



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Modelo Dinámico de un  
Sistema de Frenos de un  
Vehículo Tipo Fórmula SAE**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**Ingeniero Mecánico**

**P R E S E N T A**

Jonathan Acuña Apreza

**DIRECTOR DE TESIS**

M.I. Antonio Zepeda Sánchez



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2026**



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y  
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL  
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado MODELO DINAMICO DE UN SISTEMA DE FRENOS DE UN VEHICULO TIPO FORMULA SAE que presenté para obtener el título de INGENIERO MECÁNICO es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

---

JONATHAN ACUÑA APREZA  
Número de cuenta: 314013662

# Índice

1.	Introducción .....	1
1.1.	Resumen.....	1
1.2.	Prólogo .....	1
1.3.	Formula SAE .....	2
1.4.	Objetivo .....	4
1.4.1.	Contexto del equipo.....	4
1.4.2.	Objetivos .....	4
2.	Antecedentes .....	5
2.1.	Sistemas de frenos en vehículos motorizados .....	5
2.1.1.	Componentes de un sistema de frenos .....	6
2.1.2.	Requerimientos técnicos para el vehículo tipo fórmula SAE .....	9
2.2.	Neumáticos en un vehículo motorizado .....	10
2.2.1.	Fuerzas en los neumáticos .....	13
2.2.2.	Pruebas experimentales para la caracterización de neumáticos y TTC en Fórmula SAE....	15
2.3.	Dinámica Vehicular y Modelado .....	15
2.3.1.	Dinámica Vehicular y Transferencia de Carga.....	15
2.4.	Métodos de Euler para la solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias .....	16
3.	Modelos.....	19
3.1.	Modelos matemáticos ocupados .....	20
3.1.1.	Modelado de sistema de frenos .....	20
3.1.2.	Modelado de rueda y llanta .....	23
3.1.3.	Modelado del vehículo.....	26
3.2.	Simulación del Modelo.....	34
3.2.1.	Parámetros, entradas y condiciones iniciales .....	34
3.2.2.	Programación de modelo.....	38
3.2.3.	Simulación y post procesamiento .....	42
3.3.	Simulación usando Simulink.....	44
4.	Resultados de la Simulación .....	50
4.1.	Parámetros Ocupados.....	50
4.2.	Resultados Obtenidos .....	52
4.2.1.	Resultados y comportamiento del sistema actual .....	52

4.2.2.	Benchmarking de propuestas de sistemas de frenos .....	58
4.3.	Comparación de resultados entre simulaciones .....	64
4.3.1.	Comparación entre parámetros de solución numérica .....	64
4.3.2.	Comparación entre modelos de 1GDL y 3GDL.....	65
4.3.3.	Comparación entre modelos programados y Simulink.....	66
5.	Conclusiones.....	71
5.1.	Conclusiones de modelado .....	71
5.2.	Conclusiones de diseño .....	71
5.3.	Conclusiones generales de la tesis .....	72
Referencias.....	Referencias.....	74

# 1. Introducción

## 1.1. Resumen

En esta tesis se desarrolló el modelado y simulación del sistema de frenos de un vehículo tipo Fórmula SAE. El modelo consiste en tres partes principales, que son: el sistema de frenos, la llanta y el modelo del vehículo. Se desarrollan y presentan dos diferentes modelos de vehículo, de 1 y 3 grados de libertad. El modelo se simula usando métodos numéricos para la solución de las ecuaciones matemáticas en el software Wolfram Mathematica, que no es un software especializado en simulación (como Simulink), por lo que en realidad se puede ocupar cualquier lenguaje de programación. Después se ocupa un software especializado para comparar los resultados. Finalmente, el modelo se ocupa para el diseño de un sistema de frenos.

## 1.2. Prólogo

“Hoy en día, tu teléfono celular tiene más potencia computacional que toda la NASA en 1969, cuando llevó a dos astronautas a la luna”. Esta es la ahora popular frase que el físico Michio Kaku publicó en uno de sus libros [1], como indicador del avance computacional. Las computadoras portátiles, los teléfonos inteligentes y la inteligencia artificial son algunas de las herramientas que estos avances han producido, y, como en muchos otros momentos de la historia, las profesiones evolucionan con las herramientas.

Actualmente, el trabajo de un ingeniero se ve muy diferente que en 1969. Los dibujos técnicos se realizan con computadora, el proceso de diseño ha cambiado, la cantidad de pruebas físicas ha disminuido y, por ende, la importancia del modelado y simulación ha aumentado. Se dice que para crear la bombilla eléctrica Edison y su equipo diseñaron, manufacturaron y probaron 10,000 prototipos [2]. “No fracase. Solo encontré 10,000 maneras que no funcionan” fue el sentir de Edison, no obstante, el tiempo y costo de las pruebas es incuestionable. Las herramientas de modelado y simulación buscan mitigar el efecto en estos recursos, ofreciendo la posibilidad de realizar miles de cambios a un diseño y evaluar su desempeño sin necesidad de manufacturar ningún prototipo físico.

La industria automotriz no es la excepción al uso de estas herramientas, aún más en el sector de deporte motor. Existe una gran cantidad de herramientas especializadas para la simulación de vehículos completos con el propósito de optimizar su diseño y el de sus componentes. **Para un sistema de frenos, el modelado y simulación proporcionan poderosas herramientas de análisis, predicción y diseño, fundamentales para mejorar el desarrollo y desempeño del vehículo.** En este trabajo se desarrolla el proceso integral que constituye el modelado y simulación para el sistema de frenado de un vehículo.



Figura 1.1. Imagen de la visualización de resultados del software de simulación VI-CarRealTime [3].

### 1.3. Formula SAE

Formula SAE es una competencia internacional organizada por SAE (Sociedad de Ingenieros Automotrices por sus siglas en inglés), dirigida a estudiantes de ingeniería, en la cual, cada equipo diseña y manufactura un prototipo de carrera tipo Formula.

El objetivo de esta competencia es preparar a estudiantes de pregrado y posgrado en una variedad de disciplinas para empleos futuros en industrias automovilísticas, desafiándolos con una aplicación de ingeniería del mundo real.

La Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México ha participado en la competencia desde 2010 [4], brindándole a los estudiantes la oportunidad de demostrar su creatividad y conocimientos de ingeniería frente a universidades de todo el mundo.



Figura 1.2. Foto del Prototipo IC UM-11

Existen dos categorías dentro de Fórmula SAE: vehículos de combustión interna y vehículos eléctricos. Los equipos pueden participar en una o ambas categorías.

Cada prototipo es evaluado frente a otros, en una serie de Pruebas Estáticas y Dinámicas para determinar el vehículo que mejor cumple con los objetivos [5].

Pruebas Estáticas:

- **Presentación de Diseño:** En este evento se presenta el diseño del vehículo y sus sistemas ante jueces expertos, con la intención de demostrar el mejor uso de la ingeniería para cumplir con los objetivos de diseño, costos y el conocimiento del diseño de los sistemas.
- **Costos y Manufactura:** Este evento evalúa la habilidad del equipo para considerar un presupuesto e incorporar consideraciones de producción y manufactura en términos de productividad y eficiencia.
- **Presentación de Caso de Negocio:** El concepto de esto cambia año con año, pero busca evaluar la habilidad del equipo de desarrollar y presentar un caso de negocios, logístico, de producción o técnico para convencer a inversionistas externos a invertir en el equipo.

#### Pruebas Dinámicas:

- **Aceleración:** Esta prueba, tal como su nombre lo indica, evalúa la aceleración del vehículo en una línea recta de 75 metros.
- **Skidpad:** La pista de este evento traza la figura de un 8 con círculos de mismo tamaño y concéntricos. El objetivo de esta prueba es evaluar la habilidad del vehículo para *cornering* (tomar curvas) en una curva de radio constante.
- **Autocross:** Una pista completa compuesta de rectas, curvas, curvas de radio constantes, *hairpins*, *slaloms*, *chicanes*, curvas seguidas y de radios cambiantes, etc. La maniobrabilidad y conducción del vehículo son las cualidades evaluadas de este evento.
- **Endurance:** Esta es la prueba con mayor puntaje de toda la competencia y, por lo mismo, considerada la más importante. Busca evaluar la confiabilidad y durabilidad del vehículo, al correr en una pista similar a la de *Autocross* múltiples vueltas para recorrer una distancia aproximada de 22 km.
- **Prueba de eficiencia:** Esta prueba no es un evento independiente, sino que evalúa la energía/combustible consumido durante el evento de *Endurance*.

Antes de siquiera participar en las pruebas dinámicas, el vehículo tiene que pasar una Inspección Técnica para verificar que cumple con el reglamento de la competencia. Una de las pruebas es particularmente importante para el desarrollo de este trabajo, ya que se enfoca en el frenado del vehículo. El objetivo de esta prueba es mostrar la capacidad del sistema de frenos de bloquear las 4 llantas del vehículo. El vehículo debe acelerar, usualmente a segunda velocidad (alrededor de 50 kilómetros por hora) y frenar con fuerza suficiente para demostrar bloqueo total de las llantas. Este evento no recibe puntaje al ser parte de la Inspección técnica, sin embargo, es crítico para seguir adelante con el resto de la competencia. Este es el primer requerimiento del sistema de frenos del prototipo.

## 1.4. Objetivo

### 1.4.1. Contexto del equipo

Durante la temporada 2020-2021 de la escudería UNAM Motorsports se planteó el cambio del sistema de frenos para el sistema de Masa No Suspendida para el nuevo diseño del prototipo eléctrico. La propuesta de cambio se planteó por las siguientes razones:

- El sistema de frenos ocupado en temporadas anteriores contaba con un desgaste significativo.
- La posibilidad de contar con componentes dinámicos distintos para ambos prototipos (combustión interna y eléctrico) de la escudería UNAM Motorsports.
- El contar con un sistema de frenos diseñado específicamente para el prototipo eléctrico, incluyendo la futura implementación de freno regenerativo en paralelo.
- Una disminución en los costos del sistema de frenos.

Adicionalmente, durante esta temporada se buscaba establecer métricas totalmente definidas y justificadas para los objetivos de la temporada. Es decir, determinar métricas claves relacionadas al comportamiento del vehículo y obtener una justificación para los valores numéricos seleccionados como objetivo.

Para la correcta selección de los componentes del sistema de frenos, se estableció como objetivo el desarrollar un modelo dinámico del frenado del vehículo.

### 1.4.2. Objetivos

Los objetivos se clasifican en:

- **Objetivos de Tesis:** El objetivo de la tesis es desarrollar el modelado y simulación del sistema de frenos de un vehículo tipo Fórmula SAE. El modelo servirá como herramienta para el diseño y optimización de parámetros del sistema de frenos, además de funcionar como recurso didáctico para comprender el proceso de modelado y simulación de sistemas complejos. El modelo se desarrollará utilizando las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica de los diversos componentes que integran tanto el vehículo como el sistema de frenos. Se elegirá un sistema de frenos para el nuevo prototipo eléctrico de la escudería UM-E4, considerando la necesidad de integración de un freno regenerativo en serie. Se validarán los modelos mediante la comparación de resultados con herramientas de simulación especializadas.
- **Objetivos de Diseño:** Para el diseño del sistema de frenos del UM-E4, tomando en cuenta el contexto del equipo, son los siguientes:
  - Una deceleración aproximada de 1.5 g, similar a la del prototipo IC UM-11.
  - Una disminución de costos del sistema de un 20 %, con un presupuesto de alrededor de 1500 USD.
  - La posibilidad de implementar la regeneración del frenado en serie, con una regeneración de al menos un 7% de la energía disipada en cada frenada.

## 2. Antecedentes

### 2.1. Sistemas de frenos en vehículos motorizados

Al usar un vehículo, la capacidad para detenerlo de forma segura y controlada se da por hecho. Esto es precisamente lo que se busca al diseñar un sistema de frenos. En la actualidad, además de ser confiables y seguros, el desempeño de estos sistemas es impresionante. Por ejemplo, los vehículos de Fórmula 1, referidos como “el pináculo del Deporte Motor”, alcanzan casi 5 g de deceleración, que es casi el doble de la aceleración del transbordador espacial STS de la NASA [6]. Hablando de vehículos comerciales los números son igual de impresionantes. Para un automóvil de 1700 kg que viaja a 120 km/h y frena de emergencia en 6 segundos, la potencia disipada, en promedio, es de 211 caballos de fuerza durante este intervalo. Detener un tráiler de 30,000 kg que viaja a 100 km/h implica una disipación promedio de varios miles de caballos de fuerza [7].

Para alcanzar el desempeño actual, los sistemas de frenos han pasado por varias etapas de desarrollo y evolución. Los primeros automóviles adoptaron el sistema de frenos de los carruajes, el cual consistía en un sistema mecánico de bloques de madera envueltos en algún material, como piel, que entraban en contacto con la rueda para generar fricción [8].

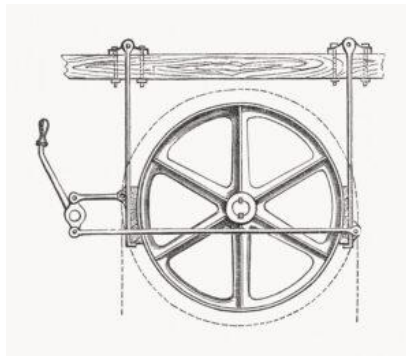


Figura 2.1. Primeros sistemas de frenos en los automóviles adoptados de carruajes. [9]

Estos sistemas no eran muy eficientes, ya que los bloques de madera se desgastaban rápidamente y no generaban suficiente fuerza de frenado en caminos con pendientes pronunciadas [9]. El siguiente avance fue el freno en la transmisión, donde una banda sujetaba a un “tambor” que estaba unido a la transmisión. Este fue el precursor del freno de tambor que conocemos hoy en día, usualmente atribuido a Louis Renault. Renault evolucionó el diseño sustituyendo la banda por un mecanismo dentro del tambor que se expande para generar fricción con la superficie interna del mismo. Inicialmente los frenos de tambor solo se podían montar en las llantas traseras, pero eventualmente se pudieron ensamblar también en las llantas delanteras a pesar de la dirección. El freno de tambor era efectivo, pero tenía un problema de acumulación de calor y por ende distorsión debido al estrés térmico. La solución a estos problemas se encontraba en los discos de freno, que a pesar de existir desde 1800, no fueron adoptados por la industria automotriz hasta la década de los años 1950 [8]. Estos dos componentes de frenado son los que se utilizan actualmente en la industria automotriz.

La siguiente revolución para los sistemas de frenado fue el ABS (**Antiblockiersystem** en alemán) o sistema de antibloqueo de ruedas. Como su nombre lo indica, el objetivo de este sistema es evitar el

bloqueo de las ruedas por razones de seguridad modulando la fuerza de frenado. Físicamente, para lograr esto se requiere de un controlador, y de válvulas para liberar la presión de frenado. La primera iteración fue un sistema electrohidráulico patentado por Bosch en 1936, e inicialmente solo se adoptaron en aviones. En 1991 solo el 10% de los vehículos vendidos en Estados Unidos contaban con ABS, mientras que hoy en día, la mayoría de los vehículos cuentan con el sistema [8].

Actualmente, los autos eléctricos ya están consolidados en la industria automotriz. En el 2023, casi uno de cada cinco automóviles vendidos fue eléctrico, y las ventas globales han aumentado cada año [10]. Los motores eléctricos han traído cambios significativos a muchos sistemas del vehículo, incluyendo el freno regenerativo. Este sistema utiliza el motor para ayudar en el frenado, permitiendo recuperar o regenerar una porción de la energía de frenado. La implementación de estos sistemas es uno de los desarrollos más recientes de los frenos.

Otros avances relativamente recientes para los sistemas de frenos, como los sistemas electrónicos de distribución de fuerza de frenado y el frenado de emergencia automatizado entre otros, culminan en el desarrollo de vehículos totalmente autónomos lo más seguros posible. Todos estos avances logran por diferentes medios contribuir al objetivo principal del sistema de frenos que es detener el vehículo de forma segura para los pasajeros y peatones.

### 2.1.1. Componentes de un sistema de frenos

En esta sección se presentan los componentes más comúnmente utilizados en un sistema de frenos comercial para vehículos ligeros:

- **Pedal de freno:** Es el primer componente del sistema de frenos, y con el que actúa directamente el conductor. Este componente actúa como una palanca mecánica para multiplicar la fuerza que aplica el piloto, y está conectado al *master cylinder* o cilindro maestro.
- **Master Cylinder o Cilindro Maestro:** Es el segundo componente del sistema, y su mecanismo es similar al de una jeringa pues convierte la fuerza mecánica en presión hidráulica a través de un pistón con resorte de retorno.



Figura 2.2. Imagen de un cilindro maestro.

Adicionalmente, contiene el *reservoir* o depósito de líquido de frenos cuyo propósito principal es el de asegurar que el circuito contenga la suficiente cantidad de líquido para su funcionamiento. Existen *master cylinders* individuales o en tándem (duales). El de tándem, como su nombre lo indica contiene dos pistones en tándem, con dos *reservoir*, lo que permite conectar un par de llantas a cada pistón. De esta forma, si existe alguna fuga de líquido en el sistema, no se pierde la capacidad de frenado en todas las llantas. El par puede ser de eje delantero y trasero o en "X", es decir, una llanta del eje frontal con la opuesta del eje trasero.

Por razones que se discuten en la sección 2.3.1, las llantas del eje delantero generan mayor fuerza de frenado que las traseras, en algunos casos hasta un 70% de la fuerza total [8]. Es por esto por lo que el arreglo en "X" es el más comúnmente ocupado, sin embargo, la simplicidad y estabilidad del otro arreglo permite que el arreglo por ejes sea ocupado para ciertos casos.

- **Balance bar:** Este componente se utiliza para distribuir la fuerza de frenado entre el eje delantero y trasero, conectando dos *master cylinders* individuales. Ya que los vehículos comerciales usualmente ocupan *master cylinders* en tándem y el previamente mencionado arreglo en "X", no pueden ocupar la *balance bar*, y en su lugar distribuyen la presión usando válvulas proporcionales en las líneas de freno o integradas en el *master cylinder*.



Figura 2.3. Imagen de una *balance bar*.

- **Línea de frenos:** Este componente sirve como conexión del líquido de frenos del *master cylinder* hacia la ubicación de los demás componentes. La línea puede ser rígida o flexible. La rígida es un tubo metálico doblado múltiples veces para alcanzar el punto deseado. La línea flexible está hecha de goma reforzada con trenzado de acero inoxidable, lo que permite el movimiento de las llantas debido a la dirección o por el camino. Usualmente se emplea una combinación de ambos tipos de línea para construir un sistema de frenos. Las líneas terminan conectando el líquido de frenos en uno de los dos componentes principales para frenar: el caliper de freno o el freno de tambor.
- **Caliper o pinzas de freno:** En este componente desemboca el líquido de freno de la línea. Utiliza la presión hidráulica para mover pistones, los cuales, hacen entrar en contacto materiales de fricción, que convierten la energía cinética del vehículo en energía térmica deteniéndolo.



Figura 2.4. Imagen de un *caliper* de freno con rotor.

Los componentes que generan la fricción son el disco y la balata. El disco de freno o rotor gira con la rueda mientras que la balata, al activar los frenos, es presionada contra el disco por los pistones del caliper. El disco suele ser de fundición gris, aunque para aplicaciones de alto rendimiento, son de fibra de carbono [8]. Su principal función es actuar como la superficie de fricción de las balatas, soportando las cargas y temperaturas causadas por el sistema de frenos.

En la mayoría de los casos los discos son ventilados para ayudar con la disipación de calor. Las balatas están construidas de una placa de acero estampado a la que se le adhiere el material de fricción. Este material puede ser de compuesto semi metálico, cerámico u orgánico, y es altamente especializado para operar a altas temperaturas manteniendo un coeficiente de fricción relativamente constante. Mientras el compuesto de las balatas es especializado y de alta tecnología, el material de los rotores suele ser bastante ordinario, y esto tiene una razón muy interesante. El coeficiente de fricción de la balata con el rotor no es muy alto en realidad, sin embargo, el de balata con balata es bastante alto. Esto es lo que en realidad sucede, ya que el compuesto de la balata se incrusta al rotor y genera la fricción para frenar el vehículo. Por esta misma razón al cambiar de rotor y balatas se tienen que “asentar”, proceso para obtener una buena base de balata sobre el rotor y lograr un desempeño uniforme [11].

Los componentes que generan la fricción son el rotor o disco, que gira con el ensamble de la rueda, y la balata, que es el componente que empuja el pistón del caliper. El material o compuesto de la balata puede cambiar de sistema a sistema, sin embargo, es un compuesto altamente especializado para cumplir con los requisitos de coeficientes de fricción, temperatura, desgaste, etc.

- **Freno de tambor:** Este componente es la alternativa barata al *caliper*, desempeña la misma función de otra forma. Su nombre se debe a que contiene una estructura metálica con forma de tambor que gira con la rueda. Dentro del tambor hay un mecanismo actuado por el líquido de frenos que se expande para hacer entrar en contacto material de fricción y frenar.



Figura 2.5. Imagen de un freno de tambor.

El tambor tiene un revestimiento interno de material de fricción, al igual que las zapatas (la parte del mecanismo interno que entra en contacto con el tambor). Aunque el freno de tambor es efectivo, también actúa como un acumulador de calor ideal debido a su peso, geometría y material. Esto causa deformación térmica que resulta en una pérdida de contacto entre la zapata y el tambor [8].

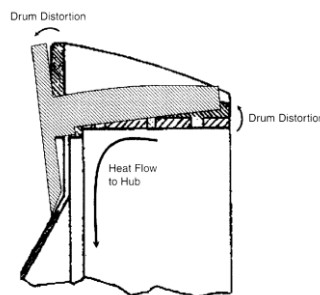


Figura 2.6. Deformación térmica del tambor de freno [8].

A pesar de esto, el tambor de freno sigue presente en la industria automotriz, principalmente en el eje trasero de autos económicos, ya que cuenta con las siguientes ventajas:

- Más barato para producir
- Mayor simplicidad para incluir el freno de emergencia
- Al ser un sistema cerrado, es más difícil que contaminantes y abrasivos exteriores lo desgasten, por lo que requiere menor mantenimiento
- Son auto energizantes

Además de los componentes ya presentados, los automóviles comerciales pueden contar con otros componentes como:

- Servo de freno o servofreno
- Válvula de compensación
- Sistema ABS

### 2.1.2. Requerimientos técnicos para el vehículo tipo fórmula SAE

El reglamento de FSAE especifica los siguientes requerimientos para el sistema de frenos [5]:

- El vehículo debe tener un sistema de frenos que:
  - Actúe en las 4 llantas
  - Sea operado con un solo control
  - Sea capaz de bloquear las cuatro llantas
- El sistema de frenos debe tener dos circuitos hidráulicos independientes. De esta manera una fuga o falla mantendría una capacidad de freno en al menos dos llantas.
- Cada circuito hidráulico debe tener su propia reserva de líquido de frenos, usando *reservoirs* separados.
- Un solo freno que actúe en un diferencial de deslizamiento limitado puede ser ocupado
- Sistemas estilo *brake by wire* están prohibidos.
- Líneas de freno de plástico sin protección están prohibidas

Y específicamente para prototipos eléctricos:

- El 90% del recorrido del pedal de freno se puede ocupar para regenerar energía sin actuar el sistema hidráulico
- El resto del recorrido debe actuar directamente el sistema hidráulico. La regeneración puede seguir activa.

Con base en estos requerimientos, el sistema de frenos de la escudería UNAM Motorsports, está compuesto por los componentes mostrados en la Tabla 2.1.





Componente	Nombre	Imagen	Características
<i>Master Cylinder Delantero</i>	AP Racing CP7855		<i>Master cylinder de tipo push</i>
<i>Master Cylinder Trasero</i>			
<i>Balance Bar</i>	AP Racing CP5500		<i>Balance bar ajustable</i>
<i>Caliper Delantero</i>	AP Racing CP-4227		Caliper de 4 pistones
<i>Caliper Trasero</i>	AP Racing CP-4226		Caliper de 2 pistones

Tabla 2.1. Componentes del sistema de frenos del UM-10 de la escudería UNAM Motorsports.

Consta de dos líneas independientes para el eje delantero y trasero. Un *caliper* de 4 pistones en el eje frontal y uno de 2 para el eje trasero. Todos los componentes del mismo proveedor *AP Racing*.

## 2.2. Neumáticos en un vehículo motorizado

Los neumáticos son el medio que transfiere las fuerzas entre la carretera y el vehículo. Son necesarios para producir las fuerzas que controlan el vehículo, por lo tanto, son un componente crítico de los vehículos.

Un neumático es un producto de ingeniería avanzada elaborado con caucho y una serie de materiales sintéticos ensamblados. Los cables de fibra, textiles y acero son algunos de los componentes que

forman parte del aislamiento interior, la carcasa, el conjunto de talones, las correas, las paredes laterales y la banda de rodadura del neumático [12] .

La Figura ilustra los componentes de los neumáticos y su disposición.

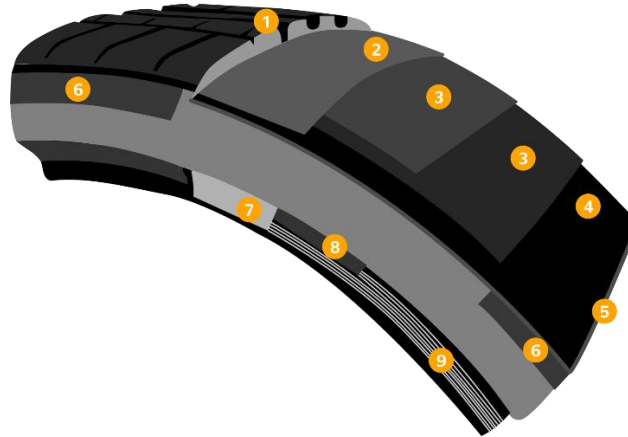


Figura 2.7. Componentes de un neumático [13].

## Componentes de los neumáticos

### Banda de rodadura

La función principal de este compuesto de caucho es envolver la cubierta, proporcionando una resistencia a la rodadura baja, una conducción óptima, una vida útil larga y buen kilometraje [13].

1. Perfil. Fabricado con caucho sintético y natural. En los neumáticos nuevos, esta superficie texturizada garantiza un gran kilometraje, una buena conducción en carretera y expulsa bien el agua. Esto significa conducir con seguridad en cualquier condición. El perfil del neumático conecta con la carretera y el flanco, y tiene tres zonas:

- Banda de rodadura: Es la parte del neumático que está más en contacto con la carretera. Proporciona agarre a las superficies, resistencia al desgaste y estabilidad direccional.
- Base: Se encuentra por debajo de la banda de rodadura, la base reduce la resistencia de rodadura y los daños que sufre la estructura interna: la cubierta.
- Hombro: Bordes exteriores del perfil, esta zona es la transición óptima entre el perfil y el flanco del neumático.

2. Lonas de carcasa. Esta capa, justo debajo del perfil, permite circular a gran velocidad. Están formadas por una sola cuerda de nailon resistente, embutida en caucho. Estas cuerdas hacen espirales alrededor de la circunferencia del neumático de un lado a otro, sin solaparse.

3. Lonas de cima. Cables de acero resistente que proporcionan rigidez a esta capa del neumático, lo que a su vez:

- Aumenta la estabilidad de la forma y la estabilidad direccional
- Reduce la resistencia de rodadura
- Incrementa el kilometraje del neumático.

#### Cubierta/carcasa

Constituye la parte interna del neumático, sus capas son la parte principal que soporta las fuerzas de tensión generadas por la presión del aire de los neumáticos.

4. Pliegue de tejido. Esta capa de tejido, concretamente rayón o poliéster cauchutado, controla la presión interna del neumático y conserva su forma.

5. Aislamiento interior. Capa estanca de caucho butílico que cumple dos funciones fundamentales:

- Sella la cámara de aire interior, controlando la presión del neumático
- Actúa como cámara en los neumáticos modernos, que precisamente no la tienen.

6. Flanco. Pared exterior del neumático, conectada al perfil por el hombro. Fabricado con caucho natural, el flanco protege la cubierta de daños externos y de las condiciones externas.

#### Aro: Conecta el neumático y la rueda

El componente del aro, que es parte de la cubierta, forma parte del borde del neumático que se asienta firmemente en la ranura de la rueda. Es el lugar donde el neumático se mantiene en su lugar sobre la rueda, gracias a la presión del aire. El aro está constituido por tres partes.

7. Aro de talón. Fabricado con nailon o aramida, un tipo de fibra sintética fuerte y resistente al calor; este cableado fino:

- Incrementa la estabilidad direccional
- Facilita una respuesta precisa al girar.

8. Talón. Cuña de caucho sintético cuya función es estabilizar. La zona baja tiene la misma función que el aro de talón, a la vez que proporciona un confort adicional al girar.

9. Pestaña. Parte central del talón, la pestaña está fabricada con cable de acero embutido en caucho. La pestaña garantiza que el neumático se asiente firmemente en la llanta.

*El talón* es un bucle de cable de acero de alta resistencia recubierto de caucho. Le confiere al neumático la fuerza que necesita para permanecer asentado en la llanta y transferir las fuerzas del neumático a la llanta.

El aislamiento interior está formado por diferentes tejidos, llamados capas. El tejido de capas más común es el cordón de poliéster. Las capas superiores también se llaman capplies. Las capas superiores son telas de poliéster que ayudan a mantener todo en su lugar.

Las capas protectoras no se encuentran en todos los neumáticos; se utilizan principalmente en neumáticos con índices de velocidad más altos para ayudar a que todos los componentes permanezcan en su lugar a altas velocidades.

### 2.2.1. Fuerzas en los neumáticos

Las fuerzas en los neumáticos controlan el comportamiento del vehículo. Por tal motivo, es importante identificarlas, a través de un sistema de coordenadas en la huella del neumático.

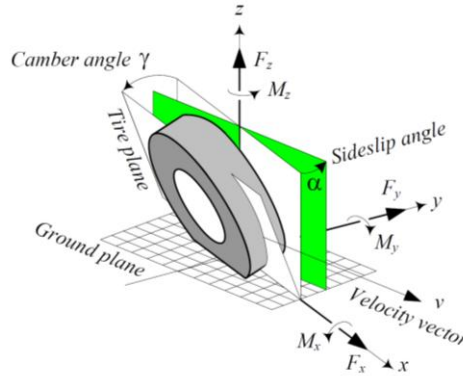


Figura 2.8. Fuerzas y momentos en un neumático [12].

El eje X corresponde a la dirección a la que apunta la llanta, el eje Z está en dirección opuesta a la gravedad y el eje Y completa el eje con la regla de la mano derecha. Dos ángulos se ocupan para determinar la orientación de la llanta: el ángulo de *camber*  $\gamma$ , y el ángulo de deslizamiento  $\alpha$ . El ángulo entre el plano vertical y la llanta es el camber, y el ángulo entre el eje X y el vector de velocidad del vehículo es el ángulo de deslizamiento.

La fuerza del neumático esta descompuesta en los tres ejes coordenados, por lo tanto, hay tres fuerzas y tres momentos:

- Fuerza Longitudinal  $F_x$ : Es la fuerza que actúa en el eje X, y si el auto está acelerando  $F_x > 0$ , mientras que si esta frenando es  $F_x < 0$ .
- Fuerza Normal  $F_z$ : Es la fuerza vertical, y corresponde a la reacción del peso del vehículo.
- Fuerza Lateral  $F_y$ : Es una fuerza tangente al piso y ortogonal a la fuerza longitudinal y normal. Esta fuerza se genera cuando el vehículo da vuelta [12].

Determinar estas fuerzas es de vital importancia para conocer el comportamiento que tendrá el vehículo, para ello, existen múltiples recursos que calculan tanto las fuerzas, como los momentos. La fuerza longitudinal es importante, puesto que, genera el frenado del vehículo, por lo tanto, profundizaremos en su operación.

Para una rueda en libre giro con una velocidad longitudinal  $v_x$  y una velocidad angular  $\omega$ , podemos obtener la relación:

$$\frac{v_x}{\omega} = r_e$$

Donde  $r_e$  es el llamado radio efectivo de la rueda. Sin embargo, cuando se aplica un par se genera un deslizamiento longitudinal o *slip ratio*, que se define de la siguiente forma:

$$SR = \frac{r_e \cdot \omega - v_x}{v_x}$$

El *slip ratio* o *SR* será 0% cuando no existe ningún deslizamiento entre llanta y vehículo, es decir la distancia longitudinal recorrida por el vehículo es exactamente la misma a el arco recorrido de la llanta. Es 100% es cuando la llanta no está rotando y el vehículo está en movimiento, es decir, cuando se bloquea o amarra la llanta. Este estado es particularmente importante para el frenado del vehículo y se da cuando la fuerza de frenado supera el agarre disponible entre el neumático y el asfalto, por lo que la llanta está bloqueada, aunque el auto sigue en movimiento [14]. Durante este estado la fuerza longitudinal generada por la llanta es considerablemente menor que la fuerza longitudinal máxima, por lo que representa un riesgo tanto de desempeño como de seguridad.

Se puede calcular el coeficiente de fricción longitudinal, mediante la relación entre la fuerza longitudinal y normal en la llanta:

$$F_x = \mu_x \cdot F_z$$

Y podemos graficar el coeficiente de fricción longitudinal como función del *slip ratio*:

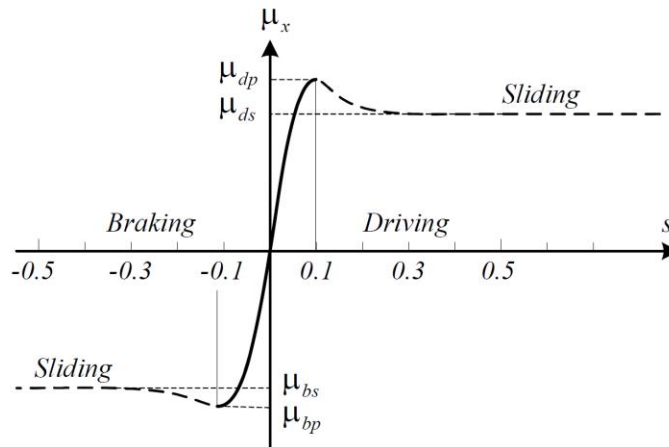


Figura 2.9. Coeficiente de fricción longitudinal como función del *slip ratio* [12].

Podemos observar que existe un pico máximo alrededor de  $SR \approx 10\%$  y después una caída hasta un valor casi constante. Cuando se alcanza ese valor casi constante, se dice que la llanta se está deslizando o patinando. Se busca que la llanta siempre este en su *SR* óptimo, ya sea frenando o acelerando, y esto es lo que sistemas de ABS o de control de tracción buscan.

Aunque la Figura 2.9 muestra el comportamiento general de un neumático, cada compuesto de llanta tiene sus propias características que la definen. Para un diseño integral es necesario conocer estas características del neumático que se ocupa.

### 2.2.2. Pruebas experimentales para la caracterización de neumáticos y TTC en Fórmula SAE

En la sección anterior se discutieron algunas de las características críticas de los neumáticos longitudinales, con esto, se vuelve claro que la comprensión del comportamiento del neumático es necesario para el diseño de un sistema de frenos, y del vehículo en general. Para determinar estas características el mejor acercamiento es el experimental, sin embargo, estas pruebas requieren de equipos caros y mucho tiempo de pruebas, lo que no es factible de lograr para muchos equipos. Es por esto por lo que se creó el *Tire Test Consortium* o TTC por sus siglas.

El TTC fue establecido en Formula SAE con el objetivo de facilitar datos de neumáticos a los equipos participantes y que estos puedan usar la información en sus diseños. La información es obtenida probando neumáticos de distintos fabricantes en las instalaciones de Calspan “Tire Research Facility”. La información recabada es compartida con equipos que paguen una sola cuota de 500 USD, para su uso por parte de los equipos.

La información que se recibe del TTC corresponde a diferentes pruebas y corridas que realizan de pruebas longitudinales y laterales, a diferentes presiones, fuerzas normales, ángulos de *camber*, etc. Toda esta información se comparte sin filtrar y corresponde a los equipos filtrarla, y adecuarla para obtener datos útiles para el diseño. Con estos datos y ciertas herramientas de modelado se puede recrear o estimar la gráfica 2.9 (presentada en el apartado 2.2.1.)

## 2.3. Dinámica Vehicular y Modelado

### 2.3.1. Dinámica Vehicular y Transferencia de Carga

Las principales fuerzas que controlan un vehículo a alta velocidad se desarrollan en cuatro zonas, donde los neumáticos entran en contacto con la carretera, por esta razón, para comprender la dinámica de los vehículos, es necesario conocer las fuerzas y los momentos generados por los neumáticos en el suelo.

Dado que el rendimiento de un vehículo responde a las fuerzas impuestas, gran parte del estudio de la dinámica vehicular debe comprender cómo y por qué se producen dichas fuerzas. Por lo tanto, es necesario comprender a fondo el comportamiento de los neumáticos y las condiciones en las que operan.

La comprensión de la dinámica del vehículo se puede lograr en dos niveles: el empírico y el analítico.

El enfoque analítico busca describir la mecánica de interés basándose en las leyes físicas para establecer un modelo analítico. Estos modelos pueden representarse mediante ecuaciones algebraicas o diferenciales que relacionan las fuerzas o movimientos de interés con las entradas de control y las propiedades del vehículo o del neumático. Estas ecuaciones permiten evaluar el papel de cada propiedad del vehículo en el fenómeno de interés.

El modelo también proporciona capacidad predictiva, de modo que se puedan identificar los cambios necesarios para alcanzar un objetivo de rendimiento determinado, sin embargo, los métodos analíticos solo se aproximan a la realidad [7].

La transferencia de carga es un resultado directo de la dinámica vehicular. Existen dos tipos de transferencia de carga: la lateral y la longitudinal.

### Transferencia de carga lateral

La transferencia de carga lateral consiste el desplazamiento de masa entre las ruedas debido a la fuerza centrífuga y la aceleración lateral y se produce cuando un automóvil toma curvas.

### Transferencia de carga longitudinal

Cuando un coche acelera o frena, se genera una fuerza de reacción similar a la fuerza centrífuga generada al tomar una curva. Esta fuerza de reacción se denomina "W<sub>Ax</sub>". La aceleración longitudinal se expresa en fuerza g, similar a la transferencia de carga lateral. El valor de la fuerza g es "A<sub>x</sub>". Si la aceleración se expresa en metros por segundo al cuadrado. Ya que, para el frenado, esta transferencia de carga es la más importante nos enfocaremos en esta. La siguiente ecuación puede utilizarse para calcular la transferencia de carga para una aceleración constante:

$$\Delta W_x = \frac{h}{l} \cdot W \cdot a_x$$

Donde:

- $\Delta W_x$ : Es el aumento de la carga descendente del eje trasero y, por lo tanto, la disminución de la carga del eje delantero. O, si se frena, es la disminución de la carga del eje trasero y el aumento de la carga del eje delantero en kg.
- $l$ : La distancia entre ejes del coche en metros
- $h$ : La altura del centro de gravedad desde el suelo en metros
- $W$ : Masa total del vehículo en kg
- $a_x$ : Aceleración longitudinal en fuerza g.

Con base a esta ecuación podemos comprender la razón por la que los frenos del eje delantero tienen más potencia (o mayor número de pistones) que el eje trasero. Esto ya que, al tener una aceleración negativa, el eje delantero tiene mayor carga normal, y por lo tanto mayor agarre para frenar en el eje delantero, caso opuesto del eje trasero.

## 2.4. Método de Euler para la solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

El método de Euler consiste en la discretización de la solución de una ecuación diferencial. Para lograr esto se puede decir que se realiza una aproximación de la curva "solución" de la ecuación. La aproximación se realiza mediante pequeños incrementos de la solución. Los incrementos son lineales, por lo que la curva se aproxima mediante pequeñas rectas. Entre más pequeño sea el incremento, la recta será más pequeña y la aproximación a la curva será más precisa. Este proceso se puede observar gráficamente en la Figura 2.10.

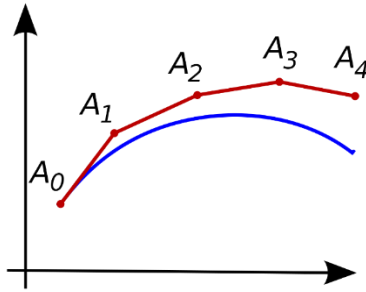


Figura 2.10. Representación gráfica del método de Euler.

Para resolver una ecuación diferencial ordinaria con este método, se siguen los siguientes pasos:

1. Se tiene la siguiente EDO

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

2. Se aproxima la ecuación diferencial como

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_t - x_{t-\Delta t}}{\Delta t}$$

Donde:

$x_t \approx x(t)$ : Es el valor aproximado de la función  $x$  en el tiempo  $t$

$x_{t-\Delta t} \approx x(t - \Delta t)$ : Es el valor inicial o aproximado de la función  $x$  en el tiempo  $t$

Si  $t - \Delta t = 0$  entonces es el valor inicial y por lo tanto  $x_{t-\Delta t} = x(t - \Delta t) = x(t = 0)$

Es necesario conocer este el valor inicial para resolver la ecuación diferencial ordinaria.

$\Delta t$ : Es el tamaño del incremento de la discretización. Entre menor sea este tamaño mayor precisión tendrá la solución aproximada.

3. De la ecuación del paso 1 y la ecuación del paso 2, podemos despejar para obtener la solución de la ecuación diferencial ( $x_t$ ) para el incremento  $t$ .

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \approx \frac{x_t - x_{t-\Delta t}}{\Delta t}$$

$$x_t \approx f(x, t) \cdot \Delta t + x_{t-\Delta t}$$

4. Se repite este proceso, utilizando un tamaño de incremento ( $\Delta t$ ) lo suficientemente pequeño para que los resultados tengan buena precisión, hasta llegar al tiempo  $t = t_f$ , que representa el momento final para el cual buscamos obtener la solución.

A este proceso se le conoce como integración numérica, ya que se está utilizando un método numérico para calcular la solución de una ecuación diferencial al avanzar numéricamente en el tiempo. Con este método se “integra” la ecuación diferencial para obtener una aproximación de  $x$  en varios puntos discretos a lo largo del tiempo  $t$ .

Al desarrollar un modelo dinámico, las ecuaciones que se desarrollan dependen del tiempo, y por ende son ecuaciones diferenciales. Debido a esto se requiere del uso de algún método numérico para su solución, y en el caso de este trabajo, se optó por el uso del método de Euler. En las ecuaciones

diferenciales empleadas en los siguientes capítulos se integran variables numéricas como lo son, aceleración y velocidad, como se puede observar en la sección 3.2.3.

### 3. Modelos

El modelo completo del frenado del vehículo se puede clasificar en tres bloques principales:

- Dinámica del sistema de frenos
- Dinámica de la rueda y neumático
- Dinámica del vehículo (que dependerá del modelo de vehículo ocupado)

La interacción de los tres bloques esta descrita en la

Figura 3.1 el input (o entrada) del modelo es la fuerza que aplica el piloto al pedal freno. Del bloque del sistema de frenos se obtiene el torque de frenado, que es el input para el bloque de dinámica de rueda y neumático. Para este bloque también se requiere como entradas la fuerza normal de la llanta y la velocidad del vehículo, señales que se obtienen del último bloque (dinámica del vehículo). De la dinámica del vehículo obtenemos las señales correspondientes a la distancia de frenado, la velocidad del vehículo y la fuerza normal de las llantas, entre otras cosas. La velocidad y la fuerza normal son necesarias en la dinámica de la rueda y llanta, por lo que están en retroalimentación.

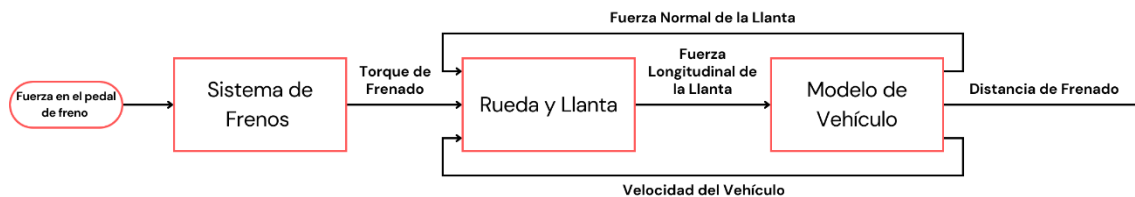


Figura 3.1. Diagrama de Bloques del Modelo General.

Si se buscara modelar la aceleración del vehículo, se podría añadir un bloque adicional para la dinámica del Tren de Potencia y Transmisión (Powertrain and Drivetrain), del cual la salida sería el torque que se aplica a la rueda mediante el eje de transmisión, como se puede ver en el diagrama de la

Figura 3.2.

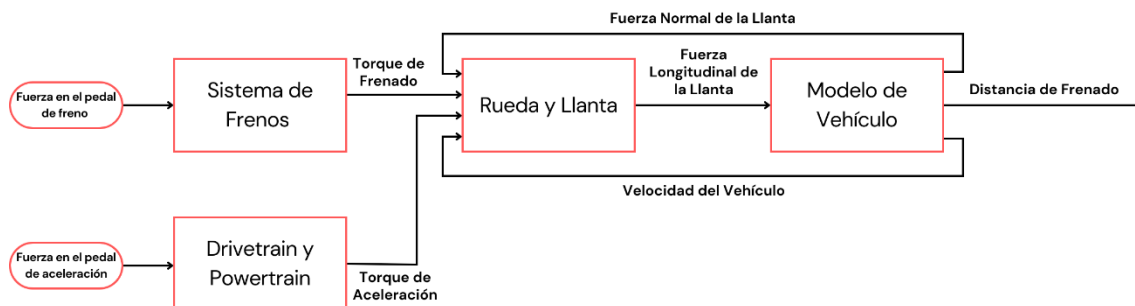


Figura 3.2. Diagrama de Bloques del Modelo General con Aceleración.

Es fácil añadir bloques nuevos, o modificar los existentes mientras las entradas y salidas se mantengan igual, por lo tanto, el modelo se puede usar como base para hacer un modelo de mayor complejidad y fidelidad. Por ejemplo, al modelo de vehículo se le pueden implementar grados de libertad adicionales, correspondientes a la dinámica lateral del vehículo, o los grados de libertad correspondientes a la masa no suspendida, modelando las llantas como resortes.

### 3.1. Modelos matemáticos ocupados

Cada bloque presentado en el diagrama general está constituido por sub-bloques, cada uno con su correspondiente entrada y salida, regidas por ecuaciones matemáticas. En las siguientes secciones discutiremos los bloques presentados, y las ecuaciones ocupadas para el modelo y la simulación.

#### 3.1.1. Modelado de sistema de frenos

En la sección 2.1 se discutieron los componentes de un sistema de frenos, la importancia de cada componente y las propiedades críticas para el frenado del vehículo. En esta sección se va a describir la interacción entre los componentes, y mediante las ecuaciones matemáticas se entenderá porque estas propiedades son tan importantes en el desempeño del frenado.

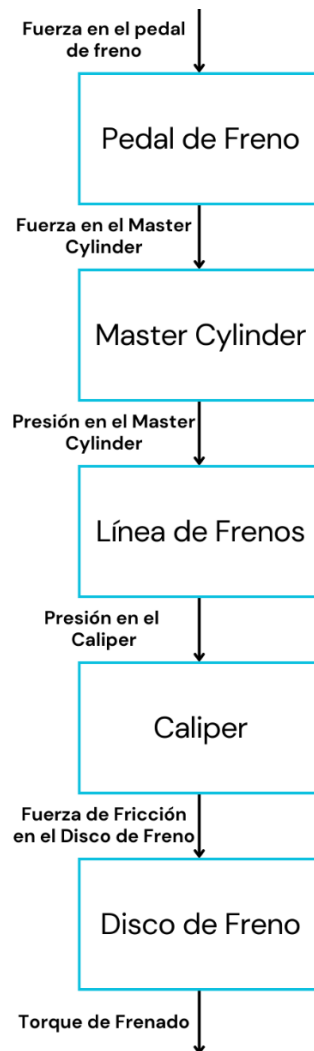


Figura 3.3. Diagrama de Bloques del Sistema de Frenos.

Describiremos cada bloque del diagrama de la

Figura 3.3:

- Pedal de freno

Es el primer componente que interactúa con la fuerza aplicada por el piloto. Tiene una propiedad de diseño conocida como *Pedal Ratio*, relación entre la “longitud del pedal” (distancia del punto de pivote al lugar donde se aplica la fuerza) y la distancia entre punto del pivote al punto de conexión con el *Master Cylinder* (MC) o cilindro maestro. El *pedal ratio* actúa como multiplicador de la fuerza aplicada por el piloto hacia el *Master Cylinder*, en términos básicos, una palanca. Para un arreglo como el mostrado en la Figura 3.4, el *pedal ratio* se calcula con la siguiente ecuación:

$$PR = \frac{x}{y}$$

Donde:

$PR$ : Pedal Ratio [1]

$x, y$  : Dimensiones marcadas en el diagrama de la Figura 3.4 [m]

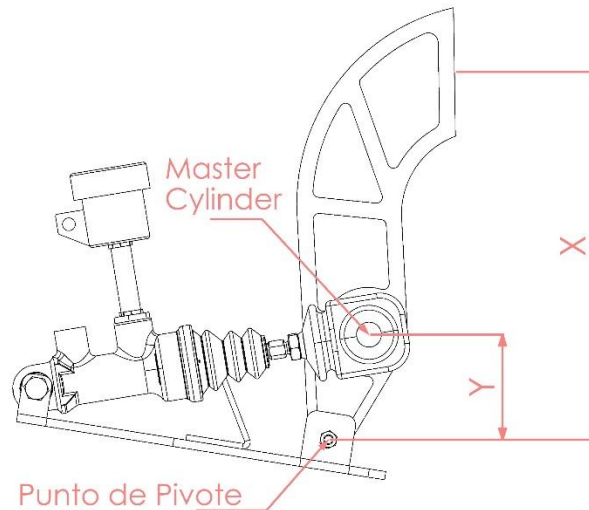


Figura 3.4. Esquema de Pedal Ratio.

Debido a que hay líneas independientes para el eje delantero y trasero, se utiliza la *balance bar* como enlace entre el *master cylinder* delantero y el trasero. Con esta, podemos distribuir manualmente la fuerza entre ambas líneas. La distribución hacia las llantas delanteras es conocida como *Brake Bias*.

La ecuación del bloque es:

$$F_{MC_f} = F_{Piloto} \cdot PR \cdot BB$$

$$F_{MC_r} = F_{Piloto} \cdot PR \cdot (1 - BB)$$

Donde:

$F_{piloto}$ : Fuerza del piloto en el pedal de freno [N]

$BB$ : Brake Bias [1]

$F_{MC_f}$ : Fuerza en el Master Cylinder Frontal [N]

$F_{MC_r}$ : Fuerza en el Master Cylinder Trasero [N]

Debido a que se tienen las dos líneas de frenos, habrá ecuaciones para ambos ejes (frontal y trasero), sin embargo, a partir de ahora por simplicidad las ecuaciones serán presentadas de forma general, dando por entendido que el resultado para cada eje será diferente.

- Master Cylinder

Este componente convierte la fuerza mecánica que se le aplica en presión hidráulica. La ecuación que dicta el estado estacionario del bloque es:

$$P_{MC} = \frac{F_{MC}}{A_{MC}} = \frac{F_{MC}}{\pi \cdot \left(\frac{d_{MC}}{2}\right)^2}$$

Donde:

$P_{MC}$ : Presión en el Master Cylinder [Pa]

$d_{MC}$ : Diámetro del pistón del Master Cylinder [m]

El diámetro del pistón del Master Cylinder es una propiedad crítica para el desempeño, ya que afecta directamente la presión en el sistema. Entre menor sea el diámetro mayor será la presión en la línea y viceversa.

- Línea de Frenos

La línea es la conexión entre el *master cylinder* y el *caliper*. En estado estacionario este componente no tiene efecto directo en el desempeño del sistema, sin embargo, en la respuesta transitoria existe un desfase (o demora) que está en función de la viscosidad del líquido, el área transversal de la línea, los elementos de conexión y distribución y la longitud de la línea. Caracterizar físicamente este desfase es extremadamente complejo, por lo que un acercamiento experimental es preferible y mucho más sencillo. Este desfase ayuda a que el modelo tenga un comportamiento más realista, sin embargo, también es válido aproximar el estado estacionario de esta línea y asumir que la presión en el *caliper* y en el *master cylinder* es la misma en todo momento.

Para considerar este desfase y tener un comportamiento más realista del sistema de frenos, se considera el desfase con la siguiente ecuación:

$$\dot{P}_C = \frac{P_{MC} - P_C}{\tau}$$

Donde:

$P_C$ : Presión en el Caliper [ $Pa$ ]

$\tau$ : Constante de desfase [ $s$ ]

La constante de desfase puede ser obtenida experimentalmente, pero para nuestro caso se obtuvo mediante referencia bibliográfica.

- Caliper

La ecuación de estado para este bloque es:

$$F_{f_{disco}} = N_{piston} \cdot \mu_B \cdot \#_{pistones} = (P_C \cdot A_C) \cdot \mu \cdot \#_{pistones} = \left( P_C \cdot \left( \pi \cdot \left( \frac{d_C}{2} \right)^2 \right) \right) \cdot \mu \cdot \#_{pistones}$$

Donde:

$F_{f_{disco}}$ : Fuerza de fricción en el disco de freno [ $N$ ]

$N_{piston} = P_C \cdot A_C = P_C \cdot \left( \pi \cdot \left( \frac{d_{MC}}{2} \right)^2 \right)$ : Fuerza Normal del pistón del caliper en el disco [ $N$ ]

$\#_{pistones}$ : Número de pistones del caliper [1]

$\mu_B$ : Coeficiente de fricción de la balata [1]

$d_C$ : Diámetro del pistón del caliper [ $m$ ]

De esta ecuación podemos observar que la fuerza de fricción del disco (que está directamente relacionada al torque de frenado) puede ser duplicada por el número de pistones del *caliper* (cambiando de un *caliper* de 2 pistones a 4), además de ser proporcional al área de sus pistones.

- Disco de Freno

La ecuación de este bloque es:

$$T_f = F_{f_{disco}} \cdot r_{disco}$$

Donde:

$T_f$ : Torque de Frenado [ $N \cdot m$ ]

$r_{disco}$ : Radio efectivo del disco de freno [ $m$ ]

### 3.1.2. Modelado de rueda y llanta

Al hablar de modelado de la rueda nos referimos al modelado de la masa no suspendida que, junto con la llanta, está rotando (como la maza o *Wheel Hub*, el rin y el disco de frenos). Con modelado de la llanta estamos hablando específicamente del modelado del compuesto neumático de la llanta, es decir, las características que posee nuestro compuesto respecto a agarre longitudinal y lateral, temperaturas de trabajo, desgaste, etc.

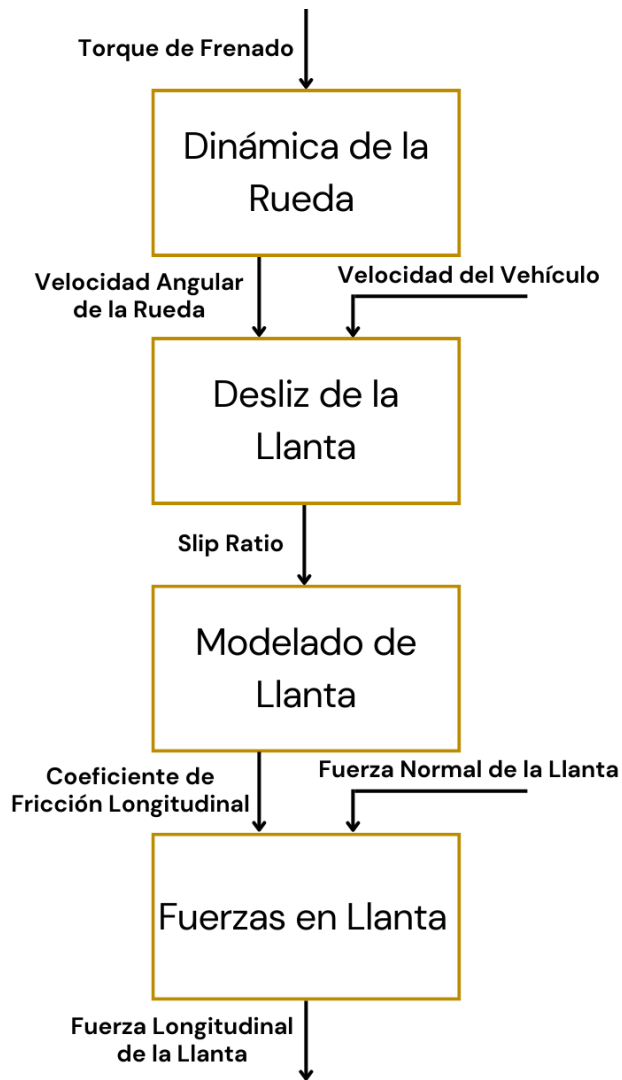


Figura 3.5. Diagrama de Bloques de la Rueda y Llanta.

El diagrama del modelo de estos componentes se puede observar en la Figura 3.5, del cual se explica cada bloque a continuación:

- Dinámica de la rueda

La ecuación dinámica de la rueda consiste en la suma de momentos del eje X en el centro de la rueda, como se puede observar en la Figura 3.6:

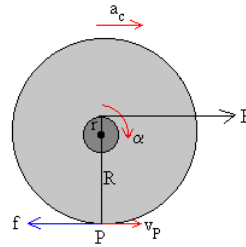


Figura 3.6. Suma de Momentos en la Rueda.

$$I_{yy_{Rueda}} \cdot \dot{\omega}_{rueda} = T_f - r_{llanta} \cdot F_x$$

Donde:

$I_{yy_{Rueda}}$ : Momento de inercia del eje principal X de la rueda (llanta, rin, maza y cualquier otro componente que rote) [ $kg \cdot m^2$ ]

$\dot{\omega}_{rueda}$ : Aceleración angular de la rueda [ $\frac{rad}{s^2}$ ]

$r_{llanta}$ : Radio efectivo de la llanta [ $m$ ]

$F_x$ : Fuerza longitudinal del neumático [ $N$ ]

La entrada de este bloque es el torque de frenado y la salida es la velocidad angular de la rueda, que se obtiene integrando la aceleración angular de la rueda de la suma de momentos.

- Desliz de la llanta

Esta cantidad adimensional es un indicador del movimiento relativo entre el neumático y el vehículo, dado por la siguiente ecuación:

$$SR = \frac{r_{llanta} \cdot \omega_{rueda} - v_x}{v_x} \cdot 100\%$$

Donde:

$SR$ : Slip Ratio o desliz de la llanta [%]

$v_x$ : Velocidad longitudinal del vehículo [ $\frac{m}{s}$ ]

Para este bloque, se requiere una entrada adicional correspondiente a la velocidad longitudinal del vehículo que se obtiene en forma de retroalimentación del modelo del vehículo.

- Modelado de Llanta

El modelo que se ocupa en este bloque es el modelo empírico más simple ajustado por datos experimentales (TTC, explicado en la sección 2.2.4). Es conocido como *Magic Formula*, y consiste en determinar los coeficientes de la siguiente fórmula empírica:

$$\mu_x = D \cdot \sin \{C \cdot \arctan[B \cdot SR - E \cdot (B \cdot SR - \arctan(B \cdot SR))]\}$$

Donde:

$B, C, D, E$  son los coeficientes que se ajustan ocupando los datos del TTC.

$SR$ : *Slip Ratio* o desliz de la llanta [%]

$\mu_x$ : Coeficiente de fricción longitudinal [1]

- Fuerzas en Llanta

Este bloque ocupa como entrada el coeficiente de fricción longitudinal, y la fuerza normal en el neumático como retroalimentación del Modelo del Vehículo para calcular la fuerza longitudinal con la siguiente fórmula de fricción:

$$F_x = \mu_x \cdot F_z$$

Donde:

$F_x$ : Fuerza longitudinal en la llanta [N]

$F_z$ : Fuerza normal en la llanta [N]

### 3.1.3. Modelado del vehículo

En esta sección se derivan las ecuaciones de movimiento de algunos modelos vehiculares descritos en la sección 2.3.2. Los modelos en esta sección fueron los modelos ocupados en los resultados de la simulación.

#### 3.1.3.1. Modelo Longitudinal de 1 GDL

El grado de libertad de este modelo es:

- Traslación en el eje X (movimiento longitudinal)

El esquema representado en la Figura 3.7 se conoce como el modelo de medio automóvil (*half-car model*), debido a que las ruedas se agrupan en dos ejes: el delantero y el trasero. En este modelo, se considera que el chasis del vehículo se comporta como un cuerpo rígido. Además, se asume que las ruedas de un mismo eje (ya sea el delantero o el trasero) tienen la misma carga, lo que significa que la distribución de peso lateral es uniforme.

Sin embargo, si el vehículo presentara una inclinación significativa hacia un lado en la distribución de peso, es posible analizar cada cuadrante de forma independiente, teniendo en cuenta la relación estática entre las ruedas exteriores e interiores. Esto es necesario porque, en caso de frenado, las ruedas del lado con menos peso serían las primeras en bloquearse. El uso de la relación estática es posible en este modelo, ya que no tiene en cuenta la transferencia de peso lateral. Por lo tanto, este modelo no permite representar una combinación de transferencia de peso tanto longitudinal como lateral.

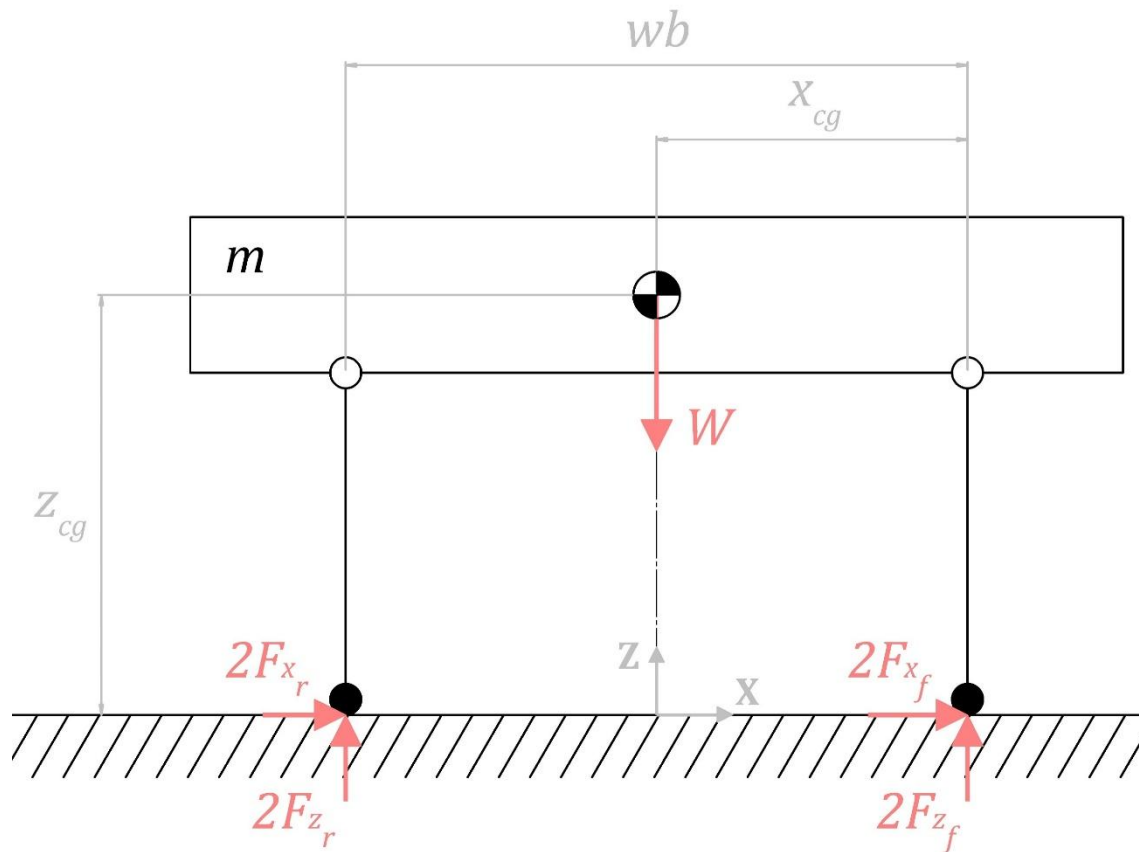


Figura 3.7. Modelo Longitudinal de 1 GDL.

Las fuerzas presentes en el vehículo corresponden a las fuerzas longitudinales en llanta  $F_x$  (de frenado si son negativas o aceleración si son positivas), el peso del vehículo  $W$ , y las fuerzas de reacción  $F_z$  (o fuerzas normales en llantas). Las únicas fuerzas externas son las fuerzas longitudinales. Las fuerzas están multiplicadas por dos para que el análisis corresponda al de un cuadrante, es decir, la fuerza  $F_x$  corresponde a la fuerza longitudinal generada por un solo cuadrante o neumático, esto considerando la distribución de peso lateral como uniforme.

Para el modelado las dimensiones necesarias del vehículo están marcadas en gris en la Figura 3.7, y corresponden a:

$w_b$ : *Wheelbase* (distancia entre ejes) [m]

$x_{CG}$ : Distancia del centro de gravedad al eje frontal [m]

$z_{CG}$ : Distancia del centro de gravedad al piso [m]

El vehículo solo se puede trasladar en la dirección del eje X, sin embargo, para conocer las fuerzas normales de cada llanta se necesita considerar las fuerzas del eje Z y los momentos en el cuerpo.

Para obtener las ecuaciones de movimiento del cuerpo ocupamos las leyes de Newton:

$$m \cdot \ddot{x} = \sum F_x = 2F_{x_f} + 2F_{x_r}$$

$$m \cdot \ddot{z} = 0 = \sum F_z = -W + 2F_{z_f} + 2F_{z_r}$$

$$I_{yy} \cdot \ddot{\theta} = 0 = \sum T_{CG} = 2F_{x_f} \cdot z_{CG} + 2F_{x_r} \cdot z_{CG} + 2F_{z_f} \cdot x_{CG} - 2F_{z_r} \cdot (wb - x_{CG})$$

Donde:

$$W = m \cdot g$$

En este modelo, como solo hay un GDL (la traslación en el eje X),  $\ddot{z}$  y  $\ddot{\theta}$  son iguales a cero. Las incógnitas del modelo son  $x$ ,  $F_{z_f}$  y  $F_{z_r}$ . Se cuentan con tres ecuaciones para las tres incógnitas, y se puede notar que  $F_{z_f}$  y  $F_{z_r}$  se pueden resolver algebraicamente, mientras que  $x$  es una ecuación diferencial que se resuelve numéricamente.

Para resolver  $F_{z_f}$  y  $F_{z_r}$  desarrollamos las ecuaciones de movimiento para obtener:

$$W = 2F_{z_f} + 2F_{z_r}$$

$$2F_{z_r} \cdot (wb - x_{CG}) = 2F_{x_f} \cdot z_{CG} + 2F_{x_r} \cdot z_{CG} + 2F_{z_f} \cdot x_{CG}$$

Finalmente obtenemos:

$$2F_{z_r} = \frac{1}{wb} \left( 2F_{x_f} \cdot z_{CG} + 2F_{x_r} \cdot z_{CG} + W \cdot x_{CG} \right)$$

$$2F_{z_f} = W - \frac{1}{wb} \left( 2F_{x_f} \cdot z_{CG} + 2F_{x_r} \cdot z_{CG} + W \cdot x_{CG} \right)$$

Se puede notar que si las fuerzas longitudinales son positivas, la transferencia es hacia el eje trasero. Si la fuerza es de frenado (o negativa) la transferencia es hacia las llantas delanteras.

Cabe recordar que la entrada del bloque es la fuerza longitudinal y las salidas son la distancia de frenado  $x$ , la velocidad del vehículo  $\dot{x}$  y la fuerza normal de las llantas  $F_{z_f}$  y  $F_{z_r}$ .

### 3.1.3.2. Modelo Longitudinal de 3 GDL

Los tres grados de libertad de este modelo corresponden a:

- Traslación en el eje X (movimiento longitudinal)
- Traslación en el eje Z (movimiento vertical)
- Rotación con respecto al eje Y (*pitch angle*)

Estos grados de libertad se pueden observar en la Figura 3.8, marcados en rojo. En este caso, en el *half-car model* se considera la suspensión delantera ( $k_f$  y  $c_f$ ) y trasera ( $k_r$  y  $c_r$ ) como un sistema resorte-amortiguador, y el vehículo es modelado como un cuerpo rígido de masa  $m$ , con momento de inercia  $I_{yy}$  con respecto al eje Y. La suspensión permite la traslación en el eje Z y la rotación con respecto al eje Y, por lo que para este modelo se tienen 3 GDL. Al igual que en el modelo de 1 GDL, este modelo considera que

las llantas que corresponden al mismo eje tienen la misma carga. Si la distribución lateral del peso del vehículo está muy sesgada hacia algún lado, se puede analizar cada cuadrante del vehículo independientemente, considerando el sistema resorte-amortiguador de cada eje en paralelo, y luego distribuyendo las fuerzas normales con la relación estática de distribución lateral. Al igual que en el modelo de 1 GDL, no es posible modelar transferencias combinadas. Si el interés es modelar transferencias combinadas, es necesario un modelo de mayor GDL, como el modelo de 7 GDL.

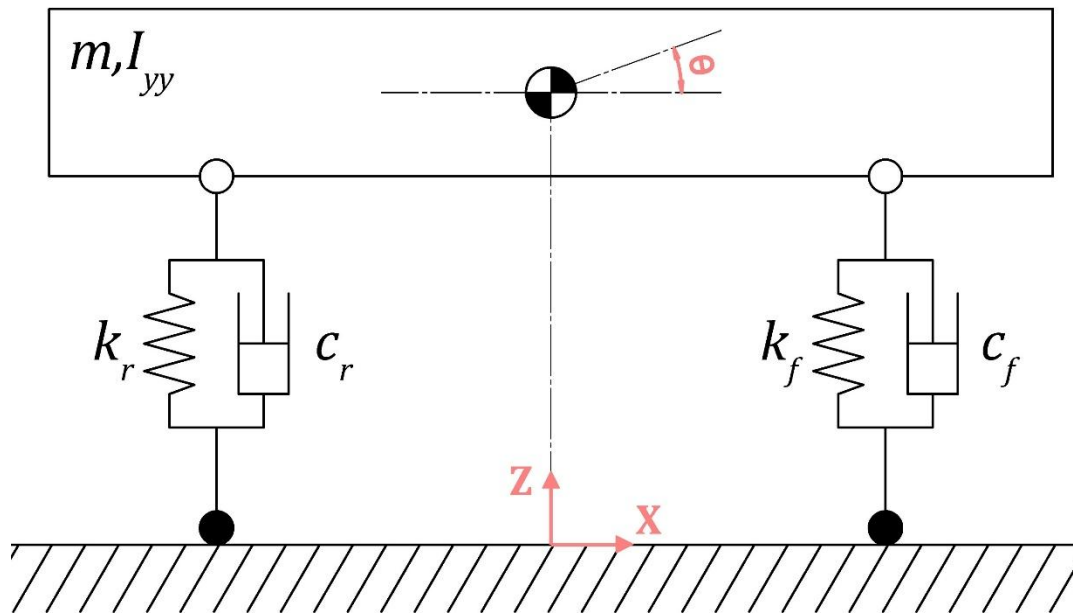


Figura 3.8. Modelo Longitudinal de 3 GDL.

Para poder derivar las ecuaciones de movimiento, es necesario conocer ciertas dimensiones y relaciones del vehículo, que se muestran en la Figura 3.9.

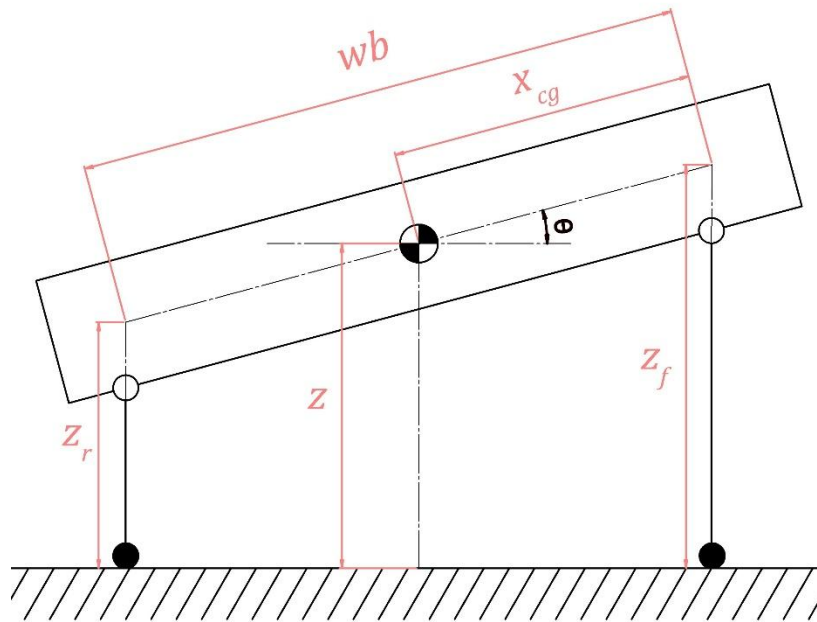


Figura 3.9. Diagrama de las dimensiones del vehículo.

En la que:

$wb$ : *Wheelbase* (distancia entre ejes) [m]

$x_{CG}$ : Distancia del centro de gravedad al eje frontal [m]

$z$ : Distancia del centro de gravedad al piso [m]

$z_f$ : Distancia del piso al eje frontal [m]

$z_r$ : Distancia del piso al eje trasero [m]

Las dimensiones  $wb$  y  $x_{CG}$  son constantes, y están determinadas por el diseño del vehículo. La distancia  $z$  es un GDL del vehículo y por lo tanto no es constante sino una incognita de las ecuaciones de movimiento. Sin embargo las distancias  $z_f$  y  $z_r$  también son variables, y para que el número de ecuaciones de movimiento corresponda al número de incognitas se debe encontrar una relación entre estas dos variables y los GDL, que esta dada por:

$$z_f = z + x_{CG} \cdot \sin \theta$$

$$z_r = z - (wb - x_{CG}) \cdot \sin \theta$$

Ahora podemos derivar las ecuaciones de movimiento mediante las leyes de Newton, ocupando el diagrama de cuerpo libre de la Figura 3.10.

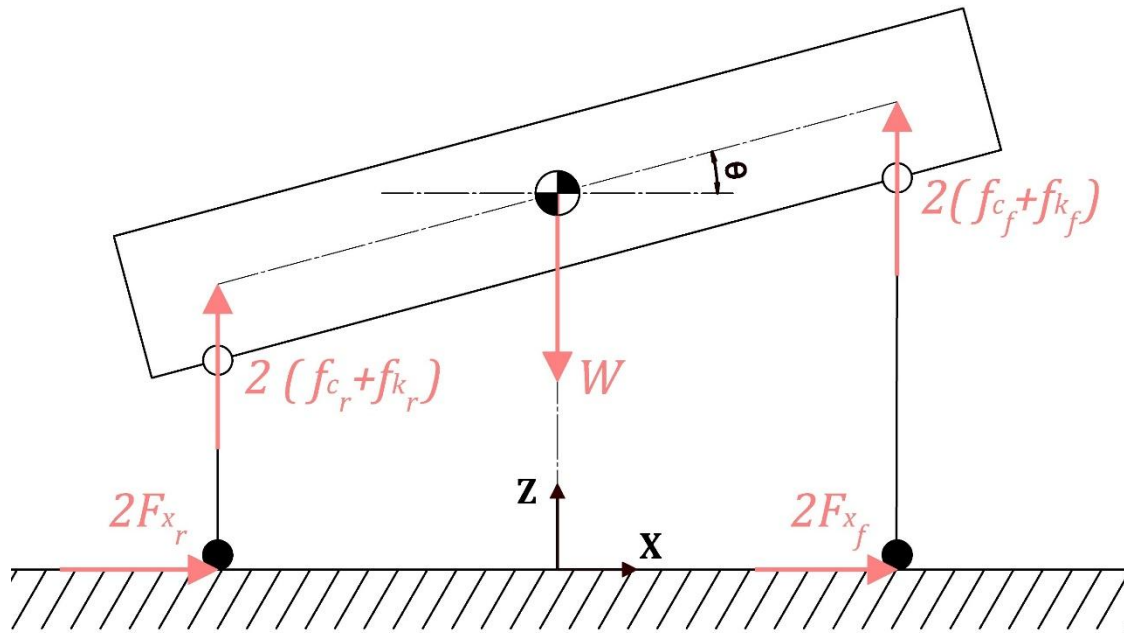


Figura 3.10. Diagrama de cuerpo libre del Modelo Longitudinal de 3 GDL.

Las fuerzas que tenemos presentes en el vehículo corresponden al peso del vehículo  $W$ , la fuerza de reacción del resorte y amortiguador,  $f_k$  y  $f_c$  respectivamente, y las fuerzas longitudinales  $F_x$ . El caso que se muestra es el del vehículo siendo acelerado (para un vehículo de tracción trasera  $F_{x_f} = 0$ ). Para el frenado del vehículo el único cambio es que las fuerzas longitudinales son negativas, cambiando la dirección del ángulo theta. Las fuerzas están multiplicadas por dos para que el análisis corresponda al de un solo cuadrante o llanta, esto considerando la distribución de peso lateral como uniforme.

La suma de fuerzas en X, en Z y la suma de momentos en el centro de gravedad, da resultado a las siguientes ecuaciones:

$$m \cdot \ddot{x} = \sum F_x = 2F_{x_f} + 2F_{x_r}$$

$$m \cdot \ddot{z} = \sum F_z = -W + 2(f_{c_f} + f_{k_f}) + 2(f_{c_r} + f_{k_r})$$

$$I_{yy} \cdot \ddot{\theta} = \sum T_{CG} = 2(f_{c_f} + f_{k_f}) \cdot x_{CG} - 2(f_{c_r} + f_{k_r}) \cdot (wb - x_{CG}) + 2F_{x_f} \cdot z_f + 2F_{x_r} \cdot z_r$$

Donde:

$W = m \cdot g$ , es el peso del vehículo.

$f_{c_f} = c_f \cdot \dot{z}_f$ , es la fuerza del amortiguador frontal, con  $c_f$  siendo la constante de amortiguación. No es necesario modelar la fuerza del amortiguador con una constante única, se pueden ocupar curvas de amortiguamiento para un modelado más realista.

$f_{k_f} = k_f \cdot (z_{o_f} - z_f)$  es la fuerza del resorte, con  $k_f$  siendo la constante de rigidez del resorte. Debido a que nuestro marco de referencia se encuentra en el piso se requiere incluir la constante  $z_{o_f}$ , que corresponde a la altura  $z$  en la que el resorte frontal estará en equilibrio.

Las mismas ecuaciones son ocupadas para la suspensión trasera con sus respectivos subíndices  $r$ .

Para obtener  $\dot{z}_f$  derivamos  $z_f$  y  $z_r$  para obtener:

$$\begin{aligned}\dot{z}_f &= \dot{z} - x_{CG} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta \\ \dot{z}_r &= \dot{z} + (wb - x_{CG}) \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta\end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de movimiento tenemos:

$$\begin{aligned}m \cdot \ddot{x} &= 2(F_{x_f} + F_{x_r}) \\ m \cdot \ddot{z} &= -m \cdot g + 2(k_f(z_{o_f} - z_f) - c_f \dot{z}_f) + 2(k_r(z_{o_r} - z_r) - c_r \dot{z}_r) \\ I_{yy} \cdot \ddot{\theta} &= 2(k_f(z_{o_f} - z_f) - c_f \dot{z}_f) \cdot x_{CG} - 2(k_r(z_{o_r} - z_r) - c_r \dot{z}_r) \cdot (wb - x_{CG}) + 2F_{x_f} \cdot z_f + 2F_{x_r} \cdot z_r\end{aligned}$$

Continuando con la sustitución y reacomodando los términos, obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned}m \cdot \ddot{x} &= 2(F_{x_f} + F_{x_r}) \\ m \cdot \ddot{z} + 2(c_f + c_r)\dot{z} + 2(c_f x_{CG} - c_r(wb - x_{CG}))\dot{\theta} \cos \theta + 2(k_f + k_r)z \\ &+ 2(k_f x_{CG} - k_r(wb - x_{CG})) \sin \theta = -m \cdot g + 2(k_f z_{o_f} + k_r z_{o_r}) \\ I_{yy} \cdot \ddot{\theta} + 2(c_f x_{CG}^2 + c_r(wb - x_{CG})^2)\dot{\theta} \cos \theta + 2(c_f x_{CG} - c_r(wb - x_{CG}))\dot{z} \\ &+ 2(k_f x_{CG}^2 + k_r(wb - x_{CG})^2) \sin \theta + 2(k_f x_{CG} - k_r(wb - x_{CG}))z \\ &= 2(k_f z_{o_f} \cdot x_{CG} + k_r z_{o_r} \cdot (wb - x_{CG}) + F_{x_f} z_f + F_{x_r} z_r)\end{aligned}$$

Estas ecuaciones son no lineales, y se pueden ocupar para modelar el vehículo, sin embargo, también podemos linealizar el modelo para ángulos  $\theta$  pequeños ( $\theta \ll 1$ ). Esta aproximación es válida para la mayoría de los vehículos y condiciones. Permite simplificar las ecuaciones y ponerlas en forma matricial. Con la aproximación de ángulos pequeños sabemos que:

$$\begin{aligned}\sin \theta &\approx \theta \\ \cos \theta &\approx 1\end{aligned}$$

Reacomodando las ecuaciones lineales se tienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}m \cdot \ddot{x} &= 2(F_{x_f} + F_{x_r}) \\ m \cdot \ddot{z} + 2(c_f + c_r)\dot{z} + 2(c_f x_{CG} - c_r(wb - x_{CG}))\dot{\theta} + 2(k_f + k_r)z + 2(k_f x_{CG} - k_r(wb - x_{CG}))\theta \\ &= -m \cdot g + 2(k_f z_{o_f} + k_r z_{o_r})\end{aligned}$$

$$I_{yy} \cdot \ddot{\theta} + 2(c_f x_{CG}^2 + c_r (wb - x_{CG})^2) \dot{\theta} + 2(c_f x_{CG} - c_r (wb - x_{CG})) \dot{z} + 2(k_f x_{CG}^2 + k_r (wb - x_{CG})^2) \theta + 2(k_f x_{CG} - k_r (wb - x_{CG})) z = 2(k_f z_{of} \cdot x_{CG} + k_r z_{or} \cdot (wb - x_{CG}) + F_{x_f} z_f + F_{x_r} z_r)$$

Que podemos escribir en forma matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{f}$$

Donde:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ z \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(c_f + c_r) & 2(c_f x_{CG} - c_r (wb - x_{CG})) \\ 0 & 2(c_f x_{CG} - c_r (wb - x_{CG})) & 2(c_f x_{CG}^2 + c_r (wb - x_{CG})^2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(k_f + k_r) & 2(k_f x_{CG} - k_r (wb - x_{CG})) \\ 0 & 2(k_f x_{CG} - k_r (wb - x_{CG})) & 2(k_f x_{CG}^2 + k_r (wb - x_{CG})^2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 2(F_{x_f} + F_{x_r}) \\ -m \cdot g + 2(k_f z_{of} + k_r z_{or}) \\ 2(k_f z_{of} \cdot x_{CG} + k_r z_{or} \cdot (wb - x_{CG}) + F_{x_f} z_f + F_{x_r} z_r) \end{bmatrix}$$

Donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa,  $\mathbf{C}$  es la matriz de amortiguamiento,  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez,  $\mathbf{f}$  es el vector de fuerzas externas y  $\mathbf{r}$  el vector de desplazamiento. Se nota que las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento son simétricas, y son un buen indicador para verificar que las ecuaciones de movimiento son correctas.

Adicionalmente se puede notar que la ecuación  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{f}$  es muy similar a la ecuación del modelo de vibración generalizado.

La forma matricial es muy práctica para programar y simular modelos complejos, ya que nos permite tener un indicador para verificar que las ecuaciones son correctas, además de que permite modificar fácilmente las ecuaciones al igual que las fuerzas externas del modelo. Adicionalmente la programación para la solución numérica de las ecuaciones es más sencilla, sin embargo, esta notación solo existe para modelos lineales.

Finalmente, cabe recordar que la entrada de este bloque es la fuerza longitudinal generada en las llantas, y las salidas corresponden a la distancia de frenado  $x$ , la velocidad del vehículo  $\dot{x}$  y la fuerza normal de las llantas  $F_{z_f} = f_{c_f} + f_{k_f}$  y  $F_{z_r} = f_{c_r} + f_{k_r}$ .

### 3.2. Simulación del Modelo

Una vez que se cuenta con todas las ecuaciones requeridas para modelar el fenómeno dinámico, se requiere de la simulación para poder obtener resultados. La simulación consiste en la solución de las ecuaciones diferenciales mediante métodos numéricos. Esto se puede hacer directamente con los solvers disponibles en el software, o se puede programar algún método numérico. En nuestro caso se programa directamente el método de Euler como método numérico para la solución de las ecuaciones.

#### 3.2.1. Parámetros, entradas y condiciones iniciales

Para la simulación, se requiere conocer ciertos parámetros y condiciones iniciales del vehículo, además de las entradas del piloto hacia los controles (en nuestro caso particular el pedal de freno).

- Parámetros

Los parámetros son valores del vehículo que están definidos por su construcción (como la masa) y que no cambian dependiendo de la situación que se vaya a modelar. Para nuestro modelo, los parámetros que se requieren son los siguientes:

Bloque	Parámetro	Símbolo	Unidad	
Sistema de Frenos	Pedal Ratio	$PR$	[1]	
	Diámetro de Pistón de Master Cylinder Frontal	$d_{MC_f}$	[m]	
	Diámetro de Pistón de Master Cylinder Trasero	$d_{MC_r}$	[m]	
	Diámetro de Pistón de Caliper Frontal	$d_{C_f}$	[m]	
	Diámetro de Pistón de Caliper Trasero	$d_{C_r}$	[m]	
	Número de Pistones de Caliper Frontal	$\#_{Pistones_f}$	[1]	
	Número de Pistones del Caliper Trasero	$\#_{Pistones_r}$	[1]	
	Coeficiente de Fricción de la Balata	$\mu_B$	[1]	
Rueda y Llanta	Momento de Inercia del Eje Principal Y de la Rueda Frontal	$I_{yy_{Rueda_f}}$	[kg · m <sup>2</sup> ]	
	Momento de Inercia del Eje Principal Y de la Rueda Trasera	$I_{yy_{Rueda_r}}$	[kg · m <sup>2</sup> ]	
	Radio Efectivo de la Llanta	$r_{llanta}$	[m]	
	Coeficiente B de la <i>Magic Formula</i>	$B$	[1]	
	Coeficiente C de la <i>Magic Formula</i>	$C$	[1]	
	Coeficiente D de la <i>Magic Formula</i>	$D$	[1]	
	Coeficiente E de la <i>Magic Formula</i>	$E$	[1]	
Modelo de Vehículo	1 GDL	Masa Total del Vehículo	$m$	[kg]
		<i>Wheelbase</i> (distancia entre ejes)	$wb$	[m]
		Distancia del Centro de Gravedad al Eje Frontal	$x_{CG}$	[m]
		Distancia del Centro de Gravedad al Piso	$z_{CG}$	[m]
	3 GDL	Momento de Inercia del Eje Principal Y del Vehículo	$I_{yy}$	[kg · m <sup>2</sup> ]
		Coeficiente de Rigidez de la Suspensión Frontal	$k_f$	$\frac{N}{m}$

		Coeficiente de Rigidez de la Suspensión Trasera	$k_r$	$\left[\frac{N}{m}\right]$
		Coeficiente de Amortiguación de la Suspensión Frontal	$c_f$	$\left[\frac{kg}{s}\right]$
		Coeficiente de Amortiguación de la Suspensión Trasera	$c_r$	$\left[\frac{kg}{s}\right]$

Tabla 3.1. Parámetros para la simulación.

La mayoría de los parámetros son escalares, pero en algunos casos (como el coeficiente de fricción de la balata y el coeficiente de amortiguación de la suspensión) dependen de alguna otra variable, y pueden ser introducidos como funciones de algún otro valor (el coeficiente de fricción de la balata está en función de la temperatura y el coeficiente de amortiguación en función de la velocidad de la masa no suspendida).

Los parámetros están definidos por la construcción del vehículo, pero los podemos cambiar en nuestra simulación para observar los cambios en el comportamiento (disminuir 20 kg la masa del vehículo total y ver el cambio en el tiempo y distancia de frenado) y así definir objetivos numéricos para el diseño del vehículo en los que el efecto es conocido y medible.

- Condiciones Iniciales

Son las condiciones del sistema al momento de empezar a simular, sin embargo, también las podemos definir como la situación o caso que se busca modelar. Estas condiciones son necesarias para encontrar una solución a las ecuaciones diferenciales, ya sea de forma analítica o numérica. Cambiarlas puede llevar a resultados completamente diferentes en el modelo, por lo que es importante siempre tener en cuenta las condiciones iniciales que se están simulando.

Para nuestro modelo las condiciones iniciales son las siguientes:

Bloque	Condición Inicial		Símbolo	Unidad
Sistema de Frenos	Presión Inicial en Caliper Frontal		$p_{c_{f_0}}$	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
	Presión Inicial en Caliper Trasero		$p_{c_{r_0}}$	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
Rueda y Llanta	Velocidad Angular Inicial de la Rueda Frontal		$\omega_{f_0}$	$\left[\frac{rad}{s}\right]$
	Velocidad Angular Inicial de la Rueda Trasera		$\omega_{r_0}$	$\left[\frac{rad}{s}\right]$
Modelo de Vehículo	1 GDL	Distancia Inicial del Vehículo en Dirección del Eje X	$x_0$	$[m]$
		Velocidad Inicial del Vehículo en Dirección del Eje X	$\dot{x}_0$	$\left[\frac{m}{s}\right]$
	3 GDL	Distancia Inicial del Vehículo en Dirección del Eje Z	$z_0$	$[m]$
		Velocidad Inicial del Vehículo en Dirección del Eje Z	$\dot{z}_0$	$\left[\frac{m}{s}\right]$
		Ángulo Inicial <i>Pitch</i> del Vehículo	$\theta_0$	$[rad]$
	Velocidad Angular <i>Pitch</i> Inicial del Vehículo	$\dot{\theta}_0$	$\left[\frac{rad}{s}\right]$	

Tabla 3.2. Condiciones iniciales para la simulación.

Tenemos mucha libertad para seleccionar las condiciones iniciales, ya que dependen totalmente de la situación que se busque simular. Sin embargo, algunas tienen ciertas relaciones que es importante considerar. Por ejemplo, si la velocidad angular de la rueda es mayor a cero, pero la velocidad inicial del vehículo es cero, entonces lo que se está modelando es un derrape de las llantas. Este tipo de casos pueden

dar resultados inconsecuentes o inusuales. Además, las condiciones iniciales deben tener sentido físicamente, por ejemplo, si se escoge  $z_0 = 4 [m]$  esto significaría que el CG de nuestro vehículo comienza a una distancia de 4 [m] con las llantas aún conectadas al piso, y con unos resortes y amortiguadores lo suficientemente largos, vehículo cuya existencia es dudable. Por esto a pesar de tener libertad para estas condiciones, es necesaria verificar que tengan sentido tanto en sus relaciones como físicamente, ya que los resultados se verán afectados completamente.

- Entradas o *Inputs*

Las entradas o *inputs* son aquellas variables que generan el cambio o perturbación en el comportamiento del sistema. Aunque las condiciones iniciales pueden generar este cambio (cuando las condiciones iniciales están fuera de los puntos de equilibrio del sistema), las entradas son una perturbación más directa que generalmente es controlada y activada por un usuario. En nuestro caso, el piloto es el usuario, y el control es el pedal de freno. La fuerza del piloto en el pedal de freno es la única entrada para nuestro modelo, sin embargo, modelos más complejos pueden tener múltiples entradas, como lo serían el volante del vehículo, el pedal de aceleración, el freno de mano y más.

La fuerza que aplica el piloto al frenar el vehículo cambia según la situación, como cuando frena bruscamente, frena levemente, intenta alcanzar una velocidad específica, o gira en una curva. Para representar esta fuerza en una función, primero debemos elegir el escenario que queremos modelar. Una vez decidido, existen varias formas de obtener esta función. Podemos usar datos de telemetría o experimentales y utilizarlos directamente como entrada. Otra opción es ajustar una curva a estos datos experimentales. También podemos estimar una función con ciertos parámetros que representen características importantes de la fuerza aplicada por el piloto. Para este trabajo se optó por el último método.

Dado que uno de los objetivos clave es diseñar un sistema de frenos, nos centramos en caracterizar, definir y comparar de manera específica el efecto y el comportamiento del sistema en lugar del rendimiento del piloto. Por lo tanto, se modelará un escenario de frenado brusco con el fin de obtener la máxima deceleración posible del sistema. Este escenario puede ser comparado con un evento de la competencia llamado *Brake Test* (que pertenece al *Technical Inspection*).

Del artículo "*Driver's reaction time under emergency braking a car – Research in a driving simulator*" [15] se obtiene la siguiente figura:

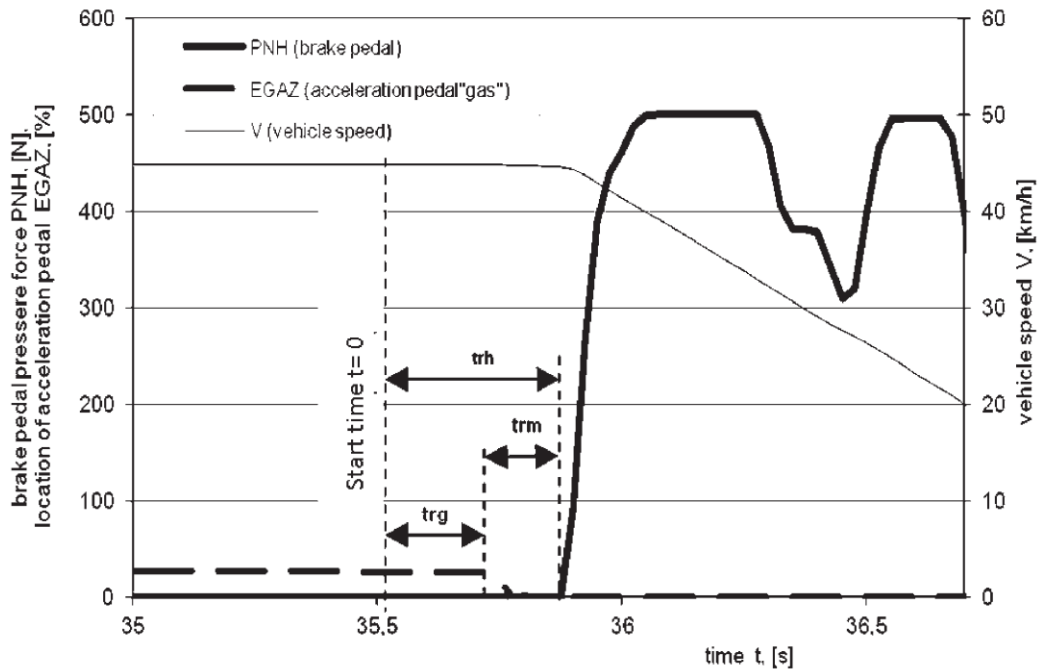


Figura 3.11. Gráfica mostrando tiempos de frenado [15].

De la figura 3.11 se puede aproximar nuestra función a ocupar. Hay ciertos parámetros que, aunque interesantes, no son necesarios para nuestro escenario como los tiempos de reacción del piloto. Datos que resultan útiles son la fuerza máxima del piloto y el tiempo requerido para aplicarla. Con esa información y aproximando la forma de la curva podemos generar una función similar para ocupar en la simulación.

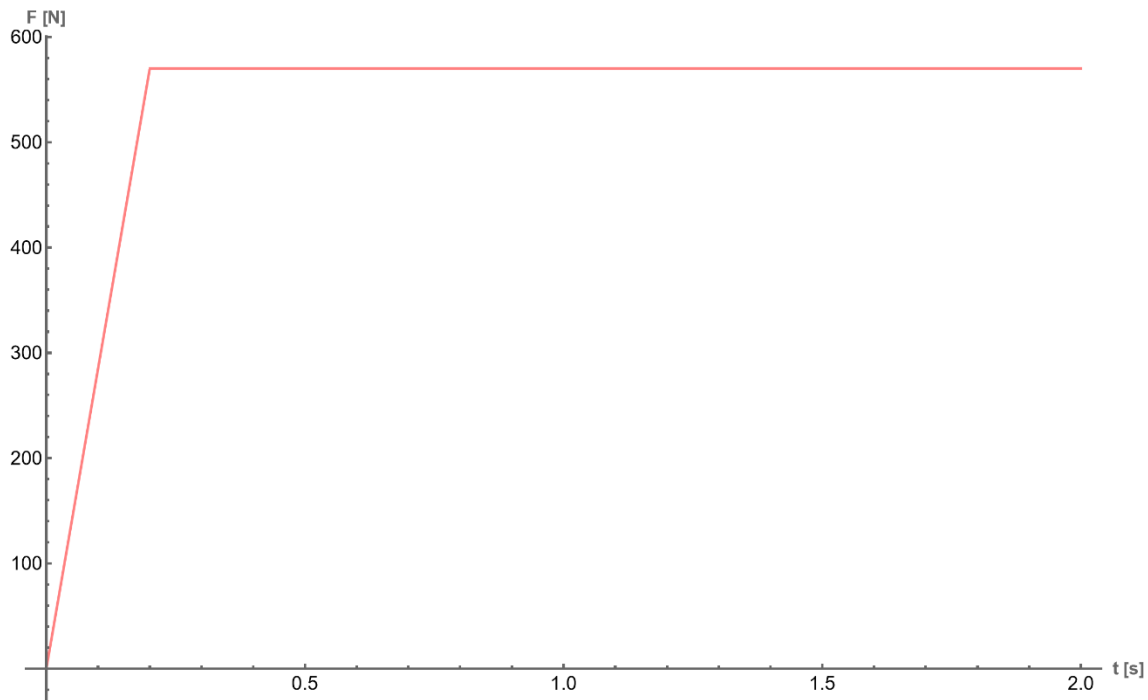


Figura 3.12. Función aproximada que se ocupa como input para el modelo.

Al comparar la Figura 3.11 con la Figura 3.12 se puede notar que la aproximación es una versión muy simplista de la función experimental. Sin embargo, para la evaluación del paquete de frenos, no es necesario una aproximación tan detallada. Los parámetros clave de la función aproximada son los siguientes:

Tipo de Entrada	Entrada o Input	Símbolo	Unidad
Parámetros de Función Aproximada	Fuerza Máxima del Piloto	$F_{Piloto_{MAX}}$	[N]
	Tiempo para Aplicación de Máxima	$t_{FP_{MAX}}$	[s]
Control Adicional	Distribución de Frenado o <i>Brake Bias</i>	$BB$	[1]

Tabla 3.3. Parámetros de entradas al modelo.

Los dos parámetros clave para aproximar la función son la fuerza máxima que el piloto puede aplicar al pedal de freno y el tiempo que lleva alcanzar esta fuerza máxima. Estos parámetros son significativos porque tienen un impacto directo en la evaluación del rendimiento del paquete de frenos; por ejemplo, si el piloto no puede generar la fuerza máxima necesaria para bloquear las ruedas. Además, se incorpora un control adicional: la distribución de frenado, también conocida como *Brake Bias*. Este control es importante en los vehículos de carrera, ya que los pilotos deben ajustarlo manualmente para adaptarse a las diferentes curvas de un circuito, en lugar de ser simplemente un parámetro fijo.

### 3.2.2. Programación de modelo

El modelo se programó y simuló ocupando el software Wolfram Mathematica, pero, como se mencionó antes, no se usó ningún comando o característica especial del software, por lo que se puede replicar en cualquier tipo de lenguaje de programación. El código está constituido por cuatro segmentos principales.

# Brake Model

Data »

Models »

Simulation »

Results »

Figura 3.13. Segmentos del código.

- Datos

En esta parte del código se introducen los valores de los parámetros, condiciones iniciales y entradas (los discutidos en la sección 3.2.1. *Parámetros, entradas y condiciones iniciales*).

```
Data ▾  
  
ClearAll["Global`*"];  
  
Parameters  
  
Vehicle  
  
m = 290 (*total vehicle mass [kg]*);  
w = m*9.81 (*total vehicle weight [N]*);  
tr = 50*0.0254 (*track distance [m]*);  
wb = 66*0.0254 (*wheelbase distance [m]*);  
xcg = 0.8332 (*front tire to cg distance (X direction) [m]*);  
zcg = 0.2015 (*floor to cg distance (Z direction) [m]*);  
  
Brakes  
  
pr = 5 (*pedal ratio [1]*);
```

Figura 3.14. Segmento de Código: Datos.

Los parámetros del vehículo están seccionados de la misma forma que en la Tabla 3.1. Parámetros para la simulación.

- Modelos

En esta parte, los modelos discutidos en la sección 3.1. *Modelos matemáticos ocupados*, son introducidos en el código. Se introdujeron como funciones o subrutinas para optimizar el código y permitir flexibilidad si se quisiera reemplazar la dinámica de algún bloque por otro. Esto permite que sea fácil agregar o modificar bloques para que el modelo tenga más grados de libertad o mayor fidelidad.

## Models

### Brake Model

```
In[*]:= FBrakeModel[pr_, fmba_, rmba_, fcpa_, rcpa_,  $\mu b$ _, fcpn_, rcpn_, brr_, bb_, pf_, fzblp_, rzblp_, fblpc_, rblpc_, dt_] :=  
Module[{fblf, rblf, fblpmc, rblpmc, vfbllpc, vrblpc, fblpcloc, rblpcloc, fdbf, rdbf, fbt, rbt},  
  fblf = pf * pr * bb (*front brake line master cylinder force [N]*);  
  rblf = pf * pr * (1 - bb) (*rear brake line master cylinder force [N]*);  
  fblpmc =  $\frac{fblf}{fmba}$  (*front brake line pressure on master cylinder [Pa]*);  
  rblpmc =  $\frac{rblf}{rmba}$  (*rear brake line pressure on master cylinder [Pa]*);  
  vfbllpc =  $\frac{fblpmc - fblpc}{fzblp}$  (*derivative on front brake line pressure on master cylinder [Pa]*);  
  vrblpc =  $\frac{rblpmc - rblpc}{rzblp}$  (*derivative on rear brake line pressure on master cylinder [Pa]*);  
  fblpcloc = vfbllpc * dt + fblpc (*front brake line pressure on master cylinder [Pa]*);  
  rblpcloc = vrblpc * dt + rblpc (*rear brake line pressure on master cylinder [Pa]*);  
  fdbf =  $\mu b$  * (fblpcloc * fcpa) * fcpn (*front disc brake force for individual wheel [N]*);  
  rdbf =  $\mu b$  * (rblpcloc * rcpa) * rcpn (*rear disc brake force for individual wheel [N]*);  
  fbt = fdbf * brr (*front wheel brake torque for individual wheel [Nm]*);  
  rbt = rdbf * brr (*rear wheel brake torque for individual wheel [Nm]*);  
  {fblpcloc, rblpcloc, fbt, rbt, fblpmc, rblpmc}
```

Figura 3.15. Segmento de Código: Modelos.

- Simulación

En esta sección, se ocupan los modelos programados y los datos introducidos en el código, junto con una solución numérica para la simulación del sistema. Además, se introducen datos y condiciones adicionales que son referentes a la simulación.

## Simulation

### Setup

```
t = 0 (*initial simulation time [s]*);
Δt = 0.0001 (*simulation time step [s]*);
i = 0 (*counter for loop [1]*);
vf = 1 * (1000 / 3600) (*desired final car velocity on x direction [ $\frac{m}{s}$ ]*);
μx = FMagicFormula[mfD, mfC, mfB, mfE, SR]
(*tire coefficient of friction on x direction through magic formula for any slip ratio [1]*);
```

### Run

```
In[*]:= runvars = Reap[
  While[vx > vf,
    t = t + Δt;
    BrakeVariables = FBrakeModel[pr, fmba, rmba, fcpa, rcpa, μb, fcpn, rcpn, brr, bb, pf, fxblp, rxblp, fblpc, rblpc, Δt];
    fblpc = BrakeVariables[[1]];
    rblpc = BrakeVariables[[2]];
    fblpmc = BrakeVariables[[5]];
    rblpmc = BrakeVariables[[6]];
    Sow[fblpc, 1];
```

Figura 3.16. Segmento de Código: Simulación.

Una vez que se obtienen resultados numéricos, se hace el post procesamiento de esta información para obtener una visualización gráfica de la información. La programación de este segmento y el método numérico de solución son vistos a más detalle en la sección 3.2.3 [Simulación y post procesamiento](#).

- Resultados

En esta sección se muestran los resultados obtenidos en la simulación de forma gráfica para su visualización, análisis y documentación.

## Results

### Graphs

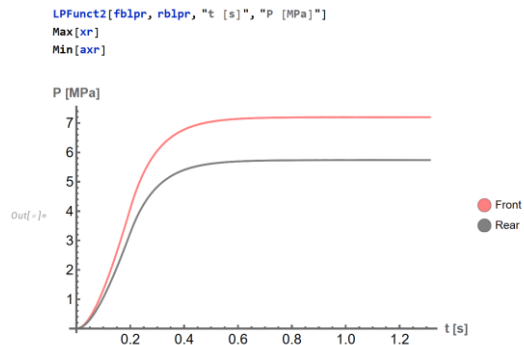


Figura 3.17. Segmento de Código: Resultados.

### 3.2.3. Simulación y post procesamiento

Para programar la simulación, el primer paso es elegir un método numérico para resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias. Existen varios métodos numéricos disponibles, como el método de Euler y los métodos de Runge-Kutta. El método de Euler es uno de los más simples, pero para lograr precisión, requiere realizar un gran número de iteraciones de cálculos. Por otro lado, los métodos de Runge-Kutta son más eficientes, aunque con una mayor complejidad. Para los objetivos de este proyecto en particular, se optó por utilizar el método de Euler. Se realizó de esta forma para simplificar la implementación y para que resultara más claro cómo se utiliza el método numérico en el modelado.

La programación de la simulación consiste en tres segmentos:

- Configuración o *Setup*

### Setup

```
t = 0 (*initial simulation time [s]*);
Δt = 0.0001 (*simulation time step [s]*);
i = 0 (*counter for loop [1]*);
vf = 0 + (1000 / 3600) (*desired final car velocity on x direction [m/s]*);
```

Figura 3.18. Segmento de código: *Setup*.

En esta sección se establecen las variables que configuran la simulación y cómo se ejecutara. Al ocupar el método de Euler, los parámetros clave son los siguientes:

$t$ : Tiempo inicial de la simulación (usualmente es igual a cero) [s].

$\Delta t$ : Tamaño del incremento del tiempo que se ocupa en la simulación [s]. Ya que se ocupa el método de Euler, entre menor sea este incremento, más exactos serán los resultados. Por naturaleza, el frenado de un vehículo solo dura un par de segundos, por esta razón, los tiempos de simulación no son muy

largos y se puede ocupar un incremento muy pequeño (un incremento de  $\sim 0.001$  segundos es suficiente para obtener una buena exactitud).

$i$ : Contador de iteraciones de la simulación [1]. Este parámetro es importante para contabilizar el número de iteraciones que se hace en cada simulación. Se puede añadir directamente en el ciclo o bucle en el que se hace la simulación, o se puede calcular mediante el tiempo final y el tamaño del incremento.

$v_{x_f}$ : Velocidad final deseada  $\left[\frac{m}{s}\right]$ . Este parámetro se ocupa como condición para terminar el bucle de la simulación. El bucle o ciclo se detendrá cuando se alcance esta velocidad final. Esta dependerá del caso que se busque modelar, sin embargo, para el modelado del frenado de un vehículo es más práctico ocupar esta variable como condición final, ya que una variable independiente (como un tiempo final  $t_f$ ) no estaría relacionado directamente con el fenómeno que se modela.

- Ejecución o *Run*

## Run

```

t= runvars = Reap[
  While[vx > vf,
    t = t + dt;
    BrakeVariables = FBrakeModel[pr, fmba, rmba, fcpa, rcpa, μb, fcpn, rcpn, brr, bb, pf, ftblp, rtblp, fblpc, rblpc, dt];
    fblpc = BrakeVariables[[1]];
    rblpc = BrakeVariables[[2]];
    fblpmc = BrakeVariables[[5]];
    rblpmc = BrakeVariables[[6]];
    Sow[fblpc, 1];
    Sow[rblpc, 2];
    fbt = -BrakeVariables[[3]];
    Sow[fbt, 3];
    rbt = -BrakeVariables[[4]];
    Sow[rbt, 4];
    fα = FMomentEquilibrium[fwIxx, fFx, ter, fbt];
    Sow[fα, 5];
    rα = FMomentEquilibrium[rwIxx, rFx, ter, rbt];
    Sow[rα, 6];
    fω = fα * dt + fω;
    Sow[fω, 7];
    rω = rα * dt + rω;
    Sow[rω, 8];
    fSR = If[ $\frac{ter * f\omega - vx}{vx} \leq -1, -1, \frac{ter * f\omega - vx}{vx}$ ];
    Sow[fSR, 9];
    rSR = If[ $\frac{ter * r\omega - vx}{vx} \leq -1, -1, \frac{ter * r\omega - vx}{vx}$ ];
    Sow[rSR, 10];
    fμx = -μx /. SR → fSR;
    Sow[fμx, 11];
  ]

```

Figura 3.19. Sección de Código: Ejecución o *Run*

En esta sección se ejecuta la simulación completa. Se utilizan los modelos y variables declarados en las partes anteriores para obtener valores numéricos e integrar numéricamente con el método de Euler.

Para esto se declara un ciclo o bucle *While* (se pueden ocupar otros bucles como *For* o *Do*), para el que la condición es  $v_x > v_{x_f}$ . Cada iteración se analiza un nuevo incremento de tiempo, por lo que se

comienza la iteración con  $t = \Delta t + t$ . Después se utilizan las funciones de los modelos (utilizando los valores de la sección de Datos) para obtener las salidas de cada bloque. Finalmente se integra numéricamente las variables derivadas usando el método de Euler. Las variables que tienen que ser integradas numéricamente son las siguientes:

Bloque		Nombre	Símbolo
Línea de Frenos		Razón de cambio en la presión en el caliper $[\frac{Pa}{s}]$	$\dot{P}_C$
Dinámica de la Rueda		Aceleración angular de la rueda $[\frac{rad}{s^2}]$	$\dot{\omega}_{rueda}$
Modelo del Vehículo	1 GDL	Aceleración longitudinal (dirección del eje X) del vehículo $[\frac{m}{s^2}]$	$\ddot{x}$
		Velocidad longitudinal (dirección del eje X) del vehículo $[\frac{m}{s}]$	$\dot{x}$
	3 GDL	Aceleración vertical (dirección del eje Z) del vehículo $[\frac{m}{s^2}]$	$\ddot{z}$
		Velocidad vertical (dirección del eje Z) del vehículo $[\frac{m}{s}]$	$\dot{z}$
		Aceleración angular (pitch acceleration) del vehículo $[\frac{rad}{s^2}]$	$\ddot{\theta}$
		Velocidad angular (pitch rate) del vehículo $[\frac{rad}{s}]$	$\dot{\theta}$

Tabla 3.4. Variables integradas numéricamente.

Y, como ejemplo, la integración numérica de la aceleración longitudinal sería:

$$\dot{x}_t = \ddot{x}_t \cdot \Delta t + \dot{x}_{t-\Delta t}$$

Todos estos cálculos se repiten cada iteración del ciclo hasta que el vehículo frene a la velocidad deseada.

El código completo se encuentra en el Anexo. En la Figura 3.19 se pueden observar comandos y variables (como *Reap*, *Sow*, *runvars*) que no están siendo explicados aquí. Esto se debe a que estos comandos y variables no son de relevancia ni tienen relación alguna con el modelo, la simulación o la integración numérica simplemente se ocupan para la recopilación de los datos de la simulación debido a las particularidades del software.

### 3.3. Simulación usando Simulink

Para validar los modelos y las simulaciones, se reconstruyen ocupando un software especializado en simulación llamado Simulink. Este software, además de simular directamente las ecuaciones, también cuenta con bloques de modelos ya preconstruidos para diversas áreas, incluida la Dinámica Vehicular. Por estas razones una comparación directa entre los resultados es un buen indicador de su validez. Esta comparación no busca reemplazar la validación experimental, ni es útil como confirmación de que los resultados del modelo y los experimentales serán iguales. Simplemente es útil como confirmación de que los modelos desarrollados son física y matemáticamente correctos, que el código funciona de manera adecuada, y que los parámetros del método numérico dan resultados con suficiente exactitud.

Simulink, que es una extensión de MATLAB, es un entorno de programación visual basado en diagramas de bloques especializado en simulación. Es útil para simular de forma más directa sistemas complejos de todo

tipo. Como ya se mencionó, existen bloques predeterminados, o se pueden programar los modelos/ecuaciones en el software. El objetivo de este trabajo no es el uso de Simulink ni la simulación de sistemas con el uso de Simulink, por lo que esta sección describirá brevemente el modelo ocupado para validar los resultados sin mucho detalle en el funcionamiento del software, ni las particularidades del software.

En la Figura 3.20 se muestra el modelo que se construyó. Consta de tres subsistemas (Fuerza en el Pedal de Freno, Sistema de Frenos y Rueda y Llanta) y un bloque “preconstruido” que pertenece al conjunto de bloques de Dinámica Vehicular que representa el modelo longitudinal de 1GDL. Comparando la Figura 3.20 y la Figura 3.1, es fácil notar que son muy similares. Existen los mismos bloques y la mayoría de las entradas y salidas son similares. Ambos modelos son muy similares, sin embargo, existen algunas diferencias debido a la estructura y funcionamiento de los bloques “preconstruidos”.

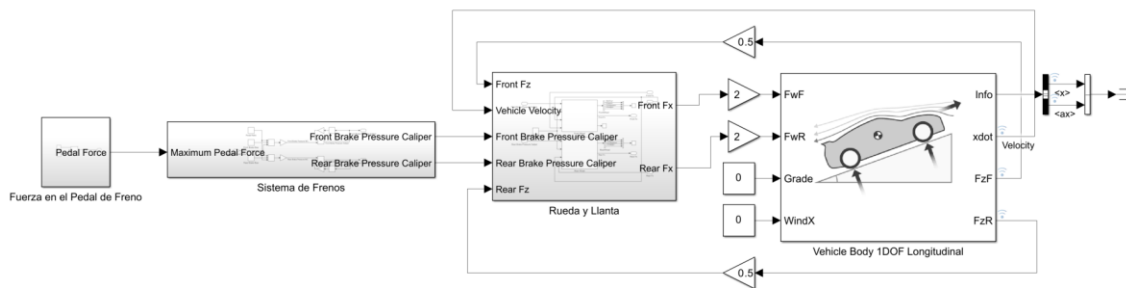


Figura 3.20. Modelo general de Simulink.

El primer subsistema del modelo es *Fuerza en el Pedal de Freno*. En este subsistema se crea la función de entrada al modelo. Se genera mediante el uso de una función rampa, una función escalón, y un switch o interruptor que cambia entre el uso de ambos en un tiempo definido  $t_{FP\_MAX}$ . La función que se construye en este subsistema es exactamente la misma que se muestra en la Figura 3.12.

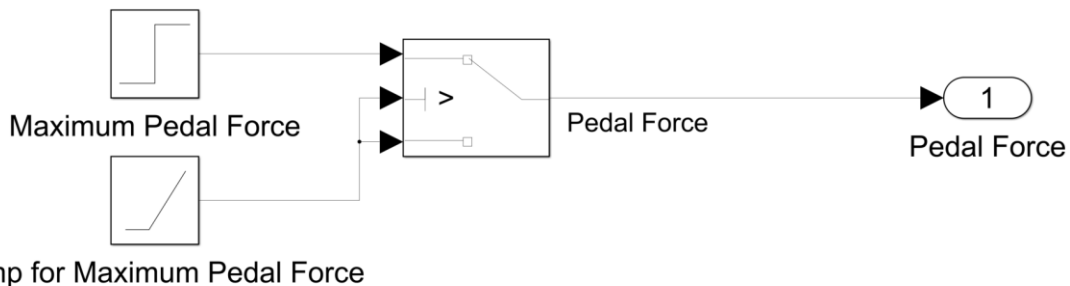


Figura 3.21. Subsistema *Fuerza en el Pedal de Freno* en Simulink.

El siguiente subsistema es *Sistema de Frenos*. Este subsistema sigue la misma dinámica que se discutió en la sección 3.1.1 **Modelado de sistema de frenos**. Sin embargo, en la Figura 3.22, podemos observar que las salidas del subsistema son la presión frontal y trasera en los calipers, en lugar de los torques de frenado.

Esto se debe a que para el modelado de las llantas se ocupa un bloque del conjunto de Dinámica Vehicular, que también incluye la opción de modelar una parte del sistema de frenos (el caliper y disco) para obtener directamente el torque de frenado y su efecto en la dinámica de la llanta. La entrada para ese bloque es la presión de freno en el caliper, por lo que es lo último que se necesita calcular para el sistema de frenos.

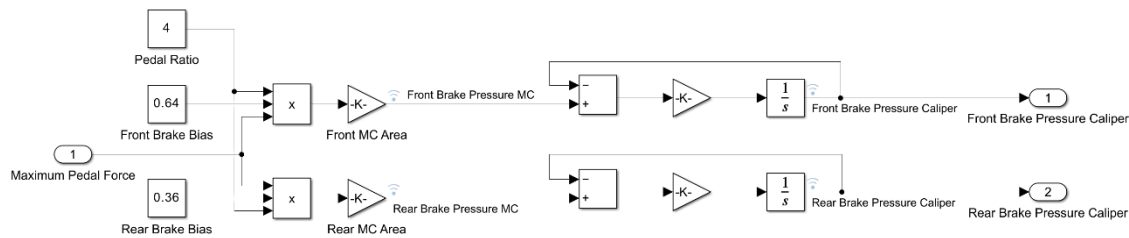


Figura 3.22. Subsistema *Sistema de Frenos* en Simulink.

En este subsistema se ocupa un bloque representado como  $\frac{1}{s}$ , que corresponde a la integración numérica de una señal. Esto se hace para resolver la ecuación diferencial. Se puede observar cómo al ser un software especializado para simulación, resolver ecuaciones diferenciales ordinarias es trivial.

Para el subsistema de *Rueda y Llanta* se ocupa otro bloque del conjunto de Dinámica Vehicular que modela una rueda longitudinal con disco de freno. Las entradas de este bloque son:

- Presión de frenado en el *caliper*
- Torque en el eje (torque de aceleración)
- Velocidad Longitudinal (en la dirección del eje x)
- Fuerza normal en la llanta

Se puede observar que las entradas son muy similares a las de la Figura 3.1, con la diferencia de que el bloque requiere como entrada la presión de frenado en lugar del torque de frenado, y la adición de la entrada del torque de aceleración, que nosotros solo proponemos como posibilidad en la Figura 3.2. Debido

a que solo nos importa modelar un frenado, el torque de aceleración se define como una constante que es igual a cero.

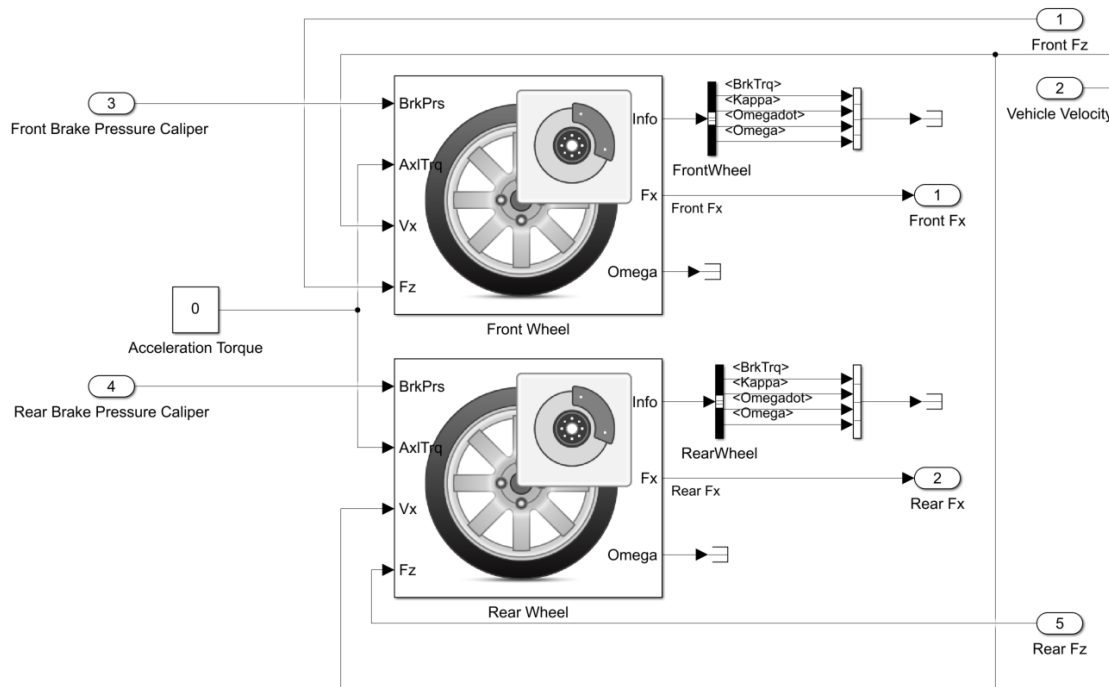


Figura 3.23. Subsistema *Rueda y Llanta* en Simulink.

Finalmente, el bloque que corresponde al modelo del vehículo (*Vehicle Body 1DOF Longitudinal*) también pertenece al conjunto de bloques de Dinámica Vehicular. Este representa el modelo obtenido en la sección 3.1.3.1 **Modelo Longitudinal de 1 GDL**. Las entradas del bloque son:

- Fuerza Longitudinal en el Eje Frontal
- Fuerza Longitudinal en el Eje Trasero
- Ángulo de Inclinación de Camino
- Velocidad Longitudinal del Viento

Las dos primeras entradas corresponden a lo propuesto en el modelo de la Figura 3.1, sin embargo, este bloque añade dos entradas adicionales. El ángulo de inclinación permite modelar caminos con pendientes (que afectan la dinámica del vehículo), mientras que la velocidad longitudinal del viento modela la fuerza de arrastre que se genera debido a la aerodinámica del vehículo. Se puede notar que, para nuestro caso, ambas entradas se establecen como constantes con un valor de cero. Esto se debe a que el ángulo de inclinación del camino no se considera relevante, dado que todas las competencias tienen lugar en caminos planos. La fuerza de arrastre, al igual que la fuerza de downforce, no fueron considerados para esta primera iteración del modelo dinámico, sin embargo, son aspectos importantes para hacer que el modelo sea más preciso y fiable. Estas fuerzas son un caso de lo que se debe trabajar a futuro en el modelo.

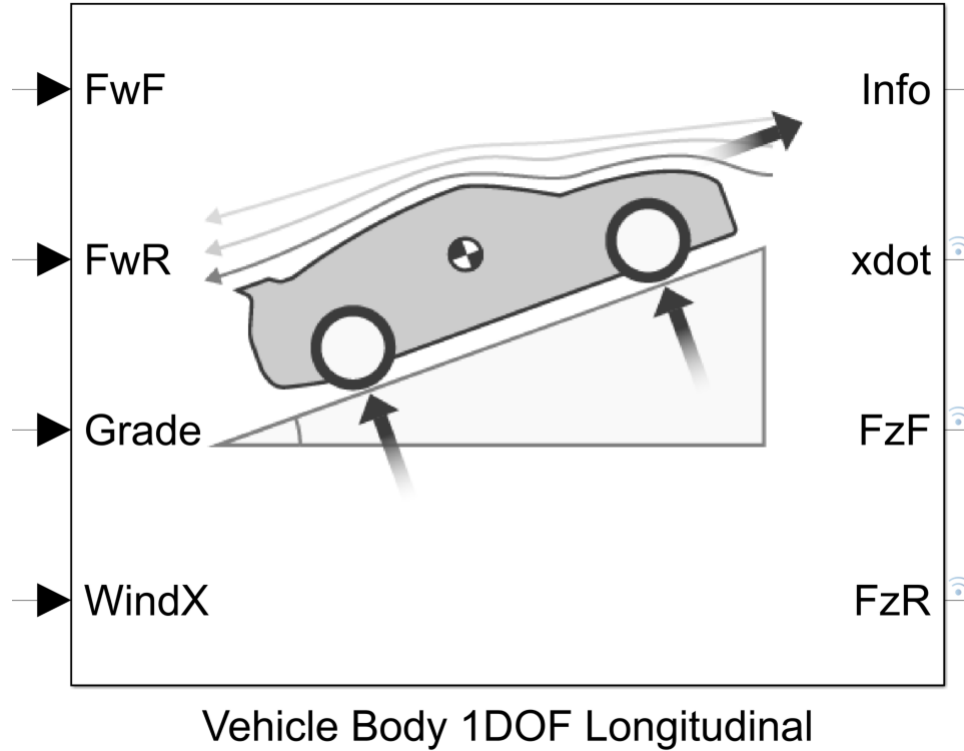


Figura 3.24. Modelo de Vehículo Longitudinal de 1GDL en Simulink.

El sistema presentado representa al modelo de 1 GDL de la sección 3.1.3.1, sin embargo, es fácil modificar el sistema para el modelo de 3 GDL de la sección 3.1.3.2, como se observa en la Figura 3.25.

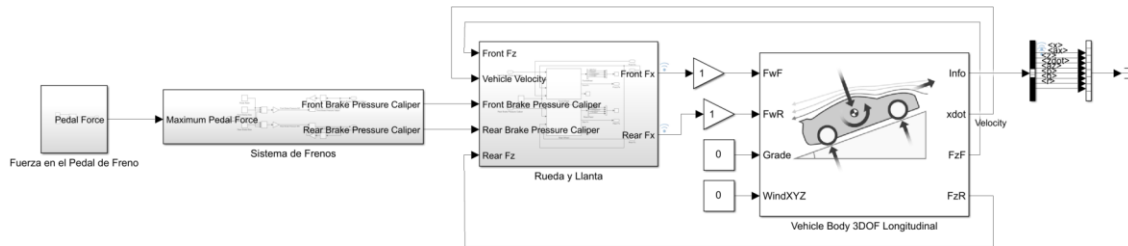


Figura 3.25. Modelo general de Simulink con vehículo longitudinal de 3 GDL.

El único cambio es en el modelo del vehículo, donde se puede observar que ahora es de 3 GDL. Las entradas y salidas son las mismas por lo que es muy fácil reemplazar el bloque del modelo del vehículo por el otro.

Es fácil ver la practicidad del software Simulink como herramienta de simulación de sistemas complejos, sin embargo, también es importante notar que tanto el modelado del vehículo como el del neumático (al usarse los bloques “preconstruidos” del conjunto de Dinámica Vehicular) son cajas negras. En otras palabras, se les proporciona una entrada y se obtiene una salida sin necesidad de conocer las ecuaciones subyacentes ni las aproximaciones utilizadas. Esto puede dar a lugar a una falta de entendimiento de la dinámica del vehículo y de los resultados obtenidos, que finalmente resultará en un diseño deficiente. Adicionalmente,

para cualquier modelo de caja negra, si se le introduce entradas o datos incorrectos, los resultados serán igual de inexactos. Por estas razones, en este trabajo se derivó cada modelo y se describió cada bloque presentado de manera que fuera instructivo y que se comprenda el impacto de cada variable y parámetro en el comportamiento del vehículo.

## 4. Resultados de la Simulación

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones de los modelos presentados anteriormente.

Primero, en la sección 4.1 Parámetros, se presentan y describen los valores de los parámetros, entradas y condiciones iniciales ocupados, y el porqué de estos.

Después, en la sección 4.2 Resultados, se presentan diversos resultados correspondientes al sistema actual, el análisis y comparación de diferentes sistemas de frenos propuestos, y finalmente los resultados del sistema de frenado propuesto.

En la última sección, 4.3 Comparación de resultados entre simulaciones, se comparan directamente los diferentes modelos de vehículo (1 GDL y 3 GDL), el modelo programado y el modelo de Simulink, y finalmente se comparan los resultados entre diferentes parámetros de la simulación para determinar el error numérico y el efecto que tiene en los resultados de la simulación.

### 4.1. Parámetros Ocupados

Los valores de los parámetros y condiciones iniciales se presentan en la siguiente tabla:

Variable	Símbolo	Valor	Unidad
<b>Condiciones Iniciales</b>			
Presión Inicial en Caliper Frontal	$p_{c_{fo}}$	0	$\frac{N}{m^2}$
Presión Inicial en Caliper Trasero	$p_{c_{ro}}$	0	$\frac{N}{m^2}$
Velocidad Angular Inicial de la Rueda Frontal	$\omega_{fo}$	77.845	$\frac{rad}{s}$
Velocidad Angular Inicial de la Rueda Trasera	$\omega_{ro}$	77.845	$\frac{rad}{s}$
Distancia Inicial del Vehículo en Dirección del Eje X	$x_o$	0	[m]
Velocidad Inicial del Vehículo en Dirección del Eje X	$\dot{x}_o$	16.667	$\frac{m}{s}$
Distancia Inicial del Vehículo en Dirección del Eje Z	$z_o$	0.31194	[m]
Velocidad Inicial del Vehículo en Dirección del Eje Z	$\dot{z}_o$	0	$\frac{m}{s}$
Ángulo Inicial <i>Pitch</i> del Vehículo	$\theta_o$	0	[rad]
Velocidad Angular <i>Pitch Rate</i> Inicial del Vehículo	$\dot{\theta}_o$	0	$\frac{rad}{s}$
<b>Entradas o Inputs</b>			
Fuerza Máxima del Piloto	$F_{PilotoMAX}$	400	[N]
Tiempo para Aplicación de Máxima	$t_{FP\_MAX}$	0.2	[s]
Distribución de Frenado o <i>Brake Bias</i>	$BB$	0.64	[1]
<b>Parámetros (Prototipo de Combustión UM-10)</b>			
Sistema de Frenos			
Pedal Ratio	$PR$	4	[1]
Diámetro de Pistón de Master Cylinder Frontal	$d_{MC_f}$	0.014	[m]
Diámetro de Pistón de Master Cylinder Trasero	$d_{MC_r}$	0.014	[m]

Diámetro de Pistón de Caliper Frontal	$d_{C_f}$	0.0254	[m]
Diámetro de Pistón de Caliper Trasero	$d_{C_r}$	0.0254	[m]
Número de Pistones de Caliper Frontal	$\#_{Pistones_f}$	4	[1]
Número de Pistones del Caliper Trasero	$\#_{Pistones_r}$	2	[1]
Coefficiente de Fricción de la Balata	$\mu_B$	0.4	[1]
Radio Efectivo del Disco de Freno	$r_{disco}$	0.08	[1]
<b>Rueda y Llanta</b>			
Momento de Inercia del Eje Principal Y de la Rueda Frontal	$I_{yy_{Rueda_f}}$	0.25	[kg · m <sup>2</sup> ]
Momento de Inercia del Eje Principal Y de la Rueda Trasera	$I_{yy_{Rueda_r}}$	0.34	[kg · m <sup>2</sup> ]
Radio Efectivo de la Llanta	$r_{llanta}$	0.2141	[m]
Coefficiente B de la <i>Magic Formula</i>	$B$	15	[1]
Coefficiente C de la <i>Magic Formula</i>	$C$	1.5	[1]
Coefficiente D de la <i>Magic Formula</i>	$D$	1.6	[1]
Coefficiente E de la <i>Magic Formula</i>	$E$	0.5	[1]
<b>Modelo de Vehículo</b>			
Masa Total del Vehículo	$m$	310	[kg]
<i>Wheelbase</i> (distancia entre ejes)	$wb$	1.6256	[m]
Distancia del Centro de Gravedad al Eje Frontal	$x_{CG}$	0.8128	[m]
Distancia del Centro de Gravedad al Piso	$z_{CG}$	0.31194	[m]
Momento de Inercia del Eje Principal Y del Vehículo	$I_{yy}$	77.34	[kg · m <sup>2</sup> ]
Coefficiente de Rigidez de la Suspensión Frontal	$k_f$	43781.7	$\frac{N}{m}$
Coefficiente de Rigidez de la Suspensión Trasera	$k_r$	43781.7	$\frac{N}{m}$
Coefficiente de Amortiguación de la Suspensión Frontal	$c_f$	5000	$\frac{kg}{s}$
Coefficiente de Amortiguación de la Suspensión Trasera	$c_r$	5000	$\frac{kg}{s}$

Tabla 4.1. Valores de los parámetros (prototipo de combustión UM-10), entradas y condiciones iniciales ocupados en las simulaciones.

Dado que uno de los objetivos principales es diseñar un sistema de frenos y caracterizar su rendimiento para poder compararlo con otros sistemas, hemos modelado un escenario de frenado brusco en línea recta. En este escenario, el vehículo parte de una velocidad inicial,  $x_o$ , y se detiene completamente, buscando determinar la máxima deceleración del sistema.

Las condiciones iniciales presentadas corresponden a un vehículo que está en *free rolling* o rodando libremente. Esto quiere decir que no existe una fuerza de aceleración en los neumáticos en el momento en el que comienza el frenado. Esto lo podemos notar con la velocidad angular inicial de las ruedas:

$$\omega_f/r_o = \frac{v_{x_o}}{r_{llanta}}$$

Cuyo valor podemos sustituir para calcular el  $SR$ , obtendríamos lo siguiente:

$$SR = \frac{r_{llanta} \cdot \omega_f / r_o - v_{x_o}}{v_{x_o}} = \frac{r_{llanta} \cdot \frac{v_{x_o}}{r_{llanta}} - v_{x_o}}{v_{x_o}} = 0$$

Y al ser el  $SR$  cero, sabemos que no hay ninguna fuerza longitudinal en los neumáticos y por lo tanto no hay ninguna fuerza de aceleración (en el modelo no se consideran las fuerzas de resistencia a la rodadura).

Para determinar la fuerza de frenado se ocupa el modelo de forma iterativa. La fuerza de frenado que garantiza la máxima deceleración corresponde a la fuerza máxima que no bloquee los neumáticos de ningún eje. Para garantizar esto, también se tiene que modificar el *Brake Bias* de los ejes.

El ángulo inicial de *pitch*  $\theta_o$  es diferente a cero y esto es por diseño del vehículo. La distancia inicial  $z_o$  corresponde a la distancia del piso al centro de gravedad del vehículo ( $z_{CG}$ ). En realidad, estas condiciones iniciales son los puntos de equilibrio del sistema. Se pueden calcular conociendo algunos parámetros del vehículo (wheelbase, posición del centro de gravedad en el plano XZ, coeficientes de los resortes delanteros y traseros). Para determinar los puntos de equilibrio ocupamos las ecuaciones de movimiento de la sección 3.1.3.2, y consideramos que no existe velocidad ni aceleración para ninguna de nuestras variables, como se muestra a continuación.

Los parámetros presentados en la Tabla 3.1 corresponden al prototipo de combustión interna UM-10. Mas adelante se presentan los datos del prototipo eléctrico UM-E4 y de diferentes paquetes de frenos que son comparados para determinar el nuevo paquete de este prototipo.

## 4.2. Resultados Obtenidos

Los resultados obtenidos de las simulaciones son las señales de las variables de salida. Estas señales, que son el comportamiento de la variable para las condiciones iniciales y parámetros establecidos. Estas son utilizadas para obtener valores significativos, generar gráficas, figuras, animaciones, etc., y es lo que se presentará a continuación en esta sección.

Primero, en la sección 4.2.1, se muestran los resultados del sistema de frenos actual del vehículo de combustión interna (IC). En la sección 4.2.2 se comparan estos resultados con los de diferentes sistemas de frenos propuestos para poder usar la simulación como herramienta de diseño.

### 4.2.1. Resultados y comportamiento del sistema actual

El sistema de frenos actual corresponde al prototipo UM-10 (prototipo de combustión interna), cuyos parámetros son presentados en la Tabla 4.1. Los resultados obtenidos de este sistema de frenos se presentan a continuación.

Los datos representativos del sistema de frenos son los siguientes:

Dato	Valor	Unidad
Tiempo de Frenado	1.2817	[s]
Distancia de Frenado	12.3115	[m]
Máxima Deceleración	1.5807	[g]
Máxima Transferencia de Carga al Eje Frontal	80.3339 %	[1]

Mínima Transferencia de Carja al Eje Trasero	19.6661 %	[1]
Máximo Torque de Frenado del Eje Frontal	431.437	[N m]
Máximo Torque de Frenado del Eje Trasero	121.342	[N m]
Mínimo SR del Eje Frontal	-12.2536 %	[1]
Mínimo SR del Eje Trasero	-9.5769 %	[1]
Máxima Presión en Línea de Frenos Frontal	6.65197	[MPa]
Máxima Presión en Línea de Frenos Trasera	3.74173	[MPa]

Tabla 4.2. Datos representativos del sistema de frenos del UM-10.

De la simulación podemos determinar que la deceleración máxima del sistema es de aproximadamente 1.58 g, frenando de 16.667  $\frac{m}{s}$  a un alto total, con un tiempo de 1.265 [s]. Hay una transferencia de carga de un 80.33 % al eje frontal, dejando al eje trasero con solo el 19.66 % del peso total del vehículo.

Los torques de frenado máximo son indicadores del desempeño del sistema de frenos, y de igual manera son cruciales para el diseño de componentes de la masa no suspendida.

El Slip Ratio es un dato importante para determinar el aprovechamiento del agarre de los neumáticos. El Slip Ratio óptimo de estos neumáticos es de alrededor del 12 %, por lo que podemos notar que el eje delantero está aprovechando este agarre. El eje trasero, cuyo SR es de 9.57 %, esta un poco fuera de rango. Esto se debe a la transferencia de carga del vehículo.

Las presiones en las líneas de frenos son también muy importantes, debido a que ciertos componentes del sistema de frenos, como lo son los *calipers*, *master cylinders* y la misma línea tienen presiones de operación máximas. Si estas presiones son excedidas, el componente podría fallar, poniendo en riesgo la seguridad del piloto.

Además de los datos representativos, podemos obtener gráficas para las diferentes señales o variables del sistema, como se muestran a continuación:

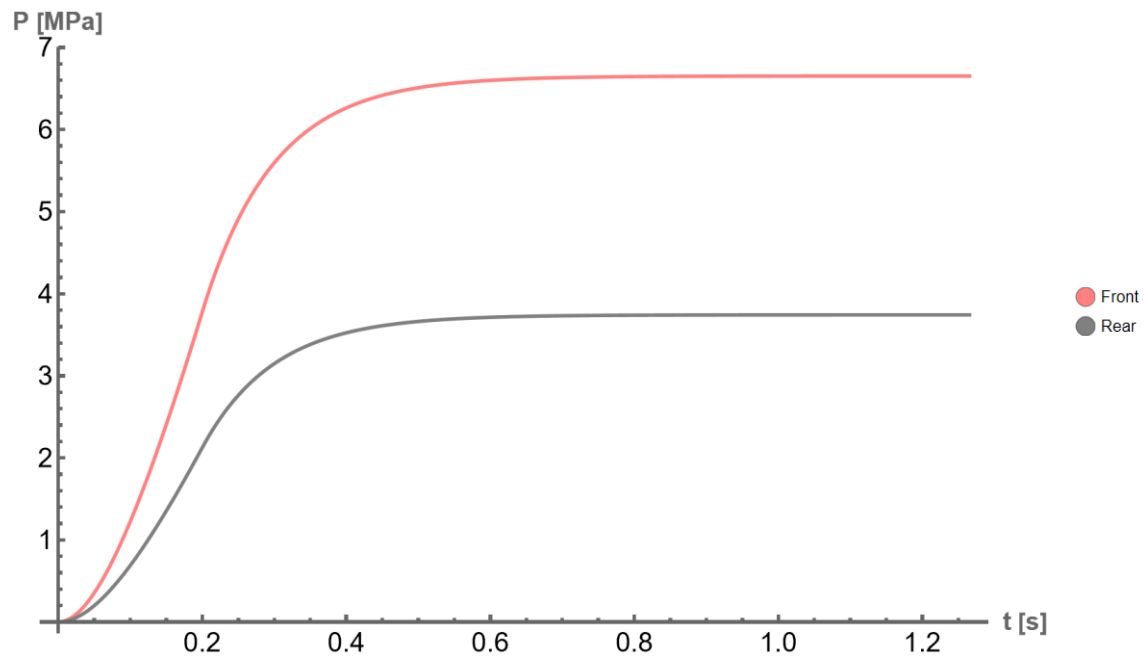


Figura 4.1. Gráfica de Presión en *Caliper* vs Tiempo.

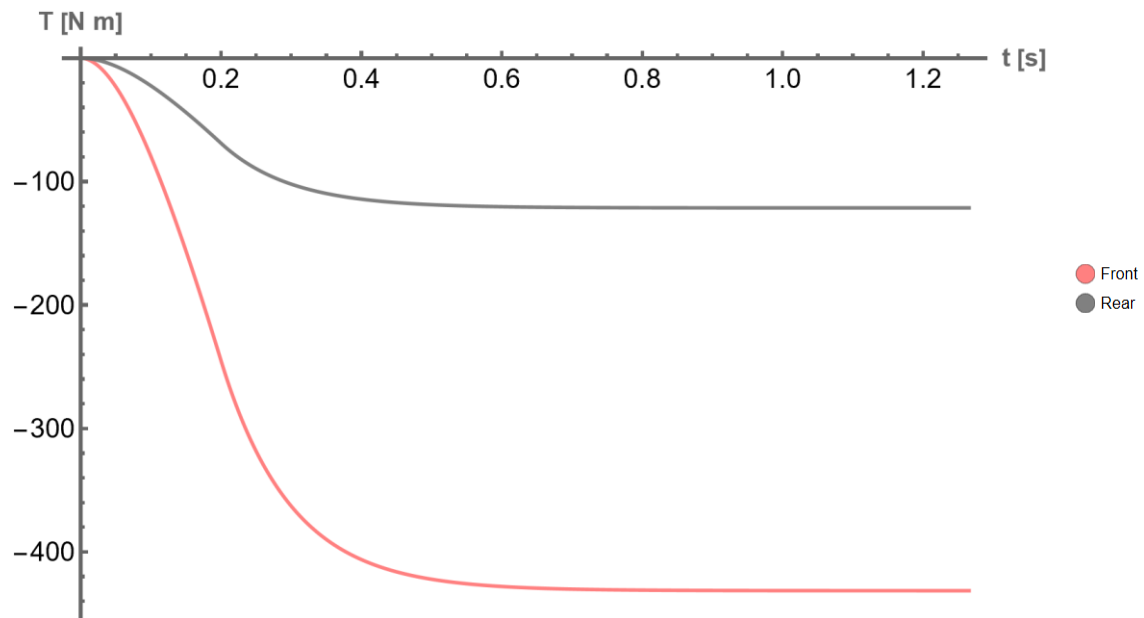


Figura 4.2. Gráfica de par de Frenado vs Tiempo.

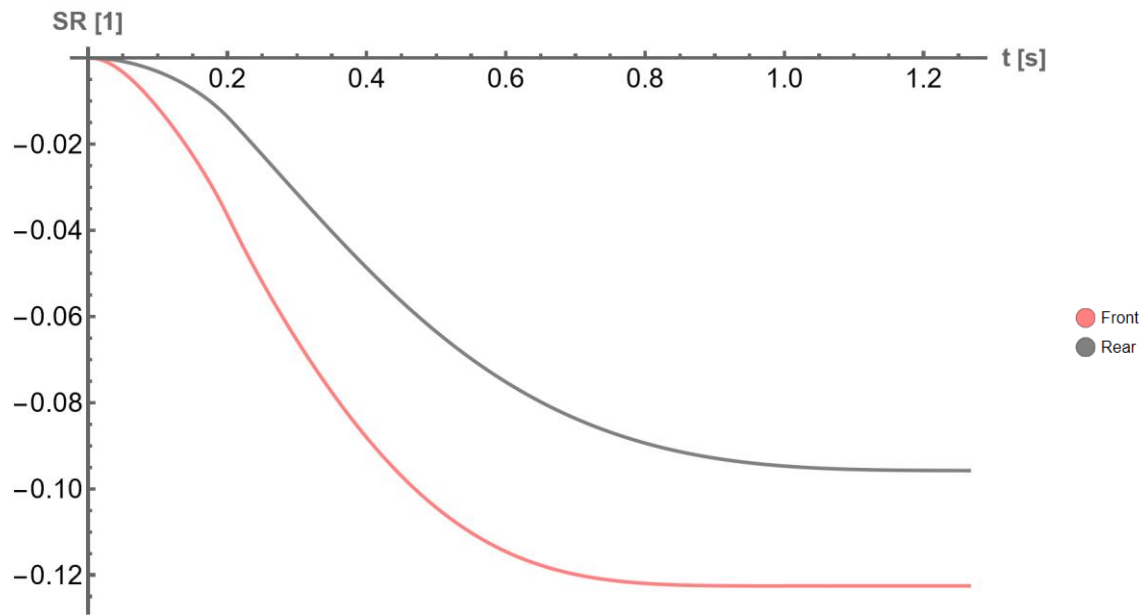


Figura 4.3. Gráfica de *Slip Ratio* vs Tiempo.

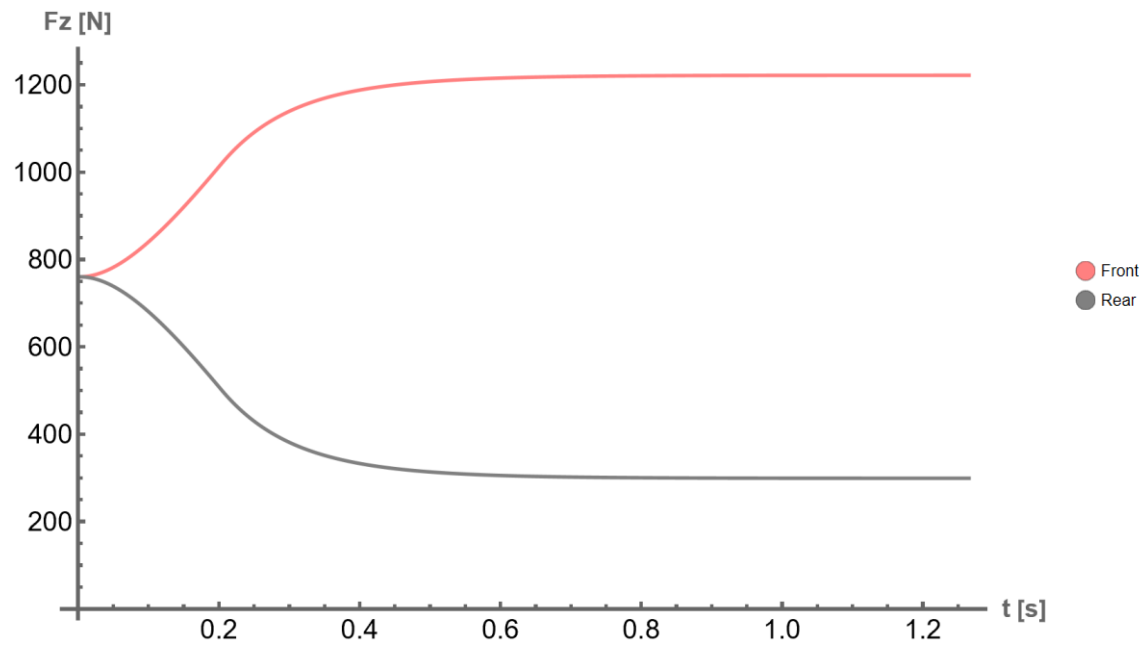


Figura 4.4. Gráfica de Carga Normal vs Tiempo.

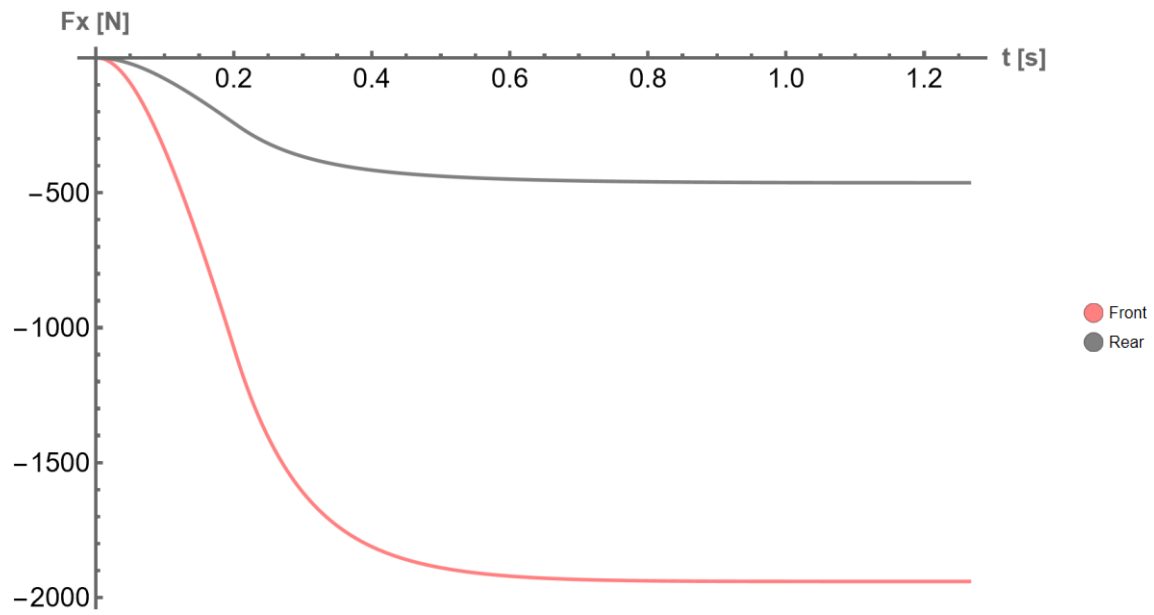


Figura 4.5. Gráfica de Fuerza Longitudinal vs Tiempo.

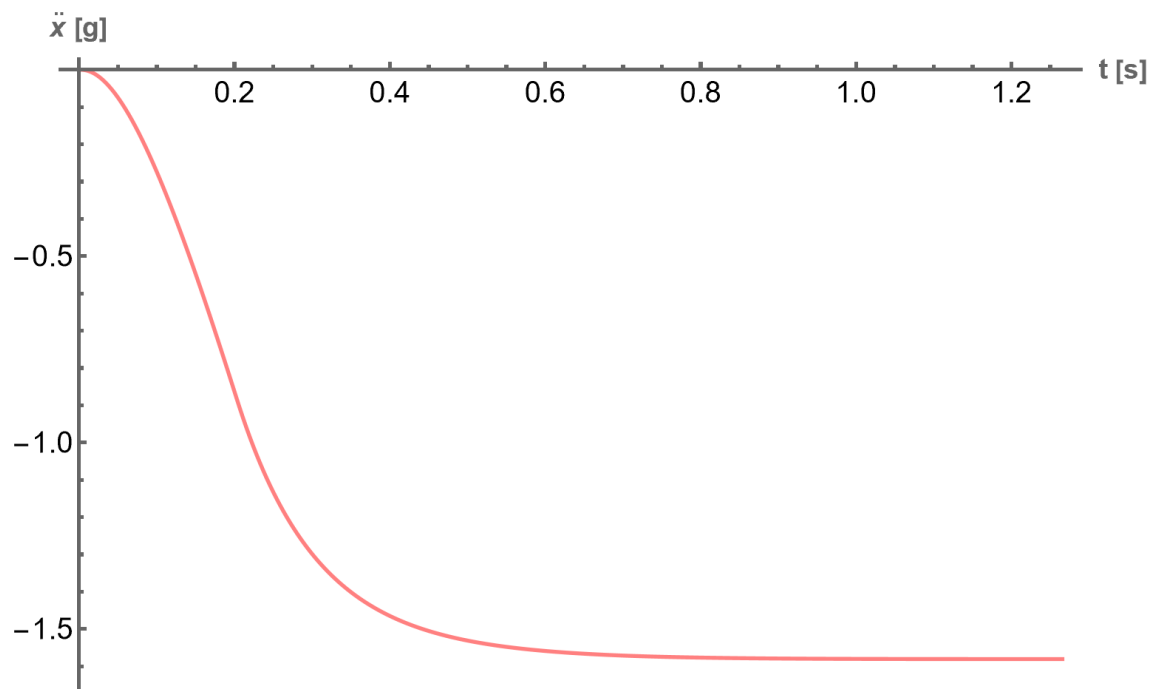


Figura 4.6. Gráfica de Deceleración Longitudinal vs Tiempo.

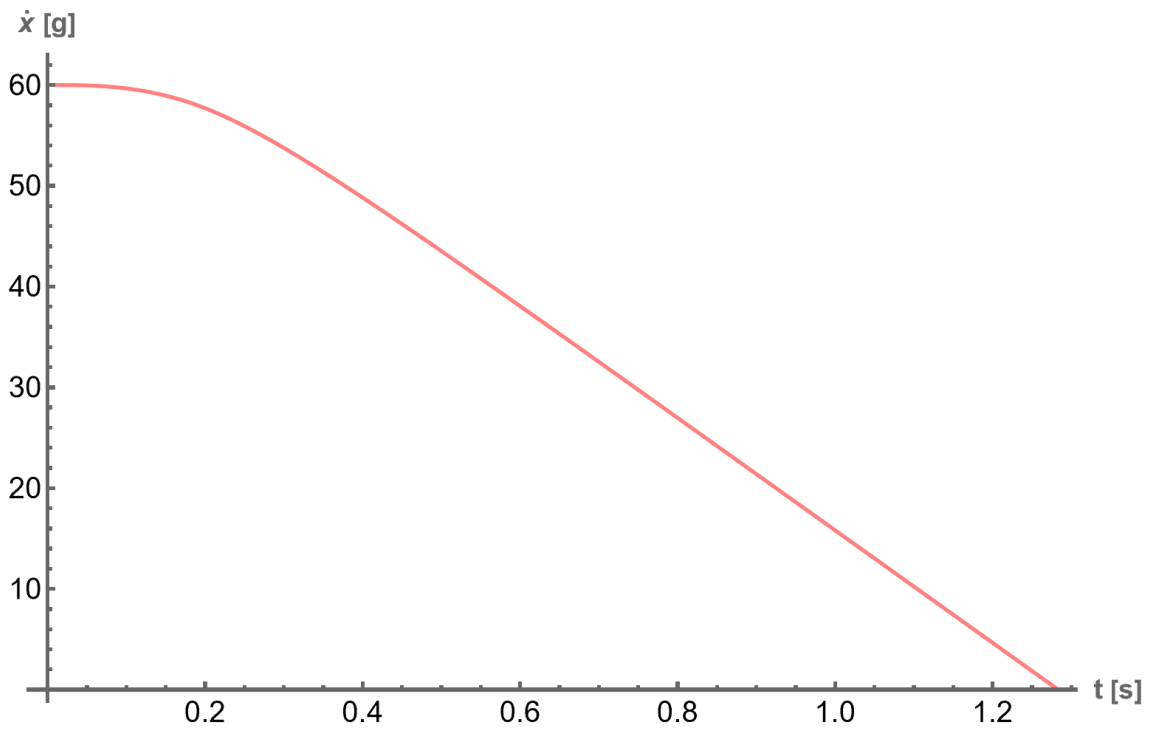


Figura 4.7. Gráfica de Velocidad vs Tiempo.

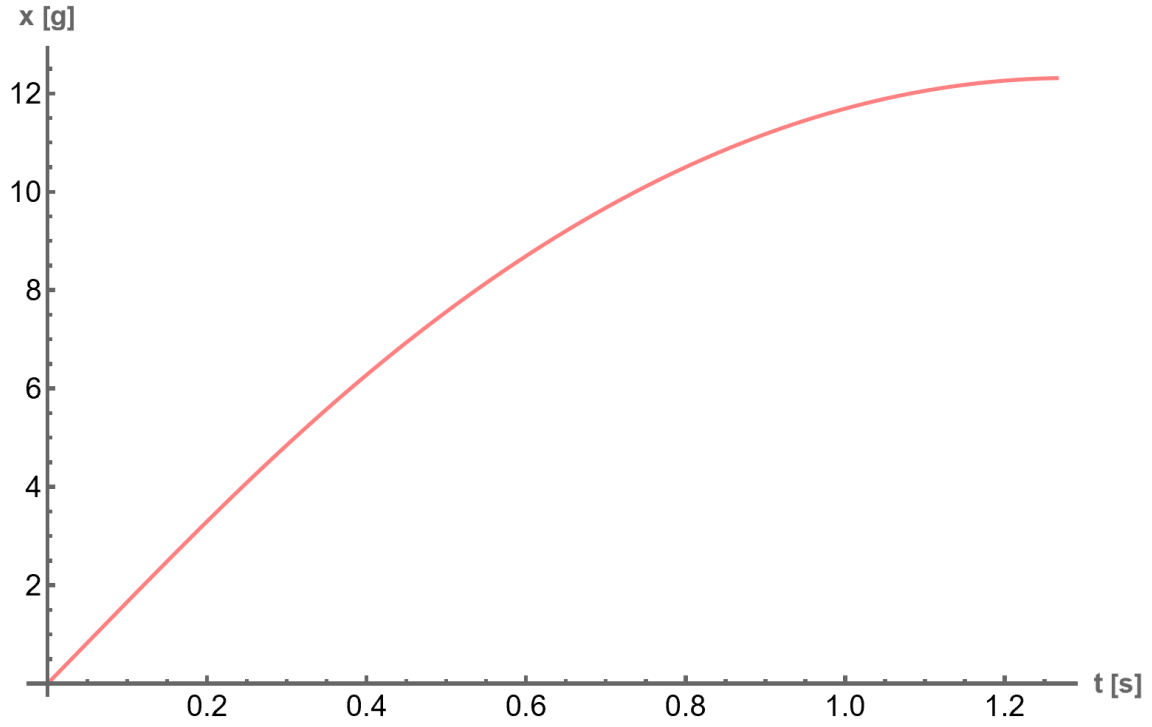


Figura 4.8. Gráfica de Distancia de Frenado vs Tiempo.

Además, se pueden ocupar los resultados obtenidos del modelo para crear animaciones o representaciones visuales del evento simulado, como la siguiente figura:

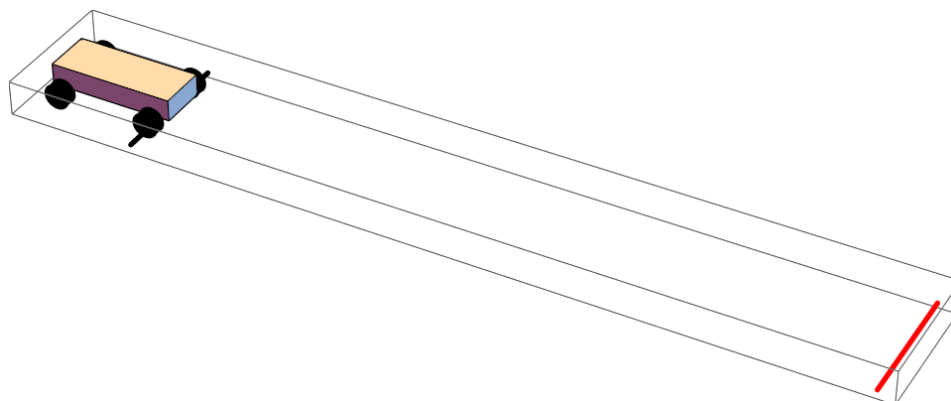


Figura 4.9. Animación del Frenado del Vehículo.

Esta figura es un cuadro de la animación del frenado del vehículo. Esta animación sirve para visualizar el frenado del vehículo, al igual como una herramienta visual para comparar distancias de frenado.

#### 4.2.2. Benchmarking de propuestas de sistemas de frenos

Los parámetros ocupados para los análisis de las propuestas corresponden a los del prototipo del vehículo eléctrico UM-E4, que son los siguientes:

Variable	Símbolo	Valor	Unidad
<b>Condiciones Iniciales</b>			
Presión Inicial en Caliper Frontal	$p_{c_{fo}}$	0	$\frac{N}{m^2}$
Presión Inicial en Caliper Trasero	$p_{c_{ro}}$	0	$\frac{N}{m^2}$
Velocidad Angular Inicial de la Rueda Frontal	$\omega_{fo}$	77.845	$\frac{rad}{s}$
Velocidad Angular Inicial de la Rueda Trasera	$\omega_{ro}$	77.845	$\frac{rad}{s}$
Distancia Inicial del Vehículo en Dirección del Eje X	$x_o$	0	[m]
Velocidad Inicial del Vehículo en Dirección del Eje X	$\dot{x}_o$	16.667	$\frac{m}{s}$
Distancia Inicial del Vehículo en Dirección del Eje Z	$z_o$	0.2015	[m]
Velocidad Inicial del Vehículo en Dirección del Eje Z	$\dot{z}_o$	0	$\frac{m}{s}$
Ángulo Inicial <i>Pitch</i> del Vehículo	$\theta_o$	0	[rad]
Velocidad Angular <i>Pitch Rate</i> Inicial del Vehículo	$\dot{\theta}_o$	0	$\frac{rad}{s}$
<b>Entradas o Inputs</b>			
Fuerza Máxima del Piloto	$F_{Piloto_{MAX}}$	TBD	[N]
Tiempo para Aplicación de Máxima	$t_{FP_{MAX}}$	0.2	[s]
Distribución de Frenado o <i>Brake Bias</i>	$BB$	TBD	[1]
<b>Parámetros (Prototipo Eléctrico UM-E4)</b>			
Sistema de Frenos			

Pedal Ratio	$PR$	TBD	[1]
Diámetro de Pistón de Master Cylinder Frontal	$d_{MC_f}$	TBD	[m]
Diámetro de Pistón de Master Cylinder Trasero	$d_{MC_r}$	TBD	[m]
Diámetro de Pistón de Caliper Frontal	$d_{C_f}$	TBD	[m]
Diámetro de Pistón de Caliper Trasero	$d_{C_r}$	TBD	[m]
Número de Pistones de Caliper Frontal	$\#_{Pistones_f}$	TBD	[1]
Número de Pistones del Caliper Trasero	$\#_{Pistones_r}$	TBD	[1]
Coefficiente de Fricción de la Balata	$\mu_B$	0.4	[1]
Radio Efectivo del Disco de Freno	$r_{disco}$	TBD	[1]
<b>Rueda y Llanta</b>			
Momento de Inercia del Eje Principal Y de la Rueda Frontal	$I_{yy_{Rueda_f}}$	0.21	[kg · m <sup>2</sup> ]
Momento de Inercia del Eje Principal Y de la Rueda Trasera	$I_{yy_{Rueda_r}}$	0.34	[kg · m <sup>2</sup> ]
Radio Efectivo de la Llanta	$r_{llanta}$	0.2141	[m]
Coefficiente B de la <i>Magic Formula</i>	$B$	15	[1]
Coefficiente C de la <i>Magic Formula</i>	$C$	1.5	[1]
Coefficiente D de la <i>Magic Formula</i>	$D$	1.6	[1]
Coefficiente E de la <i>Magic Formula</i>	$E$	0.5	[1]
<b>Modelo de Vehículo</b>			
Masa Total del Vehículo	$m$	290	[kg]
<i>Wheelbase</i> (distancia entre ejes)	$wb$	1.6764	[m]
Distancia del Centro de Gravedad al Eje Frontal	$x_{CG}$	0.8332	[m]
Distancia del Centro de Gravedad al Piso	$z_{CG}$	0.2015	[m]
Momento de Inercia del Eje Principal Y del Vehículo	$I_{yy}$	75.62	[kg · m <sup>2</sup> ]
Coefficiente de Rigidez de la Suspensión Frontal	$k_f$	43,781.7	$\frac{N}{m}$
Coefficiente de Rigidez de la Suspensión Trasera	$k_r$	43,781.7	$\frac{N}{m}$
Coefficiente de Amortiguación de la Suspensión Frontal	$c_f$	5,000	$\frac{kg}{s}$
Coefficiente de Amortiguación de la Suspensión Trasera	$c_r$	5,000	$\frac{kg}{s}$

Tabla 4.3. Valores de los parámetros (prototipo eléctrico UM-E4), entradas y condiciones iniciales ocupados en las simulaciones.

Los parámetros notados como TBD en la Tabla 4.3 son parámetros que cambian dependiendo del paquete de frenos que se ocupe. Mas adelante se muestran los componentes, sus características y parámetros para las simulaciones.

Se propusieron componentes de frenos comúnmente ocupados para aplicaciones de Fórmula SAE que cumplieran con los requisitos dimensionales del prototipo. Todos los componentes debían ser contenidos en un rin de 10" de diámetro, cuya selección ya era definitiva. Adicionalmente los *Master Cylinder* también

tenían requisitos dimensionales debido al espacio en la cabina. Con los componentes que cumplían los requisitos, se generaron las propuestas de sistemas de frenos, que se muestran en la siguiente tabla:

<b>Caliper</b>					
<b>Marca</b>	<b>Componente</b>	<b>Imagen</b>	<b>Número de Pistones</b>	<b>Diámetro de Pistón [in]</b>	<b>Precio [USD]</b>
AP Racing	CP-4226		2	1"	243.36
AP Racing	CP-4227		4	1"	425.86
Wilwood	PS-1		2	1" & 1.12"	105.96
Wilwood	GP200		2	1.25"	148.42
ISR	22-049		2	0.98"	223.37
ISR	22-048		4	0.98"	406.54
Brembo	P34		2	1.259"	169.00
<b>Master Cylinder</b>					





Marca	Componente	Imagen	Diámetro de Pistón [in]	Precio [USD]
AP Racing	CP7855		0.55" to 7/8"	202.51
Wilwood	GS Compact Remote Master Cylinder		1/2" to 13/16"	89.17
ISR	21-016-OA		0.55"	162.09
Brembo	XA6.S2.11/15		0.62" to 0.87"	148.00

Tabla 4.4. Benchmarking de componentes propuestos para el prototipo eléctrico UM-E4.

De esta tabla notamos que existe una gran variedad de componentes, con un rango muy amplio en precio y características. Solo se presentan datos que afectan directamente en los resultados del modelo, como el diámetro y número de pistón, sin embargo, hay muchas más características de cada componente que tienen importancia y fueron consideradas. Un ejemplo son los calipers de marca ISR, que tienen un precio más elevado debido a que se enfocan en la optimización de peso. El caliper de 2 pistones (22-049) tiene un peso de 0.29 kg, mientras que los PS1 de Wilwood tienen un peso de 0.498 kg. De la misma forma, el caliper ISR 22-049 es mucho más compacto, mientras que el PS1 apenas cumple el requisito de dimensiones para el rin de 10". Otro ejemplo es la presión máxima de trabajo que soporta cada componente. Esta característica es crítica para determinar la fuerza máxima que el piloto debe ejercer, afectando directamente el desempeño del componente en el paquete.

Otra consideración que se tomó para el modelado de estos sistemas fue que todos los componentes se ordenarían de una misma marca debido a que el costo de envío puede ser muy elevado (alrededor de 100 USD). Por lo tanto, no se analizaron combinaciones de diferentes marcas, por ejemplo, caliper AP Racing y master cylinder Wilwood. Como existe una gran variedad de componentes de cada marca, el considerar que el paquete completo sea adquirido de una sola marca no es una limitación.

Los paquetes analizados y sus resultados se muestran en la siguiente tabla:

	Paquete 1	Paquete 2	Paquete 3	Paquete 4	Paquete 5
Caliper Frontal	CP-4227	GP200	PS1	22-048	P34

<b>Caliper Trasero</b>	CP-4226	PS1	PS1	22-049	P34
<b>Master Cylinder Frontal</b>	CP7855 (14 mm)	GS Compact MC (5/8")	GS Compact MC (5/8")	21-016-OA	XA6.S2.11/15 (16 mm)
<b>Master Cylinder Trasero</b>	CP7855 (14 mm)	GS Compact MC (5/8")	GS Compact MC (0.7")	21-016-OA	XA6.S2.11/15 (17.46 mm)
<b>Radio del disco de freno [m]</b>	0.08	0.0857	0.0723	0.08	0.08
<b>Fuerza Máxima del Piloto [N]</b>	405	505	525	420	410
<b>Pedal Ratio</b>	4	4	5	4	4
<b>Brake Bias</b>	0.51	0.63	0.62	0.51	0.67
<b>Costo Total [USD]</b>	1743.46	687.1	602.18	1584	930
<b>Resultados</b>					
<b>Tiempo de Frenado [s]</b>	1.277	1.285	1.32	1.279	1.288
<b>Distancia de Frenado [m]</b>	12.1832	12.313	12.5981	12.2622	12.3317
<b>Máxima Deceleración [g]</b>	1.5993	1.5723	1.5217	1.5825	1.5687
<b>Transferencia de Carga al Eje Frontal</b>	69.52%	69.20%	68.59%	69.32%	69.15%
<b>Torque de Frenado del Eje Frontal [N m]</b>	352.397	349.097	334.483	349.016	348.157
<b>Torque de Frenado del Eje Trasero [N m]</b>	169.289	164.597	163.429	167.665	164.456
<b>Mínimo SR del Eje Frontal</b>	11.70%	12.48%	9.10%	12.04%	12.04%
<b>Mínimo SR del Eje Trasero</b>	10.40%	8.98%	7.98%	10.88%	8.87%
<b>Presión en Línea de Frenos Frontal [MPa]</b>	5.367	6.4294	8.2224	5.6030	6.764
<b>Presión en Línea de Frenos Trasera [MPa]</b>	5.1565	3.776	4.0175	5.3833	3.195

Tabla 4.5. Paquetes de frenado propuestos y sus resultados.

Los paquetes presentados son solo los más competitivos de cada marca. Hay algunos paquetes que son omitidos por ser objetivamente inferiores con precios mayores. El caliper de dos pistones de AP-Racing (CP-4226) en ambos ejes da una deceleración máxima de 1 g a un precio más elevado que el Paquete 2. Sucede lo mismo con el caliper de dos pistones de ISR (22-049).

De la Tabla 4.5, el Paquete 1, consta de un caliper de 4 pistones en el eje delantero, y uno de dos pistones en el eje trasero. Este paquete es el mismo que el del prototipo IC (UM-10). Es el paquete más caro, pero el que obtiene los mejores resultados con una deceleración máxima de 1.59 g y un tiempo de frenado de 1.277 segundos. Comparando con el prototipo IC, el prototipo eléctrico alcanza una deceleración mayor al ser más ligero.

El Paquete 2 es de componentes de la marca Wilwood. De los componentes de esta marca, no se encontró algún caliper de 4 pistones que entrara en el rin de 10". Los calipers de este paquete son el GP200 y el PS1. Se puede encontrar un buen balance entre estos dos calipers ya que el área del pistón del caliper GP200 es mayor que el del PS1. La diferencia entre los precios de esta marca y de las otras es bastante significativa, por lo que ofrece una buena relación entre precio y desempeño.

El Paquete 3 es el más barato, pero con el tiempo de frenado más largo. Consiste en dos calipers iguales para ambos ejes, que, para balancear la transferencia de carga tiene un master cylinder de menor diámetro en el eje delantero. Este paquete tiene la mayor discrepancia de presiones entre ejes delantero y trasero. Con el slip ratio de este paquete se puede notar que con solo el paquete no se está ocupando todo el agarre de los neumáticos.

La marca ISR, representada por el Paquete 4, obtiene el segundo lugar en costo y rendimiento. Este paquete al ser reconocido por ser ligero y compacto ofrece ventajas competitivas que no son cuantificadas en la Tabla 4.5, como masa total no suspendida y empaquetamiento. Es comparable al Paquete 1, siendo los únicos dos paquetes analizados que tienen calipers de 4 pistones en el eje delantero.

El Paquete 5 de la marca Brembo es similar al Paquete 3, ya que ambos ocupan los mismos calipers en ambos ejes. La transferencia de carga al eje delantero es balanceada ocupando master cylinders de mayor diámetro en el eje trasero. Es el cuarto lugar en tiempo de frenado y por ende deceleración. Alcanzan una mayor deceleración ya que el diámetro de pistón de los calipers es mayor que los del Paquete 3.

Los Paquetes 1 y 4 tienen el mejor desempeño, ya que ambos tienen calipers de 4 pistones en el eje delantero. Después están los Paquetes 2 y 5, con resultados bastante similares, sin embargo, el Paquete 2 es más barato por más de 200 USD, con un desempeño mejor. Finalmente, el paquete 5 tiene el peor desempeño.

Para la selección del paquete, y considerando los objetivos de la escudería, se descartan los Paquetes 1 y 4 a pesar de ser los mejores en términos de rendimiento. Esto se debe a su elevado precio, que supera más del doble el costo de otros paquetes. Dada la situación financiera del equipo, la diferencia en el rendimiento de estos paquetes en comparación con los demás no justifica el aumento de precio, ya que esos fondos podrían destinarse de manera más efectiva a otras áreas. Además, el Paquete 5 se desecha debido a su menor rendimiento y precio más elevado en comparación con el Paquete 2. En términos de costo y rendimiento, el Paquete 2 se posiciona como la mejor opción y la selección inicial. Sin embargo, se debe tener en cuenta que uno de los objetivos del equipo es implementar el freno regenerativo en serie. Es por esta razón que, finalmente, se opta por el Paquete 3, que ofrece la mayor capacidad de regeneración en serie en comparación con los otros paquetes disponibles.

Al analizar el Paquete 3, se observa que el slip ratio de ambos ejes está fuera del rango deseado. Sin embargo, esto nos da la oportunidad de implementar el freno regenerativo específicamente en el eje trasero, lo que permite recuperar una cantidad significativamente mayor de energía en comparación con los otros paquetes evaluados. Con el Paquete 3, podemos regenerar hasta el 13.5 % de la energía disipada durante el frenado, mientras que con los demás paquetes solo logramos alrededor del 5 %.

### 4.3. Comparación de resultados entre simulaciones

En esta sección, se comparan los resultados de las simulaciones para determinar los efectos de diferentes parámetros y validar los modelos construidos. Primero, se examina el impacto de los parámetros de simulación en los resultados obtenidos y se determina el tamaño óptimo del incremento  $\Delta t$ . Luego, se comparan los resultados obtenidos utilizando los modelos de vehículos de 1GDL y 3GDL. Finalmente, se utilizan los resultados del modelo construido en Simulink para validar los modelos desarrollados en Mathematica.

#### 4.3.1. Comparación entre parámetros de solución numérica

En el método numérico de Euler, el parámetro que influye en la exactitud de la solución es el incremento  $\Delta t$ . A medida que este incremento disminuye, la aproximación de la solución se vuelve más exacta, pero los tiempos de ejecución aumentan. Para modelos de mayor complejidad o con tiempos de simulación prolongados, esto figura un problema crucial. Aunque en nuestro modelo podemos disminuir este incremento sin que el tiempo de ejecución se convierta en un obstáculo, se presenta el análisis completo.

Valor de $\Delta t$ [s]	Tiempo de Ejecución [s]	Tiempo de Frenado [s]	Energía Disipada calculada Numéricamente [kJ]	Error en Energía Disipada
0.1	0.003125	1.4	39.8387	7.47 %
0.05	0.007813	1.5	41.2544	4.18 %
0.01	0.014063	1.26	42.6739	0.88 %
0.005	0.03125	1.27	42.8675	0.43 %
0.001	0.176563	1.28	43.0179	0.087 %
0.0005	0.30625	1.281	43.0367	0.043 %
0.0001	1.407814	1.2817	43.0517	0.0086 %
0.00005	3.39219	1.28175	43.0536	0.0043 %
0.00001	13.4453	1.281752	43.0551	0.00087 %

Tabla 4.6. Comparación entre parámetro  $\Delta t$  y los resultados de la simulación.

Para la Tabla 4.6, se ocuparon los mismos parámetros de la sección 4.1. Se ejecuto 10 veces el programa, y el promedio es el tiempo de ejecución mostrado. Adicionalmente se calcula la energía cinética disipada del vehículo analíticamente, mediante la ecuación:

$$K.E. = \frac{1}{2} m (v_o^2 - v_f^2)$$

Para el evento simulado:

$$K.E. = \frac{1}{2} \cdot 310 \cdot (16.667^2 - 0^2) = 43055.55 \text{ [ J ]}$$

También se puede calcular numéricamente la energía disipada ocupando la definición de trabajo:

$$W = F \cdot d$$

Que para nuestro modelo podemos reescribir como:

$$W = (2F_{x_f} + 2F_{x_r}) \cdot x$$

Donde la fuerza, se convierte en las fuerzas que actúan en el vehículo y  $x$  representa la distancia que ha frenado el vehículo. Este cálculo se realiza para cada iteración de la simulación y se van acumulando para calcular la energía disipada, que es lo que se muestra en la cuarta columna de la tabla. Este valor puede ser utilizado como un marcador de cuanto es el error numérico de la simulación, que es la quinta columna.

Gráficamente podemos mostrar las tendencias de la Tabla 4.6 a continuación:

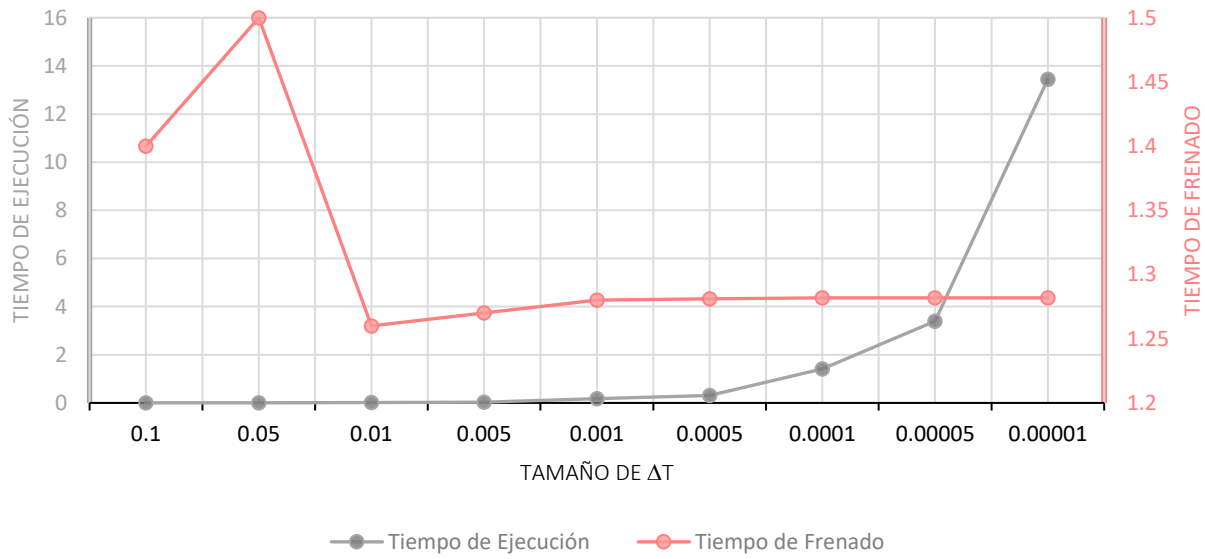


Figura 4.10. Gráfica de Tamaño de  $\Delta t$  vs Tiempo de ejecución y de Frenado.

El Tiempo de Frenado, conforme aumenta el Tamaño de  $\Delta t$ , converge a un valor. Esta convergencia se comienza a dar a partir de un  $\Delta t = 0.001$ . El Tiempo de Ejecución aumenta con el Tamaño de  $\Delta t$ , e incluso para una simulación tan corta como esta llega a tiempos de casi 14 segundos. Conociendo estas tendencias y los errores calculados con la energía disipada, podemos concluir que a partir de un  $\Delta t \approx 0.001$  se obtienen resultados con buena exactitud. En las simulaciones de este trabajo se ocupa un  $\Delta t = 0.0001$  para una mayor resolución en los tiempos de frenado.

#### 4.3.2. Comparación entre modelos de 1GDL y 3GDL

En esta sección se comparan los resultados obtenidos con el modelo de vehículo de 1 GDL y de 3 GDL. El evento simulado es el mismo que el de la sección anterior. Las diferencias entre los modelos del vehículo, construidos en las secciones 3.1.3.1 y 3.1.3.2, son los grados de libertad del vehículo. El de 1 GDL, solo considera desplazamiento en una dimensión, mientras el de 3 GDL permite el desplazamiento junto con el *roll* y *heave* del vehículo, siendo un modelo más realista del vehículo.

De las simulaciones, se observa el siguiente comportamiento para los mismos parámetros:

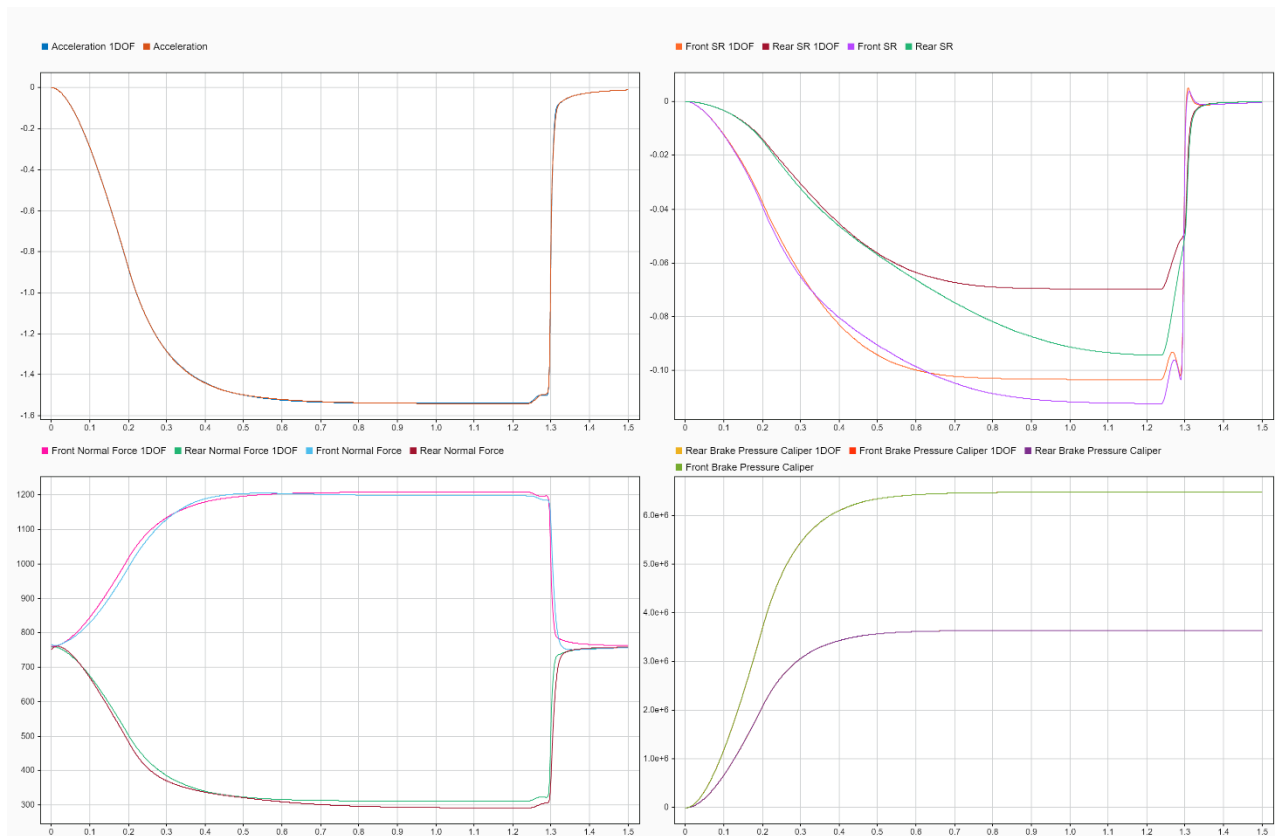


Figura 4.11. Comparación entre simulación de 1GDL y 3GDL.

La deceleración de ambos modelos es fundamentalmente la misma, mientras que la fuerza normal muestra una leve diferencia con la de 1 GDL debido a la adición de la suspensión y el efecto del pitch en el movimiento vertical. El *slip ratio* muestra una mayor diferencia debido a esta diferencia en la fuerza normal. La adición de estos GDL ofrece una mayor fidelidad en el *slip ratio* calculado y por ende una mejor afinación para el *brake bias* del vehículo. En los resultados críticos de la simulación, como deceleración máxima y tiempos de frenado, la diferencia es mínima. Para determinar un estimado de la deceleración máxima, tiempo de frenado, distancia de frenado, etc., el modelo de 1 GDL ofrece suficiente fidelidad, sin embargo, para una aplicación de mayor complejidad como el controlador de un sistema ABS, la diferencia entre SR es suficiente para tener un efecto considerable en su comportamiento.

#### 4.3.3. Comparación entre modelos programados y Simulink

Para validar el modelo, se comparan los resultados obtenidos con los resultados del modelo creado en el software Simulink. Para esto, primero comparamos el modelo de 1GDL del prototipo actual del IC, cuyos resultados presentados en la sección 4.2.1. Comparamos primero las señales más indicativas del frenado del vehículo, que son la aceleración, velocidad y distancia de frenado:

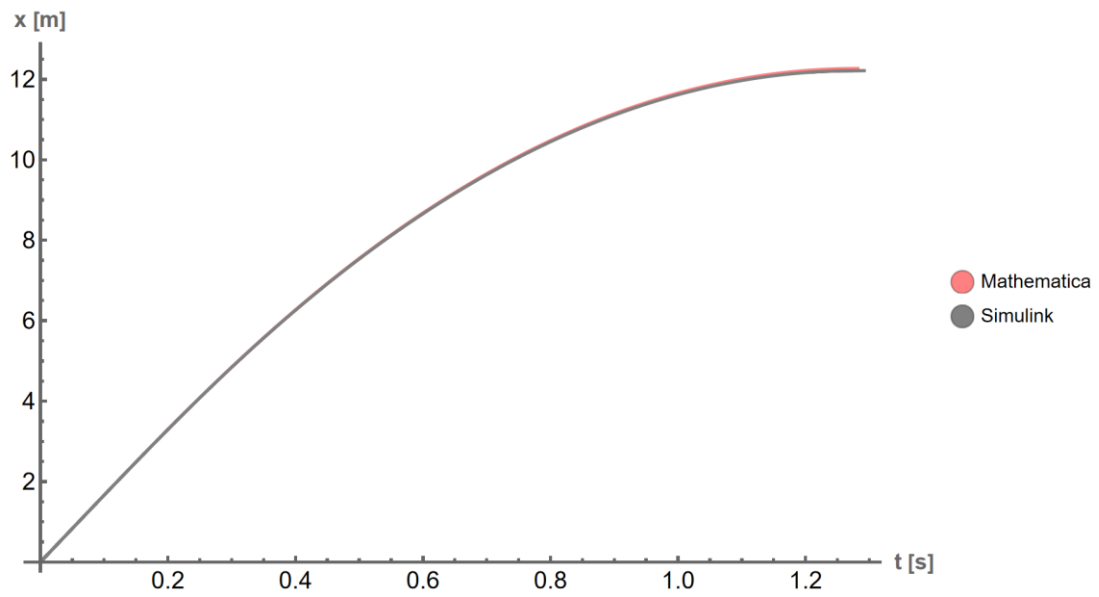


Figura 4.12. Gráfica Comparativa de Distancia de Frenado vs Tiempo.

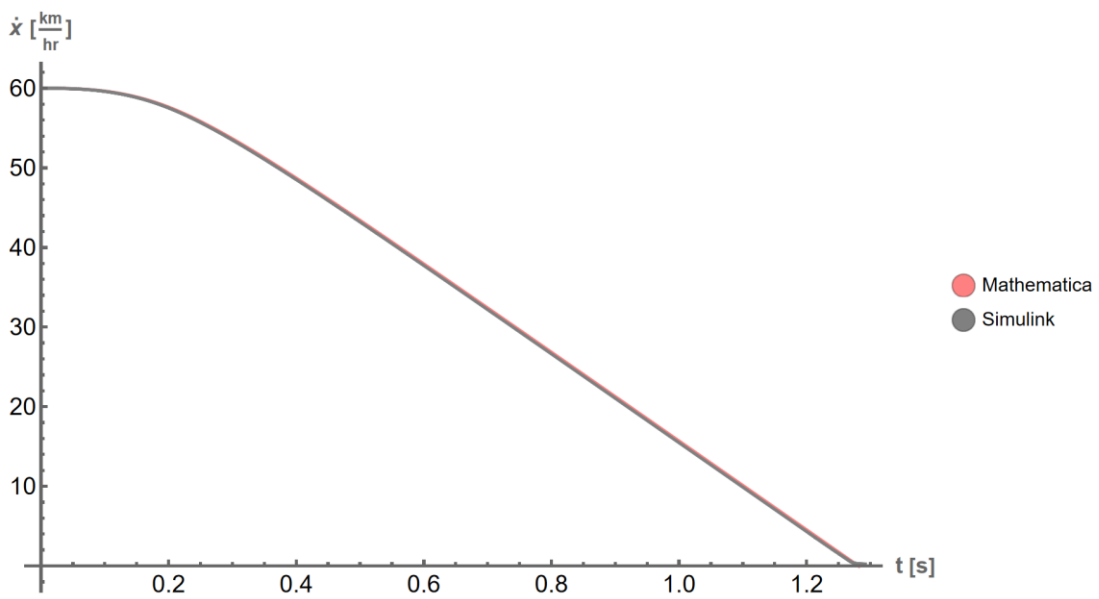


Figura 4.13. Gráfica Comparativa de Velocidad vs Tiempo.

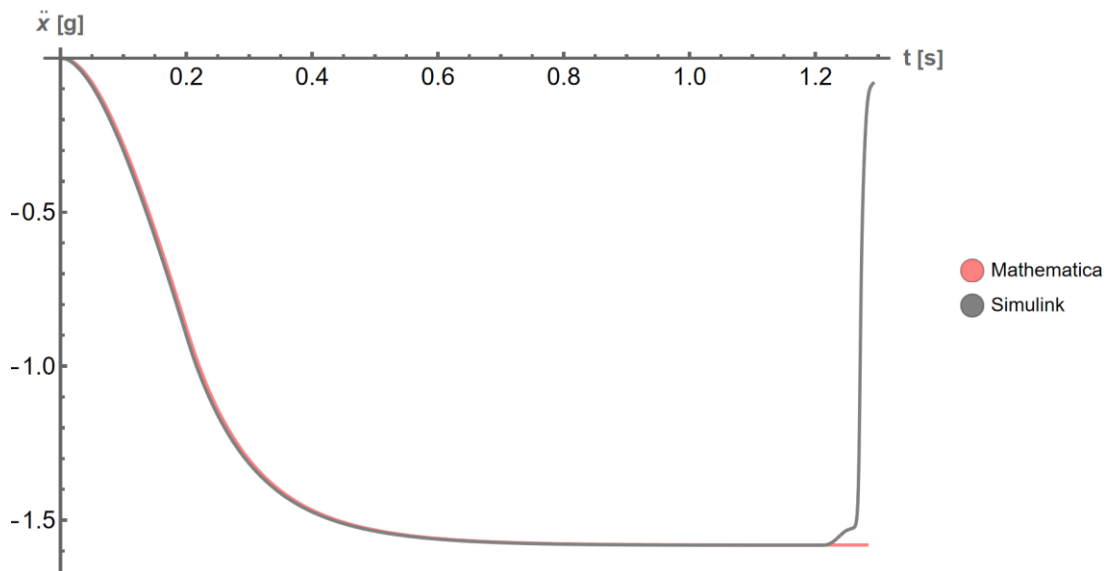


Figura 4.14. Gráfica Comparativa de Aceleración vs Tiempo.

De la Figura 4.12 y Figura 4.13 se observa que ambas señales son casi indistinguibles durante casi todo el evento. Sin embargo, de la Figura 4.14 que compara las aceleraciones, podemos notar que existe una gran discrepancia solo al final del evento. Para poder comprender el porqué de esto podemos analizar la diferencia entre el *slip ratio* de los modelos:

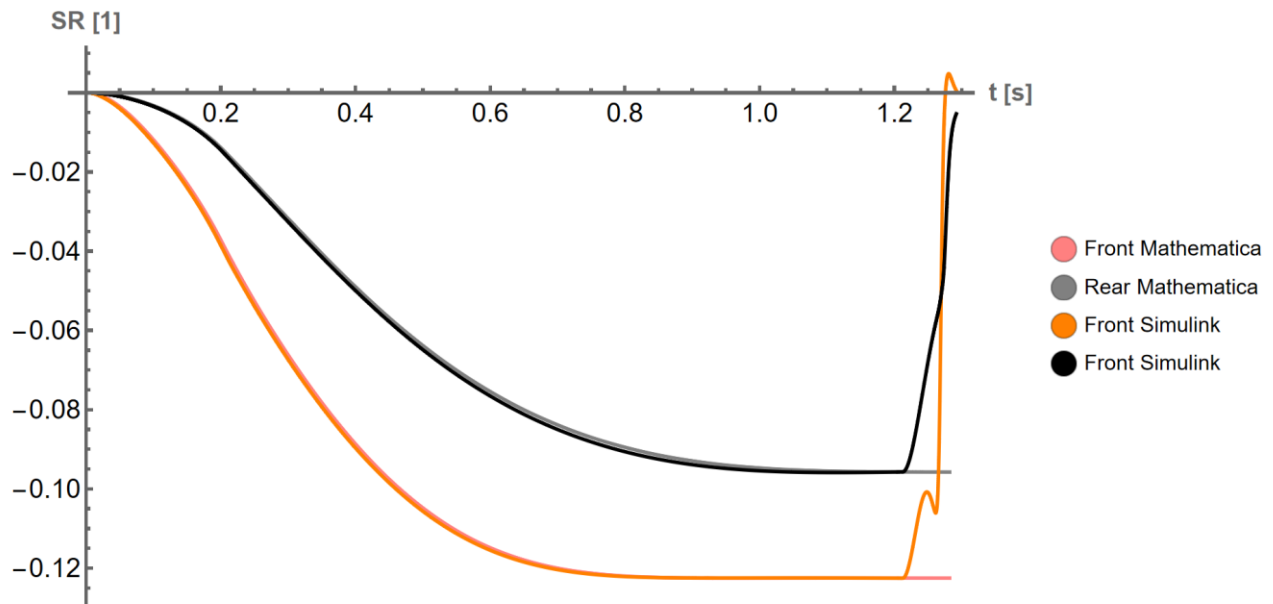


Figura 4.15. Gráfica Comparativa de Slip Ratio vs Tiempo.

La comparación de *Slip Ratio* muestra un comportamiento similar a la Figura 4.14, en la que las señales coinciden hasta casi el final del evento. Revisando la documentación del bloque de Simulink, se determina que la diferencia en los modelos se debe a la ecuación matemática ocupada para calcular el *Slip Ratio*, en

la que el caso en el que la velocidad del vehículo es igual a 0, esta cantidad se vuelve indefinida. El bloque de Simulink, ya que está planteado para simulaciones de múltiples eventos (por ejemplo, una simulación de pista) implementa una medida preventiva para evitar problemas numéricos.

El error numérico entre las simulaciones es presentado en la siguiente tabla:

Variable	Mathematica	Simulink	Diferencia Porcentual
Tiempo de Frenado [s]	1.2817	1.292	0.79 %
Distancia de Frenado [m]	12.3115	12.2146	0.62 %
Máxima Deceleración [g]	1.5807	-1.5813	0.02 %

Tabla 4.7. Error entre los Resultados de las Simulaciones.

A pesar de lo observado en la Figura 4.14 y Figura 4.15, la diferencia en los resultados finales es mínima. Por lo tanto, y considerando los objetivos y el uso del modelo, no es necesario agregar una medida para definir el Slip Ratio cuando el vehículo está detenido. Además, el único evento de la competencia que requiere un frenado total del vehículo es el Brake Test, el cual no es cronometrado ni puntuado. Por ende, la fidelidad de la simulación no es tan relevante para este caso. Las comparaciones para la selección del paquete de frenos, que se basaron en este mismo evento, no afectan la selección realizada, dado que todos los paquetes están afectados por el mismo sesgo.

Para comparar directamente los modelos podemos proponer un nuevo evento de frenado, en el que el vehículo disminuya su velocidad de  $60 \left[\frac{km}{hr}\right]$  a  $20 \left[\frac{km}{hr}\right]$ , dando como resultado las siguientes gráficas de aceleración y Slip Ratio:

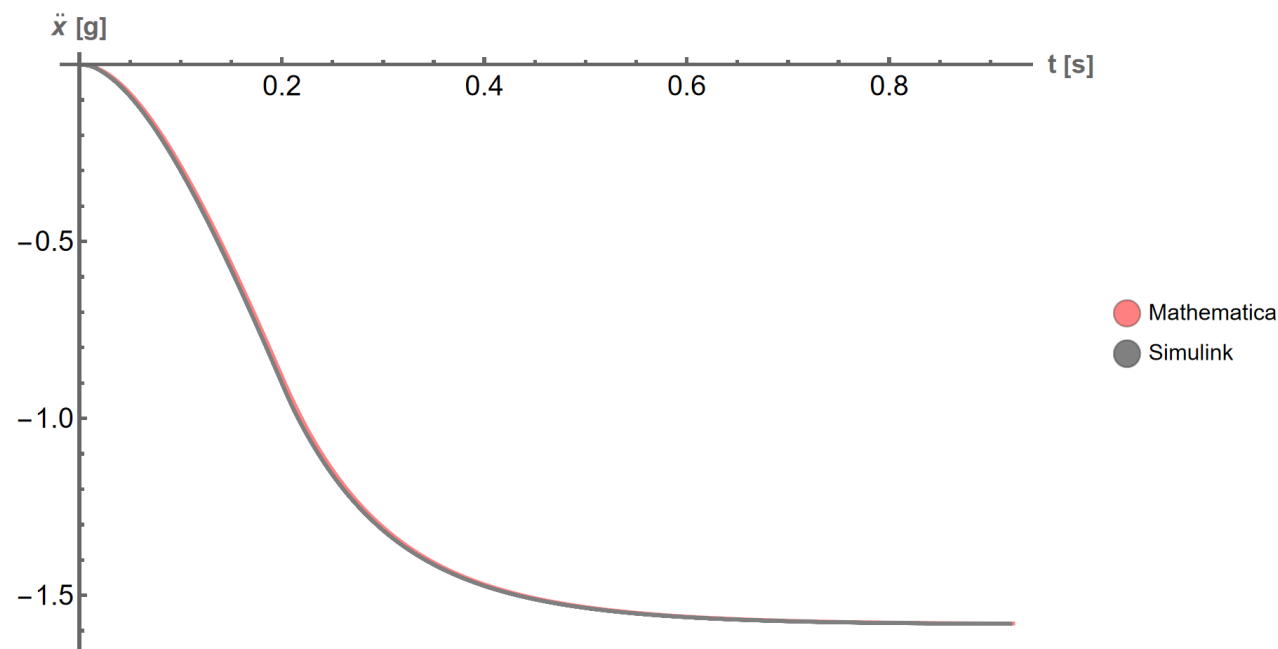


Figura 4.16. Gráfica Comparativa de Aceleración vs Tiempo para Frenado de  $60 \left[\frac{km}{hr}\right]$  a  $20 \left[\frac{km}{hr}\right]$ .

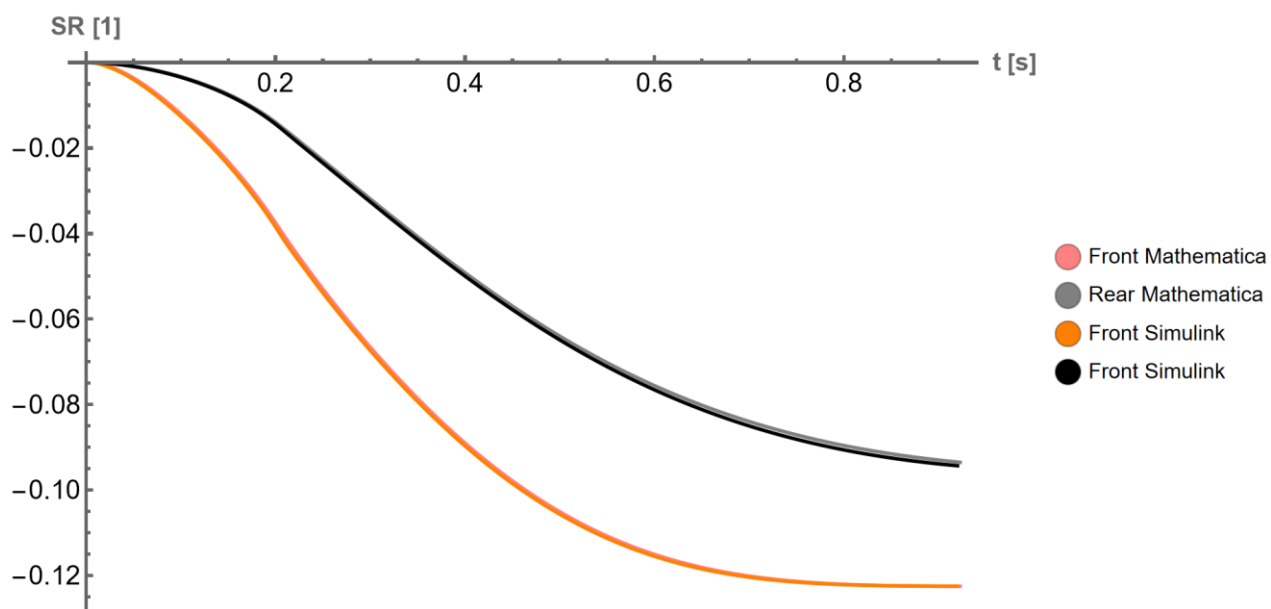


Figura 4.17. Gráfica Comparativa de *Slip Ratio* vs Tiempo para Frenado de  $60 \frac{km}{hr}$  a  $20 \frac{km}{hr}$ .

Ahora que la comparación está en igualdad de condiciones las señales son casi indistinguibles, y podemos cuantificar la diferencia entre las señales calculando los errores promedio entre las señales, usando como valor patrón el resultado de Simulink.

Variable	Mathematica	Simulink	Diferencia Porcentual
Tiempo de Frenado [s]	0.9225	0.91982	0.29 %
Distancia de Frenado [m]	11.2567	11.2226	0.30 %
Máxima Deceleración [g]	-1.57963	-1.58057	0.05 %
Error Promedio entre Señales			
Distancia de Frenado	0.11 %		
Velocidad	0.36 %		
Aceleración	0.39 %		
<i>Slip Ratio</i> Frontal	0.55 %		
<i>Slip Ratio</i> Trasero	0.82 %		

Tabla 4.8. Error entre Simulaciones para Frenado de  $60 \frac{km}{hr}$  a  $20 \frac{km}{hr}$ .

Numérica y visualmente, se determina que la diferencia es mínima, y se puede atribuir, entre otras cosas, al método numérico ocupado para la solución de las ecuaciones y ecuaciones diferenciales, parámetros de estos métodos (valor del incremento del tiempo, si es fijo o variable, etc.), tolerancias, errores de redondeo y la interpolación de primer grado ocupada para comparar los valores entre las señales. No se presentan más señales debido a la similitud de las ya presentadas.

## 5. Conclusiones

### 5.1. Conclusiones de modelado

En este trabajo se desarrollaron dos modelos para simular el proceso de frenado de un vehículo tipo Fórmula SAE, diferenciándose principalmente por los grados de libertad (GDL) considerados en su formulación.

El primer modelo, de un grado de libertad, considera únicamente el movimiento de traslación longitudinal, asumiendo un cuerpo rígido para el vehículo. El segundo modelo, de tres grados de libertad, incorpora además el movimiento vertical del chasis y la rotación en el eje transversal (pitch), lo que permite representar de forma más realista la transferencia dinámica de carga durante el frenado.

Ambos modelos fueron programados en Mathematica, con el objetivo de comprender en profundidad las ecuaciones de movimiento y el comportamiento dinámico del sistema. Posteriormente, se recrearon en Simulink, utilizando bloques predefinidos, con el fin de comparar y validar los resultados obtenidos.

Los resultados mostraron una diferencia porcentual mínima entre los modelos programados y los de Simulink, lo cual respalda la validez de las ecuaciones formuladas. Las pequeñas discrepancias se atribuyen principalmente a que los bloques de Simulink están diseñados para aplicaciones genéricas, mientras que los modelos desarrollados manualmente fueron diseñados para un escenario específico de frenado. Aun así, ambos enfoques cumplieron con los objetivos planteados, permitiendo tomar decisiones informadas en el rediseño del sistema de frenos.

La comparación entre el modelo de 1 GDL y el de 3 GDL muestra que el incremento en complejidad y fidelidad puede ser crucial dependiendo del objetivo del análisis. Por ejemplo, en el desarrollo de un sistema de frenado ABS, la dinámica vertical y el pitch son fundamentales, mientras que para tareas como la selección de un paquete de frenos adecuado, como fue el caso de este trabajo, el modelo más simple resulta suficiente y eficiente. Reconocer estas diferencias permite optimizar el uso de recursos y enfocarse en la complejidad necesaria para cada proyecto.

Finalmente, aunque se utilizaron herramientas de simulación para validar el comportamiento del sistema, la validación experimental sigue siendo necesaria. Factores externos como las condiciones del asfalto, el desgaste de componentes o la temperatura pueden influir significativamente en los resultados reales, por lo que se recomienda incorporar datos experimentales en futuros desarrollos para mejorar la precisión de los modelos.

### 5.2. Conclusiones de diseño

Gracias al uso del modelo dinámico desarrollado, fue posible seleccionar un nuevo sistema de frenos para el prototipo eléctrico UM-E4 que cumpliera con los objetivos establecidos por el equipo. Estos objetivos fueron los siguientes:

- Alcanzar una deceleración aproximada de 1.5 g, similar a la del prototipo de combustión interna UM-11.
- Lograr una reducción de costos del 20% respecto al sistema anterior, con un presupuesto estimado de 1500 USD.

- Incorporar la capacidad de frenado regenerativo en serie, con una eficiencia de regeneración de al menos un 7% de la energía disipada en cada frenada.

El sistema seleccionado superó las expectativas iniciales: se alcanzó una deceleración máxima de 1.52 g y una regeneración energética de 13.5%, con un costo total de 602 USD, lo que representa una reducción del 66% respecto al sistema previo. Estas mejoras fueron posibles gracias a la capacidad del modelo de simular diferentes configuraciones y predecir el comportamiento del sistema ante diversas condiciones.

El modelo también permitió identificar ajustes clave en el diseño del sistema, como el aumento del pedal ratio de 4 a 5 y un incremento en la fuerza ejercida por el piloto, los cuales fueron necesarios para cumplir los objetivos.

Si bien, se encontraron varios paquetes de frenos que cumplían con las metas planteadas, se priorizó la selección de un sistema compatible con la implementación del freno regenerativo en serie, optimizando así la eficiencia energética para futuras versiones del prototipo.

En definitiva, se concluye que el uso de modelos dinámicos no solo facilita la selección adecuada de componentes, sino que también es una herramienta esencial para la optimización de recursos, la mejora del rendimiento del vehículo y la toma de decisiones informadas dentro del equipo de diseño. Este enfoque metodológico es indispensable para el desarrollo eficiente y sostenible de vehículos de alto desempeño como el UM-E4.

### 5.3. Conclusiones generales de la tesis

El modelo desarrollado fue utilizado como una herramienta de diseño para el sistema de frenos, y su funcionamiento fue validado mediante el uso de herramientas especializadas de simulación. Esta validación permitió corroborar que los resultados obtenidos por el modelo eran coherentes con los estándares esperados para un sistema de esta naturaleza.

Si bien las herramientas de simulación como Simulink ofrecen grandes ventajas en términos de rapidez, robustez y facilidad de implementación, el proceso de desarrollar el modelo desde cero aportó un entendimiento profundo del comportamiento dinámico del sistema y de las ecuaciones que lo rigen. Este conocimiento es esencial para interpretar correctamente los resultados que ofrecen estas plataformas especializadas, lo que refuerza la importancia de comprender el funcionamiento interno de los bloques de simulación y no depender únicamente de ellos como cajas negras.

Desde un punto de vista práctico, el modelo fue determinante para la selección del nuevo paquete de frenos, que no solo cumplió con los objetivos de rendimiento establecidos, sino que también permitió una reducción del 66% en los costos asociados. Esto demuestra de manera tangible la utilidad del modelado y simulación como herramientas clave en la toma de decisiones de diseño y en la optimización de recursos dentro del equipo.

En conclusión, el modelado y la simulación se consolidan como herramientas fundamentales para la ingeniería moderna, ya que permiten anticipar el comportamiento de sistemas complejos, reducir la necesidad de pruebas físicas costosas y acelerar los ciclos de desarrollo. No obstante, estas herramientas no deben considerarse un reemplazo completo de la validación experimental. La

verificación de los modelos con datos reales sigue siendo un paso crítico para asegurar la fiabilidad del diseño, mejorar continuamente los modelos utilizados y retroalimentar de manera efectiva los procesos técnicos dentro de la escudería.

## Referencias

- [1] M. Kaku, *Physics of the Future: How Science Will Shape Human Destiny and Our Daily Lives by the Year 2100*, New York: Doubleday, 2011.
- [2] B. Stone, «Will Simulation End Physical Test?,» NI, 21 12 2021. [En línea]. Available: <https://www.ni.com/en/perspectives/will-simulation-end-physical-test.html>. [Último acceso: 12 Febrero 2024].
- [3] "VI-CarRealTime," VI-Grade, 2023. [Online]. Available: <https://www.vi-grade.com/en/products/vi-carrealtime/>. [Accessed 16 Febrero 2024].
- [4] «Historia,» UNAM Motorsports, [En línea]. Available: <https://unam.pro/22-23/>. [Último acceso: 15 Febrero 2024].
- [5] SAE International, «Formula SAE Rules 2024 Version 1.0,» 01 08 2023. [En línea]. Available: <https://www.fsaeonline.com/cdsweb/gen/DownloadDocument.aspx?DocumentID=369d01c0-589d-4ebe-b8d4-b07544f4a52b>. [Último acceso: 16 Febrero 2024].
- [6] «F1 Infographics,» Brembo, [En línea]. Available: <https://www.brembo.com/en/car/formula-1/f1-infographics>. [Último acceso: 22 Febrero 2024].
- [7] T. D. Gillespie, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, Warrendale: Society of Automotive Engineers, Inc., 1992.
- [8] R. S. a. J. K. Ball, *Automotive Engineering Fundamentals*, Warrendale: SAE International, 2004.
- [9] «The History of Braking Systems,» ABE Brakes, [En línea]. Available: <https://www.abebrakes.com/en/information-en/the-history-of-braking-systems/>. [Último acceso: 22 Febrero 2024].
- [10] IEA, «Electric Vehicles,» IEA, 2024. [En línea]. Available: <https://www.iea.org/energy-system/transport/electric-vehicles>. [Último acceso: 22 Febrero 2024].
- [11] AutoZone, "Bedding Brakes: How It's Done and Why It Matters," AutoZone, [Online]. Available: <https://www.autozone.com/diy/brakes/bedding-brakes?srsId=AfmBOoo5LbYNHv9f3EYWdA306iTqykEvBpsdGHBmosWFSAQxSC5dvSSn>. [Accessed 25 Febrero 2024].
- [12] R. N. Jazar, *Vehicle Dynamics: Theory and Applications*, Springer, 2008.
- [13] Continental, "Componentes de los neumáticos," Continental, [Online]. Available: <https://www.continental-neumaticos.es/b2c/tire-knowledge/tire-components/>. [Accessed 11 Marzo 2024].
- [14] H. B. Pacejka, *Tyre and Vehicle Dynamics*, Oxford: Butterword-Heinemann, 2006.

- [15] R. S. Jurecki, "Driver's reaction time under emergency braking a car – Research in a driving simulator," *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability*, p. 295–301, 2012.