

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Modelos de atenuación de ondas elásticas en la vecindad
de pozos petroleros.**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO GEOFÍSICO

PRESENTA:

ALEXANDRO VERA ARROYO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FRANCISCO JOSÉ SÁNCHEZ SESMA

MÉXICO, D.F. 2009

Resumen

En este trabajo se presenta la teoría de la propagación de ondas mecánicas en medios elásticos y viscoelásticos lineales. En el desarrollo de la teoría se exponen las ecuaciones que permiten describir el movimiento en coordenadas cilíndricas como cartesianas. Además se exponen los diferentes modelos de atenuación para buscar simular el comportamiento de medios realistas, así mismo se hace un estudio de sus parámetros para conocer la interacción con las ondas existentes en un medio isótropo viscoelástico lineal. Dichos modelos se estudiarán desde un punto de vista matemático y físico, con énfasis en su aplicación en la solución de la ecuación de onda en un pozo vertical a cualquier escala.

Presento la formulación y aplicación de los dos métodos de simulación empleados en el desarrollo del estudio; el método de Diferencias Finitas y del Numero de Onda discretizado (DWN por sus siglas en Ingles), los programas creados a partir de dichos métodos representan la solución numérica y semianalítica respectivamente, para tomar en cuenta la generación y propagación de ondas en la sección de un pozo, de esta manera se realiza la solución de la ecuación de onda en 2 dimensiones y en 2.5 dimensiones.

Los programas creados, a partir de los métodos de simulación fueron modificados y corregidos para tomar en cuenta, los diferentes modelos de atenuación presentados en este trabajo, con los parámetros descritos en la teoría para realizar las simulaciones.

De igual manera se realizó un estudio para encontrar los diferentes parámetros físicos que tomen en cuenta las características presentes en los modelos geológicos de un pozo petrolero, para hacer las simulaciones, se utilizaron los programas de diferencias finitas y numero de onda discretizado, para entender la influencia relativa de cada parámetro y representar de manera fidedigna el fenómeno de propagación y atenuación de ondas en un medio cilíndrico, es decir, en un medio elástico con una cavidad cilíndrica ocupada por fluido.

El estudio paramétrico es esencial para las conclusiones, ya que los resultados obtenidos serán presentados como animaciones y sismogramas sintéticos, donde será posible observar la propagación de ondas en un pozo. Se obtendrán vistas tanto de planta como la traza de los esfuerzos contra la velocidad, para así analizar los resultados y hacer las conclusiones pertinentes.

El programa de visualización en MATLAB 7.0 genera a partir de los archivos de salida del programa de Diferencias Finitas una serie de animaciones y graficas que ayudan para la interpretación del fenómeno físico y a realizar un análisis de sensibilidad de los parámetros.

Abstract

In this work I review the basic theory of wave propagation in elastic and linear viscoelastic media. The aim is to deal properly with the problem of wave propagation in a borehole. I firstly made a summary of the several attenuation models proposed so far in order to include them in the programs that solve the wave equation for an axi-symmetric hollow cylinder. These programs are based on elastic theory and use the finite difference method (FDM) and the discrete wave number method (DWN). In these programs I also included some parameters needed to take into account the attenuation.

After reviewing the programs for the numerical and the semi analytical solution, the attenuation study was performed. It is the way to represent realistic conditions in the sonic log and to find the right physical parameters. The results of this study are presented by means of stress and velocity time history of the wave and in movies of particle displacements. To obtain the movies a Matlab program was made to show the data resulting from the numerical programs.

These studies can be made for 1 or 10 receivers and various geometrical arrays in order to avoid constraining the focus of the program just to one scale. Further improvements both in the theoretical formulation and in the computational side would include:

- 3D simulation
- Take into account the poro-elastic theory (Biot's theory)
- A process of inversion.

A mi padre, por ser padre y madre; por darme más de lo que necesito aun sin yo saberlo; por inculcarme el amor al conocimiento, al estudio y al buen trabajo; por mantener vivo el recuerdo de mi madre con sus memorias (y por tantas cosas más). Gracias por sus clases de vida; por enseñarme a disfrutar; a ver las cosas con otro enfoque; por todas las pláticas que hemos compartido, y por las muchas que vendrán.

A mis tíos Margarita Vera y Julio Arroyo, por complementar mi formación con sus muy particulares conocimientos de la vida, enseñanzas invaluable que resultaron verdaderas salvavidas en esta aventura que es vivir. A mis tíos Carlos, Juan y Ernesto Arroyo y Jaime Vera, por ayudarme en los momentos de mayor necesidad, con su compañía, palabras de apoyo y gratos momentos. Gracias a todos ellos por darme a conocer diferentes valores y cualidades. A mi tía Patricia Arroyo, por hacer realidad un sueño de años y ayudarme a completar las lagunas de mi pasado; por esas cenas que duraban horas que me permitieron enriquecer los recuerdos de mi madre y conocerla mejor.

Dame agudeza para entender; capacidad para retener; método y facultad para aprender; sutileza para interpretar; eficacia y persuasión al hablar.

Dame acierto para empezar; dirección para progresar y perfección para acabar.

Índice

RESUMEN

ABSTRACT

1. INTRODUCCIÓN	1
2. MARCO TEÓRICO	3
2.1 Isotropía	3
2.2 Anisotropía	4
2.3 Propiedades mecánicas de los materiales	4
2.3.1 Elasticidad	4
2.3.2 Anelasticidad	5
2.3.3 Viscosidad	6
2.3.4 Atenuación.....	6
2.4 Mecánica del medio continuo	10
2.4.1 Relación desplazamiento-deformación.....	11
2.4.2 Ecuaciones Constitutivas	12
2.4.3 Estado de esfuerzo	13
2.4.4 Tensor de esfuerzo	13
2.4.5 Estado de deformación.....	16
2.4.6 Tensor de deformación	17
2.5 Ecuación de movimiento y ecuación de Navier.....	17
2.6 Tipos de ondas sísmicas	19
2.7 Ecuación de onda elástica en un medio isótropo.....	21
2.8 Viscoelasticidad	25
2.8.1 Ecuaciones constitutivas para medios viscoelásticos	27
2.8.2 Relación energía deformación	28
2.8.3 Densidad de energía para la relación constitutiva ...	29
2.8.4 Propagación de una onda plana en un medio	30
Viscoelástico	
3. METODOLOGÍA.....	32
3.1 Análisis de Fourier.....	32
3.1.1 Transformada de Fourier	32
3.1.2 Transformada discreta de Fourier.....	34
3.2 Pulso de Ricker.....	35
3.3 Método de Diferencias Finitas (DF)	36
3.3.1 Teorema de Taylor	38
3.4 Método de Numero de Onda Discretizado (DWN).....	41
3.4.1 Teoría Básica	41
3.5 DF vs DWN	44

4. MODELOS DE ATENUACIÓN	45
4.1 Parámetros básicos de los modelos.....	45
4.1.1 Función de relajación	45
4.1.2 Función de aumento.....	46
4.1.3 Tiempo de relajación.....	46
4.1.4 Modulo complejo, de pérdida y almacenamiento....	47
4.2 Modelo de Atenuación de Maxwell.....	48
4.2.1 Relación esfuerzo- deformación	48
4.3 Modelo de atenuación de Kelvin-Voigt	51
4.3.1 Relación constitutiva.....	51
4.4 Modelo de atenuación de Zener.....	54
4.4.1 Relación constitutiva.....	54
4.5 Modelo de Zener varios parámetros	58
5. FORMULACIÓN DE ATENUACIÓN EN LOS ALGORITMOS DE SOLUCIÓN.....	65
5.1 Aplicación del algoritmo Diferencias Finitas	65
5.1.1 Promedio y disposición de las variables.....	69
5.1.2 Implementación numérica	70
5.1.3 Uso de la simetría.....	70
5.1.4 Conclusión.....	70
5.2 Aplicación del algoritmo DWN	71
5.2.1 Sistema de ecuaciones por resolver.....	71
5.2.2 Conclusión.....	77
5.3 Aplicación de la atenuación en los algoritmos.....	77
5.3.1 Modelo de Kelvin-Voigt.....	78
5.3.2 Modelo de Zener	79
5.3.2.1 Modelo de Zener en DF Y DWN.....	80
5.3.2.2 Conclusiones.....	81
6. RESULTADOS NUMÉRICOS	82
6.1 Resultados numéricos sin atenuación	83
6.2 Resultados numéricos con atenuación	97
7. CONCLUSIONES.....	108
8. AGRADECIMIENTOS	111

BIBLIOGRAFÍA

I.- Introducción

En los estudios del subsuelo, muchas veces la complejidad de la geología hace que se utilicen modelos sencillos que, en ocasiones son erróneos y llevan a malas interpretaciones, tanto a nivel regional con la sismica como a escala de pozo con el registro de pozo sónico. Uno de los elementos más importantes para la representación fidedigna de la geología, es la correcta definición de las relaciones esfuerzo-deformación, energía-esfuerzo, energía- deformación y relajación-deformación para materiales viscoelásticos ya que las rocas están lejos de ser materiales perfectamente elásticos.

La modelación matemática de la propagación de ondas en pozos con eje de simetría axial es un problema clásico de la elastodinámica. En este trabajo esta modelación será útil para simular la propagación de ondas en medios viscoelásticos, mediante el empleo de los distintos modelos de atenuación y su aplicación en la simulación numérica en pozos verticales con cierta escala. Para la solución del problema planteado utilizaremos los métodos de diferencias finitas y del número de onda discretizado (DWN por sus siglas en ingles).

Típicamente se piensa en la anisotropía a escala sísmica; sin embargo, el tema también es de importancia a nivel de pozo. La anisotropía se relaciona con los sistemas de estratificación y de fracturas naturales. Estos temas son de suma importancia ya que ambos pueden determinar el éxito o fracaso en fase de perforación y producción. La anisotropía también se relaciona con la concentración y orientación de los esfuerzos lo cual es crucial en la toma de decisiones para la perforación.

El algoritmo del número de onda discretizado es empleado para la solución del problemas que pueden ser analíticos o semi-analíticos, reduciendo así el tiempo de cálculo, pero limitando la complejidad del problema. Esta solución analítica es accesible gracia al algoritmo DWN que su principal ventaja es el tiempo y la precisión

de los cálculos, sin embargo su limitación es que las geometrías complejas no se pueden tomar en cuenta, como el caso de las grietas o estratos delgados.

Para problemas con geometrías complejas y suplir las deficiencias del algoritmo DWN utilizaremos el método de diferencias finitas, que representa una solución numérica, pues el método consiste en resolver un sistema de ecuaciones diferenciales por etapas, considerando cierto grado de precisión. En este caso, se hace una discretización espacial y temporal del problema.

Mediante el proceso de discretización, el conjunto finito de números que representan la función o funciones incógnitas en el espacio continuo es reemplazado por un número finito de parámetros incógnita. La estrategia para lograr la solución de dichos problemas se basa en el uso de computadoras y así agilizar el cálculo de la solución. Para ello es necesario presentar el problema de una manera puramente algebraica y este proceso requiere alguna forma de aproximación. Entre las diferentes formas de discretización posibles existen; los elementos finitos, volúmenes finitos y espectrales, diferencias finitas, etc.

Una de las aplicaciones más importantes del enfoque de este trabajo podría ser en el contexto del monitoreo y evaluación de yacimientos. Para optimar el proceso se debe caracterizar de mejor manera un yacimiento. Esto es más complejo e importante que en el pasado, donde con una geología elástica e isótropa se debía modelar la respuesta del subsuelo en una escala regional. Las rocas del yacimiento pueden mostrar anisotropía efectiva en la banda sísmica o sónica. De igual manera las microfracturas en las limolitas, que son en ocasiones las rocas sello por excelencia y las rocas generadoras del sistema, deberían ser modeladas tomando en cuenta la anisotropía y la viscoelasticidad. Es más, los yacimientos fracturados con alta saturación de fluidos y las areniscas porosas presentan propiedades de atenuación, que con un tratamiento convencional solo se disfrazan o se mal interpreta la señal, recientemente se están viendo en el mundo las ventajas de tratar la anisotropía de la atenuación en lugar de tratar la anisotropía de la elasticidad.

II.- Marco Teórico

En la bibliografía, dependiendo del enfoque que se adopte, se encuentran diversas definiciones para los conceptos que en este estudio se manejarán comúnmente. Con el propósito de homogeneizar criterios, definir los términos empleados y fundamentar el desarrollo del trabajo con los términos necesarios para establecer el marco teórico. Este se basa en una revisión de textos como los de Achenbach (1976) y Fung (1977), entre otros.

II.1 Isotropía.

La materia sólida está constituida por un conjunto de partículas que interactúan entre sí, dando lugar a una configuración en equilibrio. En numerosas aplicaciones es conveniente aceptar que dichas partículas están constituidas por un medio continuo, sin espacios entre las partículas ni separaciones en su interior (fracturas o porosidad), homogéneo y además isótropo. La isotropía excluye la posibilidad de tener una distribución preferencial de las propiedades físicas y en especial las mecánicas. De esta manera, el material isótropo es aquel cuyas propiedades mecánicas no dependen de la dirección en la que se aplique la fuerza y presenta las mismas características en cualquier dirección.

El concepto de isotropía es ampliamente usado y referido en la literatura por esta sencilla hipótesis, razonable para muchas condiciones, ayuda a simplificar las ecuaciones. De esta manera, es posible crear un modelo matemático diferencial ideal para estudiar el comportamiento del medio. De particular interés es el caso de la propagación de ondas, que a final de cuentas es la variación espacio - tiempo de una cierta propiedad del medio.

II.2 Anisotropía

La anisotropía se define como la variación de una propiedad física dependiendo de la dirección en la cual se mide. En términos de la propagación de onda, la anisotropía se representa por la variación de la dirección de vector de onda, por lo que se observa una velocidad de fase dependiente de la dirección de propagación ya que la dirección de la velocidad de fase, no coincide con la dirección de la velocidad de grupo.

Parte de las características de la anisotropía y por lo que vale la pena estudiar el tema a fondo es el hecho que la anisotropía puede ser inducida, ya sea por tectónica local o intrínseca, es decir, estar asociada a estratificación, a presencia de lutitas, fracturas alineadas, capas delgadas y en general, a factores con resolución menor a la escala de observación. En cierta forma, también la anisotropía inducida por esfuerzo tectónico está asociada a fracturamiento o micro fracturamiento. Las fracturas se forman en dirección del esfuerzo principal máximo y al abrirse, por acomodo de los granos producen aumento en la porosidad. El tema de la anisotropía resulta interesante para un trabajo posterior al tratar la anisotropía con un enfoque poro-elástico.

II.3 Propiedades mecánicas de los materiales

Las propiedades mecánicas que se presentan a continuación son la base teórica para la solución de problemas de propagación de ondas, estas propiedades describen el comportamiento de los materiales ante un sistema de fuerzas a través del tiempo, se incluye una revisión básica de mecánica del medio continuo para introducir los términos empleados.

II.3.1 Elasticidad

Todos los materiales poseen hasta cierto punto la propiedad de elasticidad. En efecto, cuando un cuerpo es sometido a un sistema de fuerzas, el cual no excede cierto límite, el cuerpo presenta una deformación, la cual desaparece hasta su estado original una vez que el sistema de fuerzas es retirado.

Además, un sólido elástico es aquel que sigue la ley de Hooke, la cual establece que el tensor de esfuerzo es proporcional al tensor de deformación, es decir, que las deformaciones crecen linealmente con a los esfuerzos. La expresión más general de para el tensor de esfuerzos σ_{ij} , se ve como el producto del tensor de las propiedades mecánicas C_{ijkl} y el tensor de deformaciones e_{kl} , esto es:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} \dots\dots\dots (2.1)$$

Los índices que aparecen en la ecuación 2.1 varían entre 1 y 3 y adquirirán sentido más adelante. Por ahora nos basta notar que σ_{ij} y e_{kl} tienen nueve elementos y que C_{ijkl} tiene 81 elementos y está formado por constantes para la mayoría de los materiales de interés en la exploración del subsuelo, al menos hasta cierto límite.

En la amplia gama de materiales que existen en la tierra existen comportamientos variados dentro de las propiedades mecánicas de los materiales, por ejemplo, para materiales anelásticos donde C está en función de la deformación $C = C(e)$, para materiales viscoelásticos donde C está en función del tiempo $C = C(t)$.

II.3.2 Anelásticidad

La anelásticidad describe genéricamente la deformación elástica que depende del tiempo, es decir que la deformación y el esfuerzo no están linealmente relacionados de manera directa como con el caso elástico. El sistema depende de la historia de deformación y de esfuerzos del material y siempre hasta cierto nivel, regresa al estado original. Al aplicarse una carga, el material sigue deformándose durante el tiempo. Lo mismo ocurre al eliminar la carga y se tiende a tarda un tiempo en recuperar su forma inicial al avanzar el tiempo.

Para el estudio de la propagación de ondas, la anelásticidad es un mecanismo de disipación de las ondas en el cual existe una relación de la deformación con el esfuerzo en función del tiempo, debido a que la energía de las ondas elásticas es transformada en energía térmica, por la fricción interna de las fronteras porosas del material que atraviesa la onda. Esta energía térmica está en función de las propiedades

termodinámicas del material, específicamente con la entalpía y la temperatura, ya que relaciona la cantidad de energía que el sistema puede intercambiar con su entorno y condiciona la historia de deformación, en general la temperatura afecta al ir disminuyendo la resistencia, y aumentando la ductilidad, si la temperatura aumenta podemos decir que, disminuye el límite elástico.

II.3.3 Viscosidad

La viscosidad es definida (Phan Thien N. 2002) como el cociente del esfuerzo de cortante entre la velocidad de la deformación cortante. La figura 2.1 representa de manera microscópica 2 placas de un material cualquiera, una placa encima de otra, con un fluido entre las placas. Las cantidades interesantes en esa figura son la velocidad de deformación, $\dot{\gamma} = U/h$ y el esfuerzo $S = F/A$, donde U es la velocidad de la placa sobreyacente y h es el espesor, S es el esfuerzo de corte, F la fuerza tangencial que actúa en la superficie y A , el área de contacto del fluido.

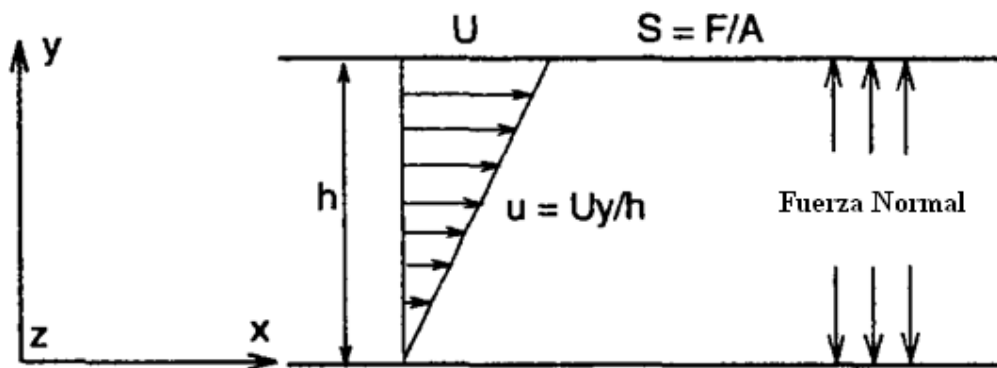


Figura 2.1. Movimiento de corte generado por el deslizamiento entre 2 placas sobrepuestas.

Entonces, tenemos que para un flujo constante, se tiene que la viscosidad está definida por:

$$\eta = S/\dot{\gamma} \dots\dots\dots (2.2)$$

Para un fluido Newtoniano, η es constante con unidades en Pa y depende solo de la temperatura.

II.3.4 Atenuación.

Para un medio lineal homogéneo e isótropo, donde se propaga una onda, el movimiento continuará indefinidamente. Ciertamente la onda se atenua espacialmente mientras se aleje de la fuente, pero la energía seguirá siendo la misma.

En los materiales reales existen procesos de fricción interna entre los espacios vacíos del medio, en donde básicamente se transforma la energía mecánica en energía calorífica, en especial cuando las fronteras de las partículas no están perfectamente acopladas y estas disipan la energía ligada al movimiento (Achenbach 1976) disminuyendo la amplitud de la onda, además esta fricción interna se puede ver por el carácter anelástico o viscoelástico de los materiales que se pueden representar de manera gruesa mediante la combinación de los diversos mecanismos de atenuación y las diferentes maneras de representarlos.

Para tomar en cuenta este fenómeno, se modela el comportamiento viscoelástico del medio introduciendo un término correctivo en los parámetros elásticos, ya que al tomar en cuenta la atenuación entramos en materia de viscoelasticidad.

El modelo más sencillo para representar un sistema dinámico es el experimento de Hooke, que consiste en una masa sujeta a un resorte. Si a este sistema le agregamos en combinación o de manera individual cualquier elemento o elementos de amortiguamiento, tenemos alguno de los modelos de atenuación. Estos modelos ayudan a representar de manera matemática la atenuación, al utilizar valores complejos de las velocidades de propagación estamos pensando en una dependencia de la velocidad con la frecuencia y el factor de calidad. Esta dependencia se ve de manera más clara al pasar las relaciones constitutivas del dominio del tiempo a la frecuencia mediante la transformada de Fourier, de esta manera, la relación entre los esfuerzos y deformaciones es lineal y las velocidades de las ondas compresionales y de corte quedan en el dominio complejo debido al factor de calidad, facilitando el cálculo de las propiedades viscoelásticas, estas velocidades se pueden encontrar de manera

convencional con α y β , pero estas de manera compleja se transforman sencillamente en:

$$\alpha^* = \alpha \left(1 + \frac{i}{2Q_p} \right) \dots\dots\dots (2.3)$$

Y

$$\beta^* = \beta \left(1 + \frac{i}{2Q_s} \right) \dots\dots\dots (2.4)$$

Donde Q_p y Q_s son los factores de calidad para las ondas P y S respectivamente, α^* y β^* representan las velocidades complejas para las ondas P y S con atenuación y α y β representan la velocidad de las ondas P y S sin atenuación que veremos mas adelante.

Para representar a grosso modo la atenuación y los efectos de fricción interna en materiales viscoelásticos o anelásticos es necesaria la definición del factor de calidad Q , que es adimensional, depende de la frecuencia y puede ser útil para determinar propiedades macroscópicas, el factor de calidad por si solo es una medida que depende de la frecuencia y amplitud de las ondas (que controlan la energía) y del material.

Este parámetro Q , se ha determinado en trabajos experimentales como constante en un amplio rango de frecuencias. Q representa una medida de la fricción interna o viscoelasticidad cuando un esfuerzo es aplicado sobre un cuerpo a una cierta frecuencia ω (Aki & Richards 2002).

El factor de calidad Q , cuyo inverso es el factor de disipación, es la relación entre la atenuación y la propagación de la onda. Si un determinado volumen de material se somete a un esfuerzo con cierta frecuencia ω , el factor de calidad que determina la cantidad de fricción interna está dada por:

$$\frac{1}{Q(\omega)} = - \frac{\Delta E}{2\pi E} \dots\dots\dots (2.5)$$

Donde E es el pico de la energía almacenada durante la deformación del volumen y $-\Delta E$ es la energía perdida en cada ciclo debido a la anelasticidad. Esta definición por sí

sola no se ocupa directamente sin embargo es la primera relación entre el factor de disipación y un esfuerzo constante en un intervalo de tiempo, es decir, el paso de una onda. En el fenómeno de atenuación, por lo general se observan 2 fenómenos, el decaimiento o disminución temporal de la amplitud la onda para un cierto número de onda constante y el decaimiento espacial de la amplitud de una onda que se propaga en una frecuencia dada, además para simplificar las ecuaciones en este trabajo se supone que la atenuación es un fenómeno lineal, por lo que se puede encontrar la solución de la propagación de una onda haciendo la síntesis en frecuencia con la transformada de Fourier, logrando con esta transformada de Fourier ver de manera evidente los 2 fenómenos antes mencionados, el de decaimiento temporal en un numero de onda fijo y decaimiento espacial en frecuencia fija, lo cual ayuda para introducir de manera correcta los efectos de atenuación.

Para estudiar cualquiera de los 2 fenómenos de atenuación es necesario definir la amplitud de la onda, A , donde, para un medio con una relación constitutiva lineal, A resulta ser proporcional al pico de energía almacenada durante la deformación, es decir, $A \propto E^{1/2}$ y $Q \gg 1$.

Sustituyendo esta relación en la ecuación (2.5) ahora tenemos la ecuación como:

$$\frac{1}{Q(\omega)} = -\frac{\Delta A}{\pi A} \dots\dots\dots (2.6)$$

Donde podemos obtener las fluctuaciones de la amplitud debido a la atenuación.

Ahora para estudiar los 2 fenómenos presentes en la atenuación de una onda, el de decaimiento temporal y espacial, tenemos para el decaimiento temporal, la amplitud de la onda A esta en función del tiempo, es decir, $A(t)$ y esta representado por:

$$A(t) = A_0 e^{\left[\frac{-\omega t}{2Q}\right]} \dots\dots\dots (2.7)$$

Esta ecuación es la que utilizamos para describir la atenuación temporal y para determinar el Q temporal.

Ahora bien, para determinar el decaimiento espacial $A(x)$, establecemos que la dirección de máxima atenuación sea la misma dirección de propagación de la onda, tenemos entonces que $\Delta A = \left(\frac{dA}{dx}\right)\lambda$, donde λ es el vector longitud de onda dado en términos de ω y la velocidad de fase c , entonces $\lambda = 2\pi c/\omega$. Entonces la ecuación (2.6) queda como:

$$A(x) = A_0 e^{\frac{-\omega x}{2cQ}} \dots\dots\dots (2.8)$$

Lo que resulta en una decaimiento exponencial de la amplitud espacial de la onda, utilizamos la ecuación (2.8) para determinar el Q espacial.

Ahora para obtener los efectos de la atenuación en una solución de onda tal que $e^{i(kx-\omega t)}$, para obtener Q se puede remplazar ω y k , por una frecuencia angular compleja, tal que la parte imaginaria está dada por: $-i\omega/2Q^{temporal}$ y un vector numero de onda complejo tal que la parte imaginaria de k esta representado por: $ik/2Q^{espacial}$.

Supongamos por ejemplo una onda plana $\delta\left(t - \frac{x}{c}\right)$ propagándose a una misma velocidad c a lo largo de la dirección positiva del eje x , en un medio con atenuación pero sin dispersión y con un factor de calidad Q independiente de la frecuencia, esta onda puede verse como la Transformada de Fourier del impulso, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega x/c} \dots\dots\dots (2.9)$$

Esta onda sufrirá una atenuación con un factor dado, este factor es:

$$e^{-\alpha(\omega)x} \dots\dots\dots (2.10)$$

Y de la ecuación (2.8) podemos ver que este coeficiente de atenuación es:

$$\alpha = \omega/(2Qc) \dots\dots\dots (2.11)$$

También existe la forma de definir al factor de calidad como la parte imaginaria de los diferentes módulos de almacenamiento y de pérdida, pero esta definición se verá mas adelante con más detalle, es por eso que Q puede verse como:

$$Q = \frac{M_1}{M_2} = \frac{Re(M)}{Im(M)} = \frac{Re(v_c^2)}{Im(v_c^2)} \dots\dots\dots (2.12)$$

Donde v_c^2 representa la velocidad compleja al cuadrado en donde se incluyen las constantes elásticas complejas que se definirán más adelante.

II.4 Mecánica del medio continuo.

La mecánica del medio continuo es la rama de la mecánica que se refiere al esfuerzo en sólidos, líquidos y gases y estudia la deformación extrema en dichos materiales, la finalidad de las siguientes líneas es presentar los aspectos más relevantes para el desarrollo del capítulo.

Supongamos una región \mathfrak{R}^3 , en dicha región tenemos un elemento diferencial, que estará sujeto a fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie; las fuerzas de cuerpo dependen de la cantidad de materia contenida en el cuerpo, por ejemplo la masa. Si se toma el promedio de la masa en un elemento diferencial de volumen y después su límite tenemos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta m} = \rho \dots\dots\dots (2.13)$$

Esto es, pasar de una propiedad de todo el cuerpo a una propiedad de un solo punto, es decir puntual, estas propiedades intensivas o puntuales de un medio continuo son funciones continuas y derivables del tiempo en cada punto del medio y por lo tanto podemos determinar el comportamiento global de campo escalares y vectoriales de las fuerzas y desplazamientos a estudiar.

Un concepto fundamental antes de comenzar a definir los demás entes matemáticos, es el esfuerzo, que es la generalización de las fuerzas de superficie, esto es, si una fuerza F , o mejor dicho un vector que actúa sobre una superficie S , la suponemos

uniforme distribuida, continua y diferenciable, de tal manera que al tender a cero el elemento diferencial de área le corresponda una parte pequeña de la fuerza total, se obtiene el esfuerzo promedio de la siguiente manera:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} = \sigma \dots\dots\dots (2.14)$$

Ahora con base en las hipótesis anteriores se observan 3 tipos de relaciones: las de equilibrio, de desplazamiento-deformación y las constitutivas, de las cuales por características de este trabajo, solo nos ocuparemos de las relaciones de desplazamiento deformación y esfuerzo deformación (relación constitutiva)

II.4.1 Relaciones desplazamiento-deformación.

Para un estado de deformaciones en el plano x, y con elementos diferenciales dx, dy se consideran por simplificación 2 tipos de deformaciones, las longitudinales o volumétricas y las angulares o distorsionales, mientras que las primeras llevan a un cambio de magnitud las segundas llevan a un cambio en forma.

La relación para deformaciones longitudinales en x tanto como en y es:

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x_x} \dots\dots\dots (2.15)$$

$$e_y = \frac{\partial u_y}{\partial x_y} \dots\dots\dots (2.16)$$

Y la relación para deformaciones angulares en el plano resulta ser simétrica y está dada por la relación:

$$e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial x_y} + \frac{\partial u_y}{\partial x_x} \dots\dots\dots (2.17)$$

Para un medio en general en 3 dimensiones, utilizando notación indicial la relación para deformaciones tanto longitudinales como angulares está dada por:

$$e_{ij} = E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \dots\dots\dots (2.18)$$

II.4.2 Ecuaciones constitutivas

La relación entre la deformación y esfuerzo es definida por las ecuaciones constitutivas, para diferentes materiales existen diferentes relaciones constitutivas, sin embargo se puede generalizar en 3 simples relaciones idealizadas, que describen la mayoría de los materiales, estas relaciones son; fluido no viscoso Newtoniano, fluido viscoso Newtoniano, y el sólido perfectamente elástico, existen casos más complejos como los que trataremos en lo sucesivo, donde, el comportamiento es mucho más complejo como los sólidos viscoelásticos, pero para el caso puramente elástico la relación constitutiva está dada por:

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}) \dots\dots\dots (2.19)$$

Esta relación, al igual que la ley de Hooke, nos dice que cada componente del tensor de esfuerzo es una combinación lineal de todos los componentes del tensor de deformación. La relación entre los esfuerzos y las deformaciones para un sólido elástico isótropo cuando no se toma en cuenta ningún tipo de atenuación es la ley de Hooke y se expresa:

$$\sigma_{ij} = \lambda[\sum_i \varepsilon_{ii}]\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \dots\dots\dots (2.20)$$

Donde en la ecuación 2.20, λ y μ son las constantes de Lamé, δ_{ij} es el delta de Kroeneker el cual funciona como; si $i = j = 1$; si $i \neq j, = 0$ y $\varepsilon_{ij} = e_{ij}$ es el tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy que veremos mas adelante, específicamente μ es el modulo de rigidez del material. Como se podrá comprobar, la velocidad de las ondas S en un fluido como el agua es igual a 0 ya que en los líquidos $\mu = 0$ y λ esta relacionado con el contenido dentro los espacios vacios del material solido cualquiera que este sea, sea algún fluido viscoso o gas.

II.4.3 Tensor de esfuerzos

Supongamos la figura 2.1 representa un cuerpo en equilibrio. Este cuerpo es sometido a un sistema de fuerzas externas cualesquiera, $P_1 \dots P_7$, producirá fuerzas internas entre las partes del cuerpo, para estudiar la magnitud de estas fuerzas en cualquier punto O , supongamos que el cuerpo se divide en 2 partes A y B por una sección transversal denominada mm que atraviesa el punto O . Si se analiza por separado las partes, digamos la parte A, puede decirse que se encuentra en equilibrio bajo la acción de las fuerzas externas $P_1 \dots P_7$ y por las fuerzas internas distribuidas a través de la sección mm debido a la acción del material de la parte B del material sobre A. Se establece en la literatura (Timoshenko S.P 1934) que estas fuerzas están distribuidas continuamente a lo largo del área mm de la misma manera que la presión hidrostática o la presión del viento actúa sobre la superficie. La magnitud de dichas fuerzas están normalmente definidas por su intensidad, es decir, por la cantidad de fuerza por unidad de área en la superficie sobre la que actúan, estas fuerzas internas son conocidas como esfuerzo. Para el caso de la figura 2.1, el esfuerzo no está distribuido uniformemente sobre el área mm . Para obtener la magnitud del esfuerzo actuando sobre un área diferencial de A , es decir δA , tomado de la sección mm en cualquier punto O , se supone que las fuerzas que actúan a lo largo del área elemental, debido a la acción de la parte B del material sobre la parte A, pueden ser reducidas a una resultante de fuerzas δP . Si delimitamos la parte diferencial del área δA , el cociente entre $\delta P / \delta A$ nos da como resultado la magnitud del esfuerzo actuando sobre la sección transversal mm en el punto O . La dirección limitante de la resultante δP se encuentra en dirección del esfuerzo. En general la dirección del esfuerzo se toma inclinada a la porción del área diferencial δA en donde generalmente se divide en 2 componentes; un componente normal de esfuerzo, perpendicular al área que es el cociente entre la componente normal (N) y el área A , un esfuerzo de corte, el cual actúa sobre el plano del área δA y es el cociente de la componente Tangencial o de corte entre una porción de área.

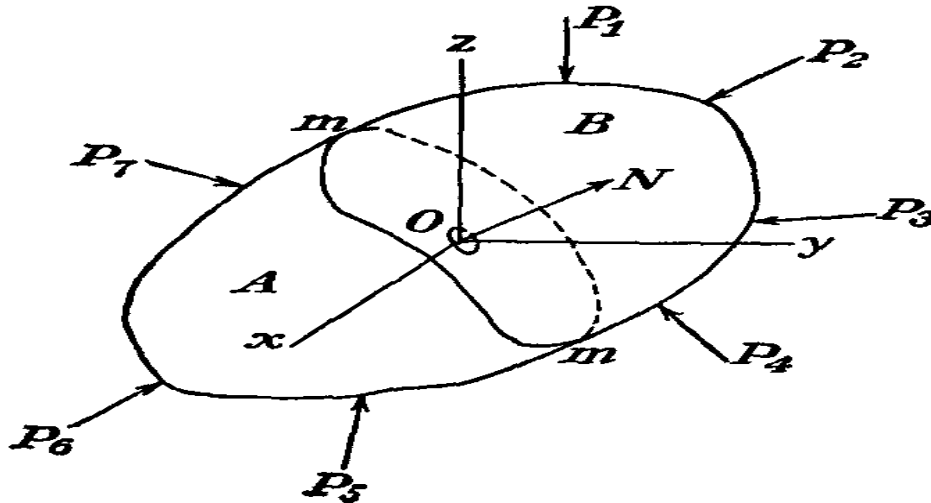


Figura 2.2 Sistema de fuerzas en un volumen cualquiera. Área transversal mm .

De la definición anterior puede concluirse que; la magnitud del esfuerzo depende de la magnitud del área donde actúa la fuerza y que el esfuerzo es un vector dado que está definido como el cociente del vector de fuerza entre un escalar que es el área. Esta definición de esfuerzo es aplicable a un plano, sin embargo, es posible extender la definición del estado de esfuerzos a todos los puntos de un cuerpo y representar así dichos estados de esfuerzos en un diferencial de volumen. Así, se tienen esfuerzos normales y tangenciales en tres direcciones perpendiculares entre sí.

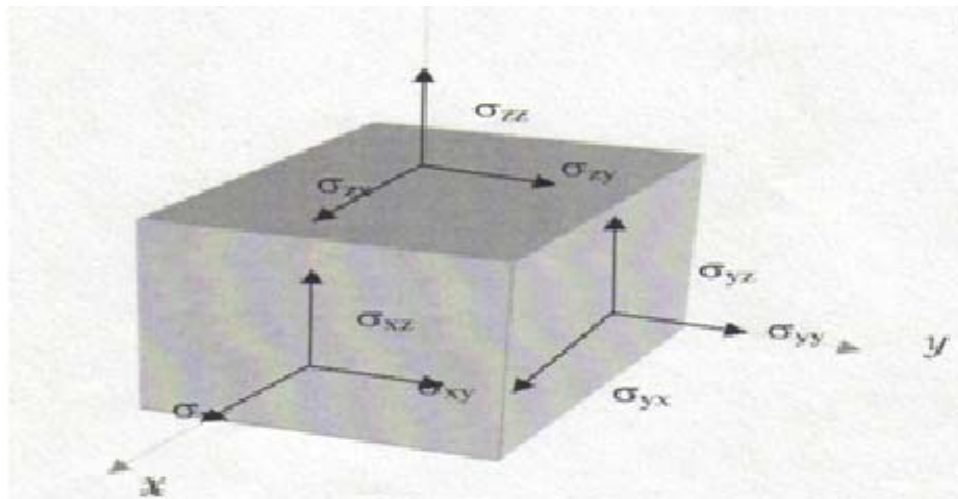


Figura 2.3. La representación de esfuerzos en un volumen elemental. El primer índice indica la cara en cual se aplica el esfuerzo, el segundo indica la dirección del esfuerzo.

Estos esfuerzos se pueden representar matemáticamente en un arreglo matricial conocido como tensor de esfuerzos, el cual representa el estado de esfuerzos del medio y es especialmente útil ya que cualquier tipo de esfuerzos normales están contenidos en la diagonal principal, mientras que en la triangular superior e inferior se localizan los esfuerzos cortantes o tangenciales.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.21)$$

A los esfuerzos que actúan donde los esfuerzos cortantes son nulos se les denomina esfuerzos principales estos son esfuerzos normales y los planos donde actúan se les denomina planos principales.

El tensor de esfuerzo puede ser escrito como la suma de 2 tensores, uno representando los esfuerzos normales o hidrostáticos en donde cada componente normal del esfuerzo es $1/3\sigma_{kk}$ y el vector complementario es llamado tensor desviador de esfuerzo y está representado matemáticamente por:

$$d_{ij} = \sigma_{kk} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \dots\dots\dots (2.21a)$$

II.4.4 Estado de deformación

Los cuerpos se pueden clasificar en cuanto a su capacidad de deformarse en; cuerpo rígido o deformable, el análisis de cuerpo rígido trata los efectos exteriores de las fuerzas sobre el cuerpo y estudia el cambio de lugar de este, es decir, no implica deformaciones internas en el material, el análisis de cuerpo deformable trata los efectos internos producto de las fuerzas al actuar sobre el cuerpo y pueden causar un cambio de forma, volumen o de posición. Si la intensidad de las fuerzas aumenta puede ocurrir en cierto grado una ruptura del cuerpo y por lo tanto el desequilibrio del sistema de fuerzas que actúan en el.

Normalmente en la literatura se define como deformación al cambio de longitud entre dos puntos (dx) de un cuerpo cuando se somete a un estado de esfuerzos, sin

embargo, este cambio de longitud no es una medida propia de la deformación, ya que es dependiente de la longitud misma.

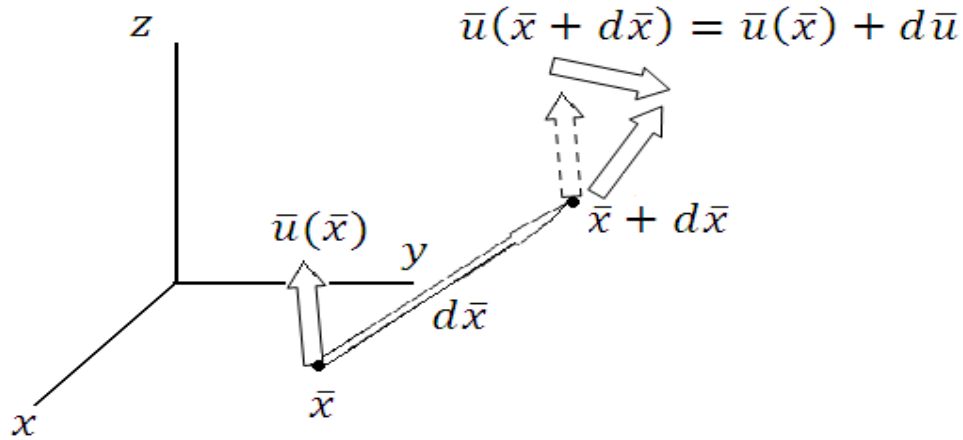


Figura 2.4. Esquema del cambio de posición de un punto con un vector \bar{x} .

Para eliminar esta dependencia debe normalizarse a en función de la longitud inicial, es decir,

$$e = \frac{L_f - L_i}{L_i} \dots\dots\dots (2.22)$$

L_f es la longitud final y L_i es la longitud inicial y e es la deformación unitaria. Esta es una medida de la deformación independiente de la magnitud de la recta que une a los 2 puntos.

II.4.5 Tensor de deformación

El tensor de deformación es una matriz que al igual que el tensor de esfuerzo sus elementos representan las deformaciones unitarias tanto lineales como angulares de un cuerpo referido a un sistema de ejes coordenados.

El tensor de deformación se define como

$$e_{ij} = E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \dots\dots\dots (2.23)$$

Esta representación se conoce como de deformaciones infinitesimales de Cauchy y sus elementos representan tanto a las deformaciones longitudinales como angulares en un medio continuo. Otra forma de ver el tensor de deformación es mediante el tensor desviado de deformaciones, que es la suma de las deformaciones normales menos el promedio de la traza las deformaciones de corte, esto es:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \dots\dots\dots (2.23a)$$

II.5 Ecuación de movimiento y ecuación de Navier.

A partir de la segunda ley de Newton podemos resumir que la fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración. i.e. Fuerza=masa x aceleración. Al expresarse de manera vectorial por unidad de volumen se tiene

$$\frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.24)$$

Donde $\frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k}$ es la divergencia del tensor de esfuerzos y ρ es la densidad de masa, f es la fuerza de cuerpo, u_i es el desplazamiento, por lo general se utiliza u para referirse al movimiento en el eje x , v para referirse al movimiento en el eje de las ordenadas y w para el movimiento en el eje z y x_i son las coordenadas espaciales.

Recordando la ley de Hooke, que establece que las deformaciones son proporcionales a los esfuerzos que las producen, ec. 2.20 y sustituyendo la ec.2.23 en la ec. 2.20, se puede utilizar para reescribir los desplazamientos en función de los esfuerzos esto es;

$$\sigma_{ki} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \dots\dots\dots (2.25)$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación del movimiento (ec. 2.24) se obtiene que

$$\lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_k} \delta_{ki} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.26)$$

Que puede escribirse como:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.27)$$

Esta expresión se conoce como ecuación de Navier y representa el equilibrio dinámico en un sólido elástico, lineal, homogéneo e isótropo en términos de los desplazamientos.

Gracias al teorema de Helmholtz el cual nos dice que una función vectorial se puede separar y clasificar como la suma de la divergencia de un campo escalar con el rotacional de un campo vectorial esto es; $\hat{u} = \nabla \cdot \Psi + \nabla \times \Phi$, donde $\nabla \cdot \Psi = 0$, donde Ψ es una función vectorial

La ecuación de Navier se puede escribir de forma vectorial como ref. [11]:

$$\mu \nabla^2 \hat{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \hat{u} + f = \rho \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.28)$$

II.6 Tipos de ondas sísmicas

En un medio elástico con extensión ilimitada pueden propagarse 2 tipos de ondas elásticas, las ondas primarias o de compresión, ondas P y las ondas secundarias o de corte. Las primeras se propagan con mayor velocidad en el medio, presentando además la característica de propagarse tanto en líquidos como en sólidos, las ondas S viajan a una velocidad menor y no se propagan a través de líquidos y tienen una mayor amplitud. El desplazamiento de las partículas en el terreno durante el paso de la onda es perpendicular a la dirección de propagación

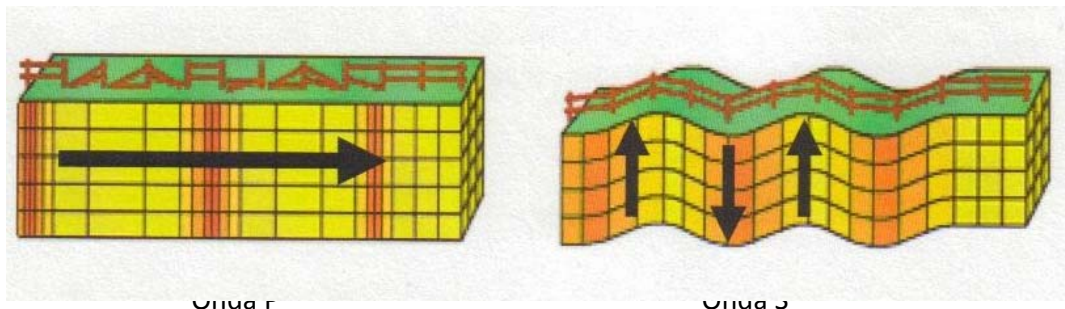


Figura 2.5. Representación del movimiento de las partículas durante las ondas de cuerpo.

La onda S se descompone en 2 direcciones ortogonales entre sí, en este caso se dice que las ondas están polarizadas como se muestra en la figura.

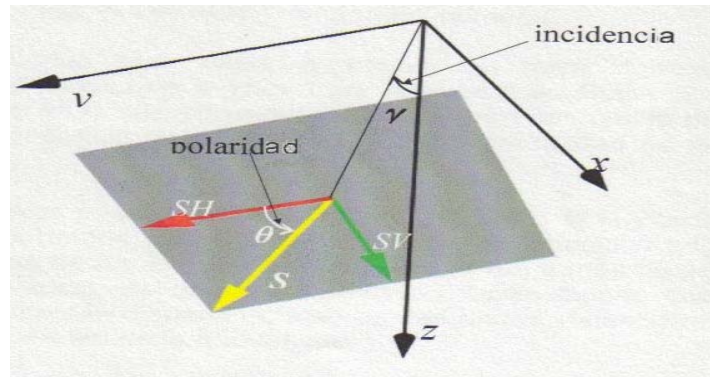
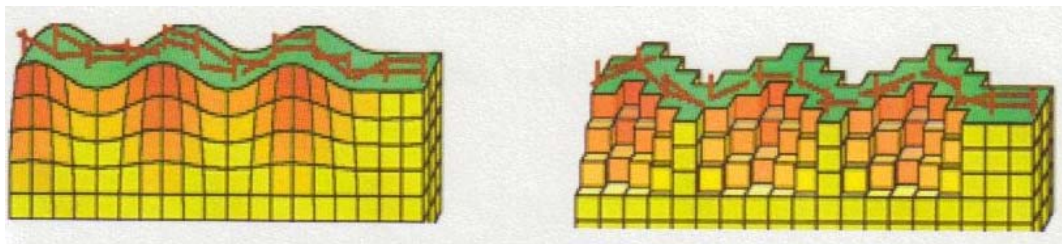


Figura 2.6. Ondas S y sus componentes SV y SH, el ángulo γ es el ángulo de incidencia y el ángulo θ es el ángulo de polarización entre las ondas SH y SV.

El componente vertical de la onda S está alojado en un plano vertical y se conocen como SV, mientras que el componente horizontal se le conoce como componente SH, por lo general la componente vertical de las ondas S, viajan acopladas con las ondas P. Existen otras llamadas ondas superficiales y que solo existen en la superficie. Estas ondas tienen amplitud máxima en la superficie del terreno y decrecen con la profundidad en función de la frecuencia, además su velocidad es menor que las ondas de cuerpo, por lo que generalmente las ondas de superficie llegan mucho después y presentan dispersión; esto es que; las ondas viajan con diferentes velocidades en función de la frecuencia. Estas ondas pueden agruparse en dos tipos principales: ondas de Rayleigh y ondas de Love, también existen ondas superficiales que solo existen en diferentes interfaces, como por ejemplo Stoneley, Sholke.



Onda de Rayleigh

Onda de Love

Figura 2.6. Representación del movimiento de las partículas durante las ondas superficiales.

Las ondas superficiales pueden explicarse como producto de la interferencia de las ondas de cuerpo (P y S). Las ondas de Rayleigh, se deben a la interacción entre las ondas P y las SV, el movimiento de cada partícula de la superficie del terreno al paso de la onda es en forma de elipse retrograda.

Las ondas de Love, son de periodo muy largo, se comportan de manera muy parecida a la descrita para las ondas de Rayleigh, pero se deben a la interferencia constructiva de ondas SH, no pueden existir en un semiespacio, sino que requieren al menos una capa sobre un semiespacio, donde pueda quedar atrapada parte de la energía. Estas son polarizadas horizontalmente y por lo tanto no se registran en los sensores verticales.

II.7 Ecuación de onda elástica en un medio isótropo.

Para simplificar la descripción del fenómeno de propagación de ondas elásticas considérenos la ecuación de Navier en forma vectorial (ec. 2.28) sin fuerzas de cuerpo, es decir, $f_i = 0$ dejando la expresión como:

$$\mu \nabla^2 \hat{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \hat{u} = \rho \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.29)$$

Ahora, supongamos que \hat{u} es un cierto movimiento que se verifica sin cambio de volumen, es decir, $\nabla \cdot \hat{u} = 0$. En este caso la ec.2.26 queda como

$$\nabla^2 \hat{u} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.30)$$

Donde $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. Se puede comprobar que la divergencia del campo de desplazamientos es nula, es decir, $(\nabla \cdot u) = 0$ por lo que se trata de ondas sin cambio de volumen. Esta ecuación gobierna la propagación de las ondas S o de cortante. Su característica principal es que ocurre un movimiento de las partículas generalmente perpendicular a la dirección de propagación del frente de onda.

Si ahora suponemos o establecemos como condición que $\nabla \times \hat{u} = 0$, es decir que \hat{u} es un movimiento continuo sin rotación de las partículas, la ec. 2.29 de igual manera puede escribirse como

$$\nabla^2 \hat{u} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.31)$$

Esta ecuación describe la propagación de ondas irrotacionales, garantizado por $\nabla \times \hat{u} = 0$, donde solo se involucran cambios de volumen, en la ecuación $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ y es la velocidad de propagación de las ondas P. Este tipo de ondas como veremos más adelante se asocian sólo con el cambio de volumen de la posición de las partículas (compresión o distensión) ya que el rotacional es nulo ($\nabla \times u = 0$).

Podemos escribir la ecuación 2.29 de manera escalar en coordenadas cartesianas sustituyendo $u = x, v = y$ y $w = z$, con esto la ecuación 2.29 de forma no vectorial le corresponde 3 ecuaciones, que representan el equilibrio en las 3 direcciones:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.32)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.33)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.34)$$

A partir de estas expresiones se puede encontrar las ecuaciones que describan el movimiento en diferentes direcciones, para demostrarlo se pueden establecer algunas condiciones iniciales de frontera sobre la física del problema, tales como esfuerzos o desplazamientos conocidos en alguna sección del medio.

Ahora para encontrar la solución supongamos por ejemplo; que $u \neq 0$ y que $w = v = 0$. Además que $w = w(z, t)$. Bajo estas condiciones el conjunto de ecuaciones quedan como:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.35)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \dots\dots\dots (2.36)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0 \dots\dots\dots (2.37)$$

De las ecuaciones 2.36 y 2.37 se tiene que

$$u = F(x, t) + G(y, t) + H(z, t) + I(y, z, t)$$

Que indica que existen 4 soluciones independientes. Considérese el caso en que u es función solo de x y del tiempo t . la ecuación 2.35 queda como:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.38)$$

O bien:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.39)$$

Esta es la ecuación de onda en una dimensión, en este caso es en el eje x , la cual admite cualquier solución de la forma

$$u = f \left(t - \frac{x}{\alpha} \right) + g \left(t + \frac{x}{\alpha} \right)$$

Las funciones f y g son funciones de una sola variable y pueden describir perfectamente una forma de onda arbitraria.

Un análisis de los argumentos de f y g permite establecer, que f representa el movimiento de la onda de manera constante en la dirección positiva del eje x , consideremos que f varía con el tiempo y el espacio, mientras el tiempo aumenta por un incremento de dt , el argumento permanece constante debido a que la distancia aumenta a una velocidad de αdt , de igual manera g representa el movimiento de la onda en dirección negativa del eje x . los que nos lleva a pensar que la composición de

cualquiera 2 funciones que viajen en un mismo plano con la misma velocidad y los mismos argumentos pueden representar matemática y físicamente el comportamiento de una onda.

Una aplicación sumamente útil para la anterior conclusión es el hecho de suponer una solución de onda armónicas, ya que cualquier función de la forma $f(x \pm vt)$ describe una onda que se propaga en función del tiempo y de la distancia, una forma muy útil de representar es mediante senos y cosenos de la forma

$$u(x, t) = Ae^{i(\omega t \pm kx)} = A \cos(\omega t \pm kx) + Ai \sin(\omega t \pm kx)$$

Donde la velocidad es $v = \omega/k$.

Por otra parte, puede verificarse como se vio en los casos anteriores que el rotacional es nulo y que la onda producto de la ecuación 2.39 solo está asociado al cambio de volumen de las partículas. Ondas de este tipo reciben el nombre de ondas P o de compresión.

Ahora tomamos el caso en que $u = u(y, t)$ o bien.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.40)$$

Lo que nos lleva a la solución particular de D’Alambert y tiene la forma

$$u = f\left(t - \frac{y}{\beta}\right) + g\left(t + \frac{y}{\beta}\right)$$

Donde $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, es la velocidad con la que viajan las partículas, en esta solución se ve que se trata de un movimiento en la dirección del eje x que se propaga en dirección del eje y con una velocidad β . Puede verse que la divergencia de u es igual con 0. Se trata entonces de ondas sin cambio de volumen. Este tipo de ondas se llaman ondas S

Cabe resaltar que $\alpha > \beta$, que indica que la velocidad de las ondas P es mayor que la velocidad de las ondas S.

Como se vio en las posibles soluciones del campo de desplazamientos u existe 3 partes que representan la ecuación de onda en una sola dirección, ya sea x , y , z , sin embargo también existe un caso en que $u = u(y, z, t)$ cuyas solución en este espacio satisface las ecuaciones 2.36 y 2.37 dejando la ec 2.32 como:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.41)$$

O bien:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.42)$$

Que es la ecuación de onda en 2 dimensiones. La soluciones de la ec.2. 35 serán ondas de corte pues la divergencia de $u(y, z, t) = 0$

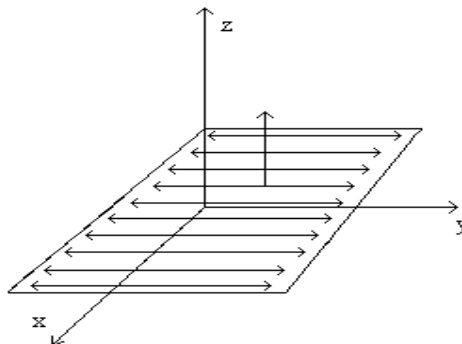


Figura 2.8. Cuando $u = u(z, t)$ la solución es similar y se tiene ondas S propagándose en la dirección de z pero con movimiento de las partículas en dirección del eje x .

Hemos definido los conceptos esenciales para nuestro estudio en un medio elástico isótropo, ahora comenzaremos a definir los conceptos necesarios para un medio viscoelástico.

II.8 Viscoelasticidad

Un sólido viscoelástico a diferencia de un material elástico si lo atraviesa una onda, este presentara una pérdida de energía, debido a los procesos internos de atenuación. Un material viscoelásticos, es aquel en el que la deformación es producto no solo del esfuerzo aplicado en un instante si no en la historia de cómo se ha sometido a esfuerzos el material. La formulación básica de la viscoelasticidad lineal ha sido desarrollada por varios científicos a través de la historia como Maxwell (1867), Boltzman (1874), Lord Kelvin (William Thomson Kelvin, 1875), Voigth (1892). Pero no fue sino hasta 1874 con Boltzman quien introdujo el concepto de Memoria, en el sentido de que, en un punto fijo del material el esfuerzo aplicado en cualquier momento depende de las deformaciones existentes en cualquier momento anterior, es decir, el comportamiento viscoelástico depende del tiempo, es una respuesta mecánica no instantánea del material a las variaciones del esfuerzo aplicado. Ya que la respuesta no es instantánea existe una función dependiente del tiempo que caracteriza el comportamiento del material. La función incorpora el esfuerzo o la historia de deformación del cuerpo viscoelástico. La dependencia es mayor para eventos recientes y menor para eventos antiguos, es por eso que se dice que el material tiene memoria, en un cuerpo viscoelástico lineal el esfuerzo es linealmente proporcional a la deformación hasta cierto nivel, la deformación producto de un aumento en esfuerzo va a incrementar las deformaciones producto de esfuerzos anteriores creados en el cuerpo. Consideremos un elemento infinitesimal de materia y supongamos que sometemos al elemento en un estado de esfuerzo homogéneo longitudinal instantáneo definido por $\sigma_x \neq 0$ y $\sigma_y = \sigma_z = 0$, en un material elástico perfecto, el esfuerzo σ_x automáticamente produce una deformación, en particular a una deformación homogénea extensional de magnitud $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{\mu} \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$ donde λ y μ son los coeficientes de Lamé. En un elemento viscoelástico, la respuesta instantánea vendrá acompañada de una deformación extra que aumenta con el tiempo, este fenómeno llamado “**aumento**” o creep, es característico de estos materiales. La respuesta de la deformación extensional a un esfuerzo longitudinal homogéneo de magnitud unitaria es llamada la función de aumento $\chi(t)$. Por otro lado, si el elemento

es colocado instantáneamente en un estado de deformación extensional, combinado con la respuesta de esfuerzo instantáneo, este a continuación presentara una disminución del nivel de esfuerzo. Este fenómeno es conocido como “**relajación**” o relaxation. La respuesta de un esfuerzo longitudinal a una deformación de magnitud unitaria es conocida como la función de relajación $\psi(t)$.

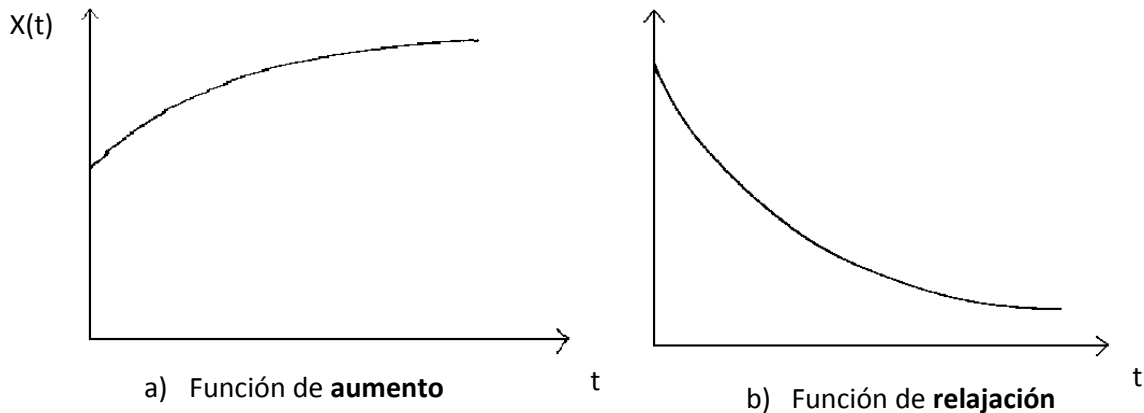


Figura 2.9. La grafica 2.9 a) muestra el comportamiento en el tiempo de la función de aumento, 2.9. b) muestra el comportamiento en el tiempo de la función de relajación.

Las propiedades de ondas planas viscoelásticas están descritas esencialmente en términos del vector de onda complejo. Este puede ser escrito en términos de su parte real e imaginaria, representando el vector numero de onda por la parte real y por la parte imaginaria el vector de atenuación. Cuando estos vectores coinciden en dirección, la onda plana es conocida como homogénea, de lo contrario la onda plana es llamada heterogénea. Esta heterogeneidad tiene diversas consecuencias que hace el comportamiento de onda viscoelástico diferente al comportamiento elástico de la onda.

Para una dimensión encontramos de manera breve gracias a la propiedad de linealidad del proceso de atenuación, que el esfuerzo longitudinal debido a una deformación extensional cualquiera en función del tiempo puede expresarse como una superposición de la integral sobre $\psi(t)$ y ϵ_x .

$$\sigma_x(t) = \epsilon_x(0)\psi(t - t_0) + \int_{t_0}^t \psi(t - s) \frac{d\epsilon_x}{ds} ds \dots\dots\dots(2.43)$$

Donde se debe dejar en claro que el proceso comienza en $t = t_0$, entonces la ecuación 2.44 puede ser reescrita como:

$$\sigma_x(t) = \varepsilon_x(t)\psi(0) + \int_{t_0}^t \psi'(t-s)\varepsilon_x(s)ds \dots\dots\dots (2.44)$$

Donde ψ representa la función de aumento en $t = 0$ y ψ' denota la derivada con respecto al argumento. Ver referencia Achenbach J.D, 1976, Carcione J.M, 2002.

II.8.1 Ecuaciones constitutivas para medios viscoelásticos

En un cuerpo elástico isótropo el comportamiento mecánico está completamente descrito por 2 constantes elásticas μ y λ , al igual que en un medio elástico, la ecuación que determinan la relación entre esfuerzo y deformación es la ecuación constitutiva, que en esta ocasión es para un medio viscoelástico, y por las características recientemente mencionadas dependen de la memoria de esfuerzo y de deformaciones para que sea posible tener la deformación en función del tiempo

Ahora bien en analogía con la ecuación 2.44 las relaciones viscoelásticas correspondientes son:

$$d_{ij} = 2 \int_0^t \psi_s(t-d)de_{ij} \dots\dots\dots (2.45)$$

$$\sigma_{ij} = 3 \int_0^t \psi_B(t-d)d\varepsilon_{kj} \dots\dots\dots (2.46)$$

Donde $\psi_s(t)$ y $\psi_B(t)$ son las funciones de relajacion en un movimiento de corte y otro volumetrico.

La respectiva relación constitutiva para los esfuerzos σ_{ij} y las deformaciones ε_{ij} es:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \int_0^t [\psi_B(t-d) - \frac{2}{3}\psi_s(t-d)]d\varepsilon_{kk} + 2 \int_0^t \psi_s(t-d)de_{ij} \dots\dots\dots (2.47)$$

II.8.2 Relación energía - deformación.

Es la primera parte para definir las ecuaciones constitutivas o relación esfuerzo deformación, con la ayuda de la propiedad de simetría de los tensores de esfuerzo y de deformación [4]

$$2V = \sum_I^6 \sum_{J \geq I}^6 a_{ij} e_i e_j \dots\dots\dots (2.48)$$

Según la notación de Voigt

$$e_i = e_{i(i)} = \delta_i u_i, \quad I = 1,2,3, \quad e_I = e_{ij} = \delta_i u_j + \delta_j u_i, \quad i \neq j \quad (I = 4,5,6),$$

Donde u son las componentes de desplazamiento, V es la energía de deformación y a_{ij} son los 21 coeficientes relacionados a las constantes de elasticidad c_{ij} dado que $a_{I(I)} = c_{I(I)}$ y $a_{IJ} = 2c_{I(I)}$ para $I \neq J$

Ahora bien utilizando coordenadas cartesianas, la densidad energía deformación queda expresada en términos de un tensor c_{ijkl} de la siguiente manera.

$$2V = c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \dots\dots\dots (2.49)$$

Donde la propiedad de simetría en el tensor de 4º orden hace que quede como:

$$\varepsilon = \sum \varepsilon_{ij} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j \dots\dots\dots (2.50)$$

Y la ley de Hooke o la ecuación constitutiva final para un cuerpo isotrópico viscoelástico es:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \dots\dots\dots (2.51)$$

II.8.3 Densidad de energía para la relación constitutiva.

Una forma para encontrar la función de densidad de energía de deformación, es mediante la convolución y para encontrar la relación esfuerzo – deformación mediante

la función de relajación, es con la convolución del tensor de deformaciones y la función de relajación que es un tensor.

La relación esfuerzo deformación es:

$$\sigma_{ij} = \psi_{ijkl} * \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial t} \dots \dots \dots (2.52)$$

Sin embargo, esta ecuación no determina la energía almacenada que necesitamos encontrar para relacionar con la memoria

Donde ψ_{ijkl} son los componentes del tensor de relajación, tal que

$$\psi_{ijkl} = G_{ijkl}(t, 0)H(t) \dots \dots \dots (2.53)$$

Donde H (t) es una función escalón o Heavy - side que significa que antes de t=0 H (t) era nula, entonces

$$\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t - \tau_2, 0) \frac{d\tau_2}{dt} \epsilon_{kl}(\tau_2) d\tau_2 \dots \dots \dots (2.54)$$

se convierte en

$$\sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \dot{D} \dots \dots \dots (2.55)$$

$$\text{Donde } \dot{D} = -\frac{1}{2} \iint_{-\infty}^t G_{ijkl}(t - \tau_1, t - \tau_2) \frac{d\tau_1}{dt} \epsilon_{ij}(\tau_1) \frac{d\tau_2}{dt} \epsilon_{kl}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \dots \dots \dots (2.56)$$

que representa el cociente de densidad de energía disipada.

Como la ecuación 2.72 no determina la energía almacenada, esta no puede obtenerse de la relación esfuerzo deformación, sin embargo si asumimos que

$$G_{ijkl}(t, \tau_1) = \overset{0}{\psi}_{ijkl}(t, \tau_1) \dots \dots \dots (2.57)$$

$$\text{Entonces } \psi_{ijkl} = \overset{0}{\psi}_{ijkl}(t, \tau_1)H(t) \dots \dots \dots (2.58)$$

y sustituyendo en las ecuaciones 2.50 y 2.56 tenemos que

$$V(t) = - \iint_{-\infty}^t \psi_{ijkl}^0(2t - \tau_1 - \tau_2) \frac{d\tau_1}{dt} \epsilon_{ij}(\tau_1) \frac{d\tau_2}{dt} \epsilon_{kl}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \dots\dots\dots (2.59)$$

Y

$$\dot{D} = -\frac{1}{2} \iint_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} \psi_{ijkl}^0(t - \tau_1, t - \tau_2) \frac{d\tau_1}{dt} \epsilon_{ij}(\tau_1) \frac{d\tau_2}{dt} \epsilon_{kl}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \dots\dots\dots (2.60)$$

Estas expresiones describen la energía almacenada en el resorte y disipada en el amortiguador.

Ahora bien comenzamos con las ecuaciones para las ondas en medios viscoelásticos

II.8.4 Propagación de onda en un medio viscoelástico

Antes de comenzar a definir los diferentes modelos con lo que se atenúa la onda debemos primero definir como se propaga la onda a través de un medio viscoelástico en una dimensión, para lo cual hemos acentuado la dependencia de la relación esfuerzo deformación con la frecuencia, sin embargo el modulo para los modelos de atenuación como veremos más adelante es complejo y depende de igual manera de la frecuencia. Ref. [4]

Supongamos la ecuación de desplazamiento de una onda plana como:

$$u = u_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

Donde $k = \frac{\omega}{v_x}$ que representa el vector numero de onda complejo en dirección x .

De la ecuación de newton podemos encontrar la ecuación de balance entre la superficie y las fuerzas de inercia

$$\frac{d\sigma(l)}{dt} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.61)$$

Y la relación de dispersión es:

$$Mk^2 = \rho\omega^2 \dots\dots\dots (2.62)$$

El cual para ondas que se propagan con k complejo y ω real tenemos una velocidad compleja.

$$v_c(\omega) = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{M(\omega)}{\rho}} \dots\dots\dots (2.63)$$

Siendo el vector numero de onda complejo $k^* = k - i\alpha$, siendo k el vector numero de onda tradicional y $\alpha = -\omega \text{Im}(\frac{1}{v_c})$ el factor de atenuación o vector de atenuación.

Podemos escribir la ecuación de onda plana como

$$u = u_0 e^{(-\alpha x)} e^{i(\omega t - kx)} \dots\dots\dots (2.64)$$

La velocidad de fase queda definida como:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = [\text{Re}(\frac{1}{v_c})]^{-1} \dots\dots\dots (2.65)$$

Y el factor de atenuación queda como:

$$\alpha = -\omega \text{Im}(\frac{1}{v_c}) \dots\dots\dots (2.66)$$

III. Metodología

En este capítulo se realiza una revisión de los métodos de solución utilizados para resolver la propagación de ondas en un medio viscoelástico isótropo cilíndrico y tomar en cuenta los modelos de atenuación y la teoría viscoelástica.

Antes de comenzar es necesario hacer una revisión y descripción de una de las herramientas más importantes en el repertorio de un geofísico. Hasta ahora, hemos definido a la ecuación de onda como una función que depende del espacio y el tiempo, sin embargo, en ocasiones resulta práctico cambiar de dimensión y trabajar en el dominio espacio-frecuencia, para ello, nos basamos en la hipótesis fundamental de que cualquier serie en el tiempo puede ser descompuesta y fragmentada en la suma o la integral de ondas armónicas con diferentes frecuencias, decimos entonces que aplicamos el análisis de Fourier.

III.1 Análisis de Fourier.

En el estudio de la tierra, una de las herramientas del geocientífico y el único medio indirecto con el que cuenta para el estudio del subsuelo, es la señal producto de las estructuras geológicas, ya sean señales magnéticas, gravimétricas o la respuesta producto de una onda que viaja en la tierra producidas por una fuente transitoria generada. El análisis de Fourier permite analizar o sintetizar una señal e interpretar diversos parámetros, lograr un manejo más amigable de los datos para estimar una respuesta. En el concepto fundamental se tiene una serie en el dominio del tiempo, puede ser una serie de ondas armónicas y considerar cada serie armónica por separado para después realizar una operación de síntesis.

III.1.1 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una señal temporal permite expresar a la señal como una superposición continua de señales armónicas de frecuencias variables con amplitud dependiendo de cada frecuencia.

Matemáticamente se define como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \dots\dots\dots (3.1)$$

Donde $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función $f(t)$. La transformada inversa se define como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \dots\dots\dots (3.2)$$

Se había señalado que la ecuación de onda plana admite soluciones de la forma $f(t - \frac{x}{c})$, si aplicamos este corrimiento en el tiempo a la definición de la transformada inversa de Fourier se tiene:

$$f(t - \frac{x}{c}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} d\omega \dots\dots\dots(3.2 a)$$

Y como $e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} = e^{-i\omega x/c} e^{i\omega t}$, se suele llamar al primer término propagador o función de transferencia. Si además se considera la velocidad compleja, como podría ser el caso de la ecuación de onda en un medio viscoelástico, este término puede ser un factor de atenuación. La función de transferencia es un ente matemático que propaga la solución a través del medio. La función $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de la señal que perturba el medio.

Generalmente, la función de transferencia se ve afectada por factores que contienen información sobre las amplitudes que sufre la onda cuando viaja en el medio. La función de transferencia es un operador que permite conocer la solución en la posición de interés. Suele representarse comparando su modulo contra la frecuencia.

Si bien no existe un método de solución universal para resolver el problema de propagación de ondas en medios viscoelásticos. Pero existe una metodología a seguir para encontrar el campo de desplazamientos o esfuerzos en el medio a partir de soluciones en el dominio de la frecuencia. Porque al desarrollar la función de

transferencia, ésta debe convolucionarse con la excitación en el dominio de la frecuencia.

La convolución de funciones es un concepto matemático que se define como:

$$h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t - \tau)d\tau \dots\dots\dots (3.3)$$

Al aplicarse este teorema a la definición de la transformada de Fourier, se encuentra que si $F(\omega)$ y $H(\omega)$ son las transformadas de Fourier de $f(t)$ y $h(t)$ respectivamente, entonces la convolución de ambas funciones tiene como transformada al producto $F(\omega) H(\omega)$, es decir, la convolucion de 2 funciones en el dominio del tiempo se transforma en una multiplicación (en numeros complejos) punto a punto en el dominio de la frecuencia.

Una vez hecha la convolución entre la función de transferencia y la señal de excitación, basta con aplicar a dicho producto la transformada inversa de Fourier, la función que se obtenga será la respuesta del medio en el punto de estudio. A este resultado se le conoce como sismograma sintético y representa la respuesta del medio en el dominio del tiempo.

3.1.2 Transformada Discreta de Fourier

Debido a que en la práctica los cálculos numéricos se hacen a través de programas, es necesario discretizar las expresiones de la transformada de Fourier y de la transformada inversa. Así, definimos respectivamente a la transformada discreta de Fourier como:

$$F(\omega_j) = F_j = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t)e^{-i\omega_n n\Delta t} \dots\dots\dots (3.4)$$

Donde Δt es la tasa de muestreo y N es el número de puntos que tiene la señal de interés. La transformada inversa discreta de Fourier se define como:

$$f(t_n) = f(n\Delta t) = f_n = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{i\omega_j n\Delta t} \dots\dots\dots (3.5)$$

La representación grafica de la transformada de Fourier suele hacerse como el modulo de cada uno de los valores de la función $F(\omega)$ en función de la frecuencia, es decir, $|F(\omega)|$ contra ω , a dicha grafica se le conoce como el espectro de Fourier e indica la manera en que la energía varia respecto a la frecuencia.

III.2. Pulso de Ricker

En este trabajo ocupamos el pulso de Ricker, este pulso permite un control directo, determina la eficiencia del muestreo y además, se puede identificar de manera sencilla, así pues, resulta el pulso apropiado para excitar un modelo con énfasis en una frecuencia cualquiera. Analíticamente el pulso de Ricker se define como:

$$r(t) = (a^2 - \frac{1}{2})e^{-a^2} \dots\dots\dots (3.6)$$

Donde $a = \frac{\pi(t-t_s)}{t_p}$ donde t_p es el periodo característico del pulso y t_s define el centro del pulso, la duración de la parte central del pulso es $\frac{\sqrt{6} t_p}{\pi}$.

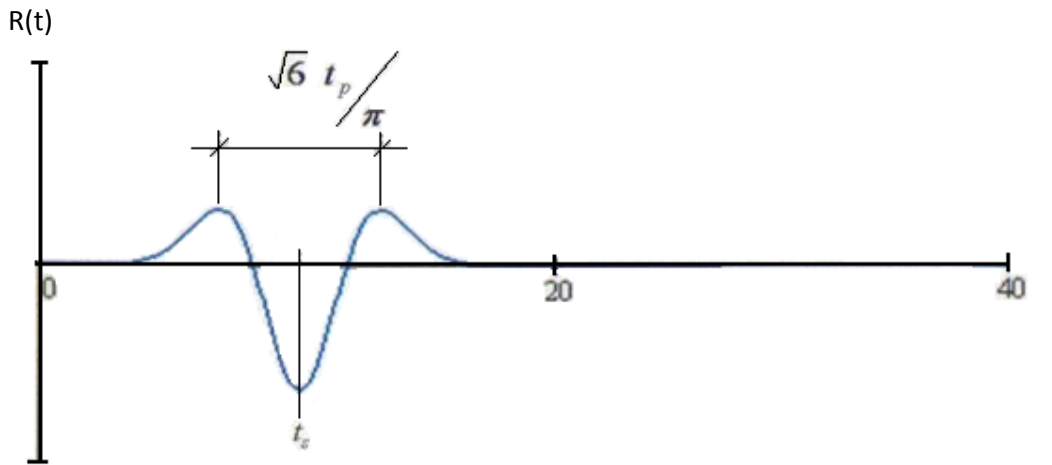


Figura 3.1 Pulso de Ricker en el dominio de tiempo.

Mediante la transformada de Fourier se puede encontrar que la expresión del pulso de Ricker para el dominio de la frecuencia es:

$$R(\omega) = -\frac{t_p}{\sqrt{\pi}} b^2 e^{-i\omega t} \dots\dots\dots (3.7)$$

Donde $b = \omega/\omega_p$, y $\omega_p = 2\pi f_p = 2\pi/t_p$, donde f_p es la frecuencia de energía máxima conocida como frecuencia característica. Para que la respuesta de un sistema sea significativa, es necesario que la función de transferencia del modelo y el pulso que lo excita presenten energía en el mismo intervalo de frecuencias.

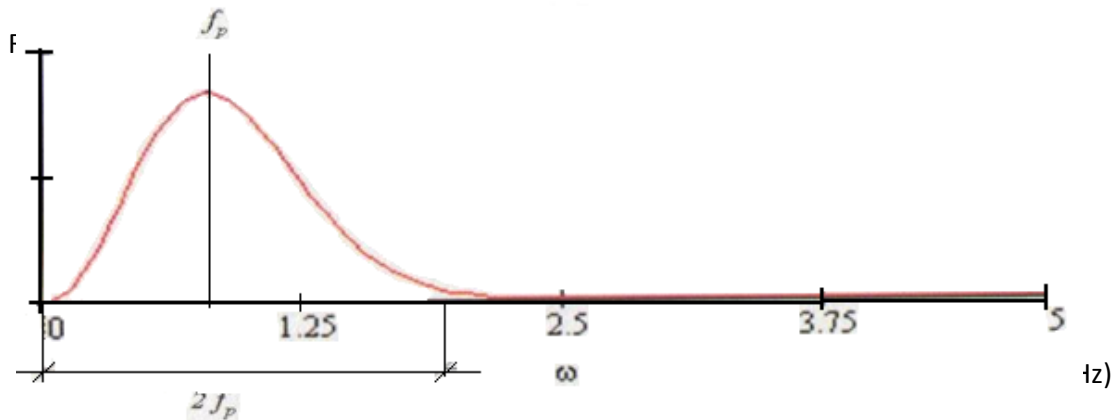


Figura 3.2 Pulso de Ricker en el dominio de la frecuencia.

III.3 Método de Diferencias Finitas

A continuación se presenta en una descripción del método de diferencias finitas para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. El marco teórico es general y es aplicable a problemas de ecuación de onda propios de sismología de exploración.

El método es esencialmente parecido a una simulación de laboratorio usando un modelo a escala, tiene mayores ventajas sobre otros métodos en cuanto a exactitud de resultados, facilidad para preparar el modelo de estudio y la facilidad para crear la fuente y los mecanismos de reducción del efecto de fronteras artificiales impuestas, estas con un carácter finito en los modelos. Todo esto sin ninguna otra dificultad que un programa de computadora.

Dicho programa es posible gracias al proceso de discretización, logrando representar funciones o funciones incógnitas continuas y mediante la discretización con un conjunto finito de números que reemplazan un número finito de parámetros incógnita. Entre las diferentes formas de discretización posibles existen los elementos finitos, volúmenes finitos, etc. En este apartado estudiaremos uno de los métodos más simples, el método de diferencias finitas.

Este método ofrece un camino directo para calcular los movimientos, a partir del problema formulado, en términos de las ecuaciones básicas vistas en el capítulo anterior y las condiciones iniciales y de frontera, implica un mínimo de esfuerzo analítico mediante el empleo intensivo de computadoras digitales. El método es en general flexible, puede ser aplicado a cualquier cuerpo inhomogéneo de forma virtual y arbitraria. El tamaño y la complejidad de un problema que puede ser resuelto con este método está limitado por la capacidad de cómputo disponible. Por ello es de gran importancia contar con algoritmos que minimicen la cantidad de memoria requerida y el tiempo de cómputo. Un algoritmo eficiente debe explotar al máximo la simetría de un problema, la simplificación de las ecuaciones básicas, las condiciones de frontera que se alojan para la exactitud deseada y las opciones óptimas de configuraciones para rejillas, formas de diferencias finitas y condiciones en las fronteras artificiales.

Para nuestro caso en particular con la finalidad de reducir el tiempo de computación de las simulaciones, se supone que las propiedades de los medios son iguales sobre un cilindro centrado en el eje de axisimetría. La ventaja de desarrollar un código de diferencias finitas reside en el hecho de que los estudios de propagación de ondas se pueden efectuar para un medio más realista

El proceso general de aplicación consiste en, primero, discretizar el dominio del problema mediante una malla, tomando en cuenta las condiciones de estabilidad, la aproximación de las derivadas de las ecuaciones que rigen el fenómeno mediante el esquema de diferencias finita, establecer las condiciones iniciales y de frontera, el planteamiento del sistema de ecuaciones en diferencias finitas y por último el cómputo de los resultados:

Se puede clasificar el método según el tipo de discretización que se emplee en; Métodos de mallado regular o irregular, según se realice el discretización del dominio. También se pueden clasificar como métodos implícitos o explícitos. Los métodos implícitos son aquellos que conllevan la resolución de un sistema de ecuaciones, mientras que los explícitos evitan la resolución de sistemas y permiten el cálculo de la solución de una manera iterativa. También se cuenta con diferentes tipos de rejilla, como la convencional y la desplazada. La rejilla convencional es empleada con representaciones en desplazamientos, mientras que las rejillas desplazadas se emplean con formulaciones en desplazamientos-esfuerzos o velocidad-esfuerzos.

III.3.1 El teorema de Taylor

El primer paso o etapa para establecer un esquema de diferencias finitas para resolver una ecuación en derivadas parciales, es sustituir el dominio conjunto del problema original por un modelo discreto, es decir, una malla o rejilla. A modo de ejemplo se analiza el caso más sencillo de una función dependiente de una variable espacial, es el caso unidimensional.

Sea $u(x)$ una variable continua dependiente, se puede pasar a un dominio discreto como $u(i \cdot \Delta x)$, o mediante la notación con subíndices como u_i . Así se pueden referenciar los distintos puntos de discretización como se muestra en la figura 3.1.

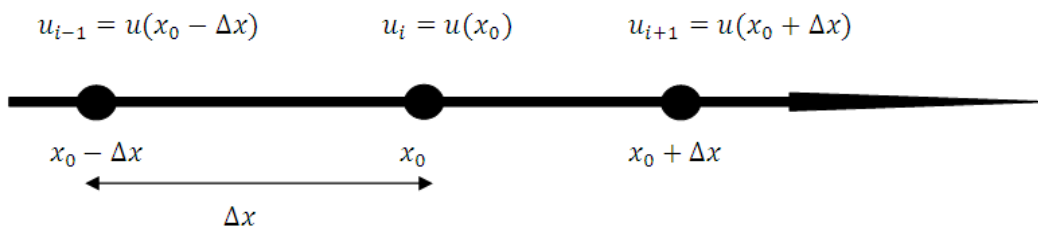


Figura 3.3 Discretización espacial en una dimensión (Pérez Ruiz, Ja y Luzón Martínez F).

La idea de la aproximación por diferencias finitas para una derivada se puede extraer de la propia definición de derivada como tal es; $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}$, donde se tiene la aproximación para el valor de la derivada respecto de u con respecto de x , en torno de x_0 . No obstante, una manera más formal de desarrollar este tipo de

aproximaciones se puede conseguir mediante la aplicación del desarrollo en series de Taylor. Al desarrollar una expansión en esta serie se tiene de la forma:

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0} \cdot \frac{\Delta x}{2!} + \dots + \left. \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \right|_{x_0} \cdot \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} + \left. \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right|_{\xi} \cdot \frac{(\Delta x)^n}{n!} \dots \dots \dots (3.8)$$

Con límites en $x_0 \leq \xi \leq x_0 + \Delta x$, la letra ξ es un punto intermedio donde se evalúa $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ y donde el último término de la ec .3.8 es el dominado resto de la expansión. Una vez que se tiene este desarrollo se puede extraer lo que se conoce con diferencia “hacia adelante”, reordenando la ecuación anterior como:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0} = \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} - \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_0} \cdot \frac{\Delta x}{2!} + \dots \dots \dots (3.9)$$

Empleando una notación más usual, a través de índices quedaría:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \dots \dots \dots (3.10)$$

El error de truncamiento $O(x)$ se define como la diferencia entre la derivada parcial y su representación con diferencia finita.

Existe un número infinito de representaciones para la derivada de u , dependiendo del la expansión en serie de Taylor, así se puede encontrar el llamado esquema “hacia atrás” sin más que aplicar el siguiente desarrollo de Taylor,

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0} \Delta x + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_0} \cdot \frac{\Delta x}{2!} + \dots + \left. \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right|_{\xi} \cdot \frac{(\Delta x)^n}{n!} \dots \dots \dots (3.11)$$

Simplificando se obtiene

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \dots \dots \dots (3.12)$$

Restando los dos desarrollos anteriores, ec. 3. 11 3.12 y reordenando los términos, se encuentra el llamado esquema “centrado”:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \dots\dots\dots (3.13)$$

Si en lugar de restarlas se suman y se reordenan se obtiene una aproximación “centrada” para la segunda derivada

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^2 \dots\dots\dots (3.14)$$

Existen diversos desarrollos para obtener diferentes esquemas que aproximan con distinto orden de error las sucesivas derivadas. A continuación muestro algunos ejemplos de estos esquemas

Derivada	Aproximación en DF	Orden de Error
$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right _i$	$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$	$O(\Delta x)$
	$\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$	$O(\Delta x)$
	$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$	$O(\Delta x)^2$
$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right _i$	$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{-u_{i+2} + 16u_{i+1} - 30u_i + 1}{\Delta x^2}$	$O(\Delta x)^4$
$\left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right _i$	$\frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + 4u_i + 2u_{i-1}}{2\Delta x^3}$	$O(\Delta x)^2$

Tabla 3.1. Algunos esquemas de derivadas en diferencias finitas.

El método de DF resulta laborioso para lograr explotar el máximo de eficiencia es por eso que en ocasiones para un problema complejo resulta, hablando en términos computacionales, sumamente costoso y el desarrollo del algoritmo se vuelve una tarea complicada y difícil, es por eso que recientemente se han realizado algunas modificaciones al método de DF tratando de aprovechar al máximo su esquema.

III.4 Número de Onda Discretizado.

El método de DWN mediante la solución y evaluación de la función de Green fue introducida por Bouchon y Aki. La evaluación de funciones de Green para medios elásticos y acústicos es un problema, que por su importancia, ha sido estudiado en repetidas ocasiones, desde el trabajo pionero de Lamb (1904), muchas aproximaciones han sido propuestas para evaluar la respuesta de sólidos elásticos excitados por una fuente puntual transitoria. Los métodos concebidos para el cálculo de las funciones de Green son, sin embargo, muy complejos o que proporcionan sólo soluciones aproximadas. El método de onda discretizado, introducido por Bouchon y Aki (1977), proporciona una forma de calcular acertadamente la función de Green completa para muchos problemas con un mínimo de matemáticas.

El principio del método se puede llevar hasta Rayleigh, quien demostró que las ondas reflejadas por una superficie sinusoidal corrugada se propagan solo a ángulos discretos, los cuales describió los órdenes del espectro (Rayleigh, 1896, 1907). La existencia de órdenes discretos en el espectro horizontal del número de onda es una consecuencia inmediata de la periodicidad de la superficie reflectora. Aki y Larner, en 1970, extendieron la aproximación de Rayleigh para estudiar la dispersión de ondas planas en la vecindad de una superficie irregular periódica utilizando frecuencias en dominios complejos. De la misma forma, el número de onda discretizado, introduce una periodicidad espacial de fuentes para discretizar el campo ondulatorio radiado, que se apoya en la transformada de Fourier en el dominio de la frecuencia compleja para calcular las funciones de Green.

III.4.1 Teoría básica del DWN

Consideremos la onda esférica, que admite una expresión integral de la forma (ver Bouchon, 2003)

$$\frac{e\left(-\frac{i\omega R}{c}\right)}{R} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} H_0^{(2)}(\eta r) dk \dots\dots\dots(3.15)$$

Donde $i = \sqrt{-1}$, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r = R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\eta = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2}$

$Im(\eta) < 0$, $H_m^{(2)}$ Es la función de Hankel de segunda especie de orden cero y c es la velocidad de las ondas en el fluido, y suponiendo que hay un número infinito de fuentes de ondas esféricas separadas por una distancia L , es posible transformar la integral de la ec. (3.15) en una suma de la forma:

$$\frac{e\left(\frac{i\omega R}{c}\right)}{R} = \frac{-i}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m H_0^{(2)}(\eta_m r) \cos(k_m z) \Delta k - \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} R_m^{-1} e^{\left(\frac{-i\omega R_m}{c}\right)} \dots\dots\dots (3.16)$$

Donde

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}, \eta_m = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_m^2}, \quad Im(\eta_m) < 0 \quad \Delta k = \frac{2\pi}{L} \quad \text{y } k_m = m\Delta k.$$

Se supone que L es tan grande como sea necesario para que la ventana de tiempo considerada no registre la llegada de las fuentes localizadas en $\pm mL$.

La interpretación física de la ecuación 3.19 consiste en que la onda esférica que esta expresada en el lado izquierdo, se descompone en la superposición continua de ondas planas o cilíndricas homogéneas e inhomogéneas que se mueven a lo largo del eje z y ondas cilíndricas que lo hacen a lo largo de la dirección radial r , el conjunto corresponde a un patrón cónico. En la figura 3.5 se ilustra esquemáticamente esta descomposición.

El sistema de ecuaciones que resulta de considerar las condiciones de frontera en las ecuaciones de movimiento se resuelve en el dominio de la frecuencia. La suma de las ondas se hace mediante una integración, que puede tener polos y singularidades. Con la finalidad de evitarlas, además, esto se logra añadiendo una parte imaginaria constante a la frecuencia y por ello las ondas que vienen desde ese arreglo periodico están amortiguadas.

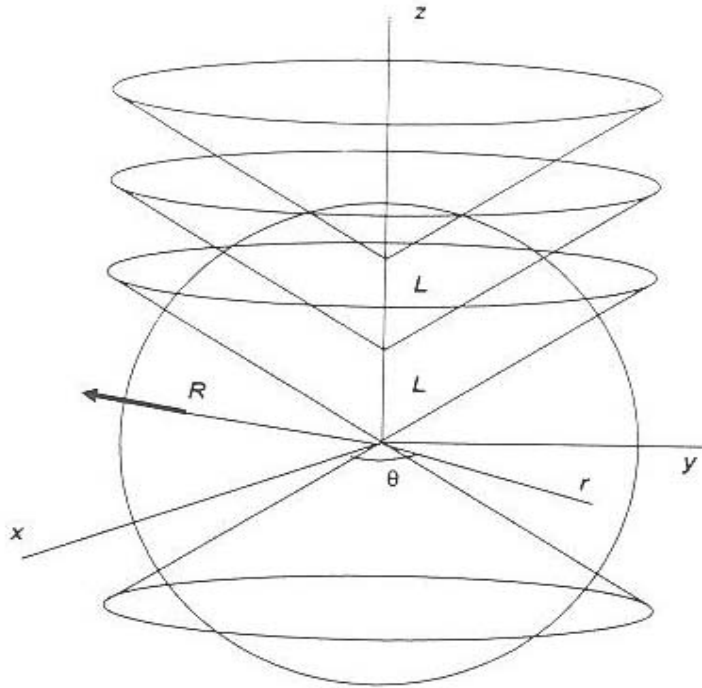


Figura 3.5. Descomposición de una onda esférica en una superposición de ondas cónicas.

Considerando las ecs. (3.15) y (3.16), el potencial de la fuente se puede expresar de la forma:

$$\Phi_F^0 = S(\omega) \frac{e^{-i\omega R/c}}{R} = S(\omega) \frac{1}{2i} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m H_0^{(2)}(\eta_m r) \cos(k_m(z - z_s)) \Delta k$$

Donde $S(\omega)$ es la transformada de Fourier del pulso disparado en la fuente (x_s, y_s, z_s) es la posición de la fuente, $R = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}$, $\omega = \omega_R - i \frac{\pi}{T_W}$, y los otros parámetros se toman como fueron definidos con anterioridad. En general el método de número de onda discretizado se basa en parte en el teorema de Schwarz, el cual nos ayuda a representar un fenómeno mediante la suma de fuentes continuas, esto implica tener la repetición de las fuentes, es por esto que es necesario un sistema de amortiguamiento virtual, para las fuentes que deben de estar suficientemente alejadas para que su efecto sea mínimo.

III.5 Diferencias Finitas Vs DWN.

En este capítulo se presento la teoría básica de los métodos de DF y DWN, cada uno de estos métodos tienen sus ventajas y desventajas, entre las principales ventajas del método de DWN sobre DF podemos mencionar la velocidad de cálculo, costo de computo y una mayor facilidad en el planteamiento, sin embargo es necesario revisar las fuentes periódicas producto de la teoría del método, para el método de DF podemos decir la potencia de cálculo, capacidad para incluir mayores parámetros y mayor complejidad en la geometría.

Son 2 alternativas para la solución de la propagación de onda en medios cilíndricos, ambos métodos utilizan parámetros similares para el diseño de la geometría y fuente, entre las principales diferencias podemos contar el principio de programación, el dominio en el que se resuelven las variables y en especial para el método de DWN el empleo de frecuencias complejas para amortiguar las ondas producto de las fuentes virtuales, este procedimiento es equivalente a utilizar un sistema de amortiguamiento virtual para las fronteras, es por ello que el programa de DWN requiere algunos parámetros mas para realizar el cálculo.

Sin importar las diferencias, cuando 2 métodos están debidamente programados y ambos se suponen correctos la prueba a superar es la similitud en los resultados obtenidos, es por ellos que un método sirve en este trabajo para comparar con el otro, lo ideal, seria comparar ambos métodos con un registro sónico real para posteriormente realizar un proceso de inversión de datos sónico, esto implicaría tener una matriz de sensibilidades y de parámetros correctos para dicho proceso, sin embargo por el momento escapa del objetivo, el cual es mostrar la atenuación en la propagación de ondas en medios cilíndricos con cavidades inmersas en un fluido.

IV. Modelos de Atenuación

A continuación se muestran las características generales de los distintos modelos de atenuación que existen para representar la propagación de ondas en materiales reales y no idealizados como las rocas y algunos fluidos.

IV.1 Parámetros básicos de los modelos de atenuación.

IV.1.1 Función de relajación.

Se puede obtener midiendo el esfuerzo después de imponer una constante por unidad de deformación en una muestra relajada del medio.

Para encontrar la función de relajación primero recordando la ley de Hooke para un caso sin pérdida es $\sigma = M_e \epsilon$ y la función de relajación para este caso es:

$$\psi(t) = M_e H(t) \dots\dots\dots (4.1)$$

Donde M_e es la constante de lamé λ y $H(t)$ es una función escalón o Heavy-side, que significa que antes de $t=0$, la función $H(t)$ era nula.

Sabemos que en la relación viscoelástica, el esfuerzo es proporcional a la deformación, y que se puede expresar como la convolución de la función de relajación con la derivada temporal del tensor de deformaciones, esto es:

$$\sigma = \psi * \frac{d}{dt} \epsilon(t) = \frac{d}{dt} \psi(t) = M_e \delta(t) * \epsilon = M_e \epsilon \dots\dots\dots (4.2)$$

Ahora para el caso con pérdida tenemos

$$\sigma = \psi * \frac{d}{dt} \epsilon(t) \dots\dots\dots (4.3)$$

$$\text{Donde } \psi(t) = \overset{0}{\psi} H(t) \dots\dots\dots (4.4)$$

$$\sigma = \psi * \frac{d\varepsilon}{dt} \dots\dots\dots (4.5)$$

Entre las propiedades que cuenta una función de relajación, es que debe ser causal, positiva y real además de presentar un comportamiento decreciente con el tiempo.

IV.1.2 Función de aumento

La dependencia de la deformación con el tiempo resultado de la aplicación de un esfuerzo uniaxial constante.

$$\varepsilon(t) = \frac{d\chi(t)}{dt} * H(t) = \chi(t) * \delta(t) = \chi(t) \dots\dots\dots (4.6)$$

También se puede ver como

$$\sigma = \frac{d}{dt} \psi(t) * \varepsilon = \frac{d}{dt} \chi(t) * \sigma = \left(\frac{d}{dt} \psi(t) * \frac{d}{dt} \chi(t)\right) * \sigma \dots\dots\dots (4.7)$$

Tenemos la propiedad que:

$$\frac{d}{dt} \psi(t) * \frac{d}{dt} \chi(t) = \delta(t) \dots\dots\dots (4.8)$$

Y $M(\omega)J(\omega) = 1$, donde $J(\omega) = \mathcal{F}|\chi(t)|$ es el modulo complejo de aumento flexible.

Ahora si $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\chi}{dt}$ es finito, ocurre una deformación después de aplicar un campo de esfuerzos, este comportamiento esta relacionado a los fluidos viscoelasticos, si dicho limite es 0 el material es un solido viscoelásticos si $\chi \rightarrow \infty \psi \rightarrow 0$.

IV.1.3 Tiempo de relajación

El tiempo de relajación (τ) o de respuesta del sistema, físicamente representa el tiempo necesario en el cual el esfuerzo caiga exponencialmente hasta su valor inicial, así mismo es el tiempo en el cual la función de esfuerzo pasa a través de un punto de inflexión.

IV.1.4 Modulo complejo, de pérdida y almacenamiento

El Modulo complejo es el cociente de desfaseamiento entre el esfuerzo y la deformación, el modulo complejo representa la transformada de Fourier de la función de relajación, la transformada de Fourier de la ecuación 4.3.

$$\mathcal{F}|\sigma(\omega)| = M(\omega)\mathcal{F}|\epsilon(\omega)| \dots\dots\dots (4.9)$$

Donde \mathcal{F} es el operador de la transformada de Fourier. Ahora tenemos que:

$$M(\omega) = \mathcal{F} \left[\frac{d\psi(\omega)}{dt} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{dt} e^{-i\omega t} dt \dots\dots\dots (4.10)$$

Es el modulo complejo ya que $\frac{d\psi}{dt} = \delta(t)\psi^0 + \delta(t)\psi^0 H(t)$

$$M(\omega) = \psi(0^+) + \int_0^{\infty} \frac{d\psi(t)}{dt} e^{-i\omega t} dt \dots\dots\dots (4.11)$$

Si separamos $M(\omega)$ en su parte real e imaginaria tenemos que

$$M(\omega) = M_1(\omega) + M_2(\omega) \dots\dots\dots (4.12)$$

Donde la parte real representa el modulo de almacenamiento y la parte imaginaria representa el modulo de pérdida, esto es:

$$M_1(\omega) = \omega \int_0^{\infty} \sin(\omega t) dt \dots\dots\dots (4.13)$$

es el modulo de almacenamiento

$$M_2(\omega) = \omega \int_0^{\infty} [\psi(t) - \psi(\infty)] \cos(\omega t) dt \dots\dots\dots (4.14)$$

es el modulo de perdida

Entre algunas de las propiedades del modulo complejo se encuentran; su parte real e imaginaria deben de ser diferentes con 0, su límite inferior y superior debe ser real y coincidir con los valores de la función de relajación en sus partes relajada y no relajada, el par transformado de Hilbert es su parte real e imaginaria

IV.2 Modelo de atenuación de Maxwell.

Uno de los pioneros en darse a la labor de formular las bases de la viscoelasticidad lineal, fue Maxwell en el año de 1867 quien publicó su representación de uno de los modelos más sencillos de atenuación, la combinación de elementos mecánicos sencillos colocados en serie, como se ve en la figura 4.1 estos elementos son un resorte y un amortiguador. Con esto se logra que las deformaciones que se producen en cada elemento y en la parte inferior sea la suma total de las deformaciones en los elementos.

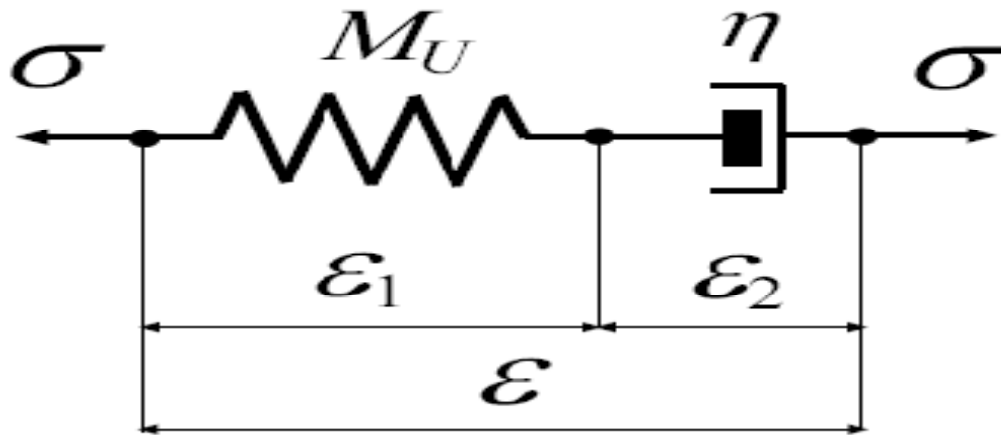


Figura 4.1. Muestra la representación mecánica del modelo de Maxwell para la atenuación.

IV.2.1 Relaciones esfuerzo deformación

La relación entre el esfuerzo y la deformación para este modelo mecánico en la parte del resorte está dada por la ecuación:

$$\sigma = M_u \epsilon_1 \dots\dots\dots (4.15)$$

En el resorte donde M_u es la constante elástica del resorte que representa la respuesta instantánea del sistema no relajado para el resorte. La relación constitutiva para el amortiguador con $\eta \geq 0$, siendo η el factor de viscosidad, es:

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon}_2 \dots\dots\dots (4.16)$$

La elongación final del sistema $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, la relación esfuerzo deformación para el modelo Maxwell.

$$\frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{1}{M_u} + \frac{\sigma}{\eta} = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \dots\dots\dots (4.17)$$

Cuya transformada de Fourier es $\sigma(\omega) = M(\omega)\varepsilon(\omega)$ (4.18)

Donde $M(\omega) = \frac{\omega\eta}{\omega\tau - i}$ (4.19)

es el modulo complejo con $\tau = \frac{\eta}{M_u}$ (4.20)

La función de relajación y de aumento para el modelo de Maxwell quedan definidas como: $\psi(t) = M_u e^{\left(\frac{-t}{\tau}\right)} H(t)$ (4.21)

$$\chi(t) = \frac{1}{M_u} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) H(t) \dots\dots\dots (4.22)$$

El modelo Maxwell tiene un cociente de relación esfuerzo energía $V = \frac{\sigma^2}{2k_u}$ (4.23)

Con un factor de calidad igual a $Q(\omega) = \omega\tau$ (4.24)

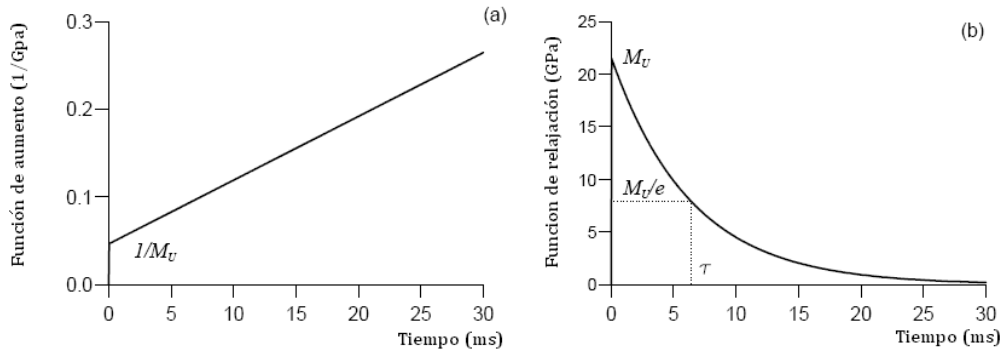


Figura 4.2. La grafica a) muestra el comportamiento de la función de aumento para el modelo de Maxwell mientras que la grafica b) muestra el comportamiento de la función de relajación para el mismo modelo, M_u es el modulo con tensión del resorte.

El hecho de que el modelo de Maxwell sea el más apropiado para representar un fluido viscoelástico, es debido a la cantidad y simplicidad de sus elementos.

En la grafica podemos ver como el factor de calidad es directamente proporcional a la frecuencia y al tiempo de relajación del material, lo que nos puede dar una idea de la proporción entre la atenuación de la onda en función de la frecuencia angular, a mayor frecuencia angular mayor dispersión por lo tanto menor amplitud en el tiempo, también del tiempo que se tarda el material en disipar la energía que atraviesa en forma elástica.

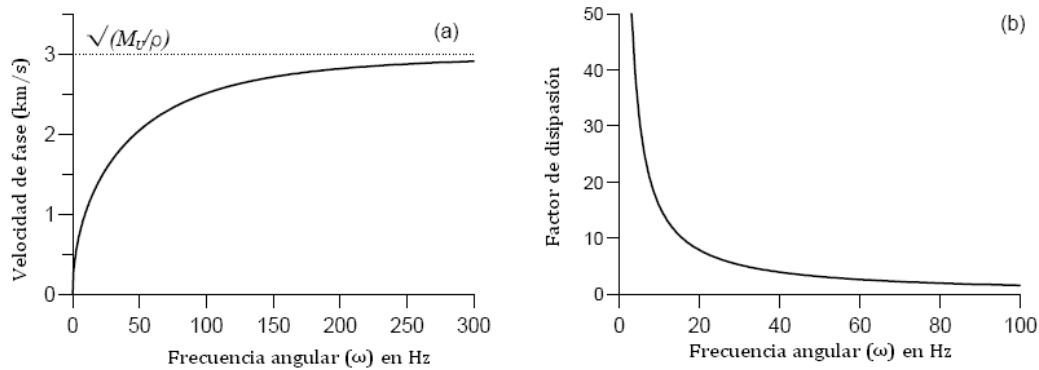


Figura 4.3. a) Velocidad de fase y b) factor de disipación para el modelo de Maxwell con los siguientes datos $M_u = \rho c^2$, $\rho = 2.4 \frac{gr}{cm^3}$, $c = \frac{3km}{s}$, $\tau = \frac{1}{2\pi f}$, $f = 25$ Hz.

El sistema actúa como un filtro pasa altas, ya que los modos en bajas frecuencias son disipados completamente. La velocidad para un medio elástico se puede obtener en el límite de altas frecuencias, a bajas frecuencias como podemos ver, la propagación es mínima.

Tanto el resorte como el amortiguador sufren la misma fuerza, ya sea en serie o en paralelo, inicialmente la extensión es en el resorte, después el intercambio de la deformación en el resorte al amortiguador para después presentar la relajación en el amortiguador, lo que hace un movimiento más lento el modelo de Maxwell es más apropiado para representar un fluido viscoelásticos. También vale la pena mencionar que una onda en un material cuyo modelo de atenuación es representado por el modelo de Maxwell presenta una velocidad menor que una onda que viaja en un material sin atenuación.

IV.3 Modelo de atenuación de Kelvin-Voigt.

Lord Kelvin (William Thomson) en el año de 1875 y Woldemar Voigt en 1892, adecuaron un sistema mecánico utilizado para describir los efectos de la anelásticidad. Este modelo resulta muy útil para describir sólidos elásticos puros a altas frecuencias. Es un modelo viscoelástico comúnmente utilizado para atenuar las altas frecuencias características en los materiales metálicos. Consiste de 2 elementos de amortiguamiento conectados en paralelo, esto causa esfuerzos diferentes tanto en el resorte como para el amortiguador.

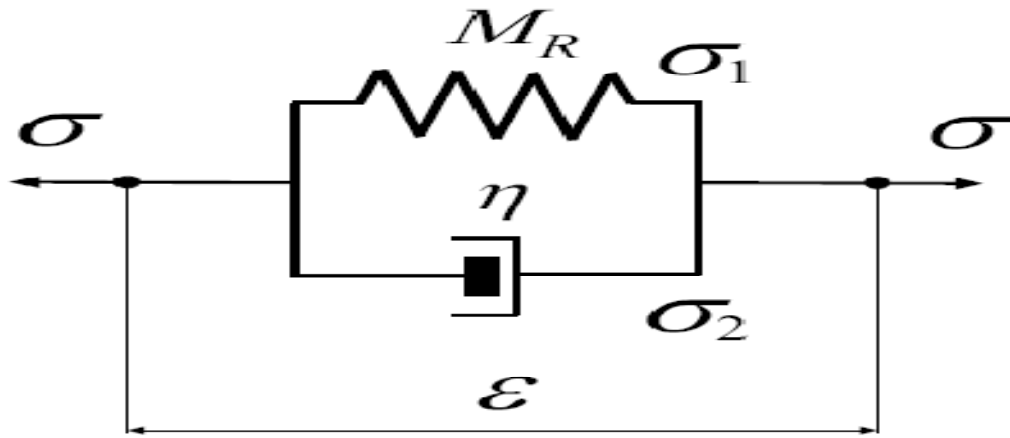


Figura 4.4. Representación mecánica del modelo de Kelvin-Voigt, podemos ver que a diferencia del modelo de Maxwell los elementos están en paralelo.

IV.3.1 Relación constitutiva

El esfuerzo total está compuesto por un esfuerzo elástico en el resorte es:

$$\sigma_1 = M_R \epsilon \dots\dots\dots (4.25)$$

Donde M_R es la constante del resorte, el subíndice R es para “relajado” o sin esfuerzo y la relación constitutiva en el amortiguador involucrando a la viscosidad del elemento de amortiguación, se tiene:

$$\sigma_2 = \eta \frac{d\epsilon(t)}{dt} \dots\dots\dots (4.26)$$

Donde ε es la deformación total del sistema. La relación constitutiva general está dada por la suma total de los esfuerzos

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = M_R \varepsilon_1 + \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \dots\dots\dots (4.27)$$

Ahora bien en función de las constantes elásticas de Lamè tenemos:

$$\sigma_{ij} = \lambda (\sum_i \varepsilon_{ij}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda' (\sum_i \dot{\varepsilon}_{ij}) \delta_{ij} + 2\mu' \dot{\varepsilon}_{ij} \dots\dots\dots (4.28)$$

Donde λ' y μ' son los coeficientes anelásticos. Solo se agrega una atenuación proporcional a la derivada temporal de las deformaciones.

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación 4.27 tenemos:

$$\sigma = (M_R + i\omega\eta)\varepsilon \dots\dots\dots (4.29)$$

Y el modulo complejo es:

$$M(\omega) = M_R + i\omega \dots\dots\dots (4.30)$$

De ahí se puede entonces calcular la función de relajación a partir de la transformada inversa de Fourier de la ec. 4.10. $M(\omega) = \mathcal{F} \left[\frac{d\psi(\omega)}{dt} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{dt} e^{-i\omega t} dt$

$$\psi(t) = M_R H(t) + \eta \delta(t) \dots\dots\dots (4.31)$$

Y una función de aumento:

$$\chi(t) = \frac{1}{M_R} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] H(t) \dots\dots\dots (4.32)$$

$$\text{Donde } \tau = \frac{\eta}{M_R} \dots\dots\dots (4.33)$$

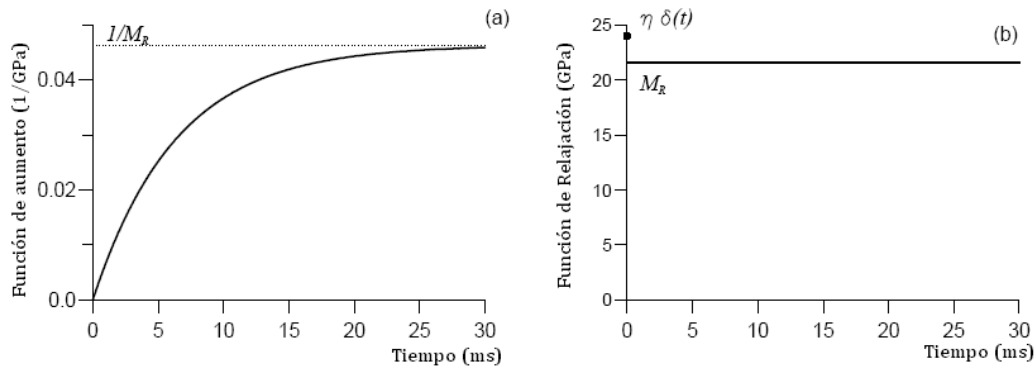


Figura 4.5. a) Comportamiento de la función de aumento, b) comportamiento de la función de relajación para un experimento dado.

La función de relajación no muestra dependencia con el tiempo. El modelo es ideal para materiales sólidos elásticos puros en altas frecuencias. Inicialmente el amortiguador se extiende y comienza a transferir el esfuerzo al resorte, al final, el esfuerzo total esta en el resorte, la función de aumento no muestra instantáneamente dicho impulso o deformación instantánea ya que el amortiguador no se deforma instantáneamente, lo cual no es necesariamente cierto en un medio real. La función de aumento tiende al modulo relajado M_R en el tiempo infinito.

El factor de calidad esta dado por: $Q(\omega) = \frac{1}{\omega\tau}$

Es curioso que en este modelo el factor de calidad sea inversamente proporcional al del modelo de Maxwell, además, la función de relajación no muestra dependencia temporal, es decir, que depende por completo del material por donde se propaga la onda. Vale la pena mencionar que una onda que se propaga en un modelo Kelvin Voigt es más rápida que una onda que se propaga en un material elástico.

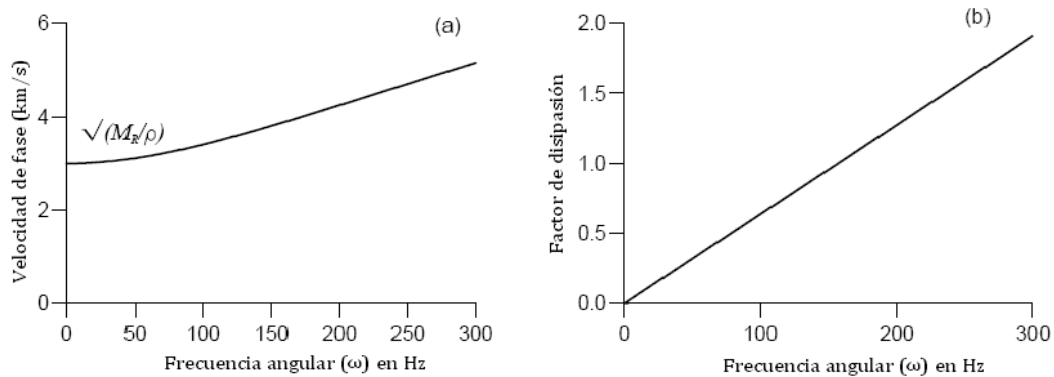


Figura 4.6. Velocidad de Fase a) y b) Factor de Disipación del modelo Kelvin - Voigt.

El sistema actúa como un filtro pasa altas ya que disipa las bajas frecuencias, ideal en experimentos o fenómenos que necesiten una frecuencia ultrasónica. Una onda que se propague en un medio con atenuación Kelvin Voigt es más rápida que la misma onda en un medio elástico.

IV. 4 Modelo de atenuación de Zener.

La combinación entre el modelo de Maxwell y Kelvin Voigt nos otorga la capacidad de describir mejor lo materiales que podemos encontrar comúnmente, rocas, polímeros, etc. Para considerar procesos de anelásticidad o de relajación en fronteras porosas, es necesario representarlos mediante la distribución de picos de relajación, este tipo de picos de relajación puede ser obtenidos considerando elementos tipo Zener ya sea en serie o en paralelo, la velocidad de fase varía desde $\sqrt{\frac{M_R}{\rho}}$ como limite de baja frecuencia y para altas frecuencias tenemos $\sqrt{\frac{M_u}{\rho}}$, el sistema presenta un comportamiento elástico en $Q^{-1} = 0$

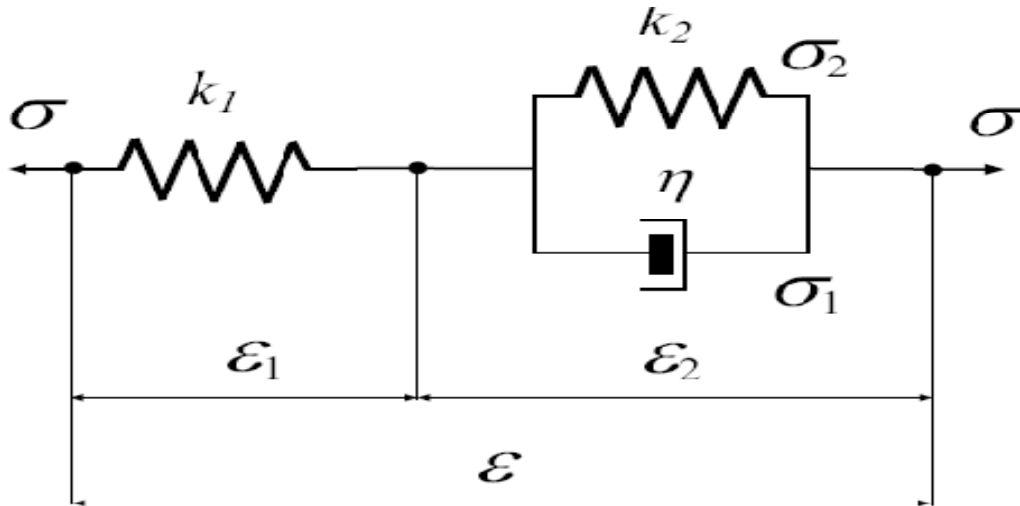


Figura 4.7. Representación mecánica del modelo estándar lineal o Zener multielemento.

IV.4.1 Relación constitutiva.

La relación esfuerzo deformación por partes para cada uno de los elementos son:

$$\sigma = k_1 \varepsilon_1 \dots\dots\dots (4.34)$$

$$\sigma_1 = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt} \dots\dots\dots (4.35)$$

$$\sigma_2 = k_2 \varepsilon_2 \dots\dots\dots (4.36)$$

Con $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$ y $\eta \geq 0$

Sabemos que el esfuerzo total puede ser la suma de los esfuerzos en cada elemento, esto es: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ (4.37)

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots\dots\dots (4.38)$$

La solución al conjunto de ecuaciones para σ y ε nos da la relación esfuerzo deformación.

$$\sigma + \tau_\sigma \frac{d\sigma(t)}{dt} = M_R \left(\varepsilon + \tau_\varepsilon \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right) \dots\dots\dots (4.39)$$

Donde $M_R = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ (4.40)

es el modulo de relajación (modulo de los amortiguadores relajados)

$$\tau_\sigma = \frac{\eta}{k_1 + k_2} \dots\dots\dots (4.41)$$

y

$$\tau_\varepsilon = \frac{\eta}{k_2} \dots\dots\dots (4.42)$$

son los tiempos de relajación tanto para el esfuerzo como para la deformación

El modulo complejo se obtiene sacando la transformada de Fourier de la ec. 4.34.

$$M(\omega) = M_R \left(\frac{1 + i\omega\tau_\varepsilon}{1 + i\omega\tau_\sigma} \right) \dots\dots\dots (4.43)$$

El modulo de los amortiguadores con esfuerzo y se obtiene cuando $\omega \rightarrow \infty$

$$M_U = M_R \left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} \right) M_U \geq M_R \dots\dots\dots (4.44)$$

El factor de calidad es

$$Q(\omega) = \frac{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon \tau_\sigma}{\omega(\tau_\varepsilon - \tau_\sigma)} \dots\dots\dots (4.45)$$

Donde $\tau_0 = \sqrt{\tau_\varepsilon \tau_\sigma}$

También podemos expresar el factor de calidad en función de τ_0 y una frecuencia central dada $\omega_0 = \tau_0^{-1}$ y este factor de calidad para una frecuencia dada.

$$Q_0 = \frac{2\tau_0}{\tau_\varepsilon - \tau_\sigma} \dots\dots\dots (4.46)$$

Para cualquier frecuencia en función de τ_0

$$Q(\omega) = Q_0 \left(\frac{1 + \omega^2 \tau_0^2}{2\omega\tau_0} \right) \dots\dots\dots (4.47)$$

Resolviendo para el tiempo τ_ε y τ_σ

$$\tau_\varepsilon = \frac{\tau_0}{Q_0} (\sqrt{Q_0^2 + 1} + 1) \dots\dots\dots (4.48)$$

$$\tau_\sigma = \frac{\tau_0}{Q_0} (\sqrt{Q_0^2 + 1} - 1) \dots\dots\dots (4.49)$$

Las ecuaciones constitutivas quedan

$$\sigma = \psi * \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \dots\dots\dots (4.50)$$

$$\varepsilon = \chi * \frac{d\sigma(t)}{dt} \dots\dots\dots (4.51)$$

Donde la función de relajación es

$$\psi(t) = M_R \left[1 - \left(1 - \frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} \right) e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}} \right] H(t) \dots\dots\dots (4.52)$$

Y la función de aumento es

$$\chi(t) = \frac{1}{M_R} \left[1 - \left(1 - \frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon} \right) e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}} \right] H(t) \dots\dots\dots (4.53)$$

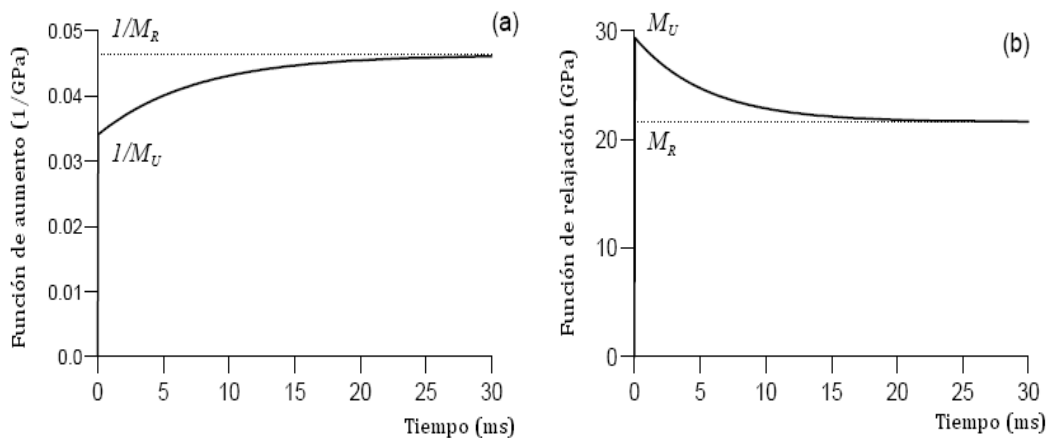


Figura 4.8. a) Comportamiento de la función de aumento, la cual muestra una respuesta instantánea y un valor asintótico como los sólidos en la realidad. b) la función de relajación presenta un estado no relajado instantáneo, y al final del proceso, el sistema se ha distendido totalmente al modulo M_R .

Para la función de aumento existe un valor inicial $\chi(0^+) = M_u^{-1}$ y un esfuerzo asintótico para $\chi(\infty) = M_R^{-1}$, determinado por las propiedades del resorte y del amortiguador. Poco después de la primera deformación, la fuerza a través del amortiguador es gradualmente disipada por la deformación en el amortiguador, resultando en un incremento gradual de la deformación en total, finalmente se alcanza el valor asintótico. De manera similar la función de relajación muestra un estado instantáneo de esfuerzo de magnitud M_U . Al final del proceso, el modulo del sistema tiende al valor de M_R .

De igual manera como para los sistemas anteriores podemos ver en las siguientes graficas características como la velocidad de fase aumenta con la frecuencia. El factor de calidad para el modelo de Zener es:

$$Q(\omega) = \frac{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon \tau_\sigma}{\omega(\tau_\varepsilon - \tau_\sigma)} \dots\dots\dots (4.54)$$

Donde podemos encontrar las graficas de velocidad de fase y factor de disipación.

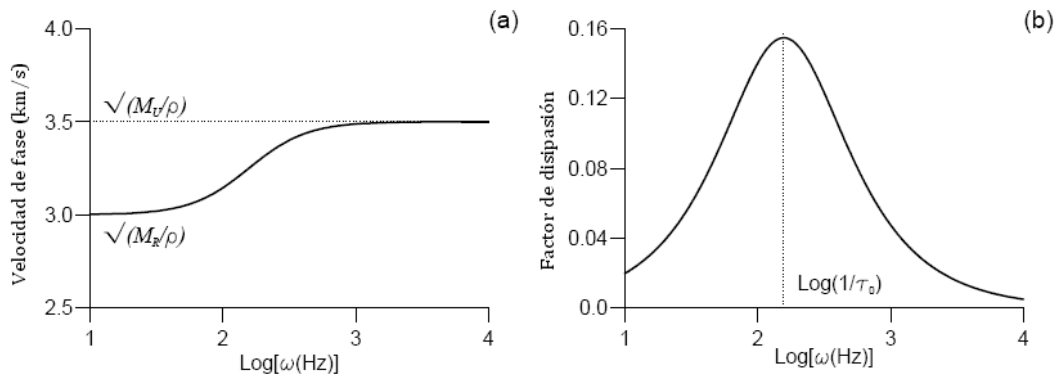


Figura 4.9. a) Velocidad de fase y b) factor de disipación del modelo de Zener

Donde $\tau_0 = \sqrt{\tau_\varepsilon \tau_\sigma} \dots\dots\dots (4.55)$

La velocidad de fase aumenta con la frecuencia en este modelo hasta alcanzar un valor asintótico con $\sqrt{\frac{M_U}{\rho}}$, presenta un pico de atenuación para cuando $\omega_0 = 1/\tau_0$. El modelo de Zener es apropiado para representar los mecanismos de relajación como

los ilustrados en la figura 4.7. Procesos como relajación en las fronteras de los poros pueden ser explicados por la distribución de picos de relajación. Este comportamiento es resultado de considerar varios elementos de Zener en serie o en paralelo, un sistema que trataremos a continuación.

IV.5 Modelo de Zener para varios elementos.

Algunos procesos como la simulación de grietas o fracturas, o medios con alta porosidad en lo que está presente una proceso de atenuación debido a la porosidad de la materia y que tienen factores de disipación mucho más complicados que una sola curva. Para tratar de representar físicamente el modelo que se propone, se supone una serie de modelos Zener conectados en serie o en paralelo como se muestra a continuación.

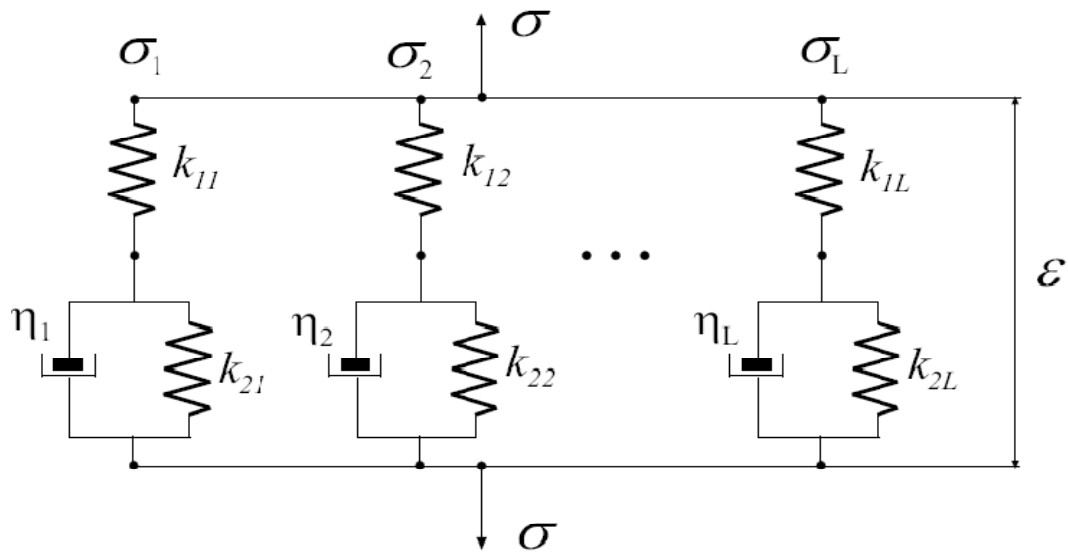


Figura 4.10. Representación mecánica del modelo Zener Generalizado o Zener Multielemento.

El esfuerzo total en el sistema para elementos en paralelo es:

$$\sigma = \sum_{l=1}^L \sigma_l \dots\dots\dots (4.56)$$

En el dominio del tiempo relacionando la función de relajación tenemos la ecuación constitutiva

$$\sigma = \sum_{l=1}^L \psi_l * \frac{d}{dt} \epsilon = \psi * \frac{d}{dt} \epsilon \dots \dots \dots (4.57)$$

Donde ψ_l es la función de relajación para cada elemento y se obtiene de

$$\psi_l = M_R \left[1 - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left(1 - \frac{\tau_{\epsilon l}}{\tau_{\sigma l}} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] H(t) \dots \dots \dots (4.58)$$

Y para el modulo no relajado tenemos

$$M_U = M_R \left[1 - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left(1 - \frac{\tau_{\epsilon l}}{\tau_{\sigma l}} \right) \right] = \frac{M_R}{L} \sum_{l=1}^L \frac{\tau_{\epsilon l}}{\tau_{\sigma l}} \dots \dots \dots (4.59)$$

Cuando $t = 0$ y $\omega \rightarrow +\infty$

También podemos encontrar la relación constitutiva mediante

$\sigma = \sum_{l=1}^L M_l \epsilon$ Y en el dominio de la frecuencia tenemos la relación como:

$$\sigma = \sum_{l=1}^L M_{Rl} \left(\frac{1+i\omega\tau_{\epsilon l}}{1+i\omega\tau_{\sigma l}} \right) \epsilon \dots \dots \dots (4.60)$$

Podemos escoger la relación $M_{Rl} = \frac{M_R}{L}$, y el modulo complejo puede ser expresado como

$$M(\omega) = \sum_{l=1}^L M_l(\omega) \dots \dots \dots (4.61)$$

$$M_l(\omega) = \frac{M_R}{L} \left(\frac{1+i\omega\tau_{\epsilon l}}{1+i\omega\tau_{\sigma l}} \right) \dots \dots \dots (4.62)$$

Por lo general, en el área de exploración petrolera y sismología, los modelos con Q constante son utilizados para representar la atenuación en rocas, en algunas ocasiones es válido a escala sísmica regional, aunque la dependencia con la frecuencia es por lo

general desconocida. Para ciertas bandas de frecuencia esta empíricamente visto que la atenuación es casi constante con la frecuencia, por lo que Q es generalmente constante en las distintas ventanas de frecuencia. La técnica para encontrar Q para un rango de frecuencia, es suponer mecanismos de relajación separados a una misma distancia en un escala logarítmica en función ω (Liu, Anderson and Kanamori, 1976).

Por lo general, para el modelo de Zener de varios elementos, la respuesta del factor de calidad en función de la frecuencia es equivalente a la superposición de la respuesta de varios modelos Zener de un solo elemento, por lo que se puede decir que en dicho rango de frecuencias una respuesta de Q para un modelo Zener de varios parámetros, es equivalente a varios modelos de un solo elemento, esto es, que exista un Q cuasi constante en la que el efecto de tener varios picos pueda ser descrito por una sola curva. En la siguiente descripción veremos cómo ajustar las curvas.

Este modelo es conveniente para representar la atenuación en las rocas ya que generalmente la dependencia de la frecuencia es desconocida, sin embargo, existe evidencia física que la atenuación es casi constante con la frecuencia, de ahí la posibilidad de obtener un Q constante para una banda de frecuencias. La técnica para construir un modelo de Q constante sobre un rango de frecuencias es sencilla. Es posible para sólidos con poca pérdida representar la atenuación mediante el modelo de Zener multiparámetro, de forma que se puede ver de manera más clara y sencilla una parametrización del modelo Zener un elemento, podemos obtener para una frecuencia central dada por; $\omega_0 = \tau_0^{-1}$, y el valor de factor de calidad para esta frecuencia es:

$$Q_0 = \frac{2\tau_0}{\tau_\epsilon - \tau_\sigma} \dots\dots\dots (4.63)$$

Entonces el factor de calidad en función de la frecuencia queda como:

$$Q(\omega) = Q_0 \left(\frac{1 + \omega^2 \tau_0^2}{2\omega \tau_0} \right) \dots\dots\dots (4.64)$$

Resolviendo para τ_σ y τ_ϵ tenemos que

$$\tau_\epsilon = \frac{\tau_0}{Q_0} (\sqrt{Q_0^2 + 1} + 1) \dots\dots\dots (4.65)$$

$$\text{y } \tau_\sigma = \frac{\tau_0}{Q_0} (\sqrt{Q_0^2 + 1} - 1) \dots\dots\dots (4.66)$$

Ahora el problema es encontrar un conjunto de tiempos de relajación $\tau_{\epsilon l}$ y $\tau_{\sigma l}$ para cada elemento que nos den un Q casi constante en una banda de frecuencias con centro en $\omega_{0m} = 1/\tau_{0m}$, que representa la posición del mecanismo en la mitad de la banda, que para cualquier L, tiene un índice $m = \frac{L}{2} - 1$.

Como se menciona anteriormente, se deben de tomar varios picos individuales de relajación en una escala log (ω) equidistante.

El factor de calidad del sistema es:

$$Q(\omega) = \frac{Re(M)}{Im(M)} = \frac{Re(\sum_{l=1}^L M_l)}{Im(\sum_{l=1}^L M_l)} \dots\dots\dots (4.67)$$

$$\text{Recordando la ec. 4.53 } M_l(\omega) = \frac{M_R}{L} \left(\frac{1+i\omega\tau_{\epsilon l}}{1+i\omega\tau_{\sigma l}} \right)$$

Ya que $Q_l = \frac{Re(M_l)}{Im(M_l)}$ se puede suponer que

$$Q(\omega) = \frac{\sum_{l=1}^L Q_l Im(M_l)}{\sum_{l=1}^L Im(M_l)} \dots\dots\dots (4.68)$$

$$\text{Donde } Q_l(\omega) = Q_{0l} \left(\frac{1+\omega^2\tau_{0l}^2}{2\omega\tau_{0l}} \right) \dots\dots\dots (4.69)$$

Y suponiendo una aproximación con poca pérdida $\tau_{\sigma l} \approx \tau_{\epsilon l}$ tenemos que:

$$Im(M_l) = \frac{M_R}{L} \left[\frac{\omega(\tau_{\epsilon l} - \tau_{\sigma l})}{1+\omega^2\tau_{\sigma l}^2} \right] \approx \frac{M_R}{L} \left[\frac{2\omega\tau_{0l}}{(1+\omega^2\tau_{\sigma l}^2)Q_{0l}} \right] = \frac{M_R}{LQ_l} \dots\dots\dots (4.70)$$

Ahora escogemos $Q_{0l} = Q_0$, y sustituimos en ecuación 4.61 para encontrar

$$Q(\omega) = LQ_0 \left(\sum_{l=1}^L \frac{2\omega\tau_{0l}}{1+\omega^2\tau_{0l}^2} \right)^{-1} \dots\dots\dots (4.71)$$

Supongamos entonces τ_{0l} distribuido iniformemente en el eje $\log(\omega)$ y $Q(\omega_{0m}) = \bar{Q}$ que sería el valor ideal a encontrar tenemos la grafica

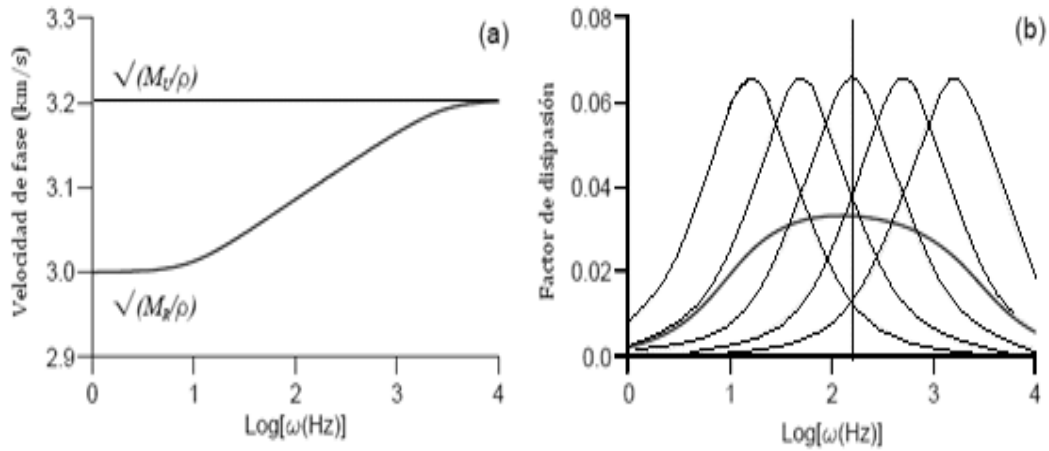


Figura 4.11. a) Velocidad de fase y b) Factor de disipación contra la frecuencia, para 5 mecanismos de disipación, cada uno con un $Q_0=15$, tal que $\bar{Q}=30$. Las líneas punteadas son los factores de calidad de cada elemento de disipación y la línea continua vertical indica la posición del tercer pico de relajación y la línea continua muestra Q constante equivalente.

Entonces para tener una Q constante igual a \bar{Q} necesitamos:

$$Q_0 = \frac{\bar{Q}}{L} \sum_{l=1}^L \frac{2\omega_{0m}\tau_{0l}}{1+\omega_{0m}^2\tau_{0l}^2} \dots\dots\dots (4.72)$$

La función de relajación para dicha Q constante tiene una grafica como:

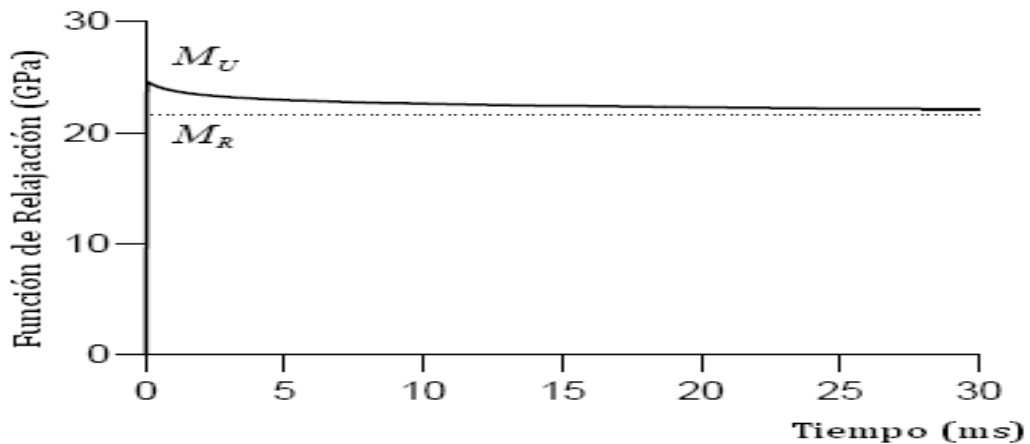


Figura 4.12. Comportamiento de la función de relajación en el tiempo.

La velocidad compleja está dada por: $v_c = \sqrt{\frac{M}{\rho}} \dots\dots\dots (4.73)$

Y la velocidad de fase está dada por $v_p = C_0 \left| \frac{\omega}{\omega_0} \right|^\gamma$ (4.74)

Con $C_0 = \sqrt{\frac{M_0}{\rho}} \left[\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) \right]^{-1}$ (4.75)

que representa la velocidad de fase en $\omega = \omega_0$ (que es la frecuencia de referencia) y

$$M_0 = \rho c_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)$$

El factor de atenuación esta dado por: $\alpha = \tan\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) \operatorname{sgn}(\omega) \frac{\omega}{v_p}$ (4.76)

Y el factor de calidad, es: $Q = \frac{1}{\tan(\pi\gamma)}$, pero Q es independiente de la frecuencia de

forma que $\gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{1}{Q}\right)$ parametriza o normaliza el nivel de atenuación

V. Formulación de Atenuación en DWN y FD 2.5D

El problema que se estudia en este trabajo corresponde a la propagación de ondas en el interior de un cilindro dentro de un medio elástico. La fuente es un pulso esférico disparado a lo largo del eje de simetría del cilindro. Cada uno de los medios de propagación está considerado homogéneo, de densidad ρ y de geometría cualquiera. Se define una referencia cilíndrica $(O, \vec{r}, \vec{e}_\theta, \vec{z})$ como se muestra en la figura 5.1. La fuente está centrada en O , un punto perteneciente al eje z .

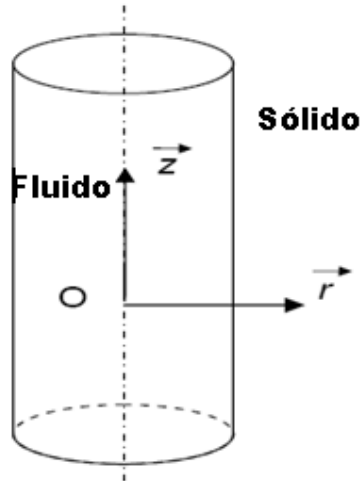


Figura 5.1. Representación geométrica del sistema de referencia en coordenadas cilíndricas.

V.1 Aplicación del algoritmo de DF 2.5D

El principio de cálculo de diferencias finitas como ya hemos mencionado, consiste en resolver un sistema de ecuaciones diferenciales por etapas, considerando cierto grado de precisión. En este caso, se hace una discretización espacial y temporal del problema, en el cual las derivadas de una variable son aproximadas localmente en cada una de las celdas por un esquema de diferencias finitas de un orden escogido, es decir, tomando en cuenta para la suma la misma variable en celdas situadas alrededor y asignando un peso apropiado a la exactitud del esquema. El paso de un tiempo al otro se hace mediante la solución de las ecuaciones en las fronteras de cada una de las

celdas y de la ecuación de movimiento. Gracias a esto, se facilita la formulación y se aumenta la precisión. Por ejemplo, con base en la figura 5.2, u_r se encuentra en medio del borde izquierdo de la celda a fin de cumplir con la continuidad de desplazamiento normal a este borde. Del lado derecho se supone que se encuentra el desplazamiento u_r de la celda siguiente. Las propiedades del medio se definen en el punto medio de la malla indicado con una estrella. Si las celdas contiguas tienen propiedades distintas, se hace un promedio y las propiedades son iguales en toda la celda.

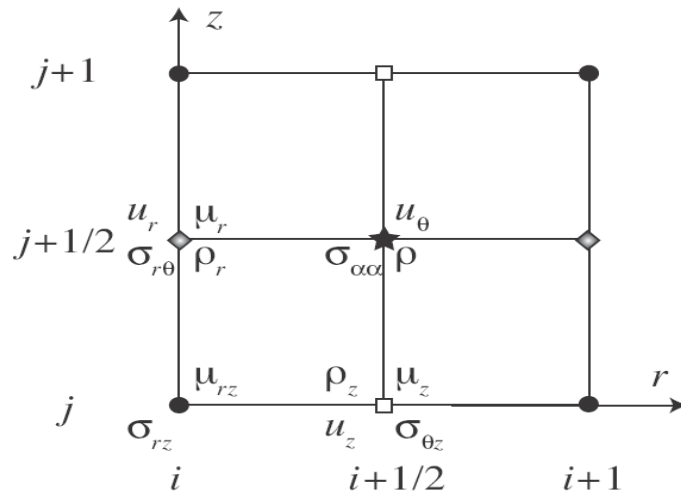


Figura 5.2. Configuración de la malla para el esquema elegido, posición de las variables.

Se considera cada uno de los medios de propagación homogéneo, de densidad ρ y de geometría cualquiera. Se define una referencia cilíndrica $(0, \vec{r}, \vec{e}_\theta, \vec{z})$. La fuente está centrada en O , un punto al eje z . El perfil temporal de la fuente puede escogerse de cualquier forma pero se necesita que sea causal y con derivada continua.

El sistema de ecuaciones para resolver está constituido de las ecuaciones del movimiento y las condiciones de fronteras. Se resuelven en dos etapas de tiempo (t_n y $t_{n+1/2}$). Primero se evalúan las componentes del desplazamiento que se utilizan después para calcular las deformaciones y los esfuerzos que cumplen directamente con las condiciones de las fronteras.

El campo de los desplazamientos se puede sustituir por el campo de las velocidades a fin de evitar hacer dos derivadas en tiempo. La ecuación del movimiento en

coordenadas cilíndricas y con la derivada de las velocidades se expresa de la siguiente forma:

$$\rho \dot{v}_r = \left(\frac{\sigma_{rr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \dots \dots \dots (5.1)$$

$$\rho \dot{v}_\theta = \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} \dots \dots \dots (5.2)$$

$$\rho \dot{v}_z = \frac{\sigma_{zr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \dots \dots \dots (5.3)$$

Se considera la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \Pi_r &= \dot{v}_r \\ &= \rho^{-1} \left(\frac{\sigma_{rr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \dots \dots \dots (5.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_\theta &= \dot{v}_\theta \\ &= \rho^{-1} \left(\frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (5.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_z &= \dot{v}_z \\ &= \rho^{-1} \left(\frac{\sigma_{zr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (5.6) \end{aligned}$$

Ahora bien, las ecuaciones en la frontera se deben cumplir en cada una de las celdas. Para cualquier borde de cada celda se establece la continuidad de los esfuerzos normales y de los desplazamientos normales a cada superficie, es decir, q los esfuerzos normales a una superficie paralela al eje r son:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^I &= \sigma_{rr}^{II} \\ \sigma_{rz}^I &= \sigma_{rz}^{II} \dots \dots \dots (5.7) \\ \sigma_{r\theta}^I &= \sigma_{r\theta}^{II} \\ u_r^I &= u_r^{II} \end{aligned}$$

De igual manera se puede expresar los esfuerzos y desplazamientos normales al plano $(e\hat{r}, e\hat{\theta})$ para la superficie z :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^I &= \sigma_{zz}^{II} \\ \sigma_{z\theta}^I &= \sigma_{z\theta}^{II} \\ u_z^I &= u_z^{II} \end{aligned}$$

Con el propósito de cumplir estas condiciones se hace un promedio de las propiedades de los materiales, que mas adelante en el algoritmo se le asignaran a cada celda dichas propiedades. Para hacer las ecuaciones un poco más sencillas, realizaremos el siguiente cambio de variable

$$S = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \dots\dots\dots (5.8)$$

Y sustituimos la nueva variable para expresar el esfuerzo en función de las velocidades.

$$\dot{\sigma}_{rr} = \lambda S + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \dots\dots\dots (5.9)$$

$$\dot{\sigma}_{\theta\theta} = \lambda S + 2\mu \left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (5.10)$$

$$\dot{\sigma}_{zz} = \lambda S + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \dots\dots\dots (5.11)$$

$$\dot{\sigma}_{\theta z} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (5.12)$$

$$\dot{\sigma}_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \dots\dots\dots (5.13)$$

$$\dot{\sigma}_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (5.14)$$

Afortunadamente se pueden hacer algunas simplificaciones con las hipótesis de axi-simetría. Por ejemplo, las ecuaciones se reducen suponiendo que el plano $(O, \vec{r}, \vec{e}_\theta)$ siempre tiene el mismo patrón de irradiación que la fuente. Este patrón es de la forma $\cos(n\theta)$ donde n es el tipo de fuente, (e.g. n=1 monopolar, n=2 dipolar, etc.). Por razones de simetría, las variables $v_r, v_z, \sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}$ también deben tener un patrón de irradiación de la misma forma que la fuente, mientras que en las variables $v_\theta, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta z}$ este patrón es de la forma $\sin(n\theta)$. Introduciendo la dependencia de θ en las ecuaciones, se puede constatar, que se simplifica y sólo queda el orden n de la fuente. Las componentes de la variable Π tienen por supuesto la misma dependencia que las componentes de la velocidad:

$$\Pi_r = \dot{v}_r = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\sigma_{rr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{n}{r} \sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \dots\dots\dots (5.15)$$

$$\Pi_{\theta} = \dot{v}_{\theta} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{-n}{r} \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (5.16)$$

$$\Pi_z = \dot{v}_z = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\sigma_{zr}}{r} + \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{n}{r} \sigma_{\theta z} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (5.17)$$

Así, las variables Π_r y Π_z , dependen de $\cos(n\theta)$ mientras que en Π_{θ} , es de la forma $\sin(n\theta)$. Los esfuerzos se escriben como:

$$S = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{nv_{\theta}}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \dots\dots\dots (5.18)$$

Que era nuestro cambio de variable cambia de tal forma que los esfuerzos cambian a:

$$\dot{\sigma}_{rr} = \lambda S + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \dots\dots\dots (5.19)$$

$$\dot{\sigma}_{\theta z} = \mu \left(\frac{n}{r} v_z + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (5.20)$$

$$\dot{\sigma}_{\theta\theta} = \lambda S + 2\mu \left(\frac{v_r}{r} + \frac{n}{r} v_{\theta} \right) \dots\dots\dots (5.21)$$

$$\dot{\sigma}_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \dots\dots\dots (5.22)$$

$$\dot{\sigma}_{zz} = \lambda S + 2\mu \frac{\partial z}{\partial z} \dots\dots\dots (5.23)$$

$$\dot{\sigma}_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{v_{\theta}}{r} + \frac{-n}{r} v_r \right) \dots\dots\dots (5.24)$$

V.1.1 Promedio y disposición de las variables en la malla

Las variables están arregladas de manera tal que cumplan con las ecuaciones de frontera. En la referencia [A7] explica cómo hacer el promedio de las propiedades de las celdas, de manera que se imponga la continuidad de los esfuerzos y los desplazamiento normal o velocidad normal en este caso. Hay que subrayar que sólo las variables situadas en las fronteras cumplen con las ecuaciones. Las variables ρ_z y ρ_r corresponden al promedio aritmético de las densidades según la dirección de su subíndice. Eso permite calcular correctamente u_r y u_z . La variable ρ será utilizada con u_{θ} y tiene como valor la densidad asociada al interior de la celda. Igualmente, las variables u_r , u_z y u_{rz} corresponden al promedio armónico (inverso del promedio aritmético de los inversos) del coeficiente de Lamé de las celdas en la direcciones de

sus índices. Estas son usadas para evaluar las variables $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta z}$ y σ_{rz} . La variable μ se utiliza para calcular $\sigma_{\alpha\alpha}$, donde $\alpha = (r, \theta, z)$.

V.1.2 Implementación numérica

El esquema numérico entre el tiempo q y $q+1$ se puede escribir como:

$$v_r^{q+1} = v_r^q + \frac{\Delta t}{\rho_r} \Pi_r \dots\dots\dots (5.25)$$

$$v_\theta^{q+1} = v_\theta^q + \frac{\Delta t}{\rho_\theta} \Pi_\theta \dots\dots\dots (5.26)$$

$$v_z^{q+1} = v_z^q + \frac{\Delta t}{\rho_z} \Pi_z \dots\dots\dots (5.27)$$

$$S^{q+1} = S^q + \Delta t \dot{S} \dots\dots\dots (5.28)$$

$$\sigma_{rr}^{q+1} = \sigma_{rr}^q + \Delta t \dot{\sigma}_{rr}^{q+1}(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \dots\dots\dots (5.29)$$

$$\sigma_{\theta z}^{q+1} = \sigma_{\theta z}^q + \Delta t \dot{\sigma}_{\theta z}^{q+1}(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \dots\dots\dots (5.30)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{q+1} = \sigma_{\theta\theta}^q + \Delta t \dot{\sigma}_{\theta\theta}^{q+1}(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \dots\dots\dots (5.31)$$

$$\sigma_{rz}^{q+1} = \sigma_{rz}^q + \Delta t \dot{\sigma}_{rz}^{q+1}(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \dots\dots\dots (5.32)$$

$$\sigma_{zz}^{q+1} = \sigma_{zz}^q + \Delta t \dot{\sigma}_{zz}^{q+1}(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \dots\dots\dots (5.33)$$

$$\sigma_{r\theta}^{q+1} = \sigma_{r\theta}^q + \Delta t \dot{\sigma}_{r\theta}^{q+1}(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \dots\dots\dots (5.34)$$

V.1.3 Uso de la simetría

Cuando $r = 0$, se pueden usar las simetrías del problema con el fin de calcular solamente la mitad de la geometría. Las simetrías del problema dependen del tipo de fuente (para una fuente centrada en cero). Cuando la fuente es monopolar, las variables $v_z, \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{r\theta}$ son pares y pueden ser distintas a cero en $r = 0$. Las variables $v_r, v_\theta, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}$, son, por otro lado, impares y por lo tanto nulas en $r = 0$.

V.1.4 Conclusión

En esta sección se presentó un método de simulación que permite simular la irradiación de las ondas generadas por una fuente monopolar centrada en un pozo en un medio elástico. En esta formulación no incluye ningún parámetro de atenuación o

propagación en un medio viscoelástico, ya que estos se verán en el capítulo 5. Las ecuaciones se resuelven paso a paso gracias a las discretizaciones espacial y temporal.

V.2 Aplicación del algoritmo de DWN

La modelación de ondas en la vecindad de pozos puede, como antes he mencionado, partir de un método analítico llamado del numero de onda discretizado (DWN por sus siglas en inglés). La geometría es tal que los pozos son considerados infinitos en las dirección z , las ventajas de este metodo sobre el método de diferencias finitas son multiples; la rapidez de los cálculos y la precisión que se puede alcanzar. Sin embargo tiene la desventaja de que las geometrías complejas, como podría ser el caso del mismo cilindro con grietas, estratos inclinados, etc., no pueden ser caracterizadas.

Los medios de propagación son considerados homogéneos, de densidad ρ , geometria tubular y de radio r . Se define un sistema de referencia cilíndrico dado por (r, θ, z) con O como el origen. En la figura 5.1 podemos apreciar que la dirección del eje \vec{z} esta alineada con el eje de los tubos. La fuente está centrada en F y es un punto sobre el eje z . El sistema de coordenadas es el mismo que el empleado en el método de diferencias finitas y la posición de la fuente es de igual manera un punto O sobre el eje vertical del sistema de referencia.

V.2.1 Sistema de ecuaciones por resolver

La solución se expresa en el fluido como la suma de un campo incidente y uno reflejado, y en el sólido como un campo transmitido. El campo incidente se resuelve de manera teórica a partir de la ecuación del movimiento, mientras que las amplitudes de los campos reflejado y transmitido se obtienen considerando las condiciones de frontera. Por lo tanto se hace una descomposición de las ondas circulares en expansión o en hundimiento en el plano $(O, \vec{r}, \vec{e}_\theta)$ a partir de las funciones de Hankel.

Al igual que el método de diferencias finitas la de ecuación del movimiento 5.1. Es:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho_f \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

En donde los subíndices i y j corresponden a los ejes cartesianos, es decir, cuando i, j sean igual a 1, tomaran el sentido del eje de las x y para i o j igual a 3 tomaran el sentido del eje z . Los componentes del tensor de esfuerzos están representados por σ_{ij} y finalmente ρ_f es la densidad del fluido y u_i los componentes de los desplazamientos en el fluido.

En las ecuaciones en la frontera se debe verificar que los esfuerzos normales en la interfaz líquido-sólido sean nulos y que exista continuidad de los desplazamientos normales, esto es:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{solido} &= \sigma_{rr}^{fluido} \\ \sigma_{rz}^{solido} &= 0 \\ \sigma_{r\theta}^{solido} &= 0 \\ u_r^{solido} &= u_r^{fluido} \end{aligned}$$

La relación entre los esfuerzos y las deformaciones en un medio isótropo como vimos en el capítulo 2 se puede escribir como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \dots\dots\dots (5.35)$$

Expresando los esfuerzos en coordenadas cilíndricas tenemos:

$$\sigma_{rr} = \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}) + 2\mu \varepsilon_{rr} \dots\dots\dots (5.36)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}) + 2\mu \varepsilon_{zz} \dots\dots\dots (5.37)$$

$$\sigma_{rz} = 2\mu \varepsilon_{rz} \dots\dots\dots (5.38)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu \varepsilon_{r\theta} \dots\dots\dots (5.38)$$

Y las deformaciones en coordenadas cilíndricas son

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \dots\dots\dots (5.39)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \dots\dots\dots (5.40)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \dots\dots\dots (5.41)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \dots\dots\dots (5.42)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \dots\dots\dots (5.43)$$

Las ecuaciones constitutivas resultan en:

$$\sigma_{rr} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \dots\dots\dots (5.44)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \dots\dots\dots (5.45)$$

$$\sigma_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \dots\dots\dots (3.46)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \dots\dots\dots (3.47)$$

Por lo que las condiciones de frontera anteriores pueden expresarse a partir únicamente de los desplazamientos. La ventaja de suponer la forma de los desplazamientos de modo que concuerde con la ecuación del movimiento tanto en el fluido como en el sólido, es que el campo de desplazamiento se puede expresar mediante potenciales.

Ahora para ver los desplazamientos en función de los potencias tenemos que considera una descomposición del campo vectorial de los desplazamientos en el sólido como la ecuación 5.35

$$u = \nabla \varphi_s + \nabla \times \psi \dots\dots\dots (5.48)$$

con la condición sobre $\psi = (\psi_r, \psi_\theta, \psi_z)$ Para que la divergencia de la función potencial sea igual con cero, es decir, $\nabla \cdot \psi = 0$ Considerando coordenadas cilíndricas, el potencial vectorial viene dado por:

$$\psi_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \chi_s}{\partial \theta} \dots\dots\dots (5.49)$$

$$\psi_\theta = -\frac{\partial \chi_s}{\partial r} \dots\dots\dots (5.50)$$

$$\psi_z = \psi_s \dots\dots\dots (5.51)$$

Los desplazamientos pueden reescribirse como:

$$u_r(r, \theta, z, t) = \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 \chi_s}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} \dots\dots\dots (5.52)$$

$$u_\theta(r, \theta, z, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi_s}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial \psi_s}{\partial r} \dots\dots\dots (5.53)$$

$$u_z(r, \theta, z, t) = \frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi_s}{\partial \theta^2} \right] \dots\dots\dots (5.54)$$

Sustituyendo los desplazamientos en la ecuación 5.1 del movimiento y expresándolas de manera vectorial, se tiene:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega}{\alpha^2} \right) \varphi_s = 0 \dots\dots\dots (5.55)$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega}{\beta^2} \right) \psi_s = 0 \dots\dots\dots (5.55a)$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega}{\beta^2} \right) \chi_s = 0 \dots\dots\dots (5.55b)$$

Recordando que el laplaciano en coordenadas cilíndricas se expresa como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

En el líquido, el desplazamiento se calcula solamente en función del potencial escalar:

$$u_r(r, \theta, z, t) = \frac{\partial}{\partial r} (\phi_{fluido}^0 + \phi_{fluido}^d) \dots\dots\dots (5.56)$$

$$u_z(r, \theta, z, t) = \frac{\partial}{\partial z} (\phi_{fluido}^0 + \phi_{fluido}^d) \dots\dots\dots (5.57)$$

Donde ϕ_{fluido}^0 corresponde al campo emitido por la fuente en el fluido y ϕ_{fluido}^d es la parte del campo correspondiente a las difracciones en el mismo fluido. Los esfuerzos se escriben finalmente como:

$$\sigma_{rr}^{fluido} = \sigma_{zz}^{fluido} = -\lambda_f \frac{\omega^2}{\alpha_f^2} (\phi_{fluido}^0 + \phi_{fluido}^d) \dots\dots\dots (5.58)$$

$$\sigma_{rr}^{sólido} = \left[\lambda_s \nabla^2 + 2\mu_s \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \varphi + 2\mu_s \frac{\partial^3}{\partial r^2 \partial z} \chi \dots\dots\dots (5.59)$$

$$\sigma_{rz} = \mu_2 \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial r \partial z} + \left(\frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial z^2} - \frac{\partial^3 \chi}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right) \right) \dots\dots\dots (5.60)$$

$$\sigma_{zz}^s = \left[\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\mu_s \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \lambda_s \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \varphi - \frac{2\mu_s}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(r \frac{\partial \chi_s}{\partial r} \right) \dots\dots\dots (5.61)$$

Ahora bien, para encontrar la solución del campo escalar asociada a una fuente monopolar requerimos escribir el campo asociado a una fuente monopolar [Aki & Richards]:

$$\phi_{fluido}^0 = \frac{e^{-j\frac{\omega}{\alpha}R}}{R} = \frac{1}{2j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(k_{fn}r) e^{-jk_{zn}(z)} \Delta k \dots\dots\dots (5.62)$$

Con $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$, $k_{fn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha_f^2} - k_{zn}^2}$, $R = \sqrt{z^2 + r^2}$. $H_0^{(2)}$ corresponde a una onda cilíndrica en expansion y $H_0^{(1)}$ a una implosión. Esto si onda es armónica del tipo $e^{+j\omega t}$ [Aki], es importante mencionar que solo nos interesa la primera onda generada por la serie armónica.

Los potenciales reflejados y transmitidos se expresan de manera similar. El potencial ligado a las ondas longitudinales del sólido se escribe como:

$$\varphi_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_0^{(2)}(k_{pn}r) e^{-jk_{zn}(z)} \Delta k \dots\dots\dots (5.63)$$

Donde $k_{pn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha_s^2} - k_{zn}^2}$. Para las ondas S del sólido, el potencial es:

$$\chi_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_0^{(2)}(k_{sn}r) e^{-jk_{zn}(z)} \Delta k \dots\dots\dots (5.64)$$

Donde $k_{sn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta_s^2} - k_{zn}^2}$. Y finalmente, la expresión del potencial en el fluido es:

$$\phi_{fluido}^0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n H_0^{(2)}(k_{fn}r) e^{-jk_{zn}(z)} \Delta k \dots\dots\dots (5.65)$$

Sin embargo, el desplazamiento según la dirección r del campo reflejado en el fluido debe ser nulo en $r = 0$, con lo que sólo se requiere tomar en cuenta la componente J_0 de la función H_0 .

$$\phi_{fluido}^0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (E_n J_0(k_{fn} r)) e^{-jk_{zn}(z)} \Delta k \dots\dots\dots (5.66)$$

Tomando en cuenta las siguientes identidades para las funciones de Bessel:

$$\frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial r} = -\alpha J_1(\alpha r) \quad \gamma \quad \frac{\partial^2 J_0(\alpha r)}{\partial r^2} = -\alpha^2 J_0(\alpha r) + \frac{\alpha}{r} J_1(\alpha r)$$

$$\frac{\partial^3 J_0(\alpha r)}{\partial r^3} = -(\alpha^3 - 2 \frac{\alpha}{r^2}) J_1(\alpha r) + \frac{\alpha^2}{r} J_0(\alpha r) \quad \text{Se tiene que:}$$

$$u_r^{fluido} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{fn} (E_n J_1(k_{fn} r) + \frac{1}{2} H_1^{(2)}(k_{fn} r)) e^{-Jk_{zn}(z)} \Delta k \dots\dots\dots (5.67)$$

$$u_r^s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n H_1^{(2)}(k_{pn} r) (-k_{pn}) + C_n H_1^{(2)}(k_{sn} r) (Jk_{tn} k_{zn})) e^{Jk_{zn}(z)} \Delta k \dots\dots\dots (5.68)$$

Para los esfuerzos se tiene:

$$\sigma_{rr}^{fluido} = \sigma_{zz}^{fluido} = -\lambda_f \frac{\omega^2}{\alpha_{fl}^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (E_n J_0(k_{fn} r) + \frac{1}{2} H_0^{(2)}(k_{fn} r)) e^{Jk_{zn}(z)} \Delta k \dots (5.69)$$

$$\sigma_{zz}^{fluido} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{c} -\lambda_s (k_{pn}^2 + k_{zn}^2) A_n H_0^{(2)}(k_{pn} r) + \\ -k_{pn}^2 A_n H_0^{(2)}(k_{pn} r) + \frac{k_{pn} r}{r} A_n H_1^{(2)}(k_{pn} r) + \\ 2\mu_s \left(Jk_{zn} k_{sn}^2 C_n H_0^{(2)}(k_{pn} r) - Jk_{zn} \frac{k_{sn} r}{r} C_n H_1^{(2)}(k_{sn} r) \right) \end{array} \right) \dots\dots\dots 5.70$$

$$\sigma_{rz} = \mu \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2Jk_{zn} k_{pn} A_n H_1^{(2)}(k_{pn} r) + k_{sn} (k_{zn}^2 + k_{tn}^2) C_n H_1^{(2)}(k_{sn} r)) e^{Jk_{zn}(z)} \Delta k \dots\dots\dots 5.71$$

$$\sigma_{zz}^{solido} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\lambda_s (k_{pn}^2 + k_{zn}^2) A_n H_0^{(2)}(k_{pn} r) + 2\mu_s \left(\begin{array}{c} -k_{zn}^2 A_n H_0^{(2)}(k_{pn} r) + \\ Jk_{zn} k_{tn} r C_n H_0^{(2)}(k_{tn} r) \end{array} \right) \right) \dots\dots\dots (5.72)$$

Debido a que las igualdades son válidas para cualquier z , lo son también para cada uno de los términos de la suma. Así, reorganizando el sistema de ecuaciones en forma matricial para cada término n , la resolución del conjunto de incógnitas se hace más sencilla:

$$u_r^s = u_r^{fl} |_{r'} : \sigma_{rr}^s = \sigma_{rr}^{fl} |_{r'} : \sigma_{rz}^s = 0 |_{r'} : \begin{bmatrix} X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ C_n \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ X \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las cruces representan los coeficientes de A_n , C_n y E_n o las expresiones del campo incidente. De este modo, la inversión de la matriz permite calcular las incógnitas, que posteriormente son utilizadas en las expresiones deseadas (desplazamiento, esfuerzos, deformaciones) para obtener el movimiento en cualquier punto de la geometría.

V.2.2 Conclusión

En esta sección se presentaron con detalle las bases de un método de simulación que permite tomar en cuenta la radiación de las ondas generada por una fuente monopolar centrada en un pozo con una simetría central. Las soluciones de las ecuaciones correspondientes son expresadas mediante desarrollos de funciones de onda que se expresan mediante funciones exponenciales de z y radiales. Esto puede interpretarse como una aplicación masiva del método de separación de variables. La estrategia de solución es usar desarrollos en términos de números de onda vertical discretos. La solución se expresa de manera analítica en el dominio de las transformadas considerando las ecuaciones de frontera. Finalmente, a partir de la solución en el dominio de la frecuencia se expresan las variables de campo en los dominios espacial y temporal. Esto es posible gracias a la utilización de la transformada rápida de Fourier temporal.

5.3 Aplicación de la atenuación en los algoritmos.

Como mencione en el capítulo 2, la atenuación se puede ver simplemente como un mecanismo de transformación de la energía mecánica en energía calorífica, y como se presento en el capitulo anterior existen diversas maneras de representar la atenuación matemáticamente, pero en todos los modelos vistos se presenta una dependencia con la frecuencia, a continuación presentaremos la implementación de los modelos de atenuación en los algoritmos de solución que hemos visto.

Recordamos del capítulo II que la relación constitutiva cuando no existe la atenuación es:

$$\sigma_{ij} = \lambda \left(\sum_i \varepsilon_{ij} \right) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

V.3.1 Modelo de Kelvin-Voigt

Para el modelo de Kelvin-Voigt podemos la relación constitutiva está dada por la ec. 4.20 del capítulo anterior, que es;

$$\sigma_{ij} = \lambda(\sum_i \varepsilon_{ij})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda'(\sum_i \dot{\varepsilon}_{ij})\delta_{ij} + 2\mu'\dot{\varepsilon}_{ij} \dots\dots\dots (5.73)$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación 5.73 tenemos para encontrar la notación en frecuencia resulta como:

$$\sigma_{ij} = (\lambda + j\omega\lambda')(\sum_i \varepsilon_{ij})\delta_{ij} + 2(\mu + j\omega\mu')\varepsilon_{ij} \dots\dots\dots (5.74)$$

Para simplificar la ecuación anterior podemos hacer el siguiente cambio de variable

$$\lambda^* = \lambda + j\omega\lambda' \dots\dots\dots (5.75)$$

$$\mu^* = \mu + j\omega\mu' \dots\dots\dots (5.75a)$$

Esto nos ayuda a realizar los cálculos siguientes como si no existiera ningún tipo de atenuación y podemos ver la relación entre esfuerzos como:

$$\sigma_{ij} = \lambda^*(\sum_i \varepsilon_{ij})\delta_{ij} + 2\mu^*\varepsilon_{ij} \dots\dots\dots (5.76)$$

De esta manera se puede calcular la velocidad de ondas compresionales o primarias y transversales con base en las ecuaciones 5.75 y 5.75a.

$$\alpha(\omega) = V_p(\omega) = \sqrt{\frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho}} \dots\dots\dots (5.77)$$

$$\beta(\omega) = V_s(\omega) = \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho}} \dots\dots\dots (5.78)$$

Donde los números de onda son $k_p = \frac{\omega}{V_p}$ y $k_s = \frac{\omega}{V_s}$ son tomados también en cuenta para la atenuación.

Esto es para el método de DWN, para el método de Diferencias finitas en 2.5 D.

Para resolver la ecuación 5.73 en el método de DF realizamos el cambio de variable

$$\dot{S} = \frac{\partial \Pi_r}{\partial r} + \frac{\Pi_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}$$

Que aplicado al esquema numérico de los esfuerzos se tiene:

$$\dot{S} = \frac{\partial \Pi_r}{\partial r} + \frac{\Pi_r}{r} + \frac{n}{r} \Pi_\theta + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \dots\dots\dots (5.79)$$

$$\dot{\sigma}_{rr} = \lambda S + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} + \lambda' S + 2\mu' \frac{\partial \Pi_r}{\partial r} \dots\dots\dots (5.80)$$

$$\dot{\sigma}_{\theta\theta} = \lambda S + 2\mu \left(\frac{v_r}{r} + \frac{n}{r} v_\theta \right) + \lambda' S + 2\mu' \left(\frac{\Pi_r}{r} + \frac{n}{r} \Pi_\theta \right) \dots\dots\dots (5.81)$$

$$\dot{\sigma}_{zz} = \lambda S + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda' S + 2\mu' \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \dots\dots\dots (5.82)$$

$$\dot{\sigma}_{\theta z} = \mu \left(\frac{-n}{r} v_z + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + \mu' \left(\frac{-n}{r} \Pi_z + \frac{\partial \Pi_\theta}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (5.83)$$

$$\dot{\sigma}_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \mu' \left(\frac{\partial \Pi_\theta}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \right) \dots\dots\dots (5.84)$$

$$\dot{\sigma}_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{-n}{r} v_r \right) + \mu' \left(\frac{\partial \Pi_\theta}{\partial r} - \frac{\Pi_\theta}{r} + \frac{-n}{r} \Pi_r \right) \dots\dots\dots (5.85)$$

Como podemos apreciar los cambios de variable en el método de DWN son más fáciles de apreciar y de llevar a cabo mientras que la aplicación en DF resulta una tarea sensiblemente mas compleja.

V.3.2 Modelo de Zener

La relación entre los esfuerzos y deformaciones tomando en cuenta la atenuación mediante el modelo de Zener.

$$\sigma_{ij} + \tau_{\sigma l} \partial_t \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \tau_{\varepsilon l} \partial_t \varepsilon_{kl}$$

En el método de número de onda discreta, aplicando la transformada de Fourier a la ecuación anterior permite obtener el tensor de los coeficientes de elasticidad equivalente

$$C_{ijkl}^* = C_{ijkl} \frac{1+j\omega\tau_\varepsilon}{1+j\omega\tau_\sigma} \dots\dots\dots 5.86$$

Esto en resumidas cuentas representa un cambio de variable el cual permite utilizar la ecuación constitutiva $\sigma_{ij} = \lambda(\sum_i \varepsilon_{ij})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$

V.3.2.1 Modelo de Zener en el algoritmo de DF y DWN:

La ecuación 5.86 se describe también en función de las nuevas constantes elásticas. En un sistema de referencia cartesiano se tiene:

$$\sigma_{xx} = [\lambda + 2\mu]^* \varepsilon_{xx} + \lambda^* \varepsilon_{yy} \dots\dots\dots (5.87)$$

$$\sigma_{yy} = [\lambda + 2\mu]^* \varepsilon_{yy} + \lambda^* \varepsilon_{xx} \dots\dots\dots (5.88)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu^* \varepsilon_{xy} \dots\dots\dots (5.89)$$

En coordenadas polares:

$$\sigma_{rr} = [\lambda + 2\mu]^* \varepsilon_{rr} + \lambda^* (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}) \dots\dots\dots (5.90)$$

$$\sigma_{zz} = [\lambda + 2\mu]^* \varepsilon_{zz} + \lambda^* (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \dots\dots\dots (5.91)$$

$$\sigma_{rz} = 2\mu^* \varepsilon_{rz} \dots\dots\dots (5.92)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu^* \varepsilon_{r\theta} \dots\dots\dots (5.93)$$

Con

$$[\lambda + 2\mu]^* = \lambda\chi_1 + \mu \left(\frac{2}{3}\chi_1 + \frac{4}{3}\chi_2 \right) \dots\dots\dots (5.94)$$

$$\lambda^* = \lambda\chi_1 + \frac{2}{3}\chi_1\mu(\chi_1 - \chi_2) \dots\dots\dots (5.95)$$

$$\mu^* = \mu\chi_2 \dots\dots\dots (5.96)$$

Como vimos en el capítulo anterior χ_1 y χ_2 son las funciones de relajación son adimensionales y cumplen tanto para las ondas P (compresionales) como para las ondas S (de corte). Estas funciones están definidas por:

$$\chi_v = 1 - \frac{1}{L_v} \sum_{l=1}^{L_v} \left(1 - \frac{\tau_{\varepsilon l}}{\tau_{\sigma l}} \right) e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}}$$

Donde sabemos que $\tau_{\varepsilon l}^v = \frac{\tau_0}{q_v} (\sqrt{1 + q_v^2} + 1)$ y $\tau_{\sigma l}^v = \frac{\tau_0}{q_v} (\sqrt{1 + q_v^2} - 1)$ corresponden a los tiempos de relajación. En estas ecuaciones y para implementar en los programas, se utilizó $\tau_0 = 1/f_{ricker}$ para el DWN y $\tau_0 = 1/2f_{ricker}$ para el programa de DF, L_v el número de elementos de Zener y una notación de superíndices para v donde cuando $v = 1$ representa las ondas P y $v = 2$ representa las ondas de corte o transversales.

V.3 Conclusiones.

La atenuación de Kelvin-Voigt es más apropiada para representar el amortiguamiento debido a una frecuencia ultrasónica, ya que consiste principalmente en un amortiguamiento en las bajas frecuencias, tratar de representar un experimento sísmico o sónico en el registro geofísico de pozos sería inútil con este modelo de atenuación, al contrario, el modelo de Zener con un elemento y con varios elementos es más representativo de la atenuación encontrada en los experimentos efectuados a baja frecuencia, donde el medio presenta muchas heterogeneidades, e.g, fracturas, anisotropía, porosidad, geologías irregulares y poco homogéneas, etc. El modelo de Zener otorga una atenuación máxima en torno a una frecuencia de referencia, este modelo puede calcularse utilizando el modelo de Zener en serie o en paralelo con el propósito de reproducir mejor lo mejor posible las señales reales.

VI. Resultados

Durante el desarrollo de este trabajo hemos hecho una revisión tanto de la teoría elástica como de la viscoelástica. También se realizó un estudio de los métodos de solución utilizados y de la aplicación de la teoría de atenuación en cada uno ellos. Así mismo, comentamos las ventajas y desventajas de dichos métodos. Toca el turno ahora de mostrar algunos resultados. Por las características del estudio, una parte de ellos se muestran en películas, en donde se aprecia la propagación de las ondas.

En el capítulo anterior hice la revisión y aplicación de la atenuación en los métodos de solución, en particular, de los modelos de atenuación de Kelvin-Voigt y de Zener debido a que estos dos métodos resultan los más apropiados para representar la atenuación en los sólidos (ver cap. 4), mientras que el modelo de Maxwell resulta por su sencillez más efectivo para los líquidos. Es por eso que el modelo de Maxwell solo se utiliza en la parte interior del cilindro, donde se supone está lleno de lodo de perforación con ciertas propiedades mecánicas.

A continuación se presenta un estudio paramétrico con el modelo de atenuación de Zener debido a que, así como los modelos Kelvin-Voigt y Zener resultan más aptos para modelar la atenuación en sólidos, el modelo de Zener resulta más efectivo para simular la propagación de ondas con atenuación en sólidos a baja frecuencia como podría ser el caso de un estudio sísmico o para el registro sísmico. Mientras que el modelo de Kelvin-Voigt es útil para estudios ultrasónicos en materiales más competentes como metales o algunos polímeros.

Por lo tanto el siguiente estudio paramétrico está enfocado en la propagación de ondas en materiales con atenuación en bajas frecuencias. Por ello el modelo que emplearé para simular dicha atenuación es el modelo de Zener y Zener con varios elementos de atenuación.

Este estudio paramétrico se divide en dos grandes ramas, la simulación con el método de DF y con DWN, así mismo cada uno está dividido en 2 posibilidades, con atenuación y

sin atenuación, y los parámetros que se buscan variar son: Tipo de formación, rápida, lenta o media, frecuencia y litología. En la estudio en función de la frecuencia se dividen en 5 frecuencias desde 20 MHz hasta 2 MHz, que representa el rango máximo y mínimo de la frecuencia en un registro sísmico. Por su parte la litología fue seleccionada para un estudio en pozos petroleros los materiales que se escogieron son propios del contexto, para esto realicé un estudio bibliográfico para encontrar las litologías que a mi parecer son las más características de un pozo petrolero así como algunas de sus propiedades mecánicas. Entre las rocas más comunes se encuentran: dolomía y calcita (carbonatos) arenisca y cuarzo - arenisca y arcillas.

VI.1 Resultados sin atenuación.

A continuación presento las graficas sin atenuación para los distintos parámetros, para DF y para DWN así como una comparación entre los 2 métodos. Comenzamos el estudio paramétrico con un solo receptor y en función del tipo de formación:

Formación Lenta

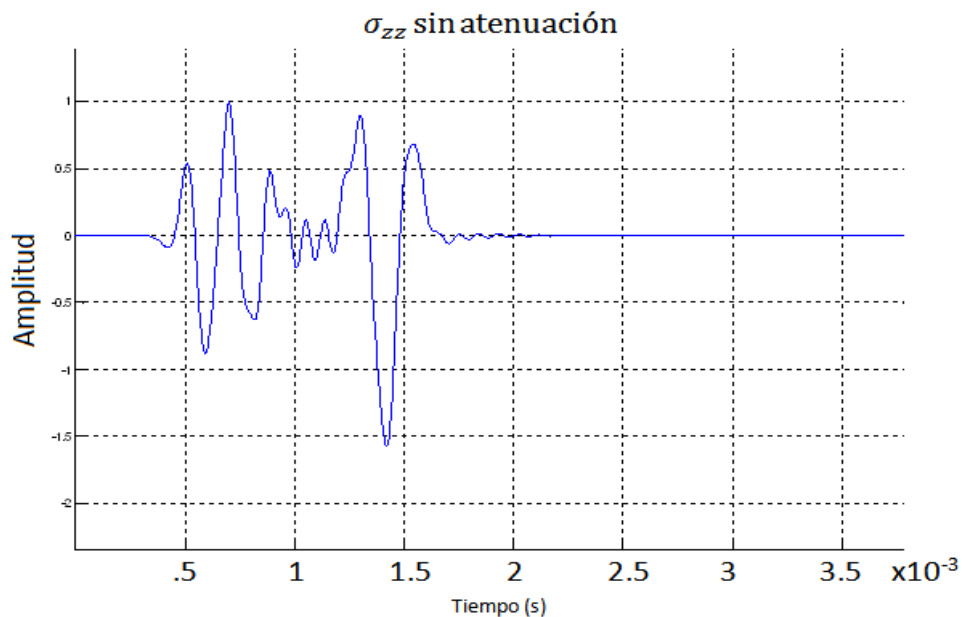


Figura 6.1. Grafica de los esfuerzos en un pozo, método de DWN.

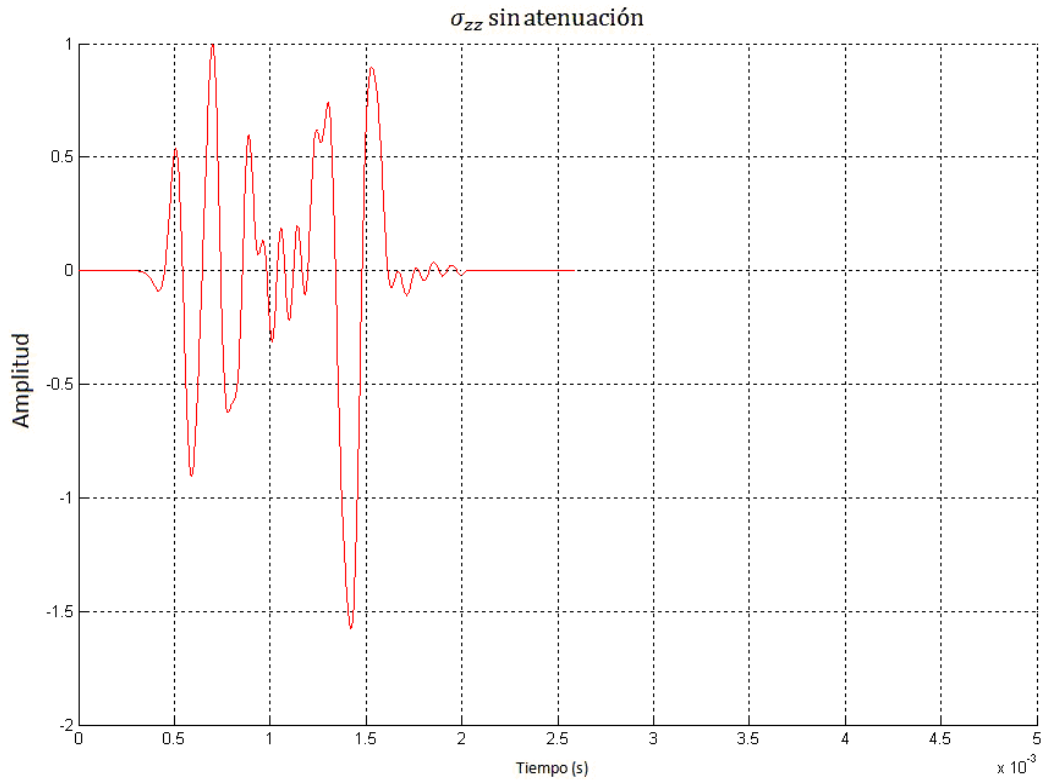


Figura 6.2 Grafica de los esfuerzos en un pozo, método de DF.

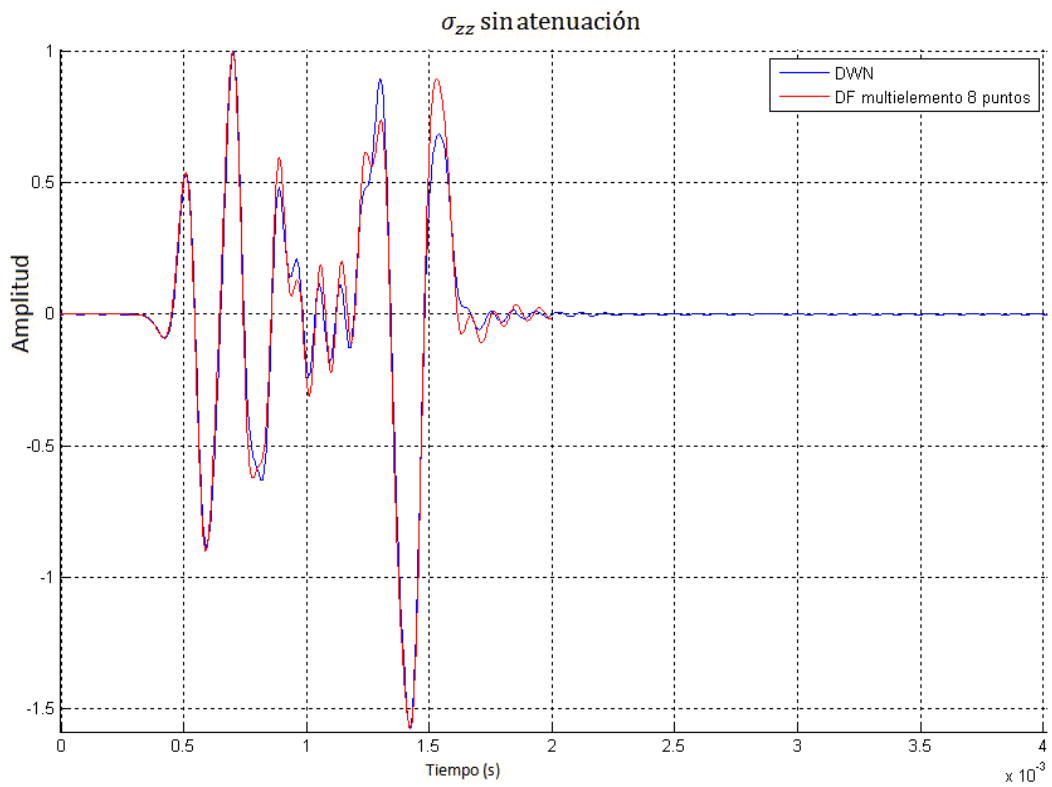


Figura 6.3. Grafica de los esfuerzos en un pozo, comparación método de DF vs DWN.

Formación Media.

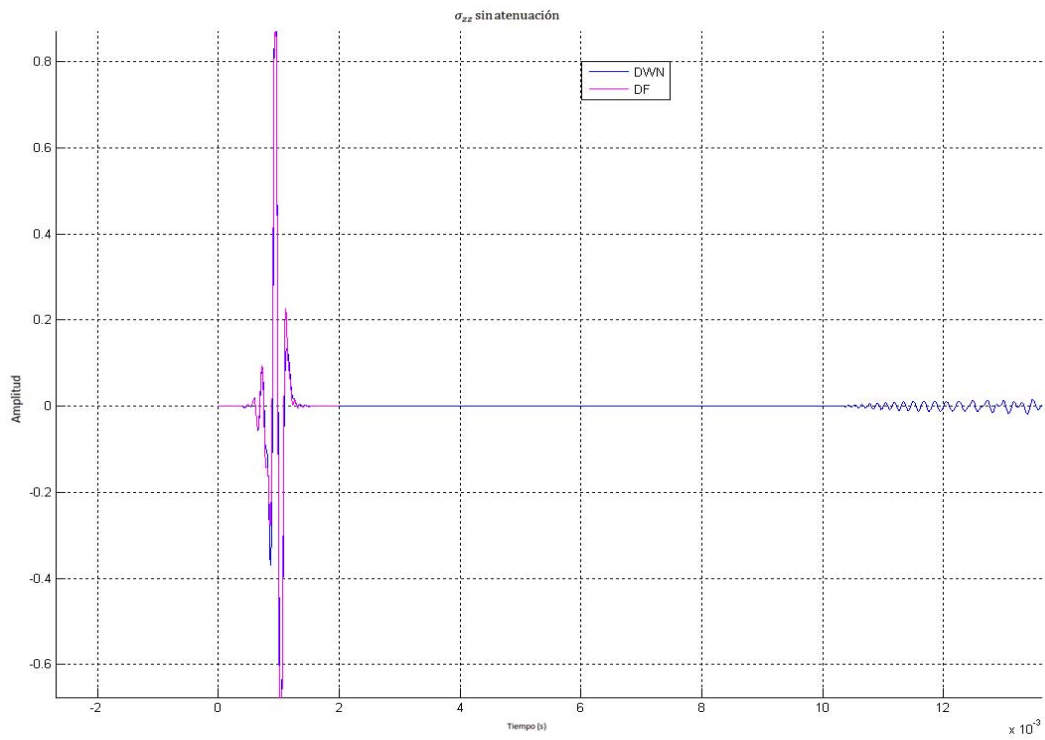


Figura 6.4. Grafica de los esfuerzos en un pozo, comparación método de DF vs DWN.

Formación Rápida

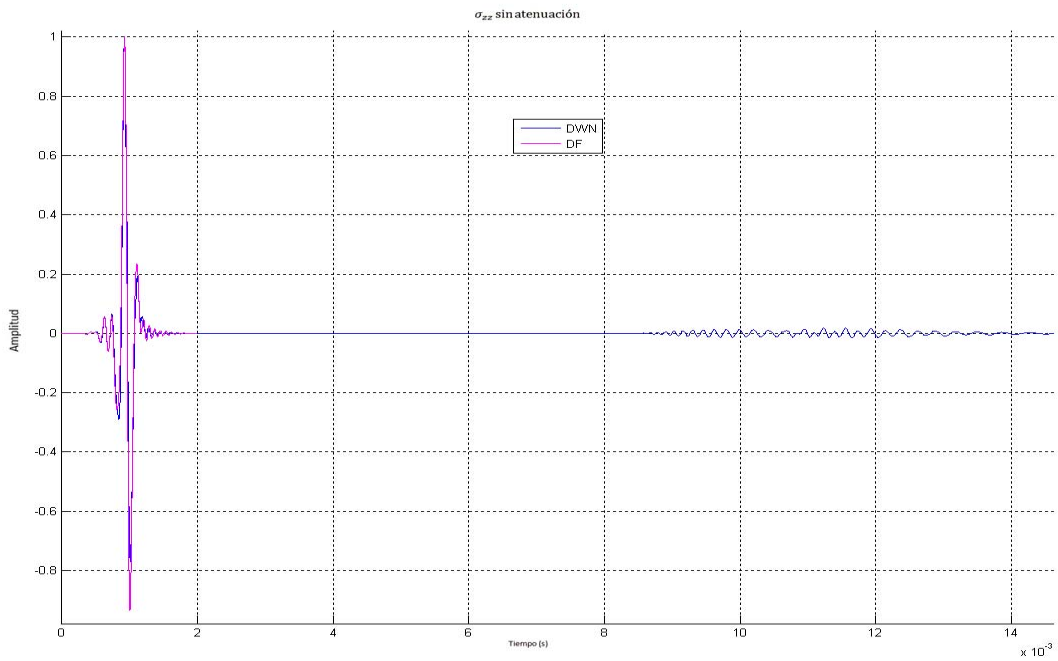


Figura 6.5. Grafica de los esfuerzos en un pozo, comparación método de DF vs DWN.

La siguiente fase del estudio paramétrico involucra el contexto petrolero al tomar en cuenta los valores de densidad y velocidad de las principales rocas presentes en los pozos petroleros, entre ellas podemos mencionar; Dolomía, Calcita, Arenisca, Cuarzo arenisca y Arcilla.

Litología	Velocidad		Densidad [gr/cm^3]
	Velocidad α	Velocidad β	
Dolomía	4800	2400	2.87
Calcita	4800	2000	2.71
Arenisca	4000	2000	2.68
Cuarzo arenisca	3600	1200	2.65
Arcilla	3200	1200	2.31

Tabla 6.1

En seguida las gráficas de la comparación de los métodos de DWN y DF con los distintos parámetros para las distintas litologías que se muestran en la tabla 6.1.

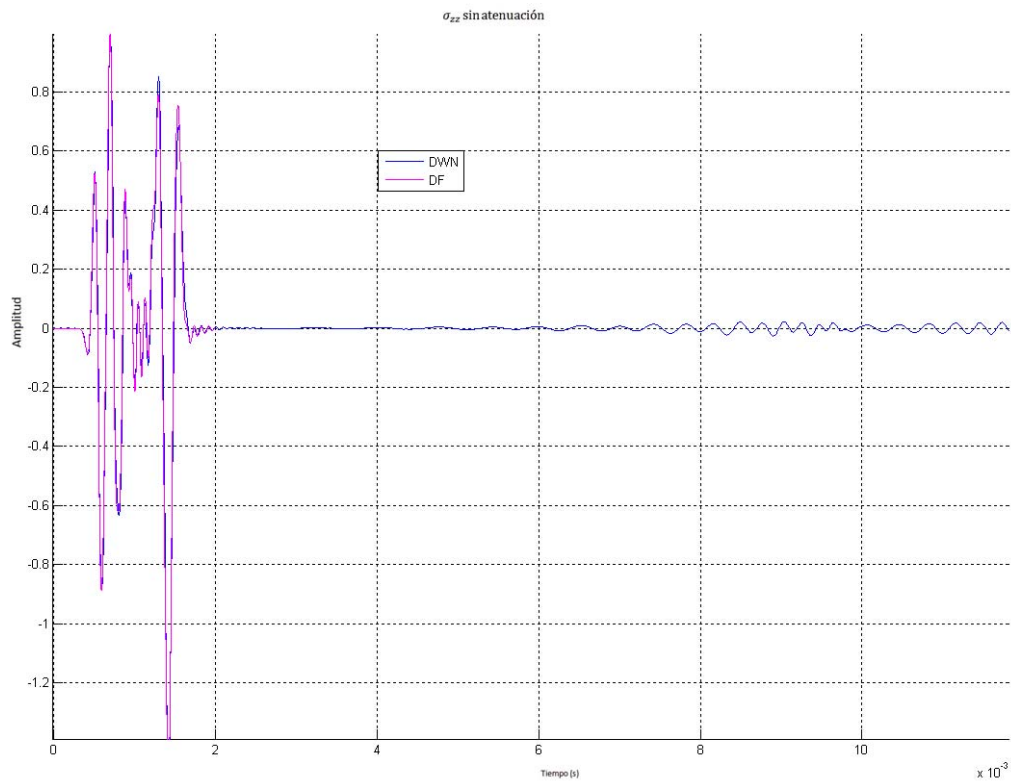


Figura 6.6. Gráfica de los esfuerzos con los métodos de DWN vs DF y litología Dolomía.

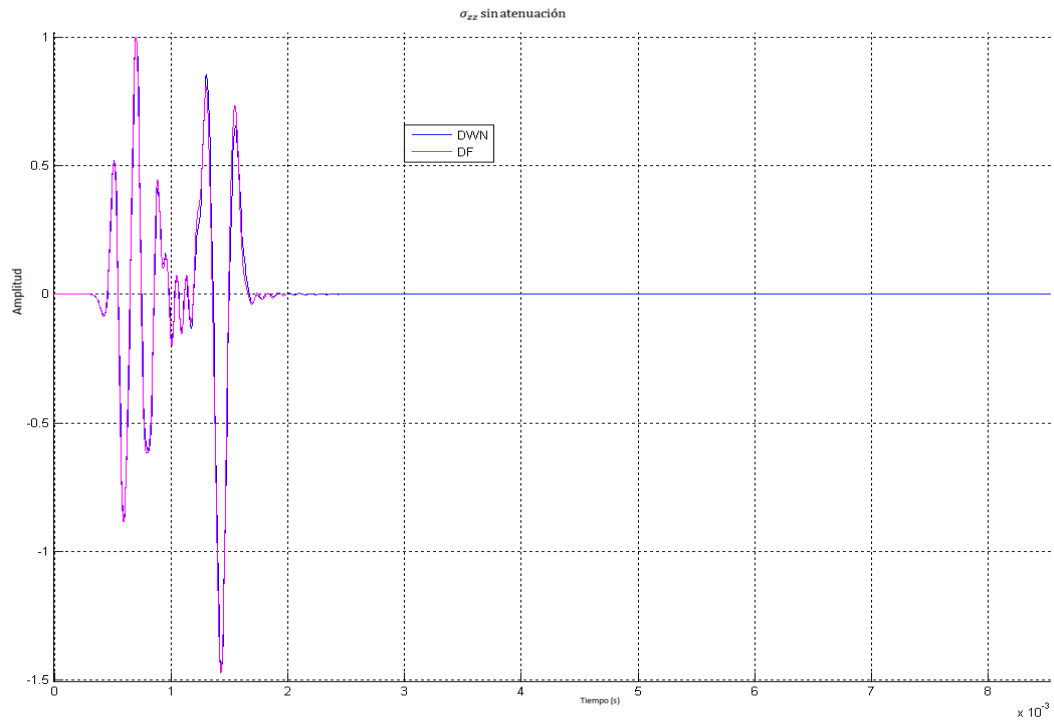


Figura 6.7. Gráfica de los esfuerzos con los métodos de DWN vs DF y litología Calcita.

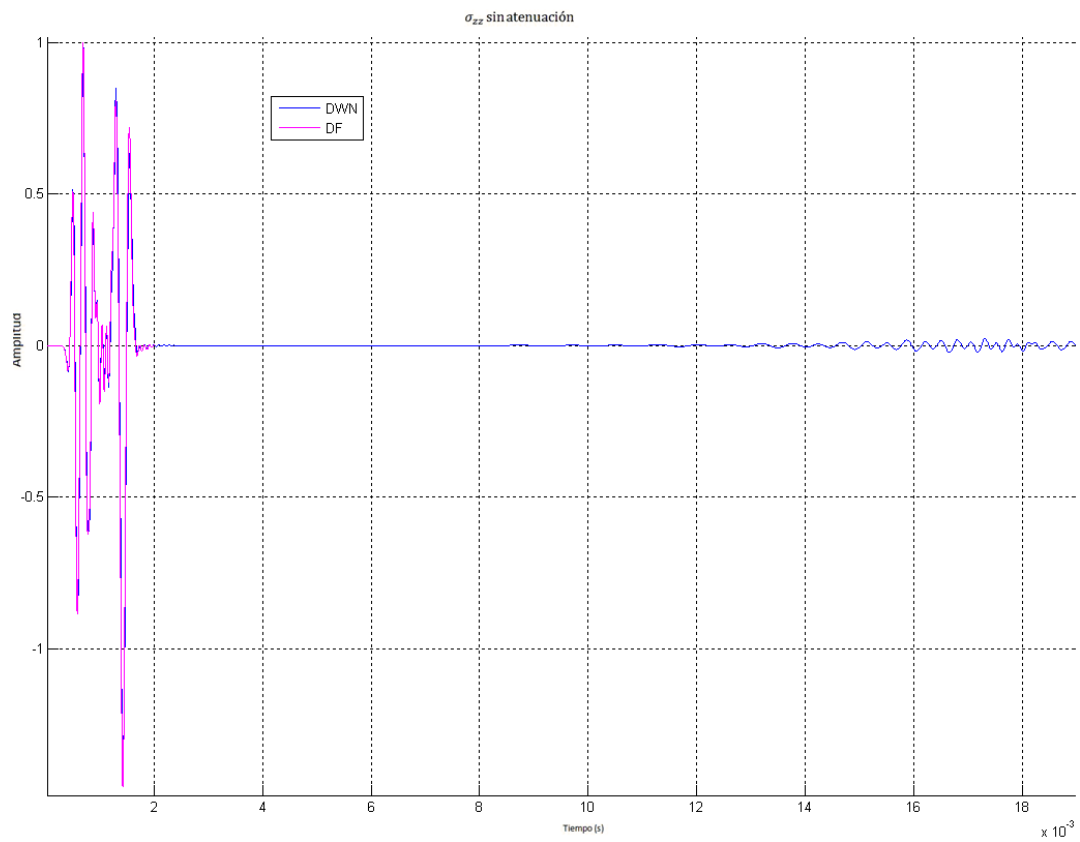


Figura 6.8. Gráfica de los esfuerzos con los métodos de DWN vs DF y litología de Cuarzo arenisca.

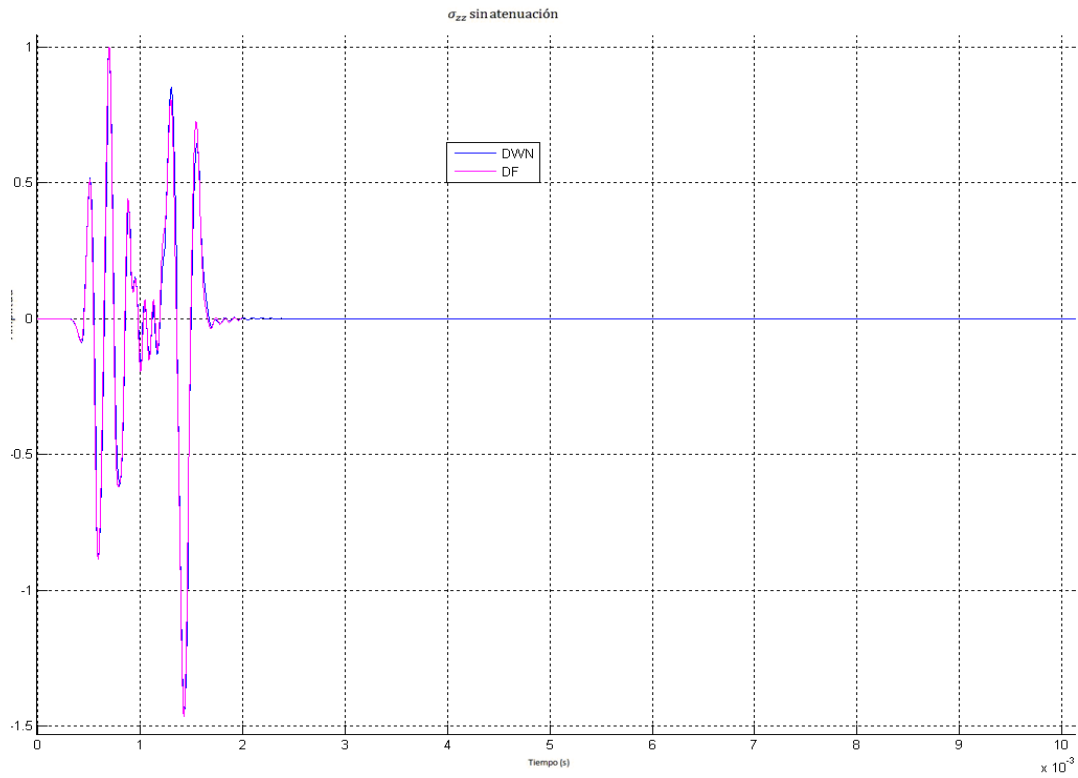


Figura 6.9. Gráfica de los esfuerzos con los métodos de DWN vs DF y litología de arenisca.

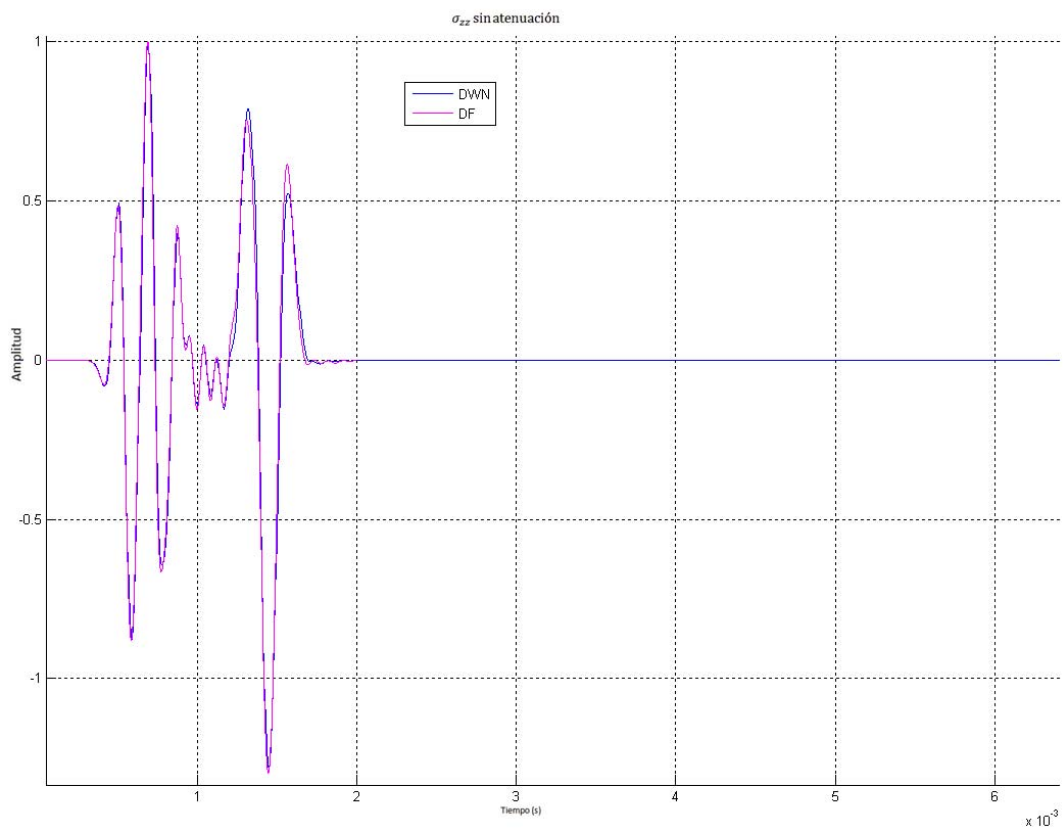


Figura 6.10. Gráfica de los esfuerzos con los métodos de DWN vs DF, litología Arcilla

A continuación el siguiente compendio de gráficas se encarga del estudio de la frecuencia, para determinar las frecuencias representativas en el estudio con atenuación. Las graficas que seleccione para el estudio se encuentran en la siguiente tabla.

DF [Hz]	DWN [s]	$v_\alpha = 3200 \text{ m/s}$ $v_\beta = 1200 \text{ m/s}$ $v_f = 1615 \text{ m/s}$ $\rho_s = 2.71 \text{ gr/cm}^3$ $\rho_f = 1.1 \text{ gr/cm}^3$
2000	.0002	
4000	.0005	
8000	.000125	
16000	.0000625	
20000	.00005	

Tabla 6.2. Estudio de la Frecuencia

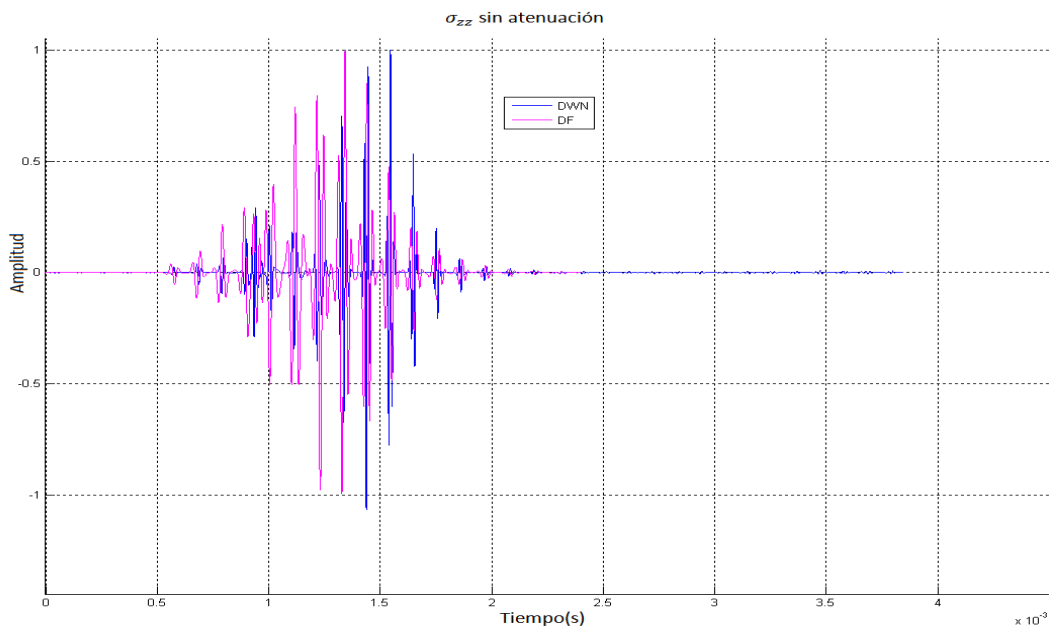


Figura 6.11. Gráfica de los esfuerzos en un pozo, con una fuente virtual a una frecuencia de 20 Mhz.

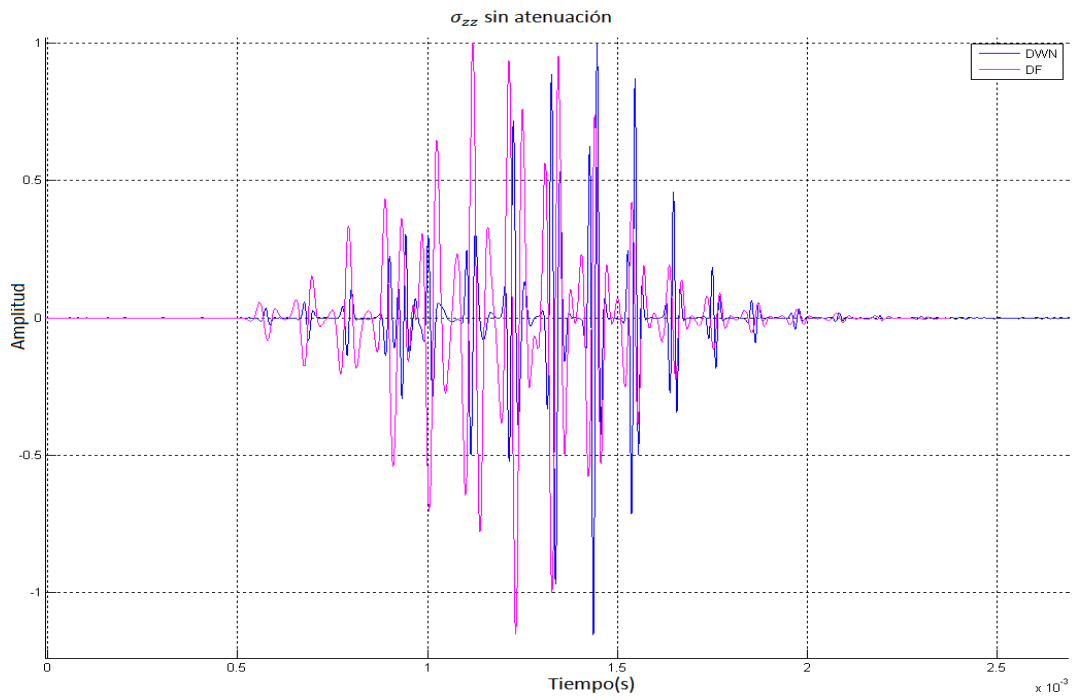


Figura 6.12. Gráfica de los esfuerzos en un pozo, con una fuente virtual a una frecuencia de 16 Mhz.

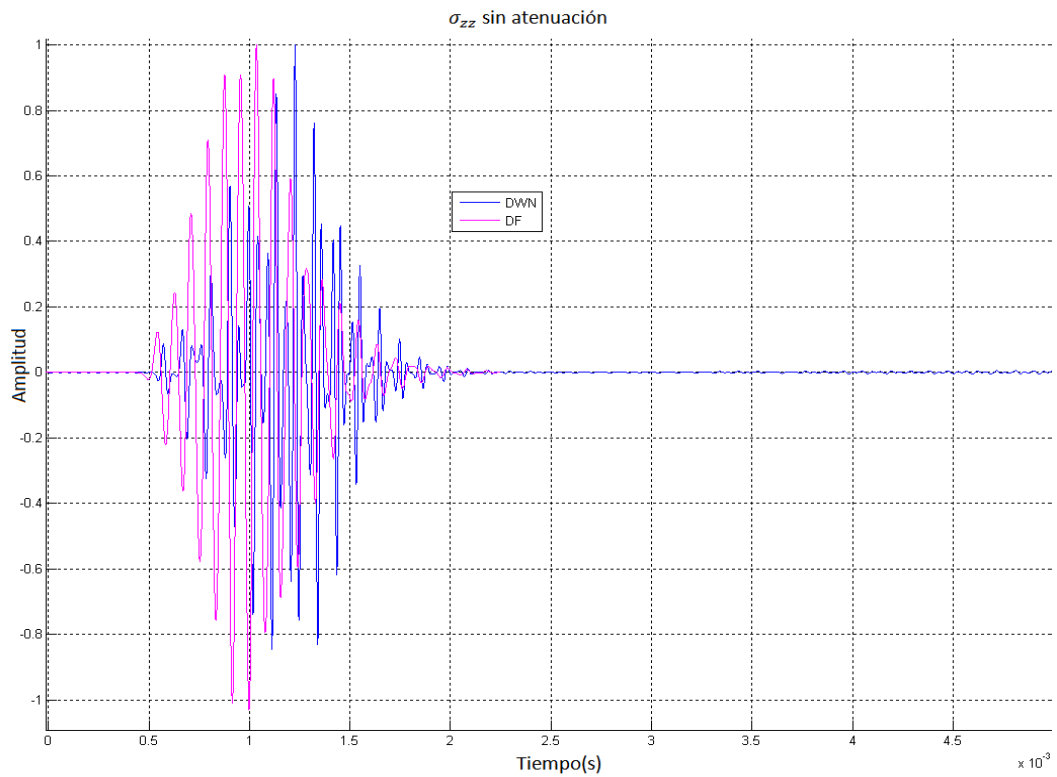


Figura 6.13. Gráfica de los esfuerzos en un pozo, con una fuente virtual a una frecuencia de 8 Mhz.

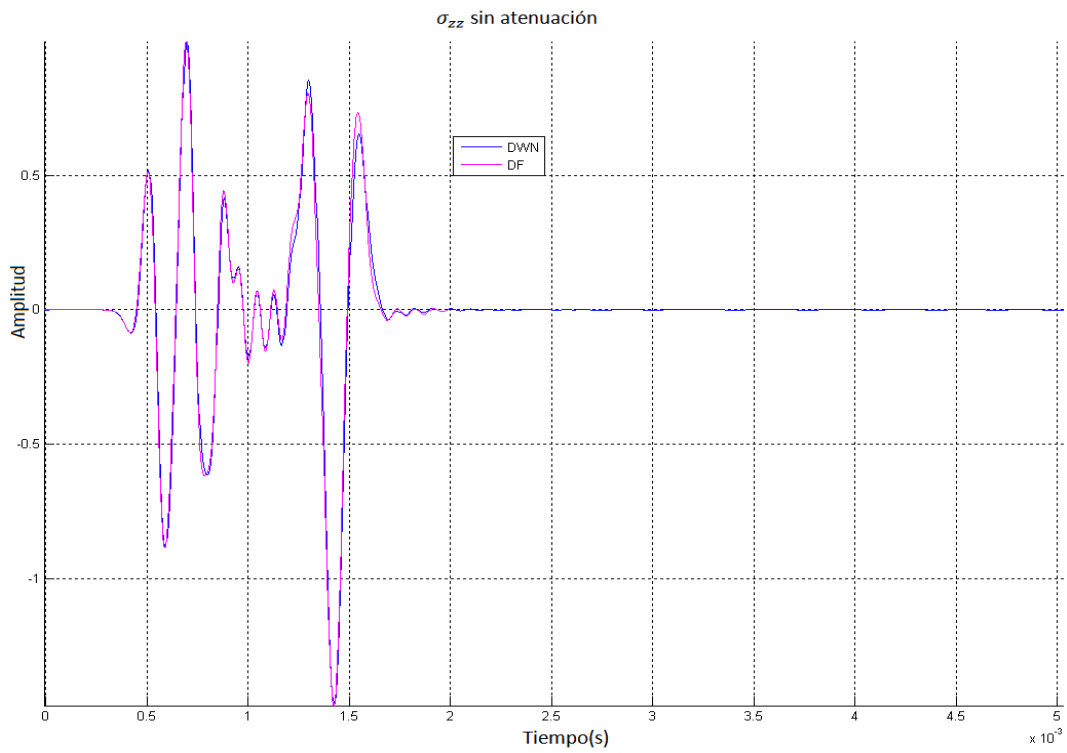


Figura 6.14. Gráfica de los esfuerzos en un pozo, con una fuente virtual a una frecuencia de 4 Mhz.

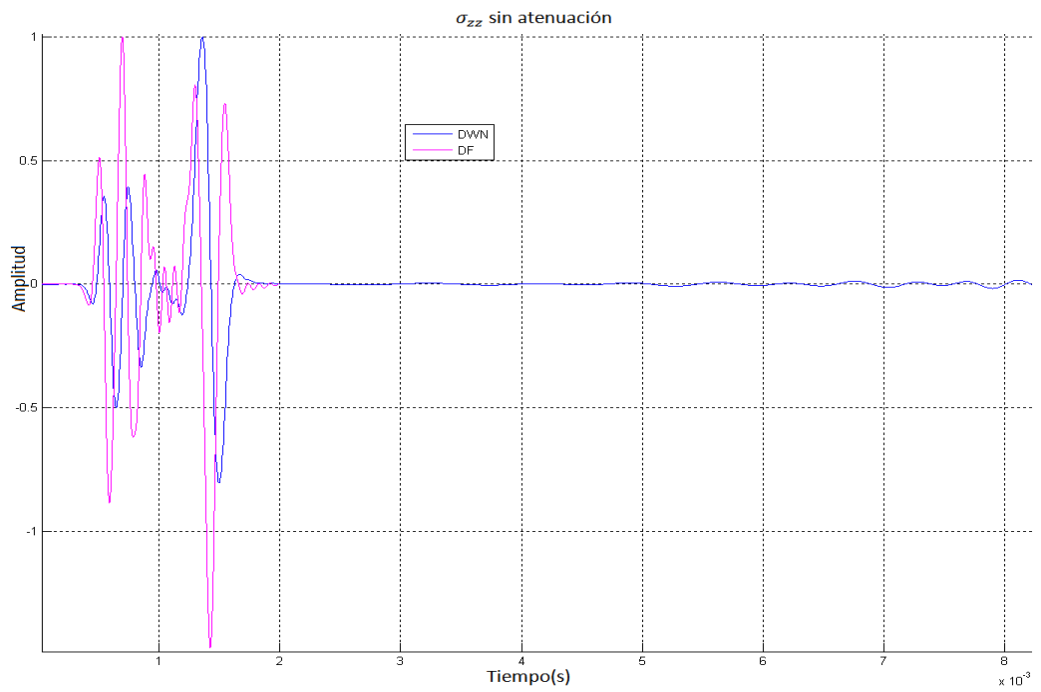


Figura 6.15. Gráfica de los esfuerzos en un pozo, con una fuente virtual a una frecuencia de 2 Mhz.

Antes de comenzar con los resultados con atenuación, vale la pena hacer un par de comentarios de los resultados anteriores sin atenuación. Las gráficas 6.1 a la 6.3 corresponden a la propagación de ondas en un cilindro y se muestrean as presiones a lo largo del eje z a través del tiempo. Estos casos corresponden a una formación lenta, la cual se define así cuando la velocidad de corte del medio circundante es menor a la velocidad del fluido inmerso en el cilindro. Estas tres primeras figuras son importantes ya que la figura 6.1 muestra el resultado con el método de DWN, la figura 6.2 muestra el resultado con el método d DF mientras que la figura 6.3 muestra la comparación entre los dos métodos, como podemos apreciar en esta gráfica las diferencias son mínimas, de hecho solo se aprecian en los rebotes de las ondas que se entrampan en el cilindro y en la llegada de las ondas superficiales al final que son las de mayor amplitud.

En las siguientes gráficas se muestra solamente la comparación entre los dos métodos. En las graficas 6.4 y 6.5 se presentan resultados para el estudio de formación media y formación rápida, respectivamente. Esto significa que la velocidad de corte es mayor a la velocidad del fluido, para el caso de la formación rápida es el doble y para el caso de la formación media es 1.5 veces mayor. Con esta información vemos que se altera la polaridad de la primera onda de llegada, así como los tiempos de llegada de las ondas y los rebotes provenientes del fluido se compactan y aumentan. Estos resultados son con una misma frecuencia ya que en este primer estudio lo que nos interesa es el parámetro de las velocidades de las formaciones, lo cual nos da una idea del tipo de ondas que se pueden distinguir de manera más clara, para la formación lenta la llegada de cada onda y cada evento está bien definida mientras que para las graficas de las formación media las ondas están más juntas, los rebotes no son de mucha amplitud y las ondas que al final llegan están más cercanas al paquete inicial, por lo que para fines académicos es más útil la formación lenta debido a que le da mayor énfasis en cada una de las ondas.

Para el caso de las graficas de las figuras 6.6 a la 6.10 el estudio es en función de la litología. En dicho estudio el cambio fueron las velocidades constantes en un tipo de formación lenta y solo cambiamos las densidades. Esto es útil para hacer un análisis de

sensibilidades cualitativo, podemos apreciar desde la figura 6.6 a la 6.10 como los tiempos de llegada son similares, la polaridad de las primeras ondas es la misma, la amplitud relativa es similar, los únicos cambios sustanciales que se muestran en estas 5 graficas se encuentran entre la figura 6.6 y 6.10, si comparamos las 2 podemos ver que la amplitud de las ondas en el caso de una formación más competente es mayor mientras que para una formación menos densa las ondas están mejor definidas pero presentan menor amplitud, en el caso de las ondas de cabecera que se ven al final de la grafica podemos apreciar que son más notorias en el caso de una densidad mayor (figura 6.6) por lo que nos da una idea de que la impedancia acústica está directamente relacionada con los índices de transmisión de la energía y de reflexión de las ondas, en conclusión el contraste de densidades no es tan apreciable, es decir, necesita un mayor contraste para notar alguna diferencia, sin embargo, en caso de utilizar un mayor rango de densidades algunos materiales no sería propiamente de un pozo petrolero, los materiales que elegí para investigar sus densidades, es decir, la litología son característicos de un sistema petrolero, materiales como arcilla, dolomía, arenisca, cuarzo arenisca y calcita. Estas densidades las tome de una serie de cartas de interpretación de Schlumberger. En conclusión para hacer más notorio el efecto de la densidad requiere al menos un contraste entre materiales como sólido y líquido o rocas y metales, sería útil un estudio a mayor profundidad para determinar los efectos de la densidad de la herramienta en la propagación de ondas o los efectos de la densidad de una roca con porosidad y permeabilidad, pero estos escaparían del alcance de este trabajo ya que los programas no toman en cuenta la presencia de la herramienta y la teoría no toma en cuenta los parámetros de Biot o Castagna para la porosidad y permeabilidad.

Sin lugar a dudas, el estudio más interesante de estos 3 fue el hecho en función de la frecuencia, para este estudio se mantuvieron fijas la litología, es decir, la densidad, el tipo de formación, se eligió una formación lenta, y el cambio se dio en relación a la frecuencia de la fuente, el rango de frecuencias seleccionado va de los 2000 Hz hasta los 20 MHz, esto debido a que son las frecuencias que se acostumbran manejar en la industria petrolera para los registros sísmicos. En este estudio representado por las

gráficas 6.11 a la 6.15 podemos ver como para las distintas frecuencias seleccionadas para cada grafica los cambios son notorios, desde el tiempo de cálculo hasta la representación de los esfuerzos, así mismo, en este estudio es donde se muestra una mayor discrepancia con los métodos, ya que como hemos mencionado el DWN está íntimamente relacionado con la frecuencia por lo que es más sensible a los cambios producidos por este, el estudio no de ser válido por esto ya que se respetan los tiempos de llegada y las formas de onda, lo que varia son las amplitudes, recurando que estas son amplitudes relativas y dependen del tipo de normalización que se utilice.

Cuando el pulso es de alta frecuencia o bajo periodo, se puede distinguir muy bien cada onda. La enumeración de todas las ondas se hará con la ayuda de las imágenes instantáneas (snapshots) que se presentan en las figuras 6.16 y 6.17 en donde se puede apreciar la evolución de las señales en función de la duración del pulso. Cuando el pulso de la fuente es de más baja frecuencia, las ondas se traslapan y no se distinguen las llegadas. Para resolver esta situación, se utiliza una convolución con ondículas que tiene la misma forma que el pulso utilizado en el estudio, es decir un pulso de Ricker. Los primeros arribos de la onda que ha viajado en el sólido con la velocidad A tienen una amplitud relativa muy pequeña cuando la señal incidente corresponde a un pulso de alta frecuencia, para los arribos obtenidos con un pulso de baja frecuencia las amplitudes que se obtienen en la respuesta son mayores. Sin embargo, hay que destacar que se están considerando las amplitudes relativas, es decir, la amplitud de una onda contra las amplitudes de todas las ondas presentes en la señal. Efectivamente, es posible ver la señal recibida por los receptores aunque la señal incidente tenga alta frecuencia. Pero estas señales son analíticas y no toman en cuenta el ruido siempre presente. Dependiendo de sus amplitudes, los primeros arribos podrían no ser fácilmente detectados en las señales experimentales. Además, la amplitud de la repuesta dinámica en los receptores también tiene un papel importante, pues si no se usa una compresión, no se pueden detectar estos pequeños cambios. La mayor amplitud de las ondas viajando en el sólido y radiando sobre los receptores se puede explicar a partir de la longitud del pulso. Entre más largo sea el pulso en el agua, más largo será el sector angular alrededor del ángulo crítico que

permite generar la onda que se medirá. Sin embargo, una amplificación con el tiempo de la onda viajando en el sólido con la misma velocidad (debido a que todas las llegadas de esta onda se pueden distinguir en alta frecuencia) se puede medir en la formación a partir de la diferencia de tiempo entre dos reflexiones. También se puede verificar si la sonda está bien centrada en el pozo considerando la periodicidad de las recepciones, esto es, en el caso de que la sonda esté vertical pero no centrada, se ve una periodicidad entre las llegadas pares y otra de mismo periodo con las llegadas impares. Así, la generación con alta frecuencia favorece la medida de la velocidad A.

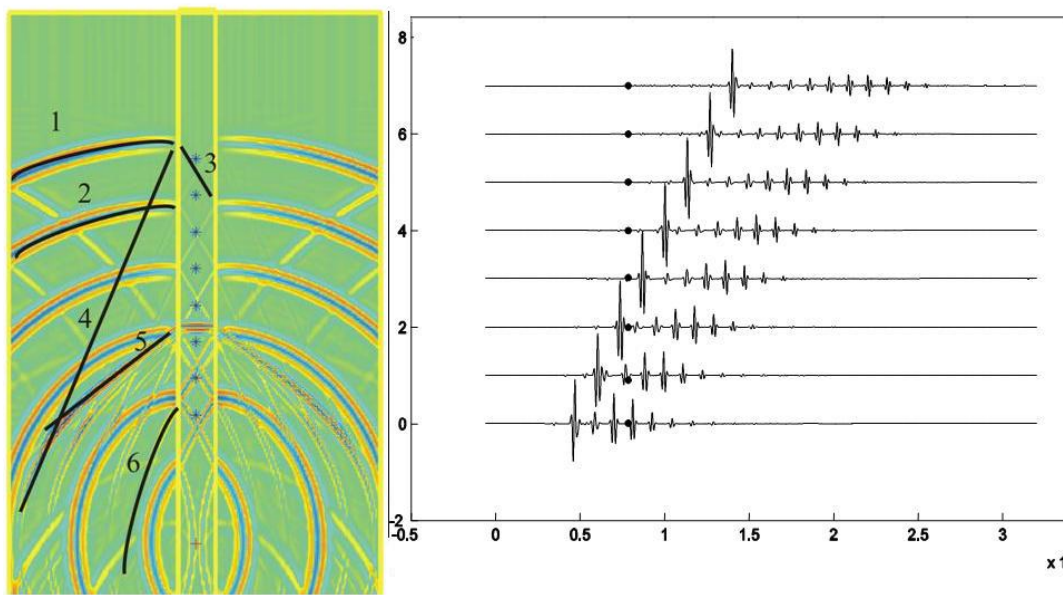


Figura 6.16. Representación en una animación instantánea así como en tazas de la propagación de ondas a través de un cilindro con una fuente virtual y 8 receptores.

Para ver el tipo de ondas que se puede encontrar en estas señales hay que remitirse a la figura 6.16 que tiene una resolución bastante buena. Esta se obtuvo con un pulso de alta frecuencia ($T_p = 5 \times 10^{-5}$ s). En esta figura las líneas señaladas con los números (1) y (2) corresponden a las ondas de polarización longitudinales L en el sólido generadas por la onda directa de compresión (L_f) del agua (línea 1), y después de una reflexión (línea 2). La línea (3) corresponde a la onda de cabecera emitida por la onda L (1) del sólido. Esta onda se superpone a la onda de cabecera emitida por la onda L (2) del sólido y así sucesivamente. Se ve claramente la amplificación con el tiempo de esta onda en la segunda traza de la grafica contigua. Los puntos negros en esta gráfica corresponden al

tiempo de la instantánea o snapshot. La línea (4) representa a la onda cabecera de polarización transversal o de corte T en el sólido emitida por la onda L del sólido. Su amplitud es muy pequeña. La línea (5) corresponde a la onda cabecera T emitida por la onda de compresión en el agua cual se ve en el pozo al extremo derecho de la línea (5). Los frentes de ondas detrás del pulso de agua y dentro del pozo corresponden a una mezcla entre ondas cabeceras del estilo (3) y los rebotes de la onda de agua. La línea (6) corresponde a la última onda T transmitida en el sólido. Su amplitud es muy pequeña lo que se explica con el coeficiente de transmisión entre el fluido y el sólido. A la izquierda de la línea (6) se pueden ver las cuatro primeras ondas T .

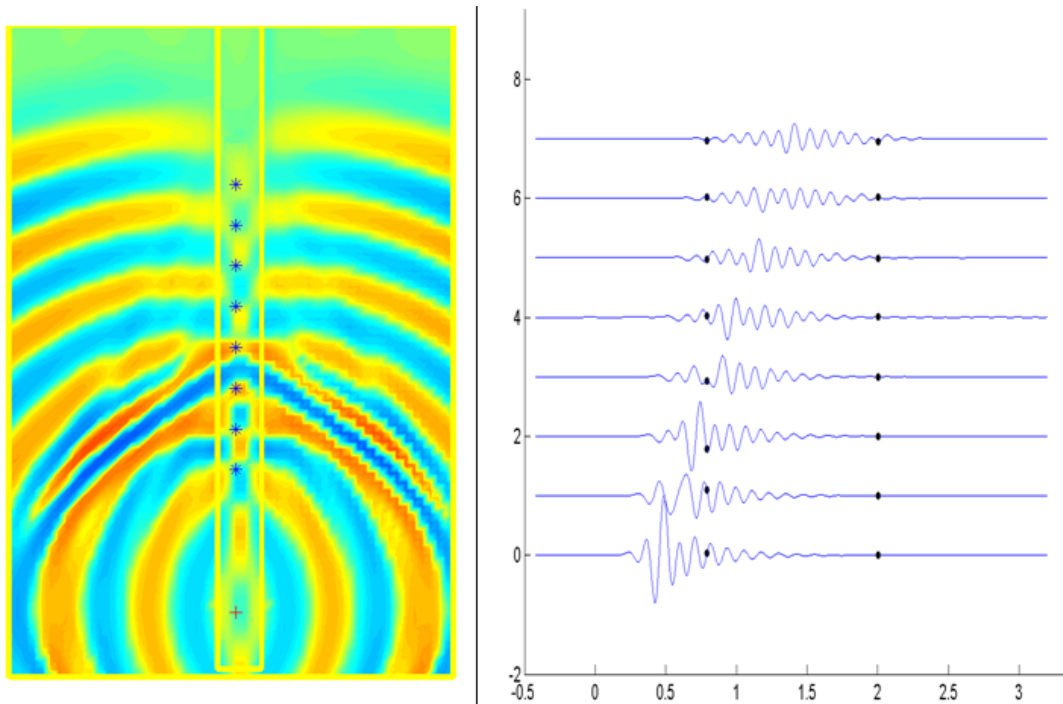


Figura 6.17. Representación instantánea de la propagación de una onda a menor frecuencia, 8 Receptores y sus trazas. Sin atenuación.

La **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** 6.17 se obtuvo con un pulso de Ricker de más baja frecuencia ($T_p = 5.0 \text{ e}^{-3} \text{ s}$). Se presentan dos instantáneas (snapshots) a dos tiempos distintos, la primera la de la figura 6.17, en esta ilustración se puede notar el traslape de las ondas lo que no permite distinguir bien todas las ondas que se describieron en el párrafo anterior. Esta grafica no exhibe la onda de Stoneley la cual no se aprecia claramente en la primera gráfica. Eso se puede explicar de la siguiente manera: 1) la onda de Stoneley

tiene una velocidad más baja que la del fluido lo que le permite apartarse del paquete de ondas y volverse más identificable; 2) es una onda de superficie y su amplitud no disminuye con el tiempo como las ondas de volumen, las cuales tienen una amplitud que disminuye debido a la difracción. Hay que recordar que los modelos aquí estudiados son bidimensionales, lo que implica que el efecto será mucho menos visible que en un modelo 3D.

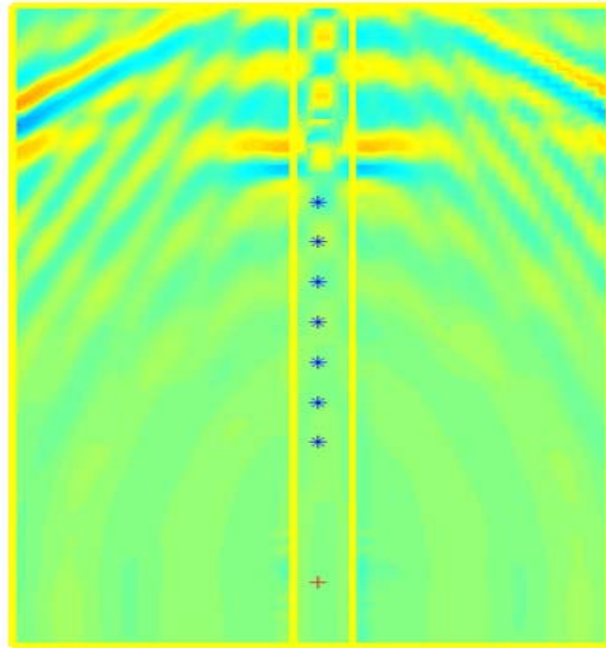


Figura 6.17^a. Representación a diferente tiempo de la propagación de ondas mencionada en la figura anterior

En esta figura las ondas cabeceras T se visualizan mejor después de que ha pasado el paquete de ondas.

VI.2 Resultados con atenuación.

En esta sección se muestran los resultados con atenuación, estos resultados están divididos en un estudio paramétrico para encontrar la influencia de cada parámetro, las graficas están compuestas por un solo receptor para visualizar de mejor manera las trazas.

Estudio paramétrico en función de la litología.

En la tabla 6.3 se muestra los valores utilizados para la simulación, recordamos que Q_p y Q_s son los factores de calidad, mientras que τ_p y τ_s son los tiempos de relajación y están íntimamente ligados a la frecuencia de atenuación del material. V_p hace referencia a la velocidad de la onda P y V_s hace referencia a la velocidad de la onda S en el material. La velocidad, densidad del fluido permanecen constantes.

Tabla 6.3

Litología	Densidad	Velocidad		Q_p	Q_s	τ_p	τ_s
		V_p	V_s				
Dolomía	2.87	4800	2400	30	21	.0318385	.0296065
Calcita	2.71	4800	2400	25	18	.0311465	.0304653
Arenisca	2.68	4000	2000	20	15	.0325305	.0332577
Cuarzo arenisca	2.65	3200	2000	15	12	.0304655	.028748
Arcilla	2.31	3200	1200	10	9	.0332577	.035244

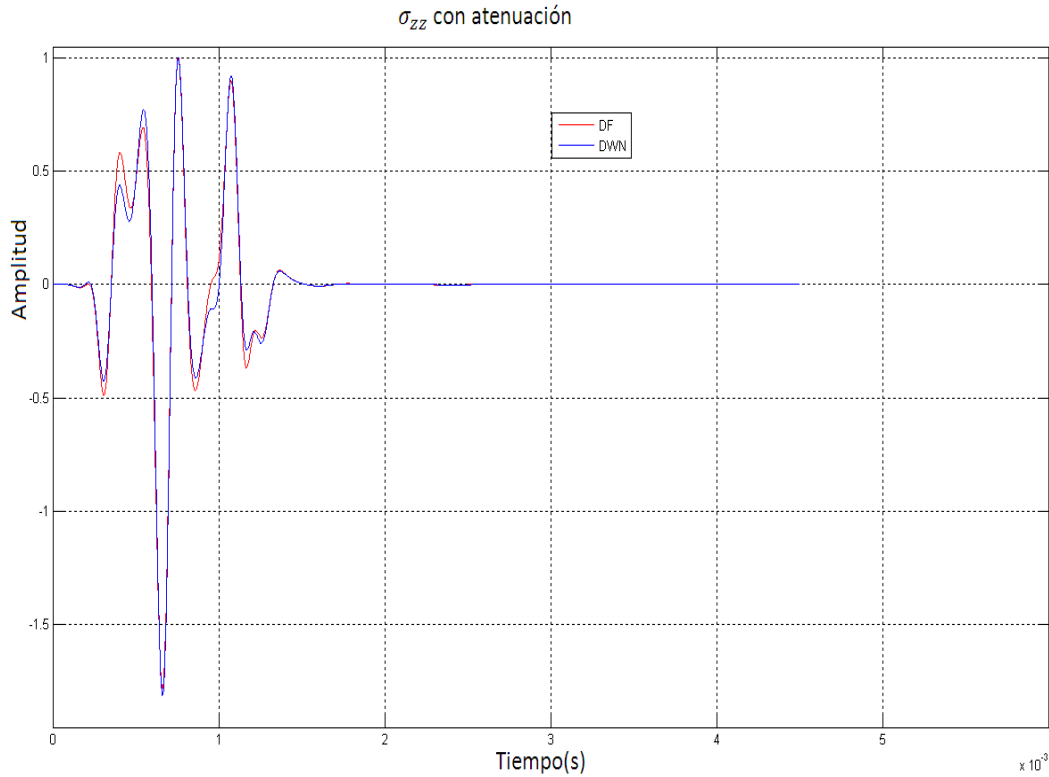


Figura 6.18. Comparación entre DWN y DF de la propagación de ondas en pozo con atenuación con una litología de Dolomía. Dentro de un estudio paramétrico con la litología

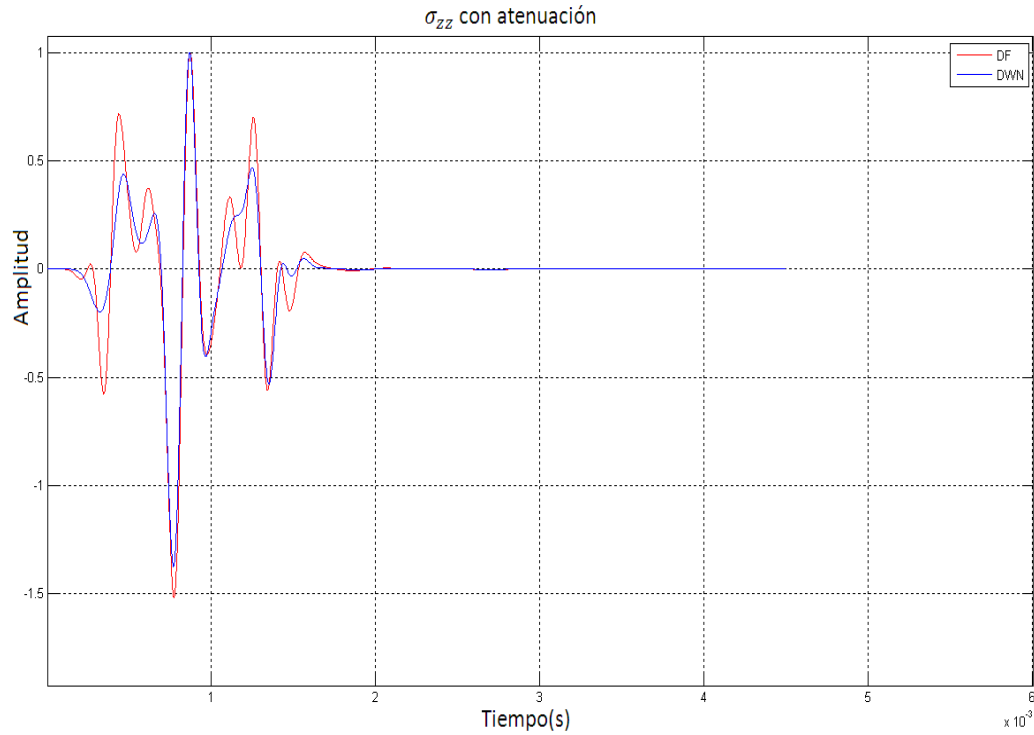


Figura 6.19. Comparación entre DWN y DF de la propagación de ondas en pozo con atenuación con una litología de Calcita. Dentro de un estudio paramétrico con la litología

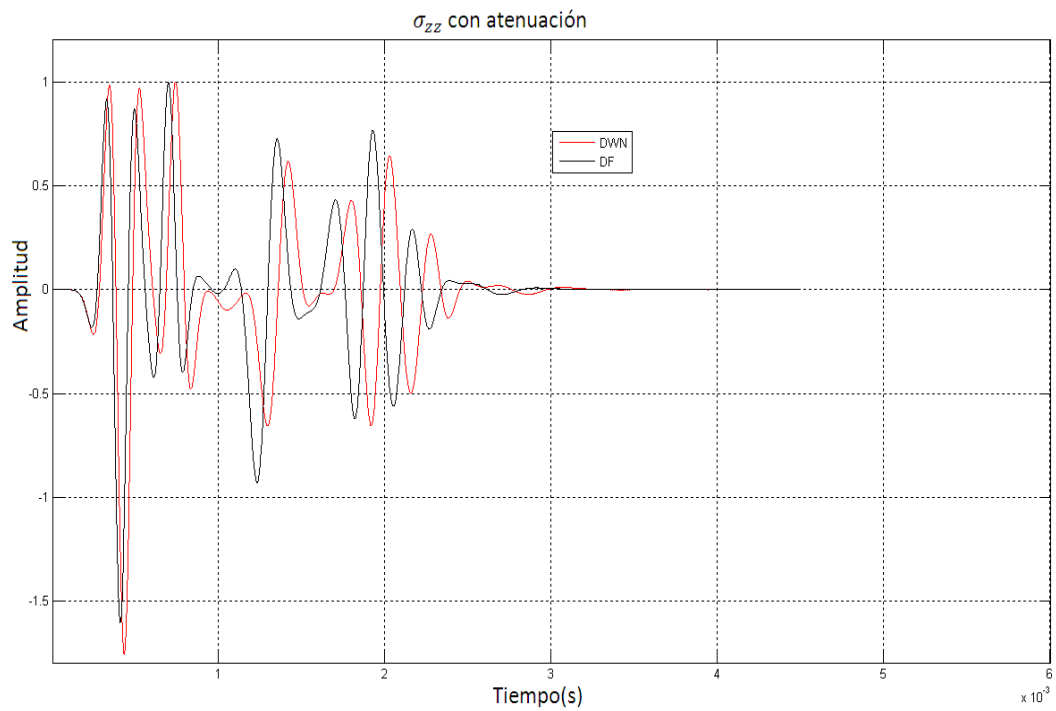


Figura 6.20. Comparación entre DWN y DF de la propagación de ondas en pozo con atenuación con una litología de Arenisca. Dentro de un estudio paramétrico con la litología

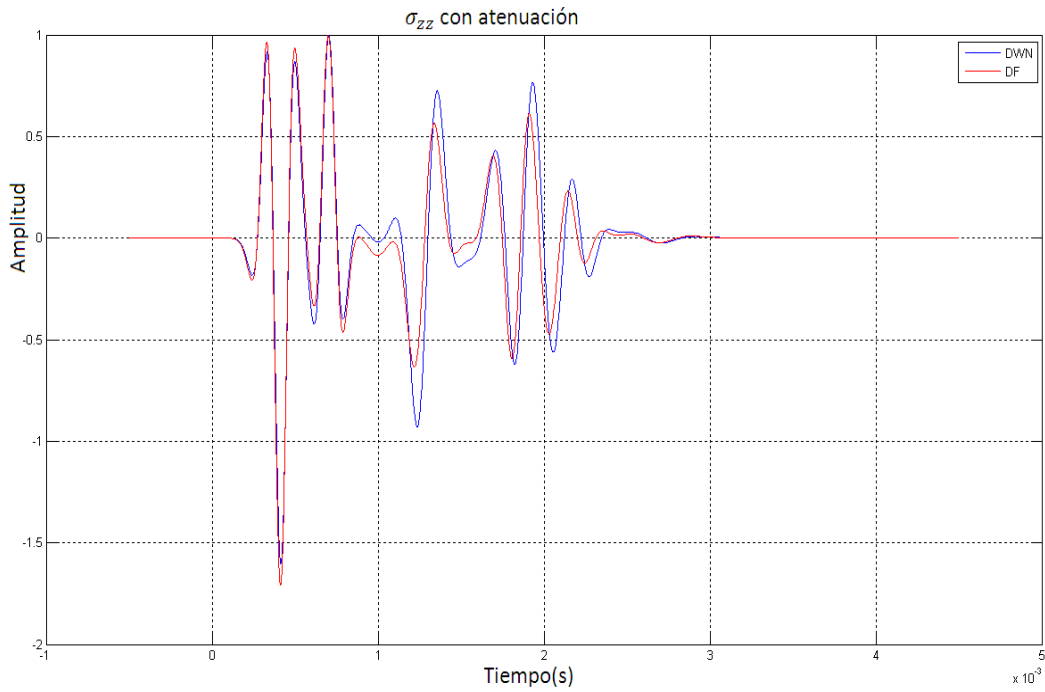


Figura 6.21. Comparación entre DWN y DF de la propagación de ondas en pozo con atenuación con una litología de Cuarzo-Arenisca. Dentro de un estudio paramétrico con la litología.

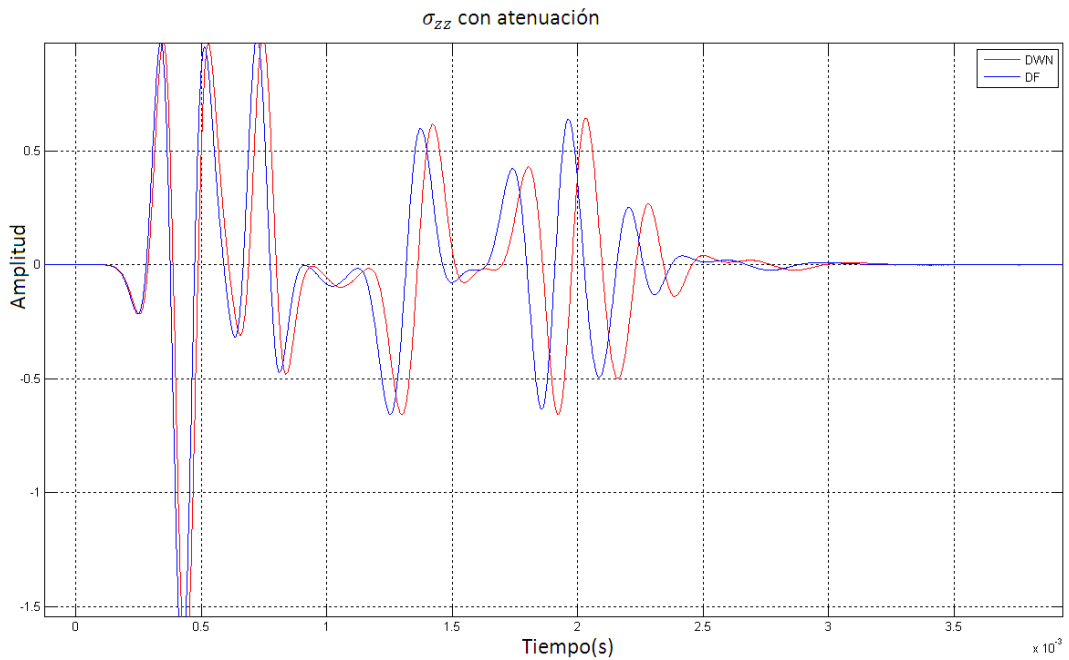


Figura 6.22. Comparación entre DWN y DF, Estudio paramétrico con la litología correspondiente a una formación con Arcilla.

A continuación la tabla 6.4 muestra valores del estudio paramétrico en función de los tiempos de relajación, la densidad es constante, los factores de calidad son constantes, se supone una formación media, una frecuencia de 4000 Hz.

Tabla 6.4

Litología		Densidad	Q_p	Q_s	τ_p	τ_s
A	Calcita	2.71	25	18	.0318385	.0296065
B	Calcita	2.71	25	18	.0325305	.0304653
C	Calcita	2.71	25	18	.0332577	.0332577

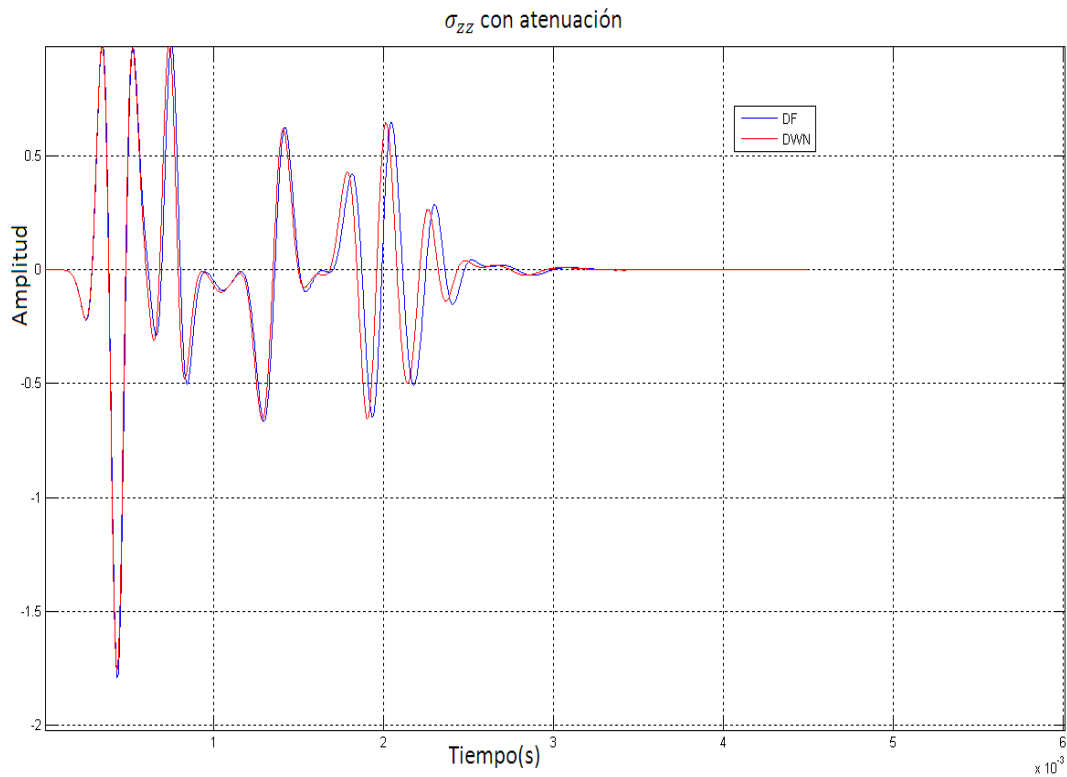


Figura 6.23. Comparación entre DF y DWN para los valores A de la tabla 6.4

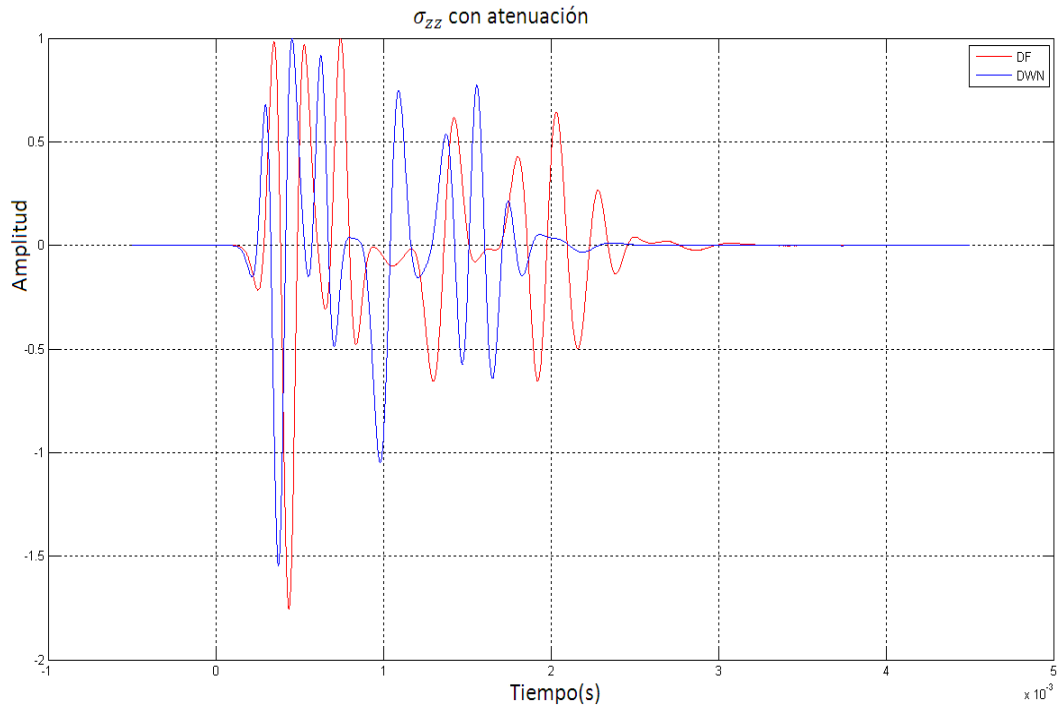


Figura 6.24. Comparación entre DF y DWN para los valores B de la tabla 6.4

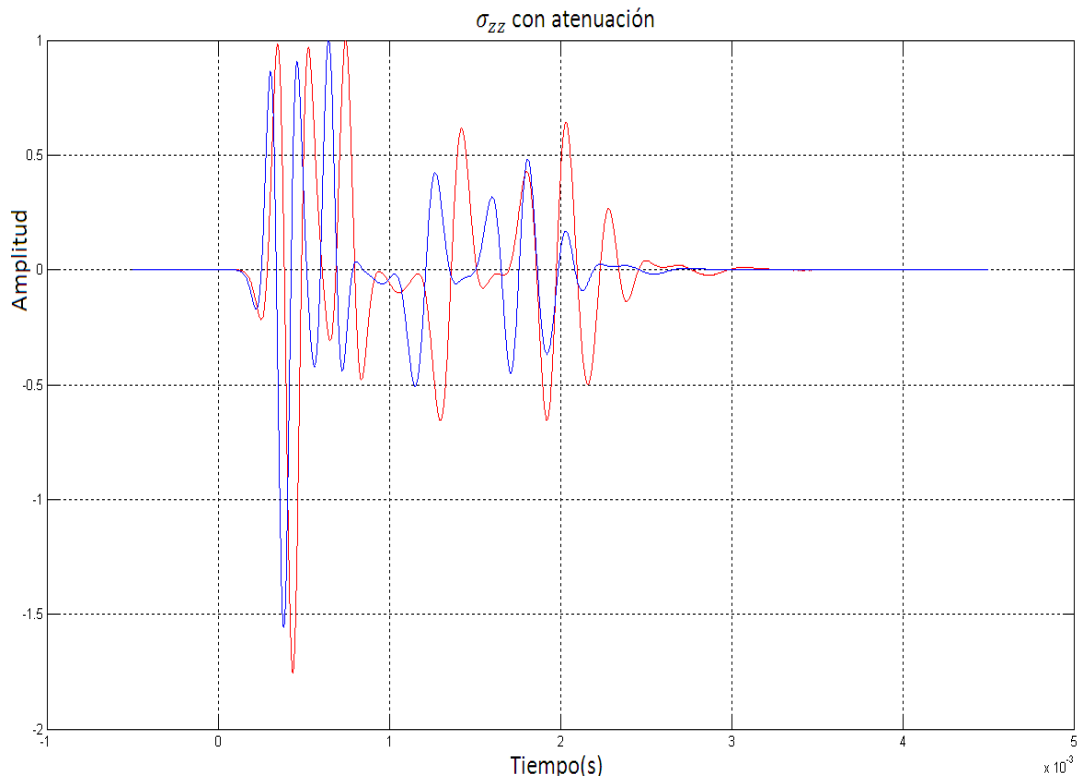


Figura 6.25. Comparación entre DF y DWN para los valores C de la tabla 6.4

Estudio paramétrico en función del Factor de calidad. Litología constante (calcita), frecuencia constante (4 Mhz), formación lenta.

Litología	Q_p	Q_s	τ_p	τ_s
Calcita	30	21	.033	.032
Calcita	20	9	.033	.032
Calcita	10	6	.033	.032
Calcita	5	3	.033	.032

Tabla 6.5

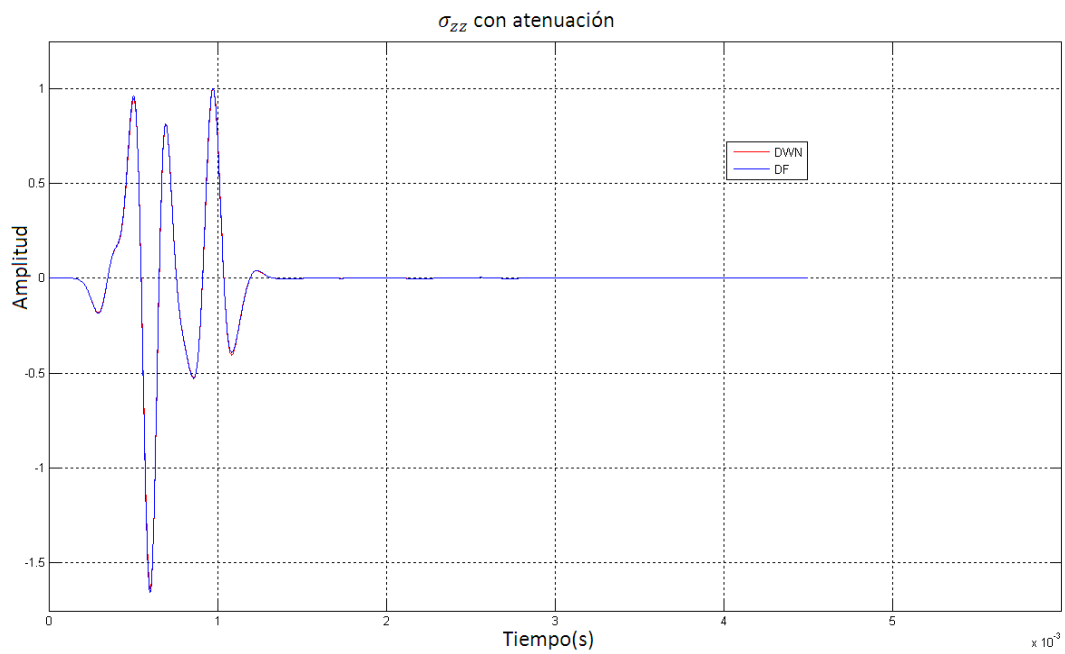


Figura 6.25. Representación de los efectos del Factor de calidad en los esfuerzos en un pozo, se comparan los 2 métodos DF y DWN. Para $Q_p = 30$ y $Q_s = 21$.

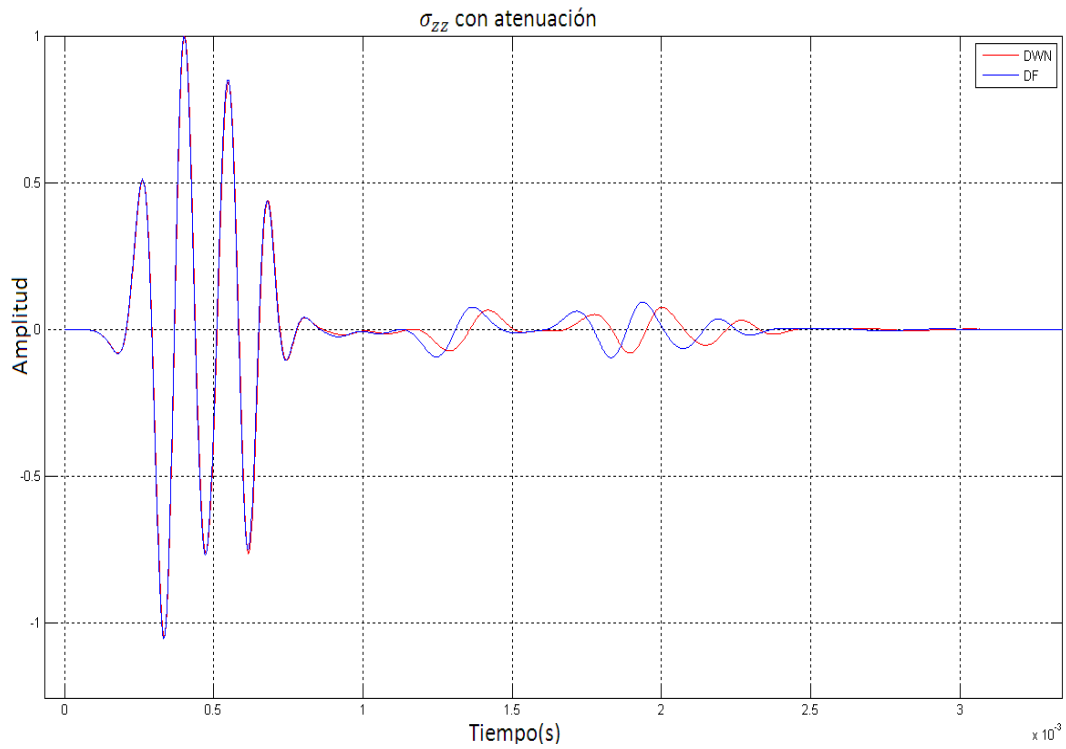


Figura 6.26. Representación de los efectos del Factor de calidad en los esfuerzos en un pozo, se comparan los 2 métodos DF y DWN. Para $Q_p = 20$ y $Q_s = 9$.

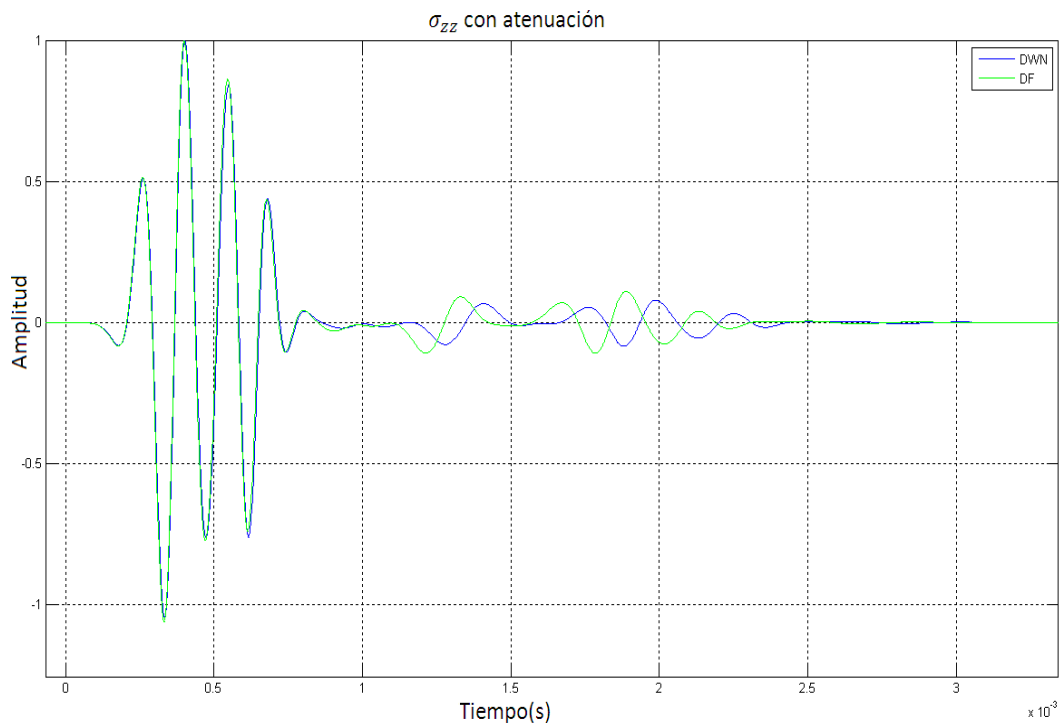


Figura 6.27. Representación de los efectos del Factor de calidad en los esfuerzos en un pozo, se comparan los 2 métodos DF y DWN. Para $Q_p = 10$ y $Q_s = 6$.

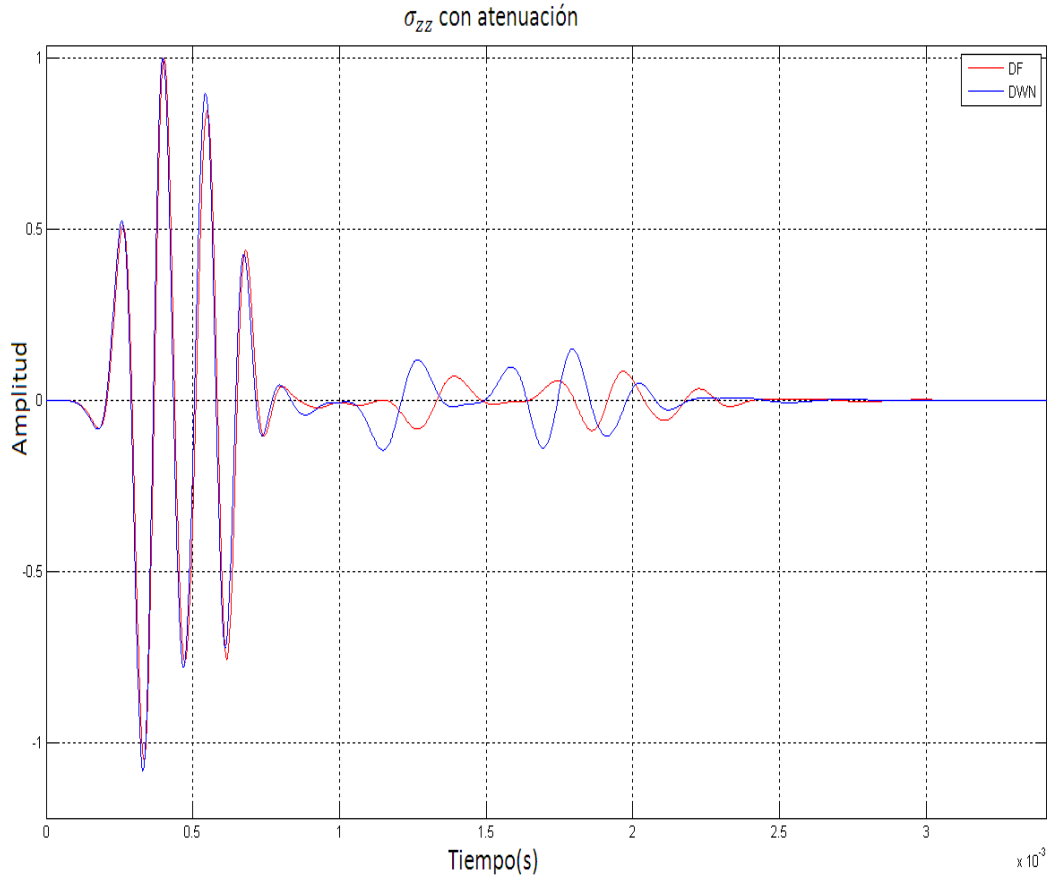


Figura 6.28. Representación de los efectos del Factor de calidad en los esfuerzos en un pozo, se comparan los 2 métodos DF y DWN. Para $Q_p = 5$ y $Q_s = 3$

Estudio paramétrico en función de la frecuencia.

Frecuencia	DF	DWN	Parámetros	Q_s	Q_p
2000		.002	F. Lenta	30	18
4000		.0005	$\tau_p=.033$	20	9
16000		.000125	$\tau_s=.032$	10	

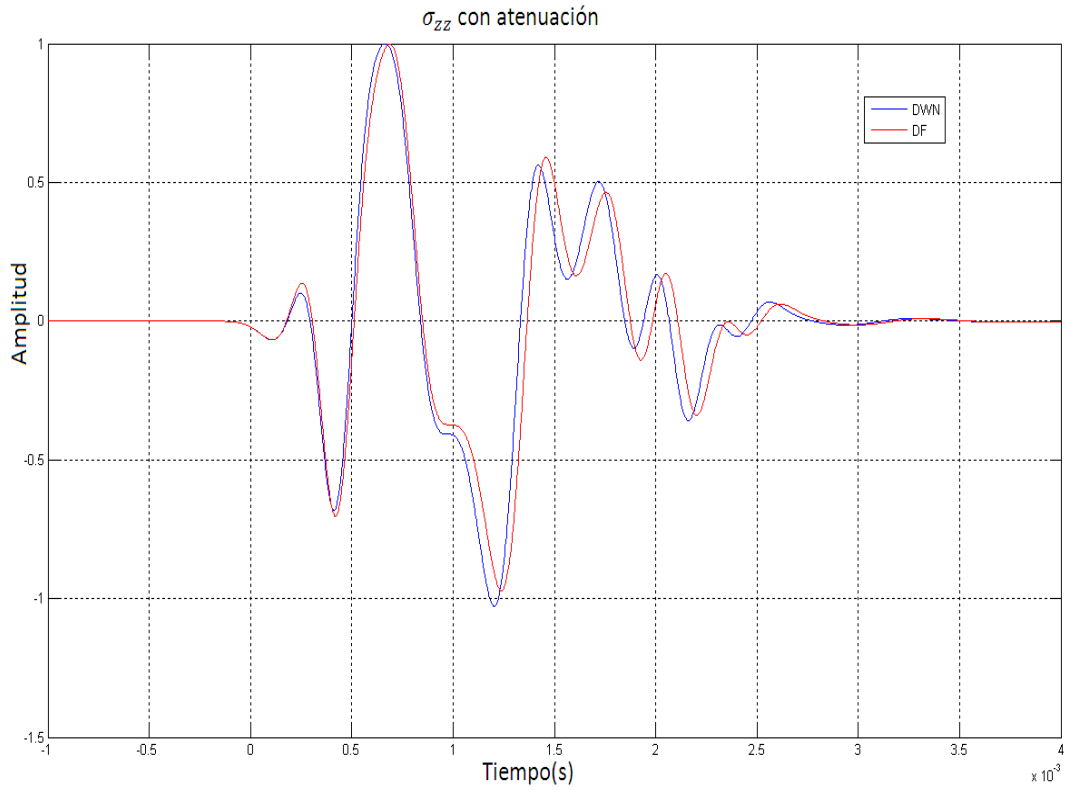


Figura 6.29. Representación de los esfuerzos con un pulso de baja frecuencia (2 Mhz).

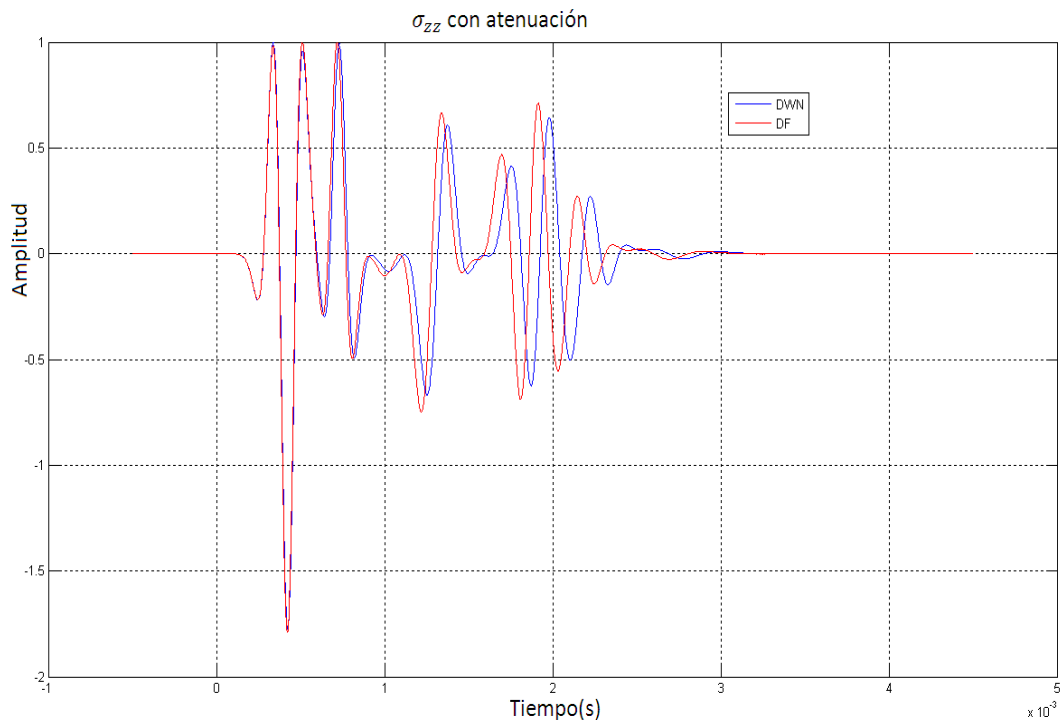


Figura 6.30. Representación de los esfuerzos con un pulso de media frecuencia (4 Mhz)

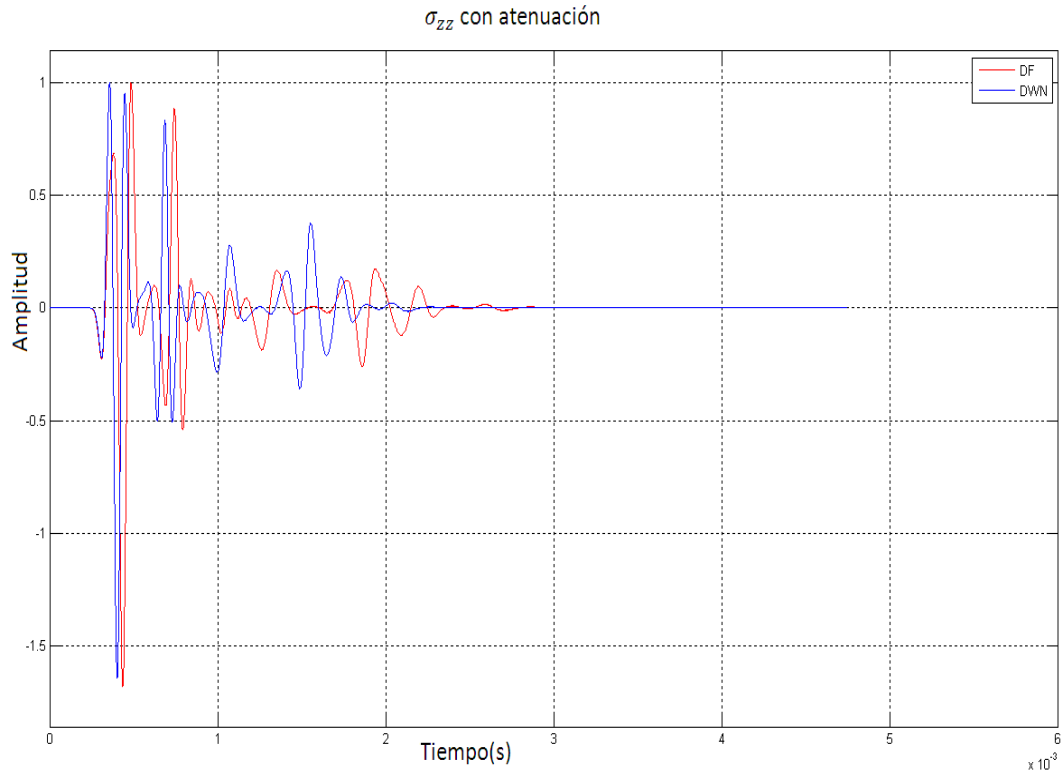


Figura 6.31. Representación de los esfuerzos en un pozo con un pulso de alta frecuencia (16 Mhz).

Este estudio paramétrico resulta insuficiente ya que se puede ver a mayor detalle en las animaciones realizadas a partir de las simulaciones numéricas, dichas animaciones se mostraran en la presentación, por lo pronto se puede decir que la atenuación está ligada a la frecuencia de la fuente y a la litología mediante la frecuencia de atenuación del material y los factores de calidad en cierta banda de frecuencias, la densidad y la velocidad del material afectan las formas de onda y sus amplitudes pero no están tan relacionadas con la atenuación.

El factor de calidad de la onda de corte Q_s , se liga directamente a la parte después de los rebotes, cambiando su amplitud y atenuando dichas ondas, esto se debe a que amortigua las ondas que atraviesan los materiales de menor velocidad; a mayor valor de Q es menor la atenuación, mientras que para los tiempos de relajación el contraste debe de ser mayor. En efecto, para tiempos de relajación grandes es mayor la atenuación.

VII.- Conclusiones

A lo largo de este trabajo se presentaron con detalle las ecuaciones del fenómeno así como las bases de dos métodos para realizar la simulación y tomar en cuenta la propagación de las ondas generada por una fuente monopolar, centrada en un pozo con una simetría central. Las soluciones de las ecuaciones correspondientes son expresadas mediante desarrollos de funciones de onda que se expresan mediante funciones exponenciales de z y radiales. La estrategia de solución para el método de DWN es utilizar desarrollos en términos de números de onda vertical discretos en un eje, en este caso el eje z . La solución se expresa de manera analítica en el dominio de las transformadas considerando las ecuaciones de frontera. Finalmente, a partir de la solución en el dominio de la frecuencia se expresan las variables de campo en los dominios espacial y temporal. Esto es posible gracias a la utilización de la transformada rápida de Fourier temporal, por parte del método de DF la solución es un poco más compleja ya que se resuelven las ecuaciones diferenciales parciales en coordenadas cilíndricas. La fuente utilizada para los dos métodos es el pulso de Ricker debido a la facilidad para escoger su frecuencia central, en el caso del método de DF en las fronteras se empleo un método para absorber los rebotes, esto fue mediante un factor de atenuación virtual conocido como γ , la cual se utiliza para hacer la convolución de la señal con una señal de la forma $e^{-i\omega\gamma}$ logrando así un amortiguamiento en la señal de regreso.

Se han proporcionado ecuaciones y lineamientos para modelar las velocidades y la atenuación de ondas sísmicas en materiales isótropos viscoelásticos. Sólo se presentaron tres tipos de mecanismos de atenuación ya que estos son los que resultan adecuados para explicar los datos disponibles en la actualidad

En el estudio sin atenuación logramos observar la importancia que tiene la frecuencia central de la fuente en este estudio, de igual manera se ve que el tipo de formación es importante para caracterizar las ondas ya que da más énfasis a cierto tipo de generación de ondas y el estudio depende íntimamente de los contrastes de

impedancias acústicas para la fase de la primer onda recibida y el tiempo de llegada de esta. Este estudio fue necesario para conocer la dependencia de ciertos parámetros en la propagación de ondas, estos parámetros en especial fueron, la frecuencia de la fuente, el tipo de formación y con base en estos resultados se tomaron dichos parámetros para puntualizar de mejor manera el estudio con atenuación. La frecuencia de la fuente es importante ya que a menor frecuencia las ondas son más fáciles de identificar, pero hay un menor número de formas de onda, mientras que a mayor frecuencia del pulso existe un mayor número de ondas pero más difíciles de identificar, como por ejemplo las ondas de Cabecera, ondas Stoneley. El tipo de formación es necesario y útil para ver los tipos de rebote dentro del fluido, en una formación lenta los rebotes será más espaciados, la amplitud de la onda de Stoneley será pronunciada, para el caso de una formación media, la cual pretendo que sea la transición entre los dos tipos de formaciones tradicionales, la rápida y la lenta, resulta interesante ya que la amplitud es mayor, pero los rebotes son menores, el tiempo de llegada de la onda P corresponden con los cálculos. En una formación rápida, la amplitud de la onda de Stoneley es 20 % menor a la formación media, la fase de la primer llegada es invertida y el tiempo de llegada es menor, esto se debe al contraste de velocidades y de impedancias acústicas. En este caso para calcular el tiempo de llegada es necesario calcular el ángulo crítico para conocer el ángulo de incidencia y así obtener la primer llegada que es la que viaja por la frontera del sólido del Pozo.

Para el estudio con atenuación, de los tres modelos de atenuación escogí en particular el modelo de Zener ya que la atenuación de Kelvin-Voigt corresponde a un amortiguamiento encontrado en régimen ultrasónico que consiste principalmente en un amortiguamiento de las altas frecuencias. Al contrario, el modelo de Zener con un elemento es más representativo de la atenuación encontrada en los experimentos efectuados a baja frecuencia donde el medio presenta muchas heterogeneidades. El modelo proporciona una atenuación máxima en torno a una frecuencia de referencia, la cual se encontró mediante los experimentos de simulación y el cálculo de la mayor atenuación a cada frecuencia. Esta frecuencia de referencia está ligada a la frecuencia

de la fuente pero también a la frecuencia de atenuación dada al material por los parámetros τ_s y τ_p .

Cuanto mayor sea el número de elementos de Zener que se utilicen, ya sea en serie o en paralelo, las señales son reproducidas con mayor realismo, siempre y cuando se utilicen los parámetros correctos de atenuación.

En general, a los mecanismos de atenuación se les denomina macroscópicos, mesoscópicos o microscópicos dependiendo de la escala en la cual los cambios en la presión del fluido inducidos por las ondas tratan de equilibrarse. En el flujo macroscópico, la distancia que necesita equilibrarse es la que corresponde a la longitud de onda sísmica que a su vez varía de manera inversamente proporcional a la frecuencia. En los flujos mesoscópico y microscópico las distancias que se van a equilibrar son longitudes independientes de la frecuencia determinadas por la heterogeneidad mesoscópica y por el tamaño de los granos, respectivamente. Debido a esto, la frecuencia de relajación para la cual el valor de Q^{-1} alcanza un máximo tiene una dependencia inversa a la viscosidad del fluido en comparación con la que corresponde a los mecanismos de flujo mesoscópico o de flujo microscópico. Se demostró que en la banda de frecuencias de exploración sísmica sólo el mecanismo de flujo mesoscópico parece ser capaz de explicar los niveles medidos de atenuación. La heterogeneidad mesoscópica se puede deber ya sea a una saturación difusa del fluido o a variaciones litológicas.

El alcance de este trabajo es académico sin embargo puede ser la antesala para la simulación de ondas con atenuación en tres dimensiones y con más detalle y recursos podría ser un estudio de la propagación de ondas elásticas en medios porosos saturados con fluidos, si se incluyera la teoría de Biot, la cual involucra porosidades y permeabilidades, dando así la relación entre los fluidos dentro de los materiales elásticos y como se ve afectada la onda al paso por este tipo de sólidos, el cual podría ser de gran importancia para la industria petrolera, pues permite comprender y determinar mejor las propiedades petrofísicas de las rocas presentes en los yacimientos de hidrocarburos.

VIII. Agradecimientos

Todo mi reconocimiento y agradecimiento al Dr. Francisco Sánchez Sesma el cual fue mi tutor y director de tesis, fue él quien comenzó la base del programa de DF y gracias a él encontré el gusto por la simulación numérica, además sus valiosos comentarios ayudaron a construir y revisar en varias ocasiones diversos capítulos de este trabajo. De igual manera gracias al Dr. James Spurlin quien realizó la segunda fase de construcción del programa de DF y en su reciente visita a México me hizo comentarios positivos y sumamente valiosos para el desarrollo para complementar la tesis.

Un agradecimiento especial al Dr. Mathieu Perton por su gran ayuda y tutoría durante este trabajo, gracias a sus enseñanzas logré entender el fenómeno de atenuación y plasmarlo en el programa de DF, suyo es el programa de DWN el cual ayuda a corroborar las funciones del programa de DF.

A la Facultad de Ingeniería, el cual cultivo mi conocimiento en el mundo de la geofísica y al instituto de ingeniería el cual me abrigó con sus facilidades y ayudas durante el desarrollo de esta tesis. Durante buena parte del desarrollo de la tesis tuve una beca de la DGAPA dentro del proyecto IN114706.

Bibliografía

1. Achenbach J.D. (1976). *Wave propagation in elastic solids*, second edition. North-Holland Publishing Company. Amsterdam.
2. Aki K. & P.G. Richards (2002). *Quantitative Seismology*, second edition. W.H. Freeman and Co. New York.
3. Timoshenko S.P. & Goodier J.N. (1979). *Theory of elasticity*, third Edition editorial Mc Graw Hill.
4. Carcione J.M. (2001). *Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic and porous media*. Seismic Exploration Vol. 31.
5. Backus G. (1997). *Continuum mechanics*. Samizdat.
6. Bowen R.M. & Wang C.C. (2004). *Introduction to continuum mechanics for engineers*.
7. Claerbout J.F. (1994). *Imaging the Earth's interior*. First edition. Geophysics Department, Stanford University.
8. Fung Y.C. (1977). *A first course in continuum mechanics*, second edition, prentice hall, inc,
9. Phan-Thien N. (2002). *Understanding viscous elasticity, Basics of Rheology*. Springer. Alemania.
10. Lay T. & Wallace C.T. (1995). *Modern Global Seismology*. Academic Press. San Diego. USA
11. Stein, S & Wysession M. (2003). *An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure*. Blackwell publishing.
12. Zhang Ch. & Gross D. 2001. *On wave propagation in elastic solids with cracks*. Computational Mechanics Publications. Southampton, UK

Artículos e informes

1. Dingwell B.D (19xx). Viscosity and anelasticity of melts.
2. Roylance D. (2001). Engineering Viscoelasticity. Department of materials science and engineering. Massachusetts Institute of Technology. Cambridge.
3. Haldorsen J.B.U., Johnson L.D., Sinha B., Valero H.P. & Winkler K. (2006). Borehole acoustic waves. Ridgefield, Connecticut, USA.
4. Cheng N., Cheng C.H. & Toksöz M.N. (1995). Borehole wave propagation in three dimensions, *J. of Acoustic. Soc. Am.* **97**, 3383-3393.
5. Chi S. (2003). Simulation of wave propagation in boreholes and radial profiling of formation elastic parameters. Thesis doctoral
6. Biot M. A. (1961). Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, *Journal of Applied Physics* **33** (4), 1482-1498.
7. Randall C.J., Scheibnert D.J. & Wu P.T. (1991). Multipole borehole acoustics waveforms: Synthetic logs with beds and borehole washouts, *Geophysics* **56**, 1757-1769.