APUNTES DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS

Próspero García Márquez
Carlos de la Lanza Elton

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS APLICADAS

1983

Apuntes de Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias

PROSPERO GARCIA M.
CARLOS DE LA LANZA E.

FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

APUNTES DE ECUACIONES
DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS

P R O L O G O

Con el estudio del Cálculo Diferencial e Integral, iniciado por Newton y Leibniz a fines del siglo XVII, surgen los primeros conceptos relativos a las Ecuaciones Diferenciales. Estos conceptos fueron posteriormente desarrollados por los más connotados matemáticos europeos de los siglos XVIII y XIX, entre los que podemos mencionar a Euler, Lagrange, Laplace, Gauss y los Bernoulli.

En sus inicios, las ecuaciones diferenciales se emplearon para analizar problemas mecánicos y geométricos, extendiéndose posteriormente su campo de aplicación a todas las ramas de la física y, en los últimos años, a disciplinas tan diversas como la biología, la economía, la sociología y la fisiología.

De aparición más reciente son las ecuaciones en diferencias, aunque a mediados del siglo XIX ya existían tratados sobre el cálculo de diferencias finitas como el de George Boole. Sin embargo, el cálculo con funciones discretas y el estudio de las ecuaciones en diferencias han adquirido importancia relevante hasta la época actual.

Como el propio Boole lo señala, la relación entre los conceptos y métodos del cálculo de diferencias finitas y los del cálculo diferencial va, en algunos casos, mucho más allá de una mera analogía formal. El tratamiento de los conceptos básicos relativos a las ecuaciones diferenciales y a las ecuaciones en diferencias en una misma obra es, quizá, la característica más relevante de estos apuntes, cuyo objetivo es auxiliar a los estudiantes en el aprendizaje de los temas correspondientes al programa de la asignatura "Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias", que se imparte en la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M.

Aunque el estudiante encontrará aquí desarrollados todos los temas comprendidos en el programa de la asignatura, es de suma importancia que conozca otras fuentes de información y que no se limite a un solo tratamiento. Para ello, al final de la obra se recomienda una bibliografía básica cuya consulta se le sugiere.

Los primeros cuatro capítulos de este trabajo están basados en los "Apuntes de Matemáticas IV", los cuales fueron elaborados por un grupo de profesores que impartieron dicha asignatura. La adaptación de este material al programa vigente y la elaboración de los capítulos restantes fue realizada por los señores profesores

PROSPERO GARCIA MARQUEZ

y

CARLOS DE LA LANZA ELTON

a quienes expresamos nuestro reconocimiento por su valiosa participación, así como también a IRMA HINOJOSA FELIX por su colaboración en la adaptación pedagógica del material.

Agradeceremos a profesores y alumnos todas aquellas observaciones y sugerencias que nos hagan llegar a la Coordinación de la materia, las cuales nos servirán para mejorar futuras ediciones.

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS APLICADAS

CONTENIDO

CAPITULO IV. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

CAPITULO V. FUNCIONES DISCRETAS Y ECUACIONES EN DIFERENCIAS

CAPITULO VI. SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

CAPITULO VII. TRANSFORMADA GEOMETRICA

I N T R O D U C C I O N

Los presentes apuntes tratan el aspecto teórico de las ecuaciones diferenciales y de las ecuaciones en diferencias. Asimismo, se plantean algunas aplicaciones específicas, para que el estudiante pueda apreciar la relación que existe entre el campo de las matemáticas aplicadas y las ciencias físicas y de la ingeniería.

Para ayudar a comprender estas ecuaciones, se puede decir que la diferencia fundamental entre las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones en diferencias, radica en el tipo de función considerada; ya que en el primer caso se trabaja con funciones continuas y en el segundo caso con funciones discretas.

Múltiples problemas de significativa importancia en diversos campos del saber humano, requieren para su estudio de la elaboración de un modelo matemático que los represente. Estos modelos están constituidos generalmente por ecuaciones diferenciales o por ecuaciones en diferencias.

CAPITULO I ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

I.1 LA ECUACION DIFERENCIAL

Con el fin de establecer el concepto de ecuación diferencial, se considerará el siguiente problema:

Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0; considerando despreciable la resistencia del aire. Se desea obtener una expresión matemática que represente al desplazamiento del cuerpo en cualquier instante de tiempo.

La primera etapa para resolver el problema, consiste en establecer un modelo matemático del mismo. Por lo tanto, es necesario identificar a las variables que intervienen en el problema y relacionarlas por medio de leyes físicas.

El problema planteado es dinámico, en donde las variables involucradas son: el tiempo, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración. De éstas, el tiempo es una variable independiente y las otras son dependientes.

Para cada valor de tiempo "t", hay uno y sólo un valor del desplazamiento "y", por lo tanto se concluye que "y" es función de "t", esto es:

$$y = y(t)$$

El diagrama de cuerpo libre correspondiente se muestra en la figura I.1.

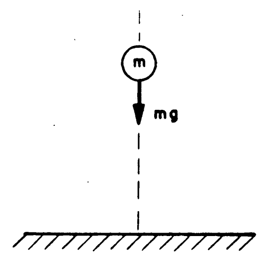


Figura I.1

El movimiento del cuerpo está regido por la segunda ley de Newton:

$$\Sigma Fy = ma \qquad \ldots (1)$$

del diagrama de cuerpo libre, se observa que la única fuerza externa que actúa sobre el cuerpo es el peso del mismo, ya que la fricción se considera despreciable, por lo tanto, la suma de fuerzas en la dirección vertical es:

$$\Sigma Fy = -mg$$

y sustituyendo en (1):

$$-mg = ma$$

de donde:

$$a = -g \qquad \ldots (2)$$

pero la aceleración puede expresarse en términos de la velocidad o del desplazamiento, y en cada caso la expresión (2) queda representada de la siguiente forma:

$$\frac{dv}{dt} = -g \qquad \ldots (3)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \qquad \ldots (4)$$

Cualesquiera de las expresiones (3) ó (4) representa el modelo matemático del problema, es decir, la abstracción del problema físico. Se puede observar que dichas expresiones son igualdades que contienen derivadas de la incógnita, ya sea de la velocidad o del desplazamiento, y que a diferencia de las ecuaciones algebraicas, dicha incógnita es una función y no una variable numérica. A expresiones de este tipo se les llama *ecuaciones diferenciales*.

Definición: Toda igualdad que relaciona a una función desconocida con su(s) variable(s) independiente(s) y su(s) derivada(s), se llama ecuación diferencial.

Otros ejemplos de ecuaciones diferenciales ligados a fenómenos físicos son los siguientes:

A) Oscilación de un péndulo de longitud L:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\,\text{sen}\,\theta = 0\ ; \qquad \theta = \theta(t) \qquad \ldots (5)$$

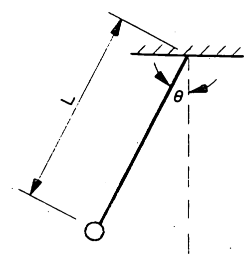


Figura I.2

B) Distribución de la temperatura en una placa:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0\ ; \qquad T = T(x,\ y) \qquad \ldots (6)$$

C) Ecuación de un circuito eléctrico con resistencia R, inductancia L y fuente de tensión $e(t)$ en serie:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e(t) \; ; \qquad i = i(t) \qquad \ldots (7)$$

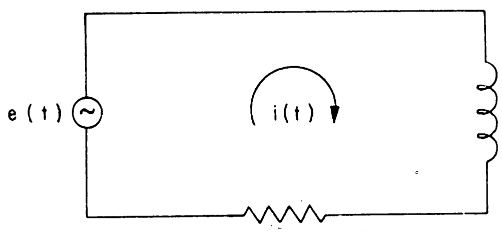


Figura I.3

D) Oscilación libre, con amortiguamiento de una masa suspendida de un resorte:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + h \frac{dy}{dt} + ky = 0 \; ; \qquad y = y(t) \qquad \ldots (8)$$

E) Ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0 \; ; \qquad \theta = \theta(x, y, z) \qquad \ldots (9)$$

Diversos fenómenos físicos se presentan en el campo de la ingeniería, éstos pueden ser modelados matemáticamente por medio de las ecuaciones diferenciales.

Todas las ecuaciones diferenciales presentadas hasta ahora, a excepción de las ecuaciones (6) y (9), contienen solamente derivadas ordinarias, debido a que sus incógnitas son funciones de una sola variable. A ecuaciones de este tipo se les llama *ecuaciones diferenciales ordinarias*.

Las ecuaciones (6) y (9) contienen derivadas parciales de la variable dependiente, la cual es función de dos o más variables. Todas las ecuaciones de este tipo se conocen con el nombre de *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales* o simplemente como *ecuaciones diferenciales parciales*.

NOTA: Un estudio más detallado de estas ecuaciones se presenta en el capítulo IV.

I.1.1 CONCEPTOS DE ORDEN Y GRADO

La forma general para representar las ecuaciones diferenciales ordinarias es:

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$$

donde "x" es la variable independiente, $y = y(x)$ la variable dependiente o incógnita y $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ sus derivadas ordinarias.

De los ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias dados anteriormente, se observa que en cada una de las ecuaciones (4), (5), (6) y (9) el orden máximo de las derivadas involucradas es dos, mientras que en las ecuaciones (7) y

(3), el orden máximo es uno. Las cuatro primeras ecuaciones citadas, se dice que son de segundo orden y las dos últimas son de primer orden.

Definición: El orden de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden que aparece en dicha ecuación.

Con el fin de establecer el concepto de grado en una ecuación diferencial ordinaria, considérese la siguiente ecuación:

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = \operatorname{sen} x$$

esta ecuación está expresada como un polinomio de grado tres en su primera derivada, que es la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación; por ello se dice que es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de tercer grado.

Definición: Si una ecuación diferencial ordinaria de orden "n" puede expresarse como un polinomio de grado "k" en la enésima derivada, se dice que es de grado "k" siempre y cuando "k" sea finito.

La ecuación:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

es de segundo orden y primer grado, y la ecuación:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y^3 = 5x$$

es de segundo orden y segundo grado.

En el caso de que la ecuación diferencial no pueda ser expresada como un polinomio de grado "k" en su derivada de mayor orden, entonces su grado no está definido, tal es el caso de la siguiente ecuación:

$$e^{y''} - xy' + y = 0$$

I.1.2 SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA

Definición: La solución de una ecuación diferencial ordinaria, es una función escalar de una variable escalar independiente, que sustituida en dicha ecuación, la transforma en una identidad.

En el problema del móvil lanzado verticalmente, se obtuvo como modelo matemático a la ecuación (3):

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

en donde la incógnita es la velocidad $v = v(t)$. Para determinar la velocidad a partir de la ecuación diferencial, se representa a ésta en forma diferencial:

$$dv = -gdt$$

y se integra en ambos miembros:

$$\int dv = -\int gdt$$

$$v = -gt + c \qquad \ldots (10)$$

donde "c" es una constante de integración y por lo mismo, esencial y arbitraria.

Derivando la expresión (10) y sustituyéndola en la ecuación diferencial (3), se llega a la identidad:

$$-g = -g$$

esto es, la función (10) satisface a la ecuación diferencial (3), y por consiguiente es su solución.

Como la velocidad es igual a la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo, esto es:

$$\frac{dy}{dt} = v$$

en el caso visto anteriormente, donde la velocidad está dada por $v = -gt + c$, se tiene:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + c$$

en forma diferencial:

$$dy = (-gt + c)\,dt$$

integrando ambos miembros:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d \qquad \ldots (11)$$

en donde "c" y "d" son constantes arbitrarias.

Sustituyendo la expresión (11) en la ecuación diferencial (4):

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

que representa también el modelo matemático del problema, se llega a la identidad:

$$-g = -g$$

esto es, la función (11) satisface a la ecuación diferencial (4), y por consiguiente es su solución.

Geométricamente la ecuación (10) representa una familia de rectas paralelas entre sí con pendiente igual a $-g$.

Cada una de estas rectas corresponde a un valor diferente de "c" y cada una de ellas satisface a la ecuación diferencial (3).

El enunciado del problema indica que el móvil es lanzado inicialmente con una velocidad v_0, es decir en $t = 0$, $v = v_0$, o bien $v(0) = v_0$. Considerando esta condición en la solución $v = -gt + c$:

$$v_0 = -g(0) + c$$

de donde $c = v_0$, por lo tanto, la solución del problema que satisface la condición inicial es:

$$v = -gt + v_0 \qquad \ldots (12)$$

la cual pertenece a la familia de rectas representada por la ecuación (10). (Véase figura I.4).

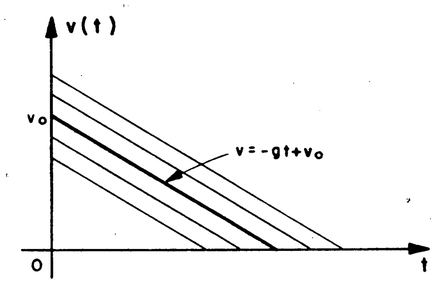


Figura I.4

Dado que la solución $v = -gt + v_0$, fue obtenida para el caso particular planteado, y por lo tanto ya no contiene a la constante arbitraria "c", se le llama *solución particular*. En cambio, la solución (10) que representa al conjunto de todas las soluciones particulares (una para cada valor de "c"), de la ecuación diferencial (3), se llama *solución general*.

Obsérvese que la ecuación diferencial (3) es de primer orden y que su solución general contiene solamente una constante arbitraria.

La solución general de la ecuación diferencial (4) es:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d$$

donde "c" y "d" son constantes arbitrarias. Esta solución representa a la familia de parábolas mostradas en la figura I.5. Cada una de las cuales es solución particular de la misma.

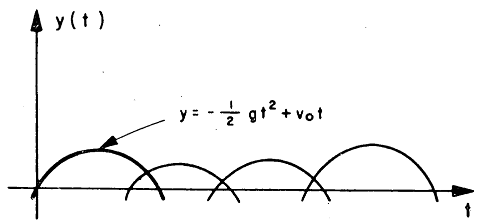


Figura I.5

En este problema, se establecen dos condiciones, en $t = 0$:

$$y = 0 \quad y \quad y' = v_0$$

considerando la primera condición en la ecuación (11), se tiene:

$$0 = -\frac{1}{2}g(0)^2 + c(0) + d$$

de donde $d = 0$.

Derivando la ecuación (11):

$$y' = -gt + c$$

en donde, con la segunda condición:

$$v_0 = -g(0) + c$$

se tiene que $c = v_0$, por lo tanto, la solución particular correspondiente es:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \qquad \ldots (13)$$

Como en el caso anterior, la solución particular se obtuvo de la solución general por medio de las condiciones del problema; además se puede observar que la ecuación (11) es la solución general de una ecuación diferencial de segundo orden y contiene dos constantes arbitrarias.

Definición: La solución general de una ecuación diferencial ordinaria de primer grado, es una función de una sola variable que contiene un número de constantes esenciales y arbitrarias igual al orden de la ecuación diferencial, y que sustituida en ella la transforma en una identidad.

Las soluciones particulares no contienen constantes arbitrarias. Sin embargo, algunas ecuaciones diferenciales tienen soluciones que, al igual que las particulares, no contienen constantes esenciales y arbitrarias, pero con la característica de que no se obtienen de la solución general.

NOTA: Tales soluciones se llaman soluciones singulares y no serán tratadas en estos apuntes.

Definición: Una solución particular de una ecuación diferencial ordinaria de orden "n" y primer grado, es una función de una sola variable que se obtiene de la solución general, valuando sus constantes esenciales y arbitrarias y que sustituida en la ecuación diferencial la transforma en una identidad.

Ejemplo I.1

Dada la ecuación diferencial:

$$y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$$

Determinar si cada una de las siguientes funciones es solución de la misma, y en caso afirmativo decir qué tipo de solución es:

a) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + x + 2$

b) $y = -2\, e^{x} + x + 2$

c) $y = e^{-x}$

Solución

a) Si al sustituir la función $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + x + 2$ en la ecuación diferencial, la transforma en una identidad, entonces la función sí es solución.

Derivando la función propuesta:

$$y' = c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x} + 1$$

$$y'' = c_1 e^{x} + 4c_2 e^{2x}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$(c_1 e^{x} + 4c_2 e^{2x}) - 3(c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x} + 1) + 2(c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + x + 2) = 2x + 1$$

simplificando:

$$(c_1 - 3c_1 + 2c_1) e^{x} + (4c_2 - 6c_2 + 2c_2) e^{2x} - 3 + 2x + 4 = 2x + 1$$

o sea:

$$2x + 1 = 2x + 1$$

por lo tanto, la función propuesta es solución de la ecuación diferencial. Como la solución tiene dos constantes esenciales y arbitrarias y la ecuación diferencial es de segundo orden y primer grado, se trata de la solución general.

b) Derivando la función $y = -2e^{x} + x + 2$:

$$y' = -2e^{x} + 1$$

$$y'' = -2e^{x}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$-2e^{x} - 3(-2e^{x} + 1) + 2(-2e^{x} + x + 2) = 2x + 1$$

simplificando:

$$(-2 + 6 - 4) e^{x} - 3 + 2x + 4 = 2x + 1$$

$$2x + 1 = 2x + 1$$

por lo tanto, la función propuesta es solución de la ecuación diferencial y como no contiene constantes arbitrarias, se trata de una solución particular, además ésta se obtiene de la solución general haciendo $c_1 = -2$ y $c_2 = 0$.

c) Derivando la función $y = e^{-x}$

$$y' = -e^{-x}$$

$$y'' = e^{-x}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$e^{-x} - 3(-e^{-x}) + 2e^{-x} = 2x + 1$$

de donde:

$$6e^{-x} \neq 2x + 1$$

por lo tanto, la función propuesta no es solución de la ecuación diferencial.

I.2 ECUACION DIFERENCIAL LINEAL

Una función $f(x, y)$ es lineal en "y" si para $y = c_1y_1 + c_2y_2$ se cumple:

$$f(x, c_1y_1 + c_2y_2) = c_1f(x, y_1) + c_2f(x, y_2)$$

Para una función con más variables, se tiene la siguiente definición de linealidad:

> Definición: Una ecuación diferencial ordinaria de orden "n" expresada como $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ es lineal, si y sólo si F es una función lineal en la variable dependiente y en sus derivadas.

Ejemplo I.2

Para saber si la ecuación (8):

$$my'' + hy' + ky = 0$$

es lineal en "y", se representa por medio de la siguiente función:

$$F(x, y, y', y'') = my'' + hy' + ky = 0$$

la ecuación será lineal si se cumple:

$$F(x, c_1y_1 + c_2y_2, c_1y_1' + c_2y_2', c_1y_1'' + c_2y_2'') = c_1F(x, y_1, y_1', y_1'') + c_2F(x, y_2, y_2', y_2'')$$

Verificando la linealidad de la ecuación:

$$F(x, c_1y_1 + c_2y_2, c_1y_1' + c_2y_2', c_1y_1'' + c_2y_2'') = m(c_1y_1'' + c_2y_2'') + h(c_1y_1' + c_2y_2') +$$

$$+ k(c_1y_1 + c_2y_2)$$

$$= c_1(my_1'' + hy_1' + ky_1) + c_2(my_2'' + hy_2' + ky_2)$$

$$= c_1F(x, y_1, y_1', y_1'') + c_2F(x, y_2, y_2', y_2'')$$

por lo tanto, la ecuación (8), es lineal.

Entonces, la ecuación:

$$\frac{d\theta}{dt} + t \operatorname{sen} \theta = 1$$

es no lineal, dado que sen θ es una función de la variable dependiente no lineal. En cambio, la ecuación:

$$\frac{d\theta}{dt} + \theta \text{ sen } t = 1$$

sí es lineal, ya que la función no lineal sen t es función de la variable independiente.

Las siguientes ecuaciones son no lineales:

$$(y')^2 + y \text{ sen } x = x$$

$$yy' + xy = 3x^2$$

$$y'' - 2y' = \text{Lny}$$

la primera por el término $(y')^2$, la segunda por el producto yy' y la tercera por la función Lny.

En general, la ecuación diferencial:

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

es lineal en "y" y en sus derivadas. Por ello la expresión más general de la ecuación diferencial lineal de orden "n" es la siguiente:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = Q(x)$$

esta ecuación lineal es de primer grado. En general, toda ecuación diferencial lineal es de primer grado. Lo inverso es falso; no toda ecuación diferencial de primer grado es lineal.

I.2.1 LA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

Con base en la definición de ecuación diferencial ordinaria lineal, descrita anteriormente y cuya forma general es:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = Q(x), \quad a_0(x) \neq 0$$

se puede establecer la forma general de la ecuación diferencial lineal de primer orden, con n = 1, esto es:

$$y' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, y = \frac{Q(x)}{a_0(x)}, \quad a_0(x) \neq 0$$

denominando:

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \quad \text{y} \quad q(x) = \frac{Q(x)}{a_0(x)}$$

entonces:

$$y' + P(x)y = q(x) \qquad \ldots (14)$$

Toda ecuación diferencial lineal de primer orden, tiene la forma expresada en la ecuación (14).

Para llegar a la definición de la ecuación diferencial homogénea y no homogénea se ilustrará por medio del siguiente ejemplo.

Supongamos que un hombre aborda un bote de motor en el muelle para hacer una travesía. El hombre y su bote pesan juntos 981 kg y el motor está diseñado para proporcionar al vehículo un empuje equivalente a una fuerza constante de 120 kg. El agua presenta una resistencia al movimiento que es directamente proporcional a la velocidad del bote, de tal forma que cuando la velocidad de éste es de 15 m/s, la resistencia del agua es equivalente a una fuerza de 25 kg. Lo que interesa es conocer la velocidad del bote durante su trayectoria.

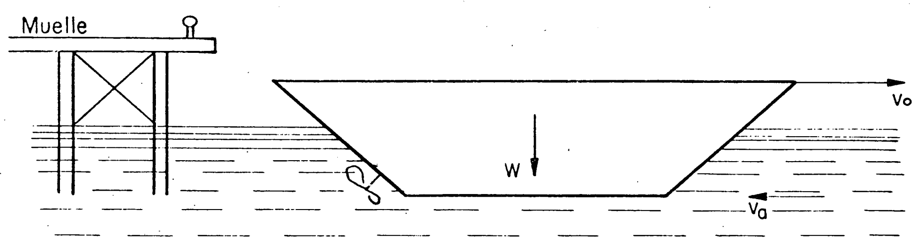


Figura I.6

El modelo matemático del problema se establece por medio de la segunda ley de Newton. La resultante F que actúa sobre el bote es la suma algebraica entre el empuje del motor y la resistencia que presenta el agua; esto es:

$$F = 120 - kv$$

Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene:

$$120 - kv = ma$$

Como la aceleración es la rapidez de cambio de velocidad con respecto al tiempo, entonces:

$$120 - kv = m \frac{dv}{dt} \qquad \ldots (15)$$

además, como el peso del hombre y del bote es de 981 kg, su masa es:

$$m = \frac{w}{g} = \frac{981}{9.81} = 100$$

cuando v = 15 m/s, la resistencia del agua es de 25 kg, por lo tanto:

$$k(15) = 25 \qquad \text{donde} \qquad k = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

sustituyendo los valores de "m" y "k" en la ecuación (15), se tiene:

$$120 - \frac{5}{3} v = 100 \frac{dv}{dt}$$

o bien:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{60} v = \frac{6}{5} \qquad \ldots (16)$$

Comparando (16) y (14) se observa que la ecuación (16) es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden con $P(t) = \frac{1}{60}$ y $q(t) = \frac{6}{5}$.

En cuanto al desplazamiento del bote se distinguen dos casos:

1) El bote se desplaza por efecto de su motor.

2) El bote se desplaza por efecto de una fuerza impulsiva aplicada en el tiempo t = 0.

En el caso (1), la fuerza que mueve al bote actúa durante todo el tiempo que dura el movimiento, es decir, existe una excitación permanente en el sistema. En el caso (2), la fuerza que provoca el desplazamiento se aplica instantáneamente y desaparece, es decir, no existe excitación permanente en el sistema.

El modelo correspondiente al caso (1) es precisamente la ecuación (16). En el caso (2), el movimiento está regido por la segunda ley de Newton, esto es, la resultante F que actúa sobre el bote, es tan solo la resistencia que presenta el agua al movimiento, ya que no existe excitación permanente en el sistema:

$$F = -kv$$

y por la segunda ley de Newton:

$$-kv = ma$$

sustituyendo los valores de "k" y "m" obtenidos para el caso (1);

$$-\frac{5}{3}v = 100\,a$$

como $a = \frac{dv}{dt}$, entonces:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{60}v = 0 \qquad \ldots (17)$$

Obsérvese que la única diferencia entre las ecuaciones (16) y (17) es el miembro derecho de ambas, ya que en la primera, éste es diferente de cero, y en la segunda es igual a cero; además la primera representa un problema con excitación permanente y la segunda un problema donde la excitación no es permanente. Esto conduce a distinguirlas llamándolas *ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea* y *ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea*.

En general toda ecuación diferencial ordinaria lineal de la forma:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = q(x)$$

se llama no homogénea y aquéllas de la forma:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\,y = 0$$

son llamadas homogéneas:

Como las ecuaciones (16) y (17) difieren solamente en el miembro derecho debido a la excitación, pero ambas corresponden al mismo problema, obsérvese que a partir de la ecuación (16), se obtiene la ecuación (17), simplemente eliminando la excitación permanente en el sistema. Para distinguir este hecho a la ecuación (17) se le llama *ecuación diferencial homogénea asociada* a (16).

En general toda ecuación ordinaria lineal de la forma:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_n(x)y = Q(x)$$

tiene asociada a ella una ecuación de la forma:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

la cual se conoce como *ecuación homogénea asociada*.

I.2.2 RESOLUCION DE LA ECUACION HOMOGENEA DE PRIMER ORDEN

Toda ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \qquad \ldots (18)$$

puede ser resuelta separando las variables e integrando, como se muestra a continuación:

$$\frac{dy}{y} = - P(x)\ dx$$

integrando:

$$\frac{dy}{y} = - \int P(x)\ dx$$

$$Lny = - \int P(x)dx + c_1$$

o bien:

$$y = e^{-\int P(x)dx + c_1}$$

$$y = c\ e^{-\int P(x)dx} \qquad \ldots (19)$$

la función (19) es la solución general de la ecuación homogénea (18).

Continuando con el problema planteado en el inciso I.2.1, se analizará el caso en el que el bote se mueve exclusivamente bajo el efecto de una fuerza impulsiva aplicada en $t = 0$, cuyo modelo matemático es la ecuación diferencial homogénea (17):

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{60} v = 0$$

separando las variables:

$$\frac{dv}{v} = - \frac{1}{60}\ dt$$

integrando ambos miembros:

$$Lnv + c_1 = - \frac{1}{60} t + c_2$$

o bien:

$$Lnv = - \frac{1}{60} t + c_3 \ ; \qquad c_3 = c_2 - c_1$$

el antilogaritmo en ambos miembros es:

$$v = e^{-\frac{1}{60}t + c_3}$$

$$v = e^{-\frac{1}{60}t}\ e^{c_3}$$

$$v = c\ e^{-\frac{1}{60}t} \qquad \ldots (20)$$

donde $c = e^{c_3}$.

La función (20) es la solución general de la ecuación (17).

Si la fuerza impulsiva aplicada al bote en $t = 0$, proporciona una velocidad inicial de 5 m/s, la solución particular del problema se obtiene de la solución general (20), valuando la constante arbitraria con la condición inicial:

$$v(0) = 5$$

sustituyendo la velocidad en (20) para $t = 0$:

$$5 = c\ e^{-\frac{1}{60}(0)}$$

de donde:

$$c = 5$$

por lo tanto, la solución particular del problema que satisface la condición inicial dada es:

$$v = 5\, e^{-\frac{1}{60}t} \qquad \ldots (21)$$

y su representación gráfica es:

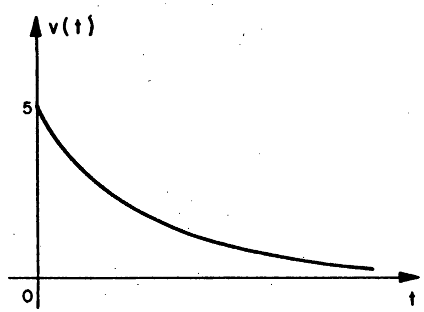


Figura I.7

I.2.3 RESOLUCION DE LA ECUACION NO HOMOGENEA DE PRIMER ORDEN

Sea la ecuación lineal no homogénea (14):

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = q(x)$$

como ya se demostró en el inciso anterior, la solución general de la ecuación homogénea asociada es la expresión (19):

$$y = c\, e^{-\int P(x)dx}$$

la solución de la ecuación (14) se forma a partir de la solución de la homogénea asociada, cambiando la constante arbitraria "c" por una función de la variable independiente g(x), esto es:

$$y = g(x)\; e^{-\int P(x)dx}$$

para que esta expresión sea solución de (14) la debe satisfacer, por lo tanto para obtener la función g(x) se sustituye la expresión anterior en la ecuación diferencial (14), esto es:

$$-g(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + \frac{dg(x)}{dx}\, e^{-\int P(x)dx} + P(x)g(x)e^{-\int P(x)dx} = q(x)$$

simplificando y despejando la derivada de g(x):

$$\frac{dg(x)}{dx} = q(x)e^{\int P(x)dx}$$

integrando:

$$g(x) = \int q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c$$

sustituyendo en la solución propuesta:

$$y = g(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$y = \left[\int q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right] e^{-\int P(x)dx}$$

$$y = c\; e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int q(x)e^{\int P(x)dx}dx \qquad \ldots (22)$$

Esta expresión es la solución general de la ecuación diferencial no homogénea (14). Como se observa, la solución (22) está formada por la suma de la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada más otro término, el cual se investigará a continuación.

La solución (22) se puede representar como:

$$y = y_h + y_p$$

donde:

$$y_h = c\, e^{-\int P(x)\,dx}$$

es la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada, y:

$$y_p = e^{-\int P(x)\,dx} \int q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx$$

es una solución particular de la ecuación no homogénea (14); porque al sustituirla en ésta, la transforma en una identidad, y además no contiene constantes esenciales y arbitrarias.

En el inciso anterior, se resolvió el problema planteado correspondiente al caso en el cual, el movimiento del bote se debe exclusivamente a una velocidad inicial producida por una fuerza impulsiva. Se resolverá ahora, el problema correspondiente al caso en el cual el bote se desplaza por la fuerza impulsora de su motor, y cuyo modelo matemático es la ecuación lineal no homogénea (16):

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{60} v = \frac{6}{5}$$

A partir de la solución de la ecuación homogénea asociada a (16):

$$v = c\, e^{-\frac{1}{60} t}$$

se cambia la constante "c" por una función de "t" y se representará con g(t), con lo cual se obtiene:

$$v(t) = g(t)\, e^{-\frac{1}{60} t} \qquad \ldots (23)$$

esta función se propone como solución de la ecuación (16).

Derivando la ecuación (23):

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{60} g(t)\, e^{-\frac{1}{60} t} + \frac{dg(t)}{dt} e^{-\frac{1}{60} t}$$

sustituyendo la solución propuesta (23) y su derivada en (16):

$$-\frac{1}{60} g(t)\, e^{-\frac{1}{60} t} + \frac{dg(t)}{dt} e^{-\frac{1}{60} t} + \frac{1}{60} g(t)\, e^{-\frac{1}{60} t} = \frac{6}{5}$$

de donde:

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{6}{5}\, e^{\frac{1}{60} t}$$

integrando:

$$\int dg(t) = \frac{6}{5} \int e^{\frac{1}{60} t}\, dt$$

$$g(t) = c + 72\, e^{\frac{1}{60} t}$$

esta función g(t) es la que permite que la solución propuesta (23), sea efectivamente solución de la ecuación (16), por lo tanto:

$$v = g(t)\ e^{-\frac{1}{60}t}$$

$$v = \left(c + 72\ e^{\frac{1}{60}t}\right)e^{-\frac{1}{60}t}$$

$$v = c\ e^{-\frac{1}{60}t} + 72 \qquad \ldots (24)$$

es la solución general de la ecuación no homogénea (16).

Como se puede observar de la solución general (24), en el lado derecho aparece la suma de dos términos, uno de esos términos es precisamente la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada. Entonces, se representa a la solución (24) de la siguiente forma:

$$v(t) = v_H(t) + v_p(t)$$

donde:

$$v_H(t) = c\ e^{-\frac{1}{60}t}$$

es la solución de la ecuación general homogénea asociada y:

$$v_p(t) = 72$$

es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea (16), ya que al sustituirla en dicha ecuación, ésta se satisface.

I.2.4 EL OPERADOR DIFERENCIAL

En el problema con el cual se inició este capítulo y cuyo modelo es:

$$v' + \frac{1}{60}v = \frac{6}{5}$$

o bien:

$$\frac{d}{dt}v + \frac{1}{60}v = \frac{6}{5};$$

recordando que $\frac{d}{dt} = D$, se tiene:

$$Dv + \frac{1}{60}v = \frac{6}{5} \qquad \ldots (25)$$

por otro lado, el operador diferencial D es una transformación lineal, es decir:

$$D(f_1(x) + f_2(x)) = Df_1(x) + Df_2(x)$$

$$D\alpha g(x) = \alpha Dg(x)$$

En general, cualquier operador de tipo D^n, n = 0,1,2,3 ... es una transformación lineal.

Se puede verificar que $a_0(x)D$ es también un operador lineal. En general $a_0(x)D^n$ es un operador lineal.

Por otro lado, el álgebra de transformaciones lineales, define que la suma de dos transformaciones lineales es también una transformación lineal; es decir, dados D^2 y D se tiene que $D^2 + D$ es un operador lineal.

La ecuación (16) puede escribirse como:

$$\left(D + \frac{1}{60} \right) v = \frac{6}{5}$$

También puede expresarse en términos del desplazamiento "x", es decir:

$$\frac{d^2}{dt^2} x + \frac{1}{60} \frac{d}{dt} x = \frac{6}{5} ;$$

empleando el operador D, se tiene:

$$D^2x + \frac{1}{60} Dx = \frac{6}{5}$$

o bien:

$$\left(D^2 + \frac{1}{60} D \right) x = \frac{6}{5} \qquad \ldots (26)$$

En general, ecuaciones diferenciales lineales de mayor orden pueden ser representadas de manera similar, como se observa en la siguiente ecuación:

$$y''' + 3y'' + 2y = \text{sen } x ; \qquad y = y(x)$$

su representación en términos del operador D es:

$$(D^3 + 3D^2 + 2)y = \text{sen } x \qquad \ldots (27)$$

En las ecuaciones (25), (26) y (27), el operador que actúa sobre la variable dependiente tiene la apariencia de una expresión polinomial en D con coeficientes constantes, por lo que se puede representar como P(D). A este operador se le llama *operador polinomial*.

La siguiente ecuación:

$$x^3 y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0 ;$$

expresada en términos del operador D, queda:

$$(x^3D^2 + \frac{1}{x} D + 1) y = 0$$

en donde:

$$P(D) = x^3D^2 + \frac{1}{x} D + 1$$

En general, una ecuación diferencial lineal no homogénea de orden "n", se puede escribir como:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = Q(x)$$

o bien:

$$[a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \ldots + a_n(x)] y = Q(x)$$

donde:

$$P(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \ldots + a_n(x)$$

la ecuación diferencial queda representada simplemente como:

$$P(D)y = Q(x)$$

Definición: El operador lineal P(D) será llamado *operador diferencial lineal de orden* "n" en el intervalo $x \in [a, b]$ si puede expresarse en la forma:

$$P(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \dots + a_n(x);\ a(x) \neq 0 \quad \dots (28)$$

donde los coeficientes $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ son funciones continuas en dicho intervalo.

Al verificar que cualquier operador diferencial de la forma (28) es lineal, se tiene:

Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$ dos funciones diferenciables de orden "n":

1. $P(D)[y_1(x) + y_2(x)] = [a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \dots + a_n(x)][y_1(x) + y_2(x)] =$

$= a_0(x)D^n[y_1(x) + y_2(x)] + a_1(x)D^{n-1}[y_1(x) + y_2(x)] + \dots + a_n(x)[y_1(x) + y_2(x)]$

$= [a_0(x)D^n y_1(x) + \dots + a_n(x)y_1(x)] + [a_0(x)D^n y_2(x) + \dots + a_n(x)y_2(x)]$

$= P(D)y_1(x) + P(D)y_2(x)$

2. $P(D)\alpha y_1(x) = [a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \dots + a_n(x)] \cdot [\alpha y_1(x)]$

$= a_0(x)D^n[\alpha y_1(x)] + a_1(x)D^{n-1}[\alpha y_1(x)] + \dots + a_n(x)[\alpha y_1(x)]$

$= \alpha a_0(x)D^n y_1(x) + \alpha a_1(x)D^{n-1}y_1(x) + \dots + \alpha a_n(x)y_1(x)$

$= \alpha P(D)y_1(x)$

por lo tanto el operador diferencial es lineal.

I.3 LA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL GENERAL

I.3.1 SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION HOMOGENEA

TEOREMA I.1

Sea la ecuación diferencial lineal, homogénea de orden "n":

$$[a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \dots + a_n(x)]\, y = 0$$

y sean $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... $y_n(x)$, "n" soluciones linealmente independientes de la ecuación, entonces:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$$

es la solución general de dicha ecuación.

Demostración:

Sustituyendo la solución propuesta en la ecuación diferencial:

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_n)(c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n) = 0$$

operando:

$$a_0D^n(c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n) + a_1D^{n-1}(c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n) + \dots + a_n(c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n) = 0$$

de donde:

$$c_1(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_n)y_1 + c_2(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_n)y_2 + \dots + c_n(a_0D^n + a_1D^n + \dots + a_n)y_n = 0$$

como $y_1, y_2, \ldots y_n$ son soluciones de la ecuación homogénea, se tiene:

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_n)y_1 = 0$$

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_n)y_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_n)y_n = 0$$

por lo tanto:

$$c_1(0) + c_2(0) + \ldots + c_n(0) = 0$$

$$0 = 0$$

con esto queda demostrado que $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$ es solución de la ecuación diferencial homogénea. Además, es la solución general, porque cualquier solución particular de la ecuación, puede obtenerse a partir de ella.

Ejemplo I.3

Dada la ecuación:

$$xy'' - (x + 3)y' + y = 0 , \qquad x \neq 0$$

y dos soluciones de ella:

$$y_1 = x + 3$$

$$y_2 = e^x (x^2 - 4x + 6)$$

determinar la solución general.

Por el teorema I.1, se ve que para esta ecuación de segundo orden, se necesitan dos soluciones linealmente independientes.

Una condición suficiente para que un conjunto de "n" funciones sea linealmente independientes, es que el wronskiano de las mismas sea diferente de cero.

En este caso, y_1, y_2 están definidas para toda $x \in R$. Determinando el valor del wronskiano para y_1 y y_2:

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} x + 3 & e^x(x^2 - 4x + 6) \\ 1 & e^x(2x - 4) + e^x(x^2 - 4x + 6) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x + 3 & e^x(x^2 - 4x + 6) \\ 1 & e^x(x^2 - 2x + 2) \end{vmatrix}$$

$$= e^x(x + 3)\ (x^2 - 2x + 2) - e^x(x^2 - 4x + 6) = e^x x^3$$

$$W(y_1, y_2) \neq 0 , \qquad \forall\ x \neq 0$$

Por lo tanto $y_1 = x + 3$ y $y_2 = e^x(x^2 - 4x + 6)$ son linealmente independientes y en consecuencia:

$$y(x) = c_1(x + 3) + c_2e^x(x^2 - 4x + 6)$$

es la solución general de la ecuación propuesta.

Ejemplo I.4

Sea la ecuación:

$$y'' + (\text{tg } x - 2 \cot x)y' = 0$$

y dos soluciones de ella:

$$y_1(x) = \text{sen}^3 x$$

$$y_2(x) = \text{sen } x - \frac{1}{3} \text{sen } 3x$$

Para formar la solución general con estas soluciones, habrá que demostrar que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente independientes.

Para determinar la independencia lineal de y_1 y y_2 se utilizará, en lugar del wronskiano, la definición de funciones linealmente independientes.

La combinación lineal de y_1 y y_2 igualada a cero es:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

considerando $c_1 \neq 0$

se tiene:

$$c_2 = -\frac{c_1 y_1(x)}{y_2(x)} = -\frac{c_1(\text{sen}^3 x)}{\text{sen } x - \frac{1}{3} \text{sen } 3x}$$

como $\text{sen } 3x = \text{sen } (2x + x) = 3 \cos^2 x \text{ sen } x - \text{sen}^3 x$, se tiene:

$$c_2 = -\frac{c_1 \text{sen}^2 x}{1 - \cos^2 x + \frac{1}{3} \text{sen}^2 x} = -\frac{c_1 \text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x + \frac{1}{3} \text{sen}^2 x} = -\frac{c_1}{\frac{4}{3}} =$$

$$= -\frac{3}{4} c_1$$

por lo tanto existen escalares c_1 y c_2 diferentes de cero tales que:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

donde y_1 y y_2 son linealmente dependientes, y con ellas no se puede formar la solución general de la ecuación diferencial dada.

I.3.2 SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION NO HOMOGENEA

La solución general de una ecuación no homogénea se puede establecer en el teorema I.3, que se estudiará más adelante.

TEOREMA I.2

Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$P(D)y(x) = q(x) \qquad \ldots (29)$$

entonces la diferencia $y_1(x) - y_2(x)$ es solución de la ecuación homogénea asociada a (29).

Demostración:

Como $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación no homogénea, se tiene:

$$P(D)y_1(x) = q(x)$$

$$P(D)y_2(x) = q(x)$$

restando:

$$P(D)y_1(x) - P(D)y_2(x) = q(x) - q(x)$$

$$P(D)\left[y_1(x) - y_2(x)\right] = 0 \qquad \ldots (30)$$

con lo cual queda demostrado que $y_1(x) - y_2(x)$ es solución de la ecuación homogénea asociada a (29).

Este teorema interviene en la demostración del teorema I.3, el cual es muy importante para establecer la forma de la solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea.

TEOREMA I.3

Cualquier solución de una ecuación lineal no homogénea de orden "n":

$$P(D)y(x) = q(x)$$

puede expresarse como:

$$y(x) = y_p(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x) \qquad \ldots (31)$$

donde $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ son "n" soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada, y $y_p(x)$ es una solución de la ecuación no homogénea.

Demostración:

Como $y(x)$ y $y_p(x)$ son soluciones de la ecuación lineal no homogénea, entonces, con base en el teorema I.2, la diferencia $y(x) - y_p(x)$ es solución de la ecuación homogénea asociada, esto es:

$$P(D)\left[y(x) - y_p(x)\right] = 0$$

pero de (31):

$$y(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x) \qquad \ldots (32)$$

entonces:

$$P(D)\left[c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)\right] = 0$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

En el teorema I.3, la combinación lineal de las soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada, y se representa con $y_H(x)$:

$$y_H(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x) \qquad \ldots (33)$$

Al demostrar que la expresión (31) representa la forma de cualquier solución de la ecuación lineal no homogénea de orden "n", significa que es precisamente la forma de la solución general, la cual se puede representar como:

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) \qquad \ldots (34)$$

A la solución $y_H(x)$ se le llama *solución homogénea* o *solución complementaria*.

La secuencia para obtener la solución general de una ecuación lineal no homogénea se describe a continuación:

A. Encontrar la solución general $y_H(x)$ de la ecuación homogénea asociada $P(D)y = 0$.

B. Encontrar una solución particular. Varios autores concuerdan en que se puede prestar a confusión el utilizar el término *solución particular* para referirse a y_p, ya que puede aludir a una solución que satisfaga condiciones iniciales preestablecidas. Estrictamente y_p es una solución cualquiera de $P(D)y = q(x)$.

C. Sumar las soluciones y_p y y_H obtenidas.

El término q(x) puede ser complicado; sin embargo, en el caso de que se represente como una suma finita de funciones más simples, se puede aprovechar la linealidad del problema, y entonces resolver la ecuación mediante la solución de casos más simples:

sea por ejemplo una ecuación en donde $q(x) = q_1(x) + q_2(x)$:

$$P(D)y = q(x) = q_1(x) + q_2(x) \qquad \ldots (35)$$

obteniendo la solución particular $y_{p_1}(x)$ de la ecuación:

$$P(D)y = q_1(x)$$

y también la solución particular $y_{p_2}(x)$ de la ecuación:

$$P(D)y = q_2(x)$$

entonces $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ es la solución particular de (35). Esta conclusión se puede comprobar de la siguiente forma:

$$P(D)y_{p_1} = q_1(x)$$

y

$$P(D)y_{p_2} = q_2(x)$$

sumando:

$$P(D)(y_{p_1} + y_{p_2}) = q_1(x) + q_2(x) = q(x)$$

por lo tanto $y_{p_1} + y_{p_2}$ es la solución particular de la ecuación (35).

El principio que se aplicó para resolver el caso descrito, es conocido como principio de superposición y es de gran utilidad en matemáticas.

Finalmente, la forma de la solución general representada en (34), es la generalización de lo que se determinó en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de primer orden.

I.3.3 EL PROBLEMA DE VALORES INICIALES Y DE VALORES EN LA FRONTERA

Sea la ecuación lineal planteada en el ejemplo I.3:

$$xy'' - (x + 3) + y = 0 \qquad \ldots (36)$$

y dos soluciones de ella:

$$y_1(x) = x + 3$$

$$y_2(x) = e^x(x^2 - 4x + 6)$$

como las dos soluciones son linealmente independientes, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = c_1(x + 3) + c_2e^x(x^2 - 4x + 6) \qquad \ldots (37)$$

Para obtener una solución particular de la ecuación diferencial, es necesario valuar las constantes que aparecen en la solución general; el número de ellas nos hace pensar en establecer dos ecuaciones algebraicas cuyas incógnitas sean las constantes c_1 y c_2.

Si por ejemplo, para la ecuación (36) se pide determinar la solución que satisface las condiciones:

$$y(1) = 0 \; ; \quad y'(1) = 1$$

por medio de éstas y de la solución general se pueden establecer las dos ecuaciones requeridas. La primera condición se sustituye en la expresión (37) con el siguiente resultado:

$$0 = 4c_1 + 3ec_2 \qquad \ldots (38)$$

para sustituir la segunda condición es necesario derivar la solución general, esto es:

$$y'(x) = c_1 + c_2 e^x(x^2 - 2x + 2)$$

en la expresión anterior se sustituye la condición $y'(1) = 1$ con el siguiente resultado:

$$1 = c_1 + ec_2 \qquad \ldots (39)$$

Resolviendo para c_1 y c_2 el sistema de ecuaciones algebraicas formado por (38) y (39), se tiene:

$$c_1 = -3$$

$$c_2 = \frac{4}{e}$$

Entonces la solución particular que satisface las condiciones dadas es:

$$y(x) = \frac{4}{e}\, e^x(x^2 - 4x + 6) - 3(3 + x)$$

Para obtener la solución particular de una ecuación diferencial de primer orden es necesario contar con una condición. En el presente caso, dado que la ecuación diferencial es de segundo orden, se requiere de dos condiciones.

Si se quiere obtener una solución particular de una ecuación diferencial de orden "n", entonces como la solución general contiene "n" constantes arbitrarias, el problema se reduce a determinar los valores de dichas constantes.

Los valores de las constantes se pueden asignar arbitrariamente, pero si la solución particular buscada debe satisfacer determinadas condiciones iniciales del problema, entonces para determinar las "n" constantes, se requieren "n" condiciones.

Un problema de condiciones iniciales modelado por una ecuación diferencial de primer orden, queda representado de la siguiente forma:

$$y' = f(x,y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

si el modelo es una ecuación de segundo orden su representación es:

$$y'' = f(x,y,y')$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y_0'$$

y en general, si el modelo del problema de condiciones iniciales es una ecuación diferencial de orden "n", su representación es:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= f(x,y,y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0' \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

En todos los casos las condiciones impuestas están dadas para el mismo valor x_0 de la variable independiente, es por esto que se les llama *condiciones iniciales*.

Considerando nuevamente como ejemplo la ecuación diferencial (36), pero ahora se determinará la solución particular que satisface las condiciones:

$$y(1) = 0$$

$$y(2) = 1$$

Dado que la solución general de (36) contiene dos constantes arbitrarias, la solución particular correspondiente se obtiene valuando dichas constantes esenciales.

Sustituyendo en la solución general:

$$y(x) = c_1(x + 3) + c_2 e^x(x^2 - 4x + 6)$$

las dos condiciones dadas, se tiene, con la primera $y(1) = 0$:

$$0 = 4c_1 + 3ec_2 \qquad \ldots (40)$$

con la segunda, $y(2) = 1$:

$$1 = 5c_1 + 2e^2c_2 \qquad \ldots (41)$$

Resolviendo para c_1 y c_2 el sistema de ecuaciones (40) y (41) se tiene:

$$c_1 = \frac{3}{15 - 8e}$$

$$c_2 = \frac{-4}{15e - 8e^2}$$

por lo tanto la solución buscada es:

$$y(x) = \frac{3}{15 - 8e}(x + 3) - \frac{4e^x}{15e - 8e^2}(x^2 - 4x + 6)$$

Se observa que también en este caso se requiere de dos condiciones para establecer la solución particular, pero que a diferencia de las condiciones usadas en el primer caso, éstas están dadas para dos valores diferentes de la variable independiente:

$$x = 1\ ,\quad x = 2$$

En las aplicaciones, estos dos valores representan los extremos del problema en estudio y por tal razón se les conoce como *puntos frontera*; de ahí que los valores que adopta la variable dependiente en dichos extremos se conozcan con el nombre de *valores en la frontera o condiciones de frontera*. Para el caso en cuestión, las condiciones de frontera son:

$$y(1) = 0 \quad y \quad y(2) = 1$$

En realidad, el término condiciones de frontera es más general, ya que si bien es cierto que la variable dependiente es la incógnita, esto no quiere decir que siempre sea posible medir su valor en los puntos frontera, por tal motivo, en algunas ocasiones resulta más fácil conocer la primera derivada de la variable dependiente, de modo que las condiciones de frontera pueden ser los valores de ésta en los puntos frontera. Así para este caso, unas nuevas condiciones de frontera pueden ser por ejemplo:

$$y'(1) = 1 \quad ; \quad y'(2) = e$$

En general un valor en la frontera es el valor que adopta en dicho punto la variable dependiente y/o sus derivadas.

Las condiciones en un problema, ya sean iniciales o de frontera, permiten evaluar las constantes esenciales y arbitrarias de la solución general.

I.4 RESOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE COEFICIENTES CONSTANTES

En el inciso I.2,3, de este capítulo, se determinó que la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

tiene como solución general a la función:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} + c\right] ;$$

la cual fue obtenida siguiendo un método analítico llamado *variación de parámetros*. Para el caso de ecuaciones diferenciales lineales de orden "n", existe una teoría general para determinar su solución.

En los incisos siguientes, I.4.1, I.4.2 y I.4.3, se estudiarán este tipo de ecuaciones y en especial el caso en que los coeficientes son constantes. Esto se representa frecuentemente en ingeniería y de ahí la importancia de estudiarlo con mayor detalle.

I.4.1 RESOLUCION DE LA ECUACION HOMOGENEA

Sea la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden y coeficientes constantes:

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad \ldots (42)$$

La solución general de esta ecuación es de la forma:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación (42) linealmente independientes.

Con el objeto de obtener las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$, se hará referencia, primero a la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$y' + \lambda y = 0 \quad , \qquad \lambda = \text{cte.}$$

la cual tiene como solución general a la función:

$$y(x) = c\, e^{-\lambda x}$$

Como se observa, la solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea con coeficientes constantes es de tipo exponencial. Este tipo de solución también se presenta en la ecuación de segundo orden.

Si $y(x) = e^{\lambda x}$ es solución de (42); entonces debe satisfacer a dicha ecuación. Sustituyendo en ella se tiene:

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0 \quad ;$$

ya que $e^{\lambda x} \neq 0$, entonces esta ecuación solamente se satisface si:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad \ldots (43)$$

por lo tanto $y(x) = e^{\lambda x}$ es solución de la ecuación diferencial lineal y'' + ay'' + by = 0, si λ es solución de la ecuación:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

La ecuación (43) tiene dos soluciones:

$$\lambda_1 \quad y \quad \lambda_2$$

con ellas se obtienen las dos soluciones de la ecuación (42):

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \qquad , \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

las cuales son linealmente independientes si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (42) es:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

siempre y cuando $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

En general, dada la ecuación lineal homogénea de orden "n"

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad \ldots (44)$$

donde a_1, a_2 ..., a_n son constantes reales, la función $y = e^{\lambda x}$, donde λ es en general un número complejo, es una solución de ella si se cumple que:

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n)\ e^{\lambda x} = 0 \quad ; \ldots (45)$$

aplicando el operador a la función $e^{\lambda x}$, la ecuación queda:

$$(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n)\ e^{\lambda x} = 0 \qquad \ldots (46)$$

Dado que $e^{\lambda x}$ es siempre diferente de cero, se tiene que:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad \ldots (47)$$

de lo anterior, se concluye que $y = e^{\lambda x}$ es solución de la ecuación (44), si λ es una raíz de la ecuación (47).

La ecuación (47) se conoce como *ecuación característica* de la ecuación diferencial (44). Obsérvese el miembro izquierdo de la ecuación característica, se puede formar a partir del polinomio P(D), simplemente cambiando D por λ por lo tanto la ecuación característica es $P(\lambda) = 0$. La ecuación (47) tiene "n" raíces; con éstas se forman las "n" funciones:

$$e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ e^{\lambda_n x}$$

cada una de las cuales es solución de la ecuación (44).

Por el teorema fundamental del álgebra, la ecuación (46) puede factorizarse quedando representada de la siguiente forma:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ \ldots\ (\lambda - \lambda n)e^{\lambda x} = 0$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ \lambda_n$ son las "n" raíces de (47).

De manera análoga, la ecuación (45), puede expresarse en forma factorizada:

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)\ \ldots\ (D - \lambda n)e^{\lambda x} = 0 \ldots (48)$$

Esta factorización del operador diferencial con coeficientes constantes será de suma utilidad posteriormente, de momento sirve para establecer que cada una de las soluciones $c_1 e^{\lambda_1 x}$, $c_2 e^{\lambda_2 x}$, ..., $c_n e^{\lambda_n x}$ de la ecuación diferencial (44), es a su vez solución general de la ecuación diferencial de primer orden que resulta de aplicar a una función "y" el factor $(D - \lambda_i)$ correspondiente , es decir $y = c_i e^{\lambda_i x}$ es solución general de la ecuación diferencial $(D - \lambda_i)y = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Por último, las raíces de la ecuación característica pueden ser reales o complejas, diferentes e iguales. En cada caso, la estructura de la solución general tiene una forma característica. A continuación se analiza en detalle cada uno de estos casos.

CASO A. RAICES REALES DISTINTAS

Si las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la ecuación característica son "n" números reales distintos entre sí, entonces $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$, ..., $e^{\lambda_n x}$ son "n" diferentes soluciones de (44). Además se demuestra (calculando el wronskiano correspondiente o a través de la ecuación de dependencia lineal) que estas "n" soluciones son linealmente independientes, de manera que con base en el teorema I.1, la solución general de (44) está dada por:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}$$

Ejemplo I.5

Para determinar la solución general de la siguiente ecuación:

$$y''' - y'' - 2y' = 0$$

se representa ésta en términos del operador diferencial:

$$(D^3 - D^2 - 2D)y = 0$$

la ecuación característica es:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

o bien, en forma factorizada:

$$\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

de donde:

$$\lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = -1 \ , \ \lambda_3 = 2$$

por lo tanto, la solución general de la ecuación es:

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$$

CASO B. RAICES REALES REPETIDAS

En el análisis de este caso se hace uso de la fórmula para el cálculo de la derivada k-ésima del producto de la función exponencial $e^{-\lambda x}$ por alguna otra función u(x). Con objeto de no interrumpir posteriormente el desarrollo matemático, **se demostrará que:**

$$D^k e^{-\lambda x} \cdot u = e^{-\lambda x}(D - \lambda)^k u \qquad \ldots (49)$$

La demostración consiste en derivar sucesivamente el producto de funciones, esto es:

$$De^{-\lambda x} \cdot u = e^{-\lambda x}(D - \lambda)u$$

$$D^2 \ e^{-\lambda x} \cdot u = e^{-\lambda x}(D^2 - 2\lambda D + \lambda^2)u = e^{-\lambda x}(D - \lambda)^2 u$$

$$\vdots$$

$$D^k e^{-\lambda x} \cdot u = e^{-\lambda x}(D - \lambda)^k u$$

En el caso de que una de las raíces de la ecuación característica (λ_1) sea de multiplicidad "k", dicha ecuación tiene la forma:

$$(D - \lambda_1)^k (D - \lambda_2) \ \ldots \ (D - \lambda_{n-k+1}) e^{\lambda x} = 0$$

Como se señaló anteriormente, la solución general de (44) es una combinación lineal de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, generadas a partir de cada uno de los factores en que se descompone el operador diferencial P(D). En este caso tales ecuaciones son:

$$(D - \lambda_1)^k y = 0$$

$$(D - \lambda_2)y = 0$$

$$\vdots$$

$$(D - \lambda_{n-k+1})y = 0$$

así que la solución general buscada está dada por:

$$y = u(x) + c_{k+1} e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_{n-k+1} x} \qquad \ldots (50)$$

donde $c_{k+1}e^{\lambda_2 x}$, ..., $c_n e^{\lambda_{n-k+1}x}$ son las soluciones generales de las ecuaciones de primer orden:

$(D - \lambda_2)y = 0$, ..., $(D - \lambda_{n-k-1})y = 0$, respectivamente y $u(x)$ es la solución general de la ecuación lineal de orden "k":

$$(D - \lambda_1)^k u = 0 \qquad \ldots (51)$$

El problema se reduce a determinar esta función $u(x)$ que satisface a la ecuación (51). Multiplicando ambos miembros de dicha ecuación por $e^{-\lambda_1 x}$:

$$e^{-\lambda_1 x}(D - \lambda_1)^k u = 0 \quad ,$$

esta ecuación puede escribirse de la forma:

$$D^k e^{-\lambda_1 x}\cdot u = 0$$

y bastará con integrar sucesivamente esta ecuación para obtener la función $u(x)$:

$$D^{k-1}e^{-\lambda_1 x}\cdot u = c_1$$

$$D^{k-2}e^{-\lambda_1 x}\cdot u = c_1 x + c_2$$

$$\vdots$$

$$De^{-\lambda_1 x}\cdot u = c_1 x^{k-2} + c_2 x^{k-3} + \ldots + c_{k-1}$$

$$e^{-\lambda_1 x}\cdot u = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_{k-1}x + c_k$$

despejando u:

$$u = (c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_{k-1}x + c_k)e^{\lambda_1 x}$$

sustituyendo "u" en la expresión (50) se obtiene:

$$y = (c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_{k-1}x + c_k)e^{\lambda_1 x} +$$

$$+ c_{k+1}e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_{n-k+x}}$$

que es la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea (44), en el caso de que una de las raíces (λ_1) de la ecuación característica sea de multiplicidad "k". Si la ecuación característica tiene raíces múltiples, cada una de ellas tiene una contribución semejante en la solución general, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo I.6

Sea la ecuación diferencial:

$$y''' - 4y'' - 3y' + 18y = 0$$

La ecuación característica correspondiente es:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 18 = 0,$$

cuyas raíces son:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \ \lambda_3 = -2$$

por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = (c_1 x + c_2)e^{3x} + c_3 e^{-2x}$$

Ejemplo I.7

Dada la ecuación diferencial:

$$(D^6 + 2D^5 - 2D^3 - D^2)y = 0$$

Para obtener la solución general, se establece primero la ecuación característica:

$$\lambda^6 + 2\lambda^5 - 2\lambda^3 - \lambda^2 = 0,$$

las raíces son:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = -1$$

con estas raíces, la solución general es:

$$y = (c_1 x + c_2)e^{0x} + c_3 e^{x} + (c_4 x^2 + c_5 x + c_6)e^{-x}$$

o sea:

$$y = c_1 x + c_2 + c_3 e^{x} + (c_4 x^2 + c_5 x + c_6)e^{-x}$$

CASO C. RAICES COMPLEJAS

Si alguna de las raíces de la ecuación característica (47) es el número complejo a + bi, entonces el complejo conjugado a - bi será también raíz de acuerdo con la teoría de ecuaciones polinomiales. La parte de la solución general de (44) correspondiente a este par de raíces es:

$$k_1 e^{(a+bi)x} + k_2 e^{(a-bi)x} \qquad \ldots (52)$$

donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias.

Sin embargo, es conveniente expresar las soluciones mencionadas en términos de funciones reales. La teoría de variable compleja nos proporciona el medio para lograrlo, utilizando la fórmula de Euler:

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

La expresión (52) puede escribirse, empleando esta fórmula:

$$\begin{aligned} k_1 e^{(a+bi)x} + k_2 e^{(a-bi)x} &= k_1 e^{ax} e^{bix} + k_2 e^{ax} e^{-bix} \\ &= e^{ax}(k_1 e^{bix} + k_2 e^{-bix}) \\ &= e^{ax}\left[k_1(\cos bx + i\,\mathrm{sen}\,bx) + \right. \\ &\quad \left. + k_2(\cos bx - i\,\mathrm{sen}\,bx)\right] \\ &= e^{ax}\left[(k_1 + k_2)\cos bx + i(k_1 - k_2)\,\mathrm{sen}\,bx\right] \\ &= e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2\,\mathrm{sen}\,bx) \end{aligned}$$

donde:

$$c_1 = k_1 + k_2 \quad y \quad c_2 = i(k_1 - k_2)$$

Por otra parte, cualquier raíz compleja a + bi de la ecuación característica puede tener una multiplicidad "k"; lo que implica la existencia de la raíz conjugada a - bi, también con multiplicidad "k". En este caso la solución general de la ecuación diferencial incluye 2k términos linealmente independientes, los cuales, combinando los resultados de los casos (A) y (B) presentan la estructura siguiente:

$$\left[(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_k x^{k-1})\,\mathrm{sen}\,bx + \right.$$
$$\left. + (c_{k+1} + c_{k+2}x + c_{k+3}x^2 + \ldots + c_{2k}x^{k-1})\cos bx\right] e^{ax}$$

Ejemplo I.8

Dada la ecuación diferencial:

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$$

la ecuación característica correspondiente es:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

y sus raíces son:

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 2i = 0 + 2i$$

$$\lambda_3 = -2i = 0 - 2i$$

por lo tanto, la solución general es:

$$y = c_1 e^{-x} + (c_2 \operatorname{sen} 2x + c_3 \cos 2x)\, e^{0x}$$

o sea:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 \operatorname{sen} 2x + c_3 \cos 2x$$

Ejemplo I.9

Dada la ecuación:

$$(D^5 - 9D^4 + 34D^3 - 66D^2 + 65D - 25)y = 0$$

la ecuación característica es:

$$\lambda^5 - 9\lambda^4 + 34\lambda^3 - 66\lambda^2 + 65\lambda - 25 = 0$$

factorizando:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)^2 = 0 \quad ;$$

sus raíces son:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2 + i, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = 2 - i$$

por lo que la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = c_1 e^{x} + \left[(c_2 + c_3 x) \operatorname{sen} x + (c_4 + c_5 x) \cos x \right] e^{2x}$$

I.4.2 EL METODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

En el inciso anterior se estudió la resolución de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes. En el presente inciso se estudiará un método utilizado para obtener la solución particular de una ecuación diferencial no homogénea.

Sea la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes:

$$y'' + 2y' + y = 2x + 3 \qquad \ldots (53)$$

Para determinar su solución general, se procederá a transformarla en una ecuación diferencial homogénea. Para esto se deberá anular el miembro derecho de la ecuación (53). En términos del operador diferencial, la ecuación queda representada como:

$$(D^2 + 2D + 1)y = 2x + 3$$

aplicando en ambos miembros el operador D^2:

$$D^2(D^2 + 2D + 1)y = 0$$

o sea:

$$y^{(iv)} + 2y''' + y'' = 0$$

la ecuación diferencial resultó de cuarto orden y su solución general es:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x + c_4 \qquad \ldots (54)$$

además, la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada a (53) es:

$$y_c(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \qquad \ldots (55)$$

la solución general de (53) es de la forma:

$$y = y_c + y_p \qquad \ldots (56)$$

sustituyendo las soluciones (54) y (55) en (56):

$$c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x + c_4 = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + y_p$$

de donde:

$$y_p = c_3 x + c_4 \qquad \ldots (57)$$

c_3 y c_4 son constantes a las que se denomina *coeficientes de la solución particular* y_p.

c_3 y c_4 deben de tener un valor tal que y_p satisfaga a la ecuación (53).

Sustituyendo y_p en la ecuación no homogénea (53):

$$2c_3 + c_3 x + c_4 = 2x + 3$$

esto es:

$$c_3 x + (2c_3 + c_4) = 2x + 3$$

igualando coeficientes:

$$2c_3 + c_4 = 3$$

$$c_3 = 2$$

por lo tanto:

$$c_3 = 2 \quad y \quad c_4 = -1$$

entonces $y_p = 2x - 1$ y la solución general de la ecuación diferencial (53) es:

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 2x - 1$$

Del problema anterior se obtuvieron dos resultados fundamentales, a saber:

1. Un operador $P_1(D)$, en este caso D^2, tal que al operar sobre ambos miembros de la ecuación generó una ecuación homogénea.

2. La solución de la ecuación homogénea resultante, en este caso de cuarto orden, permitió obtener la forma de la solución particular de la ecuación original.

Sin embargo, cabe preguntarse si toda ecuación diferencial de la forma $(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n)y = q(x)$ admite un operador $P_1(D)$ que genere a partir de ella, una ecuación homogénea, esto es, un operador diferencial de la forma $D^n + b_1 D^{n-1} + \ldots + b_n$, que aplicado al segundo miembro $q(x)$ de la ecuación no homogénea, lo anule:

$$(D^n + b_1 D^{n-1} + \ldots + b_n)q(x) = 0 \qquad \ldots (58)$$

Para responder a la pregunta se tiene presente que la ecuación es diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes, la cual, evidentemente no se satisface para cualquier función de "x". Esto quiere decir que no cualquier función de "x" se anula al ser afectada por el operador $P_1(D)$, sino que exclusivamente aquellas que son soluciones de la ecuación.

De lo anterior se deduce, para que una función $q(x)$ dada, pueda ser anulada por algún operador diferencial lineal, es indispensable que dicha función sea solución de alguna ecuación diferencial lineal homogénea.

El operador diferencial capaz de anular el segundo miembro de una ecuación diferencial no homogénea, se denomina *anulador o aniquilador*.

En el inciso I.4.1, se obtuvieron las funciones que representan la solución general de una ecuación diferencial lineal como la (58), de acuerdo a la naturaleza de las raíces de su ecuación característica.

Teniendo en cuenta los tres casos que al respecto pueden presentarse, las soluciones de tales ecuaciones son siempre funciones del tipo:

$$x^k e^{\lambda x} \qquad k \geq 0, \qquad k \in N, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$x^k e^{ax} \text{sen } bx \qquad k \geq 0, \qquad k \in N, \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad b \in \mathbb{R}$$

$$x^k e^{ax} \cos bx \qquad k \geq 0, \qquad k \in N, \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad b \in \mathbb{R}$$

y la suma algebraica de ellas. Por lo tanto se puede asegurar que solamente este tipo de funciones son anuladas por operadores lineales.

Para obtener un operador $P_1(D)$ apropiado que anule a una función $q(x)$ dada, se requiere determinar la ecuación homogénea, de la cual la función $q(x)$ es solución.

Se determinarán a continuación los operadores aniquiladores de algunas funciones de uso frecuente.

Considerando primeramente la función $q(x) = x^{k-1}$. La función propuesta equivale a $x^{k-1}e^{0x}$ y este tipo de función es la solución de una ecuación homogénea, cuya ecuación característica tiene una raíz $\lambda = 0$, y de multiplicidad "k" (caso B). Como la raíz múltiple es $\lambda = 0$, un operador diferencial anulador es:

$$(D - 0)^k = D^k$$

se verifica que:

$$D^k \, x^{k-1} = 0$$

siempre y cuando $k - 1 \geq 0$.

Considerando el caso en que $q(x) = e^{\lambda_1 x}$, esta función es solución de una ecuación lineal de primer orden, cuya ecuación característica tiene por raíz $\lambda = \lambda_1$. El anulador de esta función es por lo tanto $(D - \lambda_1)$, lo cual puede verificarse fácilmente, aplicando el aniquilador a la función:

$$(D - \lambda_1)e^{\lambda_1 x} = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} = 0$$

Finalmente, analizando el caso de una combinación lineal de "n" funciones como la siguiente:

$$q(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

ésta corresponde a la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden "n"; el operador aniquilador correspondiente es entonces, un operador de orden "n", el cual usando la representación factorizada es:

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \dots (D - \lambda_n)$$

Los resultados anteriores y otros, se presentan en la tabla siguiente, a fin de que sirvan como auxiliares en la determinación del operador aniquilador.

q(x)			ANULADOR
x^{k-1}			D^k
e^{ax}			$(D - a)$
$x^{k-1}e^{ax}$			$(D - a)^k$
$\cos bx$	ó	$\text{sen } bx$	$(D^2 + b^2)$
$x^{k-1}\cos bx$	ó	$x^{k-1}\text{sen } bx$	$(D^2 + b^2)^k$
$e^{ax}\cos bx$	ó	$e^{ax}\text{sen } bx$	$D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)$
$x^{k-1}e^{ax}\cos bx$	ó	$x^{k-1}e^{ax}\text{sen } bx$	$[D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)]^k$

Tabla I.1

Los ejemplos siguientes muestran el método completo de coeficientes indeterminados.

Ejemplo I.10

Sea la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x} + e^{-2x}$$

la solución general de la ecuación es de la forma:

$$y = y_c + y_p$$

la solución de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

Dado que $q(x) = e^{-x} + e^{-2x}$ es solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes, el operador aniquilador existe y se puede determinar:

como $q(x)$ está formada con las raíces $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, se tiene que:

$$P_1(D) = (D + 1)(D + 2)$$

es el aniquilador correspondiente.

Aplicando $P_1(D)$ a la ecuación diferencial:

$$(D + 1)(D + 2)(D^2 + 3D + 2)y = 0$$

resolviendo esta última ecuación homogénea:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x e^{-2x} \quad ;$$

como:

$$y = y_c + y_p$$

se obtiene:

$$y_p = c_3 x e^{-x} + c_4 x e^{-2x}$$

donde c_3 y c_4 son los coeficientes a determinar.

Sustituyendo y_p en la ecuación original, se obtiene la siguiente identidad:

$$c_3 e^{-x} - c_4 e^{-2x} = e^{-x} + e^{-2x}$$

de donde:

$$c_3 = 1 \qquad y \qquad -c_4 = 1$$

por lo tanto:

$$y_p = x e^{-x} - x e^{-2x}$$

y entonces la solución general de la ecuación original es:

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + x e^{-x} - x e^{-2x}$$

Ejemplo I.11

En la ecuación diferencial:

$$y' + 2y = x + 1 + x e^{x}$$

la anulación del término $x + 1$, se logra aplicando el operador D^2 a la ecuación:

$$D^2(D + 2)y = x e^{x}$$

La función xe^x es solución de $(D-1)^2y = 0$, por lo que el aniquilador de xe^x es $(D-1)^2$. Aplicando $(D-1)^2$ a la ecuación no homogénea, se tiene:

$$D^2(D-1)^2(D+2)y = 0$$

la solución de esta ecuación homogénea es:

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x + c_5e^{-2x}$$

Como la solución de la ecuación homogénea asociada a la original es:

$$y_c = c_5e^{-2x}$$

entonces:

$$y_p = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x$$

sustituyendo y_p en la ecuación original:

$$y_p' + 2y_p = x + 1 + xe^x$$

$$c_2 + c_3e^x + c_4xe^x + c_4e^x + 2c_1 + 2c_2x + 2c_3e^x + 2c_4xe^x = x + 1 + xe^x$$

simplificando:

$$2c_1 + c_2 + e^x(3c_3 + c_4) + xe^x(3c_4) + 2c_2x = x + 1 + xe^x$$

donde:

$$2c_1 + c_2 = 1 \quad ; \quad c_2 = 1/2$$

$$3c_3 + c_4 = 0 \quad ; \quad c_4 = 1/3$$

$$3c_4 = 1 \quad ; \quad c_1 = 1/4$$

$$2c_2 = 1 \quad ; \quad c_3 = -1/9$$

por lo tanto la solución general de la ecuación no homogénea es:

$$y = y_c + y_p = c_5e^{-2x} + \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{e^x}{9} + \frac{xe^x}{3}$$

Ejemplo I.12

Sea la ecuación:

$$y'' + 2y' + y = \text{sen } x$$

El operador aniquilador de la función sen x es:

$$P_1(D) = (D^2 + 1)$$

aplicándolo a la ecuación diferencial:

$$(D^2 + 1)(D^2 + 2D + 1)y = (D^2 + 1)\text{sen } x = 0$$

$$(D^4 + 2D^3 + 2D^2 + 2D + 1)y = 0$$

Esta ecuación diferencial lineal es homogénea de cuarto orden y su solución general es:

$$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3\cos x + c_4\text{sen } x$$

ya que la solución de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$$

entonces:

$$y_p = c_3\cos x + c_4\text{sen } x$$

donde c_3 y c_4 son coeficientes a determinar.

Sustituyendo y_p en la ecuación diferencial no homogénea:

$$2c_4\cos x - 2c_3\text{sen } x = \text{sen } x$$

de donde:

$$2c_4 = 0 \qquad y \qquad -2c_3 = 1$$

entonces, los coeficientes son:

$$c_4 = 0 \qquad y \qquad c_3 = -1/2$$

por lo tanto:

$$y_p = -1/2 \cos x$$

y la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} - \frac{1}{2}\cos x$$

I.4.3 EL METODO DE VARIACION DE PARAMETROS

El método de coeficientes indeterminados es muy utilizado en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales, no es un método general, ya que existen muchas ecuaciones para las cuales el método no es aplicable. Esta limitación radica en el problema de obtener el operador aniquilador para cualquier función q(x), así como en el tipo de coeficientes de la ecuación.

Algunas ecuaciones para las cuales no es aplicable el método de coeficientes indeterminados, son por ejemplo las siguientes:

a) $y'' + 2y' + y = \tan x$

b) $y' + y = \frac{1}{x^2}$

c) $y'' + 2y = \text{Ln } x$

d) $y'' + 2xy' + y = \text{sen } x$

Un método general que también sirve para resolver aquellas ecuaciones en donde el método de coeficientes indeterminados no es aplicable, es el de variación de parámetros. Este método se desarrolló para determinar la solución de la ecuación diferencial de primer orden, en el inciso I.2.3, ahora se generalizará para la ecuación de orden "n".

Considérese la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$y'' + a_1y' + a_2y = q(x) \qquad \dots (59)$$

la solución general de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2$$

TEOREMA I.4

Si y_1 y y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada a la ecuación no homogénea:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = q(x)$$

entonces la solución particular de la ecuación no homogénea es:

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2 \quad \ldots (60)$$

donde la primera derivada de u(x) y v(x) satisface el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(x) \end{bmatrix} \quad \ldots (61)$$

Demostración:

Derivando y_p:

$$y_p' = u(x)y_1' + v(x)y_2' + u'(x)y_1 + v'(x)y_2$$

considerando la primera ecuación del sistema (61):

$$u'(x)y_1 + v'(x)y_2 = 0$$

entonces:

$$y_p' = u(x)y_1' + v(x)y_2' \quad \ldots (62)$$

derivando nuevamente:

$$y''_p = u(x)y_1'' + v(x)y_2'' + u'(x)y_1' + v'(x)y_2' \quad ;$$

considerando la segunda ecuación del sistema (61):

$$u'(x)y_1' + v'(x)y_2' = q(x)$$

por lo tanto:

$$y''_p = u(x)y_1'' + v(x)y_2'' + q(x) \quad \ldots (63)$$

sustituyendo y_p, y_p' y y_p'' en (59), se tiene:

$$u(x)y_1'' + v(x)y_2'' + q(x) + a_1\left[u(x)y_1' + v(x)y_2'\right] +$$
$$+ \ a_2\left[u(x)y_1 + v(x)y_2\right] = q(x)$$

factorizando:

$$u(x)\left[y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1\right] + v(x)\left[y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2\right] + q(x) = q(x)$$

Pero dado que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada a (59), entonces:

$$y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 = 0$$

$$y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 = 0$$

por lo tanto:

$$q(x) = q(x)$$

Ejemplo I.13

Sea la ecuación:

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2} \qquad \ldots (a)$$

La solución general tiene la forma:

$$y = y_c + y_p$$

para determinar y_c, se considera la ecuación homogénea asociada:

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

entonces, la ecuación característica es:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

donde:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

$$y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

Para encontrar y_p, se observa que no es posible aplicar el método de coeficientes indeterminados. Por el teorema I.4, y_p es de la forma:

$$y_p = u(x)e^{-2x} + v(x)xe^{-2x} \qquad \ldots (b)$$

El problema consiste en determinar u(x) y v(x). Se recordará que (b) es una solución particular de (a) si se cumple:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(x) \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en este sistema $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$ y $q(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2}$:

$$\begin{bmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & -2xe^{-2x} + e^{-2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^{-2x}}{x^2} \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema anterior, se tiene:

$$\begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{e^{-4x}} \begin{bmatrix} (1-2x)e^{-2x} & -xe^{-2x} \\ 2e^{-2x} & e^{-2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^{-2x}}{x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x} \\ \frac{1}{x^2} \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$u(x) = -\int \frac{1}{x}\,dx = -\mathrm{Ln}\,x = \mathrm{Ln}\,\frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

$$v(x) = \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$$

entonces:

$$y_p = e^{-2x}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1}{x} - e^{-2x} = e^{-2x}\left(\mathrm{Ln}\,\frac{1}{x} - 1\right)$$

la solución general es:

$$y = y_c + y_p = e^{-2x}\left[c_1 + c_2x + \mathrm{Ln}\,\frac{1}{x} - 1\right]$$

Obsérvese que y_p se obtiene a partir de y_c, con la simple sustitución de las constantes c_1 y c_2 por funciones de x, u(x) y v(x), debido a esto, el método empleado para encontrar y_p en el problema anterior, se conoce con el nombre de *método de los parámetros variables o variación de parámetros*.

Al obtener u(x) y v(x) en el ejemplo anterior, no se consideraron las constantes de integración. Ahora si éstas se consideran, se procede de la siguiente forma:

$$u(x) = -\int \frac{1}{x}\,dx = \mathrm{Ln}\,\frac{1}{x} + c_1$$

$$v(x) = \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c_2$$

de donde:

$$y_p = \left(\mathrm{Ln}\,\frac{1}{x} + c_1\right)e^{-2x} + \left(-\frac{1}{x} + c_2\right)xe^{-2x}$$

o sea:

$$y_p = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + e^{-2x}\left(\mathrm{Ln}\,\frac{1}{x} - 1\right)$$

Como se observa, al considerar las constantes de integración en la obtención de u(x) y de v(x), se obtiene en y_p la solución general de la ecuación diferencial y no la solución particular como se propuso.

Entonces, dado el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada, se puede encontrar la solución general de la ecuación diferencial. Los resultados obtenidos se generalizan en el siguiente teorema.

TEOREMA I.5

Sea la ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = q(x)$$

donde:

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$$

es la solución de la ecuación homogénea asociada.

Y el sistema:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \\ \vdots \\ u_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q(x) \end{bmatrix}$$

Entonces, la solución particular de la ecuación no homogénea es:

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + \dots + u_n(x)y_n$$

Ejemplo I.14

Para obtener la solución general de la siguiente ecuación:

$$y''' + y' = tg\ x$$

primero se obtiene la solución complementaria, que es:

$$y_c = c_1 + c_2 sen\ x + c_3 cos\ x$$

por el método de variación de parámetros se tiene:

$$y_p = u_1(x) + u_2(x) sen\ x + u_3(x) cos\ x$$

donde la primera derivada de u_1, u_2 y u_3 debe satisfacer el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & sen\ x & cos\ x \\ 0 & cos\ x & -sen\ x \\ 0 & -sen\ x & -cos\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \\ u_3'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ tg\ x \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema:

$$u_1'(x) = tg\ x$$

$$u_2'(x) = cos\ x - sec\ x$$

$$u_3'(x) = -\ sen\ x$$

integrando:

$$u_1(x) = \int tg\ x\ dx = Ln\ sec\ x$$

$$u_2(x) = \int (cos\ x - sec\ x)\, dx = sen\ x - Ln(sec\ x + tg\ x)$$

$$u_3(x) = -\int sen\ x\ dx = cos\ x$$

por lo tanto:

$$y_p = Ln\ sec\ x - sen\ x\ Ln\ (sec\ x + tg\ x) + sen^2\ x + cos^2\ x$$

como $sen^2\ x + cos^2\ x = 1$ y dado que esta función ya existe en la solución complementaria, se tiene:

$$y_p = Ln\ sec\ x - sen\ x\ Ln(sec\ x + tg\ x)$$

la solución general de la ecuación es:

$$y = c_1 + c_2 sen\ x + c_3 cos\ x + Ln\ sec\ x - sen\ x\ Ln(sec\ x - tgx)$$

Ejemplo I.15

Sea la siguiente ecuación diferencial lineal de coeficientes variables:

$$xy'' - (x + 3)y' + y = x^4 \qquad \ldots (a)$$

si $y_1 = (x + 3)$ y $y_2 = e^x(x^2 - 4x + 6)$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada.

Su solución general es:

$$y = y_c + y_p$$

donde:

$$y_c = c_1(x + 3) + c_2 e^x(x^2 - 4x + 6)$$

Los métodos para obtener la solución particular de y_p son:

a) Coeficientes indeterminados.

b) Variación de parámetros.

El primero sólo se aplica cuando la ecuación diferencial es de coeficientes constantes. Por las características del ejemplo, no es aplicable, por lo cual se utiliza el segundo método:

$$y_p = u(x)\,(x + 3) + v(x)e^x(x^2 - 4x + 6)$$

donde u(x) y v(x) deben satisfacer al sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x + 3 & e^x(x^2 - 4x + 6) \\ 1 & e^x(x^2 - 2x + 2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

resolviendo este sistema:

$$u'(x) = -(x^2 - 4x + 6)$$

$$v'(x) = xe^{-x} + 3e^{-x}$$

integrando:

$$u(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 6x$$

$$v(x) = -xe^{-x} - 4e^{-x}$$

por lo tanto:

$$y_p = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 6x \right](x + 3) + \left[-xe^{-x} - 4e^{-x} \right] e^x(x^2 - 4x + 6)$$

$$y_p = -\frac{x^4}{3} - 8x - 24 \qquad \ldots (b)$$

Para verificar que (b) es una solución particular de la ecuación (a), se deriva y_p.

$$y_p' = -\frac{4}{3}x^3 - 8$$

$$y_p'' = -4x^2$$

sustituyendo en (a):

$$-4x^3 - (x + 3)\left(-\frac{4}{3}x^3 - 8 \right) - \frac{x^4}{3} - 8x - 24 = x^4$$

$$-4x^3 + \frac{4}{3}x^4 + 8x + 4x^3 + 24 - \frac{x^4}{3} - 8x - 24 = x^4$$

$$x^4 = x^4$$

por lo tanto (b) sí es solución de (a).

La solución general de la ecuación diferencial (a) es:

$$y = y_c + y_p = c_1(x + 3) + c_2e^x(x^2 - 4x + 6) - \frac{x^4}{3}$$

I.5 APLICACIONES

En el presente inciso se describen algunos problemas de los considerados clásicos, con objeto de mostrar la amplia gama de aplicación de las ecuaciones diferenciales lineales.

Problema I.1

Sea el siguiente sistema masa - resorte - amortiguador excitado con una fuerza $f(t)$ = sen t:

donde:

$$m = 1, \quad B = 2, \quad k = 1$$

Se desea determinar la expresión para el desplazamiento $x(t)$ en cualquier instante "t", suponiendo que:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

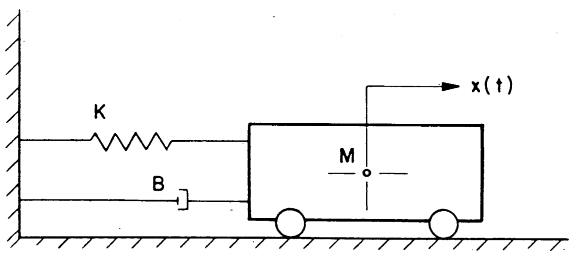
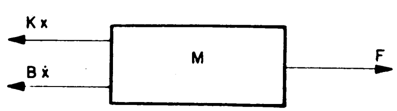


Figura I.8

Solución

Del diagrama de cuerpo libre se tiene:

Figura I.9



$$M\ddot{x} = F(t) - kx - B\dot{x}$$

o bien:

$$\ddot{x} + \frac{B}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = \frac{F(t)}{M}$$

sustituyendo los valores de B, M y k:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \text{sen } t$$

ecuación diferencial no homogénea, que constituye el modelo del problema.

Resolviendo la ecuación diferencial, se obtiene:

$$x_c(t) = c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t} \qquad \text{y} \qquad x_p(t) = -\frac{1}{2}\cos t$$

por lo que la solución general es:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t} - \frac{1}{2}\cos t \qquad \text{... (a)}$$

derivando (a) se tiene:

$$\dot{x}(t) = -c_1 e^{-t} - c_2 te^{-t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2}\text{sen } t \qquad \text{... (b)}$$

sustituyendo las condiciones iniciales en (a) y (b):

$$x(0) = 0 = c_1 - \frac{1}{2}$$

$$\dot{x}(0) = 0 = -c_1 + c_2$$

donde:

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$$

la solución del problema es:

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{2}\cos t$$

Nótese que cuando "t" tiende a infinito, las funciones exponenciales tienden a cero, por lo que en la solución prevalecerá únicamente el término cosenoidal, lo cual implica que la masa M oscilará indefinidamente con una frecuencia igual a la de su excitación.

Problema I.2

Sea el siguiente circuito LRC, excitado con una fuente de voltaje constante E.

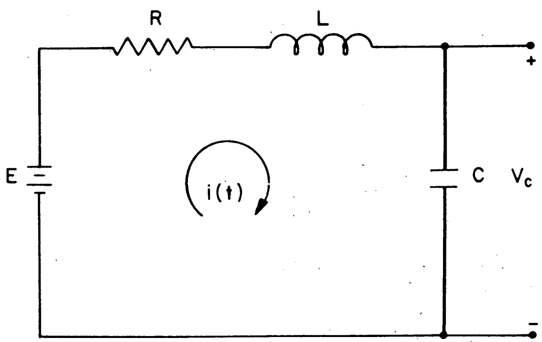


Figura I.10

donde R = 3Ω, L = 1 H y C = 0.5 F

Encontrar la expresión para la caída de voltaje v_C en el capacitor en cualquier instante "t", suponiendo que:

$$\dot{v}_C(0) = 0 = v_C(0)$$

Solución

De la segunda ley de Kirchhoff:

$$E = Ri + L\frac{di}{dt} + v_C$$

donde:

$$i(t) = c\dot{v}_C$$

por lo tanto:

$$E = Rc\dot{v}_C + Lc\ddot{v}_C + v_C$$

o bien:

$$\ddot{v}_C + \frac{R}{L}\dot{v}_C + \frac{1}{Lc}v_C = \frac{E}{Lc}$$

sustituyendo valores:

$$\ddot{v}_C + 3\dot{v}_C + 2v_C = 2E \quad ;$$

ecuación diferencial no homogénea, que es el modelo matemático del problema.

Resolviendo la ecuación diferencial, se obtiene:

$$v_{C_C} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t}$$

$$v_{C_p} = E$$

por lo tanto, la solución general es:

$$v_C(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + E \qquad \ldots \text{(a)}$$

para valuar c_1 y c_2, se deriva (a):

$$\dot{v}_C(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} \qquad \ldots \text{(b)}$$

sustituyendo las condiciones iniciales en (a) y (b):

$$0 = c_1 + c_2 + E$$

$$0 = -c_1 - 2c_2$$

de donde:

$$c_1 = -2E \qquad y \qquad c_2 = E$$

la solución del problema es:

$$v_C(t) = -2Ee^{-t} + Ee^{-2t} + E$$

nótese que cuando "t" tiende a infinito, el voltaje en el capacitor tiende al valor del voltaje de la batería.

Problema I.3

Se tiene un tubo en U lleno de un líquido de densidad δ, como se muestra en la siguiente figura:

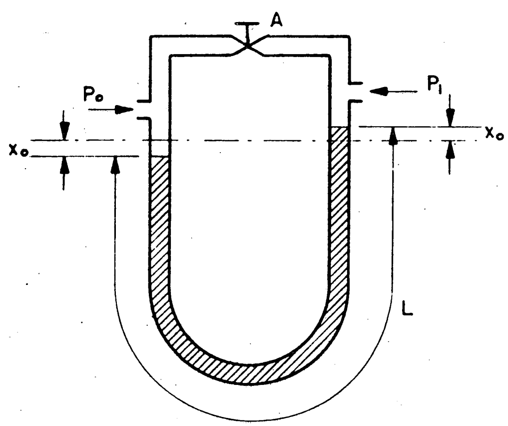


Figura I.11

Si en t = 0 se abre la válvula A, igualando las presiones P_1 y P_2, encontrar el período de oscilación del líquido en el tubo, suponiendo despreciable la fricción entre el líquido y las paredes del tubo.

Solución

La masa del líquido es m = δAL, en donde A es el área de la sección transversal del tubo y L es la longitud de la columna del líquido.

La fuerza que actúa sobre el líquido es:

$$f = \delta A2\, x_0 g - \delta A2xg \quad ;$$

utilizando la segunda ley de Newton:

$$\delta AL\ddot{x} = \delta A2x_0 g - \delta A2xg$$

o bien:

$$\ddot{x} + \frac{2g}{L}\, x = \frac{2g}{L}\, x_0 \quad ;$$

ecuación diferencial no homogénea que es el modelo matemático del problema.

Resolviendo la ecuación:

$$x_c = c_1 \cos\sqrt{\frac{2g}{L}}\, t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{2g}{L}}\, t$$

$$x_p = x_0$$

la solución general de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = c_1 \cos\sqrt{\frac{2g}{L}}\, t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{2g}{L}}\, t + x_0 \qquad \ldots (a)$$

Para determinar c_1 y c_2, se deriva la ecuación (a):

$$\dot{x}(t) = -c_1\sqrt{\frac{2g}{L}} \operatorname{sen}\sqrt{\frac{2g}{L}}\, t + c_2\sqrt{\frac{2g}{L}} \cos\sqrt{\frac{2g}{L}}\, t$$

y sustituyendo las condiciones iniciales:

$$c_1 = - x_0$$

$$c_2 = 0$$

por lo tanto:

$$x(t) = x_0\left(1 - \cos\sqrt{\frac{2g}{L}}\, t\right)$$

de la solución, se deduce que la velocidad angular es:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

y por lo tanto el período de oscilación es:

$$T = \pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$$

Problema I.4

Un cable flexible de peso despreciable soporta un puente (carga uniforme), como se muestra en la siguiente figura:

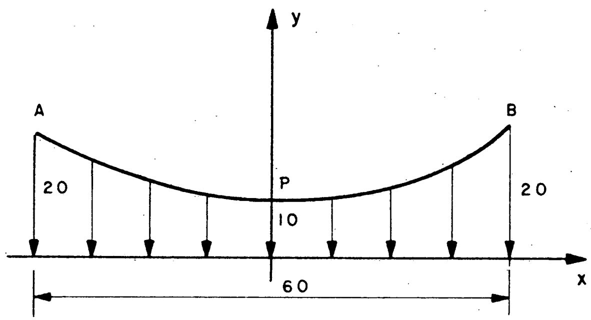


Figura I.12

Determinar la ecuación de la curva APB.

Solución

Considérese la parte del cable entre el punto P y cualquier punto "c" de coordenadas (x, y).

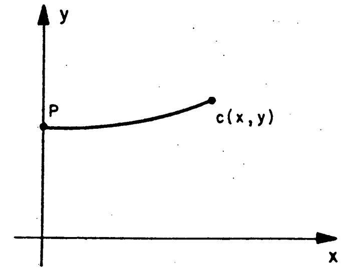


Figura I.13

La parte del cable estará en equilibrio debido a la tensión T en "c"; la fuerza horizontal H en P y la carga vertical total sobre la porción Pc del cable, a la cual se denominará $\omega(x)$ que actúa sobre algún punto del cable.

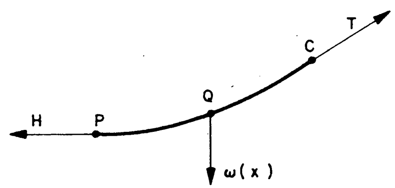


Figura I.14

En estado de equilibrio, la suma algebraica en la dirección "x" (horizontal), debe ser cero y la suma algebraica en la dirección "y" (vertical), también debe ser cero.

Descomponiendo la tensión T en sus dos proyecciones, como se muestra en la figura I.15.

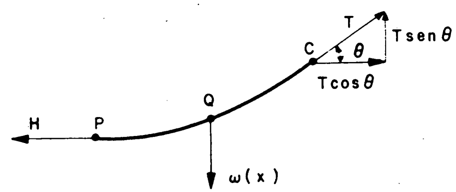


Figura I.15

Se tiene en el equilibrio:

$$T \text{ sen } \theta = \omega(x) \qquad y \qquad T \cos \theta = H$$

como tg $\theta = \frac{dx}{dy}$; es igual a la pendiente de la tangente en "c" de la curva APB, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega(x)}{H} \quad ;$$

en donde H es una constante; derivando la ecuación diferencial anterior, se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H} \frac{d\omega(x)}{dx}$$

La derivada de $\omega(x)$, es el incremento de ω por unidad de incremento de "x", es decir, es la carga por unidad de distancia en la dirección horizontal.

Como en el problema la carga está uniformemente repartida, se representará.

$$\frac{d\omega(x)}{dx} = \omega \ ; \quad \omega \text{ constante}$$

con lo cual, la ecuación diferencial lineal no homogénea es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{H}$$

la solución general de esta ecuación es:

$$y = \frac{\omega x^2}{2H} + c_1 x + c_2$$

Para valuar las constantes c_1 y c_2 se consideran las condiciones iniciales:

$$y(0) = 10 \qquad y \qquad \dot{y}(0) = 0$$

con lo cual:

$$c_1 = 0 \quad , \quad c_2 = 10$$

sustituyendo los valores de c_1 y c_2 en la solución general se obtiene la ecuación de la curva APB:

$$y = \frac{\omega x^2}{2H} + 10 \qquad -30 \le x \le 30$$

esto representa la ecuación de una parábola.

Obsérvese que si el origen del sistema de referencia x - y, se coloca sobre el punto P_1; entonces las condiciones iniciales son:

$$\text{en} \quad x = 0, \quad y = 0, \qquad y \text{ en} \quad x = 0, \ \frac{dy}{dx} = 0$$

con lo cual:

$$c_1 = c_2 = 0$$

quedando la solución como:

$$y = \frac{\omega x^2}{2H}, \qquad -30 \le x \le 30$$

CAPITULO II SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

II.1 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

En el capítulo anterior, se estudiaron las ecuaciones diferenciales lineales y ordinarias, en las cuales aparece una variable dependiente y una variable independiente. En el presente capítulo se estudiarán dichas ecuaciones consideradas en forma de sistemas. Naturalmente, tales sistemas están caracterizados por la aparición de varias variables dependientes, cada una de las cuales es una función de una misma variable independiente.

Considérese el circuito eléctrico mostrado en la figura II.1:

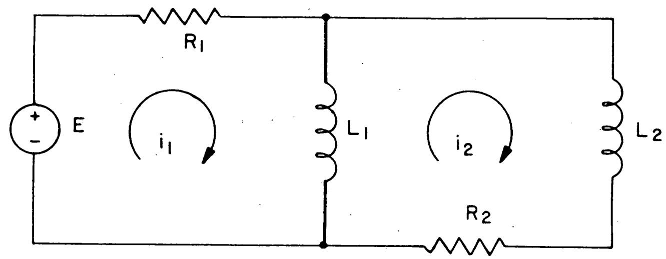


Figura II.1

al modelo matemático le corresponde el siguiente sistema de ecuaciones:

$$L_1 \frac{d}{dt}(i_1 - i_2) + R_1 i_1 = E$$

$$- L_1 \frac{d}{dt}(i_1 - i_2) + L_2 \frac{di_1}{dt^2} + R_2 i_2 = 0$$

Este sistema se obtiene aplicando en cada malla la ley de voltajes de Kirchhoff y considerando que en el elemento L_1 común a ambas, la intensidad de la corriente es $i_1 - i_2$ en la malla izquierda, y en la malla derecha $i_2 - i_1$.

El conocido problema de Lotka y Volterra en ecología matemática es otro ejemplo de sistemas de ecuaciones diferenciales. Tales investigadores plantearon un modelo matemático para que dos especies, una A que devora a otra B se mantengan en equilibrio, estando presentes simultáneamente. Se denotará como A, a la especie de conejos y como B, a la de zorros. En ausencia de la especie rapaz, la presa se desarrollaría sin límite y en forma proporcional a su número, o sea, si $B = 0$:

$$\frac{dA}{dt} = a\,A, \quad \text{donde } a \text{ es el índice de natalidad.}$$

La especie rapaz en cambio, en ausencia de la presa, finalmente se extinguirá; o sea, si $A = 0$:

$$\frac{dB}{dt} = - b\,B, \quad \text{donde } b \text{ es la tasa de mortalidad.}$$

En realidad, el incremento de zorros depende del abastecimiento de comida (conejos) y la extinción de la presa se realiza con una rapidez proporcional al número de encuentros AB entre zorros y conejos. Cada encuentro representa una disminución en el número de conejos y un incremento en el de zorros, matemáticamente:

$$\frac{dA}{dt} = aA - k_1 AB$$

$$\frac{dB}{dt} = - bB + k_2 AB$$

donde k_1 y k_2 son valores del efecto de la interacción de zorros y conejos.

En cada uno de los ejemplos anteriores, el modelo matemático está representado por un sistema de dos ecuaciones diferenciales, en donde aparecen dos variables dependientes y una variable independiente.

II.2 SISTEMAS LINEALES DE PRIMER ORDEN Y COEFICIENTES CONSTANTES

Un sistema de "n" ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, se caracteriza por tener "n" variables dependientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y una sola variable independiente "t". Las variables dependientes constituyen las incógnitas del sistema y cada una de ellas es función de "t". Una representación general de este tipo de sistemas es la siguiente:

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \ldots (1) \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Si las funciones F_i presentan la forma:

$$F_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \ldots + a_{in}(t)x_n + b_i(t),$$

entonces el sistema es lineal y de primer orden, su representación general es:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \qquad \ldots (2) \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{aligned}$$

Un sistema como el (2) tiene una solución dentro de un intervalo $t_1 < t < t_2$, si existe un conjunto de "n" funciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$, todas diferenciables de "t" en cualquier punto de dicho intervalo. Al conjunto de funciones, si existe, se le llama *solución del sistema de ecuaciones.*

Ejemplo II.1

Para el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_2$$

Considérese el conjunto de funciones x_1, x_2:

$$x_1 = e^t + e^{2t}$$

$$x_2 = e^{2t}$$

Se desea comprobar si x_1 y x_2 es la solución del sistema:

Si bien estas funciones son diferenciables en todo el eje real, no constituyen la solución del sistema, ya que no satisfacen a ambas ecuaciones. En efecto sustituyendo x_1 y x_2 en las ecuaciones del sistema:

$$e^t + 2e^{2t} \neq (e^t + e^{2t}) - e^{2t}$$

$$2e^{2t} = 2e^{2t}$$

como se observa, la primera ecuación diferencial del sistema no se satisface, en cambio se puede verificar que las funciones:

$$x_1 = e^t - 2e^{2t}$$

$$x_2 = 2e^{2t}$$

sí constituyen una solución del sistema.

El sistema lineal de ecuaciones (2), tiene la siguiente representación matricial:

$$\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + \bar{b}\,(t) \qquad \ldots (3)$$

donde:

$$\overline{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}, \quad \text{vector de términos independientes.}$$

$$\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{vector de incógnitas.}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad \text{matriz de coeficientes.}$$

Es conveniente aclarar que el sistema (2) tiene solución en términos de funciones elementales únicamente en algunos casos particulares.

Si en el sistema (2) los elementos de la matriz A(t) son constantes se dice que el sistema de ecuaciones diferenciales lineales, de primer orden, es de coeficientes constantes y se representará como:

$$\begin{matrix} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{matrix} \quad \dots (4)$$

o en forma matricial:

$$\dot{\overline{x}} = A\overline{x} + \overline{b}(t) \quad \dots (5)$$

Este tipo de sistemas, son los que se estudiarán en el presente capítulo.

II.2.1 MATRICES DE FUNCIONES

Se llama matriz de funciones a una matriz en la cual todos sus elementos son funciones de una variable real y su representación es:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

el concepto anterior se hace extensivo a los vectores.

Si una matriz tiene funciones como elementos, es posible obtener la derivada o la integral de dicha matriz.

II.2.2 DERIVACION E INTEGRACION DE MATRICES DE FUNCIONES

La derivada de una matriz de funciones A(t) de orden m x n, es una matriz del mismo orden y cuyos elementos se obtienen al derivar el elemento correspondiente de la matriz original, esto es:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a_{ij}(t)\right)$$

Ejemplo II.2

Dada la matriz de funciones:

$$A(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t \\ 3t & -t \end{bmatrix}$$

su primera derivada es:

$$A'(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}(t^2) & \frac{d}{dt}(t) \\ \frac{d}{dt}(3t) & \frac{d}{dt}(-t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

La integral de una matriz de funciones A(t) de orden m x n es una matriz del mismo orden y cuyos elementos se obtienen al integrar los elementos correspondientes de la matriz original, esto es:

$$\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(a_{ij}(t)\right) dt$$

Así para la matriz A(t) del ejemplo anterior, la integral de 0 a "t" es:

$$\int_0^t A(t)\,dt = \begin{bmatrix} \int_0^t t^2 dt & \int_0^t t\,dt \\ \int_0^t 3t\,dt & -\int_0^t t\,dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t^3}{3} & \frac{t^2}{2} \\ \frac{3t^2}{2} & \frac{-t^2}{2} \end{bmatrix}$$

Propiedades de la derivada e integral de matrices:

A). $\frac{d}{dt}(A + B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}$

B). $\frac{d}{dt}(AB) = A\frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt}B$

C). $\frac{d}{dt}(\alpha A + \beta B) = \alpha\frac{dA}{dt} + \beta\frac{dB}{dt}$

D). $\int_{t_1}^{t_2} \alpha A\,dt = \alpha\int_{t_1}^{t_2} A\,dt$

E). $\int_{t_1}^{t_2} (A + B)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} A\,dt + \int_{t_1}^{t_2} B\,dt$

F). $\int_{t_1}^{t_2} (\alpha A + \beta B)\,dt = \alpha\int_{t_1}^{t_2} A\,dt + \beta\int_{t_1}^{t_2} B\,dt$

Donde A y B son matrices de funciones conformables para la suma o la multiplicación según el caso, y α, β son escalares cualesquiera.

II.2.3 SERIES DE MATRICES Y CONVERGENCIA

El concepto de serie de matrices se define a partir de la noción de sucesión de matrices de la siguiente forma:

> Definición: Sea una sucesión $\{A_k\}$ de matrices de orden m x n cuyos elementos son números, entonces la serie de matrices se expresa como:
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

Si en la serie de matrices $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ se designa al elemento ij de A_k por $a_{ij}^{(k)}$ y todas las series correspondientes a cada elemento (m n) son convergentes, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ es convergente y la suma está definida como la matriz de orden m x n cuyo elemento ij está dado por la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}, \text{ donde } (i = 1, 2, 3, \ldots, m;\ j = 1, 2, 3, \ldots n)$$

Otra forma de analizar la convergencia de una serie de matrices, es a través de la norma de una matriz (generalización del valor absoluto de un número), por esto, se presenta la siguiente definición:

Definición: La norma de una matriz A de orden m x n cuyos elementos son números, se representa por $\| A \|$ y se define como el número no negativo obtenido por medio de $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, es decir las sumas de los valores absolutos de todos sus elementos, por lo tanto:

$$\| A \| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

A partir de la definición de norma, se podrá aplicar el siguiente teorema, con respecto a la convergencia de matrices.

TEOREMA II.1

Si $\{A_k\}$ es una sucesión de matrices de orden m x n tales que $\sum_{k=1}^{\infty} \| A_k \|$ converge, entonces la serie de matrices $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ también converge.*

Aplicando el teorema II.1, se demuestra que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{K!}$ converge para matrices cuadradas A, cuyos elementos sean números (en estas series se entiende que el término que le corresponde a k = 0, es la matriz identidad correspondiente).

El desarrollo de la función e^x en serie de Maclaurin es el siguiente:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$$

Por similitud con este desarrollo, podemos decir que para la función matricial e^A, el desarrollo correspondiente es:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots$$

o bien:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

el desarrollo de e^A queda formalizado a través de la siguiente definición:

Definición: Sea A una matriz de orden n x n cuyos elementos son constantes, se define la exponencial e^A como una matriz de orden n x n dada por la serie convergente

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

*La demostración del teorema se puede consultar en el volumen 2 de "Calculus" de Tom. M. Apostol.

La matriz exponencial e^{At} es importante en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, su desarrollo es:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots + \frac{A^kt^k}{k!} + \dots$$

Con base en los desarrollos en serie de Maclaurin para las funciones sen x y cos x, se pueden escribir los desarrollos de las funciones matriciales sen A y cos A:

$$\text{sen } A = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos A = I - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{A^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

II.2.4 SISTEMAS HOMOGENEOS Y LA FORMA DE SU SOLUCION

En el método que se presenta a continuación, para obtener la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, se utiliza la serie de Maclaurin para desarrollar la solución en un entorno del vector $\overline{x}(0)$:

$$\overline{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

al vector $\overline{x}(0)$ se le llama *vector de condiciones iniciales*. Por lo tanto, la solución que se obtiene es una solución particular que satisface condiciones en $t = 0$.

El caso homogéneo del sistema (4) presenta la siguiente forma:

$$\dot{\overline{x}} = A\overline{x} \; ; \qquad \dots (6)$$

derivando la ecuación anterior:

$$\ddot{\overline{x}} = A\dot{\overline{x}} \qquad \dots (7)$$

sustituyendo (6) en (7):

$$\ddot{\overline{x}} = A^2\overline{x} \qquad \dots (8)$$

si este proceso de derivación, con la sustitución correspondiente, se lleva hasta el enésimo orden, se tiene:

$$\overset{n}{\overline{x}} = A^n\overline{x} \qquad \dots (9)$$

entonces, cada componente del vector solución $\overline{x}$ del sistema debe ser una función diferenciable y, por lo tanto, continua para cualquier valor de la variable independiente "t", en algún intervalo dado que contenga al punto $t = 0$; según esto y de acuerdo con la ecuación (9), la derivada enésima de la solución del sistema estudiado, será también una función continua para toda "t" en dicho intervalo, ya que A^n es una matriz de coeficientes constantes. La función $x_i (i = 1, \dots, n)$ debe tener un desarrollo en serie de Maclaurin de la siguiente forma:

$$x_i = P_{0i} + P_{1i}t + P_{2i}t^2 + \dots + P_{ni}t^n + \dots \; ; \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

vectorialmente:

$$\overline{x} = \overline{P}_0 + \overline{P}_1 t + \overline{P}_2 t^2 + \dots + \overline{P}_n t^n + \dots \qquad \dots (10)$$

donde $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$, son vectores desconocidos que deben determinarse. La ecuación (10) representa la forma general de la solución del sistema (6). Sin embargo, tiene ciertos inconvenientes, primero por ser una serie infinita, lo que impide conocer la solución exacta y segundo, por la gran cantidad de trabajo que involucra evaluar los vectores $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots \overline{P}_n$, suponiendo que sólo se quisieran conocer algunos términos de la serie. Este último inconveniente se puede resolver en parte, representando a los vectores $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ en términos del vector de condiciones iniciales $\overline{P}_0$, como se muestra a continuación.

Premultiplicando (10) por la matriz de coeficientes A, se obtiene:

$$A\overline{x} = A\overline{P}_0 + A\overline{P}_1 t + A\overline{P}_2 t^2 + \ldots + A\overline{P}_n t^n + \ldots \qquad \ldots (11)$$

derivando la solución propuesta en (10):

$$\dot{\overline{x}} = \overline{P}_1 + 2\overline{P}_2 t + 3\overline{P}_3 t^2 + \ldots + n\overline{P}_n t^{n-1} \qquad \ldots (12)$$

por lo tanto, igualando (11) con (12) debido a (6), e igualando los términos correspondientes:

$$\begin{aligned} \overline{P}_1 &= A\overline{P}_0 \\ 2\overline{P}_2 &= A\overline{P}_1 = A^2\overline{P}_0 \; ; \; \overline{P}_2 = A^2\overline{P}_0/2 \qquad \ldots (13) \\ 3\overline{P}_3 &= A\overline{P}_2 = A^3\overline{P}_0/2 \; ; \; \overline{P}_3 = A^3\overline{P}_0/2x3 \end{aligned}$$

y en general:

$$\overline{P}_n = \frac{A^n}{n!}\overline{P}_0$$

el interés por expresar todas las componentes $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$ en función de A y $\overline{P}_0$, se debe a que ambos son datos; A es la matriz de coeficientes y $\overline{P}_0$ es el vector de condiciones iniciales.

Sustituyendo (13) en (10), la solución del sistema homogéneo es:

$$\overline{x} = \left(I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{A^n}{n!}t^n + \ldots\right)\overline{P}_0 \qquad \ldots (14)$$

en donde se observa que para determinar la solución de un sistema de la forma (6), basta con determinar el valor de la serie matricial infinita:

$$I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{A^n}{n!}t^n + \ldots$$

esta forma de obtener la solución $\overline{x}$, implica sumar un número infinito de términos. Con el uso de una computadora, es posible considerar un gran número de términos de la serie, pero de cualquier modo, se llegaría a la solución de la ecuación diferencial en forma aproximada.

Ejemplo II.3

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{\overline{x}} = A\overline{x}, \quad \overline{x}(0) = \overline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Para obtener el vector solución $\overline{x}$ por medio de la serie (14), es necesario calcular las potencias de A:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}, \ldots, A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

sustituyendo en (14):

$$\bar{x} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} \frac{t^3}{6} + \ldots + \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 + 2t + 4\frac{t^2}{2} + 8\frac{t^3}{6} + \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 3t + 9\frac{t^2}{2} + 27\frac{t^3}{6} + \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 + 2t + \frac{(2t)^2}{2} + \frac{(2t)^3}{6} + \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 3t + \frac{(3t)^2}{2} + \frac{(3t)^3}{6} + \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

como:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \ldots$$

la solución del sistema es:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 3e^{t} \\ 2e^{3t} \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$x_1 = e^{2t}, \quad x_2 = 3e^{t}, \quad x_3 = 2e^{3t}$$

Si la matriz A es diagonal y no dispersa (cero en cualquier posición, excepto en la diagonal no nula) se facilita la resolución del sistema.

También se obtuvo en el ejemplo II.3, la suma de la serie matricial infinita de la ecuación (14), la cual es una matriz cuadrada que involucra elementos exponenciales de la forma e^{At}:

$$\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

por esta razón se le denomina *matriz exponencial* y se le denota por e^{At}:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \dots + \frac{A^n}{n!} t^n + \dots \qquad \dots (15)$$

con esta nueva notación para la serie matricial infinita, se puede expresar a la solución del sistema de la siguiente forma:

$$\bar{x} = e^{At}\bar{x}(0) \qquad \dots (16)$$

Se puede observar la analogía con el caso escalar:

$$y' = ay$$

cuya solución es:

$$y = e^{at}\, y(0)$$

El problema para obtener la solución (16) de un sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas, consiste en calcular la matriz exponencial e^{At}, por lo que se debe analizar con más detenimiento sus propiedades y la forma de su obtención.

II.2.5 PROPIEDADES DE LA MATRIZ EXPONENCIAL

A continuación se presentan algunas propiedades importantes de la matriz exponencial e^{At}.

A) Si en la ecuación (15) se tiene $t = 0$:

$$e^{(0)} = I \qquad \dots (17)$$

B) Derivando la ecuación (15) con respecto a "t":

$$\frac{de^{At}}{dt} = A + A^2 t + \dots + \frac{1}{(n-1)!} A^n t^{n-1} + \dots$$

$$= A\left[I + At + \dots + \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} + \dots\right]$$

$$= \left[I + At + \dots + \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} + \dots\right] A$$

por lo tanto:

$$\frac{de^{At}}{dt} = A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A \qquad \dots (18)$$

C) Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden, si $AB = BA$ entonces:

$$e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt} \qquad \dots (19)$$

Para comprobar lo anterior, se desarrollan las matrices exponenciales:

$$e^{(A+B)t} = I + (A+B)t + \frac{(A+B)^2}{2!} t^2 + \frac{(A+B)^3}{3!} t^3 + \dots \qquad (20)$$

y

$$e^{At} e^{Bt} = \left(I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \dots\right)\left(I + Bt + \frac{B^2}{2!} t^2 + \dots\right)$$

$$= I + (A+B)t + \frac{A^2}{2!} t^2 + ABt^2 + \frac{B^2}{2!} t^2 + \frac{A^3}{3!} t^3 + $$

$$+ \frac{A^2 B}{2!} t^3 + \frac{AB^2}{2!} t^3 + \frac{B^3 t^3}{3!} + \dots \qquad (21)$$

restando (21) de (20):

$$e^{(A+B)t} - e^{At} e^{Bt} = \frac{BA - AB}{2!} t^2 + \frac{BA^2 + ABA + B^2 A + BAB - 2A^2 B - 2AB^2}{3!} t^3 + \dots \quad (22)$$

En la expresión (22) si AB = BA se tiene:

$$e^{(A+B)t} - e^{At}\cdot e^{Bt} = 0$$

de donde:

$$e^{(A+B)t} = e^{At}\cdot e^{Bt}$$

D) Si en la ecuación (19) se hace B = - A:

$$I = e^{At}\cdot e^{-At} ,$$

por lo tanto:

$$\left[e^{At}\right]^{-1} = e^{-At} \qquad \ldots (23)$$

II.2.6 SISTEMAS NO HOMOGENEOS

A continuación se procede a determinar la forma que presenta la solución del sistema no homogéneo:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + \bar{b}(t) , \qquad \bar{b}(t) \neq 0 ;$$

si se multiplica el sistema por e^{-At}:

$$e^{-At}\,\dot{\bar{x}} = e^{-At}A\bar{x} + e^{-At}\bar{b}(t)$$

como $\frac{d}{dt}(e^{-At}\bar{x}) = e^{-At}\dot{\bar{x}} - e^{-At}A\bar{x}$, la expresión anterior se puede representar:

$$d(e^{-At}\bar{x}) = e^{-At}\bar{b}(t)\,dt \quad ; \qquad \ldots (24)$$

integrando la ecuación entre 0 y "t", se tiene:

$$e^{-At}\bar{x} - \bar{x}(0) = \int_0^t e^{-A\delta}\bar{b}(\delta)d\delta$$

despejando $\bar{x}$:

$$\bar{x} = e^{At}\bar{x}(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\delta}\bar{b}(\delta)d\delta$$

o bien:

$$\bar{x} = e^{At}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\delta)}\bar{b}(\delta)d\delta \qquad \ldots (25)$$

la ecuación (25) representa la solución del sistema no homogéneo.

II.2.7 CALCULO DE LA MATRIZ EXPONENCIAL

Existen varios métodos para calcular e^{At} aplicables a casos de matrices dispersas; el método de transformada de Laplace, el método de valores y vectores característicos, el método de conversión matricial a la forma canónica de Jordan, etc.

El método aquí presentado tiene la suficiente flexibilidad para adaptarse a cualquier tipo de matriz con relativa facilidad, sin caer en la complejidad de otros cuando se tratan matrices de valores característicos repetidos.

Antes de desarrollar el método para calcular e^{At}, es conveniente enunciar el siguiente teorema:

TEOREMA II.2 DE HAMILTON-CAYLEY

Toda matriz cuadrada satisface su ecuación característica. Esto es si:

$$\det(A - \lambda I) = b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_0 = 0$$

es la ecuación característica de la matriz A, entonces:

$$b_nA^n + b_nA^{n-1} + \dots + b_0I = 0$$

Ejemplo II.4

Para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

se tiene:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -7 \\ 3 & 6-\lambda \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 8\lambda + 33 ;$$

de modo que la ecuación característica de la matriz es:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 33 = 0$$

Además:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & -56 \\ 24 & 15 \end{bmatrix}$$

la matriz A satisface el teorema de Hamilton - Cayley, ya que:

$$A^2 - 8A + 33I = 0$$

esto es:

$$\begin{bmatrix} -17 & -56 \\ 24 & 15 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + 33\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A continuación se desarrolla un método para obtener la matriz exponencial e^{At}, empleando el teorema de Hamilton-Cayley.

Si la ecuación característica de una matriz cuadrada A de orden "n" es:

$$\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0 \qquad \dots (26)$$

por el teorema de Hamilton-Cayley se cumple:

$$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots. + \alpha_n I = 0 \quad ; \qquad \ldots (27)$$

de donde:

$$A^n = -\alpha_1 A^{n-1} - \alpha_2 A^{n-2} - \ldots - \alpha_n I \; ; \qquad \ldots (28)$$

multiplicando la ecuación (28) por A, se tiene:

$$A^{n+1} = -\alpha_1 A^n - \alpha_2 A^{n-1} - \ldots - \alpha_n A \qquad \ldots (29)$$

sustituyendo (28) en (29) resulta lo siguiente:

$$A^{n+1} = -\alpha_1(-\alpha_1 A^{n-1} - \alpha_2 A^{n-2} - \ldots - \alpha_n I) - \alpha_2 A^{n-1} - \ldots - \alpha_n A$$

agrupando términos:

$$A^{n+1} = \gamma_{11} A^{n-1} + \gamma_{21} A^{n-2} + \ldots + \gamma_{n1} I \quad ;$$

En general:

$$A^{n+k} = \gamma_{1k} A^{n-1} + \gamma_{2k} A^{n-2} + \ldots + \gamma_{nk} I \; , \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad \ldots (30)$$

por la definición de matriz exponencial, la ecuación (15) es una serie matricial infinita:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \frac{A^3}{3!} t^3 + \ldots + \frac{A^n}{n!} t^n + \ldots$$

si en esta ecuación se sustituye la ecuación (30), se tiene:

$$e^{At} = I + At + \ldots. + \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} + \frac{1}{n!}(\gamma_{10} A^{n-1} + \ldots + \gamma_{n0} I) t^n +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}(\gamma_{11} A^{n-1} + \gamma_{21} A^{n-2} + \ldots + \gamma_{n1} I) t^{n+1} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n+k)!}(\gamma_{1k} A^{n-1} + \ldots + \gamma_{nk} I) t^{n+k} + \ldots \qquad \ldots (31)$$

En la ecuación (31) se observa que sólo aparecen potencias de A de la forma A^m con $m = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$; agrupando términos se tiene:

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 A^2 + \ldots + \beta_{n-1} A^{n-1} \qquad \ldots (32)$$

donde "n" es la dimensión de la matriz y β_0, β_1 ... β_{n-1} son funciones de "t".

Para cada valor característico λi se tiene:

$$e^{\lambda_i t} = 1 + \lambda_i t + \frac{\lambda_i^2 t^2}{2} t^2 + \ldots + \frac{\lambda_i^n}{n!} t^n + \ldots \; ; \qquad \ldots (33)$$

de la ecuación (26), se tiene:

$$\lambda_i^n = -\alpha \lambda_i^{n-1} - \ldots - \alpha_n \quad ;$$

realizando los mismos pasos que se efectuaron para obtener las ecuaciones (28) a la (32), se obtiene:

$$\lambda_i^{n+k} = \gamma_{1k} \lambda_i^{n-1} + \gamma_{2k} \lambda_i^{n-2} + \ldots + \gamma_{nk} \; ; \; k = 0, 1, 2, \ldots \qquad \ldots (34)$$

donde los coeficientes γ_{ik} son los mismos que los de ecuación (30), y finalmente:

$$e^{\lambda_i t} = \beta_0 + \beta_1\lambda_i + \beta_2\lambda_i^2 + \ldots + \beta_{n-1}\lambda_i^{n-1} \qquad \ldots (35)$$

donde los coeficientes β_i son los mismos que aparecen en la ecuación (32).

Para determinar la matriz exponencial e^{At} se requiere conocer $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{n-1}$, para lo cual se plantea una ecuación del tipo (35) para cada valor característico de la matriz A; si estos valores son distintos se tendrá un sistema de "n" ecuaciones con "n" incógnitas del cual se obtendrán "n" valores β_i necesarios en (32).

Cuando la matriz A tenga un valor característico repetido "k" veces, será necesario derivar la ecuación (35), k - 1 veces respecto a λ, para obtener las ecuaciones adicionales que sean necesarias en la determinación de los valores de β_i.

Ejemplo II.5

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz exponencial e^{At}, como A es una matriz de orden n = 2, por la ecuación (32) se tiene:

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A \quad ;$$

los valores característicos de A son:

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 5$$

Con estos valores se obtienen dos ecuaciones, una para cada valor característico, como indica la expresión (35):

$$e^{5t} = \beta_0 + 5\beta_1$$

$$e^{-t} = \beta_0 - \beta_1 \quad ;$$

resolviendo este sistema algebraico:

$$\beta_1 = \frac{1}{6}\,(e^{5t} - e^{-t})$$

$$\beta_0 = \frac{1}{6}\,(e^{5t} + 5e^{-t})$$

por lo tanto:

$$e^{At} = \frac{1}{6}\,(e^{5t} + 5e^{-t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\,(e^{5t} - e^{-t}) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2e^{5t} + 4e^{-t} & 2e^{5t} - 2e^{-t} \\ 4e^{5t} - 4e^{-t} & 4e^{5t} + 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo II.6

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz A es de orden 3 y sus valores característicos son:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

la matriz e^{At} se calcula por medio de la expresión (32):

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 A^2;$$

de la expresión (35) para $\lambda_1 = 1$, se obtiene:

$$e^{t} = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \qquad \ldots \text{(a)}$$

y para $\lambda_2 = 0$:

$$1 = \beta_0 \qquad \ldots \text{(b)}$$

la tercera ecuación se obtiene derivando la siguiente ecuación con respecto a λ:

$$e^{\lambda t} = \beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2$$

esto es:

$$te^{\lambda t} = \beta_1 + 2\lambda\beta_2 \;;$$

valuando para $\lambda_3 = 0$, se tiene:

$$t = \beta_1 \qquad \ldots \text{(c)}$$

Resolviendo las ecuaciones (a), (b) y (c) se obtienen los valores de β_0, β_1 y β_2.

De las ecuaciones (b) y (c) se obtienen $\beta_0 = 1$ y $\beta_1 = t$.

Sustituyendo estos valores en (a) se tiene:

$$\beta_2 = e^{t} - t - 1$$

por lo tanto:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{t} - t - 1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

efectuando operaciones:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ e^{t}-1 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo II.7

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que es una matriz de orden 2, se tiene:

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A$$

La ecuación característica de la matriz es:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

por lo que:

$$\lambda_1 = i \quad y \quad \lambda_2 = -i$$

para $\lambda_1 = i$:

$$e^{it} = \beta_0 + i\beta_1 = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

y para $\lambda_2 = -i$:

$$e^{-it} = \beta_0 - i\beta_1 = \cos t - i \operatorname{sen} t$$

resolviendo para β_0 y β_1 se obtiene:

$$\beta_0 = \cos t$$

$$\beta_1 = \operatorname{sen} t$$

con estas funciones la matriz exponencial es la siguiente:

$$e^{At} = \cos t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}$$

II.3 RESOLUCION DE SISTEMAS LINEALES DE PRIMER ORDEN Y COEFICIENTES CONSTANTES

Con los planteamientos básicos dados, se pueden resolver sistemas lineales de primer orden y coeficientes constantes. Por medio de ejemplos concretos se presentarán los dos casos: Resolución de sistemas homogéneos y resolución de sistemas no homogéneos.

II.3.1 RESOLUCION DE SISTEMAS HOMOGENEOS

En la sección II.2.4, se obtuvo la solución del sistema homogéneo $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, la cual es de la forma:

$$\bar{x} = e^{At}\bar{x}(0)$$

Ejemplo II.8

Para el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \end{matrix}$$

la ecuación característica de la matriz de coeficientes es:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \quad ;$$

por lo tanto, los valores característicos de la matriz A son:

$$\lambda_1 = 4$$

$$\lambda_2 = -2$$

Como A es de orden 2, la matriz exponencial se calcula de la siguiente manera:

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A \qquad \ldots \text{(a)}$$

Con λ_1 y λ_2 se forma el siguiente sistema:

$$e^{4t} = \beta_0 + 4\beta_1$$

$$e^{-2t} = \beta_0 - 2\beta_1 \quad ;$$

resolviendo para β_0 y β_1 se obtiene:

$$\beta_1 = \frac{1}{6}(e^{4t} - e^{-2t}) \qquad \text{y} \qquad \beta_0 = \frac{1}{3}(e^{4t} + 2e^{-2t})$$

sustituyendo los valores de β_0 y β_1 en la expresión (a), se tiene:

$$e^{At} = \frac{1}{3}(e^{4t} + 2e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}(e^{4t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

efectuando operaciones:

$$e^{At} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3e^{4t} + 3e^{-2t} & e^{4t} - e^{-2t} \\ 9e^{4t} - 9e^{-2t} & 3e^{4t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la solución para el sistema dado con $x_1(0) = x_2(0) = 1$ es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3e^{4t} + 3e^{-2t} & e^{4t} - e^{-2t} \\ 9e^{4t} - 9e^{-2t} & 3e^{4t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

esto es:

$$x_1 = \frac{2}{3} e^{4t} + \frac{1}{3} e^{-2t}$$

$$x_2 = 2e^{4t} - e^{-2t}$$

Ejemplo II.9

Sea el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 0 \end{matrix}$$

Como A es de orden 3, la matriz exponencial se calcula de la siguiente forma:

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 A^2$$

Los valores característicos de la matriz A son:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$$

como los valores se repiten, es necesario derivar dos veces para generar las tres ecuaciones de las que se obtendrán:

$$\beta_0, \ \beta_1 \ \text{y} \ \beta_2$$

La primera derivada de la expresión $e^{\lambda t} = \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2$ es:

$$te^{\lambda t} = \beta_1 + 2\beta_2\lambda$$

y la segunda derivada:

$$t^2 e^{\lambda t} = 2\beta_2$$

sustituyendo $\lambda = 3$:

$$e^{3t} = \beta_0 + 3\beta_1 + 9\beta_2$$

$$te^{3t} = \beta_1 + 6\beta_2$$

$$t^2 e^{3t} = 2\beta_2$$

resolviendo estas tres ecuaciones se obtienen β_0, β_1 y β_2 y sustituyendo en la matriz exponencial se tiene:

$$e^{At} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la solución del sistema es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o sea:

$$x_1 = e^{3t}(1 + t)$$

$$x_2 = e^{3t}$$

$$x_3 = 0$$

La teoría presentada, ha sido desarrollada para problemas de valores iniciales, es decir, se precisa del conocimiento de un vector de condiciones iniciales en $t = 0$, el cual se ha representado como $\overline{x}(0)$. Sin embargo, esta teoría es perfectamente aplicable a problemas en donde se solicita la solución general, o bien a problemas en donde las condiciones están dadas en un instante de tiempo cualquiera, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo II.10

Para el sistema:

$$\dot{x} = x + y$$

$$\dot{y} = 9x + y$$

Se desea obtener su solución general.

Los valores característicos de la matriz son:

$$\lambda_1 = 4 \quad ; \quad \lambda_2 = -2$$

Y la matriz exponencial, calculada con el método descrito (ver ejemplo II.7), es:

$$e^{At} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3e^{4t} + 3e^{-2t} & e^{4t} - e^{-2t} \\ 9e^{4t} - 9e^{-2t} & 3e^{4t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

la solución general es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{At}\bar{k} \; ,$$

donde:

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

es un vector desconocido de condiciones iniciales, esto es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3e^{4t} + 3e^{-2t} & e^{4t} - e^{-2t} \\ 9e^{4t} - 9e^{-2t} & 3e^{4t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(3k_1 + k_2)e^{4t} & + & \frac{1}{6}(3k_1 - k_2)e^{-2t} \\ \frac{3}{6}(3k_1 + k_2)e^{4t} & - & \frac{3}{6}(3k_1 - k_2)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

como:

$$x = \frac{1}{6}(3k_1 + k_2)e^{4t} + \frac{1}{6}(3k_1 - k_2)e^{-2t}$$

$$y = \frac{3}{6}(3k_1 + k_2)e^{4t} - \frac{3}{6}(3k_1 - k_2)e^{-2t}$$

si $c_1 = (3k_1 + k_2)/6$ y $c_2 = (3k_1 - k_2)/6$ entonces:

$$x = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t}$$

$$y = 3c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{-2t}$$

Obsérvese que las constantes esenciales de la solución no son directamente las coordenadas del vector de condiciones iniciales, sino una combinación de ellas. El quid del problema estriba en poder formar esas combinaciones.

II.3.2 RESOLUCION DE SISTEMAS NO HOMOGENEOS

En los próximos ejemplos, los conceptos fundamentales para resolver un sistema no homogéneo, son los mismos del homogéneo y se hace necesario únicamente completar la solución de la parte no homogénea, por lo que se hará uso de la teoría expuesta en el inciso II.2.6; concretamente de la expresión (25):

$$\bar{x} = e^{At}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{A(t - \delta)}\bar{b}(\delta)\,d\delta$$

que representa la solución de un sistema no homogéneo de la forma:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + \bar{b}(t)$$

con la condición inicial $\bar{x}(0)$.

Ejemplo II.11

Para el sistema no homogéneo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $x_1(0) = 4$ y $x_2(0) = 0$, la ecuación característica de la matriz de coeficientes es:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

donde:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -3$$

son los valores característicos.

La matriz exponencial está dada por:

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A \quad ;$$

con λ_1 y λ_2 se genera el sistema:

$$e^{t} = \beta_0 + \beta_1$$

$$e^{-3t} = \beta_0 - 3\beta_1$$

resolviéndolo, se obtiene:

$$\beta_0 = \frac{3e^{t} + e^{-3t}}{4} \quad ; \quad \beta_1 = \frac{e^{t} - e^{-3t}}{4}$$

entonces, la matriz exponencial es:

$$e^{At} = \frac{3e^{t} + e^{-3t}}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{t} - e^{-3t}}{4} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

o sea:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{2(e^{t} + e^{-3t})}{4} & -\frac{e^{t} - e^{-3t}}{2} \\ \frac{-e^{t} + e^{-3t}}{2} & \frac{e^{t} + e^{-3t}}{2} \end{bmatrix}$$

por lo tanto la solución es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{t} + e^{-3t}}{2} & -\frac{e^{t} - e^{-3t}}{2} \\ \frac{-e^{t} + e^{-3t}}{2} & \frac{e^{t} + e^{-3t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{e^{t-\delta} + e^{-3(t-\delta)}}{2} & -\frac{e^{t-\delta} - e^{-3(t-\delta)}}{2} \\ \frac{-e^{t-\delta} + e^{-3(t-\delta)}}{2} & \frac{e^{t-\delta} + e^{-3(t-\delta)}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\delta} \\ 0 \end{bmatrix} d\delta \, ,$$

efectuando las operaciones y simplificando:

$$x_1 = \frac{7}{4} e^{-3t} + \frac{9}{4} e^{t}$$

$$x_2 = \frac{7}{4}\ e^{-3t} - \frac{9}{4}\ e^{t} + \frac{1}{2}\ e^{-t}$$

Ejemplo II.12

Se desea obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 0 \\ x_3(0) &= 1 \end{aligned}$$

Los valores característicos de la matriz son:

$$\lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = i \quad y \quad \lambda_3 = -i \quad ;$$

como A es de tercer orden:

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 A^2$$

$$e^{\lambda t} = \beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2$$

al sustituir los valores de λ en la ecuación anterior se obtiene el sistema:

$$1 = \beta_0$$

$$e^{it} = 1 + i\beta_1 - \beta_2 = \cos t + i \text{ sen } t$$

$$e^{-it} = 1 - i\beta_1 - \beta_2 = \cos t - i \text{ sen } t$$

resolviéndolo, se tiene:

$$\beta_0 = 1$$

$$\beta_1 = \text{sen } t$$

$$\beta_2 = 1 - \cos t$$

sustituyendo en e^{At}:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \text{sen } t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} +$$

$$+ (1 - \cos t) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

efectuando las operaciones y simplificando:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & -2 + 2\cos t + \text{sen } t & -5 + 5\cos t \\ 0 & \cos t - 2 \text{ sen } t & -5 \text{ sen } t \\ 0 & \text{sen } t & \cos t + 2 \text{ sen } t \end{bmatrix} ;$$

conocida la matriz exponencial, se obtendrá la solución del sistema no homogéneo:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2+2\cos t + \operatorname{sen} t & -5+5\cos t \\ 0 & \cos t - 2\operatorname{sen} t & -5\operatorname{sen} t \\ 0 & \operatorname{sen} t & \cos t + 2\operatorname{sen} t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \int_0^t \begin{bmatrix} -6+6\cos(t-\delta) + 3\operatorname{sen}(t-\delta) \\ 3\cos(t-\delta) - 6\operatorname{sen}(t-\delta) \\ 3\operatorname{sen}(t-\delta) \end{bmatrix} d\delta$$

integrando la matriz:

$$\int_0^t \begin{bmatrix} -6+6\cos(t-\delta) + 3\operatorname{sen}(t-\delta) \\ 3\cos(t-\delta) - 6\operatorname{sen}(t-\delta) \\ 3\operatorname{sen}(t-\delta) \end{bmatrix} d\delta =$$

$$= \begin{bmatrix} \int_0^t [-6+6\cos(t-\delta) + 3\operatorname{sen}(t-\delta)]\, d\delta \\ \int_0^t [3\cos(t-\delta) - 6\operatorname{sen}(t-\delta)]\, d\delta \\ \int_0^t [3\operatorname{sen}(t-\delta)]\, d\delta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -6t+3+6\operatorname{sen} t - 3\cos t \\ -6+3\operatorname{sen} t + 6\cos t \\ 3-3\cos t \end{bmatrix}$$

Sustituyendo y simplificando se obtiene la solución:

$$x_1 = -2-6t+2\cos t + 6\operatorname{sen} t$$
$$x_2 = -6+6\cos t - 2\operatorname{sen} t$$
$$x_3 = 3-2\cos t + 2\operatorname{sen} t$$

Ejemplo II.13

Para el sistema no homogéneo:

$$\dot{x}_1 = 3x_1 + x_2 \qquad x_1(0) = 0$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + e^{-t} \qquad x_2(0) = 1$$

La matriz exponencial es:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} + te^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t} - te^{2t} \end{bmatrix}$$

con la cual se calcula la solución del sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}+te^{2t} & te^{2t} \\ \\ -te^{2t} & e^{2t}-te^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{2(t-\delta)}+(t-\delta)e^{2(t-\delta)} & (t-\delta)e^{2(t-\delta)} \\ \\ -(t-\delta)e^{2(t-\delta)} & e^{2(t-\delta)}-(t-\delta)e^{2(t-\delta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \\ e^{-\delta} \end{bmatrix} d\delta$$

donde:

$$x_1 = te^{2t} + \int_0^t e^{-\delta}\left[te^{2(t-\delta)} - \delta e^{2(t-\delta)}\right] d\delta$$

$$x_2 = e^{2t} - te^{2t} + \int_0^t e^{-\delta}\left[e^{2(t-\delta)} - (t-\delta)e^{2(t-\delta)}\right] d\delta$$

integrando y simplificando:

$$x_1 = \frac{4}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t} + \frac{1}{9}e^{-t}$$

$$x_2 = \frac{13}{9}e^{2t} - \frac{4}{3}te^{2t} - \frac{4}{9}e^{-t}$$

II.3.3 TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA SISTEMAS LINEALES

TEOREMA II.3

Sea el sistema lineal $\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t)$; $\bar{x}(0) = \bar{b}$ donde A es una matriz constante de orden $n \times n$ y $\bar{b}$ es el vector de condiciones iniciales de $n \times 1$. La solución única del sistema en el intervalo $-\infty < t < \infty$ es $\bar{x}(t) = e^{At}\bar{b}$.

Demostración:

A) Para demostrar que $\bar{x}(t) = e^{At}\bar{b}$ es solución del sistema, se deberá comprobar que lo satisface.

Derivando la solución propuesta:

$$\dot{\bar{x}}(t) = Ae^{At}\bar{b}$$

sustituyendo $\bar{x}(t) = e^{At}\bar{b}$ y su derivada en el sistema:

$$Ae^{At}\bar{b} = Ae^{At}\bar{b}$$

o sea, la ecuación se transforma en una identidad. Además, en $t = 0$:

$$\bar{x}(0) = e^{A(0)}\bar{b}$$

$$= \bar{b}$$

por lo tanto:

$$\bar{x}(t) = e^{At}\bar{b}$$

es solución del sistema $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, con $\bar{x}(0) = \bar{b}$.

B) Para demostrar que $\bar{x}(t) = e^{At}\bar{b}$ es la única solución, se supone que existe otra solución a la que se llamará $\bar{z}(t)$. Entonces como $\bar{z}(t)$ es solución, se tendrá que:

$$\dot{\bar{z}}(t) = A\bar{z}(t) \quad ; \qquad \bar{z}(0) = \bar{b}$$

El producto $e^{-At}\bar{z}(t)$ se representa por $\bar{p}(t)$, se tiene:

$$\bar{p}(t) = e^{-At}\bar{z}(t)$$

derivando esta función matricial:

$$\dot{\bar{p}}(t) = e^{-At}\dot{\bar{z}}(t) - Ae^{At}\bar{z}(t)$$

como $\dot{\bar{z}}(t) = A\bar{z}(t)$, se tiene:

$$\dot{\bar{p}}(t) = e^{-At}A\bar{z}(t) - Ae^{-At}\bar{z}(t)$$

además $Ae^{-At} = e^{-At}A$, por lo que:

$$\dot{\bar{p}}(t) = e^{-At}A\bar{z}(t) - e^{-At}A\bar{z}(t)$$

$$\dot{\bar{p}}(t) = 0$$

lo que significa que $\bar{p}(t)$ es una matriz de elementos constantes, por lo que $\bar{p}(t) = \bar{p}(0)$.

Entonces como:

$$\bar{p}(t) = e^{-At}\bar{z}(t)$$

para $t = 0$: $\bar{p}(0) = e^{-A(0)}\bar{z}(0) = \bar{z}(0) = \bar{b}$

o sea:

$$\bar{p}(t) = \bar{p}(0) = e^{-At}\bar{z}(t)$$

de donde:

$$e^{-At}\bar{z}(t) = \bar{b}$$

premultiplicando por e^{At}:

$$\bar{z}(t) = e^{At}\bar{b}$$

pero como $\bar{x}(t) = e^{At}\bar{b}$, se concluye que $\bar{z}(t) = \bar{x}(t)$, o sea que la única solución del sistema es:

$$\bar{x}(t) = e^{At}\bar{b}$$

II.4 TRANSFORMACION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL DE ORDEN "n" A UN SISTEMA DE "n" ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

En el capítulo anterior se estudiaron las ecuaciones diferenciales lineales; en éstas aparece como incógnita una variable escalar. Si el modelo de un problema es una ecuación de este tipo y de orden "n", se puede transformar en un sistema de "n" ecuaciones diferenciales de primer orden; de esta manera se tendrán "n" variables como incógnitas. Las "n" variables pueden o no tener una interpretación física en el problema.

El procedimiento para realizar dicha transformación, consiste en introducir tantas variables dependientes, como sea el orden de la ecuación diferencial.

Ejemplo II.14

Sea la ecuación diferencial de orden tres:

$$x''' + 2x'' - x' + 3x = 2t \qquad \ldots (a)$$

si $x = w_1$ ... (b)

entonces:

$$x' = w_1'$$

haciendo:

$$x' = w_2$$

se tiene:

$$x' = w_1' = w_2 \qquad \ldots (c)$$

derivando $x' = w_2$ y haciendo $w_2' = w_3$:

$$x'' = w_2' = w_3 \qquad \ldots (d)$$

derivando (d), se tiene:

$$x''' = w_3' \qquad \ldots (e)$$

como ya se tiene tres nuevas variables; w_1, w_2 y w_3, ya no se podrá hacer:

$$x''' = w_3' = w_4$$

entonces en este caso, se despeja x''' de la ecuación diferencial (a):

$$x''' = -3x + x' - 2x'' + 2t \qquad \ldots (f)$$

sustituyendo (b), (c), (d) y (e) en (f):

$$w_3' = 3w_1 + w_2 - 2w_3 + 2t \qquad \ldots (g)$$

de las ecuaciones (c), (d) y (g) se forma el siguiente sistema:

$$w_1' = w_2$$

$$w_2' = w_3$$

$$w_3' = -3w_1 + w_2 - 2w_3 + 2t$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \\ w_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix}$$

cuya solución w_1, w_2 y w_3 representa:

$$w_1 = x, \quad w_2 = x' \quad y \quad w_3 = x''$$

Ejemplo II.15

Transformar la siguiente ecuación diferencial a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$y^{IV} + 3y' + y = x \; ; \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$$

Primero se identifica la variable dependiente de la ecuación, en este caso "y", y se hace un cambio de variable, esto es:

$$y = w_1 \qquad \ldots (a)$$

de esta manera la nueva variable es w_1. Haciendo otro cambio de variable para y', se tiene:

$$y' = w_1' = w_2 \qquad \ldots (b)$$

y así sucesivamente con las derivadas de "y" hasta tener cuatro nuevas variables

$$y'' = w_2' = w_3 \qquad \ldots (c)$$

$$y''' = w_3' = w_4 \qquad \ldots (d)$$

despejando y^{IV} de la ecuación diferencial original:

$$y^{IV} = -y - 3y' + x$$

ecuación que, al introducir las nuevas variables correspondientes, queda;

$$y^{IV} = w_4' = -w_1 - 3w_2 + x \qquad \ldots (e)$$

de las ecuaciones (b), (c), (d) y (e) se obtiene el sistema:

$$w_1' = w_2$$

$$w_2' = w_3$$

$$w_3' = w_4$$

$$w_4' = -w_1 - 3w_2 + x$$

o bien, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \\ w_3' \\ w_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix}$$

como $y = w_1$ y $y(0) = 0$, entonces $w_1(0) = 0$.

De la misma forma:

$$y'(0) = w_2(0) = 0$$

$$y''(0) = w_3(0) = 0$$

$$y'''(0) = w_4(0) = 0$$

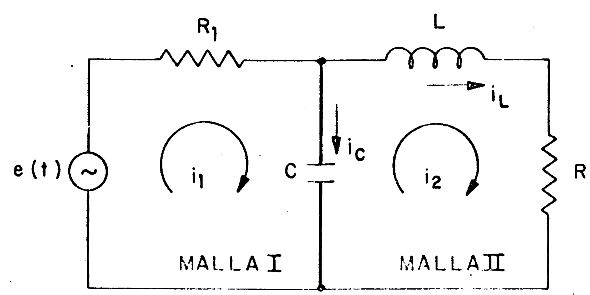
por lo tanto, las condiciones iniciales en el sistema de ecuaciones son:

$$w_1(0) = w_2(0) = w_3(0) = w_4(0) = 0$$

II.5 APLICACIONES

Problema II.1

En el circuito eléctrico que se muestra en la figura II.2 se desea determinar el voltaje en el capacitor $v_C(t)$ y la corriente en la inductancia $i_L(t)$ para $t > 0$. En el instante $t = 0$ se sabe que $v_C(0) = 0$ e $i_L(0) = 0$.



$R_1 = 1\ \Omega$

$c = 1\ F$

$L = 1\ H$

$R_2 = 3\ \Omega$

$e(t) = 1\ V$

Figura II.2

Efectuando la suma de voltajes en la malla I:

$$e(t) = v_{R_1} + v_C$$

como $v_{R_1} = R_1 i_1$ entonces:

$$e(t) = R_1 i_1 + v_C$$

donde:

$$i_1 = i_C + i_L = c\,\frac{dv_C}{dt} + i_L$$

por lo tanto:

$$e(t) = R_1\left(c\,\frac{dv_C}{dt} + i_L\right) + v_C$$

o bien, despejando la derivada de v_C:

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{R_1C}\,v_C - \frac{1}{c}\,i_L + \frac{1}{R_1C}\,e(t) \qquad \ldots (a)$$

efectuando la suma de voltajes en la malla II:

$$v_C = v_L + v_{R_2}$$

como:

$$v_L = L\,\frac{di_L}{dt} \qquad y \qquad v_{R_2} = R_2 i_2 = R_2 i_L$$

se tiene:

$$v_C = L\,\frac{di_L}{dt} + R_2 i_L$$

de donde:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}\,v_C - \frac{R_2}{L}\,i_L \qquad \ldots (b)$$

Las ecuaciones (a) y (b) forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales, donde las variables dependientes son las variables que se desean conocer, o sea v_C e i_L. Estas dos ecuaciones en forma matricial y con los valores correspondientes de L, C, R_1 y R_2 queda:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \; v_C(0) = 0, \quad i_L(0) = 0$$

el vector solución $\overline{x}$ de este sistema es:

$$\overline{x} = e^{At}\overline{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\delta)}\overline{b}(\delta)\, d\delta$$

Para obtener e^{At}, primero se calculan los valores característicos de A:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)^2 = 0 \; ; \; \lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

para $\lambda_1 = -2$:

$$e^{-2t} = \beta_0 - 2\beta_1$$

para $\lambda_2 = -2$:

$$te^{-2t} = \beta_1$$

donde:

$$\beta_1 = te^{-2t}$$

$$\beta_0 = (1 + 2t)e^{-2t}$$

La matriz exponencial es:

$$e^{At} = (1 + 2t)e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{-2t}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

o sea:

$$e^{At} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 + t & -t \\ t & 1 - t \end{bmatrix}$$

calculando la solución:

$$\int_0^t e^{A(t-\delta)}\bar{b}(\delta)\, d\delta = \int_0^t e^{-2(t-\delta)}\begin{bmatrix} 1 + t - \delta & -(t-\delta) \\ t - \delta & 1 - (t-\delta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\delta =$$

$$= \int_0^t e^{-2t}\begin{bmatrix} e^{2\delta}(1 + t - \delta) \\ e^{2\delta}(t - \delta) \end{bmatrix} d\delta = e^{-2t}\begin{bmatrix} \int_0^t e^{2\delta}(1 + t - \delta)\, d\delta \\ \int_0^t e^{2\delta}(t - \delta)\, d\delta \end{bmatrix} =$$

$$= e^{-2t}\begin{bmatrix} \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{3}{4}e^{-2t} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

como:

$$\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se tiene:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = e^{At}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\delta)}\bar{b}(\delta)d\delta = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{3}{4}e^{-2t} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Problema II.2

Se tienen dos tanques cilíndricos comunicados por la parte inferior, como se ilustra en la figura II.3. Una bomba eléctrica extrae un líquido de un depósito y lo entrega al tanque 1 con un gasto constante. Parte del fluido que entrega al tanque 1 pasa al 2 por el orificio inferior, con un cierto gasto; y el fluido que entra al tanque 2 sale, con otro gasto, hacia el exterior del sistema.

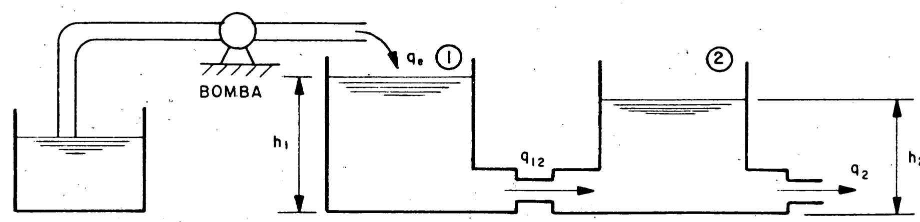


Figura II.3

Los gastos q_{12} y q_2 son en general funciones no lineales de las alturas variables h_1 y h_2, pero en algunas situaciones prácticas, puede considerarse que las relaciones entre gasto y altura son lineales, en la forma siguiente:

$$q_{12} = k_1(h_1 - h_2) \qquad \ldots (a)$$

$$q_2 = k_2 h_2 \qquad \ldots (b)$$

Se trata de determinar el comportamiento en el tiempo de las alturas del fluido en los tanques, considerando que:

$$k_1 = \frac{4}{3}$$

$$k_2 = 12$$

$$q_{bomba} = 5 \text{ unidades cúbicas/s} = q_e$$

A_1 = Area de la sección transversal del tanque $1 = 1$ unidades cuadradas

A_2 = Area de la sección transversal del tanque $2 = 8$ unidades cuadradas

Se sabe que en $t = 0$, el nivel del fluido en ambos tanques es igual a una unidad lineal.

Solución

Para el tanque 1, la rapidez de la variación del volumen del líquido contenido es:

$$\frac{dv_1}{dt} = q_e - q_{12} \qquad \ldots (c)$$

Dado que los tanques son cilíndricos:

$$v_1 = A_1 h_1 \qquad \ldots (d)$$

$$v_2 = A_2 h_2 \qquad \ldots (e)$$

Sustituyendo (d) en (c) y considerando los datos del problema:

$$\frac{dA_1h_1}{dt} = 5 - \frac{4}{3}(h_1 - h_2)$$

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{5}{A_1} - \frac{4}{3A_1}(h_1 - h_2)$$

$$\frac{dh_1}{dt} = 5 - \frac{4}{3}(h_1 - h_2) \qquad \ldots (f)$$

Para el tanque 2:

$$\frac{dv_2}{dt} = q_{12} - q_2$$

o bien:

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2}\,\frac{4}{3}(h_1 - h_2) - 12\,\frac{h_2}{A_2}$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{4}{24}(h_1 - h_2) - \frac{12}{8}h_2 \qquad \ldots (g)$$

Las ecuaciones (f) y (g) constituyen el modelo matemático del problema planteado, matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{24} & -\frac{40}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots (h)$$

Resolviendo el sistema por medio de la matriz exponencial:

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} - \lambda & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{24} & -\frac{40}{24} - \lambda \end{bmatrix}$$

La ecuación característica resultante es:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

las raíces son:

$$\lambda_1 = -1 \ ; \quad \lambda_2 = -2$$

Dado que el sistema es de dos ecuaciones y las raíces diferentes, se tiene:

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A$$

donde β_0 y β_1 son soluciones de:

$$e^{-t} = \beta_0 - \beta_1$$

$$e^{-2t} = \beta_0 - 2\beta_1 \ ;$$

resolviendo:

$$\beta_0 = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\beta_1 = e^{-t} - e^{-2t}$$

por lo tanto se obtiene:

$$e^{At} = (2e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{24} \begin{bmatrix} -32 & 32 \\ 4 & -40 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{16}{24} e^{-t} + \frac{8}{24} e^{-2t} & \frac{4}{24}(e^{-t} - e^{-2t}) \\ \frac{1}{6}(e^{-t} - e^{-2t}) & \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{2}{3} e^{-2t} \end{bmatrix}$$

la solución del sistema (h) es:

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{24} e^{-t} + \frac{8}{24} e^{-2t} & \frac{4}{24}\left(e^{-t} - e^{-2t}\right) \\ \frac{1}{6}(e^{-t} - e^{-2t}) & \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{2}{3} e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{80}{24} e^{-(t-\delta)} + \frac{40}{24} e^{-2(t-\delta)} \\ \frac{5}{6} e^{-(t-\delta)} - \frac{5}{6} e^{-2(t-\delta)} \end{bmatrix} d\delta$$

Efectuando operaciones:

$$h_1 = -\frac{60}{24}e^{-t} - \frac{16}{24}e^{-2t} + \frac{100}{24}$$

$$h_2 = -\frac{2}{6}e^{-t} + \frac{11}{12}e^{-2t} + \frac{5}{12}$$

Obsérvese que cuando $t \to \infty$:

$$h_1 = \frac{100}{24} \qquad y \qquad h_2 = \frac{5}{12}$$

lo que significa que los tanques se estabilizarán en un valor fijo (el gaso de entrada es constante) y que la altura del fluido en el tanque 1 será diez veces mayor que la del tanque 2.

CAPITULO III LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

III.1 DEFINICION DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

Si V y W son dos espacios vectoriales, una transformación $T : V \to W$ con dominio en un subconjunto D de V, se llama transformación lineal de V en W si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $T(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = T(\bar{v}_1) + T(\bar{v}_2)$, $\forall\ \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in D$

2. $T(c\bar{v}) = cT(\bar{v})$, $\forall\ \bar{v} \in D$

o bien:

$$T(c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2) = c_1T(\bar{v}_1) + c_2T(\bar{v}_2)$$

En general, una transformación es una función entre espacios vectoriales definidos sobre un mismo campo, que asigna mediante una cierta regla, a cada elemento de V uno y sólo un elemento de W; esto es:

$$\boxed{T(\bar{v}) = \bar{w}}$$

gráficamente se representa como:

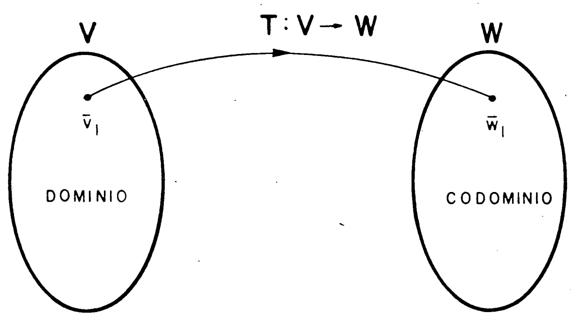


Figura III.1

Ejemplo III.1

Sea $\bar{v}_1 = \text{Ln}x$, $x \neq 0$, donde $\bar{v}_1 \in V$, y sea una transformación definida por la regla:

$$T = \frac{d}{dx}$$

el elemento del recorrido correspondiente es:

$$\bar{w}_1 = T(\text{Ln}x) = \frac{d}{dx}(\text{Ln}x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \quad \text{y} \quad \bar{w}_1 \in W$$

En este ejemplo, al aplicar la transformación sobre una función real de variable real, se obtuvo como imagen otra función real de la misma variable.

Ejemplo III.2

Sea $\bar{v}_1 = t^2$, y la transformación definida por la regla:

$$T(*) = \int_a^b st(*)dt \qquad \ldots (1)$$

donde "a" y "b" son constantes, $0 < a < b$, y "s" es un parámetro. La imagen o transformada de $\bar{v}_1$ es:

$$\bar{w}_1 = T(\bar{v}_1) = \int_a^b st(t^2)dt = \frac{s(b^4 - a^4)}{4}$$

En este caso la transformación conduce a obtener una imagen que no es función de "t" (como lo es $\bar{v}_1$), sino función de "s". Las gráficas correspondientes a $\bar{v}_1$ y $\bar{w}_1$ se ilustran en las figuras III.2 y III.2.1.

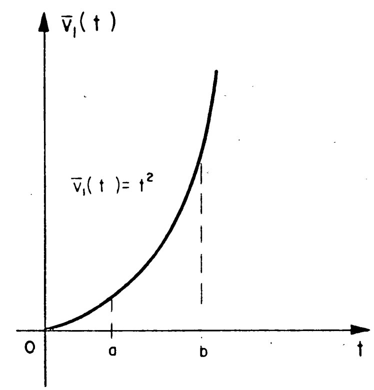


Figura III.2

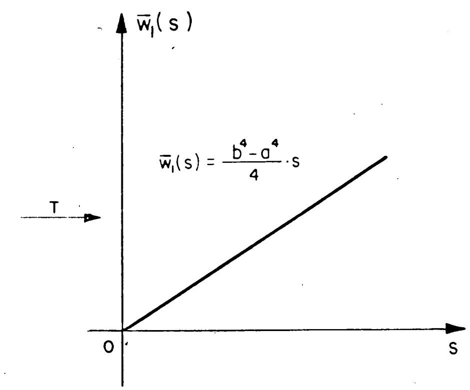


Figura III.2.1

En general, si $\bar{v} = f(t) \in V$ y la transformación se define como:

$$T(\bar{v}) = \int_a^b k(s,t)\,\bar{v}dt \qquad \ldots (2)$$

entonces:

$$T(\bar{v}) = F(s)$$

Definición: Dados k(s,t) y f(t), se llamará transformación integral lineal de f(t) sobre k(s,t) a la siguiente expresión:

$$\int_a^b k(s,t)f(t)dt = F(s) \qquad \ldots (3)$$

k(s,t) es conocido como el *kérnel* o *núcleo* de la transformación.

Ejemplo III.3

Sea $\overline{v}_1 = t^2$ y la transformación definida por:

$$T(*) = \int_0^{\infty} k(s,t)(*)dt$$

A) Si el kérnel de la transformación es k(s,t) = st, la transformada de $\overline{v}_1$ es:

$$\overline{w}_1 = T(\overline{v}_1) = \lim_{b\to\infty} \frac{st^4}{4}\Bigg|_0^b = \infty$$

por lo tanto, no existe la imagen de $\overline{v}_1$ debido a que la integral impropia resulta divergente.

B) Si se considera el kérnel $k(s,t) = e^{st}$, s > 0, la imagen de $\overline{v}_1$ es:

$$\overline{w}_1 = T(\overline{v}_1) = \int_0^t e^{st}\, t^2 dt$$

integrando por partes, se obtiene:

$$\overline{w}_1 = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{t^2 e^{st}}{s} - \frac{2te^{st}}{s^2} + \frac{2e^{st}}{s^3}\right]_0^b = \infty$$

lo cual indica que con el kérnel seleccionado, la integral es divergente, por lo tanto la transformada de $\overline{v}_1$ no existe.

C) Sea el kérnel:

$$k(s,t) = e^{-st}, \quad s > 0$$

la imagen o transformada de $\overline{v}_1$ es:

$$\overline{w}_1 = T(\overline{v}_1) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, t^2 dt \;;$$

integrando por partes, se obtiene:

$$\overline{w}_1 = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{t^2 e^{-st}}{s} - \frac{2te^{-st}}{s^2} - \frac{2e^{-st}}{s^3}\right]_0^b = \frac{2}{s^3}$$

por lo tanto, con el kérnel seleccionado en este inciso la transformada sí existe. Además, los elementos del recorrido son funciones de "s", mientras que los del dominio son de "t".

La transformación definida con el kérnel del inciso C del ejemplo anterior, es una transformación llamada *transformada de Laplace*.

Definición: Sea V un espacio vectorial de funciones f(t) definidas para $t \geq 0$. La transformación integral que aplica a cada f(t) de V en su imagen F(s) de W, se llama transformación de Laplace y queda definida por la siguiente regla:

$$L\{*\} = \int_0^{\infty} e^{-st}(*)dt \qquad \ldots (4)$$

para una función f(t), se tiene:

$$L : V \to W$$

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \qquad \ldots (5)$$

donde V es el conjunto de todas las funciones f(t), $t \geq 0$ y W es el conjunto de las funciones transformadas F(s) bajo L, es decir:

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

A la regla de la definición anterior se le conoce con el nombre de transformación *unilateral* de Laplace, para diferenciarla de la *bilateral* que se define como:

$$L\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

En la mayoría de los problemas, donde la transformada de Laplace se aplica, la variable tiempo es mayor o igual a cero, por lo tanto, la transformada de Laplace que se estudia es la unilateral.

Ejemplo III.4

La transformada de Laplace de f(t) = 1 es:

$$L\{1\} = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st}dt = \lim_{b \to \infty} \left. -\frac{1}{s} e^{-st} \right|_0^b$$

$$L\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

Ejemplo III.5

La transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{at}$ definida para $t \geq 0$, es:

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at}dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-(s-a)t}dt$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[\left. -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right|_0^b \right] = \frac{1}{s-a} \; ; \; s > a$$

Hasta este momento, la única forma de verificar si la transformada de Laplace de una función existe, es resolver la integral que establece su definición y determinar los valores de "s" para que la integral sea convergente. Este proceso puede ser laborioso para algunas funciones.

Para simplificar el procedimiento anterior, existe un teorema que establece las condiciones suficientes que debe satisfacer una función, para que su transformada de Laplace exista.

III.1.1 LA EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Antes de establecer el teorema de existencia, se definirán dos conceptos relativos a funciones, que serán necesarios para determinar la transformabilidad de ellas, estos conceptos son:

1. La continuidad seccional de una función.
2. El orden exponencial de una función.

Respecto al primero, se establece la siguiente definición:

> Definición: Una función f(t) es seccionalmente continua en el intervalo $a \le t \le b$, si este intervalo puede ser dividido en un número finito de subintervalos de tal manera que en cada uno de ellos:
>
> a) f(t) sea continua
>
> b) f(t) se aproxima a un límite a medida que "t" se aproxima a cada uno de los dos extremos internos, es decir, que en un subintervalo $c \le t \le d$ existen:
>
> $$\lim_{t \to c^+} f(t) \quad y \quad \lim_{t \to d^-} f(t)$$

Ejemplo III.6

Sea la función cuya gráfica se ilustra a continuación:

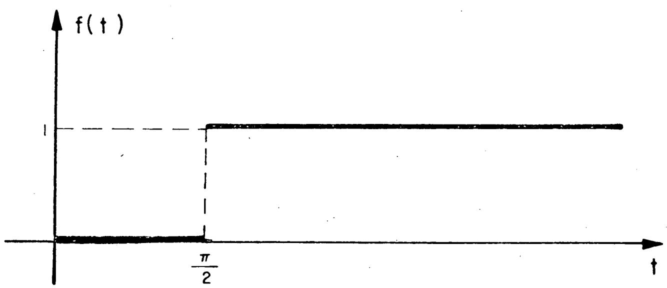


Figura III.3

En el interior de los subintervalos $(0, \frac{\pi}{2})$ y $(\frac{\pi}{2}, \infty)$ la función es continua, además en el subintervalo $0 \le t < \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = 0 \quad y \quad \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} f(t) = 0$$

y en el subintervalo $t > \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^+} f(t) = 1 \quad y \quad \lim_{t \to \infty} f(t) = 1$$

por lo tanto, la función es seccionalmente continua en el intervalo $(0, \infty)$.

La función periódica que aparece en la figura III.4, es seccionalmente continua, ya que en el interior de cada subintervalo $(n, n + 1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, la función es continua y el límite existe en los extremos interiores de cada subintervalo.

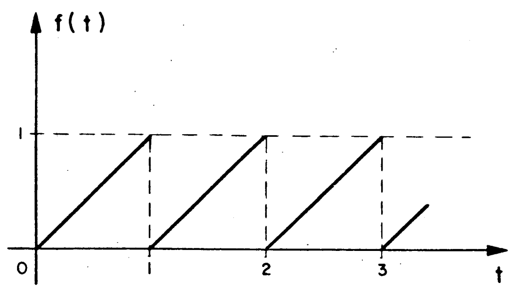


Figura III. 4

Cuando una función es seccionalmente continua en un cierto intervalo, se garantiza la existencia de su integral en el mismo, esto es:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{a_1} f(t)dt + \int_{a_1}^{a_2} f(t)dt + \int_{a_2}^{a_3} f(t)dt + \ldots + \int_{a_n}^{b} f(t)dt$$

donde $a, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, b$, son los extremos de los $n + 1$ subintervalos en donde la función es continua.

El concepto de función de orden exponencial, se establece en la siguiente definición:

> Definición: Se dice que una función $f(t)$ es de *orden exponencial* cuanto $t \to \infty$, si existen constantes M y b y un valor de "t" igual a t_0, tales que:
>
> $$|f(t)| < Me^{bt}, \qquad \text{para } t \geq t_0 \qquad \ldots (6)$$

La definición anterior puede interpretarse como la comparación entre $f(t)$ y una función exponencial Me^{bt} seleccionada previamente.

Si existe una función Me^{bt}, tal que, a partir de un valor t_0 de "t", la función $f(t)$ crece más lentamente que Me^{bt} al aumentar "t" hacia el infinito; entonces $f(t)$ es de orden exponencial.

Ejemplo III.7

Sean las funciones $f(t) = 2$ y e^{bt} con $b > 0$, cuyas gráficas aparecen en la figura III.5. Como se observa, para $t < t_0$ la función $f(t)$ es mayor que la exponencial e^{bt}, pero en el intervalo $t > t_0$, es menor que e^{bt}. Por lo tanto $f(t) = 2$ es de orden exponencial.

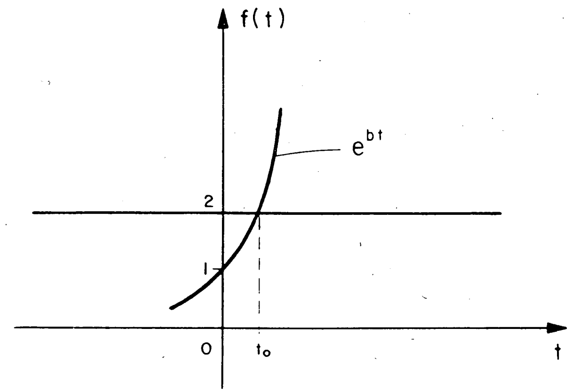


Figura III.5

Para verificar si una función $f(t)$ es de orden exponencial, es suficiente que la siguiente desigualdad se cumpla, dados "b" y M constantes:

$$\lim_{t \to \infty} |e^{-bt} f(t)| < M \qquad \ldots (7)$$

Ejemplo III.8

Para verificar si $f(t) = e^{3t}$ sen t, es de orden exponencial, se tiene que |sen t| está comprendida entre 0 y 1, entonces:

$$|e^{3t} \text{ sen } t| \leq |e^{3t}|$$

por lo tanto, en lugar de investigar si $f(t)$ es de orden exponencial, se hará con:

$$f_1(t) = e^{3t}$$

y si ésta resulta de orden exponencial, entonces:

$$f(t) = e^{3t} \text{ sen } t$$

con mayor razón lo será.

Si $b > 3$, por ejemplo $b = 3.001$ y $M = 1$, se cumple la desigualdad:

$$|e^{3t}| < e^{(3.001)t}, \text{ cuando } \quad t \to \infty$$

por lo tanto, f(t) es de orden exponencial.

Definición: Las funciones que son seccionalmente continuas y de orden exponencial son *llamadas funciones de clase* A.

La importancia de una función de clase A, radica en que la transformada de Laplace de estas funciones siempre existe. Esto se establece en el siguiente teorema:

TEOREMA III.1

Si f(t) es una función de clase A, entonces su transformada de Laplace existe, por lo tanto:

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

para $s > s_0$, donde s_0 se llama la abscisa de convergencia.

Demostración

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Como f(t) es seccionalmente continua, entonces:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^a e^{-st} f(t)dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad \ldots (8)$$

La primera integral del miembro derecho de la igualdad existe, dado que se trata de la integral definida de una función continua en el intervalo definido por los límites de integración. Falta probar que la segunda integral impropia sea convergente.

Por ser f(t) de orden exponencial, entonces:

$$|f(t)| < Me^{bt}$$

$$e^{-st}|f(t)| < Me^{bt}e^{-st} = Me^{-(s-b)t}$$

por lo tanto:

$$\int_a^\infty e^{-st} f(t)dt \leq \int_a^\infty e^{-st}|f(t)|dt < M\int_a^\infty e^{-(s-b)t}dt \qquad \ldots (9)$$

Si la tercera integral de la desigualdad (9) converge, con más razón lo hará la primera integral. Por lo tanto, analizando la convergencia de la tercera integral:

$$M\int_a^\infty e^{-(s-b)t}dt = M \lim_{d \to \infty} - \frac{1}{s-b} e^{-(s-b)t} \Big|_a^d$$

si $s > b$, la integral converge al valor $\dfrac{Me^{-(s-b)a}}{s-b}$.

Esta convergencia garantiza, a su vez, la de la integral:

$$\int_a^\infty e^{-st} f(t)dt$$

las dos integrales del miembro derecho de la ecuación (8) existen y por lo tanto:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

también existe.

El teorema III.1, establece la *condición de clase* A *de una función como suficiente, pero no necesaria*, esto significa que pueden existir funciones que, *sin ser de clase* A, *pueden ser transformadas mediante Laplace*.

Cuando una función no es de clase A, el único recurso de que se dispone para verificar si es o no transformable, es investigar la convergencia o divergencia de la integral.

Ejemplo III.9

Se desea obtener la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

En este caso f(t) no es de clase A, dado que es discontinua en t = 0. Por la definición de transformada de Laplace se tiene:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}dt}{\sqrt{t}} = \int_0^{\infty} e^{-st}t^{-1/2}\,dt$$

con el cambio de variable $t^{1/2} = z$:

$$dz = \frac{t^{-1/2}dt}{2} \qquad y \qquad dt = \frac{2dz}{t^{-1/2}}$$

si:

$$t = z^2 \qquad y \qquad t^{-1/2} = z^{-1}$$

se tiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}t^{-1/2}dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-sz^2}z^{-1}2dz}{z^{-1}} = 2\int_0^{\infty} e^{-sz^2}dz \ ;$$

si $y = s^{1/2} z$, entonces:

$$y^2 = sz^2 \qquad y \qquad dz = \frac{dy}{s^{1/2}}$$

con lo cual:

$$2\int_0^{\infty} e^{-sz^2}dz = \int_0^{\infty} 2e^{-y^2}s^{-1/2}\,dy = 2s^{-1/2}\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy \ ;$$

de las tablas de integración se obtiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ ;$$

finalmente:

$$L\{1/\sqrt{t}\} = 2s^{-1/2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

Con esto se comprueba que la transformada de una función que no es de clase A, puede existir.

Ejemplo III.10

Se desea investigar si existe la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = e^{t^2}$$

Esta función es seccionalmente continua en $(0, \infty)$, pero no es de orden exponencial, por lo tanto no es de clase A. De la definición de transformada de Laplace se tiene:

$$L\{e^{t^2}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{t^2} dt$$

como esta integral es divergente, la transformada de Laplace $f(t) = e^{t^2}$ no existe.

Con los ejemplos anteriores se ha comprobado que cuando una función no es de clase A, puede o no existir su transformada de Laplace. La clase A, en cambio, garantiza la existencia de la transformada.

En general, el parámetro "s" en la transformada de Laplace es un número complejo de la forma $s = x + yi$; sin embargo, sólo es tratado como tal, en cursos avanzados de matemáticas. En este capítulo se considerará únicamente la parte real, o sea, $s = x$, que es la abscisa del número complejo.

Puede darse el caso de que una función, siendo de clase A, no pueda ser transformada, debido a un valor del parámetro "s" asignado inadecuadamente. Esto puede verse con claridad al obtener la transformada de $f(t) = e^{3t}$:

$$L\{e^{3t}\} = \int_0^\infty e^{3t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-3)t} dt$$

si $s < 3$, la expresión $(s - 3)$ resulta negativa y el integrando pasa a ser una exponencial positiva. Así, la integral impropia pasa a ser divergente. Al valor de $s_0 = 3$, se le llama *parámetro* o *abscisa de convergencia*. Para valores de $s > s_0$ se garantiza la transformación de la función, o sea, la convergencia de la integral impropia. Debido a esto, en el teorema III.1, se condiciona la transformación de una función de clase A, a la existencia de una abscisa de convergencia s_0.

En la siguiente tabla se enlistan las transformadas de algunas funciones:

f(t)	F(s)
c, $c \in \mathbb{R}$	c/s, $s > 0$
t	$1/s^2$, $s > 0$
t^2	$2/s^3$, $s > 0$
t^n, $n = 0,1,2,\ldots$	$n!/s^{n+1}$, $s > 0$
e^{at}	$1/(s - a)$, $s > a$
sen at	$a/(s^2 + a^2)$
cos at	$s/(s^2 + a^2)$
senh at	$a/(s^2 - a^2)$, $s > a$
cosh at	$s/(s^2 - a^2)$, $s > a$

Tabla III.1

Todas las transformadas de esta tabla se obtuvieron a partir de la definición de transformada de Laplace.

III.1.2 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE COMO UN OPERADOR LINEAL

Siendo la transformada de Laplace una transformación, cumplirá con la propiedad de linealidad si se verifica:

$$L\{f_1 + f_2\} = L\{f_1\} + L\{f_2\} \qquad \ldots (10)$$

Considérense por ejemplo las funciones:

$$f_1 = t \quad y \quad f_2 = -t$$

entonces:

$$L\{f_1\} + L\{f_2\} = L\{t\} - L\{t\} = 1/s^2 - 1/s^2 = 0, \quad \text{para } s > 0$$

esto es:

$$L\{f_1\} + L\{f_2\} = 0$$

pero no está definida para valores de $s \leq 0$. Por otra parte:

$$L\{f_1 + f_2\} = L\{0\} = 0 \quad \text{para toda } s$$

entonces, se puede decir que:

$$L\{f_1 + f_2\} \quad y \quad L\{f_1\} + L\{f_2\}$$

son idénticas para aquellos valores de "s" en que:

$$L\{f_1\} \quad y \quad L\{f_2\}$$

están definidas, por lo que en general:

$$L\{f_1 + f_2\} \neq L\{f_1\} + L\{f_2\}$$

De lo anterior se deduce que las funciones transformadas $F_1(s)$, $F_2(s)$, ..., $F_n(s)$ en W, son idénticas, sólo si coinciden en un intervalo de la forma $(0, \infty)$.

Con esta consideración, se establece una de las propiedades más útiles e importantes de la transformación de Laplace, *la propiedad de linealidad*.

Si c_1, c_2, ..., c_n es un conjunto de constantes y $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$, es un conjunto de funciones de clase A, cuyas transformadas son $F_1(s)$, $F_2(s)$, ..., $F_n(s)$ respectivamente, entonces:

$$L\{c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n\} = c_1L\{f_1\} + c_2L\{f_2\} + \ldots + c_nL\{f_n\}$$

$$L\{c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n\} = c_1F_1(s) + c_2F_2(s) + \ldots + c_nF_n(s) \qquad (11)$$

Para "s" mayor que el máximo elemento del conjunto:

$$\{s_i \mid s_i \text{ es una abscisa de convergencia}\}$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

La propiedad de linealidad representada por la ecuación (11), se demuestra a continuación:

$$L\{c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n\} = \int_0^\infty e^{-st}(c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n)dt =$$

$$= c_1\int_0^\infty e^{-st}f_1dt + c_2\int_0^\infty e^{-st}f_2dt + \ldots + c_n\int_0^\infty e^{-st}f_ndt$$

como:

$$L\{f\} = \int e^{-st}fdt$$

entonces:

$$L\{c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n\} = c_1L\{f_1\} + c_2L\{f_2\} + \ldots + c_nL\{f_n\}$$

o bien:

$$L\{c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n\} = c_1F_1(s) + c_2F_2(s) + \ldots + c_nF_n(s)$$

Esta propiedad es útil para transformar funciones compuestas con las funciones básicas que aparecen en la tabla III.1.

Ejemplo III.11

La transformada de Laplace de la función $f(t) = 3e^{3t} + 16 - 3\cos 3t$, se obtiene utilizando la propiedad de linealidad, esto es:

$$L\{3e^{3t} + 16 - 3\cos 3t\} = 3L\{e^{3t}\} + 16L\{1\} - 3L\{\cos 3t\}$$

$$= \frac{3}{s-3} + \frac{16}{s} - \frac{3s}{s^2+9} \quad ; \quad s > 3$$

Ejemplo III.12

Para obtener la transformada de $f(t) = \cos wt$, sin aplicar la definición de la transformación, se procede de la siguiente forma:

Por el teorema de Euler para funciones exponenciales complejas:

$$e^{iwt} = \cos wt + i \operatorname{sen} wt$$

$$e^{-iwt} = \cos wt - i \operatorname{sen} wt$$

sumando estas expresiones y despejando $\cos wt$, se obtiene:

$$\cos wt = \frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}$$

aplicando el operador transformada de Laplace:

$$L\{\cos wt\} = \frac{1}{2} L\{e^{iwt}\} + \frac{1}{2} L\{e^{-iwt}\}$$

las transformaciones del lado derecho, se realizan en forma análoga al caso de exponenciales reales, para $f_1(t) = e^{at}$ y $f_2(t) = e^{-at}$, donde "a" es un número complejo de la forma $r + iq$. Seleccionando $s > r$, se obtiene la abscisa de convergencia, como se vio anteriormente; en este problema, $r = 0$ y $q = w$, de modo que para $s > 0$:

$$L\{\cos wt\} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s - iw} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s + iw} = \frac{s}{s^2 + w^2}; \quad s > 0$$

Ejemplo III.13

Para obtener la transformada de $f(t) = \cos^2 wt$, se utiliza la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cos^2 wt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2wt$$

por lo tanto:

$$L\{\cos^2 wt\} = \frac{1}{2} L\{1\} + \frac{1}{2} L\{\cos 2wt\}$$

$$= \frac{1}{2s} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2 + 4w^2}\right)$$

III.2 LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

El problema de obtener f(t) dada su imagen F(s), corresponde al concepto de *transformación inversa*. Gráficamente:

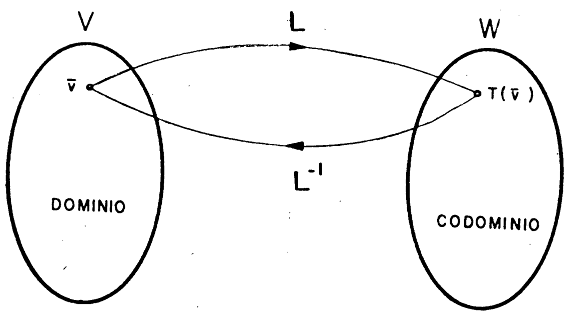


Figura III.6

donde $L : V \to W$ y L^{-1} representa la transformación del recorrido al dominio, o sea:

$$L^{-1} : W \to V$$

Esta transformación que permite obtener el elemento del dominio f(t), dada la función elemento del recorrido correspondiente, se llama *transformación inversa de Laplace* y se representa como:

$$L^{-1}$$

Ejemplo III.14

Como $L\{\cos 2t\} = \dfrac{s}{s^2 + 4}$, entonces:

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \cos 2t$$

similarmente, como $L\{1\} = \dfrac{1}{s}$ y $L\{e^{3t}\} = \dfrac{1}{s-3}$, entonces:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = e^{3t}$$

Cuando se quiere determinar los elementos del dominio f(t), a partir de los del recorrido de la transformación F(s), se considera que éstos se generaron mediante la regla:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

En forma similar a como fue definida la transformada de Laplace, la transformación inversa de Laplace de una función F(s), se define:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{s_0 - j\infty}^{s_0 + j\infty} e^{st}F(s)\,ds \qquad \ldots (12)$$

donde:

$$\int_{s_0 - j\infty}^{s_0 + j\infty} e^{st}F(s)\,ds = \lim_{A \to \infty}\int_{s_0 - jA}^{s_0 + jA} e^{st}F(s)\,ds \quad ;$$

y s_0 es la abscisa de convergencia.

Aplicar la regla anterior para obtener antitransformadas, no es simple ni práctico y es común encontrar en la literatura la definición de la antitransformada, L^{-1}, en términos de la transformación directa:

> **Definición:** Sea W el espacio vectorial de todas las funciones F(s) definidas para $s > s_0$. La transformación lineal que aplica a cada función F(s) de W en la función f(t) de V, y de la cual es imagen, se llama transformada inversa de Laplace, designada como L^{-1}. Esto significa que si $L\{f(t)\} = F(s)$, entonces:
>
> $$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

De la definición anterior se deduce una propiedad importante de la transformación inversa L^{-1}, la de linealidad:

$$L^{-1}\{c_1F_1(s) + c_2F_2(s) + \dots + c_nF_n(s)\} = c_1L^{-1}\{F_1(s)\} +$$

$$+ c_2L^{-1}\{F_2(s)\} + \dots + c_nL^{-1}\{F_n(s)\} \quad \dots (13)$$

Con la aplicación de esta propiedad y el uso de la tabla III.1 de transformadas, se puede obtener la antitransformada de algunas funciones F(s).

Ejemplo III.15

La antitransformada de:

$$F(s) = \frac{15}{s} + \frac{4}{s^2} - \frac{2s}{s^2+1}$$

por la propiedad de linealidad es igual a:

$$L^{-1}\{F(s)\} = 15L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

de la tabla III.1:

$$L^{-1}\{F(s)\} = 15 + 4t - 2\cos t\,,$$

ya que:

$$L\{1\} = \frac{1}{s}\,,\quad L\{t\} = \frac{1}{s^2}\quad \text{y}\quad L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}\,,\quad s > 0$$

III.2.1 LA EXISTENCIA Y UNICIDAD DE L^{-1}

En los ejemplos correspondientes a la transformación directa de Laplace, los resultados han sido únicos; a cada función del dominio le corresponde una y sólo una función del recorrido. Sin embargo, esta propiedad de unicidad no siempre se cumple en la transformación inversa.

Ejemplo III.16

Sean las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$;

$$f_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \ne 5 \\ 2, & t = 5 \end{cases} \qquad f_2(t) = 1,\ t \ge 0$$

cuyas gráficas se muestran a continuación.

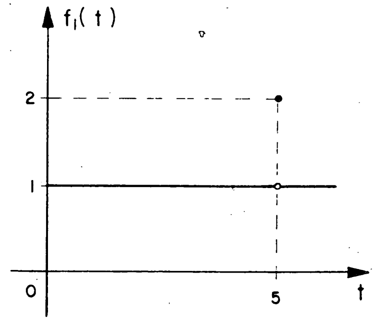


Figura III.7

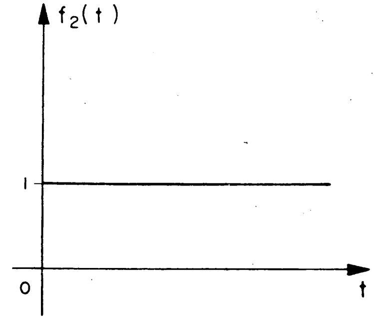


Figura III.7.1

La transformada de $f_2(t)$ es:

$$L\{f_2(t)\} = L\{1\} = \frac{1}{s}\ ; \qquad s > 0 \qquad \ldots \text{(a)}$$

Para obtener la transformada de $f_1(t)$, véanse las figuras III.8 y III.8.1.

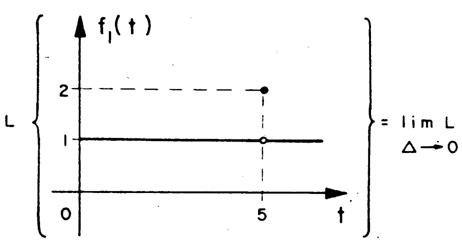


Figura III.8

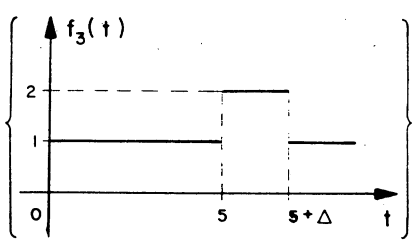


Figura III.8.1

esto es:

$$L\{f_1(t)\} = \lim_{\Delta \to 0} L\{f_3(t)\}$$

como:

$$L\{f_3(t)\} = \int_0^5 1\cdot e^{-st}dt + \int_5^{5+\Delta} 2e^{-st}dt + \int_{5+\Delta}^{\infty} 1\cdot e^{-st}dt$$

entonces:

$$L\{f_1(t)\} = \int_0^5 1\cdot e^{-st}dt + \int_5^{5} 2e^{-st}dt + \int_5^{\infty} 1\cdot e^{-st}dt$$

por lo tanto:

$$L\{f_1(t)\} = \int_0^{\infty} 1\cdot e^{-st}dt = \frac{1}{s}\ , \qquad s > 0 \qquad \ldots \text{(b)}$$

De (a) y (b) se concluye que, además de ser f_1 y f_2 dos funciones distintas:

$$L\{f_1\} = L\{f_2\} = \frac{1}{s}\ ; \qquad s > 0 \qquad \ldots \text{(c)}$$

es decir, un elemento F(s) del recorrido es imagen de dos elementos del dominio, f_1 y f_2. Esto significa que la transformada inversa de Laplace no es única.

Obsérvese que f_1 y f_2 son dos funciones idénticas, excepto en un punto de discontinuidad. En general, la no unicidad de la transformada inversa se presenta precisamente en el caso de funciones que sólo difieren en un conjunto discreto de puntos. Esto es generalizado mediante el teorema de Lerch, que establece lo siguiente:

TEOREMA III.2 DE LERCH

Sean f_1 y f_2 dos funciones de clase A:

$$L\{f_1\} = L\{f_2\}$$

para $s > s_0$, si y sólo si $f_1 = f_2$ para toda $t > 0$, excepto en un conjunto de puntos de discontinuidad, si es que los hay.*

La falta de unicidad de la transformada inversa, no es importante en la mayoría de los problemas de aplicación, dado el tipo tan especial de funciones que la provocan.

III.3 PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES L Y L^{-1}

Las propiedades de la transformación de Laplace, directa e inversa, son numerosas. En el presente inciso solamente se estudiarán algunas de ellas.

A) Propiedades de traslación.

Antes de enunciar y estudiar formalmente estas propiedades, considérese el siguiente ejemplo:

Ejemplo III.17

Se desea obtener la transformada de $f(t) = e^{2t}\cos 3t$.

* Una demostración del teorema de Lerch, se puede consultar en: "Operational Mathematics" de R. Churchil.

Por el teorema de Euler, cos 3t puede expresarse como:

$$\cos 3t = \frac{1}{2}\left(e^{3ti} + e^{-3ti}\right)$$

por lo tanto:

$$L\{e^{2t}\cos 3t\} = L\left\{e^{2t}\,\frac{e^{3ti} + e^{-3ti}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\,L\left\{e^{(2+3i)t} + e^{(2-3i)t}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s-2)-3i} + \frac{1}{(s-2)+3i}\right] = \frac{1}{2}\;\frac{s-2+3i+s-2-3i}{s^2-4s+4+9} =$$

$$= \frac{s-2}{(s-2)^2+3^2} = F_1(s)$$

como:

$$L\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2+3^2} = F_2(s)\ ;$$

comparando $F_1(s)$ con $F_2(s)$ se tiene:

$$F_1(s) = F_2(s-2)$$

esto significa que:

$$L\{e^{2t}\cos 3t\} = F(s-2)$$

donde $F(s)$ es la transformada de la función cos 3t.

El resultado anterior es importante, puesto que permite simplificar la transformación de funciones multiplicadas por una función exponencial. Su generalización se enuncia mediante el siguiente teorema:

TEOREMA III.3 DE TRASLACION EN EL DOMINIO DE "s".

Si $L\{f(t)\} = F(s)$, entonces:

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \qquad \ldots (14)$$

Demostración

$$L\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a)$$

Este teorema es conocido también con el nombre de *primera propiedad de traslación o corrimiento* de la transformada de Laplace.

Ejemplo III.18

Para obtener la transformada de $f(t) = te^{at}$, como:

$$L\{t\} = \frac{1}{s^2} = F(s)$$

aplicando la primera propiedad de traslación se tiene:

$$L\{te^{at}\} = \frac{1}{(s-a)^2} = F(s-a)$$

En la siguiente figura, se observa la traslación de la función transformada:

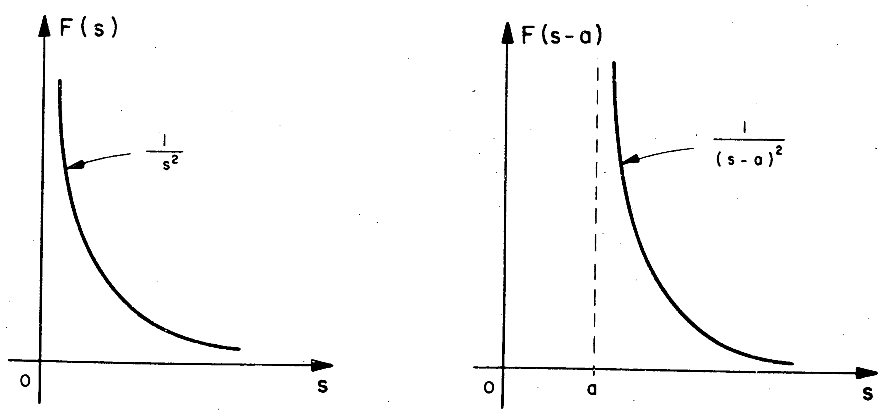


Figura III.9

Del teorema de traslación se obtiene la propiedad equivalente para la transformación inversa, esto es:

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \qquad \text{con} \qquad F(s) = L\{f(t)\}$$

aplicando L^{-1} en ambos miembros se obtiene:

$$L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t) \qquad \ldots (15)$$

donde:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

Ejemplo III.19

La siguiente función:

$$F(s) = \frac{s}{s^2 - 6s + 10} - \frac{3}{s^2 - 6s + 10}$$

se puede representar como:

$$F(s) = \frac{s-3}{s^2 - 6s + 9 + 1} = \frac{s-3}{(s-3)^2 + (1)^2} = F_1(s-3)$$

esto significa que:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\{F_1(s-3)\} = e^{3t}g(t)$$

donde:

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t$$

por lo tanto:

$$f(t) = e^{3t}\cos t$$

La primera propiedad de traslación en "s", describe el corrimiento de la función transformada. Una propiedad similar puede establecerse, pero trasladando directamente la función en "t".

TEOREMA III.4 DE TRASLACION EN EL DOMINIO DE "t"

$$\text{Si} \quad f(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ g(t - t_0), & t > t_0 \end{cases}$$

entonces:

$$L\{f(t)\} = e^{-t_0 s} G(s), \quad \text{donde} \quad G(s) = L\{g(t)\} \quad \dots \text{(16)}$$

Demostración

$$L\{f(t)\} = \int_0^{t_0} e^{-st}(0)dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} g(t - t_0)dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} g(t - t_0)dt$$

Si $z = t - t_0$, $dz = dt$, se tiene:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-(z+t_0)s} g(z)dz = e^{-t_0 s}\int_0^{\infty} e^{-sz} g(z)dz = e^{-t_0 s} G(s)$$

La utilidad de este teorema, conocido también como *segunda propiedad de traslación*, consiste en recorrer o trasladar una función hasta hacerla adoptar una forma tal, que aplicando el teorema se obtenga la transformada de la función original.

Ejemplo III.20

Sea la función cuya gráfica se muestra a continuación:

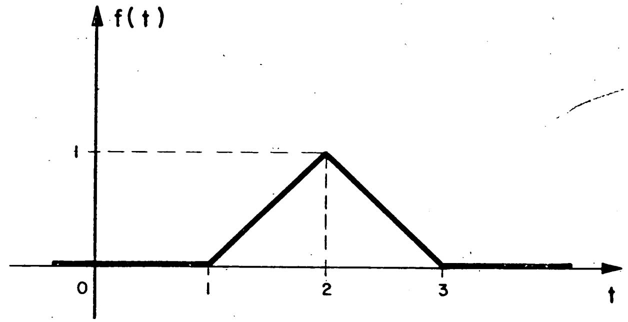


Figura III.10

Trasladando la función f(t) una unidad hacia la izquierda, se obtiene una función g(t), cuya gráfica se muestra a continuación.

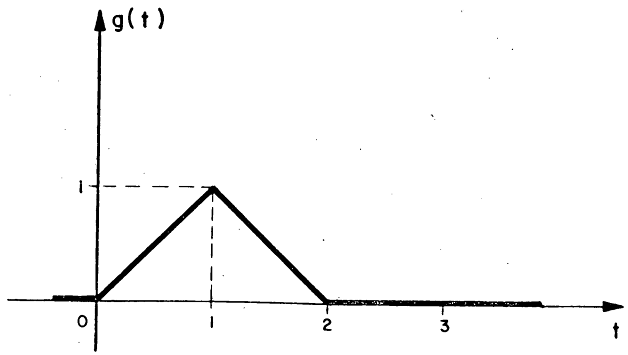


Figura III.11

tal que:

$$f(t) = g(t - 1)$$

de la gráfica anterior se concluye que:

$$g(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 2 - t, & 1 < t < 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$

por el teorema de traslación en "t":

$$L\{f(t)\} = L\{g(t - 1)\} = e^{-s}L\{g(t)\}$$

donde:

$$L\{g(t)\} = \int_0^1 te^{-st}dt + \int_1^2 (2 - t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^1 te^{-st}dt + \int_1^2 2e^{-st}dt - \int_1^2 te^{-st}dt$$

integrando por partes, con $u = t$ y $dv = e^{-st}dt$:

$$L\{g(t)\} = -\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}dt + 2\int_1^2 e^{-st}dt +$$

$$+ \frac{t}{s}e^{-st}\Big|_1^2 - \frac{1}{s}\int_1^2 e^{-st}dt$$

$$= \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}$$

por lo tanto:

$$L\{f(t)\} = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} \cdot e^{-s} = \frac{e^{-s} - 2e^{-2s} + e^{-3s}}{s^2}$$

III.3.1 TRANSFORMACION DE DERIVADAS

La transformada de Laplace de la derivada de orden "n" de una función, se generaliza en el siguiente teorema:

TEOREMA III.5

Si $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$ .... $f^{(n-1)}(t)$ son funciones continuas para cualquier $t > 0$ y si $f^{(n)}(t)$ es de clase A en $(0, \infty)$, entonces:

A) $L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$ ... (17)

B) $L\{f''(t)\} = s^2L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$ ... (18)

y en general:

C) $L\{f^{(n)}(t)\} = s^nL\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots -$

$- sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$ ... (19)

La demostración se hará sólo para el caso (A); el procedimiento es similar para las derivadas segunda, tercera, cuarta, etc. El caso general (C) se puede demostrar por inducción matemática.

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt \;;\quad \text{integrando por partes:}$$

$$u = e^{-st},\quad du = -se^{-st} \;;\quad dv = f'dt,\quad v = f(t)$$

$$L\{f'(t)\} = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$= 0 - f(0) + sL\{f(t)\}$$

$$= sL\{f(t)\} - f(0)$$

Este teorema es de gran utilidad en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales.

Considérese la función de clase A, $f(t) = e^{2t}$. Transformando la derivada de la función:

$$L\{f'(t)\} = L\{2e^{2t}\} = \frac{2}{s-2} \;;$$

como:

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s-2}$$

se tiene:

$$sL\{f(t)\} - f(0) = s\,\frac{1}{s-2} - 1 = \frac{s - s + 2}{s-2} = \frac{2}{s-2}$$

por lo tanto:

$$sL\{f(t)\} - f(0) = L\{f'(t)\}$$

Transformando ahora la segunda derivada de la función:

$$L\{f''(t)\} = L\{4e^{2t}\} = \frac{4}{s-2}$$

además:

$$s^2L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) = s^2\,\frac{1}{s-2} - s(1) - 2 =$$

$$= \frac{s^2 - s^2 + 2s - 2s + 4}{s-2} = \frac{4}{s-2}$$

por lo tanto:

$$s^2L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) = L\{f''(t)\}$$

Siguiendo este procedimiento se puede comprobar lo que establece el teorema III.2

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^nL\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \ldots\ldots - f^{(n-1)}(0)$$

III.3.2 TEOREMA DE CONVOLUCION

El teorema de convolución es útil para obtener la transformada inversa de Laplace de algunas funciones. Antes de establecerlo, es conveniente definir el concepto de convolución entre dos funciones.

Definición: Sean las funciones $f(t)$ y $g(t)$ continuas en $(0,\infty)$, la convolución de "f" y "g" se representa $f * g$ y se define:

$$h(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du = f * g \qquad \ldots (20)$$

NOTA: La integral de convolución tiene una gran importancia en varias áreas de la física y las matemáticas, como teoría de circuitos eléctricos, cálculo operacional, análisis de Fourier, transformada de Laplace, etc.

A continuación se enlistan algunas de las principales propiedades de la convolución.

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1 \qquad \text{(conmutatividad)} \qquad \ldots (21)$$

$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3 \qquad \text{(asociatividad)} \qquad \ldots (22)$$

$$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3 \qquad \text{(distributividad)} \qquad \ldots (23)$$

TEOREMA III.6 DE CONVOLUCION

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones de clase A, con transformadas $F(s)$ y $G(s)$ respectivamente, entonces:

$$L\{f * g\} = F(s) \cdot G(s) \qquad \ldots (24)$$

Aplicando el operador inverso de Laplace a la expresión (24):

$$L^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = \int_0^t f(t-u)g(u)du \qquad \ldots (25)$$

donde:

$$F(s) = L\{f(t)\} \quad y \quad G(s) = L\{g(t)\}$$

por lo tanto, la transformada inversa de un producto de funciones de "s", se obtiene por medio de la integral de convolución.

Ejemplo III.21

Sea la función:

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

la cual se expresa como un producto de funciones:

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

representando a cada uno de los factores con $F_1(s)$ y $F_2(s)$, se obtiene que la transformada inversa de éstas es:

$$L^{-1}\{F_1(s)\} = L^{-1}\{F_2(s)\} = \text{sen } t$$

entonces por el teorema de convolución:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \int_0^t \text{sen}(t-u)\ \text{sen}u\ du$$

$$= \int_0^t (\text{sen } t \cos u - \text{sen } u \cos t)\ \text{sen}u\ du$$

$$= \text{sen } t \int_0^t \cos u\ \text{sen } u du - \cos t \int_0^t \text{sen}^2 u du$$

$$= \text{sen } t \cdot \frac{\text{sen}^2 u}{2}\Big|_0^t - \cos t \cdot \frac{t - \text{sen } t \cos t}{2}$$

$$= \frac{\text{sen } t - t \cos t}{2}$$

Ejemplo III.22

La función:

$$F(s) = \frac{1}{s^2+2s-3}$$

se expresa como un producto de funciones:

$$F(s) = \frac{1}{s^2+2s-3} = \frac{1}{(s+3)(s-1)} = \frac{1}{(s+3)} \cdot \frac{1}{(s-1)}$$

como:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)}\right\} = e^{-3t} \quad y \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} = e^t$$

entonces la transformada inversa de F(s) se obtiene por medio del teorema de convolución:

$$L^{-1}\{F(s)\} = e^t * e^{-3t}$$

$$= \int_0^t e^u e^{-3(t-u)} du$$

$$= \int_0^t e^{-3t + 4u} du$$

$$= e^{-3t} \int_0^t e^{4u} du$$

$$= e^{-3t} \cdot \frac{e^{4u}}{4} \Big|_0^t$$

$$= \frac{e^t - e^{-3t}}{4}$$

III.3.3 TRANSFORMACION INVERSA MEDIANTE FRACCIONES PARCIALES

El uso de las tablas y propiedades permiten obtener la transformada y antitransformada de algunas funciones. Sin embargo, en el caso de funciones F(s), es frecuente que presenten formas extensas y complicadas cuya antitransformación no es posible mediante el uso directo o inmediato de tablas o propiedades: por ejemplo la antitransformación de:

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 5)(s^2 + 2s + 2)}$$

En casos como éste, la descomposición de la función en fracciones parciales facilita la solución del problema.

NOTA: El desarrollo en fracciones parciales, se estudia en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral, por lo que en estos apuntes, solamente se dará una breve explicación del mismo.

Siempre que se presenten fracciones funcionales impropias Q(s)/R(s), o sea, donde el grado de Q(s) es menor que el grado de R(s), la fracción puede descomponerse en una suma de fracciones parciales de acuerdo a los siguientes casos:

CASO A. EL DENOMINADOR R(s).- Es factorizable en términos de raíces diferentes no repetidas:

$$\frac{Q(s)}{R(s)} = \frac{Q(s)}{(s - m_1)(s - m_2) \dots (s - m_n)} = \frac{A_1}{s - m_1} + \frac{A_2}{s - m_2} + \dots + \frac{A_n}{s - m_n}$$

Ejemplo III.23

La descomposición de $F(s) = \frac{s + 3}{s - 3s + 2}$ es:

$$\frac{s + 3}{s^2 - 3s + 2} = \frac{s + 3}{(s - 2)(s - 1)} = \frac{A}{(s - 2)} + \frac{B}{(s - 1)}$$

CASO B. EL DENOMINADOR R(s).- Es factorizable en términos de raíces reales repetidas:

$$\frac{Q(s)}{R(s)} = \frac{Q(s)}{(s - m)^n} = \frac{A_1}{(s - m)} + \frac{A_2}{(s - m)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s - m)^n}$$

Ejemplo III.24

La descomposición de $F(s) = \frac{s^2 + s - 1}{s^3 + 4s^2 + 4s}$ es:

$$\frac{s^2 + s - 1}{s^3 + 4s^2 + 4s} = \frac{s^2 + s - 1}{s(s + 2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + 2)} + \frac{C}{(s + 2)^2}$$

CASO C. EL DENOMINADOR R(s).- Es un polinomio de segundo grado:

$$\frac{Q(s)}{R(s)} = \frac{Q(s)}{s^2 + ps + q} = \frac{As + B}{s^2 + ps + q}$$

Ejemplo III.25

La descomposición de $F(s) = \dfrac{4}{s(s^2 + 4)(s + 1)^2}$ es:

$$\frac{4}{s(s^2 + 4)(s + 1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + 1)} + \frac{C}{(s + 1)^2} + \frac{Ds + E}{s^2 + 4}$$

CASO D. EL DENOMINADOR R(s).- Es factorizable en términos de polinomios de segundo grado con raíces repetidas:

$$\frac{Q(s)}{R(s)} = \frac{Q(s)}{(s^2 + ps + q)^n} = \frac{A_1 s + B_1}{(s^2 + ps + q)} +$$

$$+ \frac{A_2 s + B_2}{(s^2 + ps + q)^2} + \dots + \frac{A_n s + B_n}{(s^2 + ps + q)^n}$$

Ejemplo III.26

La descomposición de $F(s) = \dfrac{2s^3 + s + 3}{(s^2 + 1)^3}$ es:

$$\frac{2s^3 + s + 3}{(s^2 + 1)^3} = \frac{As + B}{(s^2 + 1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 1)^2} + \frac{Es + F}{(s^2 + 1)^3}$$

Con las técnicas descritas, la antitransformación de funciones de "s" en forma de fracción racional, donde el denominador es un pilinomio en "s", es una labor accesible, como se ejemplifica a continuación:

Ejemplo III.27

La transformada inversa de:

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 5)(s^2 + 2s + 2)}$$

se obtiene descomponiendo F(s) en fracciones parciales:

$$\frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 5)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{As + B}{s^2 + 2s + 5} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2s + 2}$$

para determinar los valores de A, B, C y D, se suman las fracciones del miembro derecho y se igualan los numeradores de ambos miembros:

$$s^2 + 2s + 3 = (As + B)(s^2 + 2s + 2) + (Cs + D)(s^2 + 2s + 5)$$

$$s^2 + 2s + 3 = (A + C)s^3 + (2A + B + 2C + D)s^2 + (2A + 2B + 5C + 2D)s + 2B + 5D$$

$$A + C = 0$$

$$2A + B + 2C + D = 1$$

$$2A + 2B + 5C + 2D = 2$$

$$2B + 5D = 3 \quad ;$$

resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$A = 0, \quad B = \frac{2}{3}, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{3}$$

con estos valores:

$$F(s) = \frac{2/3}{s^2 + 2s + 5} + \frac{1/3}{s^2 + 2s + 2}$$

la forma de los denominadores sugiere completar un trinomio cuadrado perfecto:

$$F(s) = \frac{2/3}{s^2 + 2s + 1 + 4} + \frac{1/3}{s^2 + 2s + 1 + 1}$$

simplificando:

$$F(s) = \frac{2/3}{(s + 1)^2 + 2^2} + \frac{1/3}{(s + 1)^2 + 1^2}$$

antitransformando:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{3} L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2 + 4}\right\} + \frac{1}{3} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2 + 1}\right\}$$

aplicando la primera propiedad de traslación para la antitransformación:

$$f(t) = \frac{1}{3} e^{-t} L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\} + \frac{1}{3} e^{-t} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\}$$

de la tabla III.1:

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\} = \text{sen } 2t \qquad \text{y} \qquad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \text{sen } t$$

por lo tanto:

$$f(t) = \frac{1}{3} e^{-t}(\text{sen } 2t + \text{sen } t)$$

Ejemplo III.28

Para obtener la transformada inversa de la función $F(s) = \frac{s + 4}{s^3 + 3s^2 + 2s}$ se puede representar por medio de fracciones parciales:

$$F(s) = \frac{s + 4}{s(s + 2)(s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + 2)} + \frac{C}{(s + 1)}$$

donde:

$$s + 4 = A(s + 2)(s + 1) + Bs(s + 1) + Cs(s + 2) \quad \ldots \text{(a)}$$

Debido a la factorización del denominador en términos de raíces reales, es ventajoso determinar A, B y C mediante la sustitución en (a) de dichas raíces:

para s = 0:

$$4 = A(2)(1) + 0 + 0$$

$$A = 2$$

para s = - 1:

$$3 = 0 + 0 + c(-1)(1)$$

$$C = -3$$

sustituyendo s = - 2:

$$2 = 0 + B(-2)(-1) + 0$$

$$B = 1$$

por lo tanto:

$$F(s) = 2\,\frac{1}{s} + \frac{1}{(s + 2)} - 3\,\frac{1}{(s + 1)}$$

entonces la transformada inversa es:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = 2 + e^{-2t} - 3e^{-t}$$

III.4 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE Y LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Los conceptos y propiedades de la transformada de Laplace directa e inversa, que se presentaron en los incisos anteriores, se pueden aplicar en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales. El procedimiento consiste en obtener la transformada de Laplace de los dos miembros de la ecuación diferencial, de esta manera se obtiene una ecuación algebraica en donde la variable es la imagen F(s) de la incógnita f(t).

Si bien, el método de resolución de ecuaciones diferenciales por transformada de Laplace, puede aplicarse a ecuaciones diferenciales lineales, ya sean ordinarias, parciales, de coeficientes constantes o de coeficientes variables, en estos apuntes solamente se aplicará a las ecuaciones ordinarias de coeficientes constantes. Es precisamente en este campo, en donde la transformada de Laplace ha tenido una de sus mejores aplicaciones.

Ejemplo III.29

Para resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t} \;;\quad y(0) = -3,\; y'(0) = 5$$

se obtiene la transformada de Laplace en ambos miembros:

$$L\{y'' - 3y' + 2y\} = L\{4e^{2t}\}$$

$$L\{y''\} - 3L\{y'\} + 2L\{y\} = \frac{4}{s-2}$$

$$s^2 y_s - sy(0) - y'(0) - 3\left[sy_s - y(0)\right] + 2y_s = \frac{4}{s-2}$$

donde $y_s = L\{y\}$, despejando y_s:

$$y_s(s^2 - 3s + 2) + 3s - 5 - 9 = \frac{4}{s-2}$$

$$y_s = \frac{4 - (3s - 14)(s-2)}{(s-2)(s^2 - 3s + 2)} = \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2}$$

como $y(t) = L^{-1}\{y_s\}$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2}\right\}$$

desarrollando y_s en fracciones parciales:

$$y_s = \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-2)} + \frac{C}{(s-2)^2}$$

donde:

$$A(s-2)^2 + B(s-1)(s-2) + C(s-1) = -3s^2 + 20s - 24 \quad \ldots \text{(a)}$$

para s = 1:

$$A(-1)^2 + 0 + 0 = -3(1)^2 + 20(1) - 24$$

$$A = -7$$

para s = 2:

$$0 + 0 + C(2-1) = -3(2)^2 + 20(2) - 24$$

$$C = 4$$

Dado que 2 es una raíz repetida, para obtener el valor de B, se puede dar un valor arbitrario a "s"; el más conveniente para sustituir en (a) es s = 0, con lo cual:

$$-7(0-2)^2 + B(0-1)(0-2) + C(0-1) = -24$$

$$B = 4$$

con los valores de A, B y C:

$$y_s = -7\frac{1}{s-1} + 4\frac{1}{s-2} + 4\frac{1}{(s-2)^2}$$

obteniendo la transformada inversa de y_s:

$$y(t) = L^{-1}\{y_s\} = -7L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} + 4L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)}\right\} +$$

$$+ 4L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}$$

Ejemplo III.30

Sea el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2e^t; \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = -2$$

resolviendo la ecuación por transformada de Laplace:

$$L\{y'''\} - 3L\{y''\} + 3L\{y'\} - L\{y\} = L\{t^2e^t\}$$

esto es:

$$s^3y_s - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) - 3\left[s^2y_s - sy(0) - y'(0)\right] +$$

$$+ 3\left[sy_s - y(0)\right] - y_s = \frac{2}{(s-1)^3}$$

sustituyendo las condiciones iniciales y despejando y_s se llega a:

$$y_s = \frac{2}{(s-1)^3(s-1)^3} + \frac{s^2-3s+1}{(s-1)^3} = \frac{2}{(s-1)^6} + \frac{s^2-3s+1}{(s-1)^3}$$

como:

$$s^2 - 3s + 1 = (s-1)^2 - s = (s-1)^2 - (s-1) - 1$$

entonces:

$$y_s = \frac{2}{(s-1)^6} + \frac{(s-1)^2}{(s-1)^3} - \frac{s-1}{(s-1)^3} - \frac{1}{(s-1)^3}$$

$$= \frac{2}{(s-1)^6} + \frac{1}{(s-1)} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} \; ;$$

en el desarrollo anterior se expresó a y_s en términos de transformadas cuyas funciones f(t) se pueden obtener directamente de tablas, evitándose con ello el uso de la técnica de fracciones parciales. Antitransformando:

$$y(t) = L^{-1}\{y_s\} = \frac{1}{60}t^5e^t + e^t - te^t - \frac{1}{2}t^2e^t$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{60}t^5 - \frac{1}{2}t^2 - t + 1\right)e^t$$

Ejemplo III.31

Para el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$y^{(iv)} + 2y'' + y = 0 \ ; \quad y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0, \quad y''(0) = 1$$

la transformada de Laplace de la ecuación es:

$$s^4 y_s - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - sy''(0) - y'''(0) + 2\left[s^2 y_s - sy(0) - \right.$$

$$\left. - y'(0)\right] + y_s = 0$$

sustituyendo el valor de las condiciones iniciales y despejando y_s:

$$y_s\ (s^4 + 2s^2 + 1) - s = 0$$

$$y_s = \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$$

En este caso la fracción es irreducible, ya que no puede descomponerse mediante fracciones parciales, pero se puede aplicar el teorema de convolución:

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 1)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + 1)}\right\} * L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 1)}\right\}$$

o sea:

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 1)^2}\right\} = \text{sen } t * \cos t$$

donde:

$$\text{sen } t * \cos t = \int_0^t \text{sen } u \cos (t - u)\, du$$

usando identidades trigonométricas, se tiene:

$$\text{sen } u \cos (t - u) = \frac{1}{2} \text{ sen}\left[u + (t - u)\right] + \frac{1}{2} \text{ sen}\left[u - (t - u)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \text{ sen } t + \frac{1}{2} \text{ sen } (2u - t)$$

por lo tanto:

$$\text{sen } t * \cos t = \frac{1}{2} \text{ sen } t \int_0^t du + \frac{1}{2}\int_0^t \text{sen } (2u - t)\, du$$

$$= \frac{1}{2} \text{ sen } t \cdot u\Big|_0^t - \frac{1}{4} \cdot \cos (2u - t)\Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{2}\, t \text{ sen } t - \frac{1}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos (-t)$$

$$= \frac{1}{2}\, t \text{ sen } t$$

finalmente:

$$y(t) = \text{sen } t * \cos t = \frac{1}{2}\, t \text{ sen } t$$

III.4.1 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN LA RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

En la resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales que se estudió en el capítulo II, la matriz exponencial e^{At}, se calcula por un método desarrollado a partir del teorema de Hamilton-Cayley. Otra forma de calcular dicha matriz es por medio de la transformada de Laplace.

Sea el sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$$

aplicando el operador transformada de Laplace al sistema:

$$s\bar{x}(s) - \bar{x}(0) = A\bar{x}(s)$$

de donde:

$$\bar{x}(s) = \{[sI - A]\}^{-1}\bar{x}(0)$$

antitransformando:

$$\bar{x} = L^{-1}\{[sI - A]^{-1}\}\ \bar{x}(0) \qquad \ldots (26)$$

además, la solución del sistema planteado es de la forma:

$$\bar{x} = e^{At}\bar{x}(0)$$

por lo tanto, al comparar ésta con la expresión (26) obtenida anteriormente, se concluye que:

$$e^{At} = L^{-1}\{[sI - A]^{-1}\}$$

Ejemplo III.32

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz exponencial e^{At} por transformada de Laplace, se calcula primero la diferencia:

$$sI - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

La matriz inversa de sI - A es:

$$[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2+1} & \dfrac{-1}{s^2+1} \\ \dfrac{1}{s^2+1} & \dfrac{s}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

por lo tanto la matriz exponencial es:

$$e^{At} = L^{-1}\{[sI - A]^{-1}\} = \begin{bmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}$$

El cálculo de la matriz exponencial por medio de la transformada de Laplace tiene sus inconvenientes, ya que la inversión de la matriz sI - A se va complicando a medida que aumenta el orden de A.

Utilizar la transformada de Laplace para calcular la matriz exponencial, no es la única forma de aplicar este operador en la resolución de sistemas. Otra forma es aplicar el operador a cada una de las ecuaciones diferenciales para obtener un sistema de ecuaciones algebraicas.

Ejemplo III.33

Aplicando el operador transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones del siguiente sistema:

$$x' = 2x - 3y \ ; \qquad x(0) = 8$$

$$y' = y - 2x \ ; \qquad y(0) = 3$$

se obtiene:

$$sx_s - x(0) = 2x_s - 3y_s$$

$$sy_s - y(0) = y_s - 2x_s$$

sustituyendo las condiciones iniciales y factorizando:

$$(s - 2)x_s + 3y_s = 8$$

$$2x_s + (s - 1)y_s = 3$$

Como se mencionó anteriormente, el sistema transformado obtenido, constituye un sistema de ecuaciones algebraicas cuyas variables son x_s y y_s. Resolviendo el sistema por la regla de Cramer:

$$x_s = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{8s - 8 - 9}{(s-2)(s-1) - 6} = \frac{8s - 17}{s^2 - 3s - 4} = \frac{8s - 17}{(s-4)(s+1)}$$

$$y_s = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{3s - 6 - 16}{s^2 - 3s - 4} = \frac{3s - 22}{(s-4)(s+1)}$$

desarrollando x_s y y_s en fracciones parciales:

$$y_s = \frac{C}{s - 4} + \frac{D}{s + 1}$$

$$x_s = \frac{A}{s - 4} + \frac{B}{s + 1}$$

donde los residuos son:

$$A = 3, \quad B = 5, \quad C = -2 \quad \text{y} \quad D = 5$$

por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales dado, se obtiene antitransformando las funciones x_s y y_s:

$$x = L^{-1}\left\{\frac{3}{s - 4} + \frac{5}{s + 1}\right\} = 3e^{4t} + 5e^{-t}$$

$$y = L^{-1}\left\{\frac{5}{s + 1} + \frac{-2}{s - 4}\right\} = 5e^{-t} - 2e^{4t}$$

Ejemplo III.34

El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, es un sistema de orden superior y se puede resolver por transformada de Laplace:

$$y'' + z + y = 0$$

$$z' + y' = 0 \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad z(0) = 1$$

aplicando el operador transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones, se obtiene:

$$s^2 y(s) + z(s) + y(s) = 0$$

$$sz(s) - 1 + sy(s) = 0$$

factorizando:

$$(s^2 + 1)y(s) + z(s) = 0$$

$$y(s) + z(s) = \frac{1}{s}$$

de donde:

$$y(s) = -\frac{1}{s^3}$$

$$z(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} \quad ;$$

antitransformando:

$$y(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

$$z(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

III.5 TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LAS FUNCIONES: ESCALON, IMPULSO Y RAMPA

En algunos problemas de ingeniería se emplean las funciones: escalón, impulso y rampa, por lo que se darán las definiciones de cada una de ellas y se obtendrá su transformada de Laplace.

A) FUNCION ESCALON UNITARIO.- Se define de la siguiente manera:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

su representación gráfica es:

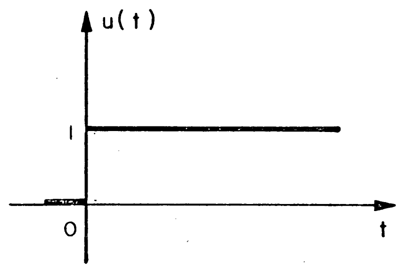


Figura III.12

La transformada de Laplace de la función escalón unitario se obtiene a partir de la definición:

$$L\{u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}u(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}(1)dt = \frac{1}{s}$$

por lo tanto:

$$L\{u(t)\} = \frac{1}{s}; \qquad s > 0$$

B) FUNCION IMPULSO UNITARIO.- Se representa con la delta de Dirac $\delta(t)$, su valor es cero para tiempos positivos y negativos, es infinito para $t = 0$ y su área es igual a uno, esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad y \qquad \delta(t) = 0 \qquad para \qquad t \neq 0$$

La función impulso se comprende mejor si se considera como el límite cuando $\Delta \to 0$ de la función impulso $P_\Delta(t)$ que aparece graficada a continuación:

$$P_\Delta = \begin{cases} 0 \;, & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} \;, & 0 < t < \Delta \\ 0 \;, & t > \Delta \end{cases}$$

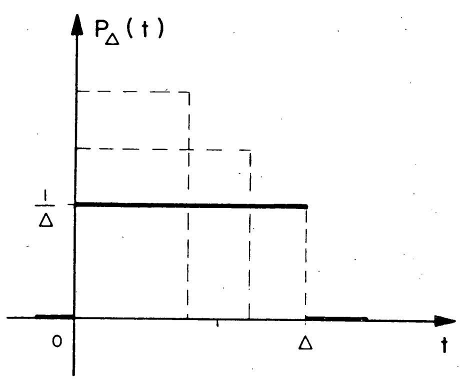


Figura III.13

esto es:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} P_\Delta(t)$$

Como no es posible representar gráficamente a la función impulso debido a su amplitud infinita y a su pequeña duración, se conviene en representarla gráficamente de la siguiente manera:

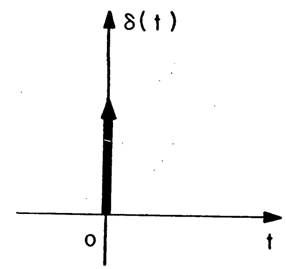


Figura III.14

La amplitud infinita que tiene la función impulso puede crear confusión, por lo que cabe aclarar que la utilidad de la misma radica en su característica de tener área unitaria y pequeña duración. Su aplicación es amplia, por ejemplo, se emplea como excitación de sistemas y también aparece en las derivadas de funciones discontinuas.

La transformada de Laplace de la función impulso se obtiene a partir de la definición:

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t)dt$$

donde para valores de "t" diferentes de cero, la función impulso vale cero, por lo tanto:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t)dt = 0 \qquad para \qquad t \neq 0$$

y para $t = 0$, $e^{-st} = 1$, con lo cual:

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

C) FUNCION RAMPA.- Se representa con $r(t)$ y se define como:

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t > 0 \end{cases}$$

su representación gráfica es la siguiente:

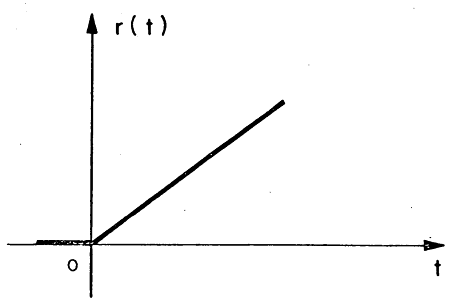


Figura III.15

Su transformada de Laplace se obtiene como:

$$L\{r(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt$$

integrando por partes se tiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \frac{1}{s^2} \;; \quad s > 0$$

por lo tanto:

$$L\{r(t)\} = \frac{1}{s^2} \;; \; s > 0$$

III.6 APLICACIONES

Problema III.1

Sea una viga libremente apoyada en sus extremos, $x = 0$, $x = \ell$, que soporta una carga constante, "w", uniformemente distribuida. Se desea determinar una expresión para calcular la deflexión de la viga entre o y "ℓ". Véase la siguiente figura:

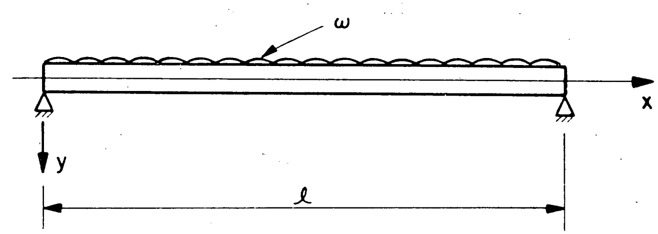


Figura III.16

El modelo matemático para la deflexión y(x), basado en el concepto de radio de curvatura, es el siguiente:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{w}{EI} \; ; \qquad \dots (27)$$

donde E es el módulo de elasticidad e I el momento de inercia.

Como los extremos de la viga están apoyados, la deflexión en los extremos es nula, o sea:

$$y(0) = 0 \,, \qquad y(\ell) = 0 \qquad \dots (a)$$

Por otro lado, para una viga de este tipo, el momento flexionante, $Mx = EIy''$, es nulo en los extremos, o sea:

$$M(0) = 0 = EIy''(0)$$

$$M(\ell) = 0 = EIy''(\ell)$$

de donde:

$$y''(0) = 0 \,, \qquad y''(\ell) = 0 \qquad \dots (b)$$

las condiciones de frontera para el problema de cuarto orden, son las cuatro representadas por (a) y (b).

Aplicando el operador transformada de Laplace a la ecuación (27):

$$s^4y_S - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) = \frac{w}{EI} \cdot \frac{1}{s} \dots (c)$$

en esta ecuación se desconocen $y'(0)$ y $y'''(0)$, pero como son constantes, se pueden representar por k_1 y k_2, respectivamente:

$$y'(0) = k_1$$

$$y'''(0) = k_2$$

sustituyendo k_1 y k_2 en la ecuación (c):

$$s^4y_S - s^2k_1 - k_2 = \frac{w}{sEI}$$

despejando y_S:

$$y_S = \frac{w}{s^5EI} + \frac{k_1}{s^2} + \frac{k_2}{s^4}$$

antitransformando:

$$y(x) = L^{-1}\{y_S\} = \frac{1}{24} \frac{w}{EI} x^4 + k_1x + \frac{k_2}{6} x^3 \qquad \dots (d)$$

Para obtener k_1 y k_2, se emplean las condiciones de frontera $y(\ell) = 0$ y $y''(\ell) = 0$, que aún no se han utilizado, para lo cual se requiere la segunda derivada de y(x);

$$y''(x) = \frac{1}{2} \frac{w}{EI} x^2 + k_2x \qquad \dots (e)$$

con la condición $y(\ell) = 0$ en (d):

$$0 = \frac{1}{24} \frac{w}{EI} \ell^4 + k_1\ell + \frac{k_2}{6} \ell^3 \qquad \dots (f)$$

y sustituyendo la condición $y''(\ell) = 0$ en la ecuación (e):

$$0 = \frac{1}{2} \frac{w}{EI} \ell^2 + k_2\ell$$

de donde:

$$k_2 = -\frac{1}{2} \frac{w\ell}{EI}$$

sustituyendo k_2 en (f):

$$0 = \frac{1}{24}\,\frac{w\ell^4}{EI} + k_1\ell - \frac{1}{12}\,\frac{w\ell}{EI}\cdot\ell^3$$

de donde:

$$k_1 = \frac{1}{24}\,\frac{w\ell^3}{EI}$$

por lo tanto, con los valores obtenidos de k_1 y k_2:

$$y(x) = \frac{1}{24}\,\frac{w}{EI}\,(x^4 + \ell^3 x - 2\ell x^3)$$

Problema III.2

En el siguiente circuito eléctrico, la fuerza electromotriz (fem) es de 10 volts, la resistencia R de 2 Ω, la capacidad "c" de 1 F y la inductancia L de 0.1 Hy. Se desea obtener una expresión para la carga "q" del circuito:

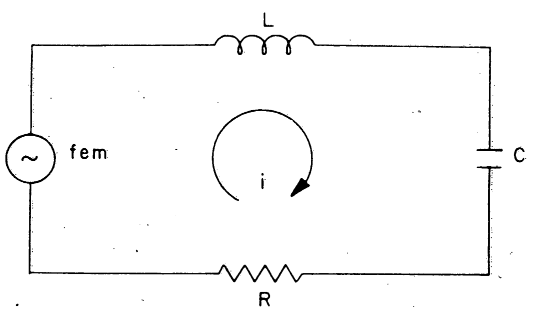


Figura III.17

Por la ley de voltajes de Kirchhoff:

$$-\,\text{fem} + V_R + V_L + V_C = 0$$

como:

$$V_R = Ri\,,\qquad V_L = L\,\frac{di}{dt}\quad y\quad V_C = cq$$

se tiene:

$$Ri + L\,\frac{di}{dt} + cq = \text{fem}$$

además:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

por lo tanto:

$$L\,\frac{d^2q}{dt^2} + R\,\frac{dq}{dt} + cq = \text{fem}$$

sustituyendo los valores de L, R y c:

$$0.1q'' + 2q' + q = 10$$

o sea:

$$q'' + 20q' + 10q = 100 \qquad \ldots (a)$$

Las condiciones iniciales se obtienen considerando que en t = 0 el circuito no tiene corriente ni carga:

$$q(0) = 0\,,\qquad i(0) = 0$$

como:

$$i = q'$$

se tiene:

$$q'(0) = 0$$

por lo tanto, las condiciones iniciales de (a) son:

$$q(0) = q'(0) = 0$$

Resolviendo la ecuación (a) por transformada de Laplace:

$$s^2 q_s - sq(0) - q'(0) + 20\left[sq_s - q(0)\right] + 10q_s = \frac{100}{s}$$

de donde:

$$q_s = \frac{100}{s(s^2 + 20s + 10)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 20s + 20}$$

los valores correspondientes de A, B y C son:

$$A = 10, \quad B = -10, \quad C = -200$$

con estos valores:

$$q_s = 10\,\frac{1}{s} - 10\,\frac{s}{s^2 + 20s + 10 + 100 - 100} - 200\,\frac{1}{s^2 + 20s + 10 + 100 - 100}$$

$$= 10\,\frac{1}{s} - 10\,\frac{s}{(s+10)^2 - (\sqrt{90})^2} - \frac{200}{\sqrt{90}}\,\frac{\sqrt{90}}{(s+10)^2 - (\sqrt{90})^2}$$

antitransformando:

$$q(t) = L^{-1}\{q_s\} = 10 - 10e^{-10t}\cosh\sqrt{90}\,t - \frac{200}{\sqrt{90}}\,e^{-10t}\,\mathrm{senh}\,\sqrt{90}\,t$$

CAPITULO IV ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

IV.1 LA ECUACION EN DERIVADAS PARCIALES

En una ecuación diferencial ordinaria, la variable dependiente es función de una sola variable y por lo tanto, las derivadas que aparecen en la ecuación son derivadas ordinarias.

Si la variable dependiente, es función de dos o más variables, entonces las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial son derivadas parciales, y en este caso, la ecuación recibe el nombre de *ecuación en derivadas parciales*.

Definición: Toda igualdad que relaciona a una función desconocida con sus variables independientes y con sus derivadas parciales, se llama ecuación en derivadas parciales. Su representación general es:

$$F\left(x,\ y,\ \ldots,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \ldots,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \ldots\right) = 0$$

donde $u = u(x,\ y,\ \ldots)$ es la variable dependiente.

Ejemplo IV.1

Una barra metálica de longitud ℓ, tiene una temperatura T_1 en uno de sus extremos, y en el otro, una temperatura T_2. La temperatura T de la barra, es una variable que depende tanto del punto "x" en el cual se mide, como del instante de tiempo "t" en el que se toma la lectura, por lo tanto $T = T(x,\ t)$. El modelo matemático que representa al problema es la ecuación:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - \frac{c\rho}{\sigma}\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = 0 \qquad \ldots (1)$$

donde "c" es el calor específico, ρ la densidad del material y σ la conductividad térmica del mismo.

La expresión (1) es una ecuación en derivadas parciales, en donde la variable desconocida es la temperatura T, la cual es función de dos variables independientes: la posición "x" y el tiempo "t".

Ejemplo IV.2

En un problema de líneas de transmisión eléctrica, en donde el voltaje "v" y la corriente "i" son funciones de la distancia "x" y del tiempo "t", esto es:

$$v = v(x, t), \qquad i = i(x, t)$$

el modelo matemático correspondiente es el conjunto de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} &= L\,\frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + Ri(x, t) \\ -\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} &= K\,\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + Sv(x, t) \end{aligned}\right. \qquad \ldots (2)$$

éstas constituyen un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

Ejemplo IV.3

El Laplaciano de la función $\theta = \theta(x, y, z)$ es:

$$\nabla^2\theta = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}$$

Si el Laplaciano de θ es cero, entonces a la función θ se le llama *armónica* y a la ecuación que se obtiene:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0 \qquad \ldots (3)$$

se le llama *ecuación de Laplace*.

Otros ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales, son los siguientes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad \ldots (4)$$

$$\frac{\partial^3\theta}{\partial s^3} + \frac{\partial\theta}{\partial t} = \theta \qquad \ldots (5)$$

$$x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \ldots (6)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \qquad \ldots (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^4 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \ldots (8)$$

NOTA: En este capítulo, el nombre de ecuación en derivadas parciales se abreviará como EDP.

IV.1.1 DEFINICIONES

En la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales, existen algunos conceptos que permiten clasificarlas; entre ellos los siguientes:

a) orden

b) grado

c) linealidad

El orden de una ecuación en derivadas parciales se define similarmente al de una ecuación diferencial ordinaria.

> Definición: El orden de una ecuación en derivadas parciales, es el de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Por ejemplo, las ecuaciones (2) y (4) son de primer orden, las ecuaciones (1), (3), (6), (7) y (8) son de segundo orden y la ecuación (5) es de tercer orden.

El grado en una EDP; se define con base en la potencia de las derivadas que contiene la ecuación.

> Definición: El grado de una ecuación en derivadas parciales, está dado por la potencia de la derivada de mayor orden, siempre y cuando la ecuación se puede expresar como un polinomio de esa derivada.

Según esta definición, las ecuaciones (1), (2), (3), (4), (5), (6) y (7) son de primer grado y la ecuación (8) es de cuarto grado.

La linealidad de una ecuación en derivadas parciales, depende de la linealidad de la variable dependiente y sus derivadas. Las EDP, además de clasificarse en lineales y no lineales, se clasifican también en cuasilineales.

> Definición: Una ecuación en derivadas parciales es lineal, si lo es en la variable dependiente y en sus derivadas.

> Definición: Una ecuación en derivadas parciales es cuasilineal, si es lineal en la derivada de mayor orden y no lineal en las otras derivadas o en la variable dependiente.

Una EDP que no satisface ninguna de las dos definiciones anteriores, es no lineal.

De acuerdo a lo anterior, las ecuaciones (1), (2), (3), (4), (5) y (6) son lineales, la ecuación (7) es cuasilineal y la ecuación (8) es no lineal. Algunos ejemplos adicionales de ecuaciones cuasilineales son:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = u^2$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = \operatorname{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

IV.1.2 LA SOLUCION DE UNA ECUACION EN DERIVADAS PARCIALES

El método de resolución de una ecuación en derivadas parciales con variable dependiente "u", consiste en obtener una función "u", tal que, junto con todas sus derivadas parciales, satisfagan a la ecuación. A esta función "u" se le llama *solución de la EDP*.

Los conceptos de solución general y solución particular, también están definidos para las ecuaciones en derivadas parciales.

> Definición: Una función u(x, y, ...) es solución general de una ecuación en derivadas parciales de orden "n", si la satisface al sustituirla en ella y además involucra "n" funciones arbitrarias diferentes.

A diferencia de lo que sucede en las ecuaciones diferenciales ordinarias, en donde la solución general contiene constantes arbitrarias, en las EDP la solución general contiene funciones arbitrarias.

Ejemplo IV.4

Sea la EDP lineal de primer orden:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - 2x \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0 \qquad \ldots (a)$$

y la función:

$$u(x, y) = f(ax^2 + ay + b) \qquad \ldots (b)$$

Para comprobar si esta función es solución de la ecuación dada, se obtienen las derivadas de la función respecto a x, y con respecto a "y":

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2axf'$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = af'$$

y se sustituyen en la ecuación (a):

$$2axf' - 2xaf' = 0$$

$$0 = 0$$

Como la EDP se satisface con la función dada, se concluye que ésta sí es solución, además involucra una función arbitraria, por lo tanto, es la solución general.

Ejemplo IV.5

Sea la EDP de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \ldots (a)$$

Para verificar si la función:

$$u = f_1(ax + ay) + f_2(2xa + ay) \ldots (b)$$

es solución de la ecuación, donde "a" es constante, se obtienen las segundas derivadas de "u":

$$\frac{\partial u}{\partial x} = af_1' + 2af_2'$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = af_1' + af_2'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2f_1'' + 4a^2f_2''$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2f_1'' + a^2f_2''$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a^2f_1'' + 2a^2f_2''$$

y se sustituyen en la ecuación (a):

$$a^2f_1'' + 4a^2f_2'' - 3(a^2f_1'' + 2a^2f_2'') + 2(a^2f_1'' + a^2f_2'') = 0$$

factorizando:

$$(a^2 - 3a^2 + 2a^2)f_1'' + (4a^2 - 6a^2 + 2a^2)f_2'' = 0$$

$$0 = 0$$

por lo tanto, la función "u", satisface a la EDP, lo que significa que "u" es su solución general.

Como se puede observar, una EDP posee una solución de estructura más compleja que la de otros tipos de ecuaciones. Una ecuación algebraica es resuelta por números, una ecuación diferencial ordinaria, por una familia de curvas definidas por una función, pero una EDP es resuelta por una función que involucra varias funciones arbitrarias.

En el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, las soluciones particulares se obtienen al valuar las constantes arbitrarias de la solución general, y en el caso de EDP las soluciones particulares se obtienen al especificar las funciones arbitrarias de la solución general. Por ejemplo, a partir de la solución:

$$u = f_1(ax + ay) + f_2(2ax + ay)$$

de la EDP del ejemplo IV.5, se pueden obtener soluciones particulares, como las siguientes:

$$u = x + y + e^{2x + y}$$

$$u = \operatorname{sen}(2x + 2y) + \cos(4x + 2y)$$

$$u = \operatorname{Ln}(4x + 4y) + (8x + 4y)^2$$

$$\vdots$$

las cuales se obtienen simplemente especificando funciones f_1 y f_2 arbitrariamente. En un problema físico, la solución particular se determina tomando en cuenta las condiciones iniciales y de frontera del problema.

IV.2 METODO DE SEPARACION DE VARIABLES

Un método de resolución que se puede aplicar a un gran número de ecuaciones en derivadas parciales, es el llamado *método de separación de variables.*

El método consiste en suponer que la solución de una EDP, con dos variables independientes, puede factorizarse en el producto de dos funciones, cada una de las cuales depende sólo de una de las variables. Es decir, si u(x, y) es la solución buscada, entonces:

$$u(x, y) = F(x) \cdot G(y) \qquad \ldots (9)$$

utilizando esta hipótesis, se sustituye la función (9) en la ecuación, y se procede a determinar las funciones F y G para que la ecuación se satisfaga. Este procedimiento requiere de separar las variables F y G e igualar a una constante. El método se describe en el siguiente ejemplo:

Ejemplo IV.6

Para resolver con el método de separación de variables la siguiente EDP:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} \qquad \ldots (a)$$

se establece la siguiente hipótesis:

La solución u(t, x) es tal, que se puede expresar como el producto de las funciones F(x) y G(t), esto es:

$$u(t, x) = G(t) \cdot F(x) \qquad \ldots (b)$$

Si la función "u" propuesta en (b) es solución de la EDP, debe satisfacerla.

Derivando $u = F(x) \cdot G(t)$, para sustituir en (a):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x)\,\frac{dG(t)}{dt} = F(x)G'(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)G''(t)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = F(x)G'''(t) \qquad \ldots \text{(c)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = G'(t)\ \frac{dF(x)}{dx} = G'(t)F'(x)\ ; \qquad \ldots \text{(d)}$$

sustituyendo (c) y (d) en la EDP, se tiene:

$$G'''(t)F(x) = 4G'(t)F'(x) \qquad \ldots \text{(e)}$$

separando las variables F y G:

$$\frac{G'''(t)}{4G'(t)} = \frac{F'(x)}{F(x)} \qquad \ldots \text{(f)}$$

Obsérvese que el miembro izquierdo de (f) es función sólo de "t", por tanto el miembro derecho también debería serlo. Por otra parte, el miembro derecho es función sólo de "x", por tanto, el miembro izquierdo también debería serlo. La única forma de darle validez a (f), es considerar que ambos miembros son iguales a una misma constante, la cual será llamada *constante de separación*. Esto es:

$$\frac{G'''(t)}{4G'(t)} = \alpha\ ; \qquad \frac{F'(x)}{F(x)} = \alpha \qquad \ldots \text{(g)}$$

dado que la constante α es indeterminada, se deberán considerar todos sus posibles valores: positivo, negativo y nulo. En un problema físico, el valor de la constante se obtiene de las condiciones iniciales o de frontera del problema; en este caso, como no fueron proporcionadas, se analizarán los tres casos:

$$\alpha = \begin{cases} k^2 > 0 \\ -k^2 < 0 \\ 0 \end{cases}$$

CASO A. $\alpha = k^2$

Sustituyendo $\alpha = k^2$, en (g):

$$\frac{G'''(t)}{4G'(t)} = k^2 \quad , \qquad \frac{F'(x)}{F(x)} = k^2$$

esto es:

$$G'''(t) - 4k^2G'(t) = 0\ , \qquad F'(x) - k^2F(x) = 0$$

ambas ecuaciones diferenciales ordinarias son homogéneas y por tanto pueden ser fácilmente resueltas; sus soluciones respectivas son:

$$F(x) = c_1 e^{k^2 x}$$

$$G(t) = c_2 + c_3 e^{2kt} + c_4 e^{-2kt}$$

la solución de la EDP dada es:

$$u(x,\ t) = F(x)G(t) = c_1 e^{k^2 x}(c_2 + c_3 e^{2kt} + c_4 e^{-2kt}) \qquad \ldots \text{(h)}$$

como se estableció en la hipótesis.

Para comprobar que la expresión anterior resuelve a la EDP del problema; se obtienen las derivadas u_{ttt} y $4u_{tx}$:

$$u_t = 2c_1 e^{k^2 x} k c_3 e^{2kt} - 2c_1 e^{k^2 x} k c_4 e^{-2kt}$$

$$u_{tt} = 4c_1 e^{k^2 x} k^2 c_3 e^{2kt} + 4c_1 e^{k^2 x} k^2 c_4 e^{-2kt}$$

$$u_{ttt} = 8k^3 c_1 c_3 e^{k^2 x} e^{2kt} - 8k^3 c_1 c_4 e^{k^2 x} e^{-2kt} \qquad \ldots \text{(i)}$$

$$4u_{tx} = 4(kc_3 e^{2kt} \cdot 2k^2 c_1 e^{k^2 x} - kc_4 e^{-2kt} \cdot 2k^2 c_1 e^{k^2 x})$$

$$4u_{tx} = 8k^3 c_1 c_3 e^{k^2 x} e^{2kt} - 8k^3 c_1 c_4 e^{k^2 x} e^{-2kt} \quad \ldots (j)$$

de la comparación de (i) con (j) se concluye que la ecuación (a) se satisface con la función (h).

CASO B. $\alpha = -k^2$

Sustituyendo $\alpha = -k^2$ en (g):

$$\frac{G'''(t)}{4G'(t)} = -k^2 \quad , \quad \frac{F'(x)}{F(x)} = -k^2$$

esto es:

$$G'''(t) + 4k^2 G'(t) = 0 \quad ; \quad F'(x) + k^2 F(x) = 0 \ ;$$

cuyas soluciones son, respectivamente:

$$F(x) = c_1 e^{-k^2 x}$$

$$G(t) = c_2 + c_3 \cos 2kt + c_4 \operatorname{sen} 2kt \quad ;$$

la solución correspondiente en este caso es:

$$u(x, t) = c_1 e^{-k^2 x}(c_2 + c_3 \cos 2kt + c_4 \operatorname{sen} 2kt)$$

CASO C. $\alpha = 0$

Sustituyendo $\alpha = 0$, en (g):

$$\frac{G'''(t)}{4G'(t)} = 0 \quad , \quad \frac{F'(x)}{F(x)} = 0$$

las soluciones de estas ecuaciones son:

$$F(x) = c_1$$

$$G(t) = c_2 t^2 + c_3 t + c_4$$

por lo tanto la solución de (a) es:

$$u(x, t) = c_1(c_2 t^2 + c_3 t + c_4)$$

Matemáticamente existen tres soluciones para la EDP. Sin embargo, para el caso de un problema físico modelado por una ecuación de este tipo, con condiciones iniciales y/o de frontera, sólo deberá existir una solución. En tal circunstancia, la aplicación de dichas condiciones a cada una de las soluciones, permitirá discernir cuál es la verdadera, determinándose de esta manera, el valor correspondiente de α.

Analizando la solución en cada uno de los casos, obtenida por el método de separación de variables, se pueden apreciar las siguientes características:

1. La forma de la solución no está de acuerdo con la definición de solución general, ya que no aparecen funciones, sino constantes arbitrarias.

2. El número de constantes arbitrarias no corresponde al orden de la EDP.

Las constantes, cuya aparición se explica por el hecho de haber transformado la EDP original en un conjunto independiente de ecuaciones diferenciales ordinarias, y la circunstancia de existir funciones específicas y no arbitrarias en la solución, conforman un esquema al que se ha denominado *solución completa de la* EDP. Este tipo de soluciones son especialmente útiles en problemas de valores iniciales o en la frontera, ya que siempre resulta más fácil determinar el valor de una constante, que especificar una función.

Ejemplo IV.7

Las siguientes EDP modelan un problema de líneas de transmisión eléctrica:

$$-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + Ri(x,t)$$
$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = K\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + Sv(x,t) \qquad \ldots (a)$$

Se desea obtener una expresión para la corriente eléctrica "i", considerando los valores $L = 0$, $R = S = 1$, $K = \frac{1}{c}$ y las condiciones de frontera:

$$\frac{\partial i(0,t)}{\partial t} = e^{-ct} \qquad \ldots (b)$$

$$i(\ell, t) = 0 \qquad \ldots (c)$$

Sustituyendo los valores R, L, S y K en (a), se obtiene:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = i \qquad \ldots (d)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial v}{\partial t} + v \qquad \ldots (e)$$

derivando la ecuación (e) con respecto a "x":

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

sustituyendo en esta última, la ecuación (d):

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-i) - i$$

multiplicando por - 1:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial i}{\partial t} + i \qquad \ldots (f)$$

La ecuación (f) es una EDP cuya variable dependiente $i(x, t)$, es la función que se desea conocer en el problema.

Por el método de separación de variables, la solución de la ecuación (f), es de la forma:

$$i(x,t) = F(x)G(t) \qquad \ldots (g)$$

por lo tanto, derivando (g) con respecto a "x" y con respecto a "t":

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = G(t)F''(x)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} = F(x)G'(t)$$

y sustituyendo en la ecuación (f):

$$G(t)F''(x) = \frac{1}{c}F(x)G'(t) + F(x)G(t)$$

separando las variables F y G e igualando a la constante de separación, se obtiene:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{cG(t)} + 1 = \alpha \qquad \ldots (h)$$

A continuación se analizan los tres casos posibles:

CASO A. $\alpha = k^2$

Con este valor de α, se tiene, de la ecuación (h):

$$F''(x) - k^2F(x) = 0$$

cuya solución es:

$$F(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} \qquad \ldots \text{ (i)}$$

el valor de las constantes c_1 y c_2 se determina mediante la condición de frontera (c):

$$i(\ell, t) = F(\ell)G(t) = 0$$

esta identidad se verifica si G(t) es cero o bien si $F(\ell)$ es cero. Si G(t) = 0, entonces $i = F(x)G(t) = 0$, esto es, la solución de la ecuación (f) es trivial, por lo tanto, lo que debe valer cero es $F(\ell)$.

Considerando $F(\ell) = 0$ en (i):

$$F(\ell) = c_1 e^{k\ell} + c_2 e^{-k\ell} = 0 \qquad \ldots \text{ (j)}$$

como $e^{k\ell}$ y $e^{-k\ell}$ son cantidades positivas diferentes, para $k \neq 0$, se concluye que (j) se satisface para valores $c_1 = c_2 = 0$, esto sustituido en (i) conduce a la solución trivial:

$$F(x) = 0, \quad \forall x$$

lo que a su vez hace que:

$$i(x, t) = F(x)G(t) = 0$$

esta solución trivial no es aceptable para el problema, por lo que el valor $\alpha = k^2$ no es el adecuado.

CASO B. $\alpha = -k^2$

Sustituyendo $\alpha = -k^2$ en (h), se obtiene la ecuación:

$$F''(x) + k^2 F(x) = 0$$

cuya solución es:

$$F(x) = c_1 \cos kx + c_2 \operatorname{sen} kx$$

utilizando la condición $F(\ell) = 0$:

$$F(\ell) = 0 = c_1 \cos k\ell + c_2 \operatorname{sen} k\ell \qquad \ldots \text{ (k)}$$

dado que el seno y coseno no son simultáneamente nulos para un mismo valor del argumento, se concluye que sólo con $c_1 = c_2 = 0$, se verifica la identidad (k). Esto, como en el caso anterior, conduce a la solución trivial, que carece de sentido en el problema.

CASO C. $\alpha = 0$

Con este valor de α, se obtiene de la ecuación (h):

$$\frac{G'(t)}{cG(t)} + 1 = 0 \; ; \qquad g'(t) + cG(t) = 0$$

su solución es:

$$G(t) = c_1 e^{-ct} \qquad \ldots \text{ (l)}$$

Para poder utilizar la segunda condición de frontera, se procede de la siguiente forma:

como:

$$i(x, t) = F(x)G(t)$$

entonces:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = F(x)G'(t)$$

por la condición (b):

$$\frac{\partial i(0, t)}{\partial t} = F(0)G'(t) = e^{-ct} \qquad \ldots \text{ (m)}$$

derivando (l) y sustituyendo en (m):

$$\frac{\partial i(0,\ t)}{\partial t} = F(0)\left[-\ cc_1 e^{-ct}\right] = e^{-ct}$$

de donde:

$$c_1 = \frac{-1}{cF(0)} \quad ; \qquad \ldots (n)$$

para determinar el valor de F(0), se resuelve la ecuación en F(x), que aparece en (h) con $\alpha = 0$:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = 0$$

la solución de esta ecuación es:

$$F(x) = c_2 x + c_3 \qquad \ldots (o)$$

valuando esta solución en $x = 0$:

$$F(0) = c_2(0) + c_3 = c_3$$

por lo tanto, sustituyendo $F(0) = c_3$ en (n):

$$c_1 = \frac{-1}{cc_3}$$

de donde:

$$c_1 c_3 = \frac{-1}{c} \qquad \ldots (p)$$

En el caso (A) de este ejemplo, se obtuvo que $F(\ell) = 0$, por lo tanto, considerando esto en $F(x) = c_2 x + c_3$:

$$F(\ell) = c_2\ell + c_3 = 0$$

de donde:

$$c_3 = -\ c_2\ell \quad ;$$

multiplicando por c_1:

$$c_1 c_3 = -\ c_1 c_2 \ell \ ;$$

sustituyendo en (p):

$$-\ c_1 c_2 \ell = \frac{-1}{c}$$

$$c_1 c_2 = \frac{1}{\ell c} \qquad \ldots (q)$$

la solución de la ecuación (f), se obtiene multiplicando las ecuaciones (l) y (o):

$$i(x,\ t) = (c_2 x + c_3)(c_1 e^{-ct}) = c_1 c_2 x e^{-ct} + c_1 c_3 e^{-ct}$$

sustituyendo (p) y (q):

$$i(x,\ t) = \frac{1}{\ell c}\, x e^{-ct} - \frac{1}{c}\, e^{-ct}$$

ésta es la solución particular del problema, ya que no contiene funciones arbitrarias, ni constantes arbitrarias.

IV.3 SERIE TRIGONOMETRICA DE FOURIER

La serie *trigonométrica de Fourier* es utilizada para diversos problemas de ingeniería, en este capítulo se dará solamente una introducción a la misma; con el objeto de poder determinar la solución particular de ciertas ecuaciones en derivadas parciales, las cuales se estudiarán más adelante.

Sea el espacio vectorial W, de las funciones f(x) definidas en el intervalo $-L \leq x \leq L$. Si se define el producto interno como:

$$(f \mid g) = \int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx$$

entonces, se puede demostrar que el conjunto de funciones:

$$A = \left\{ \left(\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L},\ n = 1, 2, \ldots\right),\ \left(\cos\frac{n\pi x}{L},\ n = 0, 1, 2, \ldots\right) \right\}$$

o sea:

$$A = \left\{ 1,\ \text{sen}\,\frac{\pi x}{L},\ \cos\frac{\pi x}{L},\ \text{sen}\,\frac{2\pi x}{L},\ \cos\frac{2\pi x}{L},\ \ldots \right\}$$

es un conjunto ortogonal de W, y por lo tanto, una base de W, donde cualquier función de W, puede representarse como una combinación lineal de los elementos de la base, esto es:

$$f(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\right),\ \forall\ f(x) \in W \quad \ldots (10)$$

Para demostrar que A es un conjunto ortogonal de W, bastará verificar que el producto interno de todo par de vectores diferentes del conjunto A, debe ser igual a cero, esto es:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0\ ; \qquad n \neq m \qquad \ldots (a)$$

$$\int_{-L}^{L} \text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,\text{sen}\,\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0\ ; \qquad n \neq m \qquad \ldots (b)$$

$$\int_{-L}^{L} \text{sen}\,\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0\ ; \qquad \forall\ n, m \qquad \ldots (c)$$

Verificando la primera integral (a):

$$I = \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\,dx; \qquad n \neq m$$

si:

$$\beta = \frac{\pi x}{L}\ ; \qquad d\beta = \frac{\pi}{L}\,dx$$

entonces para $x = L$:

$$\beta = \frac{\pi L}{L} = \pi$$

y para $x = -L$:

$$\beta = \frac{-\pi L}{L} = -\pi$$

con lo cual la integral se puede escribir:

$$I = \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\beta \cos m\beta\,d\beta$$

además como:

$$\cos n\beta \cos m\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(n+m)\beta + \cos(n-m)\beta\right]$$

se tiene:

$$I = \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos(n+m)\beta + \cos(n-m)\beta\right]d\beta$$

$$= \frac{L}{2\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(n+m)\beta}{n+m} + \frac{\operatorname{sen}(n-m)\beta}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

la verificación de las integrales (b) y (c) se realiza en forma análoga.

Para determinar los coeficientes a_n, b_n y c de la serie (10), se procederá de la siguiente manera:

Multiplicando ambos miembros de (10) por sen $\frac{m\pi x}{L}$ dx; e integrando de - L a L:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx = \int_{-L}^{L} c\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx + \right.$$

$$\left. + bn\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx\right] \qquad \ldots (d)$$

en donde:

$$\int_{-L}^{L} c\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx = 0$$

por (c):

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx = 0\ ; \quad \forall\ n, m$$

por (b):

$$\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0\ ; & \text{para } n \neq m \\ \displaystyle\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}^2\frac{m\pi x}{L}dx = L, & \text{para } n = m\end{cases}$$

por lo tanto:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx = b_m L\ ; \quad \text{para } n = m$$

de donde:

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx, \quad \text{para } n = m$$

o bien:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx;\quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \ldots (11)$$

análogamente, multiplicando (10) por $\cos \frac{m\pi x}{L}\,dx$, e integrando de $-L$ a L:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \int_{-L}^{L} c\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx + b_n\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx\right] \qquad \ldots (e)$$

donde:

$$\int_{-L}^{L} c\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0\ ; & m = 1, 2, 3, \ldots \\ 2cL; & m = 0 \end{cases}$$

por (c):

$$\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0\ ; \qquad \forall\ n, m$$

por (a):

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0\ ; & \text{para } n \neq m \\ \displaystyle\int_{-L}^{L}\cos^2\frac{n\pi x}{L}\,dx = L\ ; & \text{para } n = m \end{cases}$$

por lo tanto:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = a_n L\ ; \qquad n = m = 1, 2, 3, \ldots$$

de donde:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx\ ; \qquad n = m$$

o bien:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \ldots (12)$$

cuando $m = 0$, en (e):

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = cx\Big|_{-L}^{L} = 2cL$$

de donde:

$$c = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

si $c = \frac{1}{2}a_0$:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \qquad \ldots (13)$$

Resumiendo, la serie:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \ldots (14)$$

se llama serie trigonométrica de Fourier de la función f(x) en el intervalo $-L \leq x \leq L$, donde:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \qquad \ldots (15)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (16)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}dx\ ; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (17)$$

Para obtener los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier de una función f(x), se puede simplificar el proceso de integración si se considera la simetría de las funciones involucradas.

Definición: Una función f(x) definida en el intervalo $-L \leq x \leq L$, se llama función par, si:

$$f(-x) = f(x)\ ; \quad \forall x \in \text{Dominio}$$

y se llama función impar si:

$$f(-x) = -f(x)\ ; \quad \forall x \in \text{Dominio}$$

Los ejemplos clásicos de función par y función impar, son la función cos x y la función sen x respectivamente. Ver figuras IV.1 y IV.1.1.

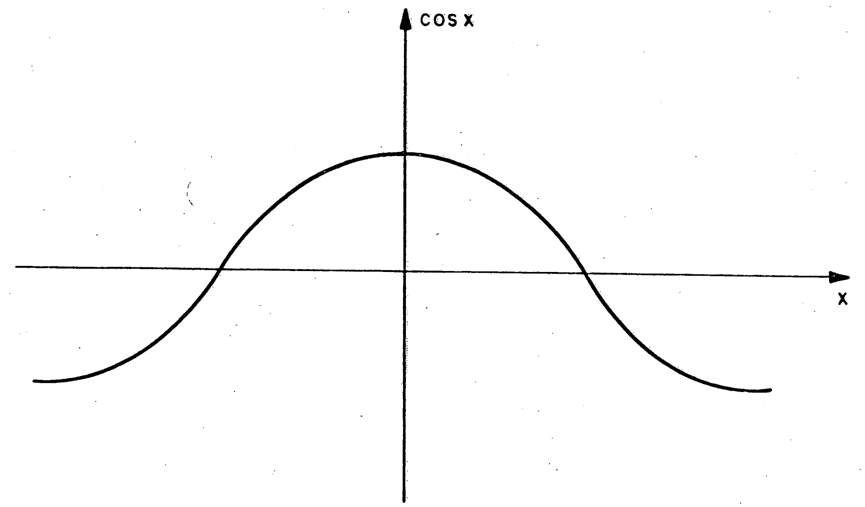


Figura IV.1 Función par

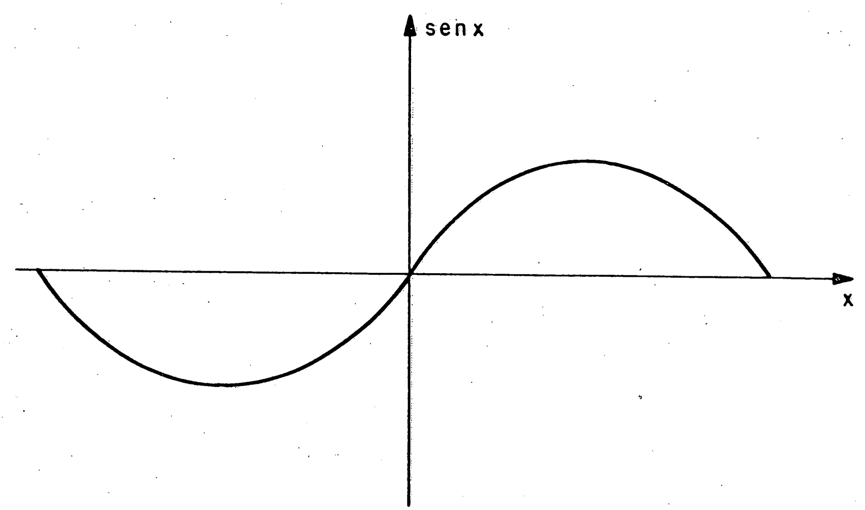


Figura IV.1.1 Función impar

La integral de una función par se simplifica de la siguiente manera:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{o}^{L} f(x)dx$$

y la integral de una función impar:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$$

Además la multiplicación de funciones pares e impares, obedece las siguientes reglas:

(par)(par) = (impar)(impar) = par

(par)(impar) = (impar)(par) = impar

La integral de un producto de funciones par e impar es cero. De lo anterior, se concluye lo siguiente:

a) En la serie trigonométrica de Fourier de una función par, el coeficiente b_n es igual a cero, ya que:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{L}\ dx$$

y siendo f(x) par y sen $\frac{n\pi x}{L}$ impar, su producto es una función impar g(x), para la cual se sabe que:

$$\int_{-L}^{L} g(x)dx = 0$$

b) En la serie trigonométrica de Fourier de una función impar, los coeficientes a_0 y a_n son cero, por la razón expuesta anteriormente.

Ejemplo IV.8

Determinar la serie trigonométrica de Fourier de la función f(x). (Véase siguiente figura).

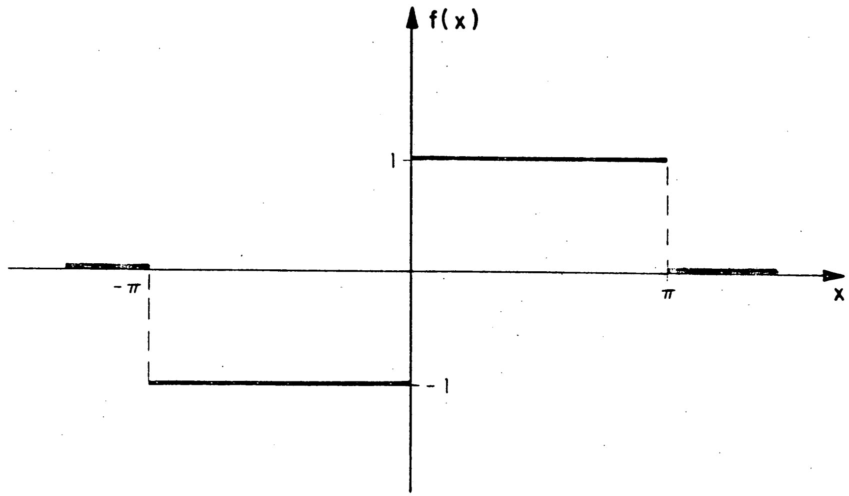


Figura IV.2

Esta función está definida de $-\pi$ a π, por lo tanto:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n\ \text{sen}\ nx)$$

Como f(x) es una función impar, $a_0 = a_n = 0$ y:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ sen } nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \text{ sen } nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \text{sen } nx \, dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \ldots \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

por lo tanto:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\text{sen } x + \frac{1}{3}\text{ sen } 3x + \frac{1}{5}\text{ sen } 5x + \ldots\right)$$

En la siguiente figura aparece tanto la función f(x), como los dos primeros términos de la serie:

$$\frac{4}{\pi}\left(\text{sen } x + \frac{1}{3}\text{ sen } 3x\right)$$

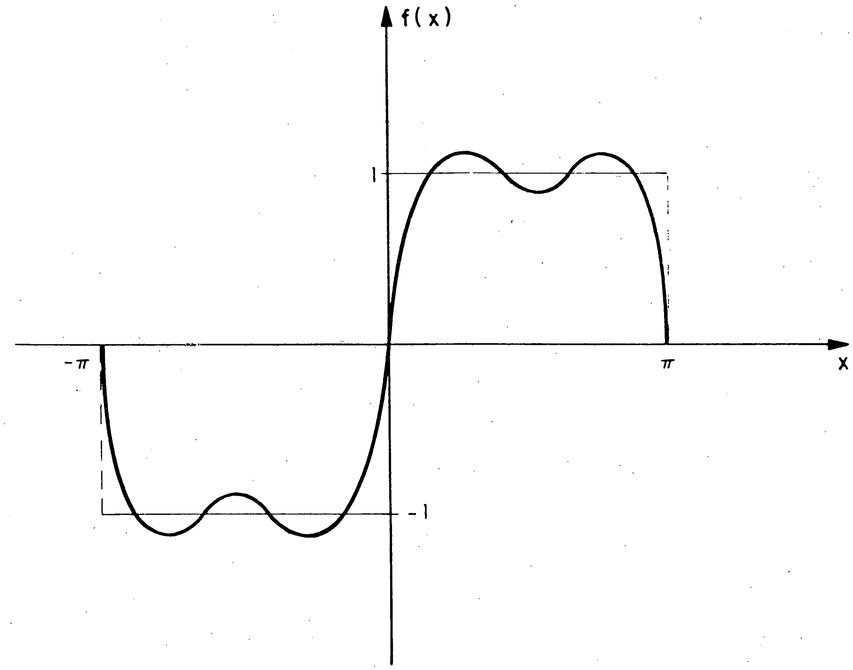


Figura IV.3

Como se puede apreciar, a medida que se tomen más términos de la serie, la aproximación a f(x) va mejorando.

IV.3.1 CASOS PARTICULARES DE LA SERIE TRIGONOMETRICA DE FOURIER

Dos casos específicos de la serie trigonométrica de Fourier, se presentan cuando los coeficientes a_0 y a_n son cero y cuando b_n, es cero. En el primer caso la serie recibe el nombre de serie seno de Fourier y en el segundo, el de serie coseno de Fourier.

CASO A. SERIE SENO DE FOURIER

Sea f(x) una función definida en el intervalo $-L < x < L$, si g(x) es una función tal que:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) ; & 0 < x < L \\ -f(-x) ; & -L < x < 0 \end{cases}$$

entonces g(x) es una función impar, y como los coeficientes a_0 y a_n de la serie trigonométrica de Fourier de una función impar son nulos, se tiene:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ sen } \frac{n\pi x}{L}, \qquad -L < x < L$$

donde:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} g(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{L} dx ; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

como g(x) y sen $\frac{n\pi x}{L}$ son funciones impares, su producto es una función par, y entonces:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} g(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{L} dx$$

Como g(x) = f(x) para $0 < x < L$, se tiene:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ sen } \frac{n\pi x}{L}, \qquad 0 < x < L \qquad \ldots (18)$$

donde:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{L} dx , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

La serie (18) se llama serie seno de Fourier de la función f(x).

CASO B. SERIE COSENO DE FOURIER

Sea f(x) una función definida en el intervalo $-L < x < L$ si g(x) es una función tal que:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) ; & 0 < x < L \\ f(-x) ; & -L < x < 0 \end{cases}$$

entonces g(x) es una función par, y como el coeficiente b_n de su serie trigonométrica de Fourier es cero, se tiene:

$$g(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} ; \qquad -L < x < L$$

donde:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} g(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx ; \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

como $g(x)$ y $\cos \frac{n\pi x}{L}$ son funciones pares, su producto es una función par, entonces:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \;; \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

como $g(x) = f(x)$ para $0 < x < L$, se tiene:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \;; \qquad 0 < x < L \qquad \ldots (19)$$

donde:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \;; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

La serie (19) se llama serie coseno de Fourier de la función $f(x)$.

Ejemplo IV.9

Determinar la serie seno de Fourier de la función $f(x) = x$, en el intervalo $0 < x < 1$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi x \;; \qquad 0 < x < 1$$

donde:

$$b_n = 2\int_0^1 x \operatorname{sen} n\pi x\,dx \;; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = 2\left[-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2}\operatorname{sen} n\pi x\right]_0^1$$

$$= 2\left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n^2\pi^2}\operatorname{sen} n\pi\right]$$

$$= 2\left[-\frac{1}{n\pi}(-1)^n\right]$$

$$= -\frac{2}{n\pi}(-1)^n\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

por lo tanto:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n\pi}(-1)^n \operatorname{sen} n\pi x$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\operatorname{sen}\pi x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\pi x + \ldots\right)$$

Ejemplo IV.10

Determinar la serie coseno de Fourier de la función $f(x) = x$, $0 < x < 1$.

La serie coseno es:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x \;; \qquad 0 < x < 1$$

donde:

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

para $n = 0$:

$$a_0 = 2\int_0^1 x\,dx = 1$$

para n = 1, 2, ...

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx = \frac{2}{n^2\pi^2}\left[-1 + \cos n\pi\right]$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\left[-1 + (-1)^n\right]$$

por lo tanto:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}\left[-1 + (-1)^n\right]\cos n\pi x$$

IV.4 APLICACIONES

Considérese una cuerda tensa e inicialmente en reposo como se muestra en la figura IV.4. La cuerda, de longitud ℓ, está fija en sus extremos (tal es el caso de una cuerda de guitarra, por ejemplo).

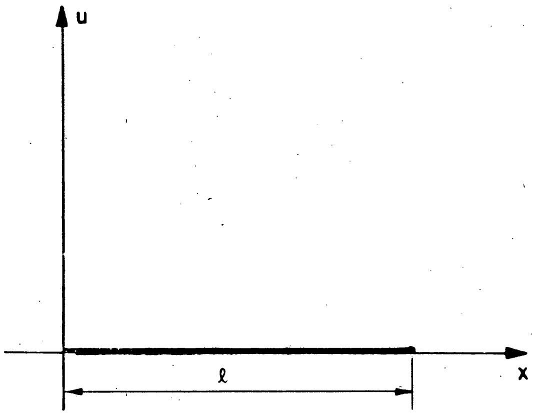


Figura IV.4

Si se le desplaza en el instante t = 0, para proporcionarle una condición inicial, esto es, se estira la cuerda flexible hasta que sufra un alargamiento significativo y después se suelta; la cuerda comenzará a vibrar en el plano u - x.

Sea "u" el desplazamiento experimentado por la cuerda a partir de su posición original, como se muestra en la figura IV.5.

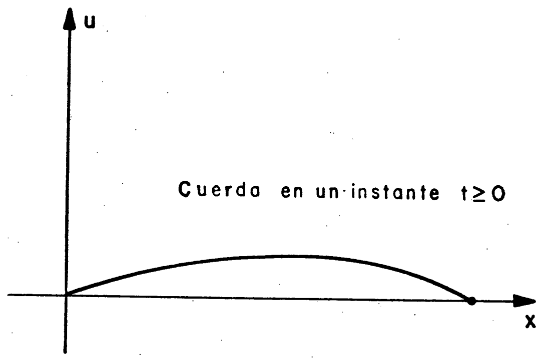


Figura IV.5

Es un hecho que el valor de "u" depende de dos variables independientes. Para un instante "t" cualquiera el valor de "u" depende del valor de "x" para el cual se mide; pero para otro valor de "t", la posición de la cuerda habrá cambiado y el valor de "u" será distinto para un mismo valor de "x", por lo tanto $u = u(x, t)$.

Para propósitos de derivar y obtener el modelo matemático que represente a este problema, se considera en la siguiente figura, que la tensión T es constante a lo largo de toda la cuerda en un instante "t" determinado.

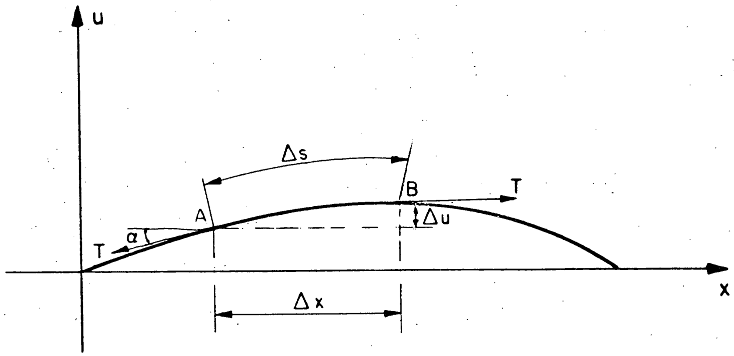


Figura IV.6

Se obtiene entonces, que la fuerza restitutiva de la cuerda es:

$$Fr = ma \;;$$

la aceleración de un elemento Δs de la cuerda está dada por:

$$a = \frac{\partial^2 u(x,\, t)}{\partial t^2}$$

la masa del elemento Δs es:

$$m = \rho\, \Delta s\,,$$

siendo ρ la masa de la cuerda por unidad de longitud, se tiene:

$$Fr = \rho\, \Delta s\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \ldots\ (20)$$

Para calcular Fr se deberá tener presente que la fuerza efectiva, es decir, la fuerza que produce el desplazamiento "u" está dada por el desequilibrio entre las componentes de la tensión en los extremos del elemento Δs paralelas al eje "u", ya que el movimiento es en el plano x - u. Esto es, si se representa con Tv_A y Tv_B a las componentes verticales de la tensión en los extremos A y B del elemento, respectivamente, se tiene:

$$Fr = Tv_B - Tv_A$$

donde el signo menos indica que Tv_A se dirige hacia abajo.

En la figura IV.7, la componente vertical de la tensión en el punto A de la cuerda, es T sen α; pero dado que α es un ángulo pequeño, entonces:

$$\text{sen}\ \alpha \approx \tan\alpha = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

de tal manera que: $\quad Tv_A = T\,\frac{\Delta u}{\Delta x}\;;$

en el límite, cuando $\Delta x \to 0$, dicha componente será:

$$Tv_A = T\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

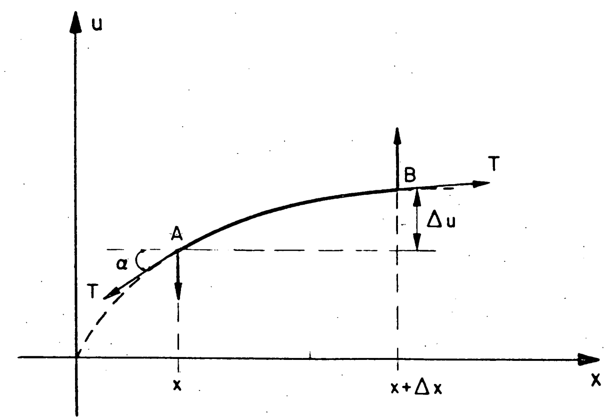


Figura IV.7

Por otro lado, se puede ver que la componente vertical de la tensión T en el punto B, puede ser considerada como la componente vertical de la tensión en A más el incremento de la componente en A cuando "x" se incrementa en Δx. Es decir:

$$Tv_B = T\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x$$

$$= T\frac{\partial u}{\partial x} + T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$$

por lo tanto, la fuerza restauradora del elemento Δs, es:

$$Fr = Tv_B - Tv_A = \left(T\frac{\partial u}{\partial x} + T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\right) - \left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$Fr = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x \qquad \ldots (21)$$

sustituyendo en (20):

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x = \rho\,\Delta s\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Dado que el elemento Δs considerado es pequeño, se supondrá que $\Delta x \approx \Delta s$, con lo cual el modelo matemático de la cuerda vibrante, conocido como *ecuación de onda* es:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \ldots (22)$$

Como la tensión T y la masa ρ de la cuerda por unidad de longitud son positivas, $\frac{T}{\rho}$ también es positivo. Por tanto, si:

$$c^2 = \frac{T}{\rho}$$

se tiene la forma con que comúnmente se presenta la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \ldots (23)$$

Esta ecuación no sólo se aplica a la cuerda vibrante, sino también modela fenómenos como el de vibraciones longitudinales en una barra, propagación de ondas sonoras en tuberías, transmisión eléctrica en cables aislados de baja resistencia, oscilaciones torsionales en una varilla, propagación de olas en un canal sin cambios de dirección y otros.

La ecuación (23) puede ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \ldots (24)$$

Problema IV.1

Considérese una cuerda elástica de longitud ℓ, sujeta en sus extremos. Se toma la cuerda a la mitad y se desplaza verticalmente a unidades como se muestra en la figura IV.8.

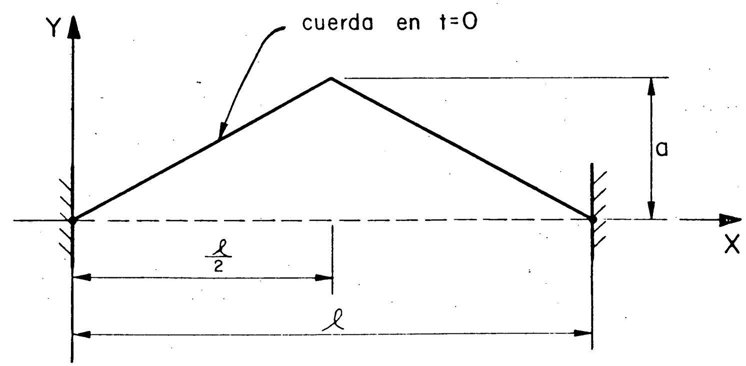


Figura IV.8

La cuerda se suelta en t= 0 y comienza a vibrar de tal manera que la magnitud de la vibración es la variable $y(x, t)$. El modelo matemático del problema está representado por la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \ldots \text{(a)}$$

como la cuerda está fija en sus extremos $x = 0$ y $x = \ell$, se establecen las siguientes condiciones de frontera:

$$y(0, t) = 0 \qquad \ldots \text{(b)}$$

$$y(\ell, t) = 0 \qquad \ldots \text{(c)}$$

De los datos del problema, se tienen dos condiciones iniciales:

$$y(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2a}{\ell} x \ ; & 0 \le x \le \frac{\ell}{2} \\ -\frac{2a}{\ell} x + 2a \ ; & \frac{\ell}{2} < x \le \ell \end{cases} \qquad \ldots \text{(d)}$$

$$\left.\frac{\partial y(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \qquad \ldots \text{(e)}$$

la condición (e) representa la velocidad de la cuerda en el instante $t = 0$.

Para resolver la ecuación de onda (a), se aplicará el método de separación de variables; por lo tanto, la solución de la ecuación es de la forma:

$$y(x, t) = u(x)v(t) \qquad \ldots \text{(f)}$$

sustituyendo (f) en (a):

$$u(x)v''(t) = c^2 u''(x)v(t)$$

separando variables:

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = c^2 \frac{u''(x)}{u(x)}$$

de donde:

$$c^2 \frac{u''(x)}{u(x)} = k \qquad \ldots \text{(g)}$$

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = k \qquad \ldots \text{(h)}$$

donde "k" es una constante de separación.

Para determinar el valor de la constante "k", se analizarán los casos:

$$k = 0, \quad k > 0 \quad y \quad k < 0$$

CASO A. $k = 0$.

Resolviendo la ecuación (g) con $k = 0$:

$$c^2 \frac{u''(x)}{u(x)} = 0$$

de donde:

$$u''(x) = 0$$

la solución de esta ecuación es:

$$u(x) = c_1 + c_2 x \qquad \ldots \text{(i)}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Para determinar el valor de estas constantes, se considerarán las condiciones de frontera.

Como:

$$y(0,\ t) = 0$$

y

$$y(x,\ t) = u(x)v(t)$$

se tiene:

$$y(0,\ t) = u(0)v(t) = 0 \qquad \ldots \text{(j)}$$

como:

$$y(\ell,\ t) = 0$$

y

$$y(x,\ t) = u(x)v(t) :$$

se tiene:

$$y(\ell,\ t) = u(\ell)v(t) = 0 \qquad \ldots \text{(k)}$$

Las ecuaciones (j) y (k) se satisfacen con $v(t) = 0$, pero esto implicaría que $y(x,\ t) = u(x)v(t) = 0$, o sea que la cuerda no vibra. Como esto no es aceptable, entonces para que (j) y (k) se satisfagan, se debe cumplir:

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(\ell) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \text{(l)}$$

Considerando las condiciones (l) en la función (i) se obtiene:

$$u(0) = c_1 + c_2(0) = 0$$

$$u(\ell) = c_1 + c_2\ell = 0$$

de donde $c_1 = c_2 = 0$, y en consecuencia $u(x) = 0$.

Este resultado no puede ser aceptado, ya que si $u(x)=0$, implica que $y(x,\ t) = u(x)v(t) = 0$. Por lo tanto $k = 0$ no es aceptable para el problema.

CASO B. $k > 0$.

Con $k > 0$ la ecuación diferencial (g) se representa:

$$u''(x) - \frac{k}{c^2}\,u(x) = 0 \ ; \qquad k > 0$$

y su solución es:

$$u(x) = c_1 e^{\frac{\sqrt{k}}{c}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{k}}{c}x} \qquad \ldots \text{(m)}$$

considerando las condiciones (l) en esta función, se obtienen:

$$u(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$u(\ell) = c_1 e^{\frac{\sqrt{k}}{c}\ell} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{k}}{c}\ell} = 0$$

este sistema de ecuaciones algebraicas es homogéneo y su única solución para $k > 0$ es la solución trivial:

$$c_1 = c_2 = 0$$

Con $c_1 = c_2 = 0$, la función (m) es $u(x) = 0$. Este resultado implica que la cuerda no vibra, por lo tanto, $k > 0$, tampoco es aceptable.

CASO C. $k < 0$

Considerando $k = -\alpha^2$, para que $k < 0$, la ecuación (g) se representa:

$$u''(x) + \frac{\alpha^2}{c^2} u(x) = 0$$

la solución es:

$$u(x) = c_1 \cos \frac{\alpha}{c} x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{c} x \qquad \ldots \text{ (n)}$$

Con las condiciones (l) en (n) se obtienen:

$$u(0) = c_1 = 0$$
$$u(\ell) = c_1 \cos \frac{\alpha}{c} \ell + c_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{c} \ell = 0$$

Este sistema se satisface con $c_1 = c_2 = 0$; sin embargo, esto implicaría que $u(x)$ es igual a cero.

Otra forma de satisfacer al sistema de ecuaciones, es con $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ y $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{c} \ell = 0$; de esta manera:

$$u(x) = c_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{c} x \; ; \qquad c_2 \neq 0 \qquad \ldots \text{ (o)}$$

Los valores del argumento, para los cuales $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{c} \ell = 0$ son:

$$\frac{\alpha}{c} \ell = n\pi \; , \qquad n = 0, 1, 3, \ldots$$

de donde:

$$\alpha = \frac{cn\pi}{\ell}$$

como $k = -\alpha^2 < 0$:

$$k = -\frac{c^2 n^2 \pi^2}{\ell} \; ; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \ldots \text{ (p)}$$

Obsérvese que en la expresión para "k", no se ha considerado el valor $n = 0$. La razón es que si $n = 0$, entonces $k = 0$, lo cual contradice la consideración de que $k < 0$.

Con el valor de "k" determinado, la solución de la ecuación diferencial (g) representada por (o), queda:

$$u(x) = c_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x \; ; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \ldots \text{ (q)}$$

La solución de la ecuación (h) con $k = -\frac{c^2 n^2 \pi^2}{\ell}$ es:

$$v(t) = c_3 \cos \frac{cn\pi}{\ell} t + c_4 \operatorname{sen} \frac{cn\pi}{\ell} t \; ; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ (r)}$$

sustituyendo las funciones (q) y (r) en (f):

$$y(x, t) = \left(c_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x\right)\left(c_3 \cos \frac{cn\pi}{\ell} t + c_4 \operatorname{sen} \frac{cn\pi}{\ell} t\right); \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

o bien:

$$y(x, t) = \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x\right)\left(b \cos \frac{cn\pi}{\ell} t + a \operatorname{sen} \frac{cn\pi}{\ell} t\right) \qquad \ldots \text{ (s)}$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde $a = c_2 c_4$ y $b = c_2 c_3$.

Como se puede apreciar de la expresión (s), se tiene una solución de la ecuación de onda para cada valor de "n", y por ser la ecuación lineal, la suma de todas las soluciones también es solución, esto es:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x\right)\left(b_n \cos \frac{cn\pi}{\ell} t + a_n \operatorname{sen} \frac{cn\pi}{\ell} t\right) \qquad \ldots \text{ (t)}$$

Para determinar una solución particular del problema, se determinarán las constantes b_n y a_n de la solución (t), utilizando las condiciones iniciales.

Considerando la condición (d) en (t), se obtiene:

$$y(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x \qquad \ldots (u)$$

esta expresión representa la serie seno de Fourier de la función f(x) en el intervalo $0 \leq x \leq \ell$, por lo tanto el coeficiente b_n se puede calcular:

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x \, dx$$

sustituyendo la función f(x) definida en (d):

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell/2} \left(\frac{2a}{\ell} x \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x \, dx + \frac{2}{\ell} \int_{\ell/2}^{\ell} \left(- \frac{2a}{\ell} x + 2a \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x \, dx$$

$$= \frac{8a}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \; ; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \ldots (v)$$

considerando la condición inicial (e) en la solución (t), se tiene:

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n c\pi n}{\ell} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x = 0$$

de donde $a_n = 0$.

Sustituyendo las constantes a_n y b_n en la solución (t); se obtiene:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x \right) \left(\frac{8a}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi c}{\ell} t \right) \qquad \ldots (w)$$

$$= \frac{8a}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} x \cos \frac{\pi c}{\ell} t - \frac{8a}{9\pi^2} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{\ell} x \cos \frac{3\pi c}{\ell} t +$$

$$+ \frac{8a}{25\pi^2} \operatorname{sen} \frac{5\pi}{\ell} x \cos \frac{5\pi c}{\ell} t - \ldots$$

Esta función (w) representa la solución particular del problema.

CAPITULO V FUNCIONES DISCRETAS Y ECUACIONES EN DIFERENCIAS

V.1 FUNCION DISCRETA

El *cálculo infinitesimal* estudia exclusivamente funciones continuas; otra rama de las matemáticas llamada *cálculo de diferencias finitas*, estudia tanto a las funciones continuas como a las funciones discretas.

Una función continua f(x), se caracteriza porque su variable independiente "x" puede tomar cualquier valor real dentro de un cierto intervalo $a < x < b$. En cambio, una función discreta f(x) se caracteriza porque "x" solamente toma determinados valores x_0, x_1, x_2, ... x_k, dentro de un cierto intervalo, por lo que el recorrido de la función es:

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_k)$$

En la figura V.1, aparece graficada una función continua, y en la figura V.1.1, se muestra la gráfica de una función discreta:

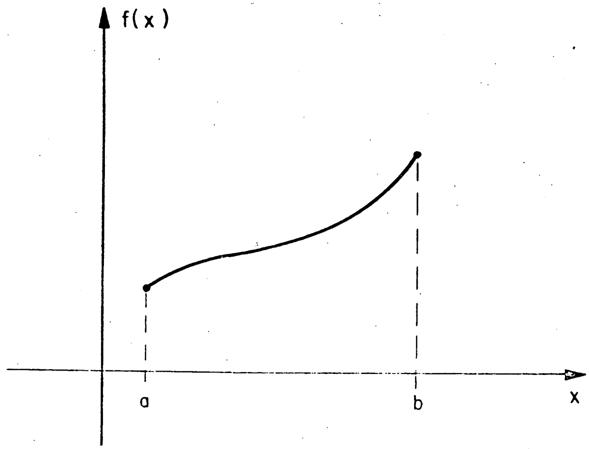


Figura V.1

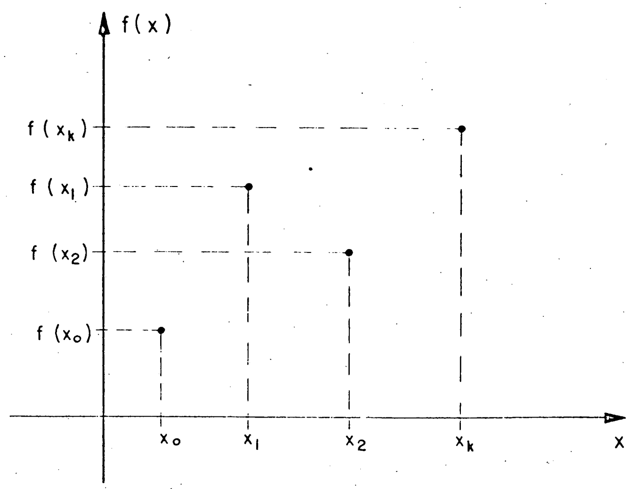


Figura V.1.1

El dominio de una función discreta puede estar formado por un conjunto de números reales, los cuales no guardan ninguna relación entre sí, por ejemplo en la función:

$$f(x) = x + 1, \quad \text{donde} \quad x = -1.1,\ 0.5,\ 2.3,\ \pi,\ 4.02,\ \ldots$$

Un caso particular que se presenta en varios problemas de aplicación, es cuando los valores del dominio de la función están equiespaciados, esto es, el valor x_{k+1} es igual a x_k más una constante "a". Dos ejemplos de este tipo de funciones son las siguientes:

$$f(x) = 2^x + x, \quad x = \ldots -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$g(x) = 3\cos x, \quad x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots$$

Como se puede observar en la función $f(x)$, $x_{k+1} = x_k + 1$, mientras que en $g(x)$, $x_{k+1} = x_k + \pi$. En todas estas funciones, la diferencia $x_{k+1} - x_k$, es una constante finita "a", de ahí el nombre de valores equiespaciados.

El estudio de las funciones discretas que se desarrolla en este capítulo, comprende exclusivamente funciiones cuyo dominio está constituido por valores enteros no negativos y equiespaciados, las cuales se expresan como una sucesión:

$$\{f(0),\ f(1),\ f(2),\ \ldots,\ f(k),\ \ldots\}$$

esto es, funciones que se pueden representar con $f(k)$ donde $k = 0, 1, 2, \ldots$

Ejemplo V.1

Debido a la depreciación a la que está sujeto un bien material que originalmente costó $ 1,000.00, tiene un valor anual dado por la expresión.

$$f(k) = 1000(1 - 0.05)^k \quad ; \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

donde "k" representa el año. Esta es una función discreta, donde los valores de su dominio están equiespaciados y su representación en forma de sucesión es la siguiente:

$$\{1000, 950, 900, 850, \ldots\}$$

V.1.1 FUNCIONES DISCRETAS: PULSO, ESCALON Y RAMPA

En el capítulo III de estos apuntes, se dieron las definiciones de las funciones impulso, escalón y rampa; estas dos últimas, son continuas para $t > 0$. Funciones similares se definen para el caso discreto y se presentan a continuación:

A) FUNCION PULSO UNITARIO.- La función discreta pulso unitario se representa por medio de la delta de Kronecker $\delta(k)$ y se define de la siguiente manera:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \qquad \ldots (1)$$

Como la función pulso unitario vale uno para $k = 0$ y cero para cualquier otro valor de "k", su representación gráfica aparece en la siguiente figura.

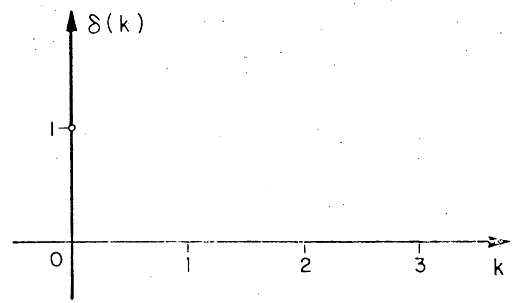


Figura V.2

En la siguiente figura, se muestra la función pulso unitario desplazada $\delta(k - a)$:

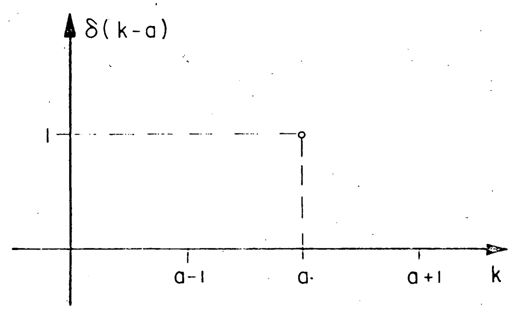


Figura V.2.1

B) FUNCION ESCALON UNITARIO.- La función discreta escalón unitario es similar a la continua, la diferencia consiste solamente en el dominio discreto. Se representa con u(k) y se define:

$$u(k) = \begin{cases} 1 \; ; & k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \\ 0 \; ; & k < 0 \end{cases} \qquad \ldots (2)$$

Su representación gráfica se muestra en la siguiente figura:

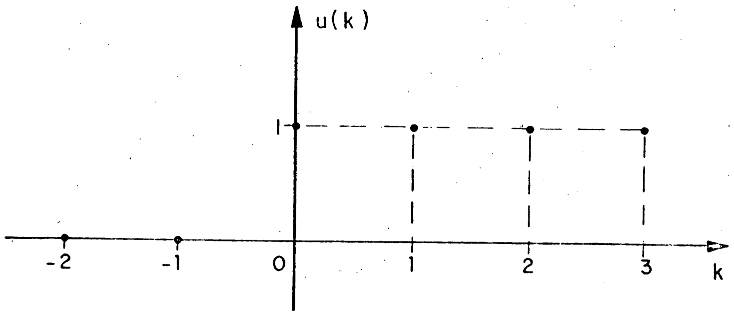


Figura V.3

La función desplazada "a" unidades, se representa gráficamente en la siguiente figura.

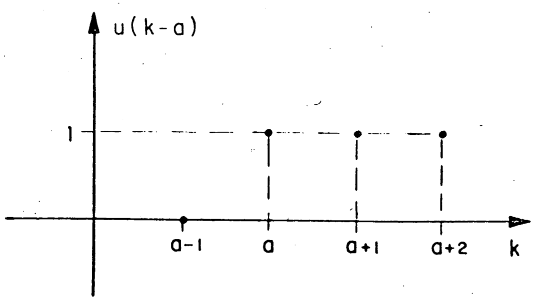


Figura V.3.1

C) FUNCION RAMPA UNITARIA.- La función discreta rampa unitaria se representa con r(k) y se define:

$$r(k) = \begin{cases} k\ ; & k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \\ 0\ ; & k < 0 \end{cases} \qquad \ldots (3)$$

En la figura V.4, se muestra la representación gráfica de la función r(k) y en la figura V.4.1, la gráfica de r(k- a).

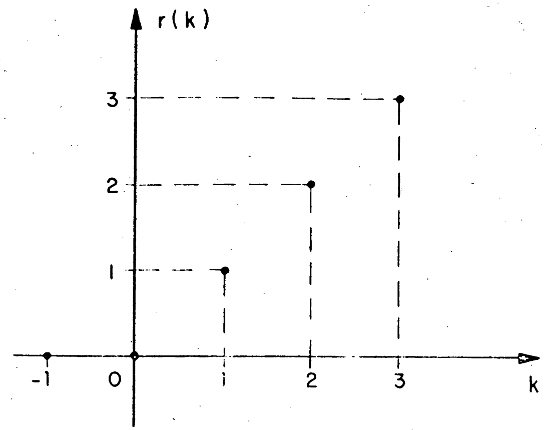


Figura V.4

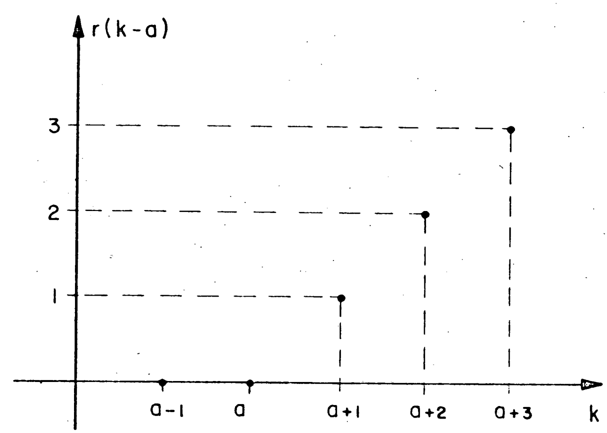


Figura V.4.1

V.1.2 OPERACIONES CON FUNCIONES DISCRETAS

Del estudio de las operaciones binarias definidas en un conjunto S, se sabe que la suma de números naturales es una operación cerrada, ya que la suma de dos números naturales cualesquiera es siempre un número natural. En el caso de funciones discretas, su recorrido es un conjunto de números, todos ellos elementos de un conjunto S, por lo tanto se pueden definir operaciones con estas funciones.

A) SUMA.- Dadas dos funciones f(k) y g(k):

$$f(k)=\{f(0),f(1),f(2),\ldots\}\quad,\quad g(k)=\{g(0),g(1),g(2),\ldots\}$$

la suma de las funciones f(k) y g(k), se define como la función cuyo elemento k-ésimo es la suma de los elementos correspondientes de f(k) y g(k), esto es:

$$f(k)+g(k)=\{f(0)+g(0),\ f(1)+g(1),\ f(2)+g(2),\ldots\}$$

Ejemplo V.2

Sean las funciones:

$$f(k)=2k-5\ ,\qquad k=0,1,2,3,\ldots$$

$$g(k)=k^2\ ,\qquad k=0,1,2,3,\ldots$$

el desarrollo en forma de sucesión es:

$$f(k)=\{-5,-3,-1,1,\ldots\}$$

$$g(k)=\{0,1,4,9,\ldots\}$$

la suma de f(k) y g(k) es la función:

$$f(k)+g(k)=\{-5,-2,3,10,\ldots\}$$

B) PRODUCTO POR UN ESCALAR.- El producto de una función f(k) por un escalar λ, es la función cuyo k-ésimo elemento es el producto de λ por el k-ésimo elemento de f(k), esto es:

$$\lambda f(k)=\{\lambda f(0),\lambda f(1),\lambda f(2),\ldots\}$$

Ejemplo V.3

El producto del escalar $\lambda = 3$ por la función discreta escalón unitario es la función que se muestra en la siguiente figura:

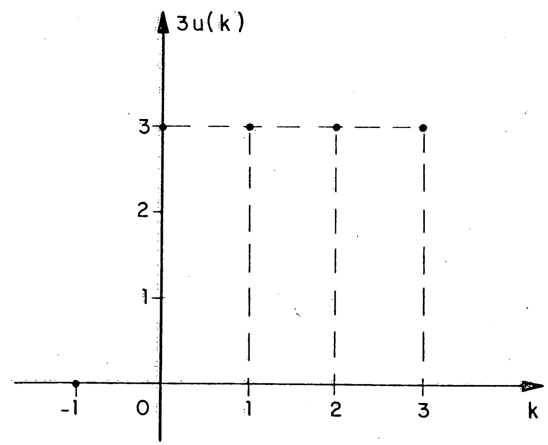


Figura V.5

C) COMBINACION LINEAL.- Dadas las funciones discretas $f(k)$ y $g(k)$, la combinación lineal de ellas se define:

$$c_1 f(k) + c_2 g(k)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Como en el caso de las funciones continuas, si $c_1 f(k) + c_2 g(k) = 0$ se satisface solamente para constantes $c_1 = c_2 = 0$, se dice que $f(k)$ y $g(k)$ son linealmente independientes, pero si se satisface para alguna constante c_1 o c_2 diferente de cero, se dice que $f(k)$ y $g(k)$ son linealmente dependientes.

Para un conjunto de funciones continuas se define un determinante llamado Wronskiano, el cual interviene en un teorema que establece una condición suficiente para que las funciones sean linealmente independientes.

NOTA: Este teorema se estudia en los cursos de Algebra lineal.

Para el caso de funciones discretas se define un determinante similar al Wronskiano, llamado Casorati.

Definición: Para las funciones $y_1(k)$, $y_2(k)$, ..., $y_n(k)$, al determinante:

$$\begin{vmatrix} y_1(k) & y_2(k) & \cdots & y_n(k) \\ y_1(k+1) & y_2(k+1) & \cdots & y_n(k+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1(k+n-1) & y_2(k+n-1) & \cdots & y_n(k+n-1) \end{vmatrix}$$

se le llama Casorati.

TEOREMA V.1

Las "n" funciones $y_1(k)$, $y_2(k)$, ..., $y_n(k)$ son linealmente independientes, si y sólo si el Casorati de las "n" funciones es diferente de cero.

Ejemplo V.4

Se desea saber si las funciones:

$$f(k) = k \; ; \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$g(k) = k^2 \; ; \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

son linealmente independientes.

El Casorati de estas funciones es:

$$\begin{vmatrix} f(k) & g(k) \\ f(k+1) & g(k+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & k^2 \\ k+1 & (k+1)^2 \end{vmatrix} = k(k+1)^2 - k^2(k+1) = k^2 + k$$

por lo tanto para $k = 1, 2, 3, \ldots$, el Casorati de las funciones es diferente de cero, y según el teorema V.1, esto es condición suficiente para que las funciones sean linealmente independientes. Esta conclusión se puede observar también al formar la combinación lineal e igualarla a cero:

$$c_1 k + c_2 k^2 = 0 \; ; \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

como esta ecuación sólo se satisface para $c_1 = c_2 = 0$, se concluye que las funciones son linealmente independientes.

D) CONVOLUCION.- La convolución entre dos funciones discretas f(k) y g(k) definidas para k = 0, 1, 2, 3, ..., se representa:

$$f(k) * g(k)$$

y se define como la función h(k) cuyo k-ésimo elemento es:

$$h(k) = f(k) * g(k) = f(0)\ g(k) + f(1)\ g(k-1) + f(2)\ g(k-2) +$$

$$+ \ldots + f(k)\ g(0)$$

esto es:

$$h(k) = f(k) * g(k) = \sum_{n=0}^{k} f(n) \cdot g(k-n) \quad \ldots(4)$$

Así para k = 0:

$$h(0) = \sum_{n=0}^{0} f(n) \cdot g(-n) = f(0) \cdot g(0)$$

para k = 1:

$$h(1) = \sum_{n=0}^{1} f(n) \cdot g(1-n) = f(0) \cdot g(1) + f(1) \cdot g(0)$$

para k = 2:

$$h(2) = \sum_{n=0}^{2} f(n) \cdot g(2-n) = f(0)g(2) + f(1)g(1) + f(2)g(0)$$

.
.
.

$$h(k) = \{h(0),\ h(1),\ h(2),\ \ldots\}$$

Ejemplo V.5

Sean las funciones:

$f(k) = 1 - k$ para $k = 0, 1, 2, 3$

$g(k) = 2k$ para $k = 0, 1, 2, 3$

$f(0) = 1$	$g(0) = 0$
$f(1) = 0$	$g(1) = 2$
$f(2) = -1$	$g(2) = 4$
$f(3) = -2$	$g(3) = 6$

La convolución entre f(k) y g(k) es la función:

$$h(k) = f(k) * g(k) = \sum_{n=0}^{k} f(n)g(k-n) \quad \ldots (a)$$

para k = 0:

$$h(0) = f(0) \cdot g(0)$$
$$= (1)\ (0)$$
$$= 0$$

para k = 1:

$$h(1) = f(0)g(1) + f(1)g(0)$$
$$= (1)(2) + (0)(0)$$
$$= 2$$

para k = 2:

$$h(2) = f(0)g(2) + f(1)g(1) + f(2)g(0)$$
$$= (1)(4) + (0)(2) + (-1)\ (0)$$
$$= 4$$

para $k = 3$:

$$h(3) = f(0)g(3) + f(1)g(2) + f(2)g(1) + f(3)g(0)$$
$$= (1)(6) + (0)(4) + (-1)(2) + (-2)(0)$$
$$= 4$$

por lo tanto:

$$h(k) = f(k) * g(k) = \{0, 2, 4, 4\} ;$$

definida para $k = 0, 1, 2, 3$

V.2 DIFERENCIA DE UNA FUNCION

Como el cálculo de diferencias finitas considera funciones continuas y discretas, será más sencillo establecer el concepto de diferencia de una función, considerando primero una función continua.

Sea la función continua $y(x)$ que aparece en la siguiente figura.

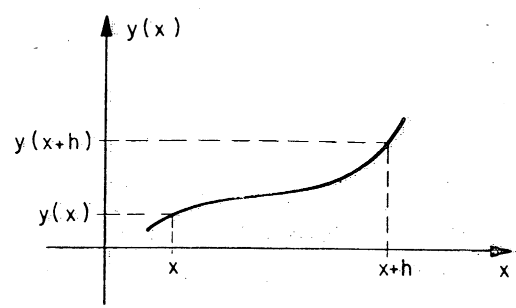


Figura V.6

Partiendo del punto "x" del dominio de la función, se incrementa en una cantidad finita "h", de tal manera que para $x+h$ el valor de la función es $y(x + h)$. Entonces el incremento que experimenta la función es:

$$\Delta y(x) = y(x + h) - y(x) \qquad \ldots (5)$$

y se le conoce como primera diferencia de la función.

> Definición: El cambio de una función $y(x)$ debido a un incremento "h" de su argumento "x", se llama primera diferencia de la función y se representa por $\Delta y(x)$.

De la misma manera, si el punto $x + 2h$ del dominio de la función, se incrementa en una cantidad "h", la primera diferencia de la función es:

$$\Delta y(x + 2h) = y(x + 3h) - y(x + 2h)$$

Ejemplo V.6

Se desea obtener la primera diferencia de cada una de las siguientes funciones:

a) $y(x) = 2x^2$

b) $f(x) = x^2 + 1$, en $x = 2$ y con $h = 1$

Solución

a) $\Delta y(x) = y(x + h) - y(x)$

$$= 2(x + h)^2 - 2x^2$$

$$= 2(x^2 + 2xh + h^2) - 2x^2$$

$$= 4xh + 2h^2$$

b) $\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$

con $h = 1$:

$$\Delta f(x) = (x + 1)^2 + 1 - (x^2 + 1)$$

$$\Delta f(x) = 2x + 1$$

para $x = 2$:

$$\Delta f(2) = 5$$

De la misma manera como se obtuvo la primera diferencia de la función $y(x)$, se obtiene la segunda diferencia $\Delta^2 y(x)$, esto es:

$$\Delta y(x) = y(x + h) - y(x)$$

entonces:

$$\Delta^2 y(x) = \Delta\{\Delta y(x)\}$$

$$= \{y(x + h + h) - y(x+h)\} - \{y(x+h) - y(x)\}$$

$$= y(x + 2h) - 2y(x + h) + y(x)$$

además:

$$\Delta y(x+h) - \Delta y(x) = \{y(x+2h) - y(x+h)\} - \{y(x+h) - y(x)\}$$

$$= y(x + 2h) - 2y(x + h) + y(x)$$

por lo tanto:

$$\Delta^2 y(x) = \Delta y(x+h) - \Delta y(x) = y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)$$

La tercera diferencia de $y(x)$ es:

$$\Delta^3 y(x) = \Delta\{\Delta^2 y(x)\}$$

$$= \Delta\{y(x + 2h) - 2y(x + h) + y(x)\}$$

$$= y(x + 3h) - 2y(x + 2h) + y(x + h) -$$

$$- \{y(x + 2h) - 2y(x + h) + y(x)\}$$

$$= y(x + 3h) - 3y(x + 2h) + 3y(x + h) - y(x)$$

y así sucesivamente, de tal manera que:

$$\Delta^m y(x) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \, {}_mC_n \; y(x + mh - nh)$$

$$= y(x + mh) - {}_mC_1 \, y(x + mh - h) +$$

$$+ {}_mC_2 \, y(x + mh - 2h) + \ldots + (-1)^m \, {}_mC_m \, y(x) \quad \ldots (6)$$

donde:

$${}_mC_n = \frac{m!}{n!\,(m - n)!}$$

Ejemplo V.7

Se desea determinar:

$$\Delta^0 y(x), \quad \Delta y(x), \quad \Delta^2 y(x) \quad y \quad \Delta^3 y(x)$$

de la función $y(x) = x^3$, con $h = 1$.

La diferencia de orden cero de la función es:

$$\Delta^0 y(x) = y(x) = x^3$$

la primera, segunda y tercera diferencias son:

$$\Delta y(x) = (x + 1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Delta^2 y(x) = 3(x + 1)^2 + 3(x + 1) + 1 - (3x^2 + 3x + 1) = 6x + 6$$

$$\Delta^3 y(x) = 6(x + 1) + 6 - (6x + 6) = 6$$

Si en lugar de una función continua, se tiene una función discreta $y(x_k)$, con elementos equiespaciados del dominio:

$$x_k = x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,$$

entonces la primera diferencia de la función es:

$$\Delta y(x_k) = y(x_{k+h}) - y(x_k)$$

donde x_{k+h} pertenece al dominio de la función.

En el estudio de este capítulo y del siguiente, solamente se trabajará con funciones discretas, donde todos los elementos del dominio están equiespaciados y se representarán con:

$$y(k)\ ; \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Con esta representación la primera diferencia de $y(k)$ se define:

$$\Delta y(k) = y(k + h) - y(k)$$

además se considerará $h = 1$, con lo cual:

$$\Delta y(k) = y(k + 1) - y(k) \qquad \ldots (7)$$

La segunda diferencia de la función $y(k)$ es:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y(k) &= \Delta(\Delta y(k)) \\ &= [y(k + 2) - y(k + 1)] - [y(k + 1) - y(k)] \\ &= y(k + 2) - 2y(k + 1) + y(k) \end{aligned}$$

y así sucesivamente:

$$\begin{aligned} \Delta^3 y(k) &= \Delta(\Delta^2 y(k)) \\ &= y(k + 3) - 3y(k + 2) + 3y(k + 1) - y(k) \\ &\ \vdots \\ \Delta^m y(k) &= \Delta[\Delta^{m-1} y(k)] \end{aligned}$$

Otras formas de representar a una función discreta son:

$$y(x_k),\ y(k) \quad ó \quad y_k$$

En la siguiente configuración, aparecen las diferencias de la primera a la cuarta, para una función discreta $f(k)$:

$f(k)$				
	$\Delta f(k)$			
$f(k+1)$		$\Delta^2 f(k)$		
	$\Delta f(k+1)$		$\Delta^3 f(k)$	
$f(k+2)$		$\Delta^2 f(k+1)$		$\Delta^4 f(k)$
	$\Delta f(k+2)$		$\Delta^3 f(k+1)$	
$f(k+3)$		$\Delta^2 f(k+2)$		
	$\Delta f(k+3)$			
$f(k+4)$				

Ejemplo V.8

La función $f(k) = 3k - k^2$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$, aparece en la siguiente figura:

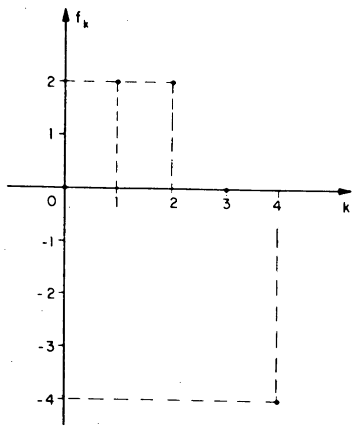


Figura V.7

y sus diferencias, de la primera a la cuarta, se representan en la siguiente tabla.

k	f(k)	Δf(k)	$\Delta^2 f(k)$	$\Delta^3 f(k)$	$\Delta^4 f(k)$
0	0	2	- 2	0	0
1	2	0	- 2	0	
2	2	- 2	- 2		
3	0	- 4			
4	- 4				

Tabla V.1

V.2.1 OPERADORES

En la primera diferencia de la función $y(k)$:

$$\Delta y(k) = y(k+1) - y(k)$$

Δ está operando sobre $y(k)$ de una manera análoga a como el operador diferencial D opera sobre una función.

El símbolo Δ es un operador y se le conoce como el *operador diferencia*.

Algunas propiedades y leyes importantes del operador diferencia, son las siguientes:

A) PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.- Sean $y(k)$ y $z(k)$ dos funciones, entonces:

$$\Delta[y(k) + z(k)] = \Delta y(k) + \Delta z(k) \qquad \ldots (8)$$

Demostración:

$$\Delta[y(k) + z(k)] = [y(k+1) + z(k+1)] - [y(k) + z(k)]$$

$$= y(k+1) - y(k) + z(k+1) - z(k)$$

$$= \Delta y(k) + \Delta z(k)$$

B) PROPIEDAD CONMUTATIVA RESPECTO A UNA CONSTANTE.- Sea $y(k)$ una función y λ una constante, entonces:

$$\Delta[\lambda y(k)] = \lambda \Delta y(k) \qquad \ldots (9)$$

Demostración:

$$\Delta[\lambda y(k)] = \lambda y(k+1) - \lambda y(k)$$

$$= \lambda[y(k+1) - y(k)]$$

$$= \lambda \Delta y(k)$$

C) LEY DE LOS INDICES PARA Δ.- Si "r" y "s" son números enteros no negativos, entonces:

$$\Delta^r \quad \Delta^s = \Delta^s \ \Delta^r = \Delta^{r+s} \qquad \ldots (10)$$

D) LA PRIMERA DIFERENCIA DE UN POLINOMIO.- La primera diferencia del polinomio $y(k) = a_0 + a_1 k + a_2 k^2, + \ldots, a_n k^n$, de grado "n", es otro de grado $(n - 1)$.

Demostración:

El polinomio de grado "n" se representará de la siguiente forma:

$$y(k) = \sum_{n=0}^{n} a_n k^n$$

entonces:

$$\begin{aligned} \Delta y(k) &= \sum_{n=0}^{n} \Delta a_n k^n \\ &= \sum_{n=0}^{n} a_n \Delta k^n \\ &= \sum_{n=0}^{n} a_n \{ (k+1)^n - k^n \} \\ &= \sum_{n=0}^{n} a_n \{ n k^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} k^{n-2} + \ldots \} \end{aligned}$$

es un polinomio de grado n - 1.

Por ejemplo, si se tiene un polinomio de grado 3:

$$f(k) = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3$$

su primera diferencia será un polinomio de grado 3 - 1 = 2:

$$\Delta f(k) = (a_1 + a_2 + a_3) + (2a_2 + 3a_3) \cdot k + 3a_3 k^2$$

la segunda diferencia será un polinomio de grado 3 - 2 = 1:

$$\Delta^2 f(k) = (2a_2 + 6a_3) + 6a_3 k$$

y la tercera diferencia es un polinomio de grado 3 - 3 = 0:

$$\Delta^3 f(k) = 6a_3$$

E) LA DIFERENCIA DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES.

$$\Delta \left[u(k) v(k) \right] = u(k) \Delta v(k) + v(k) \Delta u(k) + \Delta v(k) \Delta u(k) \qquad \ldots (11)$$

Demostración:

$$\Delta \left[u(k) v(k) \right] = u(k+1) v(k+1) - u(k) v(k)$$

$$\begin{aligned} &= u(k+1) v(k+1) - u(k) v(k) + u(k) v(k+1) - u(k) v(k+1) \\ &= u(k) \left[v(k+1) - v(k) \right] + \left[u(k+1) v(k+1) \right] - \left[u(k) v(k+1) \right] \\ &= u(k) \Delta v(k) + u(k+1) v(k+1) - u(k) v(k+1) + v(k) u(k+1) - \\ &\quad - v(k) u(k+1) - v(k) u(k) + v(k) u(k) \\ &= u(k) \Delta v(k) + v(k) \left[u(k+1) - u(k) \right] + u(k+1) v(k+1) - \\ &\quad - u(k+1) v(k) - u(k) v(k+1) + v(k) u(k) \\ &= u(k) \Delta v(k) + v(k) \Delta u(k) + \left[u(k+1) - u(k) \right] \left[v(k+1) - v(k) \right] \\ &= u(k) \Delta v(k) + v(k) \Delta u(k) + \Delta u(k) \Delta v(k) \end{aligned}$$

F) LA DIFERENCIA DE UN COCIENTE DE FUNCIONES.

$$\Delta\left[\frac{u(k)}{v(k)}\right] = \frac{v(k)\Delta u(k) - u(k)\Delta v(k)}{v(k)v(k+1)} \quad \ldots (12)$$

La demostración es similar a la que se desarrolló para la propiedad (E).

Otro operador importante es el *operador corrimiento* E. Este operador E aplicado a una función $y(k)$, permite pasar del valor de la función $y(k)$ en el punto "k" de su dominio, al valor de la función en el punto $k + h$, esto es:

$$Ey(k) = y(k + h) \quad \ldots (13)$$

considerando $h = 1$:

$$Ey(k) = y(k + 1) \quad \ldots (14)$$

de esta manera:

$$E^2y(k) = E[Ey(k)] = y(k + 2)$$

$$E^3y(k) = E[E^2y(k)] = y(k + 3)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$E^my(k) = E[E^{m-1}y(k)] = y(k + m)$$

Ejemplo V.9

Los corrimientos $E^0f(k)$, $Ef(k)$ y $E^3f(k)$ de la función $f(k) = 3k - 1$, con $k = 2$, son:

$$E^0f(k) = f(k)$$

$$= 3k - 1$$

$$E^0f(2) = 3(2) - 1$$

$$= 5$$

$$Ef(k) = f(k + 1)$$

$$= 3(k + 1) - 1$$

$$Ef(2) = 8$$

$$E^3f(k) = f(k + 3)$$

$$= 3(k + 3) - 1$$

$$E^3f(2) = 14$$

Algunas propiedades importantes del operador E, son las siguientes:

A) PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.

$$E[y(k) + z(k)] = Ey(k) + Ez(k) \quad \ldots (15)$$

B) PROPIEDAD CONMUTATIVA RESPECTO A UNA CONSTANTE.

$$E[\lambda y(k)] = \lambda Ey(k) \;; \qquad \lambda = \text{cte.} \quad \ldots (16)$$

C) LEY DE LOS INDICES. Si "r" y "s" son números enteros no negativos, entonces:

$$E^rE^s = E^sE^r = E^{r+s} \quad \ldots (17)$$

Existe una relación entre los operadores Δ y E, la cual se puede obtener a partir de la diferencia de $y(k)$:

$$\Delta y(k) = y(k + 1) - y(k)$$

y como:

$$Ey(k) = y(k + 1)$$

entonces:

$$\Delta y(k) = Ey(k) - y(k)$$

$$= (E - I)y(k)$$

por lo tanto:

$$\Delta = E - I \qquad \text{o bien} \qquad E = \Delta + I \qquad \dots (18)$$

donde I es el operador identidad, tal que:

$$Iy(k) = y(k)$$

por el teorema del binomio:

$$\Delta^m = (E - I)^m = \sum_{n=0}^{m} {}_mC_n (-1)^{m-n} E^n I^{m-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{m} {}_mC_n (-1)^{m-n} E^n$$

$$E^m = (\Delta + I)^m = \sum_{n=0}^{m} {}_mC_n \Delta^n I^{m-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{m} {}_mC_n \Delta^n$$

Ejemplo V.10

La expresión:

$$y(k + 3) - 2y(k + 2) + y(k + 1)$$

se puede representar:

a) Por medio del operador E.

b) Por medio del operador Δ.

Esto es:

a) $y(k+3) - 2y(k+2) + y(k+1) = E^3y(k) - 2E^2y(k) + Ey(k)$

$$= (E^3 - 2E^2 + E)y(k)$$

b) $y(k+3) - 2y(k+2) + y(k+1) = (E^3 - 2E^2 + E)y(k)$

$$= E(E - I)^2y(k)$$

$$= (\Delta + I)\,\Delta^2y(k)$$

$$= (\Delta^3 + \Delta^2)y(k)$$

$$= \Delta^3y(k) + \Delta^2y(k)$$

o bien:

$$y(k+3) - 2y(k+2) + y(k+1) = (E^3 - 2E^2 + E)y(k)$$

$$= \{(\Delta + I)^3 - 2(\Delta + I)^2 + (\Delta + I)\}y(k)$$

$$= (\Delta^3 + 3\Delta^2 + 3\Delta + I - 2\Delta^2 - 4\Delta - 2I + \Delta + I)y(k)$$

$$= \Delta^3y(k) + \Delta^2y(k)$$

Además de los operadores E y Δ, existen otros que también se estudian en el cálculo de diferencias, entre ellos los siguientes:

A) EL OPERADOR DIFERENCIA HACIA ATRAS ∇.

$$\nabla f(k) = f(k) - f(k - 1)$$

B) EL OPERADOR DIFERENCIA CENTRAL δ.

$$\delta f(k) = f(k + \tfrac{1}{2}) - f(k - \tfrac{1}{2})$$

y la relación de ∇ y δ con E y Δ es la siguiente:

$$\nabla = 1 - E^{-1} = \Delta E^{-1}$$

$$\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} = E^{-\frac{1}{2}}\,\Delta = E^{\frac{1}{2}}\,\nabla$$

V.2.2 LA SUMATORIA

Si se conoce la derivada de una función f(x):

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x)$$

la función f(x) se puede conocer aplicando a g(x) la operación inversa a la derivada, o sea integrando g(x):

$$f(x) = \int g(x)dx$$

De una manera similar, si se conoce la primera diferencia de una función y(k):

$$\Delta y(k) = f(k)$$

entonces y(k) se puede conocer aplicando a f(k) la operación inversa a la diferencia, esto es, la suma representada por $\Delta^{-1}f(k)$ o bien $\Sigma f(k)$, por lo tanto:

$$y(k) = \Delta^{-1}f(k) = \Sigma f(k)$$

al proceso de obtener una suma se le llama sumatoria.

Ejemplo V.11

Si $\Delta y(k) = 3^k$, verificar si:

$$y(k) = \Sigma 3^k = \frac{3^k}{2} + c$$

donde "c" es una constante arbitraria.

Se obtiene la primera diferencia de y(k):

$$y(k) = \frac{3^k}{2} + c$$

$$\Delta y(k) = \frac{3^{k+1}}{2} + c - \left(\frac{3^k}{2} + c \right)$$

$$= \frac{3^{k+1} - 3^k}{2}$$

$$= \frac{3^k (3 - 1)}{2}$$

$$= 3^k$$

por lo tanto:

$$y(k) = \Sigma 3^k = \frac{3^k}{2} + c$$

Como se observa en este ejemplo, al igual que en la integral indefinida, en la suma de f(k), ($\Sigma f(k)$), aparece una constante arbitraria, por lo que a este tipo de sumas se les llama *sumas indefinidas*.

En las sumas indefinidas de funciones discretas, en lugar de la constante arbitraria, puede aparecer una función periódica de período "h", o sea, una función g(k) tal que:

$$g(k + h) - g(k) = 0$$

en el ejemplo anterior, si $\Delta y(k) = 3^k$, entonces:

$$y(k) = \Sigma 3^k = \frac{3^k}{2} + g(k)$$

donde $g(k)$ es una función de período 1, y la primera diferencia de $y(k)$ sigue siendo igual a 3^k como se comprueba a continuación:

$$\Delta y(k) = \frac{3^{k+1}}{2} + g(k+1) - \left(\frac{3^k}{2} + g(k) \right)$$

$$= 3^k + g(k+1) - g(k)$$

$$= 3^k$$

en donde:

$$g(k+1) - g(k) = 0$$

Si $\Delta y(k) = f(k)$, entonces la función $y(k)$ se puede obtener de la siguiente forma:

como $\Delta y(k) = f(k)$, entonces:

$$y(k+1) = y(k) + f(k) \; ; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

para $k = 0$:

$$y(1) = y(0) + f(0)$$

para $k = 1$:

$$y(2) = y(1) + f(1) = y(0) + f(0) + f(1)$$

para $k = 2$:

$$y(3) = y(2) + f(2) = y(0) + f(0) + f(1) + f(2)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$y(k) = y(k-1) + f(k-1) = y(0) + f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(k-1)$$

por lo tanto, la función $y(k)$ se puede expresar en términos de $y(0)$ y de los valores conocidos de la función $f(k)$ en la siguiente forma:

$$y(k) = \begin{cases} y(0) + \sum_{r=0}^{k-1} f(r), & k = 1, 2, 3, \ldots \\ y(0), & k = 0 \end{cases}$$

donde se ha considerado que $\sum_{r=1}^{k-1} f(r) = 0$ cuando el límite superior de la sumatoria es negativo, o sea cuando $k-1 < 0$.

Análogamente, si $k = M, M+1, M+2, \ldots,$ se tiene en la expresión:

$$y(k+1) = y(k) + f(k), \qquad k = M, M+1, M+2, \ldots,$$

para $k = M$:

$$y(M+1) = y(M) + f(M)$$

para $k = M+1$:

$$y(M+2) = y(M+1) + f(M+1) = y(M) + f(M) + f(M+1)$$

para $k = M+2$:

$$y(M+3) = y(M+2) + f(M+2) = y(M) + f(M) + f(M+1) + f(M+2)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$y(M+k) = y(M+k-1) + f(M+k-1) = y(M) + f(M) + f(M+1) + f(M+2) + \ldots + f(M+k-1)$$

por lo tanto, la función $y(k)$ se puede expresar en términos de $y(M)$ y de los valores conocidos de la función $f(k)$, de la siguiente forma:

$$y(k) = \begin{cases} y(M) + \sum_{r=M}^{k-1} f(r), & k = M+1,\ M+2,\ \ldots \\ y(M), & k = M \end{cases}$$

A partir de esta expresión se puede llegar al concepto de suma definida.

De $y(k) = y(M) + \sum_{r=M}^{k-1} f(r)$:

se tiene:

$$\sum_{r=M}^{k-1} f(r) = y(k) - y(M)$$

y haciendo $k - 1 = N$, o sea $k = N + 1$:

$$\sum_{M}^{N} f(k) = y(N+1) - y(M)$$

$$\sum_{M}^{N} f(k) = y(k)\Big|_{M}^{N+1}$$

y como $y(k) = \Sigma f(k)$:

$$\sum_{M}^{N} f(k) = \Sigma f(k)\Big|_{M}^{N+1} \qquad \ldots (19)$$

que representa la suma definida de $f(k)$ y en donde $\Sigma f(k)$ es una suma indefinida de $f(k)$.

Ejemplo V.12

Si $f(k) = 3^k$, determinar $\sum_{1}^{3} f(k)$:

$$\sum_{1}^{3} f(k) = \sum_{1}^{3} 3^k$$

como:

$$\Sigma\, 3^k = \frac{3^k}{2} + c$$

entonces:

$$\sum_{1}^{3} 3^k = \frac{3^k}{2} + c\Big|_{1}^{3+1}$$

$$= \frac{3^4}{2} + c - \left(\frac{3}{2} + c\right) = \frac{81 - 3}{2} = 39$$

Si se tiene una función $y(k)$, y se obtiene la primera diferencia, el resultado es otra función de "k":

$$\Delta y(k) = f(k)$$

por lo tanto, la suma de la función $f(k)$ será la función $y(k)$:

$$\Sigma f(k) = y(k)$$

por ejemplo, con la función:

$$y(k) = \cos\,(ak + b)$$

se tiene:

$$\Delta\cos(ak+b) = \cos\left[a(k+1)+b\right] - \cos(ak+b)$$

$$= \cos(ak+b+a) - \cos(ak+b)$$

$$= \cos(ak+b)\cos a - \operatorname{sen}(ak+b)\operatorname{sen} a - \cos(ak+b)$$

$$= \cos(ak+b)(\cos a - 1) - \operatorname{sen}(ak+b)\operatorname{sen} a$$

$$= \cos(ak+b)\left(-2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}\right) - \operatorname{sen}(ak+b)\left(2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\right)$$

$$= -2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\left\{\cos(ak+b)\operatorname{sen}\frac{a}{2} + \operatorname{sen}(ak+b)\cos\frac{a}{2}\right\}$$

$$= -2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\left(ak+b+\frac{a}{2}\right)$$

por lo tanto:

$$\Sigma\operatorname{sen}\left(ak+b+\frac{a}{2}\right) = -\frac{\cos(ak+b)}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}}$$

o bien:

$$\Sigma\operatorname{sen}(ak+b) = -\frac{\cos\left(ak+b-\frac{a}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}}$$

De esta manera se obtendrá la suma de las funciones usuales.

En la tabla V.2, se presentan algunas funciones y sus respectivas sumas.

$f(k) = \Delta y(k)$	$y(k) = \Sigma f(k)$
a^k	$\dfrac{a^k}{a-1}$; $a \neq 1$
$\dfrac{1}{a^k}$	$\dfrac{a}{(1-a)a^k}$; $a \neq 1$
$\operatorname{sen}(ak+b)$	$\dfrac{-\cos\left(ak+b-\frac{a}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}}$
$\cos(ak+b)$	$\dfrac{\operatorname{sen}\left(ak+b-\frac{a}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}}$
$a^k\operatorname{sen} bk$	$\dfrac{a^{k+1}\operatorname{sen} b(k-1) - a^k\operatorname{sen} bk}{a^2 - 2a\cos b + 1}$
$a^k\cos bk$	$\dfrac{a^{k+1}\cos b(k-1) - a^k\cos bk}{a^2 - 2a\cos b + 1}$
$\operatorname{sen}^2(ak+b)$	$\dfrac{k}{2} - \dfrac{\operatorname{sen}(2ak+2b-a)}{4\operatorname{sen} a}$
$\cos^2(ak+b)$	$\dfrac{k}{2} + \dfrac{\operatorname{sen}(2ak+2b-a)}{4\operatorname{sen} a}$
$\operatorname{senh}(ak+b)$	$\dfrac{\cosh\left(ak+b-\frac{a}{2}\right)}{2\operatorname{senh}\frac{a}{2}}$
$\cosh(ak+b)$	$\dfrac{\operatorname{senh}\left(ak+b-\frac{a}{2}\right)}{2\operatorname{senh}\frac{a}{2}}$

$k^{(m)}$	$\frac{k^{(m+1)}}{m+1}$, $m \neq -1$
$(a\,k + b)^{(m)}$	$\frac{(a\,k+b)^{(m+1)}}{a\,(m+1)}$, $-a\,m \neq a$
$k\,\mu(k)$	$k\,\Sigma\,\mu(k) - \Sigma^2\,\mu(k+1)$
$k^2\,\mu(k)$	$k^2\,\Sigma\,\mu(k) - (2\,k+1)\,\Sigma^2\,\mu(k+1) + 2\Sigma^3\,\mu(k+2)$

Tabla V.2

Un tipo de función que puede ser de utilidad, es la llamada *función factorial* $k^{(m)}$:

$$k^{(m)} = k(k-1)(k-2)\,\ldots\,[k-(m-1)] \qquad \ldots (20)$$

$$k^{(-m)} = \frac{1}{(k+1)\,(k+2)\,\ldots\,(k+m)} \qquad \ldots (21)$$

donde "m" es un entero positivo.

Para m = 0 se define:

$$k^{(0)} = 1$$

por ejemplo:

$$k^{(3)} = k(k-1)\,(k-2)$$

$$k^{(5)} = k(k-1)\,(k-2)\,(k-3)\,(k-4)$$

$$k^{(1)} = k$$

Obteniendo la primera diferencia de la función se tiene:

$$\Delta k^{(m)} = m\,k^{(m-1)}$$

de donde:

$$\Delta k^{(m+1)} = (m+1)\,k^{(m)}$$

por lo tanto:

$$\Sigma k^{(m)} = \frac{k^{(m+1)}}{m+1}$$

de la misma manera:

$$\Sigma k^{(-m)} = \frac{k^{(1-m)}}{1-m}\;; \quad m \neq 1$$

Ejemplo V.13

Para obtener la suma de k^2, conviene representar k^2 en términos de la función factorial:

$$k^2 = k^{(2)} + k^{(1)}$$

ya que:

$$k^{(2)} + k^{(1)} = k(k-1) + k = k^2 - k + k = k^2$$

por lo tanto:

$$\Sigma k^2 = \Sigma(k^{(2)} + k^{(1)}) = \Sigma k^{(2)} + \Sigma k^{(1)}$$

$$= \frac{k^{(3)}}{3} + \frac{k^{(2)}}{2} + c$$

$$= \frac{k(k-1)(k-2)}{3} + \frac{k(k-1)}{2} + c$$

$$= \frac{2k^3 - 3k^2 + k}{6} + c$$

Algunas propiedades importantes de la sumatoria son las siguientes:

A) $\Sigma[\lambda_1 \mu(k) + \lambda_2 v(k)] = \lambda_1 \Sigma \mu(k) + \lambda_2 \Sigma v(k)$ ... (22)

donde λ_1 y λ_2 son constantes.

B) $\Sigma \mu(k) \Delta v(k) = \mu(k) v(k) - \Sigma v(k+1) \Delta\mu(k)$ ... (23)

Esta última propiedad se llama *sumatoria por partes*, y la demostración aparece a continuación.

$$\Delta\mu(k)v(k) = \mu(k+1)v(k+1) - \mu(k)v(k)$$

$$= v(k+1)[\mu(k+1) - \mu(k)] + \mu(k)[v(k+1) - v(k)]$$

$$= v(k+1)\,\Delta\mu(k) + \mu(k)\Delta v(k)$$

$$\Sigma\Delta\mu(k)v(k) = \Sigma v(k+1)\Delta\mu(k) + \Sigma\mu(k)\Delta v(k)$$

$$\mu(k)v(k) = \Sigma v(k+1)\Delta\mu(k) + \Sigma\mu(k)\Delta v(k)$$

de donde:

$$\Sigma\mu(k)\;v(k) = \mu(k)v(k) - \Sigma v(k+1)\Delta\mu(k)$$

Ejemplo V.14

La suma:

$$\sum_{1}^{2} k \cdot 3^k$$

se obtiene sumando por partes, para lo cual, se considera:

$$\mu(k) = k \qquad y \qquad \Delta v(k) = 3^k$$

entonces:

$$\Delta\mu(k) = (k+1) - k = 1$$

$$v(k) = \Sigma 3^k = \frac{3^k}{2}$$

desarrollando por partes:

$$\sum_{1}^{2} k \cdot 3^k = k \cdot \frac{3^k}{2}\Bigg|_1^3 - \sum_{1}^{2} \frac{3^{k+1}}{2} \cdot 1$$

donde:

$$\Sigma \frac{3^{k+1}}{2} = \frac{3}{2}\;\Sigma\, 3^k = \frac{3}{4} \cdot 3^k$$

por lo tanto:

$$\sum_{1}^{2} k \cdot 3^k = k \cdot \frac{3^k}{2}\Bigg|_1^3 - \frac{3}{4} \cdot 3^k \Bigg|_1^3 = 21$$

V.3 LA ECUACION EN DIFERENCIAS

La ecuación en diferencias se define de manera análoga a la ecuación diferencial.

> Definición: Toda ecuación que relaciona a una función desconocida con sus diferencias y su(s) variable(s) independiente(s), recibe el nombre de *ecuación en diferencias*.

De acuerdo a esta definición, la ecuación:

$$y(x) - 2\Delta y(x) + \Delta^3 y(x) = x$$

es una ecuación en diferencias.

Con las diferencias:

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$$

$$\Delta^3 y(x) = y(x+3h) - 3y(x+2h) + 3y(x+h) - y(x)$$

la ecuación anterior, se puede representar:

$$y(x) - 2\{y(x+h) - y(x)\} + y(x+3h) - 3y(x+2h) + 3y(x+h) - y(x) = x$$

o sea:

$$y(x+3h) - 3y(x+2h) + y(x+h) + 2y(x) = x$$

Si la función desconocida, es una función discreta $y(k)$; $k = 0, 1, 2, \ldots$, la siguiente ecuación:

$$\Delta^2 y(k) + 3\Delta y(k) + y(k) = 2^k + 1$$

es una ecuación en diferencias, y como:

$$\Delta y(k) = y(k+1) - y(k)$$

$$\Delta^2 y(k) = y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)$$

se puede representar:

$$y(k+2) + y(k+1) - y(k) = 2^k + 1$$

Toda ecuación en diferencias, donde la variable dependiente es $y(k)$, se puede representar en forma general:

$$F(k,\ y(k),\ y(k+1),\ y(k+2),\ \ldots,\ y(k+r)) = 0 \qquad \ldots (24)$$

Algunos ejemplos de ecuaciones en diferencias son los siguientes:

A) $\Delta^3 f(k) + \Delta^2 f(k) + 2f(k) = k^2 - 2k + 4$

B) $4y(k+2) + y(k) = 2k^3 + 3^k$

C) $(k-1)y(k+2) - 4ky(k) = 0$

D) $2ky(k+2) + y(k+1)y(k) - 2y^2(k) = \sqrt{1 - y^2(k)}$

E) $y(k+3) + 2y(k+2) + y(k+1) = 0$

F) $f(x+2) - 2y(x+1) + 2y(x) = 2^x$

G) $\mu(k+1, m) + \mu(k, m+1) = 0$

Así como en las ecuaciones diferenciales, en las ecuaciones en diferencias también se define el orden de una ecuación.

Definición: El orden de una ecuación en diferencias donde la variable dependiente es $y(x)$, es la diferencia entre el mayor y el menor argumento de "y" que aparece en la ecuación, dividido entre "h".

Ejemplo V.15

a) $y(x + 3h) - 2y(x + h) + 3y(x) = x$

el orden de la ecuación es:

$$\frac{(x + 3h) - x}{h} = 3$$

b) $y(k + 2) + 4ky(k) = 0$

el orden es:

$$\frac{(k + 2) - (k)}{1} = 2$$

c) $y(k + 4) + 3y(k - 1) = 0$

el orden es:

$$\frac{(k + 4) - (k - 1)}{1} = 5$$

V.3.1 SOLUCION DE UNA ECUACION EN DIFERENCIAS

La solución de una ecuación en diferencias queda definida de la siguiente manera:

Definición: Una función $f(k)$ será solución de una ecuación en diferencias, si al sustituirla en la ecuación la transforma en una identidad.

Ejemplo V.16

Dada la ecuación:

$$y(k + 1) - 2y(k) = 0$$

comprobar que $y(k) = 3 \cdot 2^k$ es solución.

Como:

$$y(k) = 3 \cdot 2^k$$

entonces:

$$y(k + 1) = 3 \cdot 2^{k+1}$$

sustituyendo $y(k)$ y $y(k + 1)$ en la ecuación en diferencias:

$$3 \cdot 2^{k+1} - 2(3 \cdot 2^k) = 0$$

$$3 \cdot 2 \cdot 2^k - 2 \cdot 3 \cdot 2^k = 0$$

$$0 = 0$$

por lo tanto:

$$y(k) = 3 \cdot 2^k$$

sí es solución.

En este ejemplo, se puede comprobar que $y(k) = -5 \cdot 2^k$, $y(k) = \sqrt{2} \cdot 2^k$, etc., también son soluciones de la ecuación. En general $y(k) = c_1 \cdot 2^k$, donde c_1 es una constante arbitraria, es solución. A $y(k) = c_1 \cdot 2^k$ se le llama *solución general*, mientras que todas las soluciones obtenidas de ésta, asignando un determinado valor a c_1, se llaman *soluciones particulares*.

Ejemplo V.17

Para comprobar que:

$$y(k) = c_1 + c_2 \cdot 2^k + \frac{1}{6} \cdot 4^k$$

es solución de la ecuación:

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 4^k$$

se obtienen $y(k+1)$ y $y(k+2)$:

$$y(k) = c_1 + c_2 \cdot 2^k + \frac{1}{6} \cdot 4^k$$

$$y(k+1) = c_1 + c_2 \cdot 2^{k+1} + \frac{1}{6} \cdot 4^{k+1}$$

$$y(k+2) = c_1 + c_2 \cdot 2^{k+2} + \frac{1}{6} \cdot 4^{k+2}$$

y se sustituyen:

$$y(k), \quad y(k+1) \quad y \quad y(k+2)$$

en la ecuación:

$$c_1 + c_2 \cdot 2^{k+2} + \frac{1}{6} \cdot 4^{k+2} - 3(c_1 + c_2 \cdot 2^{k+1} + \frac{1}{6} \cdot 4^{k+1}) +$$

$$+ 2(c_1 + c_2 \cdot 2^k + \frac{1}{6} \cdot 4^k) = 4^k$$

$$c_1(1 - 3 + 2) + c_2 \cdot 2^k (2^2 - 3 \cdot 2 + 2) + \frac{1}{6} 4^k (4^2 - 3 \cdot 4 + 2) = 4^k$$

$$4^k \equiv 4^k$$

La solución general de una ecuación en diferencias, tiene tantas constantes arbitrarias como sea el orden de la ecuación.

Ejemplo V.18

Si $y(k) = c_1 \cdot 2^k + c_2 \cdot 4^k$ es la solución general de una ecuación en diferencias:

a) Determinar la ecuación en diferencias.

b) Determinar la solución particular que satisface las condiciones $y(0) = 0$ y $y(1) = 4$.

Solución

a) Como la solución general tiene dos constantes arbitrarias, la ecuación en diferencias es de segundo orden.

Entonces:

$$y(k) = c_1 \cdot 2^k + c_2 \cdot 4^k \qquad \ldots (a)$$

$$y(k+1) = c_1 \cdot 2^{k+1} + c_2 \cdot 4^{k+1} \qquad \ldots (b)$$

$$y(k+2) = c_1 \cdot 2^{k+2} + c_2 \cdot 4^{k+2} \qquad \ldots (c)$$

multiplicando la ecuación (b) por -2 y el resultado sumado a (c):

$$y(k+2) - 2y(k+1) = c_2 \cdot 8 \cdot 4^k$$

de donde:

$$c_2 = \frac{y(k+2) - 2y(k+1)}{8 \cdot 4^k} \quad \ldots (d)$$

multiplicando (b) por -4 y el resultado sumado a (c):

$$y(k+2) - 4y(k+1) = c_1 \cdot (-4) \cdot 2^k$$

de donde:

$$c_1 = \frac{-y(k+2) + 4y(k+1)}{4 \cdot 2^k} \quad \ldots (e)$$

sustituyendo (d) y (e) en (a):

$$y(k) = -\frac{y(k+2) - 4y(k+1)}{4 \cdot 2^k} \cdot 2^k + \frac{y(k+2) - 2y(k+1)}{8 \cdot 4^k} \cdot 4^k$$

simplificando:

$$8y(k) = -2y(k+2) + 8y(k+1) + y(k+2) - 2y(k+1)$$

finalmente:

$$y(k+2) - 6y(k+1) + 8y(k) = 0$$

b) Como $y(k) = c_1 \cdot 2^k + c_2 \cdot 4^k$ y $y(0) = 0$, $y(1) = 4$, entonces:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$y(1) = 2c_1 + 4c_2 = 4$$

de donde:

$$c_1 = -2, \qquad c_2 = 2$$

por lo tanto, la solución particular correspondiente es:

$$y(k) = -2 \cdot 2^k + 2 \cdot 4^k$$

V.4 LA ECUACION LINEAL EN DIFERENCIAS

La ecuación en diferencias es lineal si se representa de la forma:

$$a_0(k)y(k+n) + a_1(k)y(k+n-1) + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}(k)y(k+1) + a_n(k)y(k) = Q(k) \quad \ldots (25)$$

donde $y(k)$ es la variable dependiente, "k" la variable independiente y $a_0(k)$, $a_1(k)$, ... $a_n(k)$ son los coeficientes.

Si $a_0(k) \neq 0$ y $a_n(k) \neq 0$, la ecuación es lineal y de orden "n".

Al igual que en las ecuaciones diferenciales:

A) Si $Q(k) \neq 0$ la ecuación se llama *no homogénea*.

B) Si $Q(k) = 0$ la ecuación se llama *homogénea*.

C) Si a_0, a_1, ..., a_n, son constantes, la ecuación se llama de *coeficientes constantes.*

Utilizando el operador E, la ecuación lineal se representa:

$$a_0E^n y(k) + a_1E^{n-1}y(k) + \dots + a_{n-1}Ey(k) + a_n y(k) = Q(k) \quad \dots (26)$$

o bien:

$$(a_0E^n + a_1E^{n-1} + \dots + a_{n-1}E + a_n)y(k) = Q(k)$$

representando el polinomio en E por $\emptyset$ (E), esto es:

$$\emptyset(E) = a_0E^n + a_1E^{n-1} + \dots + a_{n-1}E + a_n$$

se tiene:

$$\emptyset(E)y(k) = Q(k) \qquad \dots (27)$$

TEOREMA V.2

La solución general de una ecuación lineal en diferencias no homogénea:

$$\emptyset(E)y(k) = Q(k)$$

es:

$$y(k) = y_c(k) + y_p(k) \qquad \dots (28)$$

donde $y_c(k)$ se llama *solución complementaria* y es la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$\emptyset(E)y(k) = 0$$

y $y_p(k)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea:

$$\emptyset(E)y(k) = Q(k)$$

Demostración

Sustituyendo $y(k) = y_c(k) + y_p(k)$ en la ecuación en diferencias lineal de orden "n":

$$\emptyset(E)y(k) = Q(k)$$

se obtiene:

$$\emptyset(E)\left[y_c(k) + y_p(k)\right] = Q(k)$$

por ser el operador $\emptyset(E)$ lineal:

$$\emptyset(E)y_c(k) + \emptyset(E)y_p(k) = Q(k)$$

como $\emptyset(E)y_c(k) = 0$ y $\emptyset(E)y_p(k) = Q(k)$:

$$0 + Q(k) = Q(k)$$

por lo tanto, la ecuación se satisface con $y(k) = y_c(k) + y_p(k)$, lo que demuestra que es su solución.

La solución complementaria $y_c(k)$ contiene "n" constantes arbitrarias, por lo que:

$$y(k) = y_c(k) + y_p(k)$$

es la solución general de la ecuación.

Ejemplo V.19

Para la ecuación lineal $y(k+1) - 2y(k) = k + 1$, probar si:

a) $y(k) = c_1 \cdot 2^k$ es la solución complementaria,

b) $y(k) = -k - 2$ es una solución particular.

Si $y(k) = c_1 \cdot 2^k$ es la solución complementaria, entonces deberá ser la solución general de la ecuación homogénea:

$$y(k+1) - 2y(k) = 0$$

entonces sustituyendo $y(k) = c_1 \cdot 2^k$ y $y(k+1) = c_1 \cdot 2^{k+1}$ en la ecuación homogénea, se tiene:

$$y(k+1) - 2y(k) = 0$$

$$c_1 \cdot 2^{k+1} - 2c_1 \cdot 2^k = 0$$

$$c_1 \cdot 2 \cdot 2^k - 2c_1 \cdot 2^k = 0$$

$$0 \equiv 0$$

por lo tanto $y(k) = c_1 \cdot 2^k$ sí es la solución complementaria.

Sustituyendo $y(k) = -k - 2$ en la ecuación no homogénea:

$$y(k+1) - 2y(k) = k + 1$$

$$-(k+1) - 2 - 2(-k-2) = k + 1$$

$$k + 1 = k + 1$$

por lo tanto $y(k) = -k - 2$ sí es solución particular de la ecuación no homogénea.

De lo anterior, se deduce que la solución general de la ecuación $y(k+1) - 2y(k) = k + 1$ es:

$$y(k) = y_c(k) + y_p(k) = c_1 \cdot 2^k - k - 2$$

En los incisos siguientes se obtendrá la solución general de una ecuación en diferencias homogénea, así como la solución particular de una ecuación no homogénea por el método de coeficientes indeterminados y por variación de parámetros.

V.4.1 RESOLUCION DE ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES

La forma general de una ecuación lineal en diferencias homogénea y de coeficientes constantes, es la siguiente:

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \ldots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = 0 \quad \ldots (29)$$

o bien:

$$\emptyset(E) y(k) = 0$$

Si se propone como solución de la ecuación (29), a la función:

$$y(k) = \beta^k \quad \ldots (30)$$

donde β es una constante; esta función debe satisfacer a la ecuación (29) para que la proposición sea válida.

Como:

$$y(k) = \beta^k$$

entonces:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= \beta^{k+1} &&= \beta\beta^k \\ y(k+2) &= \beta^{k+2} &&= \beta^2\beta^k \\ &\vdots && \vdots \\ y(k+n-1) &= \beta^{k+n-1} &&= \beta^{n-1}\beta^k \\ y(k+n) &= \beta^{k+n} &&= \beta^n\beta^k \end{aligned}$$

sustituyendo en (29):

$$a_0\beta^n\beta^k + a_1\beta^{n-1}\beta^k + \ldots + a_{n-1}\beta\beta^k + a_n\beta^k = 0$$

factorizando:

$$(a_0\beta^n + a_1\beta^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\beta + a_n)\ \beta^k = 0$$

Como $\beta^k \neq 0$, entonces de esta ecuación se obtiene que $y(k) = \beta^k$ es solución de (29) si:

$$a_0\beta^n + a_1\beta^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\beta + a_n = 0 \qquad \ldots (31)$$

a esta ecuación se le llama *ecuación característica.*

Ejemplo V.20

Para la ecuación en diferencias:

$$y(k+2) - 6y(k+1) + 8y(k) = 0$$

la ecuación característica es:

$$\beta^2 - 6\beta + 8 = 0$$

en forma factorizada:

$$(\beta - 2)\ (\beta - 4) = 0$$

cuyas raíces son:

$$\beta_1 = 2, \qquad \beta_2 = 4$$

por lo tanto $y_1(k) = 2^k$ y $y_2(k) = 4^k$ son dos soluciones de la ecuación homogénea.

TEOREMA V.3

Si $y_1(k), y_2(k), \ldots, y_n(k)$, son "n" soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal en diferencias homogénea de orden "n", entonces una combinación lineal de ellas:

$$c_1y_1(k) + c_2y_2(k) + \ldots + c_ny_n(k)$$

es la solución general.

Ejemplo V.21

Para la ecuación en diferencias:

$$E^2y(k) - 5Ey(k) + 6y(k) = 0$$

la ecuación característica es:

$$\beta^2 - 5\beta + 6 = 0$$

$$(\beta - 3)\ (\beta - 2) = 0$$

cuyas raíces son:

$$\beta_1 = 3 \quad y \quad \beta_2 = 2$$

por lo tanto:

$$y_1(k) = 3^k \quad y \quad y_2(k) = 2^k.$$

son dos soluciones de la ecuación, y su Casorati es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} 3^k & 2^k \\ 3^{k+1} & 2^{k+1} \end{vmatrix} = 3^k \cdot 2^{k+1} - 2^k \cdot 3^{k+1} = 3^k \cdot 2^k (2 - 3)$$
$$= -3^k \cdot 2^k$$
$$\neq 0 \ \forall \ k$$

como el Casorati de $y_1(k)$ y $y_2(k)$ es diferente de cero, las dos soluciones son linealmente independientes, y como la ecuación en diferencias es de segundo orden, la solución general es:

$$y(k) = c_1 \cdot 3^k + c_2 \cdot 2^k$$

Con lo anterior se establecerá el siguiente teorema:

TEOREMA V.4

Si la ecuación característica de la ecuación lineal en diferencias de coeficientes constantes y orden "n", $\emptyset(E)y(k) = 0$, tiene "n" raíces reales y diferentes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, entonces la solución general de la ecuación en diferencias es:

$$y(k) = c_1\beta_1{}^k + c_2\beta_2{}^k + \ldots + c_n\beta_n{}^k$$

CASO A. RAICES IGUALES.- Si en la ecuación lineal de segundo orden $\emptyset(E)y(k) = 0$, la ecuación característica tiene sus dos raíces iguales $\beta_1 = \beta_2$, entonces se obtienen dos soluciones linealmente dependientes:

$$y_1(k) = \beta_1{}^k \quad y \quad y_2(k) = \beta_2{}^k$$

Al sustituir $y(k) = \beta^k$ en la ecuación de segundo orden $\emptyset(E)y(k) = 0$, se tiene:

$$\emptyset(E)\beta^k = (\beta^2 + a_1\beta + a_2)\beta^k$$
$$= (\beta - \beta_1)^2 \beta^k \qquad \ldots (32)$$

para $\beta = \beta_1$:

$$\emptyset(E)\beta_1{}^k = 0$$

de donde se concluye que $y(k) = \beta_1{}^k$ es solución.

Derivando ambos miembros de la expresión (32):

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\, \emptyset(E)\beta^k = \frac{\partial}{\partial \beta}\, (\beta - \beta_1)^2\, \beta^k$$

$$\emptyset(E)\, \frac{\partial \beta^k}{\partial \beta} = 2(\beta - \beta_1)\beta^k + (\beta - \beta_1)^2\, \frac{\partial \beta^k}{\partial \beta}$$

$$\emptyset(E)k\beta^{k-1} = 2(\beta - \beta_1)\beta^k + (\beta - \beta_1)^2 K\beta^{k-1}$$

multiplicando ambos miembros por β:

$$\emptyset(E)k\beta^k = 2(\beta - \beta_1)\beta^{k+1} + (\beta - \beta_1)^2 k\beta^k$$

para $\beta = \beta_1$:

$$\emptyset(E)k{\beta_1}^k = 0$$

de donde se concluye que $y(k) = k{\beta_1}^k$ también es solución, por lo tanto, la ecuación de segundo orden con raíces iguales tiene dos soluciones:

$$y_1(k) = {\beta_1}^k \qquad y \qquad y_2(k) = k{\beta_1}^k$$

las cuales, son linealmente independientes, entonces la solución general es:

$$y(k) = c_1{\beta_1}^k + c_2k{\beta_1}^k$$

TEOREMA V.5

Si para la ecuación en diferencias lineal, de coeficientes constantes y de orden "m", $\emptyset(E)y(k) = 0$, la ecuación característica tiene "m" raíces iguales $\beta_1 = \beta_2 = \ldots \beta_m = \beta$, entonces la solución general es:

$$y(k) = (c_1 + c_2k + c_3k^2 + \ldots + c_mk^{m-1})\beta^k$$

Ejemplo V.22

Sea la ecuación en diferencias:

$$y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) - y(k) = 0$$

la ecuación característica es:

$$\beta^3 - 3\beta^2 + 3\beta - 1 = 0$$

$$(\beta - 1)^3 = 0\ ; \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$$

por lo tanto, la solución general es:

$$y(k) = (c_1 + c_2k + c_3k^2)\ (1)^k$$

o sea:

$$y(k) = c_1 + c_2k + c_3k^2$$

Ejemplo V.23

Para la ecuación en diferencias:

$$y(k+3) - 3y(k+2) + 4y(k) = 0$$

la ecuación característica es:

$$\beta^3 - 3\beta^2 + 4 = 0$$

$$(\beta + 1)(\beta - 2)^2 = 0\ ; \qquad \beta_1 = -1,\ \beta_2 = \beta_3 = 2$$

por lo tanto la solución general es:

$$y(k) = c_1\ (-1)^k + (c_2 + c_3k)\cdot 2^k$$

CASO B. RAICES COMPLEJAS.- Si se tiene una ecuación en diferencias de segundo orden, $\emptyset(E)y(k) = 0$, tal que su ecuación característica tiene raíces complejas:

$$\beta_1 = a + bi\ , \qquad \beta_2 = a - bi$$

entonces se tiene dos soluciones:

$$y_1(k) = (a + bi)^k \quad y \quad y_2(k) = (a - bi)^k$$

y su combinación lineal es otra solución:

$$y(k) = d_1(a + bi)^k + d_2(a - bi)^k$$

en la forma de Euler, donde:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad y \quad \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

se tiene:

$$y(k) = d_1(re^{\theta i})^k + d_2(re^{-\theta i})^k$$

pasando a la forma trigonométrica:

$$\begin{aligned} y(k) &= d_1r^k(\cos k\theta + i\,\text{sen}\ k\theta) + d_2r^k(\cos k\theta - i\,\text{sen}\ k\theta) \\ &= r^k\left[(d_1 + d_2)\cos k\theta + (d_1i - d_2i)\,\text{sen}\ k\theta\right] \\ &= r^k\ (c_1\cos k\theta + c_2\text{sen}\ k\theta) \end{aligned}$$

las funciones:

$$r^k \cos k\theta \quad y \quad r^k \text{sen}\ k\theta$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación en diferencias, por lo tanto:

$$y(k) = r^k\ (c_1\cos k\theta + c_2\text{sen}\ k\theta)$$

es la solución general.

Ejemplo V.24

Se desea resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $y(k + 2) - 2y(k + 1) + 2y(k) = 0$

b) $(E^5 - 4E^4 + 6E^3 - 6E^2 + 5E - 2)\ y(k) = 0$

la ecuación característica del inciso (a) es:

$$\beta^2 - 2\beta + 2 = 0$$

$$\beta_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}\ ; \qquad \beta_1 = 1 + i\ , \qquad \beta_2 = 1 - i$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

por lo tanto, la solución general es:

$$y(k) = (\sqrt{2})^k\ (c_1\cos\frac{\pi}{4}k + c_2\text{sen}\ \frac{\pi}{4}k)$$

La ecuación característica del inciso (b) es:

$$\beta^5 - 4\beta^4 + 6\beta^3 - 6\beta^2 + 5\beta - 2 = 0$$

por división sintética:

	1	-4	6	-6	5	-2
2		2	-4	4	-4	2
	1	-2	2	-2	1	0
1		1	-1	1	-1	
	1	-1	1	-1	0	
1		1	0	1		
	1	0	1	0		
i		i	-1			
	1	i	0			
-i		-i				
	1	0				

por lo tanto las raíces son $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = \beta_3 = 1$, $\beta_4 = i$ y $\beta_5 = -i$. La solución general es:

$$y(k) = c_1 \cdot 2^k + c_2 + c_3 \cdot k + c_4 \cos \frac{k\pi}{2} + c_5 \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2}$$

V.4.2 METODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

El método de coeficientes indeterminados se utilizó para obtener la solución particular de algunas ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

Este método se aplicará para obtener una solución particular de ecuaciones en diferencias lineales y de coeficientes constantes:

$$\emptyset(E)y(k) = Q(k)$$

donde $Q(k)$ es solución de alguna ecuación en diferencias lineal y homogénea. O sea que $Q(k)$ es una combinación lineal de funciones, cada una de las cuales pueden ser:

A) a^k ; $a \in \mathbb{R}$

B) k^p ; $p = 0, 1, 2, \ldots$

C) sen bk

D) cos bk

E) $a^k k^p$ sen bk, $a^k k^p$ cos bk; $a \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{N}$

En los ejemplos V.25, V.26 y V.27 se aplica el método de coeficientes indeterminados, a las ecuaciones en diferencias.

Ejemplo V.25

Sea la ecuación:

$$(E - 2)y(k) = k + 1 \qquad \ldots (a)$$

la ecuación homogénea asociada es:

$$y(k+1) - 2y(k) = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$\beta - 2 = 0$$

$$\beta = 2$$

por lo tanto la solución complementaria es:

$$y_C(k) = c_1 \cdot 2^k \qquad \text{... (b)}$$

como $Q(k) = k + 1$ es solución de la ecuación en diferencias homogénea.

$$y(k+2) - 2y(k+1) + y(k) = 0$$

$$(E^2 - 2E + 1)y(k) = 0$$

$$(E - 1)^2 y(k) = 0 \qquad \text{... (c)}$$

entonces se aplica el método de coeficientes indeterminados para obtener una solución particular $y_p(k)$.

El aniquilador en este caso, se obtiene de la expresión (c), y es:

$$\emptyset(E) = (E - 1)^2$$

por lo tanto, al aplicar a la ecuación original (a) el aniquilador, ésta se transforma en una ecuación homogénea, esto es:

$$(E - 2)y(k) = k + 1$$

$$\begin{aligned} (E-1)^2 \quad (E-2)y(k) &= (E-1)^2(k+1) \\ &= (E^2 - 2E + 1)(k+1) \\ &= (k+2+1) - 2(k+1+1) + (k+1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

la solución de esta ecuación es:

$$y(k) = c_1 \cdot 2^k + c_2 + c_3 k$$

en donde, como $c_1 \cdot 2^k = y_C(k)$, entonces:

$$y_p(k) = c_2 + c_3 k$$

sustituyendo $y_p(k)$ en la ecuación original (a):

$$(E - 2)y_p(k) = k + 1$$

$$(E - 2)(c_2 + c_3 k) = k + 1$$

$$[c_2 + c_3(k+1)] - 2(c_2 + c_3 k) = k + 1$$

$$-c_3 k - c_2 + c_3 = k + 1$$

de donde:

$$-c_3 = 1$$

$$-c_2 + c_3 = 1$$

por lo tanto:

$$c_3 = -1, \quad c_2 = -2 \quad \text{y} \quad y_p(k) = -2 - k$$

finalmente la solución general de (a) es:

$$y(k) = y_C(k) + y_p(k) = c_1 \cdot 2^k - 2 - k$$

Ejemplo V.26

Sea la ecuación en diferencias:

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 1 + a^k$$

La solución complementaria es:

$$y_c(k) = c_1 + c_2 \cdot 2^k$$

la función $Q(k) = 1 + a^k$ es solución de la ecuación homogénea:

$$(E - a)(E - 1)y(k) = 0$$

por lo tanto, el aniquilador es:

$$\phi(E) = (E - a)(E - 1)$$

aplicando a la ecuación no homogénea el aniquilador:

$$(E - a)(E - 1)(E^2 - 3E + 2)y(k) = (E - a)(E - 1)(1 + a^k)$$

$$(E - a)(E - 1)(E - 2)(E - 1)y(k) = 0$$

la solución de esta ecuación es:

$$y(k) = b_1 + b_2 k + b_3 a^k + b_4 \cdot 2^k \quad ; \quad a \neq 1, \quad a \neq 2$$

de donde, como $y_c(k) = c_1 + c_2 \cdot 2^k$, entonces:

$$y_p(k) = b_2 k + b_3 a^k$$

o bien:

$$y_p(k) = Ak + Ba^k$$

sustituyendo $y_p(k)$ en la ecuación no homogénea:

$$(E^2 - 3E + 2)y(k) = 1 + a^k$$

$$(E^2 - 3E + 2)(Ak + Ba^k) = 1 + a^k$$

$$A(k+2) + Ba^{k+2} - 3\left[A(k+1) + Ba^{k+1}\right] + 2(Ak + Ba^k) = 1 + a^k$$

$$(A - 3A + 2A)k + (Ba^2 - 3Ba + 2B)a^k + (2A - 3A) = 1 + a^k$$

de donde:

$$A = -1 \quad y \quad B = \frac{1}{(a-2)(a-1)}$$

por lo tanto:

$$y_p(k) = -k + \frac{1}{(a-2)(a-1)} a^k ; \quad a \neq 2 \quad y \quad a \neq 1$$

y la solución general es:

$$y(k) = c_1 + c_2 \cdot 2^k - k + \frac{1}{(a-2)(a-1)} a^k ; \; a \neq 2 \quad y \quad a \neq 1$$

Ejemplo V.27

Sea la ecuación:

$$y(k+2) + y(k) = 4 \cos 2k \qquad \ldots (a)$$

la ecuación característica es:

$$m^2 + 1 = 0 ; \quad m_1 = i, \quad m_2 = -i$$

por lo tanto, la solución complementaria es:

$$y_c(k) = c_1 \cos \frac{k\pi}{2} + c_2 \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} \qquad \ldots \text{(b)}$$

como $Q(k) = 4 \cos 2k$ es solución de la ecuación homogénea:

$$(E^2 - 2 \cos (2)\, E + 1) y(k) = 0$$

el aniquilador es:

$$\emptyset(E) = E^2 - 2 \cos (2)\, E + 1 \qquad \ldots \text{(c)}$$

la solución particular de (a) es:

$$y_p(k) = A \cos 2k + B \operatorname{sen} 2k \qquad \ldots \text{(d)}$$

sustituyendo (d) en (a):

$$(E^2 + 1)\, y_p(k) = 4 \cos 2k$$

$$(E^2 + 1)\, (A \cos 2k + B \operatorname{sen} 2k) = 4 \cos 2k$$

$$A \cos 2(k+2) + B \operatorname{sen} 2(k+2) + A \cos 2k + B \operatorname{sen} 2k = 4 \cos 2k$$

$$A \left[\cos 2k \cos 4 - \operatorname{sen} 2k \operatorname{sen} 4 \right] +$$

$$+ B \left[\operatorname{sen} 2k \cos 4 + \cos 2k \operatorname{sen} 4 \right] +$$

$$+ A \cos 2k + B \operatorname{sen} 2k = 4 \cos 2k$$

de donde:

$$A \cos 4 + B \operatorname{sen} 4 + A = 4$$

$$-A \operatorname{sen} 4 + B \cos 4 + B = 0$$

resolviendo este sistema por Cramer:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 4 & \operatorname{sen} 4 \\ 0 & 1 + \cos 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + \cos 4 & \operatorname{sen} 4 \\ - \operatorname{sen} 4 & 1 + \cos 4 \end{vmatrix}} = \frac{4 + 4 \cos 4}{(1 + \cos 4)^2 + \operatorname{sen}^2 4} = \frac{4(1 + \cos 4)}{2(1 + \cos 4)} = 2$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 1 + \cos 4 & 4 \\ - \operatorname{sen} 4 & 0 \end{vmatrix}}{2(1 + \cos 4)} = \frac{4 \operatorname{sen} 4}{2(1 + \cos 4)} = 2 \frac{\operatorname{sen} 4}{1 + \cos 4}$$

por lo tanto:

$$y_p(k) = 2 \cos 2k + 2 \frac{\operatorname{sen} 4}{1 + \cos 4} \operatorname{sen} 2k$$

$$= 2 \frac{\cos 2k + \cos 2k \cos 4 + \operatorname{sen} 2k \operatorname{sen} 4}{1 + \cos 4}$$

$$= 2 \frac{\cos 2k + \cos (2k - 4)}{1 + \cos 4}$$

y la solución general es:

$$y(k) = c_1 \cos \frac{k\pi}{2} + c_2 \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} + 2 \frac{\cos 2k + \cos (2k - 4)}{1 + \cos 4}$$

V.4.3 METODO DE VARIACION DE PARAMETROS

El método de variación de parámetros sirve para obtener la solución particular $y_p(k)$ de una ecuación en diferencias. Este método es general, ya que se puede aplicar a cualquier ecuación en diferencias lineal, inclusive de coeficientes variables.

Antes de describir el método, conviene hacer un desarrollo que se utilizará más adelante.

Si:

$$y(k) = \mu(k)v(k)$$

entonces:

$$\Delta y(k) = \mu(k)\Delta v(k) + v(k)\Delta\mu(k) + \Delta\mu(k)\Delta v(k)$$

desarrollando:

$$y(k+1) - y(k) = \mu(k)(v(k+1) - v(k)) + (v(k) + \Delta v(k))\Delta\mu(k)$$

$$y(k+1) - \mu(k)v(k) = \mu(k)v(k+1) - \mu(k)v(k) + (v(k) + v(k+1) -$$

$$- v(k))\Delta\mu(k)$$

$$y(k+1) = \mu(k)v(k+1) + v(k+1)\Delta\mu(k)$$

y en forma general:

$$y(k+n) = \mu(k)v(k+n) + v(k+n)\Delta\mu(k) \qquad \ldots (33)$$

Si se considera una ecuación lineal en diferencias de segundo orden no homogénea:

$$y(k+2) + a(k)y(k+1) + b(k)y(k) = Q(k) \qquad \ldots (34)$$

la solución complementaria de esta ecuación es:

$$y_c(k) = c_1y_1(k) + c_2y_2(k) \qquad \ldots (35)$$

donde $y_1(k)$ y $y_2(k)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada a (34), haciendo a c_1 y c_2 variables:

$$c_1 = \mu(k) \quad y \quad c_2 = v(k)$$

se forma la función:

$$y(k) = \mu(k)y_1(k) + v(k)y_2(k) \qquad \ldots (36)$$

la cual se propone como solución de la ecuación (34)

Para determinar las funciones $\mu(k)$ y $v(k)$, que hacen que (36) sea solución de (34), se obtiene $y(k+1)$ y $y(k+2)$ de (36) y se sustituye en (34).

Considerando la expresión (33):

$$y(k+1) = \mu(k)y_1(k+1) + v(k)y_2(k+1) + y_1(k+1)\Delta\mu(k) + y_2(k+1)\Delta v(k)$$

estableciendo arbitrariamente, que:

$$y_1(k+1)\Delta\mu(k) + y_2(k+1)\Delta v(k) = 0 \qquad \ldots (37)$$

se obtiene:

$$y(k+1) = \mu(k)y_1(k+1) + v(k)y_2(k+1)$$

a partir de la cual:

$$y(k+2) = \mu(k)y_1(k+2) + v(k)y_2(k+2) + y_1(k+2)\Delta\mu(k) + y_2(k+2)\Delta v(k)$$

sustituyendo $y(k)$, $y(k+1)$ y $y(k+2)$ en (34):

$$\left[\mu(k)y_1(k+2) + v(k)y_2(k+2) + y_1(k+2)\Delta\mu(k) + y_2(k+2)\Delta v(k)\right] +$$
$$+ a(k)\left[\mu(k)y_1(k+1) + v(k)y_2(k+1)\right] +$$
$$+ b(k)\left[\mu(k)y_1(k) + v(k)y_2(k)\right] = Q(k)$$

factorizando:

$$\mu(k)\left[y_1(k+2) + a(k)y_1(k+1) + b(k)y_1(k)\right] +$$
$$+ v(k)\left[y_2(k+2) + a(k)y_2(k+1) + b(k)y_2(k)\right] + y_1(k+2)\Delta\mu(k) +$$
$$+ y_2(k+2)\Delta v(k) = Q(k)$$

como $y_1(k)$ y $y_2(k)$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada a (34), las expresiones entre paréntesis de la ecuación anterior, son igual a cero, por lo tanto, se reduce a:

$$y_1(k+2)\Delta\mu(k) + y_2(k+2)\Delta v(k) = Q(k) \qquad \dots (38)$$

Las ecuaciones (37) y (38) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\Delta\mu(k) \quad y \quad \Delta v(k)$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1(k+1) & y_2(k+1) \\ y_1(k+2) & y_2(k+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mu(k) \\ \Delta v(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q(k) \end{bmatrix}$$

al resolver este sistema se obtiene $\Delta\mu(k)$ y $\Delta v(k)$, sumando cada una de estas diferencias se obtienen las funciones $\mu(k)$ y $v(k)$.

Con las funciones $\mu(k)$ y $v(k)$, se obtiene la solución general de la ecuación (34):

$$y(k) = y_c(k) + y_p(k) = c_1y_1(k) + c_2y_2(k) + \mu(k)y_1(k) + v(k)y_2(k)$$

En general, la ecuación lineal en diferencias de orden "n":

$$\emptyset(E)y(k) = Q(k)$$

tiene como solución complementaria a la función:

$$y_c(k) = c_1y_1(k) + c_2y_2(k) + \dots + c_ny_n(k)$$

y como solución particular a la función:

$$y_p(k) = \mu_1(k)y_1(k) + \mu_2(k)y_2(k) + \dots + \mu_n(k)y_n(k)$$

donde $\mu_1(k)$, $\mu_2(k)$, ..., $\mu_n(k)$, se obtienen de la solución del sistema:

$$\begin{bmatrix} y_1(k+1) & y_2(k+1) & \dots & y_n(k+1) \\ y_1(k+2) & y_2(k+2) & \dots & y_n(k+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1(k+n) & y_2(k+n) & \dots & y_n(k+n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mu_1(k) \\ \Delta\mu_2(k) \\ \vdots \\ \Delta\mu_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ Q(k) \end{bmatrix}$$

Ejemplo V.28

Sea la ecuación:

$$y(k+2) - 6y(k+1) + 8y(k) = 8\cdot 4^k\cdot 2^k$$

la solución complementaria es:

$$y_C(k) = c_1 \cdot 2^k + c_2 \cdot 4^k$$

por variación de parámetros, se tiene:

$$y_p(k) = \mu(k) \cdot 2^k + v(k) \cdot 4^k$$

para determinar $\Delta\mu(k)$ y $\Delta v(k)$, se sustituye $y_1(k) = 2^k$ $y_2(k) = 4^k$ en el sistema:

$$\begin{bmatrix} y_1(k+1) & y_2(k+1) \\ y_1(k+2) & y_2(k+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mu(k) \\ \Delta v(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q(k) \end{bmatrix}$$

obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} 2^{(k+1)} & 4^{(k+1)} \\ 2^{(k+2)} & 4^{(k+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mu(k) \\ \Delta v(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \cdot 4^k \cdot 2^k \end{bmatrix}$$

resolviendo por Cramer:

$$\Delta\mu(k) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 \cdot 4^k \\ 8 \cdot 4^k \cdot 2^k & 16 \cdot 4^k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 \cdot 2^k & 4 \cdot 4^k \\ 4 \cdot 2^k & 16 \cdot 4^k \end{vmatrix}} = \frac{-32 \cdot 2^k \cdot 4^k \cdot 4^k}{16 \cdot 2^k \cdot 4^k} = -2 \cdot 4^k$$

$$\Delta v(k) = \frac{\begin{vmatrix} 2 \cdot 2^k & 0 \\ 4 \cdot 2^k & 8 \cdot 2^k \cdot 4^k \end{vmatrix}}{16 \cdot 2^k \cdot 4^k} = \frac{16 \cdot 2^k \cdot 4^k \cdot 2^k}{16 \cdot 2^k \cdot 4^k} = 2^k$$

$$\mu(k) = \Sigma\Delta\mu(k) = \Sigma(-2 \cdot 4^k) = -2\,\Sigma 4^k = -2\,\frac{4^k}{3}$$

$$v(k) = \Sigma\Delta v(k) = \Sigma 2^k = 2^k$$

por lo tanto la solución particular es:

$$y_p(k) = -2\,\frac{4^k}{3} \cdot 2^k + 2^k \cdot 4^k$$

$$= \frac{1}{3}\, 2^k \cdot 4^k$$

y la solución general es:

$$y(k) = c_1 \cdot 2^k + c_2 \cdot 4^k + \frac{1}{3}\, 4^k \cdot 2^k$$

Ejemplo V.29

Sea la ecuación en diferencias:

$$(E^3 - 6E^2 + 11E - 6)\,y(k) = 5 \cdot 2^k + k^2$$

la solución complementaria es:

$$y_C(k) = c_1 + c_2 \cdot 2^k + c_3 \cdot 3^k$$

por variación de parámetros:

$$y_p(k) = \mu_1(k) + \mu_2(k) \cdot 2^k + \mu_3(k) \cdot 3^k$$

donde $\mu_1(k)$, $\mu_2(k)$ y $\mu_3(k)$ se obtienen a partir de la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2^{k+1} & 3^{k+1} \\ 1 & 2^{k+2} & 3^{k+2} \\ 1 & 2^{k+3} & 3^{k+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mu_1(k) \\ \Delta\mu_2(k) \\ \Delta\mu_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5\cdot 2^k + k^2 \end{bmatrix}$$

resolviendo esta ecuación se obtiene:

$$\Delta\mu_1(k) = \frac{1}{12}\,(30\cdot 2^k + 6\cdot k^2)$$

$$\Delta\mu_2(k) = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{k^2}{2^k}$$

$$\Delta\mu_3(k) = \frac{1}{6}\,\left(\frac{5\cdot 2^k + k^2}{3^k}\right)$$

obteniendo la suma correspondiente:

$$\begin{aligned} \mu_1(k) &= \Sigma\,\frac{1}{12}\,(30\cdot 2^k + 6\cdot k^2) = \frac{30}{12}\,\Sigma 2^k + \frac{6}{12}\,\Sigma k^2 \\ &= \frac{5}{2}\,2^k + \frac{1}{2}\,\Sigma\,(k^{(2)} + k^{(1)}) \\ &= \frac{5}{2}\,2^k + \frac{1}{2}\,\left(\frac{k^{(3)}}{3} + \frac{k^{(2)}}{2}\right) \\ &= \frac{5}{2}\,2^k + \frac{1}{2}\,\left(\frac{2k^3 - 3k^2 + k}{6}\right) \\ &= \frac{1}{12}\,(30\cdot 2^k + 2\cdot k^3 - 3k^2 + k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_2(k) &= \Sigma\left(-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{k^2}{2^k}\right) = -\frac{5}{2}\,\Sigma(1) - \frac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{k^2}{2^k} \\ &= -\frac{5}{2}\,k - \frac{1}{2}\,\left(-2\,\frac{k^2 + 2k + 3}{2^k}\right) \\ &= -\frac{5}{2}\,k + \frac{k^2 + 2k + 3}{2^k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_3(k) &= \Sigma\,\frac{1}{6}\,\left(\frac{5\cdot 2^k + k^2}{3^k}\right) = \frac{5}{6}\,\Sigma\,\frac{2^k}{3^k} + \frac{1}{6}\,\Sigma\,\frac{k^2}{3^k} \\ &= \frac{5}{6}\left(-3\,\frac{2^k}{3^k}\right) + \frac{1}{6}\left(-3\,\frac{k^2 + k + 1}{2\cdot 3^k}\right) \\ &= -\frac{5}{2}\,\frac{2^k}{3^k} - \frac{1}{4}\left(\frac{k^2 + k + 1}{3^k}\right) \end{aligned}$$

por lo tanto la solución particular es:

$$\begin{aligned} y_p(k) &= \frac{1}{12}\,(30\cdot 2^k + 2\cdot k^3 - 3k^2 + k) + \\ &+ \left(-\frac{5}{2}\,k + \frac{k^2 + 2k + 3}{2^k}\right)\cdot 2^k + \\ &+ \left(-\frac{5}{2}\,\frac{2^k}{3^k} - \frac{1}{4}\,\frac{k^2 + k + 1}{3^k}\right)\cdot 3^k \\ &= \frac{k^3}{6} + \frac{1}{2}\,k^2 + \frac{11}{6}\,k + \frac{11}{4} - \frac{5}{2}\,k\cdot 2^k \end{aligned}$$

y la solución general es:

$$y(k) = c_1 + c_2\cdot 2^k + c_3\cdot 3^k + \frac{k^3}{6} + \frac{k^2}{2} + \frac{11k}{6} + \frac{11}{4} - \frac{5k\cdot 2^k}{2}$$

o bien:

$$y(k) = c_1 + (c_2 - \frac{5k}{2})\cdot 2^k + c_3\cdot 3^k + \frac{k^3}{6} + \frac{k^2}{2} + \frac{11k}{6} + \frac{11}{4}$$

V.5 APLICACIONES

Problema V.1

¿En cuántas secciones se puede dividir un plano por medio de rectas no paralelas?

En la figura V.8, se muestra un plano dividido por una, dos y tres rectas no paralelas.

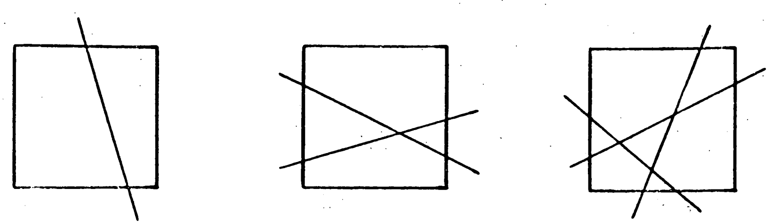


Figura V.8

Representando con y(k) el número de secciones y con "k" el número de rectas, se tiene:

k	y(k)
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11
.	.
.	.
.	.

de donde se observa que en general, con k + 1 rectas se obtienen y(k) + k + 1 secciones, esto es:

$$y(k + 1) = y(k) + k + 1$$

o sea:

$$y(k + 1) - y(k) = k + 1$$

ésta es una ecuación en diferencias lineal no homogénea de primer orden, la cual se puede representar como:

$$(E - 1)y(k) = k + 1$$

o bien:

$$\Delta y(k) = k + 1$$

de donde: $y(k) = \Sigma(k + 1)$

$$= \Sigma(k^{(1)} + 1)$$

$$= \frac{k^{(2)}}{2} + k + c$$

$$= \frac{k(k-1) + 2k}{2} + c$$

$$= \frac{k^2 + k}{2} + c$$

pero cuando $k = 0$, $y(0) = 1$, por lo tanto $c = 1$:

$$y(k) = \frac{k^2 + k + 2}{2}$$

Problema V.2

Por medio de una serie de censos en una población "y", se obtuvieron los datos que se muestran en la siguiente tabla:

k en años	y(k) en millones
0	20
1	30
2	35
3	45
4	50

Tabla V.3

Se desea establecer una expresión matemática que permita determinar la población para cualquier tiempo:

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

observando los datos del problema, se tiene que:

$$y(k+2) - y(k) = 15 \; ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad \ldots (a)$$

esta expresión es una ecuación en diferencias lineal y no homogénea, cuya solución se obtiene a continuación.

La ecuación característica es:

$$\beta^2 - 1 = 0 \; ; \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = -1$$

por lo tanto, la solución complementaria es:

$$y_C(k) = c_1 + c_2 \, (-1)^k \qquad \ldots (b)$$

por coeficientes indeterminados se tiene que:

$$y_P(k) = Ak \qquad \ldots (c)$$

sustituyendo (c) en (a):

$$A(k+2) - Ak = 15$$

$$A = \frac{15}{2}$$

por lo tanto, la solución general de (a) es:

$$y(k) = c_1 + c_2 \, (-1)^k + \frac{15}{2} k \qquad \ldots (d)$$

Para determinar la solución particular del problema, se utilizan las condiciones:

$$P(0) = 20 \quad y \quad P(1) = 30$$

entonces, sustituyendo en (d):

$$20 = c_1 + c_2$$

$$30 = c_1 - c_2 + \frac{15}{2}$$

de donde:

$$c_1 = \frac{85}{4} \qquad \text{y} \qquad c_2 = -\frac{5}{4}$$

por lo tanto:

$$y(k) = \frac{85}{4} - \frac{5}{4}(-1)^k + \frac{15}{2}k$$

Problema V.3

Los números binarios de un sistema digital se pueden transmitir a través de una línea. Los pulsos de magnitud V_1 y V_2 corresponden a los dígitos 0 y 1 respectivamente.

Si el tiempo de transmisión de V_1 es de 2 segundos y el de V_2 es de 1 segundo; determine de entre cuántos números binarios diferentes, se puede seleccionar uno, para transmitirlo en "t" segundos.

En tres segundos se puede transmitir uno de los siguientes números binarios:

0 1

1 0

1 1 1

o sea, se puede seleccionar uno de entre tres números diferentes.

En cuatro segundos:

0 0

0 1 1

1 0 1

1 1 0

1 1 1 1

De esta manera se forma la tabla V.4, donde "t" es el tiempo de transmisión de un número binario y N(t), la cantidad de números binarios diferentes, de entre los cuales se puede seleccionar uno para transmitirlo en "t" segundos:

t	N(t)
0	0
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
.	.
.	.
.	.

Tabla V.4

así, en "t" segundos:

$$N(t + 2) = N(t + 1) + N(t), \quad t = 1, 2, 3, \ldots$$

o sea:

$$N(t+2) - N(t+1) - N(t) = 0 \; ; \quad t = 1, 2, 3, \ldots \quad \ldots \text{(a)}$$

Resolviendo esta ecuación en diferencias:

$$\beta^2 - \beta - 1 = 0$$

$$\beta = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \; ; \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \; ; \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

por lo tanto, la solución general de (a) es:

$$N(t) = c_1\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^t + c_2\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^t$$

como $N(1) = 1$ y $N(2) = 2$, se tiene:

$$1 = c_1\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

$$2 = c_1\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2$$

de donde:

$$c_1 = \frac{11 + 5\sqrt{5}}{15 + 7\sqrt{5}} \; , \qquad c_2 = \frac{11 - 5\sqrt{5}}{15 - 7\sqrt{5}}$$

con lo cual, la solución particular del problema es:

$$N(t) = \left(\frac{11 + 5\sqrt{5}}{11 + 7\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^t +$$

$$+ \left(\frac{11 - 5\sqrt{5}}{15 - 7\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^t$$

para $t = 1, 2, 3, \ldots$

Problema V.4

Una mesa de billar de lado "a" y cuyas aristas son A, B, C y D, aparece en la figura V.9. Si está una bola en el punto $0(k)$ del lado AB, y se le da un impulso tal, que ésta toma una trayectoria que forma un ángulo α con respecto al lado AB; la bola golpea luego al lado BC, y así sucesivamente. Se determinará el punto donde la bola golpea al lado AB después de cada circuito.

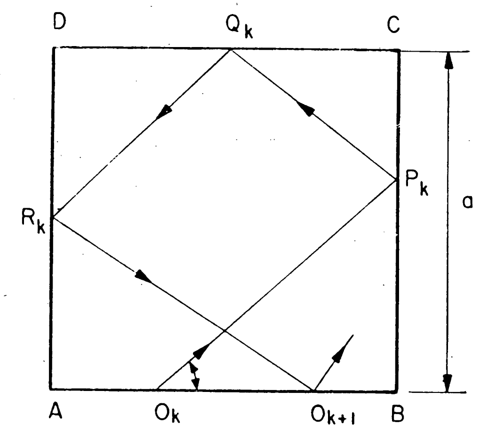


Figura V.9

Sea $ay(k) = AO_k$, de la figura V.9:

$$O(k)B = a - AO(k) = a - ay(k) = a(1 - y(k))$$

$$P(k)B = [O(k)B] \tan\alpha = a(1 - y(k)) \tan\alpha$$

$$P(k)C = a - P(k)B = a - a(1 - y(k)) \tan\alpha$$

$$Q(k)C = P(k)C \tan(90° - \alpha) = P(k)C \cot\alpha = [a - a(1 - y(k))\tan\alpha]\cot\alpha =$$

$$= a\cot\alpha - a(1 - y(k))$$

$$Q(k)D = a - Q(k)C = a - [a\cot\alpha - a(1 - y(k))] = a(1 - \cot\alpha) + a(1 - y(k))$$

$$R(k)D = Q(k)D \tan\alpha = a(\tan\alpha - 1) + a(1 - y(k)) \tan\alpha$$

$$R(k)A = a - R(k)D = a(2 - \tan\alpha) - a(1 - y(k)) \tan\alpha$$

$$AO(k+1) = R(k)A \tan(90° - \alpha) = [R(k)A] \cot\alpha = a(2\cot\alpha - 1) - a(1 - y(k)) =$$

$$= a\,y(k+1)$$

despejando $y(k+1)$ de esta última ecuación:

$$y(k+1) = (2\cot\alpha - 1) - (1 - y(k))$$

$$= 2\cot\alpha - 2 + y(k)$$

o sea:

$$y(k+1) - y(k) = 2(\cot\alpha - 1) \qquad \ldots (a)$$

ésta es una ecuación en diferencias lineal no homogénea de primer orden. Resolviéndola:

$$y_c(k) = c_1\,(1)^k = c_1 \qquad \ldots (b)$$

por variación de parámetros:

$$y_p(k) = \mu(k) \qquad \ldots (c)$$

sustituyendo (c) en (a):

$$\mu(k+1) - \mu(k) = 2(\cot\alpha - 1)$$

$$\Delta\mu(k) = 2(\cot\alpha - 1)$$

$$\mu(k) = \Sigma\Delta\mu(k) = \Sigma\, 2(\cot\alpha - 1)$$

$$= 2(\cot\alpha - 1)\,\Sigma(1)$$

$$= 2k(\cot\alpha - 1)$$

por lo tanto, la solución general de (a) es:

$$y(k) = y_c(k) + y_p(k) = c_1 + 2k(\cot\alpha - 1)$$

para determinar el valor de c_1, si $k = 0$:

$$y(0) = c_1 + 2(0)(\cot\alpha - 1)$$

de donde:

$$c_1 = y(0)$$

por lo tanto:

$$y(k) = y(0) + 2k(\cot\alpha - 1)$$

que sustituyendo en:

$$a\,y(k) = AO(k)$$

representa la solución del problema:

Problema V.5

En el siguiente circuito eléctrico, se tiene entre las terminales a - b, una tensión $V_s = A\cos wt$. Se desea conocer la tensión en cada uno de los nodos del circuito si $c_1 = 2c_2$.

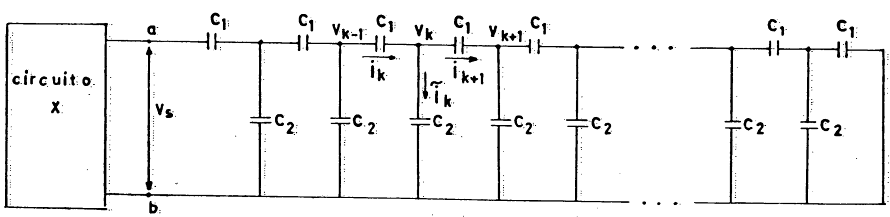


Figura V.10

Efectuando la suma de corrientes en el nodo "k":

$$i(k+1) = i(k) - i(k) \qquad \ldots \text{(a)}$$

considerando que la tensión en el nodo "k" es:

$$V(k) = V(k)\cos wt \qquad \ldots \text{(b)}$$

se tiene que:

$$i(k) = c_2\frac{dV(k)}{dt}$$

$$= c_2 wV(k)\ \text{sen}\ wt \qquad \ldots \text{(c)}$$

$$i(k) = c_1\frac{d}{dt}\left[V(k-1) - V(k)\right]$$

$$= -c_1 w(V(k-1) - V(k))\ \text{sen}\ wt \qquad \ldots \text{(d)}$$

$$i(k+1) = c_1\frac{d}{dt}\left[V(k) - V(k+1)\right]$$

$$= -c_1 w\left[V(k) - V(k+1)\right]\ \text{sen}\ wt \qquad \ldots \text{(e)}$$

sustituyendo (c), (d) y (e) en (a):

$$-c_1 w\left[V(k) - V(k+1)\right]\ \text{sen}\ wt = -c_1 w\left[V(k-1) - V(k)\right]\ \text{sen}\ wt\ +$$

$$+\ c_2\, wV(k)\ \text{sen}\ wt$$

de donde:

$$c_1\left[V(k+1) - 2V(k) + V(k-1)\right] - c_2 V(k) = 0$$

$$V(k+1) - \left(2 + \frac{c_2}{c_1}\right)V(k) + V(k-1) = 0$$

como $c_2 = 2\,c_1$:

$$V(k+1) - 4V(k) + V(k-1) = 0$$

o bien:

$$V(k+2) - 4V(k+1) + V(k) = 0 \qquad \ldots (f)$$

ésta es una ecuación en diferencias lineal y homogénea. Su ecuación característica es:

$$\beta^2 - 4\beta + 1 = 0$$

las raíces son:

$$\beta = 2 \pm \sqrt{3}$$

por lo tanto, la solución de (f) es:

$$V(k) = c_1 (2+\sqrt{3})^k + c_2 (2-\sqrt{3})^k \qquad \ldots (g)$$

Para $k = 0$; $V_0 = A$, por lo tanto (f) queda:

$$V_2 - 4V_1 + A = 0 \qquad \ldots (h)$$

y en el último nodo, cuando $k = n$, $V_n = 0$, por lo tanto (f) queda:

$$0 - 4V_{n-1} + V_{n-2} = 0 \qquad \ldots (i)$$

sustituyendo (g) en (h) cuando $k = 2$ y $k = 1$:

$$c_1 (2+\sqrt{3})^2 + c_2 (2-\sqrt{3})^2 - 4\left[c_1 (2+\sqrt{3}) + \right.$$

$$\left. + c_2 (2-\sqrt{3})\right] + A = 0 \qquad \ldots (j)$$

sustituyendo (g) en (i) cuando $k = n - 1$ y $k = n - 2$:

$$-4\left[c_1 (2+\sqrt{3})^{n-1} + c_2 (2-\sqrt{3})^{n-1}\right] +$$

$$+ c_1 (2+\sqrt{3})^{n-2} + c_2 (2-\sqrt{3})^{n-2} = 0 \qquad \ldots (k)$$

la solución del sistema de ecuaciones (j) y (k) es:

$$c_1 = -A \frac{(2-\sqrt{3})^n}{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}$$

$$c_2 = A \frac{(2+\sqrt{3})^n}{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}$$

por lo tanto, la amplitud de la tensión en un nodo "k" es:

$$V(k) = -A \frac{(2-\sqrt{3})^n}{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n} (2+\sqrt{3})^k +$$

$$+ A \frac{(2+\sqrt{3})^n}{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n} (2-\sqrt{3})^k$$

donde "n" es el número total de nodos.

CAPITULO VI SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

VI.1 SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Un sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden, es un conjunto de estas ecuaciones que presentan la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f_1\left[x_1(k),\ x_2(k),\ \ldots,\ x_n(k),\ k\right] \\ x_2(k+1) &= f_2\left[x_1(k),\ x_2(k),\ \ldots,\ x_n(k),\ k\right] \\ &\vdots \\ x_n(k+1) &= f_n\left[x_1(k),\ x_2(k),\ \ldots,\ x_n(k),\ k\right] \end{aligned} \qquad \ldots (1)$$

Ejemplo VI.1

Las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= 2x(k) - x(k)y(k) \\ y(k+1) &= (k+1)x(k) - y(k) + 2^k \end{aligned}$$

constituyen un sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden, en el cual aparece un producto entre las variables dependientes $x(k)$ y $y(k)$, además uno de los coeficientes es variable, por lo tanto, este sistema es no lineal y de coeficientes variables.

VI.1.1 SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Las funciones f_1, f_2, ..., f_n que aparecen en la representación del sistema de ecuaciones en diferencias dada en el inciso anterior, pueden ser lineales o no lineales. Al igual que para las ecuaciones diferenciales, los métodos analíticos de resolución de ecuaciones en diferencias no lineales son más complicados y carecen de generalidad; esto es, los métodos analíticos se desarrollan solamente para determinado tipo de ecuaciones no lineales.

En cambio, los sistemas lineales aceptan una teoría general para su resolución, de aquí la conveniencia de establecer a continuación la forma general que presentan estos sistemas:

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) + \dots + a_{1n}x_n(k) + b_1(k)\\
x_2(k+1) &= a_{21}x_1(k) + a_{22}x_2(k) + \dots + a_{2n}x_n(k) + b_2(k)\\
&\vdots\\
x_n(k+1) &= a_{n1}x_1(k) + a_{n2}x_2(k) + \dots + a_{nn}x_n(k) + b_n(k)
\end{aligned} \qquad \dots (2)$$

donde los coeficientes a_{ij} pueden ser funciones de "k".

En esta representación:

A) Si todos los coeficientes a_{ij} son constantes, el sistema se llama de coeficientes constantes.

B) Si por lo menos algún término $b_i(k)$ no es cero, el sistema se llama no homogéneo.

C) Si $b_1(k) = b_2(k) = \dots = b_n(k) = 0$, el sistema se llama homogéneo.

Por lo tanto, un sistema lineal de ecuaciones en diferencias de primer orden y con coeficientes constantes, se representa en la forma matricial:

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + \bar{b}(k) \qquad \dots (3)$$

donde:

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\\ \vdots\\ x_n(k+1)\end{bmatrix};\ \bar{x}(k) \begin{bmatrix} x_1(k)\\ x_2(k)\\ \vdots\\ x_n(k)\end{bmatrix};\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix};\ \bar{b}(k) = \begin{bmatrix} b_1(k)\\ b_2(k)\\ \vdots\\ b_n(k)\end{bmatrix}$$

Ejemplo VI.2

El siguiente sistema es lineal y de coeficientes constantes:

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= x(k) - 2z(k) - 1\\
y(k+1) &= 2x(k) + y(k) - z(k)\\
z(k+1) &= x(k) - 3y(k) + 2k
\end{aligned}$$

la representación matricial correspondiente es:

$$\begin{bmatrix} x(k+1)\\ y(k+1)\\ z(k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k)\\ y(k)\\ z(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 2k\end{bmatrix}$$

VI.2 TRANSFORMACION DE UNA ECUACION EN DIFERENCIAS DE ORDEN "n" EN UN SISTEMA DE "n" ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

En el capítulo anterior se han estudiado métodos para resolver ecuaciones lineales en diferencias, resulta conveniente en la teoría de sistemas, representar a una ecuación de este tipo por medio de un sistema de ecuaciones de primer orden. El procedimiento para lograr esta representación se describe a continuación.

Sea la ecuación en diferencias lineal de orden "n":

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \ldots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = Q(k) \quad (4)$$

cambiando la variable $y(k)$ por $x_1(k)$:

$$y(k) = x_1(k)$$

entonces:

$$y(k+1) = x_1(k+1)$$

a la que se puede llamar $x_2(k)$, esto es:

$$y(k+1) = x_1(k+1) = x_2(k)$$

continuando los cambios de variable como hasta ahora, se tiene:

$$y(k+2) = x_2(k+1) = x_3(k)$$

$$y(k+3) = x_3(k+1) = x_4(k)$$

$$\vdots$$

$$y(k+n-1) = x_{n-1}(k+1) = x_n(k)$$

$$y(k+n) = x_n(k+1)$$

despejando $y(k+n)$ de la ecuación (4):

$$y(k+n) = -a_n x_1(k) - a_{n-1} x_2(k) - \ldots - a_1 x_n(k) + Q(k)$$

por lo tanto:

$$y(k+n) = x_n(k+1) = -a_n x_1(k) - a_{n-1} x_2(k) - \ldots - a_1 x_n(k) + Q(k)$$

de lo anterior se tiene:

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_3(k)$$

$$x_3(k+1) = x_4(k)$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}(k+1) = x_n(k)$$

$$x_n(k+1) = -a_n x_1(k) - a_{n-1} x_2(k) - \ldots - a_1 x_n(k) + Q(k)$$

que es un sistema de "n" ecuaciones en diferencias lineales de primer orden, el cual se representará en la forma matricial:

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + \bar{b}(k)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix} ; \quad \bar{b}(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ Q(k) \end{bmatrix}$$

Ejemplo VI.3

Se desea representar la siguiente ecuación por medio de un sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden:

$$y(k+3) - 6y(k+2) + 11y(k+1) - 6y(k) = 5\cdot 2^k + k^2 \qquad \ldots \text{(a)}$$

se realizan los siguientes cambios de variable:

$$y(k) = x_1(k)$$

$$y(k+1) = x_1(k+1) = x_2(k) \qquad \ldots \text{(b)}$$

$$y(k+2) = x_2(k+1) = x_3(k) \qquad \ldots \text{(c)}$$

de la ecuación en diferencias (a):

$$\begin{aligned} y(k+3) &= 6y(k) - 11y(k+1) + 6y(k+2) + 5\cdot 2^k + k^2 \\ &= 6x_1(k) - 11x_2(k) + 6x_3(k) + 5\cdot 2^k + k^2 \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$y(k+3) = x_3(k+1) = 6x_1(k) - 11x_2(k) + 6x_3(k) + 5\cdot 2^k + k^2 \qquad \text{(d)}$$

de las ecuaciones (b), (c) y (d), se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ x_3(k+1) &= 6x_1(k) - 11x_2(k) + 6x_3(k) + 5\cdot 2^k + k^2 \end{aligned}$$

que en forma matricial se representa:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5\cdot 2^k + k^2 \end{bmatrix}$$

VI.3 RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

La solución general de un sistema de ecuaciones en diferencias lineal:

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + \bar{b}(k)$$

se obtiene sumando la solución general $\bar{x}_c(k)$ del sistema homogéneo asociado con una solución particular $\bar{x}_p(k)$ del sistema, esto es:

$$\bar{x}(k) = \bar{x}_c(k) + \bar{x}_p(k)$$

$\bar{x}_c(k)$ se llama solución complementaria o solución homogénea, y $\bar{x}_p(k)$ se llama solución particular.

Ejemplo VI.4

El siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= 2x(k) + y(k) \\ y(k+1) &= x(k) + 2y(k) + 1 \end{aligned} \qquad \ldots \text{(a)}$$

tiene por solución complementaria:

$$x(k) = c_1 \cdot 3^k + c_2 \qquad \ldots (b)$$
$$y(k) = c_1 \cdot 3^k - c_2$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, y por solución particular:

$$x(k) = \frac{1}{4}\ (3^k - 2k - 1) \qquad \ldots (c)$$
$$y(k) = \frac{1}{4}\ (3^k + 2k - 1)$$

por lo tanto, la solución general del sistema (a) es:

$$x(k) = c_1 \cdot 3^k + c_2 + \frac{1}{4}\ (3^k - 2k - 1) \qquad \ldots (d)$$
$$y(k) = c_1 \cdot 3^k - c_2 + \frac{1}{4}\ (3^k + 2k - 1)$$

VI.3.1 RESOLUCION DE SISTEMAS HOMOGENEOS

Sea el sistema homogéneo:

$$\bar{x}(k + 1) = A\bar{x}(k) \qquad \ldots (5)$$

para k = 0:

$$\bar{x}(1) = A\bar{x}(0)$$

para k = 1:

$$\bar{x}(2) = A\bar{x}(1) = AA\bar{x}(0) = A^2\bar{x}(0)$$

para k = 2:

$$\bar{x}(3) = A\bar{x}(2) = AA^2\bar{x}(0) = A^3\bar{x}(0)$$
$$\vdots$$
$$\bar{x}(k) = A\bar{x}(k - 1) = AA^{k-1}\bar{x}(0) = A^k\bar{x}(0)$$

la solución $\bar{x}(k)$ del sistema (5) es:

$$\bar{x}(k) = A^k\bar{x}(0)$$

donde A^k es la k-ésima potencia de la matriz A, y $\bar{x}(0)$ es el vector de condiciones iniciales.

VI.3.2 CALCULO DE A^k

La ecuación característica $f(\lambda) = 0$ de la matriz A de orden n x n es:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad \ldots (6)$$

por el teorema de Cayley-Hamilton, se tiene que:

$$A^n + a_1A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}A + a_nI = 0 \qquad \ldots (7)$$

despejando A^n:

$$A^n = - a_nI - a_{n-1}A - \ldots - a_1A^{n-1}$$

ecuación que se puede representar también de la siguiente forma:

$$A^n = b_0 I + b_1 A + \dots + b_{n-1} A^{n-1} \qquad \dots (8)$$

donde:

$$b_0 = -a_n,\ b_1 = -a_{n-1},\ \dots,\ b_{n-1} = -a_1$$

multiplicando la ecuación (8) por A:

$$A^{n+1} = AA^n = A(b_0 I + b_1 A + \dots + b_{n-1} A^{n-1})$$

$$= b_0 A + b_1 A^2 + \dots + b_{n-1} A^n$$

$$= b_0 A + b_1 A^2 + \dots + b_{n-1}(b_0 I + b_1 A + \dots + b_{n-1} A^{n-1})$$

$$= c_0 I + c_1 A + \dots + c_{n-1} A^{n-1}$$

multiplicando nuevamente por A:

$$A^{n+2} = AA^{n+1} = A(c_0 I + c_1 A + \dots + c_{n-1} A^{n-1})$$

$$= c_0 A + c_1 A^2 + \dots + c_{n-1} A^n$$

$$= c_0 A + c_1 A^2 + \dots + c_{n-1}(b_0 I + b_1 A + \dots + b_{n-1} A^{n-1})$$

$$= d_0 I + d_1 A + \dots + d_{n-1} A^{n-1}$$

en general:

$$A^k = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 A^2 + \dots + \beta_{n-1} A^{n-1} \qquad \dots (9)$$

donde:

$$\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_{n-1}$$

son coeficientes.

Análogamente, despejando λ^n de la ecuación (6):

$$\lambda^n = -a_n - a_{n-1}\lambda - \dots - a_1 \lambda^{n-1}$$

que se puede representar como:

$$\lambda^n = b_0 + b_1\lambda + \dots + b_{n-1}\lambda^{n-1}$$

multiplicando por λ:

$$\lambda^{n+1} = \lambda\lambda^n = \lambda(b_0 + b_1\lambda + \dots + b_{n-1}\lambda^{n-1})$$

$$= b_0\lambda + b_1\lambda^2 + \dots + b_{n-1}\lambda^n$$

$$= b_0\lambda + b_1\lambda^2 + \dots + b_{n-1}(b_0 + b_1\lambda + \dots + b_{n-1}\lambda^{n-1})$$

$$= c_0 + c_1\lambda + \dots + c_{n-1}\lambda^{n-1}$$

$$\lambda^{n+2} = \lambda\lambda^{n+1} = \lambda(c_0 + c_1\lambda + \dots + c_{n-1}\lambda^{n-1})$$

$$= c_0\lambda + c_1\lambda^2 + \dots + c_{n-1}\lambda^n$$

$$= c_0\lambda + c_1\lambda^2 + \dots + c_{n-1}(b_0 + b_1\lambda + \dots + b_{n-1}\lambda^{n-1})$$

$$= d_0 + d_1\lambda + \dots + d_{n-1}\lambda^{n-1}$$

y en general:

$$\lambda^k = \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2 + \dots + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} \qquad \dots (10)$$

donde los coeficientes β_i son respectivamente, los mismos que los de la ecuación (9).

Para las raíces λ_i de la ecuación característica (6) se tiene:

$$\lambda_i^k = \beta_0 + \beta_1\lambda_i + \beta_2\lambda_i^2 + \dots + \beta_{n-1}\lambda_i^{n-1} \qquad \dots (11)$$

CASO A. RAICES DIFERENTES

Si las "n" raíces de la ecuación característica son diferentes, entonces se sustituye cada una de ellas en la ecuación (11) y se obtiene un sistema de "n" ecuaciones con "n" incógnitas:

$$\begin{aligned} \lambda_1^k &= \beta_0 + \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_1^2 + \dots + \beta_{n-1}\lambda_1^{n-1} \\ \lambda_2^k &= \beta_0 + \beta_1\lambda_2 + \beta_2\lambda_2^2 + \dots + \beta_{n-1}\lambda_2^{n-1} \\ &\ \vdots \\ \lambda_n^k &= \beta_0 + \beta_1\lambda_n + \beta_2\lambda_n^2 + \dots + \beta_{n-1}\lambda_n^{n-1} \end{aligned} \qquad \dots (12)$$

las "n" funciones β_0, β_1, β_2, ... β_{n-1}, obtenidas como solución de este sistema, se sustituyen en la ecuación (9) para determinar la matriz A^k.

Ejemplo VI.5

Sea el siguiente sistema:

$$x(k+1) = 3x(k) - 2y(k) \;; \qquad x(0) = 1$$
$$y(k+1) = x(k) \;; \qquad y(0) = 0$$

la matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

la ecuación característica de A es:

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

las raíces son:

$$\lambda_1 = 1 \;; \quad \lambda_2 = 2$$

sustituyendo cada una de estas raíces en la ecuación (11) con $n = 2$:

$$\lambda_i^k = \beta_0 + \beta_1\lambda_i$$

se tiene, para $\lambda_1 = 1$:

$$1^k = \beta_0 + \beta_1$$
$$1 = \beta_0 + \beta_1 \qquad \dots (a)$$

para $\lambda_2 = 2$:

$$2^k = \beta_0 + 2\beta_1 \qquad \dots (b)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (a) y (b) se obtiene:

$$\beta_0 = 2 - 2^k \qquad y \qquad \beta_1 = 2^k - 1$$

la ecuación (9) con n = 2, queda:

$$A^k = \beta_0 I + \beta_1 A$$

sustituyendo los valores de β_0 y β_1:

$$A^k = (2 - 2^k)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (2^k - 1)\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 2^k - 1 & 2 - 2\cdot 2^k \\ 2^k - 1 & 2 - 2^k \end{bmatrix}$$

y como la solución del sistema homogéneo es de la forma:

$$\bar{x}(k) = A^k \bar{x}(0)$$

se tiene:

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2^k - 1 & 2 - 2\cdot 2^k \\ 2^k - 1 & 2 - 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 2^k - 1 \\ 2^k - 1 \end{bmatrix}$$

CASO B. RAICES REPETIDAS

Si la ecuación característica de la matriz A, tiene "m" raíces iguales $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m$, y las restantes $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \ldots, \lambda_n$ diferentes, entonces el sistema de ecuaciones (12), está formado por n - m + 2, ecuaciones linealmente independientes con "n" incógnitas, o sea, más incógnitas que ecuaciones. En este caso, con las n - m + 1 raíces diferentes, se establecen n - m + 1 ecuaciones, ya que:

$$f(\lambda_i) = 0, \quad i = m, \quad m + 1, \quad m + 2, \ldots, n$$

y otras m - 1 ecuaciones, se forman derivando la ecuación (11):

$$\lambda_i^k = \beta_0 + \beta_1\lambda_i + \ldots + \beta_{n-1}\lambda_i^{n-1}$$

con respecto a λ_i, m - 1 veces:

$$\left.\frac{df(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda = \lambda_j} = 0$$

$$\left.\frac{d^2f(\lambda)}{d\lambda^2}\right|_{\lambda = \lambda_j} = 0$$

$$\vdots$$

$$\left.\frac{d^{m-1}f(\lambda)}{d\lambda^{m-1}}\right|_{\lambda = \lambda_j} = 0$$

para $\lambda_j = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m$.

De esta manera se tiene un total de $(n - m + 1) + (m - 1) = n$ ecuaciones con "n" incógnitas.

Ejemplo VI.6

Para determinar la solución del siguiente sistema:

$$x(k + 1) = 3x(k) - y(k) \;; \qquad x(0) = 1$$

$$y(k + 1) = x(k) + y(k) \;; \qquad y(0) = 1$$

primero se obtiene la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

la ecuación característica de A es:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

las raíces son:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

sustituyendo $\lambda_1 = 2$ en:

$$\lambda_i^k = \beta_0 + \beta_1\lambda_i \qquad \ldots \text{(a)}$$

se tiene:

$$2^k = \beta_0 + 2\beta_1 \qquad \ldots \text{(b)}$$

derivando la ecuación (a) con respecto a λ_i:

$$k\lambda_i^{k-1} = \beta_1$$

y para $\lambda_2 = 2$:

$$k \cdot 2^{k-1} = \beta_1 \qquad \ldots \text{(c)}$$

la solución de (b) y (c) es:

$$\beta_0 = 2^k - k \cdot 2^k \,, \qquad \beta_1 = k \cdot 2^{k-1}$$

sustituyendo β_0 y β_1 en:

$$A^k = \beta_0 I + \beta_1 A$$

se obtiene:

$$A^k = (2^k - k\cdot 2^k)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (k\cdot 2^{k-1})\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} 2^k - k\cdot 2^k + 3k\cdot 2^{k-1} & -k\, 2^{k-1} \\ k\cdot 2^{k-1} & 2^k - k\cdot 2^k + k\cdot 2^{k-1} \end{bmatrix}$$

finalmente:

$$\overline{x}(k) = A^k\overline{x}(0) = \begin{bmatrix} 2^k - k\cdot 2^k + 3k\cdot 2^{k-1} & -k\cdot 2^{k-1} \\ k\cdot 2^{k-1} & 2^k - k\cdot 2^k + k\cdot 2^{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k + k\cdot 2^k \\ -2^k + k\cdot 2^k \end{bmatrix}$$

Ejemplo VI.7

Dado el siguiente sistema:

$$x_1(k+1) = 3x_1(k) + x_2(k) - x_3(k) \quad ; \quad x_1(0) = 0$$
$$x_2(k+1) = 2x_1(k) + 2x_2(k) - x_3(k) \quad ; \quad x_2(0) = 1$$
$$x_3(k+1) = 2x_1(k) + 2x_2(k) \quad ; \quad x_3(0) = 0$$

la matriz de coeficientes constantes es:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

y su ecuación característica es:

$$|A - \lambda I| = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

las raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Como el sistema es de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\lambda_i^k = \beta_0 + \beta_1\lambda_i + \beta_2\lambda_i^2 \quad \ldots \text{(a)}$$

para $\lambda_1 = 1$:

$$1 = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \quad \ldots \text{(b)}$$

para $\lambda_2 = 2$:

$$2^k = \beta_0 + 2\beta_1 + 4\beta_2 \quad \ldots \text{(c)}$$

como $\lambda_2 = \lambda_3$, se deriva la expresión (a):

$$k\lambda_i^{k-1} = \beta_1 + 2\beta_2\lambda_i$$

y para $\lambda_3 = 2$:

$$k\cdot 2^{k-1} = \beta_1 + 4\beta_2 \qquad \ldots \text{(d)}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (b), (c), (d):

$$\beta_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2^k & 2 & 4 \\ k\cdot 2^{k-1} & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4 - 3\cdot 2^k + 2k\cdot 2^{k-1}}{1} = 4 - 3\cdot 2^k + 2k\cdot 2^{k-1}$$

$$\beta_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^k & 4 \\ 0 & k\cdot 2^{k-1} & 4 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-4 - 3k\cdot 2^{k-1} + 4\cdot 2^k}{1} = 4\cdot 2^k - 3k\cdot 2^{k-1} - 4$$

$$\beta_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^k \\ 0 & 1 & k\cdot 2^{k-1} \end{vmatrix}}{1} = \frac{1 + k\cdot 2^{k-1} - 2^k}{1} = 1 + k\cdot 2^{k-1} - 2^k$$

sustituyendo β_0, β_1 y β_2 en:

$$A^k = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 A^2$$

se tiene:

$$A^k = (4 - 3\cdot 2^k + 2k\cdot 2^{k-1}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (4\cdot 2^k - 3k\cdot 2^{k-1} - 4) \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ (1 + k\cdot 2^{k-1} - 2^k) \begin{bmatrix} 9 & 3 & -4 \\ 8 & 4 & -4 \\ 10 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 + k\cdot 2^k & 2^k - 1 & -k\cdot 2^{k-1} \\ k\cdot 2^k & 2^k & -k\cdot 2^{k-1} \\ 2 + (2k-2)\cdot 2^k & 2^{k+1} - 2 & (1-k)\cdot 2^k \end{bmatrix}$$

finalmente, como: $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{x}(k) = A^k \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 2^k - 1 \\ 2^k \\ 2^{k+1} - 2 \end{bmatrix}$$

VI.3.3 RESOLUCION DE SISTEMAS NO HOMOGENEOS

Para resolver matricialmente un sistema lineal de ecuaciones en diferencias, se puede partir de la matriz de coeficientes A y con ella calcular la matriz A^k. De esta manera la solución complementaria del sistema se obtiene multiplicando A^k por un vector de elementos constantes, y la solución particular es la suma de convolución de A^k con el vector de términos independientes del sistema.

Sea el sistema no homogéneo:

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + \bar{b}(k) \qquad \ldots (13)$$

para k = 0:

$$\bar{x}(1) = A\bar{x}(0) + \bar{b}(0)$$

para k = 1:

$$\bar{x}(2) = A\bar{x}(1) + \bar{b}(1)$$

$$= A(A\bar{x}(0) + \bar{b}(0)) + \bar{b}(1)$$

$$= A^2\bar{x}(0) + A\bar{b}(0) + \bar{b}(1)$$

para k = 2:

$$\bar{x}(3) = A\bar{x}(2) + \bar{b}(2)$$

$$= A\left[A^2x(0) + A\bar{b}(0) + \bar{b}(1)\right] + \bar{b}(2)$$

$$\bar{x}(3) = A^3\bar{x}(0) + A^2\bar{b}(0) + A\bar{b}(1) + \bar{b}(2)$$

$$\vdots$$

$$\bar{x}(k) = A^k\bar{x}(0) + \sum_{r=0}^{k-1} A^{k-1-r}\,\bar{b}(r) \qquad \ldots (14)$$

La expresión (14) representa la solución general del sistema lineal no homogéneo (13), y está formada por la suma de $A^k\bar{x}(0)$, que es la solución del sistema homogéneo asociado a (13), con el término $\sum_{r=0}^{k-1} A^{k-1-r}\bar{b}(r)$ que es una solución particular de (13). Además, la sumatoria:

$$\sum_{r=0}^{k-1} A^{k-1-r}\,\bar{b}(r) = A^{k-1}\,\bar{b}(0) + A^{k-2}\,\bar{b}(1) + A^{k-3}\,\bar{b}(2) + \ldots +$$

$$+ A\bar{b}(k-2) + I\bar{b}(k-1)$$

se puede expresar de la siguiente forma:

$$\sum_{j=0}^{k-1} A^j b(k-1-j) = I\bar{b}(k-1) + A\bar{b}(k-2) + \ldots + A^{k-3}\,\bar{b}(2) +$$

$$+ A^{k-2}\,\bar{b}(1) + A^{k-1}\,\bar{b}(0)$$

por lo tanto:

$$\bar{x}(k) = A^k\bar{x}(0) + \sum_{r=0}^{k-1} A^{k-1-r}\,\bar{b}(r) = A^k\bar{x}(0) + \sum_{r=0}^{k-1} A^j\bar{b}(k-1-j)$$

Como A es una matriz de orden n x n y $\bar{b}$ un vector de orden n x 1, el producto:

$$A^{k-1-r}\,\bar{b}(r)$$

es un vector de orden n x 1, y la suma definida de éste:

$$\sum_{r=0}^{k-1} A^{k-1-r}\,\bar{b}(r)$$

se define como la suma, desde r = 0 hasta k - 1, de cada uno de sus elementos.

Ejemplo VI.8

Se desea determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x(k+1) = 2x(k) + y(k) \;; \qquad x(0) = -\frac{1}{4}$$

$$y(k+1) = x(k) + 2y(k) + k \;; \quad y(0) = 0$$

la matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

y su ecuación característica:

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

las raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

Sustituyendo λ_1 y λ_2 en la expresión:

$$\lambda_i^k = \beta_0 + \beta_1 \lambda_i$$

se tiene:

$$1 = \beta_0 + \beta_1 \qquad \ldots (a)$$

$$3^k = \beta_0 + 3\beta_1 \qquad \ldots (b)$$

la solución de (a) y (b) es:

$$\beta_0 = \frac{1}{2}(3 - 3^k) \quad ; \quad \beta_1 = \frac{1}{2}(3^k - 1)$$

por lo tanto:

$$A^k = \frac{1}{2}(3 - 3^k)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(3^k - 1)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^k = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3^k + 1 & 3^k - 1 \\ 3^k - 1 & 3^k + 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando A^k por el vector $\bar{x}(0)$:

$$A^k\bar{x}(0) = A^k \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3^k - 1 \\ -3^k + 1 \end{bmatrix}$$

Ahora:

$$\sum_{r=0}^{k-1} A^{k-1-r}\bar{b}(r) = \sum_{j=0}^{k-1} A^j \bar{b}(k-1-j) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3^j + 1 & 3^j - 1 \\ 3^j - 1 & 3^j + 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ k-1-j \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\begin{bmatrix} (3^j - 1)(k-1-j) \\ (3^j + 1)(k-1-j) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{k-1}\left[(k-1)(3^j-1) - j\cdot 3^j + j\right] \\ \\ \sum_{j=0}^{k-1}\left[(k-1)(3^j+1) - j\cdot 3^j - j\right] \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (k-1)\sum_{j=0}^{k-1}(3^j-1) - \sum_{j=0}^{k-1} j\cdot 3^j + \sum_{j=0}^{k-1} j \\ \\ (k-1)\sum_{j=0}^{k-1}(3^j+1) - \sum_{j=0}^{k-1} j\cdot 3^j - \sum_{j=0}^{k-1} j \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (k-1)\left[\left(\frac{1}{2}3^j - j\right)\Big|_o^k\right] - \left[\left(\frac{1}{2} j\, 3^j - \frac{3}{4}3^j\right)\Big|_o^k\right] + \frac{j^2-j}{2}\Big|_o^k \\ \\ (k-1)\left[\left(\frac{1}{2}3^j + j\right)\Big|_o^k\right] - \left[\left(\frac{1}{2} j\cdot 3^j - \frac{3}{4}3^j\right)\Big|_o^k\right] - \frac{j^2-j}{2}\Big|_o^k \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2\cdot k^2 + 3^k - 1 \\ \\ 2\cdot k^2 - 4k + 3^k - 1 \end{bmatrix}$$

finalmente:

$$\overline{x}(k) = A^k\overline{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^j\overline{b}(k-1-j) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3^k - 1 \\ \\ -3^k + 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2\cdot k^2 + 3^k - 1 \\ \\ 2\cdot k^2 - 4k + 3^k - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(k^2+1) \\ \\ \frac{1}{4}(k^2-2k) \end{bmatrix}$$

VI.3.4 RESOLUCION DE SISTEMAS POR MEDIO DEL OPERADOR CORRIMIENTO "E"

Otro procedimiento para resolver un sistema de "n" ecuaciones en diferencias con "n" variables dependientes, es eliminar n - 1 variables para formar una ecuación en diferencias con una sola variable dependiente. En sistemas lineales, esta eliminación se simplifica si se representan las ecuaciones con el operador corrimiento E.

Considérese un sistema lineal de dos ecuaciones en diferencias:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax(k) + by(k) + f(k) \\ y(k+1) &= cx(k) + dy(k) + g(k) \end{aligned} \qquad \ldots (15)$$

representando el sistema con el operador corrimiento:

$$Ex(k) = ax(k) + by(k) + f(k)$$
$$Ey(k) = cx(k) + dy(k) + g(k)$$

o sea:

$$(E - a)x(k) - by(k) = f(k)$$
$$- cx(k) + (E - d)y(k) = g(k)$$

resolviendo el sistema por la regla de Cramer:

$$x(k) = \frac{\begin{vmatrix} f(k) & -b \\ g(k) & E-d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E-a & -b \\ -c & E-d \end{vmatrix}}$$

de donde:

$$\begin{vmatrix} E-a & -b \\ -c & E-d \end{vmatrix} x(k) = \begin{vmatrix} f(k) & -b \\ g(k) & E-d \end{vmatrix}$$

$$\left[(E - a)(E - d) - bc \right] x(k) = (E - d)f(k) + bg(k)$$

agrupando términos:

$$\left[E^2 - (a+d)E + (ad-bc) \right] x(k) = f(k+1) - df(k) + bg(k) \qquad (16)$$

para y(k):

$$y(k) = \frac{\begin{vmatrix} E-a & f(k) \\ -c & g(k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E-a & -b \\ -c & E-d \end{vmatrix}}$$

de donde:

$$\begin{vmatrix} E-a & -b \\ -c & E-d \end{vmatrix} y(k) = \begin{vmatrix} E-a & f(k) \\ -c & g(k) \end{vmatrix}$$

$$\left[E^2 - (a + d)E + (ad - bc) \right] y(k) = (E - a)g(k) + cf(k)$$
$$= g(k+1) - ag(k) + cf(k) \qquad (17)$$

Las ecuaciones (16) y (17), son ecuaciones lineales en diferencias, cada una de las cuales tiene una sola variable dependiente, y su solución se obtiene por los métodos estudiados en el capítulo anterior. Este procedimiento de resolución se puede aplicar a un sistema lineal de "n" ecuaciones en diferencias de la forma:

$$\bar{x}(k + 1) = A\bar{x}(k)$$

Ejemplo VI.9

Para determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x(k+1) = 2x(k) + y(k) \quad ; \qquad x(0) = -\frac{1}{4}$$
$$y(k+1) = x(k) + 2y(k) + k \; ; \qquad y(0) = 0 \qquad \ldots (a)$$

el sistema se puede representar:

$$(E-2)x(k) - y(k) = 0$$
$$-x(k) + (E-2)y(k) = k$$

resolviendo para $x(k)$:

$$\begin{vmatrix} E-2 & -1 \\ -1 & E-2 \end{vmatrix} x(k) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ k & E-2 \end{vmatrix}$$

$$\left[(E-2)^2 - 1\right]x(k) = k$$

$$(E^2 - 4E + 3)x(k) = k$$

la solución complementaria de esta ecuación en diferencias es:

$$x_c(k) = c_1 + c_2 \cdot 3^k$$

y la solución particular es:

$$x_p(k) = -\frac{1}{4}k^2$$

por lo tanto, la solución general es:

$$x(k) = c_1 + c_2 \cdot 3^k - \frac{1}{4}k^2 \qquad \ldots (b)$$

Para $y(k)$:

$$\begin{vmatrix} E-2 & -1 \\ -1 & E-2 \end{vmatrix} y(k) = \begin{vmatrix} E-2 & 0 \\ -1 & k \end{vmatrix}$$

$$(E^2 - 4E + 3)y(k) = (E-2)k$$
$$= k + 1 - 2k$$
$$= 1 - k$$

la solución general es:

$$y(k) = c_3 + c_4 \cdot 3^k + \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{2}k \qquad \ldots (c)$$

sustituyendo $x(k)$ y $y(k)$ en la primera ecuación del sistema original (a):

$$c_1 + c_2 \cdot 3^{k+1} - \frac{1}{4}(k+1)^2 = 2(c_1 + c_2 \cdot 3^k - \frac{1}{4}k^2) + c_3 + c_4 \cdot 3^k + \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{2}k$$

de donde:

$$c_1 - \frac{1}{4} = 2c_1 + c_3 \quad ; \qquad c_3 = -c_1 - \frac{1}{4}$$

$$3c_2 = 2c_2 + c_4 \quad ; \qquad c_4 = c_2$$

por lo tanto:

$$y(k) = (-c_1 - \frac{1}{4}) + c_2 \cdot 3^k + \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{2}k \qquad \ldots (d)$$

las funciones (b) y (d) son la solución general del sistema de ecuaciones (a).

Como $x(0) = -\frac{1}{4}$, se tiene de (b):

$$-\frac{1}{4} = c_1 + c_2 \qquad \ldots (e)$$

y como $y(0) = 0$, se tiene de (d):

$$0 = -c_1 - \frac{1}{4} + c_2 \qquad \ldots \text{(f)}$$

resolviendo las ecuaciones (e) y (f):

$$c_2 = 0 \; ; \qquad c_1 = -\frac{1}{4}$$

por lo tanto:

$$x(k) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}k^2$$

$$y(k) = \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{2}k$$

es la solución del sistema que satisface las condiciones iniciales dadas.

VI.4 APLICACIONES

Problema VI.1

En el año de 1980, la población del país M, era de 10 millones de habitantes, mientras que la población de la ciudad N de dicho país, era de un millón de habitantes. El incremento anual de la población es de 1 %. Si cada año, un 2 % de la población del año anterior de la ciudad N sale de ésta, y un 4 % de la población que el año anterior vivía en provincia, se traslada a la ciudad N. Determinar la población que tendrá la ciudad N en el año de 1990.

El modelo matemático del problema se establece de la siguiente manera:

Si se representa con $x(k)$ a la población de la ciudad N y con $y(k)$ a la población del país M, que no viven en la ciudad N, se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} x(k+1) &= 1.01\,[(1-0.02)x(k) + 0.04y(k)] \\ y(k+1) &= 1.01\,[0.02x(k) + (1-0.04)y(k)] \\ x(0) &= 10^6 \qquad y(0) = 9 \times 10^6 \end{aligned}\right. \qquad \ldots \text{(a)}$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9898 & 0.0404 \\ 0.0202 & 0.9696 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

la ecuación característica de la matriz A de coeficientes es:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0.9898-\lambda & 0.0404 \\ 0.0202 & 0.9696-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.9594\lambda + 0.958894$$

las raíces son:

$$\lambda_1 = 1.01 \qquad \lambda_2 = 0.9494$$

para $\lambda_1 = 1.01$

$$(1.01)^k = \beta_0 + 1.01\,\beta_1 \qquad \ldots \text{(b)}$$

para $\lambda_2 = 0.9494$

$$(0.9494)^k = \beta_0 + 0.9494\ \beta_1 \qquad \ldots\ (c)$$

la solución de las ecuaciones (b) y (c) es:

$$\beta_0 = (1.01)^k - \frac{1.01}{0.0606}\left[(1.01)^k - (0.9494)^k\right]$$

$$\beta_1 = \frac{(1.01)^k - (0.9494)^k}{0.0606}$$

calculando A^k:

$$A^k = \beta_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 0.9898 & 0.0404 \\ 0.0202 & 0.9696 \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(1.01)^k + \frac{1}{3}(0.9494)^k & \frac{2}{3}(1.01)^k - \frac{2}{3}(0.9494)^k \\ \frac{1}{3}(1.01)^k - \frac{1}{3}(0.9494)^k & \frac{1}{3}(1.01)^k + \frac{2}{3}(0.9494)^k \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}(k) = A^k\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} \frac{20 \times 10^6}{3}(1.01)^k - \frac{17 \times 10^6}{3}(0.9494)^k \\ \frac{10 \times 10^6}{3}(1.01)^k + \frac{17 \times 10^6}{3}(0.9494)^k \end{bmatrix}$$

como se ha establecido, para 1980:

$$x(0) = 10^6\ , \qquad y(0) = 9 \times 10^6$$

entonces, para 1990:

$$\bar{x}(10) = \begin{bmatrix} x(10) \\ y(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.993 \times 10^6 \\ 7.053 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

por lo tanto la ciudad N tendrá en 1990, 3.993×10^6 habitantes.

Problema VI.2

Sean A y B dos bolas de igual masa "m", sobre una mesa de billar perfectamente lisa y cuyos lados no son elásticos. Las bolas están colocadas de tal manera que la recta que pasa por su centro es perpendicular a uno de los lados de la mesa. En $t = 0$, se da un impulso a la bola A para que golpee a B y se establezca un choque central directo. Se desea obtener la velocidad de cada bola antes de cada choque.

Se denota con $\mu(K)$ y $v(k)$ la velocidad de las bolas A y B respectivamente, antes del k-ésimo impacto. Entonces por la conservación de la cantidad de movimiento:

$$m\mu(k) + mv(k) = m\mu(k+1) - mv(k+1) \qquad \ldots (a)$$

además, con el coeficiente de restitución ϵ:

$$\mu(k+1) + v(k+1) = -\epsilon(\mu(k) - v(k)) \qquad \ldots (b)$$

las ecuaciones (a) y (b) se pueden expresar también de la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} \mu(k+1) &= \frac{1}{2}.(1-\epsilon)\mu(k) + \frac{1}{2}(1+\epsilon)v(k) \\ v(k+1) &= -\frac{1}{2}(1+\epsilon)\mu(k) - \frac{1}{2}(1-\epsilon)v(k) \end{aligned}\right\} \ldots (c)$$

con las condiciones iniciales:

$$\mu(0) = a \qquad v(0) = 0$$

el sistema de ecuaciones (c) se puede representar matricialmente, donde la matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\epsilon) & \frac{1}{2}(1+\epsilon) \\ -\frac{1}{2}(1+\epsilon) & -\frac{1}{2}(1-\epsilon) \end{bmatrix}$$

la ecuación característica de A es:

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 + \epsilon = 0 \quad ; \quad \lambda_1 = \sqrt{\epsilon}\, i \quad , \quad \lambda_2 = -\sqrt{\epsilon}\, i$$

para $\lambda_1 = \sqrt{\epsilon}\, i$

$$(\sqrt{\epsilon}\, i)^k = \beta_0 + \sqrt{\epsilon}\,\beta_1 i$$

$$(\sqrt{\epsilon}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2})^k = \beta_0 + \sqrt{\epsilon}\,\beta_1 i$$

$$(\epsilon^{\frac{k}{2}}\operatorname{cis}\frac{k\pi}{2}) = \beta_0 + \epsilon^{\frac{1}{2}}\beta_1 i$$

$$\epsilon^{\frac{k}{2}}(\cos\frac{k\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}) = \beta_0 + \epsilon^{\frac{1}{2}}\beta_1 i$$

donde:

$$\beta_0 = \epsilon^{\frac{k}{2}}\cos\frac{k\pi}{2}$$

$$\beta_1 = \epsilon^{\frac{k-1}{2}}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}$$

calculando A^k:

$$A^k = \beta_0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_1\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\epsilon) & \frac{1}{2}(1+\epsilon) \\ -\frac{1}{2}(1+\epsilon) & \frac{1}{2}(1-\epsilon) \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} {}^{\frac{k}{2}} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{1}{2}\,(1 - \in)\in^{\frac{k-1}{2}} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} & \frac{1}{2}\,(1 + \in)\,e^{\frac{k-1}{2}} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} \\ \\ -\frac{1}{2}\,(1 + \in)\in^{\frac{k-1}{2}} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} & \in^{\frac{k}{2}} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{1}{2}\,(1 - \in)\in^{\frac{k-1}{2}} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} \end{bmatrix}
$$

finalmente:

$$
\begin{bmatrix} \mu(k) \\ \\ v(k) \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} a \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\in^{\frac{k}{2}} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{a}{2}\,(1 - \in)\in^{\frac{k-1}{2}} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} \\ \\ -\frac{a}{2}\,(1 + \in)\in^{\frac{k-1}{2}} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} \end{bmatrix}
$$

CAPITULO VII TRANSFORMADA GEOMETRICA

VII.1 DEFINICION DE TRANSFORMADA GEOMETRICA

En el capítulo III se estudió la transformada de Laplace como una transformación lineal, que al aplicarse a una función continua $f(t)$, se obtiene como imagen una función compleja $F(s)$. Una de las ventajas que ofrece esta transformada se ha puesto de manifiesto en la resolución de ecuaciones diferenciales.

La transformada geométrica es una transformación que al aplicarse a una función discreta $f(k)$ se obtiene como imagen una función compleja $F(z)$.

La transformada geométrica es un operador de gran utilidad en matemáticas aplicadas. En este capítulo se aplicará en la resolución de ecuaciones en diferencias.

NOTA: En la mayoría de la bibliografía, la transformada geométrica se estudia bajo el nombre de *función generatriz*. Sin embargo, dado que la función generatriz es una transformación que al desarrollarse adopta la forma de una serie geométrica, en este capítulo se trabajará con el nombre de transformada geométrica.

Definición: La transformada geométrica de una función discreta $f(k)$; $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, se representa por $\mathcal{Z}\{ f(k) \}$, o bien por $F(z)$ y se define como la suma desde $k = 0$ hasta $k \to \infty$ de los productos $f(k) \cdot z^k$, donde "z" es una variable compleja, esto es:

$$\mathcal{Z}\{ f(k) \} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^k \qquad \ldots (1)$$

De la definición anterior se observa que la transformada geométrica de una función discreta f(k) es la serie:

$$\mathcal{Z}\{ f(k) \} = f(0)z^0 + f(1)z + f(2)z^2 + \ldots$$

En el presente capítulo se abreviará transformada geométrica por T.G.

Ejemplo VII.1

La transformada geométrica de la función:

$$f(k) = a^k \quad ; \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

es:

$$\mathcal{Z}\{ a^k \} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^k = 1 + az + a^2z^2 + \ldots$$

VII.1.1 CONVERGENCIA DE LA TRANSFORMADA GEOMETRICA

Si la serie del ejemplo anterior converge y tiene suma S, entonces la T.G. de la función a^k será:

$$\mathcal{Z}\{ a^k \} = S$$

A continuación se analizará la convergencia de la serie, y si es el caso, se determinará el valor de suma S.

$$\mathcal{Z}\{ a^k \} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (az)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (az)^{k-1}$$

Esta es una serie geométrica, y como se sabe es convergente si $|az| < 1$, y en consecuencia su suma es $S = \frac{1}{1 - az}$. En el caso en que $|az| \geq 1$ la serie es divergente.

Por lo tanto:

$$\mathcal{Z}\{ a^k \} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^k = \begin{cases} \frac{1}{1 - az} & ; \quad |az| < 1 \\ \text{divergente:} & |az| \geq 1 \end{cases}$$

la función $F(z) = \frac{1}{1 - az}$ es la que se conoce como T.G. de la función a^k.

De la desigualdad $|az| < 1$ se tiene:

$$|a| \cdot |z| < 1$$

de donde:

$$|z| < \frac{1}{|a|}$$

por lo tanto:

$$\mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{1}{1 - az} \quad \text{para} \quad |z| < \frac{1}{|a|}$$

En la figura VII.1, se muestra la región en el plano complejo para la cual la serie es convergente.

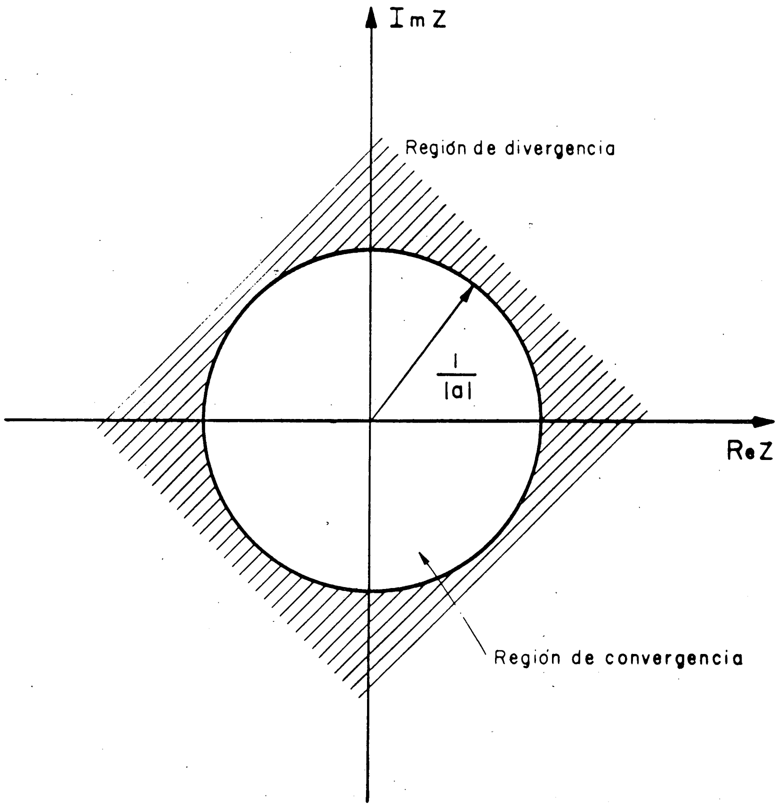


Figura VII.1

La serie que define a la T.G de una función discreta f(k), converge para ciertos valores de "z" y diverge para otros, como en el caso de la transformada de Laplace, en donde la integral impropia converge para ciertos valores de "s" y diverge para otros. Por ejemplo: la transformada de Laplace de la función e^{at}:

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s - 1}\ ; \qquad s > a$$

Como sucede con la transformada de Laplace, al aplicar la T.G., como operador a un problema matemático no son necesarios los valores de convergencia de "z".

VII.2 TRANSFORMADA GEOMETRICA DE FUNCIONES DISCRETAS

En el ejemplo VII.1, se obtuvo la T.G. de la función $f(k) = a^k$:

$$\mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{1}{1 - az}\ ; \qquad |z| < \frac{1}{|a|}$$

A continuación se obtendrá la T.G. de otras funciones discretas y se complementará con una tabla de transformadas.

Ejemplo VII.2

La T.G. de la función escalón unitario u(k) se obtiene:

$$\mathcal{Z}\{u(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^k$$

$$= 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

$$= \frac{1}{1 - z} \; ; \qquad |z| < 1 \qquad \ldots (2)$$

Ejemplo VII.3

Sea la función pulso unitario desplazada $\delta(k-m)$, como se recordará vale uno para $k = m$ y cero para cualquier otro valor de "k", su T.G. es:

$$\mathcal{Z}\{\delta(k-m)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k-m) z^k$$

$$= 0 + 0 + 0 + z^m + 0 + \ldots$$

$$= z^m \qquad \ldots (3)$$

En el caso en que $m = 0$, se tiene:

$$\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1$$

Ejemplo VII.4

La T.G. de la función $f(k) = \operatorname{sen} k\omega$, se obtiene de la siguiente forma:

$$\mathcal{Z}\{\operatorname{sen} k\omega\} = \sum_{k=0}^{\infty} (\operatorname{sen} k\omega) z^k$$

como:

$$\operatorname{sen} k\omega = \frac{e^{ik\omega} - e^{-ik\omega}}{2i}$$

entonces:

$$\mathcal{Z}\{\operatorname{sen} k\omega\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ik\omega} - e^{-ik\omega}}{2i} \right) z^k$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{ik\omega} z^k - e^{-ik\omega} z^k \right)$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{ik\omega} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ik\omega} z^k \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{i\omega}\right)^k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-i\omega}\right)^k z^k \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{1 - e^{i\omega} z} - \frac{1}{1 - e^{-i\omega} z} \right] ; \qquad |z| < 1$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\frac{- e^{-i\omega} z + e^{i\omega} z}{1 + z^2 - z(e^{i\omega} + e^{-i\omega})} \right] ; \qquad |z| < 1$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\frac{2iz \operatorname{sen} \omega}{1 + z^2 - 2z \cos \omega} \right] ; \qquad |z| < 1$$

$$= \frac{z \operatorname{sen} \omega}{1 + z^2 - 2z \cos \omega} \; ; \qquad |z| < 1 \qquad \ldots (4)$$

La transformada de la función $\cos k\omega$, se obtiene de manera similar.

La siguiente tabla contiene una lista de las funciones discretas más usuales y su correspondiente T. G.

Función discreta f(k)	Transformada Geométrica F(z)
1	$1 \;;\; \lvert z\rvert < 1$
a^k	$\dfrac{1}{1-az} \;;\; \lvert z\rvert < \dfrac{1}{\lvert a\rvert}$
k	$\dfrac{z}{(1-z)^2} \;;\; \lvert z\rvert < 1$
k^2	$\dfrac{z(z+1)}{(1-z)^3} \;;\; \lvert z\rvert < 1$
k^3	$\dfrac{z(z^2+4z+1)}{(1-z)^4} \;,\; \lvert z\rvert < 1$
$k\,a^k$	$\dfrac{az}{(1-az)^2} \;;\; \lvert z\rvert < \dfrac{1}{\lvert a\rvert}$
$k^2\,a^k$	$\dfrac{a(az+1)}{(1-az)^3} \;;\; \lvert z\rvert < \dfrac{1}{\lvert a\rvert}$
sen $k\omega$	$\dfrac{z \text{ sen } \omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} \;;\; \lvert z\rvert < \dfrac{1}{\lvert a\rvert}$
cos $k\omega$	$\dfrac{z(z-\cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} \;;\; \lvert z\rvert < \dfrac{1}{\lvert a\rvert}$
$\delta(k)$	1
$\delta(k-m)$	z^m

Tabla VII.1

VII.3 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA GEOMETRICA

Algunas de las propiedades más importantes de la T.G. son las siguientes:

A) PROPIEDAD DE LINEALIDAD.

Sean las funciones discretas f(k) y g(k) definidas para k = 0, 1, 2, 3, ..., y las constantes "a" y "b". La T.G. es una transformación lineal, ya que se cumple:

$$\mathcal{Z}\{af(k) + bg(k)\} = a\mathcal{Z}\{f(k)\} + b\mathcal{Z}\{g(k)\} \quad \ldots (5)$$

donde la región de convergencia que corresponde a $\mathcal{Z}\{af(k) + bg(k)\}$ es aquélla en donde $\mathcal{Z}\{f(k)\}$ y $\mathcal{Z}\{g(k)\}$ convergen simultáneamente.

La comprobación de esta propiedad se desarrolla a partir de la definición de T. G.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{af(k) + bg(k)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[af(k) + bg(k)\right] z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} af(k) z^k + \sum_{k=0}^{\infty} bg(k) z^k \\
&= a\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^k + b\sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^k \\
&= a\mathcal{Z}\{f(k)\} + b\mathcal{Z}\{g(k)\}
\end{aligned}$$

Ejemplo VII.5

La T.G. de la función:

$$f(k) = 4 \cdot 5^k + 2k$$

se obtiene utilizando la propiedad de linealidad:

$$\mathcal{Z}\{ 4 \cdot 5^k + 2k \} = 4\mathcal{Z}\{ 5^k \} + 2\mathcal{Z}\{ k \}$$

y de la tabla VII.1:

$$\mathcal{Z}\{ 4 \cdot 5^k + 2k \} = 4 \frac{1}{1 - 5z} + 2 \frac{z}{(1 - z)^2}$$

B) PROPIEDAD DE LA MULTIPLICACION POR a^k.

Si:

$$\mathcal{Z}\{ f(k) \} = F(z)$$

entonces:

$$\mathcal{Z}\{ a^k \cdot f(k) \} = F(az) \qquad \ldots (6)$$

Comprobación:

$$\mathcal{Z}\{ a^k f(k) \} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f(k) z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) (az)^k$$

$$= F(az)$$

Ejemplo VII.6

Dada la función discreta:

$$g(k) = 3^k \text{ sen } k\omega$$

se puede representar:

$$g(k) = 3^k f(k)$$

donde:

$$f(k) = \text{sen } k\omega$$

como:

$$\mathcal{Z}\{ \text{sen } k\omega \} = F(z) = \frac{z \text{ sen } \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$$

entonces:

$$\mathcal{Z}\{ 3^k \cdot \text{sen } k\omega \} = F(3 \cdot z)$$

$$= \frac{3 \cdot z \cdot \text{sen } \omega}{(3 \cdot z)^2 - 2(3 \cdot z) \cos \omega + 1}$$

C) PROPIEDAD DE CONVOLUCION.

Si:

$$\mathcal{Z}\{ f(k) \} = F(z) \quad y \quad \mathcal{Z}\{ g(k) \} = G(z), \text{ entonces:}$$

$$\mathcal{Z}\{ f(k) * g(k) \} = F(z) \cdot G(z) \qquad \ldots (7)$$

Comprobación

como:

$$f(k) * g(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(m) g(k - m)$$

entonces:

$$\mathcal{Z}\{ f(k) * g(k) \} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[f(k) * g(k) \right] z^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^{k} \sum_{m=0}^{k} f(m) g(k - m)$$

representando z^{k} de la forma:

$$z^{k} = z^{m} \cdot z^{-m} \cdot z^{k} = z^{m} \cdot z^{k-m}$$

se tiene:

$$\mathcal{Z}\{ f(k) * g(k) \} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} f(m) \cdot z^{m} \cdot g(k - m) \cdot z^{k-m}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(m) \cdot z^{m} \sum_{k-m=0}^{\infty} g(k - m) \cdot z^{k-m}$$

$$= F(z) \cdot G(z)$$

D) TRANSFORMADA GEOMETRICA DE UNA FUNCION DESPLAZADA A LA IZQUIERDA.

Sea una función discreta, desplazada hacia la izquierda "m" unidades, la cual se representa por $f(k+m)$, $k = 0, 1, 3, \ldots,$ la T. G. de esta función es:

$$f(k+m) = z^{-m} F(z) - z^{-m} f(0) - z^{1-m} f(1) - \ldots - z^{-1} f(m-1) \qquad \ldots (8)$$

donde:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{ f(k) \}$$

Comprobación:

$$\mathcal{Z}\{ f(k + m) \} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k + m) z^{k}$$

con el cambio de variables $k + m = n$:

$$\mathcal{Z}\{ f(k + m) \} = \sum_{n=m}^{\infty} f(n) z^{n-m}$$

$$= z^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} f(n) z^{n}$$

$$= z^{-m} \left[\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{n} - \sum_{n=0}^{m-1} f(n) z^{n} \right]$$

$$= z^{-m} F(z) - z^{-m} \left[f(0) + f(1) z + \ldots + f(m - 1) z^{m-1} \right]$$

$$= z^{-m} F(z) - z^{-m} f(0) - z^{1-m} f(1) - \ldots - z^{-1} f(m - 1)$$

E) TRANSFORMADA GEOMETRICA DE UNA FUNCION DESPLAZADA A LA DERECHA.

Sea una función discreta desplazada hacia la derecha "m" unidades, la cual se representa por $f(k - m)$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ la T.G. correspondiente es:

$$\mathcal{Z}\{ f(k - m) \} = z^m F(z) \qquad \ldots \; (9)$$

donde:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{ f(k) \}$$

Comprobación

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{ f(k - m) \} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k - m) z^k \\ &= f(-m) + f(1-m) z + f(2-m) z^2 + \ldots + f(0) z^m + \\ &\quad + f(1) z^{m+1} + \ldots\end{aligned}$$

considerando que $f(k)$ para $k < 0$, vale cero:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{ f(k - m) \} &= f(0) z^m + f(1) z^{m+1} + \ldots \\ &= z^m \left[f(0) + f(1) z + \ldots \right] \\ &= z^m F(z)\end{aligned}$$

Ejemplo VII.7

La T.G. de la función:

$$y(k + 2) - 2y(k) + y(k - 2)$$

es:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{ y(k+2) - 2y(k) + y(k-2) \} &= \mathcal{Z}\{ y(k+2) \} - 2\mathcal{Z}\{ y(k) \} + \\ &\quad + \mathcal{Z}\{ y(k-2) \} \\ &= \left[z^{-2} y(z) - z^{-2} y(0) - z^{-1} y(1) \right] - \\ &\quad - 2y(z) + z^2 y(z) \\ &= \left[z^{-2} - 2 + z^2 \right] y(z) - z^{-2} y(0) - \\ &\quad - z^{-1} y(1)\end{aligned}$$

VII.4 TRANSFORMADA GEOMETRICA INVERSA

Si se conoce la transformada geométrica de una función $f(k)$, representada por $F(z)$ y se desea obtener la función discreta, la solución es aplicar una transformación inversa; específicamente la transformada geométrica inversa.

La transformada geométrica inversa de la función $F(z)$ se representa $\mathcal{Z}^{-1}\{ F(z) \}$ y se define por la regla de transformación:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{ F(z) \} = \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(z) z^{k-1} dz \qquad \ldots \; (10)$$

donde "c" es una trayectoria cerrada en la región de convergencia.

Para obtener la transformada inversa por medio de la regla de transformación, se requiere de la teoría de la variable compleja * .

Otra forma de obtener la transformada inversa de una función F(z) es, como en el caso de la transformada de Laplace, utilizar tablas de transformación. En este capítulo se cuenta con la tabla VII.1, la cual sirve para obtener la transformada inversa de las funciones F(z) que ahí aparecen.

La propiedad más importante de la transformada geométrica inversa, es la de linealidad:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{\,aF(z) + bG(z)\,\} = a\mathcal{Z}^{-1}\{\,F(z)\,\} + b\mathcal{Z}^{-1}\{\,G(z)\,\} \quad \ldots (11)$$

Ejemplo VII.8

Sea la función:

$$F(z) = \frac{3}{1 - z} - \frac{2}{1 - 3z} + \frac{5}{5 - z}$$

para obtener la transformada inversa, primero se emplea la propiedad de linealidad:

* Objeto de estudio de un curso de variable compleja.

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = 3\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{1}{1 - z}\} - 2\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{1}{1 - 3z}\} + \mathcal{Z}^{-1}\{\frac{5}{5 + 2}\}$$

de la tabla VII.1, se obtiene:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{1}{1 - z}\} = 1^k = 1$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{1}{1 - 3z}\} = 3^k$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{5}{5 + z}\} = \mathcal{Z}^{-1}\{\frac{1}{1 + \frac{1}{5}z}\} = \left(-\frac{1}{5}\right)^k$$

por lo tanto:

$$f(k) = 3 - 2 \cdot 3^k + \left(-\frac{1}{5}\right)^k$$

VII.4.1 TRANSFORMADA INVERSA POR FRACCIONES PARCIALES

En algunos casos en que se requiere obtener la transformada inversa de una función F(z), no es posible obtenerla directamente de tablas. Si la función F(z) es una fracción racional, se puede desarrollar en fracciones parciales, de tal manera que la transformada inversa de F(z) es igual a la suma de las transformadas inversas de estas fracciones.

La transformación inversa de una fracción racional F(z) por fracciones parciales, es un proceso similar al que se estudió en la transformada de Laplace.

Ejemplo VII.9

Sea la función:

$$F(z) = \frac{2}{2z^2 - 3z + 1}$$

Observando la tabla VII.1, se concluye que no está contenida esta función. Por lo tanto, como la función es una fracción racional, la transformada inversa se puede obtener desarrollando en fracciones parciales:

$$F(z) = \frac{2}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{1}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-\frac{1}{2}}$$

calculando el valor de los residuos "a" y "b" se obtiene:

$$a = 2$$

$$b = -2$$

sustituyendo estos valores en las fracciones:

$$F(z) = \frac{2}{z-1} + \frac{-2}{z-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{2}{1-z} + \frac{4}{1-2z}$$

por lo tanto:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = -2\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{1}{1-z}\} + 4\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{1}{1-2z}\}$$

$$= -2 + 4 \cdot 2^k$$

Ejemplo VII.10

Para obtener la transformada inversa de la función:

$$F(z) = \frac{2z(z^2-1)}{(z^2+1)^2}$$

se desarrolla en fracciones parciales:

$$F(z) = z\left[\frac{2(z^2-1)}{(z^2+1)^2}\right] = z\left[\frac{a}{z+i} + \frac{b}{z-i} + \frac{c}{(z+i)^2} + \frac{d}{(z-i)^2}\right]$$

al calcular los valores de a, b, c, y d, se obtiene:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad d = 1$$

sustituyendo estos valores en las fracciones:

$$F(z) = z\left[\frac{1}{(z+i)^2} + \frac{1}{(z-i)^2}\right]$$

multiplicando y dividiendo entre $\frac{1}{i^2}$:

$$F(z) = z\left[\frac{\frac{1}{i^2}}{\frac{1}{i^2}(z+i)^2} + \frac{\frac{1}{i^2}}{\frac{1}{i^2}(z-i)^2}\right]$$

$$= z\left[\frac{-1}{(1-iz)^2} + \frac{-1}{(1+iz)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{i}\ \frac{-iz}{(1-iz)^2} + \frac{1}{i}\ \frac{-iz}{(1+iz)^2}$$

de la tabla VII.1

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = -\frac{1}{i}k(i)^k + \frac{1}{i}k(-i)^k$$

$$= i\,k\,(i)^k - i\,k\,(-i)^k$$

$$= i\,k\left[(i)^k - (-i)^k\right]$$

$$= i\,k\left[e^{k\frac{\pi}{2}i} - e^{-k\frac{\pi}{2}i}\right]$$

$$= i\,k\left[2\,i\ \text{sen}\ k\,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= -\,2k\ \text{sen}\,k\,\frac{\pi}{2}$$

VII.5 RESOLUCION DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS POR MEDIO DE LA TRANSFORMADA GEOMETRICA

La transformada Geométrica es un operador lineal, una de sus principales aplicaciones está en la resolución de ecuaciones en diferencias, ya que al aplicar la T.G. a una ecuación lineal, la transforma en una ecuación algebraica.

El procedimiento de resolución de una ecuación por medio de la T. G., es similar al que se estudió para resolver ecuaciones diferenciales por transformada de Laplace.

Ejemplo VII.11

Sea la ecuación lineal en diferencias:

$$Y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 4\cdot 3^k \quad ; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 6$$

aplicando el operador T.G. a la ecuación:

$$\mathcal{Z}\{\,y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k)\,\} = \mathcal{Z}\{\,4\cdot 3^k\,\}$$

por la propiedad de linealidad:

$$\mathcal{Z}\{\,y(k+2)\,\} - 3\mathcal{Z}\{\,y(k+1)\,\} + 2\mathcal{Z}\{\,y(k)\,\} = 4\cdot\mathcal{Z}\{\,3^k\,\}$$

sustituyendo la transformada correspondiente en cada término de esta ecuación:

$$z^{-2}y(0) - \left[z^{-2}y(z) - z^{-1}y(1)\right] - 3\left[z^{-1}y(z) - z^{-1}y(0)\right] + 2y(z) = 4\,\frac{1}{1-3z}$$

sustituyendo $y(0) = 0$, $y(1) = 6$ y factorizando $y(z)$:

$$\left[z^{-2} - 3z^{-1} + 2\right]y(z) - 6z^{-1} = 4\,\frac{1}{1-3z}$$

despejando $y(z)$:

$$y(z) = \frac{4\,\frac{1}{1-3z} + 6z^{-1}}{z^{-2} - 3z^{-1} + 2}$$

$$y(z) = \frac{\frac{4 + 6z^{-1} - 18}{1-3z}}{z^{-2} - 3z^{-1} + 2}$$

$$= \frac{\frac{-14z^2 + 6z}{1-3z}}{1 - 3z + 2z^2}$$

$$= \frac{-14z^2 + 6z}{(1-3z)(1-3z+2z^2)}$$

Para obtener la solución y(k), se tendrá que obtener la transformada inversa de y(z). Para esto, se desarrollará la fracción y(z) en fracciones parciales:

$$y(z) = \frac{-14z^2 + 6z}{(1-3z)(1-3z+2z^2)} = \frac{-14z^2 + 6z}{(1-3z)(1-z)(1-2z)}$$

$$= \frac{a}{1-3z} + \frac{b}{1-z} + \frac{c}{1-2z}$$

calculando los residuos a, b y c:

$$a(1-z)(1-2z) + b(1-3z)(1-2z) + c(1-3z)(1-z) = -14z^2 + 6z$$

de donde:

$$2a + 6b + 3c = -14$$

$$-3a - 5b - 4c = 6$$

$$a + b + c = 0$$

la solución de este sistema es:

$$a = 2, \quad b = -4 \quad y \quad c = 2$$

con estos valores de a, b y c se tiene:

$$y(z) = \frac{2}{1-3z} + \frac{-4}{1-z} + \frac{2}{1-2z}$$

La transformada inversa de y(z) es:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{y(z)\} = 2\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{1}{1-3z}\} - 4\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{1}{1-z}\} + 2\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{1}{1-2z}\}$$

por lo tanto:

$$y(k) = 2 \cdot 3^k - 4 + 2 \cdot 2^k$$

Ejemplo VII.12

Sea el sistema lineal de ecuaciones:

$$x(k+1) = 2x(k) + y(k) \quad ; \quad x(0) = 2$$

$$y(k+1) = x(k) + 2y(k) + 2^k \quad ; \quad y(0) = 0$$

Aplicando la T.G. a cada una de las ecuaciones del sistema:

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = 2\mathcal{Z}\{x(k)\} + \mathcal{Z}\{y(k)\}$$

$$\mathcal{Z}\{y(k+1)\} = \mathcal{Z}\{x(k)\} + 2\mathcal{Z}\{y(k)\} + \mathcal{Z}\{2^k\}$$

esto es:

$$z^{-1}x(z) - z^{-1}x(0) = 2x(z) + y(z)$$

$$z^{-1}y(z) - z^{-1}y(0) = x(z) + 2y(z) + \frac{1}{1-2z}$$

sustituyendo los valores de x(0) y y(0), y reacomodando los términos:

$$(z^{-1} - 2)x(z) - y(z) = 2z^{-1}$$

$$-x(z) + (z^{-1} - 2)y(z) = \frac{1}{1-2z}$$

multiplicando por z:

$$(1 - 2z)x(z) - zy(z) = 2$$

$$- zx(z) + (1 - 2z)y(z) = \frac{z}{1 - 2z}$$

resolviendo este sistema se obtiene:

$$x(z) = \frac{9z^2 - 8z + 2}{(1 - 2z)(3z^2 - 4z + 1)}$$

$$y(z) = \frac{-6z^2 + 3z}{(1 - 2z)(3z^2 - 4z + 1)}$$

Para obtener la transformada inversa de x(z) y de y(z), conviene desarrollar en fracciones parciales:

$$x(z) = \frac{9z^2 - 8z + 2}{(1 - 2z)(3z^2 - 4z + 1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9z^2 - 8z + 2}{(1 - 2z)(z - 1)\left(z - \frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{a}{1 - 2z} + \frac{b}{z - 1} + \frac{c}{z - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{-1}{1 - 2z} + \frac{-\frac{3}{2}}{z - 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{z - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{-1}{1 - 2z} + \frac{\frac{3}{2}}{1 - z} + \frac{\frac{3}{2}}{1 - 3z}$$

$$y(z) = \frac{-6z^2 + 3z}{(1 - 2z)(3z^2 - 4z + 1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{-6z^2 + 3z}{(1 - 2z)(z - 1)(z - \frac{1}{3})}$$

$$= \frac{a}{1 - 2z} + \frac{b}{z - 1} + \frac{c}{z - \frac{1}{3}}$$

$$= 0 + \frac{\frac{3}{2}}{z - 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{z - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}}{1 - z} + \frac{\frac{3}{2}}{1 - 3z}$$

de la tabla VII.1:

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{-1}{1 - 2z}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{2}}{1 - z}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{2}}{1 - 3z}\right\}$$

$$= -2^k + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot 3^k$$

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{-\frac{3}{2}}{1 - z}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{2}}{1 - 3z}\right\}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot 3^k$$

B I B L I O G R A F I A

Apóstol, Tom M.
CALCULUS, Vol. II
Segunda Edición en español
Editorial Reverté, S. A.
España, 1973.

Boyce W. y Diprima R. C.
ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS
CON VALORES EN LA FRONTERA
Tercera Edición
Editorial Limusa
México, 1979.

Goldberg, Samuel
INTRODUCTION TO DIFFERENCE EQUATIONS
John Wiley & Sons, Inc.
New York, 1958.

Hildebrand, F. B.
FINITE DIFFERENCE EQUATIONS AND SIMULATIONS
Prentice - Hall
New York, 1968,

Kreider D., Kuller R.G. y Ostberg D. F.
ECUACIONES DIFERENCIALES
Fondo Educativo Interamericano, S. A.
México, 1973.

Spiegel, Murray R.
FINITE DIFFERENCES AND DIFERENCE EQUATIONS
Serie Schaum's, McGraw Hill
New York, 1971.

Wylie. C. Ray
MATEMATICAS SUPERIORES PARA INGENIERIA
Cuarta Edición
McGraw Hill
México, 1982.

Rainville E. D., y Bedient P. E.
ECUACIONES DIFERENCIALES
Quinta Edición
Editorial Interamericana
México, 1977.

Ross, S. L.
INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES
Tercera Edición
Editorial Interamericana
México, 1982.

La composición tipográfica e ilustraciones de este fascículo se hicieron en la Facultad de Ingeniería de la UNAM. La impresión, encuadernación y nueva cubierta se realizaron bajo la supervisión de Nueva Editorial Interamericana, S.A. de C.V. Esta edición consta de 3000 ejemplares y se terminó de imprimir en el mes de abril de 1983, en los talleres de Prensa Técnica, S.A. Calzada de Chabacano núm. 65-A, Col. Asturias, México 8, D.F.