

2. Fundamentos teóricos.

2.1. Diseño de sistemas de control.

2.1.1. Control de sistemas dinámicos con retroalimentación.

Para diseñar un sistema de control se requiere primordialmente conocer la planta, esto es saber que hace, cuáles son sus principales variables, especificaciones, limitaciones, capacidad, condiciones para su manejo seguro y confiable, es decir, conocer su dinámica. Se puede establecer el objetivo de control como regulación o seguimiento de trayectoria. En regulación, el objetivo es hacer que las variables a ser controladas lleguen hasta un valor deseado y permanezcan en ese valor, mientras que en el seguimiento de trayectorias, las variables controladas deben seguir un determinado comportamiento previamente establecido sin importar algún tipo de perturbación.

La respuesta del sistema a una entrada conocida se divide en dos partes; la respuesta transitoria que ocurre cuando el sistema cambia desde una condición inicial hasta la deseada y la respuesta de estado estable que se tiene después de que la respuesta a la señal de entrada logra estabilizarse. Si la respuesta del sistema a una señal de entrada se encuentra en estado estable pero no tiene el valor deseado, se dice que existe un error en estado estable.

Los sistemas de control se clasifican básicamente en sistemas de lazo abierto y sistemas de lazo cerrado.

- **En los sistemas de lazo abierto** la señal de salida no tiene influencia sobre la entrada tal como puede observarse en la figura 1. El proceso se ejecuta estableciendo las condiciones iniciales necesarias para obtener un resultado determinado. Si por acción de la variación de las condiciones externas al sistema no se logra el resultado deseado, no hay posibilidad de poder corregir la respuesta del sistema durante el proceso. Utilizar este control tiene la ventaja de que es relativamente económico y fácil de implementar, sin embargo, presenta las desventajas de no rechazar perturbaciones que modificarían la respuesta final sin tener la posibilidad de corregirla durante el proceso y de que su efectividad dependa de la calibración de sus componentes. Esto implica la necesidad de componentes precisos, lo cual puede elevar su costo.

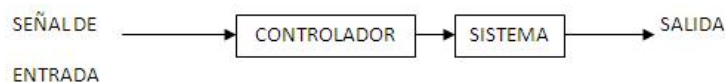


Figura 1: Sistema sin realimentación.

- **Los sistemas de lazo cerrado** son como el mostrado en la figura 2, se puede observar que la señal de salida tiene influencia sobre la entrada, es decir, si existe una desviación entre la salida real y la deseada, el controlador realiza los ajustes necesarios para aproximarlas entre sí lo más posible. Las ventajas de utilizar este control se presentan cuando existe error en la salida o bien hay perturbaciones, entonces el control los compensará. Además, existe la posibilidad de utilizar componentes imprecisos y por lo tanto más baratos. La desventaja es que es más complicado de implementar pues tiene más componentes que un control a lazo abierto y por lo tanto requiere más potencia.

La realimentación no solo reduce la diferencia entre el valor deseado y el valor real, también tiene efectos en las características del desempeño del sistema, como la ganancia, la estabilidad, la sensibilidad y el rechazo a perturbaciones. Lo anterior se puede mostrar partiendo de la figura 3.

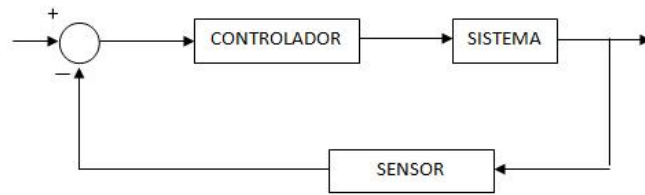


Figura 2: Sistema con realimentación.

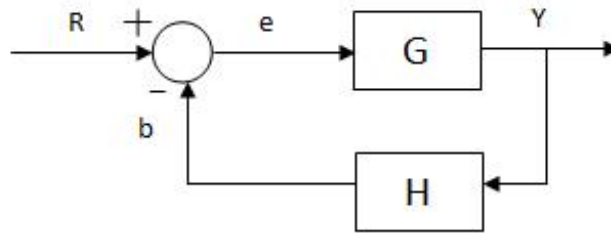


Figura 3: Sistema con realimentación negativa.

De la figura 3 se puede ver que para tener un sistema no realimentado se necesita quitar la realimentación, esto significa que la referencia es igual al error $R = e$, por lo tanto la relación salida-entrada en sistemas de lazo abierto queda dada por la siguiente expresión:

$$G = \frac{Y}{R}$$

La relación salida-entrada en sistemas de lazo cerrado con realimentación negativa queda dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} Y &= eG = (R - b)G = RG - YGH \\ Y(1 + GH) &= RG \\ \frac{Y}{R} &= \frac{G}{(1 + GH)} \end{aligned}$$

Sin embargo, cualquier sistema, por más sencillo que sea, es de naturaleza dinámica y consecuentemente para su representación es necesario el uso de ecuaciones diferenciales. Para caracterizar el comportamiento de los sistemas dinámicos frecuentemente se usa la transformada de Laplace. Cualquier sistema que pueda describirse por ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo puede ser analizado en el método operacional de Laplace.

La transformada de Laplace es un operador lineal perteneciente a la familia de las integrales de transformación, es especialmente útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales ordinarias. Se puede decir que es la segunda transformación más utilizada para resolver problemas físicos, después de la transformación de Fourier.

La transformada de Laplace unilateral se define como:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Donde:

$f(t)$: función en el tiempo

$F(s)$: transformada de Laplace de $f(t)$

s : es una variable compleja

\mathcal{L} : es el operador lineal de Laplace

2.2. Función de Transferencia.

La función de transferencia de un sistema se define como el cociente de la transformada de Laplace de la variable de salida entre la transformada de Laplace de la variable de entrada, suponiendo condiciones iniciales nulas. Tanto la entrada como la salida están representadas por polinomios, los cuales tienen raíces complejas, reales o imaginarias; a las raíces del polinomio que representa la salida se les llama polos mientras que a las raíces complejas, reales o imaginarias del polinomio que representa a la entrada se les llama ceros.

La construcción de los modelos de función de transferencia sigue las mismas etapas que la construcción de los modelos univariantes de series temporales: Identificación, Estimación, Verificación y Predicción. Sus características más importantes son:

- Sólo es aplicable a sistemas de elementos discretos modelados por ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo.
- Es una descripción de entrada-salida del comportamiento del sistema.
- Depende de las características del sistema y no de la magnitud y tipo de entrada.
- No proporciona información acerca de la estructura interna del sistema.

Los modelos de función de transferencia son muy utilizados en todos los campos científicos para evaluar respuestas dinámicas como lo muestra el siguiente ejemplo:

■ **Ejemplo 1** Sea el sistema masa, amortiguador, resorte de la figura 4.

Utilizando las leyes de Newton, se obtiene:

$$M \frac{d^2}{dt} x(t) + c \frac{d}{dt} x(t) + kx(t) = f(t)$$

Donde M es la masa, b es el coeficiente de fricción viscosa, k es la constante del resorte, $x(t)$ es el desplazamiento y $f(t)$ es la fuerza aplicada.

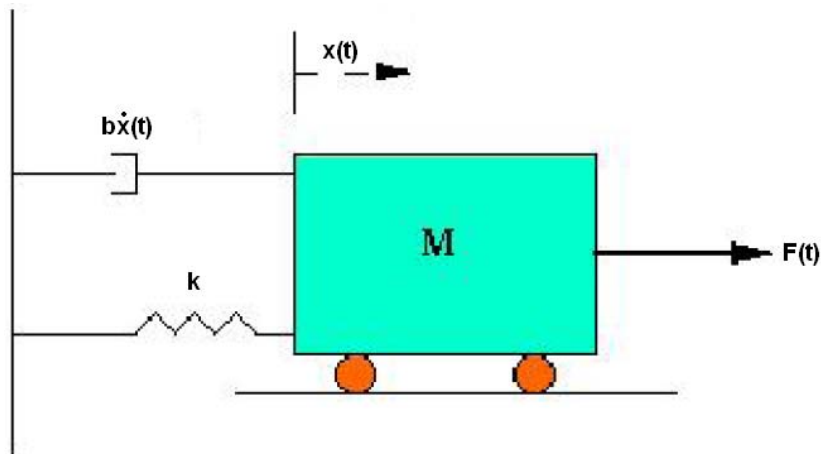


Figura 4: Sistema masa, amortiguador, resorte.

Obteniendo su transformada de Laplace.

Se consideran las condiciones iniciales como:

$$\begin{aligned}x'(0) &= 0 \\x(0) &= 0\end{aligned}$$

Al obtener la transformada de Laplace se tiene:

$$\begin{aligned}M(s^2X(s) - sx(0) - x'(0)) + b(sX(s) - x(0)) + kX(s) &= F(s) \\Ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) &= F(s)\end{aligned}$$

Finalmente la función de transferencia del sistema anterior es:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}$$

La relación causa y efecto de la función de transferencia, permite representar las relaciones de un sistema por diagramas, a estos se les conoce como diagrama de bloques. La representación general se muestra en la figura 6.

Los diagramas de bloques de un sistema son relaciones operacionales y unidireccionales que representan la función de transferencia de las variables de interés y tienen la ventaja de representar en forma más gráfica el flujo de señales de un sistema. Con ellos es posible evaluar la contribución de cada componente al desempeño del sistema. El sistema determinado no será único.

Los elementos que contiene un diagrama de bloques son:

Flecha Representa una y solo una variable, la punta de la flecha indica la dirección del flujo de señales.

Bloque Representa la operación matemática que sufre la señal de entrada para producir la señal de salida. Las funciones de transferencia se introducen en los bloques, a estos también se les conoce como ganancia.

Para un sistema en lazo abierto el diagrama de bloques se representa como se muestra en la figura 5.

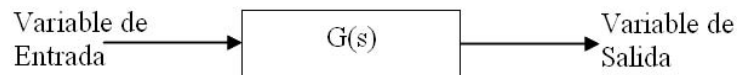


Figura 5: Representación en diagrama de bloques de un sistema sin realimentación.

Para un sistema en lazo cerrado el diagrama de bloques se representa como en la figura 6.

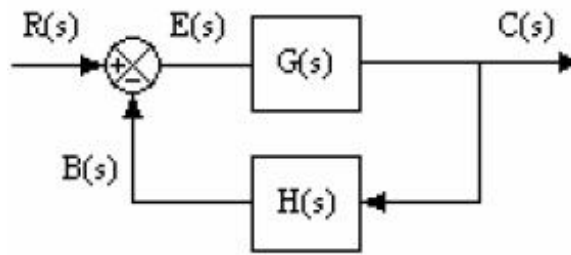


Figura 6: Representación en diagrama de bloques de un sistema realimentado.

Función de Transferencia en lazo abierto (de la figura 6 se consideran inexistentes $H(s)$ y la realimentación, $E(s) = R(s)$)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s)$$

Función de Transferencia trayectoria directa

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

Función de Transferencia lazo cerrado

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Se puede utilizar LabVIEW como herramienta gráfica interactiva para diseñar y analizar sistemas de control. Estos se pueden representar como funciones de transferencia, polos y ceros y espacio de estados de los modelos. Además, con las paletas incorporadas se pueden construir sistemas de control de retroalimentación, analizar su funcionamiento y modificar parámetros. En la figura 7 se muestran las paletas incorporadas con herramientas para diseño de control e identificación del sistema. Se integran los modelos de control construyendo modelos de plantas, esto se localiza en la paleta de “diseño de control y

simulación” (*Control Design & Simulation*) que se encuentra disponible en la paleta de “Funciones en el Diagrama de Bloques”.

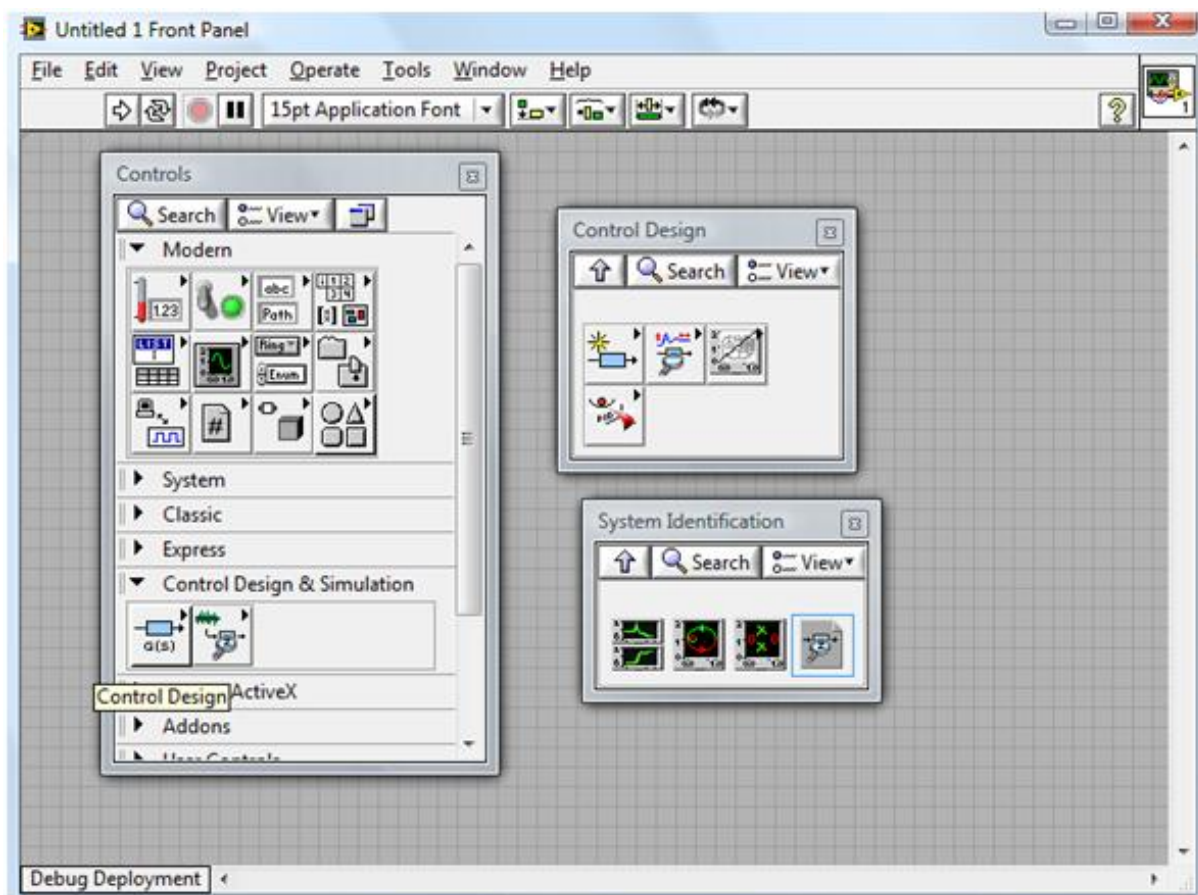


Figura 7: Diseño de control e identificación del sistema

2.3. Sistemas con más de una entrada

Para sistemas con más de una entrada como el que se muestra en la figura 8 se recurre al principio de superposición, así se puede calcular:

$$\frac{Y(s)}{r(s)} \Big|_{n(s)=0} = T_1(s)$$

$$\frac{Y(s)}{n(s)} \Big|_{r(s)=0} = T_2(s)$$

$u(s)$ Por el principio de superposición se tiene:

$$Y(s) = T_1(s)r(s) + T_2(s)n(s)$$

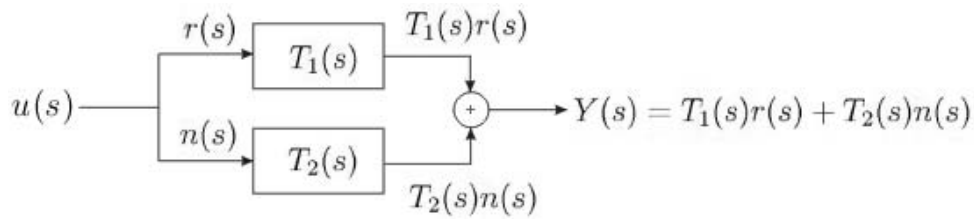


Figura 8: Sistema con más de una entrada.

2.4. Realimentación.

2.4.1. Ventajas

1. Mejor seguimiento de la referencia con incertidumbres en el modelo.
2. Rechazo a perturbaciones.

2.4.2. Desventajas

1. Aumento en complejidad.
2. Posible inestabilidad.
3. Pérdida de ganancia.

2.5. Respuesta estacionaria

2.5.1. Características de controladores P, I, D

Controlador proporcional k_p tendrá el efecto de reducir el tiempo de subida, pero nunca elimina el error de estado estacionario.

Controlador integral k_i , tendrá el efecto de eliminar el error de estado estacionario pero puede que la respuesta transitoria empeore.

Control derivativo k_d , Tendrá el efecto de incrementar la estabilidad de un sistema, reduciendo el sobrepaso y mejorando la respuesta transitoria.

La respuesta estacionaria depende fundamentalmente de la señal de excitación al sistema y, si el sistema es estable, es la respuesta que perdura cuando el tiempo crece infinitamente. Funciones de prueba

1. Escalón (constante)

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

2. Rampa

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

3. Parábola

$$R(s) = \frac{1}{s^3}$$

2.5.2. Teorema del valor final

El teorema del valor final es muy útil para el análisis y el diseño de sistemas de control, ya que proporciona el valor final de una función de tiempo mediante el conocimiento del comportamiento de su transformada de Laplace en $s = 0$. El teorema del valor final no es válido si $sF(s)$ contiene algún polo cuya parte real es cero o positiva, lo que equivale al requisito de que $sF(s)$ sea analítica en el semiplano derecho.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} se(s)$$

- Escalón

$$\begin{aligned} r(s) &= \frac{1}{s} \\ e_{\infty} &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{1 + G(s)} \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + G(s)} \\ &= \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow \infty} G(s)} \end{aligned}$$

Ahora se define la constante

$$\begin{aligned} k_p &= \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \\ e_{\infty} &= \frac{1}{1 + k_p} \end{aligned}$$

para que $e_{\infty} = 0$ entonces.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{c \sum_{i=1}^m (s + z_i)}{\sum_{i=1}^n (s + p_i)} \\ \lim_{s \rightarrow 0} G(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{c \sum_{i=1}^m (s + z_i)}{\sum_{i=1}^n (s + p_i)} \\ \lim_{s \rightarrow 0} G(s) &= \frac{c \sum_{i=1}^m (z_i)}{\sum_{i=1}^n (p_i)} \end{aligned}$$

Se requiere que al menos una raíz p_i sea nula para que el error sea cero.

$$e_{\infty} = 0$$

$$G(s) = c \frac{\sum_{i=1}^m (s + zi)}{\sum_{i=1}^n (s + pi)}$$

$$G(s) = \frac{1}{s} c \frac{\sum_{i=1}^m (s + zi)}{\sum_{i=1}^n (s + pi)}$$

Lazo cerrado Si se requiere garantizar en estado final con una referencia $R(s)$ y una salida $Y(s)$ es necesario un integrador en el lazo de control.

Lazo abierto Se pone un integrador para garantizar que en el lazo cerrado produzca un seguimiento deseable.

- Rampa

$$r(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} se(s)r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2}$$

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)}$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

$$\Rightarrow e_{\infty} = \frac{1}{k_v}$$

para que $e_{\infty} = 0$

$$\Rightarrow k_v = \infty$$

$$sG(s) = sc \frac{\prod_{i=1}^m (s + zi)}{\prod_{i=1}^n (s + pi)}$$

Para $k_v = \infty$ se requiere al menos dos polos o raíces pi iguales a cero para que $e_{\infty} = 0$.

$$G(s) = \frac{c \prod_{i=1}^m (s + zi)}{s^2 \prod_{i=1}^n (s + pi)}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \frac{c \prod_{i=1}^m (s + zi)}{\prod_{i=1}^n (s + pi)}$$

- Parábola $r(s) = \frac{1}{s^3}$

Se define otra constante k_a

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

$$e_\infty = \frac{1}{k_a}$$

Para $e_\infty \Rightarrow k_a = 0$

Resumen de constantes:

Para $k_p = \infty$ Se requiere al menos un polo de lazo abierto p_i igual a cero.

Para $k_v = \infty$ Se requiere al menos dos polos de lazo abierto p_i iguales a cero.

Para $k_a = \infty$ Se requiere al menos tres polos de lazo abierto p_i iguales a cero.

2.5.3. Sistemas de segundo orden.

Estos sistemas continuos responden a una ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma:

$$a_0 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_2 c(t) = b_0 \frac{d^2 r(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_2 r(t)$$

Para el cual se tomarán las siguientes consideraciones:

$$a_0 = 1, a_1 = p, a_2 = k, b_0 = b_1 = 0$$

La función de transferencia en lazo cerrado será:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + ps + k}$$

Se realizará el cambio de variable para k y p como se muestra:

$$k = \omega_n^2$$

$$p = 2\zeta\omega_n = 2\sigma$$

Sustituyendo en la función de transferencia tenemos lo siguiente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Donde:

- ω_n : Frecuencia natural no amortiguada del sistema.
- ζ : Factor de amortiguamiento.
- σ : Atenuación.

A lo cual podemos decir que el sistema de segundo orden se describe en términos de los parámetros ζ y ω_n .

La naturaleza de sus raíces depende del factor de amortiguamiento, lo que determina el tipo de respuesta que se obtiene para el comportamiento del sistema, de la siguiente manera:

- Si $\zeta = 0$, las raíces son cantidades imaginarias de igual magnitud pero de signo contrario y la respuesta del sistema a una entrada conocida es oscilatoria o bien no amortiguada. La gráfica de la respuesta transitoria se muestra en la figura 9.

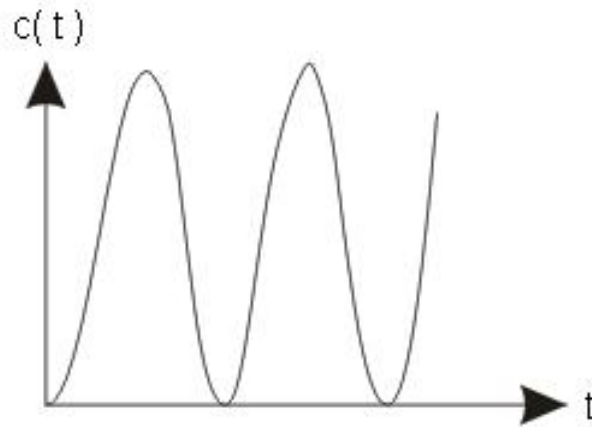


Figura 9: Respuesta no amortiguada del sistema a una entrada escalón.

- Si $0 < \zeta < 1$, las raíces son complejas conjugadas con parte real negativa y la respuesta del sistema a una entrada conocida es subamortiguada, ya que tiene oscilaciones en su respuesta transitoria. La gráfica de la respuesta transitoria se muestra en la figura 10.

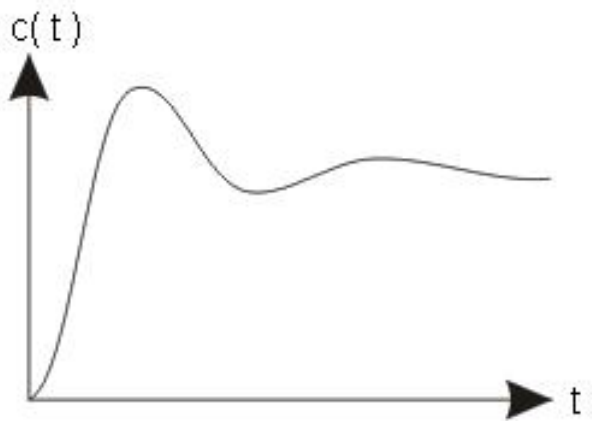


Figura 10: Respuesta subamortiguada del sistema a una entrada escalón.

- Si $\zeta = 1$, las raíces son reales iguales y negativas por lo que la respuesta del sistema a una entrada conocida es críticamente amortiguada. La gráfica de la respuesta transitoria se muestra en la figura 11.

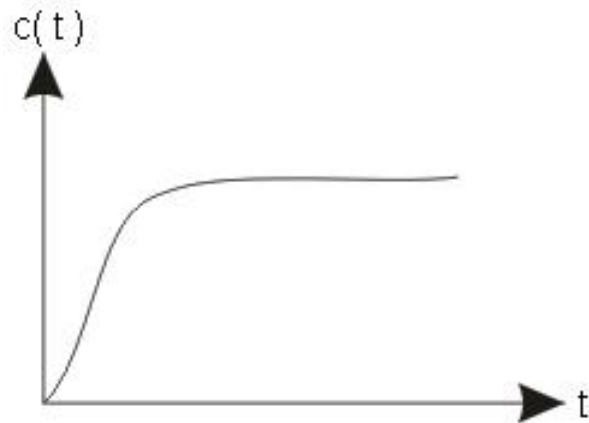


Figura 11: Respuesta críticamente amortiguada del sistema a una entrada escalón.

- Si $\zeta > 1$, las raíces son reales diferentes y negativas por lo que la respuesta del sistema a una entrada conocida es sobreamortiguada. La gráfica de la respuesta transitoria se muestra en la figura 12.

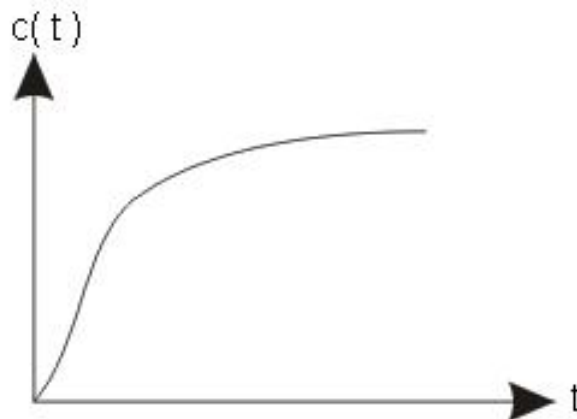


Figura 12: Respuesta sobre amortiguada del sistema a una entrada escalón.

Se estudia la respuesta de un sistema de segundo orden ante una entrada escalón unitario ya que este tipo de entrada es lo bastante drástica como para probar la bondad del sistema en régimen transitorio, además si se conoce la respuesta ante este tipo de entrada se puede calcular en forma analítica la respuesta ante cualquier tipo de entrada.

Al especificar las características de la respuesta transitoria de un sistema de control es común definir lo siguiente:

1. Tiempo de retardo t_d : Es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar la mitad del valor final por primera vez.

2. Tiempo de levantamiento t_r : Es el tiempo requerido para que la respuesta aumente del 10% al 90%, del 5% al 95%, o del 0% al 100% de su valor final. Para sistemas de segundo orden subamortiguados se utiliza normalmente el tiempo de levantamiento de 0% a 100%. Para sistemas sobreamortiguados se acostumbra usar el tiempo de levantamiento del 10% a 90%.

El tiempo de levantamiento se obtiene dando el valor de uno en la ecuación de respuesta de un sistema de segundo orden ante una entrada escalón.

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r} \left(\cos\omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}\omega_d t_r \right) = 1$$

$$\cos\omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}\omega_d t_r = 0$$

o bien:

$$\cos\omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos\omega_d t_r \tan\omega_d t_r = \cos\omega_d t_r \left[1 + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan\omega_d t_r \right] = 0$$

$$\tan\omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \frac{\omega_d}{\sigma}$$

El tiempo de levantamiento es:

$$t_r = \frac{1}{\omega_n} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}; \beta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma}$$

3. Tiempo de pico t_p : Es el requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobrepaso. El tiempo pico se obtiene derivando la ecuación de respuesta $c(t)$ e igualándola a cero, con lo que se obtiene

$$(\text{sen}\omega_d t_p) \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} = 0$$

$$\text{sen}\omega_d t_p = 0$$

los valores que satisfacen esta ecuación son:

$$0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots,$$

donde se elige el primer sobrepaso, entonces queda:

$$\omega_d t_p = \pi \quad \Rightarrow \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

4. Sobrepaso máximo (porcentual) M_p : El sobrepaso máximo es el valor pico máximo de la curva de respuesta. Generalmente se usa medido respecto al valor final. Si el valor final estabilizado de la respuesta difiere de la unidad, se suele utilizar el sobrepaso porcentual máximo. El sobrepaso máximo se obtiene de la respuesta evaluada en el tiempo pico.

$$M_p = c(t_p) - 1$$

$$M_p = -e^{-\zeta\omega_n(\pi/\omega_d)} \left(\cos\omega_d \frac{\pi}{\omega_d} + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}\omega_d \frac{\pi}{\omega_d} \right)$$

$$M_p = e^{-\zeta(\omega_n/\omega_d)\pi} = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}$$

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} * 100$$

La magnitud del sobrepaso (porcentual) máximo indica la estabilidad relativa del sistema.

5. Tiempo de asentamiento t_s : Es el que la curva de respuesta requiere para alcanzar y mantenerse en un rango alrededor del valor final con una magnitud especificada por el porcentaje absoluto del valor final habitualmente es de 2% o 5%, el rango más común es del 2%. El tiempo de asentamiento está relacionado con la constante de tiempo mayor del sistema de control. El criterio para fijar el porcentaje de error a utilizar depende de los objetivos de diseño del sistema en cuestión.

$$t_s = 4T = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma}$$

La figura 13 explica de manera gráfica los tiempos antes mencionados usando la respuesta de un sistema de segundo orden a una entrada escalón unitario.

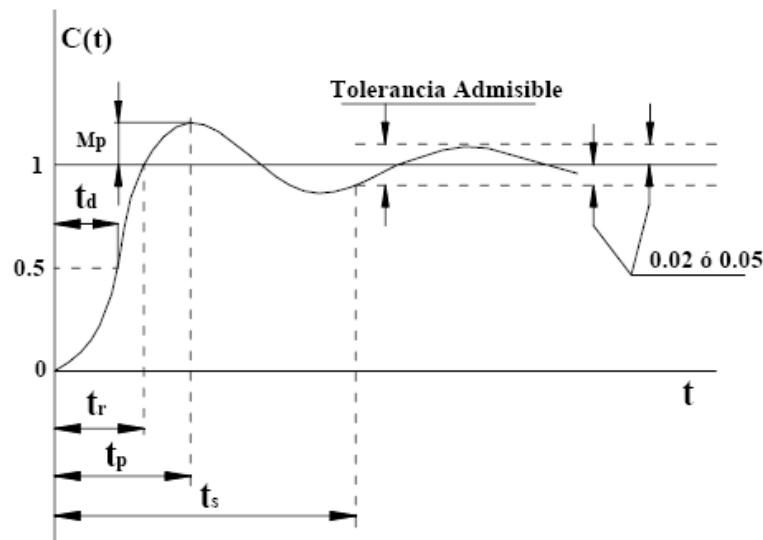


Figura 13: Curva de respuesta al escalón unitario

■ **Ejemplo 2** Dada la siguiente función de transferencia, definir los parámetros de respuesta transitoria del sistema.

Desarrollo: La función de transferencia de lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{75}{s^2 + 34s + 75}$$

Realizando la siguiente igualdad

$$\frac{75}{s^2 + 34s + 75} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned}\omega_n^2 &= 375 \rightarrow \omega_n = \sqrt{375} \\ 2\zeta\omega_n &= 34 \rightarrow \zeta = \frac{34}{2\sqrt{375}} = 0,877876 \\ \sigma &= 17 \\ \omega_d &= \sqrt{86}\end{aligned}$$

A partir de aquí se obtendrán los parámetros de respuesta transitoria

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma} = 0,499 \text{ rad.}$$

1. Tiempo de levantamiento

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = 0,2849 \text{ segundos}$$

2. Tiempo de pico

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0,33876 \text{ segundos}$$

3. Sobrepaso máximo

$$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = 0,00315 = 0,315 \%$$

4. Tiempo de asentamiento

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 0,23529 \text{ segundos}$$

2.6. Estabilidad de Sistemas de Control

2.6.1. Concepto BIBO de estabilidad

Entre las muchas formas de especificaciones de desempeño utilizadas en el diseño, el requerimiento más importante es que el sistema sea estable, por lo que desde el punto de vista de control, esta es la característica más importante de los sistemas dinámicos. La estabilidad es una propiedad cualitativa de los sistemas dinámicos a la que cabe considerar como la más importante de todas. Ello es debido a que, en la práctica, todo sistema debe ser estable ya que si el sistema no lo es, normalmente carece de todo interés y utilidad. Existen criterios que permiten discernir si un determinado sistema dinámico dado en una cierta forma de representación matemática, es o no estable.

La estabilidad se puede clasificar de la siguiente manera:

- **Estabilidad absoluta.** Se refiere directamente a la estabilidad o inestabilidad del sistema.
- **Estabilidad relativa.** Indica que tan estable es el sistema en relación a otro o en relación a algún cambio dentro del mismo.

Un sistema lineal, inicialmente en reposo, se dice estable si ante cualquier señal de entrada acotada (no alcanza valores infinitos) responde con una señal de salida acotada. Formalmente se dice de una señal $x(t)$ definida en cierto intervalo (t_0, t_1) que está acotada en dicho intervalo, si para todo $t \in (t_0, t_1)$ existe un valor $k < \infty$ tal que $|x(t)| < k$. Lo anterior significa que un sistema es estable si la señal de entrada acotada le corresponde una señal de salida acotada. Explicado de manera diferente, en el caso de sistemas lineales, el sistema es BIBO estable si lo es en el sentido de Lyapunov, esto es si cuando para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si la condición inicial $|x(0) < \delta|$, entonces $|x(t)| < \epsilon \forall t \geq 0$.

Entonces se dice que la estabilidad en un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo es BIBO (Bounded Input-Bounded Output), es decir que es estable si y sólo si a toda función de entrada acotada le corresponde una función de salida acotada. Donde la condición de estabilidad se analiza sobre puntos de equilibrio, ya que un sistema de control se encuentra en un punto de equilibrio si la salida permanece en el mismo estado en ausencia de cualquier perturbación o entrada. Estos sistemas tendrán puntos de equilibrio estables e inestables, la estabilidad es una característica propia de cada sistema y no depende de las entradas.

2.6.2. Diagrama de polos y ceros.

La estabilidad de un sistema se puede determinar por la ubicación de los polos de lazo cerrado en el plano complejo “s”. Si alguno de los polos de lazo cerrado de un sistema se encuentra en el semiplano derecho el sistema es inestable donde los ceros se destacan con un símbolo “o” y los polos con un símbolo “x”.

Para obtener los polos y ceros de nuestro sistema solo bastará con calcular las raíces del numerador y denominador ya que el numerador nos mostrará los ceros mientras el denominador nos mostrará los polos del sistema, cuando se obtengan las raíces se colocarán en el plano complejo.

Entonces decimos que un sistema realimentado lineal invariante en el tiempo es estable si todos los polos de lazo cerrado tienen parte real negativa. Por lo que si la ecuación característica del sistema tiene al menos un polo con parte real positiva, dicho sistema se designará inestable. El sistema será marginalmente estable si tiene polos simples con parte real nula, es decir que estén sobre el eje imaginario. Si los polos con parte real nula son múltiplos, el sistema también será inestable. En la figura 14 podemos observar un ejemplo de diagrama de polos y ceros en LabVIEW. La figura 15 muestra el diagrama de bloques del diagrama de polos y ceros mostrado en la figura 14.

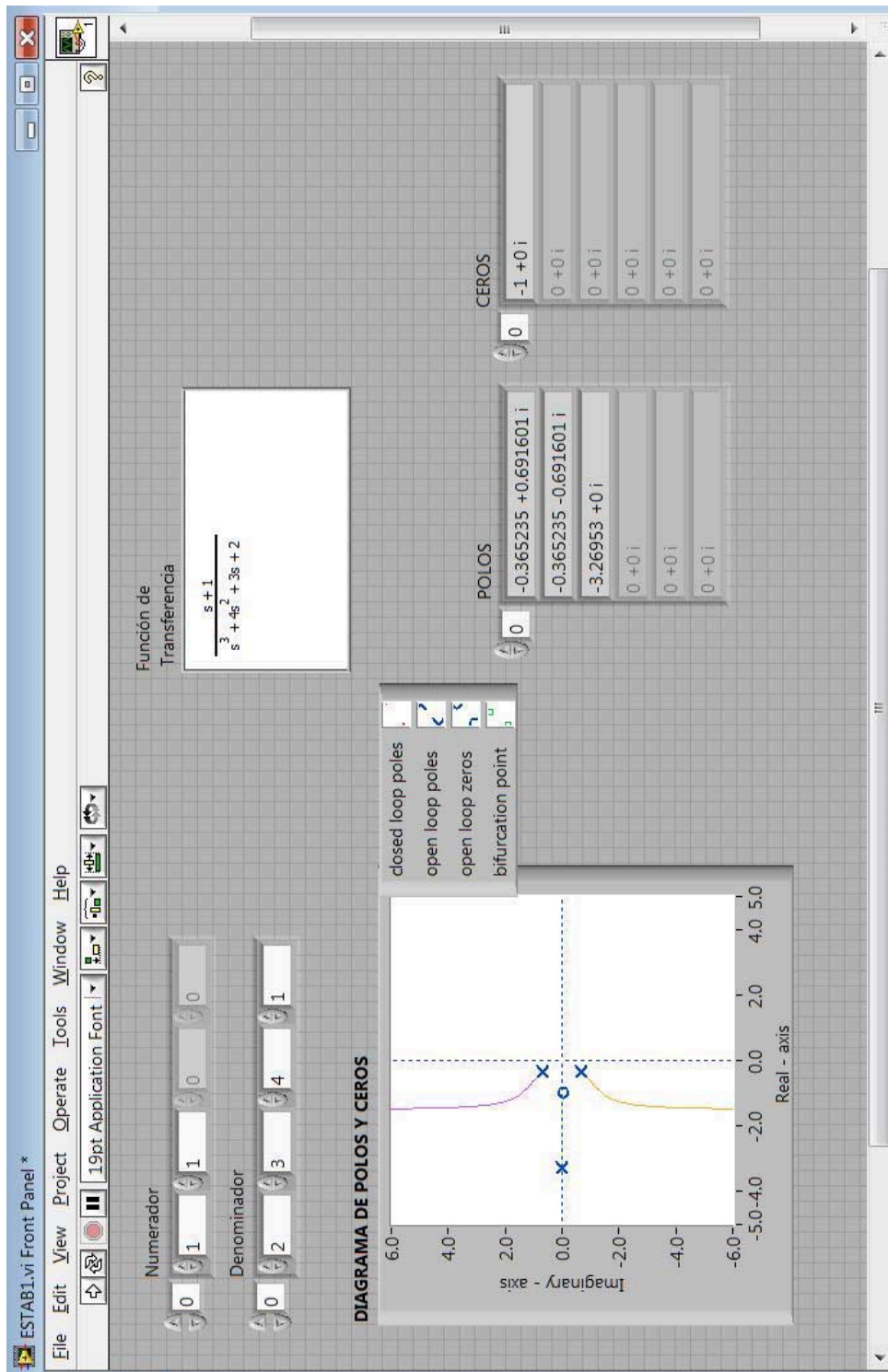


Figura 14: Diagrama de polos y ceros. Panel frontal.

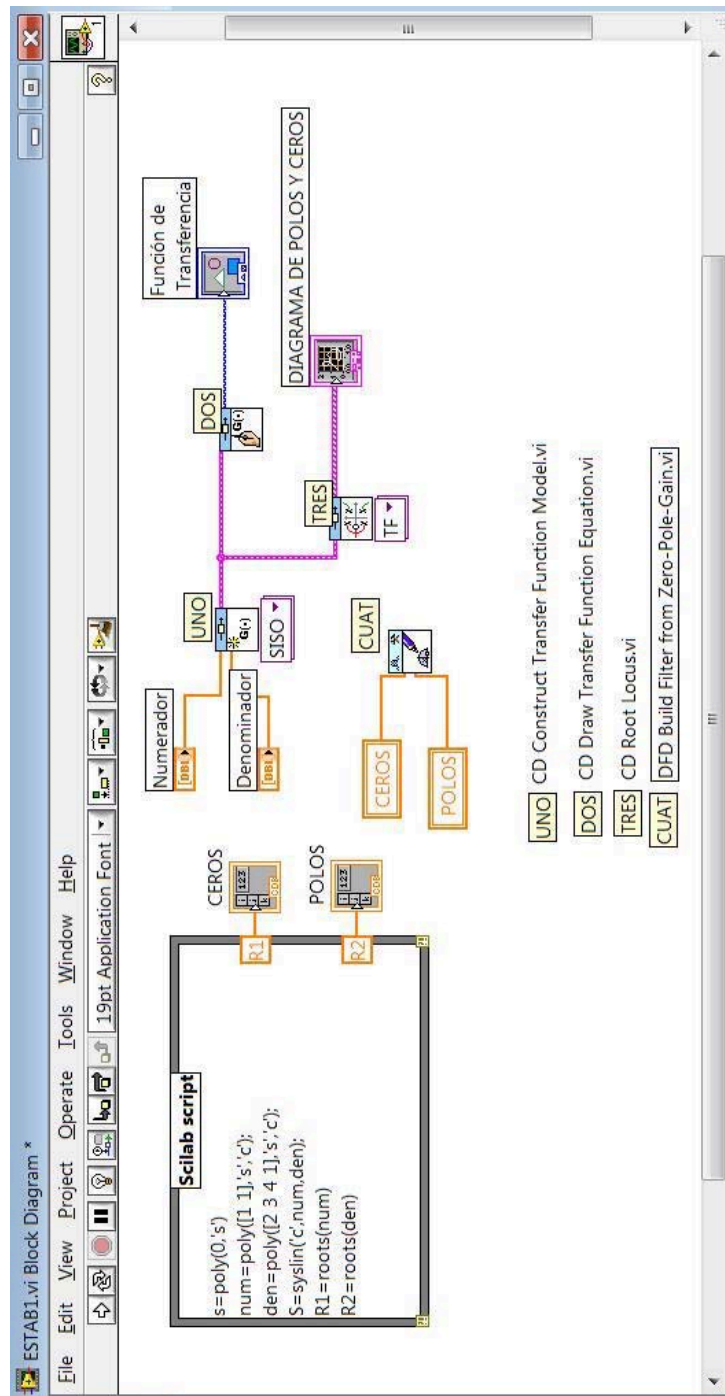


Figura 15: Diagrama de polos y ceros. Diagrama de bloques.

2.7. Criterio de Estabilidad de Nyquist

2.7.1. Respuesta en Frecuencia.

A la respuesta lineal de un sistema ante una entrada sinusoidal se le conoce como respuesta en frecuencia.

■ **Ejemplo 3** Sea la siguiente entrada sinusoidal y su correspondiente transformada de Laplace:

$$x(t) = X * \text{sen}(\omega * t) \rightarrow \frac{\omega * X}{s^2 + \omega^2} = X(s)$$

ω = frecuencia de la señal de excitación.

La salida tendrá la forma siguiente:

$$y(t) = Y * \text{sen}(\omega * t + \varphi)$$

φ = ángulo de fase

La transformada de Laplace de la salida del sistema es:

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

Como tenemos un análisis sinusoidal, se cambia la variable compleja s por $(j\omega)$.

$$Y(j\omega) = G(j\omega)X(j\omega)$$

Analizando, vemos que cada componente es un número complejo y como tal posee módulo y argumento de la forma:

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)| \angle Y(j\omega)$$

La relación de la salida $Y(j\omega)$ entre la entrada $X(j\omega)$ en el régimen sinusoidal se llama respuesta en frecuencia.

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

La respuesta en frecuencia nos brinda información indirecta acerca de la respuesta transitoria, se puede utilizar en funciones con alto grado de incertidumbre y también en sistemas con retardo que no tienen funciones racionales. Las pruebas de respuesta en frecuencia son fáciles de realizar, se pueden determinar fácilmente funciones de transferencia complejas, etc. Por lo tanto, conociendo la transferencia sinusoidal del sistema, se puede saber como será la amplitud de la salida y el ángulo de desfase.

Los métodos de respuesta en frecuencia en los sistemas de control proveen un conjunto de análisis y herramientas gráficas que no están limitadas por el orden del sistema o por otras complejidades.

2.7.2. Gráficas Polares o Diagrama de Nyquist.

En análisis dinámico de sistemas en el dominio de la frecuencia, se utilizan las representaciones de las funciones de transferencia sinusoidales en coordenadas polares que sirven de base para otros criterios de estabilidad como son el de Nyquist y el de Nichols.

El procedimiento para trazar un diagrama polar es el siguiente:

- Escribir la función en términos de $j\omega$.
- Descomponer la función en sus partes real e imaginaria.

$$G(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] + \text{Im}[G(j\omega)]$$

- Escribir la función en su forma fasorial.

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

- Determinar magnitud y fase cuando $\omega \rightarrow 0$.
- Determinar magnitud y fase cuando $\omega \rightarrow \infty$.

Una ventaja de utilizar un diagrama polar es que representa, en una sola gráfica, las características de la respuesta, en el dominio de la frecuencia, de un sistema en el rango de frecuencia completo. Una desventaja es que el diagrama no indica en forma clara la contribución de todos los factores individuales de la función de transferencia en lazo abierto.

■ Ejemplo 4 Obtener la gráfica polar de la siguiente función.

$$G(s) = \frac{1}{2s + 5}$$

Solución: se tiene que separar la función en sus partes real e imaginaria.

$$G(j\omega) = \frac{1}{2j\omega + 5} = \frac{1}{5 + 2j\omega}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{5 + 2j\omega} \cdot \frac{5 - 2j\omega}{5 - 2j\omega} = \frac{5 - j2\omega}{25 + 4\omega^2}$$

$$G(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] + \text{Im}[G(j\omega)] = \frac{5}{25 + 4\omega^2} - j \frac{2\omega}{25 + 4\omega^2}$$

Para trazar el resultado en la gráfica polar, se valúa en $G(j\omega)$ en diferentes frecuencias desde $\omega = 0$ hasta $\omega \rightarrow \infty$.

- $\omega = 0$ tenemos:

$$G(j0) = \text{Re}[G(j0)] + \text{Im}[G(j0)] = \frac{5}{25 + 4(0)^2} - j \frac{2(0)}{25 + 4(0)^2} = \frac{1}{5}$$

- $\omega \rightarrow \infty$ tenemos:

$$G(j\infty) = \text{Re}[G(j\infty)] + \text{Im}[G(j\infty)] = \frac{5}{25 + 4(\infty)^2} - j \frac{2(\infty)}{25 + 4(\infty)^2} = 0 - j0$$

- $\omega = 2$ tenemos:

$$G(j2) = \text{Re}[G(j2)] + \text{Im}[G(j2)] = \frac{5}{25 + 2(2)^2} - j \frac{2(5)}{25 + 2(2)^2} = \frac{5}{33} - j \frac{10}{33}$$

En la figura 16 se muestra una gráfica de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia obtenida en Scilab.

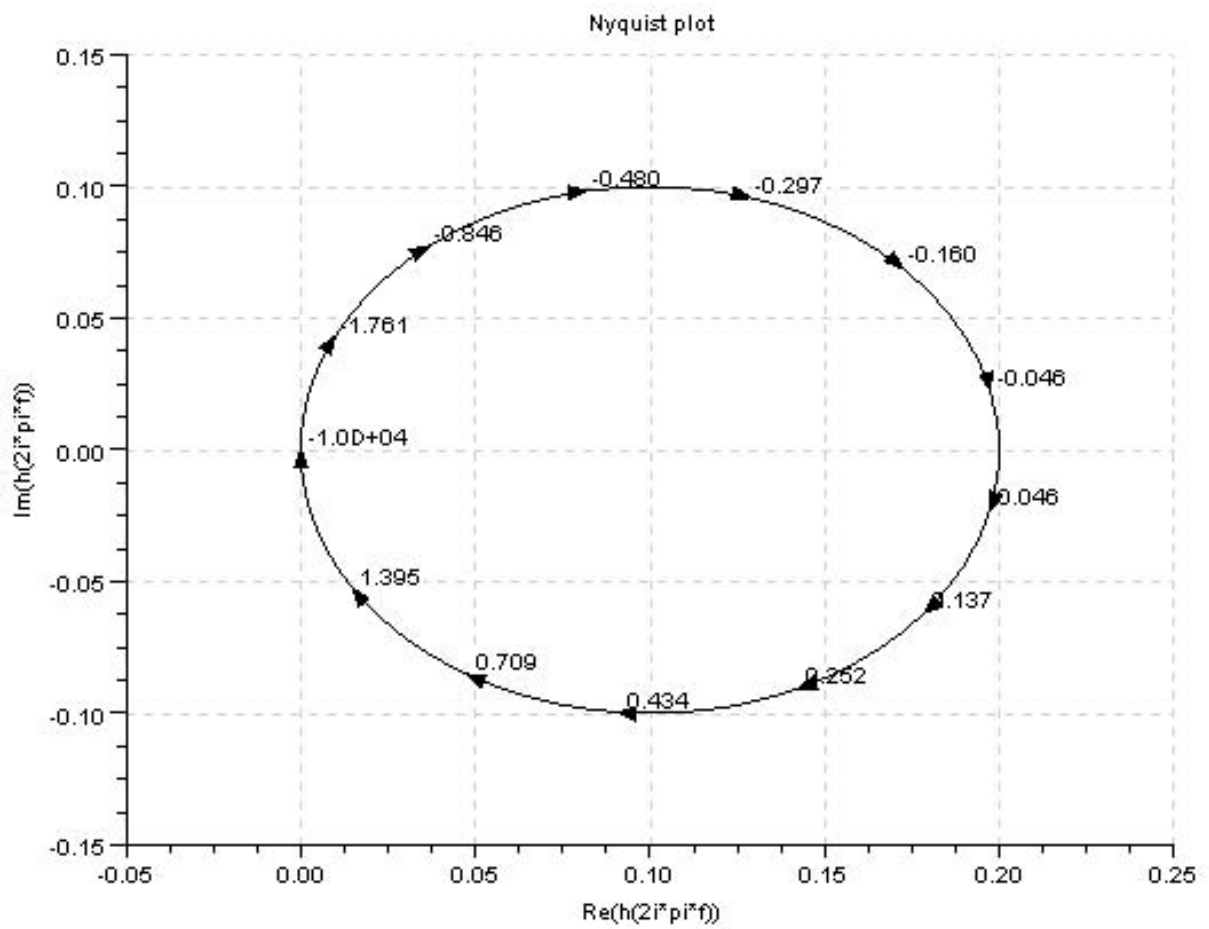


Figura 16: Gráfica de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia dada hecha con Scilab.