PLANEACION Y CONTROL DE LA PRODUCCION (1977)

Fecha	Duración	Tema	Profesor
Septiembre 2	19 a 21 h.	INTRODUCCION Conceptos de planeacion y control aplicados a la producción. Clasificación de los sistemas productivos. Técnicas de análisis	M. en C. Juan F. Bueno Zirión
Septiembre 3	8 a 14 h.	PRONOSTICOS (ESTUDIO DE LA DEMANDA) Importancia Estudio del comportamiento de la demanda. Estudio de las técnicas y selección del modelo.	M. en C. Jorge Rivera Benítez
Septiembre 10	8 a 14 h.	PLANEACION Y CONTROL DE INVENTARIOS Función de la planeación de inventarios. Análisis de inventarios por el método ABC. Modelos básicos de inventarios. Sistemas de control de inventarios. Decisiones de inventarios.	ING. Arturo Durán Peña
Septiembre 24	8 a 14 h.	PLANEACION Y CONTROL DE LA PRODUCCION Programas maestros de la producción soluciones para diferentes estructuras de costos. Costos involucrados en el cambio de volúmenes de producción. asignación de recursos a la producción.	M. en C. Juan F. Bueno Zirión

Fecha	Duración	Tema	Profesor
Septiembre 24		La función del control Estudio de restricciones y optimización	
Octubre 1°	8 a 14 h.	SISTEMAS DE PRODUCCION CONTINUA Diseño del sistema productivo Balance de líneas Programación integral de un sistema continuo. Calendarios o cédulas de producción Control de la producción continua	ING. Omar Taylor Cruz
Octubre 8	8 a 14 h.	SISTEMAS DE PRODUCCION INTERMITENTE Diseño de las instalaciones Programación y control de la producción. Metodología Sistema de gran escala Ruta crítica PERT Aplicaciones.	Ing. Adolfo Velasco
Octubre 15	8 a 14 h.	ABASTECIMIENTO Y MANEJO DE MATERIALES Estudio de la oferta de materias primas Programación y control de los abastecimientos. Metodología y técnicas del abastecimiento y manejo de materiales.	Ing. Juan José Di Mateo

'idi 30 agosto 1977

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO

PLANEACION Y CONTROL
DE LA PRODUCCION

M. EN C. JUAN BUENO ZIRION
Gerente General
Puertas y Diseños de Madera, S.A.
Blvd. Adolfo López Mateos 1547
Naucalpan, Edo. de Méx.
Tel.: 598.41.66

ING. ARTURO DURAN PEÑA
Subdirector de Ingeniería de Ventas
Combinado Industrial Sahagún
Av. Univ. y Miguel Laurent 803
Aréa de Dirección Comercial
México 12, D.F.
Tel.: 559.00.94

ING. JUAN JOSE DI MATEO CAMEIDANO
Gerente de APISA
16 de Septiembre No.55
Naucalpan, Estado de México
Tel.: 576.82.50

ING. MIGUEL LEON GARZA
Director de Admisiones
Instituto Panamericano de Alta Dirección de Empresa
Floresta No. 20
Col. Claveria
México 16, D.F.
Tel.: 527.02.60

M. EN C. JORGE RIVERA BENITEZ
Coordinador de la Sección de Ingeniería Industrial
Depto. de Ingeniería Mecánica y Electrica
Facultad de Ing. UNAM
TEL.: 50.52.15 E.3740

ING. ADOLFO VELASCO REYES
Coordinador de la Sección de Ingeniería Industrial
Departamento de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Facultad de Ingeniería, UNAM
Tel.: 550.52.15 E.3741

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO

PLANEACION Y CONTROL DE LA PRODUCCION

ING. OMAR TAYLOR CRUZ
Subgerente
A P I S A
16 de Septiembre No. 55
Naucalpan, Edo. de México
Tel.: 576.82.50

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

PLANEACION Y CONTROL DE LA PRODUCCION

INTRODUCCION

M. EN C. JUAN BUENO ZIRION

SEPTIEMBRE-OCTUBRE, 1977.

PLANEACION Y CONTROL DE LA PRODUCCION.

I.-INTRODUCCION.

En esta introducción intentaremos exponer el tema central de este curso y mediante ello las ligas o interacciones de los diferentes temas que lo componen. No entraremos en discusiones semánticas, ya que es un propósito ajeno a esta sesión, que nos definen ortodoxamente a la Planeación, sino que la consideraremos como una acción ordenada de un grupo comprometido con sus objetivos, para llevar a cabo una serie de acciones. El Control consiste entonces en la revisión periódica de las acciones y logros del Plan para su modificación pertinente si es que se requiere alguna. Todo lo anterior circunscrito al marco de la empresa como generadora de bienes y servicios.

Los orígenes de la Planeación de la Producción los encontramos en la Revolución Industrial, la cual trajo consigo una mayor complejidad en las operaciones industriales y sobre todo la apertura de mercados variables, tanto por el lado de la demanda como de la oferta. Obligando al empresario a tomar deciciones que en el futuro afectarían el comportamiento de su empresa frente a estos mercados. La dificultad de estas decisiones podemos ejemplificarla por una analogía:

Los participantes de este curso es casi seguro que alguna vez en su vida han conducido un automóvil. Imaginese que ahora tiene que hacerlo con los ojos vendados y siguiendo las indicaciones de su copiloto. Es seguro, que la marcha sería más lenta y con grandes riesgos. Si ahora obligamos a que el copiloto volteé hacia atras y únicamente viera el camino ya recorrido y en base a esto se conduzca el automóvil -

tendremos el caso típico de la empresa en que la conducción de la misma hacia el futuro esta basada en un conocimiento imperfecto del pasado. Pero por difíciles que sean, estas deciciones referentes a la planeación, y de una forma objetiva o no, deben de ser y son tomadas en todas las empresas.

La Planeación dentro de una empresa la podemos devidir en niveles, tal como muestra la figura 1.

El primer nivel de planeación dentro de una empresa es el integral, en él se obtienen básicamente las directrices generales de la empresa y consta esencialmente de tres fases: a) Basados en un Pronóstico de Venta a largo Plazo, b) se realiza en Plan General de Operación a partir del cual nace, va con fichas de realización. c) el Programa de Operación.

Este Plan General de Operación incluye la proyección de la demanda modificada al considerar nuevos productos, pedidos especiales, mercado de exportación, mercado potencial insatisfecho y restricciones gubernamentales. Con este plan general de ventas la empresa define sus necesidades comerciales y sus inversiones necesarias en su red de distribución. Calcula su plan general de producción y lo compara contra su capacidad derivándose sus necesidades de operación e inversiones, que incluyan necesidades de expansión, sustitución, mantenimiento y reestructuración.

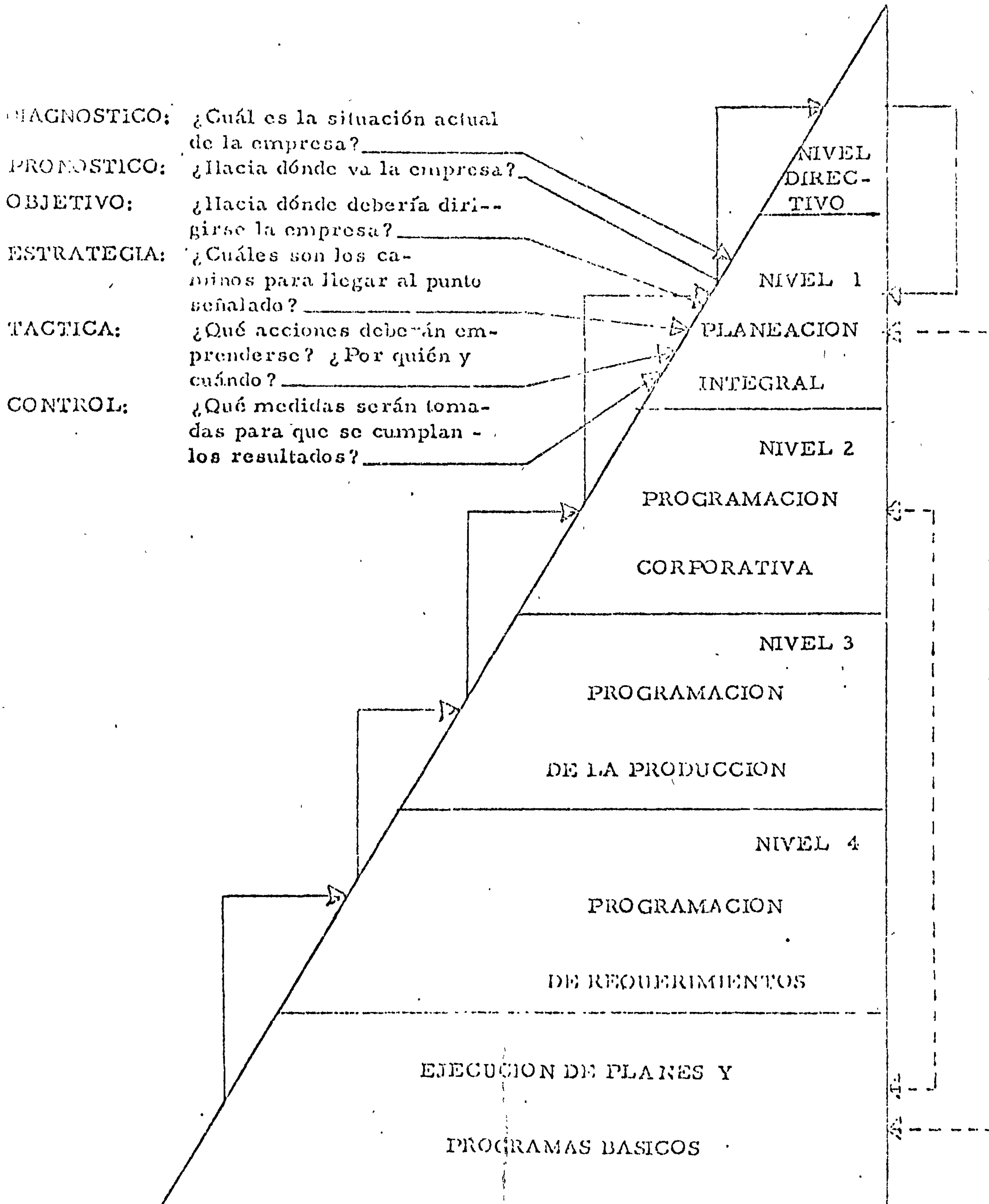
Apoyados en lo anterior se está en condiciones de preparar un Plan de Producción y Plítica de Inventarios incluida en el mismo. Asi mismo ya es posible elaborar planes de financiamiento y evaluar la bondad del Plan General que una vez aprobado da lugar al programa del mismo.

El segundo nivel sólo existe en empresas conformadas a su vez por otras empresas y en ellas el plan integral conjunta los planes generales de cada una de ellas.

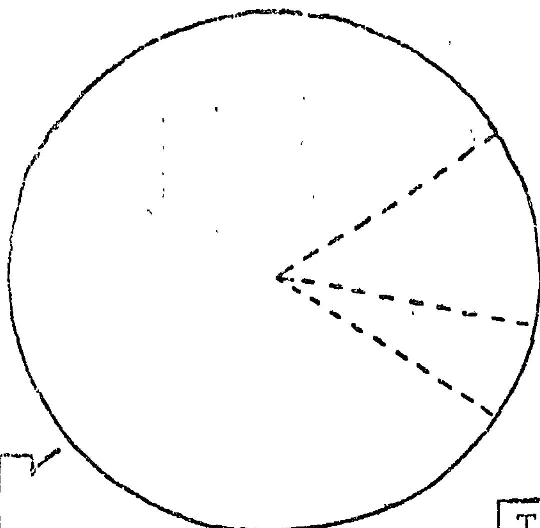
El tercero, y objeto de este curso, es el Plan de Producción y necesariamente a Corto Plazo. Basados en el Plan General y considerando cada producto por separado, es necesario, basado en el análisis de ventas reales y su variación en el tiempo, se efectúa el Plan de Producción que considera el uso de Inventarios, Mano de obra, Turnos de Producción, Tiempo Extra, Subcontratación y Abastecimientos, frente a la demanda planteada con el mínimo costo posible.

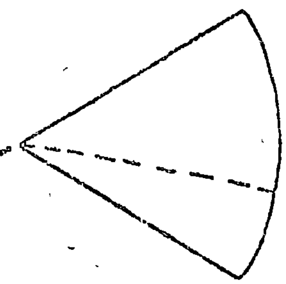
Este Plan a su vez incluye su mecanismo de Control.

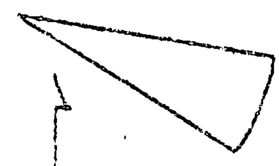
En este iremos conociendo en primer término los métodos de pronóstico, y de manejo de inventarios, con estas dos herramientas podremos profundizar en el concepto de un Plan de Producción, considerando los casos de intermitante y contínua para terminar con el tema de abastecimientos y el subtema asociado de manejo de materiales y con ello esperar el cumplimiento de los objetivos del curso.


DIAGNOSTICO: ¿Cuál es la situación actual de la empresa?
PRONOSTICO: ¿Hacia dónde va la empresa?
OBJETIVO: ¿Hacia dónde debería dirigirse la empresa?
ESTRATEGIA: ¿Cuáles son los caminos para llegar al punto señalado?
TACTICA: ¿Qué acciones deberán emprenderse? ¿Por quién y cuándo?
CONTROL: ¿Qué medidas serán tomadas para que se cumplan los resultados?
NIVEL DIRECTIVO
NIVEL 1
PLANEACION INTEGRAL
NIVEL 2
PROGRAMACION CORPORATIVA
NIVEL 3
PROGRAMACION DE LA PRODUCCION
NIVEL 4
PROGRAMACION DE REQUERIMIENTOS
EJECUCION DE PLANES Y PROGRAMAS BASICOS

Mercado Global Nacional	Mercado por Segmentos	Mercado de la Empresa
Productos	Productos de la Competencia	Productos de la Empresa







Obtención de la Demanda Futura por medio de Correlaciones, teniendo en cuenta Estadísticas Históricas y Proyecciones con Indice de Crecimiento Anual.

Técnicas de Correlación Lineal Múltiple

- Estadísticas Históricas
- Flotas de Unidades
- Producto Interno Bruto
- Ventas Totales de Unidades
- Crecimiento de la Población
- Crecimiento de la Industria

Penetración de la Empresa en el Mercado por Linea de Modelo.

- Comportamiento histórico de Modelos
- Cambios y Modificaciones a unidades
- Aceptación de Nuestras unidades
- Pedidos Especiales
- Exportaciones
- Salida del Mercado de Otras Empresas

Pronóstico de Venta a Largo Plazo de la Empresa:

1976
1977
1978
1979
1980
1981

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

PLANEACION Y CONTROL DE LA PRODUCCION

PRONOSTICOS
(ESTUDIOS DE LA DEMANDA)

Importancia
Estudio del comportamiento de la demanda
Estudio de las técnicas y selección del modelo

ING. JORGE RIVERA BENITEZ

SEPTIEMBRE DE 1977.

2.- Método de Regresión

2.1 Método de regresión para un modelo constante

Este método es un caso particular del método de promedios móviles y se presentará en el capítulo 3. Sin embargo se enunciará escuetamente

Teorema 2.1. Considere una colección de variables aleatorias $\{Y_t : t \in \Lambda\}$ con una realización $\{y_t : t \in \Lambda\}$ y $\Lambda = \{1, 2 \ldots T\}$ que siguen el modelo

$$\left.\begin{array}{ll} Y_T = \beta_0 + \varepsilon_t & ; \; t \in \Lambda \\ E[\varepsilon] = \mathbb{0} & ; \; \Sigma_\varepsilon = \sigma^2 I \end{array}\right\} (*)$$

1.- El estimador $\hat{\beta}_0$ de β según criterio de mínimo cuadrado, es.

$$\hat{\beta}_0 = \sum_{t=1}^{T} y_t / T \equiv \hat{\beta}_0 (T) \qquad (2.1)$$

2.- El pronóstico para un tiempo futuro $T+\tau$ para todo τ, ($\tau = 1, 2 \ldots$) es

$$\hat{y}_{T+\tau} = \hat{\beta}_0 \qquad (2.2)$$

Demostración.- Se presenta en la sección 3.1 del capítulo 3 ya que esta técnica de regresión, un caso particular de los promedios móviles simples con $N = T$

2.2 Metodo de regresión para un modelo [illegible] simple

Teorema 2.2 Sea $\{ y_t : t \in \Lambda \}$ una realización de la colección $\{ Y_t : t \in \Lambda \}$ con $\Lambda = \{1, 2 \ldots T\}$

Sea

$$\left. \begin{aligned} Y_T &= \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t \\ E[\varepsilon] &= \mathbb{0} \quad ; \quad \Sigma_\varepsilon = \sigma^2 I \end{aligned} \right\} (**)$$

El modelo propuesto para esta realización [illegible]

1.- los estimadores $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ de β_0 y β_1 respectivamente de acuerdo al criterio de mínimos cuadrados son

i) $$\hat{\beta}_0 = \frac{2(2T+1)}{T(T-1)} \sum_{t=1}^{T} y_t - \frac{6}{T(T-1)} \sum_{t=1}^{T} t\, y_t \equiv \hat{\beta}_0(T) \quad (2.1)$$

ii) $$\hat{\beta}_1 = \frac{12}{T(T^2-1)} \sum_{t=1}^{T} t\, y_t - \frac{6}{T(T-1)} \sum_{t=1}^{T} y_t \equiv \hat{\beta}_1(T) \text{ - } [illegible]$$

Demostración.- Si $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son estimadores de [illegible] respectivamente, entonces la combinación lineal

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$$

de ellos será un estimador si resulta un [illegible] candidato para el valor esperado $E[Y_t]$ ya que estamos suponiendo un modelo lineal [illegible] la forma [**]. Llamando $\hat{Y}_t$ al estimador de $E[Y_t]$ entonces el $\hat{Y}_t$ propuesto [illegible]

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$$

Nota.- Los valores de los estimadores $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ fueron calculados en base a un número T de datos históricos, por lo que su valor depende de este número T de datos disponibles. Por esta razón los valores de $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ se han indicado por $\hat{\beta}_0(T)$ y $\hat{\beta}_1(T)$ para hacer incapié que están calculados en base a un número T de datos.

1.- El sistema normal (2.3) matricialmente puede expresarse por:

$$\begin{bmatrix} T & \sum_{t=1}^{T} t \\ \sum_{t=1}^{T} t & \sum_{t=1}^{T} t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T} y_t \\ \sum_{t=1}^{T} t\, y_t \end{bmatrix}$$

Por lo que:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & \sum_{t=1}^{T} t \\ \sum_{t=1}^{T} t & \sum_{t=1}^{T} t^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T} y_t \\ \sum_{t=1}^{T} t\, y_t \end{bmatrix}$$

Ya que la matriz $\begin{bmatrix} T & \sum_{t=1}^{T} t \\ \sum_{t=1}^{T} t & \sum_{t=1}^{T} t_2 \end{bmatrix}$ es 2×2, su inversa puede calcularse fácilmente (ver apéndice A) esto es:

$$\begin{bmatrix} T & \sum_{t=1}^{T} t \\ \sum_{t=1}^{T} t & \sum_{t=1}^{T} t^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{T\sum_{t=1}^{T} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{T} t\right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T} t^2 & -\sum_{t=1}^{T} t \\ -\sum_{t=1}^{T} t & T \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{T\sum_{t=1}^{T} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{T} t\right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T} t^2 & -\sum_{t=1}^{T} t \\ -\sum_{t=1}^{T} t & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum y_t \\ \sum t\, y_t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{T\sum_{t=1}^{T} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{T} t\right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T} t^2 \sum_{t=1}^{T} y_t - \sum_{t=1}^{T} t \sum_{t=1}^{T} t\, y_t \\ -\sum_{t=1}^{T} t \sum_{t=1}^{T} y_t + T\sum_{t=1}^{T} t\, y_t \end{bmatrix}$$

Realizando operaciones se puede mostrar que los valores de $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ así obtenidos coinciden con los obtenidos sin el uso de matrices.

2. Otra expresión común para el termino $T\sum_{t=1}^{T} t^2 \ldots$

es

$$T\sum_{t=1}^{T} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{T} t\right)^2 = T\sum_{t=1}^{T} (t-\bar{t})^2$$

donde $\bar{t} = \sum_{t=1}^{T} t \,/\, T$. Se puede probar que ...

3. Es conveniente expresar el modelo (*) en forma matricial, ya que los resultados sobre propiedades de los estimadores se simplifican considerablemente, además de que la generalización de los resultados es directa para modelos más complicados. El modelo (**) en forma explícita es

$$Y_1 = \beta_0 + \beta_1 \cdot 1 + \varepsilon_1$$
$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 \cdot 2 + \varepsilon_2$$
$$\vdots$$
$$Y_T = \beta_0 + \beta_1 \cdot T + \varepsilon_T$$

El cual matricialmente resulta

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{bmatrix}$$

Llamando Y, X, β y ε por

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{bmatrix}$$

el sistema queda representado por

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

4. Nótese que la matriz que apareció en el sistema normal (2.4) es $X'X$ donde X' es la traspuesta de X. Para justificar esta afirmación realizamos este producto.

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & \sum_{t=1}^{T} t \\ \sum_{t=1}^{T} t & \sum_{t=1}^{T} t^2 \end{bmatrix}$$

Tambien notese que el lado derecho de (2.4) se puede escribir por el producto $X'Y$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdot & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T} t \\ \sum_{t=1}^{T} t Y_t \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el sistema normal (2.4) se puede escribir por

$$(X'X)\,\hat{\beta} = (X'Y),$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

donde $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}$ es el vector de estimadores para el vector de parametros $\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$

Esta expresion, $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)$, para $\hat{\beta}$ se puede ~~derivar~~ directamente de expresando 2 en forma ma[illegible] y utilizando el concepto de derivada de una ~~[illegible]~~ funcion vectorial

TEOREMA 2.3 (PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$)

Para el modelo lineal (**), los estimadores de sus parametros tienen las siguientes propiedades

1. $E[\hat{\beta}_0] = \beta_0$, $E[\hat{\beta}_1] = \beta_1$

   ie $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son insesgados para β_0 y β_1 respectivamente

2. $$Var(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2 \sum_{t=1}^{T} t^2}{T \sum_{t=1}^{T} (t-\bar{t})^2}$$

   $$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T} (t-\bar{t})^2}$$

3. $$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\frac{\sigma^2 \bar{t}}{\sum_{t=1}^{T} (t-\bar{t})^2} \quad ; \quad \bar{t} = \sum_{t=1}^{T} t / T$$

DEMOSTRACION. La prueba de 1, es elemental. Las otras no tan elementales, las puede encontrar en Mood, Graybill, Boes, INTRODUCTION TO THE THEORY OF STATISTICS, 3a. ed., Mc Graw Hill 1974.

NOTA El teorema anterior matricialmente expresa lo siguiente.

La parte 1, dice

$$E[\hat{\beta}] = \beta$$

Las partes 2 y 3, se pueden escribir asi

$$\Sigma_{\hat{\beta}} = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

Recuerde que $Var(\hat{\beta}_0) = cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_0)$ y $Var(\hat{\beta}_1) = cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_1)$ por lo que sus varianzas se pueden incorporar en la matriz $\Sigma_{\hat{\beta}}$.

TEOREMA 2.4 Para un modelo de tendencia lineal (**) el pronóstico para un tiempo futuro $T+\tau$ es

$$\hat{y}_{T+\tau} = \hat{\beta}_0(T) + \hat{\beta}_1(T) \cdot [T+\tau]$$

DEMOSTRACION

Ya que $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son insesgados para β_0 y β_1 respectivamente, se puede facilmente probar que cualquier combinacion lineal de $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ es insesgada para el mismo tipo de combinación de los respectivos parametros que están estimando, i.e si un estimador $\hat{\theta}$ esta dado por

$$\hat{\theta} = r_1 \hat{\beta}_0 + r_2 \hat{\beta}_0 \quad , \quad r_1, r_2 \text{ son reales}$$

entonces $\hat{\theta}$ es insesgado para el parametro θ definido por

$$\theta = r_1 \beta_0 + r_2 \beta_1$$

o sea que $E[\hat{\theta}] = \theta$. Facilmente se puede probar esta última igualdad.

La condicion suficiente (no necesaria) para que esta igualdad sea válida es que $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ sean

Insesgados: El caso que muestra que ... es necesario se presenta en el método de promedios móviles dobles vía heurística (... y capítulo 3).

Utilizando el resultado anterior vemos que un estimador para $E[Y_t]$ es la combinación lineal

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$$

Para un período futuro $T+\tau$ el pronóstico entonces también será de la misma forma, o sea

$$\hat{Y}_{T+\tau} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot (T+\tau)$$

Ya que hemos que escribiremos $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ por $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_1(T)$ y $\hat{\beta}_2 \equiv \hat{\beta}_2(T)$ para hacer incapié en que fueron calculados en base a un conjunto histórico $\Delta = \{1, 2, \ldots, T\}$ de T datos, entonces el pronóstico es expresado en la forma

$$\hat{Y}_{T+\tau} = \hat{\beta}_0(T) + [\hat{\beta}_1(T)] \cdot (T-\tau)$$

EJEMPLO. El registro de la demanda semanal de un producto ... es mostrado en la tabla de abajo. Use estos datos para estimar los pa- rametros en el modelo de tendencia lineal.

Semana (t)	Demanda (y_t)
1	10
2	12
3	15
4	18
5	20

Aplicando $\longrightarrow$ teorema 2.2 $\longrightarrow$ se tiene

$$\sum_{t=1}^{5} {}_{t} = 75 \qquad \sum_{t=1}^{5} t y_t = 251$$

$$\hat{\beta}_0(5) = \frac{2(11)}{5(4)}(75) - \frac{6}{5(4)}(251) = 7.2$$

$$\hat{\beta}_1(5) = \frac{12}{5(24)}(251) - \frac{6}{5(4)}(75) = 2.6$$

Aplicando teorema 2.4 $\longrightarrow$ la ecuación de pronóstico es

$$\hat{y}_{5+\tau} = 7.2 + 2.6(5+\tau)$$

El pronóstico de la demanda para la siguiente semana, es decir, $\tau=1$, es

$$\hat{y}_6 = 7.2 + 2.6(6) = 22.8 \approx 23$$

APLICACION DE REGRESION EN MODELOS ESTRUCTURALES Y ECONOMETRICOS

Un modelo estructural es un conjunto de funciones matemáticas las cuales intentan representar relaciones que describen los factores que controlan la variable que se desea predecir así como los medios disponibles para el que realiza la predicción. Ilustraremos esta metodología con el siguiente ejemplo:

Ejemplo (Evaluación de Proyectos de Inversión en Perspectiva)

Para esta evaluación se necesita primero la evaluación del beneficio futuro y por lo tanto del precio del bien que esta siendo producido. Seguiremos la nomenclatura que se presenta a continuación para el análisis de nuestro problema:

Q_t^s : cantidad suministrada al mercado en el tiempo t

Q_t^d : cantidad demandada en el mercado en el tiempo t

P_t : precio en el tiempo t

W_t : salario pagado, por hora, en la industria en el tiempo t

Y_t : ingreso del consumidor en el tiempo t

En nuestro ejemplo consideraremos que se sigue el modelo más simple en la interrelación de la economía de la firma por lo que supondremos que el precio está determinado, en un mercado competitivo, por las funciones de oferta-demanda.

En el modelo de oferta-demanda que se postula se considera:

i) Q_t^s depende del precio P_t y de W_t

ii) Q_t^d depende del precio P_t y del ingreso Y_t del consumidor

Por lo tanto, matematicamente nuestro modelo es:

$$\begin{aligned} Q_t^s &= f_s(P_t, W_t) \\ Q_t^d &= f_d(P_t, Y_t) \end{aligned} \qquad (*)$$

Para la completa especificación del modelo (*) deberán realizarse las siguientes etapas:

1a. etapa: (Especificación de las funciones f_s y f_d)

En la práctica consideramos que f_s y f_d son lineales.

$$Q_t^s = \alpha_o + \alpha_1 P_t + \alpha_2 W_t \qquad (1)$$

$$Q_t^d = \beta_o + \beta_1 P_t + \beta_2 Y_t \qquad (2)$$

donde α_i (i=0,1,2) y β_j (j=0,1,2) son coeficientes constantes pero desconocidos.

2nd. etapa: (Inferencia de los parámetros del modelo)

Esta etapa consiste en la estimación de los valores para los coeficientes desconocidos α_i, β_j a partir de datos históricos de las variables

$$Q_t^s,\ P_t,\ W_t,\ Q_t^d,\ Y_t$$

En esta inferencia introduciremos las variables aleatorias $\xi_{s,t}$, $\xi_{d,t}$ en (1) y (2) respectivamente, las cuales representan los errores (disturbancias) asociados en las ecuaciones teóricas propuestas. Se considera que $\xi_{s,t}$ y $\xi_{d,t}$ son variables aleatorias con media cero.

$$Q_t^s = \alpha_o + \alpha_1 P_t + \alpha_2 W_t + \xi_{s,t} \qquad (3)$$

$$Q_t^d = \beta_o + \beta_1 P_t + \beta_2 Y_t + \xi_{d,t} \qquad (4)$$

La determinación de α_i y β_j se hace a través de técnicas de regresión.

NOTAS:

i) Ya que el modelo formado por las ecuaciones (3) y (4) se origina en un contexto económico, también es llamado un modelo econométrico.

ii) La estimación de los coeficientes es un problema en la aplicación de la teoría de la econometría.

3ra. etapa: (Predicción de los precios futuros)

Suponga que nos son dados los valores futuros de

$$W_t, \; Y_t, \quad \xi_{s,t}, \quad \xi_{d,t}$$

y deseamos conocer valores futuros de precio y cantidades suministradas y demandadas en el mercado. Ya que en el sistema (3) y (4) tenemos tres incognitas

$$Q^s_t, \; Q^d_t, \; P_t$$

y dos ecuaciones, podemos resolver este sistema usando la condición de equilibrio en un mercado competitivo perfecto:

$$Q^s_t = Q^d_t$$

con lo cual obtenemos

$$P_t = \frac{(\beta_0 + \beta_2 Y_t + \xi_{d,t}) - (\alpha_0 + \alpha_2 W_t + \xi_{s,t})}{(\alpha_1 - \beta_1)}$$

NOTAS:

i) En la práctica no se tiene información sobre las disturbancias, sin embargo se puede considerar que son iguales a

$E(\xi_{s,t})=0$ y $E(\xi_{d,t})=0$

ii) W_t y Y_t fueron consideradas conocidas o que se habían determinado fuera del modelo (variables exógenas). Su determinación podría ser otro problema de predicción o se usaría predicciones subjetivas (intuitivas) para considerar al salario y al ingreso como entradas al modelo. Sin embargo en esta última situación, también podría preferirse confiar directamente en una predicción intuitiva del precio ya que probablemente se tenga más confianza en nuestro "sentimiento" que tenemos sobre nuestro mercado que en magnitudes tan relativas e intangibles como ingreso del consumidor.

Fuentes de error en la predicción cuando se emplea el modelo estructural:

i) salarios e ingresos futuros diferirán de los valores supuestos cuando el modelo fue resuelto para obtener predicciones

ii) valores reales de disturbancias futuras diferirán de cero

iii) error de muestreo que se presenta en la estimación de los coeficientes en la etapa segunda

iv) error de especificación del modelo, es decir, la estructura misma puede ser deficiente en algún aspecto, por ejemplo, la relación de oferta-demanda podría ser no-lineal, en lugar de lineal como supusimos

3. TECNICAS DE PROMEDIOS MOVILES

DADA UNA SERIE $\{y_t : t \in \Delta\}$, $\Delta = \{1, 2, ..., T\}$, las técnicas de promedios móviles consisten en aplicar el criterio de mínimos cuadrados a un subconjunto de tamaño N, $N \leq T$, de la serie $\{y_t : t \in \Delta\}$. Para un tamaño N dado, el subconjunto que se considera es aquel que comprende los últimos N datos de la serie, es decir, el subconjunto de interés es:

$$\{y_{T-N+1}, y_{T-N+2}, ..., y_{T-N+N} \equiv y_T\}$$

El factor de prioridad que se da en el criterio de mínimos cuadrados es constante para cada uno de los términos de ese subconjunto y es igual a 1. El procedimiento general se bosqueja a continuación para un modelo:

$$y_t = \varphi(t) + \varepsilon_t$$

donde $\varphi(t)$ depende de parámetros desconocidos, el criterio de mínimos cuadrados es encontrar los parámetros desconocidos que minimizan:

$$Z = \sum_{t=T-N+1}^{T} w_t \left(y_t - \varphi(t)\right)^2$$

$$\text{DONDE: } w_t = 1 \quad ; \quad t = T-N+1, T-N+2, ..., T$$

Ya que N es un valor prefijado los estimadores que minimizen Z dependerán de N, veremos en este capítulo que consecuencia tiene el elegir un N pequeño o uno grande.

En este capítulo presentaremos este procedimiento para modelar constantes y con tendencia lineal, ie aquellos en los que $\varphi(t)$ este dada por $\varphi(t) = \beta_0 + \varepsilon_t$ y $\varphi(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$ respectivamente.

3.1 MODELO CONSTANTE.

En esta sección, consideramos un modelo constante dado por

$$y_t = \beta_0 + \varepsilon_t \quad ; \quad t \in \Delta$$

donde β_0 es un parámetro desconocido y ε_t es una variable aleatoria tal que

$$\begin{aligned} &i) \quad E(\varepsilon_t) = 0 \quad ; \quad t \in \Delta \\ &ii) \quad Var(\varepsilon_t) = \sigma^2 \quad ; \quad t \in \Delta \\ &iii) \quad cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0 \quad ; \quad t \neq t' \end{aligned}$$

NOTAS.

1.- La condición i) implica que la media de las disturbancias ε_t es igual a cero para toda $t \in \Delta$.

2.- La condición ii) implica que la variancia es constante e igual a σ^2 para todas las disturbancias.

3.- La condición iii) significa que las disturbancias son independientes una de otra. Para ver esta interpretación considere que la covariancia de ε_t y $\varepsilon_{t'}$ se define por:

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = E\left[(\varepsilon_t - E(\varepsilon_t))(\varepsilon_{t'} - E(\varepsilon_{t'}))\right]$$

y es equivalente a escribirla por

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t'}) - E(\varepsilon_t) E(\varepsilon_{t'})$$

Ahora la condición de independencia de ε_t y $\varepsilon_{t'}$ implica que:

$$E[\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}] = E[\varepsilon_{t'}, \varepsilon_t]$$

por lo que sustituyendo $E[\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}]$ en la última expresión para $\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'})$ se tiene que:

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = E(\varepsilon_t) E(\varepsilon_{t'}) - E(\varepsilon_t) E(\varepsilon_{t'}) = 0$$

4. Las condiciones del i) al iii) se pueden escribir en forma más compacta a través de matrices.

Para esta representación defina ε como un vector columna dado por

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{bmatrix}$$

entonces la condición i) se puede escribir por

$$E[\varepsilon] = \mathbb{O}$$

donde $\mathbb{O}$ es un vector columna con todos sus elementos iguales a cero.

Si Σ_ε es la matriz de covariancias de las componentes de ε, o sea

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{bmatrix} \mathrm{cov}(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & \mathrm{cov}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & \mathrm{cov}(\varepsilon_1,\varepsilon_T) \\ \mathrm{cov}(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & \mathrm{cov}(\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & \mathrm{cov}(\varepsilon_2,\varepsilon_T) \\ \vdots & \vdots & & \\ \mathrm{cov}(\varepsilon_T,\varepsilon_1) & \mathrm{cov}(\varepsilon_T,\varepsilon_2) & \cdots & \mathrm{cov}(\varepsilon_T,\varepsilon_T) \end{bmatrix}$$

entonces las condiciones ii) y iii) quedan dadas por:

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 I$$

5. Usando las notaciones anteriores el modelo constante [es dado] por:

$$\left.\begin{aligned} y_t &= \beta_0 + \varepsilon_t \quad ; \quad t \in A \\ E[\varepsilon] &= \mathbb{O} \quad ; \quad \Sigma_\varepsilon = \sigma^2 I \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

TEOREMA 3.1 (TECNICA DE PROMEDIOS MOVILES SIMPLES).

CONSIDERE UNA SERIE DE TIEMPO $\{y_t : t \in \Delta\}$ QUE SIGUE EL MODELO CONSTANTE

$$\left.\begin{array}{l} y_t = \beta_0 + \varepsilon_t \; ; \quad t \in \Delta \\ E[\varepsilon_t] = 0 \; ; \quad \Sigma_\varepsilon = \sigma^2 I \end{array}\right\} \qquad (*)$$

PARA UN N PREFIJADO, SE TIENE

i) EL ESTIMADOR $\hat{\beta}_0$ DE β_0 SEGUN EL CRITERIO DE MINIMOS CUADRADOS ES

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{N} \sum_{t=T-N+1}^{T} y_t \equiv M_t \qquad (3.1)$$

O ALTERNATIVAMENTE POR

$$M_T = M_{T-1} + \frac{y_t - y_{t-N}}{N} \qquad (3.2)$$

ii) EL PRONÓSTICO PARA UN TIEMPO FUTURO $T+\tau$ ES

$$y_{T+\tau} = \hat{\beta}_0 \equiv M_T \qquad (3.3).$$

DEMOSTRACIÓN DE i)

LA SERIE EN EL TIEMPO $\{y_t : t \in \Delta\}$ DEBE CONSIDERARSE COMO LOS VALORES QUE TOMARÓN LAS VARIABLES ALEATORIAS Y_t. POR LO TANTO AL HABLAR DE LA COLECCIÓN DE OBSERVACIONES $\{y_t : t \in \Delta\}$ ESTAMOS IMPLICITAMENTE HABLANDO DE LA COLECCIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS $\{Y_t : t \in \Delta\}$ QUE TOMARA LOS VALORES $\{y_t, t \in \Delta\}$ EN EL PERIODO HISTORICO $\Delta = \{1, 2, \ldots, T\}$. TAMBIEN SE DICE QUE $\{y_t, t \in \Delta\}$ ES UNA REALIZACIÓN DE $\{Y_t : t \in \Delta\}$.
SI SUPONEMOS EL MODELO

$$Y_t = \beta_0 + \varepsilon_t$$

TENEMOS QUE EL VALOR ESPERADO DE Y_t ES

$$E[Y_t] = E[\beta_0 + \varepsilon_t]$$

$$E[Y_t] = E[\beta_0] + E[\varepsilon_t]$$

YA QUE β_0 ES UNA CONSTANTE, ENTONCES $E[\beta_0] = \beta_0$ Y TOMANDO LA HIPÓTESIS DE QUE $E[\varepsilon_t] = 0$ ENTONCES $E[Y_t] = \beta_0$
LLAME $\hat{Y}_t$ AL ESTIMADOR DE $E[Y_t]$, SI $\hat{\beta}_0$ ES UN ESTIMADOR DE β_0 ENTONCES EL ESTIMADOR $\hat{Y}_t$ DE $E[Y_t]$ ESTARA DADO POR

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0$$

OTRA NOTACIÓN PARA EL ESTIMADOR $\hat{Y}_t$ ES $\hat{E}[Y_t]$.
ENTONCES SI $\hat{\beta}_0$ ES USADO COMO ESTIMADOR DE β_0 Y $\hat{y} = \hat{\beta}_0$ ES

el estimador del valor medio de Y_t, $E[y_t]$, la desviación de la observación y_t de su valor medio es

$$d_t = y_t - \hat{y}_t$$
$$d_t = y_t - \hat{\beta}_0$$

El mejor estimador $\hat{\beta}_0$ de β_0, según el criterio de mínimos cuadrados, es aquel $\hat{\beta}_0$ que minimize la suma de los cuadrados de las desviaciones d_t. Sin embargo ya que el método de promedios móviles sólo considera relevante al subconjunto más reciente de observaciones, entonces para una N fija, el método de promedios móviles establece que el mejor estimador $\hat{\beta}_0$ sea aquel que minimize las desviaciones de las últimas N observaciones ó sea encontrar aquel $\hat{\beta}_0$ que minimize:

$$Z = \sum_{t=T-N+1}^{T} d_t^2$$

$$Z = \sum_{t=T-N+1}^{T} (y_t - \hat{\beta}_0)^2$$

Nótese que Z es una función de $\hat{\beta}_0$, $Z = g(\beta_0)$, por lo que el valor $\hat{\beta}_0$ que minimize Z será aquel que satisface la siguiente igualdad

$$\frac{dZ}{d\hat{\beta}_0} = 0$$

Ahora la derivada de Z con respecto a $\hat{\beta}_0$ es

$$\frac{dZ}{d\beta_0} = 2 \sum_{t=T-N+1}^{T} (y_t - \hat{\beta}_0)(-1)$$

Igualando a cero resulta

$$2 \sum_{t=T-N+1}^{T} (y_t - \hat{\beta}_0)(-1) = 0$$

$$\sum_{t=T-N+1}^{T} (y_t - \hat{\beta}_0) = 0$$

$$\sum_{t=T-N+1}^{T} y_t - N\hat{\beta}_0 = 0$$

$$\hat{\beta}_0 = \sum_{t=T-N+1}^{T} y_t / N \qquad \square$$

La prueba de (3 2) es elemental.

DEMOSTRACION DE ii)

Ya que el modelo considerado es

$$y_t = \beta_0 + \varepsilon_t$$

y debido a que ε_t es una desturbancia del proceso, entonces el valor de y_t (sin esta desturbancia) es

$$E[y_t] = \beta_0$$

Observese que el valor de y_t no depende de t, por lo que para cualquier tiempo futuro $t = T+\tau$, el valor del proceso será

$$E[y_{T+\tau}] = \beta_0$$

Como $\hat{\beta}_0$ es un estimador de β_0, entonces un estimador de $E[y_{T+\tau}]$, indicado por $\hat{y}_{T+\tau}$, es

$$\hat{y}_{T+\tau} = \hat{\beta}_0 \qquad \square$$

NOTAS

0. En el caso de que $N=T$, este método se reduce a uno de regresión

1. Ya que el estimador $\hat{\beta}_0 = \sum_{t=T-N+1}^{T} y_t / N$ depende de T, esta dependencia se enfatiza indicandolo por $\hat{\beta}_0(T)$ o por M_T, o sea

$$\hat{\beta}_0 \equiv \hat{\beta}_0(T) \equiv M_T$$

2. Nótese que el estimador $\hat{\beta}_0 = \sum_{t=T-N+1}^{T} y_t / N$ es el promedio de los últimos N datos, lo que justifica la palabra promedio en el nombre de promedios móviles.

3. Considere la serie

$$\{ y_t : t \in \Lambda \}$$

Con conjunto indicador histórico $\Lambda = \{1, 2, \ldots, T\}$, en base a la cual se ha encontrado el estimador $\hat{\beta} = M_T$.

Sea $\{ y_t : t \in \Lambda' \}$ la serie con conjunto histórico $\Lambda' = \{1, 2, \ldots, T, T+1\}$ que se genera al agregar el valor observado y_{T+1} cuando transcurre una unidad de tiempo. En base a esta información adicional deseamos reactualizar el estimador $\hat{\beta}_0$. El valor del estimador $\hat{\beta}_0$ considerando la información más reciente de y_{T+1}, estará dada por el promedio de las observaciones ( ) del subconjunto de las últimas N observaciones el cual se obtiene añadiendo la información mas reciente y descontando la mas vieja del subconjunto considerado antes de conocers.

el valor de y_{T+1}. Sin embargo en lugar de determinar el promedio de los N datos, cada vez que se agrega una observación, el cálculo del estimador se facilita usando la ecuación recursiva

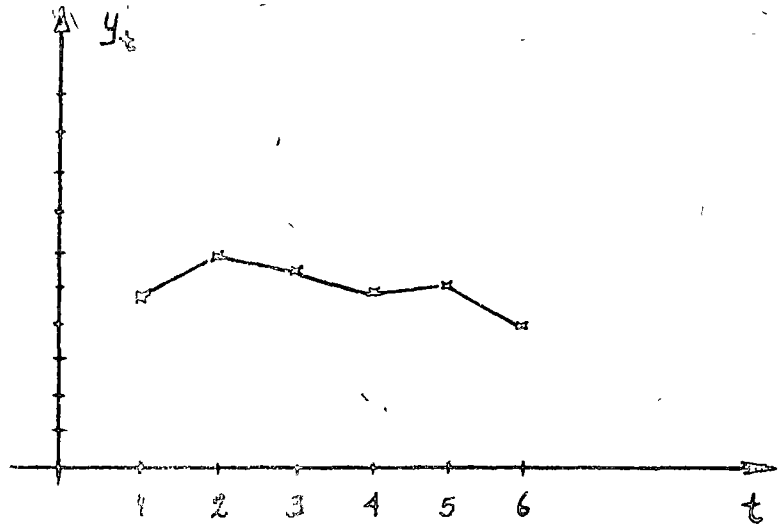
$$M_T = M_{T-1} + \frac{y_T - y_{T-N}}{N}$$

Debido a que cada vez que agregamos una información reciente estamos calculando el promedio de N datos que incluyen este valor más reciente, se justifica el nombre de promedios móviles.

EJEMPLO. Considere la demanda de un gato hidráulico durante seis meses que se muestra abajo

t	y_t
1	19
2	24
3	22
4	19
5	20
6	16

La gráfica de esta demanda es



Observando esta gráfica podemos suponer que un modelo constante es apropiado para representar la serie o sea $y_t = \beta_0 + \varepsilon_t$

Por lo tanto eligiendo la técnica de promedios móviles con $N = 6$, deseamos determinar el parámetro $\hat{\beta}_0$ de β_0 para pronosticar la demanda futura.

El estimador $\hat{\beta}_0$ para β_0, siguiendo el método de promedios móviles (fórmula 3.1) es

$$M_T = \frac{1}{N} \sum_{t=T-N+1}^{T} y_t$$

Ya que disponemos de seis datos históricos, $T=6$

y tomando en cuenta que se fijó $N=6$, resulta que

$$M_6 = \frac{1}{6}\left[19+24+22+19+20+16\right] = 20$$

Por lo tanto, el estimador de β_0 en base a un conjunto histórico de 6 elementos es $\hat{\beta}_0 = M_6 = 20$.

El pronóstico para un periodo futuro $T+\tau$, según fórmula 3.2, es

$$\hat{y}_{T+\tau} = \hat{\beta}_0 = 20$$

Nótese que este no depende de τ, por lo que el pronóstico para cualquiera de las semanas futuras es de 20 unidades.

Suponga que una vez transcurrida la séptima semana se observa que la demanda real es $y_7 = 22$. Deseamos reajustar nuestro estimador $\hat{\beta}_0$ al introducir esta nueva observación. Para esto adicionamos la observación y_7 y descartamos la y_1 para que el número de datos a considerar en el promedio siga siendo $N=6$, entonces el estimador sería

$$M_7 = \frac{1}{6}\left[24+22+19+20+16+22\right] = 20.5$$

o usando la ecuación 3.2, se tiene

$$M_7 = 20 + \frac{22-19}{6} = 20.5$$

PROPOSICION 3.2 El estimador $\hat{\beta}_0$ de β_0 dado por promedios móviles tiene las siguientes características

1. $E[\hat{\beta}_0] = \beta_0$, i.e. $\hat{\beta}_0$ es insesgado ---(3.4)
2. $Var[\hat{\beta}_0] = Var[\varepsilon_t]/n \equiv \sigma^2/n$. ____(3.5)

DEMOSTRACION

1. Sabemos que $\hat{\beta}_0 = \sum_{t=T-N+1}^{T} y_t/N$, entonces

$$E[\hat{\beta}_0] = E\Big[\sum_{t=T-N+1} y_t/N\Big]$$

$$= \frac{1}{N} E\Big[\sum_{t=T-N+1}^{T} y_t\Big]$$

Ya que $E[y_{t-N+1}] = E[y_{t-N+2}] = \ldots = E[y_T] = \beta_0$, entonces

$$E[\hat{\beta}_0] = \frac{1}{N} N \beta_0 = \beta_0 \quad \square$$

2. $Var(\hat{\beta}_0) = Var\Big(\sum_{t=T-N+1}^{T} y_t/N\Big)$

Por la hipótesis de independencia de las ε_t, la cual implica independencia de las y_t, y usando resultado de apéndice B, se tiene que

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sum_{t=T-N+1}^{T} 1/N^2 \; Var(y_t)$$

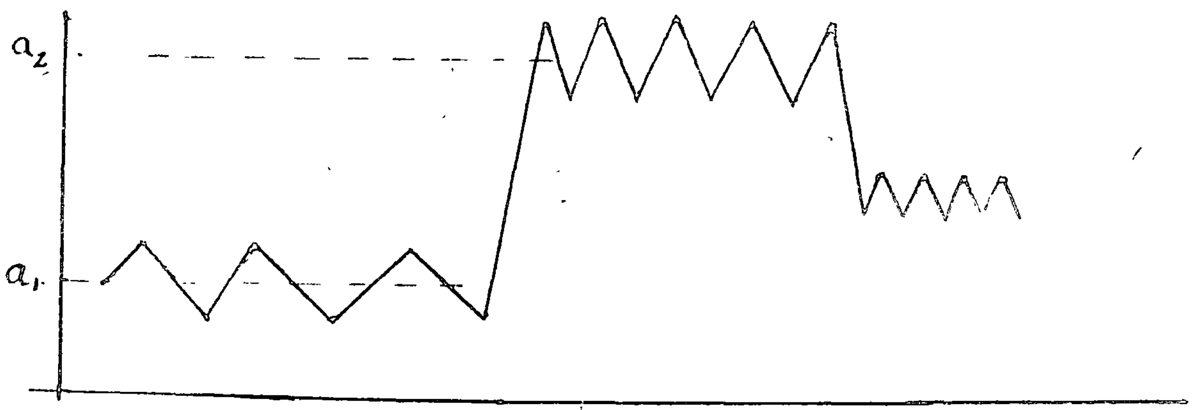
Ya que $Var(y_{t-N+1}) = Var(y_{t-N+2}) = \ldots = Var(y_T) = Var(\varepsilon_T) = \sigma^2$ entonces

$$Var(\hat{\beta}_0) = \frac{1}{N^2}\left[N\sigma^2\right] = \sigma^2/N \qquad \square$$

NOTA

El comportamiento del estimador $\hat{\beta}_0 = \sum_{t=T-N+1}^{N} y_t/N$ por el método de promedios móviles es una función de N, el número de observaciones que se desean promediar. Se analizará cuando es conveniente elegir un valor grande de N y cuando un valor pequeño

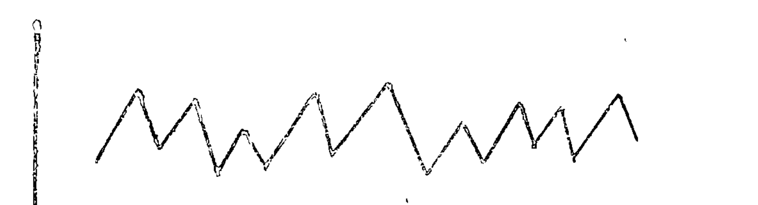
i) Si el parámetro β_0 del proceso (como el mostrado abajo) cambia súbitamente de un valor $\beta_0 = a_1$ a un valor $\beta_0 = a_2$, se necesitará que N sea pequeña para que al calcular M_T no se tomen datos mas viejos ya que estos ya no proporcionarán una buena evaluación del nuevo parámetro $\beta_0 = a_2$. Nótese que, si se elige un valor grande de N entonces si se estarán tomando los primeros datos los cuales ya no representan el comportamiento del proceso. Por esta razón se dice que cuando N es grande, el método de promedios móviles reacciona lentamente a cambios súbitos del parámetro β_0 del proceso.



ii) Si el parámetro β_0 del proceso no cambia (como el mostrado abajo) entonces se desea que N sea grande, ya que para N grande se obtendrá un estimador $\hat{\beta}_0$ con menor variancia porque

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sigma^2/N \to 0 \text{ cuando } N \to \infty$$

lo cual es una característica deseable para un estimador



3.2 MODELO CON TENDENCIA LINEAL

Para una serie $\{y_t : t \in \Lambda\}$ vamos a considerar ... de estimación y pronósticos cuando la serie sigue ... delo:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t \qquad ; \; t \in \Lambda$$

donde los ε_t son variables aleatorias con media cero, variancia constante σ^2 e independientes; o sea que:

$$E[\varepsilon] = \mathbb{O} \qquad ; \qquad \Sigma_\varepsilon = \sigma^2 I$$

DESARROLLO HEURISTICO

El desarrollo heurístico es un proceso lógico, pero no está basado en algún criterio de optimalidad como el de mínimos cuadrados. Sin embargo, los resultados que se obtienen son equivalentes a los que se llegan por mínimos cuadrados. En el proceso heurístico que presentaremos, se requieren resultados de la siguiente proposición.

PROPOSICION 3.3. Sea $\{y_t : t \in \Lambda\}$ una serie de tiempo ... conjunto histórico $\Lambda = \{1, 2, \ldots, T\}$, la cual sigue el modelo

$$\left.\begin{array}{l} y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t \\ E[\varepsilon] = \mathbb{O} \; ; \; \Sigma_\varepsilon = \sigma^2 I \end{array}\right\} \quad (**)$$

Para una N fija, sea:

$$M_T = \sum_{t=T-N+1}^{T} y_t / N \qquad (3.6)$$

el promedio móvil de los últimos N datos.

Sea

$$M_T^{[2]} = \sum_{t=T-N+1}^{T} M_t / N \qquad (3.7)$$

el promedio móvil de los últimos N promedios móviles M_T, $t = T-N+1, T-N+2, \ldots\ldots, T$.

Se afirma

$$i)\ E[Y_t] = \beta_0 + \beta_1 t \qquad (3.8)$$

$$ii)\ E(M_T) = \beta_0 + \beta_1 T - \frac{N-1}{2}\beta_1 \equiv E(y_T) - \frac{N-1}{2}\beta_1 \qquad (3.9)$$

$$iii)\ E(M_T^{[2]}) = \beta_0 + \beta_1 T - (N-1)\beta_1 \qquad (3.10)$$

DEMOSTRACION DE $i)$

$$E[Y_t] = E[\beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t] = \beta_0 + \beta_1 T + E[\varepsilon_t]$$

Por hipótesis $E[\varepsilon_t] = 0$, por lo que:

$$E[Y_t] = \beta_0 + \beta_1 T \qquad \square$$

DEMOSTRACION DE $ii)$

$$E[M_T] = E\left(\sum_{t=T-N+1}^{T} y_t / N\right)$$

$$= E\left(\sum_{t=T-N+1}^{T} (\beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t) / N\right)$$

$$= \frac{1}{N} E\left[N\beta_0 + \beta_1 \sum_{t=T-N+1}^{T} t + \sum_{t=T-N+1}^{T} \varepsilon_t\right]$$

$$E[M_T] = \frac{1}{N} N\beta_0 + \beta_1 E\left(\sum_{t=T-N+1}^{T} t\right) + E\left(\sum_{t=T-N+1}^{T} \varepsilon_t\right)$$

Nótese que $E(\varepsilon_t) = 0$ para toda t, por lo tanto:

$$E\left(\sum_{t=T-N+1}^{T} \varepsilon_t\right) = \sum_{t=T-N+1}^{T} E(\varepsilon_t) = 0 \qquad (3.12)$$

También observe que:

$$\sum_{t=T-N+1}^{T} t = \sum_{t=1}^{T} t - \sum_{t=1}^{T-N} t = \frac{T(T+1)}{2} - \frac{(T-N)(T-N+1)}{2} = \frac{N(2T-N+1)}{2}$$

por lo que:

$$E\left(\sum_{t=T-N+1}^{T} t\right) = E\left[\frac{N(2T-N+1)}{2}\right]$$

Ya que N y T son constantes, entonces:

$$E\left(\sum_{t=T-N+1}^{T} t\right) = \frac{N(2T-N+1)}{2} \qquad (3.13)$$

Por lo tanto, sustituyendo (3.12) y (3.13) en (3.11):

$$E[M_T] = \beta_0 + \beta_1 \frac{N(2T-N+1)}{2}$$

$$E[M_T] = \beta_0 + \beta_1 T - \frac{(N-1)}{2} \beta_1$$

$$E[M_T] = E(y_T) - \frac{(N-1)}{2} \beta_1 \qquad \square$$

DEMOSTRACION DE iii) Es similar

NOTAS

1. Llame al valor esperado $E[y_t] = \beta_0 + \beta_1 t$, por θ, o sea

$$\theta = \beta_0 + \beta_1 T \equiv E[y_t]$$

Es de desearse un estimador $\hat{\theta}$ para θ que sea insesgado, o sea, un $\hat{\theta}$ tal que:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

Si proponemos que ese estimador insesgado sea $\hat{\theta} = M_T$ vemos por la ecuación (3.9) que:

$$E(\hat{\theta}) \equiv E(M_T) = \beta_0 + \beta_1 T + \frac{N-1}{2}\beta_1 = \theta + \frac{N-1}{2}\beta_1$$

lo cual implica que: $E[\hat{\theta}] \neq \theta$, por lo que $\hat{\theta} \equiv M_T$ no es insesgado para el valor medio de y_t.

Sin embargo, trivialmente se puede decir que M_T es un estimador insesgado de su propio valor esperado $E(M_T)$. Este razonamiento trivial se obtiene de la siguiente manera: Considere que Z es una variable aleatoria cuyo valor esperado es μ, $\mu = E(Z)$, deseamos encontrar un estimador $\hat{\mu}$ para μ. Proponemos que este $\hat{\mu}$ esté dado por el promedio de n observaciones de Z con $n=1$, o sea

$$\hat{\mu} \equiv \bar{Z} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{1} Z_i}{1} = Z_1$$

donde Z_1 es una observación de Z. Nótese ... $E[\hat{\mu}] = E[Z_1] = \mu$ por lo que el estim... propuesto es insesgado.

Por lo tanto, el que M_T sea un estimador de ... nos motiva a pensar que podemos aproximar $E[M_T]$ por el valor de M_T, o sea $E[M_T] \doteq M_T$.

Por un razonamiento similar podemos decir que $E[M_T^{[2]}] \doteq M_T^{[2]}$

2. Considere las expresiones para los valores esperados de M_T y $M_T^{[2]}$ dados por las ecuaciones (3.8) y ... o sea

$$E(M_T) = \beta_0 + \beta_1 T - \frac{N-1}{2}\beta_1$$

$$E(M_T^{[2]}) = \beta_0 + \beta_1 T - (N-1)\beta_1$$

Resolviendo para β_0 y β_1 el sistema anterior se tiene que

$$\beta_1 = \frac{2}{N-1}\left[E(M_T) - E(M_T^{[2]})\right]$$

$$\beta_0 = 2E(M_T) - E(M_T^{[2]}) - \beta_1 T$$

De acuerdo a la nota 1 anterior, podemos ... a $E(M_T)$ por $E(M_T) \doteq M_T$ y a $E(M_T^{[2]})$ ... $E(M_T^{[2]}) \doteq M_T^{[2]}$, con lo cual sustituyendo ...

en las igualdades anteriores los estimadores para β_0 y β_1 resultan

$$\hat{\beta}_1 = \frac{2}{N-1}\left(M_T - M_T^{[2]}\right) \qquad (3.14)$$

$$\hat{\beta}_0 = 2M_T - M_T^{[2]} - \hat{\beta}_1 T \qquad (3.15)$$

PROPOSICION 3.4 Considere que los estimadores de β_0 y β_1 son:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{2}{N-1}\left(M_T - M_T^{[2]}\right)$$

$$\hat{\beta}_0 = 2M_T - M_T - \hat{\beta}_1 T$$

Se afirma que

i) $\quad E[\hat{\beta}_1] = \beta_1$

ii) $\quad E[\hat{\beta}_0] = \beta_0$

DEMOSTRACION DE i).

$$E[\hat{\beta}_1] = E\left[\frac{2}{N-1}\left(M_T - M_T^{[2]}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{N-1}\left[E(M_T) - E(M_T^{[2]}\right]$$

Sustituyendo $E(M_T)$ y $E(M_T^{[2]})$ por (3.9) y (3.…) resulta que

$$E[\hat{\beta}_1] = \beta_1$$

o sea que $\hat{\beta}_1$ es insesgado para β_1.

DEMOSTRACION DE ii) Es similar a la anterior

NOTAS

1. La estimación de la observación en el periodo T de y_T sería

$$\hat{y}_T = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 T$$

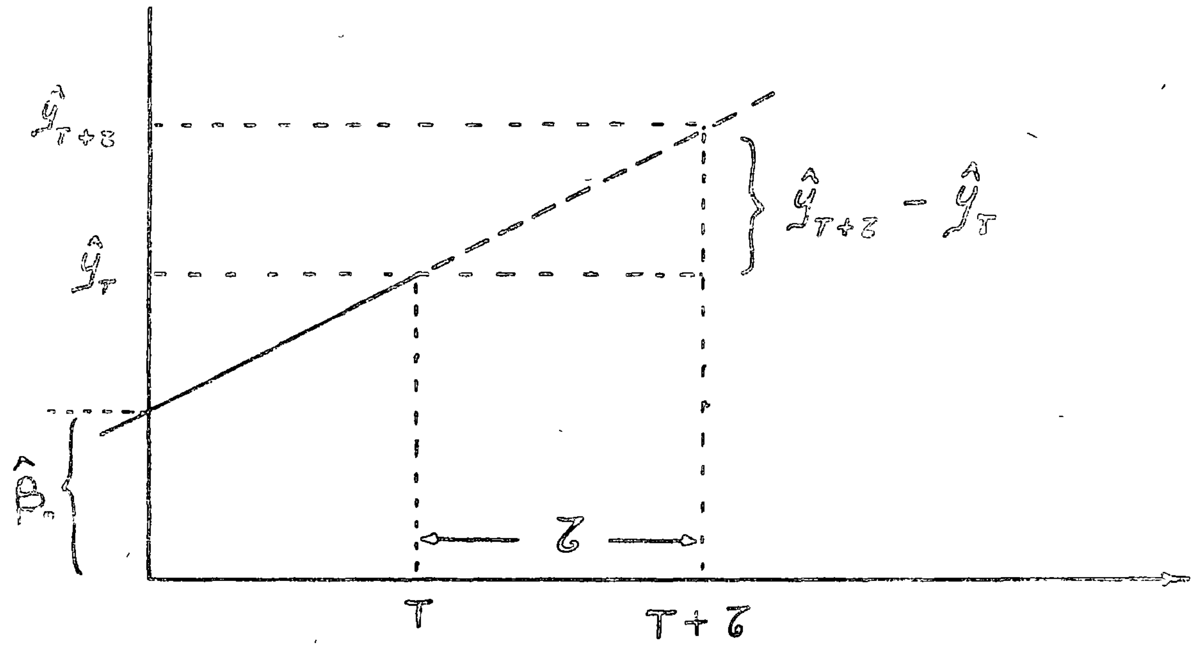
La cual sustituyendo $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ usando (3.14) y (3.15) resulta

$$\hat{y}_T = 2M_T - M_T^{[2]}$$

2. El pronóstico para τ periodos futuros se puede obtener extrapolando linealmente ya que el modelo que estamos manejando es con tendencia lineal lo cual implica que

$$\hat{y}_{T+\tau} = \hat{y}_T + \hat{\beta}_1 \tau \qquad (\ldots)$$

Esta extrapolación se muestra gráficamente a continuación



Sustituyendo $\hat{\beta}_1$ y $\hat{y}_T$ por (3.14) y (3.15) respectivamente en (3.16) se tiene que

$$\hat{y}_{T+\tau} = 2M_T - M_T^{[2]} + \tau\left(\frac{2}{N-1}\right)\left(M_T - M_T^{[2]}\right) \quad \ldots\ldots (3.17)$$

3. Cada una de las cantidades

$$M_T = \sum_{t=T-N+1}^{T} y_t / N \qquad (3.18)$$

y

$$M_T^{[2]} = \sum_{t=T-N+1}^{T} M_t / N \qquad (3.19)$$

pueden expresarse recursivamente por

$$M_T = M_{T-1} + \frac{y_T - y_{T-N}}{N} \qquad (3.20)$$

$$M_T^{[2]} = M_{T-1}^{[2]} + \frac{M_T - M_{T-N}}{N}$$

Estas expresiones alternativas para M_T y $M_T^{[2]}$ se pueden probar fácilmente.

NOTA (ALGORITMO DE PROMEDIOS MOVILES DOBLES). El desarrollo presentado anteriormente se puede resumir en: Dada una serie $\{y_t : t \in \Lambda\}$; $\Lambda = \{1, 2, \ldots, T\}$, que siga un modelo con tendencia lineal

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

y dada una N, el pronóstico para un tiempo futuro $T + \tau$ está dado por la expresión (3.17) o sea

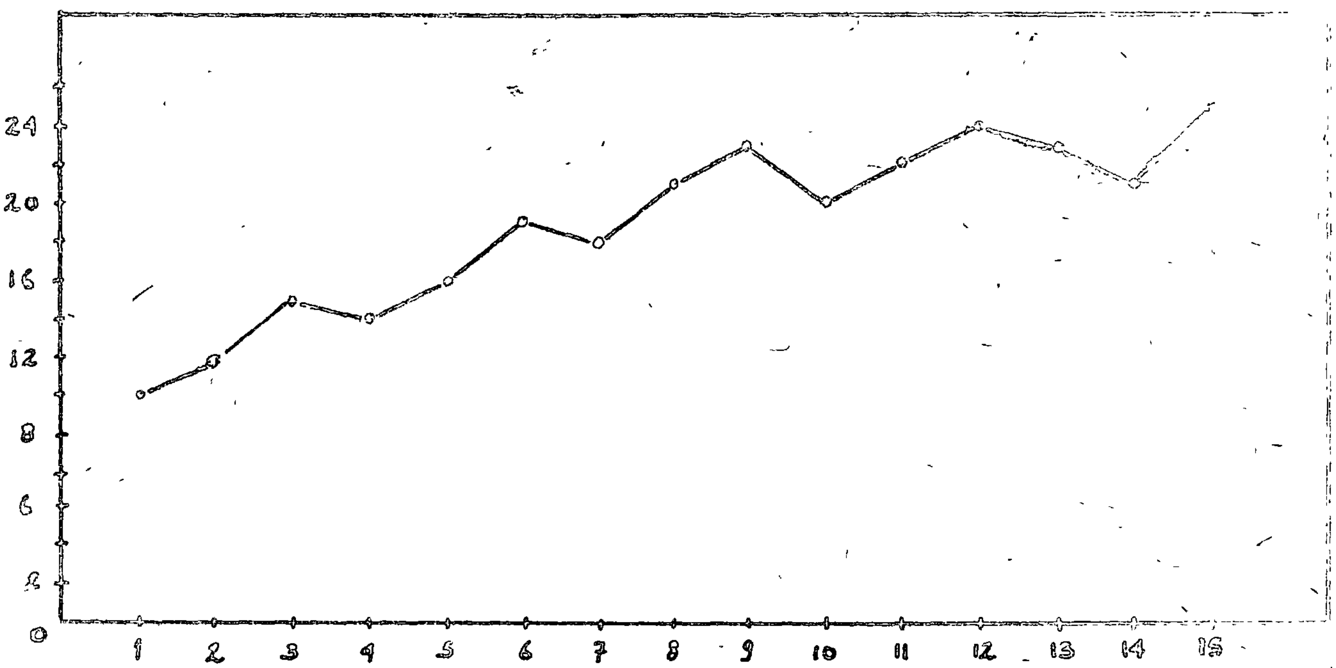
$$\hat{y}_{T+\tau} = 2M_T - M_T^{[2]} + \tau \left(\frac{2}{N-1}\right)\left(M_T - M_T^{[2]}\right)$$

El primer promedio móvil simple M_t se calcula por (3.18) y los siguientes $M_{t+1}, M_{t+2}, \ldots,$ por la relación recursiva (3.20). El primer promedio doble $M_t^{[2]}$ se calcula por (3.19) y los restantes $M_{t+1}^{[2]}, M_{t+2}^{[2]}, \ldots$ por la expresión recursiva (3.21).

EJEMPLO. Las ventas semanales de un acondicionador de aire de 5000 BTU se muestran en la siguiente tabla

SEMANA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	[illegible]
DEMANDA	10	12	15	14	16	19	18	21	23	20	22	24	23	21	[illegible]

La gráfica de ésta demanda es



En base a esta gráfica, el proceso que genera ant. puede ser aproximado por un modelo de tendencia lineal. Fijando N (el número de términos que se van a promediar) igual a 5 se ilustrará la técnica de promedios móviles dobles.

Notese que para encontrar el primer promedió móvil de $M_t^{[2]}$ se requeren 5 promedios móviles simples M_t. Estos son

$$M_5 = \sum_{t=1}^{5} y_t / 5 = 13.4$$

$$M_6 = \sum_{t=2}^{6} y_t / 5 = M_5 - \frac{y_6 - y_1}{5} = 13.4 - \frac{19 - 10}{5} = 15.2$$

$$\vdots$$

$$M_9 = \sum_{t=6}^{10} y_t / 5 = M_8 - \frac{y_9 - y_4}{5} = 19.4$$

Con estos cinco promedios móviles simples, el primer promedio móvil doble es

$$M_9^{[2]} = \sum_{t=5}^{9} M_t = 16.40$$

Obsérvese que se necesita un mínimo de 9 observaciones y_t para encontrar el primer promedio doble. Por lo que, este número es el mínimo, en nuestro ejemplo, para poder hacer un pronóstico en un tiempo futuro $9+\tau$. Entonces si deseamos pronosticar la demanda para la semana 10, es entonces usando (3.17) para $\tau = 1$ resulta que

$$\hat{y}_{10} = 2M_9 - M_9^{[2]} + (1)\left(\frac{2}{4}\right)\left(M_9 - M_9^{[2]}\right)$$

$$\hat{y}_{10} = 2(19.4) - (16.40) + 1/2\,(19.4 - 16.40) = 23.90$$

Si deseamos pronosticar dos semanas más adelante hacemos $\tau = 2$ en la expresión (3.17). Suponga que una vez transcurrida la semana 10, se conoce que la verdadera demanda y_{10} es 20. El error cometido es entonces

$$y_{10} - \hat{y}_{10} = 20 - 23.90 = -3.90$$

Ahora si deseamos introducir la información reciente de $y_{10} = 20$ para actualizar nuestros parámetros en nuestro modelo elegido deberemos encontrar ...

y $M_{10}^{[2]}$, estas son

$$M_{10} = M_9 - \frac{y_{10} - y_5}{5} = 20.2$$

$$M_{10}^{[2]} = M_9^{[2]} - \frac{M_{10} - M_5}{2} = 17.76$$

El pronóstico para la siguiente semana en base a las 10 observaciones que tenemos, $\tau = 1$, es

$$\hat{y}_{10+1} \equiv \hat{y}_{11} = 2M_{10} - M_{10}^{[2]} + (1)\frac{2}{4}\left(M_{10} - M_{10}^{[2]}\right) = 23.86$$

Similarmente podemos ir actualizando los estimadores M_t y $M_t^{[2]}$ y por lo tanto nuestro pronóstico, a medida que vayamos conociendo la demanda de las próximas semanas. Estos pronósticos para un periodo futuro de una semana se muestran en la última columna de la siguiente tabla

DEMANDA SEMANAL Y PRONOSTICO PARA UNA SEMANA ADELANTE

Semana t	Demanda y_t	M_t	$M_t^{[2]}$	$\hat{y}_t$
1	10			
2	12			
3	15			
4	14			
5	16	13.4		
6	19	15.2		
7	18	16.4		
8	21	17.6		
9	23	19.4	16.40	
10	20	20.2	17.76	23.90
11	22	20.8	18.85	23.86
12	24	22.0	20.00	23.00
13	23	22.4	20.95	24.56
14	21	22.0	21.48	22.78
15	25	23.0	22.04	24.44

DESARROLLO DEL METODO PROMEDIOS MOVILES DOBLES VIA MINIMOS CUADRADOS

Considere una colección de variables aleatorias $\{Y_t : t \in \Lambda\}$ con realización $\{y_t : t \in \Lambda\}$.
Para el modelo

$$\left.\begin{array}{l} Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t \,; \quad t \in \Lambda \\ E[\varepsilon] = \mathbb{O} \,; \quad \Sigma_\varepsilon = \sigma^2 I \end{array}\right\} (**)$$

El valor esperado de Y_t es

$$E[Y_t] = E[\beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t] = \beta_0 + \beta_1 t + E(\varepsilon_t)$$
$$E[Y_t] = \beta_0 + \beta_1 t$$

Considere que $\hat{\beta}_0$ es estimador de β_0 y $\hat{\beta}_1$ de β_1. Por lo tanto $\hat{y}_t \equiv \hat{E}[Y_t] = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$ llega a ser un estimador de $E[Y_t]$. Si $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son insesgados para los parámetros β_0 y β_1 respectivamente entonces la combinación lineal $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$ de ellos también es insesgada para el parámetro que resulta del mínimo tipo de combinación de los respectivos parámetros.
El criterio de mínimos cuadrados, considerando solamente las recientes N observaciones, establece encontrar aquellos $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ que minimizen

$$Z = \sum_{t=T-N+1}^{T} \left(y_t - \hat{y}_t \right)^2$$

$$Z = \sum_{t=T-N+1}^{T} \left(y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 t \right)^2$$

Encontrando $\partial Z / \partial \beta_0$, $\partial Z / \partial \beta_1$, e igualando a cero, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones (ecuaciones normales)

$$N \hat{\beta}_0 + \frac{N}{2} (2T + 1 - N) \hat{\beta}_1 = \sum_{t=T-N+1}^{T} y_t \qquad (3.22)$$

$$\frac{N}{2} (2T+1-N) \hat{\beta}_0 + \frac{N}{6} \left[(N-1)(2N-1) + 6T(T+1-N) \right] \hat{\beta}_1 = \sum^{T} t\, y_t \qquad (3.23)$$

Defina $\bar{t} = \sum_{t=T-N+1}^{T} t/N \equiv T - (N-1)/2$, y haga los cambios de variable: $t' = t - \bar{t} \equiv t - (T - (N-1)/2)$

y $\hat{\beta}_0' = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{t}$; $(\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_0' - \hat{\beta}_1 \bar{t})$

en las ecuaciones normales

La ecuación normal (3.22) resulta

$$N (\hat{\beta}_0' - \hat{\beta}_1 \bar{t}) + \frac{N}{2} (2T - 1 - N) \hat{\beta}_1 = \sum_{t'=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} y_{t'}$$

$$N \hat{\beta}_0' + 0 \, \hat{\beta}_1 = \sum_{t'=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} y_{t'} \qquad (3.24)$$

La ecuación normal (3.23) resulta en

$$0 \cdot \beta_0' + \frac{N(N^2-1)}{12} \hat{\beta}_1 = \sum_{t'=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} t' y_{t'} \qquad (3.25)$$

Resolviendo β_0' y $\hat{\beta}_1$ de (3.24) y (3.25)

$$\hat{\beta}_0' = \frac{1}{N} \sum_{t=T-N+1}^{T} y_t \equiv M_T$$

y

$$\hat{\beta}_1 = \frac{12}{N(N^2-1)} \sum_{t'=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} t' y_{t'}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{12}{N(N^2-1)} \left(\frac{N-1}{2} y_T + \frac{N-3}{2} y_{T-1} + \dots - \frac{(N-3)}{2} y_{T-N+2} - \frac{(N-1)}{2} y_{T-N+1} \right) \equiv U_T$$

Fórmulas recursivas para $\hat{\beta}_0'$, $\hat{\beta}_1$ y para el pronóstico se encuentran en Montgomery, Johnson, así como interpretación geométrica del cambio de variables.

4.0 TECNICAS DE ALISAMIENTO EXPONENCIAL.

En esta sección se presentan las técnicas de alisamiento exponencial las cuales son ampliamente usadas debido a su exactitud y a su eficiencia computacional. El desarrollo de estas técnicas se dará usando el criterio de mínimos cuadrados con prioridades, en las técnicas de alisamiento exponencial se consideran todas las observaciones $\{ Y_t \, ; \, t \in \Lambda \}$ solo que la prioridad que se asigna a las observaciones van aumentando entre mas reciente sea la observacion. El incremento de prioridades se hace de manera exponencial de ahi que reciban el nombre de alisamiento (o suavisamiento) exponencial.

4.1 ALISAMIENTO EXPONENCIAL SIMPLE

TEOREMA 4.1 Sea $\{ Y_t \, ; t \in \Lambda \}$ una colección de variables aleatorias en una realización $\{ Y_t = t \in \Lambda \}$ de conjunto indicador historico $\Lambda = \{ t \, ; \, t = 1, 2, 3, \ldots, T \}$

Suponga un modelo constante

$$\left. \begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + \varepsilon_t \; ; \quad t \in \Lambda \\ E[\varepsilon] &= \mathbb{O} \; ; \quad \Sigma_\varepsilon = \sigma^2 I \end{aligned} \right\} *$$

Para un γ fijo, $0 < \gamma < 1$, se tiene

1. Las siguientes expresiones para el estimador $\hat{\beta}_0$ de β_0 son equivalentes si T es grande ($T \uparrow \infty$).

i) $$\hat{\beta}_0 = \frac{(1-\gamma)}{(1-\gamma^T)} \sum_{t=1}^{T} \gamma^{T-t} y_t \equiv \hat{\beta}_0(T) \equiv S_T \qquad (4.1)$$

ii) $\hat{\beta}_0 \equiv S_T = \alpha y_T + (1-\alpha) S_{T-1}$; $q = 1-\alpha$

iii) $\hat{\beta}_0 \equiv S_T = \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k y_{T-k} + (1-\alpha)^T S_0$

2. El pronostico para un tiempo futuro $T+\tau$ es

$$\hat{y}_{T+\tau} = S_T \qquad \text{para toda } \tau \qquad (4.4)$$

DEMOSTRACION i)

El modelo propuesto implica que:

$$E[Y_t] = E[\beta_0 + \varepsilon_t] = \beta_0$$

Si $\hat{\beta}_0$ es un estimador de β_0, entonces la desviacion que se tiene entre la observación Y_t y su valor medio $\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0$ es

$$d_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y_t - \hat{\beta}_0$$

El criterio de minimos cuadrados con prioridades $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_T$ asignadas a las observaciones $y_1, y_2, \ldots, y_T$ respectivamente (o equivalentemente asignadas a las desviaciones $d_1, d_2, \ldots, d_T$) es minimizar.

$$Z = \sum_{i=1}^{T} \omega_t d_t^2$$

$$Z = \omega_1 d_1^2 + \omega_2 d_2^2 + \cdots + \omega_{T-1} d_{T-1}^2 + \omega_T d_T^2$$

La tecnica de alisamiento exponencial elige prioridades de la forma:

$$\omega_1 = \beta^{T-1} ; \quad \omega_2 = \beta^{T-2} ; \ldots , \quad \omega_{T-1} = \beta \quad ; \quad \omega_T = \beta^{0} \equiv 1$$

donde β es un número entre 0 y 1 previamente elegido. β no se refiere a β_0

El que β se eliga entre 0 y 1 implica que

$$\beta^{T-1} < \beta^{T-2} < \ldots < \beta < \beta^{0} \equiv 1$$

Lo cuál significa que las prioridades asignadas a las observaciones van decreciendo (creciendo) entre más vieja (reciente) sea la observacion.

El valor de Z queda entonces dado por:

$$Z = \sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} (y_t - \hat{\beta}_0)^2$$

Obteniendo $dz/d\hat{\beta}_0$ e igualando a cero

$$\frac{dZ}{d\hat{\beta}_0} = -2 \sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} (y_t - \hat{\beta}_0)$$

Igualando a cero se obtiene

$$\sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} y_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} = 0$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{\sum_{t=1}^{T} \gamma^{T-t}} \sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} y_t \qquad (4.5)$$

Notese que:

$$\sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} = \beta^{T-1} + \beta^{T-2} + \dots + \beta^{0} = \sum_{j=0}^{T-1} \beta_j$$

De formulas de apendice C se obtiene que $\sum_{j=0}^{T-1} \beta_j = \frac{1-\beta}{\ }$ por lo que substituyendo en (4.5) se tiene:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1-\beta}{1-\beta^T} \sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} y_t$$

Llamando a $\hat{\beta}_0$ por $\hat{\beta}_0(T)$ o S_T para hacer incapie en que fue estimado en base a T datos disponibles se tiene el resultado deseado.

DEMOSTRACION DE ii)

Deseamos encontrar una relación recursiva entre S_{T-1} o sea entre:

$$S_T = \frac{1-\beta}{1-\beta^T} \sum_{t=1}^{T} \beta^{T-t} y_t$$

$$S_T = \frac{1-\beta}{1-\beta^{T-1}} \sum_{t=1}^{T-1} \beta^{T-1-t} y_t$$

Para lograr esta relación, considere que S_T se escribir como.

$$S_T = \frac{1-\beta}{1-\beta^T}\left[\sum_{t=1}^{T-1} \beta^{T-t} y_t + y_T\right]$$

$$S_T = \frac{1-\beta}{1-\beta^T}\left[\beta\sum_{t=1}^{T-1} \beta^{T-1-t} y_t + y_T\right]$$

$$S_T = \frac{(1-\beta)\beta}{1-\beta^T}\sum_{t=1}^{T-1} \beta^{T-1-t} y_t + \frac{1-\beta}{1-\beta^T} y_T$$

$$S_T = \frac{\beta(1-\beta^{T-1})}{(1-\beta^T)} \frac{(1-\beta)}{(1-\beta^{T-1})}\sum_{t=1}^{T-1} \beta^{T-1-t} y_t + \frac{(1-\beta)}{1-\beta^T} y_T$$

$$S_T = \frac{\beta(1-\beta^{T-1})}{(1-\beta^T)} S_{T-1} + \frac{(1-\beta)}{(1-\beta^T)} y_T$$

$$S_T = \frac{(1-\beta)y_T + \beta(1-\beta^{T-1})S_{T-1}}{1-\beta^T}$$

Si T es grande entonces $\beta^T \approx 0$ y $\beta^{T-1} \approx 0$ de que la ultima igualdad se reduce a:

$$S_T = (1-\beta) y_T + \beta S_{T-1}$$

Haciendo $\alpha = (1-\beta)$, se tiene.

$$S_T = \alpha\, y_T + (1-\alpha) S_{T-1}$$

DEMOSTRACION DE iii)

La prueba de la igualdad

$$S_T = \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k \cdot y_{T-k} + (1-\alpha)^T S_0$$

es por inducción. Para T = 1

$$S_1 = \alpha \sum_{k=0}^{0} \beta^k y_{1-k} + (1-\alpha)^1 S_0$$

$$S_1 = \alpha \left[\beta^0 y_1 \right] + (1-\alpha) S_0 = \alpha y_1 + (1-\alpha) S_0$$

este resultado concuerda con la ... ecp.

Supongase que es cierta para T-1, o sea

$$S_{T-1} = \alpha \sum_{k=0}^{T-2} (1-\alpha)^k y_{T-1-k} + (1-\alpha)^{T-1} S_0$$

Deseamos probar que esta suposición implica que la relación tambien es valida para S_T. Parta de la rel. (4.2) que ya fue provada, o sea:

$$S_T = \alpha y_T + (1-\alpha) S_{T-1}$$

Substituyendo S_{T-1} por la suposición de que S_{T-1} satisface la relación buscada, o sea substituyendo S_{T-1} por (4.6) - se tiene que

$$S_T = \alpha y_T + (1-\alpha)\left[\alpha \sum_{=0} (1-\alpha)^k y_{T-1-k} + (1-\alpha)^{T-1} S_0\right]$$

$$S_T = \left[\alpha y_T + \alpha \sum_{k=0}^{T-2} (1-\alpha)^{k+1} y_{T-1-k}\right] + (1-\alpha)^T S_0$$

$$S_T = \left[\alpha(1-\alpha)^0 y_T + \alpha\left[(1-\alpha)^1 y_{T-1} + (1-\alpha)^2 y_{T-2} + \cdots + (1-\alpha)^{T-1} y_1\right.\right.$$
$$\left. + (1-\alpha)^T S_0\right]$$

$$S_T = \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k y_{T-k} + (1-\alpha)^T S_0$$

DEMOSTRACION DE 2.

El estimador $\hat{\beta}_0 = S_T$ es insésgado para β_0 si T grande, o sea que $\lim_{T\uparrow\infty} E[S_T] = \beta_0$, como se demo[illegible]

en el teorema 4.2. O partiendo de esta propiedad [illegible] tica se concluye que S_T es un estimador del valor [illegible] $E[Y_t] = E(\beta_0 + \varepsilon_T) = \beta_0$. Ya que este no depende de [illegible] ser un modelo constante, entonces el pronostico

$$\hat{y}_{T+\tau} = \hat{\beta}_0 \equiv S_T \quad \text{para toda } \tau \ (\tau = 1, 2, \ldots)$$

NOTAS.

1. Otro nombre para la técnica de alisamiento exponencial simple, es alisamiento exponencial de primer orden.
2. La ecuación que en la práctica se utiliza para calcular $\hat{\beta}_0 = S_T$, es la ecuación (4.2). Para aplicar esta ecuación se requiere conocer el valor de la constante α. El valor que se elige de α generalmente es entre 0.1 y 0.30. El criterio para seleccionar este valor se presentará más adelante.
3. La técnica de alisamiento exponencial requiere del conocimiento de un valor inicial S_0, para emplear la fórmula (4.2), en forma iterativa.
Si se tienen datos históricos disponibles, S_0 se puede tomar como promedio de los más recientes datos. Si no existen datos históricos confiables entonces deberá de hacerse un pronóstico subjetivo de S_0.

EJEMPLO. Un contratista desea pronosticar el número de instalaciones de calentadores de agua por semana. El tiene los siguientes datos disponibles:

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de instalaciones	15	18	10	12	20	17	22	16	14	20

Examinando graficamente los datos, él decide supone un modelo constante, y usar alisamiento exponencial simple. Suponiendo arbitrariamente un $\alpha = 0.1$, entonces

$$S_{11} = (0.1)y_{11} + (0.9)S_{10}$$

Sin embargo no hay un valor inicial S_{10} (notese que S_{10} representaría S_0 si reedefinimos el origen del conjunto indicador histórico como t=10). Para estimar el valor inicial S_{10}, se tomará el promedio de las demandas de las diez primeras semanas, que es igual a 16.6. Por lo tanto, es razonable considerar

$$S_{10} = 16.6 \approx 17$$

Entonces el promedio para cualquier tiempo futuro $10+\tau$, será

$$\hat{y}_{10+\tau} = S_{10} = 17$$

Suponga que el número real de instalaciones en la semana 11 fue igual a 15. Entonces

$$S_{11} = \alpha y_{11} + (1-\alpha)S_{10}$$

$$S_{11} = (0.1)(15) + (0.9)(16.60) = 16.44 \approx 16$$

y el pronóstico para un tiempo futuro $11+\tau$ basandose en un conjunto indicador histórico $\Lambda = \{t: t=1,2,\ldots,11\}$, es

$$\hat{y}_{11+\tau} = S_{11} = 16.44 \approx 16$$

En la siguiente tabla aparecen los pronósticos para períodos futuros de tamaño $\tau=1$, contra los valores reales de las instalaciones de calentadores.

Demanda y Pronóstico de Instalaciones de Calentadores de [illegible]

Semana (t)	y_t	S_t	$\hat{y}_t = S_{t-1}$
1	15		
2	18		
3	10		
4	12		
5	20		
6	17		
7	22		
8	16		
9	14		
10	20	16.60	
11	15	16.44	17
12	12	16.00	16
13	16	16.00	16
14	20	16.40	16
15	22	16.96	16
16	17	16.96	17
17	15	16.76	17
18	10	16.08	17
19	16	16.07	16
20	20	16.46	16
21	19	16.71	16
22	24	17.44	17
23	18	17.50	17
24	15	17.25	17
25	20	17.53	17

TEOREMA 4.2 (PROPIEDADES LIMITES DEL ESTIMADOR

Cuando T es grande ($T \uparrow \infty$) se tiene que.

i) $E[S_T] = \beta_0$

ii) $Var[S_T] = \frac{\alpha}{2-\alpha} Var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha}{2-\alpha} \sigma^2$ si $T \uparrow \infty$

DEMOSTRACION.

Parta de la expresion (4.3) para S_T, o sea que

$$S_T = \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k y_{T-k} + (1-\alpha) S_0$$

Demostracion de i)

$$E(S_T) = E\left[\alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k E(y_{T-k}) + (1-\alpha)^T S_0\right]$$

Ahora por hipotesis de que la serie sigue un modelo constante, se tiene que $E[Y_t] = \beta_0$ para toda t.

$$E(S_T) = \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k \beta_0 + (1-\alpha)^T E(S_0)$$

$$\lim_{T \uparrow \infty} E(S_T) = \alpha \beta_0 \sum_{k=0}^{\infty} (1-\alpha)^k + E(S_0)\left[\lim_{T \uparrow \infty} (1-\alpha)^T\right]$$

$$\lim_{T \uparrow \infty} E(S_T) = \alpha \beta_0 \frac{1}{1-(1-\alpha)} = \beta_0$$

Demostracion de ii)

$$\mathrm{Var}(S_T) = \mathrm{Var}\left[\alpha \sum_{k=0}^{T} (1-\alpha)^k y_{T-k} + (1-\alpha)^T S_0\right]$$

Debido a independencia y apendice B, se tiene que

$$\mathrm{Var}(S_T) = \sum_{k=0}^{T} [\alpha(1-\alpha)]^2 \,\mathrm{Var}(y_{T-k}) + (1-\alpha)^T \,\mathrm{Var}(S_0)$$

Ya que $\mathrm{Var}(y_t) = \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ para toda t, entonces:

$$\mathrm{Var}(S_T) = \alpha^2 \sigma^2 \sum_{k=0}^{T} (1-\alpha)^{2k} + (1-\alpha)^T \,\mathrm{Var}(S_0)$$

$$\lim_{T \uparrow \infty} \mathrm{Var}(S_T) = \alpha^2 \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} (1-\alpha)^{2k} + \mathrm{Var}(S_0) \lim_{T \uparrow \infty} (1-\alpha)^T$$

$$= \alpha^2 \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} [(1-\alpha)^2]^k$$

$$= \alpha^2 \sigma^2 \frac{1}{1-(1-\alpha)^2}$$

$$= \alpha^2 \sigma^2 \frac{1}{2\alpha - \alpha^2} = \frac{\alpha}{2-\alpha} \sigma^2$$

DESARROLLO DEL METODO DE ALISAMIENTO EXPONENCIAL SIMPLE VIA HEURISTICA.

Considere que S_{T-1} es un estimador de $\hat{\beta}_0$ basado en T-1 observaciones $y_1, y_2, \ldots, y_{T-1}$. Entonces el pronóstico para el siguiente periodo es $\hat{y}_T = S_{T-1}$ por ser un modelo constante. Si despues conocemos la verdadera demanda y_T entonces el error cometido es

$$e(T) = y_T - \hat{y}_{T-1} = y_T - S_{T-1}$$

Ahora deseamos introducir la reciente demanda y_T para ajustar nuestro estimador S_T de la futura demanda esperada. Un razonamiento lógico es pensar que esta demanda esperada esta dada por nuestro estimador anterior S_{T-1} modificado por alguna fracción del error cometido $e(T)$, o sea:

$$S_T = S_{T-1} + \alpha\, e(T)$$

$$S_T = S_{T-1} + \alpha\,(y_T - S_{T-1})$$

$$S_T = \alpha y_T + (1-\alpha) S_{T-1}$$

4.2 ALISAMIENTO EXPONENCIAL DOBLE PARA PROCESOS CON TENDENCIA LINEAL

TEOREMA (TECNICA DE ALISAMIENTO EXPONENCIAL DOBLE). Para un proceso con tendencia lineal

$$\left.\begin{array}{ll} y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t & t \in A = \{1, 2, \ldots, T\} \\ E[\varepsilon_t] = \emptyset \; ; \quad \Sigma_\varepsilon = \sigma^2 I & \end{array}\right\} \quad (4.5)$$

y para un α dado, $0<\alpha<1$, y $\beta = 1-\alpha$, se afirma:

1. Los estimadores $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ de β_0 y β_1 respectivamente son:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\alpha}{\beta}\left(S_T - S_T^{[2]}\right) \equiv \hat{\beta}_1(T) \qquad (4.6)$$

$$\hat{\beta}_0 = 2\, S_T - S_T^{[2]} - T\, \frac{\alpha}{\beta}\left[S_T - S_T^{[2]}\right] \equiv \hat{\beta}_0(T) \qquad (4.7)$$

donde

$$S_T = \alpha\, y_T + (1-\alpha) S_{T-1} \qquad (4.8)$$

y

$$S_T^{[2]} = \alpha\, S_T + (1-\alpha)\, S_{T-1}^{[2]} \qquad (4.9)$$

A $S_T^{[2]}$ se le llama el estimador doblemente alisado exponencialmente. La notación $S_T^{[2]}$ no significa que S_T se lo eleva al cuadrado, sino es un símbolo para indicar el resultado de la ecuación (4.9).

2. El pronóstico para un tiempo futuro $T + \tau$, usando alisamiento exponencial doble es:

$$\hat{y}_{T+\tau} = \hat{y}_T + \tau\, \hat{\beta}_1(T) \qquad (4.10)$$

$$\hat{y}_{T+\tau} = (2 + \gamma)\, S_T - (1 + \gamma)\, S_T^{[2]} \qquad (4.11)$$

donde $\gamma = \tau\, (\alpha / \beta)$ (4.12)

3. Los valores iniciales S_0 y $S_0^{[2]}$, para iniciar el alisamiento exponencial doble se calcular por:

$$S_0 = \hat{\beta}_0(0) - \frac{\beta}{\alpha}\, \hat{\beta}_1(0) \qquad (4.13)$$

$$S_0^{[2]} = \hat{\beta}(0) - 2\, \frac{\beta}{\alpha}\, \hat{\beta}_1(0) \qquad (4.14)$$

donde $\hat{\beta}_0(0)$ y $\hat{\beta}_1(0)$ son estimados de datos históricos usando regresión lineal. Si no se dispone de datos históricos anteriores se dan estimaciones subjetivas de $\hat{\beta}_0(0)$ y $\hat{\beta}_1(0)$.

EJEMPLO. Un analista de investigación de operaciones de un centro de cómputo de tiempo compartido, desea pronosticar los ingresos para su compañía. La compañía ha estado en operación dos años, sin embargo, él considera que los ingresos de estos dos años no indican las operaciones comerciales actuales, ya que la compañía no ha llegado a estar bien establecida. El piensa que los ingresos se incrementarán linealmente con el tiempo, y además sus mejores estimadores subjetivos para los parámetros de esta relación lineal son (en miles de dólares), $\hat{\beta}_1(0) = 95$ y $\hat{\beta}_2(0) = 1.0$. El analista decide usar alisamiento exponencial doble con $\alpha = .1$. Usando estos estimadores, los valores iniciales requeridos para el alisamiento exponencial son:

$$S_0 = 95 - \frac{(0.9)}{(0.1)}(1) = 86$$

y

$$S_0^{[2]} = 95 - 2\,\frac{(0.9)}{(0.1)}(1) = 77$$

Por lo tanto, el pronóstico (en miles de dólares) para el mes 1 es

$$\hat{y}_1 = \left[2 + (1)\frac{(0.1)}{(0.9)}\right] S_0 - \left[1 + (1)\frac{(0.1)}{(0.9)}\right] S_0^{[2]}$$

$$= (2.111)(86) - (1.111)\,77 = 95.999 \approx 96$$

Suponga que el ingreso real en el mes 1 fue 98, entonces los estimadores alisados serían

$$S_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha)\,S_0 = (0.1)(98)+(0.9)(86)=87.20$$

$$S_1^{[2]} = \alpha S_1 + (1-\alpha)S_0^{[2]} = (0.1)(87.20)+(0.9)(77)=78.02$$

y el pronóstico para el año 2 sería

$$\hat{y}_2 = (2.111)S_1-(1.111)S_1^{[2]} = (2.111)(87.20)-(1.111)(78.02)$$

$$= 96.399 \approx 96$$

Los ingresos mensuales para el siguiente año y sus pronósticos se presentan en la siguiente tabla.

Pronósticos de ingresos mensuales usando alisamiento exponencial doble

Mes (t)	y_t	S_t	$S_t^{[2]}$	$\hat{y}_t$
0		86.00	77.00	
1	98	87.20	78.02	96
2	94	87.88	79.01	96
3	99	88.99	80.00	98
4	104	90.49	81.05	99
5	108	92.24	82.17	101
6	100	93.02	83.26	103
7	106	94.32	84.36	104
8	104	95.29	85.45	105
9	118	97.56	86.66	106
10	109	98.70	87.87	110
11	102	99.03	88.98	111
12	116	100.73	90.16	110

A continuación se presenta un ejemplo en el que se analiza promedios moviles simples y dobles, y alisamiento exponencial simple y doble

EJEMPLO. Considere los datos siguientes, los cuales representan la demanda de una fábrica durante los últimos 3 años.

	1969	1970	1971
ENERO	460	538	626
FEBRERO	400	570	690
MARZO	392	601	680
ABRIL	447	565	673
MAYO	452	585	615
JUNIO	517	604	718
JULIO	572	527	745
AGOSTO	395	603	767
SEPTIEMBRE	410	604	728
OCTUBRE	579	790	788
NOVIEMBRE	582	714	793
DICIEMBRE	558	655	777

a) Use un promedio móvil de 6 meses para predecir la demanda para un período futuro de un mes ($\tau = 1$). Suponga que un modelo constante es apropiado. Trace gráfica de sus datos reales y los pronosticados.

b) Suponga que un proceso de tendencia lineal genera los datos. Use un promedio móvil doble con $N = 6$ meses para pronosticar la demanda para el próximo mes. Compare los resultados con aquellos obtenidos en la parte (a). Trace la gráfica de los datos reales y los pronosticados.

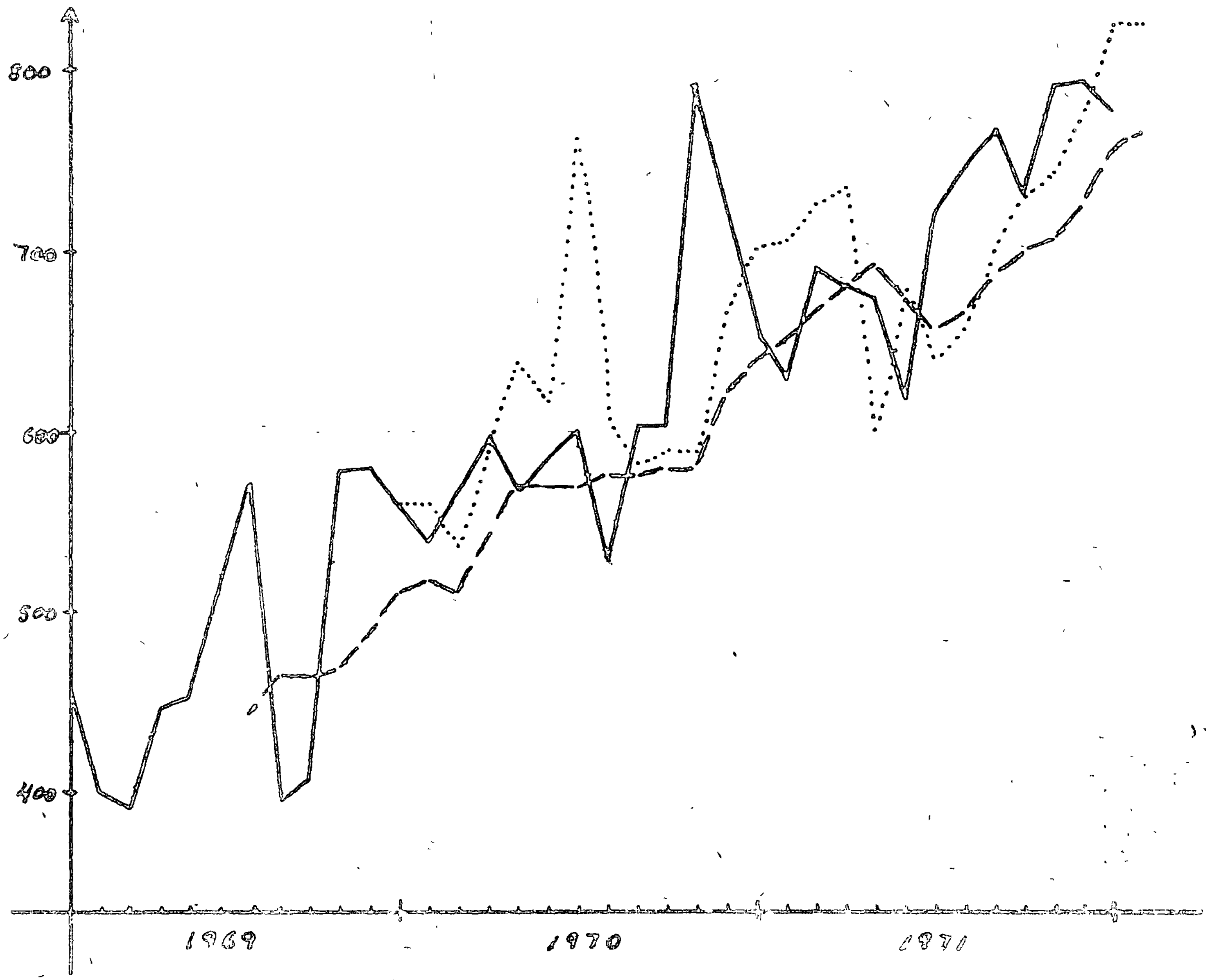
Los resultados [illegible] tenido [illegible] tablas:

PROMEDIOS MOVILES

t	Y_t	M_t	$\hat{Y}_t = M_{t-1}$
1	460		
2	400		
3	392		
4	442		
5	452		
6	517	444.67	
7	572	463.33	444.67
8	395	462.5	463 33
9	410	465.5	462.5
10	579	487.5	465.5
11	582	509.17	487.5
12	558	516 00	509.17
13	538	510.33	516.00
14	570	539.50	510.33
15	601	571.33	539.50
16	565	569.00	571.33
17	585	569.50	569.00
18	604	577.17	569 50
19	527	575.33	577.17
20	603	580.83	575.33
21	604	581.33	580.83
22	790	618.83	581.33
23	714	640.33	618.83
24	655	648.83	640.33
25	626	665.33	648.83
26	690	679.83	665.33
27	680	692.50	679.83
28	673	673.00	692.50
29	615	656.50	673.00
30	718	667.00	656.50
31	745	686 83	667.00
32	767	699 67	686.83
33	728	707.67	699.67
34	788	726.83	707.67
35	793	751.50	726.83
36	777	766.33	751.50
			766.33

PROMEDIOS MOVILES DOBLES

t	Y_t	M_t	$M_t^{[2]}$	$\hat{Y}_t$
1	460			
2	400			
3	382			
4	448			
5	452			
6	517	444.17		
7	572	463.33		
8	395	462.5		
9	410	465.5		
10	579	487.5		
11	582	509.17	472.11	
12	558	516.00	484.00	561.05
13	538	510.33	491.83	560.8
14	570	539.50	504.67	536.23
15	601	571.33	522.30	586.26
16	565	569.00	535.89	634.92
17	585	569.50	545.94	615.35
18	604	577.17	556.14	764.32
19	527	575.33	569.47	606.61
20	603	580.83	573.86	582.83
21	604	581.33	575.53	590.59
22	790	618.83	583.83	589.45
23	714	640.33	595 64	667.83
24	655	648.83	607.58	702.9
25	626	665.33	622.58	706.58
26	690	679.83	639.08	725.18
27	680	692.50	657.61	736.88
28	673	673.00	666.64	601.35
29	615	656.50	669.33	681.90
30	768	667.00	672.36	638 57
31	745	686.83	675.94	659.50
32	767	699.67	679.25	702.05
33	728	707.67	681.77	728.26
34	788	726.83	690.75	743.93
35	793	756.50	707.42	777.34
36	777	766.33	723.97	825.21
				825.65


800
700
600
500
400
1969
1970
1971

EJEMPLO. Para los datos del ejercicio anterior, pronostique la demanda para un período futuro de una unidad (mes) usando alisamiento exponencial simple con $\alpha = 0.1$. Use información del primer año para obtener S_0. Luego repita el proceso de predicción usando un alisamiento exponencial doble ($\alpha = 0.1$). Use la información del primer año para obtener S_0 y $S_0^{[2]}$.

Los resultados están contenidos en las siguientes tablas:

Suavizamiento Exponencial Simple

t	Y_t	S_{T-1}	$\hat{Y}_T$
12	558	480.33	
13	538	486.10	480.33
14	570	494.49	486.10
15	601	505.14	494.49
16	565	511.13	505.14
17	585	518.51	511.13
18	604	527.06	518.51
19	527	527.06	527.06
20	603	534.65	527.06
21	604	541.59	534.65
22	790	566.43	541.59
23	714	581.18	566.43
24	655	588.57	581.18
25	626	592.31	588.57
26	690	602.08	592.31
27	680	609.87	602.08
28	673	616.18	609.87
29	615	616.07	616.18
30	718	626.26	616.07
31	745	638.13	626.26
32	767	651.02	638.13
33	728	658.72	651.02
34	788	671.65	658.72
35	793	683.78	671.65
36	777	693.10	683.78
			693.10

Nota: Para iniciar el proceso, So se obtuvo como el promedio de los 12 primeros datos.

Alisamiento Exponencial Doble

t	x_t	S_T	$S_T^{[2]}$	$\hat{x}_T$
12	558	278.51	161.32	
13	538	304.46	175.63	408.72
14	570	331.01	191.17	447.60
15	601	358.01	207.85	486.39
16	565	378.71	224.94	524.85
17	585	399.34	242.38	549.56
18	604	419.80	260.12	573.74
19	527	430.54	277.16	597.23
20	603	447.77	294.22	604.97
21	604	463.39	311.14	618.38
22	790	496.06	329.63	632.57
23	714	517.85	348.45	680.97
24	655	513.66	366.75	706.07
25	626	541.01	384.19	714.68
26	690	555.91	401.36	715.25
27	680	568.32	418.06	727.63
28	673	578.79	434.13	735.27
29	615	582.41	448.95	739.51
30	718	595.97	463.66	730.68
31	745	610.87	478.38	742.97
32	767	626.48	493.19	754.59
33	728	636.63	507.53	774.59
34	788	651.77	521.96	780.08
35	793	665.89	536.35	796.01
36	777	677.00	550.42	809.83
				817.66

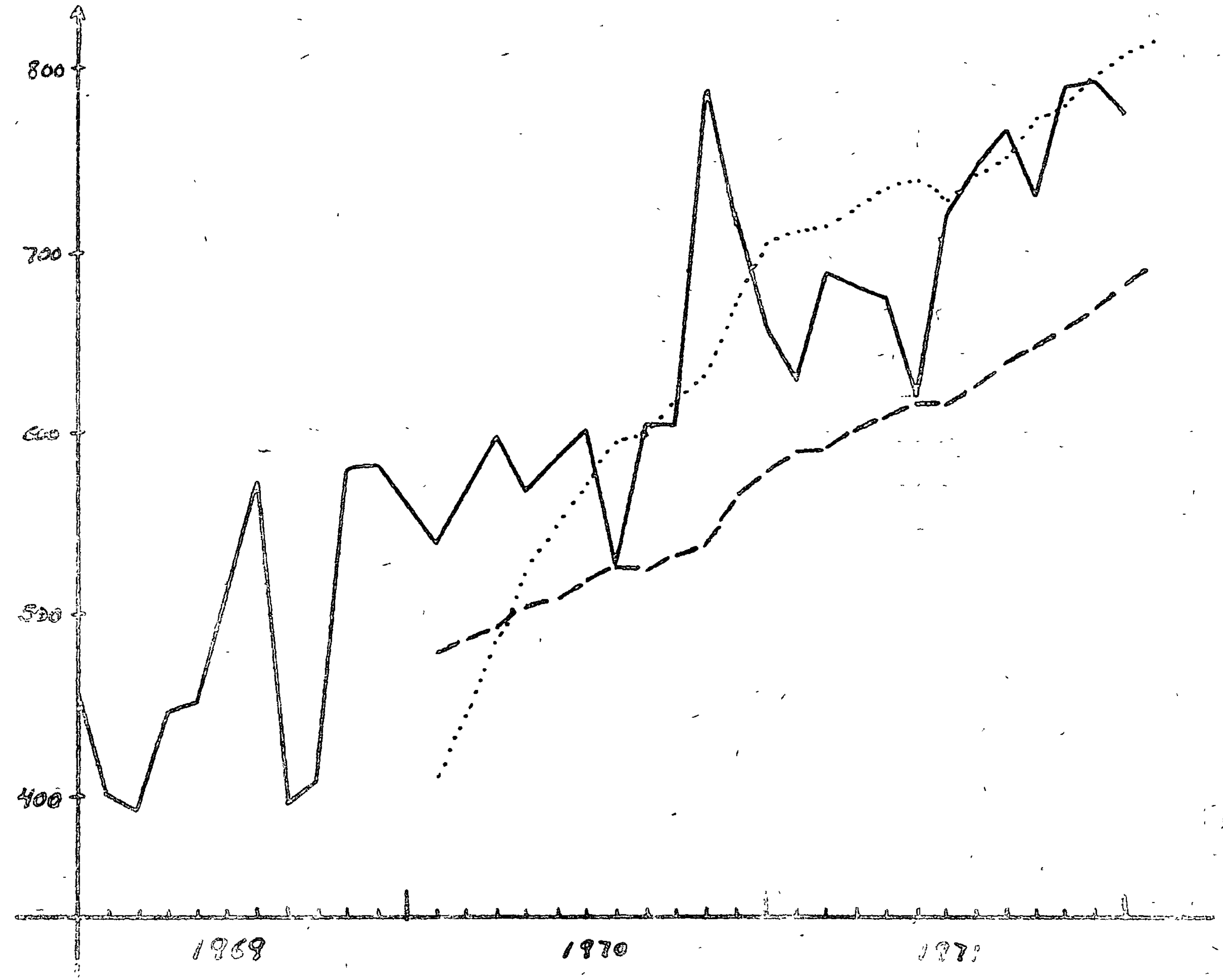
Nota: Para iniciar el proceso se consideró que en el primer año era adecuado adoptar un modelo con tendencia lineal, de esta forma se obtienen los valores:

$$\hat{a}(0) = 395.697 \quad y \quad \hat{b}(0) = 13.021$$

que nos [illegible] para obtener S_0 y $S_0^{[2]}$, por [illegible]

$$S_0 = \hat{a}(0) - \frac{\beta}{\alpha}\hat{b}(0) = 278.508$$

$$S_0^{[2]} = \hat{a}(0) - 2\frac{\beta}{\alpha}\hat{b}(0) = 161.319$$


800
700
600
500
400
1969
1970

4.3 METODO DE WINTER PARA VARIACIONES ESTACIONALES

TEOREMA. Considere un modelo estacional cuya estación (o ciclo) esta formado por L períodos, y que sigue la relación

$$y_t = (a + bt)c_t + \varepsilon_t \tag{4.15}$$

donde

- a es la señal base llamada la componente permanente
- b es la componente de la tendencia lineal
- c_t es la componente estacional (o factor estacional) para el período t, y satisface

$$\sum_{t=1}^{L} c_t = L \tag{4.16}$$

1. El procedimiento para revisar periodicamente los estimadores de los parámetros del modelo y hacer el pronóstico, se presenta a continuación. Al final de cualquier período T, después de observar x_T, realize lo siguiente:

   1) Revise (o estime) el estimador de la componente permanente:

$$\hat{a}(T) = \alpha\left[\frac{y_t}{\hat{c}_t(T-L)}\right] + (1-\alpha)\left[\hat{a}(T-1) + \hat{b}(T-1)\right] \tag{4.17}$$

   donde $0 < \alpha < 1$, es una constante de alisamiento.

ii) Revise el estimador de la componente tendencia:

$$\hat{b}(T)=\beta\left[\hat{a}(T)-\hat{a}(T-1)\right] + (1-\beta)\hat{b}(T-1) \qquad (4.18)$$

donde $0<\beta<1$, es una segunda constante de alisamiento.

iii) Revise el estimador del factor estacional para el período T:

$$\hat{c}_T(T) = \gamma\left[\frac{y_T}{a(T)}\right] + (1-\gamma)\hat{c}_T(T-L) \qquad (4.19)$$

donde $0<\gamma<1$, es una tercera constante de alisamiento.

iv) El pronóstico para cualquier período futuro $T+\tau$, es:

$$\hat{y}_{T+\tau}=\left[\hat{a}(T) + \tau\hat{b}(T)\right]\hat{c}_{T+\tau}(T+\tau-L) \qquad (4.20)$$

2. Los valores iniciales $\hat{a}(0)$, $\hat{b}(0)$ y $\hat{c}_t(0)$ para $t=1,2,\ldots,L$, necesarios para inicial esta técnica, se estiman de la siguiente manera:

i) Si se disponen de datos de dos estaciones pasadas, entonces

$$\hat{b}(0) = \frac{\bar{y}_2-\bar{y}_1}{L} \qquad (4.21)$$

donde $\bar{y}_1$ es la demanda promedio de la primera estación y $\bar{y}_2$ es la demanda promedio durante la más reciente estación.

ii) Los factores estacionales inciales pueden primeramente calcularse por

$$\hat{c}_t(0) = \frac{y_{t+L}-y_t}{L\hat{b}(0)} \quad , \qquad t=1,2,\ldots,L \qquad (4.22)$$

Sin embargo, este procedimiento generalmente da resultados pobres debido a la aleatoridad del patrón de la demanda. Por esto, se sugiere que se estimen tentativamente por (4.22), que después se usen para estimar la componente permanente "a" (ver ecuación (4.23)), y después se vuelvan estimar en terminos de $\hat{a}(0)$ y $\hat{b}(0)$, ver (4.24).

iii) Para estimar $\hat{a}(0)$, use

$$\hat{a}(0)=\frac{\sum_{t=1}^{2L} y_t + 3L^2\hat{b}(0) - 2\hat{b}(0)\sum_{t=1}^{L} t\hat{c}_t(0)}{2L} \qquad (4.23)$$

para $t=1,2,\ldots,L$.

iv) Para reevaluar los factores estacionales iniciales, basandose en los valores de $\hat{a}(0)$ y $\hat{b}(0)$, use:

$$\hat{c}_t(0) = \frac{1}{2}\left[\frac{y_t}{\hat{a}(0)-(2L-t)\hat{b}(0)} + \frac{y_{t+L}}{\hat{a}(0)-(L-t)\hat{b}(0)}\right] \qquad (4.24)$$

para $t=1,2,\ldots,L$.

NOTA. Otro procedimiento para estimar los factores estacionales consiste en dividir la demanda en cada período, entre la demanda promedio en la estación. Este procedimiento es muy adecuado cuando no aparece la componente de la tendencia (i.e., cuando b=0).

EJEMPLO. La demanda para sistemas de aire acondicionado con características de 5000 BTU y 110 V, es estacional, con una mayor demanda en los meses de primavera y verano. Datos históricos para 1970 se encuentran disponibles y aparecen en la tabla I. Suponemos que la componente de la tendencia lineal es cero, por lo que los factores estacionales se calculan dividiendo la demanda mensual entre la demanda mensual promedio durante el año. Estos factores estacionales aparecen en la última columna de la tabla I.

TABLA I. Datos históricos (1970)

Mes	Demanda	Factores estacionales estimados
Enero	4	0.48
Febrero	2	0.24
Marzo	5	0.60
Abril	8	0.96
Mayo	11	1.32
Junio	13	1.56
Julio	18	2.16
Agosto	15	1.80
Septiembre	9	1.08
Octubre	6	0.72
Noviembre	5	0.60
Diciembre	4	0.48
Total	100	12.00

Los parámetros iniciales son:

$\hat{b}(0)=0$ por suposición de que no existe esta componente

$$\hat{a}(0)=\frac{100}{12}=8.3$$

las constantes de alisamiento que se eligen son $\alpha=0.2$, $\beta=0.1$, y $\gamma=0.5$. Los valores para $\hat{a}(t)$, $\hat{b}(t)$, y $\hat{c}(t)$ son calculados con las ecuaciones (4.17), (4.18) y (4.19) respectivamente. El pronóstico con la ecuación (4.20). Los resultados aparecen en la tabla II. Por ejemplo, enero

$$\hat{y}_{En}=\left[\hat{a}(0)+\hat{b}(0)\right]\hat{c}_{En}(\text{En }1970)=(8.3+0)(0.48)=3.98\approx 4$$

Ya que la demanda real en enero de 1971, fue de 5, se tiene de la ecuación (4.17) que

$$\begin{aligned}\hat{b}(En) &= \beta\left[\hat{a}(En)-\hat{a}(0)\right]+(1-\beta)\hat{b}(0)\\ &= 0.1(8.72-8.3)+0.9(0)=0.043\end{aligned}$$

y de la ecuación (4.19)

$$\begin{aligned}\hat{c}_{En}(\text{En }1971) &= \gamma\left[\frac{y_{En}}{\hat{a}(En)}\right]+(1-\gamma)\hat{c}_{En}(\text{En. }1970)\\ &= 0.5\,\frac{5}{8.72}+0.5(0.48)=0{,}53\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{a}(En) &= \alpha\,\frac{y_{En}}{\hat{c}_{En}(\text{En. }1970)}+(1-\alpha)\,\hat{a}(0)+\hat{b}(0)\\ &= 0.2(5)/0.48+0.8(8.3)=8.72\end{aligned}$$

El pronóstico para Febrero sería

$$\hat{y}_{Fe} = \left[\hat{a}(En) + \hat{b}(En)\right]\hat{c}_{Fe}(Fe.\ 1970)$$
$$= (8.72 + 0.043)(0.24) = 2.1$$

Los elementos restantes de la tabla II, se calculan de manera similar.

TABLA II. Resultados Calculados para el año actual de 1971.

Mes	Demanda real	$\hat{a}(t)$	$\hat{b}(t)$	$\hat{c}(t)$	Pronóstico realizado un periodo anterior
Enero	5	8.72	0.043	0.53	4.0
Febrero	4	10.34	0.200	0.31	2.1
Marzo	7	10.77	0.223	0.63	6.3
Abril	7	10.25	0.149	0.82	10.6
Mayo	15	10.59	0.158	1.37	13.7
Junio	17	10.78	0.161	1.56	16.8
Julio	24	10.97	0.164	2.17	23.6
Agosto	18	10.91	0.142	1.73	20.0
Septiem.	12	11.06	0.143	1.08	11.9
Octubre	7	10.91	0.114	0.68	8.1
nov.	8	11.49	0.161	0.65	6.6
Diciembre	6	11.82	0.178	0.49	5.6
Total	130				129.3

CAPITULO 5.

5 METODOS DE BAYES EN PRONOSTICOS

Los métodos de Bayes que se presentan en esta sección son útiles cuando no se tiene información histórica disponible en el momento que se va a iniciar el pronóstico. Esta situación se presenta con frecuencia en la práctica, por lo que al hacer un pronóstico inicialmente se realiza en bases subjetivas exclusivamente. Sin embargo, a medida que se va obteniendo información histórica de la serie en el tiempo se deberán modificar nuestros estimadores subjetivos.
El método de Bayes, proporciona un criterio para ir modificando nuestros estimadores subjetivos en términos de la información que se va obteniendo. La técnica de Bayes en pronósticos consiste en aplicar el criterio de la teoría de decisiones de Bayes, la cual a su vez, está basada en el teorema de Bayes. Se presentará primero el teorema de Bayes, y después su aplicación a pronósticos para el caso de una serie en el tiempo que siga un modelo constante y cuando sea modelo con tendencia lineal.

CRITERIO DE BAYES EN ESTADISTICA.

Cuando se tiene una variable aleatoria x, que tiene una función de densidad f, la cual esta caracterizada por un parámetro θ, entonces se usa la notación $f(x;\theta)$ o $f(x|\theta)$, para hacer incapie en que la función de densidad f, depende del parámetro θ. Por ejemplo, cuando f es una densidad de probabilidad binomial, entonces la notación $f(x;\theta)$ significa que

$$f(x;\theta)=\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x} \qquad x=0,1,2,\ldots,n$$

Si f es una distribución normal, entonces la notación $f(x;\theta_1,\theta_2)$ significa

$$f(x;\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)^2}$$

En este ejemplo el parámetro θ_1 representa la media y θ_2 la variancia. Si una variable aleatoria x tiene una función de densidad normal con θ_1 y variancia θ_2, se dice que x es $N(\theta_1,\theta_2)$ o también se escribe

$$x\sim N(\theta_1,\theta_2).$$

NOTA. A una función de densidad de probabilidad también se le llama función de densidad.

Criterio de Bayes. Sea x una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f(x;\theta)$, donde el parámetro θ es desconocido. El criterio de Bayes en teoría de decisiones consiste en considerar el parámetro desconocido θ como una variable aleatoria. Esta consideración es la diferencia importante entre el criterio de Bayes y el criterio clásico en teoría de decisiones, ya que el criterio clásico considera que el parámetro θ desconocido, es una constante y no una variable aleatoria.

TEOREMA (TEOREMA DE BAYES)

Sea x una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f(x;\theta)$ donde el parámetro desconocido θ es considerado como una variable aleatoria. Sea $f(\theta)$ la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria θ. A $f(\theta)$ se le llama la función de densidad de probabilidad apriori de la variable aleatoria θ. Sean $x_1, x_2,\ldots,x_n$ observaciones de x, y sea $f(x_1, x_2,\ldots,x_n|\theta)$ la función de densidad de probabilidad condicional de $x_1, x_2,\ldots,x_n$, dado θ. La función de densidad de θ dadas las observaciones $x_1, x_2,\ldots x_n$, esta dada por

$$f(\theta | x_1, x_2,\ldots,x_n) = \frac{f(x_1, x_2,\ldots,x_n|\theta)\, f(\theta)}{\int_{\theta} f(x_1,x_2,\ldots,x_n|\theta)\, f(\theta)\, d\theta} \qquad (5.1)$$

A $f(\theta | x_1,x_2,\ldots,x_n)$ se le llama la función de densidad aposteriori de θ. A la fórmula (7.1) se le llama fórmula de Bayes o teorema de Bayes.

Demostración. La fórmula (5.1) aparece en la mayoría de los libros sobre probabilidad. Ver por ejemplo:

Mood, A.M., Graybill, F.A., and Boes, D.C., INTRODUCTION TO THE THEORY OF STATISTICS. Third edition. Mc Graw-Hill, 1974

NOTAS

1. La utilidad de la fórmula (5.1) consiste generalmente, en realizar los siguientes pasos
   - i) Subjetivamente se establecen los posibles valores que puede tomar el parámetro θ, junto con la probabilidad de que tome los valores supuestos de θ. La función de probabilidad de estos valores también se da subjetivamente, en base a la experiencia, o de situaciones similares encontradas en otros problemas ya resueltos.
   - ii) se observan los valores históricos (o experimentales), $x_1,\ldots,x_n$
   - iii) se calcula la condicional $f(x_1,\ldots,x_n|\theta)$, para cada uno de los valores de θ supuestos.
   - iv) se asignan nuevas probabilidades a los valores de θ, usando ecuación (5.1), en base de la información proporcionada por las observaciones históricas $x_1,\ldots,x_n$.
   - v) con las nuevas probabilidades $f(\theta|x_1,\ldots,x_n)$ para los posibles valores de θ, es posible hacer estimaciones o tomar decisiones sobre θ, como se verá en el teorema que aparece después.

2. En muchas ocasiones, en lugar de considerar directamente las observaciones $x_1,\ldots,x_n$, se calcula una función $y= u(x_1,\ldots,x_n)$ de las observaciones $x_1,\ldots,x_n$, para concentrar toda la información que proporcionan $x_1,\ldots,x_n$ en un solo valor $y= u(x_1,\ldots,x_n)$, y en base a esta información concentrada estimar las nuevas probabilidades de θ, lo que se calcula

$$f(\theta | y)= \frac{f(y|\theta)\, f(\theta)}{\int_{\theta} f(y|\theta)\, f(\theta)\, d\theta}$$

Para obtener esta probabilidad aposteriori, primero es necesario encontrar la condicional de $f(y|\theta)$ la cual depende de la función $f(x_1,\ldots,x_n|\theta)$, la cual a su vez depende de $f(x)$. En general -

es fácil encontrar la función $f(y \mid \theta)$ en términos de $f(x)$, aunque depende del tipo de función $y = u(x_1, \ldots, x_n)$ que se haya elegido. Por ejemplo, si

$$y = u(x_1, \ldots, x_n) = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

se sabe en estadística que $y = \bar{x}$ tiene una distribución igual a la distribución x, con la misma media, pero con varianza igual a la varianza de x sobre n. En el caso de que x sea $N(\mu, \sigma^2)$, entonces $y = \bar{x}$ es

$$N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}).$$

TEOREMA (CRITERIO DE BAYES EN TEORIA DE DECISIONES). Sea $f(x; \theta)$ una función de densidad de probabilidad, donde θ es un parámetro desconocido considerado como una variable aleatoria. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ observaciones de x, y si $y = u(x_1, \ldots, x_n)$ una función de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. El estimador Bayesiano de θ, indicado por θ^*, usando el criterio del menor error cuadrado medio, esta dado por

$$\theta^* = \int_{\theta} \theta f(\theta \mid y)\, d\theta \tag{5.3}$$

DEMOSTRACION. El método de Bayes asociado al criterio del menor error cuadrado medio, consiste en elegir un estimador θ^*, que minimize el valor esperado condicional de $(\theta - \theta^*)^2$, dadas las observaciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Para las personas interesadas en profundizar y justificar sobre esta demostración ver la referencia de Mood, Graybill and Boes, mencionada anteriormente. No es necesario que se conozcan estos detalles para entender la técnica de Bayes en pronósticos que se presentará después.

NOTA. En probabilidad se sabe que $\int \theta f(\theta/y)dy$ es por definición la media condicional de θ dado y. Por lo tanto, observando la ecuación (5.3), se dice que el estimar Bayesiano θ^* de θ, basado en el criterio del menor error cuadrado medio, es la media condicional de θ dado y, o también se dice que θ^* es la media aposteriori de θ, o la media de la distribución aposteriori $f(\theta \mid y)$.

OJO: En este capitulo a las observaciones $\{y_t : t \in \Lambda\}$ se indicaran por $\{x_t : t \in \Lambda\}$

TEOREMA (METODO DE COHEN). Sea $\{x_t : t \in \Lambda\}$, $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$, una serie en el tiempo, y considere que puede ser representada por el modelo constante

$$x_t = \beta_0 + \xi_t \tag{5.4}$$

donde β_0 es un parámetro desconocido que representa la media del proceso, y ξ_t es el error aleatorio con distribución $N(0, \sigma_\xi^2)$, donde σ_ξ^2 es conocido. Suponga que el parámetro desconocido β_0, es una variable aleatoria, cuya distribución apriori es $N(a_0, \sigma_0^2)$, ie muestra consideración subjetiva es que β_0 es una variable aleatoria $N(a_0, \sigma_0^2)$. Sea $y = \bar{x}$, la función que concentra toda la información histórica $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

i) El estimador Bayesiano β_0^* de β_0 esta dada por cualquiera de las siguientes ecuaciones

$$\beta_0^* = \frac{\bar{x}\sigma_0^2 + a_0(\sigma_\xi^2/n)}{\sigma_0^2 + (\sigma_\xi^2/n)} \equiv \beta_0^*(n) \tag{5.5}$$

$$\beta_0^* = \frac{n}{u+n}\bar{x} + \frac{u}{u+n} a_0 \equiv \beta_0^*(n) \tag{5.6}$$

donde $u = \sigma_\xi^2/\sigma_0^2$

$$\beta_0^* = a\, x_n + (1-a)\,\beta_0^*(n-1) \tag{5.7}$$

donde $a = 1/(u+n)$

ii) El pronóstico para un tiempo futuro $n+\tau$, es

$$\hat{x}_{n+\tau} = \beta_0^*(n) \tag{5.8}$$

DEMOSTRACION. Para $y = u(x_1,\ldots,x_n) = \bar{x}$ encuentre $f(\bar{x}|\theta)$ donde $\theta = \beta_0$, después encuentre $f(\theta|\bar{x})$ usando fórmula de Bayes (ecuación (5.2)), por último use (5.3).

NOTA. La técnica de Bayes deberá dejarse de usar cuando en algún tiempo ya se disponga de datos suficientes, y en ese tiempo debería adoptarse otra técnica de pronóstico, quizá alisamiento exponencial u otra.

EJEMPLO. Suponga que deseamos pronosticar la demanda para un producto nuevo. Sospechamos que la demanda esta normalmente distribuida y que un modelo constante es apropiado, pero no se dispone de información histórica. Se supone que una razonable densidad apriori para a es $N(50,4)$, y que $\sigma_\xi^2 = 9$. Para el período 1, el pronóstico es

$$\hat{x}_1 = 50$$

Suponga que la demanda real en el período 1 es $x_1 = 56$. Ahora el estimador de Bayes de β_0 es

$$\beta_0^*(1) = \frac{1}{(9/4)+1}(56) + \frac{(9/4)}{(9/4)+1}(50) \approx 52$$

Por tanto, el pronóstico para el período 2 es

$$\hat{x}_2 = 52$$

Suponga que la demanda real en el período 2 es 58, entonces

$$\beta_0^*(2) = \frac{1}{(9/4)+2}(58) + \frac{(13/4)}{(9/4)+2}(52) \approx 53 \quad \text{y} \quad \hat{x}_3 = 53$$

Este procedimiento se continua hasta que haya suficientes datos acumulados disponibles, para que en ese momento se desarrolle un sistema de pronóstico permanente.

TEOREMA. Considere un modelo lineal de la forma

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + \xi_t \tag{5.9}$$

el cual puede ser reescrito como

$$x_t = \beta_0' + \beta_1(t-\bar{t}) + \xi_t$$

donde $\beta_0' = \beta_0 + \beta_1\bar{t}$, y $\bar{t} = \sum_{t=1}^{n} t/n = n(n+1)/2$

Suponga que las densidades apriori de β_1 y β_0' son normales, i.e.,
$\beta_1 \sim N(b_0, \sigma_b^2)$ y $\beta_0' \sim N(a_0', \sigma_a^2)$, y además suponga que $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$.
Suponemos que σ_ϵ^2 es conocida.
Sean $\hat{\beta}_0' = \sum_{t=1}^{n} x_t/n$ y $\hat{\beta}_1 = \sum_{t=1}^{n} x_t (t-\bar{t})/SS_{tt}$

estimadores de β_0' y β_1, donde $SS_{tt} = \sum_{t=1}^{n} (t-\bar{t})^2$. Estos estimadores $\hat{\beta}_0'$ y $\hat{\beta}_1$ concentran la información de $x_1, \ldots, x_n$. Los estimadores de Bayes son

$$\beta_1^* = \frac{w}{w+\sigma_\epsilon^2}\hat{\beta}_1 + \frac{\sigma_\epsilon^2}{w+\sigma_\epsilon^2} b_0 \qquad (5.10)$$

donde $w = SS_{tt}\sigma_b^2$

$$(\beta_0')^* = \frac{z}{z+\sigma_\epsilon^2}\hat{\beta}_0' + \frac{\sigma_\epsilon^2}{z+\sigma_\epsilon^2}\beta_0' \qquad (5.11)$$

donde $z = t\sigma_{\beta_0'}^2$

NOTA

1. Los estimadores $\hat{\beta}_0'$ y $\hat{\beta}_1$ que concentran la información de $x_1, \ldots, x_n$, corresponden a los estimadores obtenidos por mínimos cuadrados.
2. Observando (5.10) y (5.11) se nota que los estimadores de Bayes $(\beta_0')^*$ y β_1^* son promedios ponderados (o con prioridades) de los estimadores de mínimos cuadrados y de las medias dadas apriori.
3. Las fórmulas (5.10) y (5.11) se deberán usar para que sucesivamente se vayan combinando los estimadores subjetivos con datos observados hasta que se tenga suficiente experiencia para desarrollar un sistema de pronóstico permanente.

REFERENCIAS.

1. Boloh, B.W., and Huang, C.J., MULTIVARIATE STATISTICAL METHODS FOR BUSINESS AND ECONOMICS. Prentice Hall, New Jersey, 1974.

2. Box. G.E.P. and Jenkins, G.M., TIME SERIES ANALYSIS, FORECASTING AND CONTROL. 2a. Impresión (con correcciones y problemas) Holden Day, San Francisco, 1977.

3. Bloomfield, P., FOURIER ANALYSIS OF TIME SERIES: An Introduction, Wiley, New York, 1976.

4. Brown, R.G., SMOOTHING, FORECASTING AND PREDICTION OF DISCRETE - TIME SERIES, Prentice Hall, New Jersey, 1963.

5. Brown, R.G., STATISTICAL FORECASTING FOR INVENTORY CONTROL, Mc Graw Hill, New York, 1959.

6. Buffa, E.S., and Taubert, W.H., PRODUCTION-INVENTORY SYSTEMS: PLANNING AND CONTROL, Revised edition, Irwin; Inc., 1972.

7. Draper, N.R., and Smith, H., APPLIED REGRESSION ANALYSIS, Wiley, New York, 1968.

8. Graybill, F.A., INTRODUCTION TO LINEAR STATISTICAL MODELS, Vol. I, Mc - Graw-Hill, New York, 1961.

9. Graybill, F.A., THEORY AND APPLICATION OF THE LINEAR MODEL, Duxbury Press, North Scituate, Massachusetts, 1976.

10. Johnson, L.A., and Montgomery, D.C., OPERATIONS RESEARCH IN PRODUCTION PLANNING, SCHEDULING, AND INVENTORY CONTROL, Wiley, New York, 1974.

11. Makridakis, S., A SURVEY OF TIME SERIES, Report at Massachusetts Institute of Technology.

12. Makridakis, S., Hodgsdon, A., and Wheelwright, C. AN INTERACTIVE FORECA... SYSTEM, The American Statistician, Vol. 28, No. 4, 153-158, 1974.

13. Montgomery, D.C., and Johnson, L.A., FORECASTING AND TIME SERIES ANALYSIS Mc.Graw-Hill, New York, 1976.

14. Morrison, D.F., MULTIVARIATE STATISTICAL METHODS, 2nd. ed., Mc Graw-Hill New York, 1976.

15. Nelson, C.R., APPLIED TIME SERIES ANALYSIS FOR MANEGERIAL FORECASTING Holden-Day, San Francisco, 1973.

16. Seber, B.A.F., LINEAL REGRESSION ANALYSIS, Wiley, New York, 1977.

17. Wheelwright, S., and Makridakis, S., FORECASTING METHODS FOR MANAGEMENT, Wiley, New York, 1973.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

PLANEACION Y CONTROL DE LA PRODUCCION

APENDICE A

M. EN C. JORGE RIVERA BENITEZ

SEPTIEMBRE DE 1977.

APENDICE A

2.1 MATRICES

DEFINICIONES FUNDAMENTALES

DEFINICION 2.1 Una matriz m x n, es un arreglo rectangular de números reales, llamados los elementos de la matriz, los cuales están arreglados en m renglones y n columnas en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

NOTAS:

i) Una representación simplificada del arreglo anterior es, $\left[a_{ij}\right]_{mn}$.

El símbolo a_{ij} representa al elemento que está en el i-ésimo renglón y en la - j-ésima columna del arreglo.

ii) Las matrices se representarán por letras mayúsculas gruesas, entonces si A es una matriz m x n, significa que A = $\left[a_{ij}\right]_{mn}$.

iii) Si m = n, entonces se dice que se tiene una matriz cuadrada de orden m.
iv) Si A es m x 1, entonces se dice que A es una matriz columna.
v) Si A es 1 x n, entonces se dice que A es una matriz renglón.

EJEMPLOS. Las matrices A, B, C y D mostradas a continuación.

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 12 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

tienen las siguientes características: A es 3 X 4, B es 1 X 4, (es una matriz renglón), C es 2 X 2 (es una matriz cuadrada), D es 3 X 1 (es una matriz columna)

NOTACION 1.

i) Sea $A = \left[a_{ij}\right]$ una matriz m x n. El i-esimo renglón de A, se indicará por - $A_{i\cdot}$, ie.

$A_{i\cdot} = \left[a_{i1} \;\; a_{i2} \cdots a_{in}\right]$.

ii) Sea $A = \left[a_{ij}\right]$ una matriz $m \times n$. La j-ésima columna de A, se indicará por $A_{\cdot j}$, i e.

$$A_{\cdot j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

EJEMPLOS. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ encuentre

i) el primer renglón de A
ii) el tercer renglón de A
iii) la primera columna de A
iv) la cuarta columna de A

Solución

i) $A_{1\cdot} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ii) $A_{3\cdot} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

iii) $A_{\cdot 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ iv) $A_{\cdot 4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

DEFINICION 2.2. Se dice que las matrices $A = \left[a_{ij}\right]_{mn}$ y $B = \left[b_{ij}\right]_{mn}$ son iguales si y solo si

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad \forall \quad i = 1, 2, \ldots, m \ \text{y} \ \forall \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

NOTA: De la definición anterior se observa una condición para que dos matrices sean iguales es que ambas tengan el mismo número de renglones y el mismo número de columnas

EJEMPLO. En las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

se observa que :

$A = B$ porque $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall$ $i = 1, 2;$ $j = 1, 2$.
$A \neq C$ porque para $i = 2$ y $j = 2$ se tiene que $a_{22} = 1 \neq c_{22} = 0$

DEFINICION 2.3. Las matrices $A = [a_{ij}]_{mn}$ y $B = [b_{ij}]_{mn}$ son iguales si y solo si

$$A_{i.} = B_{i.} \quad \forall \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

DEFINICION 2.4. Las matrices $A = [a_{ij}]_{mn}$ y $B = [b_{ij}]_{mn}$ son iguales si y solo si

$$A_{.j} = B_{.j} \quad \forall \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

TEOREMA 2.4. Las definiciones 2.2, 2.3 y 2.4 son equivalentes, ie.

DEFINICION 2.2 $\Leftrightarrow$ DEFINICION 2.3
DEFINICION 2.2 $\Leftrightarrow$ DEFINICION 2.4
DEFINICION 2.3 $\Leftrightarrow$ DEFINICION 2.4

DEMOSTRACION. La demostración es simple, solo considere la definición de igualdad de matrices (cualquiera de ellas) y la notación 1. Los detalles se piden en la tarea número 1.

DEFINICION 2.5. La suma de dos matrices $A = [a_{ij}]_{mn}$ y $B = [b_{ij}]_{mn}$, indicada por $A + B$, es una matriz $C = [c_{ij}]$ definida por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall \ i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

NOTA.

i) La definición anterior expresada en otros términos es

$$C = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \stackrel{d}{=} A + B$$

ii) De la definición 2.5, se observa que una condición necesaria para la adición de matrices es que ambas tengan igual número de renglones y de columnas.

EJEMPLO. Para las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+4 & 3+5 \\ 0+7 & 0+8 & 1+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$A + C$ no se define porque tienen distinto número de columnas
$B + C$ no se define por la misma razón

TEOREMA 2.6. (PROPIEDADES DE LA ADICION DE MATRICES)

i) $A + B = B + A$ (la adición es conmutativa)
ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (La adición es asociativa).

DEMOSTRACION.

i) $A + B \stackrel{d}{=} [a_{ij} + b_{ij}]$

Por otro lado, conocemos de la teoria de los números reales que la adición de los reales es conmutativa, ie. $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, por lo tanto,

$$A + B \stackrel{d}{=} \left[a_{ij} + b_{ij}\right] \Rightarrow A + B = \left[b_{ij} + a_{ij}\right] \stackrel{d}{=} B + A \qquad \square$$
$$\Rightarrow A + B = B + A$$

ii) $$(A+B) + C = \left(\left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right]\right) + \left[c_{ij}\right]$$
$$= \left[a_{ij} + b_{ij}\right] + \left[c_{ij}\right]$$
$$= \left[(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}\right]$$

Pero también conocemos de teoría de los números que en los números reales la adición es asociativa, ie.,

$$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$$

Por lo tanto,

$$(A+B) + C = \left[a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})\right]$$
$$= \left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij} + c_{ij}\right]$$
$$= A + (B+C) \qquad \square$$

DEFINICION 2.7. Sea $A = \left[a_{ij}\right]$ una matriz m x n y sea k un número real. La multiplicación de una matriz A por un número real k, indicado por kA, es una matriz m x n definida por

$$kA = \left[ka_{ij}\right]$$

NOTA: A los números reales también se les llama escalares, por lo que a la multiplicación de un real por una matriz también se le llama multiplicación escalar.

EJEMPLO. Si $k = -4$ y $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ entonces

$$kA = \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$$

TEOREMA 2.8 (PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UN REAL POR UNA MATRIZ)

i) $1\,A = A$
ii) $k\,(A+B) = kA + kB$
iii) $(k_1 + k_2)\,A = k_1 A + k_2 A$
iv) $(k_1 k_2)\,A = k_1 (k_2 A)$

DEMOSTRACION. Es trivial, solo aplique la definición 2.7, propiedades de números reales y definiciones o propiedades de matrices presentadas anteriormente. Intente hacerlo.

DEFINICION 2.9. Sea $A=\left[a_{ij}\right]$ m x n y sea $B=\left[b_{ij}\right]$ n x p. La multiplicación de A por B, indicada por AB, es una matriz de elementos c_{ij} definida por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \quad b_{kj}$$

NOTA. Una matriz A y B se pueden multiplicar si y solo si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B.

EJEMPLO Si

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 1X7 + 2X3 & 1X4 + 2X1 \\ 3X7 + 4X3 & 3X4 + 4X1 \\ 5X7 + 6X3 & 5X4 + 6X1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 33 & 16 \\ 53 & 26 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 + 8 + 5 = 16$$

Este ejemplo muestra que la multiplicación de dos matrices no es conmutativa, ie. $AB \neq BA$.

Es posible dar una definición equivalente del producto de dos matrices si se parte de la definición del producto de dos matrices particulares: una matriz renglón y una matriz columna.

DEFINICION 2.10 Sea

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \dots x_n \end{bmatrix}$$

una matriz renglón 1xn, y sea

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

NOTA: El producto xy así definido, verbalmente dice que para encontrar xy se multiplican la primera componente de x por la primera de y, la segunda de x por la segunda de y, continuando sucesivamente hasta multiplicar la n-ésima de x por la n-ésima de y, sumando después los números que resultan de estas multiplicaciones. La definición de multiplicación entre la matriz renglón x y la matriz columna y, corresponde a la definición del producto punto entre dos vectores (sin importar si uno es columna y otro vector) que se presentará en la sección de espacios vectoriales. Sin embargo es útil, para dar una definición equivalente de la multiplicación de dos matrices presentada anteriormente en la definición 2.5.

DEFINICION 2.11 Sea A mxn, B nxp, entonces el producto de A por B, indicado por AB, es una matriz de elementos c_{ij} definidos por

$$c_{ij} = A_{i.} B_{.j}$$

o sea que el elemento c_{ij} de AB se encuentra multiplicando el i-ésimo renglón de A por la j-ésima columna de B.

PROPOSICION 2.12 Las definiciones 2.9 y 2.11 son equivalentes.

DEMOSTRACION. Debemos demostrar que: Definición 2.9 $\leftrightarrow$ Definición 2.11.

Demostración de la implicación ($\rightarrow$):

Si $AB = c_{ij} \rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ por la definición 2.9

$$\rightarrow c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} \dots a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$ por definición 2.10

$\rightarrow c_{ij} = A_{i.} B_{.j}$

$\rightarrow$ Definición 2.11 □

Demostración de la implicación ($\leftarrow$). Como las implicaciones de la demostración anterior ($\rightarrow$) son reversibles en cada caso, entonces queda demostrado que la implicación 2.11 implica la definición 2.9 □

PROPOSICION 2.13.

i) $(AB)_{ij} = A_{i.} B_{.j}$

ii) $(AB)_{i.} = A_{i.} B$

iii) $(AB)_{.j} = AB_{.j}$

iv) $(ABC)_{ij} = A_{i.} BC_{.j}$

DEMOSTRACION.

DEMOSTRACION DE i). Este resultado es solo un restablecimiento de la definición 2.11.

$AB = \left[c_{ij} \right] \rightarrow (AB)_{ij} = c_{ij}$

$\rightarrow (AB)_{ij} = A_{i.} B_{.j}$ □ porque $c_{ij} = A_{i.} B_{.j}$ de acuerdo con definición 2.11

DEMOSTRACION DE ii). Demostraremos primero dos resultados

$$(A_{i.} B)_{1j} = (AB)_{ij} \qquad (*)$$

y

$$((AB)_{i.})_{1j} = (AB)_{ij} \qquad (**)$$

para luego concluir que el lado izquierdo de (*) es igual al lado izquierdo de (**), y por último mostrar que los elementos del renglón $(AB)_{i.}$ son de la forma (*) y que los elementos del renglón $A_{i.} B$ son de la forma (**), y así probar que $(AB)_{i.} = A_{i.} B$

Demostración de (*):

$(A_{i.} B)_{1j} = (A_{i.})_{1.} B_{.j}$ por la parte i) de esta proposición.

$\rightarrow (A_{i.} B)_{1j} = A_{i.} B_{.j}$ porque $A_{i.}$ es una matriz con un sólo renglón, por lo tanto el primer renglón de $A_{i.}$ es el mismo $A_{i.}$.

$\rightarrow (A_{i.} B)_{1j} = (AB)_{ij}$ □ por la parte i) de esta proposición.

Demostración de (**):

$(AB)_{i.}$ es el i-ésimo renglón de AB, lo cual implica que $(AB)_{i.}$ es una matriz de un solo renglón. Entonces el primer renglón de $(AB)_{i.}$ es la misma matriz $(AB)_{i.}$, expresando esta conclusión simbólicamente se tiene que

$$((AB)_{i.})_{1.} = (AB)_{i.}$$

Por lo tanto, si tomamos la j-ésima columna de $((AB)_{i.})_{1.}$, equivale a tomar la j-ésima columna de $(AB)_{i.}$, simbólicamente

$$((AB)_{i.})_{1j} = (AB)_{ij} \quad \square$$

Una vez demostradas (*) y (**) se tiene que

$$(*) \text{ y } (**) \rightarrow (A_{i.}B)_{1j} = ((AB)_{i.})_{ij} \qquad \forall j \qquad (***).$$

Falta ahora demostrar que los elementos del renglón $(AB)_{i.}$ son de la forma $(A_{i.}B)_{1j}$, y que los elementos del renglón $A_{i.}B$ son de la forma $((AB)_{i.})_{1j}$ y por (***) concluir que $(AB)_{i.} = A_{i.}B$:

$$\begin{aligned}
(AB)_{i.} &= \begin{bmatrix} (AB)_{i1} & (AB)_{i2} & \dots & (AB)_{in} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ((AB)_{i.})_{11} & ((AB)_{i.})_{12} & \dots & ((AB)_{i.})_{1n} \end{bmatrix} && \text{por } (**) \\
&= \begin{bmatrix} (A_{i.}B)_{11} & (A_{i.}B)_{12} & \dots & (A_{i.}B)_{1n} \end{bmatrix} && \text{por } (***) \\
&= A_{i.}B \quad \square && \text{por definición de } A_{i.}B
\end{aligned}$$

DEMOSTRACION DE iii). Es similar a la anterior. Inténtela.

DEMOSTRACION DE iv).

$$\begin{aligned}
(ABC)_{ij} &= ((AB)C)_{ij} && \text{asociatividad en la multiplicacion de matrices.} \\
&= (AB)_{i.}C_{.j} && \text{parte i) de esta proposición.} \\
&= A_{i.}BC_{.j} \quad \square && \text{propiedad ii) de esta proposición.}
\end{aligned}$$

TEOREMA 2.14 (PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION DE MATRICES)

i) $A(B+C) = AB + AC$

ii) $(A+B)C = AC + BC$

iii) $A(BC) = (AB)C$

DEMOSTRACION.

i) Debemos demostrar que el elemento (i,j) de $A(B+C)$ es igual al elemento (i,j) de $AB+AC$, para todo par (i,j):

$\left\{ A(B+C) \right\}_{ij} = \sum_k a_{ik} (B+C)_{kj}$ definición de producto de matrices

$= \sum_k a_{ik} (b_{kj} + c_{kj})$ definición de adición de matrices.

$= \sum_k a_{ik} b_{kj} + \sum_k a_{ik} c_{kj}$ propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición en los números reales.

$= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \ \forall (i,j)$

$= (AB + AC)_{ij}$ □

ii) Es similar a parte i).

iii) $\left\{ A(BC) \right\}_{ij} = \sum_k a_{ik} (BC)_{kj}$ definición de multiplicación de matrices

$= \sum_k a_{ik} \left(\sum_r b_{kr} c_{rj} \right)$ definición de multiplicación de matrices

$= \sum_k \sum_r a_{ik} b_{kr} c_{rj}$ asociatividad de la multiplicación en los números reales. (1)

Por otro lado,

$\left\{ (AB)C \right\}_{ij} = \sum_r (AB)_{ir} c_{rj}$ definición de multiplicacion de matrices

$= \sum_r \left(\sum_k a_{ik} b_{kr} \right) c_{rj}$ definición de multiplicación de matrices

$= \sum_r \sum_k a_{ik} b_{kr} c_{rj}$ asociatividad de la multiplicación en los números reales. (2)

Por lo tanto, comparando los lados derechos de (1) y (2), se demuestra que $(AB)C = A(BC)$. □

EJERCICIOS

1. Sean

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & 9 & 9 & 7 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Exprese en la notación presentada para renglones o columnas, lo siguiente

i) El tercer renglón de A y el primero de B
ii) La segunda y cuarta columna de A y de B.

En los ejercicios del 2 al 7 considera que las matrices que se mencionan son

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} ; \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad G = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Diga cuáles matrices son iguales.

3. Encuentre

i) $A + B$; ii) $B - C$; iii) $D + E$

4. Para $k = 4$ y $k = -1$ encuentre

i) kA, ii) Ak, iii) kE

5. Encuentre

i) $4A + B$; ii) $-B + 3C$

6. Encuentre

i) DA ; ii) AD ; iii) AE ; iv) BF ; v) EF ; vi) FE ; vii) $4DA + B$;

viii) $A_{2.}E$; ix) $B_{.3}D_{1.}$

7. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Encuenrre el elemento C_{21} de $C = AB$ por dos procedimientos. Primero realizando el producto AB y observando el elemento $(i,j) = (2,1)$, y segundo encontrando $A_{2\cdot} \cdot B_{\cdot 1}$.

8. Pruebe proposición 2.13 iii)

MATRIZ IDENTIDAD, TRANSPUESTA, SIMETRICA Y TRAZA DE UNA MATRIZ

DEFINICION 2.15. La matriz identidad n x n, indicada por In, es una matriz cuadrada cuyos elementos sobre la diagonal principal son todos 1 y los elementos fuera de la diagonal principal son todos cero; ie.

$$I_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \dots & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{n columnas}} \Bigg\} \text{ n renglones}$$

NOTA: La matriz identidad I_n, también se puede definir en términos de la delta de Kronecker, la cual se define a continuación. La delta de Kronecker, indicada por δ_{ij}, se define por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La matriz identidad I_n se define en términos de δ_{ij}, por

$$I_n = \left[\delta_{ij}\right]_{n \times n} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

TEOREMA 2.16. Sea $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Si I_n y I_m son matrices identidad n x n y m x m respectivamente, entonces

i) $I_n \; A = A$

ii) $A \; I_m = A$

DEMOSTRACION:

i) Si $I_n A = \left[C_{ij}\right]$ $\rightarrow C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \; a_{kj}$ por definición de multiplicación de matrices.

$$\rightarrow C_{ij} = \delta_{i1} \; a_{1j} + \dots + \delta_{i,\,i-1} \; a_{i-1,\,j} + \delta_{ii} \, a_{ij} + \delta_{i,i+1} \; a_{i+1,\,j} + \dots + \delta_{in} a_{nj}$$

$$\rightarrow C_{ij} = a_{ij}$$

$$\rightarrow I_n \; A = \left[C_{ij}\right] = \left[a_{ij}\right] = A \quad \square$$

ii) Es similar.

EJEMPLO. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ entonces

$$I_3 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = A$$

$$A I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = A$$

DEFINICION 2.17. Sea $A = \left[a_{ij}\right]_{mn}$. La transpuesta de A, indicada por A^t, es una matriz de elementos b_{ij} definida por

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

ie, si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

entonces la transpuesta de A, se define por

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots\cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots\cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

NOTA: Dada una matriz A, la transpuesta de A, se obtiene intercambiando los renglones de A para que lleguen a ser las columnas de A^t, ie.

La primera columna de A^t es el primer renglón de A

La segunda columna de A^t es el segundo renglón de A, etc.

EJEMPLOS. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}; \quad B^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

PROPOSICION 2.18

i) $(A_{i.})^t = (A^t)_{.i}$

ii) $(A_{.j})^t = (A^t)_{j.}$

DEMOSTRACION

i) Debemos demostrar que el lado izquierdo de la igualdad i), (L I I), es igual al lado derecho de la igualdad i), LDI,

$$LII = (A_{i.})^t = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{in} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \\ a_{in} \end{bmatrix}$$

$$LDI = (A^t)_{.i} = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2j} \cdots a_{2n} \\ \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots \; a_{ij} \quad a_{in} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots \; a_{mj} \quad amn \end{bmatrix}^t \right)_{.i}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{i1} \cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{i2} \cdots a_{m2} \\ \\ a_{1j} & a_{2j} \quad a_{ij} \quad a_{mj} \\ \\ a_{in} & a_{2n} \quad a_{in} \quad a_{mn} \end{bmatrix} \right)_{.i} = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \\ a_{in} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $LII = (A_{i.})^t = (A^t)_{.i} = LDI$, □

EJEMPLO. Si $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ encuentre el

primer renglón de la transpuesta de A y la tercera columna de A^t.

SOLUCION

$(A^t)_{1.} \quad = (A_{.1})^t$ por PROPOSICION 2.18 ii)

$$= \left(\begin{bmatrix}-1\\4\\7\end{bmatrix}\right)^t = (-1 \quad 4 \quad 7)$$

$$(A^t)_{\cdot 3} = (A_{3\cdot})^t \qquad \text{por PROPOSICION 2.18 ii)}$$

$$= (\,7 \quad 8 \quad 9\,)^t = \begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}$$

TEOREMA 2.19 (PROPIEDADES DE LA MATRIZ TRANSPUESTA)

i) $(A^t)^t = A$

ii) $(A+B)^t = A^t + B^t$

iii) $(kA)^t = kA^t$

iv) $(AB)^t = B^t A^t$

DEMOSTRACION:

i) Sea $B = \left[\, b_{ij} \,\right] = A^t$ y sea $C = \left[\, c_{ij} \,\right] = B^t = (A^t)$, debemos demostrar que $C = A$.

Demostración:

$C = B^t \quad \rightarrow c_{ij} \overset{d}{=} b_{ji}$ (1) por definición de transpuesta

Por otro lado,

$B = A^t \quad \rightarrow b_{ij} \overset{d}{=} a_{ji}$ (2) por definición de transpuesta

$\rightarrow b_{ji} = a_{ij}$

(2) en (1) $\rightarrow c_{ij} = b_{ji} = a_{ij}$

$\rightarrow c_{ij} = a_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n$

$\rightarrow C = A$

$\rightarrow (A^t)^t = A \quad \square$

PROPOSICION 2.10 (REPRESENTACIONES MATRICIALES DE ALGUNAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS O NUMERICAS).

1. Si $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$; $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \rightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = xy^t$

2. Si $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \rightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = xx^t$

3. Sea $u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ un vector de n componentes, los cuales son todos unos.

   i) Si $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \rightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k = xu^t$

   ii) $n = uu^t$

   El vector $u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ es llamado el vector suma debido a la propiedad de poder representar matricialmente una suma de números x_i (ver propiedad 3 i).

DEMOSTRACION. Es simple, sólo use la definición de producto de matrices para probar que el lado izquierdo de cada igualdad dada es igual al lado derecho de la misma.

EJEMPLOS

1. La expresión $8y_1 + 7y_2 - 4y_3$ puede expresarse matricialmente en la forma

$$\begin{bmatrix} 8 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Para probar que ambas expresiones son iguales, basta con que realicemos el producto matricial de las matrices renglón y columna indicadas arriba. Por lo tanto si definimos una matriz renglón x, y una matriz columna y por

$$x = \begin{bmatrix} 8 & 7 & -43 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

entonces $8y_1 + 7y_2 - 4y_3$ puede expresarse matricialmente por

$$8y_1+7y_2-4y_3 = xy$$

Nótese que otra expresión válida es

$$8y_1+7y_2-4y_3 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} \equiv y^t x$$

2. Considere la expresión $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

Si definimos un vector x por $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ entonces

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \equiv x\,x^t$$

Es fácil ver que si x se define como matriz columna entonces

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = x^t x$$

3. Si deseamos representar $\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2$ en una forma matricial, podemos definir los vectores columna a y b por:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Nótese que

$$a-b = \begin{bmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$(a-b)^t\,(a-b) = \begin{bmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{bmatrix}$$

$$(a-b)^t\,(a-b) = (a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2$$

Por lo tanto, la expresión $\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2$ en términos de las matrices columnas a y b definidas está dada por

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2 = (a-b)^t\,(a-b)$$

MATRIZ SIMETRICA.

DEFINICION 2.11 Sea $A=\left[a_{ij}\right]$ una matriz cuadrada $m \times m$.

Se dice que A es simétrica si

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \forall i \neq j$$

EJEMPLOS.

1. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

es simétrica, porque $a_{12} = 2 = a_{21}$; $a_{13} = 3 = a_{31}$; $a_{23} = 5 = a_{32}$.

2. Otras matrices simétricas son

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

PROPOSICION 2.12 Si A es simétrica entonces $A = A^t$.

DEMOSTRACION (Se deja al lector)

PROPOSICION 2.13 Si A es una matriz arbitraria entonces $A'A$ y AA' son matrices simétricas.

DEMOSTRACION (Ejercicios)

DEFINICION 2.14. La traza de una matriz cuadrada A $m \times m$, es igual a la suma de los elementos de m diagonal principal, y se indica por tr (A), ie.

$$\operatorname{tr}(A) \overset{\nabla}{=} \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$$

EJEMPLO Si

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{entonces } \operatorname{tr} A = 8 + 7 + 9 = 24$$

NOTA. La definición de traza se puede extender a matrices no cuadradas. Si A es m x n entonces

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{k} a_{ii}$$

donde k es el mínimo de los números m y n.

PROPOSICION 2.15

i) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$

ii) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

iii) $\operatorname{tr}(A') = \operatorname{tr}(A)$

EJERCICIOS

1. Sea A una matriz 3 X 4 definida como

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Encontrar:

i) AI donde I es 4 X 4

ii) IA donde I es 3 X 3

2. Encuentre la transpuesta de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} ; \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

3. Sea I la matriz identidad n x n

Demuestre que:

i) $I_{i\cdot} A = A_{i\cdot}$; ii) $AI^{t}_{\cdot i} = A_{\cdot i}$

ii) Si $I_{i\cdot} A = I_{i\cdot} B$ $\forall$ i, entonces A = B

iv) Si $A \left[I_{i\cdot}\right]^{t} = B \left[I_{i}\right]^{t}$ $\forall$ i, entonces A = B

4. Si A es una matriz m x n demuestre que

i) $(A+B)^t = A^t + B^t$.

ii) $(k\,A)^t = k\,A^t$

iii) $(AB)^t = B^t A^t$

5. Exprese los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 &= 8 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 9 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2y_1 - y_2 + y_3 &= 6 \\ -4y_1 + y_2 - 3y_3 &= -4 \\ -y_1 - y_3 &= -7 \\ y_1 + y_2 &= 5 \end{aligned}$$

En las formas:

i) $Ax = b$ dando A y b

ii) $A_{i\cdot}x = b_i$, $i=1,2,\ldots,4$

iii) $x_1 A_{\cdot 1} + x_2 A_{\cdot 2} + x_3 A_{\cdot 3} = b$; $i = 1,2,3,4$

iv) Demuestre que todas son equivalentes.

6. Si A es m x n, $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$,

$y = (y_1, \ldots, y_m)^t$ demuestre que:

i) $AX = x_1 A_{\cdot 1} + \ldots + x_n A_{\cdot n}$

ii) $y^t A = y_1 A_{1\cdot} + \ldots + y_m A_{m\cdot}$

7. Represente en forma matricial las siguientes expresiones definiendo las matrices - apropiadas.

i) $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$

ii) $3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 5x_4$

iii) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$

iv) $y_1 + y_2 + y_4$

v) $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$. Defina $x = x_1, \ldots x_n$

vi) $S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$ Defina el vector x como en el inciso anterior

vii) Defina los vectores apropiados para representar el número 4 como un producto de estos vectores.

viii) $\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2$; defina los siguientes vectores:

$$x = [x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n]^t$$

$$y = [y_1 \; y_2 \; \cdots y_n]^t$$

$$e = [e_1 \; e_2 \; \dots \; e_n] \quad ; \quad e_i = x_i - y_i \; ; \; i = 1, 2, \dots n$$

8. APLICACION EN ESTADISTICA. Un problema importante en estadística es encontrar la relación funcional que existe entre una variable y, llamada dependiente, y otra variable x llamada independiente con este objetivo, se realizan observaciones de la variable x y el correspondiente valor de la variable y. Si se postula una relación entre estas variables de la forma $y = \beta_0 + \beta_1 x$ el problema es encontrar los parámetros desconocidos β_0 y β_1. Si tienen tres pares de observaciones (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), estos pares deben seguir la relación propuesta, es decir, deben satisfacer

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_1 \\ y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_2 \\ y_3 &= \beta_0 + \beta_1 x_3 \end{aligned}$$

Represente matricialmente el sistema de ecuaciones anterior en términos de las matrices que se definen a continuación.

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} ; \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} ;$$

Suponga que se tiene observaciones (x_1, y_1), (x_2, y_2); (x_3, y_3), (x_4, y_4) que siguen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} + \beta_3 x_{31} + \varepsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{12} + \beta_2 x_{22} + \beta_3 x_{32} + \varepsilon_2 \\ Y_3 &= \beta_0 + \beta_1 x_{13} + \beta_2 x_{23} + \beta_3 x_{33} + \varepsilon_3 \\ Y_4 &= \beta_0 + \beta_1 x_{14} + \beta_2 x_{24} + \beta_3 x_{34} + \varepsilon_4 \end{aligned}$$

Defina los siguientes vectores:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} ; \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & x_{33} \\ 1 & x_{14} & x_{24} & x_{34} \end{bmatrix} ; \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix}$$

9. Probar que si A es simétrica, entonces $A^t = A$.

10. Sea

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} \cdots\cdots x_{p1} \\ 1 & x_{12} \cdots\cdots x_{p2} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_{1n} \cdots\cdots x_{pn} \end{bmatrix}$$

Probar que $(X'X)$ es simétrica.

11. Probar que $A'A$ y AA' son simétricas para cualquier matriz A.

12. Sean A y B matrices $n \times n$. Pruebe

i) $\mathrm{tr}\,(A+B) = \mathrm{tr}\;A + \mathrm{tr}\;B$

ii) $\mathrm{tr}\;AB = \mathrm{tr}\;(BA)$

iii) $\mathrm{tr}\;A' = \mathrm{tr}\;A$

13. Sea $M = Inn - X\,(X'X)^{-1}\,X'$ donde X es la matriz dada en el problema 9. Pruebe que M es idempotente, ie. pruebe que $M = M'M$.

2.3 TEORIA PIVOTAL Y OPERACIONES ELEMENTALES.

DEFINICION 2.3.1. Sea A mxn. Una operación elemental renglón sobre la matriz A es cualquier operación de uno de los siguientes tres tipos:

(i) Multiplicación de un renglón por un escalar distinto de cero, ie. un renglón $A_{i.}$ puede ser reemplazado por el renglón $cA_{i.}$ con $c \neq o$.

(ii) La adición de un múltiplo de un renglón a otro, ie., el renglón $A_{i.}$ puede ser reemplazado por el renglón $A_{i.} + cA_{k}$.

(iii) el intercambio de dos renglones cualesquiera.

NOTAS.

1. Se seguirán la siguiente notación para las operaciones elementales renglón:

La operación (i) se indicará por : $A_{i.} \to cA_{i.}$
La operación (ii) se indicará por: $A_{i.} \to A_{i.} + cA_{k.}$
La operación (iii) se indicará por: $A_{i.} \leftrightarrow A_{k.}$
La flecha en una dirección indica sustitución (reemplazo)
La flecha en ambas direcciones indica intercambio.

2. Si $\mathcal{M}_{mn}$ es el conjunto de todas las matrices m x n, entonces una operación elemental renglón puede considerarse como una función f, de $\mathcal{M}_{mn}$ a $\mathcal{M}_{mn}$ ($f: \mathcal{M}_{mn} \to \mathcal{M}_{mn}$). Si $B = f(A)$, se entiende que $B \in \mathcal{M}_{mn}$ es la matriz que resulta de aplicar la operación elemental renglón f a la matriz A.

EJEMPLO. Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

realice sobre A las siguientes operaciones elementales renglón: a) $A_{1.} \leftrightarrow A_{3.}$; b) $A_{2.} \to 5A_{2.}$; c) $A_{3.} \to A_{3.} + 2A_{2.}$

a) $f_1(A) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; b) $f_2(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 15 & 20 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$; c) $f_3(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$

DEFINICION 2.3.2. Sea A m x n. Una operación elemental columna sobre A, es cualquier operación de uno de los siguientes tres tipos:

(i) multiplicación de una columna por un escalar $c \neq o$, ie. $A_{.i} \to cA_{.i}$

(ii) adición de un múltiplo de una columna a otra, ie. $A_{.i} \to A_{.i} + cA_{.i}$

(iii) intercambio de dos columnas cualesquiera, ie. $A_{.i} \leftrightarrow A_{.k}$

NOTAS.

1. Una operación elemental columna también puede considerarse como una función ψ del conjunto M_{mn} de todas las matrices de dimensión m x n al mismo conjunto M_{mn}.

   La notación $B = \psi(A)$ significa que B es la matriz que resulta al aplicar la operación elemental columna ψ a la matriz A.

2. Las operaciones elementales columna no son usados frecuentemente, por lo tanto en nuestra discusión se considerarán operaciones elementales renglón y en ocasiones cuando se hable de operaciones elementales se entenderá que se trata de operaciones elementales renglón.

DEFINICION. 2.3.3. Sea I_{mm} la matriz identidad m x m. Una matriz elemental renglón es una matriz que se deriva de la matriz identidad I_{mm} al efectuar una y solo una operación elemental renglón. Una matriz elemental renglón, A, se llamará de tipo 1, si

$$A = f(I_{mm}) \quad \text{donde } f: \; I_{i.} \to c\, I_{i.}$$

Una matriz elemental renglón, A, se llamará de tipo 2, si

$$A = f(I_{mm}) \quad \text{donde } f: \; I_{i.} \to I_{i.} + c\, I_{j.}$$

Una matriz elemental renglón, A, se llamará de tipo 3, si

$$A = f(I_{mm}) \quad \text{donde } f: \; I_{i.} \leftrightarrow I_{j.}$$

EJEMPLO. Sea I la matriz identidad 3 x 3. Las siguientes matrices son matrices elementales renglones

$$f(I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{donde } f: I_{1.} \leftrightarrow I_{2.}$$

$$f(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{donde } f: I_{2.} \to 5.I_{2.}$$

$$f(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{donde } f: I_{3.} \to I_{3.} + 3\, I_{1.}$$

LEMA 2.3.4 Sean A mxn y B nx q.

i) Si f es una operación elemental renglón entonces

$$f(AB) = f(A)\ B$$

ii) Si ψ es una operación elemental columna entonces

$$\psi(AB) = A\ \psi(B)$$

DEMOSTRACION DE i).

Conociendo que $(AB)_{i.} = A_{i.}B$, por la proposición 2.13, la matriz AB escrita en términos de sus renglones queda representada por

$$AB = \begin{bmatrix} (AB)_{1.} \\ \vdots \\ (AB)_{i.} \\ \vdots \\ (AB)_{m.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1.}B \\ \vdots \\ A_{i.}B \\ \vdots \\ A_{m.}B \end{bmatrix}$$

De la igualdad $(AB)_{i.} = A_{i.}B$, se deduce que cualquier operación sobre los renglones de AB produce la misma operación sobre los renglones de A. Por lo tanto,

$$f(AB) = f(A)B \quad \square$$

DEMOSTRACION DE ii)

Similarmente, con la igualdad $(AB)_{.i} = AB_{.i}$, la matriz AB escrita en términos de sus columnas resulta

$$AB = \left[(AB)_{.1} \ldots (AB)_{.i} \ldots (AB)_{.n}\right] =$$

$$\left[AB_{.1} \ldots AB_{.i} \ldots AB_{.n}\right]$$

Obsérvese que la igualdad $(AB)_{.j} = AB_{.j}$ implica que cualquier operación elemental columna ψ, sobre las columnas de B produce la misma operación sobre las columnas de AB, por lo tanto

$$\psi(AB) = A\ \psi(B) \quad \square$$

TEOREMA 2.3.5 Si A es mxn, f es una operación elemental renglón y ψ es una operación columna sobre A, entonces

$$f(A) = f(I_{mm})\,A$$

y

$$\psi(A) = A\,\psi(I_{nn})$$

DEMOSTRACION. Observe que $A = I_{mm}A$ y aplique parte i) del lema anterior. También observe que $A = A\,I_{nn}$ y aplique parte ii) del mismo lema.

EJEMPLO. Considere la matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Sea f una operación elemental que consiste en sustituir el tercer renglón por la suma que resulta de sumar el renglón tres más dos veces el renglón dos. Determine f (A) por un lado y $f(I_{33})\,A$ por otro lado, y verifique que el teorema anterior se satisface.

SOLUCION.

Nótese que

$$f(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$$

Por otro lado

$$f(I_{33}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad f(I_{33})\,A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$$

Se observa que $f(A) = f(I_{33})\,A$, por lo tanto esta igualdad ilustra el teorema.

MATRICES ESCALONADAS Y CANONICAS.

DEFINICION. 2.3.6 Una matriz es llamada escalonada si el primer elemento distinto de cero de cada renglón está más a la derecha del primer elemento distinto de cero del renglón anterior.

NOTA. Algunos autores piden además que el primer elemento distinto de cero en cada renglón sea igual a 1. Esta condición no es importante para algunas aplicaciones de la matriz escalonada (como por ejemplo para la determinación del rango de una matriz que se mostrará después), pero si es necesaria junto con otras condiciones para otras aplicaciones, como por ejemplo en la solución de sistemas de ecuaciones.

EJEMPLOS. Las siguientes son matrices escalonadas

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las tres siguientes no lo son:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

DEFINICION 2.3.7 Una matriz en forma canónica es una matriz escalonada que además debe satisfacer lo siguiente:

i) el primer elemento distinto de cero en cada renglón es igual a 1.

y

ii) el primer elemento distinto de cero en cada renglón pertenece a una columna en la cual este elemento es el único diferente de cero y los restantes elementos en la columna son ceros.

EJEMPLOS. Las siguientes matrices están en forma canónica.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las siguientes no están en forma canónica.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

2.4 INVERSA DE UNA MATRIZ.

DEFINICIONES Y PROPIEDADES.

DEFINICION 2.4.1 Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Si existe una matriz B $n \times n$ tal que

$$A\,B = I_{nn}$$

$$\text{y} \quad B\,A = I_{nn}$$

entonces B es llamada la inversa de A. A la matriz B se le indicará por A^{-1}, ie, la inversa de A, indicada por A^{-1}, es una matriz tal que

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_{nn}$$

NOTA. Si para una matriz A no es posible encontrar una matriz A^{-1} que satisfaga la definición anterior, entonces se dice que A no tiene inversa o que su inversa no existe.

TEOREMA 2.4.2 (PROPIEDADES DE LA MATRIZ INVERSA). Sean A y B matrices $n \times n$ y sean A^{-1} y B^{-1} sus respectivas inversas. Se afirma que:

i) $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$
ii) $(A^{-1})^{-1} = A$
iii) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

DEMOSTRACION DE i). Para que $B^{-1}\,A^{-1}$ sea la inversa de AB, debe satisfacer que

$$(B^{-1}\,A^{-1})\,(A\,B) = I_{nn}$$

$$\text{y} \quad (A\,B)\,(B^{-1}\,A^{-1}) = I_{nn}$$

las demostraciones de estas dos condiciones se presenta en las siguientes demandas.

DEMANDA 1. $(B^{-1}\,A^{-1})\,(AB) = I_{nn}$

DEMOSTRACION

$(B^{-1}\,A^{-1})\,(AB) = (B^{-1}\,A^{-1}\,A)\,B$ por asociatividad en la multiplicacion de matrices.

$= B^{-1}\,(A^{-1}\,A)\,B$ por asociatividad de en la multiplicación de matrices.

$= B^{-1}\,I_{nn}\,B$

$= B^{-1}\,B = I_{nn}$ □

DEMANDA 2. $(AB)\,(B^{-1}\,A) = I_{nn}$

DEMOSTRACION. Es similar, a la anterior, ie.

$$(AB)\,(B^{-1}\,A^{-1}) = (A\,B\,B^{-1})\,A^{-1} = A\,(B\,B^{-1})\,A^{-1} = A\,I_{nn}\,A^{-1}$$

$$= A\,A^{-1} = I_{nn} \quad \square$$

DEMOSTRACION DE ii) Debemos demostrar que

$$A^{-1}\,(A^{-1})^{-1} = I_{nn}$$

$$\text{y} \quad (A^{-1})^{-1}\,A^{-1} = I_{nn}$$

La demostración es trevial, ya que conocemos que para cualquier matriz B con inversa, se debe satisfacer que

$$B\,B^{-1} = B^{-1}\,B = I_{nn}$$

Por lo tanto, si hacemos $B = A^{-1}$,

$$(A^{-1})\,(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}\,(A^{-1}) = I_{nn} \quad \square$$

DEMOSTRACION DE iii).

$AA^{-1} = A^{-1}A = I_{nn} \;\rightarrow\; (AA^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_{nn}^t$

$\rightarrow\; (A^{-1})^t\,A^t = A^t(A^{-1})^t = I_{nn}$ Teorema 2.19 iv) (pág. 13).

Si $B = (A^{-1})^t \;\rightarrow\; B\,A^t = A^t\,B = I_{nn}$

Por lo tanto la inversa de A^t es B por definición de inversa. Pero $B = (A^{-1})$ entonces la inversa de A^t es $(A^{-1})^t$, ie $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ $\square$.

TEOREMA 2.4.3 (INVERSA DE UNA MATRIZ 2 X2).

Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

donde $|A| = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$

DEMOSTRACION. Suponga que

$$B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

es la inversa de A, entonces AB = I, ó sea

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}w + a_{12}y & a_{11}x + a_{12}z \\ a_{21}w + a_{22}y & a_{21}x + a_{22}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}w + a_{12}y = 1$$
$$a_{21}w + a_{22}y = 0$$
$$a_{11}x + a_{12}z = 0$$
$$a_{21}x + a_{22}z = 1$$

Resolviendo en las variables w, x, y z, se tiene que

$$B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{a_{22}\,a_{11} - a_{12}\,a_{21}} & \dfrac{-a_{12}}{a_{22}\,a_{11} - a_{12}\,a_{21}} \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{22}\,a_{11} - a_{12}\,a_{21}} & \dfrac{a_{11}}{a_{22}\,a_{11} - a_{12}\,a_{11}} \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{a_{22}\,a_{11} - a_{12}\,a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \qquad \square$$

EJEMPLO. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ entonces } \qquad A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

TEOREMA 2.4.4 (INVERSION DE MATRICES POR PARTICIONES). Si A es una matriz n x n, particionada de acuerdo al siguiente criterio

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1p} & a_{1,\,p+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{p1} & & a_{pp} & a_{p,\,p+1} & \cdots & a_{pn} \\ \hline a_{p+1,\,1} & \cdots & a_{p+1,\,p} & a_{p+1,\,p+1} & \cdots & a_{p+1,\,n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,\,p} & a_{n,\,p+1} & \cdots & a_{n,\,n} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} M & R \\ L & N \end{bmatrix}; \qquad \begin{array}{l} M \text{ es } p \times p \\ L \text{ es } q \times p \\ R \text{ es } p \times q \\ N \text{ es } q \times q \\ p + q = n \end{array}$$

y N^{-1} existe entonces

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{lll} \mu = (M - R\,N^{-1} L)^{-1} & & \text{es } p \times p \\ \lambda = -\,N^{-1}\,L\,\mu & & \text{es } q \times p \\ \rho = -\,\mu\,R\,N^{-1} & & \text{es } p \times q \\ \nu = N^{-1} - N^{-1}\,L\,\rho & & \text{es } q \times q \end{array}$$

DEMOSTRACION

Suponga que la inversa de A es una matriz particionada de la forma

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{bmatrix}$$

donde μ ρ λ y ν son submatrices de A^{-1} que tienen las siguientes dimensiones:

μ es p x p
λ es q x p
ρ es p x q
ν es q x q

Por definición de inversa, se tiene que

$$A\,A^{-1} = I_{nn}$$

Esta igualdad expresada en forma particionada presenta la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} M & R \\ L & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_{pp} & O_{pq} \\ \hline O_{qp} & I_{qq} \end{array}\right]$$

Realizando el producto de las matrices particionadas del lado izquierdo de la igualdad anterior se tiene que

$$\begin{bmatrix} M\mu + R\lambda & M\rho + R\nu \\ L\mu + N\lambda & L\rho + N\nu \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_{pp} & O_{p\times q} \\ \hline O_{q\times p} & I_{qq} \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \begin{array}{ll} M\mu + R\lambda = I_{pp} & (2.4.1) \\ L\mu + N\lambda = O_{qp} & (2.4.2) \\ M\rho + R\nu = O_{pq} & (2.4.3) \\ L\rho + N\nu = I_{qq} & (2.4.4) \end{array}$$

(2.4.2) $\longrightarrow \lambda = -N^{-1} L\mu \quad \square$ (2.4.5)

(2.4.5) en (2.4.1) $\rightarrow M\mu + R(-N^{-1}L\mu) = I_{pp}$

$\rightarrow (M - RN^{-1}L)\mu = I_{pp}$

$\rightarrow \mu = (M - RN^{-1}L)^{-1} I_{pp}$

$\rightarrow \mu = (M - RN^{-1}L)^{-1} \quad \square$ (2.4.6)

(2.4.4) $\rightarrow \nu = N^{-1} - N^{-1} L\rho \quad \square$ (2.4.7)

(2.4.7) en (2.4.3) $\rightarrow M\rho + R\,[N^{-1} - N^{-1}L\rho] = O_{pq}$

$\rightarrow [M - RN^{-1}L]\rho = -RN^{-1}$

$\rightarrow \rho = -[M - RN^{-1}L]^{-1} RN^{-1}$

$\rightarrow \rho = -\mu RN^{-1} \quad \square$

EJEMPLO. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

encuentre su inversa por particiones.

SOLUCION. Una posible partición de A es

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} M & R \\ L & N \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow N^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Ya que N^{-1} existe entonces la partición elegida es apropiada y podemos aplicar el método por particiones de acuerdo al teorema anterior.

$$\mu = (M - R\,N^{-1}\,L)^{-1} = \left(1 - \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\mu = \left(1 - \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)^{-1} = (1 - 3/2)^{-1} = (-1/2)^{-1}$$

$$\mu = -2$$

$$\lambda = -N^{-1}\,L\,\mu = -\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} (-2) = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho = -\mu\,R N^{-1} = -(-2)\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\nu = N^{-1} - N^{-1}\,L\,\rho = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\nu = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Otra posible solución es eligiendo la siguiente partición

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} M & R \\ L & N \end{bmatrix}$$

$$N = 6 \rightarrow N^{-1} = 1/6$$

Ya que N^{-1} existe, entonces de acuerdo al teorema anterior se tiene

$$\mu = (M - RN^{-1}\,L)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} (1/6) \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -N^{-1}\,L\,\mu = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rho = -\mu RN^{-1} = -\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}(1/6) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\nu = N^{-1} - N^{-1} L \rho = 1/6 - (1/6)\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = (1/6) - (1/6)(-5) = 1$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \mu & \rho \\ \lambda & \nu \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ \hline 1 & -2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

INVERSION DE MATRICES POR EL METODO DE LA INVERSA EN FORMA DE PRODUCTO.

El método de la inversa en forma de producto es útil cuando conociendo una matriz A y su inversa A^{-1} se tiene otra matriz B la cual es idéntica a A excepto por una columna. Para encontrar B^{-1}, el método aprovecha el conocimiento de A^{-1} y así ahorrar un gran número de operaciones en el computo de B^{-1}. Con el objeto de tener una idea que nos recuerde la situación en que se usa este método diremos que A es la matriz vieja (ó previa) y B es la matriz nueva, entendiendo que B difiere de A por una sola columna (ó que B se obtiene de A por la sustitución de una sola columna). La presentación de este método se dará en el teorema 2.4.6, pero antes se dará un resultado preliminar en el lema 2.4.5.

La idea del método anterior también se utilizará para encontrar la inversa de una matriz A aun cuando no se conozca la inversa de una matriz previa a A que difiera de A por una sola columna. Sin embargo podemos tomar como punto de partida a la matriz identidad I e ir definiendo una secuencia de matrices de manera que la primera se parezca mucho a I y poco a A y, las siguientes se parezcan poco a I y se vayan pareciendo más a A. Esta idea define un proceso iterativo en el cual se aplica el teorema 2.4.6 en cada etapa. El detalle del procedimiento se presentará en el teorema 2.4.7.

LEMA 2.4.5 Sea

$$A = \left[A_{\cdot 1}\ A_{\cdot 2} \cdots A_{\cdot p} \cdots A_{\cdot m} \right]$$

una matriz cuadrada mxm, y sea

$$B = \left[B_{\cdot 1}\ B_{\cdot 2} \cdots B_{\cdot p} \cdots B_{\cdot m} \right]$$

una matriz mxm definida por

$$B_{\cdot j} = \begin{cases} A_{\cdot j} & \text{si} \quad j \neq p \\ u & \text{si} \quad j = p \end{cases}$$

donde U es un vector columna dado, ie.

$$B = \left[A_{\cdot 1}\ A_{\cdot 2} \cdots u \cdots A_{\cdot m} \right]$$

es una matriz que se obtiene de A al sustituir la p-ésima columna de A por un vector u conocido.

Si y es un vector columna cuyas componentes $y_1, y_2, \ldots, y_m$ expresan al vector u como una combinación lineal de las columnas de A, ie., satisfacen la igualdad

$$u = y_1 A_{\cdot 1} + y_2 A_{\cdot 2} + \cdots + y_p A_{\cdot p} + \cdots + y_m A_{\cdot m}$$

la cual matricialmente corresponde a $u = A y$, o $y = A^{-1} u$, entonces se afirma

i) $A_{\cdot p} = B v_p$

donde

$$v_p = \begin{bmatrix} -y_1/y_p \\ -y_2/y_p \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -y_{p-1}/y_p \\ 1/y_p \\ -y_{p+1}/y_p \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -y_m/y_p \end{bmatrix}$$

ii) $A = B J_p$

donde

$$J_p = \left[I_{\cdot 1}\ I_{\cdot 2} \cdots v_p \cdots I_m \right]$$

es la matriz que se obtiene de la matriz identidad al sustituir la columna $I_{\cdot p}$ de I por el vector v_p definido en la parte i) de este lema.

DEMOSTRACION DE i)

Por definición $y_1, y_2, \ldots, y_m$ representan las componentes de un vector y, los cuales expresan a u como una combinación lineal de las columnas de A, o sea

$$u = y_1 A_{\cdot 1} + y_2 A_{\cdot 2} + \ldots + Y_{p-1} A_{\cdot p-1} + y_p A_{\cdot p} + y_{p+1} A_{\cdot p+1} + \ldots + y_m A_{\cdot m}$$

Despejando la columna $A_{\cdot p}$ tenemos

$$A_{\cdot p} = -\frac{y_1}{y_p} A_{\cdot 1} - \frac{y_2}{y_p} A_{\cdot 2} - \ldots - \frac{y_{p-1}}{y_p} A_{\cdot p-1} + \frac{1}{y_p} u - \frac{y_{p+1}}{y_p} A_{\cdot p+1} - \ldots - \frac{y_m}{y_p} A_{\cdot m}$$

Esta igualdad en forma matricial resulta

$$A_{\cdot p} = \left[A_{\cdot 1} \; A_{\cdot 2} \cdots A_{\cdot p-1} \; u \; A_{\cdot p+1} \cdots A_{\cdot m} \right] \begin{bmatrix} -y_1/y_p \\ -y_2/y_p \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -y_{p-1}/y_p \\ 1/y_p \\ -y_{p+1}/y_p \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -y_m/y_p \end{bmatrix}$$

De la definición de B y de v_p, la igualdad anterior puede escribirse por

$$A_{\cdot p} = B v_p \quad \square$$

DEMOSTRACION DE ii)

$$A \overset{d}{=} \left[A_{\cdot 1} A_{\cdot 2} \cdots A_{\cdot p} \cdots A_{\cdot m} \right]$$

$A = \left[A_{\cdot 1} \; A_{\cdot 2} \cdots B v_p \cdots A_{\cdot m} \right]$ porque $A_{\cdot p} = v_p$ por parte

$A = \left[B_{\cdot 1} \; B_{\cdot 2} \cdots B v_p \cdots B_{\cdot m} \right]$ porque $B_{\cdot i} \overset{d}{=} A_{\cdot i} \; \forall i \neq p$

$A = \left[BI_{\cdot 1} \; BI_{\cdot 2} \cdots B v_p \cdots B_{\cdot m} I_{\cdot m} \right]$ porque $B_{\cdot i} = (BI)_{\cdot i} = BI_{\cdot i}$

$$A = B\left[I_{\cdot 1}\, I_{\cdot 2} \ldots v_p \ldots I_{\cdot m}\right]$$
$$A = B\,J_p \qquad \square$$

TEOREMA 2.4.6 Sea

$$A = \left[A_{\cdot 1}\, A_{\cdot 2} \ldots A_{\cdot p} \ldots A_{\cdot m}\right]$$

una matriz cuya inversa A^{-1} es conocida. Sea

$$B = \left[A_{\cdot 1}\, A_{\cdot 2} \ldots u \ldots A_{\cdot m}\right]$$

una matriz idéntica a A excepto por la p-éxima columna de A que se ha sustituido por un vector u conocido. Se afirma que

$$B^{-1} = J_p\, A^{-1}$$

donde

$$J_p = \left[I_{\cdot 1}\, I_{\cdot 2} \ldots v_p \ldots I_{\cdot m}\right]$$

$$v_p = \begin{bmatrix} -y_1/y_p \\ -y_2/y_p \\ \vdots \\ -y_{p-1}/y_p \\ 1/y_p \\ -y_{p+1}/y_p \\ \vdots \\ -y_m/y_p \end{bmatrix}; \qquad y \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{p-1} \\ y_p \\ y_{p+1} \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = A^{-1}\, u$$

DEMOSTRACION.

De la parte ii) del lema anterior conocemos la igualdad

$$A = B\,J_p$$

la cual origina las siguientes implicaciones.

$$B^{-1} A = B^{-1} B\, J_p$$
$$B^{-1} A = J_p$$
$$B^{-1} A\, A^{-1} = J_p\, A^{-1}$$
$$B^{-1} = J_p\, A^{-1} \qquad \square$$

NOTA (ALGORITMO) Si nos dan la matriz

$$A = \begin{bmatrix} A_{\cdot 1} & A_{\cdot 2} & \dots & A_{\cdot p} & \dots & A_{\cdot m} \end{bmatrix}$$

y su inversa, y también un vector columna u y la posición p en que se reemplaza la columna de A por u, entonces para encontrar la inversa de la matriz B definida por

$$B = \begin{bmatrix} A_{\cdot 1} & A_{\cdot 2} & \dots & u & \dots & A_{\cdot m} \end{bmatrix}$$

realice lo siguiente:

Paso 1: Encuentre $y = A^{-1}$

Paso 2: Encuentre $v_p = \begin{bmatrix} -y_1/y_p & -y_2/y_p & \dots & -y_{p-1}/y_p & 1/y_p & -y_{p+1}/y_p & \dots & -y_m/y_p \end{bmatrix}$

Paso 3: Encuentre $J_p = \begin{bmatrix} I_{\cdot 1} & I_{\cdot 2} & \dots & v_p & \dots & I_{\cdot m} \end{bmatrix}$

Paso 4: Encuentre $B^{-1} = J_p A^{-1}$

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

PLANEACION Y CONTROL DE LA PRODUCCION

APENDICE B

M. EN C. JORGE RIVERA BENITEZ

SEPTIEMBRE DE 1977.

APENDICE B

1. VARIABLES ALEATORIAS

DEFINICION 1.1 El espacio muestra de un fenómeno aleatorio, es el conjunto de todos los posibles resultados que se pueden obtener al realizar el fenómeno. El espacio muestra se indicará por Ω. Otra notación que se acostumbra usar para el espacio muestra es S. Los resultados, o sea los elementos de Ω, se indicarán por ω.

EJEMPLOS.

1. Si el fenómeno aleatorio consiste en tirar una moneda desde una altura determinada, entonces los posibles resultados son águila (que será abreviada por a) y sol (abreviado s), ie.,

$$\Omega = \{\omega : \omega = a, s\} = \{a, s\}$$

2. Si observamos el número obtenido al tirar un dado entonces su espacio muestra es

$$\Omega = \{\omega : \omega = 1,2,3,4,5,6\}$$

3. Si el fenómeno aleatorio consiste en observar el número de accidentes de transito en la intersección de dos avenidas durante las 7 y 8 de la mañana entonces

$$\Omega = \{\omega : \omega = 0,1,2,3,\ldots\}$$

4. El espacio muestra correspondiente a la demanda semanal de un artículo podría ser

$$\Omega = \{\omega : \omega = 0,1,2,3,\ldots\}$$

o en caso de que la región tuviera 1000 habitantes, el espacio muestra sería

$$\Omega = \{\omega : \omega = 0,1,2,3,\ldots,1000\}$$

5. Para el precio de un artículo determinado, el espacio muestra seria

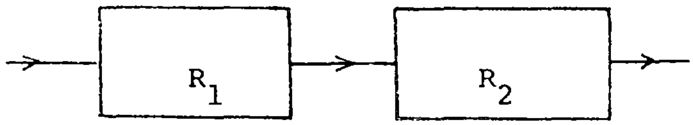
$$\Omega = \{\omega : \omega \text{ es un número real positivo o cero}\}$$
$$\Omega = \{\omega : \omega \geq 0\}$$

6. Si observamos el tiempo de vida de una máquina, éste podría ser cualquier numero real positivo, ie.,

$$\Omega = \{\omega : \omega \geq 0\}$$

El posible resultado $\omega = 0$, significa que la máquina estaba defectuosa cuando fue adquirida.

7. Considere el diagrama que muestra dos reactores de etileno y cloro-etileno conectados en serie.



Suponga que cada reactor puede operar o no operar en un tiempo determinado, y que el fenómeno aleatorio de interés es observar las condiciones en que se encuentra el sistema formado por los reactores en serie.
Defina Z_1 como una variable que nos representa el estado del reactor 1, y Z_2 otra variable que representa el estado del reactor 2. Si definimos Z_i por

$$Z_i = \begin{cases} 0 \text{ si el reactor i no opera} \\ 1 \text{ si el reactor i opera} \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

entonces el estado del sistema esta dado por el par $\omega=(Z_1,Z_2)$, y el espacio muestra será

$$\Omega = \{(Z_1,Z_2):\ (0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1\ \}$$
$$\Omega = \{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\}$$
$$\Omega = \{\ \omega^1\ ,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4\}$$

donde $\omega^1=(0,0)$, $\omega^2=(0,1)$, $\omega^3=(1,0)$ y $\omega^4=(1,1)$ son puntos de un espacio bidimensional.

DEFINICION 1.2 Sea Ω el espacio muestra de un experimento. Un evento del experimento, es cualquier subconjunto de Ω. Los eventos se indicarán por letras latinas mayusculas.

NOTA. Se dice que el evento A ocurre si cualquier elemento de A ocurre, ie., si $A=\{1,2,3\}$ es un subconjunto de un espacio muestra y al observar un experimento se obtiene $\omega=2$, entonces el evento ocurre, o sea que para que el evento A ocurra no se necesita que cada uno de los elementos de A occurra.

EJEMPLOS.

1. Para el ejemplo 1 mencionado anteriormente, con $\Omega = \{a, s\}$ subconjuntos

$A=\{a\}$, $B=\{s\}$, $C=\emptyset$, $D=\Omega$

son eventos. El subconjunto $A=\{a\}$, representa el evento d... un águila. El subconjunto $B=\{s\}$, representa el evento de obte... sol. El subconjunto $C=\emptyset$, el vacio, representa el evento de ... da desaparece o que caiga de canto, o que ruede indefinidamente... subconjunto propio $D=\Omega$, llamado el evento seguro, representa la seguridad de que el experimento (o fenómeno aleatorio) se lleve a cabo.

2 Algunos eventos del ejemplo de la tirada de un dado, con espacio muestra $\Omega = \{1,2,\ldots,6\}$, son

$A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,4,6\}$, $C=\{3,4,5,6\}$

El subconjunto A representa el evento de obtener un número ..., B el evento de obtener un número par, C obtener un número mayor que dos, etc.

3. Para el sistema de reactores mostrado en el ejemplo 7, defina los eventos A y B como sigue

A es el evento de que el sistema de reactores oper...

B es el evento de que al menos uno de los reactores opere

Exprese A y B como subconjuntos de Ω , dando sus elementos. Encuentre A^c y B^c.

SOLUCION.

$A = \{(1,1)\}$, $B = \{(1,0),\ (0,1),\ (1,1)\}$

$A^c = \{(0,1),\ (1,0),\ (0,0)\}$ representa que el sistema no funciona, ya que están en serie

$B^c = \{(0,0)\}$ representa que ninguno de los reactores funciona

DEFINICION 1.3 Se dice que dos eventos son mutuamente exclusivos si no ocurren simultaneamente, ie., si su intersección es el ...

EJEMPLO. Sea $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ el espacio muestra de la tirada de ... dado. Sea A el evento correspondiente a aquellas tiradas que ... tren un número menor o igual a 4, sea B que muestren un número ... yor de 3, y sea C el evento equivalente a obtener el número ... ces,

$A=\{1,2,3,4\}$, $B = \{4,5,6\}$, $C = \{5\}$

Los eventos A y B no son mutuamente exclusivos ya que pue...

rrir simultáneamente, porque el elemento 4 es común a ambos conjuntos, $A \cap B = \{4\} \neq \emptyset$.

Para los eventos A y C, se tiene que $A \cap C = \emptyset$, por lo tanto son mutuamente exclusivos. B y C no son mutuamente exclusivos porque $B \cap C = \{5\} = \emptyset$.

DEFINICION 1.4 Se dice que dos eventos elementales w_i y w_j son igualmente probables si se espera que cada uno de ellos ocurra con igual frecuencia cuando se repite el experimento un gran número de veces, es decir, si existe el mismo número de oportunidades para que ocurra cada uno de ellos.

EJEMPLO. Si $\Omega = \{a, s\}$ es el espacio muestra el juego de volados, entonces $w_1 = a$ y $w_2 = s$ son igualmente probables ya que una moneda solo tiene dos cantos marcados: uno para águila y otro para sol. Por lo tanto, el número de oportunidades para obtener sol (ó sea el número de veces que está acuñado el sol en la moneda) es igual al número de oportunidades para obtener águila.

DEFINICION 1.5 (DEFINICION CLASICA DE PROBABILIDAD). Sea Ω el espacio muestra de un fenómeno aleatorio que puede ocurrir en n caminos mutuamente exclusivos e igualmente probables. Si el evento A puede ocurrir en n_A de esos n caminos entonces la probabilidad del evento A, indicada por P(A), se define por

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

EJEMPLO. Sea $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ el espacio muestra en la tirada de un dado. Si $A = \{1,3,5\}$ es el evento de obtener un número impar entonces $n_A = 3$ y $n = 6$, por lo tanto

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Si $B = \{1,4\}$ entonces

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

NOTA. La definición clásica de probabilidad está restringida a determinado tipo de fenómenos aleatorios que reuna las condiciones dadas en la definición. Las desventajas que tiene son:

i. Solo se aplica a espacios muestra finitos

ii. Define probabilidad en términos del concepto de eventos elementales igualmente probables, ie hay una redundancia al definir probabilidad en términos de la misma palabra.

iii. Está restringida a problemas con eventos elementales igualmente probables.

DEFINICION 1.6 (DEFINICION FRECUENCIAL DE PROBABILIDAD). La probabilidad del evento A, se define como el límite de la frecuencia relativa del evento A cuando el número de veces que se repite el fenómeno tiende a infinito, ie. si $f_A(N)$ es la frecuencia de ocurrencia del evento A cuando el esperimento se repite N veces, ó sea la frecuencia relativa de A es $f_A(N) / N$, entonces

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{f_A(N)}{N}$$

NOTAS.

1. La definición frecuencial es también llamada una definición aposteriori, porque su determinación se hace después de realizado el experimento.

2. Las desventajas de esta definición son:

i) Es difícil saber cual es el límite de esta frecuencia relativa, ya que esta frecuencia es empírica y no analítica.

ii) Es necesaria la experimentación para conocer la frecuencia relativa.

EJEMPLO. Considere el juego de volados en el que deseamos conocer la probabilidad de obtener un águila. Defina

$$Z_N = \begin{cases} 0 & \text{si no ocurre águila en el N-ésimo volado} \\ 1 & \text{si ocurre águila en el N-ésimo volado} \end{cases}$$

y defina A como el evento de obtener un águila, $A = \{a\}$. Suponga que al tirar 30 veces un volado se obtuvo los resultados siguientes:

Repetición N	Z_N	$f_A(N)$	$f_A(N)/N$
1	1	1	1/1
2	1	2	2/2
3	0	2	2/3
4	1	3	3/4
5	0	3	3/5
6	0	3	3/6
7	1	4	4/7
8	0	4	4/8
9	0	4	4/9
10	1	5	5/10
11	1	6	6/11
12	0	6	6/12
13	0	6	6/13
14	0	6	6/14
15	1	7	7/15
16	1	8	8/16
17	1	9	9/17
18	1	10	10/18
19	0	10	10/19
20	0	10	10/20
21	0	10	10/21
22	1	11	11/22
23	1	12	12/23
24	1	13	13/24
25	0	13	13/25
26	0	13	13/26
27	1	14	14/27
28	0	15	15/28
29	1	16	16/29
30	1	17	17/30

Si se traza la frecuencia $f_A(N) / N$ contra N se puede "intuir" que el límite de $f_A(N) / N$ es 1/2, sin embargo es necesario repetir muchas veces el experimento para poder tener una idea a que número tiende esta frecuencia.

DEFINICION 1.7 (DEFINICION AXIOMATICA DE PROBABILIDAD). Sea Ω un conjunto arbitrario que representa el espacio muestra de un fenómeno aleatorio. Una función probabilidad es una función que va de una colección de subconjuntos de Ω al intervalo $[0,1]$, en forma tal que satisface los siguientes axiomas.

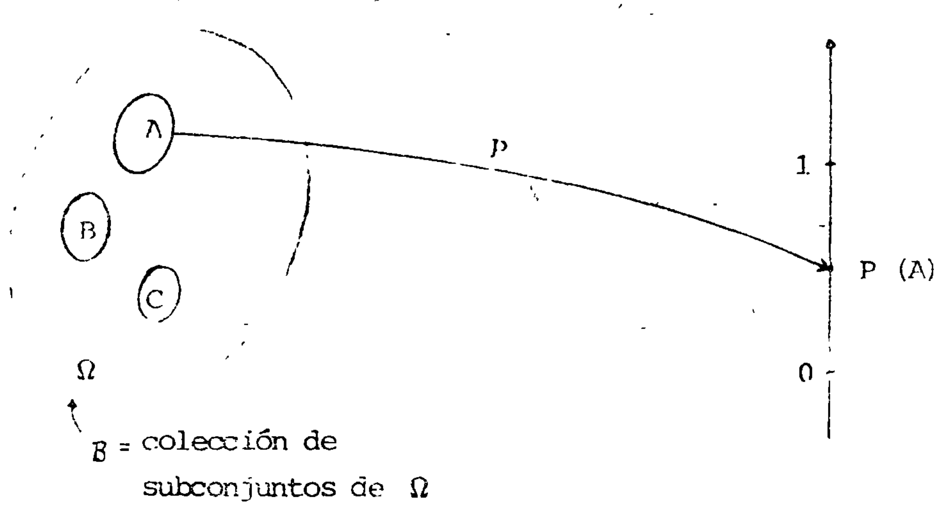
i) $P(A) \geq 0$ para cada A de la colección de subconjuntos de

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$
Si $A_1, A_2, \ldots$ es una colección de subconjuntos de Ω, mutuamente exclusivos, ie $A_i \cap A_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$.

NOTAS

1. La representación de la función de probabilidad, usando la representación de función en teoria de conjuntos, es



2. El número P(A), asociado al elemento A de B, es llamado la probabilidad del evento A. Este número P(A) debe satisfacer los axiomas de la definición

TEOREMA 1.8 Sea Ω un espacio muestra y P una función de probabilidad asocia-da a una colección β de subconjuntos de Ω. Se afirma:

i) $P(A) = 1 - P(A^c)$

ii) $P(\emptyset) = 0$

iii) Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$

iv) $0 \leq P(A) \leq 1$ para cada $A \in \beta$

v) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

vi) $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

donde $A \Delta B$ es la diferencia simétrica de A y B, la cual se define por $A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$.

DEMOSTRACION. (Ver Mood, Parzen, ó Hogg dados en las referencias).

La siguiente definición de función solo tiene como objeto recordar conceptos fundamentales que serán necesarios para definir variable aleatoria.

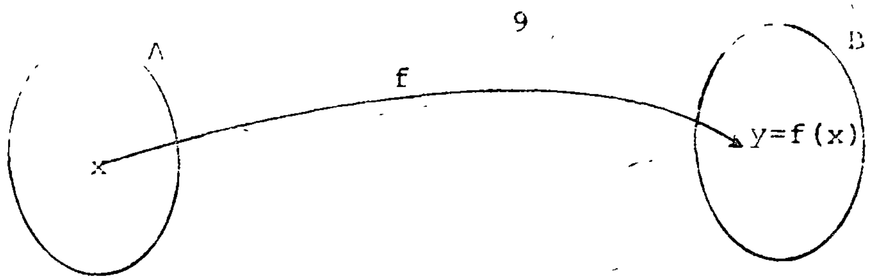
DEFINICION 1.9 Sean A y B dos conjuntos preespecificados. Si a cada elemento x de A le está asociado uno y solo un elemento y de B, a través de una regla f, entonces se dice que f es una función de A a B. Al conjunto A se le llama el dominio de la función f, y al conjunto B se le llama el contradominio de f. Si a un elemento x de A le corresponde el elemento. Y de B, se dice que y es la imagen de x bajo la regla f, y se escribe $y = f(x)$. El conjunto de todas las imágenes de los elementos de A, se llama el rango de f y se indica por rng (f), ie.

$$\text{rng}(f) = \{ y : y = f(x) \text{ para alguna } x \in A \}$$

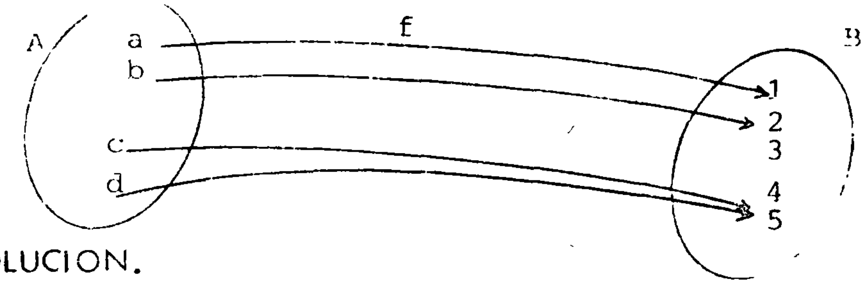
NOTAS:

1. Si una función f tiene como dominio al conjunto A y contradominio el conjunto B, entonces se escribe $f: A \to B$.

2. La representación de una función f, $f: A \to B$, en teoría de conjuntos



EJEMPLO. Si f, $f: A \to B$, es la función mostrada en la figura de abajo, dé el dominio, el contradominio y el rango de f.



SOLUCION.

dominio de f = $\{a, b, c, d\}$

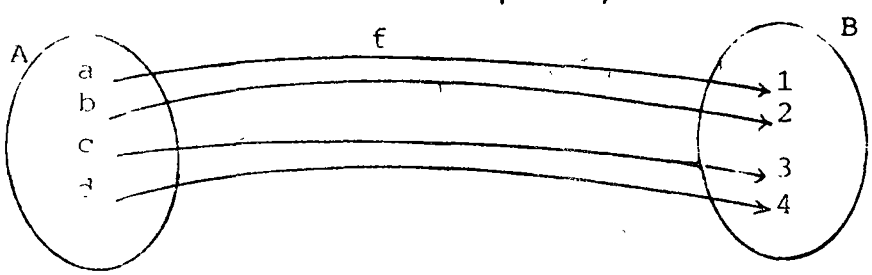
contradominio de f = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

ranfo de f = rng (f) = $\{1, 2, 5\}$

DEFINICION 1.10 Se dice que una función f, $f: A \to B$, es inyectiva si para cada par de elementos x_1 y x_2 del dominio les corresponden distintos elementos y_1 y y_2 respectivamente, del contradominio, ie f es inyectiva si para todo

$$x_1 \neq x_2 \longrightarrow y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2).$$

EJEMPLO. La función mostrada abajo es inyectiva



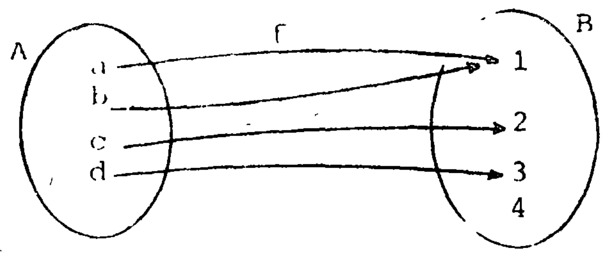
observe en este ejemplo que:

dom (f) = $\{a, b, c, d\}$ = A

contrdom (f) = $\{1,2,3,4,5\}$ = B

rng (f) = $\{1,2,4,3\}$

EJEMPLO. La función siguiente

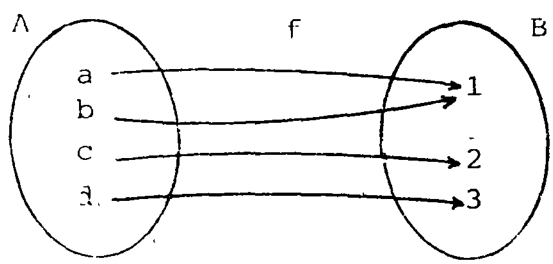


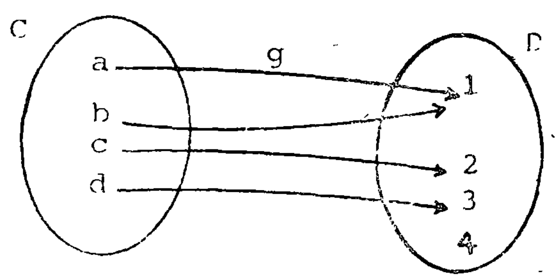
no es inyectiva porque existe un par, a y b, de elementos de A que tienen la misma imagen, ie.,

$$f(a) = 1 = f(b)$$

DEFINICION 1.11. Se dice que una función f, $f: A \rightarrow B$, es suprayectiva si el rango de f es igual a su contradominio.

EJEMPLOS. Considere las funciones f, $f: A \rightarrow B$, y g, $g: C \rightarrow D$, mostradas a continuación.





Se observa que contradom (f) $=\{1,2,3\} = B$ es igual al rng (f) $=\{1,2,3\}$. Por lo tanto f es suprayectiva. Para la función g, se tiene que

$$\text{contradom } (g) = \{1,2,3,4\}$$

es distinto que

$$\operatorname{rng}(g) = \{1,2,3\}$$

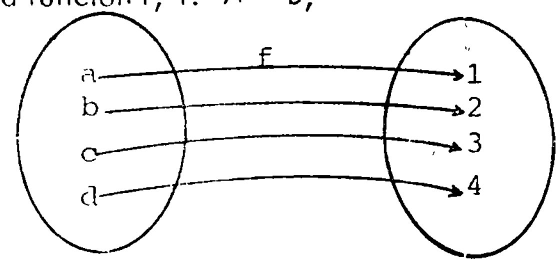
Por lo tanto g no es suprayectiva

DEFINICION 1.12 Se dice que una función f, $f: A \rightarrow B$, es biyectiva si es inyectivo y suprayectiva.

NOTA. Si una función es biyectiva también se acostumbra decir que es uno a uno

EJEMPLOS.

1. La función f, $f: A \rightarrow B$,

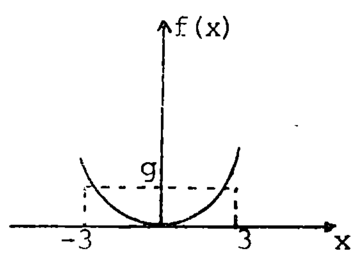


es biyectiva ya que es inyectiva y suprayectiva.

2. La función f, $f: A \rightarrow B$, con

$A = R$; $B = R$, R es el conjunto de números reales

$f(x) = x^2$



no es inyectiva ya que para todo x_1 y $x_2 = -x_1$ tiene que $f(x_1) = x_1^2$, y $f(x_2) = x_2^2 = (-x_1)^2 = x_1^2$ son iguales. Por lo tanto, no es biyectiva.

3 La función f, $f: A \rightarrow B$, con

$A = R$, $B = R$

$f(x) = 2x + 4$

es inyectiva y suprayectiva. Por lo tanto, es biyectiva.

DEFINICION 1.13. Sea f, $f: A \to B$, una función biyectiva dada. La función inversa de f, indicada por f^{-1}, es una función cuyo dominio es B y su contradominio A en forma tal que si x es la imagen de y bajo la regla f^{-1} (ie., $x = f^{-1}(y)$) entonces se satisface $y = f(x)$.

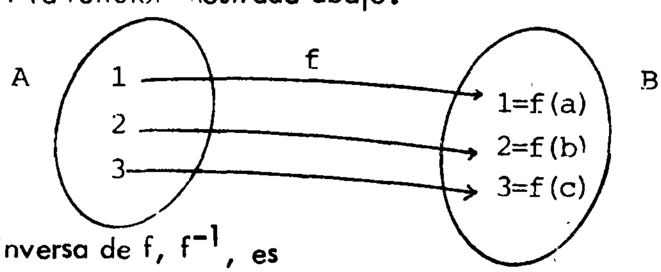
NOTAS:

1. Si $f: A \to B$; es una función dada y f^{-1} es su inversa entonces se escribe $f^{-1}: B \to A$

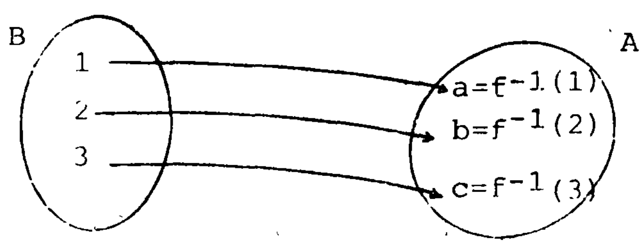
2. Para que la inversa de f se defina es necesario que f sea biyectiva.

EJEMPLOS

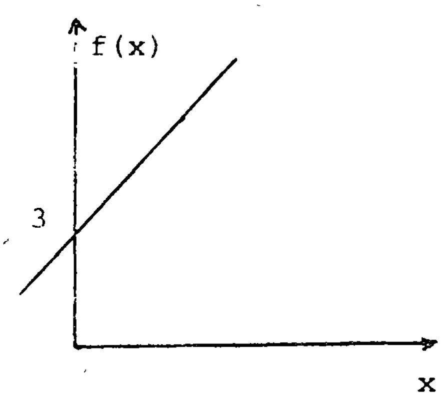
1. Sea f la función mostrada abajo.



La inversa de f, f^{-1}, es



2. Sea $y = f(x) = x + 3$, $f: R \to R$. Determine su inversa



PROPOSICION 1.13 Si $y = f(x)$ es una función dada y $x = f^{-1}(y)$ su inversa, entonces

i) $f(f^{-1}(y)) = y$

y

ii) $f^{-1}(f(x)) = x$

DEMOSTRACION de i). Sea $f: A \rightarrow B$ y $f^{-1}: B \rightarrow A$. Sean x los elementos de A, y sea y los elementos de B.

$f : A \rightarrow B \longrightarrow y = f(x)$

$y = f(f^{-1}(y))$ $\square$ ya que $x = f^{-1}(y)$ por definición de f^{-1}

DEMOSTRACION DE ii).

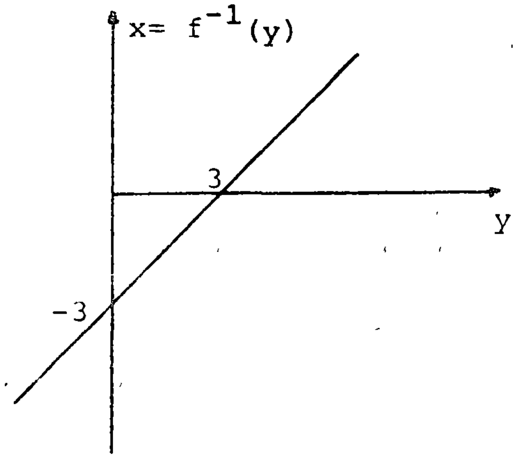
$f^{-1} : B \rightarrow A \longrightarrow x = f^{-1}(y)$

$x = f^{-1}(f(x))$ ya que $y = f(x)$ por definición de f.

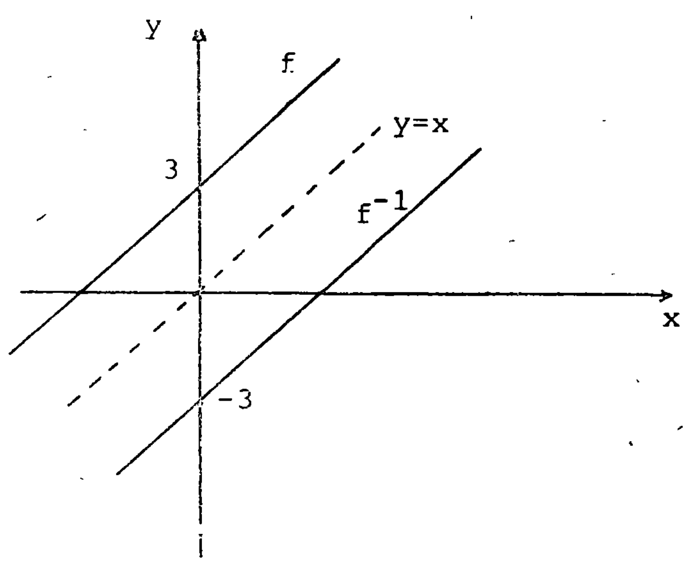
Por lo tanto, $f^{-1}(f(x)) = x$ $\square$

Si $y = x + 3$ entonces $x = y - 3$. Por lo tanto, la función inversa f^{-1}, está dada por

$$x = f^{-1}(y) = y - 3$$



En la función inversa $x = f^{-1}(y) = y + 3$, los elementos del dominio están indicados por y, y los elementos de controdominio por x. Sin embargo, debido a la cost umbre que se tiene de indicar a los elementos del dominio por x y a los del contradominio por y, - podemos rebautizar estos elementos en la función inversa $x = f^{-1}(y) = y + 3$ escrib iendo $y = f^{-1}(x) = x + 3$. Con esta convención, las gráficas de f y f^{-1}, en un mismo sistema de coordenadas aparece abajo

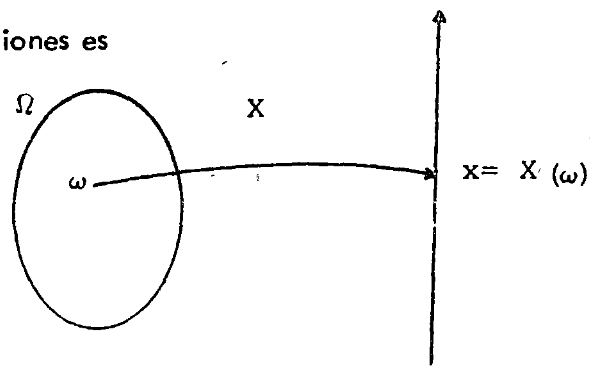


NOTA; Observe que f^{-1} es la imagen de f con respecto a la línea $y = x$.

DEFINICION 1.14. Sea Ω un espacio muestra arbitrario, y sea P una función de probabilidad asociada a una clase de subconjuntos de Ω. Una variable aleatoria, indicada por X, es una función cuyo dominio es Ω, y su contradominio los reales.

NOTAS

1. La variable aleatoria (v.a.) X, $X: \Omega \longrightarrow R$, representada en diagrama de funciones es



2. Observe que existe una contradicción entre el nombre de variable aleatoria y su definición, ya que en el nombre se habla de una variable y en su definición se dice que es una función. Sin embargo esta ambiguedad se sigue manteniendo por motivos históricos.

3. Otra observación importante es con respecto a los símbolos usados para una variable aleatoria. La variable aleatoria se indica por letras mayúsculas, por ejemplo X. Este símbolo X debe entenderse como la regla que asocia elementos de Ω con elementos de R, de acuerdo con el carácter de función que tiene X. Por lo tanto, la notación

$$x = X(\omega)$$

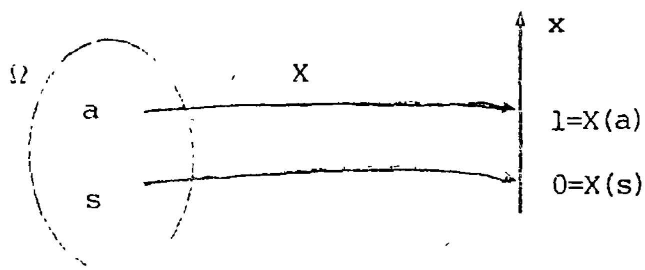
Significa que x es el valor que toma la función X cuando se evalua en el punto ω, o que x es la imagen de ω bajo la regla X. Esta observación se refuerza con la notación

$$X(\cdot)$$

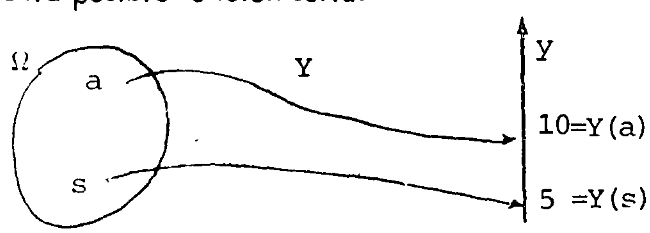
la cual significa que X es una función, y que X ($\cdot$) corresponde al valor que toma la función cuando se evalua en un punto cualquiera del dominio. El punto que aparece entre paréntesis representa cualquier elemento del dominio, y es llamado el argumento de la función X.

EJEMPLO . Para el fenómeno de la tirada de una moneda con espacio muestral

$\Omega = \{ a, s \}$, se podrá definir la siguiente función.



Otra posible función sería:



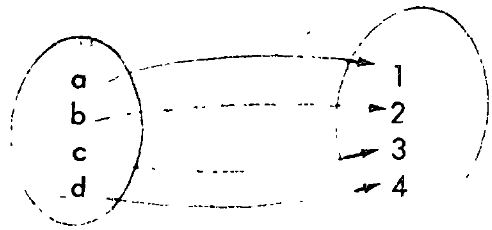
DEFINICION 1.15. Se dice que una variable aleatoria X es discreta si los valores x que puede tomar la función X son discretos, y se dice que es contínua si los valores que toma son contínuos.

NOTA: Una definición más apropiada de variable aleatoria discreta y contínua involucra el concepto de conjuntos finitos, infinitos, denumerables y contables. Estos conceptos se dan a continuación.

1. Se dice que un conjunto A es finito si existe un número entero M, $M < \infty$, tal que se puede encontrar una función uno a uno entre el conjunto A y el conjunto $\{1, 2, \ldots, M\}$, y se dice que A es infinito si A no es finito.

Ejemplos.

i) El conjunto $\{a, b, c, d\}$ es finito ya que existe un número entero M, M=4, tal que existe una función f entre A y $\{1,2,3,4\}$, por ejemplo la mostrada en la figura



ii) El conjunto $A = \{2,4,6,8, \ldots\}$ no es finito ya que no es posible encontrar un número M, $M < \infty$, tal que exista una función uno a uno entre A y $\{1,2, \ldots, M\}$. Por lo tanto A es infinito.

iii) El conjunto $A = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$ no es finito.

2. Se dice que un conjunto A es denumerable si existe una función uno a uno entre A y el conjunto N de números naturales, $N = \{n: n = 1,2,3, \ldots\}$.

EJEMPLOS

i) El conjunto $A = \{x: x = 2,4,6, \ldots\}$ es denumerable ya que existe una función f, $f(x) = \frac{x}{2}$, entre A y N; o sea para cada x de A existe un n de N, a través de la función $f: n = \frac{x}{2}$

ii) El conjunto $A = \{x: o \leq x \leq 1\}$ no es denumerable.

3. Se dice que un conjunto A es contable si es finito o es infinito denumerable. Se dice que A es no contable si es infinito no denumerable. Entonces un conjunto A puede clasificarse de acuerdo a la siguiente caracterización esquemática:

$$\text{Conjunto} \begin{cases} \text{Finito} \\ \text{Infinito} \begin{cases} \text{Denumerable} \\ \text{No denumerable} \end{cases} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{Finito, Denumerable: contables} \\ \text{No denumerable: No contable} \end{matrix}$$

DEFINICION 1.16. Se dice que la variable aleatoria es discreta si rng (X) es un conjunto contable, y es contínua si rng (X) es un conjunto no contable.

2. FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD Y FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD.

DEFINICION 2.1. Se dice que $f_X(x)$ es una función de densidad de probabilidad discreta de la v.a. X, si

i) $f_X(x) \geq 0$ para todo x

ii) $\sum_{x=-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$

iii) Si A es un evento, entonces

$$P(A) = \sum_{x \in A} f(x)$$

DEFINICION 2.2. Se dice que $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad contínua

i) $f_X(x) \geq 0$ para todo x.

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$

iii) Si A es un evento, entonces

$$P(A) = \int_{x \in A} f(x)\, dx$$

DEFINICION 2.3. La función de distribución de probabilidad (acumulada) de una v.a. X, indicada por $F_X(x)$, se define por

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}$$

NOTAS: 1. Otra notación para $F_X(x)$ es $F(x)$.

2. Si X es una v.a. discreta entonces

$$F_X(x) = \sum_{s=-\infty}^{x} f_X(s)$$

3. Si X es una v.a. contínua entonces

$$F_X(x) = \int_{s=-\infty}^{x} f_X(s)\, ds$$

EJEMPLO Supóngase que la cantidad X de ... en toneladas en un proceso, tiene la siguiente función de distribución acumulada:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-\exp(-2x) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

a) Encuentre la probabilidad de que la cantidad de ... producida sea menor o igual que una tonelada, i.e. $P[X \le 1]$.

b) Encuentre $P[X \le 0.1]$

c) Encuentre $f_X(x)$ y con ella obtenga $P[1 \le X \le 3]$

d) Después de graficar $f_X(x)$, es razonable suponer que la producción siempre será menor que una tonelada.

SOLUCIÓN:

a) $P[X \le 1] = F_X(1) = 1-\exp(-2) = 1-0.1353$

$F_X(1) = 0.8647$

b) $P[X \le 0.1] = F_X(0.1) = 1-\exp(-0.2) = 1-0.8187$

$P[X \le 0.1] = 0.1813$

c) $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx}[1-\exp(-2x)]$ (para $x>0$)

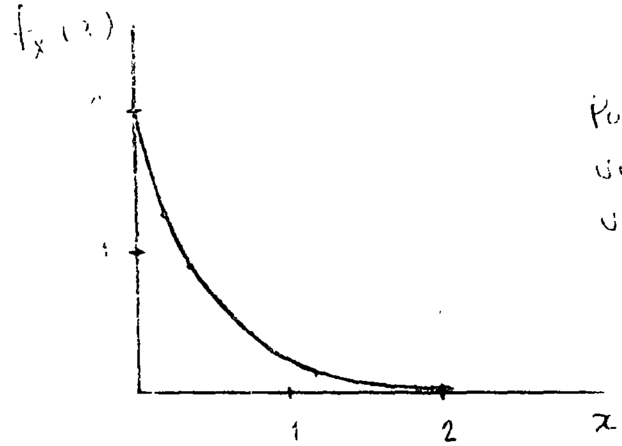
$f_X(x) = 2\exp(-2x)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2\exp(-2x) & x \ge 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$$P[1 \le X \le 3] = \int_1^3 f_X(x)\,dx = 2\int_1^3 \exp(-2x)\,dx$$

$$P(1 \le X \le 3) = 2\left[-\frac{1}{2}\exp(-2x)\right]_1^3 = -\exp(-2x)\Big|_1^3$$

$$= 0.1353 - 0.0025 = 0.1328$$



Por lo tanto es razonable esperar una producción menor o igual a una tonelada

3. ESPERANZA MATEMATICA O VALOR ESPERADO

DEFINICION 3.1 Sea X una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f_X(x)$. Sea $u(X)$ una función de la variable aleatoria X. El valor esperado de $u(X)$, indicado por $E[u(X)]$, se define por

$$E[u(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} u(x)f_X(x)$$

si X es una variable aleatoria discreta y si $\sum_{x=-\infty}^{\infty} u(x)f_X(x)$ existe. Si X es una variable aleatoria continua entonces el valor esperado de $u(X)$ se define por

$$E[u(X)] = \int_{x=-\infty}^{\infty} u(x)f_X(x)dx$$

siempre y cuando esta integral exista.

NOTA: Otro nombre para valor esperado es esperanza matemática.

TEOREMA 3.2 Sea X una variable aleatoria. Se afirma que

i) Si $u(X)$ y $v(X)$ son funciones de la variable aleatoria X, y si $u(X)= cv(X)$ donde c es una constante, entonces

$$E[cv(X)] = cE[u(X)]$$

ii) Si $v_1(X)$ y $v_2(X)$ son funciones de la variables aleatoria X, y c_1 y c_2 son constantes entonces

$$E[c_1v_1(X) + c_2v_2(X)] = c_1E[v_1(X)] + c_2E[v_2(X)]$$

DEMOSTRACION. Use solo la definición de valor esperado.

INTERPRETACION DE VALOR ESPERADO.

A continuación se presenta un ejemplo en el que se ilustra la interpretación de valor esperado.

EJEMPLO. Considere un juego de salón en el que se ganan \$8 si al tirar una moneda se obtiene un aguila y se pierden \$5 si se obtiene sol.

Si una persona participa 20 veces en el juego se espera que obtenga 10 aguilas y por lo tanto gana 10x8=80 pesos, también se espera que obtenga 10 soles y por lo tanto una pérdida de 10x5=50 pesos. Por lo tanto

Ganancia total en 20 tiradas = 10x8 + 10 (-5)=80-50=30

Ganancia esperada por tirada = 30/20 = 1.5

Si consideramos que la persona participa 50 veces entonces

Ganancia esperada total en 50 tiradas=25(8)+25(-5)=75

Ganancia esperada por tirada = 75/50=3/2=1.5

Similarmente, si se participa en N tiradas, entonces

Ganancia esperada total en N tiradas= (N/2)(8)+(N/2)(-5)

$$\text{Ganancia esperada por tirada} = \frac{(N/2)(8)+(N/2)(-5)}{N} = 3/2$$

Este procedimiento intuitivo, se puede obtener usando el concepto de valor esperado, si definimos una función $u(X)$ por

$$u(x) = \begin{cases} 8 & \text{si } x=0 \text{ (=aguila)} \\ -5 & \text{si } x=1 \text{ (=sol)} \end{cases}$$

Sabiendo que la función de densidad de probabilidad para la tirada de una moneda es

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x=0 \\ 1/2 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De acuerdo a la definición de valor esperado se tiene

$$E[u(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} u(x)f_X(x) = u(0)f_X(0) + u(1)f_X(1)$$
$$= 8(1/2) + (-5)(1/2) = 1.5$$

Los valores esperados de algunas funciones especiales $u(X)$, reciben nombres especiales:

1. Si $u(X) = X$ entonces $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$; X continua

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} x f_X(x) \text{ , } X \text{ discreta}$$

recibe el nombre de media y se indica por μ, o sea

$$\mu = E[X]$$

2 Si $u(X) = (X-\mu)^2$ entonces $E[(X-\mu)^2]$ recibe el nombre de varianza y se indica por $Var(X)$, o $V(X)$, o σ^2, entonces

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x) \quad \text{si } X \text{ discreta}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\, dx \quad \text{si } X \text{ continua}$$

Es facil probar que

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

FUNCION DE DENSIDAD CONJUNTA

DEFINICION Sean X_1 y X_2 variables aleatorias continuas. La función de probabilidad conjunta de X_1 y X_2, indicada por $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ es una función tal que

i) $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \geq 0 \quad \forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1, dx_2 = 1.$

iii) $P(A)_{(x_1, x_2) \in A} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$

DEFINICION Sean X_1 y X_2 variables aleatorias discretas. La función de probabilidad conjunta de X_1 y X_2 indicada por $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ es una función tal que:

i) $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \geq 0 \quad \forall\ x_1, x_2.$

ii) $\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = 1.$

iii) $P(A) = \sum\sum f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$

EJEMPLO 1.- considere la función

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1/36 & \text{si } X_1 = 1, 2, \ldots, 6 \quad X_2 = 1, 2, \ldots, 6. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Determinar si es una función de densidad de probabilidad. Si lo es encontrar $P(A)$ donde.

$$A = \{ (X_1, X_2) \mid x_1 + x_2 = 7 \}$$

i) $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \geq 0$ si lo es por su definición

ii) $\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = 1.$

$$\sum_{1}^{6}\sum_{x_2=1}^{6} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) + \sum_{x_1=-\infty}^{0}\sum_{x_2=-\infty}^{0} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) + \sum_{x_1=7}^{\infty}\sum_{x_2=7}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$$

pero ya que por la definición de $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$

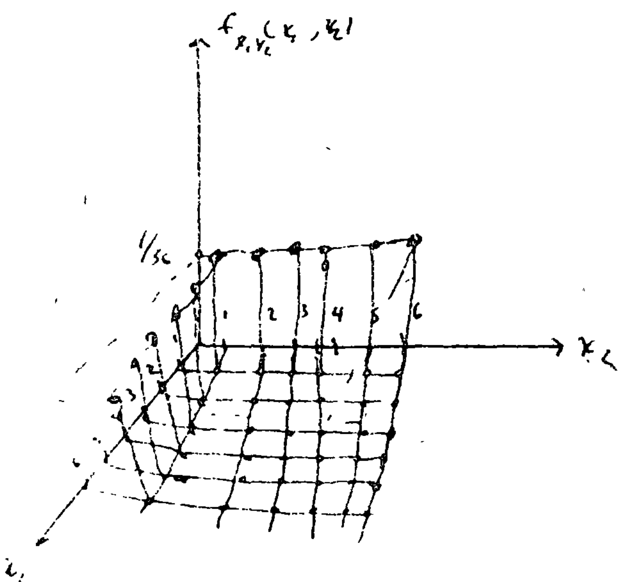
$$\sum_{-\infty}^{0} \sum_{-\infty}^{0} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = 0$$

$$\sum_{7}^{\infty} \sum_{7}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = 0.$$

$$\therefore \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \sum_{x_1=1}^{6} \sum_{x_2=1}^{6} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) =$$

$$= \sum_{x_1=1}^{6} \left[f_{X_1 X_2}(x_1, 1) + f_{X_1 X_2}(x_1, 2) + \dots + f_{X_1 X_2}(x_1, 6) \right] =$$

$$f_{X_1 X_2}(1, 1) + f_{X_1 X_2}(1, 2) + \dots + f_{X_1 X_2}(1, 6) +$$
$$+ f_{X_1 X_2}(2, 1) + f_{X_1 X_2}(2, 2) + \dots + f_{X_1 X_2}(2, 6) + \dots$$
$$+ f_{X_1 X_2}(6, 1) + f_{X_1 X_2}(6, 2) + \dots + f_{X_1 X_2}(6, 6) =$$
$$1/36 + 1/36 + \dots + 1/36 + 1/36 + 1/36 + \dots + 1/36 + \dots$$
$$+ 1/36 + 1/36 + \dots + 1/36 = 36\,(1/36) = 1.$$



$$P(A) = \sum \sum f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \quad \text{tales que} \quad x_1 + x_2 = 7.$$

$$\therefore P(A) = f_{X_1 X_2}(1, 6) + f_{X_1 X_2}(2, 5) + \dots + f_{X_1 X_2}(5, 2) +$$
$$+ f_{X_1 X_2}(6, 1) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = 6\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{1}{6}$$

EJEMPLO 2. Sea la función.

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x_1 \leq 1 \ ; \ 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

determinar si es función de densidad de probabilidad

Sean $A = \{(x_1, x_2) : \quad 0 < x_1 < \frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{2} \leq x_2 < 1\}$

$B = \{x_1, x_2) : \quad x_2 \leq x_1\}$

encontrar la $P(A)$ y $P(B)$.

i) $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \geq 0$ por definición.

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1.$

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 + \int_0^1 \int_0^1 f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 + \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$

Pero por la definición de $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$, tenemos

$\int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 0$

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 1\, dx_1\, dx_2 = 1.$

$P(A) = \int_0^{1/2} \int_{1/2}^{1} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_0^{1/2} \int_{1/2}^{1} 1\, dx_1\, dx_2 = \int_0^{1/2} [1 - \frac{1}{2}]\, dx_1 = \frac{1}{2}[-0 + \frac{1}{2}] = \frac{1}{4}.$

$P(B) = \int_0^1 \int_0^{x_1} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1 = \int_0^1 \int_0^{x_1} 1\, dx_2\, dx_1 = \int_0^1 x_1\, dx_1 = \frac{x_1^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$

DEFINICION. Sea $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ la función de densidad de probabilidad conjunta de X_1 y X_2. La función de densidad de probabilidad marginal de X_1, indicada por $f_{X_1}(x_1)$ se define por.

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_2 \quad \text{si } X_2 \text{ es continua}$$

y por.

$$f_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \quad \text{si } X_2 \text{ es discreta.}$$

Similarmente la función de densidad de probabilidad de X_2 se define por.

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 \quad \text{si } X_1 \text{ es continua.-}$$

$$\text{y} \quad f_{X_2}(x_2) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \quad \text{si } X_1 \text{ es discreta.}$$

EJEMPLO 3. Del ejemplo 1 y 2 encontrar las funciones de densidad de probabilidad marginal para X_1 y X_2.

Para el ejemplo 1.

$$f_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2=1}^{6} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1 X_2}(x_1, 1) + f_{X_1 X_2}(x_1, 2) + \dots + f_{X_1 X_2}(x_1, 6) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{36} = \frac{1}{36} \cdot 6 = \frac{1}{6}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \sum_{x_1=1}^{6} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1 X_2}(1, x_2) + f_{X_1 X_2}(2, x_2) + \dots + f_{X_1 X_2}(6, x_2) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{36} = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

Para el ejemplo 2

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^1 f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_2 = \int_0^1 1 \cdot dx_2 = 1$$

DEFINICION. Sea $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ la función de densidad de probabilidad conjunta de X_1 y X_2 y sea $f_{X_1}(x_1)$ la función de densidad de probabilidad marginal de X_1 y $f_{X_2}(x_2)$ sea la función de densidad de probabilidad marginal de X_2. La función de densidad de probabilidad condicional de X_2 dado que $X_1 = x_1$ se define por:

$$f_{X_2 | X_1 = x_1}(x_2 | x_1) = \frac{f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)}.$$

Y similarmente la función de densidad de probabilidad condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$ se define por:

$$f_{X_1 | X_2 = x_2}(x_1 | x_2) = \frac{f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}.$$

EJEMPLO 4. Sea el fenomeno aleatorio X_1 el lanzar una moneda y sea X_2 el lanzar un dado. Encontrar la función de densidad de probabilidad conjunta, marginales y condicionales.

$$X_1 \begin{cases} 0 - \text{si es aguila} \\ 1 - \text{si es cara.} \end{cases}$$

$$X_2 \begin{cases} 1 - \text{si es 1 en el dado} \\ 2 - \text{si es 2 en el dado} \\ 3 - \text{si es 3 en el dado} \\ 4 - \text{si es 4 en el dado} \\ 5 - \text{si es 5 en el dado} \\ 6 - \text{si es 6 en el dado} \end{cases}$$

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} C & \text{si } x_1 = 1, 0 \text{ y } x_2 = 1, 2, \ldots 6. \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde C es una constante a determinar ya que sabemos que todos los fenomenos son igualmente probables.

$$\therefore \sum_{0}^{1} \sum_{1}^{6} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = 1 = \sum_{0}^{1} [f_{X_1 X_2}(x_1, 1) + f_{X_1 X_2}(x_1, 2) + \dots$$

$$+ f_{X_1 X_2}(x_1, 6)] = f_{X_1 X_2}(0,1) + f_{X_1 X_2}(1,1) +$$

$$+ f_{X_1 X_2}(0,2) + f_{X_1 X_2}(1,2) + \dots + f_{X_1 X_2}(0,6) +$$

$$+ f_{X_1 X_2}(1,6) = c + c + c + c + \dots + c + c = 12c$$

$$\therefore \quad 12c = 1 \implies c = 1/12$$

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1/12 & x_1 = 1, 0 \quad x_2 = 1, 2, \dots, 6 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$f_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2=1}^{6} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \sum_{x_2=1}^{6} \frac{1}{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{12} = 6\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$f_{X_2}(x_2) = \sum_{x_1=0}^{1} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \sum_{x_1=0}^{1} \frac{1}{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

$$f_{X_1 | X_2 = x_2}(x_1 | x_2) = \frac{f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{2}.$$

$$f_{X_2 | X_1 = x_1}(x_2 | x_1) = \frac{f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)} = \frac{1/12}{1/2} = \frac{1}{6}$$

<u>DEFINICION</u>. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$. Sea μ_1 la media de X_1 y sea μ_2 la media de X_2. La covarianza de X_1 y X_2, indicada por $\text{cov}(X_1, X_2)$ se define por:

$$\text{cov}(X_1, X_2) = E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)].$$

NOTA. $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$ para X_1 y X_2 continuas.

$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ para X_1 y X_2 discretas.

Proposición.

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - \mu_1 \mu_2.$$

DEMOSTRACION.

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) \triangleq E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] =$$

$$E[X_1 X_2 - \mu_2 X_1 - \mu_1 X_2 + \mu_1 \mu_2] =$$

$$E[X_1 X_2] - E[\mu_2 X_1] - E[\mu_1 X_2] + E[\mu_1 \mu_2] =$$

$$E[X_1 X_2] - \mu_2 E[X_1] - \mu_1 E[X_2] + \mu_1 \mu_2 =$$

$$E[X_1 X_2] - \mu_2 \mu_1 - \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_2 =$$

$$E[X_1 X_2] - \mu_1 \mu_2. \quad \square$$

DEFINICION. El coeficiente de correlación de X_1 y X_2 indicado por $\rho_{X_1 X_2}$ se define por:

$$\rho_{X_1 X_2} = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)\, Var(X_2)}}$$

NOTA.

$$Var(X_1) = \sigma_1^2 \Rightarrow \sqrt{Var(X_1)} = \sigma_1.$$

$$Var(X_2) = \sigma_2^2 \Rightarrow \sqrt{Var(X_2)} = \sigma_2.$$

$$\therefore \rho_{X_1 X_2} = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

NOTACION La notación σ_{ij} significa la covarianza de X_i y X_j, i.e.

$$\sigma_{ij} \equiv cov(X_i, X_j).$$

NOTA: Si μ_i es la media de la variable aleatoria X_i entonces.

$$cov(X_i, X_i) \stackrel{d}{=} E[(X_i - \mu_i)(X_i - \mu_i)] =$$
$$= E[(X_i - \mu_i)^2] =$$
$$= E[(X_i - \mu_i)^2] =$$
$$= Var(X_i).$$

$$\therefore Var(X_i) = cov(X_i, X_i).$$

Usando la notación σ_{ij} para covariancia

$$Var(X_i) = cov(X_i, X_i) = \sigma_{ii}$$

Y usando la notación σ^2 para la variancia de una variable aleatoria, se tiene que

$$\sigma_i^2 \equiv Var(X_i) = cov(X_i, X_i) \equiv \sigma_{ii}$$

DEFINICION. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias y sea X un vector definido por.

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

al vector X se le llama un vector aleatorio i.e., un vector aleatorio es aquel en el que sus componentes son variables aleatorias.

DEFINICION Sea X un vector aleatorio el valor medio del vector aleatorio X se define por

$$E(X) = E\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \end{bmatrix}$$

DEFINICIÓN. Sea X un vector aleatorio de componentes X_1 y X_2 la matriz de covariancia del vector X (o de las variables aleatorias X_1 y X_2), indicada por Σ_X, se define por:

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} cov(X_1, X_1) & cov(X_1, X_2) \\ cov(X_2, X_1) & cov(X_2, X_2) \end{bmatrix}$$

NOTAS 1) Ya que $\sigma_{ij} = cov(X_i, X_j)$

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

2) Ya que $cov(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$ y también $cov(X_j, X_i) = E[(X_j - \mu_j)(X_i - \mu_i)]$

$$\therefore \quad cov(X_i, X_j) = cov(X_j, X_i)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

3) A la matriz de covariancia también se le llama la matriz de variancias y covariancias porque.

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} cov(X_1, X_1) & cov(X_1, X_2) \\ cov(X_2, X_1) & cov(X_2, X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} var(X_1) & cov(X_1, X_2) \\ cov(X_2, X_1) & var(X_2) \end{bmatrix}.$$

NOTACIÓN. La notación ρ_{ij} significa el coeficiente de correlación de las variables X_i y X_j, i.e.,

$$\rho_{ij} = \rho_{X_i X_j} = \frac{cov(X_i, X_j)}{\sqrt{Var(X_i)\,Var(X_j)}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\,\sigma_{jj}}}$$

DEFINICION La matriz de coeficientes de correlación de las variables aleatorias X_1 y X_2, indicada por ρ, se define por

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{cov(X_1, X_1)}{\sqrt{Var(X_1)\ Var(X_1)}} & \dfrac{cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)\ Var(X_2)}} \\ \dfrac{cov(X_2, X_1)}{\sqrt{Var(X_2)\ Var(X_1)}} & \dfrac{cov(X_2, X_2)}{\sqrt{Var(X_2)\ Var(X_2)}} \end{bmatrix}$$

NOTA Observese que.

$$\rho_{ii} = \frac{cov(X_i, X_i)}{\sqrt{Var(X_i)\ Var(X_i)}} = \frac{cov(X_i, X_i)}{Var(X_i)} =$$

$$= \frac{Var(X_i)}{Var(X_i)} = 1.$$

$$\therefore\ \rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

"INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS"

DEFINICION. Se dice que las variables aleatorias X_1 y X_2 son independientes si:

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)\ f_{X_2}(x_2) \quad \forall\ x_1, x_2$$

PROPOSICION. Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes entonces:

1) $f_{X_1 | X_2 = x_2}(x_1 | x_2) = f_{X_1}(x_1).$

2) $f_{X_2 | X_1 = x_1}(x_2 | x_1) = f_{X_2}(x_2).$

DEMOSTRACION.

$$f_{X_1 | X_2 = x_2}(x_1 | x_2) \stackrel{d}{=} \frac{f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

pero ya que X_1 y X_2 son independientes

$$\frac{f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = f_{X_1|X_2=x_2}(x_1|x_2) =$$

$$= f_{X_1}(x_1). \quad \square$$

PROPOSICION: X_1 y X_2 independientes implica que $E[X_1, X_2] = E[X_1]\,E[X_2]$.

DEMOSTRACION.

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, f_{X_1 X_2}(x_1 x_2)\, dx_1\, dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2)\, dx_1\, dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(x_2)\, dx_2 \\ &= E[X_1]\, E[X_2]. \quad \square \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN. Si las variables aleatorias X_1 y X_2 son independientes entonces $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$.

DEMOSTRACION.

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X_1, X_2) &\overset{d}{=} E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)] \\ &= E[X_1 X_2] - \mu_1\mu_2 \\ &= E[X_1]\,E[X_2] - \mu_1\mu_2 \\ &= \mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_2 \\ &= 0 \quad \square. \end{aligned}$$

NOTA. La proposición anterior no es valida en sentido inverso, i.e.

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0 \not\Rightarrow X_1, X_2 \text{ independientes}$$

DEFINICION. Se dice que X_1 y X_2 están no correlacionadas si:

$$\text{cov}(X_1, X_2) = 0.$$

"FUNCION BIVARIADA NORMAL."

DEFINICION. La función de densidad de probabilidad bivariada normal se define por:

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\, \sigma_1\, \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho \frac{(x_1-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(x_2-\mu_2)}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}.$$

donde σ_1, σ_2, μ_1, μ_2 y ρ son parámetros fijos particulares para el fenómeno aleatorio, que se trate.

PROPOSICION La función de densidad de probabilidad bivariada normal en forma matricial está dada por:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\, |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)' \Sigma^{-1} (x-\mu)\right\}.$$

donde $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$; $\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$

$$\rho = \rho_{X_1 X_2} = \rho_{12}.$$

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\, \sigma_{22}}} \Rightarrow \sigma_{12} = \rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}\, \sigma_{22}} \; ; \; \sigma_1^2 = Var(X_1) = cov(X_1, X_1) = \sigma_{11}$$

$$= \rho_{12}\sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \; ; \; \sigma_2^2 = Var(X_2) = cov(X_2, X_2) = \sigma_{22}$$

Se sospecha que un cierto tipo de d[illegible] que produce un tumor maligno, con e[illegible] fin se tomaron 1000 ratas y se les [illegible] ministró la droga con distintas dosis, [illegible] los resultados resumidos en la siguiente tabla.

	TUMOR SI	NO	TOTAL
DOSIS ALTA:	10	90	100
DOSIS LEVE:	15	485	500
SIN DROGA:	12	388	400
	37	963	1000

Sean:

$$X \begin{cases} 0 & \text{si la rata ha recibido alta dosis} \\ 1 & \text{si la rata ha recibido leve dosis} \\ 2 & \text{si la rata no ha recibido dosis.} \end{cases}$$

$$Y \begin{cases} 0 & \text{si la rata tiene tumor} \\ 1 & \text{si la rata no tiene tumor.} \end{cases}$$

Si suponemos (acertadamente) que las proporciones dadas de la tabla precedente representan probabilidades; podemos obtener probabilidades de eventos en la siguiente forma.

$f(0,0)$ = probabilidad de que la rata que ha recibido alta dosis tenga tumor.

$$f(0,0) = \frac{10}{1000} = 0.01$$

PREGUNTAS:

a) Basados en los datos anteriores y en un análisis preliminar presente en forma de tabla los valores de $f(x,y)$, para distintas combinaciones, $x = 0, 1, 2$ e $y = 0, 1$.

b) Basado en el análisis prelim[illegible] [illegible]mente $f(x)$, $f(y)$.

c) Del mismo análisis determine [illegible]

f) ... la ... de ...
... $f(x/y) = f(x,y)$ ...
... condicional de x dado y.)
... la ... presenta ... ¿cuál es la probabilidad de que haya ... dosis de droga?
c) Encuentre la matriz de covarianzas y la matriz de correlación.

RESPUESTAS:

a) Tabulación de $f_{XY}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1
0	0.010	0.09
1	0.015	0.485
2	0.012	0.388

b) Marginales

$$f_X(0) = \sum_{y=0}^{1} f_{XY}(x,y) = 0.01 + ... = ...$$

$$f_X(1) = \sum_{y=0}^{1} f_{XY}(x,y) = 0.015 + ...$$

$$f_X(2) = \sum_{y=0}^{1} f_{XY}(x,y) = 0.012 + ...$$

Las marginales para Y son:

$$f_Y(0) = \sum_{x=0}^{2} f_{XY}(x,y) = 0 ...$$

0.037

$f_y(0) = \sum f_{x,}(x,0) = 0.09 \ldots$

c) Si x e y son independientes:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

tomando por ejemplo:

$$f(0,0) = 0.01$$

ahora;

$$f_Y(0) = 0.037$$

y

$$f_X(0) = 0.10$$

como $f_X(0) \cdot f_Y(0) = (0.037)(0.10) \neq f_{XY}(0,0)$

$\therefore$ Se concluye que X e Y no son independientes, y que la aparición de tumor depende de la administración de la droga.

d) La probabilidad de que una rata con tumor haya recibido alta dosis, está dada por:

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)_{x=0}} = \frac{f(0,0)}{f_X(0)} = \frac{0.010}{0.037} = 0.27$$

$$\therefore f(y/x) = 0.27$$

e) Matriz de covariancia y matriz de correlación

Para sacar la matriz necesitamos.

$$\mu_x = E[X] = \sum_0^2 x\, f_X(x) = 0\, f_X(0) + 1\, f_X(1) + 2 \ldots$$

$$= 1(0.5) + 2(0.4) \Rightarrow \mu_x = 1.3$$

$$\mu_y = E[Y] = \sum_0^1 y\, f_Y(y) = 0\, f_Y(0) + 1\, f_Y(1)$$

$$= 1(0.963) \Rightarrow \mu_y = 0.963$$

ahora:

$\operatorname{cov}(x\,x) = E[X^2] - \mu_x^2 = \sum_{0}^{2} x^2 f_x(x) - \mu_x^2 = 0^2 f_x(0)$
$+ (1)^2 f_x(1) + (2)^2 f_x(2) - \mu_x^2 = (1)(0.5) + 4(0.4) - (1.3)^2 =$
$0.41 \Rightarrow \operatorname{cov}(x\,x) = 0.41$

enseguida

$\operatorname{cov}(y\,y) = E[y^2] - \mu_y^2 = \sum_{0}^{1} y^2 f_y(y) - \mu_y^2 = 0^2 f_y(0)$
$+ (1)^2 f_y(1) - \mu_y^2 = 1(0.963) - (0.963)^2 \Rightarrow$
$\operatorname{cov}(y\,y) = 0.036$

ahora:

$\operatorname{cov}(x\,y) = E[x\,y] - \mu_x\mu_y = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{1} x\,y\,f_{xy}(xy) - \mu_x\mu_y =$
$\sum_{0}^{2} x \sum_{0}^{1} y\,f_{xy}(xy) - \mu_x\mu_y = \sum_{0}^{2} x\,[0\,f_{xy}(x,0) + 1\,f_{xy}(x,1)]$
$- \mu_x\mu_y = \sum_{0}^{2} x\,f_{xy}(x\,1) - \mu_x\mu_y = 0\,f_{xy}(0,1) + 1\,f_{xy}(1,1)$
$+ 2\,f_{xy}(2,1) - (1.3)(0.963) = 1(0.485) + 2(0.388) -$ [illegible]
$0.009 \Rightarrow \operatorname{cov}(x\,y) = 0.009.$

La matriz de covariancia de X e Y es:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \operatorname{cov}(x\,x) & \operatorname{cov}(x\,y) \\ \operatorname{cov}(y\,x) & \operatorname{cov}(y\,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.41 & 0.009 \\ 0.009 & 0.036 \end{bmatrix}$$

La matriz de correlación es:

$$\rho_{xx} = \frac{\operatorname{cov}(xx)}{\sqrt{\operatorname{cov}(xx)}\,\sqrt{\operatorname{cov}(x\,x)}} = \sqrt{\frac{\operatorname{cov}(x\,x)}{\operatorname{cov}(x\,x)}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\rho_{yy} = \frac{\operatorname{cov}(y\,y)}{\sqrt{\operatorname{cov}(y\,y)}\,\sqrt{\operatorname{cov}(y\,y)}} = \sqrt{\frac{\operatorname{cov}(y\,y)}{\operatorname{cov}(y\,y)}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\rho_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(x\,y)}{\sqrt{\operatorname{cov}(xx)}\,\sqrt{\operatorname{cov}(y\,y)}} = \frac{0.009}{\sqrt{0.41}\,\sqrt{0.036}}$$

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{0.009}{\sqrt{0.41}\,\sqrt{0.036}} \\ \dfrac{0.009}{\sqrt{0.41}\,\sqrt{0.036}} & 1 \end{bmatrix}$$

"MULTIVARIADAS."

DEFINICION Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias y sea $f_{X_1, X_2, \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ la función de probabilidad conjunta de $X_1, X_2, \ldots, X_n$. La función de densidad de probabilidad marginal de X_i indicada por $f_{X_i}(x_i)$ se define por:

$$f_{X_i}(x_i) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{x_j \neq x_i.} f_{X_1, X_2, \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \ldots$$
$$\ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n.$$

La función de densidad de probabilidad marginal de X_i y X_j se define por.

$$f_{X_i X_j}(x_i\, x_j) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots$$
$$\ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n.$$

DEFINICION. Si $f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ es la función de densidad de probabilidad conjunta de $x_1, \ldots, x_n$ la covariancia de x_i y x_j se define por:

$$\operatorname{cov}(x_i, x_j) = E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)]$$

donde $\mu_i = E[x_i]$.
$\mu_j = E[x_j]$.

El coeficiente de correlación de x_i y x_j se define por.

$$\rho(x_i, x_j) = \frac{\operatorname{cov}(x_i, x_j)}{\sqrt{Var(x_i)}\,\sqrt{Var(x_j)}}.$$

VECTORES ALEATORIOS Y FUNCIONES DE VECTORES ALEATORIOS.

DEFINICION Un vector aleatorio U de n componentes es un vector cuyas n componentes son variables aleatorias, i.e. si $U_1, \ldots, U_n$ son variables aleatorias entonces

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix}$$

es un vector aleatorio (en particular un vector aleatorio columna)

NOTA:

Un vector aleatorio de n componentes está caracterizado probabilísticamente por la función de densidad conjunta.

$$f_{U_1 \cdots U_n}(u_1, \ldots, u_n)$$

de las variables aleatorias $U_1, \ldots, U_n$. De esta función conjunta podemos derivar las funciones marginales de una o de cualquier subconjunto de variables aleatorias, i.e., podremos encontrar

$$f_{U_i}(u_i) \qquad \text{para cualquier } i$$

o encontrar

$$f_{U_{\alpha_1} U_{\alpha_2} \cdots U_{\alpha_q}}(u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, \ldots, u_{\alpha_q})$$

para cualquier subconjunto de índices $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$ de $\{1,2,\ldots,n\}$, $q \leq n$. Con toda esta información proporcionada por la conjunta será posible encontrar todos los elementos que aparecen en las definiciones de valor esperado y matriz de covariancias del vector aleatorio U, las cuales se dan a continuación.

DEFINICION - El valor esperado de un vector aleatorio U, es un vector cuyos componentes son los valores esperados de cada una de las componentes de U, i e., si

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix}$$

es un vector aleatorio entonces el valor esperado de U, está dado por

$$EU = \begin{bmatrix} EU_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ EU_n \end{bmatrix}$$

DEFINICION - La matriz de covariancias del vector U, indicada por Σ, se define como la matriz cuyos elementos son las covariancias de todas las parejas de variables aleatorias U_i, U_j que se pueden obtener de las n componentes de U, ie., la matriz de covariancias de U se define

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{cov}(U_1, U_1) & \text{cov}(U_1, U_2) & \dots & \text{cov}(U_1, U_n) \\ \text{cov}(U_2, U_1) & \text{cov}(U_2, U_2) & \dots & \text{cov}(U_2, U_n) \\ \\ \text{cov}(U_n, U_1) & \text{cov}(U_n, U_2) & \dots & \text{cov}(U_n, U_n) \end{bmatrix}$$

NOTAS:

1 A la covariancia de cualquier pareja de variables aleatorias U_i, U_j se le indicará por

$$\sigma_{ij} = \text{cov}(U_i, U_j)$$

Por lo tanto, Σ en esta notación queda dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Observe que si $i = j$, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}\,(U_i, U_i) &= E\{[U_i - EU_i][U_i - EU_i]\} \\ &= E\{[U_i - EU_i]^2\} \\ &= \mathrm{Var}\,(U_i) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la covariancia de una variable aleatoria consigo misma es igual a su variancia. Por este motivo a la matriz de covariancias Σ también se le llama la matriz de variancias y covariancias.

Si llamamos σ_i^2 a la variancia de U_i y usando la notación de la nota anterior entonces tenemos que

$$\sigma_{ii} \equiv \mathrm{cov}\,(U_i, U_i) = \mathrm{Var}\,(U_i) \equiv \sigma_i^2$$

3. A la matriz de covariancias Σ, también la indicaremos como Σ_U para hacer énfasis de que se refiere al vector U. Esta notación será útil cuando tengamos varios vectores aleatorios y hablemos de sus matrices de covariancias correspondientes.

DEFINICION - Si U es un vector aleatorio de n componentes, su matriz de coeficientes de correlación, indicada por ρ, se define por

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & & & \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{bmatrix}$$

donde ρ_{ij} es el coeficiente de correlación entre la variable U_i y la variable U_j, ie.

$$\rho_{ij} = \frac{\mathrm{cov}\,(U_i, U_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(U_i)\ \mathrm{Var}\,(U_j)}}$$

PROPOSICION Si U es un vector aleatorio columna de n componenetes entonces su matriz de covariancias $\Sigma = [\sigma_{ij}]$ está dada por

$$\Sigma = E\{[U - EU][U - EU]'\}$$

DEMOSTRACION.

Observe que

$$[U - EU][U - EU]' = \begin{bmatrix} U_1 - EU_1 \\ U_2 - EU_2 \\ \vdots \\ U_n - EU_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 - EU_1 & U_2 - EU_2 & \dots & U_n - EU_n \end{bmatrix}$$

$$[U - EU][U - EU]' = \begin{bmatrix} [U_1 - EU_1][U_1 - EU_1] & [U_1 - EU_1][U_2 - EU_2] & \dots [U_1 - EU_1][U_n - EU_n] \\ [U_2 - EU_2][U_1 - EU_1] & [U_2 - EU_2][U_2 - EU_2] & \dots [U_2 - EU_2][U_n - EU_n] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [U_n - EU_n][U_1 - EU_1] & [U_n - EU_n][U_2 - EU_2] & \dots [U_n - EU_n][U_n - EU_n] \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$E\{[U-EU][U-EU]'\} = E \begin{bmatrix} [U_1-EU_1][U_1-EU_1] & [U_1-EU_1][U_2-EU_2] & \dots [U_1-EU_1][U_n-EU_n] \\ [U_2-EU_2][U_1-EU_1] & [U_2-EU_2][U_2-EU_2] & \dots [U_2-EU_2][U_n-EU_n] \\ \vdots & & \\ [U_n-EU_n][U_1-EU_1] & [U_n-EU_n][U_2-EU_2] & \dots [U_n-EU_n][U_n-EU_n] \end{bmatrix}$$

$$E\{[U-EU][U-EU]'\} = \begin{bmatrix} E[U_1-EU_1][U_1-EU_1] & E[U_1-EU_1][U_2-EU_2] & \dots E[U_1-EU_1][U_n-EU_n] \\ E[U_2-EU_2][U_1-EU_1] & E[U_2-EU_2][U_2-EU_2] & \dots E[U_2-EU_2][U_n-EU_n] \\ \vdots & & \\ E[U_n-EU_n][U_1-EU_1] & E[U_n-EU_n][U_2-EU_2] & \dots E[U_n-EU_n][U_n-EU_n] \end{bmatrix}$$

$$E\{[U-EU][U-EU]'\} = \Sigma$$

PROPOSICIÓN Sea U un vector aleatorio columna, cuyas componentes $U_1, \ldots$ variables aleatorias arbitrarias. Si z es una función de U definida por

$$Z = cU \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i U_i .$$

donde $c = [c_1 \ldots c_n]$ es un vector renglón cuyos componentes son constantes, entonces

i) $$\mathrm{Var}\, Z = c \Sigma c' \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} c_i c_j = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_{ii} + \sum_{i \neq j} \sigma_{ij} c_i c_j$$

donde Σ es la matriz de covariancias del vector U.

ii) Si en particular $U_1, \ldots, U_n$ son variables aleatorias independientes entonces

$$\mathrm{Var}\, Z = c \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(U_1) & 0 & & 0 \\ 0 & \mathrm{Var}(U_2) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \mathrm{Var}(U_n) \end{bmatrix} c' \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \, \mathrm{Var}(U_i)$$

iii) Si además de ser independientes las variables aleatorias $U_1, \ldots, U_n$ tienen una variancia común σ^2, entonces

$$\mathrm{Var}\, Z = c \, \sigma^2 I c' = \sigma^2 cc' \equiv \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

PRUEBA DE i)

$$\mathrm{Var}\, Z = E\{[Z - EZ]^2\} = E\{[Z - EZ][Z - EZ]\}$$

$$= E\{[Z - EZ][Z - EZ]'\}$$ porque

$(Z - EZ) = (Z - EZ)'$
ya que $(Z - EZ)$ es un real

$$= E\{[cU - E(cU)][cU - E(cU)]'\}$$

$$= E\{[cU - cE(U)][cU - cE(U)]'\}$$

$$= E\{[c(U - EU)][c(U - EU)]'\}$$

$$= E\{c[U - EU][U - EU]' c'\}$$

$$= c\, E\{[U - EU][U - EU]'\} c'$$

Pero en secciones pasadas habíamos demostrado que la matriz de covariancias de un vector U es igual a

$$\Sigma = E\{(U - EU)(U - EU)'\}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Var}\ Z = c\ \Sigma\ c' \quad \square$$

PRUEBA DE ii)

Observe que cuando $U_1, \ldots, U_n$ son independientes entonces

$$\mathrm{cov}(U_i, U_j) = \begin{cases} \mathrm{Var}(U_i) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(U_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{Var}(U_2) & \cdots & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{Var}(U_n) \end{bmatrix}$$

Sustituyendo Σ en la parte 1 se tiene el resultado deseado

PRUEBA DE iii)

El que $U_1, \ldots, U_n$ sean independientes y con variancia común σ^2 implica que

$$\mathrm{cov}(U_i, U_j) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Por lo tanto: $\Sigma = \sigma^2 I$

sustituyendo esto Σ en la primera parte de esta proposición se obtiene el resultado deseado $\square$.

Table 1 DISCRETE DISTRIBUTIONS

Name of parametric family of distributions	Discrete density functions $f(\ )$	Parameter space	Mean $\mu = \mathcal{E}[X]$	Variance $\sigma^2 = \mathcal{E}[(X-\mu)^2]$	Moments $\mu_r' = \mathcal{E}[X^r]$ or $\mu_r = \mathcal{E}[(X-\mu)^r]$ and/or cumulants κ_r	Moment generating function $\mathcal{E}[e^{tX}]$
Discrete uniform	$f(x) = \frac{1}{N} I_{\{1,\ldots,N\}}(x)$	$N = 1, 2,$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\mu_3' = \frac{N(N+1)^2}{4}$ $\mu_4' = \frac{(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)}{30}$	$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} e^{jt}$
Bernoulli	$f(x) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$	$0 \le p \le 1$ $(q = 1-p)$	p	pq	$\mu_r' = p$ for all r	$q + pe^t$
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$	$0 \le p \le 1$ $n = 1, 2, 3, .$ $(q = 1-p)$	np	npq	$\mu_3 = npq(q-p)$ $\mu_4 = 3n^2p^2q^2 + npq(1-6pq)$	$(q + pe^t)^n$
Hypergeometric	$f(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$	$M = 1, 2,$ $K = 0, 1, \ldots, M$ $n = 1, 2, \ldots, M$	$n\frac{K}{M}$	$n\frac{K}{M}\frac{M-K}{M}\frac{M-n}{M-1}$	$\mathcal{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)] = r!\frac{\binom{K}{r}\binom{n}{r}}{\binom{M}{r}}$	not useful
Poisson	$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$	$\lambda > 0$	λ	λ	$\kappa_r = \lambda$ for $r = 1, 2, \ldots$ $\mu_3 = \lambda$ $\mu_4 = \lambda + 3\lambda^2$	$\exp[\lambda(e^t - 1)]$
Geometric	$f(x) = pq^x I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$	$0 < p \le 1$ $(q = 1-p)$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\mu_3 = \frac{q+q^2}{p^3}$ $\mu_4 = \frac{q+7q^2+q^3}{p^4}$	$\frac{p}{1-qe^t}$
Negative binomial	$f(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$	$0 < p \le 1$ $r > 0$ $(q = 1-p)$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$\mu_3 = \frac{r(q+q^2)}{p^3}$ $\mu_4 = \frac{r[q+(3r+4)q^2+q^3]}{p^4}$	$\left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$

Table 2 CONTINUOUS DISTRIBUTIONS

Name of parametric family of distributions	Cumulative distribution function $F(\cdot)$ or probability density function $f(\cdot)$	Parameter space	Mean $\mu = \mathscr{E}[X]$	Variance $\sigma^2 = \mathscr{E}[(X-\mu)^2]$	Moments $\mu_r' = \mathscr{E}[X^r]$ or $\mu_r = \mathscr{E}[(X-\mu)^r]$ and or cumulants κ_r	Moment generating function $\mathscr{E}[e^{tX}]$
Uniform or rectangular	$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$-\infty < a < b < \infty$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\mu_r = 0$ for r odd; $\mu_r = \frac{(b-a)^r}{2^r(r+1)}$ for r even	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(x-\mu)^2/2\sigma^2]$	$-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$	μ	σ^2	$\mu_r = 0$, r odd, $\mu_r = \frac{r!}{(r/2)!} \frac{\sigma^r}{2^{r/2}}$, r even, $\kappa_r = 0$, $r > 2$	$\exp[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2]$
Exponential	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$	$\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\mu_r' = \frac{\Gamma(r+1)}{\lambda^r}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$ for $t < \lambda$
Gamma	$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$	$\lambda > 0$, $r > 0$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$	$\mu_j' = \frac{\Gamma(r+j)}{\lambda^j \Gamma(r)}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$ for $t < \lambda$
Beta	$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x)$	$a > 0$, $b > 0$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$	$\mu_r' = \frac{B(r+a,b)}{B(a,b)}$	not useful
Cauchy	$f(x) = \frac{1}{\pi\beta\{1+[(x-\alpha)/\beta]^2\}}$	$-\infty < \alpha < \infty$, $\beta > 0$	Does not exist	Does not exist	Do not exist	Characteristic function is $e^{i\alpha t - \beta\lvert t\rvert}$
Lognormal	$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(\log_e x - \mu)^2/2\sigma^2] I_{(0,\infty)}(x)$	$-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$	$\exp[\mu + \frac{1}{2}\sigma^2]$	$\exp[2\mu + 2\sigma^2] - \exp[2\mu + \sigma^2]$	$\mu_r' = \exp[r\mu + \frac{1}{2}r^2\sigma^2]$	not useful
Double exponential	$f(x) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{\lvert x-\alpha\rvert}{\beta}\right)$	$-\infty < \alpha < \infty$, $\beta > 0$	α	$2\beta^2$	$\mu_r = 0$ for r odd, $\mu_r = r!\,\beta^r$ for r even	$\frac{e^{\alpha t}}{1-(\beta t)^2}$

(continued)

Table 2 CONTINUOUS DISTRIBUTIONS (*continued*)

Name of parametric family of distributions	Cumulative distribution function $F(\,)$ or probability density function $f(\,)$	Parameter space	Mean $\mu = \mathscr{E}[X]$	Variance $\sigma^2 = \mathscr{E}[(X-\mu)^2]$	Moments $\mu_r' = \mathscr{E}[X^r]$ or $\mu_r = \mathscr{E}[(X-\mu)^r]$ and/or cumulants κ_r	Moment generating function $\mathscr{E}[e^{tX}]$
Weibull	$f(x) = abx^{b-1}\exp[-ax^b]I_{(0,\infty)}(x)$	$a > 0$ $b > 0$	$a^{-1/b}\Gamma(1+b^{-1})$	$a^{-2/b}[\Gamma(1+2b^{-1}) - \Gamma^2(1+b^{-1})]$	$\mu_r' = a^{-r/b}\Gamma\left(1+\frac{r}{b}\right)$	$\mathscr{E}[X^t] = a^{-t/b}\Gamma\left(1+\frac{t}{b}\right)$
Logistic	$F(x) = [1+e^{-(x-\alpha)/\beta}]^{-1}$	$-\infty < \alpha < \infty$ $\beta > 0$	α	$\frac{\beta^2\pi^2}{3}$		$e^{\alpha t}\pi\beta t\csc(\pi\beta t)$
Pareto	$f(x) = \frac{\theta x_0^\theta}{x^{\theta+1}} I_{(x_0,\infty)}(x)$	$x_0 > 0$ $\theta > 0$	$\frac{\theta x_0}{\theta-1}$ for $\theta > 1$	$\frac{\theta x_0^2}{(\theta-1)^2(\theta-2)}$ for $\theta > 2$	$\mu_r' = \frac{\theta x_0^r}{\theta - r}$ for $\theta > r$	does not exist
Gumbel or extreme value	$F(x) = \exp(-e^{-(x-\alpha)/\beta})$	$-\infty < \alpha < \infty$ $\beta > 0$	$\alpha + \beta\gamma$, $\gamma \approx .577216$	$\frac{\pi^2\beta^2}{6}$	$\kappa_r = (-\beta)^r\psi^{(r-1)}(1)$ for $r \geq 2$, where $\psi(\,)$ is digamma function	$e^{\alpha t}\Gamma(1-\beta t)$ for $t < 1/\beta$
t distribution	$f(x) = \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\Gamma(k/2)} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{1}{(1+x^2/k)^{(k+1)/2}}$	$k > 0$	$\mu = 0$ for $k > 1$	$\frac{k}{k-2}$ for $k > 2$	$\mu_r = 0$ for $k > r$ and r odd $\mu_r = \frac{k^{r/2}B((r+1)/2, (k-r)/2)}{B(\frac{1}{2}, k/2)}$ for $k > r$ and r even	does not exist
F distribution	$f(x) = \frac{\Gamma[(m+n)/2]}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2}$ $\times \frac{x^{(m-2)/2}}{[1+(m/n)x]^{(m+n)/2}} I_{(0,\infty)}(x)$	$m, n = 1, 2, \ldots$	$\frac{n}{n-2}$ for $n > 2$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ for $n > 4$	$\mu_r' = \left(\frac{n}{m}\right)^r \frac{\Gamma(m/2+r)\Gamma(n/2-r)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}$ for $r < \frac{n}{2}$	does not exist
Chi-square distribution	$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k/2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} x^{k/2-1}e^{-(1/2)x}I_{(0,\infty)}(x)$	$k = 1, 2, \ldots$	k	$2k$	$\mu_j' = \frac{2^j\Gamma(k/2+j)}{\Gamma(k/2)}$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{k/2}$ for $t < 1/2$

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

PLANEACION Y CONTROL DE LA PRODUCCION

APENDICE C

M. EN C. JORGE RIVERA BENITEZ

SEPTIEMBRE DE 1977.

FORMULAS ÚTILES

$$\sum_{i=1}^{n} i \equiv 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1+4+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1+8+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} r^j = \frac{1-r^n}{1-r}$$ para cualquier número real r.

$$\sum_{j=0}^{\infty} r^j = \frac{1}{1-r} \quad \text{si } |r|<1$$

TABLE 4-2 Infinite Sums Useful in Development of the Smoothing Vector

Form	Sum
$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k$	$\dfrac{1}{1-\beta}$; $\lvert\beta\rvert < 1$
$\sum_{k=0}^{\infty} k\beta^k$	$\dfrac{\beta}{(1-\beta)^2}$
$\sum_{k=0}^{\infty} k^2\beta^k$	$\dfrac{\beta(1+\beta)}{(1-\beta)^3}$
$\sum_{k=0}^{\infty} k^3\beta^k$	$\dfrac{\beta(1+4\beta+\beta^2)}{(1-\beta)^4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} k^4\beta^k$	$\dfrac{\beta(1+11\beta+11\beta^2+\beta^3)}{(1-\beta)^5}$
$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \sin \omega k$	$\dfrac{\beta \sin \omega}{1-2\beta\cos\omega+\beta^2}$
$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cos \omega k$	$\dfrac{1-\beta\cos\omega}{1-2\beta\cos\omega+\beta^2}$
$\sum_{k=0}^{\infty} k\beta^k \sin \omega k$	$\dfrac{\beta(1-\beta^2)\sin\omega}{(1-2\beta\cos\omega+\beta^2)^2}$
$\sum_{k=0}^{\infty} k\beta^k \cos \omega k$	$\dfrac{2\beta^2-\beta(1+\beta^2)\cos\omega}{(1-2\beta\cos\omega+\beta^2)^2}$
$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \sin \omega_1 k \sin \omega_2 k$	$\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1-\beta\cos(\omega_1+\omega_2)}{1-2\beta\cos(\omega_1+\omega_2)+\beta^2} - \dfrac{1-\beta\cos(\omega_1-\omega_2)}{1-2\beta\cos(\omega_1-\omega_2)+\beta^2}\right]$
$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \sin \omega_1 k \cos \omega_2 k$	$\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\beta\sin(\omega_1+\omega_2)}{1-2\beta\cos(\omega_1+\omega_2)+\beta^2} + \dfrac{\beta\sin(\omega_1-\omega_2)}{1-2\beta\cos(\omega_1-\omega_2)+\beta^2}\right]$
$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cos \omega_1 k \cos \omega_2 k$	$\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1-\beta\cos(\omega_1+\omega_2)}{1-2\beta\cos(\omega_1+\omega_2)+\beta^2} + \dfrac{1-\beta\cos(\omega_1-\omega_2)}{1-2\beta\cos(\omega_1-\omega_2)+\beta^2}\right]$

Note that more complex forms can be obtained by successive differentiation of those given above. For example,

$$\beta \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k\beta^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\beta^k$$

which yields

$$\beta \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\beta}{(1-\beta)^2}\right] = \frac{\beta(1+\beta)}{(1-\beta)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\beta^k$$

Similarly, we may evaluate

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2\beta^k \sin \omega k = -\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k\beta^k \cos \omega k\right)$$

More complex forms may be factored and evaluated by use of the trigonometric identities

$$\sin a \sin b = -\tfrac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$
$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$
$$\cos a \sin b = \tfrac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$
$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

This Department will carry articles of high quality on all aspects of computation in statistics
Papers describing new algorithms, programs, or statistical packages will not contain listings of the program, although the completely documented program must be available from the author. Review of the paper will always include a running test of the program by the referee.
The Editorial Committee will be pleased to confer with authors about the appropriateness of topics or drafts of possible articles.

An Interactive Forecasting System

SPYROS MAKRIDAKIS,* ANNE HODGSDON* AND STEVEN C. WHEELWRIGHT**

ABSTRACT.

Time sharing computer configurations have introduced a new dimension in applying statistical and mathematical models to sequential decision problems. When the outcome of one step in the process influences subsequent decisions, then an interactive time sharing system is of great help. Since the forecasting function involves such a sequential process, it can be handled particularly well with an appropriate time-shared computer system. This paper describes such a system which allows the user to do preliminary analysis of his data to identify the forecasting technique or class of techniques most appropriate for his situation and to apply those in developing a forecast. This interactive forecasting system has met with excellent success both in teaching the fundamentals of forecasting for business decision making and in actually applying those techniques in management situations.

The past decade has seen a number of developments in the area of forecasting methods that can be used in business. These advances in both theory and practice have been largely in response to requirements placed on individual firms by the increasing complexity and competitiveness of the business environment. Companies of all sizes now find it essential to make forecasts for a number of uncertain quantities which affect their decisions and their performance.

As with the development of most management science techniques, the application of these methods has lagged behind their theoretical formulation and verification. Thus, while most managers are aware of the need for forecasting methods, few managers are familiar with the range of techniques that have been developed and the characteristics of those which must be known in order to select the most appropriate technique for a given situation.

Unfortunately because of the lack of experience which managers have in formalized forecasting procedures there is very little reported work that deals directly with the management side of forecasting problems and the issues with which the manager must deal. Rather, the existing forecasting literature consists of a number of excellent books and articles that deal with a particular forecasting technique or with a narrow class of techniques and their technical characteristics (see, for example, the Box and Jenkins [1] approach to time series forecasting, Johnston's [5] treatment of regression techniques, and Brown's [2] smoothing methods for time series analysis). However, as operations researchers have found in the past, in order to gain wide-spread management acceptance of these methods it is necessary not only to describe their technical aspects, but to translate those characteristics into practical management concern. The factors of primary concern to managers include the practical experience that others have had in using the method, the cost of applying the method, the limitation of the forecast developed by that method, and the accuracy of the resulting forecast.

Those who have tried to apply forecasting methods in recent years have become aware of a number of requirements that are difficult to meet with existing techniques and systems. Three of the most important of these are the following:

1. *The Difficulty of Maintaining Flexibility In Approaching New Situations*

Managers have found that it is extremely easy to develop a preference for one forecasting method over all others and then to use that almost exclusively in any new situation. However, they generally recognize the need to consider a range of alternative techniques in such cases. One source of this difficulty is reliance largely on a single technical person in the firm as the source of knowledge concerning forecasting methods. It is difficult to expect that person to feel unbiased toward each of several alternative forecasting methods simply because of the magnitude of the intellectual task involved. Thus, a system that explicitly supports the consideration of many different techniques for each new forecasting problem would be clearly attractive to managers.

2. *Considering All Relevant Factors In Selecting A Forecasting Technique*

Managers are well aware of the need to consider not only accuracy but a number of other factors in selecting a forecasting technique for a new situation. Since trade-offs and judgments must be made concerning these various factors, the manager needs to be involved actively in applying any forecasting system to make those considerations.

* European Institute of Business Administration, INSEAD, Blvd de Constance, 77305 Fontainebleau, France.
** Harvard Business School, Boston, Mass 02163.

3. *A Mechanism For Rapidly Screening Alternative Techniques*

A third point that has created problems for many managers in forecasting is that they have felt compelled to turn any new situation directly over to a technical person on their staff, since they did not feel competent to do the preliminary analysis themselves. However, in many situations, if the manager could do such a preliminary screening of alternative techniques for a given situation, it might save considerable time and effort in the long run. It would also encourage the adoption of formal forecasting procedures in situations where it may not be worthwhile to make the commitment required to obtain the involvement of a specialist.

In addition to the problems that have been recognized by managers trying to apply forecasting, those teaching in business management programs have also identified some major problems. One of these is a tendency to get bogged down in the classroom in technical details at the exclusion of more practical considerations. This is a natural tendency, given that most of the literature on forecasting is technical in its orientation and that there is little written about actual experiences in forecasting.

Another problem faced by those teaching forecasting is that it takes a considerable amount of time to have students apply a single forecasting technique in a thorough manner to a single situation. Since most courses are relatively short, they do not allow the time necessary to apply a number of those techniques to each of several problem situations.

Finally, teachers have found it particularly difficult to teach about the assumptions inherent in each alternative forecasting method and the implications of those in practice. An obvious solution to this last problem would be to give the students some practical experience in applying the methods. But again, the time generally required to do this for a wide range of situations makes it impractical in all but the most specialized courses.

Based largely on a recognition of the above problems, the authors have over the past few years developed an interactive system for both teaching forecasting methods and applying them in practice. This system has been installed on a time-shared computer and used by a number of students. The remainder of this paper describes this interactive system, how it works and the practical experiences of the authors in using it both in teaching situations and in identifying and applying forecasting techniques for particular management problems. To date, the results have been extremely encouraging and it seems to be meeting its objective of overcoming the specific problems previously outlined.

DESCRIPTION OF THE COMPUTERIZED SYSTEM

The interactive forecasting system developed by the authors is divided into two sequential segments. The first segment, referred to as SIBYL, is aimed at allowing the user to perform a preliminary analysis of his data in order to identify two or three forecasting techniques that may be most appropriate for that situation. As shown in the flow chart in Figure 1, the user begins by inputing the data that wishes to examine and use as a basis for forecasting. This segment of the system makes a number of inquiries of the manager concerning his judgments about the data and about the characteristics of the situation that are most important in selecting a forecasting method. Those factors that need to be considered include the following:

1. The time horizon for decision making: immediate term, short term, medium term, and long term.
2. The pattern of data: seasonal, horizontal, trend, cyclical, or random.
3. The type of model desired, time series, causal, statistical, or non-statistical.
4. The value of the forecast, and thus the amount that can be spent in obtaining it.
5. The accuracy that is required and justified.
6. The complexity that can be tolerated.
7. The availability of historical data.

Some of these factors can best be analyzed through statistical tests while others involve value judgments which only the user can supply. Furthermore, a number require information about the forecasting techniques themselves, which can well be supplied by previous users. However, all of th factors are important and specific consideration of them must be made by the manager before he can select the most appropriate forecasting method available.

For the user to be able to decide upon the best method available, he must have, on the one hand, knowledge of all forecasting techniques and on the other, he must be able to evaluate all of the factors in his specific situation that will influence such a selection. Such a task is not easily handled, even for the expert in the field. For the novice there are many more difficulties, one of the most important being his lack of experience in evaluating the relevant factors influencing the choice of a forecasting method.

A primary characteristic of the SIBYL segment of this forecasting system is that it considers all of the seven factors mentioned above and gives support to the manager in applying them. The logical basis for this consideration is that shown in Figure 2. (This figure has been developed by the authors as a basis for comparing available techniques on different factors.) The influence of this structure on the design of the system is reflected in the sequence of questions and prompts used in SIBYL. The initial questions in this segment deal with the series of data that is to used as the basis of the forecast. An opportunity is also provided for the user to graph that data and obtain several statistics on it.

The next section of questions deals with autocorrelations and their use in identifying the basic pattern in the data. In this portion of SIBYL, the autocorrelations can be computed for various time-lags and then graphed or presented in summary statistical form. Once the autocorrelations are computed, SIBYL aids the user in identifying the patterns that seem to be present in his data. Through a series of questions the program then obtains information on the important factors needed for selecting a forecasting method and supplies the user with a list of three or four techniques that appear to be most suitable for this situation. At this point, the user is also given a number of comparative statistics on those suggested techniques and asked to select one to be used in actually developing a forecast.

Once a specific forecasting method has been selected, control is then passed to a second major segment of the system, RUNNER.

Before describing RUNNER, there are a couple of other characteristics of this forecasting system that facilitate its use by either a student or manager that deserve special mention. One of these is the option the user has of responding to any inquiry from the system with the word HELP. When a user responds in this manner he receives additional information explaining not only what is wanted in the way of a response, but also giving a more general explanation of that factor and how it relates to forecasting in general.

The second form of support given to the user is a supplementary manual that has been prepared to explain further and illustrate with examples the major principles involved in forecasting in general and in the use of specific techniques. The page references in this supplementary manual are given by the system.

The second major segment of this interactive forecasting system is called RUNNER. It is shown in the bottom half of Figure 1. This segment is composed of a number of subroutines, each one being the computerized version of a specific forecasting technique. The program RUNNER allows the user to select from the set of subroutines that forecasting method he wants to have applied to his data. (Remember that when the user reaches this point, SIBYL will have already identified the two or three techniques that are particularly well suited for this situation.) Most of the questions and prompts involved in this segment of the program deal with setting the parameters for a specific forecasting method. For example, if the forecasting method is single adaptive filtering, it is required that the user define three parameters — the weights, the adaptation constant, and the number of training iterations.

Once the forecasting method has been trained, it can then be used to prepare a forecast and to compare that with actual values in order to determine the technique's accuracy. This is done in terms of the error and the percent error. Finally, RUNNER can be used to compare several different techniques for the same set of historical data.

After running the SIBYL-RUNNER combination, the user will have completed:

1. A general analysis of his data.
2. A screening of available forecasting techniques.
3. A detailed examination of a few of the most appropriate techniques.
4. Final selection of a technique for his situation.

EXPERIENCE IN USING THE INTERACTIVE FORECASTING SYSTEM

The use of this time-sharing-based forecasting system has been particularly well received in teaching situations. Student reactions have been that they felt much more motivated when using this approach as compared to more traditional textbook approaches, and that they have felt they gained a much better understanding of the practical application of the alternative techniques (in addition to their theoretical basis). The authors have used this program in conjunction with a text on forecasting in a regular classroom course.

One of the attractive features of this system has been that it can be used very efficiently by someone familiar with it and with forecasting in general, since it allows suppression of much of the descriptive printout. Thus, the students have found it to be useful not only in their initial learning, but also once they have understood a number of techniques, it has facilitated their application of them to specific situations.

In general, the experience of teaching through the use of this system has indicated that it overcomes some of the problems that were identified at the outset of this paper. These include avoiding the expenditure of a disproportionate amount of class time on technical details, allowing the students rapidly to gain experience in a number of situations in order to infer the important characteristics of each technique, and keeping the amount of time required to reach a given level of competence at a reasonable level.

Although the SIBYL-RUNNER system has not been as thoroughly tested in actual business situations as it has in teaching situations, it has proved to be very successful in the forecasting situations in which it has been applied. Some of the advantages of this system for management forecasting are that it does allow the manager to obtain rapidly, and at a low cost, at least a rough forecast for his situation. In addition, it overcomes many of the existing problems managers face by guiding their examination of a full range of alternatives for any new situation, helping them to consider those factors that are important in selecting the most appropriate technique for a given situation, and providing them with a wide range of techniques which can actually be applied.

Having such an interactive forecasting system available within a company can greatly encourage

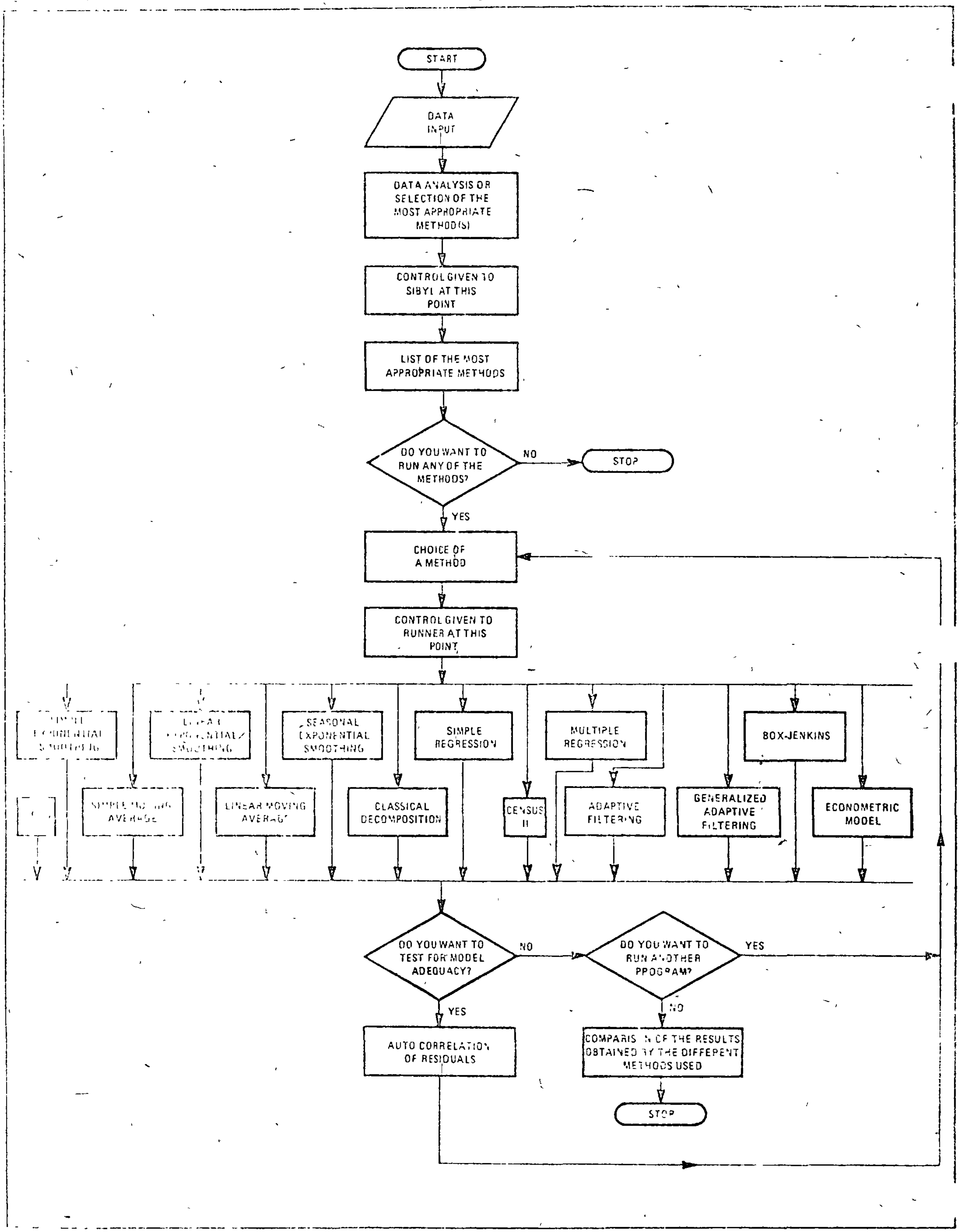


Figure 1. Flow-Chart of the Interactive Forecasting System

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
TIME HORIZON OF FORECASTING	IMMEDIATE	X		X							X	X									X	X						
	SHORT (UP TO THREE MONTHS)	X	X	X	X	X	X	X			X	X			X				X									
	MEDIUM (UP TO TWO YEARS)	X									X	X	X	X	X	X		X										X
	LONG (TWO YEARS OR MORE)	X												X	X	X	X			X			X	X	X	X	X	X
PATTERN (TYPE) OF DATA	HORIZONTAL (CORRELATED: AUTO)	X		X	X			X	X	X	X	X	X						X	X								
	HORIZONTAL (CORRELATED: NON)		X																		X	X						
	TREND (CORRELATED: AUTO)	X				X	X	X	X	X	X	X	X						X	X								
	TREND (CORRELATED: NON)													X	X	X												
	SEASONAL (CORRELATED: AUTO)	X						X	X	X	X	X	X		X	X												
	SEASONAL (CORRELATED: NON)																				X	X						
	CYCLICAL (CORRELATED: AUTO)	X						X	X	X	X	X	X		X	X		X										
	CYCLICAL (CORRELATED: NON)																				X	X						
	MINIMUM DATA REQ'S *	5	30	5 10	2	10 20	3	60*	72*	24	60*	72*	72*	30	30*	FEW 100's	15 30			FEW 1000's								
TYPE OF MODEL	TIME SERIES	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X				X		X	X	X	X	X	X
	CAUSAL	X								X		X		X	X	X				X		X	X		X	X	X	X
	STATISTICAL		X									X		X	X	X		X			X							
	NON STATISTICAL	X		X	X	X	X	X			X		X				X		X	X		X	X	X	X	X	X	X
	MIXED								X	X																		
COSTS (SCALE FROM ZERO TO ONE: 0 SMALLEST 1 HIGHEST)	DEVELOPMENT	6	1	1	05	15	1	4	6	5	4	8	5	[illegible]	6	8	5		0	1 0	5	6	5	5	5	9	6	[illegible]
	STORAGE REQ'S: PROGRAM	NA	09	09	08	13	12	19	6	5	28	9	35	17	34	48	34			NA	5	7						
	STORAGE REQ'S: DATA	01	1	075	006	05	009	33	33	06	33	33	3[illegible]	2	33	1 0	08			NA	01	1 0						
	RUNNING	NA	03	006	005	007	00[illegible]	[illegible]	65	2	3	08	70	1	21	7	2			NA	01	NA						
ACCURACY (SCALE FROM ZERO TO ONE: 0 SMALLEST 1 HIGHEST)	PREDICTING PATTERN	1	15	2	35	2	25	5	.7	.7	7	9	85	5	8	1 0	5			6			5	5	5	5	5	5
	PREDICTING TURNING POINTS	3	0	0	0	0	0	3	9	7	6	8	75	0	4	6	0	.8	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
APPLICABILITY OF COMPLEXITY (0 SMALLEST 1 HIGHEST)	TIME REQUIRED TO OBTAIN FORECAST	5	2	05	05	01	01	3	5	5	4	7	5	25	6	9	5		0	1.0	[illegible]	.5	7	.6	7	1 0	1 0	1 0
	EASINESS TO UNDERSTAND AND INTERPRET THE RESULTS	1 0	1 0	1 0	9	9	9	7	7	7	7	4	6	3	6	3	8	1 0	1 0	3	8	6	8	6	9	7	8	6

*A SEASONAL PATTERN (WHEN APPLICABLE) OF 12 MONTHS DURATION IS ASSUMED IN DERIVING THE MINIMUM DATA REQUIREMENTS

Figure 2: Factors to be Considered in Selection of a Forecasting Method.

the use of formalized forecasting procedures. This is supported not only because of the range of techniques covered but also because they can be applied directly by the manager with support from the use of the HELP command and the accompanying manual. It is practical for him to use the system at any time without the need of extensive re-education when it has been a few weeks since its last usage. It is the authors' conclusion that this system meets many of the existing needs in the area of forecasting and through further development and application it should find wide acceptance both in management education and in business practice.

Of course there are limitations to this system. First is that both managers and students must be introduced to forecasting and the range of available techniques before they can begin to use the SIBYL-RUNNER system effectively. Secondly, the questions and prompts can become routine over time and thus fail to elicit the user's judgment as is desired. Third, the simplicity of the system and its ease of usage may lead to its application where a more sophisticated analysis under the direction of a forecasting specialist is warranted. This package is designed for expanding the application of systematic forecasting methods, not replacing existing systems that already meet the requirements of very specific situations.

Keeping these limitations in mind, the authors have found SIBYL-RUNNER to be a very useful tool in facilitating the appropriate use of existing forecasting techniques in management situations. Additional experience and improvements based on that experience can only help to enhance the system's effectiveness.

At present a single computer program written in the BASIC programming language incorporates the features of the SIBYL-RUNNER system illustrated in Figure 1. In addition, there exists a BASIC program representing each of the forecasting techniques included in this system. For example, there is one program for exponential smoothing, another for simple regression, and so on. These programs that represent each forecasting method are called and controlled directly by the SIBYL-RUNNER program, however they can be run individually too.

The SIBYL-RUNNER system was designed for use on a standard Hewlett Packard 2000F computer with a core capacity of 20,000 8-bit bytes. Because of the general nature of the BASIC language used on this machine, no significant modifications would be needed to use this system on another time-shared computer equipped with the capabilities to run BASIC programs.

Efforts are currently underway to program the SIBYL-RUNNER system in FORTRAN so that it can be used on an even wider range of equipment. This work should be completed by the middle of 1975.

For those interested, a copy of the program can be obtained in either the form of a printed listing or a punched paper tape (for the nominal cost of duplicating and mailing the materials) by writing to the senior author.

REFERENCES

1. Box, G. E. P., and Jenkins, G. M.: *Time Series Analysis*, San Francisco: Holden-Day, 1970.
2. Brown, Robert G.: *Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1963.
3. Cantor, J.: *Pragmatic Forecasting*, American Management Association, New York, 1971.
4. Ewing, D. W.: *The Practice of Planning*, New York: Harper and Row, 1968.
5. Johnston, J.: *Econometric Methods*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1963.
6. Makridakis, S., and Wheelwright, S.: "Integrating Forecasting and Planning," *Insead Research Paper* No. 73, June 1972.
7. McLaughlin, R. L., and Boyle, J. J.: *Short Term Forecasting*, American Marketing Association Booklet, New York, 1968.
8. Shiskin, J.: "Electronic Computers and Business Indicators," *National Bureau of Economic Research*, Washington, D.C., Occasional Paper 57, 1968.
9. Steiner, G. A.: *Top Management Planning*, Macmillan, New York, 1969.
10. Stockfisch, J. A. (ed.): *Planning and Forecasting in the Defense Industry*, Belmont, California: Wadsworth Publishing, 1962.
11. Wheelwright, S., and Makridakis, S.: *Forecasting Methods for Management*, New York: J. Wiley and Sons, 1973.

John C. Chambers, Satinder K. Mullick y Donald D. Smith

Cómo elegir la técnica de pronóstico correcta

Lo que todo administrador debe saber de los diversos tipos de pronósticos y las ocasiones en que deben usarse

PROLOGO

El ejecutivo de la actualidad toma en consideración algún tipo de pronóstico para casi todas sus decisiones. Los pronósticos sólidos de demandas y tendencias ya no son artículos de lujo, sino necesidades para que el administrador pueda luchar con la temporalidad, los cambios repentinos de niveles de la demanda, las maniobras de disminución de precios de sus competidores, las huelgas, y las grandes oscilaciones de la economía. Los pronósticos lo ayudarán a luchar con estos problemas, pero lo ayudarán aún más si conoce los principios generales de los pronósticos, lo que estos son capaces e incapaces de hacer para él en la actualidad, y cuáles son las técnicas más adaptables para sus necesidades del momento. Los autores de este artículo tratan de explicar al administrador el potencial que los pronósticos poseen para él, enfocando especial atención en los pronósticos de venta de los productos de la Corning Glass Works, según estos han ido madurando a través de sus ciclos de vida, y también acompañan el análisis de toda la gama de las técnicas de pronóstico.

El Sr. Chambers es Director de Investigación de Operaciones de la Corning Glass Works. Anteriormente trabajó para la Ford Motor Company, con North American Aviation, y con Ernst and Ernst. Sus intereses actuales se centran en la planeación estratégica de nuevos productos y en el desarrollo de métodos mejorados para pronósticos. El Sr. Mullick es Gerente de Proyectos del Departamento de Investigación de Operaciones de la CGW, y anteriormente había estado afiliado a la Larsen and Toubro Ltd., en la India, a Bohner and Koehle Maschinenfabrik en Alemania Occidental, y a la Universidad Johns Hopkins. Su especialidad es la planificación estratégica y táctica para nuevos productos. El Sr. Smith es Director Principal de Proyectos del Departamento de Investigación de Operaciones de la CGW. Su gran interés actual está en el área de los análisis de series de tiempo y en la econometría.

En años recientes se han desarrollado muchas técnicas de pronóstico para poder manejar la variedad y complejidad cada vez mayor de los pronósticos administrativos. Cada una de ellas tiene su aplicación especial, y hay que tener cuidado de seleccionar la técnica correcta para cada aplicación. Tanto el administrador como el pronosticador tienen papeles que jugar en la selección de las técnicas; y mientras mejor comprendan la gama de posibilidades de pronóstico de las que disponen, más probable será que los esfuerzos de pronóstico de la empresa produzcan frutos.

La selección del método dependerá de muchos factores: el contexto del pronóstico, la relevancia y disponibilidad de datos históricos, el grado de precisión que se desee, el período de tiempo respecto al cual se pronosticará, el costo/beneficio (o *valor*) que tiene el pronóstico para la empresa, y el tiempo del que se dispone para hacer el análisis.

Será necesario ponderar constantemente estos factores, a diversos niveles. Por ejemplo, el pronosticador generalmente deberá seleccionar la técnica que logre el óptimo aprovechamiento de los datos disponibles. Si le resulta fácil aplicar determinada técnica cuya precisión es aceptable, no debe tratar de "enchapar de oro" el trabajo, usando alguna técnica más avanzada, que ofrezca precisión potencialmente mayor, pero que requiera información inexistente o costosa de obtener. Es relativamente fácil efectuar los intercambios de este tipo, pero veremos que hay otros que exigirán mucha más consideración.

Además, cuando una compañía desea pronosticar respecto a determinado producto, tendrá que considerar *la etapa del ciclo de vida del producto respecto al cual va a pronosticar.** Tanto la disponibilidad de datos como la posibilidad de establecer relaciones entre los factores, dependerán directamente de la madurez del producto, por lo que la etapa del ciclo de vida constituirá una determinante capital del método de pronóstico que deberá usarse.

Nuestro propósito aquí es presentar un panorama general de este campo, comentando las diversas maneras en que una compañía puede enfocar un problema

* Nota del editor. Para mayor información sobre el tema, véase el artículo No. 81 de la Biblioteca Harvard de Administración de Empresas "Aproveche el Ciclo de Vida del Producto", por Theodore Levitt.

de pronóstico describiendo los metodos disponibles, y explicando como se podrá ajustar el metodo al problema. Daremos ejemplos del uso de diversas técnicas, obtenidos de nuestra experiencia con el uso de las mismas en la Corning y concluiremos haciendo nuestro propio pronóstico respecto al futuro de los pronosticos.

Aunque consideramos que los pronósticos siguen siendo un arte, tambien creemos que alguno de los principios que hemos aprendido a través de nuestras propias experiencias ayudarán mucho a los demás.

Administrador, pronosticador y selección de métodos

El administrador suele suponer que cuando le pide a un pronosticador que prepare determinada proyección, la solicitud misma proporciona toda la informacion que el pronosticador necesita para ponerse a trabajar y terminar su trabajo. Pero eso casi nunca es cierto.

El pronóstico exitoso comienza por una colaboración entre el administrador y el pronosticador, mediante la cual obtienen las respuestas para las siguientes preguntas.

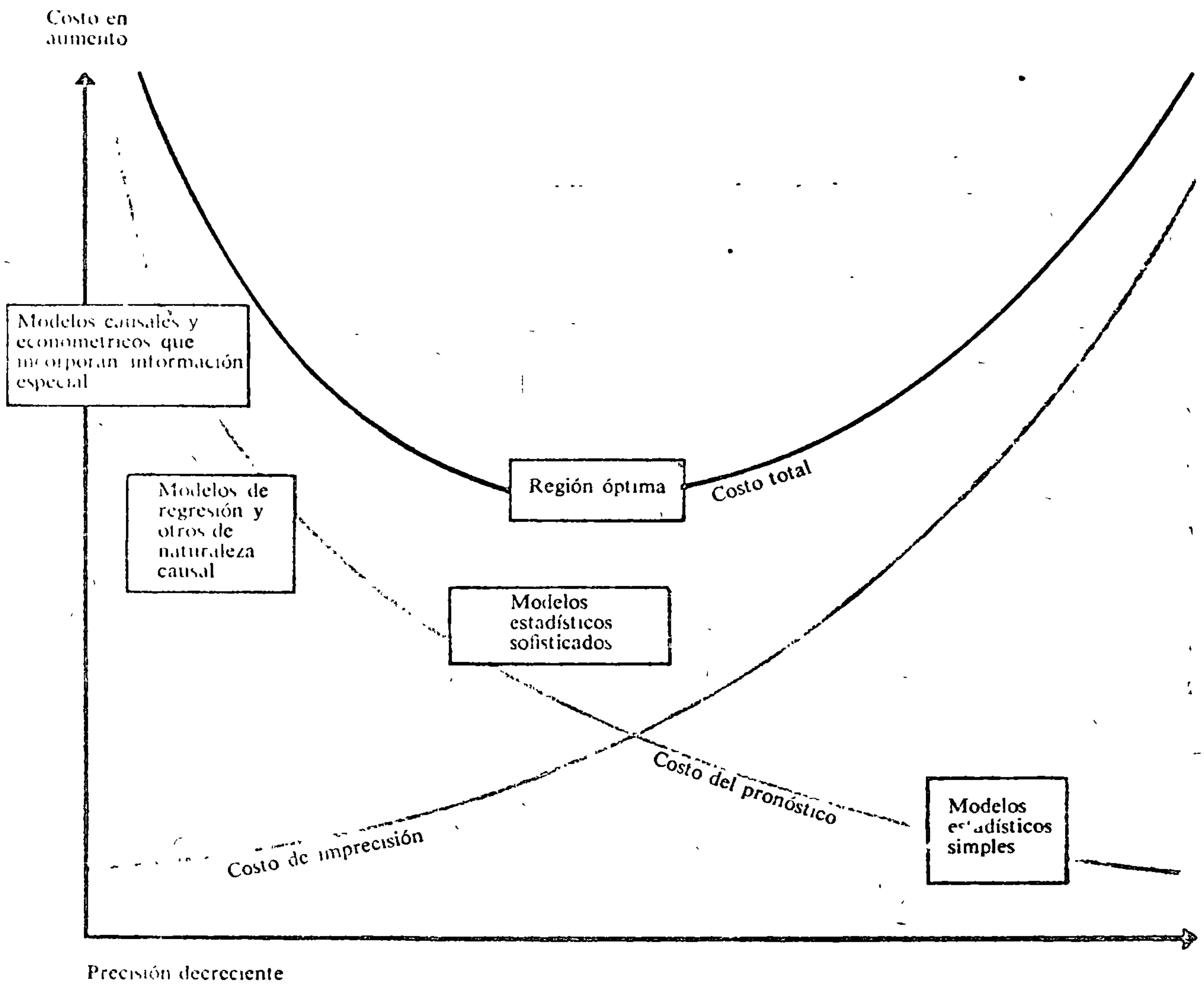
1 ¿Cuál es la finalidad del pronóstico; cómo se va a usar?

Esto determina la precisión y potencia que se requieren de las técnicas, lo que a su vez gobierna la selección. Decidir si entrar en un negocio o no, quizás no exija más que un estimado bastante burdo del tamaño del mercado, mientras que el pronóstico que se prepare para fines presupuestales tendrá que ser muy preciso; consecuentemente, las técnicas idóneas para cada fin serán diferentes entre sí.

Y si el pronóstico va a establecer una norma contra la cual se medirá el rendimiento, el método de pronóstico no debe tomar en cuenta los eventos especiales tales como promociones y otros medios mercadotécnicos, puesto que éstos se llevan a cabo precisamente para cambiar los patrones y las normas históricas, y consecuentemente formarán parte del rendimiento que se va a valorar.

Cuando los pronósticos no hacen más que bosquejar la forma que tendrá el futuro si la empresa no hace cambio significativo alguno de sus tácticas y estrategias, no suelen ser suficientemente buenos para fines de

CUADRO 1 COMPARACION DEL COSTO DEL PRONOSTICO EN EL COSTO DE IMPRECISION DE UN PRONOSTICO A MEDIANO PLAZO, SUPONIENDO DISPONIBILIDAD DE DATOS



planificación Por otro lado, si lo que la administración desea es un pronóstico del efecto que puede tener sobre las ventas cierta estrategia de mercadotecnia que se está comentando, entonces la técnica tendrá que ser lo suficientemente sofisticada como para tomar cuenta específica de las acciones y los eventos especiales que implica dicha estrategia

Los costos de las diversas técnicas varían, y también varían su amplitud y precisión El administrador deberá fijar el nivel de imprecisión que podrá tolerar —es decir, deberá decidir la forma en que variará su propia decisión según la gama de precisión del pronóstico. Esto permitirá que al seleccionar la técnica, el pronosticador haga intercambios del costo vs el valor de la precisión

Por ejemplo, es probable que cuando la precisión del control de producción e inventarios aumente, las existencias "de seguridad" disminuirán Para tal aplicación, el administrador y el pronosticador tendrán que sopesar el costo de usar una técnica más sofisticada y costosa en relación con el ahorro potencial de sus costos de inventario.

El Cuadro I muestra la forma en que el costo y la precisión aumentan con la sofisticación, y contiene la ilustración de estos factores contra el costo correspondiente de los errores de pronóstico, suponiendo ciertos factores generales La técnica más sofisticada que podrá justificarse económicamente será la que caiga en la región donde las sumas de estos dos costos sea mínima

Una vez que el administrador haya definido el propósito del pronóstico, entonces quien pronostica podrá aconsejarlo en cuanto a la frecuencia con que se podrá producir útilmente Desde el punto de vista estratégico, deberán comentar entre sí respecto a si la decisión que van a tomar con base en el pronóstico será susceptible de cambios posteriores, si se encuentran con que el pronóstico resultó ser impreciso Si *puede* cambiarse, entonces se debe examinar la utilidad que podrían lograr si instalaran algún sistema para seguirle la pista a la precisión del pronóstico, y decidir el tipo del sistema seguidor de pista que les resultará idóneo para tal fin

2 *¿Cuáles son las dinámicas y los componentes del sistema para el cual se hará el pronóstico?*

Esto aclara las relaciones entre las variables interactuantes Generalmente, el administrador y el pronosticador deben revisar algún diagrama de flujo que muestre las posiciones relativas de los diversos elementos de los sistemas de distribución, venta, producción o el que se esté estudiando

El Cuadro II muestra estos elementos en el sistema a través del cual el componente principal de la CGW para los televisores a color —el cinescopio— fluye hasta llegar al consumidor Nótese los puntos donde se requieren o mantienen inventarios dentro de este sistema de fabricación y distribución —éstos son los *elementos de líneas de abasto*, que ejercen efectos muy importantes a través de todo el sistema de distribución por lo que son de interés crítico para el pronosticador

Los elementos de color azul ejercen cierto efecto sobre la técnica de pronóstico, y la clave de colores indica las naturalezas que respectivamente poseen los datos de la CGW en cada punto, que también son determinantes principales para la selección de técnicas, puesto que diversas técnicas exigen diversas clases de insumos. Cuando no se dispone de datos, o éstos son costosos de obtener, la gama de selecciones de pronósticos queda muy limitada.

La gráfica de flujo también debe mostrar cuáles son las partes del sistema que están bajo el control de la empresa que está haciendo el pronóstico. En el *Cuadro II*, esta parte no es más que el volumen de paneles y embudos de vidrio que Corning suministra a los fabricantes de cinescopios.

En la parte del sistema que la compañía controla absolutamente, la administración tiende a sintonizarse según las diversas relaciones de causa y efecto que pueden existir, por lo que frecuentemente puede utilizar técnicas de pronóstico que tomen cuenta explícita de los factores causales

El diagrama de flujo posee valor especial para el pronosticador cuando se requieran métodos de pronóstico causales, porque le permitirá hacer conjeturas respecto a las posibilidades de variantes de niveles de ventas que causarán los inventarios, y otros factores por el estilo, y también podrá determinar los factores que debe considerar la técnica para poder proporcionar al ejecutivo un pronóstico aceptablemente preciso.

Una vez que estos factores y sus relaciones hayan sido aclarados, el pronosticador podrá construir un modelo causal del sistema, que capture tanto los hechos como la lógica de la situación —lo cual es, al fin y al cabo, la base de todo pronóstico sofisticado.

3. *¿Cuánta importancia tiene el pasado para la estimación del futuro?*

Los cambios significativos del sistema —nuevos productos, nuevas estategias competitivas, y factores similares— hacen que la similitud entre el pasado y el futuro vaya siendo menor. A corto plazo, no es probable que los cambios recientes causen alteración en los patrones generales; pero a largo plazo sí es probable que aumenten sus efectos. El ejecutivo debe comentar éstos plenamente con el pronosticador.

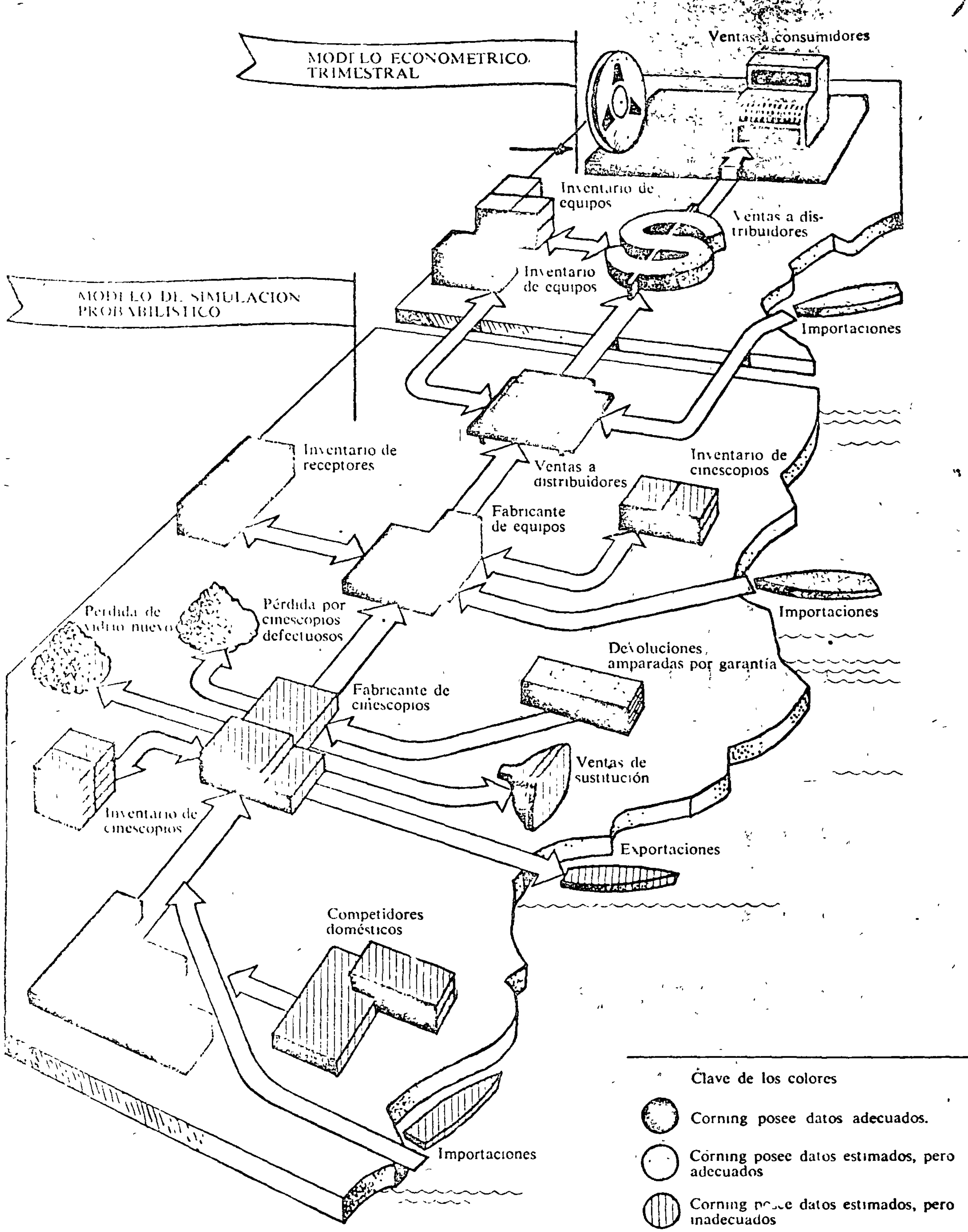
Tres tipos generales

Cuando el administrador y el pronosticador hayan formulado su problema, el pronosticador estará en situación de seleccionar su método.

Hay tres tipos básicos: *las técnicas cualitativas, el análisis y proyección de series de tiempo, y los modelos causales* El primero utiliza datos cualitativos (por ejemplo, la opinión de los expertos) e informes de eventos especiales del tipo que ya mencionamos, y

CUADRO II DIAGRAMA DEL FLUJO DEL SISTEMA DE DISTRIBUCION DE RECEPTORES DE TELEVISION

12



puede considerar el pasado, o hacer caso omiso de él.

El segundo, al contrario, se enfoca totalmente en patrones y cambios de patrones, y así se confía totalmente en los datos históricos.

El tercero usa información muy refinada y específica respecto a las relaciones entre elementos del sistema, y es lo suficientemente poderoso para tomar cuenta formal de los eventos especiales. Como en las técnicas de análisis y proyección de series de tiempo, el pasado surte efecto poderoso en los modelos causales.

Estas diferencias implican (y muy correctamente) que el mismo tipo de técnica de pronóstico no será apropiado para pronosticar las ventas (por ejemplo) que se lograrán en todas las etapas del ciclo de vida de un producto, por ejemplo, la técnica que se confíe en los datos históricos, no resultará útil para pronosticar el futuro de un producto totalmente nuevo que no posea historia.

La parte más importante del resto de este artículo tratará del problema de adaptar la técnica a las etapas del ciclo de vida. Esperamos facilitar al ejecutivo cierta penetración al potencial que poseen los pronósticos, mostrándole la forma en que debe enfocarse este problema. Pero antes de comentar el ciclo de vida, tenemos que bosquejar un poco más detalladamente las funciones generales de los tres tipos básicos de técnicas.

Técnicas cualitativas

Éstas se usan principalmente cuando se carece de datos, por ejemplo, cuando se comienza a introducir un producto al mercado. Hace uso del criterio humano y de los esquemas de categorización para trasformar la información cualitativa en estimaciones cuantitativas.

El objetivo aquí es de juntar, lógica y sistemáticamente y sin sesgo, toda la información y los criterios que tengan relación con los factores que se estén estimando. Éstas técnicas se usan frecuentemente en las áreas de tecnología nueva, donde quizás el desarrollo de una idea de producto requiera varias "invenciones" y sería difícil estimar las demandas que consecuentemente se harán del Departamento de Investigación y Desarrollo, y donde los índices de aceptación del mercado y de penetración sean muy inciertos.

El cuadro plegadizo contiene varios ejemplos de este tipo (véase la primera sección), incluyendo la investigación de mercados y la técnica Delphi, con la cual ya estamos familiarizados. En este cuadro hemos tratado de proporcionar un cuerpo de informes básicos sobre los tipos principales de técnicas de pronóstico. Algunas de las técnicas referidas no son en realidad un solo método o modelo, sino una familia. Por lo tanto, es posible que nuestro cuadro no describa con precisión todas las variantes de determinada técnica, por lo que su texto debe interpretarse como descriptivo del concepto básico de cada una de ellas.

También es bueno que digamos algo sobre las estimaciones que contiene el cuadro. Los estimados de costos son aproximados, como lo son los de los tiempos de computación, las categorías de precisión, y las categorías de identificación del punto crítico. Los costos de algunos procedimientos dependen de si se van a utilizar en forma rutinaria, o se van a crear para un solo pronóstico, y también dependen de si tendrán que determinarse sus ponderaciones o temporalidades cada vez que se haga un pronóstico; eso hará que los costos aumenten significativamente. Pero de todas maneras, las cifras que presentamos servirán de guía general.

Si el lector consulta frecuentemente al cuadro plegadizo, podrá comprender mejor el resto de este artículo.

Análisis de series de tiempo

Estas son técnicas estadísticas que se utilizan cuando se dispone de datos de varios años respecto a un producto o línea de producto, y tanto las relaciones como las tendencias son claras y relativamente estables.

Uno de los principios básicos del pronóstico estadístico —de todos los pronósticos, en realidad, cuando se dispone de datos históricos— es que el pronosticador debe aprovechar los datos del rendimiento del pasado para obtener una "lectura de velocímetro" del índice vigente (por ejemplo, el de ventas) y la rapidez con que dicho índice está aumentando o disminuyendo. El índice vigente, y los cambios de dicho índice —"aceleración" y "desaceleración"— constituyen la base del pronóstico. Una vez que se conozcan, se podrán utilizar varias técnicas matemáticas para desarrollar proyecciones basadas en ellas.

Pero este asunto no es tan sencillo como parece. Suele ser difícil construir proyecciones basadas en datos poco elaborados porque los índices y las tendencias no son inmediatamente evidentes; por ejemplo, hay veces que están mezclados con variaciones temporales, y quizás distorsionados por factores tales como los efectos que ha logrado una gran campaña de promoción de ventas. Hay que activar los datos elaborados antes de poder usarlos, y como más frecuente se hace esta revisión es haciendo análisis de series de tiempo.

Una *serie de tiempo* es un grupo de apuntes de datos, puestos en orden cronológico, por ejemplo, el volumen de ventas de cierto producto que determinada división ha logrado cada mes durante varios años. El *análisis* de series de tiempo ayuda a identificar y explicar:

- Cualquier regularidad, o cualquier variación sistemática, de la serie de datos que se deba a temporalidad, "temporales" o periódicas.
- Los patrones cíclicos que se repiten cada dos o tres años o más.
- La tendencia de los datos.
- Los índices de crecimiento de dichas tendencias.

(Lamentablemente, la mayoría de los métodos existentes no sirven para identificar más que las temporales, los efectos combinados de tendencias y ciclos, y los

[1] Véase Harper Q. North y Donald L. Pyke. *Probes* of the Technological Future, HBR Mayo-Junio 1969, pág. 68.

componentes irregulares o de azar. Esto equivale a decir que no separamos las *tendencias* de los *ciclos*. Regresaremos a este punto cuando comentamos los análisis de series de tiempo hechas en las etapas finales de la madurez del producto.)

Una vez que se haya terminado el análisis, se puede comenzar el trabajo de pronosticar las ventas futuras (o lo que sea).

Debemos observar que, si bien hemos separado aquí el análisis de la proyección, para poder explicar cada uno de ellos individualmente, la mayoría de las técnicas de pronóstico estadístico de la actualidad combinan ambas funciones en una sola operación.

El futuro será como el pasado. De tal descripción resultará evidente que todas las técnicas estadísticas se basan en la suposición de que los patrones existentes subsistirán en el futuro. Esta suposición tiene más probabilidades de resultar cierta a corto plazo que a largo plazo, motivo por el cual estas técnicas nos proporcionan pronósticos razonablemente precisos para el futuro inmediato, pero funcionan muy mal cuando se trata de penetrar más hacia el futuro (a menos que los patrones de datos sean extraordinariamente estables).

Por el mismo motivo, normalmente estas técnicas no son capaces de pronosticar *cuándo* el índice de crecimiento de una tendencia cambia significativamente; por ejemplo, cuando un periodo de crecimiento lento de ventas repentinamente cambia a periodo de decadencia rápida.

A estos puntos se les llama *puntos críticos*, y naturalmente que tienen mayor importancia para el administrador. Y como veremos, el pronosticador debe hacer uso de instrumentos totalmente diferentes, procedentes de técnicas estadísticas puras, para poder pronosticar cuándo ocurrirán.

Modelos causales

Cuando se dispongan de datos históricos, y se haya realizado suficiente análisis para determinar explícitamente las relaciones existentes entre el factor que se va a pronosticar y los demás factores (tales como negocios relacionados, fuerzas económicas, y factores socioeconómicos), el pronosticador frecuentemente decide construir un *modelo causal.*

El modelo causal es el instrumento de pronóstico más sofisticado de todos. Expresa matemáticamente las relaciones causales relevantes, y quizás incluya consideraciones del sistema de abastecimiento (por ejemplo, inventarios) e informes de encuestas de mercado. Puede también incorporar directamente los resultados de algún análisis de series de tiempo.

El modelo causal toma en cuenta todo lo que se sabe de la dinámica del sistema de flujo, y utiliza además los pronósticos de eventos relacionados tales como acciones competitivas, huelgas y promociones. Si se dispone de datos suficientes, el modelo generalmente incluye factores para cada ubicación en el diagrama de flujo (según lo muestra el *Cuadro II*) y conectar éstas mediante ecuaciones que sirven para describir el flujo general del producto.

Si se carece de datos de ciertos tipos, al inicio es necesario hacer suposiciones sobre alguna de las relaciones, y posteriormente buscar pistas que indiquen lo que está ocurriendo, para con ellos determinar si las suposiciones son correctas. Típicamente, el modelo causal se revisa continuamente a medida que va dispo-

CUADRO III. TIPO DE DECISIONES QUE SE TOMAN A TRAVES DE TODO EL CICLO DE VIDA DE UN PRODUCTO, CON TECNICAS DE PRONOSTICOS RELACIONADOS CON ESTAS

Etapa del ciclo de vida	Desarrollo del producto	Prueba de mercado y primera introducción	Crecimiento rapido	Ritmo sostenido
Decisiones típicas	Magnitud de la fuerza del desarrollo Diseño del producto Estrategias comerciales	Tamaño óptimo de las instalaciones Estrategias de mercadotecnia, incluyendo distribución y precios	Expansión de instalaciones Estrategias de mercadotecnia Planeación de producción Ventas	Promociones, ventas especiales Precios Planeación de la producción Inventarios
Técnicas de pronóstico	Metodo de Delphi Analisis histórico de productos comparables Analisis de patrones Análisis de insumo-producción Consenso de panel	Encuestas de consumidores Sistemas de pistas y avisos Pruebas de mercado Diseños experimentales	Técnicas estadísticas para identificar puntos críticos Sistema de pistas y avisos Encuestas de mercado Encuestas de intención de compras	Análisis y proyección de series de tiempo Modelos causales y econométricos Encuestas de mercado para seguida de pistas y avisos Análisis del ciclo de vida

niendo cada vez más de conocimientos respecto al sistema.

Examine otra vez en el cuadro plegadizo el bosquejo de los tipos más comunes de técnicas causales. Según muestra el cuadro, indudablemente que los modelos causales son los mejores para pronosticar los puntos críticos y para preparar los pronósticos a largo plazo.

Métodos, productos y su ciclo de vida

En cada etapa de la vida de un producto, desde su concepto hasta que sus ventas logran un ritmo sostenido, las decisiones características que la administración tendrá que tomar serán muy diferentes entre sí, y requerirán diferentes tipos de información que les sirva de base. Las técnicas de pronóstico que proporcionarán estos grupos de informes mostrarán diferencias análogas. *El Cuadro III* resume las etapas de la vida de un producto, las decisiones típicas que hay que tomar en cada una de ellas, y las principales técnicas de pronóstico que será correcto utilizar en cada etapa. Y también es cierto que diferentes productos requerirán diferentes tipos de pronósticos. Por ejemplo, los principales componentes de vidrio para los cinescopios de televisión (de los cuales la Corning es suministradora principal) y los artículos de cocina CORNING WARE (una línea de productos para consumidores que es propiedad de Corning) son dos productos de la CGW en cuyos manejos ha habido grandes diferencias. Seguiremos aquí los métodos de pronóstico que se utilizaron en cada una de las cuatro etapas diferentes de madurez de estos productos, para que nos ayuden a comprender más directamente y mejor la forma en que se seleccionan y aplican algunas de las técnicas principales de la actualidad.

Tomemos nota de las diferencias entre las situaciones respectivas de los dos tipos de productos.

- Para un producto para consumidores, como lo son los artículos de cocina, el control que ejerce el fabricante sobre la red de distribución llega cuando menos al nivel de los distribuidores, y eso le permite afectar o controlar muy directamente las ventas a consumidores, y también puede controlar directamente algunos elementos de la red de distribución.

  Por lo tanto, algunos de los cambios de índices de embarque y de lucratividad general se deben a actos del fabricante mismo, quien también puede decidir si hacer promociones y ventas especiales, y fijar precios. Por lo tanto, la técnica que seleccione el pronosticador para proyectar las ventas deberá permitir la incorporación de tales informes especiales. Se puede comenzar con técnicas sencillas, y elaborarlas hasta formar técnicas sofisticadas que incluyan tales posibilidades, pero la meta final estará definida desde el principio.

- Cuando la compañía del administrador suministre componentes a algún OEM (Original Equipment Manufacturer - Fabricante Original de Equipo), como lo hace la Corning a los fabricantes de cinescopios, la compañía no tiene esa influencia o control directo de los elementos de la red de distribución, ni tampoco de las ventas finales a consumidores. A la compañía le será imposible obtener buena información respecto a lo que ocurre en puntos más adelantados del sistema de flujo (como ocurre en el segmento superior del *Cuadro II*), y, consecuentemente, será necesario que el pronosticador utilice un género de pronóstico totalmente diferente del que utilizaría para productos de consumidores.

Tomando estos dos ejemplos como parámetros, nuestros comentarios incluirán casi toda la gama de técnicas de pronósticos. Sin embargo, cada vez que sea necesario mencionaremos otros productos y otros métodos de pronósticos.

1. Desarrollo de productos

En las primeras etapas del desarrollo de los productos, lo que busca el gerente son respuestas a preguntas como las siguientes:

- ¿Cuáles son las oportunidades de crecimiento que constituyen las alternativas posibles de seguir con el producto X?
- ¿Cómo les ha ido a los productos ya establecidos que son similares al X?
- ¿Deberemos entrar en este negocio nosotros? Y si entramos, ¿en qué segmento?
- ¿Cómo deberemos distribuir los esfuerzos y los fondos de investigación de desarrollo?
- ¿Cuánto éxito obtendrán los diversos conceptos del producto?
- ¿Cómo encajará el producto X en los mercados dentro de cinco o diez años?

Para que los pronósticos puedan ayudar a contestar estas preguntas a largo plazo, ellos mismos tendrán que poseer largos horizontes.

Un inconveniente que frecuentemente se opone a los pronósticos a largo plazo es que resulta casi imposible pronosticar precisamente lo que ocurrirá en un futuro a varios años de distancia. Estamos de acuerdo en que la incertidumbre aumenta cuando se pronostica respecto a períodos a más de dos años en el futuro, pero a pesar de ello, un pronóstico con cierta medida de precisión, cuando menos permitirá que el administrador conozca los riesgos que implican determinada estrategia, y al poseer este conocimiento, podrá seleccionar la estrategia idónea de entre las disponibles.

Desde luego que la investigación sistemática de mercados es apoyo principal en esta área. Por ejemplo, el análisis de las normas de prioridad es capaz de describir la preferencia del consumidor y la probabilidad de que compre un producto, y así será muy valioso para pronosticar (y para mantener al día) los niveles y los índices de penetración. Pero también hay otros instrumentos, cuyo uso dependerá del estado del mercado y del concepto del producto.

Para un mercado definido

No podrán existir datos directos de un producto que no sea más que brillo en el ojo de su inventor, pero sí hay varias maneras en que podría obtenerse información sobre la probabilidad de su rendimiento, siempre que el mercado en que vaya a introducirse constituya una entidad conocida.

Primero, se puede comparar el producto propuesto con los productos presentes y proyectados de los competidores, y categorizarlo en escalas cuantitativas respecto a diferentes factores. Llamamos a esto *medición de diferencias entre productos*.[2]

Para que este enfoque tenga éxito, es esencial que los expertos (de la empresa) que proporcionen los datos básicos procedan de diversas disciplinas: mercadotecnia, investigación y desarrollo, producción, legal y otras, y que sus opiniones sean objetivas.

Segundo, y más formalmente, se podrán construir *modelos de mercado segmentados*, segregando en diferentes partes un mercado complejo, para estudiar y considerar individualmente cada uno de ellos. Específicamente, será útil proyectar las curvas de crecimiento, en forma de S, para los niveles de ingreso correspondientes a diferentes regiones geográficas.

Cuando a la CGW le propusieron que produjera cinescopios de televisión a color, la empresa fue capaz de identificar los factores que ejercerían influencia sobre el crecimiento de las ventas. Hecho esto, desagregó la demanda de los consumidores, e hizo ciertas suposiciones respecto a estos factores, y entonces pudo desarrollar una curva de S respecto al índice de penetración del mercado hogareño, que resultó muy útil para la empresa.

Tercero, se puede comparar el producto propuesto con algún antepasado que haya tenido características similares. En 1965, segmentamos el mercado de los televisores a color, por niveles de ingresos y regiones geográficas, y comparamos estos submercados con el patrón histórico del crecimiento del mercado de los televisores a blanco y negro. Justificamos este procedimiento alegando que la televisión a colores era un progreso respecto a la de blanco y negro, análogo (aunque de menor intensidad) al progreso que la televisión blanco y negro constituyó respecto a la radio. Y el análisis que hicimos del crecimiento del mercado de los televisores a blanco y negro también nos permitió que estimáramos la variabilidad que podría esperarse, es decir, el grado a que nuestras proyecciones podrían apartarse de la actualidad en consecuencia de factores económicos y de otra índole.

Los precios de los televisores blanco y negro y los de otros utensilios hogareños en 1949, los ingresos disponibles de los consumidores en 1949, los precios de los televisores a color y otros utensilios en 1965, y los ingresos disponibles de los consumidores en 1965, fueron factores que nos resultó muy ventajoso considerar al desarrollar nuestro pronóstico a largo plazo para la penetración nacional de los televisores a colores. Consecuentemente, los patrones de éxito obtenidos por los televisores a blanco y negro nos facilitaron cierto indicio de las probabilidades de éxito y del potencial de ventas que tendrían los televisores a color.

Pero, en contraste con el anterior procedimiento, nuestros pronósticos de la aceptación que lograrían los utensilios de cocina Corning Ware en manos de los consumidores, los derivamos principalmente de una sola fuente experta: de un administrador que poseía comprensión perfecta de las preferencias de los consumidores y del mercado de los utensilios hogareños. Y es muy posible que estos pronósticos se hayan cumplido. Esto afirma nuestra creencia de que los pronósticos de venta de un producto nuevo que va a competir en un mercado existente serán incompletos e inciertos a menos que se obtengan los mejores criterios de elementos plenamente experimentados.

Para un mercado indefinido

Sin embargo, frecuentemente el mercado para un producto nuevo está muy débilmente definido, o se disponen de pocos datos respecto al producto, o el concepto del producto sigue siendo fluido, y la historia parece irrelevante. En este caso están las turbinas de gas, los automóviles eléctricos y a vapor, las viviendas modulares, los equipos para medir la contaminación, y las terminales de computadoras basadas en compartimiento de tiempo.

Bajo tales circunstancias, muchas organizaciones han aplicado el método llamado "de Delphi", de solicitar y consolidar las opiniones de los expertos, método que nosotros hemos usado, y con éxito, en varios casos de la CGW para estimar la demanda que habrá de tales productos nuevos.

Cuando se combina el análisis de insumos-producción (input-output) con otras técnicas, puede ser muy útil para proyectar el curso futuro que tomarán las grandes tecnologías y los grandes cambios de la economía. Los instrumentos básicos para este análisis son las tablas de insumos-producción de las industrias de los Estados Unidos para 1947, 1958 y 1963, y varias actualizaciones de las tablas de 1963 que fueron preparadas por diversos grupos que deseaban extrapolar las cifras de 1963, o hacer pronósticos para años posteriores.

Puesto que quizás determinada empresa o línea de productos no represente más que un sector muy pequeño de una industria, puede ser muy difícil usar las tablas directamente. No obstante, varias compañías están segmentando las industrias para valorar sus potenciales de venta y para pronosticar cambios de las mezclas de productos —el cese gradual de producción de líneas antiguas acompañado de la introducción de líneas nuevas. Por ejemplo, la Quantum-Science Corporation (MAPTEK) ha desarrollado técnicas que

[2] Véase John C. Chambers, Satinder K. Mullick, y David A. Goodman, "Catalyst Agent for Effective Planning", HBR, Enero-Febrero 1971, pág. 110.

permiten que los anlisis de insumos-producción sean más directamente útiles para los empresarios de la electrónica de la actualidad (Hay otras técnicas, tales como los consensos por juntas y los pronósticos visionarios, cuya efectividad a nosotros nos parece menor, y que no podemos valorar con base en nuestra propia experiencia)

2. Prueba e introducción

Antes de que un producto pueda pasar a su etapa de penetración con la rapidez que siempre se espera, habrá que probar el potencial del mercado e introducir el producto, entonces puede ser aconsejable hacer más pruebas de mercado Al llegar a esta etapa, la administración necesita respuestas a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál deberá ser nuestro plan de mercadotecnia; a cuáles mercados deberemos entrar, y con qué volúmenes de producción?
- ¿Qué capacidad de fábrica exigirán las etapas primarias de producción?
- Segun crezca la demanda, ¿dónde deberemos construir esta capacidad?
- ¿Cómo deberemos distribuir nuestros recursos de investigación y desarrollo a traves del tiempo?

El logro de utilidades importantes dependerá de que se encuentren las respuestas correctas a esas preguntas, por lo que será económicamente factible gastar cantidades relativamente grandes de esfuerzos y dinero en obtener buenos pronósticos, a corto plazo, mediano y largo

A esta etapa, el pronóstico de ventas debe proporcionar tres puntos de información: la fecha en que comenzarán las ventas rápidas, el índice de penetración del mercado durante la etapa de ventas rápidas, y el nivel final de penetración o índice de ventas durante la etapa de ritmo sostenido

Uso de los primeros datos

Es difícil pronosticar la fecha en que un producto pasará a la etapa de crecimiento rápido dos o tres años antes de que ocurra (y este suele ser el horizonte normal) El unico recurso que tendrá la empresa será el uso de métodos estadísticos de determinación de pistas, para comprobar el exito que este obteniendo la introducción del producto, y la ejecución de estudios rutinarios de mercados, para determinar cuando haya ocurrido algún aumento significativo en el índice de ventas

Además, deberá tomarse máximo cuidado al analizar los primeros datos de ventas que se comiencen a acumular cuando el producto haya sido introducido al mercado Por ejemplo, es importante distinguir entre las ventas a *innovadores* (los que probarán cualquier cosa que sea nueva) y las ventas a *imitadores* (quienes no comprarán un producto sino hasta que haya sido aceptado por los innovadores); este último grupo es el que proporciona la estabilidad de demanda Ha ocurrido muchas veces que los nuevos productos han aparentado tener éxito a su inicio, debido a las compras hechas por los innovadores, pero despues han fracasado en la recta final.

Por ejemplo, la televisión a colores fue introducida en 1954, pero no obtuvo la aceptación de la mayoría de los consumidores sino hasta fines de 1964. Claro que la televisión a colores no podía pasar de la etapa de introducción a la de crecimiento rápido hasta que las grandes redes difusoras hubieran aumentado sustancialmente su programación a colores; pero desde el punto de vista de la planificación, no es probable que ocurran las señales críticas especiales (tales como "aumento sustancial de programación a color por las grandes redes difusoras") sino hasta después del hecho; y en general encontraremos que serán las encuestas de consumidores, científicamente diseñadas, las que nos proporcionarán los primeros medios de detectar los puntos críticos que ocurren de la demanda de un producto.

Técnica de productos similares

Aunque seguir la pista por medio de estadísticas constituye un método útil durante las etapas primarias de introducción, pocas veces se dispone de datos suficientes para preparar un pronóstico estadístico. Naturalmente que los estudios e investigaciones del mercado serán útiles, como ya hemos indicado; pero lo seguro es que el pronóstico tratará de identificar algún producto similar y más antiguo cuyo patrón de penetración sea similar al del producto nuevo, ya que los mercados generales pueden exhibir, y exhiben, patrones razonables.

De nuevo consideramos la televisión a colores, y los pronósticos que preparamos en 1965.

Respecto al período 1947-1968, el *Cuadro IV* muestra los gastos totales de los consumidores, los gastos en utensilios domésticos, los gastos en radios y televisores, y los porcentajes relevantes. La columna 4 muestra que los gastos totales en artefactos domesticos fueron relativamente estables durante periodos de varios años; por ello, los artefactos nuevos tendrán que competir con los existentes, especialmente durante las recesiones económicas (nótese las cifras de 1948-1949, 1953-1954, 1957-1958 y 1960-1961).

Hay ciertas fluctuaciones específicas de estas cifras que tienen aquí significado especial Cuando la televisión a blanco y negro fue introducida como producto nuevo en 1948-1951, la razón de gastos en equipos de radio y televisión a gastos totales en bienes de consumo (véase la columna 7) aumentó un 33% aproximadamente (del 1 23% al 1.63%), en comparacion con el modesto aumento del 15% (del 1.63% al 1.88%) que registró la misma razón en la siguiente década. (Ocurrió un aumento similar del 33% en 1962-1966, a medida que la televisión a colores efectuaba su penetración más importante).

CUADRO IV. GASTOS EN UTENSILIOS DOMÉSTICOS VS GASTOS EN TODOS LOS BIENES DE CONSUMO

([illegible] de miles de millones de dólares)

Año	Todos los bienes de consumo* (2)	Utensilios domésticos** (3)	Radio, TV otros** (4)	Totales de columnas 3 y 4 (5)	Columna 5 ÷ Columna 2 (6)	Columna 4 ÷ Columna 2 (7)
[illegible]	110 9	3 18	1.43	4 61	4.16%	1.29%
[illegible]	118 9	3 47	1.48	4 95	4.16	1.23
[illegible]	119 1	3 13	1.70	4 83	4.06	1.43
[illegible]	128 6	3 94	2.46	6 40	4.98	1.91
[illegible]	138 4	3 87	2 26	6 13	4 43	1.63
[illegible]	143 3	3.82	2 37	6 19	4.32	1.65
[illegible]	150 0	3.99	2 61	6 60	4.40	1.74
[illegible]	151 1	4.02	2.74	6.77	4 48	1.81
[illegible]	162 9	4.69	2.79	7.48	4.59	1.71
[illegible]	168 2	4 89	2 87	7.76	4 61	1.71
[illegible]	176 4	4 63	3.00	7.63	4.33	1.70
[illegible]	178 1	4 44	3.07	7 51	4 22	1.72
[illegible]	190 9	4.86	3.42	8 28	4.34	1.79
[illegible]	196 6	4.74	3.62	8 36	4.25	1.84
[illegible]	200 1	4.77	3.76	8.53	4 26	1 88
[illegible]	212 1	5 01	3.94	8 95	4 22	1 86
[illegible]	222 5	5 24	4.54	9 78	4 40	2 04
[illegible]	237 9	5 74	5.41	11.15	4.69	2.27
[illegible]	257 4	6 03	6 01	12 04	4.68	2.33
[illegible]	277 7	6 77	6 91	13 68	4.93	2.49
[illegible]	288 1	7 09	7.41	14.50	5.03	2.57
[illegible]	313 9	7.80	7.85	15 65	4.99	2.50

* [illegible] de *Survey of Current Business* Tablas de Gastos de [illegible] (Secretaría de Comercio de EE UU números de julio)

** Datos obtenidos del *Survey of Current Statistics* (Secretaría de Comercio de EE UU Edición Bienal de 1969)

Probablemente haya sido la aceptación de la televisión a blanco y negro en 1950 como utensilio doméstico importante lo que haya causado que la proporción de todos los utensilios domésticos principales para todos los bienes de consumo (véase la columna 5) haya aumentado hasta alcanzar la cifra de 4 98%; en otras palabras la innovación constituida por la televisión fue lo [illegible] que el consumidor comenzara a gastar más dinero en utensilios importantes, alrededor de 1950

Nuestra expectativa para mediados de 1965 era que la introducción de la televisión a colores induciría un aumento similar. Por lo tanto, aunque esta comparación de productos no nos proporcionó un propósito preciso y detallado, sí estableció el parámetro máximo de las ventas totales que podríamos esperar para el futuro.

El próximo paso fue examinar la curva de penetración acumulativa de los televisores a blanco y negro en los hogares de Estados Unidos, mostrado en el *Cuadro V*. Suponemos que la penetración de los televisores a color mostraría una curva tipo *S* similar, pero que los televisores a color demorarían más en penetrar en todo el mercado (es decir, en obtener ventas de estado sostenido). La televisión a blanco y negro sólo demoró diez años para alcanzar el estado de ventas sostenidas, pero los estudios cualitativos de opiniones de expertos indicaban que a la televisión a colores le tardaría el doble, y por esto es que la inclinación de la curva correspondiente a la televisión a colores es más gradual

A la vez, los estudios que se llevaron a cabo en 1965 mostraron que la penetración de ventas de la televisión a colores eran significativamente diferentes respecto a diversos grupos de ingresos, y esos índices nos resultaron muy útiles para proyectar la curva de los televisores a color y para seguir la pista de la precisión de nuestra proyección.

Con base en todos estos datos y suposiciones, pronosticamos las ventas al detalle que ocurrirían desde lo que restaba de 1965 hasta mediados de 1970 (véase la sección punteada de la curva de abajo del *Cuadro V*). Estos pronósticos resultaron ser precisos hasta fines de 1966, pero fueron demasiado elevados para los siguientes tres años, debido primordialmente a que las condiciones económicas generales empeoraron y, a que las políticas de precios cambiaron.

Debemos observar aquí que cuando desarrollamos estos pronósticos y técnicas sabíamos que para poder mantener la precisión que necesitaríamos en períodos posteriores se requerirían técnicas adicionales en dichas etapas. Pero estos pronósticos nos dieron una precisión aceptable para la época en que se hicieron puesto que la meta principal de entonces no era más que la de estimar el índice de penetración y el nivel final de ventas al llegar el estado sostenido. Preparar estimaciones refinadas de la forma en que se comporten las redes de distribución y fabricación, es actividad que propiamente pertenece a la próxima etapa del ciclo de vida.

Otros enfoques. Cuando no sea posible identificar algún producto similar (imposibilidad que afrontamos en el caso del horno autolimpiador de la CGW, y en el de su hornilla de cocina de superficie limpia [Counterange]) habrá que usar otro enfoque.

Para fines de la introducción inicial a los mercados, no es necesario más que determinar el índice mínimo de ventas necesario para que el lanzamiento de un producto cumpla los objetivos de la empresa. Para estimar este mínimo podrán usarse análisis tales como los de insumos-producción, tendencias históricas y pronósticos tecnológicos, también la factibilidad de no penetrar en el mercado en absoluto, y de seguir con la investigación y el desarrollo hasta alcanzar la etapa de crecimiento rápido, podrán determinarse mejor mediante el análisis de sensibilidad.

Pronóstico del crecimiento rápido

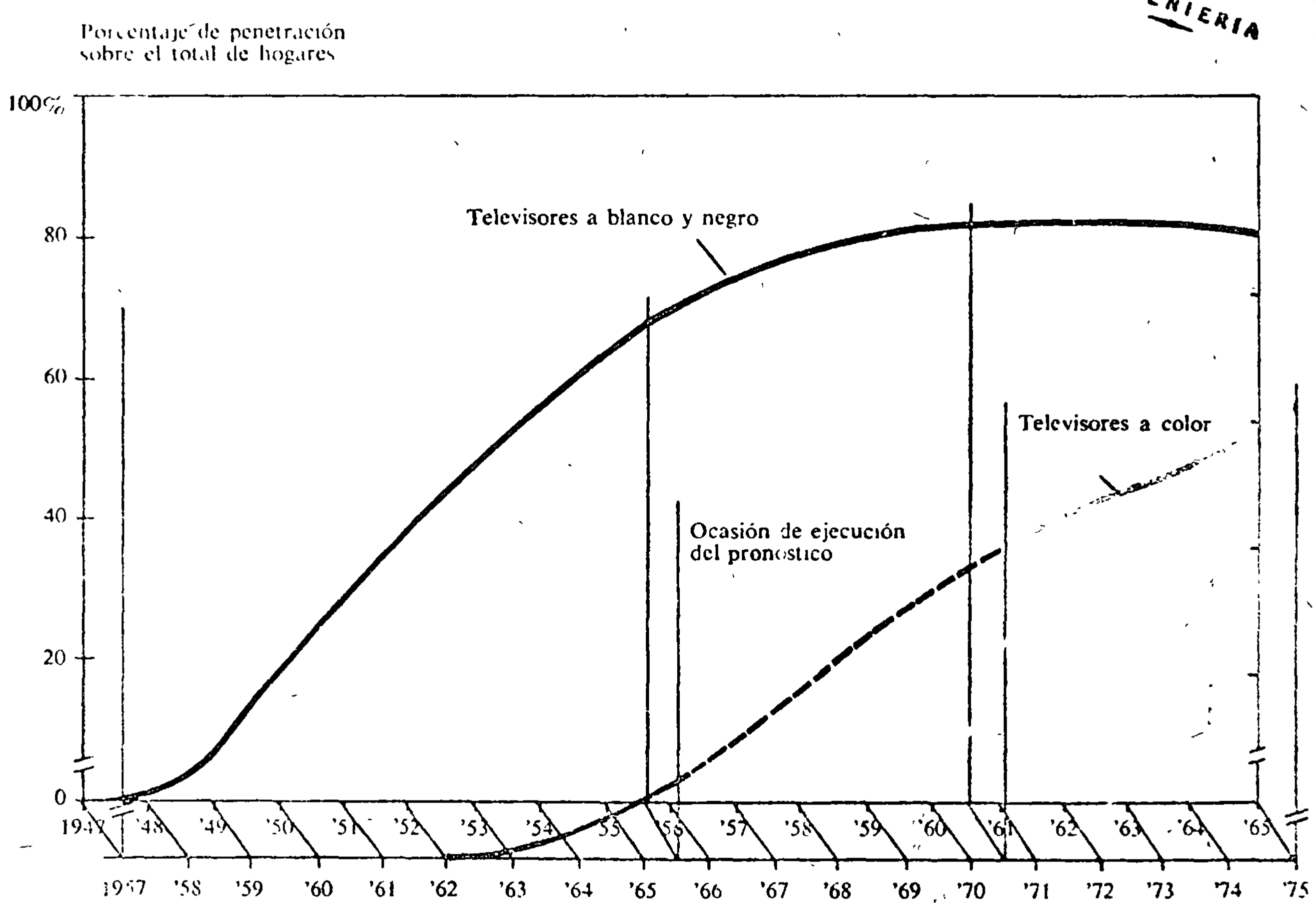
Pero hacer estimación de la fecha a la que el producto habrá pasado a la etapa de crecimiento rápido, es asunto de otra índole. Como hemos visto, esta fecha es función de muchos factores: la existencia de un sistema de distribución, la aceptación o familiaridad, por parte de los clientes, del concepto del producto, la necesidad que llena el producto, los eventos significativos (tales como la programación a colores por parte de las redes de difusión), y factores por el estilo.

Esta fecha puede estimarse revisando el comportamiento de productos similares, y también mediante ejercicios del tipo Delphi o de ciertos sistemas de categorización y jerarquización conforme a los cuales se estiman los factores que serán importantes para la aceptación por parte de los clientes; cada producto competitivo se categoriza respecto a cada factor; y se llega a una calificación general del producto competitivo, el cual se compara con la calificación lograda por un producto nuevo.

Como hemos dicho, suele ser difícil pronosticar precisamente *cuándo* ocurrirá un punto crítico; y según nuestra experiencia, la precisión máxima que puede esperarse es entre tres meses y dos años de aproximación a la fecha real.

Claro que hay ocasiones en que se puede estar seguro de que un producto nuevo recibirá aceptación entusiasta. Las pruebas de mercados y las reacciones iniciales de los clientes nos aclararon perfectamente que habría un enorme mercado para los equipos de cocina CORNING WARE. Puesto que el sistema de distribución ya existía, el tiempo que requirió esta línea para alcanzar crecimiento rápido dependió principalmente de nuestra propia capacidad para fabricarlo. Algunas veces, el pronóstico no requiere más que calcular la capacidad de empresa; pero ésta no es la regla.

CUADRO V. CURVAS DE LA PENETRACION DE HOGARES, A LARGO PLAZO, DE LOS TELEVISORES A COLOR Y A BLANCO Y NEGRO



El crecimiento rápido

...oducto pasa a esta etapa, las decisiones ...es son las relativas a expansión de insta... ...ación. Estas decisiones suelen implicar ...ones que ocurren en el ciclo (que no sean ...des de decisiones importantes respecto ...desarrollo), pero todos los esfuerzos ... seguir las pistas que se hagan estarán

... coyuntura, los pronósticos y las perse... ...stas deberán proporcionar al ejecutivo ...latos

... exacta del *pronóstico del índice de ...ado* que se hizo previamente.

...a en la cual las ventas se nivelarán a ...normal" de *ritmo sostenido.*

...tos componentes, la desviación de la ...miento que pueden causar *condiciones a lo largo de la red de distribución:* por ...ones de inventarios.

...del *índice de crecimiento*

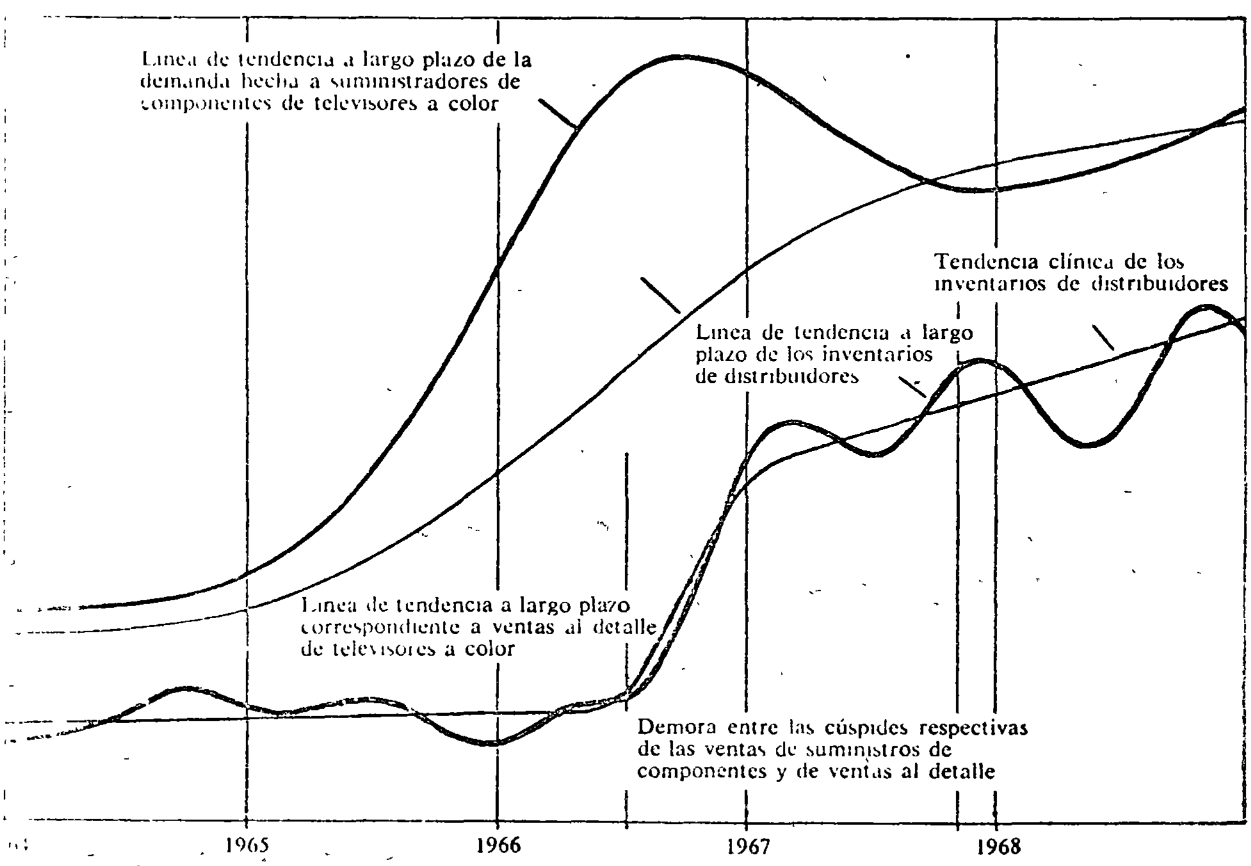
... mediano y largo plazo del índice de cre... ...ado y del obtenimiento del ritmo sostenido de ventas requiere las mismas medidas que el de la etapa de introducción del producto: estudios detallados del mercado (especialmente estudios de la intención de compra) y comparaciones de productos.

Pero por otra parte, cuando un producto ha entrado en la etapa de crecimiento rápido suelen haber suficientes datos disponibles para que se construyan modelos de crecimiento *causales* (aunque estos últimos necesariamente contendrán suposiciones que habrá que verificar más tarde).

Para los televisores a color, nosotros estimamos el índice de crecimiento y el estado a nivel sostenido mediante un modelo tosco econométrico-mercadotécnico que construimos con base en los datos que poseíamos al inicio de dicha etapa, y también condujimos frecuentes estudios del mercado.

Como ya explicámos, la limitación principal de la etapa de crecimiento de los utensilios de cocina CORNING WARE fue nuestra propia capacidad de producción, por lo que la información básica que había que pronosticar para este caso era la fecha en que se nivelaría el crecimiento. Habían inventarios sustanciales, y eso amortiguaba la precisión de la información de ventas a consumidores en toda la línea; así que carecíamos de datos confiables del campo y eso dificultó la estimación de la fecha. Terminamos por tener que establecer

...PATRONES DE VENTAS A DISTRIBUIDORES, INVENTARIOS DE ... Y VENTAS DE COMPONENTES DE ... COLOR



...de las ventas de componentes, los inventarios de distri... ...de distribuidores son diferentes. Los patrones han ... gráfica para fines de ilustración un sistema de información de campo más directo que funcionó mejor.

La red de distribución ejerce ciertos efectos de distorsión sobre la demanda de fabricantes a la vez que amortigua o alcolchona la información en los casos de productos componentes; y aunque estos efectos son muy importantes, es demasiado frecuente, a pesar de ser ilógico, que se haga caso omiso al planificar la producción o la capacidad

Simulación de la red de distribución

Mientras que la demanda de utensilios en proceso muestra una curva en forma de *S* parecida a la de las ventas al detalle, es posible que muestre algunos meses de atraso o adelanto respecto a la curva de ventas y así distorsione la curva de la demanda del suministrador de componentes

El Cuadro VI muestra la tendencia a largo plazo de la demanda hecha de un suministrador de componentes (que no sea Corning) en función de las ventas y los inventarios de distribuidores Como podrá verse en esta curva, es posible que las ventas a suministradores crezcan con relativa velocidad durante varios meses y lleguen a alcanzar la cúspide, antes de haberse nivelado la curva de ventas detallistas Son obvias las implicaciones de estas curvas para la planificación y distribución de instalaciones

Para nuestro cuadro hemos utilizado componentes para televisores a color, porque sabemos por experiencia la importancia que tiene el flujo largo de tiempo para los televisores a color, lo que resulta de los muchos pasos secuenciales en la fabricación y distribucion de estos aparatos (recuérdese el *Cuadro II*). Hay ejemplos mas espectaculares aún, por ejemplo, tratándose de motores de camiones, es muy frecuente que el tiempo de flujo de componentes del proveedor al consumidor se alargue hasta dos años

Para poder estimar la demanda total que habría de la produccion de CGW, utilizamos un modelo de demanda de detallistas, y una simulación de la red de distribución El modelo incorporaba índices de penetración, curvas de mortandad, y factores similares. Combinamos los datos que generó el modelo con datos de participacion de mercado, y de pérdidas de vidrio y con otros informes, y esta combinación fue el cuerpo de insumos que utilizamos para simular la red de distribución La produccion simulada en consecuencia nos permitió aplicar curvas proyectadas, similares a las que muestra el *Cuadro VI*, a nuestros propios proyectos de fabricación de componentes.

La simulación es un instrumento excelente para circunstancias de esta naturaleza, porque en esencia es más simple que su alternativa, esto es, que construir un modelo mas formal y "matemático" Es decir, la simulacion esquiva la necesidad de aplicar técnicas analíticas de solución y crear duplicaciones matemáticas de un ambiente complejo, y permite que el proyectista experimente La simulación también nos enseña cómo se comportarán los elementos de la red de distribución, y cómo interactuarán a través del tiempo (estos conocimientos son muy útiles para los pronósticos, especialmente para la construcción posterior de modelos causales formales).

Seguir pistas y avisar

Claro que estos conocimientos no son absolutamente "seguros", y habrá que seguir cuidadosamente la pista de las dinámicas de la red de distribución para poder determinar si las diversas estimaciones y las diversas suposiciones que se hicieron resultaron correctas A corto plazo, los métodos estadísticos son buena base para estimar y checar el índice de crecimiento, e indicar cuándo ocurrirán los puntos críticos.

A fines de 1965 ya era aparente que estaba aumentando la demanda de utensilios en proceso, porque se observaban diferencias positivas constantes entre las ventas reales en cinescopios de televisión y las ventas pronosticadas. Nuestras conversaciones con los gerentes de productos y otros ejecutivos nos señalaron la posibilidad de que estuviese ocurriendo cierto cambio significativo en la actividad de la red de distribución; era evidente que había habido aumentos rápidos de la demanda de los detallistas, que a su vez estaban aumentando los pedidos de vidrio para los utensilios en proceso: tal circunstancia podría crear una "joroba" en la curva de *S* similar a la que muestra el *Cuadro VI*. Esta "joroba" proporcionó utilidades adicionales a CGW en 1966, pero tuvo un efecto adverso en 1967. Pudimos pronosticar esta "joroba", pero lamentablemente no la pudimos disminuir ni evitarla, ya que nuestro control de la red de distribución no era suficiente para que lo lográramos.

Los inventarios, a través de toda la red de distribución, también muestran una curva en forma de *S* (según el *Cuadro VI*), hecho que crea y complica dos condiciones características de toda la red: al principio se llena demasiado, y subsecuentemente su condicion oscila entre exceso de inventario y demasiado poco inventario, en varios puntos: una secuencia de condiciones de "bonanza y borrasca".

Por ejemplo, el sistema de distribucion para utensilios de cocina Corning Ware, que es más sencillo, mostro curva en forma de *S* como las que hemos examinado Cuando el crecimiento de las ventas al detalle disminuyo de rápido a normal, los datos de los envases efectuados no proporcionaron indicaciones oportunas de que se había llegado a este punto critico tan importante Los datos de los inventarios que mantenian los distribuidores sí nos dieron cierto aviso de que se estaba llenando excesivamente la red de distribución, pero a pesar de ello no pudimos identificar con suficiente rapidez este punto tan crítico al nivel de los detallistas, porque carecíamos de datos precisos a ese nivel. Hoy en dia supervisamos cotidianamente la información de campo para poder identificar los cambios importantes, y entonces ajustamos nuestros pronósticos de embarque de acuerdo con dichos cambios

Es evidente, por lo tanto, que una de las actividades primordiales durante la etapa de crecimiento rápido deberá ser la comprobación de estimaciones anteriores; y si éstas parecen haber sido incorrectas, entonces deberá calcularse el error del pronóstico tan precisamente como sea posible, y obtener una estimación revisada.

Habrá veces en que los modelos desarrollados anteriormente no incluirán más que "macrotérminos"; y en tales casos la investigación de mercados será capaz de proporcionar la información que se necesita para dividir éstos en función de sus componentes. Por ejemplo, al inicio, el modelo para pronósticos de televisores a color no consideró más que las penetraciones totales de televisores a diferentes niveles de ingresos, sin otorgar consideración alguna a la forma en que se usarían estos equipos, por lo tanto, hicimos una encuesta de mercado para determinar con más precisión los usos de los equipos.

Igualmente deberán expansionarse submodelos de segmentos de la red de distribución durante la etapa de crecimiento rápido, incorporándose a ellos los informes más detallados, a medida que éstos se reciben. En el caso de los televisores a color, pudimos comprobar que éramos capaces de estimar los requisitos generales de la red de distribución respecto a cinescopios de vidrio, los factores de participación de mercado de CGW y las pérdidas de vidrio, y que con estas estimaciones podíamos postular una distribución de probabilidades en torno de las estimaciones más probables. Con el tiempo fue muy fácil comparar estos pronósticos con los volúmenes reales de ventas, y así comprobar la precisión de los procedimientos mediante los cuales los generábamos.

También vimos que teníamos que aumentar el número de factores que contenía el modelo de simulación; por ejemplo, había que expansionar el modelo para otorgar consideración a varios tamaños de cinescopios, y eso aumentó nuestra precisión y utilidad general.

El enfoque descrito no es más que uno de los que pueden utilizarse para pronosticar las ventas de productos nuevos que están en estado de crecimiento rápido. Otras personas han analizado otros métodos.[3]

4. Ritmo sostenido

Al llegar a esta etapa, las decisiones que el administrador toma son muy diferentes de las que ha tomado anteriormente. Ya se ha resuelto la mayor parte de la planificación de instalaciones y las tendencias, y los índices de crecimiento se han vuelto razonablemente estables. Es posible que ocurran oscilaciones de la demanda y de las utilidades, debidas a cambios de las condiciones económicas, a productos nuevos y competitivos, a dinámicas de la red de distribución, y a factores similares; y el administrador tendrá que mantener sus actividades de persecución de pistas, e iniciar actividades nuevas del mismo tipo. Pero a la larga, en cuanto a pronósticos, podrá concentrar su atención en las áreas siguientes:

- Planificación de producción a corto y a largo plazo.
- Fijación de normas para comprobar la efectividad de las estrategias de mercadotecnia.
- Proyecciones para ayudar a la planificación de utilidades.

También necesitará un sistema que sirva para seguir pistas y dar aviso, que le permita identificar cualquier disminución significativa de la demanda del producto (pero es de esperar que todavía falte mucho para que se le llegue a tal condición).

Para estar seguro, el administrador deseará proyecciones de márgenes y utilidades, y pronósticos a largo plazo para ayudarle a planificar al nivel de dirección general. Pero para estas actividades más detalladas los pronósticos a plazo corto y medio serán factores básicos; por tal motivo, a continuación examinamos los pronósticos de ventas.

Tener a mano los instrumentos adecuados

Al planear la producción y establecer la estrategia mercadotécnica para corto y medio plazo, lo primero que tiene en mente el administrador es hacer una estimación precisa del nivel vigente de ventas, y otra del índice de cambio que muestra dicho nivel.

Por lo tanto, a esta etapa será preciso que el pronosticador haga dos contribuciones relacionadas entre sí:

- Deberá proporcionar estimaciones de *tendencias y de temporalidades*, que evidentemente afectarán el nivel de ventas. Las temporalidades son especialmente importantes tanto para la planificación general de la producción como para el control de inventarios. Para lograr estas estimaciones necesitará aplicar análisis de esries de tiempo y técnicas de proyección, es decir, técnicas *estadísticas*.
- Deberá establecer relación entre el nivel futuro de ventas y otros factores que sean más fáciles de pronosticar, o tengan buena relación de "anticipación" a las ventas, o ambos. Para lograr esto necesitará construir *modelos causales*.

El tipo de producto que se esté examinando será factor muy importante para la selección de las técnicas que deberán usarse.

Para los utensilios de cocina Corning Ware, cuyos niveles de sistemas de distribución están organizados en forma relativamente directa, utilizamos métodos estadísticos para pronosticar los embarques y aprovechamos la información recibida del campo para pronosticar los cambios que ocurrirían en los índices de embarque.

3 Véase Graham F. Pyatt, *Priority Patterns and the Demand for Household Durable Goods* (Londres: Cambridge University Press, 1964), Frank M. Bass, "A New Product Growth Model for Consumer Durables", *Management Science*, Enero 1969; Gregory C. Chow, "Technological Change and the Demand for Computers", *The American Economic Review*, Diciembre 1967; y R. N. Stone y R. A. Rowe, "The Durability of Consumers' Durable Goods", *Econometrica*, Volumen 28, No. 2, 1960.

En la actualidad estamos en proceso de incorporar informes especiales —estrategias de mercadotecnia, pronósticos económicos y elementos similares— directamente a los pronósticos de embarques, y eso nos está llevando hacia un modelo de pronósticos de tipo causal.

Por otra parte, puede ocurrir que un suministrador de componentes sea capaz de pronosticar sus ventas totales con precisión suficiente para la planificación de producción de carga amplia; pero es más probable que el ambiente de la red de distribución sea tan complejo, que su mejor recurso para las proyecciones a corto plazo sea confiarse principalmente a las estimaciones hechas de lo que antecede al estimar la demanda de vidrios para televisión en función de tamaños y de clientes. En tales casos, donde los métodos estadísticos funcionen mejor será para proporcionar guías y comprobaciones de los pronósticos hechos por los vendedores.

Pero generalmente al llegar a este punto del ciclo de vida se dispone de suficientes datos de series de tiempo, y se conocen suficientes relaciones causales obtenida directamente de estudios de mercado, para que el pronosticador pueda hacer una verdadera aplicación de estos dos grupos de medios tan poderosos. Para esa época se dispondrán de datos históricos de cuando menos los últimos años, y el pronosticador los utilizará todos, de una manera u otra.

Mencionaremos aquí una crítica que frecuentemente se escucha. Los pronosticadores no quieren utilizar más que los datos más recientes (tales como las cifras de venta del pasado inmediato) para la construcción de proyecciones, alegando que la situación en curso siempre es tan dinámica y las condiciones están cambiando tan radical y rápidamente, que ya los datos históricos de épocas anteriores casi no tienen validez alguna.

Creemos que esta opinión tiene muy poco valor. Una gráfica de los datos de venta de varios años, como la que muestra la *Parte A* del *Cuadro VII*, da la impresión de una tendencia de ventas que no sería posible que recibiéramos si nos limitáramos a observar dos o tres de los puntos de datos más recientes.

En la práctica encontramos que los patrones generales tienden a subsistir durante uno o dos trimestres hacia el futuro, como mínimo, aun cuando ocurren condiciones especiales que hacen fluctuar las ventas durante uno o dos periodos (mensuales) en el futuro inmediato.

Para los pronósticos a corto plazo de uno o tres meses al futuro, son mínimos los efectos de factores tales como las condiciones económicas generales y *no causan* cambios radicales en los patrones de la demanda. Ya que las tendencias tienden a cambiar gradual y no repentinamente, los métodos estadísticos y demás de naturaleza cuantitativa son excelentes para los pronósticos a corto plazo, pero el uso de sólo uno, o sólo algunos, de los puntos de datos más recientes, tendrá como resultado que no se otorgará consideración suficiente a la naturaleza de las tendencias, los ciclos, y las fluctuaciones temporales de las ventas.

Aunque podamos dar las técnicas como aplicables, necesitamos proseguir para explicar la forma en que el pronosticador podrá identificar precisamente lo que estará ocurriendo cuando las ventas fluctúen de un período al siguiente, y cómo pronosticarán tales fluctuaciones.

Clasificación de tendencias y temporalidades

Al pronosticar, hay que manejar por separado las tendencias y las temporalidades, porque son circunstancias totalmente diferentes.

Consideremos lo que ocurriría, por ejemplo, si el pronosticador se limitara a tomar el promedio de los puntos de los datos más recientes de determinada curva, los combinara con otros puntos promedios similares del pasado inmediato, y utilizara el resultado como base para una proyección. Sería muy fácil que reaccionara exageradamente a los cambios ocurridos al azar, y los identificara equivocadamente como demostraciones de tendencias importantes; y quizás confundiera un cambio en el índice de crecimiento con un cambio periódico o cometiese otros errores similares.

Para evitar este tipo de errores, la técnica de promedios cambiantes que es parecida a la técnica hipotética que acabamos de describir, utiliza puntos de datos en forma tal que quedan eliminados los efectos de las temporalidades y las irregularidades.

Además, el ejecutivo necesita *tanto* estimaciones precisas de tendencias *como* estimaciones precisas de temporalidades: para poder planificar la producción de carga amplia, para poder determinar los esfuerzos y distribuciones mercadotécnicas, y para poder mantener los inventarios debidos, es decir, inventarios adecuados para la demanda de los clientes, pero no excesivamente costosos.

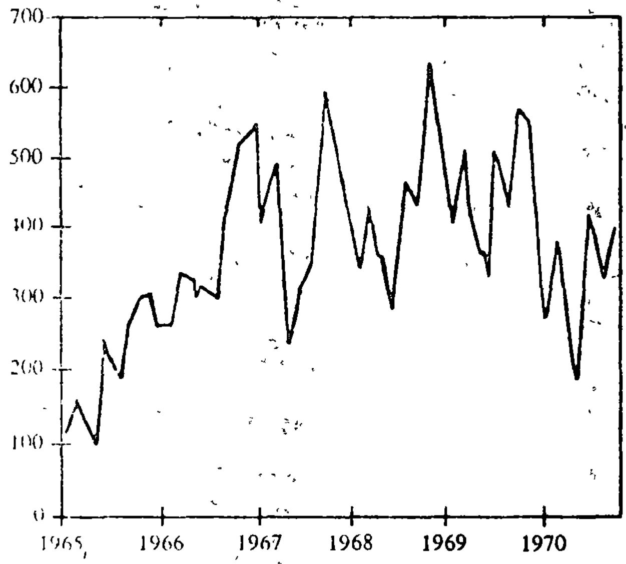
Será bueno que antes de seguir adelante demos ejemplos de la forma que toman estas identificaciones. Las *Partes A, B, y C* del *Cuadro VII* muestran la descomposición inicial de datos en estado natural respecto a las ventas de las fábricas de televisores a color, entre 1965 y mediados de 1970. La *Parte A* muestra la curva de datos brutos; la *Parte B* muestra los factores temporales que están implícitos de los datos brutos; este patrón es bastante razonable, aunque varía un poco de un año a otro. (En la próxima sección explicaremos la procedencia de esta gráfica de las temporalidades.)

La *Parte C* muestra el resultado obtenido al descontar las temporalidades de la *Parte B* de la curva de datos brutos, a la curva así producida se le llama "curva de datos temporalizados". Seguidamente, en la *Parte D* hemos dibujado la curva más suave u "óptima" que es posible lograr a través de la curva destemporalizada, y así hemos obtenido la *tendencia cíclica*. (Observaremos, además, que las diferencias entre esta línea de tendencias cíclicas y la curva de datos destemporalizados constituye el componente irregular o asistemático que el pronosticador siempre tendrá que tolerar, y que tendrá que tratar de explicar por otros métodos.)

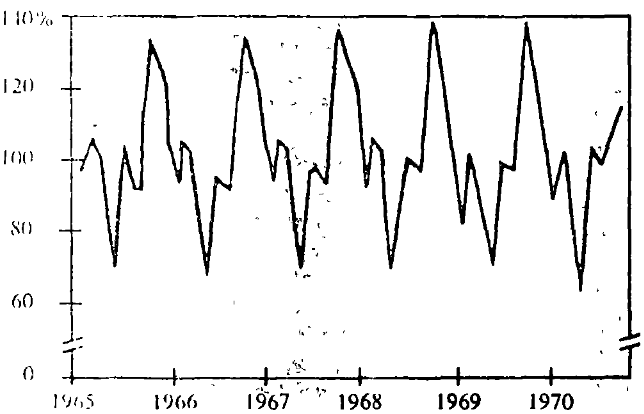
24

CUADRO VII ILUSTRACIÓN DE LOS DATOS DE VENTAS DE LAS FÁBRICAS DE TELEVISORES A COLOR

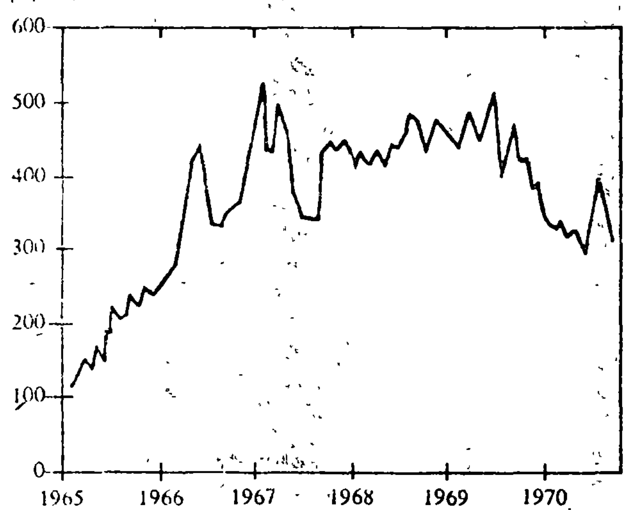
Parte A Datos brutos de ventas de fábricas de televisores a color
Equipos (miles)



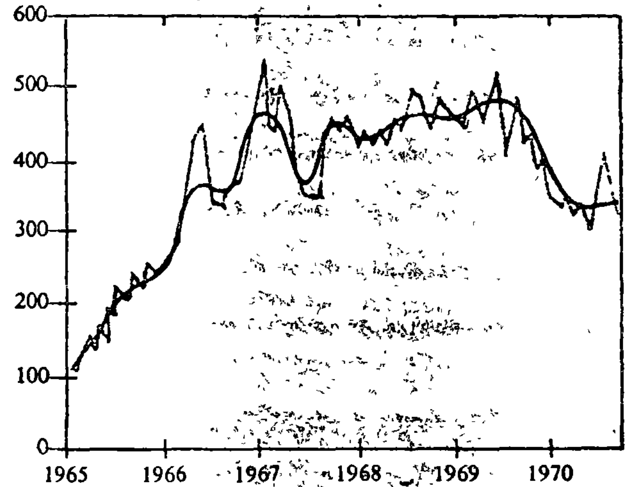
Parte B Temporalidades respecto a ventas de fábricas de televisores a color
Temporalidades (porcentaje del índice promedio anual de ventas)



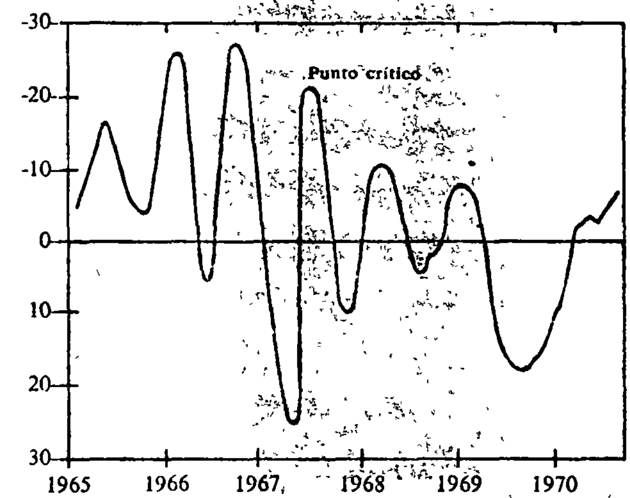
Parte C Ventas de fábricas de televisores a color (destemporalizadas)
Equipos (miles)



Parte D Tendencia cíclica final de ventas de fábricas de televisores a color
Equipos (miles)



Parte E. Cambios de tendencias cíclicas finales (índice de crecimiento) de ventas de fábricas de televisores a color
Equipos (miles)



Resumiendo: el objetivo de la técnica de pronósticos que usamos aquí es hacer lo más posible para identificar las tendencias y las temporalidades. Lamentablemente casi todos los métodos de pronóstico se proyectan mediante un procedimiento de aislamiento, análogo al de la técnica de promedios cambiantes o al de la técnica hipotética que describimos al principio de esta sección; el logro de una separación más precisa de las tendencias y las temporalidades será obra más laboriosa y costosa.

Pero de todas maneras, las técnicas de identificación han demostrado su utilidad en la práctica. La mejor manera en que podremos explicar por qué han tenido éxito, es bosquejando toscamente, cómo construimos un pronóstico de ventas basado en tendencias, temporalidades, y datos obtenidos de éstas. El método es el siguiente:

• Se dibuja la gráfica del índice al cual cambia la tendencia. En la ilustración del *Cuadro VII*, esta gráfica está muestrada en la *Parte E*. Dicha gráfica describe los altibajos sucesivos de la tendencia cíclica que muestra la *Parte D*.

• Se proyecta este índice de crecimiento hacia adelante, a través del intervalo que cubre el pronóstico. Suponiendo que estuviésemos preparando nuestro pronóstico a mediados de 1970, estaríamos proyectando hacia los meses de verano, y posiblemente hacia los primeros meses de otoño.

• Se suma este índice de crecimiento (sea positivo o negativo) al índice de venta actual. El índice que se obtiene podría denominarse "índice de ventas destemporalizado".

• Se proyectan las temporalidades de la *Parte B* durante el período que se está examinando, y se multiplica el índice de pronóstico destemporalizado por estas temporalidades. El producto será el índice de ventas pronosticado, que es el que buscábamos.

Claro que en los casos especiales donde no hay que considerar temporalidades este proceso se simplifica mucho, puede utilizarse menor volumen de datos y técnicas más sencillas.

Hemos encontrado que el análisis de los patrones de cambio del índice de crecimiento nos proporciona más precisión para pronosticar puntos críticos que el que logramos cuando no usamos más que la tendencia cíclica (por lo que también nos proporciona la misma precisión para pronosticar cambios desde el crecimiento positivo al crecimiento negativo, y viceversa).

En realidad, la ventaja principal de considerar los cambios del crecimiento la constituye el hecho de que frecuentemente podemos pronosticar con mayor anticipación el momento en que ocurrirá la situación de ausencia de crecimiento. Consecuentemente, la gráfica de cambio de crecimiento también nos proporciona excelente base visual para pronosticar e identificar los puntos críticos.

Técnica X-11

El lector sentirá curiosidad por saber la forma en que se descomponen las temporalidades, extrayéndose de los datos brutos de ventas, y por conocer la manera precisa en que se determina la curva de cambio de crecimiento con base en la curva de tendencia.

Una de las mejores técnicas que conocemos para analizar profundamente los datos históricos para determinadas temporalidades el índice actual de ventas; y el crecimiento, es la técnica X-11 del Departamento del Censo, que simultáneamente extrae las temporalidades de los informes brutos y a la vez ajusta a los datos una línea de tendencias cíclicas. La descripción de esta técnica es muy amplia cuesta unos U S. $10, y proporciona información detallada sobre las temporalidades, las tendencias, la precisión de las temporalidades, el encaje de las tendencias cíclicas, y otras medidas. La producción así obtenida incluye gráficas de las tendencias cíclicas y del índice de crecimiento, que podría recibirse simultáneamente en los despliegues gráficos de una terminal de computadora basado en tiempo compartido.

Aunque el método X-11 no se desarrolló originalmetne para los pronósticos, sí establece base para la preparación de pronósticos efectivos. No obstante, debemos observar que hay cierta inestabilidad en la línea de tendencias de los puntos de datos más recientes, ya que la técnica X-11, igual que casi todas las demás técnicas estadísticas, hace uso de cierta forma de promedio cambiante. Por lo tanto, ha demostrado su eficacia para estudiar los cambios de patrones de crecimiento a medida que se obtiene cada punto nuevo de crecimiento.

Cuando los datos recientes parezcan reflejar crecimiento o disminución repentina de las ventas, o cualquier otra anomalía del mercado, el pronosticador debe determinar si ocurrió algún evento especial durante el período que está considerando, como promociones, huelgas, cambios de la economía, u otros factores similares. La técnica X-11 proporciona la instrumentación básica que se necesita para otorgar el valor debido al efecto de dichos eventos.

Generalmente, y aun cuando puedan establecerse asociaciones entre los patrones de crecimiento y la ocurrencia de determinados eventos, la técnica X-11 y los demás métodos estadísticos no producen resultados buenos cuando el período del pronóstico es de más de seis meses, porque la incertidumbre o la naturaleza imprevisible de los eventos lo impide. Pero para pronósticos a corto plazo, de uno a tres meses, la técnica X-11 ha demostrado que es razonablemente precisa.

Nosotros la hemos usado para estimaciones de ventas de cada división, a tres períodos hacia el futuro, así como para determinar los cambios de los índices de ventas. Hemos comparado nuestros pronósticos hechos con técnica X-11 con los pronósticos desarrollados por cada una de varias divisiones para los cuales éstas han utilizado diversos métodos algunos de los cuales han tomado en cuenta las estimaciones de los vendedores y otros conocimientos especiales. Los pronósticos que se hicieron utilizando la técnica X-11 se basaron en métodos estadísticos exclusivamente, y no otorgaron consideración alguna a informes especiales.

Los pronósticos de las divisiones contenían un poco *menos* de errores que los que proporcionó el método X-11; sin embargo, encontramos que los pronósticos de las divisiones tenían cierto sesgo optimista, mientras que los que proporcionó el método X-11 no contenían sesgo alguno. Esto nos sugirió que se puede hacer mejor trabajo de pronóstico si se combinaban los conocimientos especiales, las técnicas de las divisiones, y el método X-11. Esto es lo que se está haciendo en algunas de las divisiones en la actualidad, y la precisión de sus pronósticos ha mejorado en consecuencia. También hemos usado el método X-11 para hacer pronósticos de ventas para el futuro inmediato, que sirvan de norma para la evaluación de diversas estrategias mercadotécnicas, y hemos encontrado que han sido especialmente efectivos para estimar los efectos que surtirán los cambios de precios y las promociones.

Como ya hemos indicado, frecuentemente se utiliza

A los lectores de este artículo quizás les interesen los siguientes artículos de HBR que tratan de los pronósticos:

Edward G. Bennion, "Econometrics for Management", Marzo-Abril 1961, pág. 100

James R. Bright, "Evaluating Signals of Technological Change", Enero-Febrero de 1970, pág. 62

John F. Dory y Robert J. Lord, "Does TF Really Work?" (Keeping Informed) Noviembre-Diciembre 1970, pág. 16

Wassily W. Leontief, "Proposal for Better Business Forecasting" (Thinking Ahead) Noviembre-Diciembre 1964, pág. 166.

Harper Q. North y Donald L. Pyke, "*Probes* of the Technological Future", Mayo-Junio 1969, pág. 68

George G. C. Parker y Edilberto L. Segura, "How to Get a Better Forecast", Marzo-Abril 1971, pág. 99

James Brian Quinn, "Technological Forecasting", Marzo-Abril 1967, pág. 89

---

el análisis de tendencias para proyectar datos anuales durante varios años a fin de determinar cuáles serán las ventas si subsiste la tendencia vigente. Algunas veces se utilizan de esta manera el análisis de regresión y los pronósticos estadísticos, es decir, para estimar lo que pasará si no ocurren cambios significativos. Si cuando esto se determine, el resultado no es aceptable para la estrategia de la dirección general, la empresa está en situación oportuna para cambiar su estrategia.

Modelos econométricos

Cuando los períodos de tiempo sean largos, los cambios de condiciones económicas generales darán cuenta de gran parte de los cambios del índice de crecimiento de un producto. Puesto que los pronósticos económicos son cada vez más precisos, y existen ciertas fuerzas económicas generales "principales" que cambian antes de que ocurran cambios subsecuentes en determinadas industrias, se puede mejorar la precisión de los pronósticos de los negocios, incluyendo factores económicos en sus modelos.

Pero el desarrollo de dicho modelo, al que suele llamarse "modelo econométrico", precisa que se tengan los datos suficientes para poder establecer las relaciones correctas.

Cuando los televisores a colores atravesaban su etapa de crecimiento rápido, nos dimos cuenta de que era probable que las condiciones económicas afectaran notablemente el índice de ventas. Pero los macroanálisis de los datos de televisores a blanco y negro que hicimos en 1965, relativos a las recesiones de fines de la década de los cuarenta y principio de la de los cincuenta no mostraron efecto económico sustancial alguno, por lo tanto, no poseíamos datos suficientes para establecer buenas relaciones econométricas para el modelo relativo a televisores a color. (Pero una investigación hecha posteriormente sí estableció que habían ocurrido pérdidas perceptibles en las ventas de los televisores a color durante 1967, que se debieron a condiciones económicas).

En 1969, la Corning decidió que necesitaba un método superior al X-11 para pronosticar los puntos críticos en las ventas detallistas de televisores a color para períodos de seis meses a dos año hacia el futuro. Los métodos estadísticos y las estimaciones de los vendedores son incapaces de determinar estos puntos críticos con suficiente anticipación para ayudar a tomar decisiones, por ejemplo, el gerente de producción necesita saber con tres a seis meses de anticipación dichos cambios para poder mantener una fuerza de trabajo estable.

Nos parecía que disponíamos de los datos suficientes para construir un modelo econométrico, por lo que comenzó el análisis previo al desarrollo de dicho modelo, tanto para las ventas de televisores a blanco y negro como para los televisores a color. Nuestros conocimientos de las temporalidades, las tendencias, y el crecimiento de estos productos, constituían la base natural para hacer las ecuaciones correspondientes de los modelos.

Los insumos económicos del modelo se obtuvieron primordialmente de información que había sido generada por el Modelo Econométrico de la Wharton, pero también utilizamos otras fuentes.

Utilizando datos que llegaban hasta 1968, el modelo se comportó bastante bien en el pronóstico del descenso que ocurrió en el último trimestre de 1969; y cuando se incorporaron los datos de 1969 al modelo, éste estimó precisamente la magnitud del descenso que ocurriría en los primeros dos trimestres de 1970. Las relaciones de ventaja-atraso, y la disponibilidad de pronósticos económicos para los factores del modelo, permiten estimar los efectos que tendrá la economía sobre las ventas, para períodos futuros de hasta dos años.

Los pronósticos para control de producción e inventario, los de grupos de artículos, y las estimaciones de demanda a largo plazo, son especialmente importantes para la fase de ritmo sostenido. El lector interesado en estos temas encontrará comentarios sobre dichos temas al reverso del desplegado que contiene este artículo.

Finalmente, al atravesar la fase de ritmo sostenido, es útil preparar juntas de revisión trimestrales, durante las cuales se examinen las pistas estadísticas, las gráficas de aviso y los nuevos informes. En estas juntas, la decisión de revisar o actualizar determinado modelo o pronóstico se podrá sopesar contra diversos costos, así como la magnitud del error del pronóstico. En un área sumamente volátil, será mejor celebrar dichas juntas de revisión cada mes o período.

Pronósticos en el futuro

Consideramos que al concluir un artículo sobre pronósticos, debemos dejar asentado nuestro criterio respecto a las técnicas que se utilizarán en el futuro, a corto y a largo plazo.

Como ya hemos dicho, no es demasiado difícil pronosticar el futuro inmediato, puesto que las tendencias a largo plazo no cambian de un día para otro. Muchas de las técnicas que describimos siguen en la etapa primaria de su aplicación, por lo que esperamos que gran parte de las técnicas que se utilizarán dentro de los próximos cinco años serán las mismas que comentamos aquí, aunque es posible que sus formas se amplíen.

El costo de utilización de estas técnicas disminuirá significativamente, y eso aumentará la frecuencia con que se usen. Esperamos que las empresas de compartimiento de tiempo de computadoras ofrecerán acceso, a costos nominales, a bancos de entrada y salida de datos, que se descompondrán en mayor número de segmentos de negocios de los que se dispone en la actualidad. El hecho de que la tendencia del costo por procesamiento en computadora sigue disminuyendo, y que se sigan produciendo simplificaciones de computación, hará que las técnicas tales como el método Box-Jenkins resulten económicamente factibles, aun para algunas aplicaciones para control de inventarios. También se podrá disponer, a costo nominal, de "paquetes" de técnicas, programas y métodos para computadoras, correspondientes a las técnicas estadísticas y a algunos modelos generales.

En la actualidad, para la mayor parte de los pronósticos a corto plazo no se usan más que métodos estadísticos y se use poca información cualitativa. Donde se utiliza información cualitativa no se hace más que en forma externa, y no se incorpora directamente a la rutina de computación. Pronosticamos que ocurrirá un cambio de los sistemas totales de pronóstico, conforme al cual varias técnicas se ligarán entre sí y a la vez se hará un manejo sistemático de la información cualitativa.

Se hará uso más extenso de los modelos econométricos durante los próximos cinco años, y la mayoría de las grandes empresas desarrollarán y refinarán modelos econométricos de sus actividades más importantes. También se desarrollarán modelos de simulación de mercadotecnia para nuevos productos, que corresponderán a los productos de mayor volumen, y tendrán sistema de pistas para actualizar los modelos y sus parámetros. La programación heurística servirá de medio para refinar los modelos de pronóstico.

Algunas compañías ya han dsearrollado sus propios modelos de insumo-producción, en paralelo con los datos de insumo-producción y las proyecciones estadísticas del gobierno, pero todavía faltan cinco a diez años para que la mayoría de las grandes empresas puedan usar efectivamente los modelos de insumo-producción.

Sin embargo, dentro de cinco años sí veremos cómo se hace uso extenso de sistemas de hombre-máquina conforme a los cuales se programan en computadoras modelos estadísticos, causales y econométricos con frecuentes interacciones por parte del hombre. A medida que ganemos confianza en dichos sistemas, de modo que ocurran menos informes por excepción, la intervención humana disminuirá. Básicamente, serán los modelos computerizados los que efectuarán las computaciones sofisticadas, y el hombre servirá cada vez más de generador de ideas y desarrollador de sistemas. Por ejemplo, el hombre estudiará las dinámicas del mercado y establecerá relaciones más complejas entre el factor que se está pronosticando y los que contiene el sistema del pronóstico.

Más adelante, los modelos de simulación de consumo se convertirán en asunto cotidiano. Estos modelos pronosticarán el comportamiento del consumidor y sus reacciones a diversas estrategias mercadotécnicas tales como la fijación de precios, las promociones, las introducciones de nuevos productos, y los actos de la competencia; y se hará uso frecuente de modelos probabilísticos en el proceso del pronóstico.

Finalmente, la mayor parte de los pronósticos computados tendrán relación con las técnicas analíticas que este artículo describe. Las aplicaciones de computadoras ocurrirán principalmente en negocios de productos estables y establecidos. Aunque hasta ahora las técnicas de pronóstico sólo se han aplicado especialmente al pronóstico de ventas, en el futuro se aplicarán cada vez más al pronóstico de utilidades, de gastos de capital, y otros factores igualmente importantes. Esto dará al pronosticador la libertad de pasar la mayor parte de su tiempo pronosticando las ventas y las utilidades que se derivarán de nuevos productos. Sin duda que se desarrollarán nuevas técnicas analíticas para pronósticos relativos a nuevos productos, pero habrá una dificultad sostenida que durará no menos de diez o veinte años y probablemente mucho más, para pronosticar con precisión los factores diversos de nuevos productos tales como sus ventas, su lucratividad y su ciclo de vida.

Palabras finales

La dirección general puede ayudar al pronosticador o planificador a formular debidamente el problema que va a pronosticar, a tener más confianza en los pronósticos que se le proporcionen y usarlos más efectivamente, si tiene buena comprensión de los rasgos y las limitaciones basicas de las técnicas. El pronosticador, por su parte, tendrá que mezclar las técnicas que usa con los conocimientos y experiencia que poseen los administradores.

Creemos que la necesidad actual no es de mejores métodos de pronóstico, sino de mejor aplicación de las técnicas que poseemos.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

PLANEACION Y CONTROL DE LA PRODUCCION

APENDICE "C" (Continuación)

M. en C. Jorge Rivera Benítez

Septiembre, 1977

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.

	·lodelo económico nsumo-producción	6. Indice de difusión	7. Indicador máximo	8. Analisis del ciclo de vida
	lgunas veces se combinan los modelos econométricos y los de insumos-producción para hacer pronósticos. El modelo de insumo producción se utiliza para proporcionar tendencias a largo plazo para el modelo econométrico, y también para estabilizarlo.	Porcentaje de cierto grupo de indicadores economicos que estan subiendo o bajando, porcentaje que entonces constituye el índice.	Una serie de tiempo de una actividad económica cuyo movimiento en determinada dirección, es anterior al movimiento de alguna otra serie de tiempo en la misma dirección, constituye un indicador máximo.	Este es un análisis y pronóstico de los índices de crecimiento de productos nuevos, que se basa en curvas con forma de *S*. Las fases de aceptación del producto por parte de los diversos grupos tales como los innovadores, los primeros imitadores, la primera mayoría, la mayoría final, y los de la retaguardia, son elementos centrales del análisis.
Precisión	No aplicable Buena a muy buena Buena a excelente	Mala a buena Mala a buena Muy mala	Mala a buena Mala a buena Muy mala	Mala Mala a buena Mala a buena
Identificación de puntos críticos	Buena	Buena	Buena	Mala a buena
Aplicaciones	entas de empresa a sectores y subsectores industriales.	Pronosticos de ventas por clase de productos	Pronosticos de ventas por clases de productos.	Pronóstico de ventas de nuevos productos
Datos que se requieren	gual que para un promedio cambiante y para X-11	Igual que una encuesta de intención de compra	Lo mismo que una encuesta de intención de compra, con 5 a 10 años de historial.	Como minimo, las ventas anuales del nuevo producto, o productos similares. Este procedimiento requiere con frecuencia de investigaciones del mercado.
Costo	$100,000 No	$1,000 Sí	$1,000 Sí	$1,500 Sí
Tiempo que se requiere para desarrollar el pronóstico	meses +	1 mes +	1 mes +	1 mes +
Referencias	ans & Preston, Discussion Paper No 138", Wharton School of Finance & Commerce, The University of Pennsylvania.	Evans, *Macro-economic Activity Theory, Forecasting & Control* (New York Harper & Row Publishers, Inc., 1969)	Evans, *Macro-economic Activity. Theory, Forecasting & Control* (New York Harper & Row Publishers, Inc., 1969)	Bass, "A New Product Growth Model for Consumer Durables", *Management Science*, Enero de 1969

	2. Modelo econométrico	3. Encuestas de intención de compras y anticipaciones	4. Modelos de insumo-producción	5. Modelo económico de insumo-prod…
	Un modelo econométrico es un sistema de ecuaciones de regresión interdependientes que describen cierto sector de ventas económicas o de actividad lucrativa. Los parámetros de las ecuaciones de regresión se suelen estimar simultáneamente. Por regla general, el desarrollo de estos modelos es bastante costoso, pueden costar fácilmente entre $5,000 y $10,000 cada uno, según lo detallados que sean. No obstante, y debido al sistema de ecuaciones que forma parte inherente de dichos modelos, expresarán mejor que una ecuación corriente de regresión las causalidades implicadas, por lo que podrán pronosticar con más precisión los puntos críticos.	Estas encuestas al público en general, a) determinan su intención de compra sobre ciertos productos, o b) derivan un índice que mide el sentimiento general respecto al presente y al futuro, y estima la forma en que este sentimiento afecta los hábitos de compra. Estos enfoques al pronóstico serán más útiles para seguir las pistas y dar avisos que para pronosticar. El problema básico de su uso es que puede señalar incorrectamente algún punto crítico (por lo que quizás éste nunca ocurrirá).	Un método de análisis que trata del flujo interindustrial o interdepartamental de bienes o servicios dentro de la economía, o dentro de la empresa y sus mercados. Muestra los flujos de insumos que tendrán que ocurrir para que se logren ciertas producciones. Habrá que hacer grandes esfuerzos para aprovechar debidamente estos modelos, y habrá que obtener detalles adicionales, de los que no se disponen normalmente, para poder aplicarlos a negocios determinados. Las empresas que usan modelos de insumo-producción han gastado tanto como $100,000 Dls. y más, cada año para poder desarrollar aplicaciones útiles de los mismos.	Algunas veces se combinan los modelos econométricos y los de insumos-producción para hacer pronósticos. El modelo de insumo-producción se utiliza para proporcionar tendencias a largo plazo para el modelo econométrico; y también para estabilizarlo.
	Buena a muy buena Muy buena a excelente Buena	Mala a buena Mala a buena Muy mala	No aplicable Buena a muy buena Buena a muy buena	No aplicable Buena a muy buena Buena a excelente
	Excelente	Buena	Regular	Buena
…ventas …ductos, …ilidades.	Pronósticos de ventas por clases de productos, pronósticos de utilidades.	Pronósticos de ventas por clases de productos.	Pronósticos de ventas de empresas y divisiones a sectores y subsectores industriales.	Ventas de empresa a sectores y subsectores industriales.
…rales …ara …s histó… …os obser… …e el …bles …ue se	Lo mismo que para la regresión	Se requieren varios años de datos para poder establecer relaciones entre estos índices y las ventas de la empresa.	Historial de diez o quince años. Magnitudes considerables de informes de flujos de productos y servicios dentro de una empresa (o economía) para cada año respecto al cual se desea análisis de insumo-producción.	Igual que para un promedio cambiante y para X-11.
	$5,000 + Sí	$5,000 Sí	$50,000 + No	$100,000 No
	2 meses +	Varias semanas	6 meses +	6 meses +
…n, …urray, …th …ions …c.,	Evans, *Macro-economic Activity Theory, Forecasting & Control* (New York, Harper & Row Publishers, Inc., 1969).	Publicaciones del Survey Research Center, Institute for Social Research, University of Michigan, y del Buró del Censo.	*Leontief, Input-Output Economics* (New York, Oxford University Press, 1966).	Evans & Preston, "Discussion Paper No. 138", Wharton School of Finance & Commerce, The University of Pennsylvania.

3. Box-Jenkins	4. X-11	5. Proyeccion de tendencias	1 Modelo de regresion
El "alisamiento de exponentes" es caso especial de la tecnica de Box-Jenkins La serie de tiempo se dota de un modelo matemático que es optimo en el sentido que asigna menos errores a la historia que los demas modelos Habrá que identificar el tipo de modelo, y entonces estimar sus parametros Aparentemente esta es la rutina estadistica mas precisa que poseemos en la actualidad, pero también es uno de los metodos más costosos y consumidores de tiempo.	Esta técnica, que fue desarrollada por Julius Shiskin del Buró del Censo, descompone una serie de tiempo en temporalidades, tendencias ciclicas y elementos irregulares Su uso principal es para el analisis detallado de series de tiempo (incluyendo la estimación de temporalidades), pero hemos ampliado sus usos al pronostico y la persecución de pistas y aviso, incorporandole otros metodos analiticos Utilizada en conjunto con conocimientos especiales, quizas resulte la técnica más efectiva para los pronosticos de plazo medio —tres meses a un año— y permite el pronostico de puntos criticos y la indicacion de la ocasion de eventos especiales.	Esta técnica hace qué la línea de tendencias encaje con una ecuación matematica y entonces la proyecta al futuro por medio de dicha ecuacion. Hay algunas variantes· el método de características angulares, el método de polinomios, el método de logaritmos y otros.	Esta establece relaciones funcionales entre las ventas y otras variables economicas, competitivas o internas, y estima una ecuacion, utilizando la tecnica de minimos cuadrados. El analisis de las relaciones es principalmente estadistico, aunque toda relacion se debera seleccionar para prueba con base racional.
Muy buena a excelente Mala a buena Muy mala	Muy buena a excelente Mala Muy mala	Muy buena Buena Buena	Buena a muy buena Buena a muy buena Mala
Regular	Muy buena	Mala	Muy buena
Control de producción e inventario de articulos de mucho volumen, pronosticos de flujo de efectivo.	Seguir pistas y dar avisos; hacer pronosticos de ventas de la empresa, division o departamento.	Pronosticos para productos nuevos (especialmente a plazo medio y largo).	Pronósticos de ventas por clases de productos, pronosticos de utilidades
Igual que para el promedio cambiante No obstante, en este caso, tener mas historial es muy ventajoso para la identificacion de modelos.	Al inicio, un minimo de tres años de historial Posteriormente, la historia completa.	Variará con la técnica que se use. No obstante es buena regla que al inicio se usen, como minimo, cinco años de datos anuales Posteriormente, la historia completa.	Historias trimestrales de varios años, para obtener relaciones buenas y significativas Es matematicamente necesario tener dos observaciones mas que el numero de variables independientes que se usen
$10 00 Sí	$10 00 No	Varía con la aplicación Sí	$100 Sí
1-2 días	1 día	1 día –	Depende de la capacidad para identificar las relaciones
Box-Jenkins, *Analisis, Pronosticos y Control de Series de Tiempo* (San Francisco, Holden-Day, Inc . 1970)	McLaughlin & Boyle, "Short-term Forecasting", AMA Association Booklet, 1968	Hadley *Introduction to Business Statistics* (San Francisco, Holden-Day, Inc., 1968); Oliver & Boyd, "Techniques of Production Control" Imperial Chemical Industries, 1964.	Clelland de Cani, Brown, Bush & Murray, *Basic Statistics with Business Applications* (New York, John Wiley & Sons, Inc., 1966).

...de panel	4. Pronóstico visionario	5. Analogía histórica	1. Promedio cambiante	2. Alisamiento de exponentes	3. Bo...
... basa ... de que ... serán [illegible] ... ores ...	Una profesía que hace uso de penetraciones, criterios y —cuando se puede— de hechos respecto a diferentes argumentos sobre el futuro. Se caracteriza por las conjeturas subjetivas y la imaginación. Generalmente los métodos que se utilizan no son científicos.	Este es un análisis comparativo de la introducción y el crecimiento de productos nuevos similares, en que se basa el pronóstico en patrones de similitud.	Cada punto del promedio cambiante de una serie de tiempo lo constituye el promedio aritmético o ponderado de cierto número de puntos consecutivos de la serie, en donde el número de puntos de los datos se escogen en forma tal que los efectos de las temporalidades o de las irregularidades, o de ambos, queden eliminados.	Esta técnica es similar a la del "promedio cambiante", excepto que se otorga mas peso a los puntos de datos más recientes. Descriptivamente, el pronóstico nuevo es igual al antiguo, más cierta proporción del error del pronóstico pasado. El "pronóstico adaptable" se parece bastante, excepto en que las temporalidades también se computan. Hay muchas variantes del alisamiento de exponentes: algunas son mas versátiles que otras, algunas son de computación mas compleja, y algunas requieren más tiempo de computadora.	El "... nente de la Jenki... po se mate... mo e... asign... histor... mode... identi... delo, sus p... temen... estadi... que p... actual... es un... mas e... midor
...ulo ...or	Mala Mala Mala Mala	Mala Buena a regular Buena a regular	Mala a buena Mala Muy mala	Regular a muy buena Mala a buena Muy mala	Muy b... Mala a... Muy m...
...ulas	Mala	Mala a regular	Mala	Mala	...egula...
... de ventas ...os a largo ... ventas de ... nuevos, pro- ... márgenes	Pronosticos de ventas a largo plazo y de ventas de productos nuevos, pronosticos de margenes.	Pronósticos de ventas a largo plazo y de ventas de productos nuevos, pronósticos de márgenes.	Control de inventario para artículos de bajo volumen.	Control de producción e inventarios, pronósticos de utilidades, y otros datos financieros.	Contro... inventa... de mu... pronos... efectiv...
...ación obte- ... panel de ... presenta en ... po ... ... llegar a ... por con- ... tambien se ... mínimo ... a ... cierto ... tiempo	Un grupo de argumentos posibles sobre el futuro, preparado por unos cuantos expertos a la luz de eventos del pasado	Historia de varios años de uno o mas productos.	Dos años de historiales de venta, como mínimo, si se encuentran presentes las temporalidades. Si no, menos datos. (Claro que mientras más historial haya, mejor). Deberá estipularse el promedio cambiante.	Igual que para el promedio cambiante.	Igual ... medio ... obstan... tener ... muy ... identi... modelo
	$100+ Sí	$1,000+ Sí	$.005 Sí	$.005 Sí	$10 00... Sí
+	1 semana+	1 mes+	1 día–	1 día–	1-2 día...
———	———	Spencer, Clark & Hoguet, *Business & Economic Forecasting* (Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1961).	Hadley, *Introduction to Business Statistics*, (San Francisco, Holden-Day, Inc., 1968).	Brown, "L... Risk in Inventory ...nates", HBR Julio-Agos... ...59, pág. 104.	Box-Je... *Pronos...* *Series...* Franci... Inc., ...

Técnica	1. Método Delphi	2 Investigación de mercados	3. Consenso de panel	4 I··
	Se interroga a un panel de expertos por medio de una secuencia de cuestionarios en los cuales las respuestas a un cuestionario se utilizan para producir el siguiente cuestionario De esta manera, todos los grupos de informes de los que disponen algunos expertos, pero otros no, se pasan a los que no los tenían, y eso permite que todos los expertos tengan acceso a toda la información para pronóstico Esta tecnica elimina el efecto de "arrastre de los demás" que suelen producir las opiniones mayoritarias.	El procedimiento sistemático, formal y consciente para producir y probar hipotesis respecto a mercados verdaderos.	Esta técnica se basa en la suposicion de que varios expertos serán capaces de producir un pronóstico mejor que una sola persona No existen secretos, y se estimula la comunicación Algunas veces ocurre que los factores sociales influyen en los pronosticos y por ello éstos no reflejan un consenso verdadero.	Una uso crite pued resp argu futu por l jetiv Gene dos son
	Regular a muy bueno Regular a muy bueno Regular a muy bueno	Excelente Bueno Regular a bueno	Malo a regular Malo a regular Malo	Ma Ma Mal Mal.
	Regular a bueno	Regular a muy bueno	Malo a regular	Mala
	Pronósticos de ventas a largo plazo y de ventas de productos nuevos, pronósticos de margenes	Pronósticos de ventas a largo plazo y de ventas de productos nuevos, pronósticos de márgenes.	Pronosticos de ventas de productos a largo plazo, y de ventas de productos nuevos, pronósticos de márgenes.	Pro larg vent nue de r
	Un coordinador emite la secuencia de cuestionarios, editando y consolidando las respuestas.	Como mínimo, dos grupos de informes a través de cierto periodo Se necesita una recopilación considerable de datos de mercado, obtenidos de cuestionarios, encuestas y análisis de series de tiempo de las variables del mercado.	La información obtenida en un panel de expertos se presenta en juntas de grupo, abiertamente, para llegar a pronosticos por consenso Aquí tambien se necesitan un minimo de dos informes a traves de cierto periodo de tiempo.	Un tos fut uno a l del
	$2,000+ Sí	$5,000+ Sí	$1,000+ Sí	$10 Sí
	2 meses+	3 meses+	2 semanas+	1 se
	North & Pyke, "*Probes of the Technological Future*", HBR Mayo Junio 1969, página 68.	Bass, King & Pessemeier, *Applications of the Sciences in Marketing Management* (New York, John Wiley & Sons, Inc., 1968).	———	

* Estas estimaciones se basan en nuestra propia experiencia, utilizando la siguiente configuración de máquinas un sistema IBM 360-40, 256 K, y un sistema de Comportamiento de Tiempo Univac 1108, junto con equipos mas pequeños como Compartimientos de Tiempo G.E. y equipos IBM 360-30 y 1130

Algunas técnicas adicionales para lograr mayor]

Hay ciertas aplicaciones que, si bien no están directamente relacionadas con los pronósticos del ciclo de vida de los productos, sí son importantes para el éxito de estos, por lo que las mencionaremos brevemente aquí para los lectores que tengan interes especial en ellas

Control de inventario

Si bien el metodo X-11 y los modelos econométricos o causales son procesos buenos para pronosticar las ventas totales de cierto número de articulos, no es económicamente factible utilizar estas tecnicas para el control de inventarios de artículos individuales.

Algunos de los requisitos que tendrá que cumplir la técnica de pronóstico que se use para fines de control de inventario y producción son los siguientes:

- No debe exigir el mantenimiento, en el banco de datos, de voluminosas historias de cada renglón, si esto puede evitarse.
- Las estimaciones deberán exigir el tiempo mínimo posible de computadora.
- La técnica deberá ser capaz de identificar las variaciones temporales y tomarlas en cuenta al pronosticar; y, de ser posible, deberá computar el significado estadístico de las temporalidades y eliminarlas cuando no sean importantes.
- Deberá ser capaz de hacer el ajuste adecuado de una curva de los datos más recientes, y adaptarlo rápidamente a los cambios de las tendencias y las temporalidades.
- Deberá ser aplicable a datos de muy variadas características.
- Deberá ser lo suficientemente versátil para que cuando tengan que considerarse varios cientos de articulos, haga el mejor trabajo general, aunque quizás no haga tan buen trabajo como otras técnicas respecto a un artículo determinado.

Una de las primeras técnicas que se desarrolló para cumplir estos criterios es la que se llama de *aislamiento de exponentes,* en la cual se otorga más peso a los puntos de datos más recientes que a los puntos de datos anteriores, y requiere muy poco almacenamiento de datos. Esta técnica es considerablemente superior a la técnica de promedios cambiantes, que no se adapta tan fácilmente a los cambios de las tendencias y necesita un volumen notable de almacenamiento de datos.

El pronóstico adaptivo tambien cum terios. Es una extension del alisamiento tes, que computa las temporalidades y a na un pronostico mas preciso que el q tenerse mediante el alisamiento de exp do ocurre alguna temporalidad notoria

Hay algunas variantes de los métodos co adaptivo y del alisamiento de expo todas tienen en comun la característica nos en sentido descriptivo) de que el pror es igual al pronóstico antiguo, más c del pronostico más reciente.

Casi todas las tecnicas estadísticas qu durante nuestra exposicion de la fase tenido, menos la tecnica X-11, hay qu como casos especiales de la técnica de de reciente desarrollo. Esta técnica prec más tiempo de computadora para ca en estos momentos también exige más mana. Hasta que se desarrollen métod tación más breves, sera muy limitado área de control de inventarios y de pro

Pero la técnica de Box-Jenkins tiene importante que no poseen las demás te ticas: su capacidad para incorporar i ciales (por ejemplo, cambios de precio nómicos) al pronóstico.

El motivo por el que la técnica de la X-11 son más costosas que las otras dísticas, es que el usuario tendrá que s terminada versión de la técnica, o se v estimar valores óptimos de los divers de los modelos, o quizás tenga que ha sas. Por ejemplo, el tipo y la longitud cambiante que se use lo determinarán y otras características de los datos qu mano.

Esperamos que en el futuro próximo métodos mejores de computadora, p costos disminuyan significativamente.

Pronósticos de grupos de

En algunos casos cuando los métodos proporcionan precisión aceptable resp

es para lograr mayor precisión

dencias y necesita un volumen notablemente mayor de almacenamiento de datos.

El pronóstico adaptivo también cumple estos criterios. Es una extensión del alisamiento de exponentes, que computa las temporalidades y así proporciona un pronóstico más preciso que el que puede obtenerse mediante el alisamiento de exponentes cuando ocurre alguna temporalidad notoria.

Hay algunas variantes de los métodos de pronóstico adaptivo y del alisamiento de exponentes; pero todas tienen en común la característica (cuando menos en sentido descriptivo) de que el pronóstico nuevo es igual al pronóstico antiguo, más cierta fracción del pronóstico más reciente.

Casi todas las técnicas estadísticas que describimos durante nuestra exposición de la fase del ritmo sostenido, menos la técnica X-11, hay que clasificarlas como casos especiales de la técnica de Box-Jenkins, de reciente desarrollo. Esta técnica precisa de mucho más tiempo de computadora para cada artículo, y en estos momentos también exige más atención humana. Hasta que se desarrollen métodos de computación más breves, será muy limitado su uso en el área de control de inventarios y de producción.

Pero la técnica de Box-Jenkins tiene un rasgo muy importante que no poseen las demás técnicas estadísticas: su capacidad para incorporar informes especiales (por ejemplo, cambios de precios y datos económicos) al pronóstico.

El motivo por el que la técnica de Box-Jenkins y la X-11 son más costosas que las otras técnicas estadísticas, es que el usuario tendrá que seleccionar determinada versión de la técnica, o se verá obligado a estimar valores óptimos de los diversos parámetros de los modelos, o quizás tenga que hacer ambas cosas. Por ejemplo, el tipo y la longitud del promedio cambiante que se use lo determinarán la variabilidad y otras características de los datos que se tengan a mano.

Esperamos que en el futuro próximo se desarrollen métodos mejores de computadora, para que estos costos disminuyan significativamente.

Pronósticos de grupos de artículos

En algunos casos cuando los métodos estadísticos no proporcionan precisión aceptable respecto a artículos individuales, se puede obtener la precisión que se desea creando grupos de artículos, siempre que esto reduzca la cantidad relativa de incertidumbre que contengan los datos.

Los pronosticadores suelen usar este método para obtener precisión aceptable en situaciones donde resulta virtualmente imposible obtener pronósticos precisos de artículos individuales.

Demandas a largo plazo

También hay veces que resulta posible pronosticar con precisión las demandas a largo plazo, aunque las oscilaciones a corto plazo sean tan caóticas que no puedan pronosticarse con precisión. Encontramos este caso al pronosticar artículos individuales de la línea de cinescopios para televisores a color, donde las demandas que se hacen de la CGW fluctúan ampliamente de acuerdo con los programas de los clientes. En estos casos resulta sumamente difícil lograr los niveles de utilidad deseados si la programación a corto plazo ha tomado en cuenta los objetivos a largo plazo.

Por lo tanto, son precisos dos tipos de pronósticos:

- Uno que funcione bastante bien para pronosticar la demanda de artículos individuales que ocurrirá durante los próximos tres a seis períodos.
- Otro que pronostique con más precisión la demanda total de cinescopios para de tres a trece períodos futuros.

Por este motivo, y debido a que las técnicas de bajo costo de pronóstico, tales como el alisamiento de exponentes y el pronóstico adaptable, no permiten la incorporación de informes especiales, también es ventajoso usar alguna técnica más sofisticada, como la X-11, para grupos de artículos.

Se aplica esta técnica para analizar y pronosticar los índices totales de las empresas, y también para identificar cualesquiera peculiaridades y cambios repentinos de las tendencias o los patrones. Entonces se incorpora esta información a los pronósticos de artículos, haciendo ajustes, según sea necesario conforme a los mecanismos alisadores, las temporalidades, y factores similares. Cuando las circunstancias son tan fluidas como éstas, frecuentemente hay que desarrollar también algún rasgo de excepción manual que permita hacer ajustes basados en el criterio humano.

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

PLANEACION Y CONTROL DE LA PRODUCCION

PLANEACION Y CONTROL DE INVENTARIOS

ING. ARTURO DURAN PEÑA

SEPTIEMBRE DE 1977.

TEMARIO:

3.1 OBJETIVO DE LA SESION

3.2 TERMINOS USUALES

3.3 CRITERIOS DE DECISION

3.4 PRINCIPALES TIPOS DE INVENTARIOS

3.5 LA FUNCION DEL CONTROL DE INVENTARIOS EN LA EMPRESA

3.6 CASOS

3.6.1 PLANEACION DE LA PRODUCCION

3.6.2 A B C

* LOTE ECONOMICO

3.1 OBJETIVO DE LA SESION

MOSTRAR AQUELLOS TIPOS DE CONTROL DE INVENTARIOS USUALES, SU APLICACION EN LA PRACTICA Y AQUELLOS PROBLEMAS LIGADOS A LA IMPLANTACION DE UN SISTEMA DADO; MEDIANTE DISCUSION DE GRUPO Y AYUDAS VISUALES QUE PERMITAN A LOS ASISTENTES SU - - PARTICIPACION ACTIVA.

3.2 TERMINOS USUALES

3.2.1 INVENTARIO.- ES AQUEL RECURSO OCIOSO DE CUALQUIER TIPO, CLASE O MATERIA; SIEMPRE QUE ESTE RECURSO TENGA UN VALOR ECONOMICO.

(Discusión)

3.2.2 ¿ QUE ESTUDIA LA TEORIA DE INVENTARIOS?

LA DETERMINACION OPTIMA DE ESTE RECURSO OCIOSO Y SU PLANEACION ANTICIPADA QUE PERMITA QUE SU COSTO DE AMORTIZACION SEA MENOR QUE SU COSTO EN EL PASADO.

(Discusión)

3.2.3 QUE OBJETO TIENE UN INVENTARIO?

3.2.3.1 EVITA FALTANTES EN EL PRODUCTO O SERVICIO PROPICIADOS POR LA FALTA DE SINCRONIZACION, EN ALGUNA DE LAS ACCIONES INDUSTRIALES DE TRAMITE.

3.2.3.2 AMORTIGUA LA IMPRECISION DE LOS PRONOSTICOS OPERANDO EL BANCO COMO COLCHON PRECAUTORIO.

3.2.3.3 EN LAS ETAPAS DE FLUCTUACION DE PRECIOS ES UN ELEMENTO ESPECULATIVO QUE PUEDE OTORGAR UNIDADES ADICIONALES.

3.2.4 ¿ QUE SE ENTIENDE POR CRITERIO DE DECISION?

ES EL METODO EMPLEADO AL ELEGIR DE UN GRUPO DE ALTERNATIVAS (ESTRATEGIA) AQUELLA QUE SE APROXIMA AL RESULTADO PROBABLE DESEADO.

3.2.5 COSTO DE OPORTUNIDAD

ES AQUEL COSTO ORIGINADO POR UNA DECISION INADECUADA EN EL AMBITO DE LA DEMANDA REAL.

3.3 CRITERIOS DE DICISION

3.3.1 CRITERIO MINIMAX

POSTULADO POR ABRAHAM WALD Y CONSIDERADO COMO EL TIPO DE CRITERIO CONSERVADOR CUYO PLANTEAMIENTO PUEDE MENCIONARSE EN LOS SIGUIENTES TERMINOS:

3.3.1.1 CONSIDERE TODAS LAS ESTRATEGIAS DISPONIBLES ARREGLADAS MATRICIALMENTE Y EXPRESADA EN TERMINOS DE UTILIDAD.

3.3.1.2 DETERMINEMOS PARA CADA ESTRATEGIA EL PEOR DE LOS RESULTADOS QUE PODEMOS ESPERAR.

3.3.1.3 ELIJA AQUELLA ESTRATEGIA QUE TIENE EL VALOR MAXIMO DENTRO DE EL MINIMO ANTERIOR.

3.3.2 CRITERIO DEL PAGO DE LA PENA MENOR.

PLANTEADO POR LEONARD J. SAVAGE Y CONSIDERA QUE EN LA TOMA DE DECISIONES LO QUE SE DESEA REALMENTE ES MINIMIZAR LA PENA DESPUES DE QUE LO PROBABLE YA FUE POSIBLE; LO CUAL SE LOGRA.

3.3.2.1 ESTRUCTURANDO LA MATRIZ DE COSTOS DE OPORTUNIDAD PARA LAS POSIBLES ALTERNATIVAS.

3.3.2.2 APLICANDO EL CRITERIO MINIMAX YA ENUNCIADO.

3.3.3 CRITERIO DE LA INCERTIDUMBRE AL RIESGO Ó DE "BAYES"

EL CUAL CONSIDERA QUE SIEMPRE ES POSIBLE PASAR DE UN ESTADO DE INCERTIDUMBRE A UNO DE RIESGO.

LO ANTERIOR SE REALIZA ASIGNANDO PROBABILIDADES IGUALES A CADA DEMANDA DE LA ESTRATEGIA Y ELIGIENDO AQUELLA QUE TENGA EL RESULTADO PROBABLE MAYOR

3.4 PRINCIPALES TIPOS DE INVENTARIO (Discusión)

1.- Costo unitario de manufactura --- (compra) .
   - a) Constante .
   - b) Variable .

2.- Costo unitario de mantener inventario por una unidad de tiempo .
   - a) Constante .
   - b) Variable .

3.- Costo por demanda insatisfecha .
   - a) Constante .
   - b) Variable .

4.- Demanda
   - A) Conocida
     - a) Constante
     - b) Variable
   - B) Estimada

5.- Cantidades involucradas .
   - a) Unidades discretas .
   - b) Cantidades contínuas .

6.- Distribución de retiros del inventario en el tiempo .
   - A) Contínua .
     - a) Tasa Cte.
     - b) Tasa Var.
   - B) Discontínua
     - a) Tasa Cte.
     - b) Tasa Var.

7.- Tiempo de fabricación de (surtido) .
   - a) Virtualmente cero
   - b) Positivo

8.- Tiempo entre dos periódos de fabricación .
   - A) Conocido
     - a) Constante
     - b) Variable
   - B) Estimado
     - a) Constante
     - b) Variable

9.- Cantidades fabricadas
- A) Discretas .
  - a) Constante .
  - b) Variable .
- B) Contínua .
  - a) Constante .
  - b) Variable .

10.- Distribución de la fabricación en el tiempo .
- A) Contínua .
  - a) Tasa Cte.
  - b) Tasa Disc.
- B) Discontínua .
  - a) Tasa Cte.
  - b) Tasa Disc.

3.4 PRINCIPALES TIPOS DE INVENTARIOS (HORIZONTE)

CERTEZA

RIESGO

INCERTIDUMBRE

ESTATICO
(1 PEDIDO)

CONOCIMIENTO PARCIAL O COMPLETO DE SU DISTRIBUCION DE DEMANDA

DESCONOCIMIENTO TOTAL DE SU DISTRIBUCION.

CRITERIO
DE
DECISION

TIEMPO FIJO P

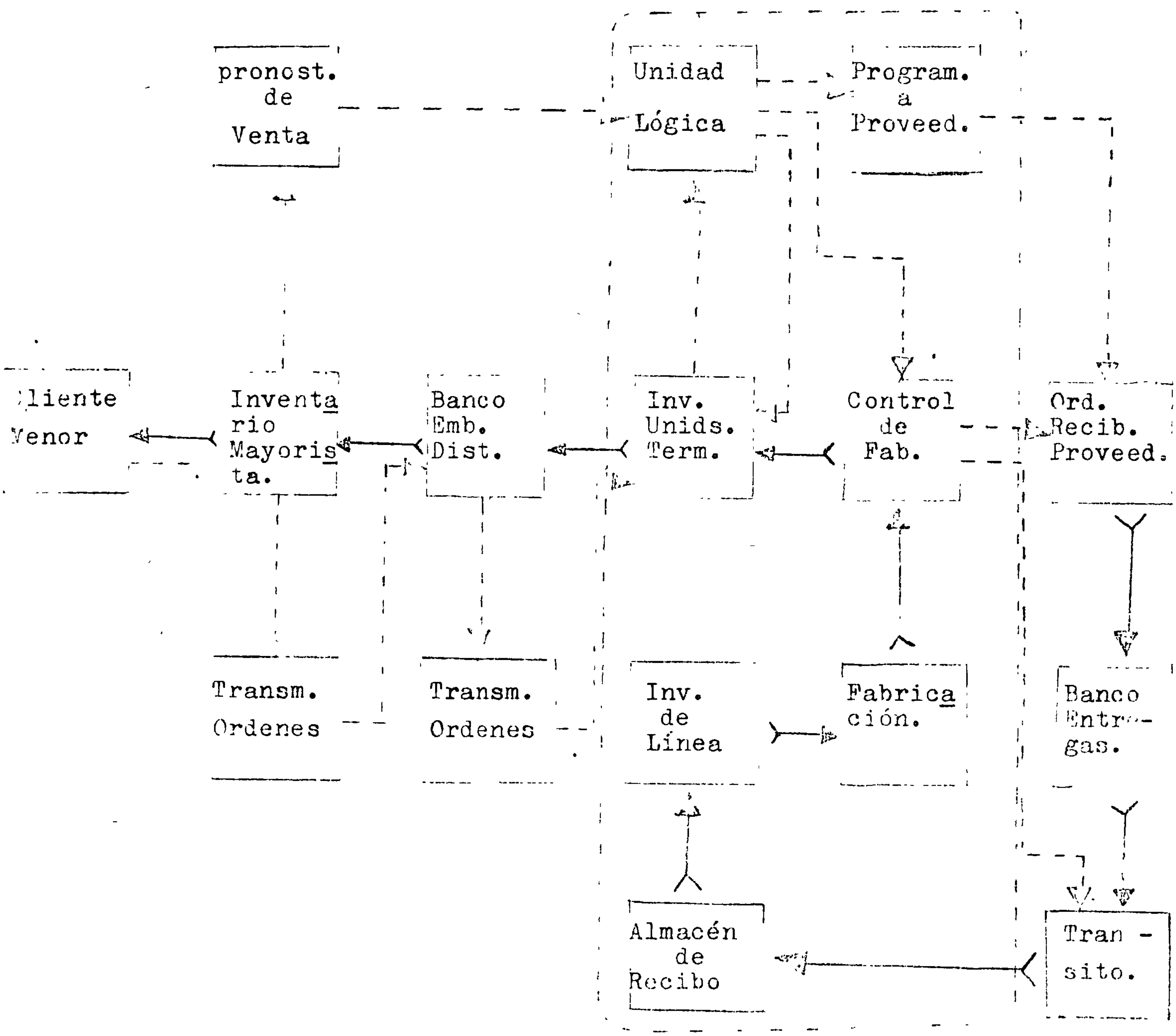
CANT. FIJA Q

POLITICA DE
INVENTARIOS

A B C

DINAMICO
PEDIDOS

3.5 ESQUEMA DE LA FUNCION DEL CONTROL DE INVENTARIOS.
(Discusión)



3.6.1 PLANEACION DE LA PRODUCCION

MODELO ORIGINADO POR WAGNER Y WHITIN COMO UNA VERSION DEL LOTE ECONOMICO DE TIPO DINAMICO EL CUAL CONSIDERA LOS SIGUIENTES TIPOS DE COSTOS.

ESTE MODELO SUPONE QUE LAS DEMANDAS DE CADA - UNO DE LOS PERIODOS PUEDE SER DIFERENTE; CUANDO ESTE ES EL CASO, LAS FORMULAS ANTERIORES PIERDEN SU VALIDEZ

SUPOSICIONES:

1.- UN SOLO PRODUCTO

2 - NO SE PERMITEN INCUMPLIMIENTOS DE LA DE -- MANDA

3.- SE PLANEA PARA PERIODOS IGUALES

4.- NO EXISTE INVENTARIO AL INICIARSE LA DEMANDA.

5 - PRODUCCION INSTANTANEA

NOTACION:

a_t = CANTIDAD REQUERIDA EN EL PERIODO t (CONOCI - DA).

X_t = CANTIDAD PRODUCIDA (ORDENADA) EN EL PERIO - DO t (VARIABLE DE DECISION).

I_t = INVENTARIO QUE ENTRA AL PERIODO t PROVENIENTE DEL PERIODO(t_{-1})

C_t (X_t) = COSTO TOTAL DE PRODUCIR (ORDENAR) X_t -- UNIDADES PARA EL PERIODO t.

i_t = COSTO DE MANTENER UNIDADES EN EL INVENTARIO QUE PASARA AL PERIODO (t_{+1}).

OBJETIVO MINIMIZAR EL COSTO TOTAL.

$$f_t^*(I_t) = \min_{\substack{x_t \geq a_t - I_t \\ x_t \geq 0}} \left\{ C_t(x_t) + i_t\,(I_t + x_t - a_t) + f_{t+1}(I_t + x_t - a_t) \right\} \quad \ldots(\alpha)$$

donde I_t puede tomar cualquier valor entre cero y $\sum_{i=t}^{n} a_i$, es decir $0 \leq I_t \leq \sum_{i=t}^{n} a_i$

Suponiendo que $C_t(x_t)$ es una función creciente de x_t entonces $I_{n+1} = 0$ es permisible y por lo tanto óptima. (por el teorema anterior).

Así mismo :

$$f_{n+1}^*(I_{n+1}) = 0$$

Básicamente en lo que consiste el procedimiento es en hacer $t = n$, asignar a I_t todos los valores posibles desde cero hasta $\sum_{i=t}^{n} a_i$. En forma de tabla tendremos :

I_t	$f_t^*(I_t)$	x_t^*
0		
1		
2		
$\sum_{i=1}^{n} a_i$		

Tabla 1

donde $f_t^*(I_t)$ es el valor definido en (α) y $x_n^* = a_n - I_n$

Para encontrar $f_t^*(I_t)$ nos valemos de la siguiente tabla (tabla 2)...

I_t \ x_t	0	1	.....	$\sum_{i=1}^{n} a_i$	x_t^*
0					$f_t^*(0)$
1					$f_t^*(1)$
2					
$\sum_{i=1}^{n} a_i$					$f_t^*(\sum_{i=1}^{n} a_i)$

Tabla 2

Una vez encontrados los anteriores valores continuamos en la misma forma [illegible] :

$$t = n \to n-1 \to n-2 \quad \dots\dots\dots \to 3 \to 2 \to 1$$

Ejemplo.

Datos:

Período	a_t	K_t	c_t	i_t
1	3	2.0	1.0	0.20
2	2	2.0	1.0	0.20
3	3	2.0	1.0	0.20
4	2	2.0	1.0	0.20

$n = 4$

Inv. inicial = o

Inv. final = 0

Solución .-

Ya vimos que :

$$f_t^*(I_t) = \min_{\substack{x_t \geq a_t - I_t \\ x_t \geq 0}} \left\{ C_t(x_t) + \underbrace{i_t(I_t + x_t - a_t)}_{C} + \underbrace{f_{t+1}(I_t + x_t - a_t)}_{D} \right\}$$

donde:

$$C_t(x_t) = \underbrace{K_t}_{A} + \underbrace{c_t x_t}_{B}$$

haciendo $t = n = 4$ tendremos :

Período 4.-

I_4	$f_4^*(I_4)$	x_4^*
0	4	2
1	3	1
2	0	0

I_4 \ x_4	0	1	2	x_4^*
0	–	–	4	2
1	–	3	–	1
2	0	–	–	0

(A) (B) (C) (D)

(1) 2 + 1(2) + 0 + 0 = 4

(2) 2 + 1(1) + 0 + 0 = 3

(3) 0 + 0 + 0 + 0 = 0

Haciendo t = 3

Período 3.-

I_3	$f_3(I_3)$	x_3
0	7.4	5
1	6.4	4
2	5.4	3
3	4.0	0
4	3.2	0
5	0.4	0

I_3 \ x_3	0	1	2	3	4	5	x_3
0	-	-	-	9	9.2	7.4	5
1	-	-	8	8.2	6.4	-	4
2	-	7	7.2	[illegible]	-	-	3
3	4	6.2	[illegible]	-	-	-	0
4	3.2	3.4	-	-	-	-	0
5	0.4	-	-	-	-	-	0

A B C D

(1) 2+1(3) + 0 + 4 = 9

(2) 2+1(4) +0.2(1)+ 3 = 9.2

(3) 2+1(5) +0.2(2)+ 0 = 7.4

(4) 2+1(2) + 0 + 4 = 8

(5) 2+1(3) +0.2(1)+ 3 = 8.2

(6) 2+1(4) +0.2(2)+ 0 = 6.4

(7) 2+1(2) + 0 + 4 = 7

(8) 2+1(2) +0.2(1)+ 3 = 7.2

(9) 2+1(3)+0.2(2) + 0 = 5.4

(10) 0+ 0 + 0 + 4 = 4

(11) 2+1(1)+0.2(2) + 3 = 6.2

(12) 2+1([illegible])+0.2([illegible]) + 0 = [illegible]

(13) 0+ 0 +0.2(1) + 3 = 3.2

(14) 2+1(1)+0.2(2) + 0 = 3.4

(15) 0+ 0 +0.2(2) + 0 = 0.4

Haciendo t = 2

Período 2.-

I_2	$f_2(I_2)$	x_2
0	10.4	7
1	9.4	6
2	7.4	0
3	6.6	0
4	5.8	0
5	4.6	0
6	4.0	0
7	1.4	0

I_2 \ x_2	0	1	2	3	4	5	6	7	x_2^*
0	--	--	11.4	11.6	11.8	11.6	12.0	10.4	7
1	-	10.4	10.6	10.8	10.6	11.0	9.4	-	6
2	7.4	9.6	9.8	9.6	10	8.4	-	-	0
3	6.6	8.8	8.6	9.0	7.4	-	-	-	0
4	5.8	7.6	8.0	6.4	-	-	-	-	0
5	4.6	7.0	5.4	-	-	-	-	-	0
6	4.0	4.4	-	-	-	-	-	-	0
7	1.4	-	---	-	-	-	---	-	0

Para este período solo calcularemos 3 valores, los demás deberán comprobarlos el alumno.

$$(1) \quad 2 + 1(2) + .2(3) + (4) = 8.6$$

$$(2) \quad 0 + 1(0) + .2(3) + 4 = 4.6$$

$$(3) \quad 0 + 1(0) + .3(5) + .4 = 1.4$$

Haciendo t = 1

Período 1.- (I_1 = 0 solamente).

I_1	$f_1(I_1)$	x_1	I_1 \ x_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	x_1
0	14.80	5ó10	0	-	-	-	15.4	15.6	14.8	15.3	15.6	15.6	16.2	14.8	5ó10

Vemos que existen dos políticas que conducen a un costo mínimo

Política (A)

$x_1^* = 5$
$x_2^* = 0$
$x_3^* = 5$
$x_4^* = 0$

Política (B)

$x_1^* = 10$
$x_2^* = 0$
$x_3^* = 0$
$x_4^* = 0$

3.6.2 CASO A B C

DETERMINAR EL COSTO TOTAL DEL MANEJO DE UN INVENTARIO DE 30 PRODUCTOS (ENSAMBLES Y/O MATERIA PRIMA)CON UNA POLITICA DE CONTROL DE CLASE 3 (A, B, C) SI LA FRECUENCIA DE LOS PERIODOS ES 1 MES, 2 MESES, 3 MESES Y SE TIENE UN COSTO DE CAPITAL POR INVENTARIO DE 24% ANUAL ($c\alpha$) Y UN COSTO UNITARIO DE COMPRA DE 300 PESOS (F) POR PEDIDO.

3.6.2.1 NOMENCLATURA

CLAVE	DESCRIPCION
α	COSTO DE CAPITAL
C 1	COSTO TOTAL ALMACEN
C 2	COSTO DE ADQUIRIR
C 3, K	COSTO DE MANTENER EL INVENTARIO
D	DEMANDA
F	COSTO UNITARIO DE COMPRA
$\hat{P}$	PERIODO
Q	LOTE ECONOMICO
U	PRECIO UNITARIO DEL ARTICULO
N	CANTIDAD DE PARTES DEL GRUPO (N=30)
UV	VALOR DE UTILIZACION
R	CANTIDAD DE ENTREGA ANUALES
$S._S$	COLCHON DE SEGURIDAD
$S._S\$$	" " " (PESOS)
E.N.	EXISTENCIA NORMATIVA

3.6.2.2 DESARROLLO

1 DETERMINE EL VALOR DE USO O DE UTILIZACION POR CADA NUMERO DE PARTE D x U (TABLA HOJA Nº 17)

2 LISTE EN ORDEN DECRECIENTE DE VALOR DE UTILIZACION UV (TABLA HOJA Nº 18)

3 PARA ESTE CASO SE FIJA LA FRECUENCIA POR ESTRATO EN FUNCION DE LOS TIEMPOS DE REACCION DEL SISTEMA Y DE LOS MONTOS A CONTROLAR

F_A = 1 MES

F_B = 2 MESES

F_C = 3 MESES

4 SE CALCULA EL LIMITE DE CLASE CONSIDERANDO QUE LA EXISTENCIA PROMEDIO ES 1/2 UV C)($^a/12$) Y EL COSTO DE ADQUIRIR C2 = $^1/$ (F) O SEA EL COSTO DE CADA PEDIDO (F) POR LA FRECUENCIA CON QUE SE PIDE 1/ .

5 CALCULADO EL PUNTO 4 PARA CADA ARTICULO EN C_1

Y C_2 SE INTEGRA PARA FORMAR EL COSTO DE MANTENER EL INVENTARIO (C_3) O SEA $C_3 = C_1 + C_2$ PERO $C_1 = (1/2 \text{ UV } (f) \frac{\&}{12}$ Y $C_2 = (\frac{1}{f})$ (F) QUE SI LOS IGUALAMOS

(I) - - - - $C_3 = \frac{1}{2}$ UV (f) $\frac{\&}{12} + \frac{1}{f}$ (F) LO QUE NOS PERMITE VER QUE SI SE INCREMENTA EL COSTO DE ALMACEN SE DECREMENTA EL COSTO DE ADQUIRIR POR EFECTO DIRECTO DE LA FRECUENCIA Y DEL PERIODO.

CON LO ANTERIOR SI IGUALAMOS LOS C_3 EN (I) PARA CADA FRECUENCIA TENDREMOS:

C_{3A} = C_{3B} QUE SIMPLIFICANDO NOS LLEVA

A:

$$UV = \frac{24F}{\&} \frac{1}{f_A \ f_B}$$

LISTA DE PARTES

ARTICULO	D. CONSUMO ANUAL		U COSTO ESTANDAR UNITARIO EN $	UV VALOR UTILIZACION $
1	90,000	pzas	1.00	$ 90,000
2	2,000	Kg.	2.00	4,000
3	2,657	m.	3.00	8,000
4	130,000	m^2	1.00	130,000
5	600	l	5.00	3,000
6	10,000	pzas	4.00	40,000
7	23,330		3.00	70,000
8	2,000		1.00	2,000
9	32,500		2.00	65,000
10	160		5.00	800
11	7,500		8.00	60,000
12	70		10.00	700
13	50,000		5.00	250,000
14	250		4.00	1,000
15	6,660		3.00	20,000
16	150		4.00	600
17	10,000		8.00	80,000
18	120		5.00	600
19	6,000		10.00	60,000
20	80		5.00	400
21	60,000		3.00	180,000
22	250		2.00	500
23	5,000		2.00	10,000
24	300		1.00	300
25	50,000		1.00	50,000
26	100		2.00	200
27	714		7.00	5,000
28	17		6.00	100
29	1,167		6.00	7,000
30	29		7.00	203

N 30

LISTA DE PARTES
CLASIFICADA POR VALOR CRECIENTE

ARTICULO	UV VALOR DE UTILIZACION	UV Acum. VALOR DE UTILIZACION ACUMULADO
13	250,000	250,000
21	180,000	430,000
4	130,000	560,000
1	90,000	650,000
17	80,000	730,000
7	70,000	800,000
9	65,000	865,000
11	60,000	925,000
19	60,000	985,000
25	50,000	1'035,000
6	40,000	1'075,000
15	20,000	1'095,000
23	10,000	1'105,000
3	8,000	1'113,000
29	7,000	1'120,000
27	5,000	1'125,000
2	4,000	1'129,000
5	3,000	1'132,000
8	2,000	1'134,000
14	1,000	1'135,000
10	800	1'135,800
12	700	1'136,500
16	600	1'137,100
18	600	1'137,700
22	500	1'138,200
20	400	1'138,600
24	300	1'138,900
26	200	1'139,100
30	200	1'139,300
28	100	1'139,400

QUE SUSTITUYENDO CON LOS VALORES DE CASO SE OBTIENE:

$$UV = \frac{24 \times 300}{0.24} \quad (12) = 360000$$

COMO LA FRECUENCIA ES 1 EN A, 2 EN B, 3 EN C ENTONCES LOS LIMINTES DE CLASE SERAN :

$$\text{LIM. A B} = \frac{360{,}000}{1 \times 2} = 180{,}000$$

$$\text{LIM. B C} = \frac{360{,}000}{2 \times 3} = 60{,}000$$

CON LO QUE LOS LIMITES QUEDAN :

$A \geq 180,000$, $B \geq 60,000$ Y.

$C < 60,000$

(LLENAR EN TABLA)

TABLA DE CALCULO

C L A S E

CONCEPTO	A	B	C	TOTAL
LIMITE DE CLASE	180,000	60,000	60,000	
ARTICULOS QUE CONTIENE CADA CLASE	2	7	21	30
UV ANUAL	430,000	555,000	154,400	1'139,400
UV MES	36,000	46,000	13,000	95,000
RECEPCIONES ANUALES	12	6	4	
C 1	7,200	12,600	25,200	45,000
S S	3	2	1	
S S $	108,000	92,000	13,000	213,000
EN	126,000	115,000	29,500	270,000
C 2	30,400	27,600	7,050	65,050

LOTE ECONOMICO ESTATICO.

~~F2-20~~ ANEXO HOJA 1

I.- DEMANDA DETERMINISTICA. (ESTATICO)

1.1 Lotes Económicos.- Cantidad económica de fabricación es aquel tamaño de la orden que minimice el costo de fabricar y mantener un artículo en inventario.

Modelo 1.1.I.-

Se debe suministrar R unidades durante el -- tiempo T a una tasa uniforme constante de demanda " a " por unidad de tiempo; de aquí que la demanda sea fija y conocida.

Sabemos que los artículos son producidos - - (ordenados) en igual cantidad Q cada vez.

Suposiciones:

a) Un solo producto.

b) Demanda constante conocida $a = R/T$

c) No se permiten incumplimientos de demanda.

d) Producción instantánea.

Costos a considerar:

a) Costo de puesta en marcha = K (cargado al principio del período).

b) Costo de producción = C $/unidad.

c) Costo de mantener inventario = h $/unid. x unid. tiempo.

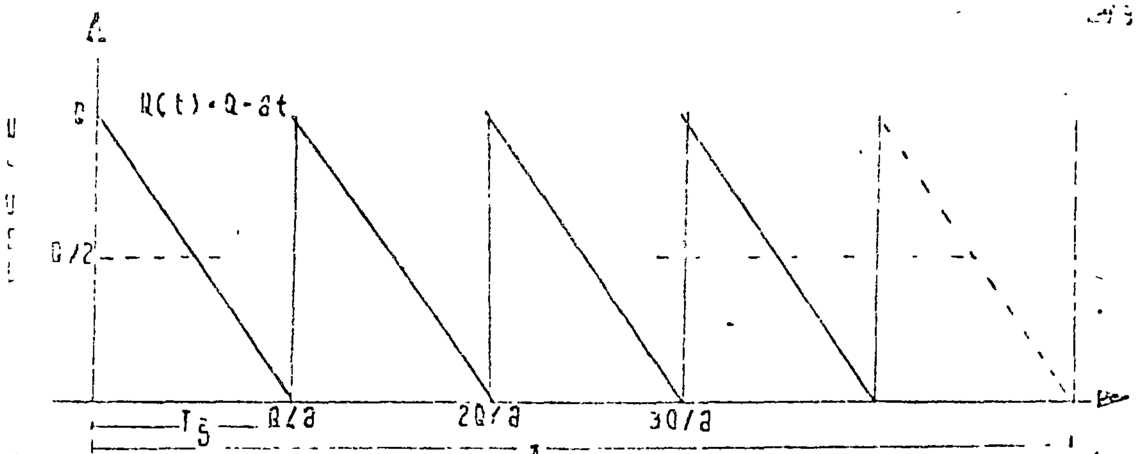
El problema consiste en determinar:

* El tiempo t_s entre corrida y corrida de producción (t_s = constante debido a que la demanda es constante.).

* Cuantas unidades Q deberán ser fabricadas en cada corrida.

En nuestro problema los datos son K,c,h,R,T. Debemos encontrar Q, t_s , cuyo objetivo es -- minimizar el costo total de C.

Lo anterior podemos representarlo de la sigte. forma



El número de corridas que debemos usar durante T será : R/Q.
también: $t_s = \frac{T}{R/Q} = \frac{QT}{R} = \frac{Q}{a}$; y $Q/2$ = inv. promedio durante t_s.

El costo de fabricación será: $\begin{cases} 0 & \text{si } Q = 0 \\ K + cQ & \text{si } Q > 0 \end{cases}$

Los costos de almacenamiento serán $h \times \frac{Q}{2} \times \frac{Q}{a} = \frac{hQ^2}{2a}$

De lo anterior obtenemos un costo por período $K + cQ + \frac{hQ^2}{2a}$ ..(1)

y un costo por unidad de tiempo $C = \frac{K + cQ + hQ^2/2a}{Q/a} = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{hQ}{2}$ ..(2)

y el valor que minimiza C se obtiene de: $dC/dQ = 0$

$$dC/dQ = -aK/Q^2 + h/2 = 0$$

por lo tanto:

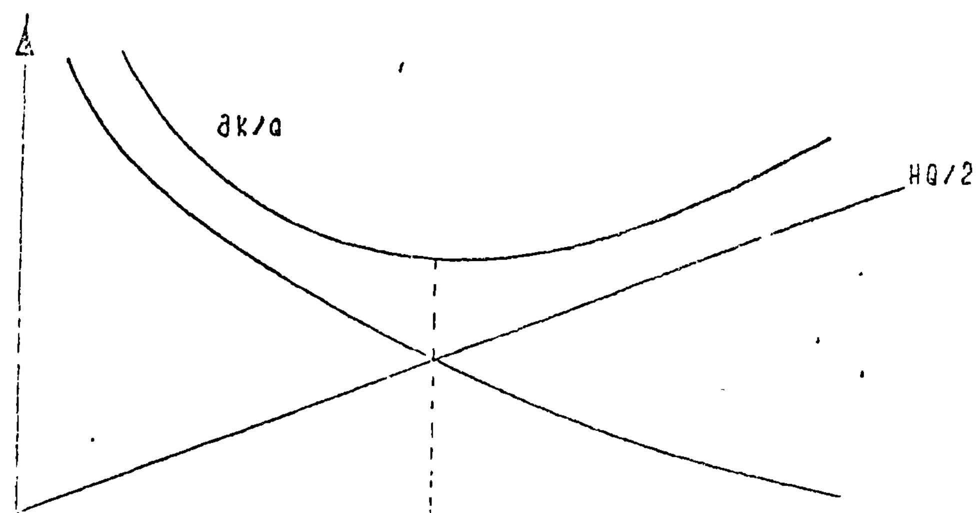
(3) $\boxed{Q^* = \sqrt{2aK/h}}$

así mismo:

(4) $\boxed{t_s = Q^*/a = \sqrt{2K/ah}}$

sustituyendo en la ecuación (2). $C^* = aK/Q^* + hQ^*/2 + ac$

$$= aK/\sqrt{2aK/h} + h\sqrt{2aK/h}/2 + ac = \sqrt{aKh/2} + \sqrt{aKh/2} + ac = \sqrt{2aKh} + ac \quad \boxed{\$/\text{unid tpo}}$$



* ANEXO HOJA

Vemos que el tiempo (ac) = constante podría [illegible] de nuestro modelo y de hecho muchos autores lo [illegible] y lo llaman el C R M (costo relevante mínimo).

$$(5)\ CRM^* = C^* - ac = \sqrt{2aKh} \quad \$/\text{ unidad de tiempo}$$

Ejemplo:- Un fabricante debe suministrar a un cliente 24000 [illegible] por año, esta demanda es fija y conocida [illegible] cliente no tiene espacio de almacenamiento, el fabricante [illegible] el suministro de un día cada día, si falla en las entregas pierde el cliente y quizá hasta el negocio (costo de demanda no satisfecha es igual a ∞). El costo de mantener el inventario es de $ 0.10 por unidad por mes y el costo de puesta en marcha es de $ 350

Encontrar el tamaño óptimo Q^* de cada corrida, el período correspondiente t_s, y el costo relevante mínimo total por año.

R = 24000 unidades

T = 12 meses

h = $ 0.10 por unidad por mes.

K = $ 350 por corrida de producción.

$a = \frac{R}{T} = 24000/12 = 2000$ unidades por mes.

Substituyendo en la ecuación (3).

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}} \quad \sqrt{\frac{2 \times 2000 \times 350}{0.10}} = \sqrt{14 \times 10^6} = 3740 \text{ Unid.}$$

de la ecuación (4).

$$t_s^* = \sqrt{\frac{2K}{ah}} = \sqrt{\frac{2 \times 350}{2000 \times 0.10}} = \sqrt{\frac{700}{200}} = 1.87 \text{ meses.}$$

también $t_s^* = \frac{Q^*}{a} = \frac{3740}{2000} = 1.87$ meses.

$$CRM = \sqrt{2aKh} = \sqrt{2 \times 2000 \times 350 \times 0.1} = \sqrt{[illegible]} = 374.[illegible]$$

[illegible]

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

PLANEACION Y CONTROL DE LA PRODUCCION

PLANEACION Y CONTROL DE LA
PRODUCCION

M. en C. JUAN BUENO ZIRION

SEPTIEMBRE-OCTUBRE, 1977

2.- PROGRAMAS MAESTROS DE PRODUCCION.

Como una introducción al problema de la programación de la producción tomamos los datos del ejemplo siguiente.

Mes (1)	Producción en el mes. (2)	Requerida Acumulada. (3)	Días de en el mes. (4)	Producción acumulada. (5)	Requerimientos diarios (2) y (4). (6)
Ene.	400	400	22	22	18.18
Feb.	510	910	18	40	28.33
Mar.	400	1310	22	62	18.18
Abr.	405	1715	21	83	19.29
May.	460	2175	22	105	20.91
Jun.	675	2850	21	126	32.14
Jul.	580	3430	21	147	27.62
Ago.	600	4030	13	160	46.15
Sept.	300	4330	20	180	15.00
Oct.	280	4610	23	203	12.17
Nov.	440	5050	21	224	20.95
Dic.	500	5550	20	244	25.00

En el aparecen los requerimientos de producción de un cierto producto, tomando ya en cuenta los tiempos de producción y distribución, por lo que los requerimentos son aquellos que la fábrica debe cumplir.

En primer término, nótese que los requerimentos por mes aparecen diferentes cuando se toma en cuenta el No. de días por mes. En el primer caso los cambios en la demanda son menos abruptos que en el caso en que se consideran los días por mes. Así la relación máximo/mínimo en los requerimentos mensuales es de 675/280= 2.41, y de la producción diaria es de 46.15/ 12.17= 3.79.

En segundo término, los requerimentos que la fábrica debe cumplir incluyen así mismo los inventarios de seguridad (buffer) para el caso de demandas extremas. Se desea realizar diferentes planes de producción que cumplan con esos requerimentos. En la siguiente figura se muestra una técnica por medio de la cual diferentes alternativas pueden ser desarrolladas.

El procedimiento a seguir es el siguiente:

1.- Grafique la curva de requerimentos de producción acumulados.

2.- Un plan de producción factible, en el sentido de cumplir con los requerimentos de rpoducción será cualquier línea que siempre esté arriba de la línea de requerimentos de producción. Las diferencias verticales entre estas dos líneas representan los inventarios creados por el plan de producción propuesto.

Se han graficado dos diferentes planes de producción. El --- plan No. 1 propone una producción constante, el plan No. 2 sigue - más de cerca los cambios en requerimentos pero cambia la produc--- ción 3 veces en el año (incluyendo el cambio al principio o al fi- nal del año). El plan 2 obviamente requiere menores inventarios -- que el plan 1 pero supone otros costos dada la necesidad de contra tar o correr gente, horas extras o alguna subcontratación. Así --- mismo el plan 2 supone un inventario inicial de 6 unidades.

En la siguiente figura se muestran los dos planes de produc- ción, junto con sus cambios cambios, comparándolos con los reque-- rimientos diarios. Así mismo se muestra la capacidad normal de --- planta y su capacidad máxima con turnos extra. Requerimentos más - allá de la capacidad máxima implican acumulación anterior de inven tarios o algo de subcontratación.

En la siguiente tabla se sumarizan los costos incrementales para los dos planes.

		Plan 1.	Plan 2.
(1)	Inventarios	76785	22288
(2)	Cambios en Fuerza Trabajo	0	28000
(3)	Tiempo Extra	0	3400
(4)	Subcontratación	0	1875
	TOTAL:	76785	55163

(1) Costo de llevar inventarios - 240.00/año x unidad
(2) Costo de contratación o liquidación - 200.00/hombre
Un empleado incrementado o substraido de la producción la afecta por .1 unidad/día.
(3) Las unidades producidas en tiempo extra cuestan 20.00 más por unidad.
(4) Las unidades subcontratadas cuestan 25.00 más por unidad.

En este caso al Plan No. 2 resulta menos costoso, aunque con seguridad no es el mejor plan al que se pudiera llegar. Esta es una de las objeciones a este método gráfico, ya que no optimiza el plan en ningún sentido, es más, es un método estático que no nos permite variar el plán según las condiciones cambian.

Estas dos limitaciones es posible en algunos casos superarlas por medio de métodos matemáticos o heurísticos que discutiremos más adelante. Sin embargo este método gráfico nos ha servido para centrarnos en el problema que representa un plan maestro de producción o planeación agregada como ha dado en llamársele actualmente. En lo que sigue usaremos los dos términos indistintamente.

3.- DIFERENTES SOLUCIONES PARA DIFERENTES ESTRUCTURAS DE COSTOS.

Según sea la estructura de costos en una empresa alguna de las variables de decisión (como son cambios de inventarios, fuerza de trabajo, etc.,) dominará en la solución dada al problema planteado por la necesidad de hacer frente a una demanda variable. Esto puede ser mejor ilustrado por medio de algunos ejemplos:

Ejemplo 1. Uso de inventarios.

En una pequeña empresa fabricante de zapatos para hombre, se encontró que el inventario era la variable clave para absorber las fluctuaciones de la demanda durante el año.

Como estas fluctuaciones son relativamente pronunciadas, significa que la inversión en inventarios varía por casi cincuenta porciento en el curso de un año. En la condición extrema de ventas mínimas, inventarios negativos son usados en el sentido de permitir la acumulación de órdenes sin surtir e incrementar los tiempos de entrega. Las razones de esta política son:

1.- Mano de obra muy calificada siendo un recurso escaso.
2.- Fama bien establecida que hace que el consumidor desee esperar el producto.
3.- El espacio de almacenamiento es reducido.

Ejemplo 2. Uso de inventarios.

Un gran productor de leche y sus derivados se encuentra frente a cambios en la demanda de sus diferentes productos, complicado esto con contratos a largo plazo con sus proveedores, en el sentido que cantidades fijas tienen que ser absorbidas en el año. Como esta oferta varía también durante el año, al problema se le dá la solución de no solo variar el inventario de leche sino también los inventarios de sus derivados. Esto se debe a que algunos productos tienen una vida más larga tales como queso, mantequilla y helado que puedan ser almacenados para la época de mayor venta. Las razones de esta política ya han sido mencionadas, a saber:

1.- Cantidades fijas de compra de materia prima.
2.- Existencia de productos derivados..

Ejemplo 3. Tasa de producción e Inventarios.

En una gran fábrica de latas para la industria cervecera, la demanda de latas se deriva de la demanda por bebidas. Como la producción de latas se puede tipificar en tres etapas, laminado- impreción- formado, es posible usar una combinación de inventarios en proceso y variaciones en la tasa de producción para satisfacer la demanda. Como la industria de latas es sumamente competitiva, se considera escencial ofrecer un servicio rápido a los clientes. Para lograr esto y evitar requerimentos de espacio para almacenar grandes cantidades de latas vacías, la solución está en completarlas dos primeras etapas del proceso y guardar las láminas impresas en inventario. Cuando se recibe una órden es posible formar y entregar las latas usando tiempo extra en la etapa de formado. El grado de mecanización usado impide a la administración variar la mano de obra. Las razones para usar tiempo extra e inventarios en proceso en este caso fueron:

1.- La mecanización fija al tamaño de la mano de obra.
2.- Se requiere un rápido servicio dada la competitividad del mercado.
3.- El proceso es divisible en etapas, requiriéndose menos volumen de almacenamiento en etapas intermedias.

Ejemplo 4. Uso de Mano de Obra.

En una industria mediana productora de dulces y chocolates, que experimenta grandes fluctuaciones en la demanda durante el año variaciones en la mano de obra son usadqs para absorber los mínimos y máximos. Como el proceso requiere una gran cantidad de mano de obra de baja calificación, es posible obtener los trabajadores sin grandes dificultades, la política estaba dictada por restricciones en la vida del producto cuyo proceso de deterioración es muy rápido

Esto significa que el inventario tiene una aplicabilidad muy limitada para absorber la demanda. Resumiendo, las razones de esta política fueron las siguientes:

1.- Corta vida del producto.
2.- Disponibilidades de mano de obra.
3.- Mano de obra no calificada necesaria en el proceso.

En los ejemplos anteriores intentamos ilustrar que dadas las estructuras de costos de una industria la solución al problema de hacer frente a las variaciones en la demanda será de un tipo definido, estas condiciones es necesario determinarlas antes de intentar ningún modelo o plán, si se desea evitar errores en ocaciones costosos. Esto no quiere decir, sin embargo, que una forma única de absorber las fluctuaciones en la demanda sea lo óptimó, existiendo costos asociados con cada una de las alternativas, tal y como se mostró en los ejemplos anteriores.

Las alternativas abiertas a un ejecutivo que intenta hacer frente a fluctuaciones son las siguientes:

1.- Ajustar su mano de obra contratando y despidiendo de acuerdo a las fluctuaciones.
2.- Ajustar su producción con más o menos tiempo de trabajo sin variar la mano de obra.
3.- Absorber las fluctuaciones por medio de acumulación de inventarios, pedidos o pérdidas de venta.
4.- Subcontratar.
5.- Políticas de Mercadotecnia.
6.- Combinación de las anteriores.

Cuáles son los costos que conciernen al usar cualquiera de estas estrategias es el tema del inciso siguiente.

3.- COSTOS INVOLUCRADOS EN EL CAMBIO DE VOLÚMENES DE PRODUCCION.

Aunque en la planeación agregada se dividen el nivel de mano de obra y la tasa de producción, es útil hablar de sus interrelaciones y ver la estructura de costos involucrada en el cambio de niveles de producción (que incluye a la mano de obra y/o tasa de producción). Nuestro objetivo será mostrar más claramente que sucede cuando el nivel de producción varía. Estaremos interesados en los costos incrementales de dichas decisiones. Podremos dividir estos costos en aquellos que ocurran por única vez al momento de tomar la decisión y los costos incrementales que ocurren durante el período en que el nuevo nivel está en efecto. Son tres los factores determinantes de estos costos.

1.- El nivel actual de producción, antes de la decisión de cambiarlo.
2.- La magnitud del cambio.
3.- La duración del cambio.

La influencia del nivel actual debe ser obvia. Si la planta se encuentra trabajando al 80% de su capacidad, un incremento del 10% resulta relativamente fácil comparado con los costos necesarios del mismo incremento si la planta ya se encontrara al 100% de su capacidad.

El efecto de la magnitud del cambio es claro también. Contratar o despedir 50 empleados resulta más caro que hacer lo mismo con 5. Similarmente un gran incremento en los inventarios puede requerir bodegas adicionales y una gran reducción puede implicar abandonar algunas de ellas. Grandes cambios en la mano de obra pueden ser impedidos por la escacés de la misma o cláusulas de contrato con sindicatos.

La duración del cambio también afecta el costo de un cambio de nivel. Un incremento en la producción por medio del uso de tiempo extra implicará costos según dure el cambio. La elección del tiempo de programación dependerá del costo de programas, los errores que se cometan, el tiempo que tarda el estudio y el costo de cambiar planes que ya se encuentran en manos de la gente de producción.

Es muy poco probable que los costos de incrementar o disminuir la producción sean losmismos. En la siguientetabla se muestran algunos de los costos típicos involucrados en aumentar y disminuir la producción y se nota que las listas son muy diferentes y los costos agregados resultantes es de esperarse que sean diferentes.

TABLA 4 - 1

Costos involucrados en el cambio de niveles de producción (tasa y fuerza de trabajo).

Costos de Aumentar	Costos de Disminuir
1.- Contratación y Entrenamiento.	1.- Compensaciones de despido
a) Entrevistas y Selección.	
b) Registros, exámenes,...	2.- Contribuciones al Sindicato.
c) Entrenamiento.	

2.- Funciones de Servicio
   a) Control de inventarios y Producción.
   b) Compras, recepción e inspección de materiales y de manejo.

3.- Nuevos Turnos.
   a) Supervisión
   b) Costo extra por horario.

4.- Tiempo extra.

3.- Costo de transferir al empleado y reentrenarlo.

4.- Efectos intangibles en la imágen de la compañía.

5.- Costos en el control de inventarios y producción por cambio de programas, puntos de ordenamiento, ...

6.- Tiempos muertos por el retrazo entre la decisión y la acción.

Así mismo podemos hablar de los costos que ocurran por cambios en los niveles de subcontratación, los cuales en caso de un aumento incluyen puntos tales como: firma de nuevos contratos, anticipos, aumento en los pagos, costos de supervisión, etc.; y en casos de disminución pueden incluir conceptos como: indemnizaciones, pérdida de confianza, etc.

En todo caso, y basados en nuestro conocimento de que los costos de un cambio son función del estado actual y de la magnitud del cambio podemos afirmar que los costos seguirán en forma tal como la propuesta en la figura 4. 1

En la cual debemos notar las siguientes características:

1.- El cambio en costos por aumentar la producción aumenta según es más alta la capacidad usada actual.

2.- El cambio en costos por disminución la producción aumenta — según es más baja la capacidad usada actual.

3.- El cambio en costos es mayor según el cambio sea en mayor, — en un incremento creciente. Es decir las nuevas son cóncavas hacia arriba.

En la vida real estos supuestos se ven complicados por el — hecho de que los cambios en ocaciones no se pueden hacer sino en — grandes incrementos a la vez lo que obliga a discontinuidades en — las curvas tal y como se muestra en la figura 4 - 2.

Así mismo debemos entender que en la vida real es muy difícil, si no imposible, determinar con exactitud la forma de dichas curvas, por lo cual es la práctica usual hacer ciertas simplificaciones como suponer las curvas como una recta o variar rectas, lo cual permite el uso de técnicas como la Programación Lineal para resolver el problema de la planeación agregada. Estas soluciones como tal son una simplificación de lo que ocurre en la realidad, sin embargo esta realidad es lo suficientemente compleja como para que pierda sentido tratar de modelarla exactamente, y aunque ello pudiera ser hecho, el costo en la mayoría de los casos resultaría prohibitivo por lo cual tendremos siempre que determinar hasta que punto deseamos modelar la realidad y que simplificaciones nos permiten llegar a resultados aprovechables.

Nos faltaría discutir cuales son los costos en que se incurre por un cambio en el nivel de inventarios, en este caso nuevamente se aplican nuestros principios básicos y son que: el cambio en costos dependerá del nivel actual, la magnitud y la duración del cambio de nivel de inventarios. En general se supone que los costos de llevar inventarios son lineales sobre un gran rango ocurriendo algunas discontinuidades en muy altos o bajos niveles en que las facilidades actuales se vuelven extremadamente ineficientes para manejar los volúmenes. En el caso de inventarios existen dos costos básicos: en primer lugar el costo de llevar inventarios que aumenta proporcionalmente al nivel de inventarios en segundo lugar el costo de faltantes que disminuye según aumentan los inventarios; la suma de estos dos costos nos dá el resultante del costo de inventarios, existiendo un nivel mínimo de acuerdo al nivel de operaciones o la forma de la demanda. Esto se ilustra en la figura 4 - 3.

5.- LA FUNCION DEL CONTROL.

Cuando se ha elaborado un programa básico de producción, el resultado es una secuencia de niveles planeados de producción y de balances de inventarios basados en los pronósticos de ventas. A medida que surjan las ventas debemos tener algún sistema para compensar las diferencias entre las necesidades planeadas y las reales de modo que se mantengan los inventarios, la mano de obra y la subcontratación a un nivel adecuado. Si las necesidades reales sobrepasan a los planes, corremos el riesgo de quedarnos sin existencia con resultados de un servicio deficiente para el cliente. Si las necesidades reales son menores a lo esperado, las existencias se acumularán o tendremos mano de obra ociosa, con el resultado de mayores costos para mantenerlos. Un plan de control es necesario, a fín de ajustar los niveles de producción e inventarios con la experiencia de las ventas. Tal plan de control puede lograrse al elaborar periódicamente un nuevo programa de producción que tome en cuenta los los inventarios existentes y los ajuste a los niveles de producción a corto plazo. La elaboración de un nuevo programa requiere la reaplicación de ideas que hemos discutido. Los ajustes inmediatos son los que deseamos discutir ahora. Es común que estos ajustes se apliquen únicamente a el nivel de inventarios, el nivel de subcontratación y ajustes en el ritmo de producción, dejando los cambios en mano de obra y política de ventas para los planes a mediano y largo plazo. En lo que sigue ejemplificaremos con el control de inventarios y cambios en el nivel de producción sin mencionar a la subcontratación, aunque ella en algunos casos es factor importante a considerar.

En escencia, nuestro objetivo es incrementar o disminuir los niveles de producción en el período posterior, en forma proporcional a las diferencias entre ventas reales y las de pronósticos, en una cantidad que minimice los costos marginales de inventarios y la fluctuación de niveles de producción. Si el período que se planea es relativamente corto, este ajuste de niveles corregirá continuamente los niveles de inventario a fín de mantenerlos de acuerdo con la demanda actual y de este modo, prevenir el quedarse sin existencias o que éstas se incrementen en demasía.

Esto trabaja como un sistema de retroalimentación. La información relacionada con la demanda del consumidor se compara con los inventarios reales para determinar el error lo cual se retroinforma y se comprara con la información que se tiene sobre los niveles de producción planeados para el período venidero. Mediante el uso de una regla predeterminada, el nivel de producción se ajusta para compensar la fluctuación en la demanda y mantener los inventarios en el nivel deseado. Este flujo de información está representado en la figura 5 - 1.

Para diseñar un sistema de control para niveles de producción son dos las variables sujetas a nuestra elección: La frecuencia de- los ajustes y la tasa de reacción del ajuste. Ambos son importantes como veremos. La tasa de reacción del ajuste sobre los niveles de - producción determina el grado de ajuste que se debe de hacer para una fluctuación dada en la demanda. Si ajustamos los niveles de producción planeados a la diferencia entre al volumen total de ventas y los pronósticos, tendríamos un 100% de tasa de reacción, y las --- fluctuaciones en las ventas se transmitirían directamente a la producción. Una tasa de reacción del 100% origina los más serios problemas y costos de inestabilidad. Si ajustamos los niveles de producción solamente en un 50% del cambio indicado por la fluctuación en la demanda, tendríamos una tasa de reacción del 50%. Obviamente estas tasas de reacción pueden tomar cualquier valor entre 0 y 100%. Tasas de reacción bajas originan una producción estable a costa de niveles no adecuados en inventarios, una tasa de reacción alta origina condiciones opuestas. La frecuencia de la reacción también tiene su efecto. Los períodos cortos de revisión tienden a reducir las fluctuaciones en la producción y ocacionan inventarios más bajos, para una tasa de reacción dada. La selección de la tasa de reacción y del período de revisión para un caso dado dependerían del balance de los costos de tener un artículo en inventario, junto con la evaluación de la magnitud en la fluctuación del nivel de producción tolerable a corto plazo.

Debido a que la mayoría de las fluctuaciones en la demanda de- los productos se debe a causas fortuitas, no existe una necesidad -- a reaccionar rápidamente. Tasas de reacción bajas y periodos de re-- visión cortos, tienden a crear una actitud "expectante" al efectuar- a menudo pequeños ajustes. Escencialmente crean una acción de retención, para ver si la fluctuación de las ventas es realmente un incremento o decremento, mas que una fluctuación fortuita. Esta política- se justifica además por el hecho de que solo en contadas ocaciones - un fabricante recibe información de primera mano acerca de la demanda de su producto, proveniendo en general de sus distribuidores, cuyos cambios son una amplificación de los cambios en el mercado al -- menudeo, existiendo un retrazo en la respuesta lo cual hace difícil- interpretar las tendencias del momento y del futuro.

En la práctica se ha encontrado conveniente tasas de reacción- bajas, típicamente del 5% al 10%. Los tiempos de revisión dados por- la velocidad con que se puede obtener información del mercado y procesarla, intentándose acortar estos lo más posible.

6.- ESTUDIO DE LAS RESTRICCIONES Y OPTIMIZACION. (PROG. LINEAL).

En este inciso veremos una técnica muy usada para la formulación de planes de producción, conocida como programación lineal.

La programación lineal es una técnica desarrollada en la época de la Segunda Guerra Mundial. Su valor respecto a la producción dirigida estriba en que con dicha técnicapueden resolverse problemas de-distribución de gran complejidad que involucran un gran número de---variables. ¿ De qué tipo de problemas hablamos ? Empecemos con un---ejemplo ilustrativo, que por ser sencillo no requiere el caso de la-programación lineal para resolverlo.

Supongamos el problema como sigue: somos productores mayoristas--tas de un laminado plástico que vendemos por hojas de 1.22 mts. x --2.44 mts. en tres espesores, contamos con dos máquinas ubicadas en -la misma planta y nos referiremos a ellas como máquinas A y B. La máquina B es de un diseño reciente y produce muy económicamente los --espesores 1 y 2, en el caso del espesor 3 resulta más económica la -máquina A. Los datos se sintetizan en la siguiente tabla:

Grueso	Horas x 100 hojas A	B	Ingreso x Ventas de 100 Hojas	Demanda Máxima en cientos de-hojas/semana.
1	.25	.20	100	310
2	.40	.25	120	300
3	.35	.45	150	125
Costo x Hora	250	300		
Max. disponible de horas/semana	100	100		

Observamos que los costos de operación por hora en la máquina -A son de 250.00 comparados con 300.00 en el caso de la máquina B y --que ambas máquinas pueden ser operadas un máximo de 100 a la semana,-lo que constituye una restricción. Los costos por hora incluyen mano-de obra, materiales diversos, energía, deprecia-sión, etc., pero no -incluyen los costos de materia prima. Estos son idénticos para un plan de producción dado, en ambas máquinas, y por ende no son considerados en el problema.

En la misma tabla se indican los ingresos por ventas y demandas máximas, para cada uno de los espesores. Al planear la producción ---podemos suponer que pueden obtenerse las cifras indicadas o menores,-siempre y cuando sea económico.

La interrogante es: ¿ Cómo distribuir la producción entre las dos máquinas para los tres tamaños que tenemos del producto, al fin de aumentar al máximo algún índice de utilidad que es nuestro objetivo final ?.

Primero definimos nuestra medida de efectividad como E, ingreso marginal: la diferencia entre el ingreso y los costos variables. En segundo lugar la tabla anterior nos dá los costos marginales o variables y las restricciones respecto al tiempo y producción disponible. Igualmente dicha tabla indica los datos del ingreso y también las limitaciones respecto a la cantidad que podemos vender. Tratemos de expresar estas ideas en forma más exacta.

6. 3.- La formulación simbólica del problema.

Puesto que tenemos limitaciones respecto al número de horas que las dos máquinas pueden operar y dado que conocemos el tiempo requerido para producir cada espesor en cada máquina, en el caso de la máquina A podemos escribir lo siguiente:

(Horas unitarias para el espesor 1) (cantidad del espesor 1)+ (Horas unitarias para el espesor 2) (cantidad del espesor 2) + (Horas unitarias para el espesor 3) (cantidad del espesor 3) no pueden exceder 100 horas.

Toda la información contenida en la descripción que antecede tiene como orígen la tabla de datos. Con el objeto de traducirla en forma simbólica, definimos las cantidades de cada producto como x. Usándo subíndices, x 1A representa la cantidad del espesor 1 producido en la máquina A, x 2A la cantidad del espesor 2 producido en la máquina A, etc. La expresión simbólica equivalente es:

$$0.25 \; x\,1A + 0.40 \; x\,2A + 0.35 \; x\,3A \leq 100 \qquad (1)$$

Esta forma simbólica equivale a su expresión verbal. El símbolo $\leq$ se lee "menor o igual a ". Se refiere solo al número de horas que se trabajarán en la máquina A en cada uno de los tres espesores. En forma semejante podemos expresar el caso de la máquina B;

$$0.20 \; x\,1B + 0.25 \; x\,2B + 0.40 \; x\,3B \leq 100 \qquad (2)$$

Tenemos ahora seis incógnitas, x 1A, x 2A, x 3A, x 1 1B, x 2B, y x 3 B, o sea las cantidades, en unidades de 100 hojas, que de cada tamaño deben producirse en las dos máquinas.

Las expresiones simbólicas como (1) y (2) se denominan desigualdades. En escencia indican que el tiempo total asignado a cada uno de los tres espesores puede no ser igual a 100 horas; es decir podría haber algún tiempo ocioso.

En tal caso y para la máquina A, designemos WA como el tiempo ocioso y así absorbemos el tiempo faltante:

$$0.25 \times 1A + 0.40 \times 2A + 0.35 \times 3A + WA = 100 \qquad (3)$$

Puede ser que el tiempo ocioso, WA, sea cero, empero dejemos que la solución nos indique su valor, a fín de que nuestra medida de utilidad (efectividad) sea máxima. Análogamente, WB es el tiempo ocioso para la máquina B y tenemos:

$$0.20 \times 1B + 0.25 \times 2B + 0.40 \times 3B + WB = 100 \qquad (4)$$

Ahora nos fijamos en que las cantidades tales a producir, que sabemos no pueden excederse de 310, 300 y 125 para los tres espesores, respectivamente, por limitaciones en la demanda. Puesto que las x representan las cantidades producidas, sabemos que la cantidad del espesor 1 producida en la máquina A más la producida en la máquina B, no pueden ser superiores a 310, V. G:

$$x\,1A + x1B \leq 310 \qquad (5)$$

Igualmente, para los tamaños 2 y 3:

$$x\,2A + x\,2B \leq 300 \qquad (6)$$

$$x\,3A + x\,3B \leq 125 \qquad (7)$$

Como en el caso anterior sabemos que es posible que no produzcamos la cantidad máxima de cada uno de los tres espesores y por tanto, cubrimos cualquier margen con tres nuevas variables, W1, W2 y W3 y así obtenemos tres ecuaciones en vez de tres desigualdades.

$$x\,1A + x\,1B + W1 = 310 \qquad (8)$$

$$x\,2A + x\,2B + W2 = 300 \qquad (9)$$

$$x\,3A + x\,3B + W3 = 125 \qquad (10)$$

Finalmente, tenemos un renglón que al expresarse simbólicamente integrará el modelo de nuestro problema. Se trata de la funció de utilidad (ganancia), que ya hemos definido como ingreso, menos los costos variables o marginales, es decir:

$$E = \text{ingresos} - \text{costos variables}$$

$$E = 100\ (x\ 1A + x\ 1B) + 120\ (x\ 2A + x\ 2B) + 150\ (x\ 3A + x\ 3B)$$

$$- 250\ (0.25x\ 1A + 0.40\ x\ 2A + 0.35x\ 3A)$$

$$- 300\ (0.20x\ 1B + 0.25\ x\ 2B + 0.40x\ 3B)$$

La función de utilidad puede simplificarse al efectuar las multiplicaciones indicadas y agrupando términos semejantes, obteniendo:

$$E = 37.5x\ 1A + 40x\ 1B + 20x\ 2A + 45x\ 2B + 62.5x\ 3A + 30x\ 3B = \max \qquad (11)$$

En realidad, E representa la suma de las diferencias que, para cada tamaño y en cada máquina, existen entre el ingreso y el costo variable multiplicada por la cantidad producida. Lo que queremos hacer es lo más grande posible E y tal objetivo se indica al igualar E a "max".

Ahora tenemos 5 ecuaciones y 11 incógnitas, más la función objetivo que deseamos aumentar al máximo. Ordenémoslas por columnas de las mismas variable como en la siguiente tabla:

Lado derecho	x1A	x2A	x3A	x1B	x2B	x3B	wa	wb	w1	w2	w3
100	0.25		0.40		0.35		1.00				
100		0.20		0.25		0.40		1.00			
310	1.00	1.00							1.00		
300			1.00	1.00						1.00	
125					1.00	1.00					1.00
max	37.50	40.00	20.00	45.00	62.50	30.00					

La tabla empieza a tomar forma de una matriz "simplex" o sea, la forma tabular normalmente usada en la solución de problemas de programación lineal tipo simplex. Con este formato y con un método iterativo puede llegarse a una solución para determinar el valor de cada una de las once variables. Un proceso iterativo es un procedimiento aritmético que se repite una y otra vez, basado en un conjunto estandar de reglas o pasos. Del planteamiento del problema, en que por necesidad todas las variables o son positivas o cero, se puede demostrar que en la solución óptima del problema, de las once variables, al menos seis serán cero y cinco tendrán valores positivos. El método simplex nos indica cuales de las variables son cero y el valor de las demás, para la condición en que E es un máximo. La solución para este problema es: E toma un valor máximo de 33,250 pesos cuando las once variables tienen los siguientes valores (el método de solución se desarrolla en el apéndice de este capítulo)

x1A = 185	x2A = 0	x3A = 125	wa = 10	wb = 0	w1 = 0
x1B = 125	x2B = 300	x3B = 0	w2 = 0	w3 = 0	

Por consiguiente la solución nos indica que la medida de efectividad será aumentada al máximo si 1) cumplimos con las cifras de la demanda, 2) mantenemos a la máquina A ociosa por 10 horas y no producimos en ella el espesor 2 y 3) si trabajamos 100 horas la máquina B produciendo espesores 1 y 2.

Aunque se trata de un problema sencillo, comparado a las complejidades que en la realidad ofrecen los problemas industriales, la respuesta no es obvia. Asimismo sirve para mostrar las potencialidades del método y algunas de sus limitaciones.

Debemos tomar nota que el modelo de programación lineal, con que venimos trabajando, puede proporcionar programas con otros objetivos básicos. Por ejemplo, un programa para aumentar al máximo la utilización del equipo, requeriría una función objetivo donde la suma de las variables wa y wb sea mínima. Por otro lado, el objetivo de producir un metraje máximo podría programarse usando una función objetivo donde la suma de todas las x aumentaría al máximo. En ambos casos podrían emplearse las mismas cinco ecuaciones de restricciones fundamentales.

El problema que hemos usado como ejemplo, es representativo de una amplia clase de problemas donde nos vemos obligados a distribuir recursos limitados entre actividades o usos competitivos. Los modelos para problemas específicos pueden involucrar restricciones tal y como lo ilustra nuestro problema ejemplo v.g. nos fue permitido usar usar un máximo de 100 horas por máquina, o la demanda limitaba hasta ciertos valores la producción. No se pretende indicar por medio de este ejemplo, que todos los problemas impliquen formulaciones de este tipo. Podemos tratar en forma semejante requerimientos de equivalencia o desigualdades en el sentido inverso ($\geq$ mayor o igual que).

Algunos usos de la programación lineal en la industria han sido:

1.- Asignación de instalaciones de producción cuando se dispone de varias rutas disponibles.

2.- La distribución de fondos limitados a varios artículos del inventario.

3.- Problemas de mezclas y problemas de abastecimientos

4.- Programación de la producción para cumplir con un pronóstico de ventas.

5.- Maximización del uso de los materiales.

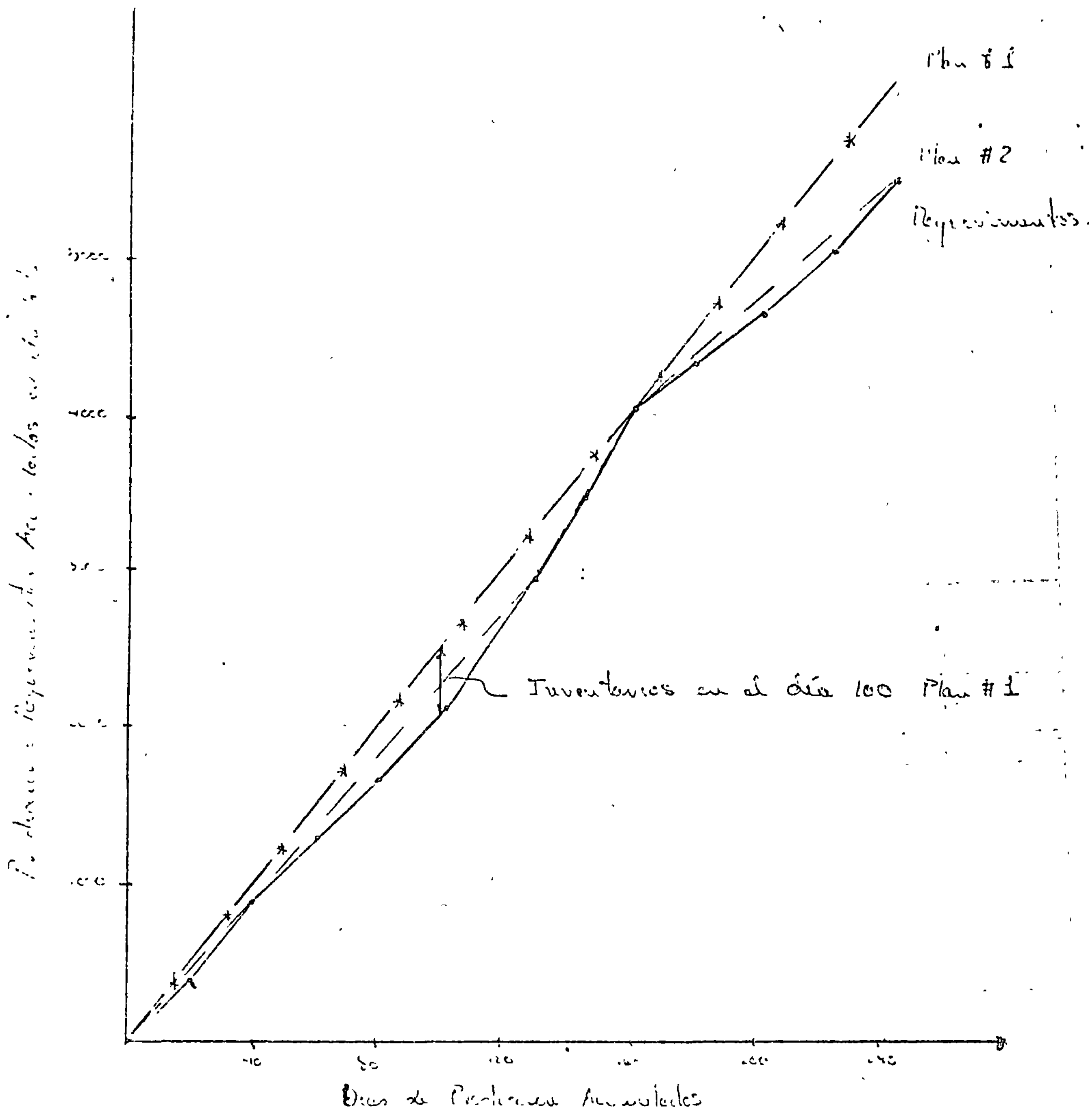
Terminemos esta sección con un ejemplo que se resolverá en clase:

Supóngase una empresa en la que se ha determinado el siguiente pronóstico de producción:

ENE	400
FEB	510
MAR	400
ABR	405
MAY	430
JUN	675
JUL	580
AGO	600
SEP	300
OCT	280
NOV	440
DIC	500

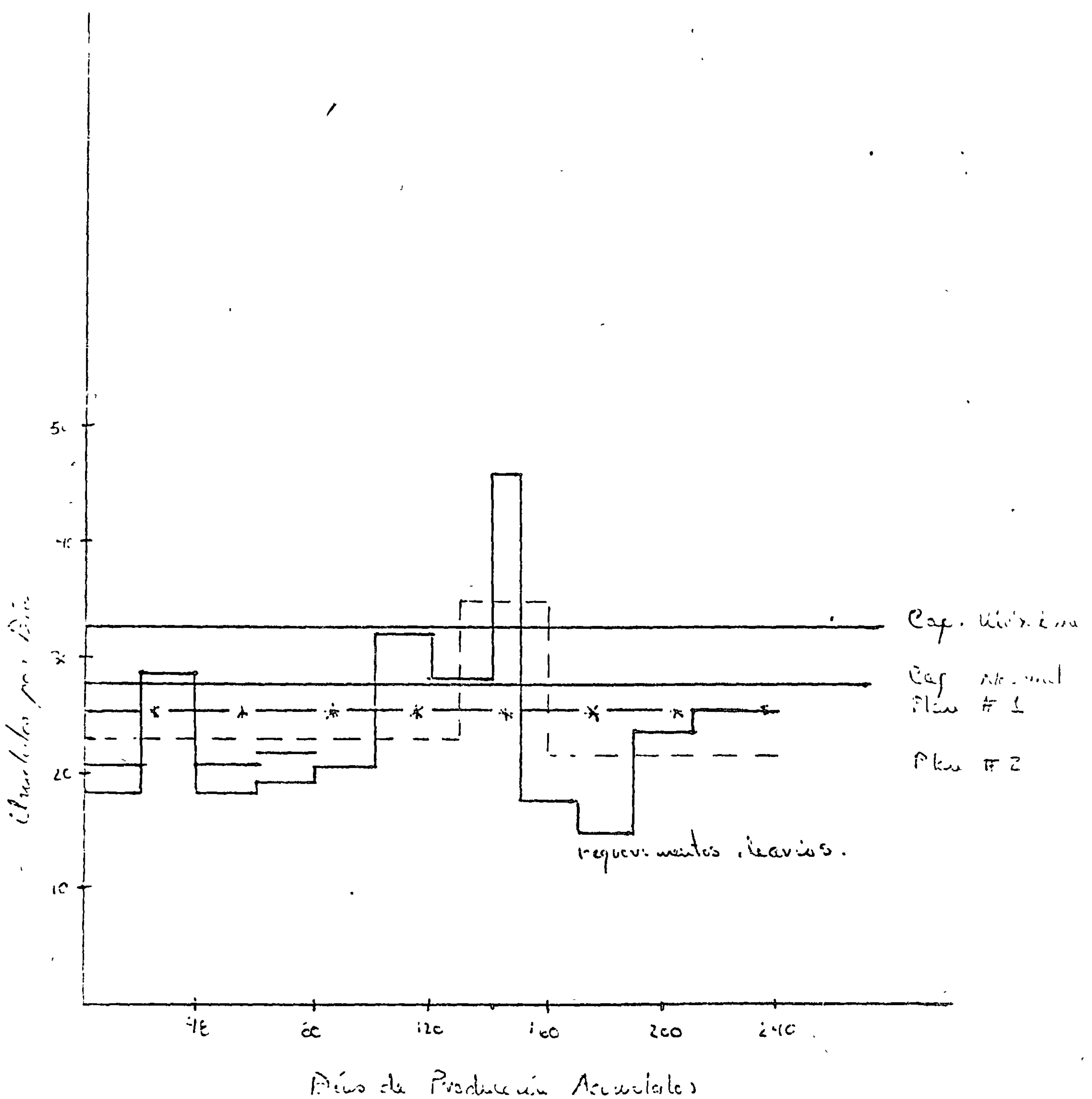
En el presente, la fuerza de trabajo puede producir 470 unidades por mes. Un empleado substraido o incrementado varía la producción en 20 unidades por mes. El salario es de 660 pesos al mes y el tiempo extra se paga en un cincuenta porciento más. En tiempo extra y por política de la empresa un empleado no puede producir más de 2 unidades por mes. El contratar una persona se ha estimado en un costo de 100 pesos y el despedirla en 200 pesos. El costo de llevar inventarios se supone de 10 pesos por mes por unidad y el costo de faltantes de 50 pesos por unidad. Nuestro objetivo es realizar un programa de producción con el menor costo posible, y planter al problema en términos de la programación lineal.

Figura 2.1.



Plan	Días	Producción	Trabajadores	Comentarios
1	Todos	25.1815	252	
2	126	22.75	228	
	34	34.22	215	Subcontrata 1324 lbs [illegible]
	8-1	18.10	181	

Figura 22.



Cap. Máxima
Cap. Normal
Plan # 1
Plan # 2
requerimientos diarios.
50
40
30
20
10
40
80
120
160
200
240
Días de Producción Acumulados

Figura 4.1

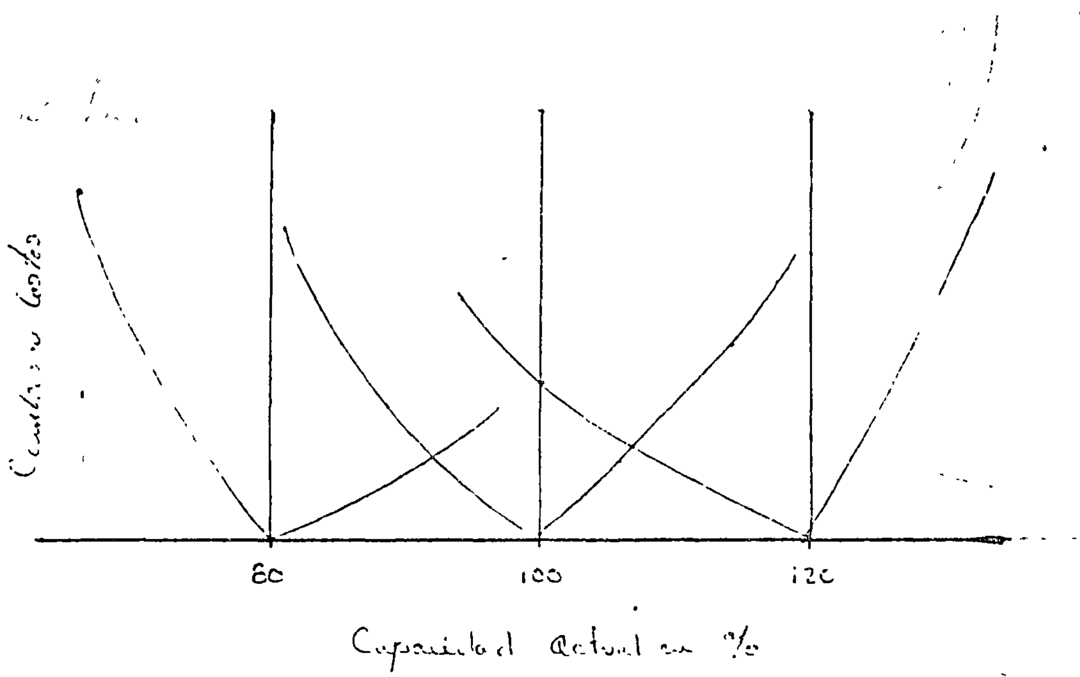


Figura 4.2.

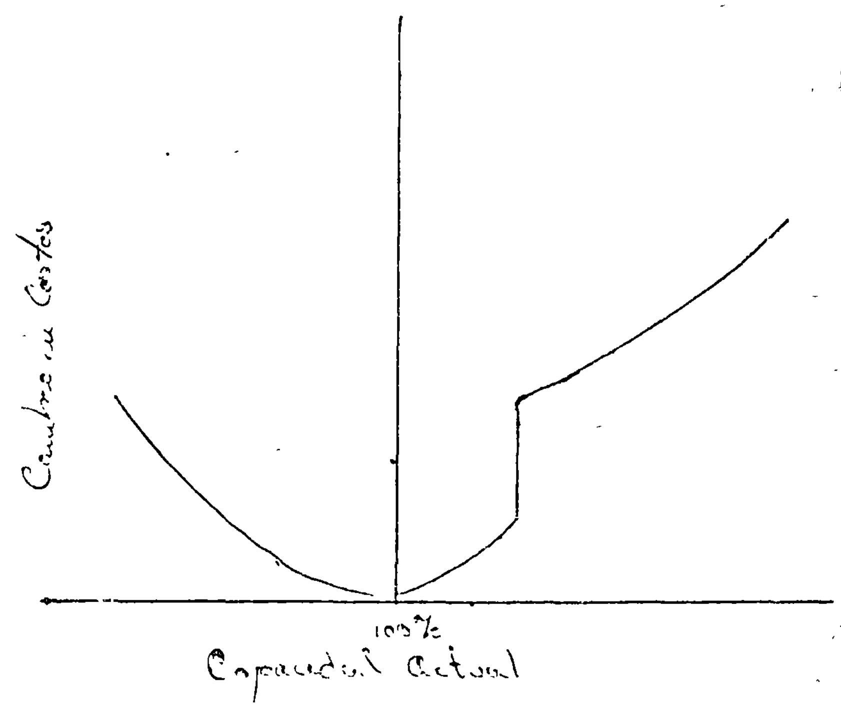


Figura 4-3

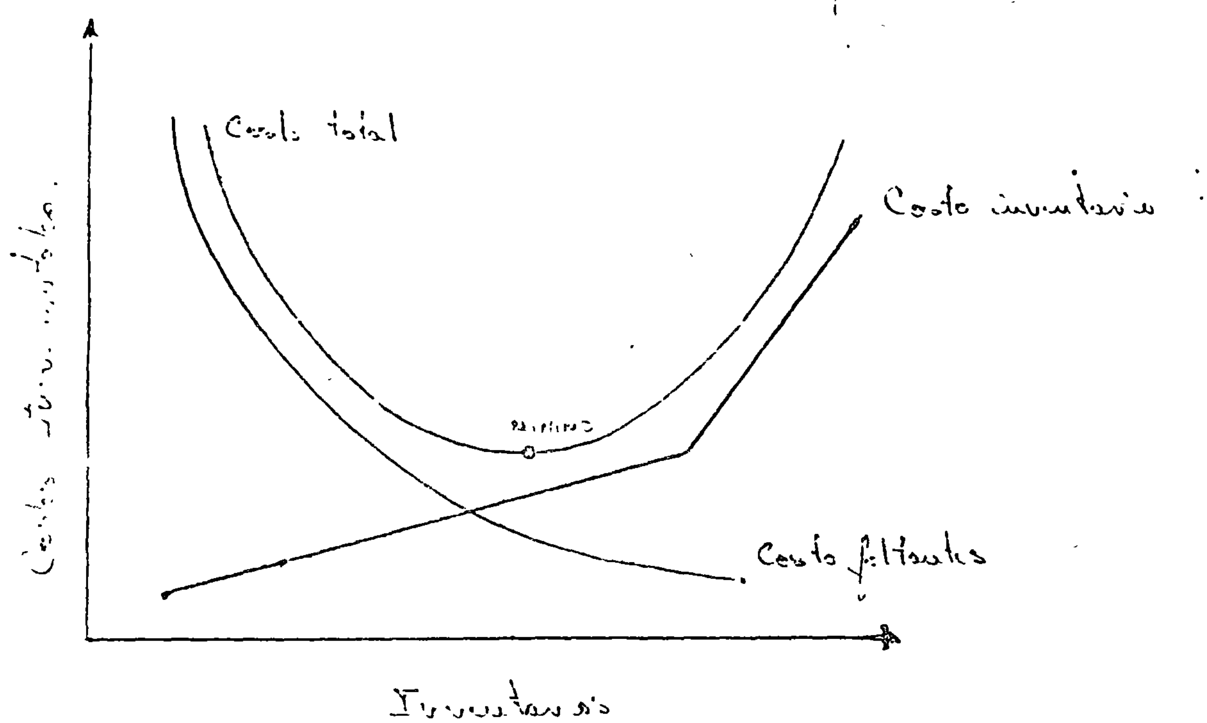


Figura 5-1

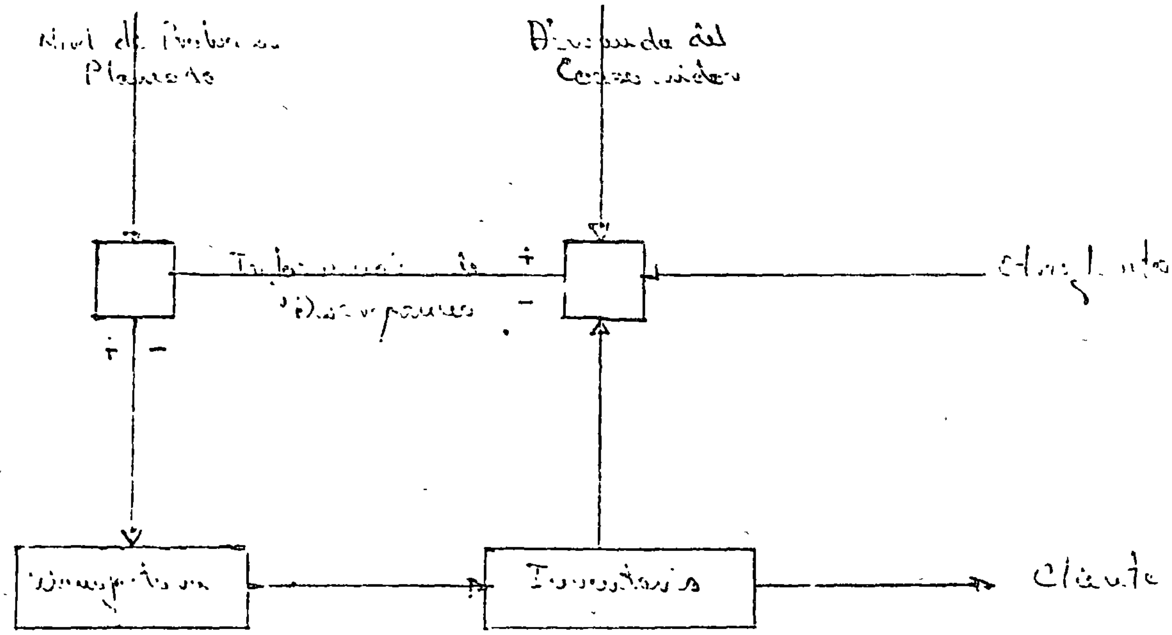
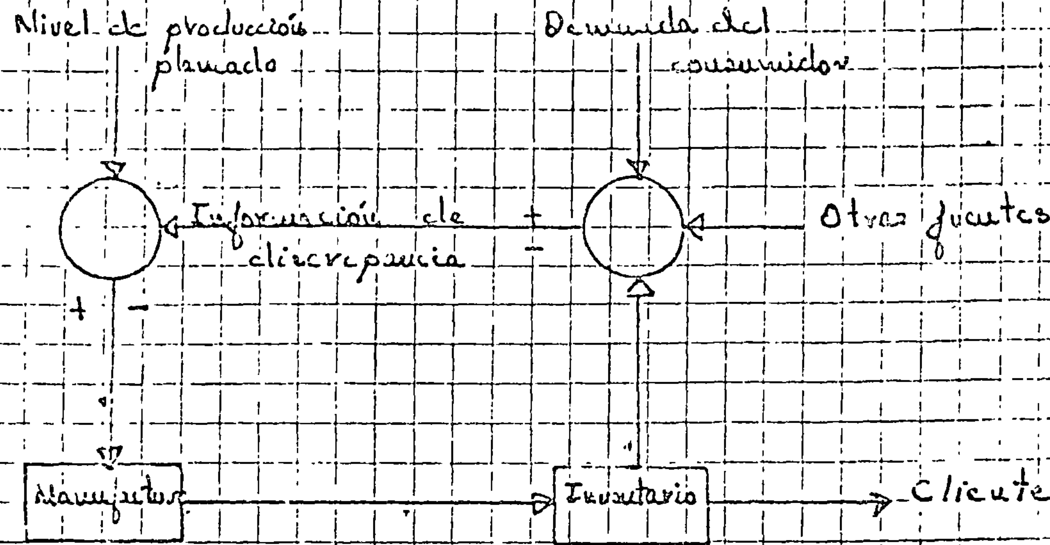


Figura 5-1



Nivel de producción planeado
Demanda del consumidor
Información de discrepancia
Otras fuentes
+
−
±
Manufactura
Inventario
Cliente

"PROBLEMAS EN EL CONTROL DE LA PRODUCCION"

Objetivos del Control.

Control, en el sentido que lo usaremos, significa el ajuste de operaciones para conformarlas a un plan. Como se ha visto anteriormente, una fuente principal de dificultades es la incertidumbre que se tiene con respecto a requerimientos futuros.

La principal función del control de producción, es la adecuación de las órdenes al sector de manufactura para mantener los inventarios en un nivel adecuado dadas fluctuaciones a corto plazo de la demanda. La posibilidad de lograrlo necesariamente depende de la abilidad del área manufactura a reaccionar rápidamente a estas fluctuaciones.

Con objeto de mantener bajos los inventarios, el proceso debe tener reacciones rápidas adecuadamente controladas o, en algunos casos, equivalentemente exceso de capacidad. Si las reacciones son lentas o limitadas los inventarios deberan ser altos, así el inventario sirve como un freno a los cambios bruscos de producción.

Algunos Ejemplos de lo que no se debe hacer.

a) La compañía XYZ maneja una línea medianamente amplia de artículos para la construcción. La mayoría de las órdenes son para entrega inmediata y un servicio rápido es importante. Para lograrlo la compañía instaló el siguiente sistema:

1.- Se determinó el lote económico para cada grupo de inventario tomando en cuenta costos de iniciar producción y almacenar.

2.- Se determinó la tardanza "normal" en entrega de pedidos y se fijaron puntos de reorden que protegieran contra estas tardanzas.

3.- La revisión de puntos de reorden se haría de la siguiente forma:

-Se preguntaba a planta si un cierto pedido se iba a entregar dentro del tiempo "normal". Si planta avisaba de contingencias que la obligaban a cambios se ajustaban en un -

80 % los puntos de reorden. Por ejemplo si el tiempo de entrega se doblaba, o sea un aumento el 100 % el punto de reorden se subía en un 80 %.

El resultado fue grandes fluctuaciones en la producción e inventario un servicio a los clientes malo.

He aqui algunas delas razones por las que esto ocurrió:

1.- Un sistema de lotes económicos no va a proteger a la producción de fluctuaciones de la demanda.

2.- Es esquema de ajustar los puntos de reorden viola uno delos principios básicos del control, "nunca amplificar las fluctuaciones" y este sistema las sobre compensa.

b) La misma compañía XYZ decidió cambiar su sistema por uno "más sencillo". El gerente, para quitarse de líos, decidió mantener un inventario suficiente para 30 días de ventas (en número de días no importa) y para ello revisa sus ventas cada mes y adecúa sus inventarios correspondientemente.

Otra vez el sistema falló y llevó a la planta a grandes fluctuaciones, las razones de ello son:

1.- Es un sistema vicioso para artículos sujetos a variaciones cíclicas cortas (cuando el ciclo es aproximádamente 3 o 6 veces el tiempo tardado en modificar la producción).

2.- Todas las fluctuaciones las pasa a la planta.

3.- No indica si la política es buena o mala económicamente (porque no 15 o 45 días mejor).

<u>Que si se debe hacer.</u>

1.- Predecir la demanda expresada en unidades de capacidad de producción.

2.- Realizar un plan de producción que indique niveles de inventarios y producción.

3.- Establecer un procedimiento de control que decida que tan rápido reestablecer los inventarios al nivel planeado cuando variaciones en la demanda obligen a desviaciones.

Análizamos estos puntos con mayor cuidado. Un primer requerimiento es tener una medida de la demanda que sea útil y pueda ser aplicada a los inventarios y la producción. Esta medida la mayoría de las ocaciones no serán las unidades en que se vende un producto (ya que en general una industria no produce únicamente un producto). Sin embargo, podemos considerar a la empresa como una vendedora del tiempo de sus empleados y máquinas y a la labor de planear la producción e inventarios como una de asiquación de tiempo a los diferentes productos. Así, si la demanda de los diferentes productos es expresada en las horas de producción necesarias en los diferentes equipos y hombres podremos tener una medida común útil para fines de planeación y control.

Una vez teniendo la demanda en unidades adecuadas es posible realizar un plan de producción que minuize los costos totales que incluyen aquellos relacionados con llevar inventarios, cambios de producción, etc.

Con estos dos elementos es necesario aún establecer un sistema de control que diga que tan rápido debe cambiarse la producción en respuesta a cambios de la demanda, reconociendo que se debe establecer un balance entre costos originados por cambios en la producción, costo de llevar inventarios y faltantes, y claro está la posibilidad del sistema de lograr estos cambios en el plazo de tiempo deseado.

Veamos en primer término una de las reglas más simples (y casi siempre inadecuada) de control:

Regla del Reordenamiento Periódico(K = 1).

Bajo esta regla el almacén hará una orden cada período igual a los requerimientos anticipados durante el tiempo de entrega, menos la cantidad ya pedida más la cantidad en que el inventario deseado en almacén y un órden excede al inventario real.

Pongamos un ejemplo que nos muestre la operación de esta regla.

En una compañía en el pasado la demanda real ha excedido a los pronósticos en 25 horas de producción, en el plazo de dos semanas, como máximo. La demanda para las próximas trece semanas, pronosticada, es la siguiente.

Semana	Demanda	Acumulada	
1	21	21	
2	24.5	45.5	
3	24.5	70	
4	28	98	
5	28	126	
6	31.5	157.5	
7	31.5	189	En horas de producción.
8	36.5	225.5	
9	42.5	268	
10	52	320	
11	54.5	374.5	
12	45.5	420	
13	35	455	

La producción se ajustará semanalmente y a causa del trabajo requerido para notificar a los empleados toma una semana para hacer efectiva una decisión de cambiar la producción. Así la suma del tiempo de entrega y el intervalo entre revisiones es de 2 semanas. Si las desviaciones máximas en ese período han sido de 25 horas para preveer esta contingencia será necesario que el inventario no baje de dicho nivel.

Supongamos que al principio del período tenemos un inventario de 38 unidades. Entonces los requerimientos de producción serán:

Demanda + Inv Mínimo Planeado - Inv Inicial

$$455 + 25 - 38 = 442$$

$\frac{442}{13}$ = 34 horas por semana. De esta forma el inventario resultante nos lo dá siguiente tabla:

Semana	Demanda Acumulada	Producción Acumulada	Inventario Planeado
1	21.0	34.0	51.0
2	45.5	68.0	60.5
3	70.0	102.0	70.0
4	98.0	136.0	76.0
5	126.0	170.0	82.0
6	157.5	204.0	84.5
7	189.0	238.0	87.0
8	225.5	272.0	84.5
9	268.0	306.0	76.0
10	320.0	340.0	58.0
11	374.5	374.0	37.5
12	420.0	408.0	26.0
13	455.0	442.0	25.0

Como toma una semana notificar a los empleados, la producción para las dos primeras semanas está fijada por el plan. Sin embargo, al final de la primera semana, el primer período de revisión, tenemos la oportunidad de ajustar la produción. Supongamos que la demanda real durante la primera semana fue el equivalente de sólo 17 horas, 4 horas menos que las 21 horas pronosticadas.

Así si la producción siguió lo planeado el inventario sería de 55 unidades y no 51 según el plan. Ahora la regla de control toma su lugar:

Nivel de Prod para	=	Dif de prod planeada con real	0
la 3ª demanda	+	Prod Planeada	34
	+	Cant de desviación en inventario	- 4
			30

De manera similar se calcularon los datos que aparecen en la siguiente tabla:

Semana	Demanda			Producción			Inventario		
	Pronóstico	Real	Desv	Plan	Real	Desv	Plan	Real	Desv
1	21.0	17.0	- 4.0	34.0	34.0	-	51.0	55.0	4
2	24.5	29.3	4.8	34.0	34.0	-	60.5	59.7	- .8
3	24.5	21.5	- 3.0	34.0	30.0	- 4.0	70.0	68.2	- 1.8
4	28.0	30.4	2.4	34.0	38.8	4.8	76.0	76.6	.6
5	28.0	24.4	- 3.6	34.0	31.0	- 3.0	82.0	83.2	1.2
6	31.5	32.7	1.2	34.0	36.4	2.4	84.5	86.9	2.4
7	31.5	43.5	12.0	34.0	30.4	- 3.6	87.0	73.8	-13.2
8	36.5	47.9	11.4	34.0	35.2	1.2	84.0	60.6	-23.4
9	42.5	46.1	3.6	34.0	46.0	12.0	76.0	61.0	-15.0
10	52.0	47.5	- 4.5	34.0	45.4	11.4	58.0	58.9	.9
11	54.5	37.1	- 17.4	34.0	37.6	3.6	37.5	59.4	21.9
12	45.5	55.7	10.2	34.0	29.5	- 4.5	26.0	33.2	7.2
13	35.0	29.6	- 5.4	34.0	16.6	-17.4	25.0	20.2	- 4.8
Total	455.0	462.7	7.7	442.0	444.9	2.9			

A primera vista parecería que es una forma complicada de llegar a una respuesta simple: Incremente o decremente la producción en la semana que está siendo planeada por la cantidad en que las ventas reales difieren de la demanda pronosticada.

Sin embargo, hay una buena razón por la cual mostrarlo así ya que en ocaciones la producción no es igual a la planeada y los ajustes exigidos no son los mismos que los ocacionados por la demanda.

Sistemas de Control con Respuesta Proporcional ($K \leq 1$).

El método anterior tenía el defecto de hacer que la producción niciera sola frente a todas las fluctuaciones, esto en contra de principios elementales de un buen control en la mayoría de las ocaciones. Parece adecuado poner un mayor peso en los inventarios para hacer frente a la demanda, y una manera de lograrlo sería ajustando en una menor proporción, que el total de la desviación, a la producción. Introduscamos la siguiente notación:

T = Teimpo empleado en hacer un cambio en la producción efectivo (1 semana en el ejemplo anterior)

P_{t+1} = Producción que está siendo determinada

$P_1, P_2 \ldots$ P_t = Producciones ya determinadas

P_i^* = Producción del período i según el plan original

I_o = Inventario que tenemos actualmente

I_o^* = Inventario que debíamos tener según el plan.

Entonces nuestra regla de control podríamos escribirla como:

$$P_{t+1} = P_{t+1}^* + K\left[P_1^* + P_2^* \ldots + P_t^* - P_1 - P_2 - \ldots - P_t + I_o^* - I_o\right]$$

Cuando K = 1 tenemos la misma regla anterior, si K = 0 el término de coweccción sería climado.

En ocaciones es útil la siguiente regla:

$$P_{t+1} = P_t + K\left[P_1^* + P_2^* \ldots + P_t^* + P_{t+1}^* - P_1 - P_2 - \ldots - P_t - P_t + I_o^* - I_o\right]$$

en ella intentamos continuar con el nivel anterior con mayor intensidad que en la regla anterior basados en la esperanza de continuidad en la demanda.

Cada una de estas alternativas es útil en cierto tipo de plantas, dependiendo por ejemplo, en si el costo de cambiar la producción proviene primariamente de tiempos extra, compensaciones,... o de entrenamiento, contratación,...

Cada una de estas reglas llevará a modificaciones en el nivel de producción de una forma suave y continua. Sin embargo, en ocaciones los cambios de producción tienen que ser en saltos o no ocurrir (por ejemplo, menos turnos, otra máquina,...). Para ilustrar como las reglas descritas pueden ser adaptadas a este tipo de situaciones nótese que el nivel de producción indicado por cada regla está compuesto por dos partes:

1.- Un nivel tentativo (P_{t+1}^* o P_t)

2.- Una cowección

Cuando sea necesario un cambio de nivel las reglas se pueden modificar como sigue:

1.- Fíjese un mínimo en la cowección que se puede hacer.

2.- Si la cowección indicada es menor que el mínimo anterior úsese el nivel tentativo en otro caso hágase la cowección.

En cualquier caso, una vez decidido el nivel de inventario mínimo quedan dos variables por determinar que condicionan el comportamiento de la regla y estos son el tiempo entre revisiones y el nivel de ajuste K.

Haciendo algunos supuestos sobre la distribución de la demanda es demostrable que:

1.- La magnitul en los cambios de nivel de producción serán en promedio

$$\sqrt{\frac{K \quad Q}{2 - K} \quad I_R}$$

Q = tiempo entre revisiones

I_R = Nivel de inv requerido

2.- El intervalo requerido de reserva será proporcional a

$$\left(\sqrt{\frac{T \ (2K - K^2) + Q}{2K - K^2}} \right)$$

En nuestro ejemplo anterior.

T = 1

K = 1

Q = 1

Con estos valores y el nivel de inventario requerido fijado en 25 horas, la magnitud esperada de los cambios en producción serían de 5 horas el inventario en 25 horas promedio operaría. Si por ejemplo hacemos que K = 5, la producción variaría en promedio en 3 horas y el inventario se incrementaría a 27 horas, o sea

$$1 \ (2 - 1) + 1 \ / \ (2 - 1) \quad = \quad 1.41 \text{ original} \qquad K = 1$$

$$1 \ (1 - .25) + 1 \ / \ (1 - .25) \quad = \quad 1.52 \qquad K = .5$$

Aumento $\frac{1.52}{1.41} = 1.08$

Nuevo inventario 1.08 x 25 = 27

Si en cambio no cambiamos K pero incrementamos Q a Z tendremos que:

Cambios esperados en producción = 7

Inventario esperado de reserva = 30

Lo cual está de acuerdo con nuestra intuición de que sucedería en dicho caso.

Un ejemplo "realista" de progreso.

La compañía Alturas, S. A., produce una pequeña máquina que se vende a $ 100 c/u y vende aproximadamente 5 200 unidades al año. El maquinado, emsamblaje se hacen en una pequeña planta usando principalmente obreras no calificadas. El nivel de producción puede ser cambiado rápidamente con el costo de entrenar o reentrenar trabajadoras, gastos de la oficina de personal e incrementos en problemas de inspección y calidad.

Existen cuatro sucursales en el país que abastecen a los clientes, los cuales a su vez son abastecidos desde el almacén central.

En las sucursales un encargado que vigila los inventarios hace los pedidos a almacén central sintiéndose presionado de no tener faltantes. En el almacén central otro encargado revisa inventarios y pone órdenes de producción a la planta.

Estas órdenes se cowían en la planta separadamente. Las fluctuaciones en produoción aun con órdenes aparentemente grandes causaban una honda preocupación a la gerencia.

Para mejorar las cosas el gerente decidió cambiar la práctica de llevar inventarios y decidio establecer lotes económicos. Después de una investigación llegó a los siguientes resultados:

Ventas por sucursal = 25 a la semana o 1300 al año

Costo de pedir a almacén central = 19 $

Costo anual de llevar inventarios = 5 $ / año

Esto indicóque las sucursales deberían de pedir en lotes económicos

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 19 \times 1300}{5}} = 100 \text{ unidades}$$

Se estableció un sistema en las sucursales por el cual cada sucursal ordenaba en cantidades de 100 unidades en promedio cada 4 semanas. Esto en teoría, le daría a cada sucursal un inventario de 50 unidades. Además el inventario en tránsito de la fábrica a la sucursal se le cargó a la sucursal. Como el tiempo de tránsito es de 1 semana, el inventario en tránsito promedia 25 unidades para cada sucursal.

Sin embargo, aunque las ventas semanales por sucursal prome—

dian 25 unidades estas varían y el tiempo de entrega a su vez también variaba y se debía tener inventario suficiente para hacer frente a estas variaciones. Las entregas podían tardar en tránsito hasta 2 semanas y la demanda en 2 semanas podía bajar hasta 38 unidades o subir hasta 70. En vista de esta incertidumbre el gerente, para mantener la probabilidad de faltantes en menos del 1% ordenó que las sucursales hicieran un pedido cada vez que el inventario llegara a 67 unidades.

Esto llegaba en promedio al siguiente inventario por sucursal

Inventario de Seguridad	42	
" en Tránsito	25	
" Promedio x Ordenes	50	(= 100 ÷ 2)
	117	o 4.7 semanas.

Estudiando el almacén central de la misma forma se obtuvieron los siguientes datos:

Costo de llevar inventario = 3.50 $/ano

Costo de poner una orden = 13.50 $

Esto indicó lotes económicos de producción de

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 13.50 \times 5200}{3.50}} = 200 \text{ unidades}$$

El tiempo de procesamiento era de 2 semanas. El almacén central necesitaría hacer órdenes a la planta cuando tuviera lo suficiente apenas para hacer frente a una demanda de 2 semanas.

Para ello se construyó la siguiente tabla:

N° de Ordenes de las Sucursales	Cantidad Ordenada	N° de semanas que ocurrió	% de semanas
0	0	28	35
1	100	28	35
2	200	20	25
3	300	4	5

Considerando independientes las órdenes por semana se construyó la tabla que indica el número de órdenes que habrá de abastecer el almacén central en un período de 2 semanas.

Nº Ordenes	Cant	% de Veces	% Acum.
0	0	.1225	.1225
1	100	.2450	.3675
2	200	.2975	.6650
3	300	.2100	.8750
4	400	.0975	.9725
5	500	.0250	.9975
6	600	.0025	1.0000
		1.0000	

Como se quisiera satisfacer el 99% de las veces las órdenes - se acordó que el punto de reorden se fijara en 500 unidades o sea- que el inventario quedó compuesto de la siguiente forma en promedio.

Inv Prom x Ordenes	=	100	(200 - 2)
Inv de Seguridad	=	300	(500 punto reorden - 200 uso normal en 2 semanas)
Inv en Proceso	=	100	(estimado)
		500	

Los costos de este sistema serían:

	Total Anual
Inventario	
Fábrica 500 x 3.5	1750
Sucursales 4 x 117 x 5.5	2340
Costo Ordenar	
Sucursales 52 x 19	990
Fábrica 26 x 13.50	350
	5430

Todo estuvo muy bien, los inventarios totales disminuyeron, - se contaba con un sistema con adecuado servicio y rápida respuesta con fácil supervisión. Todo hubiera estado perfecto si la planta - no se hubiera quedado parada sin que hacer varias veces. En promedio el almacén central haría una orden cada 2 semanas. La experiencia indico que en 53 % de las semanas no hubo órdenes, en 44% hubo una orden y en 3% hubo 2 o más órdenes.

Un análisis indicó que estas fluctuaciones en la planta eran- muy costosas. Pocos y grandes cambios eran mucho más costosos que- frecuentes y pequeños cambios. Estas fluctuaciones, después de un- año se claccularon en $ 8570 llevando el costo total del sistema a- $ 14,000.

Estos $ 8570 se debieron en gran parte al personal corrido y contratado y a pagos de sueldos de personal innecesario.

Todo esto llevó a la sugerencia de cambiar de sistema por uno de períodos fijos de reorden en quien se pidiera la cantidad vendida en el período anterior. El almacén central enviaría el pedido y haría una orden igual a la planta, y sería abastecido en 2 semanas. De esta forma cada sucursal debería tener inventario suficiente para abastecer la demanda durante un período de revisión más el tiempo de entrega (tomando tentativamente en 2 semanas). La pregunta surgió que tan largos deberían de ser los períodos de revisión:

El gerente la contestó de la siguiente manera:

a) Determinación Inv de Seguridad. Sucursales.

Nº de Semanas	Prob de que la Demanda sea menor que Nivel	Nivel	Demanda Esperada incluyendo 2 semanas de tránsito	Inventario de Seguridad
1	.9975	99	75	24
2	.9950	126	100	26
3	.9925	152	125	27
4	.9900	179	150	29
5	.9875	205	175	30
6	.9850	231	200	31

b) Inventario Promedio en el ciclo = 25 x Nº de semanas 12

c) Inventario en Tránsito = 2 semanas x 25 x 4 sucursales = 200 unidades.

d) Inventario de Seguridad Almacén Central

Nº Semanas (n)	Prob Dem< Nivel	Nivel	Dem Esperada	Inv Seg
1	.9925	341	300	41
2	.9925	447	400	47
3	.9913	553	500	53
4	.9908	658	600	58
5	.9898	762	700	62
6	.9890	867	800	67

$$\text{Nivel} \approx 100\ (n + 2) + 2.33 \sqrt{100(n+2)}$$

e) Inv Cíclico = 100 x Nº Semanas 12

f) Costo de Cambios de Producción

Cuando la magnitud de los cambios se llegó a la siguiente tabla (Costo del cambio por una unidad).

Período entre Revisiones	1	2	3	4	5	6
Costo de Cambios	$1600	$2250	$2760	$3180	$3560	$3900

y presentó la siguiente tabla:

	Longitud del Período					
	1	2	3	4	5	6
Inventario Sucursales	86.5	101	114.5	129	142.5	150
Costo ($ 5)	$ 435	$ 505	$ 575	$ 645	$715	$ 775
Costo Pedir ($19)	990	495	330	250	195	165
Total	1425	1000	905	895	910	940
x 4 Sucursales	5700	4000	3580	3640	3640	3760
Inv Alm Centrl	91	147	203	258	312	367
Costo ($3.50)	320	515	715	903	1092	1285
Costo Pedir($3.50)	700	350	235	175	140	120
Total	1020	865	950	1078	1232	1405
Cambios Prod.	1600	2250	2760	3180	3560	3900
Total	8520	7115	7330	7838	8432	9065

El éxito de este sistema animo a la compañía a ir más adelante (sus costos bajaron de 14,000 a 7115), e implantar un sistema en que las sucursales reportaran sus ventas periodicamente. La planta cocesolidaría estos reportes y pondría una cantidad equivalente en producción. Los inventarios de las sucursales serían surtidos cuando las ventas reportadas desde el último envía excedan un minimo de envió económico. Cuando un envió se hiciera la cantidad embarcada sería igual a la demanda reportada desde el último envió.- Se plantearon dos preguntas: ¿que tan frecuentemente debían reportar las sucursales? y ¿cuál era el envió mínimo?.

Las posibles ventajas del sistema serían:

1.- Las sucursales podrían justificar sus reportes de ventas reduciendo fluctuaciones y necesidades de inventarios de seguridad.

2.- Era posible hacer menos envíos reduciendo los costos.

Estudios de costos indicaron que del costo total de pedir, $19, se podía separar en $ 6 de costos administrativos y $ 13 en empaque, embarque y recepción.

Los costos que podrían ser afectados eran:

1.- Costo de Inv de Seguridad en Sucursales: un reporte semanal reduciría las necesidades de 26 a 24 unidades.

2.- Costo de Inv de Seguridad en Almacén Central: Reportes semanales reducirían las necesidades de 47 a 41 unidades.

3.- Cambios de Producción: Con reporte semanales bajarían de 2250 a 1600 anualmente.

4.- Costos de Reportes. Ahora se harían 52 reportes (de $6) en vez de 26.

5.- Costo de Envíos. Antes eran 26 (de $13) ahora debemos determinar el número de envío. El lote económico será de

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 13 \cdot 1300}{5}} = 82 \text{ unidades}$$

Ese sería el envío promedio a las sucursales, sin embargo, este no puede ser el mínimo, de hecho el promedio deberá ser el mínimo más la mitad de la demanda promedio en el período entre reportes (70 + 12 = 82). Por lo tanto el mínimo se fija en 70 unidades. Cada sucursal recibirá aproximadamente 16 envíos en el año. El inventario por ciclo sería aumentado de la mitad del envío promedio de 2 semanas (50/2) a la mitad del nuevo envío (8212) promedio.

En una tabla se compararon los dos sistemas:

	Sistema: Período fijo 2 semanas	Inv base
Inv Seguridad Suc	520	480
Inv Seguridad Alm	165	144
Reportes	625	1250
Cambios Prod	2250	1600
Envíos	1352	828
Inv x Ciclo	500	820
Total	5412	5122

Regocijado con su éxito el gerente decidió ver si obtenía mayores ahorros evitando cambios de producción. Los costos de inventarios y cambios de producción usando las dos reglas mencionadas antes son; para almacen central:

$$C_{INV} = K_1 \sqrt{\frac{2(2K - K) + 1}{2K - K^2}}$$

para $K = 1$

$$C_{INW} = K_1 \sqrt{3} = 144 \quad \therefore \quad K_1 = \$\ 83.30$$

o sea $C_{INV} = K_1 \sqrt{\frac{2(2K - K) + 1}{2K - K^2}}$

$$C_{PROD} = K_2 \sqrt{\frac{K}{2 - K}} \qquad K_2 = \$\ 1600$$

Podemos entonces crear la función

$$C_T = C_{xnv} + C_{PROD} = 83.3 \sqrt{\frac{2(2K - K) + 1}{2K - K^2}} + 1600 \sqrt{\frac{K}{2 - K}}$$

y miniuizarla para K

se encuentra que para $K = 0.5$ $C_T = 536$ con un ahorro total de \$ 1208.

En resumen el sistema trabajo como sigue:

1.- Cada sucursal estableció un inventario base de 169 unidades
(70 envío mínimo
24 seguridad
75 cubriendo 3 semanas de demanda promedio)

2.- Cada sucursal reporta semanalmente y cuando estos sobrepasan 70 unidades la planta hace un envío.

3.- El almacén central estableció un sistema de inventario con 459 unidades
(159 seguridad
300 cubriendo 3 semanas de demanda promedio)

Cada semana se hacen los siguientes cálculos:

Inventario Actual
+ Produc Proceso
- Demanda reportada no satisfecha
+ 100 (Prod normal)
- Inv Base
= Exceso (Deficiencia)

Producción = K (.05) x Exceso

Este ejemplo ficticio pero marca los puntos más interesantes de un sistema adecuado de control de producción el cual como puntos esenciales debera ser eficiente y estable.

APENDICE.

Establecimiento Formal de las Reglas de Control.

Sea:

$P^*(i)$ = Prod planeada período i

$P(i)$ = Prod realizada en el período i y disponible en el período i + 1

$\Delta P(i) = P^*(i) - P(i)$

$I^*(i)$ = inventario planeado al final del período i

μ = tiempo tardado en integrar

$d^*(i)$ = demanda pronósticada período i

$d(i)$ = demanda real período i

La regla de control nos dice que:

$$p(i+\mu) = p^*(i+U) - K\left[\sum_{j=0}^{\mu-1} p(i+j) + I(i) - I^*(i)\right] \quad \ldots (1)$$

Sea $x(i) = d(i) - d^*(i)$ es una variable aleatoria con media cero y varianza $Q\,S^2(x)$ donde Q es la longitud del período entre revisiones.

Sea $T = \mu Q$ el tiempo total de entrega

De (1)

$$\Delta p(i+\mu) = -KE(i+U) = -K\left[\sum_{j=0}^{\mu-1} \Delta p(i+j) + I(i) - I^*(i)\right] \quad .(2)$$

Como

$$\left.\begin{array}{l} I(h) = I(h-1) - d(h) + p(h-1) \\ I^*(h) = I^*(h-1) - d^*(h) + p^*(h-1) \end{array}\right\} \text{toda } h \ldots (2)\text{bis}$$

entonces

$$I(i+U) - I^*(i+U) = I(i) - I^*(i) - \sum_{j=1}^{\mu} x(i+j) + \sum_{j=0}^{\mu-1} p(i+j)$$

$$= E(i+U) - \sum_{j=1}^{\mu} x(i+j) \quad ..(3)$$

De (2) y (2) bis

$$E(i+U) = E(i+U-1) + \Delta p(i+U-1) - \Delta p(i-1) - x(i) + \Delta p(i-1)$$

$$= E(i+U-1)(1-K) - x(i)$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (1-K)^n\, x(i-n)$$

Substituyendo en 3

Y como las x(i) son variables aleatorias independientes y (i+U)= I(i + U) - I (i + U) son tambien variables aleatorias

$$\bar{\Psi} = 0$$

$$S^2(Y) = Q\,S^2(x) \left[U + \sum_{n=0}^{\infty} (1 - K)^{2n} \right] \qquad 0 \leq K \leq 1$$

$$= S^2(x) \left[UQ + \frac{Q}{2K - K^2} \right]$$

entonces la desviación de los inventarios alrededor de los niveles planeados será:

$$S(Y) = S(x) \sqrt{T + \frac{Q}{2K - K^2}} = S(x) \sqrt{\frac{T(2K - K^2) + Q}{2K - K^2}} \;\ldots 4$$

Similarmente

$$\Delta p(i) = -K\,E(i)$$
$$= -K \sum_{n=0}^{\infty} (1 - K)^n\, x(i - U - n)$$

$$y\ \overline{\Delta p} = 0$$

$$S(\Delta p) = S(x) \sqrt{\frac{KQ}{2 - K}}$$

Llamemos $\Delta^2 p = \Delta p(i) - \Delta p(i-1)$

es demostrable (Megio 1968) que

$$\overline{\Delta^2 p} = \frac{2S(x)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{KQ}{2 - K}}$$

y con los ajustes netos esperados a los niveles de producción

NOTA APENDICE.

DADOS los datos de la Demanda.

Pedidos	Demanda	Frecuencia Real	Frec Pronósticada	X
0	0	.35	0	0
1	100	.35	1.00	-65
2	200	.25	0	50
3	300	.05	0	15

$$S(x) = \sqrt{\frac{(-65)^2 + (50)^2 + (15)^2}{3}} = 48.13$$

Costo de cambio de nivel una unidad = \$ 29.40

Costo para diferentes períodos Q y K = 1

$$C_p = \frac{(29.4)\ .25(x)\sqrt{Q}}{\sqrt{1.}}$$

$$1600\sqrt{Q}$$

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

PLANEACION Y CONTROL DE LA PRODUCCION

SISTEMAS DE PRODUCCION CONTINUA.

ING. OMAR TAYLOR CRUZ

OCTUBRE, 1977.

PRODUCCION CONTINUA

La manufactura contínua, es el tipo de producción asociada a la producción en masa, esto es, una vez establecida la distribución de la línea de ensamble y los planes de producción, pueden ser puestos en marcha al comienzo del año de manufactura y el producto puede ser fabricado en base a estos planes a través del remanente del año. De lo anterior podemos decir que, la manufactura contínua significa que las especificaciones son estandarizadas y no cambian durante el período de manufactura.

Características por lo cual se recomienda la manufactura contínua:

1.-Un gran volúmen de negocios sobre un producto estandarizado.

2.-La planta es usualmente departamentalizada por producto.

3.-El uso económico de máquinas especializadas.

4.-La producción puede ser ejecutada para stock.

5.-Las órdenes que llegan a la compañía están usualmente basadas en contratos a largo plazo.

Las compañías con manufactura contínua, como dijimos anteriormente, pueden lograr las economías establecidad de producción en masa tales como rapidez, bajos inventarios en proceso, bajos costos unitarios, supervisión más simple, métodos de control de producción más simples y registros de contabilidad para el uso máximo de control serializado, entendiéndose por este último, la coordinación del flujo de trabajo a una tasa preestablecida, basada en un plan de producción a largo plazo.

La primera fase del ciclo de manufactura es el pronóstico de ventas, el que a su vez con la consideración de otros factores, es traducido en el programa de producción o master de producción, que no es otra cosa que la cantidad de producción necesaria por mes o por semana para satisfacer las ventas. Todas estas actividades es lo que conocemos como planeación original.

Debido a que la secuencia de operaciones, tiempo, balanceo de lineas y tasas de producción, son parte del diseño de esta gigantesca máquina integrada, una fábrica no puede trabajar sobre programas integrales y necesitamos saber lo que estos programas significan en términos de tasas de producción, necesidanes detalladas del flujo de material y cuantos hombres se requieren para las líneas de producción.

Por lo tanto, después de la planeación original, debemos seguir las siguientes etapas:

Planeación suplementaria
Calendarización
Despacho
Instrucción
Control

La planeación suplementaria, es la determinación de la rutina de Donde se hará el trabajo, Con qué y la Seguridad de la presencia de los factores de la producción tales como hombres, herramientas y materiales.

La calendarización es el tiempo de coordinación de la producción con la ejecución. Es en esta fase donde se desarrolla el calendario de producción, teniendo como meta el programa master.

El despacho es la emisión de las órdenes para iniciar las actividades de producción. Esta actividad varía directamente con la complejidad de las operaciones y la importancia de la aproximación al tiempo.

La instrucción incluye tanto la trasmisión de información del supervisor al empleado como su seguimiento. Esta función involucra el contacto personal con empleados subordinados, conocimiento personal de la habilidad de empleados y máquinas y juicios concernientes con la ejecución de un departamento.

Una vez que la planeación ha sido delineada, el producto diseñado, las ventas pronosticadas y programadas, los planes de trabajo para partes hechas, las cédulas o calendarios para cada parte creadas y la fabricación y/o líneas de ensamble balanceadas, la información es enviada a control de la producción, quienes tomarán estos planes y los convertirán con la asistencia de fabricantes y/o ensambladores en partes completas y productos terminados, en los tiempos, cantidades y calidades establecidas en los planes.

DISEÑO DEL SISTEMA DE PRODUCCION.-

Las restricciones físicas básicas sobre la calendarización impuesta por el Layout, capacidad de máquinas, secuencia de operaciones y balanceo, son el problema principal en el diseno del sistema de producción. La figura 1, muestra las etapas para el diseno del sistema de producción.

El diseno de producción del producto representa la primera mayor etapa en el desarrollo del diseño del sistema de producción. La fase del proceso de planeación es analizada a través de la preparación de gráficas de flujo y ensamble para desarrollar una perspectiva total del problema de manufactura. Las decisiones basadas en economías y especialización y otros factores determinan que partes y componentes se comprarán a vendedores externos y cuales se manufacturaran internamente. Los artículos para manufactura interna representan entonces el ámbito alrededor del cual debe ser disenado el sistema de producción. Para estos artículos entonces deben ser desarrollados el modo y secuencia de operaciones y procesos.

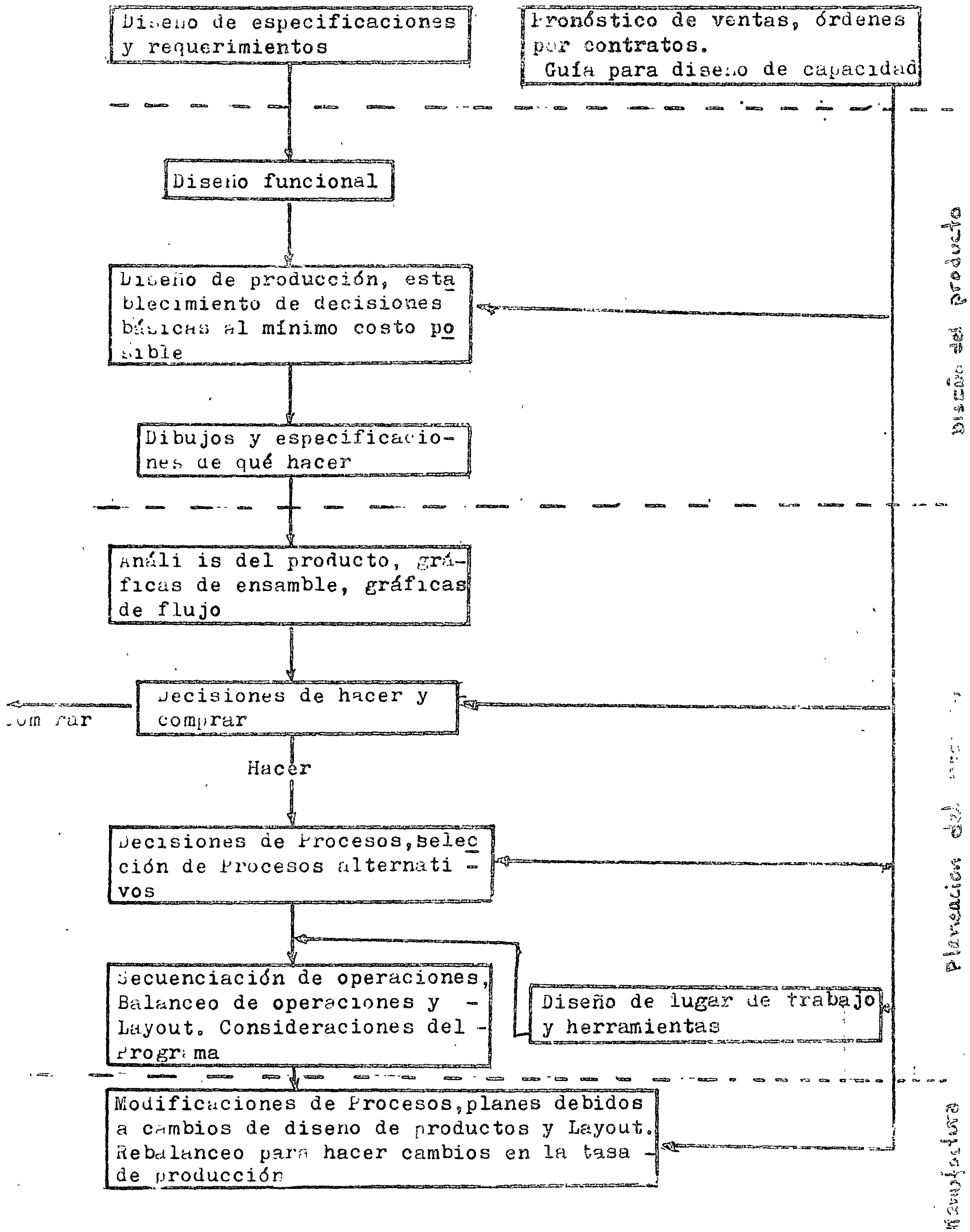
BALANCEO DE LINEAS.-

La esencia del problema de balanceo de líneas, es de agrupar y/o subdividir actividades o tareas de tal manera que todas las estaciones de trabajo tengan una cantidad igual de trabajo, haciéndolo en términos del tiempo requerido para ejecutar las tareas. A fin de iniciar con la mayor flexibilidad en las alternativas para intentar balancear para una tasa específica de producción, necesitamos saber los tiempos de ejecución para la unidad más pequeña posible del total de las actividades. Tambien necesitaremos saber las restricciones técnológicas, las cuales puedan requerir cierta secuencia de estas actividades.

Supongamos el siguiente ejemplo sencillo:

Tarea	Tiempo(seg)	Debe seguir a la tarea	Tarea	Tiempo	Debe seguir a la tarea
a	14	------	g	9	e
b-1	5	a	h	14	e
b-2	5	a	i	6	fgh
c	30	b	j	7	i
d	3	---	k	3	i
e	5	d	l	4	jk
f	13	e	m	7	l

Fig.1


Diseño de especificaciones y requerimientos
Pronóstico de ventas, órdenes por contratos. Guía para diseño de capacidad
Diseño funcional
Diseño de producción, establecimiento de decisiones básicas al mínimo costo posible
Dibujos y especificaciones de qué hacer
Análisis del producto, gráficas de ensamble, gráficas de flujo
Decisiones de hacer y comprar
Comprar
Hacer
Decisiones de Procesos, selección de Procesos alternativos
Secuenciación de operaciones, Balanceo de operaciones y Layout. Consideraciones del Programa
Diseño de lugar de trabajo y herramientas
Modificaciones de Procesos, planes debidos a cambios de diseño de productos y Layout. Rebalanceo para hacer cambios en la tasa de producción
Diseño del producto
Planeación del
Manufactura

Con los datos de la tabla anterior, queremos balancear esta secuencia de tareas en una línea de ensamble, diseñada para producir 240 unidades por hora o ciclos de 15 seg. por unidad. Debido a que el tiempo total de ensamble es de 125 seg., el mínimo número de estaciones posibles es de 125/15 = 8.3 o sea 9 estaciones. Esta solución nos daría un tiempo ocioso de 10 seg.
La figura 2 nos muestra la solución gráfica de este problema.

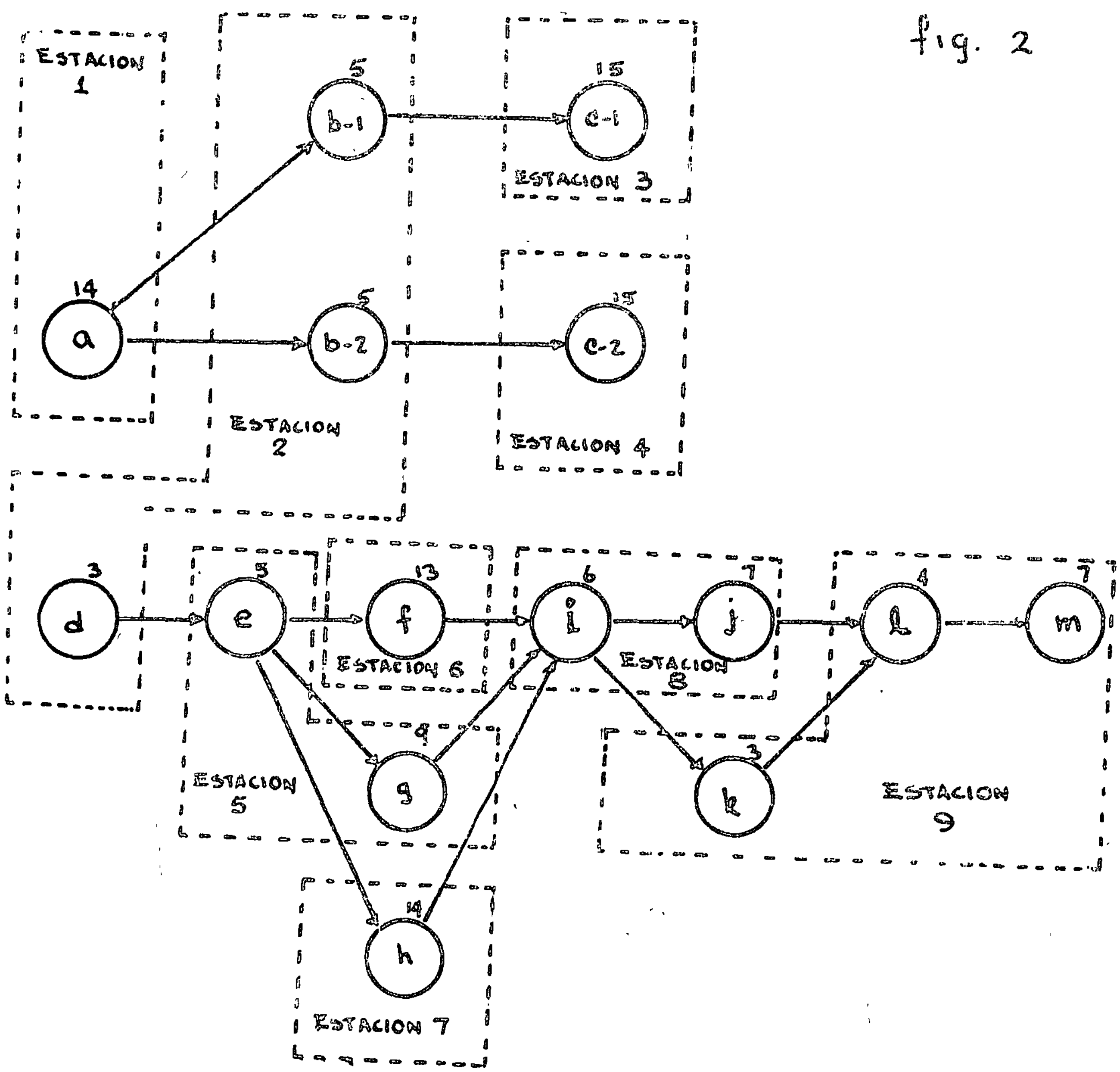


fig. 2

PROGRAMACION.-

La programación es el nombre dado a la preparación de una tabla de tiempo para las actividades con nos encontramos en cualquier empresa industrial.

Para efectos de programación, por lo general resulta más satisfactorio tratar primero los requerimientos internos, esto es, recursos de mano de obra y ajustar a ellos un programa de recursos del exterior, ya que estos recursos con frecuencia se obtienen de varias fuentes.

Razones de la programación.-

- Costo mínimo de producción
- Costos mínimos de almacenamiento
- Inventarios de costo mínimo
- Gasto mínimo en efectivo
- Máxima utilización de la planta
- máxima satisfacción del cliente
- Máxima moral de los trabajadores

Toda programación debe iniciarse con un pronóstico de los requerimientos.

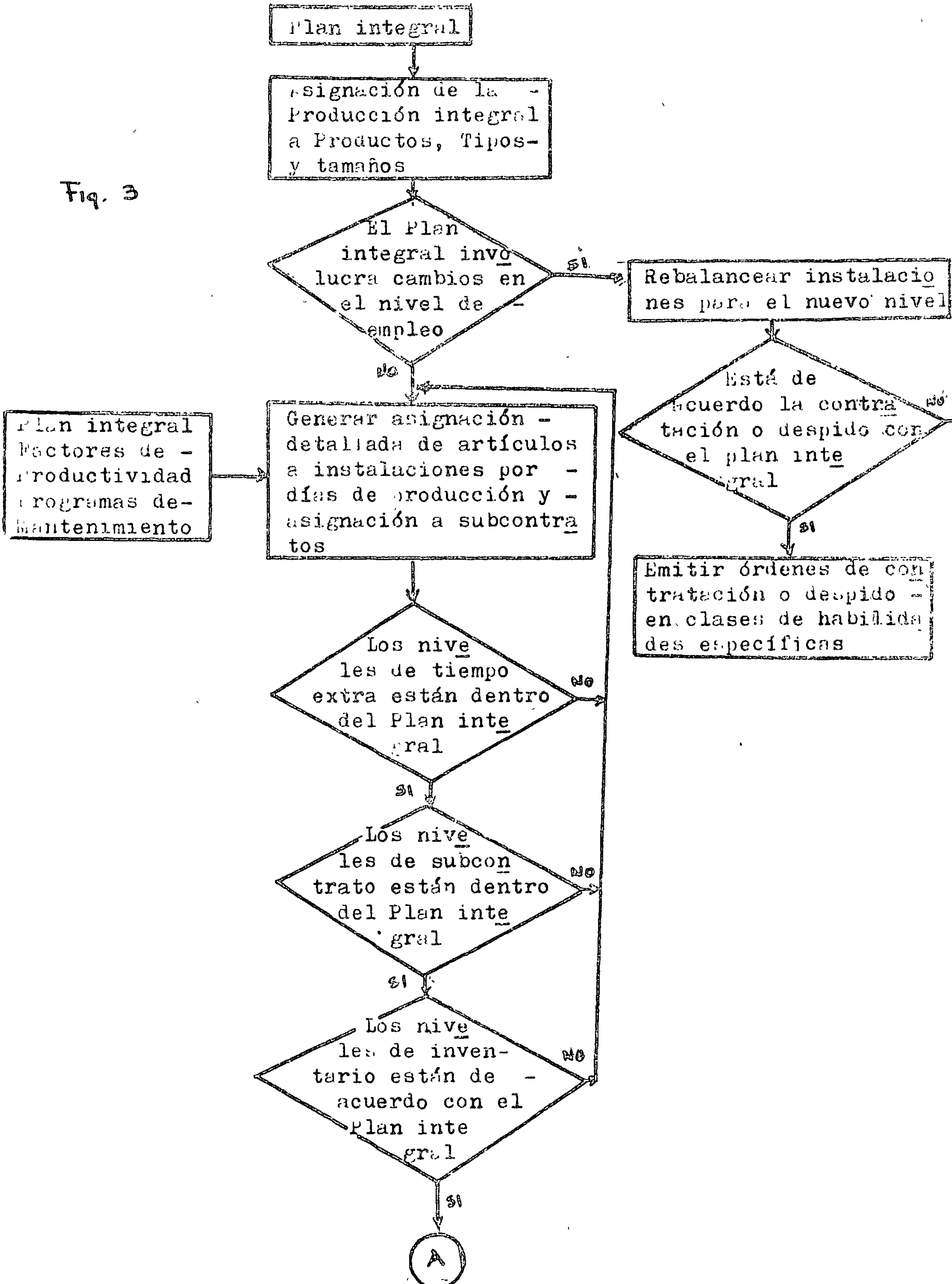
Una vez que el pronóstico está hecho y se decide preparar un programa, es necesario saber:

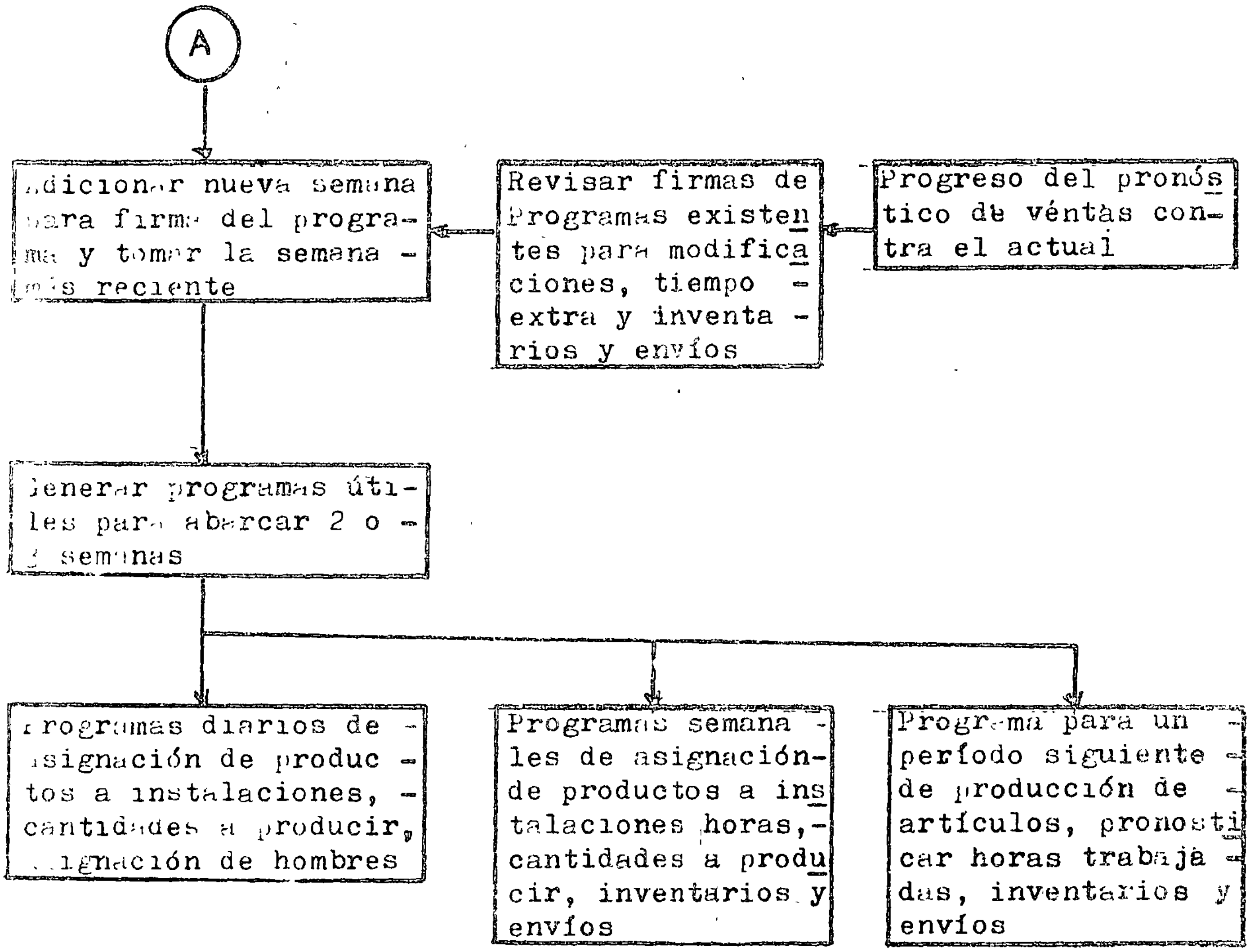
1.- Los Compromisos que existen
2.-Los recursos disponibles
3.- La eficiencia de la mano de obra en los diferentes centros de trabajo.
4.-Los niveles esperados en enfermedades y ausentismo
5.-Los compromisos de mantenimiento
6.- Otros factores locales que afectan el trabajo
7.- El contenido de trabajo de los distintos productos
8.- Los métodos de fabricación propuestos
9.- Los tiempos de preparación implícitos en los métodos propuestos.

CALENDARIZACION DETALLADA DE INSTALACIONES Y MANO DE OBRA.-

Dado el plan el cual ha establecido la producción integral a ser calendarizado, inventarios iniciales, terminación de inventarios y pronóstico de ventas totales, se procede a la calendarización detallada de instalaciones y mano de obra. En la figura 3 se muestra el proceso de generar programas detallados.

Fig. 3


Plan integral
Asignación de la Producción integral a Productos, Tipos y tamaños
El Plan integral involucra cambios en el nivel de empleo
SI
NO
Rebalancear instalaciones para el nuevo nivel
Está de acuerdo la contratación o despido con el plan integral
NO
SI
Emitir órdenes de contratación o despido en clases de habilidades específicas
Plan integral Factores de productividad Programas de Mantenimiento
Generar asignación detallada de artículos a instalaciones por días de producción y asignación a subcontratos
Los niveles de tiempo extra están dentro del Plan integral
NO
SI
Los niveles de subcontrato están dentro del Plan integral
NO
SI
Los niveles de inventario están de acuerdo con el Plan integral
NO
SI
A


A
Adicionar nueva semana para firma del programa y tomar la semana más reciente
Revisar firmas de Programas existentes para modificaciones, tiempo extra y inventarios y envíos
Progreso del pronóstico de ventas contra el actual
Generar programas útiles para abarcar 2 o 3 semanas
Programas diarios de asignación de productos a instalaciones, cantidades a producir, asignación de hombres
Programas semanales de asignación de productos a instalaciones horas, cantidades a producir, inventarios y envíos
Programa para un período siguiente de producción de artículos, pronosticar horas trabajadas, inventarios y envíos

BIBLIOGRAFIA

1.- Production Control
William Voris
Ed. Ricard D. Irwin.

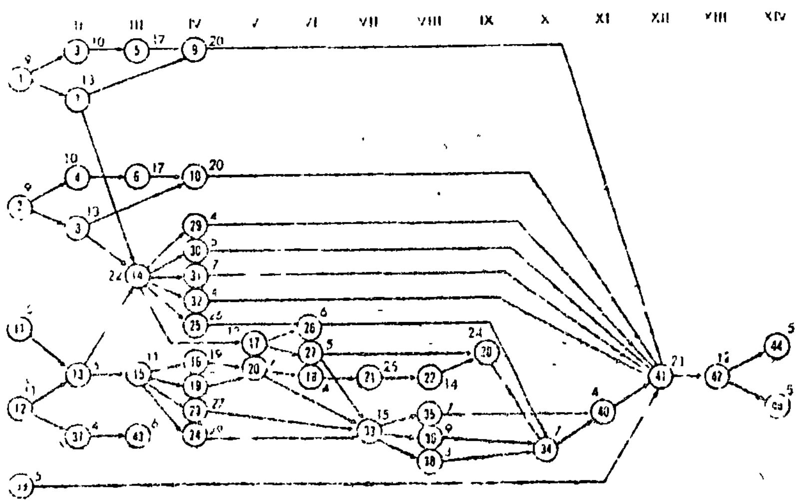
2.- Production Inventory Sistems: Planning and Control
Buffa y Taubert
Ed. Richard D. Irwin.

3.- Control de la Producción: sistemas y decisiones
Greene
Ed. Diana

4.- Production Systems; Planning, analysis and control
James L. Riggs
Ed. John wiley

Balanceo de Líneas Heurístico.- Para ilustrar este método hagamos uso del siguiente ejemplo: se tienen 45 elementos de trabajo con ciertas restricciones técnicas de secuencia, estos elementos suman 552 seg. y se desea tener 3 estaciones, lo cual nos dará 184 seg. por estación.

En el siguiente diagrama de precedencia se muestra el total de elementos, donde los números circulados representan el elemento y los números no calculados el tiempo de ejecución.



A partir de este diagrama se construye la tabla que se muestra a continuación donde la columna A, muestra el número de columnas del diagrama, la columna B el número del elemento, la C la posible movilidad que pueda tener el elemento y la D el tiempo.

(A) Column Number of Diagram	(B) Task Identification Number	(C) Remarks	(D) Task Time Duration t_i	(E) Sum of Time Durations	(F) Cumulative Time Sums
I	1		9		
	2		9		
	11		10		
	12		11		
	39	→ II, …, XI	5	44	44
II	3 (w 5, 9)	→ III, …, IX	10		
	7		13		
	4 (w 6, 10)	→ III, …, IX	10		
	8		13		
	13		6		
	37 (w 43)	→ III, …, XIII	4	56	100
III	5 (w 9)	→ IV, …, X	17		
	6 (w 10)	→ IV, …, X	17		
	14		22		
	15		11		
	43	→ IV, …, XIV	6	73	173
IV	9	→ V, …, XI	20		
	10	→ V, …, XI	20		
	29	→ V, …, XI	4		
	30	→ V, …, XI	5		
	31	→ V, …, XI	7		
	32	→ V, …, XI	4		
	25	→ V, …, VIII	26		
	16		19		
	19		3		
	23	→ V, VI	27		
	24	→ V, VI	29	164	337
V	17		12		
	20		7	19	[illegible]
VI	26	→ VII, …, IX	6		
	27		5		
	18		4	15	371
VII	21		55		
	33 (w 35, 36, 38) → VIII		15	70	441
VIII	22		14		
	35	→ IX, X	7		
	36	→ IX	9		
	38	→ IX	3	33	474
IX	28		24	24	498
X	34		7	7	505
XI	40		4	4	509
XII	41		21	21	530
XIII	42		12	12	542
XIV	44		[illegible]		
	45		5	10	552

ETAPA 1.- Debido a que C = 184, buscamos en la columna I de la tabla 1 para encontrar la suma acumulativa que debería ser 184. La suma acumulativa hasta la columna III inclusive es de 173, por lo que para satisfacer el tiempo de la estación faltan 11 seg.

ETAPA 2.- Buscando en la columna IV del diagrama, tareas que combinadas sumen 11 encontramos que las tareas 31 y 32 satisfacen estas necesidades.

ETAPA 3.- Mover las tareas 31 y 32 a la parte superior de la lista de la columna IV, entonces asignamos a ellas la estación 1. Todas las tareas en las columnas I, II y III más las tareas 31 y 32 de la columna IV son ahora asignadas a la estación 1. El estado de solución es ahora mostrado en la tabla 2.

(A) Column Number of Diagram	(B) Task Identification Number	(C) Remarks	(D) Task Time Duration t_i	(E) Sum of Time Durations	(F) Cumulative Time Sums	
I	1		9			Station 1
	2		9			
	11		10			
	12		11			
	39		5			
II	3		10			
	7		13			
	4		10			
	8		13			
	13		6			
	37		4			
III	5		17			
	6		17			
	14		22			
	15		11			
	43		6			
IV	31		7			
	32		4	184	184	
	9	→ V, . . . , XI	20			Unassigned Work
	10	→ V, . . . , XI	20			
	29	→ V, . . . , XI	4			
	30	→ V, . . . , XI	5			
	25 (w. 26)	→ V, . . . , VIII	26			
	16		19			
	19		3			
	23	→ V, VI	27			
	24	→ V, VI	29	153	337	
V	17		12			
	20		7	19	356	
VI	26	→ VII, . . . , IX	6			
	27		5			
	18		4	15	371	
VII	21		55			
	33 (w. 35, 36, 38)	→ VIII	15	70	441	
VIII	22		14			
	35	→ IX, X	7			
	36	→ IX	9			
	38	→ IX	3	33	474	
IX	28		24	24	498	
X	34		7	7	505	
XI	40		4	4	509	
XII	41		21	21	530	
XIII	42		12	12	542	
XIV	44		5			
	45		5	10	552	

ETAPA 4.- Buscar en la columna F de la tabla 2 para encontrar la suma acumulativa que de 2 x 184 = 368. La suma acumulativa para la columna VI es 371.

ETAPA 5.- Buscar en la lista de las tareas no asignadas, las cuales puedan ser movidas más alla del total de 368 en la columna VI o a la columna VII. Estas son las tareas 9, 10, 29, 30 y 25 (w. 26).

ETAPA 6.- ¿Existe alguna combinación de tareas las cuales puedan ser movidas y totalicen 371-368 = 3? NO

ETAPA 7.- Aumentar el número de la columna y repetir. La suma acumulativa para la columna VII en el diagrama de precedencia es 441.

ETAPA 8.- Buscar en la lista de las tareas no asignadas, cuáles pueden ser movidas horizontalmente más allá del total 368 en las columnas VI o a la columna VII. Estas son las tareas 9, 10, 29, 30, 25 (w. 26) y 33 (w. 35, 36, 38).

ETAPA 9.- ¿Existe alguna combinación de tiempos de tareas movibles cuyo total sea 441-368 = 73? NO

ETAPA 10.- Aumentar el número de la columna del diagrama de Precedencia y repetir. La suma acumulativa es 474 para la columna VIII.

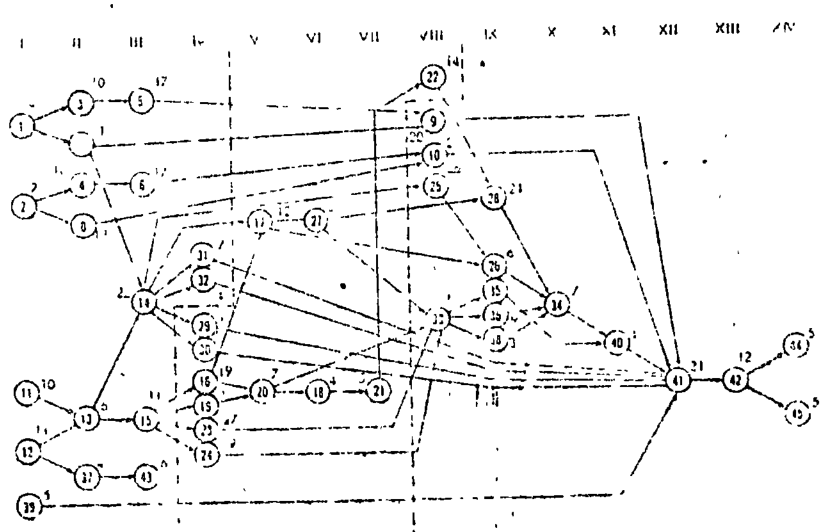
ETAPA 11.- Buscar de la lista de tareas no asignadas, cuáles pueden ser movidas horizontalmente más allá del total de 368 en la columna VIII o a la columna IX. Estas son 9, 10, 29, 30, 25 (w. 26) y 33 (w. 35, 36, 38).

ETAPA 12.- Existe alguna combinación de elementos movibles --

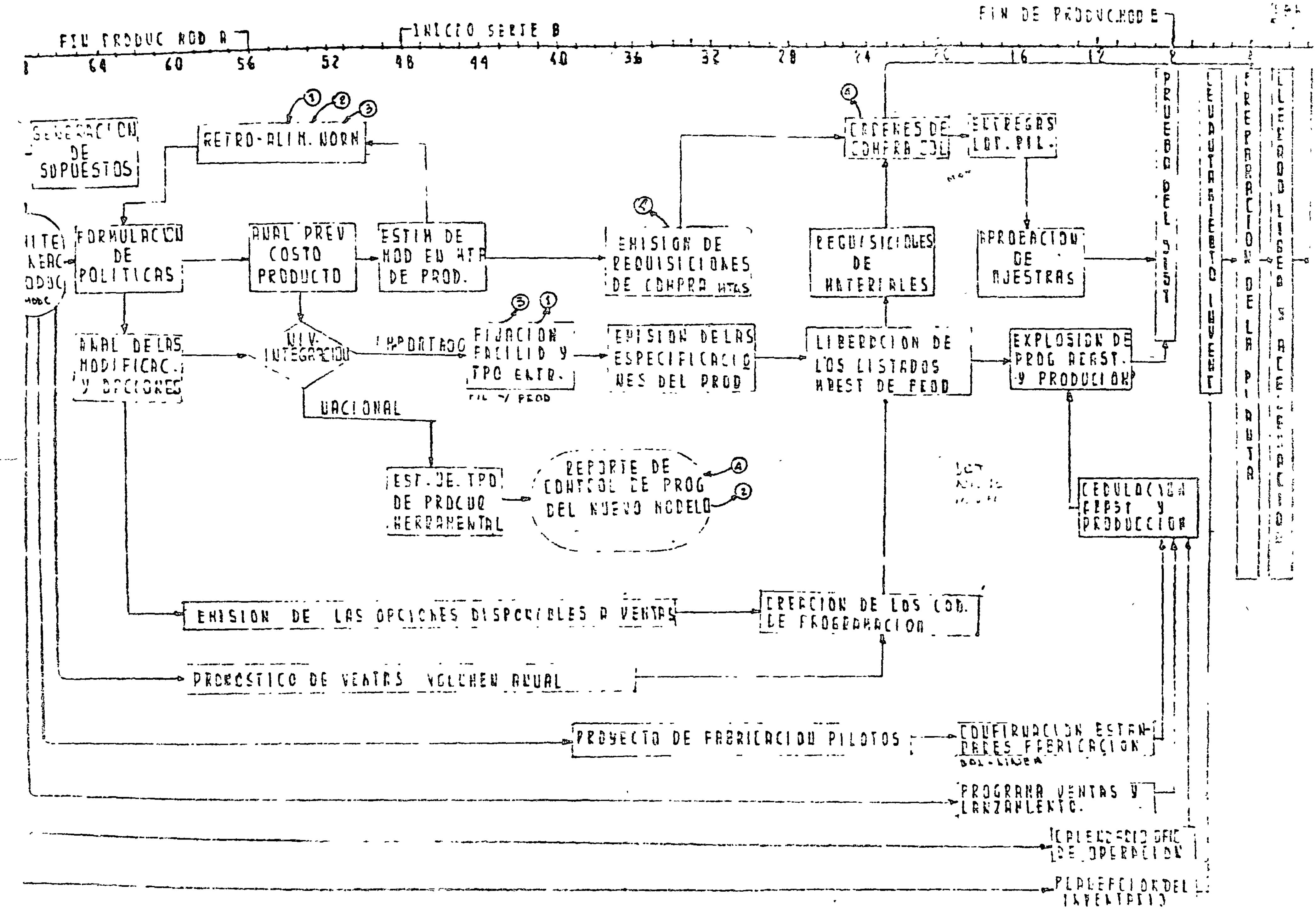
los cuales suman 476 - 368 = 106 o de otra forma ya que los tiempos de las tareas movibles totalizan 115 existe alguna combinación que totalicen 115 - 109 = 6 las cuales puedan ser retenidas en la estación 2? si los tiempos de las tareas 29 y 30 suman 9 y el balance de estas tareas movibles son de 106 seg.

ETAPA 13.- Mover las tareas número 9, 10, 25 (w.26) y 33 (w. 35, 36, 38) más allá de 368 de la columna VIII o más allá según requiera el diagrama de precedencia. La estación 2 queda ahora formada a partir de la columna IV (excluyendo 31 y 32), V, VI, VII y 22 en la columna VIII.

ETAPA 14.- La estación 3 queda formada por las tareas restantes.
La solución nos quedaría como muestra el siguiente diagrama de precedencia y la tabla 3.



(A) Column Number of Diagram	(B) Task Identification Number	(C) Remarks	(D) Task Time Duration t_i	(E) Sum of Time Durations	(F) Cumulative Time Sums	
I	1		9			Station 1
	2		9			
	11		10			
	12		11			
	39		5			
II	3		10			
	7		13			
	4		10			
	8		13			
	13		6			
	37		4			
III	5		17			
	6		17			
	14		22			
	15		11			
	43		6			
IV	31		7			
	32		4	184	184	
	29		4			Station 2
	30		5			
	16		19			
	19		3			
	23		27			
	24		29			
V	17		12			
	20		7			
VI	27		5			
	18		4			
VII	21		55			
VIII	22		14	184	368	
	9		20			Station 3
	10		20			
	25		26			
	33		15			
IX	28		24			
	26		6			
	35		7			
	36		9			
	38		3			
X	34		7			
XI	40		4			
XII	41		21			
XIII	42		12			
XIV	44		5			
	45		5	184	552	


FIN PRODUC MOD A
INICIO SERIE B
FIN DE PRODUCC MOD B
64
60
56
52
48
44
40
36
32
28
24
16
12
8
GENERACION DE SUPUESTOS
RETRO-ALIM. NORM
FORMULACION DE POLITICAS
ANAL PREV COSTO PRODUCTO
ESTIM DE MOD EN HTA DE PROD.
EMISION DE REQUISICIONES DE COMPRA HTAS
ORDENES DE COMPRA COL
ENTREGAS LOT. PIL.
REQUISICIONES DE MATERIALES
APROBACION DE MUESTRAS
PRUEBA DEL SIST
ANAL DE LAS MODIFICAC. Y OPCIONES
NIV. INTEGRACION
IMPORTADO
NACIONAL
FIJACION FACILID Y TPO ENTR.
EMISION DE LAS ESPECIFICACIONES DEL PROD
LIBERACION DE LOS LISTADOS ABAST DE PROD
EXPLOSION DE PROG ABAST. Y PRODUCCION
EST. DE TPO DE PRODUC HERRAMENTAL
REPORTE DE CONTROL DE PROG DEL NUEVO MODELO
CEDULACION ABAST Y PRODUCCION
EMISION DE LAS OPCIONES DISPONIBLES A VENTAS
CREACION DE LOS COD. DE PROGRAMACION
PRONOSTICO DE VENTAS VOLUMEN ANUAL
PROYECTO DE FABRICACION PILOTOS
CONFIRMACION ESTANDARES FABRICACION
PROGRAMA VENTAS Y LANZAMIENTO.
PREPARACION DE LA PAUTA

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

PLANEACION Y CONTROL DE LA PRODUCCION

SISTEMAS DE PRODUCCION INTERMITENTE

ING. ADOLFO VELASCO REYES

OCTUBRE, 1977.

SISTEMAS DE PRODUCCION INTERMITENTE.

El resultado final de los decisiones en los areas de producción, de planeación de servicios, distribución de planta, manejo de materiales y control de inventarios es que: en un momento dado, la firma tendrá la capacidad de producción (determinada). Es decir, que se tendrán a disposición para su utilización en la actividad de producción, clases y cantidades especificas de equipo de producción, accesorios de máquina, mano de obra, espacio de piso, equipo de manejo de materiales, materios primas y piezas compradas.

Después de establecer esta capacidad, empezarán a llegar pedidos reales para cantidades dadas de productos diferentes. Estos pedidos pueden ser para productos de norma o especiales. En lo que se refiere a productos de norma, estos se habrán producido para existencias con base a un pronóstico de ventas. Sin embargo a medida que los inventarios de estos articulos se agotan en el transcurso de las actividades de satisfacción de los demandas de los clientes, el almacén hará en efecto, pedidos de reposición al departamento de producción por cantidades determinadas según los métodos ya vistos relacionados con el control de inventarios.

En relación con los productos especiales, estos no se producirán por adelantado y por lo tanto, el departamento de producción recibirá pedidos para estos articulos directamente de los clientes. Todos los pedidos recibidos por el departamento de producción indicarán las fechas de entrega esperada, además de las cantidades requeridas de los productos implicados. Por lo tanto, se espera que el departamento de producción fabrique los productos de la firma, no solamente en las cantidades solicitadas sino también a tiempo para cumplir las fechas de entrega preestablecidas.

Como regla general, esto solo se puede lograr si se ejerce cierto control sobre las actividades de la planta. Este control, que denominaremos "Control de Producción", incluye el desarrollo y cumplimiento de un plan capaz de producir los resultados deseados.
Cada uno de tales planes exige la preparación de un programa de operación. Para un pedido dado, la programación de la actividad de operación incluirá la determinación de los operaciones necesarias, el tipo y la cantidad de las instalaciones de producción que se deben emplear y los puntos sobre los cuales se debe iniciar y completar cada una de estas operaciones si se ha de cumplir la fecha de entrega preestablecida. Después de que se ha establecido el programa de operación, se deben suministrar a los departamentos de fabricación los / instrucciones necesarias. Luego se deben establecer procedimientos para determinar el progreso de la producción, para evaluaró a la luz del programa existente y para hacer ajustes para apartarse de este programa.
Sin embargo, un sistema de producción no puede hacer milagros. Si las cantidades de pedido y las fechas de entrega estipuladas no són realistas en el sentido de que impongan demandos imposibles sobre la capacidad de producción de la firma es poco o nada lo que puede hacer el departamento de control de producción para rectificar esta situación. En resumen, el control de producción no puede eliminar los efectos adversos de una mala planeación de producción; cuando mas, prodrá reducirlos al minimo. Esto significa, sin embargo, que la planeación adecuada de producción elimina la necesidad de un control de producción. Aunque haya suministrado la capacidad de planta requerida, se deben tomar medidas para utilizar esta capacidad efectivamente.

A menos que esto se haga, no se pueden elaborar los pedidos a tiempo, ni siquiera cuando existe capacidad sobrante. En esta parte discutiremos básicamente el tipo de control de producción denominado "Control de pedido". El control de pedido es adoptado por aquellas firmas que se ocupan de la fabricación intermitente, alternativamente, "el control de flujo" es adoptado por aquellas firmas que se ocupan de la fabricación continua.

La existencia de estos dos métodos (de flujo y de pedido) de control de producción se puede atribuir al hecho de que la fabricación intermitente difiere de la fabricación continua en ciertos aspectos importantes que se han ya discutidos.

Puede verse intuitivamente que la fabricación intermitente exigirá un procedimiento de control mas complejo, debido a la mayor existencia de productos cuya producción se debe controlar. Además de esto, cada vez que se va a iniciar la producción de un producto determinado está implicada una gran cantidad de trabajo preparatorio, y en la fabricación intermitente, la producción de un solo artículo se iniciará muchas veces al año en comparación con la de un solo producto que se fabrica continuamente que puede iniciarse una sola vez. Finalmente, el hecho de que se pueda usar una pieza dada de equipo para elaborar varios productos diferentes en la producción intermitente, también presenta dificultades especiales. Se deben tomar disposiciones para una variedad de instalaciones en una sola estación de trabajo, para informar al supervisor y al operario sobre lo que debe hacerse en seguida, para tener materiales adecuados y los accesorios de máquina disponibles cuando se necesiten y así sucesivamente.

Por otra parte, en la fabricación continua será suficiente un (equipo) conjunto único de instrucciones para mantener activa una estación de trabajo para un periodo apreciable.

Debe mencionarse que en cualquier compañía pueden existir ambos sistemas al mismo tiempo. Y además muchas veces, algunas firmas tendrán un sistema que contiene elementos tanto de control de pedido como de control de flujo: La razón de esto es que hay casos en los que la fabricación es básicamente, aunque no totalmente, continua. Un ejemplo es el caso de una planta ensambladora de automóviles. En general la planta está fabricando un producto único continuamente. La linea de ensamble se ha diseñado especificamente para la ejecución de operaciones requeridas y todas las piezas componentes que lleguen a través de la linea són sometidas a los mismos procedimientos. No obstante no todos los automóviles que salen de esta linea són iguales. Algunos tienen dos puertas, otros cuatro; algunos són verdes, otros negros; algunos tienen llantas de cara blanca, otros no. En resumen; hay variaciones en el producto final y se debe preveer el manejo de estas variaciones. Es decir; que el sistema de control que se ha de diseñar para atender esta situación será una mezcla entre control de pedido y de flujo.

ASPECTOS IMPORTANTES DEL SISTEMA DE PRODUCCION INTERMITENTE.

AUTORIZACIONES PARA PRODUCIR.

En la fabricación intermitente, la actividad total del control de la producción se inicia con lo que se le dice al departamento de control de producción sobre aquello que se va a producir, las cantidades que se deben producir y la fecha en la cual se debe producir la cantidad estipulada de un producto dado.

Nos referimos a la forma en la que se presenta esta información como una autorización para producir. Realmente las autorizaciones para producir pueden asumir una de tres formas. La primera de ellas es una orden de ventas, la segunda, una solicitud de fabricación y la tercera, un programa maestro.

ORDENES DE VENTAS.-

Sabemos que los productos fabricados intermitentemente pueden ser artículos especiales producidos directamente a pedido del cliente. Cuando se recibe un pedido de ventas para un producto especial se puede enviar una copia de este pedido al departamento de control de producción. En lo que se relaciona con este departamento, la información pertinente contenida en el pedido sería la descripción de lo que se va a producir, las cantidades requeridas y la fecha de entrega.

SOLICITUDES DE FABRICACION.-

Para el caso de productos que se fabrican en tamaños de lote uniforme, la autorización para producirlos asumirá la forma de una solicitud de fabricación. La cantidad obviamente será del tamaño del lote* previamente determinado.

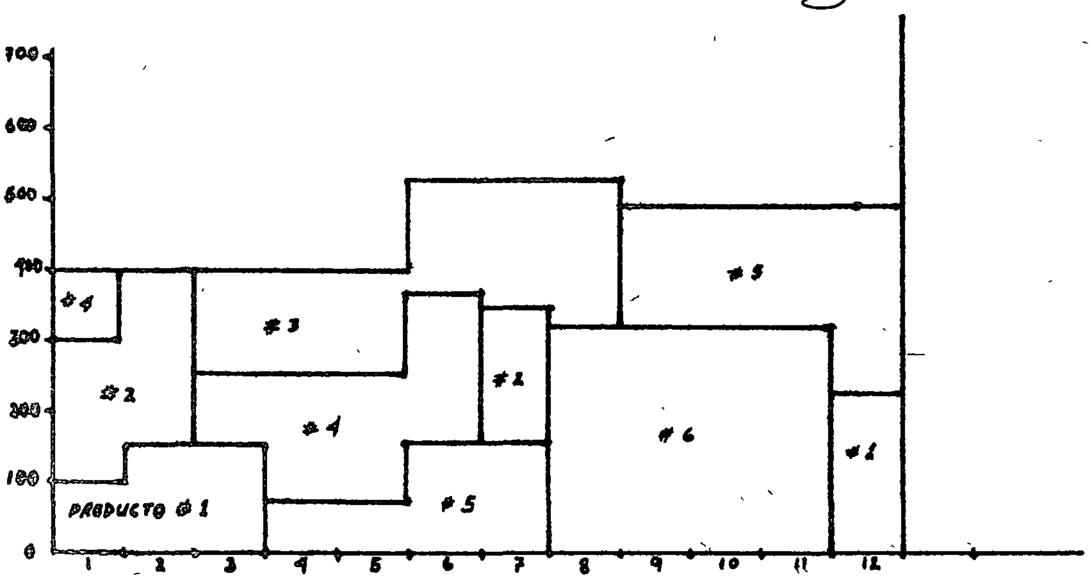
PROGRAMAS MAESTROS.-

Como se ha visto, no todos los productos de norma se fabrican en tamaños de lotes uniformes. Por el contrario, el tamaño del lote puede variar de un pedido a otro. Cuando este es el caso, no se puede llevar los mismos controles. Por lo tanto se debe emplear algún método diferente a los comunes, para autorizar la producción de estos artículos. La autorización que se usa se denomina un "programa maestro", el cual se prepara en la forma siguiente:

* Quiere decir lote económico.

Este programa debe mostrar los productos que se van a producir, las cantidades que deben producirse de cada uno y los momentos en los cuales se deben producir en el periodo bajo consideración. Esos momentos representan las fechas en las cuales se deben completar la última operación de los diferentes productos. Esto se puede representar en forma gráfica.

Este programa mostrado se debe interpretar como sigue: tomaremos la primera semana con fines de ilustración, notemos que se requiere en esta semana 100 unidades del producto 1. Esto significa que deben estar listas para la entrega durante esa semana 100 unidades de este producto. Pero durante la misma semana, deben estar listas para el despacho 200 unidades del producto 2 y así sucesivamente.



En resumen, el programa maestro, la solicitud de fabricación y la orden de ventas, són medios con los que se puede notificar al departamento de control de producción con respecto a lo que se debe producir, las cantidades y los momentos en que se debe producir.

Alejandonos un poco de los aspectos administrativos de control, veamos ahora algunas herramientas de tipo tecnico para sistemas de producción intermitente.

Uno de los problemas mas fuertes dentro de la producción intermitente es el de la fabricación por pedidos especiales. Para resolver estos problemas, podemos hacer uso de una de las herramientas conocidas como RUTA CRITICA. Cabe hacer notar que esta herramienta se usa dentro de las técnicas de control y programación de proyectos a gran escala. La técnica de la RUTA CRITICA en general ataca a problemas bajo condiciones: de tipo determinístico, de tipo probabilista y a problemas donde se presentan las dos condiciones anteriores simultaneamente.

En esta parte del curso veremos algunas técnicas de control y programación de proyectos a gran escala, las cuales estarán apoyadas en modelos de tipo determinístico, otros de tipo probabilístico y finalmente un modelo que une a los tipos probabilístico y determinístico.

Iniciaremos nuestra parte con un método conocido como PERT cuyo significado es "Proyect Evaluation and Review Technique". Este modelo lo podemos tratar únicamente con variables determinísticas, lo cual sería una herramienta muy pobre, ya que en todos los problemas reales siempre están afectados por factores difíciles de predecir, pero que pueden resultar importantes en la medida que deseemos llegar a nuestros objetivos planteados en el inicio del proyecto. Estos factores difíciles de predecir los podremos representar en términos probabilísticos correspondientemente en cada una de las etapas del proyecto a realizarse. Concretando: lo que queremos decir es que vamos a trabajar con un modelo considerando a variables determinísticas y aleatorias en cada una de las etapas de nuestro proyecto, ya que son los términos más comunes en los que se desarrollan todo trabajo de programación, predicción y control.

Veamos en forma más detallada en que consiste PERT.
(Proyect Evaluation and Review Technique).

PERT, es una técnica para análisis, coordinación y control de un proyecto puesto en marcha, lo es también em aplicaciones a proyectos ó actividades que no son recurrentes en un sentido rutinario, pero que son al menos en varios grados únicos. Sin embargo, a pesar de que fuesen recurrentes ó contínuas, estas actividades pueden considerarse como proyectos y así poder aplicar PERT sucesivamente.

Red PERT.- Básicamente el sistema PERT es la red PERT. Esta red esencialmente es un diagrama de flujo que gráficamente muestra el flujo del trabajo. El proyecto es primeramente analizado en tareas o partes de actividades (podrán ser varias centenas), y la red presentará al proyecto entero como una serie de eventos conectados por actividades, como se ilustra en la figura 1.

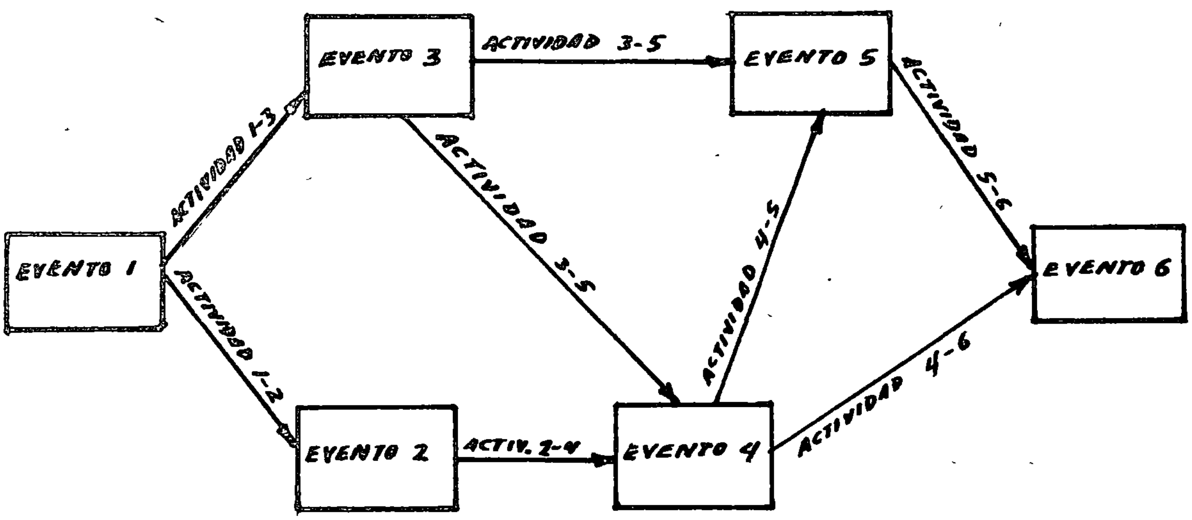


Figura 1. Una red PERT.

Cada nodo del sistema (presentado en el diagrama como un rectángulo) es un evento, nos representa un instante de tiempo y es generalmente descrito como el inicio ó la terminación de varias actividades, es decir, las tareas que deben ejecutarse en orden tal que el evento sucesor pueda ocurrir.

De esta manera una actividad es el trabajo que deberá desarrollarse entre eventos y en la red, una actividad es un período de tiempo. Es el período necesario para moverse del evento predecesor (en el inicio de la rama) al evento sucesor (a la cabeza de la rama); claro, implícitamente en esta definición de tiempo de cada actividad se toman decisiones respecto a la asignación de recursos a esa actividad.

En la figura anterior, cada evento es numerado de tal manera que los arcos siempre procedan de un número menor a uno mayor. La longitud de los arcos no necesariamente llevan una relación entre la duración del tiempo que ello representa.

La red PERT es diseñada de tal manera que las relaciones precedentes entre eventos y actividades es inviolable. Todas las actividades precedentes de entrada comunes a un evento deberían estar terminadas antes de que el evento pueda tener lugar; y - la actividad no podrá iniciarse hasta que su evento ó eventos predecesores hayan ocurrido.

En la red, cada evento es representado por varias figuras geométricas. Algunos analistas usan diferentes figuras en el mismo sistema; en el que cada figura representa varias clases particulares de eventos, avance, etc. Para la exposición de este método, usaremos simplemente rectángulos en toda la red. También se acostumbra usar la palabra inicia ó terminado en la descripción de cada evento.

El uso de la palabra terminado asegura que cada nodo (evento) así designado nos representará una tarea terminada.

CONSTRUCCION DE UN SISTEMA PERT

Ilustraremos la técnica PERT aplicándola a un proyecto de investigación de una empresa X.

El primer paso es analizar el proyecto en tareas. En cualquier situación real, el analista deberá decidir hasta donde llevará la división de tareas. Esto no siempre resulta una decisión fácil; pero una vez realizado esto, el proyecto podrá definirse en términos de una lista de tareas tal como se muestra en la tabla siguiente:

Tabla 1

Proyecto de Compañía X

Lista de Actividades

- Preparar Detalles
- Construir y Probar Programas de Computadora
- Diseñar Areas de Trabajo
- Localización de Areas de Trabajo
- Analizar Datos y Escribir Reporte
- Jefatura de Pruebas
- Preparar Indices
- Distribuir Libros a Oficinas de Clientes
- Negociación para Impresión y Encuadernación
- Impresor y Conjuntos de Tipos (establecer conjs. de tipos)
- Diseño del Libro
- Impresor Corrector de Errores, Impresión y Encuadernación.

El orden en esta lista no es de importancia. La lista de actividades en la tabla anterior fue producida por el director del proyecto, pensando en términos de grupos de actividades y la persona o personas responsables para su ejecución.

La lista es entonces revisada dentro de la secuencia de tareas ordenándola como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 2.

Empresa X

Lista de Actividades en Tareas Secuenciadas.

1.- Preparar Detalles.

2.- Diseñar Area de Trabajo

3.- Negociar para Impresión y Ecuadernación

4.- Diseño del Libro

5.- Construir y Probar Programa de Computadora

6.- Localización de Areas de Trabajo.

7.- Analizar Datos y Escribir Reporte

8.- Establecer Conjuntos de Tipos

9.- Lectura de Pruebas

10.- Preparar Indice

11.- Impresor Corrector de Errores, Impresión y Encuadernación

12.- Distribución de Libros a Oficinas de Clientes.

Hay muchas formas posibles en que pueden listarse. El mayor requisito es que cualquier tarea que deba preceder a otra tarea en el proyecto deberá listarse anteriormente en la tabla. De la lista de la tabla 2 se construye la red PERT.

Empezando en el final con el cuadro "Proyecto Terminado" y trabajando hacia atras, el analísta construirá el sistema como se muestra en la figura 2.

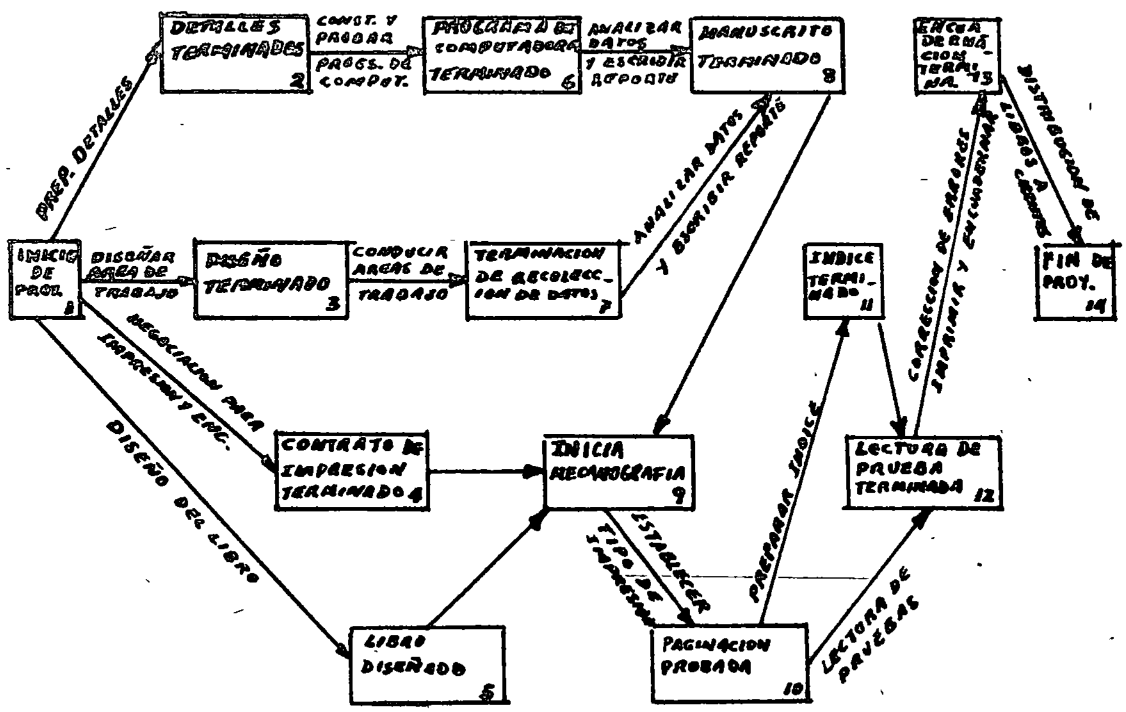
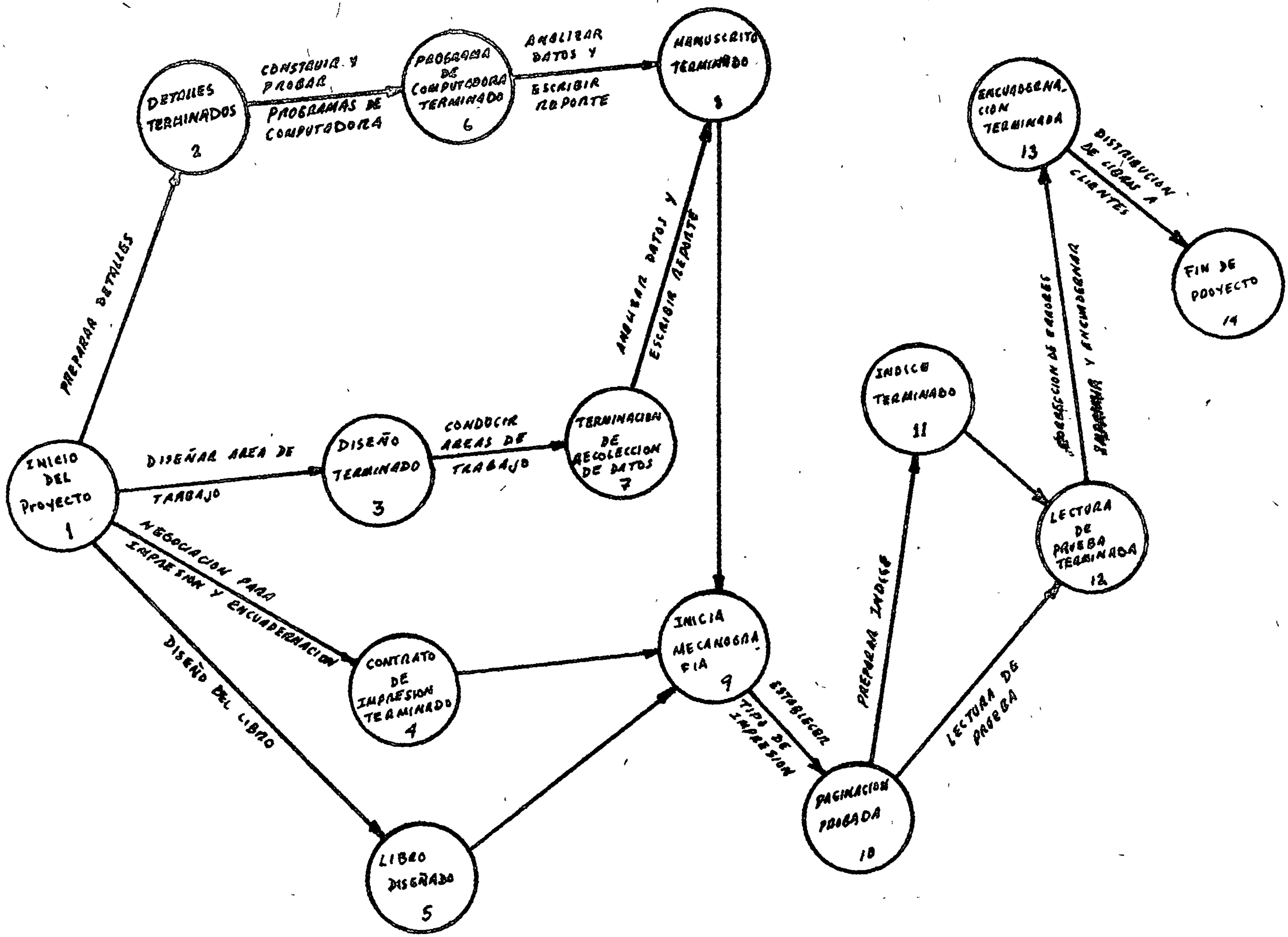


FIG. 2

La red de la figura 2 muestra los títulos de los eventos y las actividades. En la práctica usualmente no se muestran ambos. Frecuentemente solo un conjunto de títulos es mostrado y los otros están implícitos.

En la figura 2, uno de los cuadros encajados en la red es etiquetado con el título de "Inicio de Impresión"y cubre manufactura. Este es el único cuadro a excepción del



INICIO DEL Proyecto 1
PREPARAR DETALLES
DETALLES TERMINADOS 2
CONSTRUIR Y PROBAR PROGRAMAS DE COMPUTADORA
PROGRAMA DE COMPUTADORA TERMINADO 6
ANALIZAR DATOS Y ESCRIBIR REPORTE
MANUSCRITO TERMINADO 8
DISEÑAR AREA DE TRABAJO
DISEÑO TERMINADO 3
CONDUCIR AREAS DE TRABAJO
TERMINACION DE RECOLECCION DE DATOS 7
ANALIZAR DATOS Y ESCRIBIR REPORTE
NEGOCIACION PARA IMPRESION Y ENCUADERNACION
CONTRATO DE IMPRESION TERMINADO 4
DISEÑO DEL LIBRO
LIBRO DISEÑADO 5
INICIA MECANOGRAFIA 9
ESTABLECER TIPO DE IMPRESION
PAGINACION PROBADA 10
PREPARAR INDICE
INDICE TERMINADO 11
LECTURA DE PRUEBA
LECTURA DE PRUEBA TERMINADA 12
CORRECCION DE ERRORES Y ENCUADERNAR
ENCUADERNACION TERMINADA 13
DISTRIBUCION DE LIBROS A CLIENTES
FIN DE PROYECTO 14

SISTEMAS DE PRODUCCION INTERMITENTE.

El resultado final de las decisiones en las areas de planeacion de servicios, distribucion de planta, manejo de materiales y control de inventarios es que: en un momento dado, la firma tendra la capacidad de produccion (determinada). Es decir, que se tendran a disposicion para su utilizacion primero con la palabra inicio en el título. Este cuadro es agregado por consecuencia solamente; no es esencial, pero esta forma de manejar un proceso con tres actividades de entrada nos da una mejor presentación. Deben notarse dos cosas. Primero: el total de las actividades precedentes son actividades falsas ó simuladas; es decir que ellos no representan una actividad real y podrá asignárseles un tiempo cero. Esto es; el inicio de impresión podrá empezar tan pronto como los tres eventos precedentes hayan ocurrido y los arcos podrán haber sido sacados de estos tres eventos directamente al evento "Prueba de Paginación Terminada" con las tres actividades etiquetadas con el título de "Conjunto de Tipos". Este método fue usado en el evento 8. Alternativamente para el evento 8, podemos tener insertadas actividades falsas para los eventos 6 y 7 con un evento etiquetado "Inicio del Manuescrito". Este último método de presentación que es el que usamos para el evento 9 es generalmente preferido ya que es fácil de entender. De esta manera en la figura 2 definimos ambas formas de manejar una actividad con dos ó más eventos predecesores. La preferencia entre ellos es cuestión de gustos individuales, y las actividades falsas de esta forma más corta, podrán insertarse como se crea conveniente.

El analista de la compañía X tiene limitadas sus subdivisiones de las tareas de esta compañía. La compañía impresora deberá también desarrollar esto sobre un análisis PERT para las tareas que deberá desarrollar en la rotativa, haciendo cortes, probando operaciones, cubrir manufactura, impresión y encuadernación. No obstante en este proyecto, la compañía X tiene un contrato con el impresor y sus necesidades son satisfechas por el sistema subdividido como se muestra.

Por lo tanto, la duración del proyecto podrá calcularse por el uso de la forma mostrada en la tabla 3.

TABLA 3

CALCULO DE LA DURACION DEL PROYECTO POR EL METODO DE LA RUTA CRITICA.

Días Transcurridos durante las actividades.

Actividad (1)		Duración (2)		Inicio (3)		Terminación (4)
1 - 2		15	+	0	=	15
1 - 3		5	+	0	=	5
1 - 4		10	+	0	=	10
1 - 5		3	+	0	=	3
2 - 6		25	+	15	=	40
3 - 7		60	+	5	=	65
4 - 9		0	+	10	=	~~10~~
5 - 9		0	+	3	=	~~3~~
6 - 8		30	+	40	=	~~70~~
7 - 8		30	+	65	=	95
8 - 9		0	+	95	=	95
9 -10		40	+	95	=	135
10 -11		3	+	135	=	138
10 -12		8	+	135	=	143
11 -12		0	+	138	=	~~138~~
12 =13		35	+	143	=	178
13 -14		5	+	178	=	183

En esta tabla, las actividades son identificadas por los números de sus eventos predecesores y sucesores.

En el cálculo del tiempo, normalmente, los datos del calendario actual (col. 2) son usados para calcular las dos últimas columnas (3 y 4) de la tabla. Aquí, por lo que para simplificarlo supondremos que el proyecto empieza en el día 1; y la tercera y cuarta columnas en la tabla representan el número de días que deben haber transcu-

RUTA CRITICA CON CERTIDUMBRE.

Existe una variación del método el cual es conocido como C PM (Critical Path Method) que enfatiza las actividades y cuya red usualmente muestra los nodos como círculos numerados únicamente.

C.P.M. fue originalmente desarrollado en aplicaciones no militares, y los sistemas han tenido varios métodos diferentes de análisis. También varios autores distinguen entre PERT y CPM, notando que PERT enfatiza los eventos y CP.M. enfatiza las actividades. A continuación indicaremos la importancia de la ruta crítica en la red P.E.R.T.

Cada actividad PERT está asociado con una medida de duración y descripción de fuentes de localización. Así por ejemplo, el tiempo para las actividades varias son conocidas con certeza y son estas numeradas en días como se muestra en la figura 3.

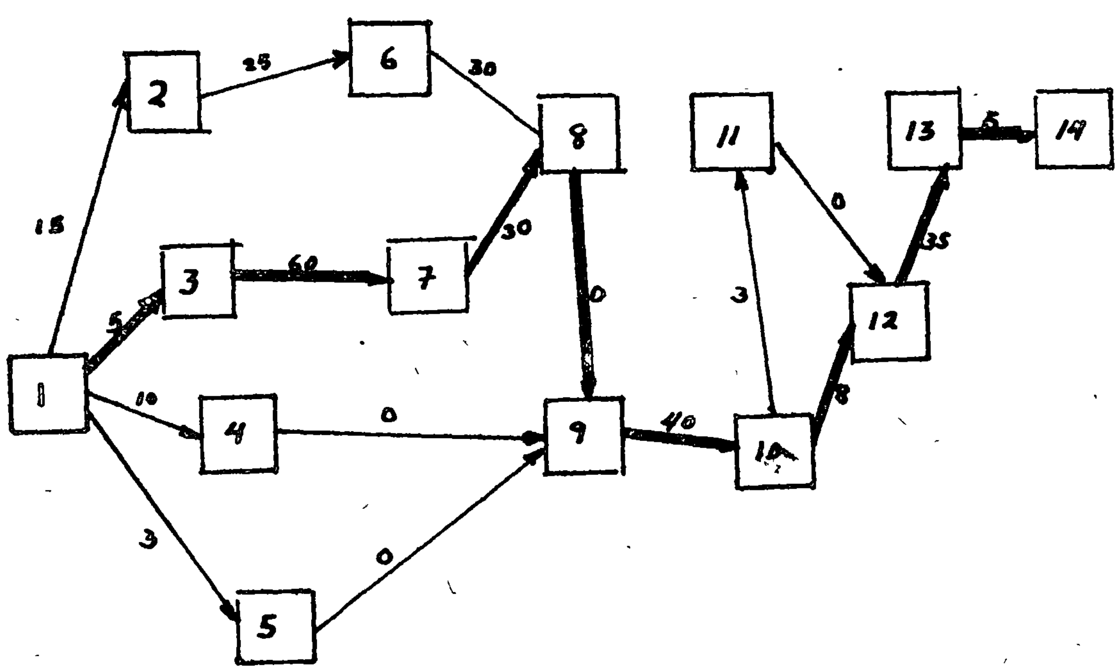


FIG. 3

rrido desde que la actividad se inició y terminó respectivamente. Cuando dos ó más actividades terminan en el mismo evento, lo que se hará será marcar con una línea a todos los tiempos terminados excepto la última actividad terminada, y cada uno de los tiempos marcados son ignoradas para los tiempos en que están sucediendo las actividades. De esta manera, el tiempo más grande a través de la red es representada por el último número en la última columna. Esto es implícitamente el tiempo más corto para el cual el proyecto puede terminarse. Como puede verse, las unidades de tiempo usadas para este análisis podrán ser horas, días, semanas, meses, etc. a las unidades que sean más convenientes. Normalmente las unidades de tiempo por semanas son las más comunes. En nuestro ejemplo, como el proyecto es relativamente pequeño, usaremos días.

La ruta crítica, es decir, la ruta a través del sistema que toma el tiempo máximo, podrá determinarse trabajando hacia atras a través de la tabla 3, iniciándose con la actividad 13-14 y trabajando hacia arriba en la columna (1), mirando la siguiente actividad que termina en el evento en el cual la última actividad fue iniciada. Ignorando las actividades con marcas de tiempos terminados, la ruta crítica es determinada por 14-13-12-10-9-8-7-3-1. Esta ruta corresponde al conjunto de flechas negras en la figura 3. Invirtiendo los números anteriores la ruta crítica es representada por las actividades de los eventos 1-3-7-8-9-10-12-13-14, y el proyecto total toma 183 días en cumplirse. Es decir, si una semana es de 5 días, el proyecto tomará 36 semanas y 3 días. En la determinación de la ruta crítica, supusimos que cada tarea se inicia tan pronto como es posible: es decir, tan pronto como su evento predecesor (ó eventos) han ocurrido. Claro que esto no es necesario para alguna activi dad que no esté en la ruta crítica. Por ejemplo la actividad 10-12 toma 8 días, no así las actividades 10-11 y 11-12 que toman 3 días. Por lo tanto, aquí existe un - tiempo de holgura de 5 días en la ruta 10-11-12, indicando con ello que la actividad 10-11 podrá retrazarse 5 días sin causar desajustes en el proyecto. Por lo tanto cualquier retrazo que ocurra en las tareas de la ruta crítica, causará un retrazo en el proyecto total.

Las variables controlables en este sistema, con certeza en la estimación: son la - - asignación de recursos en varias subtareas; claro que si el analista ve que se puede recortar el tiempo para el proyecto entero sin elevar costos, este esfuerzo podrá hacerse para pasar recursos de actividades no críticas a actividades críticas, y si los - recursos adicionales están disponibles, estas deberán asignarse a actividades críticas.

El balance óptimo para terminación temprana (inmediata) en un costo fijo podrá teóricamente ocurrir cuando los recursos están tan pronunciados que todas las rutas tienen la misma duración. Esto es de curso, hacer envíos posibles en el mundo real debido a las indivisibilidades en entradas y salidas, e indicará la dirección en el cual - los recursos deben envíarse para completar los datos.

Estimación de Tiempos Bajo Incertidumbre

En la última sección, supusimos que la duración para todas las actividades fueran conocidas con certeza. Esta situación muy raramente ocurre. El método PERT está -- apoyado en un procedimiento ingenioso para producir bajo condiciones probabilísticas la estimación de los tiempos de duración de cada una de las actividades. Este procedimiento que está basado sobre estudios sicológicos, supone que la estimación de parámetros de la duración de actividades tienden a parecerse a la distribución beta, los cuales son obtenidos por el grupo de asesoría técnica. La persona responsable para cada actividad es interrogada, dando tres estimadores para el tiempo requerido para esa actividad. Estos estimadores son: el tiempo más probable (m), el tiempo optimista (a) y el tiempo pesimista(b). Los últimos dos tiempos, el optimista y pesimista está asociados en una serie de factores impredecibles los cuales los representaremos con el concepto de probabilidad en un rango máximo de 0.01 generalmente.

Es decir que: el tiempo óptimo es aquel que bajo condiciones normales no cambia. Este tiempo se estima haciendo muestreos de corridas observadas. Bajo el mismo criterio se estiman los otros tiempos. Actualmente la metodología matemática PERT, usando la distribución beta, supone que el tiempo optimista no podrá ser mejorado y el tiempo pesimista no podrá ser excedido.

Los tiempos estimados son incluidos en la red PERT, como a - m - b donde a es el tiempo optimista, m el más probable y b el pesimista. Esto se muestra en la figura 4.

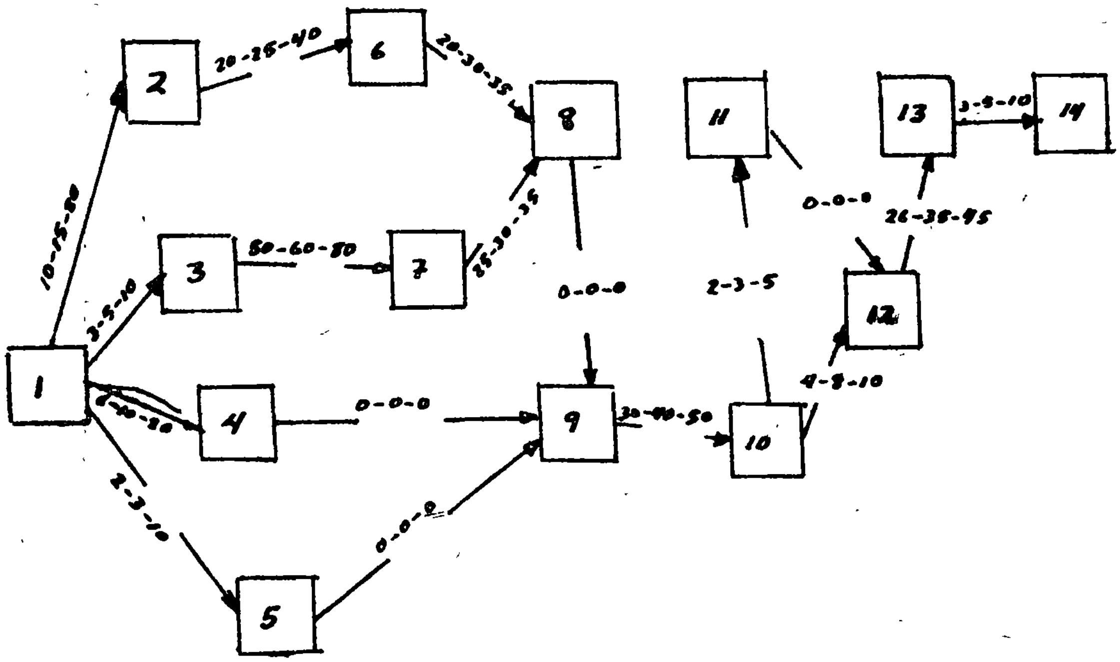


FIG. 4

De los tres tiempos estimados, el tiempo medio te es calculado como mostramos anteriormente, este cálculo está basado sobre la suposición de que el conjunto de los tres tiempos estimados, tienden a parecerse a una distribución beta, como se muestra en la figura 5.

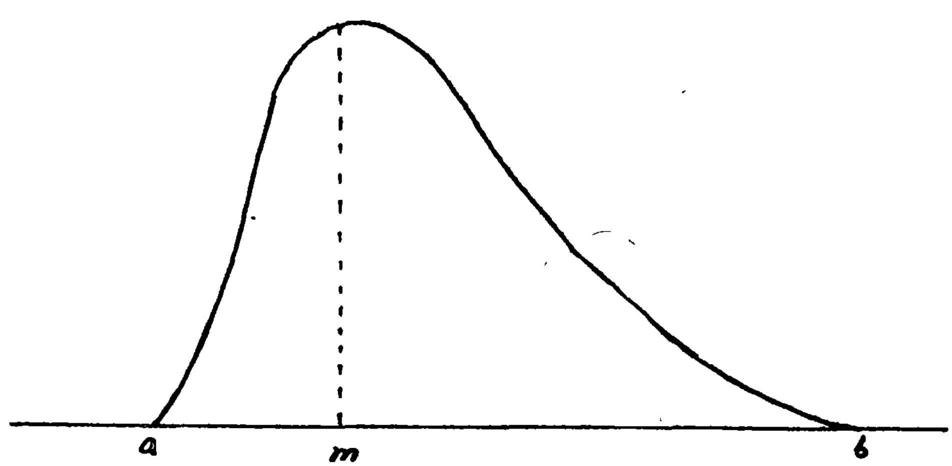


FIG. 5.

En otras palabras, se supone que la duración de una actividad es una variable con una distribución beta cuya ecuación es de la forma :

$$f(x) = \frac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\,\beta!} X^{\alpha}(1-\alpha)^{\beta} \quad ; \qquad 0 < x < 1$$

aquí α y β son usadas para los parámetros de la distribución beta, distinguiéndose como a y b, los tiempos estimados optimista y pesimista. (Aquí nos reservaremos los símbolos $\underline{\underline{a}}$ y $\underline{\underline{b}}$ para los tiempos estimados de PERT que son al mismo tiempo universalmente utilizados en esa aplicación).

Las fórmulas teóricas para la media y desviación estándard de una distribución beta son :

$$E(x) = \mu = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+2} \qquad \text{—— (1)}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\alpha+\beta)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)} \qquad \text{———— (2)}$$

La moda es :

$$m = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \text{———— (3)}$$

PERT hace la suposición de que $\underline{m}$ el estimador más probable es la moda de la distribución beta; que la media o valor esperado te, es:

$$t_e = \frac{a+4m+b}{6} \qquad \text{———— (4)}$$

y que la desviación estándard esperada es $\frac{1}{6}$ del rango de a a b.

$$\sigma_{t_e} = \frac{b-a}{6} \qquad \text{———— (5)}$$

Estas suposiciones son una parte integral del método PERT para diagnosticar bajo incertidumbre el tiempo de duración de las actividades.

Examinaremos estas suposiciones a la luz de nuestros conocimientos con respecto a la distribución beta. Por simplificación, si a=o y b=1. Esto es una transformación lineal simple para cualquier valor de a y b que deberán ser estimados .

Entonces $0 \leq m \leq 1$ y la suposición PERT es :

$$t_e = \frac{4m+1}{6} \qquad \text{———————} \qquad (6)$$

$$\sigma_{t_e} = \frac{1}{6} \qquad \text{———————} \qquad (7)$$

La suposición con respecto a la media, es decir $t_e = \mu$ con respecto a las ecuaciones (6), (3) y (1)

tenemos:

$$\frac{4\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)+1}{6} = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}$$

$$\frac{4\alpha+\alpha+\beta}{6(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}$$

$$\frac{5\alpha+\beta}{6(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}$$

Para una distribución con $\alpha=1$, $\beta=3$ tal como se muestra en la figura 6.

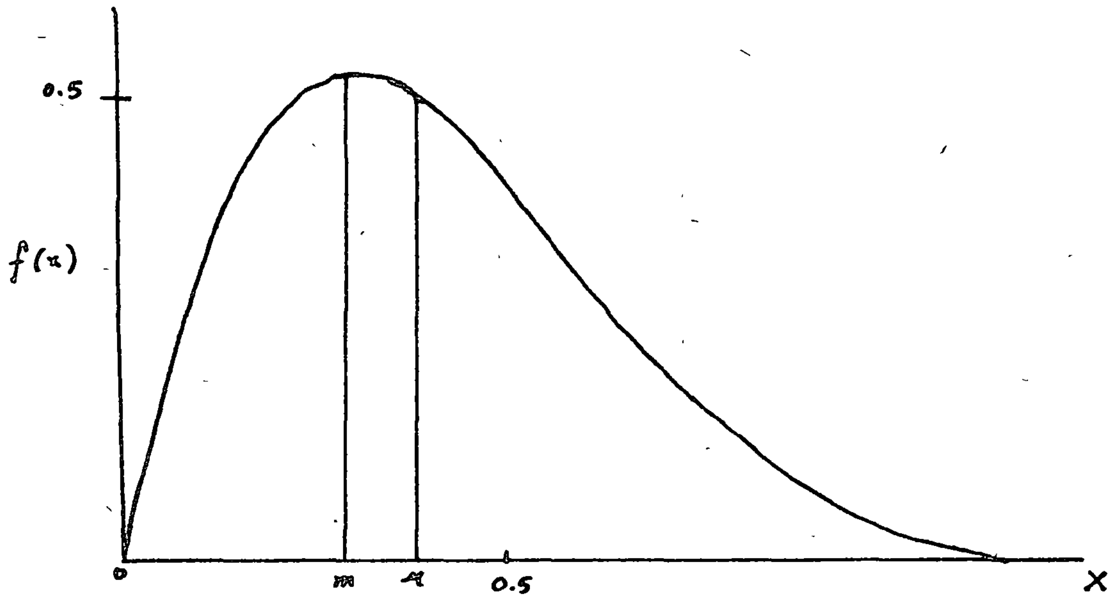
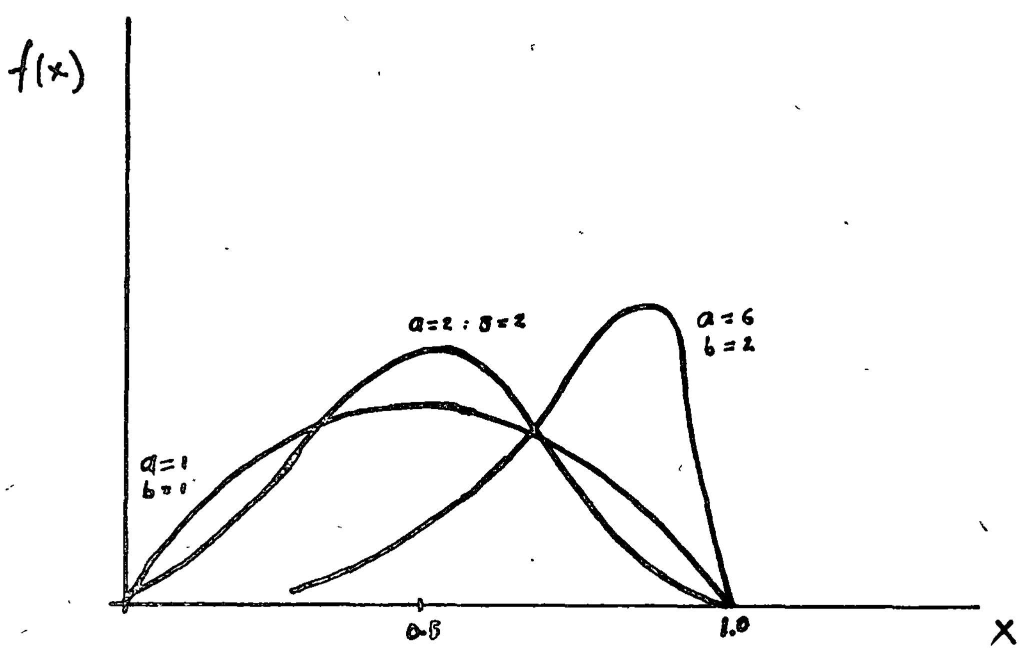


FIG. 6

Esta suposición es perfecta. Para otras distribuciones estas suposiciones no son buenas e introducen serios errores. Por ejemplo, en el caso en que la distribución esté cargada a la izquierda en la distribución beta de la figura 7.



donde $\alpha = 6$, $\beta = 2$, la condición de la ecuación (8) produce para la estimación PERT.

$$t_e = \frac{5\alpha + \beta}{6(\alpha + \beta)} = \frac{32}{48} = 0.67$$

Para la media de la distribución beta exacta

$$\mu = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} = \frac{7}{10} = 0.70$$

La diferencia es pequeña

si $\alpha = \beta$

$$\mu = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} = \frac{\alpha+1}{2\alpha+2} = \frac{1}{2}$$

y similarmente :

$$m = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{1}{2}$$

muestra que una distribución beta en el que $\alpha=\beta$ es simétricamente, entonces μ = m, es decir que la media es igual a la mediana.

Para una distribución beta simétrica, la estimación PERT de la media es:

$$t_e = \frac{5\alpha+\beta}{6(\alpha+\beta)} = \frac{6\alpha}{12\alpha} = \frac{1}{2}$$

y la suposición PERT es exactamente satisfecha para la distribución beta.

Similarmente para la desviación estándard, para $\alpha = 1$, $\beta = 3$ la desviación estándard verdadera es:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+3)}} = \sqrt{\frac{2\times 4}{(36)(7)}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{7}} = 0.18$$

tan parecida a la suposición PERT de $\frac{1}{6}$ a 0.17.

Para la distribución beta con = 6 y = 2, la fórmula exacta producirá :

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+2)^2(\alpha+\beta+3)}} = \sqrt{\frac{7(3)}{100(11)}} = 0.14$$

tan parecida a 0.17 para la suposición PERT y para la distribución simétrica de la figura 6, para $\alpha = \beta = 1$

$$\sigma = \sqrt{\frac{4}{16(5)}} = \sqrt{0.05} = 0.22$$

Para $\alpha = \beta = 2$

$$\sigma = \sqrt{\frac{9}{36(7)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{7}} = 0.19$$

tan parecida a la suposición PERT de 0.17.

En general, podemos concluir que la suposición hecha por la técnica PERT puede verse razonablemente justificada. En suma, PERT hace tres suposiciones razonables en el tratamiento de los tiempos estimados bajo incertidumbre.

Primero, se supone que la duración de una actividad es una variable aleatoria con distribución beta, con moda $\underline{\underline{m}}$ el tiempo más probable.

Segundo; se supone-que el tiempo medio es t_e dado por la ecuación (4) para el tiempo estimado.

$$t_e = \frac{a + 4\,m + b}{6} \qquad (4)$$

y tercero, se supone que la desviación estandard está dado por la ecuación.

$$\sigma t_e = \frac{b - a}{6} \qquad (5)$$

En la tabla (4), la duración media t_e, y la varianza $\sigma t_e^{\,2}$, para cada actividadson calculados de la ecuación (4) y la ecuación (5) para uso posterior. Los calculos son realizados hasta obtener un decimal solamente.

T A B L A 4.

Actividad	a	m	b	$t_e = \frac{a + 4m + b}{6}$	$t_e = \frac{b - a}{6}$	$t_e^{\,2}$
1 - 2	10	15	20	15.0	1.7	2.9
1 - 3	3	5	10	5.5	1.2	1.4
1 - 4	6	10	20	11.0	2.3	5.3
1 - 5	2	3	10	4.0	1.3	1.7
2 - 6	20	25	40	26.7	3.3	10.9
3 - 7	50	60	80	61.7	5.0	25.0
4 - 9	0	0	0	0	0	0
5 - 9	0	0	0	0	0	0
6 - 8	20	30	35	29.2	2.5	6.3
7 - 8	25	30	35	30.0	1.7	2.9
8 - 9	0	0	0	0	0	0
9 - 10	30	40	50	40.0	3.3	10.9
10 - 11	2	3	5	3.2	0.5	0.3
10 - 12	4	8	10	7.7	1.0	1.0
11 - 12	0	0	0	0	0	0
12 - 13	26	35	45	35.2	3.2	10.2
13 - 14	3	5	10	5.5	1.2	1.4

CALCULO DE LOS TIEMPOS.

Analizando el procedimiento PERT, lo ilustraremos con el ejemplo que iniciamos el presente tema.

Los tres estimadores de tiempo de la figura (4) se utilizarán y una tabla similar a la (3) será calculada usando los valores t_e. Esto se muestra en la tabla (5); que en cualquier proyecto podrá prepararse para una computadora como se muestra en la tabla (4) sobre la que está basada.

Los elementos en la columna T_e son los días (o datos) sobre los cuales el evento sucesor se espera que sea alcanzado, es decir, el día sobre el cual la actividad se espera que sea terminada.

El valor de T_e para cada una de las actividades de los eventos sucesores es calculado sumando a T_e el t_e de la actividad. Cuando dos o más actividades tienen el mismo evento sucesor, diferentes valores de T_e resultarán. Marcaremos todos con una diagonal excepto el más largo, e ignoraremos los valores marcados de T_e cuando se calcule T_e para eventos subsecuentes.

T_e es el tiempo esperado más cercano para el evento que debe concluirse. Verdaderamente estee representa la longitud en tiempo de todas las rutas dirigidas a ese evento; sin embargo los eventos no pueden concluirse hasta que todas las actividades procedentes hayan sido terminadas y por lo tanto, el final de la trayectoria representa el tiempo más cercano en el que el evento puede concluirse.

TABLA 5.

EVENTO

Predecesor	Sucesor	Descripción de la actividad	Duración esperada	Varianza esperada	Días esperados (evento sucesor)	Ultimo día permitido	Olgura
					T_E	T_L	$T_L - T_E$
1	2	preparar detalles	15.0	2.9	15.0	41.3	26.3
1	3	diseñar áreas de trabajo	5.5	1.4	5.5	5.5	0
1	4	negociar para impresión y encuadernación	11.0	5.3	11.0	97.2	86.2
1	5	Diseño del libro	4.0	1.7	4.0	97.2	93.2
2	6	preparar programa de computadora	26.7	10.9	41.7	68.0	26.3
3	7	conducir áreas de trabajo	61.7	25.0	67.2	67.2	0
4	9		0.0	0.0	11.0	97.2	86.2
5	9		0.0	0	4.0	97.2	93.2
6	8	Análisis y escritura	29.2	6.3	70.9	97.2	26.3
7	8	Análisis y escritura	30.0	2.9	97.2	97.2	0
8	9		0.0	0	97.2	97.2	0
9	10	establecer tipo de impresión	40.0	10.9	137.2	137.2	0
10	11	preparar índice	3.2	0.3	140.4	144.9	4.5
10	12	lectura de pruebas	7.7	1.0	144.9	144.9	0
11	12		0.0	0	140.4	144.9	4.5
12	13	imprimir y encuadernar	35.2	10.2	180.1	180.1	0
13	14	distribución de libros	5.5	1.4	185.6	185.6	0

En la tabla 5 como en la tabla 3, la ruta crítica es 1-3-7-8-9-10-12-13-14, y el tiempo esperado de terminación es 185.6 días. Podemos como podrá desearse, redondear todos los t_e sobre la tabla 5 y completar los días, con lo cual suponiendo que si una tarea es terminada oportunamente durante una parte del día, el resto del día no es utilizable para iniciar la siguiente tarea; de cualquier manera no haremos esto. Estas t_e son duraciones esperadas, y la consistencia sesgada que procedimiento de redondeo pueda introducirse es injustificable.

La figura 7 muestra la red con las duraciones esperadas sobre las ramas de las actividades y las T_E en los cuadros de los eventos. Olgura es la diferencia entre el tiempo esperado (T_E) y el último tiempo de terminación permisible (T_L). Si se ve como se calcula (T_L), entonces podremos estar en posición de ver las implicaciones de la olgura. Nótese que T_L y T_E que estamos considerando al respecto, se refiere a eventos, es decir, la sucesión de eventos para la actividad apropiada.

El cálculo de T_L para cada evento, se inicia en la secuencia de datos terminados o, si en el caso de que no existiera ninguno como en nuestro ejemplo, se inicia con el T_E para el evento final, restándolo del t_e para la actividad precedente hasta llegar al último tiempo de terminación (T_L) para el evento predecesor; el valor de T_L resultante entrará sobre la línea de actividades para las cuales el evento es sucesor.

Continuando trabajando hacia atras en la red (hacia arriba sobre la tabla), sustraendo de T_L de cada evento sucesor el t_e de la actividad precedente, hasta llegar al T_L del evento predecesor, e introducir el T_L sobre la línea de la actividad para la cual ese evento es sucesor. T_L es el tiempo permisible para ese evento sucesor, por lo que es el último tiempo permisible para iniciarse la actividad precedente. Cuando un evento tiene dos o más eventos sucesores, el T_L que es usado es el menor; por ejemplo: el evento 10 en la tabla sobre la línea para la actividad 9-10 muestra T_L = 137.2. Este es el menor del 137.2 generado sobre la trayectoria 10-12 y el (descartado) valor 141.7 generado sobre la trayectoria 10-11-12.

Cada elemento en la columna de las olguras o retrazos en la columna de la tabla 5 es el número de días en el que el evento sucesor podrá retrasarse en T_E sin causar un retraso en la terminación del proyecto final. Nótese que la olgura se refiere a la ruta completa. Esto es, que el valor de la olgura de 23.6 días se refiere a la ruta 1-2-6-8, y el valor de 86.2 días se refiere a la ruta 1-4-9. Similarmente el valor de la olgura de 93.2 días se refiere a la ruta 1-5-9 y el valor de la olgura de 4.5 días se refiere a la ruta 10-11-12. El retraso representado por la olgura podrá aplicarse a discresión del analista en cualquier punto a través de la ruta de olguras. Sobre la ruta crítica no existen olguras y complementariamente todos los eventos son con olgura cero, es decir, todos los eventos sobre trayectorias de olgura cero podrán llamarse eventos críticos.

INFERENCIA ESTADISTICA EN TIEMPOS ESTIMADOS.

Hasta ahora, usamos los valores t_e, los valores esperados, y los valores que obtuvimos son los tiempos promedio de terminación o promedio, tiempos de olgura, etc.

Ahora, ya que tenemos estimadores de las desviaciones estandard de todos los t_e, podemos inferir con respecto a estos resultados. Aún sin la desviación estandar, podremos decir que, T_E es un valor esperado y su distribución tiende a ser aproximadamente simétrica.

$$P(T < T_E) \cong 0.5$$

No obstante, que hemos obtenido las desviaciones estandar, podemos hacer muchas conclusiones prácticas y útiles. La varianza de T_E para el proyecto entero podrá determinarse sumando las varianzas de todas las actividades a través de la ruta crítica. Esto es:

$$\sigma_{T_E}^2 = \Sigma \sigma^2$$

donde:

$\Sigma \sigma^2$ es la suma de las varianzas de las actividades através de la ruta

$\sigma_{T_E}^2$ es la varianza para esa ruta.

Muchos analistas prefieren usar $\sum \sigma^2$ para enfatizar que es la suma de las varianzas de las actividades individuales. Se determinado empíricamente que, para una ruta consistente de varias actividades, la distribución del tiempo para cubrir la ruta es aproximada a la normal con media T_E y varianza

$$T_E^{\,2} = \sum \sigma^2.$$

En la tabla 5 la columna encabezada con $\sigma_{t_e}^{\,2}$ fué tomada de la tabla 4. La suma de las ocho varianzas a través de la ruta crítica, es decir, las que están sobre el renglón con valor de cero en las olguras es

$\sum \sigma^2 = 52.8$. Por lo tanto.

$$\sigma_{T_E} = \sqrt{\sum \sigma^2} = \sqrt{52.8} = 7.27 \text{ días.}$$

Esto podrá interpretarse como: el tiempo para terminar el proyecto es una variable aleatoria, normalmente distribuida, con media de 185.6 días y desviación estandard de 7.27 días. Esta distribución se muestra en la figura 8.

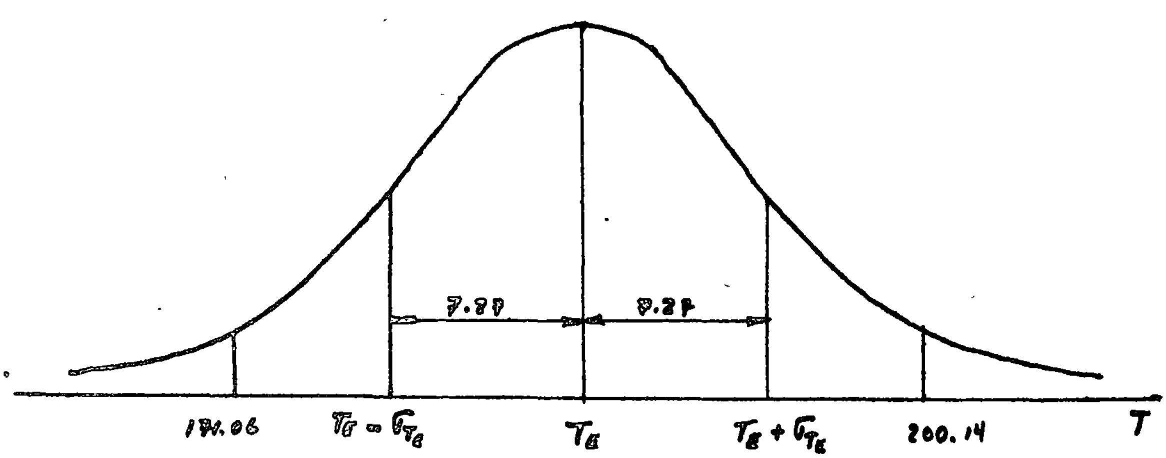


Fig. 8

Del diagrama podemos ver que hay una probabilidad del 95.5% de que la tarea sea terminada entre un período de 171 y 200 días. Si nuestra calendarización de terminación T_S) es 198 días, La probabilidad de que se cumpla con el plazo final se calcula en la forma usual

Si T es el tiempo en que el proyecto es terminado, entonces:

$$Z = \frac{T_S - T_E}{\sigma T_E} = \frac{198 - 185.6}{7.27} = \frac{12.4}{7.27} = 1.71$$

$$P(T \leq T_S) = F(1.71) = 0.95637$$

La probabilidad que el plazo final sea cumplido es 0.96. También, si existe una prima para terminarlo en 180 días (T_B)

$$Z = \frac{T_B - T_E}{\sigma T_E} = \frac{180 - 185.6}{7.27} = \frac{5.6}{7.27} = -0.77$$

$$P(T \leq T_B) = F(-0.77) = 0.22065$$

La probabilidad de que la gratificación sea ganada es de 0.22.

Actualmente, las probabilidades son poco menores que las calculadas aquí, ya que esto es posible, aunque un poco diferente, ya sea que en el proyecto se pierda la gratificación o se pierda el plazo final a causa de pérdida de tiempo a través de varias otras rutas, que en realidad viene siendo la ruta crítica. En la práctica, cuando la ruta crítica no difiere marcadamente, el cálculo deberá desarrollarse sobre cada ruta posible.

Ilustraremos esto considerando la probabilidad de hacer la bonificación (gratificación).

La probabilidad de falla haciendo la gratificación sobre la ruta crítica, 1-3-7-8-9-10-11-12-13-14, es 0.78.

A través de la ruta no-crítica, 1-2-6-8-9-10-11-12-13-14, la olgura es 23.6+ 4.5 = 30.8 días, indicando que T_E a través de esa ruta es 154.8 días.

También. $\Sigma \sigma^2 = 42.9$ y $\sqrt{42.9} = 6.55$ a través de esa ruta. La probabilidad de falla haciendo la gratificación a través de esa ruta es P(T 180) en una distribución normal con media igual a 154.8 y desviación estandard de 6.55 es:

$$Z = \frac{180.0 - 154.8}{6.55} = \frac{25.2}{6.55} = 3.85$$

$$P(T > 180) = 1 - F(3.85) \doteq 1-0.99994 = 0.00006.$$

La probabilidad de falla haciendo la gratificación a través de cualquier otra ruta en esta ilustración es muy pequeña y no es de preocuparse en su cálculo.

APLICACION DE LA PROGRAMACION DINAMICA A LOS PROCESOS EN SECUENCIA.

1) Introducción

El método de programación dinámica, debido a Richard Bellmann, es el instrumento perfecto de cuantificación para el tratamiento de los "procesos en secuencia", que son tan frecuentes en la economía de las empresas. El objeto de esta exposición es mostrar los principios y las diversas aplicaciones de este método. Aquí no vamos a tratar del punto de vista teórico ni del aspecto analítico de la programación dinámica, pues el propósito es solo enseñar al lector a utilizar este método. El único teorema realmente importante que sirve de base a este método es fácil de demostrar; omitiremos también la presentación de otros teoremas relativos a las propiedades de límites de procesos estacionarios los cuales le interesan al analista y el matemático y en menor grado al ingeniero encargado de un problema de manejo de materiales que no se encuentra casi nunca casos estacionarios, es decir, casos en que las leyes de probabilidades medidas o los costos asociados a las diversas decisiones o transiciones no varían en función del tiempo.

Bajo su aspecto analítico, la programación dinámica es objeto de una teoría muy complicada, en la que tienen aplicaciones numerosas teoremas de topología algebráica, pero, bajo el aspecto del cálculo numérico, al contrario, este método resulta de una simplicidad extrema y es muy fácil efectuar los cálculos a mano, o con la ayuda de equipo electrónico si la magnitud del problema así lo requiere: De hecho, este método se efectua en tres operaciones: multiplicación, suma y comparación. Para las personas que estén interesadas en ver aspectos más complicados de la programación dinámica, podrá encontrarlos en la bibliografía que al final del fascículo se encuentra.

2) Problemas de decisión en secuencia

Un problema de decisión se dice "en secuencia", si su naturaleza permite descomponerlo en "fases" o "períodos" ordenados, en el curso de los cuales pueden tomarse una o varias decisiones por una o varias personas, con o sin intervención del medio circundante en cada fase, o como se dice con frecuencia, de la naturaleza. En cada fase pueden intervenir una o varias variables de decisión y/o varias variables de estado (los de la naturaleza). En algunos problemas, las variables de una fase cualquiera J pueden depender, es decir, estar ligadas a las de las fases J-1, J-2, etc.

El caso más interesante y tamibén el más sencillo es aquel en que las variables de toda fase J no dependen más que de la fase J-1 que la procede.

Como los problemas de proceso tienen una naturaleza de "secuencia" que son muy frecuentes en la economía de las empresas como por ejemplo podemos decir: un proceso de almacenamiento, uso y reposición de equipos, proceso de personal, inversiones, promoción de ventas, etc.

En la figura 1 se ha presentado un problema de decisión en secuencia en el cual interviene unicamente el determinador (decisión maker) en cada fase; así, partiendo de un valor inicial $X_o = a_o$

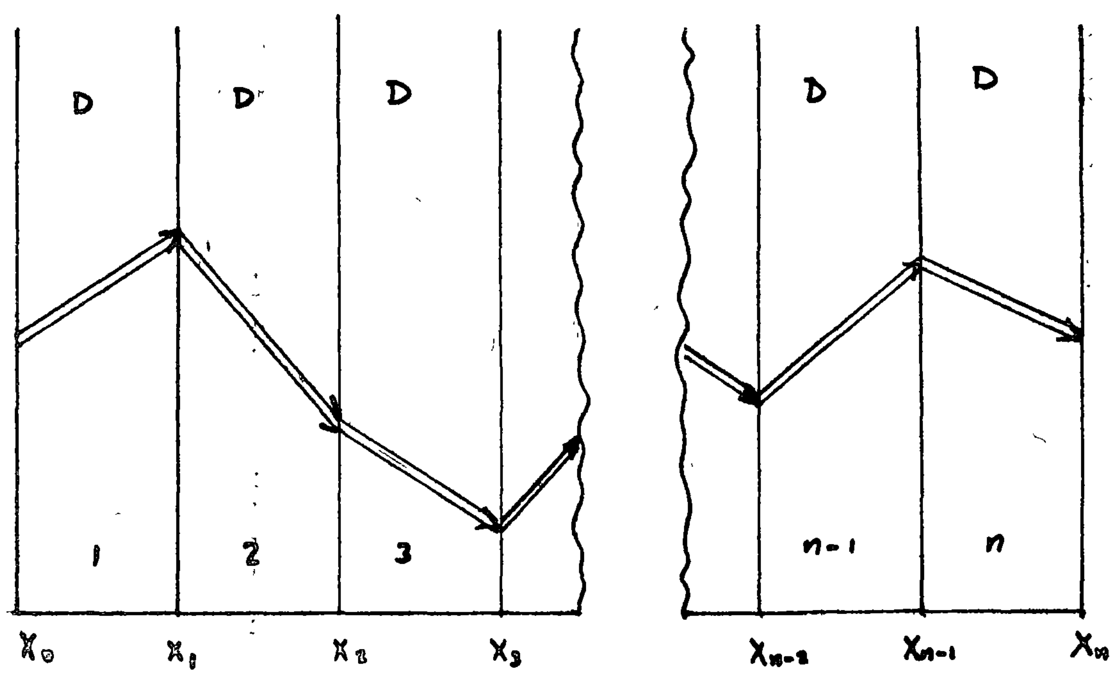


FIG. 1

eligirá una serie de valores $X_1 = a_1$, $X_2 = a_2$, ..., $X_n = a_n$.

Una serie de decisiones como a_o, a_1, a_2,..., a_{n-1}, a_n se llama una política de proceso ó política; una serie de decisiones ligadas (es decir que se suceden) constituye una "sub-política" si forma parte de una política. Así, a_2, a_3, a_n , a_3, a_4, a_{n-1} , a_o, a_1, a_3 , a_{n-1}, a_n son sub-políticas.

PROGRAMACION DINAMICA.-

Otra de las herramientas que són muy útiles en el sistema de producción intermitente es la aplicación de las técnicas de programación dinámica. Debe hacerse notar que esta técnica solo es factible su aplicación siempre y cuando en sí los problemas sean independientes y/o cada uno de ellos pueda descomponerse en varios subproblemas o que sean factibles de fraccionarlos en etapas, y que cada una de estas partes sean independientes con excepción de la inmediata anterior con una política de decisión requerida. En muchos problemas de programación dinámica se requiere encontrar una interrelación de una sucesión de decisiones que optimicen la solución del problema. Describiendo en forma somera algunos de los elementos mencionados diremos que cada etapa consta de un número de estados asociados con el (la etapa). El efecto de la política de decisión en cada etapa es transformar el estado común del sistema en un estado asociado con la siguiente etapa (posiblemente de acuerdo con una ley de probabilidad). Ahora bien, dada una etapa común, una politica óptima para las etapas restantes será independiente de la política adoptada en etapas previas. El procedimiento de solución empieza por determinar lo política óptima para cada estado de la última etapa. Para llegar a una solución óptima todos los aspectos anteriores se deben encontrar expresados en una función recursiva o funcional que identificará la política óptima para cada estado en la etapa n, dado que la politica óptima para cada estado de la etapa $(n+1)$ está disponible.. Para un caso particular.

$$f_n^*(s) = \min_{X_n} \left\{ C_{sX_n} + f_{n+1}^*(X_n) \right\}$$

donde $f_n^*(s)$ es el funcional o la función recursiva.

Esto quiere decir que para determinar la política óptima cuando se inicia en el estado S en la etapa n, se requiere determinar el valor de X_n que minimice a $f_n(s)$. A X_n se le conoce como variable (vector) de decisión en la etapa n $(n=1,2,\ldots,N)$.

$f_n(s, X_n)$ nos dice el valor o función a optimizar dado que el sistema se inicia en el estado S en la etapa n y una X_n es seleccionada.

Por lo tanto $f_n(S, X_n) = C_{s X_n} + f^*_{n+1}(X_n)$
donde $f^*_n(s)$ es el óptimo de $f_n(S, X_n)$ sobre todos los valores posibles de X_n. Por lo tanto,

$$f^*_n(s) = \underset{X_n}{\text{óptimo}} \{ f_n(s, X_n) \}$$

a $C_{s X_n}$ se le considera la contribución en la etapa n.

En forma mas sencilla, supongamos que requerimos de varias reglas de decisión que nos diga que punto mover si estamos en el punto i. Si:
$\{P_i\}$, $i=1,2,\ldots,N$ con una matriz de costos asociados $[C_{ij}]$ donde C_{ij} es el costo de moverse de P_i a P_j en un solo movimiento y suponemos $0 \leq C_{ij} \leq \infty$. ¿ Cual es el costo minimo de moverse de cualquier punto P_i a un punto P_N usando tantos movimientos como se requieran ? ¿ Cual es la secuencia óptima de movimientos ?

Ahora bien ; si representamos a P_i como i, esta regla de decisión es identificada como una política, y es equivalente a varias funciones con estados $S(i)$: Si un punto i se mueve al siguiente punto $S(i)$, que llamaremos j. El costo incluido es C_{ij} y entonces, esto depende solo de i y j que es determinado completamente por nuestro punto inicial i y la política $S(i)$ que sustituye j.

La misma politica es aplicada al punto inicial j que pasa a K, y el nuevo costo C_{jk} incurrido, analogamente es una función de la politica y el punto inicial i.

Por lo tanto, para cualquier politica dada, vemos que el costo de ir de i a N es determinado completamente por la politica y depende para una N fijo solamente de i.

Esto se aplica en particular a la politica óptima, denotaremos su costo asociado por $f(i)$.

Supongase que se decidió moverse de i a j, un costo C_{ij} es incurrido. En algún momento estaremos en j y nuestro objetivo ahora es movernos a N en una forma óptima cuyo costo es $f(j)$. Por lo tanto el costo total de i a N, primero via j y entonces óptimamente a N es:

$$C_{ij} + f(j)$$

Por lo tanto j puede ser escogido tal que sea la mejor y veremos que $f(i)$ satisface la ecuación funcional.

$$f(i) = \min_j [C_{ij} + f(j)]$$

Ahora si nuestro problema es determinar la politica óptima para ir de un punto fijo 1 a cualquier otro final i, nuestra función es:

$$f(i) = \min_j \left[f(j) + C_{ji} \right]$$ conocida como función recursiva.

En términos generales, si estamos interesados en obtener la politica óptima de i a cualquier punto j, la ecuación funcional será:

$$f(i,j) = \min_s [f(i,s) + f(s,j)]$$

donde $f(i,j)$ es el costo mínimo de ir de i a j en el que un número de pasos unitarios son requeridos. (4)

Veamos un problema de ejemplo:

Uno fábrica de muebles tiene una orden de 100 sillas que deben producirse en 3 meses. El costo de producir X sillas en el 1°, 2° y 3^er mes es de $120X$, $1.2X^2$ y $1.5X^2$ pesos respectivamente. Determine una política óptima para el número de sillas que serán producidas cada mes.

Solución:

Sea $f_K(a)$ el costo mínimo de producir $\underline{a}$ sillas durante un periodo de K meses.

para $n=1$

$$f_1(a) = 1.5\,a^2$$

para $n=2$

$$f_2(a) = \min_{0 \le x \le a} \left[1.2X^2 + f_1(a-x) \right]$$

$$= \min_{0 \le x \le a} \left[1.2X^2 + 1.5\,(a-x)^2 \right]$$

$$= \tfrac{2}{3}a^2 \qquad \text{para} \quad X = \tfrac{5}{9}a$$

para $n=3$

$$f_3(a) = \min_{0 \le x \le a} \left[120X + f_2(a-x) \right]$$

$$= \min_{0 \le x \le a} \left[120X + \tfrac{2}{3}(a-x)^2 \right]$$

$$= 120a - 5400 \qquad \text{en} \quad X = a - 90$$

El costo mínimo de producción es:

$$f_3(100) = 120(100) - 5400 = \$6600^{\underline{00}} \text{ pesos}$$

La cedulación óptima de producción es:

mes	1	2	3
Sillas	10	50	40

Problema 2.-

Dos tipos de máquinas están disponibles para hacer dos clases de productos A y B. En un periodo de cinco semanas. Las máquinas son asignadas a los productos sobre una base semanal. La razón de distribución semanal para las máquinas está de acuerdo al producto asignado, de la manera siguiente:

	Producto A	Producto B
Máquina tipo I	30%	50%
Máquina Tipo II	50%	80%

La máquina que produce el producto A, obtiene una ganancia de ¢ 300.00 en una semana, la máquina que produce el producto B obtiene una ganancia de ¢ 400.00 por semana. Determinar una política óptima para la operación.

Solución:

Sea $f_k(a,b)$ la máxima utilidad realizable con a máquinas tipo I y b máquinas tipo II, durante un periodo de k semanas.

$$f_1(a,b) = \max_{\substack{0\le x\le a\\ 0\le y\le b}} [300x + 400(a-x) + 300y + 400(b-y)]$$

$$= 400a + 400b \qquad \text{en} \quad x = 0,\ y = 0$$

$$f_2(a,b) = \max_{\substack{0\le x\le a\\ 0\le y\le b}} [300x + 400(a-x) + 300y + 400(b-y) + f_1(0.7x + 0.5(a-x),\ 0.5y + 0.2(b-y))]$$

$$= \max_{\substack{0\le x\le a\\ 0\le y\le b}} [-20x + 600a + 20y + 480b]$$

$$= 600a + 500b \qquad \text{en} \quad x = 0,\ y = b$$

$$f_3(a,b) = \max_{\substack{0\le x\le a\\ 0\le y\le b}} [300x + 400(a-x) + 300y + 400(b-y) + f_2(0.7x + 0.5(a-x), 0.5y + 0.2(b-y))]$$

$$= \max_{\substack{0\le x\le a\\ 0\le y\le b}} [20x + 700a + 50y + 500b]$$

$$= 720a + 550b \quad \text{en} \quad x = a, \; y = b$$

$$f_4(a,b) = \max_{\substack{0\le x\le a\\ 0\le y\le b}} [300x + 400(a-x) + 300y + 400(b-y) + f_3(0.7x + 0.5(a-x), 0.5y + 0.2(b-y))]$$

$$= \max_{\substack{0\le x\le a\\ 0\le y\le b}} [44x + 760a + 65y + 510b]$$

$$= 804a + 575b \quad \text{en} \quad x = a, \; y = b.$$

$$f_5(a,b) = \max_{\substack{0\le x\le a\\ 0\le y\le b}} [300x + 400(a-x) + 300y + 400(b-y) + f_4(0.7x + 0.5(a-x), 0.5y + 0.2(b-y))]$$

$$= \max_{\substack{0\le x\le a\\ 0\le y\le b}} [60.8x + 802a + 72.5y + 515b]$$

$$= 862.8a + 587.5b \quad \text{en} \quad x = a, \; y = b.$$

Por lo tanto si existen a y b tipos de máquinas I y II, disponibles respectivamente, la máxima utilidad durante las cinco semanas de operación será

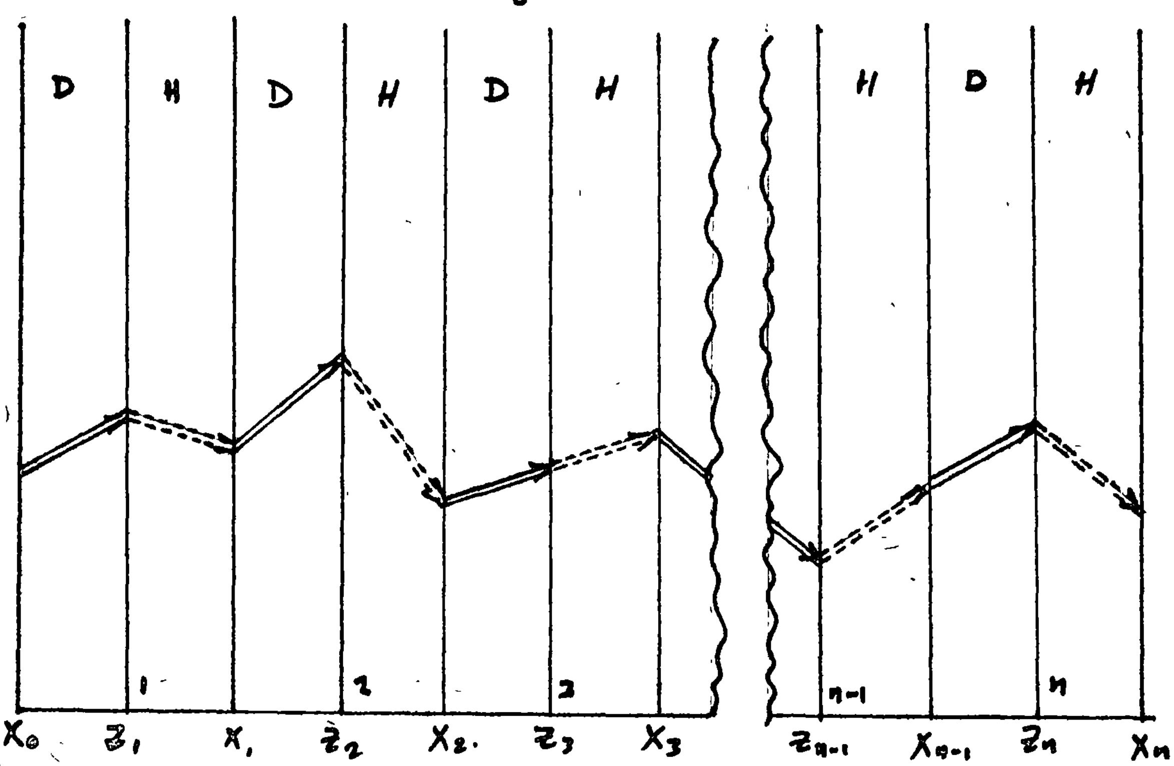
$$f_5(a,b) = 862.8a + 587.5b \quad \text{pesos}$$

Por lo tanto, la política óptima es:

Semana		1		2		3		4		5	
Producto		A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
Máquina	Tipo I	a	0	$0.7a$	0	$(0.7)^2 a$	0	0	$(0.7)^3 a$	0	$0.5(0.7)^3 a$
	Tipo II	b	0	$0.5b$	0	$(0.5)^2 b$	0	$(0.5)^3 b$	0	0	$(0.5)^4 b$

En la figura (2) se presenta un problema de decisión en "secuencia", el cual en cada fase intervienen un tomador de decisiones D y Y el medio ambiente cuyos efectos son conocidos a partir de estadísticas suficientemente precisas que permiten admitir ciertas leyes de probabilidades; efectos que llamaremos "azar" y que designaremos por H. El tomador de decisiones D deberá entonces elegir una "estrategia" contra la naturaleza. Una estrategia de proceso será una serie de valores condicionales $X_1 = a_1$ sabiendo que $Z_1 = C_1$; $X_2 = a_2$ sabiendo que $Z_2 = C_2$ y asi sucesivamente.

Fig. 2



Por lo tanto, puede una"estrategia" tabularse en la forma siguiente:

Si $Z_1 = C_1$: $X_1 = a_1$	Si $Z_2 = C_2$: $X_2 = a_2$	Si $Z_n = C_n$: $X_n = C_n$
$Z_1 = C_1'$: $X_1 = a_1'$	$Z_2 = C_2'$: $X_2 = a_2'$	$Z_n = C_n'$: $X_n = a_n'$
----------------	----------------	----------------
----------------	----------------	----------------
$Z_1 = C_1^{(m_1)}$: $X_1 = a_1^{(m_1)}$	$Z_2 = C_2^{(m_2)}$:	$Z_n = C_n^{(m_n)}$: $X_n = a_n^{(m_n)}$

Recordemos que se llama generalmente estrategia a una serie de decisiones tomando en cuenta los estados sucesivos de la naturaleza y/o decisiones posibles de uno o varios competidores. En este sentido como se emplea aqui el término estrategia, en la misma forma llamaremos"sub-estrategias" a una serie de decisiones condicionales sucesivas que forman parte de una estrategia; así, las columnas de índice 1 y 2 de la figura (1) constituyen una sub-estretegia.

Otro tipo de proceso en secuencia es el que se encuentra en un juego de estrategia en secuencia (fig. 3), en el cual

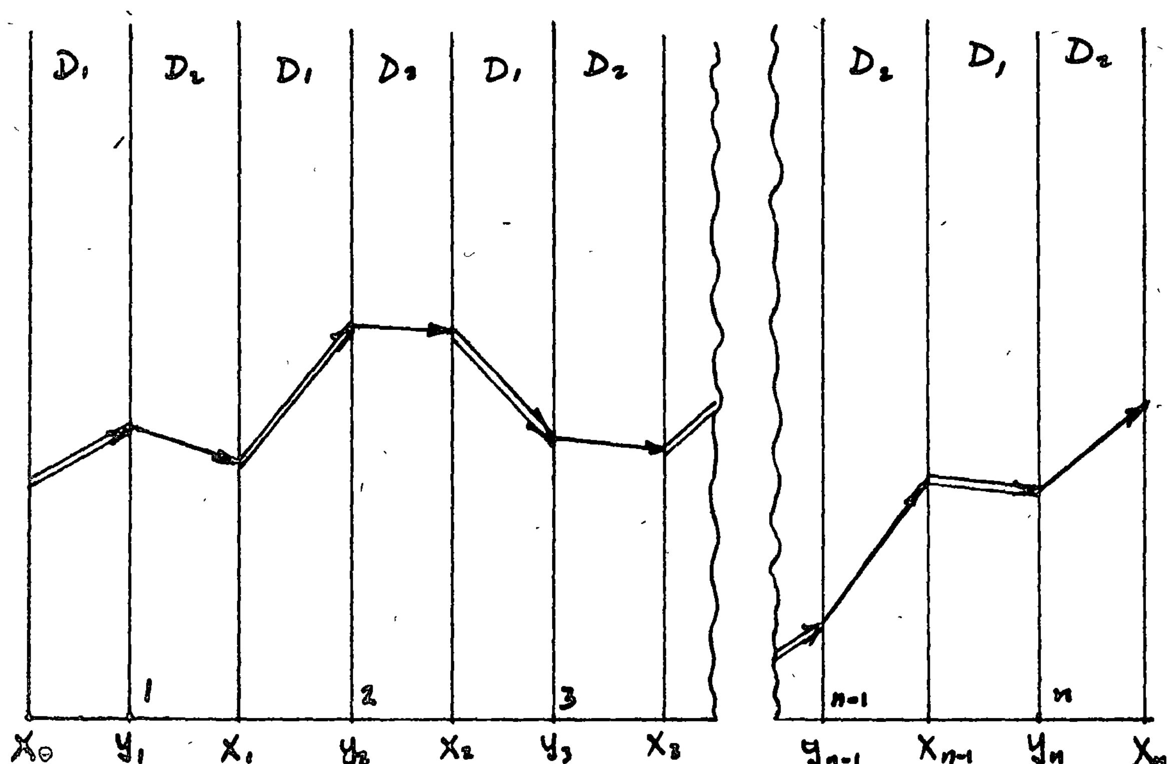


FIG. 3

los tomadores de decisión D_1 y D_2 intervienen en las fases. Llamaremos D_1 y D_2 las estrategias; he aquí, por ejemplo, una estrategia de D_1:

Si $Y_1 = b_1 : X_1 = a_1$ si $Y_2 = b_2 : X_2 = a_2$ si $Y_n = b_n : X_n = a_n$

$Y_1 = b_1^1 : X_1 = a_1^1$ $\quad Y_2 = b_2^1 : X_2 = a_2^1$ $\quad Y_n = b_n^1 : X_n^1 = a_n^1$

---------------- ---------------- ----------------

$Y_1\ b_n^{(m_1)} : X_1 = a1^{(m_1)}$ $\quad Y_2 = b_2^{(m_2)} : X_2 = a_2(m_2)$ $\quad Y_n = b_n^{(m_n)} : X_{n=a_n}(m_n)$

De la misma definiremos una estrategia de D_2. Puede extenderse esta noción de estrategia al caso en que el número de tomadores de decisión es superior a $2^{(1)}$.

En otros problemas intervienen varios tomadores de decisión, así como el azar (D_1, D_2, H); esto se ilustra en la figura (4).

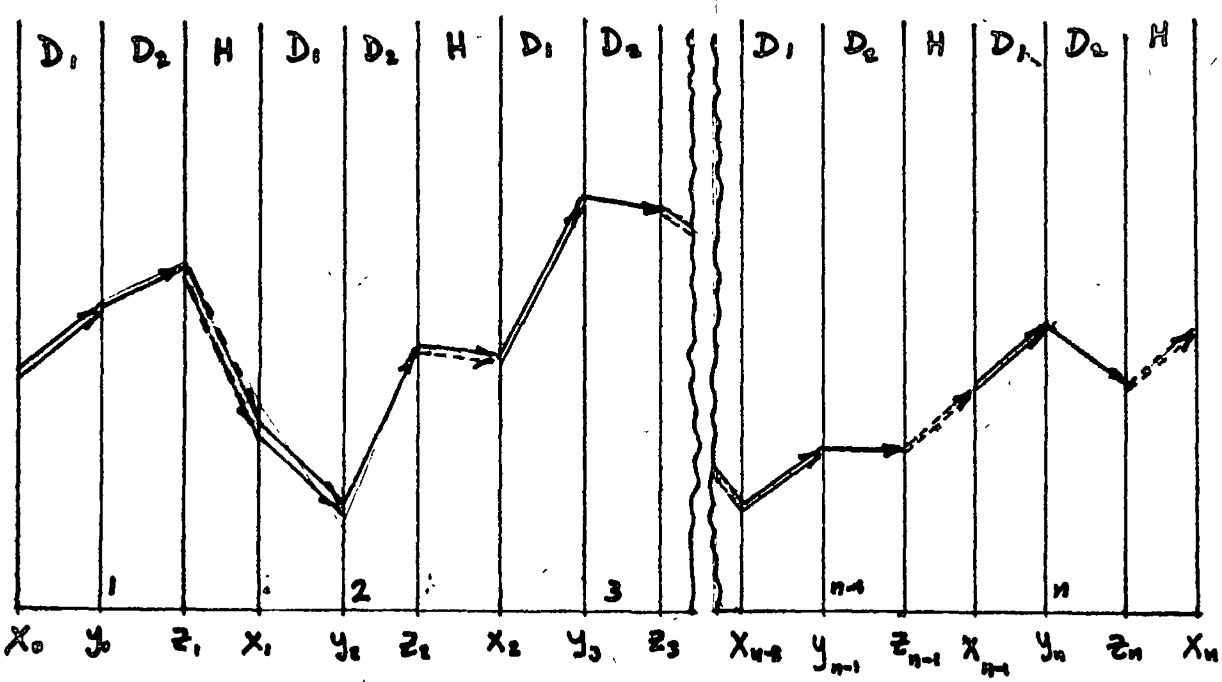


Fig. 4

Se define una estrategia de D_1 de la siguiente manera:

$$\text{si } Z_1 = C_1 \text{ y } Y_1 = b_1 : X_1 = a_1$$
$$Z_1 = C_1^1 \text{ y } Y_1 = b_1^1 : X_1 = a_1^1$$
------------ ------------
$$Z_1 = C_1^{(m_1)} \text{ y } Y_1 = b_1^{(m_1)} : X_1 = a_1^{(m_1)}$$

Pueden entenderse las nociones, presentadas en las figuras 1 a 4 a casos más complicados en los que cada fase tomadoras de decisión tales como D_1, D_2, D_3, y la naturaleza pueden intervenir una o varias veces independientemente o no los unos de los otros.

Para investigar la o las políticas óptimas, o según el aspecto del proceso, la estrategia o estrategias óptimas en el caso de las estructuras en secuencia, el instrumento ideal es la programación dinámica. A continuación ilustraremos lo antes dicho con un ejemplo.

PROBLEMA

El servicio de compras de una empresa debe, para permitir la realización de su programa de fabricación, proveerse cáda dos meses de cantidades conocidas de una determinada materia prima.

El precio de compra P_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$ y la demanda d_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$ están dados para los 6 períodos de 2 meses por venir como se muestra en la figura 5. Siendo limitada la capacidad de almacenamiento, las existencias no deben jamás sobrepasar al valor $S = 9$; la materia prima es solictada y reabastecida por valores enteros $1, 2, \ldots 9$; el "stock" inicial S_o es igual a 2, y el final S_6, debe ser nulo. Se pretende determinar las cantidades por comprar al principio de cada período, de tal manera que el costo total de compra sea mínimo, llamamos:

S_{i-1} el "stock" en la fecha i (fin del período $_{i-1,}$ principio del período i) antes de la compra a_i.

Periodo i	1	2	3	4	5	6
demanda d_i	8	5	3	2	7	4
precio de compra P_i	11	18	13	17	20	10

a_i la cantidad comprada en la fecha i

x_i el "stock" en la fecha i, después de la compra a_i.

En la figura 6 se ha representado la gráfica de todas las soluciones posibles, pero para no sobrecargar la figura, en los períodos 2, 3, 4, 5 no se han trazado las aristas, sino que nos hemos limitado a presentar "sombreadas las áreas de las soluciones posibles.

Se tiene:

$$F(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) = V_1(X_1)+ V_2(X_1, X_2)+ V_3(X_2, X_3)+ V_4(X_3, X_4) + V_5(X_4, X_5) + V_6(X_5, X_6)$$

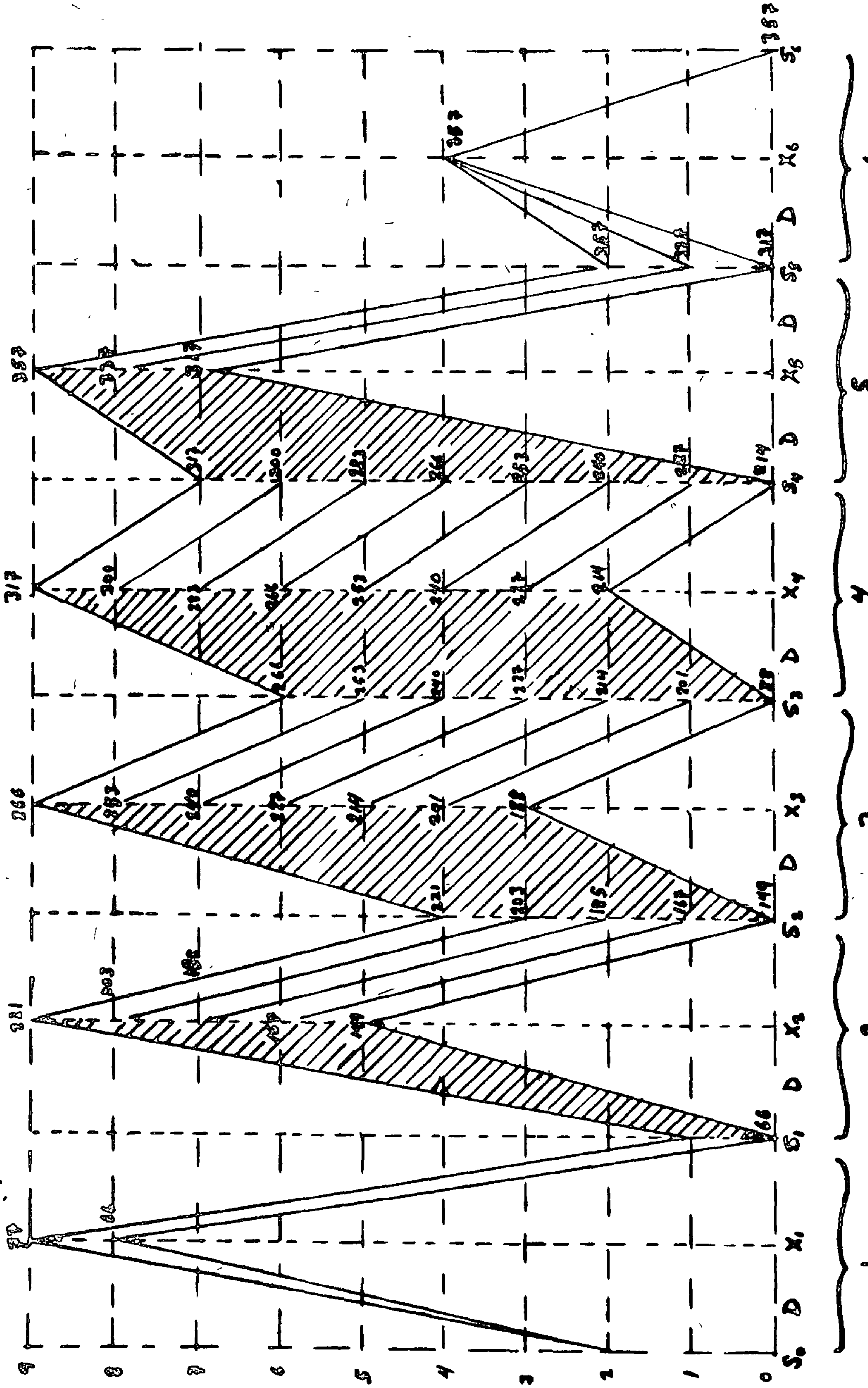


Fig. 6

Optimizamos arbitrariamente a partir del primer período.

Sea $f_{1,2}(X_2) = \min_{X_1} \quad V_1(X_1) + V_2(X_1, X_2)$

Para $S_o = 2$ los valores de $V_1(X_1)$ los dá la tabla:

		X_1 8	9
S_o	2	66	77

(a)

Para S_1 = 0 o 1, los valores $V_2(X1, X_2)$ los dá la tabla siguiente:

		X_2 5	6	7	8	9
S_1	0	90	108	126	144	162
	1	72	90	108	126	144

(b)

de aqui, la tabla que dá los valores de $V_1(X_1) + V_2(X_1, X_2)$ se obtiene sumando 66 al primer renglón de (b) y 77 al segundo renglón de (b), es decir:

		X_2 5	6	7	8	9
S_1	0	156	174	192	210	228
	1	149	167	185	203	221

los mínimos de las columnas se han subrayado.

Por lo tanto, los valores de $f_{1,2}(X_2)$ los dá el 2º renglón, y el valor óptimo de S_1 es $S_1^* = 1$; de donde $X_1^* = 9$. Sea $f_{1,2,3}(X_3) = \min_{X_2} \quad f_{1,2}(X_2) + V_3(X_2, X_3)$

Por lo tanto, los valores de $f_{1,2}(X_2)$ los dá el 2° renglón, y el valor óptimo de S_1 es $S_1 = 1$; de donde $X_1 = 9$, sea $f_{1,2,3}(X_3) + V_3(X_2, X_3)$

los valores de $V_3(X_2, X_3)$ los dá la tabla siguiente:

X_3

S_2	3	4	5	6	7	8	9
0	39	52	65	78	91	104	117
1	26	39	52	65	78	91	106
2	13	26	39	52	65	78	91
3	0	13	26	39	52	65	78
4	X	0	13	26	39	52	65

Sumando 149 al renglón 1; 167 al 2; 185 al 3; 203 al 4 y 221 al 5. Obtenemos la tabla siguiente, que da $f_{1,2}(X_2) + V_3(X_2, X_3)$:

X_3

S_2	3	4	5	6	7	8	9
0	188	201	214	227	240	253	266
1	193	206	219	232	245	258	271
2	198	211	224	237	250	263	276
3	203	216	229	242	255	26[illegible]	281
4	X	221	234	247	260	273	286

(c) Los mínimos de las columnas se han subrayado

Por lo tanto, los valores de $f_{1,2,3}(X_3)$ los dá el primer renglón y el valor óptimo de S_2 es $S_2^* = 0$, de donde $X_2^* = 5$

sea $f_{1,2,3,4}(X_4) = \min \quad f_{1,2,3}(X_3) + V_4(X_3, X_4)$

X_3

Los valores de $V_4(X_3, X_4)$ los dá la tabla siguiente:

S_3 \ X_4	2	3	4	5	6	7	8	9
0	36	51	68	85	102	119	136	153
1	17	34	51	68	85	102	119	136
2	0	17	34	51	68	85	102	119
3	X	0	17	34	51	68	85	102
4	X	X	0	17	34	51	68	85
5	X	X	X	0	17	34	51	68
6	X	X	X	X	0	17	34	51

(d)

Añadiendo el renglón (c) a las columnas de (d), se obtiene $f_{1,2,3}(X_3)$ + $V_4(X_3, X_2)$ tenemos:

S_3 \ X_4	2	3	4	5	6	7	8	9
0	222	239	256	273	290	307	324	341
1	224	235	252	269	286	303	320	337
2	<u>214</u>	231	248	265	282	299	316	333
3	X	<u>227</u>	244	261	278	295	312	329
4	X	X	<u>240</u>	257	274	291	308	325
5	X	X	X	<u>253</u>	280	297	314	331
6	X	X	X	X	<u>266</u>	<u>283</u>	<u>300</u>	<u>317</u>

Los mínimos de las columnas se han subrayado

Por lo tanto, los valores de $f_{1,2,3,4}(X_4)$ los dá la línea:

X_4	2	3	4	5	6	7	8	9
	214	227	240	253	266	283	300	317
	$S_3 = 2$	$S_3 = 3$	$S_3 = 4$	$S_3 = 5$	$S_3 = 6$	$S_3 = 6$	$S_3 = 6$	$S_3 = 6$

(e)

y el valor óptimo de S_3 es:

$S_3^* = 2$ sea $X_3^* = 5$ si $X_4 = 2$
$= 3$ " $= 6$ " $= 3$
$= 4$ " $= 7$ " $= 4$
$= 5$ " $= 8$ " $= 5$
$= 6$ " $= 9$ " $= 6, 7, 8, 9$

$$\text{Sea } f_{1,2,3,4,5}(X_5) = \min_{X_4} f_{1,2,3,4}(X_4) + V_5(X_4,X_5)$$

Los valores de $V_5(X_4,X_5)$ los dá la tabla:

S_4 \ X_5	7	8	9
0	140	160	180
1	120	140	160
2	100	120	140
3	80	100	120
4	60	80	100
5	40	60	80
6	20	40	60
7	0	20	40

(f)

Sumando la línea (e) a las columnas de (f) obtenemos $f_{1,2,3,4,5}(X_4) + V_5(X_4, X_5)$ tenemos:

	7	8	9
0	354	374	394
1	347	367	387
2	340	360	380
3	333	353	373
4	326	346	366
5	323	343	363
6	320	340	360
7	<u>317</u>	<u>337</u>	<u>357</u>

(g)

(h)

Los mínimos de cada columna han sido subrayados

Por lo tanto, los valores $f_{1,2,3,4,5}(X_4)$ los dá el último renglón y el valor óptimo de S_4 es:

$S_4^* = 7$, de donde: $X_4^* = 9$

Sea: $F^* = f_{1,2,3,4,5,6}(X_6) = \min f_{1,2,3,4,5,}(X_5) + V_6(X_5,X_6)$

Los valores de $V_6(X_5,X_6)$ los dá la tabla:

		X_6: 4
S_5	0	40
	1	30
	2	20

(i)

Sumando el renglón (h) a la columna (i) se obtiene:

$f_{1,2,3,4,5}(X_5) + V_6(X_5,X_6)$:

		X_6
		4
S_5	0	357
	1	367
	2	377

(j)

Por lo tanto, el valor mínimo de F es: $F^* = 357$; el valor óptimo de S_5 es: $S_5^* = 0$: de donde $X_5^* = 7$ automáticamente $S_6^* = 0$, $X_o^* = 4$.

Finalmente se obtiene:

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6
S_i^*	1	0	6	7	0	0
X_i^*	9	5	9	9	7	4
a_{i-1}^*	7	4	9	3	0	4

Como se ve el procedimiento es sencillo y puede ser aplicado a cualquiera que sea la naturaleza de las funciones que intervienen: lineales, no lineales, convesas o no, pero para valores enteros. Cuando se trata de valores contínuos conviene hacer un estudio analítico, lo que con frecuencia es muy delicado. Pero, sea a mano o con el auxilio de una calculadora, para el caso de valores discontínuos (uno los hace discontínuos para el cálculo electrónico), el método de la programación dinámica resulta sencillo y eficaz en muchos casos.

Actualización de los valores.

Supongamos que se aplique una tasa de interés α, por un intervalo de tiempo igual a un período; consideremos

$F(X_o, X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) = V_1(X_o, X_1) + V_2(X_1, X_2) + V_3(X_2, X_3) + \cdots + V_n(X_{n-1}, X_n)$,

una función de valor en secuencia por "optimizar".

Tomando en cuenta la tasa de actualización α , se tiene:

$$F_{act.}(X_o, X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) = V_1(X_o, X_1) + \frac{V_2(X_1, X_2)}{1+\alpha} + \frac{V_3(X_2, X_3)}{(1+\alpha)^2} + \ldots + \frac{V_n(X_{n-1}, X_n)}{(1+\alpha)^{n-1}}$$

Las fórmulas de optimización en secuencia se transforman como sigue:
Si se "optimiza" remontándose del futuro al presente:

$$f_{n,n-1}(X_n, X_{n-2}) = \min_{X_{n-1}} \left[V_{n-1}(X_{n-2}, X_{n-1}) + \frac{1}{1+\alpha} V_n(X_{n-1}, X_n) \right]$$

$$f_{n,n-1,\ldots n-r}(X_n, X_{n-2-1}) = \min_{X_{n-r}} \left[V_{n-r}(X_{n-r-1}, X_{n-r}) + \ldots + \frac{1}{1+\alpha} f_{n,n-1\ldots,\ldots,n-r+1}(X_{n-r}, X_n) \right]$$

$$r = 2, 3, \ldots, n-1$$

o bien yendo del presente al futuro:

$$f_{1,2}(X_o, X_2) = \min_{X_1} \left[V_1(X_o, X_1) + \frac{1}{1+\alpha} V_2(X_1, X_2) \right]$$

$$f_{1,2,\ldots,r}(X_o, X_2) = \min_{X_{r-1}} \left[f_{1,2,\ldots,r-1}(X_o, X_{r-1}) + \ldots + \frac{1}{(1+\alpha)^{r-1}} V_r(X_{r-1}, X_r) \right] ; \; r=3,4,\ldots,n$$

El caso en que se tratará de buscar el máximo daría fórmulas análogas.

La política o políticas óptimas pueden modificarse cuando se hace intervenir una determinada tasa de actualización, pero todo depende del valor de esta tasa. Cuando se hace tender al infinito el número de períodos en los casos económicos reales (salvo el caso de una inflación permanente), el valor total óptimo actualizado es convergente, es decir, existe un óptimo.

UN PROBLEMA EN SECUENCIA DE "STOCK" CON DEMANDA ALEATORIA.

Un artículo es reabastecido cada tres meses y nos preocupa el movimiento anual del mismo. El "Stock" inicial es nulo. La demanda trimestral U_i; $i = 1,2,3,4$ es aleatoria y su ley de probabilidad $/U_i)$ es la misma para cada uno de los cuatro trimestres como se muestra en el cuadro (1).

El costo de almacenaje de un artículo por trimestre es C_1; cuando la demanda es superior al Stock hay penalización, no podemos proveer y esto ocasiona un costo por demanda instisfecha evaluado en C_2 por artículo. Por otra parte, para diferentes estaciones no podemos sobrepasar un "Stock" igual a S.

Introduciremos las notaciones siguientes:

S_i = Stock al final del trimestre $_{i-1}$ (antes del reabastecimiento a_i)

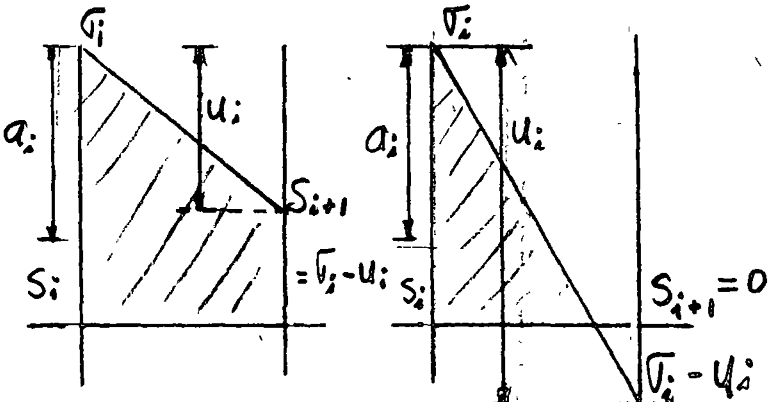
$_i$ = Stock al principio del trimestre i (después del reabstecimiento a_i)

a_i = $_{i-}S_i$ reabastecimiento al principio del trimestre i

U_i = Demanda aleatoria(*) en el trimestre i.

U	(U)	Ø (U)
0	0.2	0.2
1	0.3	0.5
2	0.4	0.9
3	0.1	1
3	0	1

CUADRO 1



Situación (a) sin penalización

Situación (b) (con penalización)

FIG. 1

*No se conoce de antemano en que momentos dentro del trimestre habrá demanda de artículos y se supone que la probabilidad de una demanda en un determinado día J de este trimestre es la misma que para cualquier otro día.

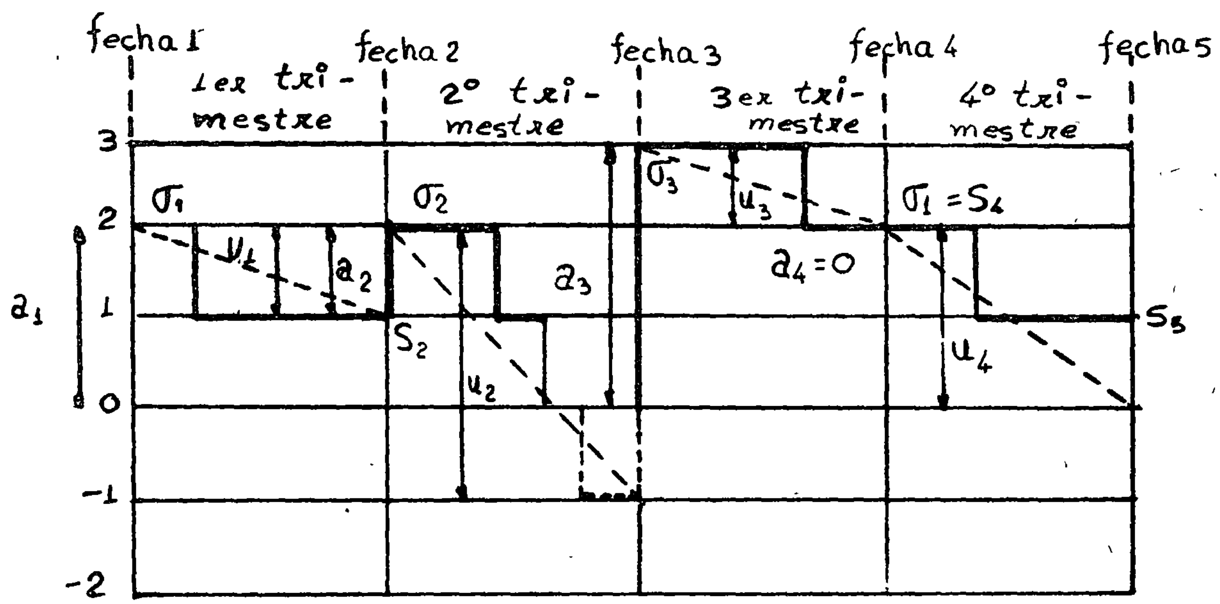

fecha 1
fecha 2
fecha 3
fecha 4
fecha 5
1er tri-mestre
2° tri-mestre
3er tri-mestre
4° tri-mestre
3
2
1
0
-1
-2
σ_1
σ_2
σ_3
$\sigma_1 = S_4$
u_1
a_2
a_3
$a_4 = 0$
a_1
S_2
S_5
u_2
u_3
u_4

Fig. 4

Observando la gráfica de la figura 2 vemos que pueden producirse dos situaciones distintas.

Situación a): $U_i \leq \sigma_i$: entonces $S_{i+1} = \sigma_i - U_i = S_i + a_i - U_i$;

no hay penalización

El costo promedio para el trimestre i es:

$C_1(\sigma_i - \frac{U_i}{2})$ si la demanda es U:

Situación b): $U_i \geq \sigma_i$; entonces $S_{i+1} = 0$

hay penalización

El costo promedio para el trimestre i es:

$\frac{1}{2} C_1 \frac{\sigma_i^2}{U_i} + C_2(U_i - \sigma_i)$ si la demanda es U_i

Intervienen las restricciones siguientes:

$$\text{Sea: } \left.\begin{array}{l} S_i \leq \sigma_i \leq S \\ S_i \leq a_i + S_i \leq S \end{array}\right\}$$

aun $0 \leq a_i \leq S-S_i$

La esperanza matemática del costo del stock para un trimestre i, teniendo en cuenta las situaciones (a) y (b), es:

$$Z(\sigma_i) = \sum_{U_i = 0}^{\sigma_i - 1} C_1(\sigma_i - \frac{U_i}{2}) \varphi(U_i) + \sum_{U_i = \sigma_i}^{\infty} \left[\frac{1}{2} C_1 \frac{\sigma_i}{U_i} + C_2(U_i - \sigma_i)\right] \varphi(U_i)$$

vamos a mostrar cómo obtener el valor mínimo del costo total del almacenaje para el año, utilizando la programación dinámica. Introducimos datos numéricos que permitan seguir facilmente los cálculos; suponemos que la demanda U_i puede ser de 0,1,2,3 artículos y que el "Stock" no debe pasar nunca de S = 3 artículos.

La ley de probabilidad (U_i) de la demanda U_i se supone que será la del cuadro 1 que dá también las probabilidades anuales (U_i).

Tomaremos $C_1 = 4$ y $C_2 = 3$, $C_1 = 12$

La figura 2 representa una historia posible de este problema de "Stock" en que la política de compras ha sido $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 0$; mientras que la demanda ha sido $U_1 = 1$, $U_2 = 3$ $U_3 = 1$, $U_4 = 2$. En esta figura hemos representado en línea discontinua la variación media del "Stock" en el trimestre, suponiendo que todos los días son equiprobables en lo que se refiere a las demandas. Los costos de almacenaje en las situaciones (a) y (b) serán admitidos, por lo tanto, proporcionales a las superficies achuradas en la figura 2.

Vamos a obtener sucesivamente los valores óptimos para el trimestre 4, después para los trimestres 4 y 3 juntos, luego 4,3,2 y finalmente 4,3,2,1. La optimización deberá hacerse obligatoriamente del futuro hacia el presente.

Con los valores numéricos dados antes 3 teniendo en cuenta que todos los trimestres tienen la misma ley de probabilidad respecto a las demandas, tendremos:

$$Z(\sigma_i) = \sum_{U_i=0}^{\sigma_i - 1} 4\left(\sigma_i - \frac{U_i}{2}\right)(U_i) + \sum_{U_i=\sigma_i}^{3} \left[2\,\frac{\sigma_i^2}{U_i} + 12\,(U_i - \sigma_i)\right]\varphi(U_i)$$

Para simplificar los cálculos utilizaremos una gráfica "decisión-azar" a la cual llevaremos directamente el resultado de los cálculos figura 4

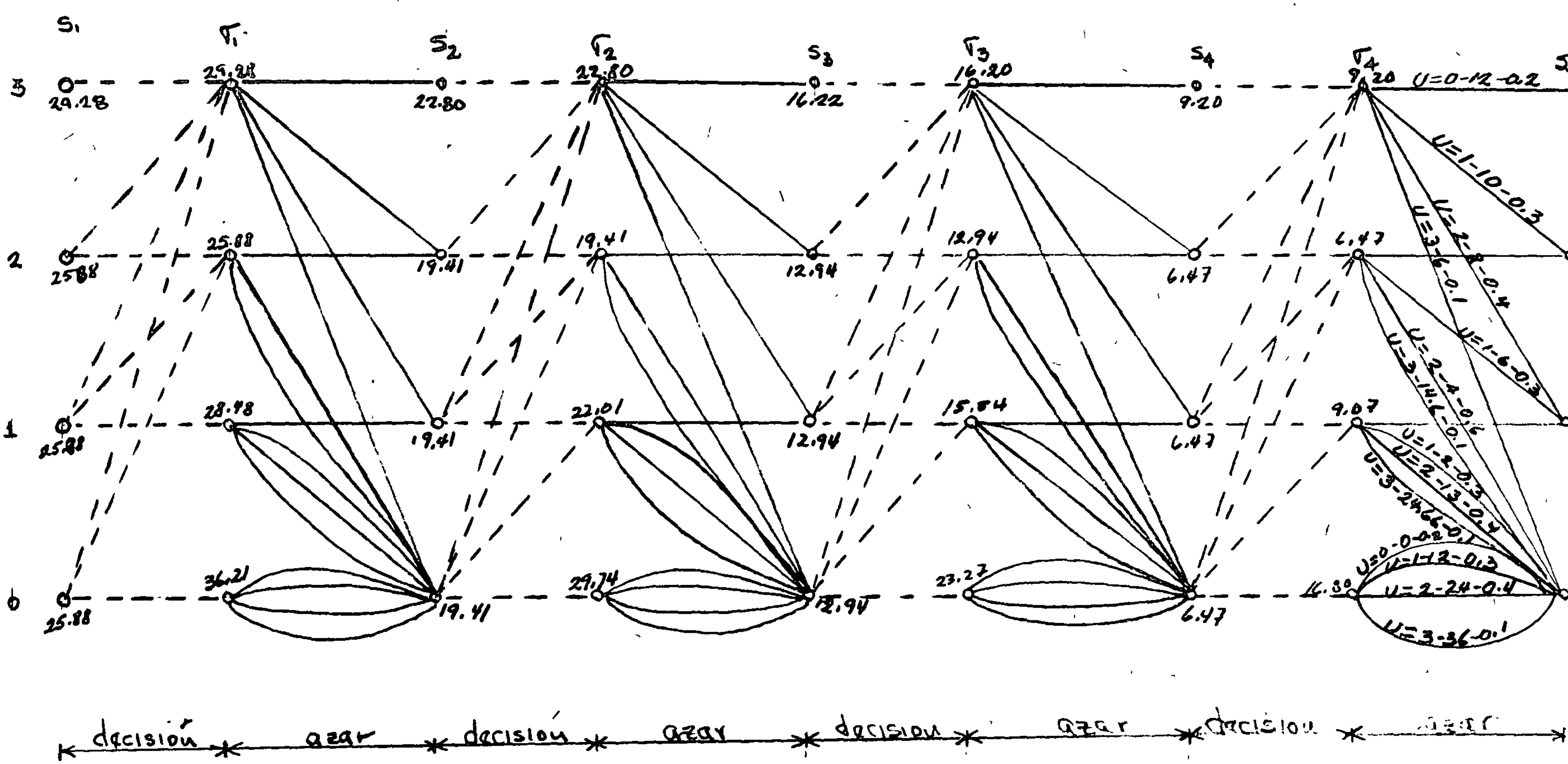


Figura 4.

Los números colocados en las columnas dan las esperanzas matemáticas referidas al período para el valor de decidido; los números en las columnas S dan valores óptimos referidos a cada valor de S; los números en las arcos del "azar" dan, en este orden: la demanda, la variación del costo y la probabilidad de transición.

46

Observamos que la estrategia óptima es:

Trimestre 1: $S_1^* = 0$ $\quad {}_1^* = 2$; de donde $a_1^* = 2$

Trimestre 2:	Si $S_2 = 0$	tomar $C_2^* = 2$;	de donde $a_2 = 2$
	$= 1$	"	$= 2$;	"	"	$= 1$
	$= 2$	"	$= 2$;	"	"	$= 0$
	$= 3$	"	$= 3$;	"	"	$= 0$
Trimestre 3:	Si $S_3 = 0$	tomar $C_3^* = 2$;	de donde $a_3^* = 2$
	$= 1$	"	$= 2$;	"	"	$= 1$
	$= 2$	"	$= 2$;	"	"	$= 0$
	$= 3$	"	$= 3$;	"	"	$= 0$
Trimestre 4:	Si $S_4 = 0$	tomar $C_4^* = 2$;	de donde $a_4^* = 2$
	$= 1$	"	$= 2$;	"	"	$= 1$
	$= 2$	"	$= 2$;	"	"	$= 0$
	$= 3$	"	" 3;	"	"	$= 0$

Así el "Stock" deberá ser siempre inferior a 2; la estrategia óptima consiste en comprar 2 artículos en el 1er. trimestre, y en los otros: 2, si $S_i = 0$; 1, si $S_i = 1$; 0 si $S_i = 2$ o 3. Así la esperanza matemática del costo será mínima e igual a 25.88.

Ilustraremos ahora la aplicación de la programación dinámica a un problema de programación de la producción y de inventarios en el que la función de costos es contínua, por lo que requiere del usp deñ cálculo diferencial para llegar al óptimo.

Para ver su uso planteamos el siguiente problema, se tiene un contrato de producción y entrega de una sola orden de 18 unidades en los siguientes 90 días. El contratista llamará para entregar las cinco unidades al final de 30 días, 5 unidades en los 60 días y 8 unidades al final de los 90 días. A causa de las limitaciones de la capacidad de producción y la decisión de la compañía a trabajar tiempo extra antes que ampliar la capacidad sobre el período de 90 días, estas unidades se producirán a un costo creciente de acuerdo a la siguiente relación, donde m_i es el costo de producir X_i unidades en el i-ésimo período de 30 días.

$$m_i = 5000 + 1000\ X_i(X_i - 1) \qquad (1)$$

Si cualquier exceso de unidades o partes de unidades son manufacturadas y sobre manejadas al final de cualquier período de 30 días, estas podrán trasladarse al siguiente período con un costo de tenencia (interés, almacenamiento, seguro, pruebas, etc.) de \$1000.00 por cada unidad trasladada de un período de 30 días al siguiente. Los costos de tenencia son proporcionales para unidades parciales excedidas. Por lo tanto si V_i es el número de unidades excedidas en el período i-ésimo (es decir; es el inventario inicial para el período i), los **costos de tenencia**, h_i, es:

$$h_i = 1000\ V_i \qquad (2)$$

En el siguiente desarrollo, simplicaremos la aritmética para la representación de costos. De este modo, la ecuación (1) y (2) se transforma en

$$m_i = 5 + X_i\ (X_i - 1); \quad h_i = V_i \quad \text{expresado en miles.}$$

La compañía buscará determinar la programación óptima que minimice la suma de costos de tener inventario y de producción. No existe inventario inicial. El exceso de inventarios no necesariamente deben ser unidades enteras.

Este problema es esencialmente un problema de programación no lineal en el que la función objetivo es minimizar:

$$\text{Costo total (CT)} = h_1 + h_2 + h_3 + m_1 + m_2 + m_3 \qquad (3)$$

$$\text{Sujeto a:} \quad \begin{aligned} X_i &\geq 0 \quad \text{para toda } i \\ X_1 &\geq 5 \\ X_1 + X_2 &\geq 10 \\ X_1 + X_2 + X_3 &= 18 \end{aligned} \qquad (4)$$

Este sistema es no lineal, ya que las restricciones son lineales, pero la función objetivo (3) es no lineal. Si sustituimos en la ecuación (3), las ecuaciones (1) y (2) tenemos:

$$C.T. = V_1+V_2+V_3+15+X_1(X_1 - 1) + X_2(X_2 - 1) + X_3(X_3 - 1) \qquad (5)$$

$$\text{Pero} \quad \begin{aligned} V_1 &= 0 \\ V_2 &= X_1 - 5 \\ V_3 &= X_1 + X_2 - 10 \end{aligned}$$

$$CT = X_1-5+X_1+X_2-10+15+X_1^2 - X_2^2 - X_2 + X_3^2 - X_3$$

$$CT = X_1 - X_3 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

La solución a este problema lo vamos a obtener aplicando la técnica de programación dinámica, que es un método muy simple.

Si

$f(V_i,\ X_i^*)$ = Costo total óptimo para la producción sobrante programada inicialmente en el inicio del período $\underline{i}$.

$C(V_i,\ X_i)$ = Costo total para el i-ésimo período más el costo total óptimo después de ese período.

Por lo tanto, la expresión de la programación dinámica fundamental que utilizaremos en este problema es:

$$C(V_i,\ X_i) = h_i + m_i + f(V_{i+1},\ X_{i+1}^*)$$

Siguiendo el método de programación dinámica, iniciaremos en el último período, el 3er. período de 30 días. El costo total en ese tercer período es:

$$C(V_3,\ X_3) = h_3 + m_3 = V_3 + 5 + X_3(X_3 - 1)$$

La compañía producirá solamente esas 18 unidades, el número óptimo a producir en el último período es el requerimiento, es decir, producir 8 unidades, menos el inventario inicial para ese período.

$$X_3^* = 8 - V_3$$

entonces

$$\begin{aligned} f(V_3,\ X_3^*) &= V_3 + 5 + (8 - V_3)\ (7 - V_3) \\ &= V_3 + 5 + 56 - 15\ V_3 + V_3^2 \end{aligned}$$

$$f(V_3,\ X_3^*) = 61 - 14\ V_3 + V_3^2$$

Como se verá V_3 será un resultado de la decisión tomada en las primeras etapas, no podemos trabajar más en esta etapa, pero deberemos ahora trabajar regresivamente hacia el 2º período. Para el 2º período, el costo es:

$$C(V_2,\ X_2) = h_2 + m_2 + f(V_3,\ X_3^*)$$

la cual nos expresa el costo como la suma de los costos para el período común más el costo óptimo para todos los períodos faltantes.

Entonces:

$$C(V_2, X_2) = V_2 + 5 + X_2(X_2 - 1) + \left[61 - 14V_3 + V_3^2\right] \quad (5')$$

Como el inventario inicial en el 3er. período es la suma del inventario inicial del período anterior más la producción anterior, menos las entregas hechas en ese período:

$$V_3 = V_2 + X_2 - 5$$

$$C(V_2, X_2) = 66 + V_2 + X_2^2 - X_2 - 14(V_2 + X_2 - 5) + (V_2 + X_2 - 5)^2 \quad (6)$$

diferenciando la ecuación (6) con respecto a X_2 e igualando a cero obtenemos X_2^*:

$$\frac{d}{d\,X_2}\left[\, C(V_2, X_2)\right] = 2X_2 - 1 - 14 + 2(V_2 + X_2 - 5)$$

$$0 = - 25 + 2V_2 + 4\,X_2^*$$

$$X_2^* = \frac{25 - 2V_2}{4} \quad (7)$$

Nótese que no garantizamos que este punto, X_2^*, esté dentro o fuera de los requerimientos necesarios en nuestro contrato. Es decir que, para hacer las entregas dentro del tiempo especificado en el contrato, es necesario que exista por lo menos 5 unidades a la mano al final del 2°. período de 30 días.

$$V_2 + X_2 \geqslant 5$$

Actualmente en este caso, podrá verse que X_2^* como se calculó la ecuación (7) será factible por este criterio, pero no podemos asegurar de esto nada, hasta que hayamos trabajado recursivamente y obtenido el valor de V_2. Si concluimos que X_2^* es entonces también pequeño para hacer la entrega del requerimiento, nosotros podemos aumentar arbitrariamente la producción en ese período a la mínima cantidad que cumpla con la factibilidad del requerimiento.

Ahora que tenemos un valor para X_2^*, lo sustituiremos en la ecuación (5'). Haremos esto en 2 pasos. Primero sustituimos el valor de X_2^* en la expresión entre paréntesis de la ecuación (5'), produciéndonos:

$$V_2 + X_2^* - 5 = V_2 + \frac{25 - 2V_2}{4} - 5 = \frac{5 + 2V_2}{4}$$

entonces

$$f(V_2, X_2^*) = 66 + V_2 + \left(\frac{25 - 2V_2}{4}\right)^2 - \left(\frac{25 - 2V_2}{4}\right) - 14 \left(\frac{5 + 2V_2}{4}\right) + \left(\frac{5 + 2V_2}{4}\right)^2$$

$$= \frac{169}{4} - \frac{11}{2} V_2 + \left(\frac{25 - 2V_2}{4}\right)^2 + \left(\frac{5 + 2V_2}{4}\right)^2$$

Finalmente:

$$C(V_1, X_1) = h_1 + m_1 + f(V_2, X_2^*)$$

$$= V_1 + 15 + X_1(X_1 - 1) + \frac{169}{4} - \frac{11}{2} V_2 + \left(\frac{25 - 2V_2}{4}\right)^2 + \left(\frac{5 + 2V_2}{4}\right)^2$$

Pero $V_1 = 0$, no existe inventario inicial, y $V_2 = X_1 - 5$

Por lo tanto,

$$\frac{25 - 2V_2}{4} = \frac{25 - 2X_1 + 10}{4} = \frac{35 - 2X_1}{4}$$

$$y\ 5 + 2V_2 = 5 + 2X_1 - 10 = 2X_1 - 5$$

$$C(V_1, X_1) = C(0, X_1) = 0 + \left[5 + X_1^2 - X_1\right] + \left[\frac{164}{4} - \frac{11}{2}(X_1 - 5) + \left(\frac{35 - 2X_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2X_1 - 5}{4}\right)^2\right]$$

Simplificando esta ecuación y derivando tenemos:

$$\frac{d}{dX_1}\left[c(V_1, X_1)\right] = 2X_1 - 1 - \frac{11}{2} + 2\left(\frac{35 - 2X_1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{2X_1 - 5}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

igualmente a cero

$$0 = 2X_1^* - \frac{13}{2} - \frac{35}{4} + \frac{X_1^*}{2} + \frac{X_1^*}{2} - \frac{5}{4}$$

$$3X_1^* = \frac{66}{4}$$

$$X_1^* = \frac{66}{12} = 5\ \frac{1}{2} \text{ unidades}$$

entonces

$$U_2 = \frac{1}{2}$$

y de la ecuación (7)

$$X_2^* = \frac{25 - 2V_2}{4} = 6$$

$$V_3 = V_2 + X_2 - 5 = \frac{1}{2} + 6 - 5 = 1\ \frac{1}{2}$$

$$X_3^* = 8 - V_3 = 6\ \frac{1}{2}$$

De esta manera, la programación óptima, el costo mínimo que satisface las entregas de los requerimientos, es: manufacturar en los tres períodos de 30 días respectivamente.

$$5\ \frac{1}{2},\ 6 \text{ y } 6\ \frac{1}{2} \text{ unidades}$$

Comparando costos de esta programación con varias otras posibles programaciones vemos: Podemos seleccionar por comparación primero; producir para las entregas a final de fecha, y segundo, producir una cantidad uniforme en cada período.

Por lo tanto:

$$T\ C = X_1 - X_3 + X_1^{\ 2} + X_2^{\ 2} + X_3^{\ 2}$$

Si producimos para las entregas a final de fecha, significa producir 5, 5, 8 unidades respectivamente; entonces el costo es:

$$CT_F = 5 - 8 + 25 + 25 + 64 \quad 111$$

Si producimos una cantidad uniforme; es decir, producir, 6, 6, 6 unidades respectivamente; entonces el costo es:

$$CT_U = 6 - 6 + 36 + 36 + 36 = 108$$

En la programación óptima; es decir, producir $5\frac{1}{2}$, 6 y $6\frac{1}{2}$ unidades, tenemos:

$$C\ T^* = 5\frac{1}{2} - 6\frac{1}{2} + 30.25 + 36 + 42.25 = 107.5$$

centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

PLANEACION Y CONTROL DE LA PRODUCCION

VII. ABASTECIMIENTO Y MANEJO DE MATERIALES

ING. JUAN JOSE DIMATTEO C.

OCTUBRE, 1977.

"LAS COMPRAS EN LA EMPRESA"

OBJETIVO: El objetivo general del Departamento de Compras, será contribuír a los resultados finales de la empresa con una eficiente conversión de los valores económicos:

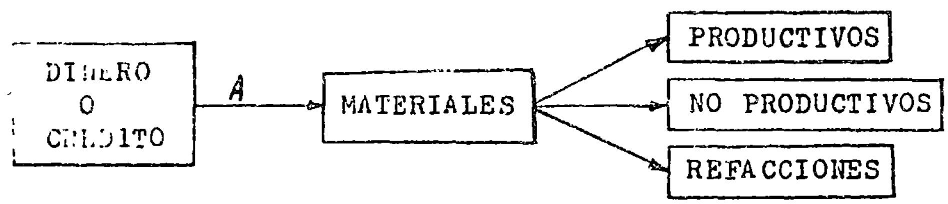


FIG. No. 1

Por medio de negociaciones éticas y objetivas.

Entendemos el movimiento de valores económicos de una empresa manufacturera como lo indica la Fig. No. 1.

Especificando un poco más el objetivo general, nos encontramos con los siguientes puntos:

1) Obtener cantidades correctas para que no se interrumpa la producción pero minimizando los gastos de inventario (lote económico).

2) Obtener artículos de la calidad apropiada para cubrir la producción sin superar las especificaciones a fin de mantener bajo precio.

3) Obtener los artículos a tiempo, pero sin acumular inventarios.

4) Mantener la reputación de la Cía. en lo referente a corrección y renombre.

5) Obtener las mejores condiciones financieras para no comprometer a la empresa (en promedio las compras representan el 50 % del dinero gastado).

6) Integración de la función de la adquisición; esto implica proporcionar canales de comunicación entre varios departamentos de la Cía. como son: Producción, Mercadotecnia, Ingeniería, Contabilidad, Jurídico.

POLITICAS DE COMPRAS

Deberán fijarse en la empresa, las políticas a seguir por el departamento. Como ejemplo de dichas políticas podemos mencionar las siguientes:

1 Todos los asuntos relacionados con proveedores, se deben canalizar a través de compras (así lo exigen los auditores internos y externos).

2) Compras solo tramitará materiales usados por la empresa, por lo tanto se deben excluír las compras personales.

3) Compras es el único departamento con autoridad para decidir la selección final de las fuentes de suministro y no acepta presiones internas ó externas sobre ése tipo de decisiones.

4) Las urgencias que se presentan, se tratarán como tales, es decir se atenderán de inmediato, pero después se analizarán para sugerir ó tomar acciones correctivas.

5) Es política general contar con doble fuente de abastecimiento siempre que sea posible.

6) Se deberán atender con celeridad, objetivo y éticamente las reclamaciones de los proveedores sobre cualquier asunto (calidad, pagos, programaciones, etc.)

7) Las políticas de financiamiento de pasivos a corto plazo, se establecen de acuerdo con el área financiera.

PROCEDIMIENTO BASICO DE COMPRAS

El encargado del Departamento de Compras, deberá establecer por escrito el procedimiento al cual se ajustará toda's las compras (como ejemplo tenemos las figuras 2 y 3).

CENTRALIZACION VS. DESCENTRALIZACION.

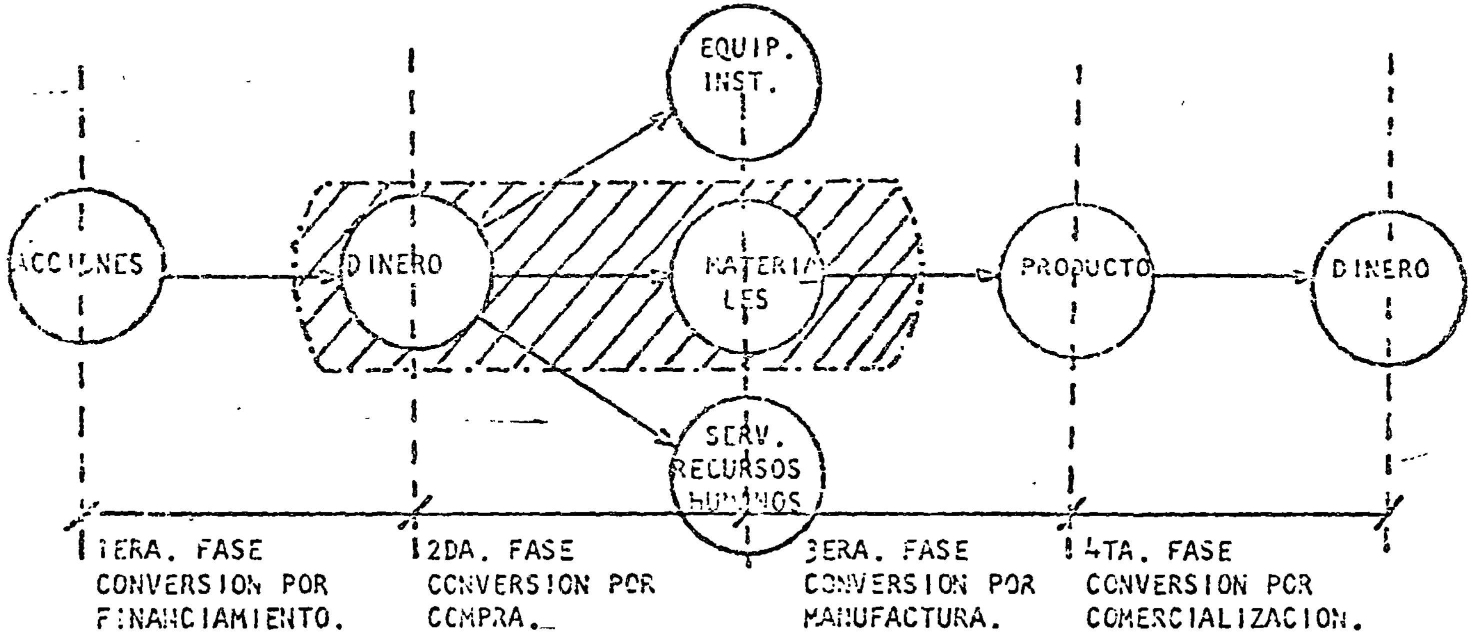
VENTAJAS: Las ventajas de centralizar son las siguientes:

1) Mejor control sobre las compras y los inventarios.
2) Pueden agruparse pedidos de manera de obtener descuentos por cantidad.
3) Personal más especializado con enfoque sistemático.
4) Posibilidad de procesar electrónicamente los datos.
5) Mayor poder de compra lo cual permite al comprador negociar mejores precios. (ejemplo "Cervecería Cuauhtémoc, S. A.)

Las compras descentralizadas implican el establecimiento de varios Deptos. que compran. Las ventajas que presentan son:

1) Acción más rápida (líneas de comunicación más cortas)
2) Puede presentarse menores costos por transporte mediante el desarrollo de proveedores locales.
3) La generación de crédito mercantil local. Lo que hacen las empresas que tienen éste problema es un sistema mixto; Centralizan los artículos de valor elevado y los que se compran en grandes cantidades.

DIAGRAMA DE MOVIMIENTO DE VALORES ECONOMICOS EN UNA EMPRESA MANUFACTURERA.



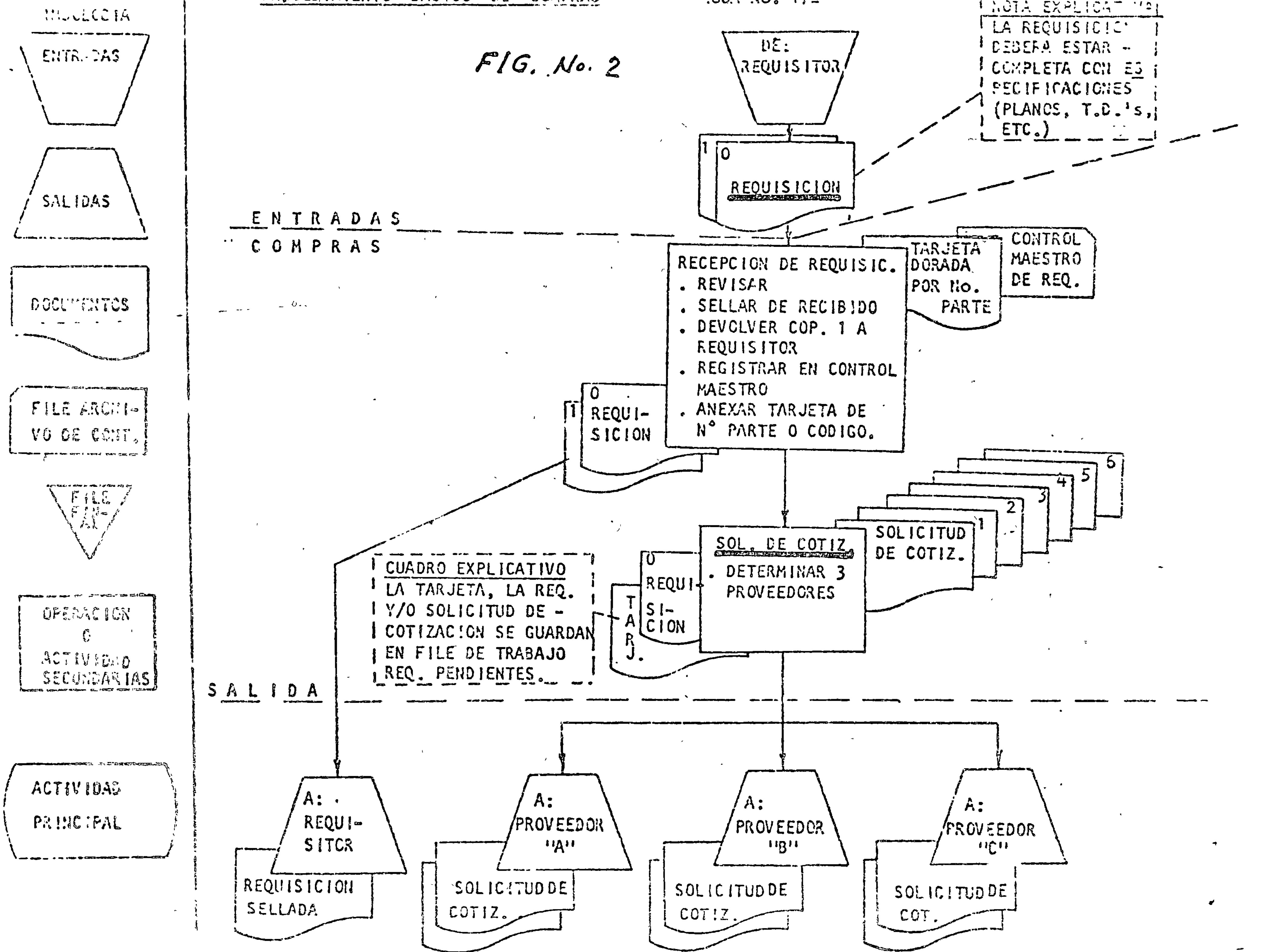
NOTAS: 1) LA EFICIENCIA TOTAL DE LA EMPRESA, DEPENDE A SU VEZ DE LA EFICIENTE -- CONVERSION DE CADA UNA DE LAS FASES.

2) EL DEPARTAMENTO DE COMPRAS OPERA FUNDAMENTALMENTE EN LA SEGUNDA FASE,- CONVIRTIENDO (POR COMPRA) DINERO O CREDITO A MATERIALES, TAL Y COMO SE MARCA POR EL AREA PUNTEADA.

FIG. No. 1

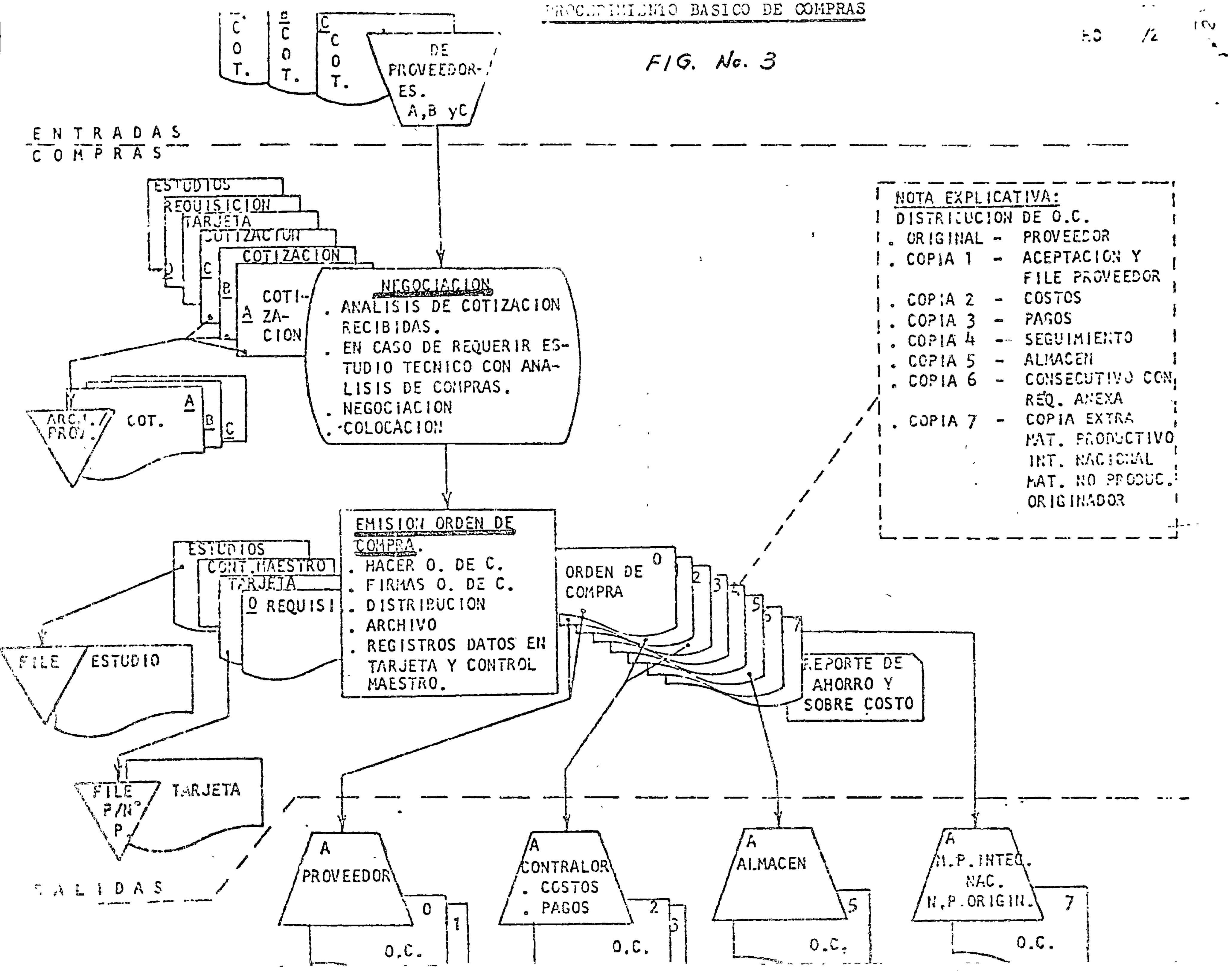
PROCEDIMIENTO BASICO DE COMPRAS HOJA No. 1/2

FIG. No. 2



PROCEDIMIENTO BASICO DE COMPRAS

FIG. No. 3



Los de urgencia y pequeños, son manejados por departamentos descentralizados, "Las compañías de Auditoría externa recomiendan que las compras se centralicen

ANALISIS DEL VALOR

Esto es un área nueva dentro de las adquisiciones. Implica la investigación de un artículo en términos de su función y precio para determinar las especificaciones más efectivas y el costo más bajo. O sea que el análisis del valor busca respuestas a preguntas como las siguientes:

1) ¿ Cual es la función del artículo y qué propósito debe cumplir ?

2) ¿ Qué materiales alternativos podrán usarse ?

3) ¿ Como podría simplificarse ?

4) ¿ Qué otro método de fabricación podría analizarse ?

5) ¿ Qué parte podría estandarizarse en vez de usar partes no estandar ?

Las respuestas a éstas preguntas suelen producir importantes ahorros.

Para llevar a cabo un análisis del valor, hay un procedimiento:

1) Analizar todos los hechos relacionados con el costo (especificaciones)

2) Consultar a Ingeniería del Producto sobre el diseño.

3) Consultar con todas las fuentes posibles y analizar las posibilidades de mejoras.

4) Cuando se tiene una idea del producto mejorado, consultar con el proveedor las posibilidades de hacer el producto mejorado.

5) Efectuar reporte que indique los ahorros que resultarán al incorporar las mejoras.

El analista de valor debe ser una persona muy creativa y que esté continuamente al tanto de todos los avances. Por otro lado debe manejar muy bién las relaciones humanas ya que el Ingeniero puede molestarse al cuestionar lo de su diseño.

Ejemplos:

1 .- La substitución de plástico por aluminio, ha traído ahorros del orden del 40 % y una reducción importante del peso.

2 .- El análisis del valor requiere de confianza entre los proveedores y los compradores.

La investigación de operaciones en las adquisiciones

Existen varias áreas en la investigación de operaciones que pueden ser aplicadas a las adquisiciones. En las negociaciones se puede emplear la teoría de los juegos. Se puede usar la simulación para las decisiones de fabricar o comprar. Se puede utilizar la programación lineal para minimizar los costos. Una de las técnicas de la investigación de operaciones es especialmente aplicable a las adquisiciones y se estudiará en este punto. La técnica se llama método Montecarlo. La idea básica es la siguiente: Si un gerente se ve enfrentado con un problema que implique la predicción de eventos inciertos, puede usar la teoría de la probabilidad para hacer tales predicciones. La técnica es útil en especial cuando los datos no están distribuidos normalmente. Un ejemplo aclarará las aplicaciones de esta técnica.

Supóngase que un fabricante utiliza un tipo de herramienta, en particular, en una máquina en un proceso de producción, y que debe determinar el número de herramientas que deban pedirse. Su experiencia le indica que una herramienta dada puede tener una vida útil corta o larga, dependiendo de un número de variables que no pueden ser completamente controladas, tales como el tipo de material en el cual se emplee la herramienta, variaciones en la calidad de la herramienta, nivel de destreza del operario que la emplee, el número de horas durante el día en las cuales la herramienta esté en uso, y así sucesivamente. Aun cuando no tenga suficiente información sobre estas variables para construir un modelo de predicción de causa y efecto, no es muy difícil determinar, por los registros del inventario de herramientas, la historia de la vida de la herramienta. Registrando la fecha en que se da salida a una nueva herramienta y cuando se recibe la herramienta desgastada, el empleado puede formular su historia. Por lo tanto, de estos registros se puede formular una distribución de frecuencia del número de días que duró la herramienta en el pasado.

Tales distribuciones de frecuencia quizá no reflejen una distribución estadística normal. Si la reflejan, el gerente podría usar la media aritmética más un número seleccionado de desviaciones estándar para llegar a una decisión con un nivel de confianza dado. Puesto que en este ejemplo, la historia de la vida de la herramienta exhibe una extraña distribución, se puede emplear la técnica Montecarlo para llegar a una decisión. Para propósitos de ilustración, en la Fig. 13-1 se muestra la distribución de frecuencia de la vida de la herramienta. Los datos en este histograma sirven como insumos para la simulación Montecarlo.

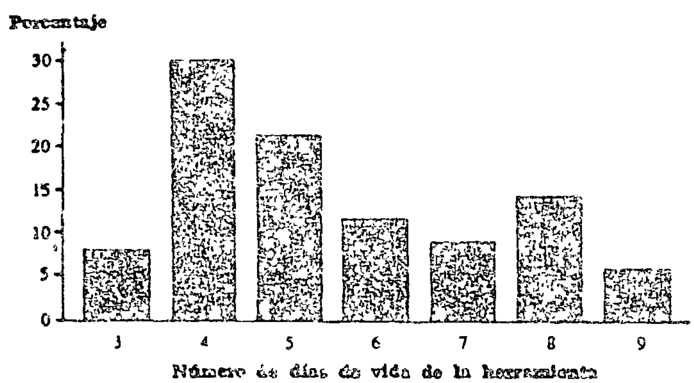


FIG. 13-1. Histograma de la vida de la herramienta

Una observación casual del histograma de la Fig. 13-1 revela que el 60% de las herramientas duran sólo cinco días o menos El 40% restante dura seis, siete, ocho o nueve días, y que su distribución es un tanto inesperada, sobre todo en términos del porcentaje, relativamente grande, que dura ocho días.

Para ajustar este problema para la simulación Montecarlo, los porcentajes deberán ser convertidos en números al azar, como en la Tabla 13-1.

La función de la simulación Montecarlo es generar el uso esperado de la herramienta durante el tiempo con referencia especial a la distribución de las historias de vida Toma en cuenta las influencias aleatorias en el proceso del uso y cada iteración de ensaye tiende a producir una respuesta distinta. Sin embargo, a la larga, las experiencias simuladas tenderán a representar la distribución de frecuencias de la historia de la vida de la herramienta sobre la cual está basado el simulador.

TABLA 13-1

Número de días	Porcentaje	Número al azar
3	8%	00-07
4	30	08-37
5	22	38-59
6	12	60-71
7	8	72-79
8	14	80-93
9	6	94-99

Con el fin de explorar la forma en que trabaja dicho simulador necesitamos establecer una cifra meta u objetivo. Supondremos que el gerente desea determinar qué cantidad de herramientas debe pedir para que le duren cincuenta días en la máquina. Es obvio que si cada una de las herramientas que emplee experimenta la vida de herramienta más larga (nueve días), por lo menos necesitará seis de ellas. Sin embargo, no es probable que esto suceda. Por otra parte, si la herramienta se desgasta en el menor tiempo experimentado (tres días) necesitará diecisiete herramientas. Tampoco es probable que esto suceda. Para determinar qué es lo más probable que suceda, tomando en cuenta las ocurrencias aleatorias, se puede emplear la simulación Montecarlo en la forma siguiente. Se generará un número al azar de una tabla de números al azar ~~o internamente en un programa de computadora~~ y se comprobará contra la gama de números al azar en la Tabla 13-1. El número de días asociado con la gama de números al azar será anotado a continuación. Si el total no es igual ni excede a cincuenta días, lo que no sucederá con el primer número, entonces se genera otro número al azar y el número de días que esté asociado a él se agrega al primer número de días. Nuevamente se ve si el total es igual o excede a cincuenta días. En caso negativo, se genera el siguiente número al azar, se registra el número de días y se comprueba contra la meta de los cincuenta días. Este procedimiento se repetirá hasta que se llegue o se rebase la meta, en cuyo punto se registrará el número total de herramientas que se necesitan para cumplir con el objetivo.

Los requerimientos totales representarán sólo una iteración o estimación del número de herramientas que se necesitan. Obviamente, como estamos trabajando con una distribución desusada, se puede tener poca confianza en la respuesta. Por lo tanto, se repite el ciclo por tantas iteraciones hasta que emerja el modelo. Para demostrar el procedimiento, en la Tabla 13-2 se describen cinco iteraciones.

TABLA 13-2. CINCO ITERACIONES DEL USO DE HERRAMIENTAS

Iteración 1		Iteración 2		Iteración 3		Iteración 4		Iteración 5	
Núm. al azar	Días	Núm. al azar	Días	Núm. al azar	Días	Núm. al azar	Días	Núm. al azar	Días
48	[illegible]	51	5	06	3	56	5	52	5
22	4	80	8	56	5	62	6	37	4
06	3	92	8	51	5	44	5	74	7
13	4	65	6	60	6	50	5	52	5
51	5	50	5	13	4	95	9	34	4
94	9	57	5	26	4	57	5	96	9
78	7	33	4	35	4	06	3	60	6
69	6	28	4	74	7	45	5	61	6
21	4	07	3	08	4	54	5	78	7
09	4	70	6	78	7	22	4		
				34	4				
Total de días = 51		Total de días = 54		Total de días = 53		Total de días = 52		Total de días = 53	
Núm. de herramientas = 10		Núm. de herramientas = 10		Núm. de herramientas = 11		Núm. de herramientas = 10		Núm. de herramientas = 9	

El resumen de estas cinco iteraciones revela que para alcanzar la meta de cincuenta días de uso o excederlos, en un caso se requieren nueve herramientas, en tres casos se requieren diez, y en un caso se requieren once. Se podría concluir que podríamos pasar el 80% del tiempo con una orden por diez herramientas y podríamos pasar el 100% del tiempo, estaríamos seguros con once herramientas. Sin embargo, esta conclusión no estaría garantizada debido a que el número de iteraciones es demasiado limitado en este punto. Es por completo obvio que se requieren más iteraciones para tener cierta confianza en la predicción.

Para llevar a cabo numerosas iteraciones es útil simular en una computadora. El procedimiento en computadora se programa con facilidad y el procedimiento en sí está idealmente adecuado para la computadora, es decir, implica una gran cantidad de cálculos y consultas a la tabla que harían que un humano se distrajera. Esto fue lo que se hizo con este problema utilizando una terminal remota conectada a una IBM 360 Modelo 50. Sólo se presenta un resumen de las cifras aquí para indicar el efecto de numerosas iteraciones sobre el proceso de simulación.

La primera serie de simulaciones implicó diez ensayos o iteraciones. Se repitió cinco veces con los siguientes resultados.

Núm. de herramientas	7	8	9	10	11	12	Total
Simulación 1	0	2	0	4	4	0	10
Simulación 2	0	3	5	2	0	0	10
Simulación 3	0	2	0	4	4	0	10
Simulación 4	0	3	2	3	2	0	10
Simulación 5	0	3	5	2	0	0	10
Total	0	13	12	15	10	0	50

Así como la simulación inicial dio como resultado una distribución un tanto distorsionada de la historia de la vida de la herramienta, estos cinco ensayos o iteraciones también reflejan historias distorsionadas. Por ejemplo, la simulación 1 nos haría creer que podríamos pedir diez herramientas a riesgo de quedarnos sin existencias el 40% del tiempo. La simulación 3 confirma esto. La simulación 4 indica que esta regla de decisión resultaría en quedar sin existencias el veinte por ciento del tiempo. Y las simulaciones 2 y 5 indican que no ocurrirán agotamientos de existencias si sólo ordenamos diez herramientas. Todas las cinco simulaciones parecen indicar que al pedir once herramientas se evitaría quedarse sin existencias. Otra vez esto es intuitivamente no realista. Para desarrollar respuestas más reales, se necesita un número mayor de iteraciones.

La segunda serie de simulaciones comprendió cincuenta ensayos o iteraciones. Se repitió cinco veces con los siguientes resultados:

Núm. de herramientas	7	8	9	10	11	12	13	Total
Simulación 1	0	6	21	19	3	1	0	50
Simulación 2	1	5	12	20	12	0	0	50
Simulación 3	0	4	22	13	8	3	0	50
Simulación 4	2	8	14	19	6	1	0	50
Simulación 5	2	7	15	21	4	0	1	50
Total	5	30	84	92	33	5	1	250

Aumentando las iteraciones de diez a cincuenta, principian a aparecer ciertos fenómenos reales. Hay varias simulaciones que contienen siete herramientas que no aparecen con una iteración límite de diez. En forma similar, hay un caso en el cual se requieren trece herramientas, lo que no aparece en las simulaciones que implicaron diez iteraciones. En general, la variación en términos de porcentajes tiende a reducirse de siete a trece herramientas.

Para explorar otro paso de aumento en el número de iteraciones, se corrió el programa de la computadora con cien iteraciones por simulación y el procedimiento de la simulación se repitió cinco veces. Los resultados son los siguientes:

Núm. de herramientas	7	8	9	10	11	12	13	Total
Simulación 1	0	16	38	32	12	1	1	100
Simulación 2	1	18	28	32	21	0	0	100
Simulación 3	1	15	36	30	14	4	4	100
Simulación 4	1	18	28	32	21	0	0	100
Simulación 5	1	9	31	41	18	0	0	100
Total	4	76	161	167	86	5	1	500

A este punto de la simulación Montecarlo, las predicciones del uso de herramientas principian a formar diseños razonablemente estables. La gama es claramente siete herramientas mínimo y trece herramientas máximo. El porcentaje de las expectaciones para determinados niveles de adquisición están resultando un tanto consistentes. Para comprobar, se hizo una corrida final empleando mil iteraciones. Los resultados son como sigue:

Número de herramientas	7	8	9	10	11	12	13	Total
	9	122	313	376	154	26	0	1000

La simulación de mil iteraciones indica que si se piden doce herramientas la probabilidad de que se agoten es cero. Si se piden once herramientas, la probabilidad de que se agoten aumenta al 2.6%. Si se piden diez herramientas, la probabilidad de que se agoten aumenta por otro 15.4% para un total del 18.0%. En este punto, el encargado de la decisión puede afirmar el riesgo que está dispuesto a correr y puede colocar su pedido con una idea relativamente específica del nivel de confianza con el cual está operando.

La historia del uso de herramientas presentada en este problema refleja un diseño que no se conforma con ninguna distribución estadística estándar y, como tal, se presta a la simulación Montecarlo. Si este modelo de uso se conformara a una distribución estadística estándar, se podría encontrar directamente la respuesta usando un promedio ponderado y calculando los límites de confianza. Aun cuando se use un generador de números al azar en la técnica Montecarlo el cual introduce cierta variabilidad aleatoria, es posible desarrollar grados de confianza, como se hizo en este problema usando los porcentajes reflejados por el histograma de las grandes simulaciones. Para indicar por qué ocurre esto, examinaremos un histograma sumamente extraño y lo sujetaremos al proceso de simulación Montecarlo. Este histograma se muestra en la Fig. 13-2.

En el caso de la Fig. 13-2, las herramientas tienen igual probabilidad de durar tres, cuatro, cinco, seis o siete días. Si se preguntara

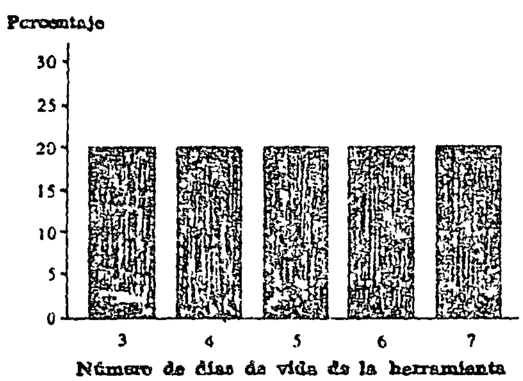


FIG. 13-2. Histograma de vida igual de la herramienta

cuántas herramientas se necesitarían para servir a una máquina durante cincuenta días, uno de los métodos sería el usar un promedio ponderado en la forma siguiente:

Núm. de días	Peso	Días ponderados
3	.20	.6
4	.20	.8
5	.20	1.0
6	.20	1.2
7	.20	1.4
		5.0

Dado un requerimiento de cincuenta días, y un promedio ponderado de vida de la herramienta de cinco días, llegamos a una necesidad promedio de diez herramientas Para indicar la forma en que esto varía en una simulación Montecarlo, se corrieron diez ensayos y se repitió el proceso cinco veces con los resultados siguientes:

Núm. de herramientas	8	9	10	11	12	13	Total	media
Simulación 1	0	1	8	1	0	0	10	10.00
Simulación 2	0	0	4	4	2	0	10	10.80
Simulación 3	0	1	5	3	1	0	10	10.40
Simulación 4	0	2	4	3	1	0	10	10.30
Simulación 5	0	1	3	3	3	0	10	10.80
Total	0	5	24	14	7	0	50	

Como indica lo anterior, existe un importante grado de variabilidad en las respuestas debido a la generación de números al azar para el uso de la herramienta. Las medias varían del 10.00 al 10.80, sin embargo, y se aproximan a la solución a que se llegó con la media ponderada. Para llevar la ilustración a un punto más, considérese el siguiente grupo de cinco simulaciones en las cuales se corrieron cien ensayos:

Núm. de herramientas	8	9	10	11	12	13	Total	media
Simulación 1	0	11	46	31	12	0	100	10.44
Simulación 2	2	16	42	29	8	3	100	10.34
Simulación 3	0	16	41	35	8	0	100	10.35
Simulación 4	2	13	45	31	8	1	100	10.33
Simulación 5	0	11	46	31	12	0	100	10.44
Total	4	67	220	157	48	4	500	

En este caso, la gama de las medias se redujo de 10.00-10.80 a 10.33-10.44 herramientas. Lo importante es que aun cuando la distribución original representaba iguales probabilidades de vida de la herramienta como en la Fig. 13-2, las respuestas derivadas de la simulación forman una distribución que se aproxima a la curva normal. Por lo tanto, es posible establecer límites de confianza al llegar a una decisión. En el caso de los totales en la gráfica anterior para quinientas iteraciones, parecería que al pedir trece herramientas se cubrirían los requisitos de cincuenta días el 100% del tiempo. Pidiendo doce herramientas se cubrirían los requisitos del 99.2% del tiempo, pidiendo once herramientas se cubrirían los requisitos del 89 6% del tiempo, pidiendo diez herramientas se cubrirían los requisitos del 58.2% del tiempo. El encargado de la decisión, ayudado por estos límites de confianza está en mejor posición de elegir el número de herramientas que deba pedir.

Aspectos legales de las adquisiciones

Se ha dicho que el hombre que actúa como su propio abogado tiene por cliente a un tonto. Esto es en especial cierto en términos de la función del agente de compras. Las funciones de adquisición comprenden muchos aspectos legales que sólo pueden ser explicados e interpretados por un abogado competente. El propósito de esta sección no es explicar las "normas" legales de las compras, sino sólo enumerar algunas de las áreas para las cuales debe buscarse el consejo de un abogado o del departamento jurídico de la compañía.

Una de las áreas más importantes en las que se requiere consejo legal es la de los contratos de compra. Como el contrato vincula legalmente a la compañía y al proveedor, es importante que los documentos que protejan a la compañía sean cuidadosamente formulados para que sirvan como contratos, formas de pedidos estándar y solicitudes para cotizaciones. Las solicitudes de cotización no son contratos, pero algunos proveedores las interpretan como tales, lo que conduce a malas interpretaciones y a problemas legales.

Otra área en la que pueden ser de ayuda los abogados es la interpretación de las leyes. Cuando se aprueban nuevas leyes y cuando los casos en las cortes cambian la interpretación de las leyes existentes, también tendrán que alterarse las actividades del agente de compras. Existen varias leyes en vigor que tratan sobre los precios justos, rebajas, descuentos, tarifas de carga y sobre otros temas que en algunos casos tienen que ser interpretadas cuando el agente cierra una operación.

Existen varios problemas legales que pueden presentarse en relación con el proveedor. En términos legales, el *proveedor* se refiere al vendedor, y el *cliente* es el comprador. En esta categoría caen los siguientes casos:

Cambios en las cláusulas del contrato.
Falsedad y fraude.

Contratos ilegales y contratos nulos.
Rechazo de los artículos despachados a la compañía.
Infracción al derecho de patente.
Reclamaciones por ajuste de seguro.
Daños causados por no hacer la entrega en la fecha estipulada o por no apegarse a las especificaciones.

PREGUNTAS DE REPASO

1. ¿Cuáles son los objetivos del departamento de compras o adquisiciones?
2. ¿Cómo está relacionado el departamento de adquisiciones o compras con las siguientes áreas de una empresa comercial?
   a. Producción.
   b Mercadotecnia
   c. Ingeniería.
   d Contabilidad.
   e. Jurídico.
   f. Recibo
3. Explique el procedimiento de compra.
4. Indique las posibles fuentes de información relativas a las fuentes potenciales de abastecimiento.
5. Proporcione varias razones por las que no pueda aceptarse la cotización más baja.
6. ¿Cuál es la diferencia entre los descuentos comerciales, por cantidad y por pago oportuno?
7. ¿Es prudente que una compañía pida un préstamo a un banco al 6% de interés simple para aprovechar un descuento por pago oportuno sobre cuentas por pagar a 2/10, neto 30?
8. Explique las ventajas y desventajas de la centralización y la descentralización en las adquisiciones
9. Explique las condiciones que afectan a la decisión de fabricar, comprar o rentar productos y servicios
10. ¿Cuál es el análisis del valor?
11. Describa la forma en que puede usarse el método Montercarlo en las adquisiciones.
12. ¿Cuáles son los problemas legales que comprenden a los proveedores y al departamento de compras o adquisiciones?

MANEJO DE MATERIALES

En el sentido más amplio, el manejo de materiales puede definirse como - "la preparación, ubicación y posicionado de los materiales para facilitar sus - movimientos y almacenajes".

En los últimos años y en particular luego de la 2da. guerra, la Ing. de Manipuleo de Materiales ha tenido un gran desarrollo como consecuencia del análisis profundo de los costos asociados a movimientos y almacenajes realizados -- en las fuerzas armadas y en las grandes empresas. Fue así como se introdujeron gran cantidad de sistemas, equipos móviles, transportadores, sistemas de almacenaje, Etc., que naturalmente produjeron un gran impacto en la reducción de -- costos industriales.

Las técnicas de manipuleo de materiales tiene como objetivos :

1.- Reducir Costos.

2.- Reducir desperdicios

3.- Aumentar capacidad productiva.

4.- Mejorar condiciones de trabajo.

5.- Mejorar la distribución o Lay-Out.

Las actividades de planeamiento de Mov. de Materiales deben realizarse en forma conjunta con el Plan de Lay Out debido a que el 2do. es un modelo estático y es el equipo de Movimiento de Materiales lo que lo hace dinámico.

Para tener una idea de la importancia de los costos de manipuleo podemos -- decir que globalmente llegan a ser del 30 al 35% del costo total de producción.

Se ha estimado también que sólo el 20% del tiempo en que los materiales están en una planta son procesados, siendo el 80% restante utilizado para movimientos o almacenaje.

Normalmente no será suficiente considerar el problema de manipuleo dentro de la fábrica o en Departamentos de Expedición. Es necesario enfocar el problema total en forma sistemática desde la fuente de Materia Prima hasta llegar al usuario. La tendencia moderna es aplicar el análisis de sistemas mediante la utilización de técnicas de Investigación de Operaciones. El análisis de sistemas parte de la idea que todas las actividades del Sistema Industrial están ligadas por relaciones causa-efecto que pueden describirse con expresiones matemáticas.

El problema de Mov. de Mat. a un costo mínimo de tiempo y esfuerzo no está restringido a la planta Industrial. Si bien el desarrollo más espectacular se ha producido en el sector industrial, hay también numerosas oportunidades de aplicación en otras actividades que no deben ser pasados por alto en el ejercicio de la Ingeniería Industrial.

<u>EL PROBLEMA DEL MANIPULEO DE MATERIALES :</u>

Genéricamente un problema de manipuleo incluirá los siguientes elementos:

1.- <u>Movimiento :</u> Materias Primas, partes, productos, Etc. deben trasladarse. El movimiento debe hacerse asegurando eficiencia y bajo costo.

2.- Tiempo : Los materiales deben estar disponibles en las fechas planeadas.

3.- Lugar : Los materiales deben estar disponibles en los lugares adecuados.

4.- Cantidad En las diversas etapas del proceso productivo, las -- cantidades pueden variar mucho. Es responsabilidad del Mov. de Mat. de proveer cantidades apropiadas.

5.- Espacio Dado que los espacios cuestan dinero, la eficiencia - del aprovechamiento de los espacios estará relaciona da con los sistemas de movimientos de materiales.

PRINCIPIOS GENERALES :

A medida que un tema se complica se hace más necesario disponer de -- principios rectores en la práctica diaria. Los principios de Mov. de Mat.re- presentan el conocimiento acumulado a lo largo de años por quienes han prac ticado estas actividades tanto en la industria como en el comercio.

1.- Planeamiento Se deben planear las actividades de manipuleo y alma cenaje de materiales a fin de obtener la máxima efi-- ciencia operativa global.

2.- Sistemas : Integrar tantas actividades de manipuleo como fuera - posible en un sistema coordinado de operaciones que cubra proveedores, recepción, producción, inspección, embalaje, depósitos, expedición, transporte y servicio.

3.- Gravedad — Utilizar la fuerza de la gravedad siempre que sea posible.

4.- Espacios : — Aprovechar en forma óptima el espacio en tres dimensiones.

5.- Tamaño Unitario — Aumentar la cantidad, tamaño o peso de las cargas unitarias.

6.- Mecanización — Siempre que sea económicamente factible, se deberán mecanizar las operaciones de manipuleo.

7.- Normalización — Normalizar métodos de manipuleo así como también tamaños y tipos de equipos empleados.

8.- Adaptabilidad — Utilizar métodos y equipos que puedan realizar una variedad de tareas y aplicaciones, donde no se justifiquen equipos especiales.

9.- Peso propio — Reducir la proporción de peso propio del equipo de transporte con relación a la carga transportada.

10.- Utilización — Lograr la máxima Carga de Trabajo para equipos y la mano de obra.

11.- Mantenimiento — Planear el mantenimiento preventivo y correctivo de todos los equipos de manipuleo.

12.- Control — Utilizar actividades de manipuleo de materiales para mejorar el control de la producción e inventarios.

13.- Seguridad — Proveer métodos y equipos adecuados para un manipuleo seguro.

... ##

-.- <u>Capacidad</u> Los equipos de manipuleo deben ayudar a lograr la producción deseada y aún cubrir los picos.

El campo del Mov. de Mat. es un amplio sector de la Ingeniería Industrial incluye los problemas relacionados con Disposic. de Equipos, Almacenaje, Selección de Equipos Mecánicos, Automatización, Estudio de Tiempos y Métodos de Movimientos, Reducción de Costos, Tráficos, Embalajes, Etc.

En muchos problemas de lay out el Mov. de Mat. llega a ser el factor determinante, por eso decíamos que deben analizarse en forma conjunta.

DESCRIPCION DE EQUIPOS DE MOV. DE MAT.

El "Material Handling Handbook" (The Ronald Press Co. New York) presenta más de 430 clases de equipos. Nosotros agruparemos los tipos de equipos en 8 categorias principales :

1.- TRANSPORTADORES CONTINUOS

2.- GRUAS, MALACATES Y ELEVADORES

3.- VEHICULOS INDUSTRIALES.

4.- VEHICULOS AUTOMOTORES

5.- VAGONES FERROVIARIOS.

6.- TRANSPORTES MARITIMOS.

7.- TRANSPORTE AEREO.

8.- CAJAS DE TRANSPORTE Y EQUIPOS AUXILIARES.

Esta clasificación incluye todos los equipos de uso universal. Nosotros veremos los tipos más difundidos en el transporte industrial interno y que -

son : 1, 2, 3 y 8.

1.- TRANSPORTADORES CONTINUOS .- Genéricamente un transportador contínuo se define como "un dispositivo horizontal, inclinado o vertical, concebido y construído para transportar materiales a granel, paquetes u objetos según una trayectoria determinada por el diseño del dispositivo y que tiene punto de carga fijos o selectivos.

Generalmente son fijos, si bien hay algunos móviles.

Los transportadores contínuos pueden considerarse como el símbolo de la producción en masa, ya que proveen materiales en forma sincronizada que es la esencia de una producción organizada. Se los hace para transportar casi todo tipo de productos desde gramos hasta toneladas. Además es de hacerse notar que aprovechan convenientemente en algunos casos el espacio cúbico.

Los transportadores contínuos se pueden dividir en dos grandes grupos :

a). De paquetes individuales (cargas discretas).
   1. Transportadores de Trolleys
   2. Transport. de cintas o cadenas (mov. horizontal o inclinado).
   3. Transport. de Gravedad.

b). De material a granel (cargas contínuas).

1.- Tipo Trolley : Consiste en una serie de trolleys que se desplazan sobre un riel colocado a cierta distancia del suelo, y conec tados unos a otros por medio de una propulsión sin fin como son : cadenas, cables, Etc. La carga se suspende de los trolleys mediante ganchos, bandejas o dispositivos especiales.

Se usan cuando se mueven cargas individuales con mucha frecuencia, siendo su aplicación más definida en los siguientes casos :

1.- Transporte entre varios puntos con selección automática del punto de descarga.

2.- Operaciones con baños electrolíticos, pinturas, Etc. en producción masiva.

3.- Armado del producto sobre el transportador.

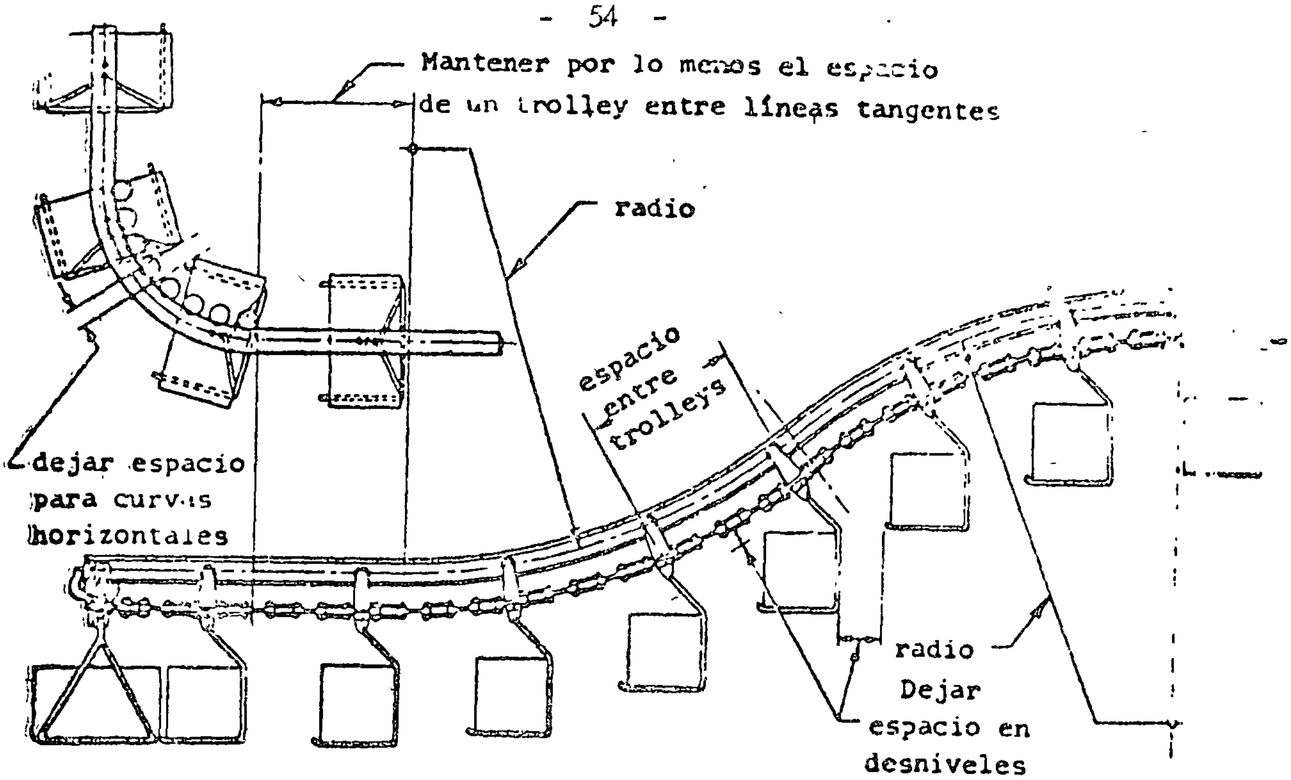
(Pueden o no usar el principio de potencia y libre (Power and free).

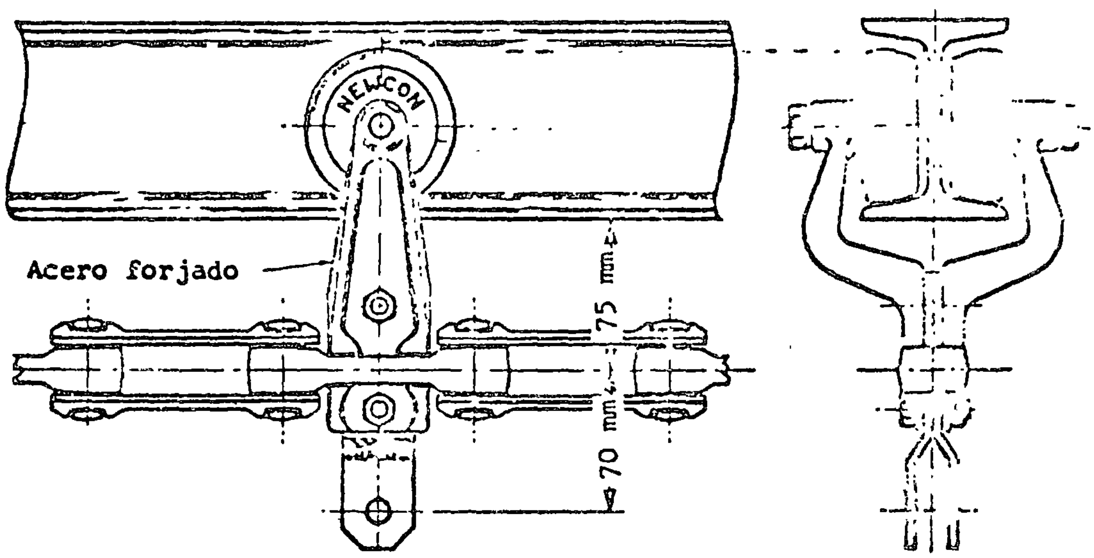
La carga se lleva en trolleys individuales en un riel inferior mientras que en uno superior se construye el accionamiento de modo que la tracción puede ser desconectada en cualquier momento.

4.- Almacenamiento de materiales en proceso en líneas de producción lo cual ahorra espacio en departamentos de Producción.

En las figuras puede verse una vista general de un transportador de trolley y un detalle del trolley.

... ##





2.- <u>CINTAS TRANSPORTADORAS</u> : Este grupo comprende los equipos utilizados para mover cargas discretas como son : paquetes u objetos sobre una cinta generalmente de superficie plana y a lo largo de una trayectoria horizontal o inclinada. No incluye los equipos para transportes a granel, que en parte se construyen según los mismos lineamientos.

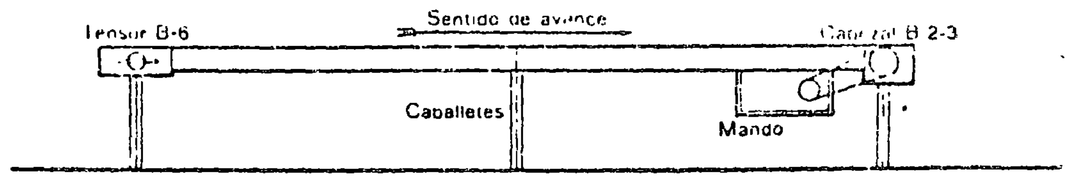
En principio se trata de un movimiento bidimensional.

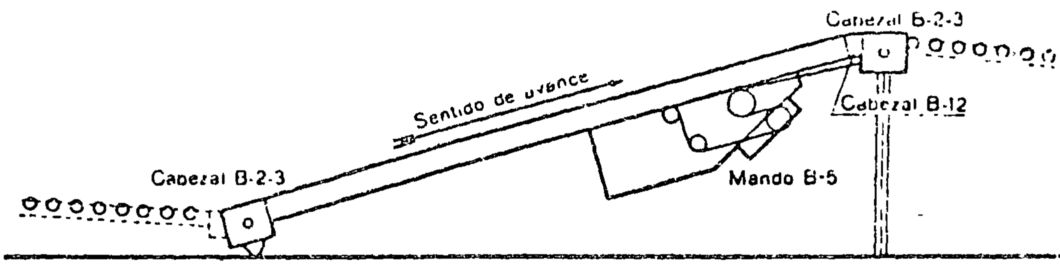
La superficie de acarreo es accionada por tracción mediante una polea motriz apoyada en rodillos. Son de uso muy general debido a su baja in-- versión y poco costo operativo. La única limitación la constituye el hecho de que el material no debe dañar a la cinta. Las cintas se construyen de - tela, hule, plástico, piel, metálicas, Etc. En todos los casos es necesario incluir un dispositivo tensor pues el estiramiento de la cinta es del orden - del 0.5 al 1.5%.

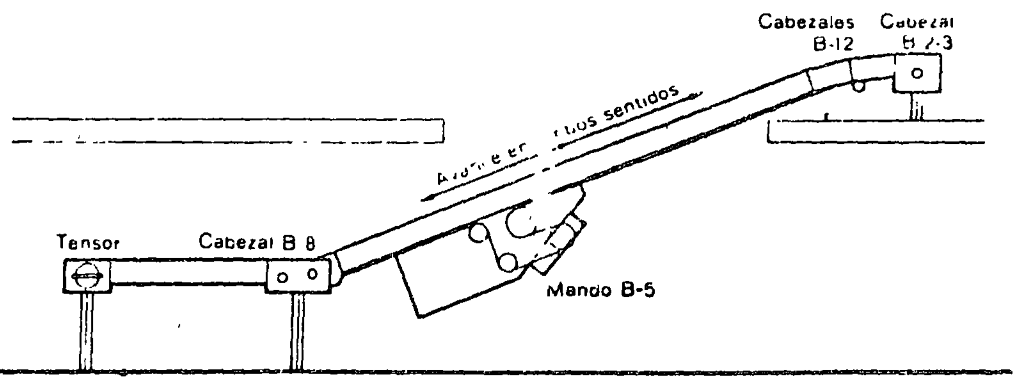
Para el caso de cintas inclinadas hasta 10 grados no hay problemas ; - se puede llevar hasta 35° mediante el agregado de barras transversales o - dispositivos especiales, ello depende también del centro de gravedad de - la carga.

En cuanto a velocidades, el rango es muy grande pudiendo ir desde - 15 cms/min. hasta varios mts/minuto.

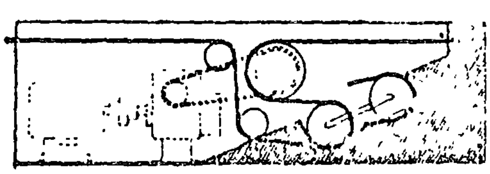
. . . ##







Cintas transportadoras

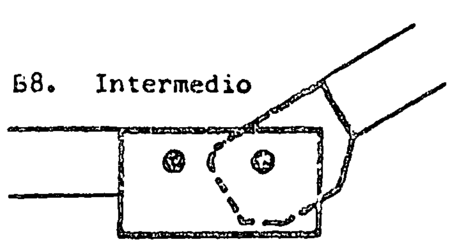


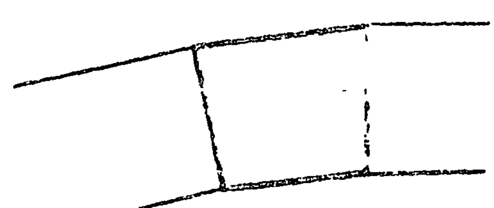
B5. Mando intermedio

B2-3 B2-7.

Cabezal extremo cinta

B8. Intermedio





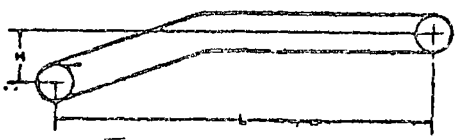
B12. Segmento angular inter...

Detalles de cinta ...

Cálculo de potencia requerida para una cinta transportadora de bultos

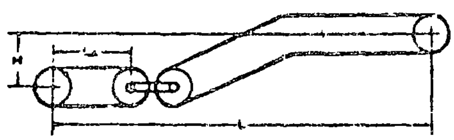
Se aplican las siguientes fórmulas de potencia requerida en la polea de mando (Forrada con capa de goma) para los casos básicos de mando en cabezal de extremo de cinta, sin aditamentos especiales.

CASO I



$$N = \frac{(q+q_c).L.V}{1400} + \frac{q_c.H.V}{70}$$

CASO II



$$N = \left[1 + 0{,}12 \cdot \frac{L_A}{L}\right] \cdot \frac{(q+q_c).L.V}{1400} + \frac{q_c.H.V}{\text{[illegible]}}$$

Para otros casos la fórmula básica se transforma de acuerdo al siguiente cuadro:

ADITAMENTO	MANDO	POLEA DE MANDO	FO[illegible]
——	En cabezal B 2	sin forrar	1,[illegible]
Tenser intermedio	En cabezal B-2	forrada	1,0[illegible]
		sin forrar	1,1[illegible]
——	Intermedio B-5	forrada	1,2[illegible]
		sin forrar	1,3[illegible]

La potencia requerida en el motor será: $N_m = \frac{N_t}{\eta}$ siendo η el rendimiento de la transmisión

NOMENCLATURA

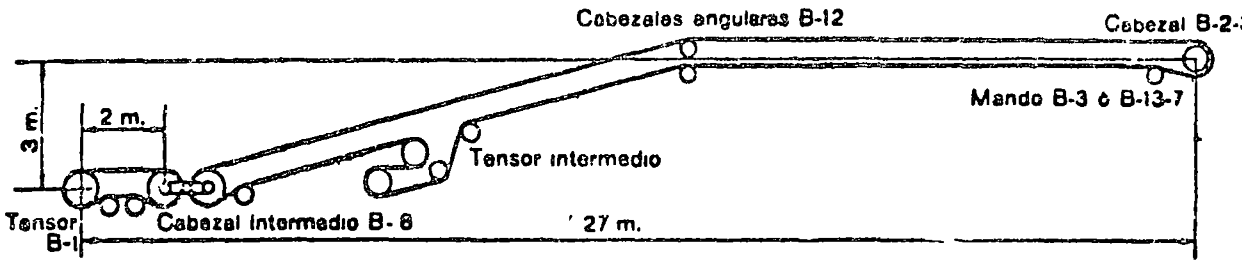
- **Cb:** Capacidad de transporte en bultos/hora.
- **d:** Distancia promedio libre entre bultos en m.
- **Fmax:** Fuerza de tracción máxima en kg.
- **H:** Altura total de elevación en m.
- **L:** Proyección horizontal en m. de la distancia total de transporte.
- **L_A:** Proyección horizontal en m. de la distancia de transporte anterior al cabezal intermedio B-8
- **l:** Longitud del bulto en m.
- **N:** Potencia básica en C.V.
- **Nt:** Potencia total de tracción con aditamentos en C.V.
- **Nm:** Potencia de motor necesaria en C.V.
- **p:** Paso entre rodillos en mm.
- **q:** Peso de las partes móviles del transportador en Kg/m. (Tabla I)
- **qb:** Peso del bulto en Kg.
- **qc:** Peso máximo de bultos en Kg/m. (Distancia entre bultos nula).
- **V:** Velocidad de transporte en m/seg.

Figura 11.

Cinta transportadora.

Ejemplo de cálculo*

Con los elementos normalizados indicados se instala una cinta como la de la figura que debe transportar 1200 paquetes por hora, cada uno de un peso de 40 Kg., largo 0,60 m. y ancho 0,45 m.



Estimando una velocidad de 0,3 m/seg. nos da una distancia promedio libre entre paquetes de:

$$d = 3600 \cdot \frac{V}{C_b} - l = 3600 \cdot \frac{0,3}{1200} - 0,6 = 0.3\ m$$

perfectamente compatible con el transporte.

Elegimos la primer correa de ancho mayor o igual al ancho del paquete. Ancho de correa = 20" = 510 mm. y el paso p. de los rodillos de acuerdo a la fórmula:

$$p = 500 \cdot l - 25 \qquad p = 500 \cdot 0,6 - 25 = 275\ mm$$

Adoptamos el primer paso Standard inferior o igual al anterior, es $p = 200\ mm$, que nos dá un peso $q = 14,1\ Kg/m$.

La carga máxima de bultos por metro será

$$q_c = \frac{q_b}{l} = \frac{40}{0,6} = 66,6\ Kg/m.$$

y la potencia (para caso II):

$$N = \left(1 + 0,12 \frac{L_A}{L}\right) \cdot \frac{(q + q_c) . L.V}{1400} + \frac{q_c . H.V}{70}$$

$$N = \left(1 + 0,12 \cdot \frac{2}{27}\right) \cdot \frac{80,7 . 27 . 0,3}{1400} + \frac{66,6 . 3 . 0,3}{70}$$

$$N = 1,01 \cdot 0,47 + 0,86 = 1,33\ C.V.$$

Si usamos polea forrada de goma por el tensor intermedio debemos aplicar:

$$N_t = 1,07 \cdot N = 1,07 \cdot 1,33 = 1,42\ C.V.$$

La fuerza de tracción sobre la correa será:

$$F = \frac{75 . N_t}{V} = \frac{75 . 1,42}{0,3} = 355\ Kg.$$

TRANSPORTADORES DE GRAVEDAD : Como su nombre lo indica se usa la gravedad como fuerza propulsora. Sirven únicamente para cargas -- discretas. Tienen el inconveniente que debido a que no puede controlarse muy bien la velocidad, en general no sirven para cargas frágiles.

El grupo puede funcionalmente dividirse en transportadores de rodillos, de ruedas (de patín) y toboganes. El grupo incluye también a los trans-- portadores horizontales que se utilizan en general para operaciones de - armado en el caso de productos voluminosos que pueden desplazarse de un - puesto de trabajo al otro, empujándolos.

El largo de una instalación de rodillos y gravedad, está limitada única mente por la pérdida de altura debido a la inclinación. Para instalar una - línea larga, si no hay altura suficiente, se utilizan elevadores mecánicos - colocados en puntos intermedios los que suben el bulto a cierto nivel posibi- litando de tal manera la continuación del transporte por gravedad.

Estos transportadores permiten almacenar mercaderías a lo largo de su -- desarrollo, de modo tal, que a medida que se retiran los bultos de la parte ferior los demas descienden automáticamente. En las figuras se describen los principales tipos y sus características.

TRANSPORTADORES A GRANEL. Son los equipos concebidos y cons-- truídos para el manipuleo contínuo de grandes cantidades de material a gra- nel. que incluye gases, líquidos y sólidos.

...

Los gases y líquidos no plantean problemas dado que se transportan en conductos con o sin bombas o compresoras, o en barriles, tambores, botellas Etc. En este último caso pueden ser considerados como cargas discretas. Por lo tanto al mencionar los transportadores continuos o a granel debe entenderse que se trata de materiales sólidos.

Dada la gran cantidad de equipos en este aspecto funcional, su elección está determinada generalmente por los siguientes factores :

1a).	Estado Físico de los materiales.	Tamaño de la partícula. Peso. Temperatura Fragilidad Resistencia a la abrasión Resistencia a la corrosión. Etc. Transporte entre plantas. Carbón, Piedra, Cal
2do).	Uso a que se destina :	Formación de mezclas. Recepción y descarga Carga a paquetes individuales. Carga de máquinas u hornos.

En este grupo debe mencionarse también el transporte neumático de elementos sólidos como es el caso del algodón.

ROLLETES DE GRAVEDAD

INDICACIONES PARA SU ELECCION:

1° Los bultos deben tener una superficie rígida y lisa para el trasporte. Los que se deforman acomodándose en los espacios entre rolletes, deben llevarse sobre bandejas. Los bultos con travesaños deben trasportarse en forma que estos no se traben con los rolletes.

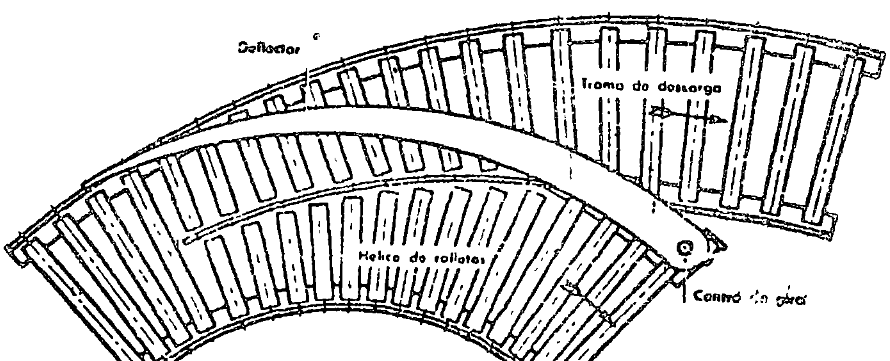
2° El peso de los rolletes elíjase de la Tabla I, entrando en ella con el largo del bulto más corto. En caso de resultar esta medida entre dos valores, adóptese el que corresponde con un paso menor.

3° El largo del rollete determínese, sumando 50 mm. al ancho del bulto. Dimensión A ó A_1 de los dibujos de la pág 27

4° El diámetro del rollete, longitud de los tramos y perfiles del bastidor, se indican en la Tabla I, en base al peso y largo del bulto. Los largos normales de fabricación de los tramos de rollete son 2 400 ó 3 000 mm.

5° El largo de una instalación de rolletes está limitado únicamente por la pérdida de altura debida a la inclinación. Para instalar una línea larga, si no hay altura suficiente, utilizamos elevadores mecánicos colocados en puntos intermedios, los que suben el bulto a cierto nivel, posibilitando así la continuación del trasporte por gravedad.

6° La inclinación de una línea de rolletes depende de las características de la superficie del bulto y su peso La Tabla II, indica aproximadamente los valores usuales de la misma.



DESCARGA INTERMEDIA

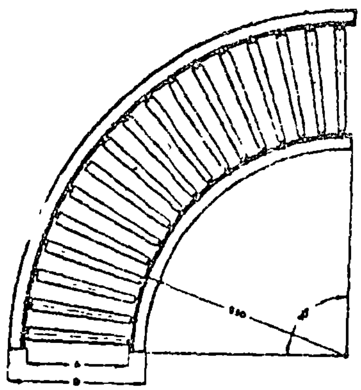
CURVAS

Para cambiar la dirección de trasporte de las mercaderías, en una línea de rolletes de gravedad se usan curvas de fabricación normal cuyo desarrollo angular es de 30°, 45°, 60° ó 90°.

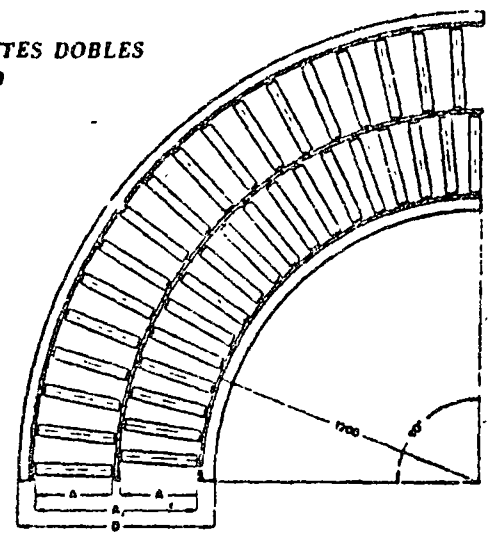
CURVAS CON ROLLETES SIMPLES:

Se utilizan para bultos de hasta 550 mm de ancho En ellos se emplean solamente rolletes cónicos, dispuestos en forma adecuada para obtener una marcha suave del bulto en la curva. El bastidor tiene el mismo ancho que en los tramos rectos y el radio interior de estas curvas es de 850 mm La construcción es plana, es decir que los puntos de entrada y salida estan al mismo nivel

CURVA 90° PARA ROLLETES SIMPLES
DIMENSIONES. "A" y "D"
ver tabla III



CURVA 90° PARA ROLLETES DOBLES
DIMENSIONES: A, A_1 y D
ver tabla III



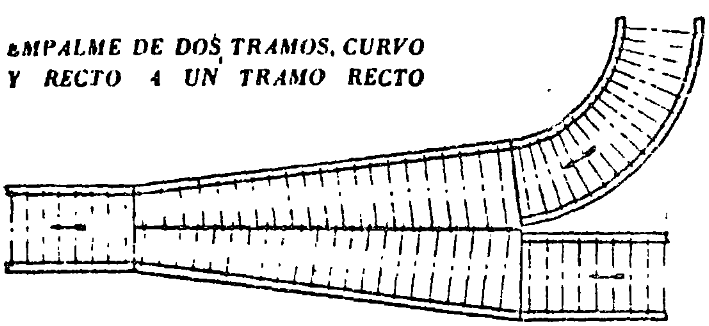
CURVAS CON ROLLETES DOBLES:

Para bultos de 600 mm o mas, las construimos como ilustra la figura con dos hileras de rolletes, dispuestos en forma alternada y dirección radial Con esta disposición se consigue mayor velocidad en la hilera externa de rolletes, facilitando esto el desvío del bulto

El radio interior de estas curvas es de 1 200 mm y el bastidor se adapta al de los tramos rectos.. La construcción es plana, es decir, que los puntos de entrada y salida están al mismo nivel.

EMPALMES

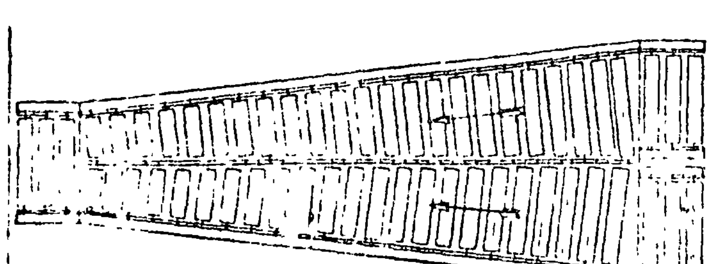
EMPALME DE DOS TRAMOS, CURVO Y RECTO A UN TRAMO RECTO



Utilizados principalmente para enviar los bultos desde ramales a una línea general. En los empalmes, cuando los ramales no trabajen alternativamente, debe colocarse un hombre para evitar atascamientos.

En las ilustraciones se indica con flechas la dirección de trasporte.

EMPALME DE DOS TRAMOS RECTOS



EMPALME DE UN RAMAL CURVO A UN TRAMO RECTO

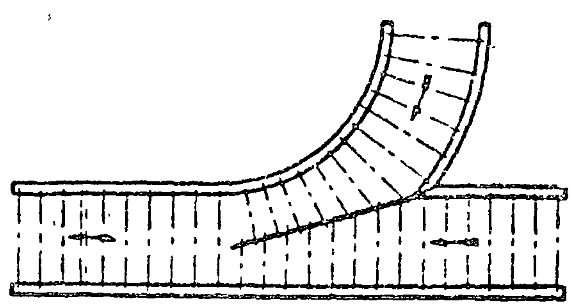


TABLA I

Largo del bulto		175	250	325	400	475	550	625	700	775	850	925	…racteristicas de los rolletes y bastidor
Paso de los rolletes		50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	
Peso del bulto en	10												…ete Ø 25 Bastidor 50x40x5
	15												
	20	Requieren construcción especial											…lete Ø 50 Bastidor 65x50x6
	30												
	40												
	50												
	60												
	70												…te Ø … Bastidor 75x50x7
	80												
	90												
	100												
Largo de los tramos			Para tramos con largo inferior a 2400 mm.				Para tramos de 2400 mm de largo			Para tramos de 3000 mm. de largo			

TABLA II

VALORES APROXIMADOS DE LA INCLINACION			
TIPO DE BULTO	OBSERV	INCLINACION	
		%	Grados y minuto
Cajones de madera o metálicos	10 a 25 kg	4	2° 20'
" " " " "	25 a 75 kg	3½	2° 0'
" " " " "	75 a 100 kg.	3	1° 45'
Cajas de cartón	1 a 3 kg	7	4° 0'
" " "	3 a 7 kg.	6	3° 25'
" " "	7 a 25 kg.	5	2° 50'
Esqueletos	—	5	2° 50'
Tarros de leche	llenos	5½	3° 10'
" " "	vacíos	6	3° 25'
Tambores	—	2¼	1° 15'

TABLA III

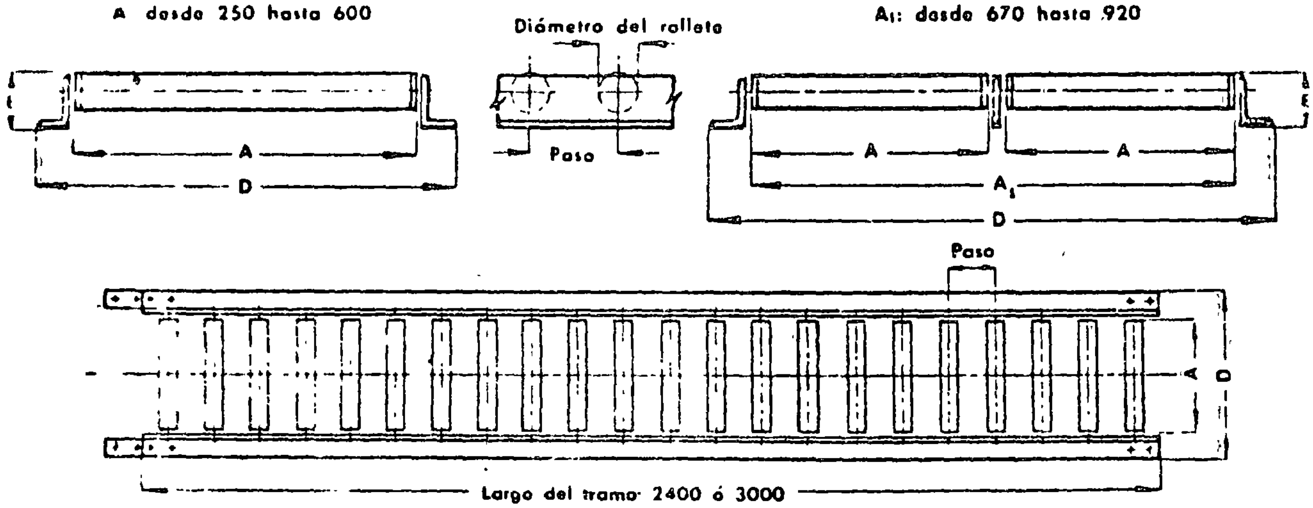
Largo del rollete A			250	300	325	350	375	400	425	450	500	550	600
D	Bastidor de	L50x40x5	342	392	417	442	467	492	517	542	592	642	692
		L65x50x6 L75x50x7	362	412	437	462	487	512	537	562	612	662	712

Largo total rolletes A_1			670	720	770	820	870	920	1020	1170	1220
Largo de un rollete A			325	350	375	400	425	450	500	550	600
D	Bastidor de.	L50x40x5	760	810	860	910	960	1010	1110	1260	1310
		L65x50x6 L75x50x7	780	830	880	930	980	1030	1130	1280	1330

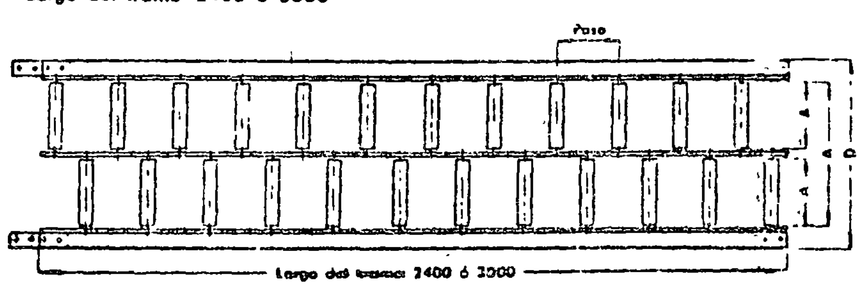
DIMENSIONES DE LOS TRAMOS DE ROLLETES DE GRAVEDAD

A desde 250 hasta 600

A_1: desde 670 hasta 920



Diametro del rollete	25	50	70
E.	54	75	85

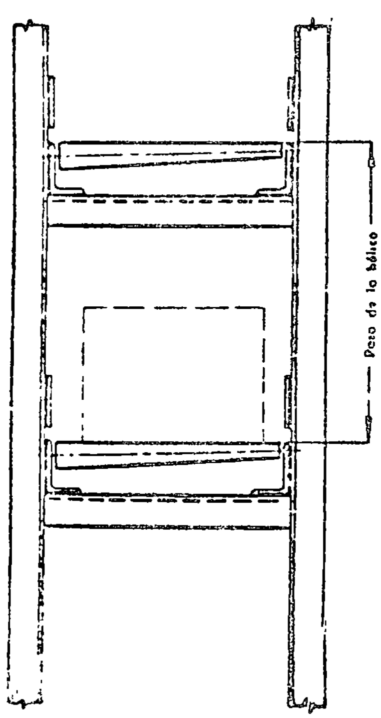


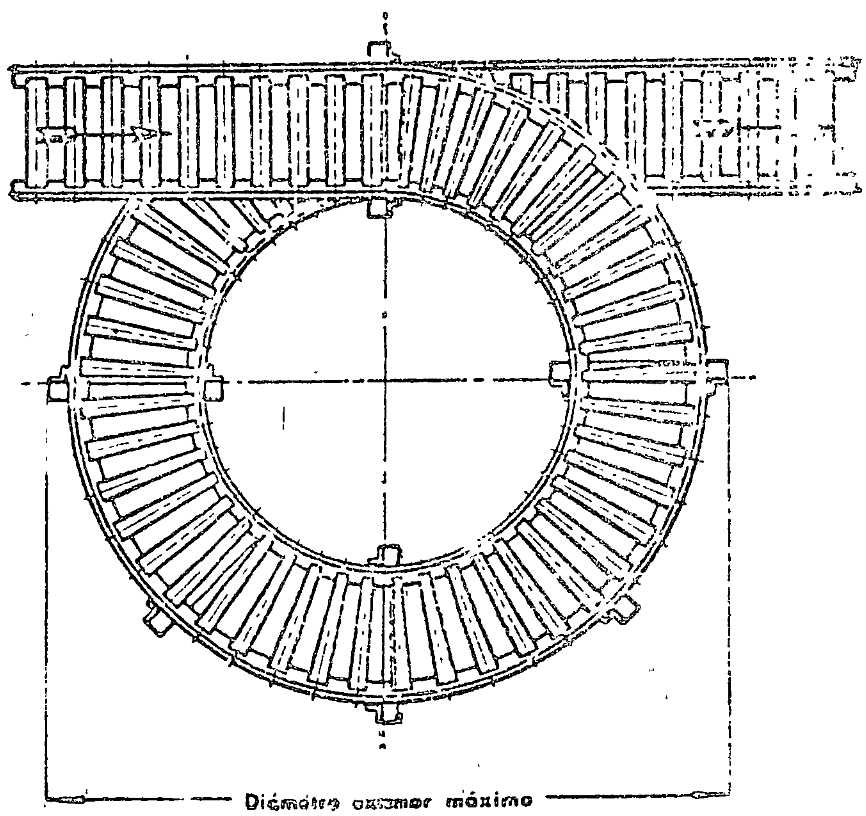
HELICES DE ROLLETES DE GRAVEDAD

Construídos con curvas de rolletes de gravedad de 90° ó 45° de desarrollo, formando una hélice soportada convenientemente por un bastidor de acero. Los rolletes pueden ser cilíndricos o cónicos siendo los primeros según el ancho del transportador, simples o dobles. El diámetro exterior de la hélice y su paso así como el tipo de rollete, dependen del peso y dimensiones de los bultos.

Permiten almacenar mercaderías a lo largo de su desarrollo, de modo tal que, a medida que se retiran los bultos de la parte inferior los demás descienden automáticamente. Los bultos pueden cargarse en la hélice mediante tramos de rolletes de gravedad, y su descarga realizarse de igual manera. Para la carga o descarga en pisos intermedios es factible intercalar desvíos.

Las aberturas en los pisos normalmente son circulares, pero si no es factible practicar una abertura muy amplia, puede atravesarse el piso mediante una canaleta recta que empalme las hélices del piso superior e inferior.

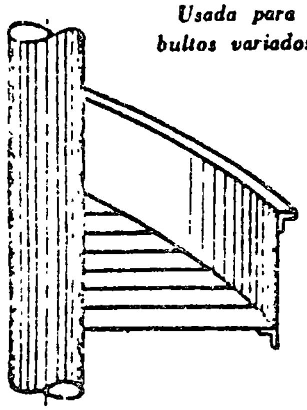




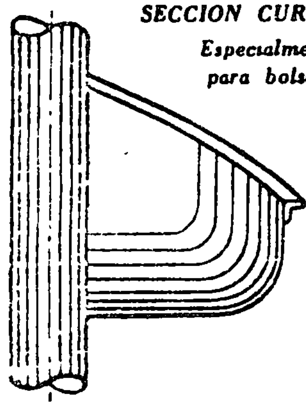
CANALETAS METALICAS HELICOIDALES

SECCIONES DE CANALETA

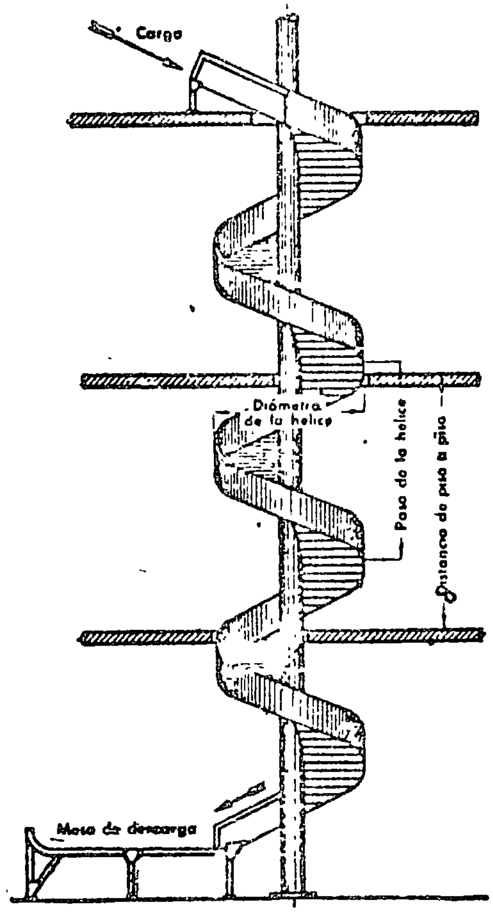
SECCION PLANA
Usada para bultos variados.



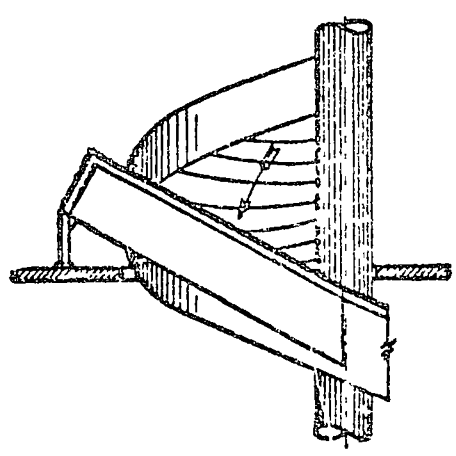
SECCION CURVA
Especialmente para bolsas.



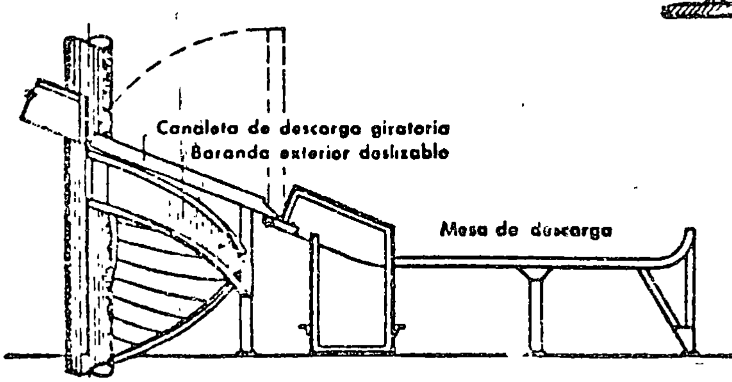
VISTA DE UNA CANALETA



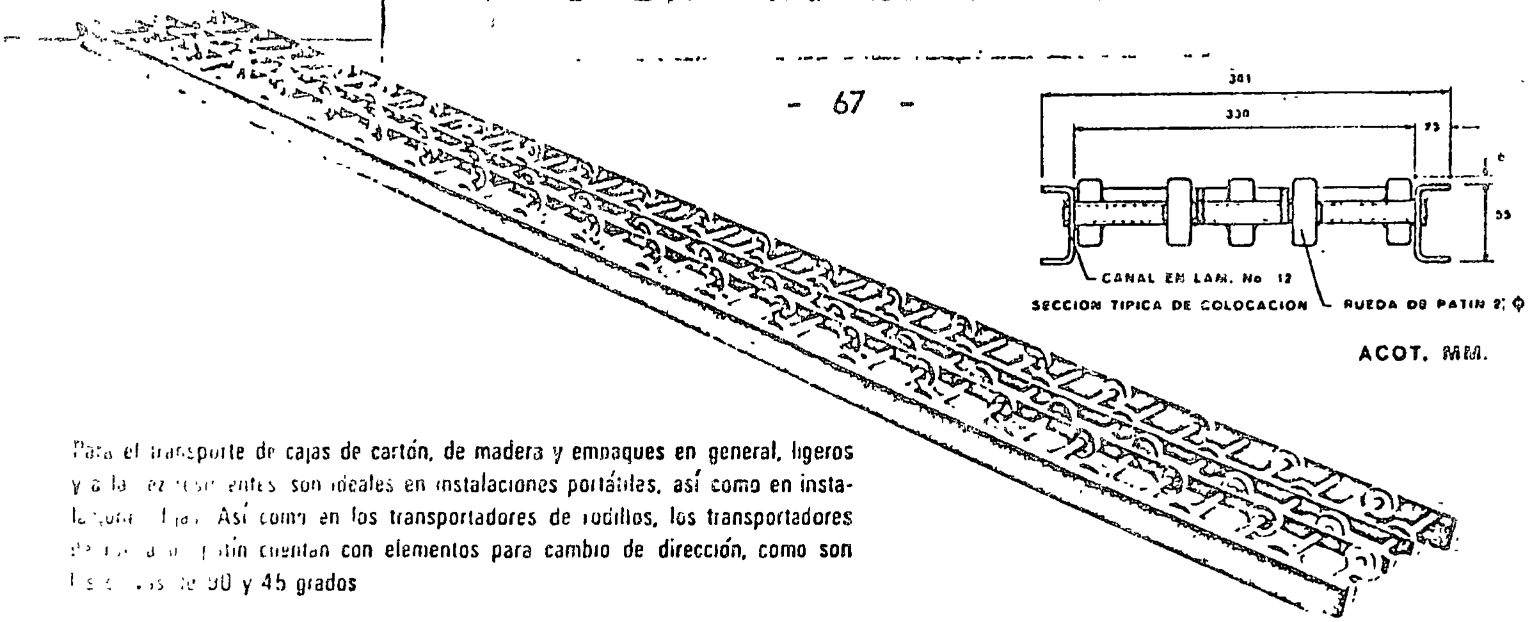
CARGA INTERMEDIA



DESCARGA INTERMEDIA



TRANSPORTADORES DE RUEDAS DE PATIN



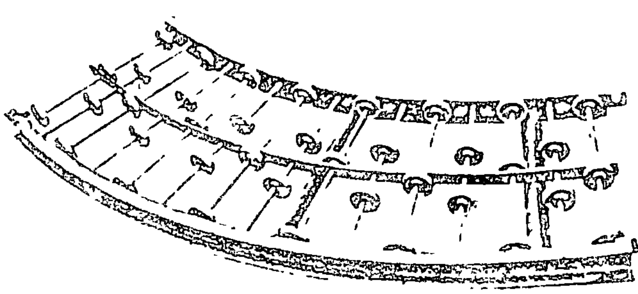
ACOT. MM.

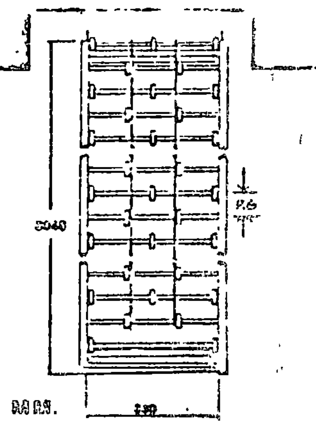
Para el transporte de cajas de cartón, de madera y empaques en general, ligeros y a la vez resistentes son ideales en instalaciones portátiles, así como en instalaciones fijas. Así como en los transportadores de rodillos, los transportadores de ruedas de patín cuentan con elementos para cambio de dirección, como son las curvas de 90 y 45 grados

Calibre de lám doblada	Long del tramo	Ancho total	Ruedas por tramo:	Distancia entre ejes	Peso total:
Calibre 12	3 05 m (10')	38 cms (15")	100	7.6 cms.	31 kg.

NOTA — Los transportadores de ruedas de patín se surten también en otras dimensiones y capacidades.

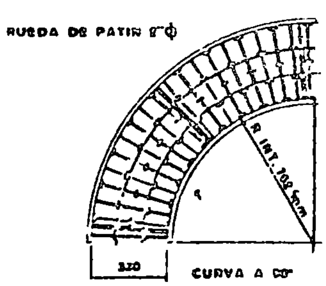
CURVAS DE TRANSPORTADOR DE RUEDAS DE PATIN





ACOT. MM.

DISTRIBUCION TIPICA EN T. RECTO 3'0.



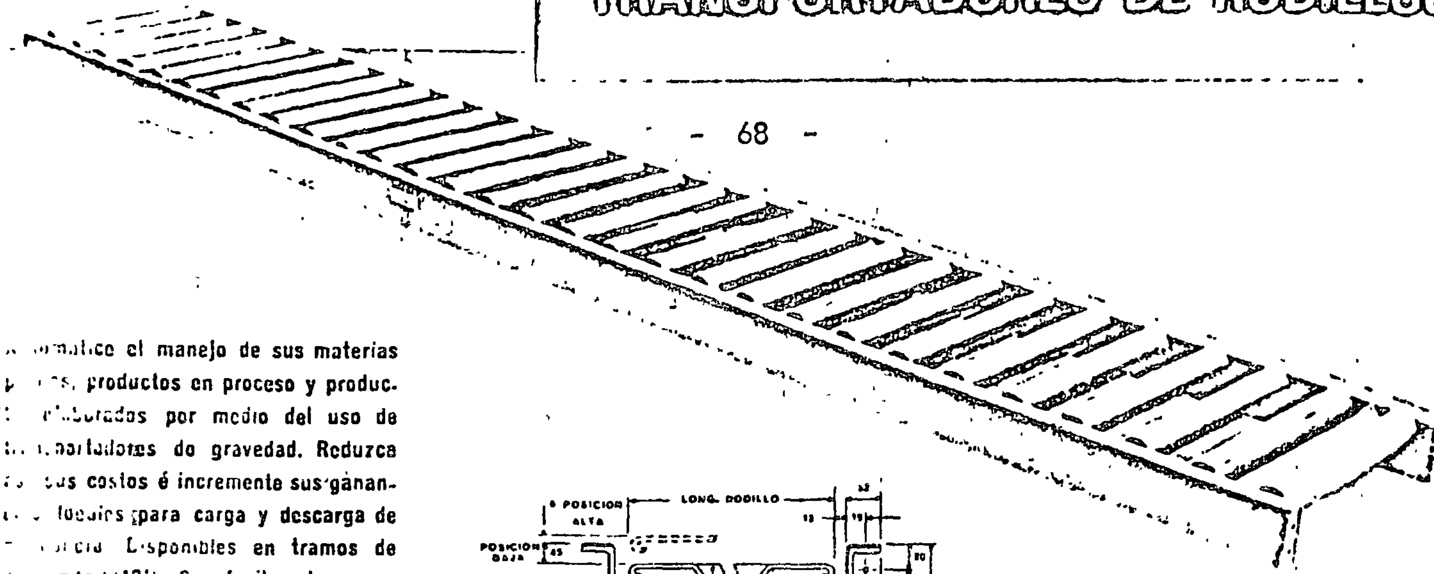
ACOT MM

Para los cambios de dirección en las líneas de transportadores, contamos con curvas de 45 y de 90 grados, con las siguientes dimensiones

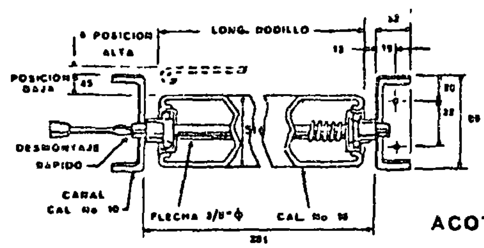
Modelo:	Ruedas por tramo:	Radio interior:	Peso total del tramo:
90°	50	762 mm.	18 kg
45°	25	762 mm.	11 "

Para la instalación de estos transportadores, también se usan los tripies y los apoyos similares a los que se usan en los transportadores de rodillos.

TRANSPORTADORES DE RODILLOS



...omatice el manejo de sus materias p...s, productos en proceso y produc... elaborados por medio del uso de ...nsportadores de gravedad. Reduzca ... sus costos é incremente sus ganan... ...cuales para carga y descarga de ... Disponibles en tramos de ... mts. (10'). Son facilmente mane... y desmontables; no ocupan espa... ...al. Estos transportadores de rodi... se utilizan con eficacia para el ... de carga pesada. Sumamente ...tes, son recomendables para instalaciones fijas y en algunos casos también para instalaciones portátiles. Para el transporte de tambores, barriles y barricas, cajas de cartón, etc. y muy especialmente en la industria embotelladora.



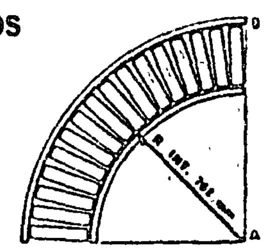
ACOT. MM.

Larg de lám doblada	Long. del tramo:	Ancho total.	Ancho entre Larg.:	Long util del rodillo	Rodillos emb por tramo:	Distancia entre ejes:	Peso total del tramo.
Calibre 10.	3.05 (10')	44 cms. 17½")	38 cms (15")	36 5 cms. (14⅜")	30	10 cms (4")	55 kg.

NOTA.—Los transportadores de rodillos se surten también en otras dimensiones, capacidades y diámetro de rodillo

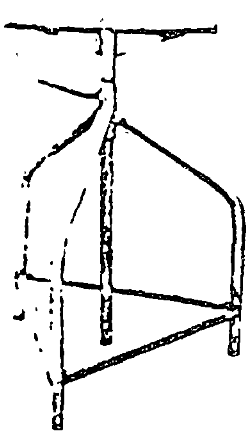
CURVAS DE TRANSPORTADOR DE RODILLOS

Modelo:	Rodillos embalerados por tramo:	Radio interior	Peso total del tramo:
90°	16	762 mm	30 kg
45°	8	762 mm	15 "



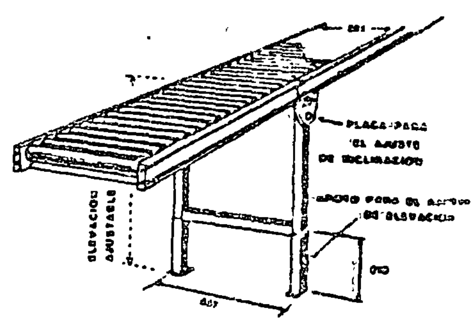
CURVA DE RODILLOS

ACOT. MM.

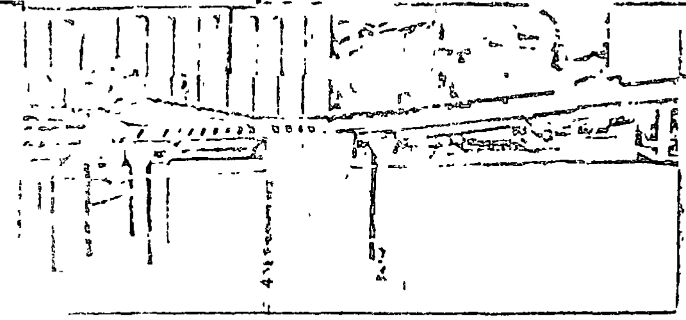


TRIPIES Y SOPORTES PARA TRANSPORTADORES

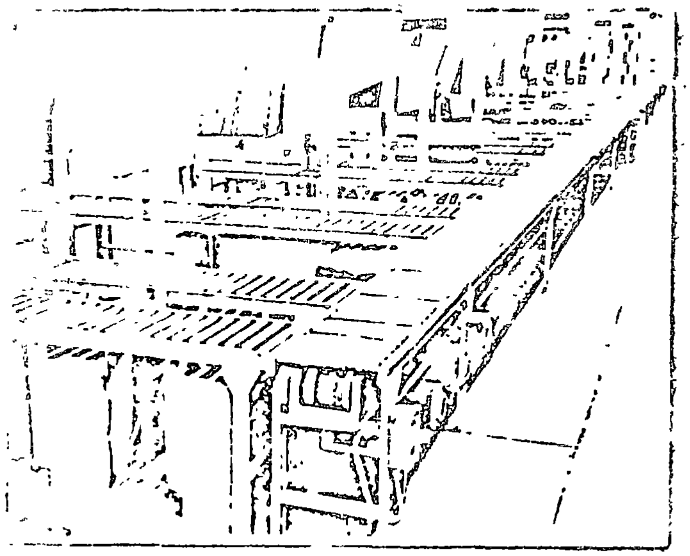
El peso de los transportadores lo soportan en el caso de instalaciones semifijas livianos pero resistentes tripiés de construcción tubular de fierro y ajustables a diversas alturas para dar la inclinación requerida al transportador, y en el caso de instalaciones fijas, soportes ajustables tipo "L", hechos de robusta lámina doblada en calibre 12, tanto la altura como la inclinación se gradúan por medio de dos tornillos por lado, pudiendo fijarse al piso por sendos barrenos en la parte inferior.



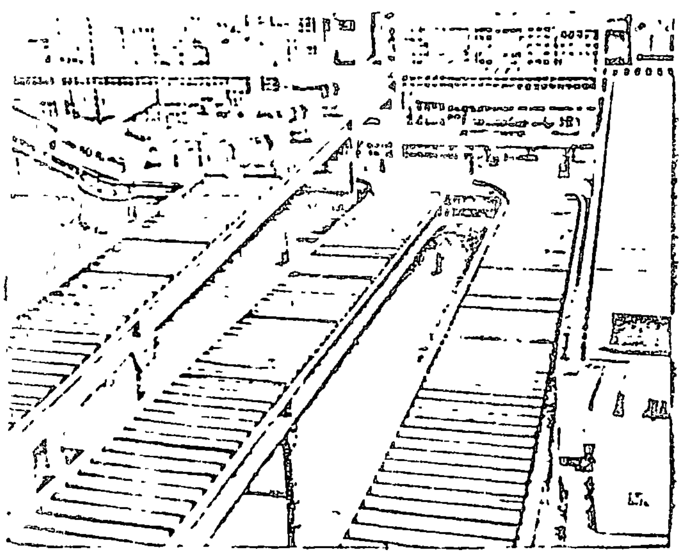
ACOT. MM.



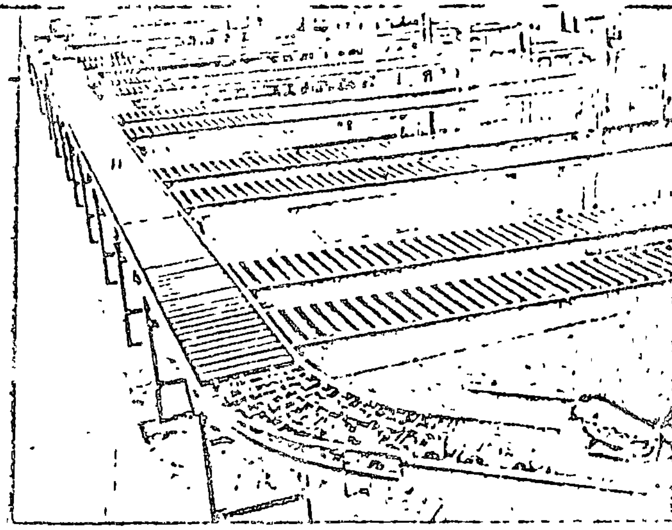
S· ci ,n de un sistema de transportadores muy completo que muestra los diver-
··s componentes como son Banda inclinada, rodillos, ruedas de patín, deflector
para cambios de dirección, y soportes ajustables de altura é inclinación.



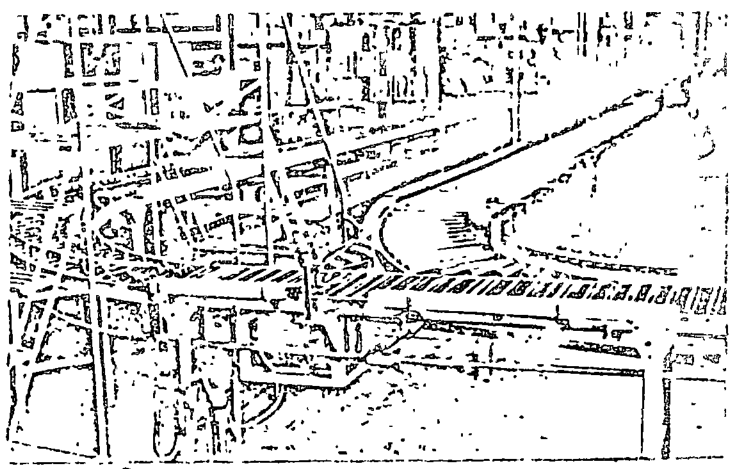
En esta secuencia se muestra como una seccion de transportadores de rodillos
vivos surte el producto empacado hacia el departamento de sellado de cajas.
Insta ados en Avon Cosmetics, S. A. de C. V



Diversas lineas de t ansportadores de rodillos permiten enviar todos los productos
del Depto. de S···ción y Empaque, al Almacen y Embarques. Se completa el
sistema con transportadores de banda horizontal é inclinado Instalación en La-
boratorio. y Agencias Unidas S A

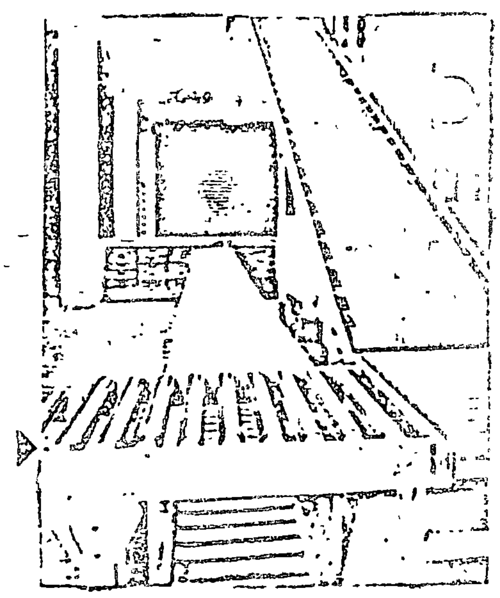


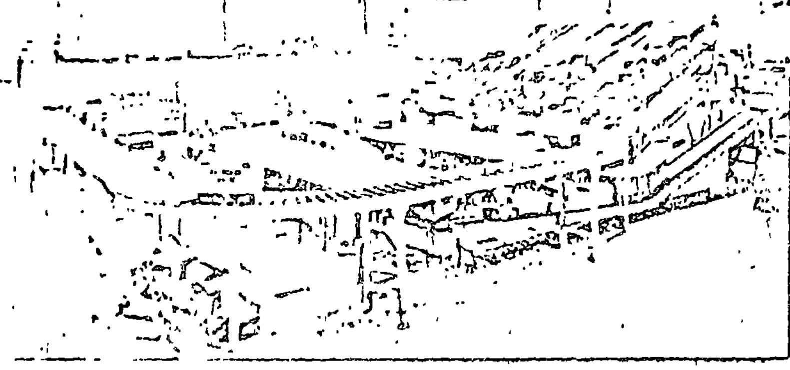
Sistema de transportadores de rodillos para surtir diversas líneas de empaque, con
secciones de compuertas contrabalaceadas que permiten el paso rápido y cómo-
do de personal a través de los transportadores. Instalación de Avon Cos' ·.
S A. de C V.



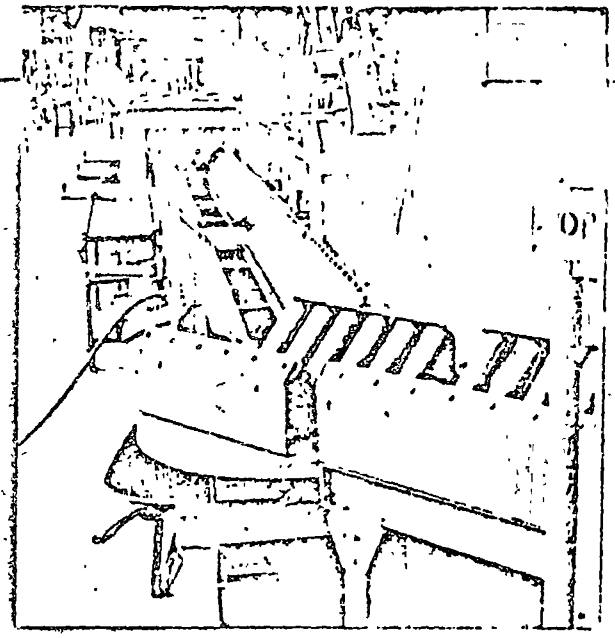
La afluencia de productos de dos diferentes líneas de rodillos convergen por curvas especialmente diseñadas a una línea de transportadores de r. dillos. La selección del tráfico de cajas se efectúa por la acción de un deflector automático. Instalación para Avon Cosmetics, S. A. de C. V.

Sistema de transportadores de rodillos por gravedad para recibo y despacho de productos. Se completa el sistema con una banda transportadora reversible de superficie rugosa que permite el movimiento de cajas entre pisos. Instalación en Casa Autrey, S. A.

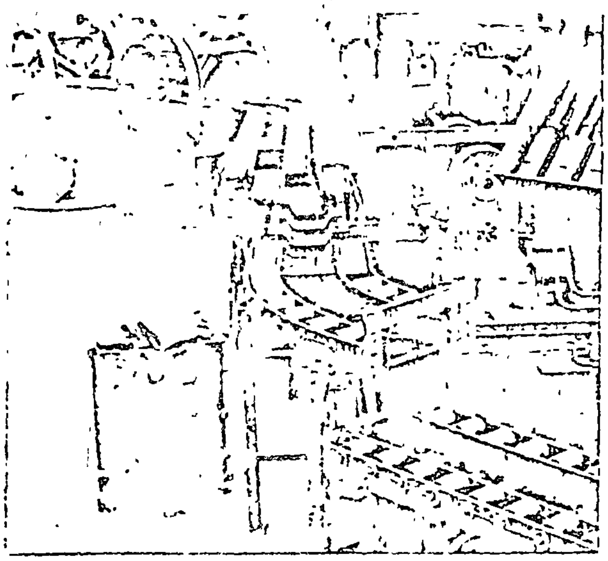




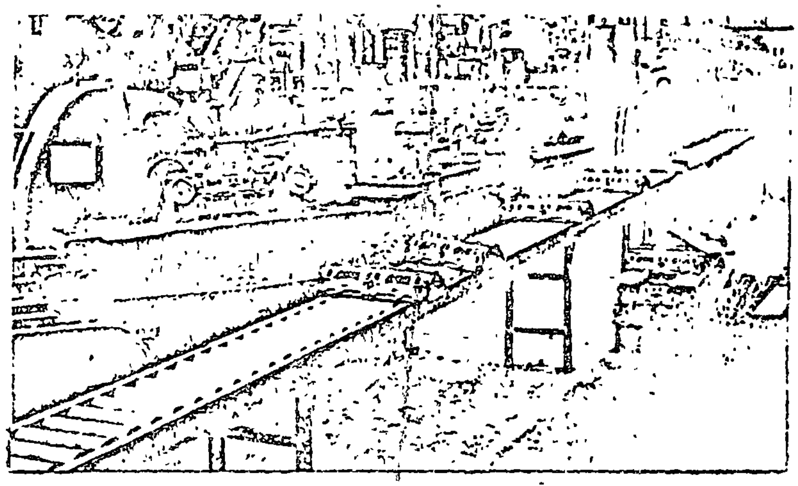
Sistema de transportadores de rodillos de gravedad rectos combinados con tramos curvos en una sección del almacén en Richardson Merrell, S. A. de C. V.



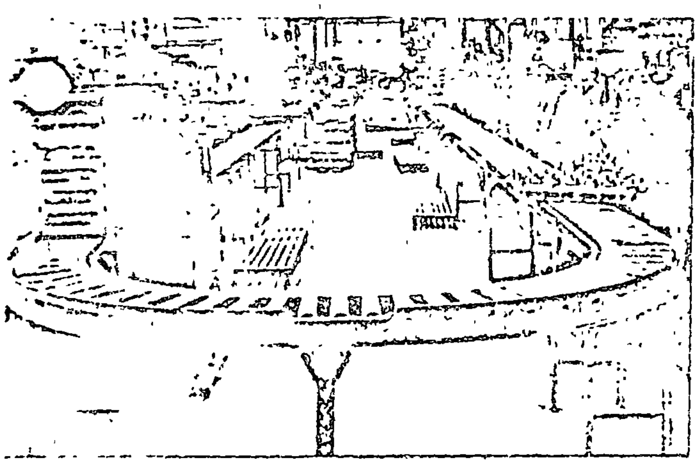
Adecuada línea de transportadores de rodillos en "V" para la sección de machuelado de piezas de motor V8 de gasolina en la línea de producción en Fábricas Automex, S. A. de Toluca, Edo. de México.



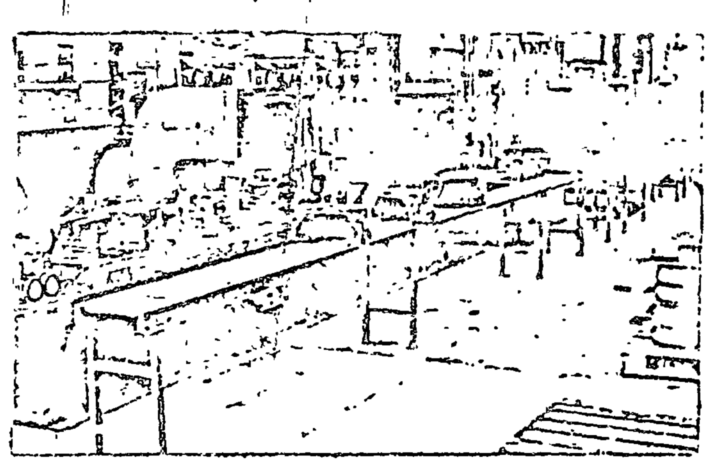
Las operaciones de volteo de motores V8 se realizan fácilmente con volteadores especiales de rodillos y sobre una doble hilera de rodillos para carga pesada instalado para una línea de ensamble y rectificado en Fábricas Automex, S. A.



Línea de transportadores de rodillos de carga pesada para el maquinado de cabezas de motor V8 en la línea de producción de Fábricas Automex, S. A.



Sistema de transportadores de rodillos para trabajo pesado mostrando una sección curva con apoyos ajustables de altura é inclinación. Equipado también con una compuerta contrabalanceado que permite el paso del personal en forma rápida y cómoda. Instalado en Fábricas Automex, S. A., en Toluca, Edo. de México.



Transportadores de rodillos para trabajo pesado que reducen los costos de operación en el maquinado de cubiertas de embrague de motores Diesel. Instalados en Motores Perkins, S. A.

II GRUPO : GRUAS, POLIPASTOS, ELEVADORES : Este grupo abarca aquellos equipos destinados a desplazamientos verticales u horizontales o en ambas direcciones. En general se utilizan para trasladar cargas muy pesadas, pieza por pieza y frecuentemente de forma irregular. Genéricamente puede subdividirse en los siguientes tipos principales :

1.- Grúas de vías fijas.
2.- Grúas móviles.
3.- Malacates.
4.- Accesorios.

1.- Grúas de Vías Fijas : Son equipos de transporte mediante los cuales se puede elevar o bajar una carga y también desplazarla en un plano horizontal, estando determinada la autonomía del desplazamiento por el diseño de la grúa.

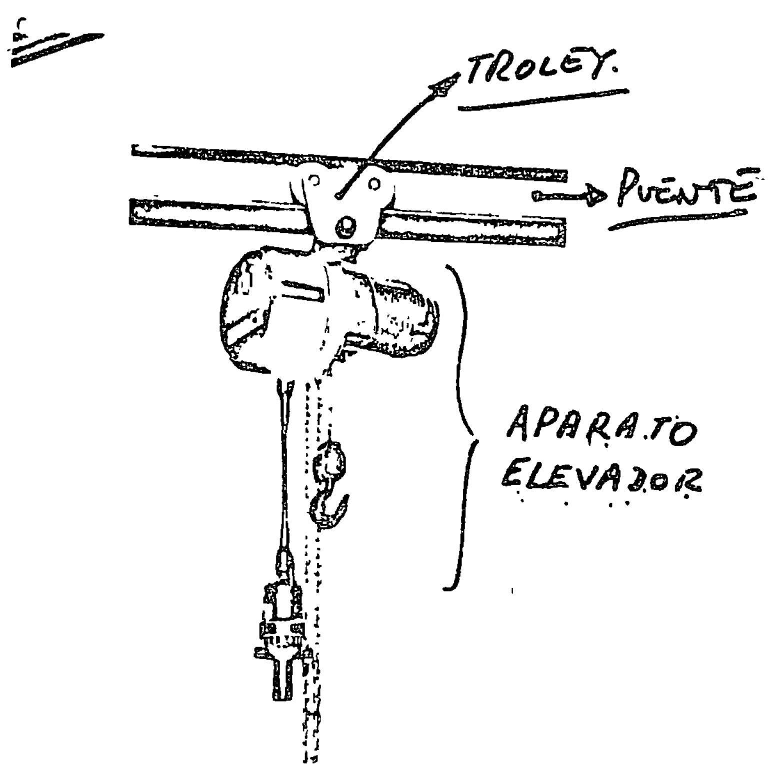
Su uso más frecuente es para piezas pesadas e irregulares como las que se dan en la construcción de buques, grandes equipos industriales como turbinas, Etc.

Desde el punto de vista constructivo una grúa puede dividirse en 3 partes, cada una de las cuales se desplaza según una dirección :

APARATO DE ELEVACION : Posibilita el movimiento en sentido vertical. Comúnmente se les denomina malacates. Son accionados a mano cuando su uso no es muy frecuente y eléctricamente o neumáticamente en caso de serlo.

2.- EL TROLLEY : Sobre él se monta el aparato de elevación y es el que permite el movimiento en sentido lateral. Como el anterior, puede ser accionado a mano o eléctricamente.

3.- EL PUENTE: Sobre el que se desplaza el trolley. Dicho movimiento también puede ser eléctrico o manual. En los monorrieles el puente es fijo, en otros como los puentes grúa, el puente se desplaza sobre dos vías aéreas. En otros tipos el puente tiene un movimiento giratorio alrededor de un eje vertical.



MUNCK LINK CHAIN HOIST 750, 1100, 1500, 2200lbs. capasity.

GRUAS MONORRIEL : Consisten en una vía aérea en forma de doble T sobre la que se desplaza un Trolley con un mecanismo elevador. La superficie de la grúa es en este caso una línea recta. Dado que la vía aérea va sujeta del techo o las paredes, este sistema de transporte puede instalarse y utilizarse sin interferir para nada con las operaciones que tienen lugar en el área situada debajo del mismo y por consiguiente ofrece algunas ventajas sobre los transportes terrestres que necesitan espacio libre sobre el suelo.

El sistema de monorriel se usa especialmente en la industria metalúrgica pesada, en la industria química, cerámica, Etc.

Su capacidad es de hasta 10 toneladas con aparejos eléctricos y su velocidad está comprendida entre 10 y 100 mts./minuto.

GRUAS PUENTE : En este caso el puente se apoya en ambos extremos sobre ruedas que se desplazan en rieles instalados formando ángulo recto con el puente. Los rieles se instalan sobre columnas del edificio, estructuras aéreas o marcos espaciales.

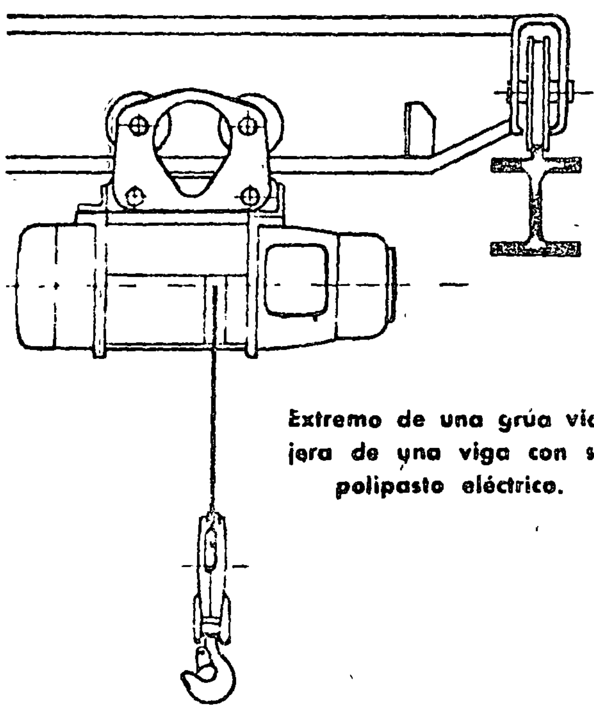
El tipo de grúa puente sobre rieles asegura una buena operación y permite una construcción mejor debido a que pueden usarse ruedas grandes.

En casos en que la velocidad de traslación longitudinal de la grúa excede la velocidad a la que puede caminar un operario (80 mts/min) éste puede viajar en la cabina de la grúa o usar un control remoto.

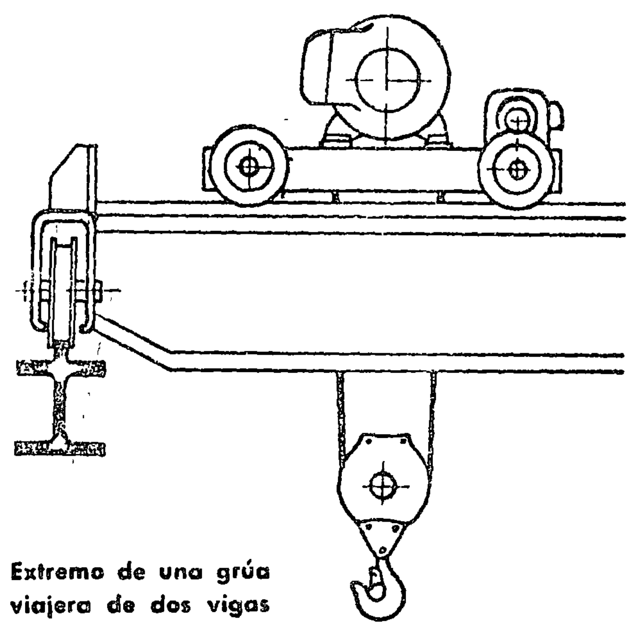
Los puentes grúas grandes tienen un motor para impulsar el puente y, por -

... //

lo general, otros dos motores para accionar el trolley y el polipasto, respectivamente. Los puentes grúa eléctricos, que son los más comunes, tienen una capacidad muy variable, que puede llegar hasta las 360 toneladas. Las más comunes tienen entre 4 y 27 toneladas. La velocidad del puente varía desde 8 a 14 mts/min. cuando es necesaria una gran exactitud en los movimientos y llega hasta 130 mts/min. cuando lo esencial es la rapidez.



Extremo de una grúa viajera de una viga con su polipasto eléctrico.



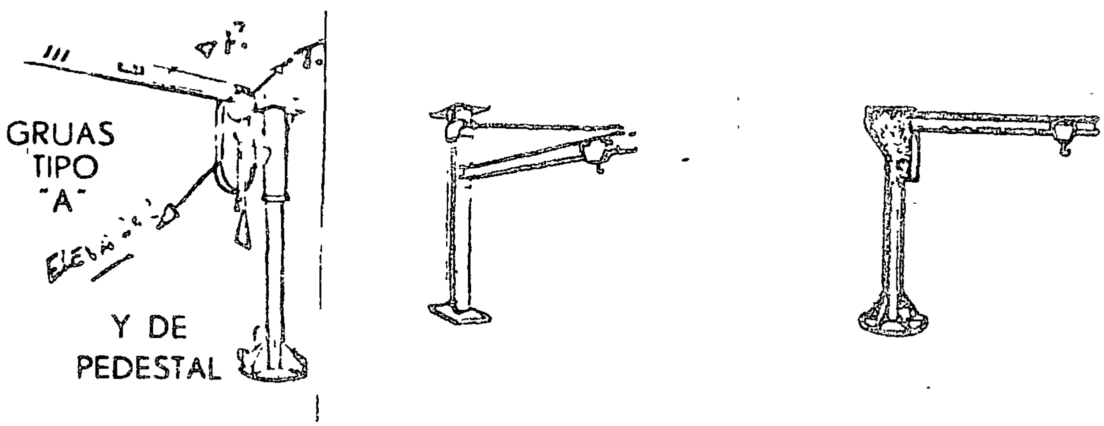
Extremo de una grúa viajera de dos vigas con carro y polipasto eléctrico sobrepuesto.

GRUAS FIJAS DE PARED Y PLUMAS. La viga principal de estas grúas gira alrededor de un eje vertical de modo que el área barrida es un segmento de círculo. Este eje vertical en las grúas está sujeto a la pared mientras que -

en las grúas pluma está en una columna que puede construirse en cualquier lugar. El ángulo de giro de la grúa fijo está limitado a 180° ó a 270° si se construye en un rincón o esquina. En los equipos normalmente encontrados en la industria la carga máxima es de 5 toneladas y la longitud varía de 1 a 8 mts.

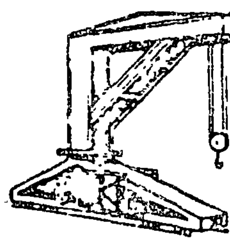
Estas grúas se instalan por lo general cuando se necesita elevar a menudo en un lugar fijo.

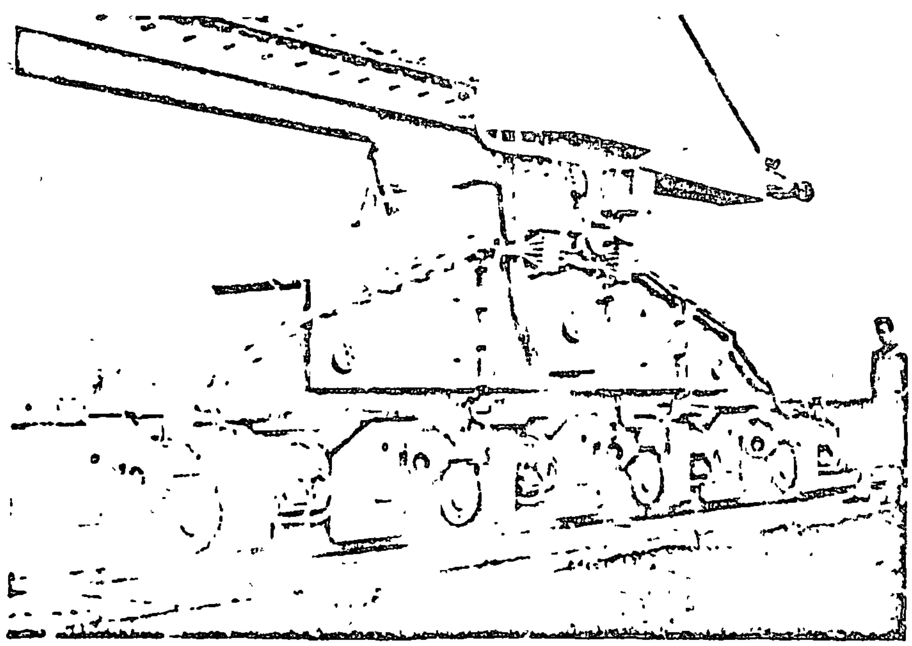
Es posible también construir una grúa fija de tal manera que pueda moverse una distancia corta a lo largo de la pared.



GRUA DE RIELES.- Este tipo de grúa (ver figura), está montada sobre un vehículo que puede ser arrastrado sobre rieles standard de ferrocarril por locomotoras u otra forma de tracción. La grúa gira alrededor de un eje vertical de modo que el área cubierta es un círculo alrededor del punto de giro. Estas grúas se construyen normalmente en tipos de 5 a 15 toneladas con radio de 2 a 20 mts. y, por lo general, son conducidas por medio de un motor diesel o de gasolina aunque también pueden ser eléctricas.

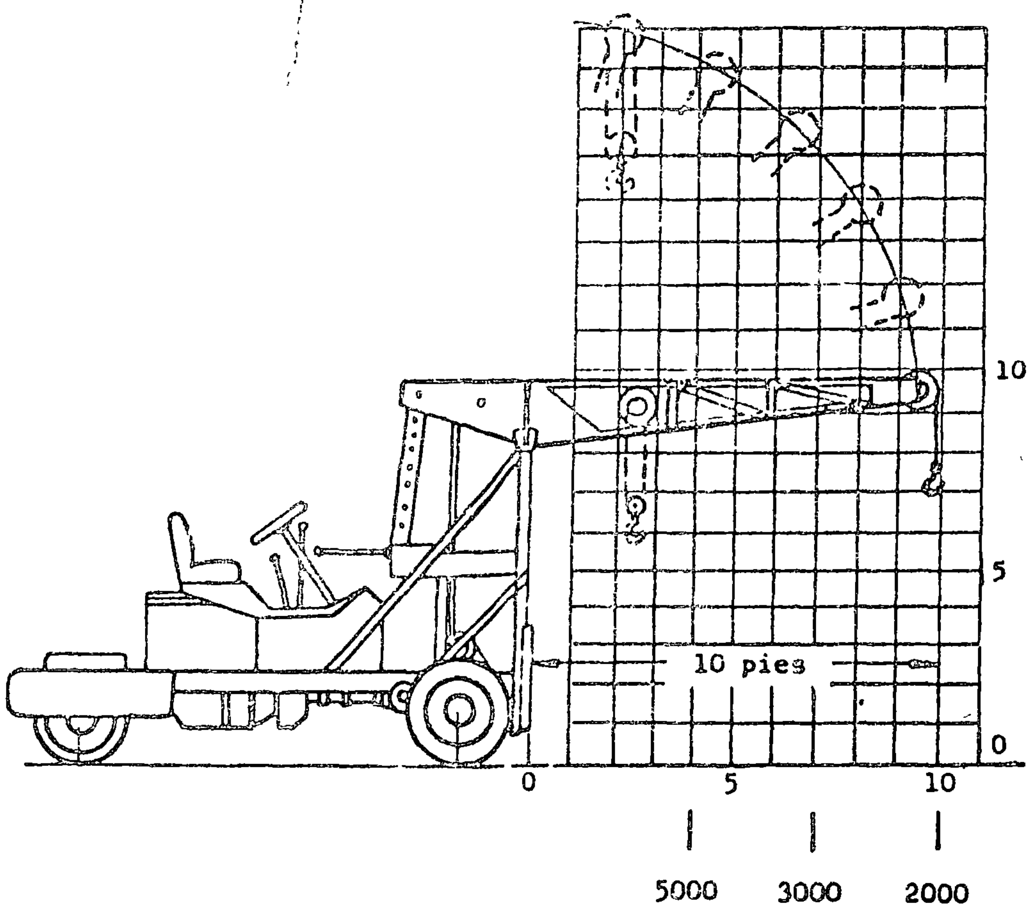
... ##





2do. GRUAS MOVILES: Las grúas móviles tienen la característica de que pueden ser conducidas a grandes distancias cuando están cargadas. Normalmente consisten en un vehículo automotor con una estructrua que sostiene la pluma. La pluma puede desplazarse verticalmente y el aparato de elevación puede desplazarse sobre la pluma. En algunos tipos de grúas, se reemplaza la pluma por un brazo con una pala de modo que pueda utilizarse para transportar tierra. Las aplicaciones más comunes de estas grúas son en patios de fábricas, de ferrocarril, muelles, Etc.

Existen otros modelos en los cuales el vehículo va montado sobre orugas.



Capacidad en el gancho (Kg.)

3ro. MALACATES : Un malacate es un dispositivo mecánico suspendido para elevar y bajar cargas en dirección vertical con un pequeño esfuerzo.

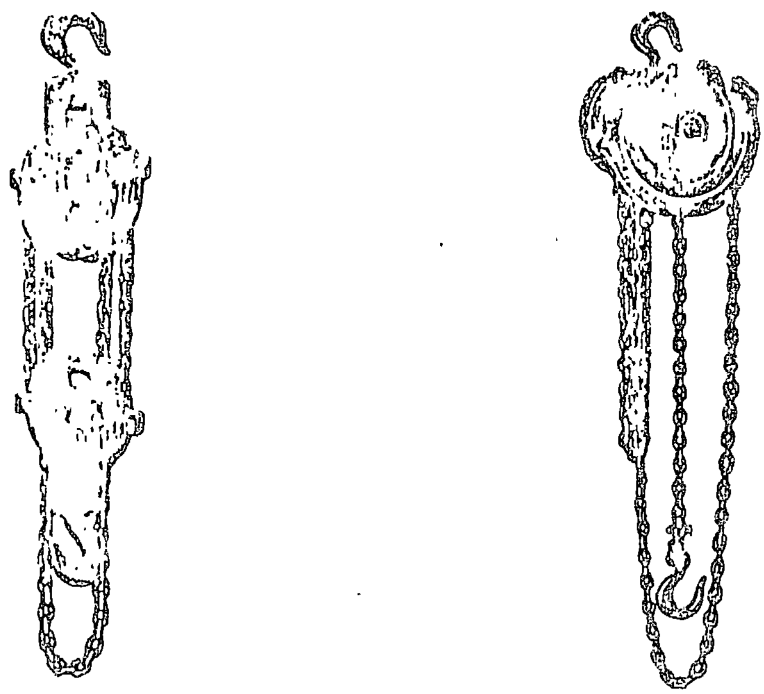
Los tipos más difundidos son :

1). De mano : utilizado en general para fines no productivos y cuando su uso se reduce a bajas alturas y poca frecuencia.

2). Malacate diferencial : es la forma más simple de elevación mecánica y consiste de una cadena sin fin única operada sobre un tambor doble o dife-

... //

rencial, y a través de una polea inferior. La diferencia o el diferencial en los diámetros de la polea doble es tan pequeña que la fricción de las distintas partes acopladas sirve para mantener la carga suspendida en cualquier punto cuando se deja de ejercer tracción sobre la cadena.



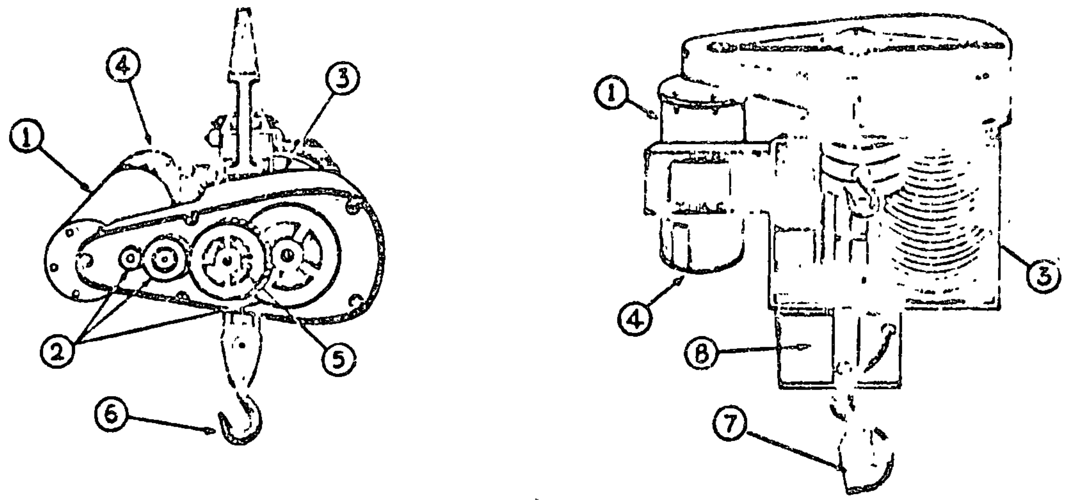
a. Diferencial

b. De engranajes planetarios

Aparejos de accionamiento manual

Se baja o se sube ejerciendo tracción en uno u otro de los lazos de la -- cadena sin fin que cuelga. Se necesita un hombre para su accionamiento y su uso es hasta 1.5 toneladas. Dado que la reducción de fuerzas se determina por la relación de los diámetros de las dos poleas de arriba, dicha reducción es muy poca.

Casos más elaborados de malacates, son los de reducción por engranajes y más aún los eléctricos, en los cuales las fuerzas requeridas para elevar la carga es proporcionada por un motor eléctrico acoplado al malacate, siendo este motor controlado por un operario mediante botonera. Tienen además un tambor donde se enrolla el cable y están provistos de un mecanismo de freno.



1. Motor eléctrico	2. Tren de engranajes	3. Tambor y cable
4. Freno del motor	5. Freno de la carga	6. Gancho
7. Control	8. Panel de control	

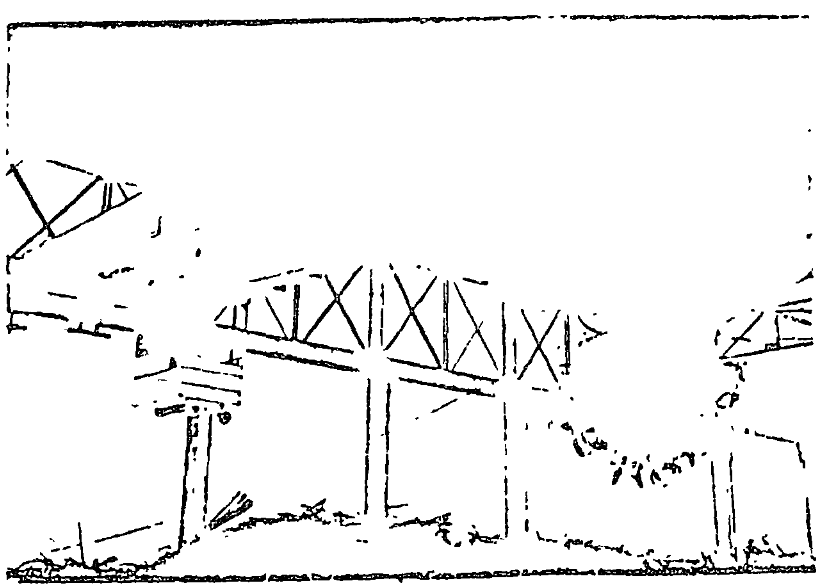
Aparejo eléctrico

Existen también malacates accionados por aire comprimido para usarse en lugares donde no se permiten chispas o donde la regulación suave es esencial, siendo su capacidad limitada a unas 5 toneladas.

...

<u>4to. ACCESORIOS :</u> Tanto las grúas como los malacates que hemos descrito deben adaptarse en las operaciones normales a diferentes condiciones de trabajo, lo que se logra mediante el uso de distintos accesorios. Dentro de los más comunes podemos citar el <u>ELEVADOR ELECTROMAGNETICO</u> que se usa para mover hierro, acero, virutas, desechos, Etc. Su fuerza portante puede ser hasta de 25 toneladas para un diámetro de electroimán del orden de los 2,5 mts.

Los electroimanes son alimentados por corriente directa y no deben utilizarse durante un tiempo muy prolongado (Histérisis, corrientes parásitas, Etc.)



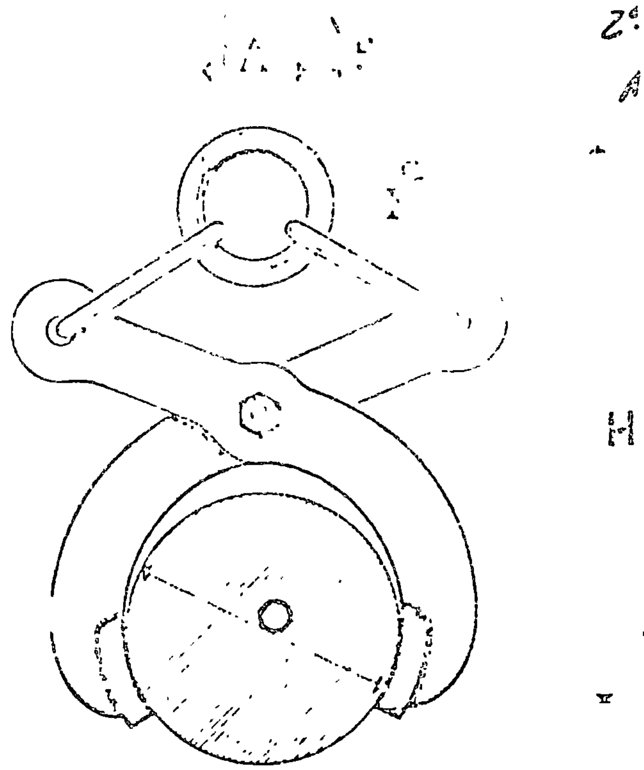
B. <u>ELEVADOR DE LAMINAS :</u> Se utiliza para levantar pilas de láminas.

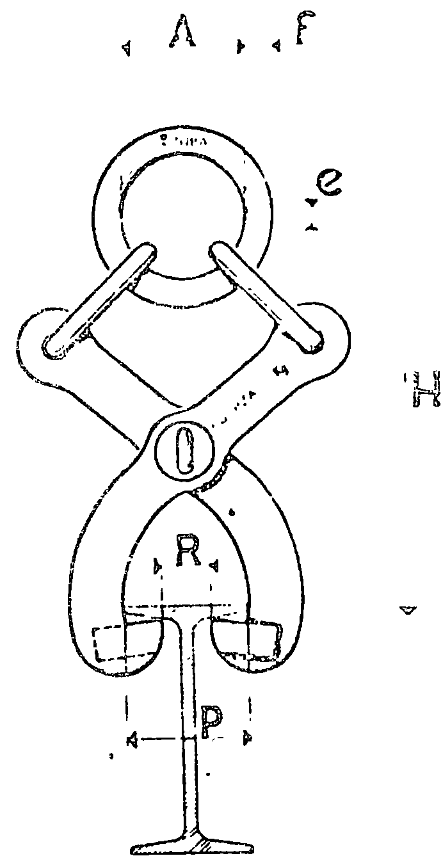
C. <u>PINZAS.</u> Para materiales de formas diversas.

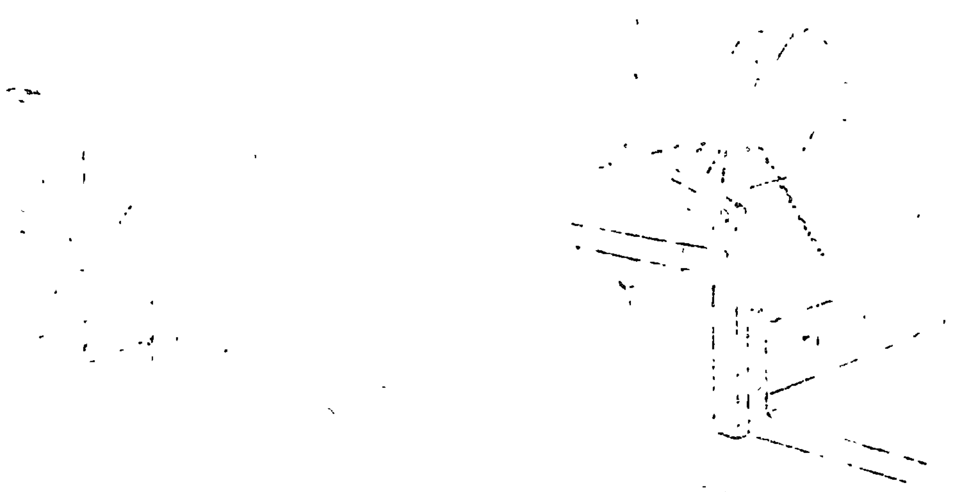
D. <u>CUCHARAS :</u> Para descargar grava, carbón, Etc.

E. <u>CINTURONES :</u> Para evitar dañar la carga o que ésta se resbale.

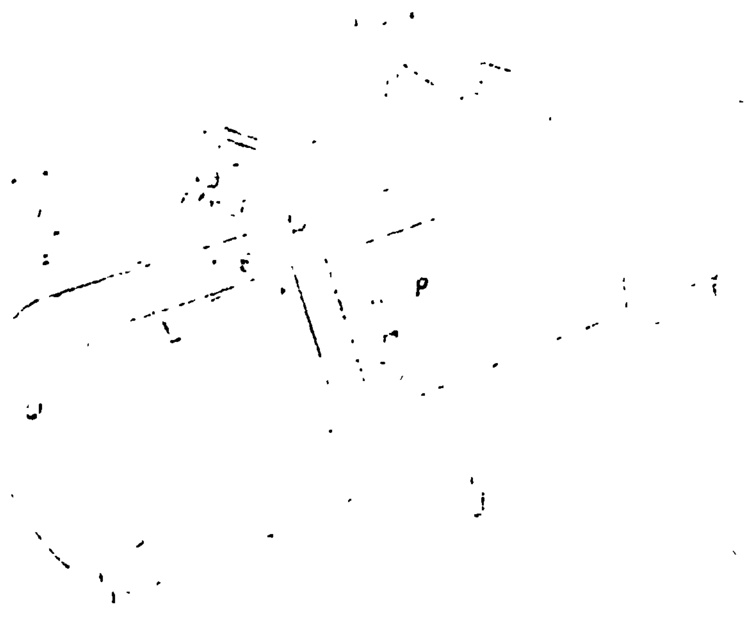
. . .





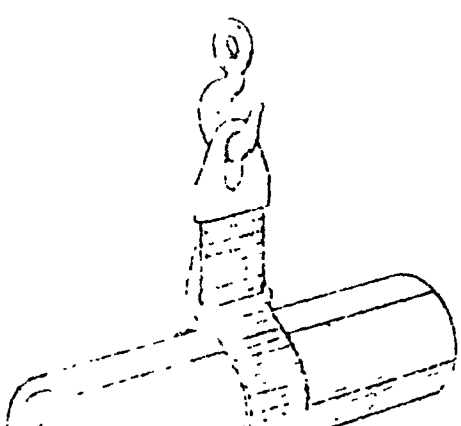


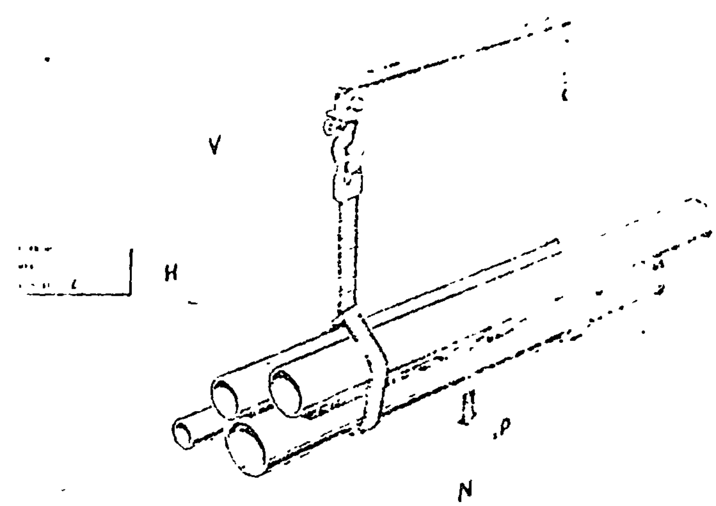
PI... DE ALTURA H REDUCIDA



ECONOMIA

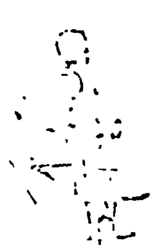
SEGURIDAD





NUDO CORREDIZO

DISTRIBUIDOR AUTORIZADO:



F. VEHICULOS INDUSTRIALES.- Este grupo de equipos incluye todos los vehículos autónomos de dos o más ruedas utilizadas para el manejo de materiales dentro de la fábrica y que pueden ser accionados a mano o por fuerza motriz eléctrica o mecánica. Tienen la ventaja de la flexibilidad y su costo de adquisición es relativamente bajo.

Dada la gran cantidad de tipos, se les suele subdividir en :

1.- CARRETILLAS MANUALES.

2.- PLATAFORMAS MANUALES DE 3 ó 4 RUEDAS.

3.- ACOPLADOS PARA USAR CON TRACTORES.

4.- CARROS ELECTRICOS DE PLATAFORMAS.

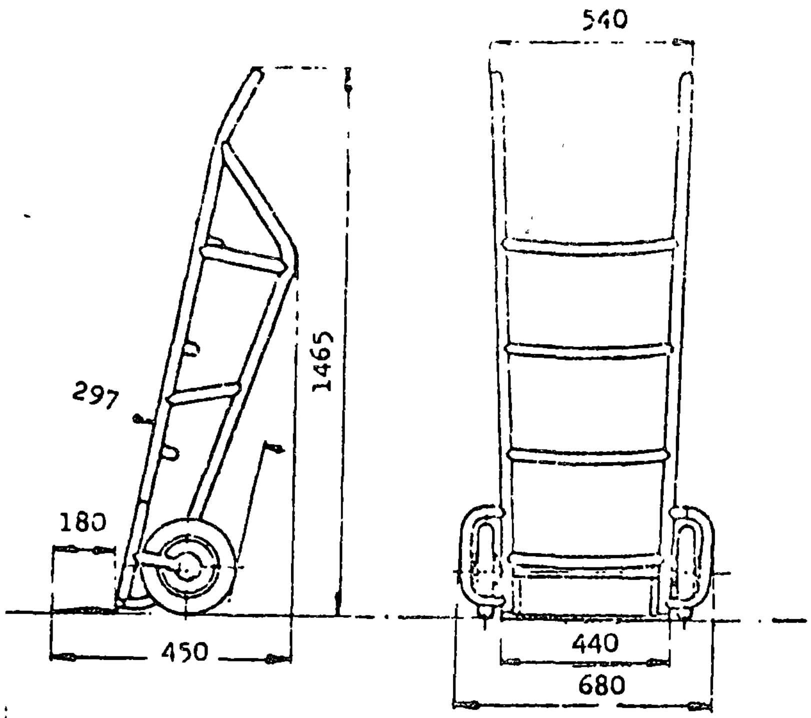
5.- VEHICULOS ELEVADORES.

6.- VEHICULOS ESPECIALES.

Es muy importante dentro de este grupo el factor diseño, sobre todo en los tipos manuales. Los aspectos más importantes son los que se refieren a : estructura, ruedas y cojinetes .

Carretillas Manuales. (Diablos). Consisten en un armazón, generalmente tubular, de acero, aluminio o de aleación liviana y provisto de dos ruedas fijas La carga se levanta empujando la carretilla debajo de aquello y dejándola caer

Se usa para el transporte de bolsas, cajas grandes, tambores, Etc., sobre distancias de varias decenas de metros.



2.- PLATAFORMAS MANUALES DE 3 ó 4 RUEDAS. Pueden ser de acero o madera y consisten en una plataforma montada sobre ruedas. Se usan para recorridos cortos con rutas variables y la carga máxima es de ------- 4,000 Kgs.

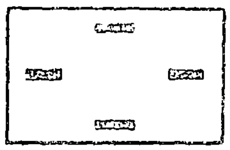
Existen modelos adoptados para aplicaciones especiales. En algunas las ruedas tienen bases giratorias. También hay de base fija o combinados.

El modelo de base giratoria es difícil de controlar mientras que el de base fija es difícil de maniobrar.

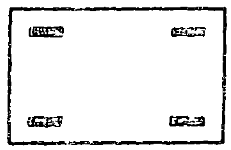
... ##

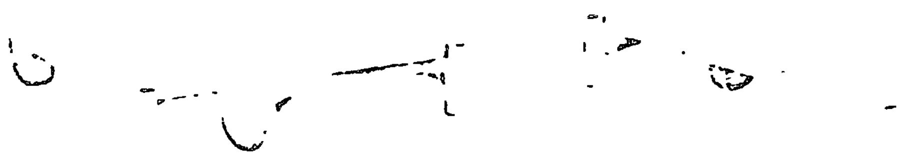
CARROS PLATAFORMA

RUEDAS EN CRUZ



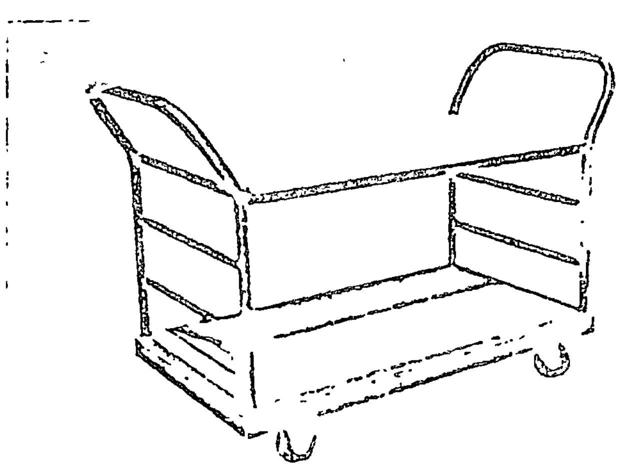
RUEDAS EN CUADRO





Carros plataforma indispensables en toda fabrica y almacén así como en laboratorios hospitales hoteles litografías tiendas de viveres lavanderias tintorerías etc. Construidos de fierro estructural de alta resistencia, con plataforma de madera de primera y manerales de fierro tubular. Capacidades de 400 a 1000 kilos. Equipados con dos rodajas giratorias y dos fijas, colocadas en cuadro para su manejo donde no existe problema de espacio y en cruz para su uso en espacios reducidos. Disponibles con uno o dos manerales y distintos tamaños de plataforma. Puede surtirse cualquier tipo o tamaño sobre pedido. Existencia constante de los siguientes modelos

Modelo:	Dimension de plataforma:	Con rodajas:	Cap. en kg. en cuadro	Cap. en kgs. en cruz
2446 54	61 cms x 117 cms. (24") x (46").	F5 111 y G4 132	400 kilos	400 kilos.
2754-66	69 cms. x 137 cms (27") x (54").	F6 132 y G6 132	600 kilos	600 kilos.
2754-86	69 cms. x 137 cms. (27") x (54").	F8 1932 y G6-132	800 kilos	800 kilos
3060-10/6	76 cms. x 152 cms. (30") x (60")	RHV-10x2 ½ y G6-132	1.000 kilos	1.000 kilos



3.- ACOPLADO PARA TRACTORES. Se les emplea especialmente para formar trenes y ser remolcados por un tractor. Consisten en una plataforma generalmente sin estructura superior y con 4 ruedas. Cuando se usan en trenes, tienen dispositivos especiales que enganchan al ser empujados los carros uno sobre otro.

4.- CARROS ELECTRICOS DE PLATAFORMA. Se trata de vehículos de tres o cuatro ruedas propulsados por un motor eléctrico a batería colocado en el mismo carro. En algunos tipos el operador va parado sobre la plataforma delantera y controla el desplazamiento mediante pedales, en otros va sentado y tiene un volante. Se usan para distancias medias, con movimientos frecuentes y con carga demasiado pesada para el movimiento manual.

5.- VEHICULOS ELEVADORES: Son vehículos de 3 ó 4 ruedas, provistos de un dispositivo por medio del cual pueden ser levados paquetes apilados sobre plataformas. Pueden considerarse como el desarrollo posterior de los vehículos no elevadores en los cuales los paquetes son descargados uno a uno.

...##

Existen dos tipos principales que son :

1.- Vehículos de plataformas : Tienen una plataforma por medio de la cual pueden tomar un pallet o tarima.

2.- Elevadores de Horquillas : Son los vehículos industriales de elevación más comunes y tienen una horquilla con dos uñas cortadas en forma de bisel o dispositivos especiales, por medio de los cuales - pueden elevar una plataforma, barriles, Etc.

Vehículos de Plataformas : Es un autoelevador de tres o cuatro ruedas con una plataforma o uñas que se elevan. Es propulsado a mano o por un motor siendo la elevación de accionamiento hidráulico o eléctrico. En general se usan para el transporte de materiales pesados como matrices, fundiciones de hierro, tambores - en la fabricación de pinturas, Etc.

Autoelevador de Horquillas : El autoelevador es un vehículo de cuatro ruedas con un mástil y una horquilla que se desliza hacia arriba y hacia abajo. Está construído de manera tal, que la horquilla y la carga están fuera de las ruedas delanteras, lo cual es necesario para estibar, y en consecuencia debe agregarse un - contrapeso al vehículo que constructivamente está formado por el motor, el bastidor y en caso de ser necesario por pesos extras. Las ruedas delanteras en general -

...###

son más grandes debido al alto peso del vehículo cargado y pueden ser macizas o neumáticas.

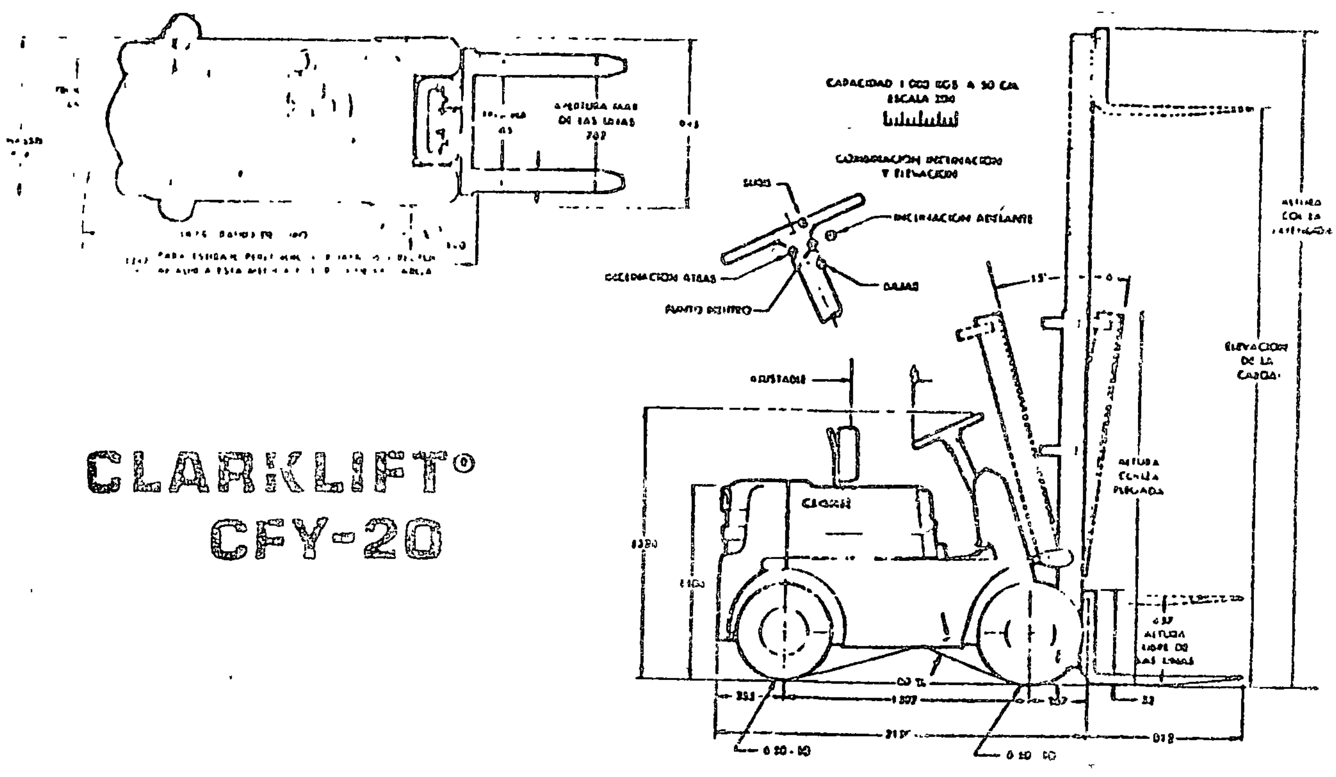
Las neumáticas acojinan la marcha y ejercen menos presión sobre el piso por razón de su gran superficie de contacto. Esta es una consideración importante para vehículos que trabajen al exterior o por superficies sin pavimentar o en interiores en que los pisos están mojados o resbaladizos. Las llantas macizas sin embargo duran más. Todos los autoelevadores tienen cambio de dirección en las ruedas posteriores.

En cuanto a los mástiles hay dos tipos : El telescópico, por medio del cual se obtiene un rango de elevación más grande, si bien se disminuye la capacidad de carga pues ésta se aleja del eje delantero, y el mástil no telescópico con limitación de la distancia de elevación. Para evitar que la carga se deslice de la plataforma, la mayoría de los autoelevadores de horquilla tienen un mecanismo de inclinación de modo que el mástil completo se puede inclinar hacia atras, alrededor de un punto de rotación bajo. La inclinación hacia adelante es de 6° y hacia atrás de 15°.

Dado que el peso de la horquilla y de la carga deben balancearse, es importante tener presente el centro de gravedad de la carga. Los catálogos de los fabricantes traen estas especificaciones. Otro aspecto a considerar, es la resistencia de los pisos, ya que estos constituyen muchas veces una limitación, y los anchos necesarios de pasillos de acuerdo a la forma en que se quiera estibar. Los catálogos traen datos, como el radio de giro, distancias al eje delantero, Etc., y fórmulas matemáticas que permiten calcular los pasillos de acuerdo a la carga, la velocidad, -

la posibilidad de tránsito de ida y vuelta.

En cuanto a la potencia, podemos decir que si las cargas se llevarán a grandes distancias o si hay rampas empinadas, se preferirá el montacargas impulsado por motor de gasolina, gas de petróleo licuado o diesel. Dichos montacargas presentan el inconveniente de que emiten gases. Los montacargas eléctricos son limpios, silenciosos y sin gases y se suelen preferir cuando la pulcritud es un requisito.



ESPECIFICACIONES Y MEDIDAS

ESPECIFICACIONES TECNICAS

MODELO

CFY 20 Peso . . . . 2.065 Kgs.
CY Peso . . . . 2.133 Kgs.

CAPACIDAD Y DISTRIBUCION DE PESO

Porcentaje sobre las ruedas motrices (vehículo vacío) . . . . 54 %
Capacidad nominal 2000 Kgs. a 50 cm. del centro de carga
Para otras capacidades ver tablas.

RODADO

Standard	Medida	Telas	Presión
Tracción simple y dirección	6.50 x 10	10	100 lbs.
Opcional			
Tracción dual y dirección . .	6.50 x 10	10	100 lbs.
Tracción simple y dirección	6 50 x 10	macizo especial	

VELOCIDAD Y DECLIVES

	Embrague a fricción	HIDRATORK
Velocidad de desplazamiento con carga nominal	16,9 Km/hora	17,6 Km/hora
Capacidad de subir rampas con carga nominal	31 %	31,5 %

COLIZA STANDARD

	cargada	vacía
Velocidad de elevación	25,3 mts./minuto	28,6 mts./minuto
descenso . .	18,3 „ „	24,4 „ „

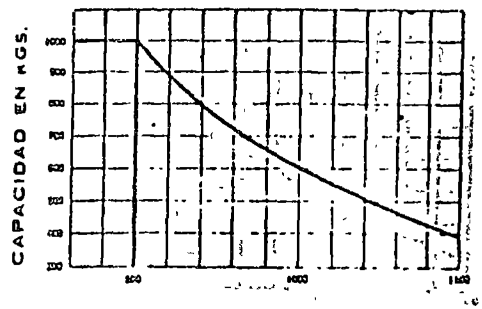
MOTOR

IKA de 4 cilindros con regulador de velocidad centrífugo actuando en la punta del árbol de levas. Distribución a engranajes de diente helicoidal rectificado. Carburador ascendente

Modelo	4L-151
Diámetro	84,138 mm.
Carrera	111 125 mm.
Cilindrada	2480 cm^3
Cap. carter	4,75 lts.
Revoluciones reguladas con carga .	2200
HP a revoluciones reguladas	49,5
Torsión máxima (k)	16,6
Cap. tanque de combustible	37,5 lts.

Nota: LP Gas opcional a costo extra.

TABLA DE CAPACIDADES



Centro de la carga en mm. desde el frente de las uñas.
Las capacidades nominales arriba indicadas estan computadas con la coliza en posición vertical.
Se aplican para altura máxima de elevación de carga de hasta 4,00 Mts.

DIMENSIONES Y ALTURAS DEL SUELO

Largo hasta el frente de las uñas	2120 mm.
Distancia entre ejes	1397 mm.
Ancho (ruedas motrices simples)	943 mm.
Trocha (motriz)	765 mm.
Radio de giro	1879 mm.
Pasillo básico para estibar en ángulo recto (añadir longitud de carga)	
Coliza	136 mm.
Eje motriz	184 mm.
Eje de dirección	181 mm.
Centro de chasis	203 mm.
Luz central	80 mm.

FILTROS DEL MOTOR

Tres tipos: (1) Filtro de combustible (2) Filtro de aceite con elemento cambiable de papel tipo automotor (3) Filtro de aire tipo seco con elemento cambiable de papel plegado de 5 micrones

SISTEMA ELECTRICO

Batería	NEGATIVO A MASA
Tensión	12 Volts nominales
Capacidad	40 ampere-hora
Regulador de carga compuesto por	Disyuntor Limitador de intensidad Regulador de tensión
Generador	
Volts	12 nominales
Amperes	35 nominales
Motor de arranque	
Tensión	12 Volts nominales
Bendix	Centrífugo

FRENOS

(Dos sistemas) Torsión del pedal multiplicada a traves de reduccion final en cada rueda motriz que reduce el esfuerzo y prolonga la vida de los frenos. Doble zapata de expansión hidráulica interno y forros adhesivos. Pedal ancho central en modelos Hydrotork de facil aplicacion con cualquier pie. Tambores encerrados en carcaza del eje motriz en lugar de las ruedas. Zapatas auto-regulables, no necesitan ajuste durante la vida util del forro.

DIRECCION

[illegible] ruedas grandes brindan facil desplazamiento y buena flotacion bajo las mas adversas condiciones de operacion. Eje de dirección de fuerte acero vanadio montado sobre dos bujes torsionales de goma que amortiguan y brindan articulacion contra desniveles del piso hasta 15 cm de altura. Topes eficaces para estabilidad lateral. Pivotes inclinados disminuyen el efecto de golpes. Tren de dirección tipo a bolillas circulantes. El punto central geométrico y la angularidad de 75° permiten giros cortos. Rotulas tipo automotor. Volante de 457 mm de diametro.

EJE MOTRIZ Y CAJA DE VELOCIDADES

Montaje integral de tres puntos que incluye: motor, embrague, caja de velocidades piñón y corona, diferencial y conjunto de eje motriz totalmente flotante. El peso del vehiculo lo soporta la cañonera y no el eje palier. Reduccion final planetaria en ruedas motrices totalmente blindada.

EMBRAGUE A FRICCION

Monodisco seco de 280 mm de diámetro de cambio rapido "quick change" con revestimiento remachado de 27 mkg de torsion, control a pedal tipo automotor. Dos palancas de cambio directas a la caja: adelante-atras y alta-baja que seleccionan 2 velocidades adelante y dos atrás.

TRASMISION HYDRATORK (OPCIONAL)

Dos [illegible] engranajes en acople constante y [illegible] de direccion. El convertidor multiplica la [illegible] del motor sin castigar la linea motriz [illegible] engranajes. El aceite es enfriado por separado en [illegible] situado en la parte inferior del radiador y filtrado a través de un elemento cambiable tipo automotor. Palanca direccional sobre el lado izquierdo de la columna de direccion. En lugares cerrados el juego libre del pedal de frenos acciona hidráulicamente una valvula que permite disminuir gradualmente la fuerza [illegible] de [illegible] aunque el motor funcione a [illegible] una elevacion rápida.

CILINDROS DE ELEVACION E INCLINACION

Embolos de inclinación cromados. Espesores para compensar el desgaste de empaquetaduras, cambiables desde afuera. Válvula de seguridad de inclinacion garantiza un control eficiente contra derivas. Todos los cilindros tienen aros metalicos de protección para las empaquetaduras. Embolo de elevación tipo pistón de esfuerzo lateral mínimo. Regulador de caudal modulado reduce la velocidad de bajada cuanto más pesada la carga.

INSTRUMENTAL

Amperimetro, Presión de aceite motor. Medidor de temperatura, Medidor de combustible, Cuenta-horas opcional a costo extra.

COLIZA

Coliza telescopica de guias embutidas con roletes blindados. Perfil central de acero tratado SAE 1045 embutido en perfil fijo del mismo material, proveen un funcionamiento uniforme y brindan mayor durabilidad. Carro porta uñas con roletes de empuje lateral montados exteriormente para dar mayor estabilidad y evitar esfuerzos de la coliza. Una traba impide que la coliza interna se eleve antes de la completa elevación libre de las uñas.

SISTEMA HIDRAULICO

Válvulas tipo carrete totalmente balanceadas a precisión brindan puestas en marcha y paradas suaves. Válvulas de alivio para sobrecargas, roscas SAE rectas y "O" rings de goma en todo el sistema de presión. Bomba hidráulica de paletas accionada por el motor a través de engranajes. Tanque hidráulico de chapa de 8 mm. montado sobre el chasis como parte integral del mismo. Mangueras hidraulicas de goma y malla de acero trenzado. Proteccion contra la suciedad: (1) Respiradero del tanque hidraulico con elemento cambiable de 5 micrones. (3) Filtro de caudal completo dentro del tanque de 25 micrones.

CARRO PORTA UÑAS Y UÑAS

Construcción enteramente soldada para trabajos pesados, de acero 1045 contra impactos. Ajuste lateral de uñas de 0-1015 mm. con o sin parrilla opcional. Conveniente traba de acción rápida para asegurar las uñas. Uñas forjadas y tratadas termicamente para mayor resistencia en toda la sección del talón.

MANTENIMIENTO

El acceso a los órganos mecánicos del autoelevador es simple. Con tan solo abrir las tapas laterales y el capot quedan expuestos para la inspección la tapa de llenado del aceite hidráulico, varilla de nivel del aceite de motor, tapa de llenado de aceite del mismo etc. Batería montada en plataforma giratoria para su mejor inspección y mantenimiento. Contrapeso de [illegible] laterales y un solo bulón de fijación, permite ser retirado rápidamente.

ASIENTO

Amplio asiento y respaldo de goma espuma cubiertos de Vinil plastico. Cómodo respaldo curvado e inclinable. Corredera que permite un ajuste longitudinal de hasta 90 mm.

TECHO Y PARRILLA

Estos accesorios son opcionales. CLARK EQUIPMENT COMPANY recomienda su uso y aconseja al propietario considerarlos indispensables.

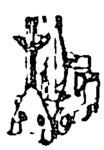
COLORES

Dos tonos: Gris plateado combinado con uno de 5 opcionales: rojo, anaranjado, amarillo, verde o azul.

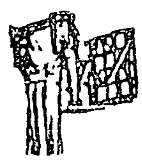
OTROS .

Reserva auxiliar de combustible accionada a mano de 2 lts. de capacidad. Acople tipo perno empotrado a 30 cms. del suelo. Bulones y tornillos cadmiados. Silenciador resonante detrás del radiador, frente a la corriente de aire, esparce el gas evitando el recalentamiento. Todas las superficies expuestas con antióxido y pintadas a soplete.

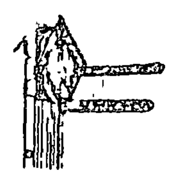
Accesorios para autoelevadores



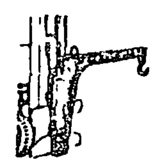
Sujecion de canastos



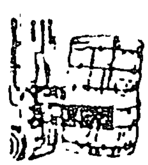
Accesorios de empuje



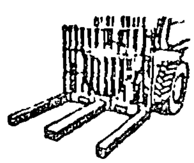
Horquilla giratoria



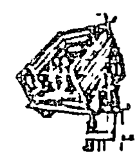
Pluma cuello de ganso



Dispositivo de sujecion

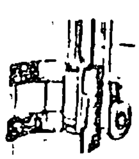


Horquilla de mordaza

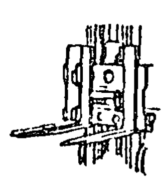


Canasto volcable

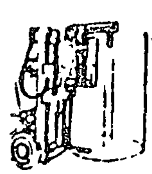
Sujecion de cartones



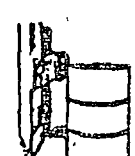
Sujecion giratoria de rollos



Giro lateral



Adaptador neumatico



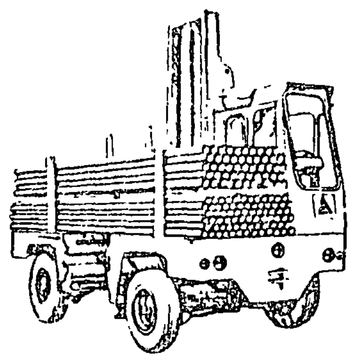
Manipuleo de barriles

6 - VEHICULOS ESPECIALES : Modernamente se han desarrollado una gran cantidad de vehículos diseñados y construídos para aplicaciones no comu_ nes ; sin embargo, algunos tipos se han difundido llegando a ser más o me_ nos comunes.

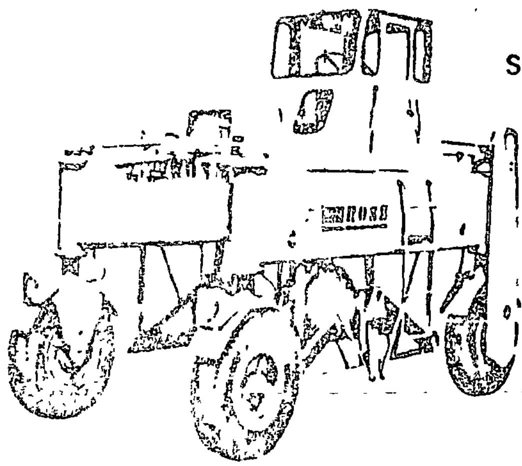
Entre ellos deben mencionarse dos :

1.- Autoelevador de carga lateral : Es un autoelevador de horquilla con cuatro ruedas normales y un mástil, que puede moverse lateralmente. Cuando tiene que tomar una plataforma, se coloca el vehículo a lo - largo de la plataforma, el mástil y la horquilla se mueven hacia afue_ ra para tomar la carga, levanta, vuelve hacia atrás y baja y luego se desplaza el vehículo. El mástil tiene también un pequeño movimien- to de inclinación hacia adelante. Se utiliza este equipo preferente-- mente para transportar materiales en los cuales predomina una dimen-- sión con respecto a las otras dos, como son tablas, caños, vigas de ace_ ro, Etc. y en la mayoría de los casos no se utilizan pallets. Normal-- mente llevan cargas entre 2 y 15 toneladas y la velocidad máxima es de 40 Km/Hr. Tienen la ventaja de permitir una gran visibilidad para el - operario.

La carga larga completa puede ser manejada fácilmente por el montacargas.

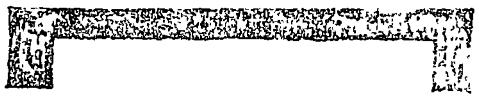


2.- ACARREADOR DE HORCADAS. En un elevador de cuatro ruedas, diseñado para que el material sea tomado por la parte inferior del vehículo. La carga, que en algunos casos se coloca en pallets, se levanta por medio de zapatas elevadores. Se ha difundido mucho en los últimos años en los E.E. U.U. y es muy apto para transportar materiales largos o voluminosos. Su capacidad puede llegar hasta 50 toneladas y tiene la ventaja adicional de poder desplazarse distancias grandes a una velocidad de 50 Km/Hr. aproximadamente, como por ejemplo del puerto a la fábrica directamente.



Grupo 8 CAJAS DE TRANSPORTE Y EQUIPOS ESPECIALES : Las cajas de transporte (containers) pueden definirse como recipientes destinados a contener una cantidad de cierto material para su movimiento entre procesos, hacia depósitos, Etc. Existen una gran variedad de cajas de transporte normalizados y especiales, diseñadas para acarrear productos, partes, Etc. a través de todas las fases del ciclo de producción incluyendo expedición.

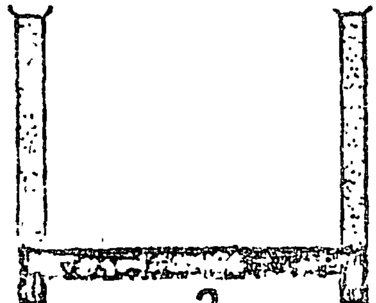
Veamos algunos tipos :

1).- 

Esta es simplemente una plataforma - (pallet).

Destinado a transportar bolsas, paquetes, Etc. Existen diferentes medidas estandarizadas.

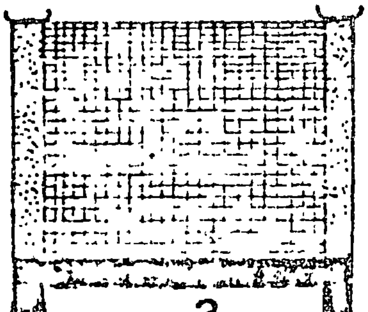
2).-



2

Igual al anterior con el agregado de cuatro columnas, lo que permite transportar tubos redondos, caños, Etc.

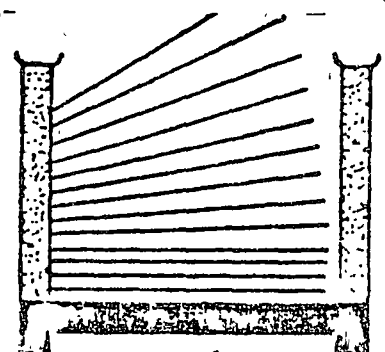
3).-



3

La forma básica se completa con tela metálica para el almacenamiento de partes que pueden estar en contacto, tales como piezas de fundición, piezas de plástico, Etc.

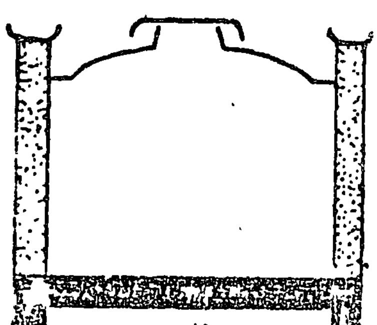
4).-



4

Consiste en base, columnas, costados y estantes para transportar piezas chicas en bandejas.

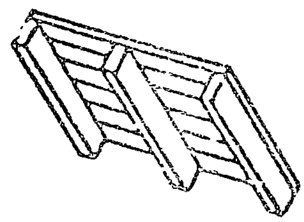
5).-



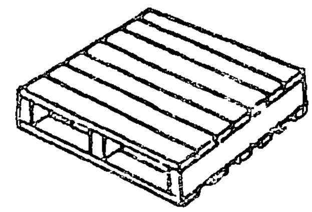
5

Similar a los anteriores, pero forrado interiormente para el transporte de material granular. Pueden hacerse también para transportar líquidos o elementos congelados.

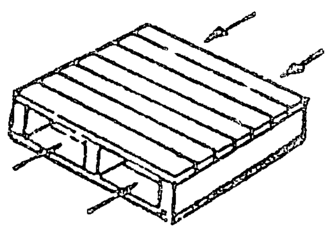
En la práctica, estas formas elementales adquieren diferentes configuraciones para servir a propósitos específicos. En algunos modelos, las paredes son desmontables o plegadizas a efectos de disminuir el espacio ocupado cuando están vacios.



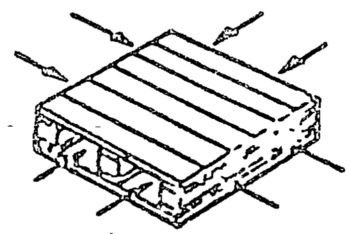
Simple cubierta



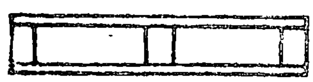
Doble cubierta



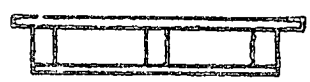
De dos entradas



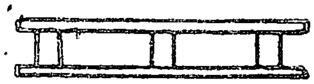
De cuatro entra s



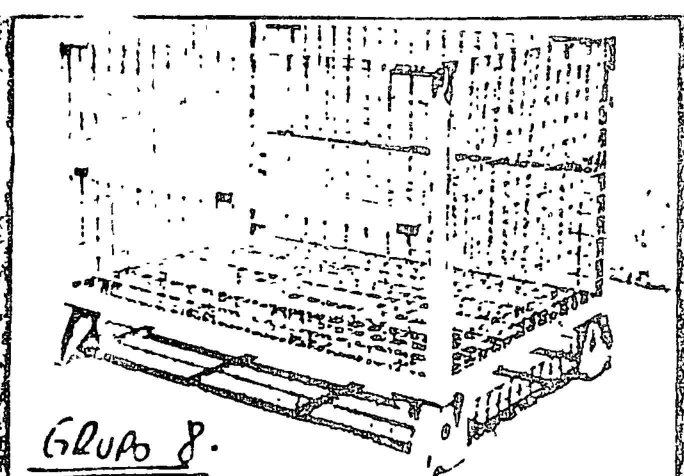
Sin aletas



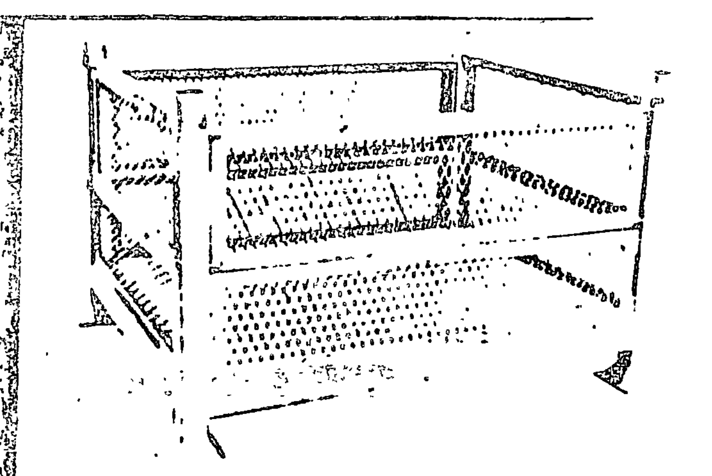
Con aletas simples



Con aletas dobles



Caja autoestibable de malla de alambre para almacenaje de materiales ó productos a granel. Por la ventaja de poderse estibar unas sobre otras, se logran mayores áreas aprovechables, ahorrando espacios horizontalmente. Se pueden acumular de 4 a 5 estibas dependiendo de la altura de elevación de su motoestibador. En uso en Thompson Ramco, S. A. de C. V.



Caja autoestibable con malla de metal desplegado, de estructura tubular con una compuerta para operaciones de carga y descarga. Se pueden acumular de 4 a 5 estibas, dependiendo de la altura de elevación de su motoestibador. En uso en Massey Ferguson de Mexico, S. A. de C. V.

PALETIZADORES: Son máquinas destinadas a hacer pilas de productos que, generalmente, vienen en cajas, como son cerveza, productos alimenticios o también bolsas de cemento, Etc. La máquina recibe cajas individualmente y las acomoda sobre una plataforma o pallet de acuerdo a un patrón predeterminado, en el número de capas requerido. El pallet se monta generalmente sobre un pistón hidráulico. Las cajas se alimentan a la parte superior de la máquina y van descargando sobre el pallet que hace bajar el pistón.

Cédulas fotoeléctricas cuentan el número de cajas y determinar orientación.

La carga completa es automáticamente descargada de la máquina. En la mayoría de los casos el pallet cargado es tomado por un montacargas.

Ejemplo de patrones que pueden hacer un paletizador a efectos de aprovechar óptimamente la superficie del pallet. (ver página No. 101).

Seguridad en el manejo de materiales. Este tema lo vemos, pues muchos ingenieros industriales, por causas no muy claras, son nombrados Jefes de Seguridad.

La seguridad en el manejo de materiales depende de las mismas normas y -

principios que los programas de seguridad en general Los accidentes son de dos tipos principales :

a). Debido a condiciones inseguras.

b). Provocados por actos personales.

Las causas principales de las primeras son :

1.- Defensas inseguras.

2.- Diseño o construcción inseguro.

3.- Iluminación deficiente.

4.- Ventilación deficiente.

5.- Ropas inadecuadas.

6.- Herramental no apropiado

7.- Pisos en mal estado, Etc.

En cuanto a los actos personales que pueden provocar accidente pueden mencionarse :

1.- Operar equipos sin autorización.

2.- Trabajar con un equipo a velocidad peligrosa.

3.- Usar manos en vez de herramientas.

4.- Trabar dispositivos de seguridad de los equipos.

5.- Distracciones, bromas, Etc.

6.- No utilizar dispositivos de seguridad (antecjos, guantes, Etc.)

Con referencia a equipos específicos, los fabricantes proveen de normas e instrucciones para su operación. Como ejemplo de normas para vehículos industriales motorizados, podemos mencionar :

1.- Mantenga su carga lo más bajo posible estando en movimiento

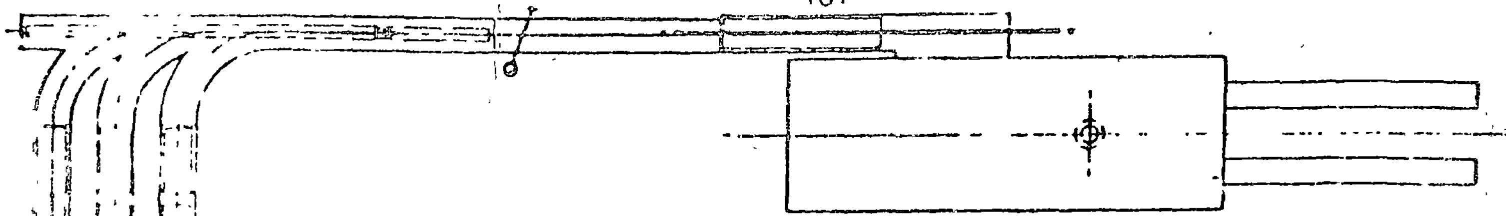
2.- Evite arranques o paradas bruscas.

3.- Disminuya su velocidad al acercarse a puntos peligrosos.

4.- Informe de pisos sucios.

5.- Asegúrese de levantar toda la carga.

6.- Use el claxón, Etc.



EFICIENTE ALIMENTACIÓN DE VARIAS LÍNEAS

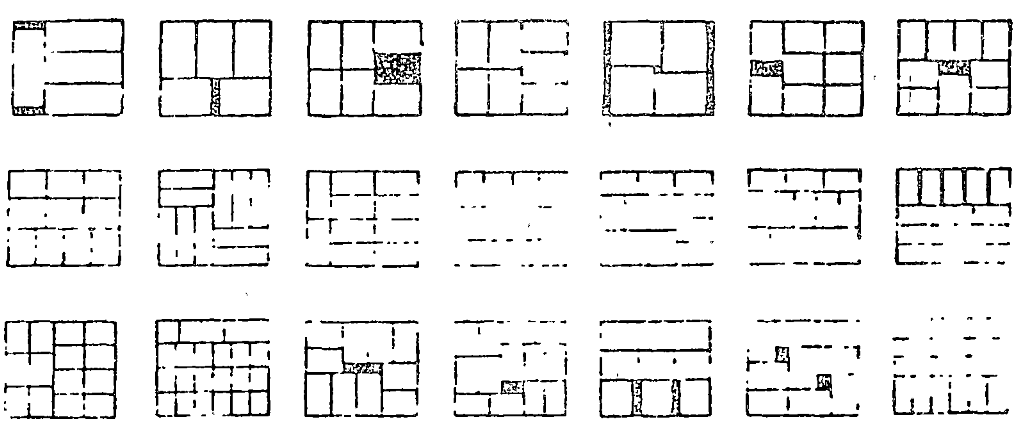
El dibujo muestra tres transportadores de acumulación transportando paquetes desde tres centros de producción diferentes. Cuando los controles de cualquiera de estas tres líneas de transportadores indiquen que una carga completa de paquetes ha sido acumulada, una señal es enviada al paletizador. Si el paletizador no está paletizando otra carga, aceptará los paquetes de la línea de acumulación que ha enviado la señal, y automáticamente contará las unidades de una carga completa. Si el paletizador está en operación al recibir la señal, ésta será registrada en la memoria hasta que la carga en proceso se haya paletizado, en cuyo momento el paletizador aceptará los paquetes de la línea de acumulación en espera.

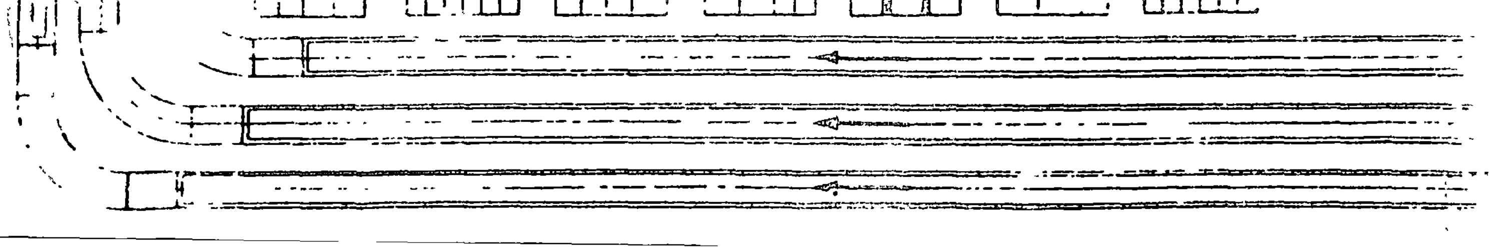
Cada producto tiene un patrón de estibo predeterminado, el cual es seleccionado automáticamente por la máquina al aceptar dicho producto. Un singular mecanismo de control permite el manejo de diferentes productos en cada línea de acumulación, asegurando que los mismos serán paletizados separadamente y sin mezclas. Si una carga completa de paquetes se ha acumulado en cada una de las tres líneas simultáneamente, éstas están diseñadas con una longitud de acumulación tal que les permite recibir la producción adicional durante el tiempo requerido en paletizar dichas líneas.

La carga completa es automáticamente descargada de la máquina. En la mayoría de los casos, la plataforma cargada es trasladada del transportador de descarga por medio de montacargas, aunque también es posible transportar la carga directamente a su punto de destino en el almacén.

POSIBLES PATRONES PARA CAJAS, BOLSAS, O FARDOS

A continuación se muestran algunos de los tantos patrones que se pueden ejecutar en el paletizador A-key. Otros innumerables patrones también pueden ser formados.





ANALISIS ECONOMICO : En el mejoramiento del manipuleo de materiales - pueden identificarse tres formas bien definidas :

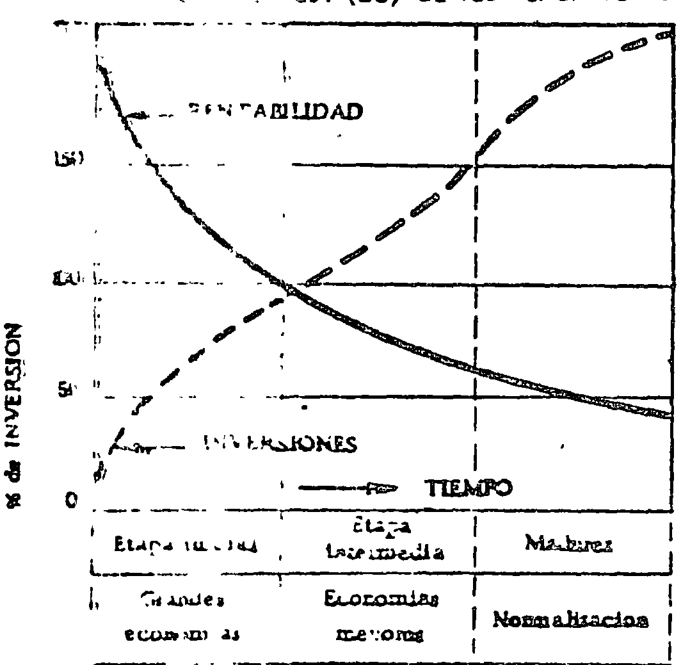
1.- Etapa Inicial

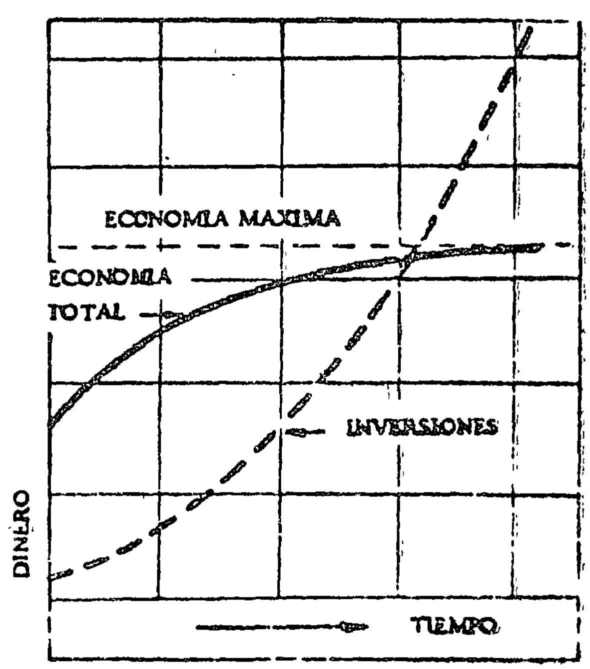
2.- Etapa Intermedia.

3.- Madurez.

Por supuesto que las líneas de división no son precisas.

En la primera etapa hay gran receptibilidad por parte de la dirección. Cambios muy simples pueden producir economías muy grandes. A medida que el programa avanza, se van estableciendo mayores metas de rentabilidad lo -- cual en general no se verifica, pues se llega al límite de los rendimientos decrecientes. (Ley de los Rendimientos Decrecientes).





La etapa inicial de gran desarrollo y rentabilidad, llega a agotarse y el programa entra en una faz intermedia en la cual los Ingenieros Industriales de-d' can mayor tiempo para obtener menores resultados siendo sus proyectos más - le' 'llados.

Al llegar a la etapa de madurez, los cambios son más limitados y específicos. En esta etapa la atención de los especialistas se centra en la normalización de equipos y métodos, mejorar el mantenimiento y las condiciones de seguridad. Es decir que todo el programa llega a límites de refinamiento, de investigación de nuevas técnicas y la incorporación de los últimos adelantos. - En todas las etapas, pero especialmente en la última es indispensable contar -- con un método uniforme, simple y confiable para que la Dirección pueda realizar las propuestas económicas. Se puede aplicar el método que veremos en selección de maquinaria en el cual se calculaban los costos totales anuales para - las alternativas. Suele disponerse también de formularios impresos como el de - la figura.

ANALISIS DEL COSTO ANUAL PARA EQUIPOS DE MANEJO DE MATERIALES

Basado en _____ dias habiles

CONCEPTO	Metodo A			Metodo B			Metodo C		
	8	16	24	8	16	24	8	16	24*
INVERSIONES									
Precio de compra del equipo									
Gastos de instalacion									
Cambios en instalaciones existentes									
Flete									
Trabajos de adaptacion									
Varios									
TOTAL DE INVERSIONES									
GASTOS FIJOS									
Depreciación (___ años)									
Intereses (___ %)									
Seguros									
Impuestos									
Supervisión									
Gastos administrativos									
Personal de mantenimiento									
Otros gastos									
TOTAL GASTOS FIJOS									
GASTOS VARIABLES									
Operarios									
Electricidad y/combustibles									
Lubricantes									
M.d.o. de mantenimiento									
Repuestos									
Otros gastos									
TOTAL GASTOS VARIABLES									
TOTAL GASTOS ANUALES									

* Horas diarias de utilizacion

UNIDADES MAG (Adaptado del Sistematic Layout Planning de Richard Muther).

En producciones diversificadas, que impliquen una apreciable variedad de materiales a transportar ni el peso ni el volumen pueden usarse como magnitudes para mediciones con fines comparativos. Por este motivo y a fin de poder realizar el planeamiento global de una disposición, antes de establecer métodos y equipos de movimiento de materiales, se ha introducido la unidad denominada MAG que mide la transportabilidad de diferentes materiales.

El concepto y la aplicación de la unidad MAG, tiene sus limitaciones y puede esperarse del sistema una precisión del orden del 20%. No está basado en investigación Científica sino que fue desarrollado en base a la experiencia de especialistas en Lay Out y Movimiento de Materiales.

Los diferentes factores que afectan la facilidad o dificultad del transporte pueden reducirse básicamente a los 6 siguientes :

A. Tamaño del elemento.

B. Densidad o estado de agregación.

C. Forma.

D. Riesgo de daño al material, personal o equipos.

E. Condiciones del elemento (limpio, aceitoso, Etc.)

F. Costo (Incluído sólo en algunos casos).

. . . ##

El peso no se incluye porque para un material dado, es proporcional al tamaño y además indicamos la densidad o estado de agregación.

El sistema que aplica la unidad MAG establece un valor básico para el tamaño, que se incremente o reduce luego, según valores que tienen en cuenta los factores mencionados anteriormente. Por definición un MAG es igual a una pieza de material que reune las siguientes condiciones.

1.- Puede tenerse cómodamente en una mano.

2.- Es razonablemente sólido.

3.- Es de forma compacta y puede apilarse.

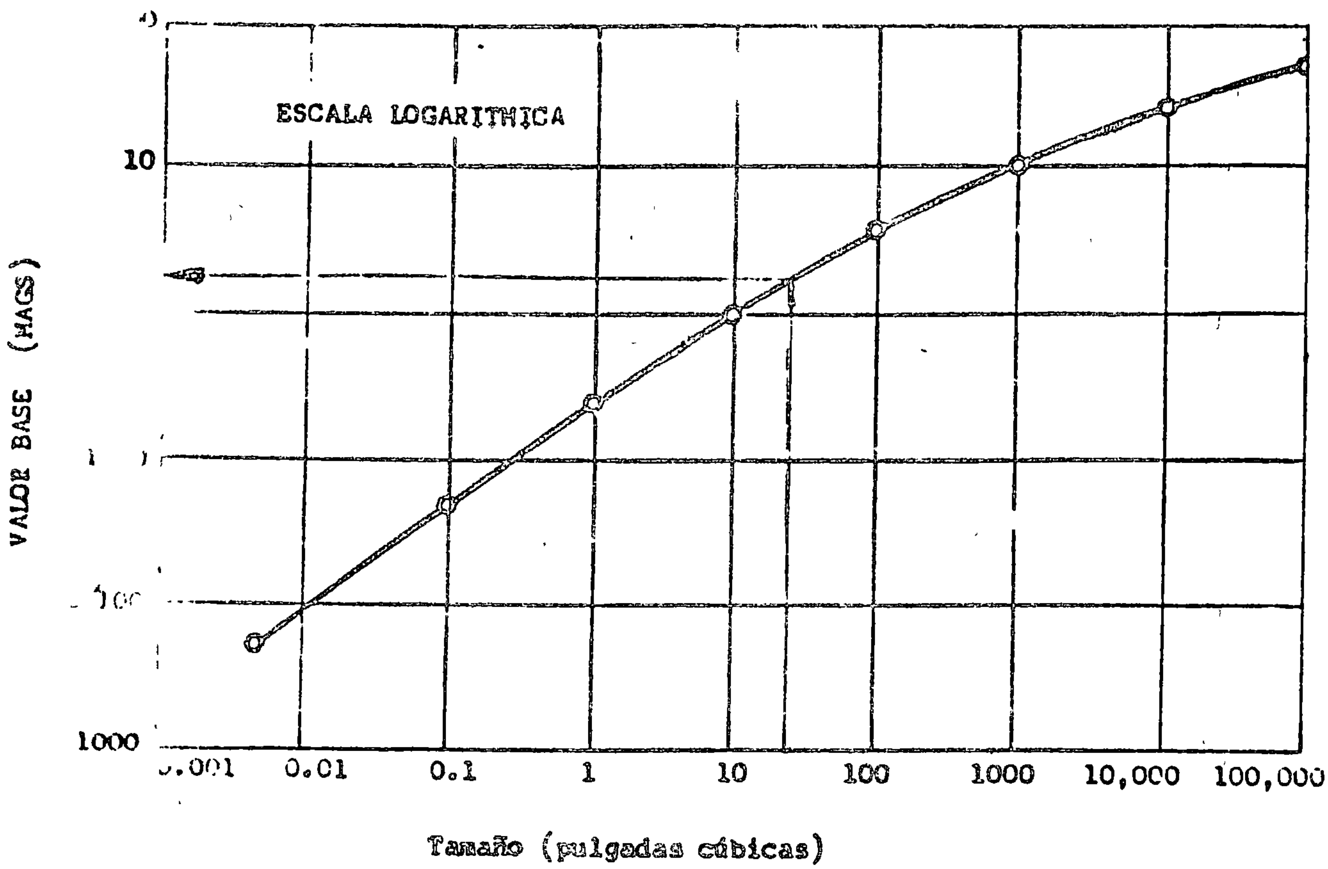
4.- Poco susceptible de ser dañado.

5.- Es razonablemente limpio, firme y estable.

Un ejemplo típico de 1 MAG es un cubo de madera seca de 10 pulgadas cúbicas de volumen.

Sobre esta base, una cajetilla de cigarros es 1/2 MAG, Etc. Para el factor A, existe un gráfico en escala logarítmica.

... ##



Puede consultarse en el libro de Richard Muther. Se observa que el valor base, no es directamente proporcional al volumen, dado que es relativamente más fácil transportar un material a medida que el volumen aumenta.

Al medir el volumen para usar este gráfico, debe tomarse las dimensiones exteriores y no restar los contornos irregulares o cavidades.

Para cualquier elemento, el número de MAGS, se calcula por la fórmula :

$$MAGS = A + 0.25A\ (B + C + D + E + F)$$

Los valores B, C, D, E, se encuentran tabulados. El factor F, no se incluye en la tabla dado que en general no lleva variaciones de transportabilidad dentro de la fábrica. No obstante si la situación requiriése considerarlo, bastaría -- con fijarse un valor cero y desarrollar la escala.

Cuando se transportan elementos planos en una pila, la unidad es la pila y no la pieza individual. Entonces se aplicarán los seis factores a la pila : debe notarse que la cantidad de MAGS puede variar mucho de una operación a la otra a pesar de que la cantidad de material no lo haga, como en operaciones de pintura, estampado, Etc.

Ejemplo : A fin de planear una nueva disposición de talleres metalúrgicos, se trató de establecer, entre otras cosas, la intensidad de movimiento de materiales. Uno de los productos, es un tapón para ruedas de automóviles. El análisis del producto es :

Def.: Tapón metálico de 12 cúbicas de volumen.

Operaciones :

1.- Corte de lámina en tiras.	2.- Estampado en prensa.
3.- Recorte.	4.- Baños galvánicos.

Producción : 200,000 piezas/año.

Determinar el número de MAGS para el movimiento de estampado a recortado (op. 2 a 3).

Del gráfico, entrando con 12 pulgadas cúbicas, obtenemos $A = 3$.

De la tabla : $B = -2 \quad C = -1 \quad D = 0 \quad E = +1$

$$\text{MAGS} = A + 0.25 \quad A\ (B + C + D + E)$$

$$= 3 + (0.25)\ (3)\ (-2\ -1\ +1) = 3 - 1.5 = 1.5 \text{ MAGS/pza.}$$

= 1.5 M/pieza y 200,000 piezas año.

Intensidad de movimiento :

= 300 000 MAGS/año.

UNIDAD UGE

GRADO	B. DENSIDAD	C. FORMA	D. RIESGO	E. CONDICION
-3	-------	Muy delgado y apilable o completamente anidable (Láminas de hierro, hojas de papel, madera terciada)	----------	- -------
-2	Muy liviano y vacío (Láminas metálicas voluminosas)	Fácilmente apilable o anidable (Bloque de papel, cacerola)	No susceptible a ningún riesgo (Chatarra)	---------
-1	Liviano y voluminoso (Cartón corrugado plegado)	Bastante apilable o ligeramente apilable (Libro, zapato)	Susceptible a muy escaso riesgo (Fundición compacta)	---------
0	Razonablemente sólido (Bloque de madera seca)	Básicamente cúbico y apilable (Bloque de madera)	Ligeramente susceptible a algún daño (Madera cortada a medida)	Limpio, firme y estable (Bloque de madera)
+1	Bastante pesado y denso (Fundición gris con cavidades)	Largo, redondo o algo irregular (Bolsa de cereal, barra corta)	Susceptible de daño por aplastamiento, rotura o raspadura (Piezas pintadas)	Aceitoso, resbaloso, inestable o incómodo de tomar (Virutas aceitadas)
+2	Pesado y denso (Fundición sólida)	Muy largo, esférico o irregular (Teléfono)	Muy susceptible a daño (Tubo de TV)	Cubierto de grasa, caliente, resbaloso o difícil de tomar
+3	Muy pesado y denso (Plomo, matriz metálica)	Muy largo, curvado, o muy irregular (Viga de acero larga)	Altamente susceptible a daños (cristales de vidriera)	(Superficies con adhesivos frescos)
+4	------	Muy largo, muy curvado o particularmente irregular (Estructura de tubos, silla de madera)	Altamente susceptible a grandes daños (Acidos en vidrio, explosivos, material radioactivo)	(Acero fundido)

LA GERENCIA DE MATERIALES.

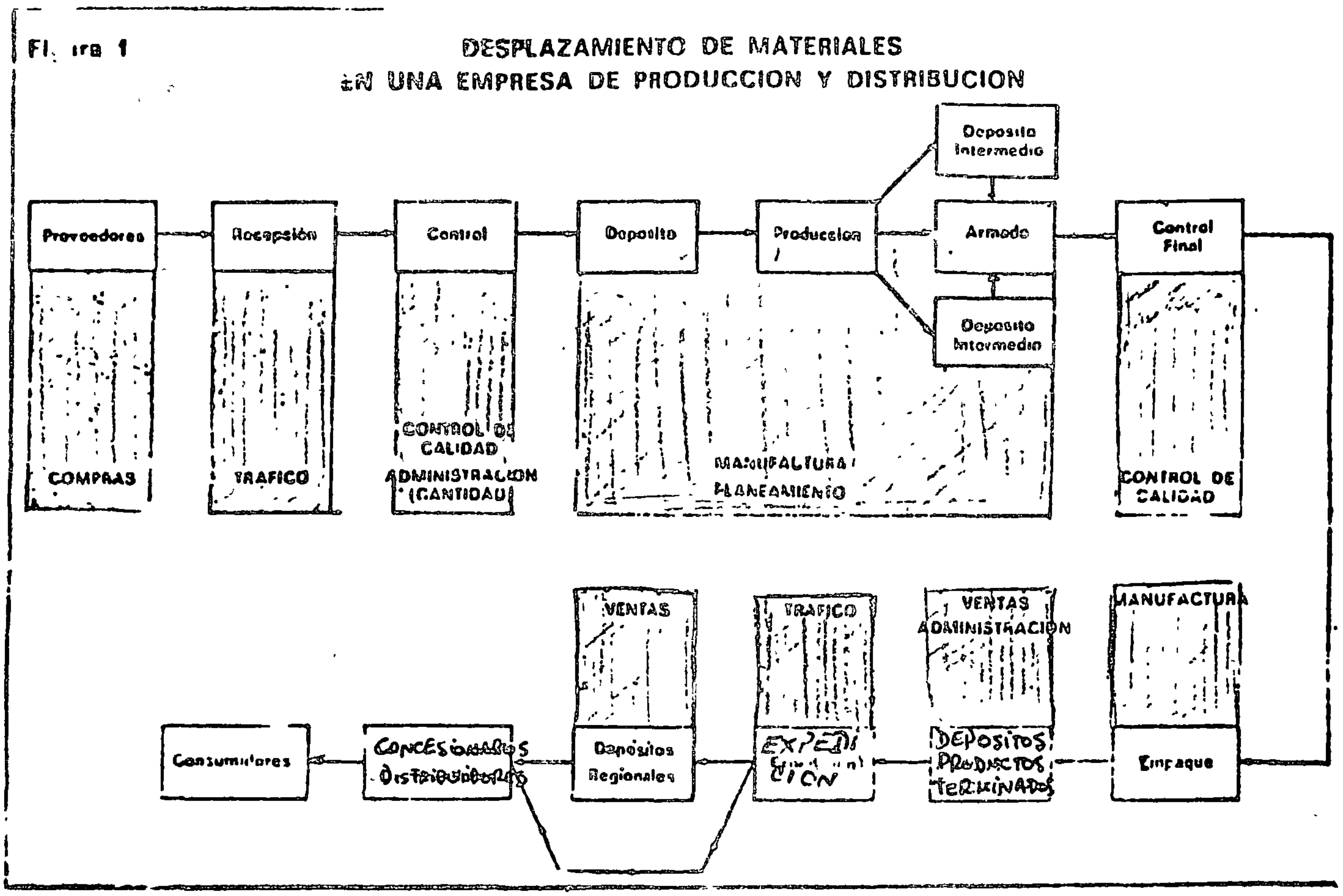
Controlar existencias y movimientos de materiales con miras a su eficiencia global, ha sido de particular interés en las grandes compañías, y adquirió jerarquía científica, con la introducción de la Investigación de Operaciones y el Procesamiento Electrónico de datos. Con relación a esas actividades, una interesante innovación se ha registrado en los últimos años. Se trata de la Gerencia de Materiales, una nueva función básica, cuyo objetivo es incrementar la rentabilidad de los capitales invertidos en materia prima, artículos en proceso y productos terminados.

Tradicionalmente la administración de materiales es confiado en forma fragmentada a diferentes áreas de la empresa, que separadamente los controlan en cantidad y calidad, organizan sus movimientos y almacenajes, Etc.

La Gerencia de Materiales, en cambio, centraliza las subfunciones y personas que planean, programan, compran y controlan materiales desde la provisión de materia prima hasta su distribución física, bajo la autoridad y responsabilidad de un ejecutivo que actúa al mismo nivel que los gerentes de producción, compras, ventas, Etc.

Ejemplo : Si se considera el desplazamiento de los materiales y las responsabilidades pertinentes en una empresa integrada de producción y distribución, tendríamos un esquema como el siguiente :

... //



Se observa que la responsabilidad sobre los materiales y sus costos asociados, está dividido en varios departamentos sin la suficiente coordinación sobre la rentabilidad total. Dado la diversidad de funciones, sub-funciones y Departamentos de la Empresa que pueden tomar decisiones, que afectan el movimiento de materiales, es necesario CONCENTRAR la responsabilidad y autoridad bajo un gerente único que puede planear, ejecutar y controlar las operaciones en su totalidad, independientemente de los intereses particulares de áreas específicas.

ASPECTOS ECONOMICOS. Dado el peso decisivo que sobre los costos del producto terminado, y el costo de inventarios, tienen los materiales, se considera actualmente, que el capital inmovilizado en ellos, debe ser objeto de un análisis científico.

El control de inventarios, consiste en mantener los lotes óptimos que resulten de la aplicación de la Investigación de Operaciones, estableciendo los límites económicos para órdenes de compra, transporte, producción y depósitos.

Una de las primeras empresas que concretó la idea de la Gerencia de Materiales fue la GOODYEAR TIRE AND RUBBER Co. que hizo una descripción de 5 puntos principales para la función :

1.- Asumir plena responsabilidad por toda la inversión en materiales a fin de satisfacer a ventas sin ser dominado por él.

2.- Coordinar con producción los lotes económicos que impidan inventarios inaceptables.

3.- Implementar las directivas financieras con respecto a los inventarios.

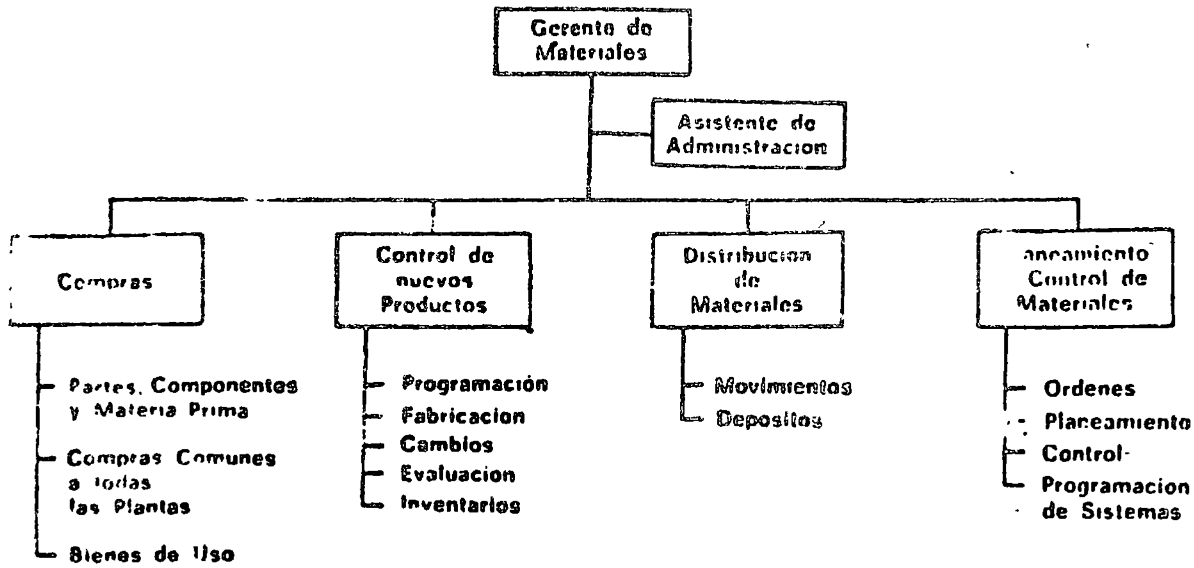
4.- Preparar pronósticos a corto plazo para control de Producción e inventarios.

5.- Considerar todos los factores estacionales y de obsolescencia referentes a los productos de la Empresa.

Posteriormente la IBM hizo una exposición más detallada de la función. Su organigrama toma la siguiente forma :

... ##

Figura 3 LA GERENCIA DE MATERIALES EN LA DATA SYSTEM DE IBM



La oficina de movimientos cubre desde la recepción hasta la expedición y distribución geográfica.

Publican una serie de resultados con este organigrama :

1.- Rotación de materiales en proceso : Aumento 55% del 60/62.

2.- Demoras en despacho de máquinas : NINGUNA.

3.- Ordenes de compra procesadas por día/hombre : Aumento 16%.

4.- Se cumplieron las metas fijadas en compras.

Otras empresas como CHAMPION, ALLIS CHALMERS, RCA, muestran cifras cuyo promedio es :

Reducción de Inventarios : 40%

Productividad por hombre : Aumento 28%

Rotación de Inversiones : Aumento 50%

... ##

TECNICAS UTILIZADAS. Aparte del cambio que se produce en la organización formal, la Gerencia de Materiales no implica ninguna novedad ya que su dinámica participa de la aplicación de técnicas conocidas y que han sido gradualmente convalidadas con la experiencia y la práctica industrial .

Dado que el campo es muy amplio, muchas son las técnicas, de eficiencia y organización que pueden aplicarse.

Dentro de ellas mencionaremos :

1o. Para inventarios — Regla 20/80, ABC, Lote Económico.
Lo que entra primero sale primero.
Lo que entra primero sale último, Etc.

2o. Costos de movimientos y almacenaje
Estudios de tiempos y métodos.
Muestreos
Programación Lineal .

3o. Análisis y Comunicaciones.
Estadística, Inv. de Operaciones.
(colas, Etc.).- Análisis Marginal .

Computación, Etc.

...//

CRITERIOS EUROPEOS

Algunas empresas han aceptado la idea de la Gerencia de materiales, aunque no todas aceptan sus consecuencias estructurales. En general se ha tratado de desarrollar y centralizar funcionalmente los aspectos tecnológicos relativos al movimiento y almacenaje de materiales más que a promover una integración económica financiera del control de los materiales. El criterio general en Europa parte de una definición de objetivos un poco diversa a la norteamericana : se considera como meta de la gerencia de materiales la reducción de costos en la recepción, almacenaje y movimiento de materiales durante el proceso y expedición. Se excluyen en casi todos los casos las actividades de compras y programación.

Iniciación de un Programa.

Dado que una reestructuración con vista a la administración integral de los materiales exige una redistribución de funciones y personas, no puede iniciarse fácilmente desde niveles inferiores de la organización. En las empresas que lo han experimentado en los últimos años, la nueva función ha debido contar con el apoyo firme de la dirección y fueron gradualmente afectando a los gerentes.

Un punto clave del nuevo esquema es la selección del ejecutivo máximo que ha de dirigirlo. De acuerdo a la experiencia, no hay una especialidad que habilite más que las otras. Hay en la actualidad gerentes de materiales que anteriormente se desempeñaban en compras, ingeniería, administración, Etc.

... ##

No obstante, y dado el nivel en que actuará, es evidente que la persona seleccionada además de ser un ejecutivo capaz, con relevantes condiciones de organización, deberá poseer experiencia o haber recibido instrucción en los siguientes campos :

1.- Movimientos de materiales.

2.- Programación y control de la producción.

3.- Compras y control de inventarios.

4.- Control de calidad.

5.- Conocimientos básicos de Ingeniería Industrial y Procesamiento -- Electrónico de datos.

Posibilidades en México. Si bien cada caso en particular indicará en qué medida las empresas puedan asimilar las experiencias extranjeras, podemos afirmar que, en general, una estructura tal como la tratada puede brindar a las empresas mexicanas considerables ventajas. Es de hacer notar, que el solo hecho de dibujar un organigrama no basta, y que los beneficios económicos financieros han de ser consecuencia de la aplicación inteligente de las técnicas de administración.

Se observa sobre todo en fábricas medianas y chicas que este tema se halla muy descuidado. La causa más frecuente es la falta de análisis por desconocimiento de las técnicas y la idea infundada de que toda racionalización exige grandes inversiones.

... //

En las empresas grandes que cuentan con una sólida infraestructura económica y humana, el cambio de estructura hacia la gerencia de materiales debe repet·· las experiencias de las empresas norteamericanas con probabilidades de obtener importantes beneficios.

Bibl ografía sobre Mov. de Materiales.

1.- Imme· Movimiento de Materiales.

2.- Material Handling Handbook. (The Ronald Press Co.)

3.- Apple James M. Material Handling System Design, Ronald, 1972.

4.- Maynard, H.B.,"Industrial Engineering Handbook", Mc Graw Hill.