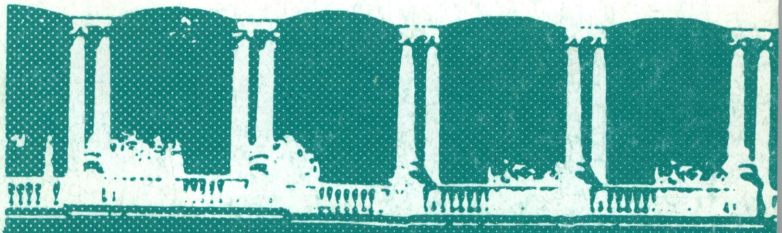
FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO



WILBERT ARCILA RODRIGUEZ
J. LINO VIDAL MACEDO

APUNTES DE ANALISIS DE CIRCUITOS ELECTRICOS

(PRIMERA PARTE)

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

WILBERT ARCILA RODRIGUEZ
J. LINO VIDAL MACEDO

APUNTES DE ANALISIS DE CIRCUITOS ELECTRICOS

(PRIMERA PARTE)

DIVISION DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE CONTROL

DERECHOS RESERVADOS © 1985, respecto a la primera edición en español
por la FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO,
Ciudad Universitaria, México 20, D.F.

APUNTES DE ANALISIS
DE CIRCUITOS ELECTRICOS (PRIMERA PARTE)

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS © 1985, respecto a la primera edición en español
por la FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO,
Ciudad Universitaria, México 20, D.F.

Impreso en México Printed in Mexico

PROLOGO

La asignatura Análisis de Circuitos Eléctricos se imparte en el sexto semestre, a los alumnos de las carreras Ingeniero Mecánico Electricista e Ingeniero en Computación.

Esta asignatura tiene como antecedente la denominada Dinámica de Sistemas Físicos. El conjunto formado por ambas materias ofrece los conocimientos básicos de la Ingeniería Eléctrica, es por ello que Análisis de Circuitos Eléctricos es, a su vez, antecedente de varias asignaturas sobre temas más específicos, como son: Máquinas Eléctricas, Transformadores y Motores de Inducción, Sistemas Eléctricos de Potencia, Comunicaciones Analógicas y Control Analógico.

La obra está dividida en dos partes, ésta, que es la primera, incluye dos unidades y dos apéndices. La primera unidad, dividida en tres módulos, se dedica a la obtención de la respuesta permanente, debida a excitaciones senoidales, de circuitos eléctricos lineales, empleando para ello la metodología de fasores; esto incluye el cálculo de la potencia eléctrica y los sistemas trifásicos. En la segunda unidad, dividida en seis módulos, se estudian los métodos para el análisis de redes eléctricas, con un enfoque sistemático, lo que permite hacerlo con la ayuda de una computadora digital.

En el apéndice A se ofrecen al estudiante conceptos básicos de números complejos. Con esto se pretende dar facilidades para cubrir la deficiencia de estos conocimientos, lo cual según nuestra experiencia, es frecuente que ocurra. El apéndice B presenta un conjunto de programas de computadora, en BASIC, para analizar redes eléctricas empleando los métodos de la unidad dos.

La segunda parte de la obra constará de las siguientes cuatro unidades: Bipuertos, con tres módulos; Circuitos en Resonancia, con dos módulos; La serie de Fourier, con tres módulos y la Integral de Fourier, también con tres módulos.

Este trabajo fue iniciado como seminario de tesis por los pasantes Víctor M. Rodríguez Reyna y José Lino Vidal Macedo, bajo mi dirección, lamentablemente el primero no pudo continuar y el segundo se encargó de la culminación del trabajo.

Deseamos manifestar nuestro agradecimiento por la activa participación del Lic. Rafael Hernández Lemus, quien no sólo se concretó a darnos asesoría pedagógica para la elaboración del material, sino que de hecho se incorporó al equipo de trabajo; no dudamos en afirmar que esto contribuyó de manera muy importante a mejorar la calidad del material, tanto en su contenido como en la presentación del mismo.

Por otro lado, estamos concientes que a pesar del esfuerzo que representaron las innumerables revisiones al manuscrito y a los originales, se podrán encontrar algunos errores u omisiones, razón por la cual ofrecemos nuestras disculpas y nos ponemos a las órdenes de los lectores para recibir comentarios y sugerencias que serán de gran utilidad, para una segunda edición corregida.

WILBERT ARCILA RODRIGUEZ.

Cd. Universitaria D.F., enero de 1985.

CONTENIDO

PROLOGO I

INSTRUCCIONES PARA EL MANEJO DEL TEXTO IX

REQUISITOS XIII

UNIDAD I RESPUESTA SENOIDAL EN ESTADO PERMANENTE DE CIRCUITOS LINEALES E INVARIANTES 1

OBJETIVO GENERAL 1

INTRODUCCION 1

MODULO 1 RESPUESTA EN REGIMEN PERMANENTE SENOIDAL 3

CUADRO SINOPTICO 3

OBJETIVOS ESPECIFICOS 3

1.1 CALCULO DE LA RESPUESTA TOTAL DE CIRCUITOS BAJO EXCITACION SENOIDAL, A TRAVES DE LA SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES 4

1.2 CONCEPTO DE FASOR 8

1.3 PROPIEDADES DEL FASOR 12

1.4 RELACIONES FASORIALES PARA LOS ELEMENTOS PASIVOS R, L, C 14

1.5 IMPEDANCIA Y ADMITANCIA COMPLEJAS 19

1.6 RESOLUCION DE CIRCUITOS LINEALES E INVARIANTES EN ESTADO SENOIDAL PERMANENTE, EMPLEANDO LOS CONCEPTOS DE FASOR, IMPEDANCIA Y ADMITANCIA . . . 26

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION 32

MODULO 2 POTENCIA Y FACTOR DE POTENCIA. 37

CUADRO SINOPTICO 37
OBJETIVOS ESPECIFICOS. 37

2.1 POTENCIA INSTANTANEA Y POTENCIA PROMEDIO. . . 38

2.2 VALORES EFICACES DE TENSION Y CORRIENTE SENOIDALES. 43

2.3 POTENCIA REAL, POTENCIA APARENTE Y FACTOR DE POTENCIA. 45

2.4 POTENCIA COMPLEJA Y TRIANGULO DE POTENCIAS . 51

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION. 66

MODULO 3 CIRCUITOS TRIFASICOS 73

CUADRO SINOPTICO. 73
OBJETIVOS ESPECIFICOS. 73

3.1 VOLTAJES EN UN ALTERNADOR TRIFASICO 74

3.2 SECUENCIAS DE FASE POSITIVA Y NEGATIVA. VOLTAJES Y CORRIENTES DE LINEA Y DE FASE. ALTERNADOR CONECTADO EN ESTRELLA. 75

3.3 CIRCUITOS TRIFASICOS BALANCEADOS. 86

3.4 POTENCIA EN CIRCUITOS TRIFASICOS BALANCEADOS. . 91

3.5 CIRCUITOS TRIFASICOS DESBALANCEADOS 97

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION. 100

BIBLIOGRAFIA 105

UNIDAD II METODOS GENERALES DE ANALISIS DE REDES 106

OBJETIVO GENERAL. 106
INTRODUCCION. 106

MODULO 4 TRANSFORMACIONES DE FUENTES. 107

CUADRO SINOPTICO. 107
OBJETIVOS ESPECIFICOS 107

4.1 TRANSFORMACION DE FUENTES DE VOLTAJE A FUENTES DE CORRIENTE Y VICEVERSA. 108

4.2 ELEMENTOS CON CONDICIONES INICIALES 111

4.3 MODIFICACION DE REDES QUE TIENEN FUENTES IDEALES DE VOLTAJE. 113

4.4 MODIFICACION DE REDES QUE TIENEN FUENTES IDEALES DE CORRIENTE. 116

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION 119

MODULO 5 TEORIA ELEMENTAL DE GRAFICAS 127

CUADRO SINOPTICO. 127
OBJETIVOS ESPECIFICOS. 127

5.1 CONCEPTO DE GRAFICA 128

5.2 GRAFICA ORIENTADA 129

5.3 CONCEPTOS RELACIONADOS CON LAS GRAFICAS 132

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION. 138

MODULO 6 METODO DE ANALISIS DE NODOS 143

CUADRO SINOPTICO. 143
OBJETIVOS ESPECIFICOS. 143

6.1 MATRIZ DE INCIDENCIA Y LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF. 144

6.2 LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF EN FORMA MATRICIAL. 146

6.3 RAMA GENERAL CON DOS FUENTES Y UNA ADMITANCIA. 148

6.4 ECUACION MATRICIAL DE NODOS 150

6.5 METODO BREVE PARA OBTENER LAS ECUACIONES DE NODOS. 162

6.6 RESUMEN DEL METODO DE ANALISIS POR NODOS. . . . 169

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION. 172

MODULO 7 METODO DE ANALISIS POR MALLAS. 177

CUADRO SINOPTICO. 177

OBJETIVOS ESPECIFICOS 177

7.1 MATRIZ DE MALLAS Y LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF. 178

7.2 LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF Y CORRIENTES DE MALLA. 180

7.3 RAMA GENERAL CON DOS FUENTES Y UNA IMPEDANCIA. . 181

7.4 ECUACION MATRICIAL DE MALLAS. 183

7.5 METODO BREVE PARA DETERMINAR LAS ECUACIONES DE MALLA. 197

7.6 RESUMEN DEL METODO DE ANALISIS POR MALLAS. . . . 202

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION. 205

MODULO 8 METODO DE ANALISIS POR LAZOS. 211

CUADRO SINOPTICO. 211

OBJETIVOS ESPECIFICOS 211

8.1 FORMACION DE LAZOS FUNDAMENTALES 212

8.2 MATRIZ DE LAZOS FUNDAMENTALES. 213

8.3 LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF Y CORRIENTES DE LAZO 214

8.4 ECUACION MATRICIAL DE LAZOS FUNDAMENTALES. . . . 217

8.5 RELACION ENTRE EL METODO DE MALLAS Y EL METODO DE LAZOS. 219

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION. 224

MODULO 9 METODO DE ANALISIS POR SECCIONES DE CORTE. 231

CUADRO SINOPTICO. 231

OBJETIVOS ESPECIFICOS 231

9.1 FORMACION DE SECCIONES DE CORTE FUNDAMENTALES. . 232

9.2 MATRIZ DE SECCIONES DE CORTE FUNDAMENTALES. . . . 233

9.3 LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF Y VOLTAJES DE RAMAS DE ARBOL. 234

9.4 ECUACION MATRICIAL DE SECCION DE CORTE FUNDAMENLES. 237

9.5 RELACION ENTRE EL METODO DE NODOS Y EL METODO DE SECCIONES DE CORTE. 241

9.6 COMENTARIOS SOBRE LOS METODOS SISTEMATICOS DE ANALISIS DE REDES. 243

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION. 245

BIBLIOGRAFIA 251

SOLUCION AL CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION. 253

APENDICE A 273

APENDICE B. 285

ABREVIATURAS 341

INDICE ANALITICO 343

INSTRUCCIONES PARA EL MANEJO DEL TEXTO

LA ESTRUCTURA DEL LIBRO

El texto ha sido concebido pensando, sobre todo, en los estudiantes que no tienen oportunidad de asistir regularmente a un curso. De tal manera, proporciona por sí solo los elementos básicos para un aprendizaje adecuado en el estudio independiente.

La obra se divide en dos partes. Tiene usted en sus manos la primera, y ambas están constituidas por grandes bloques de contenido denominados UNIDADES temáticas.

Cada unidad temática tiene un OBJETIVO GENERAL de aprendizaje que se debe alcanzar con el estudio de la unidad completa; una INTRODUCCION que sintetiza el contenido y su utilidad.

Todas las unidades están constituidas por bloques de contenido más pequeños, llamados MODULOS.

Cada módulo aborda un tema específico y de menor extensión que el de las unidades. Contiene elementos didácticos y actividades de aprendizaje que lo conforma como bloque de aprendizaje independiente.

Un módulo presenta al inicio un CUADRO SINOPTICO que proporciona una idea general de su contenido. También aparecen los OBJETIVOS ESPECIFICOS del módulo, que le indican lo que se espera de usted al finalizar dicho estudio.

Se ha pretendido desarrollar el contenido de cada módulo en una forma clara y sencilla, incluyendo la solución detallada de los ejemplos allí presentados.

Como una manera de destacar las ideas, conceptos o experiencias más importantes en el desarrollo de cada módulo, se incorporan los lla-

mados INDICADORES ESPECIFICOS. Aparecen en el margen derecho de las páginas llamando la atención sobre algún aspecto importante y facilitan su posterior localización.

Al final de cada módulo se encuentra un CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION, que pretende indicarle su grado de avance en el aprendizaje; es decir, señalarle en qué medida se lograron los objetivos específicos de aprendizaje del módulo. Las respuestas a los cuestionarios de autoevaluación se encuentran después de la Unidad II.

Antes de comenzar la Unidad I se localiza una sección denominada REQUISITOS. En ella se le indican los conocimientos que debe poseer para el mejor aprovechamiento del texto.

RECOMENDACIONES PARA EL USO DEL TEXTO

La estructura de la obra sigue los principios didácticos de los sistemas abiertos de enseñanza, lo que permite el desarrollo de un estudio independiente más eficiente. Sin embargo, es necesario atender una serie de indicaciones para facilitar dicho estudio, y lograr los objetivos de aprendizaje establecidos en el texto.

LEA ATENTAMENTE LOS OBJETIVOS

La primera recomendación es leer atentamente los objetivos, tanto generales como específicos de cada unidad y módulo. Esto le dará una idea precisa de lo que se pretende lograr con el estudio de cada módulo y de cada unidad.

El conocimiento de los objetivos le ayudará a ubicar el alcance de su estudio y a evaluar por sí mismo el nivel de su aprendizaje. La evaluación tiene sentido cuando se sabe lo que se va a evaluar; por lo tanto, si usted conoce lo que va a lograr con su estudio, a través de los objetivos de aprendizaje, le será más fácil evaluar objetivamente su avance.

También es recomendable que lea la Introducción a la Unidad y que observe con atención los cuadros sinópticos con los que se inicia cada módulo. Son de gran ayuda cuando se recurre a ellos una vez

finalizado el estudio del módulo, pues presenta una síntesis que puede ser confrontada con la visión global que obtuvo del tema.

ESTUDIE LOS MODULOS SECUENCIALMENTE

Comience el estudio con el módulo uno y continúe con el siguiente sólo hasta que lo haya dominado; es decir, hasta que haya logrado alcanzar los objetivos específicos. Efectúe el estudio observando con cuidado el desarrollo del contenido, y preste especial atención a la forma en que se solucionan los problemas de los ejemplos. Inmediatamente después trate de resolverlos sin recurrir al texto.

Es probable que, dada su experiencia, ya conozca o domine el contenido de uno o más módulos. En tal sentido, no estaría demás un repaso y comprobar su nivel de dominio del tópico en cuestión. Para lo último, le ayudará el cuestionario de autoevaluación.

RESUELVA EL CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

Una vez efectuado el estudio del módulo, proceda a contestar el cuestionario de autoevaluación.

Este es un elemento de enorme importancia en el texto, pues a través de él podrá darse cuenta del grado de avance en su aprendizaje y tener la oportunidad de retroalimentar aquellos aspectos en los que no se haya logrado el aprendizaje deseado.

Responda lo que se le pide en el cuestionario y verifique sus respuestas sólo hasta haber contestado, al menos, la sección en la que se encuentre. No consulte las respuestas sino hasta después de haber tratado de responder.

En caso de que tenga dificultades para contestar o sus respuestas hayan sido erróneas, estudie nuevamente el módulo o la parte del módulo correspondiente y vuelva otra vez a contestar el cuestionario.

Como puede ver, la autoevaluación es un elemento que sirve para retroalimentar su estudio y le permite ejercitar lo aprendido.

ANOTE SUS DUDAS Y DESPUES CONSULTE A SU ASESOR

Si durante el estudio de un módulo, se le presenta alguna duda, anótela en el cuaderno dedicado a la asignatura que cubra el texto. Trate de resolver la duda recurriendo a su compeñero de estudio o trabajo, o bien a la bibliografía que aparece al final de la unidad correspondiente. En el caso de que esto no resulte satisfactorio, recurra a su asesor; con seguridad le resolverá su duda. Pero es importante que recurra a él sólo hasta haber agotado otros recursos disponibles. Con ello se pretende evitar lo más posible la nociva dependencia del profesor.

No olvide que todos y cada uno de los elementos didácticos del texto tienen como finalidad optimizar su aprendizaje. Por tal razón, es muy importante que siga las recomendaciones que le hacemos. Le aseguramos que de llevarlas a cabo, sus resultados serán muy satisfactorios.

REQUISITOS

Para lograr un mejor aprovechamiento y alcanzar los objetivos de aprendizaje establecidos en el texto, es necesario contar con algunos conocimientos previos. Estos son muy importantes pues se convierten en antecedentes necesarios para adquirir nuevos conocimientos. Dicho de otra manera, son los REQUISITOS imprescindibles para el óptimo aprovechamiento del texto. De hecho, los planes de estudio establecen los requisitos para cada asignatura, indicando las materias que se deben acreditar previamente; sin embargo, consideramos muy útil señalar, de manera más específica, los requisitos del curso.

Con el fin de saber si usted ya posee los requisitos, hemos elaborado un cuestionario donde se le pregunta el grado de dominio de determinados conocimientos. Para contestarlo, subraye el nivel de dominio que posea sobre el conocimiento en cuestión.

CUESTIONARIO

1. Resolución de una ecuación diferencial, lineal, de coeficientes constantes, no homogénea.
   Excelente Bueno Regular Deficiente

2. Uso de la transformada de Laplace para la solución de ecuaciones diferenciales lineales.
   Excelente Bueno Regular Deficiente

3. Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales.
   Excelente Bueno Regular Deficiente

4. Operaciones con números complejos.
   Excelente Bueno Regular Deficiente

5. Operaciones con matrices.
   Excelente Bueno Regular Deficiente

6. Solución de ecuaciones matriciales.
   Excelente Bueno Regular Deficiente

7. Cálculo de integrales definidas e integrales impropias.
   Excelente Bueno Regular Deficiente

8. Planteamiento de la ecuación diferencial de un circuito lineal invariante de 2° orden.
   Excelente Bueno Regular Deficiente

9. Descomposición de la respuesta de un circuito lineal de 2° orden en sus partes permanente, transitoria, libre y forzada.
   Excelente Bueno Regular Deficiente

Le recordamos repasar los temas correspondientes a los incisos en los que haya subrayado los niveles REGULAR o DEFICIENTE. Para ello le proporcionamos en seguida la bibliografía para cada tema.

1. Resolución de una ecuación diferencial, lineal, de coeficientes constantes, no homogénea.
   García, M.P.; de la Lanza E.C. *Apuntes de ecuaciones diferenciales y en diferencias*. Facultad de Ingeniería. UNAM, 1982.

2. Transformada de Laplace.
   García, M.P.; de la Lanza E.C. *Apuntes de ecuaciones diferenciales y en diferencias*. Facultad de Ingeniería. UNAM, 1982.

3. Sistemas de ecuaciones diferenciales.
   García, M.P.; de la Lanza E.C. *Apuntes de ecuaciones diferenciales y en diferencias*. Facultad de Ingeniería. UNAM, 1982.

4. Números complejos. Apéndice A de esta obra.
   Solar, E.; Speziale, L. *Apuntes de álgebra*. Facultad de Ingeniería. UNAM, 1981.

5. Matrices.
   Solar, E.; Speziale, L. *Apuntes de álgebra*. Facultad de Ingeniería. UNAM, 1981.

6. Ecuaciones matriciales.
Solar, E.; Speziale, L. *Apuntes de álgebra*. Facultad de Ingeniería. UNAM, 1981.

7. Cálculo integral.
Andrade, A. *et. al.*
Apuntes de cálculo diferencial e integral. Facultad de Ingeniería. UNAM, 1982.

8. Circuitos de segundo orden.
Canon. *Dynamics of Physical Systems*. McGraw-Hill. New York. 1965.
Desoer, Ch.; Kuh, E. *Basic Circuit Theory*. McGraw-Hill Kogakusha, Tokio, 1969.

9. Respuesta de un circuito lineal de segundo orden.
Canon. *Dynamics of Physical Systems*. McGraw-Hill. New York. 1965.
Desoer, Ch.; Kuh, E. *Basic Circuit Theory*. McGraw-Hill Kogakusha, Tokio, 1969.

UNIDAD I RESPUESTA SENOIDAL EN ESTADO PERMANENTE DE CIRCUITOS LINEALES E INVARIANTES

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el estudio de esta unidad, el alumno:

Aplicará métodos de solución para calcular las respuestas y parámetros principales de circuitos y sistemas lineales invariantes que actúan bajo una excitación senoidal en estado permanente, tomando como elemento de partida el concepto de fasor.

INTRODUCCION

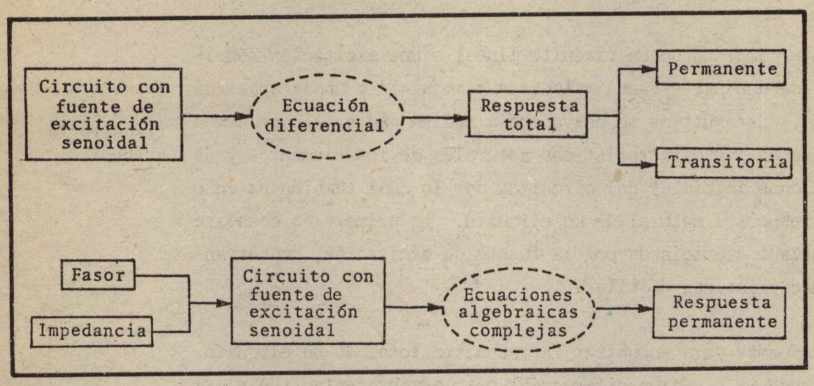
Una de las razones principales para estudiar el régimen permanente senoidal, es que la mayor parte de la energía eléctrica utilizada en aparatos industriales y electrodomésticos, se transmite a través de circuitos de corriente senoidal (corriente alterna). El análisis de este tipo de circuitos se realiza con base en un desarrollo que consiste en representar una función excitatriz senoidal o una respuesta senoidal por medio de una notación en números complejos, llamada fasor. Este especifica la información más importante de una senoide y por lo tanto la caracteriza completamente. Trabajando con fasores en vez de hacerlo con derivadas e integrales de senoide, el análisis senoidal permanente se simplifica enormemente.

Se presentará también el estudio de la potencia suministrada por una fuente o consumida por un circuito; se introducirá el concepto de potencia compleja y se estudiará la importancia de las características de la carga, las que influyen de una manera determinante en los aspectos práctico y económico de la distribución de la energía eléctrica.

Por último, siendo los sistemas trifásicos los más utilizados en la transmisión de energía eléctrica se hace indispensable efectuar el estudio de algunos aspectos elementales de los mismos, como la potencia generada o consumida, el tipo de conexión que presentan; la distribución proporcional de la carga en cada fases, las relaciones existentes entre los parámetros entre fase y los parámetros entre líneas, etc.

MODULO 1 RESPUESTA EN REGIMEN PERMANENTE SENOIDAL

CUADRO SINOPTICO



OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Resolverá circuitos en estado permanente senoidal, empleando en su ecuación diferencial el concepto de fasor y sus propiedades.
2. Obtendrá la impedancia y admitancia de los elementos pasivos de un circuito.
3. Distinguirá la diferencia en el comportamiento de los elementos R, L y C en estado permanente senoidal.
4. Calculará la respuesta permanente de circuitos empleando los conceptos de fasor, impedancia y admitancia.

1.1 CALCULO DE LA RESPUESTA TOTAL DE CIRCUITOS BAJO EXCITACION SENOIDAL, A TRAVES DE LA SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES

La respuesta completa de un circuito lineal a una excitación senoidal consta de dos partes: una *respuesta permanente* y una *respuesta transitoria*. Esta última se desvanece a medida que el tiempo aumenta y depende de las características naturales de los elementos y de las condiciones iniciales del circuito, por lo cual también es conocida como respuesta natural de un circuito. La primera no desaparece y es forzada u originada por la fuente de excitación, conservando las características de ella.

Respuesta permanente o forzada
transitoria
natural

Una de las formas para encontrar la respuesta total de un circuito es resolviendo la ecuación diferencial que lo representa. En el siguiente ejemplo se muestra cómo se obtienen estos dos tipos de respuesta.

Ejemplo 1.1

Obtenga la respuesta $v_C(t)$ total (transitoria y permanente) del circuito RLC en serie, representado en la figura 1.1.

$e(t) = \frac{13}{8} \cos t \ \ V$

$i_L(0) = 8 \ \ A$

$v_C(0) = 0$

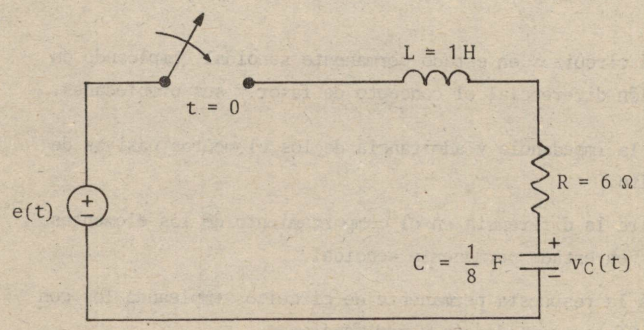


Figura 1.1

Solución

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff tenemos

$$v_L + v_R + v_C = e(t)$$

y como

$$v_R = R\, i_L$$

$$v_L = R \frac{di_L}{dt}$$

entonces

$$L \frac{di_L}{dt} + R\, i_L + v_C = e(t)$$

pero como

$$i_R = i_L = i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

entonces

$$LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = e(t)$$

Sustituyendo valores

$$\frac{1}{8} \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{6}{8} \frac{dv_C}{dt} + v_C = \frac{13}{8} \cos t \qquad \text{(a)}$$

La ecuación diferencial (a) es la que representa al circuito, y de ella se obtiene una solución de la forma:

$$v_{C\ TOTAL} = \underbrace{v_{C\ h}}_{\substack{\text{solución} \\ \text{homogénea}}} + \underbrace{v_{C\ p}}_{\substack{\text{solución} \\ \text{particular}}}$$

Solución homogénea

La respuesta transitoria se obtiene mediante la solución homogénea de la ecuación diferencial (a). Se parte de:

$$\frac{1}{8}\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{6}{8}\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$$

multiplicando por 8

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + 6\frac{dv_C}{dt} + 8V_C = 0$$

cuya ecuación característica es

$$m^2 + 6m + 8 = 0$$

resolviendo

$$m_1 = -2$$
$$m_2 = -4$$

y como la solución de una ecuación diferencial homogénea de orden n es

$$v_{Ch} = K_1e^{-m_1t} + K_2e^{-m_2t} + \ldots + K_ne^{-m_nt}$$

entonces

$$v_{Ch} = K_1e^{-2t} + K_2e^{-4t}$$

que es la expresión que representa a la respuesta transitoria con las constantes K_1 y K_2 aún sin determinar.

Solución particular

La *respuesta permanente* se obtiene encontrando la *solución particular*. Por ser la fuente de tipo senoidal, esta solución será de la forma:

$$v_{Cp} = A \operatorname{sen} t + B \cos t \qquad (b)$$

La determinación de las constantes A y B se efectúa sustituyendo la solución (b) en la ecuación del circuito (a); por lo tanto tenemos:

$$\frac{1}{8}\frac{d^2}{dt^2}(A \text{ sen } t + B \cos t) + \frac{6}{8}\frac{d}{dt}(A \text{ sen } t + B \cos t) +$$

$$A \text{ sen } t + B \cos t = \frac{13}{8} \cos t$$

Eliminando denominadores y derivando

$$- A \text{ sen } t - B \cos t + 6 A \cos t - 6 B \text{ sen } t +$$

$$8 A \text{ sen } t + 8 B \cos t = 13 \cos t$$

factorizando

$$(-A -6B +8A)\text{sen } t + (-B +6A +8B -13)\cos t = 0$$

de donde

$$7A - 6B = 0 \qquad (c)$$

$$7B + 6A - 13 = 0 \qquad (d)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (c) y (d)

$$A = 0.92$$

$$B = 1.07$$

La respuesta total será de la forma

$$V_{C\ TOTAL} = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-4t} + 0.92\text{sen } t + 1.07\cos t \qquad (e)$$

derivando (e), tenemos

$$\frac{dv_C}{dt} = -2K_1 e^{-2t} - 4K_2 e^{-4t} + 0.92\cos t - 1.07\text{sen } t \qquad (f)$$

Para obtener $i_L = i_C = C\frac{dv_C}{dt}$, multiplicamos (f) por 1/8

$$i_L = -0.25\, K_1 e^{-2t} - 0.5K_2 e^{-4t} + 0.12\cos t - 0.13\text{sen } t \qquad (g)$$

Evaluando (e) y (g) en t = 0 y sustituyendo las condiciones iniciales en las mismas, llegamos a:

$$v_C(0) = 0 = K_1 + K_2 + 1.07 \qquad (h)$$

$$i_L(0) = 8 = -0.25K_1 - 0.5K_2 + 0.12 \qquad (i)$$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones (h) e (i)

$$K_1 = 29.38$$
$$K_2 = -30.45$$

por lo tanto

$$v_{C_{TOTAL}}(t) = \underbrace{29.38e^{-2t} - 30.45e^{-4t}}_{\text{Transitoria}} \underbrace{+0.92\text{sen } t + 1.07\cos t}_{\text{Permanente}}$$

1.2 CONCEPTO DE FASOR

En el inciso anterior utilizamos un método poco práctico para calcular la respuesta más importante de un circuito: la permanente. Ahora encontraremos una forma de representar las funciones excitatrices senoidales mediante cantidades complejas llamadas *fasores*; este tipo de representación facilitará los cálculos para determinar el tipo de respuesta mencionado anteriormente.

Una corriente o tensión senoidal está caracterizada por tres parámetros: amplitud, velocidad angular y ángulo de fase. Consideremos, por ejemplo, un voltaje senoidal del tipo:

$$v(t) = V_m\cos(\omega t+\phi)$$

donde

V_m es la amplitud
ω es la frecuencia angular y
ϕ es el ángulo de defasamiento

Ahora bien, usando la *identidad de Euler*[1] podemos descomponer al número complejo $V_m e^{j(\omega t+\phi)}$ en dos partes, una real y otra imaginaria, de la siguiente manera:

$$V_m e^{j(\omega t+\phi)} = \underbrace{V_m \cos(\omega t+\phi)}_{\text{parte real}} + \underbrace{jV_m \operatorname{sen}(\omega t+\phi)}_{\text{parte imaginaria}}$$

Aquí se observa que la parte real del complejo $V_m e^{j(\omega t+\phi)}$ es $v(t)$; es decir:

$$v(t) = \text{Re}\left[V_m e^{j(\omega t+\phi)}\right]$$

ó

$$v(t) = \text{Re}\left[V_m e^{j\omega t} e^{j\phi}\right]$$

Si en la expresión anterior, a la cantidad compleja $V_m e^{j\phi}$ le llamamos *fasor* V, o sea:

Fasor

$$\boxed{V = V_m e^{j\phi}}$$

entonces

$$v(t) = \text{Re}\left[Ve^{j\omega t}\right]$$

Se puede observar que el número complejo V contiene toda la información referida a la amplitud (V_m) y al ángulo de fase (ϕ) de la senoide.

Ahora bien, como la respuesta senoidal se debe a la fuente de excitación, la velocidad angular de ambas es la misma. Así, podemos afirmar que ω no variará y todos los términos que contengan esta variable resultarán redundantes en los cálculos de las soluciones de las ecuaciones que representan al circuito; podemos decir que conociendo la amplitud y la fase de la señal, ésta podrá ser representada fielmente. En otras palabras, conociendo el fasor de la señal, sabremos las características de la misma.

[1] En el apéndice A se incluye la identidad de Euler.

El fasor $\mathbf{V} = V_m e^{j\phi}$ se puede escribir en forma polar como sigue:

$$\mathbf{V} = V_m \angle \phi$$

Asimismo, una corriente del tipo $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ se puede expresar en la forma fasorial:

$$\mathbf{I} = I_m e^{j\phi} = I_m \angle \phi$$

La representación gráfica de cualquier fasor en el plano complejo (figura 1.2) se puede realizar mediante una recta dirigida que se mueve con una velocidad angular ω en sentido antihorario, que parte del origen de dicho plano.

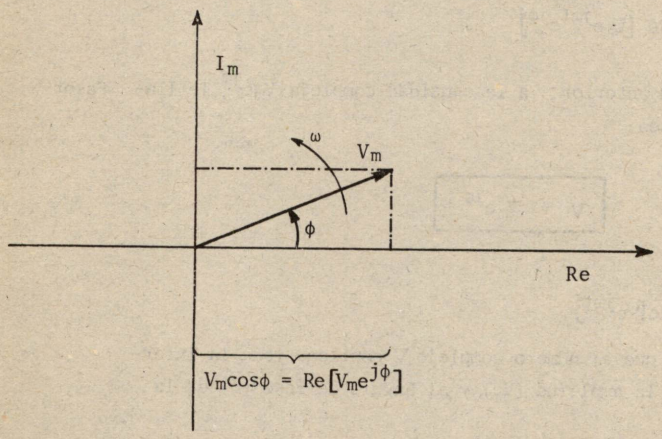


Figura 1.2 Representación de un fasor en el plano complejo.

Debemos señalar que *un fasor es la representación en números complejos de una señal senoidal que originalmente se encuentra en el dominio del tiempo*. Por ser el fasor un número complejo, se denota con letras mayúsculas y remarcadas.

Ejemplo 1.2
Dada la función $v(t) = 50 \operatorname{sen}(300t - 60°)$, determine el fasor **V** de dicha función.

Solución

Como v(t) no está en forma de onda coseno con un ángulo de fase, primero se debe escribir en esos términos.

Recordemos que

$$\text{sen } \omega t = \cos(\omega t - 90°)$$

entonces

Transformación de una onda senoidal en el dominio del tiempo a fasor

$$v(t) = 50 \text{ sen}(300t - 60°)$$
$$= 50 \cos(300t - 60° - 90°)$$
$$= 50 \cos(300t - 150°)$$

de donde

$$V_m = 50; \quad \phi = -150°$$

por lo tanto

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = 50e^{-j150°} = 50\angle -150°$$

El proceso inverso, o sea, la transformación de un fasor a una onda senoidal en el dominio del tiempo se ilustra en el siguiente ejemplo.

Transformación de un fasor a una onda senoidal en el dominio del tiempo

Ejemplo 1.3

Dado el fasor $\mathbf{I} = 5\angle -135°$, determine la onda senoidal en el dominio del tiempo a la que representa.

Solución

Como $I_m = 5$ y $\psi = -135°$

entonces

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi) = 5\cos(\omega t - 135°)$$

ó

$$i(t) = 5\text{sen}(\omega t - 45°)$$

1.3 PROPIEDADES DEL FASOR

Conviene recordar que las partes reales de las funciones complejas cumplen con las propiedades de aditividad y homogeneidad; es decir:

$$\mathrm{Re}[G_1 + G_2] = \mathrm{Re}[G_1] + \mathrm{Re}[G_2] \quad \text{propiedad de aditividad}$$

$$\mathrm{Re}[\alpha G_1] = \alpha \mathrm{Re}[G_1] \quad \text{propiedad de homogeneidad}$$

Propiedades de las partes reales de los números complejos

donde

α es un número real
G_1 y G_2 son funciones complejas

Por otro lado, si consideramos el fasor $\mathbf{I} = I_m e^{j\phi}$, se cumple que

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Re}\left[\mathbf{I}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\mathbf{I}e^{j\omega t}\right] \qquad (1.1)$$

y también que

$$\mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\mathbf{I}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[j\omega \mathbf{I}e^{j\omega t}\right] \qquad (1.2)$$

De la primera igualdad (1.1) se puede afirmar que la derivada y la parte real se conmutan. De la igualdad (1.2) se puede concluir que la derivada de $\mathbf{I}e^{j\omega t}$ con respecto al tiempo sólo implica multiplicar por $j\omega$.

Apliquemos las propiedades de las partes reales de las funciones complejas y el concepto de fasor para obtener la respuesta permanente, encontrando la solución particular de la ecuación diferencial que representa a un circuito.

Ejemplo 1.4

Considere el circuito de la figura 1.3. Si es excitado por una senoide del tipo $v(t) = V_m\cos(\omega t + \phi)$, determine la corriente $i(t)$, como respuesta permanente.

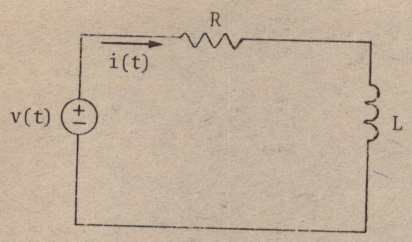


Figura 1.3

Solución

La ecuación diferencial del circuito es:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t) \qquad \text{(a)}$$

La solución particular tendrá que ser senoidal y puede calcularse usando fasores:

$$\left.\begin{aligned} v(t) &= V_m\cos(\omega t + \phi) = \text{Re}\left[Ve^{j\omega t}\right] \\ i(t) &= I_m\cos(\omega t + \psi) = \text{Re}\left[Ie^{j\omega t}\right] \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

donde

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi}$$

$$\mathbf{I} = I_m e^{j\psi}$$

Sustituyendo las ecuaciones (b) en (a)

$$L\frac{d}{dt}\left\{\text{Re}\left[Ie^{j\omega t}\right]\right\} + R\,\text{Re}\left[Ie^{j\omega t}\right] = \text{Re}\left[Ve^{j\omega t}\right]$$

o sea

$$L\,\text{Re}\left[j\omega Ie^{j\omega t}\right] + R\,\text{Re}\left[Ie^{j\omega t}\right] = \text{Re}\left[Ve^{j\omega t}\right]$$

factorizando

$$\text{Re}\left[Ie^{j\omega t}(R + j\omega L)\right] = \text{Re}\left[Ve^{j\omega t}\right]$$

y comparando los dos miembros de la igualdad se llega a

$$I(R + j\omega L) = V$$

de donde

$$I = \frac{V}{R+j\omega L}$$

Si damos los siguientes valores

$R = 4\ \Omega$
$L = 2\ H$
$v(t) = 20\cos(2t + 30°)$ o $V = 20\angle 30°$

tendremos que

$$I = \frac{20\angle 30°}{4+j4} = \frac{20\angle 30°}{\sqrt{32}\angle 45°} = 3.53\angle -15°$$

ó

$$i(t) = 3.53\cos(2t - 15°)$$

1.4 RELACIONES FASORIALES PARA LOS ELEMENTOS PASIVOS R, L, C

Las relaciones fasoriales para los elementos pasivos se pueden obtener a partir de las relaciones tensión-corriente en el dominio del tiempo de cada elemento, con la ayuda de la transformación fasorial y de algunas propiedades que presentan los números complejos.

La relación tensión-corriente en el dominio del tiempo para la resistencia está dada por:

$$v(t) = Ri(t)$$

Los fasores correspondientes de voltaje y corriente son $\mathbf{V} = V_m\angle\phi$ e $\mathbf{I} = I_m\angle\phi$ respectivamente, y por lo tanto la relación fasorial que se obtiene es:

$$\boxed{\mathbf{V} = R\mathbf{I}} \qquad (1.3)$$

Ejemplo 1.5

Para el circuito de la figura 1.4 en el que $v(t) = 20\cos(t + 30°)$:

a. Determine la respuesta $i(t)$.
b. Grafique $i(t)$ y $V(t)$ tanto en el dominio del tiempo como en un diagrama fasorial.

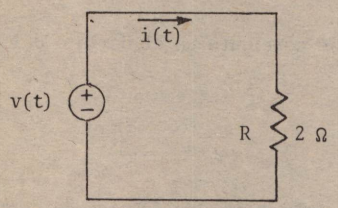


Figura 1.4

Solución

El fasor voltaje es $\mathbf{V} = 20\angle 30°$

por lo tanto, el fasor corriente es

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R} = \frac{20\angle 30°}{2} = 10\angle 30°$$

entonces $i(t) = 10\cos(t + 30°)$

Observemos que tanto el ángulo de fase del voltaje como el de la corriente son iguales; es decir, para un elemento puramente resistivo, voltaje y corriente están en fase. Las gráficas respectivas tanto en el dominio del tiempo como en un diagrama fasorial se muestran en la figura 1.5.

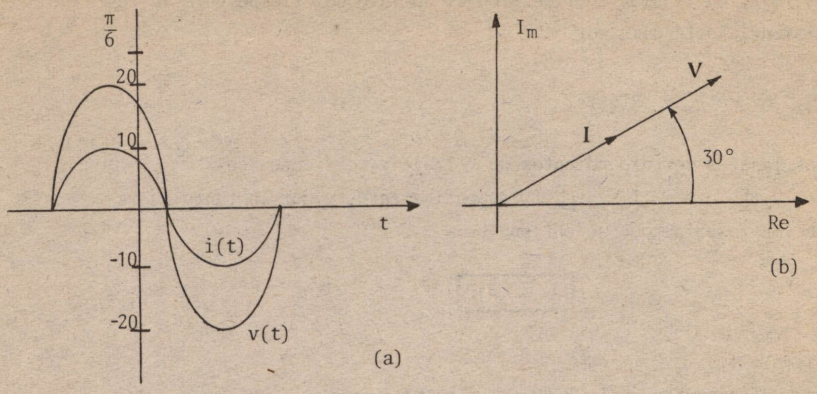


Figura 1.5 Gráficas de voltaje y corriente para un circuito puramente resistivo: a) en el dominio del tiempo, b) diagrama fasorial.

Sabemos que la relación voltaje-corriente en el dominio del tiempo para la inductancia es:

$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$$

Si en la ecuación anterior se introducen los fasores de corriente y voltaje, se obtiene la siguiente relación:

$$\mathrm{Re}\left[\mathbf{V}e^{j\omega t}\right] = L\mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\mathbf{I}e^{j\omega t}\right]$$

derivando e igualando las partes reales se obtiene la relación fasorial para la inductancia·

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \qquad (1.4)$$

Ejemplo 1.6
Para el circuito de la figura en el que $v(t) = 8\ \mathrm{sen}(2t + 135°)$ [V]:

a. Determine la respuesta i(t).
b. Grafique i(t) y v(t) en el dominio del tiempo y en un diagrama fasorial.

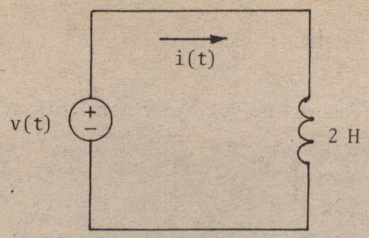


Figura 1.6

Solución

Como $v(t) = 8 \text{ sen } (2t + 135°) = 8 \cos (2t + 45°)$ V

se tiene el fasor

$$\mathbf{V} = 8\angle 45° \text{ V}$$

y de $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$, se tiene

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L} = \frac{8\angle 45°}{j2(2)} = \frac{8\angle 45°}{4\angle 90°} = 2\angle -45° \text{ A}$$

De acuerdo a los ángulos de fase del voltaje y la corriente, es evidente que para la inductancia la corriente está atrasada 90° con respecto al voltaje (ver figura 1.7).

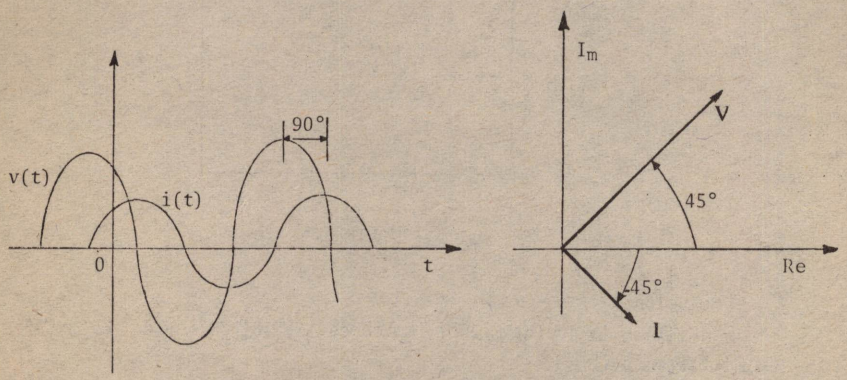


Figura 1.7

La ecuación de definición del capacitor en el dominio del tiempo es:

$$i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

introduciendo los fasores de voltaje y corriente se obtiene:

$$Re\left[Ie^{j\omega t}\right] = Re\left[C\frac{d}{dt}Ve^{j\omega t}\right]$$

derivando y comparando los dos miembros tenemos:

$$I = j\omega CV$$

finalmente la relación fasorial para la capacitancia es:

$$V = \frac{I}{j\omega C} \qquad (1.5)$$

Ejemplo 1.7

Para el circuito de la figura 1.8 en el que $v(t) = 18\cos(3t - 30°)$:

a. Determine la respuesta $i_C(t)$.

b. Grafique en el dominio del tiempo y en un diagrama fasorial, $i_C(t)$ y $v(t)$.

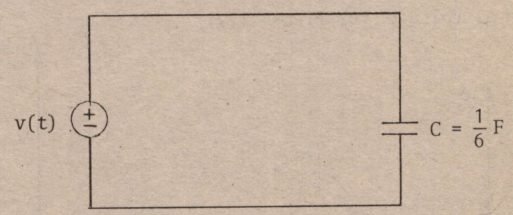


Figura 1.8

Solución

Si $v(t) = 18\cos(3t - 30°)$, entonces $\mathbf{V} = 18\angle -30°$ y de $\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}$ obtenemos

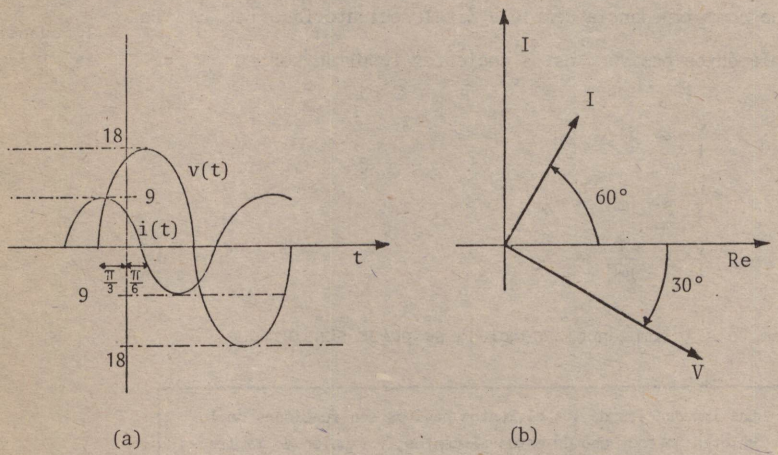
$$\mathbf{I} = j\left(\frac{1}{6}\right)(3)(18\angle -30°) = j9\angle -30°$$

Ahora bien, como multiplicar por j equivale a defasar 90° la expresión que afecta, tenemos:

$$\mathbf{I} = 9\angle 60°$$

o sea $i(t) = 9\cos(3t + 60°)$

Si observamos los ángulos de fase del voltaje y la corriente podemos concluir que, para un elemento capacitivo puro, la corriente está adelantada 90° con respecto al voltaje. Esto se comprueba en las gráficas de la figura 1.9.



(a) (b)

Figura 1.9 Gráficas de voltaje y corriente para un elemento capacitivo: a) en el dominio del tiempo, b) diagrama fasorial.

1.5 IMPEDANCIA Y ADMITANCIA COMPLEJAS

Si las relaciones fasoriales (1.3), (1.4) y (1.5) que obtuvimos en el inciso anterior las escribimos como cocientes de fasor tensión entre fasor corriente tendremos:

para la resistencia

$$\boxed{\frac{V}{I} = R}$$

para la inductancia

$$\boxed{\frac{V}{I} = j\omega L}$$

para la capacitancia

$$\boxed{\frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}}$$

Se define como impedancia compleja Z, al cociente fasorial $\frac{V}{I}$ Para los elementos pasivos, estos cocientes resultan ser:

Impedancia compleja

$$\frac{V}{I} = R = Z_R$$

$$\frac{V}{I} = j\omega L = Z_L$$

$$\frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C} = Z_C$$

Con respecto a la impedancia compleja se puede señalar que:

1. Las impedancias de los elementos pasivos son funciones de los valores de cada uno de estos elementos, y también de la frecuencia en el caso de la inductancia y la capacitancia.

2. Consideraremos a las impedancias de la misma manera que a las resistencias, con la excepción de que son cantidades complejas y todas las operaciones algebraicas deben ser las apropiadas para números complejos.[2]

3. La impedancia es un concepto en el dominio de la frecuencia (haciendo $j\omega = s$).

4. La impedancia se mide en ohms por ser el cociente de un voltaje entre una corriente.

[2] Todas las operaciones algebraicas referentes a este tipo de números, aparecen en el Apéndice A.

La validez de las leyes de Kirchhoff en el dominio de la frecuencia, hace posible demostrar fácilmente que las impedancias pueden combinarse entre sí, en serie y en paralelo siguiendo las mismas reglas que se aplican a las resistencias puras (ver ejemplos 1.8 y 1.9).

Ejemplo 1.8

Impedancia equivalente de dos impedancias en serie

Calcule la impedancia equivalente entre los puntos a y b del circuito de la figura 1.10.

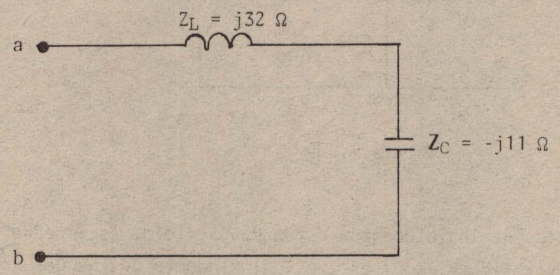


Figura 1.10

Solución

Como las impedancias de los elementos están en serie, la impedancia equivalente (figura 1.11) será la suma de las impedancias de cada una de ellas, entonces:

$$Z_{eq} = j32 - j11 = j21\ \Omega$$

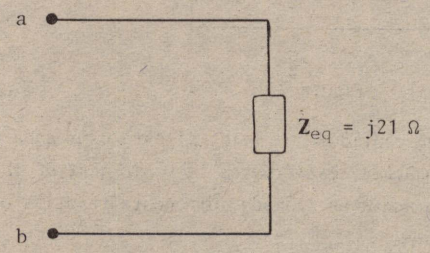


Figura 1.11

Ejemplo 1.9

Impedancia equivalente de dos impedancias en paralelo

Calcule la impedancia equivalente entre los puntos a y b del circuito de la figura 1.12.

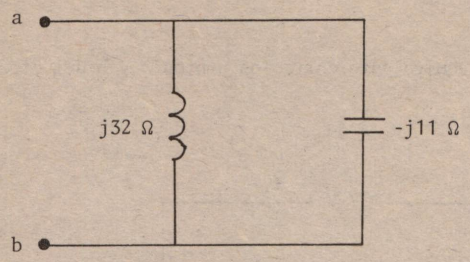


Figura 1.12

Solución

Como las impedancias de los elementos están en paralelo, la impedancia equivalente (ver figura 1.13) es igual al producto de las dos impedancias dividido entre la suma de las mismas.

$$Z_{eq} = \frac{-j11(j32)}{-j11 + j32} = \frac{352}{j21} = -j16.76\ \Omega$$

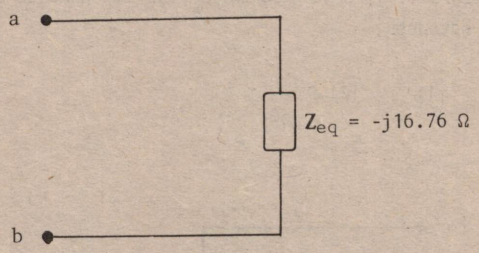


Figura 1.13

Reactancia

Siendo la impedancia una cantidad compleja, si está expresada en forma rectangular, la *componente resistiva* es la *parte real* de la impedancia, y la *parte imaginaria* es llamada componente reactiva o *reactancia* (X). De esta forma:

$$Z = R \pm jX$$

donde

R es la resistencia
X es la reactancia

La naturaleza de la reactancia es de tipo inductivo cuando se le asigna el signo positivo (+), y es de tipo capacitivo cuando toma el signo negativo (-). De esta manera, la impedancia de un circuito en serie RL es:

$$Z = R + jX_L$$

si definimos $X_L = \omega L$, entonces

$$Z = R + j\omega L$$

En un circuito RC en serie, la impedancia es

$$Z = R - jX_C$$

Por otro lado, si definimos $X_C = \frac{1}{\omega C}$, entonces

$$Z = R - j\frac{1}{\omega C}$$

Ejemplo 1.10
Determine la impedancia equivalente entre las terminales a y b del siguiente circuito (figura 1.14), si $\omega = 10$ rad/s.

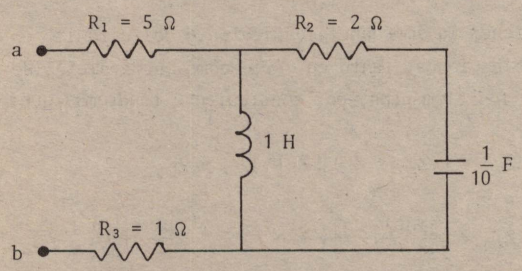


Figura 1.14

Solución

Las impedancias de cada uno de los elementos son:

$$Z_{R_1} = R_1 = 5\ \Omega$$

$$Z_{R_2} = R_2 = 2\ \Omega$$

$$Z_{R_3} = R_3 = 1\ \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j10\ \Omega$$

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j1\ \Omega$$

El circuito en el dominio de la frecuencia se muestra en la figura 1.15.

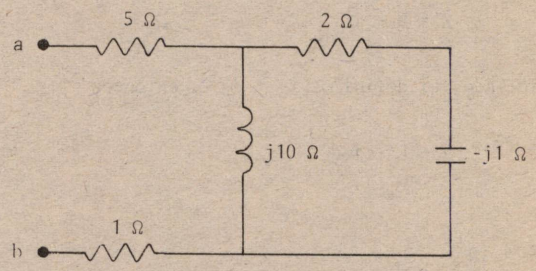


Figura 1.15

Para obtener la impedancia equivalente del circuito es necesario hacer combinaciones, tanto en serie como en paralelo, de las impedancias de los elementos, por consiguiente tendremos que:

$$Z_{eq} = [(Z_{R_2} + Z_C) \parallel Z_L] + Z_{R_1} + Z_{R_3}$$

$$Z_{eq} = \frac{j10(2 - j1)}{j10 + 2 - j1} + 5 + 1 = \frac{10 + j20}{2 + j9} + 6$$

$$= \frac{200 + j50}{85} + 6 = 8.4 - j0.6\ \Omega$$

Anteriormente vimos que a las relaciones del fasor tensión entre el fasor corriente para cada uno de los elementos pasivos se les conocía con el nombre de impedancia; al recíproco de cada una de estas relaciones se le denominará *admitancia* (**Y**); es decir:

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{1}{\mathbf{Z}}$$

Admitancia

Como también la admitancia es una cantidad compleja puede ser expresada en forma rectangular:

$$\mathbf{Y} = G + j\,B$$

donde

G es la parte real llamada *conductancia* y
B es la parte imaginaria llamada *susceptancia*

Conductancia y susceptancia

Resulta pertinente hacer la siguiente observación:
La expresión

$$\mathbf{Y} = G + j\,B = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R \pm jX}$$

debe ser examinada cuidadosamente, ya que establece que la parte real de la admitancia *no* es el recíproco de la parte real de la impedancia, ni establece que la parte imaginaria de la admitancia es el recíproco de la parte imaginaria de la impedancia; es decir:

$$G \neq \frac{1}{R} \qquad \text{y} \qquad B \neq \frac{1}{X}$$

La admitancia, conductancia y susceptancia se miden en mhos (℧).

1.6 RESOLUCION DE CIRCUITOS LINEALES E INVARIANTES EN ESTADO SENOIDAL PERMANENTE, EMPLEANDO LOS CONCEPTOS DE FASOR, IMPEDANCIA Y ADMITANCIA

Los conceptos de fasor, impedancia y admitancia que recientemente discutimos, son imprescindibles para el análisis de circuitos. Se presentan a continuación algunos ejemplos que ilustran la manera de calcular las respuestas de un circuito, tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo.

Ejemplo 1.11

Calcule las respuestas en corriente $i_1(t)$ e $i_2(t)$ del circuito representado en la figura 1.16.

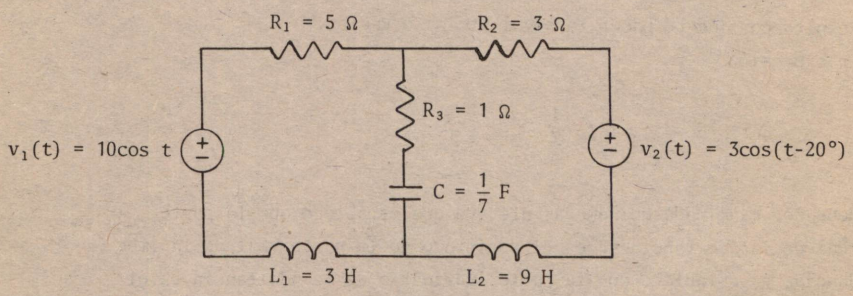


Figura 1.16

Solución

Calculando las impedancias de los elementos, tenemos

$$\mathbf{Z}_{R1} = R_1 = 5\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_{R2} = R_2 = 3\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_{R3} = R_3 = 1\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_{L1} = j\omega L_1 = j(1)(3) = j3\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_{L2} = j\omega L_2 = j(1)(9) = j9\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{(1)(1/7)} = -j7\ \Omega$$

Los fasores de las fuentes son

$$V_1 = 10\angle 0°$$
$$V_2 = 3\angle -20°$$

El circuito en el dominio de la frecuencia se muestra en la figura 1.17.

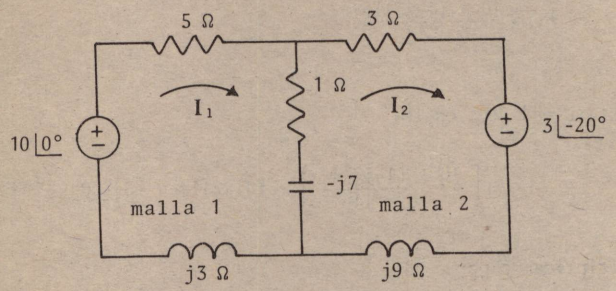


Figura 1.17

Efectuando las sumas de los voltajes en las dos mallas:
para la malla 1

$$5I_1 + (1-j7)(I_1-I_2) + j3I_1 = 10\angle 0°$$

acomodando y reduciendo

$$(6-j4)I_1 - (1-j7)I_2 = 10\angle 0° \qquad (a)$$

para la malla 2

$$(3+j9)I_2 + (1-j7)(I_2-I_1) = -3\angle -20°$$

acomodando y reduciendo

$$-(1-j7)I_1 + (4+j2)I_2 = -3\angle -20° \qquad (b)$$

Observe que el signo negativo (-) del segundo miembro de la ecuación (b), o sea el correspondiente a V_2, se debe a que las caídas de voltaje en la malla 2 (determinadas por el sentido de I_2) se contraponen a las de la fuente.

Resolveremos a continuación el sistema de ecuaciones (a) y (b), por el método de sustitución:

Despejando I_1 de (a)

$$I_1 = \frac{10 + (1-j7)I_2}{6 - j4} \qquad (c)$$

Sustituyendo (c) en (b)

$$-(1-j7)\left[\frac{10 + (1-j7)I_2}{6 - j4}\right] + (4+j2)I_2 = -3\angle -20°$$

multiplicando por 6-j4

$$-(1-j7)\left[10 + (1-j7)I_2\right] + (4+j2)(6-j4)I_2 = -3\angle -20°\ (6-j4)$$

factorizando y acomodando

$$I_2\left[-(1-j7)^2 + (4+j2)(6-j4)\right] = -3\angle -20°\ (6-j4) + 10(1-j7)$$

reduciendo

$$I_2(80+j10) = (-2.81 + j1.02)(6-j4) + 10-j70$$

despejando I_2

$$I_2 = \frac{-2.78 - j52.64}{80 + j10} = \frac{52.71\angle -93.03}{80.62\angle 7.13°} = 0.65\angle -100.16°$$

sustituyendo I_2 en (c)

$$I_1 = \frac{10 + (1-j7)(0.65)\angle -100.16°}{6 - j4} =$$

$$= \frac{10 + (7.07\angle -81.86°)(0.65\angle -100.16°)}{6 - j4}$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{10 + 4.6\angle -182.02}{6 - j4} = \frac{10 - 4.6 + j0.162}{6 - j4}$$

$$= \frac{5.4\angle 1.72°}{7.21\angle -33.68°}$$

$$\mathbf{I}_1 = 0.75\angle 35.4°$$

finalmente

$$\mathbf{I}_1 = 0.75\angle 35.4° \quad \text{o} \quad i_1 = 0.75\cos(t + 35.4°)$$

$$\mathbf{I}_2 = 0.65\angle -100.16° \quad \text{o} \quad i_2 = 0.65\cos(t - 100.16°)$$

Observe que si cualquiera de las dos corrientes resultara con signo negativo, se debería a que el sentido de la corriente es contrario al que se estableció en el circuito.

Ejemplo 1.12

Determine los voltajes v_a y v_b en el dominio del tiempo del circuito de la figura 1.18.

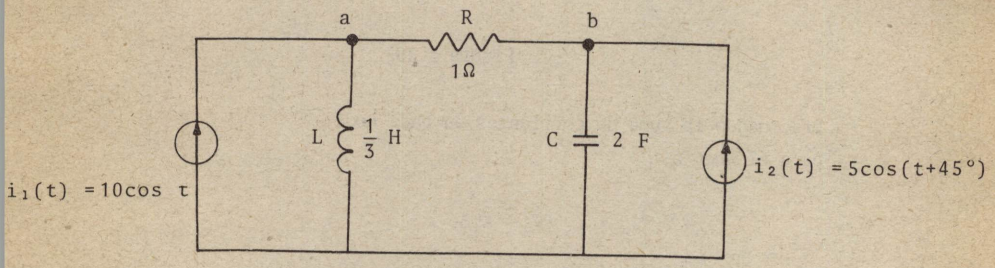


Figura 1.18

Solución

Calculando las admitancias de los elementos y obteniendo los fasores de las fuentes, tenemos:

$$Y_R = \frac{1}{R} = \frac{1}{1} = 1\ \mho$$

$$Y_C = j\omega C = j(1)(2) = j2\ \mho$$

$$Y_L = -j\frac{1}{\omega L} = -j\frac{1}{1(1/3)} = -j3\ \mho$$

$$I_1 = 10\angle 0°$$

$$I_2 = 5\angle 45°$$

El circuito en el dominio de la frecuencia se muestra en la figura 1.19.

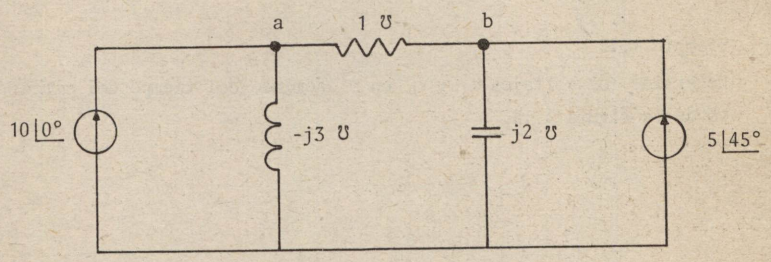


Figura 1.19

Efectuando la suma de corrientes en cada nodo:
para el nodo a

$$I_1 = Y_L V_a + Y_R (V_a - V_b)$$

$$I_1 = -j3 V_a + 1(V_a - V_b)$$

$$I_1 = (1-j3) V_a - V_b \qquad \text{(a)}$$

para el nodo b

$$I_2 = Y_C V_b + Y_R (V_b - V_a)$$

$$I_2 = j2\,V_b + 1(V_b - V_a)$$

$$I_2 = -V_a + (1+j2)\,V_b \qquad \text{(b)}$$

Escribiendo en forma matricial (a) y (b) tendremos

$$\begin{bmatrix} 1 - j3 & -1 \\ -1 & 1+j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\,\underline{|0°} \\ 5\,\underline{|45°} \end{bmatrix}$$

resolviendo este sistema de ecuaciones

$V_a = 4.5\,\underline{|69.6°}$ o $v_a(t) = 4.5\cos(t + 69.6°)$

$V_b = 4.2\,\underline{|-6.8°}$ o $v_b(t) = 4.2\cos(t - 6.8°)$

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I. A continuación aparece un grupo de definiciones. Escriba en el espacio colocado a la derecha de cada una de ellas, el concepto al que corresponde cada definición.

a. Relación fasorial que depende de los valores de los elementos pasivos de un circuito y de la frecuencia en el caso del inductor y del capacitor. Su componente real es resistiva y su componente imaginaria es reactiva. _____

b. Parte de la respuesta total de un circuito que es originada por la fuente de excitación, que no se desvanece y que se puede obtener fácilmente con los conceptos de fasor, impedancia y admitancia. _____

c. Cociente del fasor corriente entre el fasor tensión. Si se expresa en forma rectangular, a su componente real se le denomina conductancia y a su componente imaginaria, susceptancia.

_____

d. Cantidad compleja que es una representación abreviada en el dominio de la frecuencia. Contiene información sobre la magnitud y el ángulo de fase de una senoide. _____

II. Derive con respecto al tiempo la siguiente expresión:

$$\mathrm{Re}\left[\mathbf{I}e^{j\omega t}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\mathrm{Re}\left[\mathbf{I}e^{j\omega t}\right]\right\} = _____$$

III. En el rectángulo de abajo se dan tres equivalencias de la admitancia Y, de las cuales una no es verdadera. Indíquela anotando la letra correspondiente en el paréntesis colocado a la izquierda. Señale también la razón por la cual no es verdadera.

(a) (b) (c)

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R} \pm \frac{1}{jX} = \frac{1}{R \pm jX}$$

( ) es falsa porque: _____

IV. A continuación se presenta una serie de problemas. Resuélvalos y escriba la o las soluciones en los espacios indicados.

1. Utilizando ecuaciones diferenciales, obtenga la respuesta total $i_L(t)$ del circuito de la figura 1.20.

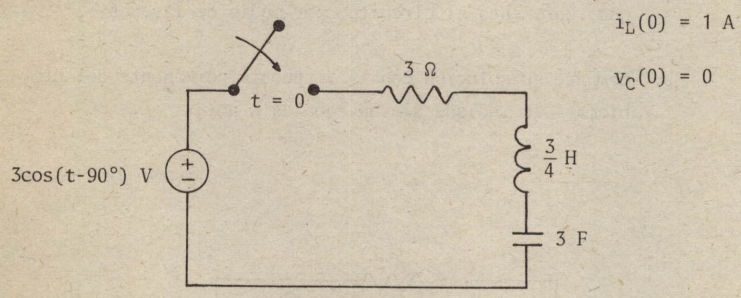


Figura 1.20

$i_L(t)$ = _____ A

2. Obtenga los fasores correspondientes de las funciones senoidales abajo indicadas.

a. $v(t) = 580\cos(t - 20°)$ V
b. $i(t) = 38\text{sen}(3t + 25°)$ A
c. $e(t) = 12\cos(2t + 20°)$ V

a. $\mathbf{V}$ = _____ V
b. $\mathbf{I}$ = _____ A
c. $\mathbf{E}$ = _____ V

3. Obtenga las expresiones en el dominio del tiempo correspondientes a los fasores abajo indicados.

   a. $\mathbf{V} = 20e^{-j\pi/2}$
   b. $\mathbf{I}_1 = 123\angle\phi$ A
   c. $\mathbf{I}_2 = -34\angle -90°$ A

   a. $v(t) =$ _____ V
   b. $i_1(t) =$ _____ A
   c. $i_2(t) =$ _____ A

4. Para el circuito de la figura 1.21:

   a. Determine $i_L(t)$, resolviendo la ecuación diferencial, que representa al circuito, por medio de fasores.

   b. Compare su solución con la respuesta permanente del problema 1, e indique si son iguales o no.

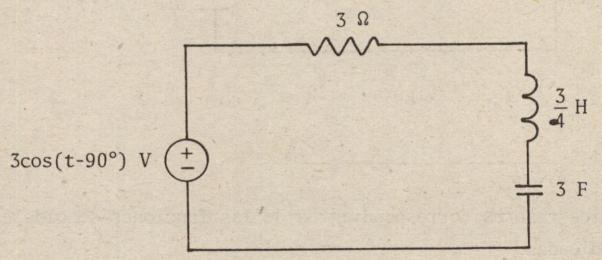


Figura 1.21

   a. $i_L(t) =$ _____ A
   b.

5. Calcule la impedancia equivalente entre las terminales a y b de los circuitos de las figuras 1.22 y 1.23. Considere $\omega = 1$ rad/s.

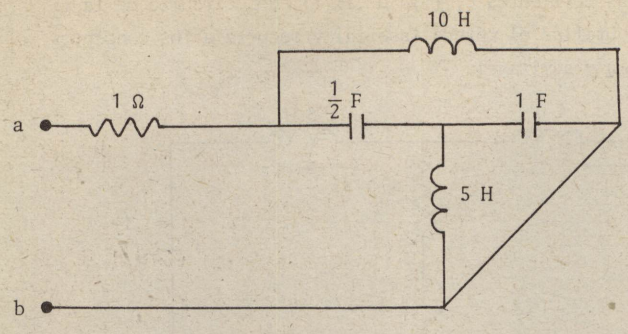


Figura 1.22

Z = _____ Ω

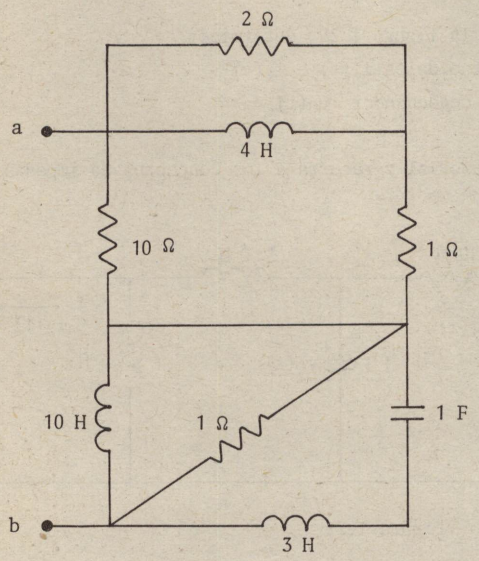


Figura 1.23

Z_{ab} = _____ Ω

6. Determine las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ del circuito de la figura 1.24. Utilice el método fasorial y recurra a los conceptos de impedancia y admitancia.

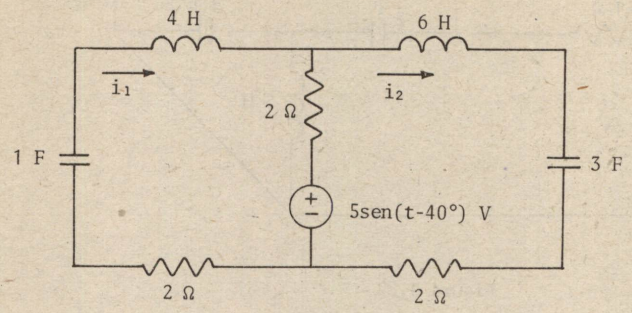


Figura 1.24

$i_1(t)$ = _____ A

$i_2(t)$ = _____ A

7. Para el circuito de la figura 1.25, determine:
   a. Las corrientes senoidales $i_1(t)$ e $i_2(t)$.
   b. El voltaje en el condensador $v_C(t)$.

   Utilice el método fasorial y recurra a los conceptos de impedancia y admitancia.

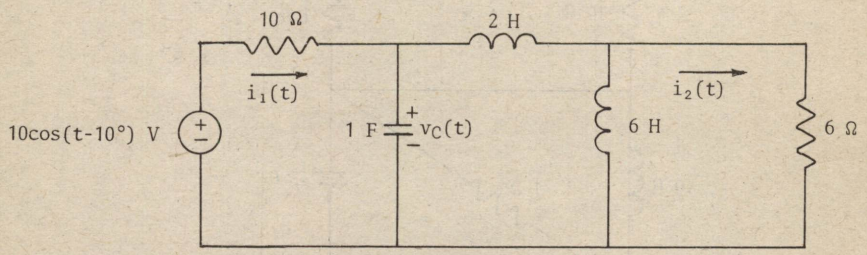


Figura 1.25

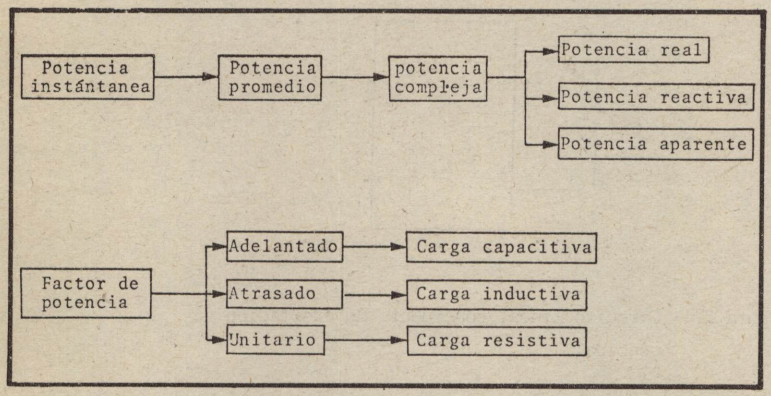
a. $i_1(t)$ = _____ A

   $i_2(t)$ = _____ A

b. $v_C(t)$ = _____ V

MODULO 2 POTENCIA Y FACTOR DE POTENCIA

CUADRO SINOPTICO



OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Calculará los diferentes tipos de potencias disipadas en una red.
2. Calculará el factor de potencia de la carga de un sistema eléctrico.
3. Corregirá el factor de potencia de la carga de un sistema eléctrico.
4. Representará en el plano complejo el diagrama de potencias de un circuito en estado permanente senoidal.

2.1 POTENCIA INSTANTANEA Y POTENCIA PROMEDIO

Consideremos un circuito lineal como el mostrado en la figura 2.1.

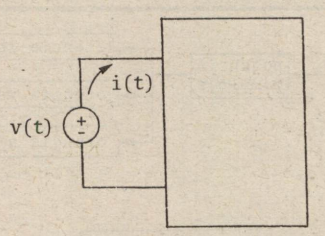


Figura 2.1 Circuito lineal con fuente de excitación senoidal.

Al aplicar un voltaje senoidal a través del circuito, circulará una corriente de tipo senoidal.

Por definición, la potencia que la fuente de excitación senoidal entrega al circuito está dada por el producto del voltaje instantáneo y la corriente instantánea que por él pasa. Consecuentemente, la ecuación que nos da la potencia instantánea es:

$$p(t) = v(t)i(t) \qquad (2.1)$$

Potencia instantánea

Supongamos que el voltaje y la corriente son del tipo:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$$

Por lo tanto, nuestra expresión de potencia instantánea será:

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t + \psi)$$

Utilizando la identidad trigonométrica del producto de dos funciones coseno, se obtiene:

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi - \psi) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \phi + \psi) \qquad (2.2)$$

Por otra parte, el valor promedio de la potencia instantánea se conoce como potencia promedio (P) y puede calcularse integrando la potencia en un período y dividiendo a continuación entre ese período, es decir:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)dt \qquad (2.3)$$

Si volvemos a la ecuación (2.2), que obtuvimos de la potencia instantánea, observamos que esta expresión está formada por dos términos. El primero es una constante; el segundo es una onda senoidal con una frecuencia angular igual al doble de la frecuencia del voltaje o de la corriente. Ahora bien, como habíamos mencionado anteriormente, para obtener la potencia promedio deberemos integrar la ecuación (2.2).

Por nuestros conocimientos sobre ondas senoidales sabemos que el valor promedio de una onda senoidal en un período cualquiera es cero. Esto trae como consecuencia que la integral del segundo término de la ecuación (2.2) se haga cero; por lo que la potencia promedio es:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi - \psi) \qquad (2.4a)$$

Si definimos $\theta = \phi - \psi$
obtenemos

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\theta \qquad (2.4b)$$

Potencia promedio

De esta última expresión se desprende que la potencia promedio que una fuente le entrega a un circuito pasivo, es igual a la mitad del producto de las amplitudes máximas del voltaje y la corriente, multiplicadas por el coseno de la diferencia de ángulos del voltaje y la corriente.

Ejemplo 2.1
Calcule y grafique las potencias instantánea y promedio que la fuente le suministra al circuito de la figura 2.2.

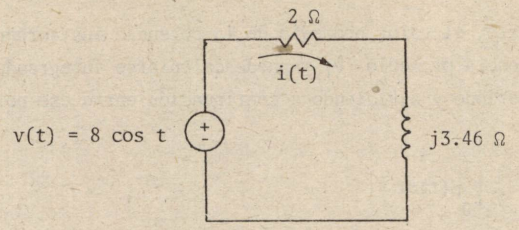


Figura 2.2

Solución

El circuito en el dominio de la frecuencia se muestra en la figura 2.3.

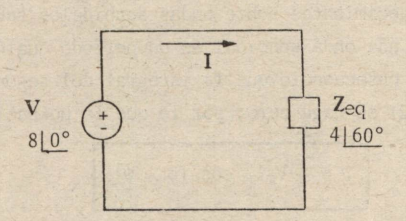


Figura 2.3

donde

$$Z_{eq} = 2 + j3.46 = 4\angle 60°$$

entonces

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{8\angle 0°}{4\angle 60°} = 2\angle -60°$$

La corriente en el dominio del tiempo es

$$i(t) = 2\cos(t - 60°)$$

por lo tanto

$$p(t) = v(t)i(t)$$

$$= 8\cos t\ [2\cos(t - 60°)]$$

$$= \frac{1}{2}(8)(2)\cos(0 - 60°) + \frac{1}{2}(8)(2)\cos(2t + 0 - 60°)$$

$$p(t) = 4 + 8\cos(2t - 60°)$$

El primer término del segundo miembro es P, por lo tanto

$$P = 4$$

Las gráficas de $v(t)$, $i(t)$, $p(t)$ y P se muestran en la figura 2.4.

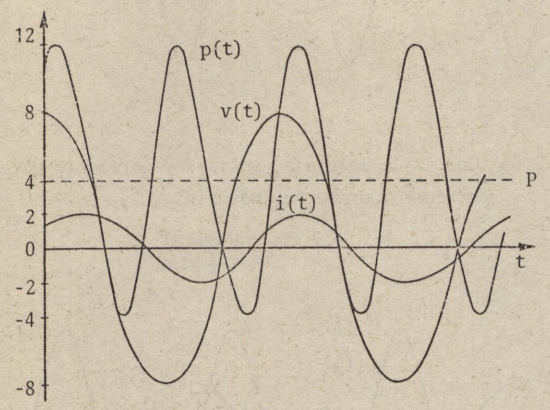


Figura 2.4

Ahora mencionaremos dos casos particulares:

1. Cuando el circuito es puramente reactivo, la potencia promedio para este tipo de circuito es cero. Ello se hace evidente si tenemos en cuenta que la diferencia de ángulos de fase entre tensión y corriente es de 90°; es decir, si $\theta = 90°$, entonces:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos 90° = 0$$

En la figura 2.5a se muestran las curvas de corriente, voltaje y potencia de un circuito puramente inductivo, y en la figura 2.5b las curvas de corriente, voltaje y potencia de un circuito puramente capacitivo. En ambos casos puede observarse que la potencia promedio es cero, y que la potencia instantánea vale cero solamente cuando el voltaje o la corriente es cero.

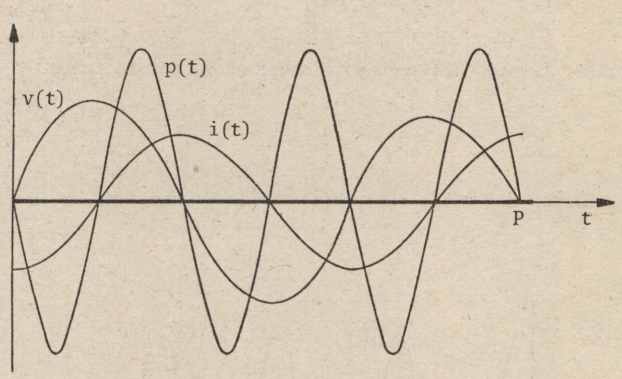


Figura 2.5a Curvas de potencia, voltaje y corriente para un circuito puramente inductivo.

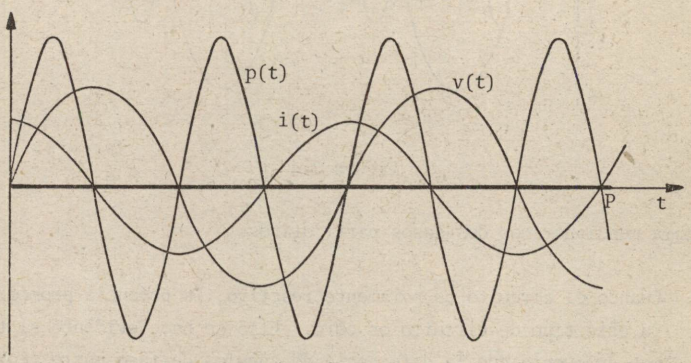


Figura 2.5b Curvas de potencia, voltaje y corriente para un circuito puramente capacitivo.

2. Cuando el circuito es puramente resistivo. La diferencia de ángulos de fase es cero; es decir, si $\theta = 0°$

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos 0° = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{V_m^2}{2R}$$

En la figura 2.6 se muestra la gráfica de potencias correspondiente a este tipo de circuitos.

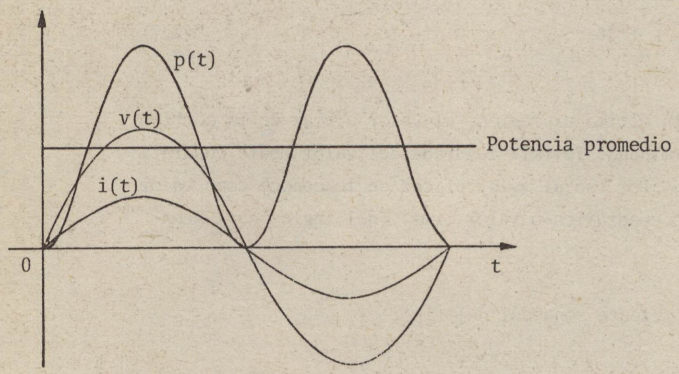


Figura 2.6. Gráficas de potencia para un circuito puramente resistivo.

2.2 VALORES EFICACES DE TENSION Y CORRIENTE SENOIDALES

El valor eficaz de una corriente senoidal se determina sobre la base de que dos corrientes, una senoidal y una continua, le entregan la misma potencia a una resistencia dada.

La potencia promedio que la corriente senoidal le entrega a la resistencia en un período T es:

$$P = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 \, dt \qquad (2.5)$$

Por otro lado, la potencia promedio que la corriente continua le entrega a la misma resistencia está dada por:

$$P = I^2R = I_{ef}^2R \qquad (2.6)$$

donde se establece que la magnitud de la corriente continua (I) es igual al valor eficaz de la corriente senoidal dada (I_{ef}). Si igualamos las ecuaciones (2.5) y (2.6) y despejamos I_{ef} se obtiene:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} \qquad (2.7)$$

Advierta que en esta última expresión, el valor eficaz de la corriente se obtiene determinando la raíz cuadrada del valor medio cuadrático de la corriente. Por eso al valor eficaz se le conoce como valor de la raíz promedio cuadrática o valor rms (del inglés *root-mean-square*).

Consideremos una corriente senoidal del tipo:

$$i(t) = I_m\cos(\omega t + \psi) \quad , \text{ con período } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

si la sustituimos en la ecuación (2.7)

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \psi)dt}$$

$$I_{ef} = I_m\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t - 2\psi)\right)dt}$$

$$I_{ef} = I_m\sqrt{\frac{\omega}{4\pi}\left(t\right)_0^{\frac{2\pi}{\omega}}}$$

$$\boxed{I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707\ I_m} \qquad (2.8a)$$ Valor eficaz de corriente

De lo que se concluye que el valor eficaz de una corriente senoidal es 0.707 veces su valor máximo. De una manera similar se puede obtener el valor eficaz de un voltaje senoidal, llegando a:

$$\boxed{V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0.707\ V_m} \qquad (2.8b)$$ Valor eficaz de voltaje

2.3 POTENCIA REAL, POTENCIA APARENTE Y FACTOR DE POTENCIA

El conocimiento de los conceptos de potencia aparente, potencia real y factor de potencia se hace necesario cuando se habla de transmisión de grandes cantidades de energía, ya que la eficiencia y por lo tanto el costo de la transmisión dependerá básicamente de estos parámetros.

Ahora bien, cuando la potencia promedio, (ecuación 2.4) es expresada, en términos de valores eficaces es conocida como *potencia real o activa* (P). A ambas se les denota con la misma letra ya que no hay diferencia entre ellas. La diferencia en el nombre estará determinada por los términos en que estén expresadas; así, si se manejan valores máximos se habla de potencia promedio, y si se manejan valores eficaces se habla de potencia real o de potencia activa. Escribamos nuevamente la ecuación (2.4b):

Potencia real o activa

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\theta \qquad \text{--- (2.4b)}$$

y como de las ecuaciones (2.8a) y (2.8b)

$$I_m = \sqrt{2}\, I_{ef}$$

$$V_m = \sqrt{2}\, V_{ef}$$

entonces, la potencia real resulta ser

$$P = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{2}}{2} V_{ef} I_{ef} \cos\theta$$

o sea

$$\boxed{P = V_{ef} I_{ef} \cos\theta} \qquad (2.9)$$

La unidad de la potencia real es el watt [W].

Potencia aparente. Se define como el producto de los valores eficaces de tensión y corriente, es decir:

$$S = V_{ef}I_{ef} \qquad (2.10)$$ Potencia aparente

La unidad de la potencia aparente es el volt-ampere [VA].

Factor de potencia. Se define como el cociente de la potencia real entre la potencia aparente:

$$\text{Factor de potencia (FP)} = \frac{\text{potencia real}}{\text{potencia aparente}}$$

$$FP = \frac{V_{ef}I_{ef}\cos\theta}{V_{ef}I_{ef}} = \cos\theta \qquad (2.11)$$ Factor de potencia

Como se puede observar, el factor de potencia es $\cos\theta$, y debido a que θ es la diferencia de ángulos entre tensión y corriente, se le conoce también como *ángulo del factor de potencia.* Angulo del factor de potencia

Como $\cos\theta$ no puede tener un valor mayor que el de la unidad, es claro que el valor de la potencia real nunca podrá ser mayor que la potencia aparente; es decir, la potencia real será siempre menor o igual que la potencia aparente.

Para una carga resistiva pura, la tensión y la corriente están en fase; es decir, $\theta = 0°$; por lo tanto, el factor de potencia vale uno ($\cos 0° = 1$) y las potencias real y aparente son iguales. Observe las figuras 2.7a y 2.7b.

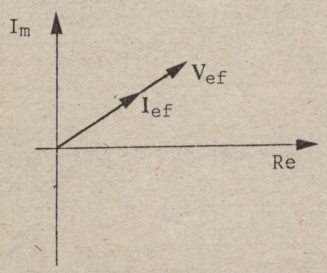


Figura 2.7a. Fasores de voltaje y corriente para un circuito puramente resistivo.

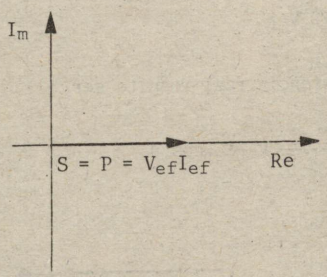


Figura 2.7b. Potencias real y aparente de un circuito puramente resistivo.

En una carga reactiva pura, la diferencia de los ángulos del voltaje y la corriente es de +90° o -90° ; la diferencia de +90° corresponde a una carga reactiva inductiva, y la de -90° a una carga reactiva capacitiva. Como en estos casos el FP = $\cos(\pm 90°) = 0$, entonces la potencia real vale cero.

En aplicaciones prácticas los circuitos presentan, a la vez, carga resistiva y carga reactiva; el FP en estos casos variará dentro del rango de 0 a 1. Por ejemplo, un FP de 0.707 indicará una impedancia con ángulo de fase de +45° o -45°; la primera carga es inductiva, ya que $\theta = \phi - \psi > 0$, y entonces la corriente se atrasa con respecto al voltaje; y la segunda carga (en la cual $\theta = -45°$) es capacitiva.

Para saber si un FP corresponde a una carga inductiva o a una carga capacitiva, se habla de un FP *adelantado* o de un FP *atrasado*, lo que depende del ángulo de fase de la corriente con respecto al del voltaje. En consecuencia, una carga capacitiva tiene un FP adelantado (la corriente adelantada al voltaje), y una carga inductiva tiene un FP atrasado (la corriente está atrasada con respecto al voltaje).

FP adelantado
FP atrasado

El concepto de FP es muy importante en la industria eléctrica, ya que cuando su valor es bajo (menor de 0•85 atrasado) puede ocasionar pérdidas considerables.

Ejemplo 2.2

Cierto cliente necesita una potencia de 13 200 W a 220 V_{rms} y la carga presenta un FP = 0.95. Si la línea por la que se entrega al cliente la energía tiene una resistencia total de 0.166 Ω, calcule la potencia que debe suministrar la compañía eléctrica.

Solución

El sistema eléctrico se puede esquematizar mediante el circuito mostrado en la figura 2.8.

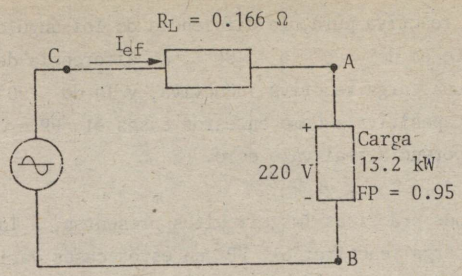


Figura 2.8

La corriente que circula por la carga I_{AB} es la que circula a través de la línea I_{CA}, y como la expresión para la potencia activa que debe recibir la carga es:

$$P_{AB} = V_{ef} I_{ef} \cos \theta$$

entonces

$$I_{ef} = \frac{P_{AB}}{V_{ef} \cos\theta} = I_{AB} = I_{CA} = \frac{13\ 200}{220(0.95)} = 63.15\ A_{rms}$$

$$I_{ef} = 63.15\ A_{rms}$$

La pérdida de potencia en la línea P_{CA} es:

$$P_{CA} = R_L (I_{CA})^2 = (0.166)(63.15)^2 = 662\ W$$

$$P_{CA} = 662\ W$$

Ahora bien, para poder dar al cliente los 13.2 kW, la compañía debe generar la potencia en la línea más la que le entrega al cliente, es decir:

$$P_{CB} = P_{CA} + P_{AB}$$

por lo tanto

$$P_{CB} = 0.662 + 13.2 = 13.862 \text{ kW}$$

$$P_{CB} = 13.862 \text{ kW}$$

El voltaje al que trabaja la compañía eléctrica deberá ser, haciendo una suma de voltajes:

$$V_{CB} = V_{CA} + V_{AB}$$

pero

$$V_{CA} = R_L(I_{CA})$$

esto es

$$V_{CA} = (0.166)(63.15) = 10.48$$

entonces

$$V_{CB} = 10.48 + 220 = 230.48 \text{ V}$$

$$V_{CB} = 230.48 \text{ V}$$

Como el cliente solamente paga 13.2 kW , la compañía genera 0.662 kW sin retribución.

El porcentaje de aprovechamiento de energía es:

$$\frac{13.200}{13.862} \times 100 = 95.22\%$$

Ejemplo 2.3

Si otro cliente de la misma compañía eléctrica consume los mismos 13.2 kW , pero con un ángulo del factor de potencia de 60° retrasado, calcule la potencia que debe suministrar la compañía y el porcentaje de aprovechamiento de energía.

Solución

El circuito para este sistema es similar al del ejemplo anterior, y se muestra en la figura 2.9.

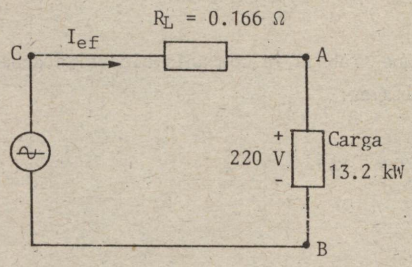


Figura 2.9

Como

$$P_{AB} = V_{ef} I_{ef} \cos \theta$$

Entonces, la corriente rms que circula por la carga (I_{AB})es

$$I_{ef} = \frac{P_{AB}}{V_{ef} \cos 60°} = \frac{13.2}{220(0.5)} = 120$$

$$I_{ef} = 120 \ A_{rms}$$

La pérdida de potencia en la línea (P_{CA}) será ahora de

$$P_{CA} = R_L (I_{ef})^2 = (0.166)(120)^2$$

$$P_{CA} \simeq 2.3 \ kW$$

Esto ocasiona que la compañía genere 13.2 + 2.3 = 15.5 kW de los cuales el cliente sólo paga 13.2 kW, y la energía generada sin retribución es de 2.3 kW.

El porcentaje de aprovechamiento de energía es de

$$\frac{13.2}{15.5} \times 100 = 85.16\%$$

Del análisis de estos dos ejemplos se puede concluir que mientras más bajo sea el factor de potencia, ocasionará mayores pérdidas en las líneas, y por lo tanto costos mayores en las compañías eléctricas, con el consecuente desaprovechamiento de una energía que cada día es más cara de producir.

2.4 POTENCIA COMPLEJA Y TRIANGULO DE POTENCIAS

Se tratará ahora un concepto matemático que considera a la potencia como una cantidad compleja y que ayudará a simplificar los cálculos para su determinación.

Partiendo de la expresión para la potencia real que una fuente entrega a una red pasiva (ecuación 2.4a), en términos de valores eficaces, es decir:

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos(\phi - \psi) \qquad (2.4a)$$

Al aplicar a esta expresión la identidad de Euler, se tendrá:

$$P = V_{ef} I_{ef} \mathrm{Re}\left[e^{j\phi} e^{-j\psi}\right]$$

es decir

$$P = \mathrm{Re}\left[V_{ef} e^{j\phi} I_{ef} e^{-j\psi}\right]$$

donde

$$\mathbf{V} = V_{ef} e^{j\phi}$$

y

$$\mathbf{I}^* = I_{ef} e^{-j\psi}$$

por lo que

$$P = \mathrm{Re}[V\, I^*] \qquad (2.12)$$

Observe que el ángulo ψ es negativo, por lo que el fasor corriente que le corresponde es el fasor corriente conjugado (I^*).

Al eliminar el operador real de la expresión (2.12)se obtiene la *potencia compleja* (S). Así:

$$\boxed{S = V\, I^*} \qquad (2.13)$$

Potencia compleja

En la figura 2.10 se puede apreciar la representación de P y S en el plano complejo.

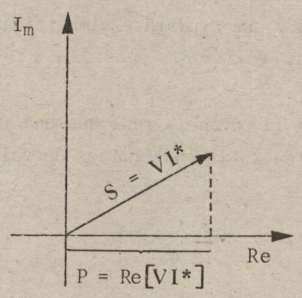


Figura 2.10 Representación de las potencias real y compleja en el plano complejo.

La ecuación (2.13) expresada en forma exponencial es:

$$S = V_{ef} I_{ef} e^{j\phi}\, e^{-j\psi} = V_{ef} I_{ef} e^{j\theta}$$

y en forma polar:

$$S = V_{ef} I_{ef} \underline{\lfloor \phi - \psi} = V_{ef} I_{ef} \underline{\lfloor \theta}$$

Observe que la *magnitud de la potencia compleja* ($|S|$), resulta ser la *potencia aparente*, o sea:

$$|S| = V_{ef}I_{ef} = S$$

Además, observe que el ángulo que se le asigna a la potencia compleja es el ángulo del factor de potencia; recuerde que se había visto anteriormente que el ángulo del FP es $\theta = \phi - \psi$.

La potencia compleja expresada en forma rectangular es:

$$S = V_{ef}I_{ef}\cos\theta + jV_{ef}I_{ef}\operatorname{sen}\theta$$

donde

$$P = V_{ef}I_{ef}\cos\theta \qquad (2.14)$$

A la parte imaginaria de la potencia compleja se le define como la potencia reactiva (Q); esto es:

$$\boxed{Q = V_{ef}I_{ef}\operatorname{sen}\theta} \qquad (2.15)$$

Potencia reactiva

Por lo tanto la potencia compleja puede escribirse como:

$$\boxed{S = P + jQ} \qquad (2.16)$$

La figura 2.11 muestra una representación gráfica de la potencia compleja en el plano complejo.

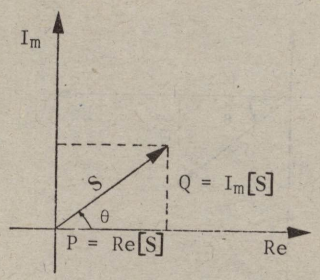


Figura 2.11. Representación de P, Q y S en el plano complejo.

Es importante destacar que siendo la potencia activa (P) la componente real de la potencia compleja (S) y Q la parte imaginaria

de la misma, se cumple que:

$$S = |S| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

La unidad en que se mide la potencia reactiva es el VAR (Volt-Ampere reactivo).

La potencia reactiva puede ser de tipo inductivo o de tipo capaciti_ vo, según sea la naturaleza de la carga.

Los triángulos de potencia que se forman en el plano complejo de acuerdo al tipo de carga, se muestran en las figuras 2.12 y 2.13.

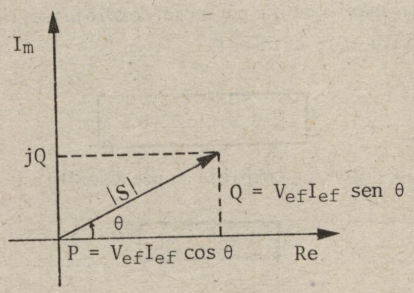


Figura 2.12 Representación del triángulo de potencias para una carga inductiva (FP atrasado).

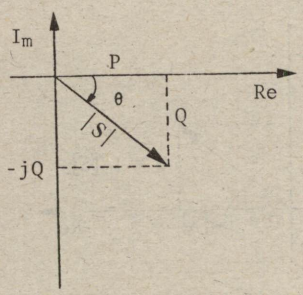


Figura 2.13 Representación del triángulo de potencias para una carga capacitiva (FP adelantado).

El triángulo de potencias atrasado se forma cuando la naturaleza de la carga es inductiva. Como la potencia reactiva para este tipo de carga es positiva, y como $\theta = \phi - \psi > 0$ (donde ϕ es el ángulo de defasamiento del voltaje y ψ el ángulo de defasamiento de la corriente) entonces *la corriente está atrasada con respecto al voltaje.*

Por lo anterior, a este triángulo se le denomina triángulo de potencias en atraso o retrasado. Observe la figura 2.12.

El triángulo de potencias adelantado se forma cuando la naturaleza de la carga es capacitiva.

Como la potencia reactiva para este tipo de carga es negativa, y como $\theta = \phi - \psi$ y $\theta < 0$, entonces *la corriente está adelantada con respecto al voltaje.* Por lo anterior, a este triángulo se le denomina triángulo de potencias en adelanto o adelantado. Observe la figura 2.13.

Ejemplo 2.4
Si en el circuito de la figura 2.14, la frecuencia de operación es de 1000 rad/s:

a. Determine las potencias real, reactiva y aparente, suministradas por la fuente.

b. Si $I_S = 3\angle 30°\ A_{rms}$, dibuje el triángulo de potencias para el circuito.

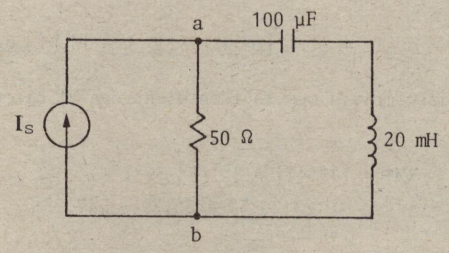


Figura 2.14

Solución

a. Cálculo de impedancias.

$$Z_R = 50\ \Omega$$

$$Z_C = -j\left(\frac{1}{10^3 \times 100 \times 10^{-6}}\right) = -j10\ \Omega$$

$$Z_L = j(10^3)(20 \times 10^{-3}) = j20\ \Omega$$

El circuito en el dominio de la frecuencia se muestra en la figura 2.15.

Donde

$$Z_{eq} = (Z_C + Z_L)//(Z_R) = \frac{(j10)(5)}{j10 + 5} = 4 + j2$$

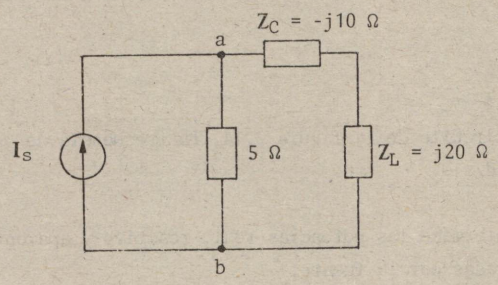


Figura 2.15

El fasor voltaje será:

$$V = Z_{eq} I_s = (4.47\angle 26.5°)(3\angle 30°) = 13.41\angle 56.5°$$

La potencia compleja que la fuente entrega al circuito está dada por:

$$S = VI^* = (13.41\angle 56.5°)(3\angle -30°)$$
$$= 40.23\angle 26.5° = 35.79 + j17.95$$

de donde

$$\theta = 26.5°$$

Potencia aparente $S = 40.23$ VA
Potencia real $P = 35.79$ kW
Potencia reactiva $Q = 17.95$ VAR
Factor de potencia $FP = \cos 26.5° = 0.89$ atrasado

b. El diagrama fasorial de potencias del circuito se muestra en la figura 2.16.

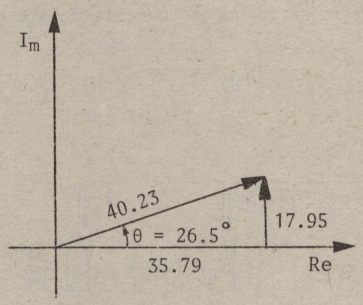


Figura 2.16

Modificación del factor de potencia

Anteriormente se había mencionado que los factores de potencia bajos (generalmente menores de 0.85) producen pérdidas significativas en los sistemas eléctricos. El hecho sugiere la necesidad de contrarrestar estas pérdidas. El mecanismo para hacerlo consiste en incrementar el valor del factor de potencia; lo que se puede lograr si se conectan cargas capacitivas en paralelo con las cargas originales, ya que generalmente las cargas industriales son de tipo inductivo.

A continuación se presentan algunos ejemplos que ilustran el mecanismo para modificar el factor de potencia.

Ejemplo 2.5

En una fábrica se trabaja con un motor de inducción de 3.5 kW con un FP de 0.766 retrasado. Para conseguir tarifas eléctricas más baratas se debe aumentar el FP a 0.90 retrasado. Si el voltaje de alimentación es de 220 V_{rms}, determine:

a. La reactancia capacitiva que se debe conectar en paralelo con el motor para que se obtenga el factor de potencia deseado (0.90 retrasado).

b. La capacitancia que corresponde a la carga agregada si la frecuencia del sistema es de 60 Hz.

Solución

En la figura 2.17 se muestra un circuito que incluye tanto al motor de inducción como a la carga que se conecta a éste en paralelo.

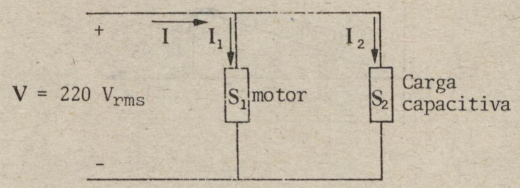


Figura 2.17

En este circuito S_1 es la potencia compleja del motor de inducción y S_2 es la potencia de la carga capacitiva.

a. Calcularemos la potencia compleja que se le suministra al motor (S_1).

Como

$$S = S\angle\theta = \frac{P}{FP}\angle\theta$$

entonces

$$S_1 = \frac{3\,500}{0.766}\angle\cos^{-1}(0.766) = 4\,569.19\angle 40^\circ = 3\,500 + j2\,937$$

La potencia compleja S para el FP deseado será:

$$S = \frac{3\ 500}{0.90} \underline{|\cos^{-1}(0.90)} = 3\ 888.88 \underline{|26^\circ} = 3\ 500 + j1\ 704.77$$

Si se compara S_1 con S_2 se podrá observar que sus componentes reales son iguales, no así sus componentes imaginarias.

Esto implica que la parte imaginaria deseada es j1 704.77 y la parte imaginaria de la potencia compleja del motor es j2 937.00

Por lo tanto, la carga capacitiva agregada debe proporcionar:

$$j1\ 704.77 - j2\ 937.00 = -\ j1\ 232.23$$

Es decir

$$Q_2 = S_2 = 1\ 232.23\ \text{VAR}$$

b. La corriente (I_2) que circulará por la carga capacitiva es:

$$I_2^* = \frac{S_2}{V} = \frac{-j1\ 232.23}{220} = -\ j5.60$$

Por lo tanto

$$I_2 = j5.60$$

La impedancia de la carga capacitiva Z_2 será:

$$Z_2 = \frac{V_2}{I_2} = \frac{220}{j5.60} = -\ j39.28$$

y como

$$Z_2 = -\ j\left(\frac{1}{\omega C}\right) = -\ j\left(\frac{1}{2\pi f C}\right) = -\ j39.28$$

entonces

$$\frac{1}{2\pi f C} = 39.28$$

de donde

$$C = \frac{1}{2\pi f(39.28)} = \frac{1}{2\pi(60)(39.28)} = 60 \times 10^{-6}\ \text{F}$$

por lo tanto

$$C = 60\ \mu F$$

Los resultados obtenidos en el inciso a. se muestran en el diagrama fasorial de la figura 2.18.

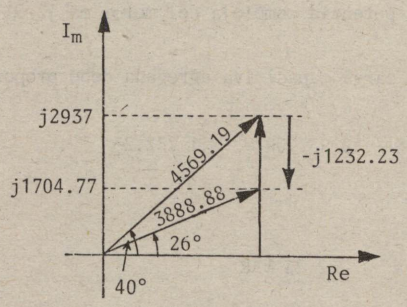


Figura 2.18

Es importante observar el efecto de la carga capacitiva, que es el de contrarrestar la carga inductiva del motor. En otras palabras, disminuye la potencia aparente y por lo tanto la corriente, mejorando con esto el factor de potencia.

Ejemplo 2.6

Un sistema eléctrico, con una capacidad nominal para generar 25 kVA, alimenta una carga de 10 kV con un FP de 0.743 retrasado. Determine:

a. El porcentaje de la capacidad nominal a que está trabajando el sistema.

b. Cuánta carga resistiva adicional se le puede agregar al sistema para que trabaje a plena carga, es decir a su capacidad nominal.

Solución

El sistema eléctrico se puede esquematizar como se muestra en la figura 2.19.

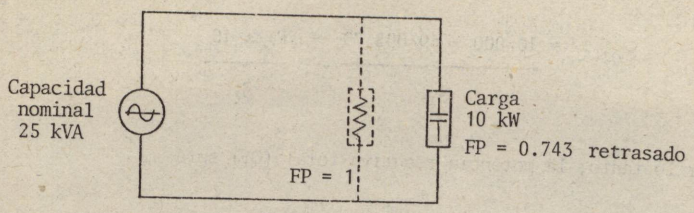


Figura 2.19

a. La potencia aparente con la que el sistema alimenta a la carga (S_1) es:

$$S_1 = \frac{P}{FP} = \frac{10\ 000}{0.743} = 13\ 458.95 \text{ VA}$$

Como la capacidad nominal es de 25 000 VA, entonces el porcentaje de capacidad a que está trabajando el sistema es:

$$\left(\frac{13\ 458.95}{25\ 000}\right)100 = 53.83\ \%$$

b. La potencia compleja original (S_1) del sistema es:

$$S_1 = S_1 \underline{\lfloor \cos^{-1}(0.743)} = 13\ 458.95 \underline{\lfloor 42°}$$

$$S_1 = 10\ 000 + j9\ 005.79$$

Agregar una carga con FP = 1 que consume una potencia S_2, significa que solamente presenta una parte real. Por lo tanto se debe cumplir que:

$$S_{TOTAL} = S_1 + S_2$$

Ahora bien, para que se trabaje a plena carga

$$S_{TOTAL} = 25\ 000 \text{ VA}$$

La potencia reactiva a plena carga no variará con respecto a la original debido a que las cargas agregadas consumen sólo potencia real, es decir:

$$S_{TOTAL} = \underbrace{10\ 000 + j9\ 005.79}_{S_1} + \underbrace{P_2 + j0}_{S_2}$$

Por lo tanto, la potencia reactiva total (Q_T) será

$$Q_T = 9\ 005.79$$

El diagrama de potencias con los resultados obtenidos hasta ahora se muestra en la figura 2.20.

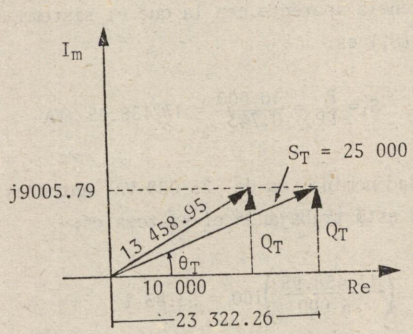


Figura 2.20

Del diagrama anterior se puede observar que

$$\text{sen } \theta_T = \frac{Q_T}{S_T} = \frac{9\ 005.79}{25\ 000} = 0.36$$

entonces

$$\theta_T = \text{ang sen}(0.36) = 21.11°$$

por lo tanto

$$S_T = S_T \underline{\lfloor \theta_T} = 25\ 000 \underline{\lfloor 21.11°} = 23\ 322.26 + j9\ 005.79$$

y como

$$S_T = S_1 + S_2$$

entonces

$$S_2 = S_T - S_1$$

por lo que

$$S_2 = 23\ 322.26 + j9\ 005.79 - (10\ 000 + j9\ 005.79)$$

es decir

$$S_2 = 13\ 322.26\ W = 13.322\ kW$$

Ejemplo 2.7

Un sistema eléctrico con una capacidad nominal de 1 000 kVA funciona a plena carga con un FP de 0.6 retrasado. Conectando un banco de condensadores en paralelo con la carga alimentada, se modifica el FP a 0.9 retrasado. Determine:

a. La potencia reactiva del banco de condensadores.

b. Cuánta carga activa y cuánta carga reactiva se puede añadir al sistema para que trabaje a su capacidad nominal con el nuevo factor de potencia.

Solución

a. Cuando el sistema funciona a plena carga se tiene que:

$S = VI = 1\ 000$ kVA
$P = VI\cos\theta = 1\ 000(0.6) = 600$ kW
$\theta = \text{ang cos } 0.6 = 53.13°$
$Q = VI\text{sen } \theta = 1\ 000\text{sen } 53.1° = 800$ kVAR

Observe la figura 2.21.

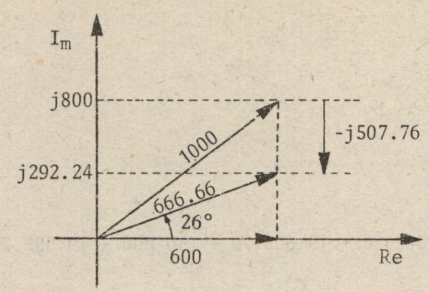


Figura 2.21

Cuando FP = 0.9 en retraso

$\theta' = \text{ang cos } 0.9 = 26°$

$S' = \frac{P}{FP} = \frac{600}{0.9} = 666.66 \text{ kVA}$

$Q' = S'\text{sen } \theta' = 666.66 \text{ sen } 26°$

$Q' = 292.24 \text{ kVAR}$

Por lo tanto, la potencia reactiva en los condensadores es:

$Q - Q' = 800 - 292.24 = 507.76 \text{ kVAR}$

b. Para FP = 0.9 retrasado y en condiciones nominales:

$\theta = \text{ang cos } 0.9 = 26°$

$S = 1\ 000 \text{ kVA}$

$P = VI\cos\theta = 1\ 000(0.9) = 900 \text{ kW}$

$Q = VI\text{sen } \theta = 1\ 000 \text{ sen } 26° = 438.4 \text{ kVAR}$

El diagrama de potencias con los resultados obtenidos se muestra en la figura 2.22.

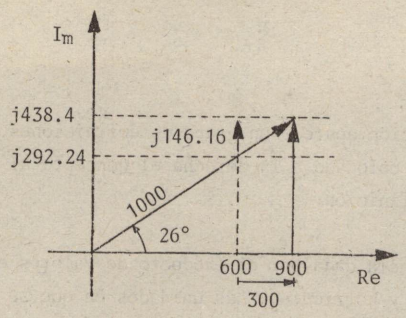


Figura 2.22

En la figura anterior se observa que se puede añadir al sistema tanto una carga resistiva que consuma una potencia activa de 900 - 600 = 300 kW, como una carga inductiva que consuma una potencia reactiva de 438.4 - 292.24 = 146.16 kVAR.

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION.

I. A continuación aparece un grupo de definiciones. Escriba en el espacio colocado a la derecha el concepto al que corresponde de cada definición.

a. Potencia dada por el producto de valores eficaces de voltaje y corriente. Las unidades en que se mide son VA, y representa también la magnitud de la potencia compleja. _____

b. Potencia que está especificada en términos de los valores máximos de voltaje y corriente._____

c. Potencia dada por el producto del voltaje y la corriente en función del tiempo. Presenta una componente constante y otra componente senoidal cuya frecuencia es el doble de la del voltaje o de la corriente._____

d. Potencia no aprovechable por las cargas de un sistema eléctrico. Es la componente imaginaria de la potencia compleja._____

II. A continuación aparecen algunos problemas. Resuélvalos y escriba las soluciones en los espacios indicados.

1. Determine el FP asociado a una carga:

a. que consiste en un condensador de $6.25\ \mu F$ en paralelo con la combinación en serie de una resistencia de $400\ \Omega$ y una inductancia de $1\ H$ para $\omega = 400\ rad/s$

b. que es inductiva y consume $33\ A_{rms}$ y $6.9\ kW$ para un voltaje de $230\ V_{rms}$

c. compuesta de cargas paralelas, una de las cuales consume 10 kVA con un FP de 0.8 retrasado, y la otra consume 8 kVA con un FP de 0.9 adelantado.

a. FP = _____

b. FP = _____

c. FP = _____

2. Determine el valor de **Z** del circuito de la figura 2.23, donde la resistencia de 3 Ω consume 666 W y el circuito total consume 3 370 VA con un FP de 0.937 adelantado.

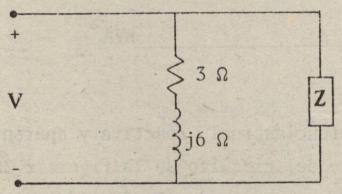


Figura 2.23

Z = _____ Ω

3. Obtenga la potencia promedio y la potencia instantánea entregada a la resistencia del circuito que se muestra en la figura 2.24.

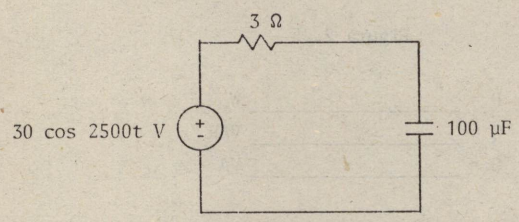


Figura 2.24

P = _____ W

p(t) = _____ W

4. Determine el triángulo de potencia total de tres cargas conectadas en paralelo. La primera de ellas consume 3 kW con un FP unitario, la segunda 5 kVA con un FP de 0.866 retrasado y la tercera 4 kVA con un FP de 0.707 retrasado. El circuito está alimentado por una fuente de 230 V_{rms} que trabaja a 60 Hz.

S_T = _____ kVA

5. Encuentre las potencias real, reactiva y aparente suministradas por la fuente del circuito de la figura 2.25. Considere una frecuencia de operación de 1 000 rad/s.

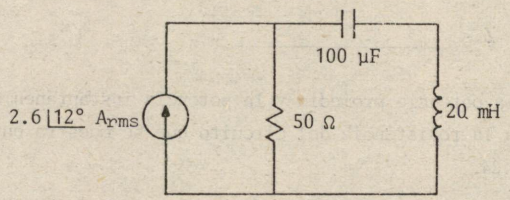


Figura 2.25

P = _____ W

Q = _____ VAR

S = _____ VA

6. Determine el FP para el circuito que se muestra en la figura 2.26.

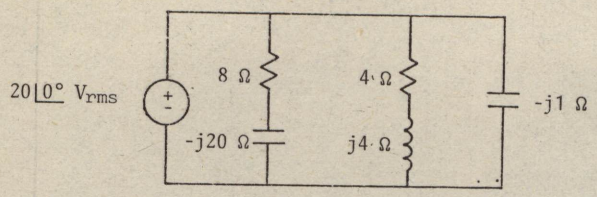


Figura 2.26

FP = _____

7. Halle la potencia total consumida por la carga y dibuje el triángulo de potencia correspondiente para el circuito de la figura 2.27.

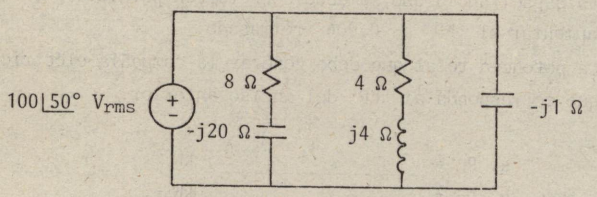
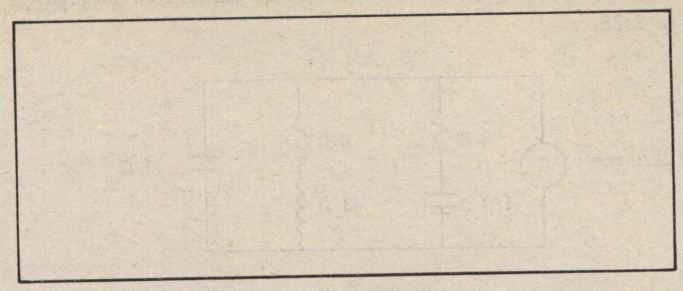


Figura 2.27

P_T = _____ kW



Triángulo de potencias

8. Un cliente de cierta compañía eléctrica necesita una potencia de 20.5 kW a 127 V_{rms} y 60 Hz. La carga que se va a conectar presenta un FP de 0.642 retrasado. Si la resistencia de la línea por la que la energía se entrega al cliente es de 0.18 Ω, calcule:

   a. La potencia que se pierde en la línea.
   b. La potencia total que debe generar la compañía eléctrica.
   c. La capacitancia que se debe conectar en paralelo para aumentar el FP a 0.906 retrasado.
   d. La potencia total que debe generar la compañía eléctrica, que corresponda al FP del inciso anterior.

   a. P_L = _____ kW
   b. P_T = _____ kW
   c. C = _____ μF
   d. P_T = _____ kW

9. Para un circuito en el que hay dos impedancias conectadas en paralelo, una de ellas de $4\angle -30°$ Ω y otra de $5\angle 60°$ Ω, y en el que el fasor tensión aplicado es de $20\angle 0°$ V_{rms}, dibuje:

   a. El triángulo de potencias para la impedancia 1.
   b. El triángulo de potencias para la impedancia 2.
   c. El triángulo de potencias total del circuito.

10. Mediante la conexión de unos capacitores se modifica el factor de potencia de una carga de 300 kW desde 0.65 retrasado hasta 0.90 retrasado. Considerando un voltaje de la carga de $200\angle 0°$ V_{rms}, calcule:

    a. La potencia reactiva de los capacitores necesarios para la modificación del FP.
    b. La capacitancia que corresponde a la carga anexada si la frecuencia del sistema es de 60 Hz.

    a. Q = _____ VAR
    b. C = _____ μF

11. Una carga de motores de inducción de 1 500 W con un FP de 0.75 retrasado, se combina en paralelo con la de un grupo de motores síncronos de 500 VA con un FP de 0.65 adelantado. Calcule la potencia reactiva de los capacitores a instalar para que el FP de los dos grupos de motores sea de 0.95 retrasado.

    Q = _____ kVAR

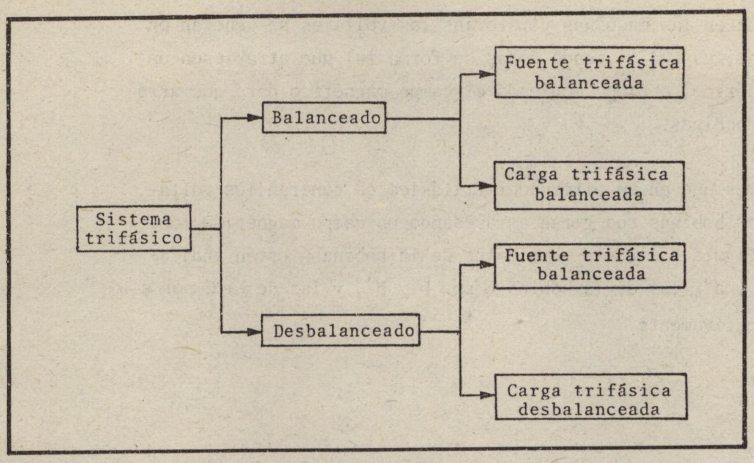
12. Un transformador de 250 kVA trabaja a plena carga con un FP de 0.8 retrasado. Mediante un banco de capacitores se corrige el factor de potencia al valor de 0.9 retrasado.

    a. Encuentre la potencia reactiva de los capacitores anexados.
    b. Determine la potencia activa que se le puede añadir sin exceder el límite de la potencia aparente del transformador al anexar una nueva carga.

    a. Q = _____ kVAR
    b. P = _____ kW

MODULO 3 CIRCUITOS TRIFASICOS

CUADRO SINOPTICO



OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Identificará los voltajes y corrientes que se presentan en circuitos o sistemas trifásicos.

2. Establecerá una referencia que le permita realizar el cálculo de los voltajes y corrientes de un circuito trifásico.

3. Representará en un diagrama fasorial los voltajes y corrientes de un circuito trifásico.

4. Calculará el valor de las potencias disipadas por un circuito trifásico.

5. Transformará conexiones delta a estrella y viceversa.

6. Aplicará el método de diagrama unifilar a los circuitos trifásicos balanceados para simplificar el cálculo de sus parámetros.

7. Determinará el valor de las corrientes y voltajes de un circuito trifásico desbalanceado.

3.1 VOLTAJES EN UN ALTERNADOR TRIFASICO

Sabemos que en las máquinas giratorias los voltajes se generan en las bobinas, ya sea moviendo éstas de forma tal que atraviesen un campo magnético, o bien, moviendo el campo magnético para que atraviese las bobinas.

Consideremos que en un alternador trifásico se generan los voltajes en tres bobinas que giran atravesando un campo magnético (observe la figura 3.1); las terminales de la bobina A están indicadas por a y a', las de la bobina B por b y b', y las de la C por c y c' respectivamente.

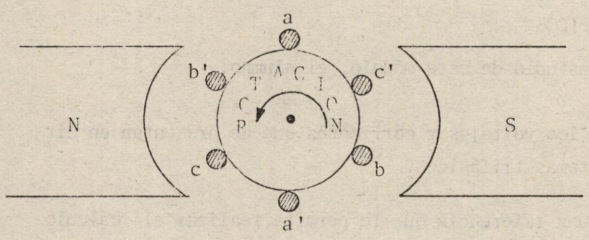


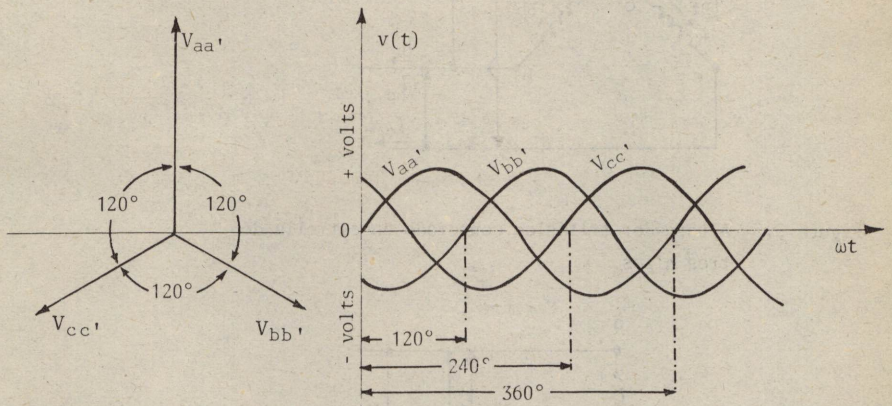
Figura 3.1 Alternador trifásico.

Generalmente las tres bobinas están interconectadas y se dispone externamente de las terminales a, b y c para que se conecten a las líneas que alimentan a una carga determinada.

Secuencia de fase

Los voltajes generados en las tres bobinas están defasados en un ángulo de 120° cada uno con respecto a otro. El orden en que son generados los voltajes es conocido como *secuencia de fase*. Si las bobinas giran en *sentido antihorario*, a través del campo magnético, los voltajes se generan en el orden $V_{aa'}(t)$, $V_{bb'}(t)$, $V_{cc'}(t)$;

y la secuencia de fase se considera *positiva*. Si las bobinas giran en el *sentido de las manecillas del reloj*, los voltajes pasarán en el orden $V_{aa'}(t)$, $V_{cc'}(t)$, $V_{bb'}(t)$ respecto a un punto fijo; a esta secuencia de fase se le considera *negativa*. En la figura 3.2 se muestran los voltajes generados en el dominio del tiempo y en un diagrama fasorial de un alternador trifásico con secuencia de fase positiva.



En un diagrama fasorial — En el dominio del tiempo

Figura 3.2 Voltajes generados en un alternador trifásico de secuencia positiva (abc).

3.2 SECUENCIAS DE FASE POSITIVA Y NEGATIVA. VOLTAJES Y CORRIENTES DE LINEA Y DE FASE. ALTERNADOR CONECTADO EN ESTRELLA

Las tres bobinas de la figura 3.1 se muestran interconectadas en la Fig. 3.3. Las tres terminales a', b' y c' están conectadas en un punto común n. A esta forma de conexión se le conoce como conexión estrella (Y). Generalmente están disponibles tres terminales (a, b y c); sin embargo, a veces se dispone de una cuarta terminal, el neutro, dando origen al sistema de cuatro terminales (Figura 3.4).

Alternador conectado en estrella

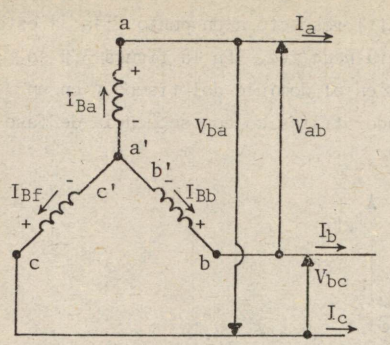


Figura 3.3 Alternador trifásico conectado en estrella de tres hilos.

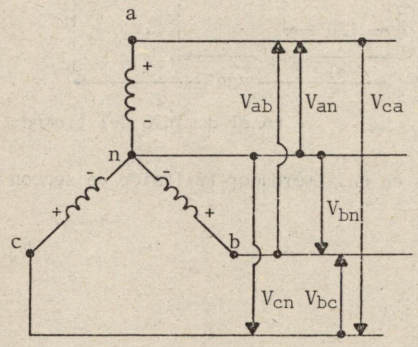


Figura 3.4 Alternador trifásico conectado en estrella de cuatro hilos.

Cuando en un alternador se dispone de la terminal neutra, un voltaje de cualquier terminal de línea (a, b o c) a la terminal neutra (n) se llama *voltaje al neutro*. En la figura 3.4 los voltajes al neutro son V_{an}, V_{bn} y V_{cn}. El voltaje entre cualquier par de terminales a, b o c se denomina *voltaje entre fases*, aunque también se le conoce como voltaje entre líneas. En la figura 3.3 los voltajes entre fases son V_{ab}, V_{bc} y V_{ca}.

Voltaje al neutro

Voltaje entre fases

En general, podemos decir que un alternador trifásico es balanceado o equilibrado, si:

Alternador trifásico balanceado

1. Las magnitudes de los fasores de los voltajes al neutro son iguales entre sí; es decir:

$$|V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}| = V_n$$

2. La suma fasorial de los voltajes al netro es cero; es decir:

$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0$$

Ahora bien, si tenemos conectadas en estrella las bobinas de un alternador trifásico balanceado y consideramos que los voltajes se generan en el orden a, b, c (secuencia de fase positiva) y además, la referencia de los fasores de voltaje es Van (o sea a Van le asignamos un ángulo de 0°), tendremos:

$$V_{an} = V_N \angle 0° \tag{3.1a}$$

$$V_{bn} = V_N \angle -120° \tag{3.1b}$$

$$V_{cn} = V_N \angle -240° \tag{3.1c}$$

en donde Vn representa la magnitud de cualquiera de los fasores de los voltajes al neutro. Los fasores de los voltajes entre fases se pueden obtener a partir de los tres fasores de voltaje al neutro arriba escritos. Fijémonos en la figura 3.5, donde se observa que:

$$V_{ab} = V_{an} - V_{bn} \tag{3.2}$$

sustituyendo (3.1a) y (3.1b) en (3.2), tenemos:

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_N \angle 0° - V_N \angle -120° \\ &= V_N - V_N[\cos(-120°) + j\,\mathrm{sen}(-120°)] \\ &= V_N - V_N[-0.5 - j0.866] \\ &= V_N(1.5 + j0.866) \\ &= \sqrt{3}\, V_N \angle 30° \end{aligned}$$

Para los otros dos voltajes entre fases o entre líneas, tendremos:

$$V_{bc} = V_{bn} - V_{cn} \tag{3.3}$$

sustituyendo (3.1b y 3.1c) en (3.3)

$$\begin{aligned} V_{bc} &= V_N\angle -120^\circ - V_N\angle -240^\circ \\ &= V_N\angle -120^\circ + V_N\angle -60^\circ \\ &= V_N[\cos(-120^\circ) + j\,\mathrm{sen}(-120^\circ) + \cos(-60^\circ) + j\,\mathrm{sen}(-60^\circ)] \\ &= V_N(-j1.73) \\ V_{bc} &= \sqrt{3}\,V_N\angle -90^\circ \end{aligned}$$

$$V_{ca} = V_{cn} - V_{an} \tag{3.4}$$

sustituyendo (3.1b y 3.1c) en (3.4)

$$\begin{aligned} V_{ca} &= V_N\angle -240^\circ - V_N\angle 0^\circ \\ &= V_N[\cos(-240^\circ) + j\,\mathrm{sen}(-240^\circ)] - V_N \\ &= V_N\,(-0.5 + j0.866) - V_N \\ &= V_N\,(-1.5 + j0.866) \\ V_{ca} &= \sqrt{3}\,V_N\angle -210^\circ = \sqrt{3}\,V_N\angle 150^\circ \end{aligned}$$

Estos voltajes de fase o de línea se pueden obtener gráficamente en un diagrama fasorial mediante la suma algebraica de los fasores que aparecen en las ecuaciones (3.2), (3.3) y (3.4), observe la figura 3.5. En la figura anterior, los ángulos de todos los fasores que ahí aparecen son múltiplos de 30° y los voltajes al neutro están defasados 120° entre sí. Lo anterior ocurre también para los voltajes de línea. También se puede apreciar que la suma fasorial de los voltajes de línea es cero, o sea que:

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = 0.$$

Además podemos concluir que las magnitudes de estos tres voltajes son iguales; es decir que:

$$|V_{ab}| = |V_{bc}| = |V_{ca}| = V_F$$

Si consideramos a V_F como la magnitud de cualquiera de los voltajes de fase o de línea, según los resultados de los desarrollos de las ecuaciones (3.2), (3.3) y (3.4) se puede afirmar que la relación entre la magnitud del voltaje entre fases (V_F) y la magnitud del voltaje al neutro (V_N) es:

$$V_F = \sqrt{3}\, V_N \qquad (3.5)$$

Relación entre el voltaje al neutro y voltaje entre fases

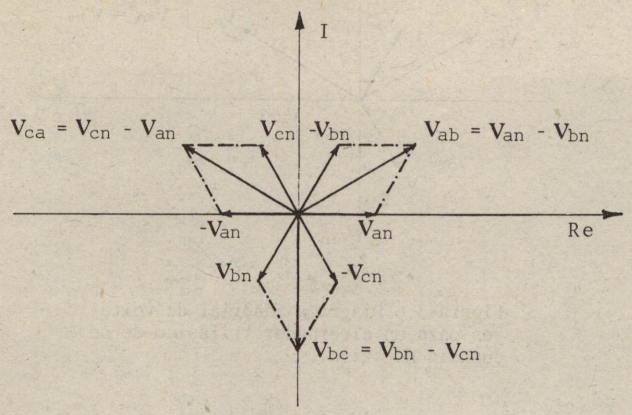


Figura 3.5 Diagrama fasorial de voltajes de un alternador trifásico de secuencia positiva.

Si consideramos que los voltajes se generan en el orden a, c, b es decir, si se presenta la secuencia de fase negativa, entonces tenemos que los voltajes al neutro - tomados con referencia a V_{an} - serán:

$$V_{an} = V_N \angle 0°$$
$$V_{cn} = V_N \angle -120°$$
$$V_{bn} = V_N \angle -240°$$

Y de una manera análoga a la utilizada en la secuencia de fase positiva, los voltajes de línea que se obtienen a partir de los voltajes en las bobinas resultan ser:

$$V_{ac} = \sqrt{3}\, V_N \angle 30°$$
$$V_{cb} = \sqrt{3}\, V_N \angle -90°$$
$$V_{ba} = \sqrt{3}\, V_N \angle -210°$$

El diagrama fasorial para los voltajes al neutro y de línea, para la secuencia negativa (acb) se muestran en la figura (3.6).

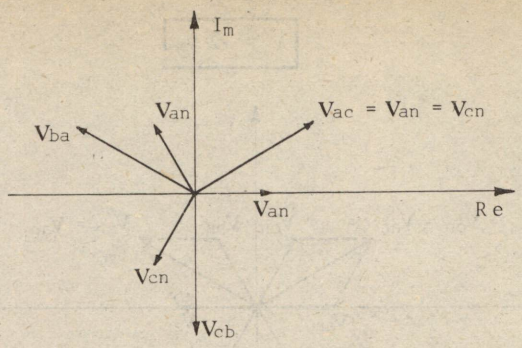


Figura 3.6 Diagrama fasorial de voltajes para un alternador trifásico de secuencia negativa.

Existe otra forma de construir un diagrama fasorial para voltajes o corrientes que resulta en forma de triángulo. Para visualizar esto de una manera más clara desarrollaremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1
Construya un diagrama fasorial de voltajes para un alternador trifásico conectado en Y de secuencia positiva que presenta un voltaje entre líneas de 240 V_{rms}.

Solución

Como se debe establecer un fasor de voltaje como referencia, se presentan dos posibles opciones para empezar a construir el diagrama fasorial:

Primera opción:
Si el fasor del voltaje de referencia es entre fases, se hace coincidir dicho voltaje con la dirección positiva del eje horizontal, es decir, se le asigna un ángulo de 0°. Tomemos el fasor de voltaje V_{ab} como referencia (ver figura 3.7a).

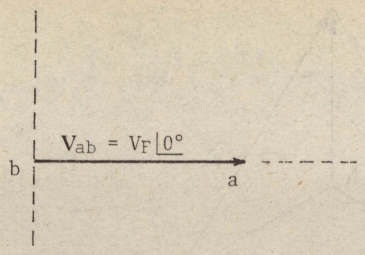


Figura 3.7a

Existen ahora 2 posibilidades para la posición del vértice c: c_1 o c_2 (Figura 3.7b).

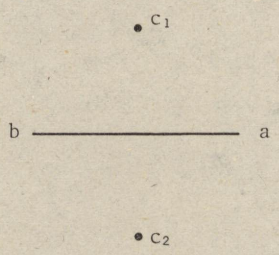


Figura 3.7b

Pero como la secuencia es positiva y se debe pasar en el orden abc por un punto fijo al girar los fasores en sentido antihorario, entonces la posición correcta del punto es c_1 y el triángulo quedará como la figura 3.7c.

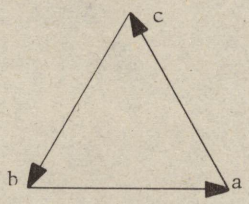


Figura 3.7c

Después se sitúa el punto n (neutro) en el centro geométrico de la figura y se dibujan 3 líneas que parten de n y que apuntan hacia a, b y c (Figura 3.7d).

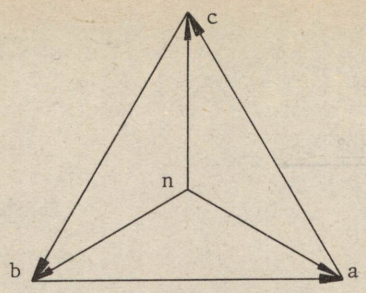


Figura 3.7d

Diagrama fasorial de un sistema trifásico balanceado, conectado en estrella, en forma de un triángulo

La figura 3.7d es un diagrama que nos proporciona automáticamente todos los ángulos de los fasores de voltaje. Entonces, del diagrama tenemos que:

$$V_{ab} = V_F \angle 0°$$

$$V_{ca} = V_F \angle 120°$$

$$V_{bc} = V_F \angle -120°$$

$$V_{cn} = \frac{V_F}{\sqrt{3}} \angle 90°$$

$$V_{an} = \frac{V_F}{\sqrt{3}} \angle -30°$$

$$V_{bn} = \frac{V_F}{\sqrt{3}} \angle -150°$$

sustituyendo los valores de nuestro ejemplo:

$$V_{ab} = 240 \angle 0°$$

$$V_{ac} = 240 \angle 120°$$

$$V_{cb} = 240 \angle -120°$$

$$V_{cn} = 138.5 \angle 90°$$

$$V_{an} = 138.5 \angle -30°$$

$$V_{bn} = 138.5 \angle -150°$$

Segunda opción: Si uno de los voltajes al neutro se toma como referencia, también se le asigna un ángulo de 0°. Para nuestro ejemplo, tomemos como referencia el voltaje V_{an} (Figura 3.8a).

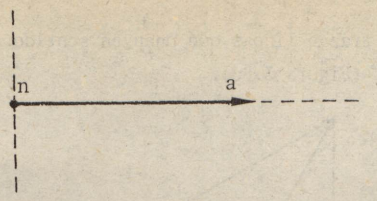


Figura 3.8a

Después se trazan dos líneas que partan de n y que apunten hacia b y c de tal forma que se presente un defasamiento de 120° entre cada dos de las tres (figura 3.8b).

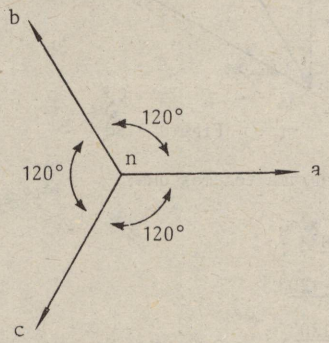


Figura 3.8b

Ahora bien, como la secuencia es positiva, los fasores al girar en sentido antihorario y pasar por un punto fijo deben hacerlo en el orden abc. La única opción de situar los puntos b y c se muestra en la figura 3.8c.

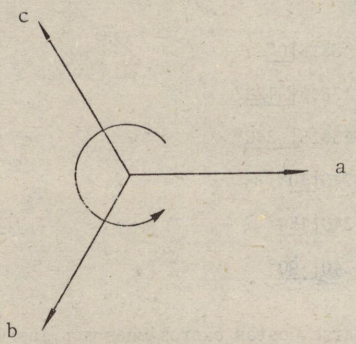


Figura 3.8c

Finalmente, se trazan líneas que unan en sentido antihorario a los puntos a, b y c (Figura 3.8d).

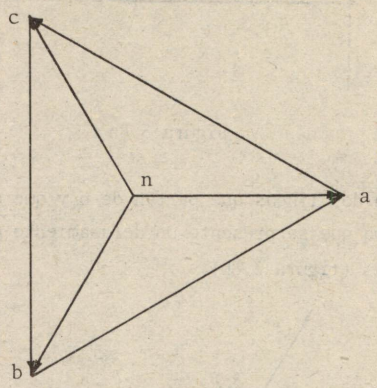


Figura 3.8d

De este último diagrama tenemos que:

$$V_{an} = V_N \angle 0°$$
$$V_{bn} = V_N \angle -120°$$
$$V_{cn} = V_N \angle 120°$$
$$V_{ab} = V_F \angle 30°$$
$$V_{ca} = V_F \angle 150°$$
$$V_{bc} = V_F \angle -90°$$

sustituyendo los valores de nuestro ejemplo:

$$V_{an} = 138.5 \angle 0°$$
$$V_{bn} = 138.5 \angle -120°$$
$$V_{cn} = 138.5 \angle -240°$$
$$V_{ab} = 240 \angle 30°$$
$$V_{ca} = 240 \angle 150°$$
$$V_{bc} = 240 \angle -90°$$

Como puede notarse, estas expresiones son las mismas que las obtenidas en las ecuaciones (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4).

Refiriéndonos nuevamente a la figura 3.3 se puede afirmar que las magnitudes de las corrientes en cada una de las fases I_a, I_b e I_c son iguales a las magnitudes de las corrientes en las bobinas, o sea a I_{Ba}, I_{Bb} e I_{Bc} respectivamente. En otros términos, en una conexión estrella (Y), la relación entre la magnitud de las corrientes de fase (I_F) y la magnitud de las corrrientes de bobina (I_B) es:

$$\boxed{I_F = I_B} \qquad (3.6)$$

Relación entre las magnitudes de las corrientes de fase y de bobina

Alternador conectado en delta

Cuando un alternador está conectado en delta (Δ), observe la figura 3.9, las terminales de las bobinas se conectan una a continuación de otra formando un triángulo. Las líneas en este tipo de conexión se sacan de los puntos de unión de dos bobinas.

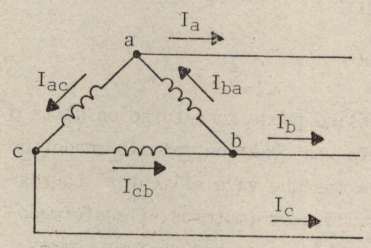


Figura 3.9 Bobinas de un alternador trifásico en conexión delta.

En una conexión delta la magnitud del voltaje entre cada fase, V_{ab}, V_{bc} y V_{ca}, V_F es igual a la magnitud de voltaje en cada una de las bobinas (V_B); es decir, la relación entre los voltajes de fase y de bobinas en una conexión delta es:

Relación entre las magnitudes de los voltajes entre fases y de bobina

$$\boxed{V_F = V_B} \qquad (3.7)$$

Además, los tres voltajes se encuentran defasados 120° entre sí y de acuerdo a la ley de voltajes de Kirchhoff la suma es cero.

Las corrientes en las bobinas de una conexión delta, como se ve en la figura 3.9 son I_{ac}, I_{cb} e I_{ba}. Para hallar la corriente en cualquiera de las tres fases, I_a, I_b e I_c, es necesario aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff a cada uno de los nodos a, b y c. Así por ejemplo, para el nodo a tenemos que:

$$I_a = I_{ba} - I_{ac}$$

Puesto que las corrientes en las bobinas son iguales en magnitud y defasadas 120° entre sí, podemos seguir un procedimiento similar al que se efectuó con las ecuaciones (3.2), (3.3) y (3.4) para llegar a que la relación entre la magnitud de las corrientes de fase y la magnitud de las corrientes de bobina es:

$$\boxed{I_F = \sqrt{3}\, I_B} \qquad (3.8)$$

Relación entre las magnitudes de las corrientes de fase y de bobina

3.3 CIRCUITOS TRIFASICOS BALANCEADOS

Hemos visto que un alternador trifásico puede conectarse en delta o en estrella. Ahora surge la pregunta ¿La conexión del alternador determina la conexión de las cargas a las que va a alimentar? La respuesta es no. Aunque las cargas trifásicas (motores, transformadores, sistemas de alumbrado, etc.) también se conectan tanto en estrella como en delta, la conexión de las mismas es independiente de la conexión del alternador. Pero, por otro lado, las mismas relaciones de corrientes y voltajes que se presentan en las conexiones Δ y Y de un alternador se presentan en las conexiones Δ y Y de las cargas.

Una carga trifásica es balanceada si las cargas en cada una de las fases son iguales.

Carga trifásica balanceada

Al voltaje en cada carga se le denomina *voltaje de carga* y se denota V_c a la corriente en cada carga se le llama *corriente* de carga y se denota I_c.

Un circuito trifásico es balanceado si tanto el alternador trifásico (fuente de alimentación) como la carga o impedancia trifásica conectada al mismo son balanceadas.

Ejemplo 3.2

La figura 3.10 muestra tres resistencias de 15 ohms cada una conectada en estrella a un voltaje de línea de 240 V_{rms}. Encuentre:

a. Las corrientes a través de cada una de las resistencias.
b. Las corrientes en las líneas.

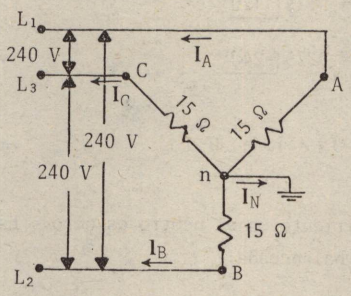


Figura 3.10

Solución

a. La magnitud del voltaje a través de cada resistor (V_c) está dada por:

$$|V_{AN}| = |V_{BN}| = |V_{CN}| = V_C$$

$$V_C = \frac{V_F}{\sqrt{3}} = \frac{240}{\sqrt{3}} = 138.7\ V_{rms}$$

La intensidad (magnitud) de la corriente en cada resistencia (I_C) es:

$$|I_{AN}| = |I_{BN}| = |I_{CN}| = I_C = \frac{V_C}{Z_C} = \frac{138.7}{15} = 9.25\ A_{rms}$$

Para determinar los ángulos de las corrientes, tomaremos como referencia a $V_{an} = 240\angle 0°$ y si $Z_C = 15\angle 0°$, entonces:

$$I_{AN} = \frac{V_{AN}}{Z_C} = \frac{138.7\angle 0°}{15\angle 0°} = 9.25\angle 0°$$

$$I_{BN} = 9.25\angle -120°$$

$$I_{CN} = 9.25\angle -240°$$

b. Como la carga está conectada en estrella, se cumple que:

$$I_A = I_{AN} = 9.25\angle 0°$$

$$I_B = I_{BN} = 9.25\angle -120°$$

$$I_C = I_{CN} = 9.25\angle -240°$$

$$I_N = I_A + I_B + I_C = 0$$

Observe que la corriente en el neutro es cero. Esto sucede siempre que la carga está balanceada.

Ejemplo 3.3

Un motor de inducción trifásico es la carga conectada a una fuente trifásica balanceada de secuencia negativa, con un voltaje entre líneas de 250 V_{rms}. Si la carga es balanceada, en conexión delta con una impedancia de $50\angle 15° \ \Omega$:

a. Determine las corrientes de línea.
b. Dibuje el diagrama fasorial de voltajes y corrientes del sistema.

Solución

a. Del enunciado del problema podemos trazar el circuito de la figura 3.11.

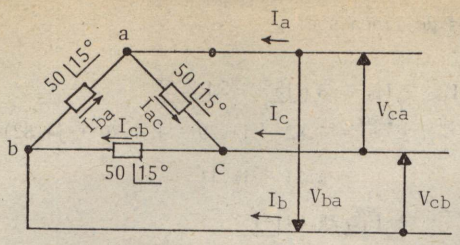


Figura 3.11

Si establecemos como referencia de voltajes a $V_{ac} = V_F \lfloor 0°$ (Observe la figura 3.12), tendremos:

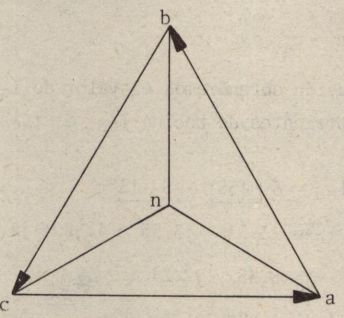


Figura 3.12. Referencia de voltajes con secuencia de fase negativa.

$$V_{ac} = 250\lfloor 0°$$

$$V_{cb} = 250\lfloor -120°$$

$$V_{ba} = 250\lfloor -240°$$

Las corrientes de fase son:

$$I_{ac} = \frac{V_{ac}}{Z_F} = \frac{250\lfloor 0°}{50\lfloor 15°} = 5\lfloor -15°$$

$$I_{cb} = \frac{V_{cb}}{Z_F} = \frac{250\lfloor -120°}{50\lfloor 15°} = 5\lfloor -135°$$

$$I_{ba} = \frac{V_{ba}}{Z_F} = \frac{250\lfloor -240°}{50\lfloor 15°} = 5\lfloor -255°$$

Las corrientes de línea son:

$$I_a = I_{ac} - I_{ba} = 5\angle -15° - 5\angle -255°$$
$$= 4.82 - j1.29 - (-1.29 + j4.82)$$
$$= 6.11 - j6.11$$
$$I_a = 8.64\angle -45°$$

Como las otras corrientes de línea están defasadas 120° cada una con respecto a la otra, entonces:

$$I_b = 8.64\angle -165°$$

$$I_c = 8.64\angle 75°$$

A manera de comprobación obtendremos el valor de I_c por medio del desarrollo de las corrientes de bobina I_{cb} e I_{ac}.

$$I_c = I_{cb} - I_{ac} = 5\angle -135° - 5\angle -15°$$
$$= -3.53 - j3.53 - 4.82 + j1.29$$
$$= 8.35 - j2.24$$
$$I_c = 8.64\angle -165°$$

b. Los diagramas fasoriales de corrientes y de voltajes se muestran en la figura 3.13.

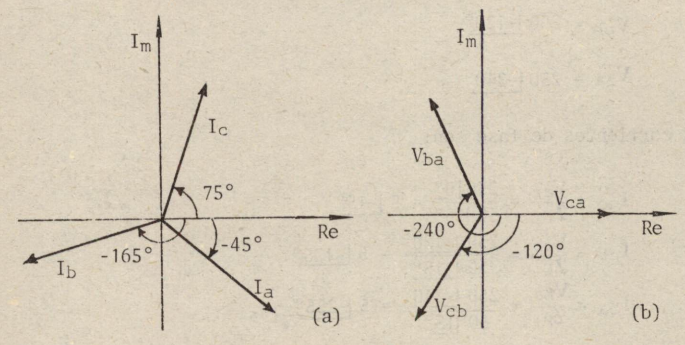


Figura 3.13 Diagramas fasoriales (a) de corrientes, (b) de voltajes.

3.4 POTENCIA EN CIRCUITOS TRIFASICOS BALANCEADOS

La potencia real o activa consumida por cada una de las impedancias de una carga trifásica balanceada, según la expresión (2.9), es:

$$\boxed{P = V_C I_C \cos\theta} \qquad (3.9)$$

Ahora bien, como son tres impedancias, cada una de las cuales consume una cierta potencia (que es la misma para las tres) la potencia total es la suma de todas las potencias, es decir:

$$\boxed{P_T = 3P = 3V_C I_C \cos\theta} \qquad (3.10)$$

si se expresa en términos de los parámetros de fase tanto para la conexión estrella como para la delta se llega a:

$$\boxed{P_T = \sqrt{3}\, V_F I_F \cos\theta} \qquad (3.11)$$

Ejemplo 3.4

Determine la potencia total que consume un sistema trifásico balanceado de secuencia positiva, que presenta una carga de $20\angle 45°\ \Omega$ por fase, conectada en delta, si el voltaje de alimentación es de 240 V_{rms}.

Solución

El circuito que representa al sistema se muestra en la figura 3.14.

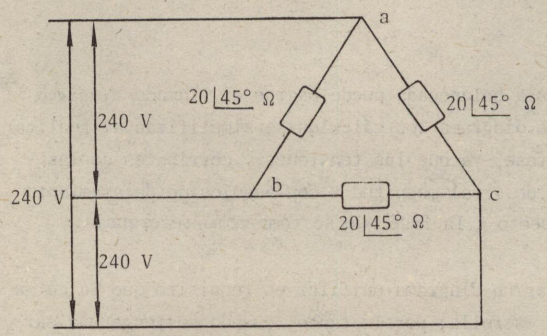


Figura 3.14

La magnitud de la corriente en la carga es

$$I_C = \frac{V_C}{Z_C} = \frac{240}{20} = 12 \text{ A}_{rms}$$

y la potencia consumida en cada una de las cargas es

$$P_C = V_C I_C \cos\theta$$
$$= (240)(12)(\cos 45°) = 2\,880(.7071)$$
$$= 2\,036 \text{ W} = 2.036 \text{ kW}$$

luego, la potencia total del sistema es

$$P_T = 3P_C = 3(2.036) = 6.109 \text{ kW}$$

Otra manera de calcular la potencia es la siguiente

si $I_F = \sqrt{3}\, I_C$

entonces

$$I_F = 12\sqrt{3}$$

y

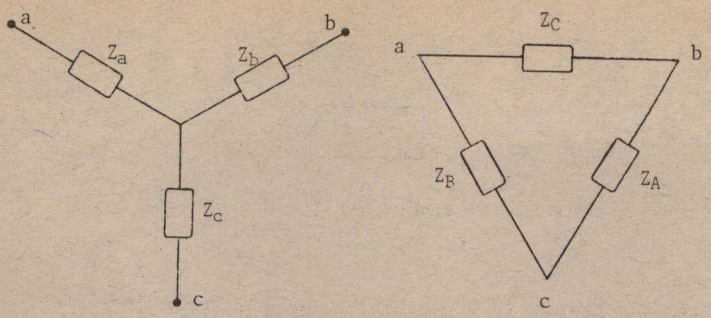
$$P_T = \sqrt{3}\, V_F I_F \cos\theta$$
$$= \sqrt{3}\,(240)(12\sqrt{3})(.7071) = 6.109 \text{ kW}$$

$$P_T = 6.109 \text{ kW}$$

Diagrama unifilar

Cuando la carga está balanceada puede usarse el llamado *diagrama unifilar*. Con este diagrama los cálculos se simplifican al realizarlos, en una sola fase, ya que las tensiones y corrientes de las otras fases serán de igual magnitud y con ángulos de defasamiento de 120° , con respecto a la fase que se toma como referencia.

Para poder utilizar un diagrama unifilar es requisito que la carga esté conectada en estrella; por lo tanto, cuando se tenga una carga conectada en delta, se deberá obtener su equivalente en estrella (ver figura 3.15) según las siguientes relaciones.



Carga en conexión **Y** Carga en conexión Δ

Figura 3.15 Transformación de una carga conectada en estrella a una carga conectada en delta y viceversa.

Transformación de una carga conectada en estrella a una carga conectada en delta y vice versa

Transformación $\mathbf{Y} \rightarrow \Delta$

$$Z_A = \frac{Z_aZ_b + Z_aZ_c + Z_bZ_c}{Z_a}$$

$$Z_B = \frac{Z_aZ_b + Z_aZ_c + Z_bZ_c}{Z_b}$$

$$Z_C = \frac{Z_aZ_b + Z_aZ_c + Z_bZ_c}{Z_c}$$

Transformación $\Delta \rightarrow \mathbf{Y}$

$$Z_a = \frac{Z_BZ_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$Z_b = \frac{Z_AZ_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$Z_c = \frac{Z_AZ_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

De manera que, si se tiene una carga balanceada en Δ, de valor Z_Δ, su correspondiente en **Y** será:

$$Z_a = \frac{Z_BZ_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

pero como $Z_A = Z_B = Z_C = Z_\Delta$, entonces:

$$Z_a = \frac{Z_\Delta \, Z_\Delta}{3Z_\Delta} = \frac{Z_\Delta}{3}$$

o sea

$$\boxed{Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}} \qquad (3.12)$$

Así pues, bastará con dividirla entre 3.

Ejemplo 3.5

Se tiene un sistema trifásico balanceado de secuencia positiva, con un voltaje de línea de 480 V_{rms}, que suministra una potencia de 2 000 W con un factor de 0.8 adelantado, a una carga equilibrada conectada en estrella.

a. Determine las corrientes de línea y la impedancia de carga por fase.

b. Si al sistema anterior se le añade una carga de alumbrado de 1 000 W balanceada y en estrella, determine la intensidad de la corriente de iluminación y la intensidad de la corriente de línea.

c. Determine la potencia que el sistema debe suministrar a las dos cargas.

Solución

a. La magnitud de la corriente de línea se puede hallar a partir de la expresión de la potencia. Así de

$$P_T = 3V_C I_C \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{3}} V_F I_F \cos\theta$$

tenemos

$$I_F = \frac{P_T}{3/\sqrt{3}\, V_F \cos\theta}$$

sustituyendo valores

$$I_F = \frac{2\,000}{3/\sqrt{3}\,(480)(0.8)} = 3.007 \; A_{rms}$$

La magnitud de la impedancia en cada carga (Z_c) es:

$$Z_c = |Z_c| = \frac{V_c}{I_c} \text{ ; pero } V_c = \frac{V_T}{\sqrt{3}} = \frac{480}{\sqrt{3}}$$

y como en conexión estrella $I_c = I_F$, entonces:

$$Z_c = \frac{480/\sqrt{3}}{3.007} = 92.16\ \Omega$$

Como θ es el ángulo del factor de potencia y es igual al ángulo de la impedancia, entonces:

$$\theta = \text{ang cos } 0.8 = -36.86°$$

nota: el signo (-) es porque el factor de potencia es adelantado.

Luego

$$Z_c = |Z_c| \underline{\theta} = 92.16 \underline{|-36.86°}$$

Si tomamos como voltaje de referencia $480\underline{|0°}$, entonces tendremos para la primera fase:

$$I_F = I_a = \frac{480\underline{|0°}}{\sqrt{3}(92.16\underline{|-36.86°})} = 3.007\ \underline{|36.86°}$$

y las otras dos corrientes de línea presentarán defasamientos de 120° , o sea que:

$$I_b = 3.007\ \underline{|-83.14°}$$

$$I_c = 3.007\ \underline{|-203.14°}$$

b. Dibujaremos en primera instancia un diagrama unifilar que represente al sistema (figura 3.16).

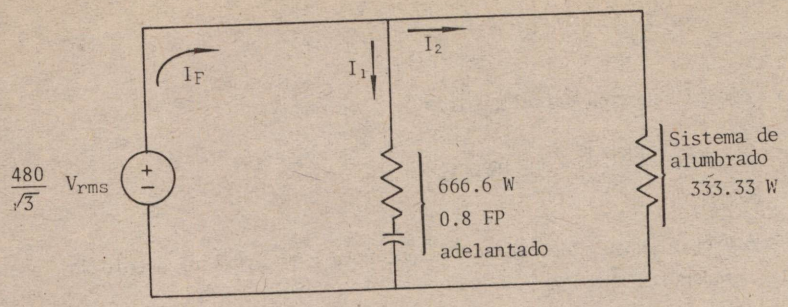


Figura 3.16

La magnitud de la corriente de alumbrado (I_2) está determinada por:

$$I_2 = \frac{P_c}{V_c \cos\theta} = \frac{1\,000/3}{(480/\sqrt{3})(1)}$$

$$I_2 = 1.2\angle 0°$$

Nota: como la carga es puramente resistiva, FP = $\cos\theta$ = 1

entonces la corriente de fase es:

$$I_F = I_1 + I_2$$
$$= 3.007\angle 36.86° + 1.2\angle 0° =$$
$$= 3.6 + j1.80 = 4.02\angle 26.56°;$$
$$I_F = I_c = 4.02\ A_{rms}$$

c. La potencia consumida en cada fase por las dos cargas es:

$$P_c = V_c I_c \cos\theta$$
$$= \frac{480}{\sqrt{3}}(4.02)(\cos 26.56) = 998.51 \simeq 1\,000\ W;$$

$$P_T = 3P_c = 3\,000\ W$$

3.5 CIRCUITOS TRIFASICOS DESBALANCEADOS

Cuando se conectan cargas trifásicas desbalanceadas (impedancias de carga por fase, con diferente magnitud y ángulo) ya sea en delta o en estrella, a fuentes trifásicas balanceadas, las corrientes que circularán a través de las fases o líneas y de las impedancias de cargas serán distintas y no presentarán un ángulo de defasamiento de 120° entre sí. En estas condiciones no es factible utilizar el diagrama unifilar; además, en caso de haber línea neutra, sí habría corriente circulando por ella.

Ejemplo 3.6

A una fuente trifásica de secuencia positiva, con voltaje de línea de 240 V_{rms} se le conecta en triángulo una carga desbalanceada (figura 3.17). Determine las corrientes de fase y las corrientes de línea.

Solución

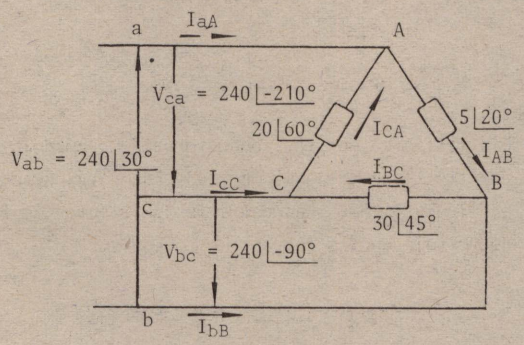


Figura 3.17

Como se puede observar en la figura anterior, las corrientes en las cargas están dadas por:

$$I_{AB} = \frac{V_{ab}}{Z_{AB}} = \frac{240\lfloor 30°}{5\lfloor 20°} = 48\lfloor 10° \; A_{rms}$$

$$I_{BC} = \frac{V_{bc}}{Z_{BC}} = \frac{240\lfloor -90°}{30\lfloor 45°} = 8\lfloor -135° \; A_{rms}$$

$$I_{CA} = \frac{V_{ca}}{Z_{CA}} = \frac{240\angle -210^\circ}{20\angle 60^\circ} = 12\angle -270^\circ \ A_{rms}$$

Y las corrientes de línea por:

$$I_{aA} = I_{AB} - I_{CA} = 48\angle 10^\circ - 12\angle -270^\circ$$

$$= 47.27 + j8.34 - j12 = 47.27 - j3.66$$

$$= 47.4\angle -4.4^\circ$$

$$I_{bB} = I_{BC} - I_{AB} = 8\angle -135^\circ - 48\angle 10^\circ$$

$$= -5.7 - j5.7 - (47.3 + j8.3) = -53 - j14$$

$$= 54.8\angle -165.2^\circ$$

$$I_{cC} = I_{CA} - I_{BC} = 12\angle -270^\circ - 8\angle -135^\circ$$

$$= j12 - (-5.7 - j5.7) = 5.7 + j17.7$$

$$= 18.6\angle 72.15^\circ$$

Ejemplo 3.7

Un sistema trifásico de tres conductores de secuencia positiva y 260 V_{rms} entre líneas, tiene conectada una carga desbalanceada en estrella (figura 3.18). Encuentre las corrientes de línea y las caídas de voltaje en las cargas.

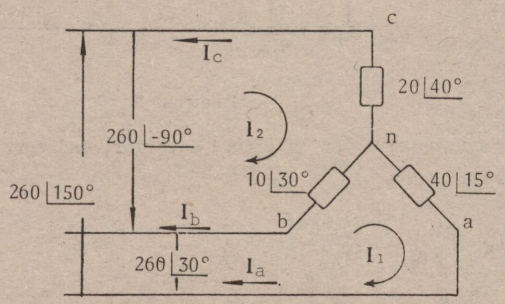


Figura 3.18

Solución

De las corrientes de malla I_1 e I_2 elegidas en la figura 3.18 tenemos:

$$V_{ab} = (Z_{an} + Z_{bn})I_1 - Z_{bn}I_2$$

$$V_{DC} = -Z_{bn}I_1 + (Z_{bn} + Z_{cn})I_2$$

sustituyendo en estas ecuaciones los valores numéricos obtendremos en forma matricial el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 40\angle 15° + 10\angle 30° & -10\angle 30° \\ -10\angle 30° & 10\angle 30° + 20\angle 40° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260\angle 30° \\ 260\angle -90° \end{bmatrix}$$

La solución del sistema nos proporciona las corrientes I_1 e I_2.

$$I_1 = 4.73\angle -6° \ A_{rms}$$

$$I_2 = 8.15\angle -116.5 \ A_{rms}$$

Las corrientes de línea son:

$$I_a = I_1 = 4.73\angle -6° \ A_{rms}$$

$$I_b = I_2 - I_1 = 8.15\angle -116.5 - 4.73\angle -6° \ A_{rms}$$

$$= 10.7\angle -140.7° \ A_{rms}$$

$$I_c = -I_2 = -8.15\angle -116.5° \ A_{rms}$$

Las caídas de voltaje en las tres impedancias de carga, se obtienen multiplicando la corriente de línea, por la impedancia correspondiente:

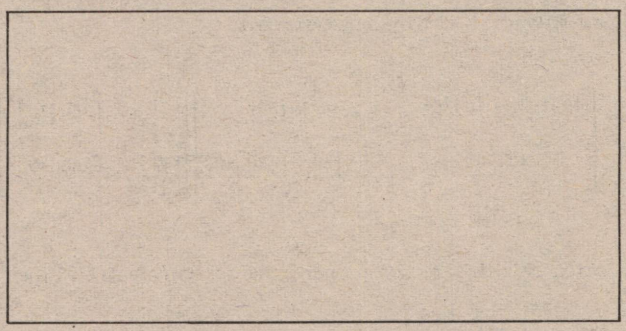
$$V_{an} = Z_{an}I_a = 40\angle 15°(4.73\angle -6°) = 189.2\angle 9° \ V_{rms}$$

$$V_{bn} = Z_{bn}I_b = 10\angle 30°(10.7\angle -140.7°) = 107\angle -110.7° \ V_{rms}$$

$$V_{cn} = Z_{cn}I_c = 20\angle 40°(-8.15\angle -116.5°) = -163\angle -76.5° \ V_{rms}$$

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I Dibuje, en el rectángulo de abajo, un diagrama fasorial de voltajes para secuencia negativa tomando como referencia el voltaje V_{ba}.



II A continuación se presenta una serie de problemas. Resuélvalos y escriba la o las soluciones en los espacios indicados.

1. Un sistema trifásico balanceado Y—Y de secuencia positiva con tres conductores, tiene una carga de una resistencia de 100 Ω, un capacitor de 10 μF y una bobina de 0.5 H, todos ellos están conectados en serie en cada fase. Si la magnitud del voltaje al neutro es de 230 V_{rms} y la velocidad angular ω es de 400 rad/s, determine:

   a. Los voltajes de fase V_{an}, V_{bn} y V_{cn}
   b. Los voltajes de línea V_{ab}, V_{bc} y V_{ca}

   a. V_{an} = _____ V_{rms}
      V_{bn} = _____ V_{rms}
      V_{cn} = _____ V_{rms}

   b. V_{ab} = _____ V_{rms}
      V_{bc} = _____ V_{rms}
      V_{ca} = _____ V_{rms}

2. Un sistema trifásico balanceado de secuencia negativa, con un voltaje de línea de 240 V_{rms} , alimenta a dos cargas trifásicas balanceadas en conexión estrella y conectadas entre sí en paralelo. Una carga es un motor de inducción que se puede representar por una impedancia de 20 + j10 Ω por fase; la otra carga, es de alumbrado equivalente a 15 Ω por fase. Determine:

   a. La potencia promedio entregada a la carga de alumbrado.
   b. La potencia promedio entregada al motor de inducción.
   c. La potencia promedio entregada por fase al circuito.

   a. P_a = _____ kW
   b. P_m = _____ kW
   c. P_F = _____ kW

3. Un sistema trifásico balanceado de secuencia positiva con tres conductores alimenta dos cargas en conexión estrella; una carga consume 10 kW con un factor de potencia de 0.8 retrasado; la otra necesita 20 kW con un factor de potencia de 0.83 adelantado. Si la corriente en cada línea es de 10 A_{rms}, determine la corriente de fase en:

   a. La primera carga
   b. La segunda carga
   c. La fuente

   a. $|\mathbf{I}_1|$ = _____ A_{rms}
   b. $|\mathbf{I}_2|$ = _____ A_{rms}
   c. $|\mathbf{I}|$ = _____ A_{rms}

4. Una carga balanceada en conexión delta contiene 12 + j6 Ω por fase, y una carga balanceada en conexión estrella consiste de 8 - j4 Ω por fase. Ambas cargas se conectan en paralelo a un sistema trifásico de tres conductores en el que el voltaje es de 220 V_{rms} en las cargas. Si cada una de las tres líneas que se extienden de las fuentes a las cargas tienen una resistencia de 0.3 Ω, determine la potencia total:

a. Entregada a la conexión delta.
b. Entregada a la conexión en estrella.
c. Que se pierde en los tres conductores.

a. P_Δ = _____ kW
b. P_Y = _____ kW
c. P_C = _____ kW

5. Un motor de inducción trifásico necesita 6 kW con un factor de potencia de 0.8 retrasado. Determine los valores para una estrella de capacitores que producirá un funcionamiento con un factor de potencia unitario, cuando se conectan en paralelo con el motor en un sistema balanceado, con un voltaje de línea de 240 V_{rms} y una frecuencia de 60 Hz.

C = _____ μF

6. Encuentre:
a. La corriente de línea.
b. La potencia total entregada a la carga.
c. La pérdida total de potencia en las líneas para el circuito de la figura 3.19, donde $V_{ab} = 200\angle 0°\ V_{rms}$, $Z = 8 + j5\ \Omega$, $R = 0.5\ \Omega$ y la secuencia de fase es positiva.

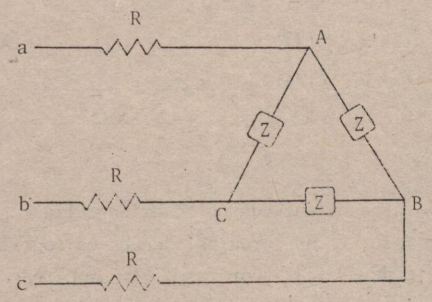


Figura 3.19

a. I_L = _____ A_{rms}
b. P_C = _____ kW
c. P_ℓ = _____ kW

7. Un motor trifásico consume 9 kVA con un factor de potencia de 0.8 retrasado, en un sistema balanceado con un voltaje de línea de 300 V_{rms}, para una frecuencia de 60 Hz. Determine el valor que deben tener los tres capacitores, para producir un funcionamiento con un factor de potencia unitario, si se conectan en delta y en paralelo con el motor trifásico.

$C =$ _____ μF

8. Dado un sistema trifásico balanceado para el cual V_L es de 220 V_{rms}, se presentan dos cargas; una en conexión estrella con una impedancia de $15 - j10\ \Omega$ por fase, y la otra en conexión delta con $30 + j15\ \Omega$ por fase; determine:

   a. La corriente de línea.
   b. La potencia entregada a la carga en estrella.
   c. La potencia entregada a la carga en delta.
   d. El factor de potencia del circuito.

   a. $I_L =$ _____ A_{rms}
   b. $P_Y =$ _____ kW
   c. $P_\Delta =$ _____ kW
   d. FP = _____

9. Determine:
   a. Las tres corrientes de línea.
   b. La corriente en el neutro de una fuente trifásica que tiene un voltaje de fase de $200\angle 0°\ V_{rms}$ con secuencia de fase positiva y de cuatro conductores, si dicha fuente se conecta a una carga no balanceada, en la cual: $\mathbf{Z}_{an} = 2 + j1\ \Omega$, $\mathbf{Z}_{bn} = 5 + j9\ \Omega$ y $\mathbf{Z}_{cn} = 10 + j15\ \Omega$

   a. $I_a =$ _____ A_{rms}
      $I_b =$ _____ A_{rms}
      $I_c =$ _____ A_{rms}

   b. $I_n =$ _____ A_{rms}

10. Una fuente balanceada de secuencia positiva tiene un voltaje de fase de $300\angle 0°$ V_{rms}. A la fuente se le conecta una carga desbalanceada, donde $Z_{AB} = 6 + j10\ \Omega$, $Z_{BC} = 3 + j5\ \Omega$ y $Z_{CA} = 8 - j5\ \Omega$; determine:

a. Los tres fasores de las corrientes de línea.
b. La potencia consumida por cada fase de la carga.
c. La potencia suministrada por cada fase de la fuente.

a. I_{aA} = _____ A_{rms}
I_{bB} = _____ A_{rms}
I_{cC} = _____ A_{rms}

b. P_{c1} = _____ kW
P_{c2} = _____ kW
P_{c3} = _____ kW

c. P_{F1} = _____ kW
P_{F2} = _____ kW
P_{F3} = _____ kW

BIBLIOGRAFIA

Básica

1. DESOER, CHARLES A.; KUH, ERNEST S.
Basic circuit theory. McGraw-Hill. New York, 1969.

2. EDMINISTER, JOSEPH A.
Circuitos eléctricos. McGraw-Hill México, 1981.

3. HAYT, WILLIAM H.; KEMMERLY, JACK E.
Análisis de circuitos en ingeniería. McGraw-Hill. México, 1980.

Complementaria

4. FITZGERALD, A.E.; KINGSLEY, CHARLES; KUSKO, ALEXANDER.
Electric Machinery. Mc-Graw-Hill. Kogakusha. Tokio, 1971.

5. PLANT ENGINEERING
Polyphase Circuits, lesson seven, unit three
AC Aplications, lesson six, unit three.
Barrington. Illinois, 1970.

6. STEVENSON, WILLIAM D.
Elements of power system analysis. McGraw-Hill.
Kogakusha. Tokio, 1962.

UNIDAD II METODOS GENERALES DE ANALISIS DE REDES

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el estudio de esta unidad, el alumno analizará un circuito lineal con o sin elementos de acoplamiento, utilizando cualquiera de los métodos sistemáticos siguientes: de nodos, de mallas, de lazos o de secciones de corte.

INTRODUCCION

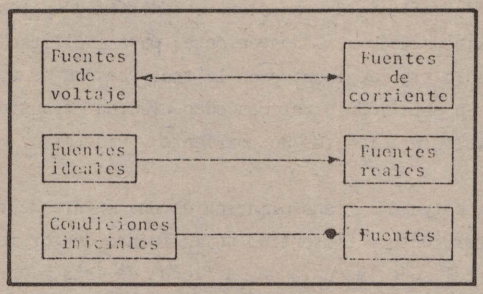
En la unidad I analizamos circuitos formados por pocos elementos. Ahora bien, en la práctica se presentan circuitos, generalmente formados por cientos de elementos, llamados redes.

En tales circunstancias es preciso determinar el voltaje y la corriente de cada uno de dichos elementos. Con el fin de resolver el problema de análisis de redes han sido desarrollados los métodos matriciales de nodos, mallas, lazos y secciones de corte, los cuales serán estudiados en esta unidad.

Una de las ventajas de la formulación matricial de los métodos es que el manejo de matrices es conciso y, por lo tanto, conveniente en el desarrollo de los sistemas de ecuaciones de las redes. La representación matricial de una red es la más adecuada para computación digital, especialmente cuando las redes son grandes y complejas.

MODULO 4 TRANSFORMACION DE FUENTES

CUADRO SINOPTICO



OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Efectuará transformaciones de fuentes de voltaje a fuentes de corriente y viceversa.

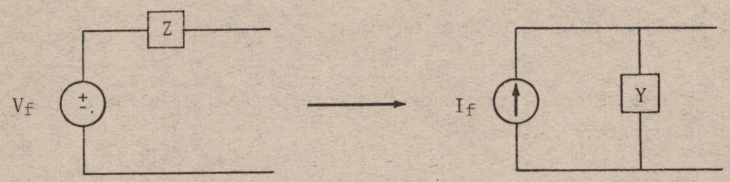
2. Sustituirá las condiciones iniciales por fuentes de corriente o voltaje.

3. Trasladará una fuente ideal dentro de una red, de manera tal que ésta aparezca con fuentes reales sin alterar el resultado del problema.

4.1 TRANSFORMACION DE FUENTES DE VOLTAJE A FUENTES DE CORRIENTE Y VICEVERSA

En los métodos de análisis de redes que estudiaremos en los módulos restantes de esta Unidad, será conveniente, para facilitar los cálculos, tener un solo tipo de fuentes en la red, ya sean de voltaje o de corriente. En este módulo veremos cómo efectuar transformaciones de fuentes de voltaje a fuentes de corriente y viceversa.

La figura 4.1 muestra una transformación de una fuente de voltaje a una fuente de corriente. El sentido de la fuente de corriente se toma de manera tal, que la punta de la flecha de ésta, corresponda al signo positivo de la fuente de voltaje.



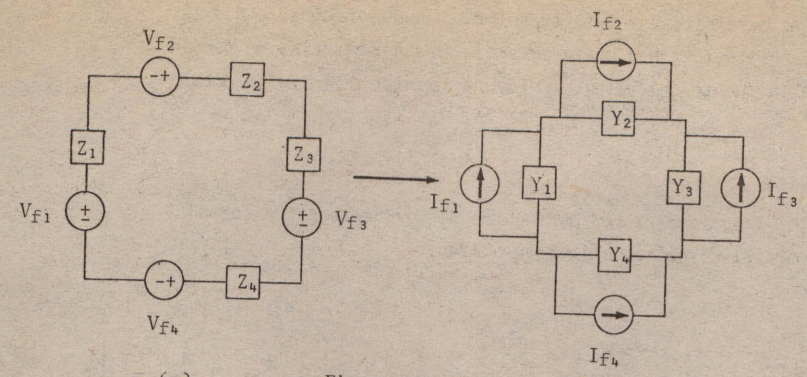
$$I_f = \frac{V_f}{Z}$$

$$Y = \frac{1}{Z}$$

Figura 4.1 Transformación de una fuente de voltaje a una fuente de corriente.

Ejemplo 4.1

Transforme las fuentes de voltaje a fuentes de corriente en el circuito mostrado en la figura 4.2a.



(a) Figura 4.2 (b)

Solución

Las admitancias correspondientes a la red son:

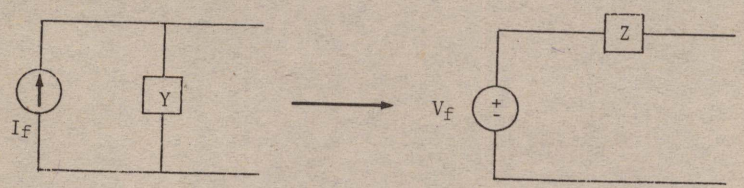
$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} \quad ; \quad Y_2 = \frac{1}{Z_2} \quad ; \quad Y_3 = \frac{1}{Z_3} \quad ; \quad Y_4 = \frac{1}{Z_4}$$

Las corrientes en cada fuente se calculan de la siguiente manera:

$$I_{f_1} = \frac{V_{f_1}}{Z_1} \quad ; \quad I_{f_2} = \frac{V_{f_2}}{Z_2} \quad ; \quad I_{f_3} = \frac{V_{f_3}}{Z_3} \quad ; \quad I_{f_4} = \frac{V_{f_4}}{Z_4}$$

El circuito con las fuentes ya transformadas se muestra en la figura 4.2b.

La transformación de una fuente de corriente a una fuente de voltaje se ilustra en la figura 4.3.



$$V_f = Z\, I_f$$

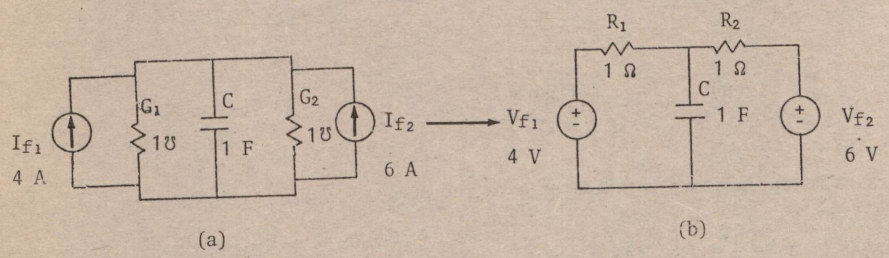
$$Z = \frac{1}{Y}$$

Figura 4.3 Transformación de una fuente de corriente a una fuente de voltaje.

Observe que para efectuar esta transformación, es necesario que la fuente de corriente tenga una admitancia (o conductancia) en paralelo, y que la fuente de voltaje tenga una impedancia (o resistencia) en serie.

Ejemplo 4.2

Efectúe las transformaciones de fuentes de corriente a fuentes de voltaje para el circuito de la figura 4.4a.



(a) (b)

Figura 4.4

Solución

Las resistencias que se colocarán en serie con las fuentes de voltaje (figura 4.4b) se calculan a continuación:

$$R_1 = \frac{1}{G_1} = \frac{1}{1} = 1\ \Omega \quad ; \quad R_2 = \frac{1}{G_2} = \frac{1}{1} = 1\ \Omega$$

Los voltajes de cada fuente son:

$$V_{f_1} = R_1 I_{f_1} = (1)(4) = 4\ V$$

$$V_{f_2} = R_2 I_{f_2} = (1)(6) = 6\ V$$

El circuito con las fuentes ya transformadas, se muestra en la figura 4.4 b.

4.2 ELEMENTOS CON CONDICIONES INICIALES

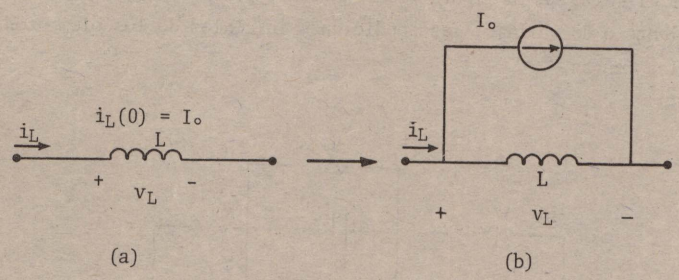
Sustitución de las condiciones iniciales de un elemento, por una fuente

Cuando se desea calcular la respuesta completa en una red que tiene elementos capacitivos e inductivos con condiciones iniciales, es conveniente sustituir ese voltaje o corriente inicial por una fuente de voltaje o de corriente, según sea el caso.

La ecuación para un inductor (figura 4.5 a) con corriente inicial es:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)dt + i_L(0) \qquad (4.1)$$

La figura 4.5 b proviene de la ecuación (4.1). La fuente de corriente se debe a la corriente inicial ($i_L(0) = I_0$) del inductor. Cuando el inductor *no tiene* corriente inicial ($i_L(0) = 0$) *no* se le agrega una fuente de corriente (de condición inicial) en paralelo.



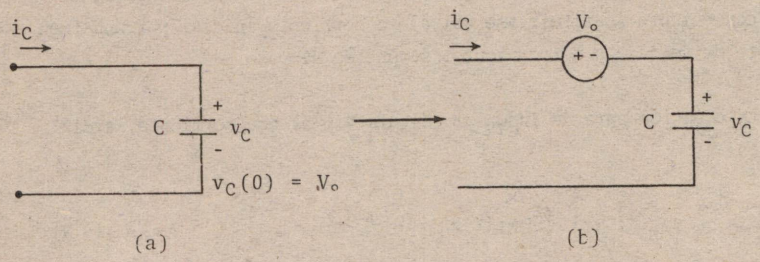
(a) (b)

Figura 4.5 a) Inductor con corriente inicial $i_L(0)$. b) Inductor con corriente inicial I_0 considerada como fuente de corriente.

La ecuación para un capacitor (figura 4.6 a) que tiene un voltaje inicial es:

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt + v_C(0) \qquad (4.2)$$

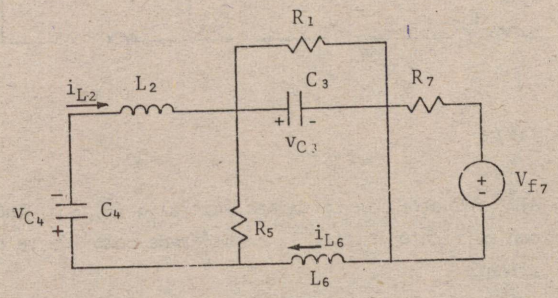
De la ecuación (4.2) se deriva la figura 4.6b, que tiene una fuente de voltaje cuyo valor es el voltaje inicial ($v_C(0) = V_0$) del capacitor. Si el voltaje inicial fuera cero ($v_C(0) = 0$) no habría una fuente de voltaje (de condición inicial) en serie con el capacitor.



(a) (b)

Figura 4.6 a) Capacitor con voltaje inicial $v_C(0)$. b) Capacitor con voltaje inicial V_0 considerado como fuente de voltaje.

Ejemplo 4.3
En el circuito de la figura 4.7a sustituya por fuentes, ya sea de corriente o de voltaje, las condiciones iniciales de los elementos que las tengan.



$i_{L_2}(0) = 5$ A $\qquad v_{C_3}(0) = 4$ V

$i_{L_6}(0) = 0$ A $\qquad v_{C_4}(0) = 0$ V

Figura 4.7a

Solución

La fuente de corriente debida a la corriente inicial del inductor (L_2) queda en paralelo con éste; la fuente de voltaje correspondiente al capacitor (C_3) se pone en serie con éste (figura 4.7b).

Observe que la fuente de voltaje inicial debe colocarse de manera tal que tengan el mismo sentido del voltaje supuesto para el capacitor. Lo mismo sucede para la fuente de corriente inicial del inductor que debe tener el mismo sentido de la corriente supuesta para éste.

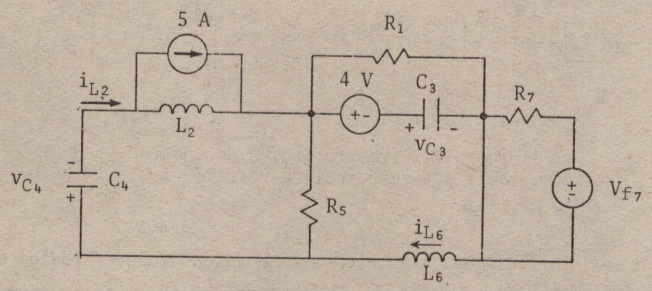


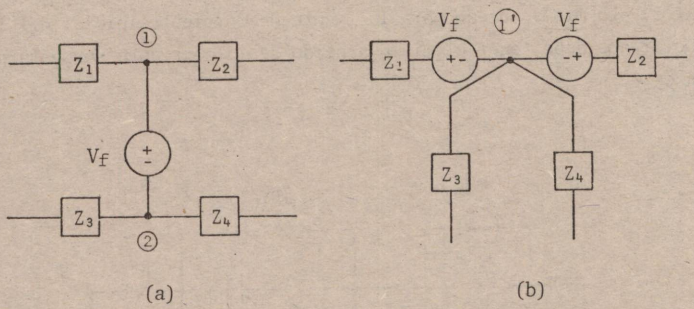
Figura 4.7b

4.3 MODIFICACION DE REDES QUE TIENEN FUENTES IDEALES DE VOLTAJE

Cuando una fuente de voltaje es ideal (no tiene una impedancia en serie), no puede transformarse en fuente de corriente; inversamente, una fuente ideal de corriente no puede transformarse en fuente de voltaje. De aquí que sea necesario hacer algunas modificaciones a la red, de manera tal que las fuentes ideales se vuelvan fuentes reales.

Transformación de fuentes ideales de voltajes, en fuentes reales

Consideremos la parte de una red (figura 4.8a) con una fuente ideal de voltaje. A esta parte de la red la modificamos colocando la fuente en serie con las impedancias Z_1 y Z_2. El lugar que antes ocupaba la fuente se sustituye por un corto circuito; en otras palabras, los nodos[3] ① y ② ahora son un mismo nodo al que denominamos ①' (figura 4.8b).



(a) (b)

Figura 4.8 Transformación de fuente ideal a fuente real de voltaje.

Como se ve en la figura 4.8b, tenemos ahora dos fuentes reales de voltaje que pueden transformarse a fuentes de corriente en caso necesario. Es fácil demostrar que estas modificaciones hechas en la red no alteran los resultados del problema; sólo necesitamos aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff.

Es necesario hacer las siguientes observaciones:

1. Por cada fuente ideal de voltaje que exista en una red, el número de nodos se reduce en uno.

2. Por cada fuente ideal de voltaje que tenga una red el número de fuentes reales de voltaje aumenta en dos fuentes cuando la fuente ideal de voltaje se desliza a dos ramas, en tres cuando se desliza a tres ramas, etc. Por esta razón es preferible deslizar la fuente ideal de voltaje hacia donde haya menor número de ramas.

3 Nodo es el punto de conexión de dos o más elementos. Véase el módulo 5.

Ejemplo 4.4

Hacer las modificaciones correspondientes al circuito de la figura 4.9a de modo tal que *no* haya fuentes ideales.

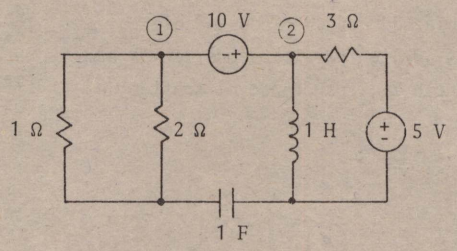


Figura 4.9a

Solución

Optemos por desplazar la fuente de 10 V hacia las resistencias de 1 Ω y 2 Ω (figura 4.9b). Los nodos (1) y (2) constituyen el nodo (1').

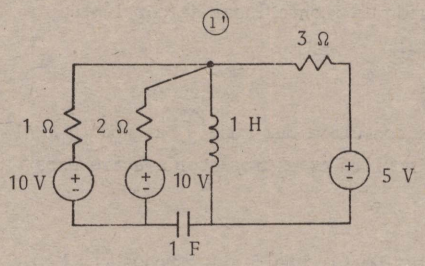


Figura 4.9b

4.4 MODIFICACION DE REDES QUE TIENEN FUENTES IDEALES DE CORRIENTE

Transformación de fuentes ideales de corriente, en fuentes reales

Consideremos ahora la modificación de redes que contienen fuentes ideales de corriente. Para ese propósito la fuente ideal de corriente (figura 4.10a) es reemplazada por un circuito abierto; son colocadas dos fuentes (figura 4.10b) en paralelo, una con la admitancia Y_1 y otra con la admitancia Y_2, respetando el sentido de la fuente original.

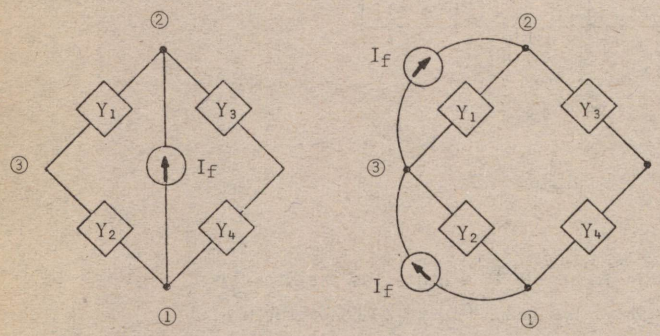


Figura 4.10 Transformación de fuente ideal de corriente a fuente real.

Nótese que la fuente ideal está conectada del nodo (1) al nodo (2). Al hacerse las modificaciones se localizó otra trayectoria entre esos mismos nodos (1) y (2).

Si se aplica la ley de corrientes de Kirchhoff a los nodos (1), (2) y (3) de la red modificada se observa que la suma de las corrientes se mantiene igual que en la red original.

Ejemplo 4.5

En el circuito de la figura 4.11a, realice las modificaciones necesarias para que no aparezcan fuentes ideales.

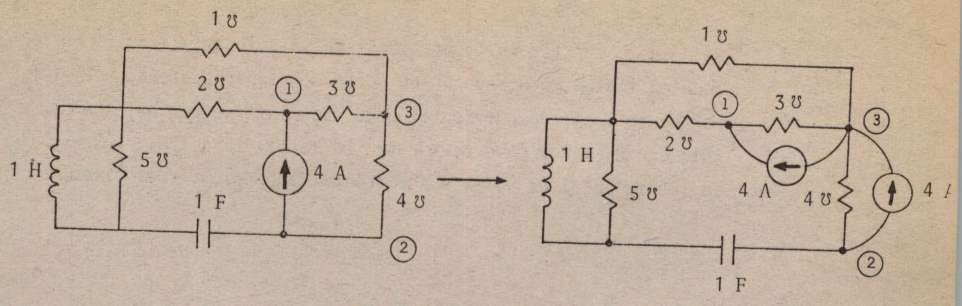


Figura 4.11

Solución

Para tener menos fuentes reales de corriente, es conveniente trasladar la fuente ideal de corriente por la trayectoria que tiene menos elementos. Por lo tanto, se desplaza en paralelo con las conductancias de 3 ℧ y 4 ℧ (figura 4.11b).

Ejemplo 4.6

Efectúe las modificaciones correspondientes al circuito de la figura 4.12a de manera tal que las fuentes ideales se conviertan en fuentes reales.

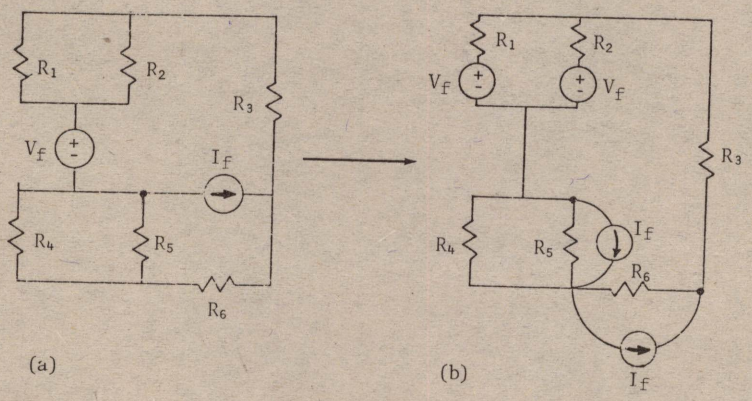


Figura 4.12

Solución

Se puede convertir la fuente ideal de voltaje del circuito en fuentes reales colocándolas en serie con las resistencias R_1 y R_2. La fuente ideal de corriente puede reemplazarse por otras en paralelo con R_5 y R_6, como se muestra en la figura 4.12b. Observe que la fuente ideal de voltaje fue reemplazada por un cortocircuito.

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I. A continuación aparece un grupo de afirmaciones. Señale si es falsa o verdadera cada una de ellas, anotando en el espacio indicado una V si es verdadera o una F si es falsa.

1. Para hacer una transformación de fuente de voltaje a fuente de corriente, es necesario que la fuente de voltaje esté conectada en serie con una impedancia o resistencia. _____

2. La corriente inicial de un inductor puede considerarse como una fuente de voltaje en serie con el inductor. _____

3. El voltaje inicial de un capacitor puede ser considerado como una fuente de voltaje en serie con el capacitor. _____

4. Cuando se traslada una fuente ideal de voltaje a una rama se sustituye por un cortocircuito. _____

5. Para transformar una fuente ideal de voltaje en fuentes reales, es conveniente trasladarla hacia donde haya mayor número de ramas. _____

6. Por cada fuente ideal de voltaje que tenga un circuito, al transformarla a fuentes reales, el número original de nodos se reduce en uno. _____

7. Al transformar las fuentes ideales en fuentes reales las expresiones de las leyes de Kirchhoff que se obtienen del circuito original, son diferentes a las expresiones obtenidas en el circuito modificado. _____

II. Resuelva los siguientes problemas y anote la o las soluciones en el espacio que se deja para tal fin.

1. Transforme las fuentes de voltaje a fuentes de corriente en el circuito de la figura 4.13.

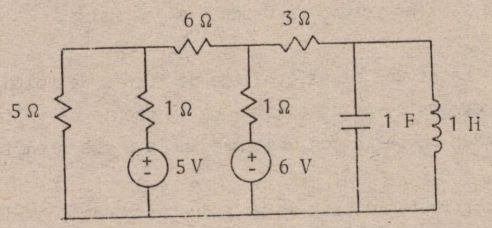


Figura 4.13

2. Convierta en fuentes de voltaje las fuentes de corriente de la red de la figura 4.14.

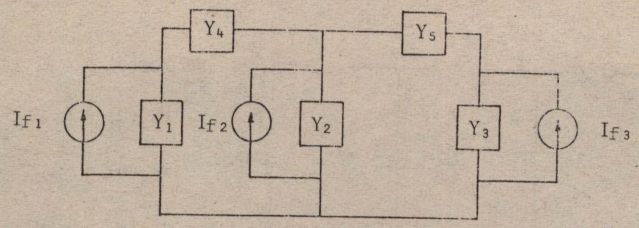
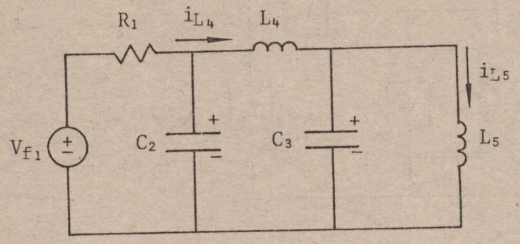


Figura 4.14

3. Sustituya las condiciones iniciales de los elementos por fuentes de corriente o voltaje para el circuito que se muestra en la figura 4.15.



$v_{C_2}(0) = 3$ V

$v_{C_3}(0) = 6$ V

$i_{L_4}(0) = 5$ A

$i_{L_5}(0) = 2$ A

Figura 4.15

4. Realice las modificaciones del circuito de la figura 4.16, de manera que todas la fuentes sean reales.

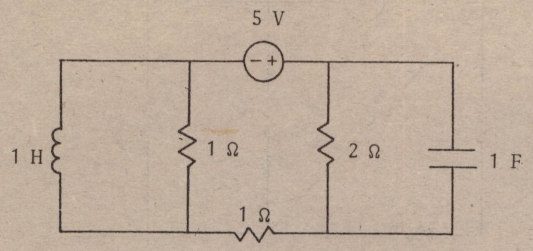


Figura 4.16

5. Traslade la fuente ideal de corriente en el circuito de la figura 4.17, de tal manera que no haya fuentes ideales.

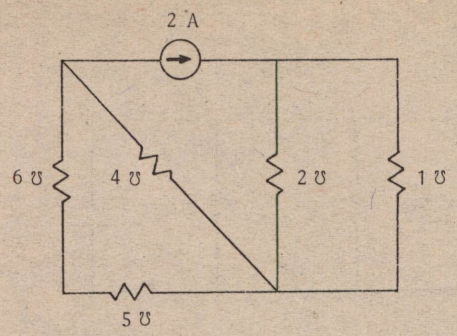


Figura 4.17

6. Transforme las fuentes ideales, que aparecen en el circuito de la figura 4.18, en fuentes reales.

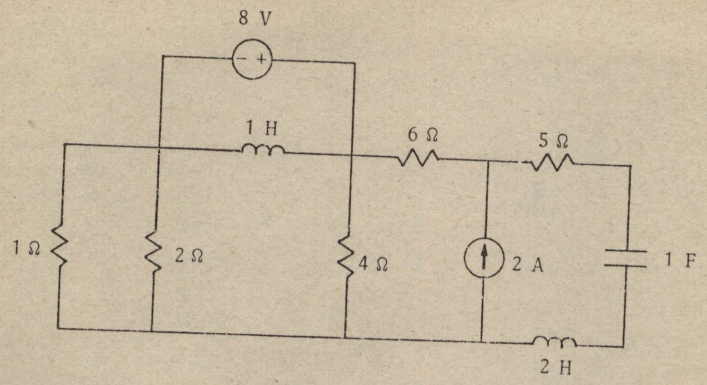
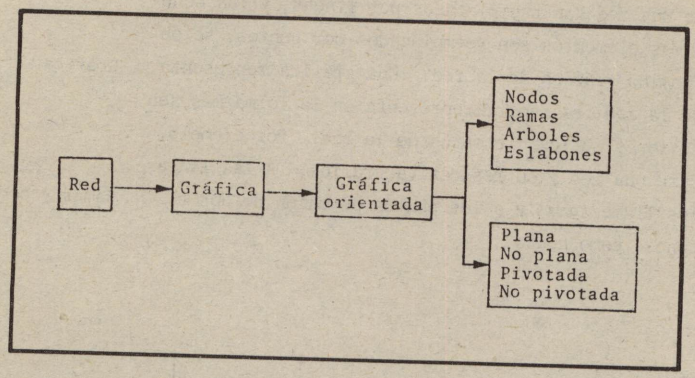


Figura 4.18

MODULO 5 TEORIA ELEMENTAL DE GRAFICAS

CUADRO SINOPTICO



OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Construirá la gráfica orientada de cualquier red dada.
2. Identificará en una gráfica los siguientes elementos: subgráfica, trayectoria, malla, lazo, árbol, eslabones y secciones de corte.
3. Distinguirá una gráfica plana de una no plana.
4. Distinguirá una gráfica pivotada de una no pivotada.

5.1 CONCEPTO DE GRAFICA

Si los elementos de una red son reemplazados por líneas, y las conexiones entre dos o más elementos son reemplazados por puntos, se obtiene lo que se denomina gráfica de la red. Una gráfica representa la configuración de la red; es decir, representa en la forma más sencilla las interconexiones de los elementos de la red. Por ejemplo, la figura 5.1 muestra una red y su respectiva gráfica. A las líneas de la gráfica se les llama *ramas* y a los puntos de unión de dos o más ramas se les conoce como *nodos*[4].

Gráfica

Ramas y nodos

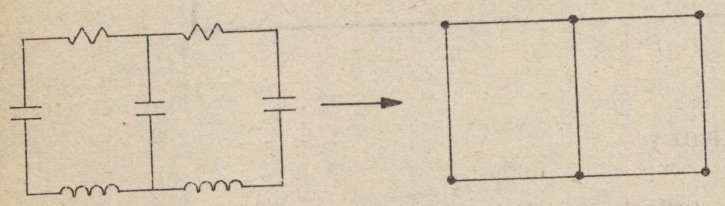


Figura 5.1 Red y su gráfica.

Para identificar los diferentes nodos y ramas de una gráfica debemos numerarlos. En la red de la figura 5.2a todos los elementos tienen un número como subíndice (C_1, R_2,...). Estos subíndices se utilizan para numerar las ramas de la gráfica correspondiente. Por ejemplo, la rama 5 (figura 5.2b) corresponde al elemento C_5. De manera semejante, los elementos R_2 y L_3 tendrán sus ramas 2 y 3 respectivamente en la gráfica. Identificar los nodos es mucho más sencillo, ya que tanto en la red como en la gráfica correspondiente se identifican con un número encerrado dentro de un pequeño círculo. Observemos (figura 5.2a) que la rama 4 está formada por dos elementos, la resistencia R_4 y la fuente ideal de voltaje V_{f4}. En la grá

4 Los nodos, también son conocidos como vértices y las ramas como aristas.

fica esta fuente de voltaje se representa como un cortocircuito. La rama 6 está formada por una fuente ideal de corriente en paralelo con una resistencia. En la gráfica, la fuente de corriente se repre senta como un circuito abierto, es decir al dibujar la gráfica de una red las fuentes deben anularse; las fuentes de corriente se dejan en circuito abierto y las fuentes de voltaje se sustituyen por un cortocircuito.

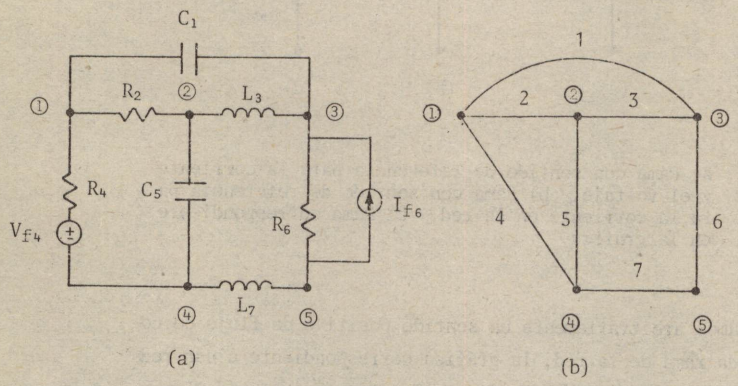


Figura 5.2 Identificación de los elementos y las ramas.

5.2 GRAFICA ORIENTADA

Para nuestras discusiones posteriores será necesario contar con voltajes y corrientes de referencia en las ramas de la red o de la gráfica. Consideremos la rama de la figura 5.3a en la cual está indicado el voltaje V de referencia y la corriente I. El sentido asignado a la flecha de corriente se conoce como sentido positivo porque la corriente fluye de un potencial mayor a uno menor.

Si a una rama se le asigna una flecha para denotar el sentido positivo de corriente, la polaridad del voltaje a través de esa rama queda automáticamente determinada y puede omitirse. Por consiguiente, sólo utilizaremos en las ramas de la red o de la gráfica puntas de flecha (figura 5.3b y c) para indicar la polaridad.

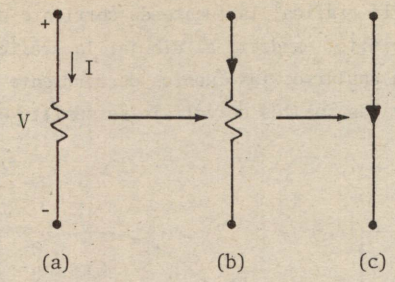


Figura 5.3 a) Rama con sentido de referencia para la corriente y el voltaje, b) Rama con sentido de referencia para la corriente en la red, c) Rama correspondiente en la gráfica.

Cuando asignamos arbitrariamente un sentido positivo de flujo de corriente a cada rama de la red, la gráfica correspondiente a esa red se denomina *gráfica orientada*. La figura 5.4 muestra una red y su correspondiente gráfica orientada.

Gráfica orientada

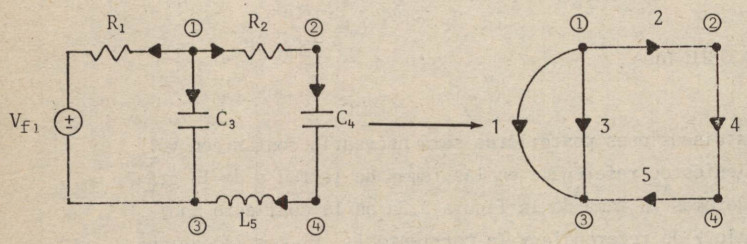


Figura 5.4 Red y gráfica orientada.

Ejemplo 5.1

Construya la gráfica orientada del circuito mostrado en la figura 5.5.

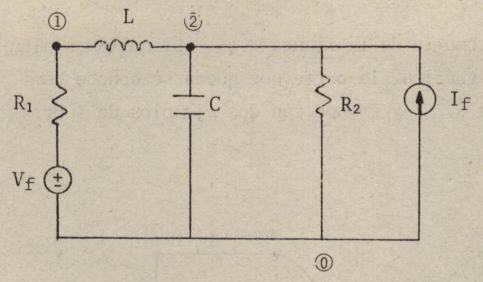


Figura 5.5

Solución

Como el circuito no tiene asignados sentidos de recorrido para las corrientes de rama, se establecen arbitrariamente; de esta forma, la gráfica orientada podrá tener diferentes sentidos. Las figuras 5.6a y 5.6b muestran dos posibles soluciones.

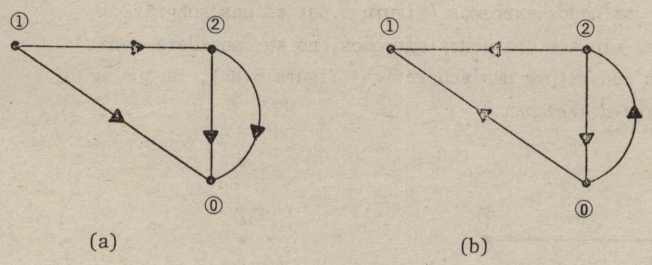
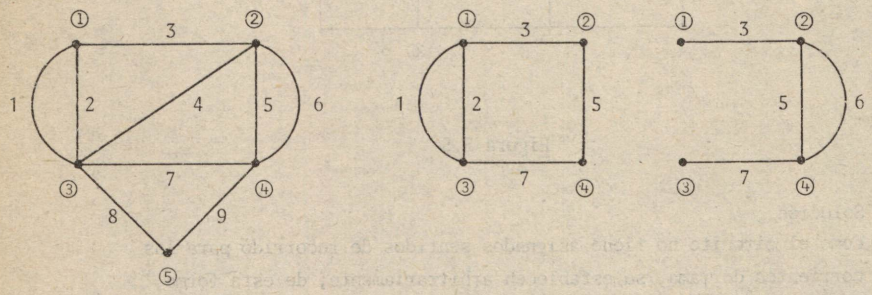


Figura 5.6

Observe que las fuentes se anularon, poniendo la de voltaje en cortocircuito y la de corriente en circuito abierto.

5.3 CONCEPTOS RELACIONADOS CON LAS GRAFICAS

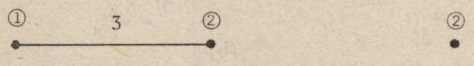
Supongamos una gráfica como la de la figura 5.7a. Si quitamos algunos nodos y ramas de la gráfica, la parte que queda se conoce como *subgráfica*. Las figuras 5.7 b y c muestran dos ejemplos de subgráficas. Subgráfica



(a) (b) (c)

Figura 5.7 a) Gráfica, b) y c) Subgráficas.

Una rama con sus dos nodos extremos (figura 5.8a) es una subgráfica pero la rama sola, sin sus dos nodos extremos, no se considera como tal; un solo nodo constituye una subgráfica (figura 5.8b), la que se denomina *subgráfica degenerada*.



(a) (b)

Figura 5.8 Subgráficas.

Trayectoria se define como una secuencia de ramas conectadas sucesivamente entre nodos. Para la gráfica de la figura 5.7a la trayectoria

entre los nodos (1) y (4) se muestra en la figura 5.9. Esta trayecto ria está formada por el nodo (1), la rama 2, el nodo (3), la rama 4, el nodo (2), la rama 5 y el nodo (4). Trayectoria

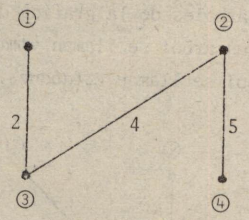


Figura 5.9 Trayectoria.

Una *malla interna* es una trayectoria cerrada que no contiene ramas dentro de ella. Una malla interna formada por las ramas 2,3 y 4 y los nodos (1), (2) y (3) se muestra en la figura 5.10. Una *malla externa* es una trayectoria cerrada formada por las ramas y nodos ex ternos de la gráfica. Es evidente que toda gráfica sólo puede tener una malla externa. La malla externa de la gráfica de la figura 5.7a está formada por las ramas 1, 3, 6, 9 y 8 por los nodos (1), (2), (4), (5) y (3). Malla interna. Malla externa

Un *lazo* es una trayectoria cerrada con o sin ramas en su interior; lazo es un término más general que incluye al de malla. La figura 5.11 muestra un lazo formado por los nodos (1), (2), (3) y (4) y las ramas 2, 3, 5 y 7. Lazo

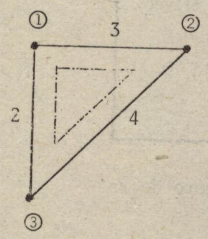


Figura 5.10 Malla interna.

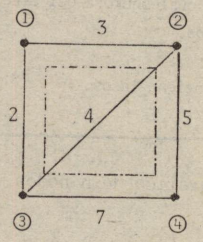


Figura 5.11 Lazo.

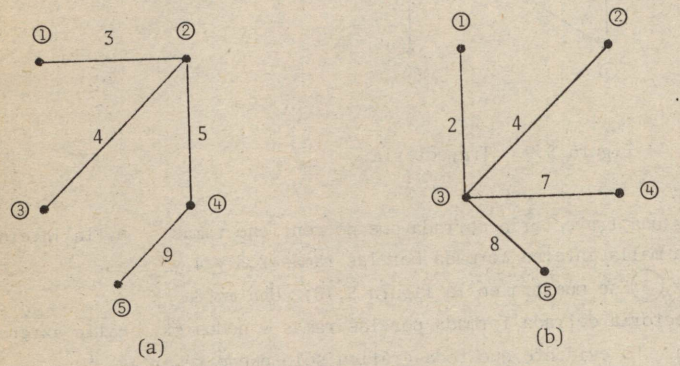
Un *árbol* se define como una subgráfica cuyas ramas conectan a todos los nodos de la gráfica sin formar ninguna trayectoria cerrada. Para una gráfica se pueden formar varios árboles. El número de ramas de cada árbol es igual al número de nodos menos uno.

Arbol

Las figuras 5.12a y b representan dos árboles de la gráfica de la figura 5.7a. Las ramas que constituyen un árbol se llaman *ramas de árbol*, y las que no forman parte del árbol se llaman *eslabones*.

Ramas de árbol

Eslabones



(a) (b)

Figura 5.12 Arboles.

Los árboles de una gráfica tienen las siguientes propiedades:

Propiedades de los árboles de una gráfica

1. Todos los árboles de una gráfica contienen igual número de ramas (4 en nuestro ejemplo).
2. Cada árbol contiene todos los nodos de la gráfica.
3. Dados dos nodos cualesquiera del árbol, existe sólo una trayectoria entre ellos.
4. Ningún árbol contiene lazos.

En general, para una gráfica de n nodos y r ramas el número de ramas del árbol es:

$$b = n - 1$$

y el número de eslabones está dado por:

$$\varepsilon = r - (n - 1)$$

Es decir, los eslabones se obtienen encontrando la diferencia entre todas las ramas de la gráfica menos las ramas del árbol.

Lo expresado anteriormente se hace evidente si se observa que la primera rama conecta dos nodos y cada rama adicional conecta sólo un nodo más al formar el árbol.

Una *sección de corte* se define como un conjunto de ramas que separan la gráfica en dos subgráficas; si estas ramas son eliminadas de la gráfica, se obtienen dos subgráficas no conectadas. La figura 5.13 muestra dos ejemplos de secciones de corte. La sección de corte indicada por la línea C_1 en la figura 5.13a está formada por las ramas 3, 4 y 5; la sección de corte C_2 de la figura 5.13b está formada por las ramas 1, 2, 4, 6 y 7. Observe que las ramas de las secciones de corte se indican mediante líneas punteadas y que la gráfica se divide en dos al quitar las ramas.

Sección de corte

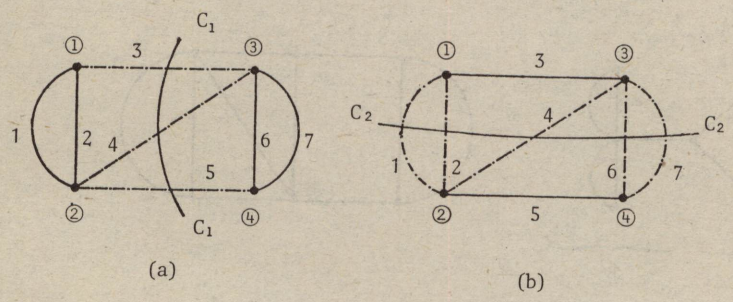


Figura 5.13 Secciones de corte.

Una gráfica es plana si puede ser dibujada en un plano de manera tal que no se intersecten sus ramas (figura 5.14). Si la gráfica no puede dibujarse en un plano sin que existan intersecciones entre ramas, *entonces la gráfica no es plana* (figura 5.15).

Gráfica plana

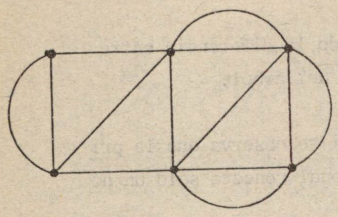


Figura 5.14 Gráfica plana.

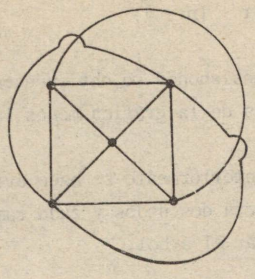


Figura 5.15 Gráfica no plana.

En la gráfica de la figura 5.16 se identifican dos subgráficas, A y B, unidas por un solo nodo. A una gráfica con estas características se le conoce como *gráfica pivotada*. Las gráficas que no presentan esta característica se denominan *gráficas no pivotadas* (figura 5.17)

Gráfica pivotada

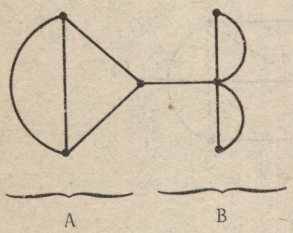


Figura 5.16 Gráfica pivotada.

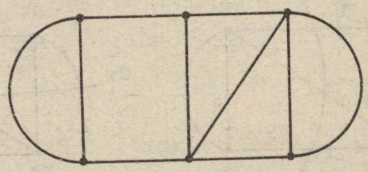


Figura 5.17 Gráfica no pivotada.

Ejemplo 5.2
Dibuje dos árboles distintos para la gráfica de la figura 5.18a.

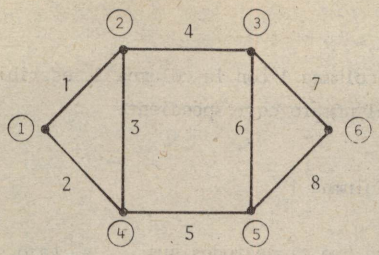


Figura 5.18a

Solución
El número de ramas de cada árbol es:

$$b = n - 1$$

$$b = 6 - 1 = 5 \text{ ramas:}$$

El número de eslabones está dado por

$$\varepsilon = r - (n - 1)$$

$$\varepsilon = 8 - (5) = 3 \text{ eslabones}$$

Los valores calculados para el número de ramas del árbol y para el número de eslabones pueden verificarse en las figuras 5.18 b y c, en las que se han dibujado dos árboles de la gráfica. Los eslabones son las ramas 2, 5 y 8 en la figura 5.18b.

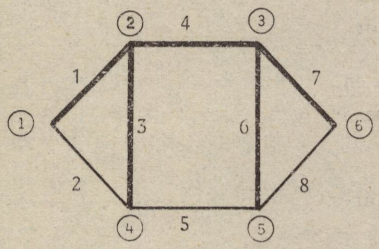


Figura 5.18b

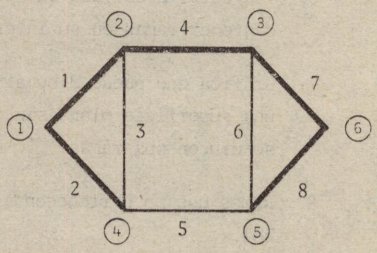


Figura 5.18c

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I. Relacione la columna 1 con la columna 2, escribiendo, dentro del paréntesis, el número correspondiente.

Columna 1	Columna 2
1. Subgráfica que tiene todos sus nodos interconectados a través de ramas y no contiene ninguna trayectoria cerrada.	a. Lazo ( )
2. Conexión común de dos o más ramas.	b. Malla interna ( )
3. Representación de una red mediante líneas sin tomar en cuenta la naturaleza de los elementos de la red.	c. Subgráfica ( )
4. Parte que queda de una gráfica al quitarle algunos nodos y ramas.	d. Arbol ( )
5. Trayectoria cerrada que no puede contener ramas en su interior.	e. Gráfica plana ( )
6. Trayectoria cerrada que puede contener ramas en su interior.	f. Gráfica ( )
7. Gráfica que puede dibujarse en una superficie plana sin que se crucen sus ramas.	g. Nodo ( )
8. Ramas que no pertenecen al árbol.	h. Eslabones ( )
	i. Sección de corte ( )

II. Resuelva los siguientes problemas y anote la o las soluciones en el espacio indicado.

1. Dibuje una gráfica orientada para la red de la figura 5.19. Indique si la gráfica es plana o no, y si es pivotada o no.

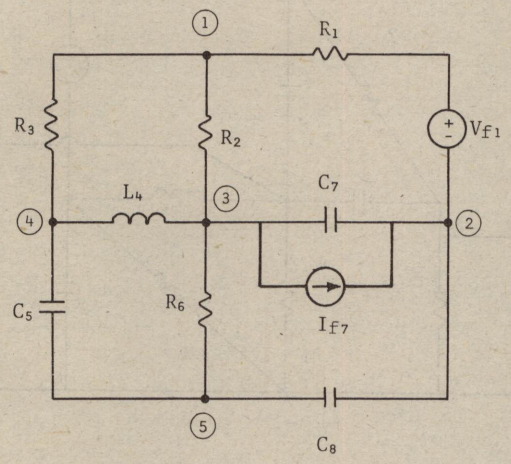


Figura 5.19

2. Dibuje la gráfica de la red representada en la figura 5.20. Numere los nodos y las ramas. Indique si la gráfica es plana o no, y si es pivotada o no.

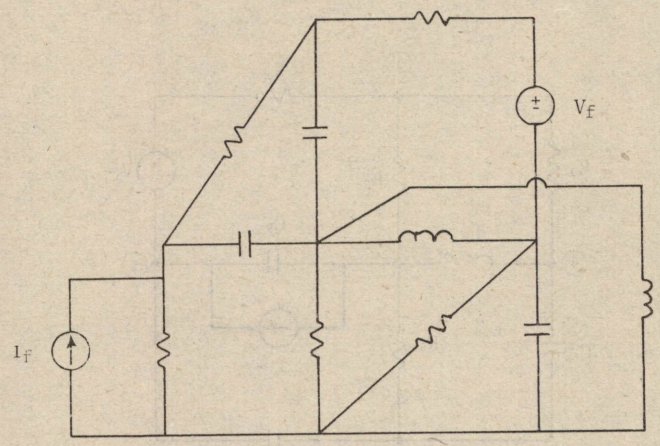


Figura 5.20

3. Dibuje tres árboles diferentes para la gráfica de la figura 5.21.

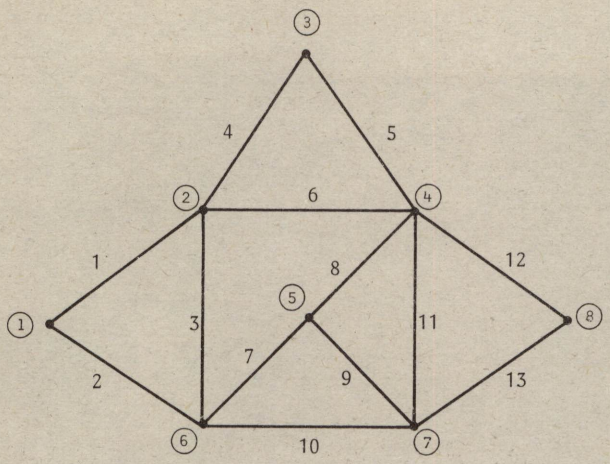
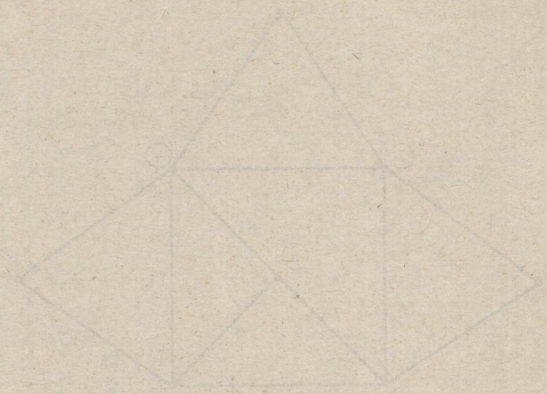


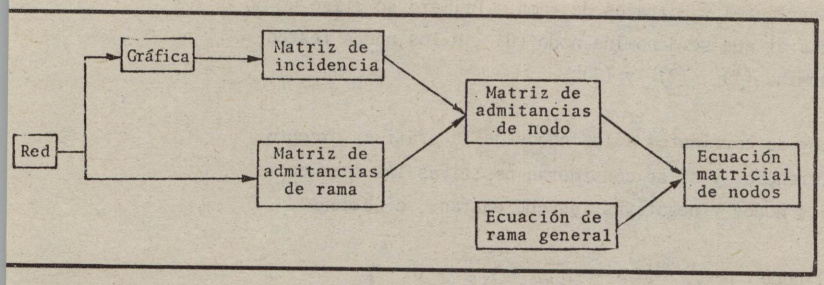
Figura 5.21

4. Determine dos secciones de corte para la gráfica de la figura 5.21.



MODULO 6 METODO DE ANALISIS DE NODOS

CUADRO SINOPTICO



OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno.

1. Obtendrá la matriz de incidencia de la gráfica de una red.
2. Obtendrá la matriz de admitancias de rama de una red.
3. Determinará las ecuaciones de nodo, los voltajes y las corrientes de rama utilizando el método sistemático matricial.
4. Determinará las ecuaciones de nodo para un circuito dado, utilizando el método breve.

6.1 MATRIZ DE INCIDENCIA Y LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF

Supongamos la gráfica de una red (figura 6.1) en la que se desea determinar las corrientes y voltajes de rama. Primero se elige un nodo de referencia al que se denomina nodo ⓪ , a los nodos restantes se les denomina ① , ② y ③ .

Aplicando la ley de corrientes a los nodos de la gráfica, excepto al nodo de referencia, y si se consideran positivas las corrientes que salen de los nodos y negativas las que entran, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Para el nodo } 1 \ ; & I_{r1} + I_{r4} + I_{r5} = 0 \\ \text{Para el nodo } 2 \ ; & I_{r2} - I_{r5} + I_{r6} = 0 \\ \text{Para el nodo } 3 \ ; & I_{r3} - I_{r4} - I_{r6} = 0 \end{array}\right\} \qquad (6.1)$$

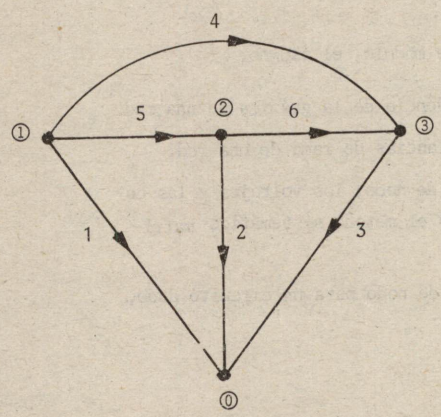


Figura 6.1 Gráfica orientada.

Observe que en el sistema de ecuaciones (6.1) los términos I_{r1}, I_{r2} e I_{r3} aparecen, cada uno, en sólo una ecuación.

Esto implica que las tres ecuaciones son linealmente independientes.

En general, para una gráfica de n nodos y r ramas, se verifica que:

> **Las n-1 ecuaciones con incógnitas I_{r1}, I_{r2}, ... I que se obtienen al aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff a todos los nodos excepto al de referencia, forman un sistema de ecuaciones linealmente independientes.**

El sistema de ecuaciones (6.1) se puede escribir en la forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \\ I_{r5} \\ I_{r6} \end{bmatrix}}_{I_r} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{0}$$

o

$$AI_r = 0 \qquad (6.2)$$

Matriz de incidencia reducida

donde I_r es el vector de corrientes de rama

A es la matriz de incidencia reducida porque no incluye al nodo de referencia. Tiene dimensiones $(n - 1) \times r$ (n = número de nodos; r = número de ramas).

La ecuación (6.2) es la ley de corrientes de Kirchhoff en forma matricial, obtenida utilizando la matriz de incidencia.

La matriz de incidencia A da información acerca de la manera en que están interconectados los nodos y las ramas. Los renglones de esta matriz representan los nodos de la gráfica (excepto el de referencia) y las columnas representan las ramas.

Acabamos de obtener la matriz de incidencia haciendo sumas de corrientes en los nodos. Sin embargo es mucho más sencillo obtenerla de la gráfica, si se considera que cada uno de sus elementos a_{ij} se obtiene de la siguiente manera:

a_{ij} = 1 cuando la rama j sale del nodo i

a_{ij} = -1 cuando la rama j entra al nodo i

a_{ij} = 0 cuando la rama j no está conectada al nodo i

6.2 LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF EN FORMA MATRICIAL

Llamaremos *voltajes de nodo* a la diferencia de potencial que hay entre cada nodo y el de referencia. Así, los voltajes de cada uno de los nodos serán V_{n1}, V_{n2},... Si se relaciona los voltajes de rama V_{r1}, V_{r2},..., con los voltajes de nodo (figura 6.1) se obtiene:

Voltajes de nodo

$$
\begin{aligned}
V_{r1} &= V_{n1} \\
V_{r2} &= V_{n2} \\
V_{r3} &= V_{n3} \\
V_{r4} &= V_{n1} - V_{n3} \\
V_{r5} &= V_{n1} - V_{n2} \\
V_{r6} &= V_{n2} - V_{n3}
\end{aligned}
$$

o bien

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \\ V_{r5} \\ V_{r6} \end{bmatrix}}_{V_r} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \end{bmatrix}}_{V_n}
$$

es decir

$$V_r = A^T V_n \qquad (6.3)$$

Ley de voltajes de Kirchhoff en términos de la matriz de incidencia reducida

donde

V_r es el vector de voltajes de rama

V_n es el vector de voltajes de nodo

A^T es la matriz de incidencia transpuesta

Observemos que la ecuación (6.3) relaciona simplemente los voltajes de nodo con los voltajes de rama. La ecuación (6.3) se conoce como la ley de voltajes de Kirchhoff en forma matricial.

Ejemplo 6.1
Determine la matriz de incidencia reducida y su transpuesta para la gráfica de la figura 6.2.

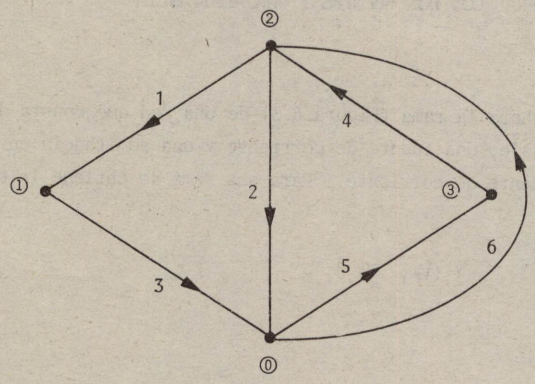


Figura 6.2

Solución
Considerando que un elemento de la matriz es 1 si la rama sale del nodo, y es -1 o 0 si la rama entra o no está conectada al nodo, tenemos:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \end{matrix} \text{ nodos}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

ramas

Para hallar la matriz transpuesta convertimos los renglones en columnas; por tanto:

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.3 RAMA GENERAL CON DOS FUENTES Y UNA ADMITANCIA

Consideremos ahora la rama (Figura 6.3) de una red que consta de una fuente de voltaje, una fuente de corriente y una admitancia en paralelo con la fuente de corriente. Para esa rama se obtiene la ecuación:

$$I_{r_1} = I_{f_1} + Y_1(V_{r_1} - V_{f_1})$$

o bien

$$I_{r_1} = I_{f_1} + Y_1 V_{r_1} - Y_1 V_{f_1} \qquad (6.4)$$

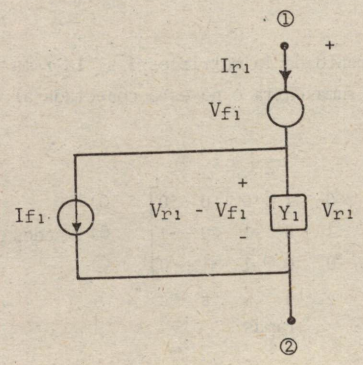


Figura 6.3 Rama general con dos fuentes y una admitancia.

La ecuación (6.4) permite reducir la rama a una equivalente más sencilla (figura 6.4), tomando en cuenta que el tercer término del segundo miembro de la ecuación (6.4) es una transformación de fuente de voltaje a fuente de corriente.

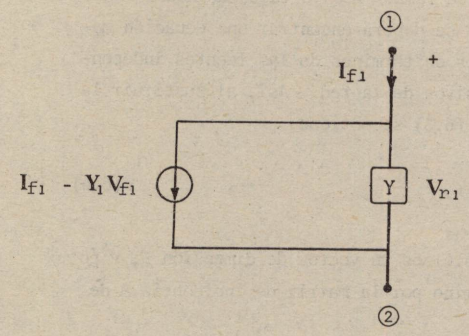


Figura 6.4 Rama equivalente con fuente y admitancia.

Cualquier rama de una red puede representarse en la forma de la figura 6.3. Por esta razón se le llama rama general. Si la rama no tuviera fuentes, I_{f1} y V_{f1} valdrían cero.

La ecuación (6.4) puede generalizarse para r ramas de una red, teniendose entonces: Rama general con admitancia

$$I_{r1} = I_{f1} + Y_1 V_{r1} - Y_1 V_{f1}$$
$$I_{r2} = I_{f2} + Y_2 V_{r2} - Y_2 V_{f2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$I_{rr} = I_{fr} + Y_r V_{rr} - Y_r V_{fr}$$

y, en notación matricial:

$$\mathbf{I_r} = \mathbf{I_f} + \mathbf{Y_r V_r} - \mathbf{Y_r V_f} \qquad (6.5)$$

Vectores de fuentes y matriz de admitancias de rama

donde

$\mathbf{I_r}$ y $\mathbf{V_r}$ son los vectores de voltajes y corrientes de rama
$\mathbf{I_f}$ es el vector de fuentes de corriente
$\mathbf{V_f}$ es el vector de fuentes de voltaje
$\mathbf{Y_r}$ es la matriz de admitancias de rama; es diagonal cuando la red no tiene elementos de acoplamiento.

6.4 ECUACION MATRICIAL DE NODOS

Si se conocen los voltajes de nodos de una red es posible conocer todos los voltajes y corrientes de rama. Los voltajes de nodos son variables importantes de la red; se deberá encontrar una ecuación matricial que permita calcularlos en términos de las fuentes independientes y de los elementos pasivos de la red. Así, al sustituir la ecuación (6.3) en la ecuación (6.5) se obtiene:

$$\mathbf{I}_r = \mathbf{I}_f + \mathbf{Y}_r\mathbf{A}^T\mathbf{V}_n - \mathbf{Y}_r\mathbf{V}_f \tag{6.6}$$

Cada término de la ecuación (6.6) es un vector de dimensión r, y podemos premultiplicar cada término por la matriz de incidencia A de (n - 1) x r. Así:

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_r = \mathbf{A}\mathbf{I}_f + \mathbf{A}\mathbf{Y}_r\mathbf{A}^T\mathbf{V}_n - \mathbf{A}\mathbf{Y}_r\mathbf{V}_f \tag{6.7}$$

Debido a la ecuación (6.2), la ecuación (6.7) se reduce a:

$$0 = \mathbf{A}\mathbf{I}_f + \mathbf{A}\mathbf{Y}_r\mathbf{A}^T\mathbf{V}_n - \mathbf{A}\mathbf{Y}_r\mathbf{V}_f$$

o

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}_r\mathbf{A}^T\mathbf{V}_n = \mathbf{A}\mathbf{Y}_r\mathbf{V}_f - \mathbf{A}\mathbf{I}_f \tag{6.8}$$

En la ecuación (6.8), al término $\mathbf{A}\mathbf{Y}_r\mathbf{V}_f - \mathbf{A}\mathbf{I}_f$, se le define como *vector de fuentes de corriente de nodos* y se representa como $\mathbf{I}_n$:

$$\boxed{\mathbf{I}_n = \mathbf{A}\mathbf{Y}_r\mathbf{V}_f - \mathbf{A}\mathbf{I}_f} \tag{6.9}$$

Vector de fuentes de corriente de nodos

Al término $\mathbf{A}\mathbf{Y}_r\mathbf{A}^T$ y se le define como *matriz de admitancias de nodos* y se representa como $\mathbf{Y}_n$:

$$\boxed{\mathbf{Y}_n = \mathbf{A}\mathbf{Y}_r\mathbf{A}^T} \tag{6.10}$$

Matriz de admitancias de nodos

Por lo tanto, la ecuación (6.8) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\boxed{\mathbf{Y}_n\mathbf{V}_n = \mathbf{I}_n} \tag{6.11}$$

Ecuación matricial de nodos

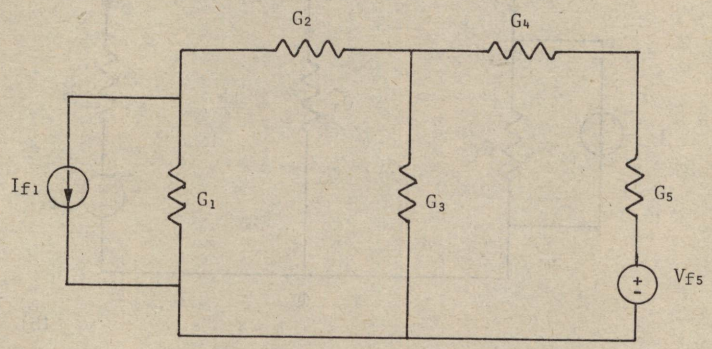
La ecuación (6.11) se conoce como *ecuación matricial de nodos*. En esta ecuación la matriz Y_n y el vector I_n son conocidos puesto que se obtienen de los elementos de la red.

La ecuación (6.11) consiste de n-1 ecuaciones lineales algebraicas con n-1 voltajes de nodo tomados con respecto al nodo de referencia.

Una vez que se determina el vector de voltajes de nodo V_n se pueden determinar el vector de voltajes de rama V_r y el vector de corrientes de rama I_r, de acuerdo con las ecuaciones (6.3) y (6.5) respectivamente.

Ejemplo 6.2

Dado el circuito resistivo de la difura 6.5a determine, por el metodo sistemático, las ecuaciones de nodo. Resuelva las ecuaciones de nodo y determine los voltajes y corrientes de rama.



$G_1 = 1\ \mho$ $G_4 = 1\ \mho$ $V_{f5} = 6\ V$

$G_2 = 2\ \mho$ $G_5 = 1\ \mho$ $I_{f1} = 5\ A$

$G_3 = 3\ \mho$

Figura 6.5a

Solución

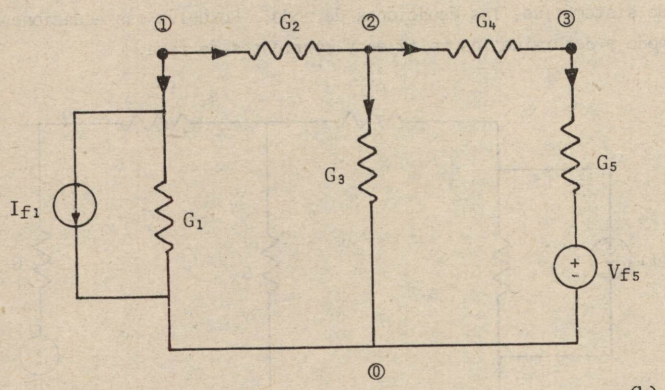
1° Se elige un nodo de referencia, ⓪ (figura 6.5b) y se denomina a los demás nodos ①, ② y ③. Se denomina V_{n1}, V_{n2} y V_{n3} a los voltajes de esos nodos con respecto al de referencia.

2° Se asigna a cada rama un sentido de referencia (figura 6.5b) y se dibuja la gráfica del circuito (figura 6.5c), numerando las ramas con los subíndices de cada elemento. Luego, de la gráfica se determina la matriz de incidencia:

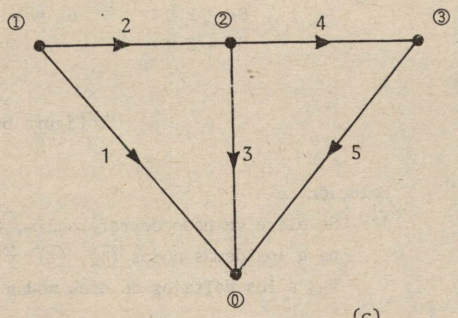
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \end{matrix} \text{ nodos}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$$

ramas



(b)



(c)

Figura 6.5

3° De las ramas del circuito se determina la matriz de admitancias (conductancias):

$$Y_r = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de admitancias (conductancias) de nodos se obtiene de:

$$Y_n = AY_r A^T$$

$$Y_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

El vector de fuentes es:

$$I_n = AV_r V_f - AI_f$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la ecuación de nodos es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{Y_n} \underbrace{\begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \end{bmatrix}}_{V_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}}_{I_n}$$

4° Los voltajes de nodo se determinan invirtiendo la matriz de admitancias de nodo y multiplicando por I_n; es decir:

$$V_n = Y_n^{-1} I_n$$

La matriz inversa se obtiene hallando los cofactores y dividiendo entre el determinante. Así:

$$Y_n^{-1} = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.16 & 0.08 \\ 0.16 & 0.24 & 0.12 \\ 0.08 & 0.12 & 0.56 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$V_n = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.16 & 0.08 \\ 0.16 & 0.24 & 0.12 \\ 0.08 & 0.12 & 0.56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.72 \\ -0.08 \\ 2.96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \end{bmatrix}$$

5° Los voltajes de rama se obtienen de:

$$V_r = A^T V_n$$

$$V_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.72 \\ -0.08 \\ 2.96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.72 \\ -1.64 \\ -0.88 \\ -3.04 \\ 2.96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \\ V_{r5} \end{bmatrix}$$

6° Las corrientes de rama están dadas por:

$$I_r = Y_r V_r + I_f - Y_r V_f$$

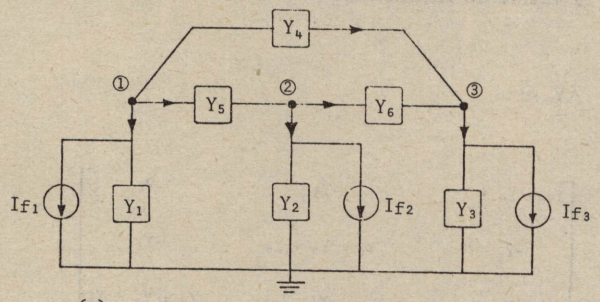
$$I_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.72 \\ -1.64 \\ -0.08 \\ -3.04 \\ 2.96 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$I_r = \begin{bmatrix} 3.28 \\ -3.28 \\ -0.24 \\ -3.04 \\ -3.04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \\ I_{r5} \end{bmatrix}$$

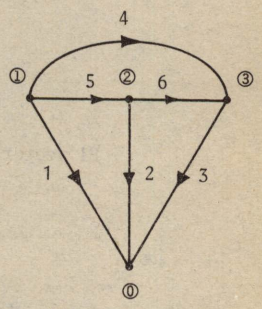
De esta forma se completa el análisis del circuito resistivo; es decir, que se han determinado todos los voltajes y corrientes de rama. Observemos, en este ejemplo, que la matriz de conductancias de rama es diagonal y la matriz de conductancias de nodo es simétrica.

Ejemplo 6.3

Determine la ecuación matricial de nodos para el circuito de la figura 6.6a que se encuentra en estado senoidal permanente.



(a)



(b)

Figura 6.6

Solución

Como ya están elegidos los sentidos de referencia para las corrientes, se construye la gráfica (figura 6.6b) y se obtiene la matriz de incidencia.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Del circuito se establece la matriz de admitancias de rama:

$$Y_r = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_6 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz de admitancias de nodos se realiza el producto:

$$Y_n = AY_rA^T$$

$$Y_n = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_4 + Y_5 & -Y_5 & -Y_4 \\ -Y_5 & Y_2 + Y_5 + Y_6 & -Y_6 \\ -Y_4 & -Y_6 & Y_3 + Y_4 + Y_6 \end{bmatrix}$$

El vector de fuentes es:

$$I_n = \underbrace{AY_rV_f}_{0} - AI_f = -A \begin{bmatrix} I_{f1} \\ I_{f2} \\ I_{f3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{f1} \\ -I_{f2} \\ -I_{f3} \end{bmatrix}$$

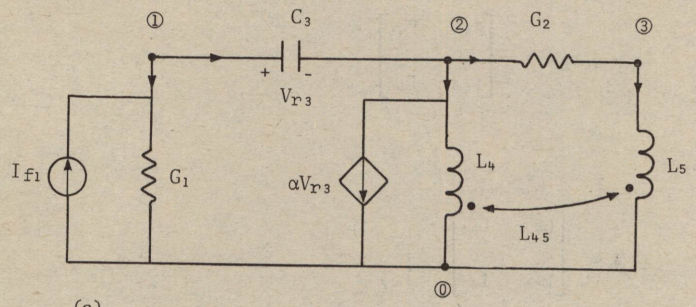
Por lo tanto, la ecuación matricial de nodos es:

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_4 + Y_5 & -Y_5 & -Y_4 \\ -Y_5 & Y_2 + Y_5 + Y_6 & -Y_6 \\ -Y_4 & -Y_6 & Y_3 + Y_4 + Y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{f1} \\ -I_{f2} \\ -I_{f3} \end{bmatrix}$$

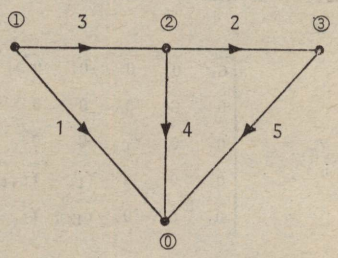
Observe que la matriz $\mathbf{Y}_r$ es diagonal porque el circuito no tiene elementos de acoplamiento, y que la matriz $\mathbf{Y}_n$ es simétrica.

Ejemplo 6.4

Dado el circuito (figura 6.7a) en estado senoidal permanente, determine la ecuación matricial de nodos.



(a)



(b)

Figura 6.7

Solución

Primero se dibuja la gráfica (figura 6.7b) del circuito; de ésta se obtiene la matriz de incidencia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las admitancias del capacitor y de las inductancias, propias y mutuas, están dadas por:

$$Y_{C_3} = j\omega C_3 \qquad Y_{L_{45}} = \frac{\Gamma_{45}}{j\omega}$$

$$Y_{L_4} = \frac{\Gamma_4}{j\omega} \qquad Y_{L_{54}} = \frac{\Gamma_{54}}{j\omega}$$

$$Y_{L_5} = \frac{\Gamma_5}{j\omega}$$

donde [5]

$$\Gamma = L^{-1} = \begin{bmatrix} \Gamma_4 & \Gamma_{45} \\ \Gamma_{54} & \Gamma_5 \end{bmatrix}$$

para

$$L = \begin{bmatrix} L_4 & L_{45} \\ L_{54} & L_5 \end{bmatrix}$$

La matriz de admitancias de ramas para el circuito es:

$$Y_r = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{C_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & Y_{L_4} & Y_{L_{45}} \\ 0 & 0 & 0 & Y_{L_{54}} & Y_{L_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \frac{\Gamma_4}{j\omega} & \frac{\Gamma_{45}}{j\omega} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Gamma_{54}}{j\omega} & \frac{\Gamma_5}{j\omega} \end{bmatrix}$$

5 Para mayores detalles sobre inductancias mutuas y sus admitancias e impedancias, consulte la referencia 1, pp. 341 - 356.

En la que, el elemento ω es la constante de la fuente dependiente, éste se coloca en el renglón cuatro porque la fuente pertenece a la rama cuatro y en la columna tres porque la fuente depende del voltaje (V_{r_3}) de la rama tres. Las admitancias Y_{L45} y Y_{L54} se escriben junto a las admitancias de las autoinductancias formando una matriz cuadrada, siempre que las ramas de las inductancias mutuas se numeren una después de la otra (L_4, L_5).

La matriz de admitancias de nodos se obtiene realizando el producto:

$$Y_n = AY_rA^T$$

$$= \begin{bmatrix} G_1 + j\omega C_3 & - j\omega C_3 & 0 \\ \alpha - j\omega C_3 & G_2 + j\omega C_3 - \alpha + \frac{\Gamma_4}{j\omega} & - G_2 + \frac{\Gamma_{45}}{j\omega} \\ 0 & - G_2 + \frac{\Gamma_{54}}{j\omega} & G_2 + \frac{\Gamma_5}{j\omega} \end{bmatrix}$$

El vector de fuentes de corriente es:

$$I_n = AY_rV_f - AI_f = -A\begin{bmatrix} -I_{f_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{f_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así, la ecuación matricial de nodos del circuito es:

$$\begin{bmatrix} G_1 + j\omega C_3 & - j\omega C_3 & 0 \\ \alpha - j\omega C_3 & G_2 + j\omega C_3 - \alpha + \frac{\Gamma_4}{j\omega} & - G_2 + \frac{\Gamma_{45}}{j\omega} \\ 0 & - G_2 + \frac{\Gamma_{54}}{j\omega} & G_2 + \frac{\Gamma_5}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{f_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Debemos observar lo siguiente:
Debido a que el circuito de este ejemplo contiene una fuente dependiente e inductancias mutuas la matriz Y_r no es diagonal y la matriz Y_n no es simétrica.

Las características de la matriz son las siguientes:

1. Cuando no haya elementos de acoplamiento (inductancias mutuas, transformadores y fuentes dependientes) la matriz Y_r de r x r es diagonal y, por consiguiente, la matriz Y_n de (n -1) x (n -1) será simétrica.

2. Cuando no haya fuentes dependientes (pero sí inductancias mutuas) ambas matrices, Y_r y Y_n, serán simétricas.

En el análisis sistemático de nodos de un circuito que contenga resistencias, capacitancias, inductancias, inductancias mutuas, fuentes dependientes y fuentes independientes, se pueden establecer los siguientes pasos:

1° Si el circuito tiene fuentes ideales, hay que transformarlas a fuentes reales (módulo 4 de esta unidad).

2° Fijar el sentido de referencia de las corrientes de rama del circuito, elegir un nodo de referencia, (0), y numerar los restantes como (1), (2), (3),. . ., (n-1).

3° Dibujar la gráfica del circuito y determinar la matriz de incidencia A.

4° Determinar la matriz de admitancias de rama Y_r y calcular la matriz de admitancias de nodos Y_n con la ecuación:

$$Y_n = AY_rA^T$$

5° Establecer los vectores de fuentes de rama:

$$I_f = \begin{bmatrix} I_{f1} \\ I_{f2} \\ \vdots \\ I_{fr} \end{bmatrix} \qquad y \qquad V_f = \begin{bmatrix} V_{f1} \\ V_{f2} \\ \vdots \\ V_{fr} \end{bmatrix}$$

y determinar el vector de fuentes de nodo con la ecuación:

$$I_n = AY_r V_f - AI_f$$

Si los elementos de los vectores de fuentes de rama aparecen con la misma polaridad de la figura 6.3, se consideran positivos, de otra manera se consideran negativos.

6° Establecer la ecuación matricial de nodos con los voltajes de nodo como incógnitas; es decir:

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{V}_n = \mathbf{I}_n$$

o bien

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1,n-1} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{n-1,1} & Y_{n-1,2} & \cdots & Y_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ \vdots \\ V_{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n1} \\ I_{n2} \\ \vdots \\ I_{n,n-1} \end{bmatrix}$$

7° Calcular los voltajes de nodo premultiplicando por la inversa de Y_n; es decir:

$$V_n = Y_n^{-1} I_n$$

8° Una vez determinados los voltajes de nodo, calcular los voltajes de rama con la ecuación:

$$V_r = A^T V_n$$

o

$$\begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ \vdots \\ V_{rr} \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ \vdots \\ V_{nr} \end{bmatrix}$$

9° Después de haber determinado los voltajes de rama, las corrientes de rama se obtienen de la expresión:

$$I_r = Y_r V_r + I_f - Y_r V_f$$

$$\begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ \vdots \\ I_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & Y_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ \vdots \\ V_{rr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{f1} \\ I_{f2} \\ \vdots \\ I_{fr} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & Y_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{f1} \\ V_{f2} \\ \vdots \\ V_{fr} \end{bmatrix}$$

Y_r puede o no ser diagonal.

6.5 METODO BREVE PARA OBTENER LAS ECUACIONES DE NODOS

El procedimiento sistemático, considerado anteriormente, describe claramente los pasos para analizar un circuito; es completamente general ya que se aplica en todos los casos.

En el caso de circuitos formados por resistencias, capacitancias, inductancias y fuentes independientes (sin elementos de acoplamiento, tales como inductancias mutuas), las ecuaciones de nodos pueden obtenerse directamente del circuito.

Así, en la ecuación matricial de nodos:

$$\mathbf{Y_n V_n} = \mathbf{I_n} \qquad (6.11)$$

o

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1,n-1} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{n-1,1} & Y_{n-1,2} & \cdots & Y_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ \vdots \\ V_{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n1} \\ I_{n2} \\ \vdots \\ I_{n,n-1} \end{bmatrix}$$

Reglas para obtener, por inspección, la ecuación matricial de nodos

La matriz de admitancias de nodos $\mathbf{Y}_n$ puede obtenerse de acuerdo a las siguientes reglas:

1. Y_{ii} es la suma de admitancias de todas las ramas que están conectadas al nodo (i) (elementos de la diagonal).

2. Y_{ij} es el negativo de la suma de todas las admitancias de las ramas conectadas entre los nodos (i) y (j). Y_{ij} se conoce como admitancia mutua entre los nodos (i) y (j) (elementos que están arriba y abajo de la diagonal).

Con respecto al vector de fuentes I_n, si todas las fuentes de voltaje se convierten en fuentes de corriente, entonces:

3. $I_{n,j}$ es la suma de todas las fuentes de corriente que entran o salen del nodo (j). Las fuentes de corriente cuyo sentido de referencia entra al nodo se consideran positivas y las que salen del nodo se consideran negativas.

Ejemplo 6.5
Escriba las ecuaciones de nodo directamente del circuito de la figura 6.8.

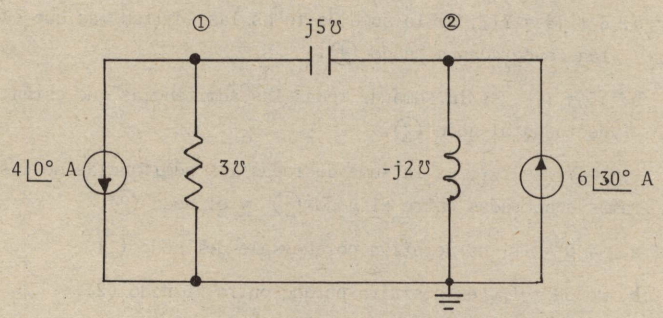


Figura 6.8

Solución
Se aplica la ley de corrientes a los nodos ① y ② .

Por lo tanto para el nodo ①

$$3V_{n1} + j5(V_{n1} - V_{n2}) = -4\angle 0°$$

ó

$$(3 + j5)V_{n1} - j5V_{n2} = -4\angle 0° \qquad \text{(a)}$$

En el nodo ②

$$-j2V_{n2} + j5(V_{n2} - V_{n1}) = 6\angle 30°$$

ó

$$-j5V_{n1} + j3V_{n2} = 6\angle 30° \qquad \text{(b)}$$

Las ecuaciones a y b en forma matricial son:

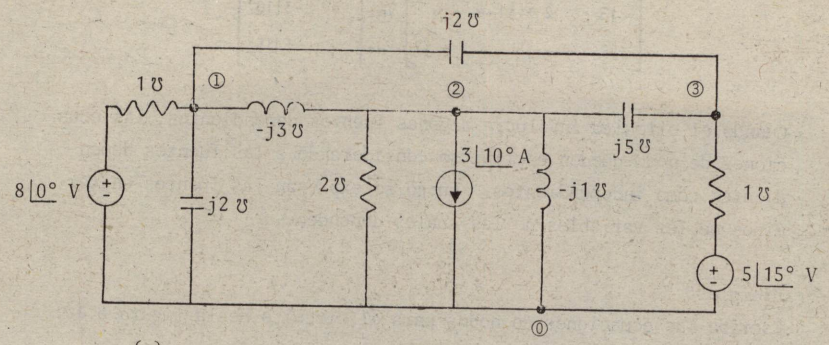
$$\begin{bmatrix} 3 + j5 & -j5 \\ -j5 & j3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\angle 0° \\ 6\angle 30° \end{bmatrix}$$

donde se observa que:

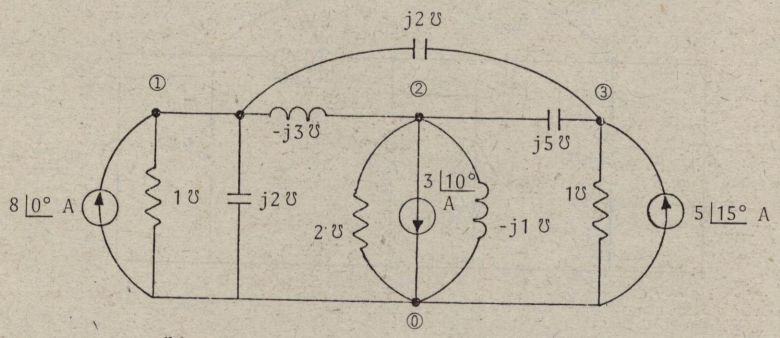
1. a. $3 + j5 = Y_{11}$, es la suma de todas las admitancias que están conectadas al nodo ①.
   b. $j3 = Y_{22}$, es la suma de todas las admitancias que están conectadas al nodo ②.
2. $-j5 = Y_{12} = Y_{21}$, es la suma de todas las admitancias de las ramas conectadas entre el nodo ① y el nodo ②.
3. a. $-4\angle 0° = I_{f1}$ es negativa porque sale del nodo ①.
   b. $6\angle 30° = I_{f2}$ es positiva porque entra al nodo ②.
4. Al obtener la ecuación para un nodo se considera que las corrientes salen del nodo a través de las admitancias (es decir, el voltaje del nodo para el que se está escribiendo la ecuación se considera positivo con respecto a los demás nodos) y se igualan con las corrientes de las fuentes.
5. Como consecuencia del punto anterior, no se han fijado sentidos de referencia para las corrientes de rama.

Ejemplo 6.6

Escriba las ecuaciones de nodo para el circuito de la figura 6.9a.



(a)



(b)

Figura 6.9

Solución

Como el circuito tiene fuentes de voltaje hay que transformarlas a fuentes de corrientes[6] (figura 6.9b). De acuerdo con las reglas anteriormente expuestas, se obtiene la siguiente ecuación matricial:

6 Las transformaciones de fuentes se tratan en el módulo 4 de esta unidad.

$$\begin{bmatrix} 1 + j1 & j3 & -j2 \\ j3 & 2 + j1 & -j5 \\ -j2 & -j5 & 1 + j7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\angle 0° \\ -3\angle 10° \\ 5\angle 15° \end{bmatrix}$$

Cuando el circuito involucra algunas fuentes dependientes, las ecuaciones de nodo pueden escribirse considerando a las fuentes dependientes como independientes. Luego se expresan las fuentes en términos de las variables de las cuales dependen.

Ejemplo 6.7

Escriba las ecuaciones de nodos para el circuito de la figura 6.10.

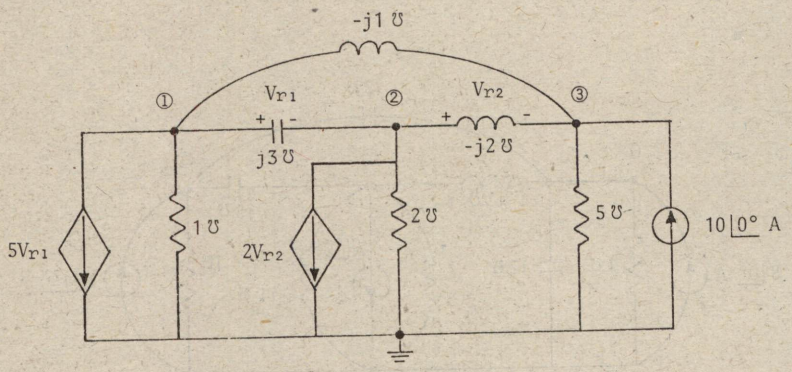


Figura 6.10

Solución

Del circuito se obtiene:

para el nodo ①

$$(1 + j3 - j1)V_{n1} - j3V_{n2} + j1V_{n3} = -5V_{r1} \qquad (a)$$

Relacionando la fuente dependiente $5V_{r1}$ con las variables de las cuales depende, se obtiene:

$$-5V_{r1} = -5(V_{n1} - V_{n2})$$

Al sustituir en la ecuación (a) y factorizando, se obtiene:

$$(6 + j2)V_{n1} + (-5 - j3)V_{n2} + j1V_{n3} = 0 \qquad (a')$$

Para el nodo ②

$$-j3V_{n1} + (2 + j3 - j2)V_{n2} + j2V_{n3} = -2V_{r2} \qquad (b)$$

Expresando la fuente dependiente en términos de los voltajes de nodo, se llega a la expresión:

$$-2V_{r2} = -2(V_{n2} - V_{n3})$$

que reduce la ecuación (b) a:

$$-j3V_{n1} + (4 + j1)V_{n2} + (-2 + j2)V_{n3} = 0 \qquad (b')$$

Para el nodo ③

$$j1V_{n1} + j2V_{n2} + (5 - j3)V_{n3} = 10\angle 0° \qquad (c)$$

En forma matricial las ecuaciones (a'), (b') y (c) son:

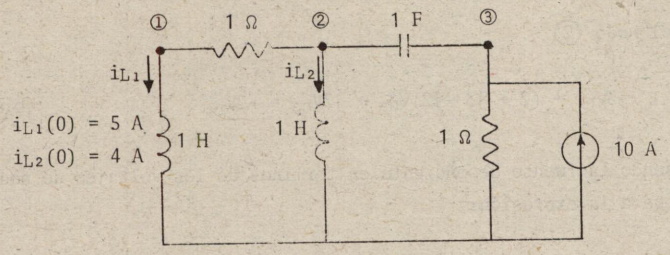
$$\begin{bmatrix} 6 + j2 & -5 - j3 & j1 \\ -j3 & 4 + j1 & -2 + j2 \\ j1 & j2 & 5 - j3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10\angle 0° \end{bmatrix}$$

Observe que la matriz de este sistema de ecuaciones no es simétrica puesto que el circuito contiene fuentes dependientes.

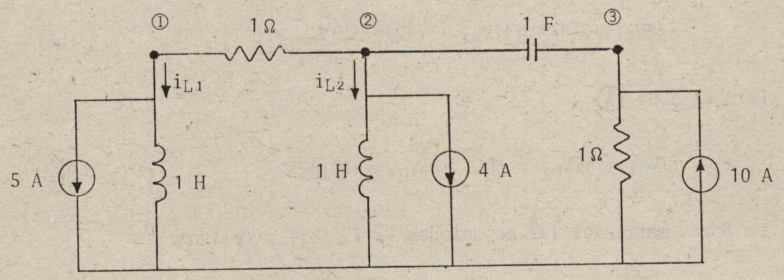
Cuando un circuito contiene elementos (capacitores e inductores) con condiciones iniciales, se pueden obtener las ecuaciones de nodos si esas condiciones iniciales se convierten en fuentes (de corriente o de voltaje) como se vio en el módulo 4 de esta unidad. Sin embargo, no podrán usarse fasores, ya que el empleo de estos presupone condiciones iniciales nulas.

Ejemplo 6.8

Determine las ecuaciones de nodos del circuito de la figura 6.11a, que tiene elementos con condiciones iniciales.



(a)



(b)

Figura 6.11

Solución

A las inductancias que tienen condiciones iniciales se les conecta una fuente de corriente en paralelo como se muestra en la figura 6.11b. Ahora podemos obtener las ecuaciones de nodos utilizando el operador D:

$$D = \frac{d}{dt} \qquad y \qquad \frac{1}{D} = \int dt$$

Así para el nodo ① obtenemos:

$$(1 + \frac{1}{D})v_{n1} - v_{n2} = -5 \qquad (a)$$

para el nodo ②

$$-v_{n1} + (1 + D + \frac{1}{D})v_{n2} - Dv_{n3} = -4 \qquad (b)$$

para el nodo ③

$$- Dv_{n2} + (1 + D)v_{n3} = 10 \qquad (c)$$

Las ecuaciones (a), (b) y (c) se escriben en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{D} & - 1 & 0 \\ - 1 & 1 + D + \frac{1}{D} & - D \\ 0 & - D & 1 + D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ v_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - 5 \\ - 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación matricial es, de hecho, un sistema de ecuaciones integrodiferenciales, cuya solución daría las respuestas transitoria y permanente del circuito.

Observe que los dos primeros elementos del vector de fuentes de corriente, se deben a las condiciones iniciales de los elementos del circuito.

6.6 RESUMEN DEL METODO DE ANALISIS POR NODOS

El método matricial sistemático de análisis por nodos aquí desarrollado, está basado en el concepto de gráfica, en las leyes de Kirchhoff y en la ecuación de una rama general. Combinando estos conceptos se ha obtenido la ecuación matricial de nodos:

$$\mathbf{Y_n V_n = I_n} \qquad (6.11)$$

que se aplica a cualquier tipo de red plana o no plana, con o sin elementos de acoplamiento (tales como inductancias mutuas y fuentes dependientes) con fuentes independientes de corriente, de voltaje o ambas.

La ecuación (6.11) tiene como variables de red (incógnitas) a los voltajes de nodo (con respecto al de referencia). Una vez que se determinan éstos, los voltajes de rama pueden obtenerse de:

$$V_r = A^T V_n \tag{6.3}$$

Después de calcular los voltajes de rama, las corrientes de rama se obtienen de:

$$I_r = Y_r V_r + I_f - Y_r V_f \tag{6.6}$$

Para circuitos sencillos, es decir, aquellos que no tengan inductancias mutuas y cuyas fuentes de voltaje se transformen en fuentes de corriente, se puede utilizar la ecuación:

$$Y_n V_n = I_n \tag{6.11}$$

donde Y_n e I_n se obtienen directamente del circuito (aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff) sin utilizar el concepto de gráfica ni los sentidos de referencia de las corrientes de rama como en el método sistemático.

En la tabla 6.1 se resumen algunas características del análisis de nodos.

Tabla 6.1 Resumen del método de análisis por nodos.

A N A L I S I S D E N O D O S

	METODO MATRICIAL SISTEMATICO	METODO BREVE
VARIABLES	Voltajes de nodo $V_{n1}, V_{n2}, \ldots$	Voltajes de nodo $V_{n1}, V_{n2}, \ldots$
BASES	Leyes de Kirchhoff $AI_r = 0$ $V_r = A^T V_n$	Ley de corrientes de Kirchhoff
ECUACION DE RAMA GENERAL	$I_r = Y_r V_r + I_f - Y_r V_f$	
ECUACION MATRICIAL DE REDES	$Y_n V_n = I_n$ donde: $Y_n = AY_r A^T$ $I_n = AY_r V_f - AI_f$	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1,n-1} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{n-1,1} & Y_{n-1,2} & \cdots & Y_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ \vdots \\ V_{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n1} \\ I_{n2} \\ \vdots \\ I_{n,n-1} \end{bmatrix}$
ELEMENTOS DE RED	Elementos de acoplamiento Fuentes reales de voltaje y de corriente.	Es conveniente tener solamente fuentes de corriente. Sin inductancias mutuas.

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I. Resuelva los siguientes problemas y anote la o las soluciones en el espacio indicado.

1. Determine los voltajes y corrientes de rama para el circuito de la figura 6.12, utilizando el método sistemático de análisis por nodos (considere los sentidos de referencia indicados).

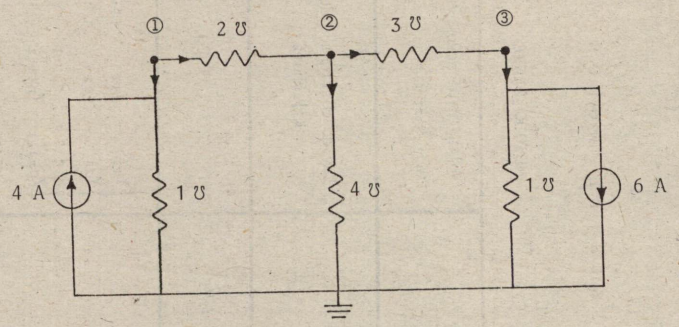


Figura 6.12

V_{r1} = _____ V I_{r1} = _____ A

V_{r2} = _____ V I_{r2} = _____ A

V_{r3} = _____ V I_{r3} = _____ A

V_{r4} = _____ V I_{r4} = _____ A

V_{r5} = _____ V I_{r5} = _____ A

2. Para el circuito de la figura 6.13, utilizando el método matricial:

   a. Obtenga las ecuaciones de nodo.

   b. Escriba las ecuaciones de voltajes de rama.

   c. Escriba las ecuaciones de corrientes de rama.

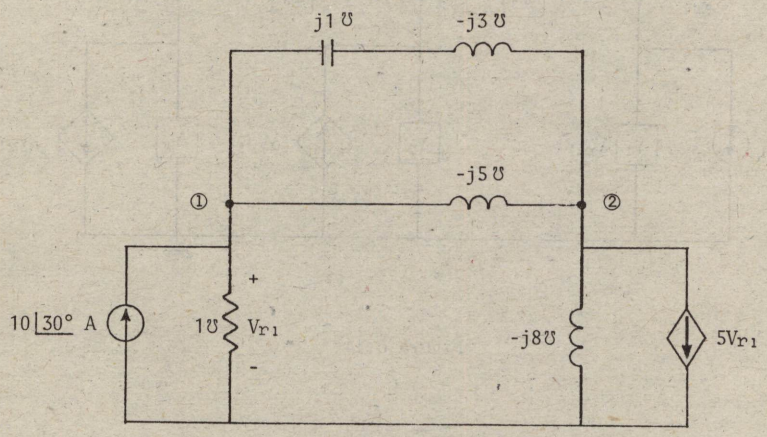


Figura 6.13

a.

b.

c.

3. Obtenga las ecuaciones de nodos del circuito de la figura 6.14, usando el método breve.

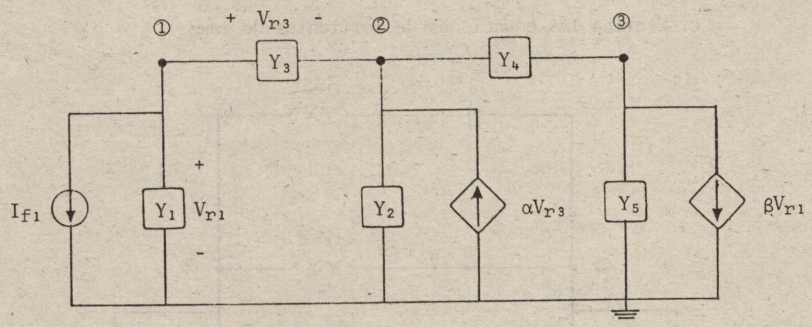


Figura 6.14

4. Para el circuito de la figura 6.15 en estado permanente senoidal con $\omega = \omega_o$:

   a. Determine las ecuaciones de nodos por el método sistemático matricial.

   b. Establezca en forma matricial las ecuaciones de voltajes de ramas.

   c. Establezca en forma matricial las ecuaciones de las corrientes de rama.

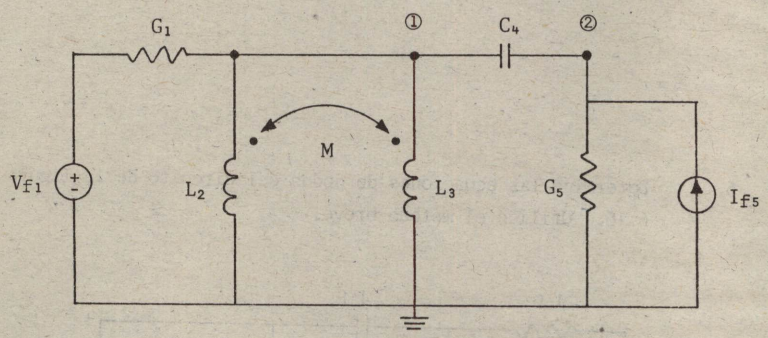


Figura 6.15

a.

b.

c.

5. Para el circuito del problema 4, considerando nula la inducc_ tancia mutua, obtenga las ecuaciones de nodos utilizando el método breve.

6. Determine las ecuaciones de nodos del circuito de la figura 6.16. Utilice el método breve.

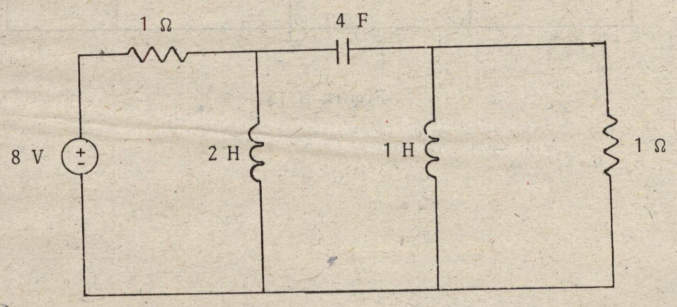
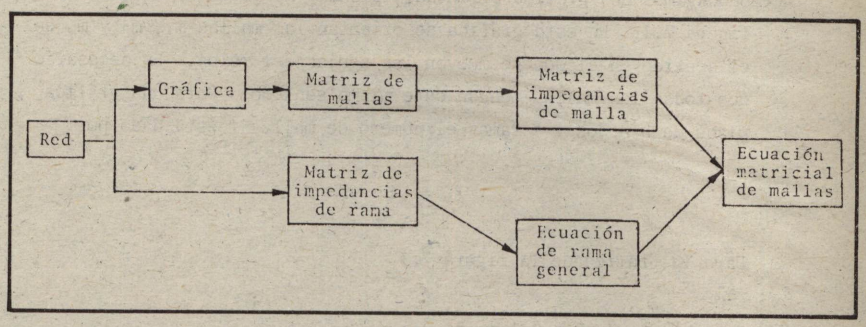


Figura 6.16

MODULO 7 METODO DE ANALISIS POR MALLAS

CUADRO SINOPTICO



OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Determinará la matriz de mallas a partir de las mallas de la gráfica de la red.
2. Obtendrá la matriz de impedancia de rama a partir de la red.
3. Determinará las ecuaciones de malla, las corrientes y voltajes utilizando el método sistemático matricial.
4. Obtendrá las ecuaciones de malla para una red sin elementos de acoplamiento utilizando el método breve.

7.1 MATRIZ DE MALLAS Y LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF

Supongamos una gráfica orientada, plana y no pivotada como la de la figura 7.1. En esta gráfica se orientan las mallas m_1, m_2 y m_3 en el sentido en el que se mueven las agujas del reloj. Es necesario que todas las mallas tengan este mismo sentido. Para una gráfica plana de n nodos y r ramas el número de mallas ℓ está dado por:

$$\ell = r - n + 1$$

Para la gráfica de la figura 7.1

$$\ell = 6 - 4 + 1 = 3$$

Con respecto a la gráfica de la figura 7.1, consideremos que el voltaje de rama es positivo si la rama tiene el mismo sentido que la malla y negativo en caso contrario. Bajo esta consideración, si se aplica la ley de voltajes de Kirchhoff a dicha gráfica se obtienen las siguientes ecuaciones:

para la malla m_1; $V_{r1} - V_{r2} - V_{r3} = 0$ (7.1)

para la malla m_2; $V_{r2} - V_{r4} + V_{r5} = 0$ (7.2)

para la malla m_3; $V_{r3} - V_{r5} + V_{r6} = 0$ (7.3)

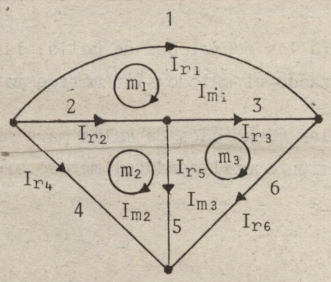


Figura 7.1 Gráfica con las mallas m_1, m_2 y m_3.

Es necesario señalar que en cada una de las ecuaciones (7.1), (7.2) y (7.3) existe un término propio de una de estas ecuaciones; es decir, V_{r1} sólo aparece en la ecuación (7.1), V_{r4} en la ecuación (7.2) y V_{r6} sólo en la ecuación (7.3). Lo anterior significa que las ecuaciones (7.1), (7.2) y (7.3) son linealmente independientes. En general una gráfica de ℓ mallas tendrá ℓ ecuaciones de malla. Así, se establece que:

> Las ℓ ecuaciones de malla obtenidas al aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff alrededor de cada malla, constituyen un conjunto de ecuaciones linealmente independientes. Las variables de estas ecuaciones son los voltajes de rama.

Las ecuaciones (7.1), (7.2) y (7.3) pueden escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \\ V_{r5} \\ V_{r6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o sea

$$\mathbf{M}V_r = 0 \qquad (7.4)$$

donde

V_r es el vector de voltajes de rama
$\mathbf{M}$ es la matriz de mallas reducida — Matriz de mallas reducida

Por el método utilizado para su obtención, la ecuación (7.4) se conoce como: *Ley de voltajes de Kirchhoff en función de la matriz de mallas.*

Cada elemento m_{ij} de la matriz de mallas $\mathbf{M}$ de orden $\ell \times r$ (número de mallas por número de ramas), puede obtenerse directamente de una gráfica, de acuerdo a las siguientes reglas:

$m_{ij} = 1$ si la rama j pertenece a la malla i y ambas tienen el mismo sentido.
$m_{ij} = -1$ si la rama j pertenece a la malla i y su sentido es contrario al de la malla.
$m_{ij} = 0$ si la rama j no pertenece a la malla i.

7.2 LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF Y CORRIENTES DE MALLA

Relacionando las corrientes de rama con las corrientes de malla, de la figura 7.1, se obtiene:

$$I_{r1} = I_{m1}$$
$$I_{r2} = -I_{m1} + I_{m2}$$
$$I_{r3} = -I_{m1} + I_{m3}$$
$$I_{r4} = -I_{m2}$$
$$I_{r5} = I_{m2} - I_{m3}$$
$$I_{r6} = I_{m3}$$

Corrientes de malla

Observe que las corrientes de malla coinciden con las de rama cuando ésta pertenece a una sola malla. Si la rama pertenece a dos mallas, entonces la corriente de rama será la diferencia de las dos corrientes de malla.

Las ecuaciones anteriores, escritas en forma matricial producen el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \\ I_{r5} \\ I_{r6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix}$$

o sea

$$I_r = M^T I_m \qquad (7.5)$$

Ley de corrientes de Kirchhoff en términos de la matriz de mallas

donde

I_r es el vector de corrientes de rama
I_m es el vector de corrientes de malla
M^T es la matriz de mallas transpuesta

La ecuación (7.5) es conocida como *ley de corrientes de Kirchhoff en términos de corrientes de malla.*

7.3 RAMA GENERAL CON DOS FUENTES Y UNA IMPEDANCIA

Consideremos ahora la rama de la figura 7.2. Para esta rama se obtiene la ecuación:

$$V_{r1} = V_{f1} + Z_1(I_{r1} - I_{f1})$$

equivalente a:

$$V_{r1} = V_{f1} + Z_1 I_{r1} - Z_1 I_{f1} \qquad (7.6)$$

Rama general con impedancia

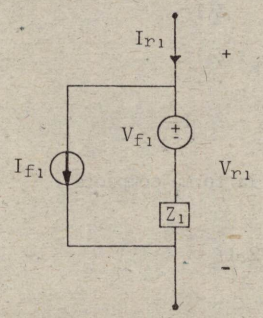


Figura 7.2 Rama general con dos fuentes y una impedancia.

Con la ecuación (7.6) se puede obtener una rama equivalente (ver figura 7.3) que tenga una fuente equivalente y la impedancia Z_1 en serie. Esto se puede realizar considerando que la fuente de corriente ha sido transformada a fuente de voltaje de acuerdo con el término $Z_1 I_{f1}$ del segundo miembro de la ecuación (7.6).

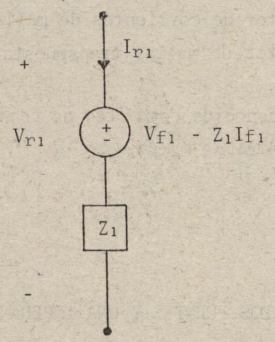


Figura 7.3 Rama equivalente con fuente de voltaje e impedancia.

La rama de la figura 7.2 es bastante general porque incluye los dos tipos de fuentes. Por ejemplo si I_{f1} fuera cero, la fuente de voltaje V_{f1} estaría en serie con la impedancia Z_1.

La ecuación (7.6) puede establecerse para n ramas de una red, obteniéndose entonces las n ecuaciones:

$$V_{r1} = V_{f1} + Z_1 I_{r1} - Z_1 I_{f1}$$

$$V_{r2} = V_{f2} + Z_2 I_{r2} - Z_2 I_{f2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_{rr} = V_{fr} + Z_r I_{rr} - Z_r I_{fr}$$

que pueden escribirse en la forma compacta:

$$\mathbf{V_r} = \mathbf{V_f} + \mathbf{Z_r I_r} - \mathbf{Z_r I_f} \qquad (7.7)$$

donde

V_r, I_r, I_f y V_f son los vectores de voltajes y corrientes de rama y de corrientes y voltajes de fuente ya presentados en el análisis de nodos.

Z_r es la matriz de impedancias de rama. Puede ser diagonal o no dependiendo de los elementos de la red.

Matriz de impedancias de rama

7.4 ECUACION MATRICIAL DE MALLAS

Si a cada malla de la gráfica de una red se le asigna una corriente, se obtendrán corrientes de malla. Estas corrientes de malla son variables adecuadas para la red porque permiten calcular todos los voltajes y corrientes de la red misma. Por esta razón nos proponemos ahora desarrollar una ecuación matricial que permita determinar las corrientes de malla.

Sustituyendo la ecuación (7.5) en la ecuación (7.7) se obtiene:

$$V_r = V_f + Z_r M^T I_m - Z_r I_f$$

Cada término de esta ecuación es un vector de dimensión n; se puede premultiplicar por la matriz de mallas M de $\ell \times n$; de esta forma:

$$MV_r = MV_f + MZ_r M^T I_m - MZ_r I_f \qquad (7.8)$$

De acuerdo a la ecuación (7.4), la ecuación (7.8) se reduce a:

$$0 = MV_f + MZ_r M^T I_m - MZ_r I_f$$

o su equivalente:

$$MZ_r M^T I_m = MZ_r I_f - MV_f \qquad (7.9)$$

Definiendo para la ecuación (7.9) a :

$$\boxed{V_m = MZ_r I_f - MV_f} \qquad (7.10)$$

Vector de fuentes de voltaje de mallas

como el *vector de fuente de voltaje de mallas* cuyas componentes representan la suma de las fuentes de voltaje alrededor de las mallas, y a:

$$\boxed{Z_m = MZ_r M^T} \qquad (7.11)$$

Matriz de impedancias de malla

como la *matriz de impedancias de malla*, se obtiene la ecuación:

$$\boxed{Z_m I_m = V_m} \qquad (7.12)$$

Ecuación matricial de mallas

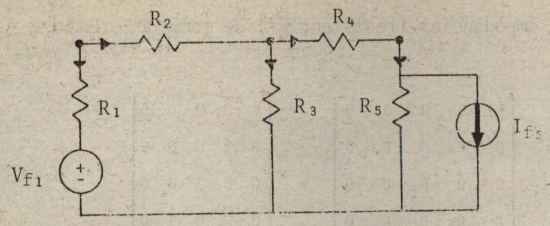
conocida como *ecuación matricial de mallas*.

En la ecuación (7.12) es evidente que el vector I_m es el único desconocido, ya que Z_m y V_m se obtienen de los valores de los elementos de la red. Una vez que se determinan las corrientes de malla con la ecuación matricial (7.12), las corrientes y voltajes de rama de la red se obtienen con las ecuaciones (7.5) y (7.7) respectivamente.

Ejemplo 7.1

Para el circuito resistivo de la figura 7.4a, por el método sistemático de análisis de mallas:

a. Determine las ecuaciones de malla.
b. Resuelva las ecuaciones de malla y halle las corrientes y voltajes de rama del circuito.

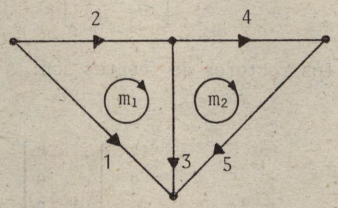


(a)

$I_{f5} = 4$ A $\qquad R_1 = R_4 = R_5 = 1\ \Omega$

$V_{f1} = 5$ V $\qquad R_2 = 2\ \Omega$

$R_3 = 3\ \Omega$



(b)

Figura 7.4

Solución

a. Como el circuito ya tiene fijados los sentidos de referencia de las corrientes de rama, se dibuja la gráfica correspondiente (figura 7.4b). Luego se forman las mallas m_1 y m_2 (ambas con el mismo sentido). La matriz de mallas que se obtiene, de acuerdo con las reglas ya vistas anteriormente, es:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de impedancias (resistencias) de rama del circuito es:

$$Z_r = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz de impedancias de malla está dada por:

$$Z_m = MZ_rM^T$$

$$Z_m = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Los vectores de fuentes son:

$$I_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{f5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad V_f = \begin{bmatrix} V_{f1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así, el vector de fuentes de voltajes de malla se obtiene de:

$$V_m = MZ_rI_f - MV_f$$

$$V_m = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

La ecuación matricial de mallas para el circuito es:

$$Z_mI_m = V_m$$

o sea

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

Una manera de resolver la ecuación matricial (a) de mallas es premultiplicándola por Z_m^{-1} ; resultando así:

$$I_m = Z_m^{-1} V_m = \begin{bmatrix} 0.23 & 0.14 \\ 0.14 & 0.28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.76 \\ 1.85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix}$$

Una vez calculadas las corrientes de malla obtendremos las corrientes de rama:

$$I_r = M^T I_m = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.76 \\ 1.85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.76 \\ 1.76 \\ -0.09 \\ 1.85 \\ 1.85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \\ I_{r5} \end{bmatrix}$$

Los voltajes de rama se determinan a partir de la expresión:

$$V_r = V_f + Z_r I_r - Z_r I_f$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.76 \\ 1.76 \\ -0.09 \\ 1.85 \\ 1.85 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$V_r = \begin{bmatrix} 3.23 \\ 3.52 \\ -0.28 \\ 1.85 \\ -2.14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \\ V_{r5} \end{bmatrix}$$

La obtención de los voltajes y corrientes de rama del circuito, completa el análisis del mismo por el método sistemático de mallas.

Observe que la matriz de impedancias de rama $\mathbf{Z}_r$ es diagonal, porque el circuito no contiene elementos de acoplamiento; por tanto la matriz de impedancias de malla $\mathbf{Z}_m$ es simétrica.

Ejemplo 7.2

Determine la ecuación matricial de mallas del circuito de la figura 7.5a escribiendo las impedancias en función de la frecuencia compleja s.

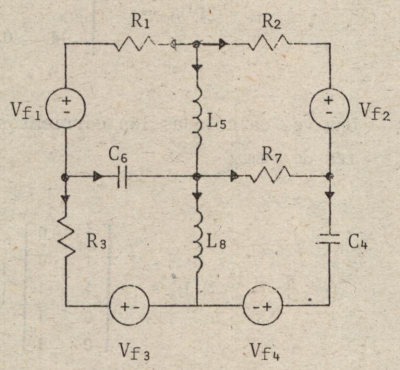


Figura 7.5a

Solución

De la red se obtiene la gráfica (figura 7.5b) y en ella se forman las mallas m_1, m_2, m_3 y m_4.

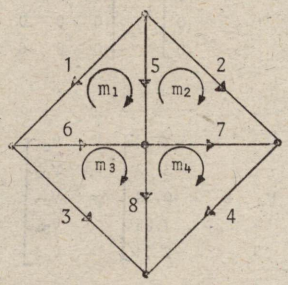


Figura 7.5b

De la gráfica se obtiene la matriz de mallas:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se forma la matriz de impedancias de rama del circuito, en el dominio de la variable s de la transformada de Laplace.

$$Z_r = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sC_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sL_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sC_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sL_8 \end{bmatrix}$$

Se realiza el siguiente producto, para obtener la matriz de impedancias de mallas.

$$Z_m = MZ_rM^T$$

$$= \begin{bmatrix} R_1 + sL_5 + \frac{1}{sC_6} & -sL_5 & -\frac{1}{sC_6} & 0 \\ -sL_5 & R_2 + sL_5 + R_7 & 0 & -R_7 \\ -\frac{1}{sC_6} & 0 & R_3 + \frac{1}{sC_6} + sL_8 & -sL_8 \\ 0 & -R_7 & -sL_8 & \frac{1}{sC_4} + R_7 + sL_8 \end{bmatrix}$$

El vector de fuentes de voltaje de malla está dado por:

$$V_m = \underbrace{MZ_r I_f}_{=0} - MV_f$$

$$= -\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{f_1} \\ V_{f_2} \\ V_{f_3} \\ V_{f_4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{f_1} \\ -V_{f_2} \\ V_{f_3} \\ -V_{f_4} \end{bmatrix}$$

finalmente se obtiene la ecuación matricial de mallas de la red:

$$\mathbf{Z_m I_m} = \mathbf{V_m}$$

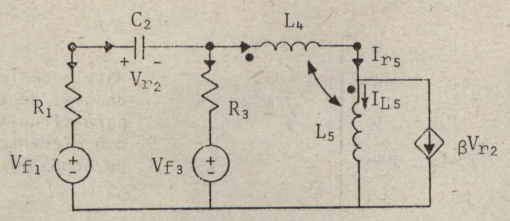
$$= \begin{bmatrix} R_1 + sL_5 + \frac{1}{sC_6} & -sL_5 & -\frac{1}{sC_6} & 0 \\ -sL_5 & R_2 + sL_5 + R_7 & 0 & -R_7 \\ -\frac{1}{sC_6} & 0 & R_3 + \frac{1}{sC_6} + sL_8 & -sL_8 \\ 0 & -R_7 & -sL_8 & \frac{1}{sC_4} + R_7 + sL_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m_1} \\ I_{m_2} \\ I_{m_3} \\ I_{m_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{f_1} \\ -V_{f_2} \\ V_{f_3} \\ -V_{f_4} \end{bmatrix}$$

Observe que, como el circuito no tiene elementos de acoplamiento, la matriz de impedancias de rama $\mathbf{Z_r}$ es diagonal y la matriz de impedancias de mallas $\mathbf{Z_m}$ es simétrica.

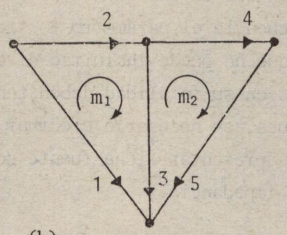
Note también que $\mathbf{Z_m}$ es una matriz cuadrada de $\ell \times \ell$ (ℓ = número de mallas).

Ejemplo 7.3

Dado el circuito (figura 7.6a) operando en estado senoidal permanente con frecuencia angular ω, determine la ecuación matricial de mallas.



(a)



(b)

Figura 7.6

Solución

En primer lugar se dibuja la gráfica del circuito de la figura 7.6a y se forman las mallas m_1 y m_2 para obtener la matriz de las mismas:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las impedancias de las inductancias (incluyendo las inductancias mutuas) y del capacitor son:

$$Z_{C_2} = \frac{1}{j\omega C_2} \qquad Z_{L_{45}} = j\omega L_{45}$$

$$Z_{L_4} = j\omega L_4 \qquad Z_{L_{54}} = j\omega L_{54}$$

$$Z_{L_5} = j\omega L_5$$

Así, la matriz de impedancias de rama para el circuito es:

$$\mathbf{Z}_r = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j\omega C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega L_4 & j\omega L_{45} \\ 0 & -\beta\frac{L_5}{C_2} & 0 & j\omega L_{54} & j\omega L_5 \end{bmatrix}$$

Matriz de impedancias de rama para circuitos con elementos de acoplamiento

Antes de continuar es necesario hacer una aclaración: El elemento $-\beta\frac{L_5}{C_2}$ aparece en la matriz debido a la fuente controlada de la rama 5 ($I = \beta V_{r2}$). Observe que es una fuente de corriente controlada por voltaje, en consecuencia el parámetro β tiene unidades de admitancia ($\mho$) por lo que no puede incluirse directamente en la matriz $\mathbf{Z}_r$ cuyos elementos en su totalidad deben tener unidades de impedancia (Ω) . Así pues, es necesario efectuar las siguientes operaciones con el fin de presentar dicha fuente controlada con parámetro en unidades de impedancia.

1° Por la ley de corrientes de Kirchhoff, en la rama 5 tenemos que:

$$I_{L5} = I_{r5} - \beta V_{r2}$$

y además el voltaje de esa rama esta dado por:

$$V_{r5} = j\omega L_5(I_{r5} - \beta V_{r2}) + j\omega L_{54} I_{r4}$$

puesto que

$$V_{r2} = \frac{1}{j\omega C_2} I_2$$

entonces

$$V_{r5} = j\omega L_5(I_{r5} - \beta\frac{1}{j\omega C_2} I_{r2}) + j\omega L_{54} I_{r4}$$

$$V_{r5} = j\omega L_5 I_{r5} - \beta\frac{L_5}{C_2} I_{r2} + j\omega L_{54} I_{r4}$$

Observe que los coeficientes de esta ecuación dan origen al quinto renglón de la matriz de impedancias de rama. Además los términos de esta ecuación son voltajes debidos a diferentes causas; el término $j\omega L_5 I_{r5}$ se debe a la caída de voltaje en la inductancia por la corriente que circula en la rama 5; el término $-\beta\frac{L_5}{C_2} I_{r2}$ es el voltaje ocasionado por la fuente controlada y, por último el término $j\omega L_{54} I_{r4}$ es la diferencia de potencial ocasionada en la inductancia L_5 por el acoplamiento magnético con la rama 4.

Los elementos $j\omega L_{45}$ y $j\omega L_{54}$ (impedancias de las inductancias mutuas) se escriben en la matriz $\mathbf{Z}_r$ en forma simétrica respecto a la diagonal de acuerdo con los números de rama de las inductancias acopladas; en nuestro caso se encuentran acopladas las inductancias de las ramas 4 y 5.

La matriz de impedancias de malla se obtiene efectuando el producto matricial:

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{M}\mathbf{Z}_r\mathbf{M}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j\omega C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega L_4 & j\omega L_{45} \\ 0 & -\beta\frac{L_5}{C_2} & 0 & j\omega L_{54} & j\omega L_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_m = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_2} & -R_3 \\ -\beta\frac{L_5}{C_2} - R_3 & R_3 + j\omega L_4 + j\omega L_5 + j\omega L_{45} + j\omega L_{54} \end{bmatrix}$$

Los vectores de las fuentes independientes son:

$$\mathbf{V}_f = \begin{bmatrix} V_{f1} \\ 0 \\ V_{f3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I}_f = 0$$

Por tanto, el vector de fuentes de voltajes de malla se obtiene de la siguiente manera:

$$V_m = \underbrace{MZ_r I_f}_{=0} - MV_f$$

$$V_m = -\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{f1} \\ 0 \\ V_{f3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_m = \begin{bmatrix} (V_{f1} - V_{f3}) \\ V_{f3} \end{bmatrix}$$

Por consiguiente la ecuación matricial de mallas del circuito es:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_2} & -R_3 \\ -\beta\frac{L_5}{C_2} - R_3 & R_3 + j\omega L_4 + j\omega L_5 + j\omega L_{45} + j\omega L_{54} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (V_{f1} - V_{f3}) \\ V_{f3} \end{bmatrix}$$

Debido a que el circuito de este ejemplo contiene inductancias mutuas y fuentes dependientes, la matriz de impedancias de rama Z_r no es diagonal y la matriz de impedancias de malla Z_m no es simétrica.

En general las matrices Z_r y Z_m tienen las siguientes características:

1. Cuando el circuito dado no tenga elementos de acoplamiento, la matriz de impedancias de rama $\mathbf{Z}_r$ de $n \times n$ será diagonal y por lo tanto la matriz de impedancias de malla $\mathbf{Z}_m$ de $\ell \times \ell$ será simétrica.

2. Cuando el circuito no contenga fuentes dependientes (pero sí inductancias mutuas lineales), las matrices de impedancias $\mathbf{Z}_r$ y $\mathbf{Z}_m$ serán simétricas.

Para el análisis sistemático de mallas planas y no pivotadas, de circuitos que tienen elementos de acoplamiento (inductancias mutuas, transformadores y fuentes dependientes), se pueden establecer los siguientes pasos:

1° Si el circuito tiene fuentes ideales, es necesario transformarlas a fuentes reales (Vea el módulo 4).

2° Fijar el sentido de referencia de las corrientes de rama e identificar las ramas.

3° Hacer la gráfica del circuito, formar las mallas en el sentido de las agujas del reloj y obtener la matriz de mallas **M**.

4° Determinar la matriz de impedancias de rama Z_r a partir del circuito y calcular la matriz de impedancias de mallas con la ecuación:

$$Z_m = MZ_rM^T$$

5° Establecer los vectores de fuentes independientes de rama.

$$V_f = \begin{bmatrix} V_{f_1} \\ V_{f_2} \\ \vdots \\ V_{f_r} \end{bmatrix}, \qquad I_f = \begin{bmatrix} I_{f_1} \\ I_{f_2} \\ \vdots \\ I_{f_r} \end{bmatrix}$$

Cuando los elementos de estos vectores tienen la polaridad indicada en la figura 7.2, se consideran positivos; de otra manera, se consideran negativos.

Luego se calcula el vector de voltajes de malla con la ecuación:

$$V_m = MZ_rI_f - MV_f$$

6° Se establece la ecuación matricial de mallas, con las corrientes de mallas como incógnitas:

$$Z_m I_m = V_m$$

o

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1\ell} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2\ell} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ Z_{\ell 1} & Z_{\ell 2} & \cdots & Z_{\ell\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ \vdots \\ I_{m\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{m1} \\ V_{m2} \\ \vdots \\ V_{m\ell} \end{bmatrix}$$

7° Se determinan las corrientes de malla I_{m1}, I_{m2}, ... $I_{m\ell}$, premultiplicando el vector de voltajes de malla V_m por la inversa de la matriz Z_m; es decir:

$$I_m = Z_m^{-1} V_m$$

8° Después de haber determinado las corrientes de malla, las corrientes de rama se calculan con la ecuación:

$$I_r = M^T I_m$$

o

$$\begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ \vdots \\ I_{rr} \end{bmatrix} = M^T \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ \vdots \\ I_{m\ell} \end{bmatrix}$$

9° Finalmente se obtienen los voltajes de rama con la ecuación:

$$V_r \quad V_f + Z_r I_r + Z_r I_f$$

o

$$\begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{f1} \\ V_{f2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{fr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ 0 & 0 & \cdots & Z_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{rr} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ 0 & 0 & \cdots & Z_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{f1} \\ I_{f2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{fr} \end{bmatrix}$$

Z_r puede ser o no diagonal; esto depende de que el circuito contenga o no elementos de acoplamiento.

7.5 METODO BREVE PARA DETERMINAR LAS ECUACIONES DE MALLA

El método sistemático de análisis de mallas que acabamos de describir es general, se aplica a circuitos cuyas gráficas sean planas y no pivotadas y que además tengan elementos de acoplamiento.

Cuando se presentan circuitos formados por resistencias, capacitancias, inductancias y fuentes independientes, las ecuaciones de malla se pueden obtener directamente del circuito.

Así, en la ecuación matricial de mallas:

$$\mathbf{Z}_m \mathbf{I}_m = \mathbf{V}_m$$

o

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1\ell} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2\ell} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ Z_{\ell 1} & Z_{\ell 2} & \cdots & Z_{\ell\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ \vdots \\ I_{m\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{m1} \\ V_{m2} \\ \vdots \\ V_{m\ell} \end{bmatrix}$$

Reglas para obtener por inspección la ecuación matricial de mallas

La matriz de impedancias de mallas se obtiene de acuerdo con las reglas siguientes:

1. Z_{ii} es la suma de todas las impedancias de rama de la malla i (elementos de la diagonal).

2. Z_{ij} es el negativo de la suma de todas las impedancias de las ramas que son comunes a las mallas i y j (elementos que se encuentran arriba y abajo de la diagonal).

3. Si se convierten todas las fuentes del circuito, en fuentes de voltaje, entonces V_{mj} es la suma de todas las fuentes de voltaje en la malla j. Las fuentes de voltaje cuyo sentido de referencia genera corriente en el sentido de la malla j se consideran positivas, si no tienen esta polaridad se consideran negativas.

Ejemplo 7.4

Obtenga las ecuaciones de malla directamente del circuito de la figura 7.7 en estado senoidal permanente.

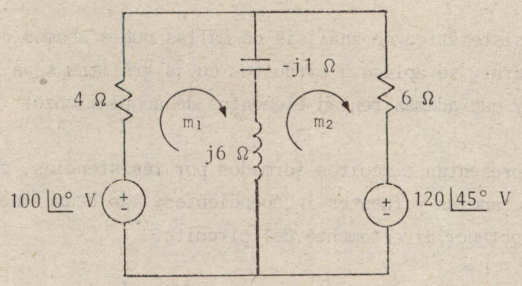


Figura 7.7

En este ejemplo las ecuaciones de malla del circuito se obtendrán aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff y mostrando cada paso. En los siguientes ejemplos se aplicará directamente el procedimiento arriba descrito.

Solución

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff a la malla m_1:

$$4I_{m1} + j5(I_{m1} - I_{m2}) = 100\angle 0°$$
$$(4 + j5)I_{m1} - j5I_{m2} = 100\angle 0° \qquad \text{(a)}$$

Para la malla m_2:

$$j5(I_{m2} - I_{m1}) + 6I_{m2} = -120\angle 45°$$

ó

$$-j5I_{m1} + (6 + j5)I_{m2} = -120\angle 45° \qquad \text{(b)}$$

En forma matricial las ecuaciones (a) y (b) quedan:

$$\begin{bmatrix} 4 + j5 & -j5 \\ -j5 & 6 + j5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\angle 0° \\ -120\angle 45° \end{bmatrix}$$

donde se debe observar que:

1. a. $4+j5 = Z_{11}$ es la suma de todas las impedancias que están en la malla m_1.
   b. $6+j5 = Z_{22}$ es la suma de todas las impedancias que están en la malla m_2.

2. $-j5 = Z_{12} = Z_{21}$ es la suma de todas las impedancias comunes a las mallas m_1 y m_2.

3. a. $100\angle 0°$ = V_{f1} es positiva porque la fuente de voltaje produce la corriente en el sentido de la malla m_1 (por convención, la *corriente* en una fuente de voltaje *sale* por el signo positivo y *entra* al negativo).

   b. $-120\angle 45°$ = V_{f2} es negativa porque la fuente de voltaje produce la corriente en sentido contrario al de la malla m_2.

Ejemplo 7.5
Escriba las ecuaciones de malla directamente (por inspección) del circuito de la figura 7.8a.

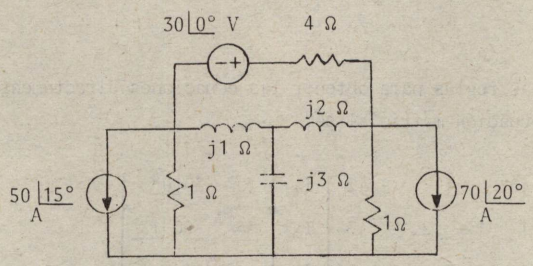


Figura 7.8a

Solución

Las fuentes de corriente del circuito se deben transformar a fuentes de voltaje como en la figura 7.8b. Así, se establecen las mallas m_1, m_2 y m_3.

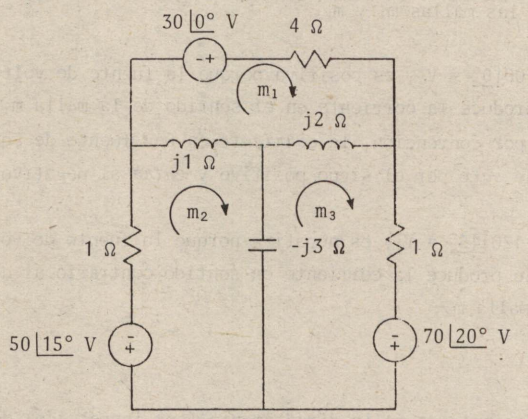


Figura 7.8b

De acuerdo a las reglas para obtener las ecuaciones directamente del circuito, la ecuación matricial es:

$$\begin{bmatrix} 4 + j3 & -j1 & -j2 \\ -j1 & 1 - j2 & j3 \\ -j2 & j3 & 1 - j1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\angle 0° \\ -50\angle 15° \\ 70\angle 20° \end{bmatrix}$$

Cuando hay fuentes dependientes en el circuito, las ecuaciones de malla pueden escribirse considerando las fuentes dependientes como independientes y expresándolas después en función de las variables de las cuales dependen esas fuentes.

Ejemplo 7.6

Obtenga las ecuaciones de malla para el circuito de la figura 7.9 utilizando el método breve.

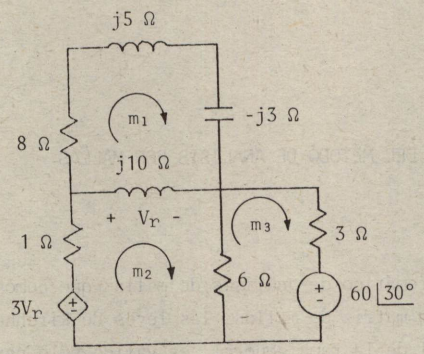


Figura 7.9

Solución

Para las mallas indicadas en el circuito, la ecuación matricial es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 8 + j12 & - j10 & 0 \\ - j10 & 7 + j10 & - 6 \\ 0 & - 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3V_r \\ -60\angle 30° \end{bmatrix} \qquad (a)$$

Expresando el elemento $3V_r$ en función de las corrientes de malla, dicha expresión es:

$$3V_r = 3(j10)(I_{m2} - I_{m1}) = 30jI_{m2} - 30jI_{m1}$$

Sustituyendo esta última relación en el sistema matricial de ecuaciones (a) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 8 + j12 & - j10 & 0 \\ 20j & 7 - j20 & - 6 \\ 0 & - 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -60\,\underline{|30°} \end{bmatrix}$$

7.6 RESUMEN DEL MÉTODO DE ANALISIS POR MALLAS

El método sistemático de análisis de mallas que hemos desarrollado a partir de la matriz de mallas, las leyes de Kirchhoff y la ecuación matricial de la rama general, es válido sólo para circuitos con gráficas planas. Así, hemos obtenido la ecuación matricial de mallas:

$$\mathbf{Z_m I_m = V_m} \qquad (7.12)$$

que se aplica solamente a redes planas, ya sea que tengan o no elementos de acoplamiento (inductancias mutuas, transformadores y fuentes dependientes), y que incluyan o no, fuentes independientes de voltaje o de corriente.

En la ecuación (7.12) las corrientes de malla I_{m1}, I_{m2}, ... , $I_{m\ell}$ son las variables de red. Una vez que éstas se han determinado, es fácil hallar las corrientes de rama a través de la ecuación:

$$\mathbf{I_r = M^T I_m} \qquad (7.5)$$

Después de haber calculado las corrientes de rama con la ecuación (7.5), los voltajes de rama pueden obtenerse con la ecuación:

$$\mathbf{V_r = Z_r I_r + V_f - Z_r I_f} \qquad (7.7)$$

Al calcular todos los voltajes y corrientes de rama concluye el análisis del circuito.

En circuitos sencillos que no tengan inductancias mutuas y en los que todas las fuentes de corriente sean transformadas a fuentes de voltaje, se puede utilizar la ecuación:

$$\mathbf{Z}_m \mathbf{I}_m = \mathbf{V}_f \qquad (7.12)$$

donde $\mathbf{Z}_m$ y $\mathbf{V}_f$ se obtienen directamente del circuito, por simple observación, aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff sin utilizar la gráfica del circuito, ni sentidos de referencia para las corrientes de rama, como en el método sistemático matricial.

En la tabla 7.1 se reúnen algunas características del análisis de mallas.

Tabla 7.1 Resumen del método de análisis por mallas.

A N A L I S I S D E M A L L A S

	METODO MATRICIAL SISTEMATICO	METODO BREVE
VARIABLES	Voltajes de malla $I_{m1}, I_{m2}, \ldots$	Corrientes de malla $I_{m1}, I_{m2}, \ldots$
BASES	Leyes de Kirchhoff $\mathbf{M}\mathbf{V}_r = 0$ $\mathbf{I}_r = \mathbf{M}^T \mathbf{I}_m$	Ley de voltajes de Kirchhoff
ECUACION DE RAMA GENERAL	$V_r = Z_r I_r + V_f - Z_r I_f$	
ECUACION MATRICIAL DE REDES	$\mathbf{Z}_m \mathbf{I}_m = \mathbf{V}_m$ donde: $\mathbf{Z}_m = \mathbf{M} Z_r \mathbf{M}^T$ $\mathbf{V}_m = \mathbf{M}_r \mathbf{I}_f - \mathbf{M} V_f$	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \ldots & Z_{1\ell} \\ Z_{21} & Z_{22} & \ldots & Z_{2\ell} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Z_{\ell 1} & Z_{\ell 2} & \ldots & Z_{\ell\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ \vdots \\ I_{m\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{f1} \\ V_{f2} \\ \vdots \\ V_{f\ell} \end{bmatrix}$
ELEMENTOS DE RED	Elementos de acoplamiento fuentes reales de voltaje y de corriente.	Es conveniente tener sólo fuentes de voltaje. Sin inductancias mutuas.

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I Resuelva los siguientes problemas anotando la o las soluciones en el espacio indicado.

1. Utilizando el método sistemático de análisis de mallas, obtenga los voltajes y corrientes de rama del circuito de la figura 7.10. Considere los sentidos de referencia indicados en el circuito y numere las ramas arbitrariamente.

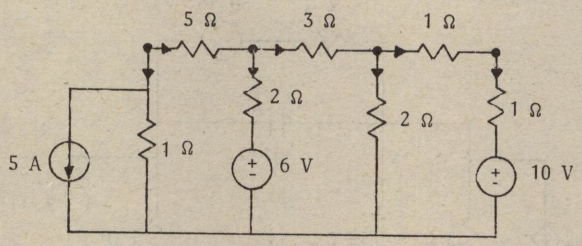


Figura 7.10

V_{r1} = _____ V I_{r1} = _____ A
V_{r2} = _____ V I_{r2} = _____ A
V_{r3} = _____ V I_{r3} = _____ A
V_{r4} = _____ V I_{r4} = _____ A
V_{r5} = _____ V I_{r5} = _____ A
V_{r6} = _____ V I_{r6} = _____ A
V_{r7} = _____ V I_{r7} = _____ A

2. Aplicando el método sistemático de mallas al circuito de la figura 7.11:

   a. Obtenga las ecuaciones de malla.
   b. Establezca las ecuaciones de corrientes de rama.
   c. Establezca las ecuaciones de voltajes de rama.

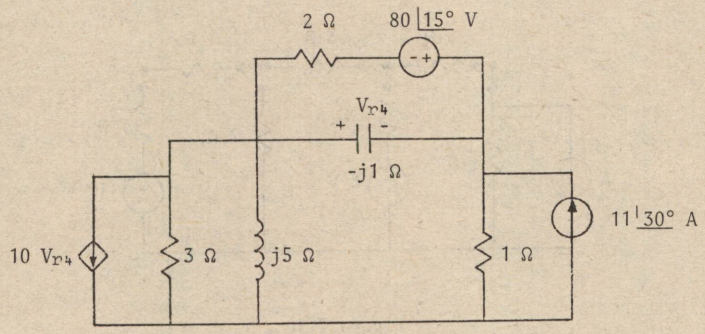


Figura 7.11

a.

b.

c.

3. Obtenga las ecuaciones de malla del circuito de la figura 7.12, usando el método breve.

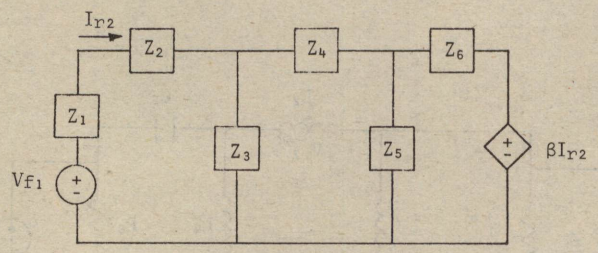


Figura 7.11

4. Considerando el circuito de la figura 7.13 en estado senoidal permanente con $\omega = \omega_o$:

   a. Obtenga las ecuaciones de malla por el método matricial sistemático.
   b. Establezca las ecuaciones de corrientes de rama del circuito.
   c. Establezca las ecuaciones de voltajes de rama.

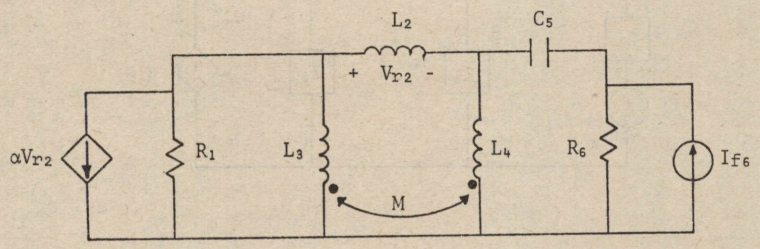


Figura 7.13

a.

b.

c.

5. Para el circuito del problema anterior, obtenga las ecuaciones de malla utilizando el método breve. Considere nulas las inductancias mutuas.

6. Obtenga las ecuaciones de malla del circuito de la figura 7.14. Utilice el método breve.

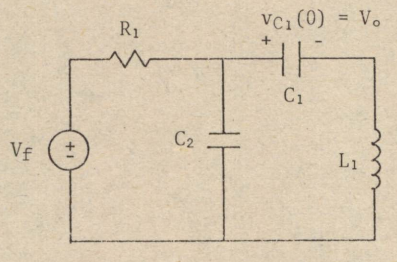
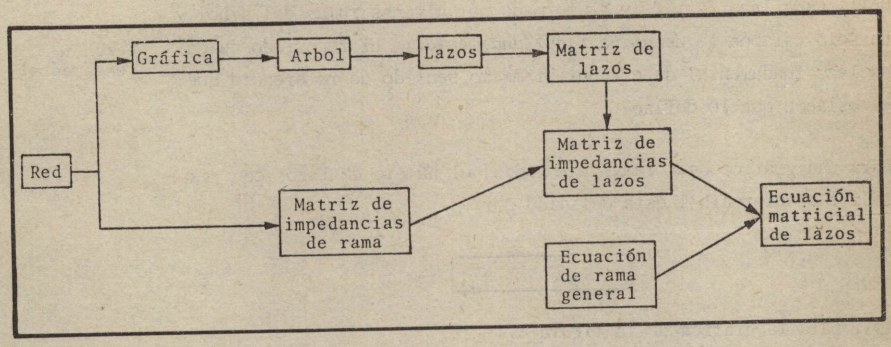


Figura 7.14

MODULO 8 METODO DE ANALISIS POR LAZOS

CUADRO SINOPTICO



OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Obtendrá la matriz de lazos de la gráfica orientada para un árbol elegido de la misma.
2. Calculará la matriz de impedancia de lazos.
3. Obtendrá la ecuación matricial de lazos para una red dada.

8.1 FORMACION DE LAZOS FUNDAMENTALES

Consideremos una gráfica como la de la figura 8.1 en la cual hemos elegido un árbol formado por las ramas 4, 5 y 6. Observe que los eslabones 1, 2 y 3 han sido numerados antes que las ramas del árbol. Cada lazo ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_3 formado por algunas ramas del árbol y un solo eslabón se denomina *lazo fundamental*. El recorrido de cada lazo fundamental debe tener el mismo sentido de referencia que el eslabón que lo define.

Lazo fundamental

Para una gráfica de r ramas y n nodos, el número de lazos con respecto a cualquier árbol esta definido por:

$$\boxed{\ell = r - n + 1}$$

Así, para la gráfica de la figura 8.1

$$\ell = 6 - 4 + 1 = 3$$

lazos fundamentales.

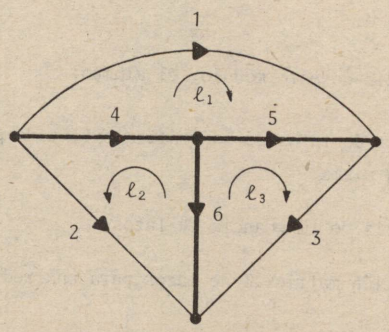


Figura 8.1 Gráfica con los lazos ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3.

Es conveniente numerar primero los eslabones y después las ramas. Sin embargo, esto no es indispensable.

8.2 MATRIZ DE LAZOS FUNDAMENTALES

Considerando que un voltaje de rama es positivo si la rama tiene el mismo sentido que el lazo al cual pertenece, establecemos las ecuaciones siguientes para la gráfica de la figura 8.1:

$$\begin{aligned} &\text{Para el lazo } \ell_1: && V_{r1} - V_{r4} - V_{r5} = 0 \\ &\text{Para el lazo } \ell_2: && V_{r2} - V_{r4} - V_{r6} = 0 \\ &\text{Para el lazo } \ell_3: && V_{r3} + V_{r5} - V_{r6} = 0 \end{aligned} \qquad (8.1)$$

Como cada ecuación tiene un término que no aparece en las otras el sistema de ecuaciones 8.1 es linealmente independiente.

En general, para una gráfica de ℓ lazos fundamentales se puede establecer lo siguiente:

> Las ℓ ecuaciones lineales con incógnitas $V_{r1}, V_{r2}, \ldots$ obtenidas al aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff a cada lazo fundamental, forman un sistema de ecuaciones linealmente independientes.

El sistema de ecuaciones (8.1) puede escribirse en forma matricial, es decir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \\ V_{r5} \\ V_{r6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o sea

$$\mathbf{B}V_r = 0 \qquad (8.2)$$

Matriz de lazos fundamentales

donde **B** es la matriz de lazos fundamentales con dimensiones $\ell \times r$ (número de lazos por número de ramas). Cada elemento de la matriz

de lazos fundamentales se puede obtener de acuerdo a las siguientes reglas:

$b_{ij} = 1$ si la rama j pertenece al lazo i y ambos tienen el mismo sentido

$b_{ij} = -1$ si la rama j pertenece al lazo i pero la rama y el lazo tienen sentido opuesto.

$b_{ij} = 0$ si la rama j no pertenece al lazo i.

8.3 LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF Y CORRIENTES DE LAZO

Si en la gráfica de la figura 8.1, a los lazos fundamentales les asignamos corrientes de lazo y a éstas las relacionamos con las corrientes de rama, tenemos las expresiones siguientes:

$$I_{r1} = I_{\ell 1}$$

$$I_{r2} = I_{\ell 2}$$

$$I_{r3} = I_{\ell 3}$$

$$I_{r4} = -I_{\ell 1} - I_{\ell 2}$$

$$I_{r5} = -I_{\ell 1} + I_{\ell 3}$$

$$I_{r6} = -I_{\ell 2} - I_{\ell 3}$$

que escritas en forma matricial quedan:

$$\begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \\ I_{r5} \\ I_{r6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\ell 1} \\ I_{\ell 2} \\ I_{\ell 3} \end{bmatrix}$$

es decir

$$\mathbf{I_r = B^T I_\ell} \qquad (8.3)$$

Ley de corrientes de Kirchhoff en términos de la matriz de lazos

donde

$\mathbf{B}^T$ es la matriz transpuesta de lazos fundamentales.
$\mathbf{I}_\ell$ es el vector de corrientes de lazos fundamentales.
$\mathbf{I}_r$ es el vector de corrientes de rama.

La ecuación 8.3 relaciona las corrientes de lazo con las corrientes de rama.

Ejemplo 8.1
Para la gráfica de la figura 8.2a:

a. Construya un árbol.
b. Forme los lazos fundamentales.
c. Halle la matriz de lazos fundamentales.
d. Halle la matriz transpuesta de lazos fundamentales.
e. Establezca la ecuación que relaciona las corrrientes de lazo con las de rama.

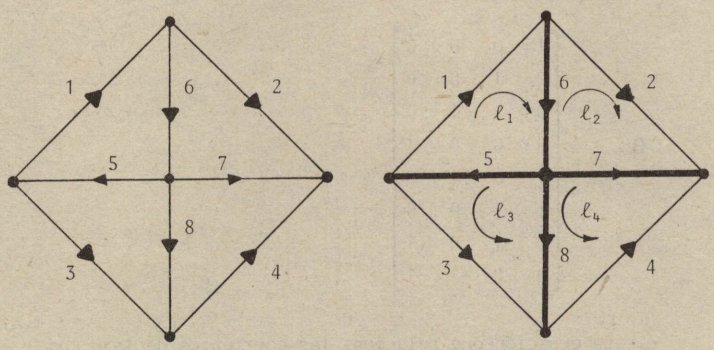


Figura 8.2

Solución

a. El árbol que se elige (figura 8.2b) debe contener:

$b = n - 1 = 5 - 1 = 4$ ramas

En este ejemplo se eligen las ramas 5, 6, 7 y 8.

b. Para la gráfica

$\ell = r - n + 1 = 8 - 5 + 1 = 4$ lazos fundamentales.

El lazo fundamental ℓ_1 está definido por las ramas 5 y 6 del árbol y por el eslabón 1. Observe que los cuatro lazos tienen definido su sentido de referencia por el eslabón que tiene cada lazo.

c. La matriz de lazos fundamentales que se obtiene de los lazos de la gráfica de acuerdo con las reglas dadas anteriormente es:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

d. La matriz transpuesta de lazos fundamentales se obtiene convirtiendo los renglones en columnas de la matriz original, y es:

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e. La ecuación que relaciona las corrientes de lazo con las corrientes de rama es:

$$\begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \\ I_{r5} \\ I_{r6} \\ I_{r7} \\ I_{r8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\ell 1} \\ I_{\ell 2} \\ I_{\ell 3} \\ I_{\ell 4} \end{bmatrix}$$

8.4 ECUACION MATRICIAL DE LAZOS FUNDAMENTALES

Las corrientes de lazos fundamentales son un conjunto de variables adecuadas que permite evaluar todos los voltajes y corrientes de rama de la red.

Combinando la ecuación (7.7) con las ecuaciones(8.2) y (8.3) y siguiendo un procedimiento semejante al utilizado en el método sistemático de análisis de mallas, se obtiene la ecuación matricial de lazos fundamentales:

$$\boxed{\mathbf{Z}_\ell \mathbf{I}_\ell = \mathbf{V}_\ell} \qquad (8.4)$$ Ecuación matricial de lazos fundamentales

donde

$$\boxed{\mathbf{Z}_\ell = \mathbf{B}\mathbf{Z}_r\mathbf{B}^T} \qquad (8.5)$$ Matriz de impedancias de lazos fundamentales

se conoce como *matriz de impedancias de lazos fundamentales* y

$$\boxed{\mathbf{V}_\ell = \mathbf{B}\mathbf{Z}_r\mathbf{I}_f - \mathbf{V}_f} \qquad (8.6)$$ Vector de fuentes de voltaje de lazos fundamentales

es el *vector de fuentes de voltaje de lazos fundamentales*, asimismo $\mathbf{I}_\ell$ es el *vector de corrientes de lazos fundamentales*.

Ejemplo 8.2
Obtenga la ecuación matricial de lazos del circuito representado en la figura 8.3a.

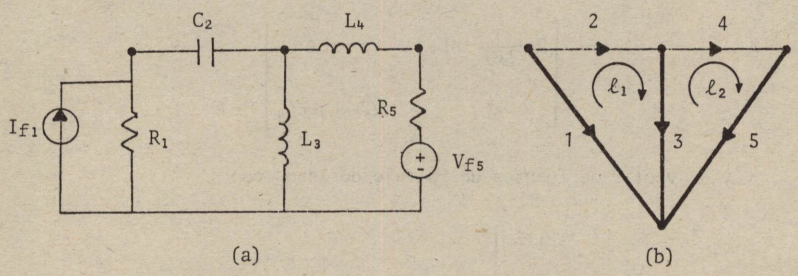


Figura 8.3

Solución

La gráfica del circuito se muestra en la figura 8.3b, en la cual se ha elegido el árbol formado por las ramas 1, 3 y 5. Los eslabones 2 y 4 (junto con las ramas del árbol) definen a los lazos ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente. Así, de estos lazos se obtiene la matriz:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las impedancias para los elementos capacitivo e inductivos del circuito, en función de la frecuencia compleja s son:

$$Z_{C_2} = \frac{1}{sC_2}$$

$$Z_{L_3} = sL_3$$

$$Z_{L_4} = sL_4$$

Entonces se establece la matriz de impedancias de rama:

$$\mathbf{Z}_r = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sC_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sL_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sL_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix}$$

La matriz de impedancias de lazos en función de s está dada por:

$$\mathbf{Z}_\ell = \begin{bmatrix} R_1+\frac{1}{sC_2}+sL_3 & -sL_3 \\ -sL_3 & R_5+sL_3+sL_4 \end{bmatrix}$$

y el vector de fuentes de voltaje de lazos es:

$$\mathbf{V}_\ell = \begin{bmatrix} -R_1 I_{f1} \\ -V_{f5} \end{bmatrix}$$

Consecuentemente la ecuación matricial de lazos del circuito es:

$$\begin{bmatrix} R_1+\frac{1}{sC_2}+sL_3 & -sL_3 \\ -sL_3 & R_5+sL_3+sL_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\ell 1} \\ I_{\ell 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 I_{f1} \\ -V_{f5} \end{bmatrix}$$

8.5 RELACION ENTRE EL METODO DE MALLAS Y EL METODO DE LAZOS

Anteriormente habíamos mencionado que la idea de malla es menos general que la de lazo[7]. Ahora podemos agregar que la malla está definida o es utilizada solamente en circuitos cuyas gráficas sean planas. Por otra parte el lazo se utiliza tanto en gráficas planas como en las que no son planas.

Ahora el objetivo es encontrar algunas semejanzas y diferencias entre el método de mallas y el de lazos. Para ese propósito se observan las ecuaciones matriciales de ambos métodos. Así, para el método de mallas se había obtenido la ecuación:

$$\mathbf{Z_m I_m = V_m}$$

y para el método de lazos:

$$\mathbf{Z_\ell I_\ell = V_\ell}$$

Para cada una de las ecuaciones anteriores se definen las respectivas matrices de impedancias de mallas y de lazos:

$$\mathbf{Z_m = M Z_r M^T} \quad \text{y} \quad \mathbf{Z_\ell = B Z_r B^T}$$

[7] Consulte el apartado 4.3.

En estas expresiones, $\mathbf{Z}_r$ es la misma matriz de impedancias de rama, puesto que se ha obtenido de la misma rama general con dos fuentes y una impedancia.

Analicemos ahora un ejemplo sencillo, utilizando los dos métodos mencionados para relacionarlos mejor.

Ejemplo 8.3
Halle las ecuaciones de mallas y de lazos para el circuito de la figura 8.4a.

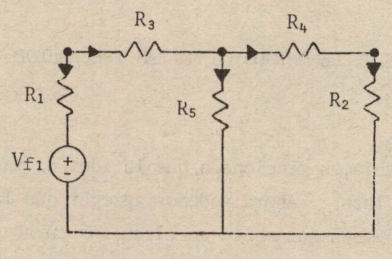


Figura 8.4a

Solución
De la gráfica (figura 8.4b) se obtiene la matriz de mallas:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

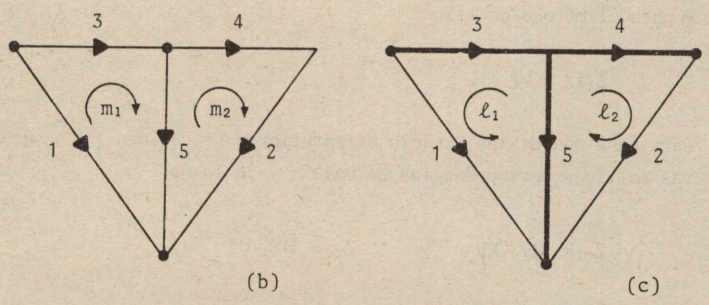


Figura 8.4

De la gráfica (figura 8.4c) en la que se ha elegido el árbol formado por las ramas 3, 4 y 5 se obtiene la matriz de lazos:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz de impedancias (resistencias) del circuito es:

$$\mathbf{Z}_r = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix}$$

Así, se obtiene la matriz de impedancias de mallas:

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{M}\mathbf{Z}_r\mathbf{M}^T$$

$$Z_m = \begin{bmatrix} R_1+R_3+R_5 & -R_5 \\ -R_5 & R_2+R_4+R_5 \end{bmatrix}$$

y la matriz de impedancias de lazos:

$$\mathbf{Z}_\ell = \mathbf{B}\mathbf{Z}_r\mathbf{B}^T$$

$$\mathbf{Z}_\ell = \begin{bmatrix} R_1+R_3+R_5 & +R_5 \\ +R_5 & R_2+R_4+R_5 \end{bmatrix}$$

Excepto por el signo negativo de los elementos R_5 que están arriba y abajo de la diagonal, las matrices de impedancias de mallas y de lazos son iguales.

Que los elementos situados arriba y abajo de la diagonal de la matriz de impedancias de malla $\mathbf{Z}_m$ tengan signo negativo, se debe a que las mallas m_1 y m_2 tienen el mismo sentido de referencia (sentido de las agujas del reloj).

El signo positivo de los elementos que no están en la diagonal de la matriz de impedancias de lazo $\mathbf{Z}_\ell$, se debe a que los lazos pueden no tener entre ellos el mismo sentido de referencia; esto depende del sentido de los eslabones que definen a los lazos.

Continuando con el ejemplo, se observa que los vectores de voltajes de mallas y de lazos son:

$$\mathbf{V}_m = \begin{bmatrix} V_{f1} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad y \qquad \mathbf{V}_\ell = \begin{bmatrix} -V_{f1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

El signo negativo de V_{f1} en el vector $\mathbf{V}_\ell$ se debe a que la malla m_1 y el lazo ℓ_1 tienen sentido opuesto entre sí en las gráficas de las figuras 8.4b y 8.4c. De aquí se puede deducir que las corrientes I_{m1} e $I_{\ell 1}$ van a ser iguales pero con signo contrario, y las corrientes I_{m2} e $I_{\ell 2}$ serán completamente iguales.

En consecuencia, las ecuaciones matriciales de mallas y de lazos para el circuito del ejemplo son respectivamente:

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3+R_5 & -R_5 \\ -R_5 & R_2+R_4+R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{f1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3+R_5 & +R_5 \\ +R_5 & R_2+R_4+R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\ell 1} \\ I_{\ell 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{f1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como las matrices de impedancias de mallas y de lazos son casi idénticas, las características que se habían mencionado en el apartado 7.4 respecto de la matriz de impedancias de mallas $\mathbf{Z}_m$, son válidas para la matriz de impedancias de lazos $\mathbf{Z}_\ell$. Además el método breve de análisis de mallas discutido en el módulo 7 puede utilizarse para obtener la matriz de impedancias de lazos, con la observación de que puede aparecer un signo positivo en vez de negativo en los elementos que no están en la diagonal.

En conclusión:

1. El método de análisis de lazos es más general que el método de mallas ya que puede ser utilizado tanto en redes planas como en redes no planas.

2. En el caso de redes planas la diferencia entre el método de mallas y el de lazos radica en que este último utiliza el concepto de árbol, formándose los lazos de acuerdo al sentido de referencia de cada eslabón. Por otro lado, en el método de mallas, simplemente se forman las mallas en la gráfica considerando a todas ellas con el mismo sentido de referencia, el de las manecillas del reloj.

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I Complete las afirmaciones siguientes indicando con una cruz en el paréntesis correspondiente, a aquella opción que la haga verdadera.

1. La matriz que se obtiene a partir de los lazos fundamentales se denomina:

   ( ) a. matriz de incidencia
   ( ) b. matriz de mallas
   ( ) c. matriz de mallas reducida
   ( ) d. matriz de lazos fundamentales

2. Las variables de las ecuaciones de lazos son:

   ( ) a. las corrientes de malla
   ( ) b. los voltajes de rama
   ( ) c. las corrientes de lazo
   ( ) d. los voltajes de lazo

3. La matriz que se obtiene del producto de las matrices de lazos, de impedancias de rama y la transpuesta de lazos es:

   ( ) a. matriz de impedancias de mallas
   ( ) b. matriz de impedancias de lazos
   ( ) c. matriz de impedancias de ramas
   ( ) d. matriz de impedancias reducida

4. Fuentes que debe tener la red para aplicarle el método sistemático de análisis por lazos:

   ( ) a. fuentes ideales de corriente
   ( ) b. fuentes ideales de voltaje
   ( ) c. fuentes reales de voltaje o de corriente
   ( ) d. fuentes ideales de voltaje o de corriente

5. Lo que determina el sentido de referencia de un lazo fundamental es:

( ) a. el sentido de la rama del árbol
( ) b. el sentido del eslabón
( ) c. el sentido de las manecillas del reloj
( ) d. el sentido contrario a las manecillas del reloj

II Resuelva los siguientes problemas y anote la o las soluciones en el espacio indicado.

1. Obtenga una matriz de lazos para el circuito no plano representado en la figura 8.5.

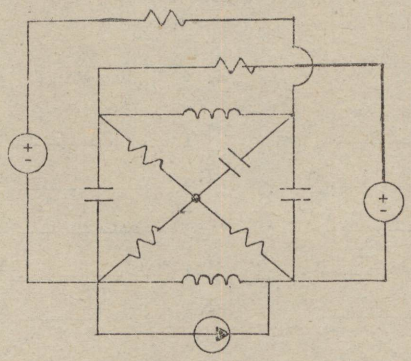


Figura 8.5

B =

2. Usando el método sistemático de lazos, obtenga los voltajes y corrientes de rama para el circuito representado en la figura 8.6.

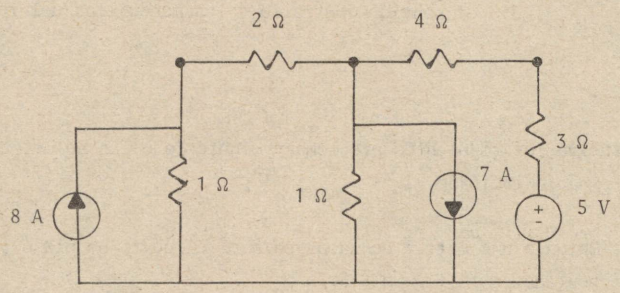


Figura 8.6

V_{r1} = _____ V I_{r1} = _____ A

V_{r2} = _____ V I_{r2} = _____ A

V_{r3} = _____ V I_{r3} = _____ A

V_{r4} = _____ V I_{r4} = _____ A

V_{r5} = _____ V I_{r5} = _____ A

3. Considerando la red de la figura 8.7:

   a. Determine la matriz de impedancias de lazo.
   b. Obtenga la ecuación matricial de lazos.
   c. Plantee la ecuación matricial de corrientes de rama.
   d. Plantee la ecuación matricial de voltajes de rama.

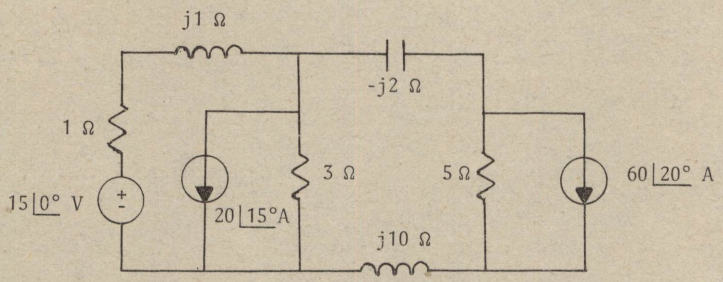


Figura 8.7

a.

b.

c.

d.

4. Obtenga la ecuación matricial de lazos del circuito de la figura 8.8. Considere las impedancias en función de la frecuencia compleja s.

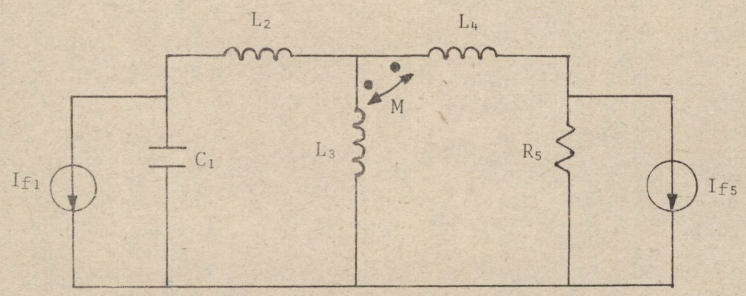
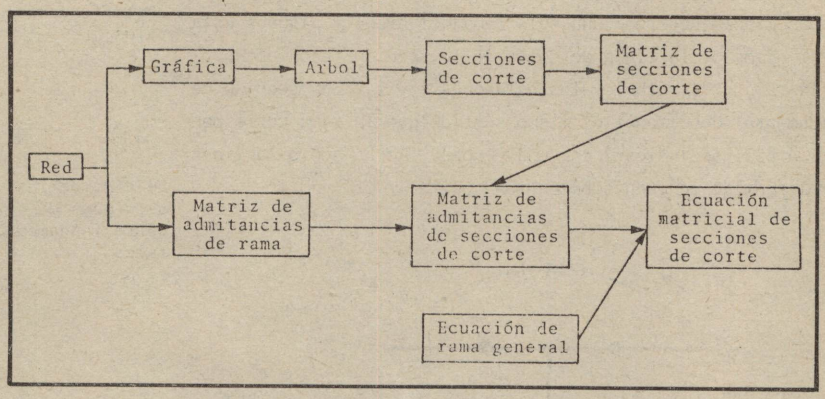


Figura 8.8.

5. Para el circuito del problema anterior, considerando nulas las inductancias mutuas, determine la ecuación matricial de lazos.

MODULO 9 METODO DE ANALISIS POR SECCIONES DE CORTE

CUADRO SINOPTICO



OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Obtendrá la matriz de secciones de corte fundamentales para una red dada.
2. Determinará la matriz de admitancias de secciones de corte fundamentales.
3. Determinará la ecuación matricial de secciones de corte fundamentales.

9.1 FORMACION DE SECCIONES DE CORTE FUNDAMENTALES

Secciones de corte fundamentales

En la gráfica de la figura 9.1 se ha elegido un árbol constituido por las ramas 4, 5 y 6. Una sección de corte fundamental se forma trazando una línea que cruce una sola rama del árbol y algunos eslabones. Por ejemplo, la línea de corte de la sección fundamental C_1 cruza la rama 4 del árbol y los eslabones 1 y 2. Una sección de corte fundamental debe tener el mismo sentido que la rama correspondiente del árbol, se indicará con una pequeña flecha sobre la línea de corte el sentido de cada sección fundamental.

Sentido de las secciones de corte fundamentales

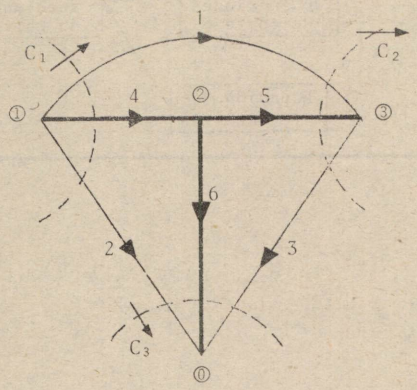


Figura 9.1 Gráfica con secciones de corte fundamentales C_1, C_2 y C_3.

Es importante observar que una sección de corte está formada por las ramas cruzadas por la línea de corte; por ejemplo, en la figura 9.1 las ramas 1, 3 y 5 constituyen la sección de corte fundamental C_2.

Si se quitan las ramas de una sección de corte la gráfica debe dividirse en dos partes separadas; por ejemplo, quitando las ramas de la sección de corte C_1 (figura 9.1), la gráfica debe dividirse en una parte formada por el nodo ① y en otra parte formada por las ramas 3, 5 y 6, y los nodos ⓪ , ② y ③.

Para una gráfica de n nodos el número de secciones de corte fundamentales está dado por:

$$c = n - 1$$

9.2 MATRIZ DE SECCIONES DE CORTE FUNDAMENTALES

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff a cada sección de corte fundamental de la figura 9.1 y considerando que las corrientes de rama son positivas cuando tienen el mismo sentido que la sección de corte y negativas en caso contrario, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Para la sección } C_1: & I_1 + I_2 + I_4 = 0 \\ \text{Para la sección } C_2: & I_1 - I_3 + I_5 = 0 \\ \text{Para la sección } C_3: & I_2 + I_3 + I_6 = 0 \end{array}\right\} \qquad (9.1)$$

Es fácil mostrar que el sistema de ecuaciones (9.1) es linealmente independiente y ya en forma general se puede afirmar que:

> Las $n-1$ ecuaciones con incógnitas $I_1, I_2, \ldots I_r$ obtenidas al aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff a cada una de las secciones fundamentales de la gráfica de una red forman un conjunto de ecuaciones linealmente independientes.

El sistema de ecuaciones (9.1) se puede expresar en la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o sea

$$\mathbf{Q}\mathbf{I}_r = 0$$

Matriz de secciones de corte fundamentales

donde

$\mathbf{Q}$ es la matriz de secciones de corte fundamentales.

Los elementos de la matriz $\mathbf{Q}$ pueden obtenerse mediante las siguientes reglas:

$q_{ij} = 1$	Si la rama j pertenece a la sección de corte fundamental i y ambas tienen el mismo sentido
$q_{ij} = -1$	Si la rama j pertenece a la sección de corte fundamental i pero el sentido es opuesto entre las dos.
$q_{ij} = 0$	Si la rama j no pertenece a la sección de corte fundamental i

9.3 LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF Y VOLTAJES DE RAMAS DE ARBOL

Si en la gráfica de la figura 9.1 se relacionan los voltajes de rama que incluyen eslabones y ramas de árbol V_{r1}, ... , V_{r6} con los voltajes de las ramas de árbol V_{b4}, V_{b5} y V_{b6} se obtendrá lo siguiente:

$$\begin{aligned}
V_{r1} &= V_{b4} + V_{b5} \\
V_{r2} &= V_{b4} + V_{b6} \\
V_{r3} &= -V_{b5} + V_{b6} \\
V_{r4} &= V_{b4} \\
V_{r5} &= V_{b5} \\
V_{r6} &= V_{b6}
\end{aligned}$$

Estas relaciones, escritas en forma matricial, son:

$$\begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \\ V_{r5} \\ V_{r6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{b4} \\ V_{b5} \\ V_{b6} \end{bmatrix}$$

o sea

$$\mathbf{V_r} = \mathbf{Q}^T \mathbf{V_b} \qquad (9.3)$$

Ley de voltajes de Kirchhoff en términos de la matriz de secciones de corte

donde

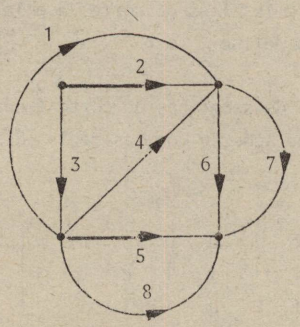
$\mathbf{V_b}$ es el *vector de voltajes de ramas del árbol*, de dimensión n - 1 (número de nodos menos uno).

$\mathbf{Q}^T$ es la *matriz transpuesta de secciones de corte fundamentales*.

Ejemplo 9.1

De la gráfica de la figura 9.2a:

a. Construya un árbol.
b. Establezca las secciones de corte fundamentales.
c. Obtenga la matriz de secciones de corte fundamentales.
d. Halle la matriz transpuesta de secciones de corte fundamentales.



2a

Solución

a. El número de ramas del árbol es:

$n - 1 = 4 - 1 = 3$ ramas

El árbol elegido (figura 9.2 b) está formado por las ramas 2, 4 y 6,

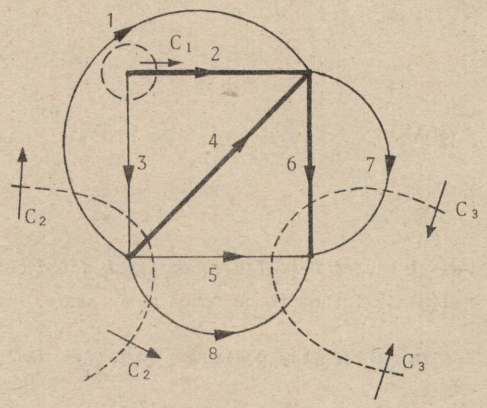


Figura 9.2b

b. Las secciones de corte fundamentales que se forman para cada rama del árbol están indicadas (figura 9.2b) como C_1, C_2 y C_3. Observe que cada sección de corte tiene el mismo sentido de referencia (indicado por flechas sobre la línea de corte) que la rama correspondiente que la define.

c. La matriz de secciones de corte fundamentales que se obtiene de acuerdo con las reglas descritas antes es:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d. La matriz transpuesta es:

$$Q^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9.4 ECUACION MATRICIAL DE SECCION DE CORTE FUNDAMENTALES

Los voltajes de las ramas del árbol son ahora variables de la red. Se deberá encontrar una ecuación matricial para poder calcular esos voltajes.

Así, combinando la ecuación (6.5) de la rama general del apartado 6.3, con las ecuaciones (9.2) y (9.3) de este módulo, y siguiendo un procedimiento semejante al utilizado para obtener la ecuación matricial de nodos, se obtendrá la siguiente ecuación matricial de secciones de corte fundamentales:

$$\boxed{Y_c V_b = I_c} \qquad (9.4)$$

Ecuación matricial de secciones de corte

donde

$$\boxed{Y_c = Q Y_r Q^T} \qquad (9.5)$$

es la *matriz de admitancias de secciones de corte fundamentales*, y

Matriz de admitancias de secciones de corte

V_b es el *vector de voltajes de ramas del árbol.*

Por otra parte

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{Q}\mathbf{Y}_r\mathbf{V}_f \quad \mathbf{Q}\mathbf{I}_f \tag{9.6}$$

Vector de fuentes de corriente de secciones de corte

es el *vector de fuentes de corriente de secciones de corte*, cuyas componentes representan la suma de las fuentes de corriente en cada sección de corte fundamental.

En la ecuación (9.4) $\mathbf{V}_b$ es el vector desconocido ya que tanto $\mathbf{Y}_c$ como $\mathbf{I}_c$ se obtienen de los valores de los elementos de la red.

Ejemplo 9.2

Determine la ecuación matricial de secciones de corte fundamentales para el circuito de la figura 9.3a que opera en estado senoidal permanente a frecuencia angular ω.

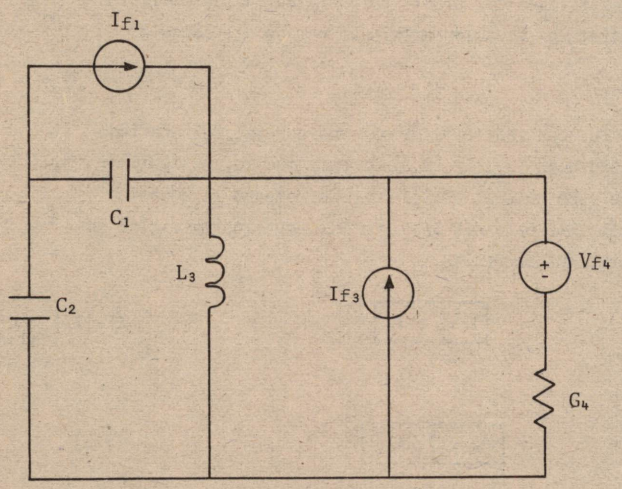


Figura 9.3a

Solución

Primero se realiza la gráfica del circuito que se muestra en la figura 9.3b, y se elige el árbol que contiene las ramas 2 y 3.

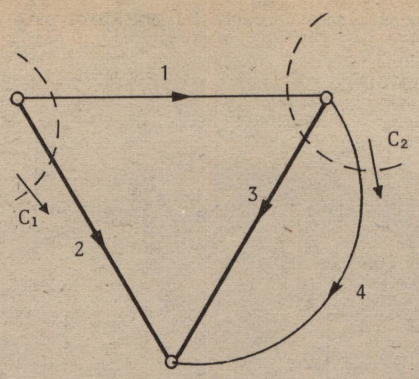


Figura 9.3b

Luego se forman las secciones de corte fundamentales para las ramas del árbol, como se indica en la figura 9.3b. Para estas secciones de corte se escribe la matriz:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las admitancias para los elementos capacitivos e inductivos del circuito son:

$$Y_{C1} = j\omega C_1$$

$$Y_{C2} = j\omega C_2$$

$$Y_{L3} = \frac{1}{j\omega L_3}$$

Por tanto, la matriz de admitancias de rama es:

$$Y_r = \begin{bmatrix} j\omega C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega L_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix}$$

y la matriz de secciones de corte fundamentales está dada por:

$$\mathbf{Y}_c = \mathbf{Q}\mathbf{Y}_r\mathbf{Q}^T$$

$$\mathbf{Y}_c = \begin{bmatrix} j\omega C_1 + j\omega C_2 & -j\omega C_1 \\ -j\omega C_1 & j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_3} + G_4 \end{bmatrix}$$

Los vectores de fuentes son:

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} I_{f_1} \\ 0 \\ -I_{f_3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_{f_4} \end{bmatrix}$$

De esta forma el vector de fuentes de corriente de secciones de corte es:

$$\mathbf{I}_c = \begin{bmatrix} -I_{f_1} \\ G_4V_{f_4} + I_{f_1} + I_{f_3} \end{bmatrix}$$

Finalmente se obtiene la ecuación matricial de secciones de corte fundamentales:

$$\begin{bmatrix} j\omega C_1 + j\omega C_2 & -j\omega C_1 \\ -j\omega C_1 & j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_3} + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{b1} \\ V_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{f_1} \\ G_4V_{f_4} + I_{f_1} + I_{f_3} \end{bmatrix}$$

Observe en este ejemplo que:

1. La matriz de admitancias de secciones de corte $\mathbf{Y}_c$ es simétrica porque el circuito no tiene elementos de acoplamiento.

2. La matriz $\mathbf{Y}_r$ de admitancias de rama es diagonal por la misma razón.

3. La matriz de admitancias de secciones de corte tiene dimensiones $(n - 1) \times (n - 1)$.

4. El vector V_b de voltajes de ramas del árbol es de dimensión $n - 1$.

9.5 RELACION ENTRE EL METODO DE NODOS Y EL METODO DE SECCIONES DE CORTE

El método de secciones de corte fundamentales es una variación del método de nodos visto en el módulo 6 de esta unidad, ya que ambos métodos coinciden cuando las secciones de corte fundamentales contienen a cada uno de los nodos de la gráfica.

Veamos esto con un ejemplo; consideremos la gráfica de la figura 9.4a, en la cual está indicado el nodo de referencia ⓪ y los nodos ① , ② y ③ . Para estos nodos la matriz de indicencia es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

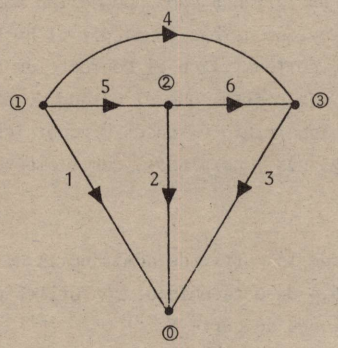


Figura 9.4a

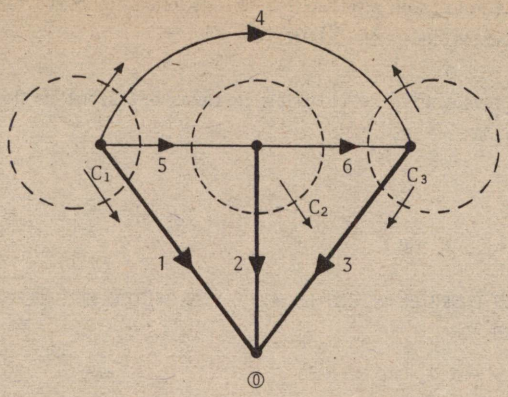


Figura 9.4 b

En la figura 9.4b se observa la misma gráfica con secciones de corte fundamentales para cada rama del árbol. De esta gráfica se obtiene la matriz de secciones de corte:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz $\mathbf{Q}$ es igual a la matriz $\mathbf{A}$ los métodos de nodos y de secciones de corte coinciden. En realidad esto sucede cuando cada una de las secciones de corte fundamentales, consideradas como superficies cerradas, encierran a cada uno de los nodos, exceptuando al de referencia. Hay que agregar que, por el hecho de que el método de secciones de corte utilice el concepto de árbol, se considera más flexible o más general que el método de nodos. Pero, en realidad, ambos son igualmente eficaces y generales dado que son aplicables a redes planas y no planas, con elementos de acoplamiento.

Las características de la matriz de admitancias de nodos $\mathbf{Y}_n$, señaladas en el apartado 6.4 de esta unidad, son útiles para la matriz de admitancias de secciones de corte $\mathbf{Y}_c$.

El método breve de análisis por nodos también es útil para obtener las ecuaciones de secciones de corte fundamentales. Hay que obser

var que los elementos que no están en la diagonal de la matriz de admitancias de secciones de corte, podrían tener signo diferente a los elementos obtenidos por el método breve.

9.6 COMENTARIOS SOBRE LOS METODOS SISTEMATICOS DE ANALISIS DE REDES

El análisis de una red concluye cuando, teniéndose como datos los valores de los elementos del circuito, se determinan todos los voltajes y corrientes de rama de esa red. Hemos considerado cuatro métodos (de nodos, mallas, lazos y secciones de corte) para llevar a cabo el análisis de una red. Cabe destacar que los desarrollos matriciales de estos métodos han sido enfocados para ser utilizados en computadora digital; de hecho, hay subrutinas disponibles para invertir o multiplicar matrices rápidamente, lo cual ofrece grandes ventajas ya que en la práctica las redes son grandes y complejas y, como consecuencia, las matrices también lo son[7].

Criterios para la elección del método a usar, al analizar redes eléctricas

La elección de uno de los cuatro métodos para analizar un circuito depende de varios factores, entre ellos el número y el tipo de fuentes, el número de nodos y el número de ramas. Por otro lado se vio que los métodos de nodos y de secciones de corte tienen $n - 1$ variables, los voltajes de nodos y de rama de árbol, respectivamente. Los métodos de mallas y de lazos tienen $r - n + 1$ variables, es decir las corrientes de malla y de lazo respectivamente.

Así, en una red plana con menos nodos que mallas y que contenga solamente fuentes de corriente, habrá menos voltajes de nodos y, por lo tanto, menos variables en las ecuaciones de nodos. Consecuentemente, el método que resulta más conveniente emplear es el de nodos. La elección de un método para analizar un circuito se facilita más con

[7] En el apéndice B se presentan varios programas en lenguaje BASIC para el análisis de redes eléctricas, que aplican los métodos tratados en esta unidad.

la expereiencia y el dominio que se tenga de los cuatro métodos sistemáticos.

Es pertinente aclarar que el método de mallas es utilizado solamente para analizar redes planas, mientras que los otros tres métodos se pueden emplear incluso para redes no planas.

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I. A continuación aparece un grupo de afirmaciones. Indique si éstas son verdaderas o falsas, colocando en el espacio correspondiente una V si es verdadera y una F si es falsa.

1. Una sección de corte fundamental se forma específicamente para cada rama del árbol. _____

2. Una característica propia de una sección de corte es que al quitar las ramas de ésta, la gráfica se separa en tres partes. _____

3. Cuando un circuito contiene elementos de acoplamiento, la matriz de admitancias de rama Y_r es diagonal. _____

4. El método de secciones fundamentales de corte se aplica tanto a redes planas como a redes no planas. _____

5. De los cuatro métodos sistemáticos de análisis de redes, el único que está restringido a redes planas es el método de mallas. _____

6. Los cuatro métodos sistemáticos de análisis de redes considerados en esta unidad fueron concebidos para aplicarse en computadora. _____

7. Si se nos da una red que tenga más lazos que secciones de corte fundamentales el método adecuado para analizar esa red es el método de lazos. _____

II. Resuelva los siguientes problemas anotando la o las soluciones en el espacio indicado.

1. Para el circuito de la figura 9.5:

   a. Obtenga la ecuación matricial de secciones fundamentales de corte.
   b. Establezca la ecuación matricial de corrientes de rama.
   c. Establezca la ecuación matricial de voltajes de rama.

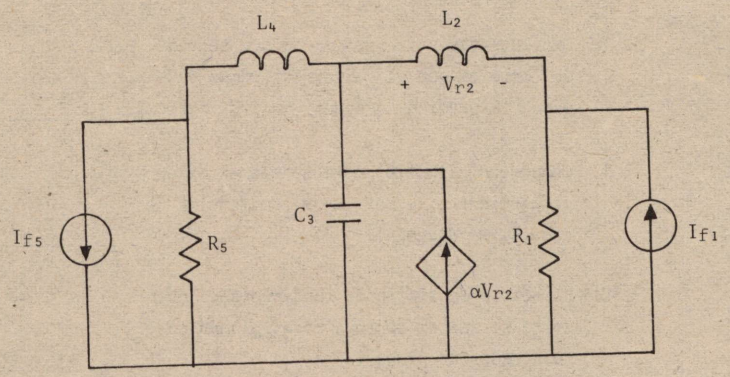


Figura 9.5

a.

b.

c.

2. Obtenga la ecuación matricial de secciones fundamentales de corte para el circuito representado en la figura 9.6.

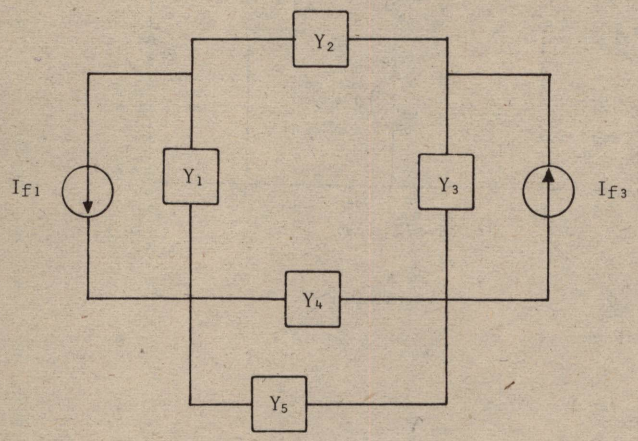


Figura 9.6

3. Utilizando el método sistemático de secciones fundamentales de corte, determine los voltajes y corrientes de rama del circuito representado en la figura 9.7.

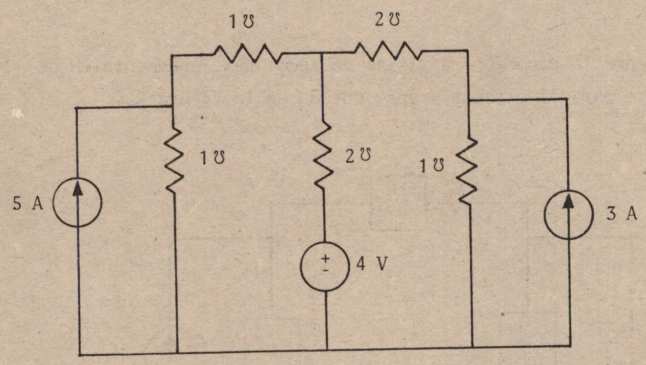


Figura 9.7

V_{r1} = _____ V I_{r1} = _____ A

V_{r2} = _____ V I_{r2} = _____ A

V_{r3} = _____ V I_{r3} = _____ A

V_{r4} = _____ V I_{r4} = _____ A

V_{r5} = _____ V I_{r5} = _____ A

4. Para el circuito de la figura 9.8, en estado senoidal permanente, determine la ecuación matricial de secciones fundamentales de corte.

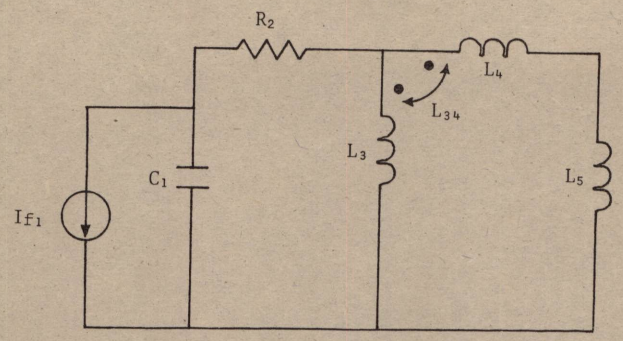


Figura 9.8

5. Determine la ecuación matricial de secciones fundamentales de corte para el circuito del problema anterior, considerando nulas las inductancias mutuas.

BIBLIOGRAFIA BASICA

1) DESOER, CHARLES A.; KUH, ERNEST S. *Basic Circuit Theory*. McGraw-Hill. Nueva York, 1969.

2) GEREZ GREIZER, VICTOR. *Circuitos y sistemas electromecánicos*. Tomo I. Representaciones y Servicios de Ingeniería. México, 1974.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

3) CHAN, S. P.; CHAN, S. Y.; CHAN, S. G. *Analysis of Linear Networks and Systems*. Addison Wesley, Massachusetts, 1972.

4) ELGERD, OLLIE. *Electric Energy System Theory: and Introduction*. McGraw-Hill. Nueva York, 1971.

5) HAYT, WILLIAM H.; KEMMERLY, JACK E. *Análisis de circuitos en Ingeniería*. McGraw-Hill. México, 1980.

SOLUCIONES AL CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

MODULO 1

I a. Impedancia
b. Respuesta forzada
c. Admitancia
d. Fasor

II $j\omega Re[\mathbf{I}e^{j\omega t}]$

III (b), es falsa porque no es el inverso de la impedancia.

IV 1. $i_L(t) = -0.14e^{-0.11t} + 1.27e^{-3.89t} - 0.135\cos t - 0.98\,\text{sen}\,t$ A

2. $\mathbf{V} = 580\angle -20°$ V

$\mathbf{I} = 38\angle -65°$ A

$\mathbf{E} = 12\angle -20°$ V

3. $v(t) = 20\cos(\omega t - \pi/2)$ V

$i_1(t) = 123\cos(\omega t + \phi)$ A

$i_2(t) = -34\cos(\omega t - \pi/2)$ A

4a. $i_L(t) = -0.135\cos t - 0.98\,\text{sen}\,t$ A

b. sí, son iguales

5a. $Z_{ab} = 1 - j4.81\ \Omega$

b. $Z_{ab} = 14.06 + j17.63\ \Omega$

6. $i_1(t) = -0.86\cos(t - 77.63°)$ A

$i_2(t) = 0.51\cos(t - 92°)$ A

7. $i_1(t) = 0.98\cos(t - 3.5°)$ A

$i_2(t) = 0.1\cos(t - 101.5°)$ A

$v_C(t) = 1.14\cos(t - 87.5)$ V

MODULO 2

I. a. Potencia aparente

b. Potencia promedio

c. Potencia instantánea

d. Potencia reactiva

II 1a. FP = 0.70 adelantado

b. FP = 0.90 atrasado

c. FP = 0.98 atrasado

2. $Z = 2.76\angle 7°\ \Omega$

3. $P = 54\ W$; $p(t) = 54 + 90\cos(2500t + 53°)\ W$

4. $S_T = 11.47\ KVA$

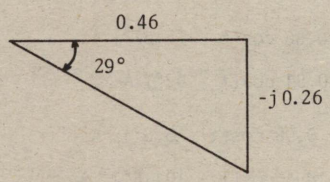
5. $P = 13\ W$

$Q = 65\ VAR$

$S = 66.28\ VA$

6. FP = 0.52 adelantado

7. $P_T = 0.46\ kW$



Triángulo de potencias

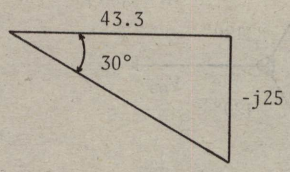
8a. P_L = 11.34 kW

b. P_T = 31.84 kW

c. Q = 14.92 kVAR

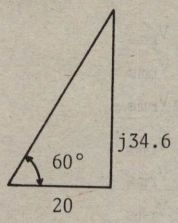
d. P_T = 26.2 kW

9a.



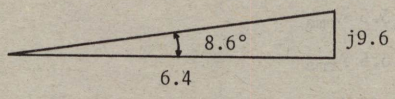
Triángulo de potencias

b.



Triángulo de potencias

c.



Triángulo de potencias

10a. Q = 205 VAR

b. C = 136 μF

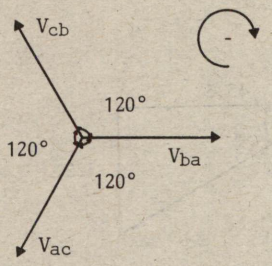
11. Q = 343 kVAR

12a. Q = 53.13 kVAR

b. P = 25 kW

MODULO 3

I



II 1a. $\mathbf{V}_{an} = 230\angle 0°\ V_{rms}$

$\mathbf{V}_{bn} = 230\angle -120°\ V_{rms}$

$\mathbf{V}_{cn} = 230\angle -240°\ V_{rms}$

b. $\mathbf{V}_{ab} = 398\angle 30°\ V_{rms}$

$\mathbf{V}_{bc} = 398\angle -90°\ V_{rms}$

$\mathbf{V}_{ca} = 398\angle -210°\ V_{rms}$

2a. $P_a = 3.85$ kW

b. $P_m = 2.30$ kW

c. $P_f = 2.05$ kW

3a. $|\mathbf{I}_1| = 3.5\ A_{rms}$

b. $|\mathbf{I}_2| = 6.5\ A_{rms}$

c. $|\mathbf{I}| = 10\ A_{rms}$

4a. $P_d = 9.65$ kW

b. $P_e = 4.82$ kW

c. $P_c = 1.34$ kW

5. $C = 200\ \mu F$

6a. $\mathbf{I}_L = 32.3\angle -27.8°\ A_{rms}$

b. $P_c = 9.36$ kW

c. $P_\ell = 0.52$ kW

7. $C = 50\ \mu F$

8a. $\mathbf{I}_L = 16\angle 4°\ A_{rms}$

b. $P_e = 2.21\ kW$

c. $P_d = 3.87\ kW$

d. $FP = 0.9$

9a. $\mathbf{I}_{aA} = 90.9\angle -26.5°\ A_{rms}$

b. $\mathbf{I}_{bB} = 20\angle -180°\ A_{rms}$

c. $\mathbf{I}_{cC} = 11.1\angle -296.3°\ A_{rms}$

d. $\mathbf{I}_{nN} = 109\angle 89.4°\ A_{rms}$

10a. $\mathbf{I}_{aA} = 96.8\angle 76°\ A_{rms}$

$\mathbf{I}_{bB} = 117.8\angle -78°\ A_{rms}$

$\mathbf{I}_{cC} = 49\angle 154°\ A_{rms}$

b. $P_{c1} = 11.22\ kW$

$P_{c2} = 23.85\ kW$

$P_{c3} = 24.28\ kW$

c. $P_{F1} = 28.19\ kW$

$P_{F2} = 23.64\ kW$

$P_{F3} = 8.22\ kW$

MODULO 4

I 1. V

2. F

3. V

4. V

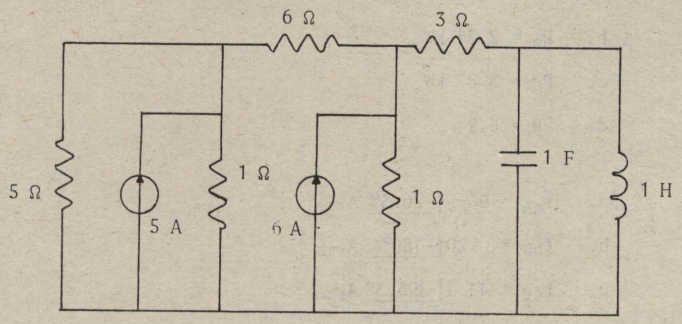
5. F

6. V

7. F

II 1. $I_{f1} = 5\ A$

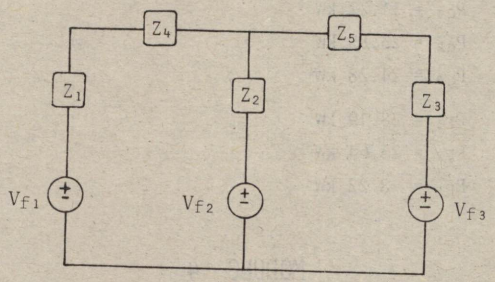
$I_{f2} = 6\ A$



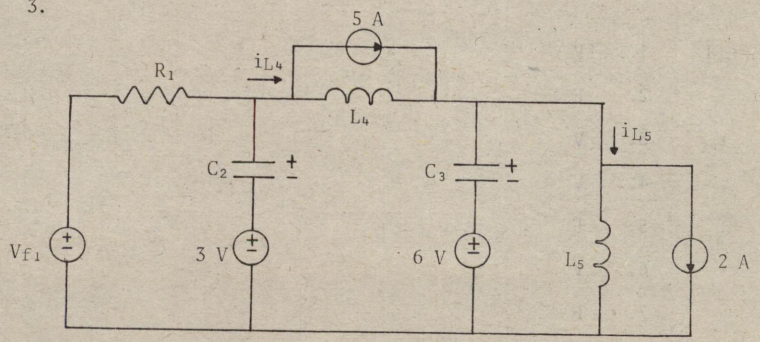
2. $V_{f1} = Y_1 I_{f1}$ $\quad Z_1 = \frac{1}{Y_1}$ $\quad Z_4 = \frac{1}{Y_4}$

$V_{f2} = Y_2 I_{f2}$ $\quad Z_2 = \frac{1}{Y_2}$ $\quad Z_5 = \frac{1}{Y_5}$

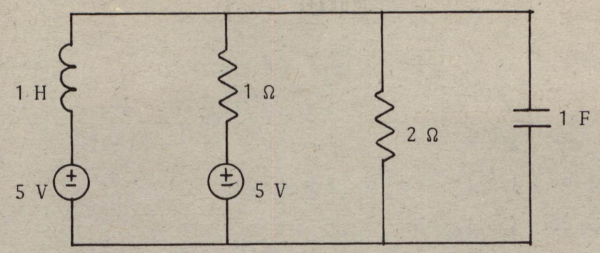
$V_{f3} = Y_3 I_{f3}$ $\quad Z_3 = \frac{1}{Y_3}$



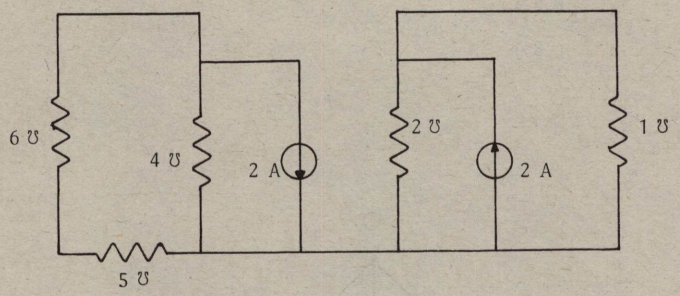
3.



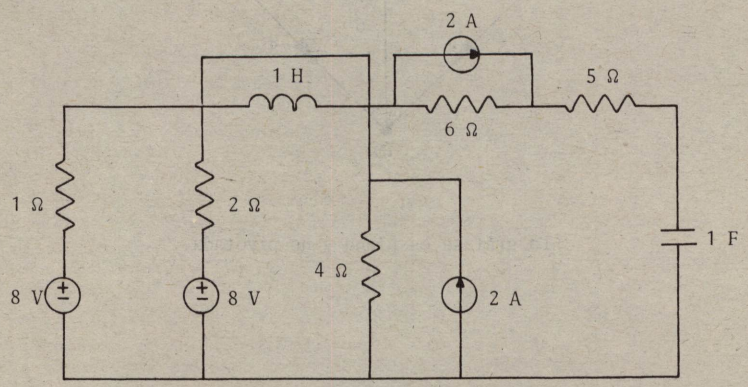
4.



5.



6.



MODULO 5

I a. (6)

b. (5)

c. (4)

d. (1)

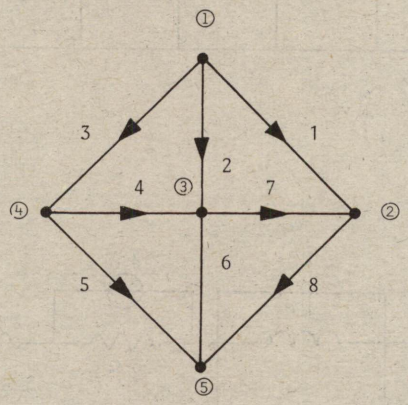
e. (7)

f. (3)

g. (2)

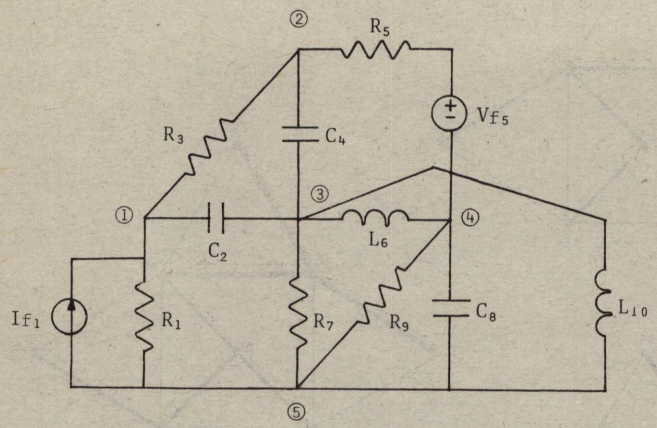
h. (8)

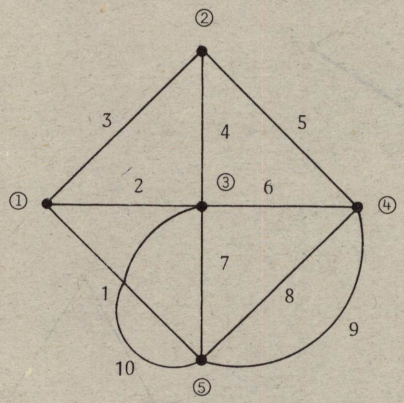
II 1.



La gráfica es plana y no pivotada.

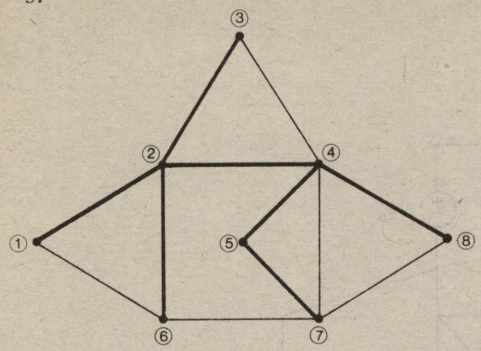
2.

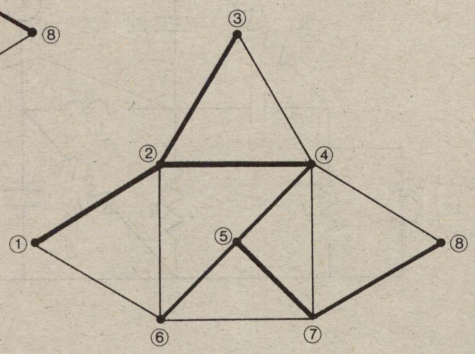


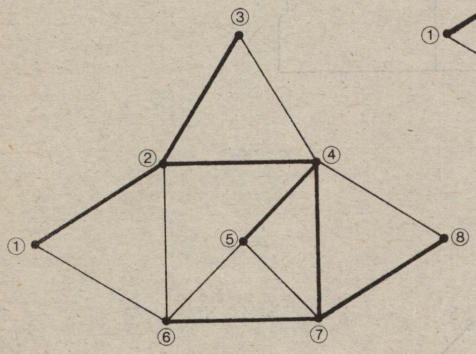


La gráfica no es plana y no es pivotada.

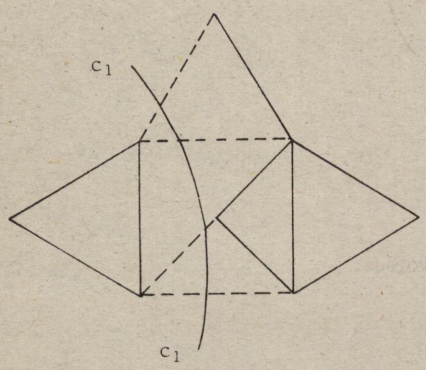
3.

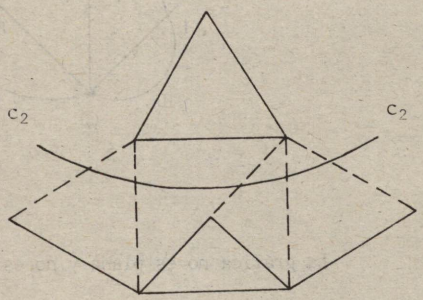






4.





MODULO 6

I 1. $V_{r1} = 0.6$ V
$V_{r2} = 0.05$ V
$V_{r3} = 0.56$ V
$V_{r4} = 2.1$ V
$V_{r5} = -1.53$ V

$I_{r1} = -3.6$ A
$I_{r2} = 0.1$ A
$I_{r3} = 2.24$ A
$I_{r4} = 6.3$ A
$I_{r5} = 4.47$ A

2a.
$$\begin{bmatrix} 1 - j7 & j7 \\ 5 + j7 & -j15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \angle 30° \\ 0 \end{bmatrix}$$

b.
$$\begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \end{bmatrix}$$

c.
$$\begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -j8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \angle 30° \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.
$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & - Y_3 & 0 \\ -(\alpha + Y_3) & \alpha + Y_2 + Y_3 + Y_4 & - Y_4 \\ \beta & - Y_4 & Y_4 + Y_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - I_{f1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4a.

$$\begin{bmatrix} G_1 + \frac{1}{j\omega_o L_2} + \frac{1}{j\omega_o L_3} + \frac{1}{j\omega_o L_{23}} + \frac{1}{j\omega_o L_{32}} + j\omega_o C_4 & -j\omega_o C_4 \\ -j\omega_o C_4 & G_5 + j\omega_o C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 V_{f1} \\ I_{f5} \end{bmatrix}$$

b.

$$\begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \\ V_{r5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \end{bmatrix}$$

c.

$$\begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \\ I_{r5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j\omega_o L_2} & \frac{1}{j\omega_o L_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j\omega_o L_{32}} & \frac{1}{j\omega_o L_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega_o C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \\ V_{r5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_{f5} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j\omega_o L_2} & \frac{1}{j\omega_o L_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j\omega_o L_{32}} & \frac{1}{j\omega_o L_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega_o C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{f1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.

$$\begin{bmatrix} G_1 + \frac{1}{j\omega_o L_2} + \frac{1}{j\omega_o L_3} + j\omega_o C_4 & -j\omega_o C_4 \\ -j\omega_o C_4 & G_5 + j\omega_o C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 V_{f1} \\ I_{f5} \end{bmatrix}$$

6. $$\begin{bmatrix} 1 + 4D + \frac{1}{2D} & -4D \\ -4D & 1 + 4D + \frac{1}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -0 \end{bmatrix}$$

MODULO 7

I 1.

$V_{r1} = -3.55$ V $I_{r1} = 1.45$ A
$V_{r2} = -7.25$ V $I_{r2} = -1.45$ A
$V_{r3} = 1.74$ V $I_{r3} = -2.13$ A
$V_{r4} = 2.04$ V $I_{r4} = 0.68$ A
$V_{r5} = -2.94$ V $I_{r5} = -1.47$ A
$V_{r6} = 2.15$ V $I_{r6} = 2.15$ A
$V_{r7} = -7.85$ V $I_{r7} = 2.15$ A

2a. $$\begin{bmatrix} 3 + j5 & j30 & -j35 \\ 0 & 2 - j1 & j1 \\ -j5 & j1 & 1 + j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 80\angle 15° \\ -11\angle 30° \end{bmatrix}$$

b. $$\begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \\ I_{r5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix}$$

c.

$$\begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \\ V_{r5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -80\angle 15° \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & j30 & 0 \\ 0 & j5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \\ I_{r5} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & j30 & 0 & 0 \\ 0 & j5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -11\angle 30° \end{bmatrix}$$

3.
$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 & - Z_3 & 0 \\ - Z_3 & Z_3 + Z_4 + Z_5 & - Z_5 \\ \beta & - Z_5 & Z_5 + Z_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{f1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4a.
$$\begin{bmatrix} R_1+j\omega_o L_3 & j\omega_o L_2\alpha R_1 - j\omega_o L_3 + j\omega_o L_{34} \\ -j\omega_o L_3 + j\omega_o L_{43} & j\omega_o L_2 + j\omega_o L_3 - j\omega_o L_{43} + j\omega_o L_4 - j\omega_o L_{34} \\ -j\omega_o L_{43} & j\omega_o L_{43} - j\omega_o L_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -j\omega_o L_{34} \\ j\omega_o L_4 - j\omega_o L_{34} \\ j\omega_o L_4 + \dfrac{1}{j\omega_o C_5} + R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_6 I_{f6} \end{bmatrix}$$

b.
$$\begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \\ I_{r5} \\ I_{r6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix}$$

c.

$$\begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \\ V_{r5} \\ V_{r6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & j\omega_o L_2 \alpha R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega_o L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega_o L_3 & j\omega_o L_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega_o L_{43} & j\omega_o L_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega_o C_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \\ I_{r5} \\ I_{r6} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} R_1 & j\omega_o L_2 \alpha R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega_o L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega_o L_3 & j\omega_o L_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega_o L_{43} & j\omega_o L_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega_o C_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_{f6} \end{bmatrix}$$

5.

$$\begin{bmatrix} R_1+j\omega_o L_3 & j\omega_o L_2 \alpha R_1 - j\omega_o L_3 & 0 \\ -j\omega_o L_3 & j\omega_o L_2 + j\omega_o L_3 + j\omega_o L_4 & -j\omega_o L_4 \\ 0 & -j\omega_o L_4 & R_6 + j\omega_o L_4 + \frac{1}{j\omega_o C_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_6 I_{f6} \end{bmatrix}$$

6.

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{DC_2} & -\frac{1}{DC_2} \\ -\frac{1}{DC_2} & \frac{1}{DC_1} + \frac{1}{DC_2} + DL_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_f \\ -V_0 \end{bmatrix}$$

MODULO 8

I 1. (x) d

2. (x) c

3. (x) b

4. (x) c

5. (x) b

II 1.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.

$V_{r1} = -12.25$ V $\quad I_{r1} = -4.25$ A

$V_{r2} = 8.5$ V $\quad I_{r2} = 4.25$ A

$V_{r3} = 0.71$ V $\quad I_{r3} = 6.29$ A

$V_{r4} = -8.12$ V $\quad I_{r4} = -2.03$ A

$V_{r5} = -3.12$ V $\quad I_{r5} = -2.03$ A

3a.

$$Z_\ell = \begin{bmatrix} 4 + j1 & -3 \\ -3 & 8 - j2 \end{bmatrix}$$

b.

$$\begin{bmatrix} 4 + j1 & -3 \\ -3 & 8 - j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\ell 1} \\ I_{\ell 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.66 \angle 19.86° \\ 300 \angle 20° \end{bmatrix}$$

c.

$$\begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \\ I_{r5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\ell 1} \\ I_{\ell 2} \end{bmatrix}$$

d.

$$\begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \\ V_{r5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \\ I_{r5} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20\angle 15° \\ 0 \\ 60\angle 20° \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} sL_2+sL_3+\dfrac{1}{sC_1} & sL_{43}-sL_3 \\ sL_{34}-sL_3 & sL_3-sL_{34}+sL_4-sL_{43}+R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\ell 1} \\ I_{\ell 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{I_{f1}}{sC_1} \\ R_5 I_{f5} \end{bmatrix}$$

5.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{sC_1}+sL_2+sL_3 & -sL_3 \\ -sL_3 & sL_3+sL_4+R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\ell 1} \\ I_{\ell 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{I_{f1}}{sC_1} \\ R_5 I_{f5} \end{bmatrix}$$

MODULO 9

I 1. V

2. F

3. F.

4. V

5. V

6. V

7. F.

II. 1a.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{sL_4}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{sL_4} & 0 \\ -\frac{1}{sL_4} & \frac{1}{sL_2}-\alpha+sC_3+\frac{1}{sL_4} & \alpha-\frac{1}{sL_2} \\ 0 & -\frac{1}{sL_2} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{sL_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{b5} \\ V_{b3} \\ V_{b1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{f5} \\ 0 \\ I_{f1} \end{bmatrix}$$

b.

$$\begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \\ I_{r5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sL_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & sC_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sL_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \\ V_{r5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I_{f1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{f5} \end{bmatrix}$$

c.

$$\begin{bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \\ V_{r5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{b1} \\ V_{b2} \\ V_{b5} \end{bmatrix}$$

2.
$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & Y_3 & Y_3 \\ Y_3 & Y_2 + Y_3 & Y_3 \\ Y_3 & Y_3 & Y_3 + Y_4 + Y_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{b1} \\ V_{b2} \\ V_{b5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{f1} + I_{f3} \\ I_{f3} \\ I_{f3} \end{bmatrix}$$

3.

$V_{r1} = -4.04$ V	$I_{r1} = 0.96$ A
$V_{r2} = -8.19$ V	$I_{r2} = -8.19$ A
$V_{r3} = 4.14$ V	$I_{r3} = 0.28$ A
$V_{r4} = 7.42$ V	$I_{r4} = 14.84$ A
$V_{r5} = -3.28$ V	$I_{r5} = -0.28$ A

4.
$$\begin{bmatrix} sC_1 + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL_3} + \frac{1}{sL_{43}} + \frac{1}{sL_4} + \frac{1}{sL_{34}} & -\frac{1}{sL_4} - \frac{1}{sL_{34}} \\ 0 & -\frac{1}{sL_4} - \frac{1}{sL_{34}} & \frac{1}{sL_4} + \frac{1}{sL_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{b1} \\ V_{b3} \\ V_{b5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{f1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.
$$\begin{bmatrix} sC_1 + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL_3} + \frac{1}{sL_4} & -\frac{1}{sL_4} \\ 0 & -\frac{1}{sL_4} & \frac{1}{sL_4} + \frac{1}{sL_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{b1} \\ V_{b3} \\ V_{b5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{f1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

APENDICE A

NUMEROS COMPLEJOS

I Introducción

La energía elétrica comercial es suministrada con señal en forma de onda senoidal a frecuencia constante. Por dicha razón, una gran cantidad de circuitos que se analizan en ingeniería eléctrica, presentan señales de corriente y voltaje con esa forma.

Por otra parte, en el módulo 1 se establece la forma de representar señales senoidales mediante el uso de fasores, que son números complejos. De esa manera las ecuaciones integrodiferenciales de un circuito o red eléctrica se transforman en simples ecuaciones algebraicas con variables complejas.

Como se ve, resulta de la mayor importancia operar adecuadamente los números complejos, pues facilita enormemente el análisis de circuitos.

Este ápendice presenta los aspectos de mayor relevancia en torno a los números complejos, y que son usados en el desarrollo de la obra.

II Número complejo

Un número complejo se define como aquél de la forma $z = a + bj$ donde a y b son números reales y j[1] es la unidad imaginaria, tal que:

$$j^2 = -1$$

De tal manera, un número complejo tiene una parte real y una imaginaria. La parte real es a y la parte imaginaria es b. Es decir,

[1] En general la unidad imaginaria se denota con la letra *i*. Sin embargo, en el análisis de circuitos eléctricos se opta por la letra *j* para evitar confusiones con el símbolo de la corriente eléctrica (*i*).

de la forma z = a + bj (conocida como forma binómica o rectangular), tenemos que:

Forma binómica o rectangular

$$Re\{z\} = a$$

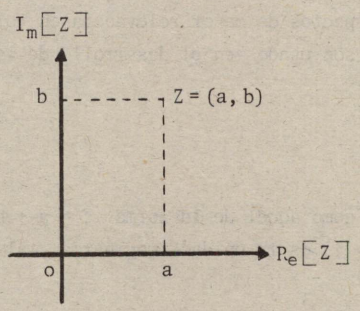
$$Im\{z\} = b$$

III Representación gráfica de los números complejos

Es de una gran utilidad representar gráficamente los números complejos. A partir de la forma rectangular o binómica, un número complejo puede ser representado en un plano.

El número a + bj puede ser considerado como una pareja ordenada de números, por lo que es posible emplear un sistema cartesiano de dos dimensiones para representarla.

A este sistema se le conoce como *plano complejo o diagrama de Argand*, donde el eje de las abscisas corresponde a la parte real y el eje de las ordenadas a la parte imaginaria. Observe la figura A.1.



Plano complejo o diagrama de Argand

Figura A.1 Representación de un número complejo en el Diagrama de Argand.

IV El conjugado de un número complejo

Un número de la forma a - bj se dice que es el conjugado del número z = a + bj, y se denota con el símbolo z*. Es decir z* = a - bj.

V Operaciones básicas con números complejos

Antes de establecer las operaciones fundamentales con números complejos, es conveniente definir la igualdad entre los números complejos.

Sean $z_1 = a + bj$ y $z_2 = c + dj$ dos números complejos. Entonces:

Igualdad de números complejos

$$z_1 = z_2 \iff a = c \text{ y } b = d$$

Las operaciones fundamentales son: adición, sustracción, multiplicación y división. Y se definen como sigue:

Sea $z_1 = a + bj$ y $z_2 = c + dj$, entonces:

Adición $\quad z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)j$

Sustracción $\quad z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)j$

Multiplicación

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + bj)(c + dj) \\ &= ac + adj + bcj + bdj^2 \\ \therefore z_1 z_2 &= (ac - bd) + (ad + bc)j \end{aligned}$$

División

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bj}{c + dj} = \frac{a + bj}{c + dj}\left(\frac{c - dj}{c - dj}\right)$$

$$\frac{a + bj}{c + dj} = \frac{ac - adj + bcj - bdj^2}{c^2 - cdj + cdj - d^2j^2}$$

$$\therefore \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)j}{c^2 + d^2}$$

Ejemplos

a. $(4 + 2j) + (3 + 8j) = (4 + 3) + (2 + 8)j$

$= 7 + 10j$

b. $(13 + 8j) - (4 + 5j) = (13 - 4) + (8 - 5)j$

$= 9 + 3j$

c. $(5 + j)(3 + 7j) = \left[(5 \times 3) - (1 \times 7)\right] + \left[(5 \times 7) + (1 \times 3)\right] j$

$= 15 - 7 + (35 + 3)j$

$= 8 + 38j$

d. $\dfrac{3 + 4j}{4 + 2j} = \dfrac{\left[(3 \times 4) + (4 \times 2)\right] + \left[(4 \times 4) - (3 \times 2)\right]j}{(4)^2 + (2)^2}$

$= \dfrac{(12 + 8) + (16 - 6)j}{16 + 4}$

$= \dfrac{20 + 10j}{20}$

$= 1 + \dfrac{1}{2} j$

VI Propiedades

Una vez definidas las operaciones fundamentales, es posible establecer las siguientes propiedades de los números complejos.

Sean z_1, z_2 y z_3 números complejos, entonces:

1.	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	ley conmutativa de la adición
2.	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$	ley asociativa de la adición
3.	$z_1 z_2 = z_2 z_1$	ley conmutativa de la multiplicación
4.	$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$	ley asociativa de la multiplicación
5.	$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	ley distributiva
6.	Existe el número complejo $0 = 0 + 0j$, llamado el elemento neutro, tal que, para toda z_1 $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$	Elemento neutro de la adición
7.	Existe el número complejo $1 = 1 + 0j$, llamado elemento neutro de la multiplicación, tal que: $(1)(z_1) = (z_1)(1) = z_1$	Elemento neutro de la multiplicación

La demostración de estas propiedades puede ser consultada en los Apuntes de álgebra editados por la Facultad de Ingeniería.

VII Forma polar

La forma rectangular de un número complejo $z = a + bj$ no siempre es adecuada. En ocasiones se hace necesario representar un número complejo en forma distinta.

Si partimos del hecho de que un número complejo en forma binómica puede considerarse como una pareja ordenada de números reales, que representa un punto en el sistema de coordenadas rectangulares; este mismo punto puede ubicarse en un sistema de coordenadas polares en el mismo plano complejo.

Observe la figura A.2. Un vector r que parte del origen a un punto (a, b), forma un ángulo θ con respecto al eje $R_e[Z]$

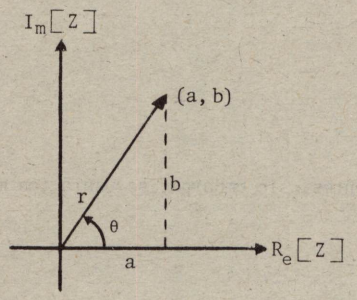


Figura A.2 Representación con coordenadas polares de un punto en el plano complejo

Observe que:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (A.1)$$

por lo tanto $r = |a + bj| = |z|$, que es llamado *módulo* o valor absoluto de un número complejo.

Módulo de un número complejo

Por otro lado:

$$\theta = \text{ang tan } \frac{b}{a} \qquad (A.2)$$

es llamado el *argumento* del número complejo z. Así pues, de la figura A.2, vemos que:

Argumento de un número complejo

$$a = r \cos \theta \qquad (A.3)$$

y

$$b = r \operatorname{sen} \theta \qquad (A.4)$$

Por lo tanto, un número complejo de la forma $z = a + bj$, puede representarse de la siguiente manera:

$$z = r(\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta) \qquad (A.5)$$

De lo anterior, se establece la *forma polar* de un número complejo, como sigue:

Forma polar de un número complejo

$$z = r \operatorname{cis} \theta \qquad (A.6)$$

$$z = r\angle\theta \qquad (A.7)$$

Estas dos formas son equivalentes, sin embargo, se usará con más frecuencia la segunda (A.7).

Ejemplos

a. Exprese el número complejo $z_1 = 3 + 4j$ en forma polar y represéntelo en el diagrama de Argand.

Solución

$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\theta = \text{ang tan } \frac{4}{3} = 53.13°$

$\therefore \quad z_1 = 5\angle 53.13°$

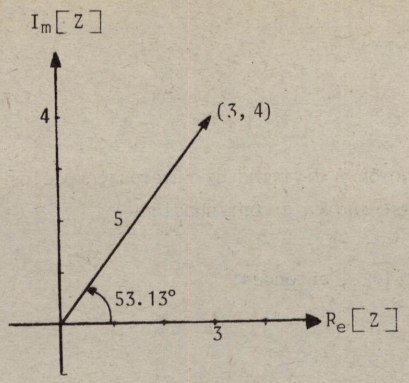


Figura A.3

b. Exprese el número complejo $z_2 = 10\angle -30°$ en forma rectangular, y represéntelo en el diagrama de Argand.

Solución

$$z_2 = 10 \cos 30° + j10 \text{ sen } -30°$$

$$= 10(0.866) + j10(-0.5)$$

$$= 8.66 - j5$$

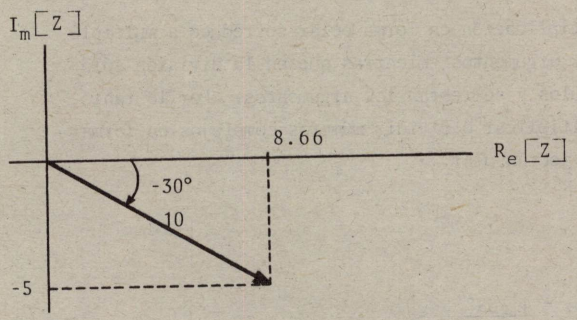


Figura A.4

VIII Igualdad, multiplicación y división en la forma polar

La igualdad de dos números complejos $z_1 = r_1\angle\theta_1$ y $z_2 = r_2\angle\theta_2$ se establece de la siguiente manera:

$$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2 \qquad \text{(A.8)}$$

Igualdad en forma polar

y

$$\theta_1 = \theta_2 + k(360°)$$

donde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Las operaciones de multiplicación y división de números complejos en forma polar se efectúan como se indica a continuación.

Sean $z_1 = r_1 \angle \theta_1$ y $z_2 = r_2 \angle \theta_2$, entonces:

Multiplicación

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle \theta_1 + \theta_2 \qquad \text{(A.9)}$$ Multiplicación en forma polar

División

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \theta_1 - \theta_2 \qquad \text{(A.10)}$$ División en forma polar

La demostración, a partir de la forma rectangular, de la igualdad, multiplicación y división de números complejos en forma polar, puede consultarse en los "Apuntes de álgebra" de la Facultad de Ingeniería.

Observe que la multiplicación en forma polar se reduce a multiplicar módulos y sumar argumentos, mientras que en la división sólo se dividen los módulos y se restan los argumentos. Por lo tanto, es más sencillo multiplicar o dividir números complejos en forma polar que en forma rectangular.

Ejemplos

a. $z_1 = 42 \angle 50°$, $z_2 = 4 \angle -35°$

$$z_1 z_2 = (42 \angle 50°)(4 \angle -35°)$$
$$= 42 \times 4 \angle 50° - 35°$$
$$= 168 \angle 15°$$

b. $z_1 = 100 \angle -20°$, $z_2 = 65 \angle 85°$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{100\angle -20°}{65\angle 85°}$$

$$= \frac{100}{65}\angle -20° - 85°$$

$$= 1.54\angle -105°$$

IX Conjugado en forma polar

El conjugado de un número complejo, dado en forma polar se obtiene cambiando el signo del argumento.

Esto es, si $z = r\angle\theta$, entonces

$$z^* = r\angle -\theta \qquad (A.11)$$

Demostración:

De la expresión A.5:

$$z = r(\cos\theta + j\operatorname{sen}\theta)$$

y de acuerdo con la definición del conjugado de un número complejo en forma binómica, se tiene:

$$z^* = r(\cos\theta - j\operatorname{sen}\theta)$$

por otra parte:

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

entonces:

$$z^* = r\left[\cos(-\theta) + j\operatorname{sen}(-\theta)\right]$$

que escrito en forma polar:

$$z^* = r\angle -\theta$$

L.Q.Q.D.

Ejemplo

$$z_1 = 3 + j4, \quad z_2 = 15\angle 60°, \quad z_3 = 20\angle -70°$$

$$\frac{z_1 z_2}{z_2^* + z_3} = \frac{(3 + j4)(15\angle 60°)}{15\angle -60° + 20\angle -70°}$$

transformando la z_1 a forma polar se tiene:

$$z_1 = 5\angle 53.13°$$

por otra parte, z_2^* en forma rectangular queda:

$$z_2^* = 7.5 - 12.99j$$

además, z_3 en forma rectangular:

$$z_3 = 6.8 - 18.79j$$

por lo tanto:

$$\frac{z_1 z_2}{z_2^* + z_3} = \frac{(5\angle 53.13°)(15\angle 60°)}{(7.5 - j12.99) + (6.8 - 18.79j)}$$

$$= \frac{75\angle 113.13°}{14.3 - 31.78j}$$

$$= \frac{75\angle 113.13°}{34.85\angle -65.7°}$$

$$= 2.15\angle 178.8°$$

X Identidad de Euler

Existe una expresión de gran utilidad en el análisis de Fourier cuyo desarrollo conviene presentar aquí. Dicha expresión es la llamada identidad de Euler, que se obtendrá a partir de la expansión de la función exponencial en serie de Taylor.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

donde x puede tomar valores reales o complejos. Por lo tanto, si $x = \theta j$, entonces:

$$e^{\theta j} = 1 + \theta j + \frac{(\theta j)^2}{2!} + \frac{(\theta j)^3}{3!} + \frac{(\theta j)^4}{4!} + \frac{(\theta j)^5}{5!} + \frac{(\theta j)^6}{6!} + \ldots \qquad (A.12)$$

desarrollando esta expresión en términos de las potencias[2] de j, tenemos:

$$e^{\theta j} = 1 + \theta j - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - j\frac{\theta^7}{7!} + \ldots$$

agrupando las potencias pares y las impares:

$$e^{\theta j} = \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots\right] + j\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots\right] \qquad (A.13)$$

Por otra parte, las expansiones de las funciones seno y coseno en serie de Taylor son, respectivamente:

$$\text{sen}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots \qquad (A.14)$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots \qquad (A.15)$$

Ahora bien, al sustituir las expresiones (A.14) y (A.15) en la expresión (A.13), tenemos:

$$e^{\theta j} = \cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta \qquad (A.16)$$

Identidad de Euler

[2] Las potencias de j son:

$j = \sqrt{-1}$
$j^2 = -1$
$j^3 = j^2 j = -1j = -j$
$j^4 = j^3 j = -jj = -j^2 = 1$
$j^5 = j^4 j = 1j = j$
$j^6 = j^5 j = jj = j^2 = -1$
$j^7 = j^6 j = -1j = -j$

La expresión (A.16) es conocida como la *identidad de Euler.*

A partir de esta identidad, se pueden obtener dos expresiones para representar las funciones seno y coseno en términos de la función exponencial.

Así, si en la identidad (A.16) cambiamos el signo de θ, tenemos:

$$e^{-\theta j} = \cos(-\theta) + j\,\text{sen}(-\theta)$$

$$e^{-\theta j} = \cos\theta - j\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{(A.17)}$$

Ahora, de las expresiones (A.16) y (A.17), se obtiene:

$$e^{\theta j} + e^{-\theta j} = 2\cos\theta$$

por lo tanto:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{\theta j} + e^{-\theta j}) \qquad \text{(A.18)}$$

Para obtener la expresión de la función seno, de (A.16) y (A.17):

$$e^{\theta j} - e^{-\theta j} = 2j\,\text{sen}\,\theta$$

por lo tanto:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2j}(e^{\theta j} - e^{-\theta j}) \qquad \text{(A.19)}$$

APENDICE B

PROGRAMAS EN BASIC PARA ANALISIS DE REDES

I Introducción

En la Unidad II se desarrollaron cuatro métodos para analizar redes eléctricas. Allí se apuntó que la característica más importante de estos métodos es ser sistemáticos, lo que posibilita su uso en computadora digital.

Existen paquetes comerciales de programas para estos propósitos, que están disponibles en varias marcas de computadoras. Por otro lado, es factible localizar un programa, en lenguaje FORTRAN, para este mismo propósito.

Consulte el texto de Torres Fentanes, J. A. y Czitron de Gerez, V., *Métodos para la solución de problemas con computadora digital*. Representación, Servicios de Ingeniería, S.A., México, 1980.

Sin embargo, debido a que recientemente se ha extendido el uso de las microcomputadoras, muchas de las cuales hacen uso del lenguaje BASIC, hemos considerado conveniente incluir este apéndice que presenta un paquete de programas en ese lenguaje, para el análisis de redes eléctricas.

II Descripción del paquete de programas

En la Unidad II fueron desarrollados los métodos de nodos, mallas, lazos y secciones de corte. Como ahí quedó establecido, dichos métodos son equivalentes en cuanto a que, los cuatro, culminan con el cálculo del voltaje y la corriente de cada una de las ramas de la red eléctrica en cuestión. Inclusive, las ecuaciones que maneja cada uno de tales métodos tienen la misma construcción, diferenciándose sólo en el significado de las variables. Esto se podrá observar más claramente a continuación.

Ecuaciones para el método de nodos:

$$V_r = A^T V_n$$
$$I_r = I_f + Y_r V_r - Y_r V_f$$
$$Y_n = A Y_r A^T$$
$$I_n = A Y_r V_f - A I_f$$
$$Y_n V_n = I_n$$

Ecuaciones para el método de mallas:

$$I_r = M^T I_m$$
$$V_r = V_f + Z_r I_r - Z_r I_f$$
$$Z_m = M Z_r M^T$$
$$V_m = M Z_r I_f - M V_f$$
$$Z_m I_m = V_m$$

Ecuaciones para el método de lazos:

$$I_r = B^T I_\ell$$
$$V_r = V_f + Z_r I_r - Z_r I_f$$
$$Z_\ell = B Z_r B^T$$
$$V_\ell = B Z_r I_f - B V_f$$
$$Z_\ell I_\ell = V_\ell$$

Ecuaciones para el método de secciones de corte:

$$V_r = Q^T V_b$$
$$I_r = I_f + Y_r V_r - Y_r V_f$$
$$Y_c = Q Y_r Q^T$$
$$I_c = Q Y_r V_f - Q I_f$$
$$Y_c V_b = I_c$$

Se puede observar que los grupos de ecuaciones para cada método son equivalentes entre sí. A partir de ello se puede estructurar la siguiente tabla de equivalencias entre las variables.

TABLA DE EQUIVALENCIA DE LAS VARIABLES EN LOS CUATRO METODOS DE ANALISIS DE REDES EN EL PROGRAMA

Nodos	Mallas	Lazos	Secciones de corte	Programa
Matriz de admitancias de nodos Y_n	Matriz de impedancias de mallas Z_m	Matriz de impedancias de lazos Z_L	Matriz de admitancias de secciones de corte Y_C	ZN(I, J, K)
Matriz de incidencia reducida A	Matriz de mallas reducida M	Matriz de lazos fundamentales B	Matriz de secciones de corte fundamentales Q	Q(I, J, K)
Matriz de admitancias de rama Y_r	Matriz de impedancias de rama Z_r	Matriz de impedancias de rama Z_r	Matriz de admitancias de rama Y_r	Z(I, J, K)
Número de nodos independientes $n - 1$	Número de mallas internas $r - n + 1$	Número de lazos fundamentales $r - n + 1$	Número de secciones de corte fundamentales $n - 1$	PN
Número de ramas r	Número de ramas r	Número de ramas r	Número de ramas r	PA
Vector de fuentes de corriente de nodos I_n	Vector de fuentes de voltaje de mallas V_m	Vector de fuentes de voltaje de lazos V_ℓ	Vector de fuentes de corriente de sección de corte I_C	CN(I, J, K)
Vector de fuentes de voltaje en las ramas V_f	Vector de fuentes de corriente en las ramas I_f	Vector de fuentes de corriente en las ramas I_f	Vector de fuentes de voltaje en las ramas V_f	FV(I, K)
Vector de fuentes de corriente en las ramas I_f	Vector de fuentes de voltaje en las ramas V_f	Vector de fuentes de voltaje en las ramas V_f	Vector de fuentes de corriente en las ramas I_f	FJ(I, K)
Vector de voltajes en los nodos V_n	Vector de corrientes de malla I_m	Vector de corrientes de lazo I_ℓ	Vector de voltajes en las ramas del árbol V_b	E(I, K)
Vector de voltajes en las ramas V_r	Vector de corrientes en las ramas I_r	Vector de corrientes en las ramas I_r	Vector de voltajes en las ramas V_r	VR(I, K)
Vector de corrientes en las ramas I_r	Vector de voltajes en las ramas V_r	Vector de voltajes en las ramas V_r	Vector de corrientes en las ramas I_r	CR(I, K)

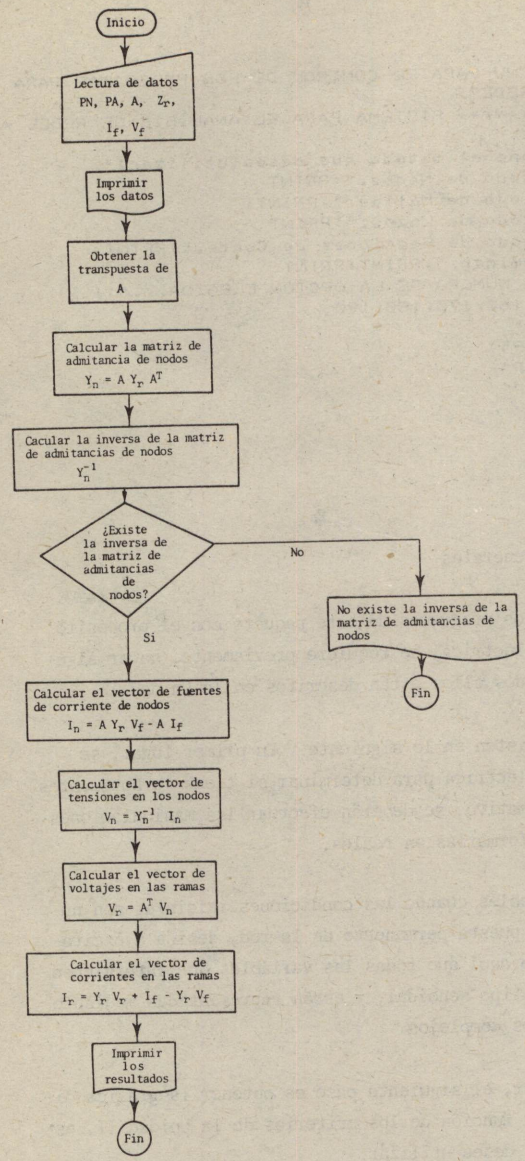
Considerando las equivalencias de la tabla anterior, se ha desarrollado un programa para cada método, cada uno de los cuales considera las variables correspondientes a la columna "PROGRAMA" de la tabla mencionada.

De hecho, los cuatro programas efectúan el mismo proceso, aunque cada uno de ellos solicita los datos específicos necesarios e imprime los resultados correspondientes al método que emplea. Por ello, podemos hablar de un programa representativo de los cuatro.

Este programa está integrado por un programa principal y tres subrutinas. El programa principal lee los datos, administra las subrutinas e imprime los resultados del proceso. Una subrutina multiplica dos matrices con números complejos, otra invierte una matriz con números complejos y la tercera corrige errores en los datos de entrada.

El diagrama de flujo del programa principal se muestra a continuación.

III. Diagrama de flujo del programa principal



Adicionalmente, hay un quinto programa que es usado para seleccionar el método que se desee emplear. El listado de este programa es el siguiente.

```
10 '[MENURED]  MENU PARA EL CONTROL DE LOS PROGRAMAS PARA
    ANALISIS DE REDES
20 CLS:PRINT"********* SISTEMA PARA EL ANALISIS DE REDES **********"
   :PRINT:PRINT
30 PRINT"Seleccione el metodo que desea utilizar:"
40 PRINT"1).- Metodo de Nodos.":PRINT
50 PRINT"2).- Metodo de Mallas.":PRINT
60 PRINT"3).- Metodo de Lazos.":PRINT
70 PRINT"4).- Metodo de Secciones de Corte.":PRINT
75 PRINT"5).- Terminar.":PRINT:PRINT
80 INPUT"ANOTE EL NUMERO DE LA OPCION ELEGIDA...";I
90 ON I GOTO 150,160,170,180,190
150 RUN"REDES/IMP"
160 RUN"REDES2/IMP"
170 RUN"REDES3/IMP"
180 RUN"REDES4/IMP"
190 END
```

IV Recomendaciones generales

Para usar alguno de los programas de este paquete con el propósito de analizar una red eléctrica, se requiere previamente, hacer algunos preparativos. Todos ellos están descritos en la Unidad II.

Los preparativos consisten en lo siguiente. En primer lugar, se debe revisar la red eléctrica para determinar si tiene o no fuentes ideales; en caso afirmativo, se deberán efectuar las manipulaciones necesarias para transformarlas en reales.

Los métodos son aplicables cuando las condiciones iniciales son nulas, obteniendo la respuesta permanente de la red, debida a excitaciones senoidales. De aquí que todas las variables que intervienen en los métodos son de tipo senoidal, y estén representadas mediante fasores, o sea, números complejos.

Con base en lo anterior, el siguiente paso es obtener la gráfica dirigida de la red y, en función de los criterios de la Unidad II, escoger el método que se desee utilizar.

Una vez elegido el método, habrá que obtener de la gráfica la matriz de topología de la red, esto es **A**, **M**, **B** o **Q**, según sea el caso.

Luego se deberá obtener de la red, la matriz de impedancias o admitancias de rama, según se requiera, y los vectores de fuentes de voltaje y corriente de rama. Es necesario recordar que los elementos de los vectores y matrices deberán ser números complejos, expresados en su forma binómica.

Terminadas dichas operaciones, estaremos en posibilidades de emplear el paquete de programas del apéndice.

V Listados de los programas

A continuación se presentan los listados de los cuatro programas ya mencionados, los cuales fueron procesados en una microcomputadora Radio Shack, TRS-80 modelo II.

```
10 '[MENURED]  MENU PARA EL CONTROL DE LOS PROGRAMAS PARA
   ANALISIS DE REDES
20 CLS:PRINT"********** SISTEMA PARA EL ANALISIS DE REDES **********"
   :PRINT:PRINT
30 PRINT"Seleccione el metodo que desea utilizar:"
40 PRINT"1).- Metodo de Nodos.":PRINT
50 PRINT"2).- Metodo de Mallas.":PRINT
60 PRINT"3).- Metodo de Lazos.":PRINT
70 PRINT"4).- Metodo de Secciones de Corte.":PRINT
75 PRINT"5).- Terminar.":PRINT:PRINT
80 INPUT"ANOTE EL NUMERO DE LA OPCION ELEGIDA...";I
90 ON I GOTO 150,160,170,180,190
150 RUN"REDES/IMP"
160 RUN"REDES2/IMP"
170 RUN"REDES3/IMP"
180 RUN"REDES4/IMP"
190 END


10 '[REDES/IMP]  PROGRAMA PARA RESOLVER REDES ELECTRICAS USANDO
   EL METODO DE NODOS
15 DEFINT I-P
300 CLS:INPUT "ANOTE EL NUMERO TOTAL DE NODOS DE LA RED";P
310 INPUT "AHORA ANOTE EL NUMERO DE ARISTAS";PA
320 PN = P - 1 ' PN = NUMERO DE NODOS INDEPENDIENTES
330 DIM Q(PN,PA,2), Z(PA,PA,2), FJ(PA,2), FV(PA,2), QT(PA,PN,2),
    A(PA,PA,2),B(PA,PA,2),C(PA,PA,2), ZI(PN,PN,2), CN(PN,2),
    TA(PN,PA,2), TB(PN,2), E(PN,2), VR(PA,2), CR(PA,2),
    TC(PA,2), ZN(PN,PN,2)
500 CLS: PRINT CHR$(31) "****** LECTURA DE DATOS ******":PRINT:PRINT
510 PRINT "Anote a continuacion los datos de la"
520 PRINT "red, segun los solicite la computadora"
530 PRINT
540 PRINT "Si comete algun error al proporcionar"
550 PRINT "los datos, podra corregirlo antes de"
560 PRINT "iniciar el proceso."
570 PRINT "Tome nota de los datos que desee"
580 PRINT "corregir."
590 FOR I = 1  TO  30000 : NEXT I
600 PRINT CHR$(30)
700 '
710 '*******LECTURA DE DATOS*******
720 'Matriz de Incidencia
730 PRINT:PRINT"A continuacion, la computadora va a solicitar los
                elementos de la matriz de INCIDENCIA"
740 PRINT:PRINT "Los pedira por renglon y es necesario proporcionar
                 solamente la parte real, pues la imaginaria se
                 tomara automaticamente como cero"
750     FOR I=1 TO PN
760             FOR J=1 TO PA
770             PRINT"A(";I;",";J;") = ";:INPUT Q(I,J,1)
780             Q(I,J,2) = 0
790             NEXT J
800     NEXT I
810 '
```

```
820 'Matriz de admitancias de rama
830 CLS:PRINT:PRINT"Ahora va a solicitar los elementos de la matriz
    de ADMITANCIAS de rama, tambien los pedira por renglon,
    pero habra que dar la PARTE REAL y la PARTE IMAGINARIA,
    en ese orden, separadas por una coma"
840     FOR I=1 TO PA
850             FOR J=1 TO PA
860             PRINT"Yr(";I;",";J;") = ";:INPUT Z(I,J,1),Z(I,J,2)
870             NEXT J
880     NEXT I
890 '
900 'Vector de fuentes de corriente
910 CLS:PRINT:PRINT"Proporcione ahora los elementos del vector de
    FUENTES DE CORRIENTE, dando tambien la PARTE REAL y la PARTE
    IMAGINARIA, separadas con una coma":PRINT
920     FOR I=1 TO PA
930     PRINT "Jf(";I;") = ";:INPUT FJ(I,1),FJ(I,2)
940     NEXT I
950 '
960 'Vector de fuentes de voltaje
970 CLS:PRINT:PRINT"Corresponde ahora anotar los elementos del vecto
    de FUENTES DE VOLTAJE, siguiendo las mismas consideraciones del
    caso anterior":PRINT
980     FOR I=1 TO PA
990     PRINT "Vf(";I;") = ";:INPUT FV(I,1),FV(I,2)
1000    NEXT I
1005 CLS : LINE INPUT "DESEA CORREGIR ALGUN DATO?  (SI/NO)..."; X$
1007 IF X$ = "SI"  THEN  GOSUB 30000
1010 '
1020 '****** IMPRIMIR LOS DATOS *******
1030 'Matriz de incidencia
1032 LPRINT TAB(30) "********* SISTEMA PARA ANALIZAR REDES *********
     :LPRINT:LPRINT:LPRINT
1036 LPRINT TAB(45) "METODO DE NODOS":LPRINT:LPRINT:LPRINT
1040 LPRINT TAB(15) "MATRIZ DE INCIDENCIA"
1050    FOR I=1 TO PN
1060            FOR J=1 TO PA
1070            LPRINT Q(I,J,1);Q(I,J,2),
1080            NEXT J
1090    LPRINT
1100    NEXT I
1110 '
1120 LPRINT:'Matriz de Admitancias de rama
1130 LPRINT TAB(15) "MATRIZ DE ADMITANCIAS DE RAMA"
1140    FOR I=1 TO PA
1150            FOR J=1 TO PA
1160            LPRINT Z(I,J,1);Z(I,J,2),
1170            NEXT J
1180    LPRINT
1190    NEXT I
1200 '
1210 LPRINT:'Vector de fuentes de corriente
1220 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE"
1230    FOR I=1 TO PA
1240    LPRINT TAB(20) FJ(I,1);FJ(I,2)
1250    NEXT I
```

```
1260 '
1270 LPRINT:'Vector de fuentes de voltaje
1280 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE FUENTES DE VOLTAJE"
1290    FOR I=1 TO PA
1300    LPRINT TAB(20) FV(I,1);FV(I,2)
1310    NEXT I
1320 '
1330 '
1340 '***** INICIO DE LAS OPERACIONES *****
1350 '
1360 '***** CALCULO DE LA TRANSPUESTA DE LA MATRIZ DE INCIDENCIA ***
1365 'QT(I,J,K) = Elementos de la transpuesta de la matriz de
                  incidencia
1370    FOR I=1 TO PN
1380            FOR J=1 TO PA
1390            QT(J,I,1) = Q(I,J,1)
1400            QT(J,I,2) = Q(I,J,2)
1410            NEXT J
1420    NEXT I
1430 '
1440 '*****CALCULO DE LA MATRIZ DE ADMITANCIAS DE NODOS*****
1450 M=PN:N=PA:L=PA
1460    FOR I=1 TO PN
1470            FOR J=1 TO PA
1480            A(I,J,1) = Q(I,J,1)
1490            A(I,J,2) = Q(I,J,2)
1500            NEXT J
1510    NEXT I
1520    FOR I=1 TO PA
1530            FOR J=1 TO PA
1540            B(I,J,1) = Z(I,J,1)
1550            B(I,J,2) = Z(I,J,2)
1560            NEXT J
1570    NEXT I
1580 GOSUB 10000
1590 'TA(I,J,K) = Elementos de la matriz producto de
     la multiplicacion de Q por Z
1600    FOR I=1 TO PN
1610            FOR J=1 TO PA
1620            TA(I,J,1) = C(I,J,1)
1630            TA(I,J,2) = C(I,J,2)
1640            NEXT J
1650    NEXT I
1660 M = PN:N = PA:L = PN
1670    FOR I=1 TO PN
1680            FOR J=1 TO PA
1690            A(I,J,1) = TA(I,J,1)
1700            A(I,J,2) = TA(I,J,2)
1710            NEXT J
1720    NEXT I
1730    FOR I=1 TO PA
1740            FOR J=1 TO PN
1750            B(I,J,1) = QT(I,J,1)
1760            B(I,J,2) = QT(I,J,2)
1770            NEXT J
```

```
1780    NEXT I
1790 GOSUB 10000
1800 'ZN(I,J,K) = Elementos de la matriz de admitancias de nodos
1810    FOR I=1 TO PN
1820            FOR J=1 TO PN
1830            ZN(I,J,1) = C(I,J,1)
1840            ZN(I,J,2) = C(I,J,2)
1850            NEXT J
1860    NEXT I
1870 '
1880 ' CALCULO DE LA INVERSA DE LA MATRIZ DE ADMITANCIAS DE NODOS
1890 N = PN
1900    FOR I=1 TO PN
1910            FOR J=1 TO PN
1920            A(I,J,1) = ZN(I,J,1)
1930            A(I,J,2) = ZN(I,J,2)
1940            NEXT J
1950    NEXT I
1960 GOSUB 20000
1970 IF DE > EPS THEN 2000
1980 CLS:PRINT
     " > NO EXISTE LA INVERSA DE LA MATRIZ DE ADMITANCIAS DE NODOS <
1990 RUN"MENURED"
1995 'ZI(I,J,K) = Elemento de la inversa de la matriz de admitancias
                  de nodos
2000    FOR I=1 TO PN
2010            FOR J=1 TO PN
2020            ZI(I,J,1) = C(I,J,1)
2030            ZI(I,J,2) = C(I,J,2)
2040            NEXT J
2050    NEXT I
2060 '
2070 '***** CALCULAR EL VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE DE NODOS *****
2080 'CN(I,K) = Elementos del vector de fuentes de corriente de nodo
2090 M = PN:N = PA: L = 1
2100    FOR I=1 TO PN
2110            FOR J=1 TO PA
2120            A(I,J,1) = TA(I,J,1)
2130            A(I,J,2) = TA(I,J,2)
2140            NEXT J
2150    NEXT I
2160    FOR I=1 TO PA
2170    B(I,1,1) = FV(I,1)
2180    B(I,1,2) = FV(I,2)
2190    NEXT I
2200 GOSUB 10000
2210    FOR I=1 TO PN
2220    TB(I,1) = C(I,1,1)
2230    TB(I,2) = C(I,1,2)
2240    NEXT I
2250 'TB(I,K) = Elementos del vector producto de las matrices Q, Z
                y FV
2260 M = PN : N = PA : L = 1
2270    FOR I=1 TO PN
2280            FOR J=1 TO PA
```

```
2290              A(I,J,1) = Q(I,J,1)
2300              A(I,J,2) = Q(I,J,2)
2310              NEXT J
2320     NEXT I
2330     FOR I=1 TO PA
2340     B(I,1,1) = FJ(I,1)
2350     B(I,1,2) = FJ(I,2)
2360     NEXT I
2370 GOSUB 10000
2380     FOR I=1 TO PN
2390     CN(I,1) = TB(I,1) - C(I,1,1)
2400     CN(I,2) = TB(I,2) - C(I,1,2)
2410     NEXT I
2420 '
2430 '***** CALCULO DEL VECTOR DE TENSIONES EN LOS NODOS *****
2440 'E(I,K) = Elementos del vector de tensiones en los nodos
2450 M = PN : N = PN : L = 1
2460     FOR I=1 TO PN
2470              FOR J=1 TO PN
2480              A(I,J,1) = ZI(I,J,1)
2490              A(I,J,2) = ZI(I,J,2)
2500              NEXT J
2510     NEXT I
2520     FOR I=1 TO PN
2530     B(I,1,1) = CN(I,1)
2540     B(I,1,2) = CN(I,2)
2550     NEXT I
2560 GOSUB 10000
2570     FOR I=1 TO PN
2580     E(I,1) = C(I,1,1)
2590     E(I,2) = C(I,1,2)
2600     NEXT I
2610 '***** CALCULO DEL VECTOR DE VOLTAJES EN LAS RAMAS *****
2620 'VR(I,K) = Elementos del vector de voltajes en las ramas
2630 M = PA : N = PN : L = 1
2640     FOR I=1 TO PA
2650              FOR J=1 TO PN
2660              A(I,J,1) = QT(I,J,1)
2670              A(I,J,2) = QT(I,J,2)
2680              NEXT J
2690     NEXT I
2700     FOR I=1 TO PN
2710     B(I,1,1) = E(I,1)
2720     B(I,1,2) = E(I,2)
2730     NEXT I
2740 GOSUB 10000
2750     FOR I=1 TO PA
2760     VR(I,1) = C(I,1,1)
2770     VR(I,2) = C(I,1,2)
2780     NEXT I
2790 '
2800 '***** CALCULO DEL VECTOR DE CORRIENTES EN LAS RAMAS *****
2810 'CR(I,K) = Elementos del vector de corrientes en las ramas
2820 M = PA : N = PA : L = 1
2830     FOR I=1 TO PA
```

```
2840              FOR J=1 TO PA
2850              A(I,J,1) = Z(I,J,1)
2860              A(I,J,2) = Z(I,J,2)
2870              NEXT J
2880     NEXT I
2890     FOR I=1 TO PA
2900     B(I,1,1) = VR(I,1)
2910     B(I,1,2) = VR(I,2)
2920     NEXT I
2930 GOSUB 10000
2940 'TC(I,K) = Elementos del vector producto de [Z] por VR]
2950     FOR I=1 TO PA
2960     TC(I,1) = C(I,1,1)
2970     TC(I,2) = C(I,1,2)
2980     NEXT I
2990     FOR I=1 TO PA
3000     B(I,1,1) = FV(I,1)
3010     B(I,1,2) = FV(I,2)
3020     NEXT I
3030 GOSUB 10000
3040     FOR I=1 TO PA
3050     CR(I,1) = TC(I,1) + FJ(I,1) - C(I,1,1)
3060     CR(I,2) = TC(I,2) + FJ(I,2) - C(I,1,2)
3070     NEXT I
3080 '
3090 '
3100 '***** IMPRESION DE LOS RESULTADOS *****
3110 '
3115 LPRINT:LPRINT:LPRINT
3120 'Matriz de admitancias de nodos
3130 CLS:LPRINT TAB(15) "MATRIZ DE ADMITANCIAS DE NODOS"
3140     FOR I=1 TO PN
3150              FOR J=1 TO PN
3160              LPRINT ZN(I,J,1); ZN(I,J,2),
3170              NEXT J
3180     LPRINT
3190     NEXT I
3200 LPRINT:'Vector de fuentes de corriente en los nodos
3210 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE DE NODOS"
3220     FOR I=1 TO PN
3230     LPRINT TAB(20) CN(I,1); CN(I,2)
3240     NEXT I
3250 LPRINT:'Vector de tensiones en los nodos
3260 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE TENSIONES EN LOS NODOS"
3270     FOR I=1 TO PN
3280     LPRINT TAB(20) E(I,1); E(I,2)
3290     NEXT I
3300 LPRINT:'Vector de voltajes en las ramas
3310 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE VOLTAJES EN LAS RAMAS"
3320     FOR I=1 TO PA
3330     LPRINT TAB(20) VR(I,1); VR(I,2)
3340     NEXT I
3350 LPRINT:'Vector de corrientes en las ramas
3360 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE CORRIENTES EN LAS RAMAS"
3370     FOR I=1 TO PA
3380     LPRINT TAB(20) CR(I,1); CR(I,2)
```

```
3390    NEXT I
3395 SYSTEM"FORMS T":SYSTEM"AGAIN"
3400 RUN"MENURED"
4000 '
4010 '
4020 '
10000 'SUBRUTINA PARA MULTIPLICAR MATRICES CON NUMEROS
      COMPLEJOS (MULMATCO/BAS)
10010 'M=NUM DE RENGLONES 1a MATRIZ,N=NUM DE COLUMNAS 1a MATRIZ
      Y NUM DE RENGLONES 2a MATRIZ,L=NUM DE COLUMNAS 2a MATRIZ
10020 '3er INDICE 1=PARTE REAL,3er INDICE 2= PARTE IMAGINARIA
10030 'A es la 1a matriz, B es la 2a matriz y C es el producto A*B=C
10040   FOR I=1 TO M
10050           FOR J=1 TO L
10060           C(I,J,1)=0:C(I,J,2)=0
10070                   FOR K=1 TO N
10080                   C(I,J,1)=C(I,J,1)+A(I,K,1)*B(K,J,1)
                        -A(I,K,2)*B(K,J,2)
10090                   C(I,J,2)=C(I,J,2)+A(I,K,1)*B(K,J,2)
                        +A(I,K,2)*B(K,J,1)
10100                   NEXT K
10110           NEXT J
10120   NEXT I
10130 RETURN
15000 '
15010 '
15020 '
20000 '[SUBINVCO/BAS]  Subrutina que efectua las operaciones para
      invertir una matriz compleja.
20010 '
20020 'Inicializar
20030 DIM LR(N), LC(N), EM(2), TEMP(2)
20040   FOR I=1 TO N
20050    LR(I)=0:LC(I)=0'  LR(I)=Contador de renglon usado
         como pivote, LC(I)=Contador de columna usado como pivote
20060    NEXT I
20070 '
20080 'Generar la matriz identidad C(I,J)
20090    FOR I=1 TO N
20100       FOR J=1 TO N
20110       IF I=J THEN 20120ELSE 20130
20120       C(I,J,1)=1:C(I,J,2)=0:GOTO 20140
20130       C(I,J,1)=0:C(I,J,2)=0
20140       NEXT J
20150    NEXT I
20160 '
20170 'Iniciar operaciones en la matriz .
20180 'EM=mayor elemento de A que se va a usar como pivote,
      EM(1)=parte real, EM(2)=parte imaginaria, PR=renglon del
      pivote, PC=columna del pivote
20190    FOR K=1 TO N
20200    EM(1)=0:EM(2)=0:PR=0:PC=0
20210 '
20220 'Localizar el mayor elemento de A que no haya sido usado
      como pivote
```

```
20230       FOR I=1 TO N
20240       IF LR(I)=I THEN 20300
20250          FOR J=1 TO N
20260          IF LC(J)=J THEN 20290
20270          IF SQR(EM(1)↑2+EM(2)↑2)>=SQR(A(I,J,1)↑2+A(I,J,2)
               ↑2) THEN 20290
20280          EM(1)=A(I,J,1):EM(2)=A(I,J,2):PR=I:PC=J
20290          NEXT J
20300       NEXT I
20310 '
20320 'Investigar si existe o no matriz inversa, DE=parametro que
       es cero si no hay inversa
20330    DE=SQR(EM(1)↑2+EM(2)↑2)
20340    IF DE <= EPS THEN RETURN
20350 '
20360 'Ver si el pivote esta o no en la diagonal
20370    IF PR=PC THEN 20500
20380 '
20390 'Intercambio de renglones para colocar el pivote en la
       diagonal, TEMP=variable temporal, TEMP(1)=parte real,
       TEMP(2)=parte imaginaria
20400       FOR I=1 TO N
20410       TEMP(1)=A(PR,I,1):TEMP(2)=A(PR,I,2)
20420       A(PR,I,1)=A(PC,I,1):A(PR,I,2)=A(PC,I,2)
20430       A(PC,I,1)=TEMP(1):A(PC,I,2)=TEMP(2)
20440       TEMP(1)=C(PR,I,1):TEMP(2)=C(PR,I,2)
20450       C(PR,I,1)=C(PC,I,1):C(PR,I,2)=C(PC,I,2)
20460       C(PC,I,1)=TEMP(1):C(PC,I,2)=TEMP(2)
20470       NEXT I
20480 '
20490 'Normalizar el pivote
20500       FOR I=1 TO N
20510       T=(A(PC,I,1)*EM(1)+A(PC,I,2)*EM(2))/(EM(1)↑2+EM(2)↑2)
20520       A(PC,I,2)=(A(PC,I,2)*EM(1)-A(PC,I,1)*EM(2))/(EM(1)↑2
                    +EM(2)↑2)
20530       A(PC,I,1) = T
20540       T=(C(PC,I,1)*EM(1)+C(PC,I,2)*EM(2))/(EM(1)↑2+EM(2)↑2)
20550       C(PC,I,2)=(C(PC,I,2)*EM(1)-C(PC,I,1)*EM(2))/(EM(1)↑2
                    +EM(2)↑2)
20560       C(PC,I,1) = T
20570       NEXT I
20580 '
20590 'Hacer ceros arriba y abajo de la diagonal, en la columna
       del pivote
20600       FOR I=1 TO N
20610       IF I=PC THEN 20690
20620       TEMP(1)=A(I,PC,1):TEMP(2)=A(I,PC,2)
20630          FOR J=1 TO N
20640          A(I,J,1)=A(I,J,1)-TEMP(1)*A(PC,J,1)+TEMP(2)*A(PC,J,2)
20650          A(I,J,2)=A(I,J,2)-TEMP(2)*A(PC,J,1)-TEMP(1)*A(PC,J,2)
20660          C(I,J,1)=C(I,J,1)-TEMP(1)*C(PC,J,1)+TEMP(2)*C(PC,J,2)
20670          C(I,J,2)=C(I,J,2)-TEMP(2)*C(PC,J,1)-TEMP(1)*C(PC,J,2)
20680          NEXT J
20690       NEXT I
20700 '
```

```
20710 'Modificar contadores para el renglon y la columna usados com
      pivote
20720       LR(PC)=PC:LC(PC)=PC
20730       NEXT K
20740 RETURN
29000 '
29010 '
29020 '
30000 '[CORREC/MAL] SUBRUTINA PARA CORREGIR DATOS
30010 CLS:PRINT TAB(15) "CORRECION DE DATOS":PRINT:PRINT
30020 PRINT"1.- Matriz de incidencia"
30030 PRINT"2.- Matriz de admitancias de rama"
30040 PRINT"3.- Vector de fuentes de corriente"
30050 PRINT"4.- Vector de fuentes de voltaje"
30060 PRINT"5.- Terminar las correciones":PRINT
30070 INPUT"ANOTE EL NUMERO DE LA OPCION DESEADA";IW
30080 ON IW GOTO 30100, 30180, 30260, 30330, 30090
30090 RETURN
30100 CLS:PRINT TAB(10) "CORRECIONES EN LA MATRIZ DE INCIDENCIA"
                        :PRINT:PRINT
30110 PRINT"Para corregir un elemento, siga las instrucciones:"
30120 INPUT"Anote el numero del RENGLON";I
30130 INPUT"Anote el numero de la COLUMNA";J
30140 INPUT"Anote el valor correcto del elemento";Q(I,J,1):PRINT
30150 INPUT"SI DESEA HACER OTRA CORRECION EN LA
           *MATRIZ DE INCIDENCIA*, ANOTE UN 1,
           SI NO, ANOTE UN CERO";IX
30160 IF IX=1 GOTO 30100
30170 GOTO 30010
30180 CLS:PRINT"CORRECCIONES EN LA MATRIZ DE ADMITANCIAS DE RAMA
30190 PRINT"Para corregir un elemento siga las instrucciones:"
30200 INPUT"Anote el numero del RENGLON";I
30210 INPUT"Anote el numero de la COLUMNA";J
30220 INPUT"Ahora anote los valores correctos del elemento; la
           PARTE REAL y la PARTE IMAGINARIA, separadas por
           una coma...";  Z(I,J,1),Z(I,J,2):PRINT
30230 INPUT"SI DESEA HACER OTRA CORRECION EN LA *MATRIZ DE
           ADMITANCIAS DE RAMA*,ANOTE UN 1, SI NO, ANOTE UN CERO";I
30240 IF IY=1 GOTO 30180
30250 GOTO 30010
30260 CLS:PRINT"CORRECCIONES EN EL VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE"
         :PRINT:PRINT
30270 PRINT"Para corregir un elemento siga las instrucciones:"
30280 INPUT"Anote el numero del renglon";I
30290 INPUT"Anote ahora los valores correctos del elemento, la
      PARTE REAL y la PARTE IMAGINARIA, separadas por una coma..."
      ;FJ(I,1),FJ(I,2):PRINT
30300 INPUT"SI DESEA HACER OTRA CORRECION EN EL *VECTOR DE FUENTES I
           CORRIENTE*, ANOTE UN 1, SI NO ANOTE UN CERO";JX
30310 IF JX=1 GOTO 30260
30320 GOTO 30010
30330 CLS:PRINT"CORRECCIONES EN EL VECTOR DE FUENTES DE VOLTAJE"
         :PRINT:PRINT
30340 PRINT"Para corregir un elemento siga las instrucciones:"
30350 INPUT"Anote el numero del RENGLON";I
```

```
30360 INPUT"Anote ahora los valores correctos del elemento, la
          PARTE REAL y la PARTE IMAGINARIA, separadas por una
          coma...";FV(I,1),FV(I,2):PRINT
30370 INPUT"SIDESEA HACER OTRA CORRECION EN EL *VECTOR DE
     FUENTES DE VOLTAJE*, ANOTE UN 1, SI NO, ANOTE UN CERO";JY
30380 IF JY=1 GOTO 30330
30390 GOTO 30010
```

```
   10 '[REDES2/IMP]  PROGRAMA PARA RESOLVER REDES ELECTRICAS USANDO EL
      METODO DE MALLAS    LISTA LOS RESULTADOS EN LA IMPRESORA
   15 DEFINT I-P
   300 CLS:INPUT "ANOTE EL NUMERO TOTAL DE NODOS DE LA RED";P
   310 INPUT "AHORA ANOTE EL NUMERO DE ARISTAS";PA
   320 PN = PA - P + 1'PN=NUMERO DE MALLAS INTERNAS DE LA RED
   330 DIM Q(PN,PA,2), Z(PA,PA,2),FJ(PA,2),FV(PA,2), QT(PA,PN,2),
       A(PA,PA,2), B(PA,PA,2),C(PA,PA,2),ZI(PN,PN,2), CN(PN,2),
       TA(PN,PA,2), TB(PN,2), E(PN,2), VR(PA,2), CR(PA,2), TC(PA,2),
       ZN(PN,PN,2)
   500 CLS:  PRINT  CHR$(31)  "***** LECTURA DE DATOS *****":PRINT:PRIN
   510 PRINT "Anote a continuacion los datos de la"
   520 PRINT "red, segun los solicite la computadora"
   530 PRINT
   540 PRINT"Si comete algun error al proporcionar"
   550 PRINT "los datos, podra corregirlo antes de"
   560 PRINT "iniciar el proceso"
   570 PRINT "Tome nota de los datos que desee"
   580 PRINT "corregir."
   690 FOR I = 1  TO  30000 : NEXT I
   695 PRINT CHR$(30)
   700 '
   710 '*******LECTURA DE DATOS*******
   720 'Matriz de Mallas
   730 PRINT"A continuacion, la computadora va a solicitar los element
       de la matriz de       MALLAS"
   740 PRINT:PRINT "Los pedira por renglon y es necesario proporcionar
        solamente la parte real, pues la imaginaria se tomara automa-
       ticamente como cero"
   750     FOR I=1 TO PN
   760             FOR J=1 TO PA
   770             PRINT"M(";I;",";J;") = ";:INPUT Q(I,J,1)
   780             Q(I,J,2) = 0
   790             NEXT J
   800     NEXT I
   810 '
   820 'Matriz de impedancias de rama
   830 CLS:PRINT:PRINT"Ahora va a solicitar los elementos de la matriz
       IMPEDANCIAS de rama, tambien los pedira por renglón, pero habra
       que dar la PARTE REAL y la PARTE IMAGINARIA, en ese orden, separ
       das por una coma"
   840     FOR I=1 TO PA
   850             FOR J=1 TO PA
   860             PRINT"Zr(";I;",";J;") = ";:INPUT Z(I,J,1),Z(I,J,2)
   870             NEXT J
```

```
880     NEXT I
890 '
900 'Vector de fuentes de voltaje
910 CLS:PRINT:PRINT"Proporcione ahora los elementos del vector de
    FUENTES DE VOLTAJE, dando tambien la PARTE REAL y la PARTE
    IMAGINARIA, separadas con una coma":PRINT
920     FOR I=1 TO PA
930     PRINT "Vf(";I;") = ";:INPUT FJ(I,1),FJ(I,2)
940     NEXT I
950 '
960 'Vector de fuentes de corriente
970 CLS:PRINT:PRINT"Corresponde ahora anotar los elementos del vecto
    de FUENTES DE CORRIENTE, siguiendo las mismas consideraciones de
    caso anterior":PRINT
980     FOR I=1 TO PA
990     PRINT "Jf(";I;") = ";:INPUT FV(I,1),FV(I,2)
1000    NEXT I
1005 CLS:LINE INPUT "DESEA CORREGIR ALGUN DATO?  (SI/NO)...."; X$
1007 IF X$ = "SI" THEN GOSUB 30000
1010 '
1020 '****** IMPRIMIR LOS DATOS *******
1030 'Matriz de mallas
1032 LPRINT TAB(30)
     "********** SISTEMA PARA ANALIZAR REDES **********":LPRINT:
     LPRINT:LPRINT
1036 LPRINT TAB(45) "METODO DE MALLAS":LPRINT:LPRINT:LPRINT
1040 LPRINT TAB(15) "MATRIZ DE MALLAS"
1050    FOR I=1 TO PN
1060            FOR J=1 TO PA
1070            LPRINT Q(I,J,1);Q(I,J,2),
1080            NEXT J
1090    LPRINT
1100    NEXT I
1110 '
1120 LPRINT:'Matriz de Impedancias de rama
1130 LPRINT TAB(15) "MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE RAMA"
1140    FOR I=1 TO PA
1150            FOR J=1 TO PA
1160            LPRINT Z(I,J,1);Z(I,J,2),
1170            NEXT J
1180    LPRINT
1190    NEXT I
1200 '
1210 LPRINT:'Vector de fuentes de voltaje
1220 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE FUENTES DE VOLTAJE"
1230    FOR I=1 TO PA
1240    LPRINT TAB(20) FJ(I,1);FJ(I,2)
1250    NEXT I
1260 '
1270 LPRINT:'Vector de fuentes de corriente
1280 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE"
1290    FOR I=1 TO PA
1300    LPRINT TAB(20) FV(I,1);FV(I,2)
1310    NEXT I
1320 '
```

```
1330 '
1340 '***** INICIO DE LAS OPERACIONES *****
1350 '
1360 '***** CALCULO DE LA TRANSPUESTA DE LA MATRIZ DE INCIDENCIA ***
1365 'QT(I,J,K) = Elementos de la transpuesta de la matriz de
     incidencia
1370    FOR I=1 TO PN
1380            FOR J=1 TO PA
1390            QT(J,I,1) = Q(I,J,1)
1400            QT(J,I,2) = Q(I,J,2)
1410            NEXT J
1420    NEXT I
1430 '
1440 '*****CALCULO DE LA MATRIZ DE ADMITANCIAS DE NODOS*****
1450 M=PN:N=PA:L=PA
1460    FOR I=1 TO PN
1470            FOR J=1 TO PA
1480            A(I,J,1) = Q(I,J,1)
1490            A(I,J,2) = Q(I,J,2)
1500            NEXT J
1510    NEXT I
1520    FOR I=1 TO PA
1530            FOR J=1 TO PA
1540            B(I,J,1) = Z(I,J,1)
1550            B(I,J,2) = Z(I,J,2)
1560            NEXT J
1570    NEXT I
1580 GOSUB 10000
1590 'TA(I,J,K) = Elementos de la matriz producto de la multiplicaci
     de Q por Z
1600    FOR I=1 TO PN
1610            FOR J=1 TO PA
1620            TA(I,J,1) = C(I,J,1)
1630            TA(I,J,2) = C(I,J,2)
1640            NEXT J
1650    NEXT I
1660 M = PN:N = PA:L = PN
1670    FOR I=1 TO PN
1680            FOR J=1 TO PA
1690            A(I,J,1) = TA(I,J,1)
1700            A(I,J,2) = TA(I,J,2)
1710            NEXT J
1720    NEXT I
1730    FOR I=1 TO PA
1740            FOR J=1 TO PN
1750            B(I,J,1) = QT(I,J,1)
1760            B(I,J,2) = QT(I,J,2)
1770            NEXT J
1780    NEXT I
1790 GOSUB 10000
1800 'ZN(I,J,K) = Elementos de la matriz.de admitancias de nodos
1810    FOR I=1 TO PN
1820            FOR J=1 TO PN
1830            ZN(I,J,1) = C(I,J,1)
1840            ZN(I,J,2) = C(I,J,2)
1850            NEXT J
```

```
1860    NEXT I
1870 '
1880 '***** CALCULO DE LA INVERSA DE LA MATRIZ DE ADMITANCIAS
     DE NODOS *****
1890 N = PN
1900    FOR I=1 TO PN
1910            FOR J=1 TO PN
1920            A(I,J,1) = ZN(I,J,1)
1930            A(I,J,2) = ZN(I,J,2)
1940            NEXT J
1950    NEXT I
1960 GOSUB 20000
1970 IF DE > EPS THEN 2000
1980 CLS:PRINT
     "  NO EXISTE LA INVERSA DE LA MATRIZ DE ADMITANCIAS DE NODOS  '
1990 RUN "MENURED"
1995 'ZI(I,J,K) = Elemento de la inversa de la matriz de admitancias
     de nodos
2000    FOR I=1 TO PN
2010            FOR J=1 TO PN
2020            ZI(I,J,1) = C(I,J,1)
2030            ZI(I,J,2) = C(I,J,2)
2040            NEXT J
2050    NEXT I
2060 '
2070 '***** CALCULAR EL VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE DE NODOS ****
2080 'CN(I,K) = Elementos del vector de fuentes de corriente de nod
2090 M = PN:N = PA: L = 1
2100    FOR I=1 TO PN
2110            FOR J=1 TO PA
2120            A(I,J,1) = TA(I,J,1)
2130            A(I,J,2) = TA(I,J,2)
2140            NEXT J
2150    NEXT I
2160    FOR I=1 TO PA
2170    B(I,1,1) = FV(I,1)
2180    B(I,1,2) = FV(I,2)
2190    NEXT I
2200 GOSUB 10000
2210    FOR I=1 TO PN
2220    TB(I,1) = C(I,1,1)
2230    TB(I,2) = C(I,1,2)
2240    NEXT I
2250 'TB(I,K) = Elementos del vector producto de las matrices Q,
      Z y FV
2260 M = PN : N = PA : L = 1
2270    FOR I=1 TO PN
2280            FOR J=1 TO PA
2290            A(I,J,1) = Q(I,J,1)
2300            A(I,J,2) = Q(I,J,2)
2310            NEXT J
2320    NEXT I
2330    FOR I=1 TO PA
2340    B(I,1,1) = FJ(I,1)
2350    B(I,1,2) = FJ(I,2)
2360    NEXT I
```

```
2370 GOSUB 10000
2380    FOR I=1 TO PN
2390    CN(I,1) = TB(I,1) - C(I,1,1)
2400    CN(I,2) = TB(I,2) - C(I,1,2)
2410    NEXT I
2420 '
2430 '***** CALCULO DEL VECTOR DE TENSIONES EN LOS NODOS *****
2440 'E(I,K) = Elementos del vector de tensiones en los nodos
2450 M = PN : N = PN : L = 1
2460    FOR I=1 TO PN
2470            FOR J=1 TO PN
2480            A(I,J,1) = ZI(I,J,1)
2490            A(I,J,2) = ZI(I,J,2)
2500            NEXT J
2510    NEXT I
2520    FOR I=1 TO PN
2530    B(I,1,1) = CN(I,1)
2540    B(I,1,2) = CN(I,2)
2550    NEXT I
2560 GOSUB 10000
2570    FOR I=1 TO PN
2580    E(I,1) = C(I,1,1)
2590    E(I,2) = C(I,1,2)
2600    NEXT I
2610 '***** CALCULO DEL VECTOR DE VOLTAJES EN LAS RAMAS *****
2620 'VR(I,K) = Elementos del vector de voltajes en las ramas
2630 M = PA : N = PN : L = 1
2640    FOR I=1 TO PA
2650            FOR J=1 TO PN
2660            A(I,J,1) = QT(I,J,1)
2670            A(I,J,2) = QT(I,J,2)
2680            NEXT J
2690    NEXT I
2700    FOR I=1 TO PN
2710    B(I,1,1) = E(I,1)
2720    B(I,1,2) = E(I,2)
2730    NEXT I
2740 GOSUB 10000
2750    FOR I=1 TO PA
2760    VR(I,1) = C(I,1,1)
2770    VR(I,2) = C(I,1,2)
2780    NEXT I
2790 '
2800 '***** CALCULO DEL VECTOR DE CORRIENTES EN LAS RAMAS *****
2810 'CR(I,K) = Elementos del vector de corrientes en las ramas
2820 M = PA : N = PA : L = 1
2830    FOR I=1 TO PA
2840            FOR J=1 TO PA
2850            A(I,J,1) = Z(I,J,1)
2860            A(I,J,2) = Z(I,J,2)
2870            NEXT J
2880    NEXT I
2890    FOR I=1 TO PA
2900    B(I,1,1) = VR(I,1)
2910    B(I,1,2) = VR(I,2)
2920    NEXT I
```

```
2930 GOSUB 10000
2940 'TC(I,K) = Elementos del vector producto de [Z] por VR]
2950    FOR I=1 TO PA
2960    TC(I,1) = C(I,1,1)
2970    TC(I,2) = C(I,1,2)
2980    NEXT I
2990    FOR I=1 TO PA
3000    B(I,1,1) = FV(I,1)
3010    B(I,1,2) = FV(I,2)
3020    NEXT I
3030 GOSUB 10000
3040    FOR I=1 TO PA
3050    CR(I,1) = TC(I,1) + FJ(I,1) - C(I,1,1)
3060    CR(I,2) = TC(I,2) + FJ(I,2) - C(I,1,2)
3070    NEXT I
3080 '
3090 '
3100 '***** IMPRESION DE LOS RESULTADOS *****
3110 '
3120 'Matriz de impedancias de malla
3125 LPRINT:LPRINT:LPRINT
3130 CLS:LPRINT TAB(15) "MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE MALLAS"
3140    FOR I=1 TO PN
3150            FOR J=1 TO PN
3160            LPRINT ZN(I,J,1); ZN(I,J,2),
3170            NEXT J
3180    LPRINT
3190    NEXT I
3200 LPRINT:'Vector de fuentes de tension de mallas
3210 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE FUENTES DE TENSION DE MALLAS"
3220    FOR I=1 TO PN
3230    LPRINT TAB(20) CN(I,1); CN(I,2)
3240    NEXT I
3250 LPRINT:'Vector de corrientes de malla
3260 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE CORRIENTES DE MALLA"
3270    FOR I=1 TO PN
3280    LPRINT TAB(20) E(I,1); E(I,2)
3290    NEXT I
3300 LPRINT:'Vector de corrientes en las ramas
3310 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE CORRIENTES EN LAS RAMAS"
3320    FOR I=1 TO PA
3330    LPRINT TAB(20) VR(I,1); VR(I,2)
3340    NEXT I
3350 LPRINT:'Vector de voltajes en las ramas
3360 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE VOLTAJES EN LAS RAMAS"
3370    FOR I=1 TO PA
3380    LPRINT TAB(20) CR(I,1); CR(I,2)
3390    NEXT I
3395 SYSTEM"FORMS T":SYSTEM"AGAIN"
3400 RUN "MENURED"
4000 '
4010 '
4020 '
10000 'SUBRUTINA PARA MULTIPLICAR MATRICES CON NUMEROS COMPLEJOS
      (MULMATCO/BAS)
```

```
10010 'M=NUM DE RENGLONES 1a MATRIZ,N=NUM DE COLUMNAS 1a MATRIZ Y
      NUM DE RENGLONES 2a MATRIZ,L=NUM DE COLUMNAS 2a MATRIZ
10020 '3er INDICE 1=PARTE REAL,3er INDICE 2= PARTE IMAGINARIA
10030 'A es la 1a matriz, B es la 2a matriz y C es el producto A*B=C
10040   FOR I=1 TO M
10050           FOR J=1 TO L
10060           C(I,J,1)=0:C(I,J,2)=0
10070                   FOR K=1 TO N
10080                   C(I,J,1)=C(I,J,1)+A(I,K,1)*B(K,J,1)-
                        A(I,K,2)*B(K,J,2)
10090                   C(I,J,2)=C(I,J,2)+A(I,K,1)*B(K,J,2)+
                        A(I,K,2)*B(K,J,1)
10100                   NEXT K
10110           NEXT J
10120   NEXT I
10130 RETURN
15000 '
15010 '
15020 '
20000 '[SUBINVCO/BAS] Subrutina que efectua las operaciones para
      invertir una matriz compleja
20010 '
20020 'Inicializar
20030 DIM LR(N), LC(N), EM(2), TEMP(2)
20040   FOR I=1 TO N
20050     LR(I)=0:LC(I)=0'  LR(I)=Contador de renglon usado como
          pivote, LC(I)=Contador de columna usado como pivote
20060     NEXT I
20070 '
20080 'Generar la matriz identidad C(I,J)
20090     FOR I=1 TO N
20100         FOR J=1 TO N
20110         IF I=J THEN 20120ELSE 20130
20120         C(I,J,1)=1:C(I,J,2)=0:GOTO 20140
20130         C(I,J,1)=0:C(I,J,2)=0
20140         NEXT J
20150     NEXT I
20160 '
20170 'Iniciar operaciones en la matriz
20180 'EM=mayor elemento de A que se va a usar como pivote,
      EM(1)=parte real, EM(2)=parte imaginaria, PR=renglon
      del pivote, PC=columna del pivote
20190     FOR K=1 TO N
20200     EM(1)=0:EM(2)=0:PR=0:PC=0
20210 '
20220 'Localizar el mayor elemento de A que no haya sido usado como
      pivote
20230         FOR I=1 TO N
20240         IF LR(I)=I THEN 20300
20250             FOR J=1 TO N
20260             IF LC(J)=J THEN 20290
20270             IF SQR(EM(1)↑2+EM(2)↑2)>=SQR(A(I,J,1)↑2+A(I,J,2)↑2)
                  THEN 20290
20280             EM(1)=A(I,J,1):EM(2)=A(I,J,2):PR=I:PC=J
20290             NEXT J
20300         NEXT I
```

```
20310 '
20320 'Investigar si existe o no matriz inversa, DE=parametro que es
      cero si no hay inversa
20330    DE=SQR(EM(1)↑2+EM(2)↑2)
20340    IF DE <= EPS THEN RETURN
20350 '
20360 'Ver si el pivote esta o no en la diagonal
20370    IF PR=PC THEN 20500
20380 '
20390 'Intercambio de renglones para colocar el pivote en
       la diagonal, TEMP=variable temporal, TEMP(1)=parte real,
       TEMP(2)=parte imaginaria
20400       FOR I=1 TO N
20410       TEMP(1)=A(PR,I,1):TEMP(2)=A(PR,I,2)
20420       A(PR,I,1)=A(PC,I,1):A(PR,I,2)=A(PC,I,2)
20430       A(PC,I,1)=TEMP(1):A(PC,I,2)=TEMP(2)
20440       TEMP(1)=C(PR,I,1):TEMP(2)=C(PR,I,2)
20450       C(PR,I,1)=C(PC,I,1):C(PR,I,2)=C(PC,I,2)
20460       C(PC,I,1)=TEMP(1):C(PC,I,2)=TEMP(2)
20470       NEXT I
20480 '
20490 'Normalizar el pivote
20500       FOR I=1 TO N
20510       T=(A(PC,I,1)*EM(1)+A(PC,I,2)*EM(2))/(EM(1)↑2+EM(2)↑2)
20520       A(PC,I,2)=(A(PC,I,2)*EM(1)-A(PC,I,1)*EM(2))/(EM(1)
            ↑2+EM(2)↑2)
20530       A(PC,I,1) = T
20540       T=(C(PC,I,1)*EM(1)+C(PC,I,2)*EM(2))/(EM(1)↑2+EM(2)↑2)
20550       C(PC,I,2)=(C(PC,I,2)*EM(1)-C(PC,I,1)*EM(2))/(EM(1)↑2+
            EM(2)↑2)
20560       C(PC,I,1) = T
20570       NEXT I
20580 '
20590 'Hacer ceros arriba y abajo de la diagonal, en la columna del
      pivote
20600       FOR I=1 TO N
20610       IF I=PC THEN 20690
20620       TEMP(1)=A(I,PC,1):TEMP(2)=A(I,PC,2)
20630          FOR J=1 TO N
20640          A(I,J,1)=A(I,J,1)-TEMP(1)*A(PC,J,1)+TEMP(2)*A(PC,J,2)
20650          A(I,J,2)=A(I,J,2)-TEMP(2)*A(PC,J,1)-TEMP(1)*A(PC,J,2)
20660          C(I,J,1)=C(I,J,1)-TEMP(1)*C(PC,J,1)+TEMP(2)*C(PC,J,2)
20670          C(I,J,2)=C(I,J,2)-TEMP(2)*C(PC,J,1)-TEMP(1)*C(PC,J,2)
20680          NEXT J
20690       NEXT I
20700 '
20710 'Modificar contadores para el renglon y la columna usados como
      pivote
20720       LR(PC)=PC:LC(PC)=PC
20730       NEXT K
20740 RETURN
29000 '
29010 '
29020 '
30000 '[CORREC/MAL] SUBRUTINA PARA CORREGIR DATOS
```

```
30010 CLS:PRINT TAB(15) "CORRECION DE DATOS":PRINT:PRINT
30020 PRINT"1.- Matriz de mallas"
30030 PRINT"2.- Matriz de impedancias de rama"
30040 PRINT"3.- Vector de fuentes de voltaje"
30050 PRINT"4.- Vector de fuentes de corriente"
30060 PRINT"5.- Terminar las correciones":PRINT
30070 INPUT"ANOTE EL NUMERO DE LA OPCION DESEADA";IW
30080 ON IW GOTO 30100, 30180, 30260, 30330, 30090
30090 RETURN
30100 CLS:PRINT TAB(10) "CORRECIONES EN LA MATRIZ DE MALLAS":PRINT:
      PRINT
30110 PRINT"Para corregir un elemento, siga las instrucciones:"
30120 INPUT"Anote el numero del RENGLON";I
30130 INPUT"Anote el numero de la COLUMNA";J
30140 INPUT"Anote el valor correcto del elemento";Q(I,J,1):PRINT
30150 INPUT"SI DESEA HACER OTRA CORRECION EN LA *MATRIZ DE MALLAS*,
      ANOTE UN 1, SI NO, ANOTE UN CERO";IX
30160 IF IX=1 GOTO 30100
30170 GOTO 30010
30180 CLS:PRINT"CORRECCIONES EN LA MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE RAMA"
30190 PRINT"Para corregir un elemento siga las instrucciones:"
30200 INPUT"Anote el numero del RENGLON";I
30210 INPUT"Anote el numero de la COLUMNA";J
30220 INPUT"Ahora anote los valores correctos del elemento; la PARTE
      REAL y la PARTE IMAGINARIA, separadas por una coma...";
      Z(I,J,1),Z(I,J,2):PRINT
30230 INPUT"SI DESEA HACER OTRA CORRECION EN LA *MATRIZ DE
      IMPEDANCIAS DE RAMA*,ANOTE UN 1, SI NO, ANOTE UN CERO";IY
30240 IF IY=1 GOTO 30180
30250 GOTO 30010
30260 CLS:PRINT"CORRECCIONES EN EL VECTOR DE FUENTES DE VOLTAJE
      ":PRINT:PRINT
30270 PRINT"Para corregir un elemento siga las instrucciones:"
30280 INPUT"Anote el numero del renglon";I
30290 INPUT"Anote ahora los valores correctos del elemento,
      la PARTE REAL y la PARTE IMAGINARIA, separadas por una coma...
      ";FJ(I,1),FJ(I,2):PRINT
30300 INPUT"SI DESEA HACER OTRA CORRECION EN EL *VECTOR DE
      FUENTES DE VOLTAJE*, ANOTE UN 1, SI NO ANOTE UN CERO";JX
30310 IF JX=1 GOTO 30260
30320 GOTO 30010
30330 CLS:PRINT"CORRECCIONES EN EL VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE"
      :PRINT:PRINT
30340 PRINT"Para corregir un elemento siga las instrucciones:"
30350 INPUT"Anote el numero del RENGLON";I
30360 INPUT"Anote ahora los valores correctos del elemento,
      la PARTE REAL y la PARTE IMAGINARIA, separadas por una coma...
      ;FV(I,1),FV(I,2):PRINT
30370 INPUT"SI DESEA HACER OTRA CORRECION EN EL *VECTOR DE FUENTES
      DE CORRIENTE*, ANOTE UN 1, SI NO, ANOTE UN CERO";JY
30380 IF JY=1 GOTO 30330
30390 GOTO 30010
```

```
10 '[REDES3/IMP]  PROGRAMA PARA RESOLVER REDES ELECTRICAS USANDO
   EL METODO DE LAZOS  Y LISTA LOS RESULTADOS EN LA IMPRESORA
15 DEFINT I-P
300 CLS:INPUT "ANOTE EL NUMERO TOTAL DE NODOS DE LA RED";P
310 INPUT "AHORA ANOTE EL NUMERO DE ARISTAS";PA
320 PN = PA - P + 1
330 DIM Q(PN,PA,2),Z(PA,PA,2),FJ(PA,2), FV(PA,2), QT(PA,PN,2),
    A(PA,PA,2), B(PA,PA,2),C(PA,PA,2), ZI(PN,PN,2), CN(PN,2),
    TA(PN,PA,2), TB(PN,2), E(PN,2), VR(PA,2), CR(PA,2),
    TC(PA,2), ZN(PN,PN,2)
500 CLS:  PRINT CHR$(31)  "***** LECTURA DE DATOS *****":PRINT:PRINT
510 PRINT "Anote a continuacion los datos de la"
520 PRINT "red, segun los solicite la computadora"
530 PRINT
540 PRINT "Si comete algun error al proporcionar"
550 PRINT "los datos, podra corregirlo antes de "
560 PRINT "iniciar el proceso"
570 PRINT "Tome nota de los datos que desea"
580 PRINT "corregir."
690 FOR I = 1 TO 30000: NEXT I
695 PRINT CHR$(30)
700 '
710 '*******LECTURA DE DATOS*******
720 'Matriz de Lazos
730 PRINT:PRINT"A continuacion, la computadora va a solicitar
    los elementos de la matriz de       LAZOS"
740 PRINT:PRINT "Los pedira por renglon y es necesario proporcionar
    solamente la parte real, pues la imaginaria se tomara
    automaticamente como cero"
750     FOR I=1 TO PN
760             FOR J=1 TO PA
770             PRINT"B(";I;",";J;") = ";:INPUT Q(I,J,1)
780             Q(I,J,2) = 0
790             NEXT J
800     NEXT I
810 '
820 'Matriz de impedancias de rama
830 CLS:PRINT:PRINT"Ahora va a solicitar los elementos de la matriz
    de IMPEDANCIAS de rama, tambien los pedira por renglon, pero
    habra que dar la PARTE REAL y la PARTE IMAGINARIA, en ese orden,
    separadas por una coma"
840     FOR I=1 TO PA
850             FOR J=1 TO PA
860             PRINT"Zr(";I;",";J;") = ";:INPUT Z(I,J,1),Z(I,J,2)
870             NEXT J
880     NEXT I
890 '
900 'Vector de fuentes de voltaje
910 CLS:PRINT:PRINT"Proporcione ahora los elementos del vector de
    FUENTES DE VOLTAJE, dando tambien la PARTE REAL y la PARTE
    IMAGINARIA, separadas con una coma":PRINT
920     FOR I=1 TO PA
930     PRINT "Vf(";I;") = ";:INPUT FJ(I,1),FJ(I,2)
940     NEXT I
950 '
960 'Vector de fuentes de corriente
```

```
970 CLS:PRINT:PRINT"Corresponde ahora anotar los elementos del vect
    de FUENTES DE CORRIENTE, siguiendo las mismas consideraciones
    del caso anterior":PRINT
980     FOR I=1 TO PA
990     PRINT "Jf(";I;") = ";:INPUT FV(I,1),FV(I,2)
1000    NEXT I
1005 CLS:LINE INPUT "DESEA CORREGIR ALGUN DATO?  (SI/NO)..."; X$
1007 IF X$ = "SI" THEN GOSUB 30000
1010 '
1020 '****** IMPRIMIR LOS DATOS *******
1030 'Matriz de Lazos
1032 LPRINT TAB(30) "**** SISTEMA PARA ANALIZAR REDES ****"
    :LPRINT:LPRINT:LPRINT
1036 LPRINT TAB(45) "METODO DE LAZOS":LPRINT:LPRINT:LPRINT
1040 LPRINT TAB(15) "MATRIZ DE LAZOS"
1050    FOR I=1 TO PN
1060            FOR J=1 TO PA
1070            LPRINT Q(I,J,1);Q(I,J,2),
1080            NEXT J
1090    LPRINT
1100    NEXT I
1110 '
1120 LPRINT:'Matriz de Impedancias de rama
1130 LPRINT TAB(15) "MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE RAMA"
1140    FOR I=1 TO PA
1150            FOR J=1 TO PA
1160            LPRINT Z(I,J,1);Z(I,J,2),
1170            NEXT J
1180    LPRINT
1190    NEXT I
1200 '
1210 LPRINT:'Vector de fuentes de voltaje
1220 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE FUENTES DE VOLTAJE"
1230    FOR I=1 TO PA
1240    LPRINT TAB(20) FJ(I,1);FJ(I,2)
1250    NEXT I
1260 '
1270 LPRINT:'Vector de fuentes de corriente
1280 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE"
1290    FOR I=1 TO PA
1300    LPRINT TAB(20) FV(I,1);FV(I,2)
1310    NEXT I
1320 '
1330 '
1340 '***** INICIO DE LAS OPERACIONES *****
1350 '
1360 '**** CALCULO DE LA TRANSPUESTA DE LA MATRIZ DE INCIDENCIA ***
1365 'QT(I,J,K) = Elementos de la transpuesta de la matriz
     de incidencia
1370    FOR I=1 TO PN
1380            FOR J=1 TO PA
1390            QT(J,I,1) = Q(I,J,1)
1400            QT(J,I,2) = Q(I,J,2)
1410            NEXT J
1420    NEXT I
1430
```

```
1440 '*****CALCULO DE LA MATRIZ DE ADMITANCIAS DE NODOS*****
1450 M=PN:N=PA:L=PA
1460     FOR I=1 TO PN
1470              FOR J=1 TO PA
1480              A(I,J,1) = Q(I,J,1)
1490              A(I,J,2) = Q(I,J,2)
1500              NEXT J
1510     NEXT I
1520     FOR I=1 TO PA
1530              FOR J=1 TO PA
1540              B(I,J,1) = Z(I,J,1)
1550              B(I,J,2) = Z(I,J,2)
1560              NEXT J
1570     NEXT I
1580 GOSUB 10000
1590 'TA(I,J,K) = Elementos de la matriz producto de la
     multiplicacion de Q por Z
1600     FOR I=1 TO PN
1610              FOR J=1 TO PA
1620              TA(I,J,1) = C(I,J,1)
1630              TA(I,J,2) = C(I,J,2)
1640              NEXT J
1650     NEXT I
1660 M = PN:N = PA:L = PN
1670     FOR I=1 TO PN
1680              FOR J=1 TO PA
1690              A(I,J,1) = TA(I,J,1)
1700              A(I,J,2) = TA(I,J,2)
1710              NEXT J
1720     NEXT I
1730     FOR I=1 TO PA
1740              FOR J=1 TO PN
1750              B(I,J,1) = QT(I,J,1)
1760              B(I,J,2) = QT(I,J,2)
1770              NEXT J
1780     NEXT I
1790 GOSUB 10000
1800 'ZN(I,J,K) = Elementos de la matriz de admitancias de nodos
1810     FOR I=1 TO PN
1820              FOR J=1 TO PN
1830              ZN(I,J,1) = C(I,J,1)
1840              ZN(I,J,2) = C(I,J,2)
1850              NEXT J
1860     NEXT I
1870 '
1880 '** CALCULO DE LA INVERSA DE LA MATRIZ DE ADMITANCIAS DE NODOS
1890 N = PN
1900     FOR I=1 TO PN
1910              FOR J=1 TO PN
1920              A(I,J,1) = ZN(I,J,1)
1930              A(I,J,2) = ZN(I,J,2)
1940              NEXT J
1950     NEXT I
1960 GOSUB 20000
1970 IF DE > EPS THEN 2000
```

```
1980 CLS:PRINT
     " > NO EXISTE LA INVERSA DE LA MATRIZ DE ADMITANCIAS DE NODOS <
1990 RUN "MENURED"
1995 'ZI(I,J,K) = Elemento de la inversa de la matriz de
      admitancias de nodos
2000    FOR I=1 TO PN
2010            FOR J=1 TO PN
2020            ZI(I,J,1) = C(I,J,1)
2030            ZI(I,J,2) = C(I,J,2)
2040            NEXT J
2050    NEXT I
2060 '
2070 '***** CALCULAR EL VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE DE NODOS ****
2080 'CN(I,K) = Elementos del vector de fuentes de corriente de nod
2090 M = PN:N = PA: L = 1
2100    FOR I=1 TO PN
2110            FOR J=1 TO PA
2120            A(I,J,1) = TA(I,J,1)
2130            A(I,J,2) = TA(I,J,2)
2140            NEXT J
2150    NEXT I
2160    FOR I=1 TO PA
2170    B(I,1,1) = FV(I,1)
2180    B(I,1,2) = FV(I,2)
2190    NEXT I
2200 GOSUB 10000
2210    FOR I=1 TO PN
2220    TB(I,1) = C(I,1,1)
2230    TB(I,2) = C(I,1,2)
2240    NEXT I
2250 'TB(I,K) = Elementos del vector producto de las matrices Q,
.    Z y FV
2260 M = PN : N = PA : L = 1
2270    FOR I=1 TO PN
2280            FOR J=1 TO PA
2290            A(I,J,1) = Q(I,J,1)
2300            A(I,J,2) = Q(I,J,2)
2310            NEXT J
2320    NEXT I
2330    FOR I=1 TO PA
2340    B(I,1,1) = FJ(I,1)
2350    B(I,1,2) = FJ(I,2)
2360    NEXT I
2370 GOSUB 10000
2380    FOR I=1 TO PN
2390    CN(I,1) = TB(I,1) - C(I,1,1)
2400    CN(I,2) = TB(I,2) - C(I,1,2)
2410    NEXT I
2420 '
2430 '***** CALCULO DEL VECTOR DE TENSIONES EN LOS NODOS *****
2440 'E(I,K) = Elementos del vector de tensiones en los nodos
2450 M = PN : N = PN : L = 1
2460    FOR I=1 TO PN
2470            FOR J=1 TO PN
2480            A(I,J,1) = ZI(I,J,1)
2490            A(I,J,2) = ZI(I,J,2)
```

```
2500              NEXT J
2510     NEXT I
2520     FOR I=1 TO PN
2530     B(I,1,1) = CN(I,1)
2540     B(I,1,2) = CN(I,2)
2550     NEXT I
2560 GOSUB 10000
2570     FOR I=1 TO PN
2580     E(I,1) = C(I,1,1)
2590     E(I,2) = C(I,1,2)
2600     NEXT I
2605
2610 '***** CALCULO DEL VECTOR DE VOLTAJES EN LAS RAMAS *****
2620 'VR(I,K) = Elementos del vector de voltajes en las ramas
2630 M = PA : N = PN : L = 1
2640     FOR I=1 TO PA
2650              FOR J=1 TO PN
2660              A(I,J,1) = QT(I,J,1)
2670              A(I,J,2) = QT(I,J,2)
2680              NEXT J
2690     NEXT I
2700     FOR I=1 TO PN
2710     B(I,1,1) = E(I,1)
2720     B(I,1,2) = E(I,2)
2730     NEXT I
2740 GOSUB 10000
2750     FOR I=1 TO PA
2760     VR(I,1) = C(I,1,1)
2770     VR(I,2) = C(I,1,2)
2780     NEXT I
2790 '
2800 '***** CALCULO DEL VECTOR DE CORRIENTES EN LAS RAMAS *****
2810 'CR(I,K) = Elementos del vector de corrientes en las ramas
2820 M = PA : N = PA : L = 1
2830     FOR I=1 TO PA
2840              FOR J=1 TO PA
2850              A(I,J,1) = Z(I,J,1)
2860              A(I,J,2) = Z(I,J,2)
2870              NEXT J
2880     NEXT I
2890     FOR I=1 TO PA
2900     B(I,1,1) = VR(I,1)
2910     B(I,1,2) = VR(I,2)
2920     NEXT I
2930 GOSUB 10000
2940 'TC(I,K) = Elementos del vector producto de [Z] por VR]
2950     FOR I=1 TO PA
2960     TC(I,1) = C(I,1,1)
2970     TC(I,2) = C(I,1,2)
2980     NEXT I
2990     FOR I=1 TO PA
3000     B(I,1,1) = FV(I,1)
3010     B(I,1,2) = FV(I,2)
3020     NEXT I
3030 GOSUB 10000
3040     FOR I=1 TO PA
```

```
3050     CR(I,1) = TC(I,1) + FJ(I,1) - C(I,1,1)
3060     CR(I,2) = TC(I,2) + FJ(I,2) - C(I,1,2)
3070     NEXT I
3080 '
3090 '
3100 '***** IMPRESION DE LOS RESULTADOS *****
3110 '
3120 'Matriz de impedancias de lazos
3125 LPRINT:LPRINT:LPRINT
3130 CLS:LPRINT TAB(15) "MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE LAZOS"
3140     FOR I=1 TO PN
3150              FOR J=1 TO PN
3160              LPRINT ZN(I,J,1); ZN(I,J,2),
3170              NEXT J
3180     LPRINT
3190     NEXT I
3200 LPRINT:'Vector de fuentes de tension de lazos
3210 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE FUENTES DE TENSION DE LAZOS"
3220     FOR I=1 TO PN
3230     LPRINT TAB(20) CN(I,1); CN(I,2)
3240     NEXT I
3250 LPRINT:'Vector de corrientes de lazo
3260 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE CORRIENTES DE LAZO"
3270     FOR I=1 TO PN
3280     LPRINT TAB(20) E(I,1); E(I,2)
3290     NEXT I
3300 LPRINT:'Vector de corrientes en las ramas
3310 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE CORRIENTES EN LAS RAMAS"
3320     FOR I=1 TO PA
3330     LPRINT TAB(20) VR(I,1); VR(I,2)
3340     NEXT I
3350 LPRINT:'Vector de voltajes en las ramas
3360 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE VOLTAJES EN LAS RAMAS"
3370     FOR I=1 TO PA
3380     LPRINT TAB(20) CR(I,1); CR(I,2)
3390     NEXT I
3395 SYSTEM"FORMS T":SYSTEM"AGAIN"
3400 RUN "MENURED"
4000 '
4010 '
4020 '
10000 'SUBRUTINA PARA MULTIPLICAR MATRICES CON NUMEROS
       COMPLEJOS (MULMATCO/BAS)
10010 'M=NUM DE RENGLONES 1a MATRIZ,N=NUM DE COLUMNAS 1a MATRIZ
      Y NUM DE RENGLONES 2a MATRIZ,L=NUM DE COLUMNAS 2a MATRIZ
10020 '3er INDICE 1=PARTE REAL,3er INDICE 2= PARTE IMAGINARIA
10030 'A es la 1a matriz, B es la 2a matriz y C es el producto A*B=(
10040   FOR I=1 TO M
10050             FOR J=1 TO L
10060             C(I,J,1)=0:C(I,J,2)=0
10070                       FOR K=1 TO N
10080                       C(I,J,1)=C(I,J,1)+A(I,K,1)*B(K,J,1)
                            -A(I,K,2)*B(K,J,2)
10090                       C(I,J,2)=C(I,J,2)+A(I,K,1)*B(K,J,2)
                            +A(I,K,2)*B(K,J,1)
```

```
10100                    NEXT K
10110               NEXT J
10120     NEXT I
10130 RETURN
15000 '
15010 '
15020 '
20000 '[SUBINVCO/BAS]  Subrutina que efectua las operaciones para
       invertir una matriz compleja
20010 '
20020 'Inicializar
20030 DIM LR(N), LC(N), EM(2), TEMP(2)
20040     FOR I=1 TO N
20050       LR(I)=0:LC(I)=0'  LR(I)=Contador de renglon usado
            como pivote, LC(I)=Contador de columna usado como pivote
20060       NEXT I
20070 '
20080 'Generar la matriz identidad C(I,J)
20090       FOR I=1 TO N
20100          FOR J=1 TO N
20110          IF I=J THEN 20120ELSE 20130
20120          C(I,J,1)=1:C(I,J,2)=0:GOTO 20140
20130          C(I,J,1)=0:C(I,J,2)=0
20140          NEXT J
20150       NEXT I
20160 '
20170 'Iniciar operaciones en la matriz
20180 'EM=mayor elemento de A que se va a usar como pivote,
      EM(1)=parte real, EM(2)=parte imaginaria, PR=renglon del
      pivote, PC=columna del pivote
20190       FOR K=1 TO N
20200       EM(1)=0:EM(2)=0:PR=0:PC=0
20210 '
20220 'Localizar el mayor elemento de A que no haya sido usado
      como pivote
20230          FOR I=1 TO N
20240          IF LR(I)=I THEN 20300
20250             FOR J=1 TO N
20260             IF LC(J)=J THEN 20290
20270             IF SQR(EM(1)↑2+EM(2)↑2)>=SQR(A(I,J,1)↑2+A(I,J,2)↑2)
                  THEN 20290
20280             EM(1)=A(I,J,1):EM(2)=A(I,J,2):PR=I:PC=J
20290             NEXT J
20300          NEXT I
20310 '
20320 'Investigar si existe o no matriz inversa, DE=parametro que
      es cero si no hay inversa
20330       DE=SQR(EM(1)↑2+EM(2)↑2)
20340       IF DE <= EPS THEN RETURN
20350 '
20360 'Ver si el pivote esta o no en la diagonal
20370       IF PR=PC THEN 20500
20380 '
20390 'Intercambio de renglones para colocar el pivote en la
      diagonal, TEMP=variable temporal, TEMP(1)=parte real,
      TEMP(2)=parte imaginaria
```

```
20400        FOR I=1 TO N
20410        TEMP(1)=A(PR,I,1):TEMP(2)=A(PR,I,2)
20420        A(PR,I,1)=A(PC,I,1):A(PR,I,2)=A(PC,I,2)
20430        A(PC,I,1)=TEMP(1):A(PC,I,2)=TEMP(2)
20440        TEMP(1)=C(PR,I,1):TEMP(2)=C(PR,I,2)
20450        C(PR,I,1)=C(PC,I,1):C(PR,I,2)=C(PC,I,2)
20460        C(PC,I,1)=TEMP(1):C(PC,I,2)=TEMP(2)
20470        NEXT I
20480 '
20490 'Normalizar el pivote
20500        FOR I=1 TO N
20510        T=(A(PC,I,1)*EM(1)+A(PC,I,2)*EM(2))/(EM(1)↑2+EM(2)↑2)
20520        A(PC,I,2)=(A(PC,I,2)*EM(1)-A(PC,I,1)*EM(2))/(EM(1)↑2
    +EM(2)↑2)
20530        A(PC,I,1) = T
20540        T=(C(PC,I,1)*EM(1)+C(PC,I,2)*EM(2))/(EM(1)↑2+EM(2)↑2)
20550        C(PC,I,2)=(C(PC,I,2)*EM(1)-C(PC,I,1)*EM(2))/(EM(1)↑2
                    +EM(2)↑2)
20560        C(PC,I,1) = T
20570        NEXT I
20580 '
20590 'Hacer ceros arriba y abajo de la diagonal, en la columna del
    pivote
20600        FOR I=1 TO N
20610        IF I=PC THEN 20690
20620        TEMP(1)=A(I,PC,1):TEMP(2)=A(I,PC,2)
20630           FOR J=1 TO N
20640           A(I,J,1)=A(I,J,1)-TEMP(1)*A(PC,J,1)+TEMP(2)*A(PC,J,2)
20650           A(I,J,2)=A(I,J,2)-TEMP(2)*A(PC,J,1)-TEMP(1)*A(PC,J,2)
20660           C(I,J,1)=C(I,J,1)-TEMP(1)*C(PC,J,1)+TEMP(2)*C(PC,J,2)
20670           C(I,J,2)=C(I,J,2)-TEMP(2)*C(PC,J,1)-TEMP(1)*C(PC,J,2)
20680           NEXT J
20690        NEXT I
20700 '
20710 'Modificar contadores para el renglon y la columna usados como
    pivote
20720        LR(PC)=PC:LC(PC)=PC
20730        NEXT K
20740 RETURN
29000 '
29010 '
29020 '
30000 '[CORREC/MAL] SUBRUTINA PARA CORREGIR DATOS
30010 CLS:PRINT TAB(15) "CORRECION DE DATOS":PRINT:PRINT
30020 PRINT"1.- Matriz de lazos"
30030 PRINT"2.- Matriz de impedancias de rama"
30040 PRINT"3.- Vector de fuentes de voltaje"
30050 PRINT"4.- Vector de fuentes de corriente"
30060 PRINT"5.- Terminar las correciones":PRINT
30070 INPUT"ANOTE EL NUMERO DE LA OPCION DESEADA";IW
30080 ON IW GOTO 30100, 30180, 30260, 30330, 30090
30090 RETURN
30100 CLS:PRINT TAB(10) "CORRECIONES EN LA MATRIZ DE LAZOS"
    :PRINT:PRINT
30110 PRINT"Para corregir un elemento, siga las instrucciones:"
30120 INPUT"Anote el numero del RENGLON";I
```

```
30130 INPUT"Anote el numero de la COLUMNA";J
30140 INPUT"Anote el valor correcto del elemento";Q(I,J,1):PRINT
30150 INPUT"SI DESEA HACER OTRA CORRECION EN LA *MATRIZ DE LAZOS*,
      ANOTE UN 1, SI NO, ANOTE UN CERO";IX
30160 IF IX=1 GOTO 30100
30170 GOTO 30010
30180 CLS:PRINT"CORRECCIONES EN LA MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE RAMA"
30190 PRINT"Para corregir un elemento siga las instrucciones:"
30200 INPUT"Anote el numero del RENGLON";I
30210 INPUT"Anote el numero de la COLUMNA";J
30220 INPUT"Ahora anote los valores correctos del elemento;
      la PARTE REAL y la PARTE IMAGINARIA, separadas por una coma...
      Z(I,J,1),Z(I,J,2):PRINT
30230 INPUT"SI DESEA HACER OTRA CORRECION EN LA
      *MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE RAMA*,
      ANOTE UN 1, SI NO, ANOTE UN CERO";IY
30240 IF IY=1 GOTO 30180
30250 GOTO 30010
30260 CLS:PRINT"CORRECCIONES EN EL VECTOR DE FUENTES DE VOLTAJE"
      :PRINT:PRINT
30270 PRINT"Para corregir un elemento siga las instrucciones:"
30280 INPUT"Anote el numero del renglon";I
30290 INPUT"Anote ahora los valores correctos del elemento,
      la PARTE REAL y la PARTE IMAGINARIA, separadas por una coma...
      FJ(I,1),FJ(I,2):PRINT
30300 INPUT"SI DESEA HACER OTRA CORRECION EN EL
      *VECTOR DE FUENTES DE VOLTAJE*,
      ANOTE UN 1, SI NO ANOTE UN CERO";JX
30310 IF JX=1 GOTO 30260
30320 GOTO 30010
30330 CLS:PRINT"CORRECCIONES EN EL VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE"
      :PRINT:PRINT
30340 PRINT"Para corregir un elemento siga las instrucciones:"
30350 INPUT"Anote el numero del RENGLON";I
30360 INPUT"Anote ahora los valores correctos del elemento,
      la PARTE REAL y la PARTE IMAGINARIA, separadas por una coma...
      FV(I,1),FV(I,2):PRINT
30370 INPUT "SI DESEA HACER OTRA CORRECION EN EL
      *VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE*,
      ANOTE UN 1, SI NO, ANOTE UN CERO";JY
30380 IF JY=1 GOTO 30330
30390 GOTO 30010


   10 '[REDES4/IMP]  PROGRAMA PARA RESOLVER REDES ELECTRICAS USANDO EL
      METODO DE SECCIONES DE CORTE     LISTA LOS RESULTADOS EN LA
      IMPRESORA
   15 DEFINT I-P
  300 CLS:INPUT "ANOTE EL NUMERO TOTAL DE NODOS DE LA RED";P
  310 INPUT "AHORA ANOTE EL NUMERO DE ARISTAS";PA
  320 PN = P - 1
  330 DIM Q(PN,PA,2),Z(PA,PA,2),FJ(PA,2), FV(PA,2), QT(PA,PN,2),
      A(PA,PA,2), B(PA,PA,2),C(PA,PA,2), ZI(PN,PN,2), CN(PN,2),
      TA(PN,PA,2), TB(PN,2), E(PN,2), VR(PA,2), CR(PA,2),
      TC(PA,2), ZN(PN,PN,2)
```

```
500 CLS: PRINT CHR$(31) "****** LECTURA DE DATOS ******":PRINT:PRINT
510 PRINT "Anote a continuacion los datos de la"
520 PRINT "red, segun los solicite la computadora"
530 PRINT
540 PRINT "Si comete algun error al proporcionar"
550 PRINT "los datos, podra corregirlo antes de"
560 PRINT "iniciar el proceso."
570 PRINT "Tome nota de los datos que desee"
580 PRINT "corregir."
590 FOR I = 1   TO  30000 : NEXT I
600 PRINT CHR$(30)
700 '
710 '*******LECTURA DE DATOS*******
720 'Matriz de Secciones de Corte
730 PRINT:PRINT"A continuacion, la computadora va a solicitar
    los elementos de la matriz de      SECCIONES DE CORTE"
740 PRINT:PRINT "Los pedira por renglon y es necesario proporcionar
    solamente la parte real, pues la imaginaria se tomara
    automaticamente como cero"
750     FOR I=1 TO PN
760             FOR J=1 TO PA
770             PRINT"Q(";I;",";J;") = ";:INPUT Q(I,J,1)
780             Q(I,J,2) = 0
790             NEXT J
800     NEXT I
810 '
820 'Matriz de admitancias de rama
830 CLS:PRINT:PRINT"Ahora va a solicitar los elementos de la matriz
    de ADMITANCIAS de rama, tambien los pedira por renglon, pero
    habra que dar la PARTE REAL y la PARTE IMAGINARIA, en ese orden,
    separadas por una coma"
840     FOR I=1 TO PA
850             FOR J=1 TO PA
860             PRINT"Yr(";I;",";J;") = ";:INPUT Z(I,J,1),Z(I,J,2)
870             NEXT J
880     NEXT I
890 '
900 'Vector de fuentes de corriente
910 CLS:PRINT:PRINT"Proporcione ahora los elementos del vector de
    FUENTES DE CORRIENTE          dando tambien la PARTE REAL y
    la PARTE IMAGINARIA, separadas con una coma":PRINT
920     FOR I=1 TO PA
930     PRINT "Jf(";I;") = ";:INPUT FJ(I,1),FJ(I,2)
940     NEXT I
950 '
960 'Vector de fuentes de voltaje
970 CLS:PRINT:PRINT"Corresponde ahora anotar los elementos del
    vector de FUENTES DE VOLTAJE, siguiendo las mismas
    consideraciones del caso anterior":PRINT
980     FOR I=1 TO PA
990     PRINT "Vf(";I;") = ";:INPUT FV(I,1),FV(I,2)
1000    NEXT I
1005 CLS:LINE INPUT "DESEA CORREGIR ALGUN DATO?  (SI/NO)...";X$
1007 IF X$ = "SI" THEN GOSUB 30000
1010 '
```

```
1020 '****** IMPRIMIR LOS DATOS *******
1030 'Matriz de Secciones de Corte
1032 LPRINT TAB(30) "*** SISTEMA PARA ANALIZAR REDES ***":
     LPRINT:LPRINT:LPRINT
1036 LPRINT TAB(40) "METODO DE SECCIONES DE CORTE":LPRINT:LPRINT:
     LPRINT
1040 LPRINT TAB(15) "MATRIZ DE SECCIONES DE CORTE"
1050    FOR I=1 TO PN
1060            FOR J=1 TO PA
1070            LPRINT Q(I,J,1);Q(I,J,2),
1080            NEXT J
1090    LPRINT
1100    NEXT I
1110 '
1120 LPRINT:'Matriz de Admitancias de rama
1130 LPRINT TAB(15) "MATRIZ DE ADMITANCIAS DE RAMA"
1140    FOR I=1 TO PA
1150            FOR J=1 TO PA
1160            LPRINT Z(I,J,1);Z(I,J,2),
1170            NEXT J
1180    LPRINT
1190    NEXT I
1200 '
1210 LPRINT:'Vector de fuentes de corriente
1220 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE"
1230    FOR I=1 TO PA
1240    LPRINT TAB(20) FJ(I,1);FJ(I,2)
1250    NEXT I
1260 '
1270 LPRINT:'Vector de fuentes de voltaje
1280 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE FUENTES DE VOLTAJE"
1290    FOR I=1 TO PA
1300    LPRINT TAB(20) FV(I,1);FV(I,2)
1310    NEXT I
1320 '
1330 '
1340 '***** INICIO DE LAS OPERACIONES *****
1350 '
1360 '** CALCULO DE LA TRANSPUESTA DE LA MATRIZ DE INCIDENCIA **
1365 'QT(I,J,K) = Elementos de la transpuesta de la matriz de
     incidencia
1370    FOR I=1 TO PN
1380            FOR J=1 TO PA
1390            QT(J,I,1) = Q(I,J,1)
1400            QT(J,I,2) = Q(I,J,2)
1410            NEXT J
1420    NEXT I
1430 '
1440 '*****CALCULO DE LA MATRIZ DE ADMITANCIAS DE NODOS*****
1450 M=PN:N=PA:L=PA
1460    FOR I=1 TO PN
1470            FOR J=1 TO PA
1480            A(I,J,1) = Q(I,J,1)
1490          . A(I,J,2) = Q(I,J,2)
1500            NEXT J
1510    NEXT I
```

```
1520     FOR I=1 TO PA
1530              FOR J=1 TO PA
1540              B(I,J,1) = Z(I,J,1)
1550              B(I,J,2) = Z(I,J,2)
1560              NEXT J
1570     NEXT I
1580 GOSUB 10000
1590 'TA(I,J,K) = Elementos de la matriz producto de la
      multiplicacion de Q por Z
1600     FOR I=1 TO PN
1610              FOR J=1 TO PA
1620              TA(I,J,1) = C(I,J,1)
1630              TA(I,J,2) = C(I,J,2)
1640              NEXT J
1650     NEXT I
1660 M = PN:N = PA:L = PN
1670     FOR I=1 TO PN
1680              FOR J=1 TO PA
1690              A(I,J,1) = TA(I,J,1)
1700              A(I,J,2) = TA(I,J,2)
1710              NEXT J
1720     NEXT I
1730     FOR I=1 TO PA
1740              FOR J=1 TO PN
1750              B(I,J,1) = QT(I,J,1)
1760              B(I,J,2) = QT(I,J,2)
1770              NEXT J
1780     NEXT I
1790 GOSUB 10000
1800 'ZN(I,J,K) = Elementos de la matriz de admitancias de nodos
1810     FOR I=1 TO PN
1820              FOR J=1 TO PN
1830              ZN(I,J,1) = C(I,J,1)
1840              ZN(I,J,2) = C(I,J,2)
1850              NEXT J
1860     NEXT I
1870 '
1880 '* CALCULO DE LA INVERSA DE LA MATRIZ DE ADMITANCIAS DE NODOS*
1890 N = PN
1900     FOR I=1 TO PN
1910              FOR J=1 TO PN
1920              A(I,J,1) = ZN(I,J,1)
1930              A(I,J,2) = ZN(I,J,2)
1940              NEXT J
1950     NEXT I
1960 GOSUB 20000
1970 IF DE > EPS THEN 2000
1980 CLS:PRINT ">NO EXISTE LA INVERSA DE LA MATRIZ DE
                 ADMITANCIAS DE NODOS<"
1990 RUN "MENURED"
1995 'ZI(I,J,K) = Elemento de la inversa de la matriz de admitancias
2000     FOR I=1 TO PN
2010              FOR J=1 TO PN
2020              ZI(I,J,1) = C(I,J,1)
2030              ZI(I,J,2) = C(I,J,2)
2040              NEXT J
```

```
2050     NEXT I
2060 '
2070 '*** CALCULAR EL VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE DE NODO ***
2080 'CN(I,K) = Elementos del vector de fuentes de corriente
      de nodos
2090 M = PN:N = PA: L = 1
2100     FOR I=1 TO PN
2110              FOR J=1 TO PA
2120              A(I,J,1) = TA(I,J,1)
2130              A(I,J,2) = TA(I,J,2)
2140              NEXT J
2150     NEXT I
2160     FOR I=1 TO PA
2170     B(I,1,1) = FV(I,1)
2180     B(I,1,2) = FV(I,2)
2190     NEXT I
2200 GOSUB 10000
2210     FOR I=1 TO PN
2220     TB(I,1) = C(I,1,1)
2230     TB(I,2) = C(I,1,2)
2240     NEXT I
2250 'TB(I,K) = Elementos del vector producto de las matrices
      Q, Z y FV
2260 M = PN : N = PA : L = 1
2270     FOR I=1 TO PN
2280              FOR J=1 TO PA
2290              A(I,J,1) = Q(I,J,1)
2300              A(I,J,2) = Q(I,J,2)
2310              NEXT J
2320     NEXT I
2330     FOR I=1 TO PA
2340     B(I,1,1) = FJ(I,1)
2350     B(I,1,2) = FJ(I,2)
2360     NEXT I
2370 GOSUB 10000
2380     FOR I=1 TO PN
2390     CN(I,1) = TB(I,1) - C(I,1,1)
2400     CN(I,2) = TB(I,2) - C(I,1,2)
2410     NEXT I
2420
2430 '***** CALCULO DEL VECTOR DE TENSIONES EN LOS NODOS *****
2440 'E(I,K) = Elementos del vector de tensiones en los nodos
2450 M = PN : N = PN : L = 1
2460     FOR I=1 TO PN
2470              FOR J=1 TO PN
2480              A(I,J,1) = ZI(I,J,1)
2490              A(I,J,2) = ZI(I,J,2)
2500              NEXT J
2510     NEXT I
2520     FOR I=1 TO PN
2530     B(I,1,1) = CN(I,1)
2540     B(I,1,2) = CN(I,2)
2550     NEXT I
2560 GOSUB 10000
2570     FOR I=1 TO PN
2580     E(I,1) = C(I,1,1)
```

```
2590     E(I,2) = C(I,1,2)
2600     NEXT I
2610 '***** CALCULO DEL VECTOR DE VOLTAJES EN LAS RAMAS *****
2620 'VR(I,K) = Elementos del vector de voltajes en las ramas
2630 M = PA : N = PN : L = 1
2640     FOR I=1 TO PA
2650              FOR J=1 TO PN
2660              A(I,J,1) = QT(I,J,1)
2670              A(I,J,2) = QT(I,J,2)
2680              NEXT J
2690     NEXT I
2700     FOR I=1 TO PN
2710     B(I,1,1) = E(I,1)
2720     B(I,1,2) = E(I,2)
2730     NEXT I
2740 GOSUB 10000
2750     FOR I=1 TO PA
2760     VR(I,1) = C(I,1,1)
2770     VR(I,2) = C(I,1,2)
2780     NEXT I
2790 '
2800 '***** CALCULO DEL VECTOR DE CORRIENTES EN LAS RAMAS *****
2810 'CR(I,K) = Elementos del vector de corrientes en las ramas
2820 M = PA : N = PA : L = 1
2830     FOR I=1 TO PA
2840              FOR J=1 TO PA
2850              A(I,J,1) = Z(I,J,1)
2860              A(I,J,2) = Z(I,J,2)
2870              NEXT J
2880     NEXT I
2890     FOR I=1 TO PA
2900     B(I,1,1) = VR(I,1)
2910     B(I,1,2) = VR(I,2)
2920     NEXT I
2930 GOSUB 10000
2940 'TC(I,K) = Elementos del vector producto de [Z] por VR]
2950     FOR I=1 TO PA
2960     TC(I,1) = C(I,1,1)
2970     TC(I,2) = C(I,1,2)
2980     NEXT I
2990     FOR I=1 TO PA
3000     B(I,1,1) = FV(I,1)
3010     B(I,1,2) = FV(I,2)
3020     NEXT I
3030 GOSUB 10000
3040     FOR I=1 TO PA
3050     CR(I,1) = TC(I,1) + FJ(I,1) - C(I,1,1)
3060     CR(I,2) = TC(I,2) + FJ(I,2) - C(I,1,2)
3070     NEXT I
3080 '
3090 '
3100 '***** IMPRESION DE LOS RESULTADOS *****
3110 '
3120 'Matriz de admitancias de secciones de corte
3125 LPRINT:LPRINT:LPRINT
```

```
3130 CLS:LPRINT TAB(15) "MATRIZ DE ADMITANCIAS DE SECCIONES
                         DE CORTE"
3140    FOR I=1 TO PN
3150            FOR J=1 TO PN
3160            LPRINT ZN(I,J,1); ZN(I,J,2),
3170            NEXT J
3180    LPRINT
3190    NEXT I
3200 LPRINT:'Vector de fuentes de corriente de secciones de corte
3210 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE DE SECCIONES
                     DE CORTE"
3220    FOR I=1 TO PN
3230    LPRINT TAB(20) CN(I,1); CN(I,2)
3240    NEXT I
3250 LPRINT:'Vector de voltajes en las ramas del arbol
3260 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE VOLTAJES EN LAS RAMAS DEL ARBOL"
3270    FOR I=1 TO PN
3280    LPRINT TAB(20) E(I,1); E(I,2)
3290    NEXT I
3300 LPRINT:'Vector de voltajes en las ramas
3310 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE VOLTAJES EN LAS RAMAS"
3320    FOR I=1 TO PA
3330    LPRINT TAB(20) VR(I,1); VR(I,2)
3340    NEXT I
3350 LPRINT:'Vector de corrientes en las ramas
3360 LPRINT TAB(15) "VECTOR DE CORRIENTES EN LAS RAMAS"
3370    FOR I=1 TO PA
3380    LPRINT TAB(20) CR(I,1); CR(I,2)
3390    NEXT I
3395 SYSTEM"FORMS T":SYSTEM"AGAIN"
3400 RUN "MENURED"
4000 '
4010 '
4020 '
10000 'SUBRUTINA PARA MULTIPLICAR MATRICES CON NUMEROS
       COMPLEJOS (MULMATCO/BAS)
10010 'M=NUM DE RENGLONES 1a MATRIZ,N=NUM DE COLUMNAS 1a MATRIZ
       Y NUM DE RENGLONES 2a MATRIZ,L=NUM DE COLUMNAS 2a MATRIZ
10020 '3er INDICE 1=PARTE REAL,3er.INDICE 2= PARTE IMAGINARIA
10030 'A es la 1a matriz, B es la 2a matriz y C es el producto A*B=C
10040   FOR I=1 TO M
10050           FOR J=1 TO L
10060           C(I,J,1)=0:C(I,J,2)=0
10070                   FOR K=1 TO N
10080                   C(I,J,1)=C(I,J,1)+A(I,K,1)*B(K,J,1)
                        -A(I,K,2)*B(K,J,2)
10090                   C(I,J,2)=C(I,J,2)+A(I,K,1)*B(K,J,2)
                        +A(I,K,2)*B(K,J,1)
10100                   NEXT K
10110           NEXT J
10120   NEXT I
10130 RETURN
15000 '
15010 '
15020 '
```

```
20000 '[SUBINVCO/BAS]  Subrutina que efectua las operaciones
                       para invertir una matriz compleja
20010 '
20020 'Inicializar
20030 DIM LR(N), LC(N), EM(2), TEMP(2)
20040   FOR I=1 TO N
20050    LR(I)=0:LC(I)=0'  LR(I)=Contador de renglon usado como
                           pivote, LC(I)=Contador de columna
                           usado como pivote
20060    NEXT I
20070 '
20080 'Generar la matriz identidad C(I,J)
20090    FOR I=1 TO N
20100       FOR J=1 TO N
20110       IF I=J THEN 20120ELSE 20130
20120       C(I,J,1)=1:C(I,J,2)=0:GOTO 20140

20130       C(I,J,1)=0:C(I,J,2)=0
20140       NEXT J
20150    NEXT I
20160 '
20170 'Iniciar operaciones en la matriz
20180 'EM=mayor elemento de A que se va a usar como pivote,
      EM(1)=parte real, EM(2)=parte imaginaria, PR=renglon del
      pivote, PC=columna del pivote
20190   FOR K=1 TO N
20200   EM(1)=0:EM(2)=0:PR=0:PC=0
20210 '
20220 'Localizar el mayor elemento de A que no haya sido usado
      como pivote
20230       FOR I=1 TO N
20240       IF LR(I)=I THEN 20300
20250          FOR J=1 TO N
20260          IF LC(J)=J THEN 20290
20270          IF SQR(EM(1)↑2+EM(2)↑2)>=SQR(A(I,J,1)↑2+A(I,J,2)↑2)

       THEN 20290
20280          EM(1)=A(I,J,1):EM(2)=A(I,J,2):PR=I:PC=J
20290          NEXT J
20300       NEXT I
20310 '
20320 'Investigar si existe o no matriz inversa, DE=parametro que
      es cero si no hay inversa
20330    DE=SQR(EM(1)↑2+EM(2)↑2)
20340    IF DE <= EPS THEN RETURN
20350 '
20360 'Ver si el pivote esta o no en la diagonal
20370    IF PR=PC THEN 20500
20380 '
20390 'Intercambio de renglones para colocar el pivote en la
      diagonal, TEMP=variable temporal, TEMP(1)=parte real,
      TEMP(2)=parte imaginaria
20400       FOR I=1 TO N
20410       TEMP(1)=A(PR,I,1):TEMP(2)=A(PR,I,2)
20420       A(PR,I,1)=A(PC,I,1):A(PR,I,2)=A(PC,I,2)
20430       A(PC,I,1)=TEMP(1):A(PC,I,2)=TEMP(2)
```

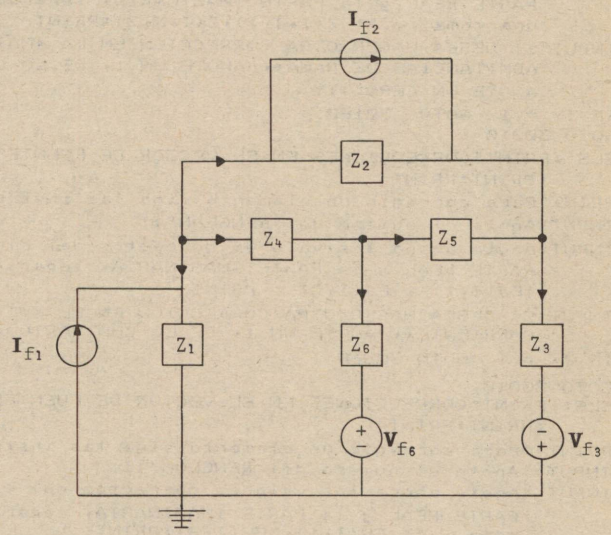
```
20440        TEMP(1)=C(PR,I,1):TEMP(2)=C(PR,I,2)
20450        C(PR,I,1)=C(PC,I,1):C(PR,I,2)=C(PC,I,2)
20460        C(PC,I,1)=TEMP(1):C(PC,I,2)=TEMP(2)
20470        NEXT I
20480 '
20490 'Normalizar el pivote
20500        FOR I=1 TO N
20510        T=(A(PC,I,1)*EM(1)+A(PC,I,2)*EM(2))/(EM(1)↑2+EM(2)↑2)
20520        A(PC,I,2)=(A(PC,I,2)*EM(1)-A(PC,I,1)*EM(2))/(EM(1)↑2
                  +EM(2)↑2)
20530        A(PC,I,1) = T
20540        T=(C(PC,I,1)*EM(1)+C(PC,I,2)*EM(2))/(EM(1)↑2+EM(2)↑2)
20550        C(PC,I,2)=(C(PC,I,2)*EM(1)-C(PC,I,1)*EM(2))/(EM(1)↑2
             +EM(2)↑2)
20560        C(PC,I,1) = T
20570        NEXT I
20580 '
20590 'Hacer ceros arriba y abajo de la diagonal, en la
      columna del pivote
20600        FOR I=1 TO N
20610        IF I=PC THEN 20690
20620        TEMP(1)=A(I,PC,1):TEMP(2)=A(I,PC,2)
20630           FOR J=1 TO N
20640           A(I,J,1)=A(I,J,1)-TEMP(1)*A(PC,J,1)+TEMP(2)*A(PC,J,2)
20650           A(I,J,2)=A(I,J,2)-TEMP(2)*A(PC,J,1)-TEMP(1)*A(PC,J,2)
20660           C(I,J,1)=C(I,J,1)-TEMP(1)*C(PC,J,1)+TEMP(2)*C(PC,J,2)
20670           C(I,J,2)=C(I,J,2)-TEMP(2)*C(PC,J,1)-TEMP(1)*C(PC,J,2)
20680           NEXT J
20690        NEXT I
20700 '
20710 'Modificar contadores para el renglon y la columna usados
      como pivote
20720        LR(PC)=PC:LC(PC)=PC
20730        NEXT K
20740 RETURN
29000 '
29010 '
29020 '
30000  '[ CORREC/MAL ] SUBRUTINA PARA CORREGIR DATOS
30010 CLS:PRINT TAB(15) "CORRECCION DE DATOS":PRINT:PRINT
30020 PRINT "1.- Matriz de secciones de corte"
30030 PRINT "2.- Matriz de admitancias de rama"
30040 PRINT "3.- Vector de fuentes de corriente"
30050 PRINT "4.- Vector de fuentes de voltaje"
30060 PRINT "5.- Terminar las correcciones":PRINT
30070 INPUT"ANOTE EL NUMERO DE LA OPCION DESEADA"; IW
30080 ON IW GOTO 30100,30180,30260,30330,30090
30090 RETURN
30100 CLS: PRINT TAB(10)  "CORRECCIONES EN LA MATRIZ DE
                          SECCIONES DE CORTE":PRINT:PRINT
30110 PRINT"Para corregir un elemento, siga las instrucciones:"
30120 INPUT"Anote el numero del RENGLON";I
30130 INPUT"Anote el numero de la COLUMNA";J
30140 INPUT"Anote el valor correcto del elemento";Q(I,J,1):PRINT
```

```
30150 INPUT"SI DESEA HACER OTRA CORRECCION EN LA *MATRIZ DE
           SECCIONES DE CORTE*, ANOTE UN UNO, DE LO CONTRARIO
           ANOTE UN CERO";IX
30160 IF IX = 1 GOTO 30100
30170 GOTO 30010
30180 CLS:PRINT"CORRECCIONES EN LA MATRIZ DE ADMITANCIAS DE RAMA"
30190 PRINT"Para corregir un elemento siga las instrucciones:"
30200 INPUT"Anote el numero del RENGLON";I
30210 INPUT"Anote el numero de la COLUMNA";J
30220 INPUT"Ahora anote los valores correctos del elemento; la
           PARTE REAL y la PARTE IMAGINARIA, separadas por
           una coma ..."; Z(I,J,1),Z(I,J,2):PRINT
30230 INPUT"SI DESEA HACER OTRA CORRECCION EN LA *MATRIZ DE
           ADMITANCIAS DE RAMA*, ANOTE UN 1, DE LO CONTRARIO
           ANOTE UN CERO";IY
30240 IF IY = 1  GOTO  30180
30250 GOTO 30010
30260 CLS :PRINT"CORRECCIONES EN EL VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE"
          :PRINT:PRINT
30270 PRINT"Para corregir un elemento siga las instrucciones:"
30280 INPUT"Anote el numero del RENGLON";I
30290 INPUT"Anote ahora los valores correctos del elemento; la
           PARTE REAL y la PARTE IMAGINARIA, separadas por una coma
           ;FJ(I,1) , FJ(I,2) : PRINT
30300 INPUT"SI DESEA HACER OTRA CORRECCION EN EL *VECTOR DE FUENTES
           CORRIENTE*, ANOTE UN 1, DE LO CONTRARIO ANOTE UN CERO";J
30310 IF JX = 1  GOTO 30260
30320 GOTO 30010
30330 CLS: PRINT"CORRECCIONES EN EL VECTOR DE FUENTES DE VOLTAJE"
          :PRINT:PRINT
30340 PRINT "Para corregir un elemento siga las instrucciones:"
30350 INPUT "Anote el numero del RENGLON";I
30360 INPUT "Anote ahora los valores correctos del elemento; la
            PARTE REAL y la PARTE IMAGINARIA, separadas por una
            coma..."; FV(I,1), FV(I,2):PRINT
30370 INPUT "SI DESEA HACER OTRA CORRECCION EN EL *VECTOR DE
            FUENTES DE VOLTAJE*, ANOTE UN 1, DE LO CONTRARIO
            ANOTE UN CERO";JY
30380 IF JY = 1  GOTO  30330
30390 GOTO 30010
```

Con el propósito de ilustrar el empleo del paquete de programas, a continuación se presenta un ejemplo, resuelto por los cuatro métodos. Esto incluye los resultados impresos por la computadora.

VII Ejemplo

Resolver la red eléctrica de la figura, usando los métodos de nodos mallas, lazos y secciones de corte.



$Z_1 = 1 + j0\ \Omega$

$Z_2 = 4 + j5\ \Omega$

$Z_3 = 3 - j2\ \Omega$

$Z_4 = 2 - j1\ \Omega$

$Z_5 = 0 + j6\ \Omega$

$Z_6 = 2 + j4\ \Omega$

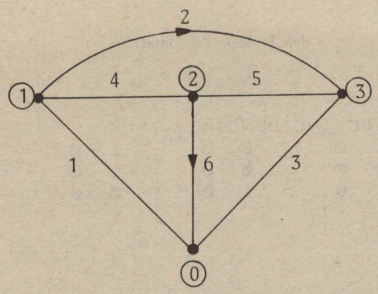
$I_{f1} = 1 + j1$ A

$I_{f2} = 2 + j1$ A

$I_{f3} = 13 + j14$ V

$I_{f6} = 12 + j15$ V

METODO DE NODOS



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_r = \begin{bmatrix} 1+j0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.09-j0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.23+j0.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4+j0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0-j0.16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1-j0.2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} -(1+j1) \\ +(2+j1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(13+j14) \\ 0 \\ 0 \\ +(12+j15) \end{bmatrix}$$

********* SISTEMA PARA ANALIZAR REDES *********

METODO DE NODOS

MATRIZ DE INCIDENCIA

1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	1	0
0	0	-1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0

MATRIZ DE ADMITANCIAS DE RAMA

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	.097	-.121	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	.23	.153	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	.4	.2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-.166	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.1	-.2

VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE

-1	-1
2	1
0	0
0	0
0	0
0	0

VECTOR DE FUENTES DE VOLTAJE

0	0
0	0
-13	-14
0	0
0	0
12	15

MATRIZ DE ADMITANCIAS DE NODOS

1.497	.079	-.4 -.2	-.097 .121
-.4 -.2		.5 -.166	0 .166
-.097	.121	0 .166	.327 -.134

VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE DE NODOS

```
    -1   Ø
     4.2  -.9
     1.152 -4.209
```

VECTOR DE TENSIONES EN LOS NODOS

```
     .638712 -1.53536
     6.02533 -3.14817
     7.15596 -13.6897
```

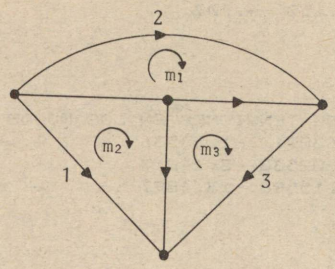
VECTOR DE VOLTAJES EN LAS RAMAS

```
     .638712 -1.53536
    -6.51724  12.1543
     7.15596 -13.6897
    -5.38662  1.61281
    -1.13062  10.5415
     6.02533 -3.14817
```

VECTOR DE CORRIENTES EN LAS RAMAS

```
    -.361288 -2.53536
     2.8[illegible]5  2.96756
     4.50839  3.15524
    -2.47721 -.4322
     1.74989  .187683
    -4.2271 -.619884
```

METODO DE MALLAS



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_r = \begin{bmatrix} 1+j0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4+j5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-j2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-j1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0+j6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+j4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} -(1+j1) \\ +(2+j1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(13+j14) \\ 0 \\ 0 \\ +(12+j15) \end{bmatrix}$$

********** SISTEMA PARA ANALIZAR REDES **********

METODO DE MALLAS

MATRIZ DE MALLAS

0	0		1	0		0	0		-1	0		-1	0		0	0
-1	0		0	0		0	0		1	0		0	0		1	0
0	0		0	0		1	0		0	0		1	0		-1	0

MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE RAMA

1	0		0	0		0	0		0	0		0	0		0	0	
0	0		4	5		0	0		0	0		0	0		0	0	
0	0		0	0		3	-2		0	0		0	0		0	0	
0	0		0	0		0	0		2	-1		0	0		0	0	
0	0		0	0		0	0		0	0		0	6		0	0	
0	0		0	0		0	0		0	0		0	0		2	4	

VECTOR DE FUENTES DE VOLTAJE

0	0
0	0
-13	-14
0	0
0	0
12	15

VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE

-1	-1
2	1
0	0
0	0
0	0
0	0

MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE MALLAS

6	10		-2	1		0	-6	
-2	1		5	3		-2	-4	
0	-6		-2	-4		5	8	

VECTOR DE FUENTES DE TENSIÓN DE MALLAS

3	14
-11	-14
25	29

VECTOR DE CORRIENTES DE MALLA

2.84631	2.97969
.370386	2.54938
4.60214	3.1682

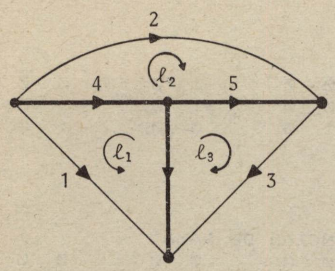
VECTOR DE CORRIENTES EN LAS RAMAS

-.370386	-2.54938
2.84631	2.97969
4.60214	3.1682
-2.47592	-.430312
1.75583	.18851
-4.23176	-.618822

VECTOR DE VOLTAJES EN LAS RAMAS

.629614	-1.54938
-6.51322	12.1503
7.14283	-13.6997
-5.38216	1.6153
-1.13106	10.535
6.01177	-3.16467

METODO DE LAZOS



$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Z_r = \begin{bmatrix} 1+j0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4+j5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-j2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-j1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0+j6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+j4 \end{bmatrix}$$

$$I_f = \begin{bmatrix} -(1+j1) \\ +(2+j1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad V_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(13+j14) \\ 0 \\ 0 \\ +(12+j15) \end{bmatrix}$$

**** SISTEMA PARA ANALIZAR REDES ****

METODO DE LAZOS

MATRIZ DE LAZOS

1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0
0	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	-1	0

MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE RAMA

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	4	5	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	3	-2	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	4

VECTOR DE FUENTES DE VOLTAJE

0	0
0	0
-13	-14
0	0
0	0
12	15

VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE

-1	-1
2	1
0	0
0	0
0	0
0	0

MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE LAZOS

5	3	2	-1	2	4
2	-1	6	10	0	-6
2	4	0	-6	5	8

VECTOR DE FUENTES DE TENSION DE LAZOS

```
      11   14
      3   14
      25   29
```

VECTOR DE CORRIENTES DE LAZO

```
     -.370386 -2.54938
      2.84631   2.97969
      4.60214   3.1682
```

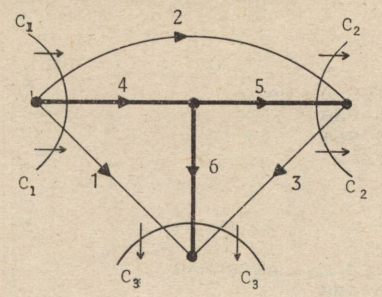
VECTOR DE CORRIENTES EN LAS RAMAS

```
     -.370386 -2.54938
      2.84631   2.97969
      4.60214   3.1682
     -2.47592 -.430312
      1.75583   .18851
     -4.23176 -.618822
```

VECTOR DE VOLTAJES EN LAS RAMAS

```
       .629614 -1.54938
     -6.51322   12.1503
      7.14283 -13.6997
     -5.38216   1.6153
     -1.13106   10.535
      6.01177 -3.16467
```

METODO SECCIONES DE CORTE



$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_r = \begin{bmatrix} 1+j0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.09-j0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.23+j0.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4+j0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0-j0.16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1-j0.2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} -(1+j1) \\ +(2+j1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(13+j14) \\ 0 \\ 0 \\ +(12+j15) \end{bmatrix}$$

********** SISTEMA PARA ANALIZAR REDES **********

METODO DE SECCIONES DE CORTE

MATRIZ DE SECCIONES DE CORTE

1	Ø	1	Ø	Ø	Ø	1	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
Ø	Ø	1	Ø	-1	Ø	Ø	Ø	1	Ø	Ø	Ø
1	Ø	Ø	Ø	1	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	1	Ø

MATRIZ DE ADMITANCIAS DE RAMA

1	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
Ø	Ø	.097	-.121	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
Ø	Ø	Ø	Ø	.23	.153	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	.4	.2	Ø	Ø	Ø	Ø
Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	-.166	Ø	Ø
Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	.1	-.2

VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE

-1	-1
2	1
Ø	Ø
Ø	Ø
Ø	Ø
Ø	Ø

VECTOR DE FUENTES DE VOLTAJE

Ø	Ø
Ø	Ø
-13	-14
Ø	Ø
Ø	Ø
12	15

MATRIZ DE ADMITANCIAS DE SECCIONES DE CORTE

1.497	.079	.097	-.121	1	Ø
.097	-.121	.327	-.134	-.23	-.153
1	Ø	-.23	-.153	1.33	-.047

VECTOR DE FUENTES DE CORRIENTE DE SECCIONES DE CORTE

```
-1   Ø
-1.152   4.209
 4.352  -5.109
```

VECTOR DE VOLTAJES EN LAS RAMAS DEL ARBOL

```
-5.38662   1.61281
-1.13062   10.5415
 6.02533  -3.14817
```

VECTOR DE VOLTAJES EN LAS RAMAS

```
 .638712  -1.53535
-6.51724   12.1543
 7.15596  -13.6897
-5.38662   1.61281
-1.13062   10.5415
 6.02533  -3.14817
```

VECTOR DE CORRIENTES EN LAS RAMAS

```
-.361289  -2.53535
 2.8385    2.96756
 4.58839   3.15524
-2.47721  -.4322
 1.74989   .187683
-4.2271   -.619883
```

A B R E V I A T U R A S

Amperes	A
farad	F
henry	H
hertz	Hz
mho	℧
ohm	Ω
factor de potencia	FP
radian	rad
raíz media cuadrática	rms
segundo	s
volt	V
volt ampere	VA
volt-ampere-reactivo	VAR
watt	W
volt eficaz	V_{rms}
ampere eficaz	A_{rms}

potencia promedio	P
potencia reactiva	Q
potencia aparente	S
potencia compleja	**S**

INDICE ANALITICO

Activa, potencia, 45, 48

Admitancia:
- definición, 25
- equivalente, 30, 31
- mutua, 163

Alternador trifásico:
- balanceado, 77
- en estrella, 75
- en delta, 85
- voltaje de un, 74

Amplitud de una senoide, 8

Angulo de fase, 8, 55

Arbol:
- propiedades, 134
- ramas, 134
- Argumento, 278

Capacitancia, 111

Capacitor:
- características de, 111
- impedancia del, 20
- relación fasorial para el, 18
- voltaje inicial del, 111

Carga:
- resistiva, 46
- reactiva, 47
- inductiva, 47, 55
- capacitiva, 47

Carga trifásica:
- balanceada, 87, 88
- desbalanceada, 97
- en delta, 88, 89
- en estrella, 87

Circuito:
- RLC en serie, 4
- puramente resistivo, 43, 155
- puramente reactivo, 41
- puramente inductivo, 42
- puramente capacitivo, 42
- en estado senoidal permanente, 1, 4

Circuito abierto, 116, 129, 131

Circuito trifásico:
- balanceado, 86, 87
- desbalanceado, 97
- diagrama unifiliar, 92, 95
- potencia en un, 91

Complejo conjugado, 52

Componente:
- resistiva de la impedancia, 22
- reactiva de la impedancia, 22
- real de la impedancia, 22
- imaginaria de la impedancia, 22

Condiciones iniciales:
- del inductor, 111
- del capacitor, 112

Conductancia, 25

Conexión:
- delta, 85
- estrella, 75

Conversión:
- estrella-delta, 93, 85
- delta-estrella, 93, 75

Corriente:
- sentido, 129
- inicial del inductor, 111

de malla, 180
de lazo, 217
de rama, 131, 144, 154
de línea, 85, 87, 90
de fase, 85, 96
instantánea, 38
senoidal, 8, 38, 43
continua, 43, 44
rms, 43, 44

Cortocircuito, 129, 131

Diagrama:
fasorial, 15, 16, 57
de Argand, 274
unifilar, 92, 95

Dominio:
del tiempo, 11, 14, 15, 16, 26, 40
de la frecuencia, 20, 24, 26, 40

Ecuación:
característica, 6
diferencial, 4, 5, 6

Ecuación matricial:
de nodos, 150, 151
de mallas, 184
de lazos fundamentales, 217
de secciones de corte fundamentales, 237

Eslabon, 134

Estado senoidal permanente, 1, 8

Euler, identidad de, 9

Fase:
ángulo de, 8, 9, 15
secuencia de, 74
diferencia, 39

Fasor:
diagrama, 15, 16
propiedades, 12
forma polar, 10
forma rectangular, 9, 10
corriente, 11, 15, 16
voltaje, 11, 15, 16
transformación, 11

Factor de potencia:
corrección, 57
ángulo de, 46, 49
adelantado, 47, 95
atrasado, 47

Forma rectangular de un número complejo, 274

Forma polar, 277

Forma de Euler, 282

Frecuencia:
angular, 8, 39
dominio de la, 20

Fuente de corriente:
dependiente, 166
independiente, 110, 202
real, 110
ideal, 113
transformación de, 108

Fuente de voltaje:
dependiente, 159
independiente, 110, 202
real, 110
ideal, 113, 114
transformación de, 108

Gráfica:

rama, 128
nodo, 128
orientada, 129, 130, 178
plana, 135, 178
no plana, 135
pivotada, 136
no pivotada, 136, 178

Identidad de Euler, 9

Impedancia:

definición, 20
equivalente, 21, 22, 23
del resistor, 20
del inductor, 20
del capacitor, 20
mutua, 158

Inductancia:

mutua, 158
propia, 158

Inductor:

característica del, 111
corriente inicial del, 111
impedancia del, 20
relación fasorial para el, 16

Kirchhoff:

ley de corrientes de, 86, 170
ley de voltajes de, 5, 147

Lazo fundamental:

formación, 212
sentido, 212
corriente de, 214
método de análisis por, 211

Línea:

corriente de, 85, 87, 90
voltaje de, 76, 78

Malla:

interna, 133
externa, 133
corriente de, 180
método de análisis por, 177
sentido, 178
plana, 135

Matriz:

de incidencia, 145, 152, 156
de incidencia reducida, 145
de incidencia traspuesta, 147
diagonal, 149, 155, 160
simétrica, 155, 157
de admitancia de rama, 149, 156
de admitancia de nodo, 150, 156
de conductancias, 153
de admitancias de secciones de corte fundamentales, 237
cuadrada, 183, 186
de mallas, reducida, 179
de mallas traspuesta, 181
de impedancia de malla, 184, 190
inversa, 154
de impedancia de rama, 186, 190
de lazos fundamentales, 213
de lazos fundamentales traspuestos, 215, 216
de impedancia de lazos fundamentales, 217
de secciones de corte fundamentales, 233
de secciones de corte fundamentales traspuesta, 235

Método breve:
de nodos, 162
de mallas, 197
Método sistemático:
de nodos, 162
de mallas, 184, 197
de lazos fundamentales, 217
de secciones de corte fundamentales, 231, 235
Neutro, voltaje al, 76
Nodo:
de referencia, 144
método de análisis por, 151
voltaje de, 146
ecuación matricial de, 150, 151
Número complejo:
conjugado 274
forma rectangular, 274
forma polar, 277
parte imaginaria, 9, 273
parte real, 9, 273
argumento, 278
módulo, 277
suma de, 275
sustracción de, 275
multiplicación de, 275, 280
división de, 275, 280
Número imaginario: 273
Particular, solución, 6
Perídodo, 39, 43
Plano complejo, 10
Polaridad de voltaje, 108, 129, 161
Potencia:
instantánea, 38, 42
promedio, 39, 42, 43, 44
real, 45, 46
aparente, 45, 46, 52
activa, 45, 48
pérdida de, 48, 50
reactica, 53, 54
triángulo de, 54, 55
Potencia compleja:
forma rectangular, 53
magnitud, 52
ángulo, 53
Rama, corriente de, 144
Rama general:
dos fuentes e impedancia, 181
dos fuentes y admitancia, 148
Rama equivalente:
fuente de voltaje e impedancia, 182
fuente de corriente y admitancia, 149
Reactancia:
inductiva, 23
capacitiva, 23
Reactiva, potencia, 53, 54
Relación fasorial:
para el resistor, 15
para el inductor, 16
para el capacitor, 18
Resistencia, 43, 44
Resistor, 87

Respuesta:
total, 4, 7
permanente, 4, 6, 8, 12
transitoria, 4, 5, 6, 8
natural, 4
forzada, 4

Sección de corte, definición, 135

Sección de corte fundamental:
formación, 232
sentido, 232
método de análisis por, 237

Senoide:
amplitud de, 9
valor eficaz de, 43, 44
valor promedio de, 39
valor máximo de, 39

Secuencia de fase:
positiva, 75
negativa, 75

Sistema trifásico:
balanceado, 86, 87
desbalanceado, 87

Solución de la ecuación diferencial:
homogénea, 5, 6
particular, 5, 6, 12, 13

Subgráfica:
definición, 132
degenerada, 132

Susceptancia, 25

Transformación:
fasor a senoide, 11
senoide a fasor, 11
estrella a delta, 93
delta a estrella, 93
fuente de corriente a fuente de voltaje, 108, 109
fuente de voltaje a fuente de corriente, 108, 149
fuente ideal a fuente real, 114

Trayectoria, 132

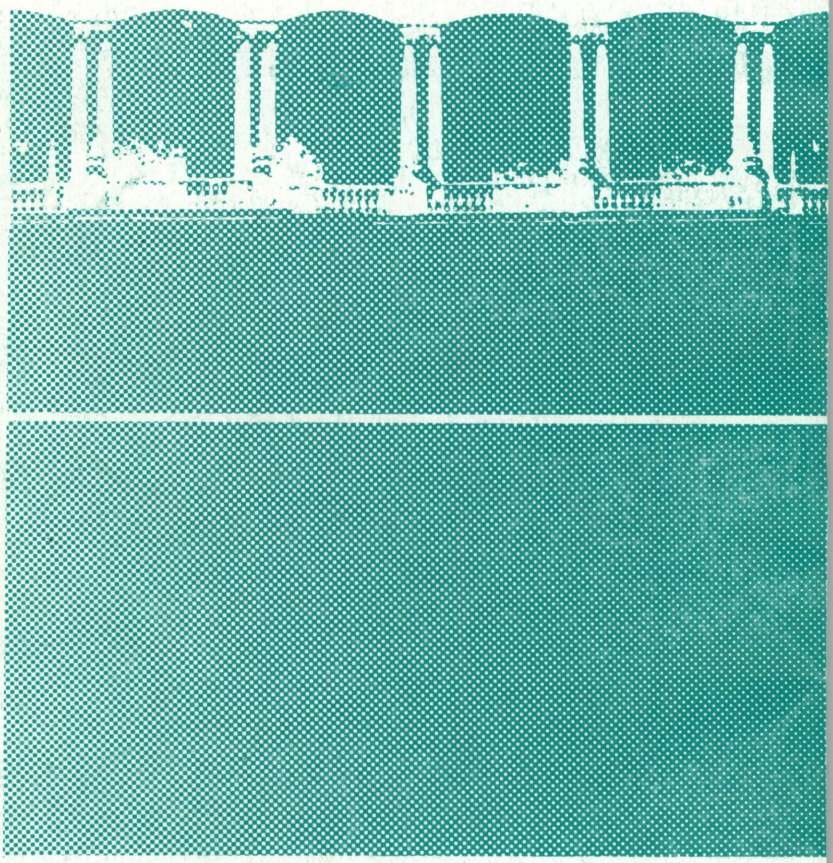
Unidad imaginaria, 273

Variable de una red:
corriente de malla, 183
corrientes de lazos fundamentales, 217
voltajes de nodo, 146
voltajes de ramas de árbol, 237

Vector:
de voltajes de rama, 147, 183
de corrientes de rama, 147, 183
de voltajes de nodo, 147
de fuentes de corriente de nodo, 149, 150
de fuentes de voltaje de malla, 184
de fuentes de corriente de malla, 184
de fuente de voltaje de lazo fundamental, 217
de fuente de corriente de lazo fundamental, 217
de corrientes de lazo fundamental, 215
de fuentes de corriente de secciones de corte fundamentales, 237

de fuentes de voltaje en secciones de corte fundamentales, 237
de voltajes de ramas del árbol, 234
Velocidad angular, 8, 9, 10
Voltajes:
caída de, 50
instantáneo senoidal, 38
valor eficaz de, 43, 44
valor máximo de, 8, 39
de línea, 76, 78
al neutro, 76
entre fases, 76
magnitud del, 8, 7, 148
inicial del capacitor, 111
de nodo, 146
de rama, 144, 154
de rama del árbol, 234, 235
Voltajes trifásicos:
digrama fasorial, 75, 79
diagrama triangular, 82

Impreso por la
Coordinación de Servicios Generales
a través de la Unidad de Difusión,
Departamento de Impresión.
El tiraje consta de 2,000 ejamplares
y se terminó de imprimir
en el mes de abril de 1990.



FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA