



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Optimización topológica de los
acostillados de un ala de
aeronave, basada en criterios
dinámico-estructurales**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Aeroespacial

P R E S E N T A

Osmar Naim Corona Zamudio

DIRECTOR DE TESIS

Dr. César Abraham Luna Estrada



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2026



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado OPTIMIZACION TOPOLOGICA DE LOS ACOSTILLADOS DE UN ALA DE AERONAVE, BASADA EN CRITERIOS DINAMICO-ESTRUCTURALES, que presenté para obtener el título de INGENIERO AEROESPACIAL es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

OSMAR NAIM CORONA ZAMUDIO
Número de cuenta: 318056485

Dedicatoria

A mis padres, Ulises Corona y Angélica Zamudio. Por toda su bondad y amor hacia mí

A mi hermana Abi, por apoyarme, aunque a veces es divertido molestarte, este trabajo va para ti

A mis abuelos y abuelas. Por enseñarme que, aunque la vida no es fácil, siempre se debe tener una sonrisa

A mi asesor César, por la paciencia y todos los aprendizajes que me transmitió

A mis amistades, en especial las Ratas Asalariadas y Hasta la raíz. Y todas aquellas personas que han compartido conmigo

A mis mascotas, que siempre se desvelaron conmigo en los proyectos finales. Una compañía muy valiosa

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a Dios por permitirme llegar a este punto de mi vida, brindándome de su Gracia y guía para culminar este trabajo de grado y cerrar tan maravilloso capítulo en mi vida. A mis padres *Ulises Corona* y *Angélica Zamudio*, por apoyarme de forma incondicional y por creer en mí. Sé que preferían otro modo de titulación, pero aún así me apoyaron cuando mencioné que quería hacer una tesis. Ha sido una travesía maravillosa y atesoro en mi corazón que ustedes estuvieran conmigo en todo este proceso, ayudándome de forma incondicional. Es por ustedes que este trabajo está materializado.

A mi hermana *Abi*, por haber sido un gran sostén emocional, cuyas palabras me animaban a continuar, seguir luchando por mis sueños y porque me ha hecho saber que siempre estará a mi lado apoyándome. A mis 2 abuelas, por todo su apoyo genuino, cuya presencia tranquila me permitía seguir adelante y porque siempre han velado por mi bien. Sus bendiciones han sido buenas nuevas para mí. A mis tíos, que de alguna forma me tranquilizaban cuando me sentía presionado, me escuchaban y me animaban a no desistir, tanto para este trabajo como para mis planes de vida en general. A mis primos, que me motivaban con sus palabras.

A mi asesor, el Dr. César Abraham, por tenerme paciencia y guiarme a lo largo de este trabajo. Con sus correcciones y recomendaciones, pude crecer mucho. El mundo de las estructuras aeronáuticas es maravilloso y no puedo esperar a seguir expandiendo mi conocimiento y habilidades. Extiendo mi agradecimiento a todos mis profesores a lo largo de mi formación académica; todos me enseñaron algo que hoy me es útil y han contribuido a mi formación como ingeniero aeroespacial.

A todas las amistades que formé durante este maravilloso camino de 5 años en la Facultad de Ingeniería. Algunos ya no forman parte de mi vida, pero reconozco que cada uno contribuyó de forma positiva. Mencionaré a algunos que son los más cercanos: Adrián, Rodrigo (supervisor), Manu C, Emilio D, Héctor, Durán y Ángel V. Gracias por los buenos momentos compartidos y por continuar la amistad más allá de las aulas.

Y, por supuesto, a mis amistades fuera de la FI, que se han mantenido conmigo por mucho tiempo, mencionando a: Joceline, Julie, Jess, Marie, Lana, Mono, Luis, *Anita*, el Flowers, Andry, Yisus y Josh. Porque compartí muchas risas y siempre me ayudaron a ver más allá de lo académico. Fue y es maravilloso compartir con ustedes y estar fuera del mundo de la ingeniería. Espero seguir manteniendo la amistad de cada uno de ustedes.

Finalmente, a todas las personas que me han rodeado y que de alguna forma me motivaron a continuar por este camino. Me siento agradecido por culminar esta etapa importante de mi vida con este trabajo escrito. Y me llevo todo lo bueno para comenzar con mucha confianza la etapa venidera.

Resumen

El presente trabajo desarrolla una metodología integral para el diseño estructural eficiente de la semiala de una aeronave de fuselaje ancho, articulando la determinación de cargas aerodinámicas, la optimización estructural y la validación dinámico-estructural. La distribución de sustentación a lo largo de la envergadura se obtuvo mediante la solución de Phillips, adaptada a un ala recta con cuerda variable y cuatro perfiles aerodinámicos distintos. A partir de las cargas resultantes, se aplicó el método de Optimización Estructural Evolutiva (ESO) al diseño de los acostillados, logrando una reducción de masa del 17 % en el conjunto de los acostillados y una reducción cercana al 34 % en la masa estructural global del ala. El diseño optimizado se sometió a una validación dinámico-estructural mediante el método del elemento finito, que comprendió un análisis modal, identificándose el primer modo natural de flexión en 1.6627 Hz y un análisis de respuesta en frecuencia.

Adicionalmente, se evaluaron las cargas por ráfaga conforme a la normativa CS-25.341 y se construyó el diagrama de envolvente de vuelo (V-n), verificándose que la estructura opera dentro de los límites de seguridad establecidos. Los resultados confirman que la metodología propuesta permite obtener configuraciones estructurales eficientes y estructuralmente válidas bajo condiciones de carga representativas.

Abstract

This work develops a comprehensive methodology for the efficient structural design of the semi-wing of a wide-body aircraft, integrating aerodynamic load determination, structural optimization, and dynamic-structural validation. The spanwise lift distribution was obtained through Phillips' solution, adapted to a straight wing with variable chord and four distinct aerodynamic profiles. Based on the resulting loads, the Evolutionary Structural Optimization (ESO) method was applied to the design of the ribs, achieving a 17 % mass reduction in the set of ribs and a reduction of nearly 34 % in the overall structural mass of the wing. The optimized design was subjected to a dynamic-structural validation through the finite element method, comprising a modal analysis, identifying the first natural bending mode at 1.6627 Hz— and a frequency response analysis.

Additionally, gust loads were evaluated in accordance with the CS-25.341 standard, and the flight envelope diagram (V-n) was constructed, verifying that the structure operates within the established safety limits. The results confirm that the proposed methodology enables structurally efficient and valid configurations under representative loading conditions.

Índice de figuras

1.	Distribución de narrowbodies y widebodies. [3]	19
2.	Pedidos totales de aeronaves en los próximos 10 años. [3] [4]	20
3.	Materiales predominantes de cada modelo de Boeing. Se aprecia un auge de los materiales compuestos. [10]	26
4.	Componentes estructurales del ala [21]	27
5.	Distintos perfiles tipo I para los largueros [23]	27
6.	Distintas configuraciones estructurales para las costillas. [23]	28
7.	Flujo de trabajo. Elaboración propia	31
8.	Envergadura y nomenclatura de las alas. [7]	33
9.	Configuraciones de alas en flecha. Se aprecian flechas mínimas, moderadas o un valor alto. Hay diseños con flechas variables. [7]	34
10.	Torcimiento geométrico positivo y negativo. [7]	35
11.	Definición de un perfil alar [7]	36
12.	Efectos de la flexibilidad del ala. A medida que el valor del ángulo Θ aumenta, la magnitud de la sustentación local se incrementa respecto del modelo rígido.	40
13.	Estado de esfuerzos en un punto material: (a) componentes del tensor de esfuerzos sobre un elemento diferencial y (b) vector de tracción sobre un plano de corte arbitrario, según el teorema de Cauchy.	42
14.	Interpretación física de la compatibilidad: un campo de deformaciones compatible preserva la continuidad del medio (izquierda), mientras que uno incompatible genera huecos o solapamientos sin sentido físico (derecha).	45
15.	Esquemas representativos de los estados planos: esfuerzo plano en un cuerpo delgado cargado en su plano (izquierda) y deformación plana en un cuerpo prismático de gran longitud (derecha).	50
16.	Metodología de análisis FEM	52
17.	Perfiles alares seleccionados a lo largo de la semienvvergadura. Nótese la diferencia de los espesores del perfil para lograr un torcimiento. [40]	65
18.	Geometría del perfil y nomenclatura empleada para los cálculos consecuentes.	67
19.	Valores de la cuerda a lo largo de la envvergadura.	70
20.	Acostillado de referencia: (a) diseño real del Boeing 777X. (b) diseño idealizado propuesto. El diseño idealizado constituye la geometría de partida sobre la cual se aplicará el análisis estructural y la posterior optimización topológica. El resultado final propondrá un diseño similar al mostrado en a)	70

21.	Vista en planta del ala. Las líneas verdes resaltadas en naranja son guías para apreciar que el ala tiene un diseño de ala recta con cuerda variable.	71
22.	Torcimiento aerodinámico a lo largo de la envergadura.	73
23.	Torcimiento geométrico a lo largo de la envergadura.	73
24.	Magnitud del arrastre inducido a lo largo de la envergadura. Nótese cómo la magnitud aumenta en las puntas del ala, fenómeno que genera el cambio del ángulo de ataque provocando una deflexión vertical hacia abajo del ala.	74
25.	Distribución de sustentación en ala rígida.	74
26.	Comparación de la distribución de sustentación. En verde corresponde a los efectos de ala flexible, en café su homólogo en ala rígida.	75
27.	Set-up del análisis FEM. Se aprecia el soporte fijo y las 6 magnitudes de fuerza aplicadas en las costillas.	76
28.	Convergencia de los resultados. Se puede apreciar que en ambas tablas, a partir de la 4 iteración se tiene la convergencia de los resultados obtenidos.	77
29.	Resultados del análisis estático estructural. Los esfuerzos no sobrepasan el límite del material, debido a la sobredimensión, con el objetivo de reducir la mayor cantidad posible de material.	79
30.	Condiciones iniciales de la optimización topológica	80
31.	Convergencia de las funciones objetivo	81
32.	Estructura optimizada	82
33.	Estructura alar optimizada: (a) vista isométrica y (b) vista en planta. La configuración final integra los catorce acostillados optimizados con los largueros y larguerillos, conservando la geometría de ala recta con cuerda variable de la propuesta inicial.	86
34.	Condiciones iniciales para el análisis modal.	88
35.	Primeros tres modos naturales de vibración de la estructura alar, todos correspondientes a flexión. Las imágenes muestran la deformación total, desde las zonas de menor amplitud en la raíz hasta las de mayor amplitud en la punta del ala.	90
36.	Modos naturales de torsión de la estructura alar, correspondientes al cuarto y quinto modo de vibración. A diferencia de los modos de flexión, en estos la deformada modal se caracteriza por el giro de las secciones transversales del ala alrededor de su eje longitudinal. La escala de color representa la deformación total, con mayor amplitud hacia la punta del ala.	91
37.	Condiciones iniciales para el análisis de respuesta en frecuencia	92
38.	Diagramas de respuesta en frecuencia (Bode) de la estructura alar, en términos de (a) esfuerzo y (b) deformación.	94

39.	Envolvente de vuelo (diagrama V-n) de la semiala, con las líneas de ráfaga superpuestas según la normativa CS-25.341.	99
40.	Vistas de la estructura alar completa. a) y b) muestran la estructura con la piel translúcida. c) y d) Muestran la estructura con el acabado material de la piel. . . .	100
41.	Renderizados de las costillas optimizadas con web plates. Se aprecian los remaches que unirían las estructuras. Siendo modelos listos para manufacturar.	101

Índice de tablas

2.	Funciones principales de las estructuras alares	21
3.	Propiedades de materiales relevantes en la industria aeronáutica [10]	25
4.	Comparación entre los estados de esfuerzo plano y deformación plana.	50
5.	Datos principales del Boeing 787 Dreamliner.	63
7.	Requerimientos y restricciones generales.	63
6.	Datos principales del Boeing 777X.	64
8.	Caracterización de los cuatro perfiles.	66
9.	Valores mínimos de la estructura tipo I.	69
10.	Materiales asignados	72
11.	Distribución de los 4 perfiles en la semiala	72
12.	Magnitud de las cargas aplicadas.	76
13.	Análisis de independencia de malla.	77
14.	Adecuaciones estructurales de los acostillados (costillas 3 a 14).	85
15.	Factores de participación dominantes.	88
16.	Set-up del análisis de remaches.	97
17.	Comparación cualitativa del comportamiento modal con estudios reportados en la literatura.	102
18.	Comparación de la masa estructural de los acostillados antes y después de la optimización.	103
19.	Peso estructural de las geometrías.	103
20.	Análisis de los remaches	120

Nomenclatura y símbolos

Símbolo	Significado	Unidades
A	Área de la sección transversal del patín del larguero	m^2
A_e	Área del elemento finito	m^2
A_{web}	Área del alma del larguero	m^2
a_j	Coeficientes asociados al ángulo de ataque (serie de Phillips)	–
A_j	Coeficientes de la serie de Fourier de la distribución de sustentación	–
AR	Relación de aspecto, $AR = b^2/S$	–
b	Envergadura del ala	m
$b/2$	Semienvergadura	m
$\mathbf{B}$	Matriz deformación–desplazamiento	m^{-1}
B	Ancho del patín del larguero (perfil tipo I)	m
b_j	Coeficientes asociados al torcimiento/washout (serie de Phillips)	–
b_x, b_y, b_z	Componentes de las fuerzas máscas por unidad de volumen	N/m^3
C	Compliance (flexibilidad media) estructural	J
C^*	Compliance límite prescrita	J
$[C]$	Matriz global de amortiguamiento	$N \cdot s/m$
c	Cuerda del perfil alar	m
$\mathbf{c}$	Vector de traslación de cuerpo rígido	m
c_r	Cuerda en la raíz	m
c_t	Cuerda en la punta	m
$c(y)$	Distribución de cuerda a lo largo de la envergadura	m
C_{ijkl}	Tensor constitutivo (de elasticidad) de cuarto orden	Pa
C_L	Coeficiente de sustentación del ala (3D)	–
c_l	Coeficiente de sustentación del perfil (2D)	–
$C_{L\alpha}$	Pendiente de la curva de sustentación	rad^{-1}
$C_{L_{max}}$	Coeficiente de sustentación máximo	–
$[D]$	Matriz constitutiva del material	Pa
d	Distancia del eje neutro al centroide del patín	m
d_j	Coeficientes asociados a la tasa de alabeo (serie de Phillips)	–
d_r	Diámetro del remache	m
D_i	Resistencia (arrastre) inducida	N

(continúa en la página siguiente)

(continúa de la página anterior)

Símbolo	Significado	Unidades
E	Módulo de elasticidad (Young)	Pa
e	Factor de eficiencia de envergadura (Oswald)	–
e	Distancia al borde (falla por arrancamiento del remache)	m
e_1	Factor de Oswald (corrección 2D→3D del perfil)	–
ER	Tasa evolutiva (<i>evolutionary rate</i>) del método ESO	–
$\{F\}$	Vector global de fuerzas nodales	N
$F(t)$	Vector de cargas dependiente del tiempo	N
F_0	Amplitud del vector de carga armónica	N
F^e	Vector de fuerzas elemental	N
F_g	Factor de alivio del perfil de vuelo (ráfaga)	–
F_{ij}	Matriz de coeficientes de la solución de Phillips	–
F_r	Fuerza por remache	N
F_{rib}	Fuerza total sobre la costilla	N
$\mathbf{f}$	Vector de fuerzas máscas por unidad de volumen	N/m ³
$f(x)$	Función objetivo de optimización	–
f_1	Primera frecuencia natural de flexión	Hz
f_{gust}	Frecuencia equivalente de la ráfaga	Hz
$\hat{f}(\varphi)$	Función auxiliar de torsión	–
FS_{fatiga}	Factor de seguridad ante fatiga	–
G	Módulo de cortante, $G = \mu$	Pa
$g_i(x)$	Restricciones del problema de optimización	–
H	Gradiente de ráfaga	m
H_{cr}	Gradiente de ráfaga crítico	m
h	Distancia del vórtice a un punto dado	m
h	Altura del alma del larguero (perfil tipo I)	m
I	Momento de inercia de la sección	m ⁴
$\bar{I}$	Momento de inercia centroidal propio	m ⁴
I_{alas}	Momento de inercia de las alas	m ⁴
I_{min}	Momento de inercia mínimo requerido	m ⁴
i	Unidad imaginaria	–
j	Índice de los términos de la serie de Fourier	–
$[K]$	Matriz global de rigidez	N/m

(continúa en la página siguiente)

(continúa de la página anterior)

Símbolo	Significado	Unidades
K^e	Matriz de rigidez elemental	N/m
$[K^i]$	Matriz de rigidez del i -ésimo elemento	N/m
$[K^*]$	Matriz de rigidez tras eliminar un elemento	N/m
L	Magnitud de sustentación	N
$\mathbf{L}$	Operador diferencial deformación–desplazamiento	–
$L(x_2)$	Sustentación total integrada a lo largo de la envergadura	N
L_{semi}	Sustentación de la semiala	N
l	Sustentación local (por unidad de envergadura)	N/m
$[M]$	Matriz global de masa	kg
M^e	Matriz de masa elemental	kg
M	Momento flector	N·m
M_{Root}	Momento flector en la raíz	N·m
$MTOW$	Peso máximo de despegue (<i>Maximum Take-Off Weight</i>)	kg
$\bar{N}, N_i$	Funciones de forma (interpolación)	–
$\mathbf{n}$	Vector normal unitario al plano de corte	–
n	Factor de carga	–
n_e	Número de elementos	–
n_{max}	Factor de carga máximo	–
n_{min}	Factor de carga mínimo	–
$n_{remaches}$	Número de remaches	–
$\bar{p}$	Razón de alabeo adimensional	–
$\dot{p}$	Velocidad de alabeo	rad/s
q_∞	Presión dinámica del flujo libre	Pa
RR_i	Tasa de rechazo (<i>rejection ratio</i> , ESO)	–
RR_0	Tasa de rechazo inicial	–
S	Superficie alar	m ²
$\mathbf{S}$	Condición (tensor) de compatibilidad	–
S_e	Límite de resistencia a la fatiga	Pa
s	Coordenada natural del elemento / distancia penetrada por la ráfaga	m
St	Número de Strouhal	–
t	Espesor (constante) del elemento o placa	m

(continúa en la página siguiente)

(continúa de la página anterior)

Símbolo	Significado	Unidades
$\mathbf{t}^{(n)}$	Vector de tracción sobre el plano de normal $\mathbf{n}$	Pa
$\mathbf{t}$	Vector de tracciones aplicadas en la frontera	Pa
t_f	Espesor del patín (<i>flange</i>) del larguero	m
t_w, t_{web}	Espesor del alma (<i>web</i>) del larguero	m
$U(\Omega)$	Amplitud compleja de la respuesta en frecuencia	m
U	Velocidad de la ráfaga (perfil $1 - \cos$)	m/s
U_{ds}	Velocidad de ráfaga de diseño	m/s
U_{ref}	Velocidad de ráfaga de referencia	m/s
u, v, w	Componentes del desplazamiento en x, y, z	m
$\mathbf{u}(x)$	Campo de desplazamientos	m
$\bar{u}, u_e$	Vector de desplazamientos nodales	m
$\dot{u}$	Campo de velocidades	m/s
$\ddot{u}$	Campo de aceleraciones	m/s ²
u^i	Vector de desplazamiento del i -ésimo elemento	m
u_∞	Velocidad de vuelo (flujo libre)	m/s
V	Magnitud del vórtice (velocidad inducida)	m/s
V	Fuerza cortante	N
v_∞	Velocidad del flujo libre	m/s
v_c	Velocidad de crucero	m/s
v_D	Velocidad nunca excedida	m/s
v_{div}	Velocidad de divergencia	m/s
v_m	Velocidad de maniobra	m/s
v_s	Velocidad de pérdida (<i>stall</i>)	m/s
W	Peso total de la aeronave	N
$\bar{w}$	Funciones de ponderación (método de Galerkin)	—
x	Conjunto de variables de diseño (optimización)	—
x_0, x_2	Coordenadas a lo largo de la envergadura	m
y	Coordenada a lo largo de la envergadura	m
y_0	Posición del vórtice	m
α	Ángulo de ataque	rad
α_i	Ángulo de ataque inducido (aerodinámica)	rad
α_i	Número sensitivo del elemento i (ESO)	J

(continúa en la página siguiente)

(continúa de la página anterior)

Símbolo	Significado	Unidades
α_{eff}	Ángulo de ataque efectivo	rad
$\alpha_{L=0}$	Ángulo de ataque de sustentación nula	rad
α_0	Ángulo de ataque de referencia (raíz)	rad
Γ	Función de circulación	m ² /s
Γ_0	Circulación de referencia	m ² /s
Γ_t	Frontera con tracciones aplicadas	—
γ_{ij}	Deformaciones angulares ingenieriles	—
Δ	Operador de incremento o variación	—
δ_{ij}	Delta de Kronecker	—
$\delta\varepsilon, \delta u$	Variaciones virtuales de deformación y desplazamiento	—
ε	Tensor de deformaciones	—
ε_{ij}	Componentes del tensor de deformaciones	—
ε_{kk}	Deformación volumétrica	—
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	Deformaciones longitudinales	—
Θ	Ángulo máximo de torsión del ala	rad
θ	Función auxiliar de torsión, $\theta = \Theta \hat{f}(\varphi)$	rad
λ	Relación de estrechamiento (<i>taper ratio</i>), $\lambda = c_t/c_r$	—
λ	Constante de Lamé (elasticidad)	Pa
λ	Longitud de onda de la ráfaga, $\lambda = 2H$	m
λ_{max}	Relación de estrechamiento máxima	—
μ	Constante de Lamé, $\mu = G$	Pa
ν	Coeficiente de Poisson	—
ρ	Densidad del material	kg/m ³
ρ_∞	Densidad del flujo libre	kg/m ³
σ	Tensor de esfuerzos	Pa
σ_{ij}	Componentes del tensor de esfuerzos	Pa
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Esfuerzos normales	Pa
σ_{adm}	Esfuerzo normal admisible	Pa
σ_{bear}	Esfuerzo de aplastamiento (<i>bearing</i>)	Pa
σ_{max}	Esfuerzo máximo permisible	Pa
σ_{tear}	Esfuerzo de arrancamiento (<i>tear-out</i>)	Pa
σ_y	Esfuerzo de fluencia (<i>yield</i>)	Pa

(continúa en la página siguiente)

(continúa de la página anterior)

Símbolo	Significado	Unidades
σ_{VM}	Esfuerzo de Von Mises	Pa
τ_{ij}	Esfuerzos cortantes (tensoriales)	Pa
τ	Esfuerzo cortante	Pa
τ_{adm}	Esfuerzo cortante admisible	Pa
τ_{shear}	Esfuerzo cortante en el remache	Pa
τ_y	Esfuerzo cortante de fluencia	Pa
φ	Coordenada angular (cambio a cilíndricas)	rad
φ	Potencial escalar (existencia de función potencial)	—
ϕ	Ángulo de flecha del ala (<i>sweep</i>)	rad
ϕ_i	Modos de vibración (eigenvectores)	—
$\Psi(\varphi)$	Función auxiliar de la tasa de alabeo	—
Ω	Giro del ala (<i>washout</i> total)	rad
Ω	Frecuencia de excitación armónica	rad/s
Ω	Dominio de integración (Ω_e : dominio del elemento)	—
ω	Función de distribución de <i>washout</i>	—
ω_i	Frecuencias naturales (eigenvalores)	rad/s
$\nabla(\cdot)$	Gradiente (operador nabla)	—
$\nabla \cdot (\cdot)$	Divergencia	—
$\nabla \times (\cdot)$	Rotacional	—
∂	Derivada parcial	—
$\text{Abs}(\cdot)$	Valor absoluto	—
$\therefore$	Por lo tanto	—
CAD	Diseño asistido por computadora (<i>Computer-Aided Design</i>)	—
CS-25	<i>Certification Specifications</i> Parte 25 (normativa)	—
EAS	Velocidad equivalente (<i>Equivalent Airspeed</i>)	—
ESO	Optimización Estructural Evolutiva (<i>Evolutionary Structural Optimization</i>)	—
FAR	<i>Federal Aviation Regulations</i>	—
FEM	Método del Elemento Finito (<i>Finite Element Method</i>)	—
V-n	Diagrama de envolvente de vuelo	—

Índice

Índice de figuras	4
Índice de tablas	7
1. Introducción y problemática	18
1.1. Motivación	18
1.2. Demanda de aeronaves de fuselaje ancho	19
1.3. Importancia de estructuras alares	21
1.4. Reducción de masa estructural	21
1.4.1. Impacto en consumo de combustible	23
1.5. Técnicas para reducir densidad estructural	23
1.5.1. Materiales avanzados	23
1.5.2. Aleaciones de aluminio	24
1.5.3. Aleaciones de titanio	25
1.5.4. Materiales compuestos	25
1.5.5. Optimización de configuraciones estructurales	26
1.5.6. Optimización estructural computacional	28
1.6. Objetivos	29
1.6.1. Objetivos específicos	29
1.7. Alcances del proyecto	29
1.8. Metodología y estructura general del documento	30
2. Antecedentes	32
2.1. Nomenclatura y geometría de alas	32
2.1.1. Envergadura y semienvvergadura	32
2.1.2. Vista en planta	33
2.1.3. Torsión alar y flecha	34
2.1.4. Perfil alar	35

2.2.	Teoría de sustentación de Prandtl y solución de Phillips	36
2.2.1.	Formulación de Prandtl	37
2.2.2.	Solución general por serie de Fourier	38
2.2.3.	Efectos de ala flexible	40
2.3.	Elasticidad lineal	41
2.3.1.	Equilibrio: Primera ley de Cauchy	41
2.3.2.	Compatibilidad	43
2.3.3.	El problema inverso y las ecuaciones de compatibilidad	44
2.3.4.	Ley de Hooke generalizada	46
2.3.5.	Forma tensorial general	47
2.3.6.	Simplificación plana	48
2.3.7.	Esfuerzo plano	48
2.3.8.	Deformación plana	49
2.3.9.	Métodos aproximados de solución	50
2.4.	Método del elemento finito	51
2.4.1.	Funciones de forma	52
2.4.2.	El método de Galerkin	53
2.4.3.	Particularización al estado plano	54
2.4.4.	Ensamblaje y condiciones de frontera	54
2.4.5.	Formulación dinámica	55
2.4.6.	Análisis de respuesta en frecuencia	56
2.5.	Optimización estructural evolutiva	57
2.5.1.	Optimización topológica	58
2.5.2.	Principio del método ESO	58
2.5.3.	Criterio de eliminación del material	59
2.5.4.	ESO para varias cargas	59
2.5.5.	Estructuras con restricción de rigidez	60

3. Optimización y adecuación de elementos estructurales	62
3.1. Requerimientos y especificaciones	62
3.2. Dimensionamiento geométrico	63
3.2.1. Largueros	66
3.2.2. Diseño CAD inicial	69
3.3. Cargas de sustentación	72
3.3.1. Modelo ala rígida	73
3.3.2. Ala flexible	75
3.3.3. Set-up de análisis FEM	75
3.4. Sensibilidad de malla	77
3.4.1. Resultados del estático estructural	78
3.5. Optimización topológica	80
4. Validación y resultados	87
4.1. Análisis modal	87
4.1.1. Modos naturales de flexión	89
4.1.2. Modos naturales de torsión	91
4.2. Análisis de respuesta en frecuencia	92
4.2.1. Zona de resonancia crítica	93
4.2.2. Comportamiento fuera de modos naturales	96
4.3. Dimensionamiento de los remaches	97
4.4. Diseño final del ala	97
4.4.1. Diagrama V-n	97
4.5. Discusión de resultados	101
5. Conclusiones	105
5.1. Contribuciones del trabajo	105
5.2. Trabajo futuro y extensiones recomendadas	106

6. Referencias	107
7. Anexos	111
7.1. Anexo A- Planos de componente de los 6 acostillados con web-plates	111
7.2. Anexo B - Plano de la estructura alar	117
7.3. Anexo C - Cálculos de remaches	120

1. Introducción y problemática

En esta sección se aborda la motivación del trabajo, así como un breve repaso de la importancia que tienen las estructuras alares, la nomenclatura y la definición geométrica. Es necesario agregar que este trabajo se enfoca en aeronaves de fuselaje ancho y con capacidad de realizar vuelos transoceánicos; esto lleva a tratar con estructuras alares cuya envergadura es uno de los valores más grandes de la industria. También se establece el objetivo principal y los objetivos específicos del presente proyecto.

1.1. Motivación

Tras la recuperación del sector aeronáutico posterior a la pandemia por COVID-19, según el comunicado de la IATA en 2022 [1], se presenta un auge en la demanda de aeronaves de fuselaje ancho y de largo alcance [2]. Proyectos como el Airbus A350® o el renovado A330-Neo® son prueba de ello, así como el Boeing 787 Dreamliner® o el tan esperado Boeing 777X® muestran el interés de la industria aeronáutica en este tipo de aeronaves.

La industria ha experimentado un crecimiento sostenido, impulsado por la reactivación del transporte aéreo internacional y el incremento en la demanda de rutas de largo alcance. De acuerdo con proyecciones recientes, el tráfico global de pasajeros crecerá a una tasa aproximada del 3.6 % anual para los próximos 20 años, lo que implicará la necesidad de más de 43,000 nuevas aeronaves comerciales hacia el año 2044, donde aproximadamente 9,000 corresponderán a aeronaves de fuselaje ancho destinadas principalmente a vuelos intercontinentales [3]

Este crecimiento está fuertemente vinculado al incremento de la clase media global, la expansión de mercados emergentes y la consolidación de rutas internacionales de alta demanda, particularmente en regiones como Asia y el Medio Oriente [2]. En este contexto, las aeronaves de fuselaje ancho juegan un papel fundamental al permitir el transporte eficiente de grandes volúmenes de pasajeros en trayectos de larga distancia, lo que las posiciona como un elemento clave en la evolución del transporte aéreo global [4].

A pesar de la relevancia de este tipo de aeronaves, su diseño estructural representa un desafío significativo debido a las condiciones de carga más exigentes, la necesidad de minimizar el peso estructural y la interacción compleja entre fenómenos aerodinámicos y estructurales [5]. En particular, el diseño de estructuras alares para aeronaves de gran envergadura requiere metodologías que integren de manera consistente la distribución aerodinámica de cargas, el análisis estructural y la optimización del material.

En este sentido, surge la necesidad de establecer una metodología de diseño que permita abordar

1.2 Demanda de aeronaves de fuselaje ancho

de manera integrada estos aspectos, garantizando un desempeño estructural adecuado bajo condiciones operativas reales, al mismo tiempo que se optimiza el uso de material. El presente trabajo se enfoca en el desarrollo y validación de dicha metodología, aplicada al diseño de una semiala representativa de aeronaves de fuselaje ancho.

1.2. Demanda de aeronaves de fuselaje ancho

Tal como se ha mencionado, las aeronaves de fuselaje ancho están teniendo relevancia en el mercado, ya que en un periodo de 2 décadas, los widebodies representarán un 21 % del total de las aeronaves. Es relevante mencionar que si bien, es una cantidad menor respecto de los aviones de fuselaje corto, los *widebodies* representan una mayor exigencia en el diseño. En la figura 1 se aprecia la distribución proyectada.

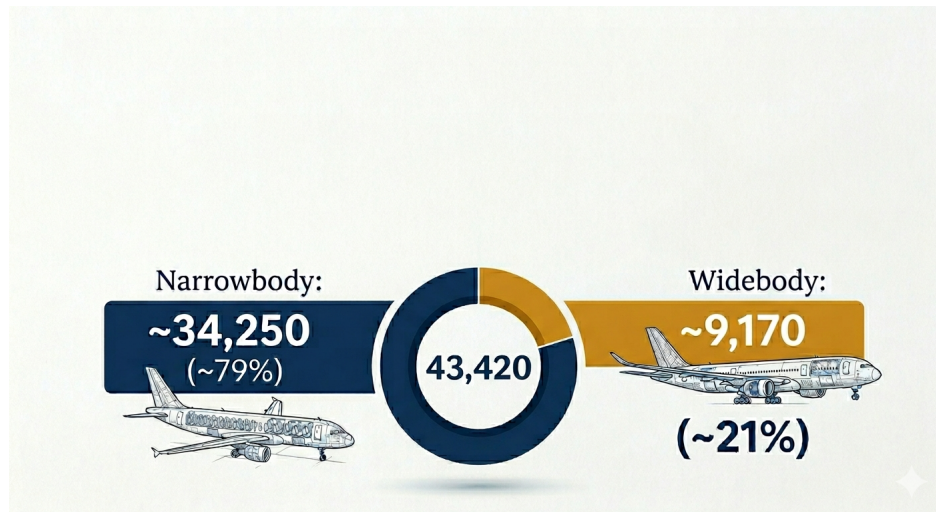


Figura 1: Distribución de narrowbodies y widebodies. [3]

Ahora, los principales fabricantes de aeronaves de fuselaje ancho, tanto Boeing® como Airbus® tienen una producción asegurada para los próximos 10 años debido a la gran cantidad de pedidos que han solicitado los operadores [2]. En la Figura 2 se aprecia la cantidad de pedidos para los widebodies modernos de los fabricantes antes mencionados:

1.2 Demanda de aeronaves de fuselaje ancho

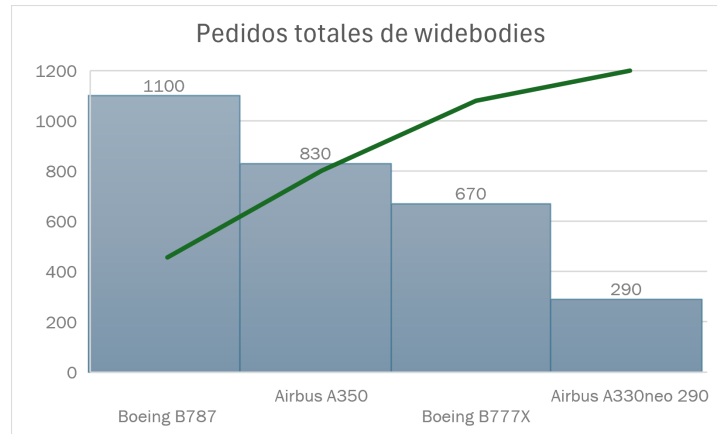


Figura 2: Pedidos totales de aeronaves en los próximos 10 años. [3] [4]

Sin embargo, hay bastantes retos que se deben superar, tales como falta de componentes, así como una producción mermada debida a la pandemia de COVID-19 [2].

Es relevante agregar los diversos factores que están provocando el crecimiento del tráfico aéreo, de acuerdo con estudios de la IATA [6]:

- **Demográfico:** Auge de 1.5 mil millones de personas de la clase media.
- **Económico:** Incremento en el PIB global aunado a una liberalización del transporte aéreo.
- **Operativo:** Expansión de rutas de largo alcance así como un desarrollo de hubs internacionales.

El análisis del mercado aeronáutico global muestra que, aunque las aeronaves de fuselaje ancho representan aproximadamente una quinta parte del total de entregas proyectadas en las próximas dos décadas, su relevancia estratégica es significativamente mayor. Estas aeronaves están directamente asociadas con el crecimiento del tráfico intercontinental, así como el incremento en la capacidad de transporte y la eficiencia operativa en rutas de largo alcance. Adicionalmente, la existencia de un déficit en la capacidad de producción frente a la demanda, evidenciado por los elevados niveles de backlog y las limitaciones actuales de manufactura, refuerza la necesidad de desarrollar soluciones de diseño estructural más eficientes. En este contexto, la optimización de estructuras alares en aeronaves de gran envergadura se posiciona como un enfoque de alta relevancia dentro de la ingeniería aeronáutica contemporánea.

1.3 Importancia de estructuras alares

1.3. Importancia de estructuras alares

Las alas son una de las estructuras más críticas de una aeronave, ya que, gracias a su presencia, el avión puede elevarse a través del aire [7] y surcar los cielos. Aún así, no es la única función que poseen; también permiten asegurar la estabilidad, maniobrabilidad y eficiencia en pleno vuelo de la aeronave, sin importar el tamaño y los objetivos para los cuales fue diseñada. Sin embargo, la función principal que tiene, mencionada anteriormente, se logra con la generación de la fuerza de sustentación necesaria, permitiendo que el avión pueda elevarse, primero con un equilibrio entre el peso neto del avión y la fuerza generada, y después generando una fuerza mayor que permita la elevación de la aeronave.

En la tabla 2 se condensan las principales funciones que tienen las estructuras alares:

Tabla 2: Funciones principales de las estructuras alares

Función	Descripción
Sustentación	Generación de fuerzas aerodinámicas mediante perfiles alares que inducen diferencias de presión entre superficies [8].
Control	Integración de superficies móviles como alerones, flaps, slats y spoilers para el control de la aeronave en distintas fases de vuelo [9].
Estabilidad	Contribución al equilibrio dinámico mediante la respuesta a perturbaciones aerodinámicas y reducción de arrastre inducido [8].
Almacenamiento de combustible	Integración de tanques de combustible que contribuyen a la eficiencia estructural y reducción de cargas en el fuselaje [7].
Resistencia estructural	Capacidad de soportar cargas aerodinámicas elevadas y deformaciones significativas sin comprometer la integridad estructural [9].

1.4. Reducción de masa estructural

En el diseño de las aeronaves modernas, la reducción de masa es uno de los objetivos fundamentales de la industria y está muy fuertemente relacionada con la sustentabilidad de la aviación [10]. De modo que, el peso estructural se encuentra estrechamente relacionado con el desempeño aerodinámico, el consumo de combustible, la capacidad de carga útil y los costos operativos del avión. Por lo anterior, el diseño va de la mano con la filosofía de maximizar la relación resistencia-peso, buscando garantizar la seguridad estructural y confiabilidad durante la vida útil.

Dicho concepto se refiere a la capacidad de una estructura para soportar las cargas mecánicas aplicadas en relación con su peso estructural. Un valor alto de dicha relación se traduce en una

1.4 Reducción de masa estructural

aeronave que puede ser más ligera y eficiente operacionalmente [11]. Es decir, la masa total de una aeronave está relacionada con la cantidad de sustentación necesaria para mantener el vuelo. De las diversas etapas de vuelo que hay, se hará énfasis en el vuelo estacionario, donde se tiene un equilibrio entre la fuerza de sustentación y el peso neto del avión:

$$L = W \quad (1)$$

Donde:

- L es la sustentación en [N]
- W es el peso total de la aeronave en [N]

Al aumentar el peso total del avión, las alas reciben la tarea de generar una mayor cantidad de sustentación, de modo que se cumpla el equilibrio aerodinámico. Generalmente, la solución más simple es incrementar la velocidad de vuelo; sin embargo, no siempre es lo más conveniente, dado que al aumentar la velocidad de vuelo, las fuerzas aerodinámicas y las cargas estructurales también se incrementan. De modo que se pueden alcanzar solicitaciones mecánicas que pongan en riesgo la integridad estructural, agregando que hay un límite de velocidad debido a las limitaciones de la potencia que pueden entregar los motores.

Además, si se incrementa el peso de la aeronave, se traduce en el incremento de la resistencia inducida. Esta componente aparece como resultado de la generación de sustentación de las estructuras alares, John Anderson Jr, en su obra *Introduction to Flight* [12] tiene definida la resistencia inducida como:

$$D_i = \frac{L^2}{\pi e A R q_\infty S} \quad (2)$$

Donde:

- L es la magnitud de sustentación
- e Factor de Oswald
- q_∞ presión dinámica
- $AR = \frac{b^2}{S}$ Aspect ratio (por sus siglas en inglés)

De la ecuación 2, se tiene que la resistencia inducida aumenta con el cuadrado de la sustentación requerida; esto se traduce en un incremento del consumo de combustible, ya que la potencia requerida para mantener el vuelo y sobreponerse a la resistencia inducida incrementada es mayor.

1.5 Técnicas para reducir densidad estructural

1.4.1. Impacto en consumo de combustible

El consumo de combustible representa uno de los factores más importantes en el aspecto de los costos operativos. Se tiene, entonces, una relación directa entre la masa de la aeronave y el consumo de combustible, tal como lo establece Roskam en su obra [13]. Además del consumo de combustible, el peso estructural influye en la capacidad de carga útil que tiene el avión, ya que está en relación de proporción con el peso máximo de despegue, siendo un peso estructural menor asociado a una mayor capacidad de carga útil. La carga útil constituye uno de los objetivos de diseño a tener en cuenta, ya que determina qué tan rentable en términos económicos será dicha aeronave [14]. Esto puede traducirse en una mayor capacidad de carga o un alcance incrementado, debido a una mayor capacidad de albergar más combustible.

Este se encuentra muy relacionado con el aspecto ambiental. Al reducir el peso se disminuyen las emisiones de gases de efecto invernadero. Se tiene que la aviación comercial contribuye entre el 2 y 3 % de las emisiones globales de dióxido de carbono, esto según los reportes de la ICAO en 2022 [15]. Es importante añadir que la industria de la aviación tiene la meta de cero emisiones para 2050, de modo que una de las estrategias más efectivas para mejorar la eficiencia energética es la reducción de masa y peso estructural.

Así, con lo anterior, se tiene que la reducción del peso estructural de las aeronaves forma parte de los pilares en el diseño aeronáutico, donde factores de peso como consideraciones aerodinámicas, estructurales, económicas y ambientales forman parte del ciclo de desarrollo.

1.5. Técnicas para reducir densidad estructural

Cabe señalar que, de la sección anterior, se abordó todo lo relacionado con las ventajas y la importancia de reducir la densidad estructural de las aeronaves. De modo que, en esta sección se muestran las diferentes estrategias que existen para lograr dicho objetivo. La reducción de masa estructural se busca lograr sin tener que comprometer la seguridad de operación; esto es, sin comprometer la resistencia, rigidez y durabilidad de la estructura. Dichas estrategias son: el uso de materiales avanzados, la optimización geométrica y estructural basadas en herramientas computacionales.

1.5.1. Materiales avanzados

La selección de materiales aeroespaciales dentro de la industria es crucial tanto para componentes aeroespaciales como para los ciclos de diseño. Suele impactar aspectos importantes del desempeño operativo de la aeronave desde la etapa de diseño hasta el producto final, incluyendo eficiencia estructural, dinámica de vuelo, carga útil, consumo energético, seguridad, durabilidad, costos de

1.5 Técnicas para reducir densidad estructural

mantenimiento, disponibilidad y la capacidad de manufactura de los materiales seleccionados [11]. Es importante añadir que muchos materiales empleados en la industria deben cumplir con requerimientos mínimos en sus propiedades mecánicas, físicas, térmicas y químicas, tomando en cuenta también los costos de mantenimiento y la facilidad de manufactura, lo que permite que un proyecto sea viable.

Actualmente, en la industria aeronáutica, muchos materiales se han diseñado para soportar cargas cíclicas por un periodo de tiempo prolongado, dependiendo del componente estructural. Lo anterior exige que los materiales tengan densidades aceptables que permitan una reducción de peso, manteniendo las propiedades mecánicas en el rango aceptable para una operación segura [16].

Dependiendo de la aplicación del componente estructural, existen criterios de diseño y selección de materiales específicos. Centrándonos en las estructuras alares, estas están sometidas a flexión durante gran parte del vuelo debido al peso de la aeronave y a las cargas dinámicas derivadas de su interacción con el fluido. En menor medida y en situaciones específicas, también reciben las cargas del tren de aterrizaje, los slats, situados en el borde de ataque, y los flaps, ubicados en el borde de salida. De modo que el extradós siempre está sometido a compresión durante el vuelo y a tracción durante el rodaje, en contraste con el intradós que experimenta las cargas opuestas [16]. Esto lleva a que las alas deban emplear materiales con elevada resistencia tanto a la tracción como a la compresión. [17]

La forma más efectiva de lograr una mejor eficiencia estructural es reducir la densidad del material mediante el uso de materiales ligeros. Los materiales más comunes dentro de la aviación comercial son: las aleaciones de aluminio, aleaciones de titanio, aceros de alta resistencia y el reciente desarrollo de materiales compuestos, utilizados en los proyectos más recientes, como el Boeing 787 Dreamliner [18]

1.5.2. Aleaciones de aluminio

Las aleaciones de aluminio han sido uno de los materiales más utilizados en la industria aeronáutica durante muchos años. Esto se debe a su elevada resistencia y rigidez específicas, junto con una buena ductilidad, resistencia a la corrosión, bajos costos y facilidad de manufactura [19]. Dichas aleaciones son empleadas en gran parte de las estructuras alares, como los largueros y larguerillos, así como los acostillados y en el revestimiento del ala. Aunque en años recientes, para esta última aplicación se ha optado por emplear materiales compuestos como el CFRP.

En particular el desarrollo de los tratamientos térmicos ha permitido obtener aleaciones de aluminio con alta resistencia, situándolos en el mercado como una opción muy viable. De los ajustes en las composiciones y el método de tratamiento térmico empleado es que surgen las diversas series de aluminio. Las más relevantes en la industria aeronáutica son: La serie 2000 (Al-Cu), la serie 6000

1.5 Técnicas para reducir densidad estructural

(Al-Mg-Si), la serie 7000 (Al-Zn) y las aleaciones de aluminio-litio [10]. En la Tabla 3, se muestran las propiedades mecánicas más relevantes de diversos materiales.

Tabla 3: Propiedades de materiales relevantes en la industria aeronáutica [10]

Material	Resistencia a tracción [MPa]	Módulo elástico [GPa]	Densidad [$\frac{kg}{m^3}$]	Resistencia específica [$\frac{GPa \cdot m^3}{kg}$]
Al 2024 T6	483	73.1	2.78	173.7
Al 7075 T6	572	71.7	2.81	203.6
Ti-6Al-4V	703	193	7.86	89.4
CFRP	1500	135	1.6	937.5

1.5.3. Aleaciones de titanio

Dichas aleaciones presentan múltiples ventajas frente a otros metales; estas son: una mayor resistencia específica, una rigidez elevada, buena tenacidad a la fractura y una elevada resistencia a la fatiga. Su resistencia a la corrosión, resistencia térmica y un coeficiente bajo de expansión térmica [10] permiten que sea un excelente material empleado en situaciones muy críticas.

Estas ventajas se ven eclipsadas debido a los elevados costos, cerca de 8 veces el costo de las aleaciones de aluminio comerciales, así como por procesos de manufactura muy complejos. De modo que su uso está muy limitado en componentes de los motores y en el pylon, estructura que conecta el motor con la estructura alar. En la Tabla 3, se encuentran las propiedades de la aleación de titanio más utilizada en aeronáutica.

1.5.4. Materiales compuestos

En los últimos años, los materiales compuestos han revolucionado la industria aeronáutica, ya que su baja densidad y alta resistencia mecánica han favorecido diseños más livianos pero estructuralmente más rígidos. Algunos de los retos que enfrentan son costos elevados, la poca experiencia de la industria al emplear estructuras con materiales compuestos. Proyectos recientes como el Boeing 787 o el Airbus A350 emplean materiales compuestos en gran parte de su estructura. En la figura 3 reportada en el trabajo de P. Childs [10], muestra el auge creciente de este tipo de materiales.

1.5 Técnicas para reducir densidad estructural

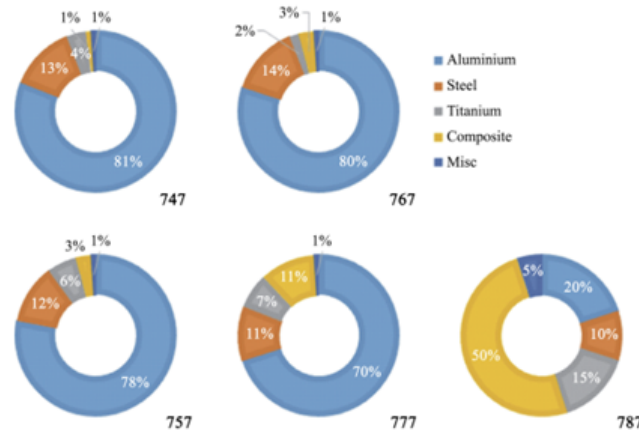


Figura 3: Materiales predominantes de cada modelo de Boeing. Se aprecia un auge de los materiales compuestos. [10]

En general, estos compuestos poseen una resistencia y rigidez específicas muy superiores respecto a los metales a temperaturas moderadas [10]. Las propiedades mecánicas de uno de los compuestos más utilizados se encuentran en la Tabla 3. Otra de las ventajas que ofrecen es una resistencia a la fatiga, a la corrosión y a la humedad mayores, así como la capacidad de orientar las capas (tailor lay-ups) de tal modo que se permita optimizar la rigidez y resistencia en las direcciones que así lo requieran [10]. El CFRP es uno de los materiales más utilizados actualmente; se emplea en el cajón de torsión del ala, los acostillados, así como en las superficies de control.

1.5.5. Optimización de configuraciones estructurales

La reducción de masa estructural se puede lograr mediante el diseño eficiente de configuraciones estructurales que sean capaces de soportar cargas aerodinámicas con una cantidad mínima de material. Las estructuras aeronáuticas más recientes suelen emplear configuraciones semimonocasco, donde la piel externa trabaja en conjunto con los elementos estructurales internos para resistir las cargas de flexión, torsión y compresión.

Poniendo énfasis en las alas, la estructura principal adopta la forma de una caja alar, que está compuesta por largueros, costillas, larguerillos y los paneles de piel reforzados [20]. En la figura 4 se ilustran todos los componentes que forman las estructuras alares de las aeronaves modernas.



Figura 4: Componentes estructurales del ala [21]

Los largueros son los principales elementos estructurales del ala. Son paralelos al eje lateral de la aeronave, desde el fuselaje hacia la punta del ala, y generalmente están unidos al fuselaje por accesorios de alas, vigas planas o una viga. Los largueros pueden estar hechos de metal, madera o materiales compuestos dependiendo de los criterios de diseño de una aeronave específica.

Actualmente, la mayoría de los aviones fabricados tienen largueros de ala hechos de aluminio extruido sólido o extrusiones de aluminio remachadas para formar el poste. La figura 5 muestra diferentes perfiles utilizados para los largueros. En una viga tipo I, la parte superior e inferior de la viga I se llaman 'alas' y la sección vertical se denomina 'alma' [22]. La barra entera puede ser extruida de una pieza de metal, pero a menudo se construye a partir de múltiples extrusiones o ángulos formados. La banda forma la parte principal de profundidad del larguero y a ella se le unen las tiras de tapas (extrusiones, ángulos formados o secciones fresadas).

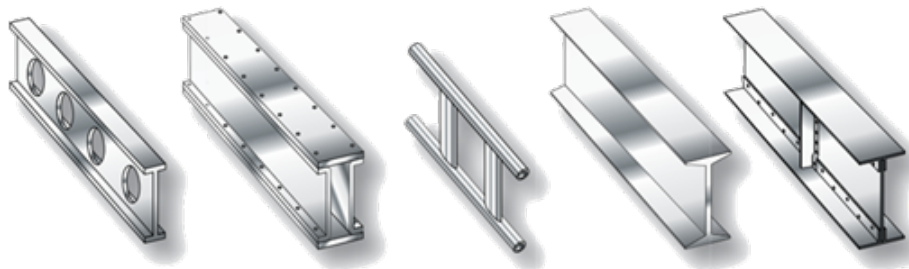


Figura 5: Distintos perfiles tipo I para los largueros [23]

Juntos, estos miembros llevan las cargas causadas por la flexión del ala, con las tapas que proporcionan una base para fijar la piel. Aunque las formas de los largueros de la figura 6 son típicas, las

1.5 Técnicas para reducir densidad estructural

configuraciones reales de los largueros del ala tienen la posibilidad de asumir perfiles diferentes a los convencionales.

Las costillas del ala también se utilizan para ayudar a resistir las cargas de presión causadas por el transporte de combustible en el ala. También se utilizan para ayudar a estabilizar la piel bajo condiciones de carga a corte y compresión. Son más eficaces para ayudar a la piel a resistir el pandeo por cortante, ya que las costillas están alineadas perpendicularmente a las cargas de compresión en la piel que actúan en la dirección spanwise. Las costillas pueden tener distintos diseños, tal como lo muestra la figura 6.

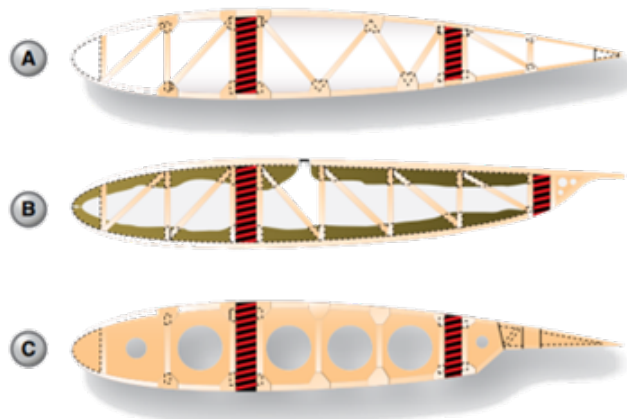


Figura 6: Distintas configuraciones estructurales para las costillas. [23]

Los larguerillos proporcionan rigidez a la piel del ala, previniendo fenómenos de pandeo local [14]. Con lo anterior, dadas las diversas maneras de diseñar cada componente estructural de las alas, se logra una disminución de la densidad estructural. Otra de las estrategias que se utilizan es el uso de estructuras de tipo panel reforzado, donde una lámina delgada se refuerza mediante rigidizadores longitudinales.

1.5.6. Optimización estructural computacional

Con el desarrollo de herramientas computacionales avanzadas, es posible aplicar técnicas de optimización estructural orientadas a la obtención de configuraciones eficientes bajo restricciones específicas de diseño [24]. Estas metodologías permiten explorar soluciones que no son evidentes mediante enfoques tradicionales, particularmente en estructuras sometidas a condiciones de carga complejas.

Dentro de las estrategias de optimización estructural, destacan la optimización de tamaño, de forma y topológica [25]. Mientras que la optimización de tamaño y forma se centra en ajustar parámetros

1.6 Objetivos

geométricos dentro de configuraciones predefinidas, la optimización topológica permite determinar la distribución óptima de material dentro de un dominio estructural, sin imponer restricciones previas sobre la geometría final [24].

Dado que el diseño de estructuras alares para aeronaves de gran envergadura implica trayectorias de carga no uniformes y requerimientos estrictos de reducción de peso, resulta conveniente emplear técnicas que permitan una redistribución libre del material en función de los esfuerzos inducidos [26]. En este contexto, el método de Optimización Estructural Evolutiva (ESO) se presenta como una herramienta adecuada, ya que permite eliminar iterativamente material ineficiente, generando configuraciones estructurales coherentes con las trayectorias de carga dominantes [27].

Por lo tanto, la elección de este enfoque no responde únicamente a su implementación computacional, sino a su capacidad de adaptarse a las características particulares del problema aeroestructural abordado en este trabajo.

1.6. Objetivos

Con base en todo lo anterior, para el presente trabajo se establece el objetivo general de aplicar técnicas de cómputo evolutivo para el diseño óptimo de los acostillados del ala de una aeronave, a fin de eficientar el rendimiento estructural bajo condiciones de carga dinámica, tomando en consideración la distribución de sustentación a lo largo de la envergadura.

1.6.1. Objetivos específicos

- Describir, mediante la solución de Phillips, la distribución de sustentación a lo largo de la envergadura, comparando los modelos de ala rígida y flexible.
- Validar que el diseño final cumple con los requisitos de operación mediante un análisis modal y de respuesta en frecuencia.
- Definir modos torsionales del ala, así como su rango de frecuencia de operación, para asegurar que las frecuencias de operación del ala no tengan valores cercanos a las frecuencias naturales del sistema, aunado a garantizar que la velocidad de divergencia sea una cota muy superior con respecto a la velocidad máxima de operación.

1.7. Alcances del proyecto

Para el diseño de la estructura, se parte de una propuesta inicial compuesta por acostillados, largueros, larguerillos y la piel. Se determinan las magnitudes de las cargas utilizando la teoría de

1.8 Metodología y estructura general del documento

sustentación de Prandtl y la solución de Phillips para alas trapezoidales con cuerda variable. Con la distribución de sustentación, en conjunto con los objetivos y restricciones, se lleva a cabo el proceso de optimización topológica.

El enfoque de la optimización es la geometría de los 14 acostillados que la componen, de modo que no se modifica la topología de los largueros y larguerillos. Sin embargo, se cambian los espesores del alma y las alas de la estructura tipo I de los largueros. Es importante enfatizar que la geometría de trabajo ha sido diseñada por el autor, ya que los diseños utilizados en la industria están protegidos y no son accesibles. De modo que el diseño es lo más cercano a lo que se encuentra en la industria.

También se empleo software pertinente para cada etapa del desarrollo del presente trabajo, alternando el uso del equipo personal del autor y del equipo académico de la Facultad. Finalmente, la geometría optimizada se ajusta para cumplir con las restricciones de manufactura que existen industrialmente y se realiza una validación dinámico-estructural a la semiala, trazando el diagrama V-n del modelo. Se comparan las mejoras de la geometría inicial con respecto a la optimizada y se proponen más aspectos a tomar en cuenta para mejorar la optimización y el comportamiento de la estructura como parte de un trabajo futuro.

1.8. Metodología y estructura general del documento

La metodología con la que se trabajará el proyecto se presenta en la Figura 7

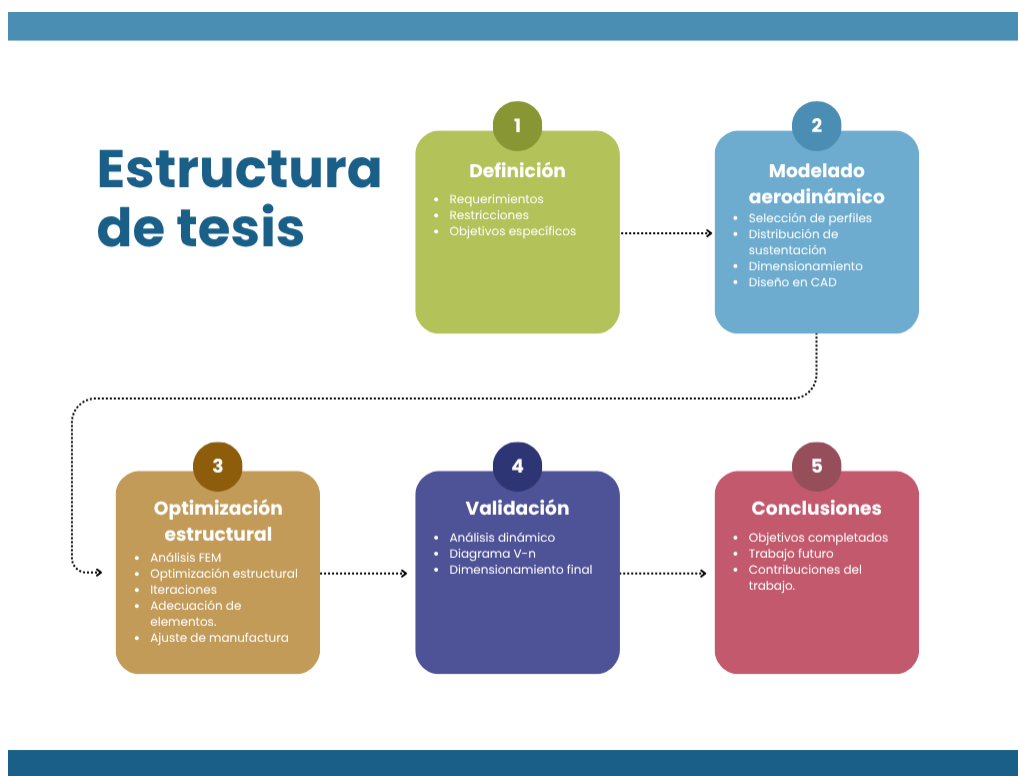


Figura 7: Flujo de trabajo. Elaboración propia

El capítulo 2 presenta el marco teórico necesario para el desarrollo del trabajo, abordando los conceptos fundamentales que sustentan la metodología empleada. Entre ellos se encuentran los fundamentos de la elasticidad lineal, el método del elemento finito en sus formulaciones estática y dinámica, incluido el análisis de respuesta en frecuencia, la optimización topológica basada en reglas evolutivas y la teoría de sustentación de Prandtl junto con la solución de Phillips para alas trapezoidales en flecha. Finalmente, se introduce el fenómeno de divergencia aeroelástica y su relevancia dentro del diseño estructural aeronáutico.

En el capítulo 3 se aborda el dimensionamiento de la geometría alar y la caracterización de los 4 perfiles utilizados para la distribución de la sustentación. Por consiguiente, se realiza la optimización y se adecuan los acostillados. El capítulo 4 corresponde a la validación dinámico-estructural del ala, el análisis de los resultados y el diagrama V-n. Se culmina con el capítulo 5, las conclusiones, donde se compara y revisa si se cumplieron los requerimientos generales y se establece el trabajo futuro.

2. Antecedentes

En este capítulo se desarrollan los fundamentos teóricos que sustentan el presente trabajo. Se parte de la nomenclatura y la geometría que definen una estructura alar, para después abordar la teoría de sustentación, que determina la distribución de cargas aerodinámicas sobre el ala. Posteriormente, se presentan los fundamentos de la elasticidad lineal y el método del elemento finito, que permiten evaluar la respuesta estructural ante dichas cargas. Finalmente, se expone la optimización estructural evolutiva, herramienta con la que se busca una distribución eficiente del material.

De este modo, los conceptos se encadenan siguiendo la secuencia del propio análisis: de la carga aerodinámica a la respuesta estructural, pasando por la optimización y finalizando con la validación estructural del modelo final.

2.1. Nomenclatura y geometría de alas

Esta sección tiene como objetivo mostrar los aspectos más relevantes en la definición geométrica de las alas y su nomenclatura, ya que son la base del desarrollo del presente trabajo y es importante estar familiarizado con dichos términos. Ahora bien, las estructuras alares están definidas por su envergadura, su forma de planta, torcimiento y por la forma de su perfil alar [7].

Dicha forma geométrica está en función de tener la máxima eficiencia en la generación de sustentación mientras se tiene el mínimo incremento del arrastre total [7]. Aunque tampoco se descartan otros requerimientos aerodinámicos en el diseño, todo está en función del objetivo para el que se diseña la aeronave.

2.1.1. Envergadura y semienvergadura

La envergadura de un ala está definida por medio de b , definida como la distancia medida desde la punta del ala hasta la otra punta del ala [7] sin tomar en cuenta la forma de las alas. Para análisis de ingeniería, se utiliza frecuentemente la semi-envergadura, definida como $b/2$, ya que se simplifica que tanto el ala izquierda como el ala derecha son reflejos, reduciendo el tiempo de análisis. En la figura 8 se ilustra la envergadura y la semienvergadura, así como las cuerdas en la raíz y en la punta.

2.1 Nomenclatura y geometría de alas

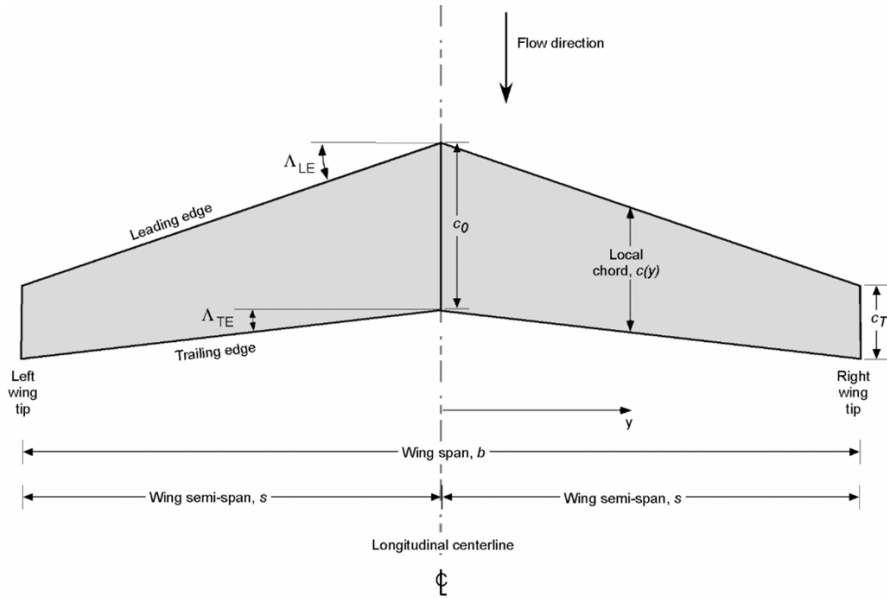


Figura 8: Envergadura y nomenclatura de las alas. [7]

También se muestra la superficie alar S , misma que corresponde a la superficie del ala vista en planta [28], el ángulo diedro corresponde a la inclinación del ala con respecto al plano XY del avión, teniendo diseños con diedro positivo, negativo o neutro.

2.1.2. Vista en planta

La cuerda se define como la distancia medida entre el borde de ataque y el borde de salida, medida en una dirección paralela a la del flujo libre, y se denota con una c . Desde la perspectiva de la vista en planta del ala, se tiene que el valor de la cuerda varía de forma lineal a lo largo de la envergadura, de modo que la cuerda local se representa como una función de $c(y)$. [7]. Usualmente, las alas suelen presentar un estrechamiento lineal, esto debido a razones de ingeniería, que en la sección siguiente se abordarán, de modo que los valores de la cuerda en la raíz c_r y la cuerda en la punta c_t adquieren relevancia. Con los valores anteriores se define la relación de estrechamiento:

$$\lambda = \frac{c_t}{c_r} \quad (3)$$

Y la definición de la función de la cuerda a lo largo de la envergadura queda de la forma:

$$c(y) = c_r \left(1 + y \left(\frac{\lambda - 1}{b/2} \right) \right) \quad (4)$$

Esto lleva a la aparición del ángulo de flecha ϕ , formado sobre la proyección en un plano horizontal de la línea del 25 % de la cuerda y con el eje transversal de la aeronave. [28]

2.1 Nomenclatura y geometría de alas

2.1.3. Torsión alar y flecha

Actualmente, muchas aeronaves están diseñadas con estructuras alares en flecha. Esto con propósitos aerodinámicos principalmente, ya que permiten retrasar la aparición de las ondas de choque y los fenómenos de compresibilidad [8]. Es importante añadir que el valor del ángulo de flecha tiene un límite, ya que a medida que ϕ siga aumentando, la eficiencia aerodinámica del ala comienza a disminuir. En la figura 9 se aprecian distintas configuraciones de alas en flecha.

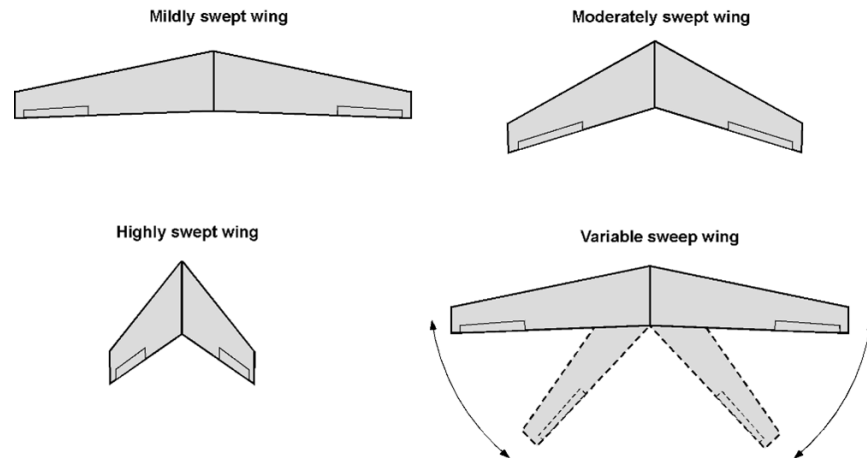


Figura 9: Configuraciones de alas en flecha. Se aprecian flechas mínimas, moderadas o un valor alto. Hay diseños con flechas variables. [7]

Muchas alas, se diseñan con torcimientos, estos pueden ser de índole geométrico o aerodinámico. El torcimiento está definido como la variación del ángulo medido entre la dirección del viento y la cuerda del perfil a lo largo de la semienvergadura [7]. Ahora bien, el torcimiento geométrico puede ser positivo, denominado como wash-in o negativo washout. En el primer caso, las cuerdas cercanas a la punta, tienen un ángulo positivo, pero no es una configuración muy utilizada. En contraste, es más utilizado el Washout, ya que permite un mejor ajuste en los efectos aerodinámicos deseados [7] así como una entrada en pérdida de la punta del ala más controlada. En la figura 10 se aprecia bien el diseño de washout y de washin en una estructura alar.

2.1 Nomenclatura y geometría de alas

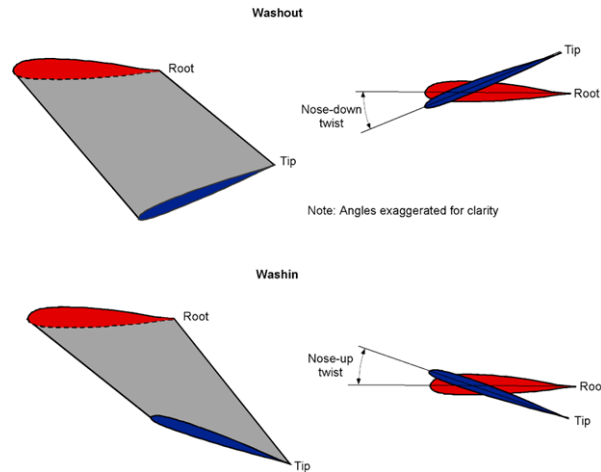


Figura 10: Torcimiento geométrico positivo y negativo. [7]

El torcimiento aerodinámico corresponde a la variación de los perfiles alares utilizados a lo largo de la semienvergadura, ya que cada perfil alar, en su caracterización aerodinámica, presenta un valor diferente del ángulo de ataque en el que la sustentación generada es nula $\alpha_{L=0}$ [12]. Teniendo entonces un comportamiento similar al del torcimiento geométrico. La torsión alar resulta útil para controlar el desarrollo de la pérdida de sustentación, ya que, si las puntas del ala entran en pérdida antes que la raíz, el avión puede sufrir un balanceo brusco y el piloto tendría nulo control de los alerones. El ajuste de la distribución de la torsión alar otorga cierto margen de maniobra bajo condiciones adversas y a bajas velocidades, sin comprometer la seguridad operacional.

2.1.4. Perfil alar

El perfil alar es la sección transversal del ala. La geometría de los perfiles está descrita por la curvatura, el espesor del perfil, que es la distancia máxima entre el intradós y el extradós, y el radio del borde de ataque. Muchas alas, especialmente en las aeronaves de fuselaje ancho, emplean distintos perfiles alares a lo largo de su envergadura, buscando una transición de forma progresiva [7]. En la figura 11, se aprecian todos los rasgos geométricos que definen a los perfiles alares. Es imperativo resaltar que el perfil debe contar con un espesor considerable en la raíz del ala, esto con la finalidad de soportar las cargas de flexión y de cortante.

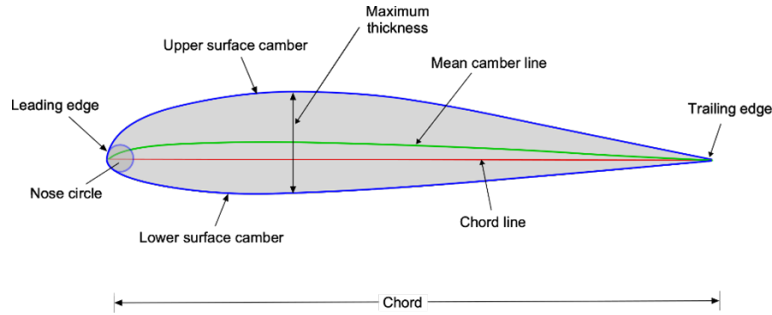


Figura 11: Definición de un perfil alar [7]

2.2. Teoría de sustentación de Prandtl y solución de Phillips

De acuerdo con la teoría, no existe un modelo único que permita describir la sustentación que genera una estructura alar dada. El modelo más simplificado se expresa:

$$L = \frac{1}{2} \rho_{\infty} u_{\infty}^2 S C_L \quad (5)$$

Donde:

- L : magnitud de sustentación
- ρ_{∞} : densidad del flujo
- u_{∞} : velocidad de vuelo
- C_L : Coeficiente de sustentación

Nótese que la ecuación 5 maneja el subíndice del coeficiente de sustentación con una mayúscula, esto para denotar que el valor describe el coeficiente de un ala, dejándose las minúsculas para el valor del coeficiente de un perfil. Dicha relación forma parte de la teoría de la línea sustentadora de Prandtl y se trata de una corrección de flujo modelado de 2D a 3D del valor de la pendiente de sustentación del perfil caracterizado, no del coeficiente. Esto es relevante para obtener valores de sustentación locales puntuales. Dicha relación se expresa:

$$C_L = \frac{c_l}{\left(1 + \frac{cl}{\pi AR}\right)} e_1 \quad (6)$$

Donde:

- c_l : Coeficiente de sustentación en 2D

- e_1 : Factor de Oswald

Ahora, es importante mencionar que la ecuación 5 proporciona una magnitud aproximada; no revela la distribución de sustentación a lo largo de la envergadura. De modo que la sustentación también se puede entender como la suma de cada sustentación local a lo largo de la envergadura, donde se toman en consideración los vórtices inducidos, los cuales aparecen al trasladar el análisis de flujo bidimensional a flujo 3D.

$$L(x_2) = \int l(x_2) dx \quad (7)$$

Los vórtices son los responsables de generar la velocidad y el arrastre inducidos, de modo que van modificando el ángulo de sustentación local; así, se puede obtener el valor de la magnitud de sustentación local y, por ende, emplear la ecuación 7 para obtener la magnitud total. Esta teoría parte de la circulación del flujo. Por lo tanto, del teorema de Biot-Savart y omitiendo el desarrollo matemático, ya que está fuera de los alcances de este trabajo, se tiene:

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h} \quad (8)$$

Donde:

- V : magnitud del vórtice
- Γ : función de circulación.
- h : es la distancia del vórtice a un punto dado

La ecuación 8 describe el comportamiento de un vórtice semi-infinito.

2.2.1. Formulación de Prandtl

Dicha formulación comienza con la discretización del ala y de la circulación, de modo que permite calcular la velocidad inducida y, con eso, el ángulo de ataque inducido. Partiendo de la ecuación 8 y desarrollando, se llega a la definición del washout:

$$\omega(x_0) = \frac{-1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\delta\Gamma/\delta x_2}{y_0 - x_2} dx_2 \quad (9)$$

De la ecuación 9 se puede obtener el ángulo de ataque inducido.

$$\alpha_i = \tan^{-1}\left(\frac{\omega(y_0)}{v_\infty}\right) = \frac{\omega(y_0)}{v_\infty} \quad (10)$$

Esto nos lleva al uso del teorema Kutta-Joukowski para describir el ángulo de ataque efectivo:

$$\alpha_{eff} = \frac{\rho v_{\infty} \Gamma(x_2)}{2\pi q_{\infty} c} + \alpha_{L=0} \quad (11)$$

Donde la sustentación local es:

$$l = \rho v_{\infty} \Gamma(x_2) = 2\pi q_{\infty} c (\alpha_{eff} - \alpha_{L=0}) \quad (12)$$

De las expresiones anteriores y reordenando, se tiene la ecuación fundamental de la teoría de sustentación de Prandtl:

$$\alpha(x_2) = \frac{\Gamma(x_2)}{\pi v_{\infty} c(x_2)} + \alpha_{L=0} + \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma/dx_2}{y_0 - x_2} dx_2 \quad (13)$$

2.2.2. Solución general por serie de Fourier

Conviene hacer un cambio a coordenadas cilíndricas para efectos de modelar la distribución de sustentación, expresada como:

$$x_2 = \frac{b}{2} \cos \varphi \quad (14)$$

por ende, la función de circulación queda de la forma:

$$\Gamma(\varphi) = \Gamma_0 \cdot \sin \varphi \quad (15)$$

Ahora, se tiene que la distribución de sustentación es una función armónica simple, de modo que se puede expresar como una serie de Fourier, partiendo de la circulación:

$$\Gamma(\varphi) = \Gamma_0 \sin(\varphi) = 2bv_{\infty} \sum_{j=1}^n A_j \cdot \sin(j \cdot \varphi) \quad (16)$$

Donde la distribución generalizada de sustentación en coordenadas cilíndricas es:

$$\alpha(\varphi_0) = \frac{2b}{\pi c(\varphi_0)} \sum_{j=1}^n A_j \sin(j\varphi_0) + \alpha_{L=0} + \sum_{j=1}^n j A_j \frac{\sin j\varphi_0}{\sin \varphi_0} \quad (17)$$

La expresión 17 tiene varias soluciones, de modo que para efectos de este trabajo se describen los coeficientes A_j que dan solución a la ecuación 16. Los efectos que se toman en cuenta son: los fenómenos de ala flexible, los torcimientos geométricos y aerodinámicos (b_j) y la tasa de alabeo (d_j). Se tiene que A_j es una combinación lineal de los efectos a considerar, quedando entonces

como:

$$A_j = a_j(\alpha - \alpha_0 - \alpha_i)_{root} - b_j\Omega + d_j\bar{p} \quad (18)$$

Para obtener cada uno de los coeficientes, se utiliza la siguiente expresión:

$$F_{ij} = \frac{4b}{C_{L\alpha}c(\varphi)} + \frac{j}{\sin \varphi_i} \quad (19)$$

Esta expresión permite obtener las componentes que conforman los términos A_j como se muestra en la ecuación 20:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j F_{ij} \sin(\varphi_i) &= 1 \\ \sum_{j=1}^n b_j F_{ij} \sin(\varphi_i) &= \omega(\varphi_i) \\ \sum_{j=1}^n d_j F_{ij} \sin(\varphi_i) &= \Psi(\varphi_j) \end{aligned} \quad (20)$$

Donde la función de distribución normalizada de *washout* para un modelo lineal de ala recta con cuerda variable:

$$\omega(\varphi_i) = 1 - \frac{\sin(\varphi_i)}{1 - (1 - \lambda)Abs(\cos \varphi_i)} \quad (21)$$

Para la función auxiliar de la tasa de alabeo:

$$\Psi(\varphi_i) = \cos \varphi_i \quad (22)$$

Y donde Ω es el giro del ala caracterizado por el *washout* total:

$$\Omega = (\alpha(\varphi_i) - \alpha_{L=0})_{Root} - (\alpha(\varphi_i) - \alpha_{L=0})_{Max} \quad (23)$$

Y donde:

$$\bar{p} = \frac{b\dot{p}}{2v_\infty} \quad (24)$$

$\dot{p}$ es la razón de alabeo, medida en $[\frac{rads}{s}]$

Sustituyendo la ecuación 16 en 12, se tiene que:

$$l = 2\rho_\infty v_\infty^2 b \sum_{j=1}^n A_j \sin(j\varphi_j) \quad (25)$$

Finalmente, se tiene la distribución de sustentación para un ala rígida con cuerda variable.

2.2.3. Efectos de ala flexible

Para efectos de la flexibilidad del ala, la expresión 18 se modifica de la siguiente manera:

$$A_j = a_j(\alpha - \alpha_0 - \alpha_i + \theta)_{root} - b_j\Omega + \partial\Theta \quad (26)$$

Donde:

- Θ : es el ángulo máximo de torsión del ala
- $\theta = \Theta \hat{f}(\varphi)$; función auxiliar

La definición de esta última función auxiliar y el cumplimiento de la condición que se satisface se expresan:

$$\sum_{j=1}^n \partial_j F_{ij} \sin(j\varphi_i) = \hat{f}(\varphi_i) \quad (27)$$

$$\hat{f}(\varphi_i) = \cos\left(\text{Abs}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos(\varphi_i)\right)\right)$$

La figura 12 muestra la comparación de la distribución de la carga del modelo rígido y los efectos de ala flexible variando los valores del ángulo de torsimiento Θ .

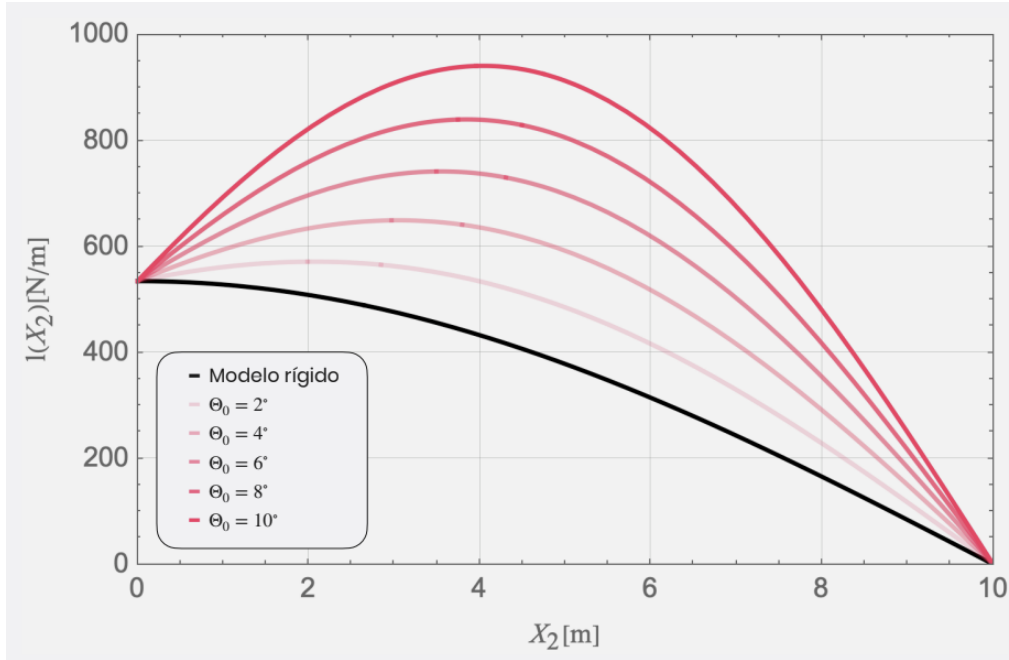


Figura 12: Efectos de la flexibilidad del ala. A medida que el valor del ángulo Θ aumenta, la magnitud de la sustentación local se incrementa respecto del modelo rígido.

2.3 Elasticidad lineal

Gran parte del desarrollo teórico de las ecuaciones anteriores se ha omitido, pero al lector interesado, puede referirse al trabajo de W.F. Phillips [29]

2.3. Elasticidad lineal

La teoría de la elasticidad lineal se encarga de describir el comportamiento mecánico de los sólidos deformables sometidos a sollicitaciones externas. El objetivo es determinar, para cada punto, 3 campos físicos:

- *Campo de desplazamientos*: Describe el movimiento de cada partícula respecto a su posición inicial.
- *Campo de deformaciones*: Cuantifica la distorsión local del material.
- *Campo de esfuerzos*: Fuerzas internas por unidad de área.

A lo largo de esta sección se adoptan las hipótesis propias de la elasticidad lineal, que delimitan el marco de validez de toda la formulación posterior. Se considera que el sólido es un *medio continuo*, de modo que sus propiedades se describen mediante funciones continuas de la posición; *homogéneo*, por lo que dichas propiedades no dependen del punto considerado; e *isótropo*, lo que implica que su comportamiento mecánico es independiente de la dirección. Asimismo, se asume un comportamiento *elástico-lineal*, en el que los esfuerzos y las deformaciones se relacionan linealmente dentro del régimen elástico, y la hipótesis de pequeñas deformaciones y desplazamientos, que permite linealizar las relaciones cinemáticas. Finalmente, el problema se plantea en régimen *cuasi-estático*, despreciando los términos inerciales [30].

El comportamiento del sólido elástico queda completamente caracterizado por tres conjuntos de ecuaciones que constituyen los tres ejes fundamentales de la mecánica de sólidos deformables: las **ecuaciones de equilibrio**, las **condiciones de compatibilidad** y las **relaciones constitutivas**.

2.3.1. Equilibrio: Primera ley de Cauchy

El primer eje establece las condiciones que deben satisfacer las fuerzas internas para que el sólido se encuentre en equilibrio mecánico. Se considera un sólido en equilibrio al que se le realiza un corte imaginario por un plano, cuya orientación queda definida por su vector normal unitario $\mathbf{n}$. Sobre la superficie expuesta se transmite una fuerza interna por unidad de área denominada *vector de tracción* $\mathbf{t}^{(n)}$, cuyo valor depende no solo del punto considerado, sino también de la orientación del plano de corte. El teorema de Cauchy establece que esta dependencia es lineal y queda

2.3 Elasticidad lineal

completamente determinada por un tensor de segundo orden, el *tensor de esfuerzos* σ , mediante la relación:

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{t}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n}, \quad (28)$$

donde se ha empleado el convenio de suma sobre índices repetidos. Desarrollando la ecuación 28:

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}. \quad (29)$$

Las componentes de la diagonal del tensor σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{zz} , representan los esfuerzos normales que actúan perpendicularmente a las caras del elemento, mientras que las componentes fuera de la diagonal, τ_{ij} , corresponden a los esfuerzos cortantes o tangenciales. La Figura 13 representa gráficamente los esfuerzos sobre un elemento diferencial. Físicamente, la columna j -ésima del tensor reúne las componentes del vector de tracción que actúa sobre la cara cuya normal apunta en la dirección j .

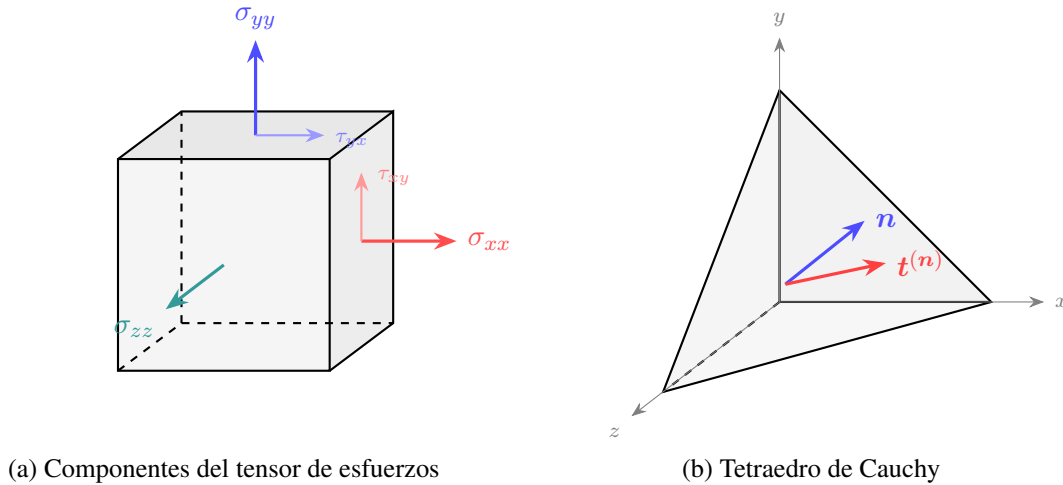


Figura 13: Estado de esfuerzos en un punto material: (a) componentes del tensor de esfuerzos sobre un elemento diferencial y (b) vector de tracción sobre un plano de corte arbitrario, según el teorema de Cauchy.

El equilibrio de un elemento diferencial de volumen exige que la resultante de las fuerzas que actúan sobre él sea nula. Imponiendo el balance de la cantidad de movimiento sobre dicho elemento y considerando las fuerzas másicas por unidad de volumen f , se obtiene la denominada **primera ley de Cauchy del movimiento**. En el régimen cuasi-estático considerado, los términos inerciales se anulan y la expresión se reduce a su forma local [31]:

2.3 Elasticidad lineal

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (30)$$

donde la notación $\sigma_{ji,j}$ denota la derivada parcial de la componente σ_{ji} respecto a la coordenada x_j . Desarrollada en las tres direcciones del espacio, la ecuación 30 constituye el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Estas tres ecuaciones expresan que, en cada punto del dominio, la variación espacial de los esfuerzos internos equilibra las fuerzas másicas aplicadas. Ahora, el balance del momento angular sobre el mismo elemento diferencial impone una condición adicional sobre el tensor de esfuerzos. Al exigir que la suma de momentos respecto a cualquier eje sea nula, se obtiene que las componentes cortantes conjugadas son iguales, lo que se traduce en la simetría del tensor, conocida como **segunda ley de Cauchy** [31]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \Longrightarrow \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (32)$$

Esta propiedad reduce de nueve a seis el número de componentes independientes del tensor de esfuerzos. En los problemas planos que se abordan más adelante, esta reducción es aún mayor, quedando únicamente tres componentes independientes: σ_{xx} , σ_{yy} y τ_{xy} .

2.3.2. Compatibilidad

El segundo eje aborda la relación entre el campo de desplazamientos y el de deformaciones, así como la condición que garantiza la consistencia entre ambos. A diferencia del equilibrio, que constituye una condición de naturaleza física, la compatibilidad es de carácter geométrico: asegura que el sólido se deforme preservando su continuidad, sin que se generen huecos ni solapamientos en el material durante el proceso de deformación [30].

Dado un campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ suficientemente regular, el campo de deformaciones asociado se obtiene por derivación espacial. Bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, el tensor de

2.3 Elasticidad lineal

deformaciones infinitesimales se define como la parte simétrica del gradiente de desplazamientos:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (33)$$

Denotando por u , v y w las componentes del desplazamiento en las direcciones x , y y z , respectivamente, las seis componentes independientes del tensor de deformaciones se desarrollan como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Las componentes de la diagonal, ε_{xx} , ε_{yy} y ε_{zz} , representan las deformaciones longitudinales o cambios unitarios de longitud en cada dirección, mientras que las componentes fuera de la diagonal, ε_{ij} con $i \neq j$, corresponden a las deformaciones angulares, que cuantifican la distorsión del ángulo recto entre fibras inicialmente perpendiculares.

2.3.3. El problema inverso y las ecuaciones de compatibilidad

La obtención de las deformaciones a partir de un campo de desplazamientos conocido, descrita por la ecuación (33), constituye el denominado problema directo, que siempre admite solución. La ecuación (33) representa un sistema de seis ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (debido a la simetría del tensor) con únicamente tres incógnitas, esto es, las tres componentes del desplazamiento. Al tratarse de un sistema sobredeterminado, su integración solo es posible si las componentes del campo de deformaciones satisfacen ciertas condiciones, conocidas como ecuaciones de compatibilidad [31].

Esta situación es análoga a la que se presenta en el cálculo vectorial al estudiar la existencia de una función potencial. Un campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ deriva de un potencial escalar ϕ si y solo si su rotacional es nulo:

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \iff v_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad \text{cuya existencia exige } \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (35)$$

De manera enteramente análoga, un campo de deformaciones proviene de un campo de desplazamientos continuo si y solo si verifica las ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant, cuya forma compacta puede expresarse como [31]:

$$\mathbf{S} \equiv \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla) = \mathbf{0}, \quad (36)$$

2.3 Elasticidad lineal

o, en notación indicial:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0, \quad i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (37)$$

El desarrollo explícito de la expresión (36) conduce a un conjunto de seis ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (38)$$

La Figura 14 ilustra el significado físico de esta condición: un campo de deformaciones compatible permite que los elementos del sólido, una vez deformados, encajen entre sí, preservando la continuidad del medio, mientras que un campo incompatible da lugar a huecos o solapamientos carentes de sentido físico.

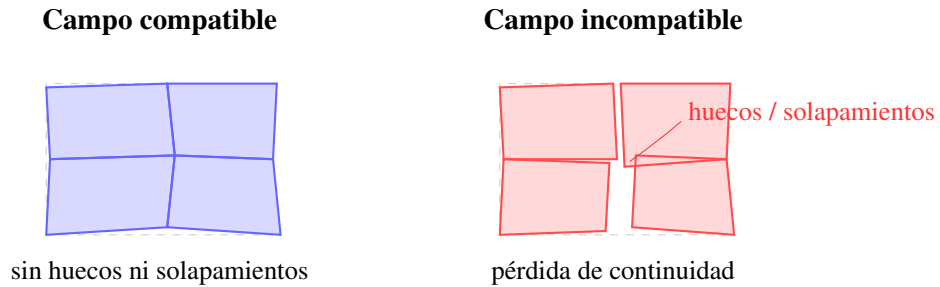


Figura 14: Interpretación física de la compatibilidad: un campo de deformaciones compatible preserva la continuidad del medio (izquierda), mientras que uno incompatible genera huecos o solapamientos sin sentido físico (derecha).

Conviene señalar que las seis ecuaciones (38) no son mutuamente independientes. Aprovechando la identidad del cálculo vectorial según la cual la divergencia del rotacional de cualquier campo es

2.3 Elasticidad lineal

idénticamente nula, se establece una relación funcional entre ellas:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad \implies \quad \nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad (39)$$

lo que reduce a tres el número de condiciones de compatibilidad efectivamente independientes [31].

Cuando un campo de deformaciones satisface las ecuaciones de compatibilidad, resulta integrable y permite recuperar el campo de desplazamientos. No obstante, dicha recuperación no es única: el campo de desplazamientos queda determinado, salvo un movimiento de sólido rígido, compuesto por una rotación y una traslación uniformes que no producen deformación alguna:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}}_{\text{movimiento de sólido rígido}}, \quad (40)$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es un tensor de rotación infinitesimal (antisimétrico) y $\mathbf{c}$ un vector de traslación, ambos constantes. Físicamente, esto significa que el campo de deformaciones determina la forma final del cuerpo, pero no su posición ni su orientación en el espacio, las cuales quedan fijadas por las condiciones de contorno.

Finalmente, cabe destacar una consecuencia de relevancia directa para la formulación numérica que se aborda en la sección siguiente. Cuando el problema se plantea en términos de desplazamientos, es decir, tomando $\mathbf{u}$ como incógnita primaria, el campo de deformaciones se obtiene por derivación y, en virtud de la ecuación 33, satisface las ecuaciones de compatibilidad de manera automática. Por consiguiente, en una formulación en desplazamientos como la del método del elemento finito, las condiciones de compatibilidad no requieren imponerse de forma explícita. Estas solo constituyen una restricción activa en las formulaciones planteadas en términos de esfuerzos, como la que da origen a las ecuaciones de Beltrami-Michell, que se presentan más adelante.

2.3.4. Ley de Hooke generalizada

El tercer eje establece la relación entre los esfuerzos y las deformaciones, incorporando el comportamiento mecánico del material. Mientras que el equilibrio y la compatibilidad son válidos para cualquier medio continuo independientemente de su naturaleza, la relación constitutiva es la que distingue a un material de otro. Para un sólido elástico-lineal, dicha relación es la ley de Hooke generalizada, que vincula linealmente ambos tensores [30], [31].

2.3 Elasticidad lineal

2.3.5. Forma tensorial general

En su expresión más general, la ley de Hooke establece una relación lineal entre los tensores de esfuerzos y de deformaciones por medio de un tensor de cuarto orden, denominado *tensor de elasticidad o tensor constitutivo* C_{ijkl} :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (41)$$

En principio, el tensor C_{ijkl} posee $3^4 = 81$ componentes. Sin embargo, las simetrías de los tensores de esfuerzos y de deformaciones, junto con la existencia de una función de energía de deformación, reducen el número de constantes elásticas independientes a 21, valor que corresponde al material anisótropo más general [30].

Bajo la hipótesis de isotropía adoptada en este trabajo, las propiedades del material son independientes de la dirección, lo que reduce el número de constantes elásticas independientes a únicamente dos. Empleando las constantes de Lamé, λ y μ , la ley de Hooke generalizada se expresa de forma compacta como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (42)$$

donde δ_{ij} es la *delta de Kronecker*, $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ representa la *deformación volumétrica* y las constantes de Lamé se relacionan con el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson ν mediante:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (43)$$

siendo μ equivalente al *módulo de rigidez a corte* G . Al invertir la relación (42), se obtienen las deformaciones en función de los esfuerzos:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad (44)$$

que, desarrollada en componentes, da lugar a las seis relaciones de la ley de Hooke generalizada para un material isótropo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], & \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})], & \varepsilon_{yz} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], & \varepsilon_{xz} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xz}. \end{aligned} \quad (45)$$

Estas expresiones son válidas siempre que la magnitud de las sollicitaciones no exceda el límite de proporcionalidad del material. Para su implementación en el método del elemento finito, resulta

2.3 Elasticidad lineal

conveniente expresar la ley de Hooke en notación matricial. Agrupando las componentes independientes de los tensores de esfuerzos y de deformaciones en sendos vectores, esto es, la notación de Voigt, la relación constitutiva adopta la forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad (46)$$

o, de manera abreviada:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}, \quad (47)$$

donde $[D]$ es la matriz constitutiva del material. Conviene precisar que, en esta notación, el vector de deformaciones emplea las deformaciones angulares ingenieriles γ_{ij} , relacionadas con las componentes tensoriales mediante $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$. Esta convención es la habitual en la formulación del método del elemento finito y explica la aparición del factor $\frac{1-2\nu}{2}$ en los términos asociados a la deformación por cortante. La matriz constitutiva $[D]$ constituye uno de los elementos centrales en la construcción de la matriz de rigidez, como se detalla en la sección siguiente.

2.3.6. Simplificación plana

El planteamiento general de la elasticidad lineal conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales en tres dimensiones cuya resolución analítica resulta, en la mayoría de los casos, inabordable. No obstante, bajo determinadas condiciones geométricas y de carga, un problema tridimensional puede reducirse a uno bidimensional sin pérdida de rigor. Conviene subrayar que la elasticidad plana no constituye una idealización restringida a cuerpos genuinamente bidimensionales, sino una simplificación aplicable a numerosos problemas tridimensionales en los que la geometría y las solicitaciones presentan ciertas regularidades [30]. Se distinguen dos esquemas, mutuamente excluyentes, según cuáles componentes se anulen en la dirección perpendicular al plano de análisis.

2.3.7. Esfuerzo plano

El estado de esfuerzo plano se presenta en cuerpos delgados, en los que el espesor es considerablemente menor que las dimensiones en el plano, cargados únicamente en dicho plano y con sus caras mayores libres de solicitaciones. Bajo estas condiciones, las componentes de esfuerzo asociadas a

2.3 Elasticidad lineal

la dirección del espesor se anulan:

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \varepsilon_{zz} \neq 0. \quad (48)$$

Es importante notar que la deformación en la dirección del espesor no es nula, sino que se recupera a partir de las componentes en el plano mediante:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \quad (49)$$

La relación constitutiva se reduce, entonces, a una forma que involucra únicamente las tres componentes de esfuerzo en el plano, con matriz constitutiva:

$$[\mathbf{D}]_{\text{esf. plano}} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (50)$$

2.3.8. Deformación plana

El estado de deformación plana, por el contrario, es propio de cuerpos prismáticos de gran longitud en una dirección, cuya geometría y carga permanecen invariantes a lo largo de ella, y cuyos extremos se encuentran impedidos de desplazarse axialmente. En este caso, se anulan las deformaciones asociadas a dicha dirección:

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \neq 0. \quad (51)$$

A diferencia del esfuerzo plano, ahora es el esfuerzo en la dirección perpendicular el que no se anula, como consecuencia del confinamiento que impide la deformación en esa dirección. La matriz constitutiva correspondiente es:

$$[\mathbf{D}]_{\text{def. plana}} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (52)$$

La Tabla 4 resume las diferencias entre ambos esquemas.

Tabla 4: Comparación entre los estados de esfuerzo plano y deformación plana.

Característica	Esfuerzo plano	Deformación plana
Geometría típica	Cuerpo delgado	Cuerpo prismático largo
Condición impuesta	$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$	$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$
Componente no nula	$\varepsilon_{zz} \neq 0$	$\sigma_{zz} \neq 0$
Ejemplo	Placa, lámina, costilla	Presa, túnel, tubería

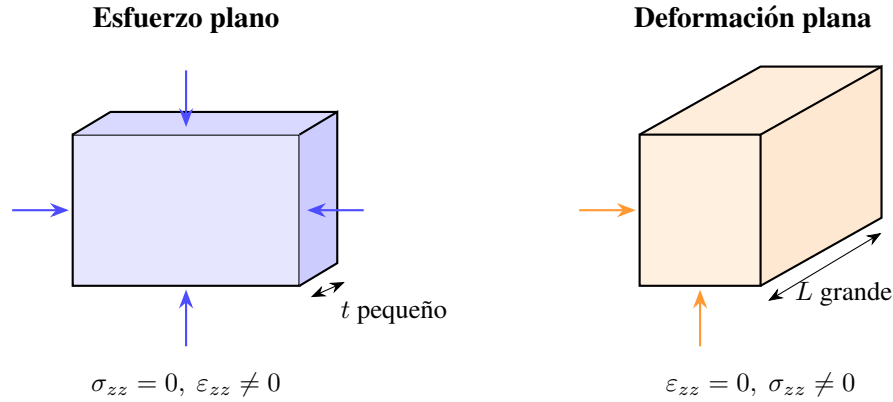


Figura 15: Esquemas representativos de los estados planos: esfuerzo plano en un cuerpo delgado cargado en su plano (izquierda) y deformación plana en un cuerpo prismático de gran longitud (derecha).

2.3.9. Métodos aproximados de solución

Una vez establecidos los tres ejes del problema elástico, su combinación permite plantear las ecuaciones de gobierno. En la formulación en esfuerzos, las componentes del tensor de esfuerzos se adoptan como incógnitas primarias, lo que obliga a imponer explícitamente la condición de compatibilidad, expresándola en términos de esfuerzos mediante las relaciones constitutivas. En el caso plano, de las seis ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant subsiste una sola:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (53)$$

Sustituyendo en ella las relaciones constitutivas y empleando las ecuaciones de equilibrio para eliminar los términos de cortante, se obtiene una ecuación de gobierno expresada únicamente en términos de los esfuerzos. Para el estado de esfuerzo plano, dicha ecuación, conocida como la formulación de Beltrami-Michell, resulta [30]:

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1 + \nu) \nabla \cdot \mathbf{f}, \quad (54)$$

2.4 Método del elemento finito

mientras que para el estado de deformación plana se obtiene una expresión análoga, diferenciada únicamente por la constante que afecta a las fuerzas másicas:

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{1}{1-\nu} \nabla \cdot \mathbf{f}. \quad (55)$$

En ausencia de fuerzas másicas, ambos casos convergen a una misma ecuación, según la cual la suma de los esfuerzos normales en el plano constituye una función armónica:

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (56)$$

Este resultado da pie al método clásico de resolución de problemas planos basado en la función de esfuerzos de Airy, en el que las componentes de esfuerzo se derivan de una única función potencial $\phi(x, y)$ que satisface idénticamente el equilibrio y cuya condición de compatibilidad se traduce en la ecuación biarmónica $\nabla^4\phi = 0$. Mediante este procedimiento es posible obtener soluciones analíticas cerradas para geometrías y condiciones de frontera sencillas [32].

Sin embargo, la geometría compleja de una estructura alar, junto con la distribución no uniforme de las cargas aerodinámicas y las condiciones de frontera reales del problema, impiden la obtención de una solución analítica por esta vía. Ante tal complejidad, se recurre a los métodos aproximados de solución, entre los que se encuentran los métodos variacionales y energéticos. El método del elemento finito, desarrollado en la sección siguiente, constituye uno de estos métodos aproximados: proporciona una solución aproximada del problema elástico que adquiere carácter numérico cuando las condiciones de frontera y de carga se especifican como valores conocidos en puntos concretos del dominio discretizado.

2.4. Método del elemento finito

En la sección anterior se estableció que el comportamiento del sólido elástico queda gobernado por un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, cuya resolución analítica resulta inviable para geometrías y condiciones de frontera arbitrarias, como las que presenta una estructura alar. Ante esta limitación, se recurre al método del elemento finito, una técnica que proporciona una solución aproximada del problema mediante la discretización del dominio continuo en un conjunto finito de subdominios, denominados *elementos* que van conectados entre sí a través de puntos llamados *nodos* [33].

La idea fundamental consiste en transformar un problema continuo, con infinitos grados de libertad, en un problema discreto con un número finito de incógnitas asociadas a los nodos. Dentro de cada elemento, la variable de campo —en este caso el desplazamiento— se aproxima mediante funciones de interpolación, de modo que el problema se reduce a la resolución de un sistema

2.4 Método del elemento finito

algebraico de ecuaciones. En la práctica, la aplicación del método sigue una secuencia de etapas bien definida que abarca desde el preprocesamiento —discretización del dominio y definición de la malla— hasta el postprocesamiento e interpretación de los resultados, pasando por el ensamblaje y la solución del sistema global. Dicha secuencia se ilustra en la Figura 16.

En este trabajo, el método se desarrolla primero en su formulación estática, a partir del método de los residuos ponderados de Galerkin, para extenderse al análisis dinámico, necesario para el estudio de la respuesta en frecuencia de la estructura.

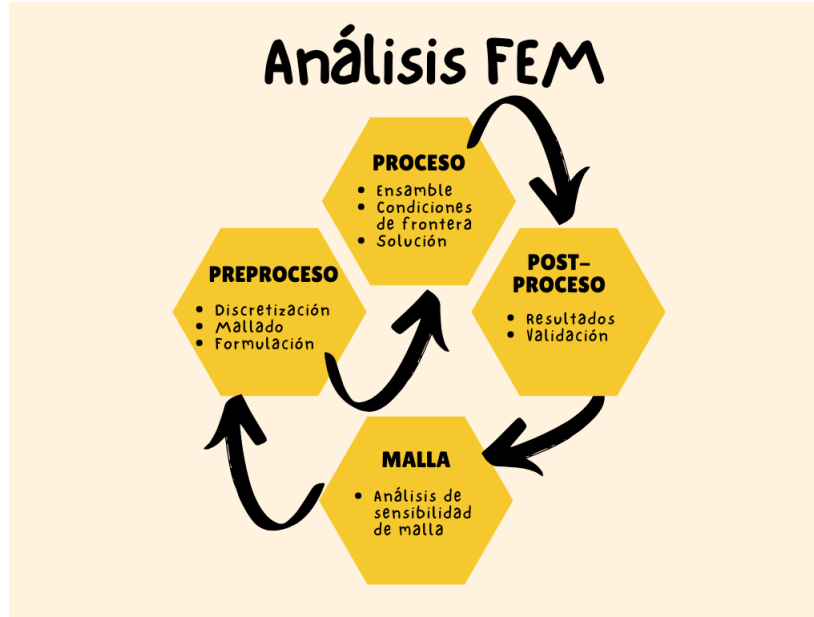


Figura 16: Metodología de análisis FEM

2.4.1. Funciones de forma

Dentro de cada elemento, el campo de desplazamientos se aproxima a partir de sus valores en los nodos mediante un conjunto de funciones de interpolación, denominadas funciones de forma. Para un elemento de n nodos, dicha aproximación se expresa como [33]:

$$u^h(s) = \sum_{i=1}^n N_i(s) u_i = \bar{N}^T \bar{u}, \quad (57)$$

donde $N_i(s)$ son las funciones de forma, $\bar{N}$ el vector que las agrupa y $\bar{u}$ el vector de desplazamientos nodales. Las funciones de forma se obtienen a partir de una interpolación polinómica cuyo grado depende del número de nodos del elemento, y satisfacen el criterio de unicidad $\sum_{i=1}^n N_i(s) = 1$, que les permite representar un desplazamiento de cuerpo rígido.

2.4 Método del elemento finito

A partir de esta aproximación, las deformaciones se obtienen aplicando el operador diferencial $\underline{L}$ sobre las funciones de forma, lo que define la matriz deformación-desplazamiento $\underline{B}$; introduciendo además la relación constitutiva, los esfuerzos quedan expresados en función de los desplazamientos nodales:

$$\bar{\varepsilon} = \underline{B} \bar{u}, \quad \underline{B} = \underline{L} \bar{N}^T, \quad \bar{\sigma} = \underline{D} \underline{B} \bar{u}. \quad (58)$$

Estas relaciones, junto con los operadores $\underline{B}$ y $\underline{D}$ establecidos en las Secciones 2.3.2 y 2.3.4, constituyen la base para la formulación de la matriz de rigidez mediante el método de Galerkin.

2.4.2. El método de Galerkin

Para plantear el sistema de ecuaciones del elemento finito se emplea el método de los residuos ponderados de Galerkin. Frente a las formulaciones energéticas, que requieren la existencia previa de un funcional, el método de Galerkin parte directamente de la ecuación diferencial de gobierno, lo que le otorga mayor generalidad [34]. La formulación se plantea sobre la ecuación de equilibrio elástico establecida en la Sección 2.3.1, que constituye la forma fuerte del problema:

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (59)$$

Dado que la solución aproximada no satisface exactamente la expresión (59), se genera un residuo. El método de Galerkin exige que la proyección de dicho residuo sobre un conjunto de funciones de ponderación $\bar{w}$ —elegidas iguales a las funciones de forma— sea nula sobre el dominio:

$$\int_{\Omega} \bar{w}^T (\nabla \cdot \sigma + f) d\Omega = 0. \quad (60)$$

Aplicando integración por partes sobre el término que contiene la divergencia de los esfuerzos, se reduce el orden de derivación y se incorporan de forma natural las condiciones de frontera asociadas a las tracciones aplicadas. Se obtiene así la forma débil del problema, equivalente al principio de los trabajos virtuales:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega = \int_{\Omega} \delta u^T f d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta u^T t d\Gamma, \quad (61)$$

donde el primer miembro representa el trabajo virtual interno y el segundo, el trabajo virtual de las fuerzas másicas f y de las tracciones t aplicadas sobre la frontera Γ_t .

Introduciendo la aproximación del campo de desplazamientos mediante las funciones de forma y

2.4 Método del elemento finito

las relaciones definidas en la Sección 2.4.1,

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N}^T \mathbf{u}^e, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \underline{\underline{B}} \mathbf{u}^e, \quad \boldsymbol{\sigma} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \mathbf{u}^e, \quad (62)$$

y sustituyéndolas en la forma débil (61), se llega al sistema de ecuaciones del elemento, en el que se identifica la matriz de rigidez elemental:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{\Omega^e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} d\Omega, \quad \underline{\underline{K}}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e. \quad (63)$$

La expresión (63) constituye el resultado central de la formulación, al vincular las propiedades del material, contenidas en la matriz constitutiva $\underline{\underline{D}}$, con la geometría de la interpolación, contenida en la matriz deformación-desplazamiento $\underline{\underline{B}}$.

2.4.3. Particularización al estado plano

Conforme a la reducción a un estado plano justificada en la Sección 2.3.7, la integración sobre el volumen del elemento se simplifica al producto del espesor t , constante, por la integral sobre el área del elemento:

$$\underline{\underline{K}}^e = t \int_{A^e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} dA, \quad (64)$$

donde la matriz constitutiva $\underline{\underline{D}}$ corresponde a la del estado de esfuerzo plano y la matriz deformación-desplazamiento, para un elemento de funciones de forma $N_i(x, y)$, adopta la forma:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Cada par de columnas de $\underline{\underline{B}}$ corresponde a un nodo del elemento, y sus tres filas reproducen la estructura del vector de deformaciones en el plano, $\{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}$.

2.4.4. Ensamblaje y condiciones de frontera

Una vez obtenida la matriz de rigidez de cada elemento, el comportamiento global de la estructura se construye combinando las contribuciones de todos los elementos en un único sistema de ecuaciones. Este proceso, denominado ensamblaje, se fundamenta en la conectividad de la malla, esto es, en la correspondencia entre los grados de libertad locales de cada elemento y los grados de libertad globales de la estructura, de modo que las contribuciones de los elementos que comparten

2.4 Método del elemento finito

un mismo nodo se superponen [34]:

$$\underline{K} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \underline{K}^e, \quad \bar{F} = \bigcup_{e=1}^{n_e} F^e, \quad (66)$$

donde n_e es el número de elementos y el operador $\bigcup$ denota el ensamblaje sobre los grados de libertad compartidos. El resultado es el sistema global de ecuaciones que gobierna el problema estático:

$$\underline{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}. \quad (67)$$

El sistema (67) no admite solución única hasta imponer las condiciones de frontera, que eliminan el movimiento de sólido rígido y reflejan las restricciones físicas del problema. Estas se clasifican en dos tipos [34]: las condiciones esenciales o de *Dirichlet*, que prescriben valores de desplazamiento en determinados grados de libertad —como el empotramiento en la raíz del ala—, y las condiciones naturales o de *Neumann*, que prescriben fuerzas o tracciones aplicadas sobre la frontera. Una vez impuestas, el sistema queda determinado y su resolución proporciona los desplazamientos nodales, a partir de los cuales se recuperan las deformaciones y los esfuerzos en todo el dominio mediante las relaciones (62).

2.4.5. Formulación dinámica

La formulación desarrollada hasta este punto corresponde al problema estático, en el que las cargas se aplican de forma gradual y se desprecian los efectos inerciales. Sin embargo, para los objetivos de la validación dinámico-estructural del ala, se requiere considerar su comportamiento dinámico, en el que las cargas varían en el tiempo y la inercia del material adquiere relevancia. Para ello se retoma la ecuación de equilibrio, ahora en su forma dinámica, incorporando el término inercial de acuerdo con el principio de d'Alembert [34]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (68)$$

donde ρ es la densidad del material y $\ddot{\mathbf{u}}$ el campo de aceleraciones. Al aplicar el procedimiento de Galerkin sobre esta ecuación, de manera análoga al caso estático, el término inercial da lugar a la matriz de masa del elemento:

$$\underline{M}^e = \int_{\Omega^e} \rho \mathbf{N} \mathbf{N}^T d\Omega. \quad (69)$$

Tras el ensamblaje de las contribuciones de todos los elementos, e incorporando un término de amortiguamiento que representa la disipación de energía del sistema, se obtiene la ecuación de

2.4 Método del elemento finito

movimiento semidiscreta que gobierna la dinámica de la estructura:

$$\underline{M} \ddot{\mathbf{u}} + \underline{C} \dot{\mathbf{u}} + \underline{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}(t), \quad (70)$$

donde $\underline{M}$, $\underline{C}$ y $\underline{K}$ son las matrices globales de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente, y $\mathbf{F}(t)$ es el vector de cargas dependiente del tiempo. La matriz de amortiguamiento $\underline{C}$ suele construirse mediante el modelo de amortiguamiento proporcional de Rayleigh, expresándola como una combinación lineal de las matrices de masa y rigidez [34]. La ecuación (70) constituye el marco general del análisis dinámico; los distintos tipos de análisis se obtienen según la naturaleza de la carga $\mathbf{F}(t)$ y de los términos que se conserven.

El caso más fundamental se obtiene al considerar la vibración libre del sistema, sin cargas externas ni amortiguamiento. La ecuación de movimiento se reduce entonces a un problema de valores propios, cuya solución proporciona las frecuencias naturales ω_i y los modos de vibración ϕ_i de la estructura:

$$\underline{M} \ddot{\mathbf{u}} + \underline{K} \mathbf{u} = \mathbf{0} \implies (\underline{K} - \omega_i^2 \underline{M}) \phi_i = \mathbf{0}. \quad (71)$$

Este análisis, conocido como análisis modal, caracteriza las propiedades dinámicas intrínsecas de la estructura y constituye el punto de partida para el estudio de su respuesta ante excitaciones dinámicas.

2.4.6. Análisis de respuesta en frecuencia

El análisis de respuesta en frecuencia estudia el comportamiento de la estructura en estado estacionario cuando se somete a una excitación armónica sostenida. Su finalidad es determinar cómo varía la amplitud de la respuesta en función de la frecuencia de excitación, identificando las frecuencias a las que la estructura experimenta amplificaciones significativas [34].

Cuando la carga aplicada es armónica, de la forma $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0 e^{i\Omega t}$, con Ω la frecuencia de excitación, la respuesta del sistema en estado estacionario es también armónica y de la misma frecuencia, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}(\Omega) e^{i\Omega t}$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de movimiento (70), las derivadas temporales se transforman en factores algebraicos y el problema diferencial se reduce a un sistema algebraico dependiente de la frecuencia:

$$(\underline{K} - \Omega^2 \underline{M} + i\Omega \underline{C}) \mathbf{U}(\Omega) = \mathbf{F}_0, \quad (72)$$

cuya solución, para cada valor de la frecuencia de excitación, proporciona la amplitud compleja de la respuesta:

$$\mathbf{U}(\Omega) = (\underline{K} - \Omega^2 \underline{M} + i\Omega \underline{C})^{-1} \mathbf{F}_0. \quad (73)$$

2.5 Optimización estructural evolutiva

El carácter complejo de $U(\Omega)$ recoge tanto la amplitud como el desfase de la respuesta respecto a la excitación. Evaluando la expresión (73) a lo largo de un rango de frecuencias, se obtiene la curva de respuesta en frecuencia (diagrama de Bode), que es el principal resultado del análisis. En dicha curva, las frecuencias de excitación que coinciden con las frecuencias naturales obtenidas en el análisis modal se manifiestan como picos de amplitud, que corresponden a las condiciones de resonancia. De ahí la importancia del análisis modal como paso previo, al indicar las frecuencias en torno a las cuales la respuesta estructural resulta crítica. La interpretación de estos resultados permite verificar que, dentro del rango de frecuencias de operación de la estructura, no se presenten condiciones de resonancia que comprometan su integridad estructural.

2.5. Optimización estructural evolutiva

Este concepto se introdujo en el capítulo anterior, como parte de las herramientas con las que se puede reducir la densidad estructural. Ahora, el enfoque de este capítulo es desglosar teóricamente el modo en el que funciona la optimización estructural evolutiva, tomando en cuenta restricciones de rigidez.

La optimización estructural está destinada a determinar una mejor distribución del material dentro de un dominio estructural, de modo que satisfaga ciertas restricciones, mismas que pueden ser de rigidez o de resistencia, a la par que se minimiza o maximiza una función objetivo, que puede ser la masa de la estructura, por ejemplo. La optimización topológica evolutiva representa una metodología eficiente e incluso conceptualmente *simple* que permite obtener configuraciones estructurales óptimas.

Un signo que representa una potencial falla estructural para un sistema mecánico dado son valores excesivos de esfuerzo. De forma inversa, un claro signo de que un modelo es ineficiente son valores muy bajos de esfuerzo a lo largo de la estructura. La distribución de esfuerzo es lo que determina el criterio de rechazo de material que más adelante se abordará, ya que considera aquellas zonas con un valor muy bajo de esfuerzo local como innecesarias, de modo que las elimina y desarrolla una estructura que permita una mejor distribución de esfuerzo, de manera que el diseño se vuelva más uniforme.

En general, un problema de optimización estructural se formula:

$$\text{Minimizar } f(x) \tag{74}$$

donde la función anterior se encuentra sujeta a la restricción:

$$g_i(x) \leq 0 \tag{75}$$

2.5 Optimización estructural evolutiva

Donde:

- $f(x)$: función objetivo
- $g_i(x)$: representa las restricciones
- x : Corresponde al conjunto de las variables de diseño

Dichas variables de diseño pueden representar diferentes aspectos del sistema estructural esto abre entonces, la posibilidad de plantear distintos tipos de problemas de optimización. Existen 3 categorías distintas, tal como se revisó en el capítulo anterior, de modo que el enfoque de esta sección corresponde con la optimización topológica.

2.5.1. Optimización topológica

En los problemas a resolver de esta naturaleza, el objetivo se centra en determinar cómo va a distribuirse el material bajo un dominio estructural previamente definido, es decir, dónde si habrá material y en dónde no habrá. Como condición inicial, el dominio estructural está completamente definido de material de modo que el proceso de optimización se encarga de eliminar gradualmente aquellas regiones cuya concentración de esfuerzo local es mínima, teniendo entonces una contribución mínima al desempeño estructural.

Este tipo de optimización es muy útil en las primeras etapas de diseño conceptual, ya que permite generar configuraciones estructurales eficientes sin imponer restricciones geométricas demasiado estrictas. De modo que, su resolución implica la aparición de métodos numéricos, siendo el método del elemento finito el método predilecto para evaluar el comportamiento estructural del dominio para diferentes configuraciones de distribución del material.

2.5.2. Principio del método ESO

El método de optimización estructural evolutiva (ESO) por sus siglas en inglés, está basado en un principio simple: *eliminar de forma progresiva el material que resulta ineficiente dentro del dominio estructural*. Dicho proceso es de naturaleza iterativa, de acuerdo con Y. M. Xie [27], el proceso consta de las siguientes etapas:

Análisis estructural con FEM

Evaluación del desempeño individual de los elementos

2.5 Optimización estructural evolutiva

Identificación de elementos ineficientes

Eliminación de los elementos

Actualización del modelo estructural

Repetición hasta satisfacer el criterio de rechazo

Así, este proceso evolutivo conduce a una geometría optimizada.

2.5.3. Criterio de eliminación del material

El criterio empleado para determinar la distribución del material a lo largo del dominio está basado en la distribución de esfuerzos sobre los elementos que conforman la estructura. El criterio funciona de modo que se compara el valor obtenido del esfuerzo de Von Mises de cada elemento estructural con el valor máximo permisible, siendo entonces que, si se satisface la siguiente condición, dichos elementos se eliminan de la estructura:

$$\frac{\sigma_e^{VM}}{\sigma_{max}^{VM}} < RR_i \quad (76)$$

Donde: RR_i es la tasa de rechazo

De modo que el proceso de análisis FEM y la eliminación de elementos se repite hasta que se alcanza un comportamiento estable. De modo que se introduce una *tasa evolutiva* ER y se añade a la expresión de la tasa de rechazo como sigue:

$$RR_{i+1} = RR_i + ER, \forall i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (77)$$

De modo que se repite la iteración para cada valor de la tasa de rechazo hasta que se satisface la función. Es necesario mencionar que el usuario define el valor de dicha tasa evolutiva y del valor inicial de la tasa de rechazo, es decir, RR_0 como parte del setup para el proceso de optimización.

2.5.4. ESO para varias cargas

Muchas estructuras están sujetas a distintas cargas mecánicas a lo largo del tiempo. De modo que las estructuras deben diseñarse para soportar las distintas cargas que se aplican. Por ejemplo, un avión está sujeto a la distribución de cargas debida a la distribución de presión ocasionada por el aire, pero en otro caso la distribución cambia a la sollicitación proveniente del tren de aterrizaje cuando se encuentra en tierra.

2.5 Optimización estructural evolutiva

El análisis FEM de estructuras sujetas a diversas cargas aplicadas no es más complejo que su homólogo sujeto a una carga. De modo que el procedimiento ESO descrito en la sección anterior se aplica de la misma forma para casos sujetos a varias cargas sobre la estructura.

2.5.5. Estructuras con restricción de rigidez

La rigidez es uno de los factores más críticos para tomar en cuenta en el diseño de estructuras. Siempre se debe de cumplir que la estructura tenga la rigidez suficiente, de modo que la deflexión máxima esté dentro de los límites permitidos. La ecuación 67, presentada en la sección anterior, nos relaciona la matriz de rigidez, con las solicitaciones mecánicas. Ahora, se define la energía de deformación como sigue:

$$C = \frac{1}{2} \{F\}^T \{u\} \quad (78)$$

La ecuación 78 se expresa como el inverso de la rigidez, conocido como *compliance*. Considerando entonces eliminar el *i*-ésimo elemento, la matriz de rigidez cambia como sigue:

$$\Delta[K] = [K^*] - [K] = -[K^i] \quad (79)$$

Donde $[K^*]$ es la matriz de rigidez de la estructura resultante y $[K^i]$ es la matriz de rigidez del *i*-ésimo elemento. Es importante recalcar que al eliminar elementos en la estructura, el vector de fuerzas $\{F\}$ se mantiene sin cambios. Esto lleva a la expresión del cambio del vector de desplazamiento como sigue:

$$\{\Delta u\} = -[K]^{-1}[\Delta K] \{u\} \quad (80)$$

Sustituyendo las ecuaciones 79 y 80 en 78 se tiene:

$$\Delta C = -\frac{1}{2} \{F\}^T [K]^{-1}[\Delta K] \{u\} = \frac{1}{2} \{u^i\}^T [K^i] \{u^i\} \quad (81)$$

donde $\{u^i\}$ es el vector de desplazamiento del *i*-ésimo elemento. Entonces, se define el número sensitivo:

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \{u^i\}^T [K^i] \{u^i\} \quad (82)$$

Dicho valor indica el cambio de la energía de deformación al ir eliminando elementos durante el proceso iterativo. Se establece que el objetivo de optimización es obtener una estructura más ligera pero lo suficientemente rígida para no fallar con las solicitaciones mecánicas, la siguiente expresión define dicho objetivo:

$$C \leq C^* \quad (83)$$

2.5 Optimización estructural evolutiva

Donde C^* es el límite preescrito de C . Para alcanzar el objetivo de optimización, conviene eliminar aquellos elementos que tengan los valores más bajos de α_i , de modo que el incremento de C es mínimo.

El procedimiento recomendado para este tipo de problemas es:

- Discretización del dominio
- Resolver la ecuación de equilibrio estático (67)
- Calcular el número sensitivo (α_i)
- Eliminar elementos con valores sensitivos muy bajos.
- Iterar de 2-4 hasta que deje de satisfacerse la condición 83

Es importante mencionar que la cantidad de elementos a eliminar en cada iteración está sujeta al valor de la *tasa de eliminación de elementos*, la cual está definida como la cantidad de elementos a remover entre la cantidad inicial de elementos.

3. Optimización y adecuación de elementos estructurales

Este capítulo constara de distintas secciones. La primera corresponde al planteamiento de los requerimientos de este trabajo, así como al diseño de la estructura alar. Se revisa el dimensionamiento geométrico inicial del ala, la selección y caracterización de los 4 perfiles, incluyendo una breve justificación de por qué cuenta con perfiles distintos. Se presenta la geometría final para ser sometida a las iteraciones de optimización. La segunda sección consta de la obtención de la distribución de sustentación en la estructura alar y el set-up inicial del análisis estático estructural previo a la optimización.

La tercera sección se enfoca en el análisis de sensibilidad de malla para definir el tamaño de elemento óptimo, asegurando resultados coherentes, y se visualizan los resultados del análisis estático. Finalmente, la última sección corresponde a la revisión de las iteraciones y la adecuación de los elementos estructurales, tomando en cuenta las restricciones de manufactura y culminando con la presentación de la geometría optimizada.

3.1. Requerimientos y especificaciones

Es momento de definir los requerimientos y las especificaciones objetivas con las que se trabajará en el presente proyecto. Se trata de una aeronave de fuselaje ancho; de este tipo existen varios en la industria, por lo que es pertinente hacer un comparativo entre el Boeing 787 Dreamliner y el Boeing 777X. Son 2 aeronaves modernas, la primera con poco más de 10 años en el mercado y la segunda se encuentra en proceso de certificación para su posterior entrada en servicio [13]. La tabla 5 resume los datos relevantes del Boeing 787 y la tabla 6 del Boeing 777X.

De las tablas 5 y 6, se tienen cambios sutiles en cuanto a las medidas de la longitud, altura y envergadura de las dos aeronaves en cuestión, de modo que la semiala para el diseño propuesto contará con medidas similares. Ahora bien, se determinará que la aeronave tendrá un peso máximo de despegue de 355 toneladas. Con base en ese requerimiento, se harán los cálculos para el dimensionamiento geométrico de la estructura.

En cuanto a los materiales utilizados, sólo se ocuparán las aleaciones metálicas debido a su simplificación, ya que son materiales isotrópicos. Los materiales compuestos se dejarán para un trabajo futuro. El factor de seguridad con el que se realizarán los diseños iniciales será el mínimo permitido en la industria aeronáutica, que es de 1.5 de acuerdo con las regulaciones de la FAA [38], siendo uno de los objetivos de la optimización mejorarlo.

Los métodos de manufactura serán una restricción; es decir, se adecuará la geometría de los acostillados para asegurar que dichos elementos se puedan manufacturar de acuerdo con los estándares

3.2 Dimensionamiento geométrico

Tabla 5: Datos principales del Boeing 787 Dreamliner.

Parámetro	Descripción	Fuente
Longitud	68 m	The Boeing Company® [18]
Envergadura	60 m	The Boeing Company®
Altura	17 m	The Boeing Company® [18]
Motor	GEnX-1B / Trent 1000	The Boeing Company® [18]
MTOW	254 000 kg	The Boeing Company® [18]
Max Landing Weight	201 839 kg	Lissys LTD® [35]
Peso seco	134 030.6 kg	Lissys LTD® [35]
Velocidad máxima	956 km h ⁻¹	Lissys LTD® [35]
Velocidad crucero	903 km h ⁻¹	Lissys LTD® [35]
Distancia de despegue	2865.12 m	Lissys LTD® [35]
Distancia de aterrizaje	1737.36 m	Lissys LTD® [35]
Aspect Ratio	9.59	The Boeing Company® [18]
Ángulo de ala	32.2°	The Boeing Company® [18]
Superficie alar	377 m ²	The Boeing Company® [18]

de la industria. En la tabla 7, se colocan los requerimientos y restricciones:

Tabla 7: Requerimientos y restricciones generales.

Aspecto	Descripción
MTOW	Deberá elevar una aeronave de 351 t
FS mínimo	1.5
Materiales	Aleaciones de aluminio
Manufactura	Web plates en las costillas
Peso máximo de estructura final	25 t

3.2. Dimensionamiento geométrico

De la primera sección, en la Tabla 7 se estableció que la estructura alar debe ser capaz de sustentar una aeronave con un MTOW de 355 t y un taper ratio máximo de 0.15. Estos valores se sustentan en la información recopilada de las aeronaves de referencia presentada previamente. El MTOW

3.2 Dimensionamiento geométrico

Tabla 6: Datos principales del Boeing 777X.

Parámetro	Descripción	Fuente
Longitud	76.72 m	The Boeing Company® [36]
Envergadura	71.75 m (extendidas)	The Boeing Company® [36]
	64.85 m (retraídas)	The Boeing Company® [36]
Altura	19.68 m	The Boeing Company® [36]
Motor	GE9X	GE Aerospace® [37]
MTOW	351 521.7 kg	Lissys LTD® [35]
Peso seco	181 430.6 kg	Lissys LTD® [35]
Velocidad máxima	N/A	–
Velocidad crucero	N/A	–
Distancia de despegue	N/A	–
Distancia de aterrizaje	N/A	–
Aspect Ratio	9.96	Lissys LTD® [35]
Ángulo de ala	N/A	–
Superficie alar	516.7 m ²	The Boeing Company® [36]

adoptado es consistente con el de la familia Boeing 777, cuyos pesos máximos de despegue se sitúan entre las 352 t a 365 t, resultando representativo de la categoría de fuselaje ancho considerada. Por su parte, el taper ratio se establece tomando como base el valor de 0.11 reportado para alas de alto alargamiento de estas aeronaves [39]; se adopta un valor ligeramente superior, 0.15, bajo un criterio conservador, ya que un taper ratio mayor incrementa la cuerda en la región de la punta, lo que favorece la integración estructural de los acostillados a costa de un ligero alejamiento de la distribución de sustentación elíptica ideal. Definidos estos requerimientos, se establecen los siguientes valores para el diseño:

$$\begin{aligned}\lambda_{max} &= 15 \% \\ c_r &= 11.869[m]\end{aligned}\tag{84}$$

Con los valores anteriores, será posible determinar valores iniciales de la longitud de la envergadura, semi envergadura, la superficie alar, el aspect ratio y por ende, se determina la función de la cuerda variable a lo largo de la envergadura, que es la ecuación 4 sustituyendo los valores antes mencionados.

Ahora, para determinar la envergadura, se emplea la ecuación 5, reordenando, se puede calcular

3.2 Dimensionamiento geométrico

una superficie alar inicial. con esto se obtiene el valor de la envergadura. Se seleccionaron 4 perfiles alares distintos debido a que se busca un comportamiento de distribución de sustentación elíptico más suave, aunado a facilitar el comportamiento estructural descrito en el capítulo 1, respecto a las torsiones geométricas y aerodinámicas.

Los perfiles seleccionados son los de la familia $BAC###$, ya que tienen una relación aceptable entre generación de sustentación y arrastre. Dichos perfiles ya han sido caracterizados en túneles de viento, de modo que se recuperan las gráficas caracterizadas que relacionan $\alpha - c_l$ para obtener la pendiente ($C_{L\alpha}$) y la ordenada al origen ($\alpha_{L=0}$) [40]. Estos datos son relevantes para la distribución de sustentación mediante la solución de Phillips.

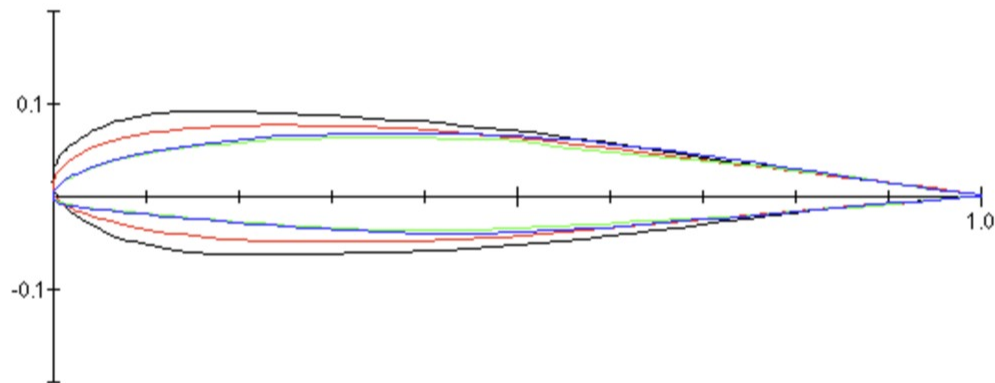


Figura 17: Perfiles alares seleccionados a lo largo de la semienvergadura. Nótese la diferencia de los espesores del perfil para lograr un torcimiento. [40]

La figura 17 muestra el cambio en la forma de los 4 perfiles, de modo que se logra un torcimiento aerodinámico. En la Tabla 8 se tienen los valores obtenidos de las curvas de cada uno de los perfiles:

3.2 Dimensionamiento geométrico

Tabla 8: Caracterización de los cuatro perfiles.

Perfil	C_{l_α} [1/rad]	$\alpha_{L=0}$ [rad]
BAC449	6.203 87	-0.021 252 9
BAC450	6.461 52	-0.020 895 6
BAC451	6.091 44	-0.022 323 7
BAC442	6.090 86	-0.026 128 4

Transformando el valor de C_{l_α} del primer perfil en radianes y sustituyendo en la ecuación 5 se tiene:

$$S = \frac{2(3.44 \times 10^6 [N])}{1.225 \left[\frac{kg}{m^3} \right] (278^2 \left[\frac{m}{s} \right]) (0.10829)} = 671 [m^2] \quad (85)$$

Se obtiene la envergadura con la expresión:

$$b = \frac{S}{c_r} = \frac{671 [m^2]}{11.869 [m]} = 56.53 [m] \quad (86)$$

De modo que, el valor del fuselaje del B787 es de $5.75 [m]$, el valor inicial de la envergadura y semi envergadura es:

$$\begin{aligned} b &= 50.78 [m] \\ \frac{b}{2} &= 25.39 [m] \\ c_r &= 11.869 [m] \\ \lambda &= 15 \% \\ \therefore c_t &= 1.78 [m] \end{aligned} \quad (87)$$

La ecuación 87 muestra también los valores mínimos con las que se debe diseñar la estructura. Contará con 14 acostillados, 2 largueros y 3 larguerillos que conforman la caja alar. A continuación, se detalla el dimensionamiento mínimo para las almas de los largueros.

3.2.1. Largueros

Los largueros contarán con una sección transversal tipo I, ya que esta geometría proporciona una alta relación rigidez-peso al concentrar el material en las tapas del larguero, incrementando el momento de inercia y mejorando la resistencia a flexión, mientras que el alma resiste principalmente los esfuerzos cortantes [26]. En la Figura 18 se detalla la nomenclatura de cada elemento que compone la sección. Para el análisis estructural, los largueros se idealizan como vigas en voladizo

3.2 Dimensionamiento geométrico

(cantilever), bajo las siguientes premisas:

- Se asume distribución de sustentación elíptica.
- Se emplea factor de carga máximo
- Un factor de seguridad mínimo permitido en aeronáutica.

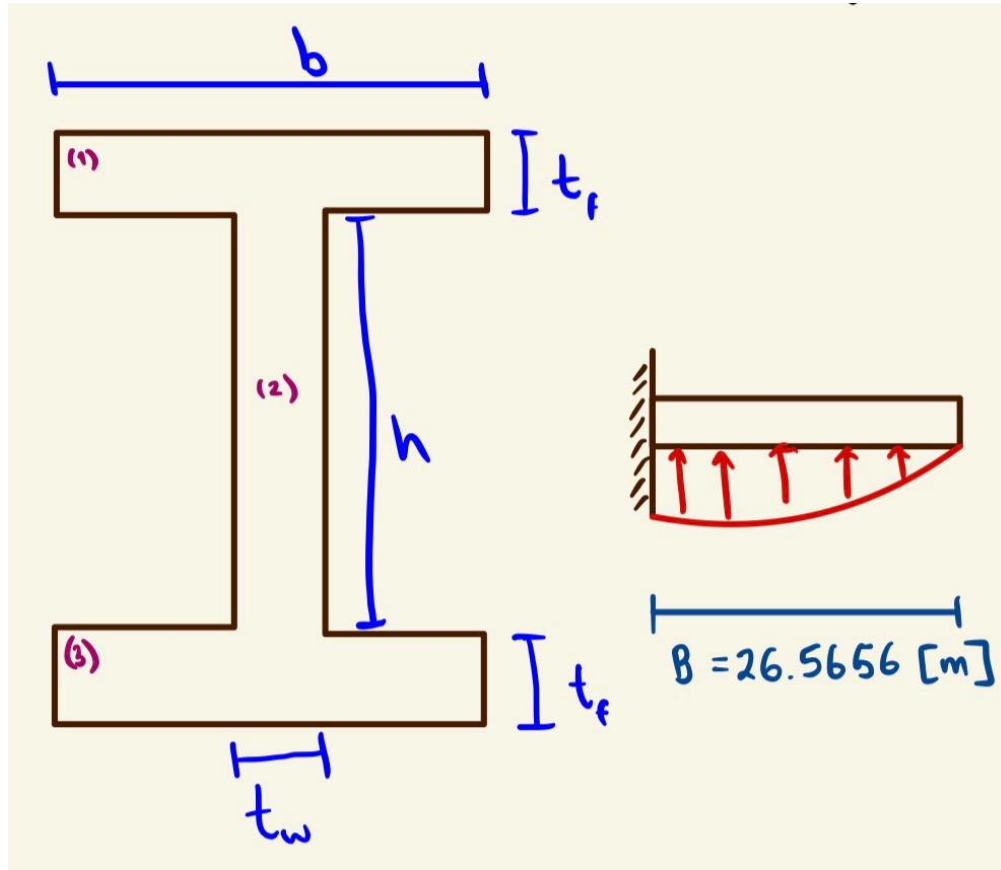


Figura 18: Geometría del perfil y nomenclatura empleada para los cálculos consecuentes.

Para obtener el momento total que debe resistir el larguero, se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned}
 W &= 3.449 \times 10^6 [N] \\
 n &= 2.1086 \\
 L_{max} &= n \cdot W = 7.27 \times 10^6 [N] \\
 L_{semi} &= \frac{7.27 \times 10^6 [N]}{2} = 3.63 \times 10^6 [N] \\
 M_{Root} &= \frac{L_{semi} \cdot B}{3} = \frac{3.63 [MN] \cdot 25.7 [m]}{3} = 3.11 \times 10^7 [N]
 \end{aligned} \tag{88}$$

3.2 Dimensionamiento geométrico

La ecuación 88 arroja el momento que debe resistir el larguero. El material asignado, tal como se establece en la restricciones y la investigación del capítulo 1, será de Aluminio 7075 T6, cuyas propiedades se enlistan:

- $\sigma_y = 503[MPa]$
- $\tau_y = 331[MPa]$
- $E = 71[GPa]$

Para la inercia mínima requerida:

$$\begin{aligned}\sigma_{adm} &= \frac{503[MPa]}{1.5} = 335[MPa] \\ I_{min} &= \frac{M \cdot y}{\sigma_{adm}} \\ y &= \frac{h}{2} \\ \therefore I_{min} &= 0.0464 \cdot h\end{aligned}\tag{89}$$

Para calcular I de la estructura, se toman en cuenta las 2 alas del perfil y se asume un análisis en flexión, omitiéndose el alma de la viga:

$$\begin{aligned}I &= \bar{I} + A \cdot d^2 \\ \bar{I} &= \frac{B \cdot h^3}{12} \\ \therefore I_{alas} &= 2\bar{I} + 2A \cdot d^2 \\ d &= \frac{h}{2} \\ A &= B \cdot t_f \\ \bar{I} &\ll 2A \cdot d^2 \\ I_{alas} &= \frac{1}{2}B \cdot t_f \cdot h^2\end{aligned}\tag{90}$$

Igualando las expresiones 89 y 90:

$$\begin{aligned}I &\geq I_{min} \\ \frac{1}{2}B \cdot t_f \cdot h^2 &\geq 0.0464 \cdot h \\ B \cdot t_f \cdot h &\geq 0.0928\end{aligned}\tag{91}$$

Durante la verificación de la resistencia a esfuerzo cortante es cuando adquiere especial relevancia

3.2 Dimensionamiento geométrico

el comportamiento estructural del alma de la viga.

$$\begin{aligned}
 V &= L_{semi} \\
 \tau_{adm} &= 221 [MPa] \\
 \tau &= \frac{V}{A_{web}} \\
 A_{web} &= h \cdot t_w \\
 \therefore h \cdot t_w &\geq 0.0164
 \end{aligned} \tag{92}$$

Las ecuaciones 91 y 92 muestran que la altura del alma es el parámetro geométrico con mayor influencia en la capacidad resistente de la sección. En consecuencia, se adoptan valores preliminares para h y b , procurando una configuración estructural eficiente y compatible con las restricciones geométricas del ala. Con estos parámetros se calculan las dimensiones mínimas requeridas para satisfacer los criterios de diseño, las cuales se resumen en la Tabla 9.

Tabla 9: Valores mínimos de la estructura tipo I.

Componente	Dimensión [m]
h (fijado)	0.8
B	1.0
t_w	0.021
t_f	0.116

3.2.2. Diseño CAD inicial

Con los valores obtenidos de la sección previa, se diseña el primer CAD. Los valores geométricos variaron un poco debido a los ajustes necesarios para que el diseño quedara bien ensamblado. Se diseñó un modelo robusto de tal modo que sea más factible la optimización topológica de los acostillados y una optimización de tamaño con los largueros. Tal como se mencionó, el ala cuenta con una cuerda variable; sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación 4 se tiene la función:

$$c(y) = 11.869(1 + Abs(y) * (\frac{14.3 - 1}{26.5656})) \tag{93}$$

La figura 19 muestra la variación lineal de la cuerda a lo largo de la envergadura:

3.2 Dimensionamiento geométrico

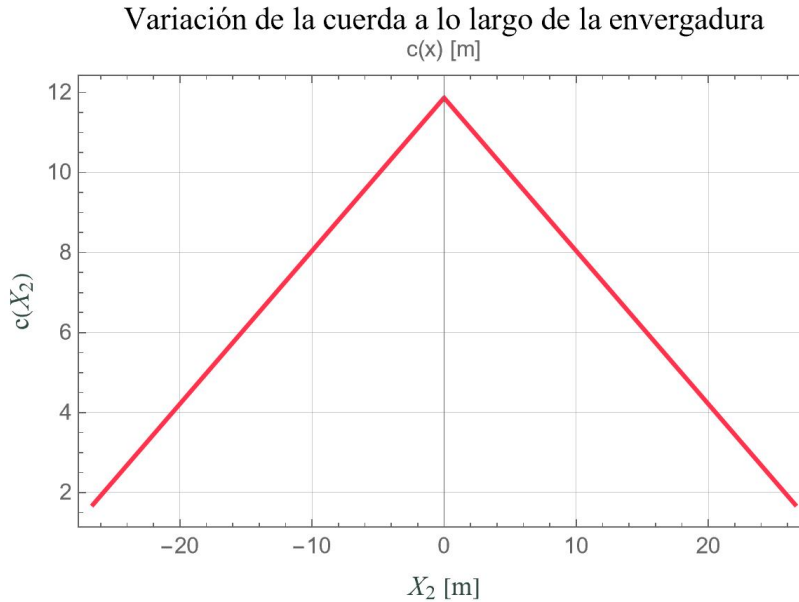


Figura 19: Valores de la cuerda a lo largo de la envergadura.

De la Figura 20 nótese que los acostillados tienen un diseño convencional, con la mayor cantidad de material para ser sometidos a las iteraciones topológicas evolutivas. Los larguerillos tienen la función de aportar más rigidez a la caja alar en las secciones donde los largueros han disminuido su espesor, que corresponde a las zonas cercanas a la punta del ala. En la Figura 21 se muestra la vista en planta del ala, donde se aprecia que es un ala recta con cuerda variable.

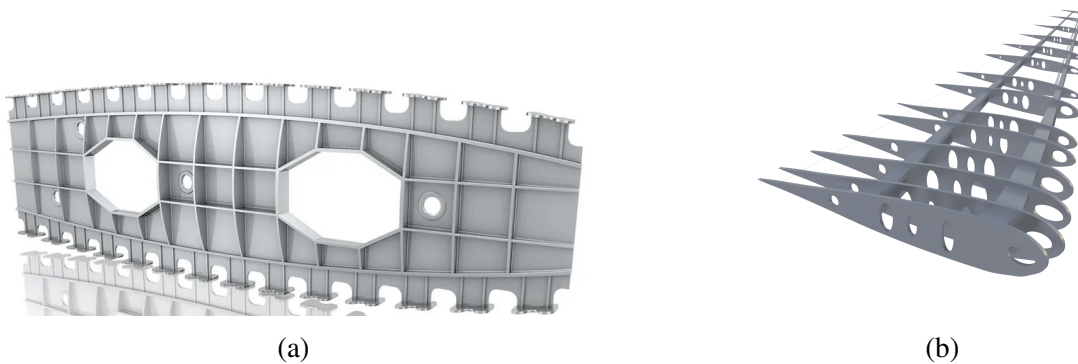


Figura 20: Acostillado de referencia: (a) diseño real del Boeing 777X. (b) diseño idealizado propuesto. El diseño idealizado constituye la geometría de partida sobre la cual se aplicará el análisis estructural y la posterior optimización topológica. El resultado final propondrá un diseño similar al mostrado en a)

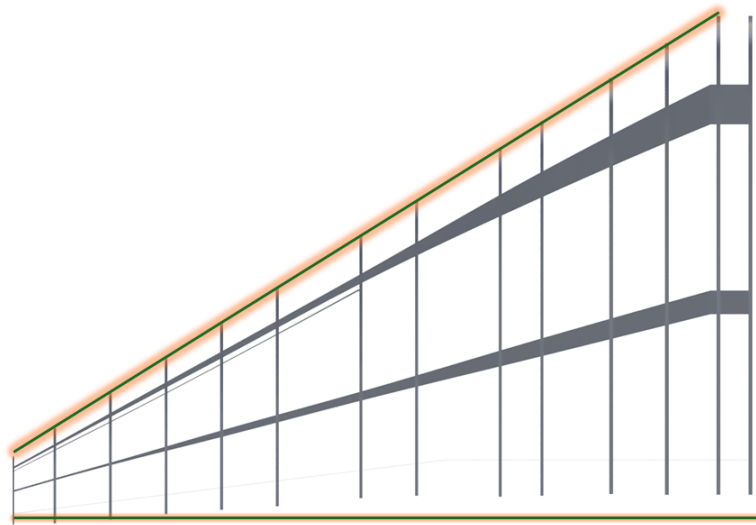


Figura 21: Vista en planta del ala. Las líneas verdes resaltadas en naranja son guías para apreciar que el ala tiene un diseño de ala recta con cuerda variable.

Los valores geométricos del CAD, se presentan como sigue:

$$\begin{aligned}
 h &= 0.8[m] \\
 B &= 1[m] \\
 t_w &= 0.4[m] \\
 t_f &= 0.3[m] \\
 b &= 53.1312[m] \\
 c_r &= 11.869[m] \\
 c_t &= 1.703[m] \\
 \lambda &= 14.3\%
 \end{aligned}
 \tag{94}$$

Con base en la revisión bibliográfica presentada en el Capítulo 1, se seleccionaron aleaciones de aluminio representativas de la industria aeronáutica, con el propósito de evaluar la influencia de sus propiedades mecánicas en el comportamiento estructural del ala. La asignación de los materiales para cada elemento estructural se presenta en la Tabla 10.

3.3 Cargas de sustentación

Tabla 10: Materiales asignados

Estructura	Material
Acostillados	Al 2024 T6
Largueros	Al 7075 T6
Larguerillos	Al 6061 T6

3.3. Cargas de sustentación

La distribución de las cargas de sustentación se calcula mediante la teoría expuesta en la sección 2.4, a través de un programa construido en Mathematica. Con los resultados obtenidos de la caracterización de los 4 perfiles, se comienzan los cálculos para cada componente de Fourier que eventualmente lleva a la sustentación local.

Se toma en cuenta el vuelo crucero, ya que es la etapa más predominante de la vida útil de la estructura, de modo que se establecen algunos valores que se introdujeron en el código:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 2 \\
 \rho &= 0.4135 \left[\frac{kg}{m^3} \right] @ 10[km] \\
 v_{\infty} &= 900 \left[\frac{km}{h} \right] \\
 \dot{p} &= 27 \left[\frac{degrees}{second} \right] \\
 e_1 &= 0.9
 \end{aligned} \tag{95}$$

La densidad del aire se obtuvo a partir de las tablas de atmósfera estándar del libro *Introduction to Flight* [12], considerando una altitud de 10 km, ya que corresponde aproximadamente a la altitud de crucero de aeronaves comerciales de transporte, donde se desarrollan las condiciones de operación predominantes durante el vuelo. Dado que se trata de 4 perfiles a lo largo de la semi-envergadura, se tiene entonces en la tabla 11 la distribución a lo largo de la semiala: Las Figuras 22

Tabla 11: Distribución de los 4 perfiles en la semiala

Perfil	Longitud perfil	Acumulado envergadura
BAC 449	7.5 [m]	7.5 [m]
BAC 450	6.5 [m]	14 [m]
BAC 451	9 [m]	23 [m]
BAC 442	3.5656 [m]	26.5656

y 23 muestran el torcimiento aerodinámico, ya que muestra la variación de $\alpha_{L=0}$, y el torcimiento geométrico al variar la distribución de $C_{l_{\alpha}}$, respectivamente, a lo largo de la envergadura.

3.3 Cargas de sustentación

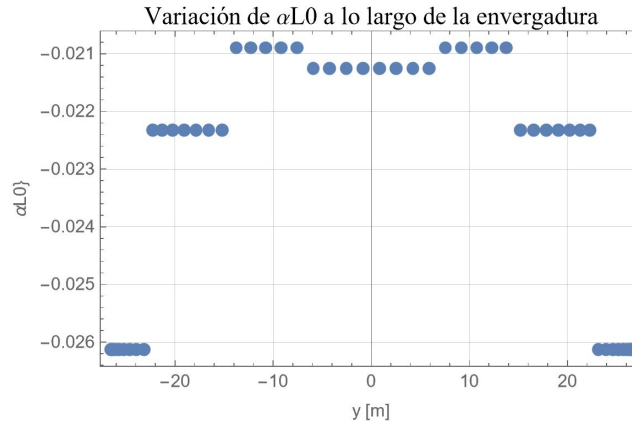


Figura 22: Torcimiento aerodinámico a lo largo de la envergadura.

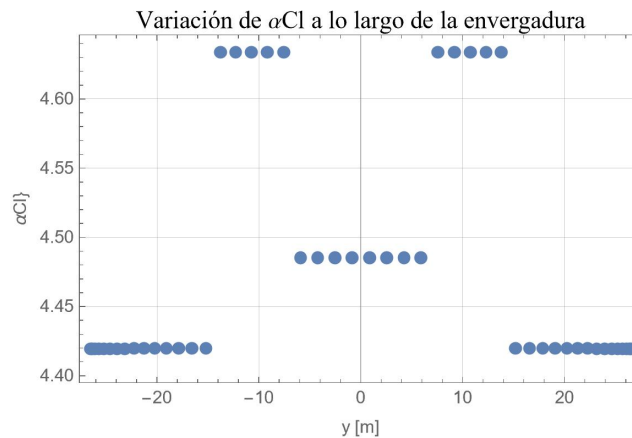


Figura 23: Torcimiento geométrico a lo largo de la envergadura.

3.3.1. Modelo ala rígida

Conociendo los torcimientos se determina el washout a lo largo de la envergadura, así como la distribución de sustentación para el caso de ala rígida. La Figura 24 muestra la distribución de washout como se observa, es una aproximación lineal para ala en flecha, de modo que tiene una magnitud mayor cerca de las puntas. Este es el responsable de generar un ángulo de ataque inducido y, por ende, una velocidad inducida que afecta la efectividad del diseño para generar sustentación, disminuyendo el arrastre. Dichos vórtices inducidos provocan una deflexión vertical hacia abajo del ala; de ahí la importancia del torcimiento geométrico y aerodinámico para mitigar dichos fenómenos y, en consecuencia, evitar una entrada en pérdida temprana en las secciones próximas a la punta del ala.

3.3 Cargas de sustentación

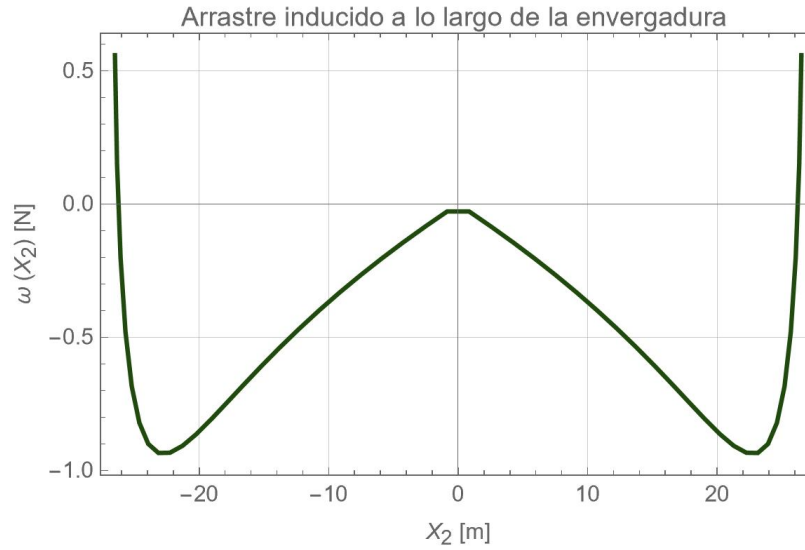


Figura 24: Magnitud del arrastre inducido a lo largo de la envergadura. Nótese cómo la magnitud aumenta en las puntas del ala, fenómeno que genera el cambio del ángulo de ataque provocando una deflexión vertical hacia abajo del ala.

La Figura 25 muestra la distribución de la sustentación a lo largo de la envergadura. Tiene un comportamiento elíptico, tomando en cuenta todos los efectos mencionados en la sección 2.2.2. Se ha logrado una distribución óptima, sin presentar picos no deseados en las secciones próximas a la punta.

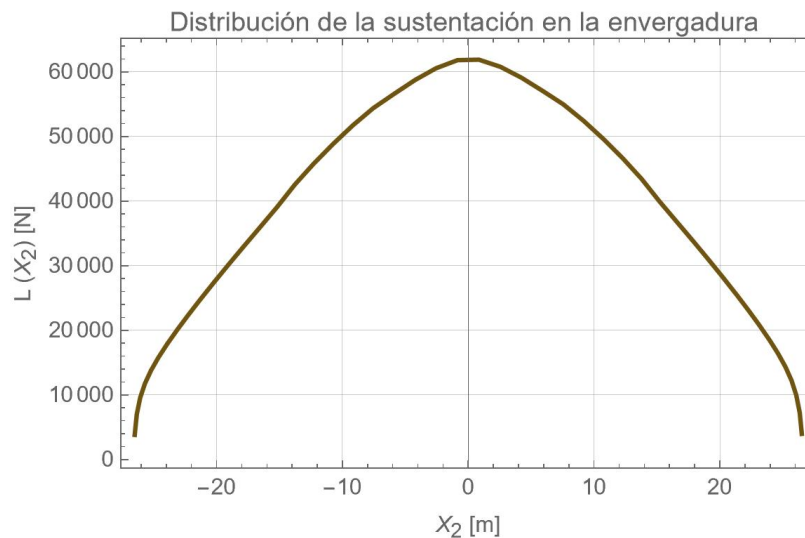


Figura 25: Distribución de sustentación en ala rígida.

El programa fue diseñado para discretizar la envergadura en una cantidad de n estaciones que el usuario puede manipular a su gusto. Para efectos de esta demostración, se eligieron 50 estaciones;

3.3 Cargas de sustentación

así, el vector de la magnitud de sustentación a lo largo de la envergadura no es tan extenso y es factible seleccionar las magnitudes aplicadas para el set-up de la simulación, que se verá en la siguiente sección.

3.3.2. Ala flexible

Ahora, para comparar el comportamiento del ala con los efectos de ala flexible, la formulación sigue siendo la misma, con la adición del valor máximo de torcimiento del ala, de modo que se satisface la ecuación 26:

$$\blacksquare \Theta = 13$$

En la Figura 26 se aprecian 2 curvas de distribución de sustentación. La gráfica verde representa los efectos de flexibilidad del ala y la café la distribución de ala rígida. De nuevo, la distribución de sustentación de ala flexible tiene un comportamiento suave, gracias a los torcimientos. Es importante destacar que, dicho comportamiento de la estructura alar, satisface la teoría revisada en la sección 2.2.3, de acuerdo con la figura 12.

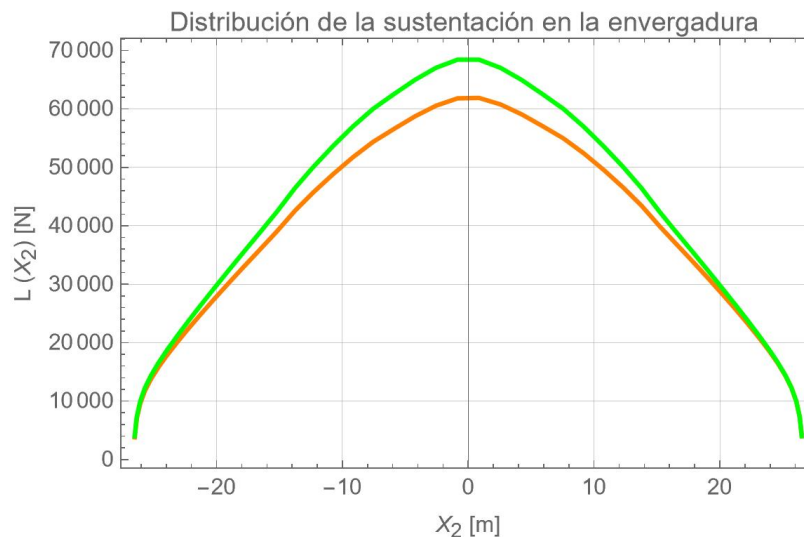


Figura 26: Comparación de la distribución de sustentación. En verde corresponde a los efectos de ala flexible, en café su homólogo en ala rígida.

3.3.3. Set-up de análisis FEM

Para esta sección, se describen las condiciones iniciales que tendrá el análisis por elementos finitos previo a la optimización topológica. Se mostrarán las condiciones de frontera: como el establecimiento de los contactos entre superficies, la sección correspondiente al empotramiento de la

3.3 Cargas de sustentación

semiala y la aplicación de las cargas sobre el acostillado, donde estas últimas tendrán magnitudes obtenidas de la solución de Phillips.

Tabla 12: Magnitud de las cargas aplicadas.

Costilla	Magnitud en y [N]	Magnitud en z [N]
2	3035.21	86 917.1
3, 4	2542.16	72 798.0
5, 6, 7, 8	1806.00	51 719.0
9, 10, 11	999.91	28 633.4
12, 13	454.205	13 006.7
14	175.131	5015.0

El análisis por elementos finitos será ejecutado por medio del uso de ANSYS®, empleando equipos de cómputo con 16 GB RAM y un procesador AMD Ryzen AI 9 HX. El primer acostillado, junto con las caras de los 2 largueros corresponden a las caras seleccionadas para ser el soporte fijo, correspondiendo al empotramiento. En los 13 acostillados restantes, es donde se aplicarán las cargas de sustentación, cuyas magnitudes se muestran en la tabla 12. En la figura 27 se muestra el set-up completo para la posterior solución del análisis estático.

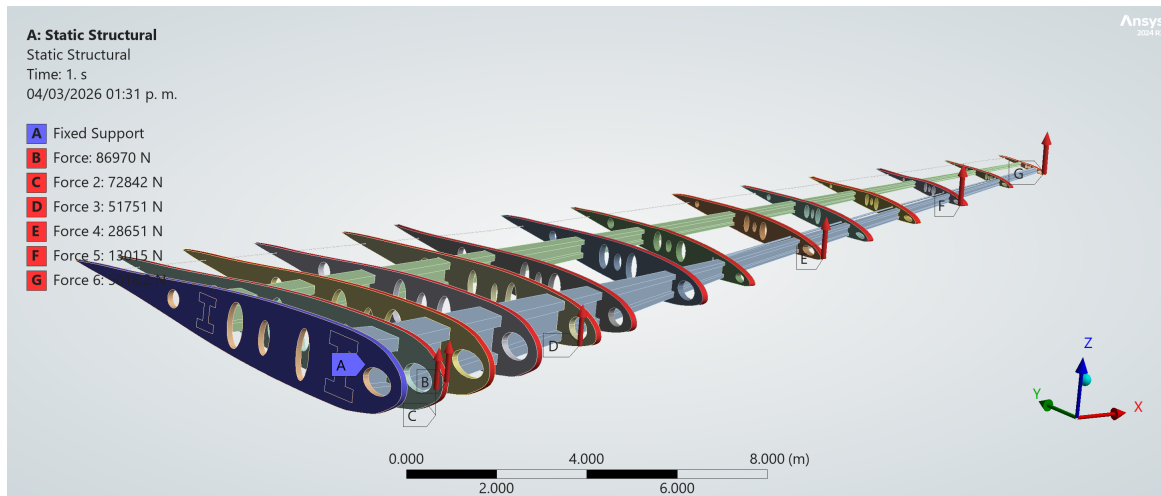


Figura 27: Set-up del análisis FEM. Se aprecia el soporte fijo y las 6 magnitudes de fuerza aplicadas en las costillas.

Es importante añadir que la magnitud está dada por componentes, debido a que se toma en cuenta la condición de vuelo crucero a un ángulo de ataque de $\alpha = 2$

3.4 Sensibilidad de malla

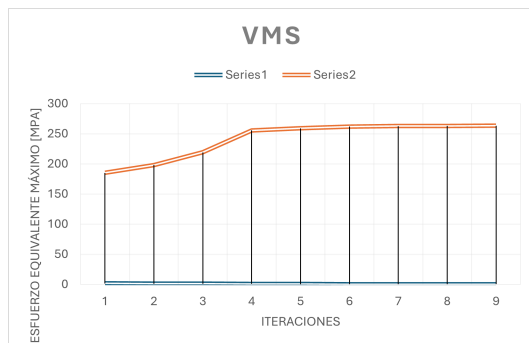
3.4. Sensibilidad de malla

Previo a la obtención de la solución, es importante hacer un análisis de sensibilidad de malla, de modo que se busque la convergencia de los resultados. La simulación empleada es justamente el *Static Structural* previamente configurado. Se comienza con el tamaño de elemento por default que propone ANSYS Mechanical® y se modifica, haciendo este valor más pequeño hasta que los valores de esfuerzo de Von Misses máximo y el desplazamiento máximo hayan convergido. Factores como tiempo de solución y la cantidad de elementos generados serán tomados en cuenta.

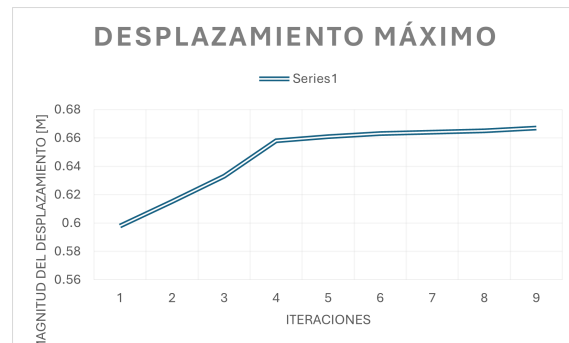
En la tabla 13 se encuentran los resultados obtenidos de cada simulación al ir variando el tamaño general de elemento. Dada la convergencia, un tamaño de elemento óptimo de 0.131 [m]. El tiempo de solución aumento considerablemente comparado con los tamaños de elemento más grandes. Se ha decidido congelar el tamaño de elemento de 0.131 [m].

Tabla 13: Análisis de independencia de malla.

Tamaño de elemento [m]	VMS [MPa]	Desplazamiento máx. [m]
1.4715	185.0	0.598
1.15	198.0	0.615
0.975	219.0	0.633
0.68	255.6	0.658
0.485	259.1	0.661
0.225	261.9	0.663
0.145	262.8	0.664
0.131	263.1	0.665
0.115	263.2	0.667



(a)



(b)

Figura 28: Convergencia de los resultados. Se puede apreciar que en ambas tablas, a partir de la 4 iteración se tiene la convergencia de los resultados obtenidos.

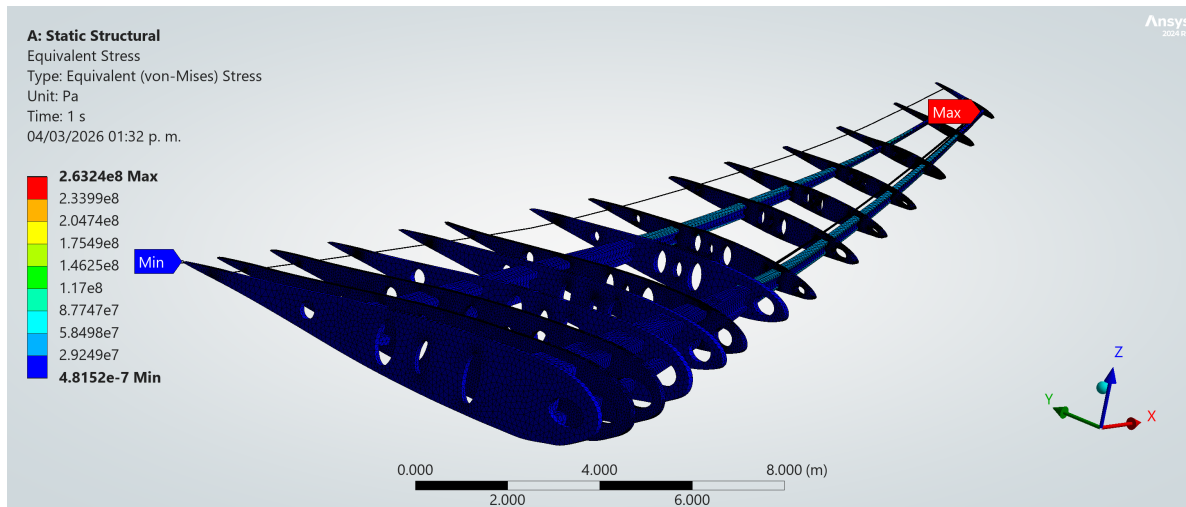
3.4 Sensibilidad de malla

3.4.1. Resultados del estático estructural

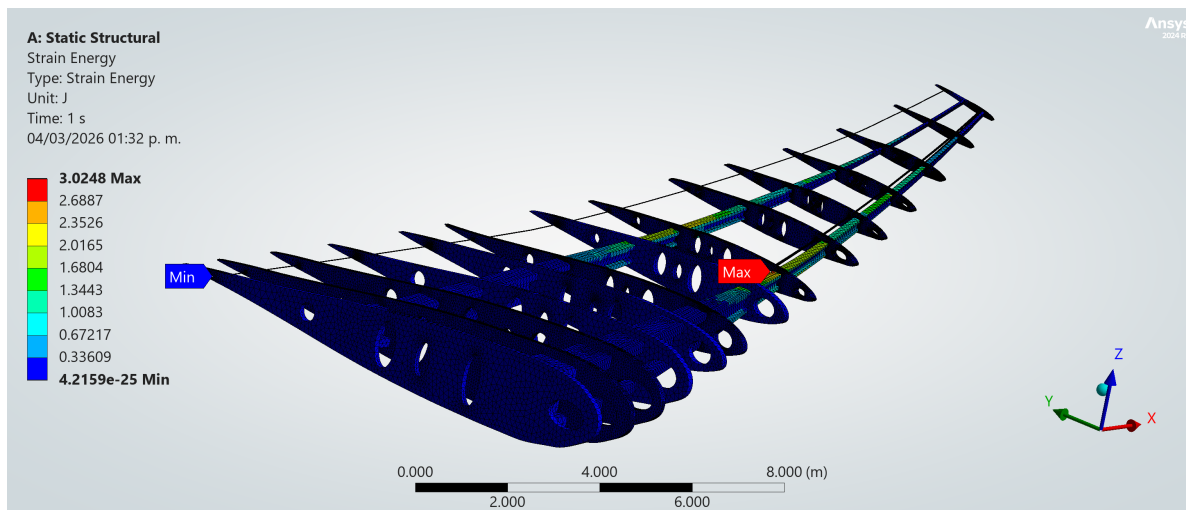
En la Figura 28 se aprecia el comportamiento convergente del esfuerzo máximo de Von Mises (*a*) y el desplazamiento máximo (*b*) respectivamente, de la estructura. Con lo anterior, se colocan los resultados más relevantes obtenidos del análisis estático. Dichos resultados son el esfuerzo de Von Mises y la energía de deformación de la estructura, pues dichos resultados son los que toma en cuenta el componente de la optimización topológica. En la Figura 29 se puede apreciar:

- a) Distribución de VMS en la estructura
- b) Energía de deformación de la estructura

3.4 Sensibilidad de malla



(a)



(b)

Figura 29: Resultados del análisis estático estructural. Los esfuerzos no sobrepasan el límite del material, debido a la sobredimensión, con el objetivo de reducir la mayor cantidad posible de material.

Obteniendo los resultados, al tener enlazadas las componentes del análisis estático estructural con el componente de optimización estructural, ANSYS® carga automáticamente los resultados del análisis por elementos finitos al solver del optimizador. El *set-up* de la optimización topológica se desarrolla en la siguiente sección.

3.5 Optimización topológica

3.5. Optimización topológica

El proceso de optimización estará enfocado principalmente en los acostillados de la estructura. De este modo, el solver no eliminará elementos pertenecientes a los largueros y larguerillos, ya que éstos constituyen los principales elementos resistentes del ala. Se busca reducir la masa de la estructura minimizando simultáneamente su compliance. Para ello, se establece una fracción máxima de material removido del 25 %, valor adoptado como un compromiso entre una reducción de masa significativa y la conservación de la rigidez estructural, evitando además configuraciones poco viables desde el punto de vista manufacturable. En la Figura 30 se muestra el set-up completo para el análisis.

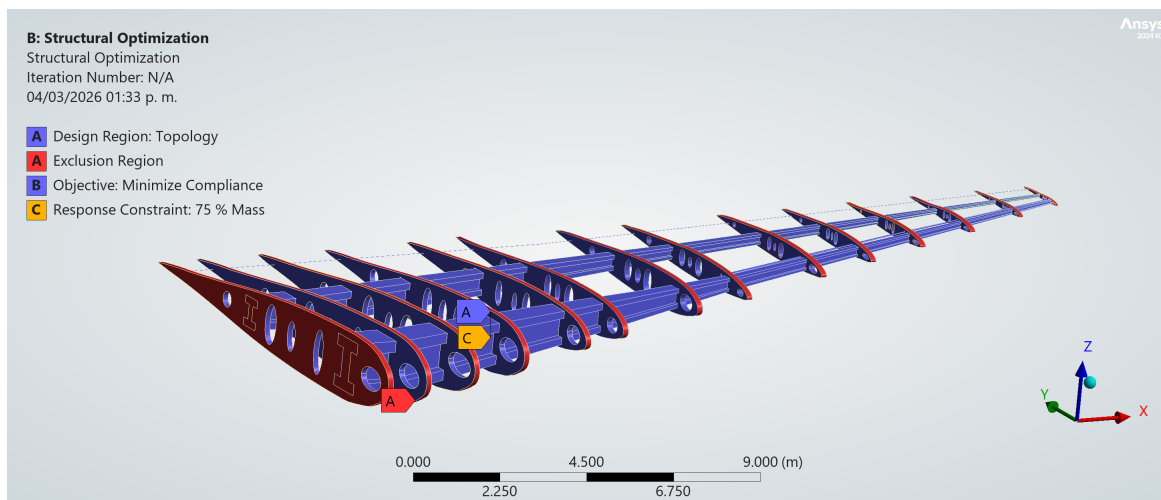


Figura 30: Condiciones iniciales de la optimización topológica

Una vez que en las iteraciones, se alcanzó la cota del porcentaje de material eliminado en conjunto con las funciones objetivo, concluyó de forma satisfactoria la optimización topológica de la estructura. La simulación requirió un tiempo considerable para ejecutarse; en la Figura 31 se muestran las gráficas de la convergencia de las funciones objetivo:

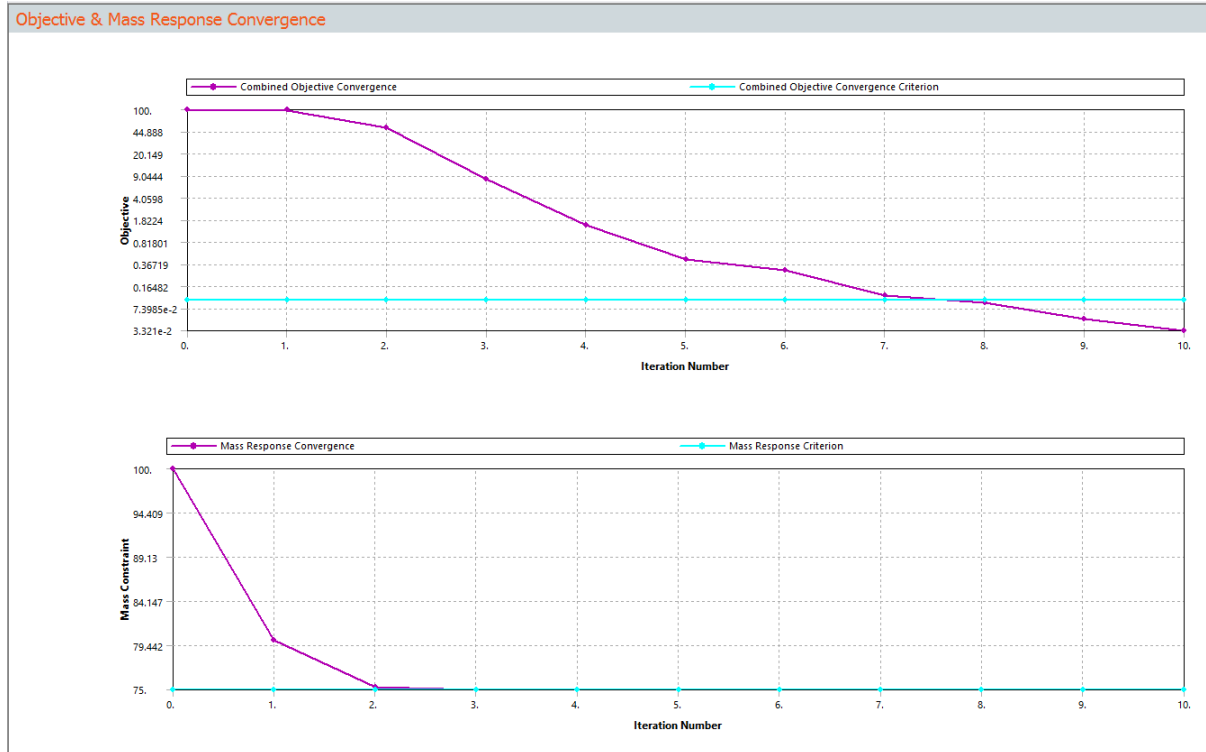


Figura 31: Convergencia de las funciones objetivo

Para la visualización de los resultados, en cuanto a la cantidad de material eliminado, se podía variar el valor en una escala de 0.1 (correspondiente a poco material eliminado) hasta 0.9 (mayor cantidad de elementos eliminados). Se eligió la distribución de 0.4, ya que presentaba la mejor configuración para la adecuación de los elementos, respetando las funciones objetivo y cumpliendo con las restricciones. En la figura 32 se muestra la estructura con la configuración antes mencionada:

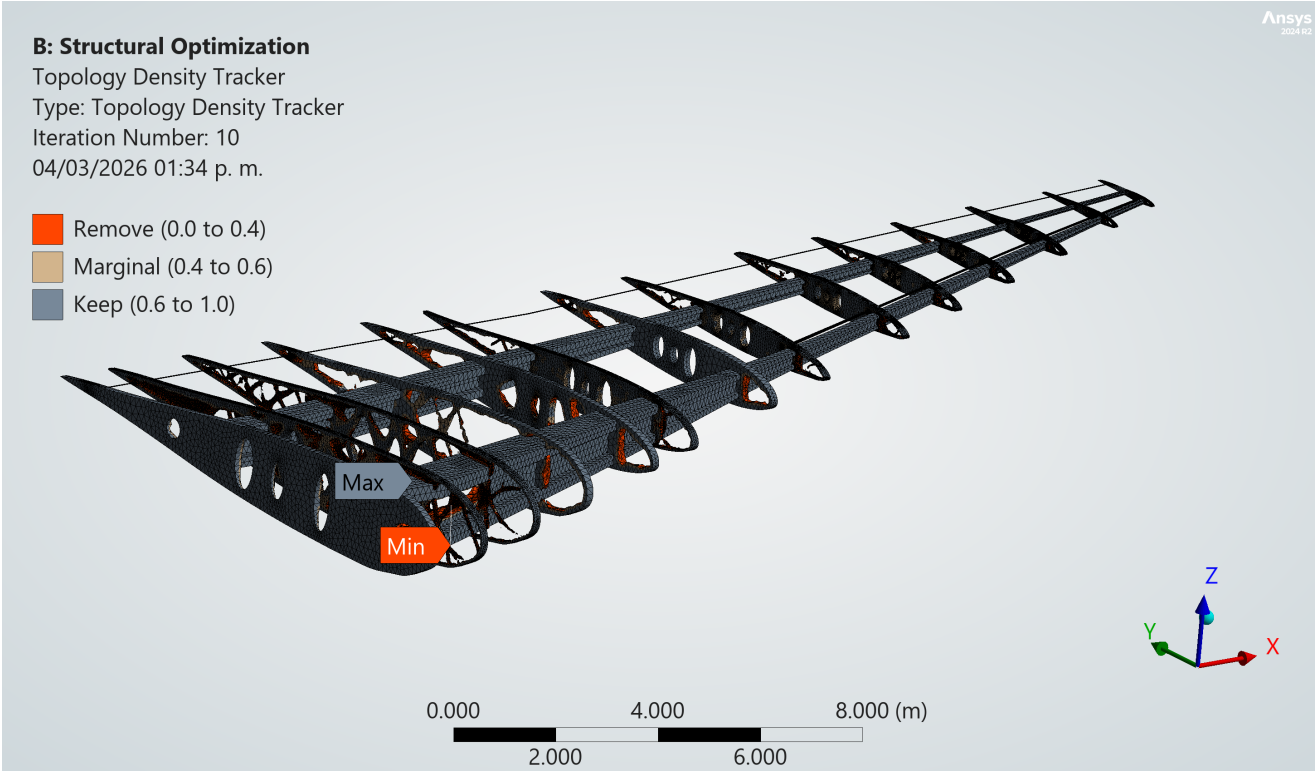


Figura 32: Estructura optimizada

El enfoque de este trabajo es la adecuación de los acostillados, de modo que en la siguiente figura se muestran los resultados. En la columna izquierda se aprecia la costilla obtenida de la optimización estructural mientras que en la columna derecha se muestran las correspondientes adecuaciones, tomando en cuenta las restricciones de manufactura con *web-plates*.

Costilla	Resultado del optimizador	Adecuación para manufactura
3		

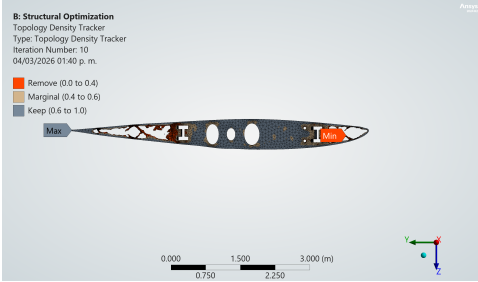
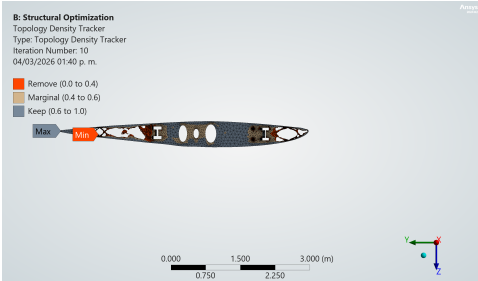
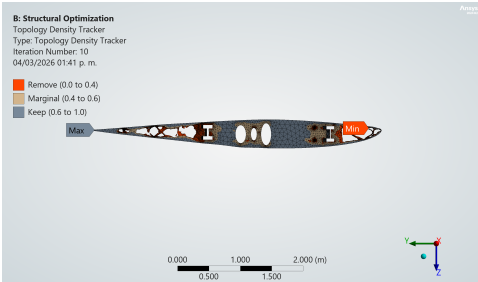
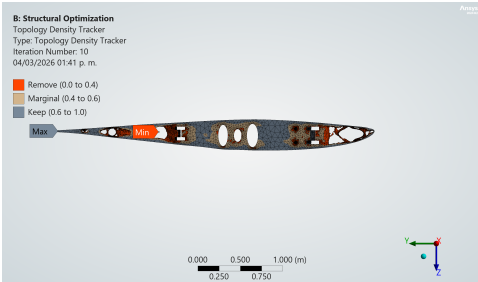
continúa en la siguiente página

Tabla 14 – *continuación*

Costilla	Resultado del optimizador	Adecuación para manufactura
4		
5		
6		
7		

continúa en la siguiente página

Tabla 14 – *continuación*

Costilla	Resultado del optimizador	Adecuación para manufactura
8		
9		
10		
11		

continúa en la siguiente página

Tabla 14 – *continuación*

Costilla	Resultado del optimizador	Adecuación para manufactura
12		
13		
14		

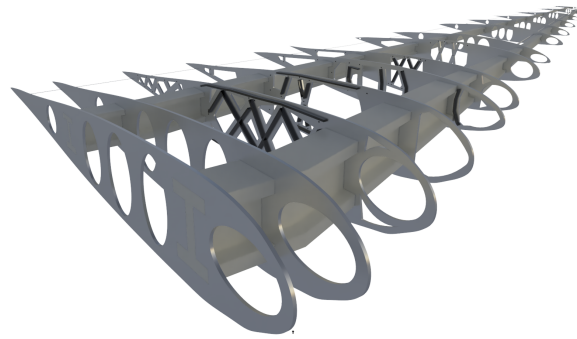
Tabla 14: Adecuaciones estructurales de los acostillados (costillas 3 a 14).

De la Tabla 14, a partir del octavo acostillado ya no hay adecuaciones que formen geometrías similares a los acostillados previos, de modo que se mantienen los óvalos, aumentando su tamaño. Dado que ya son acostillados con longitudes de cuerda mucho menores, es más factible manufacturarlos con esa forma geométrica.

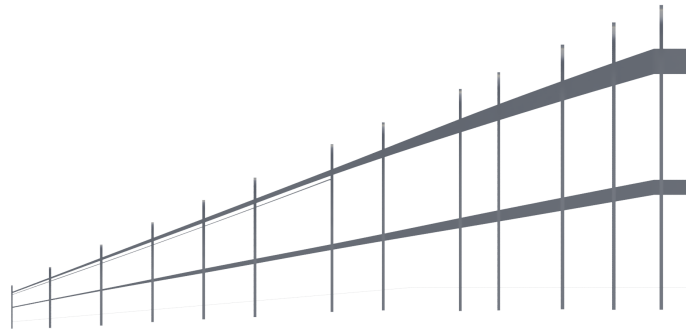
3.5 Optimización topológica

Las costillas 1 y 2 no presentan cambios, debido a que forman parte del empotramiento con el fuselaje. Las costillas 3,4,5,6 y 7 si presentan adecuaciones estructurales. Dichas costillas se manufacturan mediante web plates, donde los web-plates estarán unidos mediante remaches. La validación y dimensiones mínimas de los remaches se desarrollan en el siguiente capítulo.

Finalmente, en la Figura 33 se muestra la estructura alar optimizada, con todas las adecuaciones pertinentes. El material asignado se mantiene, de modo que esta estructura será sometida a una validación dinámica-estructural, desarrollada en el siguiente capítulo.



(a)



(b)

Figura 33: Estructura alar optimizada: (a) vista isométrica y (b) vista en planta. La configuración final integra los catorce acostillados optimizados con los largueros y larguerillos, conservando la geometría de ala recta con cuerda variable de la propuesta inicial.

4. Validación y resultados

Hasta el momento, se cuenta con la estructura de la semiala optimizada topológicamente. Es momento de realizar una validación dinámico-estructural para así determinar la seguridad de operación de la estructura y que es capaz de operar bajo las solicitaciones mecánicas para las que fue diseñada. Para ello, se hará un análisis modal para determinar los modos de vibración naturales del sistema, así como determinar el rango de las frecuencias naturales del mismo.

Posteriormente, se realiza un análisis de respuesta en frecuencia con el objetivo de modelar el comportamiento de la estructura debida a las cargas. Se ha optado por este análisis dinámico dado que, en vuelo de crucero suelen haber cargas por ráfagas súbitas, virajes bruscos o condiciones meteorológicas adversas que provoquen cambios en función del tiempo, de las cargas de sustentación a lo largo de la envergadura. Asimismo, es importante determinar que, en las condiciones de operación normales, las frecuencias estén lo más alejadas de los modos naturales del sistema.

Se continúa con la sección de las medidas mínimas para los remaches de los acostillados con web-plates. Una vez concluida la validación dinámica, se procede al cálculo de las velocidades pertinentes de la estructura y al desarrollo del diagrama V-n. Finalmente, se presenta el diseño final renderizado en conjunto con la piel de la semi-ala.

4.1. Análisis modal

Este análisis permite ver los modos naturales del sistema, determinando las frecuencias naturales del mismo y, por ende, estableciendo qué modos corresponden a flexión y cuales a torsión. Una vez que se ha establecido el rango de frecuencias naturales del sistema, es importante revisar las condiciones de operación de la estructura para evitar el fenómeno de resonancia. En la figura 34 se aprecia el set-up para el análisis modal.

4.1 Análisis modal

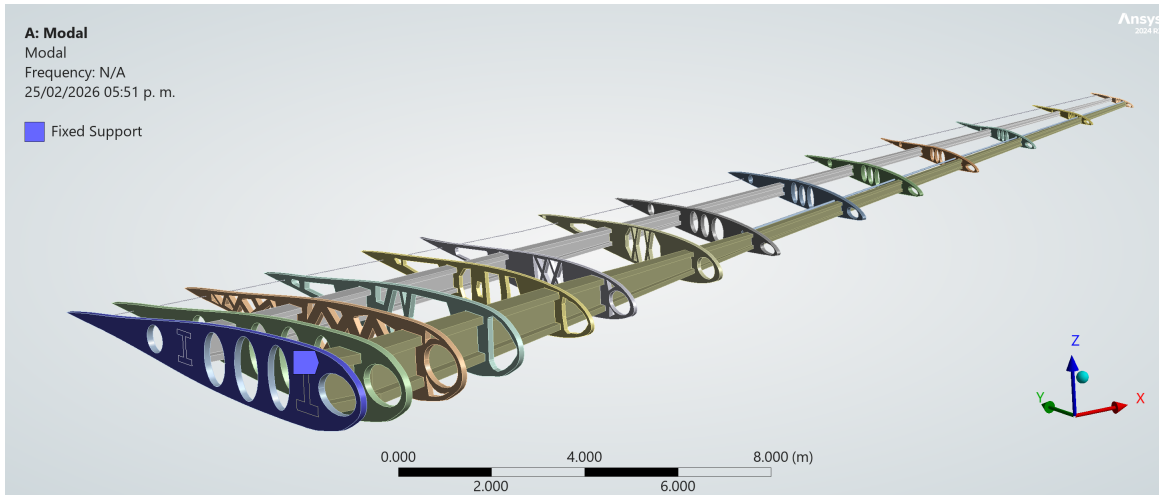


Figura 34: Condiciones iniciales para el análisis modal.

Los resultados arrojan un rango de frecuencias naturales de $[1.6627, 11.811][Hz]$. Este rango es consistente con el comportamiento dinámico esperado de una estructura alar en voladizo de elevada relación de aspecto, donde la baja rigidez flexional y la distribución de masa favorecen la aparición de modos fundamentales a frecuencias relativamente bajas. En particular, el primer modo, correspondiente a $1.6627[Hz]$, representa la condición dinámica más crítica, ya que constituye la frecuencia natural más baja del sistema y, por tanto, la que puede ser excitada con mayor facilidad por acciones externas. Con el fin de identificar la naturaleza física de cada modo de vibración, se emplea el porcentaje de participación de masa en cada dirección traslacional y rotacional.

La tabla 15 presenta los valores más altos del factor de participación con su correspondiente eje dominante, tratándose de un modo de flexión o con respecto a la rotación de un eje en caso de ser torsión.

Tabla 15: Factores de participación dominantes.

Modo	Frecuencia [Hz]	Eje dominante	Factor de participación
1	1.6627	Z	53.750
2	2.7822	X	24.854
3	3.4161	ROT Y	39.300
4	4.6720	ROT Y	49.700
5	5.2035	ROT Z	26.300
6	6.2491	ROT X	32.900
7	7.3076	ROT Y	41.131

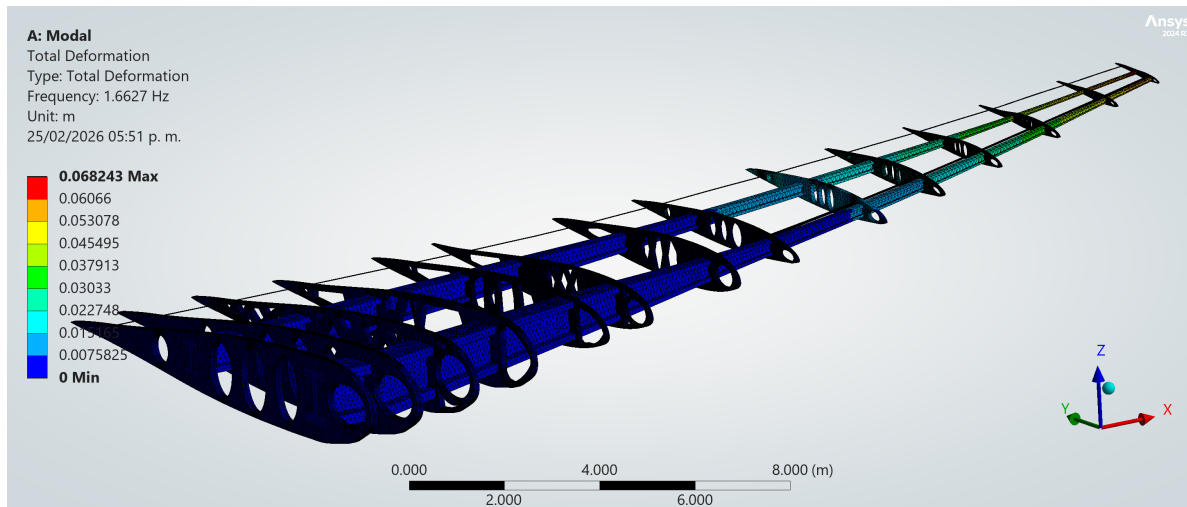
4.1 Análisis modal

4.1.1. Modos naturales de flexión

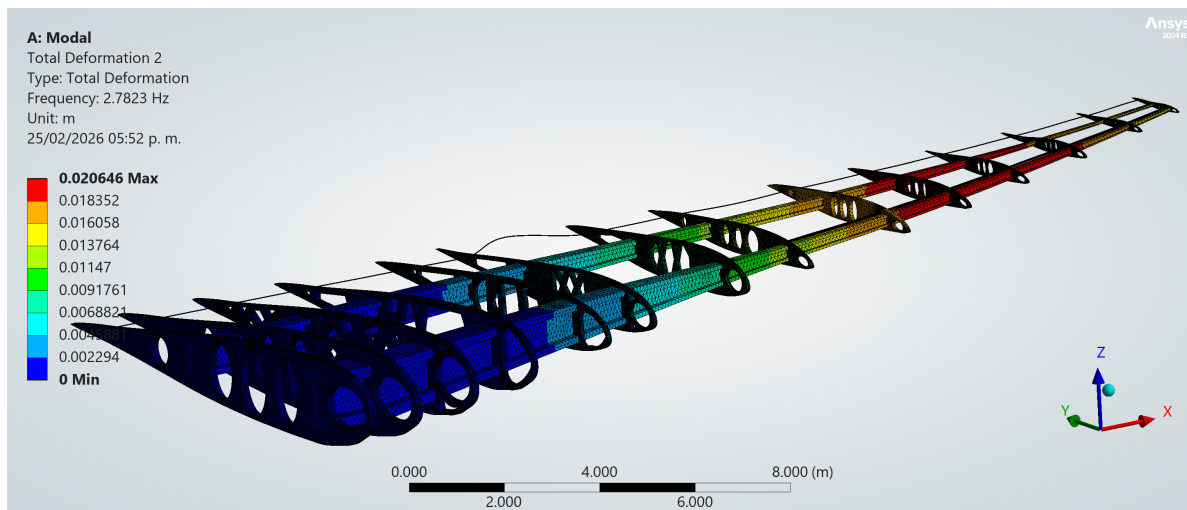
Análizando los datos mostrados en la Tabla 15 se tiene que el primer modo de vibración corresponde con el modo de flexión, ya que es el que mueve la mayor cantidad de masa en dirección del eje Z. En la Figura 35 a) se puede apreciar el comportamiento de dicho modo. Complementando, los modos 2 y 3 también corresponden a flexión, pero aquí el efecto es menos dominante en comparación con el primer modo.

De las tablas anteriores, se aprecia que los siguientes modos corresponden a torsión.

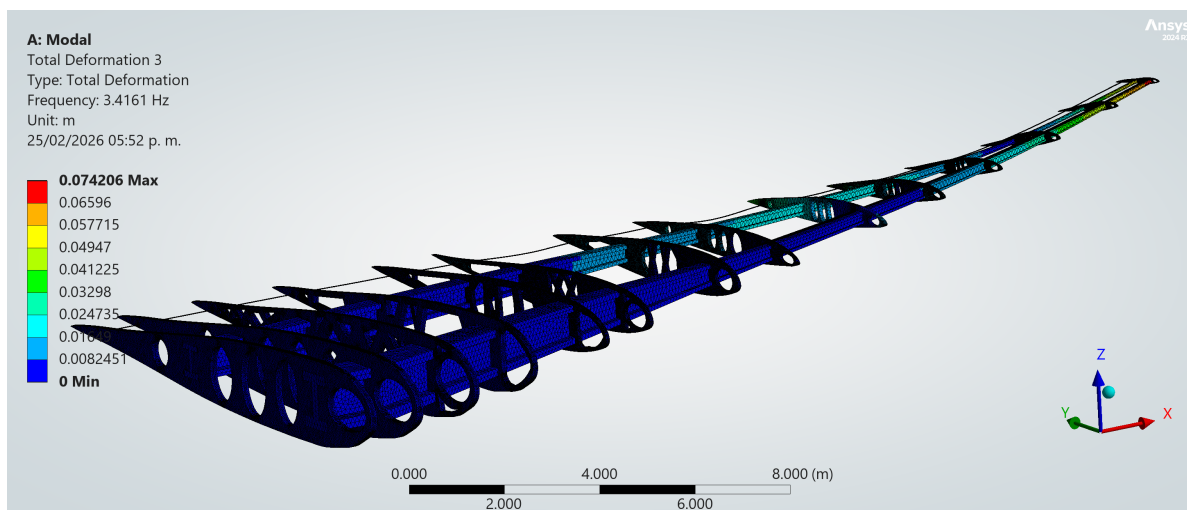
4.1 Análisis modal



(a) Modo 1



(b) Modo 2



(c) Modo 3

Figura 35: Primeros tres modos naturales de vibración de la estructura alar, todos correspondientes a flexión. Las imágenes muestran la deformación total, desde las zonas de menor amplitud en la raíz hasta las de mayor amplitud en la punta del ala.

4.1 Análisis modal

4.1.2. Modos naturales de torsión

Tal como se mencionó, se identifica que los modos 4 y 5 tienen el efecto de torsión muy dominante, señalando entonces que dichos modos corresponden a modos de torsión. En la figura 36 a) y b), se aprecian los resultados de dichos modos.

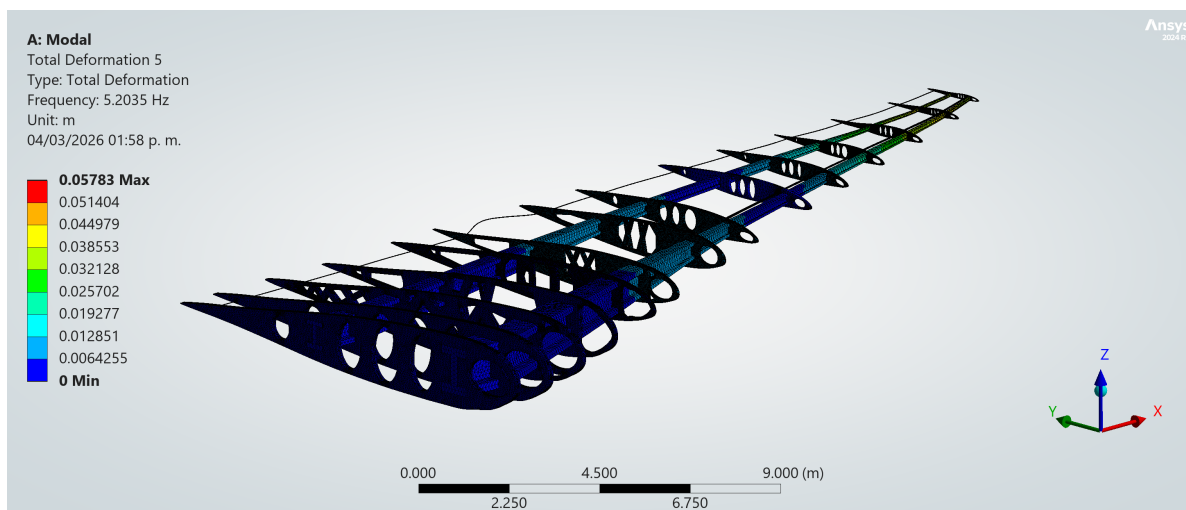
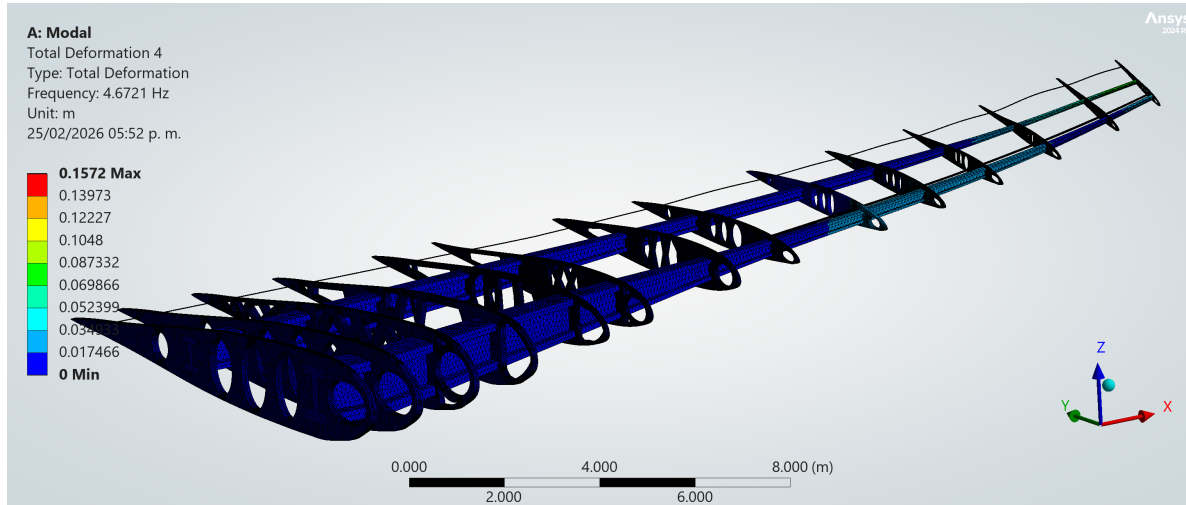


Figura 36: Modos naturales de torsión de la estructura alar, correspondientes al cuarto y quinto modo de vibración. A diferencia de los modos de flexión, en estos la deformada modal se caracteriza por el giro de las secciones transversales del ala alrededor de su eje longitudinal. La escala de color representa la deformación total, con mayor amplitud hacia la punta del ala.

Determinar la naturaleza de los modos, así como definir el rango de valores es muy importante, ya que permitirán robustecer el análisis de respuesta en frecuencia, de modo que la validación

4.2 Análisis de respuesta en frecuencia

dinámica de la estructura adquiere mayor rigor.

4.2. Análisis de respuesta en frecuencia

Para la validación dinámica, se optó por realizar un análisis de respuesta en frecuencia. Independientemente de que un análisis estático estructural permite validar la integridad del ala bajo una carga constante en un momento dado, no describe el comportamiento bajo cargas cíclicas.

Las fuerzas aerodinámicas que se aplican sobre las alas presentan una naturaleza transitoria y oscilatoria, esto debido a la interacción fluido-estructura en cargas adicionales a las de sustentación, que pueden ser: ráfagas de viento (gust loads), maniobras de viraje brusco o incluso turbulencia debida a condiciones meteorológicas adversas y súbitas. Esto lleva a generar excitaciones armónicas que se relacionan con fenómenos de resonancia e influyen en la vida útil de la estructura.

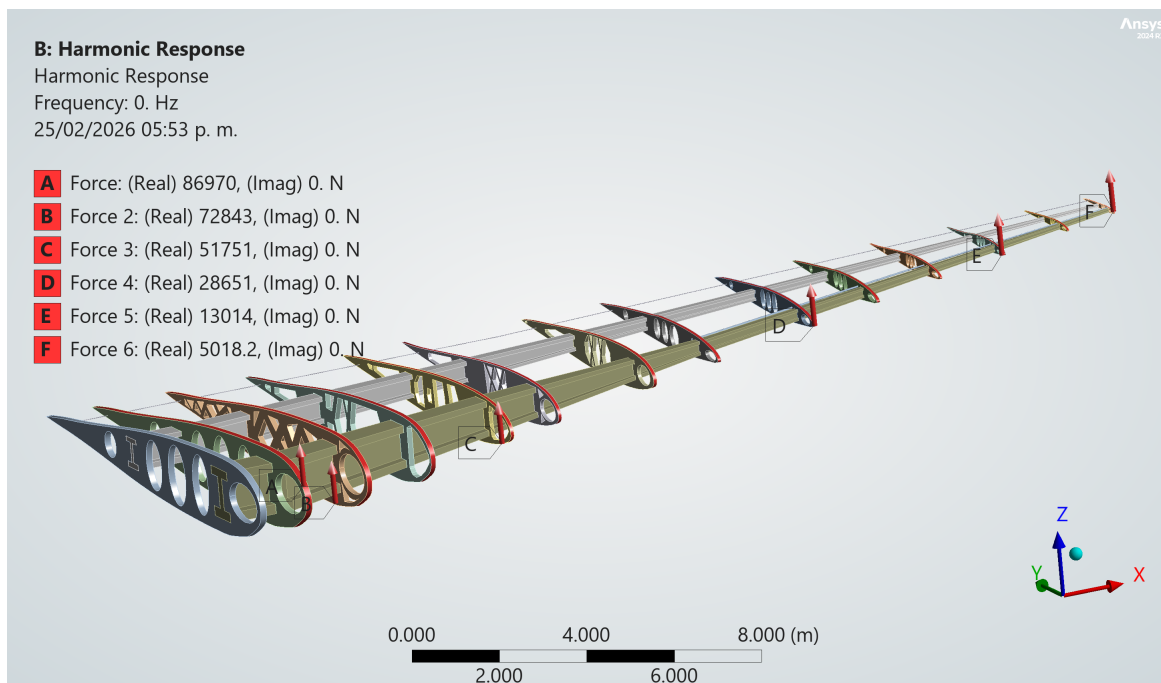


Figura 37: Condiciones iniciales para el análisis de respuesta en frecuencia

La relevancia del análisis modal fue definir el rango de frecuencias naturales, en consecuencia, con este análisis se busca validar que dicho rango de operación esté fuera de los modos naturales. En la figura 37 se muestra la configuración inicial para efectuar este análisis, de modo que cuenta con el soporte fijo y las magnitudes de la sustentación distribuida a lo largo de la envergadura. Se configuró un barrido de frecuencias de 0 hasta 45 [Hz].

Se adoptó un factor de amortiguamiento estructural del 2 %. Este valor es representativo de es-

4.2 Análisis de respuesta en frecuencia

estructuras alares metálicas: ensayos experimentales sobre alas de aluminio a escala completa reportan amortiguamientos estructurales del orden del 0.2 % a 0.6 % en su modo fundamental de flexión [41], mientras que para estructuras aeroespaciales en general los modos simétricos se sitúan alrededor del 2 % [42]. La elección del 2 % constituye, por tanto, una estimación conservadora ante la ausencia de datos experimentales específicos de la estructura analizada.

El objetivo del enfoque de este análisis es evaluar los siguientes aspectos:

- **Amplificación dinámica:** Identificar cómo es que las perturbaciones aerodinámicas con frecuencias dentro del rango natural del sistema, afectan la estructura y, en consecuencia, asegurar que las frecuencias asociadas a la operación normal en vuelo de crucero permanezcan suficientemente alejadas del primer modo natural, situado en 1.6627 Hz, evitando así la amplificación por resonancia..
- **Distribución de esfuerzos:** Observar cómo se comporta la distribución de esfuerzos en la estructura en los rangos de operación fuera de los modos naturales y determinar la seguridad operacional del ala.

En la figura 38 se tiene el diagrama de Bode de los resultados del análisis de respuesta en frecuencia, donde el a) corresponde a la amplitud de los esfuerzos sobre la estructura y b) corresponde a la amplitud de la deformación total. En cada inciso, la gráfica superior muestra la amplitud de la respuesta frente a la frecuencia de excitación y la inferior el ángulo de fase. Cabe precisar que el eje de amplitud corresponde a la magnitud de la carga de excitación aplicada en el barrido, a partir de la cual se obtienen, mediante el postprocesamiento, los esfuerzos y deformaciones reales de la estructura. El pico de mayor amplitud se presenta en 1.6627 Hz, correspondiente al primer modo de flexión, donde la respuesta se amplifica de forma máxima por resonancia; los picos subsiguientes corresponden a modos superiores, de menor amplificación. Los pequeños cuadros de zoom muestran el comportamiento exacto en las puntas más altas, donde hay mayor densidad.

Haciendo énfasis en el diagrama correspondiente a los esfuerzos, se aprecia que la respuesta presenta una amplificación dominante en la frecuencia del primer modo. Si bien la operación normal no alcanza dicha frecuencia, es necesario evaluar las solicitaciones excepcionales capaces de excitarla, lo cual se desarrolla a continuación.

4.2.1. Zona de resonancia crítica

El diagrama de respuesta en frecuencia muestra que la amplificación más pronunciada de la respuesta estructural se presenta en 1.6627 Hz, correspondiente al primer modo de flexión. Dado que las condiciones normales de operación no alcanzan dicha frecuencia, se evalúa si alguna sollicitación externa puede excitar la estructura en esa zona crítica; entre estas, las cargas por ráfaga

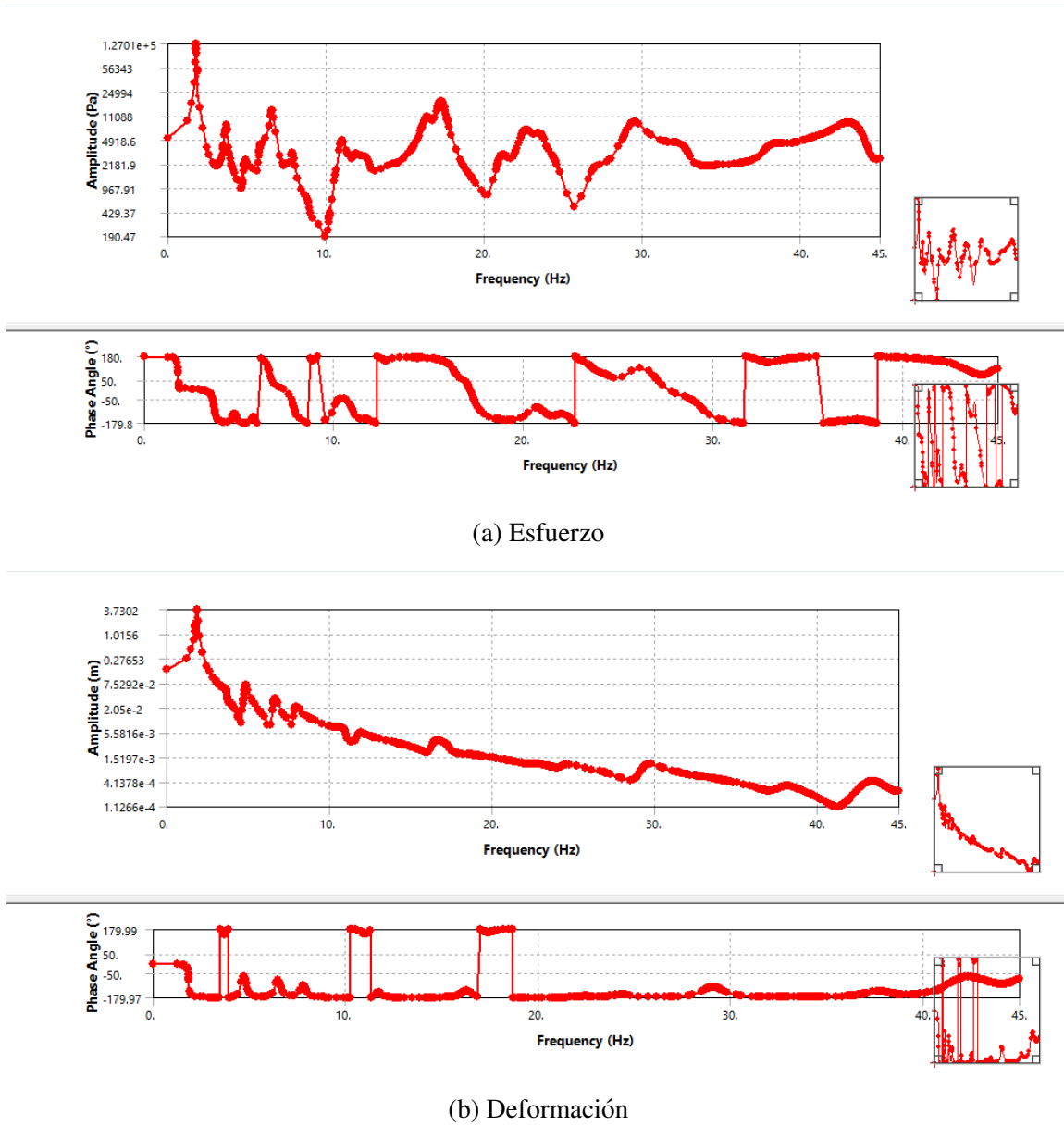


Figura 38: Diagramas de respuesta en frecuencia (Bode) de la estructura alar, en términos de (a) esfuerzo y (b) deformación.

4.2 Análisis de respuesta en frecuencia

constituyen la fuente más relevante, por lo que su análisis se realiza conforme a la normativa CS-25.341 [43], relativa a cargas por ráfaga y turbulencia.

La normativa establece un modelo de ráfaga discreta con perfil, cuya velocidad varía a lo largo de la penetración de la aeronave según:

$$U = \frac{U_{ds}}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi s}{H} \right) \right], \quad 0 \leq s \leq 2H, \quad (96)$$

donde s es la distancia penetrada, H el gradiente de ráfaga y U_{ds} la velocidad de ráfaga de diseño, definida como:

$$U_{ds} = U_{ref} F_g \left(\frac{H}{350} \right)^{1/6}, \quad (97)$$

con U_{ref} la velocidad de ráfaga de referencia en función de la altitud y F_g el factor de alivio del perfil de vuelo. La normativa prescribe barrer el gradiente H en el rango de 9 m a 107 m para identificar la respuesta crítica. Como el perfil posee una longitud de onda $\lambda = 2H$, cada ráfaga induce una excitación cuya frecuencia equivalente es:

$$f_{gust} = \frac{v_\infty}{\lambda} = \frac{v_\infty}{2H}. \quad (98)$$

Igualando esta frecuencia con la del primer modo, $f_1 = 1.6627$ Hz, y empleando la velocidad de operación $v_\infty = 249.64 \text{ m s}^{-1}$, se obtiene el gradiente de ráfaga que excita la estructura en resonancia:

$$H_{cr} = \frac{v_\infty}{2f_1} = \frac{249.64}{2(1.6627)} \approx 75 \text{ m}, \quad (99)$$

valor comprendido dentro del rango normativo. Se confirma así que existe una ráfaga capaz de excitar el primer modo de flexión en resonancia.¹

Determinada la ráfaga crítica, se evalúa su magnitud. Para $H_{cr} = 75$ m a la altitud de operación de 10 km, la velocidad de diseño resulta $U_{ds} = 7.76 \text{ m s}^{-1}$ (EAS), que induce un incremento de ángulo de ataque y de sustentación sobre el ala:

$$\Delta\alpha = \frac{U_{ds}}{v_\infty}, \quad \Delta C_L = C_{L\alpha} \Delta\alpha, \quad \Delta L = q_\infty S \Delta C_L. \quad (100)$$

Con la pendiente de sustentación promedio del ala $C_{L\alpha} = 6.212 \text{ rad}^{-1}$, la presión dinámica $q_\infty = 12884.7 \text{ Pa}$ y la superficie alar $S = 350 \text{ m}^2$, se obtiene $\Delta\alpha \approx 3.06^\circ$, $\Delta C_L \approx 0.332$ y un incremento de carga $\Delta L \approx 1498 \text{ kN}$. Esta carga, aunque considerable, es de magnitud inferior

¹La relación $f_{gust} = v_\infty/\lambda$ equivale a la expresión del desprendimiento de vórtices $f = St v/L$ con número de Strouhal unitario y longitud característica igual a la longitud de onda de la ráfaga. No se introduce un número de Strouhal del perfil porque el modelo de ráfaga discreta de la CS-25.341 parametriza la excitación mediante la longitud de gradiente H , y no mediante el desprendimiento de vórtices, fenómenos de naturaleza física distinta.

4.2 Análisis de respuesta en frecuencia

a la distribución de sustentación de crucero empleada en el análisis, ya que al distribuir esta carga en el ala, genera un esfuerzo de $4.28[kPa]$, siendo un fenómeno transitorio asociado al paso de la ráfaga.

Bajo la excitación resonante, el esfuerzo de Von Mises alcanza un valor de 279.4 MPa. Dado que el análisis de respuesta en frecuencia involucra sollicitaciones de carácter cíclico, el criterio de evaluación pertinente no es la cedencia, sino el límite de fatiga del material. Considerando los límites de resistencia a la fatiga de referencia para los aluminios empleados, del orden de 138 MPa para el Al 2024-T6 [10] y 159 MPa para el Al 7075-T6 [10], el factor de seguridad ante fatiga resulta:

$$FS_{fatiga} = \frac{S_e}{\sigma_{VM}} = \frac{S_e}{279.4 \text{ MPa}} \approx 0.49-0.57, \quad (101)$$

inferior a la unidad. No obstante, debe interpretarse en su contexto físico: la ráfaga es un evento transitorio de pocos segundos de duración, que genera únicamente algunos ciclos de oscilación amortiguada y no una excitación sostenida. El esfuerzo alcanzado permanece por debajo del límite de cedencia del material, por lo que el evento no compromete la integridad estructural inmediata ni la seguridad operacional. Sin embargo, la repetición de estos eventos a lo largo de la vida operativa del ala constituye una sollicitación que puede reducir su vida útil por fatiga. La cuantificación rigurosa de dicho efecto requiere un análisis de acumulación de daño —mediante conteo de ciclos y la regla de Miner—, que excede el alcance del presente trabajo y se plantea como una línea de trabajo futuro.

4.2.2. Comportamiento fuera de modos naturales

En esta sección, se pueden desglosar 2 zonas, la primera corresponde a partir de los 12 [Hz] hasta los 39 [Hz]. En el pico local, se aprecia aproximadamente a una frecuencia de 17 [Hz], tras hacer los cálculos teóricos comparando con los esfuerzos permisibles de los materiales, se tiene que el factor de seguridad es de 1.9, cumpliendo con el mínimo estipulado, en general, el promedio del factor de seguridad para esta zona, es de 3.8.

Finalmente, la tercera zona, se aprecia un repunte en el diagrama de Bode correspondiente al esfuerzo de Von Misses a partir de los 40 [Hz], de modo que se tiene una respuesta forzada de alta frecuencia. Recuperando los resultados del análisis modal, se observa que no hay presencia de una resonancia global en el sistema. Puede tratarse simplemente de algunas vibraciones locales que se están excitando.

El diagrama de Bode correspondiente a la deformación confirma los análisis anteriores. Esto es, en la zona de resonancia se concentran los mayores valores de deformación estructural a medida que la frecuencia aumenta. La magnitud de deformación disminuye a partir de los 40 [Hz], confirmando

4.3 Dimensionamiento de los remaches

entonces que dichas frecuencias no ponen en riesgo la integridad estructural.

4.3. Dimensionamiento de los remaches

Con el análisis anterior se presentó la visión completa de cómo se desempeña la estructura alar en condiciones normales de operación, teniendo en cuenta situaciones adversas. De modo que se centra la atención en la integridad estructural de los acostillados. Toda la energía de deformación y las cargas aplicadas se distribuyen en todos los elementos estructurales hasta llegar a los objetos de unión, que son los remaches.

Para el dimensionamiento mínimo de los remaches, se toma en cuenta un Aluminio 2024 T6 y un factor de seguridad crítico de 1.5 (ver anexo C para los cálculos); se tiene que el diámetro permitido es de 6 [mm]. En consecuencia, se propone un diámetro de 1 [cm] en la Tabla 20 se aprecia el análisis correspondiente a los remaches de cada costilla (Ver anexo C).

El arreglo de la cantidad de remaches cambió de acuerdo a la costilla, ya que tienen diseños diferentes, así como la magnitud de las cargas aplicadas, tal como se observa en la Tabla 16:

Tabla 16: Set-up del análisis de remaches.

Costilla	F_{rib} [N]	$n_{remaches}$	e [m]
3	86 724.1	20	0.013
4	72 674.0	14	0.013
5	72 674.0	14	0.013
6	72 674.0	14	0.013
7	51 719.0	12	0.013

4.4. Diseño final del ala

Finalmente, se ha llegado al cierre del proyecto, una vez que se ha validado la estructura anterior, se puede determinar las velocidades relevantes de la estructura y determinar el diagrama V-n. Dicho diagrama establece las velocidades operativas permitidas para la estructura alar, delimitadas por factores aerodinámicos y por factores estructurales, como se verá más adelante.

4.4.1. Diagrama V-n

El desarrollo de la envolvente de vuelo, establece los valores de velocidad permitidos dentro de la operación normal de la estructura alar y también define los límites operacionales del mismo. el

4.4 Diseño final del ala

cálculo se divide en varias secciones, de modo que se comienza con la obtención el factor de carga n máximo y mínimo de acuerdo con los lineamientos de la FAR 23:

$$\begin{aligned} n_{max} &= 2.1 + \frac{2400}{MTOW + 1000} = 2.1068 \\ n_{min} &= -0.4(n_{max}) = -0.8427 \end{aligned} \quad (102)$$

Una vez definido el valor del factor de carga, es posible determinar las distintas velocidades relevantes para construir el diagrama. Para la velocidad de pérdida:

$$\begin{aligned} v_s &= \sqrt{\frac{2W}{\rho SC_{L_{max}}}} \\ v_s &= \sqrt{\frac{2(2.44 \times 10^6 [N])}{1.225 [kg/m^3] (350 [m^2]) (1.03)}} \\ \therefore v_s &= 124.82 \left[\frac{m}{s} \right] \end{aligned} \quad (103)$$

Este valor representa la velocidad mínima de vuelo antes de la entrada en pérdida de la aeronave; el uso de dispositivos hipersustentadores permiten un vuelo seguro en este umbral de velocidades.

Para definir la velocidad de crucero de la aeronave, se emplea la relación propuesta en el lineamiento de la FAR:

$$\begin{aligned} v_c &= 2v_s \\ \therefore v_c &= 249.64 \left[\frac{m}{s} \right] \end{aligned} \quad (104)$$

La velocidad de maniobra se obtiene de la expresión:

$$\begin{aligned} v_m &= \sqrt{n_{max}} v_s \\ \therefore v_m &= 181.1739 \left[\frac{m}{s} \right] \end{aligned} \quad (105)$$

Finalmente, se calcula la velocidad nunca excedida de la aeronave, donde se emplea la relación de los lineamientos de la FAR:

$$v_D = 1.1v_c$$

$$v_D = 274.604 \left[\frac{m}{s} \right] \quad (106)$$

Con los valores obtenidos en las expresiones 104, 105, 106 y 103 se construye la envolvente de vuelo, empleando los valores de la expresión 102. En la figura 39 se aprecia dicho diagrama V-n, donde la región sombreada representa la envolvente de maniobra dentro de la cual la operación es estructuralmente segura. Las líneas de ráfaga, trazadas a las velocidades de crucero (V_C) y nunca excedida (V_D), permanecen dentro de los límites de factor de carga de maniobra, por lo que la condición de maniobra resulta dimensionante frente a la de ráfaga..

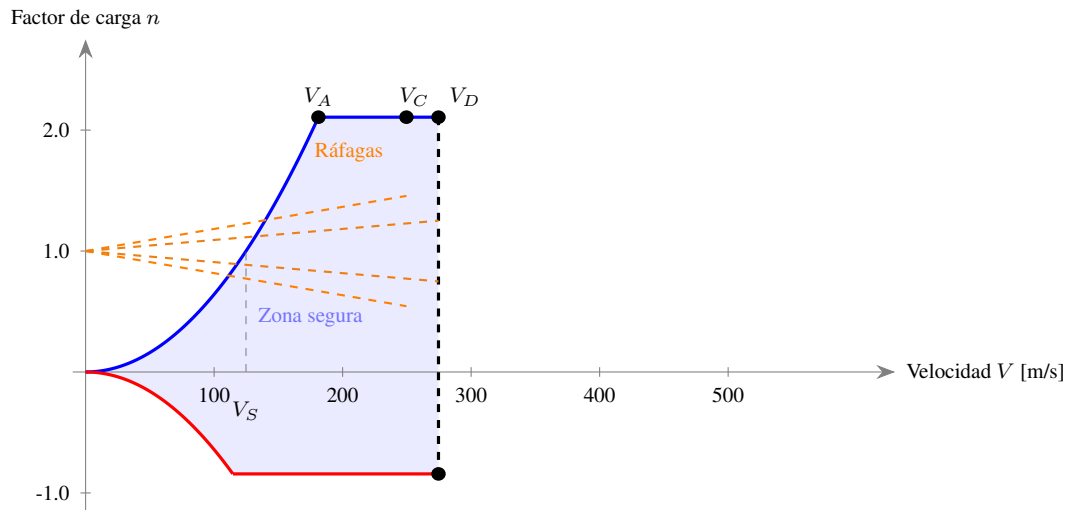


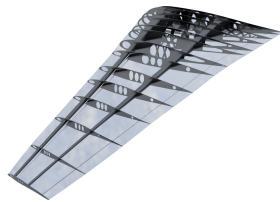
Figura 39: Envolvente de vuelo (diagrama V-n) de la semiala, con las líneas de ráfaga superpuestas según la normativa CS-25.341.

El diagrama V-n de la Figura 39 delimita la envolvente de vuelo de la semiala, es decir, el conjunto de combinaciones de velocidad y factor de carga dentro de las cuales la operación es estructuralmente segura. La región sombreada queda acotada por las curvas de pérdida que limitan el factor de carga alcanzable a baja velocidad y por los factores de carga máximo y mínimo de maniobra. Sobre esta envolvente se superpusieron las líneas de ráfaga, evaluadas a las velocidades de crucero y nunca excedida conforme a la normativa CS-25.341, con el fin de verificar que las solicitaciones inducidas por ráfaga no excedan los límites estructurales de maniobra. Como se observa, las líneas de ráfaga permanecen contenidas dentro de la envolvente, por lo que la condición de maniobra resulta dimensionante frente a la de ráfaga, confirmando que la estructura opera con margen suficiente ante ambos tipos de solicitación.

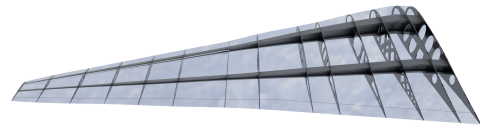
Con la envolvente de vuelo definida y verificada la respuesta dinámico-estructural del ala, queda

4.4 Diseño final del ala

caracterizado el modelo completo sometido a validación. La Figura 40 muestra la configuración final del ala, integrando la estructura interna optimizada con el revestimiento exterior, sobre la cual se aplicaron las cargas aerodinámicas y se realizaron los análisis presentados en este capítulo. De este modo, se concluye la validación dinámico-estructural de la semiala, confirmando que el diseño optimizado satisface los requerimientos de operación bajo las condiciones de carga consideradas. En el anexo A se encuentran los planos de componente de las costillas optimizadas en Web-plates y en el anexo B se aprecia el diagrama correspondiente a la estructura completa.



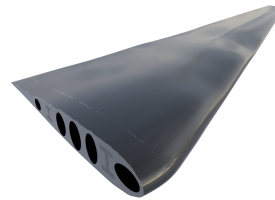
(a) Vista isométrica.



(b) Vista trasera del ala.



(c) Vista isométrica con piel.

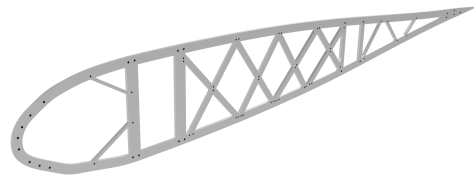


(d) Vista superior con piel

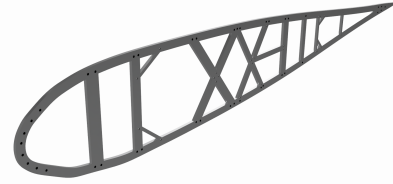
Figura 40: Vistas de la estructura alar completa. a) y b) muestran la estructura con la piel translúcida. c) y d) Muestran la estructura con el acabado material de la piel.

La Figura 41 muestra las costillas listas para ser manufacturadas. A diferencia de las mostradas en la Tabla 14 que se adaptaron en su topología, aquí se puede apreciar la unión con web plates y los correspondientes remaches.

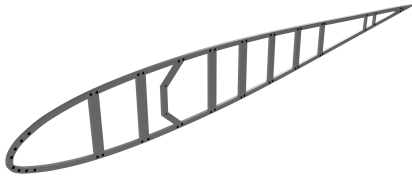
4.5 Discusión de resultados



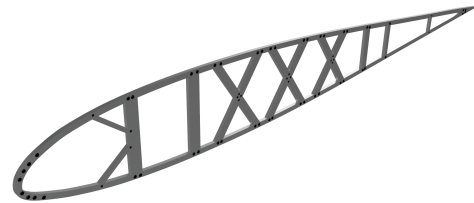
(a) Costilla 3.



(b) Costilla 4



(c) Costilla 5



(d) Costilla 6

Figura 41: Renderizados de las costillas optimizadas con web plates. Se aprecian los remaches que unirían las estructuras. Siendo modelos listos para manufacturar.

4.5. Discusión de resultados

Con el propósito de interpretar los resultados obtenidos desde una perspectiva ingenieril, en esta sección se analizan los principales hallazgos del trabajo y se contrastan con estudios reportados en la literatura. Debido a que la configuración estructural desarrollada corresponde a una semiala de transporte comercial con características geométricas y de diseño particulares, la comparación se realiza principalmente desde un enfoque cualitativo, evaluando la concordancia del comportamiento estructural y dinámico más que la coincidencia de valores absolutos. Asimismo, se discute el impacto de la optimización topológica en la reducción de masa de la estructura y su contribución al cumplimiento de los objetivos planteados.

4.5 Discusión de resultados

Tabla 17: Comparación cualitativa del comportamiento modal con estudios reportados en la literatura.

Referencia	Método	Primer modo	Observaciones
Presente trabajo	FEM	Flexión	Semiala de transporte comercial con estructura interna completa.
Frequency Analysis of Aircraft Wing Using FEM [44]	FEM (ANSYS)	Flexión	Ala modelada como viga en cantilever. El comportamiento modal coincide con el obtenido en el presente trabajo.
Comparative Study on Vibration Characteristics of Aircraft Wings Using Finite Element Method [45]	FEM (ANSYS)	Flexión	Se comparan diferentes materiales manteniendo la misma geometría. El primer modo corresponde a flexión.
Modal Analysis of a Blended Wing Body UAV [46]	FEM (COMSOL)	Flexión	Aunque corresponde a un UAV tipo Blended Wing Body, el modo fundamental continúa siendo de flexión.

Como se observa en la Tabla 17, los estudios consultados coinciden en identificar un primer modo de vibración dominado por flexión, seguido de modos asociados a flexión lateral y torsión. Aunque las frecuencias naturales difieren entre investigaciones debido a las diferencias en geometría, dimensiones, materiales y condiciones de frontera, la secuencia modal obtenida en el presente trabajo resulta consistente con el comportamiento esperado de una estructura alar en voladizo. Esta concordancia aporta confianza en la representatividad física del modelo numérico desarrollado y respalda la validez del análisis modal realizado.

Además de validar el comportamiento dinámico de la estructura, otro de los objetivos principales del presente trabajo consistió en incrementar la eficiencia estructural de la semiala mediante técnicas de optimización. Para ello, se desarrolló un proceso de optimización en dos niveles: en primera instancia se aplicó optimización topológica a los acostillados y, posteriormente, se integraron modificaciones geométricas en los restantes elementos estructurales para evaluar el impacto sobre la masa total de la semiala.

La Tabla 18 presenta la comparación de la masa de cada acostillado antes y después de la optimización topológica, así como el porcentaje de reducción obtenido en cada uno de ellos. En conjunto, la masa total de los 14 acostillados disminuyó un 17.62 %, resultado que evidencia la existencia de

4.5 Discusión de resultados

regiones con baja contribución estructural susceptibles de eliminarse sin comprometer la función resistente de estos elementos. Asimismo, el algoritmo convergió a una solución inferior al límite máximo de reducción de masa establecido durante la optimización, indicando que el equilibrio entre rigidez y ligereza se alcanzó antes de agotar el volumen de diseño disponible.

Tabla 18: Comparación de la masa estructural de los acostillados antes y después de la optimización.

Costilla	Masa inicial [kg]	Masa optimizada [kg]	Reducción [%]
1	1469.40	1207.80	17.80
2	1469.30	1207.60	17.81
3	1023.20	906.54	11.40
4	875.10	638.56	27.03
5	626.86	490.10	21.82
6	505.96	460.96	8.89
7	402.62	346.95	13.83
8	254.82	171.24	32.80
9	139.87	128.11	8.41
10	95.57	86.88	9.09
11	60.34	54.50	9.68
12	36.71	34.31	6.54
13	17.23	16.00	7.14
14	12.82	8.98	29.95
Total	6989.80	5758.53	17.62

No obstante, la reducción obtenida en los acostillados representa únicamente una parte del potencial de aligeramiento de la estructura. Una vez incorporadas las modificaciones geométricas derivadas del dimensionamiento de largueros, larguerillos y revestimiento, se evaluó nuevamente la masa de la semiala completa. Los resultados se presentan en la Tabla 19.

Tabla 19: Peso estructural de las geometrías.

Geometría	Masa [kg]
Original	33 520
Optimizada	22 259
Porcentaje de reducción	34 %

La optimización integral permitió alcanzar una reducción de masa estructural global del 34 % respecto a la configuración inicial. Este resultado demuestra que la combinación de estrategias de optimización topológica y optimización de forma genera un beneficio significativamente mayor que la aplicación aislada de cualquiera de ellas. Desde el punto de vista del diseño aeronáutico, una disminución de esta magnitud representa un incremento importante en la eficiencia estructural,

4.5 Discusión de resultados

ya que una menor masa se traduce potencialmente en una mayor carga útil, una reducción en el consumo de combustible o un incremento en la autonomía de la aeronave, siempre que se mantengan los requisitos de resistencia, rigidez y seguridad establecidos durante el proceso de diseño.

5. Conclusiones

El objetivo principal de esta investigación consistió en desarrollar y optimizar estructuralmente una semiala de transporte comercial mediante herramientas de análisis aerodinámico, diseño estructural, análisis por elemento finito y optimización topológica. Los resultados obtenidos demuestran que dicho objetivo fue alcanzado satisfactoriamente, obteniéndose una estructura capaz de satisfacer los requerimientos aerodinámicos, estructurales y de manufactura establecidos desde el planteamiento del problema.

La optimización topológica permitió reducir la masa de los catorce acostillados en un 17.62 %, mientras que la optimización integral de la semiala alcanzó una reducción global cercana al 34 %, cumpliendo simultáneamente con la restricción de masa máxima establecida para la estructura. Asimismo, el diseño obtenido satisface los criterios de resistencia, rigidez y factor de seguridad, conservando materiales convencionales de aluminio y respetando las restricciones de manufactura consideradas durante el proceso de diseño.

Los análisis aerodinámicos y estructurales desarrollados permitieron validar el desempeño de la metodología propuesta. El modelo aerodinámico reprodujo el comportamiento esperado de una superficie sustentadora finita, mientras que los análisis estáticos y dinámicos confirmaron que la estructura diseñada mantiene un comportamiento consistente con las condiciones operativas previstas, satisfaciendo los criterios de resistencia y estabilidad establecidos para el diseño conceptual de la semiala.

En conjunto, los resultados obtenidos demuestran que la integración de herramientas de aerodinámica, diseño estructural, análisis por elemento finito y optimización topológica constituye una metodología robusta para el desarrollo conceptual de estructuras aeronáuticas. El procedimiento propuesto permitió obtener una configuración estructural eficiente desde el punto de vista mecánico y de manufactura, proporcionando una base sólida para futuras etapas de diseño y desarrollo de alas de transporte comercial.

5.1. Contribuciones del trabajo

El presente trabajo aporta una metodología integral para el diseño estructural de alas, basada en la interacción entre la distribución de sustentación, la optimización estructural y la validación dinámica, permitiendo obtener una solución eficiente y físicamente consistente dentro de la envolvente de operación.

La solución de Phillips se adaptó para determinar la distribución de sustentación de un ala recta con cuerda variable, empleando cuatro perfiles alares distintos a lo largo de la envergadura. Es-

5.2 Trabajo futuro y extensiones recomendadas

ta adaptación facilita el estudio de alas con dichas características, frente al enfoque habitual en trabajos de nivel licenciatura, donde el modelo suele simplificarse a un ala recta sin variación de perfil.

Adicionalmente, el trabajo incorpora un análisis dinámico mediante la identificación de los modos naturales de vibración y el estudio de la respuesta en frecuencia, lo que permitió evaluar la susceptibilidad de la estructura a fenómenos de resonancia.

5.2. Trabajo futuro y extensiones recomendadas

A partir del trabajo desarrollado, se identifican las siguientes líneas de investigación que permitirían ampliar y profundizar los resultados obtenidos:

- Desarrollar un modelo que describa la distribución de sustentación en una configuración de ala en flecha, y correlacionar la curva resultante con un estudio de dinámica de fluidos computacional (CFD) que permita validar el modelo analítico.
- Incorporar los requerimientos de carácter aeroelástico directamente en el proceso de optimización topológica, de modo que la distribución óptima de material considere desde su formulación la respuesta dinámica y los fenómenos de acoplamiento fluido-estructura.
- Extender la metodología a la incorporación de materiales compuestos en el diseño del ala, realizando los ajustes necesarios en el proceso de optimización para considerar el comportamiento anisótropo y la naturaleza laminada de dichos materiales.
- Realizar un análisis de vida a fatiga de la estructura ante cargas cíclicas y eventos de ráfaga, mediante técnicas de conteo de ciclos y la regla de acumulación de daño de Miner, a fin de cuantificar el efecto de las condiciones de resonancia identificadas sobre la vida útil del ala.

6. Referencias

- [1] International Air Transport Association (IATA), *La recuperación de los viajes aéreos reconstruye la rentabilidad de las aerolíneas: una industria resistente reduce las pérdidas a 9.700 millones USD*, <https://www.iata.org/contentassets/d5f26f06998242b6b58e292022-06-20-02-sp.pdf>, Accessed: March 2026, jun. de 2022.
- [2] Airspace Magazine, «Analysis of Widebody Aircraft Utilization Trends,» *Airspace*, 2025, Accessed: March 2026. dirección: <https://airspacetimes.com>.
- [3] Airbus, *Global Market Forecast 2025-2044*, <https://www.airbus.com/en/products-services/commercial-aircraft/market/global-market-forecast>, Accessed: April 2026, 2025.
- [4] Boeing, *Commercial Market Outlook 2025-2044*, <https://www.boeing.com/commercial/market/commercial-market-outlook/>, Accessed: April 2026, 2025.
- [5] Reuters, «Supply of widebody aircraft remains constrained,» *Reuters*, 2025. dirección: <https://www.reuters.com/business/aerospace-defense/>.
- [6] International Air Transport Association, *Air Passenger Forecasts*, <https://www.iata.org/en/publications/store/air-passenger-forecast/>, Accessed: April 2026, 2024.
- [7] Embry-Riddle Aeronautical University. «Wing Shapes and Nomenclature.» Accessed: Aug 2025. dirección: <https://eaglepubs.erau.edu/introductiontoaerospaceflightvehicle/chapter/wing-shapes-and-nomenclature/>.
- [8] F. Franchini, *Introducción a la Ingeniería Aeroespacial*. Madrid, España: Pearson Educación, 2012.
- [9] NASA Glenn Research Center. «Dynamics of Flight.» Accessed: June 2025. dirección: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/UEET/StudentSite/dynamicsofflight.html>.
- [10] L. Zhu, N. Li y P. R. N. Childs, «Light-weighting in Aerospace Component and System Design,» *Propulsion and Power Research*, vol. 7, n.º 2, págs. 103-119, 2018. DOI: 10.1016/j.jprr.2018.04.001.
- [11] D. P. Raymer, *Aircraft Design: A Conceptual Approach*, 6.^a ed. American Institute of Aeronautics y Astronautics (AIAA), 2018.
- [12] J. D. Anderson, *Introduction to Flight*, 8.^a ed. McGraw-Hill, 2016.
- [13] J. Roskam, *Airplane Design Part I: Preliminary Sizing of Airplanes*. DARcorporation, 2003.

6 Referencias

- [14] E. Torenbeek, *Advanced Aircraft Design: Conceptual Design, Technology and Optimization of Subsonic Civil Airplanes*. Wiley, 2013.
- [15] International Civil Aviation Organization, «Environmental Report 2022,» ICAO, Montreal, inf. téc., 2022.
- [16] X. Zhang, Y. Chen y J. Hu, «Recent Advances in the Development of Aerospace Materials,» *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 97, págs. 22-34, 2018. DOI: 10.1016/j.paerosci.2018.01.001.
- [17] T. Dursun y C. Soutis, «Recent Developments in Advanced Aircraft Aluminium Alloys,» *Materials and Design*, vol. 56, págs. 862-871, 2014.
- [18] Boeing. «The 787 Dreamliner by Design.» Accessed: June 2025, visitado 22 de feb. de 2026. dirección: <https://www.boeing.com/commercial/787/by-design/>.
- [19] M. F. Ashby, *Materials Selection in Mechanical Design*, 5.^a ed. Butterworth-Heinemann, 2016.
- [20] Engineering LibreTexts. «Structural Elements and Functions of the Wing.» Accessed: Sept 2025, visitado 2026. dirección: [https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Aerospace_Engineering/Fundamentals_of_Aerospace_Engineering_\(Arnedo\)/04:_Aircraft_structures/4.04:_Structural_components_of_an_aircraft/4.4.02:_Structural_elements_and_functions_of_the_wing](https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Aerospace_Engineering/Fundamentals_of_Aerospace_Engineering_(Arnedo)/04:_Aircraft_structures/4.04:_Structural_components_of_an_aircraft/4.4.02:_Structural_elements_and_functions_of_the_wing).
- [21] Manual de Vuelo. «Manual de Vuelo.» [Online]. Accessed: May 2025. dirección: <https://manualvuelo.es/index.html>.
- [22] Abbott Aerospace UK Ltd. «Main Wing Box.» Accessed: Aug 2025, visitado 2026. dirección: <https://www.abbottaerospace.com/aa-sb-001/22-aircraft-specific-design-features-and-design-methods/22-16-57-wings/22-16-2-main-wing-box/>.
- [23] Federal Aviation Administration, *Aviation Maintenance Technician Handbook–Airframe, Volume 1* (FAA-H-8083-31). Washington, DC: Federal Aviation Administration, 2012.
- [24] M. P. Bendsøe y O. Sigmund, *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. Berlin: Springer, 2004.
- [25] R. T. Haftka y Z. Gürdal, *Elements of Structural Optimization*. Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [26] T. H. G. Megson, *Aircraft Structures for Engineering Students*, 6th. Butterworth-Heinemann, 2017.
- [27] Y. M. Xie y G. P. Steven, *Evolutionary Structural Optimization*. Springer, 1997.

6 Referencias

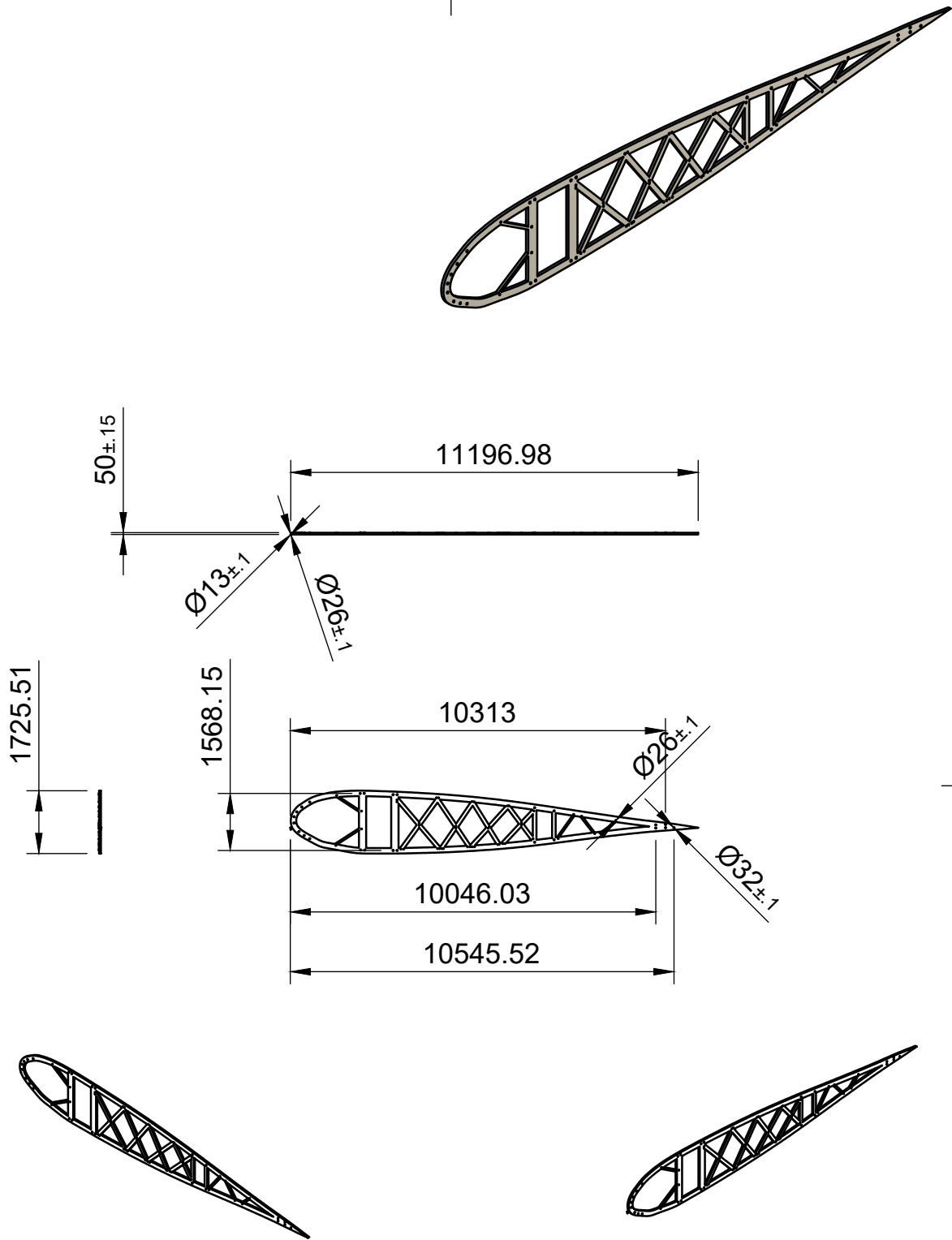
- [28] A. I. Carmona, *Aerodinámica y actuaciones del avión*, 13.^a ed. Paraninfo, 2015.
- [29] W. F. Phillips, «Analytical Decomposition of Wing Roll and Flapping Using Lifting-Line Theory,» en *Proceedings of the AIAA Aerospace Sciences Meeting*, American Institute of Aeronautics y Astronautics, 2013.
- [30] M. H. Sadd, *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*, 4.^a ed. London: Academic Press, Elsevier, 2021, ISBN: 978-0-12-815987-3.
- [31] X. Oliver Olivella y C. Agelet de Saracibar Bosch, *Mecánica de Medios Continuos para Ingenieros*, 2.^a ed. Barcelona: Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, 2002, ISBN: 978-84-8301-582-9.
- [32] S. P. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3.^a ed. New York: McGraw-Hill, 1970, ISBN: 978-0-07-064720-8.
- [33] J. N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, 4.^a ed. New York: McGraw-Hill Education, 2019, ISBN: 978-1-25-986191-8.
- [34] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor y J. Z. Zhu, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, 7th. Butterworth-Heinemann, 2013.
- [35] Lissys Ltd., *Standard Atmosphere Calculator*, <https://www.lissys.uk/sample/index.html>, [Online]. Accessed: Sept. 2025, 2025.
- [36] The Boeing Company, *777X By Design*, <https://www.boeing.com/commercial/777x/by-design>, [Online]. Accessed: Aug. 2025, 2025.
- [37] GE Aerospace, *GE9X Commercial Aircraft Engine*, <https://www.geaerospace.com/commercial/aircraft-engines/ge9x>, [Online]. Accessed: July. 2025, 2025.
- [38] Federal Aviation Administration, *14 CFR §25.303 – Factor of Safety*, Electronic Code of Federal Regulations, [Online]. Accessed: March 2025, 2025. dirección: <https://www.ecfr.gov/current/title-14/chapter-I/subchapter-C/part-25/subpart-C/section-25.303>.
- [39] A. Kretoy y D. Tiniakov, «Evaluation of the Mass and Aerodynamic Efficiency of a High Aspect Ratio Wing for Prospective Passenger Aircraft,» *Aerospace*, vol. 9, n.º 9, pág. 497, 2022. DOI: 10.3390/aerospace9090497.
- [40] AirfoilTools, *BACXXX Airfoil*, <https://airfoiltools.com/airfoil/details?airfoil=bacxxx>, [Online]. Accessed: Sept 2025, 2025.

6 Referencias

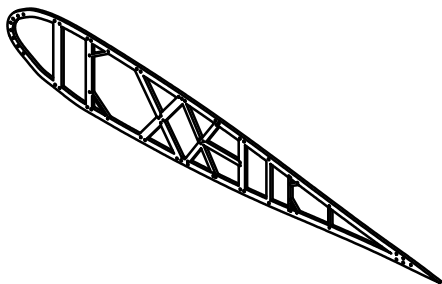
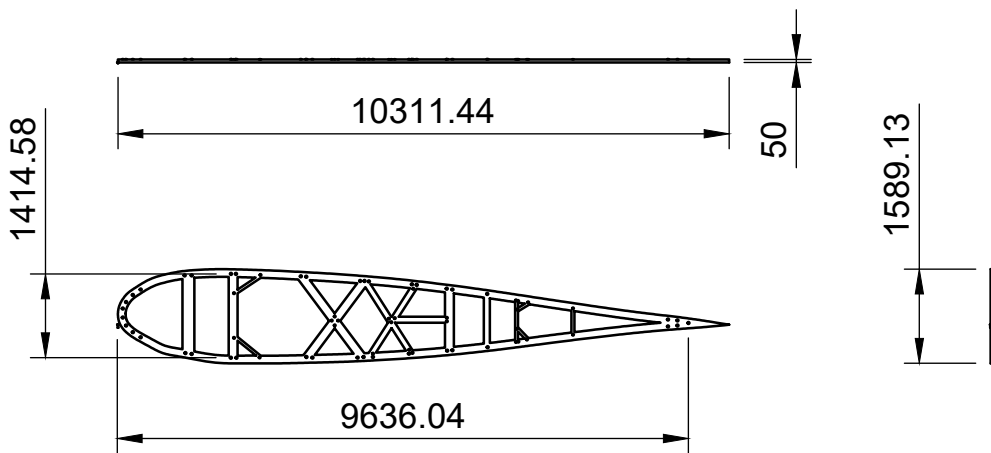
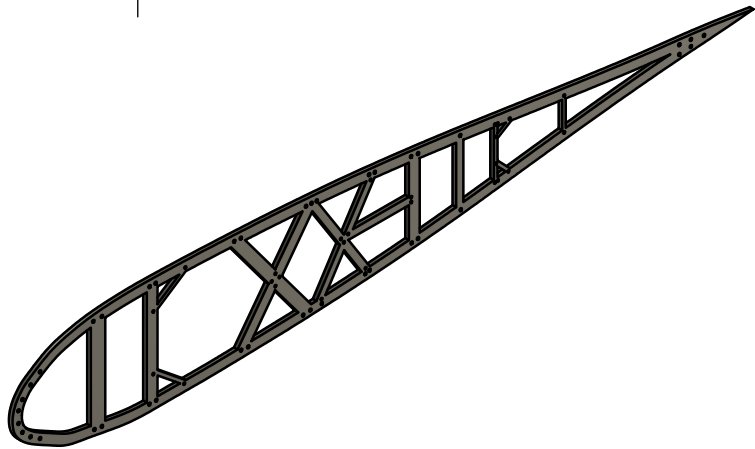
- [41] National Advisory Committee for Aeronautics, «Investigation of the Structural Damping of a Full-Scale Airplane Wing,» NACA (NASA Technical Reports Server), Technical Note, 1950, Frecuencia fundamental de flexión de 1.69 Hz; amortiguamiento estructural de 0.2 a 0.6 %.
- [42] J. R. Wright y J. E. Cooper, *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads* (Aerospace Series), 2.^a ed. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2015, ISBN: 978-1-118-48801-0.
- [43] European Union Aviation Safety Agency, «Certification Specifications and Acceptable Means of Compliance for Large Aeroplanes CS-25,» EASA, Certification Specification CS-25, Amendment 28, 2024, Subpart C, paragraph 25.341, Gust and turbulence loads.
- [44] B. G. Ramesh, K. V. S. Prasad y S. M. Kumar, «Frequency Analysis of Aircraft Wing Using FEM,» *Materials Today: Proceedings*, vol. 27, págs. 2159-2165, 2020. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.03.792.
- [45] K. V. S. Prasad, B. G. Ramesh y S. M. Kumar, «Comparative Study on Vibration Characteristics of Aircraft Wings Using Finite Element Method,» *Materials Today: Proceedings*, vol. 27, págs. 2166-2172, 2020.
- [46] D. Haryanto, A. Suryanto y A. Fauzi, «Modal Analysis of a Blended Wing Body UAV,» *Journal of Mechanical Engineering and Technology*, vol. 15, n.º 2, págs. 89-97, 2023.

7. Anexos

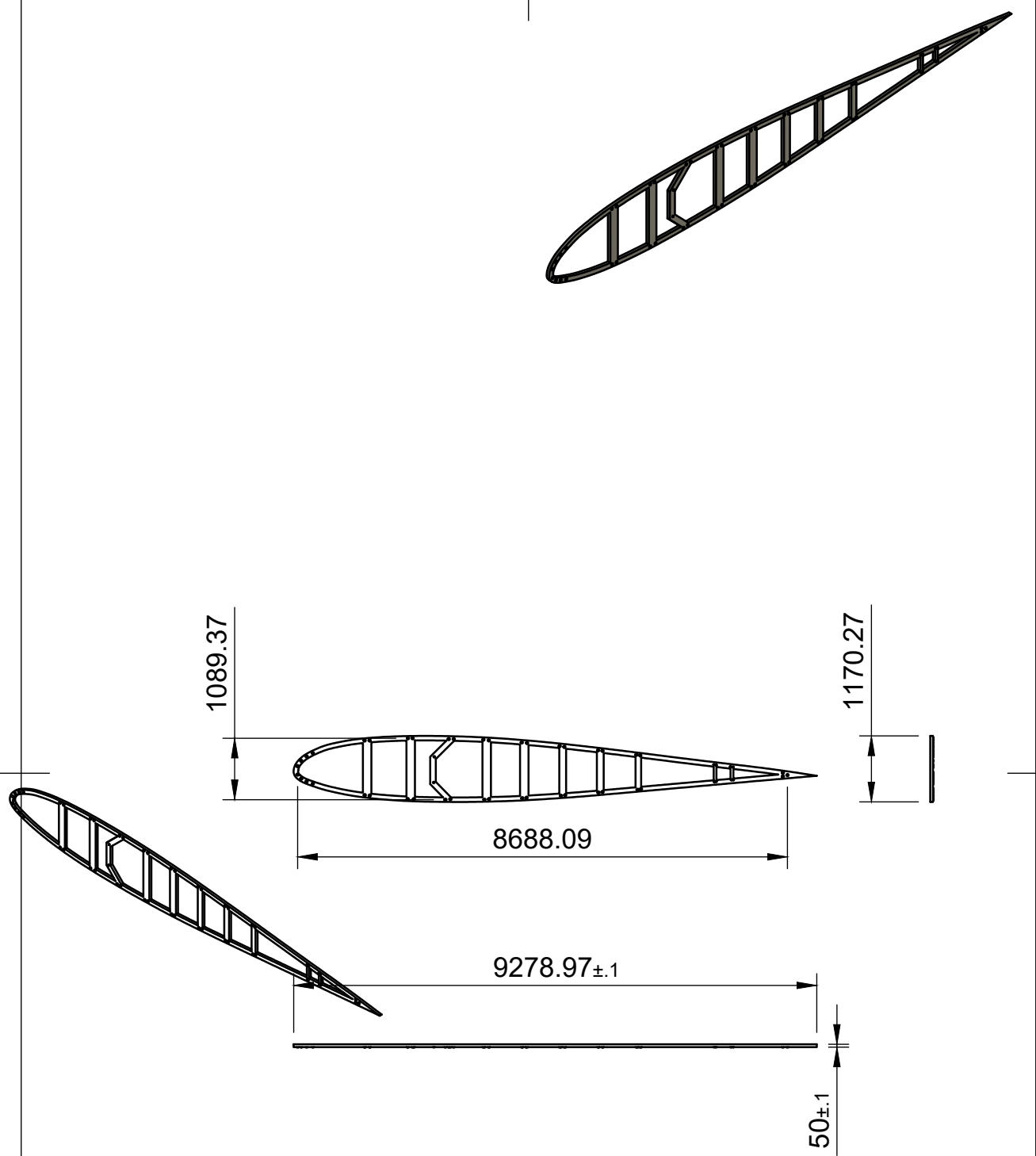
7.1. Anexo A- Planos de componente de los 6 acostillados con web-plates



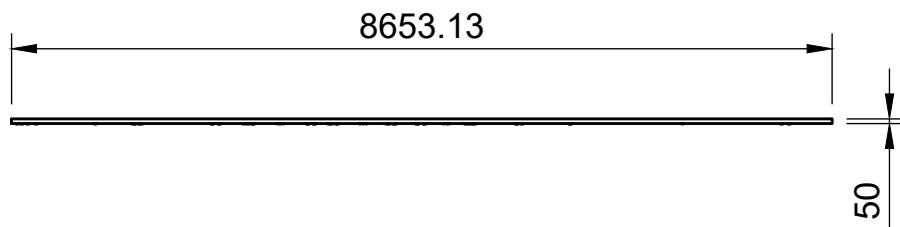
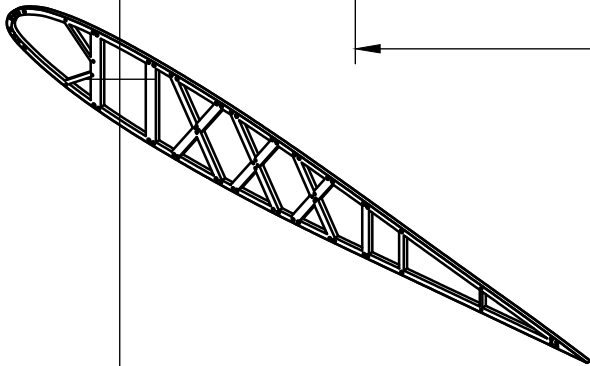
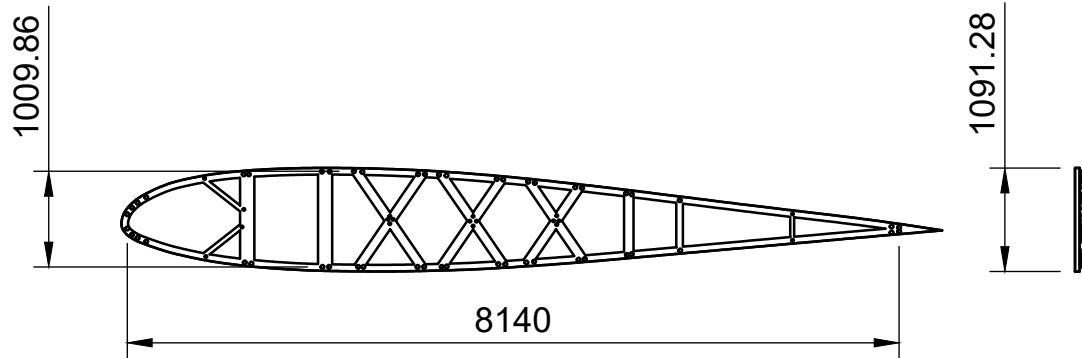
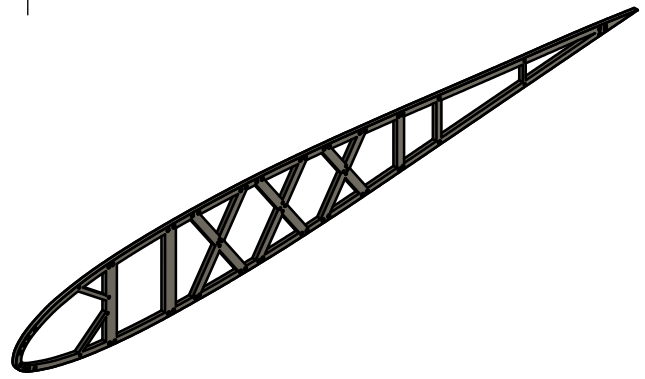
Dept.	Technical reference	Created by Osmar Corona 6/23/2026	Approved by		
		Document type	Document status		
		Title Costilla 3	DWG No.		
			Rev.	Date of issue	Sheet 1/1



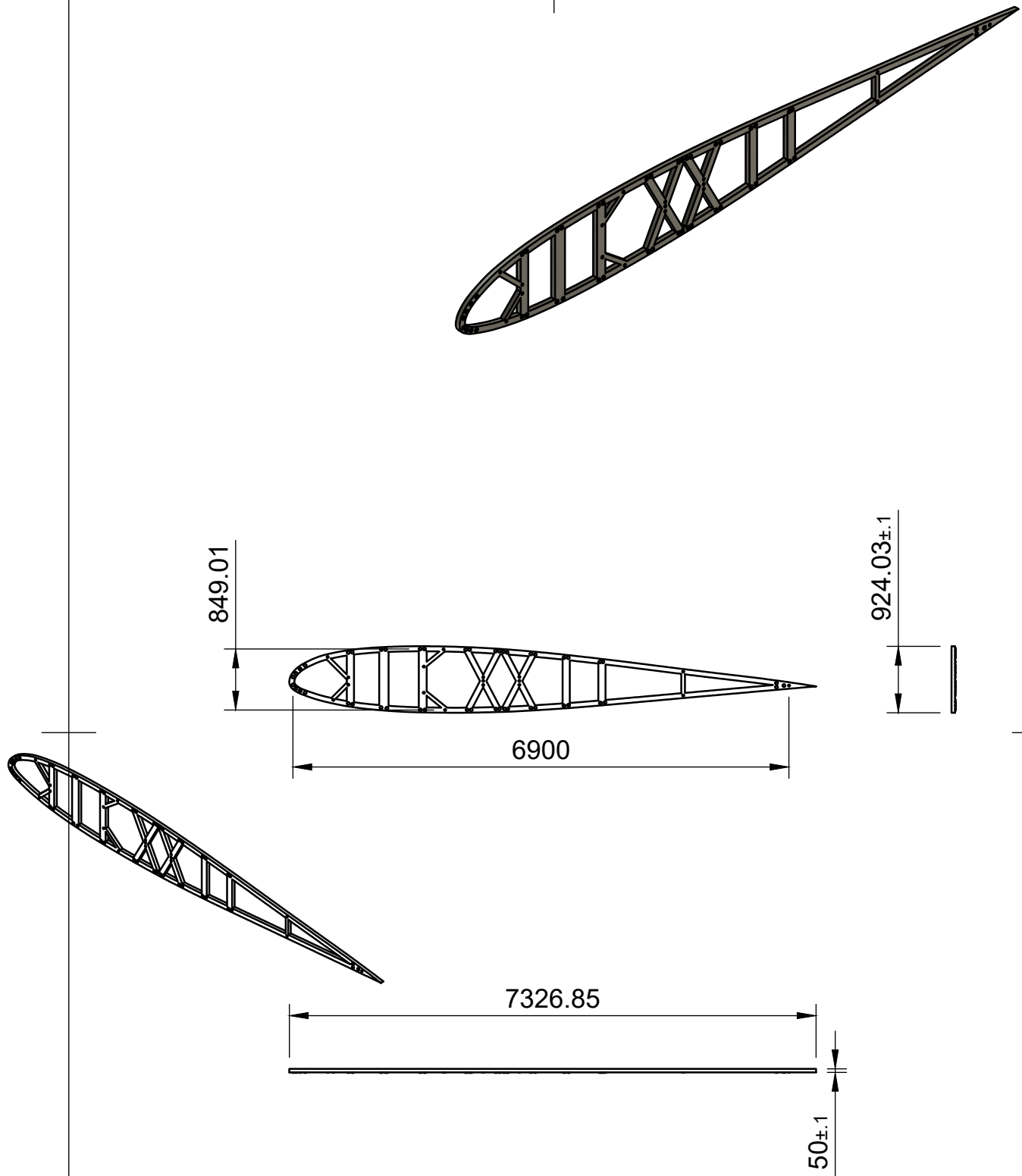
Dept.	Technical reference	Created by Osmar Corona 6/23/2026	Approved by		
		Document type	Document status		
		Title Costilla4	DWG No.		
			Rev.	Date of issue	Sheet 1/1



Dept.	Technical reference	Created by Osmar Corona 6/23/2026	Approved by		
		Document type	Document status		
		Title Costilla5	DWG No.		
			Rev.	Date of issue	Sheet 1/1



Dept.	Technical reference	Created by Osmar Corona 6/23/2026	Approved by		
		Document type	Document status		
		Title Costilla6	DWG No.		
			Rev.	Date of issue	Sheet 1/1

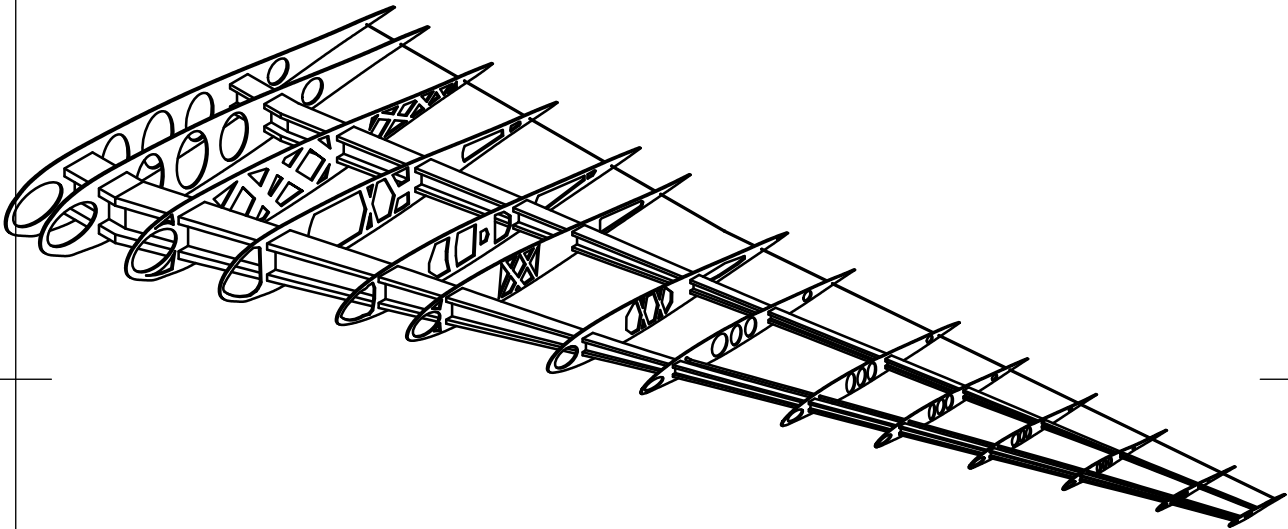


Dept.	Technical reference	Created by Osmar Corona 6/23/2026	Approved by		
		Document type	Document status		
		Title Costilla7	DWG No.		
			Rev.	Date of issue	Sheet 1/1

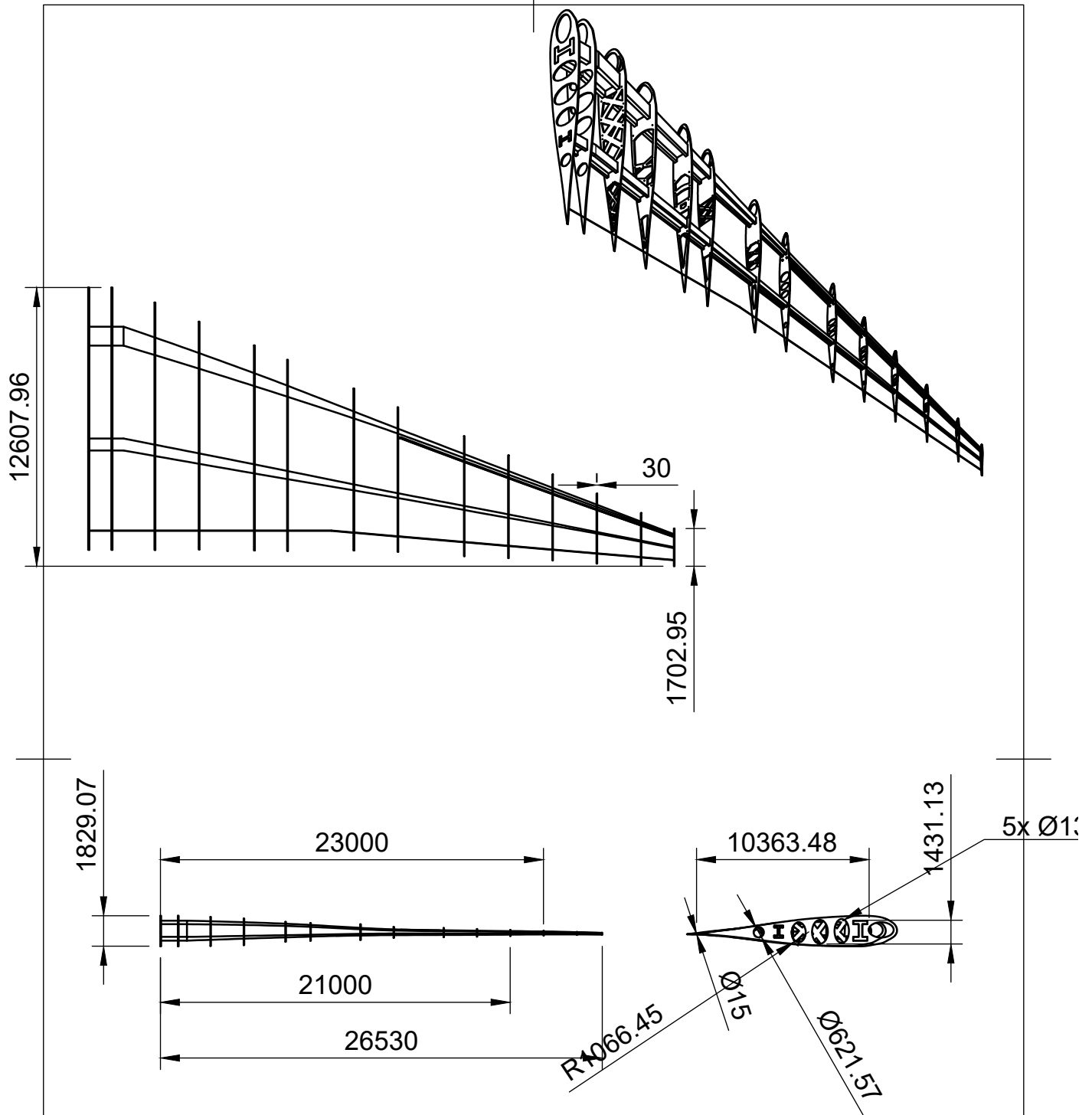
7.2 Anexo B - Plano de la estructura alar

7.2. Anexo B - Plano de la estructura alar

Parts List			
Item	Qty	Part Number	Material
1	1	B787-Structural-opt	----



Dept.	Technical reference	Created by Osmar Corona 6/20/2026	Approved by	
Plano muestra de dimensiones de topología		Document type	Document status	
		Title B787-Structural-opt	DWG No. Estructura alar completa	
		Rev.	Date of issue	Sheet 1/2



Dept.	Technical reference	Created by Osmar Corona 6/20/2026	Approved by		
		Document type	Document status		
		Title B787-Structural-opt	DWG No.		
			Rev.	Date of issue	Sheet 2/2

7.3 Anexo C - Cálculos de remaches

7.3. Anexo C - Cálculos de remaches

El énfasis radicaré desde la tercera costilla hasta la séptima, mismas que por su tamaño, se manufacturan mediante web plates unidos a través de los remaches. Se realizan 3 análisis de falla para los remaches, enunciados como sigue:

- **Falla por corte del remache:** Este remache, falla por el esfuerzo cortante.

$$\tau = \frac{F_r}{A_s} \quad (107)$$

Donde: $A_s = \frac{\pi d^2}{4}$ y $\tau \leq \frac{\tau_{adm}}{FS}$

- **Falla por aplastamiento:** Este tipo de falla es muy crítica en las costillas

$$\sigma_{bear} = \frac{F_r}{t_{web}d_r} \quad (108)$$

- **Falla por arrancamiento:** Este se presenta cuando el remache está situado cerca del borde.

$$\sigma_{tear} = \frac{F_r}{2et_{web}} \quad (109)$$

Donde e es la distancia al borde.

Donde:

$$F_r = \frac{F_{rib}}{n_{remaches}} \quad (110)$$

Tabla 20: Análisis de los remaches

Costilla	$\tau_{shear} [MPa]$	$\sigma_{bear} [MPa]$	$\sigma_{tear} [MPa]$
3	55.333144	21.729275	8.357413
4	66.206728	25.999321	9.999739
5	66.206728	25.999321	9.999739
6	66.206728	25.999321	9.999739
7	54.875563	21.549583	8.288301