



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA**

**Efectos físicos en cavidades cilíndricas usadas en  
dispositivos de levitación acústica**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE :

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**ELÉCTRICA - INSTRUMENTACIÓN**

P R E S E N T A :

**TORRES GALLEGOS EDGAR AUGUSTO**

TUTOR:

**Dr. ARTURO OROZCO SANTILLÁN**

2009

**Jurado asignado:**

<b>Presidente</b>	Dr. Treviño Treviño César
<b>Secretaria</b>	Dra. Medina Gómez Lucía
<b>Vocal</b>	Dr. Orozco Santillán Arturo
<b>1er Suplente</b>	Dr. Ascanio Gasca Gabriel
<b>2do Suplente</b>	Dra. Sánchez Pérez Celia Angelina

Este trabajo se realizó en el:

Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico  
de la Universidad Nacional Autónoma de México

Tutor de Tesis:

Dr. Orozco Santillán Arturo

## **Agradecimientos**

Las actividades desarrolladas en este trabajo estuvieron respaldadas por la beca número 202950 del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

A mis sinodales, agradezco su consejo, dedicación y el tiempo empleado en la evaluación y corrección de este trabajo.

A mi tutor:

Agradezco el aceptarme y hacerme partícipe en su trabajo como investigador, el compartirme de su vasto conocimiento en acústica y física, su paciencia inagotable y respuesta inmediata y detallada a todas mis preguntas.

Estoy en deuda por su solícito y desinteresado apoyo en mi búsqueda de oportunidades de desarrollo personal y académico,

al que debo los mejores días de mi vida.

Muchas gracias

# Índice general

## Índice de figuras

<b>Resumen</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación del estudio . . . . .	1
1.2. Objetivo . . . . .	2
1.3. Aportaciones . . . . .	3
1.4. Contenido . . . . .	3
<b>2. Reseña histórica</b>	<b>5</b>
2.1. La fuerza de radiación acústica . . . . .	5
2.2. Par acústico . . . . .	7
2.3. Estudios en microgravedad . . . . .	7
2.4. Muestras líquidas . . . . .	8
2.5. Control de la posición de la muestra . . . . .	8
2.6. Corrimiento de la frecuencia de resonancia . . . . .	9
2.7. Inestabilidades de la muestra levitada . . . . .	10
2.8. Límites físicos de la levitación acústica . . . . .	10
2.9. Aplicaciones . . . . .	11
<b>I Investigación teórica</b>	<b>13</b>
<b>3. Marco teórico</b>	<b>14</b>
3.1. Cavidades cilíndricas . . . . .	14
3.2. Dispersión debida a una esfera . . . . .	15
3.3. El exceso de presión . . . . .	19
3.4. La fuerza acústica . . . . .	22
3.5. Levitación acústica . . . . .	24

3.6. Inestabilidades oscilatorias . . . . .	26
<b>4. Corrimiento de la frecuencia de resonancia</b>	<b>27</b>
4.1. Cálculo del corrimiento . . . . .	27
4.1.1. Límite del tamaño de la muestra . . . . .	28
4.2. Principio de Boltzmann-Ehrenfest . . . . .	29
4.3. Comparación de las ecuaciones . . . . .	31
<b>II Investigación experimental</b>	<b>33</b>
<b>5. Método experimental</b>	<b>34</b>
5.1. El levitador acústico . . . . .	34
5.2. Medición de la $f_0$ de la cavidad . . . . .	35
5.2.1. Sistema experimental . . . . .	36
5.2.2. Análisis del espectro . . . . .	37
<b>6. La temperatura del medio</b>	<b>38</b>
6.1. Efectos de la temperatura en el sistema . . . . .	38
6.2. Variación de $f_0$ con la temperatura . . . . .	38
6.3. Compensación por el cambio de temperatura . . . . .	41
<b>7. Corrimiento de la frecuencia de resonancia</b>	<b>43</b>
7.1. Medición del corrimiento de la frecuencia de resonancia . . . . .	43
7.1.1. Medición 1 . . . . .	44
7.1.2. Medición 2 . . . . .	45
7.2. Cavidad con el reflector semiesférico . . . . .	46
<b>8. Retraso en la respuesta de la cavidad</b>	<b>48</b>
8.1. Montaje experimental . . . . .	48
8.1.1. Intervalo de medición dentro de la onda estacionaria . . . . .	50
8.1.2. Procesamiento de las señales . . . . .	51
8.2. Retraso como función de la frecuencia de oscilación . . . . .	52
8.3. Retraso como función de la amplitud de oscilación . . . . .	53
8.4. Análisis . . . . .	54
<b>Discusión</b>	<b>55</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>Bibliografía</b>	

# Índice de figuras

3.1. Cavity cilíndrica . . . . .	15
3.2. Cavity cilíndrica y muestra esférica . . . . .	16
3.3. Presión dispersada $p_s$ con la muestra en el antinodo . . . . .	18
3.4. Presión dispersada $p_s$ con la muestra en el nodo . . . . .	19
3.5. Gráfica de la presión, modo (001) . . . . .	25
3.6. Gráfica de la fuerza acústica, modo (001) . . . . .	25
4.1. Comparación de las ecuaciones del corrimiento de $f_0$ . . . . .	32
5.1. Levitador acústico . . . . .	34
5.2. Dimensiones del sistema . . . . .	35
5.3. Medición de la $f_0$ de la cavity . . . . .	36
6.1. Ubicación de las puntas de termopar. . . . .	39
6.2. Resonancia en función de la temperatura para los cuatro termopares. . . . .	40
6.3. Medición con cuatro termopares . . . . .	41
6.4. Promedio de las mediciones de los cuatro termopares. . . . .	42
7.1. Medición del corrimiento de $f_0$ , ecuaciones del corrimiento. . . . .	44
7.2. Medición del corrimiento de $f_0$ , ecuaciones del corrimiento. . . . .	45
7.3. Corrimiento con el reflector semiesférico . . . . .	47
8.1. Medición de la fase de retraso . . . . .	49
8.2. Rango de medición . . . . .	50
8.3. Análisis de la señal . . . . .	51
8.4. Retraso como función de la frecuencia de oscilación . . . . .	52
8.5. Retraso como función de la amplitud de oscilación. . . . .	53

# Resumen

La levitación acústica es una técnica que permite mantener un objeto suspendido en un medio sin necesidad de contacto. Para tener un mayor control de esta técnica, se investigaron los efectos físicos producidos por la presencia de una muestra esférica rígida en el campo acústico de una cavidad cilíndrica cerrada, ya que la presencia de la muestra altera las condiciones de levitación dentro de la cavidad. En este trabajo se hicieron tres aportaciones al conocimiento de la levitación acústica: 1) Se logró medir el retraso temporal de la respuesta de la cavidad ante los movimientos de la muestra. Se observó que el retraso es función de la velocidad de la muestra. 2) Usando el principio de invariancia adiabática de Boltzmann-Ehrenfest se derivó una nueva expresión que predice el corrimiento de la frecuencia de resonancia de la cavidad como función de las dimensiones del sistema y la posición de la muestra. 3) Se estudiaron y compensaron los efectos del cambio de temperatura en el sistema.

# Abstract

Acoustic levitation is a technique that allows an object to remain suspended on the medium without physical contact. There is a need to achieve a better control of this technique. The physical effects of the presence of a rigid spherical sample inside the acoustic field of a closed cylindrical cavity are studied because the sample modifies the levitation conditions inside the cavity. The contributions of this work to the knowledge of acoustic levitation are as follows: 1) The time delay of the cavity response to the movements of the sample was measured for the first time. It was found that such time delay is a function of the sample velocity. 2) By means of the Boltzmann-Ehrenfest principle of adiabatic invariance, a new equation that predicts the cavity resonance frequency shift as a function of the cavity and sample size and position was derived. 3) The effects of the temperature changes on the system were studied and compensated.



# Capítulo 1

## Introducción

Cuando una onda acústica incide en un cuerpo o *muestra*,<sup>1</sup> esta ejerce sobre el cuerpo una fuerza debida a las variaciones de presión y al movimiento del propio medio. Esta fuerza, conocida como *fuerza de radiación acústica*, es producida tanto por ondas progresivas como por ondas estacionarias.

Si la onda acústica es estacionaria, y con frente de onda plano, el *campo* de fuerza de radiación acústica que genera tiene dos características principales: (i) su amplitud depende de la posición y (ii) el vector de fuerza apunta en la dirección que va de los antinodos de presión hacia el nodo más cercano. Por ejemplo, en ausencia de la fuerza de gravedad y considerando un objeto que se encuentra dentro de una onda plana estacionaria, la fuerza acústica empujará al objeto y terminará confinándolo en la posición del nodo de presión.

Al repetirse el experimento con la presencia de la gravedad, al vector de fuerza acústica debe sumarse el vector de la fuerza de gravedad sobre la muestra (ambos tienen la misma dirección). Si las amplitudes de las dos fuerzas son iguales, pero con sentido contrario, la muestra se mantiene suspendida en el medio<sup>2</sup> sin necesidad de contacto, sea con un soporte, o un recipiente que contenga a la muestra. A este *efecto* se le conoce como *levitación acústica*.

### 1.1. Motivación del estudio

La capacidad de mantener una muestra fija en el medio sin necesidad de contacto es la ventaja principal de la levitación acústica. Se previene así la contaminación de la muestra cuando se trabaja con sustancias químicas muy reactivas o metales al rojo vivo. También puede ser útil en procesos de fabricación de productos muy delicados como

---

<sup>1</sup>Una muestra es cualquier objeto material con el que se desea experimentar.

<sup>2</sup>La levitación acústica puede lograrse en cualquier medio fluido, sea gas o líquido. Generalmente se utiliza aire por su omnipresencia, como es el caso en esta investigación.

es el caso de las obleas de semiconductores. Sin embargo, antes de que la levitación acústica pueda ser utilizada comúnmente en estos ámbitos, se debe lograr un mayor dominio teórico y práctico sobre la misma; razón por la cual diversos aspectos de esta permanecen bajo investigación hasta la fecha.

Empíricamente es posible lograr la levitación con cualquier transductor que produzca el *nivel de presión sonora* (SPL, por sus siglas en inglés) necesario para levantar la muestra, pero en ocasiones se presentan circunstancias muy características, como cambios en la frecuencia de resonancia del sistema, que pueden alterar la posición de la levitación de la muestra. Si se desea un control absoluto del fenómeno para su aplicación tanto en el laboratorio como en la industria, se deben estudiar los efectos físicos que ocurren durante la levitación en cada levitador acústico empleado y su relación con cada tipo de muestra utilizada.

Si se excita la onda estacionaria en un levitador, el campo de presión acústica depende de la geometría del sistema, especialmente de la geometría de las paredes reflectoras de la onda. También es importante la geometría del espacio que conforma la cavidad del levitador. Cuando se coloca una muestra en el interior del levitador se produce una alteración de la amplitud del campo acústico que es función del tamaño, geometría, material y posición de la muestra. Debido a que la levitación depende del campo acústico, la muestra es capaz de producir, bajo ciertas circunstancias, una alteración de las condiciones de levitación, lo que podría resultar en inestabilidades en la posición de la muestra.

Por otro lado, la longitud de la onda estacionaria depende de la velocidad de propagación del sonido en el medio que, a su vez, es función de la temperatura. Al cambiar la temperatura del medio cambia el campo acústico dentro de la cavidad, y en consecuencia, también cambia la fuerza acústica. Es importante estudiar el efecto de la temperatura en el sistema. Si la longitud de la onda estacionaria cambia, los nodos de presión se desplazan y con ellos la muestra.

Estos *efectos físicos*, debidos a los cambios de temperatura y a la alteración de la amplitud del campo acústico al introducir la muestra en los dispositivos de levitación acústica, son el objeto de estudio de esta investigación. Son de importancia porque cualquier avance a la teoría de la levitación acústica, ya sea una nueva aplicación de la técnica de levitación o mejora que se quiera hacer al levitador acústico, debe partir del conocimiento y entendimiento de estos efectos.

## 1.2. Objetivo

Estudiar teórica y experimentalmente los efectos físicos ocasionados por la presencia de una muestra esférica rígida en el campo de presión acústica de las cavidades cilíndricas cerradas, las cuales son usadas en dispositivos de levitación acústica de un solo eje.

### 1.3. Aportaciones

La investigación reportada en este trabajo hace tres aportaciones al conocimiento del fenómeno de la levitación acústica, tanto en la teoría como en la parte experimental.

En la parte experimental: se midió el retraso temporal que presenta el campo de presión acústica del sistema debido al movimiento de la muestra. Se encontró que el retraso es proporcional a la velocidad de oscilación de la muestra. Es relevante por ser un nuevo paso en la investigación actual de las inestabilidades oscilatorias de la posición de las muestras levitadas.

La segunda aportación es teórica. La presencia de la muestra modifica el campo de presión acústica y, ligado a este cambio, ocurre un corrimiento en la frecuencia de resonancia de la cavidad. Se derivó una nueva expresión analítica para calcular este corrimiento de la frecuencia de resonancia de la cavidad. Se partió del principio de invariancia adiabática de Boltzmann-Ehrenfest. La expresión es función de las dimensiones tanto de la muestra esférica como de la cavidad y de la posición de la muestra a lo largo de la onda estacionaria dentro del eje de la cavidad.

La tercera aportación partió de la dificultad de mantener constante la temperatura del medio en el laboratorio. Los resultados de los experimentos realizados en el levitador acústico no son comparables entre sí cuando son realizados a distinta temperatura. Se investigó un método para compensar los resultados de las mediciones por los cambios de temperatura. Fue posible entonces comparar distintas mediciones, descartando el efecto de la temperatura. Este método se aplicó con éxito al resto de la investigación.

### 1.4. Contenido

En la siguiente sección se presenta una reseña histórica del campo de investigación de la levitación acústica. Se acompaña de un compendio de aplicaciones propuestas en la industria y el laboratorio.

Este trabajo se divide principalmente en una parte teórica, desarrollada en los capítulos 3 y 4 y en una parte experimental, abordada en los capítulos posteriores. En el capítulo 3 se estudian las cavidades cilíndricas y sus características, el fenómeno de dispersión, y la energía en el sistema. Con esto es posible entender la fuerza de radiación acústica y el potencial de fuerza acústica. Con las bases desarrolladas se explica físicamente el fenómeno de levitación acústica. Finalmente se estudian las inestabilidades oscilatorias que presentan las muestras levitadas.

El objetivo del capítulo 4 es estudiar el corrimiento de la frecuencia de resonancia de la cavidad como función de la posición y dimensiones de la muestra. Se analizan soluciones anteriores a este problema y se deriva una nueva expresión partiendo de un nuevo enfoque, del principio de invariancia adiabática de Boltzmann-Ehrenfest.

La parte experimental se presenta en los capítulos 5 a 8. En el capítulo 5 se desarrolla

el método experimental usado en las mediciones de esta investigación. Se describe el levitados acústico empleado. Además, se propone un método para la medición de la frecuencia de resonancia de la cavidad. En el capítulo 6 se analizan los efectos de la temperatura en el sistema y se presenta un método para compensar estos efectos.

En el capítulo 7 se muestran las mediciones de las curvas del corrimiento de la frecuencia de resonancia de la cavidad en función de la posición de la muestra. Con esto se comprobó experimentalmente la validez de las ecuaciones presentadas y derivadas en el capítulo 4. Se estudia también el efecto del corrimiento en la frecuencia de resonancia para el caso de la cavidad con un reflector semiesférico.

En el capítulo 8 se presentan los resultados de un experimento diseñado para medir el retraso de la respuesta de la cavidad ante los cambios de posición de la muestra. Una teoría disponible en la bibliografía predice que este retraso es función lineal de la velocidad de la muestra.

El trabajo concluye con dos secciones. En la primera de ellas se discuten los resultados teóricos y experimentales de la investigación. También se presentan recomendaciones y líneas derivadas para futuras investigaciones, para lo cual este trabajo sirve como base teórica y experimental. En la última sección se presentan las conclusiones generales.

# Capítulo 2

## Reseña histórica

En esta sección se presenta el *estado del arte* de la investigación sobre Levitación Acústica, en orden cronológico y temático. Se explica el progreso en cada rama y los aspectos que actualmente se encuentran bajo investigación.

### 2.1. La fuerza de radiación acústica

En 1866 August Kundt [44] reportó sus observaciones experimentales del tubo que lleva su nombre y que ideó para medir la velocidad del sonido.<sup>1</sup> Excitó ondas acústicas dentro del tubo para obtener ondas estacionarias, a las que logró medir su longitud de onda de la siguiente forma: tras agregar polvo de talco en el interior del tubo, observó que las partículas de polvo se concentran en los nodos de presión de la onda estacionaria. De esto se obtiene evidencia directa de la longitud de onda, pues esta última es el doble de la distancia entre dos nodos adyacentes. El comportamiento del polvo de talco constituye la primera observación histórica del efecto de la *fuerza de radiación acústica*, que también es responsable de los fenómenos de levitación acústica, *cavitación* y *sonoluminiscencia* [15].

A inicios del siglo XX, Lord Rayleigh [77, 78] estudió por primera vez la fuerza de radiación como la contraparte acústica de la presión producida por una onda electromagnética. En 1934 Louis V. King [39] calculó analíticamente la fuerza sobre una esfera rígida en el interior de un campo de onda estacionaria plana en un fluido ideal. Su resultado fue comprobado experimentalmente por Klein [41] y extendido al caso de esferas compresibles por Yosioka [116].

En años subsecuentes se realizaron cálculos de la fuerza, relacionados con el trabajo de King como: el de Westervelt [110] de la fuerza sobre un objeto de cualquier impedancia acústica y forma dentro de ondas progresivas o estacionarias, los de Embleton [17, 18] de la fuerza media sobre una esfera en un campo sonoro esférico y el de Keller

---

<sup>1</sup>La velocidad del sonido es el producto aritmético de la frecuencia y la longitud de onda.

[38] de la fuerza media de una onda plana de dimensiones menores que las de la muestra. Como muestra usó discos rígidos, fijos en el espacio.

Gor'kov [25] calculó en 1962 la fuerza que actúa sobre una partícula dentro de un campo acústico en un fluido ideal. A diferencia del trabajo de King [39] en el que se usan ondas planas estacionarias, Gor'kov resolvió el problema para un campo acústico arbitrario (exceptuando ondas viajeras). Mostró que su expresión es equivalente a la de King para el caso de ondas planas estacionarias. En 1967 la expresión analítica de Gor'kov fue derivada con un procedimiento distinto. Con éste se obtuvo una expresión para la fuerza sobre una esfera rígida suspendida en un fluido sin viscosidad [73], expresada en términos de la energía potencial y cinética del campo incidente.

En los años siguientes se resolvieron otros aspectos sobre el tema como, los valores mínimos de presión acústica necesarios para atrapar muestras líquidas en los antinodos de presión de un cilindro lleno de agua [13]; o la fuerza sobre una superficie perfectamente absorbente [80]. En 1984 se postuló que el origen físico de la fuerza acústica se debe a la transferencia de momento de la onda al material [93].

Se estudió también la fuerza acústica dentro de cavidades, como en el trabajo experimental de Leung [52], de la fuerza sobre una esfera rígida en una cavidad con varios tamaños y posiciones de muestras, fluidos y SPLs. Leung encontró que los valores de la fuerza obtenidos experimentalmente coinciden con la teoría de King [39] para valores de presión por debajo de 150 dB ref 20  $\mu$ Pa. En un trabajo posterior se calculó la fuerza para el caso de una muestra calentada [54]. En otra investigación se midió la fuerza dentro de una cavidad cuyo medio se encuentra en dos temperaturas distintas, con diferencias de más de 700° C [79].

En 1985 Barmatz *et al.* [4] partieron del método de Gor'kov [25] para calcular el potencial de radiación acústica sobre una esfera en campos de onda estacionaria. Consideraron campos con geometría cilíndrica, esférica y plana. En 1993, Lee [49] aclaró la naturaleza de la fuerza de radiación acústica como un tema de acústica no lineal, resolviendo confusiones existentes sobre el tema desde los trabajos de Rayleigh [77, 78].

En años recientes se presentaron: una nueva teoría de la fuerza sobre una muestra esférica sumergida en fluidos reales [15], considerando efectos disipativos del medio; cálculos de la fuerza en fluidos sin pérdidas en coordenadas Eulerianas y Lagrangianas [6]; y casos particulares como el estudio de la fuerza cuando se colocan dos muestras en el campo acústico [117]. Se descubrió que la fuerza aumenta su amplitud cuando se emplean reflectores curvos para generar la onda estacionaria [114]. Por otro lado, en el área de las simulaciones, se ha empleado el método del elemento de frontera [115], o el método de *redes de Boltzmann* [30, 31] para simular la fuerza acústica.

## 2.2. Par acústico

Un fenómeno diferente, pero relacionado con las ondas acústicas es la capacidad de aplicar un par a una muestra y hacerla rotar sobre su eje. Este fenómeno parte de dos principios [9]. El primero de ellos se debe a las *fuerzas de Bernoulli*; esto fue propuesto por Lord Rayleigh a finales del siglo XIX. El segundo se debe a efectos de viscosidad cuando el medio es excitado por dos ondas ortogonales. Este tema se exploró en varios trabajos [8, 10, 38, 48, 63, 72, 104–106], de los que destacan el de Lee [48] donde se hace un cálculo del potencial de radiación acústica sobre una esfera debido a dos ondas estacionarias ortogonales, y el de Biswas *et al.* [8]. En este último se hace un análisis de la deformación que sufre una gota de glicerol levitada, debido a las fuerzas *centrífuga* y acústica de levitación combinadas.

## 2.3. Estudios en microgravedad

En laboratorios terrestres se requieren campos acústicos con SPLs elevados, del orden de 150 dB (referidos a  $20 \mu Pa$ ), para que la fuerza acústica resultante pueda contrarrestar el efecto de la gravedad sobre la muestra. Estos valores de SPL se han conseguido tras el desarrollo reciente en los transductores. Por tal razón, la investigación de la aplicación de la fuerza de radiación acústica tuvo que comenzarse en condiciones de microgravedad en experimentos realizados en el espacio. Las instituciones que se involucraron en esta investigación son el *American Institute of Aeronautics and Astronautics* (AIAA), la *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) y la *Agencia Espacial Europea* (ESA).

Se hicieron estudios en el espacio del posicionamiento acústico multiaxial de muestras esféricas en medios isotérmicos y con gradientes de temperatura para procesamiento de muestras sin contención (en condiciones de microgravedad), entre estos esfuerzos se tiene:

El desarrollo de levitadores espaciales, iniciado en 1973 por la ESA, que fueron probados en el vuelo del cohete TEXUS I. El primer experimento falló debido a una fuga de gas en el sistema [59]. Con otro experimento se estudió el posicionamiento acústico para procesamiento de materiales sin contenedor en el espacio [59]. Un levitador diferente fue diseñado por Wang *et al.* en 1974 [108], quienes también hicieron un estudio de aplicaciones de la manipulación y levitación acústica en el espacio [101].

En otros trabajos se estudió la levitación en ausencia de gravedad [35, 56, 58, 60, 61, 81], incluyendo el caso de la forma de gotas en rotación [109]. En estado de reposo, una gota en microgravedad mantiene una forma esférica. Cuando actúa sobre esta alguna fuerza, la gota toma una forma ovalada. El caso límite es cuando los polos de la gota se aproximan y el ecuador se aleja del centro. En dicho caso la gota toma la forma plana característica de los glóbulos rojos. Las oscilaciones en la forma de la gota consisten en

variaciones periódicas entre su estado esférico y ovalado.

Otro esfuerzo importante de investigación son los estudios realizados en el Laboratorio de Microgravedad de Estados Unidos (USML). Una primera fase abarcó el estudio de oscilaciones en la forma [102] y la separación [103] de gotas levitadas. Simulaciones posteriores [12] reprodujeron las observaciones de las oscilaciones de la forma de la muestra. En la segunda fase se realizaron observaciones de equilibrio de la forma de gotas bajo los efectos de: la fuerza acústica y la rotación de las muestras [45].

Finalmente, a bordo del transbordador espacial *Columbia* se realizó un experimento llamado Módulo de Física de Gotas para la observación de las oscilaciones de la forma de la gota [32].

## 2.4. Muestras líquidas

Se realizaron varios estudios de levitación acústica teóricos y experimentales de la deformación de gotas (o burbujas) en presencia y ausencia de la fuerza de gravedad con el objeto de conocer los efectos de las fuerzas sobre muestras líquidas y obtener el control de la forma de la gota. Se comenzó en 1980 con un estudio de las oscilaciones en la forma y las deformaciones estáticas de una gota debidas a la presión de radiación acústica [64]. A partir de entonces la investigación en este campo ha profundizado en cinco aspectos:

1. La deformación de la gota como consecuencia de las fuerzas acústicas. Se estudió el contorno de la gota deformada cuando se alcanza el estado estático, es decir, cuando la gota deja de deformarse [2, 8, 36, 46, 47, 85, 89, 90, 98]. La investigación se extendió para incluir otras interacciones con la gota, como la de campos eléctricos [96].
2. La posición de equilibrio de la gota en el interior del campo acústico [36, 47, 85, 90].
3. Las oscilaciones de la forma de la gota que ocurren debido al cambio en la fuerza acústica sobre la gota [62, 74, 84, 92, 99].
4. Las inestabilidades en la forma de la gota [46, 86] que ocurren cuando se pierde el control de las oscilaciones de la forma.
5. La desintegración de la gota. Cuando la fuerza acústica es muy alta, la gota sufre un colapso y se atomiza [46].

## 2.5. Control de la posición de la muestra

Se ha logrado controlar la posición de la muestra a lo largo del eje de levitación de diferentes maneras. Una de ellas es superponer distintos modos normales del levitador,



variando gradualmente la amplitud de cada uno, así el nodo de presión y con él la muestra cambian de posición [69]. Otra forma es hacer incidir frontalmente dos frentes de onda y cambiar la fase de una de ellas, lo que desplaza los nodos de presión [43, 65]. Una tercera solución es cambiar la frecuencia de la onda, con lo que se ha logrado precisión submicrométrica en la posición de la muestra [42].

Encontrando frontalmente dos rayos ultrasónicos enfocados y colimados, Wu construyó en 1991 una *pinza acústica* [111] en un medio líquido (agua destilada). La posición de la muestra se controló al variar la frecuencia o la separación y posición de los transductores. Se experimentó con huevos de rana y partículas de latex. En 1992 Zhuyou [118] desarrolló un levitador acústico con tres grados de libertad. Lee [50] hizo un estudio teórico en 2005 sobre la viabilidad del uso de rayos acústicos ultrasónicos para construir pinzas acústicas.

## 2.6. Corrimiento de la frecuencia de resonancia

El campo acústico de la onda estacionaria plana dentro de una cavidad puede describirse analíticamente de forma simple utilizando una función cosenoidal. Sin embargo, cuando al campo se introduce una muestra, ocurre dispersión de la onda y el campo se altera. Esto resulta en el cambio (o corrimiento) de la frecuencia de resonancia de la cavidad, y en un cambio de amplitud de la fuerza acústica.

El cálculo del corrimiento de la frecuencia de resonancia es un problema que se ha abordado de diferentes maneras. Morse y Feshback [70] resolvieron el caso para cavidades y muestras rectangulares utilizando la teoría de perturbaciones de frontera que describen en su trabajo. Smith [87] retomó el resultado de Morse y Feshback para estudiar experimentalmente los modos normales y la dispersión acústica dentro de una cavidad resonante.

El-Raheb [16] calculó el corrimiento de la frecuencia de resonancia para el caso de un ducto rígido con una onda plana estacionaria unidimensional. Leung [53] derivó una expresión para predecir el corrimiento de la frecuencia de resonancia como función del tamaño y posición de una muestra esférica rígida dentro de una cavidad rectangular. Concluyó que el corrimiento es resultado de la extrusión de volumen por parte de la esfera y de la dispersión de la onda. Utilizó el *teorema de Green* para llegar a su resultado. Esta técnica se retomó en un trabajo de Rudnick [82], en el que llegó a una expresión similar pero utilizando un procedimiento menos intuitivo.

Barmatz [3] estudió experimentalmente los efectos de la dispersión de una onda acústica producida por una esfera en una cavidad cilíndrica resonante. Mejoró la precisión de la ecuación del corrimiento de Leung [53] ya que incorporó las relaciones entre el corte transversal y las dimensiones (y volúmenes) de la cavidad y la muestra. Determinó experimentalmente el límite de validez de su ecuación del corrimiento. Validó también los resultados de la investigación de El-Raheb [16].

Mientras estudiaba el problema del corrimiento de la frecuencia de resonancia dentro de una cavidad y con una muestra esférica reflejante para el caso electromagnético, Curzon [14] resolvió el análogo acústico utilizando cálculo vectorial.

Finalmente, Putterman *et al.* [76] propusieron que la fuerza acústica puede calcularse al medir el corrimiento de la frecuencia de resonancia. Esto es una consecuencia de aplicar el principio de *invariancia adiabática de Boltzmann-Ehrenfest* al sistema; usando la relación *invariante* de la energía de la cavidad y su frecuencia de resonancia, de la forma  $E/\omega$ . De este principio se deriva uno de los resultados principales de este trabajo: una nueva expresión para el corrimiento de la frecuencia de resonancia de la cavidad.<sup>2</sup>

## 2.7. Inestabilidades de la muestra levitada

Bajo ciertas condiciones de excitación de la cavidad, una muestra levitada puede sufrir inestabilidades. La muestra comenzará a oscilar en el espacio alrededor de su posición de equilibrio. Debido a la necesidad del control de la muestra en las aplicaciones de la levitación acústica, es necesario entender la causas y propiedades de estas inestabilidades.

Para los casos en los que la muestra es un disco, se han estudiado las inestabilidades en el ángulo de posición del disco con respecto al eje del cilindro [22, 23]. También se han estudiado las oscilaciones perpendiculares al eje de levitación [33].

Para el caso de una muestra esférica, se ha publicado una única teoría sobre las inestabilidades oscilatorias a lo largo del eje de la cavidad cilíndrica [82]. Esta propone que las inestabilidades son generadas por el retraso temporal de la respuesta de la cavidad al movimiento de la muestra. Este movimiento, a su vez, produce cambios en el campo acústico que alteran la fuerza acústica. La investigación a este respecto permanece inconclusa.

## 2.8. Límites físicos de la levitación acústica

Se han realizado investigaciones para extender los límites físicos de la levitación acústica. La primera estudió teórica y experimentalmente la levitación de muestras de baja densidad en campos acústicos con gradientes de temperatura de hasta 800° C [95]. La segunda demostró la capacidad de levantar muestras de alta densidad [113]. Tal fue el caso para gotas de mercurio y partículas de iridio, que son respectivamente los elementos líquido y sólido más densos en la Tierra.

---

<sup>2</sup>Ver sección 4.2.

## 2.9. Aplicaciones

Las aplicaciones potenciales de la levitación acústica son numerosas. Actualmente se utiliza en el laboratorio y planea usarse en la industria en diferentes áreas:

**Biología.** Es posible levitar animales vivos; esto se reportó en 2006 por Xie [112] para el caso de hormigas, catarinas y peces. Los animales sobrevivieron a la levitación sin consecuencias notables.

**Biotecnología.** La levitación se ha utilizado en la construcción de filtros para micropartículas, como microorganismos [68] o células de mamíferos [20, 24] y para sedimentación de células rojas [24]. Se ha pasado de la etapa experimental [94] a productos comerciales<sup>3</sup> o instrumental médico como sistemas de aglutinamiento<sup>4</sup> para diagnóstico de meningitis [28].

**Química.** Para producir reacciones químicas al liberar los reactivos en el medio, cerca de los nodos de presión. Gracias a la levitación, los reactivos no hacen contacto con un contenedor, evitando así interacciones indeseadas [51]. En otra aplicación permite mezclar sustancias. La levitación acústica simula condiciones de microgravedad. Un ejemplo es la mezcla de nano partículas de rubí ( $Al_2O_3$ ), poliéster y resinas epoxicas [11]. Se puede usar como trampa ultrasónica para observaciones con microscopios para analizar la evolución de agregados de micropartículas [88]. También se puede combinar la levitación con la técnica de *espectroscopia de Raman* para analizar compuestos químicos [19, 83].

**Física.** Es en esta área donde se han presentado la mayor cantidad de aplicaciones, entre estas tenemos:

**Cambios de estado.** Se utiliza para la experimentación y observación de los cambios de estado y acumulación de diversos materiales: En trampas de gas frío usadas para la formación y el crecimiento de partículas de hielo en bajas temperaturas [5]. Para derretir y solidificar muestras de cristal líquido [21]. Observar fenómenos de cristalización al incorporar sistema de calentamiento por láser [55]. O conseguir la solidificación rápida de cristales [71].

**Filtros de materia.** Para separación de partículas suspendidas [26]; o concentración de impurezas, levitando un material poroso que funciona a modo de trampa de impurezas [27].

**Reología.** En esta rama de la física, que estudia la deformación y el flujo de materia, la levitación se utiliza para la medición de la tensión superficial de equilibrio, la *elasticidad de Gibbs* y la *viscosidad de dilatación* de la superficie

---

<sup>3</sup>Producto: BioSep de la empresa holandesa Applikon Dependable Instruments.

<sup>4</sup>Producto: Immunosonic de la empresa británica Electro Medical Suplies.

de materiales. Todo esto se logra excitando oscilaciones en la forma de las gotas levitadas [91].

**En otras mediciones.** a) Medición del coeficiente de difusión térmica de gotas líquidas [75]. b) Medición de la densidad de líquidos y metales sólidos de baja densidad [97], para esto se proponen dos técnicas con 1 % de incertidumbre: una es apropiada cuando la fuerza de gravedad está presente y la otra en ausencia de gravedad. La incertidumbre alcanzada no mejora otras técnicas de densimetría, pero su ventaja radica en la capacidad de manipular la muestra sin contacto. c) Mediciones de propiedades viscoelásticas de esponjas acuosas excitando los modos esferoides de la gota; una de las ventajas de esta técnica es la ausencia de contacto con la muestra. Con esta técnica se puede medir el *módulo de corte* (o elasticidad) transversal<sup>5</sup> del material [66]. d) Medición del cambio de peso de una muestra sólida mientras reacciona con el medio gaseoso en el que levita [37].

**Industria.** Una nueva forma de levitación, la *levitación acústica de campo cercano* se está considerando para construir bandas transportadoras. La ventaja es la ausencia de contacto de la banda con la muestra, por lo que se elimina el riesgo de contaminación. Esto es ideal para manipular obleas de silicio o placas de vidrio en los procesos de fabricación de circuitos integrados y pantallas de cristal líquido [29, 34, 100].

---

<sup>5</sup>En inglés se le conoce como *shear modulus*.

**Parte I**  
**Investigación teórica**

# Capítulo 3

## Marco teórico

### 3.1. Cavidades cilíndricas

En este trabajo es de interés el fenómeno de resonancia dentro de una *cavidad cilíndrica cerrada con fronteras rígidas*. Se usaron cavidades *cerradas* porque la contención del campo acústico en un volumen bien delimitado y de geometría sencilla tiene la ventaja de simplificar la descripción matemática.

Cuando se usan cavidades cerradas, excitadas con frecuencias audibles, las paredes de la cavidad atenúan la transmisión del sonido al exterior del sistema de levitación. Esto es útil porque los niveles de presión sonora requeridos para la levitación suelen ser superiores al que se considera el umbral del dolor del oído humano (SPL = 120 dB ref. 20  $\mu$ Pa).

Se estudiaron solamente cavidades *cilíndricas* porque se buscó establecer una base teórica para posteriores investigaciones con reflectores cóncavos acoplados a un extremo de una cavidad cilíndrica. El uso de reflectores cóncavos confiere un mayor control sobre la muestra [57] y amplifica la fuerza acústica [114].

La cavidad tiene un radio  $a$  y una longitud  $l_z$ . El origen del sistema de coordenadas cilíndricas se ubicó en el centro de la tapa inferior del cilindro en posición vertical, como se muestra en la figura 3.1.

Los *modos normales* dentro de la cavidad se representan con el conjunto de tres *números cuánticos*  $(m, n, n_z)$ , que son enteros no negativos comenzando con cero. Se trabajó únicamente con los modos  $(00n_z)$  que corresponden a los modos axiales en la dirección del eje  $z$ .

El *número de onda*  $k_{00n_z}$  para el modo  $(00n_z)$  está dado por

$$k_{00n_z} = \frac{\omega_{00n_z}}{c_0} = \pi \frac{n_z}{l_z} \quad (3.1)$$

donde  $c_0$  es la velocidad de propagación del sonido en el medio en reposo y es función de la temperatura. La *frecuencia angular*  $\omega_{00n_z}$  es la frecuencia de resonancia angular

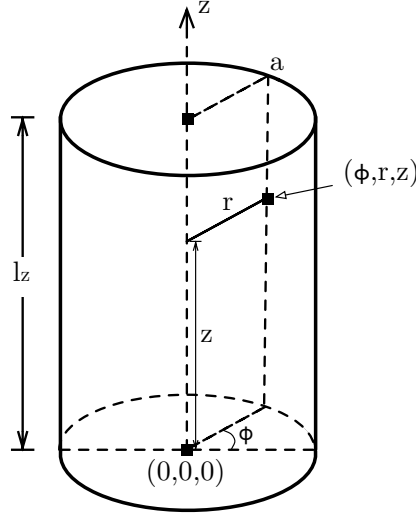


Figura 3.1: Cavidad cilíndrica con el origen de coordenadas en el centro de la tapa inferior.

de la cavidad que corresponde al modo  $(00n_z)$ .

La cavidad tiene una frecuencia de resonancia para cada modo  $(mnn_z)$ . La que interesa al presente análisis es la del modo  $00n_z$ , es decir  $f_{00n_z}$ . Para simplificar la notación, se hará referencia a esta frecuencia de la forma:  $f_0 = \omega_0/2\pi$ .

El campo de presión acústica de la onda estacionaria con frente de onda plano dentro de la cavidad cilíndrica cerrada está descrito por la ecuación:

$$p = A \cos k_{00n_z} z \cdot e^{-\omega_{00n_z} t} \quad (3.2)$$

donde  $A$  es una constante y  $t$  el tiempo. Para dicha presión, los planos nodales que corresponden a los modos normales empleados, son planos perpendiculares al eje del cilindro ubicados en las posiciones

$$z = \frac{(2b-1)\pi}{2k_{00n_z}}, \quad b = 1, 2, \dots, n_z. \quad (3.3)$$

## 3.2. Dispersión debida a una esfera

La dispersión de un frente de onda plano debida a una muestra esférica rígida es un problema tratado en las referencias [53, 107]. Se presenta a continuación la solución dada por Leung [53].

Sea una muestra esférica rígida dispersando el campo acústico. La esfera tiene un radio  $R$  y su centro se encuentra en la coordenada  $Z$  sobre el eje  $z$  dentro de la cavidad, como se muestra en la figura 3.2. La presión acústica  $p$  sobre la superficie de la esfera

se puede descomponer de la siguiente forma:

$$p = p_i + p_s \quad (3.4)$$

donde la *presión incidente*  $p_i$  es la presión que se tendría sin la muestra dentro de la cavidad. La *presión dispersada*  $p_s$  es la perturbación de presión que produce la esfera a partir de la onda incidente.

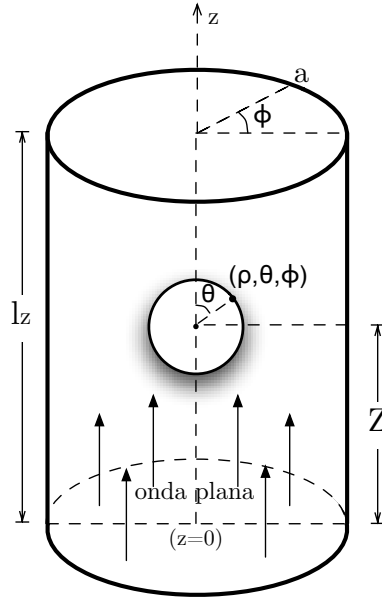


Figura 3.2: Muestra esférica en el interior de la cavidad y su sistema de coordenadas.

Si el centro de la muestra se encuentra a lo largo del eje del cilindro y si sus dimensiones son mucho menores que las de la cavidad, es decir  $R \ll a$ , entonces la amplitud de la onda dispersada, que se origina por la reflexión de la onda incidente en la superficie de la esfera, disminuye considerablemente cuando esta se aproxima a las paredes de la cavidad. Esto se debe a que la amplitud de la onda dispersada es inversamente proporcional a la distancia al centro de la esfera [53]. Por lo tanto se pueden despreciar las reflexiones subsecuentes de la onda dispersada en las paredes de la cavidad y la presión dispersada  $p_s$  puede expresarse solamente como la primera reflexión en la muestra.

La dependencia espacial de la onda plana de presión incidente dentro de la cavidad,  $p_i$ , puede describirse como:

$$p_i = A \cos kz \quad (3.5)$$

donde  $k$  es el número de onda de excitación. La ecuación 3.5 puede expresarse en el sistema de coordenadas esféricas, mostrado en la figura 3.2, como:

$$\begin{aligned} p_i &= A \cos k(\rho \cos \theta + Z) \\ &= (A/2) (e^{ikZ} e^{ik\rho \cos \theta} + e^{-ikZ} e^{-ik\rho \cos \theta}), \end{aligned} \quad (3.6)$$



asumiendo el origen de coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \phi)$  en el centro de la muestra; el sistema de coordenadas esférica se orienta en forma tal que la dirección  $\theta = 0$  sea paralela al eje  $z$ , y la coordenada  $\phi$  en coordenadas cilíndricas coincida con la coordenada  $\phi$  de las coordenadas esféricas.

Se utiliza la función coseno para describir la situación donde la tapa de la cavidad, ubicada en  $z = 0$ , es una frontera rígida y por lo tanto, existe un antinodo de la onda estacionaria sobre esta. Si se recurre a la siguiente *descomposición de onda plana* [1]:

$$e^{ik\rho \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(k\rho) P_n(\cos \theta) \quad (3.7)$$

donde  $j_n(k\rho)$  es la *función esférica de Bessel* de orden  $n$ , y  $P_n(\cos \theta)$  es el *polinomio de Legendre* de orden  $n$ , la onda incidente (ec. 3.6) puede escribirse como:

$$p_i = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (2n+1) j_n(k\rho) P_n(\cos \theta) \quad (3.8)$$

donde

$$B_n = (A/2) i^n [e^{ikZ} + (-1)^n e^{-ikZ}]. \quad (3.9)$$

La onda dispersada  $p_s$  puede expandirse (para el caso de campo abierto) de la siguiente forma [53, 70]:

$$p_s = \sum_{n=0}^{\infty} C_n h_n^{(1)}(k\rho) P_n(\cos \theta) \quad (3.10)$$

en la cual  $h_n^{(1)} = j_n + in_n$  es la *función esférica de Hankel* de primer tipo de orden  $n$ , y  $n_n$  es la *función esférica de Neumann*.  $C_n$  es una constante que se encuentra al aplicar la condición de frontera  $\partial p / \partial \hat{n} = 0$ <sup>1</sup> en la superficie de la esfera, donde  $p$  es la presión total dada por la ecuación (3.4) y  $\hat{n}$  es el vector normal a la superficie. Entonces se obtiene que

$$C_n = - \left[ \frac{B_n (2n+1) j_n'(kR)}{h_n^{(1)'}(kR)} \right] \quad (3.11)$$

donde el apóstrofe ' indica derivada, lo que permite obtener la presión acústica alrededor de una muestra esférica en un campo de onda plana estacionaria con la siguiente expresión:

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2} [e^{ikZ} + (-1)^n e^{-ikZ}] (2n+1) i^n P_n(\cos \theta) \times \left[ j_n(k\rho) - \frac{j_n'(kR) \cdot h_n^{(1)}(k\rho)}{h_n^{(1)'}(kR)} \right] \quad (3.12)$$

<sup>1</sup>Esta condición de frontera puede interpretarse como: el cambio en la presión en la dirección de la normal a la superficie de la esfera evaluada en la superficie de la esfera es cero. Esto significa que la esfera es rígida.

que resulta de sustituir las ecuaciones (3.8), (3.9), (3.10) y (3.11) en la ecuación (3.4).

En las figuras 3.3 y 3.4 se grafica la presión dispersada por la esfera para los casos en los que la muestra se encuentra en el antinodo y el nodo de presión de la onda estacionaria, respectivamente. En cada una de las figuras se presentan dos gráficas. La gráfica superior es una representación cromática del valor de la presión dispersada  $p_s$  por una muestra de radio unitario. Las zonas claras de la gráfica representan una presión acústica mayor que en las zonas oscuras. Se presenta la muestra como una circunferencia en la posición que ocupa en cada caso, ya sea el nodo o el antinodo de presión.

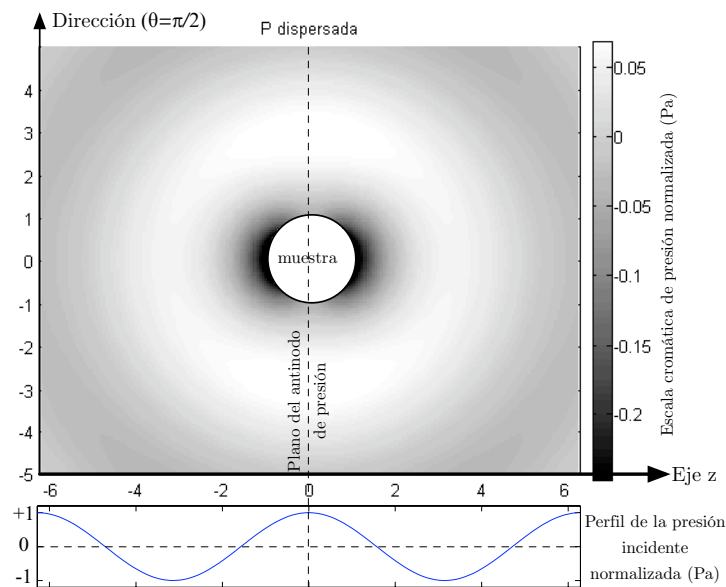


Figura 3.3: Gráfica del valor de la presión acústica dispersada  $p_s$  (ec. 3.10) en campo abierto, para un tiempo  $t = 0$ . El centro de la muestra se encuentra en un antinodo de presión. La escala de amplitud está normalizada con respecto a la onda estacionaria. El perfil de la presión incidente  $p_i$  (gráfica inferior) es una onda plana cosenoidal con  $\lambda = 2\pi$  unidades.

La gráfica inferior muestra el valor normalizado ( $A=1$ ) de la presión acústica incidente  $p_i$  a lo largo del eje  $z$ . Se grafica con el propósito de comparar, en cada caso, la presión incidente  $p_i$  con la presión dispersada  $p_s$ .

En las dos gráficas se observa que el valor de la presión dispersada  $p_s$  es menor que el de la presión incidente normalizada. Por lo tanto el valor de la presión total ( $p_i + p_s$ ) no varía notablemente con respecto a la presión incidente.

También se observa que el valor de la presión dispersada  $p_s$  disminuye al aumentar la distancia al centro de la esfera (el valor de la presión tiende a cero, representado con color gris en la escala cromática). Si la dispersión ocurriera dentro de la cavidad con la muestra lejos de las paredes, las siguientes reflexiones serían despreciables porque

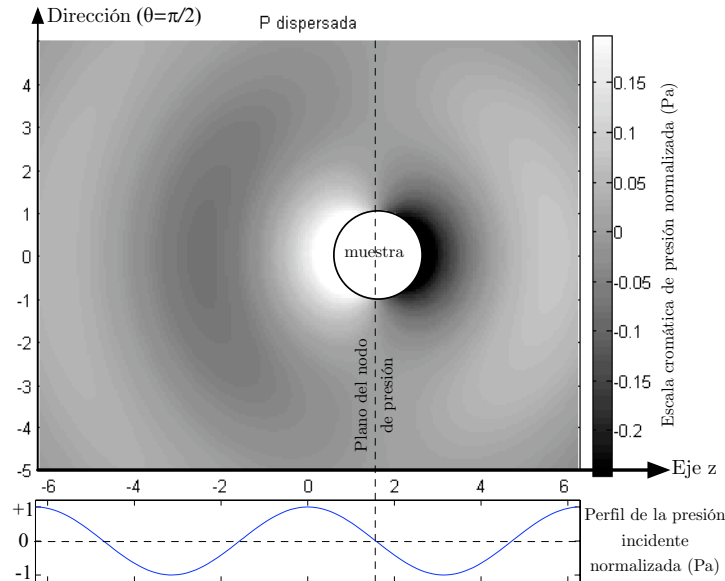


Figura 3.4: Gráfica del valor de la presión dispersada  $p_s$  (ec. 3.10), para un tiempo  $t = 0$ . En este caso se coloca el centro de la muestra en un nodo de presión. La escala de amplitud está normalizada con respecto a la onda estacionaria. El perfil de la presión incidente  $p_i$  (gráfica inferior) es una onda plana cosenoidal con  $\lambda = 2\pi$  unidades.

su valor sería mucho menor que la amplitud de la onda estacionaria. Por lo tanto, la dispersión debida a la esfera dentro de la cavidad es aproximadamente igual a la dispersión en campo abierto estudiada en esta sección.

### 3.3. El exceso de presión

En esta sección se calcula el *exceso medio de presión euleriana* de la onda estacionaria. El resultado se utiliza en la sección 3.4 para calcular la fuerza acústica sobre la muestra. Se establece también una relación del exceso de presión con la energía de la onda, ese resultado se usa en la sección 4.2 para derivar una expresión para el corrimiento de la frecuencia de resonancia de la cavidad utilizando el principio de invariancia adiabática de Boltzmann-Ehrenfest.

Sea una onda plana que se propaga en la dirección  $z$ , y se refleja en  $z = 0$  donde hay una pared rígida. Se produce una *onda estacionaria*, que tiene una presión acústica  $p$  descrita por

$$p = A \cos kz \sin \omega t \quad (3.13)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular de excitación. Si se emplea la *ecuación de fuerza no*

viscosa [7, 40]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} \quad (3.14)$$

que es una versión simplificada de la *ecuación de Euler*; donde  $\rho_0$  es la *densidad del medio* en reposo, y la relación  $k = \omega/c_0$ , se obtiene la velocidad de partícula:

$$u = -\frac{A}{\rho_0 c_0} \text{sen } kz \cos \omega t. \quad (3.15)$$

Sea  $\langle P - P_0 \rangle$  el *exceso promedio en el tiempo*<sup>2</sup> de la presión [107], donde  $P$  es la presión instantánea y  $P_0$  la presión barométrica; la presión acústica es  $p = P - P_0$ .

La ecuación de *momento de Euler* para un fluido ideal está dada por

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (3.16)$$

donde  $u_i$  es la  $i$ -ésima componente del campo vectorial de la velocidad de partícula  $\vec{u}$ , y  $x_i$  es la componente  $i$  del vector de posición. Debido a que un campo sonoro en un fluido no viscoso es *irrotacional*, la velocidad de partícula  $\vec{u}$  se puede expresar como  $\vec{u} = \nabla \Phi$ , donde  $\Phi$  es el *potencial de velocidad*. La expresión (3.16) se convierte entonces en

$$\nabla \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right] = -\frac{\nabla P}{\rho}. \quad (3.17)$$

Si  $T$  es la temperatura,  $s$  la *entropía* por unidad de masa y  $h$  la *entalpía* por unidad de masa del fluido, entonces  $dh = T ds + dP/\rho$ . Para un proceso adiabático,  $\nabla h = \nabla P/\rho$ , por lo que la ecuación (3.17) se convierte, una vez integrada espacialmente, en

$$h = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + C' \quad (3.18)$$

donde  $C'$  es constante en el espacio pero puede depender del tiempo. La presión  $P$  puede expandirse en una serie de Taylor con respecto a  $h$  de la siguiente forma

$$P = P_0 + \left( \frac{\partial P}{\partial h} \right)_{s,0} h + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial h^2} \right)_{s,0} h^2 + \dots \quad (3.19)$$

donde el subíndice  $s,0$  denota entropía constante y condiciones de equilibrio. Ya que  $(\partial h/\partial P)_s = 1/\rho$  y usando la relación fundamental  $(\partial P/\partial \rho)_s = c^2$ , entonces  $(\partial P/\partial h)_s =$

<sup>2</sup>La notación  $\langle \xi \rangle$  indica *promediación en el tiempo*, durante un periodo  $T$ , esto es:

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi \cdot dt$$

$\rho$ , y  $(\partial^2 P / \partial h^2)_s = (\partial \rho / \partial h)_s = (\partial \rho / \partial P)_s (\partial P / \partial h)_s = \rho / c^2$ . Cuando estas cantidades toman su valor de equilibrio, la ecuación (3.19) se convierte en

$$P = P_0 + \rho_0 \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + C' \right) + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c_0^2} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + C' \right)^2 + \dots \quad (3.20)$$

Para el caso de la acústica lineal,  $C' = 0$  [107], y la ecuación (3.18) se reduce a  $h = p / \rho_0 = -\partial \Phi / \partial t$ . A segundo orden, en ocasiones se requiere que  $C'$  tenga un valor constante para que la solución satisfaga las restricciones del problema. Promediando en el tiempo la ecuación (3.20) a segundo orden se tiene que

$$\langle P - P_0 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c_0^2} \left\langle \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right\rangle - \frac{1}{2} \rho_0 \langle |\nabla \Phi|^2 \rangle + C \quad (3.21)$$

donde  $C = \rho_0 \langle C' \rangle$  es constante tanto en el espacio como en el tiempo. A segundo orden,  $\Phi$  en los términos cuadráticos del lado derecho de la ecuación (3.21) puede ser sustituido por relaciones lineales. Reemplazando entonces  $\vec{u} = \nabla \Phi$  y  $\partial \Phi / \partial t = -p / \rho_0$  en la ecuación (3.21), se tiene que el exceso medio de presión acústica es finalmente [107]:

$$\langle P - P_0 \rangle = \frac{1}{2 \rho_0 c_0^2} \langle p^2 \rangle - \frac{1}{2} \rho_0 \langle \vec{u} \cdot \vec{u} \rangle + C, \quad (3.22)$$

que coincide con la diferencia entre los promedios temporales de las energías potencial  $\langle V \rangle$  y cinética  $\langle K \rangle$  de la onda estacionaria:

$$\langle V \rangle - \langle K \rangle = \frac{1}{2 \rho_0 c_0^2} \langle p^2 \rangle - \frac{1}{2} \rho_0 \langle \vec{u} \cdot \vec{u} \rangle. \quad (3.23)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.13) y (3.15) en la ecuación (3.22) se encuentra que para la *onda estacionaria*,

$$\langle V \rangle = \frac{A^2 \cos^2 kz}{4 \rho_0 c_0^2} \quad (3.24)$$

y similarmente

$$\langle K \rangle = \frac{A^2 \sin^2 kz}{4 \rho_0 c_0^2} \quad (3.25)$$

Las dos expresiones están desfasadas por  $\pi/2$  lo que significa que donde la energía cinética es máxima hay un mínimo de energía potencial y viceversa.

Partiendo de las ecuaciones (3.22), (3.24) y (3.25) se tiene finalmente que el exceso medio de la presión acústica es

$$\langle P - P_0 \rangle = \frac{A^2}{4 \rho_0 c_0^2} \cos 2kz + C = \langle E \rangle \cos 2kz + C \quad (3.26)$$

donde la densidad de energía  $\langle E \rangle$  de la onda estacionaria está dada por

$$\langle E \rangle = \langle V \rangle + \langle K \rangle = \frac{A^2}{4\rho_0 c_0^2}. \quad (3.27)$$

### 3.4. La fuerza acústica

Cuando la onda de presión acústica incide en la superficie de un objeto, impone una fuerza neta sobre éste, conocida como *fuerza de radiación acústica*. Se deriva a continuación una expresión para esta fuerza.

Se impone una condición que la muestra debe cumplir: es necesario que las dimensiones de la muestra sean menores que la longitud de onda, es decir  $kR \ll 1$ . En este trabajo esto se cumple siempre, también se cumple que la muestra sea rígida.

Sea entonces una onda estacionaria de presión incidente

$$p_i = A \cos kz \cdot e^{-i\omega t} \quad (3.28)$$

con un nodo de presión en  $z = 0$ . Se obtiene el campo de presión acústica total sobre la superficie de la esfera (donde  $\rho = R$ ) utilizando el procedimiento de la sección 3.2, que para este caso resulta en una presión total  $p$  dada por

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left[ j_n(kR) - \frac{j'_n(kR)h_n^{(1)}(kR)}{h_n^{(1)'}(kR)} \right] A_n P_n(\cos \theta). \quad (3.29)$$

Como  $kR$  se asume pequeño ( $kR \ll 1$ ), cifras con órdenes mayores a  $(kR)^2$  son despreciables y se utilizan solamente los términos con  $n = 0, 1$  y  $2$ . La ecuación (3.29) se simplifica a

$$p = \left[ 1 - \frac{(kR)^2}{2} \right] A \sin kz + \frac{3}{2}(kR)A \cos kz \cdot P_1(\cos \theta) - \frac{5}{9}(kR)^2 A \sin kz \cdot P_2(\cos \theta) \quad (3.30)$$

La velocidad de partícula  $u$  normal a la superficie de la esfera,  $u_{\hat{n}}$ , es cero porque la esfera es rígida, no así la componente tangencial  $u_{\theta}$  que se obtiene de la siguiente expresión [107]:

$$u_{\theta} = \frac{1}{i\omega\rho_0 R} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (3.31)$$

que al sustituirle la presión sobre la superficie de la esfera (ec. 3.30) da como resultado

$$u_{\theta} = \left( \frac{3i}{2} \frac{A}{\rho_0 c_0} \cos kz \sin \theta - \frac{5i}{3} \frac{(kR)A}{\rho_0 c_0} \sin kz \cos \theta \sin \theta \right) \quad (3.32)$$

Se tiene entonces la presión total  $p$  (ec. 3.30) y la velocidad de partícula tangencial  $u_\theta$  a la superficie de la esfera (ec. 3.32). Usando la ecuación (3.22) se obtiene el valor de la presión  $\langle P - P_0 \rangle$  sobre la superficie de la esfera:

$$\langle P - P_0 \rangle = \frac{A^2}{4\rho_0 c_0^2} \left[ \text{sen}^2 kz + \frac{3}{2}(kR) \text{sen } 2kz \cos \theta - \frac{9}{4} \cos^2 kz \text{sen}^2 \theta + \frac{5}{2}(kR) \text{sen } 2kz \text{sen}^2 \theta \cos \theta \right] \quad (3.33)$$

Con la ecuación anterior es posible calcular la *fuerza acústica*, en el eje  $z$ , que actúa sobre la esfera y que está dada por:

$$F_z = - \int_S \langle P - P_0 \rangle \cos \theta dS, \quad (3.34)$$

donde  $S$  es la superficie de la esfera. Se sustituye la ecuación (3.33) en la ecuación (3.34), y se obtiene así<sup>3</sup> la expresión de King [39] para la fuerza acústica de una onda estacionaria sobre la muestra esférica:

$$F_z = -\frac{5\pi}{6} \frac{A^2 k R^3}{\rho_0 c_0^2} \text{sen } 2kz \quad (3.35)$$

de la que se concluye que la fuerza, al actuar sobre la esfera, la desplaza hacia el nodo de presión.

Por otro lado, si la onda acústica no es estacionaria sino una onda progresiva cuya presión está descrita por

$$p_i = A \cdot e^{i(kz - \omega t)} \quad (3.36)$$

la fuerza que produce sobre la muestra esférica es [107]:

$$F_z = \frac{11\pi}{18} \frac{A^2 k^4 R^6}{\rho_0 c_0^2}, \quad (3.37)$$

que es de orden  $(kR)^3$  menor que la fuerza producida por la onda estacionaria (ec. 3.35). Por esta razón, para propósitos de levitación acústica es conveniente el uso de ondas estacionarias, pues la magnitud de la fuerza acústica que producen es mucho mayor que la de una onda progresiva excitada con la misma amplitud de presión ( $A$ ).

Por ejemplo, considérese el siguiente caso con la fuerza de gravedad presente: una muestra esférica con una masa de un gramo y un diámetro  $d = 1$  cm, en un campo de onda estacionaria. Se requiere que la longitud de onda  $\lambda$  sea mayor que el radio de la muestra que es  $R = d/2 = 0.005$  m. Si se considera  $\lambda = 0.1$  m, a temperatura

<sup>3</sup>Integrando sobre la superficie de la esfera con  $dS = 2\pi R^2 \text{sen } \theta d\theta$  y límites desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \pi$ .

ambiente ( $25^\circ \text{ C}$ ), la velocidad del sonido  $c_0 = 346.58 \text{ m/s}$ , entonces la frecuencia de la onda es  $f = c_0/\lambda = 3465.8 \text{ Hz}$ , el número de onda  $k = 62.83$  y la densidad del medio  $\rho_0 = 1.21 \text{ kg/m}^3$ . La gravedad genera una fuerza sobre la muestra igual a  $F_z = m \cdot g = 0.001 \cdot 9.81 = 0.00981 \text{ N}$ . Entonces, para levitar la muestra es necesaria una fuerza acústica de al menos esa magnitud. De la ecuación (3.35) se tiene que se necesita una amplitud  $A$  de  $172.38 \text{ dB ref. } 20 \mu\text{Pa SPL}$  para levitar la muestra.<sup>4</sup>

Para el caso de una onda progresiva, ecuación (3.37), el nivel de presión sonora necesario para levitar la muestra es de  $188.8 \text{ dB ref. } 20 \mu\text{Pa}$ .<sup>5</sup>

### 3.5. Levitación acústica

En esta sección se explica cómo actúa la fuerza sobre la muestra para lograr la levitación acústica. Se utiliza la ecuación de la presión acústica de la onda estacionaria (ec. 3.28). Se utiliza también la ecuación de la fuerza acústica producida por la onda estacionaria (ec. 3.35) sobre una muestra de radio arbitrario. Considérese el estado más simple en la cavidad cilíndrica (y rectangular), el modo (001), que es el primer modo en  $z$ .

En las figuras 3.5 y 3.6 se muestran las gráficas para el modo (001) de la presión y la fuerza acústica, respectivamente. Para las dos gráficas se normaliza el eje  $z$  (el de las abscisas) con respecto al largo de la cavidad  $l_z$ . Las posiciones  $z/l_z = 0$  y  $z/l_z = 1$  corresponden a las tapas del cilindro. En estos puntos se tienen los antinodos de presión (fig. 3.5) donde la fuerza acústica es cero (fig. 3.6).

En el centro de la cavidad, se encuentra el nodo de presión. Es en este plano donde la fuerza acústica posiciona a la muestra, esto se explica al analizar la gráfica de la fuerza acústica (fig. 3.6); se estudian a continuación los tres casos de la figura:

**Caso a)** cuando la muestra se encuentra en una posición  $z$  tal que  $z/l_z < 0.5$ , el campo acústico ejerce una fuerza sobre la muestra cuya dirección es positiva y su valor es función de la posición. La muestra será *empujada* en la dirección positiva del eje, hacia el nodo de presión.

**Caso b)** cuando  $z/l_z > 0.5$ , la fuerza acústica tiene dirección negativa. La muestra será *empujada* en la dirección negativa del eje, hacia el nodo de presión.

**Caso c)** cuando la muestra se encuentra en el plano nodal de presión, en  $z/l_z = 0.5$ , la fuerza acústica es cero y la muestra se mantiene en equilibrio en esa posición. Para

---

<sup>4</sup>El umbral del dolor del oído humano es del orden de  $120 \text{ dB}$ . En los sistemas de levitación, si la frecuencia de excitación está dentro del audible ( $20 \sim 20,000 \text{ Hz}$ .) se debe aislar el sistema. En caso contrario se trabaja dentro del *ultrasonido* que es inaudible al oído humano.

<sup>5</sup>Para propósitos de comparación, la presión barométrica a nivel del mar y a temperatura ambiente es de  $194 \text{ dB ref. } 20 \mu\text{Pa}$ .



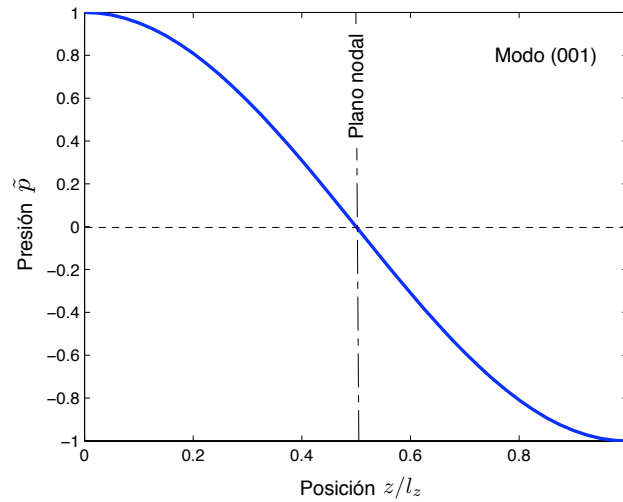


Figura 3.5: Gráfica del valor de la presión acústica (normalizada) para el modo (001) de la cavidad en función de la posición normalizada  $z/l_z$ .

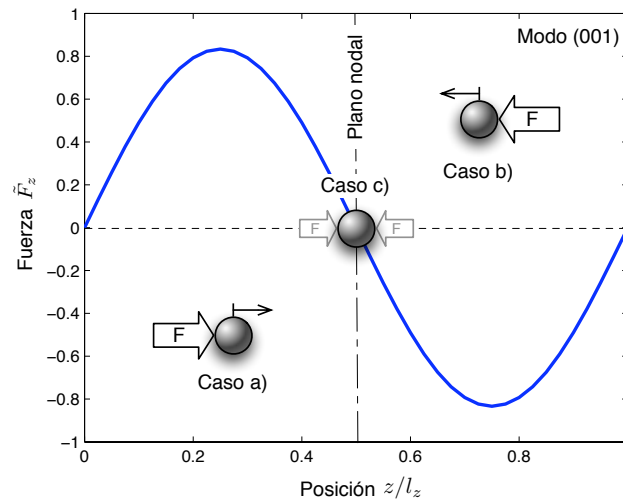


Figura 3.6: Gráfica de la fuerza acústica (normalizada) sobre una muestra en función de la posición normalizada  $z/l_z$ , para el modo (001). Se presenta la muestra en tres zonas: *a*) donde la fuerza es positiva, *b*) donde la fuerza es negativa, *c*) en el plano nodal, donde la fuerza es cero.

pequeños desplazamientos, la fuerza acústica alrededor de este punto se comporta como un resorte que mantiene a la muestra en el plano nodal.

Es necesario ahora agregar al análisis la componente de la fuerza de gravedad. El punto de equilibrio, aquel donde la suma de fuerzas sobre la muestra es cero, se recorre en función de la masa de la muestra y termina ubicado por debajo (en el eje  $z$ ) del

plano nodal. La muestra levitada se desplaza a esa posición.

### 3.6. Inestabilidades oscilatorias

Bajo ciertas circunstancias de excitación de la cavidad, una muestra levitada en el sistema comienza a oscilar o rotar alrededor de su posición de equilibrio. Tras ser observadas las inestabilidades oscilatorias en el laboratorio [22, 82], se sabe que la amplitud de su oscilación puede aumentar hasta alcanzar un valor fijo o crecer indefinidamente hasta que se pierde la levitación de la muestra.

Rudnick [82] desarrolló una teoría para explicar las inestabilidades. Predice que las inestabilidades oscilatorias ocurren únicamente cuando el sistema es excitado a una frecuencia mayor que la frecuencia de resonancia del modo  $(mnn_z)$  usado para la levitación.

La idea central de la teoría es la siguiente: existe un retraso temporal entre el cambio de posición de una muestra levitada en movimiento y la respuesta del modo acústico en la cavidad. Este retraso produce un término en la fuerza acústica que es función de la velocidad de la muestra y que toma la forma de una atenuación negativa en la ecuación de movimiento del objeto; la fuerza es equivalente a un arrastre viscoso negativo. Este término adicional en fuerza introduce la inestabilidad en la levitación de la muestra.

Rudnick derivó una ecuación para la fuerza acústica como función de la velocidad de la muestra. Sin embargo, la naturaleza y el comportamiento del retraso temporal entre el cambio de posición de la muestra y la respuesta de la cavidad no es analizada en la teoría. El tema permanece como un campo abierto en la investigación sobre la levitación acústica. En este trabajo se hizo una medición de este retraso, se presenta en el capítulo 8.

# Capítulo 4

## Corrimiento de la frecuencia de resonancia

La frecuencia de resonancia  $f_0$  de una cavidad es función de sus dimensiones. Cuando se coloca una muestra en su interior, que para facilitar su entendimiento puede considerarse como una exclusión de volumen, se altera la forma y el volumen de la cavidad. En consecuencia también se modifica el campo acústico<sup>1</sup> y la frecuencia de resonancia. Este *corrimiento de la frecuencia de resonancia* depende de la posición de la muestra en la cavidad y de las dimensiones de la cavidad y la muestra.

En este capítulo se presentan las ecuaciones existentes en la bibliografía que predice el corrimiento. Utilizando el principio de invariancia adiabática de Boltzmann-Ehrenfest se deriva, en la sección 4.2, una nueva ecuación del corrimiento de la frecuencia de resonancia.

### 4.1. Cálculo del corrimiento

Sea  $f_0$  la frecuencia de resonancia de la cavidad vacía. Usando las expresiones  $\omega_0 = 2\pi f_0$  y  $k_0 = \omega_0/c_0$ , la  $f_0$  puede relacionarse con la frecuencia angular  $\omega_0$  de resonancia y el número de onda  $k_0$  de resonancia.

Se coloca la muestra en el interior de la cavidad. Sean entonces las nuevas variables que describen al sistema:  $f$  la frecuencia de resonancia,  $\omega$  la frecuencia angular de resonancia, y  $k$  el número de onda.

El *corrimiento* de la frecuencia de resonancia es la diferencia entre la frecuencia de resonancia de la cavidad modificada y la frecuencia de resonancia original,  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ , dividido entre  $\omega_0$ , es decir:

$$\text{corrimiento} = \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta k}{k_0}. \quad (4.1)$$

---

<sup>1</sup>Ver sec. 3.2

El fenómeno del corrimiento como función de la posición de la muestra fue reportado experimentalmente por primera vez por Smith *et al.* [87], en una cavidad rectangular y con una muestra rectangular. Para el modo (001) el corrimiento de la frecuencia de resonancia que obtuvo fue:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{V_{\text{muestra}}}{V_{\text{cavidad}}} \cos 2kz \quad (4.2)$$

siendo  $z$  la posición del centro de la muestra medida desde un extremo de la cavidad. Se observa que la frecuencia de resonancia varía en forma cosenoidal en función de la posición; su amplitud es la relación de volúmenes  $V$  de la muestra y la cavidad.

Otras soluciones han sido derivadas siguiendo procedimientos distintos [14, 53, 82, 87]. Estas se mencionan a continuación.

Rudnick [82] obtuvo que para una cavidad cilíndrica con una muestra esférica el corrimiento está dado por la ecuación:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\pi R^3}{3k_0^2 V_c} \left( \frac{(\nabla^2 \psi_0)^2}{k_0^2} - \frac{3}{2} |\nabla \psi_0|^2 \right) \quad (4.3)$$

donde  $\psi_0$  es la eigenfunción normalizada de la cavidad,  $R$  es el radio de la muestra y  $V_c$  el volumen de la cavidad.

Usando la *función de Green* que describe al campo acústico cuando se introduce la muestra en la cavidad, Leung [53] obtuvo que el corrimiento de la frecuencia de resonancia, para una cavidad rectangular con una muestra esférica, está dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = & \frac{4\pi R^3/3}{V_c} \left[ \left( 1 - \frac{2}{5} (k_z R)^2 \right) \cos 2k_z z \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{4} - \frac{17}{72} (k_z R)^2 \right) \cos 2k_z z - \left( \frac{1}{4} + \frac{67}{360} (k_z R)^2 \right) \right] \quad (4.4) \end{aligned}$$

donde  $k_z$  es el número de onda para el modo (00 $n_z$ ). En esta expresión, el primer término es el corrimiento debido a la exclusión de volumen por la presencia de la muestra y los dos últimos términos corresponden al corrimiento producido por la dispersión en la muestra.

#### 4.1.1. Límite del tamaño de la muestra

Para derivar la ecuación (4.4) del corrimiento de la frecuencia de resonancia, Leung simplificó su procedimiento asumiendo  $kR \ll 1$ . Al aumentar el radio  $R$  de la muestra, el valor predicho por la ecuación (4.4) se desvía del valor observado experimentalmente. Surge la interrogante de cuál es el radio máximo de la muestra para el cual la ecuación (4.4) sigue siendo válida.

Barmatz [3] contestó esta pregunta por medios experimentales. Comparó el corrimiento predicho por la ecuación (4.4) con mediciones en el laboratorio para muestras

de distinto radio dentro de una cavidad cilíndrica. Partiendo de esta información modificó la ecuación (4.4) para ajustarla a los resultados experimentales, obtuvo la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \left(\frac{V_s}{V_c}\right) [1 - 0.4(d_s/l_z) + 1.2(A_s/A_c)^2] \cdot H(k_z z, k_z R) \quad (4.5)$$

donde  $H(k_z z, k_z R)$  es la ecuación del corrimiento de Leung (ec. 4.4),  $d_s/l_z$  es la relación entre el diámetro de la muestra  $d_s$  y la longitud de la cavidad,  $A_s/A_c$  es la relación del área del corte transversal de la muestra  $A_s$  y el cilindro  $A_c$ . La ecuación 4.5 es válida solamente al cumplirse las siguientes condiciones (obtenidas experimentalmente):

$$\begin{aligned} d_s/l_z &< 0.4 \\ A_s/A_c &< 0.6 \\ V_s/V_c &< 0.013. \end{aligned}$$

De las tres expresiones anteriores se puede obtener el radio máximo permitido para la muestra.

## 4.2. Principio de Boltzmann-Ehrenfest

El *principio de invariancia adiabática de Boltzmann-Ehrenfest* postula que para un sistema oscilatorio que se somete a una transformación adiabática, la relación entre la energía del sistema y la frecuencia de resonancia es invariante [67]. Sea entonces el sistema una cavidad vacía arbitraria donde se excita una onda estacionaria con una energía  $E_o$  y una frecuencia de resonancia  $\omega_0$ . Al realizar una compresión adiabática del volumen de la cavidad, el cociente de la nueva energía,  $E_f$ , y la nueva frecuencia de resonancia,  $\omega_f$ , se mantiene constante, esto es:

$$\frac{E_0}{\omega_0} = \text{cte.} = \frac{E_f}{\omega_f} \quad (4.6)$$

o bien

$$\frac{\omega_f}{\omega_0} = \frac{E_f}{E_0}. \quad (4.7)$$

Se resta 1 a la ecuación (4.7), en ambos lados de la igualdad, y al expandirla algebraicamente se llega a

$$\frac{\omega_f - \omega_0}{\omega_0} = \frac{E_f - E_0}{E_0}. \quad (4.8)$$

El lado izquierdo de la igualdad es el corrimiento de la frecuencia de resonancia  $\Delta\omega/\omega_0$ . En el lado derecho, la energía final del sistema  $E_f$ , es igual a la suma de la energía

inicial  $E_0$  y el trabajo realizado  $W$  para comprimir el sistema, es decir  $E_f = E_0 + W$ . Por lo tanto, la ecuación (4.8) puede simplificarse de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{W}{E_0}. \quad (4.9)$$

Sea entonces la cavidad vacía en cuyo interior existe una onda estacionaria de energía  $E_0$ . Si en el interior de la cavidad se colocara una esfera pequeña (tan pequeña que no altere el volumen de la cavidad) y esta comenzara a expandirse hasta alcanzar un radio  $R$ , la esfera realizaría un trabajo  $W$  para comprimir el volumen de la cavidad. Al terminar la expansión de la esfera el sistema se habrá convertido en una cavidad cilíndrica con una muestra esférica de radio  $R$  en su interior.

De la ecuación (3.27) se tiene que la densidad de energía de la onda estacionaria<sup>2</sup> es  $\langle E \rangle = A^2/4\rho_0c_0^2$ . La energía inicial  $E_0$  se obtiene integrando la densidad de energía en el volumen de la cavidad ( $V_c = \pi a^2 l_z$ ), por lo tanto

$$E_0 = \int_V \langle E \rangle dV = \frac{A^2}{4\rho_0c_0^2} \pi a^2 l_z. \quad (4.10)$$

Por otro lado, el trabajo  $W$  realizado sobre el volumen de la cavidad para expandir la muestra se obtiene integrando la fuerza acústica  $F$  sobre la superficie de la esfera al aumentar su radio desde cero hasta el radio final  $R$ :

$$W = \int_0^R F \cdot dr, \quad (4.11)$$

con la fuerza acústica dada por:

$$F = - \int_S p \cdot dS, \quad (4.12)$$

donde  $p$  es la presión<sup>3</sup> dada por la ecuación (3.12) y  $S$  la superficie de la esfera. Si la suma de la ecuación (3.12) se lleva a cabo con los términos  $n = 0, 1, 2$  y si se desprecia cualquier cantidad menor a  $(kR)^4$  (porque  $kR \ll 1$ ), se llega a la expresión para el trabajo:

$$W = \frac{A^2}{4\rho_0c^2} \frac{4\pi R^3}{3} \left\{ \left[ -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cos(2kz) \right] - \left[ \frac{67}{360} - \frac{229}{360} \cos(2kz) \right] (kR)^2 \right. \\ \left. + \left[ \frac{101}{1512} + \frac{101}{1512} \cos(2kz) \right] (2kR)^4 \right\} \quad (4.13)$$

---

<sup>2</sup>Ver sec. 3.3

<sup>3</sup>Ver sec. 3.2

Se sustituyen las ecuaciones (4.10) y (4.13) en la ecuación (4.9) y se obtiene finalmente la nueva ecuación para el corrimiento de la frecuencia de resonancia de la cavidad:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{V_s}{V_c} \left\{ \left[ -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cos(2kz) \right] - \left[ \frac{67}{360} - \frac{229}{360} \cos(2kz) \right] (kR)^2 + \left[ \frac{101}{1512} + \frac{101}{1512} \cos(2kz) \right] (2kR)^4 \right\} \quad (4.14)$$

### 4.3. Comparación de las ecuaciones

En esta sección se hace una comparación de la predicción del corrimiento de la frecuencia de resonancia de cada una de las ecuaciones presentadas en las secciones anteriores, a saber:

**Smith 1974** [87] Ecuación (4.2). Esta es la primera solución propuesta al problema del corrimiento.

**Leung 1982** [53] Ecuación (4.4), derivada a partir de la función de Green asumiendo  $kR \ll 1$ .

**Barmatz 1983** [3] Ecuación (4.5). Ajuste experimental a la ecuación (4.4) de Leung para descubrir el límite en el tamaño de la muestra (al acercarse al límite de la condición  $kR \ll 1$ ).

**Rudnick 1990** [82] Ecuación (4.3).

**Boltzmann-Ehrenfest** Ecuación (4.14), obtenida al aplicar el principio de invariancia adiabática de Boltzmann-Ehrenfest.

En la figura 4.1 se muestra el corrimiento para el modo (002) de una cavidad cilíndrica con dimensiones  $l_z = 0.07$  m,  $a = 0.025$  m y una muestra esférica de radio  $R = 0.0025$  m. Se grafica el porcentaje de corrimiento de la frecuencia de resonancia en función de la posición de la muestra en el eje  $z$  dentro de la cavidad, normalizada como  $z/l_z$ .

El valor predicho por la ecuación de Smith es diferente al valor del resto de las ecuaciones en los nodos de presión (mínimos de la curva). Los demás procedimientos (de Leung, Bartmatz, Rudnick y la nueva ecuación derivada a partir del principio de invariancia adiabática de Boltzmann-Ehrenfest) tienden a un resultado similar. Por lo tanto, pueden emplearse indistintamente para predecir el corrimiento de la frecuencia de resonancia, siempre que se considere el límite en el tamaño de la muestra.

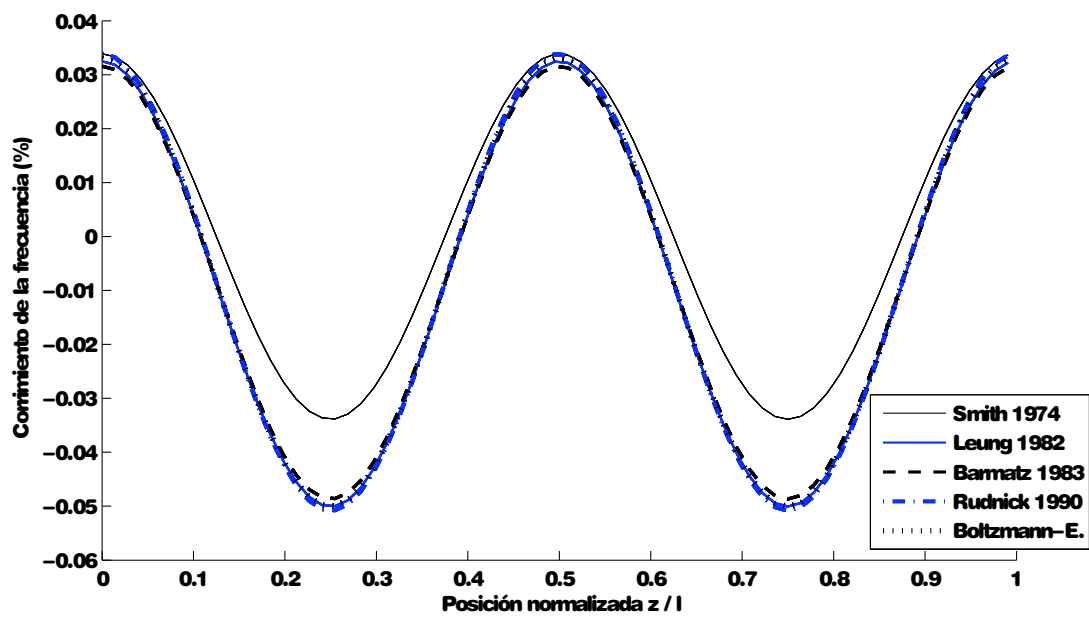


Figura 4.1: Comparación de las ecuaciones del corrimiento de la frecuencia de resonancia. Se grafica el porcentaje de desviación de la frecuencia de resonancia en función de la posición normalizada  $z/l_z$  de la muestra a lo largo del eje del cilindro.



# Parte II

## Investigación experimental

# Capítulo 5

## Método experimental

### 5.1. El levitador acústico

El levitador acústico más sencillo está constituido por una fuente sonora y una superficie plana donde la onda acústica se refleja. La onda estacionaria se genera en el espacio intermedio entre la fuente y el reflector, como se muestra en la figura 5.1.

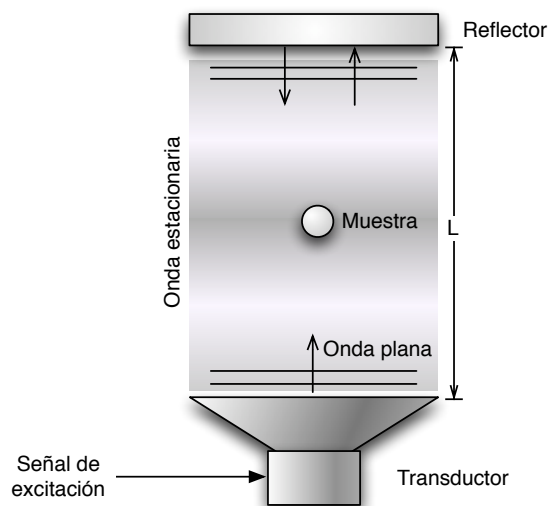


Figura 5.1: Levitador acústico, compuesto por una fuente sonora y un reflector.

El levitador de esta investigación es una cavidad cilíndrica. Se construyó con un tubo de acrílico rígido y transparente para observar el comportamiento de la muestra en el interior del sistema. La cavidad se cerró con dos tapas rígidas, una de ellas fue el reflector y la otra estaba atravesada por la salida de una guía de onda que conectó al transductor con la cavidad. Se usó un cilindro con largo arbitrario de  $l_z = 7.06$  cm y un diámetro de  $\phi = 5.08$  cm.

Se montaron dos sistemas, mostrados en la figura 5.2, ambos con la misma cavidad cilíndrica, pero con distinto reflector. La *cavidad 1* se armó con un reflector plano y una guía de onda de apertura  $\phi = 0.30$  cm. Al ser estrecha, la apertura funciona como fuente puntual. Esta cavidad fue la que se utilizó en todas, excepto una de las mediciones: la del comportamiento del corrimiento de la frecuencia de resonancia cuando la muestra se encuentra dentro del volumen del reflector semiesférico.<sup>1</sup> Para esta medición se armó la *cavidad 2* con un reflector semiesférico y una guía de onda de apertura  $\phi = 2.48$  cm.

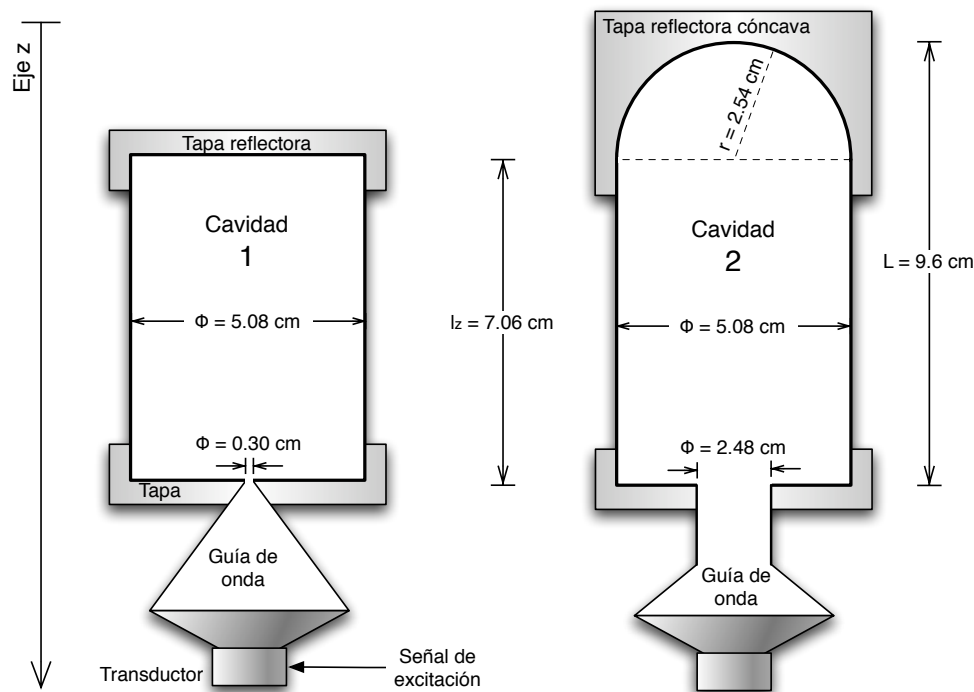


Figura 5.2: Configuración y dimensiones de las cavidades empleadas.

## 5.2. Medición de la resonancia de la cavidad

La *frecuencia de resonancia*  $f_0$  de la cavidad se midió excitando la cavidad con ruido blanco. Se capturó con un micrófono la presión acústica en el interior de la cavidad y se localizó la resonancia en el espectro de la señal.

Esta investigación se enfocó en la frecuencia de resonancia del modo (002) de la cavidad cilíndrica (cavidad 1).<sup>2</sup> Para este modo, y con el reflector ubicado en el origen,

<sup>1</sup>Ver sección 7.2.

<sup>2</sup>Este modo también fue usado por Leung [53] y Barmatz [3] en sus investigaciones.

$z = 0$ , el primer plano nodal se encuentra en la posición  $z = 1.765$  cm. La frecuencia de resonancia de la cavidad vacía, usando la ecuación (3.1) y la relación  $f_0 = c_0 k_0 / 2\pi$ , es:

$$f_{002} = \frac{c_0}{0.0706} \quad (5.1)$$

donde la velocidad del sonido  $c_0$  es función de la temperatura del medio.<sup>3</sup>

### 5.2.1. Sistema experimental

Se montó el sistema mostrado en la figura 5.3, usando la *cavidad 1*. Se colocó la muestra esférica (de vidrio) en el interior de la cavidad, sosteniéndola con una varilla de metal. Se usaron muestras de diferente tamaño, de acuerdo a los requisitos de la medición. La varilla atraviesa la tapa reflectora y permite ajustar la posición de la muestra, a lo largo del eje  $z$ , desde el exterior de la cavidad.

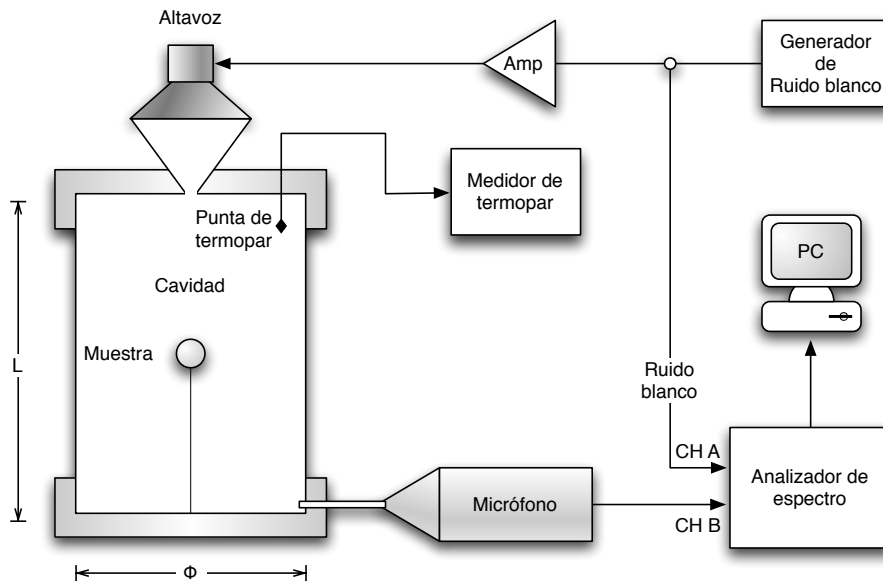


Figura 5.3: Sistema montado para la medición de la frecuencia de resonancia de la cavidad.

La varilla usada (una aguja) tuvo un diámetro de un milímetro y una longitud máxima de 3.5 cm, lo que produjo una exclusión de volumen de  $2.75 \times 10^{-8} \text{ m}^3$ . Esto es solamente el 0.02 % del volumen de la cavidad. Por lo tanto su presencia es despreciable.

El altavoz del sistema fue excitado con la señal amplificadas de un generador de ruido blanco, integrado al analizador de espectro marca Brüel&Kjær modelo 2034. La presión acústica en el interior de la cavidad fue capturada por un micrófono de sonda de la marca Brüel&Kjær, modelo 4170, cuya sonda se introdujo en la cavidad por un

<sup>3</sup>Los efectos de la temperatura se estudian en el capítulo 6.

pequeño orificio. La sonda del micrófono se colocó en el antinodo de presión para todas las frecuencias, es decir, en la tapa reflectora. Esto es cierto debido a que se está tratando con ondas estacionarias que siempre presentan un máximo de presión en las fronteras rígidas, que es donde las ondas se reflejan.

Con el analizador, Brüel & Kjær mod. 2034, se obtuvo el espectro de la presión acústica y se transfirió a la computadora en donde se hizo un procesamiento digital de las señales (realizado en MATLAB) para ubicar la frecuencia de resonancia.

Se colocó una punta de termopar en el interior de la cavidad para medir la temperatura del medio dentro del sistema utilizando un monitor de termopares con resolución de décimas de grado.

En el sistema montado, los errores debidos a la respuesta en frecuencia característica de los elementos empleados (el micrófono y el amplificador) resultaron despreciables, pues en el intervalo de frecuencias empleado (de 4.7 KHz a 5.1 KHz), se consideró plana tanto la respuesta en frecuencia del micrófono como la del amplificador. No se tuvo control de la respuesta en frecuencia del altavoz.

El generador de ruido blanco no produjo una señal con espectro plano. Para corregir este error, el analizador de espectro se programó para calcular la función de transferencia como el cociente de los espectros de la señal del micrófono entre la señal del generador. Con esto se reduce significativamente el error introducido por el generador de ruido blanco.

### 5.2.2. Análisis del espectro

Para reducir el ruido en el espectro de la presión acústica se promediaron cien mediciones en el analizador,<sup>4</sup> para lo que se requirió un tiempo aproximado de minuto y medio. Las cien muestras promediadas no fueron suficientes para reducir el ruido a un nivel despreciable, pero debido a que la temperatura del medio cambia a lo largo del día, y con esta la frecuencia de resonancia, se decidió no aumentar el tiempo de la medición. Empíricamente se observó que durante las mediciones la temperatura del medio cambió una décima de grado cada ocho minutos aproximadamente.

Se redujo el ruido remanente con el procesamiento digital de la señal. Se aplicó un filtro de promediación móvil (de valores contiguos, en inglés: *moving average filter*) a cada punto del espectro. El vector capturado por el analizador tiene un ancho de 800 puntos, con un filtro de 90 puntos de ancho se consiguió reducir el ruido a un nivel despreciable. La frecuencia de resonancia se ubicó, finalmente, en el espectro suavizado.

---

<sup>4</sup>El analizador de espectro captura la señal del micrófono cien veces, realiza la FFT de cada una y entrega el promedio como resultado de la medición.

# Capítulo 6

## La temperatura del medio

La frecuencia de resonancia de la cavidad es función de la temperatura. Si se hacen varias mediciones de la frecuencia de resonancia del sistema, no es posible compararlas entre sí porque cada una se mide a una temperatura ambiente distinta. Es necesario hacer una compensación por el efecto de la temperatura al valor de cada frecuencia de resonancia medida.

### 6.1. Efectos de la temperatura en el sistema

La velocidad de propagación del sonido es función de la temperatura del medio. Para el caso del aire la relación es lineal:

$$c_0 = 331.4 + 0.607 \cdot \theta \quad m/s \quad (6.1)$$

donde  $\theta$  es la temperatura del medio en grados centígrados, es válida [7] dentro del intervalo  $[-30^\circ C, +30^\circ C]$ .

Sustituyendo la ecuación (6.1) en la ecuación (5.1) se llega a la expresión

$$f_0 = 4694.05 + 8.60 \cdot \theta \quad (6.2)$$

donde  $f_0$  está dada en unidades de Hz y predice el cambio de la frecuencia de resonancia del modo (002) de la cavidad cilíndrica vacía como función de la temperatura.

### 6.2. Medición de la variación de $f_0$ como función de la temperatura

Se aprovechó que la temperatura ambiental cambia en el transcurso del día para realizar una medición de la frecuencia de resonancia de la cavidad en función de la temperatura del medio. Se diseñó la medición para comprobar lo siguiente:

1. La temperatura dentro de la cavidad puede considerarse uniforme, es decir, no depende de la posición, ya que la cavidad con la que se trabajó es pequeña, del orden de centímetros. Por lo tanto la temperatura es representable por una sola medición realizada en cualquier punto dentro de la cavidad.
2. La frecuencia de resonancia para el modo (002) de la cavidad cilíndrica varía linealmente 8.60 Hz por grado centígrado (ec. 6.2).

Para medir la temperatura se utilizaron cinco puntas de termopar. Una exterior colocada cerca de la cavidad para monitorear la temperatura ambiental. Las cuatro restantes se introdujeron en la cavidad 1 y se distribuyeron equidistantes a distintas profundidades, como se muestra en la figura 6.1. En el centro de la cavidad se colocó una muestra esférica fija de 6.3 mm de diámetro, para simular una muestra levitada.

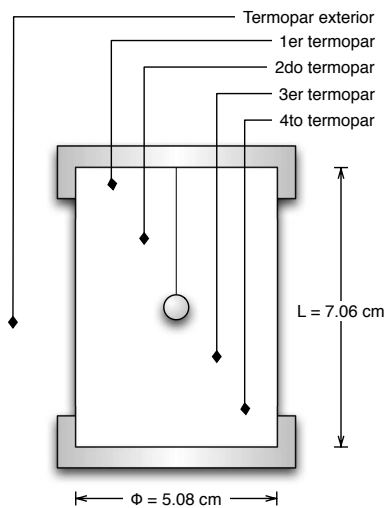


Figura 6.1: Ubicación de las puntas de termopar dentro y fuera de la cavidad.

## Resultados de la medición

En la figura 6.2 se presentan cuatro gráficas; cada una corresponde a un termopar. En el eje de las abscisas se grafica la temperatura y en el las ordenadas la frecuencia de resonancia del modo (002) de la cavidad. Se observa que la distribución de los puntos es similar en las cuatro gráficas. Los resultados se ajustan a una recta.

La desviación de los puntos con respecto a la línea que los ajusta se debe a errores intrínsecos a la medición, en este caso a la *incertidumbre* del medidor de termopares que es de  $\pm 0.05^\circ \text{ C}$ . También existe incertidumbre en la medición de la frecuencia de

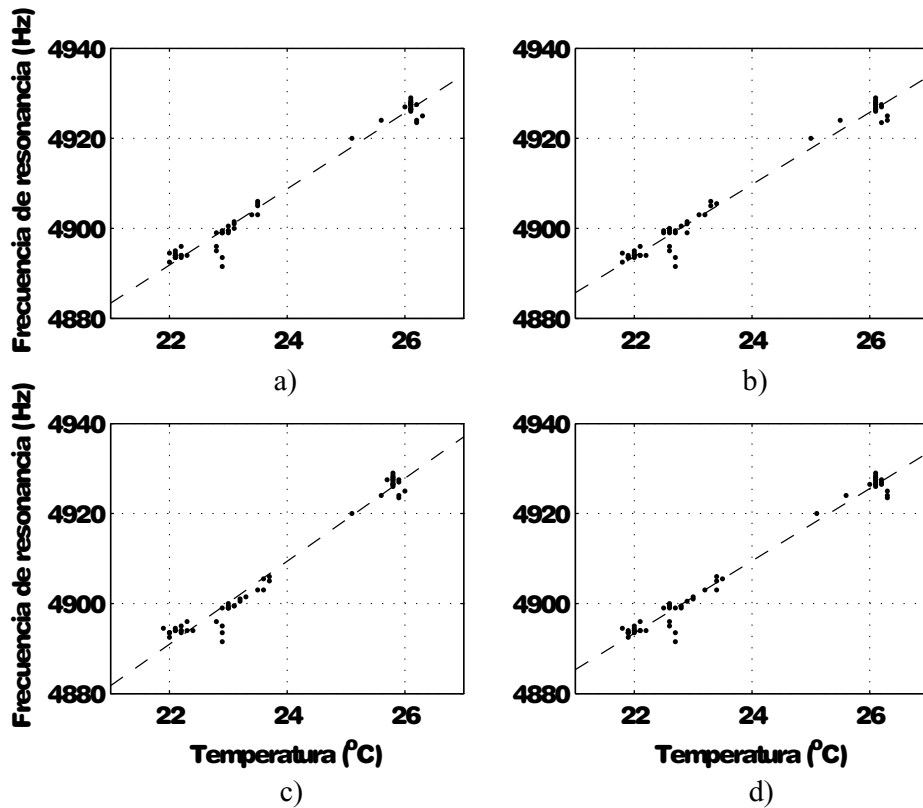


Figura 6.2: Frecuencia de resonancia en función de la temperatura, para cada uno de los termopares en la cavidad: a) termopar 1, b) termopar 2, c) termopar 3, d) termopar 4.

resonancia de la cavidad, pues la resolución del analizador de espectro usado<sup>1</sup> es de 0.5 Hz. Finalmente, se desconoce la causa de la desviación de los puntos más alejados de la línea (zona inferior izquierda de cada gráfica). Se atribuyen a un error en la preparación del experimento.

En la figura 6.3 se grafican juntos los ajustes lineales para cada termopar. Como cada termopar corresponde a una posición en el interior de la cavidad, un gradiente de temperatura se observaría como una colección de líneas paralelas en la gráfica. No es el caso, las líneas se intersectan en diferentes puntos. Por lo tanto no se observó un gradiente de temperatura dentro de la cavidad y la temperatura puede asumirse como homogénea. Basta con medirla con un sólo termopar en cualquier punto dentro de la cavidad. Así se hizo en las mediciones subsecuentes de esta investigación.

Finalmente, para cada medición de la frecuencia de resonancia realizada, se promediaron los valores de temperatura de los cuatro termopares. Esta colección de puntos resultante se ajustó a una recta para obtener su pendiente  $m$ . Los puntos obtenidos y

<sup>1</sup>Analizador de la marca Brüel & Kjær mod. 2034.



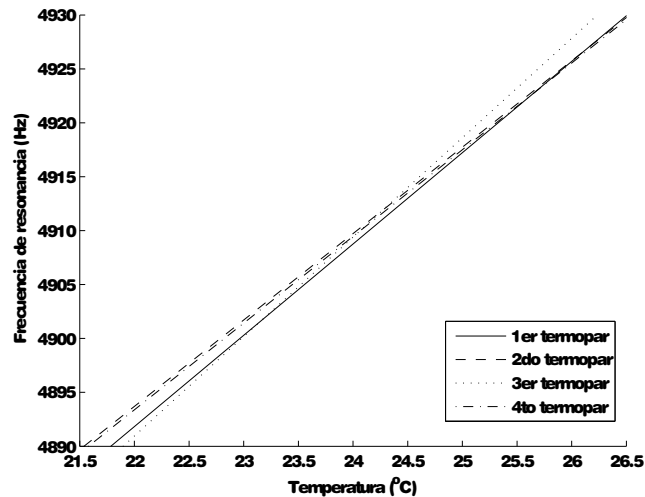


Figura 6.3: Ajustes lineales de la medición de los cuatro termopares.

la recta ajustada se muestran en la figura 6.4.

En la sección 6.1 se obtuvo teóricamente el valor de esta pendiente como  $m = 8.60$ . En esta medición, con las temperaturas promediadas, la recta ajustada tiene una pendiente  $m = 8.4235$ . La diferencia entre el valor experimental y el teórico es de 1.97%. Este resultado confirma que la frecuencia de resonancia de la cavidad es función lineal de la temperatura.

### 6.3. Compensación por el cambio de temperatura

El corrimiento en la frecuencia de resonancia de la cavidad se calculó de acuerdo a la ec. (4.1). Para ello se midió la frecuencia de resonancia de la cavidad vacía ( $f_0$ ) y posteriormente se repitió la medición con la muestra en su interior ( $f_n$ ).

Durante el tiempo de montaje del arreglo experimental de las dos mediciones transcurrieron algunos minutos, suficientes para que la temperatura del medio cambiara. Por lo tanto las dos mediciones no se pueden comparar entre sí. Antes es necesario compensar el resultado de la medición por los cambios de temperatura, de la manera siguiente.

La medición de la frecuencia de resonancia de la cavidad vacía  $f_0$  se hizo a una temperatura  $T_0$  y una velocidad del sonido  $c_0$ . La medición de la frecuencia de resonancia de la cavidad con la muestra  $f_n$  se hizo a una temperatura  $T_n$  y una velocidad del sonido  $c_n$ . La frecuencia de resonancia de la cavidad vacía a la temperatura  $T_n$ , es decir

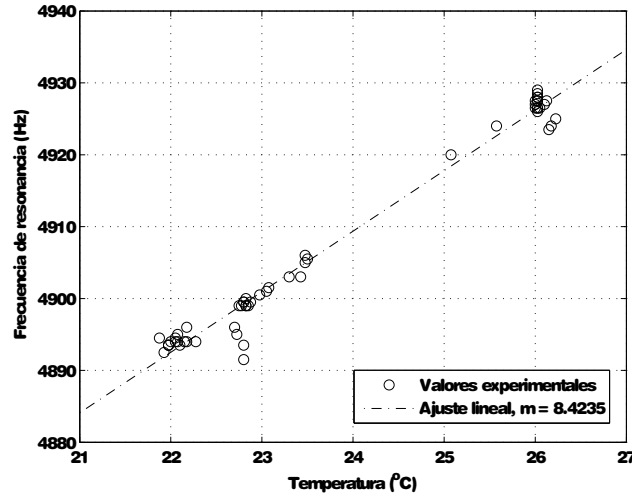


Figura 6.4: Frecuencia de resonancia de la cavidad estudiada en función del promedio de los valores de la temperatura medida con los cuatro termopares dentro de la cavidad. El conjunto de pares de valores (frecuencia de resonancia - temperatura) se ajustó a un polinomio de primer grado para obtener la pendiente  $m$ .

la frecuencia de resonancia  $f_0$  compensada por el cambio de temperatura, es entonces:

$$f_{compensada} = \frac{f_0 \cdot c_n}{c_0} \quad (6.3)$$

Y el corrimiento de la frecuencia de resonancia, que ya no incluye el error introducido por el cambio de temperatura, se obtiene entonces con la expresión

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_n - f_{compensada}}{f_{compensada}} \quad (6.4)$$

A partir de este punto todas las mediciones del corrimiento de la frecuencia de resonancia presentadas en este trabajo están compensadas por el cambio de temperatura.

# Capítulo 7

## Corrimiento de la frecuencia de resonancia

En el capítulo 4 se presentaron las ecuaciones que predicen el corrimiento de la frecuencia de resonancia de la cavidad como función del tamaño y la posición de la muestra a lo largo del eje  $z$  y de las dimensiones de la cavidad. En este capítulo se presentan los resultados experimentales del corrimiento de la frecuencia de resonancia y su comparación con las ecuaciones de:

- Leung 1982, ecuación (4.4).
- Barmatz 1983, ecuación (4.5).
- Rudnick 1990, ecuación (4.3).
- Principio de invariancia adiabática de Boltzmann-Ehrenfest, ecuación (4.14).

### 7.1. Medición del corrimiento de la frecuencia de resonancia

Para obtener las curvas del corrimiento de la frecuencia de resonancia se utilizó el mismo montaje experimental detallado en la sección 5.2. Se midió inicialmente la temperatura y frecuencia de resonancia del modo (002) de la cavidad vacía. Después se introdujo la muestra esférica. Su posición a lo largo del eje  $z$  se ajustó con la varilla de metal. Se consideró la posición del centro de la muestra esférica como la posición de la muestra. Se midió la nueva temperatura y frecuencia de resonancia del sistema con la muestra, se hizo la compensación por el cambio de temperatura (detallado en la sección 6.3) y se calculó el corrimiento de la frecuencia de resonancia utilizando la ecuación (6.4).

Se realizaron mediciones del corrimiento de la frecuencia de resonancia para distintas posiciones de la muestra a lo largo del eje  $z$  de la cavidad. Para reducir los posibles errores en el posicionamiento de la muestra, la medición completa se repitió seis veces para hacer un promedio de ellas.

### 7.1.1. Medición 1

En la primera medición se usó la cavidad 1 y una muestra esférica de diámetro  $d_s = 6.32$  mm, que cumple la condición  $kR \ll 1$ , pues  $kR = 0.2809$ . La separación de la posición de la muestra entre mediciones a lo largo del eje  $z$  fue de 4 mm.

En la figura 7.1 se muestran los resultados experimentales (representados por cuadrados) montados sobre las curvas teóricas (líneas punteadas), que son las gráficas de las ecuaciones del corrimiento. En el eje de las abscisas se grafica la posición normalizada ( $z/l_z$ ) de la muestra; en el eje de las ordenadas, el corrimiento porcentual de la frecuencia de resonancia

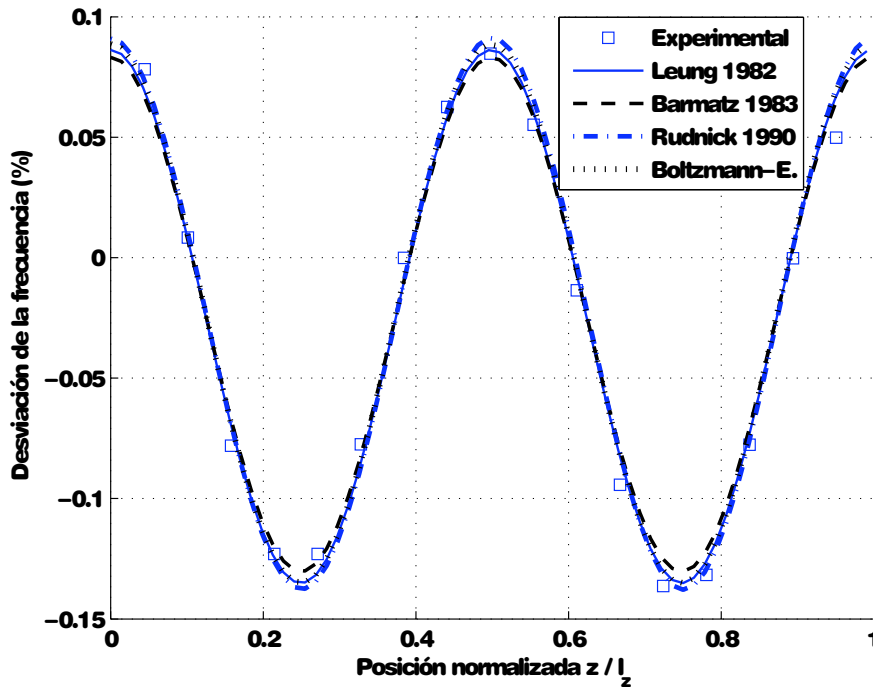


Figura 7.1: Corrimiento de  $f_0$  para una muestra de diámetro  $d_s = 6.32$  mm, comparado con las curvas teóricas.

Para el modo (002) de la cavidad, las posiciones  $z/l_z = 0.25$  y  $0.75$  corresponden a los nodos de presión, las posiciones  $z/l_z = 0, 0.5$  y  $1$  corresponden a los antinodos de presión. Se observa que las cuatro ecuaciones (de Leung, Barnatz, Rudnick y

Boltzmann-Ehrenfest) se ajustan cuantitativamente a los valores obtenidos experimentalmente. Las diferencias entre las cuatro ecuaciones son más notables en los nodos y antinodos, pero ninguna ecuación se aleja significativamente del valor experimental.

### 7.1.2. Medición 2

En la sección 4.1.1 se estableció un límite para las dimensiones de la muestra en función de las dimensiones de la cavidad, esto para el caso de la ecuación (4.5). Se hizo la medición del corrimiento de la frecuencia de resonancia del modo (002) de la *cavidad 1* para comparar las ecuaciones cerca del límite de la condición  $kR \ll 1$ . Se usó una muestra con un diámetro  $d_s = 1.4$  cm. Las relaciones de sus dimensiones son  $A_s/A_c = 0.0760$ ,  $d_s/l_z = 0.1983$  y  $V_s/V_c = 0.01$ . La muestra se encuentra cerca del límite  $V_s/V_c < 0.013$ , y como  $kR = 0.6210$  se compromete la validez de la condición  $kR \ll 1$ .

La separación entre posiciones de la muestra a lo largo del eje  $z$  fue de 4 mm. El resultado se presenta graficado sobre las curvas teóricas en la figura 7.2.

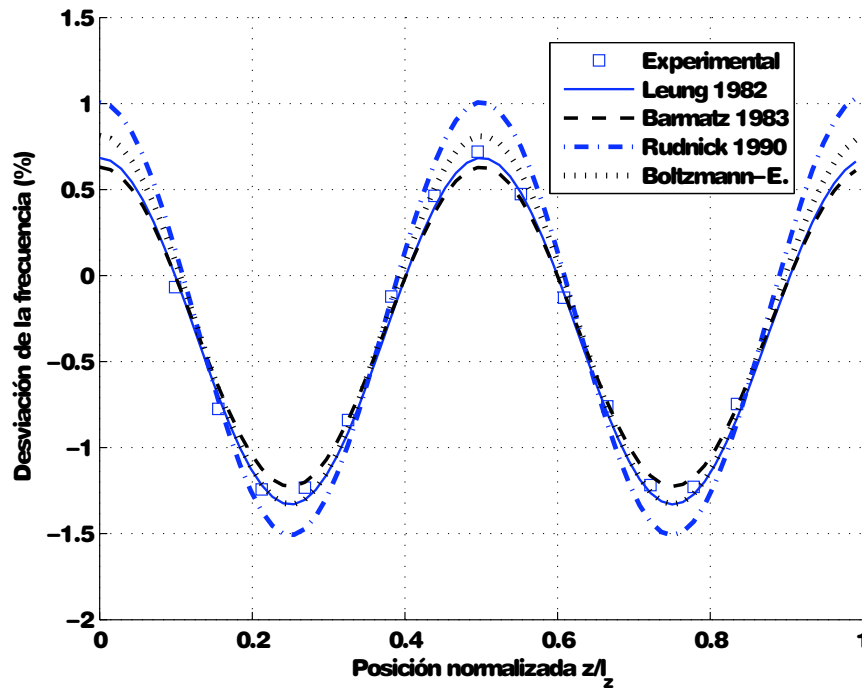


Figura 7.2: Corrimiento de  $f_0$  para una muestra de diámetro  $d_s = 1.4$  mm, comparado con las curvas teóricas.

En este caso se llega a un resultado similar que en el caso anterior, las cuatro ecuaciones predicen cualitativamente el corrimiento, pero en este caso comienzan a ser

evidentes las diferencias cuantitativas, especialmente para la predicción de la ecuación de Rudnick, cuya amplitud diverge más de los valores experimentales. La ecuación de Barmatz, a cuyo límite de validez se acercan las condiciones de la medición, predice un corrimiento cuya amplitud es similar a la observada experimentalmente.

Este resultado comprueba cualitativamente la validez de las cuatro ecuaciones. Sin embargo, cuando se trabaje con muestras cerca del límite de la condición  $kR \ll 1$  debe tenerse en cuenta que la diferencia entre el valor predicho por las ecuaciones y el valor experimental aumenta con las dimensiones de la muestra.

## 7.2. Cavidad con el reflector semiesférico

Las ecuaciones del corrimiento de la frecuencia de resonancia fueron derivadas para cavidades cilíndricas con reflectores planos. Se preparó una medición para comparar el cambio en el corrimiento de la frecuencia de resonancia para la cavidad con terminación semiesférica y la cavidad cilíndrica. No se han reportado estudios sobre este tema en la bibliografía disponible.

Se siguió el mismo procedimiento para medir las curvas del corrimiento que en los dos casos anteriores, pero se utilizó la cavidad 2. Se usó la muestra esférica de diámetro  $d_s = 1.4$  cm. Las mediciones se hicieron variando la posición de la muestra a lo largo del eje  $z$ , cada 3 mm. Se promediaron seis mediciones para disminuir el error en la posición de la muestra.

El resultado de la medición se muestra en la figura 7.3. La línea gruesa punteada en la figura es una representación esquemática de las fronteras (el corte transversal) de la cavidad. Los datos experimentales se comparan con las ecuaciones de Barmatz 1983 y de Boltzmann-Ehrenfest que, como ya se mencionó, se derivaron para cavidades con reflectores planos. En este caso no se utilizara las ecuaciones de Rudnick (ec. 4.3) y de Leung (ec. 4.4). Esto porque tras la medición 2 se observó que la ecuación de Rudnick es menos confiable que las otras; y la ecuación de Leung está implícita en la ecuación de Barmatz (ec. 4.5).

Como se observa en la gráfica, cuando la muestra se encuentra dentro del volumen semiesférico del reflector, el corrimiento de la frecuencia de resonancia es mayor que lo predicho por las ecuaciones. Entre más cercana sea la posición de la muestra a la superficie del reflector, mayor es el corrimiento. Esto podría explicarse si se considera que la relación del diámetro de la muestra entre el diámetro de la cavidad (corte transversal,  $A_s/A_c$ ) tiende a 1 al acercase la muestra al ápice del reflector. Una de las condiciones de la ecuación de Barmatz es que esta relación siempre sea menor a 0.6.

Si la muestra se encuentra en la sección cilíndrica de la cavidad, se observa un desplazamiento de los nodos y antinodos sobre el eje  $z$  generado por la geometría del reflector. Este fenómeno se aprecia claramente en el extremo derecho de la gráfica, donde las curvas teóricas y experimentales están separadas.

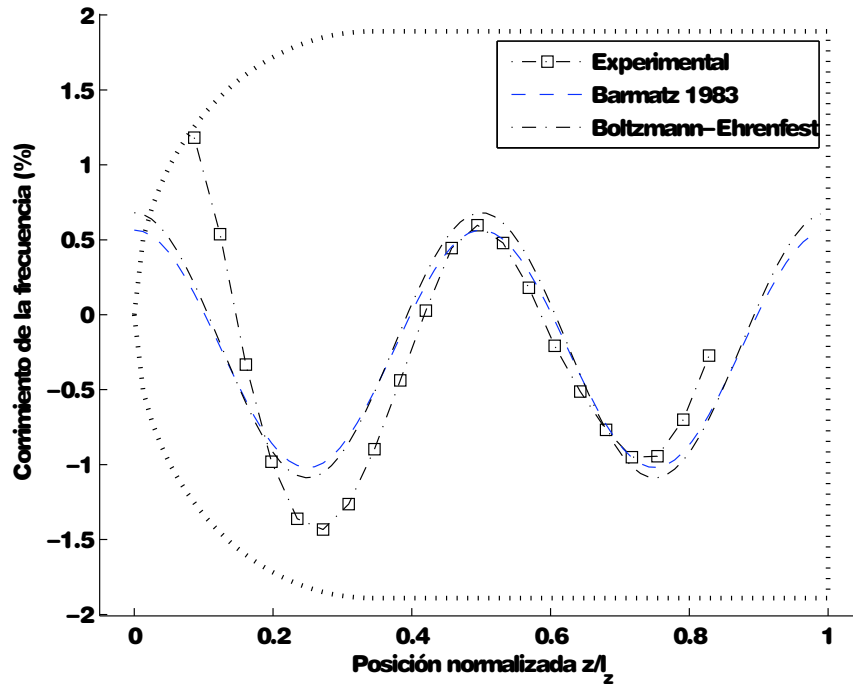


Figura 7.3: Medición del corrimiento con el reflector semiesférico (cavidad 2), comparación con las ecuaciones de Barmatz y Boltzmann-Ehrenfest. La línea punteada representa el corte transversal de la cavidad, se ilustra para relacionar cada punto de las gráficas con las zonas cilíndrica y semiesférica de la cavidad.

## Discusión

El uso de reflectores cóncavos resulta en un mayor control sobre la posición de la muestra dentro del levitador [57] y amplifica la fuerza acústica sobre la muestra [114]. Sin embargo, esta medición mostró que las ecuaciones existentes que predicen el corrimiento de la frecuencia de resonancia de cavidades cilíndricas con reflectores planos no pueden emplearse cuantitativamente para el caso de la cavidad cilíndrica con el reflector semiesférico. Por lo tanto, es necesario desarrollar una nueva ecuación que tome en cuenta la geometría curva del reflector.

# Capítulo 8

## Retraso en la respuesta de la cavidad

La teoría sobre las inestabilidades oscilatorias de las muestras levitadas<sup>1</sup> atribuye la aparición de las inestabilidades al retraso temporal entre el cambio de posición de la muestra y la reacción del campo acústico a dicho cambio. Se midió experimentalmente el retraso temporal como función de las características de la oscilación de la muestra.

La idea central del experimento fue producir un cambio en el sistema (compuesto por la cavidad y la muestra), y medir el tiempo que el campo acústico en la cavidad tardó en reaccionar a dicho cambio. El cambio en el sistema consistió en el movimiento oscilatorio de la muestra a lo largo del eje  $z$  de la cavidad, de la misma forma en que se comportan las muestras durante las inestabilidades [82]. La reacción del sistema es el cambio en la amplitud de la onda estacionaria.

### 8.1. Montaje experimental

Con el montaje experimental, mostrado en la figura 8.1, se puso a oscilar la muestra, en forma senoidal con amplitud y frecuencia controlada, a lo largo del eje del cilindro. Es importante notar que los dos movimientos, la oscilación controlada en este experimento y las inestabilidades oscilatorias, son análogos solamente. No se trata del mismo fenómeno. Sin embargo, no fue posible realizar esta medición directamente sobre las inestabilidades de las muestras levitadas porque no se tiene control sobre ellas.

La muestra, una esfera rígida con un diámetro  $d_s = 1.73$  cm se fijó a la punta de una varilla delgada y rígida que atravesó la tapa reflectora por un orificio. El otro extremo de la varilla se fijó al diafragma de un altavoz de bajas frecuencias. El altavoz se alimentó con una señal senoidal amplificada, produciendo así el movimiento oscilatorio de la muestra en el interior de la cavidad.

---

<sup>1</sup>Ver sección 3.6.



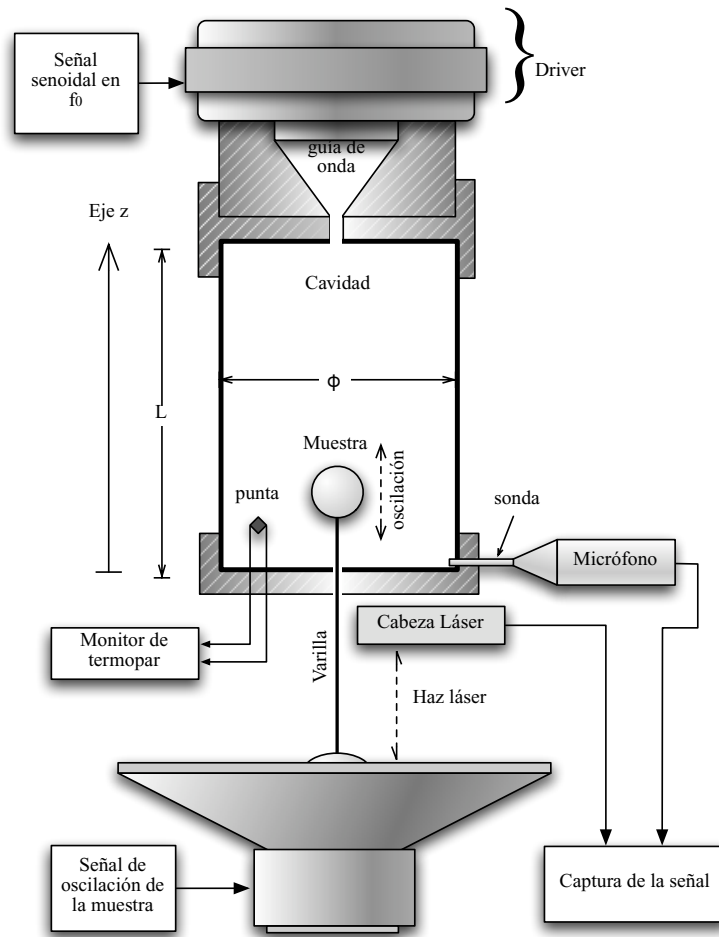


Figura 8.1: Montaje experimental para la medición de la fase de retraso del sistema

El sensor de un *Interferómetro Doppler Láser* (LDI, por sus siglas en inglés) fue montado apuntando a una superficie reflejante en el diafragma del altavoz. De esta forma se obtuvo una señal que describió el movimiento de la muestra. Midiendo la *distorsión armónica total* (THD, por sus siglas en inglés) de esta señal fue posible verificar que la oscilación de la muestra fue senoidal. Por ejemplo, en la frecuencia más baja que se utilizó (0.5 Hz) la THD de la oscilación fue menor a 0.25%. La THD disminuyó aún más al aumentar la frecuencia de la oscilación.

Se utilizó la *cavidad 1*, que fue excitada con la frecuencia de resonancia del modo (002) de la cavidad vacía, compensada por el cambio de temperatura durante la medición. Esta frecuencia de resonancia se midió antes del experimento, resultó ser 4883.5 Hz, a una temperatura ambiente de 23.0 °C. La amplitud del campo de presión acústica dentro de la cavidad fue capturada colocando la sonda del micrófono en el antinodo de presión.

### 8.1.1. Intervalo de medición dentro de la onda estacionaria

El retraso temporal entre el movimiento de la muestra y la respuesta del campo de presión acústica a dicho movimiento se puede medir fácilmente si a cada posición de la muestra a lo largo del eje  $z$  se relaciona una respuesta única del campo acústico. Basta entonces medir en las señales capturadas (la señal de posición de la muestra y la señal de la respuesta de la cavidad) el retraso temporal entre una posición cualquiera de la muestra y la respuesta de la cavidad que le corresponde.

Se buscó una la región comprendida entre el nodo (en  $z/l_z = 0.25$ ) y el antinodo (en  $z/l_z = 0.5$ ) del modo (002) de la cavidad para hacer oscilar la muestra durante la medición. Si la muestra no oscila fuera de esta región, se cumple entonces que a cada punto en la posición de la muestra corresponde una amplitud única en la presión acústica, y por lo tanto el retraso temporal se puede medir. Para comprobar esto último, se hizo una medición de la amplitud del campo acústico como función de la posición de la muestra estática. El resultado se muestra en la figura 8.2, esta respuesta es a la que tiende el sistema cuando la frecuencia de oscilación de la muestra tiende a 0 Hz. En la curva obtenida se observa que para cada valor de amplitud corresponde un valor único de posición.

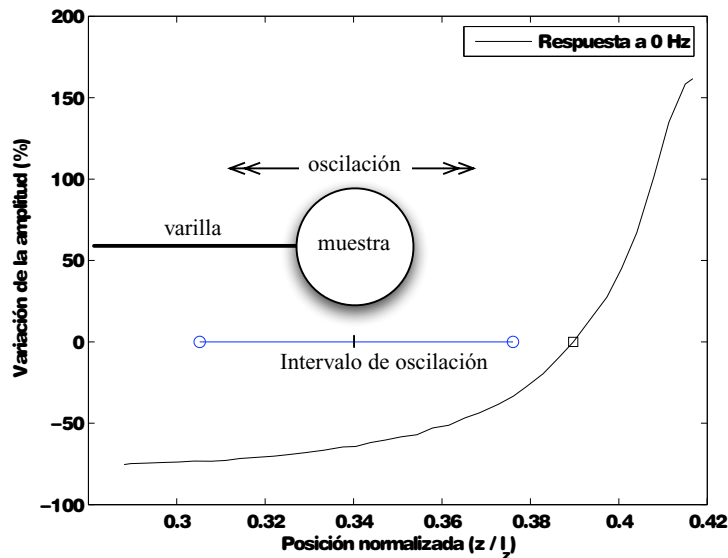


Figura 8.2: Variación de la amplitud del campo acústico como función de la posición de la muestra estática (0 Hz) a lo largo del eje de la cavidad. Se indica el intervalo que se usó para hacer oscilar la muestra en las mediciones del retraso temporal.

Partiendo de este resultado, se seleccionó finalmente la posición  $z/l_z = 0.3406$  como el punto central para las oscilaciones de la muestra, que estuvieron limitadas dentro del

intervalo  $[0.3052, 0.3761]$  mostrado en la figura 8.2. Este intervalo corresponde a una amplitud pico-pico de oscilación de 5 mm.

### 8.1.2. Procesamiento de las señales

En la figura 8.3 se muestra un ejemplo de las señales capturadas. La señal del LDI (gráfica superior) indica la posición de la muestra alrededor del punto inicial. La envolvente de la señal del micrófono (gráfica inferior) es la amplitud del campo acústico.

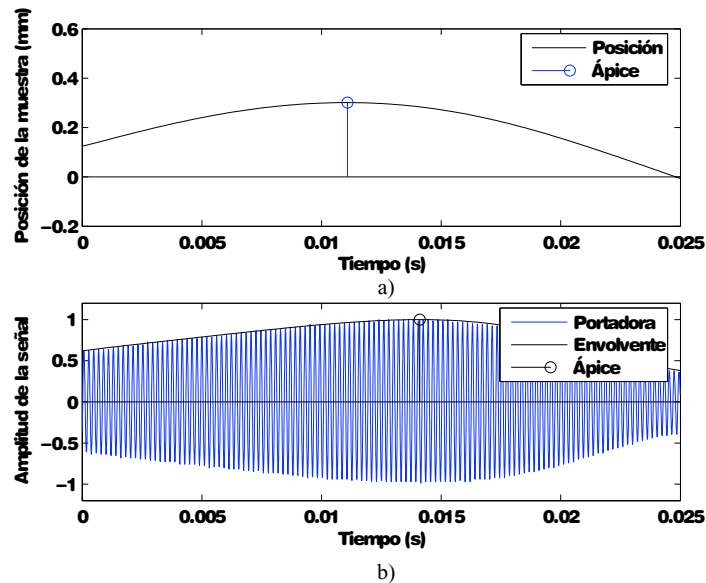


Figura 8.3: Ejemplo del análisis de la señal: a) señal de posición de la muestra; b) respuesta de la cavidad. El retraso temporal es la diferencia entre los ápices de las dos curvas.

Como a cada posición de la muestra corresponde una amplitud única en la respuesta de la cavidad, al hacer oscilar la muestra, la amplitud del campo acústico también oscila, pero está retrasada temporalmente. El tiempo de retraso es la diferencia entre el instante en el que la muestra alcanza la posición más alta de su recorrido (el ápice en la gráfica superior) y el instante en el cual la cavidad reacciona a dicho suceso (el ápice en la gráfica inferior).

Las señales se analizaron en la computadora. Para calcular la envolvente de la señal del micrófono, se calculó su valor medio cuadrático (RMS, por sus siglas en inglés) *instantáneo*,<sup>2</sup> se normalizó y posteriormente se interpoló para recuperar su resolución temporal. Se hizo un programa con el que se ubica la posición en el tiempo del ápice de

<sup>2</sup>La señal se dividió en segmentos y para cada uno se calculó el valor RMS para cada bloque, que es un valor representativo del *instante* de cada segmento.

ambas señales para medir la diferencia temporal. El tiempo de retraso que se obtuvo se convirtió a fase de retraso relativo al periodo  $\tau$  de la oscilación de la muestra.

Se hicieron mediciones con diferentes amplitudes y frecuencias de oscilación de la muestra. Los resultados se presentan en las siguientes secciones.

## 8.2. Retraso como función de la frecuencia de oscilación

Se hizo una medición del retraso en fase de la reacción de la cavidad como función de la frecuencia de oscilación de la muestra. La amplitud de la oscilación de la muestra se fijó en 5 mm pico-pico y la frecuencia se varió desde 1 Hz hasta 20 Hz. Este intervalo de frecuencias suele ser el mismo en el que se presentan las inestabilidades oscilatorias. No fue posible medir por debajo de 1 Hz debido a la respuesta en frecuencia del amplificador de audio empleado, que deja de funcionar debajo de esta frecuencia para evitar *corto circuito*. Tampoco se pudo trabajar a frecuencias mayores a 40 Hz, pues la señal envolvente pierde el perfil senoidal, necesario para hacer el análisis.

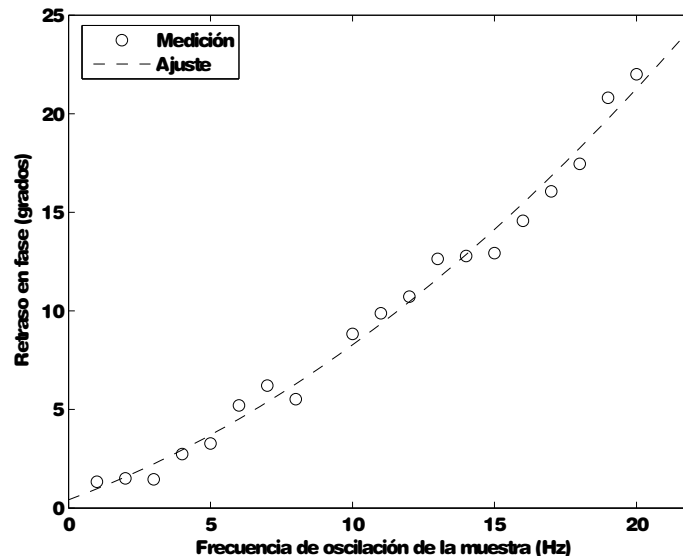


Figura 8.4: Retraso en fase como función de la frecuencia de oscilación de la muestra.

Los datos obtenidos se muestran en la figura 8.4, donde se grafica el retraso en fase (en grados) como función de la frecuencia de oscilación de la muestra. Se observa que el retraso aumenta con la frecuencia. Los datos obtenidos en la medición se ajustaron

al polinomio de segundo orden

$$y = 0.0257x^2 + 0.5285x + 0.4211 \quad (8.1)$$

que se muestra en la figura 8.4 con una línea punteada. Si se convierte este retraso en fase a retraso en unidades de tiempo, el retraso se convierte a una función lineal. Para las más bajas frecuencias (debajo de 10 Hz), el coeficiente con mayor peso del polinomio es el término lineal. En tal caso el comportamiento del retraso en fase como función de la frecuencia de oscilación de la muestra puede simplificarse a una función lineal con pendiente  $m = 0.5285$ .

### 8.3. Retraso como función de la amplitud de oscilación

Se hizo una medición del retraso en fase de la respuesta de la cavidad como función de la amplitud de oscilación de la muestra. La frecuencia de oscilación se fijó en 20 Hz. Estos datos fueron obtenidos al medir la fase de retraso para diferentes amplitudes de oscilación de la muestra desde 0.5 mm pico-pico hasta 5 mm pico-pico con pasos de 0.25 mm.

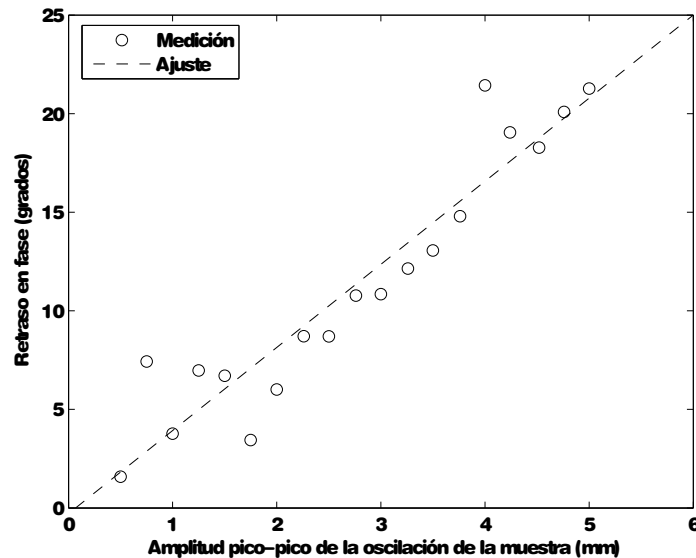


Figura 8.5: Retraso en fase como función de la amplitud de oscilación de la muestra a una frecuencia fija de 20 Hz.

Los datos obtenidos se muestran en la figura 8.5, donde se grafica el retraso en fase (en grados) en función de la amplitud pico-pico de la oscilación de la muestra.

Para pequeñas amplitudes de oscilación, la variación de la amplitud de respuesta de la cavidad es poca y, por lo tanto, difícil de medir pues la precisión disminuye. Esto explica la dispersión de los datos en la gráfica. A pesar de esto, el comportamiento de la fase de retraso es claro, aumenta en forma proporcional con la amplitud de la oscilación. Como se tiene una oscilación con frecuencia constante, al aumentar la amplitud de oscilación aumentan el recorrido de la muestra y por lo tanto la velocidad de la misma.

Al aplicar un ajuste lineal de mínimos cuadrados se obtuvo una función lineal con pendiente positiva  $m = 4.21$  que se muestra en la gráfica como una línea punteada.

## 8.4. Análisis

En su teoría sobre las inestabilidades oscilatorias de las muestras levitadas,<sup>3</sup> Rudnick [82] explica las inestabilidades partiendo de que existe un retraso temporal entre los cambios de posición de la muestra y la reacción del campo acústico a dichos cambios. Rudnick derivó una ecuación de la fuerza acústica en donde aparece un término que es función lineal de la velocidad de la muestra.

Con el experimento que se presentó en este capítulo se comprobó la existencia de este retraso temporal entre los cambios de posición de la muestra y la reacción del campo acústico a dichos cambios. Este retraso es función de la velocidad de oscilación de la muestra. Queda pendiente, para estudios posteriores, el análisis de la relación entre los resultados de esta medición y la componente de la fuerza acústica que aparece en la teoría de Rudnick, quien omite estudiar la naturaleza del retraso temporal, y por lo tanto, no predice el resultado de esta medición.

---

<sup>3</sup>Ver sec. 3.6

# Discusión

En esta sección se analiza el alcance y las implicaciones de los resultados obtenidos en este trabajo.

## Sobre la levitación acústica

Aunque las aplicaciones potenciales de la levitación acústica (detalladas en la sección 2.9) son numerosas como herramienta de laboratorio, su uso no se ha extendido. Esto se debe en parte a que los efectos físicos de la presencia de las muestras en los sistemas de levitación acústica no han sido completamente entendidos. Los efectos que fueron estudiados en esta investigación fueron la dispersión de la onda acústica y el corrimiento de la frecuencia de resonancia de la cavidad debidos a la presencia de la muestra, además del retraso temporal entre el movimiento de la muestra y la respuesta del campo acústico a dicho movimiento; también se estudió la fuerza que produce la onda sobre la muestra y los efectos de la temperatura en el sistema. Estos efectos se analizaron únicamente para el caso de cavidades cilíndricas y muestras esféricas rígidas. Pero aún hay fenómenos que deben comprenderse mejor, como es el caso de las inestabilidades oscilatorias de las muestras levitadas.

Por otro lado, un par de detalles sobre la levitación acústica deben tenerse en consideración. En la sección 3.4 se realizó un cálculo del nivel de presión sonora requerido por una onda acústica de 3.5 KHz para levitar una muestra esférica de un centímetro de diámetro y masa de un gramo en presencia de la fuerza de gravedad. El nivel resultante, de 172.38 dB ref. 20  $\mu$ Pa SPL, tiene un inconveniente; sobrepasa el umbral del dolor humano que es del orden de 120 dB ref. 20  $\mu$ Pa SPL, por lo que al excitar estos niveles de presión debe trabajarse con cavidades cerradas para atenuar y proteger los oídos de las personas cercanas al sistema; o bien trabajar con frecuencias en el ultrasonido que no son audibles y por lo tanto no producen dolor.

Una de las condiciones con las que se trabajó es que la longitud de la onda estacionaria debe ser mucho mayor que las dimensiones de la muestra. A temperatura ambiente la longitud de onda de un tono ultrasónico es siempre menor a 17 cm. Si se requiere levitar muestras mayores a unos cuantos centímetros deben usarse ondas sonoras, para muestras pequeñas basta con el ultrasonido.

---

## Trabajos posteriores

Durante el transcurso de esta investigación surgieron interrogantes, problemas e ideas que no fue posible explorar. Se mencionan en este apartado para su consideración en investigaciones futuras.

Se trabajó con muestras esféricas rígidas y cavidades cilíndricas con reflectores planos excitados solamente en un modo axial. Es necesario extender el estudio de los efectos físicos en los sistemas de levitación para el caso de muestras de diferente geometría y rigidez, y cavidades con distinta geometría. Particularmente interesante es el caso de las cavidades con reflectores semiesféricos porque al usar estos reflectores la fuerza acústica y el control sobre la posición de la muestra aumentan.

El principio de invariancia adiabática de Boltzmann-Ehrenfest (sección 4.2) utilizado en este trabajo para derivar una nueva ecuación del corrimiento de la frecuencia de resonancia de la cavidad cilíndrica con una muestra esférica puede emplearse para derivar la ecuación del corrimiento para el caso de cavidades y muestras con distinta geometría. Sin embargo, el procedimiento no es sencillo. Es necesario conocer la expresión analítica de la fuerza acústica sobre la superficie de la muestra y la energía de la onda estacionaria.

Finalmente, el método de compensación por los cambios de temperatura es válido solamente para los modos  $(00n_z)$ . Para los casos en los que existan zonas de diferente temperatura dentro del sistema, como sería el caso de una muestra de metal derretido, es necesario estudiar los gradientes de temperatura que se presenten y desarrollar un nuevo método de medición y compensación por los cambios de temperatura.



# Conclusiones

- La frecuencia de resonancia de la cavidad es función lineal de la temperatura del medio. Cuando sea necesario comparar mediciones de la frecuencia de resonancia realizadas bajo diferentes temperaturas, es posible hacer una compensación.
- En el interior de una cavidad pequeña (del orden de centímetros) y a temperatura ambiente, no existe un gradiente de temperatura apreciable (esto es, no existe un gradiente mayor a una décima de grado centígrado) por lo que una sola medición de la temperatura realizada en cualquier posición dentro de la cavidad es representativa de la temperatura de todo el sistema.
- Se compararon con resultados experimentales las ecuaciones que predicen el corrimiento de la frecuencia de resonancia de la cavidad en función de las dimensiones y la posición de la muestra en su interior. Las ecuaciones consideradas fueron las de Leung 1982 (ec. 4.4), Barmatz 1983 (ec. 4.5), Rudnick 1990 (ec. 4.3), y la nueva ecuación que se derivó en este trabajo a partir del principio de invarianza adiabática de Boltzmann-Ehrenfest (ec. 4.14). Estas son válidas siempre que las dimensiones de la cavidad y la muestra se encuentren dentro de los límites establecidos:  $d_s/l_z < 0.4$ ,  $A_s/A_c < 0.6$ ,  $V_s/V_c < 0.013$  (sección 4.1.1).
- Existe un retraso entre los cambios de posición de la muestra y la reacción del campo acústico de la cavidad a dicho movimiento. Fue posible medir ese retraso, que es análogo al que se presenta en el sistema cuando ocurren inestabilidades oscilatorias de la muestra a lo largo del eje de la cavidad. El retraso (expresado como fase de retraso relativa al periodo de oscilación de la muestra) es función lineal de la amplitud de la oscilación; también es función cuadrática de la frecuencia de oscilación de la muestra, y esta puede aproximarse a una función lineal para frecuencias muy bajas (menores a 10 Hz). Esto es válido para el caso estudiado experimentalmente.

# Bibliografía

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1965.
- [2] A. V. Anilkumar, C. P. Lee, and T. G. Wang. Stability of an acoustically levitated and flattened drop: An experimental study. *Phys. Fluids A*, 5(11):2763–2774, November 1993.
- [3] M. Barmatz, J. L. Allen, and M. Gaspar. Experimental investigation of the scattering effects of a sphere in a cylindrical resonant chamber. *J. Acoust. Soc. Am.*, 73(3):725–732, March 1983.
- [4] M. Barmatz and P. Collas. Acoustic radiation potential on a sphere in plane, cylindrical, and spherical standing wave fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(3):928–945, March 1985.
- [5] S. Bauerecker and B. Neidhart. Formation and growth of ice particles in stationary ultrasonic fields. *Journal of Chemical Physics*, 109(10):3709–3712, September 1998.
- [6] K. Beissner. The acoustic radiation force in lossless fluids in eulerian and lagrangian coordinates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103(5):2321–2332, May 1998.
- [7] L. L. Beranek. *Acústica*. Editorial Hispano Americana S.A., 2nd. edition, 1969.
- [8] A. Biswas, E. Leung, and E. H. Trinh. Rotation of ultrasonically levitated glycerol drops. *J. Acoust. Soc. Am.*, 90(3):1502–1507, September 1991.
- [9] F. Busse and T. Wang. Viscous acoustic torques on a levitating body. *J. Acoust. Soc. Am.*, 72(6):2036–2037, December 1982.
- [10] F. H. Busse and T. G. Wang. Torque generated by orthogonal acoustic waves - theory. *J. Acoust. Soc. Am.*, 69(6):1634–1638, June 1981.
- [11] Y. Cao, W. Xie, J. Sun, B. Wei, and S. Lin. Preparation of epoxy blends with nanoparticles by acoustic levitation technique. *Journal of Applied Polymer Science*, 86:84–89, 2002.
- [12] X. Chen, T. Shi, Y. Tian, J. Jankovsky, R. G. Holt, and R. E. Apfel. Numerical simulations of superoscillations of a triton-bearing drop in microgravity. *J. Fluid Mech.*, 367:205–220, 1998.
- [13] L. A. Crum. Acoustic force on a liquid droplet in an acoustic stationary wave. *J. Acoust. Soc. Am.*, 50(1):157–163, 1971.
- [14] F. L. Curzon and D. Plant. Using perturbed resonant frequencies to study eigenmodes of an acoustic resonator. *American Journal of Physics*, 54(4):367–372, April 1986.
- [15] A. A. Doinikov. Theory of acoustic radiation pressure for actual fluids. *Physical Review E*, 54(6):6297–6303, December 1996.
- [16] M. El-Raheb and P. Wagner. Acoustic propagation in rigid ducts with blockage. *J. Acoust. Soc. Am.*, 72(3):1046–1055, September 1982.
- [17] T. F. W. Embleton. Mean force on a sphere in a spherical sound field. i. (theoretical).

- J. Acoust. Soc. Am.*, 26(1):40–45, January 1954.
- [18] T. F. W. Embleton. Mean force on a sphere in a spherical sound field. ii. (experimental). *J. Acoust. Soc. Am.*, 26(1):46–50, January 1954.
- [19] C. Esen, T. Weigel, V. Sprynchak, and G. Schweiger. Raman spectroscopy on deformed droplets: theory and experiment. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 89:79–85, 2004.
- [20] T. Gaida, O. Doblhoff-Dier, and K. Strutzenberger. Selective retention of viable cells in ultrasonic resonance field devices. *Biotechnol. Prog.*, 12:73–76, 1996.
- [21] J. R. Gao, C. D. Cao, and B. Wei. Containerless processing of materials by acoustic levitation. *Adv. Space Res.*, 24(10):1293–1297, 1999.
- [22] S. L. Garrett and M. Barmatz. Detuning/dephasing instabilities in acoustic levitation and rayleigh disk systems. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(S1):S21, April 1985.
- [23] S. L. Garrett and M. Barmatz. Erratum: Detuning/dephasing instabilities in acoustic levitation and rayleigh disk systems. *J. Acoust. Soc. Am.*, 78(1):268, July 1985.
- [24] L. Gherardini, C. M. Cousins, J. J. Hawkes, J. Spengler, S. Radel, H. Lawler, B. Devcic-Kuhar, M. Gröschl, W. T. Coakley, and A. J. McLoughlin. A new immobilisation method to arrange particles in a gel matrix by ultrasound standing wave. *Ultrasound in Med. and Biol.*, 31(2):261–272, 2005.
- [25] L. P. Gor'kov. On the forces acting on a small particle in an acoustical field in an ideal fluid. *Soviet Physics - Doklady*, 6(9):773–775, March 1962.
- [26] M. Gröschl. Ultrasonic separation of suspended particles - part 1: Fundamentals. *ACUSTICA - acta acustica*, 84:432–447, 1998.
- [27] M. T. Grossner, A. E. Penrod, J. M. Belovich, and D. L. Feke. Single fiber model of particle retention in an acoustically driven porous mesh. *Ultrasonics*, 41:65–74, 2003.
- [28] M. A. Grundy, W. E. Bolek, W. T. Coakley, and E. Benes. Rapid agglutination testing in an ultrasonic standing wave. *J. Immunol. Methods*, 165:47–57, 1993.
- [29] Y. Hashimoto, Y. Koike, and S. Ueha. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103:3230, 1998.
- [30] D. Haydock. Calculation of the radiation force on a cylinder in a standing wave acoustic field. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38:3279–3285, March 2005.
- [31] D. Haydock. Lattice boltzmann simulations of the time-averaged forces on a cylinder in a sound field. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38:3265–3277, March 2005.
- [32] R. G. Holt, Y. Tian, J. Jankovsky, and R. E. Apfel. Surface-controlled drop oscillations in space. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(6):3802–3805, December 1997.
- [33] J. Hu, K. Nakamura, and S. Ueha. Stability analysis of an acoustically - levitated disk. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 50(2):117–127, February 2003.
- [34] T. Idea, J. R. Friend, K. Nakamura, and S. Ueha. A low-profile design for the noncontact ultrasonically levitated stage. *Japanese Journal of Applied Physics*, 44(6B):4662–4665, 2005.
- [35] Y. Ikegami. Development of an acoustic levitation device with a mirror furnace. In *4th European Symposium on Material Science under Microgravity*, April 1983.
- [36] H. W. Jackson, M. Barmatz, and C. Shipley. Equilibrium shape and location of a liquid drop acoustically positioned in a resonant rectangular chamber. *J. Acoust. Soc. Am.*, 84(5):1845–1862, November 1988.

- 
- [37] A. Kavouras and G. Krammer. Ultrasonic levitation for the examination of gas/solid reactions. *Review of Scientific Instruments*, 74(10):4468–4473, October 2003.
- [38] J. B. Keller. Acoustic torques and forces on disks. *J. Acoust. Soc. Am.*, 29(10):1085–1090, 1957.
- [39] L. V. King. On the acoustic radiation pressure on spheres. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 147:212, 1934.
- [40] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, and J. V. Sanders. *Fundamentos de acústica*. Limusa Noriega, primera edición edition, 1990.
- [41] E. Klein. *J. Acoust. Soc. Am.*, 9:312, 1938.
- [42] T. Kozuda, T. Tuziuti, H. Mitome, and T. Fukuda. Micromanipulation using a focused ultrasonic standing wave field. *Electronics and Communications in Japan*, 83(1):53–60, 2000.
- [43] T. Kozuda, K. Yasui, T. Tuziuti, A. Towata, and Y. Iida. Noncontact acoustic manipulation in air. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 46(7B):4948–4950, July 2007.
- [44] A. Kundt. Ueber eine neue art akustischer staubfiguren und über die anwendung derselben zur bestimmung der schallgeschwindigkeit in festen körpern and gasen. *Annal. Phys*, 127:497, 1866.
- [45] C. P. Lee, A. V. Anilkumar, A. B. Hmelo, and T. G. Wang. Equilibrium of liquid drops under the effects of rotation and acoustic flattening : results from usml-2 experiments in space. *J. Fluid. Mech*, 354:43–67, 1998.
- [46] C. P. Lee, A. V. Anilkumar, and T. G. Wang. Static shape and instability of an acoustically levitated liquid drop. *Phys. Fluids A*, 3(11):2497–2515, November 1991.
- [47] C. P. Lee, A. V. Anilkumar, and T. G. Wang. Static shape of an acoustically levitated drop with wave-drop interaction. *Phys. Fluids*, 6(11):3554–3566, November 1994.
- [48] C. P. Lee and T. G. Wang. Acoustic radiation potential on a small sphere due to two orthogonal standing waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, 83(6):2459–2461, June 1988.
- [49] C. P. Lee and T. G. Wang. Acoustic radiation pressure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(2):1099–1109, August 1993.
- [50] J. Lee, K. Ha, and K. K. Shung. A theoretical study of the feasibility of acoustical tweezers: Ray acoustics approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117(5):3273–3280, May 2005.
- [51] N. Leopold, M. Haberkorn, T. Laurell, J. Nilsson, J. R. Baena, J. Frank, and B. Lendl. On-line monitoring of airborne chemistry in levitated nanodroplets: In situ synthesis and application of sers-active ag-sols for trace analysis by ft-raman spectroscopy. *Analytical Chemistry*, 75(9):2166–2171, May 2003.
- [52] E. Leung, N. Jacobi, and T. Wang. Acoustic radiation force on a rigid sphere in a resonance chamber. *J. Acoust. Soc. Am.*, 70(6):1762–1767, December 1981.
- [53] E. Leung, C. P. Lee, N. Jacobi, and T. G. Wang. Resonance frequency shift of an acoustic chamber containing a rigid sphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, 72(2):615–620, August 1982.
- [54] E. W. Leung and T. G. Wang. Force on a heated sphere in a horizontal plane acoustic standing wave field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(5):1686–1691, May 1985.
- [55] M. Li, K. Nagashio, and K. Kuribayashi. On occurrence of multiple-site crystallization in undercooled mullite melts. *Scripta Materialia*, 45:1431–1437, 2001.
- [56] E. G. Lierke. Study on positioning and stirring of molten materials in zero gravity environments by ultrasonic methods. *ESRO contract report No. SC/39/40*, 1974.

- [57] E. G. Lierke. Deformation and displacement of liquid drops in an optimized acoustic standing wave levitator. *Acta Acustica united with Acustica*, 88:206–217, 2002.
- [58] E. G. Lierke and R. Großbach. Study on positioning of molten material in zero gravity environments by ultrasonic methods -phase ii. *ESA contract No. SC/67/HG*, 1975.
- [59] E. G. Lierke, R. Grossbach, K. Flögel, and P. Clancy. Acoustic positioning for space processing of materials science samples in mirror furnaces. In *1983 Ultrasonics Symposium*, pages 1129–1139, 1983.
- [60] E. G. Lierke, R. Großbach, and W. Heide. Entwicklung, bau und erprobung einer einrichtung zum berührungslosen halten und vereinigens von metallkugeln. *DFVLR-Report o1 QV 455-V-22 SNL 7751-B4*, 1976.
- [61] E. G. Lierke, R. Großbach, and W. Heide. Untersuchungen zur akustischen positionierung im hinblick auf funktionstests im rahmen des raketenprogramms texus und der späteren anwendung im wv-labor. *DFVLR-Report o1QV-247/AK/SN/A SLN 7761 I.1.24*, September 1977.
- [62] H.-L. Lu and R. E. Apfel. *J. Fluid. Mech.*, 222:351–368, 1991.
- [63] G. Maidanik. Torques due to acoustical radiation pressure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 30(7):620–623, July 1958.
- [64] P. L. Marston. Shape oscillation and static deformation of drops and bubbles driven by modulated radiation stress-theory. *J. Acoust. Soc. Am.*, 67(1):15–26, January 1980.
- [65] T. Matsui, E. Ohdaira, N. Masuzawa, and M. Ide. Translation of an object using phase-controlled sound sources in acoustic levitation. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 34(5B):2771–2773, May 1995.
- [66] J. G. McDaniel and R. G. Holt. Measurement of aqueous foam rheology by acoustic levitation. *Physical Review E*, 61(3):R2204–R2207, March 2000.
- [67] C. C. McDonough. *Application of the Boltzmann-Ehrenfest Principle of Adiabatic Invariance to Microwave Resonant Modes*. PhD thesis, UNIVERSITY OF CALIFORNIA, LOS ANGELES, 1994.
- [68] C. A. Miles, M. J. Morley, H. W. R., and B. M. Mackey. Principles of separating micro-organism from suspensions using ultrasound. *J. Appl. Bacteriol.*, 78:47–54, 1995.
- [69] S. L. Min, R. G. Holt, and R. E. Apfel. Simulation of drop dynamics in an acoustic positioning chamber. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91(6):3157–3165, June 1992.
- [70] P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*, volume 2, pages 1038–1064, 1166, 1466. McGraw-Hill, 1953.
- [71] K. Nagashio and K. Kuribayashi. Rapid solidification of  $\gamma$ -Fe<sub>3</sub>Al<sub>5</sub>O<sub>12</sub> garnet from hypercooled melt. *Acta materialia*, 49:1947–1955, 2001.
- [72] W. L. Nyborg. Acoustic streaming equations: Laws of rotational motion for fluid elements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 25(5):938–944, September 1953.
- [73] W. L. Nyborg. Radiation pressure on a small rigid sphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, 42(5):947–952, 1967.
- [74] K. Ohsaka. An experimental study on resonance of oscillating air/vapor bubbles in water using a two-frequency acoustic apparatus. *Phys. Fluids*, 15(5):1189–1195, 2003.
- [75] K. Ohsaka, A. Rednikov, and S. S. Sadhal. Noncontact technique for determining the thermal diffusivity coefficient on acoustically levitated liquid drops. *Review of Scientific Instruments*, 74(2):1107–1112, February 2003.

- [76] S. Putterman, J. Rudnick, and M. Barmatz. Acoustic levitation and the boltzmann–ehrenfest principle. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(1):68–71, January 1989.
- [77] L. Rayleigh. On the pressure of vibrations. *Phil. Mag.*, 3:338–346, 1902.
- [78] L. Rayleigh. On the momentum and pressure of gaseous vibrations, and on the connexion with the virial problem. *Phil. Mag.*, 10:364–374, 1905.
- [79] J. L. Robey, E. H. Trinh, and T. G. Wang. Acoustic force measurement in a dual-temperature resonant chamber. *J. Acoust. Soc. Am.*, 82(3):1039–1044, September 1987.
- [80] J. A. Rooney and W. L. Nyborg. Acoustic radiation pressure in a traveling plane wave. *AJP*, 40:1825–1830, December 1972.
- [81] B. Ross. The influence of wall resonances on the levitation of objects in a single-axis acoustic processing chamber. *NASA Techn. Memorandum*, 1980.
- [82] J. Rudnick and M. Barmatz. Oscillational instabilities in single-mode acoustic levitators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 87(1):81–92, January 1990.
- [83] S. Santesson, J. Johansson, L. S. Taylor, I. Levander, S. Fox, M. Sepaniak, and S. Nilsson. Airborne chemistry coupled to raman spectroscopy. *Analytical Chemistry*, 75(9):2177–2180, May 2003.
- [84] T. Shi and R. E. Apfel. Oscillations of a deformed liquid drop in an acoustic field. *Phys. Fluids*, 7(7):1545–1552, July 1995.
- [85] W. T. Shi and R. E. Apfel. Deformation and position of acoustically levitated liquid drops. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(4):1977–1984, April 1996.
- [86] W. T. Shi, R. E. Apfel, and R. G. Holt. Instability of a deformed liquid drop in an acoustic field. *Phys. Fluids*, 7(11):2601–2607, November 1995.
- [87] M. E. Smith, T. W. Moore, and H. W. Nicholson jr. Wave phenomena in an acoustic resonant chamber. *American Journal of Physics*, 42(2):131–136, February 1974.
- [88] J. F. Spengler and W. T. Coakley. Ultrasonic trap to monitor morphology and stability of developing microparticle aggregates. *Langmuir*, 19:3635–3642, 2003.
- [89] P. V. R. Suryanarayana and Y. Bayazitoglu. Effect of static deformation and external forces on the oscillation of levitated droplets. *Phys. Fluids A*, 3(5):967–977, May 1991.
- [90] Y. Tian, R. G. Holt, and R. E. Apfel. Deformation and location of an acoustically levitated liquid drop. *J. Acoust. Soc. Am.*, 93(6):3096–3104, June 1993.
- [91] Y. Tian, R. G. Holt, and R. E. Apfel. Investigation of liquid surface rheology of surfactant solutions by droplet shape oscillations: Experiments. *Journal of Colloid and Interface Science*, 187:1–10, 1997.
- [92] Y. Tian, J. A. Ketterling, and R. E. Apfel. Direct observation of microbubble oscillations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100(6):3976–3978, December 1996.
- [93] G. R. Torr. The acoustic radiation force. *Am. J. Phys.*, 52(5):402–408, May 1984.
- [94] F. Trampl, S. A. Sonderhoff, P. W. S. Pui, D. G. Kilburn, and J. M. Piret. Acoustic cell filter for high density perfusion culture of hybridoma cells. *Bio-Technology*, 12:281–284, 1994.
- [95] E. Trinh, J. Robey, N. Jacobi, and T. Wang. Dual-temperature acoustic levitation and sample transport apparatus. *J. Acoust. Soc. Am.*, 79(3):604–612, March 1986.
- [96] E. H. Trinh, R. G. Holt, and D. B. Thiesen. The dynamics of ultrasonically levitated drops in an electric field. *Phys. Fluids*, 8(1):43–61, January 1996.

- [97] E. H. Trinh and C. J. Hsu. Acoustic levitation methods for density measurements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 80(6):1757–1761, December 1986.
- [98] E. H. Trinh and C.-J. Hsu. Equilibrium shapes of acoustically levitated drops. *J. Acoust. Soc. Am.*, 79(5):1335–1338, May 1986.
- [99] E. H. Trinh, A. Zwern, and T. G. Wang. An experimental study of small-amplitude drop oscillations in immiscible liquid systems. *J. Fluid. Mech.*, 115:453–474, 1982.
- [100] S. Ueha, Y. Hashimoto, and Y. Koike. *Ultrasonics*, 38:26, 2000.
- [101] T. G. Wang. Acoustic levitation and manipulation for space application. *IEEE, Ultrasonic Symposium Proceedings*, 1979.
- [102] T. G. Wang, A. V. Anilkumar, and C. P. Lee. Oscillations of liquid drops: results from usml-1 experiments in space. *J. Fluid. Mech.*, 308:1–14, 1996.
- [103] T. G. Wang, A. V. Anilkumar, C. P. Lee, and K. C. Lin. Bifurcation of rotating liquid drops: results from usml-1 experiments in space. *J. Fluid Mech.*, 276:389–403, 1994.
- [104] T. G. Wang, H. Kanber, and E. E. Olli. Fourth-order acoustic torque in intense sound fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 63(5):1332–1334, May 1978.
- [105] T. G. Wang, H. Kanber, and I. Rudnick. (errata) first-order torques and solid-body spinning velocities in intense sound fields. *Physical Review Letters*, 38(128):1101, May 1977.
- [106] T. G. Wang, H. Kanber, and I. Rudnick. First-order torques and solid-body spinning velocities in intense sound fields. *Physical Review Letters*, 38(3):128–130, January 1977.
- [107] T. G. Wang and C. P. Lee. *Nonlinear Acoustics*, chapter Radiation Pressure and Acoustic Levitation, pages 177–205. Academic Press, 1998.
- [108] T. G. Wang, M. M. Saffren, and D. D. Elleman. Acoustic chamber for space processing. *AIAA*, (74-155), 1974.
- [109] T. G. Wang, E. H. Trinh, A. P. Croonquist, and D. D. Elleman. Shapes of rotating free drops: Spacelab experimental results. *Physical Review Letters*, 56(5):452–455, February 1986.
- [110] P. J. Westervelt. The theory of steady forces caused by sound waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, 23(4):312–315, May 1951.
- [111] J. Wu. Acoustical tweezers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(5):2140–2143, May 1991.
- [112] W. J. Xie, C. D. Cao, Y. J. Lü, Z. Y. Hong, and B. Wei. Acoustic method for levitation of small living animals. *Applied Physics Letters*, 89(214102), 2006.
- [113] W. J. Xie, C. D. Cao, Y. J. Lü, and B. Wei. Levitation of iridium and liquid mercury by ultrasound. *Physical Review Letters*, 89(10), September 2002.
- [114] W. J. Xie and B. Wei. Parametric study of single-axis acoustic levitation. *Applied Physics Letters*, 79(6):881–883, August 2001.
- [115] W.-J. Xie and B.-B. Wei. Resonance shift of single-axis acoustic levitation. *Chinese Physics Letters*, 24(1):135–138, 2007.
- [116] K. Yosioka and K. Kawasima. Acoustic radiation pressure on a compressible sphere. *Acustica*, 5:167, 1955.
- [117] X. Zheng and R. E. Apfel. Acoustic interaction forces between two fluid spheres in an acoustic field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97(4):2218–2226, April 1995.
- [118] C. Zhuyou, L. Shuqin, L. Zhimin, G. Mingli, M. Yulong, and W. Chenghao. Development of an acoustic levitation reactor. *Powder Technology*, 69(2):125–131, February 1992.