



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Control integral discontinuo para un levitador magnético

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Eléctrico Electrónico

P R E S E N T A

Héctor Javier Leal Villavicencio

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

Resumen

Un sistema dinámico puede ser modelado tan bien como información del sistema se conozca, abriendo paso a incertidumbres y/o perturbaciones que puedan provocar comportamientos no deseados y por consiguiente peligrosos. Establecer una estrategia de control que sea capaz de compensar estas incertidumbres y/o perturbaciones no es una tarea trivial y para ello se propone aplicar experimentalmente los resultados en [Mercedo, 2017] y [Moreno, 2016], cuyo esquema de control propuesto tiene cualidades como robustez frente a diversas clases de perturbaciones con una convergencia en tiempo finito.

Este trabajo de tesis tiene como propósito realizar una comparación entre el diseño lineal y un diseño no lineal de controladores integrales. Se hará énfasis en el desempeño de cada uno de los controladores en una regulación de la salida, en el seguimiento de una señal de referencia, así como en su robustez frente a diversas perturbaciones, sobre en un sistema de levitación magnética MagLev 730 de la marca ECP.

Índice general

Índice de figuras	VII
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	2
1.2.1. Objetivo general	2
1.2.2. Objetivos Particulares	2
1.3. Aportaciones	2
1.4. Estructura de la tesis	3
2. Preliminares	5
2.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	5
2.1.1. Estabilidad para sistemas dinámicos continuos	5
2.1.2. Estabilidad para inclusiones diferenciales	7
2.2. Homogeneidad	8
2.2.1. Homogeneidad clásica	8
2.2.2. Homogeneidad ponderada	8
2.3. Planteamiento del problema	9
3. Modelo matemático del levitador magnético	11
3.1. Sistema de levitación magnética	12
3.2. Modelo matemático de orden completo.	15
3.2.1. Simplificación del modelo matemático	17
3.3. Obtención de los parámetros en la planta	18
3.4. Verificación experimental del modelo	19
4. Diseño y simulación numérica de controladores integrales lineales	23
4.1. Control por realimentación de estados	23
4.2. Linealización por realimentación	24
4.3. Diseño de la ley de control integral	25
4.4. Simulación numérica del control por realimentación de estados con acción integral usando una linealización local	26

4.5. Simulación numérica de una realimentación de estados con acción integral usando una linealización por realimentación	31
5. Desarrollo del control integral discontinuo	33
5.1. Ley de control estabilizante	33
5.2. Función de Lyapunov	34
5.3. Diseño de la ley de control integral	34
5.4. Diseño de las ganancias del controlador	35
5.5. Simulación numérica del control Integral discontinuo	36
6. Verificación experimental de los controladores integrales	43
6.1. Control integral por realimentación de estados con acción integral usando una linealización local	44
6.1.1. Control por realimentación de Estados con acción integral usando una linealización por realimentación	46
6.1.2. Control Integral Discontinuo	51
6.2. Comparación entre controladores	60
7. Conclusiones	63
Bibliografía	65

Índice de figuras

3.1. Sistema de levitación magnética MagLev 730 de ECP	11
3.2. Esquema del MagLev 730 de ECP	12
3.3. Esquema del sensor láser	13
3.4. Curva de calibración del sensor láser	14
3.5. Interacción entre las fuerzas mecánicas y electromagnéticas en el levitador	15
3.6. Circuito RL	16
3.7. Valor experimental en la posición x_1 y velocidad para una entrada de control constante	20
3.8. Valor experimental en la posición x_2 y velocidad para una entrada de control constante	21
4.1. Resultado de la simulación para una regulación en $x_1 = 0.023[m]$	27
4.2. Señal de referencia senoidal	28
4.3. Error de seguimiento al seguir una señal de referencia senoidal	28
4.4. Resultado de la simulación con perturbación constante $\rho = 6$	29
4.5. Perturbación senoidal $\rho(t)$ con amplitud de $6[m/s]$	29
4.6. Resultado de la simulación con perturbación invariante con el tiempo $\rho(t)$	30
4.7. Resultado de la simulación para una regulación en el punto $x_1 = 0.023[m]$	32
5.1. Resultado de la posición y velocidad del magneto en la simulación numérica	37
5.2. Perturbación senoidal $\rho(t)$ con amplitud de $6[m/s]$	37
5.3. Posición y Velocidad en el magneto frente a la perturbación senoidal $\rho(t)$	38
5.4. Comportamiento del integrador z_4 en la simulación numérica	38
5.5. Señal de referencia	39
5.6. Comportamiento de la posición y la velocidad durante el seguimiento de la referencia en la simulación numérica	39
5.7. Error de seguimiento y entrada de control	40
5.8. Comparación de la posición y velocidad entre los controladores no lineales y lineal	41
5.9. Comparación del error de seguimiento y entrada u entre los controladores no lineales y lineales	42

6.1. Posición y velocidad del magneto usando el control por realimentación de estados con acción integral	44
6.2. Error de seguimiento y entrada al levitador	45
6.3. Perturbación rampa	45
6.4. Posición y velocidad del magneto frente a una perturbación rampa	46
6.5. Comportamiento de la posición y la velocidad	47
6.6. Perturbación senoidal con amplitud de 6[m]	48
6.7. Posición y la velocidad frente a una perturbación senoidal	48
6.8. Error de seguimiento frente a una perturbación senoidal	49
6.9. Posición y velocidad durante el seguimiento de la señal senoidal	50
6.10. Error de seguimiento durante el seguimiento de la señal senoidal	51
6.11. Posición y velocidad del magneto frente a una perturbación constante	52
6.12. Error de Seguimiento frente a perturbación constante	53
6.13. Efecto del integrador	53
6.14. Error de seguimiento frente a una perturbación rampa	54
6.15. Posición y velocidad frente a la perturbación rampa	55
6.16. Efecto del integrador frente a la perturbación rampa	55
6.17. Posición y velocidad frente a una perturbación senoidal	56
6.18. Error de seguimiento frente a la perturbación senoidal	57
6.19. Efecto del Integrador frente a una perturbación senoidal	57
6.20. Señal de referencia	58
6.21. Posición y velocidad durante el seguimiento de la señal de referencia	58
6.22. Error de seguimiento	59
6.23. Efecto del integrador durante el seguimiento de la señal de referencia	59
6.24. Comparación entre el control discontinuo y el control lineal	60
6.25. Comparación de los errores de seguimiento y sus entradas entre el control discontinuo y el control lineal	61

Introducción

1.1. Motivación

Una manera de aproximar el comportamiento de un sistema dinámico es a través de ecuaciones diferenciales, a ello se le conoce como Modelo matemático del sistema, tan cercano a la realidad como información se conozca del mismo. Un modelo matemático nunca será perfecto, ya que es solo es una aproximación y por lo tanto está sujeto a condiciones de operación no previstas, conocidas como incertidumbres y/o bajo la influencia de acciones externas conocidas como perturbaciones.

A partir de lo anterior se han desarrollado metodologías matemáticas, entre ellas el control como una disciplina que busca en un sistema se pueda operar de forma deseada aún bajo situaciones adversas. El control surge como una estrategia usada para manipular un sistema dinámico y cuyo diseño se puede realizar a partir del modelo matemático del sistema, en específico es posible modelar la dinámica de un sistema mediante ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Lo anterior es conocido como modelo en espacio de estados, donde f es una función que depende de los estados x y la entrada de control u , sin embargo, el desempeño del sistema se ve afectado debido a las presencia de perturbaciones y/o incertidumbres, por lo que se requiere una ley de control robusta capaz de lidiar con dichas perturbaciones. Existen diversas técnicas lineales y no lineales que pueden resolver la tarea de estabilización, como lo es una realimentación estática de los estados y la linealización por realimentación, sin embargo, no resuelven el problema de las incertidumbres y/o perturbaciones.

Los ejemplos antes mencionados, el punto de equilibrio del sistema controlado se desvía debido a las incertidumbres y/o perturbaciones, por lo que es necesario diseñar junto a la ley de control estabilizante una acción integral que pueda mantener una condición de error de seguimiento nulo, lo que implica que la ley de control sea dinámica. Al ser controladores lineales su estabilidad resulta ser exponencial, cuyo grado de libertad

en el desempeño del controlador será únicamente el diseño de sus ganancias, sin embargo, es posible aprovechar la ventaja de otras técnicas de control no lineal que permiten modificar el tipo de estabilidad y a su vez lidiar con cierta clase de perturbaciones.

Una opción es el control por modos deslizantes como una técnica de naturaleza discontinua insensible a incertidumbres paramétricas, robusta ante perturbaciones externas y que dota al sistema de control de convergencia en tiempo finito, sin embargo, su implementación se ve limitada por las restricciones físicas en los actuadores, debido al efecto de “chattering”. En [Moreno, 2016] se propone un control integral discontinuo de segundo orden que hereda la robustez ante perturbaciones externas y de convergencia en tiempo finito y en [Mercado, 2017] se realiza una generalización de control para sistemas de orden n , por lo que la finalidad este trabajo es buscar enfatizar las cualidades de este control sobre un sistema de levitación magnética.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Desarrollar un control integral discontinuo para un sistema de levitación magnética y comparar su desempeño experimentalmente contra otras técnicas de control basados en alguna clase de linealización.

1.2.2. Objetivos Particulares

1. Verificación del modelo matemático.
2. Diseño y simulación de controladores integrales lineales para la regulación de salida y seguimiento de una señal de referencia.
3. Implementar el control integral discontinuo en un levitador magnético para la regulación de salida en tiempo finito y seguimiento de una señal de referencia.
4. Comparar desempeño entre cada uno de los controladores frente a diversas perturbaciones y señales a seguir.

1.3. Aportaciones

En este trabajo se busca verificar experimentalmente el resultado presentado en [Mercado, 2017] aplicándolo en un sistema de levitación magnética. Se hará énfasis en el tipo de estabilidad del control, así como su robustez ante una clase especial de perturbaciones y su comparación con otros esquemas de control, en particular el lineal.

1.4. Estructura de la tesis

A partir del capítulo 2, se introducen algunos elementos necesarios para entender el control integral discontinuo. En este capítulo se dará una breve introducción sobre la estabilidad en el sentido de Lyapunov, presentando el caso discontinuo (inclusiones diferenciales), así como el concepto de homogeneidad ponderada, posteriormente se presenta el planteamiento del problema.

En el capítulo 3 se explican las leyes físicas involucradas en el sistema de levitación magnética, así como las suposiciones en el modelado del levitador magnético para finalmente obtener un modelo matemático aproximado. Se explica el proceso de obtención de los parámetros experimentales, así como la verificación experimental del modelo matemático.

En el capítulo 4 se introducen el control lineal por realimentación de estados y el control no lineal por el método de linealización por realimentación, que en consecuencia permiten regular la salida del sistema de levitación magnética, posteriormente se añade la acción integral en cada control con la característica de rechazar ciertas clases de perturbaciones. Se muestran las características principales de esta clase de controladores, así mismo se explican las consideraciones para el diseño de las leyes de control, así como el resultado de las simulaciones numéricas de cada tipo de linealización.

En el capítulo 5 se presenta la ley de control estabilizante y su respectiva función de Lyapunov para el caso discontinuo, así como la influencia del grado de homogeneidad del controlador integral y sus consideraciones para el diseño de la ley de control, el diseño de sus ganancias. Finalmente se muestra el resultado de las simulaciones numéricas del controlador usando el modelo del levitador magnético en regulación y seguimiento de una señal de referencia.

En el capítulo 6 se muestran los resultados experimentales obtenidos de cada controlador en el levitador magnético haciendo un énfasis en sus características con el propósito de mostrar las bondades del control integral discontinuo. Finalmente se discuten algunas diferencias entre el desempeño de los controladores lineales y no lineal.

Preliminares

En este capítulo se dará una breve introducción a la estabilidad en el sentido de Lyapunov, presentando la extensión para el caso discontinuo (inclusiones diferenciales) y posteriormente presentar a los sistemas homogéneos el concepto de homogeneidad ponderada, analizando sus diferentes propiedades.

2.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

2.1.1. Estabilidad para sistemas dinámicos continuos

Sea el sistema autónomo,

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

donde x son los estados del sistema y $f : D \rightarrow \mathbf{R}^n$ es un mapeo localmente Lipschitz en un dominio $D \subset \mathbf{R}^n$. Suponga que $\bar{x} \in D$ es un punto de equilibrio de (2.1), es decir,

$$f(\bar{x}) = 0 \tag{2.2}$$

Por conveniencia se considera el punto de equilibrio en el origen de \mathbf{R}^n . [Khalil, 2002]

Definición 1 *El punto de equilibrio $x=0$ de (2.1) es*

- *Estable, si para cada $\epsilon > 0$, hay un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

- *Inestable, si no es estable.*

- *Asintóticamente estable, si es estable y además δ puede ser elegido, tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Lo anterior explica que un punto de equilibrio es estable en el sentido de Lyapunov, si toda solución que se encuentra en una vecindad cercana al origen $\|x(0)\| < \delta$ permanece cerca del origen, en caso contrario es inestable y asintóticamente estable si para toda trayectoria que comienza en una vecindad de δ se converge al origen.

Sin embargo demostrar la estabilidad del origen de (2.1) a partir de la definición anterior es complicado, es conveniente usar el siguiente teorema [Khalil,2002].

Teorema 2 *Sea $x=0$ un punto de equilibrio de (2.1) y $D \subset \mathbf{R}^n$ un dominio que contiene a $x=0$. Sea $V : D \Rightarrow \mathbf{R}$ una función continuamente diferenciable, tal que*

$$V(0) = 0 \quad y \quad V(x) > 0 \text{ en } D \setminus \{0\} \tag{2.3}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } D, \tag{2.4}$$

entonces $x=0$ es estable. Además, si

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ en } D \setminus \{0\} \tag{2.5}$$

entonces $x=0$ es asintóticamente estable.

En el Teorema 2, $V(x)$ es una función de Lyapunov que asegura la estabilidad en el origen del sistema (2.1) y satisface la condición de la función candidata de Lyapunov (2.3), sin embargo el teorema 2 se basa en un principio de energía, considerando a la función de Lyapunov como una función de energía cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (2.1) satisface la condición (2.4), lo que implica que el sistema no genera energía y por lo tanto se cumple con la definición 1, ya que las trayectorias permanecen acotadas y por lo tanto cerca del punto de equilibrio $x = 0$ y más aún, cuando la derivada de la función candidata de Lyapunov cumple con la condición (2.5), el sistema converge a un punto de nivel de energía más bajo, es decir un punto de equilibrio asintóticamente estable $x = 0$.

2.1.2. Estabilidad para inclusiones diferenciales

Este trabajo tiene como base el control discontinuo, cuyo análisis de estabilidad y robustez usualmente se hace con ayuda de herramientas de homogeneidad para inclusiones diferenciales que garanticen, la existencia de convergencia en tiempo finito. Se considera la inclusión diferencial de [Zavala, 2014],

$$\dot{x} \in F(x) \tag{2.6}$$

donde x describe el estado del sistema y F es una función multivaluada cuyos valores son subconjuntos de \mathbf{R}^n y se asume que $F(x)$ es semicontinua por arriba y además es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de \mathbf{R}^n para cada $x \in \mathbf{R}^n$. A partir de lo anterior existen soluciones no únicas de (2.6) locales, de lo cual hay dos nociones de estabilidad para la inclusión diferencial,

- Estabilidad débil: la propiedad de estabilidad solo la cumple una solución.
- Estabilidad fuerte: la propiedad de estabilidad se cumple para todas las soluciones de la inclusión diferencial.

Lema 3 *F es fuerte y asintóticamente estable si y sólo si las soluciones existen globalmente y existe una función $\beta \in \mathcal{KL}$ tal que para cada solución $x(t, x_0)$ de la inclusión diferencial (2.6) se cumple $\|x(t, x_0)\| \leq \beta(t, \|x_0\|)$.*

Una inclusión diferencial puede admitir una función de Lyapunov diferenciable que facilita el análisis de estabilidad [Zavala, 2014].

Definición 4 *La pareja de funciones continuas (V, W) sobre \mathbf{R}^n , con $V \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ y $W \in C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$, constituyen un par de Lyapunov fuerte, y además, suave para F si las siguientes condiciones se cumplen,*

1. $V(x) > 0$ y $W(x) > 0$ son positivas definidas y $V(x)$ es propia.
2. *Decrecimiento infinitesimal fuerte,*

$$\max_{y \in F(x)} \langle \nabla V(x), y \rangle \leq -W(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$$

Para un par (V, W) con cualquier estado inicial $x_0 \in \mathbf{R}^n$, cada solución de (2.6) con $x(0) = x_0$ está definida en todo el intervalo $[0, \infty)$ y es atraído al origen de manera uniforme y estable. Esto se conoce como fuerte y asintóticamente estable.

El siguiente Teorema explica que una función de Lyapunov suave siempre existe para una inclusión diferencial invariante en el tiempo, cuyo equilibrio es asintóticamente estable [Zavala, 2014].

Teorema 5 Sea F una función multivaluada semicontinua por arriba y además es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de \mathbf{R}^n para cada $x \in \mathbf{R}^n$. Entonces el origen de (2.6) es fuerte y asintóticamente estable si y sólo si existe un par de Lyapunov fuerte (V, W) .

2.2. Homogeneidad

2.2.1. Homogeneidad clásica

La homogeneidad clásica es una propiedad de escalamiento de funciones, cuya definición tomada de [Mercado, 2017], es

Definición 6 La función $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ se dice que es homogénea de grado m si para $\epsilon > 0$ se cumple que

$$f(\epsilon x) = \epsilon^m f(x), \quad \forall x$$

donde ϵ es un escalamiento de la función y m es un entero.

2.2.2. Homogeneidad ponderada

La definición anterior considera al exponente de ϵ como entero, sin embargo, puede extenderse la definición al caso cuando se tiene exponentes fraccionarios a través de la homogeneidad ponderada tomada en [Bacciotti and Rosier, 2006].

Definición 7 Sea un conjunto de coordenadas (x_1, \dots, x_n) en \mathbf{R}^n y $r = (r_1, \dots, r_n)$ una n -tupla de números reales positivos.

- El vector de dilatación $(\delta_\epsilon^r)_{\epsilon > 0}$ (asociado con r) está definido por,

$$\delta_\epsilon^r(x) = (\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n)$$

Los números r_i son los pesos del conjunto de coordenadas.

- Una función $V : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ se dice que es δ^r homogénea de grado $m \in \mathbf{R}$ si,

$$V(\delta_\epsilon^r(x)) = \epsilon^m V(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \epsilon > 0$$

- Un campo vectorial $f = [f_1(x), \dots, f_n(x)]^T$ se dice δ^r homogéneo de grado k si la componente f_i es δ^r homogéneo de grado $k + r$, $\forall i$, es decir

$$f_i(\epsilon^{r_i} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n) = \epsilon^{k+r_i} f_i(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \epsilon > 0, i = 1, \dots, n$$

o equivalente

$$f(\delta_\epsilon^r(x)) = \epsilon^k \delta_\epsilon^r f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

De la misma manera que la definición de homogeneidad clásica, se tiene un factor de escalamiento, sin embargo, este varía con las coordenadas. Las características más importantes de un sistema definido por un campo vectorial homogéneo tomado de [Zavala, 2014] son:

- Si el origen de un sistema con campo vectorial homogéneo es asintóticamente estable localmente, entonces el origen es asintóticamente estable globalmente.
- Si $f = f_1 + \dots + f_p$ donde f_1, \dots, f_p son campos vectoriales homogéneos de grado l_1, \dots, l_p y el origen es asintóticamente estable globalmente bajo f_1 , entonces el origen es asintóticamente estable localmente bajo f .

Para sistemas lineales se sabe que un punto de equilibrio asintóticamente estable posee una función de Lyapunov estricta, la cual tiene una forma cuadrática. En el caso de sistemas homogéneos la función de Lyapunov estricta y homogénea no necesariamente tiene una estructura cuadrática. Por otro lado, la velocidad de convergencia de un sistema homogéneo queda caracterizado por el grado de homogeneidad de su campo vectorial y por lo tanto, si el grado de homogeneidad cambia, también las trayectorias cambian su tipo de convergencia.

2.3. Planteamiento del problema

Considerando el sistema,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= f(\xi) + \rho(t) + \tau. \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde $\xi \in \mathbf{R}$ son los estados, $\tau \in \mathbf{R}$ es la variable de control, $f(\xi)$ es una función que representa la dinámica conocida, mientras el término $\rho(t)$ corresponde a las incertidumbres y/o perturbaciones. El sistema (2.7) puede representar, por ejemplo un sistema mecánico, donde ξ_1 es la posición, ξ_2 es la velocidad y ξ_3 la aceleración.

El objetivo de control es seguir una referencia variante en el tiempo $r(t)$ y para lograrlo se define el error de seguimiento $z_1 = \xi_1 - r$, $z_2 = \xi_2 - \dot{r}$ y $z_3 = \xi_3 - \ddot{r}$. Por lo tanto, el error de seguimiento está descrito por el siguiente sistema dinámico,

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= f(\xi) + \rho(t) - \ddot{r}(t) + \tau.\end{aligned}\tag{2.8}$$

se elije el control $\tau = u - f(\xi) + \ddot{r}(t)$ para el sistema (2.8), tal que se convierte en una cadena de integradores perturbada,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= u + \rho(t).\end{aligned}\tag{2.9}$$

donde $u \in \mathbf{R}$ es la nueva variable de control y $\rho(t)$ es una perturbación desconocida no desvaneciente en el origen del sistema (2.9), es decir cuando $x = 0$ la perturbación permanece activa. Se sabe que al aplicar un control por realimentación de estados lineal $u = kx$ no es suficiente para estabilizar el origen del sistema y por lo tanto en lazo cerrado el origen del sistema no permanece en equilibrio debido a la perturbación desconocida [Moreno, 2016].

Es posible diseñar una ley de control que estabilice el sistema (2.9) y aplicar el resultado en un sistema de levitación magnética. De esta manera, el problema de control se resume en estabilizar el origen del sistema (2.9) rechazando diversas clases perturbaciones y para ello se busca que el sistema en lazo cerrado sea homogéneo, ya que debido a las propiedades de homogeneidad se tienen características en robustez y tipo convergencia.

El sistema de levitación magnética MagLev 730, es un levitador magnético por repulsión que debido a su gran complejidad y su comportamiento altamente no lineal hacen del sistema un problema interesante de resolver tanto en su modelo físico, como su comportamiento en tiempo real. A partir de lo anterior, se pretende mostrar una extensión del resultado en [Mercado, 2017] y [Moreno, 2016] enfatizando las características y propiedades del control integral discontinuo contra técnicas de control lineal con acción integral, cuando se utilizan para regulación y seguimiento de una referencia.

Modelo matemático del levitador magnético

En este capítulo se presenta el sistema de levitación magnética, las leyes físicas involucradas, las suposiciones para el modelado del levitador magnético y da detalle del proceso de obtención de los parámetros experimentales, así como la verificación experimental del modelo matemático.



Figura 3.1: Sistema de levitación magnética MagLev 730 de ECP

3.1. Sistema de levitación magnética

El sistema de levitación magnética MagLev 730 de la marca ECP se muestra en la Figura 3.1, es un sistema electromecánico que mediante el uso de la fuerza de repulsión de la bobina inferior, levita un magneto. En la planta existen no linealidades debido a las propiedades naturales de los campos magnéticos. Estos campos magnéticos describen las fuerzas inducidas por las corrientes eléctricas.

El levitador magnético MagLev 730 se compone estrictamente por dos subsistemas,

- **El sistema eléctrico.** Formado por la interacción de la corriente con la bobina inferior para producir un campo magnético.
- **El sistema mecánico.** Lo conforma el magneto, el cual se desliza debido a la fuerza de repulsión proveniente de la bobina inferior.

La Figura 3.2, indica cada una de las partes que conforman al levitador magnético MagLev 730,

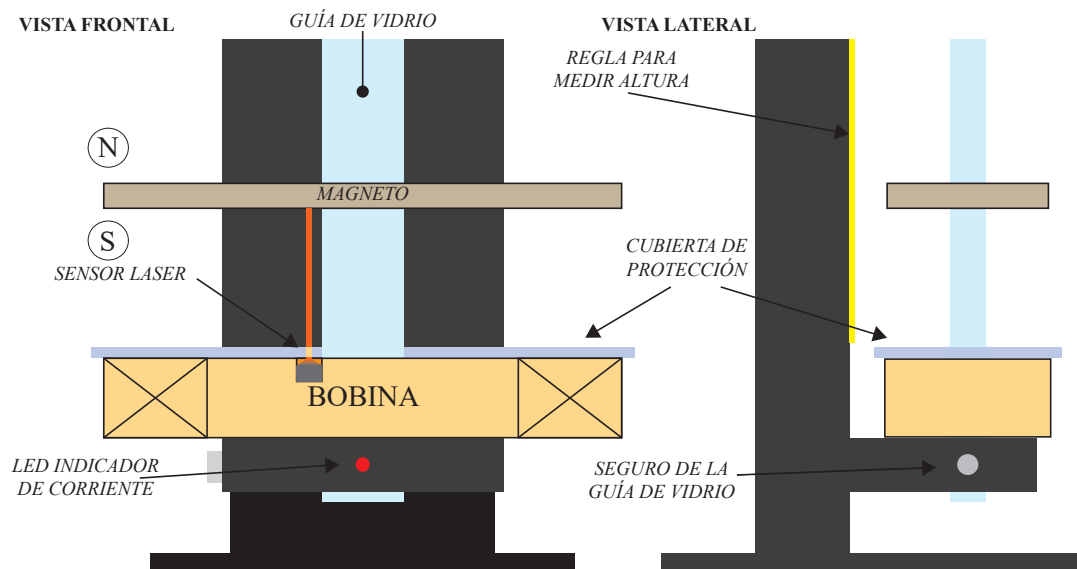


Figura 3.2: Esquema del MagLev 730 de ECP

Para realizar las medidas del desplazamiento del magneto, el MagLev 730 cuenta con un sensor láser diseñado y patentado por ECP.

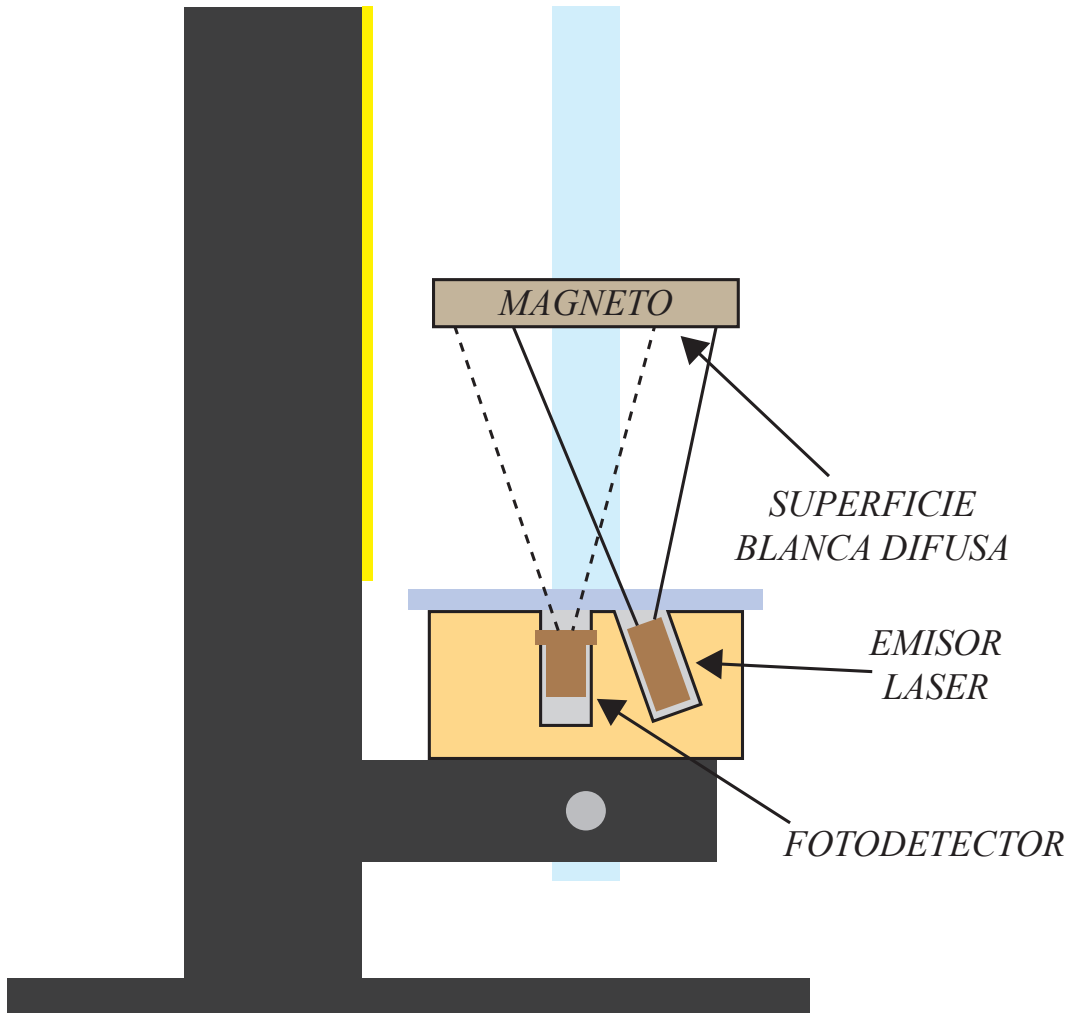


Figura 3.3: Esquema del sensor láser

La Figura 3.3, muestra un esquema de las partes y forma de operar del sensor, cuyo láser monocromático se propaga a través de un elemento óptico hemicilíndrico con una forma de abanico que es proyectada sobre una superficie blanca difusa en el magneto. Un fotodetector capta el rayo y genera un voltaje proporcional a la potencia del rayo incidente en él. Las propiedades de la superficie blanca, el factor que capta el láser/detector, así como las geometrías, son diseñadas para maximizar la pendiente de ganancia del sensor a través del rango operativo del sensor a 5cm.

3. MODELO MATEMÁTICO DEL LEVITADOR MAGNÉTICO

Para utilizar los sensores, es necesario calibrarlos y para ello se requiere de medir en un rango de 0 a 5 cm, con un correspondiente valor en cuentas que te da el software de ECP y obtener un ajuste polinómico para transformar el valor de cuentas a metros o a centímetros, según se requiera.

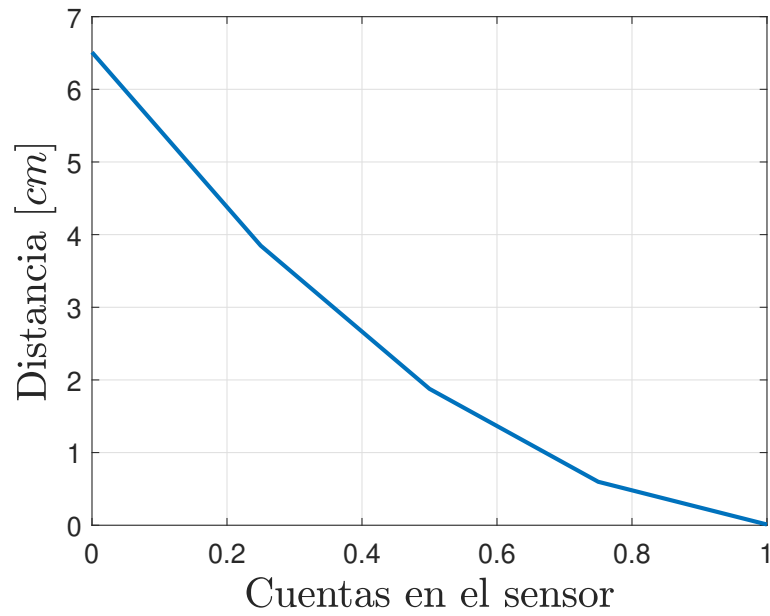


Figura 3.4: Curva de calibración del sensor láser

La figura 3.4, describe al siguiente polinomio de segundo orden que ajusta correctamente en los puntos medidos,

$$5.53x^2 - 12.03x + 6.51 \tag{3.1}$$

donde x representa el número de cuentas en el sensor.

3.2. Modelo matemático de orden completo.

La siguiente figura ilustra la interacción entre las fuerzas mecánicas y electro-magnéticas,

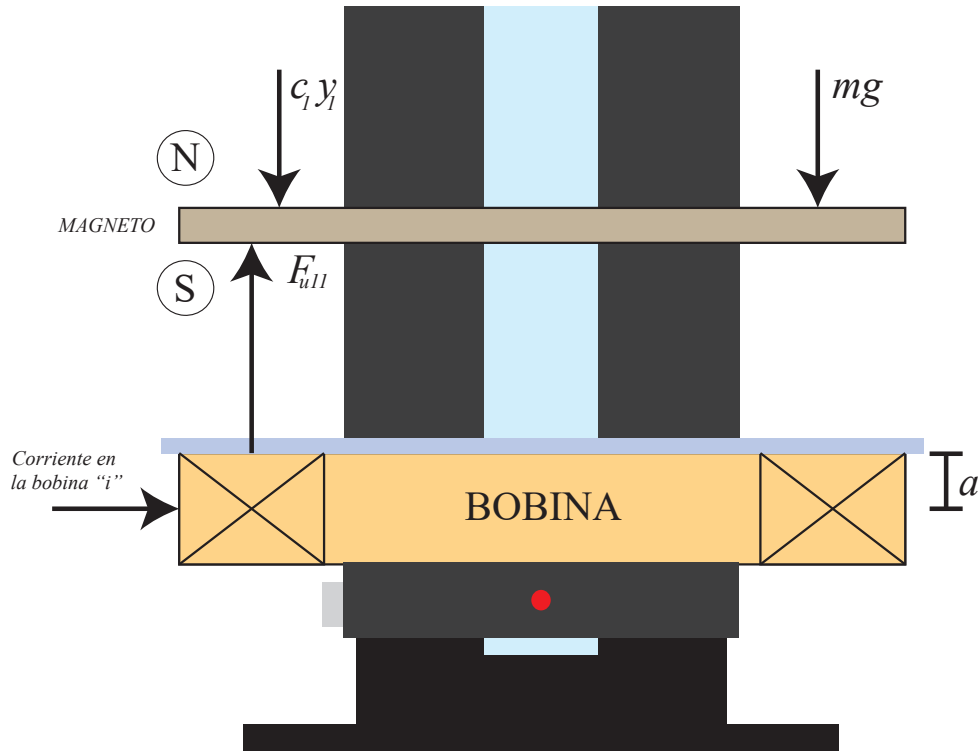


Figura 3.5: Interacción entre las fuerzas mecánicas y electromagnéticas en el levitador

De la Figura 3.5 y partir segunda ley de newton se tiene,

$$m\ddot{y}_1 + c_1\dot{y}_1 = F_{u11} - mg \quad (3.2)$$

donde,

y_1		La posición del magnetito
m		Masa del magnetito
c_1		El coeficiente de fricción seca
F_{u11}		Fuerza electromagnética del magnetito
g		Constante gravitatoria
a		Distancia entre el centro de la bobina y la cubierta protectora

3. MODELO MATEMÁTICO DEL LEVITADOR MAGNÉTICO

Una expresión que define a la energía almacenada en forma de campo magnético en una bobina de inductancia L es,

$$u = \frac{1}{2}i^2L \quad (3.3)$$

la fuerza electromagnética entre el magneto y la bobina se obtiene de la variación de la inductancia en una sola dirección. Debido a que el magneto en el MagLev esta limitado a desplazarse a lo largo de la guía de vidrio, entonces la expresión (3.3) se puede expresar como,

$$F_{u11} = \frac{1}{2}i^2 \frac{\partial L(y_1)}{\partial y_1} \quad (3.4)$$

como la inductancia $L(y_1)$ resulta ser una función no lineal que depende de la posición, cuya aproximación típica es suponer que la inductancia varia inversamente proporcional respecto a la posición, [Barie and Chiasson, 1996]

$$L(y_1) = L_1 + \frac{L_0 y_0}{y_1} \quad (3.5)$$

donde y_0 es una posición de referencia arbitraria para la inductancia, L_1 es la inductancia de la bobina en ausencia del magneto suspendido y L_0 la inductancia generada por el magneto suspendido en la posición y_0 .

Si se sustituye (3.5) en (3.4) se obtiene una nueva expresión no lineal que define la fuerza electromagnética entre el magneto y la bobina en función de la posición y la corriente,

$$F_{u11} = \frac{L_0 y_0}{2} \frac{i^2}{y_1^2} \quad (3.6)$$

En la Figura 3.6, se muestra el esquema eléctrico que describe el voltaje entre las terminales de una bobina eléctrica,

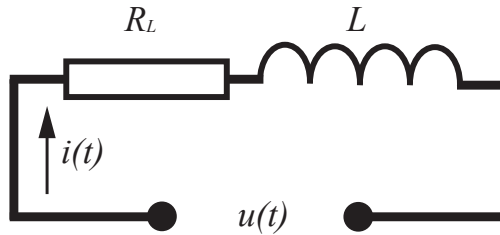


Figura 3.6: Circuito RL

cuyo modelo dinámico es,

$$u(t) = R_L i(t) + L(y_1) \frac{di(t)}{dt} \quad (3.7)$$

donde,

R_L	Resistencia en la bobina
i	Corriente en la bobina
$L(y_1)$	La inductancia de la bobina
$u(t)$	Voltaje aplicado

Si se sustituye la expresión (3.6) en (3.2) y se considera la dinámica de la bobina, se puede definir el siguiente modelo dinámico,

$$m\ddot{y}_1 + c_1\dot{y}_1 = -mg + \frac{L_0 y_0}{2} \frac{i^2}{(y_1 + a)^2} \quad (3.8)$$

$$u(t) = R_L i(t) + L(y_1) \frac{di(t)}{dt} \quad (3.9)$$

Despejando para la derivada de mayor orden y reescribiendo $u(t)$ como u_{11} se obtiene,

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= \frac{L_0 y_0}{2m} \frac{i^2}{(y_1 + a)^2} - \frac{c_1}{m} \dot{y}_1 - g \\ i &= \frac{u_{11}}{L(y_1)} - \frac{R_L}{L(y_1)} i \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde y_1 es la posición, \dot{y}_1 es la velocidad en el magneto e i como la corriente en la bobina.

3.2.1. Simplificación del modelo matemático

Si se analiza la expresión (3.5),

$$\lim_{y_1 \rightarrow \infty} L(y_1) = L_1$$

esto quiere decir que mientras mas se aleje el magneto del núcleo de la bobina, se tiende a la inductancia en ausencia del magneto suspendido.

Ahora bien, el sistema (3.10) puede expresarse de forma conveniente en el espacio de estados haciendo el siguiente cambio en las variables, si $\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = \ddot{y}_1$, $\dot{x}_3 = \dot{i}$, $x_3 = i$ y $K_m = \frac{L_0 y_0}{2m}$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= K_m \frac{x_3^2}{(x_1 + a)^2} - \frac{c_1}{m} x_2 - g \\ \dot{x}_3 &= \frac{u_{11}}{L_1} - \frac{R_L}{L_1} x_3 \end{aligned} \quad (3.11)$$

El sistema (3.11) de tercer orden puede ser simplificado aún más como un sistema de segundo orden, considerando que el transitorio de la bobina es lo suficientemente rápido y por lo tanto la dinámica correspondiente a la bobina puede ser despreciada.

3.3. Obtención de los parámetros en la planta

Debido a que el modelo matemático que se propone en este trabajo de tesis es diferente al que propone el fabricante, es necesario hallar los valores de los parámetros del sistema (3.11) que mejor se ajusten al comportamiento de la planta.

El fabricante nos proporciona el peso del magneto ($W = 1.18[N]$) y el valor de la constante gravitatoria ($g = 9.81[\frac{m}{s^2}]$), sin embargo se desconoce el valor de la inductancia y la resistencia en la bobina, la constante de fricción seca entre la guía y el magneto, así como distancia del núcleo de la bobina al magneto.

Una manera de comenzar a determinar los parámetros desconocidos, es asumir que el transitorio en la bobina es lo suficientemente rápido para el sistema (3.10). Lo anterior permite fijar un valor constante en la corriente del sistema (3.10), es decir,

$$u_{11} = R_L i$$

y se obtiene una nueva ecuación de segundo orden,

$$\ddot{y}_1 = \frac{L_0 y_0}{2m} \frac{u_{11}^2}{R_L^2} \frac{1}{(y_1 + a)^2} - \frac{c_1}{m} \dot{y}_1 - g \quad (3.12)$$

La razón de usar el sistema de orden dos se debe a que la entrada de control está en función de la posición y no de la corriente como en el modelo de tercer orden. La representación en el espacio de estados del sistema (3.12) para los estados $\dot{x}_1 = \dot{y}_1$ y $\dot{x}_2 = \ddot{y}_1$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= [K_m(x_1 + a)^{-2}]u_{11}^2 - \frac{c_1}{m}x_2 - g \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde la constante K_m representa el término $\frac{L_0 y_0}{2m R_L^2}$. El valor del control u_{11} en el equilibrio se obtiene de igualar a cero las ecuaciones dinámicas descritas en (3.13). Si el sistema descrito por (3.13) se iguala a 0 y se despeja para u_{11} entonces,

$$u_{11} = \left[\frac{g}{K_m} (x_1 + a)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.14)$$

como la entrada de control u_{11} es en función de la posición, entonces la expresión (3.14) nos permite conocer la inductancia en la bobina a partir de fijar un valor en la entrada de control para una distancia x_1 . De (3.14) despejamos para a y se obtiene,

$$a = \frac{u_1}{R_L} \sqrt{\frac{L_0 y_0}{2mg}} - x_1 \quad (3.15)$$

asumiendo que a es constante, ya que es la distancia del núcleo de la bobina al magneto para un valor fijo de la entrada de control, entonces la siguiente igualdad se satisface,

$$\frac{u_2}{R_L} \sqrt{\frac{L_0 y_0}{2mg}} - x_2 = \frac{u_1}{R_L} \sqrt{\frac{L_0 y_0}{2mg}} - x_1 \quad (3.16)$$

donde x_1 y x_2 son dos puntos de operación arbitrarios a sus respectivas entradas de control u_1 y u_2 . Agrupando términos semejantes y despejando (3.16) para L_0 se obtiene la siguiente expresión,

$$L_0 = \frac{2mgR_L^2}{y_0} \left(\frac{x_1 - x_2}{u_1 - u_2} \right)^2 \quad (3.17)$$

Finalmente para conocer los parámetros a de (3.15) y L_0 de (3.17), es necesario conocer R_L , para ello es necesario medir la resistencia entre las terminales de la bobina usando un óhmetro y medir las distancias x_1 y x_2 respectivas a las entradas de control u_1 y u_2 .

Hallar el valor del coeficiente de fricción seca, a partir de tablas que indican dicho valor en función de los materiales y el tipo de fricción, sin embargo, es más simple asumir que la fricción es seca y pequeña. Para este caso se fija un valor $c_1 = 0.1$.

3.4. Verificación experimental del modelo

La sección anterior indica cómo obtener los parámetros del sistema, una forma de verificar que los parámetros son correctos, es usar el control en lazo abierto, es decir que para una posición deseada calcular el valor de la entrada de control que pueda desplazar al magneto a dicha posición.

Una vez calculado los parámetros restantes se obtiene la Tabla 3.1,

Parámetro	Valor
a	0.0088[m]
L_0	0.2450[H]
R_L	3.33[Ω]
c_1	0.1
y_0	0.027[m]

Tabla 3.1: Parámetros en el levitador magnético

En la Tabla 3.2 se ha realizado un cálculo de la entrada de control en dos puntos diferentes,

Posición	Entrada de control
$x_1 = 0.020[m]$	$u_1 = 1.81[V]$
$x_2 = 0.024[m]$	$u_2 = 2.06[V]$

Tabla 3.2: Valor de las entradas de control para una posición

3. MODELO MATEMÁTICO DEL LEVITADOR MAGNÉTICO

Se puede comparar el valor teórico contra el experimental y determinar una incertidumbre en la posición, sin embargo, en el lazo cerrado la incertidumbre en los parámetros será compensada.

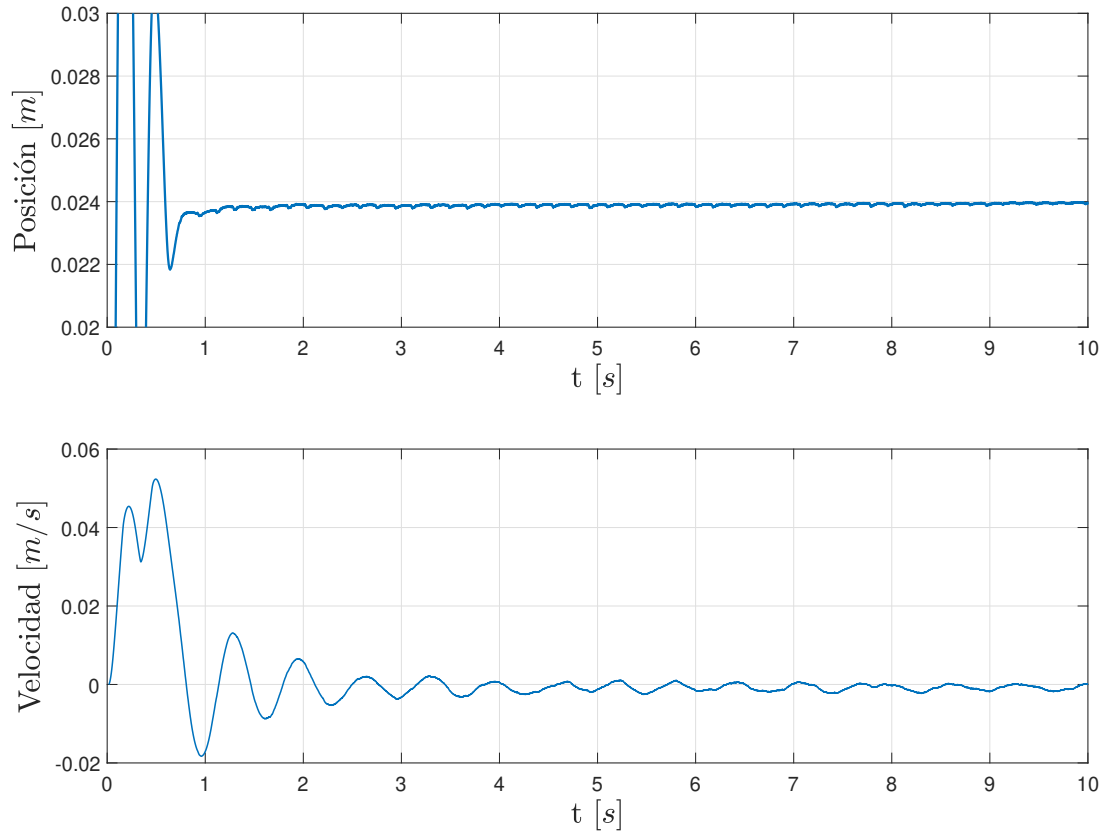


Figura 3.7: Valor experimental en la posición x_1 y velocidad para una entrada de control constante

En las figuras 3.7 y 3.8 se puede observar que $x_1 = 0.0238[m]$ y $x_2 = 0.0275[m]$ como valores experimentales cuyo error entre lo teórico y lo experimental es de 15 % y 12 % respectivamente. Recordando que el modelo es solo una aproximación del comportamiento y que los valores son lo suficientemente cercanos, se considera que el modelo es válido y que las incertidumbres mencionadas serán compensadas por cada uno de los controles.

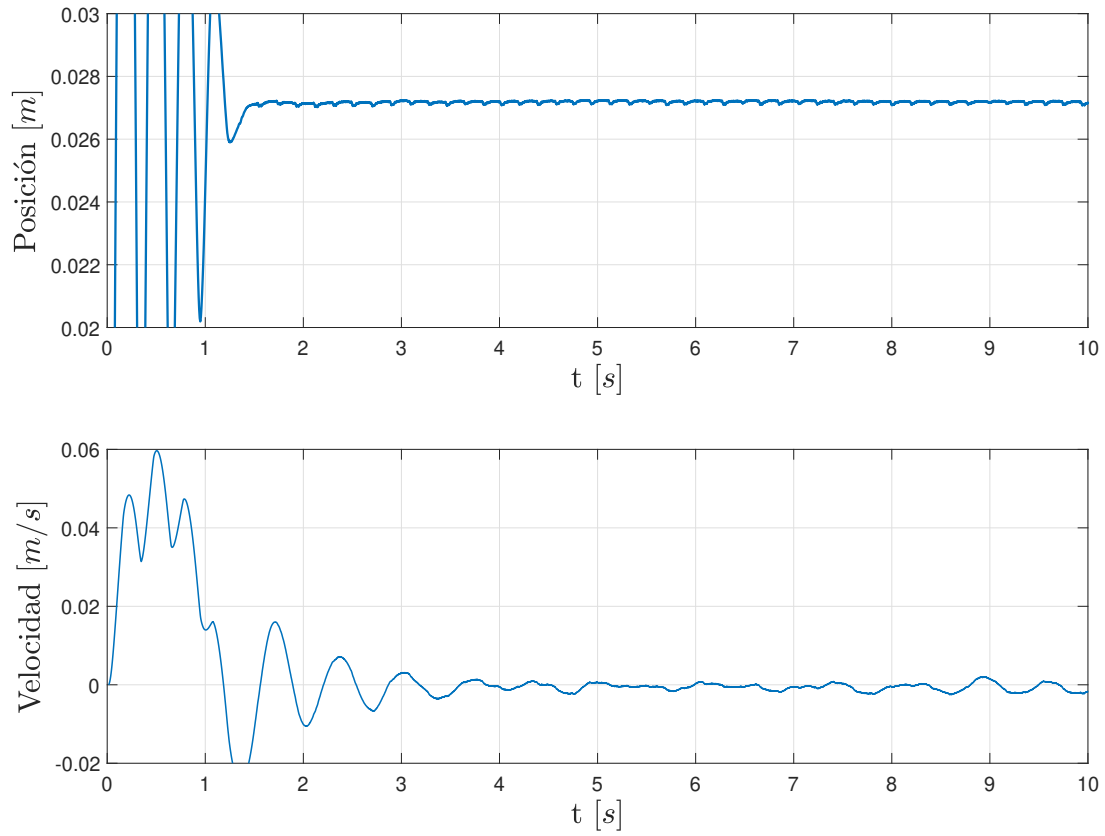


Figura 3.8: Valor experimental en la posición x_2 y velocidad para una entrada de control constante

Diseño y simulación numérica de controladores integrales lineales

En este capítulo se introducen el control lineal por realimentación de estados y el control no lineal por el método de linealización por realimentación, que en consecuencia permiten regular la salida del sistema de levitación magnética, posteriormente se añade la acción integral en cada control con la característica de rechazar ciertas clases de perturbaciones. Se muestran las características principales de esta clase de controladores, asimismo se explican las consideraciones para el diseño de las leyes de control, así como el resultado de las simulaciones numéricas de cada tipo de linealización.

4.1. Control por realimentación de estados

Considérese el sistema no lineal tomado de [Khalil, 2002],

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{4.1}$$

donde $f(0, 0) = 0$ y $f(x, u)$ es continuamente diferenciable en el dominio de $D_x \times D_u \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ que contiene al origen ($x = 0, u = 0$). Se desea diseñar una ley de control por realimentación de estados $u = \gamma(x)$ que establezca el origen del sistema (4.1). La linealización alrededor del origen resulta ser,

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.2}$$

donde,

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right|_{(x=0, u=0)} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right|_{(x=0, u=0)}$$

asumiendo que el par (A, B) es controlable o al menos estabilizante y que todos los estados se pueden medir, entonces se diseña el control $u = -Kx$, tal que K es una matriz que asigna los eigenvalores de $A - BK$ en el lado izquierdo del semiplano complejo.

Se pueden explicar las condiciones bajo las cuales se puede concluir sobre la estabilidad del origen del sistema (4.1) mediante el análisis de estabilidad del origen del sistema linealizado (4.2). El teorema de [Khalil, 2002] es conocido como el método indirecto de Lyapunov.

Teorema 8 Sea $(x = 0, u = 0)$ un punto de equilibrio del sistema (4.1).

Donde $f : D \rightarrow \mathbf{R}^n$ es continuamente diferenciable, D es una vecindad del origen y cuya linealización al rededor del punto de equilibrio,

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

entonces,

1. El origen es asintóticamente estable si $\mathbf{Re}(\lambda_i) < 0$ para todos los eigenvalores de A .
2. El origen es inestable si $\mathbf{Re}(\lambda_i) > 0$ para uno o más eigenvalores de A .

Los eigenvalores de $A - BK$ para los cuales el sistema tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable son determinados como las soluciones de la ecuación,

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})$$

Lo anterior es conocido como asignación de polos.

4.2. Linealización por realimentación

Sea el sistema no lineal [Khalil, 2002],

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

donde $f : x_0 \rightarrow \mathbf{R}^n$ y $g : x_0 \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$ son funciones suaves y continuamente diferenciables. El siguiente control,

$$u = \beta(x) + \alpha(x)v$$

con el cambio de variable,

$$z = T(x)$$

convierte la ecuación de estado no lineal en una ecuación de estado lineal controlable, debido a que $\beta(x)$ y $\alpha(x)$, donde $\beta : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ y $\alpha : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{p \times p}$ están definidos en el dominio $D_x \subset \mathbf{R}^n$ que contiene al origen, son funciones que cancelan la dinámica no lineal y cuya consecuencia es una función de la forma,

$$\dot{x} = Ax + Bv$$

donde v es la nueva variable de control. Para estabilizar el origen del sistema, se puede emplear el control visto en la sección anterior como $v = -Kx$, tal que $A - BK$ sea Hurwitz.

4.3. Diseño de la ley de control integral

El problema de estabilización del sistema es resuelto con el control $u = -Kx$ siempre y cuando no existan variaciones paramétricas y/o perturbaciones no desvanecientes. En ese sentido el control integral garantiza la estabilidad asintótica bajo perturbaciones constantes. De [Khalil, 2002] se considera el sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{4.3}$$

donde $f(x, u)$ y $h(x)$ son continuamente diferenciables en un dominio $D_x \times D_u \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$. Aquí x representa los estados, u la entrada de control y $y \in \mathbf{R}^p$ la salida controlada. Se desea diseñar un control por realimentación de estados tal que la salida tienda a una referencia constante en el estado estacionario, es decir cuando $t \rightarrow \infty$.

La tarea de regulación puede lograrse estabilizando el sistema (4.3) en un punto de equilibrio, donde la salida sea igual a la referencia, cuya condición de equilibrio requiere que exista un par $(x_{ss}, u_{ss}) \in D_x \times D_u$ donde x_{ss} y u_{ss} representan los estados y la entrada de control en el estado estacionario, tal que,

$$\begin{aligned}0 &= f(x_{ss}, u_{ss}) \\ 0 &= hx_{ss} - y_R\end{aligned}\tag{4.4}$$

Se asume que las ecuaciones (4.4) tienen una única solución. Siguiendo con el diseño del controlador, se integra el error de seguimiento $e = y - y_R$, es decir $\dot{z} = e$ y agregando el integrador al sistema (4.3),

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ \dot{z} &= y - y_R\end{aligned}\tag{4.5}$$

El control u es diseñado como una función de realimentación (x, z) tal que el sistema en lazo cerrado tiene un punto de equilibrio (\bar{x}, \bar{z}) con $\bar{x} = x_{ss}$. Si se linealiza el sistema (4.5) sobre $(x = x_{ss}, z = \bar{z}, u = u_{ss})$ para obtener,

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v = \mathcal{A}\xi + \mathcal{B}v, \quad \text{donde } \mathcal{E} = \begin{bmatrix} x - x_{ss} \\ z - \bar{z} \end{bmatrix}, v = u - u_{ss}\tag{4.6}$$

Las matrices A, B, C son en general dependientes de la y_R . Si el par (A, B) es controlable, entonces el par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ también es controlable y por lo tanto es posible diseñar K tal que $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$ sea Hurwitz.

Se puede dividir K como $K = [K_1 \ K_2]$ donde K_1 representa la ganancia correspondiente al control estático y K_2 a la ganancia de la acción integral, cuyo control tiene la forma,

$$u = K_1(x - x_{ss}) + K_2(z - \bar{z}) + u_{ss}\tag{4.7}$$

donde \bar{z} puede elegirse como,

$$\bar{z} = K_2^{-1}(u_{ss} - K_1 x_{ss}) \quad (4.8)$$

por lo tanto, el control por realimentación de estados con acción integral se resume en,

$$u = K_1 x + K_2 z \quad (4.9)$$

El control (4.9) es aplicado en el sistema (4.3) y como resultado se tiene el siguiente sistema en lazo cerrado,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, K_1 x + K_2 z) \\ \dot{z} &= h(x) - y_R \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde \dot{z} representa el estado extendido y $K_1 x + K_2 z$ es un control que estabiliza el sistema (4.3) en lazo cerrado.

El integrador \dot{z} tiene una salida constante z y cuyo error debe ser cero en el equilibrio. Es en ese sentido que radica su robustez y por lo tanto en un caso específico en el que existen perturbaciones constantes que se suman al control, la condición $e = 0$ se mantiene en el equilibrio de forma asintóticamente estable.

4.4. Simulación numérica del control por realimentación de estados con acción integral usando una linealización local

Sea el sistema (3.11), cuya linealización alrededor de un punto de operación \bar{x} de la forma,

$$\dot{x} = A\bar{x} + B\bar{u} \quad (4.11)$$

cuyos coeficientes de A y B al rededor del punto de operación son,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2K_m}{(a+\bar{x}_1)^3}\bar{x}_3^2 & -\frac{c_1}{m} & \frac{2K_m}{(a+\bar{x}_1)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{R_1}{L_1} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \tilde{u} \quad (4.12)$$

donde $\tilde{x} = x - \bar{x}$ y $\tilde{u} = u - \bar{u}$ representa una desviación del origen del sistema. Se utiliza el control con acción integral $u = K_1 x + K_2 z$, cuyas ganancias son diseñadas haciendo una asignación de polos arbitrarios y considerando los valores en los parámetros vistos en el capítulo 2, las ganancias son $K_1 = [43.22 \ 21.44 \ 7.44]$ y $K_2 = 177.36$.

El objetivo de esta prueba es unicamente verificar que el control integral funciona, así que se desea hacer una regulación, es decir llevar el magneto a la posición $x_1 = 0.023[m]$.

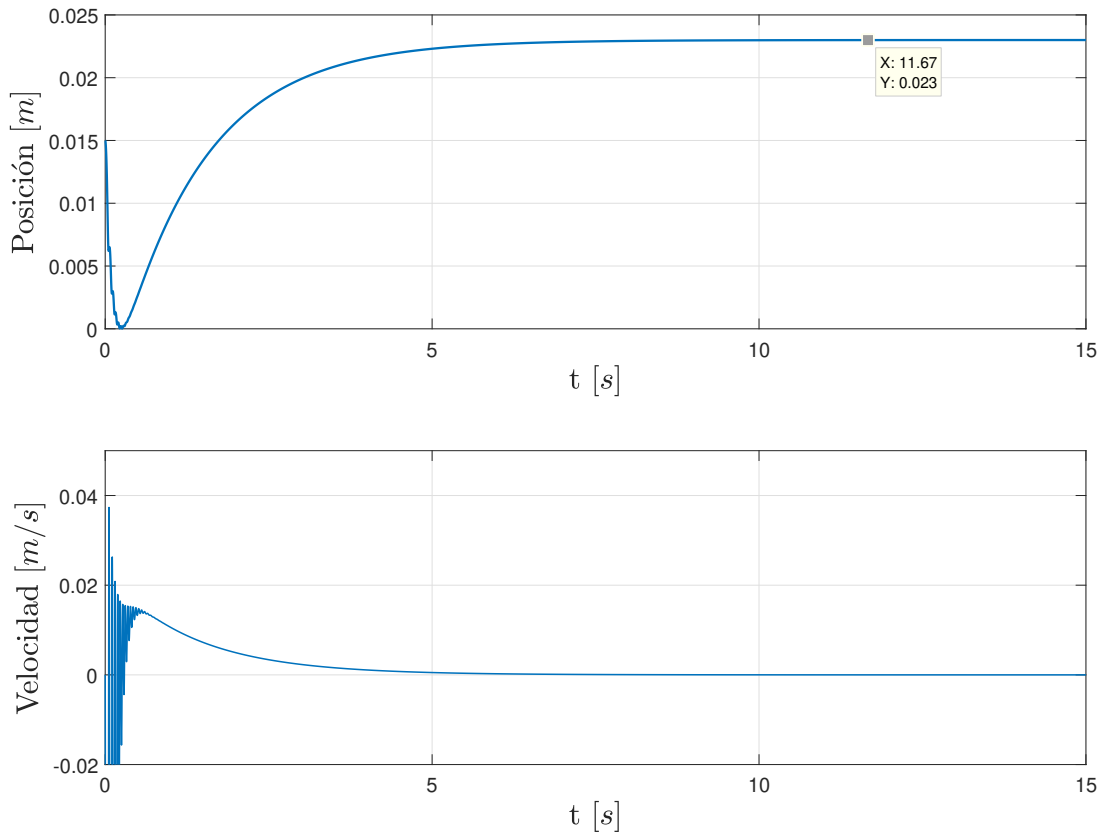


Figura 4.1: Resultado de la simulación para una regulación en $x_1 = 0.023[m]$

En la figura 4.1 se tiene el comportamiento de la posición y la velocidad del magneto, donde es posible ver que se comienza en el punto $x_1 = 0.015[m]$, ya que al ser un control lineal y local, es necesario comenzar cerca para no salir de la zona lineal y al tratarse de una tarea de regulación, se puede notar que la convergencia es exponencial al punto de operación $x_1 = 0.023[m]$.

Si ahora en lugar de hacer una tarea de regulación, se desea seguir una señal referencia,

4. DISEÑO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA DE CONTROLADORES INTEGRALES LINEALES

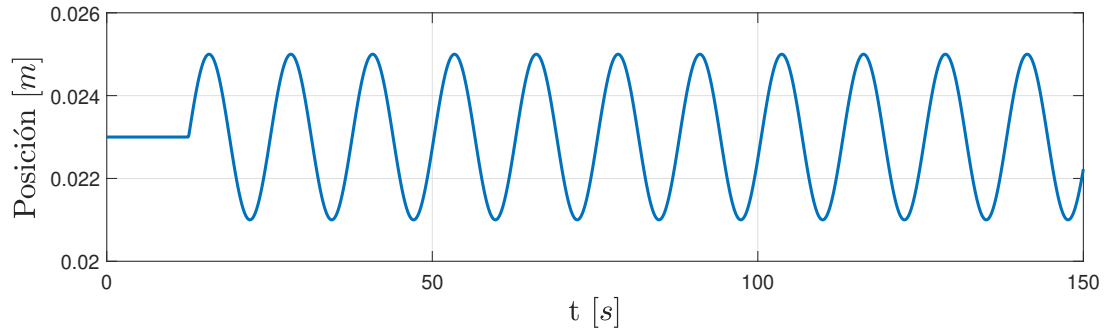


Figura 4.2: Señal de referencia senoidal

Al tratar de seguir la señal de referencia existe una deficiencia en la exactitud de $\pm 1[mm]$ que se puede observar en la figura 4.3,

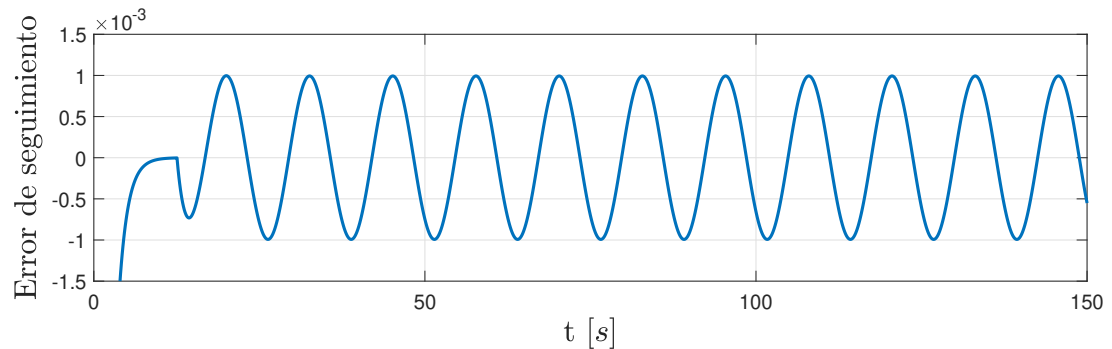


Figura 4.3: Error de seguimiento al seguir una señal de referencia senoidal

por lo tanto, es fácil notar que el control integral es bueno para cumplir con la tarea de regulación, sin embargo, es deficiente al momento de seguir una señal de referencia variante con el tiempo. Por otro lado, el tipo de linealización tiene la desventaja de no poder iniciar en el origen, ya que la región lineal no incluye al origen para este caso específico en la simulación.

Hasta el momento se analizó el caso cuando no existe una fuerza constante que perturbe al control. previamente se analizó porque el controlador integral es robusto ante perturbaciones constantes, así que sumando una constante $\rho = 6$ a la salida del control $u = K_1x + K_2z + \rho$, donde ρ es una perturbación, se muestra su robustez ante esta clase de perturbaciones que un control sin acción integral no es capaz de compensar, ya que desvía al punto de operación.

4.4 Simulación numérica del control por realimentación de estados con acción integral usando una linealización local

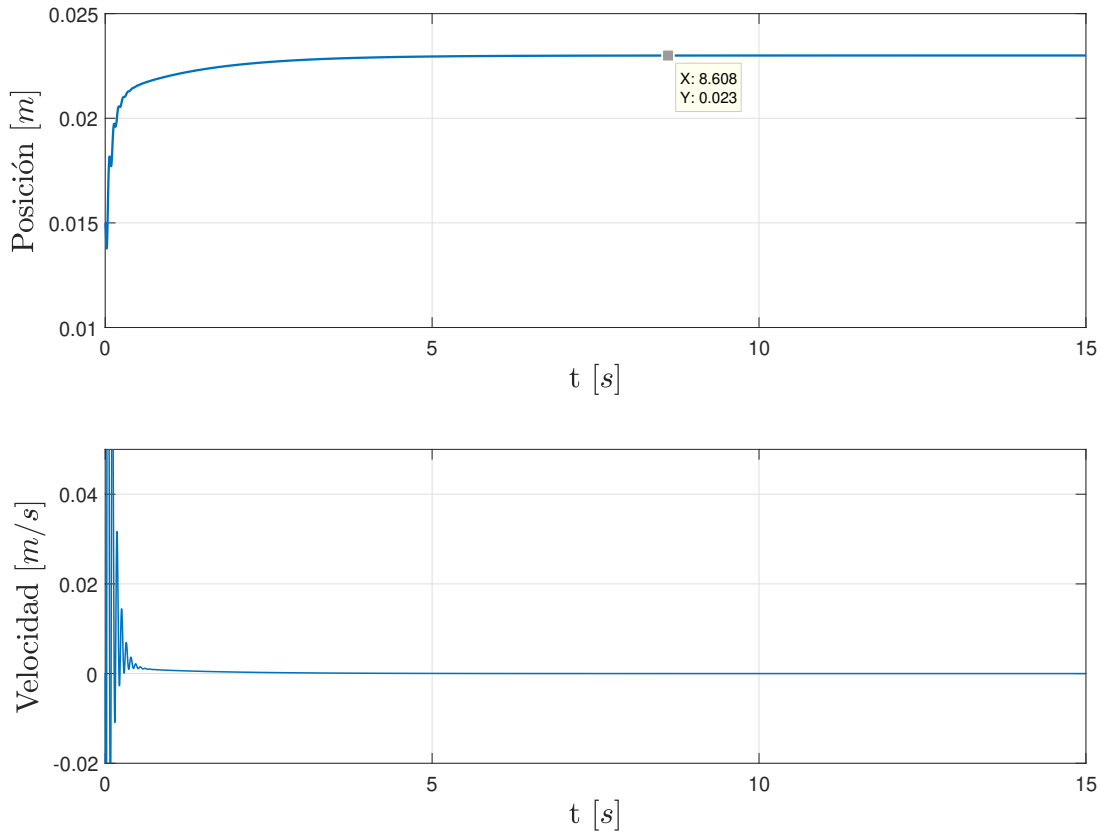


Figura 4.4: Resultado de la simulación con perturbación constante $\rho = 6$

En la figura 4.4 se muestra el comportamiento de la posición, pese a la perturbación constante. Se observa que el control es capaz de compensar esta clase de perturbaciones, sin embargo, si el tipo de perturbación es variante en el tiempo con derivada acotada, es decir, $\rho(t)$ como una señal senoidal de magnitud de 6[m].

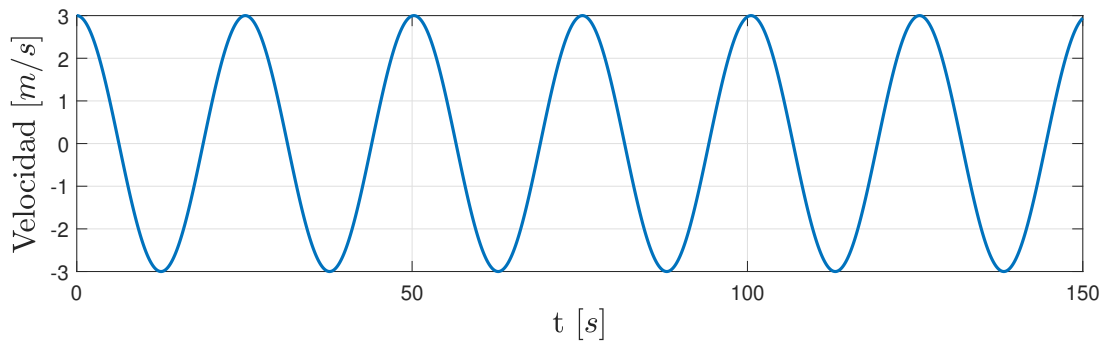


Figura 4.5: Perturbación senoidal $\rho(t)$ con amplitud de 6[m/s]

4. DISEÑO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA DE CONTROLADORES INTEGRALES LINEALES

Para el caso en el que se tiene una perturbación como en la figura 4.5, se tiene el siguiente comportamiento para la posición.

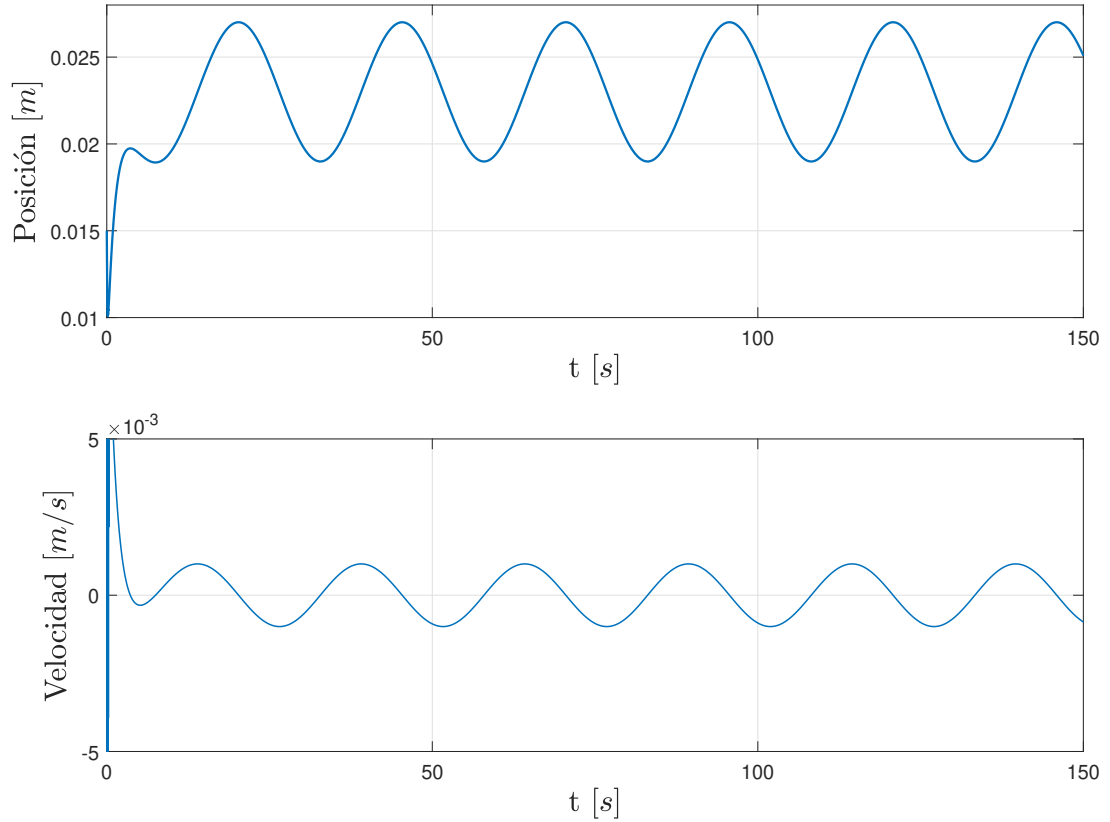


Figura 4.6: Resultado de la simulación con perturbación invariante con el tiempo $\rho(t)$

La figura 4.6 muestra una desviación completa del punto de operación, aún cuando el tiempo simulación se aumente. El control no es capaz de converger al punto de operación deseado y se puede concluir que el control integral es capaz de compensar perturbaciones constantes, mas no variantes en el tiempo.

4.5. Simulación numérica de una realimentación de estados con acción integral usando una linealización por realimentación

A partir de que se conoce la dinámica del sistema (3.11) es posible diseñar u como,

$$u = L_1 v + R_L x_3$$

y por lo tanto el nuevo sistema es,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= K_m \frac{x_3^2}{(x_1 + a)^2} - \frac{c_1}{m} x_2 - g \\ \dot{x}_3 &= v \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sin embargo el sistema aún no tiene la forma de una cadena de integradores pura, será necesario definir $h(x) = x_1$ como la salida del sistema y usando el difeomorfismo,

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ \dot{h}(x) \\ \ddot{h}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ K_m \frac{x_3^2}{(x_1 + a)^2} - \frac{c_1}{m} x_2 - g \end{bmatrix}$$

con la transformación inversa,

$$x = T^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \sqrt{\frac{1}{K_m}} \left[z_3 + g + \frac{c_1}{m} z_2 \right]^{\frac{1}{2}} (z_1 + a) \end{bmatrix}$$

que transforma al sistema en las nuevas coordenadas,

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ -\frac{c_1}{m} z_3 + \frac{2z_2(z_3 - \frac{c_1}{m} z_2 + g)}{a + z_1} + 2\sqrt{K_m} \frac{\left[z_3 + g + \frac{c_1}{m} z_2 \right]^{\frac{1}{2}}}{a + z_1} v \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Es posible definir una entrada de control v tal que el sistema (4.14) se convierte en una cadena de integradores pura,

$$v = \frac{1}{2\sqrt{K_m}} \frac{a + z_1}{\left[z_3 + g + \frac{c_1}{m} z_2 \right]^{\frac{1}{2}}} \left(w + \frac{c_1}{m} z_3 \right) - \frac{1}{\sqrt{K_m}} z_2 \left[z_3 - \frac{c_1}{m} z_2 + g \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

Finalmente, el sistema,

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ w \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

4. DISEÑO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA DE CONTROLADORES INTEGRALES LINEALES

donde w corresponde a la nueva variable de control. Ahora bien, se puede utilizar el mismo control integral y en un principio se pueden usar las mismas ganancias, sin embargo, será necesario escalar esas ganancias para sean más grandes, ya que este control si puede levantar el magneto desde el origen, por lo que requiere de más esfuerzo de control.

Finalmente se debe transformar a las coordenadas originales,

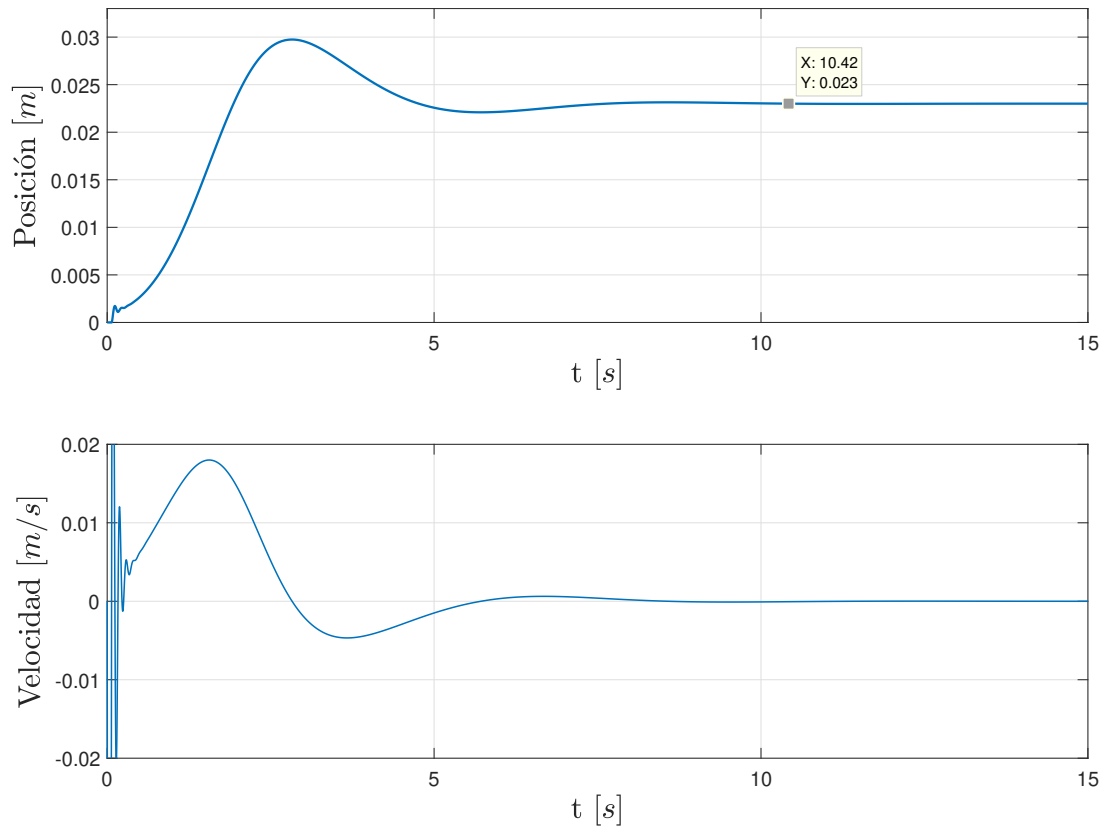


Figura 4.7: Resultado de la simulación para una regulación en el punto $x_1 = 0.023[m]$

A diferencia de una linealización local, esta técnica permite levantar al magneto desde el origen hasta el punto de operación que se desea para la regulación. En la figura 4.7 se puede observar nuevamente que se converge exponencialmente, sin embargo, al tratarse del mismo control integral es evidente que no puede cumplir con el seguimiento de una referencia, tampoco es capaz de compensar una perturbación variante en el tiempo $\rho(t)$.

Desarrollo del control integral discontinuo

En este capítulo se presenta la ley de control estabilizante y su respectiva función de Lyapunov para el caso discontinuo, así como la influencia del grado de homogeneidad del controlador integral y sus consideraciones para el diseño de la ley de control, el diseño de sus ganancias. Finalmente se muestra el resultado de las simulaciones numéricas del controlador usando el modelo del levitador magnético en regulación y seguimiento de una señal de referencia.

5.1. Ley de control estabilizante

En el diseño del control estabilizante se considera el siguiente sistema, como una cadena pura de integradores,

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= v \end{aligned} \tag{5.1}$$

y de [Zavala and Moreno,2017] se sabe que una ley de control estática es,

$$\begin{aligned} u &= -k_n \left[[x_n]^{\frac{1}{1+(n-1)d}} + \bar{k}_{n-1} [x_{n-1}]^{\frac{1}{1+(n-2)d}} + \dots + \bar{k}_2 [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + \bar{k}_1 x_1 \right]^{1+nd}, \\ \bar{k}_i &= \prod_{j=i}^{n-1} k_j^{\frac{1}{1+jd}} \end{aligned} \tag{5.2}$$

estabiliza el origen del sistema (5.1) con grado de homogeneidad $d \in [-\frac{1}{n}, 0]$, para valores adecuados de k_i . Si $d = 0$ se tiene una ley de control lineal, sin embargo como se menciona en el Capítulo 2 el control lineal solo da estabilidad exponencial, mientras que para valores de $d < 0$ el controlador nos brindara estabilidad en tiempo finito para el sistema (5.1). En el caso concreto $d = -\frac{1}{n}$ se tiene un control discontinuo capaz de rechazar perturbaciones acotadas.

5.2. Función de Lyapunov

De [Mercado,2017] se sabe que la función de Lyapunov que asegura la estabilidad del origen de sistema (5.1) en lazo cerrado usando la ley de control (5.2), se construye a partir de los siguientes elementos,

$$\begin{aligned}
 V_i(\bar{x}_i) &= \gamma_{i-1}V_{i-1}(\bar{x}_{i-1}) + W_i(\bar{x}_i), \\
 W_i(\bar{x}_i) &= \frac{1 + (i-1)d}{m} |x_i|^{\frac{m}{1+(i-1)d}} - [\nu_{i-1}]^{\frac{m-(1+(i-1)d)}{1+(i-1)d}} x_i + \left(1 - \frac{1 + (i-1)d}{m}\right) |\nu_{i-1}|^{\frac{m}{1+(i-1)d}}, \\
 \nu_i(\bar{x}_i) &= -k_i[\sigma_i]^{1+id}, \\
 \sigma_i(\bar{x}_i) &= [x_i]^{\frac{1}{1+(i-1)d}} - [\nu_{i-1}]^{\frac{1}{1+(i-1)d}} = [x_i]^{\frac{1}{1+(i-1)d}} + k_{i-1}^{\frac{1}{1+(i-1)d}} \sigma_{i-1}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

La demostración se realiza en [Zavala and Moreno,2017] mediante backstepping suponiendo que cada estado funciona como una ley de control virtual para cada una de las cadenas de integradores de menor orden. Se observa que en (5.3) la función de Lyapunov se va construyendo recursivamente con funciones de Lyapunov para sistemas de orden inferior y controladores de la estructura de (5.2) donde $\nu_i(\bar{x}_i)$ corresponde a una ley de control de orden i y la función $W_i(\bar{x}_i)$ permite relacionar el estado x_i con la variable ν_{i-1} con la ley de control para un sistema de orden menor, con ello se logra mostrar que la ley de control (5.2) lleva al penultimo estado de la cadena de integradores a un subespacio que corresponde a la ley de control de orden menor, provocando que los estados se comporten como variables de control virtual y estabilicen el origen del sistema (5.1). De [Mercado, 2017] es posible reescribir ν_i como,

$$\nu_i = -k_i \left[[x_i]^{\frac{1}{1+(i-1)d}} + [\nu_{i-1}]^{\frac{1}{1+(i-1)d}} \right]^{1+id}, \quad \forall i = 3, \dots, n \tag{5.4}$$

donde ν_i es un control estabilizante de orden reducido que estabiliza el origen del sistema (5.1).

5.3. Diseño de la ley de control integral

De la ley de control (5.2), se añade la acción integral y de [Mercado, 2017] se considera que tiene la siguiente estructura,

$$\dot{z} = -k_{I1} \left[x_1 + k_{I2} x_2^{\frac{1}{1+d}} + \dots + k_{In} x_n^{\frac{1}{1+(n-1)d}} \right]^{1+(n+1)d} \tag{5.5}$$

se conserva la homogeneidad y ya que la potencia no puede ser negativa se tiene que $d \geq -\frac{1}{n+1}$. La forma de la acción integral puede tener cualquier estructura siempre y cuando se satisfaga [Mercado, 2017],

$$\begin{aligned}
 \dot{z}(x) &= k_{I1} \phi_z(x), \quad \phi_z : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \text{ y homogénea de grado } 1+(n+1)d \\
 \phi_z(x_1, 0, \dots, 0) &= -\psi_z(x_1), \quad x_1 \psi_z(x_1) > 0
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

la condición anterior resulta ser una condición natural, debido a que en el equilibrio del sistema (5.1) el único estado diferente de cero es x_1 , donde la ganancia k_{I1} limita la acción integral.

Es posible formular el siguiente teorema para $d = -\frac{1}{n+1}$ [Mercado, 2017].

Teorema 9 *Sea el sistema (5.1) y elijase el grado de homogeneidad $d = -\frac{1}{n+1}$. Entonces la ley de control*

$$\begin{aligned}
 v &= -k_n \left[|x_n|^{\frac{1}{1+(n-1)d}} + \bar{k}_{n-1} |x_{n-1}|^{\frac{1}{1+(n-2)d}} + \dots + \bar{k}_2 |x_2|^{\frac{1}{1-d}} + \bar{k}_1 x_1 \right]^{r_1+nd} + z \\
 \bar{k}_i &= \prod_{j=i}^{n-1} k_j^{\frac{1}{r_j+1}}, \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \\
 \dot{z} &= -k_{I1} \left[x_1 + k_{I2} x_2^{\frac{1}{1+d}} + \dots + k_{In} x_n^{\frac{1}{1+(n-1)d}} \right]^{1+(n+1)d}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Ya que el grado de homogeneidad es $d = -\frac{1}{n+1}$, es posible elegir k_{I1} tal que el controlador (5.7) estabiliza el origen del sistema (5.1) en tiempo finito, rechazando perturbaciones variantes en el tiempo y con derivada acotada por la constante Lipschitz $L < k_{I1}$.

5.4. Diseño de las ganancias del controlador

La función de Lyapunov homogénea de un sistema en lazo cerrado de orden n es,

$$\begin{aligned}
 V_n(\bar{x}_n) &= \gamma_{n-1} V_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) + \frac{1 + (n-1)d}{m} |x_n|^{\frac{m}{1+(n-1)d}} - k_{n-1}^{\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} \left[|x_{n-1}|^{\frac{1}{1+(n-2)d}} + \dots + k_1 x_1 \right] x_n + \\
 &\quad \left(1 - \frac{1 + (n-1)d}{m} \right) k_{n-1}^{\frac{m}{1+(n-1)d}} \left[|x_{n-1}|^{\frac{1}{1+(n-2)d}} + \dots + k_1 x_1 \right]^m
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

cuyas ganancias serán aquellas que logren que la derivada de la función candidata de Lyapunov sea negativa definida. Es posible hacer que la derivada de la función de Lyapunov

$$\dot{V}_n(x) = F_1(x) - k_I F_2(x, \dot{\rho}(t))$$

sea negativa definida para valores adecuados de $k_{\{i=1, \dots, n\}}$, restringiendo el valor máximo de la función en la esfera unitaria $\|x\|_{r,p} \leq 1$, en donde las ganancias del controlador se encuentran acotadas y cuyo detalle se puede leer en [Mercado, 2017].

Por otro lado, se sabe que la ganancia integral k_I se encuentra acotada por $k_I > L$ y debe ser suficientemente pequeña para no afectar la estabilidad del origen del sistema (5.1).

5.5. Simulación numérica del control Integral discontinuo

Este capítulo ha mostrado como el control integral lineal resuelve el problema de regulación, así como de robustez ante cierto tipo de perturbaciones, sin embargo, es deficiente al tratar de seguir una señal de referencia y no es capaz de compensar perturbaciones variantes en el tiempo $\rho(t)$.

El control integral discontinuo resuelve la problemática anterior y para ello considere el sistema lineal (4.16) y utilizando la ley de control integral discontinuo para sistemas de tercer orden de [Mercado, 2017],

$$w = -k_3 \left[|z_3|^2 + k_2^2 |z_2|^{\frac{4}{3}} + k_2^2 k_1^{\frac{4}{3}} z_1 \right]^{\frac{1}{4}} + z_4 \quad (5.9)$$

$$\dot{z}_4 = -k_{I1} \left[z_1 + k_{I2} |z_2|^{\frac{4}{3}} + k_{I3} |z_3|^2 \right]^0 \quad (5.10)$$

es posible estabilizar el origen del sistema (4.16), sin embargo, como el objetivo es un seguimiento de la posición en un punto de operación, se puede hacer la suposición de que z corresponde al error de seguimiento, cuya dinámica se puede definir en \dot{z} como,

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - \bar{x}_1 \\ z_2 &= x_2 - \dot{\bar{x}}_1 \\ z_3 &= K_m \frac{x_3^2}{(x_1 + a)^2} - \frac{c_1}{m} x_2 - g - \bar{z}_3 \end{aligned}$$

si se toma ventaja del concepto de homogeneidad para las ganancias (k_3, k_2, k_1, k_{I1}) , entonces se puede tener un escalamiento que estabiliza al sistema. Las nuevas ganancias tienen la forma $(\lambda^{1-\frac{1}{2}} k_3, \lambda^{1-\frac{2}{3}} k_2, \lambda^{1-\frac{3}{4}} k_1, \lambda k_{I1})$.

Considérese los siguientes valores en los parámetros $g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$, $c_1 = 0.1 \left[\frac{N \cdot s}{m} \right]$, $L_0 = 0.2450[H]$, $K_m = 33[mH \cdot m]$, $a = 0.0088[m]$, $R_L = 3.33[\Omega]$ y las ganancias $k_1 = 4.2$, $k_2 = 7.14$, $k_3 = 31.8$, $k_{I1} = 1.25$ y $k_{I2} = k_{I3} = 0$, con las condiciones iniciales arbitrarias para cada uno de los estados $x_1(0) = 0[m]$, $x_2(0) = 0 \left[\frac{m}{s} \right]$ y $x_3(0) = 0.01[A]$,

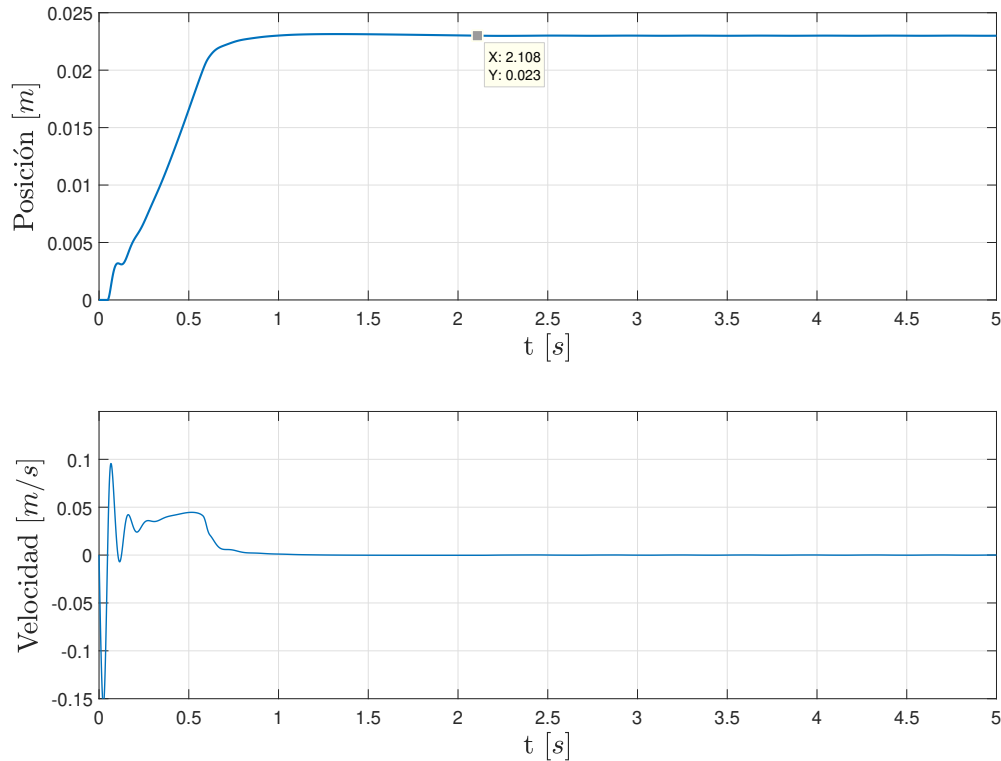


Figura 5.1: Resultado de la posición y velocidad del magneto en la simulación numérica

se desea llevar el magneto del origen al punto de operación $x_1 = 0.023[m]$ y la Figura 5.1 muestra el comportamiento de la posición y la velocidad del magneto, a lo cual se observa una convergencia en tiempo finito y no de manera exponencial como en el caso lineal cuando se tiene una tarea de regulación.

El control integral discontinuo hereda las características de robustez del caso lineal, así que se puede dar por hecho que es capaz de compensar perturbaciones constantes, sin embargo, sea el caso en el que se tiene una señal senoidal $\rho(t)$ que se suma al canal de control como una perturbación invariante con el tiempo,

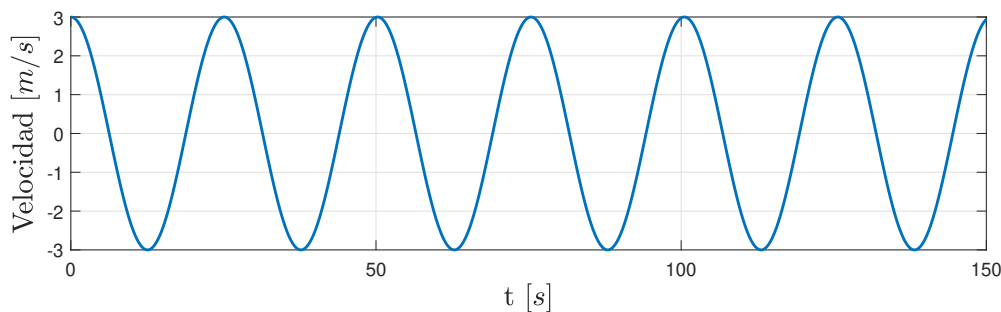


Figura 5.2: Perturbación senoidal $\rho(t)$ con amplitud de $6[m/s]$

En la Figura 5.3, se observa el comportamiento de la posición del magneto, ya que aún bajo la influencia de una fuerza externa logra llegar al punto de operación deseado con una convergencia en tiempo finito.

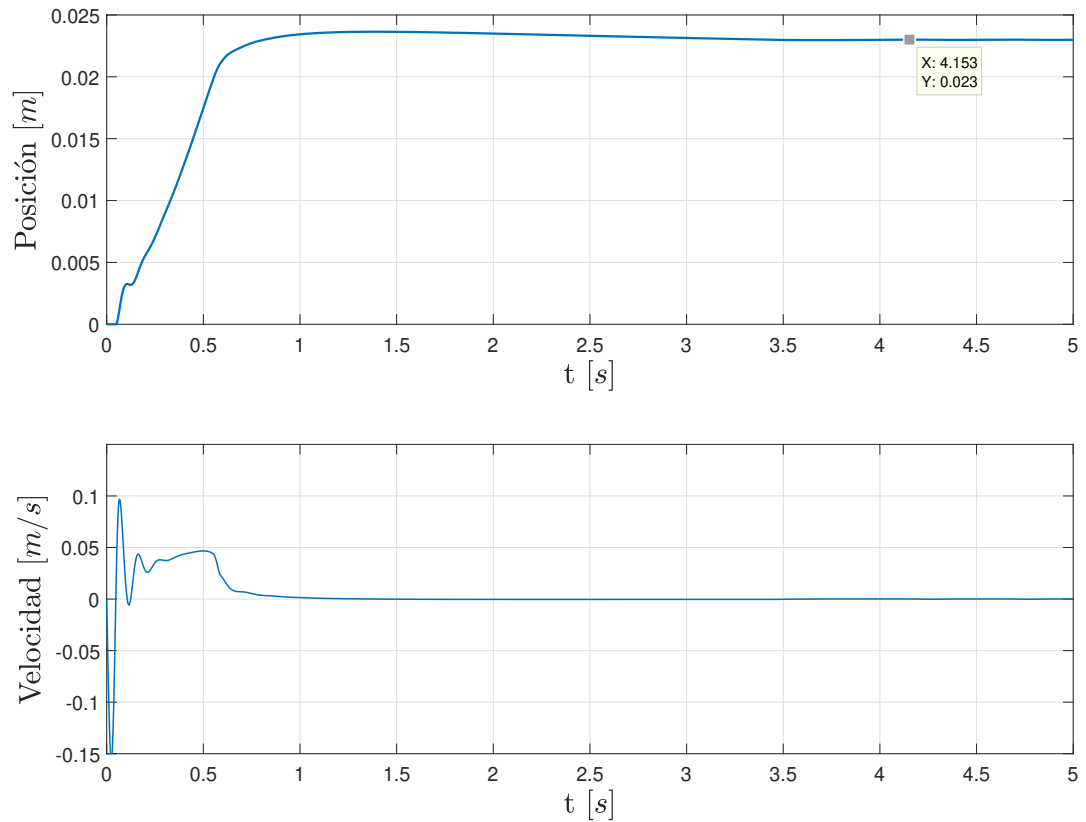


Figura 5.3: Posición y Velocidad en el magneto frente a la perturbación senoidal $\rho(t)$

Una característica de este controlador discontinuo es su capacidad de estimar la perturbación si se observa la salida del integrador en la Figura 5.4,

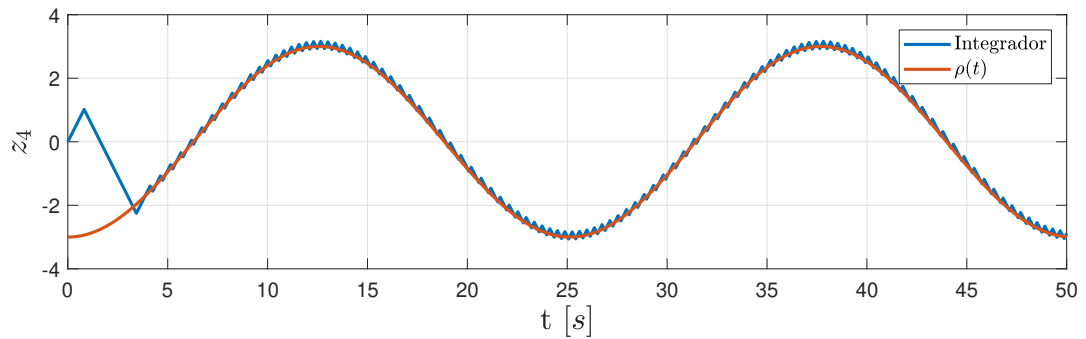


Figura 5.4: Comportamiento del integrador z_4 en la simulación numérica

Ahora bien, considere los mismos valores en los parámetros, así como las mismas condiciones iniciales.

Se desea seguir la siguiente señal de referencia,

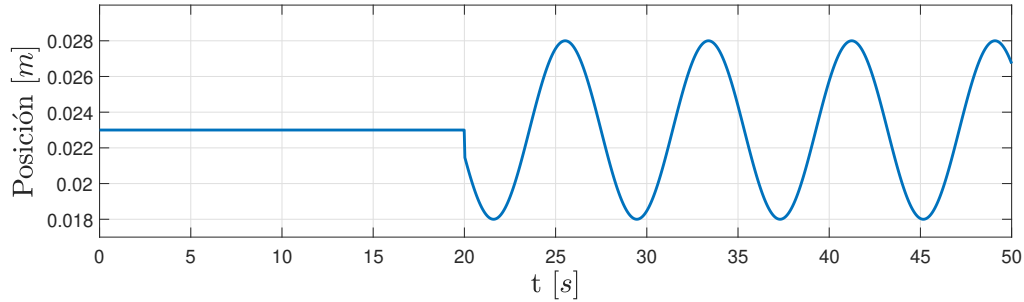


Figura 5.5: Señal de referencia

El comportamiento de la posición y la velocidad del magneto se muestra en la Figura 5.6. Es posible ver que la regulación se logra, pasando los $t = 20[s]$ entra la señal senoidal y se tiene el comportamiento deseado,

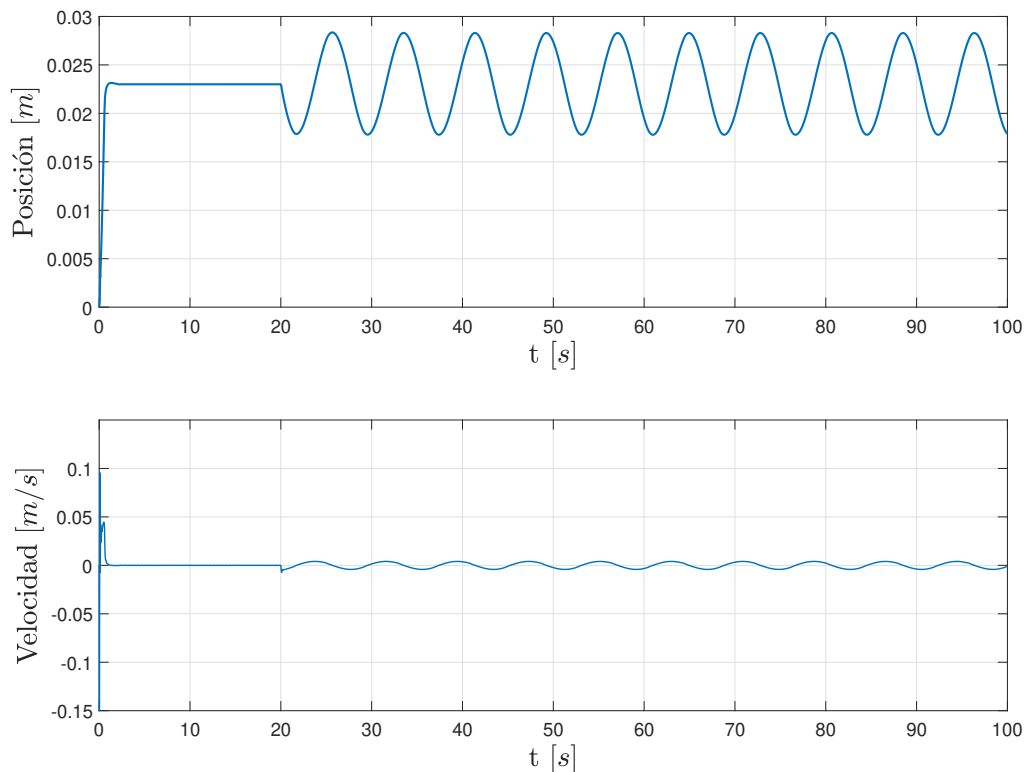


Figura 5.6: Comportamiento de la posición y la velocidad durante el seguimiento de la referencia en la simulación numérica

Lo anterior se puede justificar observando el error de seguimiento y la entrada de control,

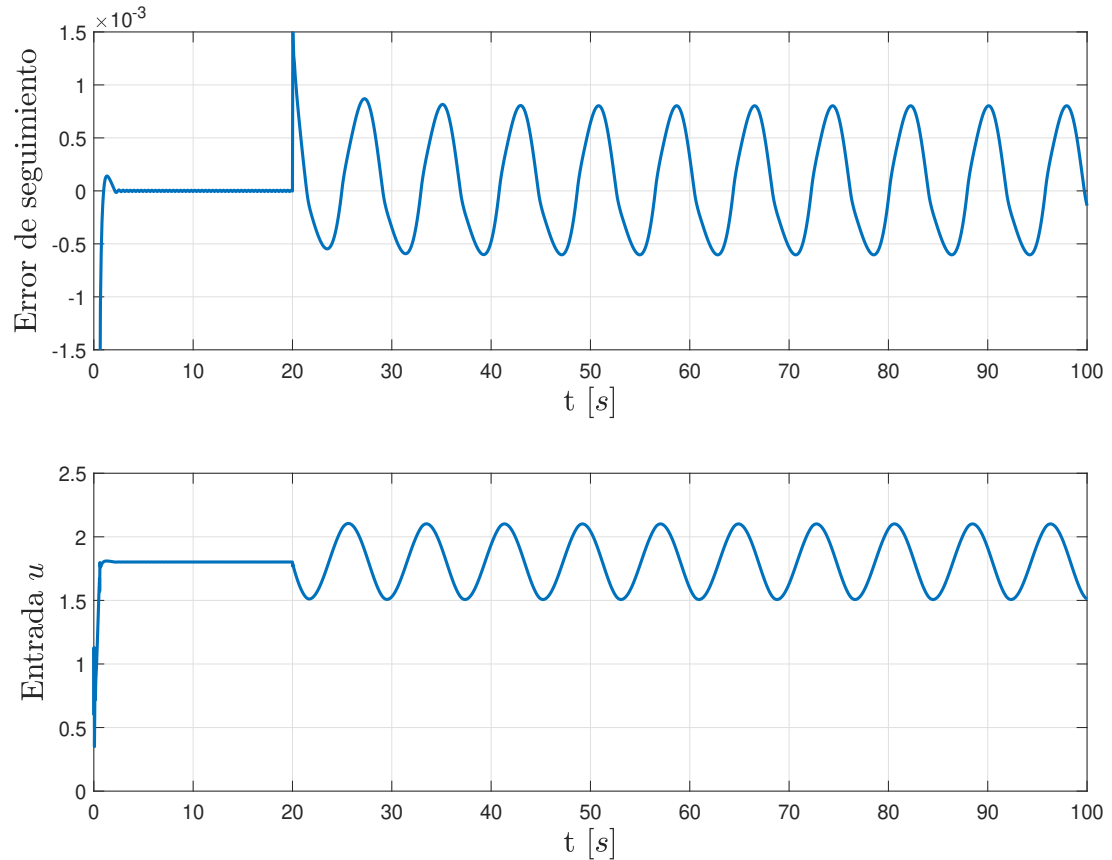


Figura 5.7: Error de seguimiento y entrada de control

La Figura 5.7 muestra que el error es lo suficientemente pequeño para considerar que el seguimiento de la referencia se ha logrado.

Se puede concluir que el control integral discontinuo tiene una convergencia en tiempo finito y es capaz de compensar perturbaciones variantes en el tiempo $\rho(t)$ con derivada acotada.

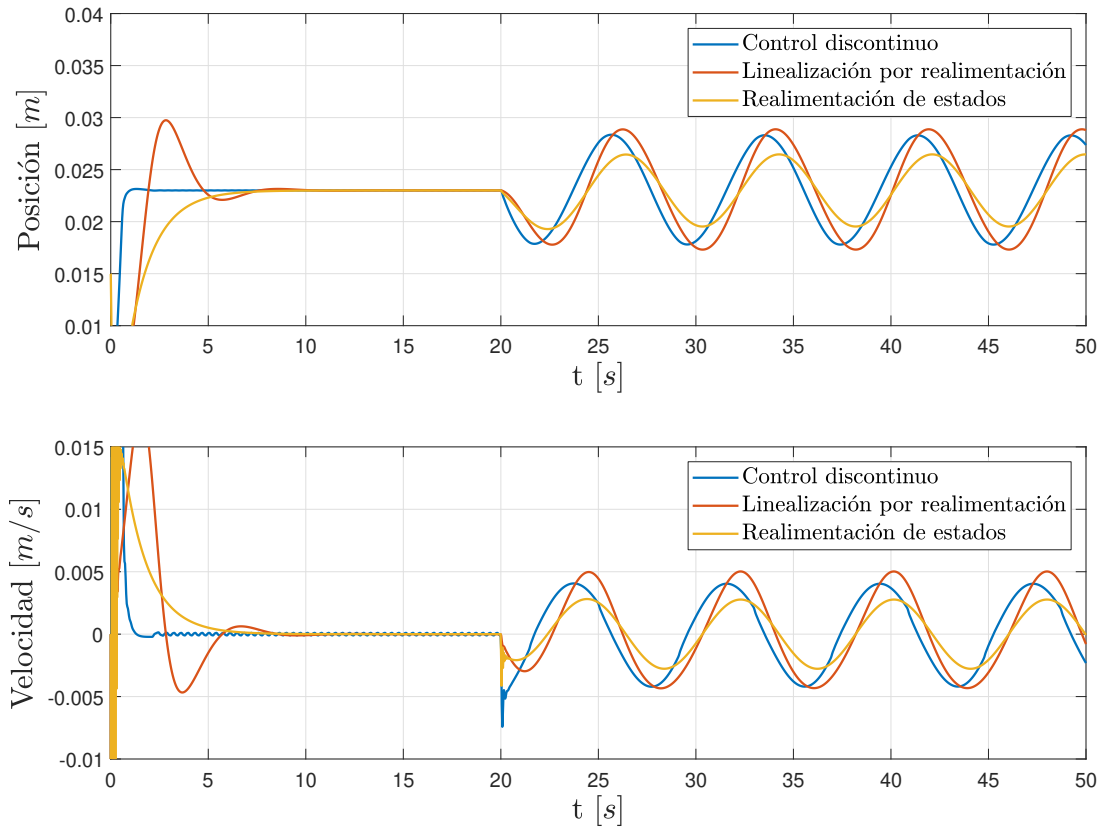


Figura 5.8: Comparación de la posición y velocidad entre los controladores no lineales y lineal

Ahora bien la Figura 5.8 muestra el desempeño del control integral discontinuo contra los controles anteriores por linealización, cuando se tiene un regulación y un seguimiento de una señal de referencia senoidal. Es de notar, la velocidad de convergencia del control discontinuo sin tener un sobrepaso que pueda considerarse peligroso, así como su capacidad para seguir la señal de referencia con un error despreciable. Lo anterior se muestra en la Figura 5.9, así como una entrada continua de control con un menor esfuerzo contra los otros controladores.

5. DESARROLLO DEL CONTROL INTEGRAL DISCONTINUO

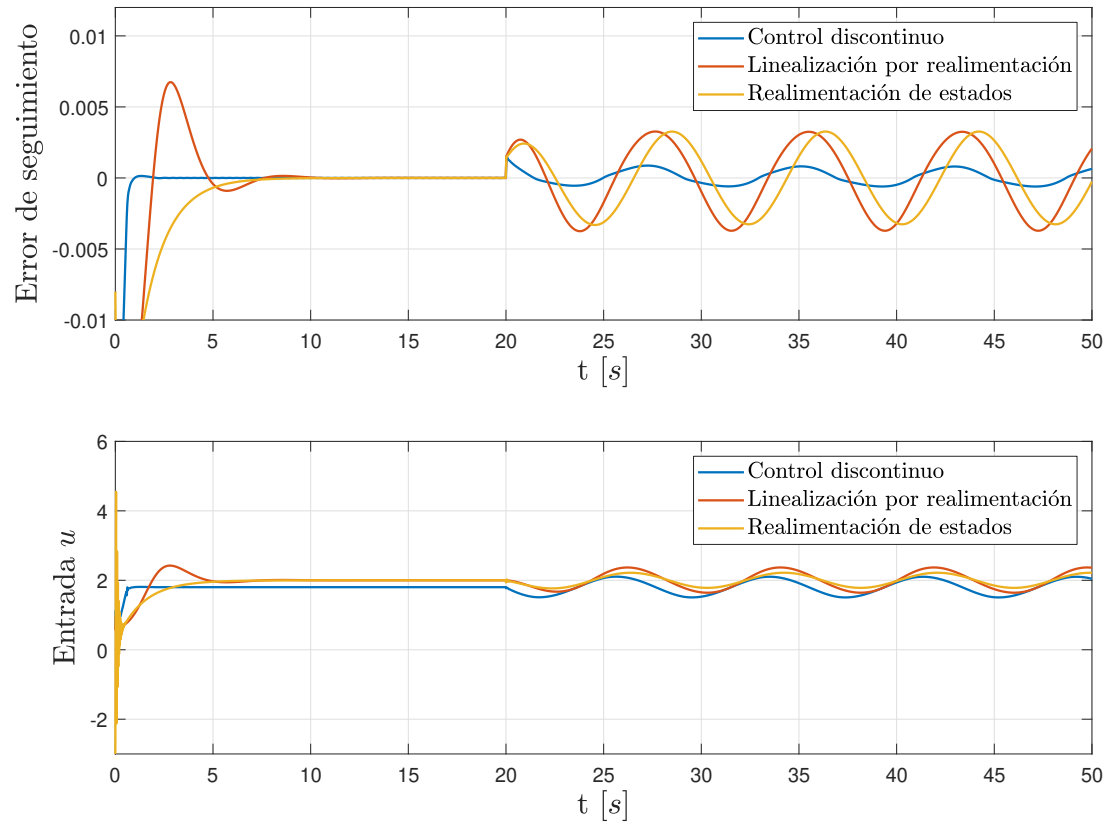


Figura 5.9: Comparación del error de seguimiento y entrada u entre los controladores no lineales y lineales

El siguiente capítulo muestra la verificación experimental en el levitador MagLev 730 usando los controladores anteriores.

Verificación experimental de los controladores integrales

En este capítulo se muestran los resultados experimentales obtenidos de cada controlador en el levitador magnético haciendo un énfasis en sus características con el propósito de mostrar las bondades del control integral discontinuo. Finalmente se discuten algunas diferencias entre el desempeño de los controladores lineales y no lineal

6.1. Control integral por realimentación de estados con acción integral usando una linealización local

Usando la linealización (4.12) en torno a un punto de operación arbitrario. Se desea realizar una regulación en el punto $x_1 = 0.023[m]$, empleando los siguientes valores para las ganancias en el control $K_1 = [61.74 \ 30.62 \ 10.63]$ y $K_2 = 253.37$,

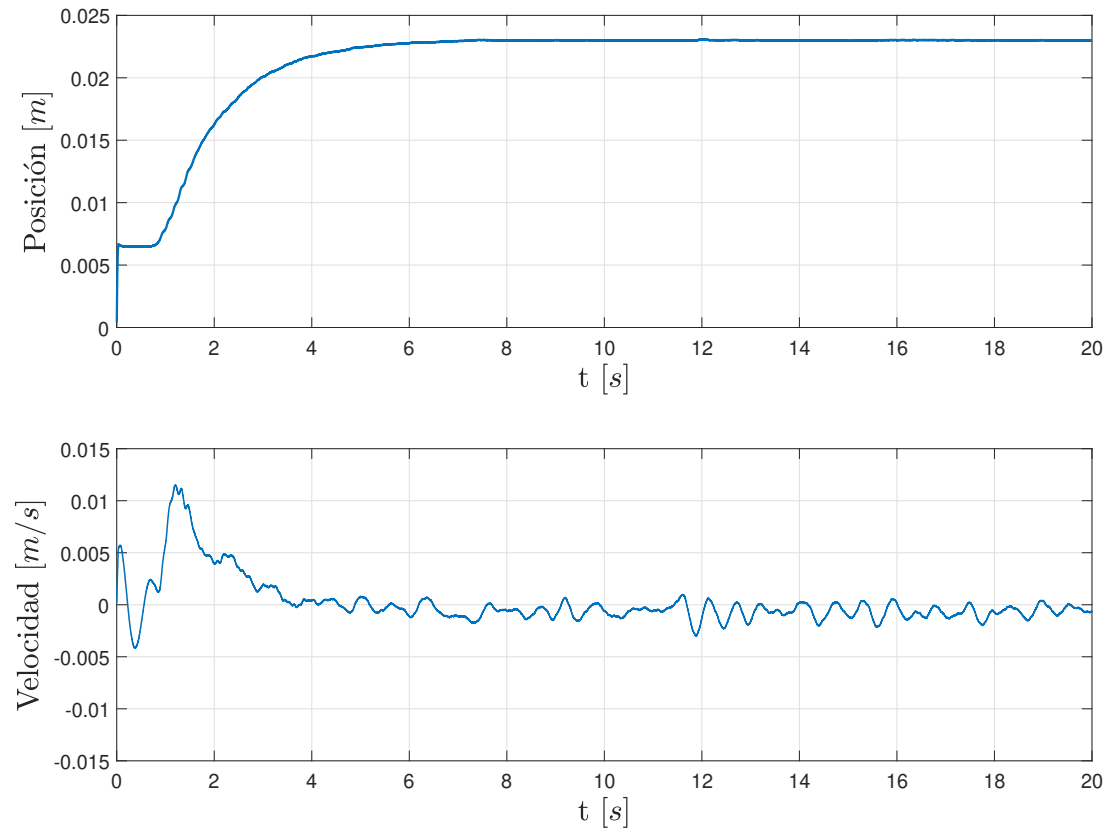


Figura 6.1: Posición y velocidad del magneto usando el control por realimentación de estados con acción integral

La figura 6.1 muestra el comportamiento de la posición y velocidad del magneto durante el control por realimentación de estados. El primer punto a observar es que este controlador no puede iniciar en el origen, ya que se se sale de la zona lineal y por otro lado se observar que la velocidad de convergencia es de tipo exponencial. Ahora bien, al observar el error de seguimiento durante la regulación,

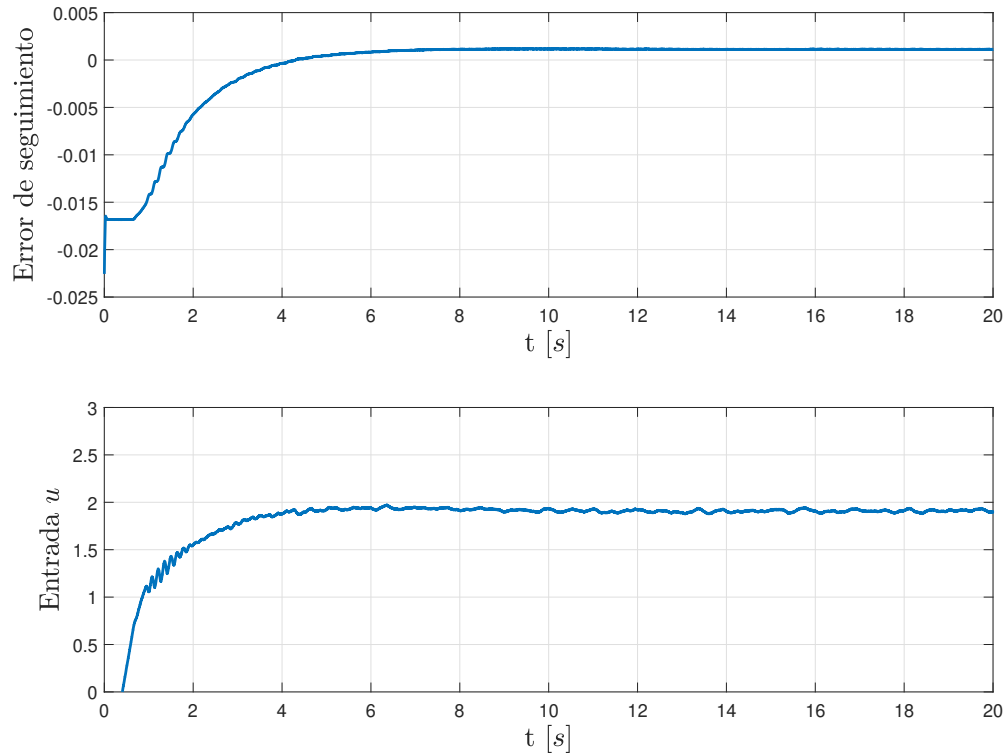


Figura 6.2: Error de seguimiento y entrada al levitador

El error de seguimiento en la figura 6.2 tiende a ser cero, justo como se espera que sea en el control integral. La ganancias se diseñaron tratando de evitar en lo posible sobrepasos que puedan provocar que se salga de la zona lineal y que como consecuencia se inestabilice el sistema.

Si se agrega una perturbación constante por software, el error de seguimiento es prácticamente el mismo y se da por hecho que el control en efecto es robusto frente a perturbaciones de este tipo. Por otro lado, si la prueba se realiza agregando por software una perturbación rampa, tal como se muestra en la Figura 6.3,

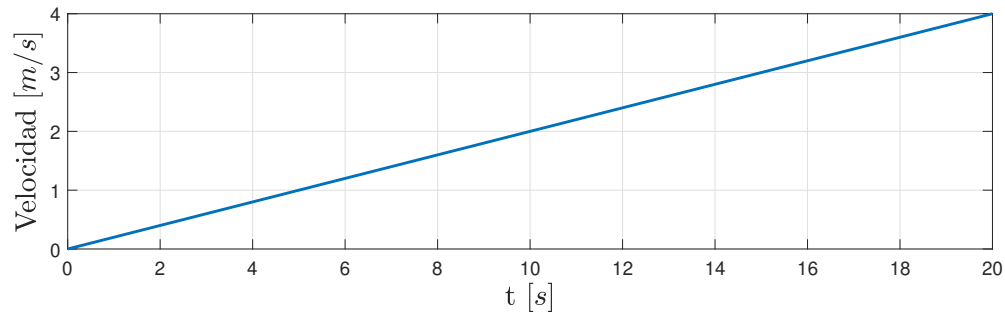


Figura 6.3: Perturbación rampa

Se espera que la posición del magneto tenga una desviación del punto de operación, ya que la derivada de la rampa será el escalón. La figura muestra el comportamiento de la posición y confirma la desviación del punto de operación

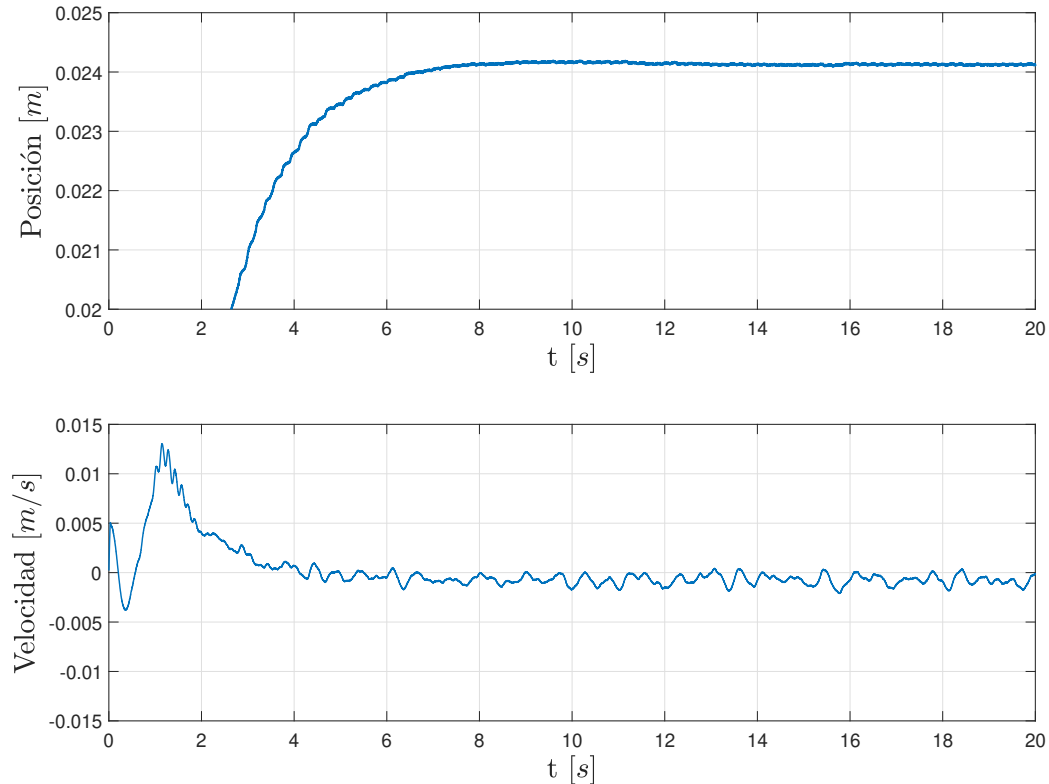


Figura 6.4: Posición y velocidad del magneto frente a una perturbación rampa

La Figura 6.4 muestra claramente una desviación del punto de operación, ya que este control no es capaz de compensar perturbaciones no desvanecientes en el origen.

Si se desea seguir una señal de referencia este control intentará seguir dicha señal, sin embargo, tendrá una capacidad deficiente de mantener el error de seguimiento en un valor casi nulo. Nuevamente el riesgo constante es salir de la zona lineal, ya que la señal a seguir deberá estar contenida en la región en la que el control es viable.

6.1.1. Control por realimentación de Estados con acción integral usando una linealización por realimentación

La ventaja de usar esta técnica de linealización es que se puede usar el control con acción integral continuo desde el origen, sin tener el riesgo de salir de la zona lineal, ya que no es una técnica local. Se da por hecho que la regulación es perfectamente posible, de manera que se analizaran los casos perturbados y de seguimiento.

Se asumen exactamente los mismo valores en los parámetros mencionados en el capítulo 4, con las mismas condiciones iniciales y sea la perturbación tipo rampa de la Figura 6.3, entonces el comportamiento de la posición y la velocidad en el magneto es,

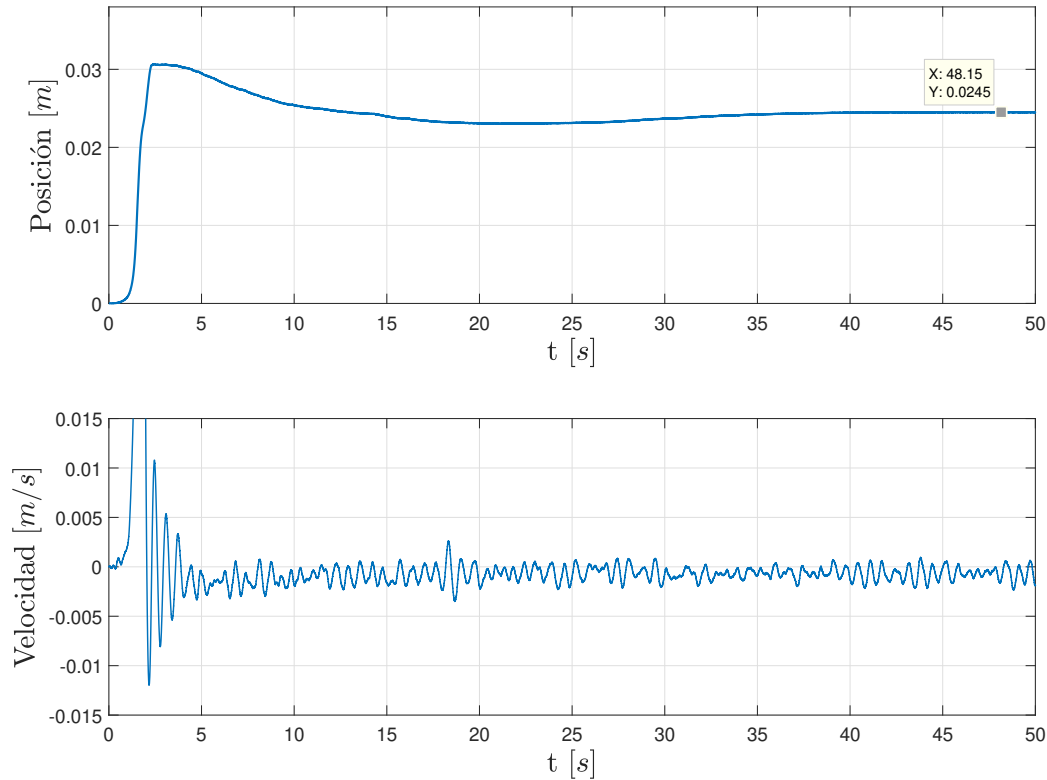


Figura 6.5: Comportamiento de la posición y la velocidad

La Figura 6.5, muestra que frente a esta clase de perturbación no es posible realizar una regulación de la posición en el punto de operación $x_1 = 0.023[m]$. Si bien esta técnica permite levantar al magneto desde el origen y modificar con más libertad las ganancias del controlador, el control nunca podrá lograr una correcta regulación frente a esta clase de perturbaciones.

6. VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS CONTROLADORES INTEGRALES

Ahora bien, en el caso donde la señal de perturbación es senoidal de amplitud $6[m/s]$ como en la Figura 6.6,

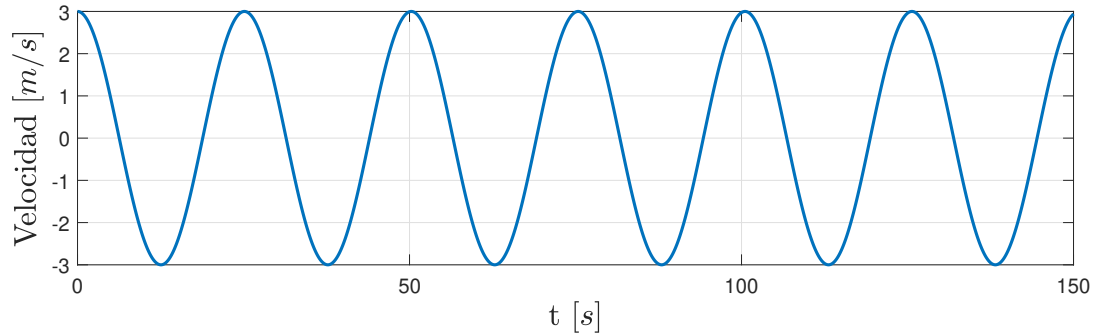


Figura 6.6: Perturbación senoidal con amplitud de $6[m]$

Se observa el siguiente comportamiento en la posición y velocidad del magneto, tomando en cuenta que se desea realizar una regulación en el punto de operación $x_1 = 0.023[m]$

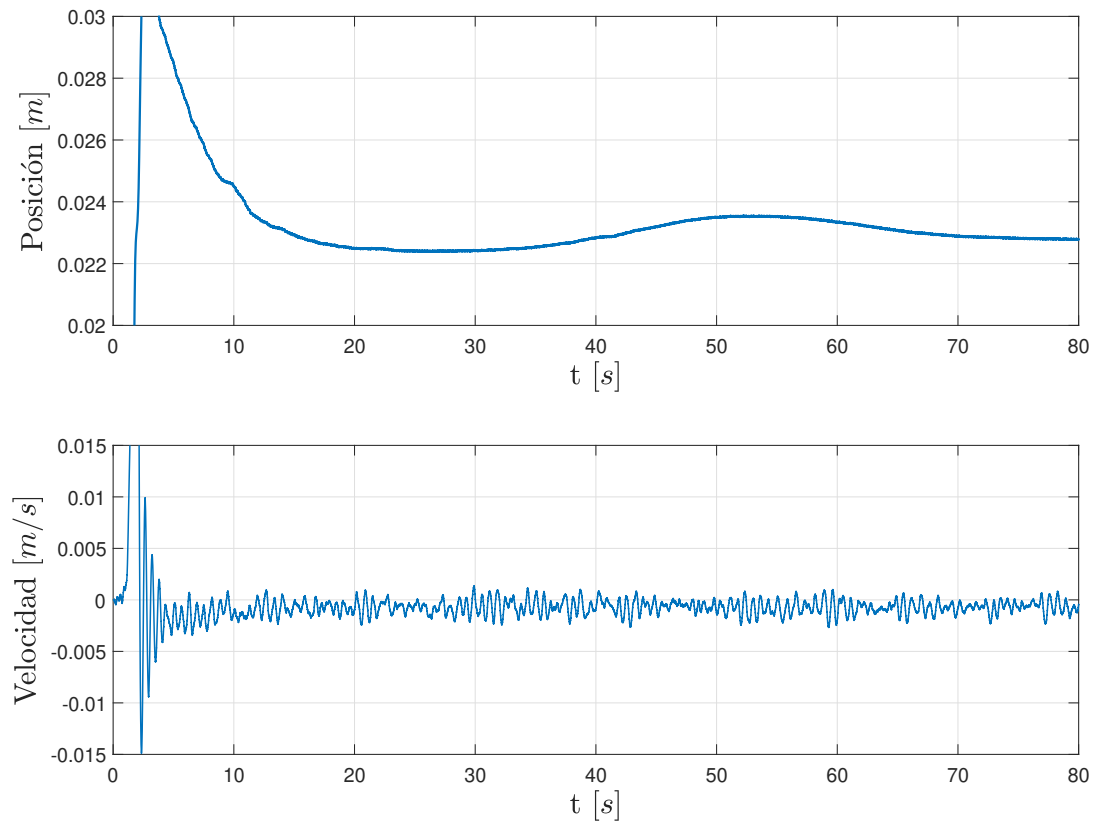


Figura 6.7: Posición y la velocidad frente a una perturbación senoidal

La Figura 6.7 muestra claramente que no es posible realizar la regulación ya que tiende a seguir la señal de perturbación en una menor escala. Si se observa el comportamiento en la Figura 6.8 del error de seguimiento,

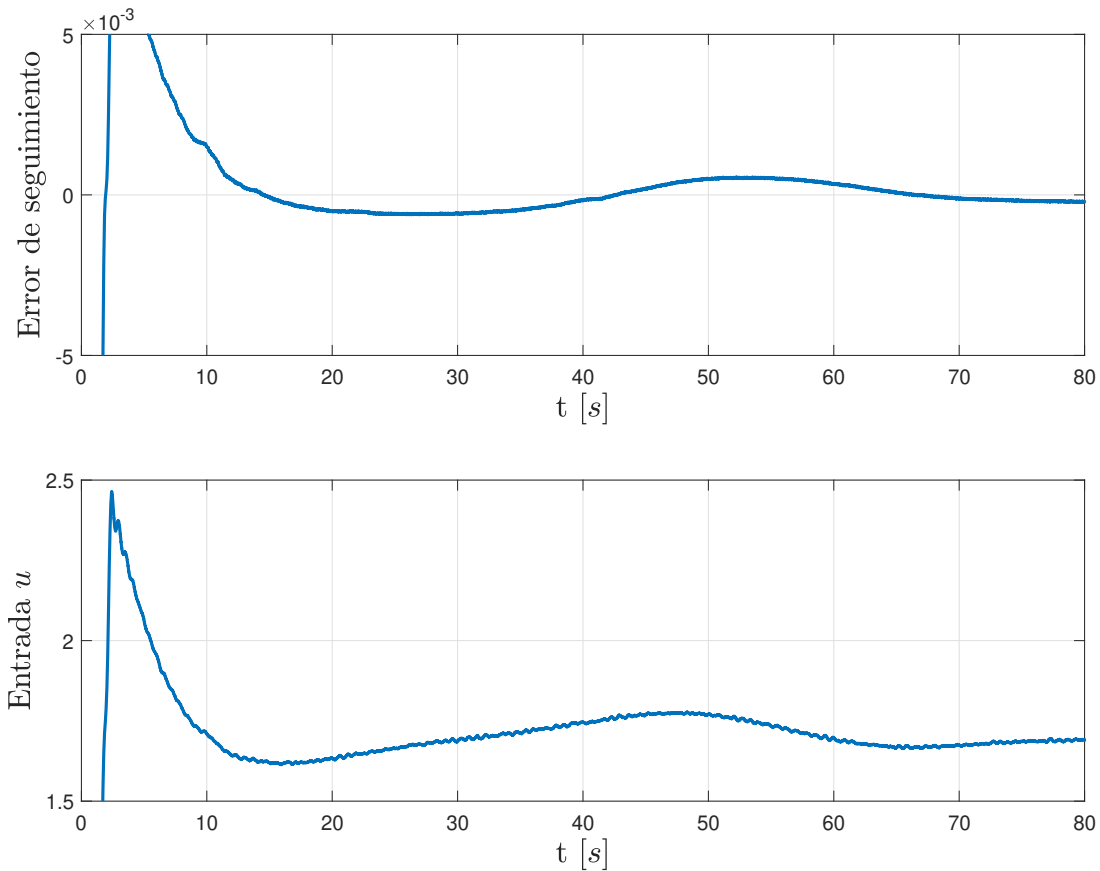


Figura 6.8: Error de seguimiento frente a una perturbación senoidal

Se muestra que existe un error que tiende a cero y por lo tanto el desplazamiento del magneto nunca converge al punto de operación deseado. Nuevamente se verifica que este controlador no es robusto frente a perturbaciones no desvanecientes.

6. VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS CONTROLADORES INTEGRALES

Finalmente se realiza el seguimiento de una señal senoidal para este control, donde la señal a seguir es la misma de la Figura 5.5 y cuyo comportamiento de la posición y velocidad son,

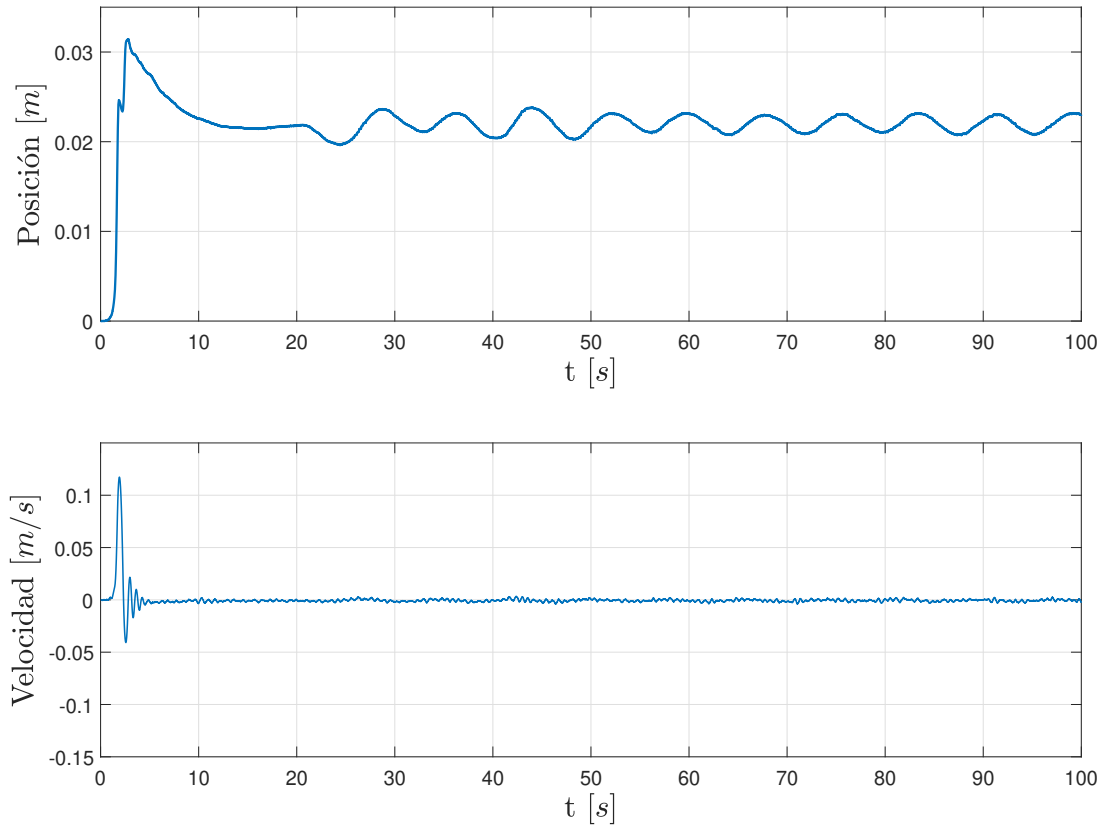


Figura 6.9: Posición y velocidad durante el seguimiento de la señal senoidal

el control intenta seguir la señal de referencia, sin embargo, el error de seguimiento de la Figura 6.10, muestra oscilaciones de diferente amplitud. Lo anterior se traducen en un seguimiento deficiente debido a que la magnitud corresponde a la precisión de estado permanente.

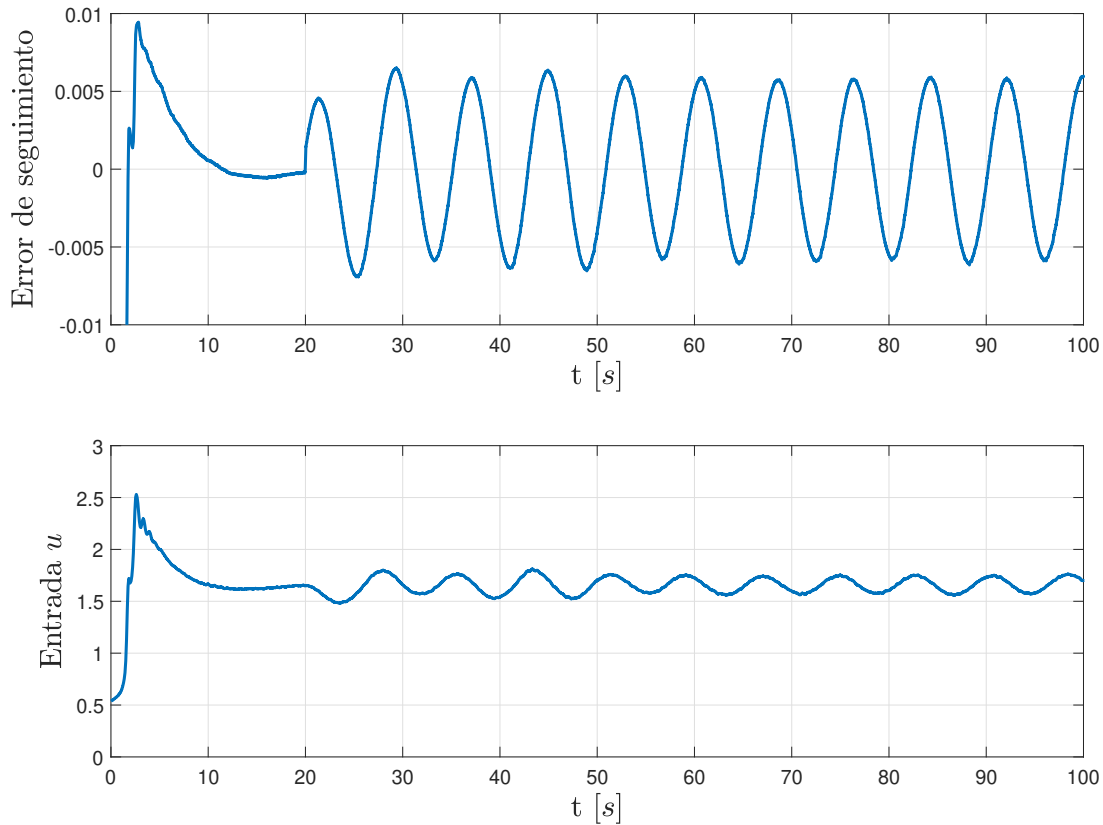


Figura 6.10: Error de seguimiento durante el seguimiento de la señal senoidal

6.1.2. Control Integral Discontinuo

En previas secciones, se puso a prueba el control lineal usando diferentes técnicas de linealización y se analizó el desempeño en regulación frente a diferentes señales y seguimiento de una señal senoidal, concluyendo que el control integral lineal es bueno para realizar una regulación aun frente a perturbaciones constantes, pero es ineficiente frente a perturbaciones no desvanecientes ya que desvía el punto de operación.

6. VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS CONTROLADORES INTEGRALES

Considerando los mismos valores en los parámetros que en las pruebas anteriores, así como las mismas condiciones iniciales cuando existe una perturbación constante $\rho = 6$ y el control discontinuo de tercer orden usando en el capítulo 6, se tiene el siguiente comportamiento en la posición y velocidad del magneto.

La Figura 6.11 muestra que aún frente a una perturbación constante, el control es capaz de compensarla en tiempo finito, la regulación en el punto de operación $x_1 = 0.023[m]$ es perfectamente medible.

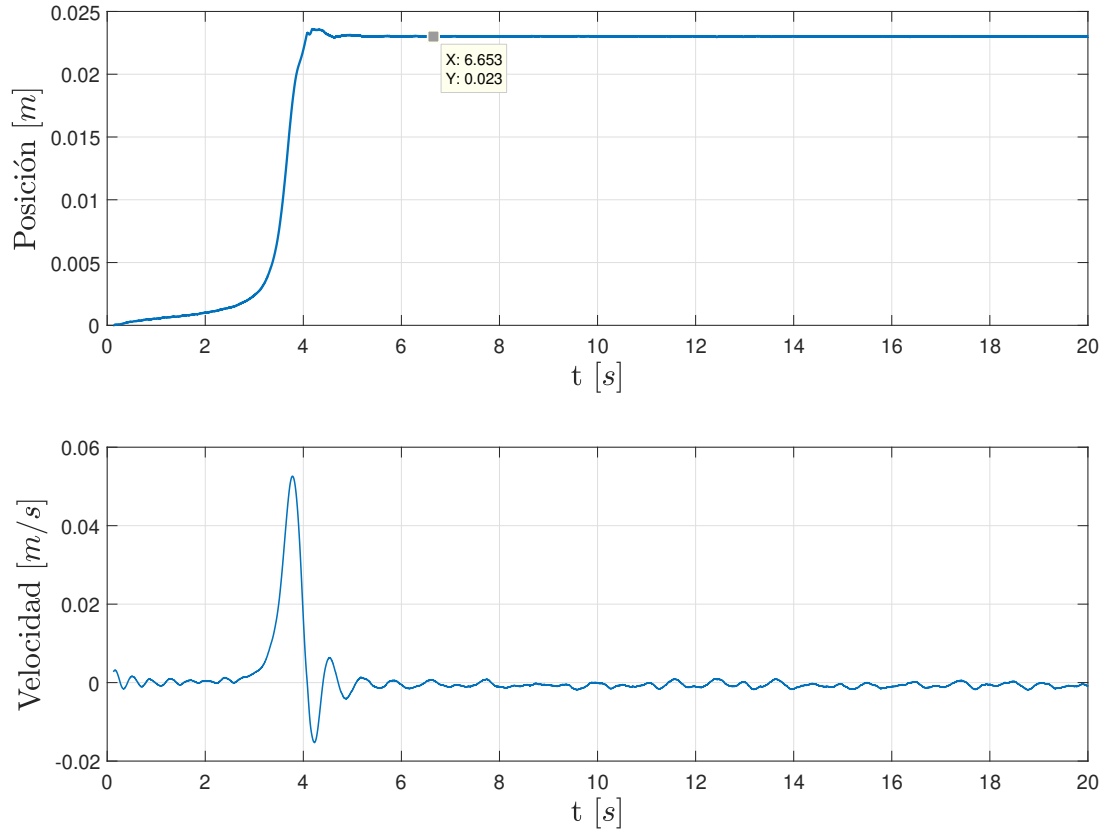


Figura 6.11: Posición y velocidad del magneto frente a una perturbación constante

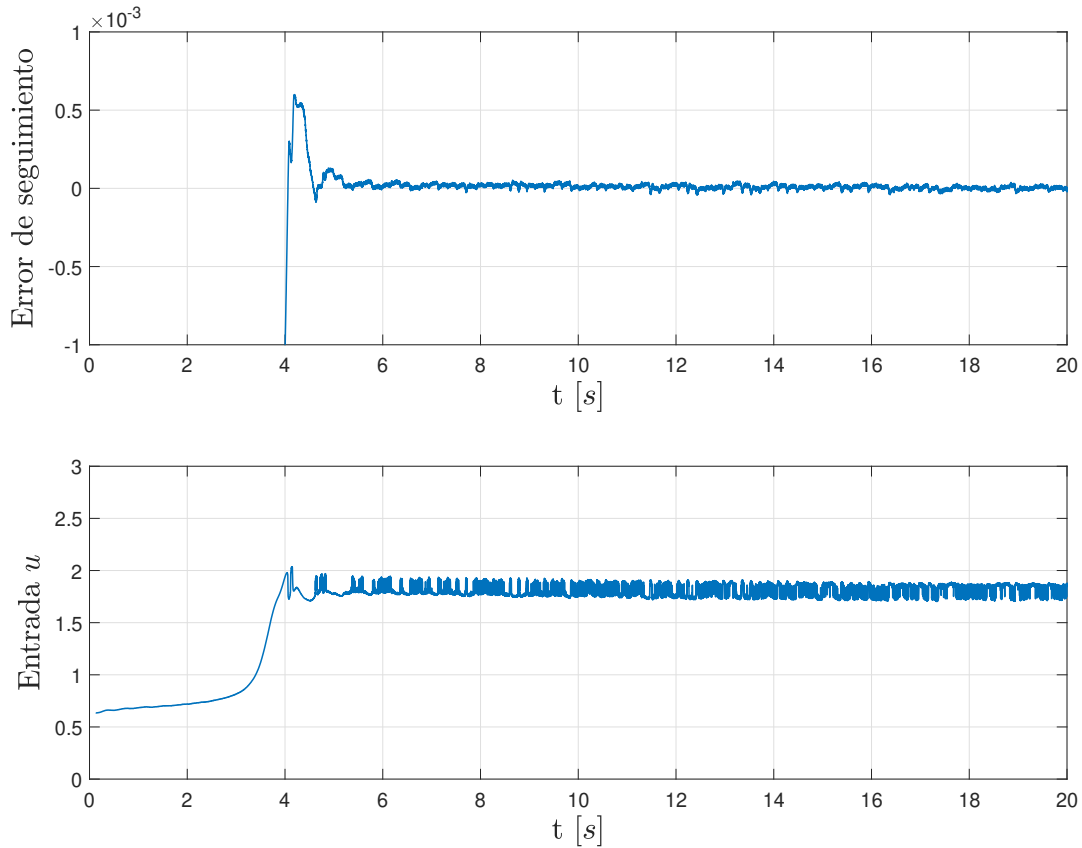


Figura 6.12: Error de Seguimiento frente a perturbación constante

Es de notar que el error que se muestra en la Figura 6.12 es tan pequeño que se puede concluir que es nulo, sin embargo, la salida muestra un chattering de baja amplitud. En el capítulo 6 se mencionó que el control discontinuo puede estimar la perturbación a la salida del integrador,

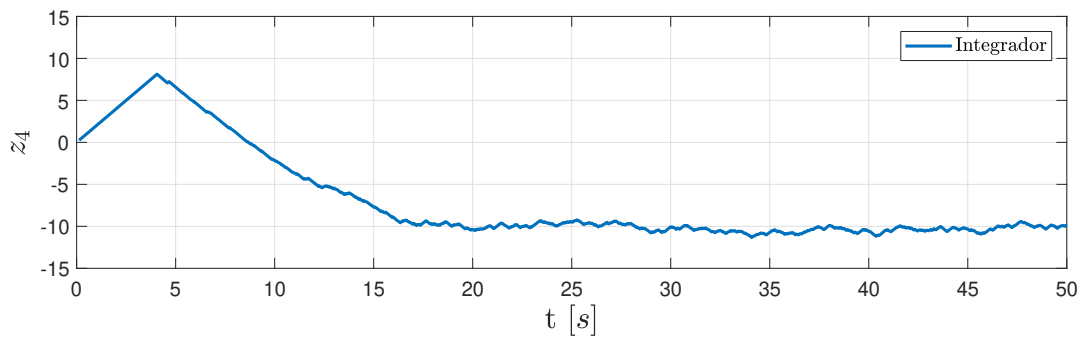


Figura 6.13: Efecto del integrador

6. VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS CONTROLADORES INTEGRALES

La Figura 6.13 muestra cómo el efecto del integrador crece durante el transitorio y mientras más se acerca al punto de operación que se desea llegar, se tendera a una forma constante al presentar una perturbación de la misma forma y se observa una desviación de forma constante del origen de z_4 debido a la perturbación y a las incertidumbres en los parámetros.

El caso que incluye a una perturbación rampa igual al de la Figura 6.3, bajo las mismas condiciones iniciales y cuyo comportamiento en la posición y velocidad del magneto son los que muestra la Figura 6.15. Se muestra que aun frente a esta clase de perturbación, es posible realizar una regulación perfecta al punto de operación deseado. Asimismo la Figura 6.14 muestra un error que se puede asumir como cero.

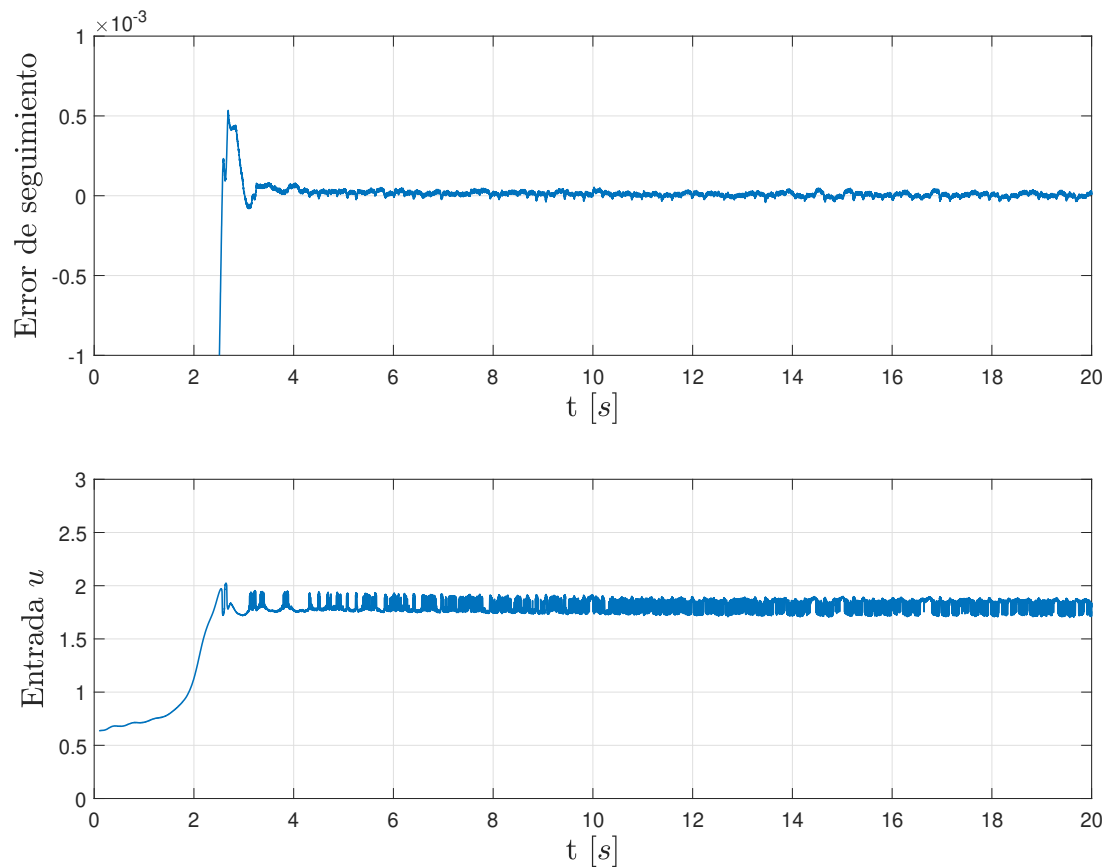


Figura 6.14: Error de seguimiento frente a una perturbación rampa

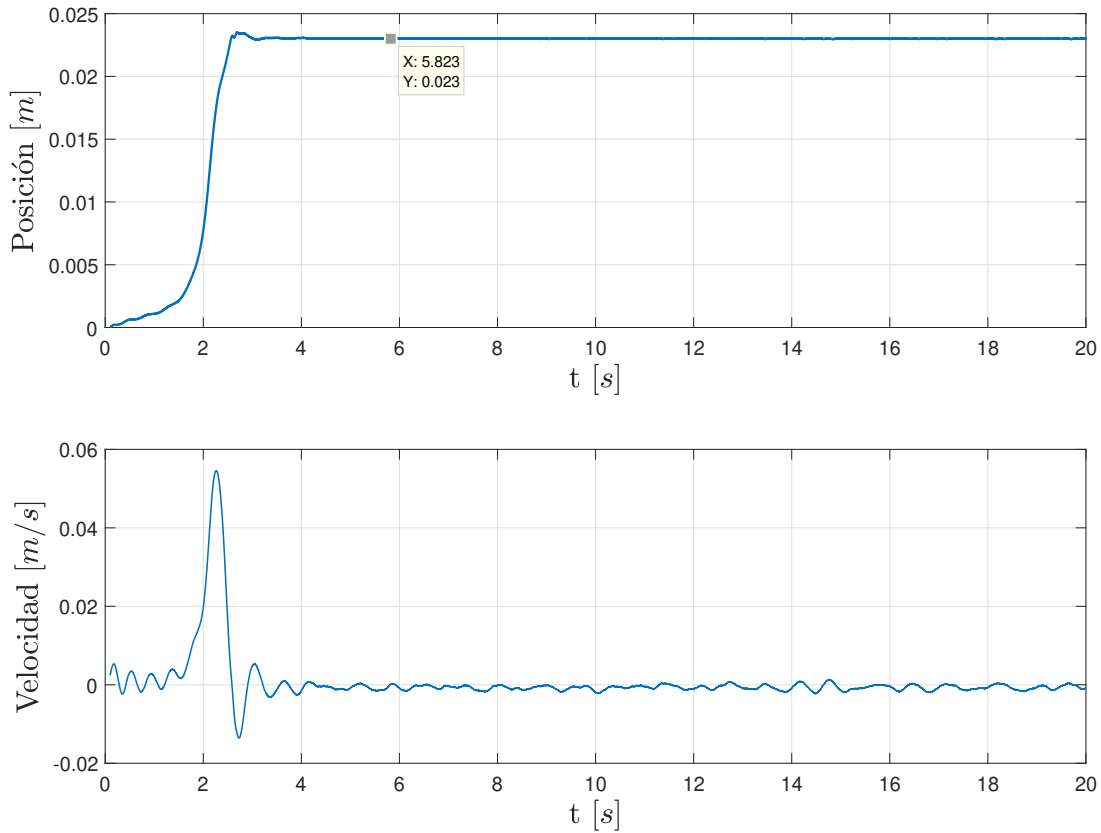


Figura 6.15: Posición y velocidad frente a la perturbación rampa

Es de notarse que aún frente a la perturbación, el control converge rápidamente al punto de operación, siendo esta una de las características principales de esta clase de controladores discontinuos.

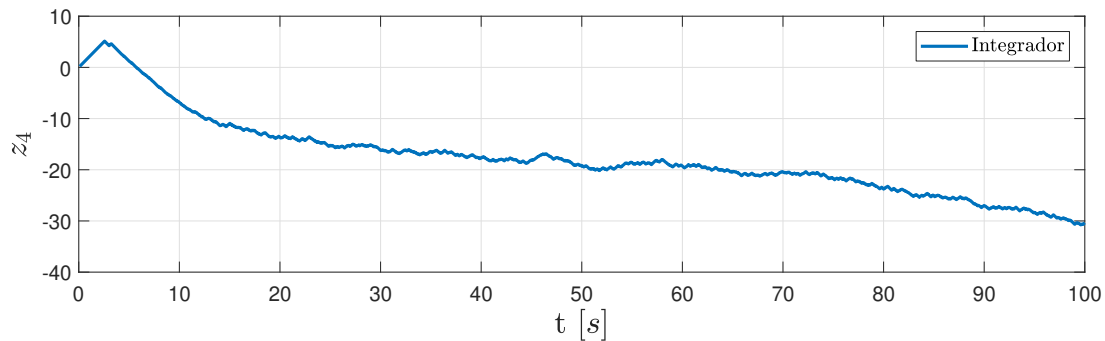


Figura 6.16: Efecto del integrador frente a la perturbación rampa

6. VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS CONTROLADORES INTEGRALES

Al observar el efecto del integrador en la Figura 6.16, muestra que se tiende a la forma de la perturbación, sin embargo, la forma en la que estima la perturbación dependerá del grado de homogeneidad correspondiente a la parte dinámica del controlador.

Si se analiza el caso en el que se tiene una perturbación senoidal de la misma forma que la Figura 6.6, se tiene el siguiente comportamiento en la posición y la velocidad,

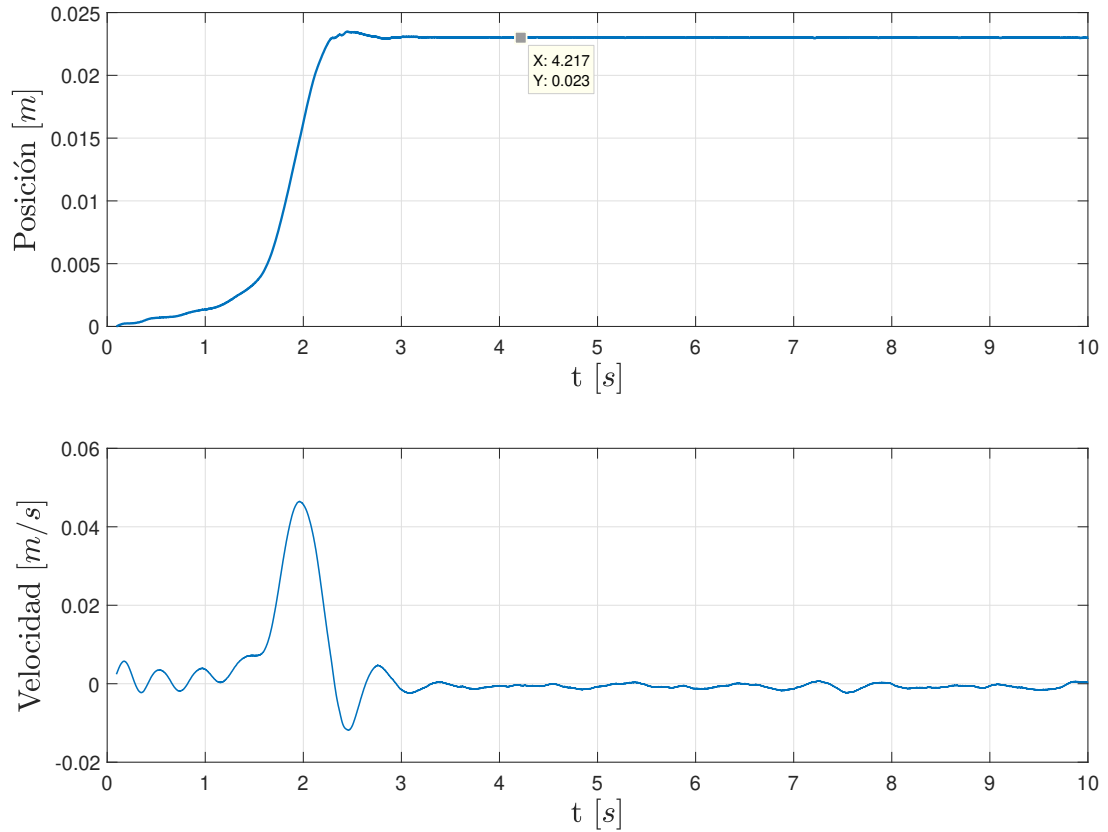


Figura 6.17: Posición y velocidad frente a una perturbación senoidal

En la Figura 6.17 se observa que aun frente a una perturbación senoidal, el control es capaz de lograr la regulación en el punto de operación $x_1 = 0.023[m]$

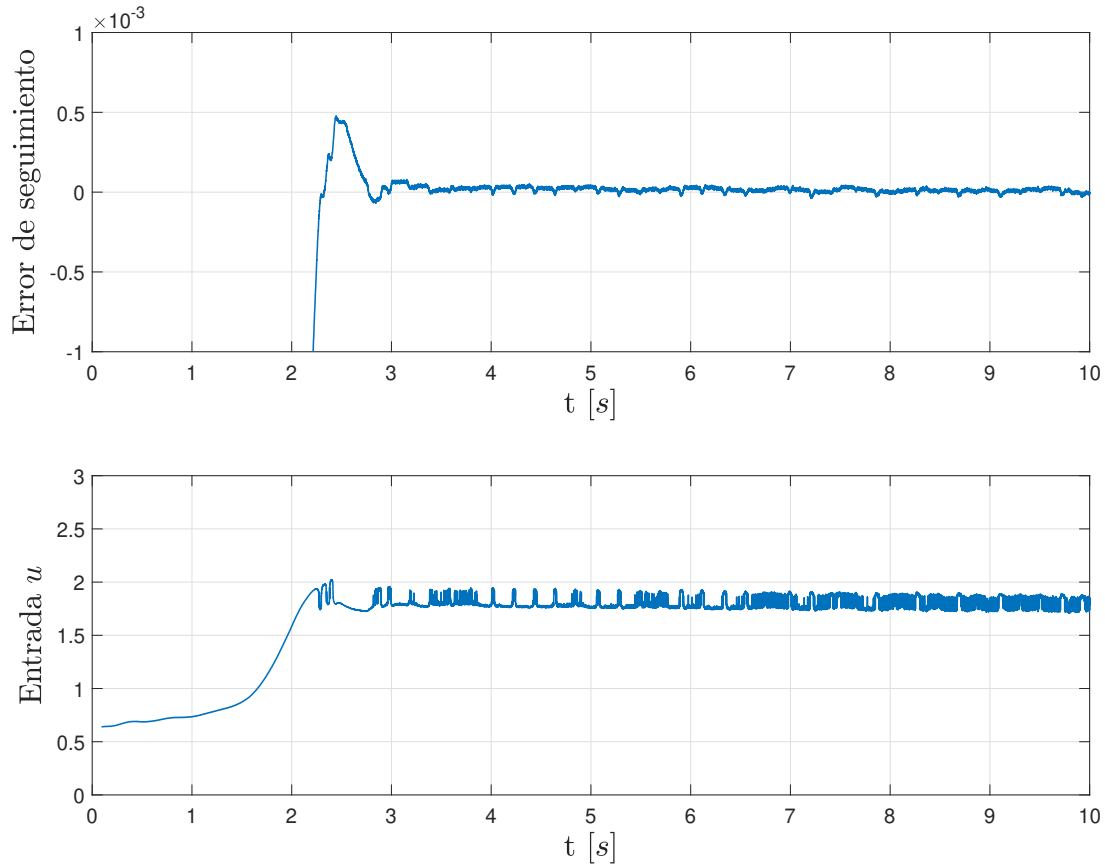


Figura 6.18: Error de seguimiento frente a la perturbación senoidal

Lo anterior se puede justificar al observar el comportamiento del error de seguimiento. La figura 6.18 muestra como el error es casi nulo y por lo tanto se puede concluir que este controlador discontinuo es robusto ante perturbaciones constantes, así como a perturbaciones no desvanecientes.

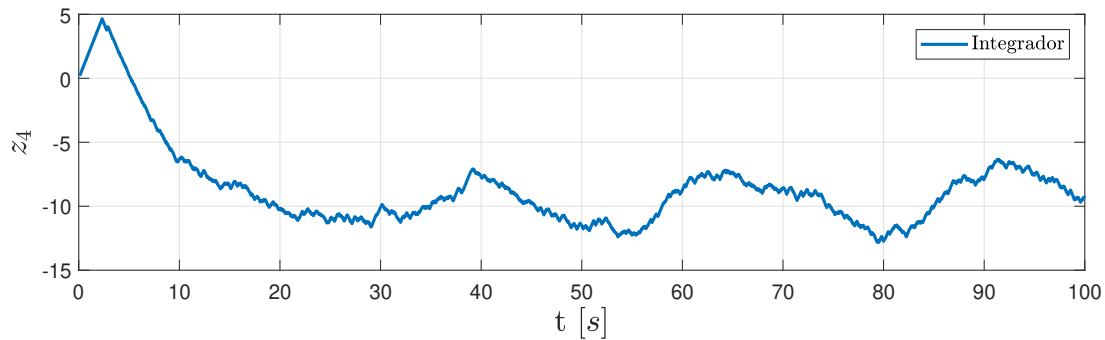


Figura 6.19: Efecto del Integrador frente a una perturbación senoidal

6. VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS CONTROLADORES INTEGRALES

El comportamiento que se muestra en la Figura 6.19 corresponde a la salida del integrador, se observa cómo después del transitorio la forma que tiende es igual a la perturbación. Esto resulta ser una razón por la cual se puede considerar a la salida de integrador como un estimador de las incertidumbres y/o perturbaciones.

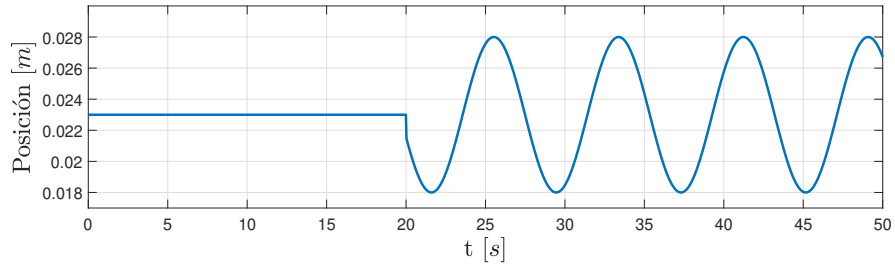


Figura 6.20: Señal de referencia

En pruebas anteriores se ha observado como el control integral continuo ha resultado ser una buena alternativa para realizar una tarea de regulación, pero una mala opción para realizar un seguimiento de una señal de referencia. Ahora bien se presenta el caso en el que se tiene una señal de referencia senoidal como en la Figura 6.20 y cuyo comportamiento de la posición y velocidad se tiene,

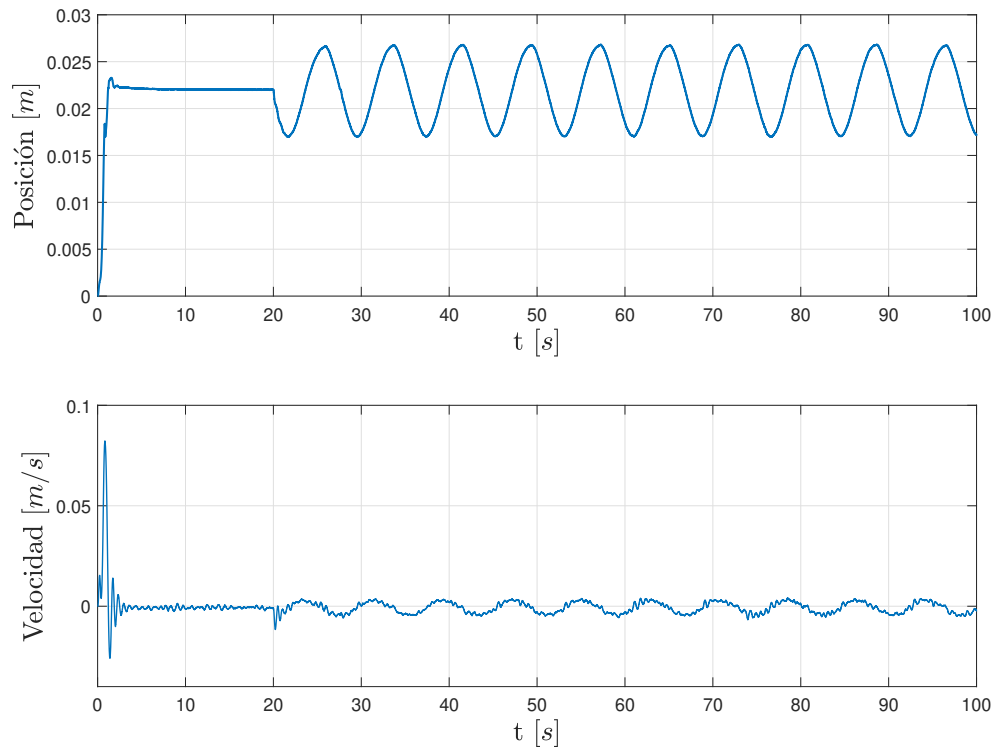


Figura 6.21: Posición y velocidad durante el seguimiento de la señal de referencia

La Figura 6.21 muestra que antes de 20[s] se realiza una regulación perfecta, posteriormente comienza a seguir la señal senoidal. La forma que tiene la velocidad es lo esperado, ya que la derivada de una señal seno es el coseno.

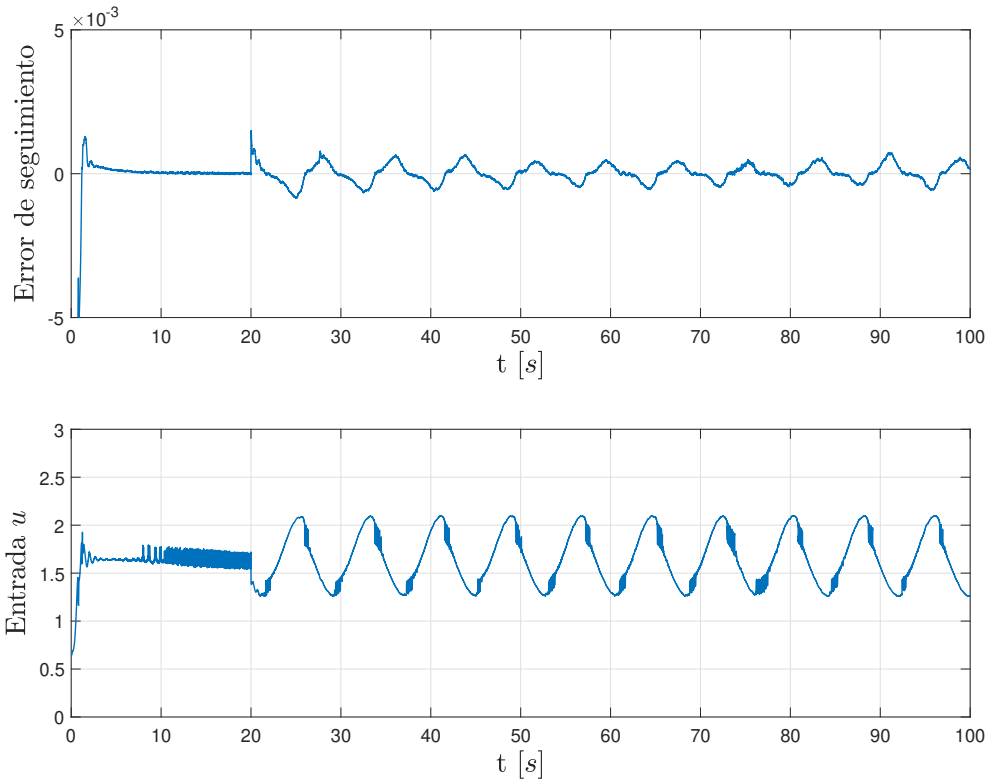


Figura 6.22: Error de seguimiento

Al observar la señal de error de seguimiento, que se muestra en la Figura 6.22, se puede notar que durante la regulación se puede asumir que es nulo y posteriormente al seguir la señal senoidal el error es lo suficientemente pequeño para considerar este control como una buena alternativa para realizar un seguimiento.

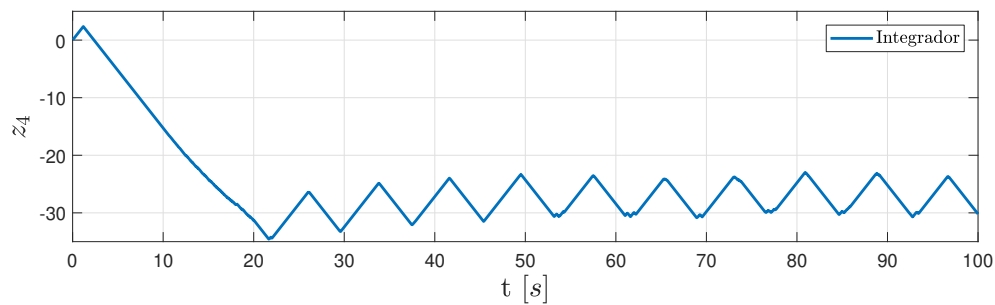


Figura 6.23: Efecto del integrador durante el seguimiento de la señal de referencia

Finalmente en la Figura 6.23, se muestra que después del transitorio la señal tiende a una forma constante ya que no se presentan perturbaciones, sin embargo, se observa una desviación en el origen del "z₄" debido a incertidumbres en los parámetros e incluso perturbaciones constantes no consideradas y que el controlador compensa.

6.2. Comparación entre controladores

Al comparar en regulación y seguimiento de trayectoria, el control por realimentación de estados usando una linealización por realimentación y el control integral discontinuo, ya que ambas técnicas permiten desplazar al magneto desde el origen. El propósito de la comparación es observar el tipo de convergencia, sobrepaso, precisión y salida de control, por lo tanto la comparación es con las pruebas experimentales de seguimiento sin usar señales de perturbación de por medio, debido a que previamente se explico y se verifico la robustez de cada control.

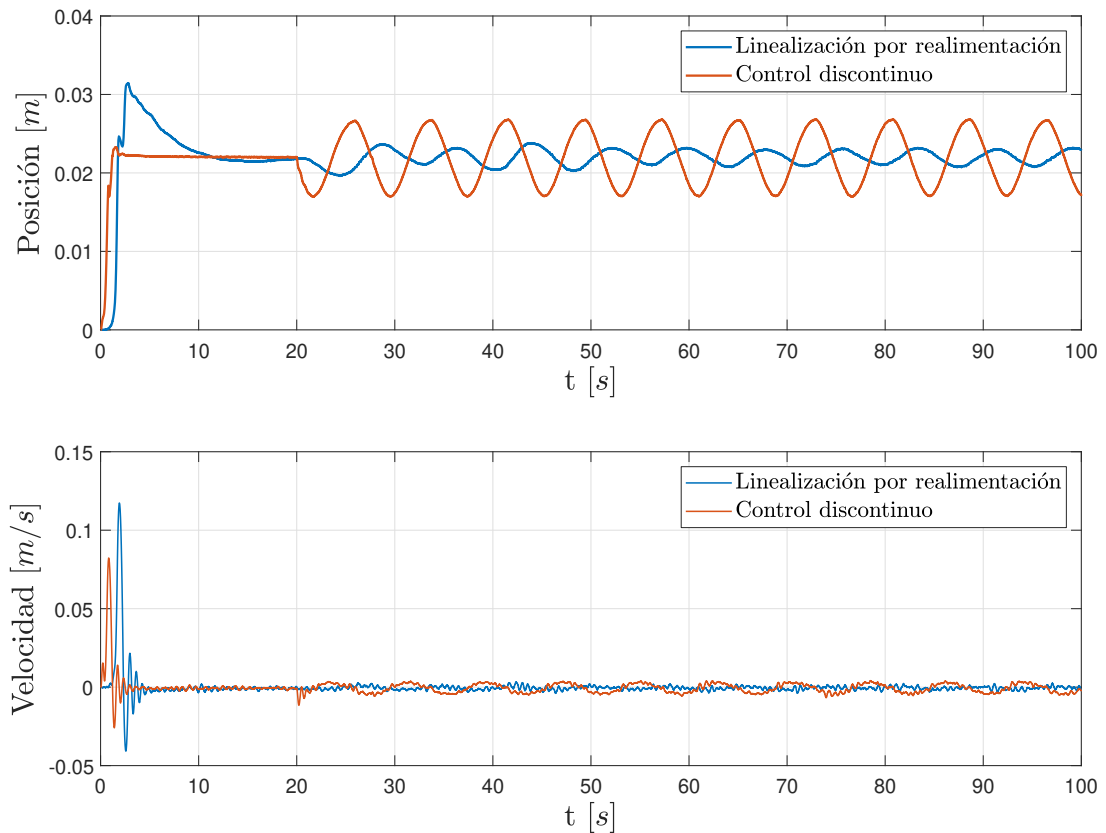


Figura 6.24: Comparación entre el control discontinuo y el control lineal

En la Figura 6.24, se muestra como el control discontinuo converge más rápidamente sin mostrar un sobrepaso contrario al control por realimentación de estados durante una tarea de regulación. Después de los 20 segundos al comenzar el seguimiento de trayectoria, se observa que las oscilaciones de la realimentación de estados se encuentran atenuadas, lo que implica una mala precisión del control y para ello se muestra la siguiente figura.

La Figura 6.25, muestra un error de seguimiento aceptable para el control discontinuo, sin embargo, el control lineal el error de seguimiento es considerable. Por otro lado en la salida de control, el control discontinuo muestra un menor esfuerzo a costo de un chattering aceptable.

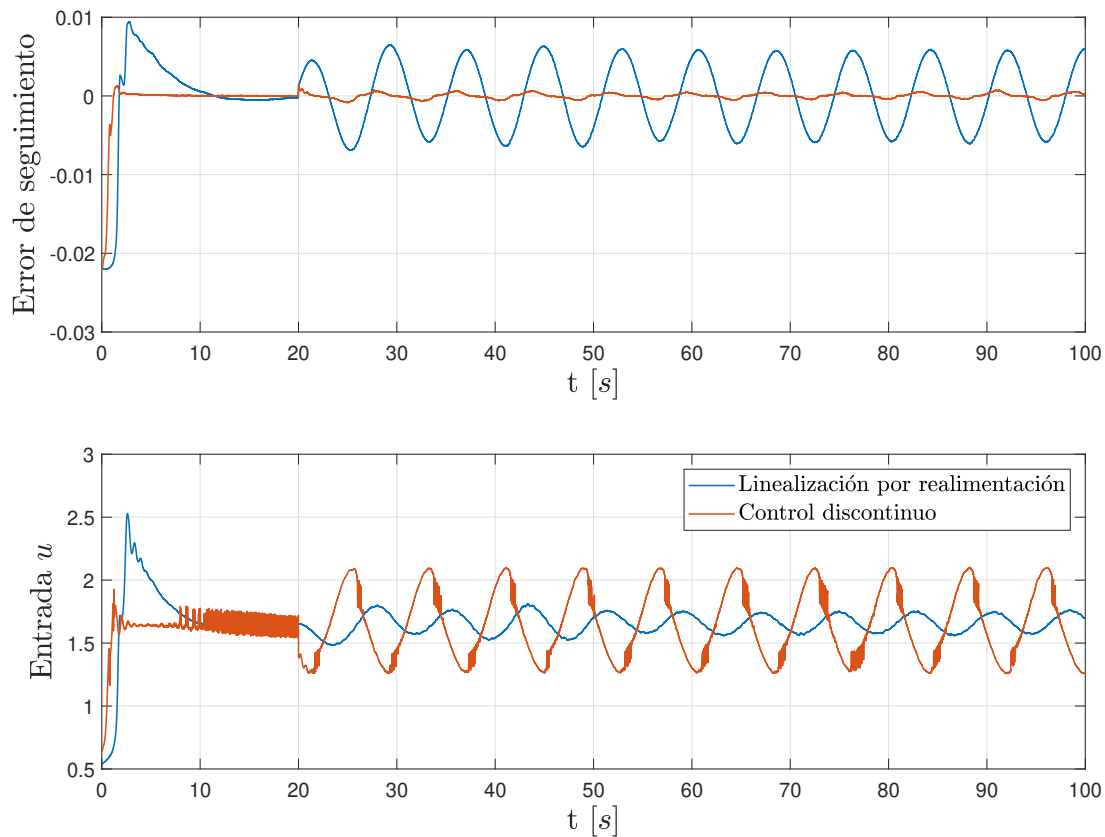


Figura 6.25: Comparación de los errores de seguimiento y sus entradas entre el control discontinuo y el control lineal

6. VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS CONTROLADORES INTEGRALES

Finalmente la Tabla 6.1, se en lista las características de cada uno de los controladores usados en el levitador magnético MagLev 730,

Características	Control integral discontinuo	Control integral lineal local	Control integral lineal LR
Tipo de convergencia	Tiempo finito	Exponencial	Exponencial
Robustez frente a perturbaciones	Constantes y Lipschitz	Constantes	Constantes
Regulación	Exacta	Exacta	Exacta
Seguimiento de trayectoria	Precisa	Deficiente	Deficiente

Tabla 6.1: Tabla comparativa entre los diferentes controladores usados en el levitador magnético MagLev 730

El siguiente capítulo se muestran las conclusiones finales de este trabajo de tesis.

Conclusiones

A lo largo de este trabajo de tesis, se han mencionado las cualidades y limitaciones de cada uno de los controles usados. El control estático o por realimentación de estados cumple con estabilizar el origen de sistema, sin embargo, no es capaz de garantizar una convergencia exacta en un punto de equilibrio, carece de robustez frente a cualquier tipo de perturbación y el seguimiento de una referencia es impreciso habiendo un error de seguimiento considerable. El control dinámico o integral realiza una estabilización precisa, es decir, que garantiza una convergencia exacta en un punto de equilibrio, aún frente a perturbaciones constantes, sin embargo, durante el seguimiento de una referencia el error de seguimiento demuestra ser impreciso.

El control por modos deslizantes surge como una alternativa por su robustez frente a ciertos tipos de perturbaciones con una convergencia en tiempo finito, a costo de tener el problema de chattering en la salida de control. El concepto de homogeneidad en este trabajo es usado para la construcción de una función de Lyapunov que asegura la estabilidad del origen del sistema en tiempo finito para el caso del control por modos deslizantes, a la cual se le añade el control dinámico o acción integral. Como resultado se tiene un control con las características de robustez y convergencia del control por modos deslizantes sin la consecuencia de un chattering agresivo. El grado de homogeneidad del control dinámico determina el tipo de perturbación que es capaz de repeler, sin embargo, este trabajo de tesis únicamente se ve el caso para grado relativo cero.

El control integral discontinuo es capaz de garantizar una convergencia exacta en tiempo finito, aún frente a perturbaciones constantes y variantes con el tiempo, sobre todo es capaz de seguir una señal de referencia con una precisión aceptable, es decir, que el error de seguimiento sea mínimo. Finalmente se puede concluir a través de la verificación experimental de este trabajo, que el control discontinuo tiene un mejor desempeño contra las técnicas lineales para una regulación y seguimiento de trayectoria debido a su velocidad de convergencia y precisión, aún frente a perturbaciones constantes y/o variantes con el tiempo.

Bibliografía

- [1] Bacciotti, A. and Rosier, L. (2006). *Lyapunov functions and stability in control theory*. Springer Science & Business Media. 8
- [2] Barie, W. and Chiasson, J. (1996). Linear and nonlinear state-space controllers for magnetic levitation. *International Journal of systems science*, 27(11):1153–1163. 16
- [3] Khalil, H. K. (2002). Nonlinear systems, 3rd. *New Jewsey, Prentice Hall*, 9(4.2). 5, 6, 23, 24, 25
- [4] Mercado, J. A. (2017). *Control Integral de Sistemas Homogeneos*. Tesis de maestria en ingenieria, Instituto de Ingenieria, Ciudad de Mexico, Mexico. III, III, 2, 8, 10, 34, 35, 36
- [5] Moreno, J. A. (2016). Discontinuous integral control for mechanical systems. In *Variable Structure Systems (VSS), 2016 14th International Workshop on*, pages 142–147. IEEE. III, III, 2, 10
- [6] Zavala, E. C. (2014). *Funciones de Lyapunov de control para el diseño de controladores discontinuos*. Tesis de doctorado en ingeniería, Instituto de Ingeniería, Ciudad de Mexico, Mexico. 7, 9
- [7] Zavala, E. C. and Moreno, J. A. (2017). Homogeneous high order sliding mode design: a lyapunov approach. *Automatica*, 80:232–238. 33, 34