



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

# **Rediseño de Dedo Protésico**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero Mecatrónico**

**P R E S E N T A**

Miguel Angel Ramírez Aguilar

**DIRECTOR(A) DE TESIS**

Dr. Francisco Cuenca Jiménez



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2020**

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Objetivos</b>	<b>5</b>
<b>3. Marco Teórico</b>	<b>6</b>
3.1. Teoría básica de engranes . . . . .	6
3.1.1. Tren de engranes simple . . . . .	10
3.1.2. Tren de engranes compuesto . . . . .	11
3.2. Relación angular en tren de engranes planetario . . . . .	12
3.3. Matrices de Rotación . . . . .	15
3.4. Método de la Potencia . . . . .	15
3.4.1. Definición de trabajo y potencia . . . . .	15
3.4.2. Ecuación de Potencia . . . . .	17
<b>4. Mecanismo Bicicloidal</b>	<b>18</b>
4.1. Definición del mecanismo . . . . .	18
4.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática de Eslabones . . . . .	20
4.2.1. Ecuaciones de Análisis Cinemático . . . . .	21
4.2.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática . . . . .	23
4.3. Ecuaciones de Síntesis Cinemática de Engranes . . . . .	25
4.3.1. Ecuaciones de Análisis Cinemático . . . . .	25
4.3.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática . . . . .	28
4.4. Análisis Estático . . . . .	29
4.5. Síntesis Estática . . . . .	33
4.6. Solución de la Síntesis Estática . . . . .	34
4.7. Resultados . . . . .	39
4.8. Comentarios Finales . . . . .	41
<b>5. Mecanismo Hexacicloidal</b>	<b>45</b>
5.1. Definición del mecanismo . . . . .	45
5.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática de Eslabones . . . . .	47
5.2.1. Ecuaciones de Análisis Cinemático . . . . .	48
5.2.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática . . . . .	49
5.3. Ecuaciones de Síntesis Cinemática de Engranes . . . . .	50
5.3.1. Ecuaciones de Análisis Cinemático . . . . .	51
5.3.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática . . . . .	54

---

5.4. Análisis Estático . . . . .	55
5.5. Síntesis Estática . . . . .	57
5.6. Solución de la Síntesis Estática . . . . .	57
5.7. Resultados . . . . .	62
5.8. Comentarios Finales . . . . .	66
<b>6. Mecanismo Hexacicloidal Compuesto</b>	<b>69</b>
6.1. Definición del mecanismo . . . . .	69
6.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática de Eslabones . . . . .	71
6.2.1. Ecuaciones de Análisis Cinemático . . . . .	72
6.2.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática . . . . .	72
6.3. Ecuaciones de Síntesis Cinemática de Engranés . . . . .	73
6.3.1. Ecuaciones de Análisis Cinemático . . . . .	74
6.3.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática . . . . .	77
6.4. Análisis Estático . . . . .	78
6.5. Síntesis Estática . . . . .	80
6.6. Solución de la Síntesis Estática . . . . .	81
6.7. Resultados . . . . .	88
<b>7. Conclusiones</b>	<b>93</b>
<b>A. Síntesis Cinemática de Diseño Original</b>	<b>99</b>
A.1. Dimensiones del mecanismo original . . . . .	99
A.2. Trayectoria del mecanismo original . . . . .	99
A.3. Resultados del mecanismo original . . . . .	101
<b>B. Análisis Estático de Diseño Original</b>	<b>104</b>
B.1. D.C.L. del mecanismo original . . . . .	104
B.2. Fuerzas y Momentos Externos del mecanismo original . . . . .	105
<b>Referencias</b>	<b>107</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Un área de oportunidad que más ha impactado el campo de las prótesis en los últimos años se ha manifestado en la necesidad de contar con actuadores más compactos y de menor peso. No obstante, se presenta como delimitante el par producido por dichos actuadores el cual tiende a decrecer en consecuencia. Asimismo, la funcionalidad de casi cualquier prótesis parte de la necesidad de emular no solo el movimiento de la extremidad de interés sino además la fuerza que se desea transmitir por la misma, siendo considerado este último punto un factor determinante hoy en día entre diversos productos existentes en el mercado. La capacidad de transmitir fuerza por parte de nuestras extremidades cobra considerable importancia en muchas de las tareas que realizamos cotidianamente; en el caso particular de una mano, y más explícitamente de los dedos, el ejemplo más claro a contemplar tiene relación con la acción de manipular objetos.

Basándose en el diseño de mecanismo hexacicloidal propuesto por Eduardo Garibay en su tesis "Diseño de una Mano con un Mecanismo Hexacicloidal", publicada en el año 2013; se propone un rediseño del dispositivo de dedo protésico propiamente descrito en dicha publicación. Existiendo como motivación para la realización del presente trabajo la necesidad de contar con un dispositivo más compacto en su totalidad; a modo que las dimensiones de éste se asemejen lo más posible a las dimensiones antropométricas propias de un dedo humano. Siendo a la vez posible demandar al mecanismo una fuerza de presión deseada sin comprometer la capacidad del mismo a fin de asegurar una ejecución de trayectoria muy similar a la realizada naturalmente por un dedo al llevar a cabo la acción de flexo-extensión. Ésta configuración dota al mecanismo 2 GDL, siendo condición en sí misma suficiente para efectuar el movimiento de flexión y extensión.

Dentro las conclusiones como parte del trabajo: "Diseño de Mano con un Mecanismo Hexacicloidal" (*Garibay, 2013*) se descarta la posibilidad de incrementar el número

de engranes, esto con el objetivo de conseguir una mayor ganancia entre la fuerza de prensión en la punta del dedo con respecto al par suministrado a la entrada del dispositivo; proponiendo en su lugar una mejor alternativa que involucra engranes planetarios compuestos; pretendiendo con ello compactar el mecanismo aún más, considerando al mismo tiempo que las dimensiones de los engranes juegan un papel determinante; ya que, al incrementarse el radio de los engranes existe una disminución en el par requerido para accionar la prótesis; éste último punto en consecuencia, representaría una reducción importante en cuanto al tamaño del dispositivo pues está directamente relacionado con el par transferido.

El rediseño a exponer en las próximas secciones retoma lo anteriormente dicho como una aproximación válida y consigue plantear, desarrollar y resolver una nueva configuración descrita; ahora, como un modelo hexacicloidal conformado por trenes de engranes planetarios compuestos. Existe una diferencia notable entonces con respecto a la primera iteración del mecanismo que va más allá de la parte cinemática; mientras el diseño original plantea el desarrollo de un análisis estático posterior a la solución de la síntesis cinemática del mecanismo en cuestión, el modelo presentado en este trabajo desarrolla una síntesis estática que involucra directamente una síntesis cinemática en el proceso. En otras palabras, el rediseño propuesto satisface tanto el seguimiento de una trayectoria deseada como la transmisión de una fuerza de prensión deseada.

Es a partir del tercer capítulo que se presentan algunos conceptos fundamentales aplicados de forma directa o indirecta al análisis y síntesis del mecanismo propuesto en este trabajo así como en relación a sus respectivas variantes.

En el cuarto capítulo se definen los elementos que componen al mecanismo bicicloidal. Se explica el análisis y posterior síntesis cinemática del mecanismo tanto para los eslabones como los engranes que componen el mismo. Tomando como base el desarrollo anterior se propone del mismo modo un análisis estático y una síntesis estática del mecanismo. Al final, se obtiene la solución de la síntesis estática del mecanismo bicicloidal, simulando la trayectoria deseada; obteniendo asimismo, una fuerza a la salida considerando un par a la entrada del mecanismo.

En el quinto capítulo se definen los elementos presentes en el mecanismo hexacicloidal, recalcando las diferencias y similitudes más notables presentes en el mecanismo hexacicloidal con respecto al mecanismo bicicloidal. Se implementa el mismo desarrollo llevado a cabo para la síntesis y análisis del mecanismo bicicloidal; obteniendo del mismo modo, la solución de la síntesis estática.

Para el sexto capítulo, se plantea una modificación al mecanismo hexacicloidal al incluir engranes compuestos; retomando así, conceptos elementales procedentes tanto del modelo bicicloidal como del hexacicloidal ya desarrollados en los dos capítulos anteriores. Se desarrolla un análisis y síntesis estática partiendo de una síntesis de tipo

cinemática; obteniendo finalmente un número de soluciones aceptables respaldadas por simulaciones diversas. A partir de ésta solución se pretende satisfacer ambos requerimientos buscados: Primeramente, poder transmitir una fuerza de presión deseada a la salida a partir de un par determinado a la entrada; y como segundo, asegurar la ejecución de una trayectoria muy similar a la realizada naturalmente por un dedo al llevar a cabo la acción de flexo-extensión. Procurando conservar en todo momento las dimensiones del dispositivo en su totalidad; a modo de que éstas se asemejen lo más posible a las dimensiones antropométricas propias de un dedo humano.

En el último capítulo se desarrollan las conclusiones finales; se exponen los puntos más destacados del rediseño presentado en comparación con el modelo original. Asimismo, se discuten recomendaciones adicionales orientadas hacia un potencial trabajo a futuro, fundamentado en el presente trabajo.

## Agradecimientos

*A mi madre, Marcela, por su inagotable apoyo y disposición hacia el camino que me he preparado delante de mí por años. Por seguirlo conmigo en los momentos más críticos, más oscuros y también los más gratificantes, pago esta deuda compartiendo ésta y cualquier futura gloria con ella.*

*A mi padre, Roberto, quien a pesar de sólo poder apreciar una fracción del fruto de mi trabajo nunca prescindió de divisar la tenacidad y el sacrificio que conllevaron mis acciones previo a este momento.*

*A mi hermano, Marcelo, quien muy pronto seguirá el mismo camino que yo en su formación como ingeniero. No me quedan dudas con respecto a su potencial, tampoco con respecto a la extensión de sus aspiraciones.*

*A mi asesor de tesis, el Dr. Francisco Cuenca. Uno de los pocos profesionales en esta facultad a quien tengo el placer de referirme con real admiración; ya sea como investigador, docente, mentor y amigo. La Máxima Casa de Estudios estará en deuda por su cuantiosa contribución en este trabajo y en muchos otros más, así cada generación que haya tenido la dicha de recibir una cátedra tan excepcional como la suya.*

*Al Ingeniero Oscar Morales López por su contribución en la realización de los modelos en 3D y simulaciones del mecanismo.*

*A todos y cada uno de los profesionales de la ingeniería y las ciencias exactas, que no se conforman, que no descansan y que nunca se limitan. Si el país falla en apremiar sus esfuerzos, estén muy seguros que el resto del mundo demandará siempre más como ustedes. Hasta entonces, orgullosos podremos todos decir “Por mi raza hablará el espíritu”.*

## Capítulo 2

# Objetivos

Basándose en la tesis "Diseño de Mano con un Mecanismo Hexacicloidal" (*Garibay, 2013*); se propone rediseñar el dispositivo de dedo protésico ya existente (*Figura 2.1*).



Figura 2.1: Modelo 3D de dedo protésico anular (*Garibay, 2013*).

El mecanismo propuesto para este rediseño deberá ser capaz de:

- Realizar el seguimiento de una trayectoria emulando el movimiento de flexión y extensión propio de un dedo humano.
- Transmitir una fuerza de presión aceptable contando con un par de torsión a la entrada de magnitud menor al requerido por el dispositivo original (*Garibay, 2013*).
- Presentar dimensiones similares o incluso menores al diseño original (*Garibay, 2013*) asemejándose lo más posible a las dimensiones antropométricas propias de un dedo humano. Todo ello sin comprometer la funcionalidad del dispositivo protésico.

Se pretende plantear y resolver de forma exitosa una síntesis cinemática y una síntesis estática del mecanismo hexacicloidal considerando engranes compuestos como componentes del mismo. El desarrollo, planteamiento y metodología propuesta será aplicable sobre el mecanismo bicicloidal, mecanismo hexacicloidal y posteriormente sobre el mecanismo hexacicloidal compuesto.



## Capítulo 3

# Marco Teórico

### 3.1. Teoría básica de engranes

Un engranaje en su forma más simple se compone de dos engranes; estos serán un engrane impulsor y un engrane impulsado. Convencionalmente, se le conoce como piñón al engrane de menor tamaño y como engrane al de mayor tamaño.

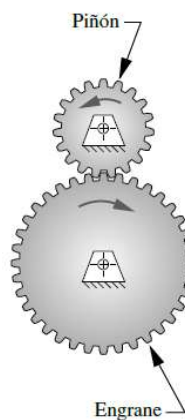


Figura 3.1: Engranaje con piñón y engrane (Norton, 2011).

La ley fundamental del engranaje establece que la razón de velocidad angular entre los engranes de un engranaje debe ser constante a lo largo del acoplamiento. Es necesario definir la razón de velocidad angular  $m_v$  como la razón entre el radio de paso del engrane de entrada y el del engrane de salida. Cabe mencionar que esta misma razón de velocidad es igual a la relación entre la velocidad angular de salida con respecto a la de entrada.

$$m_v = \pm \frac{\omega_{salida}}{\omega_{entrada}} = \pm \frac{r_{entrada}}{r_{salida}} \quad (3.1)$$

Cuando el tren de engranes es externo, se usa el signo negativo; ya que se invierte el sentido de giro del engrane de salida con respecto al de entrada. Cuando el tren de engranes es interno, se usa el signo positivo; pues el sentido de giro en ambos elementos será el mismo (*Fig. 3.2*).

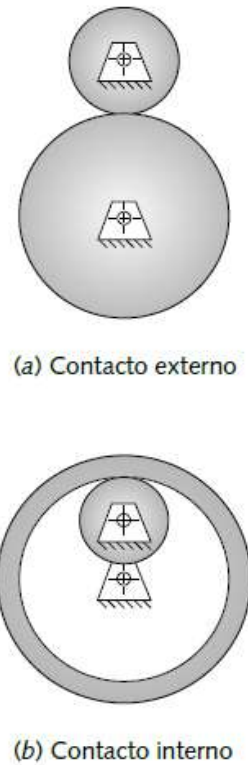


Figura 3.2: Engranaje externo y engranaje interno (Norton, 2011).

El paso circular se define como la longitud de arco en el círculo de paso; siendo éste, medido desde un punto determinado en el diente hasta el punto análogo al mismo, correspondiente al diente contiguo. En sí mismo, el paso circular refiere al tamaño del diente y se expresa como sigue:

$$p_c = \frac{\pi d}{N} \quad (3.2)$$

Otra forma de definir el tamaño del diente es mediante su relación con respecto al diámetro  $d$ , correspondiente al círculo de paso. Este recibe el nombre de paso diametral.

$$p_d = \frac{N}{d} \quad (3.3)$$

Tabla 3.1: Pasos diametrales estándares (*Norton, 2011*)

Pasos diametrales estándares	
Grueso ( $p_d < 20$ )	Fino ( $p_d \geq 20$ )
1	20
1.25	24
1.5	32
1.75	48
2	64
2.5	72
3	80
4	96
5	120
6	
8	
10	
12	
14	
16	
18	

El producto entre la relación de paso diametral y la relación de paso circular es igual a  $\pi$ . Esto se obtiene al combinar las ecuaciones (3.3) y (3.2).

$$\begin{aligned} p_d p_c &= \pi \\ p_d &= \frac{\pi}{p_c} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Las unidades de  $p_d$  son pulgadas recíprocas; o bien, número de dientes por pulgada. Es necesario aclarar que tal medida en sistema inglés sólo es válida en Estados Unidos (*Ver tabla 3.1*). Por otro lado, el sistema SI define en su lugar un parámetro llamado módulo y se expresa como el recíproco del paso diametral, para ello el diámetro de paso  $d$  es medido en milímetros. Las unidades del módulo igualmente se expresan en milímetros [mm].

$$m = \frac{1}{p_d} = \frac{d}{N} \quad (3.5)$$

Desgraciadamente, los engranes métricos no son intercambiables con los engranes estadounidenses pues los estándares para el tamaño de los dientes son diferentes. La conversión entre cualquiera de los dos estándares se muestra a continuación; se recomienda consultar la *tabla 3.2* y observar las equivalencias entre paso diametral y módulo métrico.

$$m = \frac{25.4}{p_d} \quad (3.6)$$

Tabla 3.2: Módulos métricos estándares (*Norton, 2011*).

Módulos métricos estándares	
Módulo métrico (mm)	Equivalente $p_d$ (in <sup>-1</sup> )
0.3	84.67
0.4	63.50
0.5	50.80
0.8	31.75
1	25.40
1.25	20.32
1.5	16.93
2	12.70
3	8.47
4	6.35
5	5.08
6	4.23
8	3.18
10	2.54
12	2.12
16	1.59
20	1.27
25	1.02

Existe un conjunto de valores estándar con base en las herramientas disponibles para manufacturar engranes. En la *figura 3.3* se muestran los tamaños reales de un ángulo de presión estándar de  $20^\circ$ , esto para dientes de profundidad completa con valores de  $p_d$  entre de 4 a 80. Apoyándose con la *tabla 3.2* se puede apreciar la equivalencia y con ello el tamaño de diente.

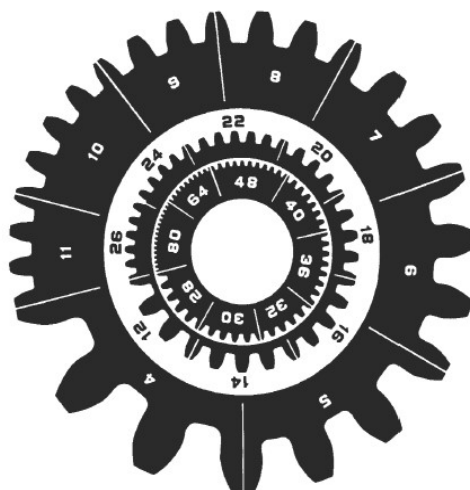


Figura 3.3: Tamaños reales de dientes de engrane para varios pasos diametrales (*Norton, 2011*).

La razón de velocidad  $m_v$  se expresa en la ecuación siguiente, definiéndose como la relación proporcional existente entre la magnitud de los radios o diámetros, siendo la misma que para números de dientes; todo esto asociado a la entrada y salida respecto a los engranes acoplados. Esto es posible sustituyendo la ecuación (3.3) en (3.1).

$$m_v = \pm \frac{r_{entrada}}{r_{salida}} = \pm \frac{d_{entrada}}{d_{salida}} = \pm \frac{N_{entrada}}{N_{salida}} \quad (3.7)$$

Es importante recalcar que el número de dientes de los engranes acoplados representa siempre un valor entero. Se define  $m_G$  como la razón entre el número de dientes del engrane  $N_g$  y el número de dientes del piñón  $N_p$ .

$$m_G = \frac{N_g}{N_p} \quad (3.8)$$

### 3.1.1. Tren de engranes simple

Cualquier tren de engranes se define como un conjunto de dos o más engranes acoplados. Un par de engranes es el ejemplo más simple de un tren de engranes; aunque generalmente la razón se limita a ser de aproximadamente 10:1. Para el caso de un tren de engranes simple, cada engrane posee un eje propio asociado al mismo. Un ejemplo de un tren de engranes simple se muestra en la *figura 3.4*.

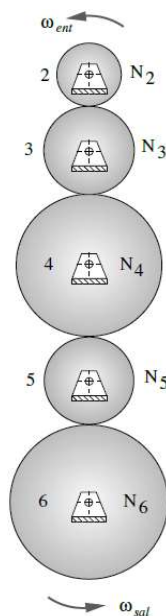


Figura 3.4: Ejemplo de tren de engranes simple (Norton, 2011).

Las razones de velocidad correspondientes a cada dupla de engranes en contacto se multiplican entre sí. Al tratarse de engranes externos, todas las razones de velocidad

son negativas.

$$\begin{aligned}
 m_v &= \left(-\frac{N_i}{N_{i+1}}\right)\left(-\frac{N_{i+1}}{N_{i+2}}\right)\left(-\frac{N_{i+2}}{N_{i+3}}\right)\dots\left(-\frac{N_{n-1}}{N_n}\right) = \pm \frac{N_i}{N_n} \\
 &= \pm \frac{N_{entrada}}{N_{salida}} = \pm \frac{\omega_{salida}}{\omega_{entrada}}
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Tal como se observa en la ecuación (3.9) cada uno de los engranajes aporta en forma considerable a la razón de velocidad resultante; sin embargo, en un tren simple, los efectos numéricos de todos los engranes se simplifican con excepción de los correspondientes a la entrada y a la salida; es decir, los respectivos al primer y último engrane. Siendo finalmente, la razón de velocidad de todo el tren de engranes igual al número de dientes del primer engrane entre el número de dientes del último de todos los engranes. Al resto de los engranes que son parte del tren simple a excepción del primero y el último se les llamará engranes intermedios, comúnmente denominados *engranes locos*; pues no se toma potencia de sus ejes.

Como única afectación en el resultado se observa el cambio en el signo de la razón de velocidad resultante. El signo cambiará a negativo cuando el número de engranes dentro del tren sea par, indicando con ello una dirección contraria en el giro del engrane de salida con respecto al de entrada. El signo será entonces positivo cuando el número de engranes sea impar, conservando la misma dirección de giro a la salida como a la entrada.

### 3.1.2. Tren de engranes compuesto

Un tren de engranes compuesto se caracteriza por tener al menos un eje con más de un engrane alineado a éste. A diferencia de un tren de engranes simple limitado a conexiones en serie únicamente, un tren de engranes compuesto posibilita configuraciones en paralelo o en serie inclusive. Un ejemplo sencillo de un tren de engranes compuesto se muestra en la *figura 3.5*.

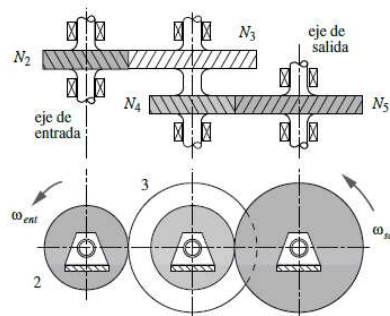


Figura 3.5: Ejemplo de tren de engranes compuesto (Norton, 2011).

Una característica importante a denotar en trenes de engranes compuestos es que tanto el desplazamiento como la velocidad angular de un conjunto de engranes sujetos a un mismo eje será siempre la misma. Basándose en el ejemplo anterior en la *figura 3.5*, es posible observar como el engrane 3 y el engrane 4 comparten el mismo eje y por tanto comparten la misma velocidad angular. Por lo que al calcular la razón de velocidad del tren propuesto se tiene lo siguiente:

$$m_v = \left(-\frac{N_2}{N_3}\right)\left(-\frac{N_4}{N_5}\right)$$

Para cualquier número de engranes en un tren de engranes compuesto la razón de velocidad se calcula de la siguiente forma:

$$m_v = \pm \frac{\text{Producto del número de dientes de engranes impulsores}}{\text{Producto del número de dientes de engranes impulsados}} \quad (3.10)$$

Nótese como a diferencia del tren de engranes simple, las razones intermedias no se simplifican; siendo la razón de velocidad resultante producto de las razones de los engranajes en paralelo. Por consiguiente, un tren compuesto es capaz de entregar una mayor razón de velocidad dejando atrás la limitación de 10:1 en la razón de velocidad, siendo esta propia de engranajes individuales; así como una opción superior al tren de engranes simple.

### 3.2. Relación angular en tren de engranes planetario

El comportamiento en base a la teoría aplicable para engranes planetarios externos en el plano se describe a partir de la *figura 3.6*. (*Erdman & Sandor, 1997*).

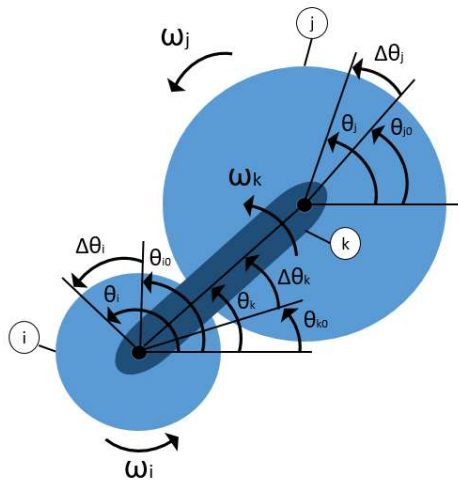


Figura 3.6: Desplazamiento angular entre engranes planetarios.

Se contemplan las variables siguientes:

- $\theta_i$  : Posición angular del engrane impulsor.
- $\theta_j$  : Posición angular del engrane impulsado.
- $\theta_k$  : Posición angular del brazo.

Definiendo posiciones angulares iniciales y finales correspondientes a cada uno de los 3 elementos.

- $\theta_{i0}, \theta_{j0}, \theta_{k0}$  : Angulos iniciales
- $\theta_i, \theta_j, \theta_k$  : Angulos finales
- $\Delta\theta_i, \Delta\theta_j, \Delta\theta_k$  : Desplazamiento angular

El desplazamiento angular se definirá entonces como la diferencia entre una posición angular final y la posición angular inicial.

$$\begin{aligned}\Delta\theta_i &= \theta_i - \theta_{i0} \\ \Delta\theta_j &= \theta_j - \theta_{j0} \\ \Delta\theta_k &= \theta_k - \theta_{k0}\end{aligned}\tag{3.11}$$

Estableciendo la ecuación que relaciona las velocidades angulares del engrane impulsor, el engrane impulsado y el brazo mediante la ec.(3.12).

$$\frac{\omega_{jk}}{\omega_{ik}} = \frac{\omega_j - \omega_k}{\omega_i - \omega_k} = -\frac{N_i}{N_j}\tag{3.12}$$

Donde:

- $\omega_{jk}$  : Velocidad angular del engrane impulsado relativa al brazo.
- $\omega_{ik}$  : Velocidad angular del engrane impulsor relativa al brazo.
- $\omega_j$  : Velocidad angular absoluta del engrane impulsado.
- $\omega_i$  : Velocidad angular absoluta del engrane impulsor.
- $\omega_k$  : Velocidad angular absoluta del brazo.
- $N_i$  : Número de dientes del primer engrane.
- $N_j$  : Número de dientes del segundo engrane.

Despejando la ec.(3.12):

$$\begin{aligned}\omega_j - \omega_k &= -\frac{N_i}{N_j}(\omega_i - \omega_k) \\ \frac{d\theta_j}{dt} - \frac{d\theta_k}{dt} &= -\frac{N_i}{N_j}\left(\frac{d\theta_i}{dt} - \frac{d\theta_k}{dt}\right)\end{aligned}\tag{3.13}$$

Es posible simplificar la expresión anterior como sigue:

$$d\theta_j - d\theta_k = -\frac{N_i}{N_j}(d\theta_i - d\theta_k)\tag{3.14}$$



Se integra con respecto a la variable de posición angular correspondiente con el fin de obtener posiciones angulares de interés.

$$\int_{\theta_{j0}}^{\theta_j} d\theta_j - \int_{\theta_{k0}}^{\theta_k} d\theta_k = -\frac{N_i}{N_j} \left( \int_{\theta_{i0}}^{\theta_i} d\theta_i - \int_{\theta_{k0}}^{\theta_k} d\theta_k \right) \quad (3.15)$$

Quedando:

$$(\theta_j - \theta_{j0}) - (\theta_k - \theta_{k0}) = -\frac{N_i}{N_j} [(\theta_i - \Delta\theta_{i0}) - (\theta_k - \theta_{k0})] \quad (3.16)$$

Retomando la ec. (3.11) se efectua la sustitución en (3.16).

$$\Delta\theta_j - \Delta\theta_k = -\frac{N_i}{N_j} (\Delta\theta_i - \Delta\theta_k) \quad (3.17)$$

Finalmente:

$$\frac{\Delta\theta_j - \Delta\theta_k}{\Delta\theta_i - \Delta\theta_k} = -\frac{N_i}{N_j} \quad (3.18)$$

La expresión en (3.18) es aplicable dentro de la estructura de cualquier tren de engranes planetario plano (externo o interno). Involucrando con ello variables que representan el desplazamiento angular a la entrada (engrane impulsor) y desplazamiento angular a la salida (engrane impulsado), con respecto a un mismo brazo. Lo anterior se representa de forma más clara mediante la ec. (3.19).

$$\frac{\Delta\theta_s - \Delta\theta_b}{\Delta\theta_e - \Delta\theta_b} = \pm \frac{N_e}{N_s} \quad (3.19)$$

La ec. (3.19) puede ser igualada a la razón de velocidad del tren planetario, definida por la relación proporcional existente entre la magnitud de los radios; siendo ésta la misma que para números de dientes, esto asociado a una entrada y una salida respecto a los engranes acoplados.

$$\frac{\Delta\theta_s - \Delta\theta_b}{\Delta\theta_e - \Delta\theta_b} = \pm \frac{N_e}{N_s} = \pm \frac{r_e}{r_s} = \pm RE_{e,s} \quad (3.20)$$

Siendo:

$\Delta\theta_e$  : Desplazamiento angular asociado al engrane de entrada.

$\Delta\theta_s$  : Desplazamiento angular asociado al engrane de salida.

$\Delta\theta_b$  : Desplazamiento angular asociado al brazo.

$N_e$  : Número de dientes del engrane de entrada.

$N_s$  : Número de dientes del engrane de salida.

$r_e$  : Radio del engrane de entrada.

$r_s$  : Radio del engrane de salida.

$RE_{e,s}$  : Razón de velocidad de la entrada y con respecto a la salida.

### 3.3. Matrices de Rotación

Las matrices de rotación son empleadas con frecuencia para modificar la dirección de un vector cualquiera con respecto de un eje ordenado (sea en la dirección  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ ), sobre el cual se efectúa un giro en términos de un ángulo  $\theta$ . Dependiendo del eje de giro  $k$ , la matriz de rotación  $\mathbf{R}_k(\theta)$  se definirá como se muestra a continuación (Craig, 2006).

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_x(\theta) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_y(\theta) &= \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_z(\theta) &= \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.21)$$

Dados los siguientes vectores  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{P}$  con sus respectivas coordenadas:

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.22)$$

La transformación de coordenadas se define de la siguiente forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_k(\theta) \mathbf{p} \quad (3.23)$$

A modo de ejemplo, una rotación sobre el eje  $z$  se expresa a continuación:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{R}_z(\theta) \mathbf{p} \\ \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.24)$$

### 3.4. Método de la Potencia

#### 3.4.1. Definición de trabajo y potencia

El trabajo se define como el producto punto de una fuerza  $\mathbf{F}$  y un desplazamiento  $\mathbf{r}$ ; como resultado, se obtiene una cantidad escalar que puede tomar valores tanto

positivos, negativos o ser éste cero (*Norton, 2013*).

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \quad (3.25)$$

La ley de la conservación de la energía establece que la energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma. Se entiende a partir de este precepto que la energía en forma de trabajo mecánico a la entrada de una máquina será retribuida de forma exacta e íntegra a la salida. Sin embargo, esto sólo representa un caso ideal pues en la realidad no es así; ya que existen pérdidas que se traducen generalmente en calor generado debido a la fricción presente en las juntas del mecanismo. Por lo que para un caso real, el trabajo realizado por el sistema o dispositivo más las pérdidas será igual a la energía entregada al mismo.

$$E = W + \text{Pérdidas}$$

En una primera aproximación al diseño de un mecanismo, la potencia  $P$  será definida como la rapidez de cambio de la energía entregada al sistema con respecto al tiempo que a su vez será sinónimo de la rapidez de cambio del trabajo mecánico realizado por el sistema con respecto al tiempo.

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dW}{dt} \quad (3.26)$$

La energía generada por un cuerpo rígido en movimiento es representada mediante la energía cinética. La energía cinética se expresa mediante la ec.(3.27).

$$E_c = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}I\omega\mathbf{K} \cdot \omega\mathbf{K} \quad (3.27)$$

Al derivar la expresión (3.27) se obtiene la razón de cambio de la energía cinética con respecto al tiempo.

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}I\omega\mathbf{K} \cdot \omega\mathbf{K} \right) \\ &= \frac{1}{2}m \underbrace{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{a})}_{2\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}} + \frac{1}{2}I \underbrace{(\alpha\mathbf{K} \cdot \omega\mathbf{K} + \omega\mathbf{K} \cdot \alpha\mathbf{K})}_{2\alpha\mathbf{K} \cdot \omega\mathbf{K}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

La derivada de la energía cinética se describe mediante la ec. (3.29).

$$\frac{dE_c}{dt} = (m\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} + (I\alpha\mathbf{K}) \cdot \omega\mathbf{K} \quad (3.29)$$

Donde:

- $m$  : Masa del cuerpo.
- $\mathbf{v}$  : Vector de velocidad del cuerpo.
- $\mathbf{a}$  : Vector de aceleración del cuerpo.
- $I$  : Momento de inercia del cuerpo.
- $\omega$  : Velocidad angular del cuerpo.
- $\alpha$  : Aceleración angular del cuerpo.

Recordando que la fuerza resultante  $\mathbf{F}$  sobre un cuerpo rígido en el espacio se define como:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (3.30)$$

De la misma forma que el momento resultante sobre el eje z actuando sobre el cuerpo rígido  $\mathbf{M}$  se define como:

$$\mathbf{M} = I\alpha\mathbf{K} \quad (3.31)$$

Sustituyendo (3.30) y (3.31) en (3.29):

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M} \cdot \omega\mathbf{K} \quad (3.32)$$

### 3.4.2. Ecuación de Potencia

Para cualquier instante, la razón de cambio de la energía externamente suministrada y la energía almacenada en el sistema debe balancearse. De forma que la potencia almacenada en el sistema se representa mediante la ec. (3.29). Mientras que la potencia externamente suministrada a la entrada y salida del sistema se describe en la ec. (3.32); esto por supuesto, despreciando las pérdidas por fricción. Por lo tanto, el comportamiento del sistema se describe mediante de la igualación de ambas ecuaciones de potencia.

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M} \cdot \omega\mathbf{K} = m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} + I\alpha\mathbf{K} \cdot \omega\mathbf{K} \quad (3.33)$$

La ec. (3.33) modela el comportamiento de un cuerpo rígido de forma individual; por lo que, el desarrollo aplicado a un mecanismo compuesto por más de un elemento móvil se expresa como la suma de la potencia asociada a cada uno de los mismos. Asociando mediante el subíndice  $k$  a cada uno de los elementos móviles.

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^n \mathbf{M}_k \cdot \omega_k \mathbf{K} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^n I_k \alpha_k \mathbf{K} \cdot \omega_k \mathbf{K} \quad (3.34)$$

Es importante denotar que para todas las posiciones propias del mecanismo de interés; las velocidades y aceleraciones, tanto angulares como lineales, deben ser calculadas; lo mismo aplica a su vez para las masas y momentos de inercia correspondientes a cada uno de los eslabones.

## Capítulo 4

# Mecanismo Bicicloidal

### 4.1. Definición del mecanismo

El mecanismo bicicloidal (*Kaufman & Sandor, 1969*), se basa en el principio de orientación de un cuerpo a partir de definir como referencia puntos denominados cicloidales o circulares. Teniendo entonces como característica fundamental un movimiento generado en un punto del satélite correspondiente a un tren planetario. Entre algunas características más sobresalientes del modelo bicicloidal están:

- Cuenta con 2 GDL, consiguiendo de esta forma movimientos independientes de las falanges.
- Al hacer uso de engranes planetarios, es viable conseguir un incremento en la fuerza de presión a la salida.
- Es posible compactar el mecanismo y optimizar espacio al seleccionar de forma apropiada el paso diametral o módulo métrico de los engranes.

Este mecanismo se compone de cuatro engranes, tres de ellos cuentan con eslabones unidos a los mismos; siendo estos los engranes 2, 3 y 4 (*Fig. 4.1*). Con el propósito de dar una representación gráfica más clara de los eslabones que conforman el mecanismo, a estos tres eslabones ya nombrados se les han asignado las letras E, F y G, respectivamente.

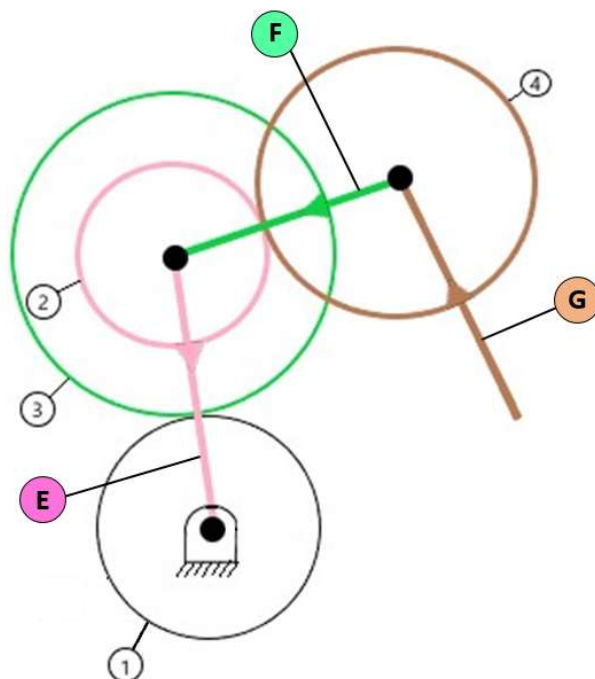


Figura 4.1: Componentes del mecanismo bicicloidal.

Las longitudes de los eslabones E, F y G presentes en el mecanismo representan valores constantes e inalterables para nuestro estudio y cualquier análisis subsecuente, representando por medio de estas medidas las longitudes de las falanges proximal, medial y distal, respectivamente. Mediante la *figura 4.2* se muestra una representación anatómica que hace referencia al conjunto de 3 falanges.

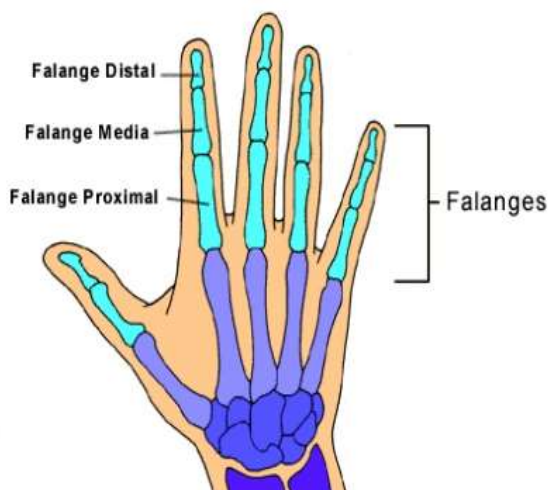


Figura 4.2: Falange distal, medial y proximal de un dedo humano.

Siendo conscientes de que las dimensiones del dispositivo en general dependerán de forma absoluta de las longitudes de estos eslabones no es permisible que las mismas

sobrepasen las dimensiones antropométricas de un dedo humano. Las dimensiones sobre las cuales se basa el diseño propuesto se apoyan en medidas antropométricas del dedo índice de un hombre adulto de 25 años de edad (*Garibay, 2013*).

El engrane 1 hace alusión al primero de los 2 GDL del mecanismo. Mientras que el segundo grado de libertad actúa sobre el eslabón E, éste se encuentra unido al engrane 2 tal como se observa en la *figura 4.1*; posterior a esto, el engrane 2 tiene contacto entre dientes con el engrane 4. Esta entrada es capaz de generar al mismo tiempo, por acción del eslabón E, una reacción; transmitiendo movimiento al engrane 3, el cual se encuentra unido al eslabón F. Este último tiene interacción con el engrane 4, que es a la vez el eslabón G y se encuentra unido al mismo, fungiendo como el efector final del mecanismo.

Cabe mencionar que es posible bloquear el movimiento del engrane 1; si éste fuera el caso de estudio, se consideraría entonces el engrane 1 como un cuerpo fijo. Asimismo y en otra instancia, esta restricción podría bien ser aplicada sobre el engrane 2 en su lugar. Es importante aclarar qué; aun permaneciendo alguno de estos dos engranes bloqueado (engrane 1 o engrane 2), el mecanismo bicicloidal se considera de 2 GDL. Este concepto conlleva importante relevancia puesto que en posteriores análisis se evalúa el comportamiento del mecanismo bajo alguna de estas condiciones mencionadas.

Para fines prácticos y con la intención de conservar consistencia, durante las secciones y capítulos subsecuentes se les denominarán a los eslabones E, F y G con los nombres: Eslabón 2, eslabón 3 y eslabón 4, respectivamente. Igualmente, el engrane 2 y el eslabón 2 forman un sólo cuerpo; así como el engrane 3 y el eslabón 3; lo mismo para el engrane 4 y el eslabón 4. No queda de más mencionar que se tiene como única excepción al engrane 1, esto al no existir un eslabón unido al mismo. Asimismo, se referirá al conjunto formado por los engranes 1, 2, 3 y 4 como engranes principales.

Al final de éste capítulo se pretende denotar y analizar las diferencias más destacadas con respecto al dispositivo expuesto por Eduardo Garibay en su trabajo: "Diseño de Mano con un Mecanismo Hexacicloidal", refiriéndose al mismo mediante el nombre de mecanismo original o modelo original (así como múltiples variantes del nombre). Lo anterior es aplicable para el modelo bicicloidal de interés, representado éste el diseño previo al cual se recurrirá continuamente en este capítulo.

## 4.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática de Eslabones

En esta sección se definen las ecuaciones de análisis cinemático y partir de las cuales se definen las ecuaciones de síntesis cinemática. Se emplea el método de matrices de rotación de 3x3 para definir la orientación de los vectores que conforman la cadena cinemática del modelo bicicloidal (*Fig. 4.3*).

## 4.2.1. Ecuaciones de Análisis Cinemático

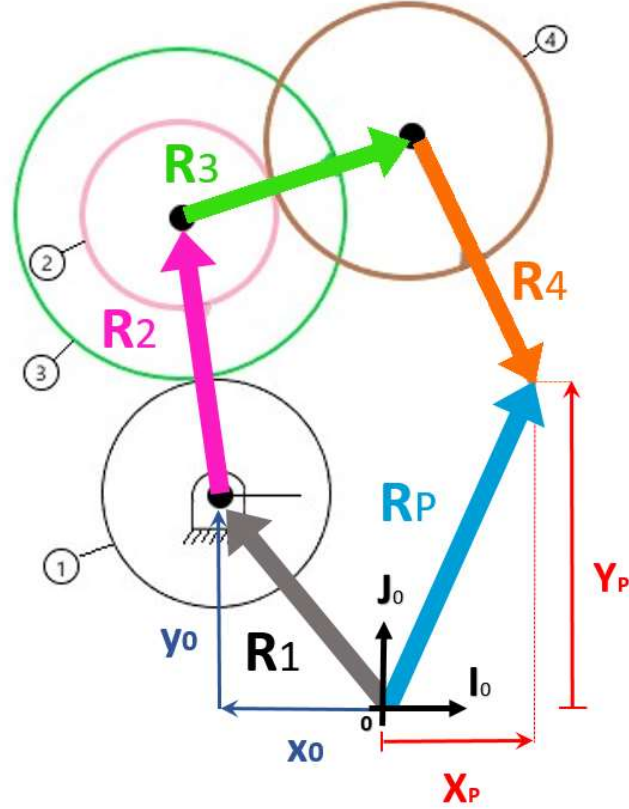


Figura 4.3: Vectores asociados al análisis cinemático.

La ecuación de posición se define a continuación.

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}_P \quad (4.1)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= [x_1, y_1, 0]^T \\ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{R}_z(\epsilon) \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{R}_3 &= \mathbf{R}_z(\eta) \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{R}_4 &= \mathbf{R}_z(\mu) \mathbf{r}_4 \\ \mathbf{R}_P &= [x_P, y_P, 0]^T \end{aligned} \quad (4.2)$$

Como se puede observar en la *figura 4.4* las variables  $\epsilon$ ,  $\eta$ ,  $\mu$  corresponden a la orientación de los eslabones 2, 3 y 4, respectivamente; a lo anterior se suma la variable  $\delta$  denotando la posición angular del engrane 1. Es importante aclarar que estas variables representan valores continuos de posición angular asociados a cada uno de los



eslabones del mecanismo, esto en forma de ángulos absolutos medidos con respecto a la horizontal; lo anterior se explicará más a detalle en las secciones siguientes.

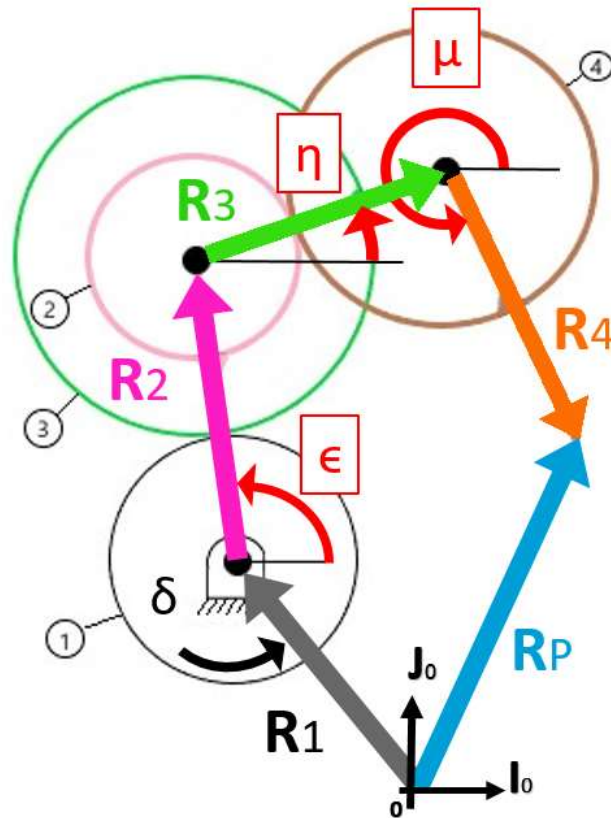


Figura 4.4: Vectores y posiciones angulares asociadas al análisis cinemático.

Como se aprecia en las ecuaciones (4.3) se definen  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_3$  y  $\mathbf{r}_4$  como los vectores sobre los cuales se aplicará la rotación. Nótese que las magnitudes de dichos vectores serán iguales a la longitud de las falanges proximal, medial y distal, respectivamente; siendo estas magnitudes representadas por  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  (Fig. 4.5).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_2 &= [x_2, 0, 0]^T \\
 \mathbf{r}_3 &= [x_3, 0, 0]^T \\
 \mathbf{r}_4 &= [x_4, 0, 0]^T
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

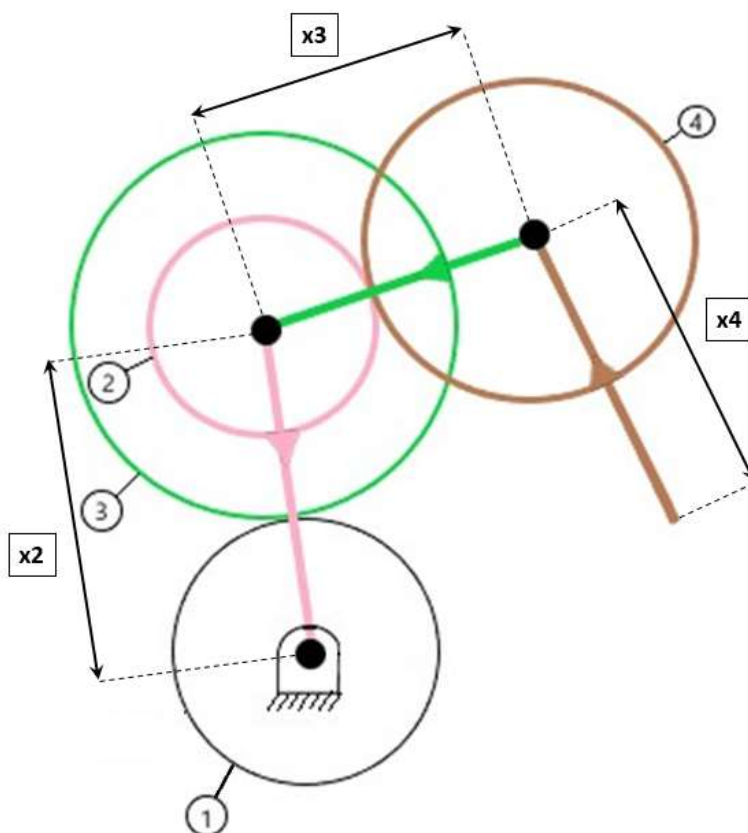


Figura 4.5: Longitud de los eslabones en mecanismo bicicloidal.

#### 4.2.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática

Las variables de posición angular  $\delta$ ,  $\epsilon$ ,  $\eta$ ,  $\mu$  empleadas en el análisis cinemático representan una infinidad de valores de ángulos continuos (*Fig 4.6*); al desarrollar la síntesis cinemática del mecanismo, requeriremos solamente algunos valores dentro del rango de dichos ángulos continuos; representando con ello posiciones angulares discretas (*Fig 4.7*). Esta condición es relativa al número de posiciones y se denota por el subíndice  $j$ ; es decir,  $\delta_j$ ,  $\epsilon_j$ ,  $\eta_j$ ,  $\mu_j$ , donde  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  (*Fig 4.8*).

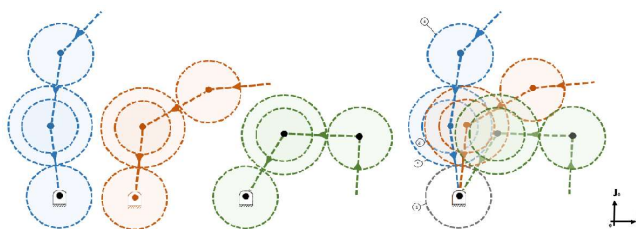


Figura 4.6: Posibles posiciones adoptadas por el mecanismo.

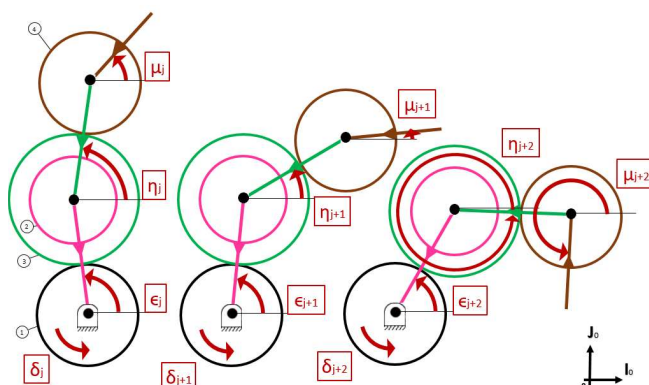


Figura 4.7: Variables de posición angular representadas en forma discretizada respecto al número de posición.

Se muestra a continuación mediante la *figura 4.8* el conjunto de posiciones angulares y vectores asociados a la síntesis cinemática.

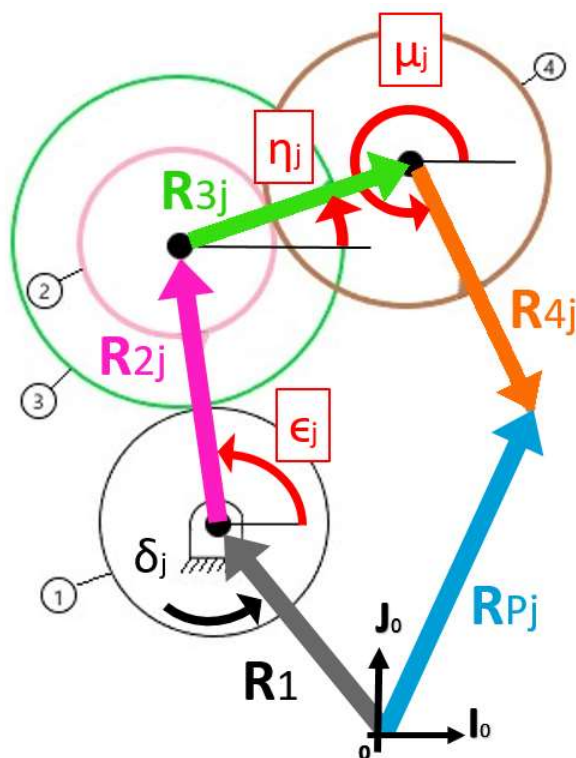


Figura 4.8: Posiciones angulares y vectores asociados a la síntesis cinemática.

En base a la ecuación de análisis cinemático en (4.1), la ecuación de síntesis de expresa a continuación.

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_{2j} + \mathbf{R}_{3j} + \mathbf{R}_{4j} = \mathbf{R}_{Pj} \quad (4.4)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_1 &= [x_1, y_1, 0]^T \\
 \mathbf{R}_{2j} &= \mathbf{R}_z(\epsilon_j) \mathbf{r}_2 \\
 \mathbf{R}_{3j} &= \mathbf{R}_z(\eta_j) \mathbf{r}_3 \\
 \mathbf{R}_{4j} &= \mathbf{R}_z(\mu_j) \mathbf{r}_4 \\
 \mathbf{R}_{Pj} &= [x_{Pj}, y_{Pj}, 0]^T
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

### 4.3. Ecuaciones de Síntesis Cinemática de Engranés

Como ya se ha mencionado antes, el mecanismo bicicloidal contempla dos trenes de engranes planetarios. La ecuación (3.19) describe la relación existente entre el desplazamiento angular a la salida con respecto a la entrada de un tren planetario, ésta se muestra a continuación.

$$\frac{\Delta\theta_s - \Delta\theta_b}{\Delta\theta_e - \Delta\theta_b} = -\frac{N_e}{N_s} = -RE_{e,s}$$

Existiendo como resultado un cociente entre el número de dientes del engrane impulsor (engrane de entrada)  $N_e$  con respecto al engrane impulsado (engrane de salida)  $N_s$ , figurando como la relación proporcional definida como razón de velocidad, ésta es denotada por  $RE_{e,s}$ .

#### 4.3.1. Ecuaciones de Análisis Cinemático

Acorde a la configuración bicicloidal, se muestra mediante la *tabla 4.1* el conjunto de variables de posición angular relacionadas a cada uno de los engranes del mecanismo.

Tabla 4.1: Variables de posición angular en modelo bicicloidal.

Variable de posición angular	Elemento del mecanismo
$\delta$	Engrane 1
$\epsilon$	Engrane 2
$\eta$	Engrane 3
$\mu$	Engrane 4

Siendo el desplazamiento angular la diferencia entre la posición angular final y la posición angular inicial.

$$\begin{aligned}
 \Delta\delta &= \delta - \delta_1 \\
 \Delta\epsilon &= \epsilon - \epsilon_1 \\
 \Delta\eta &= \eta - \eta_1 \\
 \Delta\mu &= \mu - \mu_1
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

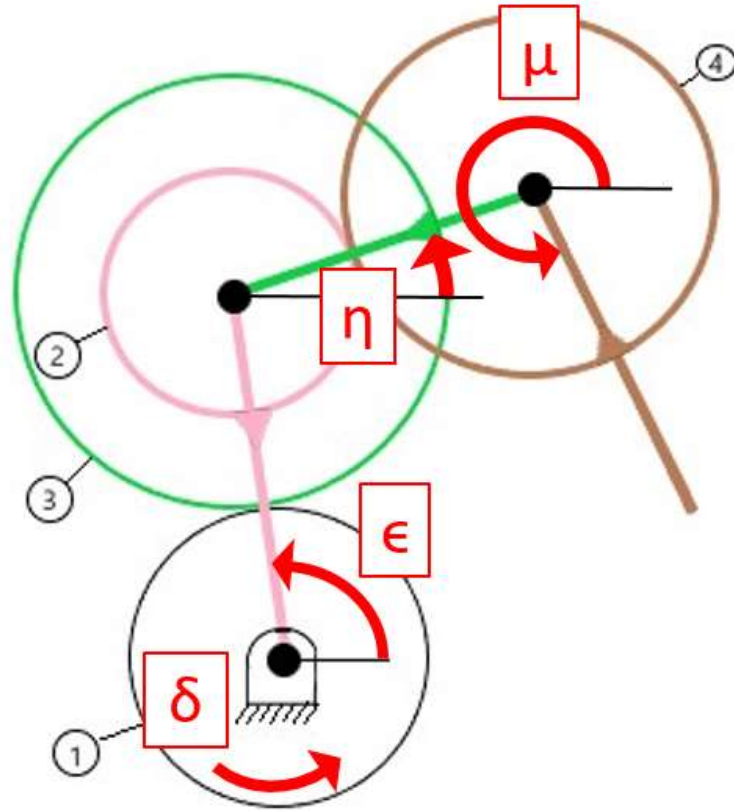


Figura 4.9: Posición angular de engranes asociada al análisis cinemático.

Mediante la *figura 4.9* se muestra una representación de las posiciones angulares asociadas a los engranes. Es igualmente necesario aclarar que las posiciones iniciales  $\delta_1$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\eta_1$  y  $\mu_1$  no necesariamente son iguales a cero.

Se plantea el modelado del primer tren planetario; conformado por el engrane 1, engrane 3 y eslabón 2. Donde  $N_1$  y  $N_3$  corresponden a los números de dientes de los engranes 1 y 3, respectivamente.

$$\frac{\Delta\eta - \Delta\epsilon}{\Delta\delta - \Delta\epsilon} = -\frac{N_1}{N_3} = -RE_{1,3} \quad (4.7)$$

El segundo tren planetario está compuesto por el engrane 2, el engrane 4 y el eslabón 3.  $N_2$  y  $N_4$  corresponden a los números de dientes de los engranes 2 y 4, respectivamente.

$$\frac{\Delta\mu - \Delta\eta}{\Delta\epsilon - \Delta\eta} = -\frac{N_2}{N_4} = -RE_{2,4} \quad (4.8)$$

Se pretende dejar las variables  $\Delta\epsilon$  y  $\Delta\eta$  en función de  $\Delta\delta$  y  $\Delta\mu$ . Por lo que primera-

mente se despeja la variable  $\Delta\eta$  de la ec. (4.8).

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\mu - \Delta\eta}{\Delta\epsilon - \Delta\eta} &= -\frac{N_2}{N_4} = -RE_{2,4} \\
\Delta\mu - \Delta\eta &= -RE_{2,4}(\Delta\epsilon - \Delta\eta) \\
\Delta\mu - \Delta\eta &= -RE_{2,4}\Delta\epsilon + RE_{2,4}\Delta\eta \\
-RE_{2,4}\Delta\eta - \Delta\eta &= -RE_{2,4}\Delta\epsilon - \Delta\mu \\
\Delta\eta(-RE_{2,4} - 1) &= -RE_{2,4}\Delta\epsilon - \Delta\mu \\
\Delta\eta &= \frac{RE_{2,4}\Delta\epsilon + \Delta\mu}{RE_{2,4} + 1}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Se prosigue a despejar la variable  $\Delta\epsilon$  de la ec. (4.7).

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\eta - \Delta\epsilon}{\Delta\delta - \Delta\epsilon} &= -\frac{N_1}{N_3} = -RE_{1,3} \\
\Delta\eta - \Delta\epsilon &= -RE_{1,3}(\Delta\delta - \Delta\epsilon) \\
-RE_{1,3}\Delta\epsilon - \Delta\epsilon &= -RE_{1,3}\Delta\delta - \Delta\eta \\
\Delta\epsilon(-RE_{1,3} - 1) &= -RE_{1,3}\Delta\delta - \Delta\eta \\
\Delta\epsilon &= \frac{RE_{1,3}\Delta\delta + \Delta\eta}{RE_{1,3} + 1}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Sustituyendo  $\Delta\eta$  de (4.9) en (4.10):

$$\begin{aligned}
\Delta\epsilon(RE_{1,3} + 1) &= RE_{1,3}\Delta\delta + \Delta\eta \\
\Delta\epsilon(RE_{1,3} + 1) &= RE_{1,3}\Delta\delta + \left(\frac{RE_{2,4}\Delta\epsilon + \Delta\mu}{RE_{2,4} + 1}\right) \\
\Delta\epsilon(RE_{1,3} + 1) &= RE_{1,3}\Delta\delta + \frac{RE_{2,4}\Delta\epsilon}{(RE_{2,4} + 1)} + \frac{\Delta\mu}{(RE_{2,4} + 1)} \\
\Delta\epsilon(RE_{1,3} + 1)(RE_{2,4} + 1) &= RE_{1,3}(RE_{2,4} + 1)\Delta\delta + RE_{2,4}\Delta\epsilon + \Delta\mu
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Agrupando y simplificando términos por medio de las constantes  $Q$  y  $S$ .

$$\Delta\epsilon \underbrace{[(RE_{1,3} + 1)(RE_{2,4} + 1) - RE_{2,4}]}_Q = \underbrace{RE_{1,3}(RE_{2,4} + 1)\Delta\delta + \Delta\mu}_S \tag{4.12}$$

El desplazamiento angular  $\Delta\epsilon$  se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\Delta\epsilon Q &= S\Delta\delta + \Delta\mu \\
\Delta\epsilon &= \frac{S\Delta\delta + \Delta\mu}{Q}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

En términos de la posición angular  $\epsilon$  y la posición angular inicial  $\epsilon_1$ , se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\epsilon - \epsilon_1 &= \frac{S\Delta\delta + \Delta\mu}{Q} \\ \epsilon &= \frac{S\Delta\delta + \Delta\mu}{Q} + \epsilon_1\end{aligned}\quad (4.14)$$

Sustituyendo  $\Delta\epsilon$  de la ec. (4.13) dentro de la ec. (4.9):

$$\begin{aligned}\Delta\eta &= \frac{RE_{2,4}\Delta\epsilon + \Delta\mu}{RE_{2,4} + 1} \\ &= \frac{RE_{2,4}\left(\frac{S\Delta\delta + \Delta\mu}{Q}\right) + \Delta\mu}{(RE_{2,4} + 1)} \\ &= \frac{\frac{S}{Q}RE_{2,4}\Delta\delta + \left(\frac{RE_{2,4}}{Q} + 1\right)\Delta\mu}{(RE_{2,4} + 1)}\end{aligned}\quad (4.15)$$

Agrupando y simplificando términos dentro de las constantes  $L$  y  $H$ .

$$\Delta\eta = \underbrace{\frac{\frac{S}{Q}RE_{2,4}}{(RE_{2,4} + 1)}}_L \Delta\delta + \underbrace{\frac{\left(\frac{RE_{2,4}}{Q} + 1\right)}{(RE_{2,4} + 1)}}_H \Delta\mu\quad (4.16)$$

El desplazamiento angular  $\Delta\eta$  se expresa de la siguiente forma:

$$\Delta\eta = L\Delta\delta + H\Delta\mu\quad (4.17)$$

En términos de la posición angular  $\eta$  y la posición angular inicial  $\eta_1$ , se tiene:

$$\begin{aligned}\eta - \eta_1 &= L\Delta\delta + H\Delta\mu \\ \eta &= L\Delta\delta + H\Delta\mu + \eta_1\end{aligned}\quad (4.18)$$

### 4.3.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática

Para la síntesis cinemática, el valor final de los ángulos se discretiza añadiendo el subíndice  $j$ . Basándose en las ecs. (4.14) y (4.18) se tienen las expresiones siguientes.

$$\epsilon_j = \frac{S\Delta\delta_j + \Delta\mu_j}{Q} + \epsilon_1\quad (4.19)$$

$$\eta_j = L\Delta\delta_j + H\Delta\mu_j + \eta_1\quad (4.20)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\Delta\delta_j &= \delta_j - \delta_1 \\ \Delta\mu_j &= \mu_j - \mu_1\end{aligned}\quad (4.21)$$

Nótese como las posiciones angulares  $\epsilon_j$  y  $\eta_j$  en las ecs. (4.19) y (4.20) son funciones de  $\Delta\delta_j$  y  $\Delta\mu_j$ , así como de sus respectivas posiciones angulares iniciales  $\epsilon_1$  y  $\eta_1$ .

Por tanto, en lo respectivo a la síntesis del modelo,  $j$  sólo tomará valores enteros mayores a 1, es decir,  $j = 2, 3, 4, \dots, n$ ; puesto que la posición inicial ya ha sido considerada. La *figura 4.10* expresa las posiciones angulares presentes en el modelo en su forma discreta.

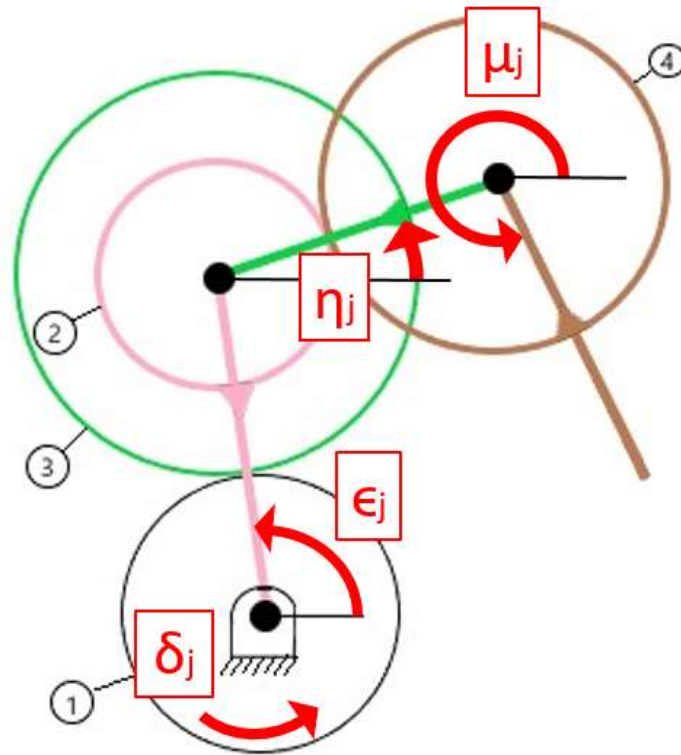


Figura 4.10: Posición angular de engranes asociada a la síntesis cinemática.

#### 4.4. Análisis Estático

En esta sección se propone un análisis del tipo estático en vez de uno del tipo dinámico. Se ignoran los efectos inerciales que pudieran resultar, esto debido a la rapidez a la que actúa el dispositivo en general, no representando ésta una magnitud considerable; por lo que el movimiento producido se analiza cuasiestáticamente. Basándose en la ecuación dinámica en (3.34).

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{V}_k + \sum_{k=1}^n \mathbf{M}_k \cdot \omega_k \mathbf{K} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{V}_k + \sum_{k=1}^n I_k \alpha_k \mathbf{K} \cdot \omega_k \mathbf{K} \quad (4.22)$$



La representación matricial de la ecuación anterior se expresa de la siguiente forma.

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^T \mathbf{V}_k + \sum_{k=1}^n \mathbf{T}_k^T \omega_k = 0 \quad (4.23)$$

Por lo que aplicando la ecuación anterior al modelo bicicloidal se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{V}_P + \mathbf{T}_1^T \omega_1 + \mathbf{T}_2^T \omega_2 = 0 \quad (4.24)$$

Donde:

- $\mathbf{F}$  : Fuerza aplicada por el efector final.
- $\mathbf{T}_1$  : Par o momento aplicado por el engrane 1.
- $\mathbf{T}_2$  : Par o momento aplicado por el eslabón 2.
- $\mathbf{V}_P$  : Velocidad correspondiente al efector final.
- $\omega_1$  : Velocidad angular del engrane 1.
- $\omega_2$  : Velocidad angular del engrane 2.

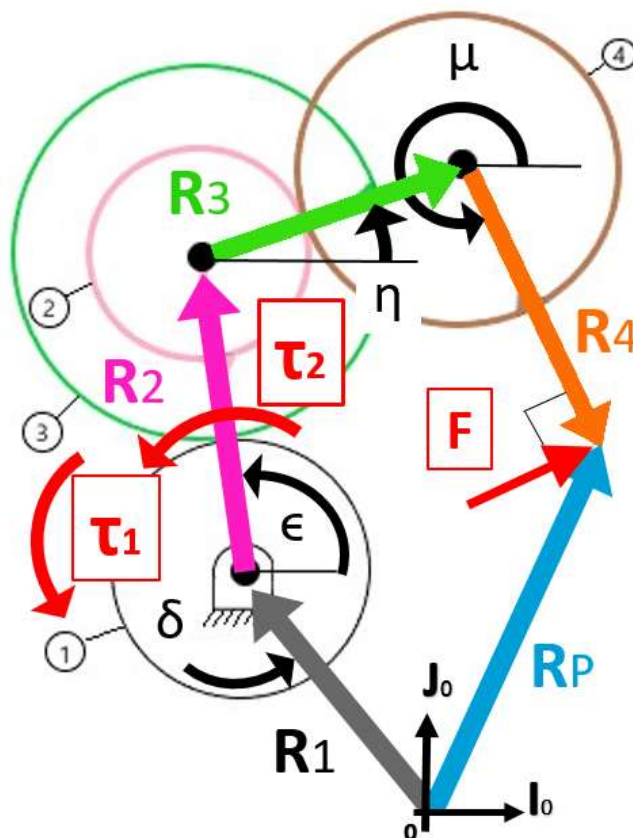


Figura 4.11: Análisis estático del mecanismo bicicloidal.

Es importante ubicar el efector final del mecanismo; éste figurará como la *punta del dedo* ya que es la parte de dicha extremidad que entra en contacto directo primeramente

con el objeto a manipular. Al hacer contacto entre la *punta del dedo* y el objeto existirá entonces una fuerza de reacción que definiremos como  $\mathbf{F}$ ; ésta actúa en dirección normal al eslabón 4, representando con ello la fuerza aplicada por el efector final.

Al ser el mecanismo de 2GDL se contemplan ambos momentos  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$ ; estos figuran como entradas externas al sistema y ejercen su acción sobre el engrane 1 y el eslabón 2, respectivamente. El sentido y dirección de  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$  se pueden apreciar más claramente mediante la *figura 4.11*.

Recordando la ec. (4.1) y derivándola con respecto al tiempo se obtiene la ec. (4.25).

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_P &= \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4 \\ \mathbf{V}_P &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4\end{aligned}\quad (4.25)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2 &= \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{V}_3 &= \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{V}_4 &= \boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{R}_4\end{aligned}\quad (4.26)$$

Además:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_1 &= \dot{\delta}\mathbf{K} \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= \dot{\epsilon}\mathbf{K} \\ \boldsymbol{\omega}_3 &= \dot{\eta}\mathbf{K} \\ \boldsymbol{\omega}_4 &= \dot{\mu}\mathbf{K}\end{aligned}\quad (4.27)$$

Sustituyendo las ecs. en (4.26) y (4.27) en la ec. (4.25):

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_P &= (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_2) + (\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{R}_3) + (\boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{R}_4) \\ &= (\dot{\epsilon}\mathbf{K}) \times \mathbf{R}_2 + (\dot{\eta}\mathbf{K}) \times \mathbf{R}_3 + (\dot{\mu}\mathbf{K}) \times \mathbf{R}_4\end{aligned}\quad (4.28)$$

Definiendo los vectores  $\mathbf{U}_2$ ,  $\mathbf{U}_3$  y  $\mathbf{U}_4$  como vectores normales a  $\mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{R}_3$  y  $\mathbf{R}_4$ , respectivamente.

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_2 &= \mathbf{K} \times \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{U}_3 &= \mathbf{K} \times \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{U}_4 &= \mathbf{K} \times \mathbf{R}_4\end{aligned}\quad (4.29)$$

Reescribiendo la ec. (4.28) de la siguiente forma:

$$\mathbf{V}_P = \dot{\epsilon}\mathbf{U}_2 + \dot{\eta}\mathbf{U}_3 + \dot{\mu}\mathbf{U}_4\quad (4.30)$$

Sustituyendo  $\mathbf{V}_P$  procedente de la expresión en (4.30) en ec.(4.24):

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^T \mathbf{V}_P + \mathbf{T}_1^T \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{T}_2^T \boldsymbol{\omega}_2 &= 0 \\ \mathbf{F}^T (\dot{\epsilon} \mathbf{U}_2 + \dot{\eta} \mathbf{U}_3 + \dot{\mu} \mathbf{U}_4) + \mathbf{T}_1^T (\dot{\delta} \mathbf{K}) + \mathbf{T}_2^T (\dot{\epsilon} \mathbf{K}) &= 0\end{aligned}\quad (4.31)$$

Retomando las expresiones en (4.14) y (4.18).

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{1}{Q} (S \Delta \delta + \Delta \mu) + \epsilon_1 \\ &= \frac{1}{Q} (S(\delta - \delta_1) + (\mu - \mu_1)) + \epsilon_1\end{aligned}\quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}\eta &= L \Delta \delta + H \Delta \mu + \eta_1 \\ &= L(\delta - \delta_1) + H(\mu - \mu_1) + \eta_1\end{aligned}\quad (4.33)$$

Derivando (4.32) y (4.33) con respecto al tiempo:

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{Q} (S \dot{\delta} + \dot{\mu}) \quad (4.34)$$

$$\dot{\eta} = L \dot{\delta} + H \dot{\mu} \quad (4.35)$$

Sustituyendo el resultado anterior de las ecuaciones (4.34) y (4.35) en (4.31). Nótese como la ecuación se simplifica quedando en términos de  $\dot{\delta}$  y  $\dot{\mu}$ .

$$\mathbf{F}^T \left( \frac{1}{Q} (S \dot{\delta} + \dot{\mu}) \mathbf{U}_2 + (L \dot{\delta} + H \dot{\mu}) \mathbf{U}_3 + \dot{\mu} \mathbf{U}_4 \right) + \mathbf{T}_1^T (\dot{\delta} \mathbf{K}) + \frac{1}{Q} \mathbf{T}_2^T (S \dot{\delta} + \dot{\mu}) \mathbf{K} = 0$$

Simplificando y agrupando términos:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^T \left( \frac{1}{Q} S \mathbf{U}_2 + L \mathbf{U}_3 \right) \dot{\delta} + \mathbf{F}^T \left( \frac{1}{Q} \mathbf{U}_2 + H \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_4 \right) \dot{\mu} + \\ \mathbf{T}_1^T \mathbf{K} \dot{\delta} + \frac{1}{Q} \mathbf{T}_2^T S \mathbf{K} \dot{\delta} + \frac{1}{Q} \mathbf{T}_2^T \mathbf{K} \dot{\mu} &= 0 \\ \underbrace{\left( \mathbf{F}^T \left( \frac{1}{Q} S \mathbf{U}_2 + L \mathbf{U}_3 \right) + \left( \mathbf{T}_1 + \frac{1}{Q} S \mathbf{T}_2 \right)^T \mathbf{K} \right) \dot{\delta}}_{Q_1} + \\ \underbrace{\left( \mathbf{F}^T \left( \frac{1}{Q} \mathbf{U}_2 + H \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_4 \right) + \frac{1}{Q} \mathbf{T}_2^T \mathbf{K} \right) \dot{\mu}}_{Q_2} &= 0\end{aligned}\quad (4.36)$$

Lo anterior se simplifica de la siguiente forma.

$$Q_1 \dot{\delta} + Q_2 \dot{\mu} = 0 \quad (4.37)$$

Siendo finalmente:

$$Q_1 = \mathbf{F}^T \left( \frac{1}{Q} S \mathbf{U}_2 + L \mathbf{U}_3 \right) + \left( \mathbf{T}_1 + \frac{1}{Q} S \mathbf{T}_2 \right)^T \mathbf{K} = 0 \quad (4.38)$$

$$Q_2 = \mathbf{F}^T \left( \frac{1}{Q} \mathbf{U}_2 + H \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_4 \right) + \frac{1}{Q} \mathbf{T}_2^T \mathbf{K} = 0 \quad (4.39)$$

Definiendo las ecs. (4.38) y (4.39) como las ecuaciones de análisis estático, en ellas se involucran las fuerzas y momentos externos que actúan sobre el mecanismo. Estas ecuaciones estáticas se verán empleadas posteriormente en la síntesis estática.

#### 4.5. Síntesis Estática

Partiendo de la *figura 4.12*, se observan cambios concernientes a la síntesis estática con respecto al análisis estático visto en la sección anterior.

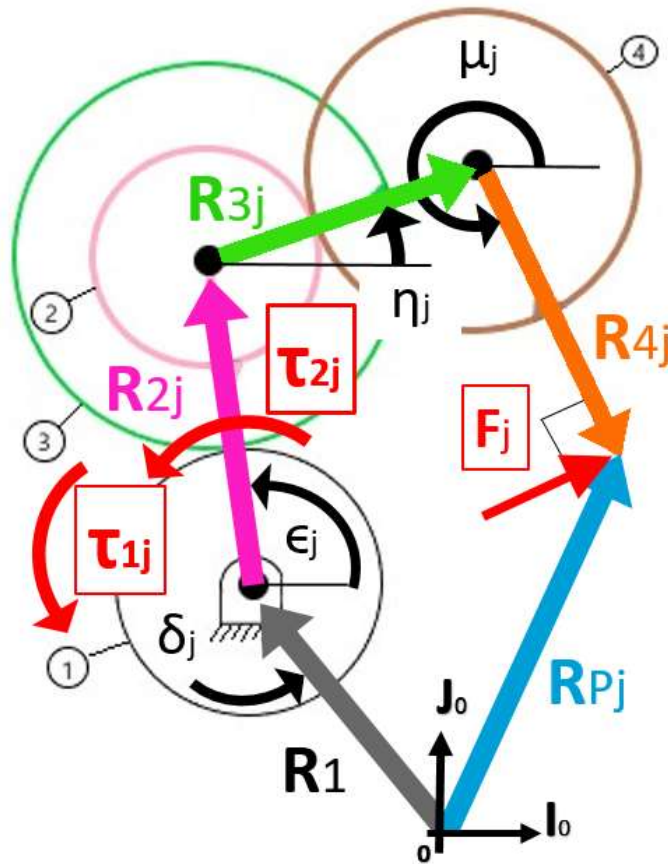


Figura 4.12: Síntesis estática del mecanismo bicicloidal.

Apoyándose en las ecuaciones de análisis estático (4.38) y (4.39) se plantean entonces las ecuaciones de síntesis estática del mecanismo bicicloidal, éstas se muestran en las ecs. (4.40) y (4.41).

$$Q_{1j} = \mathbf{F}_j^T \left( \frac{1}{Q} S \mathbf{U}_{2j} + L \mathbf{U}_{3j} \right) + \left( \mathbf{T}_{1j} + \frac{1}{Q} S \mathbf{T}_{2j} \right)^T \mathbf{K} = 0 \quad (4.40)$$

$$Q_{2j} = \mathbf{F}_j^T \left( \frac{1}{Q} \mathbf{U}_{2j} + H \mathbf{U}_{3j} + \mathbf{U}_{4j} \right) + \frac{1}{Q} \mathbf{T}_{2j}^T \mathbf{K} = 0 \quad (4.41)$$

Tal como se puede apreciar, los vectores asociados a la fuerza y a los momentos se han discretizado; denotando estos al añadir el subíndice  $j$ , donde  $j = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ .

Del mismo modo que las posiciones angulares estarán referidas con respecto al número de posición, recordando las ecuaciones obtenidas en la síntesis cinemática de engranes: (4.19), (4.20) y (4.21). Donde  $j = 2, 3, 4, \dots, n$ .

#### 4.6. Solución de la Síntesis Estática

Como ya se ha mencionado en secciones anteriores, el modelo bicicloidal representa la base de un sistema más complejo, de ahí la justificación de obtener una solución del mismo mediante el planteamiento de un método alternativo, obteniendo resultados numéricos y así demostrar la efectividad del método empleado para resolver el mecanismo.

En esta sección se soluciona la síntesis estática del mecanismo bicicloidal. Se presentan los datos propuestos y conocidos asignados como entrada del modelo de síntesis estática así como las variables a resolver. En la *figura 4.13* se aprecian el conjunto de vectores y posiciones angulares contempladas en la síntesis cinemática del mecanismo.

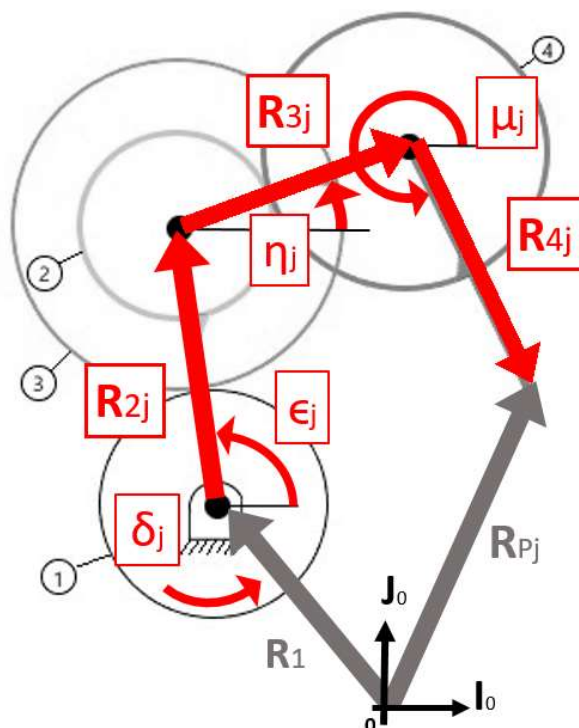


Figura 4.13: Elementos presentes en la síntesis cinemática del mecanismo.

Considerando las ecs. (4.4) y (4.5).

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_{2j} + \mathbf{R}_{3j} + \mathbf{R}_{4j} = \mathbf{R}_{Pj}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= [x_1, y_1, 0]^T \\ \mathbf{R}_{2j} &= \mathbf{R}_z(\epsilon_j) \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2 &= [x_2, 0, 0]^T \\ \mathbf{R}_{3j} &= \mathbf{R}_z(\eta_j) \mathbf{r}_3 & \mathbf{r}_3 &= [x_3, 0, 0]^T \\ \mathbf{R}_{4j} &= \mathbf{R}_z(\mu_j) \mathbf{r}_4 & \mathbf{r}_4 &= [x_4, 0, 0]^T \\ \mathbf{R}_{Pj} &= [x_{Pj}, y_{Pj}, 0]^T \end{aligned}$$

Se decide plantear como incógnitas para la síntesis de posición a las variables  $x_1$  y  $y_1$ .

Los datos propuestos (*Garibay, 2013*) para  $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  se muestran a continuación:

$x_2 = 5$
$x_3 = 2.7$
$x_4 = 3$

$N_1 = 60$
$N_3 = 40$

$x_{P1} = 1.7$	$y_{P1} = 9.7$
$x_{P2} = 3.5$	$y_{P2} = 9.1$
$x_{P3} = 5.1$	$y_{P3} = 8.1$
$x_{P4} = 6.6$	$y_{P4} = 6.2$
$x_{P5} = 7.1$	$y_{P5} = 4.0$
$x_{P6} = 6.9$	$y_{P6} = 1.3$
$x_{P7} = 6.1$	$y_{P7} = -0.4$

$\kappa_1 = 234^\circ$	$\mu_1 = \kappa_1 - 180^\circ$
$\kappa_2 = 220^\circ$	$\mu_2 = \kappa_2 - 180^\circ$
$\kappa_3 = 180^\circ$	$\mu_3 = \kappa_3 - 180^\circ$
$\kappa_4 = 170^\circ$	$\mu_4 = \kappa_4 - 180^\circ$
$\kappa_5 = 160^\circ$	$\mu_5 = \kappa_5 - 180^\circ$
$\kappa_6 = 150^\circ$	$\mu_6 = \kappa_6 - 180^\circ$
$\kappa_7 = 140^\circ$	$\mu_7 = \kappa_7 - 180^\circ$

$\delta_2 = \delta_1$
$\delta_3 = \delta_1$
$\delta_4 = \delta_1$
$\delta_5 = \delta_1$
$\delta_6 = \delta_1$
$\delta_7 = \delta_1$

Con base en el planteamiento anterior, las denominaciones de números de dientes  $N_2$  y  $N_4$  permanecen como incógnitas.

Los ángulos  $\delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7$  toman valores iguales a la posición angular inicial  $\delta_1$ . Es indispensable aclarar que para la solución de la síntesis del mecanismo se asumirá el estado del engrane 1 como inmóvil, permaneciendo éste en una misma posición en todo momento. Existiendo entonces un desplazamiento angular nulo.

Las magnitudes  $x_2, x_3, x_4$  toman valores correspondientes a las longitudes de las falanges proximal, medial y distal, respectivamente. Se recomienda consultar *Fig. 4.2* y *Fig. 4.5*.

La trayectoria deseada es definida por el conjunto de 7 posiciones  $(x_{Pj}, y_{Pj})$ , en forma de puntos coordenados en el plano  $XY$  (*Fig 4.14*).

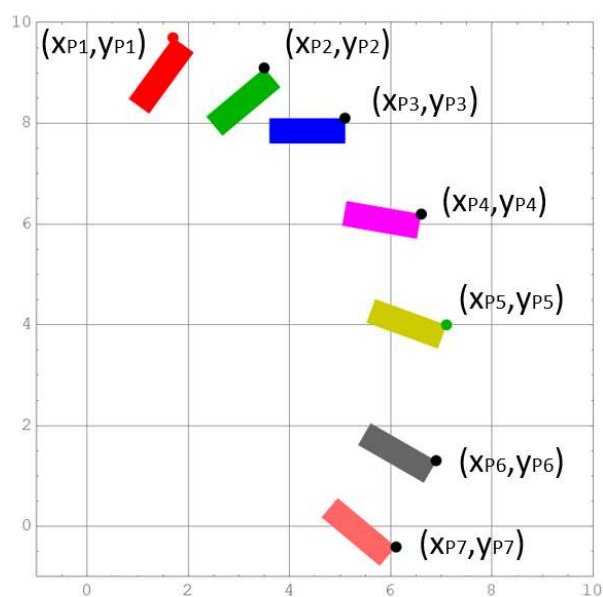


Figura 4.14: Posiciones de interés en forma de puntos coordenados.

$\kappa_j$  se representa como el ángulo asociado a un vector denotado por  $\mathbf{p}_j$ . El vector  $\mathbf{p}_j$  se usará para definir la dirección del efector final (eslabón 4); declarando como punto inicial a  $P(x_{P_j}, y_{P_j})$ , tal como se muestra en la *figura 4.15*.

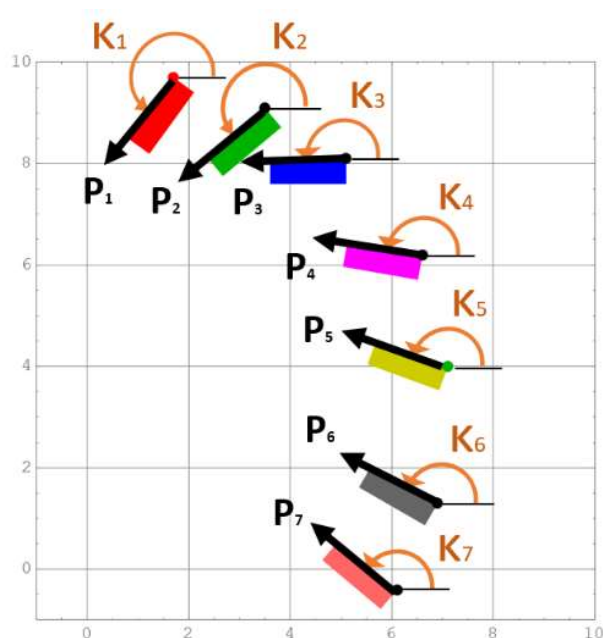


Figura 4.15: Ángulos de interés en la síntesis del mecanismo.

Es claro apreciar como el vector propuesto  $\mathbf{p}_j$  y el vector  $\mathbf{R}_{4j}$  poseen signos con-

trarios. Existiendo una diferencia de  $180^\circ$  entre el ángulo  $\mu_j$  y el ángulo  $\kappa_j$ .

$$\mu_j = \kappa_j - 180^\circ \quad (4.42)$$

A partir de las expresiones en (4.19) - (4.20) las ecuaciones de síntesis de engranes para  $j = 2, 3, 4, 5, 6, 7$  se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} \Delta\delta_j &= \delta_j - \delta_1 = 0 \\ \Delta\mu_j &= \mu_j - \mu_1 \\ \epsilon_j &= \frac{S\Delta\delta_j + \Delta\mu_j}{Q} + \epsilon_1 \\ \eta_j &= L\Delta\delta_j + H\Delta\mu_j + \eta_1 \end{aligned}$$

Permaneciendo como incógnitas para la síntesis de posición las variables:  $\epsilon_1, \eta_1$ .

Se muestra mediante (4.40) y (4.41) las ecuaciones de síntesis estática para  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} Q_{1j} &= \mathbf{F}_j^T \left( \frac{1}{Q} S \mathbf{U}_{2j} + L \mathbf{U}_{3j} \right) + \left( \mathbf{T}_{1j} + \frac{1}{Q} S \mathbf{T}_{2j} \right)^T \mathbf{K} = 0 \\ Q_{2j} &= \mathbf{F}_j^T \left( \frac{1}{Q} \mathbf{U}_{2j} + H \mathbf{U}_{3j} + \mathbf{U}_{4j} \right) + \frac{1}{Q} \mathbf{T}_{2j}^T \mathbf{K} = 0 \end{aligned}$$

Los datos propuestos a contemplar dentro de la síntesis estática se muestran a continuación.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_j &= \mathbf{R}_z(\mu_j + \pi/2) \mathbf{f}_j & \mathbf{f}_j &= [f_p, 0, 0]^T & f_p &= 5.0[N] \\ \mathbf{T}_{1j} &= [0, 0, T_{1j}]^T \\ \mathbf{T}_{2j} &= [0, 0, T_{2j}]^T \end{aligned}$$

En la *figura 4.16* es posible apreciar la acción de una fuerza sobre el extremo del efector final (*punta del dedo*), representada por el vector  $\mathbf{F}_j$ , asumiendo una dirección perpendicular al eslabón 4 (representada por la falange distal). Para lograr la condición de perpendicularidad, la matriz de rotación usará el ángulo  $\mu_j + \pi/2$ . Siendo  $f_p$  un escalar de valor fijo y constante.

Se contemplan entonces como incógnitas a las variables:  $T_{1j}$  y  $T_{2j}$  para  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ .



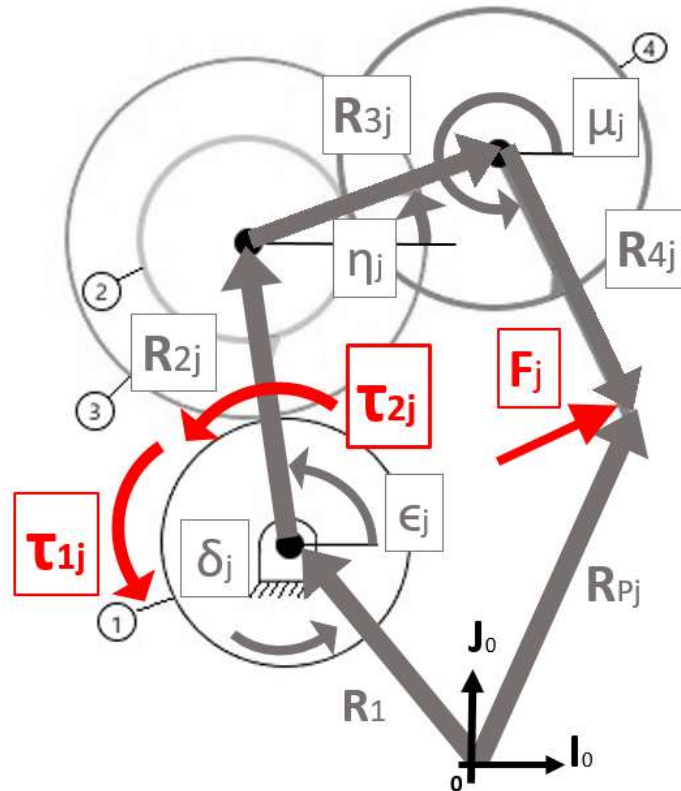


Figura 4.16: Fuerzas y momentos externos contemplados en la síntesis estática.

Una vez calculadas las denominaciones de números de dientes, se obtienen los radios correspondientes a cada engrane del mecanismo haciendo uso de las ecs. (4.43) - (4.46). Siendo las incógnitas:  $r_1, r_2, r_3, r_4$ .

$$r_1 + r_3 = x_2 \quad (4.43)$$

$$r_2 + r_4 = x_3 \quad (4.44)$$

$$\frac{N_1}{N_3} = \frac{r_1}{r_3} \quad (4.45)$$

$$\frac{N_2}{N_4} = \frac{r_2}{r_4} \quad (4.46)$$

Para la solución de la síntesis estática del mecanismo se establece la función objetivo mediante el método de Mínimos Cuadrados No Lineales (MCNL) (*Suh & Radcliffe*,

1983).

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) + f_3(\mathbf{x}) \quad (4.47)$$

$$f_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^7 (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_{2j} + \mathbf{R}_{3j} + \mathbf{R}_{4j} - \mathbf{R}_{Pj})^2 \quad (4.48)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^7 (\mathbf{F}_j^T (\frac{1}{Q} S \mathbf{U}_{2j} + L \mathbf{U}_{3j}) + (\mathbf{T}_{1j} + \frac{1}{Q} S \mathbf{T}_{2j})^T \mathbf{K})^2 \quad (4.49)$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^7 (\mathbf{F}_j^T (\frac{1}{Q} \mathbf{U}_{2j} + H \mathbf{U}_{3j} + \mathbf{U}_{4j}) + \frac{1}{Q} \mathbf{T}_{2j}^T \mathbf{K})^2 \quad (4.50)$$

Donde:

$$\mathbf{x} = (x_1, y_1, N_2, N_4, \epsilon_1, \eta_1, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}, T_{16}, T_{17}, T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{24}, T_{25}, T_{26}, T_{27}). \quad (4.51)$$

Se emplean métodos de gradientes para poder de obtener una solución numérica de la función objetivo, tal como el método de Powell. El software Mathematica<sup>®</sup> provee la instrucción conocida como *FindMinimum[]*, capaz de emplear estos métodos de gradientes. Esta herramienta fue utilizada para obtener las soluciones numéricas necesarias lo cual conllevó un método iterativo, obteniendo un número elevado de soluciones posibles de las cuales sólo algunas fueron consideradas.

## 4.7. Resultados

A partir del conjunto de soluciones obtenidas se realizó una distinción con respecto a aquellas que figurarían como las soluciones más significativas. Para ello se determinó un criterio de selección a partir del cual se pudiera considerar una solución como aceptable al cumplir con las siguientes características:

- Los resultados de la solución sostienen una interpretación lógica en relación a su válida representación física. Un ejemplo del incumplimiento de esta condición sería la obtención de números de dientes y/o radios negativos.
- La orientación de las barras en la posición inicial posibilita una postura semejante a la de un dedo humano estando erguido.
- La posición y orientación del efector final en su recorrido se aproxima a la trayectoria compuesta del número de posiciones propuestas.

Como tal no se espera una solución del mecanismo bicicloidal cuyas dimensiones sean antropométricamente cercanas a las de un dedo real; para ello se requerirían modificaciones sustanciales al mecanismo.

Componentes del vector  $\mathbf{R}_1$ :  $x_1, y_1$ .

$$x_1 = -3.16831 \text{ [cm]}$$

$$y_1 = 1.04377 \text{ [cm]}$$

Números de dientes:  $N_2, N_4$ .

$$N_2 = 11386.9$$

$$N_4 = 16072.1$$

Par de torsión  $T_{1_j}$ :

$$T_{1_1}, T_{1_2}, T_{1_3}, T_{1_4}, T_{1_5}, T_{1_6}, T_{1_7}.$$

$$T_{1_1} = 56.8298 \text{ [N.cm]}$$

$$T_{1_2} = 56.1633 \text{ [N.cm]}$$

$$T_{1_3} = 53.7544 \text{ [N.cm]}$$

$$T_{1_4} = 53.0441 \text{ [N.cm]}$$

$$T_{1_5} = 52.2941 \text{ [N.cm]}$$

$$T_{1_6} = 51.5066 \text{ [N.cm]}$$

$$T_{1_7} = 50.6836 \text{ [N.cm]}$$

Par de torsión  $T_{2_j}$ :

$$T_{2_1}, T_{2_2}, T_{2_3}, T_{2_4}, T_{2_5}, T_{2_6}, T_{2_7}.$$

$$T_{2_1} = -109.062 \text{ [N.cm]}$$

$$T_{2_2} = -107.79 \text{ [N.cm]}$$

$$T_{2_3} = -99.2163 \text{ [N.cm]}$$

$$T_{2_4} = -96.0365 \text{ [N.cm]}$$

$$T_{2_5} = -92.5034 \text{ [N.cm]}$$

$$T_{2_6} = -88.6562 \text{ [N.cm]}$$

$$T_{2_7} = -84.5385 \text{ [N.cm]}$$

Posiciones Iniciales:  $\epsilon_1, \eta_1$ .

$$\epsilon_1 = 0.891311 \text{ [rad]}$$

$$\eta_1 = 7.65787 \text{ [rad]}$$

En la *tabla 4.2* se muestran las magnitudes de los radios de engranes:

$r_1, r_2, r_3, r_4$ .

Tabla 4.2: Radios de engranes obtenidos.

Radio [cm]			
engrane 1	engrane 2	engrane 3	engrane 4
3.0	1.11966	2.0	1.58034

Se muestra a continuación en la *figura 4.17* la solución desarrollada en Mathematica<sup>®</sup>.

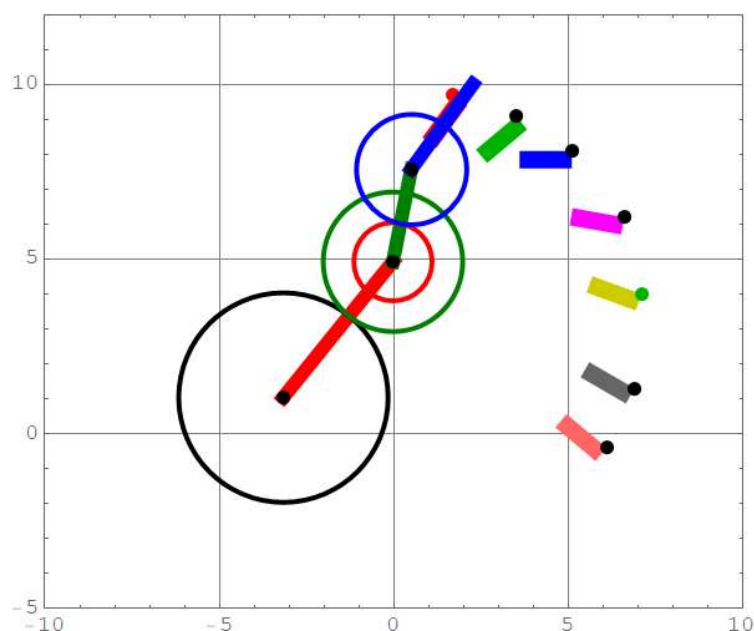


Figura 4.17: Ejemplo de solución del mecanismo bicicloidal.

## 4.8. Comentarios Finales

Se consiguió obtener una solución aceptable del mecanismo bicicloidal empleando el modelado propuesto, sugiriendo el empleo de una síntesis estática que toma en cuenta una síntesis de tipo cinemática. Lo anterior respetando las mismas condiciones a tomar en cuenta en el modelo bicicloidal original (*Garibay, 2013*), tales como: Las longitudes de las falanges, la trayectoria conformada por las siete posiciones del dedo, así como los siete valores del ángulo de orientación asociados a cada posición. De esta forma, estas condiciones permanecieron y figuraron como datos inalterables que alimentaron al modelo bicicloidal actual de la misma forma. Al final se consigue una animación del nuevo mecanismo en Mathematica<sup>®</sup> posterior a la solución del mismo; observando mediante dicha animación el seguimiento de la trayectoria descrita, consiguiendo emular así el movimiento de flexo-extensión buscado. Es importante notar

también como, tanto en el mecanismo bicicloidal propuesto como en el original, existe un desplazamiento angular nulo asociado al engrane 1, siendo ésta una restricción que se ha mantenido vigente en lo que respecta al planteamiento propuesto en este capítulo.

Vale la pena mencionar que, tanto la síntesis cinemática propia del diseño original como la síntesis estática concerniente al modelo presentado se plantean mediante la formulación de una función objetivo la cual se resuelve mediante el método de MCNL (*Suh & Radcliffe, 1983*). Igualmente, en ambos diseños se emplea el software Mathematica<sup>®</sup> para la implementación de dicho método de optimización. Cabe señalar que, aun apoyándose en el uso de cualquier método numérico, siempre será más deseable contar con un menor número de variables a resolver, facilitando así la obtención de una solución por parte del método. En adición a todo lo ya mencionado, se podría decir que el empleo de la metodología propuesta para resolver el mecanismo bicicloidal conllevó la oportunidad de ‘jugar’ con las variables y datos contemplados como parte del modelo. De esta forma, existieron ciertas libertades que permitieron observar el comportamiento del mecanismo al ser planteado mediante una síntesis estática; y así, examinar la respuesta que se generaba hasta finalmente obtener una solución. Por lo que en cierta medida lo anterior representó un proceso iterativo. Permitiendo con ello un cierto grado de flexibilidad a la hora de considerar algunos de los parámetros del diseño originalmente planteado como datos y algunos otros como variables a resolver.

Un ejemplo más claro de este último punto es perceptible dentro de la selección de datos que alimentaron a la síntesis. Para ello, se propusieron solo 2 denominaciones de número de dientes ( $N_1, N_3$ ) de las 4 disponibles, logrando resolver las 2 restantes ( $N_2, N_4$ ) mientras que en el modelo original las 4 denominaciones de números de dientes se proponen desde un inicio, siendo interpretados como datos conocidos. Uno de los retos más relevantes que parecía dificultar la obtención de una solución fue debido a que el valor de número de dientes obtenido muchas veces no representaba un valor positivo; por lo que en esos casos, era necesario abandonar dicha solución y correr nuevamente el método numérico generando una nueva. Es necesario mencionar que los dos valores de números de dientes obtenidos en la solución del mecanismo; es decir,  $N_2, N_4$ , contienen valores demasiado altos en comparación a las denominaciones de números de dientes existentes comercialmente. Sin embargo, al pertenecer el engrane 2 y 4 al mismo tren planetario, los valores de números de dientes podrían bien ser alterados a conveniencia; esto siempre y cuando se respete la relación proporcionar existente entre ambos, es decir, la razón de velocidad deberá ser siempre la misma. Es así como ambas variables, al ser consideradas de forma separada, no conllevan ninguna relación con otra variable en el modelo a excepción de la anterior expuesta. Aún con todo lo anteriormente dicho, valdría la pena clarificar que la solución obtenida no

deja de ser aceptable; pues el desarrollo expuesto en este capítulo no es con fines de prototipado y/o producto final.

Se observa mediante la *figura 4.18* una comparación entre las representaciones gráficas correspondientes a ambos mecanismos efectuadas en Mathematica<sup>®</sup>.

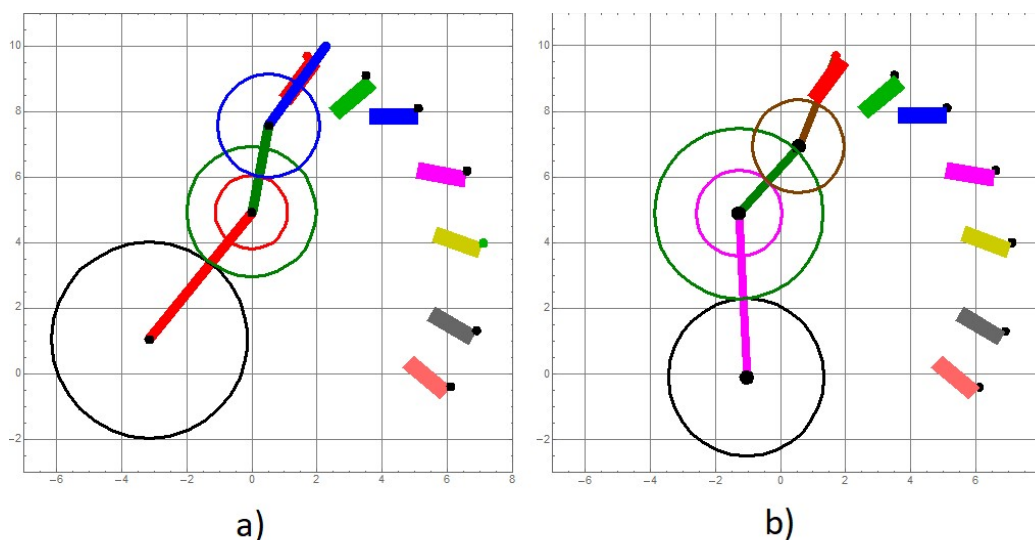


Figura 4.18: a) Solución propuesta del mecanismo. b) Solución original del mecanismo.

La orientación de las barras discrepa ligeramente entre ambos modelos tal como se observa en la *figura 4.18* ; puesto que ambos modelos consideran en su solución valores iniciales de posición angular distintos asociados a los engranes 2, 3 y 4. Aun así, este último punto no figura como un factor contradictorio al señalar a la solución obtenida como aceptable; esto pues la orientación del conjunto de eslabones bien se asemeja a la postura natural de un dedo.

Se sabe que tanto la solución del modelo bicicloidal presente en esta sección como la concerniente al modelo original incorporan ambas una síntesis cinemática; sin embargo, el modelo presente plantea una síntesis estática. De esta forma es que se ha considerado a la fuerza de salida como un requerimiento adicional en adición al seguimiento de una trayectoria determinada, figurando ésta como la diferencia principal entre el planteamiento previo aplicado al modelo original y el planteamiento propuesto. De este modo, dentro de los datos que alimentaron a la síntesis se precisó una exigencia al sistema, esto en forma de una magnitud en cuanto a la fuerza ejercida por la punta del dedo como la salida esperada, estableciendo la magnitud de ésta igual a 5.0[N]; como resultado se obtuvo la magnitud del momento  $T_{2j}$  a la entrada del mecanismo encontrándose dentro de un rango de entre 1.09[N.m] y 0.845[N.m]. Se presentan a continuación estos resultados en forma de una simple relación entre la fuerza de prensión

ejercida a la salida con respecto al par mínimo requerido a la entrada.

$$\frac{f_p}{T_{2j}} = \frac{5.0[N]}{1.09[N.m]} = 4.587[1/m]$$

El vector  $\mathbf{R}_1$  como ya se sabe, hace alusión al vector de posición que va desde el punto coordenado  $P(0,0)$  hasta el perno sobre el cual existe una junta entre tres cuerpos: El engrane 1, el eslabón 2 y la tierra, éste último término se define comúnmente como el elemento del mecanismo que permanece inmóvil en todo momento y sobre el cual se apoya el mismo. Éste mismo vector se implementó en el desarrollo del modelo bicicloidal original y fungió como parte de la misma cadena cinemática que define al mecanismo en cuestión. En dicho modelo anterior, el componente  $x_1$  del vector  $\mathbf{R}_1$  había sido igualado a cero, mientras que el componente  $y_1$  era tratado como una incógnita a resolver.

Por otro lado, el diseño propuesto considera los componentes  $x_1, y_1$  y del vector  $\mathbf{R}_1$  como incógnitas, esto se logró no sin antes apreciar mediante diversas iteraciones como soluciones del mecanismo conseguían refinarse al permitir que en el vector  $\mathbf{R}_1$  existiera una variación, obteniendo con ello soluciones que mostrarán una mejor postura, esto en cuanto a la orientación de las barras refiere. Así como se lograba favorecer al mecanismo en cuestión consiguiendo alcanzar las posiciones propuestas dentro de la trayectoria con mayor facilidad, representando de esta forma un arreglo más acorde y parecido al de un dedo.

Aunque en un principio se optó por eliminar por completo el vector  $\mathbf{R}_1$  del modelo y ubicar el perno de interés en el origen del mecanismo; sin embargo, las consecuencias de este planteamiento produjeron soluciones indeseables en las que las barras se encontraban caóticamente intrincadas unas con otras, estando lejos de aproximarse a cualquiera de las siete posiciones contempladas. Por tanto, al no existir un valor definido para ninguno de los componentes del vector  $\mathbf{R}_1$  se consigue la eliminación de una restricción, permitiendo posicionar de forma más libre lo que sería entonces el origen real del mecanismo.

## Capítulo 5

# Mecanismo Hexacicloidal

### 5.1. Definición del mecanismo

A continuación se presenta en la *figura 5.1* el concepto que refiere al modelo hexacicloidal (*Garibay, 2013*).

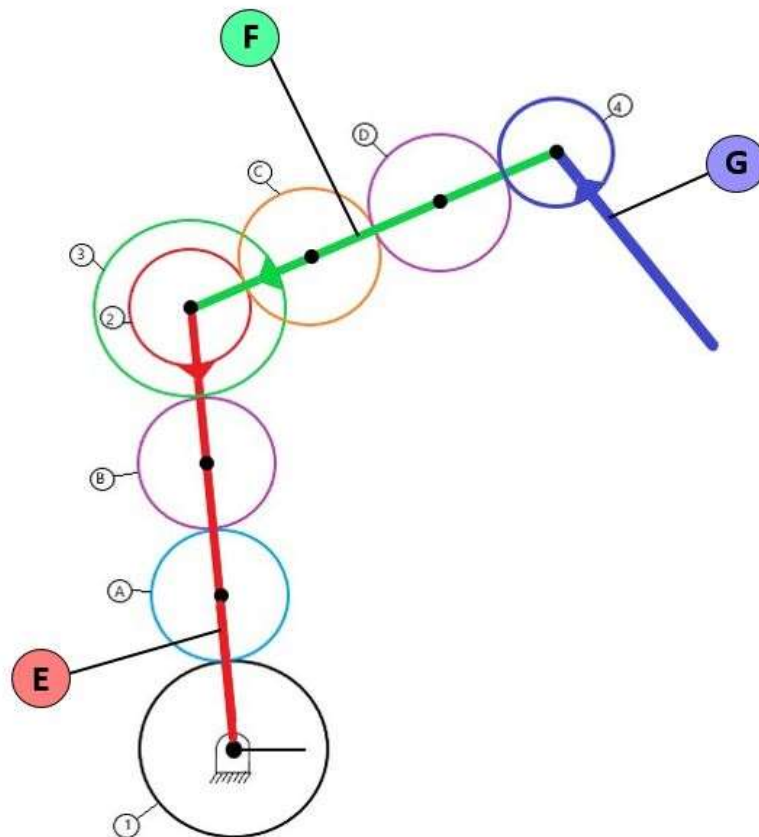


Figura 5.1: Componentes del mecanismo hexacicloidal.



Como se sabe, el mecanismo hexacicloidal está basado en el mecanismo bicicloidal (*Kaufman & Sandor, 1969*), siendo este segundo la base sobre la cual se fundamenta el primero. Existen evidentemente considerables similitudes entre el mecanismo hexacicloidal y el mecanismo bicicloidal al contar en ambos con un total de 3 eslabones unidos a engranes es una de ellas. Dichos engranes son nombrados exactamente de la misma forma que en el modelo bicicloidal, siendo estos el engrane 2, engrane 3 y engrane 4; aliados al eslabón 2, eslabón 3 y eslabón 4, respectivamente. De nueva cuenta, cada eslabón figura como una de las falanges propias de un dedo humano, conservando un valor de longitud asociado a la misma. Dentro de la *figura 5.1* han sido usadas las letras E, F y G para hacer referencia a los eslabones de cada configuración tal como se había planteado en el *Capítulo 4 "Mecanismo Bicicloidal"*; esto con el fin de visualizar más claramente dichos elementos por sobre el resto. Debido a que la estructura que compone tanto el mecanismo bicicloidal como el hexacicloidal conserva a los engranes 1, 2 3 y 4 como elementos en común en forma inalterable, nos referiremos a los mismos como *engranes principales*. Cabe denotar que el principio de operación del mecanismo hexacicloidal viene a ser exactamente el mismo que el del mecanismo bicicloidal, contando ambos con 2 GDL.

Sin embargo, la diferencia más notable entre ambos modelos reside con respecto al número de engranes presentes en el mecanismo; esto bien, no hace alusión a los engranes principales sino al resto, a los cuales nos referiremos como *engranes secundarios*. Tal como se aprecia en la *figura 5.1*, los engranes secundarios son descritos como engranes intermedios localizados en duplas entre cada conjunto de dos engranes principales, existiendo en todos y cada uno de ellos una unión con respecto a un mismo eslabón. Los engranes secundarios serán referidos como: engrane A, engrane B, engrane C y engrane D. Tal como indica su nombre, el modelo hexacicloidal posee no dos, sino seis trenes de engranes planetarios como parte de su configuración; lo anterior se relaciona al número de semi-juntas presentes en el mecanismo, como resultado del contacto entre dientes de engranes.

Como ventaja de mayor importancia dentro del modelo hexacicloidal, se pretende obtener una disminución notable en cuanto a las dimensiones del dispositivo al emplear un arreglo de trenes planetarios más compacto que en la configuración bicicloidal. Esto es lógico; puesto que al incluir un mayor número de engranes compartiendo una misma barra de longitud fija se esperaría una reducción en las dimensiones de los mismos; naturalmente, esto se ve reflejado en una reducción de sus respectivos radios o diámetros.

Con la finalidad de mantener una consistencia adecuada, se le referirá como mecanismo original o modelo original (así como para las múltiples variantes del nombre) al dispositivo expuesto por Eduardo Garibay en su trabajo: "Diseño de Mano con un

Mecanismo Hexacicloidal". Aplicable para el modelo hexacicloidal de interés, representando éste el diseño previo al cual se recurrirá continuamente en este capítulo.

El mecanismo hexacicloidal original consiguió en su momento satisfacer el requerimiento relativo a las dimensiones del dispositivo, compactando el mismo significativamente en comparación con las dimensiones del mecanismo bicicloidal original. Otro de los argumentos que sostiene el diseño original es que el mecanismo hexacicloidal se decide como la opción más atractiva para lograr disminuir el par de torsión necesario a la entrada garantizando una fuerza de prensión consistente por parte del efector final, siendo ésta última característica de suma importancia en la obtención de una solución del mecanismo a lo largo de secciones posteriores. Al final del capítulo se pretende de nueva cuenta comparar los resultados obtenidos en el mecanismo propuesto con respecto a los presentados por el mecanismo original, para ello se recomienda recurrir a la sección de *Apéndice* ubicada al final del trabajo pues contiene información relevante con respecto al diseño original.

Se puede inferir entonces que existe un número de variantes que el mecanismo bicicloidal puede sugerir a partir de sí mismo, siendo ésta su forma más fundamental; representando mediante el modelo hexacicloidal una de estas variantes. A lo largo de las secciones subsecuentes dentro del capítulo, se abordarán diversos desarrollos y planteamientos aplicados directamente al modelo hexacicloidal proponiendo emplear los mismos métodos de síntesis y análisis expuestos en el capítulo anterior.

## 5.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática de Eslabones

En esta sección se definen las ecuaciones de análisis cinemático; a partir de las cuales, se definirán las ecuaciones de síntesis cinemática.

## 5.2.1. Ecuaciones de Análisis Cinemático

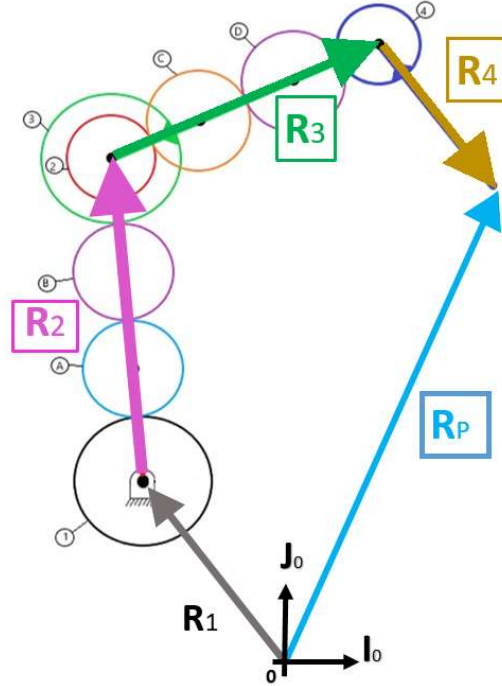


Figura 5.2: Vectores asociados al análisis cinemático.

La ecuación de posición del modelo hexacicloidal es la misma que la usada en el mecanismo bicicloidal (*Fig. 5.2*); como ya se explicó antes, ambos modelos comparten los mismos eslabones. Esto se expresa mediante las ecs. (5.1) y (5.2).

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}_P \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= [x_1, y_1, 0]^T \\ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{R}_z(\epsilon) \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{R}_3 &= \mathbf{R}_z(\eta) \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{R}_4 &= \mathbf{R}_z(\mu) \mathbf{r}_4 \\ \mathbf{R}_P &= [x_P, y_P, 0]^T \end{aligned} \quad (5.2)$$

Las variables de posición angular  $\epsilon$ ,  $\eta$ ,  $\mu$  corresponden a la orientación de los eslabones 2, 3 y 4, respectivamente (*Fig. 5.3*).

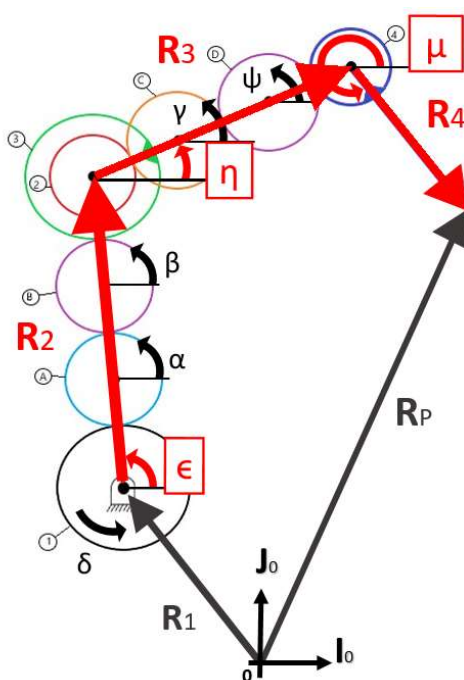


Figura 5.3: Vectores y posiciones angulares asociadas al análisis cinemático.

Siendo  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  constantes asociadas a la longitud de las falanges (Fig. 5.4).

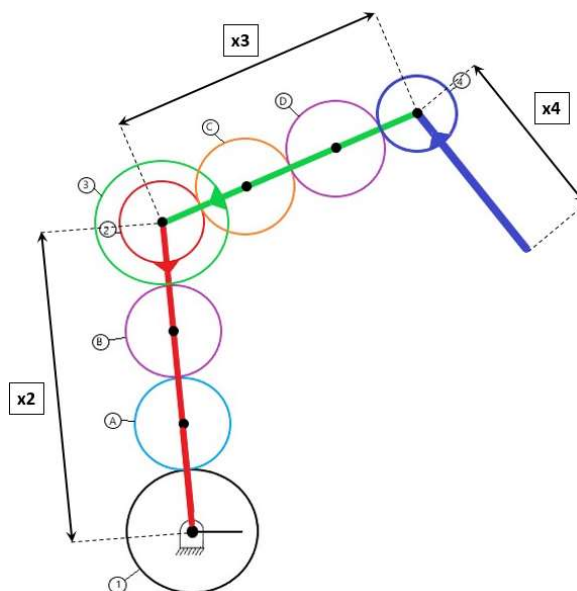


Figura 5.4: Longitud de los eslabones en mecanismo hexacicloidal.

### 5.2.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática

De la misma manera que en la ecuación de posición presente en el análisis cinemático, la ecuación de síntesis cinemática del mecanismo hexacicloidal se basa en la

ecuación de síntesis del mecanismo bicicloidal; es decir, ecuaciones (5.3) y (5.4). Donde  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  (Fig. 5.5).

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_{2j} + \mathbf{R}_{3j} + \mathbf{R}_{4j} = \mathbf{R}_{Pj} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{2j} &= \mathbf{R}_z(\epsilon_j) \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{R}_{3j} &= \mathbf{R}_z(\eta_j) \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{R}_{4j} &= \mathbf{R}_z(\mu_j) \mathbf{r}_4 \end{aligned} \quad (5.4)$$

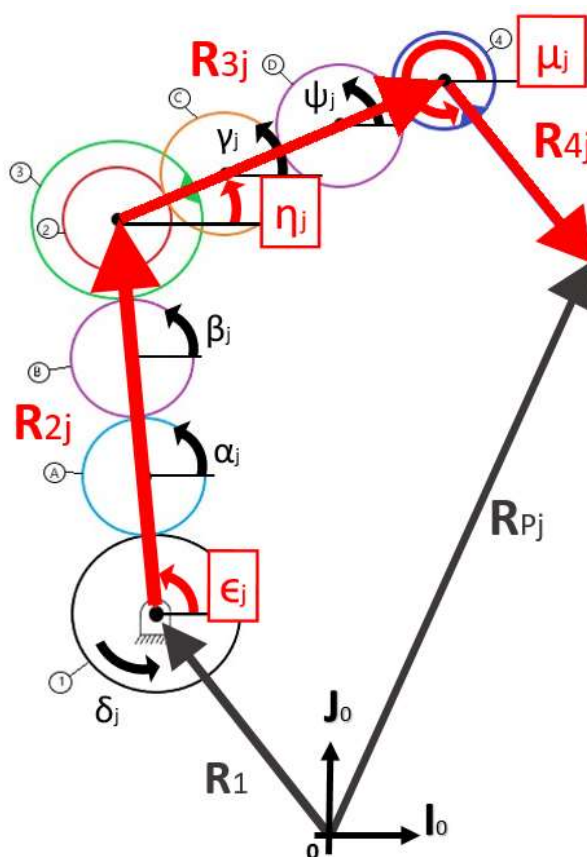


Figura 5.5: Posiciones angulares y vectores asociados a la síntesis cinemática.

### 5.3. Ecuaciones de Síntesis Cinemática de Engranés

El modelo hexacicloidal contempla un total de seis trenes planetarios. Mediante el uso de la ecuación (3.19) se explica la relación existente entre el desplazamiento angular a la salida con respecto a la entrada del tren planetario.

$$\frac{\Delta\theta_s - \Delta\theta_b}{\Delta\theta_e - \Delta\theta_b} = -\frac{N_e}{N_s} = -RE_{e,s}$$

### 5.3.1. Ecuaciones de Análisis Cinemático

Mediante la *figura 5.6* se describen las variables de posición angular que figuran dentro del mecanismo y están asociadas a cada engrane.

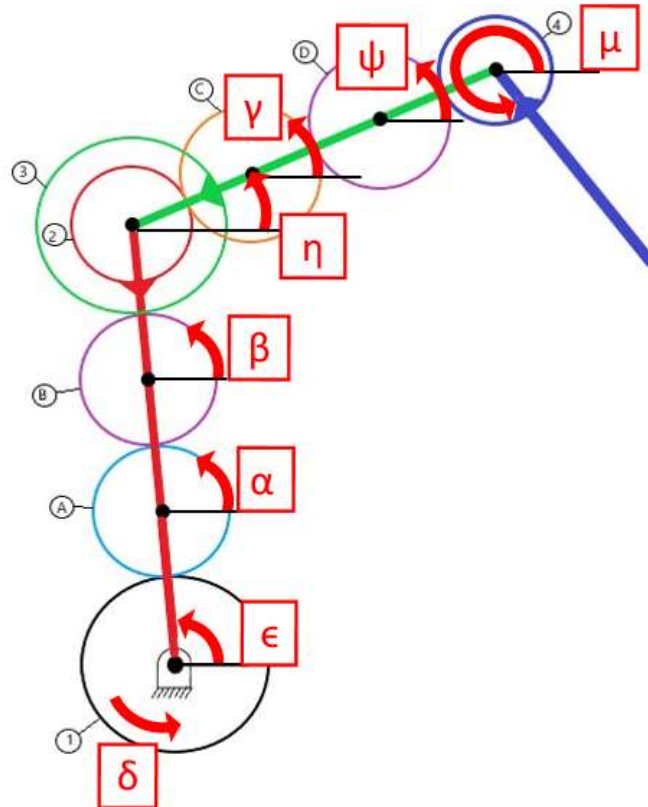


Figura 5.6: Posición angular de engranes asociadas al análisis cinemático.

Cada engrane que conforma el mecanismo será asociado a una variable de posición angular, al igual que se planteó para el modelo bicicloidal. Existiendo en esta configuración una adición en cuanto al número de engranes; y con ello, también al número de variables involucradas en el modelado. En la *tabla 5.1* se muestra el conjunto de variables de posición angular relacionadas tanto a los engranes principales como los

engranes secundarios.

Tabla 5.1: Variables de posición angular en modelo hexacícloidal.

Variable de posición angular	Elemento del mecanismo
$\delta$	Engrane 1
$\epsilon$	Engrane 2
$\eta$	Engrane 3
$\mu$	Engrane 4
$\alpha$	Engrane A
$\beta$	Engrane B
$\gamma$	Engrane C
$\psi$	Engrane D

Se muestran a continuación las variables relativas al desplazamiento angular por medio de las expresiones en (5.5).

$$\begin{aligned}
 \Delta\delta &= \delta - \delta_1 \\
 \Delta\epsilon &= \epsilon - \epsilon_1 \\
 \Delta\eta &= \eta - \eta_1 \\
 \Delta\mu &= \mu - \mu_1 \\
 \\ 
 \Delta\alpha &= \alpha - \alpha_1 \\
 \Delta\beta &= \beta - \beta_1 \\
 \Delta\gamma &= \gamma - \gamma_1 \\
 \Delta\psi &= \psi - \psi_1
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Se establecen entonces las ecuaciones que relacionan la posición angular de cada tren planetario. Los modelos de los tres primeros trenes planetarios descritos a partir de las ecs. (5.6) - (5.8) conservan al eslabón 2 como referencia en común; mientras que en (5.9) - (5.11) éste mismo figurará como el eslabón 3.

Para la relación entre engrane 1 y el engrane A se tiene lo siguiente:

$$\frac{\Delta\alpha - \Delta\epsilon}{\Delta\delta - \Delta\epsilon} = -\frac{N_1}{N_A} = -RE_{1A} \tag{5.6}$$

Para la relación entre engrane A y engrane B:

$$\frac{\Delta\beta - \Delta\epsilon}{\Delta\alpha - \Delta\epsilon} = -\frac{N_A}{N_B} = -RE_{AB} \tag{5.7}$$

Para la relación entre engrane B y engrane 3:

$$\frac{\Delta\eta - \Delta\epsilon}{\Delta\beta - \Delta\epsilon} = -\frac{N_B}{N_3} = -RE_{B3} \tag{5.8}$$

Para la relación entre engrane 2, engrane C:

$$\frac{\Delta\gamma - \Delta\eta}{\Delta\epsilon - \Delta\eta} = -\frac{N_2}{N_C} = -RE_{2C} \quad (5.9)$$

Para la relación entre engrane C y engrane D:

$$\frac{\Delta\psi - \Delta\eta}{\Delta\gamma - \Delta\eta} = -\frac{N_C}{N_D} = -RE_{CD} \quad (5.10)$$

Para la relación entre engrane D y engrane 4:

$$\frac{\Delta\mu - \Delta\eta}{\Delta\psi - \Delta\eta} = -\frac{N_D}{N_4} = -RE_{D4} \quad (5.11)$$

A continuación se muestran las soluciones de las ecuaciones (5.6) - (5.11) en términos de  $\Delta\delta$  y  $\Delta\mu$ .

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon &= B_1\Delta\delta + B_2\Delta\mu \\ \Delta\alpha &= B_3\Delta\delta + B_4\Delta\mu \\ \Delta\beta &= B_5\Delta\delta + B_6\Delta\mu \\ \Delta\eta &= B_7\Delta\delta + B_8\Delta\mu \\ \Delta\gamma &= B_9\Delta\delta + B_{10}\Delta\mu \\ \Delta\psi &= B_{11}\Delta\delta + B_{12}\Delta\mu \end{aligned} \quad (5.12)$$

Apoyándose igualmente en las ecs. en (5.5), se procede a despejar la posición angular en las expresiones (5.12); es posible apreciar como las posiciones angulares en (5.13) se encuentran en función de la posición angular inicial.

$$\begin{aligned} \epsilon &= B_1\Delta\delta + B_2\Delta\mu + \epsilon_1 \\ \alpha &= B_3\Delta\delta + B_4\Delta\mu + \alpha_1 \\ \beta &= B_5\Delta\delta + B_6\Delta\mu + \beta_1 \\ \eta &= B_7\Delta\delta + B_8\Delta\mu + \eta_1 \\ \gamma &= B_9\Delta\delta + B_{10}\Delta\mu + \gamma_1 \\ \psi &= B_{11}\Delta\delta + B_{12}\Delta\mu + \psi_1 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Los coeficientes  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{12}$  que acompañan a las variables  $\Delta\delta_j$  y  $\Delta\mu_j$  han sido propuestos con el objetivo de simplificar de las expresiones finales, a modo de aminorar la cantidad de elementos presentes.

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{A_1}(A_2 + A_5) & B_5 &= \frac{1}{A_1}(A_2 + A_5 + A_6) & B_9 &= \frac{1}{A_1}(A_2 - A_4) \\ B_2 &= \frac{1}{A_1} & B_6 &= \frac{1}{A_1}(1 - A_6) & B_{10} &= \frac{1}{A_1}(1 + A_4 + A_5) \\ B_3 &= \frac{1}{A_1}(A_2 + A_5 - A_7) & B_7 &= \frac{1}{A_1}A_2 & B_{11} &= \frac{1}{A_1}(A_2 + A_3) \\ B_4 &= \frac{1}{A_1}(1 + A_7) & B_8 &= \frac{1}{A_1}(1 + A_5) & B_{12} &= \frac{1}{A_1}(1 - A_3 + A_5) \end{aligned}$$



Siendo:

$$\begin{aligned}
A_1 &= 1 + RE_{1A}RE_{AB}RE_{B3} + RE_{1A}RE_{2C}RE_{AB}RE_{B3}RE_{CD}RE_{D4} \\
A_2 &= RE_{1A}RE_{2C}RE_{AB}RE_{B3}RE_{CD}RE_{D4} \\
A_3 &= RE_{1A}RE_{2C}RE_{AB}RE_{B3}RE_{CD} \\
A_4 &= RE_{1A}RE_{2C}RE_{AB}RE_{B3} \\
A_5 &= RE_{1A}RE_{AB}RE_{B3} \\
A_6 &= RE_{1A}RE_{AB} \\
A_7 &= RE_{1A}
\end{aligned}$$

### 5.3.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática

Para la síntesis cinemática, el valor final de los ángulos es discretizado añadiendo el subíndice  $j$ ; donde  $j$  tomará valores enteros mayores a 1, siendo  $j = 2, 3, 4, \dots, n$  (*Fig.5.7*); recordando que la posición inicial ya ha sido considerada para denotar las posiciones iniciales:  $\delta_1, \epsilon_1, \eta_1, \mu_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  y  $\psi_1$ . A partir de las ecs. en (5.13) se plantean las ecuaciones de síntesis cinemática aplicables al modelo hexacicloidal.

$$\begin{aligned}
\epsilon_j &= B_1\Delta\delta_j + B_2\Delta\mu_j + \epsilon_1 \\
\alpha_j &= B_3\Delta\delta_j + B_4\Delta\mu_j + \alpha_1 \\
\beta_j &= B_5\Delta\delta_j + B_6\Delta\mu_j + \beta_1 \\
\eta_j &= B_7\Delta\delta_j + B_8\Delta\mu_j + \eta_1 \\
\gamma_j &= B_9\Delta\delta_j + B_{10}\Delta\mu_j + \gamma_1 \\
\psi_j &= B_{11}\Delta\delta_j + B_{12}\Delta\mu_j + \psi_1
\end{aligned} \tag{5.14}$$

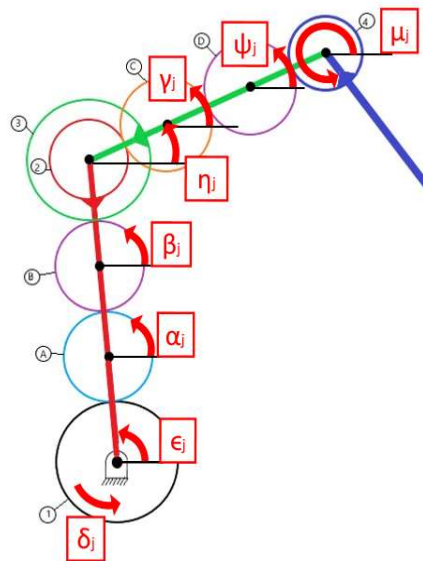


Figura 5.7: Posición angular de engranes asociada a la síntesis cinemática.

#### 5.4. Análisis Estático

En la *figura 5.8* se muestra el conjunto de fuerzas y momentos externos que actúan sobre el mecanismo hexacicloidal.

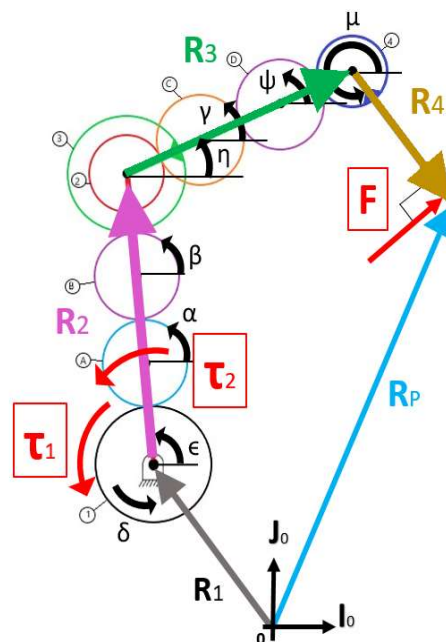


Figura 5.8: Análisis estático del mecanismo hexacicloidal.

De la misma forma que en el modelo bicicloidal, se considera la acción de una fuerza  $\mathbf{F}$  sobre el efector final, así como dos pares cinemáticos a la entrada del mecanismo  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$ . La ecuación de potencia del mecanismo se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^T \mathbf{V}_P + \mathbf{T}_1^T \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{T}_2^T \boldsymbol{\omega}_2 &= 0 \\ \mathbf{F}^T (\dot{\epsilon} \mathbf{U}_2 + \dot{\eta} \mathbf{U}_3 + \dot{\mu} \mathbf{U}_4) + \mathbf{T}_1^T (\dot{\delta} \mathbf{K}) + \mathbf{T}_2^T (\dot{\epsilon} \mathbf{K}) &= 0\end{aligned}\quad (5.15)$$

Acorde a las relaciones de engranes obtenidas en el capítulo anterior:

$$\Delta \delta = \delta - \delta_1$$

$$\Delta \mu = \mu - \mu_1$$

$$\epsilon = B_1 \Delta \delta + B_2 \Delta \mu + \epsilon_1$$

$$\eta = B_7 \Delta \delta + B_8 \Delta \mu + \eta_1$$

$$\dot{\epsilon} = B_1 \dot{\delta} + B_2 \dot{\mu} \quad (5.16)$$

$$\dot{\eta} = B_7 \dot{\delta} + B_8 \dot{\mu} \quad (5.17)$$

Sustituyendo (5.16) y (5.17) en (5.15):

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^T ((B_1 \dot{\delta} + B_2 \dot{\mu}) \mathbf{U}_2 + (B_7 \dot{\delta} + B_8 \dot{\mu}) \mathbf{U}_3 + \dot{\mu} \mathbf{U}_4) + \\ \mathbf{T}_1^T (\dot{\delta} \mathbf{K}) + \mathbf{T}_2^T (B_1 \dot{\delta} + B_2 \dot{\mu}) \mathbf{K} &= 0 \\ \mathbf{F}^T (B_1 \mathbf{U}_2 + B_7 \mathbf{U}_3) \dot{\delta} + \mathbf{F}^T (B_2 \mathbf{U}_2 + B_8 \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_4) \dot{\mu} + \\ (\mathbf{T}_1^T + B_1 \mathbf{T}_2^T) \mathbf{K} \dot{\delta} + B_2 \mathbf{T}_2^T \mathbf{K} \dot{\mu} &= 0\end{aligned}\quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}\underbrace{(\mathbf{F}^T (B_1 \mathbf{U}_2 + B_7 \mathbf{U}_3) + (\mathbf{T}_1 + B_1 \mathbf{T}_2)^T \mathbf{K})}_{Q_1} \dot{\delta} + \\ \underbrace{(\mathbf{F}^T (B_2 \mathbf{U}_2 + B_8 \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_4) + B_2 \mathbf{T}_2^T \mathbf{K})}_{Q_2} \dot{\mu} &= 0\end{aligned}$$

Acorde a la simplificación sugerida, se contempla lo siguiente:

$$Q_1 \dot{\delta} + Q_2 \dot{\mu} = 0 \quad (5.19)$$

Donde:

$$Q_1 = \mathbf{F}^T (B_1 \mathbf{U}_2 + B_7 \mathbf{U}_3) + (\mathbf{T}_1 + B_1 \mathbf{T}_2)^T \mathbf{K} = 0 \quad (5.20)$$

$$Q_2 = \mathbf{F}^T (B_2 \mathbf{U}_2 + B_8 \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_4) + B_2 \mathbf{T}_2^T \mathbf{K} = 0 \quad (5.21)$$

Finalmente, las ecs. en (5.20) y (5.21) son las ecuaciones estáticas requeridas para el análisis estático.

### 5.5. Síntesis Estática

Para la síntesis estática se discretizan las ecs. (5.20) y (5.21) para  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  (Fig.5.9).

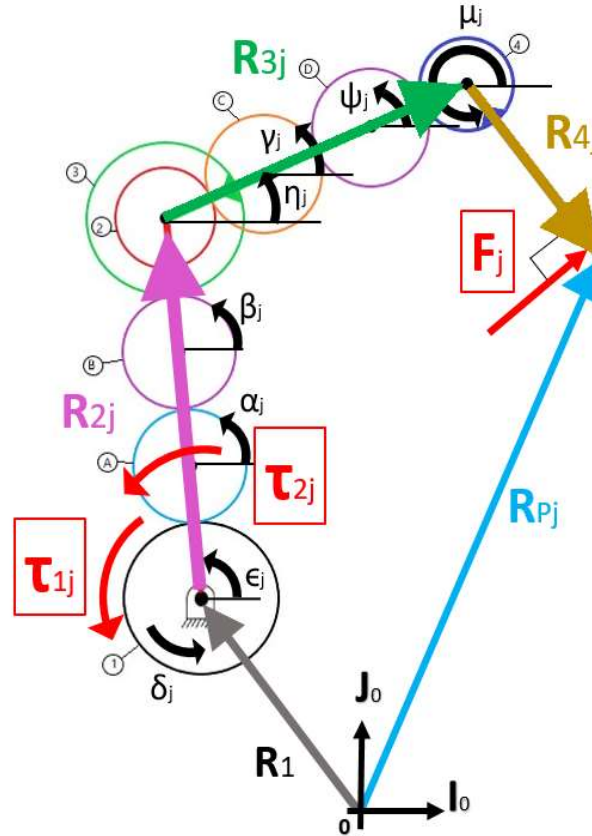


Figura 5.9: Síntesis estática del mecanismo hexacicloidal.

En esta configuración, las ecuaciones estáticas asociadas a la síntesis se expresan por las ecs. (5.22) y (5.23).

$$Q_{1j} = \mathbf{F}_j^T (B_1 \mathbf{U}_{2j} + B_7 \mathbf{U}_{3j}) + (\mathbf{T}_{1j} + B_1 \mathbf{T}_{2j})^T \mathbf{K} = 0 \quad (5.22)$$

$$Q_{2j} = \mathbf{F}_j^T (B_2 \mathbf{U}_{2j} + B_8 \mathbf{U}_{3j} + \mathbf{U}_{4j}) + B_2 \mathbf{T}_{2j}^T \mathbf{K} = 0 \quad (5.23)$$

### 5.6. Solución de la Síntesis Estática

En esta sección, se soluciona la síntesis estática del mecanismo hexacicloidal. Primariamente se muestran los datos asignados como entrada del modelo de síntesis cinemática (Fig 5.10).

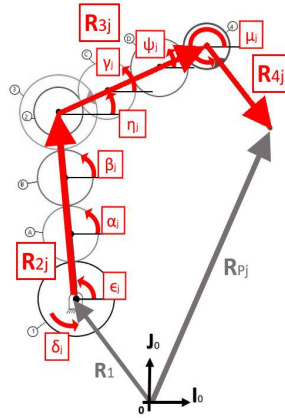


Figura 5.10: Elementos presentes en la síntesis cinemática del mecanismo.

A partir de las ecs. (4.4) y (4.5) las ecs. de síntesis de posición son:

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_{2j} + \mathbf{R}_{3j} + \mathbf{R}_{4j} = \mathbf{R}_{Pj}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= [x_1, y_1, 0]^T \\ \mathbf{R}_{2j} &= \mathbf{R}_z(\epsilon_j) \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2 &= [x_2, 0, 0]^T \\ \mathbf{R}_{3j} &= \mathbf{R}_z(\eta_j) \mathbf{r}_3 & \mathbf{r}_3 &= [x_3, 0, 0]^T \\ \mathbf{R}_{4j} &= \mathbf{R}_z(\mu_j) \mathbf{r}_4 & \mathbf{r}_4 &= [x_4, 0, 0]^T \\ \mathbf{R}_{Pj} &= [x_{Pj}, y_{Pj}, 0]^T \end{aligned}$$

Permaneciendo como incógnitas para la síntesis de posición las variables  $x_1$  y  $y_1$ .

Los datos propuestos para  $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  se muestran a continuación (*Garibay, 2013*).

$x_2 = 5$
$x_3 = 2.7$
$x_4 = 3$

$N_1 = 30$
$N_2 = 20$
$N_3 = 30$
$N_4 = 20$

$x_{P1} = 1.7$	$y_{P1} = 9.7$
$x_{P2} = 3.5$	$y_{P2} = 9.1$
$x_{P3} = 5.1$	$y_{P3} = 8.1$
$x_{P4} = 6.6$	$y_{P4} = 6.2$
$x_{P5} = 7.1$	$y_{P5} = 4.0$
$x_{P6} = 6.9$	$y_{P6} = 1.3$
$x_{P7} = 6.1$	$y_{P7} = -0.4$

$\kappa_1 = 234^\circ$	$\mu_1 = \kappa_1 - 180^\circ$
$\kappa_2 = 220^\circ$	$\mu_2 = \kappa_2 - 180^\circ$
$\kappa_3 = 180^\circ$	$\mu_3 = \kappa_3 - 180^\circ$
$\kappa_4 = 170^\circ$	$\mu_4 = \kappa_4 - 180^\circ$
$\kappa_5 = 160^\circ$	$\mu_5 = \kappa_5 - 180^\circ$
$\kappa_6 = 150^\circ$	$\mu_6 = \kappa_6 - 180^\circ$
$\kappa_7 = 140^\circ$	$\mu_7 = \kappa_7 - 180^\circ$

$\delta_2 = \delta_1$
$\delta_3 = \delta_1$
$\delta_4 = \delta_1$
$\delta_5 = \delta_1$
$\delta_6 = \delta_1$
$\delta_7 = \delta_1$

Los ángulos  $\delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7$  toman valores iguales a la posición angular inicial, es decir; serán siempre iguales a  $\delta_1$ . Es importante denotar que, para esta solución de interés, asumiremos que el engrane 1 permanecerá bloqueado en todo momento.

Las magnitudes  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  son referidas a las longitudes de las falanges proximal, medial y distal, respectivamente (Ver *Fig. 5.4*).

La trayectoria deseada es definida por el conjunto de 7 posiciones  $(x_{P_j}, y_{P_j})$  en forma de puntos coordenados en el plano  $XY$  (*Fig 5.11*).

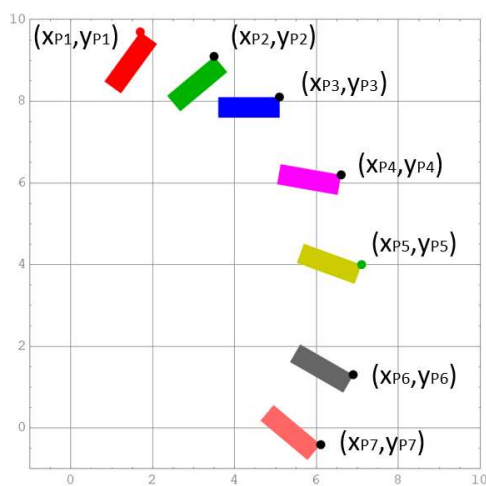


Figura 5.11: Posiciones de interés en forma de puntos coordenados.

En la *figura 4.15* se muestran el ángulo  $\kappa_j$  y el vector  $\mathbf{p}_j$ .

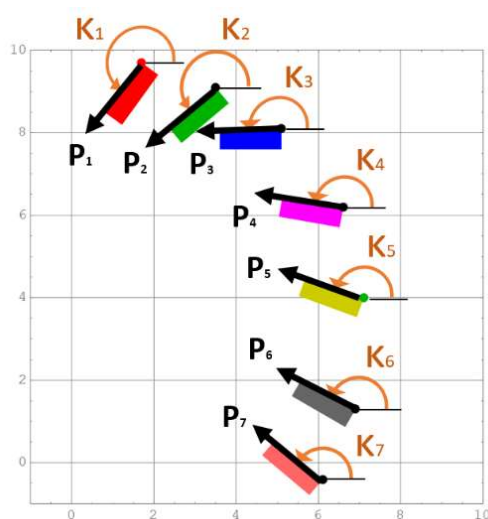


Figura 5.12: Ángulos de interés en la síntesis del mecanismo.

A partir de las expresiones en (5.14) las ecuaciones de síntesis de engranes para  $j = 2, 3, 4, 5, 6, 7$  se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}\Delta\delta_j &= \delta_j - \delta_1 = 0 \\ \Delta\mu_j &= \mu_j - \mu_1 \\ \\ \epsilon_j &= B_1\Delta\delta_j + B_2\Delta\mu_j + \epsilon_1 \\ \alpha_j &= B_3\Delta\delta_j + B_4\Delta\mu_j + \alpha_1 \\ \beta_j &= B_5\Delta\delta_j + B_6\Delta\mu_j + \beta_1 \\ \eta_j &= B_7\Delta\delta_j + B_8\Delta\mu_j + \eta_1 \\ \gamma_j &= B_9\Delta\delta_j + B_{10}\Delta\mu_j + \gamma_1 \\ \psi_j &= B_{11}\Delta\delta_j + B_{12}\Delta\mu_j + \psi_1\end{aligned}$$

Permaneciendo como incógnitas para la síntesis de posición las variables:  $\epsilon_1, \alpha_1, \beta_1, \eta_1, \gamma_1, \psi_1$ .

Se contemplarán como incógnitas a resolver igualmente a los valores de números de dientes asociados a los engranes secundarios:  $N_A, N_B, N_C, N_D$ .

Se muestra mediante (5.22) y (5.23) las ecuaciones estáticas de interés para  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ .

$$\begin{aligned}Q_{1j} &= \mathbf{F}_j^T (B_1\mathbf{U}_{2j} + B_7\mathbf{U}_{3j}) + (\mathbf{T}_{1j} + B_1\mathbf{T}_{2j})^T \mathbf{K} = 0 \\ Q_{2j} &= \mathbf{F}_j^T (B_2\mathbf{U}_{2j} + B_8\mathbf{U}_{3j} + \mathbf{U}_{4j}) + B_2\mathbf{T}_{2j}^T \mathbf{K} = 0\end{aligned}$$

Los datos propuestos a contemplar dentro de la síntesis estática se muestran a continuación.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_j &= \mathbf{R}_z(\mu_j + \pi/2) \mathbf{f}_j & \mathbf{f}_j &= [f_p, 0, 0]^T & f_p &= 1.0[N] \\ \mathbf{T}_{1j} &= [0, 0, T_{1j}]^T \\ \mathbf{T}_{2j} &= [0, 0, T_{2j}]^T\end{aligned}$$

Habiendo propuesto una magnitud constante para  $\mathbf{F}_j$ , se contemplan como incógnitas a las variables  $T_{1j}$  y  $T_{2j}$ , donde  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ .

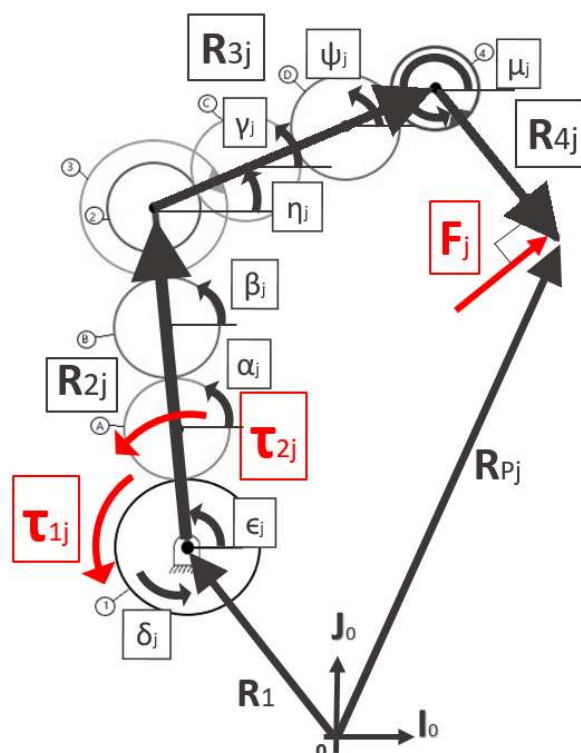


Figura 5.13: Fuerzas y momentos externos contemplados en la síntesis estática.

Una vez calculadas las denominaciones de números de dientes, se obtienen los radios correspondientes a cada engrane del mecanismo planteando las ecs. (5.24) - (5.27). Donde las incógnitas son:  $r_1, r_A, r_B, r_3, r_2, r_C, r_D, r_4$ .

$$r_1 + 2r_A + 2r_B + r_3 = x_2 \quad (5.24)$$

$$r_2 + 2r_C + 2r_D + r_4 = x_3 \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{N_A} &= \frac{r_1}{r_A} \\ \frac{N_A}{N_B} &= \frac{r_A}{r_B} \\ \frac{N_B}{N_3} &= \frac{r_B}{r_3} \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{N_2}{N_C} &= \frac{r_2}{r_C} \\ \frac{N_C}{N_D} &= \frac{r_C}{r_D} \\ \frac{N_D}{N_4} &= \frac{r_D}{r_4} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Para la solución de la síntesis estática del mecanismo, se establece la función objetivo mediante el método de Mínimos Cuadrados No Lineales (MCNL) (*Suh & Radcliffe*,



1983). El software Mathematica<sup>®</sup> provee la instrucción conocida como *FindMinimum[]* capaz de emplear métodos de gradientes.

$$f_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^7 (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_{2j} + \mathbf{R}_{3j} + \mathbf{R}_{4j} - \mathbf{R}_{Pj})^2 \quad (5.28)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^7 (\mathbf{F}_j^T (B_1 \mathbf{U}_{2j} + B_7 \mathbf{U}_{3j}) + (\mathbf{T}_{1j} + B_1 \mathbf{T}_{2j})^T \mathbf{K})^2 \quad (5.29)$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^7 (\mathbf{F}_j^T (B_2 \mathbf{U}_{2j} + B_8 \mathbf{U}_{3j} + \mathbf{U}_{4j}) + B_2 \mathbf{T}_{2j}^T \mathbf{K})^2 \quad (5.30)$$

Donde:

$$\mathbf{x} = (x_1, y_1, N_A, N_B, N_C, N_D, \epsilon_1, \alpha_1, \beta_1, \eta_1, \gamma_1, \psi_1, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}, T_{16}, T_{17}, T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{24}, T_{25}, T_{26}, T_{27}) \quad (5.31)$$

## 5.7. Resultados

Conforme a los resultados obtenidos para el mecanismo hexacicloidal propuesto, se considerará como una solución aceptable a aquella que cumpla con las siguientes características:

- Los resultados de la solución sostienen una interpretación lógica y representan valores físicamente válidos.
- Radios de engranes poseen dimensiones que posibilitan la compactación del mecanismo, a modo de no sobrepasar las medidas de un dedo humano promedio.
- La orientación de las barras en la posición inicial posibilita una postura semejante a la de un dedo humano estando erguido.
- La posición y orientación del efector final en su recorrido se aproxima a la trayectoria propuesta.
- La fuerza de prensión iguala o supera a la especificada en el mecanismo original, esto en relación al par de entrada.

A diferencia del modelo bicicloidal, las dimensiones del mecanismo hexacicloidal original se asemejan a las dimensiones reales de un dedo índice humano; por lo que una solución aceptable del mecanismo hexacicloidal mantendrá las dimensiones antropométricas esperadas. Recordando que las dimensiones sobre las cuales se basa el diseño propuesto se apoyan en medidas antropométricas del dedo índice de un hombre adulto de 25 años de edad (*Garibay, 2013*). Aun así, es preferible contar con una solución que presente una disminución aún mayor en cuanto al tamaño nominal del dispositivo en comparación con el mecanismo original.

Abordando la misma premisa que en el rediseño del mecanismo bicicloidal, se espera obtener resultados similares, más no idénticos, a los presentados por parte del modelo original bajo condiciones equivalentes. No representando la solución obtenida para el mecanismo hexacicloidal una iteración final; sino una forma de comprobación que finalmente consigue constatar la posibilidad de obtener soluciones del mecanismo hexacicloidal empleando el método propuesto, planteando y resolviendo una síntesis estática. Reputando entonces la solución obtenida para el modelo hexacicloidal de un carácter exclusivamente demostrativo al igual que la obtenida en el capítulo anterior para el mecanismo bicicloidal.

Componentes del vector  $\mathbf{R}_1$ :  $x_1, y_1$ .

$$x_1 = -3.1503[\text{cm}]$$

$$y_1 = 1.0387[\text{cm}]$$

Par de torsión  $T_{1_j}$ :

$$T_{1_1}, T_{1_2}, T_{1_3}, T_{1_4}, T_{1_5}, T_{1_6}, T_{1_7}.$$

$$T_{1_1} = 8.4682 [\text{N.cm}]$$

$$T_{1_2} = 8.3710 [\text{N.cm}]$$

$$T_{1_3} = 8.0092 [\text{N.cm}]$$

$$T_{1_4} = 7.9009 [\text{N.cm}]$$

$$T_{1_5} = 7.7862 [\text{N.cm}]$$

$$T_{1_6} = 7.6655 [\text{N.cm}]$$

$$T_{1_7} = 7.5391 [\text{N.cm}]$$

Par de torsión  $T_{2_j}$ :

$$T_{2_1}, T_{2_2}, T_{2_3}, T_{2_4}, T_{2_5}, T_{2_6}, T_{2_7}.$$

$$T_{2_1} = -18.9363 [\text{N.cm}]$$

$$T_{2_2} = -18.6820 [\text{N.cm}]$$

$$T_{2_3} = -17.0864 [\text{N.cm}]$$

$$T_{2_4} = -16.5049 [\text{N.cm}]$$

$$T_{2_5} = -15.8604 [\text{N.cm}]$$

$$T_{2_6} = -15.1594 [\text{N.cm}]$$

$$T_{2_7} = -14.4088 [\text{N.cm}]$$

Números de dientes:  $N_A, N_B, N_C, N_D$ .

$$N_A = 28.3594 \approx 28$$

$$N_B = 13.1998 \approx 13$$

$$N_C = 38.5932 \approx 38$$

$$N_D = 30.9419 \approx 31$$

Posiciones Iniciales:  $\epsilon_1, \alpha_1, \beta_1, \eta_1, \gamma_1, \psi_1$ .

$$\epsilon_1 = 0.9346 \text{ [rad]}$$

$$\alpha_1 = -0.6064 \text{ [rad]}$$

$$\beta_1 = -1.1936 \text{ [rad]}$$

$$\gamma_1 = 1.5184 \text{ [rad]}$$

$$\eta_1 = -4.9233 \text{ [rad]}$$

$$\psi_1 = -1.0733 \text{ [rad]}$$

En la *tabla 5.2* se muestran las magnitudes de los radios de engranes:

$r_1, r_A, r_B, r_3, r_2, r_C, r_D, r_4$ .

Tabla 5.2: Radios de engranes obtenidos.

Radio [cm]			
engrane 1	engrane A	engrane B	engrane 3
1.0480	0.9907	0.4611	1.0480
engrane 2	engrane C	engrane D	engrane 4
0.3015	0.5819	0.4665	0.3015

Se muestra a continuación en la *figura 5.14* la solución desarrollada en Mathematica<sup>®</sup>.

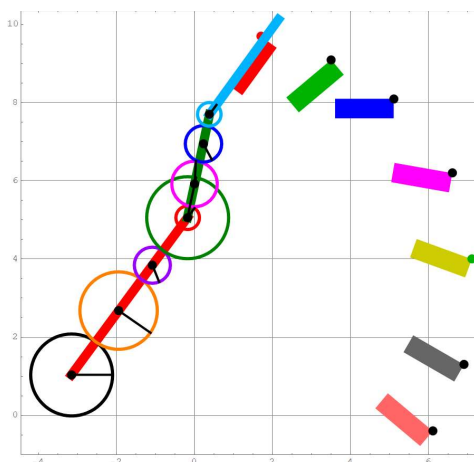


Figura 5.14: Ejemplo de solución del mecanismo hexacicloidal.

Una vez conseguida la mejor solución del mecanismo hexacicloidal propuesto se consiguió simular el seguimiento de la trayectoria a lo largo de las siete posiciones de interés para ambas configuraciones mediante una animación del mecanismo en Mathematica<sup>®</sup> (Fig. 5.15), se observa entonces como el rediseño del mecanismo hexacicloidal consigue reproducir el movimiento de flexo-extensión sin mayores complicaciones.

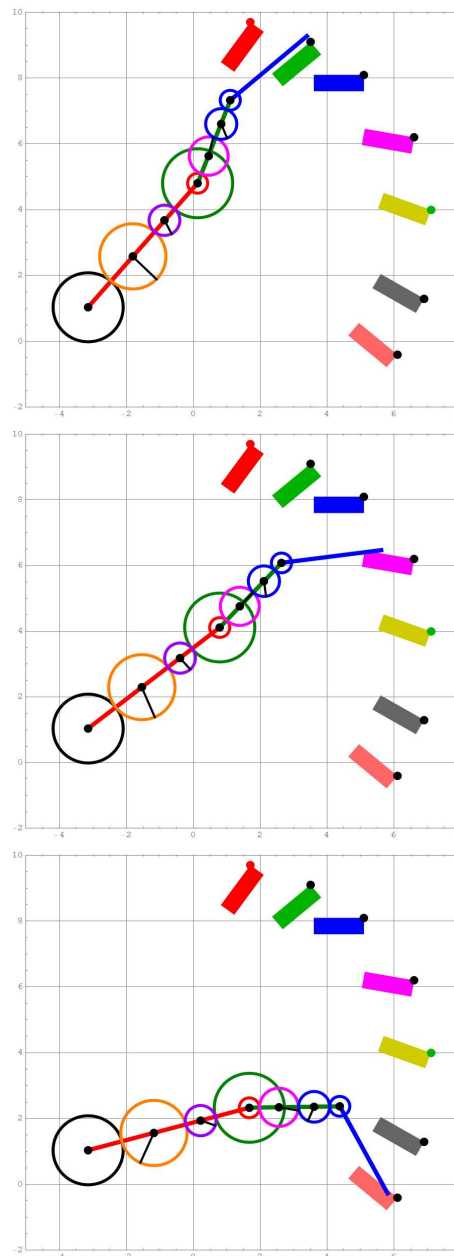


Figura 5.15: Animación en Mathematica<sup>®</sup>.

## 5.8. Comentarios Finales

Un número significativo de condiciones exhibidas por parte del mecanismo hexacicloidal original fueron retomadas y seguidas de forma inalterable en el desarrollo de la síntesis planteada para este rediseño. Las longitudes de las falanges conservan los mismos valores constantes, de la misma forma que la trayectoria conformada por el conjunto de siete posiciones y siete valores de posición angular asociados al efector final. Permanece la restricción de movimiento en el engrane 1 atendida tal como se observa en el modelo hexacicloidal original y de la misma forma que en el modelo bicicloidal visto en el capítulo anterior; existiendo desplazamiento angular nulo en dicho elemento del mecanismo en ambas configuraciones al estar éste bloqueado. Por lo que de nueva cuenta se pretende obedecer las mismas condiciones operativas para la obtención de los resultados concernientes.

Sin embargo, una diferencia importante entre la solución propuesta y la originalmente planteada es con respecto a los valores de números de dientes. Puesto que, mientras que en el mecanismo original todos los valores de números de dientes se proponen, en el mecanismo propuesto sólo se proponen aquellos asociados a los engranes principales, siendo calculados los valores de números de dientes de los cuatro engranes secundarios como resultado de la síntesis estática.

Se demuestra la eficacia del método propuesto para el rediseño del mecanismo al lograr reproducir resultados aproximados a los presentados en el mecanismo hexacicloidal original; lo anterior es evidente pues se obtuvieron radios de engranes de dimensiones muy parecidas e inclusive en algunos casos menores a las del diseño original. Una comparación gráfica entre la solución propuesta y el mecanismo original se observa en la *figura 5.16*.

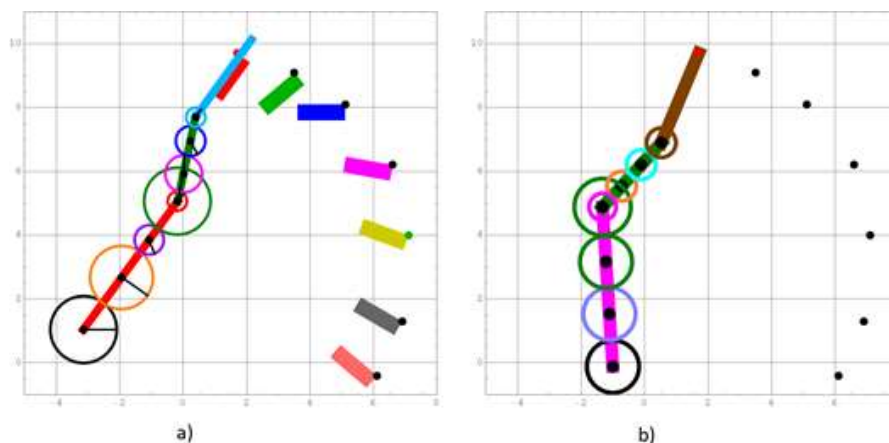


Figura 5.16: a) Solución propuesta del mecanismo. b) Solución original del mecanismo.

La orientación de las barras discrepa ligeramente entre ambos modelos, tal como se observa en la *figura 5.16*, exhibiendo con ello un comportamiento muy parecido al observado en el mecanismo bicicloidal al obtener en las respectivas soluciones de ambos modelos valores de posición angular distintos asociados a los engranes 2, 3 y 4.

La solución expuesta del mecanismo hexacicloidal consigue efectivamente adaptarse a las dimensiones antropométricas de un dedo humano. Significando con ello, que bien, el mecanismo propuesto en esta solución podría ser convertido en la base de una prótesis funcional de la misma forma que se consiguió en su momento con el mecanismo original en el pasado.

Se conservó la misma fuerza de presión especificada en el diseño original, siendo ésta fuerza de una magnitud de  $1.0[N]$ . Arrojando como resultado de la síntesis un par requerido  $T_{2j}$  asociado a cada una de las 7 posiciones planteadas, comprendido la magnitud del mismo en un rango de entre  $0.144[N.m]$  y  $0.189[N.m]$ , tomando éste último como el par mínimo requerido necesario para accionar el mecanismo. Por otra parte, la magnitud del par mínimo requerido del mecanismo hexacicloidal original se declara igual a  $3.0[N.m]$ , esto considerando una fuerza de presión de  $1.0[N]$ . Se muestra a continuación la relación entre la fuerza de presión a la salida con respecto al par mínimo requerido a la entrada respectiva a ambos diseños.

Mecanismo hexacicloidal propuesto:

$$\frac{f_p}{T_{2j}} = \frac{1.0[N]}{0.189[N.m]} = 5.291[1/m]$$

Mecanismo hexacicloidal original:

$$\frac{f_p}{T_{2j}} = \frac{1.0[N]}{3.0[N.m]} = 0.333[(1/m)]$$

Se puede apreciar como el modelo hexacicloidal propuesto consigue una ganancia en cuanto a fuerza de presión aproximadamente 16 veces mayor a la entregada por el mecanismo original.

Al igual que en el modelo bicicloidal ya planteado anteriormente, la síntesis del modelo hexacicloidal considera como variables a resolver a ambos componentes del vector  $\mathbf{R}_1$ , es decir:  $x_1$  &  $y_1$ . Mientras que el mecanismo original considera como constante a uno de los componentes ( $x_1=0$ ) considerando como variable a  $y_1$  solamente. La eliminación de ésta restricción facilitó en gran forma el seguimiento de trayectoria, permitiéndole al mecanismo posicionarse de la forma más adecuada posible; adoptando una referencia que posibilitara una mejor aproximación a cada una de las 7 posiciones contempladas en la síntesis.

Se concluye finalmente que es posible obtener una solución aceptable del mecanismo hexacicloidal planteando una síntesis estática. Presentando resultados satisfactorios al

---

lograr reproducir una trayectoria que emula el movimiento de flexo-extensión natural de un miembro real y al mismo tiempo poder transmitir una fuerza determinada a la salida en comparación con el par suministrado a la entrada que resultó ser significativamente mayor a la presentada por el dispositivo original. De igual forma, la solución obtenida permitió un rediseño del mecanismo hexacicloidal que presenta en algunos engranes radios de menores dimensiones consiguiendo compactar el mecanismo apropiadamente.

## Capítulo 6

# Mecanismo Hexacicloidal Compuesto

### 6.1. Definición del mecanismo

Como ya se ha visto en capítulos anteriores, el empleo de una síntesis estática como parte del método de resolución para los mecanismos bicicloidal y hexacicloidal permitió exigir al mecanismo una fuerza de magnitud determinada a la salida. No obstante, dicho requerimiento bien podría comprometer la magnitud de los radios obtenidos a partir de la solución, representando un impacto negativo en el diseño en caso de que alguno de los engranes sobrepase el volumen contemplado para el dispositivo. El punto anterior se menciona dentro de las conclusiones finales del trabajo de Garibay y se sugiere en el mismo, a manera de una posible solución, el empleo de engranes planetarios compuestos.

Se propone dentro de nuestro diseño el uso de engranes compuestos dentro de nuestra configuración hexacicloidal expuesta en el capítulo anterior; esto con la finalidad de conseguir un aumento significativo de fuerza a la salida del mecanismo (*Fig. 6.1*). Dicha fuerza será la fuerza de prensión del efector final, es decir, la fuerza generada por la 'punta del dedo'. Se propone entonces remplazar todos los engranes secundarios que componen la configuración hexacicloidal por engranes compuestos; lo anterior es aplicable para el engrane A, engrane B, engrane C y engrane D.

Se pretende igualmente que este cambio en la configuración del mecanismo hexacicloidal consiga una disminución aun mayor de las dimensiones del dispositivo, significando con ello una reducción en los diámetros de los engranes que lo componen. El modelo hexacicloidal compuesto jugará parte esencial en el desarrollo de un dispositivo que comparta las dimensiones antropométricas de un dedo humano, con lo que se pretende convertir este modelo en una solución viable para ello.



Al final del capítulo se pretende realizar diversas comparaciones entre el rediseño propuesto y el mecanismo hexacicloidal (*Garibay, 2013*), al cual se le referirá como diseño/modelo/mecanismo original. Cualquier información relevante con respecto al mecanismo original se encuentra disponible en el *Apéndice* ubicado al final del presente trabajo.

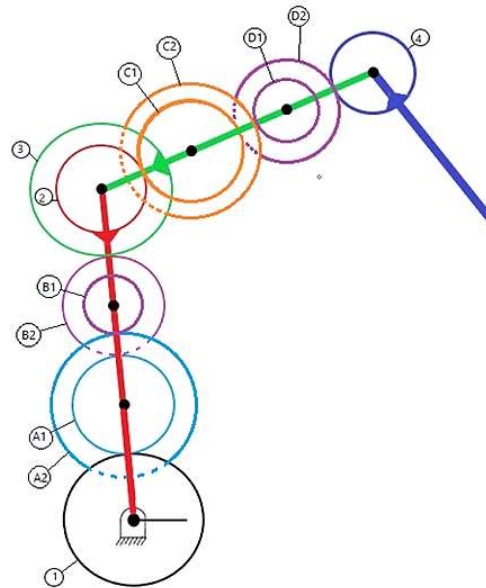


Figura 6.1: Componentes del mecanismo hexacicloidal compuesto.

Se muestra a continuación por medio de las *figuras 6.1a-6.1c* el modelo en CAD del mecanismo hexacicloidal compuesto a fin de visualizar más claramente el concepto propuesto.

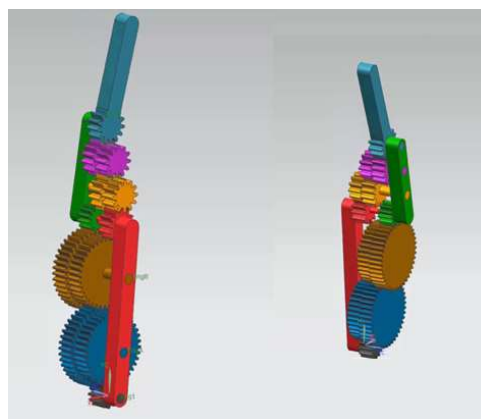


Figura 6.1a: Modelo 3D básico de mecanismo hexacicloidal compuesto.

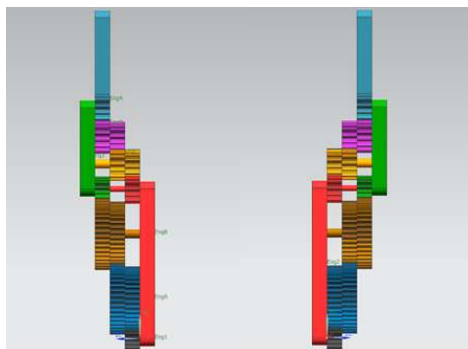


Figura 6.1b: Modelo 3D de mecanismo hexacicloidal compuesto (Vista Frontal).

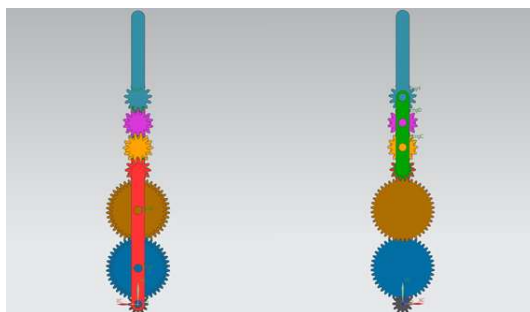


Figura 6.1c: Modelo 3D de mecanismo hexacicloidal compuesto (Vista Lateral).

En la figura siguiente se muestra una animación simple mostrando el movimiento del mecanismo propuesto al ejecutar el movimiento de flexo-extensión.

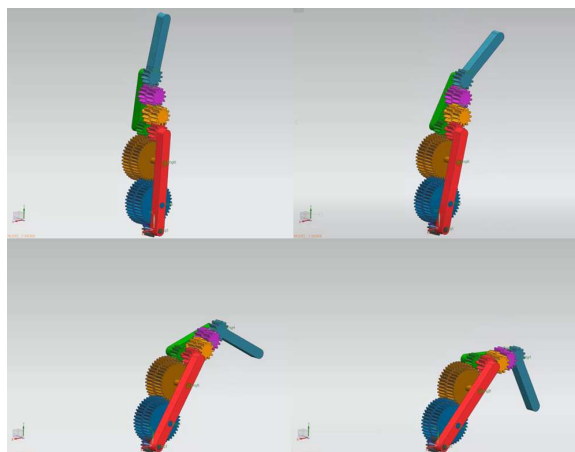


Figura 6.1d: Animación del mecanismo hexacicloidal compuesto.

## 6.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática de Eslabones

En esta sección se definen las ecuaciones de análisis cinemático; pues a partir de éstas es que se definirán las ecuaciones de síntesis cinemática.

### 6.2.1. Ecuaciones de Análisis Cinemático

La ecuación de posición del mecanismo hexacicloidal compuesto es la misma que la usada en el mecanismo bicicloidal; esto debido a que los eslabones de ambos mecanismos tienden a ser los mismos, esto se observa fácilmente en las ecs. (4.1) y (4.2). Lo anterior se muestra también a través de las *figuras 6.2 y 6.3*.

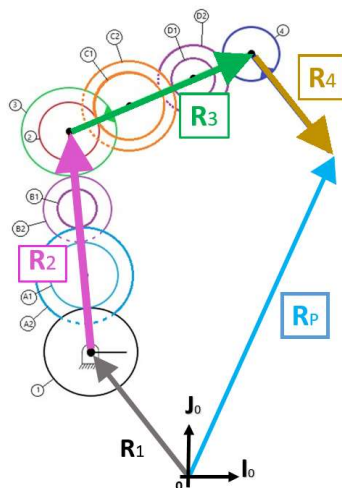


Figura 6.2: Vectores asociados al análisis cinemático.

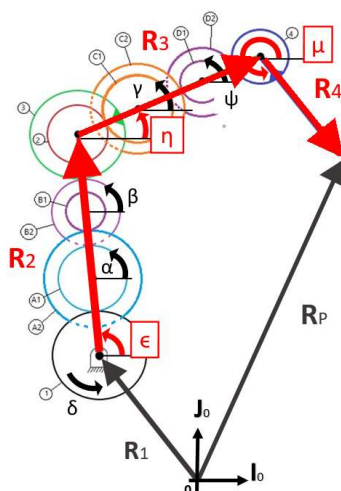


Figura 6.3: Vectores y posiciones angulares asociadas al análisis cinemático.

### 6.2.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática

Dada la *figura 6.4* mostrada a continuación:

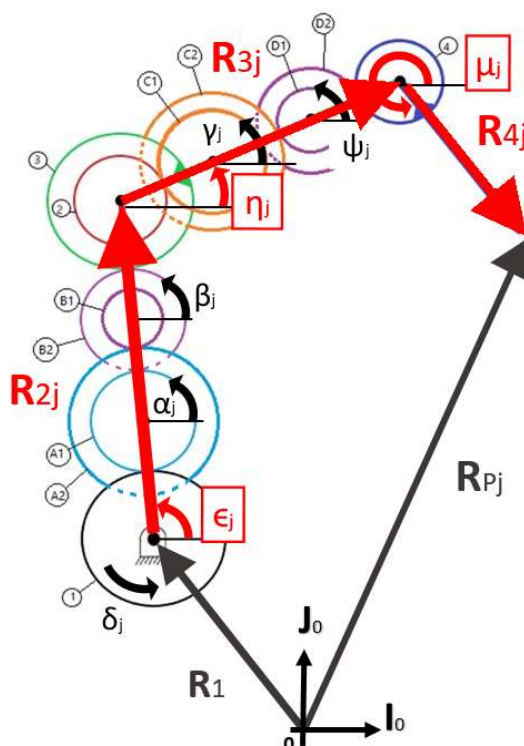


Figura 6.4: Posiciones angulares y vectores asociados a la síntesis cinemática.

De la misma manera que en la ecuación de análisis cinemático; la ecuación de síntesis cinemática del mecanismo hexacicloidal compuesto se basa en la ecuación de síntesis del modelo bicicloidal, que viene a su vez a ser la misma que en el modelo hexacicloidal. Esto visto en mediante las ecs. (4.4) y (4.5).

### 6.3. Ecuaciones de Síntesis Cinemática de Engranés

Retomando la ecuación fundamental aplicable a trenes de engranes planetarios de la expresión en (3.19).

$$\frac{\Delta\theta_s - \Delta\theta_b}{\Delta\theta_e - \Delta\theta_b} = -\frac{N_e}{N_s} = -RE_{e,s}$$

El mecanismo hexacicloidal compuesto al igual que el mecanismo hexacicloidal está constituido por un total de seis trenes planetarios. Sin embargo, es importante aclarar que los engranes compuestos se componen de una dupla de engranes fijados entre sí que comparten un mismo eje; debido a ello, tanto la posición como la velocidad angular asociada a los mismos en cualquier localización o punto dentro del mismo cuerpo se conserva siendo la misma en todo momento. Por tanto, dentro de la ecuación (3.19) las variables asociadas al desplazamiento angular con respecto a la entrada  $\Delta\theta_e$  y a la salida  $\Delta\theta_s$  no aceptarán interpretaciones distintas, esto independientemente de

su empleo sobre trenes de engranes planetarios simples o sobre trenes de engranes planetarios compuestos.

### 6.3.1. Ecuaciones de Análisis Cinemático

Como ya se discutió previamente en la sección anterior, el modelo hexacicloidal compuesto no dista demasiado del modelo hexacicloidal; ambos a su vez comparten similitudes con el modelo bicicloidal, conservando todos los engranes principales: Engrane 1, engrane 2, engrane 3 y engrane 4. Igualmente que tanto para el modelo hexacicloidal como para el modelo hexacicloidal compuesto se emplean las mismas ocho variables para denotar posición angular; esto relacionado al número de cuerpos que contemplan ambas configuraciones, siendo éste un total de ocho. Se muestra a continuación mediante la *tabla 6.1* el conjunto de variables de posición angular relacionadas tanto a los engranes principales como los engranes secundarios.

Tabla 6.1: Variables de posición angular del modelo hexacicloidal compuesto.

Variable de posición angular	Elemento del mecanismo
$\delta$	Engrane 1
$\epsilon$	Engrane 2
$\eta$	Engrane 3
$\mu$	Engrane 4
$\alpha$	Engrane A
$\beta$	Engrane B
$\gamma$	Engrane C
$\psi$	Engrane D

En esta sección se analizan las ecuaciones que explican las relaciones que existen entre el desplazamiento angular relativo a los engranes de un mismo tren planetario. Retomando lo visto en la sección previa, se muestran a continuación las variables de desplazamiento angular asociadas a cada componente mediante las expresiones en

(6.1).

$$\Delta\delta = \delta - \delta_1$$

$$\Delta\epsilon = \epsilon - \epsilon_1$$

$$\Delta\eta = \eta - \eta_1$$

$$\Delta\mu = \mu - \mu_1$$

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_1$$

$$\Delta\beta = \beta - \beta_1$$

$$\Delta\gamma = \gamma - \gamma_1$$

$$\Delta\psi = \psi - \psi_1$$

(6.1)

Representando  $\Delta\delta$ ,  $\Delta\epsilon$ ,  $\Delta\eta$  y  $\Delta\mu$  el desplazamiento angular asociado al engrane 1, engrane 2, engrane 3 y engrane 4; respectivamente. De la misma manera que  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$ ,  $\Delta\gamma$  y  $\Delta\psi$  denotarán lo mismo para los engranes secundarios: Engrane A, engrane B, engrane C y engrane D; estos últimos son engranes compuestos (Fig. 6.5).

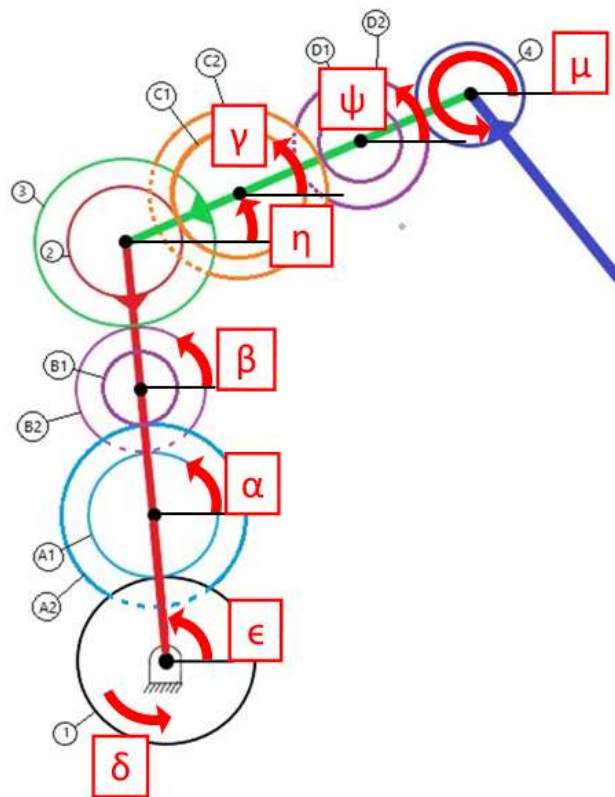


Figura 6.5: Posición angular de engranes asociadas al análisis cinemático.

Cabe señalar la existencia de dos denominaciones distintas de números de dientes por cada uno de los engranes compuestos. Con el fin de evitar confusión, a cada uno de los dos engranes alineados a un mismo eje que conforman un engrane de tipo compuesto se les dotará de un subíndice para diferenciarlos, éste podrá ser 1 o 2 (Ver *tabla 6.2*).

Tabla 6.2: Dupla de números de dientes en engranes compuestos.

Engrane compuesto	Elementos		#dientes	
Engrane A	Engrane $A_1$	Engrane $A_2$	$N_{A1}$	$N_{A2}$
Engrane B	Engrane $B_1$	Engrane $B_2$	$N_{B1}$	$N_{B2}$
Engrane C	Engrane $C_1$	Engrane $C_2$	$N_{C1}$	$N_{C2}$
Engrane D	Engrane $D_1$	Engrane $D_2$	$N_{D1}$	$N_{D2}$

Se procede entonces al planteamiento de las ecuaciones de engranes relacionadas a cada tren planetario, conservando como elemento en común al eslabón 2 dentro del modelo planteado en las ecs. (6.2) - (6.4).

Para la relación entre engrane 1 y el engrane  $A_1$  se establece lo siguiente:

$$\frac{\Delta\alpha - \Delta\epsilon}{\Delta\delta - \Delta\epsilon} = -\frac{N_1}{N_{A1}} = -RE_{1,A1} \quad (6.2)$$

Para la relación entre engrane  $A_2$  y engrane  $B_1$ :

$$\frac{\Delta\beta - \Delta\epsilon}{\Delta\alpha - \Delta\epsilon} = -\frac{N_{A2}}{N_{B1}} = -RE_{A2,B1} \quad (6.3)$$

Para la relación entre engrane  $B_2$  y engrane 3:

$$\frac{\Delta\eta - \Delta\epsilon}{\Delta\beta - \Delta\epsilon} = -\frac{N_{B2}}{N_3} = -RE_{B2,3} \quad (6.4)$$

Para el conjunto siguiente, se conserva como elemento común al eslabón 3 dentro del modelo planteado en las ecuaciones (6.5) - (6.7).

La relación entre engrane 2, engrane  $C_1$  se describe como:

$$\frac{\Delta\gamma - \Delta\eta}{\Delta\epsilon - \Delta\eta} = -\frac{N_2}{N_{C1}} = -RE_{2,C1} \quad (6.5)$$

Para la relación entre engrane  $C_2$  y engrane  $D_1$ :

$$\frac{\Delta\psi - \Delta\eta}{\Delta\gamma - \Delta\eta} = -\frac{N_{C2}}{N_{D1}} = -RE_{C2,D1} \quad (6.6)$$

Para la relación entre engrane  $D_2$  y engrane 4:

$$\frac{\Delta\mu - \Delta\eta}{\Delta\psi - \Delta\eta} = -\frac{N_{D2}}{N_4} = -RE_{D2,4} \quad (6.7)$$

En (6.8) se muestran las soluciones las ecuaciones (6.2) - (6.7) en términos de  $\Delta\delta$  y  $\Delta\mu$ .

$$\begin{aligned}
\epsilon &= D_1\Delta\delta + D_2\Delta\mu + \epsilon_1 \\
\alpha &= D_3\Delta\delta + D_4\Delta\mu + \alpha_1 \\
\beta &= D_5\Delta\delta + D_6\Delta\mu + \beta_1 \\
\eta &= D_7\Delta\delta + D_8\Delta\mu + \eta_1 \\
\gamma &= D_9\Delta\delta + D_{10}\Delta\mu + \gamma_1 \\
\psi &= D_{11}\Delta\delta + D_{12}\Delta\mu + \psi_1
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Para fines de simplificación, los coeficientes  $D_1, D_2, D_3, \dots, D_{12}$  han sido representados mediante las expresiones que se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \frac{1}{C_1}(C_2 + C_5) & D_5 &= \frac{1}{C_1}(C_2 + C_5 + C_6) & D_9 &= \frac{1}{C_1}(C_2 - C_4) \\
D_2 &= \frac{1}{C_1} & D_6 &= \frac{1}{C_1}(1 - C_6) & D_{10} &= \frac{1}{C_1}(1 + C_4 + C_5) \\
D_3 &= \frac{1}{C_1}(C_2 + C_5 - C_7) & D_7 &= \frac{1}{C_1}C_2 & D_{11} &= \frac{1}{C_1}(C_2 + C_3) \\
D_4 &= \frac{1}{C_1}(1 + C_7) & D_8 &= \frac{1}{C_1}(1 + C_5) & D_{12} &= \frac{1}{C_1}(1 - C_3 + C_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= 1 + RE_{1,A1}RE_{A2,B1}RE_{B2,3} + RE_{1,A1}RE_{2,C1}RE_{A2,B1}RE_{B2,3}RE_{C2,D1}RE_{D2,4} \\
C_2 &= RE_{1,A1}RE_{2,C1}RE_{A2,B1}RE_{B2,3}RE_{C2,D1}RE_{D2,4} \\
C_3 &= RE_{1,A1}RE_{2,C1}RE_{A2,B1}RE_{B2,3}RE_{C2,D1} \\
C_4 &= RE_{1,A1}RE_{2,C1}RE_{A2,B1}RE_{B2,3} \\
C_5 &= RE_{1,A1}RE_{A2,B1}RE_{B2,3} \\
C_6 &= RE_{1,A1}RE_{A2,B1} \\
C_7 &= RE_{1,A1}
\end{aligned}$$

### 6.3.2. Ecuaciones de Síntesis Cinemática

Para la síntesis cinemática, el valor final de los ángulos se discretiza añadiendo el subíndice  $j$ , donde  $j$  tomará valores enteros mayores a 1, siendo  $j = 2, 3, 4, \dots, n$  pues la posición inicial ya ha sido considerada. (*Fig. 6.6*).



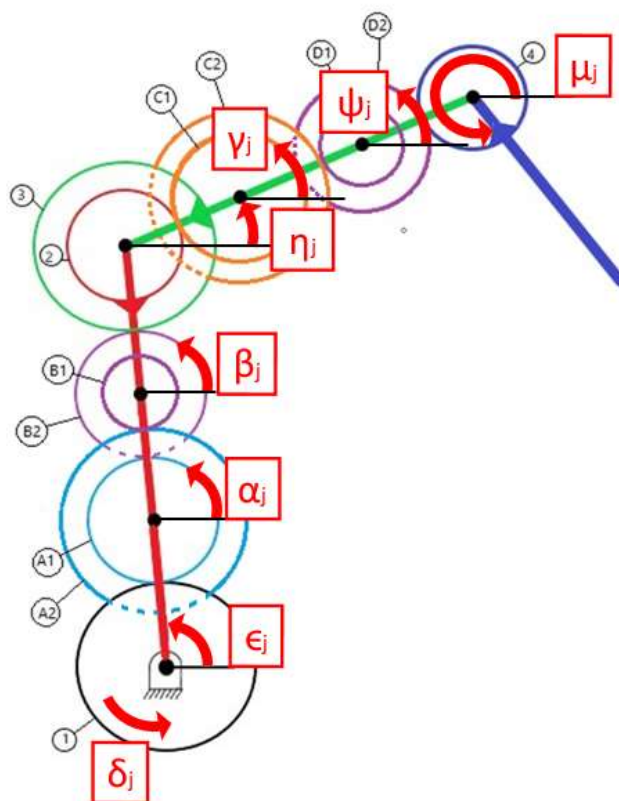


Figura 6.6: Posición angular de engranes asociada a la síntesis cinemática.

A partir de las ecs.(6.9):

$$\begin{aligned}
 \epsilon_j &= D_1 \Delta \delta_j + D_2 \Delta \mu_j + \epsilon_1 \\
 \alpha_j &= D_3 \Delta \delta_j + D_4 \Delta \mu_j + \alpha_1 \\
 \beta_j &= D_5 \Delta \delta_j + D_6 \Delta \mu_j + \beta_1 \\
 \eta_j &= D_7 \Delta \delta_j + D_8 \Delta \mu_j + \eta_1 \\
 \gamma_j &= D_9 \Delta \delta_j + D_{10} \Delta \mu_j + \gamma_1 \\
 \psi_j &= D_{11} \Delta \delta_j + D_{12} \Delta \mu_j + \psi_1
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

#### 6.4. Análisis Estático

Se muestra a continuación mediante la *figura 6.7* los elementos a considerar dentro del análisis estático del mecanismo.

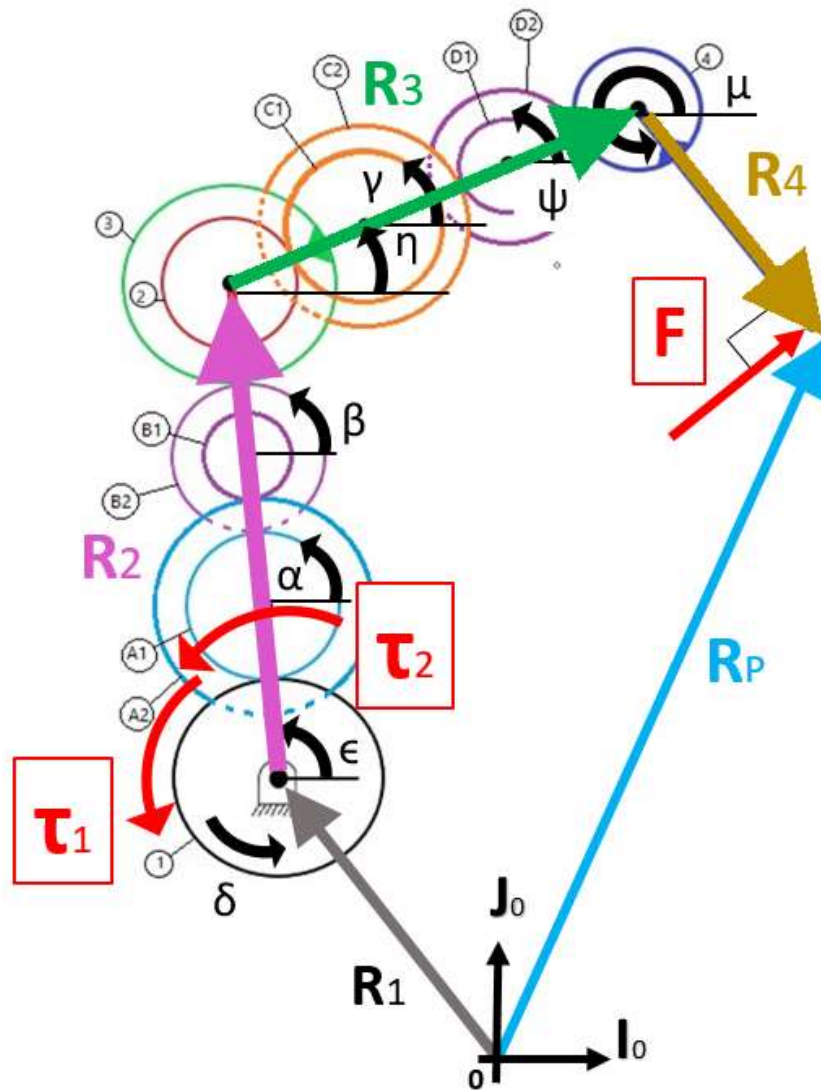


Figura 6.7: Análisis estático del mecanismo hexacicloidal.

Se considera la acción de una fuerza  $\mathbf{F}$  sobre el efector final, así como dos pares cinemáticos a la entrada del mecanismo  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$ . La ecuación de potencia se define como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T \mathbf{V}_P + \mathbf{T}_1^T \omega_1 + \mathbf{T}_2^T \omega_2 &= 0 \\ \mathbf{F}^T (\dot{\epsilon} \mathbf{U}_2 + \dot{\eta} \mathbf{U}_3 + \dot{\mu} \mathbf{U}_4) + \mathbf{T}_1^T (\delta \mathbf{K}) + \mathbf{T}_2^T (\dot{\epsilon} \mathbf{K}) &= 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Adecuando las relaciones de engranes tal como se hizo en la sección anterior.

$$\Delta\delta = \delta - \delta_1$$

$$\Delta\mu = \mu - \mu_1$$

$$\epsilon = D_1\Delta\delta + D_2\Delta\mu + \epsilon_1$$

$$\eta = D_7\Delta\delta + D_8\Delta\mu + \eta_1$$

$$\dot{\epsilon} = D_1\dot{\delta} + D_2\dot{\mu} \quad (6.11)$$

$$\dot{\eta} = D_7\dot{\delta} + D_8\dot{\mu} \quad (6.12)$$

Sustituyendo (6.11) y (6.12) en (6.10) se llega a la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}^T((D_1\dot{\delta} + D_2\dot{\mu})\mathbf{U}_2 + (D_7\dot{\delta} + D_8\dot{\mu})\mathbf{U}_3 + \dot{\mu}\mathbf{U}_4) + \\ & \quad \mathbf{T}_1^T(\dot{\delta}\mathbf{K}) + \mathbf{T}_2^T(D_1\dot{\delta} + D_2\dot{\mu})\mathbf{K} = 0 \\ & \mathbf{F}^T(D_1\mathbf{U}_2 + D_7\mathbf{U}_3)\dot{\delta} + \mathbf{F}^T(D_2\mathbf{U}_2 + D_8\mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_4)\dot{\mu} + \\ & \quad (\mathbf{T}_1^T + D_1\mathbf{T}_2^T)\mathbf{K}\dot{\delta} + D_2\mathbf{T}_2^T\mathbf{K}\dot{\mu} = 0 \quad (6.13) \\ & \underbrace{(\mathbf{F}^T(D_1\mathbf{U}_2 + D_7\mathbf{U}_3) + (\mathbf{T}_1 + D_1\mathbf{T}_2)^T\mathbf{K})}_{Q_1}\dot{\delta} + \\ & \quad \underbrace{(\mathbf{F}^T(D_2\mathbf{U}_2 + D_8\mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_4) + D_2\mathbf{T}_2^T\mathbf{K})}_{Q_2}\dot{\mu} = 0 \end{aligned}$$

Simplificando los términos de esta última expresión.

$$Q_1\dot{\delta} + Q_2\dot{\mu} = 0 \quad (6.14)$$

Donde se concluye:

$$Q_1 = \mathbf{F}^T(D_1\mathbf{U}_2 + D_7\mathbf{U}_3) + (\mathbf{T}_1 + D_1\mathbf{T}_2)^T\mathbf{K} = 0 \quad (6.15)$$

$$Q_2 = \mathbf{F}^T(D_2\mathbf{U}_2 + D_8\mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_4) + D_2\mathbf{T}_2^T\mathbf{K} = 0 \quad (6.16)$$

Siendo finalmente (6.15) y (6.16) las ecuaciones estáticas requeridas que relacionan las fuerzas y los pares externos presentes sobre el mecanismo, éstas ecuaciones serán usadas posteriormente para la síntesis estática del mecanismo.

## 6.5. Síntesis Estática

Para la síntesis estática se discretizan las ecs.(6.15) y (6.16) para  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ . Véase *Fig. 6.8*.

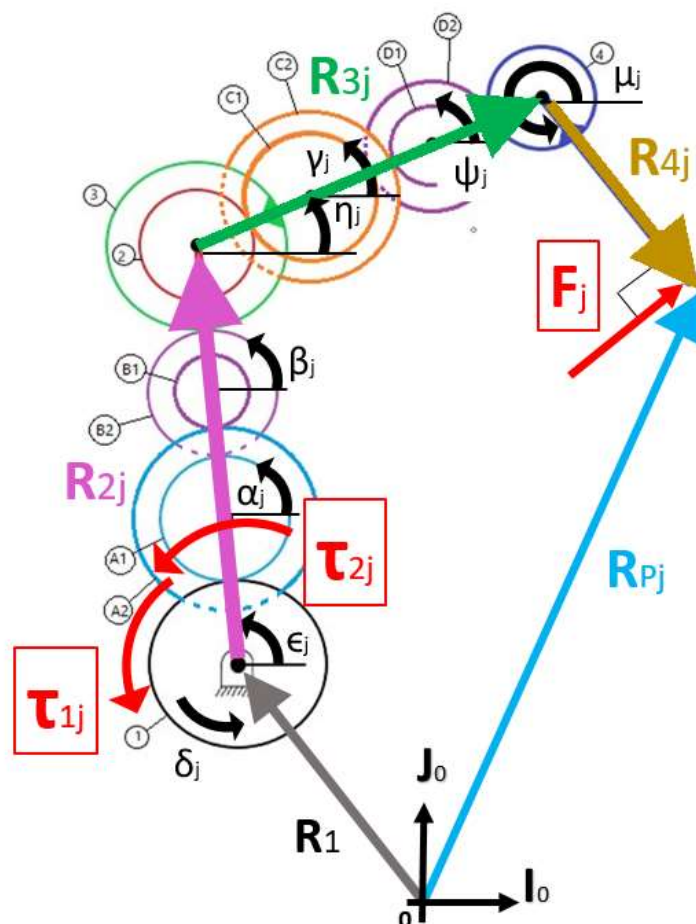


Figura 6.8: Síntesis estática del mecanismo hexacicloidal.

Las ecuaciones estáticas asociadas a la síntesis estática se expresan mediante las ecs. (6.17) y (6.18).

$$Q_{1j} = \mathbf{F}_j^T (D_1 \mathbf{U}_{2j} + D_7 \mathbf{U}_{3j}) + (\mathbf{T}_{1j} + D_1 \mathbf{T}_{2j})^T \mathbf{K} = 0 \quad (6.17)$$

$$Q_{2j} = \mathbf{F}_j^T (D_2 \mathbf{U}_{2j} + D_8 \mathbf{U}_{3j} + \mathbf{U}_{4j}) + D_2 \mathbf{T}_{2j}^T \mathbf{K} = 0 \quad (6.18)$$

## 6.6. Solución de la Síntesis Estática

En esta sección se soluciona la síntesis estática del mecanismo hexacicloidal compuesto. Para ello, se muestran los datos asignados como entrada del modelo de síntesis estática. En la *figura 6.9* se muestra el conjunto de vectores y posiciones angulares asociados a cada eslabón y/o engrane del mecanismo.

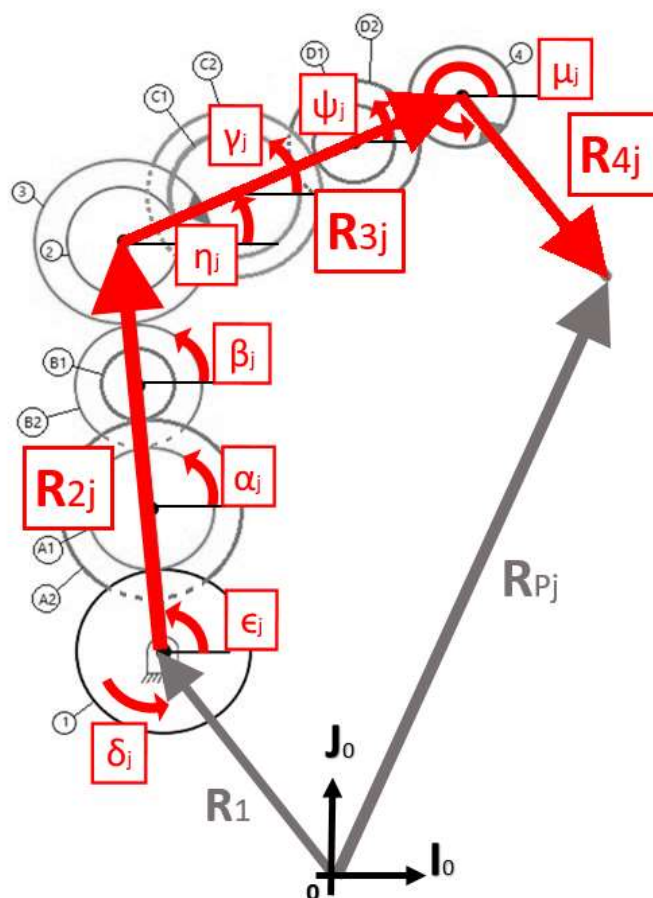


Figura 6.9: Elementos presentes en la síntesis cinemática del mecanismo.

A partir de las ecs. (4.4) y (4.5) las ecuaciones de síntesis de posición son las siguientes:

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_{2j} + \mathbf{R}_{3j} + \mathbf{R}_{4j} = \mathbf{R}_{Pj}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= [x_1, y_1, 0]^T \\ \mathbf{R}_{2j} &= \mathbf{R}_z(\epsilon_j) \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2 &= [x_2, 0, 0]^T \\ \mathbf{R}_{3j} &= \mathbf{R}_z(\eta_j) \mathbf{r}_3 & \mathbf{r}_3 &= [x_3, 0, 0]^T \\ \mathbf{R}_{4j} &= \mathbf{R}_z(\mu_j) \mathbf{r}_4 & \mathbf{r}_4 &= [x_4, 0, 0]^T \\ \mathbf{R}_{Pj} &= [x_{Pj}, y_{Pj}, 0]^T \end{aligned}$$

Se han considerado sólo 2 posiciones de entre las 7 contempladas en planteamientos previos. Los datos propuestos para  $j = 1, 2, \dots, n$  se muestran a continuación (*Garibay,*

2013):

$x_2 = 5$
$x_3 = 2,7$
$x_4 = 3$

$x_{P1} = 1,7$	$y_{P1} = 9,7$	$\kappa_1 = 234^\circ$	$\mu_1 = \kappa_1 - 180^\circ$	$\delta_2 = \delta_1$
$x_{P2} = 6,1$	$y_{P2} = -0,4$	$\kappa_2 = 140^\circ$	$\mu_2 = \kappa_2 - 180^\circ$	

La posición angular  $\delta_2$  toma el valor de la posición angular inicial, es decir,  $\delta_1$ . Representando con ello la inmovilización del engrane 1.

Las magnitudes  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  obtienen los valores respectivos a las longitudes de las falanges proximal, medial y distal; respectivamente (*Fig. 6.10 y Fig. 6.11*).

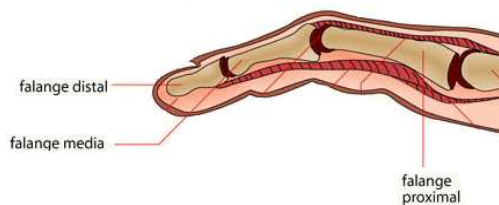


Figura 6.10: Falange distal, medial y proximal de un dedo humano.

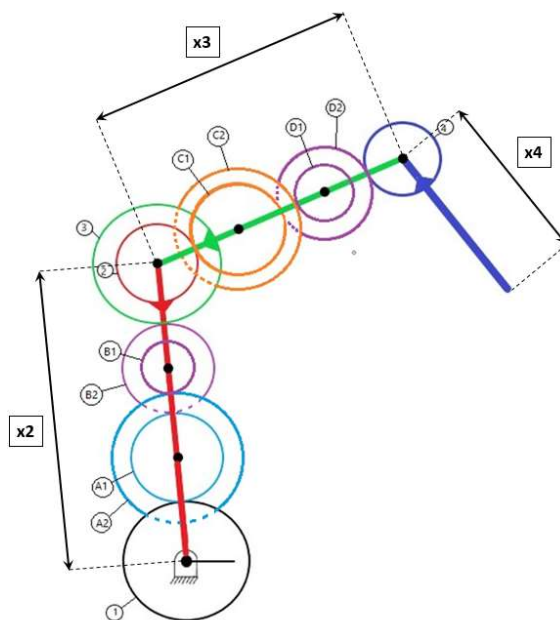


Figura 6.11: Longitud de los eslabones en mecanismo hexacicloidal compuesto.

Se definen como variables a los componentes del vector  $\mathbf{R}_1$ , es decir:  $x_1, y_1$ .

La trayectoria deseada es definida por el conjunto de 2 posiciones  $(x_{Pj}, y_{Pj})$  en forma de puntos coordenados en el plano  $XY$  (*Fig 6.12*).

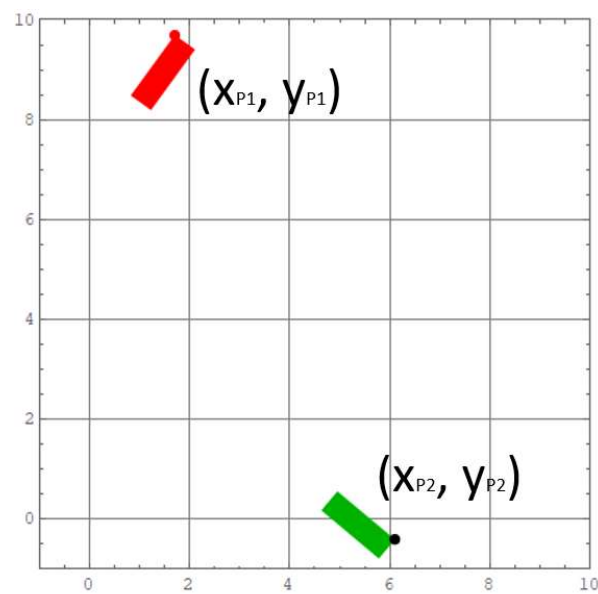


Figura 6.12: Posiciones den interés en forma de coordenadas.

El conjunto de ángulos  $\kappa_j$  asociado a cada una de las 2 posiciones se muestra en la *figura 6.13*.

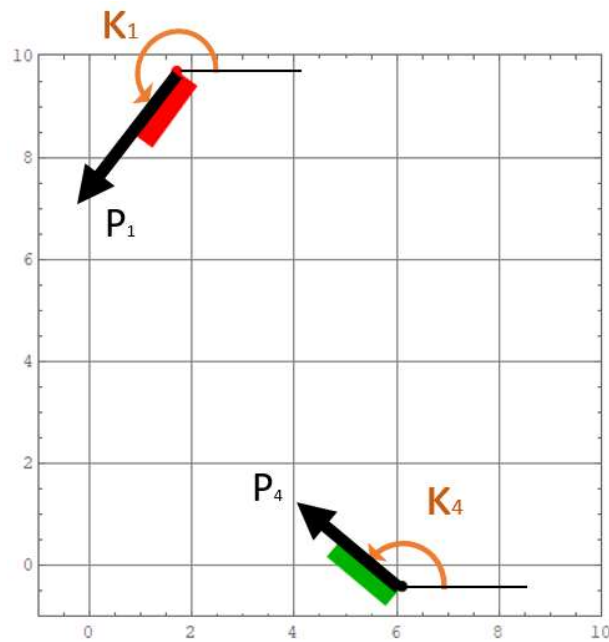


Figura 6.13: Ángulos de interés en la síntesis del mecanismo.

A partir de las ecs.(6.9) las ecuaciones de síntesis de engranes para  $j = 2, 3$  serán las siguientes:

$$\begin{aligned}\Delta\delta_j &= \delta_j - \delta_1 = 0 \\ \Delta\mu_j &= \mu_j - \mu_1 \\ \\ \epsilon_j &= D_1\Delta\delta_j + D_2\Delta\mu_j + \epsilon_1 \\ \alpha_j &= D_3\Delta\delta_j + D_4\Delta\mu_j + \alpha_1 \\ \beta_j &= D_5\Delta\delta_j + D_6\Delta\mu_j + \beta_1 \\ \eta_j &= D_7\Delta\delta_j + D_8\Delta\mu_j + \eta_1 \\ \gamma_j &= D_9\Delta\delta_j + D_{10}\Delta\mu_j + \gamma_1 \\ \psi_j &= D_{11}\Delta\delta_j + D_{12}\Delta\mu_j + \psi_1\end{aligned}$$

Permaneciendo como incógnitas para la síntesis de posición las variables:  $\epsilon_1, \alpha_1, \beta_1, \eta_1, \gamma_1, \psi_1$ .

Todos los valores de números de dientes se consideran incógnitas, tanto para los engranes principales como secundarios:  $N_1, N_2, N_3, N_4, N_{A1}, N_{A2}, N_{B1}, N_{B2}, N_{C1}, N_{C2}, N_{D1}, N_{D2}$ .

Se muestra en (6.17) y (6.18) las ecuaciones estáticas de interés para  $j = 1, 2, \dots, n$ .

$$\begin{aligned}Q_{1j} &= \mathbf{F}_j^T (D_1 \mathbf{U}_{2j} + D_7 \mathbf{U}_{3j}) + (\mathbf{T}_{1j} + D_1 \mathbf{T}_{2j})^T \mathbf{K} = 0 \\ Q_{2j} &= \mathbf{F}_j^T (D_2 \mathbf{U}_{2j} + D_8 \mathbf{U}_{3j} + \mathbf{U}_{4j}) + D_2 \mathbf{T}_{2j}^T \mathbf{K} = 0\end{aligned}$$

Se muestran a continuación los datos propuestos a contemplar dentro de la síntesis estática.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_j &= \mathbf{R}_z (\mu_j + \pi/2) \mathbf{f}_j & \mathbf{f}_j &= [f_p, 0, 0]^T & f_p &= 1.0[N] \\ \mathbf{T}_{1j} &= [0, 0, T_{1j}]^T \\ \mathbf{T}_{2j} &= [0, 0, T_{2j}]^T\end{aligned}$$

Se contemplan como incógnitas a  $T_{1j}, T_{2j}$ , donde  $j = 1, 2, \dots, n$ . Representando el escalar  $f_p$  un valor constante (*Fig 6.14*).



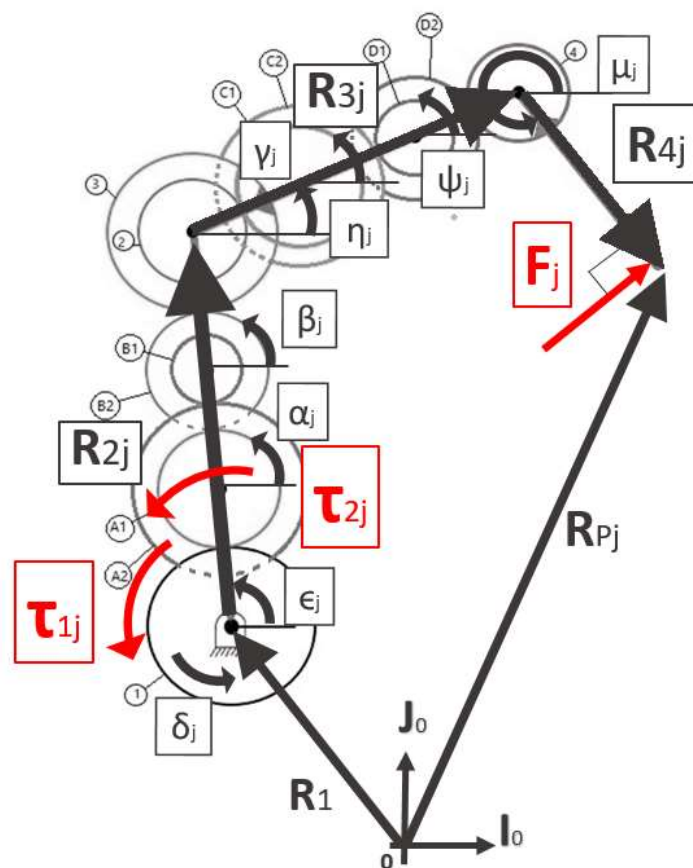


Figura 6.14: Fuerzas y momentos externos contemplados en la síntesis estática.

Se propone incluir a las ecs.(6.19-6.20) las cuales tienen como propósito delimitar el ángulo existente entre dos vectores asociados a eslabones adyacentes a  $180^\circ$ . La ec.(6.19) asocia el ángulo existente entre el eslabón 2 y el eslabón 3, mientras que la ec.(6.20) hace lo mismo para los eslabones 3 y 4. La finalidad de estas ecuaciones es mantener la postura inicial del dedo lo más recto posible en la posición inicial, siendo cualquier posición subsecuente irrelevante para su uso. Por tanto sólo es aplicable para  $j = 1$

$$A_{1j} = \text{Cos}(\pi) - \frac{-\mathbf{R}_{2j}^T(\mathbf{R}_{3j})}{|\mathbf{R}_{2j}| |\mathbf{R}_{3j}|} = 0 \quad (6.19)$$

$$A_{2j} = \text{Cos}(\pi) - \frac{-\mathbf{R}_{3j}^T(\mathbf{R}_{4j})}{|\mathbf{R}_{3j}| |\mathbf{R}_{4j}|} = 0 \quad (6.20)$$

Una vez calculadas las denominaciones de números de dientes se obtienen los radios correspondientes a cada uno de los engranes que componen el mecanismo, así como el valor del módulo métrico común en dos conjuntos de engranes  $m_1$  y  $m_2$ . Para ello se

plantean las ecuaciones siguientes:

$$r_1 + r_{A1} + r_{A2} + r_{B1} + r_{B2} + r_3 = x_2 \quad (6.21)$$

$$r_2 + r_{C1} + r_{C2} + r_{D1} + r_{D2} + r_4 = x_3 \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{2r_1}{N_1} & \frac{N_1}{N_{A1}} &= \frac{r_1}{r_{A1}} \\ m_1 &= \frac{2r_{A2}}{N_{A2}} & \frac{N_{A2}}{N_{B1}} &= \frac{r_{A2}}{r_{B1}} \\ m_1 &= \frac{N_{A2}}{2r_{B2}} & \frac{N_{B1}}{N_{B2}} &= \frac{r_{B1}}{r_{B2}} \\ m_2 &= \frac{N_{B2}}{2r_2} & \frac{N_3}{N_2} &= \frac{r_3}{r_2} \\ m_2 &= \frac{N_2}{2r_{C2}} & \frac{N_{C1}}{N_{C2}} &= \frac{r_{C1}}{r_{C2}} \\ m_2 &= \frac{N_{C2}}{2r_{D2}} & \frac{N_{D1}}{N_{D2}} &= \frac{r_{D1}}{r_{D2}} \\ m_2 &= \frac{N_{D2}}{N_4} & &= \frac{r_4}{r_4} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Permaneciendo como incógnitas:  $r_1, r_{A1}, r_{A2}, r_{B1}, r_{B2}, r_3, r_2, r_{C1}, r_{C2}, r_{D1}, r_{D2}, r_4, m_1, m_2$ .

Para la solución de la síntesis estática del mecanismo se establece la función objetivo mediante el método de Mínimos Cuadrados No Lineales (MCNL) (*Suh & Radcliffe, 1983*) mediante la instrucción en Mathematica<sup>®</sup> conocida como *FindMinimum[]*, tal como se ha efectuado en las soluciones del modelo bicicloidal y hexacicloidal.

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) + f_3(\mathbf{x}) + f_4(\mathbf{x}) + f_5(\mathbf{x}) \quad (6.24)$$

$$f_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_{2j} + \mathbf{R}_{3j} + \mathbf{R}_{4j} - \mathbf{R}_{Pj})^2 \quad (6.25)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{F}_j^T (D_1 \mathbf{U}_{2j} + D_7 \mathbf{U}_{3j}) + (\mathbf{T}_{1j} + D_1 \mathbf{T}_{2j})^T \mathbf{K})^2 \quad (6.26)$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{F}_j^T (D_2 \mathbf{U}_{2j} + D_8 \mathbf{U}_{3j} + \mathbf{U}_{4j}) + D_2 \mathbf{T}_{2j}^T \mathbf{K})^2 \quad (6.27)$$

$$f_4(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \left( \cos(\pi) - \frac{-\mathbf{R}_{2j}^T (\mathbf{R}_{3j})}{|\mathbf{R}_{2j}| |\mathbf{R}_{3j}|} \right)^2 \quad (6.28)$$

$$f_5(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \left( \cos(\pi) - \frac{-\mathbf{R}_{3j}^T (\mathbf{R}_{4j})}{|\mathbf{R}_{3j}| |\mathbf{R}_{4j}|} \right)^2 \quad (6.29)$$

Donde:

$$\mathbf{x} = (x_1, y_1, \epsilon_1, \alpha_1, \beta_1, \eta_1, \gamma_1, \psi_1, N_1, N_2, N_3, N_4, N_{A1}, N_{A2}, N_{B1}, N_{B2}, N_{C1}, N_{C2}, N_{D1}, N_{D2}, T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}) \quad (6.30)$$

Con el fin de establecer una referencia visual a partir de la cual ejemplificar de forma más práctica la disponibilidad de espacio contemplada para el dispositivo, visto

como un ensamble final, es que se propone una serie de 3 polígonos asociados a cada uno de los 3 eslabones del mecanismo, que en conjunto vendrían a representar las dimensiones relativas al ancho de un dedo humano de un hombre adulto de 25 años de edad (*Figura 6.15*)

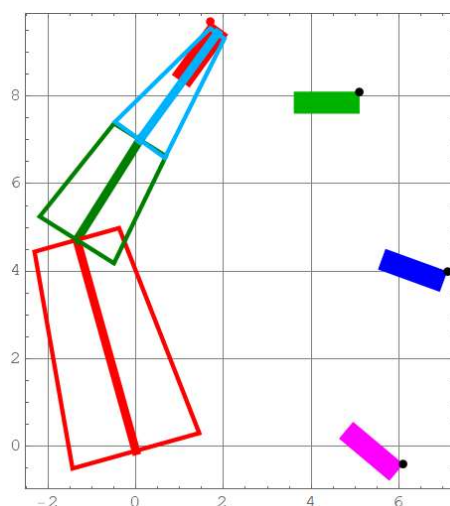


Figura 6.15: Serie de polígonos asociados a eslabones.

Cada uno de estos polígonos se presenta como un trapecio isósceles, con un valor de altura igual a la del eslabón asociado al mismo y cuyas bases mayor/menor se conservan perpendiculares a dicho eslabón. Las dimensiones de éstas últimas se presentan a continuación:

	Polígono eslabón 2	Polígono eslabón 3	Polígono eslabón 4
Base mayor (cm)	3	2	1.4
Base menor (cm)	2	1.4	0.4

## 6.7. Resultados

Conforme a los resultados obtenidos para el mecanismo hexacicloidal compuesto, se considerará como una solución aceptable a aquella que cumpla con las siguientes características:

- Los resultados de la solución sostienen una interpretación lógica y representan valores físicamente válidos.
- Radios de engranes poseen dimensiones que posibilitan la compactación del mecanismo, de modo que éstas no superen los límites establecidos por la triada de polígonos declarada en la sección anterior (*Fig 6.15*).
- La orientación de las barras en la posición inicial posibilita una postura semejante a la de un dedo humano estando erguido.

- La posición y orientación del efector final en su recorrido se aproxima a la trayectoria propuesta.
- La fuerza de prensión supera a la especificada en el mecanismo original, esto en relación al par de entrada.

Se muestra a continuación la mejor solución obtenida para el mecanismo hexacicloidal compuesto posterior a la ejecución de múltiples iteraciones, definiendo ésta como una solución aceptable y válida a ser candidata a representar una iteración final pues cumple con todos los requerimientos anteriormente nombrados.

Componentes del vector  $\mathbf{R}_1$ :  $x_1, y_1$ .

$$x_1 = -3.77653 \text{ [cm]}$$

$$y_1 = 0.532489 \text{ [cm]}$$

Par de torsión  $T_{1j}$ :

$$T_{11}, T_{12}.$$

$$T_{11} = 3.20538 \text{ [N.cm]}$$

$$T_{12} = 3.0869 \text{ [N.cm]}$$

Par de torsión  $T_{2j}$ :

$$T_{21}, T_{22}.$$

$$T_{21} = -13.8411 \text{ [N.cm]}$$

$$T_{22} = -11.2521 \text{ [N.cm]}$$

Números de dientes:  $N_1, N_2, N_3, N_4, N_{A1}, N_{A2}, N_{B1}, N_{B2}, N_{C1}, N_{C2}, N_{D1}, N_{D2}$

$$N_1 = 307.822 \approx 308$$

$$N_2 = 205.892 \approx 206$$

$$N_3 = 277.037 \approx 277$$

$$N_4 = 142.027 \approx 142$$

$$N_{A1} = 275.754 \approx 276$$

$$N_{A2} = 122.739 \approx 123$$

$$N_{B1} = 280.199 \approx 280$$

$$N_{B2} = 118.914 \approx 119$$

$$N_{C1} = 118.705 \approx 119$$

$$N_{C2} = 215.467 \approx 215$$

$$N_{D1} = 115.814 \approx 116$$

$$N_{D2} = 140.561 \approx 140$$

Posiciones iniciales:  $\epsilon_1, \alpha_1, \beta_1, \eta_1, \gamma_1, \psi_1$ .

$$\epsilon_1 = -80.5892 \text{ [rad]}$$

$$\alpha_1 = 0.627524 \text{ [rad]}$$

$$\beta_1 = 1.42164 \text{ [rad]}$$

$$\gamma_1 = -1.4571 \text{ [rad]}$$

$$\eta_1 = 968.632 \text{ [rad]}$$

$$\psi_1 = 0.528591 \text{ [rad]}$$

En la *tabla 6.3* se muestran las magnitudes de los radios de engranes:

$$r_1, r_{A1}, r_{A2}, r_{B1}, r_{B2}, r_3, r_2, r_{C1}, r_{C2}, r_{D1}, r_{D2}, r_4:$$

Tabla 6.3: Radios de engranes y valores del módulo obtenidos en primera solución del mecanismo.

Módulo [mm]	Radio [cm]					
	engrane 1	engrane A <sub>1</sub>	engrane A <sub>2</sub>	engrane B <sub>1</sub>	engrane B <sub>2</sub>	engrane 3
0.0723346	1.11331	0.997326	0.443914	1.0134	0.43008	1.00197
módulo 2	engrane 2	engrane C <sub>1</sub>	engrane C <sub>2</sub>	engrane D <sub>1</sub>	engrane D <sub>2</sub>	engrane 4
0.0575408	0.592358	0.34152	0.619906	0.333201	0.404398	0.408617

Se muestra a continuación en las *figuras 6.16* y *6.17* la representación gráfica de la solución y la animación del mecanismo efectuada en Mathematica<sup>®</sup>.

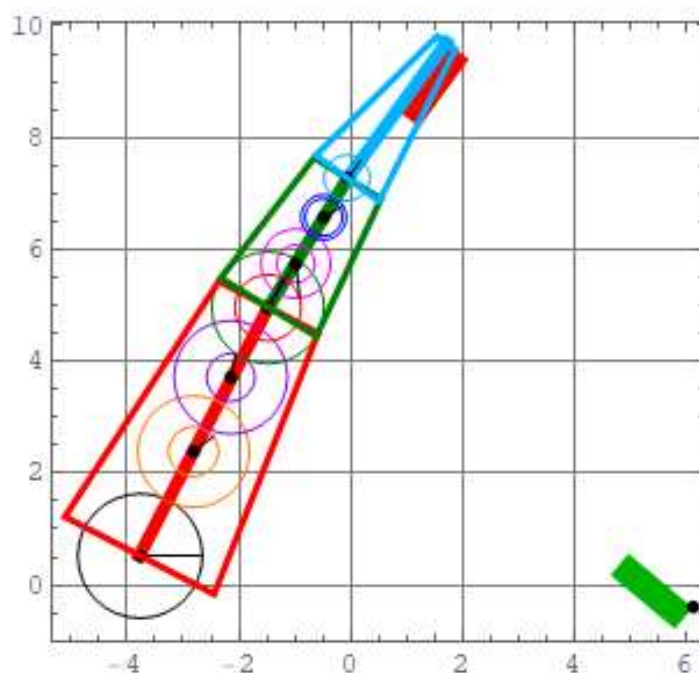


Figura 6.16: Solución del mecanismo hexacicloidal compuesto en Mathematica<sup>®</sup>.

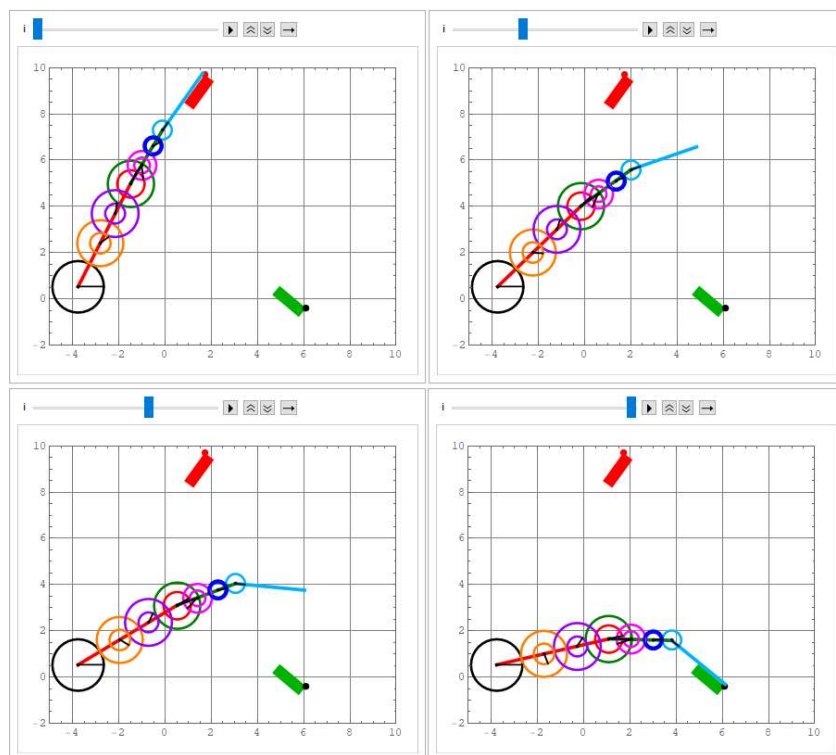


Figura 6.17: Animación en Mathematica<sup>®</sup> de la primera solución del mecanismo.

Finalmente, se muestra mediante las *figuras 6.18 y 6.21* el modelo 3D del mecanismo en su iteración final, al igual que una simulación de movimiento desarrollada por medio del software Siemens NX<sup>®</sup>.

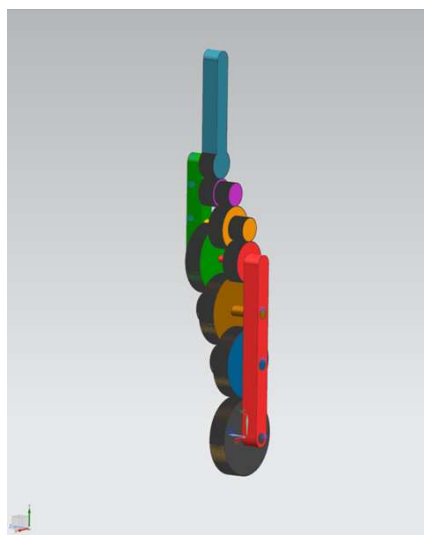


Figura 6.18: Modelo 3D básico de mecanismo hexacicloidal compuesto.

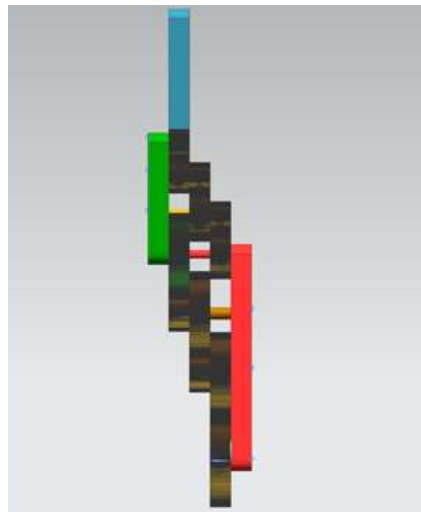


Figura 6.19: Modelo 3D de mecanismo hexacicloidal compuesto (Vista Frontal).

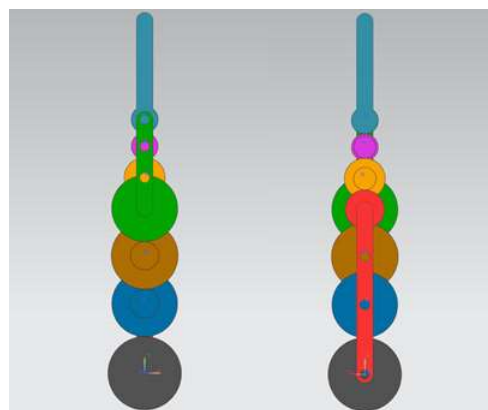
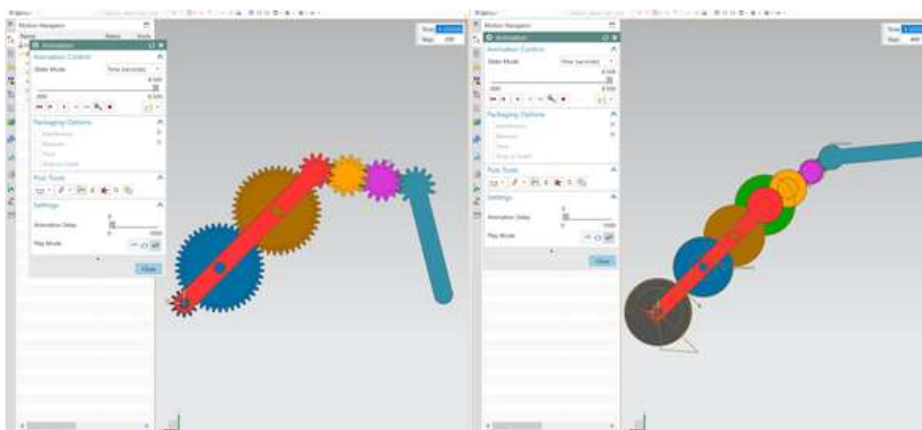


Figura 6.20: Modelo 3D de mecanismo hexacicloidal compuesto (Vista Lateral)

Figura 6.21: Simulación de seguimiento de trayectoria de mecanismo hexacicloidal compuesto en Siemens NX<sup>®</sup>.

## Capítulo 7

# Conclusiones

Ha sido comprobado la eficacia del planteamiento propuesto en el presente trabajo, siendo aplicado a la resolución del mecanismo hexacicloidal compuesto. Consiguiendo obtener 1 solución aceptable de entre múltiples soluciones obtenidas en iteraciones previas; esta solución ha demostrado cumplir con cada uno de los requerimientos declarados.

Tanto en el presente mecanismo como en los anteriores, bicicloidal y hexacicloidal, ha sido posible el desarrollo de una síntesis que emplea ecuaciones de posición. Existiendo una ecuación de síntesis de posición asociada a cada posición discreta que conforma la trayectoria de interés, siendo modelado el movimiento del mecanismo por medio de una trayectoria continua a partir de posiciones discretas.

A su vez, se planteó exitosamente una síntesis a partir de ecuaciones estáticas. Conservando estas ecuaciones de síntesis estática ciertos parámetros en común con respecto a las ecuaciones de síntesis de posición, tales como: Las longitudes de los eslabones y los radios de engranes. Existiendo una viabilidad efectiva al momento de hacer la inclusión directa de posiciones discretas dentro de las ecuaciones estáticas; consiguiendo plantear una ecuación estática, como también una ecuación de posición, para cada una de las  $n$  posiciones que puede tomar el mecanismo como parte de su trayectoria.

Se optó por reducir el número de posiciones discretas consideradas en la síntesis del mecanismo propuesto a sólo 2 de las 7 contempladas en el mecanismo original, como también para los mecanismos bicicloidal y hexacicloidal vistos en capítulos previos. Entre las posiciones seleccionadas solamente se han conservado la primera y la última posición, descartando así cualquier posición intermedia. Cabe mencionar que, durante las primeras iteraciones, se trató de obtener una solución por parte del método que considerara el conjunto originalmente planteado de 7 posiciones; no obstante, dichas pruebas se llevaron a cabo sin éxito.



Se optó finalmente por ambos puntos coordenados, tanto inicial como final; puesto que definen los límites de la trayectoria seguida por el mecanismo original. Ésta dupla de puntos ha demostrado contener datos suficientes para sustentar la síntesis del mecanismo; logrando ejecutar una trayectoria que emula el movimiento de flexo-extensión, tal como se muestra en las animaciones efectuadas en Mathematica<sup>®</sup> (Fig. 6.17).

Algunas razones que imposibilitaron ingresar más de 2 posiciones discretas en la síntesis del mecanismo apuntan al método de optimización empleado, siendo este método del tipo no restringido; impidiendo con ello el establecer límites que evitaran obtener valores de números de dientes negativos y/o decimales, así como resultados indeseables que conllevaran a radios de engranes de dimensiones desmesuradas. Aun así, es necesario hacer notar que tanto el modelo propuesto como el modelo original posibilitan la generación de soluciones en forma iterativa, esto mediante el uso del mismo método numérico, es decir, MCNL.

Recordando que, para cada una de las  $n$  posiciones existirá tanto una ecuación de posición como una ecuación estática asociada a la misma. Por tanto, es acertado afirmar que un mayor número de posiciones discretas a incluir se traduce en un mayor número de incógnitas a resolver por parte del método; significando con ello una menor factibilidad para obtener una solución aceptable o inclusive una solución cualquiera.

Es importante mencionar que la trayectoria de interés sobre la cual se basa la síntesis propuesta fue obtenida en un inicio de forma experimental, esto a partir del trazo del recorrido de un dedo humano adulto que fungió como modelo único para dicho propósito (Garibay, 2013). Sin embargo, no está de más aclarar que el sistema de actuación de un dedo humano involucra la acción conjunta de tendones y ligamentos. Por lo cual, idear un mecanismo capaz de replicar todas y cada una de las acciones de un dedo real de forma exacta resultaría extremadamente complejo de realizar. Asimismo, el hacerlo representaría una exigencia relativamente desatinada; pues es virtualmente imposible encontrar dos individuos cuyos dedos posean similitudes anatómicas idénticas y que propicien una variación nula en cuanto a la trayectoria generada al realizar la acción de flexo-extensión. Esta última premisa permite argumentar la razón por la cual en el presente trabajo no se enfatizó en análisis estadísticos con el fin de evaluar la precisión y/o exactitud de la trayectoria generada en cada solución obtenida; ya que, se carece de una trayectoria de referencia que pudiera ser considerada ideal y/o perfecta.

Habiendo establecido como primer criterio para el seguimiento de trayectoria que la solución del mecanismo en un instante inicial se asemeje la postura de un dedo humano estando erguido; y como segundo criterio, el contar con una posición y orientación asociada al efector final que se asemeje a la trayectoria propuesta. Por lo tanto, la

constatación de cualquiera de ambas condiciones se encuentra basada en una impresión con fundamento lógico/empírico; mas no formalmente del tipo experimental.

El mecanismo cuenta con 2 GDL en cualquiera de las variantes ya vistas: Bicicloidal, hexacicloidal y hexacicloidal compuesto. Para todos ellos se han conservado condiciones operativas similares entre sí; y asimismo, con respecto al diseño original; haciendo especial énfasis en mantener el engrane 1 inmóvil. Bajo dicha condición operativa es que se han cumplido con los requerimientos relativos al seguimiento de trayectoria, siendo posible entonces apreciar cómo no ha sido necesario liberar el engrane 1 para lograr los resultados deseados.

Se mantiene como hipótesis que, la acción del engrane 1 sobre el mecanismo, en adición con la acción ya contemplada del engrane 2, conseguiría una aproximación superior a la trayectoria deseada. Igualmente, se contaría con un mayor rango de movimiento, no limitándose al seguimiento de una sola curva en particular. Por último, la adición de un actuador adicional naturalmente conseguiría transmitir una mayor fuerza a la entrada; dotando al dispositivo de una fuerza de presión superior. En contraparte, en el hipotético caso de eliminar esta restricción y liberar con ello el engrane 1, aumentaría en consecuencia el número de incógnitas a resolver en 2, estando éstas asociadas a las 2 posiciones angulares discretas que puede tomar  $\delta_j$ ; lo cual hubiese complicado más la obtención de una solución por parte del método de MCNL (*Suh & Radcliffe, 1983*). En iteraciones anteriores, tanto para este modelo como para el modelo bicicloidal y hexacicloidal, se pretendió contabilizar dichas variables como parte del modelo y así obtener una solución del mecanismo; sin embargo, no fue posible llegar a una solución aceptable.

Dentro de la síntesis se definieron todos y cada uno de los valores de números de dientes como incógnitas a resolver, esto tanto para los engranes principales como secundarios. Consiguiendo resolver de forma exitosa dichas variables dentro de la solución obtenida. Por otro lado, en el diseño original los valores de números de dientes han sido propuestos como datos, en vez de incógnitas a resolver.

Como ya se comentó con anterioridad, uno de los principales retos que se presentaron a lo largo de un significativo número de iteraciones prevaleció en forma de fallidos intentos por obtener una solución por parte del método que contuviera únicamente números de dientes con valores positivos. En otras ejecuciones, el método conseguía ineficazmente arrojar valores de números de dientes de magnitudes que se podrían considerar insignificantes, o en el otro extremo, desmesuradamente exorbitantes. Siendo ineludible el descartar dicha solución y ejecutar de nueva cuenta el método numérico en busca de una que ofreciera mejores resultados.

Finalmente, se recurrió a redondear los valores de números de dientes obtenidos a partir de la solución del mecanismo, siendo estos de tipo decimal; a fin de contar

solamente con valores de números de dientes enteros. En consecuencia, es natural que se presente una variación entre los resultados obtenidos y simulados a partir del modelo con respecto a los resultados esperados al llevar a cabo la construcción del mecanismo.

Se decidió añadir el módulo métrico entre los parámetros a considerar para el cálculo de los radios de engranes, tanto para primarios como secundarios. Al mismo tiempo, se optó por emplear un mismo valor de módulo métrico para todos los trenes de engranes planetarios asociados a un mismo eslabón; ya que, el contacto entre dientes de los engranes que forman parte de dicho conjunto es ineludible, siendo necesario incluir un total de 2 valores diferentes de módulo métrico. Sin embargo, es importante denotar que ambos parámetros fueron considerados como incógnitas a resolver dentro del sistema de ecuaciones, donde también figuran radios de engranes y denominaciones de números de dientes.

Dentro del planteamiento del diseño original, el parámetro asociado al módulo métrico se contempla de forma implícita; pues se proponen las relaciones existentes entre radios y número de dientes desde un principio. A su vez, se plantean todas las denominaciones de números de dientes como datos sugeridos. No obstante, se puede apreciar como las ecuaciones que relacionan números de dientes con radios de engranes en el modelo propuesto conllevan un mayor grado de complejidad, esto en comparación con las ecuaciones análogas planteadas en el modelo original. El fundamento de esto radica en el contacto existente entre engranes compuestos y engranes comunes; por ello la necesidad de acompañar a cada una de estas ecuaciones con una adicional, figurando dentro de éstas el módulo métrico. Asimismo, es posible observar el efecto positivo que genera el planteamiento previo; logrando incrementar el número de ecuaciones en 6 adicionales y contrarrestando en buena medida el incremento en el número de incógnitas, correspondientes a los 2 valores de módulo métrico; posibilitando así la solución del sistema de ecuaciones propuesto.

Sin embargo, después de cuantiosas iteraciones, no fue posible obtener una solución del mecanismo que contuviera valores de módulo métrico aproximados a estándares comerciales, obteniendo valores considerablemente menores al valor de módulo métrico mínimo declarado, que es: 0.3mm. Tabla 3.2 "Módulos métricos estándares" (*Norton, 2011*). En consecuencia, desde el punto de vista de manufactura, no es posible producir engranes con las especificaciones declaradas mediante métodos convencionales; sino tal vez, empleando tecnologías más avanzadas para su fabricación. No obstante, cualquier consideración adicional relacionada a procesos de manufactura de engranes no figura dentro de los propósitos y/o objetivos del presente trabajo; por lo cual, no representa un factor determinante para la evaluación efectiva del modelo propuesto.

Sin duda la solución exhibida se adapta a las condiciones antropométricas propias de un dedo humano. Así, el rediseño propuesto ha podido ser compactado en un

número significativo de sus piezas; consiguiendo una resolución favorable en cuanto al empaquetamiento del mecanismo y permitiendo una importante ganancia de espacio. Igualmente, esta solución presenta una postura similar a un dedo humano estando erguido; siendo éste el resultado del conjunto de posiciones angulares iniciales asociadas a cada engrane, estableciendo así la orientación de los eslabones en el primer instante.

Lo anterior ha sido posible mediante la inclusión de dos ecuaciones adicionales como parte de la función objetivo. La aportación de ambas ecuaciones ha demostrado ser fundamental; consiguiendo mantener un ángulo de  $180^\circ$  entre duplas de eslabones adyacentes y adoptando con ello una orientación similar entre eslabones en una posición inicial. No está de más mencionar que, las magnitudes asociadas a las longitudes de la triada de eslabones conservan los mismos valores que las presentes en el diseño del mecanismo original, permaneciendo éstas como parámetros idénticos e inalterables.

La fuerza de prensión requerida se propuso de una magnitud igual a  $1[N]$ , conservando este parámetro como idéntico al declarado en el análisis estático efectuado para el mecanismo original. Al igual que en las soluciones expuestas en secciones anteriores para los mecanismos bicicloidal y hexacicloidal, se obtiene como resultado de la síntesis un valor correspondiente al par de entrada  $T_{2j}$ , asociado a cada una de las  $n$  posiciones a contemplar en la síntesis. Se optó entonces por seguir el mismo planteamiento al declarar a  $T_{2j}$  como una incógnita a resolver, siendo éste el par de entrada que acciona el mecanismo. Se registraron todos los valores que puede tomar la magnitud de este vector comprendidos dentro de un rango entre  $0.138[N.m]$  y  $0.112[N.m]$ , tomando el primer valor de entre estos dos como el par mínimo requerido para accionar el mecanismo.

Ha sido conveniente comparar de nueva cuenta la magnitud del par mínimo requerido en este rediseño con respecto al diseño original, siendo éste último declarado con una magnitud igual a  $3.0[N.m]$ . Es posible entonces apreciar como la diferencia entre el par necesario para el accionamiento de ambos dispositivos es considerable; representando con este rediseño una reducción de al menos 21 veces en el par mínimo requerido con respecto al mecanismo original. Se propone la siguiente relación entre fuerza de prensión y par mínimo requerido para ambos modelos.

Mecanismo hexacicloidal compuesto:

$$\frac{f_p}{T_{2j}} = \frac{1.0[N]}{0.138[N.m]} = 7.246[1/m]$$

Mecanismo hexacicloidal original:

$$\frac{f_p}{T_{2j}} = \frac{1.0[N]}{3.0[N.m]} = 0.333[(1/m)]$$

De la misma forma, se considera el par  $T_{1j}$  como salida de la síntesis estática, si bien el engrane 1 sobre el cual actúa directamente  $T_{1j}$  permanece bloqueado, es igualmente

necesario conocer la magnitud de éste; pues representa el par mínimo necesario para conservar el engrane 1 inmóvil. Dicho concepto es comúnmente referido mediante el término *par de bloqueo*, empleándose con recurrencia en la elección de actuadores.

Ahora bien, otra razón que podría justificar el interés por obtener información de la variable  $T_{1j}$  tiene que ver con la propia resistencia de los dientes de engrane. Aunque analizar el esfuerzo presente sobre los dientes de engranes no representa un factor a considerar en el rediseño del mecanismo; bien podría ser información de utilidad para desarrollos futuros que consideren un nivel de manufactura más desarrollado. Asimismo, para una etapa de prototipado cabe aclarar que, en cualquiera de los dos casos, el valor de  $T_{1j}$  puede bien ser sugerido y adoptar valores mayores a los expresados en la solución de la síntesis; sin embargo, a lo largo de todo el desarrollo se optó por mantener éste como incógnita y calcularlo.

Como ya se ha comentado en capítulos anteriores, en lo respectivo a las soluciones analizadas, tanto para el mecanismo bicicloidal como hexacicloidal, se ha concluido que efectivamente es posible considerar a los componentes del vector  $\mathbf{R}_1$ , es decir  $x_1$  y  $y_1$ , como incógnitas. De la misma forma, al adquirir alguno de estos un valor constante/propuesto se establece una restricción en el modelo. Por otro lado, el hecho de eliminar esta restricción y considerar a  $x_1$  y/o  $y_1$  como variables a resolver posibilita que el mecanismo se posicione de forma más adecuada desde el comienzo; logrando una mejor aproximación a cada una de las posiciones discretas contempladas en la síntesis.

Se ha comprobado la efectividad de contar con ambos componentes  $x_1$ ,  $y_1$  como variables a resolver a la salida de la síntesis; permitiendo dar con un conjunto de soluciones por parte del método hasta alcanzar una solución aceptable, tal como también se observó en desarrollos anteriores en el mecanismo bicicloidal y en el mecanismo hexacicloidal. En todas y cada una de estas configuraciones ha sido de vital importancia eliminar dicha restricción, esto al no asignar un valor a cualquiera de estas dos coordenadas. Permitiendo finalmente posicionar con una mayor libertad el mecanismo en la referencia más óptima.

## Apéndice A

# Síntesis Cinemática de Diseño Original

Se muestra en esta sección algunos datos, parámetros, consideraciones de diseño y resultados más sobresalientes recopilados a partir de la tesis: "Diseño de Mano con un Mecanismo Hexacicloidal" (*Garibay, 2013*). Representando el mecanismo hexacicloidal descrito en el anterior trabajo el diseño o modelo original.

### A.1. Dimensiones del mecanismo original

A continuación, mediante la *tabla a1* se definen las longitudes del conjunto de los tres eslabones que confirman el mecanismo, siendo estas longitudes de una magnitud igual a la de las falanges proximal, distal y medial. Las dimensiones sobre las cuales se basa el diseño propuesto se apoyan en medidas antropométricas del dedo índice de un hombre adulto de 25 años de edad (*Garibay, 2013*), siendo éste como el modelo anatómico tomado como referencia y cuyas medidas antropométricas figuran dentro del rango de las tablas antropométricas de la Ciudad de México.

Tabla a1: Medida de cada falange del dedo índice.

Falange	Longitud[cm]	
proximal	5.0	$x_2$
medial	2.7	$x_3$
distal	3.0	$x_4$

### A.2. Trayectoria del mecanismo original

En base al modelo anatómico de referencia, de manera gráfica ha sido trazada la trayectoria generada al ejecutar el movimiento de flexo-extensión. A partir de ello son

definidos puntos de forma arbitraria que forman parte de la trayectoria; para ello, la ubicación del origen es referenciada con respecto a la articulación metacarpofalángica del dedo. Se trazan rectas que parten del punto de origen hasta las coordenadas correspondientes a cada una de los puntos propuestos, cada punto forma parte de la trayectoria y está asociado a una posición del extremo del dedo. Se han definido un total de 7 posiciones, realizando las mediciones correspondientes para obtener las coordenadas de los 7 puntos correspondientes.

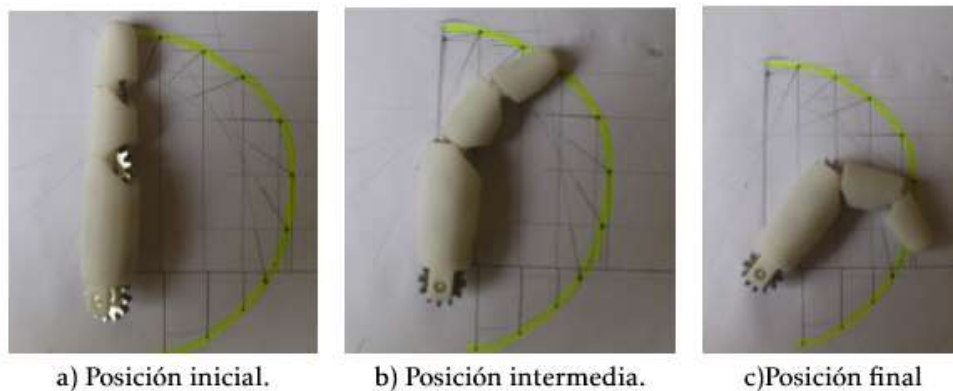


Figura A.1: Movimiento del dedo (Garibay, 2013).

Se muestra mediante la *tabla a2* las coordenadas de los puntos correspondientes a cada una de las 7 posiciones propuestas que forman parte de la trayectoria.

Tabla a2: Puntos de la trayectoria

Posición	Coordenada x [cm]	Coordenada y [cm]
1	1.7	9.7
2	3.5	9.1
3	5.1	8.1
4	6.6	6.2
5	7.1	4.0
6	6.9	1.3
7	6.1	-0.4

Es necesario obtener el conjunto de ángulos de cada una de las posiciones correspondientes al último eslabón del mecanismo, el cual representa el efector final. La forma de obtención de éste es a partir de la medición del ángulo que forma la falange distal con respecto a la horizontal, el procedimiento se observa mediante la *figura A.2*.

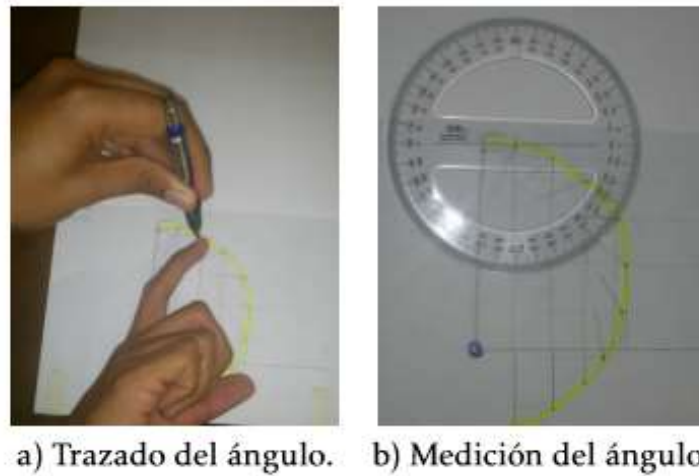


Figura A.2: Obtención del ángulo de la falange distal (Garibay, 2013).

Se muestra mediante la *tabla a3* los 7 valores de ángulos medidos.

Tabla a3: Ángulos de la falange distal

Ángulo	Valor
$\kappa_1$	234°
$\kappa_2$	220°
$\kappa_3$	180°
$\kappa_4$	170°
$\kappa_5$	160°
$\kappa_6$	150°
$\kappa_7$	140°

### A.3. Resultados del mecanismo original

La síntesis planteada se alimenta de datos propuestos y conocidos, tales como las coordenadas, ángulos del efector final y el conjunto de ecuación que conforman la síntesis cinemática. La síntesis de mecanismo se resuelve haciendo uso del método numérico conocido como Mínimos Cuadrados No Lineales (MCNL) empleando la función *find-minimum* que emplea gradientes conjugados y se encuentra disponible mediante el software Mathematica<sup>®</sup>.

Se declara como incógnita a la variable  $y_1$ , mientras que  $x_1$  permanece con valor constante, ambos representan los componentes del vector  $\mathbf{R}_{om}$ , donde  $\mathbf{R}_{om} = (X, Y, 0)$ . El resultado se muestra a continuación en la *tabla a4*.

Tabla a4 : Componentes del vector  $\mathbf{R}_{om}$

Componente	$X$	$Y$
Valor [cm]	0.000	-0.109



Se propusieron las denominaciones de número de dientes asociadas a cada uno de los engranes, éstas se encuentran en la *tabla a5*.

Tabla a5 :Número de dientes (*Garibay, 2013*)

Engrane	1	2	3	4	A	B	C	D
Número de dientes	24	24	26	26	24	24	26	26

En la *tabla a6* se puede apreciar las dimensiones correspondientes a los radios de engrane.

Tabla a6: Resultados (*Garibay, 2013*)

Engrane	1	2	3	4	A	B	C	D
Radio[cm]	0.8219	0.4257	0.8904	0.4612	0.8219	0.8219	0.4612	0.4612

Representación gráfica de la solución del mecanismo original y animación en Mathematica<sup>®</sup> (*Fig. A.3-A.4*).

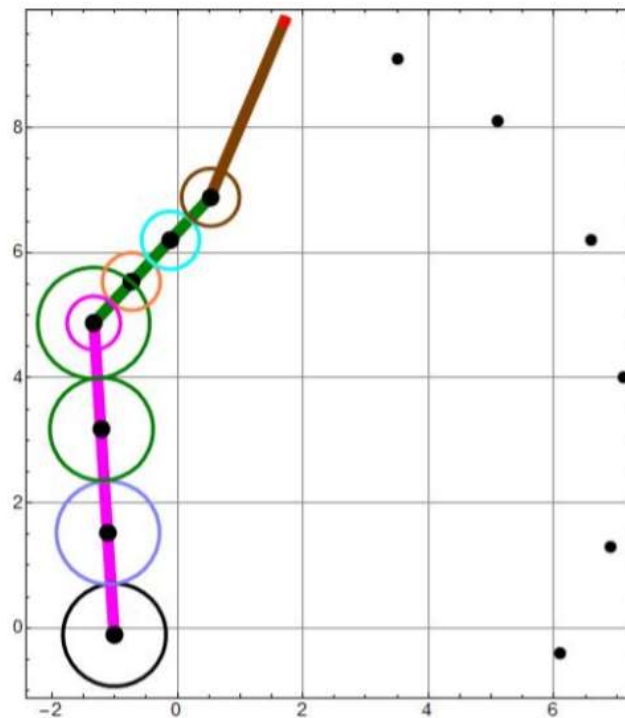


Figura A.3: Segunda propuesta (*Garibay, 2013*).

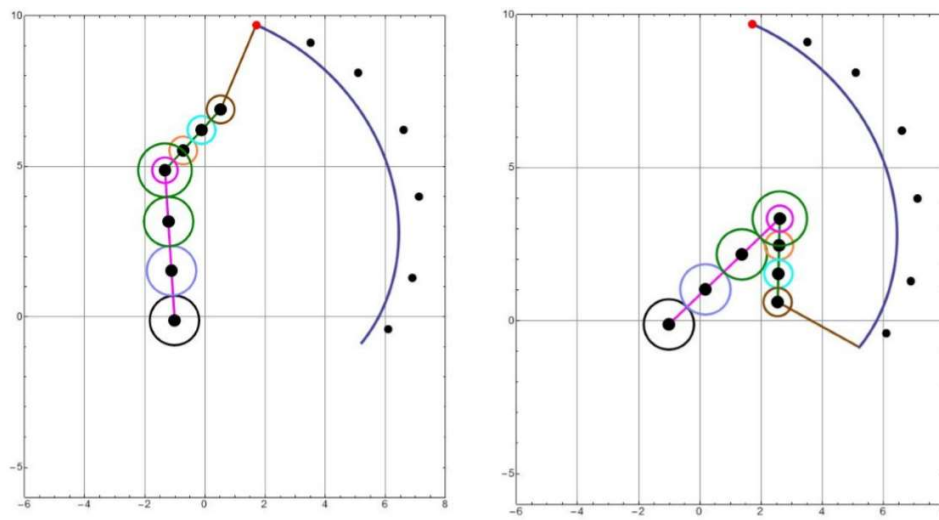


Figura A.4: Movimiento flexión-extensión de la segunda propuesta (Garibay, 2013).

## Apéndice B

# Análisis Estático de Diseño Original

### B.1. D.C.L. del mecanismo original

Se muestran a continuación la serie de diagramas de cuerpo libre asociados a cada cuerpo que compone el mecanismo hexacicloidal original, se denotan la serie de fuerzas y momentos presentes en cada uno (*Fig. A.5- A.6*).

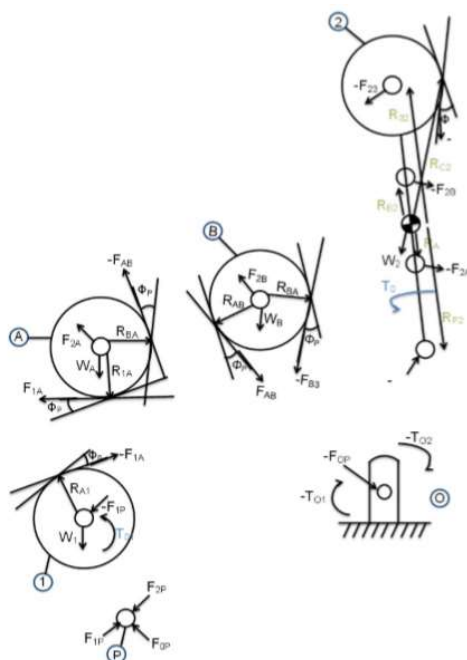


Figura A.5: Diagramas de cuerpo libre 1 del dedo medio (Garibay, 2013).

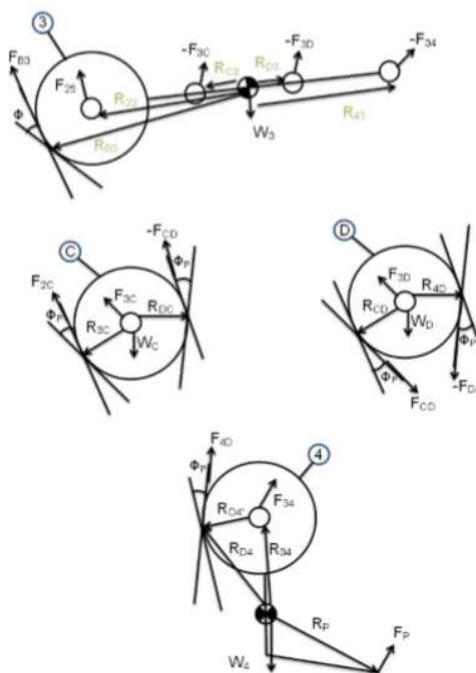


Figura A.6: Diagramas de cuerpo libre 2 del dedo medio (Garibay, 2013).

## B.2. Fuerzas y Momentos Externos del mecanismo original

Se muestra a partir de la siguiente gráfica el par de torsión máximo requerido para accionar el mecanismo a la entrada (*Fig.A.7*), siendo éste de una magnitud igual a  $3.0[N.m]$ . El par de entrada sigue la dirección mostrada en la *figura A.8*.

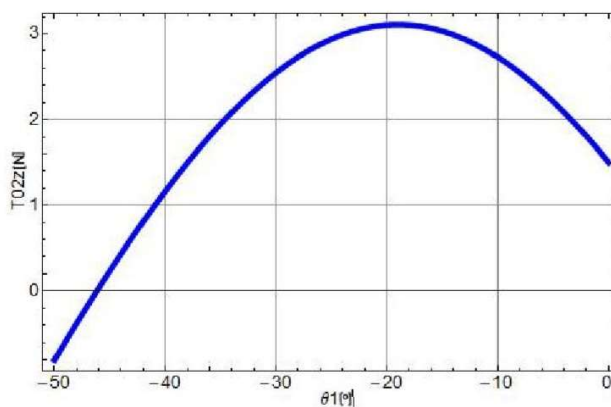


Figura A.7: Gráfica del torque requerido (Garibay, 2013).

Se muestra mediante la *figura A.8* las fuerzas y momentos externos que actúan sobre el mecanismo. La magnitud de la fuerza sobre la yema del dedo es de  $1.0[N]$  y el vector asociado actúa en dirección normal a la yema del dedo.



Figura A.8: Esquema de la fuerza del dedo y el par de torsión (Garibay, 2013).

# Referencias

- Adby, P. R., & Dempster, M. A. H. (1982), *Introduction to optimization methods*, London: Chapman and Hall.
- Arora, J.S. (2017), *Introduction to Optimum Design*, 4ta Ed., Academic Press, Iowa City, Iowa.
- Craig J. (2006), *Robótica*, 3ra Ed., Pearson Education, México, pp. 31-32.
- Erdman A.G., Sandor G.N. (1997), *Mechanism Design: Analysis and Synthesis*, vol. 1, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Garibay, E. (2013), Diseño de una Mano con un Mecanismo Hexacicloidal, Tesis, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México. URL: <http://132.248.52.100:8080/xmlui/handle/132.248.52.100/6470/>.
- Kaufman R.E., Sandor G.N. (1969), Bicycloidal Crank - A New Four-link Mechanism, *ASME Journal of Engineering for Industry*, vol. 91, no. B, pp 91-96.
- McGill D.J., King W.W. (1995), *Engineering Mechanics: An Introduction to Dynamics*, 3rd Ed., PWS Pub. Co, Boston, pp. 309-311.
- Norton R. L. (2013), *Diseño de Maquinaria: Síntesis y análisis de máquinas y mecanismos*, 5ta Ed., McGraw-Hill Education, pp. 391-392.
- Norton R. L. (2011), *Diseño de Máquinas: Un enfoque integrado*, 4ta Ed., Pearson Education, México, pp. 544-560.
- Suh, C.H., Radcliffe, C.W. (1983), *Kinematics and Mechanisms Design*, Robert E. Krieger Publishing Company, Malavar, Florida, pp. 433-436.