (5.3.34)$$

$$\frac{\partial N_\ell}{\partial \xi} = N_{\ell,\xi} = - \frac{1}{4} (1+\eta) \qquad (5.3.35)$$

$$\frac{\partial N_\ell}{\partial \eta} = N_{\ell,\eta} = \frac{1}{4}(1-\xi) \tag{5.3.36}$$

5.3.8 Derivadas de las coordenadas globales respecto a las coordenadas locales

De acuerdo con las expresiones del inciso 5.3.3 se obtiene

$$x_{,\xi} = N_{i,\xi}\, x_i + N_{j,\xi}\, x_j + N_{k,\xi}\, x_k + N_{\ell,\xi}\, x_\ell \tag{5.3.37}$$

$$x_{,\eta} = N_{i,\eta}\, x_i + N_{j,\eta}\, x_j + N_{k,\eta}\, x_k + N_{\ell,\eta}\, x_\ell \tag{5.3.38}$$

$$y_{,\xi} = N_{i,\xi}\, y_i + N_{j,\xi}\, y_j + N_{k,\xi}\, y_k + N_{\ell,\xi}\, y_\ell \tag{5.3.39}$$

$$y_{,\eta} = N_{i,\eta}\, y_i + N_{j,\eta}\, y_j + N_{k,\eta}\, y_k + N_{\ell,\eta}\, y_\ell \tag{5.3.40}$$

5.3.9 Matriz de masas

La expresión de la matriz de masas está dada por (ec 2.3.23)

$$\underline{M}^e = \int_{\Omega^e} \rho\, \underline{N}^T\, \underline{N}\, d\Omega \tag{2.3.23}$$

La región de integración para un estado plano resulta ser

$$d\Omega = t\,dA \tag{5.3.41}$$

donde:

t es el espesor del estado plano de esfuerzos. Para el estado plano de deformaciones el espesor t=1.

De acuerdo con el inciso 5.3.4, se puede escribir la expresión siguiente, para la matriz de masas consistente

$$\underline{N}^T \underline{N} = \begin{pmatrix} N_i^2 & 0 & N_iN_j & 0 & N_iN_k & 0 & N_iN_\ell & 0 \\ & N_i^2 & 0 & N_iN_j & 0 & N_iN_k & 0 & N_iN_\ell \\ & & N_j^2 & 0 & N_jN_k & 0 & N_jN_\ell & 0 \\ & & & N_j^2 & 0 & N_jN_k & 0 & N_jN_\ell \\ & & & & N_k^2 & 0 & N_kN_\ell & 0 \\ & & & & & N_k^2 & 0 & N_kN_\ell \\ & & & & & & N_\ell^2 & 0 \\ & & & & & & & N_\ell^2 \end{pmatrix} \qquad (5.3.42)$$

Para la matriz de masas concentrada, de acuerdo con el criterio del inciso 2.3.8c (escalamiento de la diagonal principal de la matriz de masas consistente de tal manera que se preserve la masa total) se puede escribir la aproximación siguiente

$$\underline{N}^T \underline{N} \approx \lambda \begin{pmatrix} N_i^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & N_i^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & N_j^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & N_j^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & N_k^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & N_k^2 & 0 & 0 \\ & & & & & & N_\ell^2 & 0 \\ & & & & & & & N_\ell^2 \end{pmatrix} \qquad (5.3.43)$$

donde la constante λ se calcula con la condición de que se preserve la masa total del elemento, M^e , es decir

$$M^e = \lambda \int_{\Omega^e} \rho \, (N_i^2 + N_j^2 + N_k^2 + N_\ell^2) \, d\Omega = \rho \, A^e t \qquad (5.3.44)$$

donde:

A^e es el área del elemento finito.

5.3.10 Integración numérica de la matriz de masas

Puesto que la integral de una matriz es igual a una matriz formada por la integral de sus componentes, entonces, basta con especificar la forma de integrar cualquier componente, digamos, el (1,1), para integrar cualquier otro.

$$M^e(1,1) = \int_{\Omega^e} \rho \, N_i^2 \, d\Omega \qquad (5.3.45)$$

Si ρ es constante en la región, y al tomar en cuenta la expresión de $d\Omega$ en una región plana, se puede escribir la expresión siguiente

$$M^e(1,1) = \rho t \int_{A^e} N_i^2 \, (x,y) \, dA \qquad (5.3.46)$$

Al tomar en cuenta la transformación de variables la ecuación anterior se puede escribir como

$$M^e(1,1) = \rho t \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} J(\xi,\eta) \, N_i^2 \, (\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta \qquad (5.3.47)$$

De acuerdo con las ecs 3.5.18 y 3.5.21 se puede

$$M^e(1,1) = \rho t \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} H_m \, H_n \, J \, (\xi_m,\eta_n) \, N_i^2 \, (\xi_m,\eta_n) \qquad (5.3.48)$$

donde M y N son los puntos de integración de la cuadratura de Gauss-Legandre. Si M=N=2, la ecuación anterior se puede escribir como

$$M^e(1,1) = \rho t \left[H_1^2 \, J(\xi_1,\eta_1)N_i^2(\xi_1,\eta_1)+H_1H_2 \, J(\xi_1,\eta_2)N_i^2(\xi_1,\eta_2) \right.$$

$$\left. +H_2H_1 \, J(\xi_2,\eta_1)N_i^2(\xi_2,\eta_1) + H_2^2 J(\xi_2,\eta_2)N_i^2(\xi_2,\eta_2) \right]$$

$$= M_{11}^e(1,1) + M_{12}^e(1,1) + M_{21}^e(1,1) + M_{22}^e(1,1) \quad (5.3.49)$$

Los valores de las abscisas ξ_m,η_n están indicados por los a_j en la tabla 3.1 y los valores de los pesos H_m y H_n por los H_j de la tabla en cuestión.

5.3.11 Matriz de rigideces

La ecuación de la matriz de rigideces dada por la ec 2.3.30 es:

$$\underline{K}^e = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \, \underline{D} \, \underline{B} \, d\Omega \quad (2.3.30)$$

Para un estado plano resulta ser

$$\underline{K}^e = t \int_{A^e} \underline{B}^T(x,y) \, \underline{D} \, \underline{B} \, (x,y) \, dA \quad (5.3.50)$$

y al tomar en cuenta la transformación de variables

$$\underline{K}^e = t \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} J(\xi,\eta) \, \underline{B}^T(\xi,\eta) \, \underline{D} \, \underline{B}(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta \quad (5.3.51)$$

De acuerdo con las ecuaciones de los incisos 5.3.5 y 5.3.6, la expresión de la matriz de deformaciones, $\underline{B}$, resulta ser:

$$\underline{B} = \frac{1}{J}$$

1	2	3	4
$y_{,\eta} N_{i,\xi} - y_{,\xi} N_{i,\eta}$	0	$y_{,\eta} N_{j,\xi} - y_{,\xi} N_{j,\eta}$	0
0	$-x_{,\eta} N_{i,\xi} + x_{,\xi} N_{i,\eta}$	0	$-x_{,\eta} N_{j,\xi} + x_{,\xi} N_{j,\eta}$
$-x_{,\eta} N_{i,\xi} + x_{,\xi} N_{i,\eta}$	$y_{,\eta} N_{i,\xi} - y_{,\xi} N_{i,\eta}$	$-x_{,\eta} N_{j,\xi} + x_{,\xi} N_{j,\eta}$	$y_{,\eta} N_{j,\xi} - y_{,\xi} N_{j,\eta}$

5	6	7	8
$y_{,\eta} N_{k,\xi} - y_{,\xi} N_{k,\eta}$	0	$y_{,\eta} N_{\ell,\xi} - y_{,\xi} N_{\ell,\eta}$	0
0	$-x_{,\eta} N_{k,\xi} + x_{,\xi} N_{k,\eta}$	0	$-x_{,\eta} N_{\ell,\xi} + x_{,\xi} N_{\ell,\eta}$
$-x_{,\eta} N_{k,\xi} + x_{,\xi} N_{k,\eta}$	$y_{,\eta} N_{k,\xi} - y_{,\xi} N_{k,\eta}$	$-x_{,\eta} N_{\ell,\xi} + x_{,\xi} N_{\ell,\eta}$	$y_{,\eta} N_{\ell,\xi} - y_{,\xi} N_{\ell,\eta}$

(5.3.52)

La matriz de coeficientes elásticos, $\underline{D}$, para el estado plano de esfuerzos (inciso 1.3.1.2) resulta ser

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{pmatrix} \tag{1.3.25}$$

La expresión de la matriz de rigideces cuando se utiliza la integración numérica resulta ser

$$\underline{K}^e = t \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} H_m H_n J(\xi_m,\eta_n) \underline{B}^T(\xi_m,\eta_n) \underline{D} \underline{B}(\xi_m,\eta_n) \tag{5.3.53}$$

Si M=N=2, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} \underline{K}^e = t \Big[& H_1^2 J(\xi_1,\eta_1) \underline{B}^T(\xi_1,\eta_1) \underline{D} \underline{B}(\xi_1,\eta_1) + \\ & H_1 H_2 J(\xi_1,\eta_2) \underline{B}^T(\xi_1,\eta_2) \underline{D} \underline{B}(\xi_1,\eta_2) + \\ & H_2 H_1 J(\xi_2,\eta_1) \underline{B}^T(\xi_2,\eta_1) \underline{D} \underline{B}(\xi_2,\eta_1) + \\ & H_2^2 J(\xi_2,\eta_2) \underline{B}^T(\xi_2,\eta_2) \underline{D} \underline{B}(\xi_2,\eta_2) \Big] \\ = \underline{K}^e_{11} + \underline{K}^e_{12} + \underline{K}^e_{21} + \underline{K}^e_{22} & \end{aligned} \tag{5.3.54}$$

5.3.12 Vector de cargas

De acuerdo con las ecs 2.3.24, 2.3.25, 2.3.27, 2.3.28 y 2.3.32, el vector de cargas es

$$\underline{f}^e = \int_{\Gamma^e} \underline{N}^T \underline{\sigma}_{(\underline{n})} \, d\Gamma + \int_{\Omega^e} \rho \underline{N}^T \underline{f} \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \, \underline{e}_o \, d\Omega - \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{\sigma}_o \, d\Omega \tag{5.3.55}$$

Para el problema que se quiere resolver, se tiene que

$$\underline{\sigma}_{(\underline{n})} = \underline{e}_o = \underline{\sigma}_o = \underline{0} \tag{5.3.56}$$

por lo que la ec 5.3.55, al tomar en cuenta a las ecs 5.3.41 y 5.3.56, y al transformarla, se puede escribir como

$$\underline{f}^e = \underline{f}^e_c = t \int_{A^e} \rho \underline{N}^T \underline{f} \, dA = t \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \rho J(\xi,\eta) \, \underline{N}^T(\xi,\eta) \, \underline{f} \, d\xi \, d\eta \tag{5.3.57}$$

Puesto que $\underline{f}$ es el vector de fuerzas por unidad de masa, $\rho\underline{f}$ es un vector de fuerza por unidad de volumen que se puede escribir como

$$\rho\underline{f} = PV \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \\ \operatorname{sen} \alpha \end{Bmatrix} \tag{5.3.58}$$

donde:

PV es el peso volumétrico del material y

α la dirección de la aceleración de la gravedad en relación con el sistema de referencia global, según se muestra en la Fig. 5.4.

Debido a que el vector $\rho\underline{f}$ (ec 5.3.58) no es función de las coordenadas locales, puede salir fuera del operador integral, de la ec 5.3.57, y al efectuar su integración numérica se tiene:

$$\underline{f}^e_c = t \left[\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} H_m H_n \, J(\xi_m,\eta_n) \, \underline{N}^T(\xi_m,\eta_n) \right] \rho\underline{f}$$

$$= t \left[H_1^2 \, J(\xi_1,\eta_1) \, \underline{N}^T(\xi_1,\eta_1) + \right.$$

$$H_1 H_2 \, J(\xi_1,\eta_2) \, \underline{N}^T (\xi_1,\eta_2) +$$

$$H_2 H_1 \, J(\xi_2,\eta_1) \, \underline{N}^T (\xi_2,\eta_1) +$$

$$H_2^2 \, J(\xi_2,\eta_2) \, \underline{N}^T (\xi_2,\eta_2) \Big] \, \rho \underline{f}$$

$$= \underline{f}_{C_{11}}^{(e)} + \underline{f}_{C_{12}}^{(e)} + \underline{f}_{C_{21}}^{(e)} + \underline{f}_{C_{22}}^{(e)} \qquad (5.3.59)$$

5.4 *Ordenamiento de las ecuaciones de equilibrio de la estructura*

De acuerdo con el inciso 2.4, para la construcción de las ecuaciones de equilibrio (ecs 2.4.3 y 2.4.9) se requiere de un ordenamiento de los grados de libertad de los puntos nodales de la estructura.

El ordenamiento depende de la numeración de los puntos nodales de la estructura, que puede ser arbitraria. La localización de los coeficientes de la matriz de rigideces, $\underline{K}$, depende de la numeración utilizada y la que se recomienda es la que provoca que tales coeficientes queden lo más cercanos a la diagonal principal. Para lograr lo anterior, se requiere que la numeración de los puntos nodales provoque la menor diferencia entre los grados de libertad para todos los elementos finitos.

A fin de aclarar los conceptos anteriores, se considera la malla del ejemplo de aplicación con la numeración de los puntos nodales indicadas en las Figs 5.2 y 5.5.

Una vez definida la numeración de los puntos nodales, se puede obtener el ordenamiento de los grados de libertad, que también puede hacerse de diversas maneras; pero el más recomendable es el indicado a continuación:

i). se le asocia a cada punto nodal un indicador de grado de libertad. Este indicador es nulo si el punto nodal tiene libertad de moverse en la dirección considerada ó vale 1 si su desplazamiento es nulo. El arreglo matricial de estos indicadores se representa mediante ID(NGL, NPE), donde NGL es el número de grados de libertad por punto nodal (2 para el ejemplo), y NPE es el número de puntos nodales requeridos para construir la malla de la estructura (10 para el ejemplo).

a) para la numeración de la Fig. 5.2

$$\underline{ID} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}_{(2x10)} \qquad (5.4.1)$$

b) para la numeración de la Fig. 5.5

$$\underline{ID} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}_{(2x10)} \qquad (5.4.2)$$

ii) con los valores de los indicadores conocidos se procede a la numeración de los grados de libertad de los puntos nodales. Esto se hace en el mismo arreglo matricial, ID. Al recorrer cada casillero (por columnas) se hace la operación siguiente:

- si es un uno, se sustituye por un cero
- si es un cero, y si es el primero, se sustituye por el número uno que es la primera ecuación de equilibrio; a partir del segundo cero en adelante, se sustituye por el número de la ecuación de equilibrio anterior más uno.

a) para la numeración de la Fig. 5.2

De acuerdo con la ec 5.4.1 se tiene

$$\underline{ID} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5.4.3)$$

b) para la numeración de la Fig. 5.5

De acuerdo con la ec 5.4.2 se tiene

$$\underline{ID} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 9 & 11 & 13 & 15 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 & 10 & 12 & 14 & 16 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5.4.4)$$

De acuerdo con los desarrollos anteriores, el ordenamiento de los grados de libertad para el punto nodal N queda localizado en la columna N del arreglo ID. Para conocer los grados de libertad para cada elemento finito, es necesario saber cuáles son los valores de los puntos nodales i,j,k y ℓ de la referencia local (Fig. 5.3). En la tabla 5.1 se indican las numeraciones de las Figs. 5.2 y 5.5.

Para tener explícitamente indicados los grados de libertad de cada elemento finito es conveniente construir un arreglo vectorial, IE , con NGL*NPN elementos, donde NPN es el número de puntos nodales del elemento (4 para el ejemplo). Este vector se construye, en forma general para el ejemplo, como se indica a continuación

$$\underline{IE} = \begin{Bmatrix} ID(1,i) \\ ID(2,i) \\ ID(1,j) \\ ID(2,j) \\ ID(1,k) \\ ID(2,k) \\ ID(1,\ell) \\ ID(2,\ell) \end{Bmatrix} \tag{5.4.5}$$

Con base en las ecs 5.4.3 y 5.4.4 y en la tabla 5.1 se escriben los vectores $\underline{IE}$ para cada elemento de las Figs. 5.2 y 5.5.

a) Vector $\underline{IE}$ para la numeración de la Fig. 5.2

$$\underline{IE}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix} ; \underline{IE}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 12 \\ 7 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \end{Bmatrix} ; \underline{IE}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 16 \\ 11 \\ 12 \\ 9 \\ 10 \\ 13 \\ 14 \end{Bmatrix} ; \underline{IE}^{(4)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ 16 \\ 13 \\ 14 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.4.6}$$

b) Vectores $\underline{IE}$ para la numeración de la Fig. 5.5

$$\underline{IE}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 12 \\ 9 \\ 10 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix} ; \underline{IE}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 13 \\ 14 \\ 11 \\ 12 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix} ; \underline{IE}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 16 \\ 13 \\ 14 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix} ; \underline{IE}^{(4)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ 16 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.4.7}$$

En las ecs 5.4.6 y 5.4.7 se puede observar que los vectores indicador de ecuación del elemento 4, $\underline{IE}^{(4)}$ contiene elementos nulos. Esto es una indi cación de que los componentes de desplazamiento de los puntos nodales corres

pondientes son conocidos y su valor es nulo, por tanto, no deben considerar se para calcular la diferencia entre los grados de libertad de los elementos finitos, misma que permite definir cuál numeración de los puntos nodales es la más recomendable. En la tabla 5.2 se presenta la diferencia en cuestión para las numeraciones de las Figs. 5.2 y 5.5, calculadas con los datos mostrados en las ecs 5.4.6 y 5.4.7.

De la tabla 5.2 se concluye que la numeración recomendable es la de la Fig. 5.2. Con estas diferencias de numeración se calcula el ancho de semibanda de la matriz de rigideces cuando se utilizan arreglos rectangulares (en banda) según el inciso 4.1.3.2.

5.5 *Matriz de rigideces del elemento finito número uno*

En la Fig. 5.6 se muestran los datos geométricos correspondientes al elemento finito número uno. Se utiliza la numeración de la Fig. 5.2.

La ec 5.3.54 es la expresión de la matriz de rigideces de un elemento finito tipo con cuatro puntos de integración numérica. A continuación, se calculan los componentes de tal ecuación.

5.5.1 Matriz de rigideces para el primer punto de integración numérica

De acuerdo con la ec 5.3.54 la matriz de rigideces correspondiente al primer punto de integración numérica resulta ser

$$K_{11}^{(1)} = t\, H_1^2\, J(\xi_1,\eta_1)\, \underline{B}^T(\xi_1,\eta_1)\, \underline{D}\, \underline{B}(\xi_1,\eta_1) \qquad (5.5.1)$$

Las coordenadas locales del primer punto de integración numérica (ξ_1,η_1) así como los coeficientes de peso (H_1) para $N=2$ se obtienen de la tabla 3.1 y se muestran en la Fig. 5.7.

De acuerdo con la Fig. 5.7 se tiene que

$$\xi_1 = -0.57735... \tag{5.5.2}$$

$$\eta_1 = -0.57735... \tag{5.5.3}$$

$$H_1 = 1.0 \tag{5.5.4}$$

5.5.1.1 Funciones de forma

De acuerdo con las ecs 5.3.2 a 5.3.5, 5.5.2 y 5.5.3 se obtiene los valores siguientes

$$N_i = \frac{1}{4}(1+0.57735)(1+0.57735) = 0.62201 \tag{5.5.5}$$

$$N_j = 0.16667 \tag{5.5.6}$$

$$N_k = 0.04466 \tag{5.5.7}$$

$$N_\ell = 0.16667 \tag{5.5.8}$$

5.5.1.2 Derivadas de las funciones de forma respecto a sus coordenadas locales

De acuerdo con las ecs 5.3.29 a 5.3.36, 5.5.2 y 5.5.3 resulta

$$N_{i,\xi} = -\frac{1}{4}(1+0.57735) = -0.3934 \tag{5.5.9}$$

$$N_{i,\eta} = -0.39434 \tag{5.5.10}$$

$$N_{j,\xi} = 0.39434 \tag{5.5.11}$$

$$N_{j,\eta} = -0.10566 \tag{5.5.12}$$

$$N_{k,\xi} = 0.10566 \tag{5.5.13}$$

$$N_{k,\eta} = 0.10566 \tag{5.5.14}$$

$$N_{\ell,\xi} = -0.10566 \tag{5.5.15}$$

$$N_{\ell,\eta} = 0.39434 \tag{5.5.16}$$

5.5.1.3 Derivadas de las coordenadas globales respecto a las coordenadas locales

De acuerdo con las ecs 5.3.37 a 5.3.40, 5.5.9 a 5.5.16 y la Fig. 6 se obtiene

$$x_{,\xi} = (-0.39434)(6.0)+(0.39434)(8.0)+(0.10566)(8.0) + (-0.10566)(6.0) = 1.0 \quad (5.5.17)$$

$$x_{,\eta} = 0 \quad (5.5.18)$$

$$y_{,\xi} = 0 \quad (5.5.19)$$

$$y_{,\eta} = 0.5 \quad (5.5.20)$$

5.5.1.4 Jacobiano de la transformación

Con base en las ecs 5.3.18, 5.5.17 a 5.5.20 resulta

$$J = (1.0)(0.5)-(0.)(0.)=0.5 = J(\xi_1,\eta_1) \quad (5.5.21)$$

5.5.1.5 Derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas globales

Con base en las ecs 5.3.21 a 5.3.28, 5.5.9 a 5.5.21 se obtiene

$$N_{i,x} = \frac{1}{0.5}\left[(0.5)(-0.39434)-(0.)(-0.39434)\right] = -0.39434 \quad (5.5.22)$$

$$N_{i,y} = -0.78868 \quad (5.5.23)$$

$$N_{j,x} = 0.39434 \quad (5.5.24)$$

$$N_{j,y} = -0.21132 \quad (5.5.25)$$

$$N_{k,x} = 0.10566 \quad (5.5.26)$$

$$N_{k,y} = 0.21132 \tag{5.5.27}$$

$$N_{\ell,x} = -0.10566 \tag{5.5.28}$$

$$N_{\ell,y} = 0.78868 \tag{5.5.29}$$

5.5.1.6 Matriz de deformaciones

Al sustituir las ecs 5.5.23 a 5.5.29 en la ec 5.3.14 se obtiene la expresión de la matriz de deformaciones, $\underline{B}_{11}^{(1)}$, dada por la ec 5.5.30.

5.5.1.7 Matriz de rigideces

De acuerdo con las ecs 5.5.4 , 5.5.21, 5.5.30 y la Fig. 5.1, se pueden calcular los elementos de la ec 5.5.1. El primer elemento resulta ser:

$$\begin{aligned}
\underline{K}_{11}^{(1)}(1,1) = t\, J(\xi_1,\eta_1)\Big[& B_{11}(D_{11}B_{11}+D_{12}B_{21}+D_{13}B_{31}) + \\
& B_{21}(D_{21}B_{11}+D_{22}B_{21}+D_{23}B_{31}) + \\
& B_{31}(D_{31}B_{11}+D_{32}B_{21}+D_{33}B_{31})\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= (0.3)(0.5)\Big\{ & (-0.39434)\Big[(2083333.)(-0.39434) + \\
& (416667.)(0.)+(0.)(-0.78868)\Big] \\
& +(\ 0.\ )\Big[(416667.)(-0.39434) + \\
& (2083333.)(0)+(0.)(-0.78868)\Big] \\
& +(-0.78868)\Big[(0.\ )(-0.39434) + \\
& (0.\ )(0.) + \\
& (833333.)(-0.78868)\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

$$= 126347.$$

donde la matriz de coeficientes elásticos (ec 1.3.25 y Fig. 5.1) es

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 2083\,333. & 416\,667. & 0. \\ 416\,667. & 2083\,333. & 0. \\ 0. & 0. & 833\,333. \end{bmatrix} \qquad (5.5.31)$$

Al calcular los elementos restantes de la matriz, $\underline{K}_{11}^{(1)}$, se obtiene la ec 5.5.32.

5.5.2 Matrices de rigideces para los restantes puntos de integración numérica

Al proceder de manera similar a como se hizo en el inciso 5.5.1 se obtienen las matrices de rigideces para los puntos de integración numérica 2, 3 y 4 mostrados en la Fig. 5.7, correspondientes a $\underline{K}_{12}^{(1)}$, $\underline{K}_{21}^{(1)}$ y $\underline{K}_{22}^{(1)}$ de la ec 5.3.54. Las matrices resultantes se indican con las ecs 5.5.33 a 5.5.35.

5.5.3 Matriz de rigideces del elemento

Al sustituir las ecs 5.5.32 a 5.5.35 en la ec 5.3.54 se obtiene la expresión de la matriz de rigideces del elemento finito número uno, según se indica en la ec 5.5.36.

5.6 *Matriz de masas del elemento finito número uno*

Para cuantificar la matriz de masas dada por la ec 2.3.23 se utilizan los desarrollos de los incisos 5.3.9 y 5.3.10, así como algunos resultados del inciso 5.5.

De acuerdo con el criterio indicado con las ecs 5.3.43 y 5.3.44, los elementos de la matriz de masas se calculan con la ec 5.3.49. Para el primer

$$\underline{B}_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} -3.9434E-01 & 0. & 3.9434E-01 & 0. & 1.0566E-01 & 0. & -1.0566E-01 & 0. \\ 0. & -7.8868E-01 & 0. & -2.1132E-01 & 0. & 2.1132E-01 & 0. & 7.8868E-01 \\ -7.8868E-01 & -3.9434E-01 & -2.1132E-01 & 3.9434E-01 & 2.1132E-01 & 1.0566E-01 & 7.8868E-01 & -1.0566E-01 \end{bmatrix}$$

(5.5.30)

$$\underline{k}_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.2635E+05 & 5.8313E+04 & -2.7761E+04 & -3.3667E+04 & -3.3854E+04 & -1.5625E+04 & -6.4730E+04 & -9.0211E+03 \\ 5.8313E+04 & 2.1382E+05 & -9.0211E+03 & 3.2646E+04 & -1.5625E+04 & -5.7292E+04 & -3.3667E+04 & -1.8917E+05 \\ -2.7761E+04 & -9.0211E+03 & 5.4177E+04 & -1.5625E+04 & 7.4386E+03 & 2.4172E+03 & -3.3854E+04 & 2.2229E+04 \\ -3.3667E+04 & 3.2646E+04 & -1.5625E+04 & 3.3393E+04 & 9.0211E+03 & -8.7474E+03 & 4.0271E+04 & -5.7292E+04 \\ -3.3854E+04 & -1.5625E+04 & 7.4386E+03 & 9.0211E+03 & 9.0712E+03 & 4.1867E+03 & 1.7344E+04 & 2.4172E+03 \\ -1.5625E+04 & -5.7292E+04 & 2.4172E+03 & -8.7474E+03 & 4.1867E+03 & 1.5351E+04 & 9.0211E+03 & 5.0688E+04 \\ -6.4730E+04 & -3.3667E+04 & -3.3854E+04 & 4.0271E+04 & 1.7344E+04 & 9.0211E+03 & 8.1240E+04 & -1.5625E+04 \\ -9.0211E+03 & -1.8917E+05 & 2.2229E+04 & -5.7292E+04 & 2.4172E+03 & 5.0688E+04 & -1.5625E+04 & 1.9577E+05 \end{bmatrix}$$

(5.5.32)

$$\underline{k}_{12}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8.1240E+04 & 1.5625E+04 & 1.7344E+04 & -9.0211E+03 & -3.3854E+04 & -4.0271E+04 & -6.4730E+04 & 3.3667E+04 \\ 1.5625E+04 & 1.9577E+05 & -2.4172E+03 & 5.0688E+04 & -2.2229E+04 & -5.7292E+04 & 9.0211E+03 & -1.8917E+05 \\ 1.7344E+04 & -2.4172E+03 & 9.0712E+03 & -4.1867E+03 & 7.4386E+03 & -9.0211E+03 & -3.3854E+04 & 1.5625E+04 \\ -9.0211E+03 & 5.0688E+04 & -4.1867E+03 & 1.5351E+04 & -2.4172E+03 & -8.7474E+03 & 1.5625E+04 & -5.7292E+04 \\ -3.3854E+04 & -2.2229E+04 & 7.4386E+03 & -2.4172E+03 & 5.4177E+04 & 1.5625E+04 & -2.7761E+04 & 9.0211E+03 \\ -4.0271E+04 & -5.7292E+04 & -9.0211E+03 & -8.7474E+03 & 1.5625E+04 & 3.3393E+04 & 3.3667E+04 & 3.2646E+04 \\ -6.4730E+04 & 9.0211E+03 & -3.3854E+04 & 1.5625E+04 & -2.7761E+04 & 3.3667E+04 & 1.2635E+05 & -5.8313E+04 \\ 3.3667E+04 & -1.8917E+05 & 1.5625E+04 & -5.7292E+04 & 9.0211E+03 & 3.2646E+04 & -5.8313E+04 & 2.1382E+05 \end{bmatrix}$$

(5.5.33)

$$\underline{k}_{21}^{(1)} = \begin{bmatrix}
5.4177E+04 & 1.5625E+04 & -2.7761E+04 & 9.0211E+03 & -3.3854E+04 & -2.2229E+04 & 7.4386E+03 & -2.4172E+03 \\
1.5625E+04 & 3.3393E+04 & 3.3667E+04 & 3.2646E+04 & -4.0271E+04 & -5.7292E+04 & -9.0211E+03 & -8.7474E+03 \\
-2.7761E+04 & 3.3667E+04 & 1.2635E+05 & -5.8313E+04 & -6.4730E+04 & 9.0211E+03 & -3.3854E+04 & 1.5625E+04 \\
9.0211E+03 & 3.2646E+04 & -5.8313E+04 & 2.1382E+05 & 3.3667E+04 & -1.8917E+05 & 1.5625E+04 & -5.7292E+04 \\
-3.3854E+04 & -4.0271E+04 & -6.4730E+04 & 3.3667E+04 & 8.1240E+04 & 1.5625E+04 & 1.7344E+04 & -9.0211E+03 \\
-2.2229E+04 & -5.7292E+04 & 9.0211E+03 & -1.8917E+05 & 1.5625E+04 & 1.9577E+05 & -2.4172E+03 & 5.0688E+04 \\
7.4386E+03 & -9.0211E+03 & -3.3854E+04 & 1.5625E+04 & 1.7344E+04 & -2.4172E+03 & 9.0712E+03 & -4.1867E+03 \\
-2.4172E+03 & -8.7474E+03 & 1.5625E+04 & -5.7292E+04 & -9.0211E+03 & 5.0688E+04 & -4.1867E+03 & 1.5351E+04
\end{bmatrix}$$

(5.5.34)

$$\underline{k}_{22}^{(1)} = \begin{bmatrix}
9.0712E+03 & 4.1867E+03 & 1.7344E+04 & 2.4172E+03 & -3.3854E+04 & -1.5625E+04 & 7.4386E+03 & 9.0211E+03 \\
4.1867E+03 & 1.5351E+04 & 9.0211E+03 & 5.0688E+04 & -1.5625E+04 & -5.7292E+04 & 2.4172E+03 & -8.7474E+03 \\
1.7344E+04 & 9.0211E+03 & 8.1240E+04 & -1.5625E+04 & -6.4730E+04 & -3.3667E+04 & -3.3854E+04 & 4.0271E+04 \\
2.4172E+03 & 5.0688E+04 & -1.5625E+04 & 1.9577E+05 & -9.0211E+03 & -1.8917E+05 & 2.2229E+04 & -5.7292E+04 \\
-3.3854E+04 & -1.5625E+04 & -6.4730E+04 & -9.0211E+03 & 1.2635E+05 & 5.8313E+04 & -2.7761E+04 & -3.3667E+04 \\
-1.5625E+04 & -5.7292E+04 & -3.3667E+04 & -1.8917E+05 & 5.8313E+04 & 2.1382E+05 & -9.0211E+03 & 3.2646E+04 \\
7.4386E+03 & 2.4172E+03 & -3.3854E+04 & 2.2229E+04 & -2.7761E+04 & -9.0211E+03 & 5.4177E+04 & -1.5625E+04 \\
9.0211E+03 & -8.7474E+03 & 4.0271E+04 & -5.7292E+04 & -3.3667E+04 & 3.2646E+04 & -1.5625E+04 & 3.3393E+04
\end{bmatrix}$$

(5.5.35)

$$\underline{k}^{(1)} = \begin{bmatrix}
2.7083E+05 & 9.3750E+04 & -2.0833E+04 & -3.1250E+04 & -1.3542E+05 & -9.3750E+04 & -1.1458E+05 & 3.1250E+04 \\
9.3750E+04 & 4.5833E+05 & 3.1250E+04 & 1.6667E+05 & -9.3750E+04 & -2.2917E+05 & -3.1250E+04 & -3.9583E+05 \\
-2.0833E+04 & 3.1250E+04 & 2.7083E+05 & -9.3750E+04 & -1.1458E+05 & -3.1250E+04 & -1.3542E+05 & 9.3750E+04 \\
-3.1250E+04 & 1.6667E+05 & -9.3750E+04 & 4.5833E+05 & 3.1250E+04 & -3.9583E+05 & 9.3750E+04 & -2.2917E+05 \\
-1.3542E+05 & -9.3750E+04 & -1.1458E+05 & 3.1250E+04 & 2.7083E+05 & 9.3750E+04 & -2.0833E+04 & -3.1250E+04 \\
-9.3750E+04 & -2.2917E+05 & -3.1250E+04 & -3.9583E+05 & 9.3750E+04 & 4.5833E+05 & 3.1250E+04 & 1.6667E+05 \\
-1.1458E+05 & -3.1250E+04 & -1.3542E+05 & 9.3750E+04 & -2.0833E+04 & 3.1250E+04 & 2.7083E+05 & -9.3750E+04 \\
3.1250E+04 & -3.9583E+05 & 9.3750E+04 & -2.2917E+05 & -3.1250E+04 & 1.6667E+05 & -9.3750E+04 & 4.5833E+05
\end{bmatrix}$$

(5.5.36)

punto de integración numérica la expresión del componente (1,1) resulta ser

$$M_{11}^{(1)}\ (1,1) = \rho\ t\ \lambda\ H_1^2\ J(\xi_1,\eta_1)\ N_1^2\ (\xi_1,\eta_1) \qquad (5.6.1)$$

Al sustituir los valores de las ecs 5.5.4, 5.5.5 y 5.5.21 se obtiene la ecuación siguiente:

$$M_{11}^{(1)}\ (1,1) = \rho t\lambda(1.)^2(0.5)(0.62201)^2 = 0.193447(\rho t\lambda) \qquad (5.6.2)$$

Para los componentes restantes resulta

$$M_{11}^{(1)}\ (3,3) = 0.013889\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.3)$$

$$M_{11}^{(1)}\ (5,5) = 0.000997\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.4)$$

$$M_{11}^{(1)}\ (7,7) = 0.013889\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.5)$$

Al repetir el proceso anterior para los puntos de integración numérica restantes se obtienen las expresiones siguientes:

$$M_{12}^{(1)}\ (1,1) = 0.013889\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.6)$$

$$M_{12}^{(1)}\ (3,3) = 0.000997\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.7)$$

$$M_{12}^{(1)}\ (5,5) = 0.013889\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.8)$$

$$M_{12}^{(1)}\ (7,7) = 0.193447\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.9)$$

$$M_{21}^{(1)}\ (1,1) = 0.013889\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.10)$$

$$M_{21}^{(1)}\ (3,3) = 0.193447\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.11)$$

$$M_{21}^{(1)}\ (5,5) = 0.013889\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.12)$$

$$M_{21}^{(1)}\ (7,7) = 0.000997\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.13)$$

$$M_{22}^{(1)}\ (1,1) = 0.000997\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.14)$$

$$M_{22}^{(1)}\ (3,3) = 0.013889\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.15)$$

$$M_{22}^{(1)}\ (5,5) = 0.193447\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.16)$$

$$M_{22}^{(1)}\ (7,7) = 0.013889\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.17)$$

De acuerdo con la ec 5.3.49 y las ecs 5.6.2 a 5.6.17 se obtienen las expresiones siguientes

$$M^{(1)}\ (1,1) = (0.193447+0.013889+0.013889+0.000997)(\rho t\lambda)$$
$$= 0.222222\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.18)a$$

$$M^{(1)}\ (3,3) = M^{(1)}\ (5,5) = M^{(1)}\ (7,7) = 0.222222\ (\rho t\lambda) \qquad (5.6.18)b$$

Para poder cuantificar la constante λ se hace uso de la ec 5.3.44. El área del elemento finito, A^e, es muy simple de cuantificar para el rectángulo; pero para cuadriláteros generales es necesario también una integración numérica como se indica a continuación:

$$A^e = \int_A dx\ dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} J\ d\xi\ d\eta = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} H_i\ H_j\ J(\xi_i,\eta_j) \qquad (5.6.19)$$

Para M=N=2, la ec 5.6.19 se reduce a

$$A^e = H_1^2\ J(\xi_1,\eta_1)+H_1H_2\ J(\xi_1,\eta_2)+H_2H_1\ J(\xi_2,\eta_1)+H_2^2\ J(\xi_2,\eta_2) \qquad (5.6.20)$$

Al sustituir los valores correspondientes en la ec 5.6.20 se obtiene

$$A^{(1)} = (1.)^2(0.5)+(1.)(1.)(0.5)+(1.)(1.)(0.5)+(1.)^2(0.5)$$
$$= 2. \qquad (5.6.21)$$

Al sustituir las ecs 5.6.18 y 5.6.21 en la ec 5.3.44 resulta

$$\lambda(\rho t)(0.222222 * 4) = \rho t(2.) \qquad (5.6.22)$$

De la ec 5.6.22 se puede calcular el valor de λ ; pero, las ecs 5.6.18 requieren del valor de $\rho t\lambda$ que de acuerdo con la ec 5.6.22 y los valores indicados en la Fig. 5.1 resulta ser

$$\rho t\lambda = (0.245)(0.3)/(0.222222 * 2) = 0.16538 \qquad (5.6.23)$$

Con las ecs 5.6.23 y 5.6.18 se calcula la matriz de masas concentradas para el elemento número uno y el resultado se indica con la ec 5.6.24

$$\underline{M}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.036697 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.036697 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.036697 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.036697 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.036697 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.036697 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.036697 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.036697 \end{bmatrix}$$

(5.6.24)

5.7 *Vector de fuerzas de cuerpo del elemento finito número uno*

De acuerdo con la ec 5.3.57 la expresión del vector fuerzas de cuerpo del elemento para el primer punto de integración resulta ser

$$\underline{f}^{(1)}_{c_{11}} = \pm H_1^2 \, J(\xi_1, \eta_1) \, \underline{N}^T(\xi_1, \eta_1) \, \rho \underline{f} \qquad (5.7.1)$$

Al desarrollar el producto matricial $\underline{N}^T \, \rho \underline{f}$, con base en las ecs 5.3.11 y 5.3.58 la ec 5.7.1 se puede escribir como

$$\underline{f}_{C_{11}}^{(1)} = PV \cdot t\, H_1^2\, J(\xi_1,\eta_1) \begin{Bmatrix} N_i \cos\alpha \\ N_i \operatorname{sen}\alpha \\ N_j \cos\alpha \\ N_j \operatorname{sen}\alpha \\ N_k \cos\alpha \\ N_k \operatorname{sen}\alpha \\ N_\ell \cos\alpha \\ N_\ell \operatorname{sen}\alpha \end{Bmatrix} \tag{5.7.2}$$

Al sustituir las ecs 5.5.4 a 5.5.8, 5.5.21 y los valores mostrados en las Figs. 5.1 y 5.6 se obtiene la ec 5.7.3

$$\underline{f}_{C_{11}}^{(1)} = (2.4)(0.3)(1.0)^2(0.5) \begin{Bmatrix} (0.62201)(0.\ ) \\ (0.62201)(-1.) \\ (0.16667)(0.\ ) \\ (0.16667)(-1.) \\ (0.04466)(0.\ ) \\ (0.04466)(-1.) \\ (0.16667)(0.\ ) \\ (0.16667)(-1.) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0. \\ -0.22392 \\ 0. \\ -0.06 \\ 0. \\ -0.01608 \\ 0. \\ -0.06 \end{Bmatrix} \tag{5.7.3}$$

Los vectores de la ec 5.3.57 para los puntos de integración restantes resultan ser:

$$\underline{f}^{(1)}_{C_{12}} = \begin{pmatrix} 0. \\ -0.06 \\ 0.0 \\ -0.01608 \\ 0.0 \\ -0.06 \\ 0.0 \\ -0.22392 \end{pmatrix} \quad \underline{f}^{(1)}_{C_{21}} = \begin{pmatrix} 0. \\ -0.06 \\ 0. \\ -0.22392 \\ 0.0 \\ -0.06 \\ 0.0 \\ -0.01608 \end{pmatrix} \quad \underline{f}^{(1)}_{C_{22}} = \begin{pmatrix} 0. \\ -0.01608 \\ 0. \\ -0.06 \\ 0. \\ -0.22392 \\ 0. \\ -0.06 \end{pmatrix} \tag{5.7.4}$$

Al sustituir las ecs 5.7.3 y 5.7.4 en la ec 5.3.57 se obtiene el vector de fuerzas de cuerpo para el elemento finito número uno y su valor se indica en la ec 5.7.5

$$\underline{f}^{(1)}_{C} = \underline{f}^{(1)}_{C_{11}} + \underline{f}^{(1)}_{C_{12}} + \underline{f}^{(1)}_{C_{21}} + \underline{f}^{(1)}_{C_{22}} = \begin{pmatrix} 0. \\ -0.36 \\ 0. \\ -0.36 \\ 0. \\ -0.36 \\ 0. \\ -0.36 \end{pmatrix} \tag{5.7.5}$$

5.8 *Matrices de esfuerzos para algunos puntos del elemento finito número uno*

La expresión del vector esfuerzo para cualquier punto del elemento finito se obtiene de acuerdo con las ecs 2.3.12 y 2.3.15 y resulta ser

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\,\underline{e} = \underline{D}\,\underline{B}\,\underline{u}^e = \underline{E}\,\underline{u}^e \qquad (5.8.1)$$

Para seleccionar los puntos donde deben calcularse los esfuerzos es conveniente seguir las recomendaciones de la ref. 24 (inciso 11.5.2, pág. 280) en donde se establece que para elementos con funciones de forma con continuidad C_0 (es decir, se requiere la continuidad de la incógnita entre elementos, sin importar sus derivadas) cuando se tienen funciones de forma lineales, los esfuerzos deberían representarse en los centroides; mientras que para funciones de forma cuadráticas, los esfuerzos deberían calcularse en los puntos gaussianos (n=2, tabla 3.1).

En este ejemplo, para observar la variación de los esfuerzos, los puntos seleccionados son los cuatro gaussianos (1,2,3 y 4 de la Fig. 5.7) y el del centroide (0 de la Fig. 5.7).

Para calcular la matriz de esfuerzos, $E=\underline{D}\,\underline{B}$ en los puntos seleccionados se procede a calcular la correspondiente matriz de deformaciones, $\underline{B}$, tal como se indica en los incisos anteriores, y se lleva a cabo el producto con la matriz, $\underline{D}$, dada por la ec 5.5.31. Las matrices resultantes se indican mediante las ecs 5.8.2 a 5.8.6.

Es conveniente conocer la posición de los puntos donde se calculan los esfuerzos. Esto se realiza mediante las ecs 5.3.6 y 5.3.7. Para el elemento en cuestión resultan ser:

$$x_o^{(1)} = N_i(0,0)x_i + N_j(0,0)x_j + N_k(0,0)x_k + N_\ell(0,0)x_\ell$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\right)(6.0) + \left(\tfrac{1}{4}\right)(8.0) + \left(\tfrac{1}{4}\right)(8.0) + \left(\tfrac{1}{4}\right)(6.0) = 7.0 = x_o \qquad (5.8.7)$$

$$y_o^{(1)} = 0.5 = y_o \qquad (5.8.8)$$

$$\underline{E}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -5.2083E+05 & -2.0833E+05 & 5.2083E+05 & -2.0833E+05 & 5.2083E+05 & 2.0833E+05 & -5.2083E+05 & 2.0833E+05 \\ -1.0417E+05 & -1.0417E+06 & 1.0417E+05 & -1.0417E+06 & 1.0417E+05 & 1.0417E+06 & -1.0417E+05 & 1.0417E+06 \\ -4.1667E+05 & -2.0833E+05 & -4.1667E+05 & 2.0833E+05 & 4.1667E+05 & 2.0833E+05 & 4.1667E+05 & -2.0833E+05 \end{bmatrix}$$

(5 . 8 . 2)

$$\underline{E}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} -2.2013E+05 & -8.8052E+04 & 2.2013E+05 & -3.2861E+05 & 8.2154E+05 & 3.2861E+05 & -8.2154E+05 & 8.8052E+04 \\ -4.4026E+04 & -4.4026E+05 & 4.4026E+04 & -1.6431E+06 & 1.6431E+05 & 1.6431E+06 & -1.6431E+05 & 4.4026E+05 \\ -1.7610E+05 & -8.8052E+04 & -6.5723E+05 & 8.8052E+04 & 6.5723E+05 & 3.2861E+05 & 1.7610E+05 & -3.2861E+05 \end{bmatrix}$$

(5 . 8 . 3)

$$\underline{E}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -2.2013E+05 & -3.2861E+05 & 2.2013E+05 & -8.8052E+04 & 8.2154E+05 & 8.8052E+04 & -8.2154E+05 & 3.2861E+05 \\ -4.4026E+04 & -1.6431E+06 & 4.4026E+04 & -4.4026E+05 & 1.6431E+05 & 4.4026E+05 & -1.6431E+05 & 1.6431E+06 \\ -6.5723E+05 & -8.8052E+04 & -1.7610E+05 & 8.8052E+04 & 1.7610E+05 & 3.2861E+05 & 6.5723E+05 & -3.2861E+05 \end{bmatrix}$$

(5 . 8 . 4)

$$\underline{E}_3^{(1)} = \begin{bmatrix} -8.2154E+05 & -3.2861E+05 & 8.2154E+05 & -8.8052E+04 & 2.2013E+05 & 8.8052E+04 & -2.2013E+05 & 3.2861E+05 \\ -1.6431E+05 & -1.6431E+06 & 1.6431E+05 & -4.4026E+05 & 4.4026E+04 & 4.4026E+05 & -4.4026E+04 & 1.6431E+06 \\ -6.5723E+05 & -3.2861E+05 & -1.7610E+05 & 3.2861E+05 & 1.7610E+05 & 8.8052E+04 & 6.5723E+05 & -8.8052E+04 \end{bmatrix}$$

(5 . 8 . 5)

$$\underline{E}_4^{(1)} = \begin{bmatrix} -8.2154E+05 & -8.8052E+04 & 8.2154E+05 & -3.2861E+05 & 2.2013E+05 & 3.2861E+05 & -2.2013E+05 & 8.8052E+04 \\ -1.6431E+05 & -4.4026E+05 & 1.6431E+05 & -1.6431E+06 & 4.4026E+04 & 1.6431E+06 & -4.4026E+04 & 4.4026E+05 \\ -1.7610E+05 & -3.2861E+05 & -6.5723E+05 & 3.2861E+05 & 6.5723E+05 & 8.8052E+04 & 1.7610E+05 & -8.8052E+04 \end{bmatrix}$$

(5 . 8 . 6)

$$x_1^{(1)} = 6.423 = x_C \tag{5.8.9}$$

$$y_1^{(1)} = 0.211 = y_C \tag{5.8.10}$$

$$x_2^{(1)} = 7.557 = x_D \tag{5.8.11}$$

$$y_2^{(1)} = 0.211 = y_D \tag{5.8.12}$$

$$x_3^{(1)} = 6.423 = x_B \tag{5.8.13}$$

$$y_3^{(1)} = 0.789 = y_B \tag{5.8.14}$$

$$x_4^{(1)} = 7.557 = x_A \tag{5.8.15}$$

$$y_4^{(1)} = 0.789 = y_A \tag{5.8.16}$$

5.9 *Ecuaciones de equilibrio de los elementos finitos restantes*

De acuerdo con las expresiones de $\underline{M}^e$, $\underline{K}^e$ y $\underline{f}_C^e$ se puede observar que dependen únicamente de la geometría y del material. Puesto que los elementos finitos dos, tres y cuatro (Fig. 5.2) son iguales que el uno; se puede concluir que las correspondientes matrices que definen sus ecuaciones de equilibrio son iguales, es decir:

$$\underline{M}^{(1)} = \underline{M}^{(2)} = \underline{M}^{(3)} = \underline{M}^{(4)} \tag{5.9.1}$$

$$\underline{K}^{(1)} = \underline{K}^{(2)} = \underline{K}^{(3)} = \underline{K}^{(4)} \tag{5.9.2}$$

$$\underline{f}_C^{(1)} = \underline{f}_C^{(2)} = \underline{f}_C^{(3)} = \underline{f}_C^{(4)} \tag{5.9.3}$$

Obvio es que los vectores de desplazamiento correspondientes son diferentes ya que quedan definidos por puntos nodales diferentes.

5.10 *Ecuaciones de equilibrio de la estructura*

Para construir las matrices de las ecuaciones de equilibrio de la estructura

($\underline{M}$, $\underline{K}$ y $\underline{P}$ de la ec 2.4.9) se hace uso de los conceptos establecidos en los incisos 2.4 y 5.4.

En el inciso 5.4 se explica el ordenamiento de las ecuaciones de equilibrio de la estructura según lo requiere la ec 2.4.7, en donde ya se consideran las condiciones de frontera. La forma sistemática de construir las ecs 2.4.4 a 2.4.6 se indica a continuación

5.10.1 Ensamble de la matriz de rigideces

De acuerdo con el ordenamiento de las ecuaciones de un elemento finito, indicado con el vector indicador de ecuación $\underline{IE}^{(e)}$, la forma en que se lleva a cabo la ec 2.4.5 se muestra esquemáticamente en la ec 5.10.1

$$\underset{e}{\Sigma}\underline{K}^{e}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} IE^e(1) & IE^e(2) & IE^e(3) & IE^e(4) & IE^e(5) & IE^e(6) & IE^e(7) & IE^e(8) \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} K^e_{11} & K^e_{12} & K^e_{13} & K^e_{14} & K^e_{15} & K^e_{16} & K^e_{17} & K^e_{18} \\ K^e_{21} & K^e_{22} & K^e_{23} & K^e_{24} & K^e_{25} & K^e_{26} & K^e_{27} & K^e_{28} \\ K^e_{31} & K^e_{32} & K^e_{33} & K^e_{34} & K^e_{35} & K^e_{36} & K^e_{37} & K^e_{38} \\ K^e_{41} & K^e_{42} & K^e_{43} & K^e_{44} & K^e_{45} & K^e_{46} & K^e_{47} & K^e_{48} \\ K^e_{51} & K^e_{52} & K^e_{53} & K^e_{54} & K^e_{55} & K^e_{56} & K^e_{57} & K^e_{58} \\ K^e_{61} & K^e_{62} & K^e_{63} & K^e_{64} & K^e_{65} & K^e_{66} & K^e_{67} & K^e_{68} \\ K^e_{71} & K^e_{72} & K^e_{73} & K^e_{74} & K^e_{75} & K^e_{76} & K^e_{77} & K^e_{78} \\ K^e_{81} & K^e_{82} & K^e_{83} & K^e_{84} & K^e_{85} & K^e_{86} & K^e_{87} & K^e_{88} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} IE^e(1) \\ IE^e(2) \\ IE^e(3) \\ IE^e(4) \\ IE^e(5) \\ IE^e(6) \\ IE^e(7) \\ IE^e(8) \end{array} \qquad (5.10.1)$$

La interpretación de la ec 5.10.1 es tal que, por ejemplo, el elemento K^e_{12} de la matriz de rigideces $\underline{K}^e$ del elemento finito, debe sumarse al elemento $K(IE^e(1), IE^e(2))$ de la matriz de rigideces $\underline{K}$ de la estructura.

En la ec 5.10.2 se muestra como queda la matriz de rigideces del ejemplo cuando se lleva a cabo la ec 2.4.5 con base en la ec 5.10.1.

5.10.2 Ensamble de la matriz de masas

El ensamble de la matriz de masas de la estructura se lleva a cabo en forma enteramente similar a como se construye la matriz de rigideces. Cuando se utiliza la aproximación de masas concentradas, como es el caso de este ejemplo, la matriz de masas es diagonal. Con base en lo anterior, y para ahorrar espacio, se acostumbra guardar la diagonal de la matriz en un arreglo vectorial, como se muestra en la ec 5.10.3, para el caso del ejemplo de aplicación.

5.10.3 Ensamble del vector de cargas

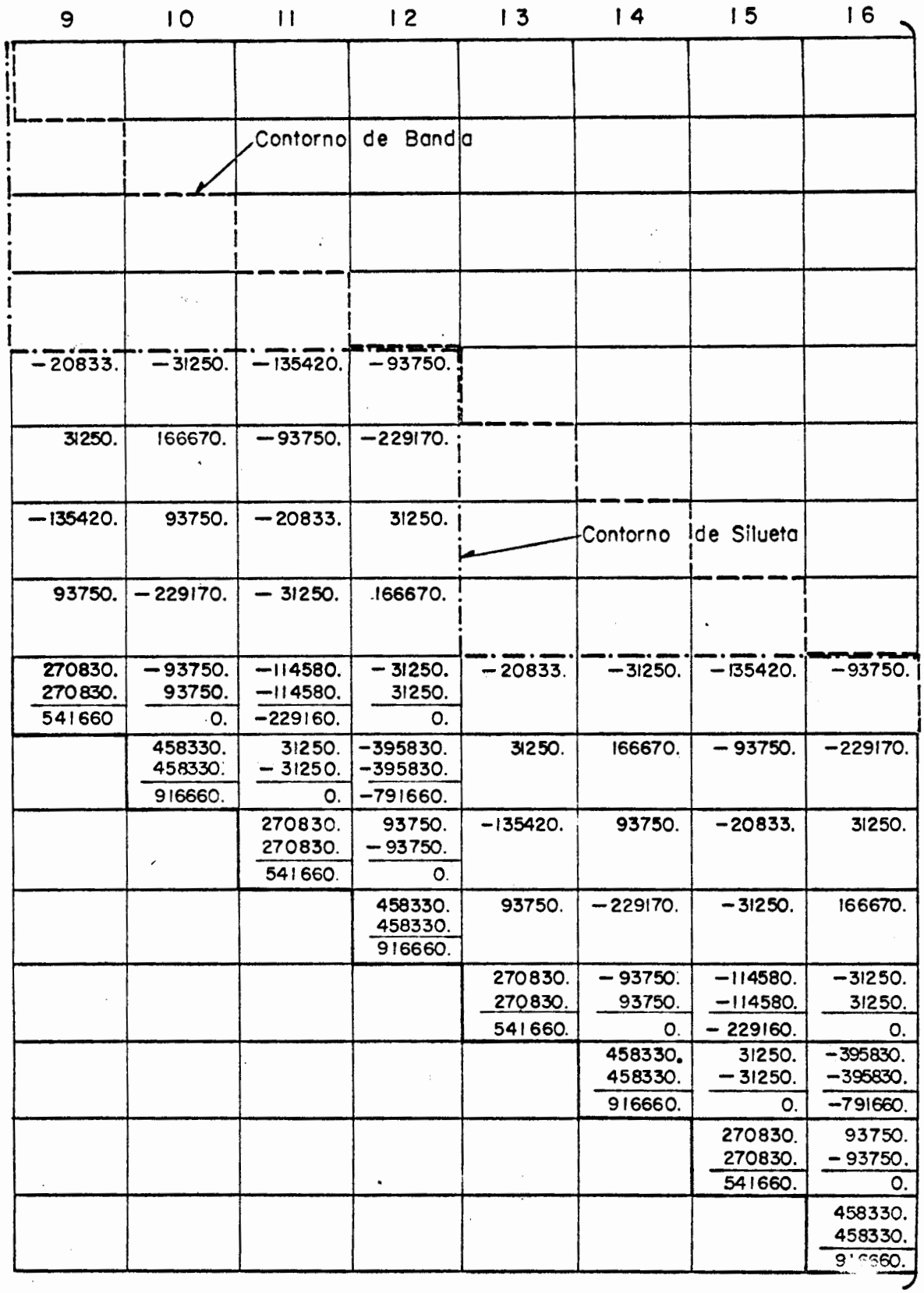
El ensamble de los vectores de cargas $\underline{f}^e$, cuyos componentes están dados por la ec 5.3.55, se muestra esquemáticamente en la ec 5.10.4. La interpretación de la ec 5.10.4 debe hacerse de tal manera que, por ejemplo, el elemento f^e_3 del vector de cargas $\underline{f}^e$ del elemento finito debe sumarse al elemento $P(IE^e(3))$ del vector de cargas $\underline{P}$ de la estructura.

En la ec 5.10.5 se muestra el vector de cargas que se obtiene para el ejemplo de aplicación. A tal vector se le asocia un subíndice c debido a que el vector de cargas $\underline{f}^e_c$ es el único que participa en su formación.

Casos particulares de cargas de superficie son las cargas concentradas. Cuando estas concentraciones actúan en los puntos nodales, ya no es necesa

$K =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	270830.	93750.	−114580.	31250.	−20833.	−31250.	−135420.	−93750.
2		458330.	−31250.	−395830.	31250.	166670.	−93750.	−229170.
3			270830.	−93750.	−135420.	93750.	−20833.	31250.
4				458330.	93750.	−229170.	−31250.	166670.
5					270830. 270830. 541660.	−93750. 93750. 0.	−114580. −114580. −229160.	−31250. 31250. 0.
6						458330. 458330. 916660.	31250. −31250. 0.	−395830. −395830. −791660.
7							270830. 270830. 541660.	93750. −93750. 0.
8								458330. 458330. 916660.
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								


9
10
11
12
13
14
15
16
Contorno de Banda
Contorno de Silueta
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
-20833. -31250. -135420. -93750.
31250. 166670. -93750. -229170.
-135420. 93750. -20833. 31250.
93750. -229170. -31250. 166670.
270830. -93750. -114580. -31250. -20833. -31250. -135420. -93750.
270830. 93750. -114580. 31250.
541660 0. -229160. 0.
458330. 31250. -395830. 31250. 166670. -93750. -229170.
458330. -31250. -395830.
916660. 0. -791660.
270830. 93750. -135420. 93750. -20833. 31250.
270830. -93750.
541660. 0.
458330. 93750. -229170. -31250. 166670.
458330.
916660.
270830. -93750. -114580. -31250.
270830. 93750. -114580. 31250.
541660. 0. -229160. 0.
458330. 31250. -395830.
458330. -31250. -395830.
916660. 0. -791660.
270830. 93750.
270830. -93750.
541660. 0.
458330.
458330.
916660.

(5.10.2)

$$\sum_e \underline{f}^e = \begin{pmatrix} f_1^e & IE^e(1) \\ f_2^e & IE^e(2) \\ f_3^e & IE^e(3) \\ f_4^e & IE^e(4) \\ f_5^e & IE^e(5) \\ f_6^e & IE^e(6) \\ f_7^e & IE^e(7) \\ f_8^e & IE^e(8) \end{pmatrix} \qquad (5.10.4)$$

rio llevar a cabo la integración indicada por la ec 2.3.24; pero cuando existen en puntos diferentes a los nodales, las concentraciones deberán tratarse como funciones tipo deltas de Dirac. Para el caso del ejemplo de aplicación el vector de cargas debido a las concentraciones se muestra en la ec 5.10.6.

5.11 *Obtención de los elementos cinemáticos de la estructura*

El problema que se va a resolver es un problema estático por lo que los elementos de las ecuaciones de equilibrio son los indicados en la ec 2.4.14. La matriz de rigideces está dada por la ec 5.10.2 y el vector de cargas corresponde únicamente a las cargas concentradas y está dado por la ec 5.10.6.

Al observar la matriz de rigideces (ec 5.10.2) se puede aseverar lo siguiente:

a) si se almacena en un arreglo cuadrado se requiere de 16x16=256 localidades

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 0.036697 \\ 0.036697 \\ 0.036697 \\ 0.036697 \\ 0.036697+ \\ 0.036697 \\ 0.073394 \\ 0.036697+ \\ 0.036697 \\ 0.073394 \\ 0.036697+ \\ 0.036697 \\ 0.073394 \\ 0.036697+ \\ 0.036697 \\ 0.073394 \\ 0.036697+ \\ 0.036697 \\ 0.073394 \\ 0.036697+ \\ 0.036697 \\ 0.073394 \\ 0.036697+ \\ 0.036697 \\ 0.073394 \\ 0.036697+ \\ 0.036697 \\ 0.073394 \\ 0.036697+ \\ 0.036697 \\ 0.073394 \end{pmatrix} \quad (5.10.3)$$

$$\underline{P}_c = \begin{pmatrix} 0. \\ -0.36 \\ 0. \\ -0.36 \\ 0. + \\ 0. \\ 0. \\ -0.36 + \\ -0.36 \\ -0.72 \\ 0. + \\ 0. \\ 0. \\ -0.36 + \\ -0.36 \\ -0.72 \\ 0. + \\ 0. \\ 0. \\ -0.36 + \\ -0.36 \\ -0.72 \\ 0. + \\ 0. \\ 0. \\ -0.36 + \\ -0.36 \\ -0.72 \end{pmatrix} \quad (5.10.5)$$

$$\underline{P}_{co} = \begin{pmatrix} 0. & 1 \\ -10. & 2 \\ 0. & 3 \\ 0. & 4 \\ 0. & 5 \\ 0. & 6 \\ 0. & 7 \\ 0. & 8 \\ 0. & 9 \\ 0. & 10 \\ 0. & 11 \\ 0. & 12 \\ 0. & 13 \\ 0. & 14 \\ 0. & 15 \\ 0. & 16 \end{pmatrix} \quad (5.10.6)$$

b) si se almacena en un arreglo rectangular (en banda) se necesitan 16x8=128 localidades (ocho es el ancho de la semibanda, con la diagonal principal incluida)

c) si se almacena en un arreglo unidimensional (en silueta) se requiere de 88+16=104 localidades

Al resolver el sistema de ecuaciones algebraicas lineales considerado se obtiene el vector de desplazamientos de la estructura, $\underline{U}$, que corresponde a los desplazamientos de los puntos nodales, cuyos valores se muestran en la tabla 5.3.

Conocido el vector $\underline{U}$ se pueden calcular los correspondientes vectores de desplazamiento de los elementos finitos, $\underline{u}^e$, como se indica a continuación:

$$\underline{u}^e = \begin{Bmatrix} U(IE(1)) \\ U(IE(2)) \\ U(IE(3)) \\ U(IE(4)) \\ U(IE(5)) \\ U(IE(6)) \\ U(IE(7)) \\ U(IE(8)) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \\ u_5^e \\ u_6^e \\ u_7^e \\ u_8^e \end{Bmatrix} \qquad (5.11.1)$$

Al llevar a cabo la operación indicada en la ec 5.11.1 se obtienen los vectores siguientes:

$$\underline{u}^{(1)}=\begin{bmatrix}-0.001108\\-0.008069\\-0.001180\\-0.012719\\0.001183\\-0.012733\\0.001107\\-0.008066\end{bmatrix};\ \underline{u}^{(2)}=\begin{bmatrix}-0.000886\\-0.004000\\-0.001108\\-0.008069\\0.001107\\-0.008066\\0.000886\\-0.004000\end{bmatrix};\ \underline{u}^{(3)}=\begin{bmatrix}-0.000517\\-0.001114\\-0.000886\\-0.004000\\0.000886\\-0.004000\\0.000517\\-0.001113\end{bmatrix};\ \underline{u}^{(4)}=\begin{bmatrix}0.\\0.\\-0.000517\\-0.001114\\0.000517\\-0.001114\\0.\\0.\end{bmatrix}$$

(5.11.2) (5.11.3) (5.11.4) (5.11.5)

5.12 *Obtención de los elementos mecánicos de la estructura*

Para calcular los esfuerzos en los puntos considerados para cada elemento en el inciso 5.8, basta multiplicar las matrices $\underline{E}$ (ecs 5.8.2 a 5.8.6) por los correspondientes vectores $\underline{u}^e$ (ecs 5.11.2 a 5.11.5) según se indica en la ec 5.8.1. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 5.4 y en la Fig. 5.10.

5.13 *Aproximación de la solución*

Puesto que la estructura original con un número infinito de grados de libertad (continua) se ha idealizado con un número finito de grados de libertad (discreta) la aproximación del análisis depende fundamentalmente del número de elementos utilizados y de la aproximación de los desplazamientos (funciones de forma) en los elementos. Si el elemento finito utilizado satisface los requisitos de convergencia es válido aseverar que la aproximación de la

solución se puede incrementar si se utiliza una malla con mayor número de elementos.

Los requisitos de convergencia para los elementos son la completez (que las funciones de desplazamiento sean capaces de representar desplazamientos de cuerpo rígido y estados de deformación constante) y la compatibilidad (las funciones de desplazamiento sean continuas en los puntos interiores y en las fronteras). Si un elemento finito satisface las condiciones anteriores se dice que es conforme. Cuando se viola la compatibilidad, pero se satisface la completez, el elemento finito se denomina no conforme. La rapidez de la convergencia depende de la expansión polinómica utilizada en la aproximación de los desplazamientos en los elementos.

A fin de tener una idea de la aproximación y la rapidez de convergencia de la solución obtenida con el método del elemento finito se presentan las soluciones del ejemplo de aplicación obtenidas con las mallas mostradas en la Fig. 5.8, que corresponde a elementos cuadriláteros lineales, y las mallas de la Fig. 5.9, formadas con elementos cuadriláteros cuadráticos. También se obtiene la solución con los elementos cuadriláteros lineales con modos de flexión* (no conforme).

La distribución del esfuerzo normal, σ_{xx}, se muestra en las Figs. 5.10 a 5.12 mientras que en la Fig. 5.13 se presenta el desplazamiento vertical en el punto de aplicación de la carga.

---

* R.L. Taylor, P.J. Beresford, and E.L. Wilson, "A *non-conforming element for stress analysis*", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 10, pp 1211-1220, 1976.

La aproximación y rapidez de convergencia de los desplazamientos quedan explícitas en la Fig. 5.13 y para una presentación similar para los esfuerzos, se construyen las Figs. 5.14 a 5.16, con base en las correspondientes Figs. 5.10 a 5.12. Con los resultados se presenta la solución para la teoría de vigas en el contexto de la mecánica de materiales que también es una solución aproximada para la teoría de la elasticidad.

6. BIBLIOGRAFIA

Mucho se ha escrito sobre el método del elemento finito y es seguro que se seguirá escribiendo sobre él. Existen miles de artículos de investigación y de informes, así como varias notas para cursos, memorias de congresos y libros de texto. En estas notas se indican los dos primeros artículos relacionados con el método del elemento finito (1 y 2), los libros de texto que lo tratan exclusivamente por orden de fecha de publicación, y, al final, algunas publicaciones periódicas en donde se presentan las investigaciones más recientes donde se ha hecho uso del método del elemento finito, así como la información sobre este tema.

1. M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, and L.J. Topp, "*Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*", J. Aero, Sce., Vol. 23, No. 9, 1956, pp 805-823

2. R.W. Clough, "*The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*", Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, 1960, pp 345-378

3. O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics* , McGraw-Hill, 1967

4. O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method in Engineering Science* , McGraw-Hill, 1971

5. C.S. Desai and J.F. Abel, *Introduction to the Finite Element Method* , Van Nostrand-Reinhold, 1972

6. J.T. Oden, *Finite Elements of Nonlinear Continua*", McGraw-Hill, 1972

7. O. Ural, *Finite Element Method* , Intext Educational Publishers, 1973

8. H.C. Martin and G.F. Carey, *Introduction to Finite Element Analysis* , McGraw-Hill, 1973

9. W.G. Strang and G.J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method* , Prentice-Hall, 1973

10. J. Robinson, *Integrated Theory of Finite Element Methods* , John Wiley, 1973

11. C.A. Brebbia and J.J. Connor, *Fundamentals of Finite Element Technique*, Butterworths, London, 1973

12. D.H. Norrie and G. De Vries, *The Finite Element Method-Fundamentals and Applications*, Academic Press, 1973

13. R.D. Cook, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley, 1974

14. B. Nath, *Fundamentals of Finite Elements for Engineers*, Athlone Press, 1974

15. E.L. Wachspress, *A Rational Finite Element Basis*, Academic Press, 1975

16. R.T. Fenner, *Finite Element Method for Engineers*, MacMillan, 1975

17. R.H. Gallagher, *Finite Element Analysis-Fundamentals*, Prentice-Hall, 1975

18. K.H. Huebner, *Finite Element Method for Engineers*, John Wiley, 1975

19. K.C. Rockey, H.R. Evans, D.W. Griffiths, and A. Nethercot, *Finite Element Method A Basic Introduction*, Crosby, Lockwood, 1975

20. J.J. Connor and C.A. Brebbia, *Finite Element Techniques for Fluid Flow*, Butterworths, 1976

21. J.T. Oden and J.N. Reddy, *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, John Wiley, 1976

22. L.J. Segerlind, *Applied Finite Element Analysis*, John Wiley, 1976

23. K.J. Bathe and E.L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, 1976

24. O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, Third Edition, McGraw-Hill, 1977

25. P. Tong and J.N. Rossettos, *Finite Element Method. Basic Technique and Implementation*, MIT Press, 1977

26. E. Hinton and D.R.J. Owen, *Finite Element Programming*, Academic Press, 1977

27. G.F. Pinder and W.G. Gray, *Finite Elements in Subsurface Hydrology*, Academic Press, 1977

28. A.R. Mitchell and R. Wait, *The Finite Element Method in Partial Differential Equations*, John Wiley, 1977

29. T.J. Chung, *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, 1978

30. D.H. Norrie and G. De Vries, *An Introduction to Finite Element Analysis*, Academic Press, 1978

31. P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, 1978

32. E. Hinton and D.R.J. Owen, *An Introduction to Finite Element Computations*, Pineridge Press, 1979

33. Y.K. Cheung and M.F. Yeo, *A Practical Introduction to Finite Element Analysis*, Pitman, 1979

34. C.S. Desai, *Elementary Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1979

35. B.M. Irons S. Ahmed, *Techniques of Finite Elements*, John Wiley, 1980

36. A. J. Davis, *The Finite Element Method: A First Approach* , Clarendon Press, 1980

37. I.M. Smith, *Programming The Finite Element Method. With Applications to Geomechanics*, John Wiley, 1981

38. E.B. Becker, G.F. Carey and J.T. Oden, *Finite Element: An Introduction*, Vol. I, The Texas Finite Element Series, Prentice-Hall, 1981

International Journal For Numerical Methods in Engineering, *John Wiley*, a partir de 1969

Computers & Structures, *Pergamon Press*, a partir de 1971

International Journal for Numerical Methods in Fluids, John Wiley, a partir de 1981

International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, John Wiley, a partir de 1977

7. TABLAS

TABLA 3.1 Abscisas y coeficientes de peso para la cuadratura de Gauss

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} H_j f(a_j)$$

$\pm a_j$			H_j		
		$n = 1$			
0			2.00000	00000	00000
		$n = 2$			
0.57735	02691	89626	1.00000	00000	00000
		$n = 3$			
0.77459	66692	41483	0.55555	55555	55556
0.00000	00000	00000	0.88888	88888	88889
		$n = 4$			
0.86113	63115	94053	0.34785	48451	37454
0.33998	10435	84856	0.65214	51548	62546
		$n = 5$			
0.90617	98459	38664	0.23692	68850	56189
0.53846	93101	05683	0.47862	86704	99366
0.00000	00000	00000	0.56888	88888	88889

TABLA 3.2 Fórmula para integración numérica de tetraedros (ref. 24).

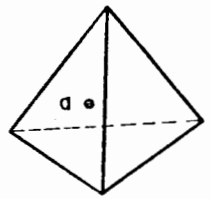
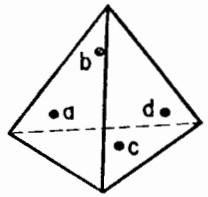
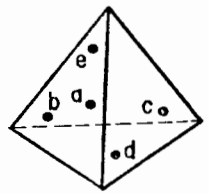
No.	Orden	Figura	Error	Punto	Coordenadas	Wi / Volumen
1	Lineal		$R = O(h^2)$	a	1/4, 1/4, 1/4, 1/4	1
2	Cuadrático	 $\alpha = 0.58541020$ $\beta = 0.13819660$	$R = O(h^3)$	a b c d	$\alpha, \beta, \beta, \beta$ $\beta, \alpha, \beta, \beta$ $\beta, \beta, \alpha, \beta$ $\beta, \beta, \beta, \alpha$	1/4 1/4 1/4 1/4
3	Cúbico		$R = O(h^4)$	a b c d e	1/4, 1/4, 1/4, 1/4 1/3, 1/6, 1/6, 1/6 1/6, 1/3, 1/6, 1/6 1/6, 1/6, 1/3, 1/6 1/6, 1/6, 1/6, 1/3	- 4/5 9/20 9/20 9/20 9/20

TABLA 3.3 Fórmula para integración numérica de triángulos. (Ref. 24)

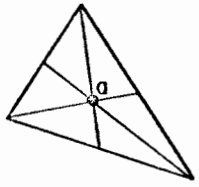
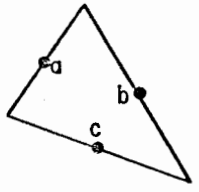
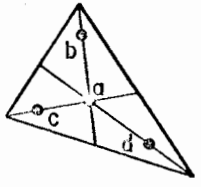
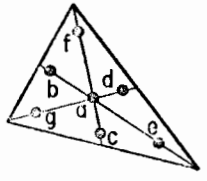
No.	Orden	Figura	Error	Punto	Coordenada	W_i^A / Area
1	Lineal		$R=O(h^2)$	a	1/3 , 1/3 , 1/3	1
2	Cuadrático		$R=O(h^3)$	a b c	1/2 , 1/2 , 0 0 , 1/2 , 1/2 1/2 , 0 , 1/2	1/3 1/3 1/3
3	Cúbico		$R=O(h^4)$	a b c d	1/3 , 1/3 , 1/3 0.6 , 0.2 , 0.2 0.2 , 0.6 , 0.2 0.2 , 0.2 , 0.6	-27/48 25/48
4	Quíntico α_1=0.0597158717 β_1=0.4701420641 α_2=0.7974269853 β_2=0.1012865073		$R=O(h^6)$	a b c d e f g	1/3 , 1/3 , 1/3 α_1 , β_1 , β_1 β_1 , α_1 , β_1 β_1 , β_1 , α_1 α_2 , β_2 , β_2 β_2 , α_2 , β_2 β_2 , β_2 , α_2	0.22500,00000 0.13239,41527 0.12593,91805

TABLA 4.1 Subrutinas para el algoritmo del método de Gauss - Crout para arreglos cuadrados (Versión eficiente)

```
      SUBROUTINE TGCCEV(A,N)
C     TRIANGULACION GAUSS-CROUT CUADRADO VE
      DIMENSION A(N,N)
      YY=A(1,2)/A(1,1)
      A(2,2)=A(2,2)-A(1,2)*YY
      A(1,2)=YY
      IF(N.EQ.2) GO TO 900
      DO 600 J=3,N
      IS=J-1
      DO 200 I=2,IS
      XX=0.
      KS=I-1
      DO 100 K=1,KS
      XX=XX+A(K,I)*A(K,J)
  100 CONTINUE
      A(I,J)=A(I,J)-XX
  200 CONTINUE
  300 CONTINUE
      XX=0.
      DO 400 I=1,IS
      YY = A(I,J)/A(I,I)
      XX=XX+YY*A(I,J)
      A(I,J)=YY
  400 CONTINUE
      A(J,J)=A(J,J)-XX
  600 CONTINUE
  900 CONTINUE
      RETURN
      END
```

a) $\underline{A} = \underline{U}^T \underline{D} \underline{U}$

```
      SUBROUTINE SGCCEV(A,B,N)
C     SUSTITUCION GAUSS-CROUT( CUADRADO
      DIMENSION A(N,N),B(N)
      DO 200 I=2,N
      KS=I-1
      XX=0.
      DO 100 K=1,KS
      XX=XX+A(K,I)*B(K)
  100 CONTINUE
      B(I)=B(I)-XX
  200 CONTINUE
      DO 300 I=1,N
      B(I)=B(I)/A(I,I)
  300 CONTINUE
      NP=N+1
      NM=N-1
      DO 500 M=1,NM
      I=NP-M
      KS=I-1
      DO 400 K=1,KS
      B(K)=B(K)-A(K,I)*B(I)
  400 CONTINUE
  500 CONTINUE
      RETURN
      END
```

b) $\underline{U}^T \underline{y} = \underline{b}$

$\underline{D}\,\underline{U}\,\underline{x} = \underline{y}$

TABLA 4.2 Comparación de la eficiencia de los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales (54 ecuaciones)

METODO	ARREGLO/ MATRIZ	No.ELEM. DE A	TIEMPO(s)/ PORCIENTO PARA TRIANGULACION	SUSTITUCION	TOTAL
Gauss	Cuadrado/general	2916 (2.98)⊕	4.47 96	0.21 4	(4.03)* 4.68 100
Crout			4.47 96	0.21 4	(4.03)* 4.68 100
Gauss-Crout V-S	Cuadrado/simétrica	1485 + 1431/2916 (2.98)⊕	2.95 93	0.21 7	(2.72)* 3.16 100
Cholesky			2.85 92	0.21 8	(2.15)* 2.49 100
Gauss-Crout V-E			2.25 91	0.21 9	(2.12)* 2.46 100
Gauss-Crout V-S	Banda/simétrica	54x37 = 1998 (2.04)⊕	2.68 93	0.21 7	(2.49)* 2.89 100
Cholesky			2.01 91	0.21 9	(1.91)* 2.22 100
Gauss-Crout V-E			1.98 90	0.21 10	(1.89)* 2.19 100
Gauss-Crout V-S	Silueta/simétrica	924 + 54/978 (1.00)⊕	1.30 88	0.18 12	(1.28)* 1.48 100
Cholesky			1.03 85	0.18 15	(1.04)* 1.21 100
Gauss-Crout V-E			1.01 87	0.15 13	(1.00)* 1.16 100

* Relación de tiempos totales respecto al método más eficiente

⊕ Relación de localidades para guardar la matriz A respecto al arreglo más eficiente

TABLA 4.3 Algoritmo del método beta de Newmark, para sistemas lineales de varios grados de libertad.

a) Calcular las siguientes constantes:

$$a_0 = \gamma \Delta t$$

$$a_1 = \Delta t - a_0$$

$$a_2 = \beta \Delta t$$

$$a_3 = a_2 \Delta t$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \Delta t^2 - a_3$$

$$a_5 = 1 + a_0 \alpha$$

$$a_6 = a_0 + \mu + a_3$$

b) Construir la matriz $\underline{K}^*$

$$\underline{K}^* = a_5 \underline{M} + a_6 \underline{K}$$

c) Triangularizar $\underline{K}^*$

Para cada paso de integración:

d) Construir los vectores $\underline{a}$, $\underline{b}$ y $\underline{r}$

$$\underline{a} = \dot{\underline{U}}_0 + a_1 \ddot{\underline{U}}_0$$

$$\underline{b} = \underline{U}_0 + \Delta t \dot{\underline{U}}_0 + a_4 \ddot{\underline{U}}_0$$

$$\underline{r} = \underline{P}_1 - \alpha \underline{M} \underline{a} - \underline{K} \left[\mu \underline{a} + \underline{b} \right]$$

e) Calcular $\ddot{\underline{U}}_1$ mediante la sustitución hacia adelante y hacia atrás en el sistema de ecuaciones

$$\underline{K}^* \ddot{\underline{U}}_1 = \underline{r}$$

f) Calcular los vectores

$$\dot{\underline{U}}_1 = \underline{a} + a_0 \ddot{\underline{U}}_1$$

$$\underline{U}_1 = \underline{b} + a_3 \ddot{\underline{U}}_1$$

TABLA 5.1 PUNTOS NODALES PARA LOS ELEMENTOS FINITOS

Elemento	Malla Figura 5.2				Malla Figura 5.5			
finito No.	i	j	k	l	i	j	k	l
1	4	2	1	3	7	6	1	2
2	6	4	3	5	8	7	2	3
3	8	6	5	7	9	8	3	4
4	10	8	7	9	10	9	4	5

TABLA 5.2 DIFERENCIA ENTRE LOS GRADOS DE LIBERTAD DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Elemento	Diferencia de numeración para las mallas	
finito No.	Figura 5.2	Figura 5.5
1	7	11
2	7	11
3	7	11
4	3	9

TABLA 5.3 Componentes de desplazamiento de los puntos nodales de la estructura (malla Fig. 5.2)

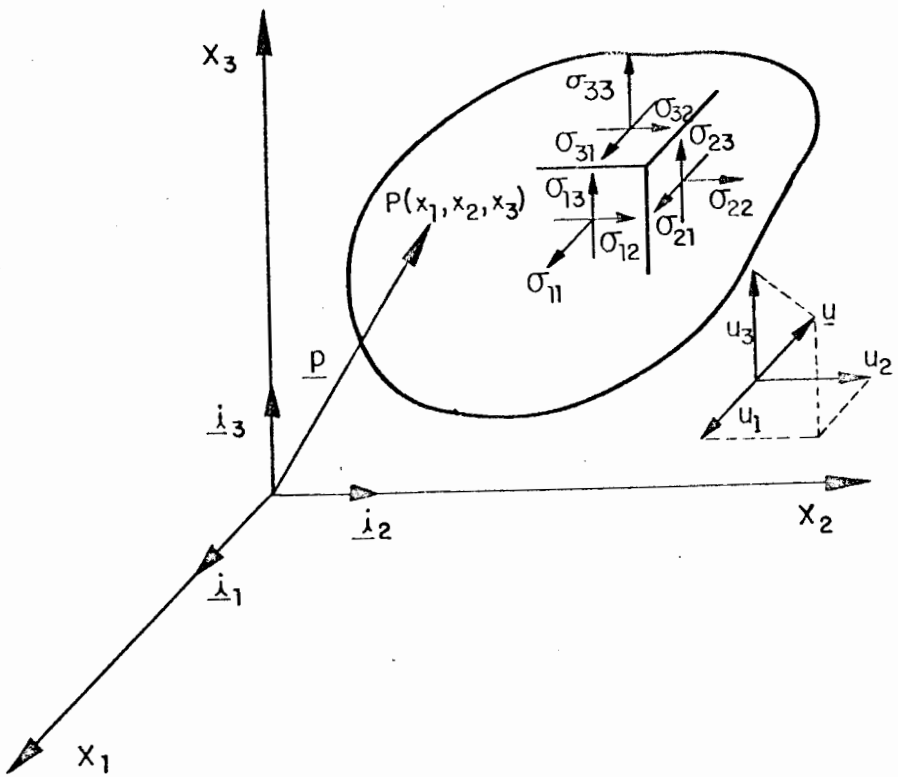
DESPLAZAMIENTOS (M) DEBIDOS A LA CARGA NO. 1

PTO.NOD.	H O R I Z O N T A L	V E R T I C A L
1	1.1831948E-03	-1.2732896E-02
2	-1.1798821E-03	-1.2719412E-02
3	1.1072884E-03	-8.0661009E-03
4	-1.1080962E-03	-8.0692837E-03
5	8.8623667E-04	-4.0003746E-03
6	-8.8607102E-04	-3.9996254E-03
7	5.1688957E-04	-1.1137624E-03
8	-5.1695658E-04	-1.1139299E-03
9	0.	0.
10	0.	0.

TABLA 5.4 Esfuerzos calculados para la estructura del ejemplo de aplicación

ELEM*PUNTO* NO	COORDENADAS X(M)	Y(M)	**ESFUERZOS (T/M**2) REF. GLOBAL NORMAL SXX	NORMAL SYY	CORTAN SXY	**ESFUERZOS (T/M**2) REF.PRINCIPAL*DIR.PPAL. PPALMAX S1	PPALMIN S2	CORT.MAX.T (GRADOS)
1 CEN D	7.00	.50	-5.6206E-11	-1.0301E+01	-3.3333E+01	2.6578E+01	-3.6879E+01	3.3729E+01 -4.06E+01
1 GAU A	7.50	.79	4.2407E+01	-1.1442E+01	1.9125E-01	4.2408E+01	-1.1443E+01	2.6925E+01 2.03E-01
1 GAU B	8.42	.79	4.0416E+01	8.8040E+00	-7.0867E+01	1.0086E+02	-4.5835E+01	7.3340E+01 -3.75E+01
1 GAU C	8.42	.21	-4.2407E+01	-9.1600E+00	-6.8858E+01	4.3110E+01	-9.4677E+01	6.8894E+01 3.80E+01
1 GAU D	7.50	.21	-4.0416E+01	-2.9207E+01	4.2006E+00	-2.8236E+01	-4.7307E+01	9.5754E+00 -1.30E+01
2 CEN D	9.00	.50	-3.2742E-11	2.4336E+00	-3.3333E+01	3.4572E+01	-3.2139E+01	3.3356E+01 4.40E+01
2 GAU A	9.50	.79	1.3372E+02	3.1445E+01	7.3727E+01	1.7230E+02	-7.1461E+00	8.9722E+01 2.70E+01
2 GAU B	9.42	.79	1.3270E+02	2.0710E+01	-1.3945E+02	2.2093E+02	-6.9450E+01	1.4919E+02 -3.46E+01
2 GAU C	9.42	.21	-1.3372E+02	-2.0970E+01	-1.4039E+02	7.0122E+01	-2.3041E+02	1.5027E+02 3.46E+01
2 GAU D	9.50	.21	-1.3270E+02	-2.1849E+01	7.2761E+01	1.4197E+01	-1.6881E+02	9.1502E+01 -2.63E+01
3 CEN D	3.00	.50	2.7203E-12	-5.0105E-01	-3.3333E+01	3.3044E+01	-3.3625E+01	3.3335E+01 -4.46E+01
3 GAU A	3.50	.79	2.2195E+02	4.3279E+01	1.4420E+02	3.0225E+02	-3.7019E+01	1.6963E+02 2.91E+01
3 GAU B	3.42	.79	2.2217E+02	4.4361E+01	-2.1109E+02	3.6232E+02	-9.5769E+01	2.2904E+02 -3.36E+01
3 GAU C	2.42	.21	-2.2195E+02	-4.4492E+01	-2.1087E+02	9.5591E+01	-3.6196E+02	2.2879E+02 3.36E+01
3 GAU D	3.50	.21	-2.2217E+02	-4.3543E+01	1.4442E+02	3.5420E+01	-3.0314E+02	1.6928E+02 -2.93E+01
4 CEN D	1.00	.50	1.9099E-11	1.0753E-01	-3.3333E+01	3.3417E+01	-3.3250E+01	3.3333E+01 4.49E+01
4 GAU A	1.50	.79	3.1090E+02	6.2444E+01	2.1539E+02	4.3532E+02	-6.1970E+01	2.4865E+02 3.00E+01
4 GAU B	.42	.79	3.1086E+02	6.2243E+01	-2.0202E+02	4.9475E+02	-1.2165E+02	3.0820E+02 -3.31E+01
4 GAU C	.42	.21	-3.1090E+02	-6.2109E+01	-2.0206E+02	1.2177E+02	-4.9478E+02	3.0827E+02 3.31E+01
4 GAU D	1.50	.21	-3.1086E+02	-6.1906E+01	2.1535E+02	6.2354E+01	-4.3512E+02	2.4874E+02 -3.00E+01

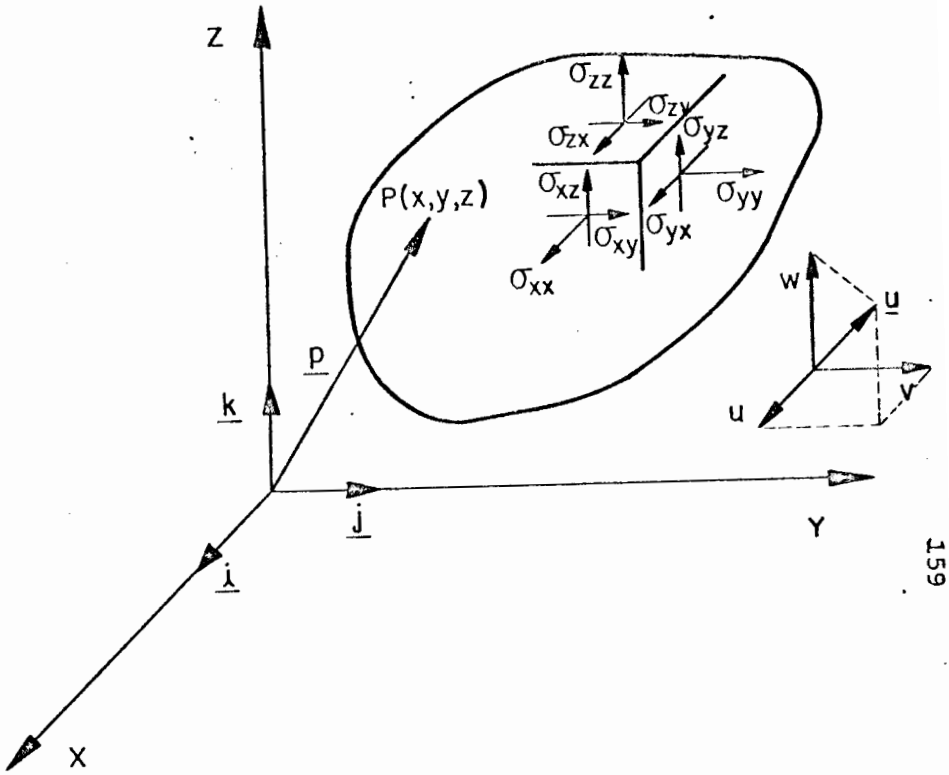
8. F I G U R A S



$$\underline{p} = x_k \underline{i}_k = x_1 \underline{i}_1 + x_2 \underline{i}_2 + x_3 \underline{i}_3$$

$$\underline{u} = u_k \underline{i}_k = u_1 \underline{i}_1 + u_2 \underline{i}_2 + u_3 \underline{i}_3$$

a) Notación indicial

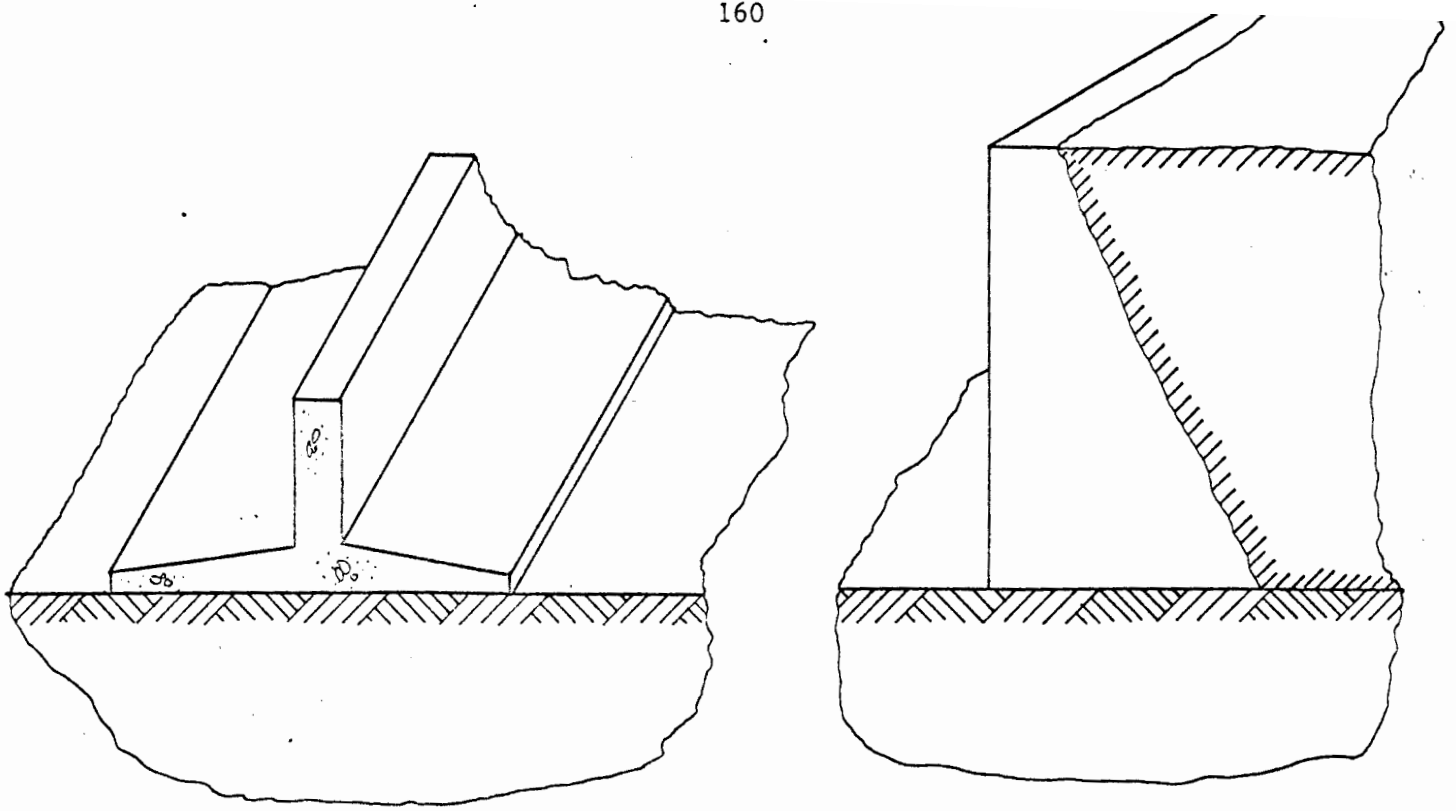


$$\underline{p} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$$\underline{u} = u\underline{i} + v\underline{j} + w\underline{k}$$

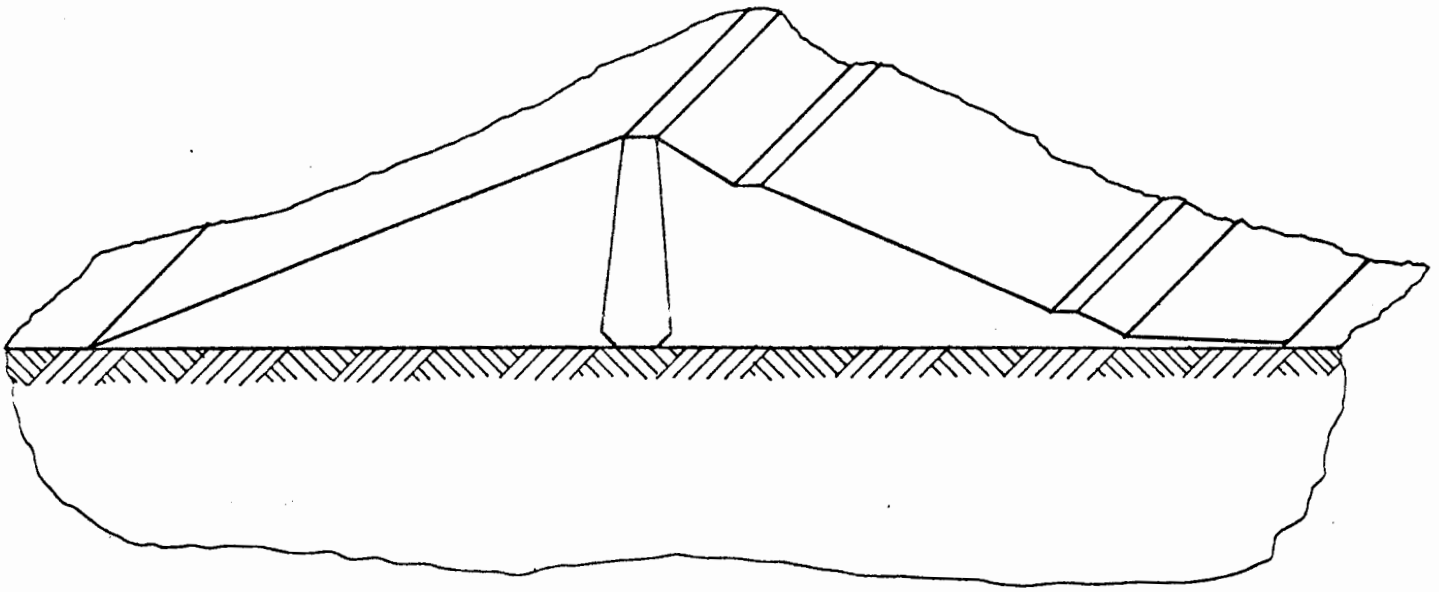
b) Notación tradicional (sin índice)

Fig. 1.1 Sistemas de referencia cartesiano



Zapata corrida

Muro de retención



Presa de tierra

Fig. I.2 Ejemplos de problemas de estados planos de deformación.

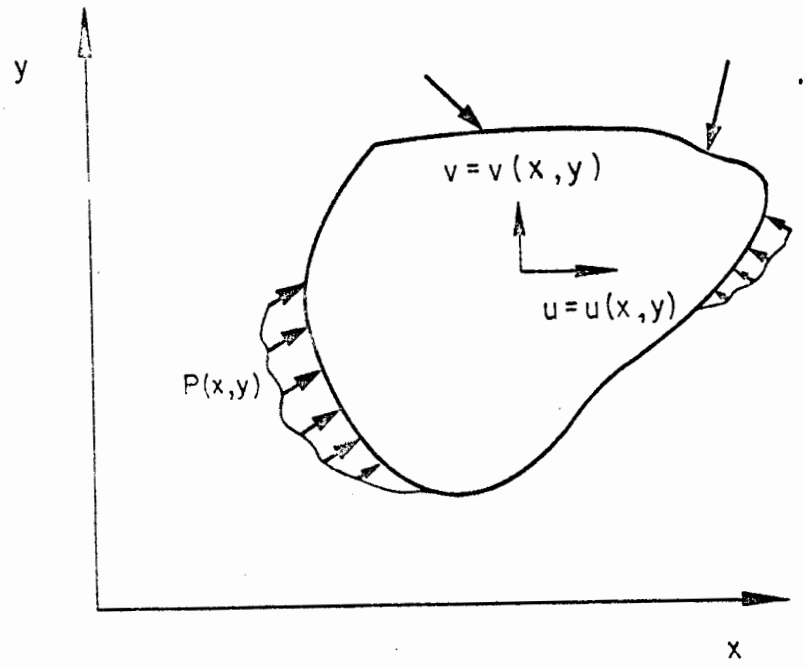


Fig 1.3 Región para los estados planos

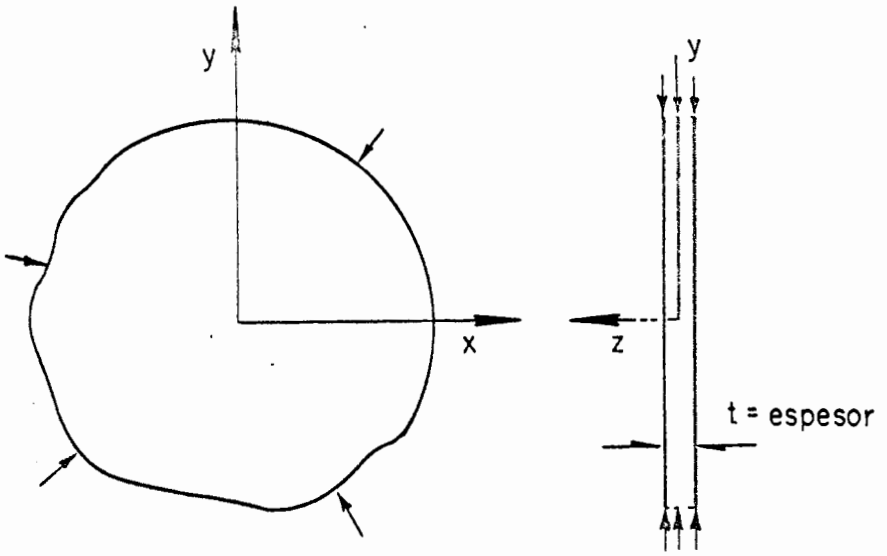


Fig. I.4 Estado plano de esfuerzos. Placa delgada con cargas en su plano.

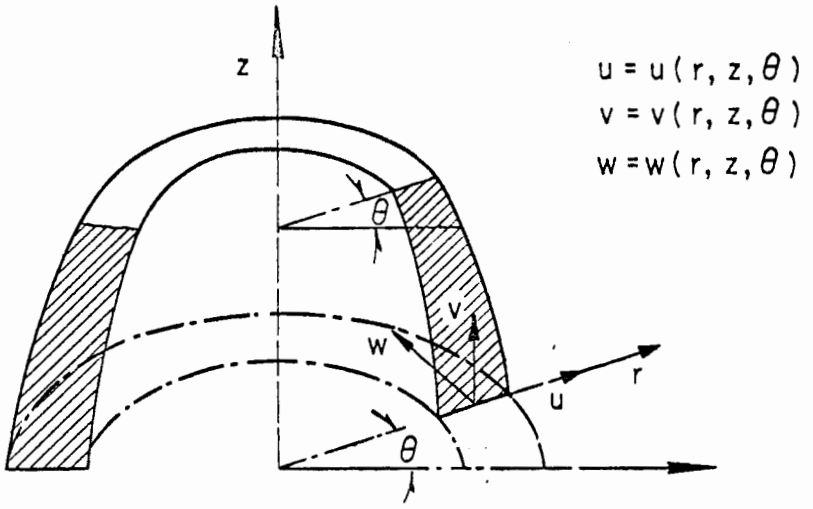


Fig. I.5 Sistema de coordenadas cilíndricas para sólidos axisimétricos.

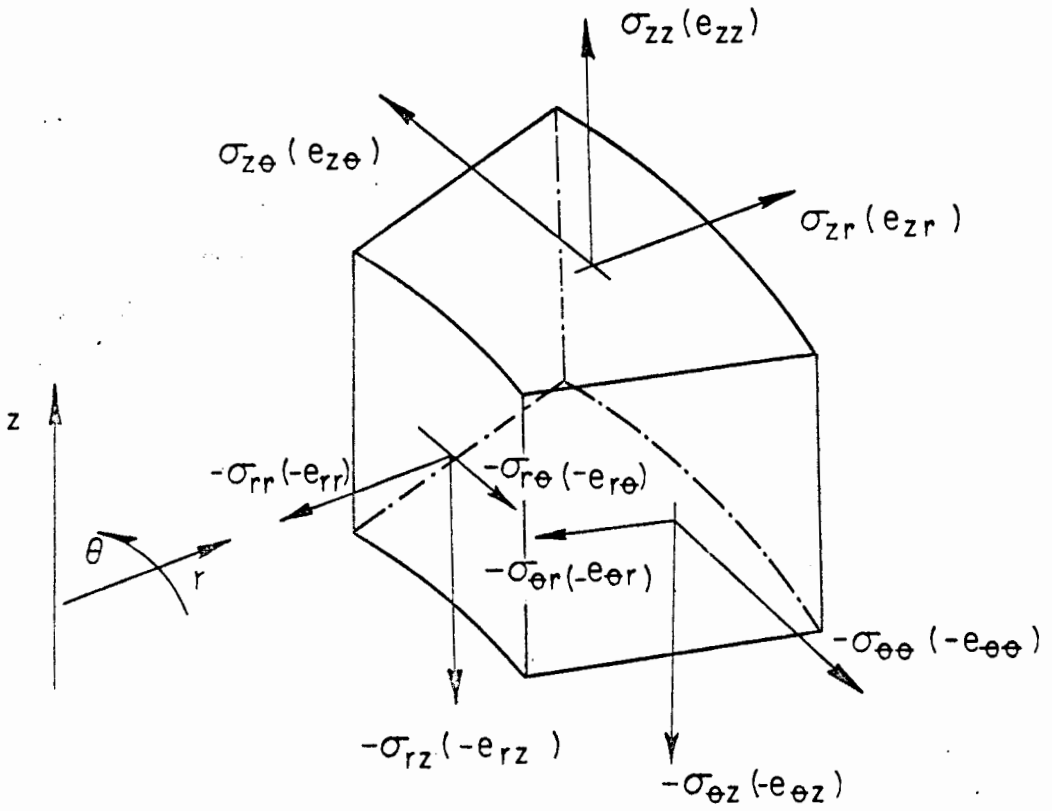


Fig. I.6 Componentes de los tensores de ezfuerzo y de deformación en una referencia cilíndrica.

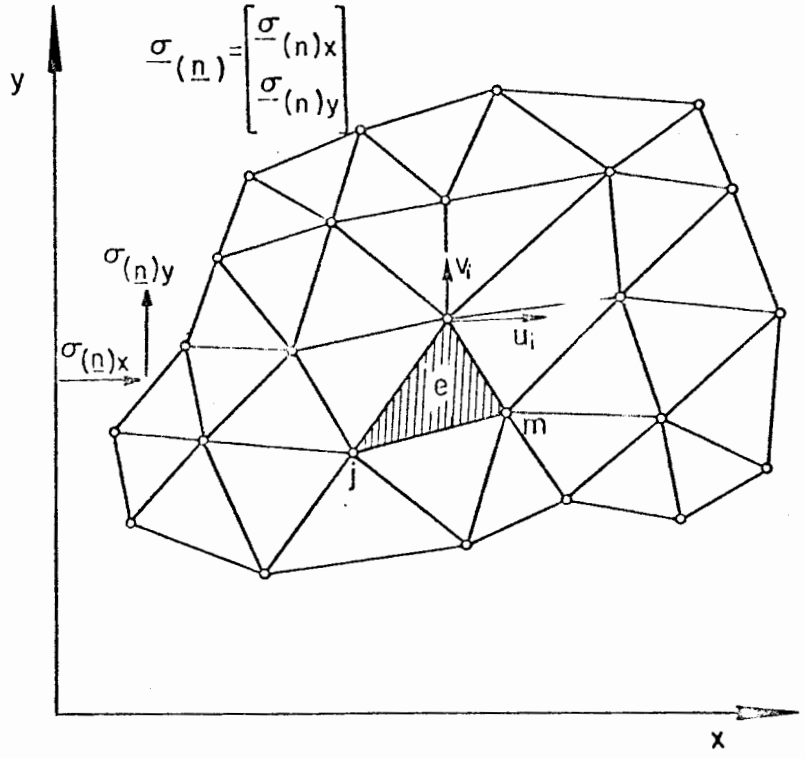


Fig. 2.1 Idealización de una región bidimensional, (estado plano de esfuerzos) mediante elementos finitos.

No. de elementos finitos = 33
No. de puntos nodales = 25

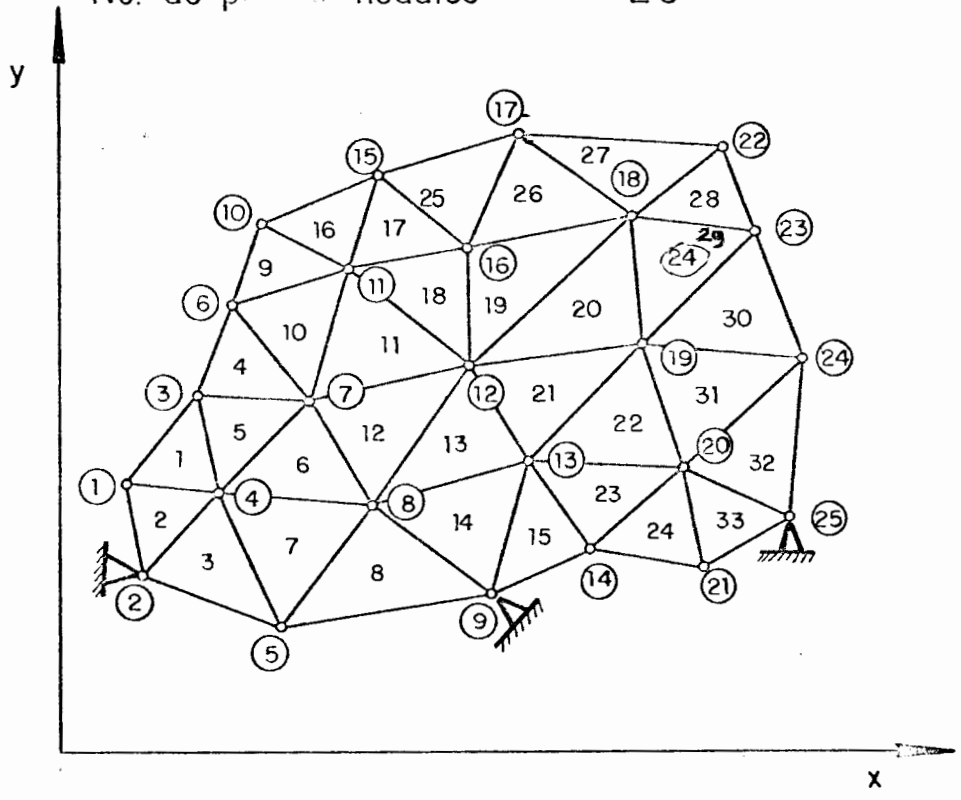
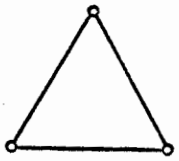


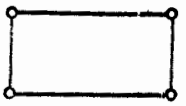
Fig. 2.2 Elementos finitos para establecer el equilibrio global de la estructura.



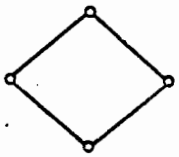
Unidimensional



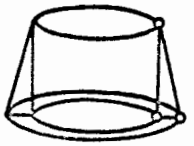
Triangular



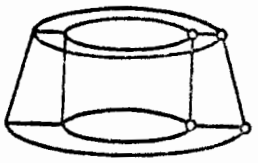
Rectangular



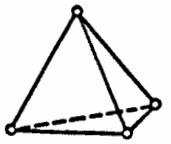
Cuadrilátero



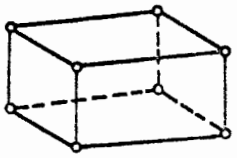
Anillo triangular



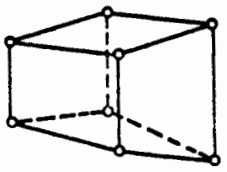
Anillo cuadrilátero



Tetraedro



Hexaedro regular



Hexaedro irregular

Fig. 3.1 Elementos finitos de varias formas.

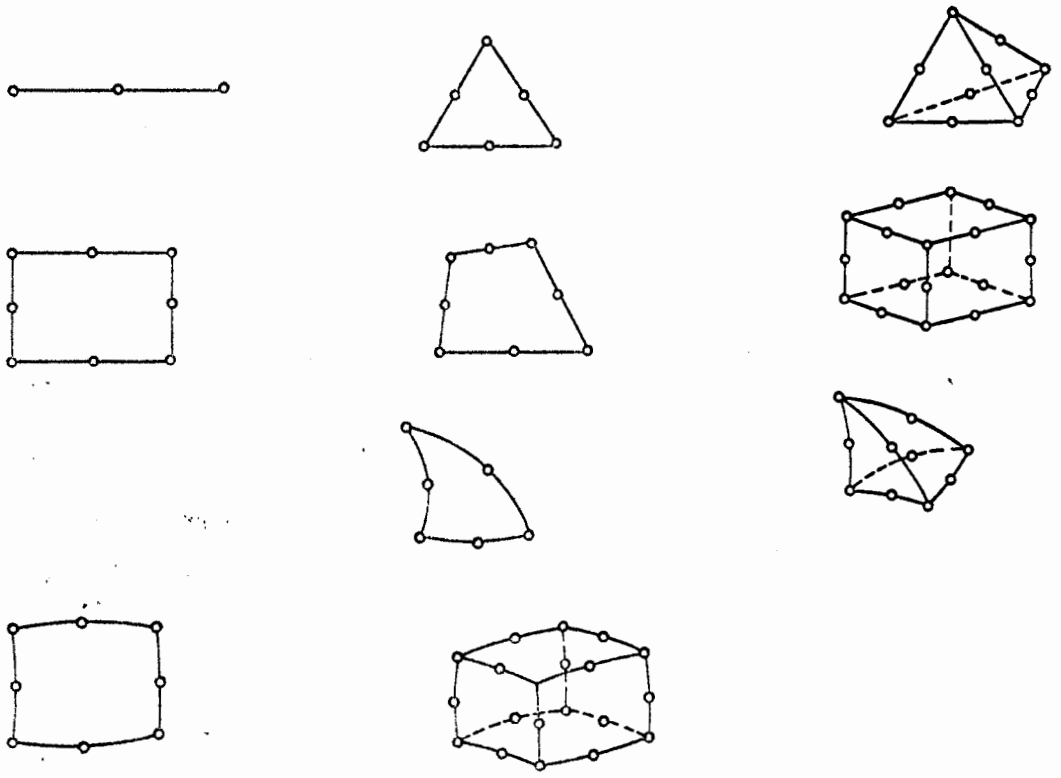


Fig. 3.2 Elementos cuadráticos.

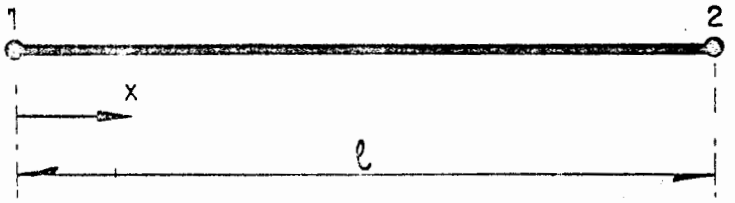


Fig. 3.3 Elemento unidimensional con variación lineal y origen en un extremo.

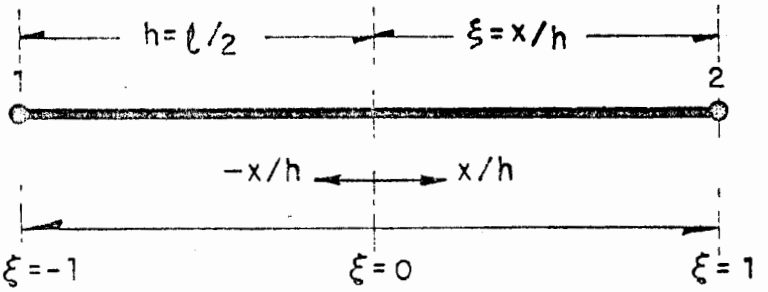


Fig. 3.4 Elemento unidimensional con variación lineal y origen en el centro.

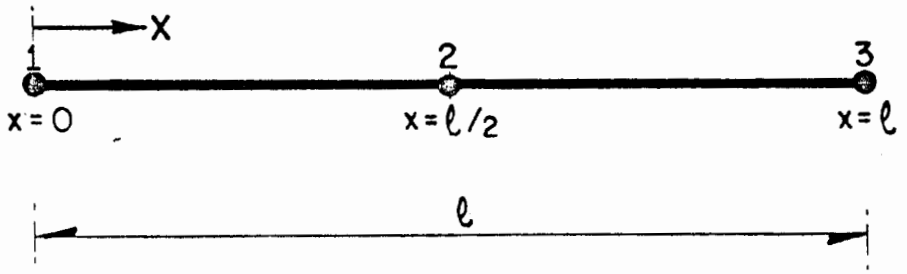


Fig. 3.5 Elemento unidimensional con variación cuadrática y origen en un extremo

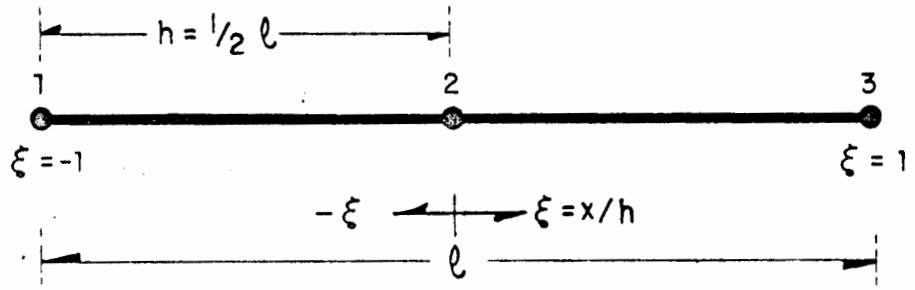


Fig. 3.6 Elemento unidimensional con variación cuadrática y origen en el centro.

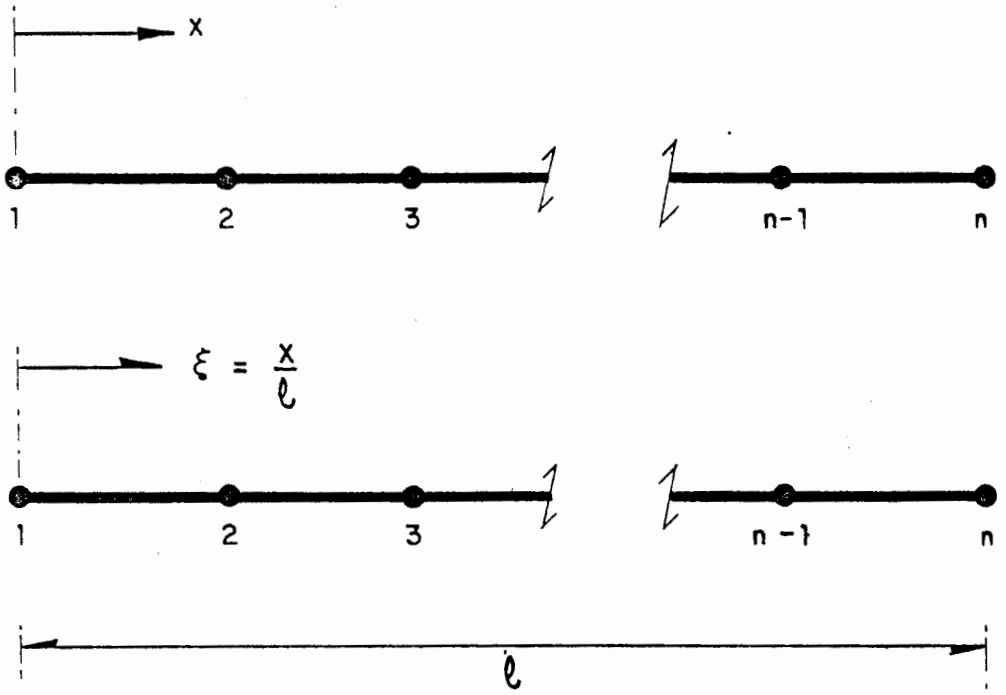
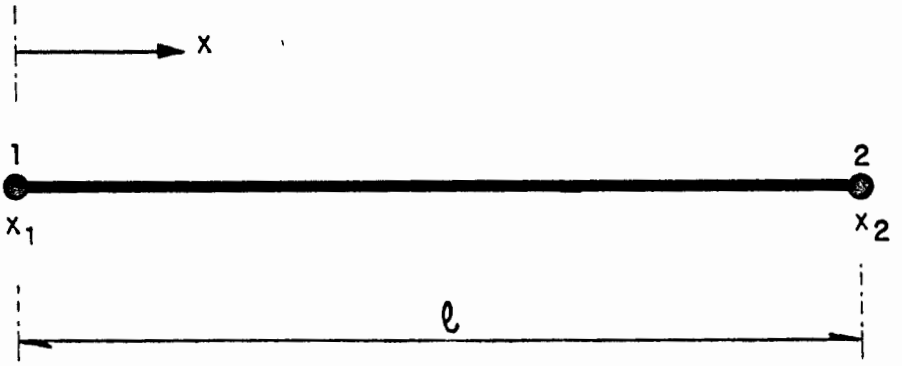
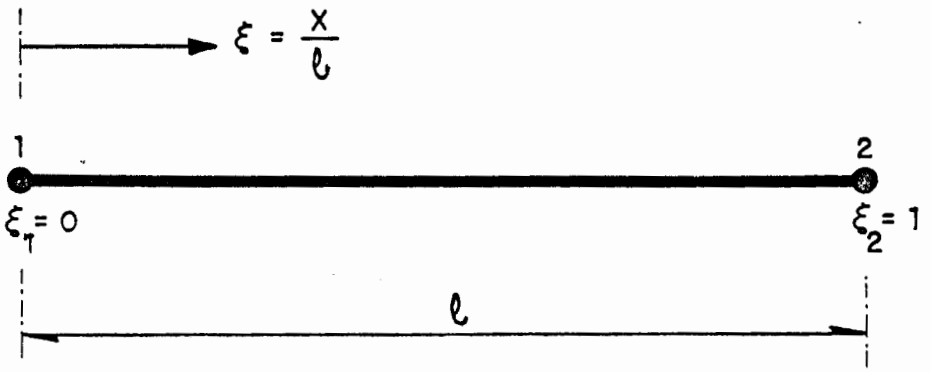


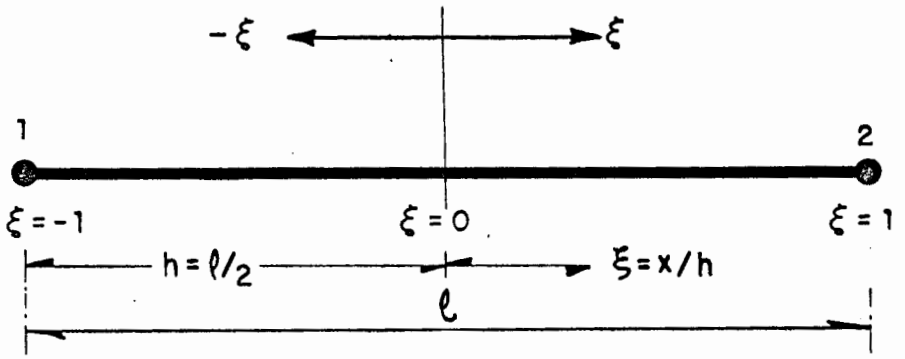
Fig. 3.7 Coordenadas en un elemento unidimensional en el que se utiliza interpolación lineal



a) Variable no normalizada con origen en un extremo.

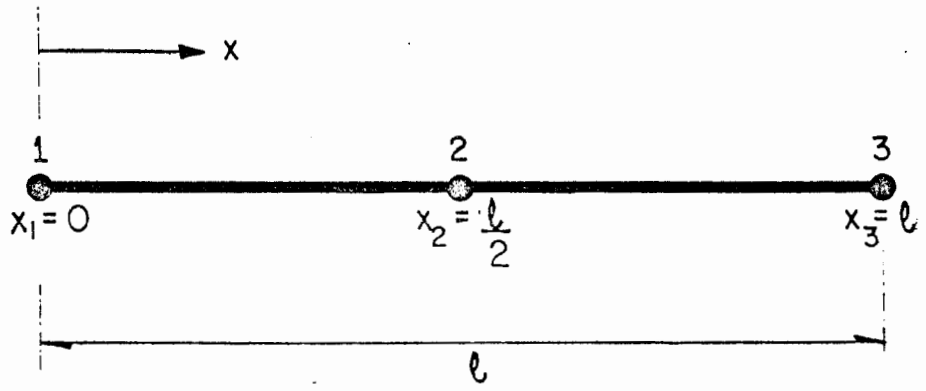


b) Variable normalizada con origen en un extremo.

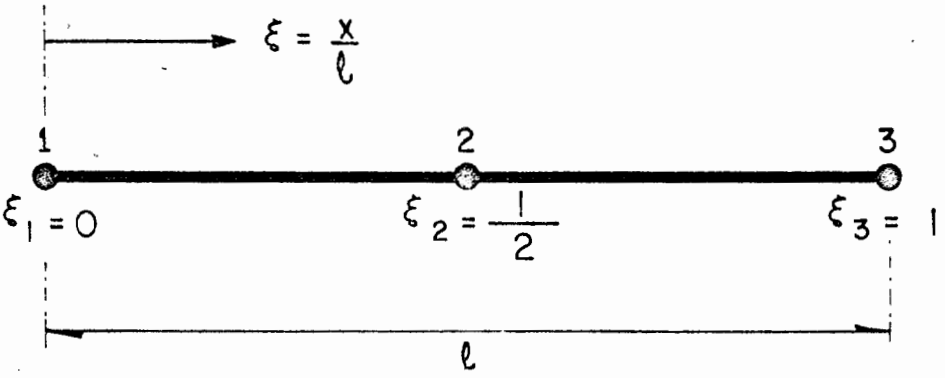


c) Variable normalizada con origen en el centro.

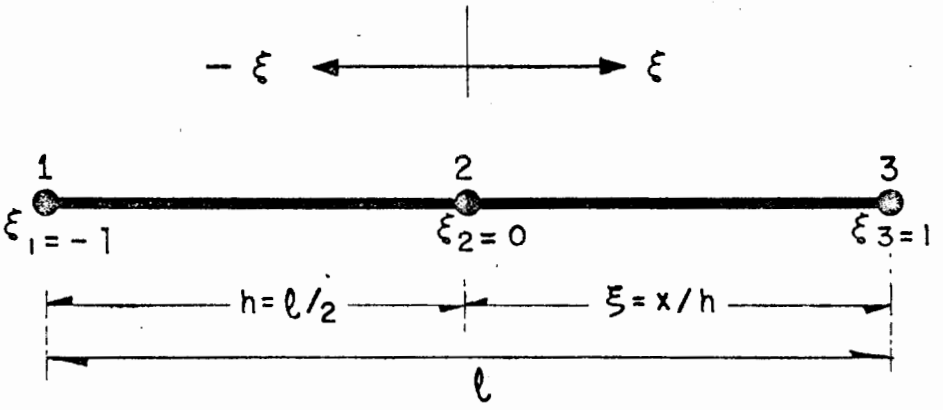
Fig. 3.8 Aproximación lineal en un elemento unidimensional Lagrangiano



a) Variable no normalizada con origen en un extremo .



b) Variable normalizada con origen en un extremo.



c) Variable normalizada con origen en el centro.

Fig. 3.9 Aproximación cuadrática en un elemento unidimensional Lagrangiano

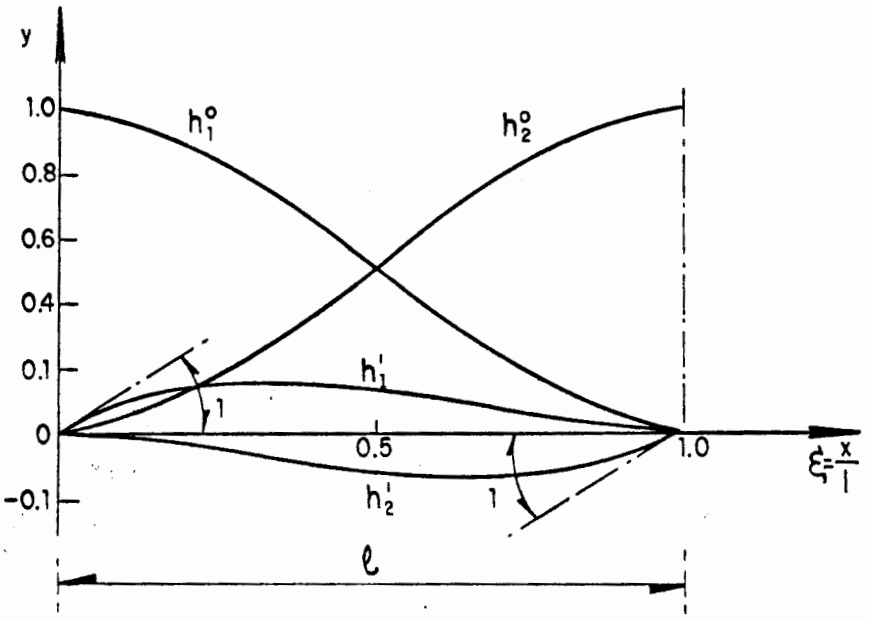


Fig. 3.10 Funciones de interpolación de Hermite.

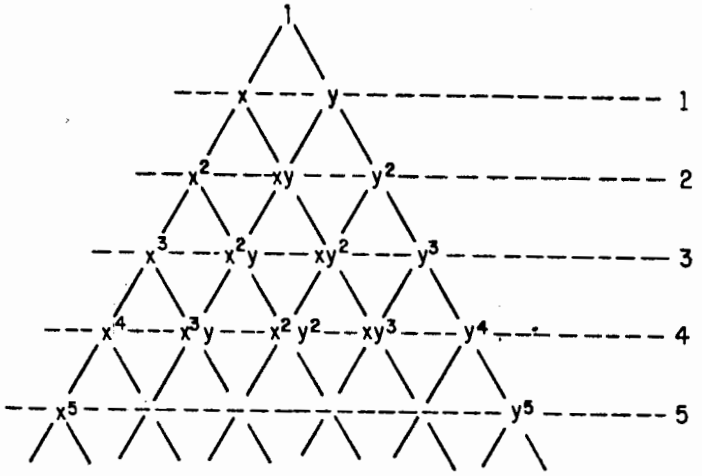


Fig. 3.11 Triángulo de Pascal. (Ref. 24)

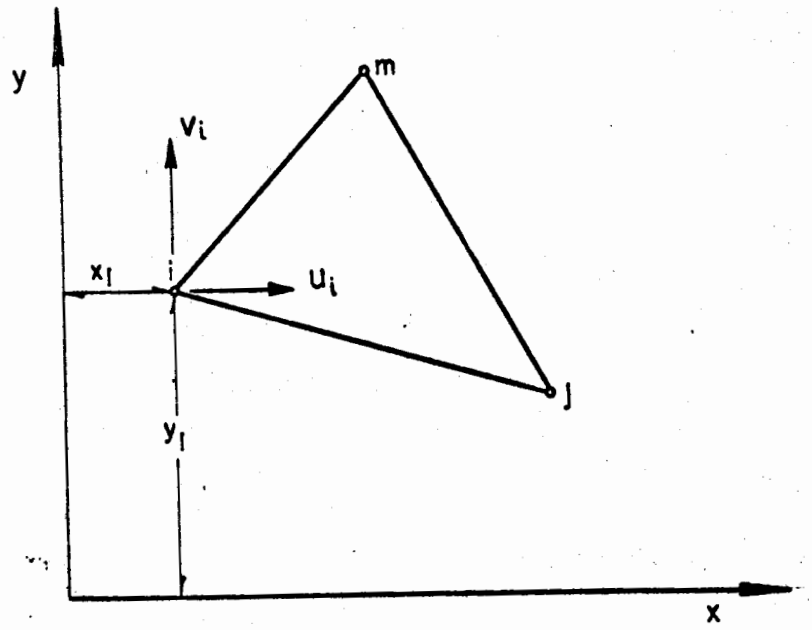


Fig. 3.12 Elemento triangular lineal.

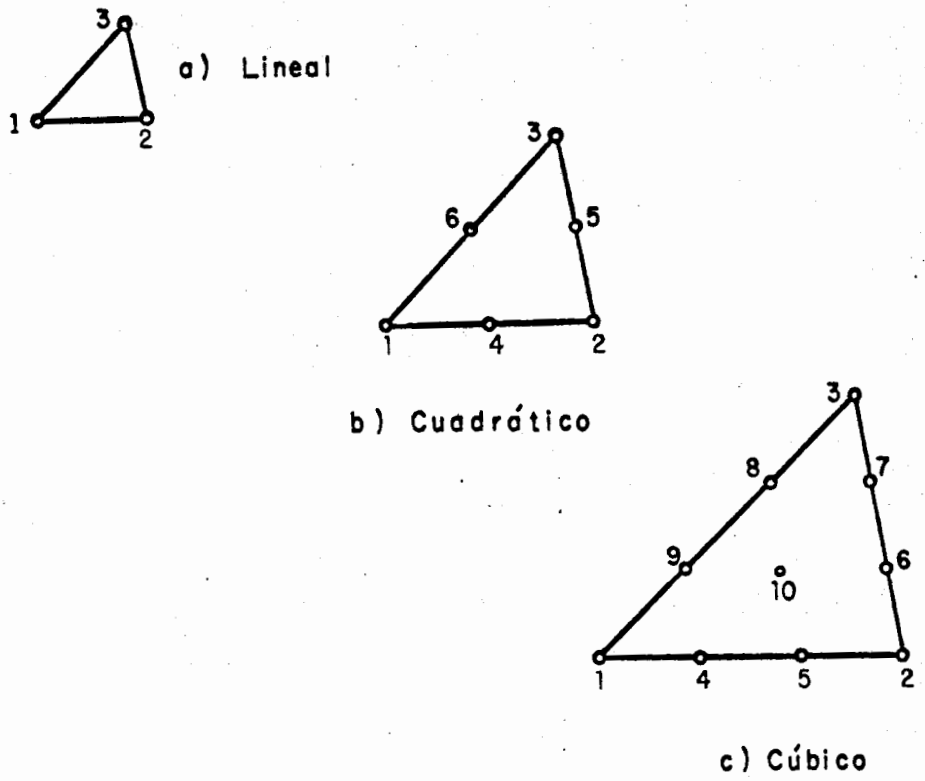


Fig. 3.13 Familia de elementos triangulares. (Ref. 24)

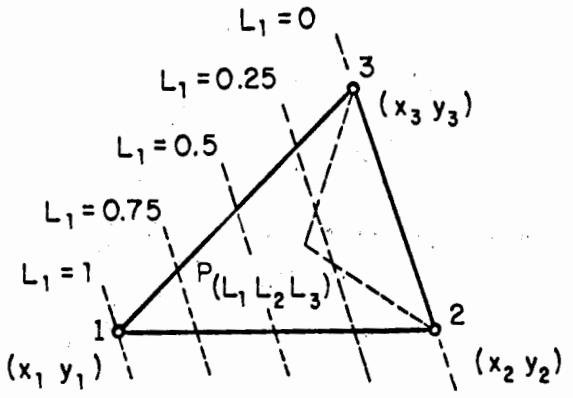


Fig. 3.14 Coordenadas de área.

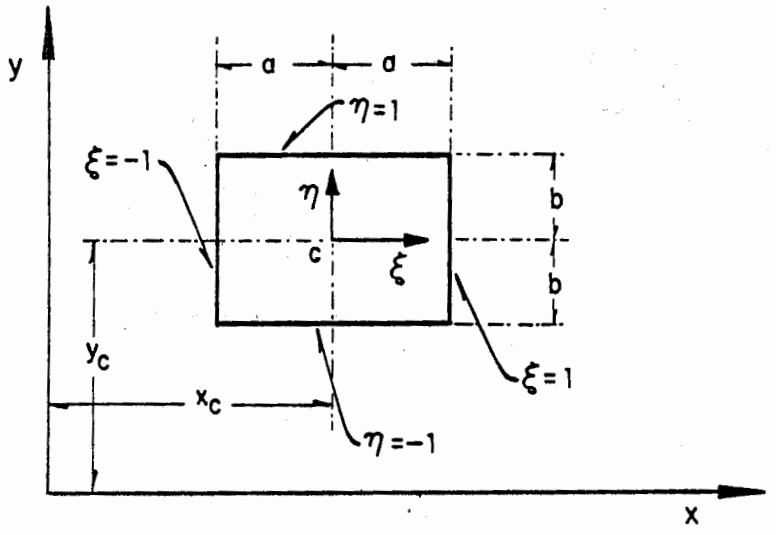


Fig. 3.15 Coordenadas normalizadas para un rectángulo. (Ref. 24)

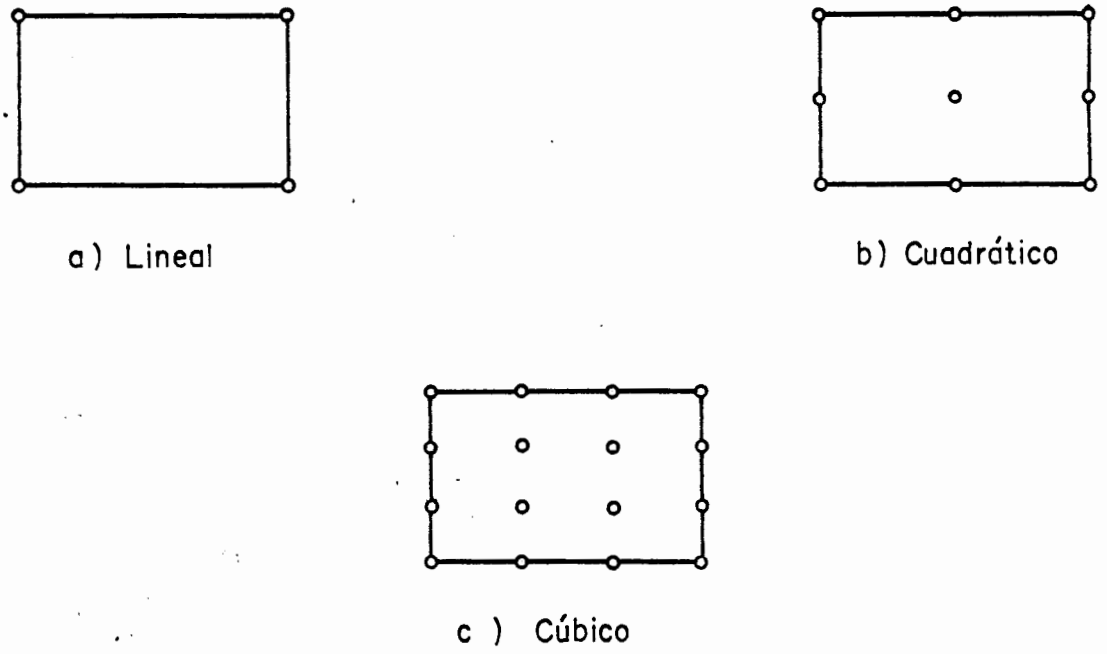


Fig. 3.16 Familia Lagrangiana de rectángulos (Ref. 24)

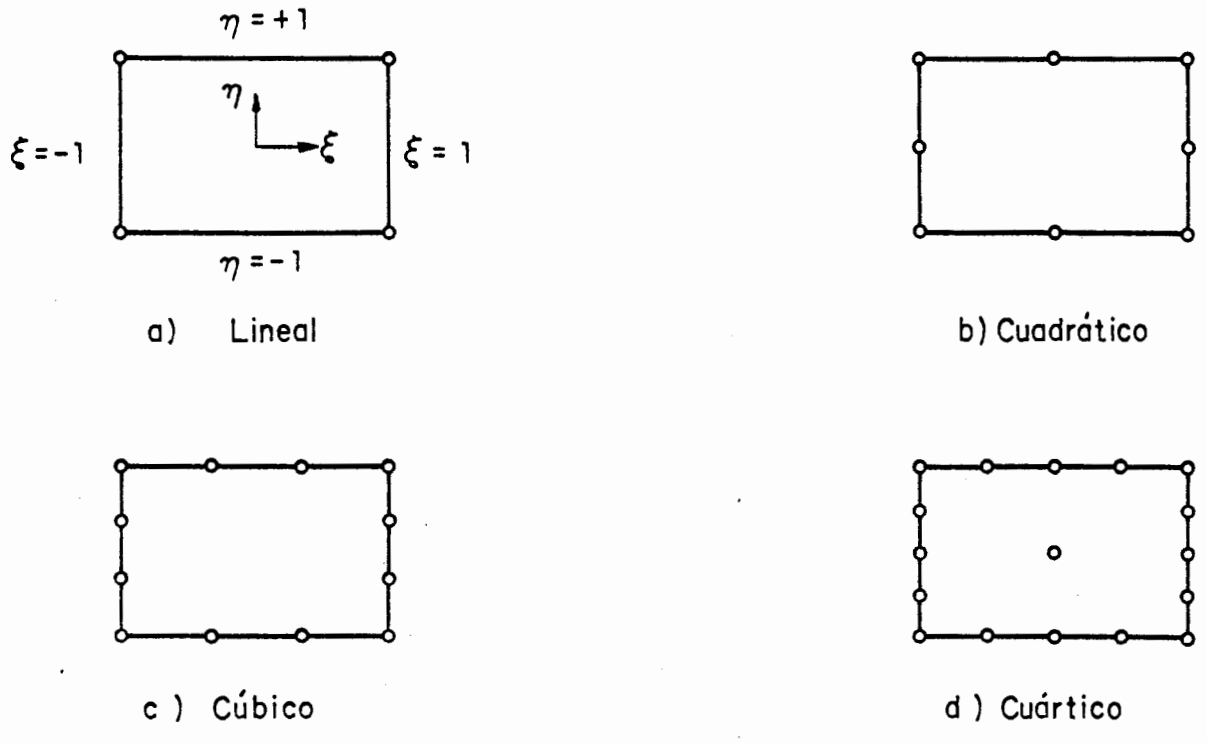


Fig. 3.17 Familia Serendipity de rectángulos.(Ref. 24)

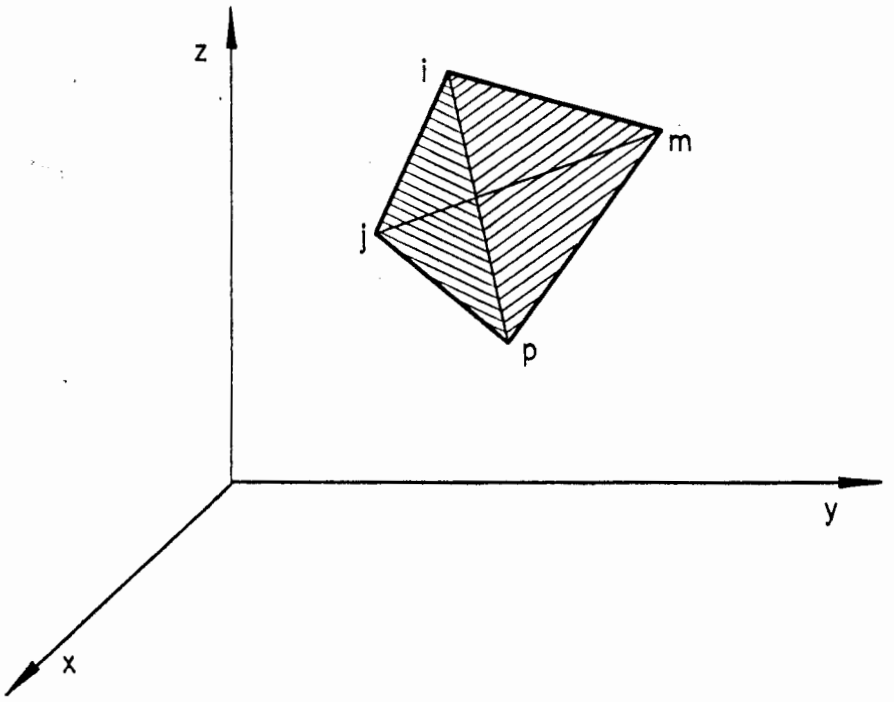


Fig. 3.18 Elemento tetraedro lineal.

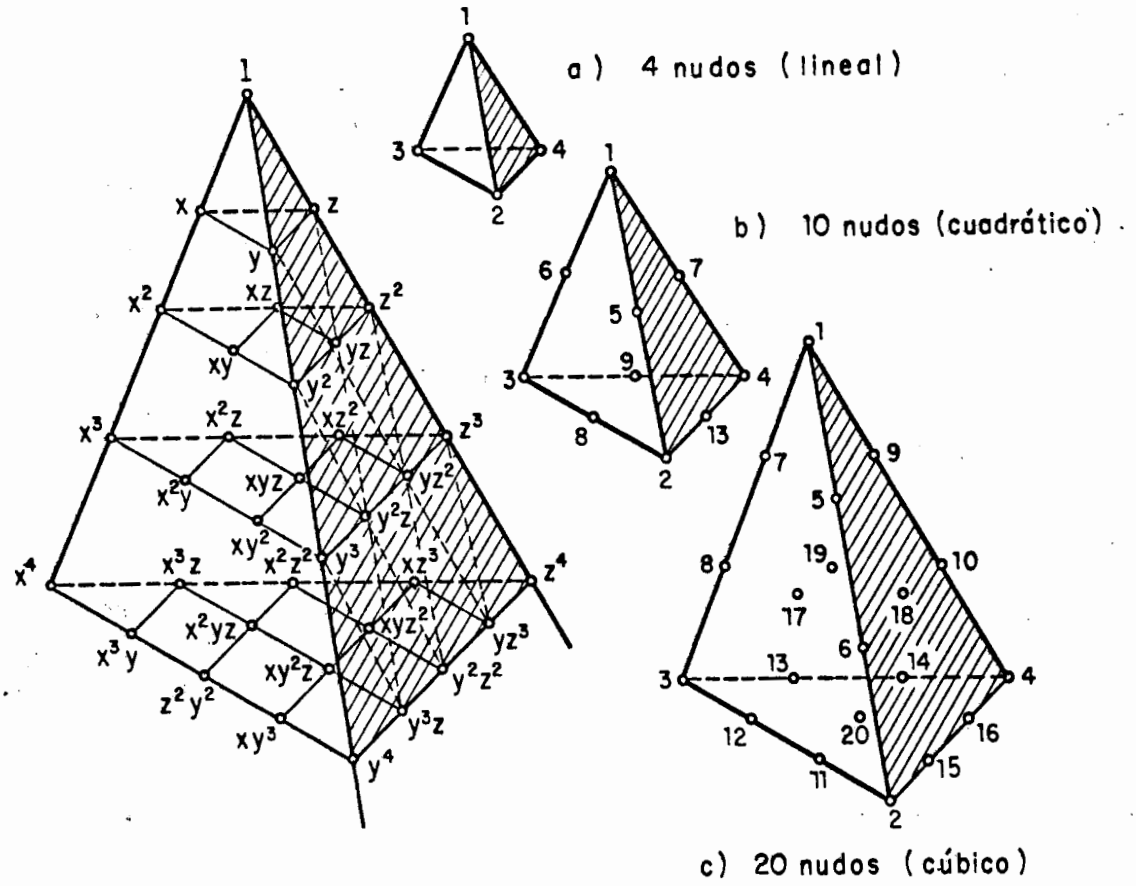


Fig. 3.19 Familia de tetraedros. (Ref. 24)

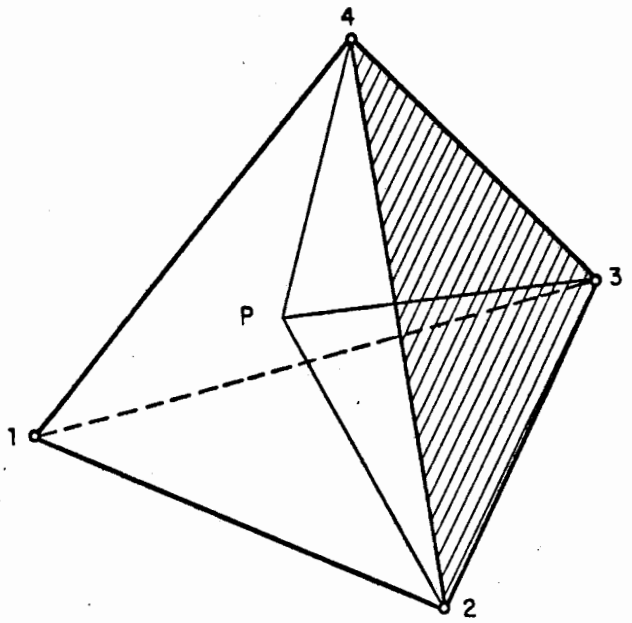


Fig. 3.20 Coordenadas de volumen. (Ref. 24)

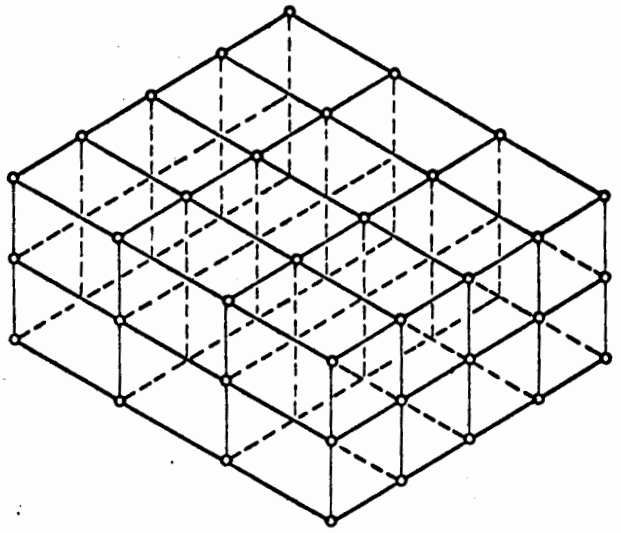


Fig. 3.2.1 Prisma rectangular de la familia Lagrangiana (Ref. 24)

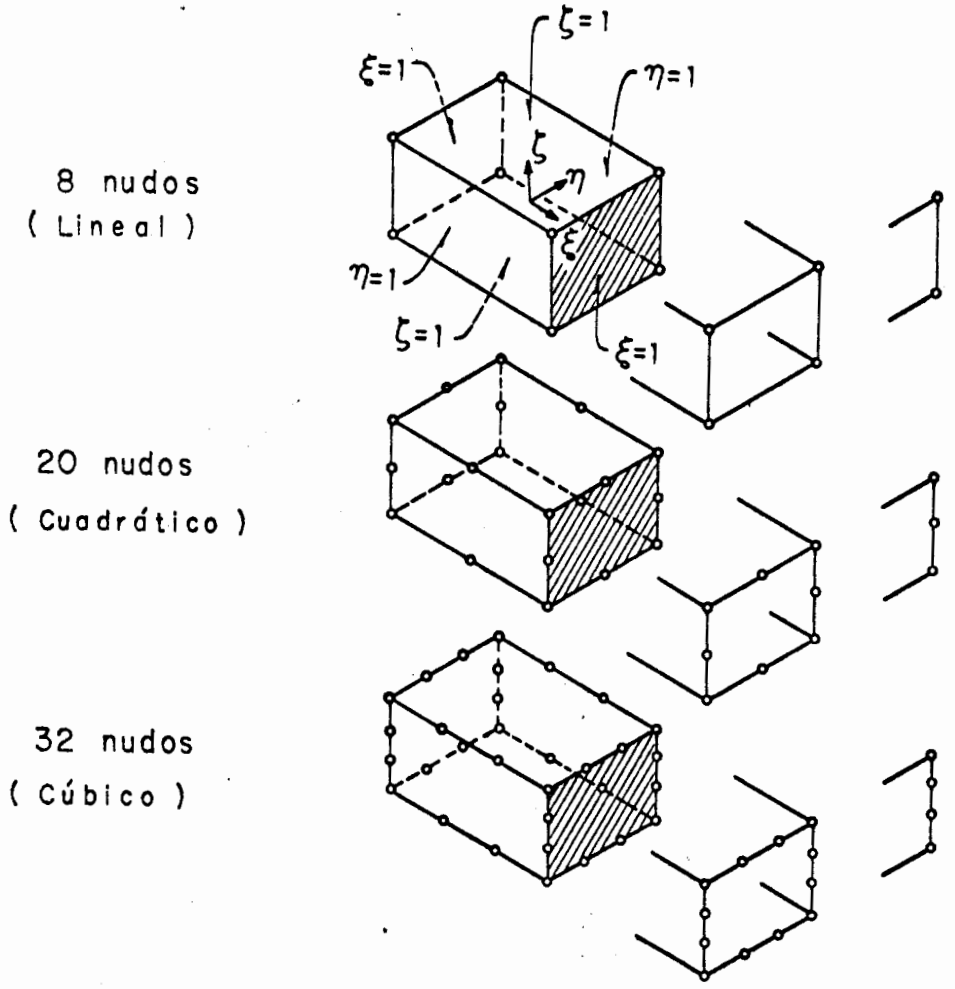


Fig. 3.22 Familia Serendipity de prismas rectangulares (Ref. 24)

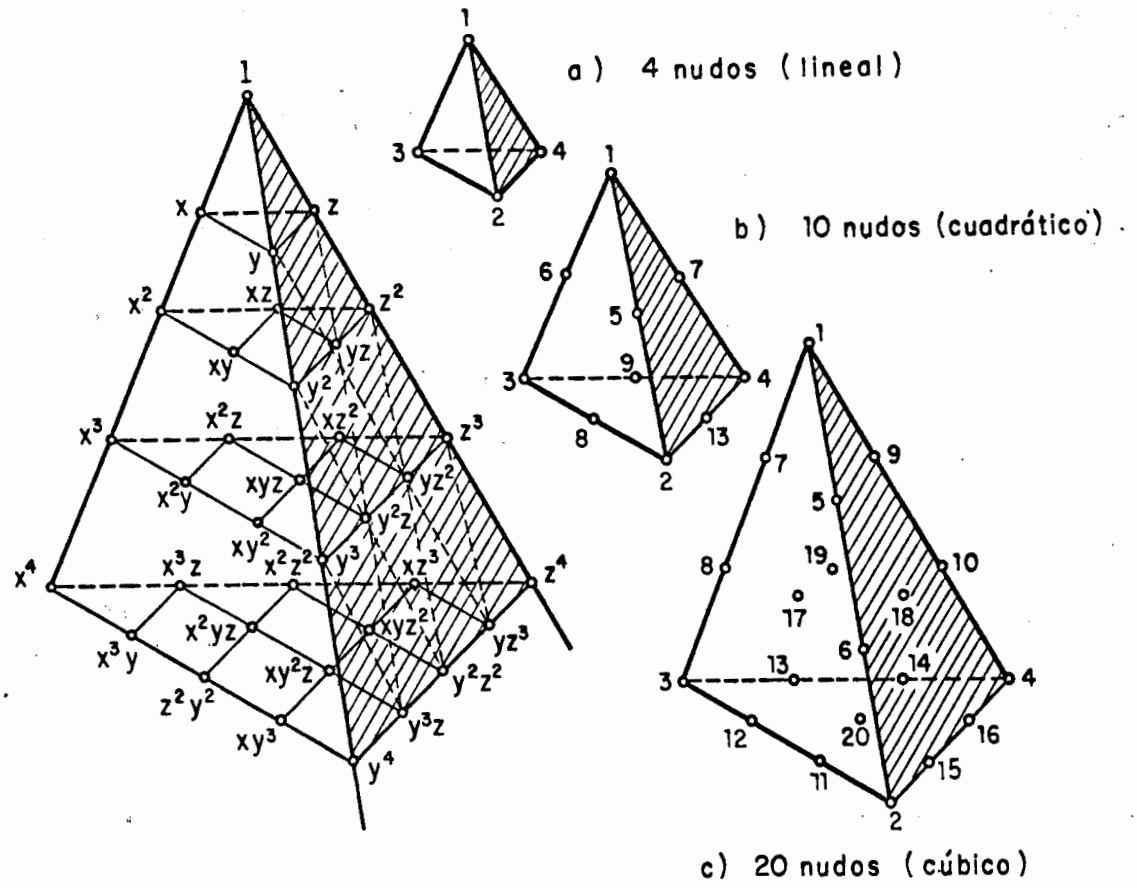


Fig. 3.19 Familia de tetraedros. (Ref. 24)

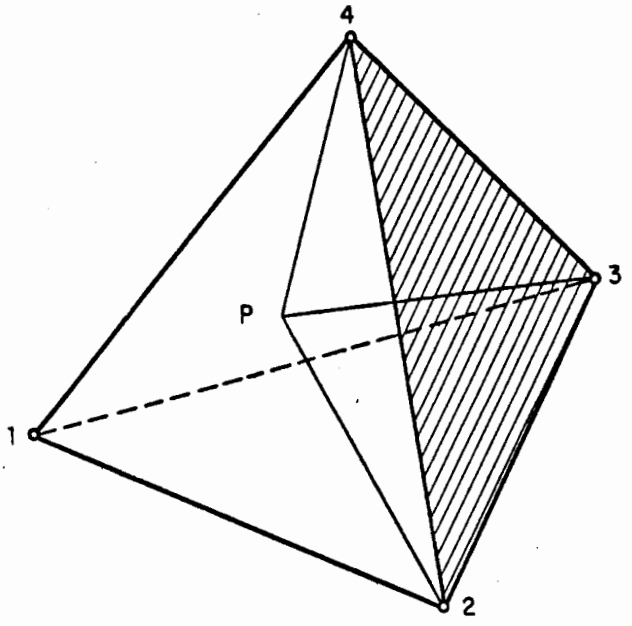


Fig. 3.20 Coordenadas de volumen. (Ref. 24)

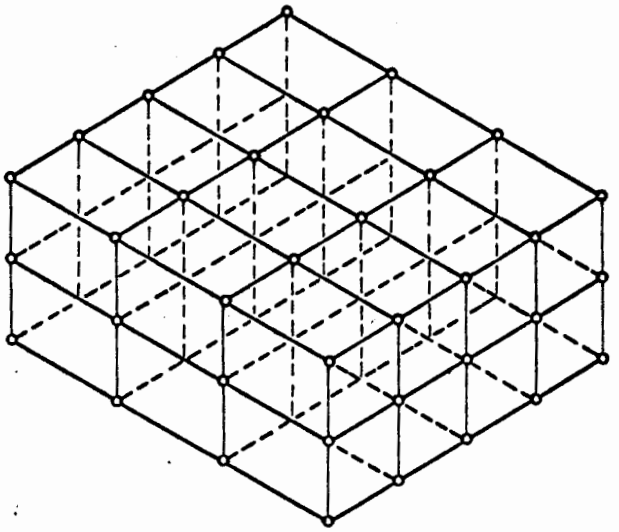


Fig. 3.2.1 Prisma rectangular de la familia Lagrangiana (Ref. 24)

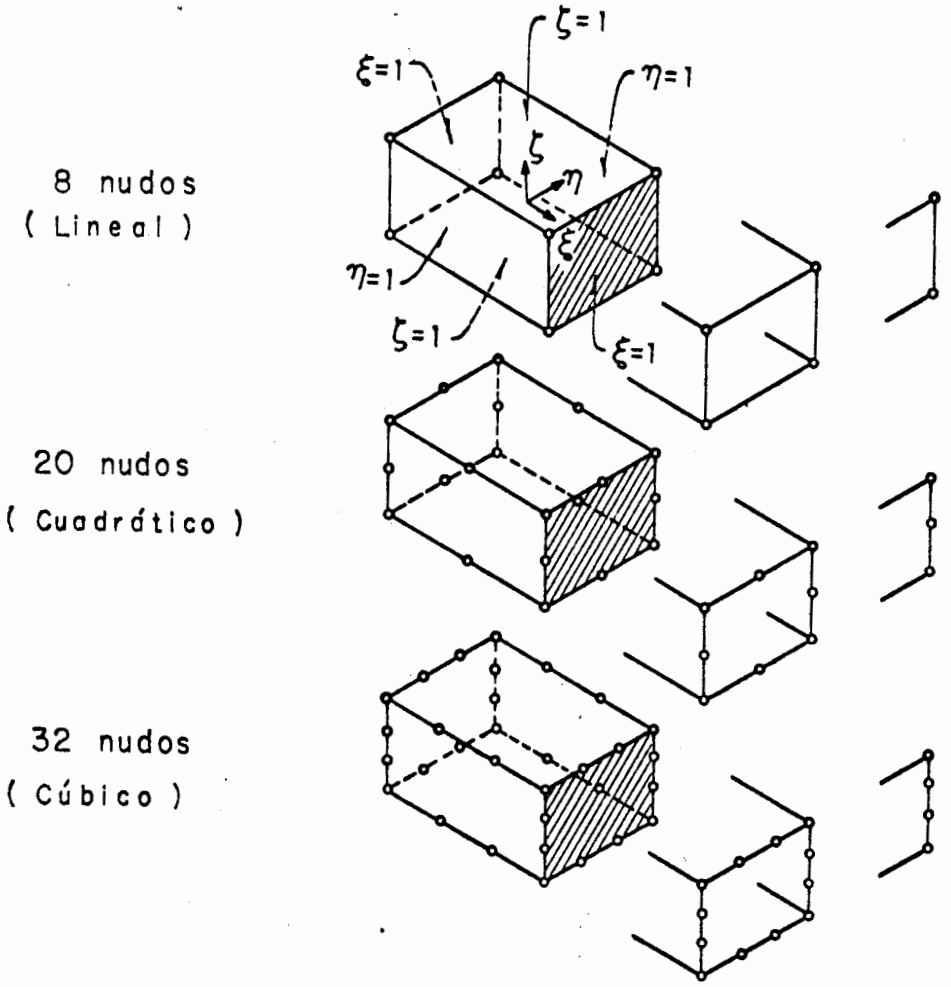


Fig. 3.22 Familia Serendipity de prismas rectangulares (Ref. 24)

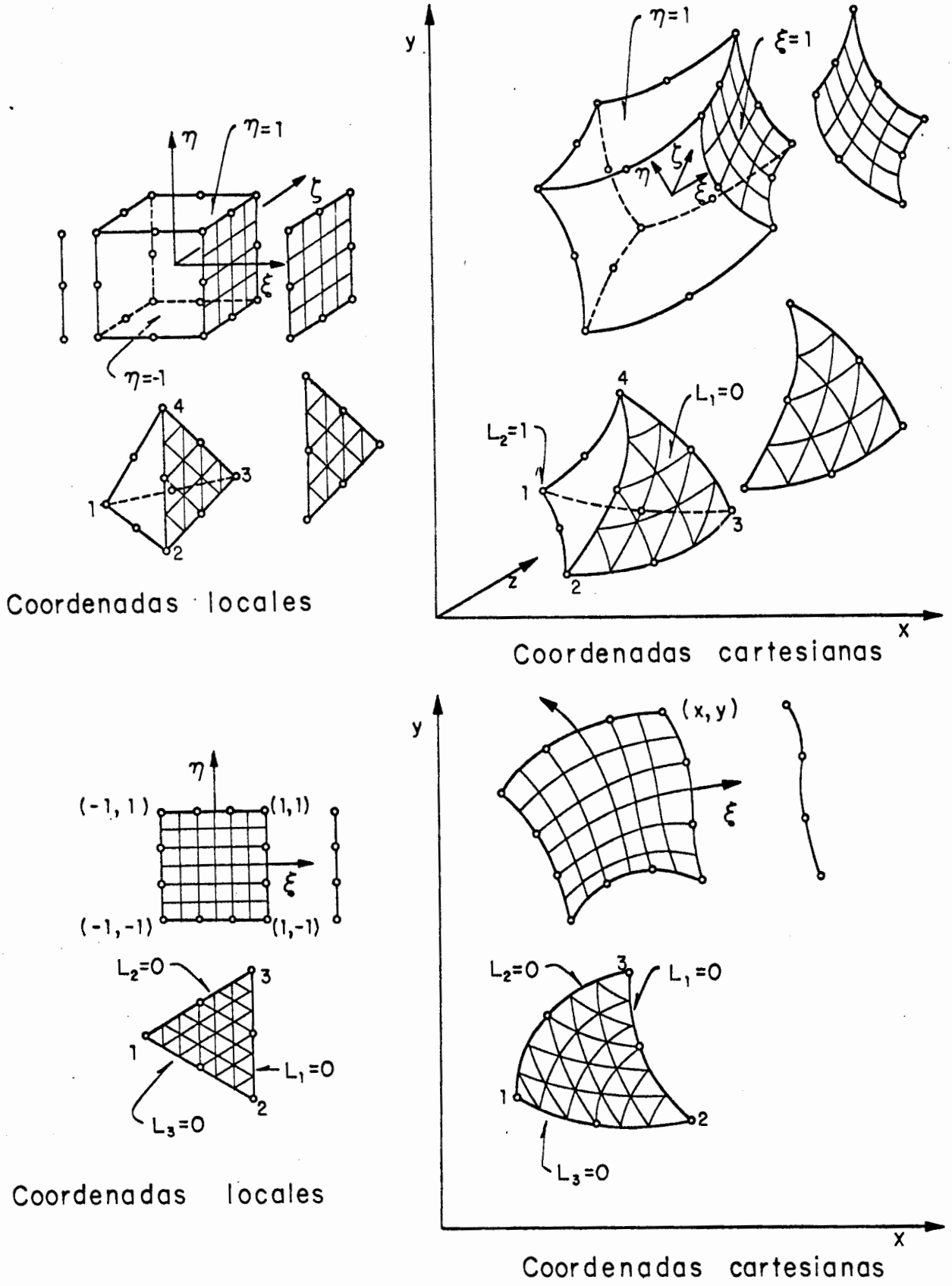
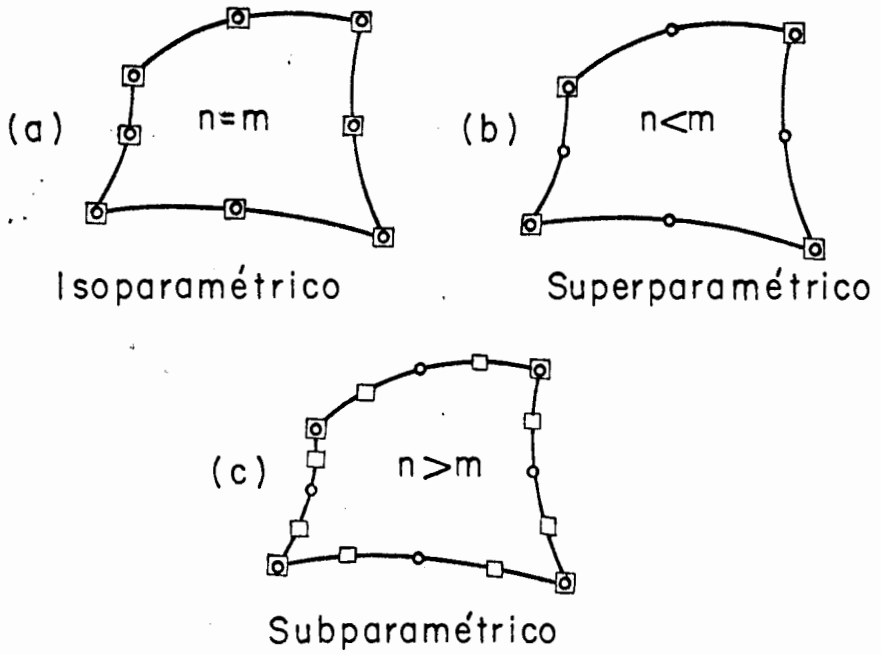


Fig. 3.23 Mapeos de elementos bidimensionales y tridimensionales (Ref. 24)

$$X = N_i X_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$U = N_i U_i \qquad i = 1, \ldots, n$$



o Punto donde se define la coordenada (m)
□ Punto donde se define la función (n)

Fig. 3.24 Transformación de coordenadas mediante funciones de forma. (Ref. 24)

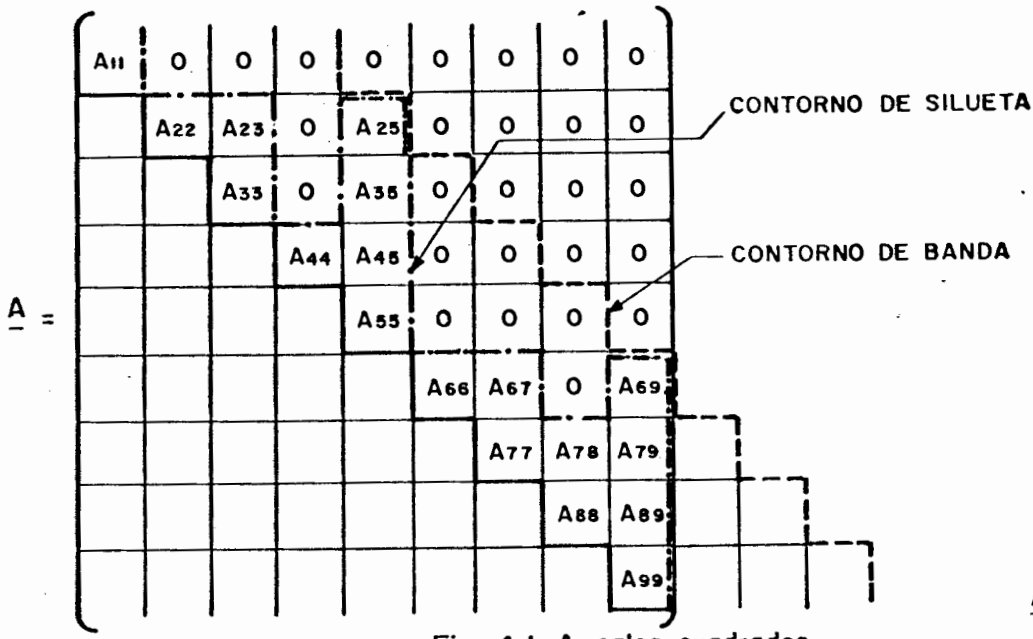


Fig. 4.1 Arreglos cuadrados

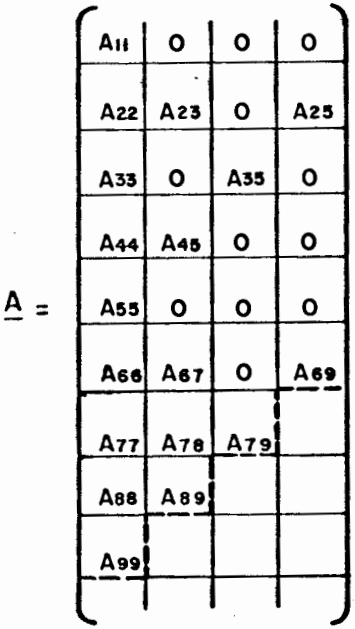


Fig. 4.2 Arreglos rectangulares (en banda)

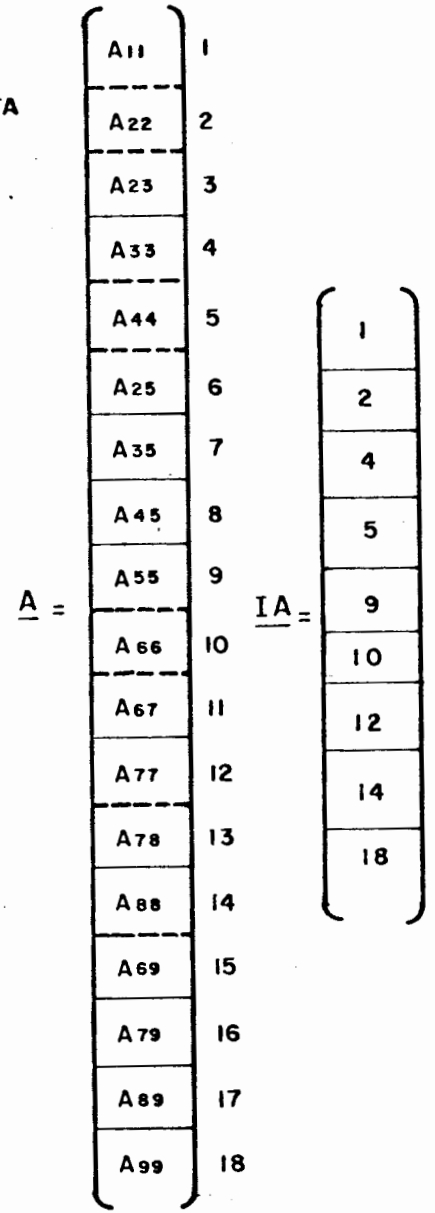
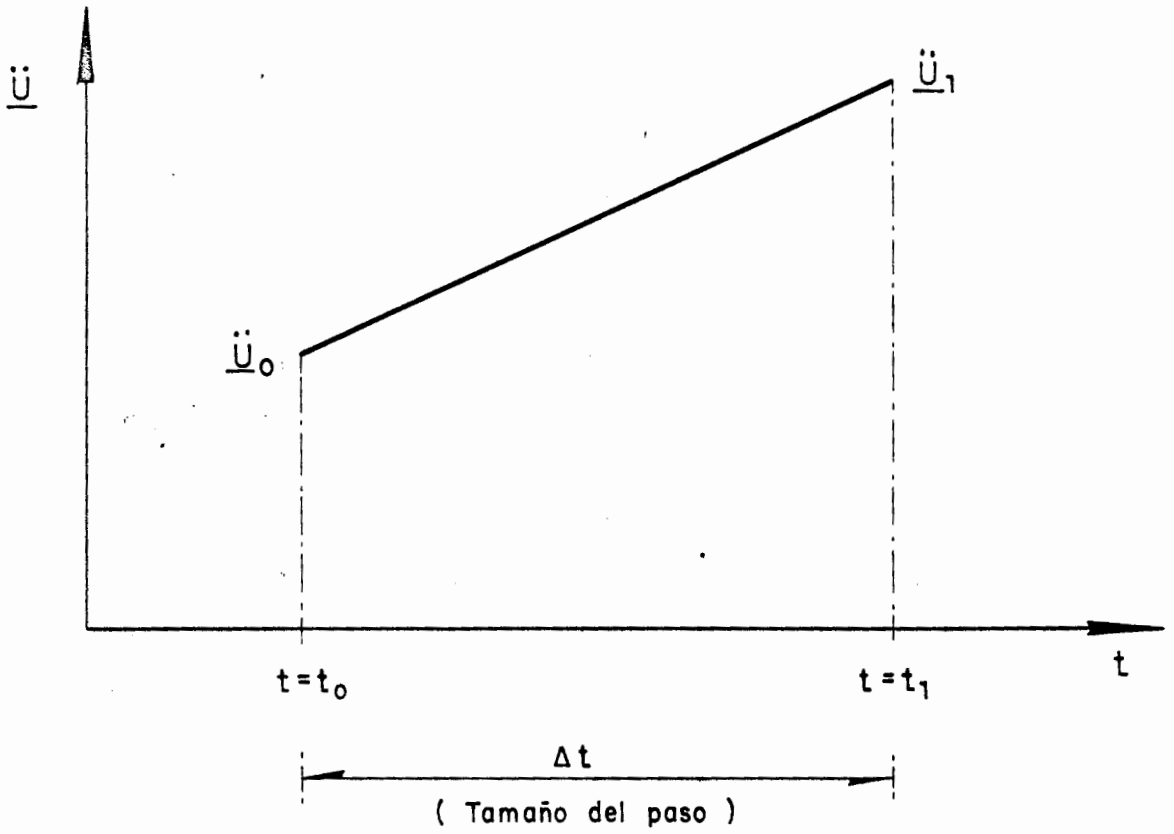


Fig. 4.3 Arreglos unidimensionales (en silueta)



Valores conocidos al inicio del paso : U_0 , $\dot{U}_0$, y $\ddot{U}_0$

Valores por conocer al final del paso : U_1 , $\dot{U}_1$, y $\ddot{U}_1$

Fig 4.4 Variación lineal de la aceleración en el intervalo de integración , Δt.

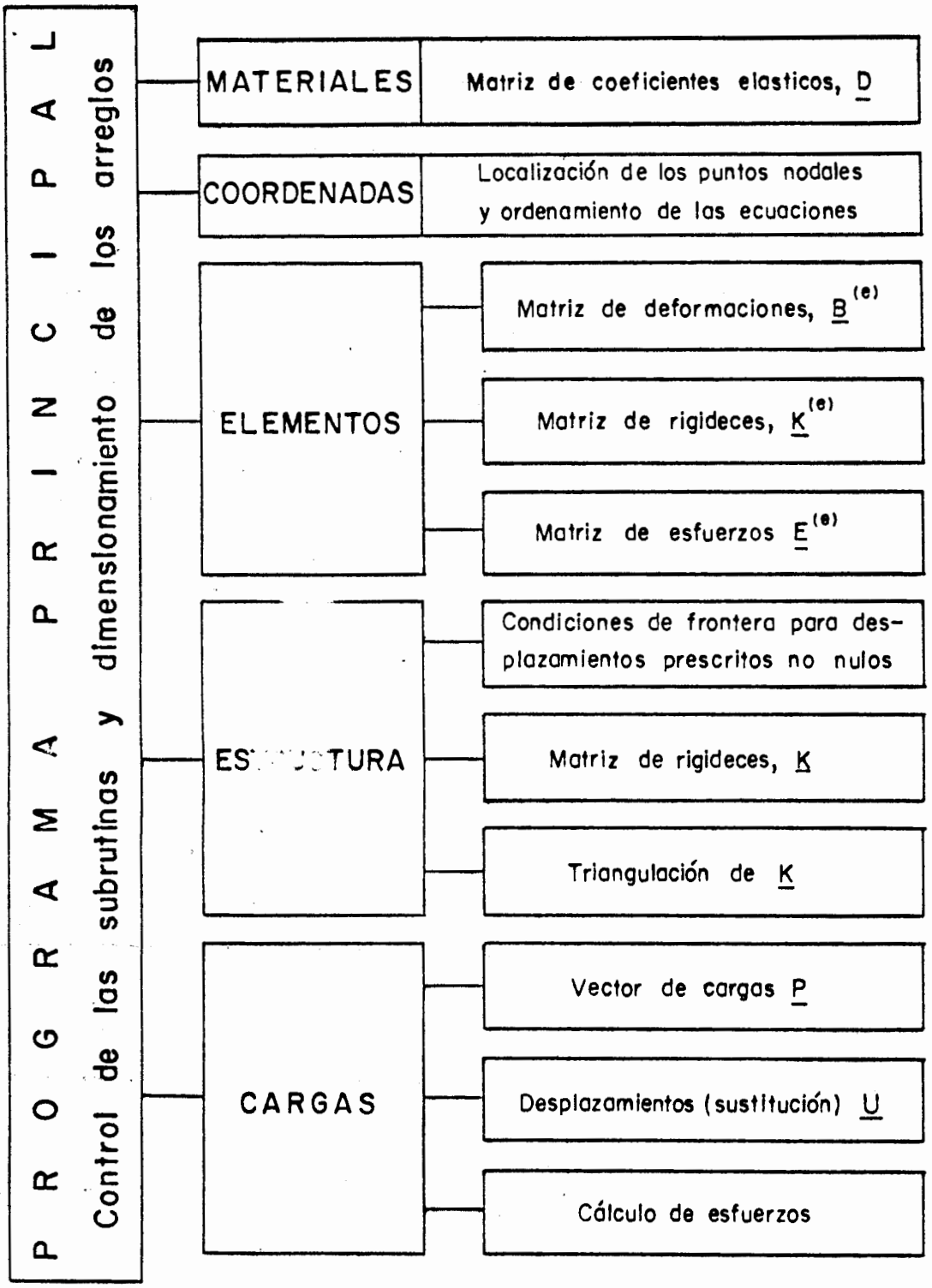
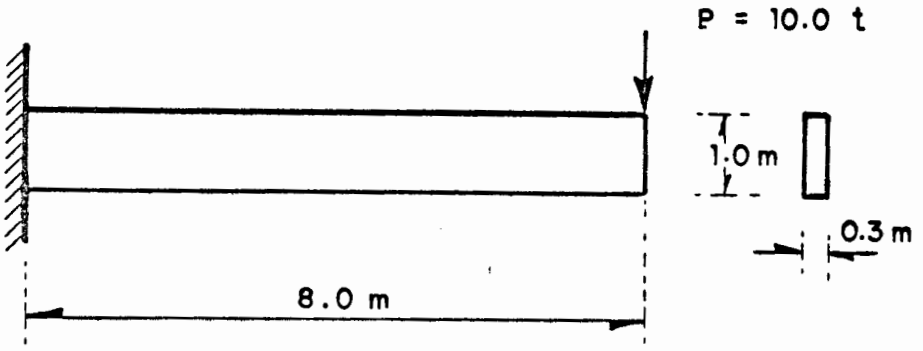


Fig. 4.5 Organización esquemática simple de un programa de computadora para el método del elemento finito (ecuaciones de equilibrio estático)



$E = 2.0 \times 10^6\ t/m^2$ $\qquad$ $g = 9.81\ m/s^2$

$\nu = 0.2$ $\qquad$ $P = \frac{Pv}{g} = 0.245\ \ t \cdot S^2/m^4$

$Pv = 2.4\ t/m^3$

Fig 5.1 Estructura del ejemplo de aplicación

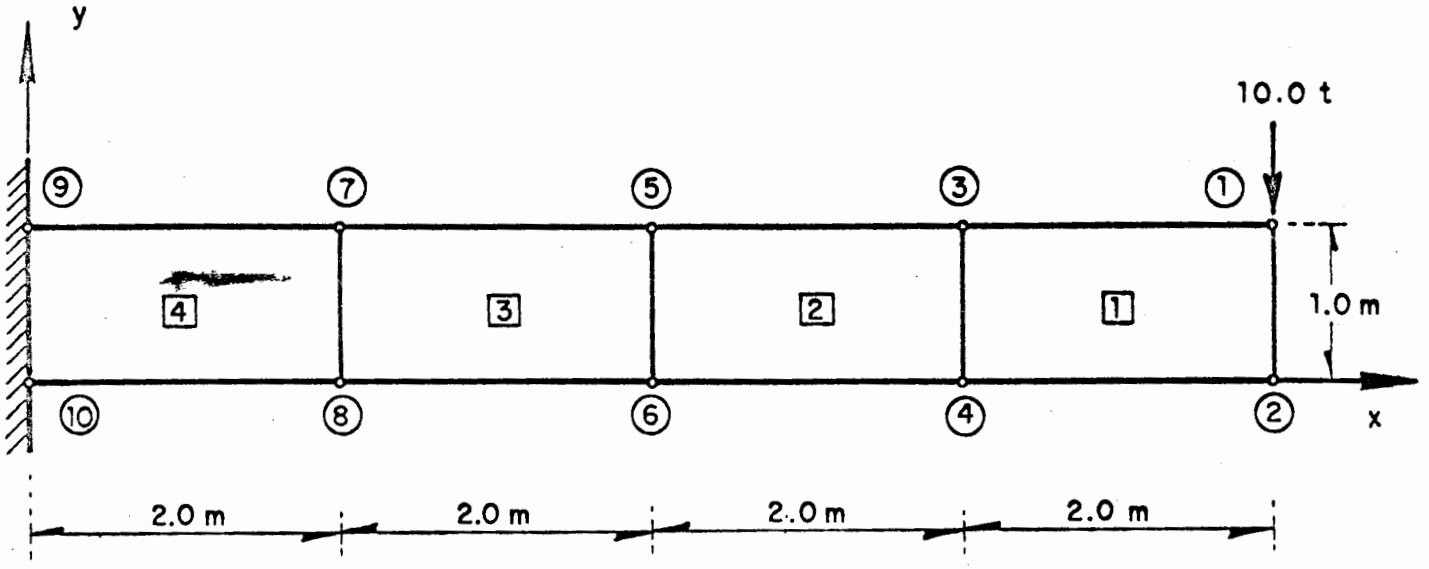
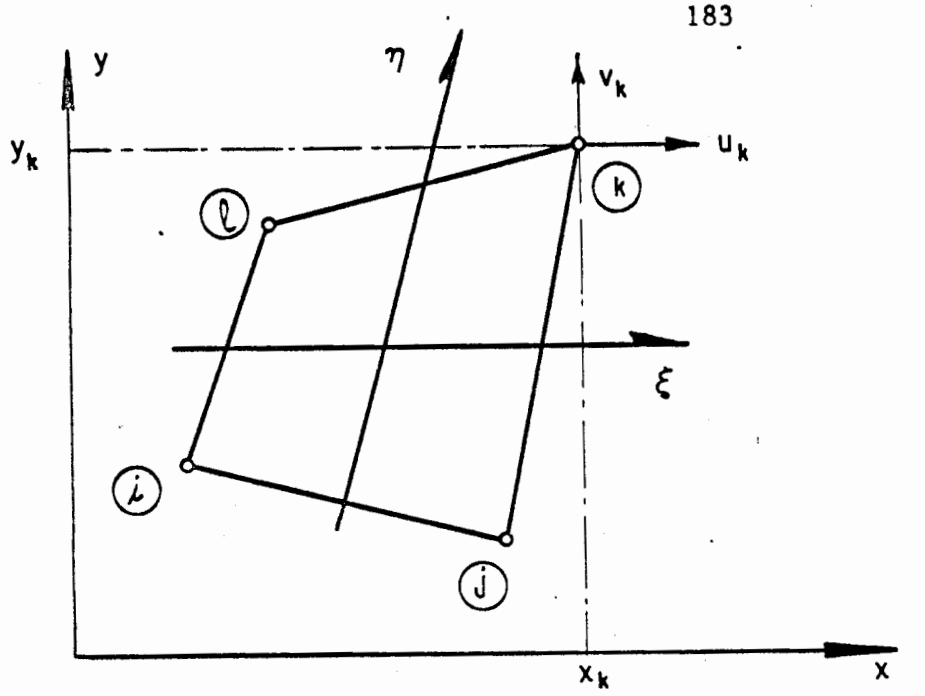
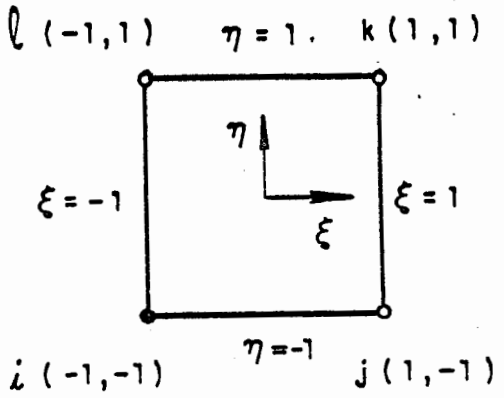


Fig 5.2 Malla de elementos finitos



a) Coordenadas globales



b) Coordenadas locales

Fig 5.3 Componentes del elemento finito tipo lineal

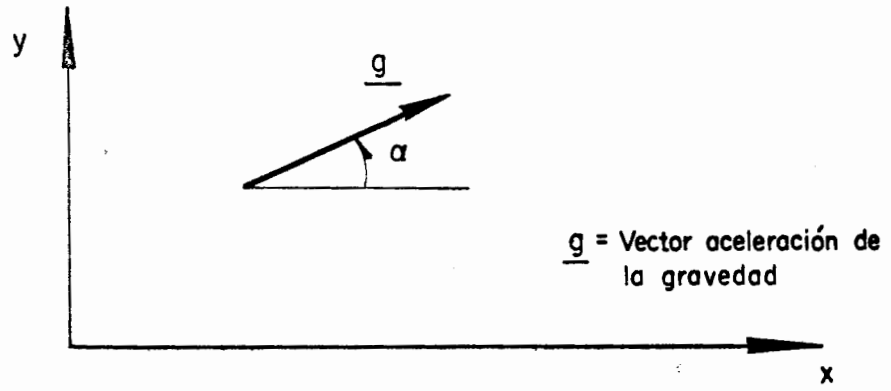


Fig 5.4 Orientación de las fuerzas de cuerpo

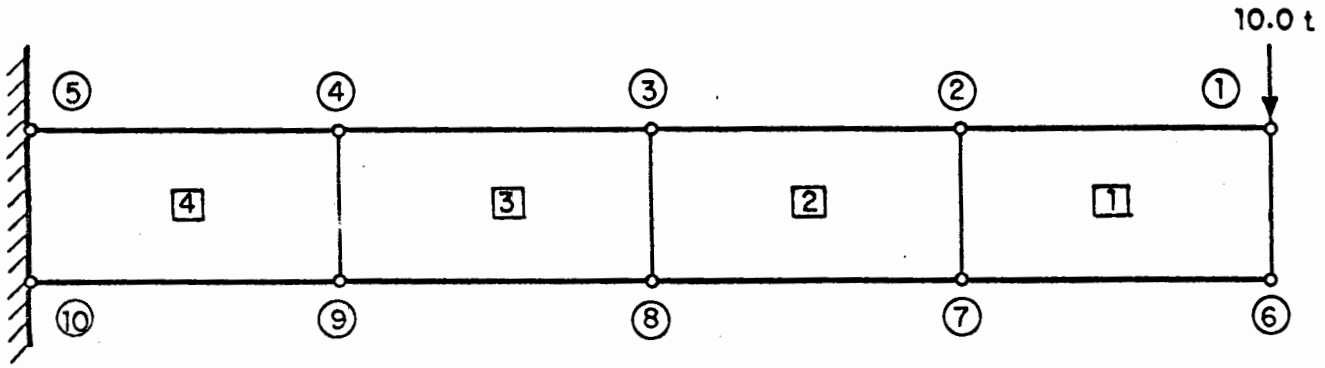


Fig 5.5 Malla de la Fig 5.2 con numeración de los puntos nodales diferentes

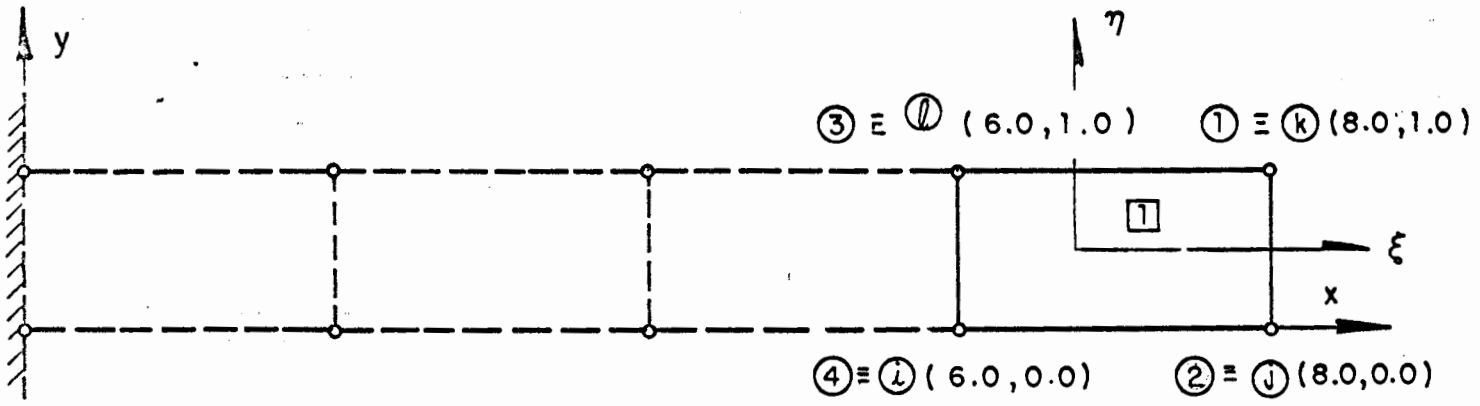


Fig 5.6 Elemento finito número uno

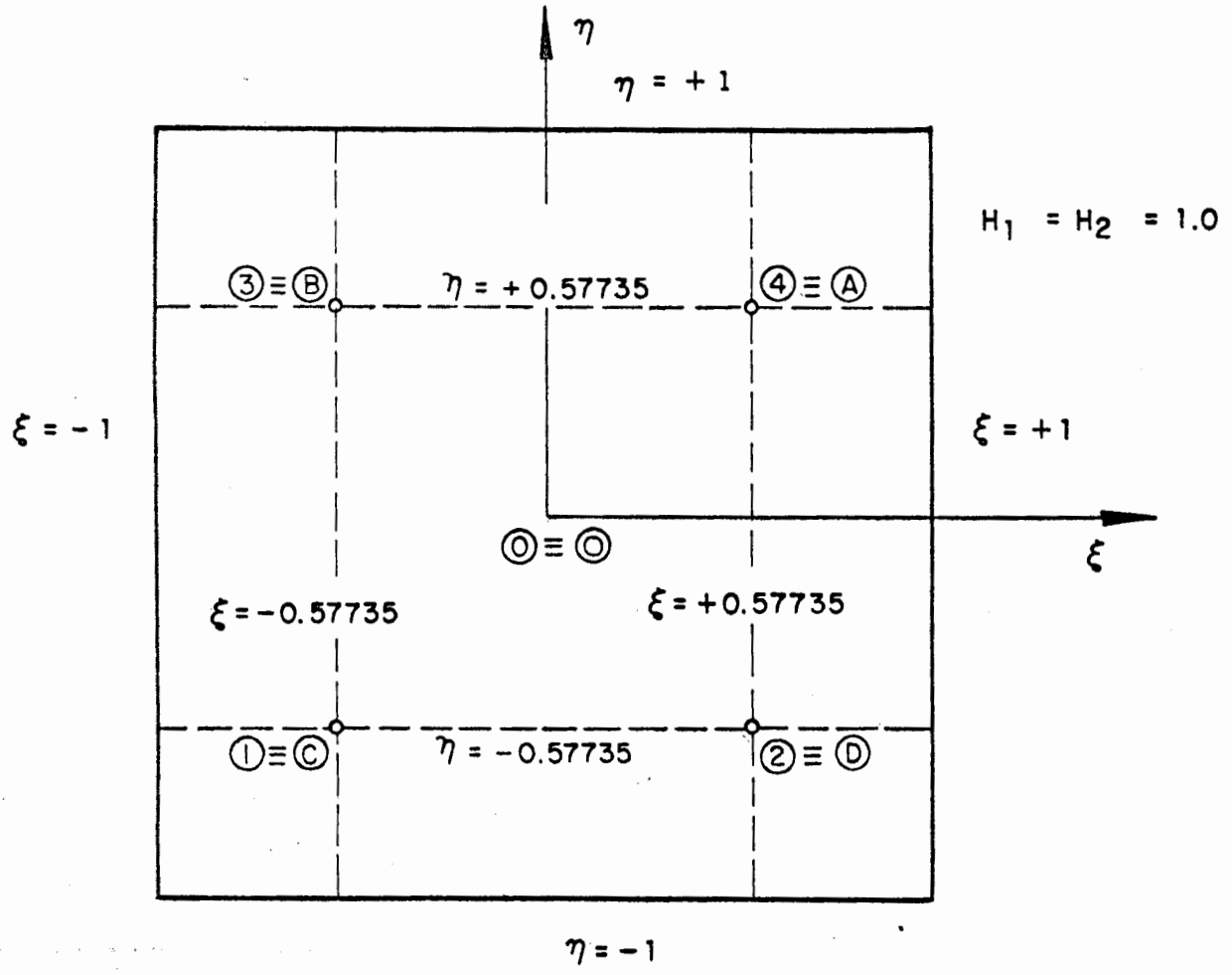
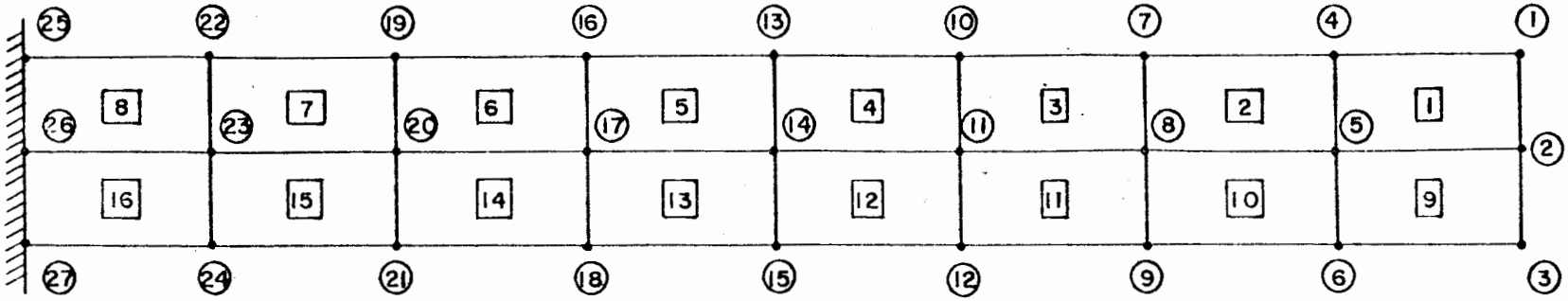
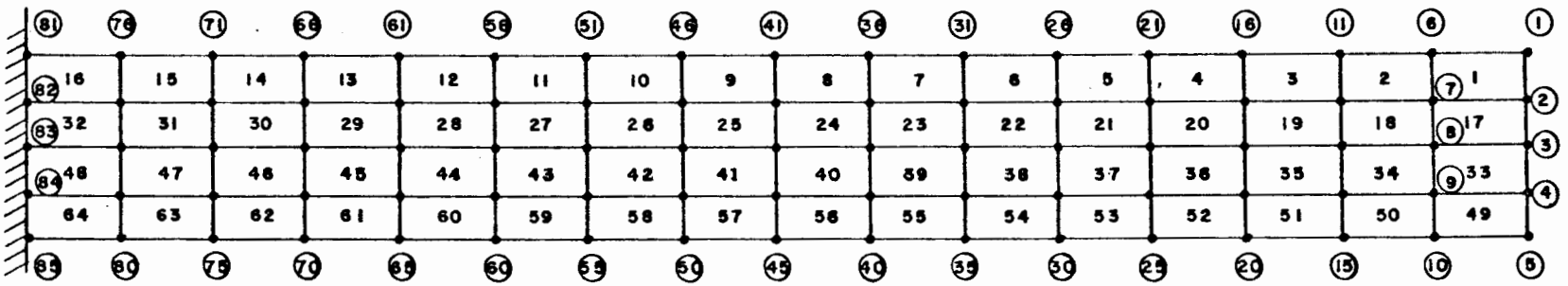


Fig 5.7 Abscisas y coeficientes de peso para la cuadratura gaussiana con N=2 para el cuadrilátero

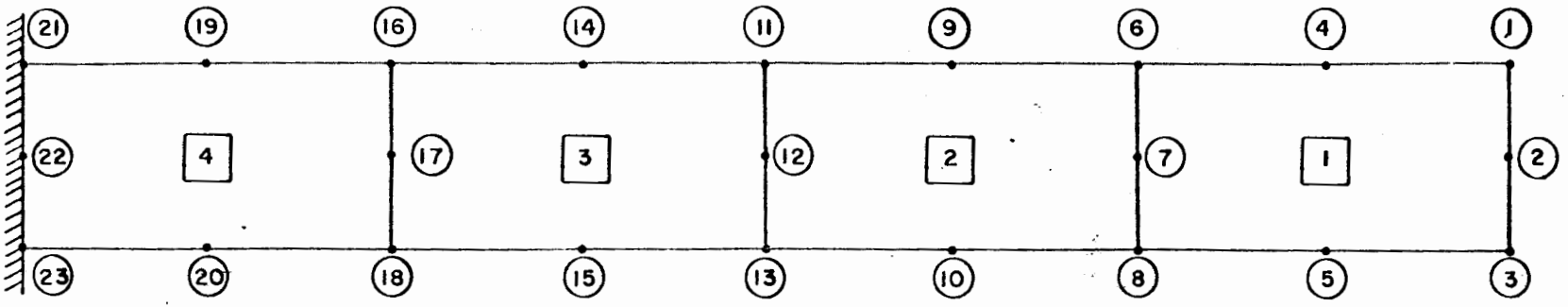


a) 16 elementos finitos — 48 ecuaciones — 2304 localidades, arreglo cuadrado
27 puntos nodales — 10 ancho de semibanda — 480 localidades, arreglo en banda
436 localidades, arreglo en silueta

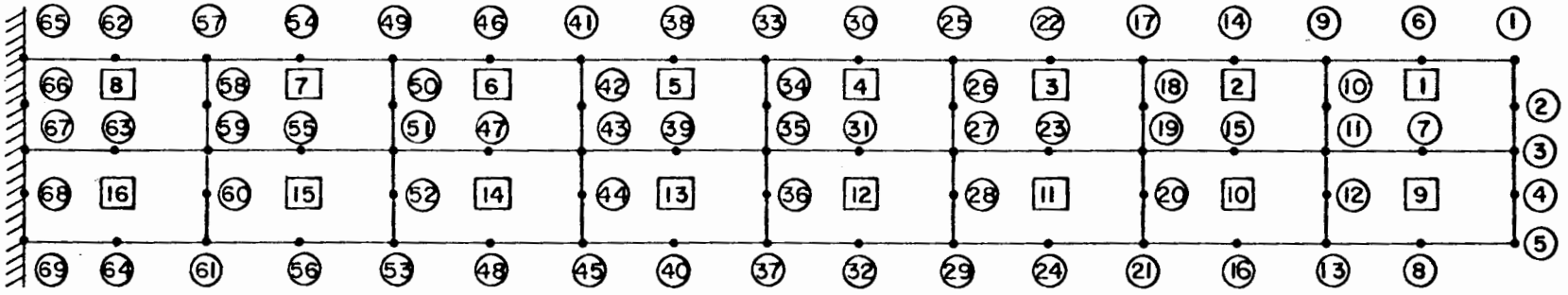


b) 64 elementos finitos — 160 ecuaciones — 25600 localidades, arreglo cuadrado
85 puntos nodales — 14 ancho de semibanda — 2240 localidades, arreglo en banda
2156 localidades, arreglo en silueta

Fig. 5.8 Mallas con elementos finitos lineales



a) 4 elementos finitos — 40 ecuaciones — 1600 localidades, arreglo cuadrado
23 puntos nodales — 16 ancha de semibanda — 640 localidades, arreglo en banda
440 localidades, arreglo en silueta



b) 16 elementos finitos — 128 ecuaciones — 16384 localidades, arreglo cuadrado
69 puntos nodales — 22 ancho de semibanda — 2816 localidades, arreglo en banda
2144 localidades, arreglo en silueta

Fig. 5.9 Malla con elementos finitos cuadráticos

0.42	1.00	1.58	2.42	3.00	3.58	4.42	5.00	5.58	6.42	7.00	7.58	
310.9		310.9	222.2		222.0	132.8		133.7	46.4		42.4	0.79
	0.0			0.0			0.0			0.0		0.50
-310.9		-310.9	-222.0		-222.2	-133.7		-132.8	-42.4		-46.4	0.21
												0.00

a) Puntos gaussianos y centroidales de la malla de la Fig. 5.2

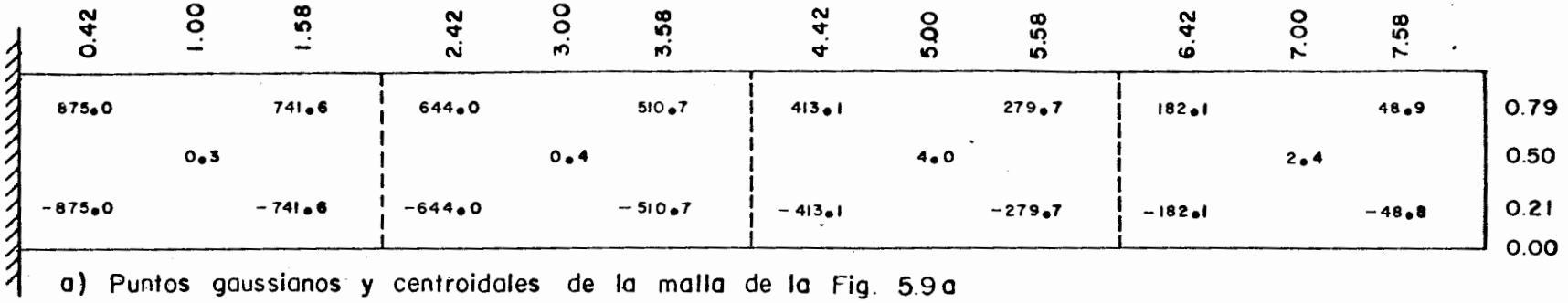
0.21	0.50	0.79	1.21	1.50	1.79	2.21	2.50	2.79	3.21	3.50	3.79	4.21	4.50	4.79	5.21	5.50	5.79	6.21	6.50	6.79	7.21	7.50	7.79	
850.5		835.5	726.2		731.9	616.9		617.6	504.0		505.9	342.0		393.7	279.4		280.6	167.5		171.8	62.9		52.4	0.89
	529.7			454.5			385.6			315.3			245.3			175.1			105.4			33.9		0.75
223.9		208.8	177.0		182.8	153.7		154.4	124.7		126.6	96.8		98.5	69.6		70.8	39.9		43.2	15.4		4.4	0.61
-223.9		-208.8	-177.0		-182.8	-153.7		-154.4	-124.6		-126.5	-97.1		-98.8	-68.4		-70.0	-43.0		-44.3	-11.7		-16.3	0.39
	-529.7			-454.5			-385.6			-315.3			-245.3			-175.1			-105.4			-33.9		0.25
-850.5		-835.5	-726.2		731.9	-616.9		617.6	-504.0		-505.9	-391.8		-393.5	-280.2		281.8	-166.5		-167.8	-51.5		-56.1	0.11
																								0.00

b) Puntos gaussianos y centroidales de la malla de la Fig. 5.8 a

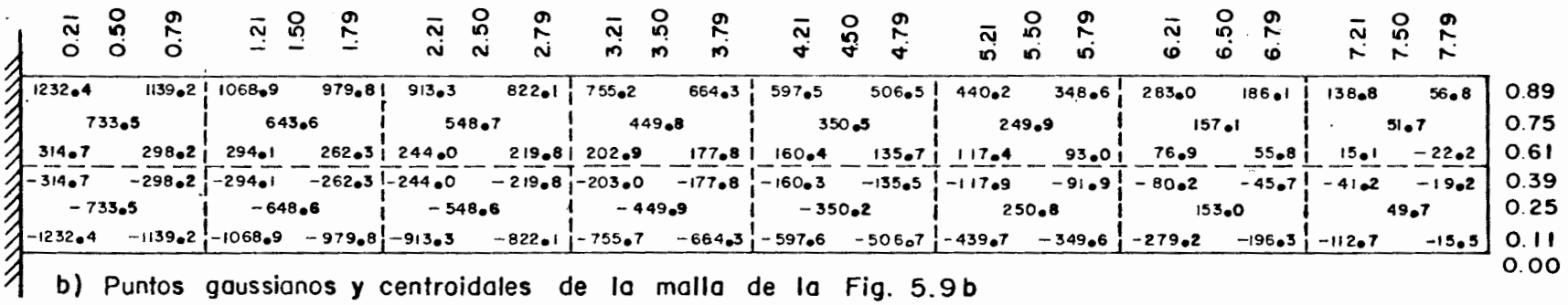
0.25	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75	4.25	4.75	5.25	5.75	6.25	6.75	7.25	7.75	
1053.2	981.8	915.0	847.0	779.3	711.5	643.8	576.0	508.2	440.5	372.3	305.0	236.9	169.1	108.2	38.8	0.88
343.3	332.7	303.6	282.5	259.7	237.2	214.6	192.0	169.4	146.8	124.2	101.7	79.2	57.3	26.0	2.9	0.63
-343.3	-332.7	-303.6	-282.6	-259.7	-237.2	-214.6	-192.0	-169.4	-146.8	-124.3	-101.7	-78.7	-56.8	-38.4	-14.5	0.38
-1053.2	-981.8	-915.0	-847.0	-779.3	-711.5	-643.8	-576.0	-508.2	-440.5	-372.7	-304.9	-237.5	-169.6	-95.7	-27.1	0.13
																0.00

c) Puntos centroidales de la malla de la Fig. 5.8 b

Fig. 5.10 Distribución del componente normal $\bar{\sigma}_{xx}$ (t/m²) calculado con elementos finitos lineales.



a) Puntos gaussianos y centroidales de la malla de la Fig. 5.9a



b) Puntos gaussianos y centroidales de la malla de la Fig. 5.9b

Fig. 5.11 Distribución del componente normal $\overline{\sigma}_{xx}$ (t/m²) calculado con elementos finitos cuadráticos

0.42	1.00	1.58	2.42	3.00	3.58	4.42	5.00	5.58	6.42	7.00	7.58	
808.3		808.3	577.3		577.3	346.4		346.4	115.5		115.5	0.79
	0.0			0.0			0.0			0.0		0.50
-808.3		-808.3	-577.3		-577.3	-346.4		-346.4	-115.5		-115.5	0.21
												0.00

a) Puntos gaussianos y centroidales de la malla de la Fig. 5.2

0.21	0.50	0.79	1.21	1.50	1.79	2.21	2.50	2.79	3.21	3.50	3.79	4.21	4.50	4.79	5.21	5.50	5.79	6.21	6.50	6.79	7.21	7.50	7.79	
1180.9		1180.9	1025.8		1025.8	867.5		867.5	709.7		709.7	552.6		552.6	293.2		293.2	237.8		237.8	82.6		82.6	0.89
	753.0			649.2			550.2			450.0			350.0			250.0			150.2			49.4		0.75
325.4		325.4	272.6		272.6	233.0		233.0	190.2		190.2	147.5		147.5	106.6		106.6	62.6		62.6	16.1		16.1	0.61
-325.1		-325.1	-272.5		-272.5	-233.1		-233.1	-189.8		-189.8	-148.5		-148.5	-104.4		-104.4	-65.2		-65.2	-22.6		-22.6	0.39
	-753.0			-649.2			-550.2			-450.0			-350.0			-250.0			-150.2			-49.4		0.25
-1180.9		-1180.9	-1025.9		-1025.9	-867.3		-867.3	-710.0		-710.0	-551.5		-551.5	-395.5		-395.5	-235.2		-235.2	-76.1		-76.1	0.11
																								0.00

b) Puntos gaussianos y centroidales de la malla de la Fig. 5.8 a

0.25	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75	4.25	4.75	5.25	5.75	6.25	6.75	7.25	7.75	
1165.7	1085.3	1013.4	937.2	862.6	787.5	712.5	637.5	562.5	487.5	412.5	337.6	262.3	186.0	120.5	45.8	0.88
377.6	371.9	333.7	313.6	287.3	262.5	237.5	212.5	187.5	162.5	137.5	112.5	87.4	64.9	28.1	0.8	0.63
-377.6	-371.9	-333.7	-313.6	-287.3	-262.5	-237.5	-212.5	-187.5	-162.5	-137.5	-112.7	-86.7	-62.5	-43.1	-16.8	0.38
-1165.7	-1085.3	-1013.4	-937.2	-862.6	-787.5	-712.5	-637.5	-562.5	-487.5	-412.5	-337.4	-262.9	-188.4	-105.5	-29.8	0.13
																0.00

c) Puntos centroidales de la malla de la Fig. 5.8 b

Fig. 5.12 Distribución del componente normal $\bar{\sigma}_{xx}$ (t/m^2) calculado con elementos finitos lineales con modos de flexión

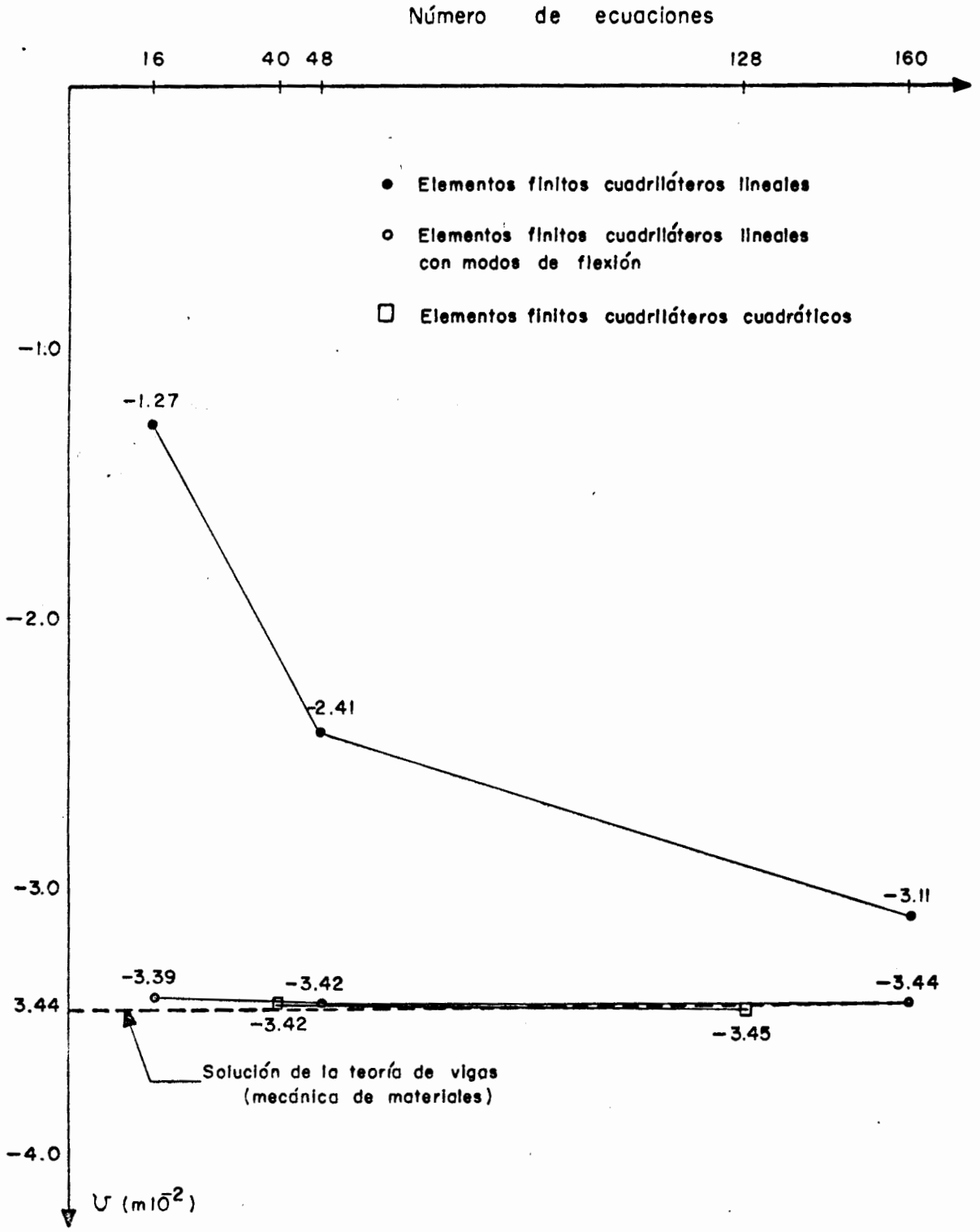


Fig. 5.13 Variación del desplazamiento vertical (U) del punto de aplicación de la carga (nudo 1) para varias mallas.

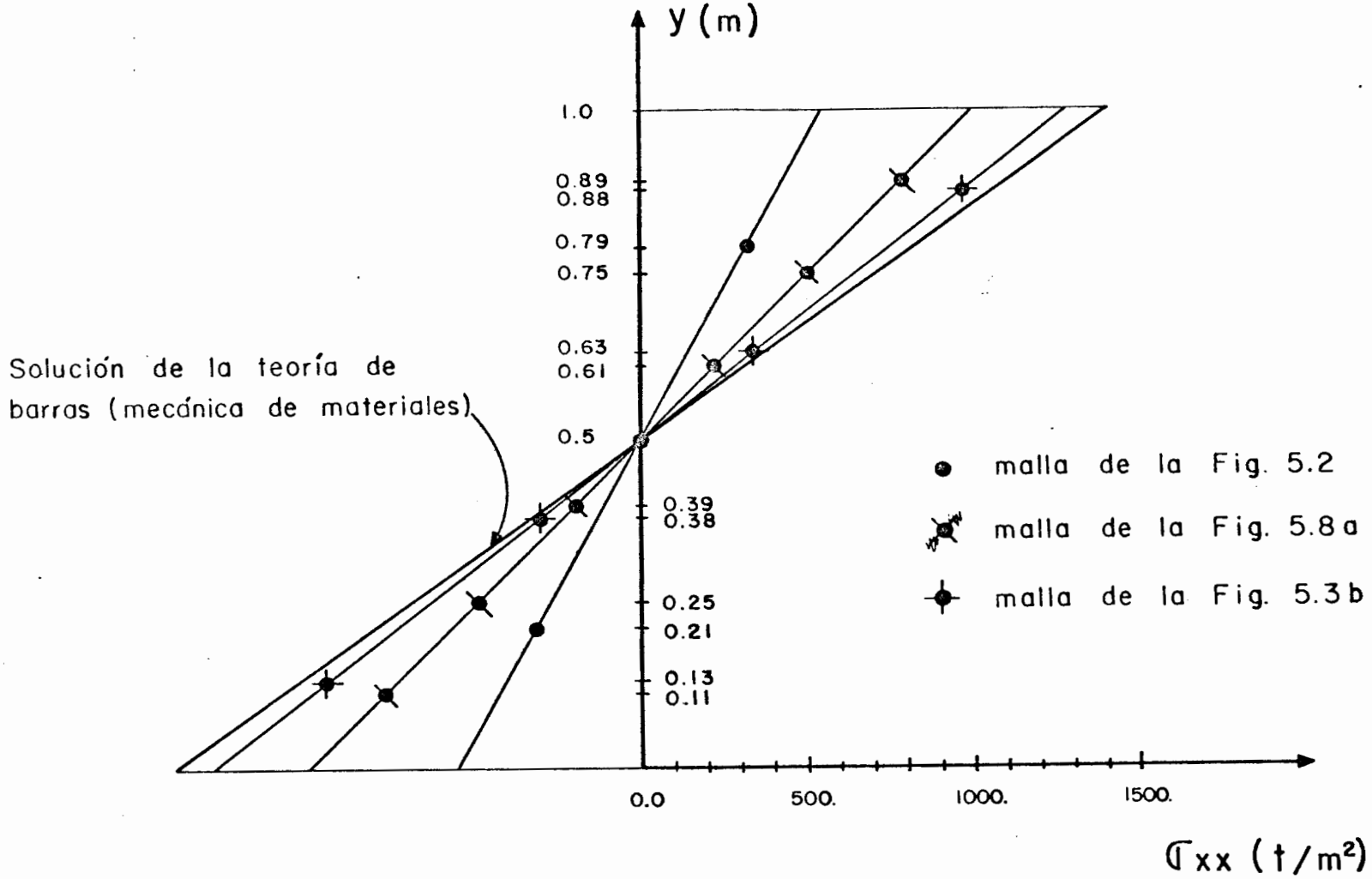


Fig. 5.14 Distribución de esfuerzos calculados con elementos finitos cuadriláteros lineales, en x = 1.0 m.

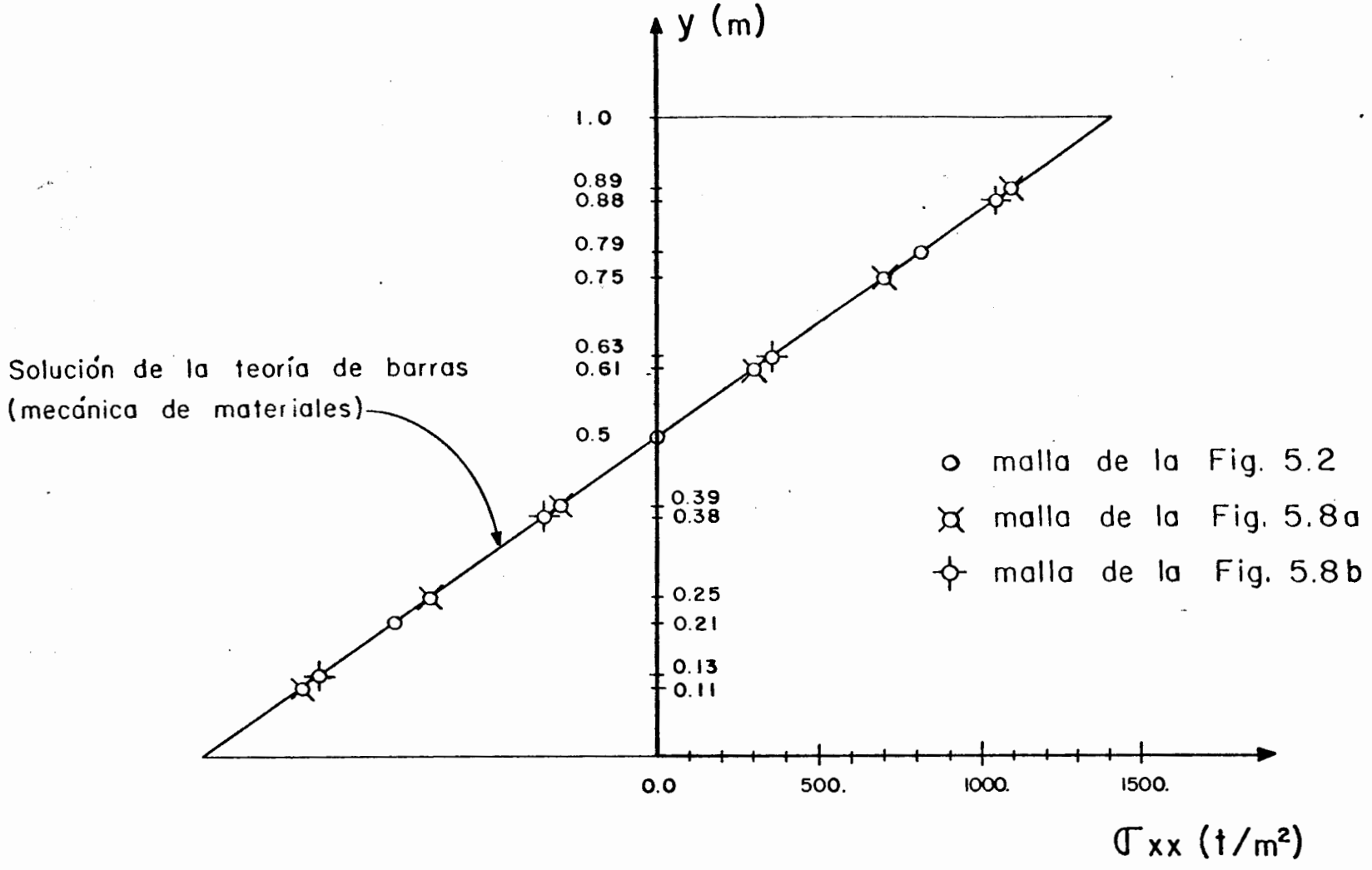


Fig. 5.15 Distribución de esfuerzos calculados con elementos finitos cudriláteros lineales con modos de flexión en x = 1.0 m.

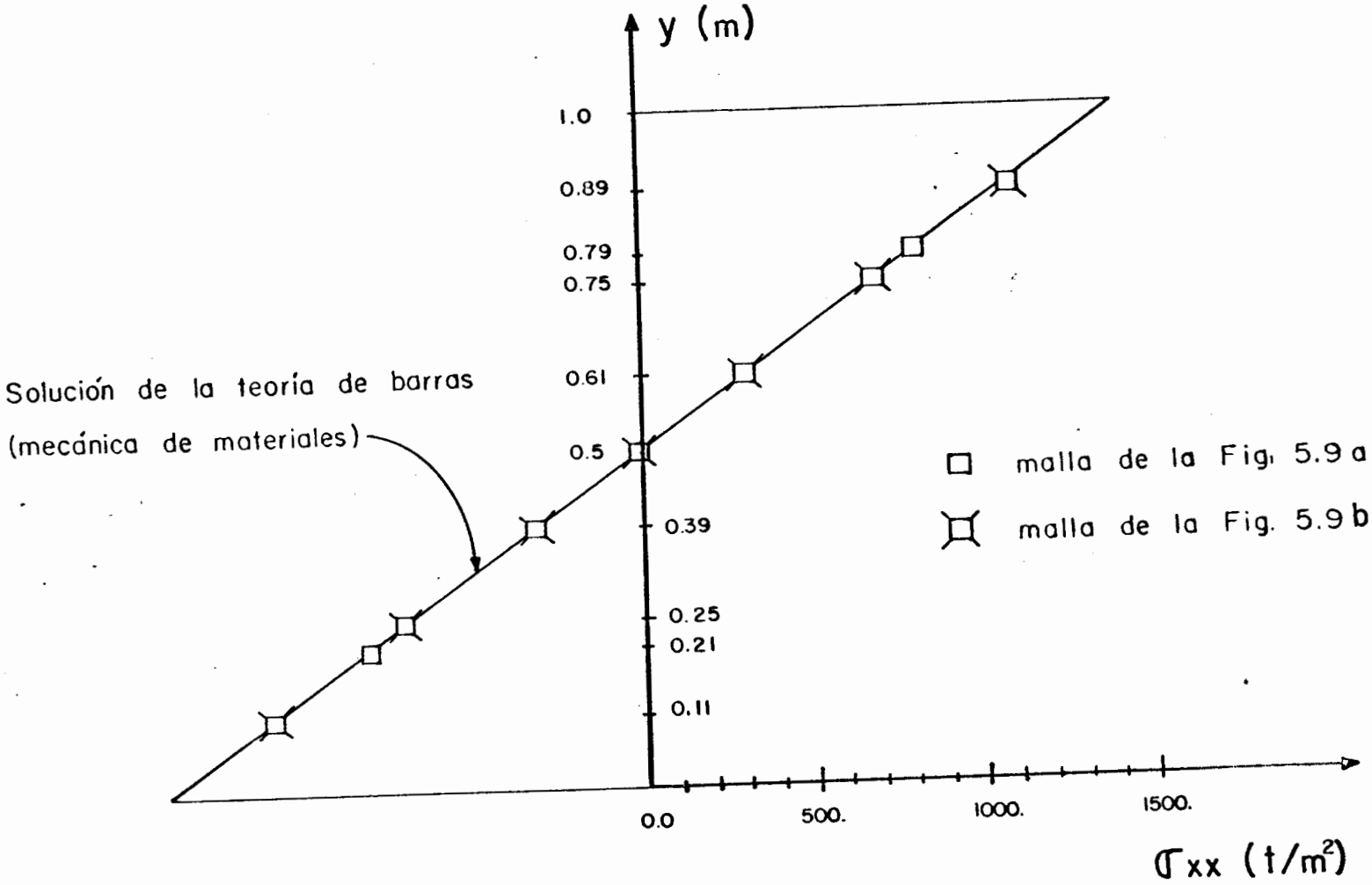


Fig. 5.16 Distribución de esfuerzos calculados con elementos finitos cuadriláteros cuadráticos, en x = 1.0 m.

F/DEPFI/A-20/1982/EJ.2
702168