



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Libro de apuntes de fundamentos
teóricos de la modelación e
inversión de datos de prospección
eléctrica en 1D, 2D y 3D.**

MATERIAL DIDÁCTICO

Que para obtener el título de

Ingeniero Geofísico

P R E S E N T A N

Emmanuel Ortiz Jiménez

David Armando Uc Canul

ASESOR(A) DE MATERIAL DIDÁCTICO

Dra. Aide Esmeralda López González



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2022

Trabajo realizado con el apoyo del Programa
UNAM-DGAPA-PAPIME. Clave del proyecto: PE106521

Participantes del proyecto

- Chávez Segura René Efraín
- Escobedo Zenil David
- García Serrano Alejandro
- Hernández Montejano Hugo Ricardo
- León Santiago Luis Alberto
- López González Aide Esmeralda
- Mendoza Gouzev Carlos Ilya
- Navedo Cruz Mauricio Damián
- Ochoa León Pablo
- Ortíz Osio Manuel
- Ortíz Jiménez Emmanuel
- Tago Pacheco Josué
- Tejero Andrade Andrés
- Uc Canul David Armando
- Vaquero Bautista Cristian Adrián
- Velasco Lindero Miguel Ángel
- Velásquez Márquez Alfredo
- Zapotitlán Román Julián

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México por habernos brindado la oportunidad de formarnos como ingenieros y ayudarnos a crecer como personas y profesionistas.

A la Dra. Aide Esmeralda López González, directora de este proyecto, por creer en nosotros y siempre brindarnos apoyo, conocimiento y paciencia para lograr concluir este trabajo.

Al Dr. Andrés Tejero Andrade, M.C. David Escobedo Zenil, Ing. Francisco Alejandro Arroyo Carrasco, Ing. Alejandro García Serrano, Dr. Josué Tago Pacheco, Ing. Manuel Ortiz Osio y al Ing. Miguel Ángel Velasco Lindero por sus comentarios para enriquecer este trabajo.

David Armando Uc Canul y Emmanuel Ortíz Jiménez

A mis padres y a mi hermano, por ser mis guías, por todo el amor, paciencia y apoyo que me han brindado a lo largo de mi vida y por siempre impulsarme a superarme y ser una mejor persona.

A Karen, Emmanuel, Daniel, Luis Ángel, Alberto, Josué, Kelly, Jocelyn y a todos los compañeros con los que coincidí en las aulas, porque esta etapa no hubiera sido lo mismo sin ustedes. Gracias por todo el apoyo, por todas las pláticas, desveladas y enseñanzas, por todos los recuerdos y, sobre todo, por siempre hacerme sentir como en casa.

A todas las personas que a lo largo de mi vida me han apoyado de una u otra forma, porque son parte de la persona que soy y en la que me convertiré.

David Armando Uc Canul

A mis padres, Luz y Alonso por todo su apoyo, amor y cariño en todo momento de mi vida; por sus enseñanzas, consejos, por la motivación, y por todos los sacrificios que hicieron para que yo obtuviera una educación y me dieran todo lo que ellos podían. No hay forma de agradecerles por todo.

A mi hermana, por todo su conocimiento brindado y que quizás sin saberlo, ha sido siempre una motivación para mí.

A mis abuelos, por siempre guiarme con educación y cariño, por sentar las bases de una familia unida y alegre, que siempre me ha apoyado y ha celebrado mis logros.

A Raquel, por siempre estar a mi lado, por el apoyo y la motivación, por escucharme y concederme paz y alegría en todo momento.

A mis amigos de la prepa y de la universidad, ustedes hicieron que este viaje fuera único. Gracias por todos las risas y momentos compartidos, por la amistad, confianza y apoyo brindado incondicionalmente. En especial a Uc, por ser un gran compañero de carrera, por el compromiso y cooperación para realizar este proyecto.

Emmanuel Ortíz Jiménez

Prólogo

Este libro de apuntes es resultado de un trabajo de investigación y recopilación de información acerca de los fundamentos teóricos de prospección geoelectrica en corriente continua, modelación e inversión de datos, con el propósito de que los estudiantes de Ingeniería Geofísica puedan comprender la relación que existe entre estos conceptos y aclarar dudas que puedan surgir en las materias de Inversión de Datos Geofísicos y Procesamiento de Datos Geofísicos y Prospección Eléctrica. Algunos de los temas presentados en el libro, por ejemplo, los relacionados a la modelación, no se ven a nivel licenciatura, sin embargo, considerando el trasfondo de materias de ciencias básicas que están incluidas en el plan de estudios, decidimos presentarlos para que los estudiantes se familiaricen con los métodos y tengan una visión general de su implementación, ya que esta es necesaria para comprender lo que los softwares de interpretación de datos realizan y, de esta forma, puedan tener una mayor certeza de sus resultados.

Objetivo

Elaborar un libro de apuntes que abarque los fundamentos teóricos, modelación, inversión y los fundamentos de procesamiento de datos de prospección geoelectrica, incorporando estrategias psicopedagógicas para que el estudiante, que lleve a cabo el “Curso de Modelación e inversión de datos de prospección eléctrica en 1D, 2D y 3D empleando software libre”, comprenda la relación que hay entre estas asignaturas, su importancia y aplicación.

Índice general

1	Fundamentos teóricos de la prospección eléctrica	11
1.1	Fundamentos de Teoría Electromagnética	11
1.2	Condiciones de frontera	14
1.3	Conceptos básicos	16
1.3.1	Resistividad	16
1.3.2	Propiedades eléctricas de las rocas	17
1.3.3	Resistividad aparente y factor geométrico	22
1.3.4	Electrodo puntual	25
1.4	Arreglos de electrodos	25
1.4.1	Función de sensibilidad y profundidad media de investigación	26
1.4.2	Puntos de atribución y pseudosección	27
1.4.3	Wenner	28
1.4.4	Dipolo-dipolo	30
1.4.5	Wenner-Schlumberger	33
1.4.6	Polo-polo	35
1.4.7	Polo-dipolo	36
1.4.8	Arreglo recíproco	40
1.5	Adquisición de datos en 1D	42
1.5.1	Calicatas Eléctricas	42
1.5.2	Sondeo Eléctrico Vertical	42
1.6	Adquisición de datos en 2D	44
1.6.1	Tomografía de Resistividad Eléctrica	44
1.7	Adquisición de datos en 3D	46
1.7.1	Tomografía de Resistividad Eléctrica 3D	46
2	Procesamiento de Datos	50
2.1	Análisis de los Datos	50
2.2	Corrección por Posición de los Electrodos	51
2.2.1	Primera Metodología: Multiplicación por Factor de Corrección	51
2.2.2	Segunda metodología: Interpolación de datos	52
2.3	Señales	53
2.4	Ruido	54
2.5	Filtros	55
2.5.1	Filtro de Media Movil	55
2.5.2	Promedio Ponderado o Media Móvil Ponderado	56
2.5.3	Filtro de Mediana	57
2.5.4	Filtro Savitzky y Golay	59

2.6	Software Libre de Procesamiento de Datos Geoeléctricos	60
2.7	Interpretación Preliminar o Cualitativa	61
3	Conceptos básicos de modelación	62
3.1	Modelación	62
3.2	Filtrado Lineal Digital	63
3.2.1	Filtros de Ghosh	64
3.2.2	Filtro de Anderson	67
3.2.3	Filtros de O' Neill & Merrick	68
3.3	Diferencias Finitas	71
3.3.1	Aproximación a la primera derivada con diferencia hacia adelante	72
3.3.2	Aproximación a la primera derivada con diferencia hacia atrás	73
3.3.3	Diferencias centradas	73
3.3.4	Diferencias finitas en dos dimensiones	74
3.4	Elementos Finitos	76
4	Teoría de inversión	81
4.1	Inversión por mínimos cuadrados	86
4.2	Mínimos cuadrados amortiguados o Método de Marquardt-Levenberg	88
4.3	Mínimos cuadrados restringidos y suavizados (Inversión suave)	88
4.4	Mínimos cuadrados repesados (Inversión robusta)	90
4.5	Archivos .urf y .trn	92
	Referencias	93

Índice de figuras

1.1	Corriente en un semiespacio homogéneo de resistividad ρ . Modificada de [41].	11
1.2	Izquierda: capa de transición entre dos medios de espesor h . Derecha: superficie de discontinuidad idealizada entre dos medios. Modificada de [73].	14
1.3	a) Determinación de las condiciones de frontera para la densidad de corriente. b) Determinación de las condiciones de frontera para el campo eléctrico. Tomada de [54].	15
1.4	Mapa mental: Ecuaciones Fundamentales de Prospección Eléctrica.	16
1.5	Definición de resistividad a través de un bloque con alto L y sección transversal A donde se aplica una corriente I y se produce una diferencia de potencial entre sus caras. Tomada de [58].	17
1.6	Resistividad de rocas, suelo y minerales. Modificada de [41].	18
1.7	Medio de resistividad homogénea donde se coloca un dispositivo electródico AMN para la definición de resistividad aparente. Modificada de [54].	22
1.8	Dispositivo electródico lineal y simétrico. Modificada de [54].	23
1.9	Ejemplo de un subsuelo heterogéneo. Modificada de [54].	23
1.10	Ejemplo de variaciones laterales. La línea solida indica la resistividad aparente con espaciamento de 10 [m], la línea punteada con espaciamento de 20 [m]. Tomada de [10].	24
1.11	Efecto de la variación vertical de la resistividad medida. (a) y (b) muestran la variación de la resistividad con un espaciamento entre electrodos diferente. (c) Muestra la resistividad aparente para el arreglo Schlumberger. Tomada de [10].	26
1.12	Arreglos de electrodos más populares en la prospección eléctrica. A y B son los electrodos de potencial; M y N, los de corriente; n, el nivel y k, el factor geométrico. Modificada de [41].	28
1.13	Puntos de atribución del arreglo Wenner en 7 niveles. Se pierden 3 datos por nivel. .	29
1.14	Función de sensibilidad del Arreglo Wenner. Tomada de [41].	30
1.15	Puntos de atribución del arreglo dipolo-dipolo en 9 niveles. Se pierden un dato por nivel.	31
1.16	Función de sensibilidad para el arreglo dipolo-dipolo. Tomada de [41].	32
1.17	Puntos de atribución del arreglo Wenner-Schlumberger en 9 niveles. Se pierden 2 datos por nivel.	33
1.18	Función de sensibilidad para el arreglo Wenner-Schlumberger. Tomada de [41]. . . .	34
1.19	Puntos de atribución del arreglo polo-polo en 9 niveles. Se pierden un dato por nivel.	35
1.20	Función de sensibilidad del arreglo polo-polo. Tomada de [41].	36
1.21	Puntos de atribución del arreglo Polo-Dipolo en 9 niveles. Se pierde un dato por nivel.	37
1.22	Función de sensibilidad del arreglo polo-dipolo. Tomada de [41].	38
1.23	Esquema: Conceptos Fundamentales de Prospección Eléctrica.	41

1.24	Grafica obtenida en la medición de campo de la resistividad aparente. Modificada de [58].	43
1.25	Ejemplo de la secuencia de medición para construir una pseudosección de resistividad. Modificada de [58].	45
1.26	Vista de perfil de la adquisición del arreglo Ecuatorial Paralelo W-S.	45
1.27	Adquisición de datos del arreglo Ecuatorial Paralelo.	46
1.28	Arreglo de electrodos para un estudio TRE3D. Modificada de [38].	47
1.29	Representación en planta de la adquisición de datos del arreglo en L. Modificada de [67].	48
1.30	Visualización de los puntos de atribución combinando las cuatro “L” modificadas. Tomada de [15].	49
2.1	Representación de un filtro. Tomada de [69]	55
2.2	Filtro de media móvil para una señal con ruido aleatorio. A medida que incrementa el orden del filtro, se pierde la forma de la señal original, sobre todo en los bordes. Tomada de [65].	56
2.3	Modelo sintético de resistividad representando un cuerpo conductor. Tomada de [5].	58
2.4	Secciones de resistividad obtenidas a partir del modelo sintético de un cuerpo conductor con 0 % de ruido. a) Sin filtro, b) Filtro de mediana, c) Filtro de media movil, d) Filtro de media movil ponderado. Tomada de [5].	58
2.5	Ejemplo de la aplicación de un filtro SG con un polinomio cuadrático, el punto central de la ventana de siete puntos, denotado por una x, es reemplazado por el valor del polinomio. Tomado de [26].	60
3.1	Mapa conceptual: Teoría de modelación y sus diferentes métodos.	63
3.2	Arreglo generalizado de 4 electrodos. Tomada de [52].	69
3.3	Malla de diferencias finitas. Modificada de [72].	74
3.4	Elementos empleados en a) una, b) dos y c) tres dimensiones. Tomada de [14].	77
3.5	Malla de elementos finitos. Modificada de [72].	78
3.6	Elemento triangular. Modificado de [72].	78
4.1	Cuadro sinóptico: Problemas en Geofísica.	82
4.2	Mapa conceptual: Teoría de Inversión.	83
4.3	Discretización 1D, 2D y 3D utilizado en los problemas de inversión geofísica. Tomada de [53].	84
4.4	Mapa mental: Inversión en Prospección Eléctrica.	84
4.5	Proceso de Inversión Geofísica.	85
4.6	Métodos de Inversión en Prospección Eléctrica.	91

Índice de tablas

1.1	Condiciones de frontera para un campo eléctrico estacionario	15
1.2	Resistividad de algunos materiales comunes y rocas realizada por Reynolds (2011). Tomada de [58].	19
1.3	Resistividad de materiales geológicos comunes realizada por Everett (2013). Tomada de [25].	20
1.4	Resistividades de varios tipos de roca y sedimentos realizada por Telford (1990). Tomada de [68].	20
1.5	Profundidad media de investigación (z_e) calculada por Edwards (1977) para dife- rentes arreglos, factor geométrico y su inverso. Modificada de [41].	39
1.6	Puntos de adquisición, forma de conexión, datos perdidos por nivel y nivel máximo de los arreglos de electrodos.	40
3.1	Filtros inversos de resistividad desarrollados por Ghosh	66
3.2	Coefficientes del Filtro Inverso propuesto por O' Neill	67
3.3	Filtros de Resistividad empleados en el Filtrado Lineal Digital	71

Capítulo 1

Fundamentos teóricos de la prospección eléctrica

1.1. Fundamentos de Teoría Electromagnética

En los métodos eléctricos, se hace pasar un pulso de corriente eléctrica $I[A]$ en el subsuelo a través de un par de electrodos. Después de haber alcanzado la corriente el estado estacionario, se mide la diferencia de potencial $\Delta V[V]$ generada por el campo eléctrico del subsuelo con un segundo par de electrodos receptores. El **objetivo** es determinar la distribución de resistividad del subsuelo, ya que se relaciona con varios parámetros geológicos como la presencia de minerales o fluidos, porosidad, saturación de agua, etc. [41].

El subsuelo se considera como un **semiespacio homogéneo, isótropo y lineal** y los electrodos se tratan como una fuente puntual (Figura 1.1). En un medio de estas características, la corriente fluye de forma radial desde la fuente. Además, el potencial es inversamente proporcional a la distancia de la fuente, las líneas equipotenciales tienen forma de hemisferio y el flujo de corriente es perpendicular a estas.

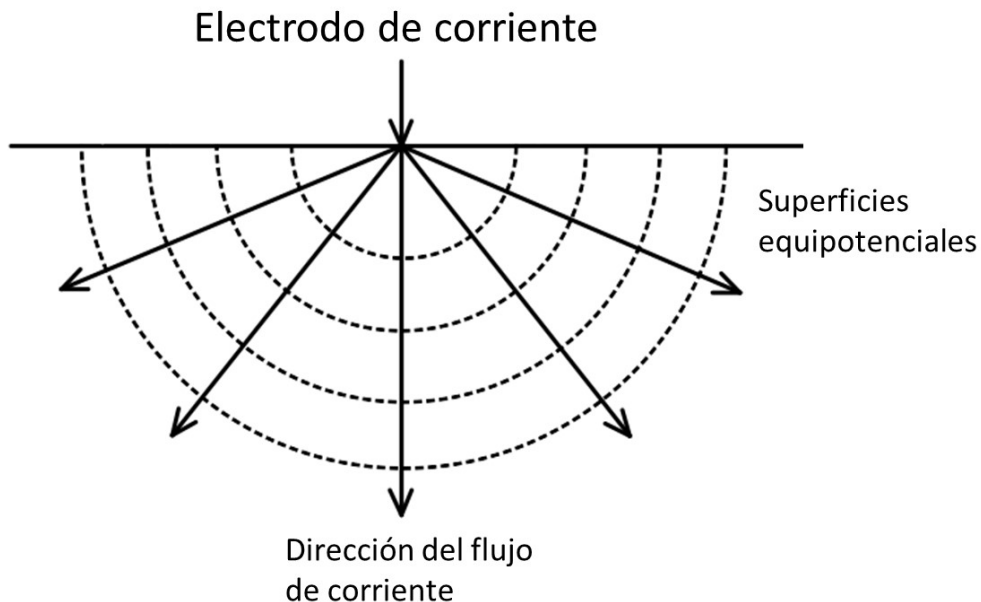


Figura 1.1: Corriente en un semiespacio homogéneo de resistividad ρ . Modificada de [41].

Los métodos eléctricos se sustentan en las **ecuaciones de Maxwell**. Partiendo de la ley de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

donde \mathbf{E} es el **campo eléctrico**; \mathbf{B} , el campo magnético; t , el tiempo; y \mathbf{r} , el vector de posición.

Debido a que la corriente es estacionaria se induce un campo magnético estacionario, es decir que no varía en el tiempo, entonces:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.2)$$

El teorema de Helmholtz indica que, si se conoce la divergencia y el rotacional de un campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, el campo puede encontrarse de forma única:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (1.3)$$

donde ϕ es el potencial escalar y \mathbf{A} , el potencial vectorial. El campo eléctrico es un **campo conservativo o estacionario**, ya que su rotacional es 0 (Ecuación 1.2), por lo anterior, puede expresarse como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}), \quad (1.4)$$

es decir, como el gradiente del potencial escalar o **potencial**.

Además, ese debe cumplir la **ecuación de continuidad** para un campo estacionario, :

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.5)$$

donde \mathbf{J} es el vector **densidad de corriente**. Este se define como el cociente de la intensidad de corriente que pasa a través de un área perpendicular a la dirección del flujo con respecto al tamaño de dicha área.

Por otro lado, en un campo eléctrico estacionario se debe cumplir la ley de Ohm [74] que relaciona $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ con $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ a través de la conductividad σ , el inverso de la resistividad ρ :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (1.6)$$

sustituyendo la ley de Ohm en la ecuación de continuidad y aplicando relaciones vectoriales, se puede llegar a:

$$\nabla \cdot (\sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})) = \sigma(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\sigma(\mathbf{r}), \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot (\sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})) = -\sigma(\mathbf{r})\nabla \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\sigma(\mathbf{r}) = -\sigma(\mathbf{r})\nabla^2\phi(\mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\sigma(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.8)$$

si se considera un semiespacio homogéneo con conductividad uniforme, es decir, $\nabla\sigma(\mathbf{r}) = 0$, se obtiene:

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.9)$$

La ecuación 1.9 es la **ecuación de Laplace**. Esta debe cumplirse en todo el semiespacio homogéneo, excepto en los electrodos ni en las superficies que limitan a medios con conductividades distintas. Una región libre de fuentes, es decir, que excluye la región en la que se encuentra la

fuente (el campo está presente pero no hay fuente) satisface esta ecuación [59].

La ecuación de continuidad (ecuación 1.5), considera que no hay fuentes en la región [59], en el método de proyección eléctrica se utiliza una fuente, es decir, un electrodo de corriente en superficie ($Z=0$) donde se inyecta una corriente I . Para añadir el efecto de la fuente, se parte de que la corriente I puede expresarse como [59]:

$$I = \oint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) d\mathbf{a}, \quad (1.10)$$

a su vez, también como [24]:

$$I = \int_V I\delta(\mathbf{r})dV, \quad (1.11)$$

donde δ es una función delta de Dirac que define la posición de la fuente. Si aplicamos el teorema de la divergencia sobre la ecuación 1.10 y sustituimos la ecuación 1.11 obtenemos:

$$I = \oint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) dV, \quad (1.12)$$

$$\int_V I\delta(\mathbf{r})dV = \oint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) dV, \quad (1.13)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) dV = \int_V I\delta(\mathbf{r})dV, \quad (1.14)$$

debido a que es el mismo volumen, se pueden igualar los integrandos, por ello:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = I\delta(\mathbf{r}). \quad (1.15)$$

Finalmente, si se sustituye la ecuación 1.4 en 1.6:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}), \quad (1.16)$$

y se sustituye en la ecuación 1.15, se obtiene:

$$\nabla \cdot [\nabla\phi(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r})] = -I\delta(\mathbf{r}). \quad (1.17)$$

Esta ecuación diferencial describe el comportamiento del potencial eléctrico producto de una corriente eléctrica originada por un electrodo puntual en la superficie en un medio heterogéneo. Si existen otras fuentes puntuales, se puede obtener el potencial total utilizando el principio de superposición [24].

En los métodos eléctricos, se mide la diferencia de potencial entre dos puntos de la superficie, esto puede expresarse como:

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.18)$$

al tratarse de un campo conservativo, el potencial es independiente de la trayectoria, es decir, únicamente depende del punto inicial (r_1) y del punto final (r_2). Sustituyendo la ley de Ohm:

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \int_{r_1}^{r_2} \rho(\mathbf{r})\mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.19)$$

donde J representa las corrientes primarias y las secundarias [63], es decir, la corriente generada por la fuente y las corrientes generadas por heterogeneidades en el subsuelo, respectivamente. **Esta ecuación fundamenta el método de prospección eléctrica en corriente estacionaria.**

1.2. Condiciones de frontera

Debido a que el subsuelo se divide en zonas con materiales de diferente composición, es de esperarse que las propiedades físicas cambien de forma abrupta en las superficies de separación entre estas. Por lo anterior, es posible que los campos asociados a dichas propiedades sean diferentes en dos regiones, por ello, se deben analizar los cambios producidos al cruzar estas fronteras. Esto se conoce como **condiciones de frontera**.

En un caso real, se espera que la propiedad analizada cambie de forma continua en una región conocida como capa de transición. Sin embargo, debido a que no se pueden conocer los detalles específicos de lo que ocurre en ella, se aproxima a través de una situación idealizada. Esto se logra contrayendo el ancho de la **capa de transición** a 0, de esta forma, se produce una discontinuidad de propiedades cuando h tiende a 0 (Figura 1.2).

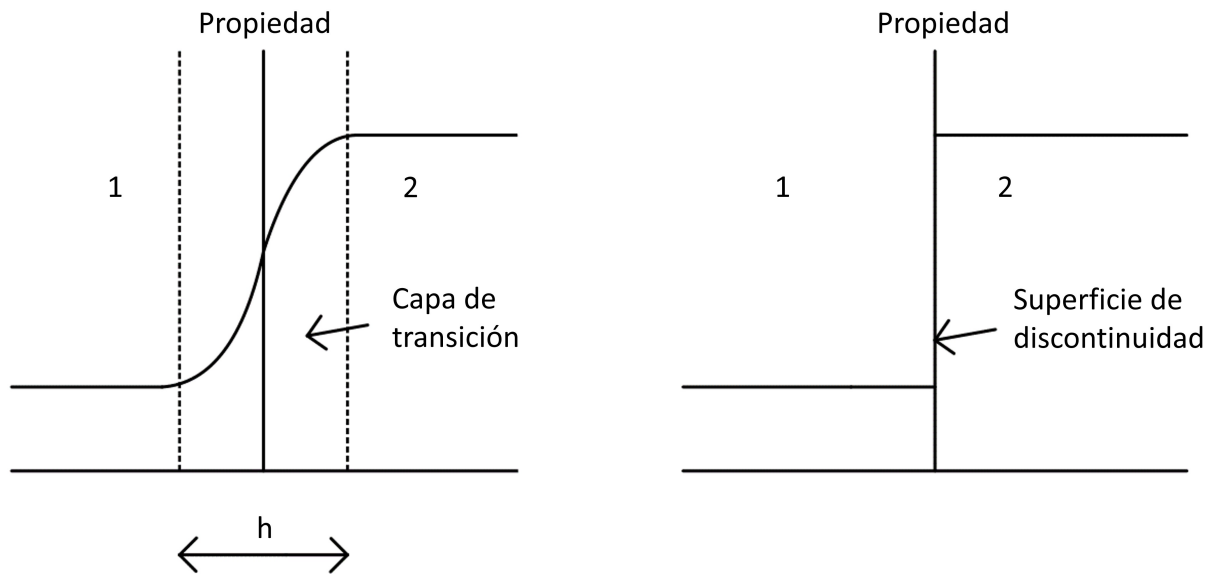


Figura 1.2: Izquierda: capa de transición entre dos medios de espesor h . Derecha: superficie de discontinuidad idealizada entre dos medios. Modificada de [73].

La primera condición de frontera para un campo eléctrico estacionario es que el potencial debe ser continuo a través de la frontera, es decir, $\phi_1 = \phi_2$ [59]. Esto implica que el potencial no experimenta ningún cambio al pasar de un medio a otro. Esto surge de la ecuación 1.18, ya que, al tender la distancia entre r_1 y r_2 a 0, el potencial también tenderá a 0, ya que \mathbf{E} debe estar acotado [54].

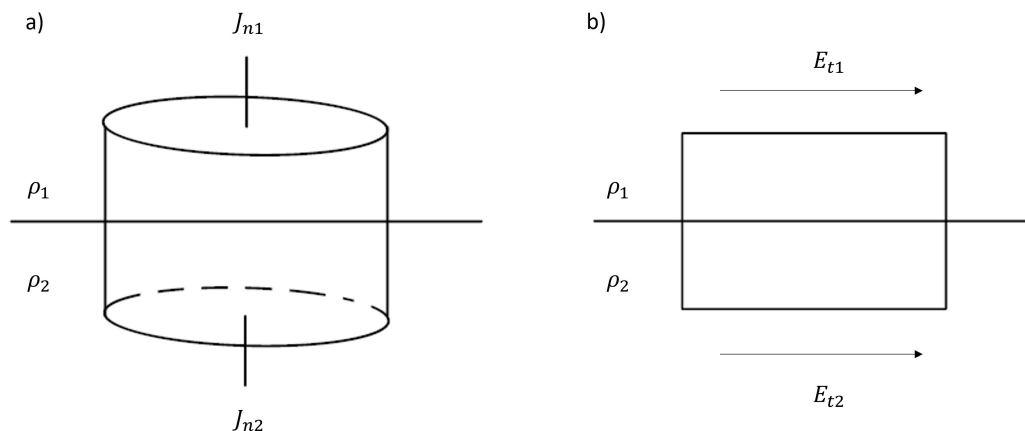


Figura 1.3: a) Determinación de las condiciones de frontera para la densidad de corriente. b) Determinación de las condiciones de frontera para el campo eléctrico. Tomada de [54].

Por otro lado, las componentes normales de la densidad de corriente deben ser continuas, es decir, $J_{n1} = J_{n2}$ [59]. Para esto, se considera un cilindro corto cuyas bases son paralelas a la superficie de discontinuidad y están una en cada medio (Figura 1.3a). Si el área de la base es pequeña y la altura tiende a cero, el flujo de corriente a través de esta superficie también tenderá a anularse [54]. Si consideramos la ecuación 1.6 se obtiene que $\sigma_1 E_{n1} = \sigma E_{n2}$, es decir, las componentes normales del campo eléctrico son discontinuas.

Así mismo, las componentes tangenciales del campo son continuas. Esto surge de considerar una rectángulo de altura muy pequeña cuyas bases son paralelas a la superficie de discontinuidad y están una en cada medio (Figura 1.3b). Si se realiza la integral de línea del campo eléctrico en esta trayectoria, debido a que es un campo conservativo y al teorema de Stokes, se anula. Si la altura es 0, solo contribuyen las bases en la integral, es decir, $E_{t1} = E_{t2}$ [54]. Finalmente, considerando la ecuación 1.6, se obtiene que $\frac{J_{t1}}{\sigma_1} = \frac{J_{t2}}{\sigma_2}$, es decir, las componentes tangenciales de la densidad de corriente son discontinuas. En la tabla 1.1 se muestran las condiciones de frontera para un campo eléctrico estacionario.

Tabla 1.1: Condiciones de frontera para un campo eléctrico estacionario

\mathbf{E}	\mathbf{J}	ϕ
$\sigma_1 E_{n1} = \sigma E_{n2}$	$J_{n1} = J_{n2}$	$\phi_1 = \phi_2$
$E_{t1} = E_{t2}$	$\frac{J_{t1}}{\sigma_1} = \frac{J_{t2}}{\sigma_2}$	

A manera de resumen de los dos temas anteriores, se presenta el siguiente mapa mental:

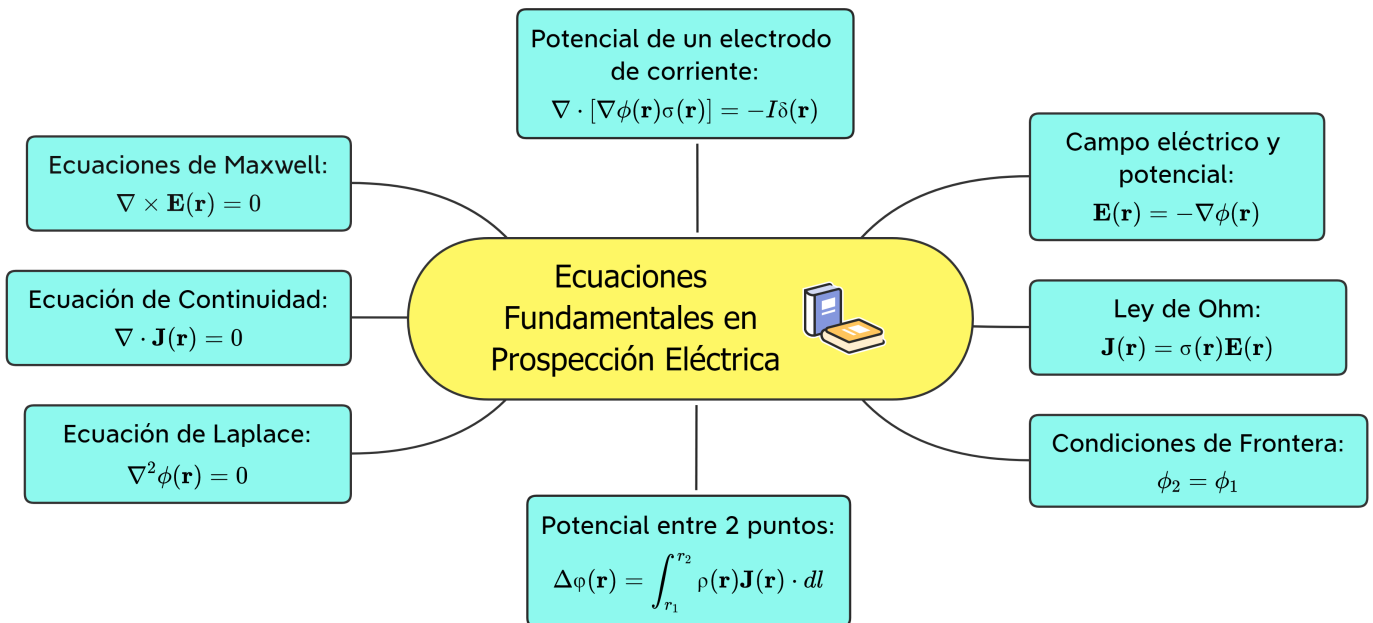


Figura 1.4: Mapa mental: Ecuaciones Fundamentales de Prospección Eléctrica.

1.3. Conceptos básicos

1.3.1. Resistividad

La **resistividad** (ρ) es una medida de la dificultad que la corriente eléctrica encuentra a su paso en un material determinado. La unidad de medida de la resistividad en el sistema internacional es el Ohm-metro [$\Omega \cdot m$] [54]. Si se considera la facilidad de paso de la corriente eléctrica se habla de **conductividad** (σ) que es el inverso de la resistividad y sus unidades son los [**Siemens/m**]

El concepto de Resistividad surge de considerar un cubo eléctricamente uniforme de longitud L por donde pasa una corriente I (Figura 1.5). El material del cubo dificulta el paso de la corriente, por ello, genera una diferencia de potencial entre dos caras opuestas. La resistencia R es proporcional a la longitud L e inversamente proporcional a la sección transversal A . La constante de proporcionalidad ρ es la resistividad en [$\Omega \cdot m$] [58].

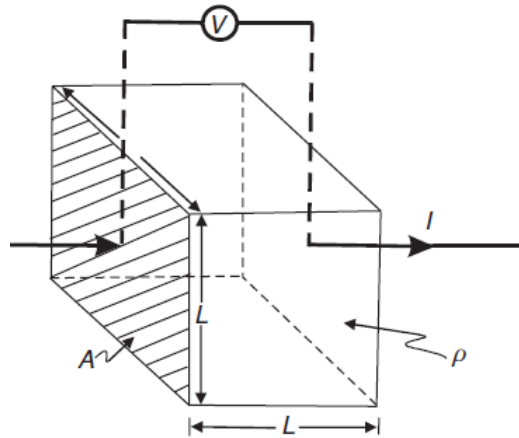


Figura 1.5: Definición de resistividad a través de un bloque con alto L y sección transversal A donde se aplica una corriente I y se produce una diferencia de potencial entre sus caras. Tomada de [58].

1.3.2. Propiedades eléctricas de las rocas

Existen 3 formas en las cuales la corriente puede conducirse a través de una roca [58]:

- **Conducción electrolítica:** ocurre debido al movimiento lento de los iones en un electrolito y depende del tipo de ion, concentración y movilidad.
- **Conducción electrónica:** proceso a través del cual los metales permiten el movimiento rápido de electrones que transportan la carga.
- **Conducción dieléctrica:** ocurre en materiales poco conductores (o aislantes) cuando una corriente alterna externa es aplicada, esto genera la alineación de los electrones con respecto al núcleo.

En la mayoría de las rocas, la conducción se realiza a través de fluidos presentes en los poros que se comportan como electrolitos, los granos minerales contribuyen poco a la conductividad de la roca, salvo en la presencia de metales [41]. La resistividad de los materiales geológicos presenta uno de los **rangos** más grandes entre todas las propiedades físicas y va desde $1.6 \times 10^{-8} [\Omega \cdot m]$ para la plata nativa hasta $10^{16} [\Omega \cdot m]$ para el azufre puro [58].

La resistividad eléctrica de las rocas es una función que **depende** de la porosidad, permeabilidad, temperatura, saturación de fluidos, composición del fluido en sus poros, mineralogía, matriz de la roca e, incluso, edad de la roca [12]. Otros factores a considerar para una interpretación adecuada de los sondeos eléctricos son: el contenido de minerales arcillosos, por la ionización generada en la interacción agua-roca, y **la presión**, para presiones de hasta 1000 kg/cm^2 , se ha observado que las rocas sedimentarias porosas y húmedas se vuelven más resistivas con el aumento de la presión, por otro lado, para rocas ígneas y sedimentarias con escaso contenido de agua se ha observado que la resistividad disminuye cuando la presión cambia de 200 a 400 kg/cm^2 rápidamente [54].

El **comportamiento eléctrico de las rocas** puede describirse de acuerdo con su tipo [41].

- **Rocas ígneas y metamórficas:** generalmente tienen altos valores de resistividad. La re-

sistividad de estas rocas depende mucho del grado de fracturamiento que presenten y el porcentaje de estas fracturas que estén llenas de agua subterránea. Su rango de valores de resistividad puede ir desde 10 hasta 10 millones de $[\Omega \cdot m]$ dependiendo si la roca esta húmeda o seca.

- **Rocas sedimentarias:** estas rocas son las más porosas y tienen un contenido de agua más alto, por lo general, tienen menor resistividad que las rocas ígneas y las metamórficas. Su resistividad depende principalmente de su porosidad y la salinidad del agua que almacenan. En el caso de las rocas carbonatadas, la relación entre la porosidad y la resistividad se complica por la presencia de porosidad secundaria, causada por los fósiles presentes al formarse la roca, que generan permeabilidad [25]. Su rango de valores de resistividad puede ir desde 10 hasta 10000 $[\Omega \cdot m]$ con la mayoría de los valores menores a 1000 $[\Omega \cdot m]$.
- **Sedimentos no consolidados:** tienen valores de resistividad menores que las rocas sedimentarias. La resistividad de estos sedimentos depende de la porosidad y el contenido de arcilla. Sedimentos arcillosos tienen una menor resistividad que sedimentos de arenas. Su rango de valores de resistividad puede ir desde 10 a valores menos de 1000 $[\Omega \cdot m]$.

Existen tablas que contienen los rangos de resistividad para diferentes rocas o materiales geológicos, a continuación, se presentan las realizadas por Loke (Figura 1.6), Reynolds (Tabla 1.2), Everett (Tabla 1.3) y Telford (Tabla 1.4):

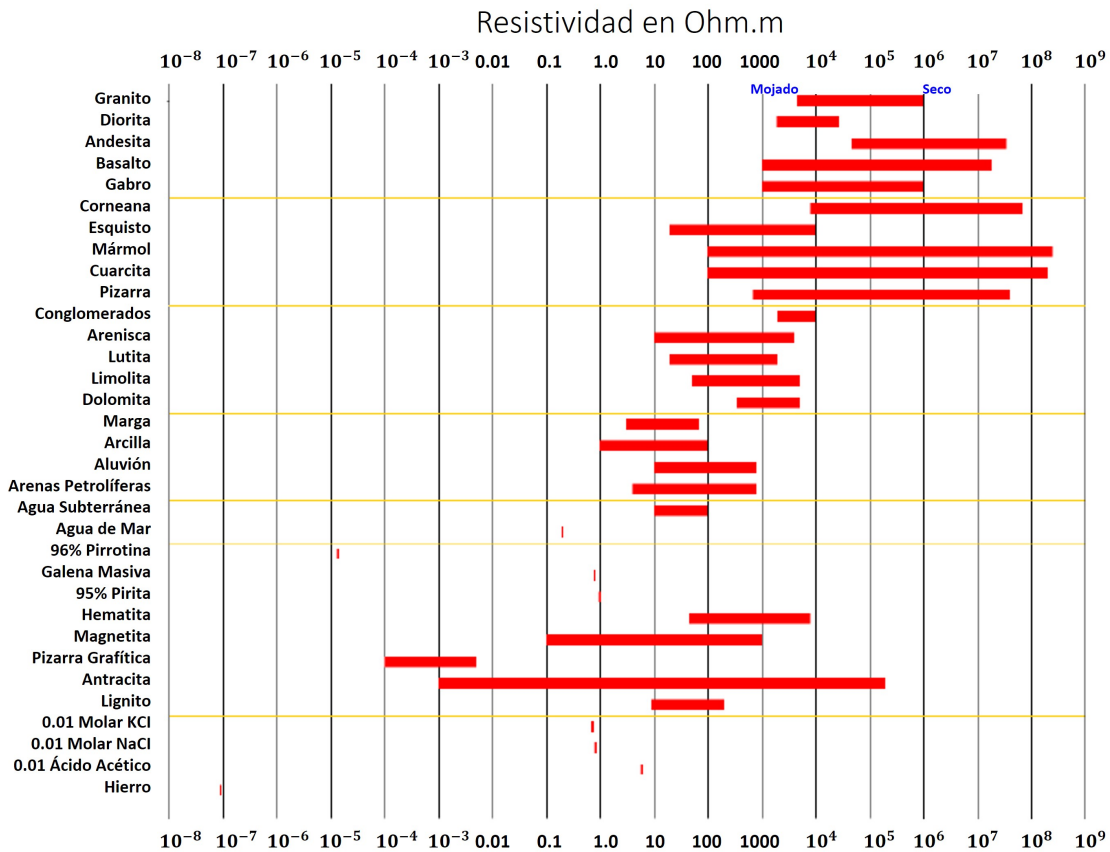


Figura 1.6: Resistividad de rocas, suelo y minerales. Modificada de [41].

Tabla 1.2: Resistividad de algunos materiales comunes y rocas realizada por Reynolds (2011). Tomada de [58].

Material	Resistividad Nominal
Calcopirita	$1.2 \times 10^{-5} - 3 \times 10^{-1}$
Pirita	$2.9 \times 10^{-5} - 1.5$
Pirrotina	$7.5 \times 10^{-6} - 1^{-2}$
Galena	$3 \times 10^{-5} - 3 \times 10^2$
Esfalerita	1.5×10^7
Hematita	$3.5 \times 10^{-3} - 10^7$
Limonita	$10^3 - 10^7$
Magnetita	$5 \times 10^{-5} - 5.7 \times 10^3$
Ilmenita	$10^{-3} - 50$
Cuarzo	$200 - 10^6$
Halita	$30 - 10^{13}$
Antracita	$10^{-3} - 2 \times 10^5$
Lignito	$9 - 200$
Granito	$300 - 1.3 \times 10^6$
Granito (Meteorizado)	$30 - 500$
Sienita	$10^2 - 10^6$
Diorita	$10^4 - 10^5$
Gabro	$10^3 - 10^6$
Basalto	$10 - 1.3 \times 10^7$
Esquisto (Calcáreo y mica)	$20 - 10^4$
Esquisto (Grafito)	$10 - 100$
Pizarras	$600 - 4 \times 10^7$
Mármol	$100 - 2.5 \times 10^8$
Lutitas Consolidadas	$20 - 2000$
Conglomerados	$2 \times 10^3 - 10^4$
Areniscas	$1 - 7.4 \times 10^8$
Calizas	$50 - 10^7$
Dolomita	$350 - 5 \times 10^3$
Margas	$3 - 70$
Arcillas	$1 - 100$
Aluvión y arena	$10 - 800$
Morrena	$10 - 5 \times 10^3$
Reserva de Hidrocarburos	$25 - 27.5$
Areniscas Sherwood	$100 - 400$
Suelo (40 % arcilla)	8
Suelo (20 % arcilla)	33
Capa Vegetal (<i>Topsoil</i>)	$250 - 1700$
Arcilla de Londres	$4 - 20$
Arcilla Lias	$10 - 15$
Arcilla (Muy seca)	$50 - 150$
Lutita Mercia	$20 - 60$
Creta	$50 - 150$

Tabla 1.2 (Continuación): Resistividad de algunos materiales comunes y rocas realizada por Reynolds (2011). Tomada de [58]

Material	Resistividad Nominal [$\Omega.m$]
Grava (Seca)	1400
Grava (Saturada)	100
Ceniza (Saturada)	4
Lateralita	800 - 1500
Lateralita (Suelo)	120 - 750
Suelo arenoso seco	80 - 1050
Arena arcillosa	30 - 215
Arena y grava	30 - 225
Vertedero No Saturado	30 - 100
Vertedero Saturado	15 - 30
Hielo Glaciar (Templado)	$2 \times 10^6 - 1.2 \times 10^8$
Hielo Glaciar (Polar)	$5 \times 10^4 - 3 \times 10^5$
Permafrost	$10^3 - > 10^5$

Tabla 1.3: Resistividad de materiales geológicos comunes realizada por Everett (2013). Tomada de [25].

Material	Resistividad [$\Omega.m$]
Arcilla	1 - 20
Arena, mojada a húmeda	20 - 200
Lutita	1 - 500
Caliza porosa	$100 - 10^3$
Caliza densa	$10^3 - 10^6$
Roca metamórfica	$50 - 10^6$
Roca ígnea	$10^2 - 10^6$

Tabla 1.4: Resistividades de varios tipos de roca y sedimentos realizada por Telford (1990). Tomada de [68].

Tipo de Roca	Rango de Resistividad [$\Omega.m$]
Granito Porfídico	4.5×10^3 (Húmedo) - 1.3×10^6 (Seco)
Feldespato Porfídico	4×10^3 (Húmedo)
Sienita	$10^2 - 10^6$
Diorita Porfídica	1.9×10^3 (Húmedo) - 2.8×10^4 (Seco)
Pórfido	$10 - 5 \times 10^4$ (Húmedo) - 3.3×10^3 (Seco)
Cuarzo Diorita	$2 \times 10^4 - 2 \times 10^6$ (Húmedo) - 1.8×10^5 (Seco)
Dacita	2×10^4
Andesita	4.5×10^4 (Húmedo) - 1.7×10^2 (Seco)
Diabasa (Varios)	$20 - 5 \times 10^7$
Lavas	$10^2 - 5 \times 10^4$
Gabro	$10^3 - 10^6$

Tabla 1.4 (Continuación): Resistividades de varios tipos de roca y sedimentos realizada por Telford (1990. Tomada de [68])

Tipo de Roca	Rango de Resistividad [$\Omega.m$]
Basalto	$10 - 1.3 \times 10^7$ (Seco)
Olivino Norita	$10^3 - 6 \times 10^4$ (Húmedo)
Peridotita	3×10^3 (Húmedo) - 6.5×10^3 (Seco)
Corneana	8×10^3 (Húmedo) - 6×10^7 (Seco)
Esquisto (Calcáreo y Mica)	$20 - 10^4$
Tufa	2×10^3 (Húmedo) - 10^5 (Seco)
Esquisto Grafito	$10 - 10^2$
Pizarra (Varios)	$6 \times 10^2 - 4 \times 10^7$
Gneis (Varios)	6.8×10^4 (Húmedo) - 3×10^6 (Seco)
Mármol	$10^2 - 2.5 \times 10^8$ (Seco)
Skarn	2.5×10^2 (Húmedo) - 2.5×10^8 (Seco)
Cuarcitas (Varios)	$10 - 2 \times 10^8$
Lutitas Consolidadas	$20 - 2 \times 10^3$
Argilita	$10 - 8 \times 10^2$
Conglomerados	$2 \times 10^3 - 10^4$
Areniscas	$1 - 6.4 \times 10^8$
Calizas	$50 - 10^7$
Dolomita	$3.5 \times 10^2 - 5 \times 10^3$
Arcilla no consolidada húmeda	20
Aluvión y arena	10 - 800
Margas	3 - 70
Arcillas	1 - 100
Arenas petrolíferas	4 - 800

En las tablas presentadas, es posible observar que los rangos de rocas de diferentes tipos se cruzan entre sí o son muy amplios, esto es consecuencia de los diversos factores que afectan a la resistividad.

1.3.3. Resistividad aparente y factor geométrico

Se considera un semiespacio homogéneo donde está una fuente puntual A y dos electrodos que miden la diferencia de potencial M y N (Figura 1.7).

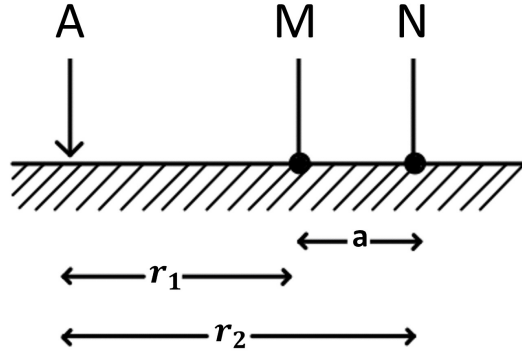


Figura 1.7: Medio de resistividad homogénea donde se coloca un dispositivo electrónico AMN para la definición de resistividad aparente. Modificada de [54].

Se define a la densidad de corriente volumétrica J como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi r^3} \mathbf{r}, \quad (1.20)$$

donde r es la distancia a la fuente. Sustituyendo la ecuación anterior en 1.19 se obtiene:

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{I\rho}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{x} \hat{\mathbf{i}}}{r^3}. \quad (1.21)$$

Si se considera que $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$, tal que $x = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{i}}$; $y = 0$; $z = 0$ ya que las mediciones se realizan en la dirección x :

$$\Delta\phi = \frac{I\rho}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{x \cdot dx}{x^3}. \quad (1.22)$$

Al resolver la integral y evaluando los límites de integración se obtiene:

$$\Delta\phi = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.23)$$

A partir de la ecuación anterior se puede definir el **factor geométrico** (k) como:

$$k = 2\pi \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1}, \quad (1.24)$$

esta ecuación también puede expresarse como:

$$k = 2\pi \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} \right)^{-1}, \quad (1.25)$$

donde AM indica la distancia entre los electrodos $A - M$ y AN entre los electrodos $A - N$.

La unidad del factor geométrico es el $[m]$ y **depende de distancia entre los electrodos**, por ello, es diferente para cada tipo de arreglo de electrodos.

Un conjunto de electrodos como el de la Figura 1.8, recibe el nombre de dispositivo electródico o **arreglo de electrodos** [54]. Este es un arreglo de electrodos típico y está formado por 4 electrodos (**cuadripolo**): dos electrodos de corriente, uno donde se transmite la corriente y otro donde se cierra el circuito de transmisión de la corriente; y dos electrodos de potencial que registran la diferencia de potencial generada por la corriente. Los cuadripolos pueden adoptar diferentes combinaciones geométricas sobre la superficie del terreno.

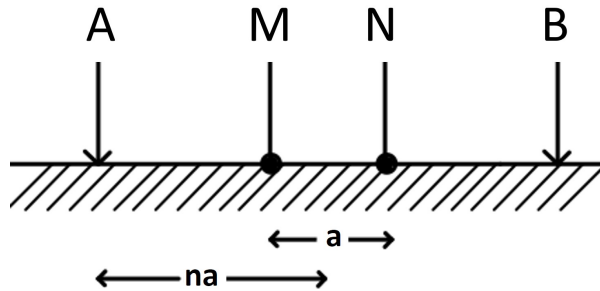


Figura 1.8: Dispositivo electródico lineal y simétrico. Modificada de [54].

La diferencia de potencial en un arreglo de 4 electrodos tiene la forma de:

$$\Delta\phi = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right), \quad (1.26)$$

donde k es:

$$k = 2\pi \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right)^{-1}. \quad (1.27)$$

Si se despeja la resistividad de la ecuación 1.26 y se reemplaza $\Delta\phi$ por ΔV , se obtiene:

$$\rho = \frac{\Delta V}{I} k. \quad (1.28)$$

Esta resistividad representa la resistividad de un semiespacio homogéneo.

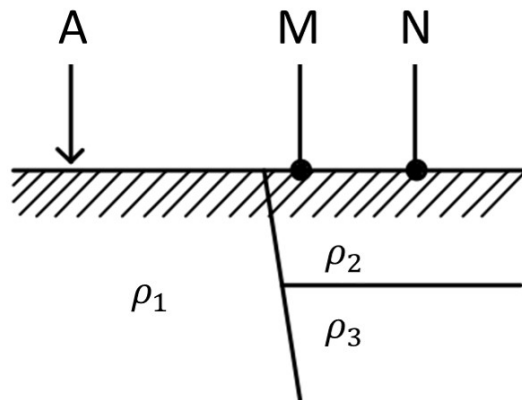


Figura 1.9: Ejemplo de un subsuelo heterogéneo. Modificada de [54].

Como se sabe, la tierra no es homogénea y no se tiene una resistividad constante, si la posición de los electrodos va cambiando se obtendrán diferentes valores de resistividad en cada medición [30], por ello, es necesario considerar el caso de un semiespacio heterogéneo (Figura 1.9). Para esto, la resistividad de la ecuación 1.28 se define como **resistividad aparente** (ρ_a) y, si se sustituye la ecuación 1.19, la expresión resultante es:

$$\rho_a(\mathbf{r}) = \frac{\Delta V(\mathbf{r})}{I} k. \quad (1.29)$$

La **resistividad aparente** equivale a la resistividad que se mediría si la tierra fuera homogénea. Esta es una variable experimental que sirve para expresar los resultados de las mediciones en los métodos geoelectricos y sus unidades son las mismas que la de la resistividad [54]. Cabe aclarar que la resistividad aparente no es una propiedad física, caso contrario a la resistividad real [58].

En la ecuación 1.29, se observa que **la resistividad aparente depende del factor geométrico**. Un ejemplo de esto se muestra en la Figura 1.10, donde la resistividad varía lateralmente y el arreglo de electrodos es desplazado de forma lateral para medir la resistividad aparente. Se muestran dos curvas de resistividad aparente: (a) la línea sólida obtenida con una separación entre electrodos de 10 [m] y (b) la línea punteada obtenida con una separación de 20 [m]. A los extremos de las regiones descritas por la figura, la resistividad aparente medida es invariable ya que no es influenciada por la resistividad de la región opuesta, a medida que el arreglo se acerca y cruza la superficie de separación entre ambas regiones, se observa un cambio en la curva, incluso, cuando el arreglo ya se encuentra completamente de un lado, se sigue observando la influencia del cambio o contraste entre resistividades. La influencia de este contraste es mayor en la curva (b), donde se observa una variación de la resistividad aparente a una mayor distancia respecto a la curva (a) [10].

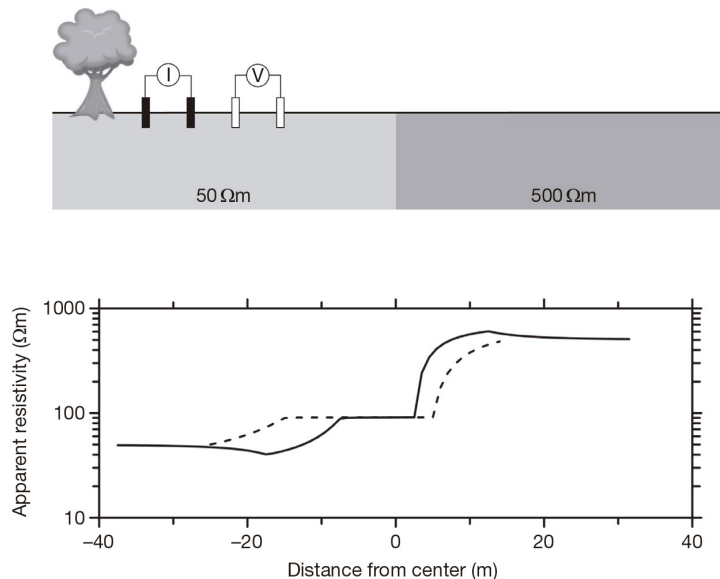


Figura 1.10: Ejemplo de variaciones laterales. La línea sólida indica la resistividad aparente con espaciamiento de 10 [m], la línea punteada con espaciamiento de 20 [m]. Tomada de [10].

En un sistema real, mucho más complejo que el utilizado en el ejemplo, estas variaciones son mucho más pronunciadas, sin embargo, con el ejemplo descrito es posible concluir que la geometría del arreglo de electrodos influye en el valor de resistividad aparente y, en consecuencia, se obtendrán

valores diferentes para cada arreglo. Estos valores de resistividad aparente son diferentes a los valores reales del subsuelo y pueden ser utilizados para una interpretación en campo o interpretación preliminar. Para obtener los valores de resistividad reales se debe aplicar un algoritmo de inversión.

1.3.4. Electrodo puntual

Una de las suposiciones en las cuales se basa el método de la prospección eléctrica es que el campo eléctrico es generado por una **fente puntual** que se localiza en la superficie de la tierra [34]. Esta fuente es la corriente transmitida a través del electrodo. De lo anterior, nace el concepto del **electrodo puntual**, es decir, la consideración de que la corriente está concentrada en un punto y que sus **dimensiones son despreciables** comparadas con la superficie de la tierra. Esta consideración permite que se cumpla la ecuación de Laplace (Ecuación 1.9) en el medio y solamente se mida el campo producido por la fuente.

En la Figura 1.1 se mostró la distribución del campo eléctrico generado por un electrodo. La mayoría de los arreglos electródicos involucran 4 electrodos: dos como fuente y dos que registran la diferencia de potencial, para que no se altere la condición puntual de los electrodos, se debe considerar la **distancia de separación** entre estos y la porción del electrodo enterrada en la superficie. Un estudio demostró que esta aproximación es válida si la relación entre la separación y la porción enterrada es grande, es decir, si la separación es varias veces la porción enterrada [71]. De forma empírica, una regla general es que la separación entre la fuente y el electrodo de potencial sea de, al menos, 10 veces más la porción que se entierra del electrodo [47] (si se entierran 15 cm, se separarían 150 cm), sin embargo, esto depende de las condiciones del sitio de adquisición, es decir, si hay un buen contacto entre el terreno y los electrodos, por lo tanto, es importante que la persona encargada de la adquisición determine las condiciones para la toma del dato.

1.4. Arreglos de electrodos

Como se mencionó anteriormente, un arreglo típico de electrodos está formado por 4 electrodos (cuadripolo). La **disposición geométrica** de los electrodos define el tipo de arreglo utilizado. Existen, al menos, 102 tipos de arreglos de electrodos reconocidos, esto es una muestra de la **flexibilidad** del método de prospección eléctrica, sin embargo, es importante conocer las ventajas y desventajas de cada tipo de arreglo. La **elección del arreglo** depende de diversos factores, por ejemplo: familiaridad, disponibilidad de equipo y software, condiciones del sitio, sensibilidad a cambios horizontales y verticales, profundidad de investigación e intensidad de la señal, etc. [58].

A medida que aumenta el espaciamiento entre los electrodos del arreglo utilizado, se obtiene información a mayor profundidad del subsuelo. En la Figura 1.11 se observa que, para un espaciamiento pequeño, las líneas de corriente están concentradas en la parte más superficial, por ello, las mediciones de resistividad aparente no son influenciadas por las capas más profundas. A mayor espaciamiento, las líneas de corriente penetran a mayor profundidad y el efecto de la capa más superficial se reduce en favor de las capas más profundas. Esto se observa en la curva de resistividad aparente [10].

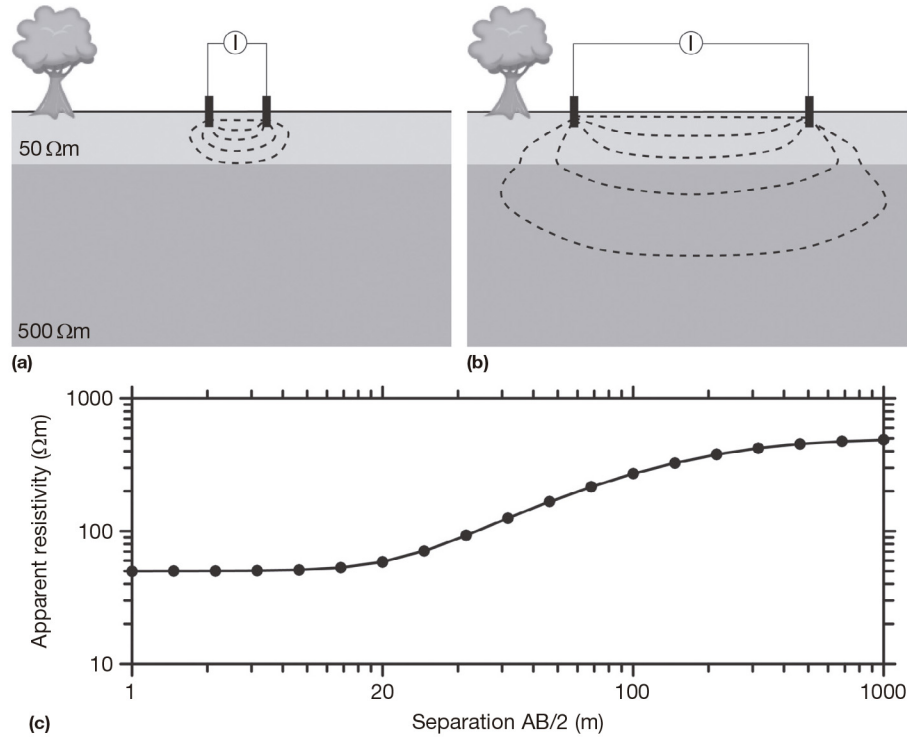


Figura 1.11: Efecto de la variación vertical de la resistividad medida. (a) y (b) muestran la variación de la resistividad con un espaciamento entre electrodos diferente. (c) Muestra la resistividad aparente para el arreglo Schlumberger. Tomada de [10].

1.4.1. Función de sensibilidad y profundidad media de investigación

La función sensibilidad indica la magnitud de una perturbación en el potencial medido causada por una perturbación en la distribución de resistividad del subsuelo [25]. Esta está representada, matemáticamente, por la derivada de Frechet, para el caso de un electrodo de potencial y un electrodo de corriente, se define de la siguiente forma:

$$F_{3D}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{x(x-a) + y^2 + z^2}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1.5} [(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{1.5}}, \quad (1.30)$$

donde a es la separación entre electrodos y (x, y, z) representan la posición de los electrodos. Si se desea obtener la función para un cuadripolo, se debe sumar la contribución de los electrodos adicionales [41]

La función de sensibilidad, depende de la posición de los electrodos, cada arreglo tiene una distribución de sensibilidad diferente, sin embargo, una característica común es que los valores más altos se encuentran en la zona inmediata a los electrodos.

Mientras mayor sea el valor de la función de sensibilidad, mayor es la influencia de la perturbación de resistividad en el valor medido de potencial. Como se puede observar en las figuras 1.14, 1.16, 1.18, 1.20 y 1.22, existen valores positivos y negativos. Un valor positivo indica las regiones en las que la presencia de un cuerpo que es más resistivo que lo que lo rodea resultará en un incremento en la resistividad medida, por otro lado, en los valores negativos, ese mismo cuerpo resultaría en

una reducción de la resistividad medida [16], esto se conoce como inversión de la anomalía [41]. Así mismo, la diferencia entre los contornos de la función de sensibilidad determina la **respuesta y resolución** de los arreglos ante diferentes tipos de estructuras (verticales u horizontales) [41].

La función de sensibilidad también puede ser utilizada para estimar la profundidad de investigación de un arreglo de electrodos en un medio homogéneo, esto se logra a partir de integrar la función de sensibilidad del arreglo de electrodos utilizado en las direcciones x, y [41]. De esta forma se obtiene la siguiente función:

$$F_{1D} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{z}{(a^2 + 4z^2)^{1.5}}, \quad (1.31)$$

que se conoce como la profundidad de investigación característica. Algunos autores utilizan el valor máximo de esta para determinar la profundidad de investigación, sin embargo, una forma más robusta de estimar la profundidad de investigación fue desarrollada por Edwards (1977) quien la denominó “**profundidad media de investigación**”. Esta utiliza la mediana de la función. El nombre hace referencia a que la contribución al potencial medido de la sección por encima de la profundidad media de investigación es la misma que la de la sección por debajo [39]. Los valores calculados por Edwards (1977) pueden observarse en la tabla 1.5 para diferentes tipos de arreglos.

Esta profundidad media de investigación, estrictamente, es válida para un modelo de tierra homogénea, a pesar de esto, es muy útil para planear adquisiciones de campo; si existen grandes contrastes de resistividad, los valores de profundidad variarían.

1.4.2. Puntos de atribución y pseudosección

La información obtenida del subsuelo, mediante la medición de potenciales, pertenece al aporte de un volumen del subsuelo y se representa como puntos, también llamados puntos de atribución que se localizan, horizontalmente, en el punto medio del arreglo y, verticalmente, a la profundidad media de investigación. Cabe recordar que los valores de resistividad obtenidos a partir de las mediciones de potencial no son reales, sino, aparentes. El conjunto de los puntos de atribución recibe el nombre de **pseudosección**, esta da una idea acerca de la distribución de resistividad real, sin embargo, está distorsionada ya que, los contornos formados en ella dependen del arreglo utilizado y de la resistividad real [41].

En la práctica los cinco arreglos **más populares** son: Wenner, dipolo-dipolo, Wenner-Schlumberger, polo-polo y polo-dipolo [41]. La configuración geométrica de estos arreglos junto a su factor geométrico puede encontrarse en la Figura 1.12.

El factor geométrico (k) de cada arreglo se obtiene a partir de la ecuación 1.27 al sustituir las distancias entre los electrodos, por ejemplo, para el arreglo Wenner, cuya configuración geométrica se observa en la 1.12a, las distancias de separación entre sus electrodos son: $AM = a$, $BM = 2a$, $AN = 2a$, $BN = a$, al sustituir en la ecuación se obtiene:

$$k = 2\pi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{a} \right)^{-1}, \quad (1.32)$$

$$k = 2\pi \left(\frac{2}{a} - \frac{2}{2a} \right)^{-1}, \quad (1.33)$$

simplificando:

$$k = 2\pi\left(\frac{4a - 2a}{2a^2}\right)^{-1} = 2\pi\left(\frac{2a}{2a^2}\right)^{-1} = 2\pi\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}, \quad (1.34)$$

finalmente,

$$k = 2\pi\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = \frac{2\pi}{\frac{1}{a}} = 2\pi a, \quad (1.35)$$

que es la ecuación que se encuentra en la 1.12a. El procedimiento es similar para los otros arreglos solo deben modificarse las distancias entre electrodos.

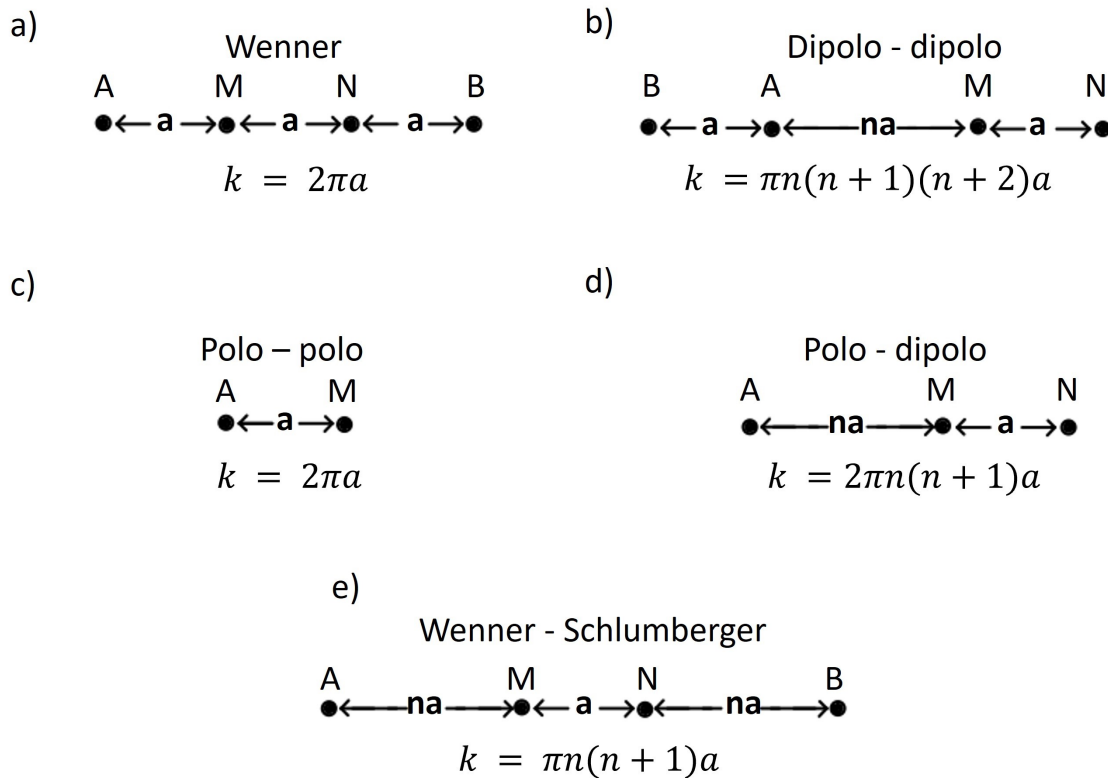


Figura 1.12: Arreglos de electrodos más populares en la prospección eléctrica. A y B son los electrodos de potencial; M y N, los de corriente; n, el nivel y k, el factor geométrico. Modificada de [41].

Para poder elegir el arreglo de electrodos adecuado para el objetivo de un estudio, es necesario conocer sus características, a continuación se presentan las de los arreglos de la Figura 1.12.

1.4.3. Wenner

La configuración del arreglo Wenner se puede observar en la Figura 1.12a. En este arreglo, los 4 electrodos están separados por una distancia a que permanece fija durante el sondeo. Este arreglo se diseñó para realizar perfiles laterales a una profundidad constante.

La función de sensibilidad del arreglo Wenner se muestra en la Figura 1.14, en ella se observan contornos horizontales en la parte central, por ello, el arreglo tiene **buena resolución en cambios**

verticales de resistividad del subsuelo (estructuras horizontales), sin embargo, no es muy bueno para detectar cambios horizontales (estructuras verticales).

Dentro de los 5 arreglos principales, este tiene la **mayor intensidad de señal**, lo cual puede ser muy importante si en el sitio de trabajo existe mucho ruido de fondo. Su profundidad de investigación es moderada. Una desventaja de este arreglo es su **poca cobertura horizontal**, a medida que se incrementa el espaciamiento a , se pierden 3 puntos de atribución por nivel, como se muestra en la Figura 1.13.

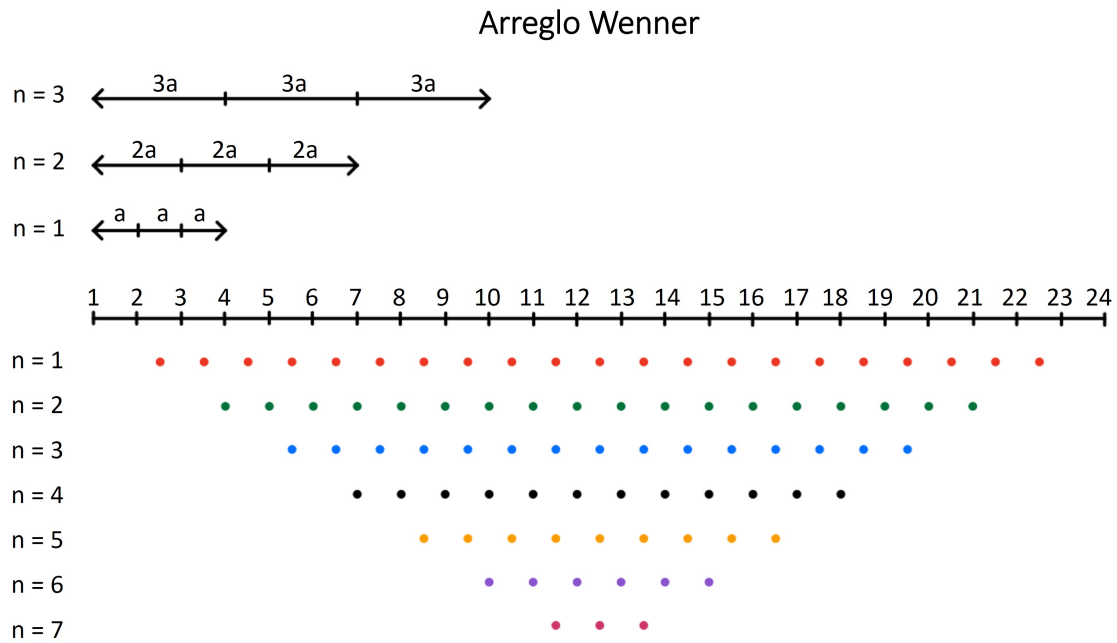


Figura 1.13: Puntos de atribución del arreglo Wenner en 7 niveles. Se pierden 3 datos por nivel.

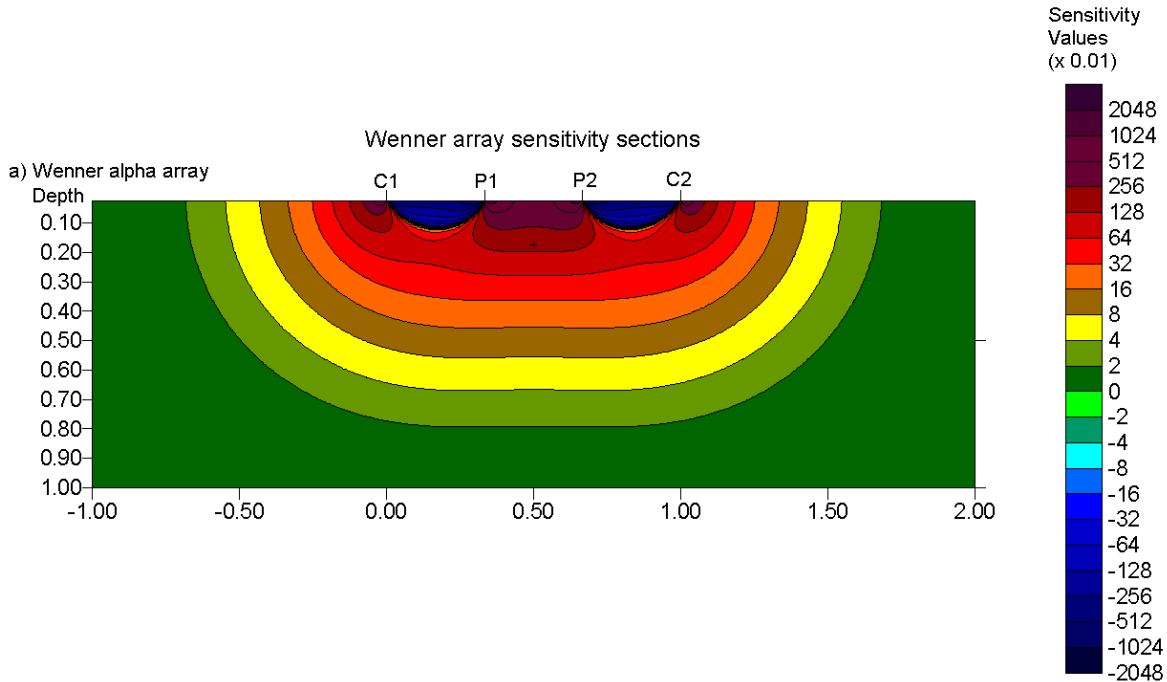


Figura 1.14: Función de sensibilidad del Arreglo Wenner. Tomada de [41].

1.4.4. Dipolo-dipolo

La configuración del arreglo Dipolo-dipolo se puede observar en la Figura 1.12b. En este arreglo, los electrodos de corriente y los de potencial están separados por un espaciamiento a , esta es la misma distancia que existe entre los electrodos de potencial. Los pares de electrodos están separados por una distancia na . Usualmente, a se mantiene fija en la unidad más pequeña de espaciamiento mientras que el factor n es incrementado desde 1 hasta 6 para aumentar la profundidad de investigación, un valor más grande que 6 resulta en un potencial muy bajo, como puede observarse en la Tabla 1.5, el potencial se reduce 56 veces respecto a $n=1$.

En la Figura 1.16 se muestra la función de sensibilidad del arreglo dipolo-dipolo. Se observa que los valores más grandes están debajo de los dipolos, a medida que incrementa n , estos valores se concentran cada vez más en la zona inmediata a los dipolos y los contornos adquieren una forma vertical, por ello, la profundidad de investigación no es significativa para valores más grandes que $n = 2$. Por lo anterior, el arreglo es muy **sensible a cambios horizontales** de resistividad, sin embargo, es **insensible a cambios verticales**, por lo tanto, es muy bueno para mapear estructuras verticales como diques o cavidades pero malo para estructuras horizontales como capas sedimentarias o sills.

La profundidad media de investigación depende del espaciamiento a y del factor n , por lo general, tiene menor profundidad de investigación que el arreglo Wenner. También, tiene mejor cobertura horizontal, como se observa en la Figura 1.15, este arreglo pierde 1 punto de atribución por nivel.

Una desventaja de este arreglo es su muy **baja intensidad de señal** para valores muy grandes del factor n . Una forma de compensar esto es incrementar a para disminuir la caída del potencial.

Arreglo Dipolo-dipolo

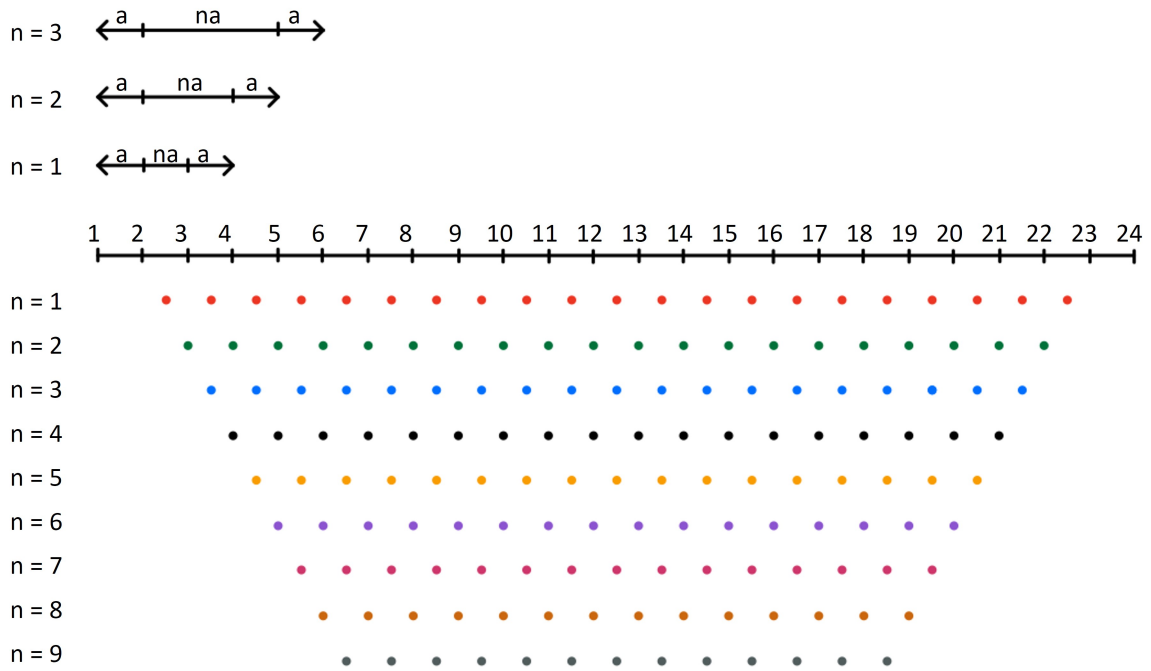


Figura 1.15: Puntos de atribución del arreglo dipolo-dipolo en 9 niveles. Se pierden un dato por nivel.

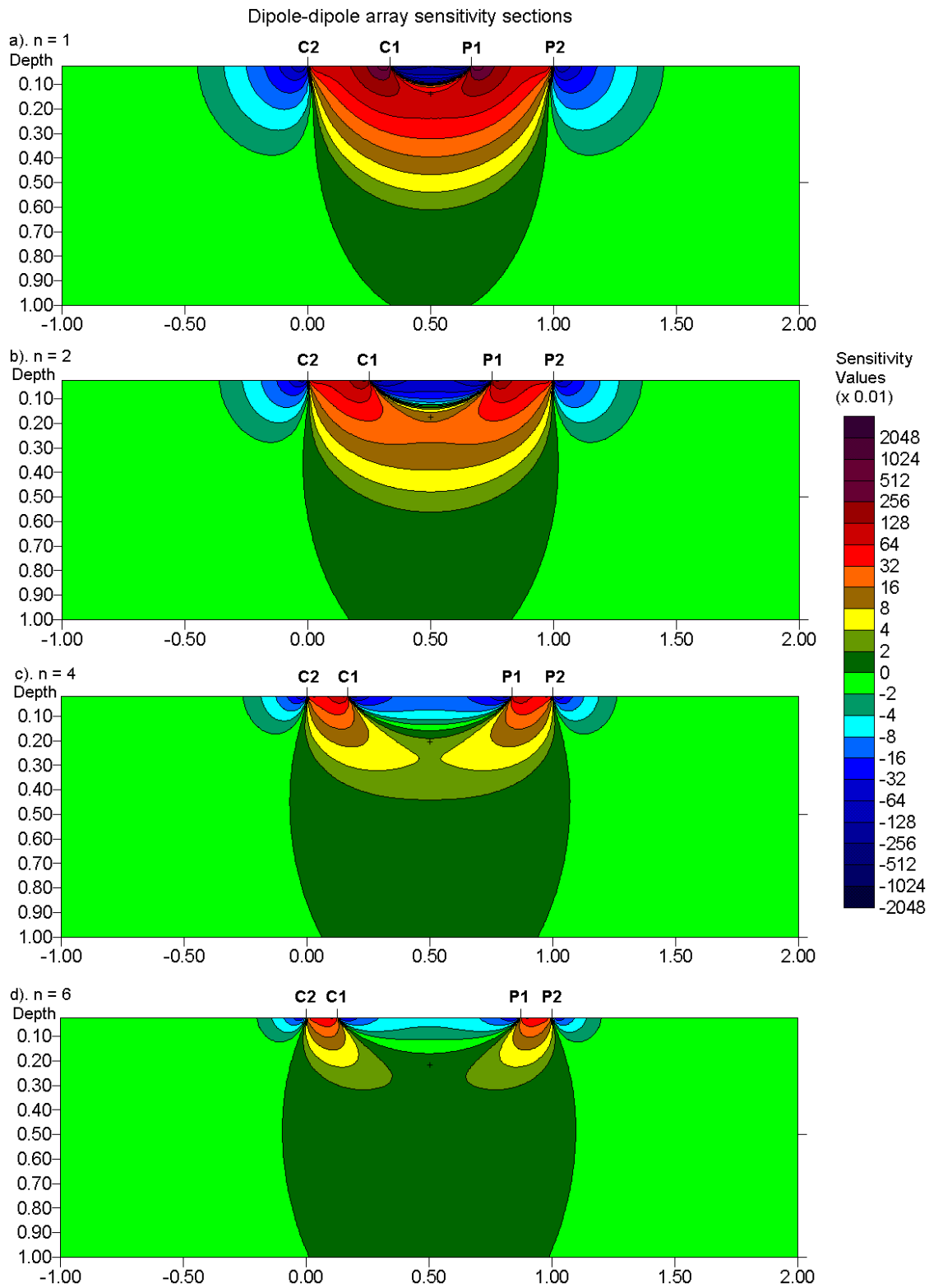


Figura 1.16: Función de sensibilidad para el arreglo dipolo-dipolo. Tomada de [41].

1.4.5. Wenner-Schlumberger

La configuración del arreglo Wenner-Schlumberger se puede observar en la Figura 1.12e. En este arreglo, los electrodos de potencial están separados entre sí por una distancia a y los electrodos de corriente están a una distancia na a partir de los de potencial. Como el nombre indica, este arreglo es un híbrido entre los arreglos Wenner y Schlumberger, el arreglo Wenner es un caso especial de este cuando $n = 1$.

En la Figura 1.18 se muestra la función de sensibilidad del arreglo Wenner-Schlumberger. Se observa que los valores más grandes se encuentran en la parte central del arreglo, es decir, entre los electrodos de potencial y se mantiene así a medida que se incrementa el valor de n . Además, en los niveles n más grandes, se forman 3 lóbulos con valores grandes de sensibilidad debajo de los electrodos. Lo anterior implica que el arreglo es **moderadamente sensible a cambios horizontales** (para valores de n pequeños) **y verticales** (valores de n grandes) de resistividad en el subsuelo. Por lo anterior, es muy útil en zonas de estudio en las que se esperan los dos tipos de estructuras.

La **profundidad media de investigación** es, aproximadamente, 10% más profunda que la del arreglo Wenner. La intensidad de su señal es más débil que la del Wenner pero más fuerte que la del dipolo-dipolo y el doble que la del polo-dipolo. Además, tiene mejor **cobertura horizontal** que el arreglo Wenner, como se muestra en la Figura 1.17, se pierden 2 datos por nivel.

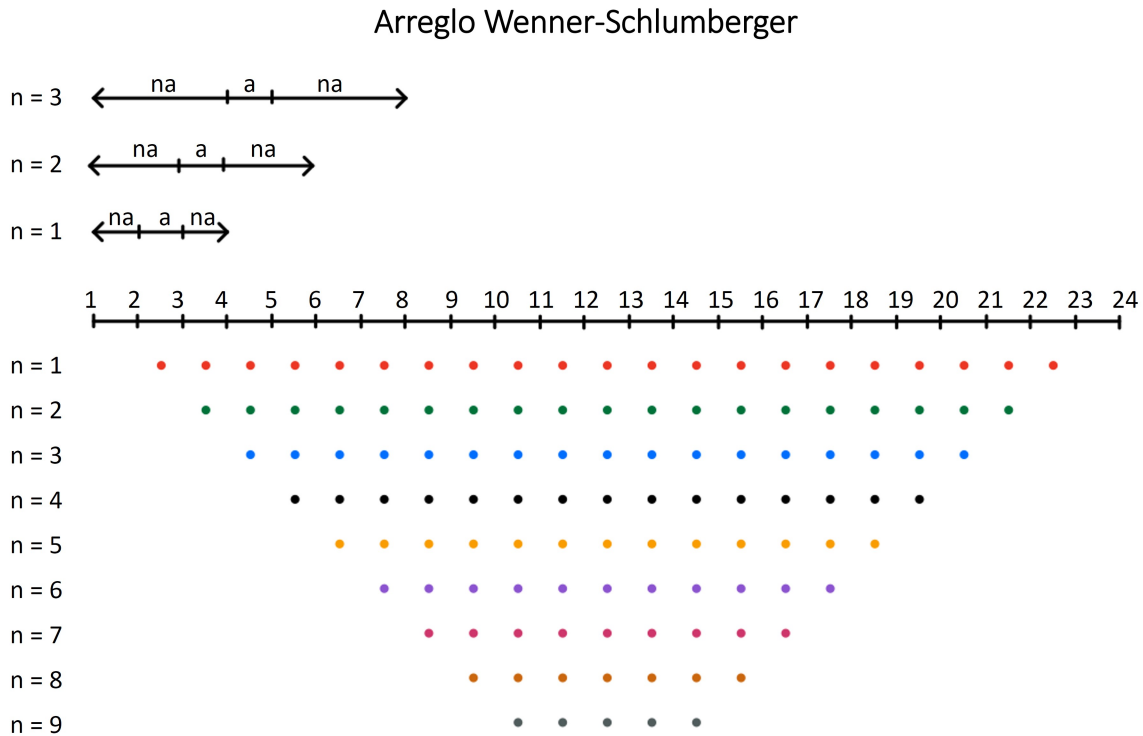


Figura 1.17: Puntos de atribución del arreglo Wenner-Schlumberger en 9 niveles. Se pierden 2 datos por nivel.

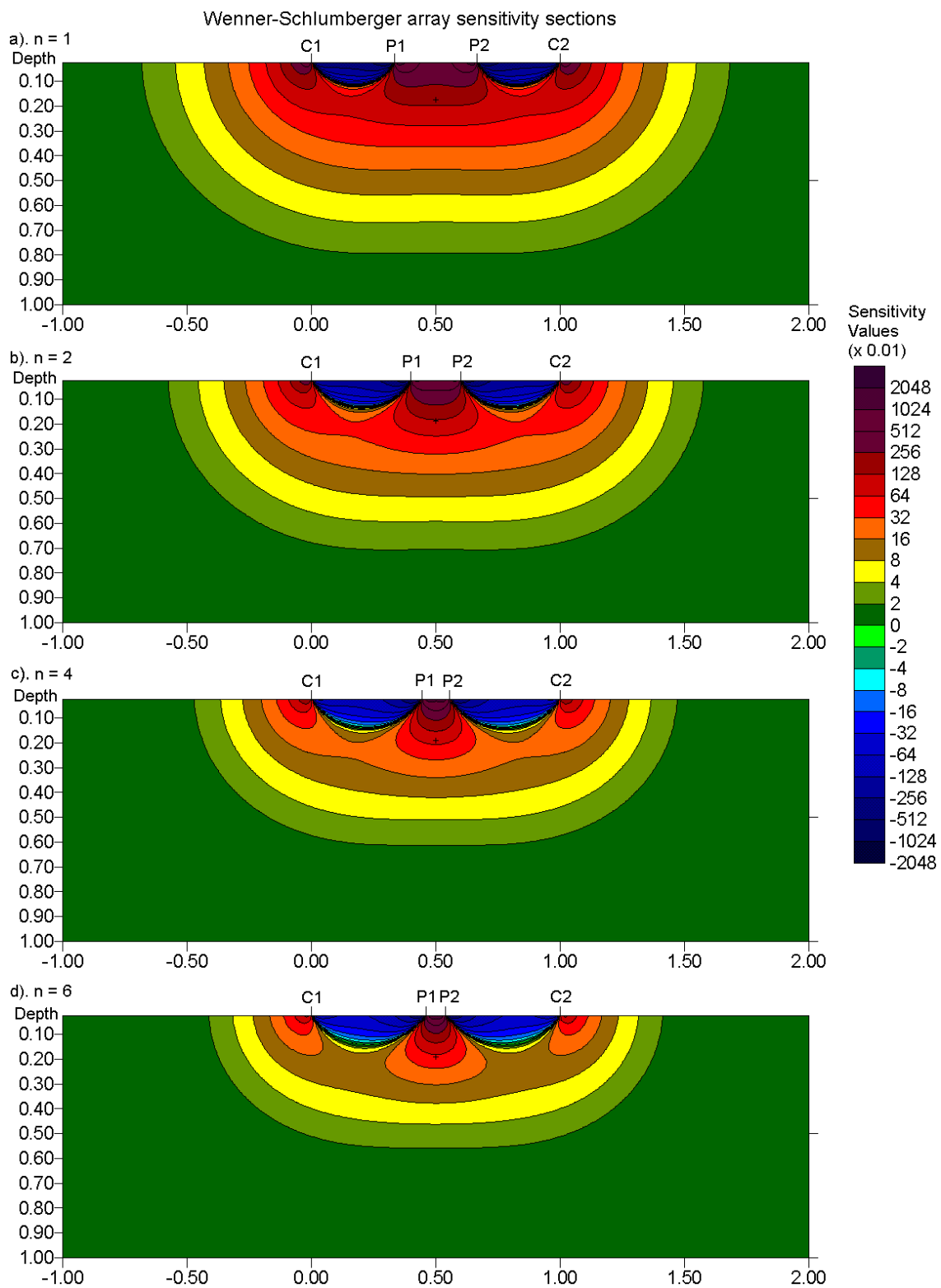


Figura 1.18: Función de sensibilidad para el arreglo Wenner-Schlumberger. Tomada de [41].

1.4.6. Polo-polo

La configuración del arreglo polo-polo se puede observar en la Figura 1.12c. En este arreglo, los polos están separados por una distancia a . En la práctica, el arreglo polo-polo ideal, con un solo electrodo de corriente y uno de potencial, no existe, para aproximar esta configuración los electrodos remotos o restantes deben estar en línea a , aproximadamente, 20 veces la máxima separación entre electrodos utilizada, de esta forma se asegura que el error es menor al 5%. Esta distancia es una desventaja porque hay sitios donde no se puede cumplir esta condición. Otra desventaja es que, al existir tanta distancia entre los electrodos de potencial, puede ser muy **afectado por el ruido telúrico** y degradar la calidad de las mediciones. Por todo lo anterior, este arreglo es utilizado en estudios en los cuales se utilice un espaciamiento entre electrodos pequeño, por ejemplo, en aplicaciones arqueológicas.

En la Figura 1.20 se muestra la función de sensibilidad del arreglo polo-polo. En ella, se observa que los valores más grandes se encuentran debajo de los electrodos y que existe un espaciamiento muy amplio entre sus contornos, por ello, este arreglo tiene la **peor resolución** entre los 5 arreglos principales.

Este arreglo tiene la **mayor profundidad de investigación**, debido a la gran distancia que hay entre los electrodos remotos y porque, para poder cubrir el área de estudio, se requiere inyectar una mayor cantidad de corriente, respecto a los otros arreglos, lo cual produce que las líneas de corriente alcancen una mayor profundidad. Además, tiene la **mejor cobertura horizontal**, como se muestra en la Figura 1.19, solo pierde 1 punto de atribución por nivel.

Arreglo Polo-polo

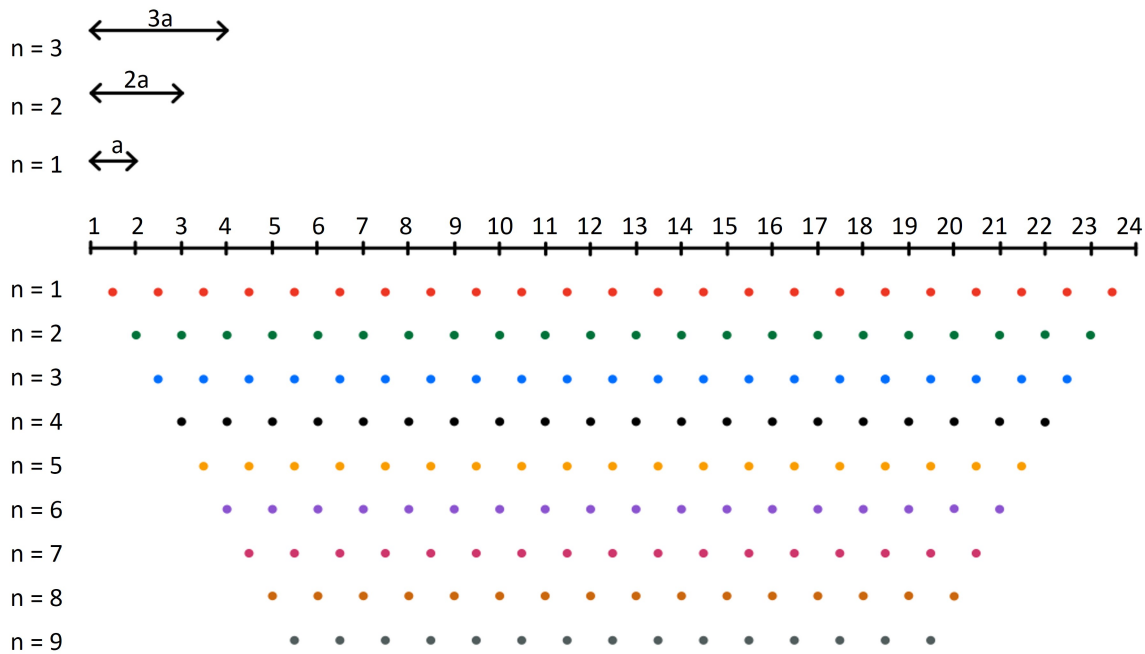


Figura 1.19: Puntos de atribución del arreglo polo-polo en 9 niveles. Se pierden un dato por nivel.

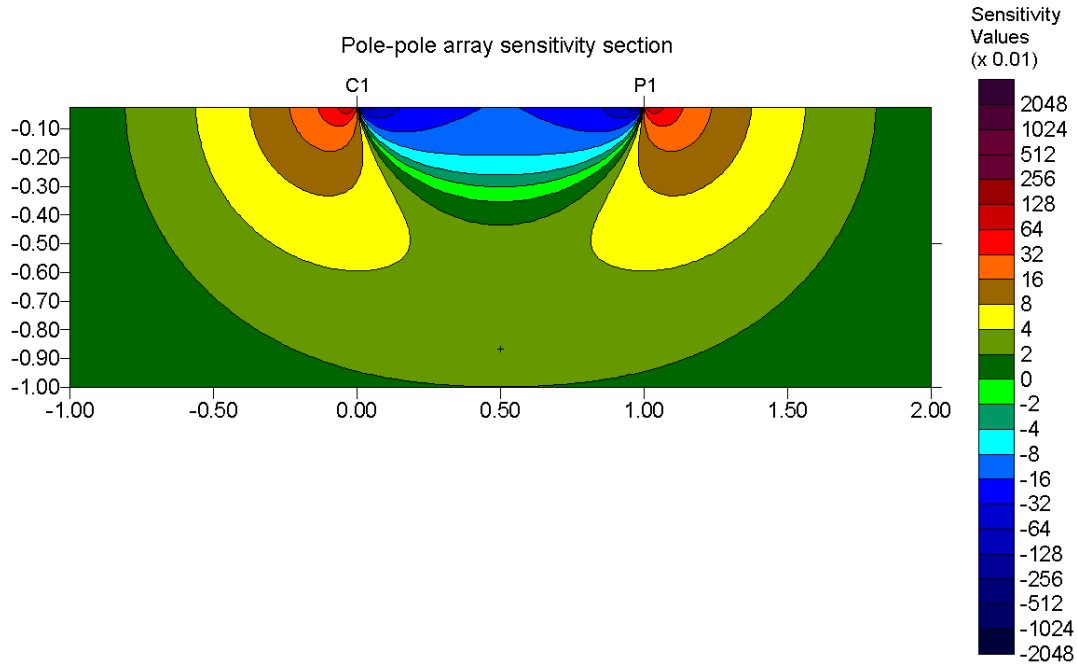


Figura 1.20: Función de sensibilidad del arreglo polo-polo. Tomada de [41].

1.4.7. Polo-dipolo

La configuración del arreglo polo-dipolo se puede observar en la Figura 1.12d. En este arreglo, el par de electrodos de corriente está separado por una distancia a mientras que el electrodo de potencial está a una distancia na . El electrodo remoto debe estar en línea a 5 veces la distancia máxima de separación na utilizada para obtener un error menor al 5% causado por su presencia.

Contrario a la mayoría de los arreglos, este arreglo es **asimétrico**, esto puede afectar al modelo obtenido con la inversión de datos. Una forma de eliminar el efecto de la asimetría es repetir las mediciones de manera inversa, es decir, intercambiando la posición del dipolo y el polo. Al combinar las mediciones del arreglo polo-dipolo de ida y vuelta, se eliminaría el **sesgo** en el modelo obtenido y se centra la anomalía, además, este procedimiento duplica el número de datos obtenidos [39].

En la Figura 1.22 se muestra la función de sensibilidad del arreglo polo-dipolo. Se observa que las áreas de mayor sensibilidad se encuentran debajo del dipolo y, conforme se incrementan los valores de n , los contornos adquieren una forma vertical, por ello, este arreglo es **más sensible a estructuras verticales**. Como en el caso del dipolo-dipolo, la forma de los contornos indica que la **profundidad de investigación** no incrementa de manera significativa para valores de n mayores a 4 o 5, para alcanzar una mayor profundidad se recomienda incrementar a .

Este arreglo tiene, relativamente, una buena cobertura horizontal, como se muestra en la Figura 1.21, pierde un punto de atribución por nivel. Respecto a la intensidad de señal, es mayor comparada con el dipolo-dipolo pero menor que la del Wenner o el Wenner-Schlumberger. Además, no es tan sensible al **ruido telúrico** como el arreglo polo-polo.

Arreglo Polo-dipolo

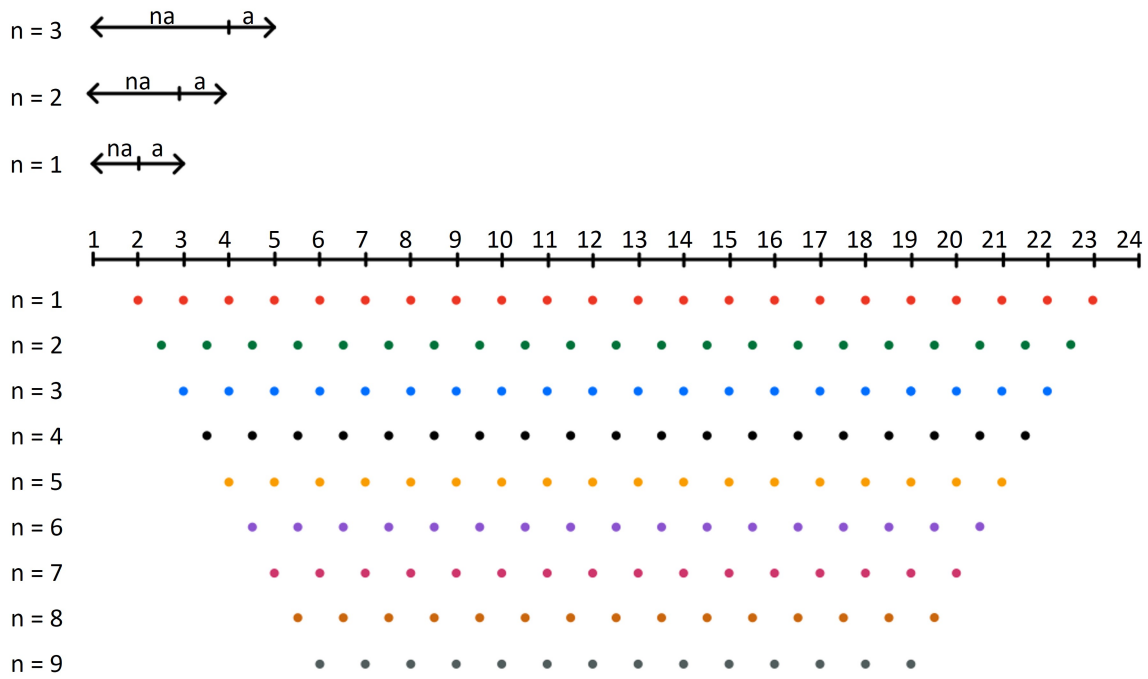


Figura 1.21: Puntos de atribución del arreglo Polo-Dipolo en 9 niveles. Se pierde un dato por nivel.

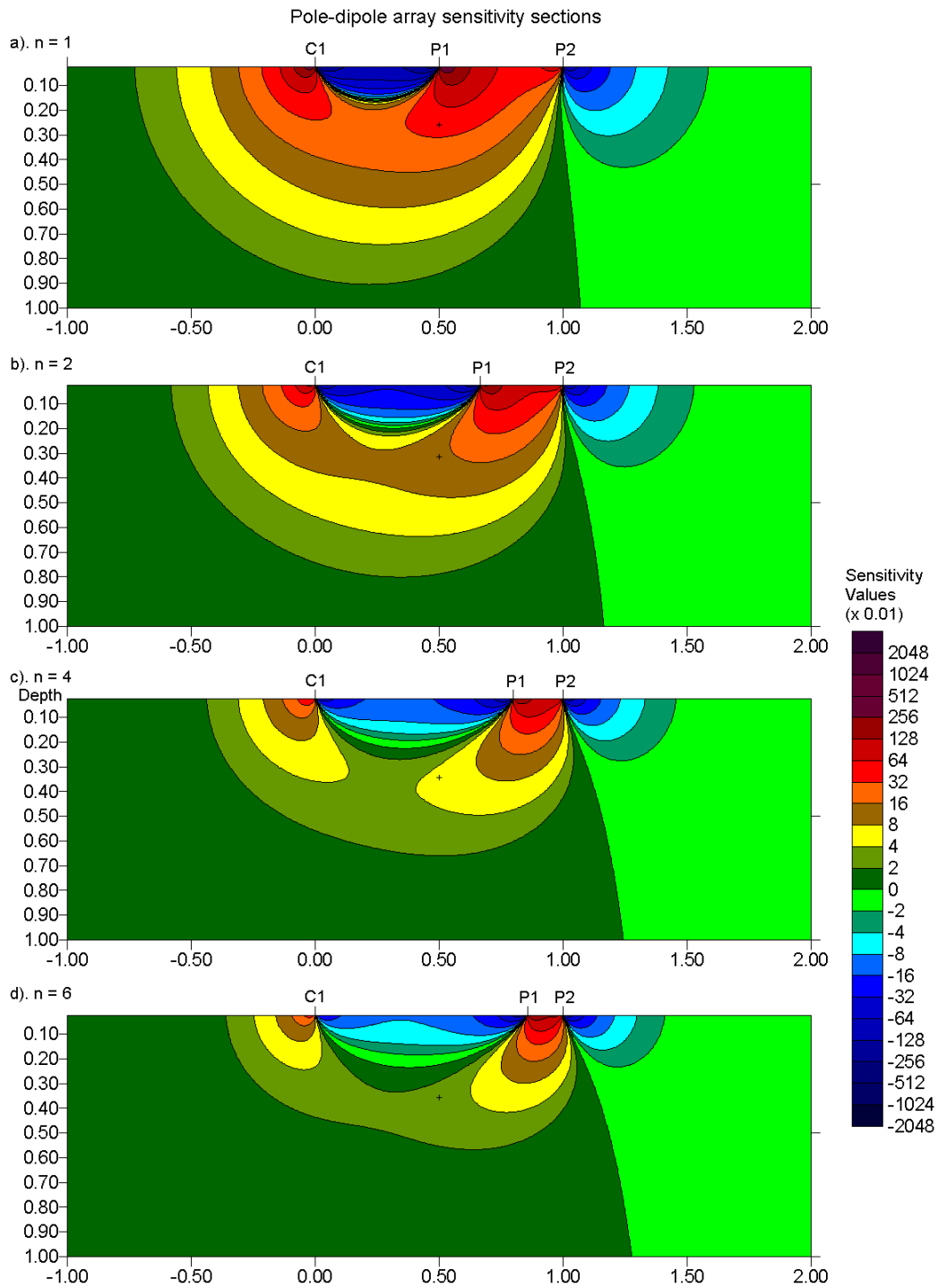


Figura 1.22: Función de sensibilidad del arreglo polo-dipolo. Tomada de [41]

Los valores de profundidad media de investigación computados por Edwards para los arreglos de la figura 1.12 se presentan en la Tabla 1.5, donde se muestra el arreglo, el factor necesario para encontrar la profundidad media de investigación (z_e) por nivel de apertura (n), en función del espaciamiento entre electrodos (a) y la longitud total del arreglo (L), además, el factor geométrico (k) y su inverso, el cual es un indicador del voltaje que se mediría entre los electrodos de potencial. También se presenta el *ratio* o proporción del potencial medido respecto al que se mediría con un arreglo Wenner, por ejemplo, si el valor es de 0.01, equivale al 1% del potencial que mediría un arreglo Wenner con ese mismo espaciamiento a .

Tabla 1.5: Profundidad media de investigación (z_e) calculada por Edwards (1977) para diferentes arreglos, factor geométrico y su inverso. Modificada de [41].

Arreglo	z_e/a	z_e/L	Factor geométrico (k)	Factor Geométrico Inverso (Ratio)
Wenner	0.519	0.173	6.2832	0.15915 (1.0000)
Dipolo-dipolo				
n = 1	0.416	0.139	18.85	0.05305 (0.3333)
n = 2	0.697	0.174	75.398	0.01326 (0.0833)
n = 3	0.962	0.192	188.5	0.00531 (0.0333)
n = 4	1.22	0.203	376.99	0.00265 (0.0166)
n = 5	1.476	0.211	659.73	0.00152 (0.0096)
n = 6	1.73	0.216	1055.6	0.00095 (0.0060)
Wenner-Schlumberger				
n = 1	0.519	0.173	6.2832	0.15915 (1.0000)
n = 2	0.925	0.186	18.85	0.05305 (0.3333)
n = 3	1.318	0.189	37.699	0.02653 (0.1667)
n = 4	1.706	0.19	62.832	0.01592 (0.1000)
n = 5	2.093	0.19	94.248	0.01061 (0.0667)
n = 6	2.478	0.191	131.95	0.00758 (0.0476)
n = 7	2.863	0.191	175.93	0.00568 (0.0357)
n = 8	3.247	0.191	226.19	0.00442 (0.0278)
n = 9	3.632	0.191	282.74	0.00354 (0.0222)
n = 10	4.015	0.191	345.58	0.00289 (0.0182)
Polo-dipolo				
n = 1	0.519	0.296	12.566	0.07958 (0.5000)
n = 2	0.925	0.308	37.699	0.02653 (0.1667)
n = 3	1.318	0.33	75.398	0.01326 (0.0833)
n = 4	1.706	0.341	125.66	0.00796 (0.0500)
n = 5	2.093	0.349	188.5	0.00531 (0.0334)
n = 6	2.478	0.354	263.89	0.00379 (0.0238)
n = 7	2.863	0.358	351.86	0.00284 (0.0178)
n = 8	3.247	0.361	452.39	0.00221 (0.0139)
Polo-polo				
	0.867		6.28319	0.15915 (1.0000)

En la Tabla 1.6 se muestran algunas de las características acerca de la adquisición con los arreglos electrónicos descritos.

Tabla 1.6: Puntos de adquisición, forma de conexión, datos perdidos por nivel y nivel máximo de los arreglos de electrodos.

Arreglos con 24 electrodos	Puntos de adquisición	Forma de conexión en pseudosección	Datos perdidos por nivel	Nivel máximo
Wenner-Schlumberger	117	Cuadrado	2	9
Wenner	84	Rombo	3	7
Dipolo-dipolo	153	Rombo	1	9
Polo-dipolo	162	Rombo	1	9
Polo-polo	171	Rombo	1	9

1.4.8. Arreglo recíproco

Las mediciones con arreglos recíprocos, a menudo se llevan a cabo para estimar la calidad de los datos, dichas mediciones se obtienen de intercambiar los electrodos de corriente con los electrodos de potencial de la medida de resistencia normal. Teóricamente, sin ningún ruido, las mediciones normal y recíproca deberían dar los mismos valores observados de resistividad aparente, por lo que la diferencia entre las dos mediciones dará una estimación de los errores de medición.

Las diferencias comunes se encuentran en términos de resistividad aparente debido a la heterogeneidad del subsuelo. Las mayores diferencias tienen lugar en los contactos verticales de los cuerpos de resistividad. Las diferencias observadas por las mediciones recíprocas están influenciadas por el tipo de arreglo de electrodos y el valor del contraste de resistividad en el límite de los cuerpos del modelo.

Es común repetir, o apilar, cada medición varias veces, ya que es una medida para cuantificar el ruido. Como alternativa se tiene el error recíproco, definido como:

$$e = R_N - R_r, \quad (1.36)$$

donde R_N es la medida de resistencia normal, R_r es la medida de resistencia recíproca y e es una medida del ruido de datos. El error recíproco puede detectar errores que pueden no ser evidentes en las mediciones de apilamiento.

Gracias a los avances tecnológicos de las últimas décadas, los equipos de medición pueden manejar un mayor número de electrodos en un menor tiempo. Para el caso de la tomografía de resistividad eléctrica 3D, el concepto de arreglo electrónico queda obsoleto, ya que para un estudio 3D, cobra mayor relevancia la separación electrónica “a” y la sensibilidad de los datos.

Para resumir los 2 subtemas anteriores, se presenta el esquema de la Figura 1.23.

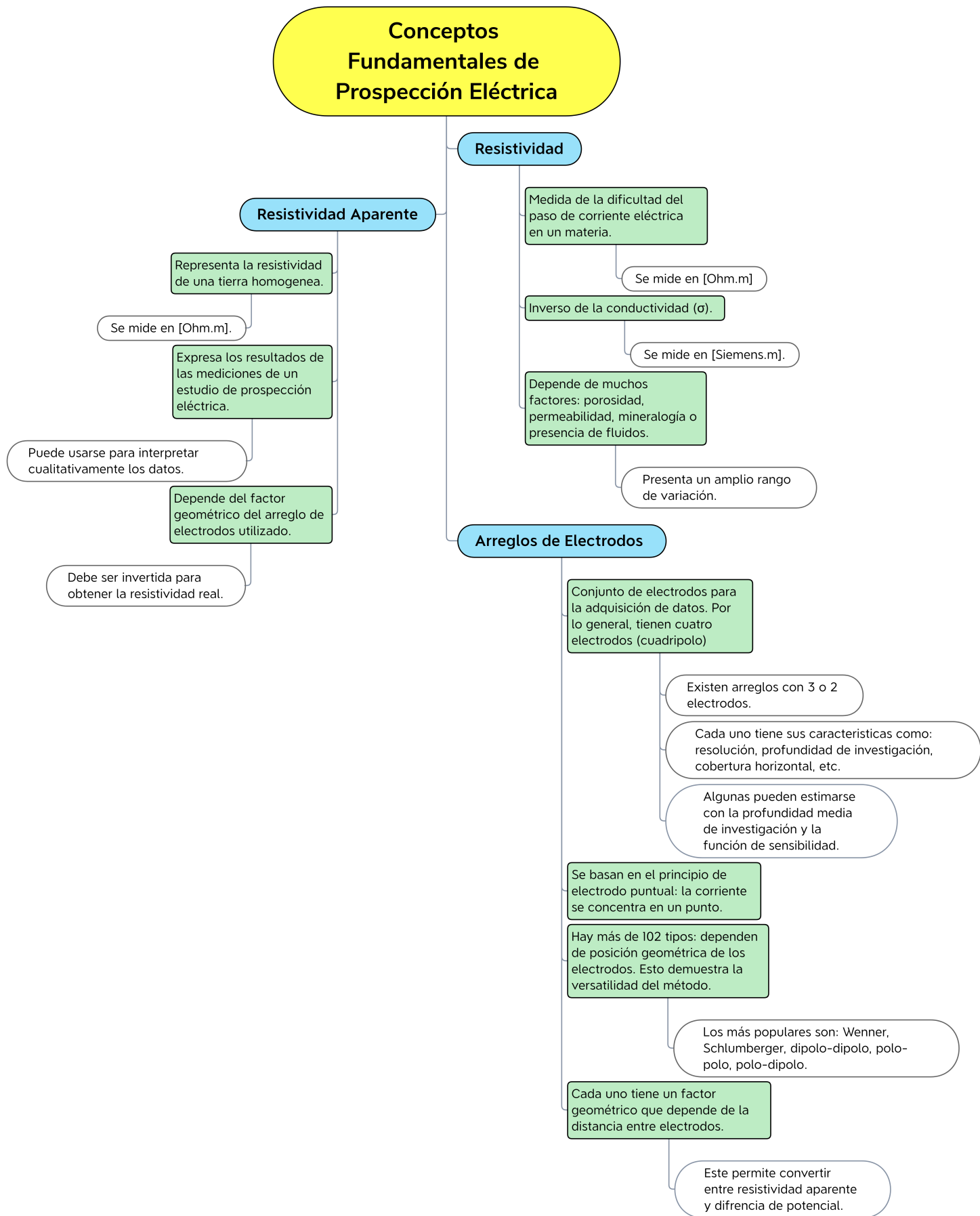


Figura 1.23: Esquema: Conceptos Fundamentales de Prospección Eléctrica.

1.5. Adquisición de datos en 1D

1.5.1. Calicatas Eléctricas

Para investigar **variaciones laterales** de resistividad en el subsuelo se utiliza la técnica de calicata eléctrica, en la cual se realizan mediciones a una **profundidad aproximadamente constante** a lo largo de perfiles [8].

Este método es muy conveniente para detectar contactos geológicos verticales o inclinados, cambios laterales de facies, metalizaciones, diques y otros cuerpos o estructuras que se presentan como heterogeneidades laterales de resistividad [54].

La zona explorada en el calicateo eléctrico se extiende desde la superficie hasta una profundidad más o menos constante, que es función tanto de la separación entre electrodos como de la distribución de resistividades bajo ellos [54].

Existe una gran variedad de tipos de calicatas eléctricas, pero todas ellas pueden clasificarse en dos grandes grupos. El primero de éstos, los electrodos de corriente permanecen fijos durante la medición, de modo que se crea en el terreno un campo estacionario, el cual es explorado colocando los electrodos de potencial en diversas posiciones.

El segundo grupo lo constituyen aquellos métodos en los que los cuatro electrodos se desplazan conjuntamente, conservando sus distancias y posiciones mutuas, es decir, que el dispositivo se traslada sobre el perfil como un todo rígido [54]. Los arreglos electródicos más empleados son el Wenner, Schlumberger y dipolo-dipolo.

1.5.2. Sondeo Eléctrico Vertical

La finalidad del sondeo eléctrico vertical (SEV) es averiguar la distribución vertical en profundidad de las resistividades aparentes bajo el punto sondeado a partir de medidas de la diferencia de potencial en la superficie. Se utiliza sobre todo para **detectar y establecer los límites de capas horizontales** de suelo estratificado.

La **profundidad de penetración** de la corriente eléctrica depende de la separación de los electrodos inyectores AB . Si la distancia entre los electrodos AB aumenta, la corriente circula a mayor profundidad pero su densidad disminuye. Para un medio isótropo y homogéneo, el 50 % de la corriente circula por encima de la profundidad $AB/2$ y el 70.6 % por encima de una profundidad AB [54].

La mayor eficacia del método corresponde al caso en que los SEV se efectúan sobre un terreno compuesto por capas lateralmente homogéneas en lo que respecta a la resistividad, y limitadas por planos paralelos a la superficie del terreno (medio estratificado). La experiencia demuestra que los resultados teóricos obtenidos para medios de esta clase son tolerablemente válidos para estratos inclinados hasta unos 30° [54].

La posición de medición se toma como el punto medio del arreglo de electrodos. Para un sondeo de

profundidad, las mediciones de la resistencia ($\delta V/I$) se realizan con la separación de electrodos más corta y luego con espaciamentos progresivamente mayores. En cada separación de electrodos se calcula un valor de resistividad aparente usando la resistencia medida junto con el factor geométrico apropiado para la configuración y separación del electrodo que se está usando. Los valores de resistividad aparente se representan en un gráfico “curva de campo” (Figura 1.24), cuyos ejes x e y representan los valores logarítmicos de la separación media de los electrodos de corriente ($AB/2$) y la resistividad aparente (ρ_a) [58].

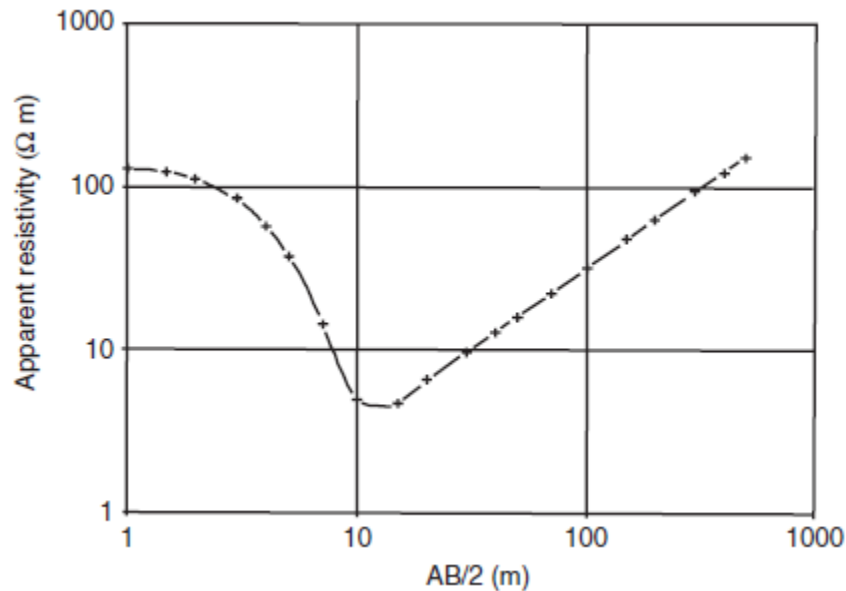


Figura 1.24: Grafica obtenida en la medición de campo de la resistividad aparente. Modificada de [58].

Mientras se esté llevando a cabo la toma de datos de resistividad, se registran en el sistema de posicionamiento global, la ubicación de los electrodos para tener su referencia geográfica, esto se debe de realizar para estudios 1D, 2D y 3D. La ubicación se desplegará en un mapa que el usuario creará desde el sistema de información geográfica (SIG) que mejor le convenga [29].

Otro punto importante es llevar una bitácora del sitio donde se colocaron los electrodos y sus alrededores, para tener en cuenta las condiciones de terreno al momento de la adquisición, por ejemplo, un poste de luz, si había material suelto, si hay cuerpos de agua cerca.

Efectos laterales en el SEV y ambigüedades en su interpretación

Si el dispositivo electródico está próximo a un contacto vertical, las líneas de corriente serán distorsionadas por lo tanto, la diferencia de potencial ΔV entre M y N se verá afectada por el otro medio y este efecto se hará tanto más marcado cuanto mayor sea la separación de los electrodos AB . Por lo tanto, la medida de la resistividad aparente en un SEV está influida por la distribución de resistividades en un cierto volumen de terreno. Esto implica que para distancias AB grandes no se sabrá si la resistividad aparente es debida a cambios de estructuras en la profundidad o a las heterogeneidades laterales por contraste de resistividades [54].

Aplicación

El SEV es aplicable cuando el objetivo tiene una posición horizontal y una extensión mayor que su profundidad. Tal es el caso del estudio estratigráfico, búsqueda de agua subterránea, infiltración de agua marina en zonas costeras, estratificación y todo tipo de situaciones geológicas donde el modelo 1D se aproxime al modelo verdadero. El SEV no es adecuado para contactos verticales tales como, fallas, diques, cavernas y discordancias [22].

1.6. Adquisición de datos en 2D

1.6.1. Tomografía de Resistividad Eléctrica

La Tomografía de Resistividad Eléctrica o ERT (*Electrical Resistivity Tomography*) es una técnica geofísica para el estudio del subsuelo que consiste en **determinar, con alta resolución espacial (tanto horizontal como vertical), la distribución de la resistividad** a partir de un número elevado de medidas realizadas en forma automática desde la superficie del terreno. Esta aplicación es la definición moderna de un sistema de perfiles eléctricos clásico que toma ventaja de innovaciones tecnológicas tanto en la adquisición (con instrumentos multicanales computarizados) como el procesamiento e interpretación cuantitativa 2D y 3D. Es una herramienta de alta resolución eficiente en investigaciones de ingeniería, ambientales y mineras hasta profundidades de 200 – 300 metros (o más) [57].

Como se observa en la Figura 1.25, el método consiste en colocar una serie de electrodos sobre una línea recta, dependiendo del arreglo elegido, los electrodos se intercambiarán para convertirse en C_1 , C_2 , P_1 o P_2 ; cada lectura será ubicada en un punto de atribución y ésta dependerá de las distancias entre electrodos y el tipo de arreglo. El conjunto de lecturas generará una pseudosección de resistividades aparentes, posteriormente, mediante algún método de inversión se convertirán a resistividades reales [57].

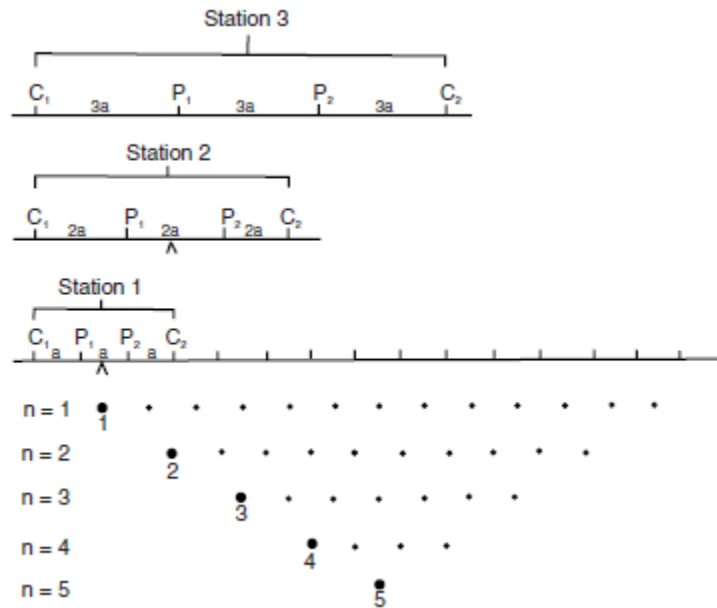


Figura 1.25: Ejemplo de la secuencia de medición para construir una pseudosección de resistividad. Modificada de [58].

A continuación, se describe brevemente el arreglo ecuatorial paralelo.

Arreglo Ecuatorial Paralelo

El arreglo ecuatorial se lleva a cabo mediante dos perfiles paralelos, en una de ellas se colocaron los electrodos de corriente (A,B) y en la otra línea los electrodos de potencial (M,N). Se puede aplicar de dos maneras, una de ellas es colocando los electrodos A y B en el perfil 1 y los electrodos M y N, en el perfil 2. En la Figura 1.26 se muestra el procedimiento de un arreglo Wenner-Schlumberger, pero se puede aplicar para cualquier arreglo convencional [60].



Figura 1.26: Vista de perfil de la adquisición del arreglo Ecuatorial Paralelo W-S.

La segunda forma de medir es colocando los electrodos de corriente A y B, en los extremos de cada perfil, seguidos por un electrodo de potencial M y N (Figura 1.27a, quedando cada perfil con la secuencia de electrodos (A,M) y (B,N). Los electrodos de potencial (M, N) se irán moviendo una posición cada vez hasta llegar al extremo de los perfiles(Figura 1.27b. Posteriormente, se repite el procedimiento moviendo una posición los electrodos de corriente sobre sus respectivos perfiles (Figura 1.27c hasta su longitud máxima [70].

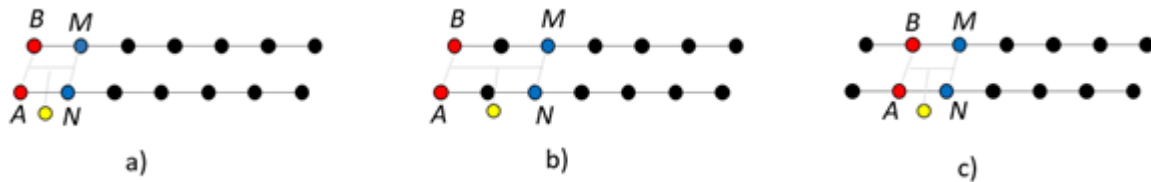


Figura 1.27: Adquisición de datos del arreglo Ecuatorial Paralelo.

Ventajas

El método de Tomografía Eléctrica presenta muchas ventajas:

- Tiene un proceso de adquisición de datos automatizado lo que nos permite procesar grandes cantidades de información.
- El estudio tiene una naturaleza no destructiva y poco invasiva, ya que el mayor daño lo podría ocasionar la colocación de electrodos.
- La implementación y diseño de un estudio es relativamente sencillo.
- Bajo costo y tiempo de levantamiento de tan solo unas horas, esto dependiendo de la longitud y el número de datos que se requieren [63].

Aplicaciones

La tomografía eléctrica es aplicable a cualquier estudio del subsuelo donde interese identificar todo tipo de accidentes o discontinuidades que representen un contraste suficiente en la distribución de resistividad del medio rocoso.

Entre los objetivos más habituales a resolver mediante esta técnica cabe mencionar los siguientes:

- Detección y caracterización de fallas determinando su zona de influencia. Rumbo, buzamiento y extensión en profundidad.
- Detección de contactos entre unidades litológicas de diferente naturaleza, para determinar la morfología y localización precisa de tales discontinuidades.
- Detección y caracterización de accidentes kársticos, tales como cavidades, rellenos arcillosos, etc.
- Obtención de una pseudosección 3D a partir de un TRE 2D por medio de interpolación 3D.

1.7. Adquisición de datos en 3D

1.7.1. Tomografía de Resistividad Eléctrica 3D

Debido a lo versátil que resulta ser el método de TRE 2D, los cuatro electrodos no necesariamente deben de estar alineados. A partir de este concepto, nace una nueva técnica, la Tomografía de Resistividad Eléctrica 3D. Esta técnica permite que la distribución de los cuatro electrodos se pueda combinar, en todo el plano de la superficie de estudio. Con esta técnica se puede obtener un cubo de resistividades aparentes, la cual posterior a una inversión, **permite delimitar en las tres dimensiones estructuras ubicadas en el subsuelo**. Como otras ventajas, en muchos casos resulta ser una buena técnica de estudio cuando el terreno presenta difícil accesibilidad, o no se tiene información previa del área [6].

Rejilla

Para un estudio 3D, usualmente, los electrodos suelen colocarse en una rejilla cuadrada con el mismo espaciamiento entre estos en las direcciones x y y . La Figura 1.28 muestra una posible disposición electródica compuesta por un mallado de 5×5 electrodos.

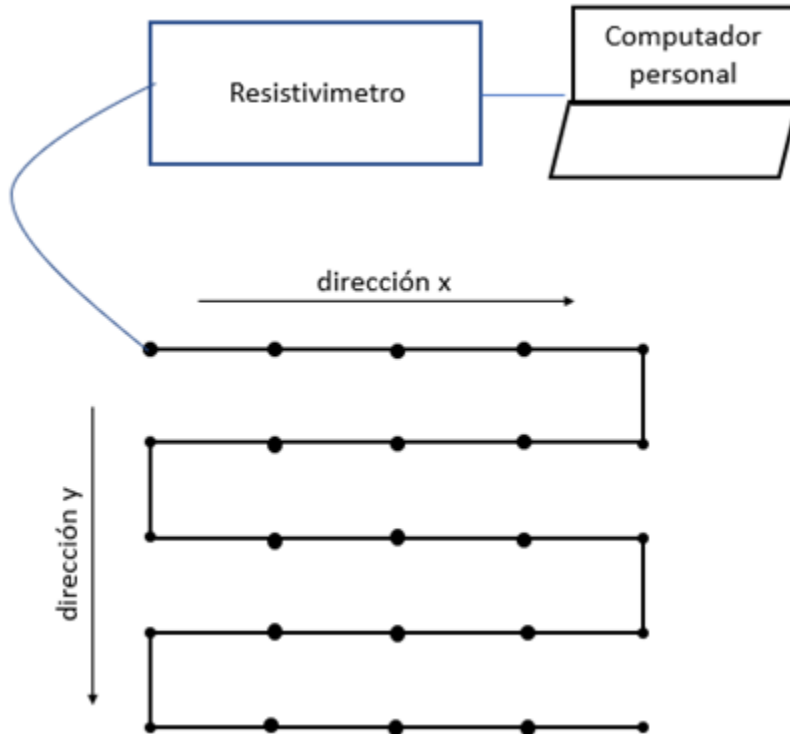


Figura 1.28: Arreglo de electrodos para un estudio TRE3D. Modificada de [38].

El número máximo de mediciones que puede llegar a adquirirse, n_{max} , estará en función de la cantidad de electrodos existentes n_e que constituyen la rejilla:

$$n_{max} = \frac{n_e(n_e - 1)}{2} \quad (1.37)$$

En este caso, cada electrodo es a su vez utilizado como electrodo de corriente y potencial. Si el estudio 3D se realiza con una serie de perfiles paralelos y no se realizan mediciones en líneas cruzadas, la distancia entre líneas debe hacerse preferentemente hasta 4 veces el espaciamiento electródico [4]. Esto es para garantizar que los materiales del subsuelo entre las líneas sean mapeados adecuadamente por las mediciones en línea.

A continuación se describen brevemente el arreglo tipo "L".

Arreglo tipo "L"

A pesar de las ventajas que ofrece realizar una malla para obtener mediciones de resistividad en tres dimensiones, en muchos casos resulta imposible disponer de la libertad de colocar los electrodos según sea conveniente. En gran parte de los estudios, lo que se busca es obtener un modelo de resistividad debajo de una construcción, la cual no puede ser afectada en su interior, A partir de esta necesidad, se han implementado diversos tipos de arreglo, éstos distribuidos en la periferia

del área de estudio [6].

Como solución al problema, Tejero *et al.* 2015, proponen un arreglo con forma de “L”, que consiste en dos perfiles perpendiculares entre sí; con el que se puede utilizar diversas secuencias de adquisición de datos. Entre éstas están, por ejemplo: polo-polo, dipolo-dipolo, Wenner, Schlumberger y Wenner-Schlumberger [15].

Durante la secuencia de lectura se combinan electrodos de ambos perfiles, con lo que se obtiene información en un plano inclinado que va desde el vértice de los perfiles, hacia el centro, cada vez a más profundidad. En la Figura 1.29 se puede observar la idea básica de la secuencia de lectura de este tipo de arreglo.

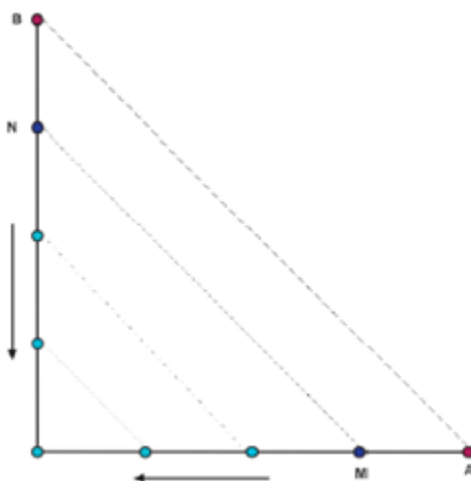


Figura 1.29: Representación en planta de la adquisición de datos del arreglo en L. Modificada de [67].

Tejero *et al.* (2011) proponen configurar el “arreglo en L” en la modalidad dipolo-dipolo, debido a que suele tener más puntos de atribución, lo que implica, más información en la parte del vértice entre los perfiles perpendiculares.

Una de las ventajas de este arreglo es que pueden combinarse cuatro “L” para rodear una estructura y poder realizar una TRE 3D por debajo de dicha estructura adquiriendo un “volumen” de información. El procedimiento es el siguiente: se modifican los archivos de lectura eliminando la información de uno de los laterales de las “L” consecutivas para evitar la repetición de datos, teniendo las cuatro “L” modificadas se obtendrían los puntos de atribución, como se observa en la **Figura 1.30**.

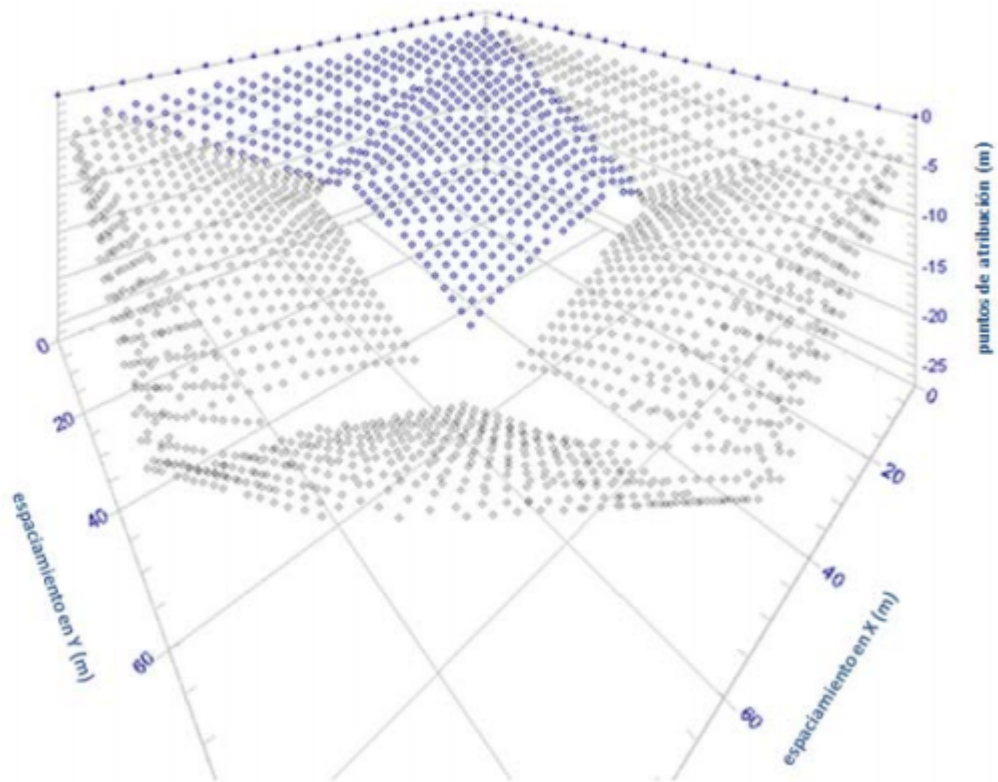


Figura 1.30: Visualización de los puntos de atribución combinando las cuatro “L” modificadas. Tomada de [15].

Capítulo 2

Procesamiento de Datos

2.1. Análisis de los Datos

La adquisición de datos debe desarrollarse con especial cuidado, debido a que una buena o mala adquisición repercutirá en nuestros resultados, por eso, se recomienda tener un control de calidad, para cerciorarse de que sea posible trabajar con esos datos o si fuera necesario mejorar su calidad [29].

Es de suma importancia realizar una prueba de resistencia de contacto antes de empezar con la adquisición, para conocer si existen inconvenientes con los cables o algún electrodo y así evitar una mala toma de lecturas. Sumado a esto, la prueba nos indicará el rango de valores esperados en la zona [29].

Dependiendo del resistivímetro utilizado, los canales de lectura y el número de apilamiento que se aplique en la adquisición, regularmente de 3 a 5 lecturas por punto de adquisición, se puede obtener la resistividad promedio.

$$\bar{P} = \sum_n^{i=1} \frac{\rho_i}{n}, \quad (2.1)$$

donde ρ_i , es la resistividad muestreada; n , el número de muestras y \bar{P} , la resistividad promedio.

Otro análisis estadístico que se puede aplicar a los datos es la desviación estándar, que es la medida de dispersión más común, que nos indica que tan dispersos están los datos con respecto a la media.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\rho_i - \bar{P})^2}{N}}, \quad (2.2)$$

donde σ es la desviación estándar.

La desviación estándar contiene información del subsuelo y de ruido, que son muy difíciles de separar. Para saber con mayor certeza la calidad de los datos, se recurre a información geológica de la zona de estudio, adquisiciones geofísicas previas, valores obtenidos de la prueba de resistencia de contacto. Otro de los puntos a tomar en cuenta es si la adquisición se realizó en época de sequía o de lluvias y factores antropogénicos.

2.2. Corrección por Posición de los Electrodo

Para poder llevar a cabo el cálculo de la resistividad aparente y la profundidad de investigación de un punto, el software utiliza entre otras cosas el factor geométrico de cada lectura. Dicho factor, depende de las posiciones en que son colocados los electrodo

En relación con lo anterior, existen limitantes que afectan la calidad de los resultados. Dichas limitantes se refieren al hecho de que los programas que se usan para llevar a cabo el procesamiento e inversión de datos de TRE están diseñados para trabajar con separaciones regulares entre los electrodo

Aunque en campo no es siempre posible colocar los electrodo en las posiciones teóricas debido a múltiples factores como la topografía, vegetación obras civiles o a que se desplazan intencionalmente para reducir la resistencia de contacto, siempre nos es posible conocer las posiciones reales de los electrodo en el campo y por lo tanto conocer los factores geométricos reales [9].

Si se considera que los valores de potencial medidos en campo no son producto de la contribución de un solo punto sino de un volumen, que los valores de resistividad no cambian abruptamente y además que no es posible conocer el factor geométrico real de cada lectura, entonces pueden llevarse a cabo dos metodologías con el fin de eliminar en la medida de lo posible los efectos del posicionamiento irregular de los electrodo [9].

2.2.1. Primera Metodología: Multiplicación por Factor de Corrección

La primera metodología consiste en multiplicar los valores de potencial observado por un factor de corrección que se relaciona con la geometría del arreglo, por medio del cual al llevarse a cabo tanto el cálculo de resistividad aparente así como la inversión de los datos, se elimina por decirlo de algún modo la multiplicación por un factor geométrico teórico calculado a partir de considerar que todos los electrodo están colocados equidistantemente con lo que se hace que la resistividad aparente teórica sea igual a la resistividad aparente verdadera [9].

Para estudios de superficie el factor geométrico se puede escribir de la siguiente forma general:

$$K = \frac{2\pi}{\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN}}, \quad (2.3)$$

donde AM es la distancia entre los electrodo A y M ; BM , entre B y M ; AN , entre A y N y BN , entre B y N .

Así que si se conocen las posiciones reales de los electrodo se puede calcular el factor geométrico verdadero de un arreglo.

El potencial observado, es importante para el cálculo de la resistividad aparente, ya que:

$$\rho_a = \frac{\Delta V}{I} K, \quad (2.4)$$

donde ρ_a es la resistividad aparente; ΔV , la diferencia de potencial observada; I , la corriente y K , es el factor geométrico.

Para que los valores de resistividad aparente encontrados sean los verdaderos, se tiene que que:

$$\rho_a(\text{verdadera}) = \frac{\Delta V_{\text{observado}}}{I} K(\text{verdadero}), \quad (2.5)$$

,sin embargo, se tiene que el cálculo que hace el software nos proporciona lo siguiente:

$$\rho_a(\text{teórica}) = \frac{\Delta V_{\text{teórico}}}{I} K_{\text{teórico}}. \quad (2.6)$$

Como nuestro objetivo es que el cálculo de la resistividad corresponda con la $\rho_a(\text{verdadera})$, se tiene que:

$$\frac{\Delta V}{I} K(\text{teórico}) = \frac{\Delta_{\text{observado}}}{I} K(\text{verdadero}), \quad (2.7)$$

si se desarrolla la ecuación anterior se llega a:

$$\Delta V = \Delta V_{\text{observado}} \frac{K(\text{verdadero})}{K(\text{teórico})}, \quad (2.8)$$

con lo que los resultados proporcionados por el software serán los siguientes:

$$\rho_a(\text{verdadera}) = \rho_a \text{teórica} = \frac{\Delta V_{\text{observado}}}{I} \frac{K(\text{verdadero})}{K(\text{teórico})}. \quad (2.9)$$

Con esta sencilla corrección se puede eliminar los efectos de la separación irregular de los electrodos. Sin embargo, es importante mencionar que aun cuando los resultados que se esperan serán notoriamente mejores, no se eliminan por completo los efectos del error en la posición de los electrodos.

2.2.2. Segunda metodología: Interpolación de datos

La segunda metodología se basa en la interpolación de los datos de resistividad (calculados a partir del factor geométrico real y los valores de potencial observado medidos), para obtener los valores que se observarían si todos los electrodos hubieran sido colocados equidistantemente [9].

Como parte de los datos conocidos en un estudio de tomografía eléctrica, se tienen los siguientes:

- La posición lineal de los electrodos.
- El punto de atribución para cada medición.
- El factor geométrico del arreglo.
- El valor de diferencia de potencial observado.
- La corriente inyectada.

- El valor de resistividad (calculado a partir del factor geométrico, el potencial observado y la corriente inyectada).

La interpolación llevada a cabo se realiza usando como base conjunto de datos de la siguiente forma:

$$x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots, (x_n, y_n), \quad (2.10)$$

tal que $x_i \neq x_j$, $i \neq j$ e $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$, donde los valores de la variable x corresponden al punto medio y los valores de la variable y a la resistividad calculada para cada punto.

Utilizando los datos anteriores se calculó un polinomio de la forma:

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3, \quad (2.11)$$

en este caso, el problema consiste en encontrar los coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3 tal que:

$$f(x_i) = y_i. \quad (2.12)$$

Desde el punto de vista del algebra lineal esto es equivalente a seleccionar una función en el espacio vectorial de funciones generada por la base x_0, x_1, x_2, x_3 para obtener un conjunto de polinomios de grado 3, lo que nos lleva a resolver un sistema lineal de ecuaciones de la forma:

$$a_0x_0^0 + a_1x_0^1 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 = y_0, \quad (2.13)$$

$$a_0x_1^0 + a_1x_1^1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1, \quad (2.14)$$

$$a_0x_2^0 + a_1x_2^1 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2, \quad (2.15)$$

$$a_0x_3^0 + a_1x_3^1 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = y_3, \quad (2.16)$$

el cual se puede expresar de forma matricial como:

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{y} \quad (2.17)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Como lo que se quiere interpolar son los valores de resistividad, ya que se conocen los puntos medios teóricos (cuando los electrodos están equiespaciados), el sistema a resolver es:

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}\mathbf{M}^{-1} \quad (2.19)$$

2.3. Señales

El procesamiento de señales es una disciplina que se encarga de la adquisición, representación, manipulación y transformación de señales [48]. En un estudio geofísico, el objetivo es obtener una señal, la cual puede definirse una secuencia de números que contiene información acerca de una

propiedad de la tierra o un proceso geológico [25]. Las señales, por lo general, varían con el tiempo o el espacio y contienen información en sus patrones de variación, además, la variable independiente se conoce como amplitud.

Las señales pueden clasificarse de dos formas, de acuerdo con los valores que toma la amplitud o a los que toma la variable independiente:

- Según la variable independiente, las señales pueden ser continuas o discretas. Una señal continua es aquella que está definida para cada valor del espacio o tiempo, por otro lado, una señal discreta está definida en un set de valores discreto o finito de la variable independiente. La mayoría de las señales de interés surgen como señales continuas, sin embargo, para su procesamiento se requiere una representación discreta, lo cual se logra a partir de un muestreo.
- Según la amplitud, una señal puede ser analógica o digital. Una señal analógica es aquella cuya amplitud es análoga o proporcional a la cantidad física que representan, en cambio, una señal digital está representada por un número finito de valores que describen la cantidad física medida para cada muestra de la señal discreta.

En el caso de los estudios de resistividad, las señales son discretas y digitales. Además, la variable independiente es el espacio, el cual puede estar en 1, 2 o 3 dimensiones, dependiendo del tipo de estudio [6].

2.4. Ruido

En la práctica, ningún proceso de adquisición está libre de perturbaciones o ruido. El ruido puede definirse como la porción residual de los datos después de aislar la señal deseada, este puede no contener información o contener información no deseada o irrelevante [25] que distorsiona o enmascara la señal.

Al llevar a cabo un proceso de adquisición, es importante considerar las posibles fuentes de ruido que pueden ser registradas: aquellas que vienen de la actividad del hombre o antropogénicas como los cables eléctricos o los vehículos y aquellas fuentes naturales como las tormentas eléctricas, el viento, la lluvia, etc. [58].

De acuerdo con Loke (2000), existen dos tipos de ruido:

- Coherente o sistemático: es causado, ocasionalmente, por algún tipo de fallo durante la adquisición de datos, por ejemplo, la desconexión de un cable o una alta resistencia de contacto. Este tipo de ruido es fácilmente identificable porque solamente se limita a unas cuantas mediciones y, por lo general, se presenta en un determinado rango de frecuencias, por ello, puede ser removido fácilmente [41]. Previo a realizar la inversión, se recomienda visualizar la pseudosección y los perfiles para identificar los datos con ruido sistemático, estos se presentan como puntos con valores inusualmente altos o bajos los cuales deben ser removidos.
- Aleatorio: es una señal que no guarda correlación estadística entre sí, afecta a todos los datos a la vez y puede ser causado, por ejemplo, por corrientes telúricas, por ello, no es tan sencillo removerlo. Este tipo de ruido afecta a aquellos arreglos con un factor geométrico grande, como el dipolo-dipolo o el polo-dipolo [39]. Este ruido causa que la imagen geoelectrica se

vea borrosa, impidiendo que se distingan rasgos presentes en el medio, lo cual conlleva a interpretaciones poco confiables [5].

2.5. Filtros

El ruido aleatorio es un problema habitual en la prospección eléctrica, es necesario realizar un procesamiento robusto en los datos para reducirlo y extraer la información deseada, de forma que se pueda construir un modelo geoelectrico adecuado y confiable, para lograr esto, se aplica un filtro digital.

Un filtro digital es un sistema que modifica una señal de entrada y la transforma en una señal de salida que puede presentar cambios en amplitud, frecuencia o fase, dependiendo de las características del filtro [5]. Al aplicar un filtro se busca mejorar la calidad de los datos, removiendo o atenuando partes inconsistentes en estos.

Un filtro puede representarse con el diagrama de la 2.1 donde $x(t)$ representa una señal de entrada, mientras que $y(t)$ representa la señal de salida correspondiente.



Figura 2.1: Representación de un filtro. Tomada de [69]

Existen dos tipos de filtros: lineales y no lineales. Los filtros lineales operan sobre los datos mediante la convolución entre los datos de entrada con la respuesta al impulso del filtro a utilizar, conocido como *kernel* [6]. Estos filtros trabajan por medio de matrices cuadradas impares (3x3, 5x5, etc.) y dan el mismo peso a los datos, es decir, consideran de la misma forma a los datos “buenos” y a los datos ruidosos [5].

Por otro lado, los filtros no lineales describen de mejor manera la dinámica del sistema, no presentan problemas con bordes como los filtros lineales y realizan una selección estadística de los datos [5]. La aplicación de un filtro a los datos conlleva a una mejor delimitación de las estructuras y valores de resistividad.

Hay una gran variedad de tipos de filtros, por ello, es de suma importancia considerar cuál filtro se aplicará a los datos, ya que la elección del filtro puede tener efectos adversos para los resultados buscados. A continuación, se presentan algunos de los más utilizados.

2.5.1. Filtro de Media Movil

El filtro de media móvil es uno de los filtros más utilizados en el procesamiento de señales. Es un filtro sencillo de entender y es óptimo para reducir el ruido aleatorio manteniendo la forma de la

señal original [65].

Este filtro promedia un número de puntos de la señal de entrada para producir un punto de la señal de salida, en forma de ecuación puede expresarse de la siguiente manera:

$$y[i] = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x[i + j], \quad (2.20)$$

donde x es la señal de entrada; y , la señal de salida y M , el número de puntos promediados u orden del filtro.

Al ser este un filtro lineal, trata a todos los puntos por igual y considera que todos los puntos son igual de ruidosos, lo cual lo hace ideal para lidiar con el ruido aleatorio, ya que, como se mencionó anteriormente, no presenta tendencia [6].

Es importante ser cuidadoso al seleccionar el orden del filtro, ya que a medida que este incrementa se reduce el ruido aleatorio, sin embargo, se comienza a perder la forma de la señal en los bordes, como se muestra en la 2.2.

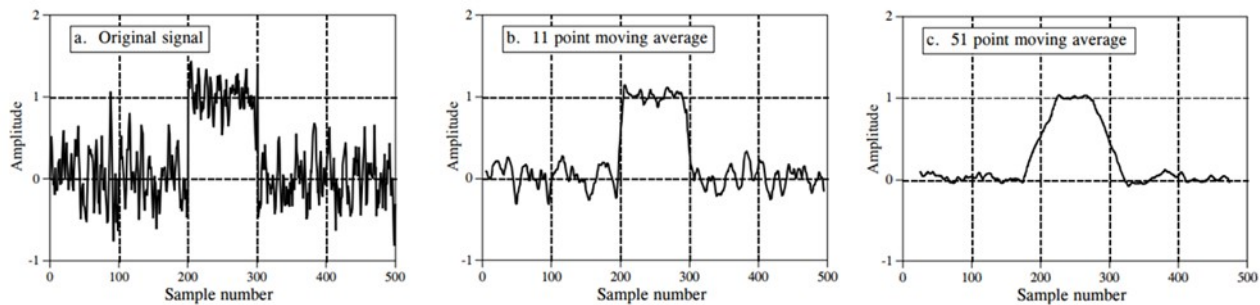


Figura 2.2: Filtro de media móvil para una señal con ruido aleatorio. A medida que incrementa el orden del filtro, se pierde la forma de la señal original, sobre todo en los bordes. Tomada de [65].

Una de las principales ventajas de este filtro es que se puede aplicar de forma recursiva, de forma que el resultado de un cálculo se utiliza en cálculos futuros, esto se expresa de la siguiente forma:

$$y[i] = y[i - 1] + x[i + p] - x[i - q], \quad (2.21)$$

donde $p = (M - 1)/2$ y $q = p + 1$. Es necesario aclarar que M es un número impar.

Esta forma recursiva incrementa significativamente la velocidad de implementación por dos razones: solo hay dos operaciones por punto y solamente utiliza las operaciones de suma y resta [65].

2.5.2. Promedio Ponderado o Media Móvil Ponderado

Existen variaciones del filtro de media móvil, por ejemplo, el filtro de promedio ponderado o media móvil pesado. Este tiene la ventaja de que permite decidir la importancia o peso que se le dará a cada valor en el cálculo de la media y posee una disminución gradual en los bordes del filtro [6].

Este filtro es útil cuando es necesario combinar dos o más mediciones separadas e independientes de una misma cantidad física, en las cuales se asume que los errores sistemáticos fueron reducidos al mínimo y únicamente queda el error aleatorio [5].

El filtro se calcula de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i * w_i)}{\sum_{i=1}^N w_i}, \quad (2.22)$$

donde \bar{x} es el promedio; w_i , los pesos; x_i , los valores y N el número de datos.

2.5.3. Filtro de Mediana

La mediana es una medida de tendencia central que divide a los datos en dos partes iguales cuando, previamente, han sido ordenados de menor a mayor. Una mitad queda por debajo de la mediana y otra mitad queda por encima de ella. Si el número de observaciones es par, la mediana está a la mitad de los dos valores centrales [50]. Para un conjunto de observaciones Y , su mediana \tilde{x} está dada por:

$$\tilde{x} = \begin{cases} Y_{\frac{N+1}{2}} & \text{Si } N \text{ es impar,} \\ \frac{1}{2}(Y_{\frac{N}{2}} + Y_{\frac{1+N}{2}}) & \text{Si } N \text{ es par.} \end{cases} \quad (2.23)$$

La mediana es más robusta que la media, esto significa que no es tan sensible a valores atípicos, esto se cumple a menos que más del 50 % de los datos estén afectados o contaminados [5].

El filtro de mediana es un filtro no lineal que consiste en asignar a cada punto el valor de la mediana local, para esto calcula la mediana alrededor de cada valor de la señal utilizando una ventana que, usualmente, es de tamaño impar. El algoritmo de este filtro es muy efectivo para remover picos, el ruido aleatorio de los datos y, además, tiende a suavizar los bordes. Finalmente, contrario al filtro de media móvil, este filtro no genera problemas en los bordes [5].

Ejemplos de la aplicación de los filtros descritos previamente pueden encontrarse en el trabajo realizado por Aguirre & Esteves (2014), uno de ellos es para el modelo sintético de la Figura 3. Los efectos de los filtros se muestran en la Figura 4, se aprecia una mejora en la homogeneidad del horizonte geoelectrico y una mejor definición del cuerpo resistivo.

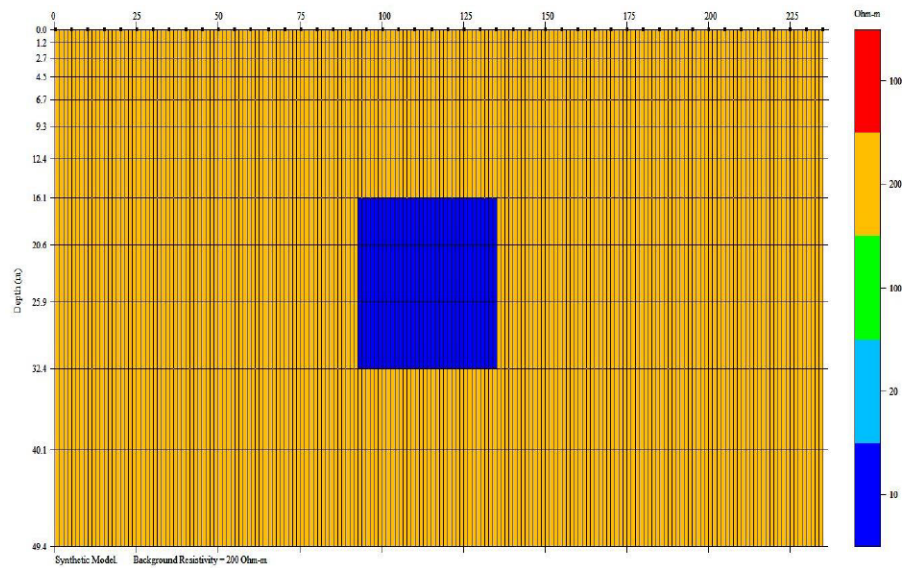


Figura 2.3: Modelo sintético de resistividad representando un cuerpo conductor. Tomada de [5].

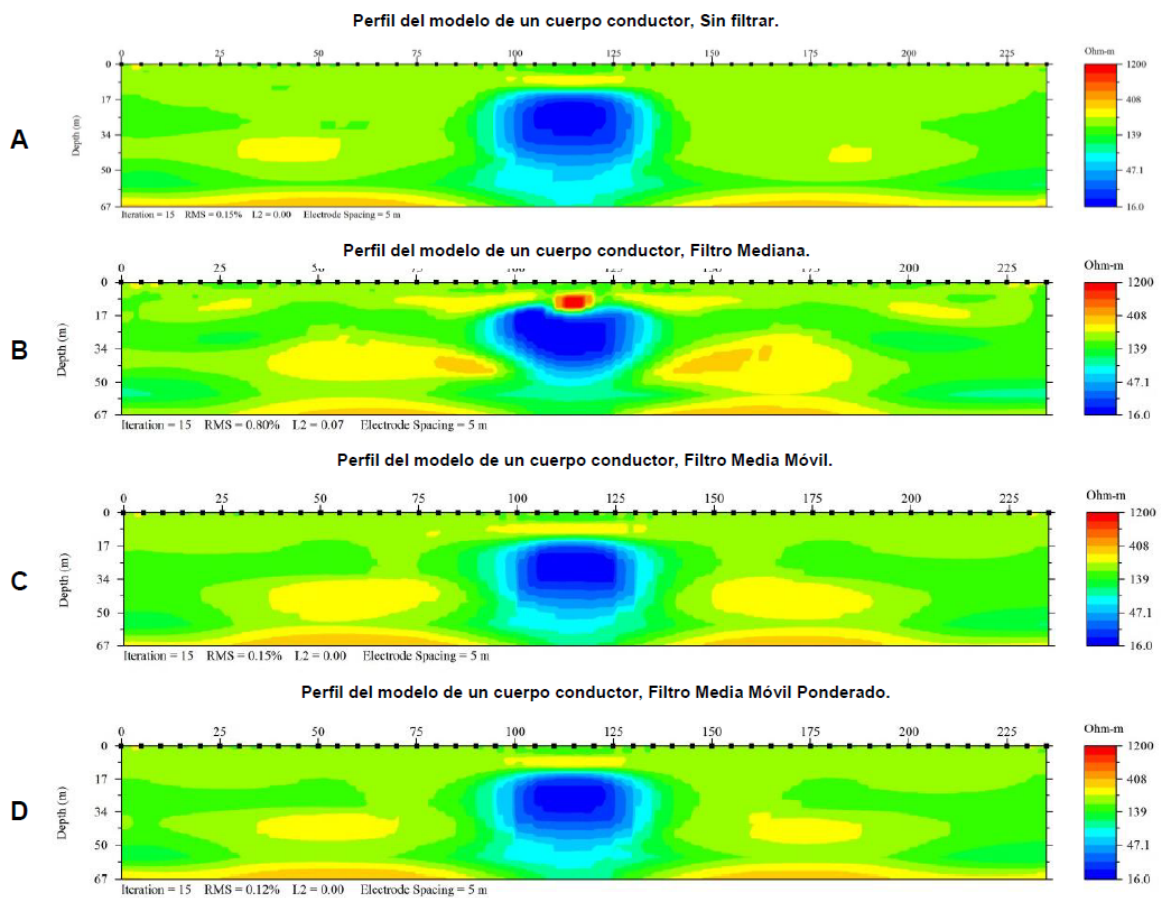


Figura 2.4: Secciones de resistividad obtenidas a partir del modelo sintético de un cuerpo conductor con 0% de ruido. a) Sin filtro, b) Filtro de mediana, c) Filtro de media móvil, d) Filtro de media móvil ponderado. Tomada de [5].

2.5.4. Filtro Savitzky y Golay

El filtro Savitzky Golay fue introducido por A. Savitzky y M. J. Golay en 1964, este filtro es utilizado para reducir el ruido de la señal y suavizarla, conservando la forma original de la misma, evitando la perdida de información. El filtro funciona mediante polinomios cuyos coeficientes deben obtenerse en función de la cantidad de puntos que se considerarán para el filtrado [76].

Con este filtro, se ajusta un polinomio a una porción de los datos, esta porción está definida por una ventana cuyo tamaño es elegido por el usuario, el punto central de esta ventana es reemplazado por el valor del polinomio en ese punto, produciendo así una salida suavizada. Este filtro puede considerarse un caso especial del filtro de promedios ponderados en el que los coeficientes de los pesos son los coeficientes de un polinomio [37].

El filtro depende de dos parámetros: el tamaño de la ventana y el grado del polinomio. Si el tamaño de la ventana es muy grande, genera la perdida de información relevante, por el contrario, si es muy pequeño, no puede reducir el ruido adecuadamente. Por otro lado, si el tamaño del polinomio es muy grande, puede arrojar información redundante y producir más ruido, si es muy pequeño, puede sobre ajustar los datos y distorsionar la señal. Se debe encontrar el equilibrio entre la reducción del ruido y la preservación de la señal [37]. Por lo general, se utiliza un grado de polinomio entre 2-6 y el tamaño de la ventana se ajusta hasta obtener un resultado optimo.

La descripción matemática del proceso de filtrado está dada por la siguiente expresión:

$$s_j^* = \frac{\sum_{i=-m}^{i=m} c_i s_{j+i}}{N}, \quad (2.24)$$

donde s es la señal original; s^* , la señal suavizada; c_i , el coeficiente de suavizamiento; N , el número de punto dentro de la ventana de suavizamiento que equivale a $2m + 1$, donde m es la mitad del tamaño de la ventana y j representa el índice del dato.

El polinomio puede modelarse como:

$$f_k(i) = b_0 + b_1 i + b_2 i^2 + \dots + b_k i^k = \sum_k^{n=0} b_n i^n, i \leq 2m, \quad (2.25)$$

donde b_n son los coeficientes del polinomio y k indica el grado del polinomio. Los coeficientes del polinomio se obtienen mediante un ajuste de mínimos cuadrados.

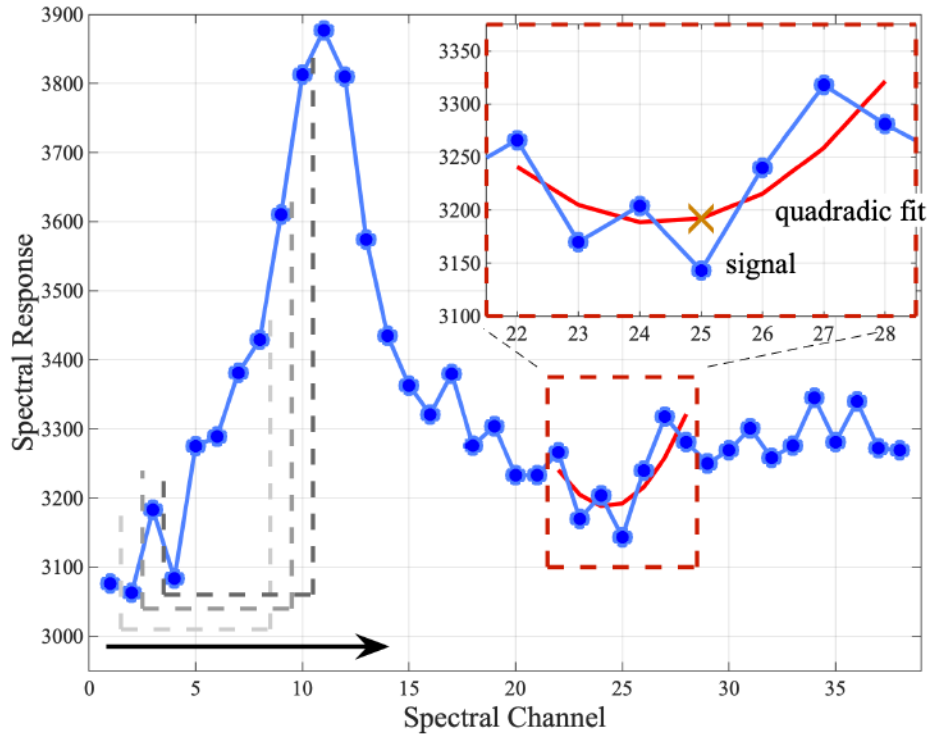


Figura 2.5: Ejemplo de la aplicación de un filtro SG con un polinomio cuadrático, el punto central de la ventana de siete puntos, denotado por una x, es reemplazado por el valor del polinomio. Tomado de [26].

2.6. Software Libre de Procesamiento de Datos Geoelectr- COS

El procesamiento y manejo de los datos puede realizarse utilizando el software proporcionado por el fabricante del equipo de adquisición, por ejemplo, para el Syscal Pro el software correspondiente es Prosys II o Prosys III, siendo este último una versión optimizada para la adquisición en 3D.

De acuerdo con *Iris Instruments*, las principales funciones de este programa son las siguientes:

- Descarga de los datos.
- Representación numérica y gráfica (parámetros crudos, resistividad, cargabilidad, etc.)
- Procesamiento de datos, es decir, el filtrado de los datos utilizando rangos de valores o filtros de media o mediana.
- Inclusión de topografía.
- Graficar la resistividad aparente y las secciones de cargabilidad.
- Exportar la información en un formato adecuado, por ejemplo, el txt, para su uso en softwares de inversión.

Para otros equipos de adquisición, como el Ares II, existe el Ares II control interface, que se descarga de la página del fabricante.

2.7. Interpretación Preliminar o Cualitativa

En un estudio 1D, las curvas obtenidas pueden ser interpretadas cualitativamente, utilizando la forma de la curva, semicuantitativa, comparando gráficamente la curva de campo con curvas teóricas obtenidas mediante modelación y cuantitativamente, utilizando métodos computacionales como inversión. Este último es el más riguroso, sin embargo, existe la posibilidad de sobreinterpretar los datos.

La interpretación cualitativa de una curva de resistividad aparente obtenida durante la adquisición se realiza en función de su forma, en el caso de 3 capas geoelectricas hay 4 tipos de curvas: H, A, K y Q, las cuales pueden combinarse para describir curvas que involucren más capas. En este caso, la forma de la curva depende del grosor de la capa intermedia, es decir, la capa 2. Así mismo, el número de capas es igual al número de puntos de inflexión en la curva, sin embargo, la posición de estos no refleja de ninguna manera la profundidad. Finalmente, las magnitudes relativas de la resistividad real pueden obtenerse a partir de las porciones planas de las curvas y son un buen indicador previo a una interpretación más sofisticada [58]. En una curva de campo, el ruido se percibe en forma de picos lo cual puede dificultar la interpretación.

La interpretación semicuantitativa se realiza utilizando el método de curvas maestras, este consiste en comparar gráficamente las curvas de campo contra un set de curvas teóricas, éstas son creadas con la suposición de que el modelo se asemeja a una tierra estratificada y que las capas incrementan su espesor con la profundidad, aunque esto último rara vez se cumple. Este método permite obtener el número de capas, su resistividad y su espesor, sin embargo, se vuelve impráctico para más de 5 o 6 capas. Así mismo, su efectividad está condicionada a la experiencia del interprete, lo cual puede llevar a errores en la interpretación. [58].

En el caso de estudios 2D y 3D, la interpretación preliminar se realiza con la pseudosección. Como se mencionó anteriormente, la pseudosección es una forma de representar los datos de resistividad y provee un estimado de la resistividad eléctrica verdadera del subsuelo [25], esta puede visualizarse con algún software que permita el manejo de datos de resistividad, por ejemplo, el Prosys II o softwares de inversión como EarthImager. Un detalle a considerar es que las pseudosecciones implican un proceso de interpolación, si existe ruido en los datos, este se mostrará como .ojos de buey.º pequeñas zonas aisladas de resistividad alta o baja y que pueden influir en el error final de la inversión, sin embargo, este error también puede surgir por malas elecciones en los parámetros de inversión, no necesariamente por el ruido.

Capítulo 3

Conceptos básicos de modelación

3.1. Modelación

El procedimiento general para predecir el comportamiento de un sistema es el modelado. **Un modelo de un sistema es un sustituto cuyo comportamiento imita al del sistema.** Los modelos más utilizados en la actualidad son los modelos matemáticos, ya que son los más versátiles y económicos [31].

Los modelos matemáticos integran el conocimiento científico y tecnológico con el propósito de predecir el comportamiento del sistema. En la actualidad, los modelos matemáticos basados en la simulación numérica permiten el estudio de sistemas complejos y fenómenos naturales que de otro modo serían muy costosos y peligrosos [31].

El modelo, usualmente, toma la forma de una o más ecuaciones que se espera sigan los datos y los parámetros del modelo, que se definen como, los valores numéricos de propiedades del sistema específicas, por ejemplo, la resistividad. Generalmente, el modelo es una integral o una ecuación diferencial que debe resolverse de forma numérica [53].

Desde esta perspectiva, la importancia del modelado matemático y computacional es clara; es el método más eficiente y eficaz para predecir el comportamiento de los sistemas naturales y artificiales de interés humano [31].

En ciencias de la Tierra, en particular, el subsuelo puede modelarse en forma unidimensional (1D), bidimensional (2D) o tridimensional (3D). Cada dimensión constituye una dirección a lo largo de la cual la resistividad del suelo puede variar. Para poder calcular el potencial eléctrico en la superficie, dada una distribución de resistividades, el problema se aborda básicamente aplicando tres métodos: **el filtrado lineal digital para el caso 1D, y el método de diferencias finitas y elementos finitos para el caso 2D y 3D.**

La teoría de modelación y los diferentes métodos que se aplican a cada dimensión, se explican de una manera más sencilla en el siguiente mapa conceptual.

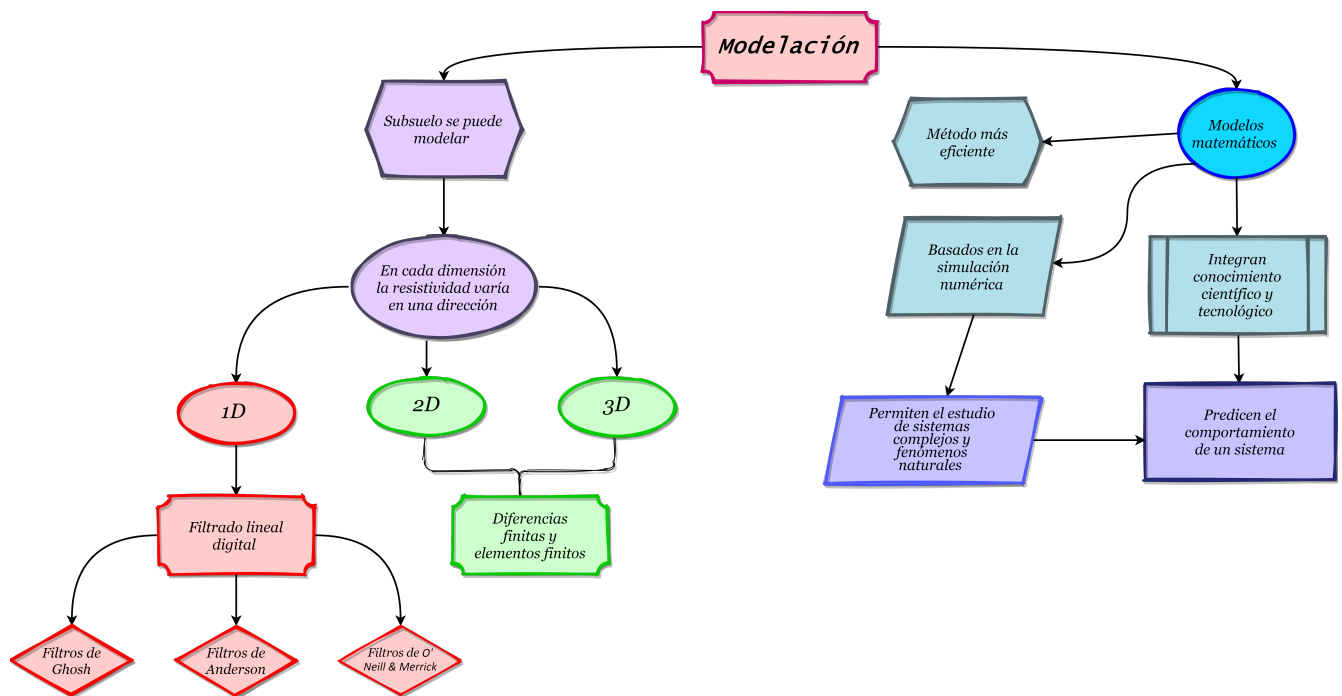


Figura 3.1: Mapa conceptual: Teoría de modelación y sus diferentes métodos.

3.2. Filtrado Lineal Digital

El método del filtrado lineal digital es empleado en la **modelación de datos 1D** de resistividad y surge de la solución del potencial para una tierra estratificada de Stefanescu, ya que un modelo 1D está limitado a capas verticales, la forma de la solución es:

$$V = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty K(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (3.1)$$

donde $K(\lambda) = [1 + 2\beta_1(\lambda)]$ y es función Kernel de Slichter; β_1 , la función **Kernel** de Stefanescu que controla los **parámetros de las capas**, es decir, la resistividad y la profundidad; J_0 , una función de Bessel de orden 0; λ , es la variable de integración y es el recíproco de la distancia r .

Koefoed (1970) define la **Función de Transformación de Resistividad** (T) como $T(\lambda) = \rho_1(1 + 2\beta(\lambda))$ esta se sustituye en la solución de Stefanescu:

$$V = \frac{I}{2\pi} \int_0^\infty T(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (3.2)$$

Entre las características de la función de transformación de resistividad están que está determinada por la distribución de capas del subsuelo, es una representación no ambigua de la función de resistividad aparente y que no depende del arreglo de electrodos utilizado, solo de los parámetros de la capa [27].

El método está fundamentado en que las funciones ρ_a y T tienen una relación lineal, por ello, se puede aplicar la **teoría del filtrado lineal digital** para obtener la función T a partir de ρ_a (Interpretación) y viceversa, es decir, ρ_a a partir de T (Modelado directo).

Koefoed (1979) divide el **procedimiento de filtrado inverso en 2 etapas**:

- Obtener los valores de la Función de Transformación de Resistividad (FTR).
- Obtener los valores de ρ_a a partir de los valores de la FTR usando un filtro lineal.

Muchos autores han propuesto metodologías de diseño de filtros de resistividad, éstas tienen como base una **integral de convolución** en la cual se utilizan diferentes pares de funciones de entrada y salida. Estos pares de funciones determinan la capacidad del filtro de obtener resultados precisos [52]. Los filtros propuestos pueden ser encontrados en tablas para su aplicación y varían tanto en número de coeficientes como en intervalo de muestreo utilizado. A continuación, se hará un recuento de algunas de estas metodologías.

3.2.1. Filtros de Ghosh

El procedimiento realizado por Ghosh (1971) fue el que dio origen a los métodos subsecuentes, en él, a partir de la función de resistividad aparente del Arreglo Schlumberger y de la ecuación 3.2, se obtiene una expresión explícita para la función de transformación de resistividad, para ello, se utiliza la inversión de Hankel de una integral de Bessel:

$$T(\lambda) = \int_0^{\infty} [\rho_a s(s) J_1(\lambda s) / s] ds, \quad (3.3)$$

donde J_1 es una función de Bessel de orden 1. Aplicando un cambio de variable donde $x = \ln s$ y $y = \frac{1}{\lambda}$ se obtiene:

$$T(\lambda) = \int_0^{\infty} [\rho_a s(x) J_1(1/ey - x)] ds. \quad (3.4)$$

La expresión es una integral de convolución que relaciona de manera lineal la entrada $\rho_a s$ con la salida $T(y)$.

Esta relación puede ser expresada como una multiplicación en el dominio de la frecuencia aplicando la transformada de Fourier:

$$F(f) = G_s(f) H_s(f) \Rightarrow H_s(f) = \frac{F(f)}{G_s(f)}, \quad (3.5)$$

donde $F(f) \Leftrightarrow T(y)$, $G_s(f) \Leftrightarrow \rho_a s(x)$ y $H_s(f)$ es la función de transferencia que, en este caso, es el filtro de resistividad.

El paso inicial del método consiste en determinar $H_s(f)$, esto se hace utilizando pares de funciones de resistividad cuya transformada sea conocida, el cociente entre estas permite obtener las características del filtro en el que, posteriormente, se ingresa una función *sinc*. El espectro de una función *sinc* es una caja o bloque con ancho $1/\Delta x$ y alto Δx donde Δx es el intervalo de muestreo. Para obtener el espectro de la respuesta a *sinc* se multiplica $H_s(f)$ por Δx hasta la frecuencia de Nyquist y por 0 para frecuencias más altas. Al aplicar la transformada inversa de Fourier se obtiene **la respuesta a sinc del filtro**, al muestrearla se obtienen los **coeficientes del filtro**. La forma discreta de escribir la ecuación 3.5 es:

$$T_m = \sum_j a_i R_{m-i}, \quad (3.6)$$

donde $m = 0, 1, 2, \dots$, a_i es el coeficiente del filtro y R_{m-i} es la resistividad aparente. Los límites de la suma dependen de la cantidad de coeficientes.

La relación anterior fue utilizada para la interpretación de datos del sondeo eléctrico durante los años 70, sin embargo, hoy en día, ha sido desplazada por métodos más modernos y computarizados como los algoritmos de inversión.

Por otro lado, al reescribir la ecuación 3.5 se llega a una relación inversa para abordar el problema directo, es decir, obtener los valores de resistividad aparente a partir de la función de transformación de resistividad:

$$G_s(f) = F(f) \frac{1}{H_s(f)}, \quad (3.7)$$

$$G_s(f) = F(f)Q(f), \quad (3.8)$$

donde $Q = \frac{1}{H_s(f)}$ y corresponde al filtro inverso.

El filtro propuesto por Ghosh tiene la siguiente forma:

$$R_m = \sum_j b_j T_{m-i}, \quad (3.9)$$

donde $m = 0, 1, 2, \dots$, b_i es el coeficiente del filtro inverso y T_{m-i} es la función de transformación de resistividad.

Ghosh propuso la siguiente ecuación para la función de transformación de resistividad para modelos de dos capas:

$$T(u) = \rho_a \frac{1 + k_{AB} \exp(-2E_A/u)}{1 - k_{AB} \exp(-2E_A/u)}, \quad (3.10)$$

donde $u = \exp(y)$; $k_{AB} = \frac{\rho_B - \rho_A}{\rho_B + \rho_A}$ y es el coeficiente de reflexión; ρ_A y ρ_B son las resistividades de las capas y, finalmente, E_A es el espesor de la capa A.

Para modelos con más de dos capas propuso la siguiente ecuación de recursividad:

$$T_n(u) = \frac{T'_{AB} + T_{n-1}}{1 + T'_{AB} \cdot T_{n-1}/(\rho_A)^2}, \quad (3.11)$$

donde T_n es la función de transformación de resistividad para n capas; $T_{n-1} = \frac{T'_{BC} + T_{n-2}}{1 + T'_{BC} \cdot T_{n-1}/(\rho_A)^2}$, la función de transformación de resistividad para el mismo modelo sin la primera capa y T'_{AB} es la función de transformación de resistividad para una sección de dos capas para el caso en que $k_{AB} = -1$.

Se obtuvieron los coeficientes de filtrado inverso obtenidos con un intervalo de muestreo a $\frac{1}{3} \ln 10$ que se muestran en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: Filtros inversos de resistividad desarrollados por Ghosh

Coefficientes	Schlumberger	Wenner
b_{-3}	0.0225	
b_{-2}	-0.0499	
b_{-1}	0.1064	0.0284
b_0	0.1854	0.4582
b_1	1.972	1.5662
b_2	-1.5716	-1.3341
b_3	0.4018	0.3473
b_4	-0.814	-0.935
b_5	0.0148	0.0416
b_6		-0.0253
b_7		0.0179
b_8		-0.0067

Este método presentaba **dos problemas**: consumía mucho tiempo y, al presentarse un contraste de resistividades mayor a 20, los coeficientes propuestos no representaban la curva de resistividad aparente de forma adecuada. Como un contraste de resistividad de 20 es común en campo, O' Neill (1975) modificó lo propuesto por Ghosh para compensar esto.

O' Neill estudio el efecto del intervalo de muestreo en los filtros propuestos por Ghosh y llegó a la conclusión que un intervalo de muestreo mejor era $\frac{1}{6} \ln 10$. Además, trabajó con el siguiente par de funciones:

$$\Delta\rho_a = \frac{e^{3x}}{(1 + e^{2x})^{\frac{7}{2}}}, \quad \Delta T(y) = \frac{e^{-y} + e^{-2y}}{15e^{-y}}. \quad (3.12)$$

Siguió el mismo procedimiento de Ghosh con el arreglo Schlumberger y determinó las posiciones óptimas de muestreo basándose en el espectro de la función *sinc*. Este espectro se vuelve periódico en los valores positivos y negativos más grandes, por ello, el muestreo debe realizarse lo más cerca posible de los ceros de la función, de forma que se pueda considerar solamente la parte central no periódica.

Se menciona que el número de coeficientes utilizado para representar el filtro es arbitrario y depende de la precisión deseada. Para el filtro inverso propuso 20 coeficientes que se encuentran en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2: Coeficientes del Filtro Inverso propuesto por O' Neill

Filtro inverso: Schlumberger			
Coeficiente	Valor	Coeficiente	Valor
b_{-5}	0.003042	b_5	2.7044
b_{-4}	-0.001198	b_6	-1.1324
b_{-3}	0.01284	b_7	0.393
b_{-2}	0.0235	b_8	-0.1436
b_{-1}	0.08688	b_9	0.05812
b_0	0.2374	b_{10}	-0.02521
b_1	0.6194	b_{11}	0.01125
b_2	1.1817	b_{12}	0.004978
b_3	0.4248	b_{13}	0.002072
b_4	-3.5407	b_{14}	0.000318

3.2.2. Filtro de Anderson

Las técnicas expuestas anteriormente, se basan en la convolución utilizando coeficientes predefinidos, es decir, los coeficientes del filtro. Sin embargo, Anderson (1979) motivado por la poca precisión de algunos de estos filtros, abordó el filtrado digital mediante la **transformada de Hankel** del Kernel de Stefanescu. La transformada de Hankel, expresa cualquier función como una suma infinita de funciones de Bessel de primera especie, también se conoce como la **transformada de Fourier-Bessel**. Este procedimiento fue realizado para el arreglo Schlumberger pero puede realizarse para cualquier arreglo a partir de la expresión de resistividad aparente correspondiente.

Se define la transformada de Hankel del Kernel $K(b)$ como:

$$K(b) = \int_0^{\infty} k(\lambda) J_n(b\lambda) d\lambda, \quad b > 0, \quad (3.13)$$

donde J_n es una función de Bessel de primera especie de orden n . Para diseñar un filtro lineal de la ecuación 3.12 se debe aplicar un cambio de variable: $x = \ln(b)$ y $y = \ln(1/\lambda)$ y multiplicar ambos lados por un factor e^x para obtener simetría en ambos ejes:

$$e^x K(e^x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(e^{-y}) [e^{x-y} J_n(e^{x-y})] dy. \quad (3.14)$$

Esta ecuación tiene la forma de una integral de convolución donde $k(e^{-y})$ es la función de entrada; $e^x K(e^x)$, es la función de salida y el termino en corchetes es la función de respuesta del filtro.

Utilizando el teorema de convolución, la respuesta del filtro puede ser obtenida utilizando un par conocido de funciones de entrada-salida.

El par de funciones utilizado fue:

$$\int_0^{\infty} \lambda \exp(-a(\lambda)^2) J_0(b\lambda) = [\exp((-b)^2/4a)]/2a, \quad (3.15)$$

$$\int_0^{\infty} \lambda \exp(-a(\lambda)^2) J_1(b\lambda) = b[\exp((-b)^2/4a)]/(2a)^2, \quad (3.16)$$

donde $a > 0$ y $b > 0$. Sin embargo, hay varios pares de funciones de transformada de Hankel que pueden ser utilizadas.

Los siguientes **pasos del método propuesto** son los siguientes:

1. Se muestrea el par de funciones para valores de abscisas de pequeños a grandes utilizando un intervalo constante $\Delta y = 0.2$. Previo a esto, las funciones propuestas se transforman con la ecuación 3.13.
2. Se obtiene la transformada de Fourier discreta de ambas funciones muestreadas y se divide el espectro de salida entre el espectro de entrada lo que resulta en el espectro de la respuesta del filtro.
3. Se obtiene la respuesta del filtro a una función *sinc* al multiplicar el espectro obtenido en el paso 2 con el espectro de una función $\text{sinc}(y) = \sin(\pi y/\Delta y)/(\pi y/\Delta y)$.
4. Realizar la transformada inversa de Fourier discreta del resultado del paso 3 para obtener los coeficientes del filtro
5. Se desplazan los coeficientes obtenidos en el paso 4 con respecto a sus intersecciones con cero, de forma que se las respuesta se aproximen a cero en ambas direcciones de sus abscisas.

Estos coeficientes se aplican en la ecuación 3.13 utilizando una suma de convolución para cualquier valor de $b > 0$ ($x = \ln b$):

$$K(b) = \frac{\sum_{N_1}^{N_2} W_i K[\exp(A_i - x)]}{b}, \quad (3.17)$$

donde W_i son los coeficientes del filtro, $A_i - x$ son las abscisas desplazadas para los valores de $i = N_1 \dots N_2$.

De acuerdo con Anderson, esta metodología tiene una **mayor precisión** en comparación con las dos descritas anteriormente, debido a que no utiliza un número fijo de coeficientes de filtrado, sino, que depende del par de funciones evaluado.

3.2.3. Filtros de O' Neill & Merrick

Muchos otros filtros diseñados, fueron desarrollados para un arreglo específico, por ello, la adquisición de datos se encontraba condicionada a los filtros existentes que indicaban que tipo de arreglo se podía utilizar de forma efectiva. Por lo anterior, O' Neill & Merrick (1984) diseñaron una metodología de **filtrado digital** para calcular la resistividad aparente para **cualquier arreglo** de 4 electrodos. Esto se logra al obtener una expresión generalizada para la resistividad aparente con el factor geométrico.

Para esto, parte de la ecuación 3.2 en la cual aplican un cambio de variable para expresarla como una integral de convolución: $r = \exp(x)$ $\lambda = \exp(-y)$:

$$V = \frac{I}{2\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} T(y) \exp(x - y) J_0[\exp(x - y)] dy, \quad (3.18)$$

$$V = \frac{I}{2\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} T(y)f(x-y)dy, \quad (3.19)$$

donde $f(x-y) = \exp(x-y)J_0[\exp(x-y)]$ es la función filtro.

El potencial se obtiene a partir de la **convolución** entre la función de transformación de resistividad con una función filtro. Dicha convolución puede expresarse de forma discreta:

$$V(r) = \frac{I}{2\pi r} \sum_{j=-n_1}^{n_2} T(\ln r - n_j)C(n_j), \quad (3.20)$$

donde n_j es la abscisa del coeficiente del filtro; $C(n_j)$, los coeficientes del filtro; n_1 , el número de coeficientes a la izquierda del origen del filtro; y, n_2 es el número de coeficientes a la derecha del origen del filtro.

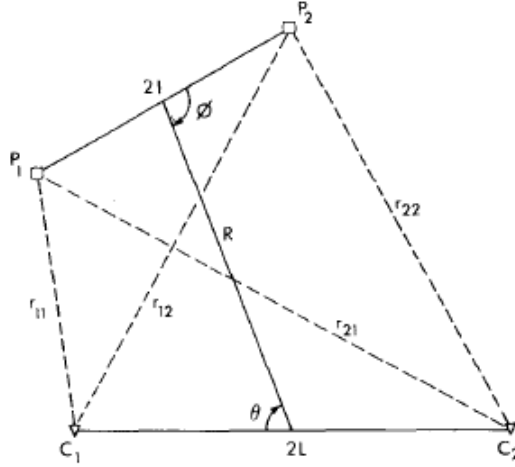


Figura 3.2: Arreglo generalizado de 4 electrodos. Tomada de [52].

Para generalizar la expresión 3.19 en función de un arreglo generalizado de 4 electrodos se tiene que el potencial entre los electrodos de potencial de la Figura 3.2 es:

$$\Delta V = V(r_{11}) - V(r_{12}) - V(r_{21}) + V(r_{22}). \quad (3.21)$$

Utilizando la ecuación 3.19 se obtiene que:

$$\Delta V^i = \frac{I}{2\pi} \sum_{j=n_1}^{n_2} T_{ij}C_j, \quad (3.22)$$

donde:

$$T_{ij} = \frac{T(\ln r_{11}^i - n_j)}{r_{11}^i} - \frac{T(\ln r_{12}^i - n_j)}{r_{12}^i} - \frac{T(\ln r_{21}^i - n_j)}{r_{21}^i} + \frac{T(\ln r_{22}^i - n_j)}{r_{22}^i}, \quad (3.23)$$

$$C_j = C(n_j). \quad (3.24)$$

T_{ij} es una función de los parámetros del modelo y de las distancias electródicas. La resistividad aparente puede escribirse como:

$$\rho = K \frac{\Delta V}{I}, \quad (3.25)$$

donde el factor geométrico K se define como:

$$K = 2\pi \left[\frac{1}{r_{11}} - \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{22}} \right]^{-1}. \quad (3.26)$$

Al combinar las ecuaciones 3.21 y 3.24 se obtiene

$$\rho_a^i = \left[\frac{1}{r_{11}} - \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{22}} \right]_i^{-1} \sum_{j=-n_1}^{n_2} T_{ij} C_j. \quad (3.27)$$

Esta ecuación muestra que la **resistividad aparente para un arreglo generalizado** puede obtenerse a partir de la multiplicación entre el factor geométrico y una suma de convolución.

O'Neill & Merrick elaboraron filtros de 18, 36, 45 y 167 puntos. Estos filtros se utilizan para convertir valores de la función de transformación de resistividad en resistividad aparente.

El muestreo de esta función se debe hacer al mismo intervalo de muestreo que el filtro utilizado, estos valores son divididos entre su respectiva distancia eléctrica y se combinan para formar un solo set como el de la ecuación 3.21. Finalmente, se realiza la convolución entre este set con los coeficientes del filtro y, al multiplicar por el factor geométrico se obtiene la resistividad aparente.

A manera de resumen, se presenta la Tabla 3.3 donde se muestran algunas de las características de los filtros de resistividad mostrados.

Tabla 3.3: Filtros de Resistividad empleados en el Filtrado Lineal Digital

Filtros de Resistividad		
Filtros de Ghosh	Filtros de Anderson	Filtro O'Neill & Merrick
Diseñado para los arreglos Wenner y Schlumberger.	Puede diseñarse para cualquier arreglo mientras se tenga la función de resistividad aparente.	Diseñado para cualquier arreglo de 4 electrodos.
El uso de la función <i>sinc</i> introduce ruido en el filtro	El uso de la función <i>sinh</i> suaviza las altas frecuencias.	Al estar diseñado para un arreglo generalizado, el uso de un filtro solamente depende del contraste entre resistividades y facilidades computacionales.
Filtros de 8 y 9 coeficientes.	Los coeficientes del filtro se adaptan según el arreglo.	Filtros de 18, 36, 45 y 167 coeficientes dependiendo del intervalo de muestreo.
Produce muy buenos resultados con un contraste bajo de resistividad (20:1), de lo contrario da resultados poco precisos.	Produce errores menores a 0.005 %.	Produce errores entre 10^{-2} - 10^{-5} dependiendo del intervalo de muestreo.
Tiene muy pocos coeficientes, esto impide que describa una curva donde la resistividad de crezca rápidamente.	El adaptar su tamaño permite que se alcance una precisión adecuada y que no se realicen operaciones innecesarias.	Soporta contrastes de resistividad de hasta 100,000:1, 2000:1, 5000:1 y 50:1, respectivamente.

3.3. Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas (MDF) nos ayuda a resolver ecuaciones diferenciales por medio de aproximaciones de las derivadas contenidas en estas. Estas aproximaciones se obtienen del truncamiento de la serie de Taylor para constituir una nueva ecuación o sistema de ecuaciones que nos ayude a obtener la solución a nuestro problema con gran facilidad [18].

La serie de Taylor se define como:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n. \quad (3.28)$$

En esencia, la serie de Taylor proporciona un medio para predecir el valor de una función en un punto en términos del valor de la función y sus derivadas en otro punto. En particular, se establece que cualquier función suave puede aproximarse por un polinomio.

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n + R_n, \quad (3.29)$$

se incluye un término residual R_n para considerar todos los términos desde $n+1$ hasta infinito:

$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} (x_{i+1} - x_i)^{n+1}, \quad (3.30)$$

donde el subíndice n indica que este es el residuo de la aproximación de n -ésimo orden y ξ es un valor de x que se encuentra en algún punto entre x_i y x_{i+1} .

Con frecuencia es conveniente simplificar la serie de Taylor definiendo un tamaño de paso o incremento $h = x_{i+1} - x_i$ y expresando la ecuación 3.29 como:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n, \quad (3.31)$$

donde el termino residual es ahora:

$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}. \quad (3.32)$$

La ecuación 3.32 nos es útil para la evaluación de errores de truncamiento. Esto se debe a que se tiene control sobre el término h de la ecuación. En otras palabras, es posible decidir qué tan lejos de x se desea evaluar $f(x)$ y controlar el número de términos que se desea tener en la expansión. Por esto, la ecuación 3.32 se expresa usualmente como:

$$R_n = O(h^{n+1}), \quad (3.33)$$

donde la nomenclatura $O(h^{n+1})$ significa que el error de truncamiento es de orden h^{n+1} . Es decir, el error es proporcional al incremento de h elevado a la $(n+1)$ ésima potencia.

3.3.1. Aproximación a la primera derivada con diferencia hacia adelante

Truncando la ecuación 3.29 después del término con la primera derivada, se obtiene:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + R_1. \quad (3.34)$$

En la ecuación 3.34 se despeja obteniendo:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{R_1}{x_{i+1} - x_i}. \quad (3.35)$$

El primer término de la ecuación 3.35 es una aproximación de primer orden y el termino de la izquierda es el error de truncamiento. Utilizando las ecuaciones 3.30 y 3.35 se tiene:

$$\frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f'(\xi)}{2!} (x_{i+1} - x_i), \quad (3.36)$$

o:

$$\frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} = O(x_{i+1} - x_i). \quad (3.37)$$

Por lo tanto, la estimación de la derivada tiene un error de truncamiento de orden $x_{i+1} - x_i$. En otras palabras, el error en nuestra aproximación de la derivada debería ser proporcional al tamaño

del incremento.

A la ecuación 3.35 se le conoce como diferencia finita dividida y generalmente se representa como:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i), \quad (3.38)$$

o:

$$f(x_i) \approx \frac{\Delta f_i}{h} + O(h), \quad (3.39)$$

donde a Δf_i se le conoce como la primera diferencia hacia adelante. Se le llama “hacia adelante”, porque usa los datos en i e $i + 1$ para estimar la derivada. Al término completo $\frac{\Delta f_i}{h}$ se le conoce como primer diferencia finita dividida.

Esta diferencia dividida hacia adelante es sólo una de tantas que pueden desarrollarse a partir de la serie de Taylor para la aproximación de derivadas numéricas. Las aproximaciones de la primera derivada utilizando diferencias hacia atrás o diferencias centradas se pueden desarrollar de una manera similar a la ecuación 3.35. Las primeras usan valores en x_{i-1} y x_i ; mientras que las segundas utilizan valores igualmente espaciados alrededor del punto donde la derivada está estimada.

3.3.2. Aproximación a la primera derivada con diferencia hacia atrás

La serie de Taylor se expande hacia atrás para calcular un valor anterior sobre la base del valor actual:

$$f(x_{i-1}) \approx f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \dots, \quad (3.40)$$

truncando la ecuación después de la primera derivada y reordenando los términos se obtiene:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} + O(h), \quad (3.41)$$

o:

$$f'(x_i) \approx \frac{\nabla f_i}{h} + O(h), \quad (3.42)$$

donde a ∇f_i se le conoce como primera diferencia dividida hacia atrás.

3.3.3. Diferencias centradas

Una tercera forma de aproximar la primera derivada consiste en restar la ecuación 3.41 de la expansión de la serie de Taylor hacia adelante:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \dots, \quad (3.43)$$

para obtener:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_{i-1}) + 2f'(x_i)h + \frac{2f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \dots, \quad (3.44)$$

de donde se despeja:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} - \frac{f^{(3)}(x_i)}{6}h^3, \quad (3.45)$$

o:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} - O(h^2) \quad (3.46)$$

La ecuación 3.44 es una representación de las diferencias centradas de la primera derivada. Observe que el error de truncamiento es del orden de h^2 en contraste con las aproximaciones hacia adelante y hacia atrás, que fueron del orden de h . Por lo tanto, el análisis de la serie de Taylor ofrece la información práctica de que la diferencia centrada es una representación más exacta de la derivada.

Es posible desarrollar aproximaciones más exactas de la primera derivada incluyendo términos de orden más alto de la serie de Taylor. Finalmente, todas las versiones anteriores se pueden desarrollar para derivadas de segundo orden, de tercer orden y de órdenes superiores.

3.3.4. Diferencias finitas en dos dimensiones

La Figura 3.3, muestra un dominio de cálculo en el plano $x - y$. Se asume que el espaciamento de los nodos de malla es constante en la dirección x y está dado por Δx . De la misma manera el espaciamento de los nodos en la dirección y es constante, y está dado por Δy . No es necesario que Δx y Δy sean uniformes.

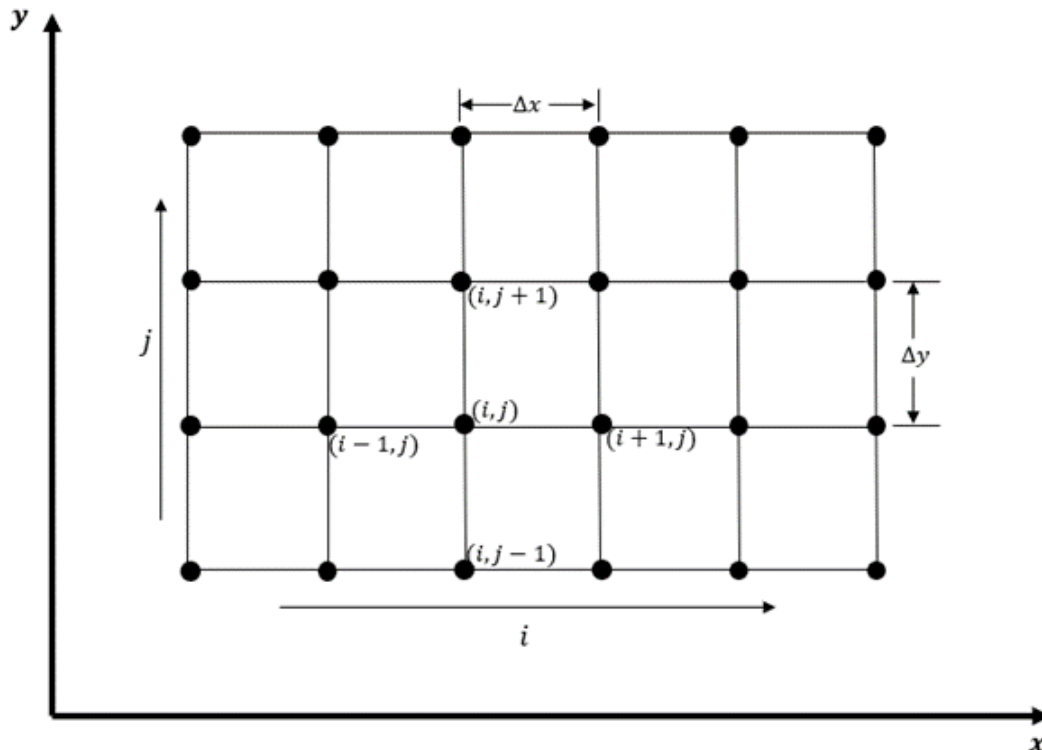


Figura 3.3: Malla de diferencias finitas. Modificada de [72].

Para localizar cualquier nodo en la malla se especifica un par ordenado (i, j) . El índice i aumenta en la dirección x positiva, mientras que el índice j que aumenta en la dirección y positiva.

Si $V_{i,j}$ es el componente x del potencial $V_{i+1,j}$ en el nodo $(i+1, j)$ se puede expresar en términos de la serie de Taylor sobre el nodo (i, j) . De forma análoga a la de la sección anterior, usando la serie de Taylor se construyen aproximaciones en diferencias finitas de primer orden en dos dimensiones.

$$V_{i+1,j} \approx V_{i,j} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots, \quad (3.47)$$

truncando la ecuación 3.47 después del término de la segunda derivada:

$$V_{i+1,j} \approx V_{i,j} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \dots, \quad (3.48)$$

de la ecuación 3.48 se despeja $\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{i,j}$, para obtener la aproximación de la derivada:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta x} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2}, \quad (3.49)$$

o:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (3.50)$$

A la ecuación 3.50 se le conoce como diferencia hacia delante de primer orden.

Ahora se considera una expansión de la serie de Taylor para $V_{i-1,j}$ sobre $V_{i,j}$:

$$V_{i-1,j} \approx V_{i,j} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots, \quad (3.51)$$

resolviendo para $\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{i,j}$, se obtiene:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{V_{i,j} - V_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (3.52)$$

La ecuación 3.52 es la diferencia hacia atrás de primer orden.

Restando la ecuación 3.51 a la expansión de la serie de Taylor hacia adelante, ecuación 3.47:

$$V_{i-1,j} - V_{i,j} \approx 2 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{3}, \quad (3.53)$$

y despejando $\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{i,j}$ de la ecuación 3.53 se obtiene:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (3.54)$$

A la ecuación 3.54 se le conoce como diferencia centrada de segundo orden.

Los cocientes de las diferencias para las derivadas en y , se obtienen de la misma manera. Los resultados son análogos a las expresiones para las derivadas en x .

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y), \quad (3.55)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y), \quad (3.56)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2). \quad (3.57)$$

Las ecuaciones 3.55, 3.56 y 3.57 se les conoce como diferencia hacia adelante, diferencia hacia atrás y diferencia centrada, respectivamente.

El método de diferencias finitas determina el potencial en los nodos de la malla rectangular y por lo tanto se pueden obtener los valores de resistividad aparente a lo largo del perfil determinado por la malla [22]. Hay que tener en cuenta que la malla puede tener un espaciado Δx y Δy constantes; pero se pueden utilizar mallas con un espaciado Δx y Δy irregulares, con esto se pueden modelar estructuras geológicas más complejas cuando la distancia entre nodos es pequeña.

3.4. Elementos Finitos

Una de las desventajas del método de diferencias finitas es que es difícil de aplicar a sistemas con geometría irregular, el método de elementos finitos ofrece una alternativa que es más adecuada para tales sistemas.

El método de elementos finitos es un **método numérico para resolver problemas de ingeniería y física** que impliquen ecuaciones diferenciales parciales (PDE por sus siglas en inglés) con solución continua. Es un método general y poderoso en su aplicación a problemas del mundo real que involucran una física compleja, geometría y/o condiciones de frontera [20].

La técnica del elemento finito **divide el dominio de la solución en regiones con formas sencillas o “elementos”**. Se puede desarrollar una solución aproximada de la PDE para cada uno de sus elementos. **La solución total se genera uniendo, o “ensamblando”, las soluciones individuales**, teniendo cuidado de asegurar la continuidad de las fronteras entre los elementos. De modo que la PDE se satisface por secciones [14].

Para **problemas unidimensionales**, los elementos son **líneas**; para **problemas bidimensionales**, los elementos pueden ser **triángulos o cuadriláteros**; y para **problemas tridimensionales**, son **tetraedros o prismas**, ver Figura 3.4. Los **puntos de intersección de las líneas que forman los lados de los elementos se conocen como nodos**, y los mismos lados se denominan **líneas o planos nodales**.

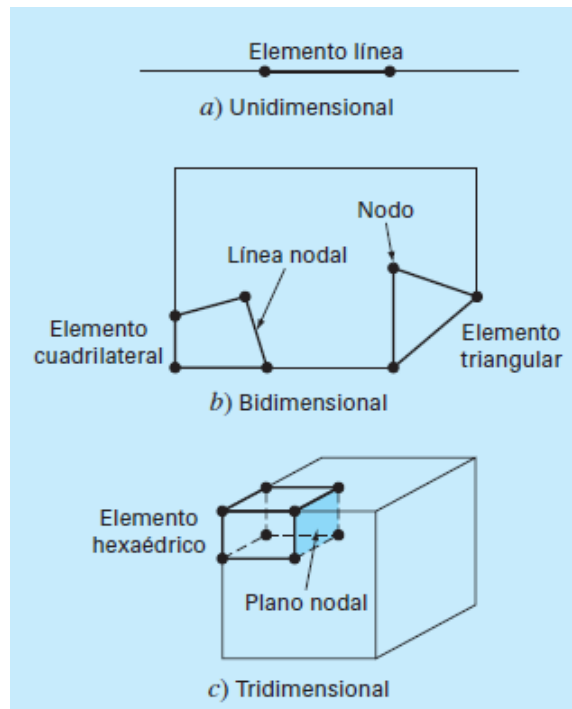


Figura 3.4: Elementos empleados en a) una, b) dos y c) tres dimensiones. Tomada de [14].

Recordar a los lectores que nuestro objetivo es familiarizar a los estudiantes con este método, por ello, les presentamos una visión general para la implementación del método de elementos finitos. .

El dominio del problema, ver Figura 3.5, se divide en elementos triangulares, ya que es de los más versátiles y simples en el método de elementos finitos en dos dimensiones, y a cada triángulo se le asigna un número de elemento y tres números de nodos en sus esquinas.

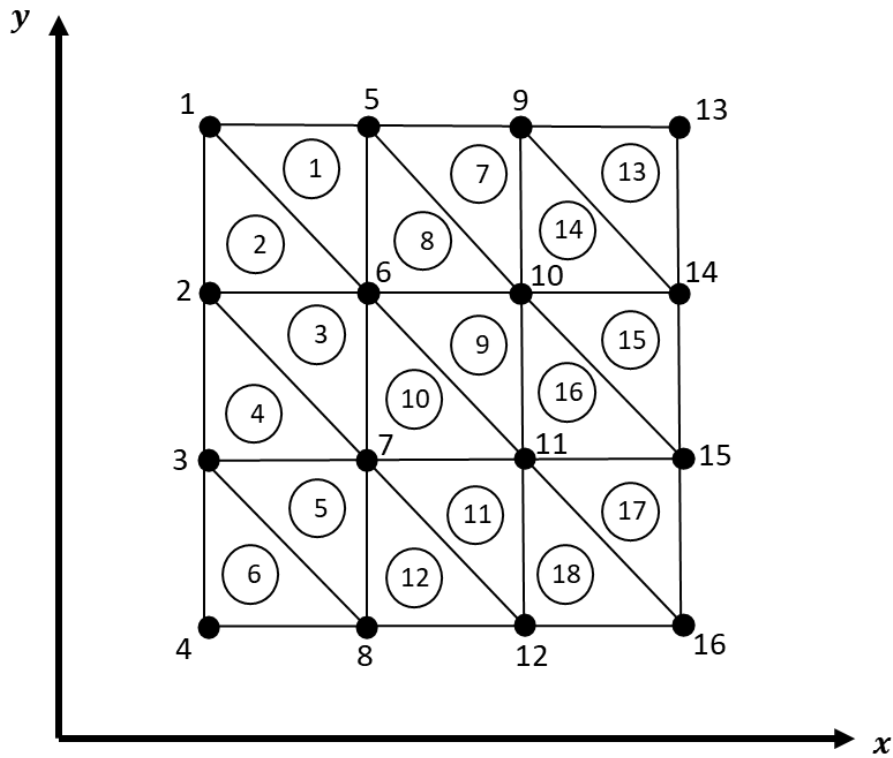


Figura 3.5: Malla de elementos finitos. Modificada de [72].

Debido a que cada elemento se trata por separado, los nodos en el elemento triangular son numerados con los índices i , j , m y en sentido contrario a las manecillas del reloj como se muestra en la Figura 3.6.

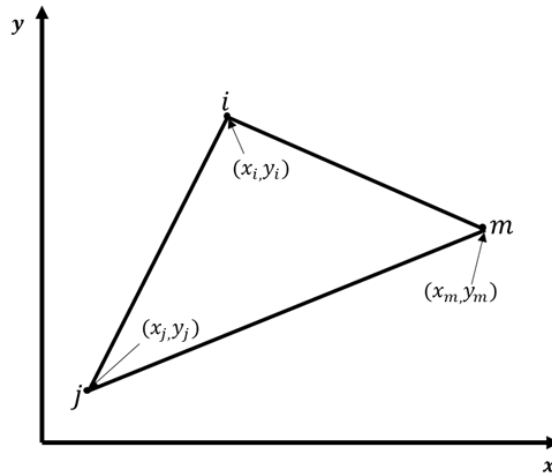


Figura 3.6: Elemento triangular. Modificado de [72].

Se deben de desarrollar ecuaciones para aproximar la solución de cada elemento. Primero se debe de elegir una función apropiada con coeficientes desconocidos que aproximará la solución. Segundo, se evalúan los coeficientes de modo que la función aproxime a la solución de manera óptima.

Las incógnitas del problema es el valor del potencial en los nodos $V_i = V(x_i, y_i)$, $V_j = V(x_j, y_j)$, $V_m = V(x_m, y_m)$. Definiendo la solución de prueba $V(x, y)$ a través del elemento triangular, la

aproximación más sencilla es el polinomio lineal:

$$V(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y, \quad (3.58)$$

donde a_0 , a_1 , a_2 son los coeficientes que deben ser determinados. Esta función debe pasar a través de los valores de $V(x, y)$ en los nodos del triángulo (x_i, y_i) , (x_j, y_j) , (x_m, y_m) . Por lo tanto:

$$V_i = a_0 + a_1x_i + a_2y_i, \quad (3.59)$$

$$V_j = a_0 + a_1x_j + a_2y_j, \quad (3.60)$$

$$V_m = a_0 + a_1x_m + a_2y_m, \quad (3.61)$$

de donde se obtiene:

$$a_0 = \frac{1}{2A_e} [V_i(x_jy_m - x_my_j) + V_j(x_my_i - x_iy_m) + V_m(x_iy_j - x_jy_i)], \quad (3.62)$$

$$a_1 = \frac{1}{2A_e} [V_i(y_j - y_m) + V_j(y_m - y_i) + V_m(y_i - y_j)], \quad (3.63)$$

$$a_2 = \frac{1}{2A_e} [V_i(x_m - x_j) + V_j(x_i - x_m) + V_m(x_j - x_i)], \quad (3.64)$$

donde A_e es el área del elemento triangular:

$$A_e = \frac{1}{2} [(x_jy_m - x_my_j) + (x_my_i - x_iy_m) + (x_iy_j - x_jy_i)]. \quad (3.65)$$

De las ecuaciones 3.62 a 3.64 se sustituyen en la ecuación 3.58. Después de reagrupar términos semejantes el resultado se expresa como:

$$V(x, y) = N_iV_i + N_jV_j + N_mV_m, \quad (3.66)$$

donde:

$$N_i = \frac{1}{2A_e} [(x_jy_m - x_my_j) + (y_j - y_m)x + (x_m - x_j)y], \quad (3.67)$$

$$N_j = \frac{1}{2A_e} [(x_my_i - x_iy_m) + (y_m - y_i)x + (x_i - x_m)y], \quad (3.68)$$

$$N_m = \frac{1}{2A_e} [(x_iy_j - x_jy_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y]. \quad (3.69)$$

La ecuación 3.66 se conoce como una función de aproximación o de forma y N_i , N_j , N_m se denominan funciones de interpolación. La ecuación 3.66 ofrece un medio para predecir valores intermedios (es decir, para interpolar) entre los valores dados V_i , V_j y V_m en los nodos.

Una vez que se ha elegido la función de interpolación, se debe de desarrollar la ecuación que rige el comportamiento del elemento. Esta ecuación representa un ajuste de la función a la solución de

la ecuación diferencial de que se trate.

Matemáticamente, las ecuaciones del elemento resultante a menudo consisten en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que puede expresarse de forma matricial:

$$[k] \{V\} = \{F\}, \quad (3.70)$$

donde $[k]$ es una propiedad del elemento, $\{V\}$ es un vector columna de las incógnitas en los nodos y $\{F\}$ es un vector columna determinado por el efecto de cualquier influencia externa aplicada a los nodos.

Una vez obtenidas las ecuaciones de elementos individuales, éstas deben ensamblarse para caracterizar el comportamiento de todo el sistema. El proceso de ensamble está regido por el concepto de continuidad. Es decir, las soluciones de elementos contiguos se acoplan, de manera que los valores de las incógnitas en sus nodos comunes sean equivalentes. Así, la solución total será continua.

Cuando finalmente todas las versiones individuales de la ecuación 3.70 están ensambladas, el sistema completo se expresa en forma matricial como:

$$[K] \{V'\} = \{F'\}, \quad (3.71)$$

donde $[K]$ es la matriz de propiedades de ensamble y $\{V'\}$ y $\{F'\}$ son vectores columna de las incógnitas y de las fuerzas externas, señaladas con apostrofe para indicar que son ensamble de los vectores $\{V\}$ y $\{F\}$ de los elementos individuales.

Antes de resolver la ecuación 3.71 debe de modificarse para considerar las condiciones de frontera del sistema. Dichos ajustes dan como resultado:

$$[K] \{V'\} = \{\bar{F}'\}, \quad (3.72)$$

donde la barra significa que las condiciones de frontera se han incorporado.

Aunque los mecanismos de solución son complicados, la matriz del sistema es tan sólo un conjunto de n ecuaciones simultáneas que pueden usarse para encontrar los valores de la variable dependiente en los n nodos.

Para la técnica de elementos finitos se discretiza el subsuelo en elementos de resistividad constante pero estos elementos pueden tener cualquier forma. Se obtienen los potenciales en los nodos de la malla y a partir de éstos los valores de resistividad aparente a lo largo del perfil [22].

Capítulo 4

Teoría de inversión

Tradicionalmente, los datos adquiridos mediante prospección eléctrica 1D eran interpretados a través de la comparación o ajuste de la curva descrita por los datos con curvas teóricas calculadas para modelos específicos. Lo anterior implicaba que el proceso de interpretación no estaba automatizado, es decir, se hacía de forma manual, por ello, el ajuste era subjetivo (dependía del interprete), laborioso e impráctico para datos en más dimensiones. Los avances computacionales permitieron el desarrollo de **algoritmos de inversión** automatizados, robustos, flexibles y computacionalmente eficientes para datos 1D, 2D y 3D.

La **teoría de inversión** es un conjunto de técnicas matemáticas que permiten obtener información, acerca del mundo físico utilizando inferencias realizadas a partir de observaciones, estas consisten en una tabulación de mediciones y se les conoce como **datos**. La información obtenida corresponde a los **parámetros del modelo**. El modelo, usualmente, toma la forma de una o más ecuaciones que se espera sigan los datos y los parámetros del modelo. Por lo general, el modelo es una integral o una ecuación diferencial que debe resolverse de forma numérica [53]. El **objetivo** de la teoría de inversión es “invertir” estas ecuaciones y obtener los parámetros del modelo. La **respuesta del modelo** consiste en un set de datos sintéticos producidos a partir de una realización particular del modelo [49].

La teoría de inversión es lo opuesto al modelado directo, el cual consiste en predecir datos utilizando como base un principio general o modelo y un set de condiciones relevantes para la predicción (parámetros del modelo); este es el **problema directo** y los datos obtenidos son datos sintéticos. Por otro lado, la teoría de inversión se encarga de resolver el **problema inverso**, es decir, a partir de un set de datos y un modelo, determinar los parámetros del modelo [49]. Las diferencias entre ambos tipos de problema se muestran en el cuadro sinoptico de la Figura 4.1.

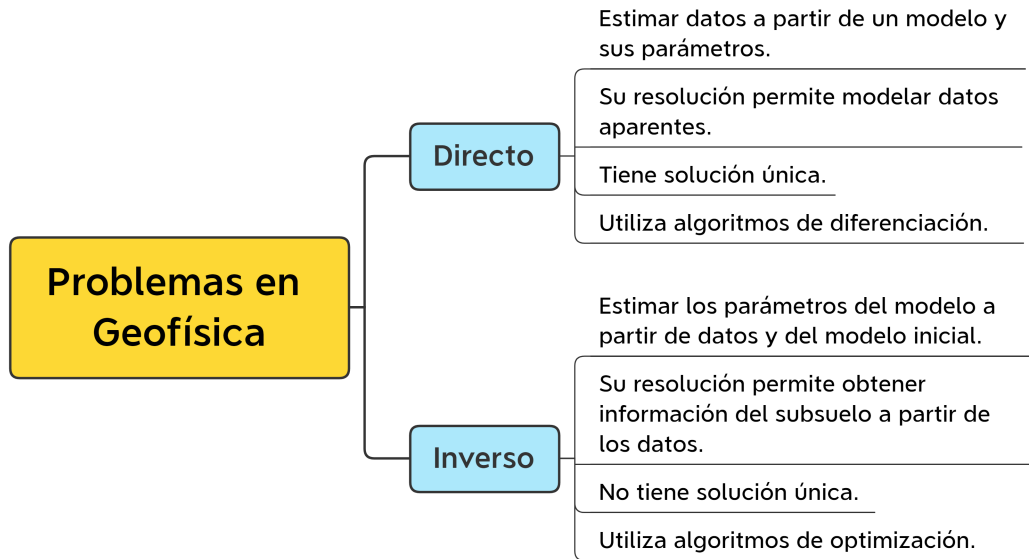


Figura 4.1: Cuadro sinóptico: Problemas en Geofísica.

El problema directo es mucho más sencillo de resolver que el problema inverso ya que la respuesta es única. Cada dato obtenido en las mediciones geofísicas depende de la distribución volumétrica de una propiedad física, la información de esta propiedad está dentro de los datos pero de forma no explícita. Además, es poco realista esperar determinar la distribución 3D de una propiedad física a partir de un número finito de datos que, en la mayoría de los casos, tienen ruido presente. Cualquier solución que se obtenga para el problema inverso no es la única posible, y si se encuentra una que se ajuste a los datos, hay un número infinito de soluciones que también podrían hacerlo. Seleccionar la mejor de estas soluciones requiere **información adicional**. Lo anterior es el problema de **no unicidad**.

Lines & Treitel (2001) definen la inversión como un procedimiento para obtener un modelo del subsuelo que describa adecuadamente los datos observados. En **Geofísica**, estas observaciones consisten en la huella o marca física de una estructura del subsuelo. La inversión intenta reconstruir las características del subsuelo a partir de los datos geofísicos, de manera que, la respuesta del modelo concuerde con los datos medidos utilizando una medida de la discrepancia entre ellos, denominada error. Particularmente, en la **prospección eléctrica**, los datos son el voltaje normalizado por la corriente (V/I) y la resistividad aparente (ρ_a). La distribución de resistividades en el subsuelo representa los parámetros del modelo. El modelo es la ecuación diferencial 1.17. El **objetivo del proceso** es reconstruir la distribución de resistividades a partir de los datos medidos [2]. La relación entre la inversión de datos y la prospección eléctrica se muestra en el mapa mental de la figura 4.4.

La respuesta del modelo puede ser una función lineal o no lineal de los parámetros del modelo. La resistividad es una respuesta **no lineal** [62]. A pesar de esto, las mismas técnicas de optimización pueden aplicarse en la solución de un problema inverso no lineal si se linealiza el problema, esto se logra a través de la función objetivo y de una expansión en series de Taylor. El proceso de inversión no lineal se realiza de forma **iterativa**, es decir, el procedimiento debe aplicarse varias veces de forma sucesiva hasta que se obtenga un grado satisfactorio de ajuste entre la respuesta del modelo y los datos observados (Figura 4.5).

El proceso de inversión se realiza utilizando un algoritmo de **optimización** que ajusta la respuesta teórica (respuesta del modelo) con la respuesta observada (datos). Los algoritmos están diseñados para minimizar una medida de la diferencia entre estos, esta es una **función objetivo** en la que, debido a la no unicidad y la inestabilidad del problema inverso, se debe ingresar información adicional, por ejemplo, conocimiento previo acerca del modelo o suposiciones acerca de las estructuras esperadas. La mayoría de los esquemas de inversión comienzan con una suposición inicial del modelo a partir de la cual se calcula la respuesta del modelo. Posteriormente, el algoritmo de inversión obtiene un conjunto actualizado de una estimación de los parámetros del modelo. Estos parámetros actualizados se introducen en el modelo teórico y se calcula la respuesta del modelo actualizada, se espera que se obtenga un mejor ajuste entre la respuesta y los datos observados, si esto sucede se dice que la inversión converge.

La información presentada acerca de la teoría de inversión se resume en el mapa conceptual de la Figura 4.2.

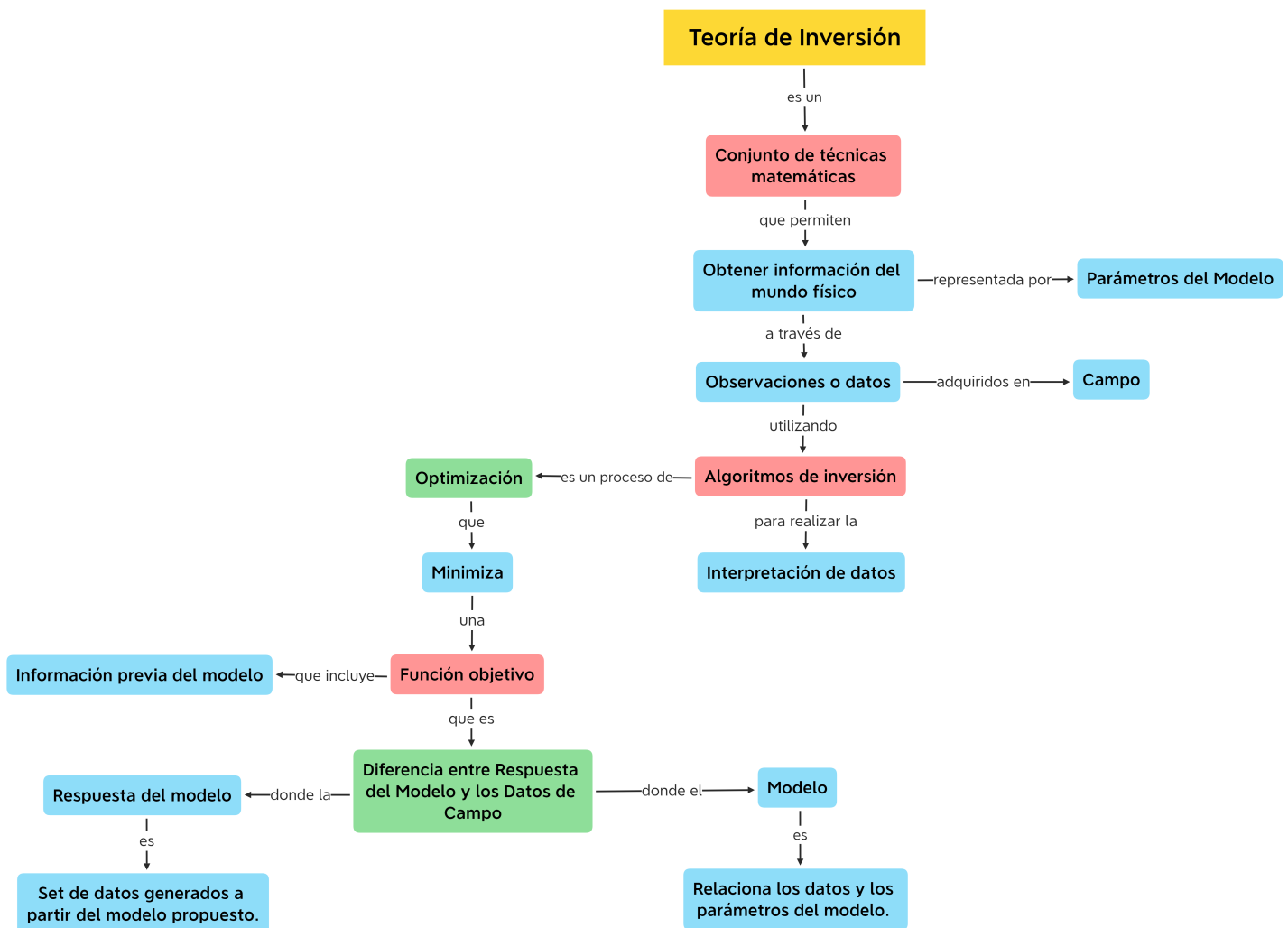


Figura 4.2: Mapa conceptual: Teoría de Inversión.

Los modelos que se espera encontrar son funciones, por ello, el problema debe ser **discretizado** para poder obtener una solución numérica, este es uno de los primeros pasos a realizar. La discretización genera una **malla** que representa la tierra cuyos elementos son celdas donde la propiedad buscada es constante. Estos elementos corresponden a los parámetros m buscados. Esta discretización debe ser lo suficientemente fina sin que afecte el resultado de la inversión. Esto puede ser realizado en 1D, 2D o 3D (Figura 4.3).

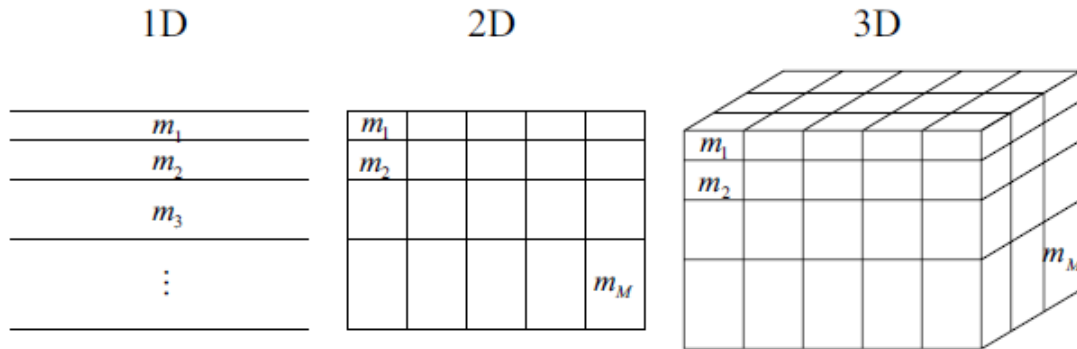


Figura 4.3: Discretización 1D, 2D y 3D utilizado en los problemas de inversión geofísica. Tomada de [53].

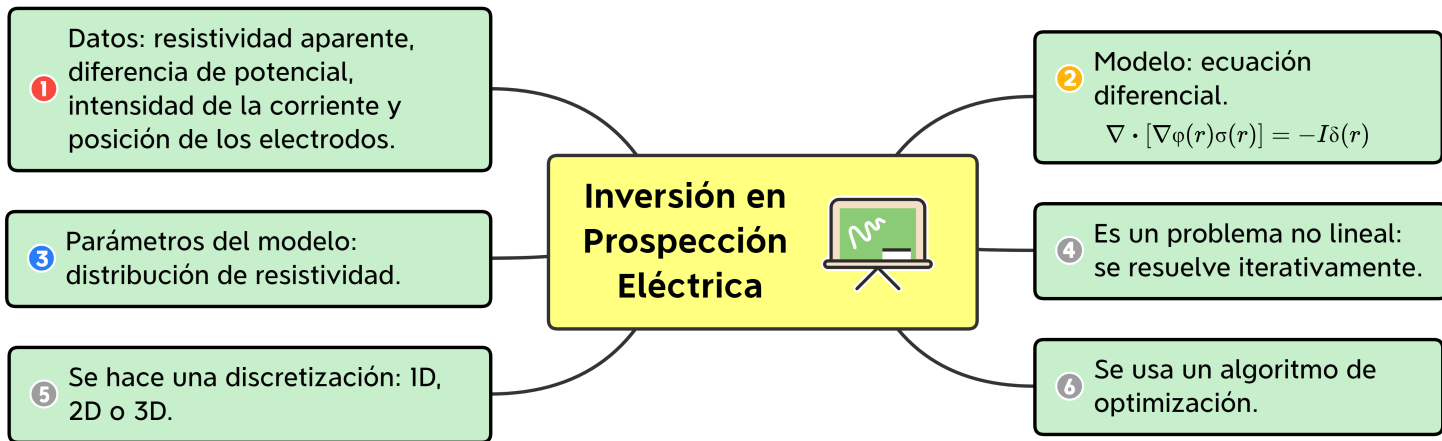


Figura 4.4: Mapa mental: Inversión en Prospección Eléctrica.

El **procedimiento para resolver un problema de inversión no lineal** puede resumirse en los pasos mostrados en la Figura 4.5 [2]:

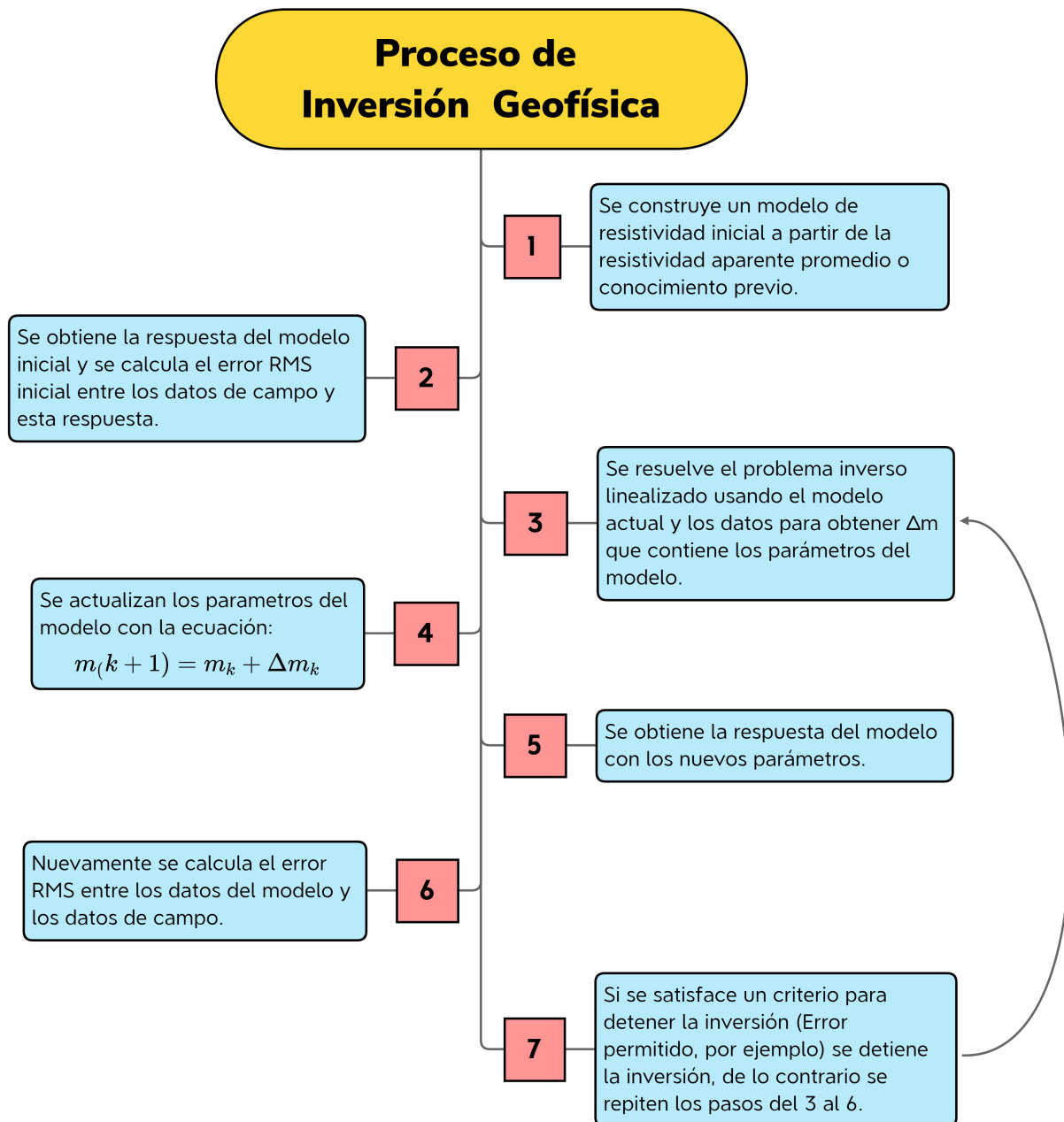


Figura 4.5: Proceso de Inversión Geofísica.

Hoy en día, existen muchos programas, tanto libres como comerciales, que realizan la inversión de datos en 1D, 2D y 3D. Independientemente del programa utilizado, el proceso sigue los mismos pasos con un algoritmo de ajuste a elección del usuario. A continuación, se presentan algunos de los algoritmos comúnmente utilizados en la inversión de datos de resistividad eléctrica.

4.1. Inversión por mínimos cuadrados

Primero, se estudiará el caso de un problema inverso lineal. El objetivo es minimizar la suma del error cuadrático entre la respuesta del modelo y las observaciones. Los datos pueden representarse por un vector columna y de tamaño n :

$$y = \text{col}(y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (4.1)$$

La **respuesta del modelo** puede representarse de forma similar, con un vector columna f de tamaño m :

$$f = \text{col}(f_1, f_2, \dots, f_n). \quad (4.2)$$

El modelo es una función de un número p de parámetros que son los elementos de un vector m :

$$m = \text{col}(m_1, m_2, \dots, m_n). \quad (4.3)$$

de forma que m_j^0 representa la estimación inicial de los parámetros m_j ($j = 1, \dots, p$) y f_0 es respuesta inicial del modelo. Si el modelo f es una función lineal de los parámetros, una perturbación en la respuesta del modelo del tamaño de m^0 puede representarse con una expansión de primer orden de una serie de Taylor.

$$f = f^0 + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial m_j} \bigg|_{m=m^0}, \quad (4.4)$$

o, en forma matricial:

$$f = f^0 + J\Delta m, \quad (4.5)$$

donde J es una **matriz jacobiana** (o de sensibilidad) de derivadas parciales de tamaño $n \times p$:

$$J = \frac{\partial f_i}{\partial m_j}, \quad (4.6)$$

que representa el cambio en la respuesta del modelo i debido al cambio en el parámetro j del modelo; y, $\Delta m = m - m^0$ es el **vector de cambio de parámetros** con elementos Δm_j que representa los cambios en los parámetros m_j , esto es:

$$\Delta m_j = m_j - m_j^0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (4.7)$$

Las perturbaciones se hacen sobre m de forma que se minimiza la suma de los errores cuadráticos entre la respuesta del modelo y los datos. El vector de **error** está representado por e y expresa la diferencia entre la respuesta del modelo f y los datos observados y :

$$y - f = e. \quad (4.8)$$

Si se sustituye en la ecuación anterior la ecuación 4.5:

$$y - (f_0 + J\Delta m) = e, \quad (4.9)$$

o expresado de otra forma:

$$y - f_0 = J\Delta m + e. \quad (4.10)$$

El vector $y - f_0$ contiene la diferencia entre la respuesta del modelo inicial y los datos observados y se le llama el **vector de discrepancia g** :

$$g = y - f^0. \quad (4.11)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación 4.9 y despejando e :

$$e = g - J\Delta m. \quad (4.12)$$

En el método de mínimos cuadrados, se busca minimizar el error cuadrático acumulado $S = e^T e$ con respecto al vector de cambio de parámetros:

$$S = e^T e = (g - J\Delta m)^T (g - J\Delta m). \quad (4.13)$$

Esta minimización implica que la derivada de S con respecto a Δm^T sea 0:

$$\frac{\partial}{\partial \Delta m^T} (\Delta m^T J^T J \Delta m - g^T J \Delta m - \Delta m^T J^T g + g^T g) = 0, \quad (4.14)$$

$$J^T J \Delta m = J^T g, \quad (4.15)$$

despejando Δm :

$$\Delta m = (J^T J)^{-1} (J^T g). \quad (4.16)$$

A partir de Δm se obtienen unos nuevos **parámetros del modelo**:

$$m_{k+1} = m_k + \Delta m_k, \quad (4.17)$$

donde m_k es el set de parámetros en la iteración k del modelo y Δm_k es la actualización a los parámetros en la iteración k .

La ecuación 4.16 también se conoce como la solución **Gauss-Newton o mínimos cuadrados no restringidos**. Esta ecuación raramente se utiliza en la inversión geofísica debido a:

- Existe la posibilidad que la matriz $J^T J$ puede ser singular, o aproximarse a ello, y por ello, no tener matriz inversa. Lo anterior genera una inestabilidad en la solución ya que los elementos de Δm podrían crecer sin límite y obtenerse valores poco realistas.
- Debido al problema de no unicidad inherente en la inversión geofísica, es probable que exista un gran número de modelos geoeléctricos que puedan ajustarse a las observaciones de campo. Por lo anterior, surge la necesidad de aplicar restricciones o condiciones al modelo.

4.2. Mínimos cuadrados amortiguados o Método de Marquardt-Levenberg

En este método se impone una restricción que limita al vector Δm mediante una cantidad finita, por ejemplo, Δm_0^2 . El efecto de esta restricción es evitar oscilaciones sin límite en la solución y suavizar Δm . Este método, surge a partir de resolver un problema de **multiplicadores de Lagrange**, donde se minimiza $e^T e$ con la restricción que $\Delta m^T \Delta m = \Delta m_0^2$, la función costo que se debe minimizar es:

$$S(\Delta m, \beta) = e^T e + \beta(\Delta m^T \Delta m - \Delta m_0^2), \quad (4.18)$$

donde β es el el multiplicador de Lagrange. Sustituyendo la ecuación 4.12 y desarrollando:

$$S(\Delta m, \beta) = (g - J\Delta m)^T (g - J\Delta m) + \beta(\Delta m^T \Delta m - \Delta m_0^2), \quad (4.19)$$

$$S(\Delta m, \beta) = \Delta m^T J^T J \Delta m - g^T J \Delta m - \Delta m^T J^T g + g^T g + \beta \Delta m^T \Delta m - \beta \Delta m_0^2. \quad (4.20)$$

Como se busca minimizar la función, la derivada respecto a Δm^T se iguala a 0 y se obtiene:

$$J^T J \Delta m + \beta \Delta m = J^T g, \quad (4.21)$$

$$(J^T J + \beta I) \Delta m = J^T g. \quad (4.22)$$

Finalmente, despejando Δm :

$$\Delta m = (J^T J + \beta I)^{-1} (J^T g) \quad (4.23)$$

donde I es una **matriz identidad**. Con esta ecuación, se evita que la matriz $J^T J$ sea singular o se aproxime a ello, al sumar una constante β a la diagonal principal de $J^T J$ que evita que el determinante se vuelva cero. El factor β es llamado **factor de amortiguamiento**, y limita el rango de valores que puede tomar el vector Δm . Mientras que el método de Gauss-Newton busca solamente minimizar el vector de discrepancia o error, el método en cuestión minimiza una combinación del vector de discrepancia y el vector de cambio de parámetros [39].

Este método, ha sido utilizado con éxito en la inversión de datos de resistividad donde el modelo consiste en un numero pequeño de capas, sin embargo, en modelos más complicados que involucran un mayor número de parámetros, el método puede generar una distribución errática de resistividad.

4.3. Mínimos cuadrados restringidos y suavizados (Inversión suave)

El método desarrollado por Constable et al. (1987) representó un avance muy significativo para la inversión de datos de resistividad. El objetivo es obtener el **modelo más suavizado** o simple que sea consistente con los datos de campo, por esto también se le conoce como Inversión de Occam o

método de Occam [10].

Constable et al. (1987) argumentan que las restricciones aplicadas por otros métodos para obtener un solo modelo solo dan una ilusión de unicidad. Por lo anterior, es necesario obtener el modelo más suavizado posible de forma que sus características se desvíen del caso más sencillo solamente lo que necesiten los datos para ser ajustados, de esta forma se evita que aparezcan características en el modelo que no son esenciales en el ajuste de las observaciones. Este método garantiza que la estructura real del subsuelo sea, como mínimo, tan compleja como el modelo obtenido, pero nunca más sencilla que este. Una ventaja de invertir orientado hacia el suavizamiento es que se obtiene un modelo que no depende de una solución inicial arbitraria.

Este método implementa un **coeficiente de regularización espacial** para aplicar el suavizamiento. Esto consiste en la incorporación de información adicional del modelo a la función objetivo a través de un término adicional, esto ayuda a obtener una solución estable y única. El método fue desarrollado para aplicaciones 1D, sin embargo, muchos autores utilizaron este enfoque para obtener soluciones en 2D y 3D. Consecuencia de esto último, existen muchos trabajos relacionados a la inversión suavizada, a pesar de que presentan ligeras diferencias entre sí, los principios generales no cambian y se describirán a continuación.

En la definición del error e se añade el término W_d que es una **matriz de pesos** o ponderaciones, si se ignoran los errores no correlacionados en las mediciones y los errores del modelado directo, esta es una matriz diagonal cuyos elementos son la desviación estándar de cada medición de campo. Esta matriz puede ser útil si se conocen mediciones que hayan sido tomadas con más precisión y se les debe asignar más peso. El **error cuadrático** puede expresarse como:

$$S = (y - f)^T W_d^T W_d (y - f) \quad (4.24)$$

La regularización se obtiene al añadir un factor o término de penalización:

$$S_m = m^T R m \quad (4.25)$$

donde R es la **matriz de rugosidad** que describe las relaciones espaciales entre los parámetros, esta matriz es útil para incluir anisotropía en el modelo, ya que permite suavizar el modelo en una o más direcciones basándose en conocimiento previo. Con este parámetro, la función que se desea minimizar es:

$$S_{Total} = S + \alpha S_m \quad (4.26)$$

siendo α un escalar que controla el **grado de suavizamiento**. La minimización de la ecuación se realiza como en el método Gauss-Newton y resulta en:

$$(J^T W_d^T W_d J + \alpha R) \Delta m = J^T W_d^T g - \alpha R m \quad (4.27)$$

Se recomienda que el escalar α se ajuste en cada iteración, comenzando en uno grande y reducirlo hasta que se alcance la convergencia.

Este método da muy buenos resultados en la mayoría de los casos y es el método de inversión más utilizado en prospección eléctrica por su buena convergencia, estabilidad y porque los modelos pueden ser visualmente atractivos [10].

4.4. Mínimos cuadrados repesados (Inversión robusta)

Aunque el método anterior puede ser aplicado en un amplio rango de situaciones, en ocasiones, una estructura de **bloques** (*Blockier*) puede ser más apropiada ya que la geología del subsuelo podría estar formada por regiones que, internamente son homogéneas, sin embargo, presentan límites muy contrastantes entre ellas, dando apariencia de bloques.

Los métodos anteriores minimizan el error cuadrático, esto genera que se de mayor importancia o peso a los puntos con mayor error. Por lo anterior, son sensibles a datos erróneos o malos. Un método alternativo, consiste en minimizar la suma de los valores absolutos del error o una **norma** L_1 . Una metodología para implementar esto a través de la aproximación por mínimos cuadrados descrita anteriormente fue desarrollada por Wolke (1998) a través de una reformulación de la ecuación 4.27:

$$(J^T W_d J + \alpha R^T W_m R) \Delta m = J^T W_d g - \alpha R^T W_m m \quad (4.28)$$

donde W_d y W_m son matrices de pesos o ponderación que permiten que diferentes elementos del error y de la rugosidad del modelo tengan el mismo peso en la inversión de datos. Con este método se tiende a obtener modelos con áreas de resistividad constante y con fronteras más marcadas, además, reduce el efecto que puedan tener datos erróneos en el modelo final. La ecuación 4.28 puede modificarse más, si es necesario, incluyendo mayor información del subsuelo.

Cabe aclarar que los algoritmos presentados no son los únicos con los que se ha trabajado en inversión geofísica, también existe el gradiente conjugado, entropía máxima, redes neuronales, cristalización simulada, entre otros; sin embargo, en inversión de datos de resistividad el método de mínimos cuadrados y sus variaciones son utilizados por la mayoría de los softwares disponibles [42]. La **elección del método** de inversión debe realizarse con conocimiento previo sobre la geología del área de estudio.

A manera de resumen se presenta el cuadro sinóptico de la Figura 4.6 con los métodos de inversión descritos y sus características:

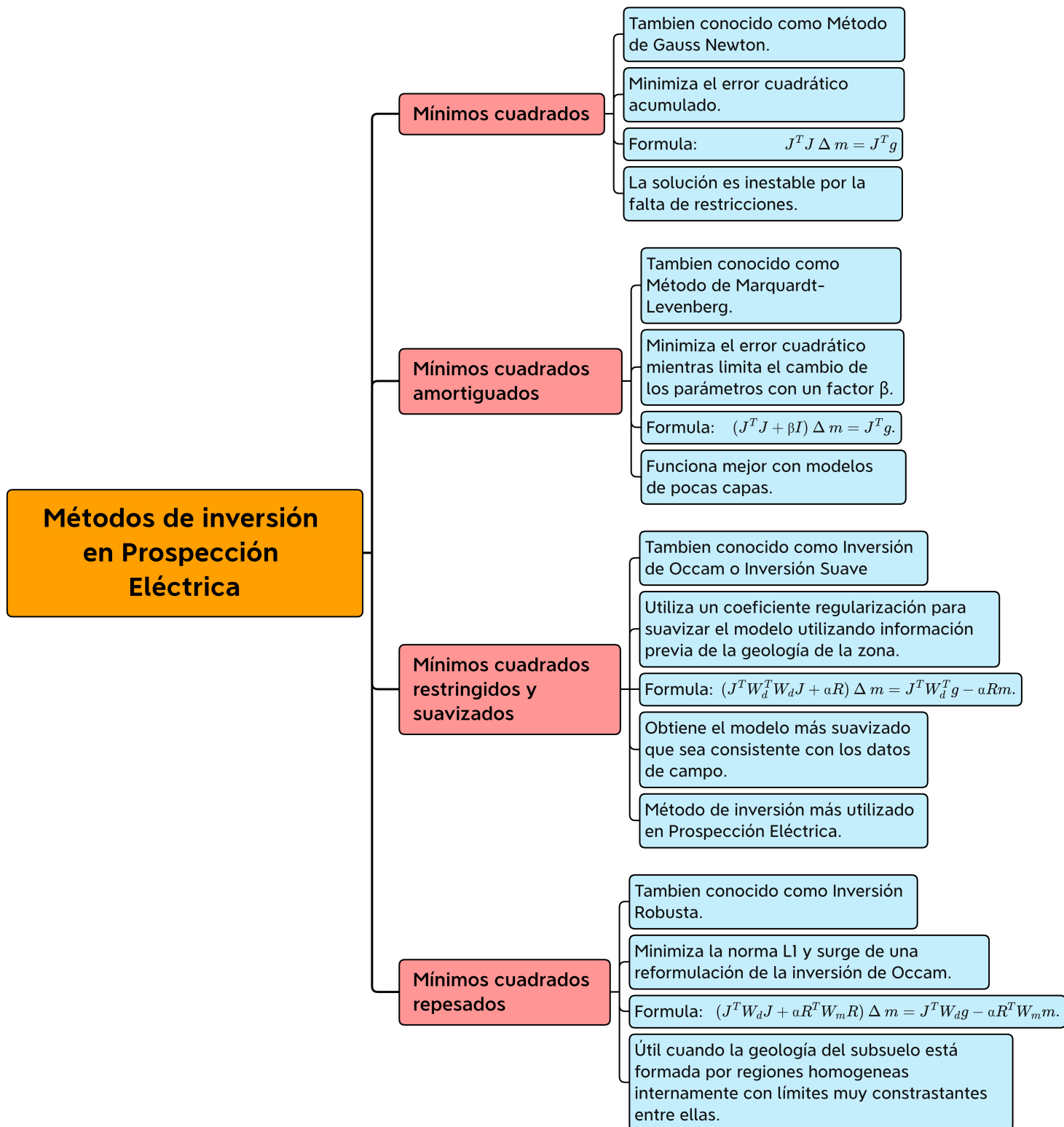


Figura 4.6: Métodos de Inversión en Prospección Eléctrica.

4.5. Archivos *.urf* y *.trn*

Para poder utilizar los datos en un software de inversión, por ejemplo, EarthImager, se debe crear un archivo *.urf* o *Universal Resistivity File*. Este archivo está compuesto por dos secciones: *Geometry* que contiene la posición x , y , z de los electrodos y *Measurements* con el valor de los electrodos (A , B , M , N), la resistencia (V/I), el valor de la corriente (I) y, por último, el error medido (desviación estándar), esto por cada cuadripolo [30].

Finalmente, la información topográfica debe incorporarse durante la inversión de datos ya puede enmascarar características interesantes en los datos de resistividad [75] en áreas con cambios de elevación significativos; para esto, se debe crear un archivo *.trn*, el cual contiene la distancia o coordenada horizontal del electrodo, así como la medida correspondiente de su topografía (elevación) en el primer caso, en el segundo contiene las coordenadas x , y y la elevación en z [30].

Referencias

- [1] AGI. (2008). Instruction manual for EarthImager 3D. Version 1.5.3. Resistivity Inversion Software. Advanced Geosciences Inc.
- [2] AGI. (2009). Instruction manual for EarthImager 1D. Version 2.0.4. 1D Resistivity Inversion Software. Advanced Geosciences Inc.
- [3] AGI. (2009). Instruction manual for EarthImager 2D. Version 2.4.0. Resistivity and IP Inversion Software. Advanced Geosciences Inc.
- [4] Aizebeokhai, A., Olayinka, A. I., & Singh, V. S. (2009). Numerical evaluation of 3D geoelectrical resistivity imaging for environmental and engineering investigation using orthogonal 2D profiles. SEG Houston International Exposition and Annual Meeting, 1440-1444.
- [5] Aguirre, P., & Esteves, S. (2014). Análisis y eliminación de ruido en tomografía eléctrica resistiva. Ciudad de México: Tesis de Licenciatura, UNAM.
- [6] Álvarez, E. (2015). Tomografía eléctrica resistiva 3D en la caracterización del subsuelo bajo estructuras civiles. Ciudad de México: Tesis de Licenciatura, UNAM.
- [7] Anderson, W. (1979). Numerical integration of related Hankel transforms of orders. *Geophysics*, 1287-1305.
- [8] Arrubarrena, M. (2010). Caracterización de un sitio contaminado por hidrocarburos usando tomografía de resistividad eléctrica. Ciudad de México: Tesis de Licenciatura, UNAM.
- [9] Ávila, S. I. (2016). Regularización de datos de resistividad aparente. Ciudad de México: Tesis de Licenciatura, UNAM.
- [10] Binley, A. (2015). Tools and techniques: electrical methods. In G. Schubert, *Treatise on Geophysics* (pp. 233-259). Estados Unidos: Elsevier.
- [11] Blanchy, G., Saneiyani, S., Boyd, J., McLachlan, P., & Binley, A. (2020). ResIPy, an Intuitive Open Source Software for Complex Geoelectrical Inversion/Modeling. *Computers & Geosciences*, 104423.
- [12] Butler, D. (2005). *Near-Surface Geophysics*. Tulsa, Oklahoma: Society of Exploration Geophysics.
- [13] Carrillo, A., & Mendoza, O. (2015). Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional. Ciudad de México: Facultad de Ciencias, UNAM.
- [14] Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros*. México: McGraw-Hill 6a. Edición.
- [15] Chavéz, G. (2011). Modelación 3D de datos de tomografía de resistividad eléctrica (TRE) con arreglo tipo "L". Ciudad de México: Tesis de Maestría, UNAM.

- [16] Chitea, F. & Georgescu, P. (2009). Sensitivity function for various geoelectric arrays. *Geophysical Research Abstracts*. University of Bucharest, Faculty of Geology and Geophysics.
- [17] Constable, S., Parker, R. & Constable, C. (1987). Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics*, 52:3, 289-300.
- [18] Corzo, H. (2019). Implementación de pozos en modelos numéricos de flujo de agua subterránea. Ciudad de México: Tesis de Licenciatura, UNAM.
- [19] Cruz, R. (2012). Modelado y análisis de una dovela metálica de un puente atirantado con el método de elementos finitos. Ciudad de México: Tesis de Licenciatura, UNAM.
- [20] De la Mora, A. M. (2021). Método de elemento finito con funciones óptimas. Caso de estudio: ecuación de elasticidad. Ciudad Universitaria, CDMX: Tesis de Maestría, UNAM.
- [21] Dey, A., & Morrison, H. F. (1979). Resistivity Modelling for Arbitrarily Shaped Two-Dimensional Structures. *Geophysical Prospecting*, 27, 106-136.
- [22] Diaz, E. (2010). Implementación del código ZondRes2D para la modelación directa e inversa de datos de tomografía de resistividad eléctrica 2D. Ciudad de México: Tesis de Licenciatura, UNAM.
- [23] Edwards, L. (1977). A modified pseudosection for resistivity and IP. *Geophysics*, 45:5, 1020-1036.
- [24] Esteves Robles, S. (2019). El empleo de multifuente en los métodos de prospección eléctrica. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional Autónoma de México, Coordinación General de Estudios de Posgrado, UNAM.
- [25] Everett, M. (2013). *Near-Surface Applied Geophysics*. Reino Unido: Cambridge University Press.
- [26] Gallagher, N. (2020). Savitzky-Golay Smoothing and Differentiation Filter.
- [27] Ghosh, D.P. (1971). The Application of Linear Filter Theory to the Direct Interpretation of Geoelectrical Resistivity Sounding Measurements. *Geophysical Prospecting*, 19: 192-217.
- [28] Habberjam, G. (1967). On the application of the reciprocity theorem in resistivity prospecting. *Geophysics*, 32, 918-919.
- [29] Huitzil, L. E. (2019). Prospección eléctrica en zonas costeras de México por medio de Tomografía de Resistividad Eléctrica Bidimensional. Ciudad de México: Tesis de Licenciatura, UNAM.
- [30] Hernandez, K. (2020). Estudio de Tomografía Eléctrica y Magnetometría en la Plazuela Este de la Pirámide de la Luna, Teotihuacan, México. Ciudad de México: Tesis de Licenciatura, UNAM.
- [31] Herrera, I., & Pinder, G. (2012). *Mathematical Modeling in Science and Engineering: An Axiomatic Approach*. Wiley, 1 edition.

- [32] Johansen, H.K. (1975). An Interactive Computer/Graphic-Display-Terminal System for Interpretation of Resistivity Soundings. *Geophysical Prospecting*, 23: 449-458.
- [33] Koefoed, O. (1970). A Fast Method for Determining the Layer Distribution from the Raised Kernel Function in Geoelectric Sounding. *Geophysical Prospecting*, 18: 564-570.
- [34] Koefoed, O. (1979). *Geosounding Principles 1: Resistivity Sounding Measurements*. Amsterdam: Elsevier Science Publishing Company.
- [35] Lines, L. & Treitel, S. (1984). Tutorial A Review of Least Squares Inversion and it's Application to Geophysical Problem. *Geophysical Prospecting*, 32: 159-186.
- [36] Lines, L. & Treitel, S. (2001). Past, present, and future of geophysical inversion—A new millennium analysis. *Geophysics*, 66: 21-24.
- [37] Liu, Y., Dang, B., Li, Y., Lin, H., & Ma, H. (2016). Applications of Savitzky-Golay Filter for Seismic Random Noise Reduction. *Acta Geophysica* 64, 101–124.
- [38] Loke, M. & Barker, R.D.. (1996). Rapid Least-Squares Inversion of Apparent Resistivity Pseudosections Using a Quasi-Newton Method. *Geophysical Prospecting*. 44. 131 - 152.
- [39] Loke, M. (2000). *Electrical imaging surveys for environmental and engineering studies: A practical guide to 2-D and 3-D surveys*.
- [40] Loke, M. (2001). *RES1D. Manual de Usuario*. Geotomosoft Solutions.
- [41] Loke, M. (2001). *Tutorial: 2-D and 3-D Electrical Imaging Surveys*.
- [42] Loke, M. (2003). A comparison of smooth and blocky inversion methods in 2D electrical imaging surveys. *Exploration Geophysics*, 182–187.
- [43] Loke, M. (2014). *RES3DMOD. Manual de Usuario*. Geotomosoft Solutions.
- [44] Loke, M. (2016). *RES2DMOD. Manual de Usuario*. Geotomosoft Solutions.
- [45] Loke, M. (2019). *RES2DINV. Manual de Usuario*. Geotomosoft Solutions.
- [46] Loke, M. (2019). *RES3DINV. Manual de Usuario*. Geotomosoft Solutions.
- [47] López, A. (2020). *Apuntes de Prospección Eléctrica: Conceptos Básicos*. Ciudad de México: Facultad de Ingeniería UNAM.
- [48] Manolakis, D., & Ingle, V. (2011). *Applied Digital Signal Processing: Theory and Practice*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [49] Menke, W. (1989). *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*. Nueva York: Academic Press.
- [50] Montgomery, D., & Runger, G. (2002). *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería*. Limusa Wiley.
- [51] O' Neill, D.J, (1975). Improved Linear Filter Coefficients for Application in Apparent Resistivity Computations. *Exploration Geophysics*, 6: 104-109.

- [52] O' Neill, D.J., & Merrick, N.P. (1984). A Digital Filter for Resistivity Sounding with a Generalized Electrode Array. *Geophysical Prospecting*, 32: 105-123.
- [53] Oldenburg, D. & Li, Y. (2005). 5. Inversion for Applied Geophysics: A Tutorial. *Near-surface Geophysics*.
- [54] Orellana, E. (1972). *Prospección Geoeléctrica en Corriente Continua*. Madrid: Paraninfo.
- [55] Program for one-dimensional interpretation of data obtained by VES and VES-IP. ZOND-IP. (n.d.). Saint-Petersburg: Zond geophysical software.
- [56] Program for two-dimensional interpretation of data obtained by resistivity and induced polarization methods. ZONDRES2D. (2016). Saint Petersburg: Zond geophysical software .
- [57] Ramirez, J. (2016). Estudio geofísico en cavidad en la delegación Álvaro Obregón usando tomografía de resistividad eléctrica. Ciudad de México: Tesis de Licenciatura, UNAM.
- [58] Reynolds, J. (2011). *An Introduction to Applied and Environmental Geophysics*. Reino Unido: Wiley-Blackwell.
- [59] Roy, Kalyan. (2008). *Potential Theory in Applied Geophysics*. Springer.
- [60] Sánchez V., V. (2013). Estudio de Tomografía de Resistividad Eléctrica previo a una excavación arqueológica. Ciudad de México: Tesis de Licenciatura, UNAM.
- [61] Santiz, B. (2016). Modelación de Medidas de Resistividad Aparente Empleando Diferencias Finitas. Ciudad de México: Tesis de Licenciatura, UNAM.
- [62] Sasaki, Y. (1992). Resolution of Resistivity Tomography Inferred from Numerical Simulation. *Geophysical Prospecting*, 40: 453-463.
- [63] Sequera, F. (2015). Estudio de tomografía eléctrica resistiva 2D para localizar la muralla limítrofe de la gran Tenochtitlán. Ciudad de México: Tesis de Licenciatura, UNAM.
- [64] Slater, L., Binley, A., Daily, W., & Johnson, R. (2000). Cross-hole electrical imaging of a controlled saline tracer injection. *Journal of Applied Geophysics*, 44, 85–102.
- [65] Smith, S. (2002). *Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientists*. Estados Unidos: Elsevier.
- [66] Software for three-dimensional interpretation of data obtained by resistivity and induced polarization methods. ZONDRES3D. (2017). Saint-Petersburg: Zond geophysical software.
- [67] Tejero Andrade, A., Cifuentes, G., Chávez, R. E., López González, A. E., & Delgado Solórzano, C. (2015). L- and CORNER-arrays for 3D electric resistivity tomography: an alternative for geophysical surveys in urban zones. *Near Surface Geophysics*.
- [68] Telford, W., Geldart, L. & Sheriff, R.E. (1990). *Applied Geophysics*. Reino Unido: Cambridge Univ. Press.
- [69] Ulloa, R. (2005). *Filtros (aproximación y síntesis)*. Ciudad de México: Universidad Iberoamericana.

- [70] Vargas G., D. (2015). Arreglos no convencionales de Tomografía de Resistividad Eléctrica 3D. Ciudad Universitaria, CDMX.: Tesis de Licenciatura UNAM.
- [71] Verdet, C., Anguy, Y., Sirieix, C., Clément, R. & Gaborieau, C. (2018). On The Effect of Electrode Finiteness in Small Scale Electrical Resistivity Imaging. *Geophysics*, 83:EN39-EN52.
- [72] Wang, A., & Anderson, M. (1995). *Introduction to Groundwater Modeling: Finite Difference and Finite Element Methods*. Academic Press, 2nd edition.
- [73] Wangsness, R. (2001). *Campo Electromagnéticos*. México: Limusa.
- [74] Wait, J. (1982). *Geo-electromagnetism*. Academic Press.
- [75] Zonge, K., Wynn, J., & Urquhart, S. (2005). 9: Resistivity, Induced Polarization, and Complex Resistivity. En D. Butler, *Near-Surface Geophysics* (págs. 265-300). Society of Exploration Geophysicists.
- [76] Zuñiga, D. (2018). Filtro Savitzky y Golay de Segundo Grado en datos de Tomografía de Resistividad Eléctrica. Ciudad de México: Tesis de Licenciatura, UNAM.