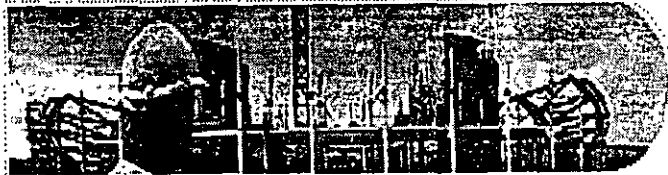




FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA



000

Ingeniería de Civil

# CURSOS ABIERTOS

## ANÁLISIS ESTRUCTURAL CA 467

TEMA

APUNTES GENERALES

**EXPOSITOR: ING. IGNACIO E. HERNÁNDEZ QUINTO**  
**DEL 27 DE JUNIO AL 01 DE JULIO DE 2005**  
**PALACIO DE MINERÍA**

# PROLOGO

Este trabajo se ha escrito de tal manera que sea accesible a cualquier persona que este familiarizada con la aplicación de la mecánica básica para el análisis estático de estructuras, temas que se estudian en los primeros cursos de la carrera de Ingeniero Civil.

Los temas que se presentan, muestran procedimientos que emplean las técnicas de álgebra matricial, y se escribió con la finalidad de servir como material de apoyo para los estudiantes que cursan la materia de Análisis Estructural III, en el 4o. año.

El trabajo fue desarrollado tomando como base el programa de estudios de la materia. Como el material es relativamente nuevo para los estudiantes de ingeniería, el autor ha tenido en mente desarrollar este material para que los alumnos cuenten con un texto que cubra ampliamente el método de las rigideces.

Cabe hacer notar, que existen varias razones por las que el análisis matricial de estructuras es importante para el análisis estructural. Una de las más importantes es que hace posible un acercamiento que es válido para estructuras de todos tipos y una segunda razón es que proporciona medios eficaces para describir los diferentes pasos en el análisis, de modo que estos pasos o etapas pueden ser programados más fácilmente en una computadora.

El uso de matrices es sencillo cuando se desarrollan cálculos con la ayuda de una computadora, ya que permite la manipulación de grandes grupos de números de un modo efectivo y sencillo. El alumno encontrará que los métodos presentados en este trabajo son altamente organizados y que los mismos procedimientos básicos pueden seguirse en el análisis de diferentes tipos de estructuras ya sean unidimensionales, bidimensionales o en el espacio.

Rafael Rojas Rojas

# CONTENIDO

Prólogo.....	i
<b>CAPITULO 1. INTRODUCCION AL ANALISIS ESTRUCTURAL</b>	
1.1 Introducción.....	1
1.2 Equilibrio, compatibilidad y relación entre fuerzas y desplazamientos .....	3
1.2.1 Equilibrio.....	4
1.2.2 Compatibilidad .....	5
1.2.3 Relación entre fuerzas y desplazamientos.....	6
1.3 Tipos de estructuras..	7
1.3.1 Armaduras.....	8
1.3.2 vigas.....	8
1.3.3 Marcos planos. ....	8
1.3.4 Reticula o emparrillado .....	9
1.3.5 Estructuras tridimensionales .....	10
1.4 Grado de hiperestaticidad .....	10
1.5 Grado de libertad.....	16
<b>CAPITULO 2. METODO DE LAS RIGIDECES</b>	
2.1 Sistemas de referencia.....	18
2.2 Determinación de la matriz de rigideces.....	22
2.2.1 Rigidez axial .....	24
2.2.2 Rigidez al corte .....	26
2.2.3 Matriz de rigideces .....	32
2.3 Rotación del sistema local al global .....	35
2.4 Acoplamiento de barras.....	39
2.4.1 Ejemplo. ....	42
2.5 Armaduras en el plano.....	43
2.5.1 Ejemplo .....	44
2.6 Armaduras en el espacio.....	51
2.6.1 Ejemplo.....	52

2.7	Vigas continuas.....	60
2.7.1	Ejemplo.....	60
2.8	Marcos planos.....	72
2.8.1	Ejemplos .....	74
2.9	Reticula o emparrillado.....	88
2.9.1	Ejemplo.....	90
2.10	Estructuras en el espacio.....	97

### **CAPITULO 3. MODIFICACION DE LA MATRIZ DE RIGIDECEES.**

3.1	Matriz de rigideces modificada.....	101
3.2	Condensación de los grados de libertad .....	104

### **CAPITULO 4. METODO DE LAS SUBESTRUCTURAS**

4.1	Formulación del método de las subestructuras.....	107
4.2	Armaduras .....	113
4.3	Marcos.....	114

### **CAPITULO 5. TEORIA DE ELASTICIDAD**

5.1	Esfuerzos.....	131
5.1.1	Esfuerzos en un punto .....	131
5.1.2	Esfuerzos en planos inclinados .....	134
5.2	Ecuación de equilibrio .....	136
5.3	Esfuerzos en planos perpendiculares .....	137
5.4	Esfuerzos en planos oblicuos.....	139
5.5	Variación del esfuerzo con la variación del elemento .....	140
5.6	Esfuerzos principales .....	144
5.7	Esfuerzos cortantes máximos .....	145
5.8	Deformaciones.....	146
5.9	Ecuación de continuidad.....	149
5.10	Relación esfuerzo-deformación.....	150

# INTRODUCCION AL ANALISIS ESTRUCTURAL 1

## 1.1 INTRODUCCION

El análisis estructural es un paso intermedio en el proceso a seguir para la construcción de cualquier obra civil y tiene como finalidad el determinar el comportamiento de la estructura que la soportará, es decir, los efectos producidos por las diferentes acciones que obrarán en la construcción. El comportamiento de la estructura se puede expresar a través de desplazamientos, reacciones y fuerzas internas (elementos mecánicos). A partir de estos últimos se define la resistencia que debe tener la estructura para soportar las cargas que obrarán sobre ésta y con los desplazamientos se revisarán las condiciones de servicio, para esto los desplazamientos actuantes serán menores o iguales que los permisibles establecidos por los reglamentos de construcción. Si esta condición no se cumple deberán cambiarse las dimensiones de la estructura y analizarla nuevamente. De lo anterior se observa que el análisis y el diseño de una estructura es un proceso iterativo y que el análisis estructural es una herramienta necesaria para diseñar una estructura y así poder construirla.

Por otro lado para poder realizar el análisis de una estructura, se debe tener bien definidas sus condiciones de frontera o condiciones de apoyo, ya que una estructura bajo las mismas condiciones de carga pero diferentes condiciones de apoyo tiene comportamiento diferente.

Un apoyo es la representación gráfica del número de reacciones necesarias en el punto donde se encuentra dicho apoyo, para establecer el diagrama de cuerpo libre en la estructura. Las diferentes condiciones de apoyo se obtienen a partir de la continuidad de los elementos o de la forma en que se conectan; por ejemplo un elemento ya sea de madera, concreto o acero se apoya en forma directa sobre otro elemento como se indica en la figura 1.1.a.

Se observa que los desplazamientos horizontal y angular pueden ser diferentes de cero, sin embargo en la dirección vertical el muro restringe el desplazamiento dando origen a una reacción vertical  $R_v$ . La idealización del apoyo de esta estructura se puede representar como se indica en la figura 1.1.b. Este apoyo se conoce como libre o directo y es la representación esquemática de una reacción.

Si la viga de la figura 1.1 se sujeta como se indica en la figura 1.2, el desplazamiento horizontal se restringe dando origen a una nueva reacción y su idealización se muestra en la figura 1.2.c. Este apoyo se conoce como articulación y es la representación esquemática de dos reacciones, una vertical y otra horizontal.

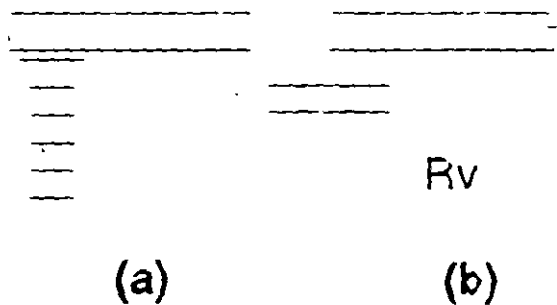


Figura 1.1

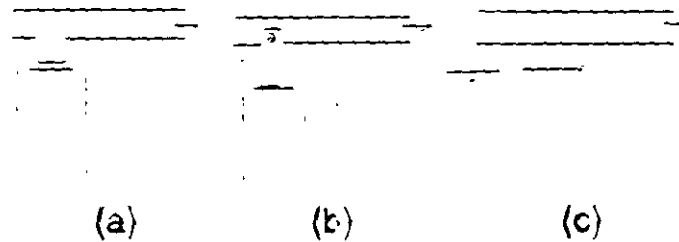


Figura 1.2

Si ese mismo elemento se conecta a otro de tal manera que el desplazamiento angular sea cero, además de los desplazamientos vertical y horizontal como se indica en la figura 1.3.a se da origen al apoyo que se conoce como empotramiento, el cual es la representación de tres reacciones como se muestra en la figura 1.3.b.

(a)

(b)

Figura 1.3

Finalmente si se conecta el elemento de la forma que se muestra en la figura 1.4 se obtiene el apoyo guiado, que es la representación esquemática de dos reacciones como se indica en las figuras 1.4.a y 1.4.b respectivamente.

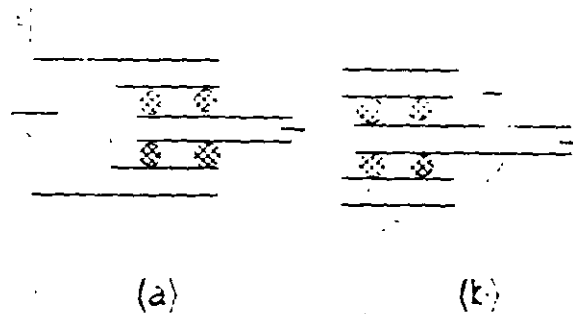


Figura 1.4

De los cuatro casos anteriores, se puede concluir que si hay desplazamiento en el apoyo no hay reacción y si hay reacción no hay desplazamiento.

## 1.2 EQUILIBRIO, COMPATIBILIDAD Y RELACION ENTRE FUERZAS Y DESPLAZAMIENTOS.

En la sección anterior se definió el objetivo del análisis como la determinación de los desplazamientos, reacciones y fuerzas internas bajo cualquier condición de carga. Sin importar el método utilizado para lograr este objetivo es necesario cumplir con las condiciones de equilibrio, compatibilidad y la relación entre fuerzas y desplazamientos.

### 1.2.1 EQUILIBRIO

La solución correcta de la estructura debe satisfacer las condiciones de equilibrio estático, no solo para la estructura completa, sino también para cualquier parte de ella tomada como un cuerpo libre.

En un espacio tridimensional si el vector fuerza resultante es igual a cero, también sus componentes deben ser igual a cero, por lo que se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad 1.1.a$$

En estas ecuaciones las expresiones  $\Sigma F_x$ ,  $\Sigma F_y$  y  $\Sigma F_z$  son las sumas algebraicas de las componentes en x, y & z respectivamente de todos los vectores fuerza que actúan en el cuerpo libre. Igualmente, si el vector momento resultante es igual a cero, las ecuaciones de momento del equilibrio estático son:

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad 1.1.b$$

donde  $\Sigma M_x$ ,  $\Sigma M_y$  &  $\Sigma M_z$  son las sumas algebraicas de los momentos respecto a los ejes x, y & z respectivamente, de todos los pares y fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre.

Las ecuaciones 1.1 representan las condiciones de equilibrio estático tridimensional. Si la estructura es plana y las cargas están en el plano que contiene a la estructura y los pares tienen sus vectores normales a ese plano, solo son útiles tres de las seis ecuaciones de equilibrio. Considerando que las fuerzas están en el plano x-y, evidentemente las ecuaciones  $\Sigma F_z = 0$ ,  $M_x = 0$  y  $\Sigma M_y = 0$  se satisfacen automáticamente. Las ecuaciones restantes  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$  y  $\Sigma M_z = 0$  son las ecuaciones de equilibrio estático que toda estructura en el plano x-y debe cumplir.

Las ecuaciones de equilibrio pueden aplicarse a cualquier estructura como cuerpo libre y si se cumplen en ésta, entonces deberán cumplirse también en cualquier punto, elemento, nodo o cualquier parte de ella tomada como cuerpo libre como ya se mencionó anteriormente.



## 1.2.2 COMPATIBILIDAD

En las estructuras donde el número de las incógnitas es igual al número de ecuaciones de equilibrio estático, se puede determinar el valor de las reacciones y de las fuerzas internas que estén presentes en el sistema estructural para lograr el equilibrio del mismo. Sin embargo hay estructuras que tienen más incógnitas que ecuaciones de equilibrio estático, por lo tanto se ve la necesidad de plantear ecuaciones adicionales para poder determinar todas las incógnitas. Estas ecuaciones se obtienen a partir de las condiciones de compatibilidad. Estas condiciones se refieren a la continuidad de los desplazamientos a lo largo de toda la estructura, por lo que, también reciben el nombre de condiciones de continuidad. Usualmente estas condiciones son de interés en los nodos de la estructura, por lo que se define la compatibilidad como: el desplazamiento de un nodo debe ser igual al desplazamiento de los extremos de las barras que concurren al nodo.

Para ilustrar esta condición, considerese la viga mostrada en la figura 1.5, la cual tiene tres reacciones y solamente se pueden utilizar dos ecuaciones de equilibrio  $F_y = 0$  y  $\Sigma M_z = 0$ , por lo que hay que establecer una tercera ecuación.

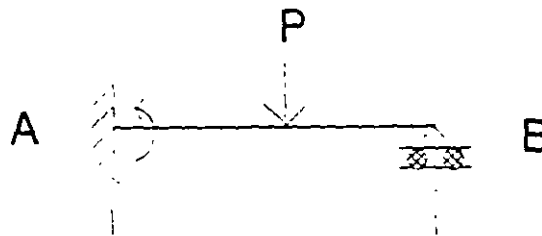
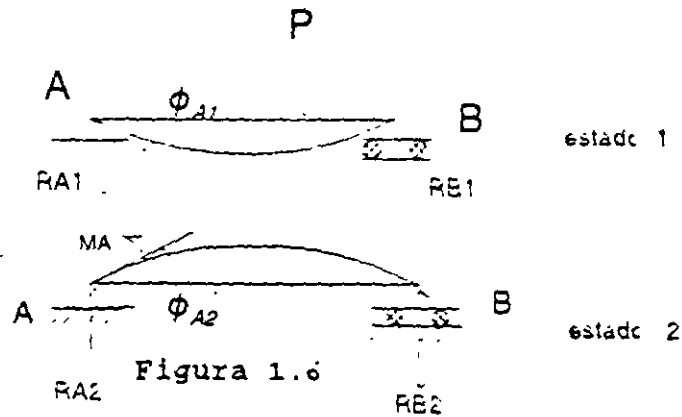


Figura 1.5

Utilizando el principio de superposición de causas y efectos ( la respuesta de una estructura, debida a un número de cargas aplicadas simultáneamente, se obtiene mediante la suma de las respuestas de las cargas individuales, aplicando por separado cada una de ellas ) la viga de la figura 1.5 se puede descomponer en dos estados como se muestra en la figura 1.6, de tal manera que si sumamos el estado 1 con el estado 2 se obtiene la viga inicial.



Se observa que en el extremo A de la viga de la figura 1.5 el desplazamiento angular vale cero,

$$\phi_A = 0$$

y de la figura 1.6 para satisfacer esta condición de compatibilidad,

$$A_1 + \phi_{A2} = 0$$

la cual es la tercera ecuación necesaria para determinar las tres reacciones de la viga

### 1.2.3 RELACION ENTRE FUERZAS Y DESPLAZAMIENTOS

Para definir la relación entre fuerzas y desplazamientos de cualquier sistema estructural, es necesario utilizar las leyes constitutivas ( propiedades ) de un material dado y los conceptos de equilibrio y compatibilidad. Hay dos formas básicas para expresar estas relaciones. La primer relación fuerza-desplazamiento de la forma:

$$P = K D$$

donde P es la fuerza, D los desplazamientos y K la rigidez de la estructura. La rigidez tiene unidades de fuerza por longitud y puede definirse como la fuerza necesaria para mantener el elemento en una unidad de desplazamiento. Esta relación es la base para el método de las rigideces, la segunda relación se puede expresar:

$$D = F P$$

en este caso  $F$  define la flexibilidad del elemento estructural y está dada en unidades de longitud por fuerza. Puede considerarse que un coeficiente de flexibilidad es el desplazamiento generado por una carga unitaria. Esta relación es la base para el método de las fuerzas.

### 1.3 TIPOS DE ESTRUCTURAS

Las estructuras de acuerdo a su comportamiento se pueden clasificar en dos grandes grupos las estables y las inestables. Estas últimas son aquellas que no son capaces de soportar un sistema general de cargas a menos de que éste sea controlado. Las estructuras estables son aquellas capaces de soportar un sistema general de cargas cuyos valores están limitados a que no ocurra una falla por deformación excesiva y a su vez se pueden subdividir en **isostáticas** e **hiperestáticas**. Las isostáticas son aquellas que se pueden resolver con las ecuaciones de equilibrio, es decir el número de incógnitas (reacciones y fuerzas internas) es igual al número de ecuaciones de equilibrio que se pueden utilizar. Por el contrario si no se pueden resolver con las ecuaciones de equilibrio se dice que son hiperestáticas. También se puede hacer la clasificación de las estructuras en torno a los elementos mecánicos que estarán presentes en las mismas

Para determinar los elementos mecánicos que estarán presentes en una estructura sujeta a un sistema general de cargas, se parte de considerar que la estructura está en equilibrio y como consecuencia cualquier punto o fracción de la misma también debe estar en equilibrio.

#### 1.3.1 ARMADURAS

Si se traza una sección a-a en la armadura mostrada en la figura 1.7.a, se observará que para lograr el equilibrio de la porción de la estructura comprendida entre la sección a-a y el apoyo A se requiere de dos fuerzas normales  $N_1$  y  $N_2$  a la sección de las barras 1 y 2 respectivamente, figura 1.7.b, para cualquier otra sección resultará una situación similar, ya que las fuerzas necesarias para lograr el equilibrio serán normales

a la sección de las barras, a estas fuerzas también se les conoce como fuerzas axiales

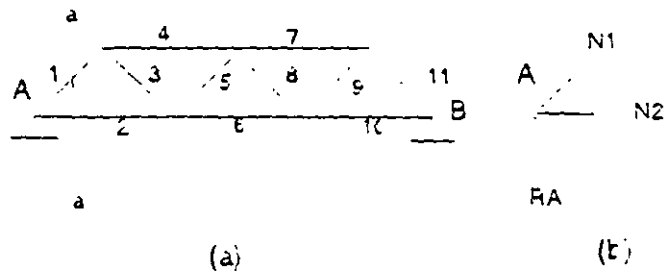


Figura 1.7

### 1.3.2 VIGAS

Si se traza la sección a-a en la viga mostrada en la figura 1.8.a, para lograr el equilibrio vertical se requiere una fuerza  $V$  que tendrá la misma magnitud pero sentido contrario a la reacción, a esta fuerza se le llama fuerza cortante, estas dos fuerzas producen un par que será contrarrestado por un momento  $M$ , que genere otro par de igual magnitud pero de sentido contrario, figura 1.8.b, así se concluye que la viga estará sujeta a fuerza cortante y momento flexionante.

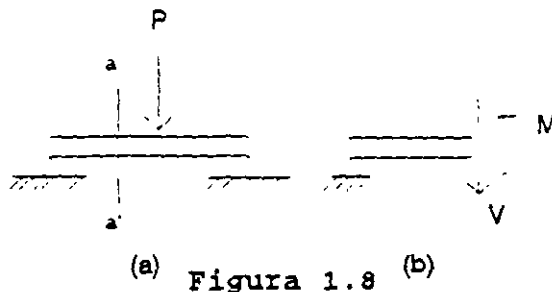


Figura 1.8

### 1.3.3 MARCOS PLANOS

Si se analiza la sección a-a del marco mostrado en la figura 1.9.a se requiere una fuerza normal  $N$  a la sección para equilibrar la reacción vertical, una fuerza cortante  $V$  para equilibrar la reacción horizontal, estas dos fuerzas ( $R_h$  y  $V$ ) forman un par que

será equilibrado por un momento  $M$  que genere otro par de igual magnitud pero sentido contrario, así los elementos mecánicos que estarán presentes en un marco serán: fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 1.9 b.

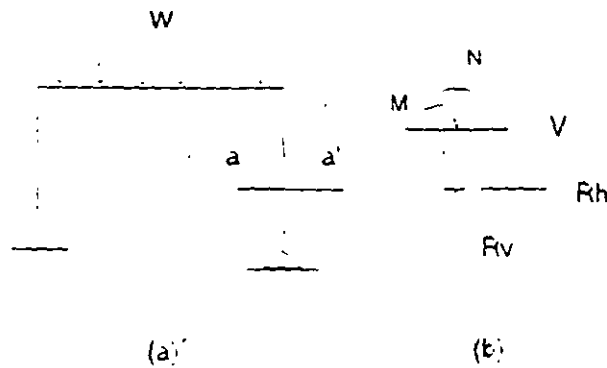


Figura 1.9

### 1.3.4 RETICULA O EMPARRILLADO

Una retícula es una estructura en la cual la carga se aplica perpendicular al plano que contiene la estructura, si se analiza la sección  $a-a$  de la retícula mostrada en la figura 1.10.a se observa que los elementos mecánicos necesarios para planterar el diagrama de cuerpo libre de la parte de la estructura comprendida entre la sección y el apoyo A son fuerza cortante  $V_y$ , momento flexionante  $M_z$  y momento torsionante  $M_x$  como se indica en la figura 1.10.b

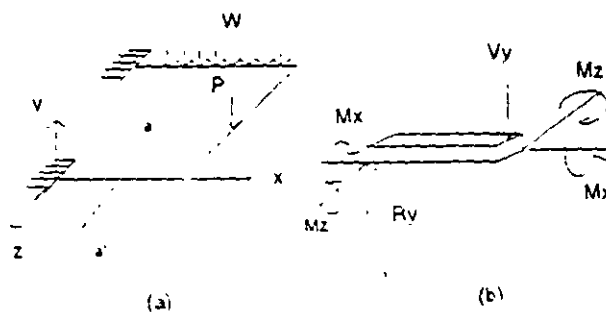


Figura 1.10

### 1.3.5 ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES

Estas estructuras también se conocen como marcos tridimensionales y para su análisis es necesario referirlos a un sistema coordenado tridimensional. Si se analiza la sección a-a del marco mostrado en la figura 1.11 a se observa que para lograr el equilibrio de la porción mostrada en la figura 1.11.b se requiere una fuerza axial  $N$ , dos fuerzas cortantes una en la dirección " y " y la otra en la dirección " z " que denominaremos como  $V_y$  y  $V_z$  respectivamente. en un momento torsionante alrededor del eje longitudinal de la barra  $M_x$  y dos momentos flexionantes uno alrededor del eje " y " y otro alrededor del eje " z "  $M_y$  y  $M_z$  respectivamente.

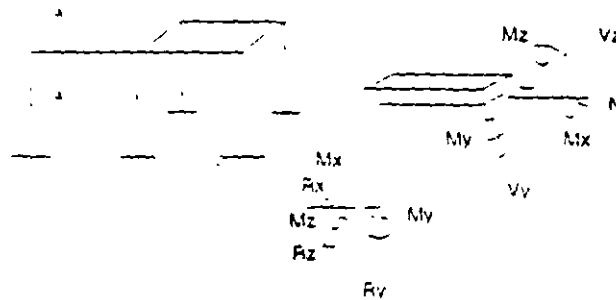


Figura 1.11

### 1.4. GRADO DE HIPERESTATICIDAD

Las estructuras hiperestáticas ( estáticamente indeterminadas ) pueden ser externamente y/o internamente indeterminadas. Si el número de reacciones excede el número de ecuaciones de equilibrio disponibles, se dice que la estructura es externamente indeterminada. Si algunas fuerzas internas (elementos mecánicos) no pueden determinarse por la estática a pesar de que todas las reacciones sean conocidas, la estructura se clasifica como internamente indeterminada. Para ilustrar lo anterior considere la viga de la figura 1.12 la cual tiene 5 reacciones y solo se tienen disponibles 3 ecuaciones de equilibrio (  $\Sigma F_x=0$ ,  $\Sigma F_y = 0$  y  $\Sigma M_z = 0$  ), lo cual da un número mayor de reacciones (incógnitas ) por lo tanto la viga se clasifica como externamente indeterminada.

Figura 1.12

La armadura de la figura 1.13 tiene 3 reacciones para cualquier condición de carga y se dispone de tres ecuaciones de equilibrio ( $\Sigma F_x$ ,  $\Sigma F_y$  y  $\Sigma M_z$ ). Como el número de reacciones es igual al número de ecuaciones de equilibrio, la armadura es isostática externamente, sin embargo las fuerzas en las barras no se pueden determinar con las ecuaciones de equilibrio. Si se retira o se corta una de las barras diagonales como se muestra en la figura 1.13.b, las fuerzas en las otras barras ya se pueden determinar con las ecuaciones de equilibrio, por lo que las fuerzas internas en la armadura exceden a las ecuaciones de equilibrio en una fuerza, lo cual indica que la armadura es hiperestática internamente.

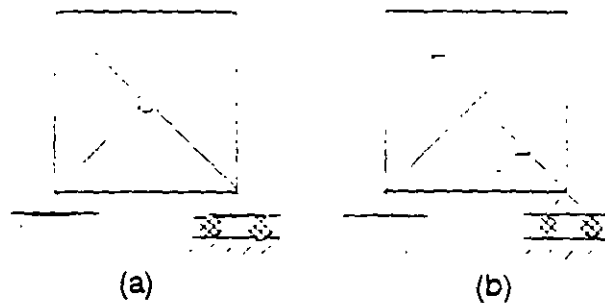


Figura 1.13

El marco de la figura 1.14 tiene seis reacciones y se tienen disponibles tres ecuaciones de equilibrio ( $\Sigma F_x$ ,  $\Sigma F_y$  y  $\Sigma M_z$ ). El número de reacciones es mayor al número de ecuaciones de equilibrio, lo cual hace que el marco sea hiperestático externamente. Las fuerzas internas (N, V y M) en todas las barras no se pueden determinar con las ecuaciones de equilibrio. Si se retira o se corta la barra horizontal inferior, como se muestra en la figura 1.14.b, las fuerzas internas en las otras barras ya se pueden calcular con las ecuaciones de la estática, por lo que las fuerzas internas del marco exceden en tres a las ecuaciones de equilibrio, lo cual

implica que el marco es hiperestático internamente.

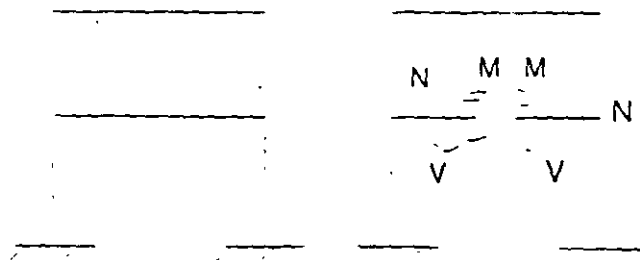


Figura 1.14 a y b

De lo anterior el grado de hiperestaticidad de una estructura se define como el número de reacciones y de fuerzas internas que exceden al número de ecuaciones de equilibrio estático. así:

$$\begin{aligned}
 GH &= GH_i + GH_e \\
 GH_i &= N.F.I. - N.E.E. \\
 GH_e &= N.R. - N.E.E.
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

donde:

$GH$ ,  $GH_i$  y  $GH_e$ : son el grado de hiperestaticidad total, interno y externo respectivamente.

N.F.I. es el número de fuerzas internas (elementos mecánicos); N.R. es el número de reacciones y N.E.E. es el número de ecuaciones de equilibrio estático disponibles.

El grado de hiperestaticidad puede ser negativo, igual a cero o mayor que cero, estos valores representan:

- $GH > 0$  estructura hiperestática
- $GH = 0$  estructura isostática
- $GH < 0$  estructura inestable

Para ilustrar la aplicaciones de la expresión (1.1) se determinará el grado de hiperestaticidad para las estructuras de las figuras 1.15 a la 1.19



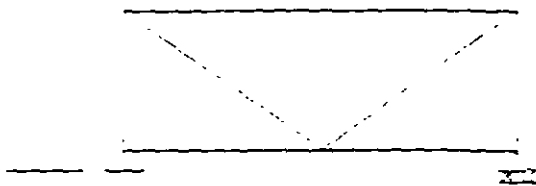


Figura 1.15

$$GHe = 3 - 3 = 0$$

$$GHi = 0$$

$$GH = 0$$

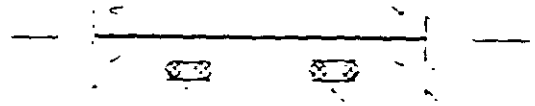


Figura 1.16

$$GH = 8 - 3 = 5$$

$$GHi = 3 - 3 = 0$$

$$GH = 5$$



Figura 1.17

$$GHe = 6 - 3 =$$

$$GHi = 3 - 3 = 0$$

$$GH = 3$$

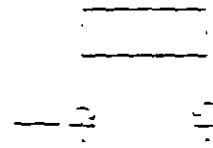


Figura 1.18

$$GHe = 6 - 3 = 3$$

$$GHi = 6 - 3 = 3$$

$$GH = 6$$

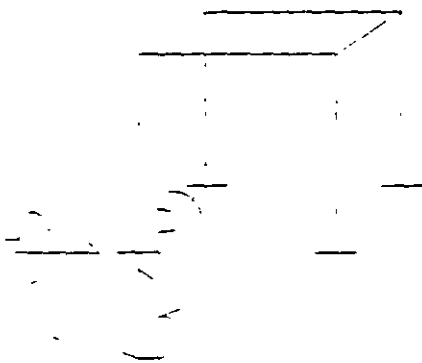


Figura 1.19

$$GHe = 6 - 3 = 3$$

$$GHi = 12 - 6 = 6$$

$$GH = 9$$

En las estructuras de la 1.15 a la 1.19 se determinó el grado de hiperestaticidad por inspección, es decir, estableciendo el número de reacciones, fuerzas internas y el número de ecuaciones de equilibrio estático que se pueden plantear en una estructura determinada. Para ciertas estructuras, especialmente para aquellas que tienen un gran número de barras, es difícil aplicar este enfoque, por lo que se recomienda utilizar la ecuación (1.2) que resulta de hacer un planteamiento formal.

Considérese una estructura cualquiera con NB barras, NN nodos y NR reacciones. Las incógnitas son los elementos mecánicos EM y las reacciones NR en cada barra y apoyos respectivamente, es decir:

$$I = NEM * NB + NR$$

En cada nodo se pueden plantear N ecuaciones de equilibrio estático NEE, así las ecuaciones que se generan en la estructura son:

$$E = NEE * NN$$

si la estructura es isostática, el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas

$$NEM * NB + NR = NEE * NN$$

por lo que el grado de hiperestaticidad es el número de incógnitas, menos el número de ecuaciones

$$GH = NEM * NB + NR - NEE * NN \quad (1.2)$$

donde:

NEM: número de elementos mecánicos en las barras de la estructura en estudio.

NEM =1 en armaduras solo hay fuerza normal

NEM =2 en vigas cuando solo exista fuerza cortante y momento flexionante

NEM =3 en vigas y marcos en el plano por presentarse fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante.

NEM =3 en retículas o parrillas se tiene presente fuerza cortante, momento torsionante y momento flexionante.

NEM =6 en marcos en el espacio por estar presente los seis elementos mecánicos (N, Vy, Vz, Mx, My, y Mz)

NN. número de nodos

NR: número de reacciones

NB: número de barras

NEE: número de ecuaciones de equilibrio por nodo

NEE = 2 armaduras en el plano

NEE = 3 armaduras en el espacio

NEE = 2 vigas con fuerza cortante y momento flexionante

NEE = 3 vigas y marcos con fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante.

NEE = 3 retículas o parrillas

NEE = 6 marcos en el espacio.

El uso de la ecuación (1.2) se ilustra con la aplicación de las estructuras de las figuras 1.15 a 1.19

Para la estructura de la figura 1.15 por ser armadura se tiene solo un elemento mecánico por barra que es la fuerza normal, por lo que  $NEM = 1$ , nueve barras  $NB = 9$ , tres reacciones  $NR = 3$ . por nodos se pueden plantear dos ecuaciones de equilibrio  $\Sigma F_x = 0$  y  $\Sigma F_y = 0$  por lo tanto  $NEE = 2$  y por último tiene seis nodos incluyendo los apoyos  $NN = 6$ , sustituyendo en la ecuación (1.2).

$$GH = 1 * 9 + 3 - 2 * 6 = 0$$

Para la viga en la figura 1.16 los elementos mecánicos por barra son tres  $NEM = 3$ , el número de reacciones es 8  $NR = 8$ , el número de ecuaciones que se pueden plantear son tres ( $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$  &  $M_z = 0$ )  $NEE = 3$  y tiene cuatro nodos  $NN = 4$  que aplicando la ecuación (1.2) resulta:

$$GH = 3 * 3 + 8 - 3 * 4 = 5$$

En el marco de la figura 1.17 se tiene  $NEM = 3$ ,  $NB = 3$ ,  $NR = 6$ ,  $NEE = 3$  y  $NN = 4$ .

$$GH = 3 * 3 + 6 - 3 * 4 = 3$$

Para el marco de la figura 1.18 se tiene  $NEM = 3$ ,  $NB = 6$ ,  $NR = 6$ ,  $NEE = 3$  y  $NN = 6$ , así:

$$GH = 3 * 6 + 6 - 3 * 6 = 6$$

Finalmente para el marco de la figura 1.19 se tiene  $NEM = 6, NB = 8, NR = 24$  y  $NN = 8$ , así:

$$GH = 6 * 8 + 24 - 8 * 6 = 24$$

que comparando los resultados se observa que son los mismos.

### 1.5 GRADO DE LIBERTAD ( INDETERMINACION CINEMATICA )

El grado de libertad está relacionado con los desplazamientos desconocidos en la estructura: como máximo un nodo puede tener seis desplazamientos desconocidos ( 3 lineales y 3 angulares ). El grado de libertad se define como el mínimo número de desplazamientos necesarios para definir la configuración deformada de la estructura. Si se consideran los desplazamientos de los nodos únicamente, el grado de libertad se puede definir como el número posible de desplazamientos de una estructura y se puede determinar a partir de la siguiente expresión

$$GL = NN * DN - NDR \quad ( 1.3 )$$

donde:

GL : grado de libertad

NN : número de nodos incluyendo los de frontera

DN : número de desplazamientos por nodo

NDR: número de desplazamientos restringidos

La expresión anterior se puede leer como: el grado de libertad es igual al número de nodos incluyendo los de frontera por el número de movimientos posibles en cada nodo menos los desplazamientos restringidos.

La expresión ( 1.3 ) también se ilustra aplicándola a las estructuras de las figuras 1.15 a 1.19.

La armadura de la figura 1.5 tiene 6 nodos  $NN = 6$ , dos desplazamientos por nodo  $DN = 2$  y tres reacciones  $NR = 3$ , así:

$$GL = 6 * 2 - 3 = 9$$

La viga de la figura 1.16 tiene cuatro nodos  $NN = 4$ , tres desplazamientos por nodo dos lineales ( horizontal y vertical ) y uno angular  $DN = 3$  y ocho reacciones  $NR = 8$ , así:

$$GL = 4 * 3 - 8 = 4$$

Para el marco de la figura 1.17,  $NN = 4$ ,  $ND = 3$  y  $NR = 6$ , así:

$$GL = 4 * 3 - 6 = 6$$

Para el marco de la figura 1.18,  $NN = 6$ ,  $ND = 3$  y  $NR = 6$ , así:

$$GL = 6 * 3 - 6 = 12$$

Y finalmente para el marco de la figura 1.19 se tiene  $NN = 8$ ,  $ND = 6$  y  $NR = 24$ , así:

$$GL = 8 * 6 - 6 - 24 = 24$$

El grado de hiperestaticidad está relacionado con el método de las flexibilidades o de las fuerzas y nos indica el número de incógnitas (elementos mecánicos y reacciones) que exceden las ecuaciones de equilibrio estático y con esto el número de ecuaciones que hay que plantear adicionalmente a las de equilibrio estático, para poder analizar la estructura. Y el grado de libertad esta relacionado con el método de las rigideces y nos indica el número de desplazamientos desconocidos que tenemos en dicha estructura y así plantear las ecuaciones necesarias para conocerlos. y a partir de estos determinar los elementos mecánicos.

## METODO DE LAS RIGIDECES

## 2

Es un método de análisis general para estructuras que se puedan modelar a base de elementos barra, como es el caso de vigas, armaduras en el plano, armaduras en el espacio, marcos planos, retículas y estructuras en el espacio.

Vale la pena mencionar que es el método más adecuado para su programación, y todos los paquetes formales para el análisis estructural en computadora lo utilizan.

En términos generales, el método de las rigideces consiste en establecer a través del equilibrio y la compatibilidad la relación que hay entre las cargas y los desplazamientos que estas generan en la estructura, a partir de dicha relación se pueden conocer los desplazamientos en los nodos de la estructura y a partir de estos los elementos mecánicos en cada una de las barras que forman la estructura.

Como se puede observar para conocer los elementos mecánicos en las barras que forman la estructura, hay que conocer primero los desplazamientos de los nodos de la misma, razón por la cual también se le conoce como el método de los desplazamientos.

### **2.1 SISTEMAS DE REFERENCIA**

En general; se tienen dos sistemas de referencia, uno llamado local  $(x,y,z)$  para poder hablar de cada elemento que forma parte de un sistema estructural y otro llamado sistema global  $(x ,y .z )$ , que será el que se utilice para hablar en su totalidad de todo el sistema estructural.

Es importante señalar que en el sistema local, el eje  $x$  deberá coincidir con el eje longitudinal de la barra y dependiendo de esto los otros dos ejes se establecerán

considerando un sistema coordenado derecho.

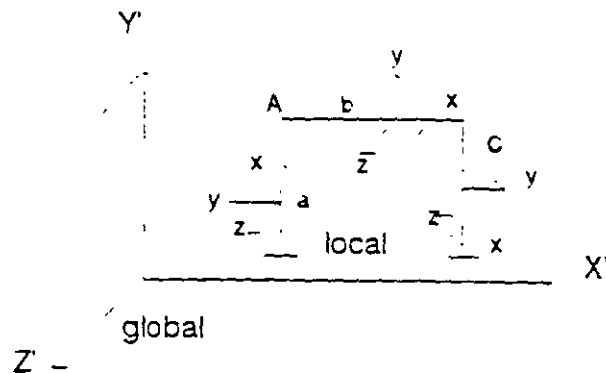


Figura 2.1

Considérese una barra cualquiera a la cual se le indica con el número uno el extremo donde inicia y con el número dos donde termina como se muestra en la figura 2.2

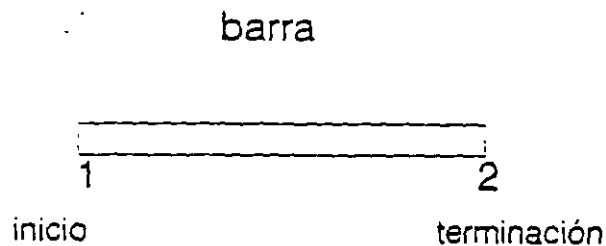


Figura 2.2

Sin embargo cuando varias barras concurren en un mismo nodo no es conveniente escribir todos los números que indiquen inicio y terminación de barra, lo que se hace es indicarlos a través de una flecha, el extremo donde inicia la barra (extremo 1) coincide con el inicio de la flecha y el extremo donde termina la barra (extremo 2) coincidirá con la terminación de la flecha, figura 2.3.

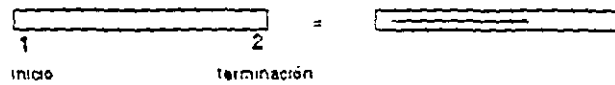


Figura 2.3

Para la aplicación del método se parte de que toda estructura debe cumplir con las condiciones de equilibrio y de compatibilidad o continuidad. Para ilustrar dichas condiciones, considérese un nodo "i" de una estructura cualquiera al que concurren varias barras y se aplica un vector de cargas " $P_i$ ", como se indica en la figura 2.4

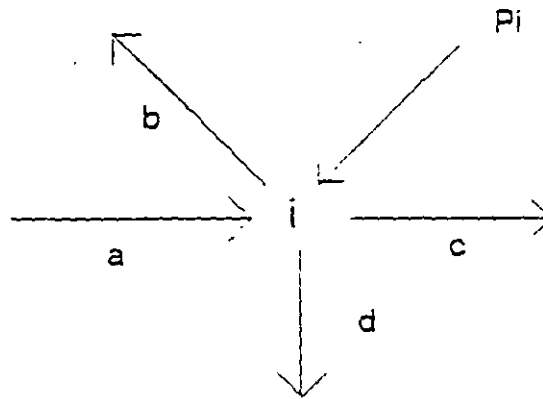


Figura 2.4

Por equilibrio:

$$\bar{P}_i = \bar{P}_{2a} + \bar{P}_{1b} + \bar{P}_{1c} + \bar{P}_{1d}$$

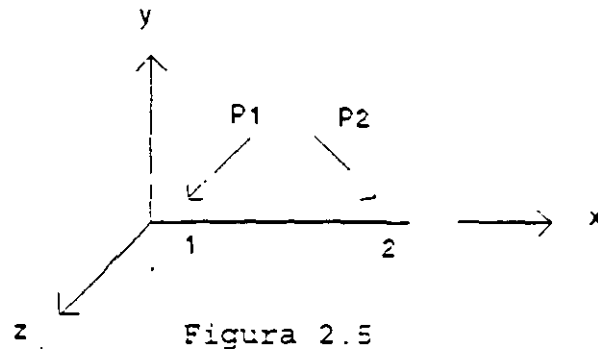
por compatibilidad:

$$\bar{d}_i = \bar{d}_{2a} + \bar{d}_{1b} + \bar{d}_{1c} + \bar{d}_{1d}$$



Esta última condición indica que el vector desplazamiento en el extremo de las barras que concurren a un nodo debe ser igual al vector desplazamiento de dicho nodo.

Por otro lado considérese una barra en el sistema local tridimensional y que puede estar sujeta a los vectores de cargas  $\bar{P}_1$  y  $\bar{P}_2$  en el extremo 1 y 2 respectivamente como se indica en la figura 2.5



Estos sin importar su magnitud y dirección, generan los vectores de desplazamiento  $\bar{d}_1$  y  $\bar{d}_2$  respectivamente.

Acoplado los vectores de cargas y desplazamiento en forma matricial, se puede establecer la relación entre estos vectores a través de una matriz de coeficientes que se define como la matriz de rigidez de la barra así:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{bmatrix}$$

En forma condensada se puede escribir:

$$\{ \bar{P} \} = \{ K \} \{ \bar{D} \}$$

Que es la ecuación fuerza-desplazamiento de un elemento barra en el sistema local.

## 2.2 DETERMINACION DE LA MATRIZ DE RIGIDECES

La rigidez de un elemento estructural se entiende comúnmente como la magnitud de la fuerza requerida para producir un desplazamiento unitario. Para ser más específicos, la palabra desplazamiento en el concepto anterior, deberá especificarse en detalle mencionando su carácter ( lineal o angular ) y su localización, como cada elemento tiene dos extremos, la palabra desplazamiento se interpreta como desplazamiento generalizado en los extremos de un elemento. En el sistema coordenado tridimensional el vector que representa el desplazamiento en un punto tiene seis componentes, tres lineales y, tres angulares, como se indica en la figura 2.6

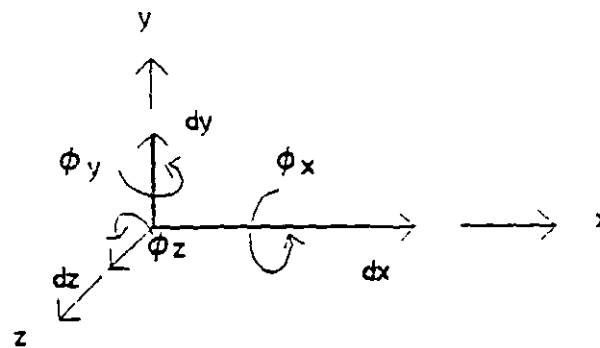


Figura 2.6

Al igual que el desplazamiento la fuerza debe de entenderse como una fuerza generalizada que en el sistema coordenado tiene seis componentes como se indica en la figura 2.7

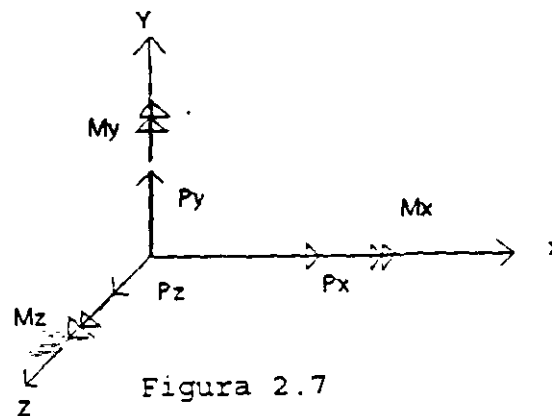


Figura 2.7

Representando en forma matricial al desplazamiento y la fuerza generalizados:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix}$$

Así la rigidez será la fuerza generalizada que produce un desplazamiento unitario.

De acuerdo a la fuerza generalizada se tienen tantos tipos de rigideces como elementos mecánicos, es decir, rigidez axial, al corte, a la flexión y a la torsión.

Para facilitar la determinación de las rigideces se considerará un elemento empotrado al cual se le inducirán desplazamientos (lineales o angulares) unitarios. Se le llamará rigidez de un elemento empotrado a las acciones ejercidas sobre este elemento debido a las restricciones impuestas al inducir el desplazamiento unitario.

Estos desplazamientos se inducirán de uno en uno y se supondrán positivos respecto a los ejes de referencia.

Las restricciones y los desplazamientos asociados con el sistema de referencia x, y, & z, para deducir las rigideces del elemento se indican en la figura 2.8.a y 2.8.b respectivamente.

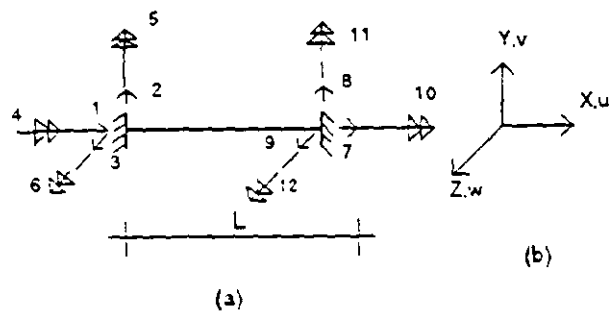


Figura 2.8

En la figura las flechas con una sola punta denotan traslación y las flechas con doble punta indican rotación. En el extremo 1 las traslaciones son numeradas 1, 2 y 3 y las rotaciones como 4, 5 y 6. Similarmente en el extremo 2 de la barra, el 7, 8 y 9 son traslaciones y 10, 11 y 12 son rotaciones. En todos los casos los desplazamientos se toman en el orden x, y & z respectivamente.

La rigideces se determinan a partir de la relación que existe entre los desplazamientos y las fuerzas generalizadas, esta relación de acuerdo a la resistencia de materiales esta dada por las ecuaciones de la 2.1.a a la 2.1.f

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_x}{EA} \quad (2.1.a)$$

$$\frac{d^2 v_b}{dx^2} = - \frac{M_z}{EI_z} \quad (2.1.b)$$

$$\frac{dv_s}{dx} = \frac{f_{ty} V_y}{AG} \quad (2.1.c)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{M_x}{GJ_m} \quad (2.1.d)$$

$$\frac{d^2 w_b}{dx^2} = - \frac{M_y}{EI_y} \quad (2.1.e)$$

$$\frac{dw_s}{dx} = - \frac{f_{tz} V_z}{AG} \quad (2.1.f)$$

### 2.2.1 RIGIDEZ AXIAL

Se aplica un desplazamiento unitario en el extremo 1 dirección "x" como se indica en la figura 2.9

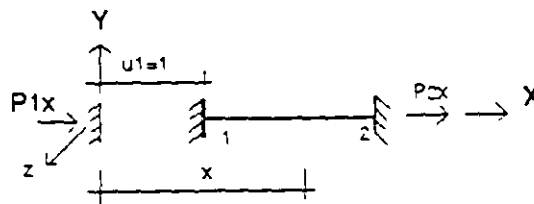


Figura 2.9

de la figura 2.9 se tiene que:

$$N_x = -P_{1x} \quad (2.2)$$

sustituyendo la ecuación (2.2) en la ecuación (2.1.a)

$$\frac{du}{dx} = - \frac{P_{1x}}{EA}$$

integrando ambos miembros de la ecuación resulta:

$$U = - \frac{P_{1x}}{EA} X + C_1$$

aplicando las condiciones de frontera: si  $x=0$ ,  $U_{x=0}=1$ , de donde  $C_1=1$ , si  $x=L$ ,  $U_{x=L}=0$ , de donde:

$$0 = - \frac{P_{1x} L}{EA} - 1$$

$$P_{1x} = \frac{EA}{L}$$

Por equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$P_{1x} + P_{2x} = 0$$

$$P_{2x} = - \frac{EA}{L}$$

En la figura 2.9 las acciones restringidas  $P_{1x}$  y  $P_{2x}$  surgen al aplicar el desplazamiento en el extremo uno del elemento en la dirección positiva del eje  $x$ . Este desplazamiento causa una fuerza de compresión en la barra. En el extremo 1 de la barra esta fuerza es equilibrada por la acción restringida  $EA/L$  en la dirección positiva de  $x$  y en el extremo 2 de la barra la acción restringida tiene el mismo valor pero en la dirección negativa de  $x$ .

## 2.2.2 RIGIDEZ AL CORTE

Se aplica un desplazamiento unitario en el extremo 1 dirección "y" como se indica en la figura 2.10

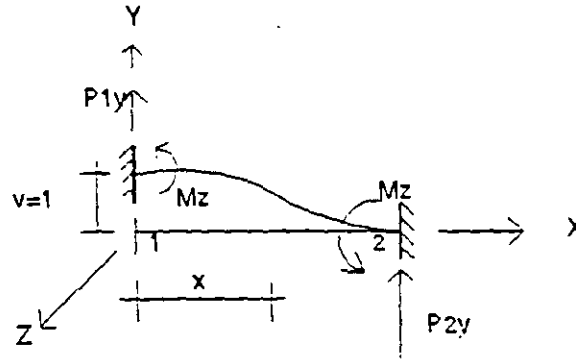


Figura 2.10

de la figura 2.10 se tiene:

$$V_y = -P_{1y}$$

$$M_z = M_{1z} - P_{1y} X$$

sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación 2.1.b

$$\frac{dv_s}{dx} = -f_{ty} \frac{P_{1y}}{AG} \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2 v_b}{dx^2} = - (M_{1z} - P_{1y} X) \frac{1}{EI_z} \quad (2.4)$$

integrando la ecuación ( 2.4 )

$$\frac{dv_b}{dx} = + \frac{P_{1y} X^2}{2EI_z} - \frac{M_{1z} X}{EI_z} + C_1 \quad (2.5)$$

aplicando las condiciones de frontera: en  $x=0$ ,  $\frac{dv_b}{dx}=0$ , de donde  $C_1=0$ ; si  $x=L$ ,  $\frac{dv_b}{dx}=0$ , de donde:

$$0 = \frac{P_{1y} L^2}{2EI_z} - \frac{M_{1z} L}{EI_z}$$

$$M_{1z} = \frac{P_{1y} L}{2} \quad (2.6)$$

sustituyendo en la ecuación ( 2.5 ) resulta:

$$\frac{dv_b}{dx} = \frac{P_{1y} X^2}{2EI_z} - \frac{P_{1y} L X}{2EI_z} \quad (2.7)$$

por otro lado sabemos que:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv_b}{dx} + \frac{dv_s}{dx}$$

sustituyendo las ecuaciones 2.3 y 2.7 en la ecuación anterior

$$\frac{dv}{dx} = \frac{P_{1y} X^2}{2EI_z} - \frac{P_{1y} L X}{2EI_z} - f_{ty} \frac{P_{1y}}{AG}$$

integrando

$$v = \frac{P_{1y} X^3}{6EI_z} - \frac{P_{1y} L X^2}{4EI_z} - f_{ty} \frac{P_{1y} X}{AG} + C_2$$

aplicando las condiciones de frontera: si  $x=0$ ,  $v_{x=0}=1$ , de donde  $C_2=0$ ; si  $x=L$   $v_{x=L}=0$  de donde:

$$0 = \frac{P_{1y} L^3}{6EI_z} - \frac{P_{1y} L^3}{4EI_z} - f_{ty} \frac{P_{1y} L}{GA} + 1$$

$$0 = -P_{1y} \left[ \frac{L^3}{12EI_z} + f_{ty} \frac{L}{GA} \right] + 1$$

$$0 = -\frac{P_{1y} L^3}{12EI_z} \left[ 1 + f_{ty} \frac{12EI_z}{GAL^2} \right] + 1$$

si llamamos factor de cortante a:

$$\phi_y = f_{ty} \frac{12EI_z}{GAL^2}$$

sustituyendo y despejando  $P_{1y}$  se tiene

$$P_{1y} = \frac{12EI_z}{(1-\phi_y)L^3} \quad (2.8)$$

sustituyendo en la ecuación 2.6

$$M_{1z} = \frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} \quad (2.9)$$

por equilibrio

$$\Sigma F_y = P_{1y} + P_{2y} = 0$$

por lo tanto

$$P_{2y} = -\frac{12EI_z}{(1-\phi_y)L^3} \quad (2.10)$$

$$\Sigma M_1 = M_{1z} + M_{2z} + P_{2y}L = 0$$

Sustituyendo valores en la ecuación anterior

$$\frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} + M_{2z} - \frac{12EI_z}{(1-\phi_y)L^2} = 0$$

por lo tanto

$$M_{2z} = \frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} \quad (2.11)$$

Las ecuaciones 2.8, 2.9, 2.10 y 2.11 representan las acciones restringidas, necesarias para lograr el equilibrio al aplicar el desplazamiento en el eje "y". En el extremo 1, las acciones restringidas para mantener el equilibrio son una fuerza cortante de  $12EI_z/(1+\phi_y)L^3$  en el sentido positivo del eje y un momento de  $6EI_z/(1+\phi_y)L^2$  positivo alrededor del eje "z". En el extremo 2 del elemento las acciones restringidas son las mismas solo que la fuerza cortante actúa negativamente en el eje "y".

En forma similar se puede determinar las acciones restringidas (rigideces del elemento) para los desplazamientos restantes.

A continuación, en las figuras 2.11 a 2.22 se representan las rigideces de un elemento para los doce posibles desplazamientos en los extremos del mismo, como se indicó en la figura 2.8.



En cada caso las diferentes acciones restringidas (rigideces del elemento) se dibujan como vectores. Las flechas con una punta representan un vector de fuerza y las flechas con doble punta representan un vector momento. Todos los vectores se dibujan en el sentido positivo y en el caso de que una acción restringida sea negativa un signo menos antecede a las expresiones para los coeficientes de rigidez.

1).- Desplazamiento en dirección "x", extremo 1

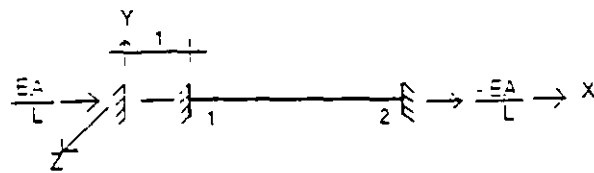


Figura 2.11

2).- Desplazamiento en dirección "y", extremo 1

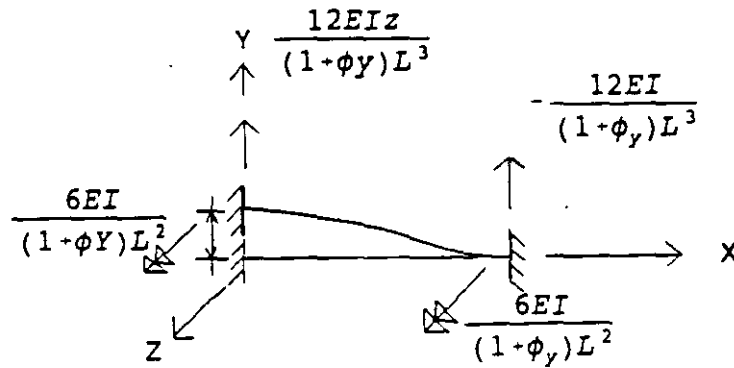


Figura 2.12

3).- Desplazamiento en dirección "z", extremo 1

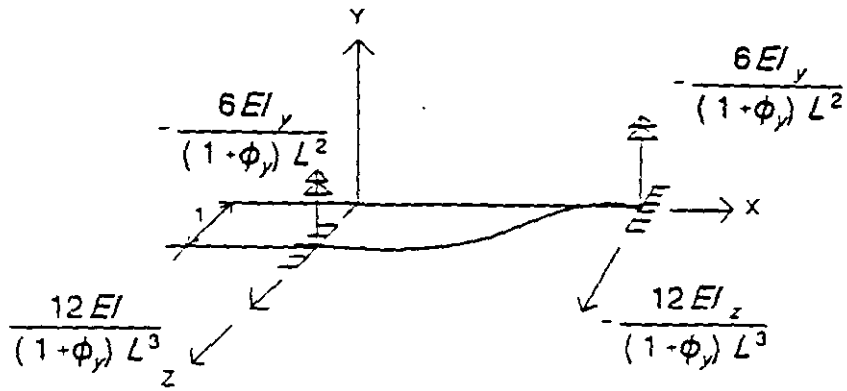


Figura 2.13

4).- Giro alrededor del eje "x", extremo 1

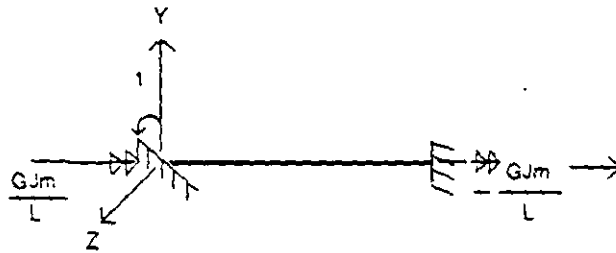


Figura 2.14

5).- Giro alrededor del eje "y", extremo 1

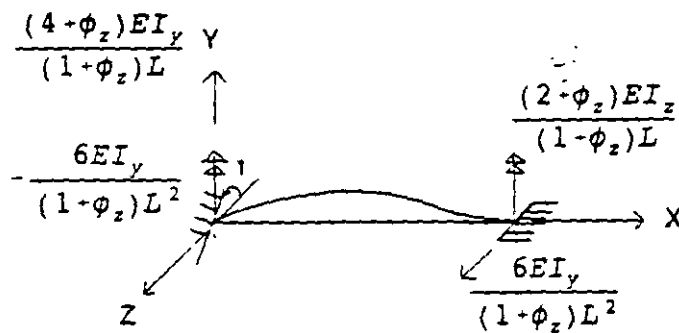


Figura 2.15

6).- Giro alrededor del eje "z", extremo 1

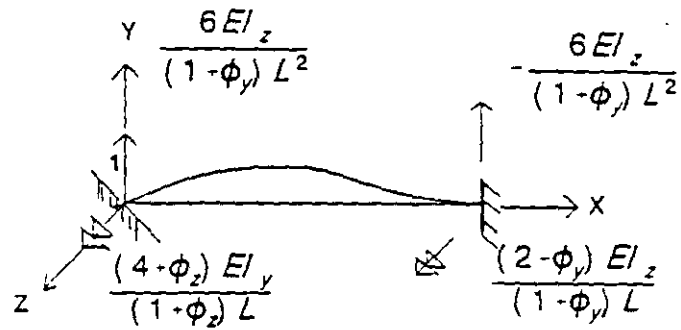


Figura 2.16

7).- Desplazamiento en la dirección X, extremo 2

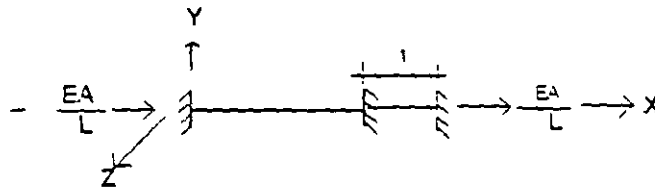


Figura 2.17

8).- Desplazamiento en la dirección Y, extremo 2

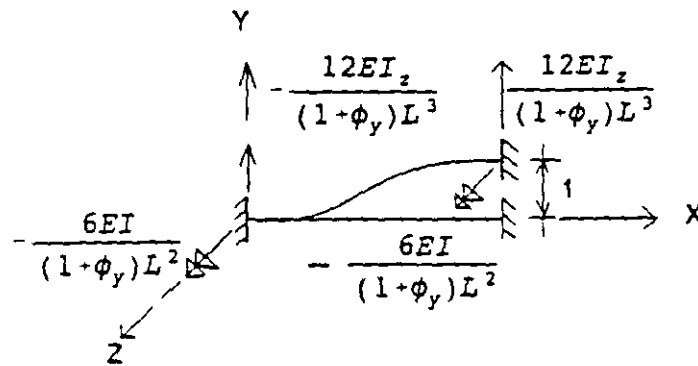


Figura 2.18

9).-Desplazamiento en la dirección Z, extremo 2

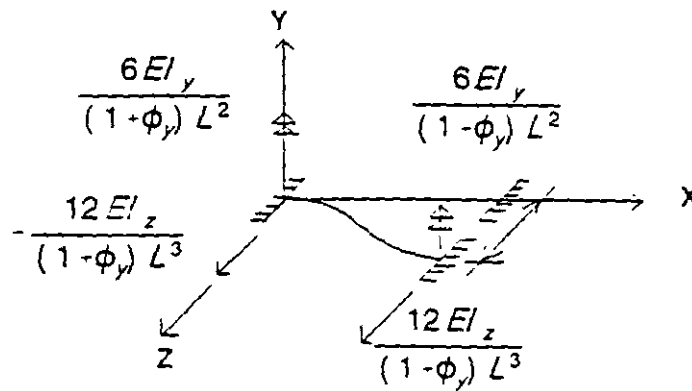


Figura 2.19

10).- Giro alrededor del eje "x", extremo 2

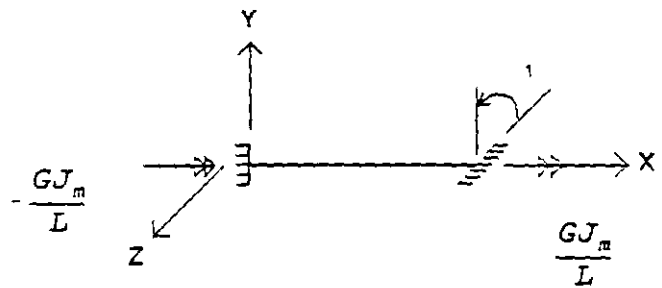


Figura 2.20

11).- Giro alrededor del eje "y", extremo 2

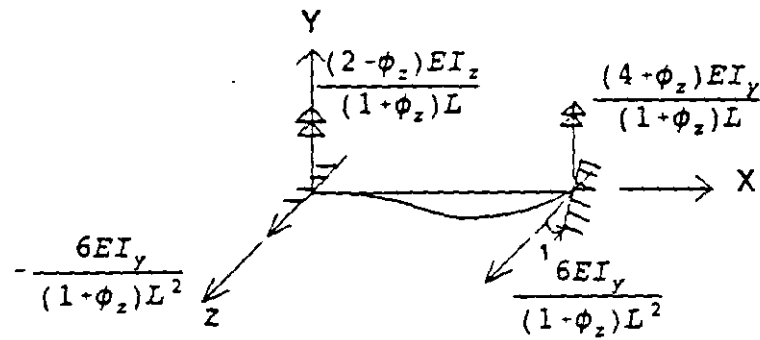


Figura 2.21

12).- Giro alrededor del eje "z", extremo 2

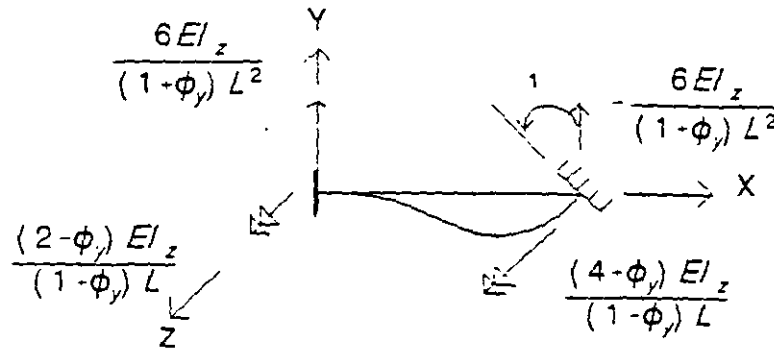


Figura 2.22

Se estableció que la ecuación fuerza-desplazamiento de una barra esta dada por

$$\bar{P} = K \bar{D}$$

Sustituyendo el valor del vector P y los valores mostrados en las figuras de la 2.11 a la 2.22 que corresponde a la matriz de rigidez y el vector de desplazamientos de una barra en el espacio tridimensional resulta la ecuación ( 2.12 ).

Si se desea considerar unicamente flexión, tomando en cuenta que la influencia de la fuerza cortante es pequeña, es decir que  $\phi_i = 0$ , la ecuación fuerza-desplazamiento resulta la ecuación ( 2.13 ).

Particionando el vector de cargas, la matriz de rigideces y el vector desplazamiento y refiriéndolos a los extremos 1 y 2 la ecuación fuerza-desplazamiento en forma condensada se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

donde  $K_{ij}$  son submatrices de  $6 \times 6$ .

$\begin{bmatrix} N_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \\ N_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{-EA}{L}$	0	0	0	0	0
	0	$\frac{12EI_x}{(1+\phi)L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_x}{(1+\phi)L^2}$	0	$\frac{-12EI_x}{(1+\phi)L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_x}{(1+\phi)L^2}$
	0	0	$\frac{12EI_y}{(1+\phi)L^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2}$	0	0	0	$\frac{-12EI_y}{(1+\phi)L^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2}$	0
	0	0	0	$\frac{GJm}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{-GJm}{L}$	0	0
	0	0	$\frac{-6EI_y}{(1+\phi)L^2}$	0	$\frac{(4+\phi)EI_y}{(1+\phi)L}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2}$	0	$\frac{(2-\phi)EI_y}{(1+\phi)L}$	0
	0	$\frac{6EI_x}{(1+\phi)L^2}$	0	0	0	$\frac{(4+\phi)EI_z}{(1+\phi)L}$	0	$\frac{-6EI_z}{(1+\phi)L^2}$	0	0	0	$\frac{(2-\phi)EI_z}{(1+\phi)L}$
	$\frac{-EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
	0	$\frac{-12EI_x}{(1+\phi)L^3}$	0	0	0	$\frac{-6EI_z}{(1+\phi)L^2}$	0	$\frac{12EI_x}{(1+\phi)L^3}$	0	0	0	$\frac{-6EI_z}{(1+\phi)L^2}$
	0	0	$\frac{-12EI_y}{(1+\phi)L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2}$	0	0	0	$\frac{12EI_y}{(1+\phi)L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2}$	0
	0	0	0	$\frac{-GJm}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{GJm}{L}$	0	0
	0	0	$\frac{-6EI_y}{(1+\phi)L^2}$	0	$\frac{(2-\phi)EI_y}{(1+\phi)L}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2}$	0	$\frac{(4+\phi)EI_y}{(1+\phi)L}$	0
	0	$\frac{6EI_x}{(1+\phi)L^2}$	0	0	0	$\frac{(2-\phi)EI_z}{(1+\phi)L}$	0	$\frac{-6EI_z}{(1+\phi)L^2}$	0	0	0	$\frac{(4+\phi)EI_z}{(1+\phi)L}$

ECUACION 2.12 FUERZA-DESPLAZAMIENTO PARA UNA BARRA TRIDIMENSIONAL

$$\begin{bmatrix} N_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \\ N_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJm}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJm}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJm}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJm}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{1z} \\ \phi_{1x} \\ \phi_{1y} \\ \phi_{1z} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{2z} \\ \phi_{2x} \\ \phi_{2y} \\ \phi_{2z} \end{bmatrix}$$

ECUACION 2.13 FUERZA-DESPLAZAMIENTO PARA UNA BARRA TRIDIMENSIONAL.

## 2.3 ROTACION DEL SISTEMA LOCAL AL GLOBAL

En la figura 2.23.a se muestra el vector de cargas generalizado en el sistema local, en las figuras 2.23.b, 2.23.c y 2.23.d se muestran los ángulos que forman el sistema local con los ejes  $x'$ ,  $y'$  &  $z'$  respectivamente, estos últimos corresponden en el sistema global.

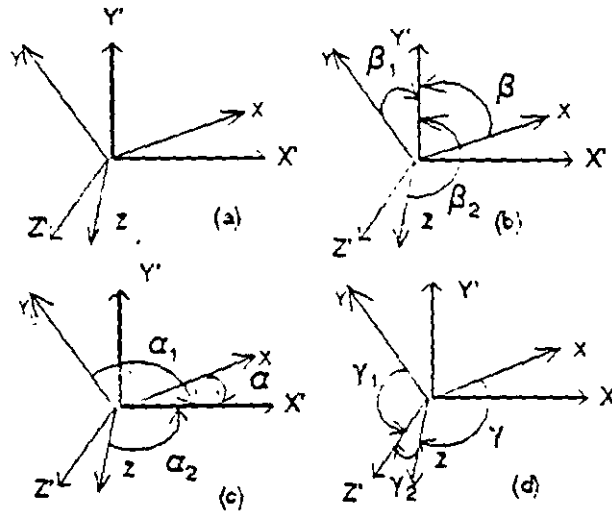


Figura 2.23

por cosenos directores tenemos; para las cargas

$$P'_x = P_x \cos\alpha + P_y \cos\alpha_1 + P_z \cos\alpha_2$$

$$P'_y = P_x \cos\beta + P_y \cos\beta_1 + P_z \cos\beta_2$$

$$P'_z = P_x \cos\gamma + P_y \cos\gamma_1 + P_z \cos\gamma_2$$

ahora para los momentos

$$M'_x = M_x \cos\alpha + M_y \cos\alpha_1 + M_z \cos\alpha_2$$

$$M'_y = M_x \cos\beta + M_y \cos\beta_1 + M_z \cos\beta_2$$

$$M'_z = M_x \cos\gamma + M_y \cos\gamma_1 + M_z \cos\gamma_2$$



sii llamamos:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_1 &= l_1 \\ \cos \beta_1 &= m_1 \\ \cos \gamma_1 &= n_1\end{aligned}$$

sustituyendo y usando notación matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \\ M'_x \\ M'_y \\ M'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l_1 & l_2 & 0 & 0 & 0 \\ m & m_1 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ n & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l_1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & m & m_1 & m_2 \\ 0 & 0 & 0 & n & n_1 & n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

en forma simplificada

$$\bar{P}' = T \bar{P} \quad (2.14)$$

donde:

- $\bar{P}'$  = Vector de cargas en el sistema global
- T = Matriz de rotación
- $\bar{P}$  = Vector de cargas en el sistema local

Por otro lado, un vector de cargas P realiza la misma cantidad de trabajo en cualquier sistema de referencia; por lo tanto:

$$\bar{P}'^t \bar{d}' = \bar{P}^t \bar{d} \quad (2.15)$$

de la ecuación 2.14 se obtiene

$$\bar{P}'^t = \bar{P}^t T^t$$

sustituyendo en la ecuación ( 2.15 )

$$\bar{P}^t T^t \bar{d}' = \bar{P}^t \bar{d}$$

de donde:

$$\bar{d} = T^t \bar{d}' \quad (2.16)$$

A las ecuaciones ( 2.14 ) y ( 2.16 ) se les llama " Principio de Contragradencia".

Sabemos que la ecuación fuerza-desplazamiento para una barra está dada por

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{bmatrix}$$

desarrollando el producto matricial resulta

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= K_{11} \bar{d}_1 + K_{12} \bar{d}_2 \\ \bar{P}_2 &= K_{21} \bar{d}_1 + K_{22} \bar{d}_2 \end{aligned}$$

premultiplicando por T y sustituyendo la ecuación ( 2.14 )

$$T \bar{P}_1 = T K_{11} T^t \bar{d}'_1 + T K_{12} T^t \bar{d}'_2$$

$$T \bar{P}_2 = T K_{21} T^t \bar{d}'_1 + T K_{22} T^t \bar{d}'_2$$

pero

$$T \bar{P} = \bar{P}'$$

entonces

$$\bar{P}'_1 = T K_{11} T^t \bar{d}'_1 + T K_{12} T^t \bar{d}'_2$$

$$\bar{P}'_2 = T K_{21} T^t \bar{d}'_1 + T K_{22} T^t \bar{d}'_2$$

de donde se concluye que

$$T K_{1j} T^t = K'_{1j}$$

Representa la rotación de las submatrices de rigideces del sistema local al global, por lo que:

$$\bar{P}'_1 = K'_{11} \bar{d}'_1 + K'_{12} \bar{d}'_2$$

$$\bar{P}'_2 = K'_{21} \bar{d}'_1 + K'_{22} \bar{d}'_2$$

Estas dos últimas expresiones representan las ecuaciones fuerza desplazamiento de la barra en el sistema global.

Conocidas las submatrices de rigidez de las barras en el sistema global se puede hacer la conexión o acoplamiento de las barras aplicando las condiciones de equilibrio y compatibilidad como se plantearon anteriormente. La aplicación de estas dos ecuaciones conduce a la determinación de la ecuación fuerza-desplazamiento en el sistema global de la estructura a la cual se aplicaron.

### ACOPLAMIENTO DE BARRAS

Considérese, la estructura de la figura 2.24 a la cual se le aplican vectores de carga nodales.

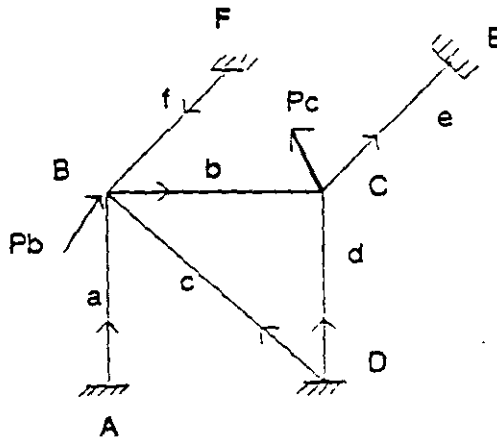


Figura 2.24

De la figura 2.24 por equilibrio

$$\bar{P}'_B = \bar{P}'_{2a} + \bar{P}'_{2c} + \bar{P}'_{1b} + \bar{P}'_{1f}$$

$$\bar{P}'_C = \bar{P}'_{2b} + \bar{P}'_{2d} + \bar{P}'_{1e} \quad (2.17)$$

por compatibilidad

$$\bar{d}'_{1a} = 0 \quad \bar{d}'_{2a} = \bar{d}'_B$$

$$\bar{d}'_{1b} = \bar{d}'_B \quad \bar{d}'_{2b} = \bar{d}'_C$$

$$\begin{aligned}
\bar{d}'_{1c} &= 0 & \bar{d}'_{2c} &= \bar{d}'_3 \\
\bar{d}'_{1d} &= 0 & \bar{d}'_{2d} &= \bar{d}'_c \\
\bar{d}'_{1e} &= \bar{d}'_c & \bar{d}'_{2e} &= 0 \\
\bar{d}'_{1f} &= 0 & \bar{d}'_{2f} &= \bar{d}'_3
\end{aligned}$$

por otro lado, la ecuación fuerza-desplazamiento de una barra en el sistema global:

$$\begin{aligned}
\bar{P}'_1 &= K'_{11} \bar{d}'_1 + K'_{12} \bar{d}'_2 \\
\bar{P}'_2 &= K'_{21} \bar{d}'_1 + K'_{22} \bar{d}'_2
\end{aligned}$$

aplicando estas ecuaciones para cada barra se tiene,

$$\begin{aligned}
\bar{P}'_{1a} &= (K'_{12})_a \bar{d}'_B & ; & & \bar{P}'_{2a} &= (K'_{22})_a \bar{d}'_B \\
\bar{P}'_{1b} &= (K'_{11})_b \bar{d}'_B + (K'_{12})_b \bar{d}'_c \\
\bar{P}'_{2b} &= (K'_{21})_b \bar{d}'_B + (K'_{22})_b \bar{d}'_c \\
\bar{P}'_{1c} &= (K'_{12})_c \bar{d}'_3 & ; & & \bar{P}'_{2c} &= (K'_{22})_c \bar{d}'_3 \\
\bar{P}'_{1d} &= (K'_{12})_d \bar{d}'_c & ; & & \bar{P}'_{2d} &= (K'_{22})_d \bar{d}'_c \\
\bar{P}'_{1e} &= (K'_{11})_e \bar{d}'_c & ; & & \bar{P}'_{2e} &= (K'_{21})_e \bar{d}'_c \\
\bar{P}'_{1f} &= (K'_{12})_f \bar{d}'_3 & ; & & \bar{P}'_{2f} &= (K'_{22})_f \bar{d}'_3
\end{aligned}$$

sustituyendo en las ecuaciones ( 2.17 )

$$\begin{aligned}
\bar{P}'_B &= (K'_{22})_a \bar{d}'_B + (K'_{22})_c \bar{d}'_3 + (K'_{11})_b \bar{d}'_B + (K'_{12})_b \bar{d}'_c + (K'_{22})_f \bar{d}'_3 \\
\bar{P}'_c &= (K'_{21})_b \bar{d}'_B + (K'_{22})_d \bar{d}'_c + (K'_{11})_e \bar{d}'_c + (K'_{22})_b \bar{d}'_c
\end{aligned}$$

expresando las ecuaciones anteriores en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} P_B \\ P_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{22})_a + (K'_{22})_c + (K'_{11})_b + (K'_{22})_f & (K'_{12})_b \\ (K'_{21})_b & (K'_{22})_b + (K'_{22})_d + (K'_{11})_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_b \\ \bar{d}_c \end{bmatrix}$$

en una forma simplificada

$$\bar{P}' = \bar{K}' \bar{D}'$$

que es la ecuación fuerza-desplazamiento en la estructura sistema global.

en donde:

- D' = Vector desplazamiento de la estructura
- K' = Matriz de rigideces del sistema estructural
- P' = Vector de cargas en los nodos de la estructura

En forma práctica, la ecuación fuerza-desplazamiento de un sistema estructural se puede ensamblar observando los extremos de las barras que concurren a un nodo y las barras que interconectan los diferentes nodos, así.

Los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces se obtienen sumando las submatrices de los extremos de las barras que concurren a un mismo nodo.

Los términos que se encuentran fuera de la diagonal principal de la matriz de rigideces son las submatrices cruzadas de las barras que unen dos nodos.

El sentido de la numeración de los nodos tiene mucha importancia ya que si es adecuada, se puede reducir el ancho de banda de la matriz de rigideces y por consecuencia, el tiempo de máquina que resulta muy costoso.

Si, en una estructura cualquiera de los nodos que intervienen en la formación de la matriz tiene un desplazamiento conocido; (igual a cero) es necesario anular la fila y la columna que corresponda según lo observado en el acoplamiento anterior ya que

dicho grado de libertad no participa. También es importante que la estructura que se analiza sea estable, pues si no, la matriz de rigideces no tiene inversa única.

**Ejemplo.-** Determinar en forma práctica la ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura que se muestra en la figura ( 2.25 ).

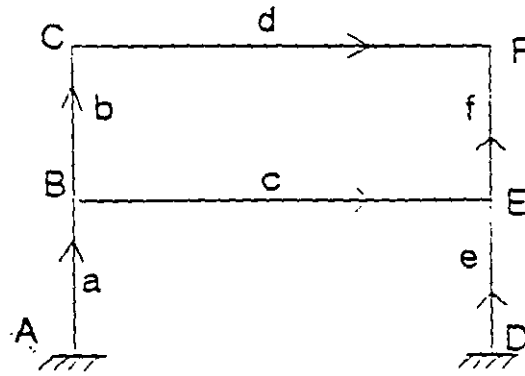


Figura 2.25

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_B \\ \bar{P}_C \\ \bar{F}_F \\ \bar{P}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{22a} - K'_{11b} + K'_{11c} & K'_{12b} & 0 & K'_{12c} \\ K'_{21b} & K'_{22b} + K'_{11d} & K'_{12d} & 0 \\ 0 & K'_{21d} & K'_{22d} + K'_{22f} & K'_{21f} \\ K'_{21c} & 0 & K'_{12f} & K'_{22c} + K'_{22e} + K'_{11f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_B \\ \bar{d}_C \\ \bar{d}_F \\ \bar{d}_E \end{bmatrix}$$

## 2.5 ARMADURAS EN EL PLANO

Para la aplicación del método de rigideces se requiere conocer las submatrices de rigidez de cada barra en el sistema global, lo cual se logra con la expresión:

$$K_j' = T K_j T'$$

Para el caso de armadura en el plano la matriz de rotación "T" se determina a partir de la figura 2.26

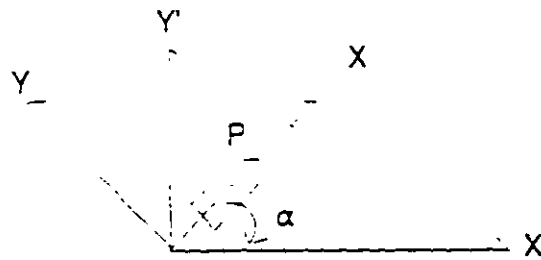


Figura 2.26

$$P_{x'} = P \cos \alpha$$

$$P_{y'} = P \operatorname{sen} \alpha$$

llamando:  $\cos \alpha = l$  ;  $\operatorname{sen} \alpha = m$  y escribiendo en forma matricial

$$\begin{bmatrix} P_{x'} \\ P_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} P$$

en forma compacta se puede escribir

$$\bar{P}' = T \bar{P}$$

donde:

$$T = \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$$

Por otro lado, de la matriz de rigideces general de doce por doce para una barra armadura resulta:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

de donde:

$$K_{11} = \frac{EA}{L} \quad K_{12} = -\frac{EA}{L}$$

$$K_{21} = -\frac{EA}{L} \quad K_{22} = \frac{EA}{L}$$

Haciendo la rotación al sistema global se obtiene

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} I \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA \\ L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & m \end{bmatrix}$$

$$K'_{22} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^2 & Im \\ mI & m^2 \end{bmatrix}$$

de las expresiones anteriores se concluye

$$K_{12} = K_{21} = -K_{11}$$

$$K_{22} = K_{11}$$

2.5.1 Ejemplo.- Analizar la estructura mostrada en la figura 2.27

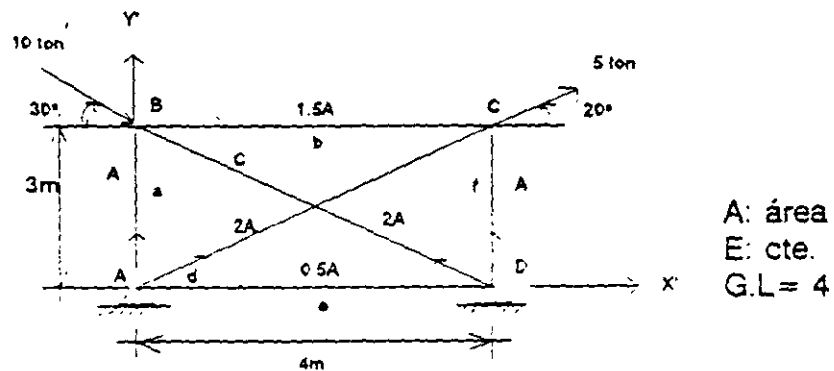


Figura 2.27  
44



La ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura en el sistema global está dada por:

$$\bar{P}' = K \cdot \bar{D}'$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}'_B \\ \bar{P}'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{22})_a + (K'_{22})_c + (K'_{22})_b & (K'_{12})_b \\ (K'_{12})_b & (K'_{22})_b + (K'_{22})_d + (K'_{22})_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}'_B \\ \bar{d}'_C \end{bmatrix}$$

donde:

$$\bar{P}'_B = \begin{bmatrix} P'_{xB} \\ P'_{yB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \cos 30^\circ \\ -10 \operatorname{sen} 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.6603 \\ -5.0000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}'_C = \begin{bmatrix} P'_{xC} \\ P'_{yC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cos 20^\circ \\ 5 \operatorname{sen} 20^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6985 \\ 1.7101 \end{bmatrix}$$

De lo anterior el vector de cargas y el vector desplazamientos

$$\bar{P}' = \begin{bmatrix} 8.6603 \\ -5.0000 \\ 4.6985 \\ 1.7101 \end{bmatrix} \quad \bar{D}' = \begin{bmatrix} d'_{xB} \\ d'_{yB} \\ d'_{xC} \\ d'_{yC} \end{bmatrix}$$

Barra	$L_i$	$A_i$	$l$	$m$	$l^2$	$lm$	$m^2$
a	3	1	0	1	0	0	1
b	4	1.5	1	0	1	0	0
c	5	2	-0.8	0.6	0.64	-0.48	0.36
d	5	2	0.8	0.6	0.64	0.48	0.36
e	4	0.5	1	0	1	0	0
f	3	1	0	1	0	0	1

Sustituyendo en:

$$K'_{11} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm \\ ml & m^2 \end{bmatrix} = K'_{22}$$

$$K'_{22} = -\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm \\ ml & m^2 \end{bmatrix} = K'_{11}$$

$$(K'_{11})_a = \frac{EA}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix}$$

$$(K'_{11})_b = \frac{E(1.5)A}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.375 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(K'_{22})_c = \frac{E(2A)}{5} \begin{bmatrix} 0.64 & -0.48 \\ -0.48 & 0.36 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.256 & -0.192 \\ -0.192 & 0.144 \end{bmatrix}$$

$$(K'_{22})_d = \frac{E(2A)}{5} \begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 \\ 0.48 & 0.36 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.256 & 0.192 \\ 0.192 & 0.144 \end{bmatrix}$$

$$(K'_{11})_f = (K'_{11})_a$$

Solo se determinó  $K'_{11}$  de cada barra ya que  $K'_{12} = K'_{21} = -K'_{11}$  y  $K'_{22} = K'_{11}$ .

Sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento se tiene:

$$\begin{bmatrix} 8.660 \\ -5.000 \\ 4.698 \\ 1.710 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.631 & -0.192 & -0.365 & 0 \\ -0.192 & 0.477 & 0 & 0 \\ -0.375 & 0 & 0.631 & 0.192 \\ 0 & 0 & 0.192 & 0.477 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x B' \\ d_y B' \\ d_x C' \\ d_y C' \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema aplicando cualquier método de solución de ecuaciones simultáneas.

$$\begin{bmatrix} d'_{x3} \\ d'_{y3} \\ d'_{xc} \\ d'_{yc} \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 31.23478 \\ 2.08899 \\ 28.39403 \\ -7.83899 \end{bmatrix}$$

Una vez conocidos los desplazamientos en los nodos se procede a calcular la fuerza en cada barra, así la ecuación fuerza-desplazamiento para cada barra esta dada por:

$$\bar{P}'_1 = K'_{11} \bar{d}'_1 + K'_{12} \bar{d}'_2$$

$$\bar{P}'_2 = K'_{21} \bar{d}'_1 - K'_{22} \bar{d}'_2$$

por compatibilidad

$$\bar{d}'_{1a} = 0 \quad \bar{d}'_{2a} = \bar{d}'_3$$

$$\bar{d}'_{1b} = \bar{d}'_3 \quad \bar{d}'_{2b} = \bar{d}'_c$$

$$\bar{d}'_{1c} = 0 \quad \bar{d}'_{2c} = \bar{d}'_3$$

$$\bar{d}'_{1d} = 0 \quad \bar{d}'_{2d} = \bar{d}'_c$$

$$\bar{d}'_{1e} = 0 \quad \bar{d}'_{2e} = 0$$

$$\bar{d}'_{1f} = 0 \quad \bar{d}'_{2f} = \bar{d}'_c$$

sustituyendo para cada barra:

Barra ( a ):

$$\bar{P}'_{1a} = (K'_{11})_a (0) + (K'_{12})_a \bar{d}'_3$$

$$\bar{P}'_{1a} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31.23478 \\ 2.08899 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.69626 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}'_{2a} = (K'_{21})_a (0) + (K'_{22})_a \bar{d}'_3$$

$$\bar{P}'_{2a} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31.23478 \\ 2.08899 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.69626 \end{bmatrix}$$

Barra ( b ):

$$\bar{P}'_{1b} = \begin{bmatrix} 0.375 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31.23478 \\ 2.08899 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.375 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28.39403 \\ -7.83899 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.06528 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}'_{2b} = \begin{bmatrix} -1.06528 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Barra ( c ):

$$P'_{1c} = \begin{bmatrix} -0.266 & 0.192 \\ 0.192 & -0.144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31.23478 \\ 2.08899 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.59502 \\ 5.69626 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2c} = \begin{bmatrix} 7.59502 \\ -5.69626 \end{bmatrix}$$

Barra ( d ):

$$P'_{1d} = \begin{bmatrix} -0.256 & -0.192 \\ -0.192 & -0.144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28.39403 \\ -7.83899 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.76378 \\ -4.32284 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2d} = \begin{bmatrix} 5.76378 \\ 4.32384 \end{bmatrix}$$

Barra ( e ):

$$\bar{P}'_{1e} = \bar{P}'_{2e} = 0 \quad (\text{no trabaja})$$

Barra ( f ):

$$\bar{P}'_{1f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28.39403 \\ -7.83899 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.61274 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.61274 \end{bmatrix}$$

Comprobación del equilibrio.

Nodo B :

$$\bar{P}'_B = \bar{P}'_{2a} + \bar{P}'_{2c} + \bar{P}'_{1B}$$

$$\begin{bmatrix} 8.6603 \\ -5.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6963 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7.5950 \\ -5.6963 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.0653 \\ 0.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.6603 \\ -5.000 \end{bmatrix}$$

Nodo C :

$$\bar{P}'_C = \bar{P}'_{2b} + \bar{P}'_{2d} + \bar{P}'_{1C}$$

$$\begin{bmatrix} 4.6985 \\ 1.7101 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0653 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.7638 \\ 4.3228 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2.6127 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6985 \\ 1.7101 \end{bmatrix}$$

Para la rotación del sistema global a local sabemos que.

$$P' = T P$$

premultiplicando por  $T'$

$$T'P = T'TP ; \text{ pero } T'T = I$$

$$P = T'P'$$

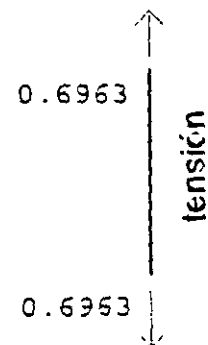
Para una barra i

$$P_{1i} = [\cos \alpha \quad \text{sen} \alpha] \begin{bmatrix} P'_{x_i} \\ P'_{y_i} \end{bmatrix}$$

Barra ( a ):

$$P_{1a} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.6963 \end{bmatrix} = -0.6963 \text{ ton}$$

$$P_{2a} = 0.6963 \text{ ton}$$

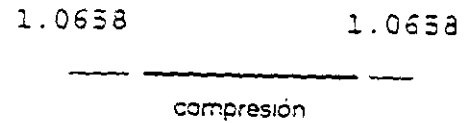


Por lo que la barra ( a ) trabaja a tensión con 0.69 ton.

Barra ( b )

$$P_{1b} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1.0658 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.0658 \text{ ton}$$

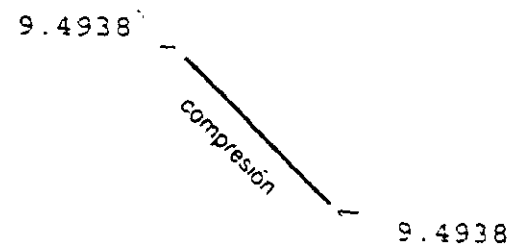
$$P_{2b} = -1.0658 \text{ ton}$$



Barra ( c ):

$$P_{1c} = [-0.8 \ 0.6] \begin{bmatrix} -7.5950 \\ 5.6963 \end{bmatrix} = 9.4938 \text{ ton}$$

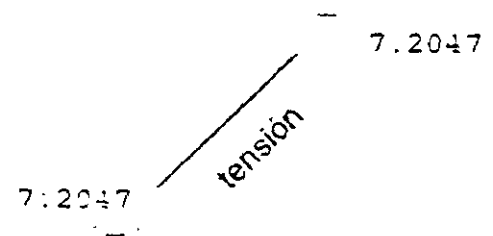
$$P_{2c} = -9.4938 \text{ ton}$$



Barra ( d ):

$$P_{1d} = [0.8 \ 0.6] \begin{bmatrix} -5.7638 \\ -4.3228 \end{bmatrix} = -7.2047 \text{ ton}$$

$$P_{2d} = 7.2047 \text{ ton}$$



Barra ( f ):

$$P_{1f} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 2.6127 \end{bmatrix} = 2.6127 \text{ ton}$$

$$P_{2f} = -2.6127 \text{ ton}$$



Representando en forma esquemática los resultados para toda la armadura:

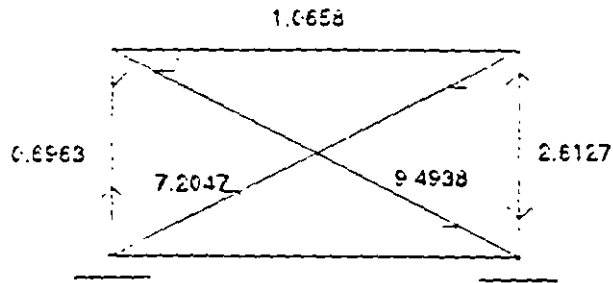


Figura 2.28

## 2.6 ARMADURAS EN EL ESPACIO

Para la determinación de las submatrices de rigideces para una barra en sistema global, se sabe.

$$K_{ij} = T K T'$$

La matriz de rotación " T " se determina a partir de la figura 2.29.

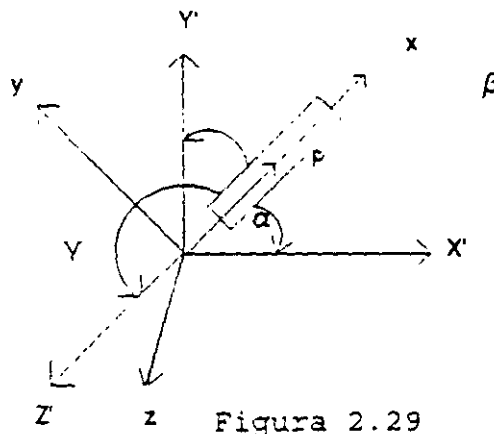


Figura 2.29

$$\begin{aligned} P'_x &= P \cos \alpha \\ P'_y &= P \cos \beta \\ P'_z &= P \cos \gamma \end{aligned}$$

Llamando  $\cos \alpha = l$ ,  $\cos \beta = m$  &  $\cos \gamma = n$

$$\begin{bmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} P$$

$$P' = T P$$

donde:

$$T = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

De la matriz de rigideces general de 12x12 para un elemento armadura se tiene:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

efectuando la rotación de las submatrices:

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \frac{EA}{L} [l \ m \ n]$$

$$K'_{11} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & ln \\ ml & m^2 & mn \\ nl & nm & n^2 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = K'_{21} = -K'_{11} \quad K'_{22} = K'_{11}$$

**EJEMPLO:** Determinar la fuerza en cada barra de la estructura mostrada en la figura (2.30). Considerar EA constante.



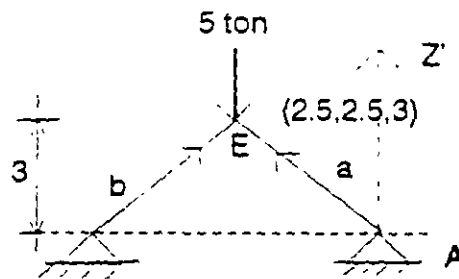
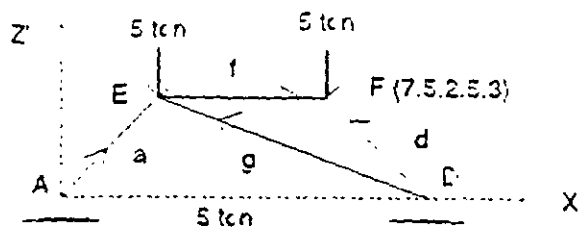
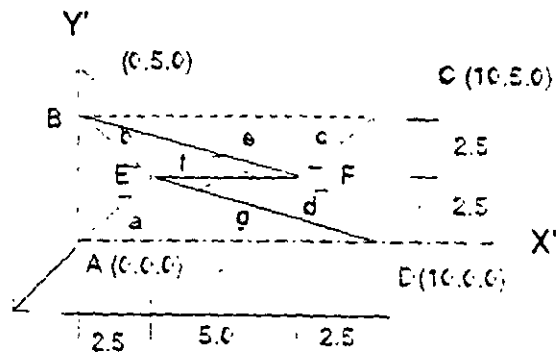


Figura 2.30

La ecuación fuerza desplazamiento de la estructura.

$$\begin{bmatrix} P'_E \\ P'_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{22})_a + (K'_{22})_b + (K'_{11})_f + (K'_{22})_g & (K'_{12})_f \\ (K'_{21})_f & (K'_{22})_c + (K'_{22})_d + (K'_{22})_e + (K'_{22})_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_E \\ d'_F \end{bmatrix}$$

Vector de cargas y desplazamiento.

$$P_E = \begin{bmatrix} P'_{xE} \\ P'_{yE} \\ P'_{zE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \quad P_F = \begin{bmatrix} P'_{xF} \\ P'_{yF} \\ P'_{zF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \quad d'_i = \begin{bmatrix} d'_{x_i} \\ d'_{y_i} \\ d'_{z_i} \end{bmatrix}$$

Para la determinación de las submatrices de rigideces se organizan los datos de las barras en la siguiente tabla, para lo cual el cálculo de la longitud de las barras se hace a partir de la expresión:

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

"y" para el cálculo de los cosenos directores:

$$l = \cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{L}$$

$$m = \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{L}$$

$$n = \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{L}$$

Barra	$L_i$	$A_i E_i$	$l$	$m$	$n$	$l^2$	$m^2$	$n^2$
a	4.637	1	0.539	0.539	0.647	0.291	0.291	0.419
b	4.637	1	0.539	-0.539	0.647	0.291	0.291	0.419
c	4.637	1	-0.539	-0.539	0.647	0.291	0.291	0.419
d	4.637	1	-0.539	0.539	0.647	0.291	0.291	0.419
e	8.456	1	0.887	-0.296	0.355	0.787	0.088	0.126
f	5.000	1	1.000	0	0	1.000	0	0
g	8.456	1	-0.887	0.296	0.355	0.787	0.088	0.126

Sustituyendo estos valores en las submatrices se tiene:

$$(K'_{11})_a = EA \begin{bmatrix} 0.063 & 0.063 & 0.075 \\ 0.063 & 0.063 & 0.075 \\ 0.075 & 0.075 & 0.090 \end{bmatrix} \quad (K'_{11})_b = EA \begin{bmatrix} 0.063 & -0.063 & 0.075 \\ -0.063 & 0.063 & -0.075 \\ 0.075 & -0.075 & 0.090 \end{bmatrix}$$

$$(K'_{11})_c = EA \begin{bmatrix} 0.063 & 0.063 & -0.075 \\ 0.063 & 0.063 & -0.075 \\ -0.075 & -0.075 & 0.090 \end{bmatrix} \quad (K'_{11})_d = EA \begin{bmatrix} 0.063 & -0.063 & -0.075 \\ -0.063 & 0.063 & 0.075 \\ -0.075 & 0.075 & 0.090 \end{bmatrix}$$

$$(K'_{11})_e = EA \begin{bmatrix} 0.093 & -0.032 & 0.037 \\ -0.031 & 0.010 & -0.012 \\ 0.037 & -0.012 & 0.015 \end{bmatrix} \quad (K'_{11})_f = EA \begin{bmatrix} 0.200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(K'_{11})_g = EA \begin{bmatrix} 0.093 & -0.031 & -0.037 \\ -0.031 & 0.010 & 0.012 \\ -0.037 & 0.012 & 0.015 \end{bmatrix}$$

Solo se ha calculado el  $K'_{11}$  de cada barra ya que  $K'_{22} = K'_{11}$  y  $K'_{12} = K'_{21} = -K'_{11}$ . Sustituyendo en la ec. fuerza-desplazamiento se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.419 & -0.031 & 0.113 & -0.200 & 0 & 0 \\ -0.031 & 0.136 & 0.012 & 0 & 0 & 0 \\ 0.113 & 0.012 & 0.195 & 0 & 0 & 0 \\ -0.200 & 0 & 0 & 0.419 & -0.031 & -0.113 \\ 0 & 0 & 0 & -0.031 & 0.136 & -0.012 \\ 0 & 0 & 0 & -0.113 & -0.012 & 0.195 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_{xE} \\ d'_{yE} \\ \theta'_{zE} \\ d'_{xF} \\ d'_{yF} \\ \theta'_{zF} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema por cualquier método de solución se obtiene:

$$\begin{bmatrix} d'_x \\ d'_y \\ d'_z \\ d'_x \\ d'_y \\ d'_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 5.49 \\ 3.81 \\ -29.06 \\ -5.49 \\ -3.81 \\ -29.06 \end{bmatrix}$$

La ecuación fuerza-desplazamiento de la barra está dada por:

$$P_1' = K_{11}' D_1' + K_{12}' D_2'$$

$$P_2' = K_{21}' D_1' + K_{22}' D_2'$$

por compatibilidad

$$d_{1a}' = 0 \quad d_{2a}' = D_E'$$

$$d_{1b}' = 0 \quad d_{2b}' = D_E'$$

$$d_{1c}' = 0 \quad d_{2c}' = D_F'$$

$$d_{1d}' = 0 \quad d_{2d}' = D_F'$$

$$d_{1e}' = 0 \quad d_{2e}' = D_F'$$

$$d_{1f}' = D_E' \quad d_{2f}' = D_F'$$

$$d_{1g}' = 0 \quad d_{2g}' = D_E'$$

Sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento para cada barra.

Barra "a"

$$P_{1a}' = EA \begin{bmatrix} -0.063 & -0.063 & -0.075 \\ -0.063 & -0.063 & -0.075 \\ -0.075 & -0.075 & -0.090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.49631 \\ 3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} 1.59283 \\ 1.59283 \\ 1.91699 \end{bmatrix}$$

$$P_{2a}' = \begin{bmatrix} -1.59283 \\ -1.59283 \\ -1.91699 \end{bmatrix}$$

Barra "b"

$$P_{1b}' = EA \begin{bmatrix} -0.063 & 0.063 & -0.075 \\ 0.063 & -0.063 & 0.075 \\ -0.075 & 0.075 & -0.090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.49631 \\ 3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} 2.07378 \\ -2.07378 \\ 2.48955 \end{bmatrix}$$

$$P_{2b}' = \begin{bmatrix} -2.07378 \\ 2.07378 \\ -2.48955 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$P'_{1c} = EA \begin{bmatrix} -0.063 & -0.063 & 0.075 \\ -0.063 & -0.063 & 0.075 \\ 0.075 & 0.075 & -0.090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.49631 \\ -3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} -1.59283 \\ -1.59283 \\ 1.91699 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2c} = \begin{bmatrix} 1.59283 \\ 1.59283 \\ -1.91699 \end{bmatrix}$$

Barra "d"

$$P'_{1d} = EA \begin{bmatrix} -0.063 & 0.063 & 0.075 \\ 0.063 & -0.063 & -0.075 \\ 0.075 & -0.075 & -0.090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.49631 \\ -3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} -2.07378 \\ 2.07378 \\ -2.48955 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2d} = \begin{bmatrix} 2.07378 \\ -2.07378 \\ -2.48955 \end{bmatrix}$$

Barra "e"

$$P'_{1e} = EA \begin{bmatrix} -0.093 & 0.031 & -0.037 \\ 0.031 & -0.010 & 0.012 \\ -0.037 & 0.012 & -0.015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.49631 \\ -3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} 1.46809 \\ -0.48095 \\ 0.59347 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2e} = \begin{bmatrix} 1.46809 \\ -0.48095 \\ 0.59347 \end{bmatrix}$$

Barra "f"

$$P'_{1f} = \begin{bmatrix} 2.19852 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P'_{2f} = \begin{bmatrix} -2.19852 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Barra "g"

$$P'_{1g} = EA \begin{bmatrix} -0.093 & 0.031 & 0.037 \\ 0.031 & -0.010 & -0.012 \\ 0.037 & -0.012 & -0.015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.49631 \\ 3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} -1.46809 \\ 0.48095 \\ 0.59347 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2g} = \begin{bmatrix} 1.46809 \\ -0.48095 \\ -0.59347 \end{bmatrix}$$

Comprobación por equilibrio

$$\bar{P}'_E = \bar{P}'_{2a} + \bar{P}'_{2b} + \bar{P}'_{1f} + \bar{P}'_{2g}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.59283 \\ -1.59283 \\ -1.91699 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.07378 \\ 2.07378 \\ -2.48955 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.19852 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.46809 \\ -0.48095 \\ -0.59347 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}'_E = \bar{P}'_{2a} + \bar{P}'_{2b} + \bar{P}'_{1f} + \bar{P}'_{2g}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.59283 \\ 1.59283 \\ -1.91699 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.07378 \\ -2.07378 \\ -2.48955 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.19852 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.46809 \\ 0.48095 \\ 0.59347 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Rotación del sistema global a local

$$\bar{P} = T \bar{P}'$$

Barra "a"

$$P'_{1a} = [0.539 \quad 0.539 \quad 0.647] \begin{bmatrix} 1.59283 \\ 1.59283 \\ 1.91699 \end{bmatrix} = 2.9574 \text{ ton}$$

$$P'_{2a} = -2.9574 \text{ ton}$$


Barra "b"

$$P'_{1b} = [0.539 \quad -0.539 \quad 0.647] \begin{bmatrix} 2.07378 \\ -2.07378 \\ 2.48955 \end{bmatrix} = 3.85 \text{ ton}$$

$$P'_{2a} = -3.85 \text{ ton}$$

0.5248

0.6248

compresion

y así para el resto de las barras.

Finalmente:

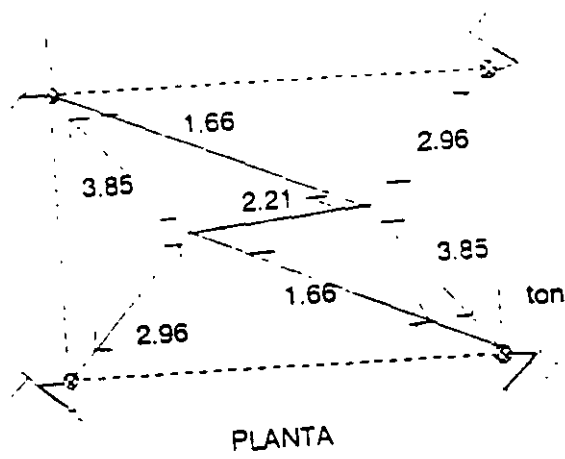


Figura 2.31

## 2.7 VIGAS CONTINUAS:

2.7.1 Ejemplo.- Determinar los elementos mecánicos de la viga mostrada en la figura 2.32 considerando la influencia de la fuerza cortante (término  $1 - \phi_y$ ).

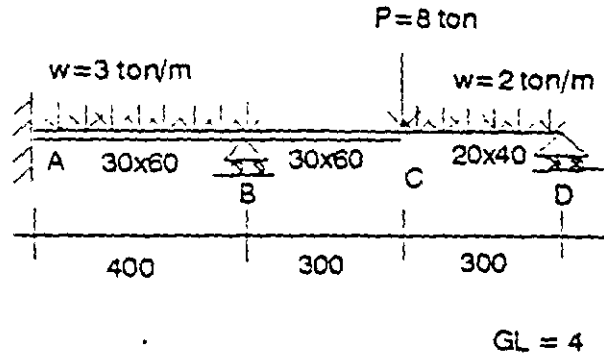


Figura 2.32

La ecuación fuerza desplazamiento de la estructura está dada por:

$$\begin{bmatrix} P'_B \\ P'_C \\ P'_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{22a} + K'_{22b} & K'_{12b} & 0 \\ K'_{21b} & K'_{22b} - K'_{11c} & 0 \\ 0 & K'_{21c} & K'_{22c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_B \\ D'_C \\ D'_D \end{bmatrix}$$

Vectores de empotramiento (acciones)

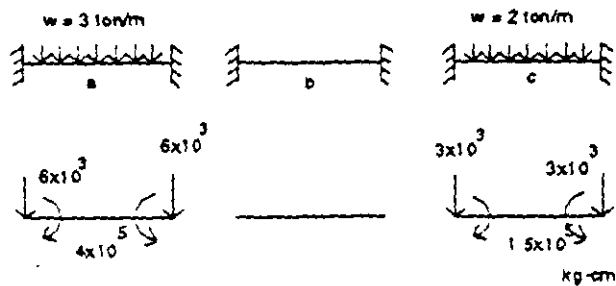


Figura 2.33



Sustituyendo en el vector de cargas y utilizando unidades en kilogramos y centímetros, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} P_B \\ P_C \\ P_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{yB} \\ M_{zB} \\ P_{yC} \\ M_{zC} \\ P_{yD} \\ M_{zD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \times 10^3 \\ 4 \times 10^5 \\ -11 \times 10^3 \\ -1.5 \times 10^5 \\ -3 \times 10^3 \\ 1.5 \times 10^5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} D_B \\ D_C \\ D_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{yB} \\ \phi_{zB} \\ d_{yC} \\ \phi_{zC} \\ d_{yD} \\ \phi_{zD} \end{bmatrix}$$

Como el transformador es igual a la matriz identidad  $T = 1$  para este caso de vigas continuas debido a que el sistema local coincide con el sistema global, entonces:

$$K_{ij} = K'_{ij}$$

de la matriz general de 12 X 12 se tiene que:

$$K_{11} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{(1-\phi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} \\ \frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} & \frac{(4-\phi_y)EI_z}{(1-\phi_y)L} \end{bmatrix} \quad K_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ -\frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1-\phi_y)L} \end{bmatrix}$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI_z}{(1-\phi_y)L^3} & -\frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} \\ \frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1-\phi_y)L} \end{bmatrix} \quad K_{22} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{(1-\phi_y)L^3} & -\frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} \\ -\frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} & \frac{(4-\phi_y)EI_z}{(1-\phi_y)L} \end{bmatrix}$$

Se sabe que

$$\phi_y = \frac{12f_y EI_z}{GA L^2}$$

el factor de forma esta dado por la expresión

$$f_y = \int \frac{Q^2}{r^2 I_z b^2} dA$$

y para secciones rectangulares es igual a 1.2

Para determinar el módulo de elasticidad se considera un valor de  $E = 8000 \sqrt{F}$  y para el módulo de elasticidad al corte un valor de  $G = 0.4E$

Para determinar las submatrices de rigidez de cada barra se sugiere hacer la siguiente tabla:

Barra	L	A	$I_z$	E	G	$\phi_y$	$EI_z$
a	400	1800	$5.4 \times 10^5$	$1.13 \times 10^5$	$4.53 \times 10^4$	$6.75 \times 10^{-2}$	$6.11 \times 10^1$
b	300	1800	$5.4 \times 10^5$	$1.13 \times 10^5$	$4.53 \times 10^4$	$1.2 \times 10^{-2}$	$6.11 \times 10^1$
c	300	800	$1.07 \times 10^5$	$1.13 \times 10^5$	$4.53 \times 10^4$	$5.3 \times 10^{-2}$	$1.21 \times 10^1$

sustituyendo en las submatrices para cada barra se obtiene:

Barra "a"

$$K'_{11a} = \begin{bmatrix} 10732 & 2146370 \\ 2146370 & 5.82 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad K'_{12a} = \begin{bmatrix} -10732 & 2146370 \\ -2146370 & 2.77 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21a} = K_{12a}^T \quad K'_{22a} = \begin{bmatrix} 10732 & -2146370 \\ -2146370 & 5.82 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

Barra "b"

$$K'_{11b} = \begin{bmatrix} 24246 & 3636905 \\ 3636905 & 7.49 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad K'_{12b} = \begin{bmatrix} -24246 & 3636905 \\ -3636905 & 3.42 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21b} = K_{12b}^T \quad K'_{22b} = \begin{bmatrix} 24246 & -2146390 \\ -3636905 & 7.49 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$K'_{11c} = \begin{bmatrix} 5107 & 766065 \\ 766065 & 1.55 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad K'_{12c} = \begin{bmatrix} -5107 & 766065 \\ -766065 & 74576488 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21c} = K'_{12c}$$

$$K'_{22c} = \begin{bmatrix} 5107 & -766065 \\ -766065 & 1.55 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la matriz de rigideces de la estructura se tiene

$$K = \begin{bmatrix} 34978 & 1490535 & -24246 & 3636905 & 0 & 0 \\ 1490535 & 1.331 \times 10^9 & -3636915 & 3.42 \times 10^8 & 0 & 0 \\ -24246 & -3636905 & 29353 & -2870840 & -5107 & 766065 \\ 3636905 & 342 \times 10^8 & -2870840 & 9.04 \times 10^8 & -766065 & 74576448 \\ 0 & 0 & -5701 & -766065 & 5107 & -766065 \\ 0 & 0 & 766065 & 74576448 & -766065 & 1.55 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura y eliminando los grados de libertad restringidos, es decir los correspondientes a  $d'_{yB} = 0$  y  $d'_{yO} = 0$  el sistema resulta:

$$\begin{bmatrix} 4 \times 10^5 \\ -11000 \\ -1.5 \times 10^5 \\ 1.5 \times 10^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.331 \times 10^9 & -3636915 & 3.42 \times 10^8 & 0 \\ -3636905 & 29353 & -2870840 & 766065 \\ 3.42 \times 10^8 & -2870840 & 9.04 \times 10^8 & 74576448 \\ 0 & 766065 & 74576448 & 1.55 \times 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{zB} \\ \phi_{yC} \\ \phi_{zC} \\ \phi_{zD} \end{bmatrix}$$

solucionando el sistema de ecuaciones anterior:

$$\begin{bmatrix} \phi_{zB} \\ \phi_{yC} \\ \phi_{zC} \\ \phi_{zD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0021897 \\ -1.316115 \\ -0.004304 \\ 0.0095435 \end{bmatrix}$$

por lo que los vectores de desplazamiento en cada nodo resultan:

$$\begin{bmatrix} d_{yB} \\ \phi_{zB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.1897 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d_{yC} \\ \phi_{zC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.316115 \\ -4.314 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d_{yO} \\ \phi_{zO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9.5445 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

por compatibilidad:

$$\begin{aligned} d'_{1a} &= 0 & d'_{2a} &= d'_B \\ d'_{1b} &= d'_B & d'_{2b} &= d'_C \\ d'_{1c} &= d'_C & d'_{2c} &= d'_D \end{aligned}$$

Para conocer los elementos mecánicos en cada barra se aplica la ecuación fuerza-desplazamiento que esta dada por:

$$\begin{aligned} P'_1 &= K'_{11} d'_1 + K'_{12} d'_2 \\ P'_2 &= K'_{21} d'_1 + K'_{22} d'_2 \end{aligned}$$

Barra "a"

$$P'_{1a} = K'_{11a} (0) + K'_{12a} d'_B$$

$$\begin{bmatrix} P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10732 & 2146370 \\ -2146370 & 2.77E8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2.1897E-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4700 \\ -606547 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2a} = K'_{21a} (0) + K'_{22} d'_B$$

$$\begin{bmatrix} P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10732 & 2146370 \\ 2146370 & 5.82 \times 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2.1897 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4700 \\ -1274405 \end{bmatrix}$$

en forma similar para las barras b y c se obtiene:

Barra "b"

$$\begin{bmatrix} P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8294 \\ 1674532 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8294 \\ 814012 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$\begin{bmatrix} P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2708 \\ -963629 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2078 \\ 150036 \end{bmatrix}$$

### Comprobación del equilibrio

$$P'_B = P'_{2b} + P'_{1b}$$

Nodo "B"

$$\begin{bmatrix} -6000 \\ 4 \times 10^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4700 \\ -1274405 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8294 \\ 1674536 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6000 \\ 4 \times 10^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12994 \\ 4 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

Nodo "C"

$$P'_C = P'_{2c} + P'_{1c}$$

$$\begin{bmatrix} -11 \times 10^3 \\ -1.5 \times 10^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8294 \\ 814012 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2708 \\ -253629 \end{bmatrix}$$

Nodo "D"

$$P'_D = P'_{2d}$$

$$\begin{bmatrix} -3 \times 10^3 \\ 1.5 \times 10^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2078 \\ 1.5 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

se observa que en los nodos B y C no se cumple el equilibrio, correspondiente al grado de libertad  $dy$  (\*), esto es debido a que hay apoyo y este debe ser capaz de absorber toda la carga que le llegue.

Los elementos mecánicos finales, figura 2.34.c, se obtienen sumando a los vectores de carga (calculados) en cada extremo de las barras figura 2.32 a los vectores iniciales de empotramiento figura 2.34.b. Estos últimos se obtienen multiplicando por menos uno el vector de cargas inicialmente considerando (acciones) figura 2.33.

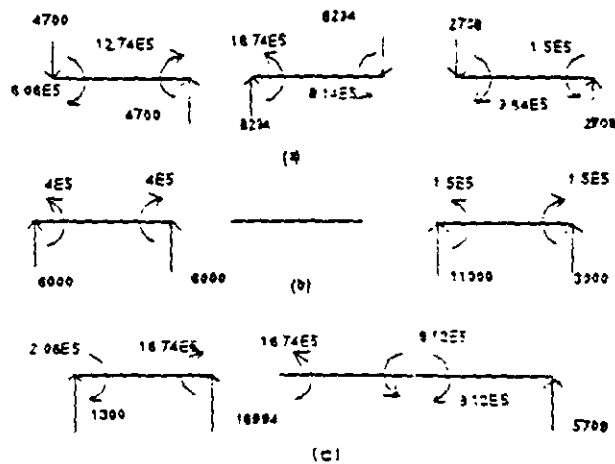


Figura 2.34

Resolver el problema anterior despreciando la influencia de la fuerza cortante en los desplazamientos.

La ecuación  $P=KD$  es la misma al valuar las submatrices de rigidez para cada elemento se debe considerar  $\phi_y = 0$ .

Barra "a"

$$K_{11a} = \begin{bmatrix} 11456 & 2291250 \\ 2291250 & 6.11 \times 10^9 \end{bmatrix} \quad K_{12a} = \begin{bmatrix} -11456 & 2291250 \\ -2291250 & 3.055 \times 10^9 \end{bmatrix}$$

$$K_{21a} = K_{12a}^T \quad K_{22a} = \begin{bmatrix} 11456 & -2291250 \\ -2291250 & 6.11 \times 10^9 \end{bmatrix}$$

Barra "b"

$$K_{11b} = \begin{bmatrix} 27156 & 4073333 \\ 4073333 & 8.1466 \times 10^9 \end{bmatrix} \quad K_{12b} = \begin{bmatrix} -27156 & 4073333 \\ -4073333 & 4.0733 \times 10^9 \end{bmatrix}$$

$$K_{21b} = K_{12b}^T \quad K_{22b} = \begin{bmatrix} 27156 & -4073333 \\ -4073333 & 8.1466 \times 10^9 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$K_{11c} = \begin{bmatrix} 5378 & 806667 \\ 806667 & 1.6133 \times 10^7 \end{bmatrix} \quad K_{12c} = \begin{bmatrix} -5378 & 806667 \\ -806667 & 8.0666 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

$$K_{21c} = K_{12c}^t \quad K_{22c} = \begin{bmatrix} 5378 & -806667 \\ -806667 & 1.6133 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

sustituyendo:

$$\begin{bmatrix} -6 \times 10^3 \\ 4 \times 10^5 \\ -11 \times 10^3 \\ -1.5 \times 10^5 \\ -3 \times 10^3 \\ 1.5 \times 10^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38612 & 1782083 & -27156 & 4073333 & 0 & 0 \\ 1782083 & 1.425 \times 10^9 & -4073333 & 4.073 \times 10^8 & 0 & 0 \\ -27156 & -4073333 & 32534 & 3266666 & -5378 & 806667 \\ 4073333 & 4.073 \times 10^8 & 3266666 & 9.7599 \times 10^8 & -806667 & 8.066 \times 10^7 \\ 0 & 0 & -5378 & -806667 & 5378 & -806667 \\ 0 & 0 & 806667 & 8.0667 \times 10^7 & -806667 & 1.6133 \times 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{ys} \\ \phi_{zs} \\ d_{yc} \\ \phi_{zc} \\ d_{yd} \\ \phi_{zd} \end{bmatrix}$$

eliminando las restricciones:

$$\begin{bmatrix} 4 \times 10^5 \\ -11 \times 10^3 \\ -1.5 \times 10^5 \\ 1.5 \times 10^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.425 \times 10^9 & -4073333 & 4.0733 \times 10^8 & 0 \\ -4073333 & 32534 & 3266666 & 806667 \\ 4.0733 \times 10^8 & 3266666 & 9.7599 \times 10^8 & 8.0667 \times 10^7 \\ 0 & 806667 & 8.0667 \times 10^7 & 1.6133 \times 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{zB} \\ d_{yc} \\ \phi_{zc} \\ \phi_{zd} \end{bmatrix}$$

solucionando:

$$\begin{bmatrix} \phi_{zB} \\ d_{yc} \\ \phi_{zc} \\ \phi_{zd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00211 \\ -1.26632 \\ -0.00428 \\ 0.009405 \end{bmatrix}$$

Comparando estos desplazamientos con los que se obtuvieron al considerar  $\phi_y$ , se observa que estos últimos resultan ligeramente menores.

2.7.2 Ejemplo.- Analizar la estructura que se muestra en la figura 2.35

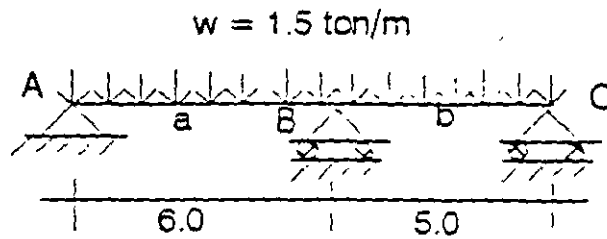


Figura 2.35

La ecuación fuerza-desplazamiento está dada por:

$$P' = K' D'$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}'_A \\ \bar{P}'_B \\ \bar{P}'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{11})_a & (K'_{12})_a & 0 \\ (K'_{21})_a & (K'_{22})_a + (K'_{11})_b & (K'_{12})_b \\ 0 & (K'_{21})_b & (K'_{22})_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}'_A \\ \bar{d}'_B \\ \bar{d}'_C \end{bmatrix}$$

Como no hay fuerza horizontal, no se genera fuerza axial. por lo tanto el desplazamiento horizontal en los nodos B y C son ceros y como no hay desplazamiento vertical en ninguno de los tres nodos, se puede considerar unicamente un grado de libertad por nodo (giro alrededor del eje z), lo que implica que solo se considerará momento flexionante, así el grado de libertad es: G.L. = 3.

Para determinar el vector de cargas se tiene que:

$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{wL_a^2}{12} = \frac{(1.5)(6)^2}{12} = 4.5 \text{ Ton} \cdot m$$

$$M_{BC} = M_{CB} = \frac{wL_b^2}{12} = \frac{(1.5)(5)^2}{12} = 3.125 \text{ Ton} \cdot m$$



Representándolos en la viga y considerando positivo al momento que representado como vector sería normal al plano que lo contiene:

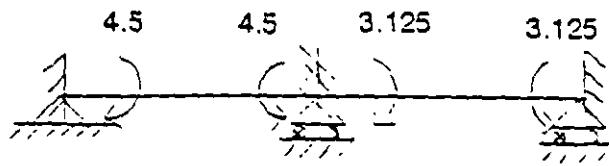


Figura 2.36

$$\bar{P}' = \begin{bmatrix} -4.5 \\ 1.375 \\ 3.125 \end{bmatrix} \quad \bar{D}' = \begin{bmatrix} \phi_A \\ \phi_B \\ \phi_C \end{bmatrix}$$

Se sabe que:

$$k'_i = T K_i T'$$

Como en este caso, el sistema local coincide con el sistema global, puesto que el eje de la barra tiene la dirección del eje de las "x" (en caso contrario sí se utilizaría un transformador); la matriz de rigideces es la misma. así de la matriz general de rigideces, considerando solo flexión y despreciando la deformación por cortante, es decir  $\phi_y$  se tiene:

$$K = K' = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

donde:

$$K'_{11} = K'_{22} = \frac{4EI}{L} \quad y \quad K'_{12} = K'_{21} = \frac{2EI}{L}$$

sustituyendo:

$$(K'_{11})_a = \frac{4EI}{6} = 0.667 EI$$

$$(K'_{12})_a = \frac{2EI}{6} = 0.333 EI$$

$$(K_{11})_b = \frac{4EI}{5} = 0.80 EI$$

$$(K_{12})_b = \frac{2EI}{5} = 0.40 EI$$

sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura:

$$\begin{bmatrix} -4.5 \\ 1.375 \\ 3.125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.667 & 0.333 & 0 \\ 0.333 & 1.467 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} EI \begin{bmatrix} \phi_A \\ \phi_B \\ \phi_C \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \phi_A \\ \phi_B \\ \phi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.68 \\ 1.87 \\ 2.97 \end{bmatrix}$$

Por compatibilidad:

$$\bar{d}_{2a} = \phi_B$$

$$\bar{d}_{1b} = \phi_B$$

$$\bar{d}_{2b} = \phi_C$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento para cada barra:

Barra "a"

$$P_{1a}' = 0.667 EI (-7.68/EI) + 0.333 EI (1.87/EI) = -4.5 \text{ ton}$$

$$P_{2a}' = 0.333 EI (-7.68/EI) + 0.667 EI (1.87/EI) = -1.31 \text{ ton}$$

Barra "b"

$$P_{1b}' = 0.8 EI (1.87/EI) + 0.4 EI (2.970/EI) = 2.685 \text{ ton}$$

$$P_{2b}' = 0.4 EI (1.87/EI) + 0.8 EI (2.970/EI) = 3.125 \text{ ton}$$

Comprobación del equilibrio:

$$P_A' = P_{1a}'; \quad P_B' = P_{2a}' + P_{1b}'; \quad P_C' = P_{2b}' \quad \text{Si checan}$$

Para obtener los momentos finales se hace lo siguiente: En las figuras 2.36 a y b se representan las acciones y los valores obtenidos con las ecuaciones fuerza-desplazamiento de la barra, respectivamente

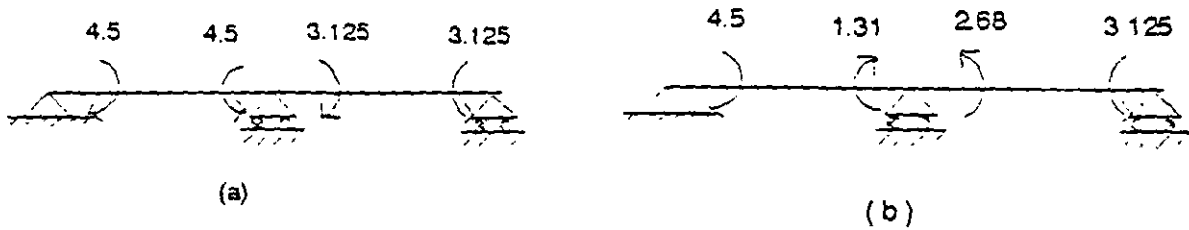


Figura 2.36

Para poder sumar los momentos de las figuras 2.37.a y 2.37.b es necesario que ambos sean acciones o reacciones por lo que se multiplica por menos uno a los momentos de la figura 2.37.a para sumarlos con los de la figura 2.37.b y así encontrar los momentos finales, estos se representan en la figura 2.37.d

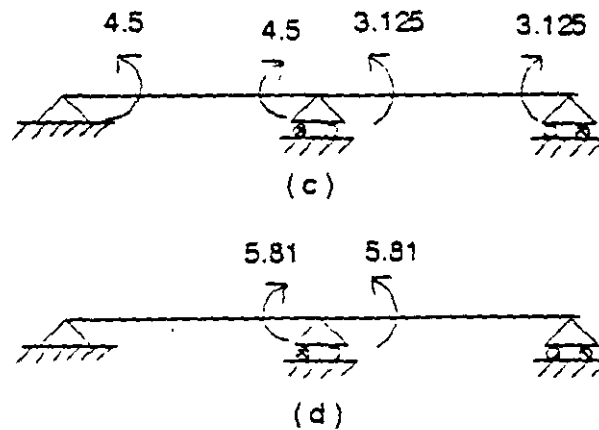


Figura 2.37

## 2.8 MARCOS PLANOS.

Se sabe que las submatrices de rigidez en el sistema global estan dadas por:

$$k'_{ij} = T k_{ij} T^T$$

en el caso de marcos planos, la matriz de rotación o transformador se determina a partir de la figura 2.38

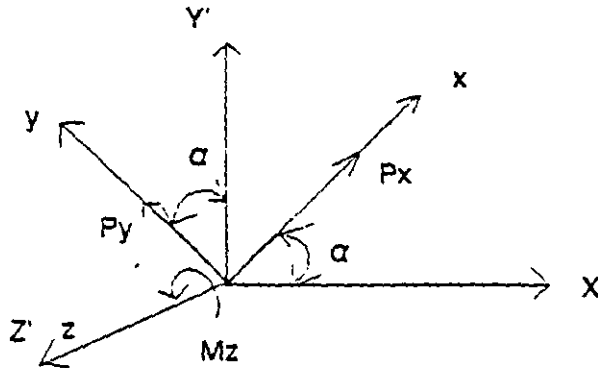


Figura 2.38

$$P'_x = P_x \text{ cosa} - P_y \text{ sena}$$

$$P'_y = P_x \text{ sena} + P_y \text{ cosa}$$

$$M'_z = M_x$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} P'_x \\ P'_y \\ M'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{cosa} & -\text{sena} & 0 \\ \text{sena} & \text{cosa} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ M_x \end{bmatrix}$$

utilizando la notación  $\cos \alpha = l$  y  $\sin \alpha = m$ , el transformador resulta:

$$T = \begin{bmatrix} l & -m & 0 \\ m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la matriz general de 12 x 12 en el sistema local, la matriz de rigideces para un elemento marco despreciando el efecto de la fuerza cortante en las deformaciones resulta:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

Haciendo la rotación del sistema local al global se obtiene:

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

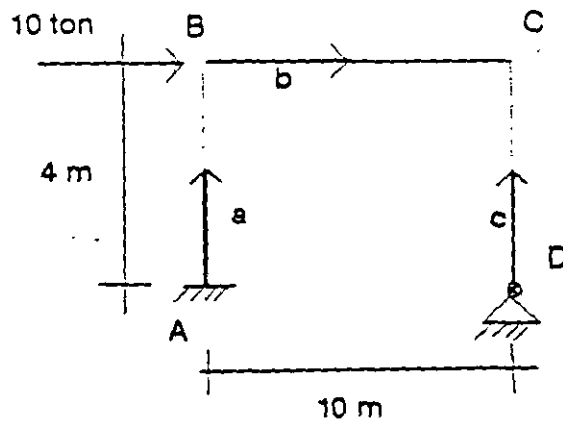
$$K'_{11} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} l^2 + \frac{12EI_z}{L^3} m^2 & (\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}) lm & -\frac{6EI_z}{L^2} m \\ (\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}) lm & \frac{EA}{L} m^2 + \frac{12EI_z}{L^3} l^2 & \frac{6EI_z}{L^2} l \\ -\frac{6EI_z}{L^2} m & \frac{6EI_z}{L^2} l & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{EA}{L} l^2 + \frac{12EI_z}{L^3} m^2\right) & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}\right) lm & -\frac{6EI_z}{L^2} m \\ -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}\right) lm & -\left(\frac{EA}{L} m^2 + \frac{12EI_z}{L^3} l^2\right) & \frac{6EI_z}{L^2} l \\ \frac{6EI_z}{L^2} m & -\frac{6EI_z}{L^2} l & \frac{2EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = K'_{12}$$

$$K'_{22} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} l^2 + \frac{12EI_z}{L^3} m^2 & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}\right) lm & \frac{6EI_z}{L^2} m \\ \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}\right) lm & \frac{EA}{L} m^2 + \frac{12EI_z}{L^3} l^2 & -\frac{6EI_z}{L^2} l \\ \frac{6EI_z}{L^2} m & -\frac{6EI_z}{L^2} l & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

2.8.1 Analizar el marco mostrado en la figura 2.39



col 30x30 cm.  
trabes 30x60 cm.  
 $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$   
 $E = 14000 \sqrt{f'_c}$

Figura 2.39

El grado de libertad para el marco en cuestión es  $GL = 7$  y su ecuación fuerza-desplazamiento está dada por:

$$\begin{bmatrix} P'_B \\ P'_C \\ P'_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{22a} + K'_{11b} & K'_{12b} & 0 \\ K'_{21b} & K'_{22b} - K'_{22c} & K'_{21c} \\ 0 & K'_{12c} & K'_{11c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_B \\ D'_C \\ D'_D \end{bmatrix}$$

Para valuar las submatrices de rigidez y con estas la ecuación fuerza-desplazamiento, se sugiere organizar la información en la siguiente tabla. Las unidades que se manejan en este problema son toneladas y centímetros.

Barra	A	E	I	EA	EI	L	I	m
a,c	900	221.359	67500	1.9922x10 <sup>5</sup>	1.4941x10 <sup>7</sup>	400	0	1
b	1800	221.359	540000	3.9844x10 <sup>5</sup>	1.1953x10 <sup>8</sup>	1000	1	0

Sustituyendo en las submatrices:

Barra "a" y "c"

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 2.802 & 0 & -560.314 \\ 0 & 498.058 & 0 \\ -560.314 & 0 & 1.494 \times 10^5 \end{bmatrix} \quad K'_{12} = \begin{bmatrix} -2.802 & 0 & -560.314 \\ 0 & -498.058 & 0 \\ 560.314 & 0 & 74.709 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = \begin{bmatrix} -2.802 & 0 & 560.314 \\ 0 & -498.058 & 0 \\ -560.314 & 0 & 74.709 \end{bmatrix} \quad K'_{22} = \begin{bmatrix} 2.802 & 0 & 560.314 \\ 0 & 498.058 & 0 \\ 560.314 & 0 & 1.494 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

Barra "b"

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 398.46 & 0 & 0 \\ 0 & 1.434 & 717.204 \\ 0 & 717.204 & 4.781 \times 10^5 \end{bmatrix} \quad K'_{12} = \begin{bmatrix} -398.46 & 0 & 0 \\ 0 & -1.434 & -717.204 \\ 0 & 717.204 & 2.391 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = \begin{bmatrix} -398.46 & 0 & 0 \\ 0 & -1.434 & -717.204 \\ 0 & 717.204 & 2.391 \times 10^5 \end{bmatrix} \quad K'_{22} = \begin{bmatrix} 398.46 & 0 & 0 \\ 0 & -1.434 & -717.204 \\ 0 & 717.204 & 2.781 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura se tiene:

$$\begin{array}{cccccccccc|l}
 10 & 401.27 & 0 & 560.31 & -398.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d'_{xb} \\
 0 & 0 & 499.49 & 717.2 & 0 & -1.43 & 717.2 & 0 & 0 & 0 & d'_{yb} \\
 0 & 560.31 & 717.2 & 6.276 \times 10^5 & 0 & -717.20 & 2.39 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 & \phi'_{zb} \\
 0 & -398.45 & 0 & 0 & 401.25 & 0 & 560.31 & -2.80 & 0 & 560.31 & d'_{xc} \\
 0 & 0 & -1.43 & -717.2 & 0 & 499.49 & -717.20 & 0 & -489.36 & 0 & d'_{yc} \\
 0 & 0 & 717.2 & 2.39 \times 10^5 & 560.31 & -717.2 & 6.276 \times 10^5 & -560.31 & 0 & 74708.5 & \phi'_{zc} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -2.8 & 0 & -560.3 & 2.80 & 0 & -560.31 & d'_{zd} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -489.36 & 0 & 0 & 498.36 & 0 & \phi'_{zd} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 560.31 & 0 & 74708.5 & -560.31 & 0 & 1.494 \times 10^5 & d'_{zd} \\
 & & & & & & & & & & \phi'_{zd}
 \end{array}$$

El sistema de ecuaciones resulta de 9x9, sin embargo el grado de libertad que se determinó al inicio del problema es  $GL = 7$ . por lo que hay que eliminar los renglones y columnas correspondientes a las restricciones, es decir los renglones correspondientes a  $d'_{xb}$  y  $d'_{yb}$  cuyos valores son conocidos, dado que son igual con cero. La ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura considerando sus condiciones de frontera resulta:

$$\begin{array}{cccccccc|l}
 10 & 401.27 & 0 & 560.31 & -398.45 & 0 & 0 & 0 & d'_{xb} \\
 0 & 0 & 499.49 & 717.20 & 0 & -1.43 & 717.20 & 0 & d'_{yb} \\
 0 & 560.31 & 717.2 & 6.276 \times 10^5 & 0 & -717.20 & 2.39 \times 10^5 & 0 & \phi'_{zb} \\
 0 & -398.45 & 0 & 0 & 401.25 & 0 & 560.31 & 560.31 & d'_{xc} \\
 0 & 0 & -1.43 & -717.2 & 0 & 499.49 & -717.20 & 0 & d'_{yc} \\
 0 & 0 & 717.2 & 2.39 \times 10^5 & 560.31 & -717.2 & 6.276 \times 10^5 & 74708.5 & \phi'_{zc} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 560.31 & 0 & 74708.5 & 1.494 \times 10^5 & \phi'_{zd} \\
 & & & & & & & & \phi'_{zd}
 \end{array}$$

Solucionando el sistema:

$$\begin{array}{l}
 d'_{xb} \\
 d'_{yb} \\
 \phi'_{zb} \\
 d'_{xc} \\
 d'_{yc} \\
 \phi'_{zc} \\
 \phi'_{zd}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 3.34 \\
 4.7 \times 10^{-3} \\
 -2.8 \times 10^{-5} \\
 3.34 \\
 -4.7 \times 10^{-3} \\
 -4.5 \times 10^{-4} \\
 -1.2 \times 10^{-2}
 \end{array}$$



Por compatibilidad:

$$\begin{aligned} d'_{1a} &= 0 & d'_{2a} &= d'_B \\ d'_{1b} &= d'_B & d'_{2b} &= d'_C \\ d'_{1c} &= d'_D & d'_{2c} &= d'_C \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento de la barra en el sistema global:

$$\begin{aligned} P'_1 &= K'_{11} D'_1 + K'_{12} D'_2 \\ P'_2 &= K'_{21} D'_1 + K'_{22} D'_2 \end{aligned}$$

Barra "a"

$$P'_{1a} = K'_{11a} (0) + K'_{12a} D'_B$$

$$\begin{bmatrix} P'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.802 & 0 & -560.314 \\ 0 & -498.058 & 0 \\ 560.314 & 0 & 74708.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.34 \\ 4.7 \times 10^{-3} \\ -2.8 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.79 \\ -2.34 \\ 1663.07 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2a} = K'_{21a} (0) + K'_{22a} D'_B$$

$$\begin{bmatrix} P'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.802 & 0 & 560.314 \\ 0 & 498.058 & 0 \\ 560.314 & 0 & 1.4942 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.34 \\ 4.7 \times 10^{-3} \\ -2.8 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.79 \\ 2.34 \\ 1452.03 \end{bmatrix}$$

En forma similar para las otras dos barras se obtiene:

Barra "b"

$$\begin{bmatrix} P'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.21 \\ -2.34 \\ -152.02 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.21 \\ 2.34 \\ -884.8 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$\begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.21 \\ -2.34 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.21 \\ -2.34 \\ 884.8 \end{bmatrix}$$

Comprobación del equilibrio:

Nodo B:

$$P'_B = P'_{2a} + P'_{1b}$$
$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.79 \\ 2.34 \\ 1452 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.21 \\ -2.34 \\ -1452 \end{bmatrix}$$

Nodo D:

$$P'_C = P'_{2b} + P'_{2c}$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.21 \\ 2.34 \\ 884.80 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.21 \\ -2.34 \\ -884.80 \end{bmatrix}$$

## ROTACION DEL SISTEMA GLOBAL AL LOCAL.

La rotación del sistema global al local se hace mediante la matriz de rotación traspuesta, en igual forma que en armaduras, así:

$$P = T^T P'$$

Barra a:

$$P_{1a} = (T) a P'_{1a}$$

$$P_{1a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7.79 \\ -2.34 \\ 1663.07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.34 \\ 7.79 \\ 1663.07 \end{bmatrix}$$

$$P_{2a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.79 \\ 2.34 \\ 1452.03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.34 \\ -7.79 \\ 1452.03 \end{bmatrix}$$

En forma similar para las otras dos barras se tiene:

Barra "b"

$$P_{1b} = \begin{bmatrix} 2.21 \\ -2.34 \\ -1452.03 \end{bmatrix} \quad P_{2b} = \begin{bmatrix} -2.21 \\ 2.34 \\ -884.80 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$P_{1c} = \begin{bmatrix} 2.34 \\ 2.21 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{2c} = \begin{bmatrix} -2.34 \\ -2.21 \\ 884.80 \end{bmatrix}$$

En la figura 2.40.a se muestran las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en los extremos de cada barra y en la figura 2.40.b se muestran las fuerzas axiales.

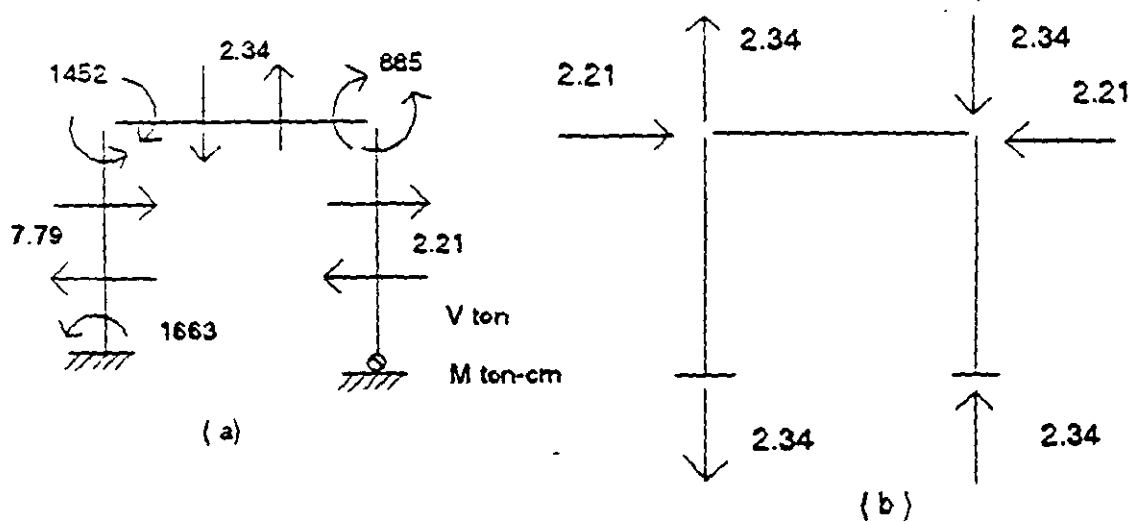


Figura 2.40

2.8.2 Ejemplo.- Analizar el marco que se muestra en la figura 2.41, considérese que la barra "d" esta articulada en sus extremos.

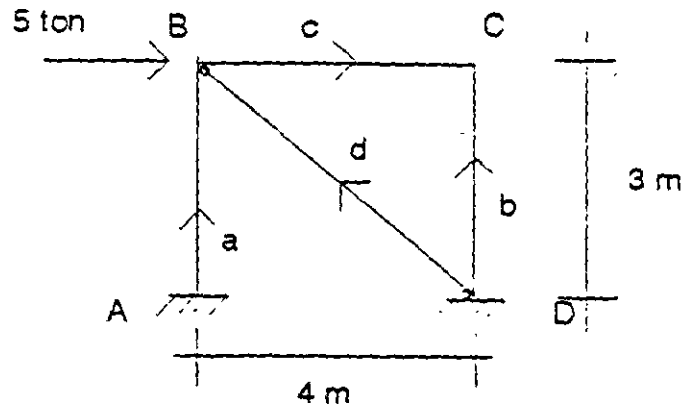


Figura 2.41

Las propiedades consideradas para cada barra se muestran en la siguiente tabla. Las unidades utilizadas para este problema son toneladas y centímetros.

El grado de libertad para el marco en cuestión es  $GL = 6$  y su ecuación fue desplazamiento es:

$$\begin{bmatrix} P_B \\ P_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22a} + K_{22d} + K_{11c} & K_{12c} \\ K_{21c} & K_{22c} + K_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_B \\ D_C \end{bmatrix}$$

Barra	A	E	I	EA	EI	L	l	m
a y b	900	141.421	67500	127279	9545918	300	0	1
c	1250	141.421	260417	176776	36828433	400	1	0
d	2520	6	5927040	15120	35562240	500	-0.8	0.6

Las unidades consideradas son toneladas y centímetros. Sustituyendo en las submatrices.

Barras a y b

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 4.243 & 0 & -636.395 \\ 0 & 424.263 & 0 \\ -636.395 & 0 & 127279 \end{bmatrix} \quad K'_{12} = \begin{bmatrix} -4.243 & 0 & -636.395 \\ 0 & -424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 63639 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = \begin{bmatrix} -4.243 & 0 & 0 \\ 0 & -424.263 & 0 \\ -636.395 & 0 & 63639 \end{bmatrix} \quad K'_{22} = \begin{bmatrix} 4.243 & 0 & 636.395 \\ 0 & 424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 127279 \end{bmatrix}$$

Barra c

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 441.94 & 0 & 0 \\ 0 & 6.905 & 1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 368284.33 \end{bmatrix} \quad K'_{12} = \begin{bmatrix} -441.94 & 0 & 0 \\ 0 & -6.905 & 1381.066 \\ 0 & -1381.066 & 184142.17 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = \begin{bmatrix} -441.94 & 0 & 0 \\ 0 & -6.905 & -1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 184142.17 \end{bmatrix} \quad K'_{22} = \begin{bmatrix} 441.94 & 0 & 0 \\ 0 & 6.905 & -1381.066 \\ 0 & -1381.066 & 368284.33 \end{bmatrix}$$

De la matriz general de 12x12 en el sistema local, la matriz de rigideces para el elemento diagonal el cual solo estará sujeto a carga axial resulta:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Haciendo la rotación del sistema local al global se tiene:

$$K' = TKT^T$$

$$K'_{11} = K'_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} l^2 & \frac{EA}{L} lm & 0 \\ \frac{EA}{L} lm & \frac{EA}{L} m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = K'_{21} = \begin{bmatrix} 1 & -m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} l^2 & \frac{EA}{L} lm & 0 \\ \frac{EA}{L} lm & \frac{EA}{L} m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sustituyendo:

Barra D

$$K'_{11} = K'_{22} = \begin{bmatrix} 19.354 & -14.515 & 0 \\ -14.515 & 10.886 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K'_{12} = K'_{21} = \begin{bmatrix} -19.354 & 14.515 & 0 \\ 14.515 & -10.886 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura se tiene:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 465.537 & -14.515 & 636.395 & -441.94 & 0 & 0 \\ -14.515 & 442.054 & 1381.066 & 0 & -6.905 & 1381.066 \\ 636.395 & 1381.066 & 495563.33 & 0 & -1381.066 & 184142.17 \\ -441.94 & 0 & 0 & 446.183 & 0 & 636.395 \\ 0 & -6.905 & -1381.066 & 0 & 431.168 & -1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 184142.17 & 636.395 & -1381.066 & 495563.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_{xB} \\ d'_{yB} \\ \phi'_{xB} \\ d'_{xC} \\ d'_{yC} \\ \phi'_{xC} \end{bmatrix}$$

Solucionando el sistema se tiene:

$$\begin{bmatrix} d'_{xB} \\ d'_{yB} \\ \phi'_{zB} \\ d'_{xC} \\ d'_{yC} \\ \phi'_{zC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.19279 \\ 7.54633 \times 10^{-3} \\ -1.99028 \times 10^{-4} \\ 0.19124 \\ -1.14398 \times 10^{-3} \\ -1.95852 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Por compatibilidad.

$$\begin{aligned} d'_{1a} &= 0 & d'_{2a} &= d'_B \\ d'_{1b} &= 0 & d'_{2b} &= d'_C \\ d'_{1c} &= d'_B & d'_{2c} &= d'_C \\ d'_{1d} &= 0 & d'_{2d} &= d'_B \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento de la barra en el sistema global.

$$\begin{aligned} P'_1 &= K_{11}' D'_1 + K_{12}' D'_2 \\ P'_2 &= K_{21}' D'_1 + K_{22}' D'_2 \end{aligned}$$

Barra "a"

$$P'_{1a} = K_{11a}'(0) + K_{12a}' d'_B$$

$$\begin{bmatrix} P'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.243 & 0 & -636.395 \\ 0 & -424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 63639 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1928 \\ 7.5463 \times 10^{-3} \\ -1.9903 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.69 \\ -3.20 \\ 110.03 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2a} = K_{21a}'(0) + K_{22a}' d'_B$$

$$\begin{bmatrix} P'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.243 & 0 & 636.395 \\ 0 & 424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 127279 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1928 \\ 7.5463 \times 10^{-3} \\ -1.9903 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ 3.20 \\ 97.36 \end{bmatrix}$$

Barra "b"

$$P_{1b}' = K_{11b}'(0) + K_{12b}'d_c'$$

$$\begin{bmatrix} P_{x1}' \\ P_{y1}' \\ M_{z1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.243 & 0 & -636.395 \\ 0 & -424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 63639 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1912 \\ -1.144 \times 10^{-3} \\ -1.9585 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.69 \\ 0.49 \\ 109.24 \end{bmatrix}$$

$$P_{2b}' = K_{21b}'(0) + K_{22b}'d_c'$$

$$\begin{bmatrix} P_{x2}' \\ P_{y2}' \\ M_{z2}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.243 & 0 & 636.395 \\ 0 & 424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 127279 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.19124 \\ -1.144 \times 10^{-3} \\ -1.9585 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ 96.78 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$P_{1c}' = K_{11c}'d_B' + K_{12c}'d_c'$$

$$\begin{bmatrix} P_{x1}' \\ P_{y1}' \\ M_{z1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 441.94 & 0 & 0 \\ 0 & 6.905 & 1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 368284.53 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1928 \\ 7.5463 \times 10^{-3} \\ -1.9903 \times 10^{-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -441.94 & 0 & 0 \\ 0 & -6.905 & 1381.066 \\ 0 & -1381.066 & 184142.17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1912 \\ -1.144 \times 10^{-3} \\ -1.9535 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.69 \\ 0.49 \\ -97.36 \end{bmatrix}$$

$$P_{2c}' = K_{21c}'d_B' + K_{22c}'d_c'$$

$$\begin{bmatrix} P_{x2}' \\ P_{y2}' \\ M_{z2}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -441.94 & 0 & 0 \\ 0 & -6.905 & -1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 184142 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1928 \\ 7.5463 \times 10^{-3} \\ -1.9903 \times 10^{-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 441.94 & 0 & 0 \\ 0 & 6.905 & -1381.066 \\ 0 & -1381.066 & 368284 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1912 \\ -1.144 \times 10^{-3} \\ -1.9585 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.69 \\ 0.49 \\ -96.78 \end{bmatrix}$$

Barra "d"

$$P_{1d}' = K_{11d}'(0) + K_{12d}'d_B'$$



$$\begin{bmatrix} P'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19.354 & 14.515 & 0 \\ 14.515 & -10.886 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1928 \\ 7.5463 \times 10^{-3} \\ -1.9903 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.62 \\ 2.72 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{2d}' = K_{21d}'(0) + K_{22d}'d_B''$$

$$\begin{bmatrix} P'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.354 & -14.515 & 0 \\ -14.515 & 10.886 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1928 \\ 7.5463 \times 10^{-3} \\ -1.9903 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.62 \\ -2.72 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comprobación del equilibrio.

Nodo B.

$$P_B' = P_{2a}' + P_{1c}' + P_{2d}'$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ 3.20 \\ 97.36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ -97.36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.62 \\ -2.72 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nodo C.

$$P_C' = P_{2b}' + P_{2c}'$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ 96.78 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.69 \\ 0.49 \\ -96.78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rotación del sistema global al local.

$$P = T^t p'$$

Barra "a"

$$P_{1a} = (T^t)_a P_{1a}'$$

$$P_{1a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.69 \\ -3.20 \\ 110.03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.20 \\ 0.69 \\ 110.03 \end{bmatrix}$$

$$P_{2a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.69 \\ 3.20 \\ 97.36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.20 \\ -0.69 \\ 97.36 \end{bmatrix}$$

Barra "b"

$$P_{1b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.69 \\ 0.49 \\ 109.24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.49 \\ 0.69 \\ 109.24 \end{bmatrix}$$

$$P_{2b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ 96.78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.49 \\ -0.69 \\ 96.78 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$P_{1c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ -97.36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ 97.36 \end{bmatrix}$$

$$P_{2c} = \begin{bmatrix} -0.69 \\ 0.49 \\ 96.78 \end{bmatrix}$$

Barra "d"

$$P_{1d} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.62 \\ 2.72 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.528 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{2d} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.62 \\ -2.72 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.528 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En la figura 2.42 se representan fuerzas cortantes y momentos flexionantes y en la figura 2.43 fuerzas normales.

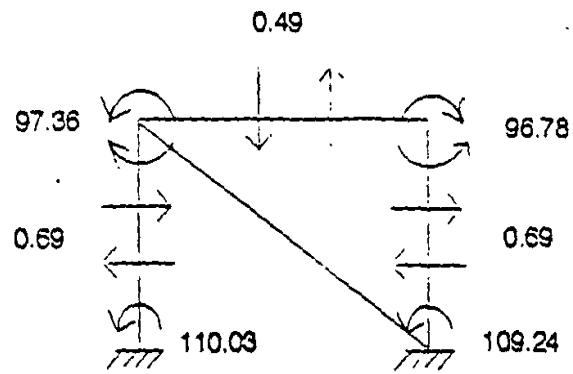


Figura 2.42

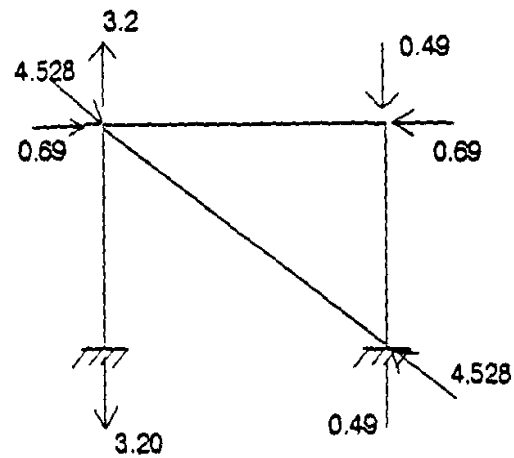


Figura 2.43

## 2.9 RETICULA O EMPARRILLADO.

Una retícula es una estructura a la cual se le aplica la carga en planos perpendiculares al plano que la contiene. Por lo cual será una estructura con tres grados de libertad por nodo, uno lineal y dos angulares como se vió en el capítulo uno.

En igual forma que en armaduras y marcos primero se determinará las submatrices de rigidez en el sistema global, para esto se sabe que:

$$K'_i = T K_i T'$$

y en el caso de retículas la matriz de rotación T se determina a partir de la figura 2.45

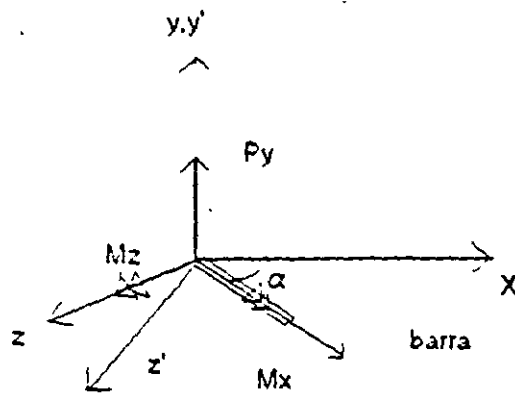


Figura 2.45

de la figura 2.45 se puede observar que:

$$M'_x = M_x \cos \alpha - M_z \operatorname{sen} \alpha$$

$$P'_y = P_y$$

$$M'_z = M_x \operatorname{sen} \alpha + M_z \cos \alpha$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M'_x \\ P'_y \\ M'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ P_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la matriz general de 12x12 en el sistema local, la matriz de rigideces para un elemento reticula es de la forma:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Haciendo la rotación del sistema local al global se obtiene:

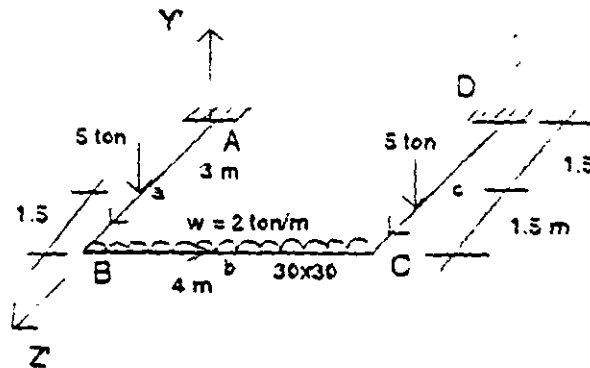
$$K_{11} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} l^2 + \frac{4EI}{L} m^2 & -\frac{6EI}{L^2} m & (\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}) lm \\ -\frac{6EI}{L^2} m & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} l \\ (\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}) lm & \frac{6EI}{L^2} & \frac{GJ}{L} m^2 + \frac{4EI}{L} l^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{GJ}{L} l^2 + \frac{4EI}{L} m^2 & \frac{6EI}{L^2} m & -(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L}) lm \\ -\frac{6EI}{L^2} m & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} l \\ -(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L}) lm & -\frac{6EI}{L^2} l & -\frac{GJ}{L} m^2 + \frac{2EI}{L} l^2 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = K'_{12}^t$$

$$K'_{22} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} l^2 + \frac{4EI}{L} m^2 & \frac{6EI}{L^2} m \left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L} \right) l m \\ \frac{6EI}{L^2} m & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} l \\ \left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L} \right) l m & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{GJ}{L} m^2 + \frac{4EI}{L} l^2 \end{bmatrix}$$

2.9.1 Ejemplo.- Analizar la retícula mostrada en la figura 2.46



$$E = \sqrt{f'_c} \text{ kg/cm}^2$$

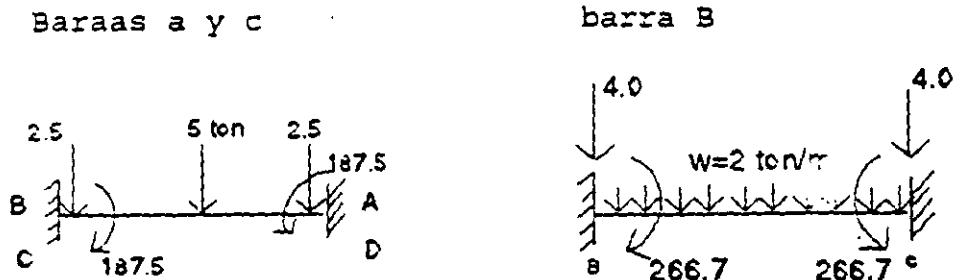
$$f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$$

Figura 2.46

La ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura en el sistema global está dada por:

$$\begin{bmatrix} P'_B \\ P'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{22a} + K'_{11b} & K'_{12b} \\ K'_{21} & K'_{22b} + K'_{22c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_B \\ D'_C \end{bmatrix}$$

Las unidades utilizadas para determinar el vector de caras serán toneladas para las cortantes y toneladas-centímetro para los momentos, así:



$$M = \frac{Pl}{8} = 187.5 \text{ Ton-cm}$$

$$M = \frac{wl^2}{12} = 266.7 \text{ Ton-cm}$$

$$V = \frac{P}{2} = 2.5 \text{ Ton}$$

$$V = \frac{wl}{2} = 4 \text{ Ton}$$

El vector de cargas y el de desplazamientos se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} M'_{xB} \\ P'_{yB} \\ M'_{zB} \\ M'_{xC} \\ P'_{yC} \\ M'_{zC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ -266.7 \\ -187.5 \\ -6.5 \\ 266.7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \phi'_{xB} \\ d'_{yB} \\ \phi'_{zB} \\ \phi'_{xC} \\ d'_{yC} \\ \phi'_{zC} \end{bmatrix} = ?$$

Para valuar las submatrices de rigidez para cada barra se sugiere organizar la información en la siguiente tabla:

Barra	E	G	I	J	L	EI	GJ	i	m
a y c	221.36	88.54	540000	370980	300	$1.1953 \times 10^7$	$3.2846 \times 10^7$	0	1
b	221.36	88.54	67500	114210	400	$1.4941 \times 10^7$	$1.0112 \times 10^7$	1	0

Para determinar el momento polar de inercia J se utiliza la expresión  $J = \beta b^3 h$  donde  $\beta$  es función de la relación  $h/b$ , como se indica en la siguiente tabla.

h/b	1	1.5	1.75	2	2.5	3	4	6	8	10
$\beta$	0.141	0.196	0.214	0.229	0.245	0.263	0.281	0.3	0.313	0.33

Sustituyendo en las matrices transformadas al sistema global:

Barras a y c

$$K'_{11a,c} = \begin{bmatrix} 1593733.3 & -7968.87 & 0 \\ -7968.87 & 53.13 & 0 \\ 0 & 0 & 10948.56 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12a,c} = \begin{bmatrix} 796886.67 & 7968.87 & 0 \\ -7968.87 & -53.13 & 0 \\ 0 & 0 & -10948.56 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21a,c} = K'^t_{12a,c}$$

$$K'_{22a,c} = \begin{bmatrix} 1593733.3 & 7968.87 & 0 \\ 7968.87 & 53.13 & 0 \\ 0 & 0 & 10948.56 \end{bmatrix}$$

Barra b

$$K'_{11b} = \begin{bmatrix} 25280.38 & 0 & 0 \\ 0 & 2.80 & 560.31 \\ 0 & 560.31 & 149417.33 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12b} = \begin{bmatrix} -25280.38 & 0 & 0 \\ 0 & -2.80 & 560.31 \\ 0 & -560.31 & 74708.67 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = K'^t_{12}$$

$$K'_{22b} = \begin{bmatrix} 25280.38 & 0 & 0 \\ 0 & 2.80 & -560.31 \\ 0 & -560.31 & 149417.33 \end{bmatrix}$$



sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento:

$$\begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ -266.7 \\ -187.5 \\ -6.5 \\ -266.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1619013.7 & 7968.87 & 0 & -25280.38 & 0 & 0 \\ 7968.37 & 55.93 & 560.31 & 0 & -2.80 & 560.31 \\ 0 & 560.31 & 258905.89 & 0 & -560.31 & 74708.67 \\ -25280.38 & 0 & 0 & 1619013.7 & 7969.87 & 0 \\ 0 & -2.80 & -560.31 & 7968.87 & 55.93 & -560.31 \\ 0 & 560 & 74708.67 & 0 & -560.31 & 258905.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'_{xB} \\ d'_{yB} \\ \phi'_{zB} \\ \phi'_{xC} \\ d'_{yC} \\ \phi'_{zC} \end{bmatrix}$$

Solucionando el sistema:

$$\begin{bmatrix} \phi'_{xB} \\ d'_{yB} \\ \phi'_{zB} \\ \phi'_{xC} \\ d'_{yC} \\ \phi'_{zC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.001976 \\ -0.418715 \\ -0.001447 \\ 0.001976 \\ -0.4187151 \\ 0.0014479 \end{bmatrix}$$

Por compatibilidad

$$\begin{aligned}
 d'_{1a} &= 0 & d'_{2a} &= d'_{2b} \\
 d'_{1b} &= d'_{1c} & d'_{2b} &= d'_{2c} \\
 d'_{1c} &= 0 & d'_{2c} &= d'_{2c}
 \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento para cada barra en el sistema global:

$$\begin{aligned}
 P'_1 &= K'_{11} d'_1 + K'_{12} d'_2 \\
 P'_2 &= K'_{21} d'_1 + K'_{22} d'_2
 \end{aligned}$$

Barra "a"

$$P'_{1a} = K'_{11a} d'_{1a} + K'_{12a} d'_{2a}$$

$$\begin{bmatrix} M'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 796886.67 & 7968.87 & 0 \\ -7968.87 & -53.13 & 0 \\ 0 & 0 & -109488.56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0019769 \\ -0.418715 \\ -0.0014479 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1762 \\ 6.5 \\ 158.5 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2a} = K'_{21a} d'_{1a} + K'_{22a} d'_{2a}$$

$$\begin{bmatrix} M'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1593733.33 & 7968.87 & 0 \\ 7968.87 & 53.13 & 0 \\ 0 & 0 & 109488.56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0019769 \\ -0.418715 \\ -0.0014479 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ -158.5 \end{bmatrix}$$

en forma similar para las otras barras se tiene:

Barra "b"

$$\begin{bmatrix} M'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -108.2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} M'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 108.2 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$\begin{bmatrix} M'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1762 \\ 6.50 \\ -158.5 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} M'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ 158.5 \end{bmatrix}$$

Comprobación del equilibrio:

$$P'_B = P'_{2a} + P'_{1b}$$

$$\begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ -266.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ -158.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -108.2 \end{bmatrix} \quad \text{sicumple}$$

$$P'_c = P'_{2b} + P'_{2c}$$

$$\begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ 266.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 108.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ 158.5 \end{bmatrix} \quad \text{si cumple}$$

Para la rotación del sistema global al local se sabe que :

$$P = T^T P'$$

Barra "a"

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1762 \\ 6.5 \\ 158.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 158.5 \\ 6.5 \\ 1762 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ -158.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -158.5 \\ -6.5 \\ 187.5 \end{bmatrix}$$

en forma similar para las barra b y c

Barra "b"

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -108.2 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} M_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 108.2 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -158.5 \\ 6.5 \\ 158.5 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} M_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 158.5 \\ -6.5 \\ 187.5 \end{bmatrix}$$

Los elementos mecánicos finales se obtienen en forma similar a los de los marcos así:

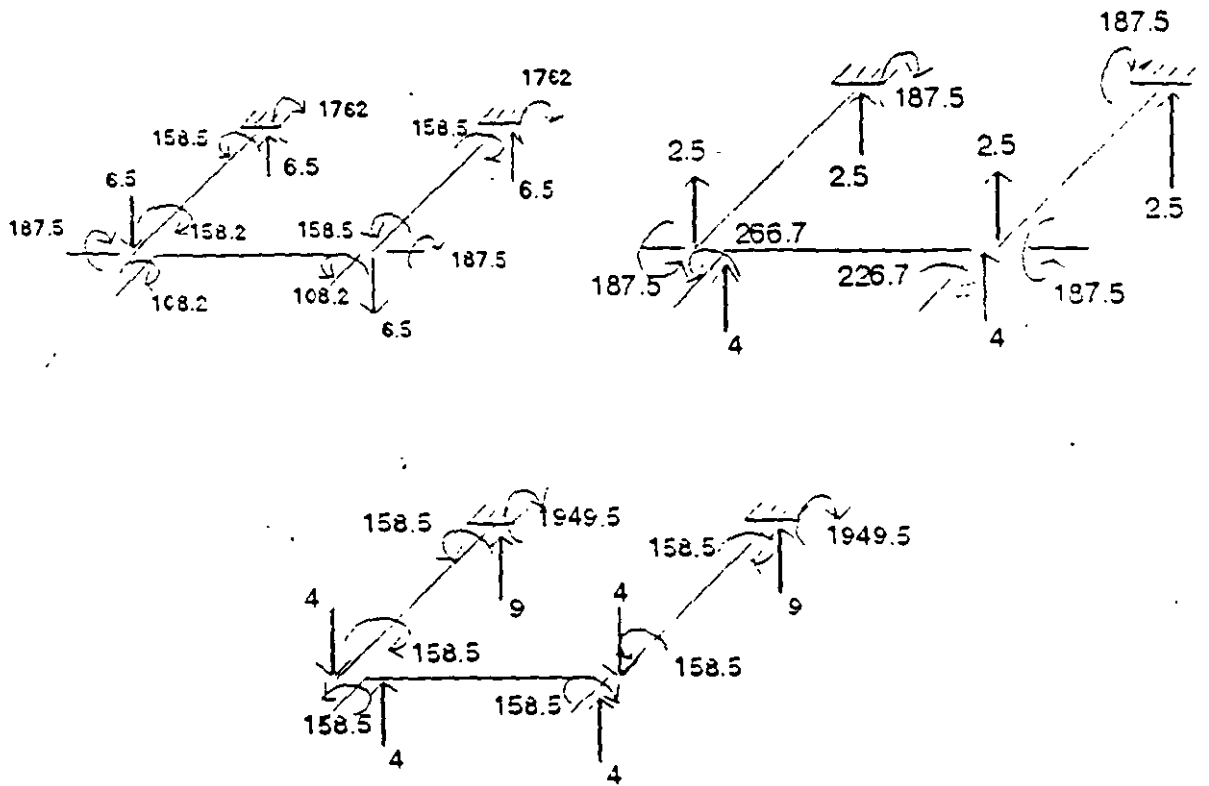


Figura 2.47

## 2.10 ESTRUCTURAS EN EL ESPACIO

Rotación del sistema local al global de una barra en el espacio:

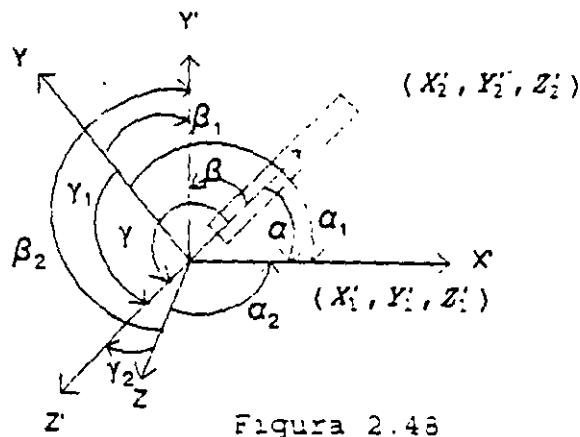


Figura 2.48

Se sabe:

$$L = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{x'_2 - x'_1}{L} \quad \cos \beta = \frac{y'_2 - y'_1}{L} \quad \cos \gamma = \frac{z'_2 - z'_1}{L}$$

Por otro lado:

$$P_{x'} = P_x \cos \alpha + P_y \cos \alpha_1 + P_z \cos \alpha_2$$

$$P_{y'} = P_y \cos \beta + P_x \cos \beta_1 + P_z \cos \beta_2$$

$$P_{z'} = P_z \cos \gamma + P_x \cos \gamma_1 + P_y \cos \gamma_2$$

en igual forma para momentos en forma matricial y llamando

$$\cos \alpha_i = l_i ; \quad \cos \beta_i = m_i ; \quad \cos \gamma_i = n_i$$

$$\begin{bmatrix} P_{x'} \\ P_{y'} \\ P_{z'} \\ M_{x'} \\ M_{y'} \\ M_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l_1 & l_2 & 0 & 0 & 0 \\ m & m_1 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ n & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & l_1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & m & m_1 & m_2 \\ 0 & 0 & 0 & n & n_1 & n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

de donde:

$$T = \begin{array}{ccc|ccc} 1 & l_1 & l_2 & 0 & 0 & 0 \\ m & m_1 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ n & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & l_1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & m & m_1 & m_2 \\ 0 & 0 & 0 & n & n_1 & n_2 \end{array}$$

De la matriz de rotación  $l$ ,  $m$ , y  $n$  representan los cosenos directores del eje "x" en el sistema global de referencia. Para determinar los cosenos directores  $l_1$ ,  $m_1$  y  $n_1$  del eje "y" partimos de seleccionar a dicho eje perpendicular a los ejes  $x$  y  $z'$  de tal forma que el producto vectorial de  $z'$  con  $x$  coincida con el eje  $y$ ; así:

$$\bar{y} = \bar{z}' \times \bar{x} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & m & n \end{bmatrix} = -m_1 i - l_1 j + o_k$$

como  $\bar{y}$  no es unitario entonces:

$$\hat{y} = \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2}} \bar{y}$$

si llamamos  $D = \sqrt{l^2 + m^2}$ , entonces

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} -\frac{m}{D} \\ \frac{l}{D} \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo que:

$$l_1 = -\frac{m}{D}; \quad m_1 = \frac{l}{D} \quad \text{y} \quad n_1 = 0$$

El eje z se determinará por la condición de ortogonalidad

$$\bar{z} = \hat{x} \times \hat{y} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} i & j & k \\ l & m & n \\ -m & l & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{z} = \frac{1}{D} [-n l_1 - m n_j + (l^2 + m^2) K]$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{\frac{1}{D^2} [n^2 l^2 + m^2 n^2 + (l^2 + m^2)^2]}$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{\frac{n^2 (l^2 + m^2) + (l^2 + m^2)^2}{(l^2 + m^2)}}$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{\frac{(l^2 + m^2) + (n^2 + l^2 + m^2)^2}{(l^2 + m^2)}}$$

$$|\bar{z}| = 1$$

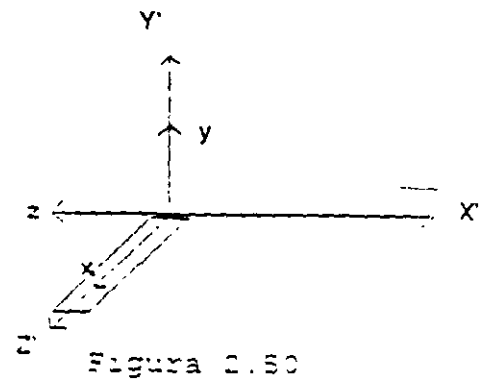
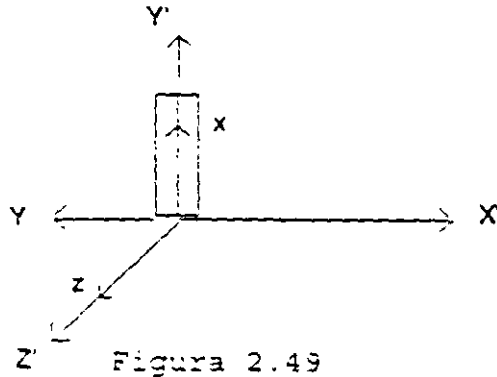
por lo que  $\bar{z} = \hat{z}$  y  $l_1 = -n \frac{l}{D}$  ;  $m_1 = -m \frac{n}{D}$

$$n_1 = \frac{l^2 + m^2}{\sqrt{l^2 + m^2}} = \sqrt{l^2 + m^2} = D$$

finalmente el transformador resulta:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{m}{D} & -\frac{nl}{D} & | & 0 & 0 & 0 \\ m & \frac{l}{D} & -\frac{mn}{D} & | & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & D & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & -\frac{m}{D} & -\frac{ln}{D} \\ 0 & 0 & 0 & | & m & \frac{l}{D} & -\frac{mn}{D} \\ 0 & 0 & 0 & | & n & 0 & D \end{bmatrix}$$

En el caso de que el eje "x" coincida con y' los ejes "z" & "z'" coincidirán como se muestra en la siguiente figura 4.29.



y el transformador resulta:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y en el caso de que el eje "x" coincida con z' los ejes "y" y "y'" coincidirán también como se muestra en la figura 2.50, el transformador resulta:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# MODIFICACION DE LA MATRIZ DE RIGIDECES

## 3.1 MATRIZ DE RIGIDECES MODIFICADA

La matriz de rigideces se modifica con la finalidad de considerar diversas condiciones de frontera. Supongase una estructura como se muestra en la siguiente figura:

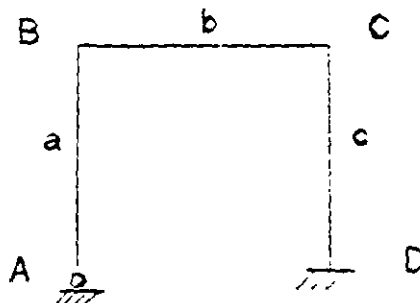
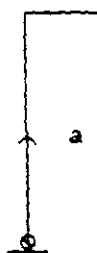


Figura 3.1

Si se consideran unicamente los grados de libertad de los nodos B y C para el análisis del marco, entonces la matriz de rigideces de la barra "a" debe modificarse para tomar en cuenta el grado de libertad del nodo A. La modificación se realiza considerando las condiciones de frontera es decir:



$$\begin{aligned} M_1 &= 0 & \phi_1 &\neq 0 \\ N_1 &\neq 0 & U_1 &= 0 \\ V_1 &\neq 0 & V_1 &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación fuerza-desplazamiento de la barra está dada por:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

sustituyendo las condiciones de frontera en el extremo 1

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ 0 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}$$

de donde se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$0 = K_{33} \Phi_1 + K_{34} U_2 + K_{35} V_2 + K_{36} \Phi_2$$

$$\Phi_1 = -K_{33}^{-1} (K_{34} U_2 + K_{35} V_2 + K_{36} \Phi_2)$$

en forma matricial:

$$\Phi_1 = -K_{33}^{-1} \begin{bmatrix} K_{34} & K_{35} & K_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}$$

Es decir que a partir del vector desplazamiento en el extremo 2 se puede determinar el giro en el extremo 1.

Por otro lado se tiene:

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

lo cual se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{43} \\ K_{53} \\ K_{63} \end{bmatrix} \phi_1 + \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_2 \\ U_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

sustituyendo el valor de  $\phi_1$ :

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{43} \\ K_{53} \\ K_{63} \end{bmatrix} -K_{33}^{-1} [K_{34} K_{35} K_{36}] \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{43} \\ K_{53} \\ K_{63} \end{bmatrix} -K_{33}^{-1} [K_{34} K_{35} K_{36}] \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

esto es:

$$\bar{P}_2 = K_{22}^* \bar{a}_2$$

donde  $K_{22}^*$  es la matriz de rigideces modificada.

La matriz de rigideces modificada es la que se utilizará para efectuar el acoplamiento de las barras cuando no se incluya el grado de libertad del nodo "A", así:

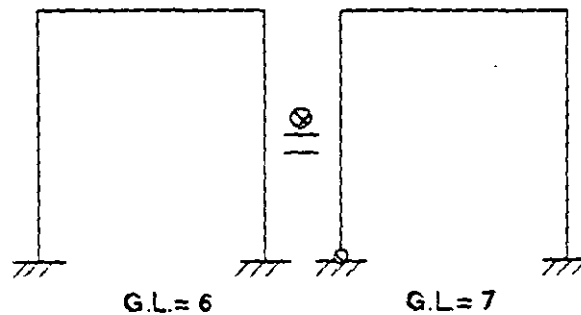
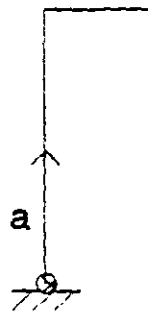


Figura 3.2

### 3.2 CONDENSACION DE LOS GRADOS DE LIBERTAD

El procedimiento anterior se puede simplificar condensando los grados de libertad de las fuerzas que son nulas:



$$M_1 = 0$$

$$\phi_1 \neq 0$$

La ecuación fuerza-desplazamiento de la barra "a" que se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

que se puede arreglar y particionar de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{23} \\ K_{41} & K_{42} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{43} \\ K_{51} & K_{52} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{53} \\ K_{61} & K_{62} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{63} \\ K_{31} & K_{32} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

en forma simplificada:

$$\begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ K'_{21} & K'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U'_{a1} \\ U'_{a2} \end{bmatrix}$$

de la segunda ecuación:

$$P_2' = K_{21}' U_1' + K_{22}' U_2'$$

pero  $P_2' = 0$  entonces

$$U_2' = -K_{22}'^{-1} K_{21}' U_1'$$

de la ecuación 1

$$P_1' = K_{11}' U_1' + K_{12}' U_2'$$

sustituyendo  $U_2$

$$P_1' = K_{11}' U_1' - K_{12}' K_{22}'^{-1} K_{21}' U_1'$$

$$P_1' = (K_{11}' - K_{12}' K_{22}'^{-1} K_{21}') U_1'$$

de donde:

$$K_{11}' - K_{12}' K_{22}'^{-1} K_{21}' = K_{11}^*$$

para el ejemplo anterior:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{41} & K_{42} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{13} \\ K_{23} \\ K_{33} \\ K_{43} \\ K_{53} \end{bmatrix} K_{33}^{-1} [K_{31} K_{32} K_{34} K_{35} K_{36}]$$

Sustituyendo condensaciones de frontera  $U_1 = 0$  y  $V_1 = 0$  lo que consiste en eliminar los renglones y columnas correspondientes, así:

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{43} \\ K_{53} \\ K_{63} \end{bmatrix} K_{33}^{-1} [K_{34} K_{35} K_{36}] \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

Que es el mismo resultado que se obtuvo al modificar la matriz de rigideces de la barra "a", de lo anterior se puede decir que la operación de condensación consiste en compactar los grados de libertad de una estructura, a aquellos que son de interes para el analista, al modular un problema dado. Generalmente los grados de libertad compactados son aquellos en donde no hay carga pero si desplazamiento.

### 3.3 MATRICES DE PERMUTACION

Estas matrices se forman mediante la permutación de renglones o columnas en la matriz identidad. Si se premultiplican se intercambian renglones y se postmultiplica se intercambian columnas.

Para ilustrar lo anterior intercambiar el primer renglón por el tercero, así como la primer columna por la tercera de la siguiente matriz.

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad MP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{31} & K_{32} & K_{33} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{11} & K_{12} & K_{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{31} & K_{32} & K_{33} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{11} & K_{12} & K_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{33} & K_{23} & K_{31} \\ K_{23} & K_{22} & K_{21} \\ K_{13} & K_{12} & K_{11} \end{bmatrix}$$

## METODO DE SUBESTRUCTURAS.

4

En la aplicación del método de las rigideces para estructuras de alto grado de hiperestaticidad cinemática en computadoras de poca memoria central, es necesario particionar la estructura en un número arbitrario de subestructuras, tomando en cuenta la capacidad de la máquina.

Se llama partición estructural a la división de la estructura completa en un número dado de subestructuras donde las uniones o fronteras de cada subestructura se fijan arbitrariamente, es conveniente tomar particiones estructurales correspondientes a particiones físicas reales. Como las propiedades de rigidez de cada subestructura pueden valuarse a partir de sus condiciones de frontera y de las propiedades geométricas y elásticas de cada barra que la componen, entonces cada subestructura puede tratarse en forma independiente aplicando el método directo de las rigideces, para condensar los grados de libertad correspondientes a los nodos intermedios (los que no están en las fronteras) a los grados de libertad en las fronteras (las fronteras son comunes a dos subestructuras adyacentes), para después hacer el acoplamiento de las subestructuras condensadas (este proceso se conoce como relajación de las fronteras) a través de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad, el sistema de ecuaciones resultante permite determinar los desplazamientos en los grados de libertad.

Cabe aclarar que el sistema estructural puede ser cualquiera por complejo que este sea, solo que aquí se presenta el de la figura 4.1 para que resulte más ilustrativo.

Como primer paso es dividir la estructura en un número conveniente de subestructuras, a las que se les imponen fronteras fijas ( estas fronteras son comunes a dos subestructuras adyacentes ). Esta división es arbitraria, se hace cuidando la capacidad de la microcomputadora, para este ejemplo se elige la partición que se muestra en la figura 4.1

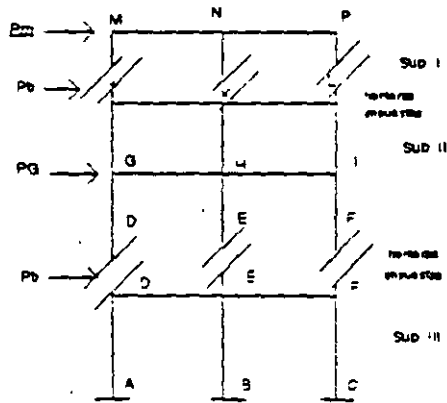


Figura 4.1

En la subestructura I los nodos M, N y P y en la subestructura II los nodos G, H e I se denominan nodos interiores, mientras que en la subestructura III no hay nodos interiores.

Una vez hecha la partición se procede al análisis de cada subestructura en forma independiente asumiendo las fronteras impuestas (que como ya se mencionó son comunes a dos subestructuras adyacentes), para condensar los grados de libertad a las fronteras, así como para determinar los vectores de empotramiento (reacciones en las fronteras necesarias para que los desplazamientos sean cero):

Al condensar los grados de libertad a las fronteras, las subestructuras (fig. 4.1) se pueden considerar como elementos equivalentes como se ilustra en la figura 4.2.

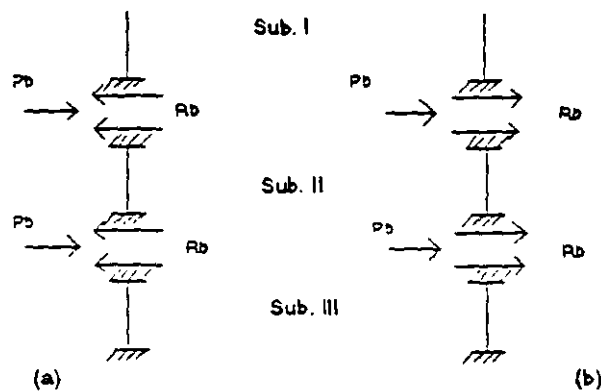


Figura 4.2



Cuando las fronteras son relajadas las reacciones y cualesquiera fuerzas aplicadas en ellas, pueden no estar en equilibrio, por lo tanto la relajación inducirá desplazamientos de magnitud tal que se satisfaga el equilibrio en las fronteras.

Para hacer el acoplamiento (relajación de las fronteras) a los vectores  $R_b$  se les cambia el signo para poder sumarlos con los vectores  $P_b$  que son las cargas aplicadas directamente en las fronteras como se indica en la figura 4.2.b

El acoplamiento de los elementos equivalentes de la figura 4.2 queda definido por las mismas reglas que para el ensamble de barras por el método directo.

Por otro lado el orden de las submatrices va a coincidir puesto que los puntos de unión o fronteras son comunes entre subestructuras adyacentes.

Al solucionar el sistema de ecuaciones que resulte del acoplamiento, se obtienen los desplazamientos en las fronteras de las diferentes subestructuras, naturalmente la solución de los desplazamientos en las fronteras implica un número pequeño de incógnitas en comparación con la solución de la estructura completa.

Finalmente se determinan los desplazamientos en los nodos interiores provocados por las cargas aplicadas directamente sobre dichos nodos más un desplazamiento que se le llama de corrección por la influencia de los desplazamientos de las fronteras.

#### **4.1 FORMULACION DEL METODO DE LAS SUBESTRUCTURAS.**

Se sabe que la ecuación fuerza-desplazamiento de un sistema estructural está dado por:

$$P = K D$$

Si denotamos al vector de los desplazamientos en las fronteras (comunes a dos subestructuras) por  $U_b$  y el vector de desplazamientos en los nodos interiores (cada uno ocurre en un punto interior de solamente una subestructura) por  $U_i$  y a las correspondientes fuerzas en las fronteras y en los nodos interiores por  $P_b$  y  $P_i$  respectivamente, así la ecuación fuerza-desplazamiento se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} P_b \\ P_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_b \\ U_i \end{bmatrix} \quad 4.1$$

El total de desplazamientos en cualquier punto del sistema estructural, se calcula por la superposición de dos vectores tal que:

$$U = U^a + U^b \quad 4.2$$

donde  $U^a$  denota el vector de desplazamientos debido a las cargas  $P_i$  cuando  $U_b = 0$  y  $U^b$  representa la corrección necesaria a los desplazamientos  $U^a$  teniendo en cuenta los desplazamientos  $U_b$  cuando  $P_i = 0$ , por lo que el vector de desplazamientos se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} U_b \\ U_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_b^a \\ U_i^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_b^b \\ U_i^b \end{bmatrix} \quad 4.3$$

donde:

$\begin{bmatrix} U_b^a \\ U_i^a \end{bmatrix}$  Es el vector de desplazamientos cuando las fronteras están fijas; por lo que  $U_b^a = 0$

$\begin{bmatrix} U_b^b \\ U_i^b \end{bmatrix}$  Representa la corrección debida a la relajación de las fronteras.

Similarmente correspondiendo a los desplazamientos  $U^a$  y  $U^b$  las cargas pueden expresarse como:

$$P = P^a + P^b \quad 4.4$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} P_b \\ P_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_b^a \\ P_i^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_b^b \\ P_i^b \end{bmatrix} \quad 4.5$$

donde por definición:

$$P_i^a = P_i \quad y \quad P_i^b = 0$$

de la segunda ecuación del sistema 4.1 cuando las fronteras están fijas ( $U_b^a = 0$ ), se tiene

$$P_i^a = K_{ii} U_i^a$$

de donde:

$$U_i^a = K_{ii}^{-1} P_i \quad 4.6$$

de la primer ecuación del sistema 4.1

$$P_i^a = K_{bi} U_i^a$$

sustituyendo la ecuación 4.6

$$P_b^a = K_{bi} K_{ii}^{-1} P_i \quad 4.7$$

donde  $P_b^a$  representa las reacciones necesarias en las fronteras para mantener a  $U_b = 0$  cuando las cargas en los nodos interiores son aplicadas, es decir la influencia de las cargas aplicadas en los nodos interiores sobre las fronteras en cada subestructura ver figura 4.3.a.

Cuando las fronteras de las subestructuras son relajadas, los desplazamientos  $U^b$  pueden determinarse a partir del sistema de ecuaciones 4.1. así, considerando la segunda ecuación de este sistema:

$$P_i^b = K_{ib} U_b^b + K_{ii} U_i^b$$

pero  $P_i^b = 0$ , entonces:

$$U_i^b = -K_{ii}^{-1} K_{ib} U_b^b \quad 4.8$$

Se puede observar que la ecuación 4.7 representa la corrección de los desplazamientos en los nodos interiores por la relajación de las fronteras.

De la ecuación 4.1

$$P_b^b = K_{bb} U_b^b + K_{bi} U_i^b$$

que sustituyendo la ecuación 4.8 se obtiene:

factorizando:

$$P_b^{\beta} = K_{bb} U_b^{\beta} - K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib} U_b^{\beta}$$

$$P_b^{\beta} = [K_{bb} - K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib}] U_b^{\beta} \quad 4.9$$

si llamamos

$$K_b = K_{bb} - K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib}$$

la ecuación 4.8 se puede escribir

$$P_b^{\beta} = K_b U_b^{\beta}$$

donde  $K_b$  es la matriz de rigideces en las fronteras (condensación de la matriz de rigideces a los grados de libertad correspondientes a las fronteras de las subestructuras),  $U_b^{\beta}$  representa los desplazamientos en las fronteras y  $P_b^{\beta}$  es el vector de cargas en las fronteras considerando la influencia de las cargas aplicadas en los nodos interiores.

De la ecuación 4.4

$$P_b^{\beta} = P_b - P_b^{\alpha} \quad 4.10$$

donde  $P_b$  es la carga aplicada directamente en las fronteras y  $P_b^{\alpha}$  es la influencia de las cargas aplicadas en los nodos interiores, ver figura 4.3.b.

Para el acoplamiento como ya se indicó las subestructuras se consideran como elementos equivalentes ver figura 4.3 y se aplica el método directo de las rigideces para establecer la ecuación fuerza-desplazamiento, así:

$$P_b^{\beta} = K_b U_b^{\beta}$$

aquí  $P_b^{\beta}$  se considera como

$$P_b^{\beta} = P_b - \Sigma P_b^{\alpha}$$

donde  $K_b$  es la matriz de rigideces del sistema acoplado y  $U_b^{\beta}$  es el vector de desplazamientos en las fronteras (impuestas inicialmente) de toda estructura.

Para ilustrar este método se presentan ejemplos numéricos aplicados a la

solucion de armadura y marcos.

## 4.2 ARMADURAS

Aplicando el método de las subestructuras determinar la fuerza en cada una de las barras de la estructura que se muestra en la figura 4.3

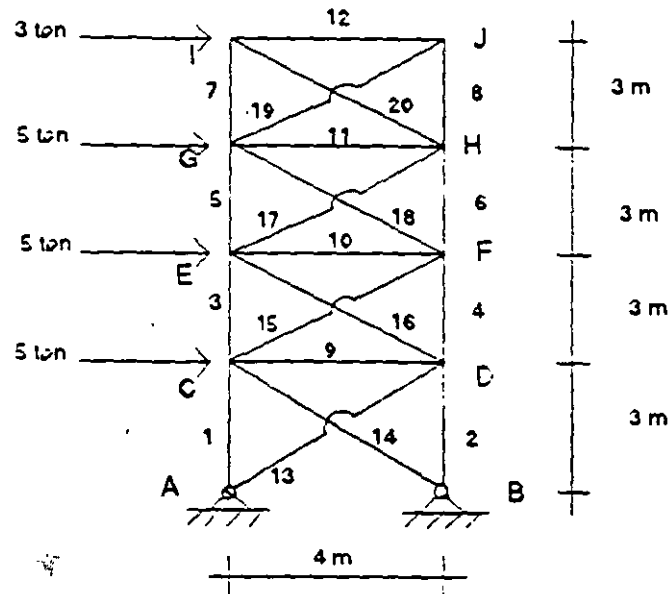


Figura 4.3

Para realizar la partición de la estructura hay varias opciones, algunas de estas se ilustran en la figura 4.4.

En el primer caso figura 4.4.a, para la subestructura superior resulta una matriz de  $8 \times 8$  la cual se condensaría a una de  $4 \times 4$  y, para las dos subestructuras siguientes resulta una matriz de  $8 \times 8$ , las cuales no se condensan y finalmente para la subestructura inferior resulta una matriz de  $4 \times 4$  la cual también no se condensa por lo cual al hacer el acoplamiento de los elementos equivalentes (relajación de las fronteras) resultará una matriz de  $12 \times 12$ . Para la partición mostrada en la figura 4.4.b. la estructura intermedia de una matriz de  $12 \times 12$ , la cual al condensar resulta de  $8 \times 8$  y al hacer la relajación de

las fronteras se tendría que trabajar con una matriz de 8x8. Para la partición mostrada en la figura 4.4.c, en la subestructura superior inicialmente se maneja una matriz de 12x12 que al condensar resulta de 4x4 y para la subestructura inferior inicialmente la matriz es de 8x8, que al condensar también resulta de 4x4.

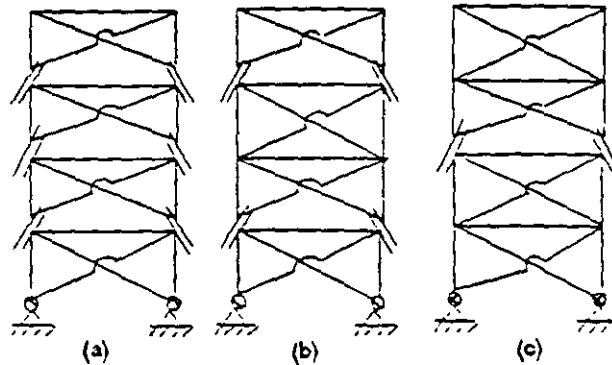


Figura 4.4

En este ejemplo se trabajará con la opción que muestra la figura 4.4.c

En la figura 4.4 se muestra la topología considerable en las subestructuras, se puede observar que los nodos E y F (fronteras) son comunes para ambas subestructuras.

#### ANÁLISIS DE LA SUBESTRUCTURA I

Aplicando el método directo de las rigideces la ecuación fuerza-desplazamiento para esta subestructura resulta:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (K_{11})_1 + (K_{11})_2 & 0 & & & & \\ 0 & (K_{22})_1 + (K_{22})_2 & & & & \\ (K_{31})_1 & (K_{31})_2 & (K_{33})_1 + (K_{33})_2 - (K_{31})_1 - (K_{31})_2 & & & \\ (K_{41})_1 & (K_{41})_2 & (K_{43})_1 & (K_{44})_1 + (K_{44})_2 - (K_{41})_1 - (K_{41})_2 & & \\ 0 & 0 & (K_{51})_1 & (K_{53})_1 & (K_{55})_1 + (K_{55})_2 - (K_{51})_1 - (K_{51})_2 & \\ 0 & 0 & (K_{61})_1 & (K_{63})_1 & (K_{65})_1 & (K_{66})_1 + (K_{66})_2 - (K_{61})_1 - (K_{61})_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix}$$

Las submatrices de rigidez en el sistema global para un elemento barra armadura están dadas por:

$$K'_{11} = K'_{22} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm \\ ml & m^2 \end{bmatrix}$$

$$k'_{12} = k'_{21} = -K'_{11}$$

Por comodidad y rapidez se recomienda hacer la siguiente tabla para organizar la información:

Barra	EA	L	l	m	l <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	lm
5	1	300	0	1	0	1	0
6	1	300	0	1	0	1	0
7	1	300	0	1	0	1	0
8	1	300	0	1	0	1	0
11	1	400	1	0	1	0	0
12	1	400	1	0	1	0	0
17	1	500	0.8	0.6	0.64	0.36	0.48
19	1	500	0.8	0.6	0.64	0.36	0.48
18	1	500	-0.8	0.6	0.64	0.36	-0.48
20	1	500	-0.8	0.6	0.64	0.36	-0.48

sustituyendo:

Barras 5,6,7 y 8

Barras 17 y 19

$$K'_{11} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 33.3 \end{bmatrix} 10^{-4} \quad K'_{11} = EA \begin{bmatrix} 12.8 & 9.6 \\ 9.6 & 33.3 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

Barras 11 y 12

Barras 18 y 20

$$K'_{11} = EA \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 33.3 \end{bmatrix} 10^{-4} \quad K'_{11} = EA \begin{bmatrix} 12.8 & -9.6 \\ -9.6 & 33.3 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

sustituyendo en la matriz de rigideces y particionando en la forma

$$K = \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{b1} \\ K_{1b} & K_{11} \end{bmatrix}$$

12.8	9.6	0	0	0	0	-12.8	-9.6	0	0	0	0
9.6	40.5	0	0	0	-33.3	-9.6	-7.2	0	0	0	0
0	0	12.8	-9.6	-12.8	9.6	0	0	0	0	0	0
0	0	-9.6	40.5	9.6	-7.2	0	-33.3	0	0	0	0
0	0	-12.8	9.6	50.6	0	-25.0	0	0	0	-12.8	-9.6
0	-33.3	9.6	-7.2	0	81.0	0	0	0	-33.3	-9.6	-7.2
-12.8	-9.6	0	0	-25.0	0	50.6	0	-12.8	9.6	0	0
-9.6	-7.2	0	-33.3	0	0	0	81.0	9.6	-7.2	0	-33.3
0	0	0	0	0	0	-12.8	9.6	37.8	-9.6	-25.0	0
0	0	0	0	0	-33.3	9.6	-7.2	-9.6	40.5	0	0
0	0	0	0	-12.8	-9.6	0	0	-25.0	0	37.8	9.6
0	0	0	0	-9.6	-7.2	0	-33.3	0	0	9.6	40.5

$10^{-4}$

Para obtener la matriz de rigideces condensada para esta subestructura se aplica la ecuación:

$$K_{bI} = K_{ii} - K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib}$$

realizando operaciones:

$$K_{bI} = \begin{bmatrix} 4.42 & 0.02 & -4.42 & -0.018 \\ 0 & 0 & 0 & -0.003 \\ -4.42 & 0.018 & 4.42 & 0.02 \\ 0 & -0.0057 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

El vector de empotramiento y los desplazamientos en nodos interiores producto de la influencia de las cargas aplicadas directamente en los nodos interiores están dadas por:

$$P_{bI}^a = (K_{bi} K_{ii}^{-1})_I P_{iI}$$

$$P_{iI}^a = (K_{ii}^{-1})_I P_{iI}$$

$$P_{iI}^a = \begin{bmatrix} P'_{Gx} \\ P'_{Gy} \\ P'_{Hx} \\ P'_{Hy} \\ P'_{Ix} \\ P'_{Iy} \\ P'_{Jx} \\ P'_{Jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



haciendo operaciones resulta:

$$P_{br}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -3.63 \\ -8.25 \\ -4.37 \\ 8.25 \end{bmatrix} ; \quad D_{br}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0.463 \\ 0.165 \\ 0.398 \\ -0.150 \\ 0.829 \\ 0.211 \\ 0.791 \\ -0.172 \end{bmatrix} \times 10^4$$

### SUBESTRUCTURA II

Aplicando el método directo de las rigideces la ecuación fuerza-desplazamiento  $P' = K' D'$  para esta subestructura resulta:

$$\begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_4' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (K_1)_{10} - (K_2)_{10} - (K_2)_3 & (K_2)_{10} & (K_2)_3 & (K_1)_6 \\ (K_1)_{10} & (K_2)_{10} - (K_2)_{10} - (K_2)_4 & (K_1)_3 & (K_1)_6 \\ (K_1)_3 & (K_2)_{10} & (K_2)_{10} - (K_1)_{10} - (K_1)_{10} - (K_1)_3 & (K_2)_6 \\ (K_2)_{10} & (K_2)_4 & (K_1)_6 & (K_2)_2 - (K_2)_{10} - (K_2)_6 - (K_1)_{10} - (K_1)_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1' \\ D_2' \\ D_3' \\ D_4' \end{bmatrix}$$

En igual forma que para la subestructura I, para valuar las rigideces de la subestructura II se hace la siguiente tabla:

Barra	EA	L	l	m	l <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	lm
5	1	300	0	1	0	1	0
6	1	300	0	1	0	1	0
7	1	300	0	1	0	1	0
8	1	300	0	1	0	1	0
11	1	400	1	0	1	0	0
12	1	400	1	0	1	0	0
17	1	500	0.8	0.6	0.64	0.36	0.48
19	1	500	0.8	0.6	0.64	0.36	0.48
18	1	500	-0.8	0.6	0.64	0.36	-0.48
20	1	500	-0.8	0.6	0.64	0.36	-0.48

sustituyendo

Barras 1,2,3 y 4

Barras 13 y 15

$$K'_{11} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 33.3 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

$$K'_{11} = EA \begin{bmatrix} 12.8 & 9.6 \\ 9.6 & 7.2 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

Barras 9 y 10

Barras 14 y 16

$$K'_{11} = EA \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

$$K'_{11} = EA \begin{bmatrix} 12.8 & -9.6 \\ -9.6 & 7.2 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

sustituyendo en la matriz de rigideces resulta:

$$\begin{bmatrix} 37.8 & -9.6 & -25.0 & 0 & 0 & 0 & -12.8 & 9.6 \\ -9.6 & 40.5 & 0 & 0 & 0 & -33.3 & 9.6 & -7.2 \\ -25.0 & 0 & 37.8 & 9.6 & -12.8 & -9.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.6 & 40.5 & -9.6 & -7.2 & 0 & -33.3 \\ 0 & 0 & -12.8 & -9.6 & 50.6 & 0 & -25.0 & 0 \\ 0 & -33.3 & -9.6 & -7.2 & 0 & 81.0 & 0 & 0 \\ -12.8 & 9.6 & 0 & 0 & -25.0 & 0 & 50.6 & 0 \\ 9.6 & -7.2 & 0 & -33.3 & 0 & 0 & 0 & 81.0 \end{bmatrix}$$

particionando la matriz de rigideces en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix}$$

Para condensar a los grados de libertad en las fronteras se aplica la fórmula:

$$K_{brr} = K_{bb} - K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib}$$

después de realizar operaciones se obtiene:

$$K_{brr} = \begin{bmatrix} 32.40 & -5.53 & -27.10 & 2.38 \\ -5.32 & 23.80 & -2.36 & -4.73 \\ -27.10 & -2.38 & 32.40 & 5.53 \\ 2.36 & -4.73 & 5.53 & 23.80 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

El vector de empotramiento y los desplazamientos en los nodos interiores están dados por:

$$P_b^a = K_{bi} K_{ii}^{-1} P_i^a$$

$$P_{iII}^a = K_{ii}^{-1} P_i^a$$

$$P_{iII}^a = \begin{bmatrix} P'_{Cx} \\ P'_{Cy} \\ P'_{Dx} \\ P'_{Dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

realizando operaciones:

$$P_{bII}^a = \begin{bmatrix} -0.825 \\ 0.620 \\ -1.675 \\ -1.250 \end{bmatrix}$$

$$U_{iII} = \begin{bmatrix} 1307.25 \\ 0 \\ 645.85 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### RELAJACION DE LAS FRONTERAS.

El acoplamiento de las subestructuras se hace considerandolas como elementos equivalentes.

La ecuación fuerza-desplazamiento está dada por:

$$P_b^\beta = K_b D_b^\beta$$

donde:

$$P_b^\beta = P_b - \Sigma P_b^\beta$$

para este caso en particular como se tienen dos subestructuras la expresión anterior se puede escribir:

$$P_b^\beta = P_b - P_{bI}^\beta - P_{bII}^\beta$$

el vector de cargas aplicado directamente en las fronteras resulta:

$$P_b = \begin{bmatrix} P_{Ex} \\ P_{Ey} \\ P_{Fx} \\ P_{Fy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo que:

$$P_b^{\beta} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.63 \\ -8.25 \\ -4.37 \\ 8.25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.83 \\ 0.62 \\ -1.68 \\ -1.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.46 \\ 7.73 \\ 6.05 \\ -7.00 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigideces en las fronteras se obtiene en este caso particular sumando las submatrices condensadas para las subestructuras I y II, así:

$$K_b = K_{bI} + K_{bII}$$

sustituyendo directamente en la ecuación fuerza-desplazamiento se tiene:

$$\begin{bmatrix} 9.48 \\ 7.63 \\ 6.05 \\ -7.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.82 & -5.55 & -31.52 & 2.36 \\ -5.53 & 23.80 & -2.36 & -4.76 \\ -31.52 & -2.36 & 36.82 & 5.55 \\ 2.36 & -4.76 & 5.55 & 23.80 \end{bmatrix} 10^{-4} \begin{bmatrix} D_{Ex} \\ D_{Ey} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix}$$

solucionando el sistema:

$$\begin{bmatrix} D'_{Ex} \\ D'_{Ey} \\ D'_{Fx} \\ D'_{Fy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31636.12 \\ 11445.58 \\ 31125.70 \\ -11057.01 \end{bmatrix} \frac{1}{EA}$$

corrección de los desplazamientos en los nodos interiores:

$$D_{iI}^{\beta} = (K_{iI}^{-1} K_{ib})^I D_b$$

$$D_{iII}^{\beta} = -(K_{iI}^{-1} K_{ib})^{II} D_b$$

sustituyendo valores en las dos expresiones anteriores obtenemos:

$$D_{11}^{\beta} = \begin{bmatrix} 48219.06 \\ 11494.74 \\ 48296.60 \\ -11004.82 \\ 65141.43 \\ 11490.29 \\ 65128.16 \\ -11014.18 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} \quad D_{111}^{\beta} = \begin{bmatrix} 11452.51 \\ 7429.02 \\ 11489.93 \\ -7290.47 \end{bmatrix} \frac{1}{EA}$$

por lo que los desplazamientos totales en los nodos interiores se obtienen con la expresión:

$$D_i = D_i^{\alpha} + D_i^{\beta}$$

sustituyendo:

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 52849.06 \\ 13144.74 \\ 52276.60 \\ -12504.82 \\ 73431.43 \\ 13600.29 \\ 73038.16 \\ -12734.18 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} D'_{Gx} \\ D'_{Gy} \\ D'_{Hx} \\ D'_{Hy} \\ D'_{Ix} \\ D'_{Iy} \\ D'_{Jx} \\ D'_{Jy} \end{bmatrix} ; \quad D_{111} = \begin{bmatrix} 12759.76 \\ 7424.02 \\ 11489.93 \\ -7290.47 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} D'_{Cx} \\ D'_{Cy} \\ D'_{Jx} \\ D'_{Jy} \end{bmatrix}$$

Una vez conocidos los desplazamientos en todos los nodos de la estructura, se procede a determinar las fuerzas en cada una de las barras, para lo cual se sigue el mismo procedimiento que cuando se aplica el método directo de las rigideces. Aquí se ilustra el procedimiento únicamente para dos barras.

Por compatibilidad:

$$\begin{aligned} D'_{1,1} &= 0 & D'_{2,1} &= D'_c \\ D'_{1,3} &= D'_c & D'_{2,3} &= D'_z \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento de una barra en el sistema global:

$$P'_1 = K'_{11} D'_1 + K'_{12} D'_2$$

$$P'_2 = K'_{21} D'_1 + K'_{22} D'_2$$

Barra 1

$$\begin{bmatrix} P'_{1x} \\ P'_{1y} \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -24.72 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} P'_{2x} \\ P'_{2y} \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 24.72 \end{bmatrix}$$

Barra 3

$$\begin{bmatrix} P'_{1x} \\ P'_{1y} \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -13.39 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} P'_{2x} \\ P'_{2y} \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 13.39 \end{bmatrix}$$

Rotación del sistema global al local:

$$P = T^c P$$

Barra 1

$$P_1 = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ -24.72 \end{bmatrix} = -24.72 \text{ ton}$$

$$P_2 = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 24.72 \end{bmatrix} = 24.72 \text{ ton}$$

Barra 3

$$P_1 = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ -13.39 \end{bmatrix} = -13.39 \text{ ton}$$

$$P_2 = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 13.19 \end{bmatrix} = 13.39 \text{ ton}$$

Se deja al lector la determinación de la fuerza en las otras barras, así como la comprobación del equilibrio.

### 4.3 MARCOS

Aplicando el método de las subestructuras, determinar los desplazamientos y los elementos mecánicos del marco mostrado en la figura 4.6.

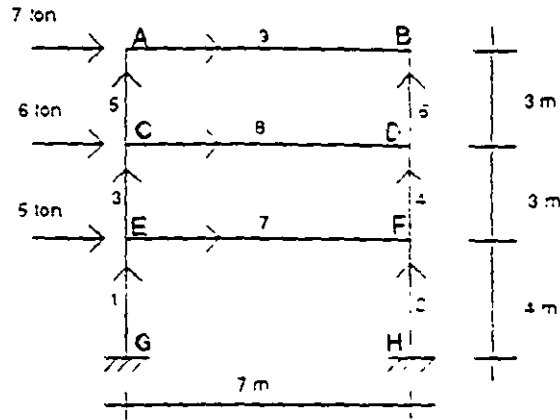


Figura 4.6

Utilizar secciones de 40x80 para las trabes y 40x40 para las columnas, un  $f_c$  de  $250 \text{ kg/cm}^2$  por lo tanto un módulo de elasticidad de  $14000\sqrt{f_c}$ .

La partición se realiza en los nodos C y D como se muestra en la figura 4.7. Vale la pena mencionar que la partición de la estructura es arbitraria, en un momento dado el número de subestructuras, así como su tamaño se puede considerar en función del tamaño de las matrices por invertir como se mencionó en el problema anterior.

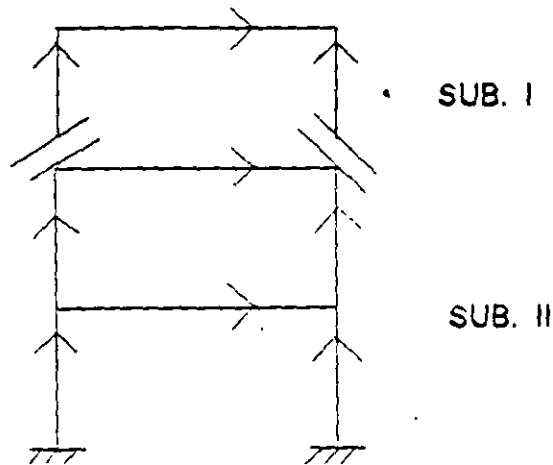


Figura 4.7

## ANALISIS DE SUBESTRUCTURA I

La matriz de rigideces de la subestructura I en el sistema global está dada por:

$$\begin{bmatrix} (K'_{22})_3 + (K'_{11})_8 & (K'_{12})_8 & (K'_{21})_3 & 0 \\ (K'_{12})_8 & (K'_{22})_4 + (K'_{22})_8 & 0 & (K'_{21})_4 \\ (K'_{21})_5 & 0 & (K'_{22})_1 + (K'_{11})_7 + (K'_{11})_3 & (K'_{12})_7 \\ 0 & (K'_{12})_4 & (K'_{21})_7 & (K'_{22})_2 + (K'_{22})_7 + (K'_{11})_4 \end{bmatrix}$$

Valuando las submatrices de rigideces para cada barra en igual forma que en el método directo, sustituyendo y particionando en:

$$K_I = \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix}$$

se obtiene:

10.3	0	31.5	-10.1	0	0	-21.3	0	31.5	0	0	0
0	11.9	46.3	0	-0.13	46.3	0	-11.8	0	0	0	0
31.5	46.3	27884.2	0	-46.3	10794	-31.5	0	3148.2	0	0	0
-10.1	0	0	10.3	0	31.5	0	0	0	-0.21	0	31.5
0	-0.13	-46.3	0	11.9	-46.3	0	0	0	0	-11.8	0
0	46.3	10794	31.5	-46.3	27884.2	0	0	0	-31.5	0	3148.2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
-21.0	0	-31.5	0	0	0	10.4	0	-13.8	-10.1	0	0
0	-11.8	0	0	0	0	0	20.8	46.3	0	-0.13	46.3
31.5	0	31.48	0	0	0	-13.8	46.3	32606.5	0	-46.3	10794
0	0	0	-0.21	0	-31.5	-10.1	0	0	10.4	0	-13.8
0	0	0	0	-11.8	0	0	-0.13	-46.3	0	20.8	-46.3
0	0	0	31.5	0	3148.2	0	46.3	10794	-13.8	-46.3	32606.5

Todos los valores de la matriz de rigidecesse han redondeado a un decimal por falta de espacio.

Condensando a los grados de libertad en la frontera se tiene:

$$K_{bI} = K_{bb} - K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib}$$



$$K_{bI} = \begin{bmatrix} 1022.59 & -1.30 & 1753.87 & -1017.52 & 1.3 & -911.09 \\ -1.30 & 520.27 & 4522.06 & -1.34 & 14.25 & 4522.06 \\ 1753.87 & 4522.06 & 2593841 & -911.29 & -422.18 & 934633.9 \\ -1017.52 & -1.34 & -911.29 & 1022.59 & 1.30 & 1753.87 \\ 1.3 & 14.25 & -422.18 & 1.30 & 520.27 & -4522.06 \\ -911.09 & 4522.06 & 934633.9 & 1753.87 & -4522.06 & 2593829.7 \end{bmatrix}$$

El vector de empotramiento para la subestructura I, está dado por:

$$P_{bI}^{\beta} = K_{bI} - K_{II}^{-1} P_I^{\alpha}$$

$$P_{iI}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad P_{bI}^{\beta} = \begin{bmatrix} -1.723 \\ 0.142 \\ -262.75 \\ -1.676 \\ -0.142 \\ -255.55 \end{bmatrix}$$

El vector de desplazamientos para los nodos interiores:

$$D_{iI}^{\alpha} = K_{II}^{-1} P_{iI}^{\alpha}$$

$$D_{iI}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 8.63 \times 10^{-2} \\ -12.05 \times 10^{-3} \\ 2.80 \times 10^{-5} \\ 8.38 \times 10^{-2} \\ 12.05 \times 10^{-5} \\ 2.65 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

## ANALISIS DE LA SUBESTRUCTURA II

La matriz de rigideces para esta subestructura está dada por:

$$K = \begin{bmatrix} (K'_{11})_5 & 0 & (K'_{12})_5 & 0 \\ 0 & (K'_{11})_6 & 0 & (K'_{12})_6 \\ (K'_{21})_5 & 0 & (K'_{22})_5 + (K'_{11})_9 & (K'_{12})_9 \\ 0 & (K'_{21})_6 & (K'_{21})_9 & (K'_{22})_6 + (K'_{22})_9 \end{bmatrix}$$

Valuando las submatrices, sustituyendo y particionando se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0.21 & 0 & -31.5 & 0 & 0 & 0 & -21.0 & 0 & -31.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -31.5 & 0 & 6296.4 & 0 & 0 & 0 & 31.5 & 0 & 3149.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.21 & 0 & -31.5 & 0 & 0 & 0 & -0.21 & 0 & -31.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -31.5 & 0 & 6296.4 & 0 & 0 & 0 & 31.5 & 0 & 3148.2 \\ \hline -21.0 & 0 & 31.5 & 0 & 0 & 0 & 10.3 & 0 & 31.5 & -10.1 & 0 & 0 \\ 0 & -11.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.9 & 46.3 & 0 & -0.13 & 46.3 \\ -31.5 & 0 & 3148.2 & 0 & 0 & 0 & 31.5 & 46.3 & 27894.2 & 0 & -46.3 & 1079.4 \\ 0 & 0 & 0 & -0.21 & 0 & 31.5 & -10.1 & 0 & 0 & 10.3 & 0 & 31.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11.8 & 0 & 0 & -0.13 & -46.3 & 0 & 11.9 & -46.3 \\ 0 & 0 & 0 & -31.5 & 0 & 3148.2 & 0 & 46.3 & 1079.4 & 31.5 & -46.3 & 27884.2 \end{bmatrix}$$

La matriz condensada a los grados de libertad resulta:

$$K_{bII} = K_{bb} - K_{bI} K_{II}^{-1} K_{Ib}$$

$$K_{bII} = \begin{bmatrix} 7.58 & -0.0103 & -1279.11 & -7.58 & +0.0103 & 1279.12 \\ -0.0103 & 0.59 & 214.39 & -0.0025 & -0.602 & 214.39 \\ -1279.11 & 214.39 & 359588.9 & 1277.38 & -215.22 & -209481.9 \\ -7.58 & -0.0025 & 1277.38 & 7.58 & 0.0103 & -1279.12 \\ 0.103 & -0.602 & -215.22 & 0.0103 & 0.59 & -214.39 \\ 1279.12 & 214.39 & -209481.9 & -1279.12 & -214.39 & 359588.9 \end{bmatrix}$$

El vector de empotramiento para ésta subestructura, esta dado por,

$$P_{bII}^{\beta} = K_{bI} K_{II}^{-1} P_I^{\alpha}$$

$$P_{III}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{III}^{\beta} = \begin{bmatrix} -3.53 \\ -1.43 \\ 554.19 \\ -3.47 \\ 1.43 \\ 545.37 \end{bmatrix}$$

El vector de desplazamientos en los nodos interiores está dado por:

$$D_{III}^{\alpha} = K_{III}^{-1} P_{III}^{\alpha}$$

$$D_{III}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 19.21 \times 10^{-2} \\ 12.10 \times 10^{-4} \\ -16.11 \times 10^{-5} \\ 18.87 \times 10^{-2} \\ -12.10 \times 10^{-4} \\ 15.47 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

## RELAJACION DE FRONTERAS

El acoplamiento de las subestructuras se hace como ya se mencionó con los elementos equivalentes, a través de la ecuación fuerza-desplazamiento

$$P_b^{\beta} = K_b D_b$$

donde:

$$P_b^{\beta} = P_b - P_{bi}^{\beta} - P_{bII}^{\beta}$$

el vector de cargas  $P_b$  aplicado directamente en las fronteras resulta

$$P_b = \begin{bmatrix} P_{Cx} \\ P_{Cy} \\ M_{Cz} \\ P_{Dx} \\ P_{Dy} \\ M_{Dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sustituyendo para obtener  $P_b^{\beta}$

$$P_b^{\beta} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.723 \\ 0.142 \\ -262.75 \\ -1.676 \\ -0.142 \\ -255.55 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.53 \\ -1.43 \\ 554.19 \\ -3.47 \\ 1.43 \\ 545.37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.253 \\ 1.288 \\ -291.44 \\ 5.146 \\ -1.288 \\ -289.82 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigideces en las fronteras se obtiene para este caso particular sumando las dos submatrices condensadas

$$K_b = K_{bI} + K_{bII}$$

sustituyendo directamente en la ecuación fuerza desplazamiento se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 11.253 \\ 1.288 \\ -291.44 \\ 5.146 \\ -1.288 \\ -289.82 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1030.17 & -1.31 & 474.76 & -1025.1 & 1.31 & 368.03 \\ -1.31 & 520.86 & 4736.45 & -1.34 & -14.85 & 4736.45 \\ 474.76 & 4736.45 & 2953430 & 366.09 & -4737.4 & 725152 \\ -1025.1 & -1.34 & 366.09 & 1030.17 & 1.31 & 474.75 \\ 1.31 & -14.85 & -4737.4 & 1.31 & 520.86 & -4736.45 \\ 368.03 & 4736.45 & 725152 & 474.75 & -4736.45 & 2953418 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Cx} \\ D_{Cy} \\ D_{Cz} \\ D_{Dx} \\ D_{Dy} \\ D_{Dz} \end{bmatrix}$$

Solucionando el sistema se obtienen los desplazamientos correspondientes a los grados de libertad en las fronteras, así:

$$D_b = \begin{bmatrix} D_{Cx} \\ D_{Cy} \\ D_{Cz} \\ D_{Dx} \\ D_{Dy} \\ D_{Dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.716 \\ 0.020 \\ -5.2 \times 10^{-4} \\ 1.713 \\ -0.020 \\ -5.2 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos  $D_{Cz}$  y  $D_{Dz}$  corresponden a los desplazamientos angulares alrededor de "z" en los nodos "D" y "C" respectivamente.

## CORRECCION DE LOS DESPLAZAMIENTOS EN LOS NODOS INTERIORES.

Esta corrección para la subestructura I esta dada por

$$D_{iI}^{\beta} = -(\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib})_I D_{bI}$$

en esta ecuación todos los términos corresponden a la subestructura I, por lo cual se les ha asignado el subíndice I. Después de efectuar operaciones, resulta:

$$U_{iI}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1.110 \\ 0.015 \\ -9.0 \times 10^{-4} \\ 1.110 \\ -0.015 \\ -9.0 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

en igual forma para la subestructura II

$$D_{iII}^{\beta} = -(\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{bi})_{II} D_{bII}$$

sustituyendo:

$$D_{iII}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1.805 \\ 0.020 \\ -7.72 \times 10^{-5} \\ 1.805 \\ -0.020 \\ -8.27 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

## DESPLAZAMIENTOS TOTALES EN NODOS INTERIORES

Estos desplazamientos se obtiene sumando los desplazamientos generados directamente por las cargas  $P_i^{\alpha}$  más los desplazamientos corrección así:

$$D_i = D_i^{\alpha} + D_i^{\beta}$$

para la subestructura I

$$D_{iI} = D_{iI}^{\alpha} + D_{iI}^{\beta}$$

sustituyendo:

$$D_{1I} = \begin{bmatrix} D_{EX} \\ D_{EY} \\ D_{EZ} \\ D_{FX} \\ D_{FY} \\ D_{FZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.63 \times 10^{-2} \\ -12.05 \times 10^{-3} \\ 2.80 \times 10^{-5} \\ 8.38 \times 10^{-2} \\ 12.05 \times 10^{-5} \\ 2.65 \times 10^{-5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.110 \\ 0.015 \\ -9.0 \times 10^{-4} \\ 1.110 \\ -0.015 \\ -9.0 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.193 \\ 0.015 \\ -8.72 \times 10^{-4} \\ 1.194 \\ -0.015 \\ -8.69 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

en forma similar para la subestructura II

$$D_{1II} = D_{1II}^a + D_{1II}^b$$

sustituyendo:

$$D_{1II} = \begin{bmatrix} D_{Ax} \\ D_{Ay} \\ D_{Az} \\ D_{Bx} \\ D_{By} \\ D_{Bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.21 \times 10^{-2} \\ 12.10 \times 10^{-4} \\ -16.11 \times 10^{-5} \\ 18.87 \times 10^{-2} \\ -12.10 \times 10^{-4} \\ 15.47 \times 10^{-5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.805 \\ 0.020 \\ -7.72 \times 10^{-5} \\ 1.805 \\ -0.020 \\ -8.27 \times 10^{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.997 \\ 0.216 \\ -2.38 \times 10^{-4} \\ 1.994 \\ -0.022 \\ -2.37 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Las unidades utilizadas en los ejemplos fueron toneladas para las cargas y centímetros como unidad de longitud, por lo que los desplazamientos lineales resultan en centímetros y los angulares en radianes.

Conocidos los desplazamientos en todos los nodos de la estructura, los elementos mecánicos se determinan aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento de la barra como se hizo cuando se aplicó el método directo de las rigideces.

## 5.1 EQFUERZOS.

Considerese un cuerpo sólido homogéneo sometido a un sistema de cargas que lo mantienen en equilibrio. Si el cuerpo se corta por un plano N como se indica en la figura 5.1.a

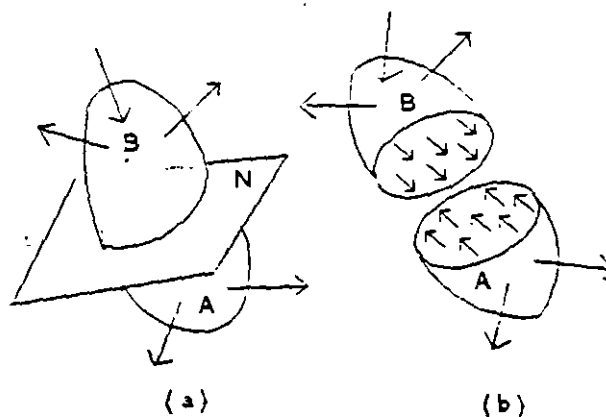


Figura 5.1

El cuerpo se ha dividido en dos partes, parte A y parte B, por el plano de corte N. A la acción que ejerce una parte sobre la otra en la superficie de corte se les llama fuerzas de interacción. Las fuerzas de interacción en la parte A equivalen a la resultante de las cargas que obran en la parte B y viceversa. Si se retira la parte B el sistema de fuerzas de interacción aplicadas a la parte A están en desequilibrio, sin embargo la parte A está en equilibrio, es decir las fuerzas de interacción son equilibradas por el sistema de fuerzas exteriores  $P_1, P_2, \dots, P_n$  que actúan sobre esta parte del cuerpo.

### 5.1.1 ESFUERZO EN UN PUNTO.

El esfuerzo medio o promedio es el cociente de dividir a la fuerza F entre el área

internos ocasionados por F, pero no precisa la forma en que estan distribuidos en la seccion. El esfuerzo promedio es más explicito en cuanto a la distribución en tanto que el área de la seccion sea más pequeña.

Considerese un cuerpo por el cual se ha hecho pasar un plano de corte N, el cual está definido por la normal exterior al mismo. Sea P un punto cualquiera de la seccion en estudio,  $\Delta A$  un elemento de área que lo contiene y  $\Delta F$  sea la resultante de las fuerzas que obran en el elemento de área. Si se reduce el contorno de  $\Delta A$  alrededor del punto P, entonces el área  $\Delta A$  y la resultante de cargas  $\Delta F$  en dicha área disminuirán y tenderán a cero. Al límite

$$\frac{\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta F}{\Delta A}$$

se le denomina esfuerzo en el punto P de superficie situado en el plano de corte N.

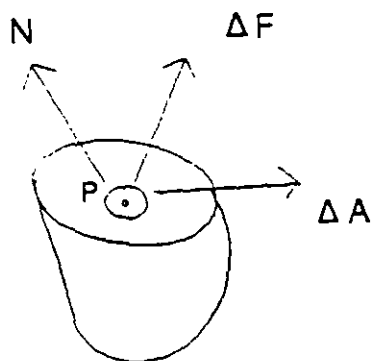


Figura 5.2

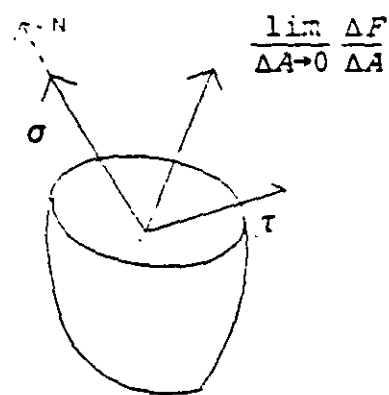


Figura 5.3

Este esfuerzo es un vector y es susceptible de descomponerse en dos, uno perpendicular al plano N y otro contenido en el mismo. Estas componentes reciben los nombres de esfuerzo normal  $\sigma$  y esfuerzo tangencial  $\tau$  en el punto respectivamente. Así:

$$\sigma = \frac{\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta N}{\Delta A} ; \quad \tau = \frac{\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta V}{\Delta A}$$



en donde  $\Delta N$  y  $\Delta V$  son las componentes normal y tangencial de la fuerza  $\Delta F$  correspondientes al elemento de área  $\Delta A$ , figura 5.3.

Para este trabajo los planos de corte se harán de tal manera que sean perpendiculares a uno de los ejes coordenados X, Y o Z.

Al esfuerzo normal asociado a un plano cuya normal es N, se denotará como  $\sigma_N$  y al esfuerzo tangencial como  $\tau_N$ ; sin embargo este último se puede descomponer en dos de acuerdo a los ejes que forman el plano por lo cual se denotará  $\tau_{Ni}$  donde el primer índice indica el plano al cual pertenece y el segundo índice indica la dirección del mismo. Figura 5.4

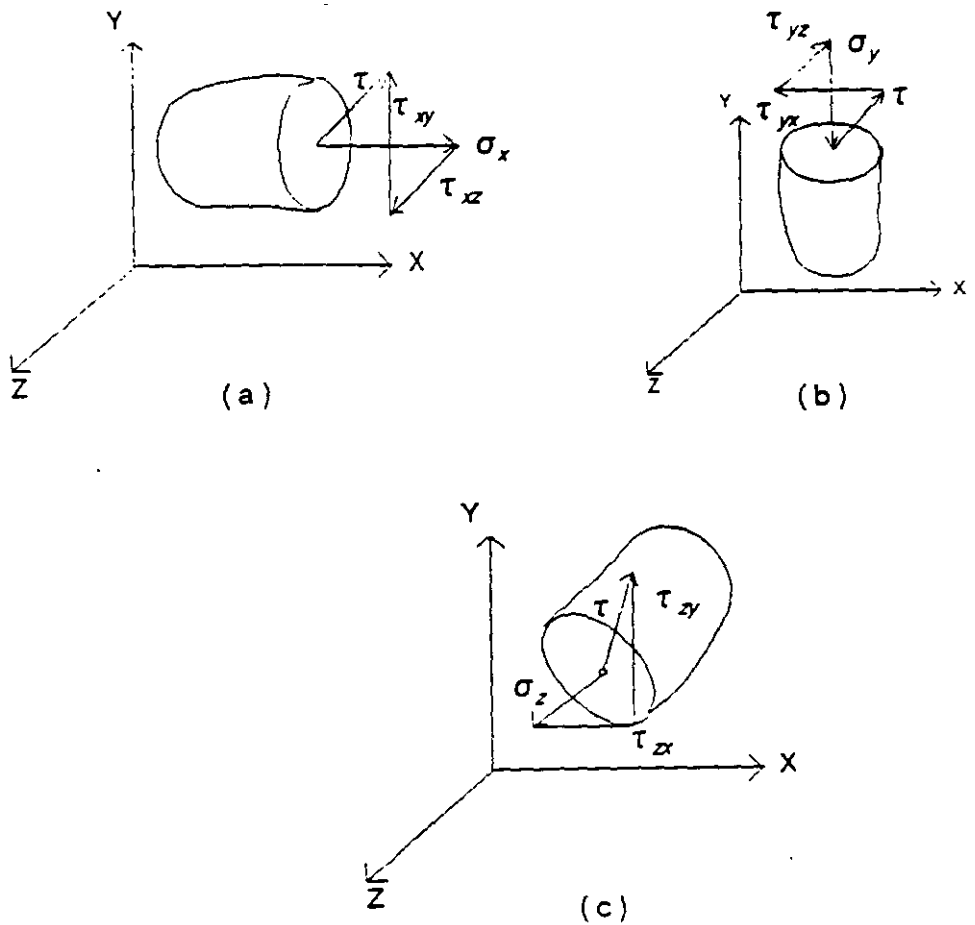


Figura 5.4

donde:  $\sigma_i$  es el esfuerzo normal en el plano  $i$  y  $\tau_{ij}$  esfuerzo tangencial plano  $i$ , dirección  $j$

### 5.1.2 ESFUERZOS EN PLANOS PARALELOS.

Separaremos de un cuerpo sólido un elemento infinitamente pequeño en forma de paralelepípedo cuyo volumen es  $dx dy dz$ , el cual se encuentra en equilibrio, figura 5.5

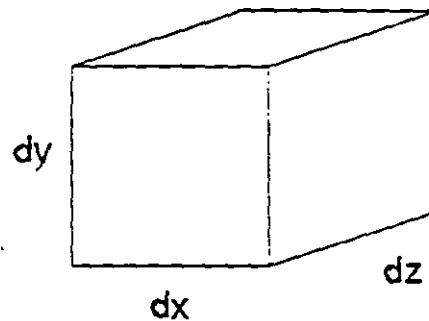


Figura 5.5

La acción que ejercen las partes suprimidas del cuerpo sobre el elemento aislado, los reemplazamos por fuerzas y los esfuerzos que generan, dichas fuerzas las descomponemos en tres componentes en cada cara, resultando así  $6 \times 3 = 18$  esfuerzos. Además se considera que en el cuerpo existen las llamadas fuerzas másicas ( fuerzas de cuerpo que son debidas a la gravedad ), también estas fuerzas se descomponen en 3 componentes X, Y, y Z figura 5.6

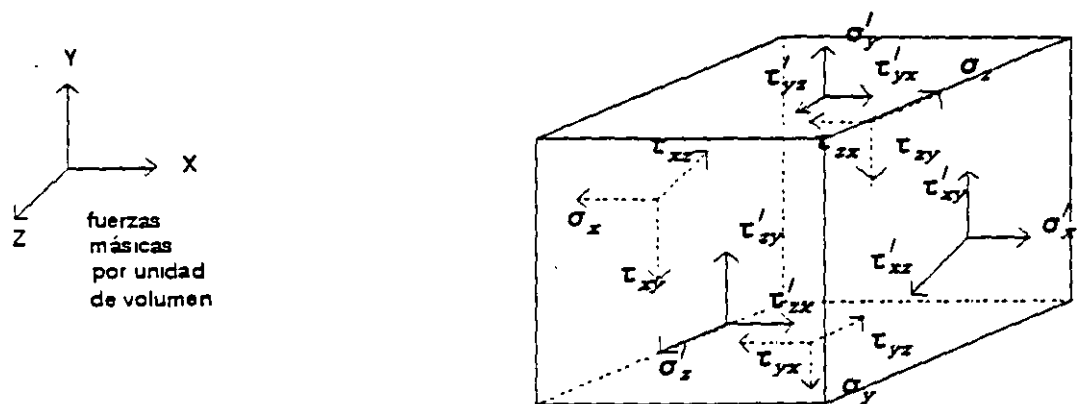
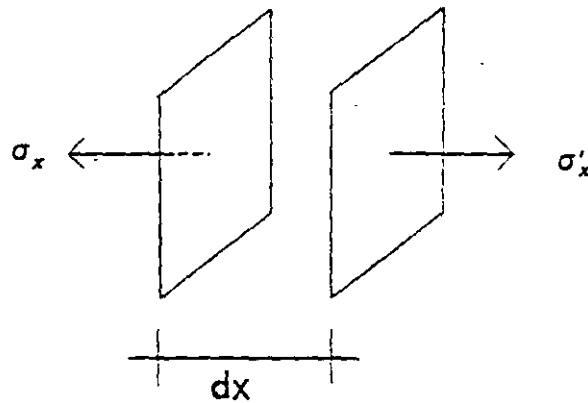


Figura 5.6

Aislado dos planos paralelos:



$$\sigma'_x = \sigma_x + d\sigma_x$$

sea  $\phi$  función de  $(x,y,z)$  entonces  $\phi = \phi(x,y,z)$ , se sabe que la diferencial de  $\phi$  esta dada por:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

si la función  $\sigma_x$  es igual a la función  $\phi$  y se considera que  $\sigma_x$  es función única y exclusivamente de la variable "x", entonces:

$$d\sigma_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

por lo que:

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

en forma análoga para los otros esfuerzos:

$$\sigma'_y = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$$

$$\sigma'_z = \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$$

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$$

$$\tau'_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$$

$$\tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$$

$$\tau'_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$$

$$\tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$$

$$\tau'_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz$$

representando estos esfuerzos en el cubo elemental se obtiene la figura 5.7

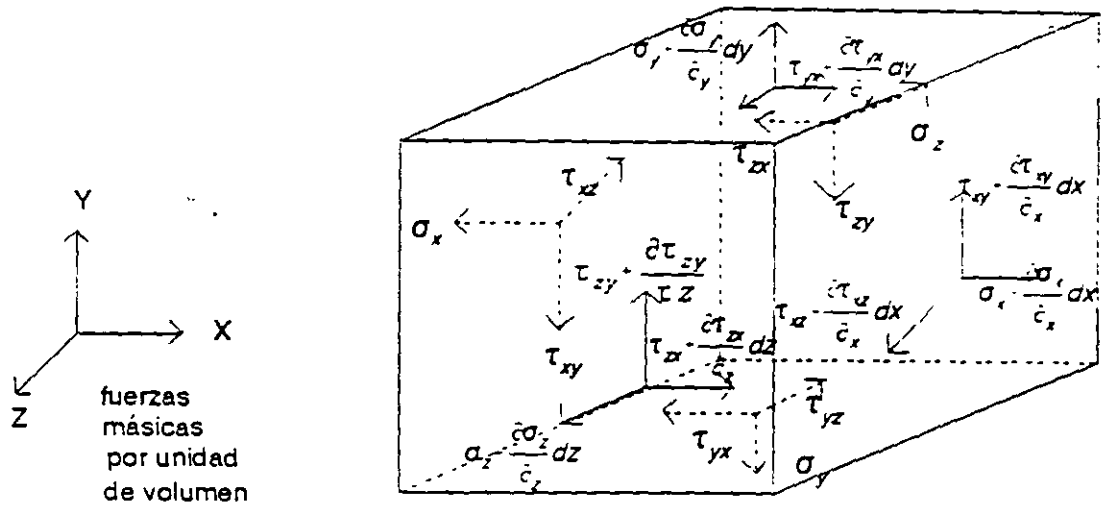


Figura 5.7

## 5.2 ECUACIONES DE EQUILIBRIO.

Considerese que las fuerzas de cuerpo actúan en el centro de gravedad del paralelepípedo figura 5.7 y que se encuentra en equilibrio; entonces deben verificarse las 6 ecuaciones de equilibrio estático.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

Aplicando la ecuación de equilibrio  $\Sigma F_x = 0$  resulta:

$$-\sigma_{xx} d_y d_z - \left( \sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d_x \right) d_y d_z - \tau_{yx} d_x d_z - \left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} d_y \right) d_x d_z - \tau_{zx} d_x d_y - \left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} d_z \right) d_y d_x - X d_x d_y d_z = 0$$

desarrollando:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d_x d_y d_z + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} d_x d_y d_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} d_x d_y d_z + X d_x d_y d_z = 0$$

dividiendo entre  $dx dy dz$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

En forma similar para las otras dos ecuaciones de equilibrio  $\Sigma F_y = 0$  y  $\Sigma F_z = 0$  se obtiene respectivamente :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

A estas tres ecuaciones se les llama ecuaciones de Navier o de equilibrio interno.

### 5.3 ESFUERZOS EN PLANOS PERPENDICULARES.

Aplicando las últimas tres ecuaciones de equilibrio ( suma de momentos igual a cero ) se puede conocer la relación de los esfuerzos en planos perpendiculares. Así aplicando  $\Sigma M_z = 0$  de la figura 5.8

$$\left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} d_y \right) d_z d_x \frac{d_y}{2} - \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} d_x \right) d_z d_y \frac{d_x}{2} + \tau_{yx} d_z d_x \frac{d_y}{2} - \tau_{xy} d_z d_y \frac{d_x}{2} = 0$$

reordenando términos y dividiendo entre  $dx dy dz$  :

$$\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx = 0$$

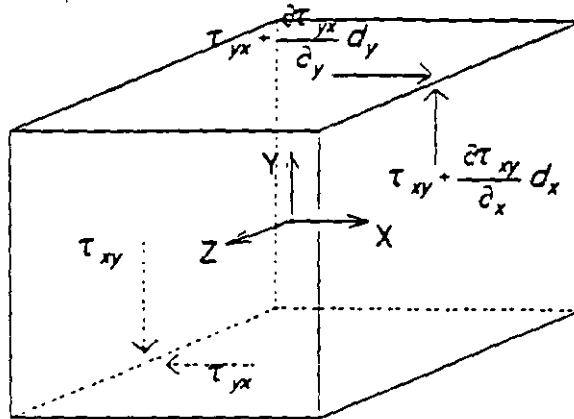


Figura 5.8

aplicando límites cuando  $dx$  y  $dy$  tienden a cero, resulta finalmente:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

En forma similar aplicando  $\sum M_y = 0$  y  $\sum M_x = 0$  se obtiene

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

De lo anterior los 18 esfuerzos incognitas figura 5.6 se han reducido a seis que son:  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yz}$  y  $\sigma_z$

Agrupando los esfuerzos de 3 caras unicamente obtenemos lo que se conoce como tensor de esfuerzos

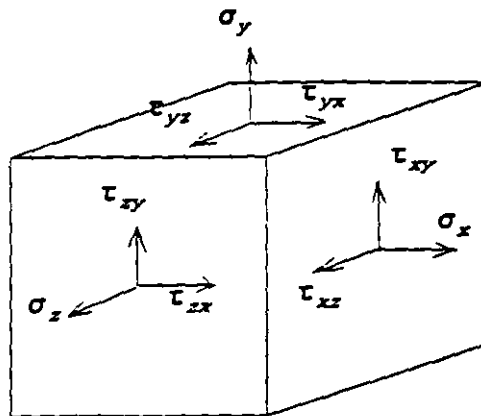


Figura 5.9

$$\tau_x = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad \tau_y = \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad \tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$$

$$[\sigma] = [ \{ \tau_x \} \quad \{ \tau_y \} \quad \{ \tau_z \} ]$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

a esta agrupación se le llama tensor de esfuerzos.

#### 5.4 ESFUERZOS EN PLANOS OBLICUOS.

Para conocer los esfuerzos que actúan sobre las caras oblicuas pertenecientes a la superficie, se requiere establecer una relación de los esfuerzos que actúan en las tres áreas elementales paralelas a los planos coordenados, como se muestra en la figura 5.10

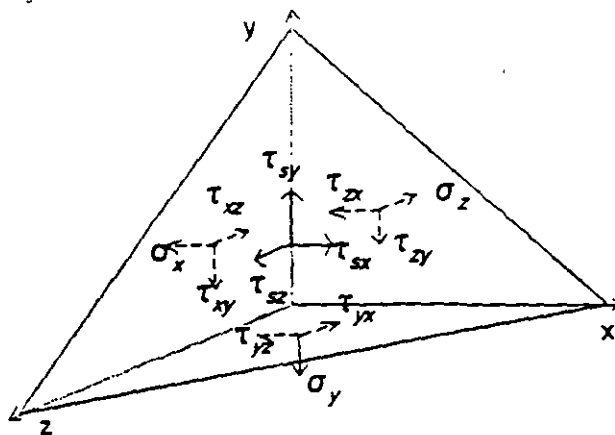


Figura 5.10

por equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$0 = \tau_{sx} ds - \sigma_x \frac{dzdy}{2} - \tau_{yx} \frac{dxdz}{2} - \tau_{zx} \frac{dxdy}{2}$$

pero:

$$\frac{dzdy}{2} = ds \cos(s, x)$$

$$\frac{dxdz}{2} = ds \cos(s, y)$$

$$\frac{dxdy}{2} = ds \cos(s, z)$$

$$0 = \tau_{sx} ds - \sigma_x ds \cos(s, x) - \tau_{yx} ds \cos(s, y) - \tau_{zx} ds \cos(s, z)$$

de donde:

$$\tau_{sx} = \sigma_x \cos(s, x) + \tau_{yx} \cos(s, y) + \tau_{zx} \cos(s, z)$$

Aplicando las otras dos ecuaciones de equilibrio  $\Sigma F_y = 0$  y  $\Sigma F_z = 0$  se obtiene respectivamente:

$$\tau_{sy} = \sigma_y \cos(s, y) + \tau_{xy} \cos(s, x) + \tau_{zy} \cos(s, z)$$

$$\tau_{sz} = \sigma_z \cos(s, z) + \tau_{xz} \cos(s, x) + \tau_{yz} \cos(s, y)$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \tau_{sx} \\ \tau_{sy} \\ \tau_{sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(s, x) \\ \cos(s, y) \\ \cos(s, z) \end{bmatrix}$$

a este sistema de ecuaciones se les llama ecuaciones de superficie o ecuaciones de Cauchy.

## 5.5 VARIACION DEL ESFUERZO CON LA VARIACION DEL ELEMENTO.

Considerese un cuerpo sólido sometido a un sistema de cargas que se encuentra en equilibrio por el cual se trazan dos planos de corte el a-a y el b-b como se muestra en la figura 5.11



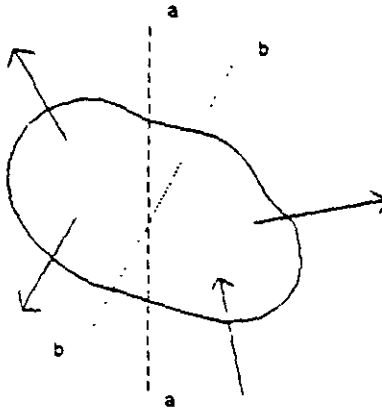


Figura 5.11

El plano de corte se traza perpendicularmente a la dirección de la resultante  $R$ , el cual se representa en la figura 5.12.

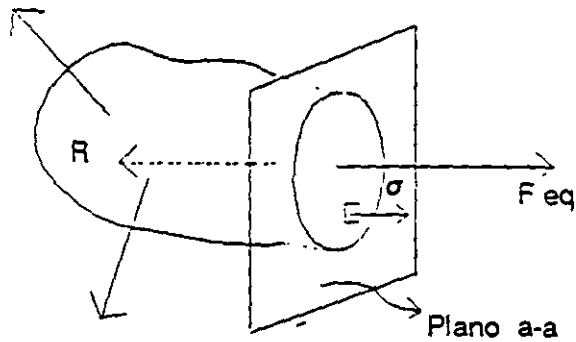


Figura 5.12

Cualquier elemento o punto situado en el plano de corte estará sometido únicamente a esfuerzo axial, mientras que si trazamos un plano de corte inclinado respecto de la dirección de la resultante, cualquier elemento situado en dicho plano estará sometido a esfuerzo normal y tangencial como se puede ver en la figura 5.13.

si se particulariza a un estado plano de esfuerzos, donde únicamente se tengan  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  como los esfuerzos en un punto, es decir  $\sigma_z = 0$  y  $\tau_{xz} = 0$  para  $i = x, y$ ; como se ilustra en la figura 5.14.

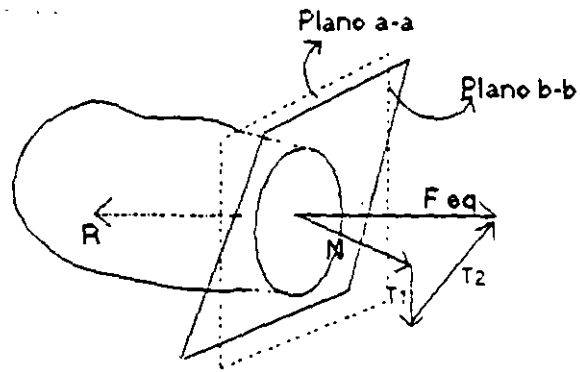


Figura 5.13

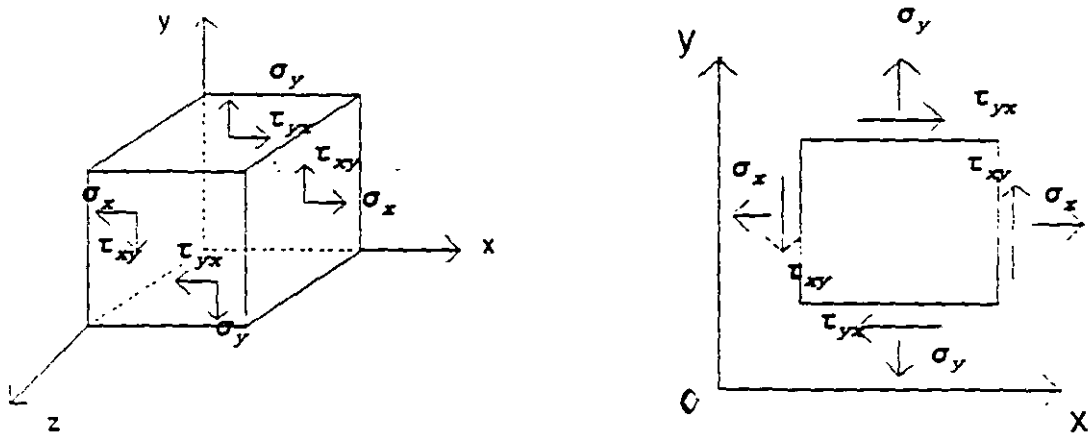


Figura 5.14

Los esfuerzos que actúan sobre cualquier plano "N" que contenga al eje Z y que está inclinado respecto a los ejes "X" e "Y" se representan en la figura 5.15

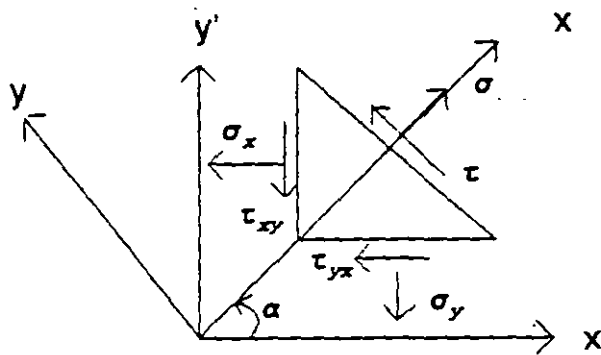


Figura 5.15

Si el área de la cara inclinada es una cantidad  $A$ ; las áreas de las otras caras serán  $A \cos \alpha$  y  $A \sin \alpha$  para los planos  $x$  e  $y$  respectivamente, como se indica en la figura 5.16

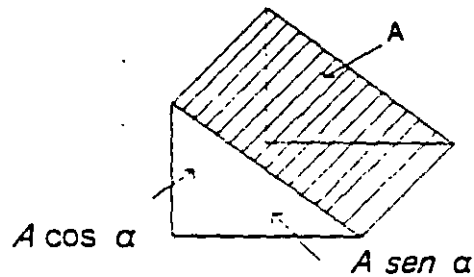


Figura 5.16

para aplicar el equilibrio dibujamos el diagrama de cuerpo libre en la figura 5.17

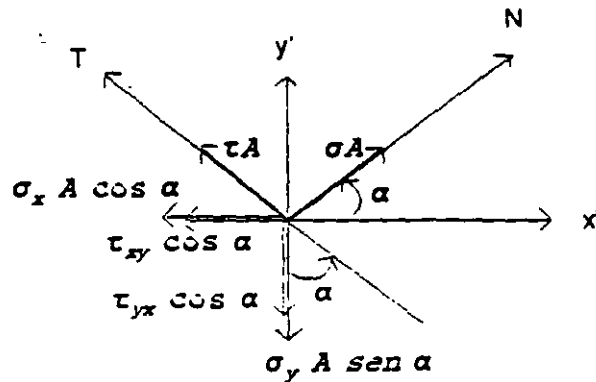


Figura 5.17

Aplicando  $\Sigma F_n = 0$

$$0 = \sigma A - \sigma_x A \cos \alpha \cos \alpha - \tau_{xy} A \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_y A \sin \alpha \sin \alpha + A \cos \alpha \sin \alpha$$

de donde:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

sustituyendo

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\sigma = \sigma_x \left( \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) + \sigma_y \left( \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) - 2\tau_{xy} \left( \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)$$

Simplificando términos:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad 5.1$$

Aplicando  $\Sigma F_t = 0$

$$0 = \tau A + \sigma_x A \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} A \sin^2 \alpha - \sigma_y A \sin \alpha \cos \alpha - \tau_{xy} A \cos^2 \alpha$$

de donde:

$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha - \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

sustituyendo las identidades trigonométricas anteriores:

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Las ecuaciones 5.1 y 5.2 representan el esfuerzo normal y cortante que están en función de dos esfuerzos en planos perpendiculares en dirección "X" e "Y".

## 5.6 ESFUERZOS PRINCIPALES.

Con frecuencia el interés se centra en la determinación del máximo esfuerzo y los planos donde se presentan tales esfuerzos. En general se determinan los planos donde se presentan los esfuerzos máximos y mínimos tanto normales como tangenciales, lo cual se logra igualando con cero las derivadas con respecto al ángulo de inclinación de las ecuaciones 5.1 y 5.2. Así para localizar el plano de un esfuerzo normal máximo o mínimo se deriva la ecuación 5.1 respecto de  $\alpha$  y se iguala con cero

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} (2) \sin \alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

de donde

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

a partir de esta ecuación se puede encontrar dos direcciones perpendiculares entre sí,

para las cuales el esfuerzo tangencial es nulo. Estas direcciones se llaman direcciones principales y los esfuerzos normales corresponden a los esfuerzos principales.

La magnitud de los esfuerzos principales se obtiene sustituyendo los valores de las funciones  $\sin 2\alpha$  y  $\cos 2\alpha$  correspondientes en la ecuación 5.1. Si

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

gráficamente:

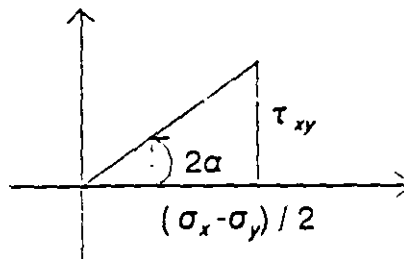


Figura 5.18

de donde:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\operatorname{cos} 2\alpha = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2}}$$

sustituyendo en la ecuación 5.1 se tiene:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

## 5.7 ESFUERZOS CORTANTES MAXIMOS.

De manera similar al estudio realizado antes para los esfuerzos normales se

procede con el esfuerzo cortante. Así para encontrar los planos en los que actúan los esfuerzos cortantes máximo o mínimo se deriva la ecuación 5.2 con respecto a  $\alpha$  y se iguala con cero. Después de efectuada esta operación se tiene:

$$\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}$$

donde  $\alpha$  define el plano donde el esfuerzo cortante es máximo o mínimo.

Haciendo la sustitución en la ecuación 5.2 de las funciones  $\cos 2\alpha$  y  $\sin 2\alpha$  determinadas en forma análoga a la de la figura 5.18 resulta:

$$\tau = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Esta ecuación da los esfuerzos cortantes máximo y mínimo. Se observa que el esfuerzo cortante máximo difiere únicamente en signo del esfuerzo cortante mínimo.

El sentido definido de esfuerzo cortante siempre se puede determinar por sustitución directa de  $\alpha$  en la ecuación 5.2 (correspondiente al plano de máximo o mínimo esfuerzo cortante).

## 5.8 DEFORMACIONES.

Considérese un cuerpo elástico, homogéneo e isótropo, sujeto de tal forma que no tiene movimiento de cuerpo rígido. Entonces todo corrimiento de sus puntos será originado por sus deformaciones. Así el punto "p" después de deformarse el cuerpo toma la posición p', gráficamente se tiene;

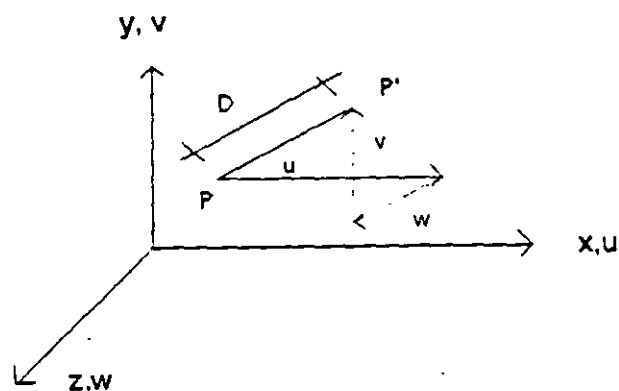


Figura 5.19

donde  $u, v$  y  $w$  son las proyecciones del desplazamiento  $pp'$  sobre los ejes coordenados.

Si se considera un elemento diferencial del cuerpo con dimensiones  $dx, dy, dz$  al deformarse, sus longitudes varían y se deforman los ángulos formados por sus caras, que inicialmente son rectas.

Se define como deformación lineal unitaria en un punto y en la dirección de  $P$  a  $P'$  como:

$$\epsilon = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{L}}{\Delta L}$$

Por facilidad considerese solamente una cara del cuerpo para determinar las deformaciones (estado plano de deformaciones), figura 5.20.

Si el cuerpo no se deforma, todos los puntos se desplazan,  $u$  en la dirección  $x$  y  $v$  en la dirección  $y$ ; pero como el cuerpo se deforma, entonces los puntos se desplazan  $u + du$  y  $v + dv$  respecto a cada eje.

Cuando la variación es respecto al eje  $x$ , entonces:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad y \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

si la variación es respecto al eje  $y$ , entonces:

$$du = \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad ; \quad dv = \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

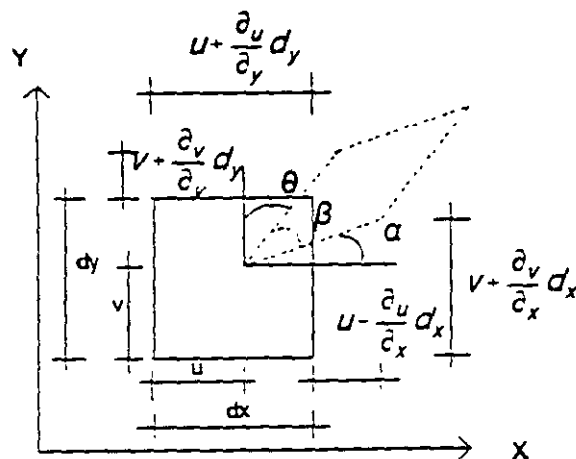


Figura 5.20

La deformación lineal unitaria en dirección X, será:

$$\epsilon_x = \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

La deformación lineal unitaria en dirección Y será:

$$\epsilon_y = \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy) - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Generalizando a un espacio tridimensional:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

La deformación angular se denota como  $\gamma_{xy}$  e indica la distorsión del cuerpo en el plano Z ( formado por los ejes x e y ).

De la figura 5.20 se tiene:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \theta = \frac{\pi}{2} - \beta$$

para ángulos pequeños la tangente del ángulo es igual al ángulo en radianes, así:

$$\alpha = \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx) - v}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}$$

de donde:

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$$

y

$$\theta = \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy) - u}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}}$$

de donde:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial y}$$

así se tiene que:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$



En general para un cuerpo en el espacio tridimensional se tiene lo siguiente:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

Resumiendo se tiene:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

A estas seis expresiones se les conoce como relaciones de Cauchy.

## 5.9 ECUACIONES DE CONTINUIDAD.

Estas ecuaciones relacionan las deformaciones lineales con las angulares y se obtienen de las relaciones de Cauchy derivando las deformaciones angulares como se indica:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z}$$

Las derivadas parciales terceras de u, v y w se obtienen derivando de las relaciones de Cauchy las deformaciones lineales de tal manera que se obtenga el

término deseado, así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} & ; & & \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} & ; & & \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} &= \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2} & ; & & \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} \end{aligned}$$

Sustituyendo en las primeras expresiones anteriores se obtienen las primeras 3 ecuaciones de compatibilidad, así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{5.3.a}$$

Derivando nuevamente de las relaciones de Couchy las deformaciones angulares como se indica en seguida:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

multiplicando por -1 la primera de estas ecuaciones y sumandola con las otras dos se obtiene:

$$-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \frac{2 \partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

derivando parcialmente respecto de z toda la ecuación se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial v_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial v_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial v_{xz}}{\partial y} \right) = \frac{2\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$$

de las relaciones de Couchy se tiene que:

$$\epsilon_z = \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

derivando parcialmente respecto de "x" e "y" resulta:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$$

sustituyendo se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial v_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial v_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{2\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y}$$

En forma similar se obtienen las otras 2 ecuaciones;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial v_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial v_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial v_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{2\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial v_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial v_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{2\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} \quad 5.3.b$$

Las ecuaciones 5.3.a y 5.3.b constituyen las seis ecuaciones de continuidad o compatibilidad que relacionan las deformaciones angulares con las deformaciones lineales.

## 5.10 RELACION ESFUERZO-DEFORMACION.

La solución de los problemas físicos de la teoría de elasticidad referente a las deformaciones que ocurren en un cuerpo elástico bajo la acción de fuerzas exteriores aplicadas a él no será posible mientras que los esfuerzos y deformaciones no estén relacionados por una ley física (Ley de Hooke).

Para deformaciones pequeñas la forma lineal es la más sencilla y más racional por lo tanto, se puede pensar que los esfuerzos son función de las deformaciones, es decir:

$$\sigma_x = f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$\sigma_y = f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$\sigma_z = f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$\tau_{xy} = f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$\tau_{yz} = f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$\tau_{zx} = f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

por lo que se puede escribir:

$$\sigma_x = a_{11}\epsilon_x + a_{12}\epsilon_y + a_{13}\epsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{yz} + a_{16}\gamma_{zx}$$

$$\sigma_y = a_{21}\epsilon_x + a_{22}\epsilon_y + a_{23}\epsilon_z + a_{24}\gamma_{xy} + a_{25}\gamma_{yz} + a_{26}\gamma_{zx}$$

$$\tau_{zx} = a_{61}\epsilon_x + a_{62}\epsilon_y + a_{63}\epsilon_z + a_{64}\gamma_{xy} + a_{65}\gamma_{yz} + a_{66}\gamma_{zx}$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

5.4

en forma reducida:

$$\{ \sigma \} = [ E ] \{ \epsilon \} \quad 5.4.a$$

o bien.

$$\{ \epsilon \} = [ E ]^{-1} \{ \sigma \} \quad 5.5$$

Para cuerpos elásticos isotrópicos las ecuaciones anteriores adquieren la forma más simple, se puede deducir a partir de la ley de Hooke aplicada a las barras elásticas sometidas a tensión o compresión.

En la figura 5.21 se muestra la gráfica del comportamiento del acero, se observa claramente dos zonas bien definidas, la elástica (lineal) y la no elástica (no lineal). el punto A marca el punto de proporcionalidad.

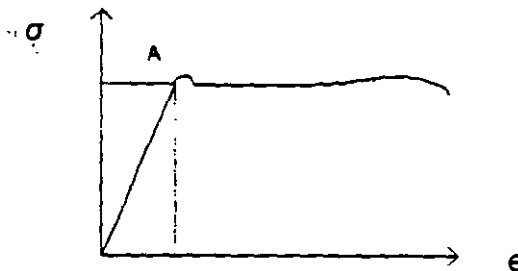


Figura 5.21

Esta gráfica es diferente para los distintos materiales y depende de la composición química y estructural del material.

En casi todos los materiales, el alargamiento longitudinal cuando hay solamente tensión, es acompañado por deformaciones transtversales, siendo estas deformaciones proporcionales y de sentido contrario al alargamiento, como se muestra en la figura 5.22.

La deformación transversal en función de la deformación longitudinal se puede escribir como:

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\mu \epsilon_x$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de proporcionalidad y se conoce como coeficiente de Poisson. Este coeficiente es constante para cada material, pero diferente para los distintos materiales.

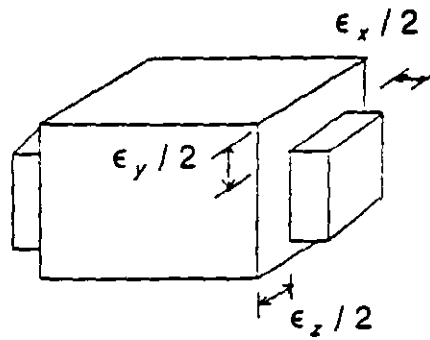


Figura 5.22

Además de las consideraciones hechas anteriormente se admitirá la proposición de que en un material elástico, homogéneo e isótropo el esfuerzo normal no genera distorsión angular y el esfuerzo cortante no genera alargamiento. Sobre esta base se determinaran las relaciones entre esfuerzo y deformación.

Considérese un paralelepípedo de aristas iguales a la unidad, sometido a la acción de fuerzas normales como se muestra en la figura 5.23.

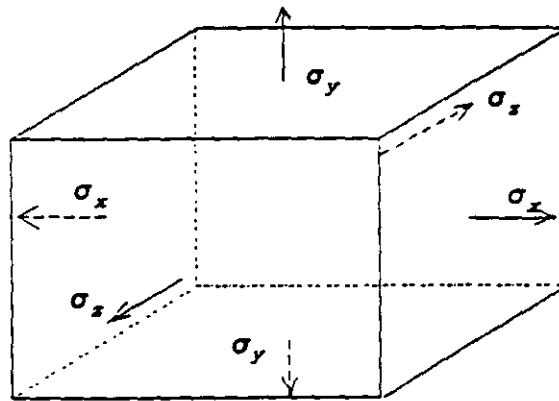


Figura 5.23

Si se considera que solamente actúa el esfuerzo  $\sigma_x$ , es decir  $\sigma_x \neq 0$  y  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ , la deformación lineal unitaria por este esfuerzo es:

$$\epsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

Bajo la acción del esfuerzo  $\sigma_y$ , es decir  $\sigma_y \neq 0$  y  $\sigma_x = \sigma_z = 0$ , la deformación en la dirección x será:

$$\epsilon_x'' = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$$

Análogamente para  $\sigma_z \neq 0$  y  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ , la deformación en la dirección x será:

$$\epsilon_x''' = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$$

Por el principio de superposición de causas y efectos la deformación total a lo largo del eje x cuando actúan los tres esfuerzos simultáneamente es:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_x' + \epsilon_x'' + \epsilon_x''' \\ \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} \end{aligned}$$

expresión que se puede escribir:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

En forma similar para lograr la deformación lineal unitaria a lo largo de los ejes "y" y "z" se tiene respectivamente:

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned}$$

La proporcionalidad entre los esfuerzos tangenciales y las distorsiones angulares que se desarrollan en las caras del paralelepípedo están dadas por:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned}$$

donde G es el módulo de elasticidad al corte.

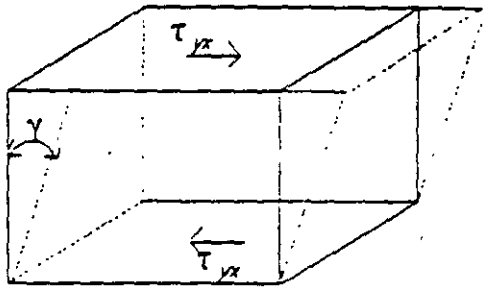


Figura 5.24

Arreglando en forma matricial las seis ecuaciones anteriores:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

A este arreglo se le conoce como la ecuación generalizada de Hooke.

Considerando la relación entre los módulos de elasticidad axial y al corte que está dada por

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

la ecuación generalizada de Hooke se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$



De acuerdo a la ecuación 5.5 la ecuación 5.6 se puede escribir como:

$$\{ \epsilon \} = [ E ]^{-1} \{ \sigma \}$$

Al considerar la relación inversa se tiene:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-2\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-2\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

que de acuerdo a la ecuación 5.4.a en forma compacta se puede escribir:

$$\{ \sigma \} = [ E ] \{ \epsilon \}$$

# FUNDAMENTOS DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS.

## 6

### 6.1 DESCRIPCION GENERAL Y ALCANCE DEL METODO.

La formulación del método de los elementos finitos data de 1943 aplicado a problemas de torsión en vigas, pero no es sino hasta 1960 cuando tuvo su auge, esto fue posible sobre todo a los progresos en el campo de la computación, ya que como en el método de las rigideces, el planteamiento del método de los elementos finitos conduce a un sistema de ecuaciones simultáneas, que en general resultan relativamente grandes por lo cual para su manejo y solución se requiere de las computadoras.

El método de los elementos finitos se desarrolló como una extensión de las técnicas del análisis estructural matricial.

Se puede pensar que el método de los elementos finitos es una generalización del método de las rigideces por lo que su enfoque es más amplio y se puede aplicar a casi todas las áreas de ingeniería.

En muchos de los casos de ingeniería se requiere determinar la distribución de esfuerzos y deformaciones en un continuo elástico. Estos casos pueden variar desde problemas bidimensionales de esfuerzos de deformación plana, sólidos en revolución, flexión de placas y hasta el análisis más general de sólidos tridimensionales. En todos los casos, el número de interconexiones entre un elemento finito cualquiera rodeado por fronteras imaginarias y los elementos vecinos a él es infinito, lo cual hace una estructura continua. La discretización de la estructura se logra siguiendo los siguientes puntos:

- 1) El sistema o continuo se divide en un número finito de elementos a través de líneas o superficies imaginarias.
- 2) Se supone que los elementos están conectados entre sí mediante nodos en puntos discretos situados en sus contornos.

3) Se toma un conjunto de funciones que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada elemento finito en función de los desplazamientos nodales de dicho elemento.

4) Se determina un sistema de fuerzas concentradas en nodos tal que equilibren los esfuerzos y cualquier carga repartida, permitiendo así una relación entre fuerzas y desplazamientos de la forma  $P = K D$

Si se supone que de alguna manera se ha logrado definir la relación de rigideces entre las fuerzas y los desplazamientos de los nodos al igual que en el método de las rigideces, inicialmente para cada elemento, con la compatibilidad y el equilibrio se puede determinar la ecuación fuerza-desplazamiento del sistema estructural  $P = K D$ . La solución de esta ecuación se puede encontrar en forma similar que para el método directo de las rigideces.

Después de solucionada la ecuación fuerza-desplazamiento del sistema estructural para los desplazamientos nodales, pueden calcularse los esfuerzos internos de cada elemento.

Aunque este proceso obliga a que exista equilibrio en los puntos nodales, en general no hay imposición del equilibrio a lo largo de las fronteras del elemento, lo cual significa, por ejemplo, que un análisis del elemento finito puede determinar que los esfuerzos en los puntos A y B figura 6.1 cada uno en un elemento distinto, sean diferentes.

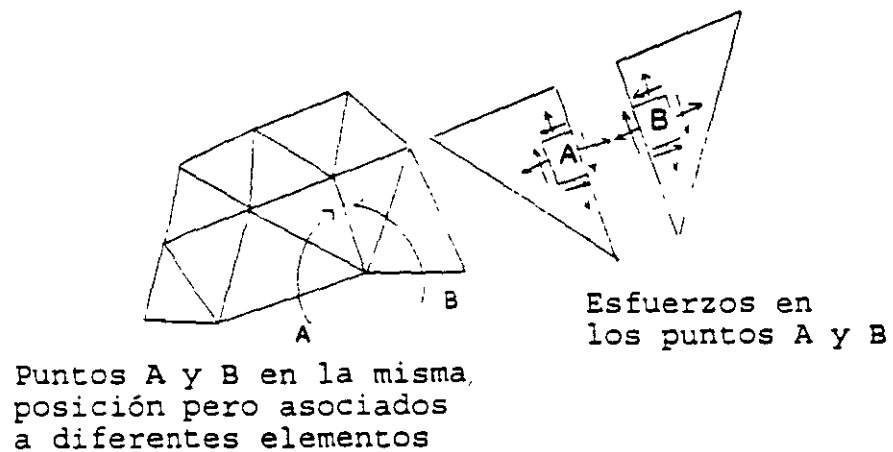


Figura 6.1

Por otro lado no siempre es fácil asegurar que las funciones de desplazamiento escogidos satisfagan las condiciones de compatibilidad o continuidad de desplazamientos entre elementos adyacentes. Por consiguiente esta condición puede no cumplirse en el contorno de los elementos, aunque es evidente que dentro de cada elemento si se cumplirá a causa de la unicidad de los desplazamientos ya que los mismos estan representados por funciones continuas.

Por lo anterior es evidente que se han introducido una serie de aproximaciones en cuanto a la igualdad de los esfuerzos y la continuidad de los desplazamientos. Al reducir el tamaño de los elementos finitos, la discrepancia entre los esfuerzos en las fronteras de elementos adyacentes disminuiría y el campo de desplazamientos convergerá en uno que sea continuo.

## 6.2 CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS.

Un campo de desplazamiento es una función de las coordenadas que definen la forma del desplazamiento de un elemento.

Por ejemplo para un elemento armadura el campo de desplazamientos es lineal y esta dado por:

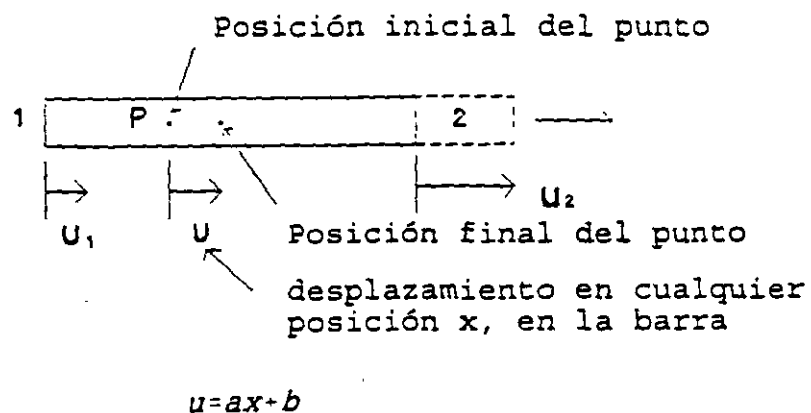
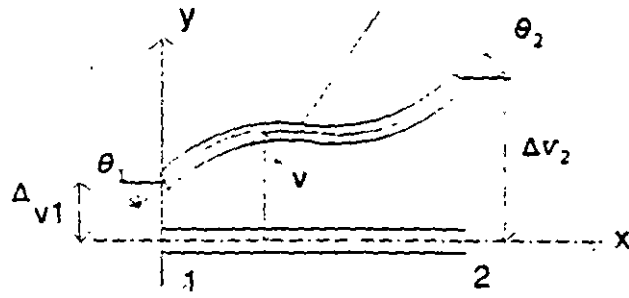


Figura 6.2

Para un elemento viga:

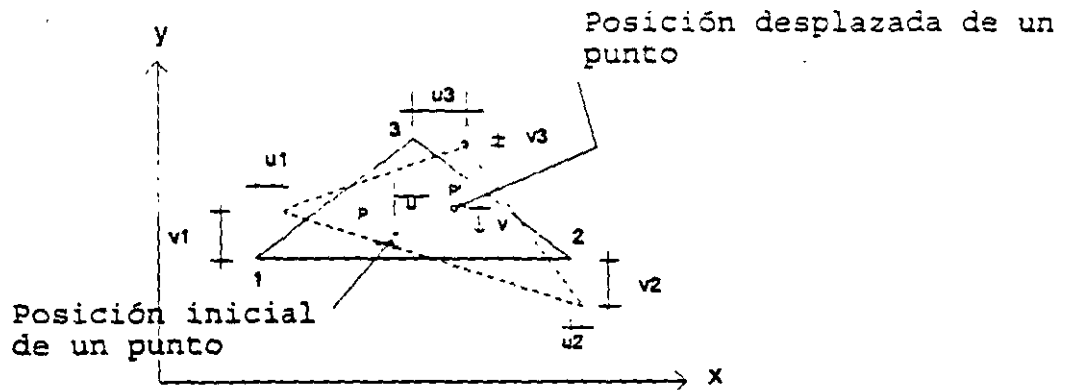
desplazamiento de la viga en cualquier posición x



$$v = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Figura 6.3

Para un elemento triangular:

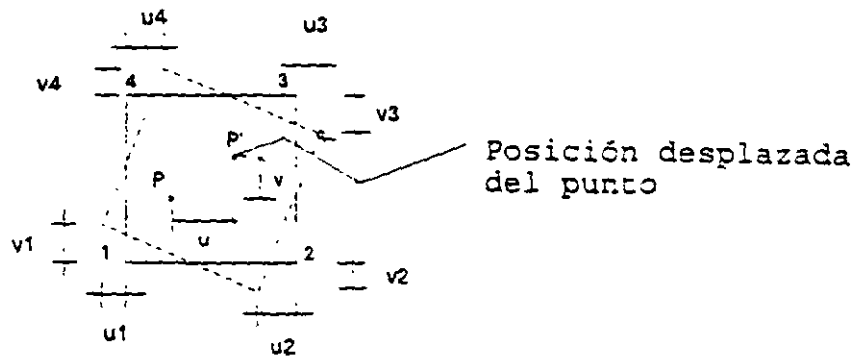


$$u = ax + by + c$$

$$v = dx + dy + f$$

Figura 6.4

Para un elemento rectangular:



\$u, v\$ desplazamiento en cualquier posición

$$u = a + bx + cy + dxy$$

$$v = e + fx + gy + hxy$$

Figura 6.5

Las ecuaciones debajo de las figuras describen los posibles desplazamientos del elemento en términos de algunos parámetros desconocidos \$a, b, c, d, \dots\$, etc. Las formas más comunes en relación a los campos de desplazamiento son polinomios, para problemas unidimensionales y bidimensionales se toman del triángulo de Pascal.

$a_0$	Grado
$a_1x \quad a_2y$	1
$a_3x^2 \quad a_4xy \quad a_5y^2$	2
$a_6x^3 \quad a_7x^2y \quad a_8xy^2 \quad a_9y^3$	3
$a_{10}x^4 \quad a_{11}x^3y \quad a_{12}x^2y^2 \quad a_{13}xy^3 \quad a_{14}y^4$	4
...	...

Si se utilizan todos los términos que están arriba de cierto nivel, en el campo de desplazamientos, se dice que el polinomio está completo, lo cual es deseable ya que así se incrementa la convergencia, aunque algunos elementos están basados en polinomios incompletos.

Cabe hacer notar que el campo de desplazamientos son supuestos que pueden o no ser la forma exacta del desplazamiento del elemento.

El objetivo de los elementos finitos es determinar los coeficientes de los campos de desplazamiento seleccionados, que minimizan el potencial total de la estructura, o bien el error que introduce la aproximación en las ecuaciones diferenciales rectoras del equilibrio. Mientras más pequeño sea el elemento finito se tendrá más oportunidad de minimizar el error por la aproximación.

### 6.3 FUNCIONES DE FORMA.

En las figuras 6.1 a la 6.5 se han mostrado los campos de desplazamiento para cuatro elementos y también los movimientos posibles de los nodos es decir los desplazamientos nodales. Para que estos desplazamientos se clasifiquen como grados de libertad deben constituir el mínimo número de elementos de desplazamientos necesario para describir completamente la deformación en cualquier punto del elemento. Para que esto sea cierto el campo de desplazamiento elegido debe escribirse en función de los desplazamientos nodales en vez de los coeficientes polinomiales a,b,c,etc. A los campos de desplazamiento en función de los desplazamientos nodales se les conoce como funciones de forma.

#### 6.3.1 FUNCIONES DE FORMA PARA UN ELEMENTO ARMADURA.

Considérese el elemento que se muestra en la figura 6.6 con los grados de libertad nodales  $U_1$  y  $U_2$  y el campo de desplazamientos elegido:

$$u = ax + b \quad 6.1$$

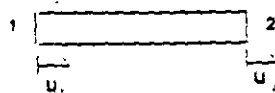


Figura 6.6

de la figura se observa que si  $x=0$  el desplazamiento debe ser  $u_1$  y si  $x=L$  el desplazamiento debe ser  $u_2$ .

Al aplicar estas dos condiciones, se obtiene:

$$u_1 = a(0) + b$$

$$u_2 = a(L) + b$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

denotando al vector de desplazamientos nodales por "DN", a la matriz de coeficientes por "A" y al vector formado por las constantes como "a", tenemos:

$$[D_N] = [A] [a] \quad 6.2$$

solucionando para [ a ]

$$[a] = [A]^{-1} [D_N] \quad 6.3$$

así:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Expresando en forma matricial el campo de desplazamientos dado en la ecuación 1

$$u = [1 \ x] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

en forma condensada se puede escribir como:

$$u = [P] [a] \quad 6.4$$

sustituyendo la ecuación 3 en la 4, se obtiene



$$u = [P] [A]^{-1} [D_M] \quad 6.5$$

si llamamos  $[N] = [P] [A]^{-1}$  el campo de desplazamientos se puede escribir:

$$u = [N] [D_N] \quad 6.6$$

como el campo de desplazamientos quedó expresado en términos de los desplazamientos nodales,  $[N]$  se define como la matriz de las funciones de forma. Cada elemento de  $[N]$  es una función de forma que multiplica a un desplazamiento nodal (grado de libertad). Así:

$$u = [x \ 1] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

haciendo el producto:

$$u = \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot \frac{x}{L} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

de donde se puede decir que las funciones de forma para el desplazamiento nodal  $u_1$  (grado de libertad 1) es:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad 6.7.1$$

y para el desplazamiento nodal 2 (grado de libertad 2) es:

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad 6.7.2$$

La validez de estas funciones de interpolación se demuestra sustituyendo los valores de  $x=0$  y  $x=L$ , es decir:

$$\text{si } x = 0 \quad u = [1 \ 0] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_1$$

$$\text{si } x = L \quad u = [0 \ 1] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_2$$

Las gráficas del campo de desplazamientos y de las funciones de interpolación se muestran en la figura 6.7

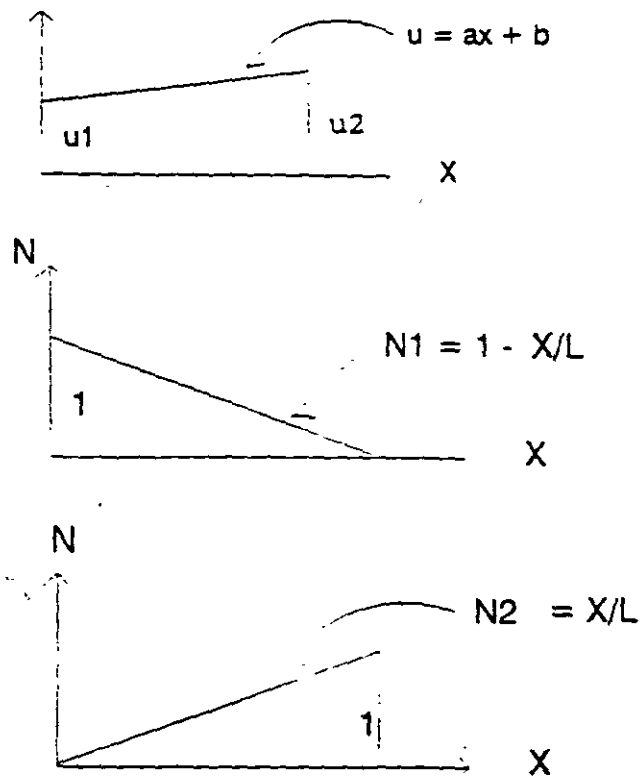


Figura 6.7

Se observa que las funciones de forma tiene un valor unitario cuando son valuadas en su nodo correspondiente y un valor de cero en cualquier otro nodo.

Cabe aclarar que la elección del campo de desplazamientos no es arbitraria. Se observa que para describir el campo de desplazamientos nodales, deben de poder definirse de manera única los coeficientes de los polinomios  $a, b, c$ , etc. Esto requiere que haya tantos coeficientes como grados de libertad para el elemento. Si esto es cierto la matriz  $A$  resultará cuadrada y por lo tanto se puede invertir para encontrar

$$[a] = [A]^{-1} [D_N]$$

Esto se generaliza para cualquier elemento finito que se considere.

### 6.3.2 FUNCIONES DE FORMA PARA UN ELEMENTO VIGA.

Considérese los grados de libertad correspondientes a los desplazamientos nodales  $v_1$ ,  $\theta_1$ ,  $v_2$  y  $\theta_2$  como se muestra en la figura 6.8

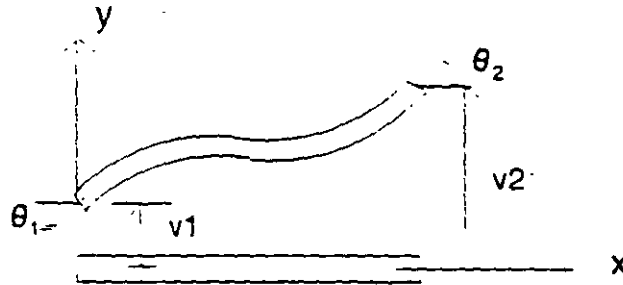


Figura 6.8

Las condiciones de frontera para este elemento son: para  $x = 0$ ,  $\frac{dv}{dx} = \theta_1$  y  $v = v_1$ ; para  $x = L$ ,  $\frac{dv}{dx} = \theta_2$  y  $v = v_2$ .

El campo de desplazamientos para este elemento fue planteado como:

$$v = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad 6.8$$

de donde se puede obtener:

$$\frac{dv}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c \quad 6.9$$

Estas funciones se determinan partiendo que el campo cúbico de desplazamientos satisfacen las condiciones de frontera.

Sustituyendo estas condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \text{si } x = 0 \quad v_1 &= d \\ \theta_1 &= c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = L \quad v_2 &= aL^3 + bL^2 + cL + d \\ \theta_2 &= 3aL^2 + 2bL + c \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$[D_N] = [A] \{a\}$$

al solucionar:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\{a\} = [A]^{-1} [D_N]$$

Expresando en forma matricial el campo de desplazamientos

$$v = [x^3 \ x^2 \ x \ 1] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$[D] = [F] \{a\}$$

sustituyendo el vector  $\{a\}$

$$v = [x^3 \ x^2 \ x \ 1] \begin{bmatrix} \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

en forma condensada:

$$[D] = [N] [DN]$$

desarrollando el producto:

$$v = \left[ \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1, \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x, -\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2}, \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

de donde las funciones de forma resultan:

$$N_1 = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1$$

$$N_2 = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x$$

$$N_3 = -\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2}$$

$$N_4 = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$

6.10

las funciones de forma  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  y  $N_4$  corresponden a los desplazamientos nodales  $v_1$ ,  $\theta_1$ ,  $v_2$  y  $\theta_2$  respectivamente.

A estas funciones de forma también se les conoce como polinomios de interpolación, polinomios de Hermite o polinomios de Hermitianos.

En la figura 6.9 se muestran las gráficas de las funciones de forma y se observa que cumplen la propiedad de que sean igual a la unidad cuando se valúan en su nodo correspondiente y cero en cualquier otro.

### 6.3.3 FUNCIONES DE FORMA PARA ELEMENTO TRIANGULAR.

Considérese los desplazamientos nodales  $u_1, v_1$ ;  $u_2, v_2$  y  $u_3, v_3$  correspondientes a los grados de libertad "x" y "y" de los nodos 1, 2 y 3 respectivamente, según se ilustra en la figura 6.10

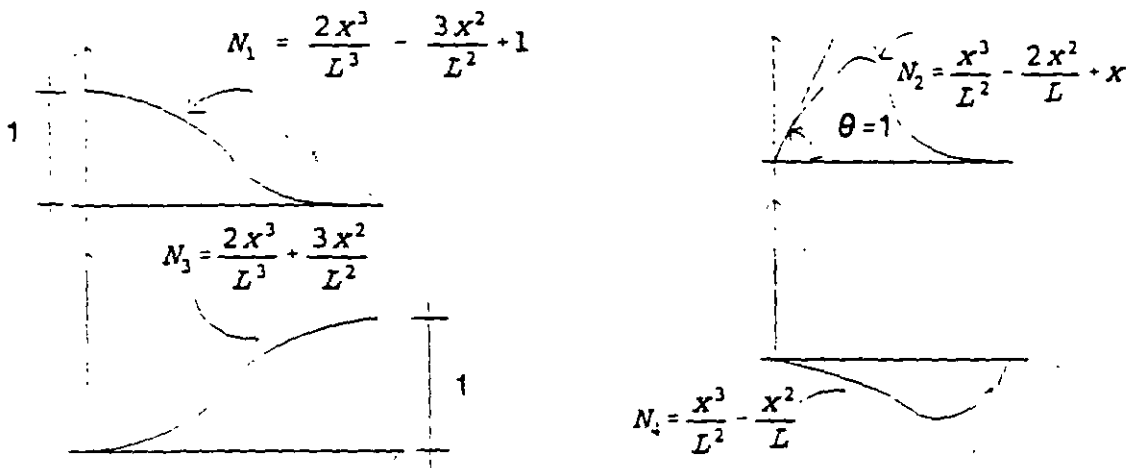
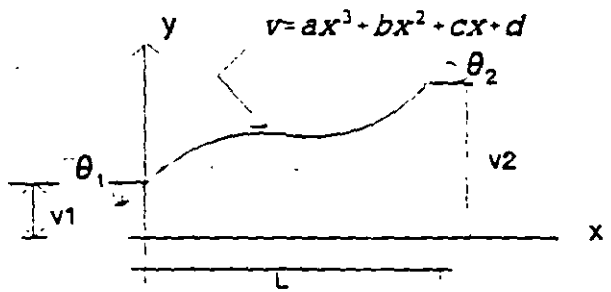


Figura 6.9

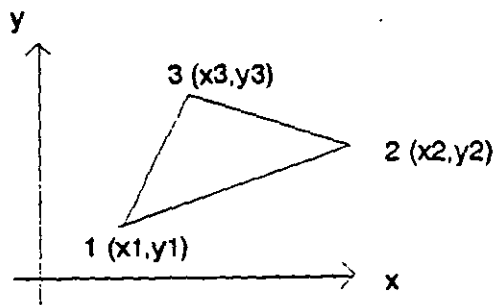


Figura 6.10

Se supondrá el campo de desplazamientos dado por:

$$\begin{aligned} u &= ax + by + c \\ v &= dx + ey + f \end{aligned}$$

6.11

Las condiciones de frontera para este caso están dadas por:

$$\begin{aligned} x=x_1, y=y_1 & \quad - \quad u=u_1 \text{ \& } v=v_1 \\ x=x_2, y=y_2 & \quad - \quad u=u_2 \text{ \& } v=v_2 \\ x=x_3, y=y_3 & \quad - \quad u=u_3 \text{ \& } v=v_3 \end{aligned}$$

si se aplican estas condiciones a los campos de desplazamiento:

$$\begin{aligned} u_1 &= ax_1 + by_1 + c \\ v_1 &= dx_1 + ey_1 + f \\ u_2 &= ax_2 + by_2 + c \\ v_2 &= dx_2 + ey_2 + f \\ u_3 &= ax_3 + by_3 + c \\ v_3 &= dx_3 + ey_3 + f \end{aligned}$$

en forma matricial y ordenando el vector desplazamientos, primero en la dirección x y después todos en la dirección y.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

en forma compacta.

$$[DN] = [A] [a]$$

solucionando:

en forma compacta.

$$[DN] = [A] \{a\}$$

solucionando:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{2DET} \begin{bmatrix} Y_2 - Y_3 & Y_3 - Y_1 & Y_1 - Y_2 & 0 & 0 & 0 \\ X_3 - X_2 & X_1 - X_3 & X_2 - X_1 & 0 & 0 & 0 \\ X_2 Y_3 - X_3 Y_2 & X_3 Y_1 - X_1 Y_3 & X_1 Y_2 - X_2 Y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_2 - Y_3 & Y_3 - Y_1 & Y_1 - Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & X_3 - X_2 & X_1 - X_3 & X_2 - X_1 \\ 0 & 0 & 0 & X_2 Y_3 - X_3 Y_2 & X_3 Y_1 - X_1 Y_3 & X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

en forma condensada:

$$\{a\} = [A]^{-1} [DN]$$

donde:

$$DET = \frac{1}{2} [(Y_1 X_3 - X_1 Y_3) + (X_2 Y_3 - Y_2 X_3) + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2)]$$

Escribiendo en forma matricial los campos de desplazamiento.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

en forma condensada:

$$[D] = [P] \{a\}$$

sustituyendo el vector  $\{a\}$  y considerando como nueva constante cada término de la matriz  $A^{-1}$



En forma condensada:

$$[D] = [P] [A]^{-1} [DN]$$

donde:

$$[N] = [P] [A]^{-1}$$

por lo que desarrollando:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

desarrollando:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2DET} (a_1x + b_1y + c_1) & a_1 &= y_2 - y_3 \\ & & b_1 &= x_3 - x_2 \\ & & c_1 &= x_2y_3 - x_3y_2 \\ N_2 &= \frac{1}{2DET} (a_2x + b_2y + c_2) & a_2 &= y_3 - y_1 \\ & & b_2 &= x_1 - x_3 \\ & & c_2 &= x_3y_1 - x_1y_3 \\ N_3 &= \frac{1}{2DET} (a_3x + b_3y + c_3) & a_3 &= y_1 - y_2 \\ & & b_3 &= x_2 - x_1 \\ & & c_3 &= x_1y_2 - x_2y_1 \end{aligned}$$

6.13

Estas son las funciones de forma para el elemento triangular. En la figura 6.11 se muestra la gráfica de estas funciones:

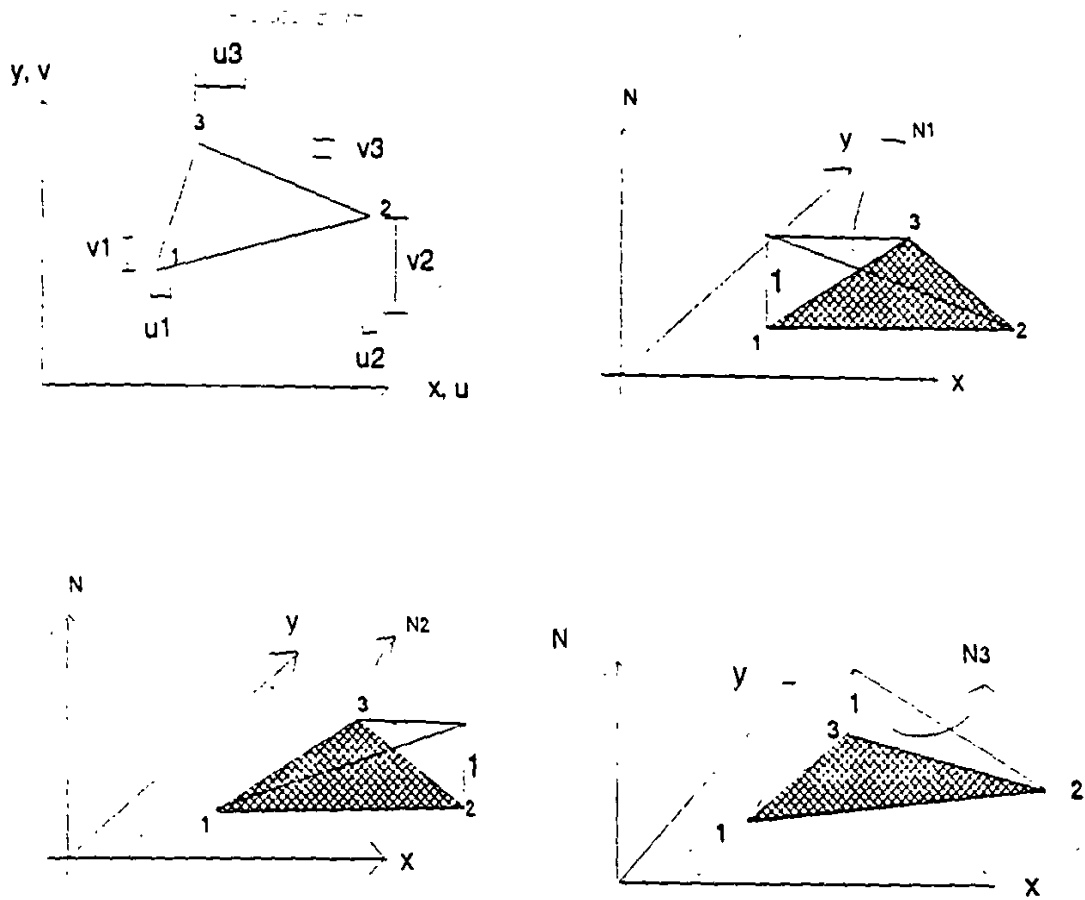


Figura 6.11

observése que cada función satisface el requisito de ser igual a la unidad en su nodo correspondiente e igual a cero cuando es valuada en los otros nodos.

### 6.3.4 FUNCIONES DE FORMA PARA UN ELEMENTO RECTANGULAR.

Considérese los grados de libertad  $u_1, v_1$ ;  $u_2, v_2$ ;  $u_3, v_3$ ; y  $u_4, v_4$ ; correspondientes a los grados de libertad de los nodos 1,2,3 y 4 respectivamente como se muestra en la figura 6.12

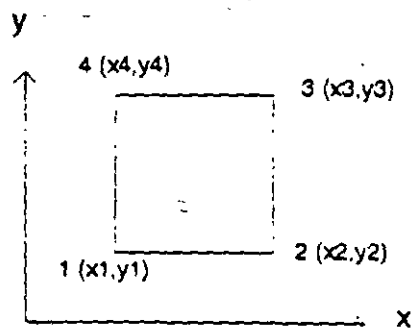


Figura 6.12

El campo de desplazamientos está dado por:

$$\begin{aligned} u &= a + bx + cy + dxy \\ v &= e + fx + gy + hxy \end{aligned} \quad 6.14$$

Las condiciones de frontera para este caso están dadas por:

$$\begin{aligned} \text{si } x = x_1; \quad y = y_1 & \quad \text{entonces} \quad u = u_1; \quad v = v_1 \\ x = x_2; \quad y = y_2 & \quad \text{entonces} \quad u = u_2; \quad v = v_2 \\ x = x_3; \quad y = y_3 & \quad \text{entonces} \quad u = u_3; \quad v = v_3 \\ x = x_4; \quad y = y_4 & \quad \text{entonces} \quad u = u_4; \quad v = v_4 \end{aligned}$$

si se aplican estas condiciones al campo de desplazamientos:

$$\begin{aligned} u_1 &= a + bx_1 + cy_1 + dx_1y_1 \\ v_1 &= e + fx_1 + gy_1 + hx_1y_1 \\ u_2 &= a + bx_2 + cy_2 + dx_2y_2 \\ v_2 &= e + fx_2 + gy_2 + hx_2y_2 \\ u_3 &= a + bx_3 + cy_3 + dx_3y_3 \\ v_3 &= e + fx_3 + gy_3 + hx_3y_3 \\ u_4 &= a + bx_4 + cy_4 + dx_4y_4 \\ v_4 &= e + fx_4 + gy_4 + hx_4y_4 \end{aligned}$$

en forma matricial y ordenando el vector desplazamientos primero los de la dirección x (desplazamientos  $u$ ) y después todos los de la dirección y (desplazamientos  $v$ ).

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

Se observa que al solucionar este sistema se tiene que invertir una matriz de 4x4, dada la dificultad para efectuar esta inversa con literales se sugiere hacerlo numéricamente, resultando así:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

donde  $a_i, b_i, c_i$  y  $d_i$  son nuevas constantes de  $[A]^{-1}$

En forma reducida:

$$[a] = [A]^{-1} [DN]$$

Escribiendo en forma matricial los campos de desplazamiento:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

en forma condensada:

$$[D] = [P] [a]$$

sustituyendo el vector [a]

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

desarrollando:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

donde:

$$N_1 = a_1 + b_1x + c_1y + d_1xy$$

$$N_2 = a_2 + b_2x + c_2y + d_2xy$$

$$N_3 = a_3 + b_3x + c_3y + d_3xy$$

$$N_4 = a_4 + b_4x + c_4y + d_4xy$$

6.15

Estas son las funciones de forma para el elemento rectangular. En la figura 6.13 se representan los que serian las gráficas de estas funciones.

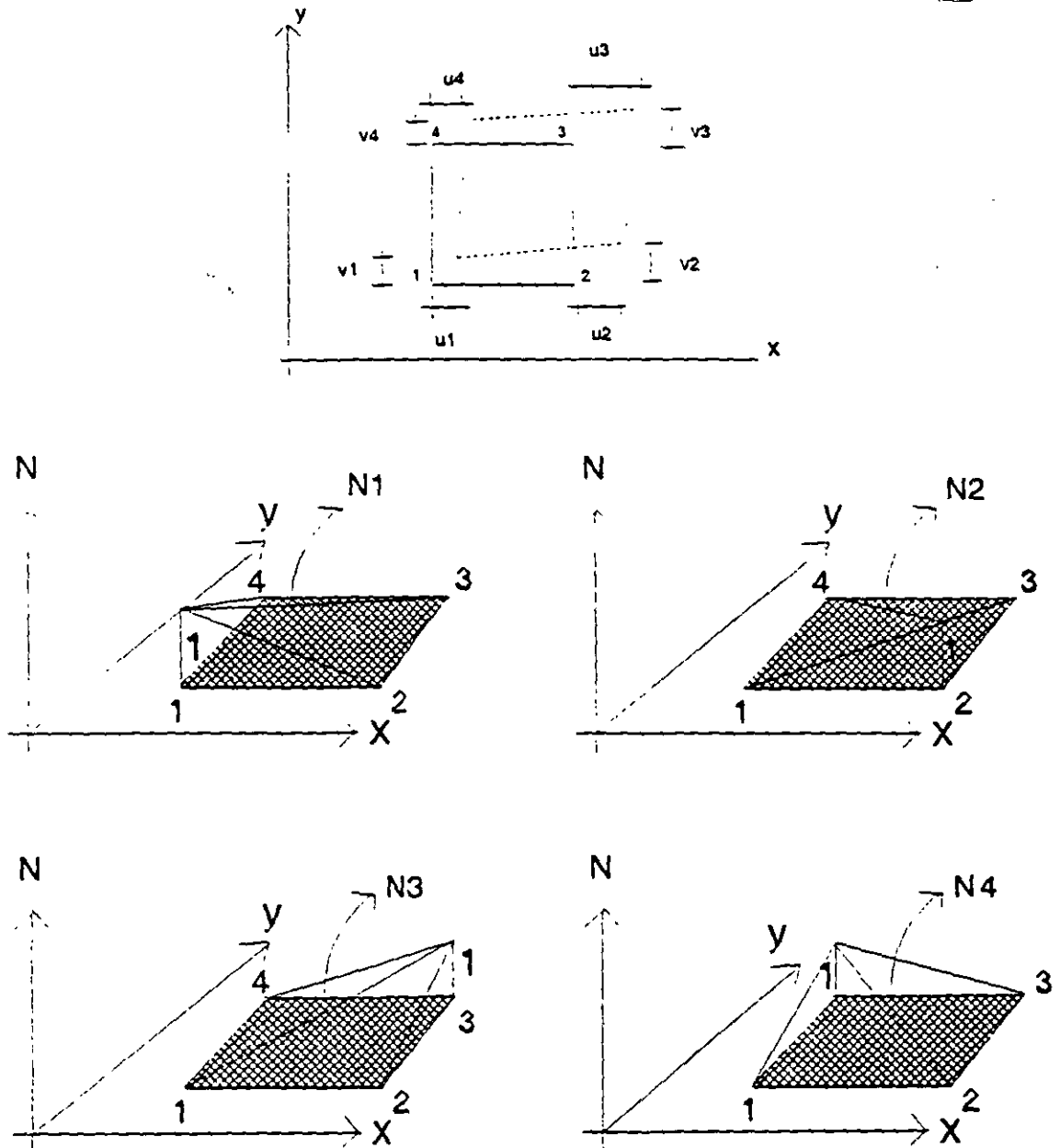


Figura 6.13

### 6.3.5 RESUMEN DE LAS FUNCIONES DE FORMA

En base a los cuatro casos planteados anteriormente, el planteamiento de las funciones de forma se puede generalizar para cualquier tipo de elemento (finito) considerando lo siguiente:

- Los campos de desplazamientos definen la forma supuesta del desplazamiento del elemento en términos de coeficientes polinomiales.

$$[D] = [P] [a] \quad 6.16$$

- Los coeficientes del campo polinomial supuesto están relacionados con los desplazamientos nodales, al forzar que el campo de desplazamientos sea igual al desplazamiento deseado en los nodos.

$$[DN] = [A] [a] \quad 6.17$$

- Expresando el desplazamiento en cualquier punto del elemento en términos de los desplazamientos nodales, se tiene:

$$[D] = [P] [A]^{-1} [DN] \quad 6.18$$

- Las funciones de forma resultan:

$$N = [P] [A]^{-1} \quad 6.19$$

y son el inicio deseado para plantear las matrices de rigidez. Estas funciones de forma deben poseer la propiedad fundamental de ser iguales a 1 cuando son evaluadas en las coordenadas de su nodo asociado y grado de libertad, y cero en todos los demás nodos y grados de libertad.

### 6.4 MATRIZ DE RIGIDECES DEL ELEMENTO.

Para determinar la matriz de rigideces hay varios enfoques, entre otros se tiene el de la energía potencial, los residuos ponderados y el método de Galerkin. El

desarrollo siguiente se hará considerando la energía potencial.

En este enfoque se plantea que la energía potencial total del sistema esté en un valor estacionario, en el caso de equilibrio estable, este corresponde al valor mínimo del potencial.

La energía potencial se puede escribir como:

$$\phi = u + u_e$$

donde  $u$  es la energía de deformación interna y  $u_e$  es la energía potencial externa (de las cargas aplicadas).

Recuerdese que la energía de deformación interna se puede escribir como:

$$u = \frac{1}{2} \int_{vol} \epsilon^t \sigma d_{vol} \quad 6.20$$

pero:

$$\sigma = E \epsilon$$

sustituyendo:

$$u = \frac{1}{2} \int_{vol} \epsilon^t E \epsilon d_{vol} \quad 6.21$$

Considerando que la deformación unitaria se puede conocer a partir de los desplazamientos y que éstos pueden ponerse en función de los desplazamientos nodales, a través de las funciones de forma, la deformación se puede escribir como:

$$[\epsilon] = [B] [DN] \quad 6.22$$

donde  $\{DN\}$  son los desplazamientos nodales y  $[B]$  se conoce como la matriz de desplazamientos-deformación. Sustituyendo 6.22 en 6.21, para esto:

$$[\epsilon]^t = [D_d]^t [B]^t \quad 6.23$$

por lo que:



$$u = \frac{1}{2} \int D_N^t [B]^t [E] [B] D_N d_{vol} \quad 6.24$$

por otro lado la energía potencial externa en términos de las cargas que actuen en dirección de los grados de libertad se puede escribir como:

$$\begin{aligned} U_e &= -P_1 D_{N1} - P_2 D_{N2} + \dots + P_n D_{Nn} \\ U_e &= -[D_N]^t [P] \end{aligned} \quad 6.25$$

sustituyendo en la energía potencial total:

$$\phi = \frac{1}{2} [D_N]^t \left[ \int [B]^t [E] [B] d_{vol} \right] [D_N] - [D_N]^t [P]$$

aplicando el principio estacionario de la energía:

$$\frac{\partial \phi}{\partial D_N} = 0$$

$$\left[ \int [B]^t [E] [B] d_{vol} \right] [D_N] - [P] = 0$$

de donde:

$$[P] = \left[ \int [B]^t [E] [B] d_{vol} \right] [D_N] \quad 6.26$$

esta expresión es la relación fuerza-desplazamiento del elemento:

$$[P] = [K] [D_N] \quad 6.27$$

del elemento, por lo que la matriz de rigideces resulta:

$$[K] = \int [B]^t [E] [B] d_{vol} \quad 6.28$$

siendo [K] la matriz de rigideces del elemento y depende de la matriz constitutiva [E] del mismo y de la matriz desplazamientos-deformación [B], esta última es función del campo de desplazamientos seleccionado y la relación entre la deformación y el desplazamiento en cualquier punto del elemento. Como la matriz [E] es simétrica, la matriz de rigideces también será simétrica.

### 6.4.1 MATRIZ DE RIGIDECES PARA UN ELEMENTO SUJETO A CARGA AXIAL.

En la figura 6.14 se muestran los grados de libertad y las cargas nodales.

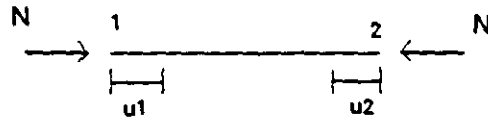


Figura 6.14

El campo de desplazamientos en términos de las funciones de forma se planteó como:

$$u = \left[ 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$u = [N_1 \quad N_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

De la teoría de elasticidad:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_x = \left[ \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\epsilon_x = \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

6.29

de acuerdo a la ecuación 6.22 se puede escribir:

$$\epsilon_x = [B] \{DN\}$$

que es la relación desplazamiento-deformación deseada, así:

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad 6.30$$

La expresión para determinar la matriz de rigideces se determinó como:

$$K = \int_{vol} B^T E B d_{vol}$$

De la teoría de elasticidad la matriz constitutiva E solo tiene un término y es precisamente el módulo de elasticidad axial E. Sustituyendo:

$$K = \int_{vol} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} d_{vol}$$

El volumen diferencial para un elemento axial puede expresarse como:

$$d_{vol} = dA dx$$

para un elemento barra de sección constante y módulo de elasticidad axial constante:

$$K = EA \int^L \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación 6.27 se obtiene la ecuación fuerza-desplazamiento:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad 6.31$$

## 6.4.2 MATRIZ DE RIGIDECES PARA UN ELEMENTO VIGA.

En la figura 6.15 se muestran los grados de libertad considerados.

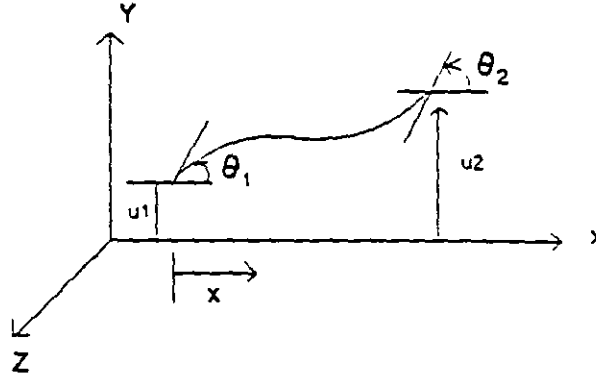


Figura 6.15

El campo de desplazamientos en términos de las funciones de forma se planteó como:

$$v = \left[ \left( \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \right) \left( \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \right) \left( -\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \right) \left( \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right) \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$v = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

por otro lado, de la teoría de elasticidad:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

pero:

$$\sigma = \frac{M y}{I} \quad y \quad M = \frac{d^2 v}{dx^2} EI$$

por lo tanto:

$$\epsilon = y \frac{d^2 v}{dx^2}$$

sustituyendo el campo de desplazamientos:

$$\epsilon = y \left[ \frac{d^2 N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_4}{dx^2} \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$N_1'' = \frac{d^2 N_1}{dx^2} = \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}$$

$$N_2'' = \frac{d^2 N_2}{dx^2} = \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}$$

$$N_3'' = \frac{d^2 N_3}{dx^2} = -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2}$$

$$N_4'' = \frac{d^2 N_4}{dx^2} = \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}$$

así:

$$\epsilon = y \left[ \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \quad -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad 6.32$$

por lo tanto:

$$B = y \left[ \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \quad -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right] \quad 6.33$$

la expresión para valuar la matriz de rigideces esta dada por:

$$K = \int_{vol} B^t E B d_{vol}$$

considerando que el elemento viga es de sección constante, que la matriz constitutiva E, solo contiene el módulo de elasticidad axial E y que:

$$\int_{vol} = \int_0^L dx \int_A dA$$

$$K = \int_0^L dx \int_A \begin{bmatrix} N_1' \\ N_2' \\ N_3' \\ N_4' \end{bmatrix} E [N_1' \ N_2' \ N_3' \ N_4'] dA$$

la integral de área es función únicamente de "y" por lo que:

$$\int y^2 dA = I$$

$$K = EI \int_0^L \begin{bmatrix} N_1' N_1' & N_1' N_2' & N_1' N_3' & N_1' N_4' \\ N_2' N_1' & N_2' N_2' & N_2' N_3' & N_2' N_4' \\ N_3' N_1' & N_3' N_2' & N_3' N_3' & N_3' N_4' \\ N_4' N_1' & N_4' N_2' & N_4' N_3' & N_4' N_4' \end{bmatrix} dx$$

desarrollando la integral.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

Si se observa esta matriz, es la misma que la obtenida con el método directo de las rigideces, considerando flexión y cortante únicamente.

## 6.5 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES PLANAS

El método de los elementos finitos obtuvo sus primeros éxitos en su aplicación a problemas bidimensionales.

Solamente se estudiará el elemento triangular, que es el más sencillo, pero el procedimiento es totalmente general. Este mismo problema se puede analizar utilizando elementos más elaborados, que se introducen en idéntica forma.

En ambos casos de esfuerzos y deformaciones planas, el campo de desplazamientos viene expresado unívocamente en función de los desplazamientos  $u$  y  $v$  en las direcciones de los ejes cartesianos  $x$  e  $y$  respectivamente.

Cuando todas las fuerzas se aplican en el plano que contiene a la estructura, digamos en el plano  $x$ - $y$  y los esfuerzos que se producen son  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  mientras que  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zy}$  y  $\tau_{yz}$  son cero, se trata de un problema de esfuerzos planos.

En la figura 6.16 se muestra el estado de esfuerzos en un elemento diferencial.

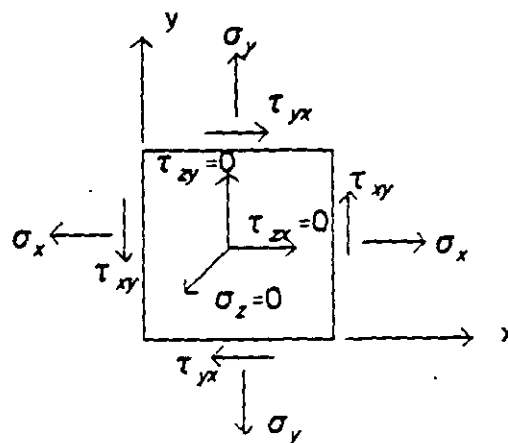


Figura 6.16

Por lo tanto las deformaciones presentes serán  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  mientras que  $\epsilon_z$ ,  $\gamma_{zx}$  y  $\gamma_{yz}$  son nulas.

Las vigas de gran peralte, los contrafuertes para presas y en general todo elemento de sección transversal (dirección z) pequeña respecto de sus otras dimensiones son estructuras para las cuales es aplicable la teoría de esfuerzos planos.

Por otro lado se dice que un cuerpo esta en estado de deformaciones planas si la deformación lineal unitaria en la dirección z se conserva igual a cero, pero el esfuerzo en la misma dirección es diferente de cero ( $\epsilon_z = 0$  y  $\sigma_z \neq 0$ ).

En la figura 6.17 se muestra el estado de esfuerzos para un problema de deformaciones planas.

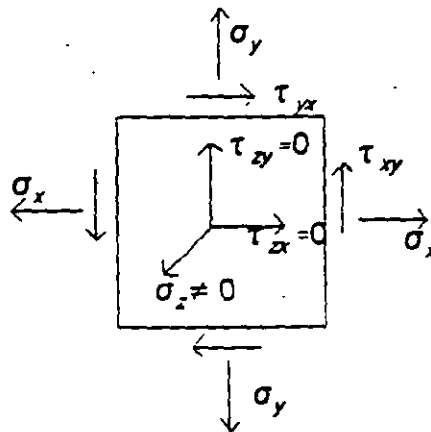


Figura 6.17

En la práctica los problemas de deformaciones planas ocurren en estructuras en que la dimensión en la dirección z es mucho más grande que las otras dos dimensiones y también la sección perpendicular al eje z es constante.

Para analizar este tipo de estructuras se toma una sección transversal representativa de espesor unitario para propósitos de análisis.

Como ejemplo de estructuras a las que se les puede aplicar esta teoría se tienen



las presas de gravedad incluyendo su cimentación, terraplenes, vertederos, etc.

### 6.5.1 MATRIZ DE RIGIDECES DE UN ELEMENTO TRIANGULAR PARA ESFUERZOS PLANOS.

Considérese los grados de libertad mostrados en la figura 6.18.

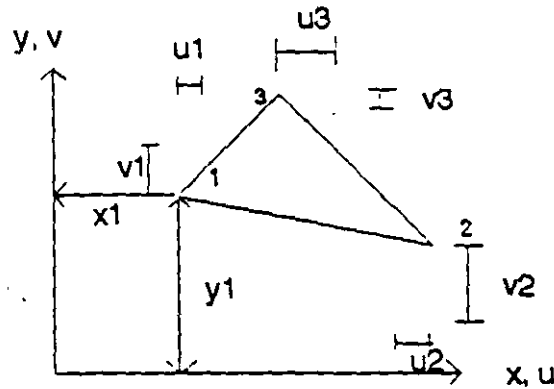


Figura 6.18

El campo de desplazamientos en términos de las funciones de forma se planteó:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

De la teoría de elasticidad para un problema de esfuerzos planos, todos los elementos están sujetos a tres esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ , como se indica en la figura 6.19

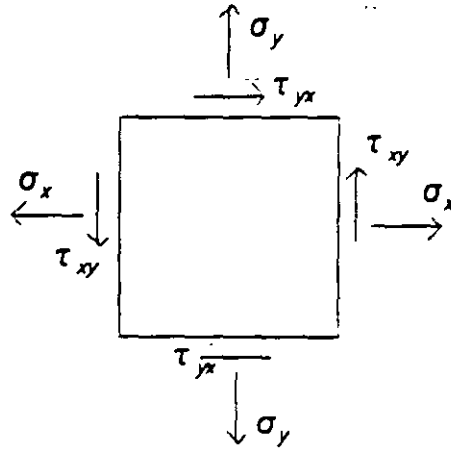


Figura 6.13

las deformaciones correspondientes:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

sustituyendo el campo de desplazamientos:

$$\epsilon_x = \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} u_3$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial N_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} v_3$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial N_1}{\partial y} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} u_3 + \frac{\partial N_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} v_3$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1x} & 0 & N_{2x} & 0 & N_{3x} & 0 \\ 0 & N_{1y} & 0 & N_{2y} & 0 & N_{3y} \\ N_{1y} & N_{1x} & N_{2y} & N_{2x} & N_{3y} & N_{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

la cual se puede expresar como:

$$\{\epsilon\} = [B] \{DN\}$$

donde:

$$N_{1x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2DET} (a_1x + b_1y + c_1) \right] = \frac{a_1}{2DET} = \frac{y_2 - y_3}{2DET}$$

$$N_{2x} = \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2DET} (a_2x + b_2y + c_2) \right] = \frac{a_2}{2DET} = \frac{y_3 - y_1}{2DET}$$

$$N_{3x} = \frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2DET} (a_3x + b_3y + c_3) \right] = \frac{a_3}{2DET} = \frac{y_1 - y_2}{2DET}$$

$$N_{1y} = \frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2DET} (a_1x + b_1y + c_1) \right] = \frac{b_1}{2DET} = \frac{x_3 - x_2}{2DET}$$

$$N_{2y} = \frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2DET} (a_2x + b_2y + c_2) \right] = \frac{b_2}{2DET} = \frac{x_1 - x_3}{2DET}$$

$$N_{3y} = \frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2DET} (a_3x + b_3y + c_3) \right] = \frac{b_3}{2DET} = \frac{x_2 - x_1}{2DET}$$

6.36

Para considerar la matriz constitutiva, en la teoría de elasticidad se planteó que:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \sigma_{xy}$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

considerando la relación inversa

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

y como en forma compacta se puede escribir:

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\}$$

por lo tanto la matriz constitutiva resulta:

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix}$$

donde:

$$E_{11} = E_{22} = \frac{E}{(1-\mu^2)}$$

$$E_{12} = -E_{21} = \frac{\mu E}{(1-\mu^2)}$$

$$E_{33} = \frac{E(1-\mu)}{2(1-\mu^2)}$$

6.37

sustituyendo en la expresión para valuar la rigidez:

$$K = \int [B]^t [E] [B] d_{vol}$$

$$K = \int_0^A \begin{bmatrix} N_{1x} & 0 & N_{1y} \\ 0 & N_{1y} & 0 \\ N_{2x} & 0 & N_{2y} \\ 0 & N_{2y} & N_{1x} \\ N_{3x} & 0 & N_{2x} \\ 0 & N_{2y} & N_{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1x} & 0 & N_{2x} & 0 & N_{3x} & 0 \\ 0 & N_{1y} & 0 & N_{2y} & 0 & N_{3y} \\ N_{1y} & N_{1x} & N_{2y} & N_{2x} & N_{3y} & N_{3x} \end{bmatrix} t d_A$$

Para este elemento ningún término  $N_{ix}$ ,  $N_{iy}$ ,...etc. contiene las variables  $x$  o  $y$ . Como resultado de ello la integración sobre el área produce sencillamente el área del elemento y solo se efectúa la multiplicación de matrices, resultando:

$$K = \frac{1}{4DET} \begin{bmatrix} E_1 a^2 - E_3 b^2 & a E_2 b - b E_3 a & a E_1 a - b E_3 b_2 & a E_2 b_2 - b E_3 a_2 & a E_1 a_3 - b E_3 b_3 & a E_2 b_3 - b E_3 a_3 \\ a E_2 b_1 - b E_3 a_1 & E_1 b^2 - E_3 a^2 & b E_2 a_2 - a E_3 b_2 & b E_2 b_2 - a E_3 a_2 & b E_2 a_3 - a E_3 b_3 & b E_2 b_3 - a E_3 a_3 \\ a E_1 a_3 - b E_3 b_3 & b E_2 a_2 - a E_3 b_2 & E_1 a^2 - E_3 b^2 & a E_2 b_2 - b E_3 a_2 & a E_1 a_3 - b E_3 b_3 & a E_2 b_3 - b E_3 a_3 \\ a E_2 b_2 - b E_3 a_2 & b E_2 b_2 - a E_3 a_2 & a E_2 b_2 - b E_3 a_2 & E_2 b^2 - E_3 a^2 & b E_2 a_3 - a E_3 b_3 & b^2 E_2 b_3 - a E_3 a_3 \\ a E_1 a_3 - b E_3 b_3 & b E_2 a_3 - a E_3 b_3 & a E_1 a_3 - b E_3 b_3 & b E_2 a_3 - a E_3 b_3 & E_1 a^2 - E_3 b^2 & a E_2 b_3 - b E_3 a_3 \\ a E_2 b_3 - b E_3 a_3 & b E_2 b_3 - a E_3 a_3 & a E_2 b_3 - b E_3 a_3 & b^2 E_2 b_3 - a E_3 a_3 & a E_2 b_3 - b E_3 a_3 & E_2 b^2 - E_3 a^2 \end{bmatrix}$$

donde:

$t$  = espesor

$$\begin{aligned} a_1 &= y_2 - y_3 & a_2 &= y_3 - y_1 & a_3 &= y_1 - y_2 \\ b_1 &= x_3 - x_2 & b_2 &= x_1 - x_3 & b_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

6.38

$$DET = \frac{1}{2} (b_3 a_2 - a_3 b_2)$$

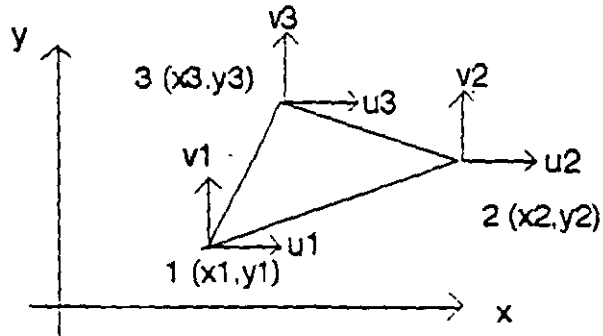


Figura 6.20

La numeración de los nodos se realizó en sentido antihorario. El área o el determinante también se puede calcular como:

$$A = DET = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} [ (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - y_2 y_1) ]$$

La ecuación fuerza-desplazamiento se puede escribir.

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

6.39

donde:

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} P_{3x} \\ P_{3y} \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad D_3 = \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Ahora puede utilizarse la matriz de rigideces en la misma forma que se utilizó para los los elementos barra, en el método de las rigideces directo para determinar los desplazamientos nodales.

### 6.5.2 MATRIZ DE ESFUERZOS.

Una vez conocidos los desplazamientos nodales de cada elemento:

$$[DN] = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Para encontrar los esfuerzos se sabe que:

$$\begin{aligned} [\sigma] &= [E] [\epsilon] \\ [\epsilon] &= B DN \end{aligned}$$

sustituyendo:

$$[\sigma] = [E] [B] [DN]$$

llamando  $[S] = [E] [B]$  matriz de esfuerzo, se puede escribir:

$$[\sigma] = [S] [DN] \tag{6.40}$$

por lo que:

$$S = \frac{1}{2DET} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2DET} \begin{bmatrix} E_{11}a_1 & E_{12}b_1 & E_{11}a_1 & E_{12}b_2 & E_{11}a_3 & E_{12}b_3 \\ E_{21}a_1 & E_{22}b_1 & E_{21}a_2 & E_{22}b_2 & E_{21}a_3 & E_{33}b_3 \\ E_{33}b_1 & E_{33}a_1 & E_{33}b_2 & E_{33}a_2 & E_{33}b_3 & E_{33}a_3 \end{bmatrix} \tag{6.41}$$

Para cada elemento se tendrán tres esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  en base a estos se puede calcular las direcciones y esfuerzos principales para cada elemento.

Si se analiza la matriz de esfuerzos  $S$  se observa que ninguno de los términos es función de  $x$  o  $y$ . Esto significa que los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  son constantes a través del elemento. Estos esfuerzos pueden considerarse como esfuerzos medios del elemento.

### 6.5.3 EJEMPLO DE APLICACION PARA ESFUERZOS PLANOS.

Analizar la placa rectangular que se muestra en la figura 6.21, usar un elemento finito triangular, desprecie el peso del cuerpo.

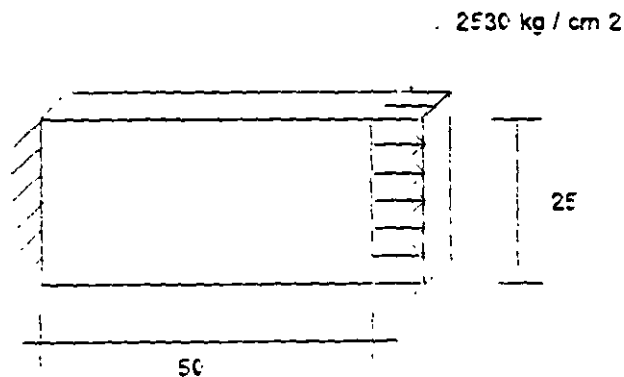


Figura 6.21

Datos:

Espesor  $t = 2.54$  cm

Módulo de elasticidad  $E = 2 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>

Relación de Poisson  $\mu = 0.25$

Para plantear la ecuación fuerza-desplazamiento de la placa, primero hay que idealizarla. En este caso particular la idealización se hace considerando los elementos finitos.



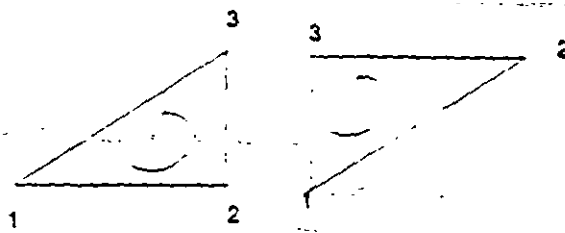


Figura 6.22

Así:

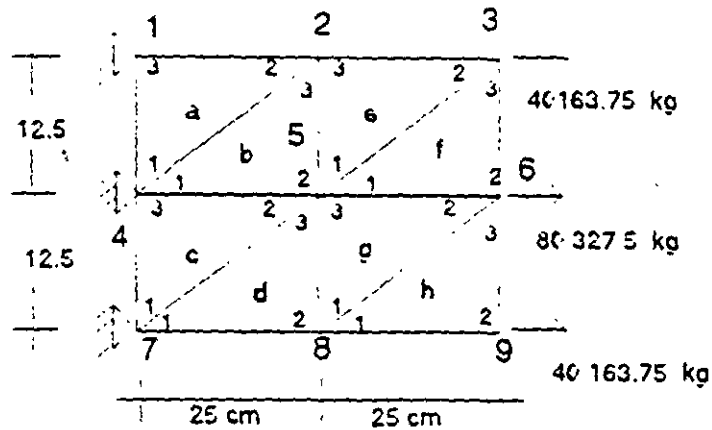


Figura 6.23

Se observa que todos los vértices de las triángulos están numerados de 1 a 3 en sentido contrario a la manecillas del reloj, estos números indican el vértice que llega a un nodo. Los números dentro de los círculos representan la numeración de los nodos.

Las cargas en los nodos se obtienen por áreas tributarias, así:

$$P_{3x} = 2530 \times 2.54 \times 6.25 = 40163.75 \text{ kg}$$

$$P_{6x} = 2530 \times 2.54 \times 12.50 = 80227.50 \text{ kg}$$

Al igual que el método directo de las rigideces la ecuación fuerza desplazamiento para el sistema estructural esta dada por:  $P' = K' DN'$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 P'_2 & K_{22a} - K_{33a} - K_{33a} & K_{22a} & & K_{32a} - K_{31a} & & & 0 & 0 & 0 & D'_{2a} \\
 P'_3 & & K_{22a} & K_{22c} - K_{33a} & K_{21a} - K_{31a} & & & K_{32a} & 0 & 0 & D'_{3a} \\
 P'_5 & K_{22a} - K_{13a} & K_{12a} - K_{13a} & K_{22a} - K_{22c} - K_{33a} - K_{11a} - K_{11a} - K_{33a} & K_{12a} - K_{32a} & K_{32a} - K_{31a} & & & & 0 & D'_{5a} \\
 P'_6 & 0 & K_{22a} & & K_{21a} - K_{32a} & K_{22a} - K_{22c} - K_{33a} & K_{21a} - K_{31a} & K_{32a} & & K_{32a} & D'_{6a} \\
 P'_8 & 0 & 0 & & K_{22a} - K_{13a} & & K_{12a} - K_{13a} & K_{22a} - K_{11a} - K_{11a} & K_{12a} & & D'_{8a} \\
 P'_9 & 0 & 0 & & 0 & & K_{22a} & K_{21a} & & K_{22a} & D'_{9a}
 \end{array}$$

El vector de cargas y el de desplazamientos quedan definidos por:

$$\begin{array}{c}
 P'_{x2} \\
 P'_{y2} \\
 P'_{x3} \\
 P'_{y3} \\
 P'_{x5} \\
 P'_{y5} \\
 P'_{x6} \\
 P'_{y6} \\
 P'_{x8} \\
 P'_{y8} \\
 P'_{x9} \\
 P'_{y9}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 40163.75 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 80327.50 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 40163.75 \\
 0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 U_2 \\
 V_2 \\
 U_3 \\
 V_3 \\
 U_5 \\
 V_5 \\
 U_6 \\
 V_6 \\
 U_9 \\
 V_9 \\
 U_9 \\
 V_9
 \end{array}
 = ?$$

para obtener la matriz de rigideces de cada elemento triangular es necesario conocer los valores de la matriz constitutiva que están dados por la ecuación 6.37.

$$E_{11} = E_{22} = \frac{E}{1-\mu^2} = \frac{2 \times 10^6}{1-(0.25)^2} = 2.13 \times 10^6$$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{\mu E}{1-\mu^2} = \frac{0.25(2 \times 10^6)}{1-(0.25)^2} = 0.53 \times 10^6$$

$$E_{33} = \frac{E(1-\mu)}{2(1-\mu^2)} = \frac{2 \times 10^6(1-0.25)}{2[1-(0.25)^2]} = 0.8 \times 10^6$$

De la ecuación 6.38 se puede evaluar las matrices de rigideces para cada elemento.

Recuérdese que la matriz de rigideces es independiente de la posición del sistema global por lo que los elementos a,e,c y g tienen las mismas propiedades de rigides asimismo los elementos b,f,d y h.

Para calcular la matriz de rigideces de los elementos d,e,c y g se consideran las coordenadas del elemento "a".

NODO	X	Y
1	0.0	12.5
2	25.0	25.0
3	0.0	25.0

$$a_1 = y_2 - y_1 = 0$$

$$b_1 = x_3 - x_2 = 0$$

$$a_2 = y_3 - y_1 = 12.5$$

$$b_2 = x_1 - x_3 = 0$$

$$a_3 = y_1 - y_2 = -12.5$$

$$b_3 = x_2 - x_1 = 25$$

$$DET = \frac{1}{2} (b_3 a_2 - a_3 b_2) = 156.25$$

sustituyendo en la ecuación 6.38

$$K_a = \begin{bmatrix} 2032000 & 0 & 0 & -1016000 & -2032000 & 1016000 \\ 0 & 5410200 & -673100 & 0 & 673100 & -5410200 \\ 0 & -673100 & 1352550 & 0 & -1352550 & 673100 \\ -1016000 & 0 & 0 & 508000 & 1016000 & -508000 \\ -2032000 & 673100 & -1352550 & 1016000 & 3384550 & -1689100 \\ 1016000 & -5410200 & 673100 & -508000 & -1689100 & 5918200 \end{bmatrix}$$

Los números que se han puesto arriba y a la derecha de la matriz corresponden a los grados de libertad (por nodo u y v) de los elementos y nos ayudan a particionar la matriz de rigideces en:

$$K'_a = \begin{bmatrix} K_{11a} & K_{12a} & K_{13a} \\ K_{21a} & K_{22a} & K_{23a} \\ K_{31a} & K_{32a} & K_{33a} \end{bmatrix}$$

lo que nos dá las submatrices para sustituir en la ecuación fuerza-desplazamiento para el sistema estructural.

Para calcular la matriz de rigideces de los elementos b,d,f y h se consideran las coordenadas del elemento "b"

NODO	X	Y
1	0	12.5
2	25.0	12.5
3	25.0	25.0

$$a_1 = y_2 - y_3 = -12.5 \quad b_1 = x_3 - x_2 = 0$$

$$a_2 = y_3 - y_1 = 12.5 \quad b_2 = x_1 - x_3 = -25.0$$

$$a_3 = y_1 - y_2 = 0 \quad b_3 = x_2 - x_1 = 25$$

$$DET = \frac{1}{2} (b_3 a_2 - a_3 b_2) = 156.25$$

sustituyendo en la ecuación 6.38

$$K'_b = \begin{bmatrix} 1352550 & 0 & -1352550 & 673100 & 0 & -673100 \\ 0 & 508000 & 1016000 & -508000 & -1016000 & 0 \\ -1352550 & 1016000 & 3384550 & -1689100 & -2032000 & 673100 \\ 673100 & -508000 & -1689100 & 5918200 & 1016000 & -5410200 \\ 0 & -1016000 & -2032000 & 1016000 & 2032000 & 0 \\ -673100 & 0 & 673100 & -5410200 & 0 & 5410200 \end{bmatrix}$$

particionando se puede escribir:

$$K_b = \begin{bmatrix} K_{11b} & K_{12b} & K_{13b} \\ K_{21b} & K_{22b} & K_{23b} \\ K_{31b} & K_{32b} & K_{33b} \end{bmatrix}$$

sustituyendo las submatrices correspondientes en la ecuación fuerza-desplazamiento se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40180.75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 80327.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40180.75 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6769100 & -1669100 & -1352550 & 1015000 & -4064200 & 1669100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1669100 & 11836400 & 673100 & -508000 & 1669100 & -10820400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1352550 & 673100 & 3384550 & 0 & 0 & -1669100 & -2032000 & 1015000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1015000 & -508000 & 0 & 5918200 & -1669100 & 0 & 673100 & -5410200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4064200 & 1669100 & 0 & -1669100 & 13536200 & -3378200 & -2705100 & 1669100 & -4064000 & 1669100 & 0 & 0 & 0 \\ 1669100 & -10820400 & -1669100 & 0 & -3378200 & 23672800 & 1669100 & -1015000 & 1669100 & -10820400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2032000 & 673100 & -2705100 & 1669100 & 6769100 & -1669100 & 0 & -1669100 & -2032000 & 1015000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1015000 & -5410200 & 1669100 & -1015000 & 11836400 & -1669100 & 0 & 673100 & -5410200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4064000 & 1669100 & 0 & -1669100 & 6769100 & -1669100 & -1352550 & 673100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1669100 & -10820400 & -1669100 & 0 & -1669100 & 11836400 & 1015000 & -508000 \\ 40180.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2032000 & 673100 & -1352550 & 1015000 & 3384550 & -1669100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1015000 & -5410200 & 673100 & -508000 & -1669100 & 5918200 \end{bmatrix}$$

solucionando se obtiene:

$$\begin{bmatrix} d_{x2} \\ d_{y2} \\ d_{x3} \\ d_{y3} \\ d_{x5} \\ d_{y5} \\ d_{x6} \\ d_{y6} \\ d_{x8} \\ d_{y8} \\ d_{x9} \\ d_{y9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.94858 \times 10^{-2} \\ -2.3839 \times 10^{-3} \\ 6.08817 \times 10^{-2} \\ 1.7609 \times 10^{-4} \\ 3.043 \times 10^{-2} \\ 1.318 \times 10^{-3} \\ 6.222 \times 10^{-2} \\ 4.1946 \times 10^{-3} \\ 3.22126 \times 10^{-2} \\ 5.2168 \times 10^{-3} \\ 6.376 \times 10^{-2} \\ 8.1336 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Para determinar las fuerzas que actúan en cada elemento se aplica la ecuación fuerza-desplazamiento:

$$\begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} & K'_{13} \\ K'_{21} & K'_{22} & K'_{23} \\ K'_{31} & K'_{32} & K'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DN'_1 \\ DN'_2 \\ DN'_3 \end{bmatrix}$$

que desarrollando se puede escribir:

$$P'_1 = K'_{11}DN'_1 + K'_{12}DN'_2 + K'_{13}DN'_3$$

$$P'_2 = K'_{21}DN'_1 + K'_{22}DN'_2 + K'_{23}DN'_3$$

$$P'_3 = K'_{31}DN'_1 + K'_{32}DN'_2 + K'_{33}DN'_3$$

Por compatibilidad:

$$\begin{array}{llll} D'_{1a} = 0 & D'_{1c} = 0 & D'_{1e} = DN'_5 & D'_{1g} = DN'_6 \\ D'_{2a} = DN'_2 & D'_{2c} = DN'_8 & D'_{2e} = DN'_3 & D'_{2g} = DN'_6 \\ D'_{3a} = 0 & D'_{3c} = 0 & D'_{3e} = DN'_2 & D'_{3g} = DN'_5 \\ D'_{1b} = 0 & D'_{1d} = 0 & D'_{1f} = DN'_5 & D'_{1h} = DN'_6 \\ D'_{2b} = DN'_5 & D'_{2d} = DN'_9 & D'_{2f} = DN'_6 & D'_{2h} = DN'_5 \\ D'_{3b} = DN'_2 & D'_{3d} = DN'_5 & D'_{3f} = DN'_3 & D'_{3h} = DN'_5 \end{array}$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento para cada elemento:

Elemento "a":

$$P'_{1a} = \begin{bmatrix} 0 & -1016000 \\ -673100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.948 \times 10^{-2} \\ -2.3889 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2422.04 \\ -19846.95 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2a} = \begin{bmatrix} 135255 & 0 \\ 0 & 508000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.948 \times 10^{-2} \\ -2.3889 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39881.14 \\ -1211.02 \end{bmatrix}$$

$$P'_{3a} = \begin{bmatrix} -1352550 & 1016000 \\ 673100 & -508000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.948 \times 10^{-2} \\ -2.3889 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42303.18 \\ 21057.97 \end{bmatrix}$$

Elementos "b", "c" y "d":

$$P'_{20} = \begin{bmatrix} 3384550 & -1689100 \\ -1689100 & 5918200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.043 \times 10^{-2} \\ 1.3188 \times 10^{-3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2032000 & 673100 \\ 1016000 & -5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.9486 \times 10^{-2} \\ -2.3839 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39250.36 \\ -741.949 \end{bmatrix}$$

$$P'_{30} = \begin{bmatrix} 2032000 & 1016000 \\ 673100 & -5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.043 \times 10^{-2} \\ 1.3188 \times 10^{-3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2032000 & 0 \\ 0 & 5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.9486 \times 10^{-2} \\ -2.3839 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -582.14 \\ 450.87 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2c} = \begin{bmatrix} 1352550 & 0 \\ 0 & 508000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.04318 \times 10^{-2} \\ 1.31888 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41160.56 \\ 669.99 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2d} = \begin{bmatrix} 3384550 & -1689100 \\ -1689100 & 5918200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.222 \times 10^{-2} \\ 5.217 \times 10^{-3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2032000 & 673100 \\ 1016000 & -5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.04318 \times 10^{-2} \\ 1.31888 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 139292.92 \\ 232.91 \end{bmatrix}$$

$$P'_{3d} = \begin{bmatrix} -2032000 & 1016000 \\ 673100 & -5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.222 \times 10^{-2} \\ 5.217 \times 10^{-3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2032000 & 0 \\ 0 & 5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.0431 \times 10^{-2} \\ 1.3188 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1666.21 \\ 599.19 \end{bmatrix}$$

y así para los otros elementos se obtiene:

$$\begin{bmatrix} P'_{1xe} \\ P'_{1ye} \\ P'_{2xe} \\ P'_{1ye} \\ P'_{3xe} \\ P'_{3ye} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -679.14 \\ -1099.71 \\ 39971.91 \\ 339.57 \\ -393000.2 \\ 760.14 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P'_{1xf} \\ P'_{1yf} \\ P'_{2xf} \\ P'_{2yf} \\ P'_{3xf} \\ P'_{3yf} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40297.42 \\ -95.87 \\ 54276.17 \\ 435.43 \\ 191.74 \\ -339.56 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P'_{1xg} \\ P'_{1yg} \\ P'_{2xg} \\ P'_{2yg} \\ P'_{3xg} \\ P'_{3yg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 714.32 \\ 311.18 \\ 46378.38 \\ -357.16 \\ -41092.71 \\ -668.34 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P'_{1xh} \\ P'_{1yh} \\ P'_{2xh} \\ P'_{2yh} \\ P'_{3xh} \\ P'_{3yh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40007.23 \\ 78.27 \\ 40163.78 \\ -0.0145 \\ -156.54 \\ -78.26 \end{bmatrix}$$

Comprobación del equilibrio.

Nodo 2

$$P_2' = P_{2a}' + P_{3b}' + P_{3c}'$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39881.41 \\ -1211.02 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -582.144 \\ 450.878 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -39300.20 \\ 760.14 \end{bmatrix}$$

Nodo 3

$$P_3' = P_{2e}' + P_{3f}'$$

$$\begin{bmatrix} 40163.75 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39971.99 \\ 339.57 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 191.74 \\ -339.56 \end{bmatrix}$$

Nodo 5

$$P_5' = P_{2b}' + P_{2c}' + P_{3d}' + P_{1e}' + P_{1f}' + P_{3g}'$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39250.36 \\ -741.95 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 41160.56 \\ 669.99 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1684.21 \\ 599.19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -679.14 \\ -1099.71 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40297.42 \\ -95.87 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -41093.7 \\ 665.34 \end{bmatrix}$$

Nodo 6

$$P_6' = P_{2f}' + P_{2g}' + P_{en}'$$

$$\begin{bmatrix} 80327.50 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40105.68 \\ 435.43 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40378.38 \\ -357.16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -156.54 \\ -78.26 \end{bmatrix}$$

Nodo 8

$$P_8' = P_{2d}' + P_{1g}' + P_{1h}'$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39292 \\ 232.91 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 714.32 \\ -311.18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40007.23 \\ 78.27 \end{bmatrix}$$



Para determinar los esfuerzos en cada elemento, se requiere conocer la matriz de esfuerzos [S] que esta dada por la ecuación 6.41 y sustituirla en la ecuación 6.40.

La matriz de esfuerzos para los elementos a,e,c y g resulta:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -42400 & 85200 & 0 & -85200 & 42400 \\ 0 & -770400 & 21200 & 0 & -21200 & 170400 \\ -64000 & 0 & 0 & 32000 & 64000 & -32000 \end{bmatrix}$$

y para los elementos b,d,f y h.

$$S = \begin{bmatrix} -85200 & 0 & 85200 & -42400 & 0 & 42400 \\ -21200 & 0 & 21200 & -170400 & 0 & 170400 \\ 0 & -32000 & -64000 & 32000 & 64000 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, sustituyendo para cada elemento en la ecuación 6.40

$$[\sigma] = [S] [DN]$$

Elemento "a"

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -42400 & 85200 & 0 & -85200 & 42400 \\ 0 & -770400 & 21200 & 0 & -21200 & 170400 \\ -64000 & 0 & 0 & 32000 & 64000 & -32000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.9486 \times 10^{-2} \\ -2.3839 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2512.20 \\ 625.10 \\ -23.28 \end{bmatrix}$$

Elemento "b"

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -85200 & 0 & 85200 & -42400 & 0 & 42400 \\ -21200 & 0 & 21200 & -170400 & 0 & 170400 \\ 0 & -32000 & -64000 & 32000 & 64000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.0432 \times 10^{-2} \\ 1.3188 \times 10^{-3} \\ 2.9486 \times 10^{-2} \\ -2.3839 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2435.79 \\ 14.20 \\ -18.38 \end{bmatrix}$$

en igual forma para los otros elementos:

Elemento c y d:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2592.79 \\ 645.15 \\ 42.20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2579.98 \\ 18.87 \\ 52.42 \end{bmatrix}$$

Elemento e y f:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2517.92 \\ 34.64 \\ -21.39 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2538.42 \\ -10.69 \\ 6.04 \end{bmatrix}$$

Elemento g y h:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2543.52 \\ -9.80 \\ -22.49 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2520.14 \\ -2.46 \\ -4.93 \end{bmatrix}$$

## 6.6 DEFORMACIONES PLANAS.

Para determinar la matriz de rigideces de un elemento triangular para deformaciones planas se sigue el mismo procedimiento que para un elemento triangular para esfuerzos planos, encontrando que las funciones de forma, la matriz desplazamiento-deformación [S] son las mismas, unicamente la matriz constitutiva es diferente. En este caso el esfuerzo normal  $\sigma_z$  no es nulo, debiendo de añadirse a las otras tres componentes de esfuerzo. Sin embargo la deformación  $\epsilon_z$  si es nula, por lo tanto:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\gamma_{xy} = 2(1+\mu) \frac{\tau_{xy}}{E}$$

pero:

$$\epsilon_x = 0 = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

de donde:

$$\sigma_z = \mu\sigma_x + \mu\sigma_y$$

sustituyendo en las deformaciones lineales  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_y$ .

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E} (\mu\sigma_x + \mu\sigma_y)$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu^2 \frac{\sigma_x}{E} - \mu^2 \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} (1 - \mu^2) - \frac{\sigma_y}{E} (1 + \mu^2)$$

$$\epsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E} (\mu\sigma_x + \mu\sigma_y)$$

$$\epsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \mu^2 \frac{\sigma_x}{E} - \mu^2 \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\sigma_x}{E} (1 + \mu^2) + \frac{\sigma_y}{E} (1 - \mu^2)$$

Arreglando en forma matricial las ecuaciones correspondientes a las deformaciones lineales  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y a la deformación angular  $\tau_{xy}$  se tiene:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} (1-\mu^2) & -(1+\mu^2) & 0 \\ -(1+\mu^2) & (1-\mu^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Considerando la relación inversa.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

en forma compacta:

$$[\sigma] = [E] [\epsilon]$$

por lo que la matriz constitutiva se puede escribir:

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix}$$

donde:

$$E_{11} = E_{22} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

$$E_{33} = \frac{E(1-\mu)}{2(1-\mu^2)}$$

por lo que la ecuación 6.31 sigue siendo válida para valuar la matriz de rigideces de un elemento triangular para deformaciones planas.

Las ecuaciones 6.40 y 6.41 por consiguiente son válidas para este tipo de elementos y la solución de la ecuación 6.41 da como resultado los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . El esfuerzo  $\sigma_z$  se determina en función de los esfuerzos  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  por medio de la expresión:

$$\sigma_z = \mu\sigma_x + \mu\sigma_y$$

## 6.7 ANALISIS DE ESFUERZOS EN CUERPOS DE REVOLUCION.

Existen estructuras cuya geometría queda definida mediante un cuerpo de revolución, existiendo entonces aximetría. Los problemas matemáticos que se presentan son muy similares a los de esfuerzos y deformaciones planas, ya que el problema se trata en forma bidimensional. Por simetría el estado de deformaciones y por consiguiente el de esfuerzos esta definido completamente por las dos componentes de desplazamientos. En la figura 6.23 se representa una de tales secciones.

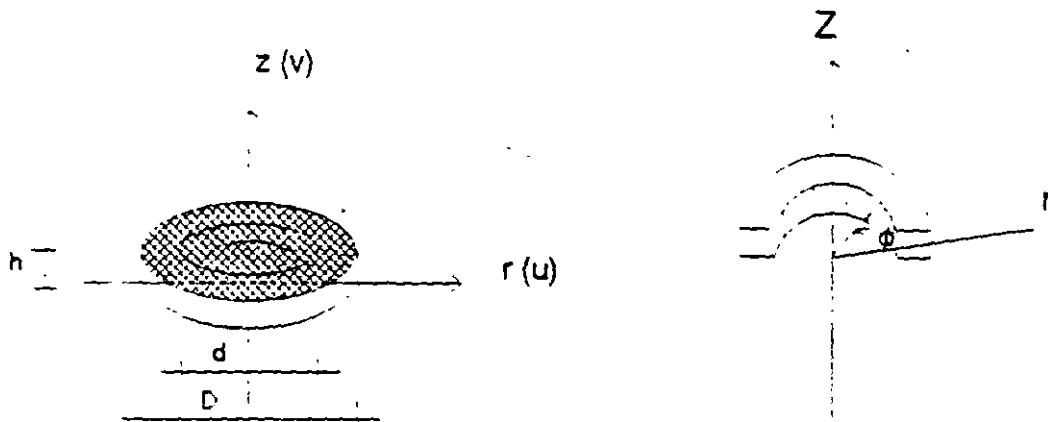


Figura 6.23

Si  $r$  y  $z$  representan respectivamente las coordenadas radial y axial de un punto respectivamente y  $u$  y  $v$  los desplazamientos correspondientes, es fácil ver que si se utiliza un elemento rectangular las ecuaciones de desplazamiento planteadas en las ecuaciones 6.5 pueden usarse para este problema, por consiguiente las funciones de forma expresadas por las ecuaciones 6.15 también son válidas, únicamente se hará el cambio de  $r$  por  $x$  y por  $z$ .

También se puede utilizar un elemento triangular, en este caso se pueden usar las mismas funciones de desplazamiento utilizadas para esfuerzos y deformaciones planas. Sin embargo en este trabajo se planteará como ya se mencionó para un elemento rectangular.

### 6.7.1 MATRIZ DE RIGIDEZES DE UN ELEMENTO RECTANGULAR PARA UN PROBLEMA AXISIMETRICO.

Considérese los grados de libertad mostrados en la figura 6.24.

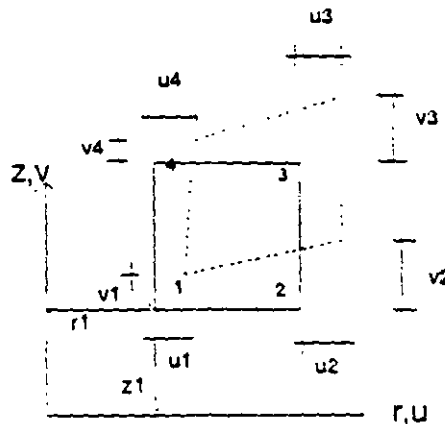


Figura 6.24

El campo de desplazamientos en términos de las funciones de forma se planteó así:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

De la teoría de elasticidad para un sólido axisimétrico el estado de esfuerzos queda definido por:

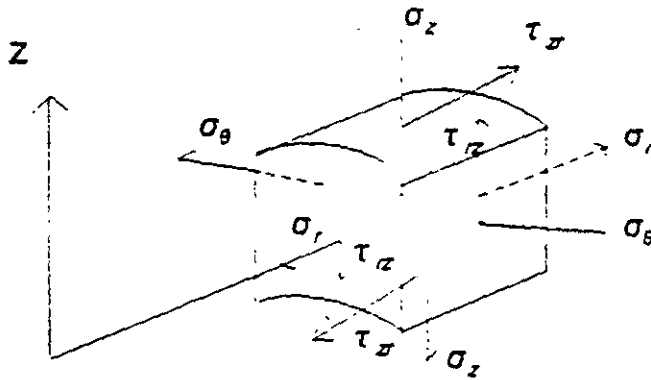


Figura 6.25

Por lo que las deformaciones a considerar en un sólido de revolución serán  $\epsilon_r$ ,  $\epsilon_z$ ,  $\epsilon_\theta$  y  $\gamma_{rz}$ , así el vector de deformación queda definido por:

$$(\epsilon) = \begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{bmatrix}$$

sustituyendo el campo de desplazamientos:

$$\epsilon_r = \frac{\partial N_1}{\partial r} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial r} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial r} u_3 + \frac{\partial N_4}{\partial r} u_4$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial N_1}{\partial z} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial z} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial z} v_3 + \frac{\partial N_4}{\partial z} v_4$$

$$\epsilon_\theta = \frac{N_1}{r} u_1 + \frac{N_2}{r} u_2 + \frac{N_3}{r} u_3 + \frac{N_4}{r} u_4$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial N_1}{\partial z} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial z} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial z} u_3 + \frac{\partial N_4}{\partial z} u_4 + \frac{\partial N_1}{\partial r} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial r} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial r} v_3 + \frac{\partial N_4}{\partial r} v_4$$

en forma matricial:  $\epsilon_r, \epsilon_z, \epsilon_\theta, \gamma_{rz}$  en función de  $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4$ .

$$\begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1r} & 0 & N_{2r} & 0 & N_{3r} & 0 & N_{4r} & 0 \\ 0 & N_{1z} & 0 & N_{2z} & 0 & N_{3z} & 0 & N_{4z} \\ N_{1\theta} & 0 & N_{2\theta} & 0 & N_{3\theta} & 0 & N_{4\theta} & 0 \\ N_{1z} & N_{1r} & N_{2z} & N_{2r} & N_{3z} & N_{3r} & N_{4z} & N_{4r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

esta ecuación se puede expresar en forma compacta como:

$$[ \epsilon ] = [ B ] [ DN ]$$

donde:

$$N_{1r} = \frac{\partial N_1}{\partial r} = b_1 + d_1 z$$

$$N_{2r} = \frac{\partial N_2}{\partial r} = b_2 - d_2 z$$

$$N_{3r} = \frac{\partial N_3}{\partial r} = b_3 + d_3 z$$

$$N_{4r} = \frac{\partial N_4}{\partial r} = b_4 + d_4 z$$

$$N_{1z} = \frac{\partial N_1}{\partial z} = c_1 + d_1 r$$

$$N_{2z} = \frac{\partial N_2}{\partial z} = c_2 + d_2 r$$

$$N_{3z} = \frac{\partial N_3}{\partial z} = c_3 + d_3 r$$

$$N_{4z} = \frac{\partial N_4}{\partial z} = c_4 + d_4 r$$



Para definir la matriz constitutiva se aplica cada una de las componentes del vector deformación en términos de los esfuerzos que la generan, así:

$$\epsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_\theta}{E}$$

$$\epsilon_z = -\mu \frac{\sigma_r}{E} + \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_\theta}{E}$$

$$\epsilon_\theta = -\mu \frac{\sigma_r}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_\theta}{E}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{rz}$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{bmatrix}$$

considerando la relación inversa:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix}$$

En forma reducida:

$$[ \sigma ] = [ E ] [ \epsilon ]$$

por lo tanto la matriz constitutiva resulta:

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} \end{bmatrix}$$

donde:

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = \frac{E(1-\mu)}{(1-\mu)(1-2\mu)}$$

$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = \frac{E\mu}{(1-\mu)(1-2\mu)}$$

sustituyendo la matriz desplazamiento-deformación y la matriz constitutiva en la ecuación 6.28 se puede evaluar la matriz de rigideces. Recordando que la integral de volumen ha de extenderse a todo el anillo de material, se tiene:

$$K^e = 2\pi \int B^T E B r dr dz$$

Sustituyendo se obtendría:

$$K^e = 2\pi \int \begin{bmatrix} N_{1r} & 0 & N_{1\theta} & N_{1z} \\ 0 & N_{1z} & 0 & N_{1r} \\ N_{2r} & 0 & N_{2\theta} & N_{2z} \\ 0 & N_{2z} & 0 & N_{2r} \\ N_{3r} & 0 & N_{3\theta} & N_{3z} \\ 0 & N_{3z} & 0 & N_{3r} \\ N_{4r} & 0 & N_{4\theta} & N_{4z} \\ 0 & N_{4z} & 0 & N_{4r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1r} & 0 & N_{2r} & 0 & N_{3r} & 0 & N_{4r} & 0 \\ 0 & N_{1z} & 0 & N_{2z} & 0 & N_{3z} & 0 & N_{4z} \\ N_{1\theta} & 0 & N_{2\theta} & 0 & N_{3\theta} & 0 & N_{4\theta} & 0 \\ N_{1z} & N_{1r} & N_{2z} & N_{2r} & N_{3z} & N_{3r} & N_{4z} & N_{4r} \end{bmatrix} r dr dz$$

Como puede observarse las matrices desplazamiento-deformación [B] dependen de las coordenadas r y z por lo que la integral no puede realizarse tan sencillamente como en el caso de esfuerzos y deformaciones planas. Hay dos alternativas para realizar esta integral, la primera es una integración numérica, la segunda una multiplicación explícita y una integración término a término.

El procedimiento aproximado más sencillo es valuar la matriz desplazamiento-deformación [B] en el centro de gravedad de cada elemento, así:

$$K^* = 2\pi B^t E B r \Delta$$

siendo  $\Delta$  el área del elemento.

Esta aproximación se basa en la demostración de que si la integración numérica es de un orden tal que permita determinar exactamente el volumen del elemento, entonces la solución converge hacia la solución exacta cuando se aumenta indefinidamente el número de elementos.

Se puede seguir un procedimiento de integración más elaborado calculando el valor del integrando en varios puntos del elemento, para el elemento rectangular con 4 puntos (dos en cada dirección) se obtiene buena aproximación, figura 6.26.

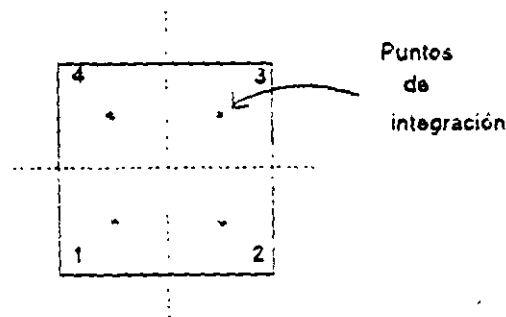


Figura 6.26

En general los puntos de integración se eligen considerando que el número de puntos de integración por tres deberá ser mayor que el grado de libertad (número de nodos por 2), menos los grados de libertad restringidos, esto es para que la matriz K sea no singular.

Aplicando la cuadratura de Gauss la matriz de rigideces se obtiene con:

$$K_{ij}^* = 2\pi r \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j B_i^t E B_j \Delta$$

donde  $n$  son los puntos de integración elegidos en cada dirección y  $W_i$ ,  $W_j$  son los coeficientes de peso de la fórmula de la cuadratura de Gauss.

Para obtener las coordenadas de los puntos de integración, así como a los coeficientes de peso de las fórmulas de cuadratura de Gauss se utiliza la tabla 8.1 pag. 228 del libro "El método de los elementos finitos" de O. C. Zienkiewicz.

### 6.7.2 MATRIZ DE ESFUERZOS PARA UN ELEMENTO AXISIMETRICO.

En este tipo de elementos el esfuerzo varía con respecto a las coordenadas por lo que es conveniente valorar dicho esfuerzo en el centroide del elemento y el procedimiento a seguir es el mismo que en esfuerzos y deformaciones planas, solo habrá que incluir los desplazamientos nodales correspondientes a los grados de libertad  $U_4$  y  $V_4$ . De la ecuación 6.40

$$[ \sigma ] = [ S ] [ DN ]$$

Una vez valuada la matriz desplazamiento-deformación  $[B]$  en el centroide del elemento se hace el producto con la matriz constitutiva para obtener la matriz esfuerzo.

$$[ S ] = [ E ] [ B ]$$

## BIBLIOGRAFIA

1. R. K. Livesley; Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press.
2. J. S. Przemieniecki; Theory of Matrix Structural Analysis, Mc Graw Hill.
3. H. Kardestuncer; Introducción al Análisis Estructural con Matrices; Mc Graw Hill.
4. Jeffrey p. Laible; Análisis Estructural; Mc Graw Hill.
5. A. Gali y A. M Neville; Análisis Estructural ; Diana.
6. J. Esterlin Kinney; Análisis de Estructuras Indeterminadas; Cecsa.
7. Carlos Magdaleno; Análisis Matricial de Estructuras Reticulares.
8. Heberto Martínez C; Análisis y diseño estructural; Representaciones y Servicios de Ingeniería.
9. Filonenko Borobich; Theory of Elasticity; Mir.
10. S. Timoshenko and J. N. Goodier; Teoría de la elasticidad; Urmo, s. a. de Edic.
11. Richard H. Gallager; Finite element analysis fundamentals; Prentice Hall.
12. Zienkiewicz O. C. ; The Finit Element Method; Mc Graw Hill.
13. Analysis of framed structural; J. M. Gere and W. Weaver; Van Nostrand Company



FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO**

**DE ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MODULO I ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

**CLAVE CA-011**

**TEMA**

**ANEXO 3: PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS  
VIRTUALES**

**DEL 19 AL 30 DE ABRIL**

**ING. IGNACIO HERNÁNDEZ QUINTO  
PALACIO DE MINERÍA  
ABRIL DE 2004**

## 1.2.1 PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES

Este principio constituye la base para la aplicación del principio de los trabajos virtuales que se vera en el siguiente inciso.

Se entenderá por desplazamiento virtual aquel desplazamiento hipotético de uno o varios puntos de un cuerpo rígido en equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de geometría del cuerpo no se altera debido a dicho desplazamiento, el cual puede ser de magnitud pequeña o infinitesimal. Dichos desplazamientos son producidos por un sistema de cargas diferente al aplicado al cuerpo rígido en equilibrio. Por lo tanto, el sistema de cargas original se mueve cuando se produce el desplazamiento virtual. El producto de cada carga del sistema original por el desplazamiento virtual respectivo producirá entonces "un trabajo virtual".

Para mostrar el principio de los desplazamientos virtuales se usará en la figura 7, en la cual se muestra un cuerpo rígido en equilibrio bajo el sistema de cargas dado.

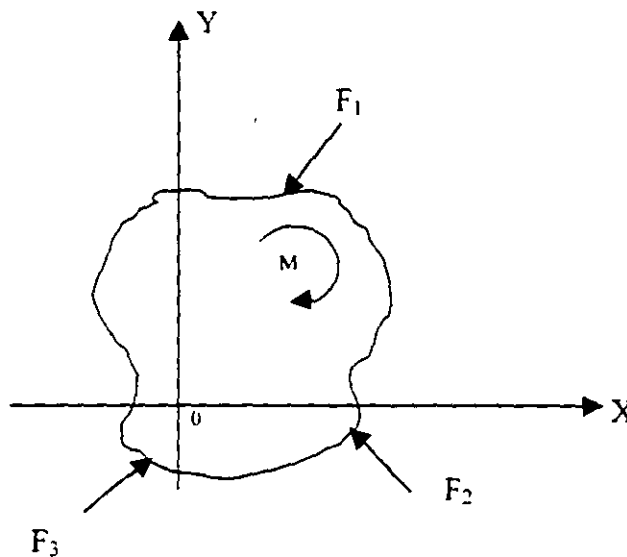


Fig. 7

Si el cuerpo está en equilibrio debe cumplirse que:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma M + \Sigma F_x Y + \Sigma F_y X = 0$$

Si un cuerpo se traslada una distancia pequeña  $\delta$  cuya componentes son:  $\delta x$  y  $\delta y$  se efectuará un trabajo que será (Fig. 8)

$$W = \Sigma F_x \delta x + \Sigma F_y \delta y$$

o sea:

$$W = \delta x \Sigma F_x + \delta y \Sigma F_y$$

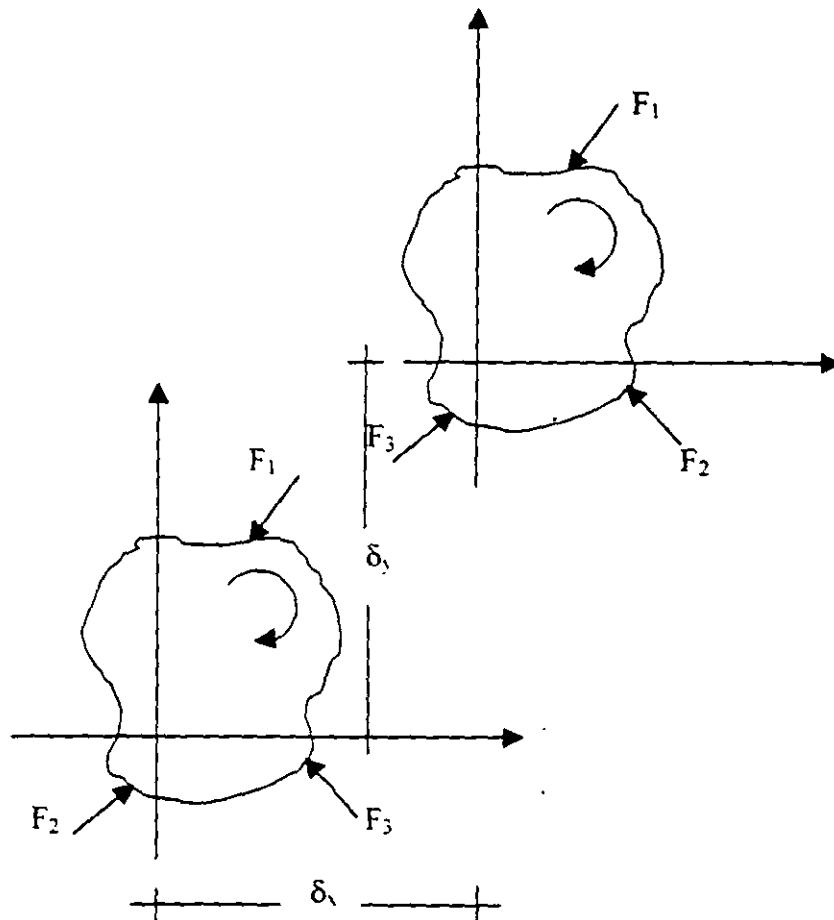


Fig. 8

ya que  $\delta x$  y  $\delta y$  son constantes en todos los puntos del cuerpo.



Debido a las condiciones de equilibrio  $\Sigma F_x = 0$  y  $\Sigma F_y = 0$  se tiene que:

$$W = \delta x \Sigma F_x + \delta y \Sigma F_y = 0$$

Si el cuerpo ya trasladado sufre una rotación pequeña  $\theta$  con respecto al origen 0, las componentes del desplazamiento de cualquier punto serán  $\alpha y$  paralela al eje "x" y  $\alpha x$  paralela al eje "y".

El trabajo efectuado por el sistema de carga será:

$$W = \Sigma M \alpha + \Sigma F_x \alpha y + \Sigma F_y \alpha x$$

o sea:

$$W = \alpha (\Sigma M + \Sigma F_x Y + \Sigma F_y X)$$

ya que  $\alpha$  es constante en todos los puntos.

Debido a las condiciones de equilibrio.

$$\Sigma M + \Sigma F_x Y + \Sigma F_y X = 0$$

se tiene que

$$W = \alpha (\Sigma M + \Sigma F_x Y + \Sigma F_y X) = 0$$

Ya que cualquier movimiento de un cuerpo puede descomponerse en un giro y una traslación y se vio que en ambos casos el trabajo efectuado vale cero, se puede enunciar que:

**"Si a un cuerpo rígido en equilibrio bajo un sistema de fuerzas dado se le desplaza virtualmente, el trabajo efectuado por este sistema durante el desplazamiento virtual es cero".**

## 2.3 PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

Considérese el cuerpo deformable que se muestra en la Fig. 9, el cual se encuentra en equilibrio bajo el sistema de fuerzas dado.

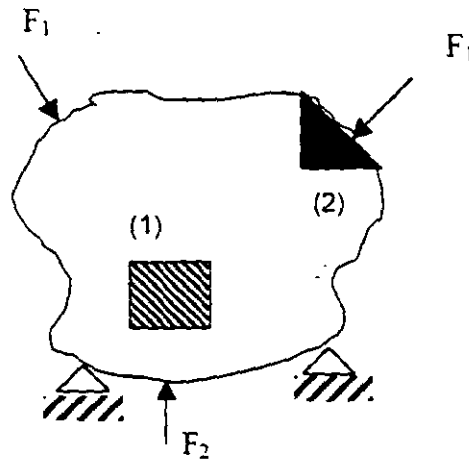


Fig. 9

Los elementos 1 y 2 de las figuras anteriores se muestran como cuerpos libres en la figura 10.

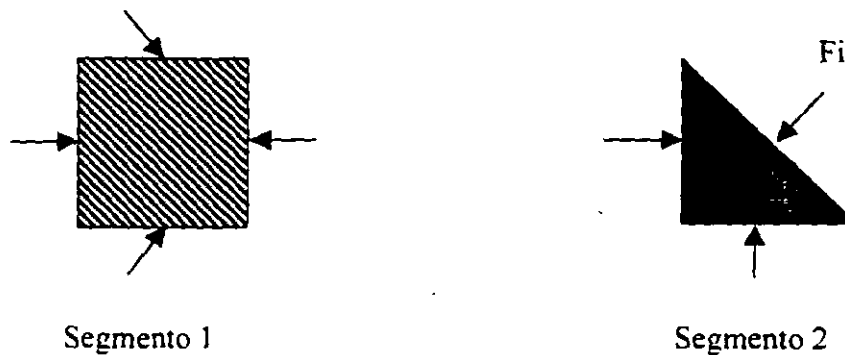


Fig. 10

El segmento 1 es un segmento interno y está sujeto a fuerzas internas en todos sus lados. El segmento 2 es un segmento de borde y está sujeto a una fuerza externa  $F_i$  en uno de sus lados y a fuerzas internas en los otros.

Si se supone un desplazamiento virtual del cuerpo producido por una acción diferente al sistema de fuerzas dado las fuerzas externas e internas se moverán y por lo mismo efectuarán un trabajo virtual.

Por lo anterior, cualquier segmento del cuerpo deformable sufrirá un giro una translación y una deformación virtual. Si se representa por  $dW_e$  al trabajo desarrollado por las fuerzas externas en el segmento se tiene que:

$$dW_e = dW_{RT} + dW_i$$

donde  $dW_{RT}$  es el trabajo virtual de deformación del segmento tratado como cuerpo rígido y  $dW_i$  es el trabajo virtual de deformación del segmento.

Por el principio de los desplazamientos virtuales se sabe que

$$dW_{RT} = 0$$

por lo tanto:

$$dW_e = dW_i$$

El trabajo desarrollado en todo el cuerpo será:

$$W_e = W_i$$

donde  $W_i$  es la energía de deformación interna virtual del cuerpo y  $W_e$  representa el trabajo virtual total debido al sistema de fuerzas externas  $F$ , ya que el trabajo desarrollado por las fuerzas inter segmentales se anula.

Por lo visto anteriormente se puede anunciar que:

***"Si una estructura deformable en equilibrio bajo un sistema de fuerzas dado, se sujeta a un desplazamiento virtual debido a una fuerza adicional, el trabajo virtual producido por las fuerzas externas, es igual a al trabajo de deformación de las fuerzas internas".***



FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO**

**DE ANÁLISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

**MODULO I ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

**CLAVE CA-011**

**TEMA**

**ANEXO 4: MÉTODO DE LAS FLEXIBILIDADES**

**DEL 19 AL 30 DE ABRIL**

**ING. IGNACIO HERNÁNDEZ QUINTO**  
**PALACIO DE MINERÍA**  
**ABRIL DE 2004**

# Método de las flexibilidades

## 5.1. Introducción

El procedimiento general para la solución de estructuras se basa en la necesidad de que las deformaciones de la estructura deben satisfacer las condiciones de compatibilidad con los requisitos estructurales.

Utilizando este método, un sistema indeterminado se descompone en un sistema de estructuras determinadas, esto se logra suponiendo los esfuerzos y/o los componentes de reacción redundantes, pero siempre teniendo una estructura estable e isostática. Debido a que las fuerzas redundantes son manejadas como incógnitas, el procedimiento recibe el nombre de método de las fuerzas.

Posteriormente se escriben las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones para cada punto de aplicación de los esfuerzos y/o reacciones redundantes, aplicando el principio de superposición.

Resolviendo simultáneamente estas ecuaciones se obtienen las magnitudes y sentidos de las redundantes (esfuerzos y/o reacciones):

Este método no es recomendable para la solución de estructuras como por ejemplo un marco continuo de varios pisos. sin embargo, se puede usar ventajosamente en el caso de marcos de una nave y un piso de formas poco usuales.

## 5.2. Análisis de vigas

Para mostrar la aplicación del procedimiento considérese la viga apoyada de la Fig. 5.1 cuyo grado de indeterminación es uno. Tomando la reacción en  $B$  como redundante se tiene una estructura isostática y estable denominada estructura primaria, habiendo hecho esto, el extremo  $B$  queda en libertad de flexionarse bajo la acción de la carga como se muestra en la figura 5.1.b la carga  $W$  se quita ahora y se aplica una carga vertical en el punto  $y$  a lo largo de la línea de acción de la reacción redundante  $R_B$  calculándose la deflexión  $\delta_B$  en términos de  $R_B$  (Fig. 5.1.c)

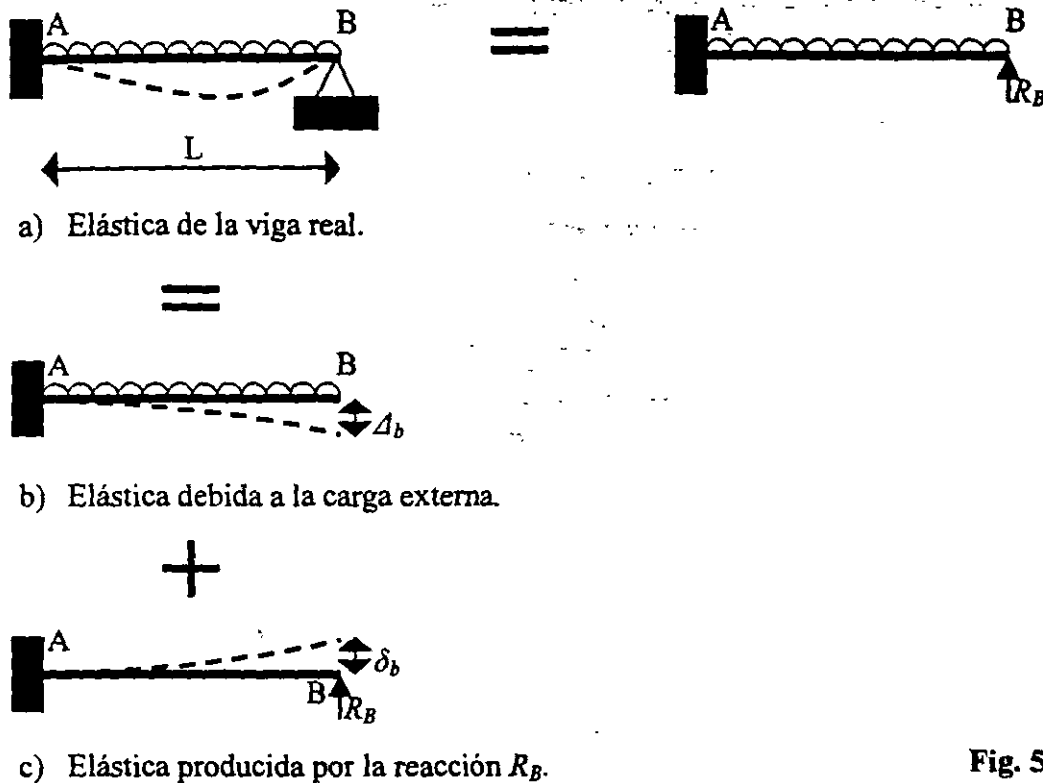


Fig. 5.

Enseguida, superponiendo los dos desplazamientos puesto que:

$$\Delta_B + \delta_B = 0$$

Se halla una solución para  $R_B$ . el efecto de esta superposición se debe a que en realidad no se mueve el punto  $B$  por la acción de las fuerzas aplicadas y la reacción redundante. Una vez conocida  $R_B$  las reacciones pueden obtenerse por medio de las ecuaciones de estática.

Se hace notar el hecho de que la reacción  $R_B$  se supuso hacia arriba porque así lo indica el sentido estructural. sin embargo, esto en realidad carece de importancia, pues si se supone incorrectamente, entonces la reacción hubiera resultado con signo negativo. Si se tiene una estructura con  $n$  redundantes, los desplazamientos se calcularan para  $n + 1$  sistemas de cargas:

- Un análisis para el sistema de cargas original.
- Un análisis para efectos de cada redundante.

Las ecuaciones de compatibilidad implican  $n$  ecuaciones lineales, donde cada una expresa una condición geométrica de la estructura real. En ocasiones es necesario hacer mas de un análisis si el problema se resuelve por medio de tablas.

### 5.3. Solución particular y complementaria

Haciendo referencia a lo señalado en la introducción, una estructura hiperestática se puede resolver poniendo cualquier combinación de componentes de esfuerzos y/o reacciones redundantes, a estas combinaciones se les llama estructuras primarias.

La elección de la estructura primaria no es única, sino principalmente es un asunto de conveniencia el determinar cuales serán las incógnitas o redundantes de manera que se realice el menor trabajo posible.

De acuerdo a la selección de la estructura primaria se pueden tener varias alternativas, dicha estructura se obtiene eliminando apoyos, transformando un tipo de apoyo en otro mas sencillo o insertando articulaciones en la estructura original, siempre teniendo presente que la estructura primaria será isostática y estable para cualquier sistema de cargas aplicado.

Ilustraremos lo anterior considerando la estructura de la Fig. 5.2.a cuyo grado de hiperestaticidad es 3, las alternativas de solución, entre otras se señalan en los incisos b), c), y d) de la misma figura.

En el inciso b) se hizo la supresión de las reacciones del apoyo  $D$ , la alternativa del inciso c) se basó en la transformación de los apoyos originales en otros mas simples y, finalmente, la solución presentada en d) tiene como redundantes los momentos en los nudos  $B$ ,  $C$ , y  $D$  en donde se insertaron articulaciones.

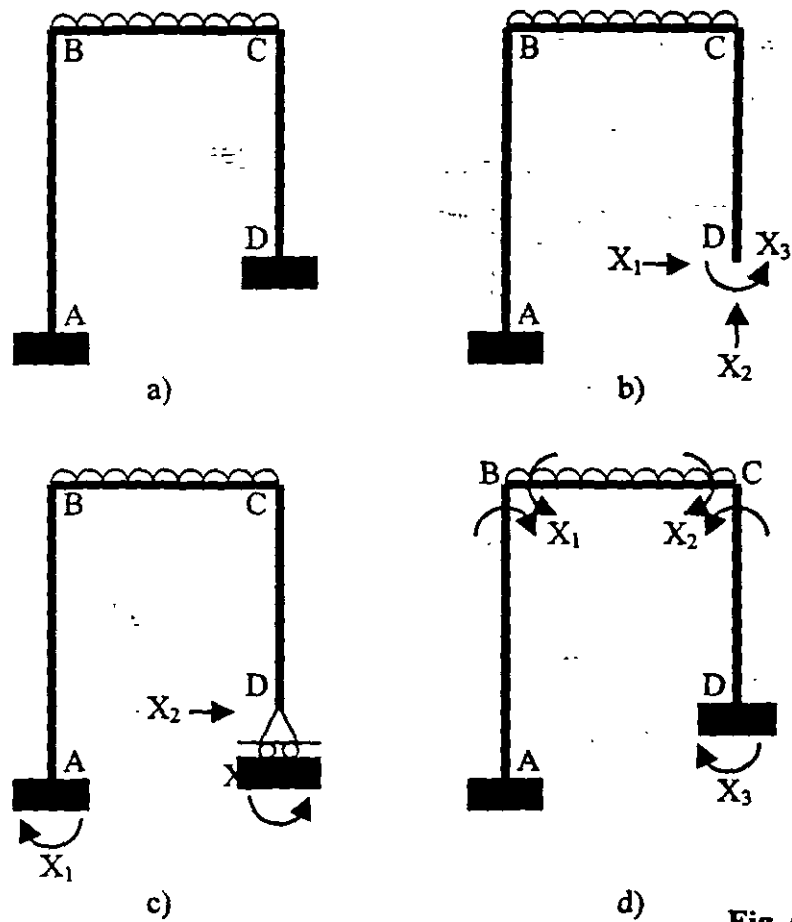


Fig. 5.2

Para el análisis de estas estructuras se llamará solución particular a la estructura primaria sobre la cual obra el sistema original de cargas y solución complementaria a la estructura primaria considerando la acción de cada una de las redundantes o incógnitas.

#### 5.4 Calculo de las flexibilidades.

Como ejemplo para la obtención de las flexibilidades y el establecimiento de las ecuaciones de compatibilidad o congruencia, considérese el marco de la Fig. 5.3.a. Suprimiendo las reacciones del apoyo  $D$ , se tiene el marco isostático de la Fig. 5.3.b el cual es la estructura primaria.



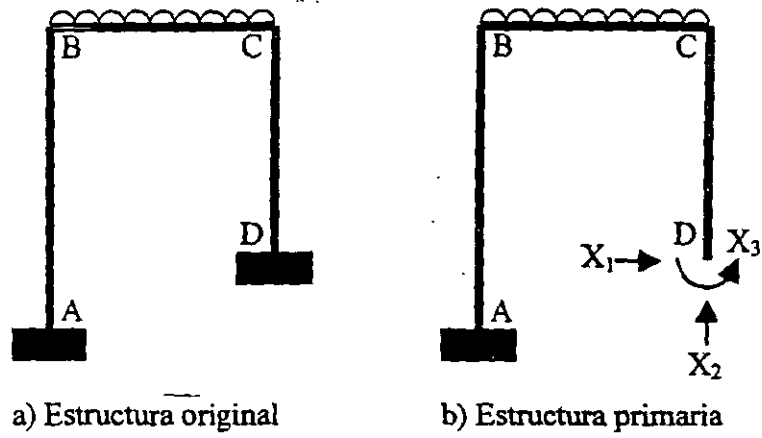


Fig. 5.3

Aplicando el principio de superposición de causas y efectos, el marco original se puede descomponer como se muestra en la Fig. 5.4 con los efectos indicados.

En base a las condiciones frontera de la estructura real las ecuaciones de compatibilidad se basarán en lo siguiente: están restringidos los desplazamientos vertical y horizontal, así como el giro en el punto  $D$ .

Si se establecen las ecuaciones que garantizan la compatibilidad de deformaciones se tiene:

a) El desplazamiento horizontal en  $D$  es cero:

$$\Delta_{DX} = \Delta_{1P} + F_{11}X_1 + F_{12}X_2 + F_{13}X_3 = 0$$

b) El desplazamiento vertical en  $D$  es cero:

$$\Delta_{DY} = \Delta_{2P} + F_{21}X_1 + F_{22}X_2 + F_{23}X_3 = 0$$

c) El desplazamiento angular en  $D$  es cero:

$$\theta_{DX} = \theta_{3P} + F_{31}X_1 + F_{32}X_2 + F_{33}X_3 = 0$$

Resolviendo simultáneamente esas ecuaciones se obtienen las magnitudes de las incógnitas. si alguna de estas resulta con signo negativo indica que el sentido es contrario al supuesto originalmente.

La ecuación matricial del método de flexibilidad siguiente:

$$[\delta][F] = [\Delta]$$

En donde  $[\Delta]$  indica desplazamientos lineales y angulares.  $[F]$  las incógnitas (momentos y/o reacciones) y  $[\delta]$  es la matriz de flexibilidad. la que es simétrica debido al teorema de los trabajos recíprocos de Maxwell.

Los coeficientes de flexibilidad pueden obtenerse por cualquier método, mas en lo siguiente se calculan aplicando el principio del trabajo virtual. En los mismos coeficientes el primer subíndice indica la correspondencia con el grado de libertad y el segundo la causa que provoca el desplazamiento.

Por lo tanto para resolver una estructura utilizando el método de las fuerzas se procede de la siguiente manera:

1. Se determina el numero de reacciones de la estructura. si el numero de estas es igual al numero de ecuaciones independientes de equilibrio, el problema es isostático. si es mayor el problema es hiperestático y se obtiene el grado de indeterminación de  $n$ .
2. Se considera la estructura primaria eliminando las  $n$  reacciones redundantes, teniendo siempre una estructura isostática y estable.

3. Se aplica el principio de superposición de causas y efectos, estableciéndose una ecuación por cada redundante de modo que se cumplan las condiciones de compatibilidad de deformaciones en la estructura real.
4. Se resuelven las  $n + 1$  estructuras, calculando los desplazamientos (lineales y/o angulares) en los puntos donde se eliminaron las reacciones redundantes, expresándolos en función de las fuerzas originales y de las reacciones redundantes.
5. Resolver el sistema de  $n$  ecuaciones obteniendo el valor de las incógnitas, las reacciones restantes se calculan haciendo uso de las ecuaciones de la estática.
6. Trazar los diagramas de los elementos mecánicos. En ocasiones es necesario hacer mas de un análisis debido a la carga externa cuando el problema se resuelve mediante el uso de tablas.

### 5.5 análisis de armaduras.

Cuando se aplica el método de las fuerzas a la solución de una armadura hiperestática, el problema puede ser que exista hiperestaticidad externa, interna o la combinación de las dos. A continuación se enuncian dichos casos.

#### 5.5.1 Estructura isostática interiormente e hiperestática exteriormente.

Consideremos la armadura de la Fig. 5.5.a, la estructura se convierte en isostática exteriormente si se quita un apoyo, el intermedio por ejemplo, debido a esto se produce el desplazamiento  $\Delta_{1P}$  causado por la acción de las fuerzas externas. En seguida se añade la estructura 5.5.c en donde se aplica la reacción en  $E$ , la cual se produce por el desplazamiento  $f_{11}$ . Utilizando el principio de superposición la condición de deformación en el apoyo  $E$  de la estructura original implica que el desplazamiento vertical es nulo, por lo que la ecuación de compatibilidad es:

$$\Delta_{1P} + f_{11}X_1 = 0$$

Una vez calculado el valor de la incógnita se encuentran los esfuerzos finales en las barras sumando algebraicamente las fuerzas producidas por el sistema externo de cargas y al efecto de la redundante.

#### 5.5.2 Estructura hiperestática interiormente e isostática exteriormente.

En este caso se dice que hay barras o miembros redundantes, tantos como:

$$\text{Barras redundantes} = b - 2j + 3$$

Donde:

b = numero de barras

j = numero de nudos

Analizamos la armadura de la Fig. 5.6.a. la solución de este problema se limita a cortar la barra redundante, calculando el desplazamiento relativo entre los nudos que limitan a la barra.

Primero se encuentra el valor del desplazamiento relativo ocasionado por el sistema de cargas aplicando (Fig. 5.6.b) y después el debido a la barra redundante (Fig. 5.6.c), se aplica la ecuación de compatibilidad que es:

$$\Delta_{1P} + f_{11}X_1 = 0$$

De donde se encuentra la incógnita y los resultados finales son la suma de los esfuerzos bajo el sistema de cargas y los de la barra redundante.

### 5.5.3 Estructura hiperestática interior y exteriormente

Este problema se resuelve con la combinación de los casos o sea eliminando los apoyos y barras y aplicando las condiciones de compatibilidad.

Los desplazamientos debidos a carga axial se calculan por medio de la siguiente formula:

$$\Delta = \sum_{i=1}^b \frac{N_i n_i}{A_i E_i} L_i$$

En donde:

$N_i$  = fuerzas normales debidas al sistema de cargas.

$n_i$  = fuerzas normales debidas a la carga unitaria.

$A_i$  = Área transversal de la barra  $i$ .

$E_i$  = modulo de elasticidad de la barra  $i$ .

$L_i$  = longitud de la barra  $i$ .

$b$  = numero total de barras.

La aplicación de esta formula se simplifica efectuándola por medio de la siguiente tabla:

Barra	$L$	$A$	$N$	$n$	Desplazamientos		Nfinales = $N + n = X_1$	
					$\Delta_{IP}$	$f_{II}$	$n = X_1$	Nfinales
					$\frac{Nn}{AE} L$	$\frac{nn}{AE} L$	ton	ton
A - C								
B - D								
A - B								
C - D								
A - D								
B - C								
				$\Sigma$				

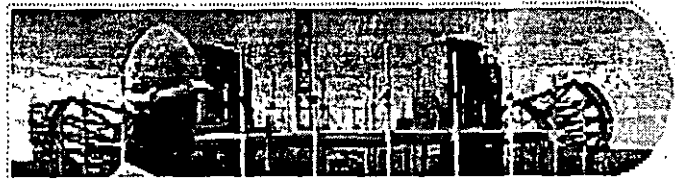
En resumen, para la solución de armaduras aplicando el método de flexibilidades se procede de la siguiente manera:

1. Se determina el número de reacciones y el número de barras de la armadura, si el número de las incógnitas es igual al de ecuaciones independientes de equilibrio, el problema es isostático, si es mayor el problema es hiperestático y el grado de indeterminación es el número de incógnitas en exceso ( $n$ ).
2. Se considera una estructura primaria suprimiendo las redundancias (apoyos y/o barras), teniendo siempre una estructura isostática y estable.
3. Se aplica el principio de superposición añadiéndole a la estructura primaria las redundancias, formulando una ecuación por cada una de estas de manera que se cumpla con la compatibilidad de deformaciones de la estructura original.
4. Se calculan los desplazamientos en los puntos donde se quitaron los elementos redundantes, causados por el sistema real de cargas y por cada una de las redundantes.
5. Se procede a la solución del sistema de  $n$  ecuaciones obteniendo los valores de las redundancias, los elementos de reacción faltantes se evalúan por medio de las ecuaciones de la estática.
6. los esfuerzos finales en las barras se calculan sumando los valores producidos bajo el sistema externo de cargas y los debidos al efecto de las redundantes.

**Nota:** Debido a que para el cálculo de desplazamientos en los ejemplos de aplicación se utilizó el método de trabajo virtual, suponiendo fuerzas concentradas y/o momentos en los puntos de interés en la dirección en que se deseaban los desplazamientos, fue necesario, para la formulación de las ecuaciones de compatibilidad establecer la convención de signos de que son positivos los desplazamientos lineales horizontales a la derecha, los verticales hacia arriba, al igual que los giros en sentido contrario al de las manecillas del reloj (excepto en el del ejemplo 5.10 en donde los giros tienen convención contraria a la anterior). Por otra parte, las figuras sombreadas indican momentos positivos y, por consiguiente, las que se encuentran en blanco corresponden a momentos negativos.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**



**Ingeniería de Civil**

# **CURSOS ABIERTOS**

## **ANÁLISIS ESTRUCTURAL CA 467**

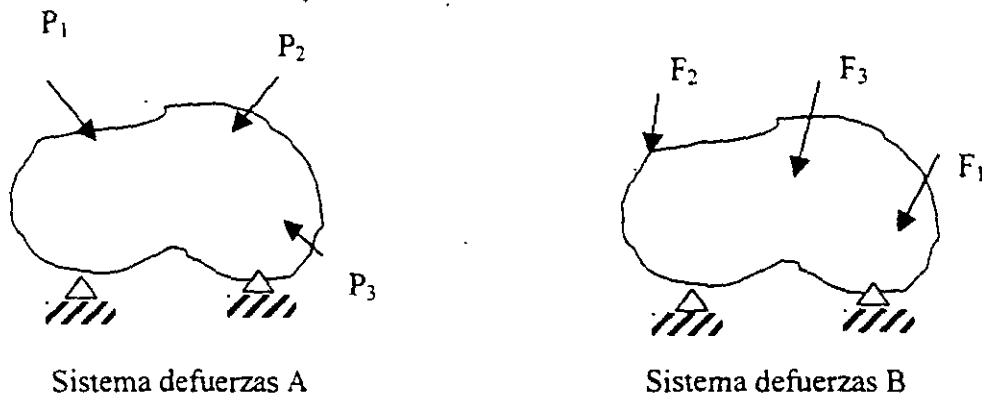
**TEMA**

**ANEXO 5: TEOREMA DE BETTI**

**EXPOSITOR: ING. IGNACIO E. HERNÁNDEZ QUINTO  
DEL 27 DE JUNIO AL 01 DE JULIO DE 2005  
PALACIO DE MINERÍA**

## 2.4 TEOREMA DE BETTI

Considérese el cuerpo elástico mostrado en la figura 11 en el que se aplican dos sistemas de cargas a la vez los cuales aparecen por separado.



Si se aplica el principio de la superposición de causas y efectos, se puede hacer el siguiente análisis:

Si se aplica gradualmente primero el sistema A y luego el sistema B, el trabajo efectuado por dichos sistemas de fuerzas será.

$$W = \frac{1}{2} P_i \delta_i + \frac{1}{2} F_j \delta_j + P_i \delta_{ij}$$

Donde:

$\delta_i$

son los desplazamientos producidos por las fuerzas  $P_i$

$\delta_j$

son los desplazamientos producidos por las fuerzas  $F_j$ .

$\delta_{ij}$

son los desplazamientos en la dirección de las fuerzas  $P_i$  debidos a la aplicación de las fuerzas  $F_j$ .



Si ahora se aplica gradualmente el sistema B y luego el sistema A, el trabajo efectuado por dichos sistemas de fuerzas será:

$$W = \frac{1}{2} F_j \delta_j + \frac{1}{2} P_i \delta_i + F_j \delta_{ji}$$

donde:

$$\delta_{ji}$$

son los desplazamientos en la dirección de las fuerzas  $F_j$  debido a la aplicación de las fuerzas  $P_i$

Debido a que el orden de aplicación de los sistemas de fuerzas no afectan al trabajo externo total, las expresiones obtenidas arriba se pueden igualar:

$$\frac{1}{2} P_i \delta_i + \frac{1}{2} F_j \delta_j + P_i \delta_{ij} = \frac{1}{2} F_j \delta_j + \frac{1}{2} P_i \delta_i + F_j \delta_{ji}$$

donde.

$$P_i \delta_{ij} = F_j \delta_{ji}$$

que es el teorema de Betti, el cual puede enunciarse como sigue:

**"El trabajo que realiza un sistema de fuerzas A debido a los desplazamientos que en sus puntos de aplicación le produce un sistema de fuerzas B, es igual al trabajo que realiza el sistema de fuerzas B debido a los desplazamientos que en sus puntos de aplicación le producen el sistema de fuerzas A".**

Un enfoque más simple puede darse observando la viga mostrada en la Fig. 12, en la cual se aplican simultáneamente la fuerzas  $P_A$  y  $P_B$ .

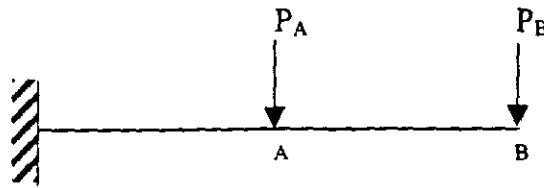


Fig.12

Considérese que se aplica gradualmente primero la fuerza  $P_A$  la cual produce los desplazamientos mostrados en la figura 13.

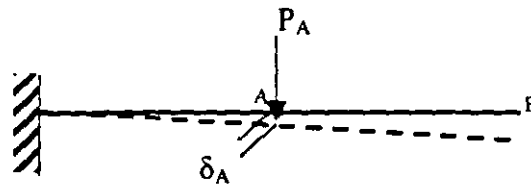


Fig.13

Considérese ahora, que se aplica gradualmente la fuerza  $P_B$  con  $P_A$  en posición como se ve en la figura 14.

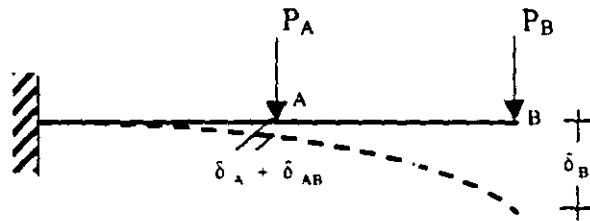


Fig.14

El trabajo total de las fuerzas aplicadas es:

$$W = \frac{1}{2} P_A \delta_A + \frac{1}{2} P_B \delta_B + P_A \delta_{AB}$$

Si se invierte el orden de aplicación de las cargas, se tiene que:

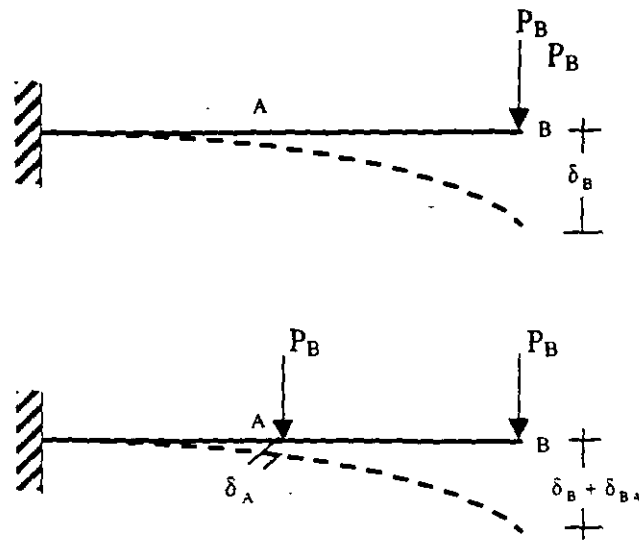


Fig.15

El trabajo total de las fuerzas aplicadas es:

$$W = \frac{1}{2} P_B \delta_B + \frac{1}{2} P_A \delta_A + P_B \delta_{BA}$$

Por lo tanto, igualando las expresiones del trabajo total, se tiene:

$$\frac{1}{2} P_A \delta_A + \frac{1}{2} P_B \delta_B + P_A \delta_{AB} = \frac{1}{2} P_B \delta_B + \frac{1}{2} P_A \delta_A + P_B \delta_{BA}$$

de donde:

$$P_A \delta_{AB} = P_B \delta_{BA}$$

## 2.5 TEOREMA DE MAXWEL

Considerando el marco mostrado en la figura 16 al cual se le aplica una carga  $P_A$  en el punto A y después, al mismo marco se le aplica una carga  $P_B$  en el punto B.

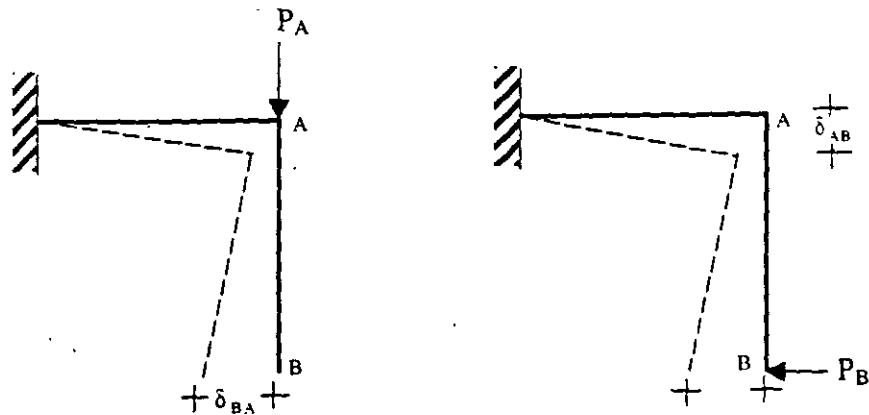


Fig.16

según la figura 16  $\delta_{BA}$  es el desplazamiento producido por  $P_A$  y tiene la dirección  $P_B$ .

Y  $\delta_{AB}$  es el desplazamiento producido por  $P_B$  y tiene la dirección  $P_A$ .

Por el teorema de Betti se tiene:  $P_A \delta_{AB} = P_B \delta_{BA}$

Según Maxwell si  $P_A$  es igual a  $P_B$ , se tiene:  $\delta_{AB} = \delta_{BA}$

por lo tanto, puede enunciarse que:

**"El desplazamiento en un punto A (en la dirección de la fuerza aplicada en A) debido a la aplicación de la fuerza P en un punto B, es igual al desplazamiento en el punto B ( en la dirección de la fuerza aplicada en B) debido a la aplicación de una fuerza P en el punto A"**

El teorema anterior también es válido para el caso de rotaciones o de combinaciones entre desplazamiento lineal y rotaciones. Un caso como el que se muestra en la figura 17 aclarará lo anterior.

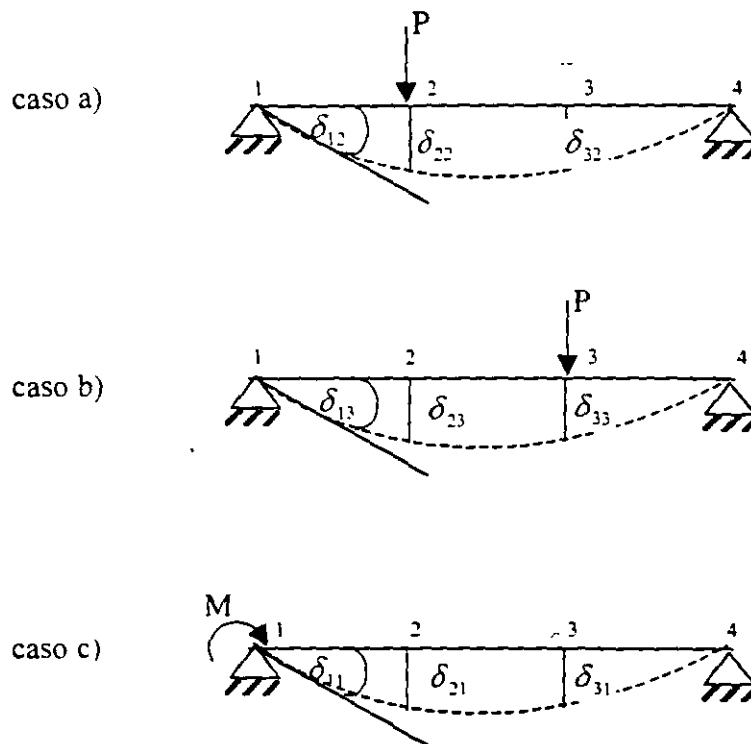


Fig.17

En los casos a) y b) se tiene:

$$P\delta_{23} = P\delta_{32}$$

entonces:

$$\delta_{23} = \delta_{32}$$

En los casos a) y c) se tiene:

$$P\delta_{21} = M\delta_{12}$$

si P y M tiene la misma magnitud, entonces

$$\delta_{21} = \delta_{12}$$

En los casos b) y c) se tiene

$$P\delta_{31} = M\delta_{13}$$

si P y M tiene la misma magnitud, entonces:

$$\delta_{31} = \delta_{13}$$

## 2.6 METODO DEL TRABAJO VIRTUAL

Es un método muy versátil para calcular desplazamientos en las estructuras. Estos desplazamientos pueden ser debidos a cargas de cualquier tipo, cambios de temperatura, contracciones en el material estructural ó errores de fabricación.

La expresión básica para el método del trabajo virtual ya se vió anteriormente y es:

$$\text{Trabajo virtual externo} = \text{Trabajo virtual interno}$$

$$W_e = W_i$$

En la ecuación anterior se puede expresar el primer término como el producto de una carga conocida por el desplazamiento buscado. El segundo término se puede expresar en función de los elementos mecánicos de la estructura, lo cual se hará enseguida.

Considérese la armadura mostrada en la Fig. 18 la cual está sujeta a un sistema de cargas  $P$ , y en la cual se desea calcular el desplazamiento vertical en el punto  $A$ .

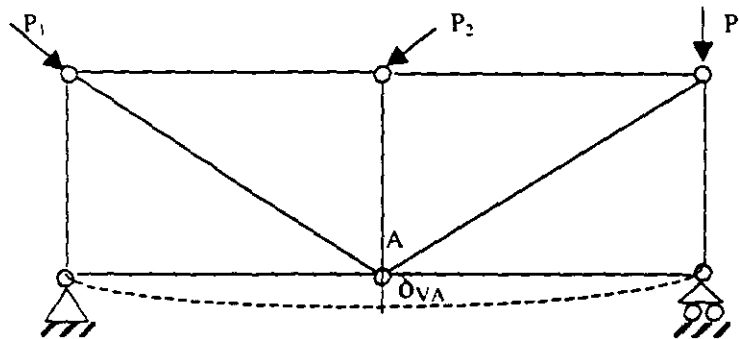


Fig.18

Considérese ahora una armadura sujeta a una carga  $F$  en el punto  $A$  en la dirección de

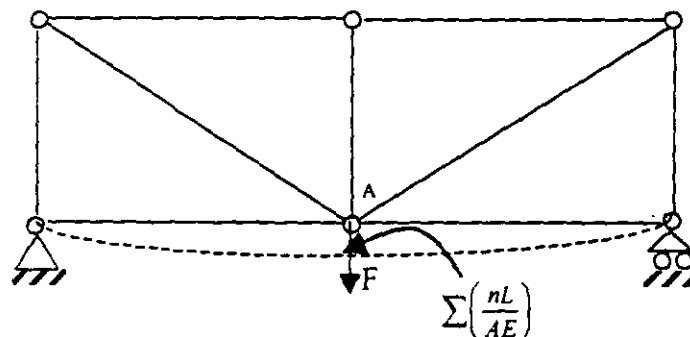


Fig.19

Si se denomina con  $N$  a las fuerzas axiales en los elementos debidas al sistema de cargas  $P$ , y como  $n$  a las fuerzas axiales en los elementos debidas a la carga  $f$ , se tiene según Betti que:

$$W_e = \frac{1}{2} F \delta_{v,A}$$

$$W_i = \frac{1}{2} \sum N \left( \frac{nL}{AE} \right)$$

donde el término con paréntesis es el alargamiento o acotamiento de cada elemento de la estructura debido a la aplicación de la carga  $F$ . Por lo tanto:

$$\frac{1}{2} F \delta_{v,A} = \frac{1}{2} \sum \frac{NnL}{AE}$$

Si se da a  $F$  el valor unitario (puede ser cualquier valor) se tendrá que:

$$\delta_{v,A} = \sum \frac{NnL}{AE}$$

Carga Axial

En la forma semejante se pueden establecer las expresiones del trabajo virtual interno para los demás elementos mecánicos y se obtiene:

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx$$

Flexión

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{CVv}{GA} dx$$

Fuerza Cortante

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{Tt}{GJ} dx$$

Torsión  
(Momento Torsionante)

## 2.7 PRIMER TEOREMA DE CASTIGLIANO

En este teorema sirve para determinar desplazamientos en cualquier dirección en una estructura.

Considérese la Fig. 20 mostrada en la cual las fuerzas P y Q se aplica gradual y simultáneamente.

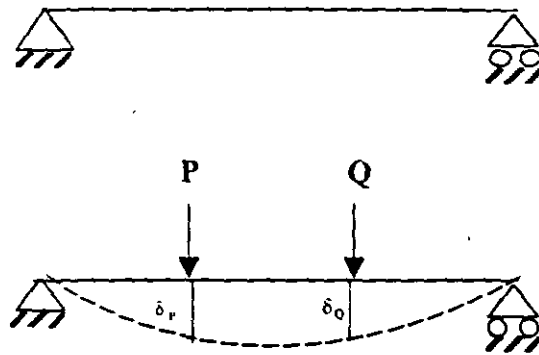


Fig. 20

El trabajo efectuado por P y Q es:

$$W = \frac{P \delta_p}{2} + \frac{Q \delta_q}{2} \quad \text{----(a)}$$

Si se aumenta la fuerza P en \$dP\$ ( Fig. 21) con P y Q en posición, el incremento del trabajo o energía de deformación interna es:

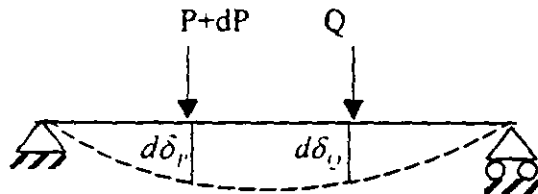


Fig. 21

$$dW = (P + dP) d\delta_p + Q d\delta_q$$

$$dW = P d\delta_p + dP d\delta_p + Q d\delta_q$$



Si se desprecian los productos diferenciales  $dP d\delta_p = 0$  se tiene:

$$dW = P d\delta_p + Q d\delta_Q \quad \text{----(b)}$$

También se puede valorar  $dW$  de la forma siguiente: considérese que se aplican  $P+dP$  y  $Q$  gradual y simultáneamente, entonces el trabajo total efectuado es:

$$W_T = \left[ \frac{P+dP}{2} \right] (\delta_p + d\delta_p) + \frac{Q}{2} (d\delta_Q)$$

despreciando los productos diferenciales

$$W_T = \frac{P\delta_p}{2} + \frac{Q\delta_Q}{2} + \frac{\delta_p dP}{2} + \frac{Pd\delta_p}{2} + \frac{Qd\delta_Q}{2} \quad \text{----(c)}$$

pero

$$W_T = W + dW$$

o sea

$$dW = W_T - W$$

y de las ecuaciones (a) y (c) se obtiene:

$$dW = \left[ \frac{P\delta_p}{2} + \frac{Q\delta_Q}{2} + \frac{\delta_p dP}{2} + \frac{Pd\delta_p}{2} + \frac{Qd\delta_Q}{2} \right] - \left[ \frac{P\delta_p}{2} + \frac{Q\delta_Q}{2} \right]$$

$$dW = \frac{\delta_p dP}{2} + \frac{Pd\delta_p}{2} + \frac{Qd\delta_Q}{2}$$

si se sustituye (b) en la expresión anterior

$$dW = \frac{\delta_p dP}{2} + \frac{dW}{2}$$

o sea

$$dW = \delta_p dP$$

de donde:

$$\delta_p = \frac{dW}{dP}$$

que puede escribirse como:

$$\boxed{\delta_p = \frac{\partial W}{\partial P}}$$

Por todo lo anterior puede enunciarse que:

Primer Teorema de Castigliano:

**"La derivada parcial de la energía total de deformación con respecto a una fuerza  $P$ , es igual al desplazamiento lineal ( producido por el sistema de fuerzas dado) medio en la dirección de la fuerza  $P$ ".**

El teorema anterior puede resumirse en las expresiones siguientes:

$$\delta_P \frac{\partial}{\partial P} \int_0^l \frac{N^2}{2AE} dx \quad (\text{axial})$$

$$\delta_P \frac{\partial}{\partial P} \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \quad (\text{flexión})$$


















$$\delta_P \frac{\partial}{\partial P} \int_0^l \frac{CV^2}{2GA} dx \quad (\text{cortante})$$

$$\delta_P \frac{\partial}{\partial P} \int_0^l \frac{T^2}{2GJ} dx \quad (\text{torsión})$$

Segundo Teorema de Castigliano:

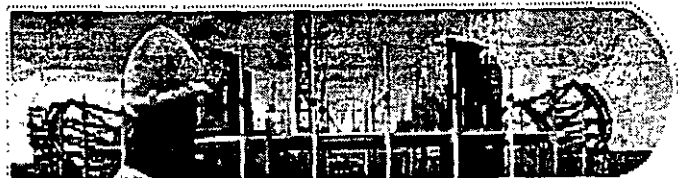
$$\theta_M = \frac{\partial W}{\partial M}$$

**"La derivada parcial de la energía total de deformación con respecto a un momento  $M$ , es igual al desplazamiento angular ( producido por el sistema de fuerzas dado) medio en la dirección del momento  $M$ ".**

Mi \ Mk							
	$Lik$	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{2}L(k_1+k_2)i$	$\frac{2}{3}Likm$	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{2}Lik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{6}L(k_1+2k_2)i$	$\frac{1}{3}Likm$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+a)ik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}Lik$	$\frac{1}{6}L(2k_1+k_2)i$	$\frac{1}{3}Likm$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+b)ik$
	$\frac{1}{2}L(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1+i_2k_1+i_1k_2+2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1+i_2)km$	$\frac{1}{12}L(3i_1+5i_2)k$	$\frac{1}{12}L(i_1+3i_2)k$	$\frac{1}{6}Lk\left\{(1+b)i_1+(1+a)i_2\right\}$
	$\frac{2}{3}Limk$	$\frac{1}{3}Limk$	$\frac{1}{3}Lim(k_1+k_2)$	$\frac{8}{15}Limkm$	$\frac{7}{15}Limk$	$\frac{1}{3}Limk$	$\frac{1}{3}L(1+ab)imk$
	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{12}L(3k_1+5k_2)i$	$\frac{7}{15}Likm$	$\frac{8}{15}Lik$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-b-b^2)ik$
	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}L(5k_1+3k_2)i$	$\frac{7}{15}Likm$	$\frac{11}{30}Lik$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-a-a^2)ik$
	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}L(k_1+3k_2)i$	$\frac{1}{5}Likm$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{5}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+a+a^2)ik$
	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{12}L(3k_1+k_2)i$	$\frac{1}{5}Likm$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{30}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+b+b^2)ik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+a)ik$	$\frac{1}{6}Li\left\{(1+b)k_1+(1+a)k_2\right\}$	$\frac{1}{3}L(1+ab)ikm$	$\frac{1}{12}L(5-b-b^2)ik$	$\frac{1}{12}L(1+a+a^2)ik$	$\frac{1}{3}Lik$



FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA



000

...: Ingeniería de Civil

# CURSOS ABIERTOS

## ANÁLISIS ESTRUCTURAL CA 467

TEMA

MÉTODO DE RIGIDECES MARCOS PLANOS  
CON BARRAS INCLINADAS

**EXPOSITOR: ING. IGNACIO E. HERNÁNDEZ QUINTO**  
**DEL 27 DE JUNIO AL 01 DE JULIO DE 2005**  
**PALACIO DE MINERÍA**

MÉTODO DE RIGIDECES  
MARCOS PLANOS CON BARRAS INCLINADAS

Agustín Deméneghi Colina\*

El método de rigideces consta de las siguientes etapas (Beaufait et al 1970):

- a) Se empotra la estructura y se determinan los elementos mecánicos cuando la estructura está empotrada;
- b) Se liberan los nudos de la estructura y se hallan los elementos mecánicos debidos a desplazamientos lineales y angulares;
- c) Se establecen las condiciones de equilibrio en cada uno de los nudos donde haya desplazamientos diferentes de cero;
- d) Se resuelven las ecuaciones de equilibrio y se obtienen los desplazamientos de la estructura;
- e) Se obtienen los elementos mecánicos en los nudos de la estructura.

La ecuación general de equilibrio de la estructura es

$$K \delta + P^e + P^c = 0 \quad (1)$$

donde

- $K$  = matriz de rigideces de la estructura
- $\delta$  = vector de desplazamientos
- $P^e$  = vector de cargas de empotramiento
- $P^c$  = vector de cargas concentradas

La matriz de rigideces de la estructura se puede obtener mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura. El vector de cargas de empotramiento de toda la estructura es igual a la suma de los vectores de carga de todas y cada una de las barras de la estructura.

A continuación obtendremos la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de una barra con apoyos continuos, sometida a una carga uniformemente repartida  $w$  (fig 1). Utilizaremos la siguiente convención de signos, para una barra horizontal (fig 2): los giros se consideran positivos en sentido antihorario, los desplazamientos verticales son positivos si van hacia abajo y los desplazamientos horizontales son positivos si van hacia la izquierda (fig 2a). Los momentos flexionantes son positivos en sentido horario, las fuerzas cortantes verticales son positivas si van hacia arriba y las fuerzas cortantes horizontales son positivas si van hacia la derecha (fig 2b).

\* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

Demos un giro  $\theta'_p$  en el extremo izquierdo de la barra. En la fig 3a se muestran los elementos mecánicos ocasionados por este giro. En la fig 3b se muestran los elementos mecánicos producidos por un giro  $\theta'_q$  en el extremo derecho. Las figs 3c y 3d exhiben los elementos mecánicos provocados por un desplazamiento vertical  $\delta'_r$  en el nudo izquierdo y un desplazamiento vertical  $\delta'_s$  en el nudo derecho, respectivamente. Las figs 3e y 3f muestran los elementos mecánicos producidos por un desplazamiento horizontal  $\delta'_u$  en el nudo izquierdo y un desplazamiento horizontal  $\delta'_v$  en el nudo derecho. Las figs 3g y 3h contienen los momentos producidos por un giro de torsión  $\theta'_a$  en el nudo izquierdo y un giro de torsión  $\theta'_b$  en el nudo derecho.

Los elementos mecánicos que aparecen en la barra  $m$  valen

$$M'_p = wL^2/12 + (4EI/L) \theta'_p + (2EI/L) \theta'_q - (6EI/L^2) \delta'_r + (6EI/L^2) \delta'_s \quad (2)$$

$$M'_q = -wL^2/12 + (2EI/L) \theta'_p + (4EI/L) \theta'_q - (6EI/L^2) \delta'_r + (6EI/L^2) \delta'_s \quad (3)$$

$$V'_r = -wL/2 - (6EI/L^2) \theta'_p - (6EI/L^2) \theta'_q + (12EI/L^3) \delta'_r - (12EI/L^3) \delta'_s \quad (4)$$

$$V'_s = -wL/2 + (6EI/L^2) \theta'_p + (6EI/L^2) \theta'_q - (12EI/L^3) \delta'_r + (12EI/L^3) \delta'_s \quad (5)$$

$$N'_u = (AE/L) \delta'_u - (AE/L) \delta'_v \quad (6)$$

$$N'_v = - (AE/L) \delta'_u + (AE/L) \delta'_v \quad (7)$$

$$M'_a = (GI_t/L) \theta'_a - (GI_t/L) \theta'_b \quad (8)$$

$$M'_b = - (GI_t/L) \theta'_a + (GI_t/L) \theta'_b \quad (9)$$

En una viga de sección rectangular de dimensiones  $b$  por  $h$ , el momento polar de inercia debido a torsión se puede valorar en forma aproximada (Beaufait et al 1970)

$$I_t = \frac{h b^3}{3} \left[ 1 - 0.63 \frac{b}{h} + 0.052 \left( \frac{b}{h} \right)^5 \right] \quad (10)$$

$$h \approx b$$

Los elementos mecánicos que transmite la barra al nudo están dados por

$$\underline{P}'_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}^e)'_m \quad (11)$$

donde

$$\underline{K}'_m = \begin{bmatrix} \theta'_p & \theta'_q & \delta'_r & \delta'_s & \delta'_u & \delta'_v & \theta'_a & \theta'_b \\ 4EI/L & 2EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2EI/L & 4EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & AE/L & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -AE/L & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI/L & -GI/L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GI/L & GI/L \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{matrix} \quad (12)$$

$$\underline{\delta}'_m = \begin{bmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$(\underline{P}^e)'_m = \begin{bmatrix} wL^2/12 \\ -wL^2/12 \\ -wL/2 \\ -wL/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$\underline{K}'_m$  = matriz de rigidez de la barra m

$\underline{\delta}'_m$  = vector de desplazamientos de la barra m

$(\underline{P}^e)'_m$  = vector de cargas de empotramiento de la barra m

Veamos a continuación la determinación de la matriz de rigidez y d. vector de cargas de empotramiento para una estructura tridimensional, formada por marcos planos ortogonales entre sí (fig 4); en cada marco pueden existir barras inclinadas.

En la fig 5 se presenta la transformación de un vector del sistema global x-y al sistema local r'-y'. Aplicando las ecuaciones de la fig 5 a la barra inclinada de la fig 6 (despreciando el efecto de torsión con eje de giro vertical):

$$\begin{aligned}
 \theta'_p &= \theta_p & \theta'_q &= \theta_q \\
 \delta'_r &= \delta_r \cos \alpha - \delta_u \sin \alpha \\
 \delta'_s &= \delta_s \cos \alpha - \delta_v \sin \alpha \\
 \delta'_u &= \delta_r \sin \alpha + \delta_u \cos \alpha \\
 \delta'_v &= \delta_s \sin \alpha + \delta_v \cos \alpha \\
 \theta'_a &= \theta''_a \cos \alpha \\
 \theta'_b &= \theta''_b \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Aplicando las expresiones de la fig 5 a la barra de la fig 7:

$$\begin{aligned}
 \theta'_p &= \theta_p \cos \beta - \theta_a \sin \beta \\
 \theta'_q &= \theta_q \cos \beta - \theta_b \sin \beta \\
 \theta''_a &= \theta_p \sin \beta + \theta_a \cos \beta \\
 \theta''_b &= \theta_q \sin \beta + \theta_b \cos \beta
 \end{aligned}$$

Sean

$$\delta'_M = \begin{bmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{bmatrix}$$

(15)



$$\delta'_M = \begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} \quad (16)$$

Es decir

$$\delta'_M = T_M \delta_M \quad (17)$$

donde

$$T_M = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha \cos \beta & 0 \\ 0 & \cos \alpha \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} \quad (18)$$

Los desplazamientos de los sistemas local y global están relacionados mediante las siguientes expresiones

$$\theta'_p = \theta_p \cos \beta - \theta_a \sin \beta \quad (19)$$

$$\theta'_q = \theta_q \cos \beta - \theta_b \sin \beta \quad (20)$$

$$\delta'_r = \delta_r \cos \alpha - \delta_u \sin \alpha \quad (21)$$

$$\delta'_s = \delta_s \cos \alpha - \delta_v \sin \alpha \quad (22)$$

$$\delta'_u = \delta_r \sin \alpha + \delta_u \cos \alpha \quad (23)$$

$$\delta'_v = \delta_s \sin \alpha + \delta_v \cos \alpha \quad (24)$$

$$\theta'_a = \theta_p \cos \alpha \sin \beta + \theta_a \cos \alpha \cos \beta \quad (25)$$

$$\theta'_b = \theta_q \cos \alpha \sin \beta + \theta_b \cos \alpha \cos \beta \quad (26)$$

En el sistema local x'-z' (fig 6)

$$\underline{P}'_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}^c)'_m \quad (27)$$

Pero

$$(\underline{P}^c)'_m = \underline{T}_m \underline{P}^c_m \quad (28)$$

y

$$\underline{P}'_m = \underline{T}_m \underline{P}_m \quad (29)$$

Sustituyendo la ec 29 en la ec 27

$$\underline{T}_m \underline{P}_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}^c)'_m \quad (30)$$

Sustituyendo las ecs 17 y 28 en la ec 30

$$\underline{T}_m \underline{P}_m = \underline{K}'_m \underline{T}_m \underline{\delta}_m + \underline{T}_m \underline{P}^c_m$$

Premultiplicando por  $\underline{T}_m^{-1}$

$$\underline{P}_m = \underline{T}_m^{-1} \underline{K}'_m \underline{T}_m \underline{\delta}_m + \underline{P}^c_m$$

donde

$$\underline{T}_m^{-1} = \begin{bmatrix} \theta_p & \theta_a & \delta_r & \delta_s & \delta_u & \delta_v & \theta_a & \theta_b \\ \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\text{sen } \beta \alpha}{\sqrt{\cos \beta \alpha}} & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\text{sen } \beta \alpha}{\sqrt{\cos \beta \alpha}} \\ 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & \text{sen } \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & \text{sen } \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 \\ -\text{sen } \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \beta \alpha}{\sqrt{\cos \beta \alpha}} & 0 \\ 0 & -\text{sen } \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \beta \alpha}{\sqrt{\cos \beta \alpha}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \theta_a \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{matrix} \quad (31)$$

En el sistema global

$$\underline{P}_m = \underline{K}_m \underline{\delta}_m + \underline{P}^c_m \quad (32)$$

donde

$$\underline{K}_m = \underline{T}_m^{-1} \underline{K}'_m \underline{T}_m \quad (33)$$

Sustituyendo las ecs 12, 18 y 31 en la ec 33, se obtiene la matriz  $\underline{K}_m$ , la cual se muestra en la tabla 1.

Para el vector de cargas de empotramiento:

$$P_m^e = T^{-1} (P_m^e)' \quad (34)$$

Para una barra sometida a una carga uniforme  $w$  en el sistema local  $x'-z'$ , el vector  $P_m^e$  vale

$$P_m^e = \begin{bmatrix} (wL^2/12) \cos \beta \\ - (wL^2/12) \cos \beta \\ - (wL/2) \cos \alpha \\ - (wL/2) \cos \alpha \\ (wL/2) \sin \alpha \\ (wL/2) \sin \alpha \\ - (wL^2/12) \sin \beta \\ (wL^2/12) \sin \beta \end{bmatrix} \quad (35)$$

La ec 33 proporciona la matriz de rigidez de la barra inclinada  $m$ , para el sistema coordenado general  $x-y-z$ . Las ecs 34 ó 35 proporcionan el vector de cargas de empotramiento de la barra inclinada  $m$ , para el sistema coordenado general  $x-y-z$ .

En resumen, primero se utilizan la tabla 1 y las 34 ó 35 para hallar la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de las barras de la estructura. La matriz de rigideces de la estructura completa se obtiene mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura; el vector de cargas de empotramiento de la estructura completa es igual a la suma de los vectores de carga de todas y cada una de las barras de la estructura. Sustituyendo en la ec 1 se obtiene la ecuación matricial de equilibrio de toda la estructura; resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los desplazamientos correspondientes al sistema global  $x-y-z$  (vector  $\delta$ ). Los elementos mecánicos en las barras se obtienen de la siguiente forma: primero se determinan los desplazamientos en el sistema local, con el empleo de la ec 17 ó las ecs 19 a 26:

$$\delta_m' = T_m \delta_m \quad (ec 17)$$

A continuación, los elementos mecánicos en la barra  $m$  se determinan con la ec 11 ó con las ecs 2 a 9:

$$P_m' = K_m' \delta_m' + (P_m^e)' \quad (ec 11)$$

Ejemplo 1  
 Determinar los elementos mecánicos en los nudos de la estructura de la fig 8a.

Solución

Primeramente numeramos las barras y los grados de libertad de la estructura (fig 8b). En este ejemplo no se toman en cuenta los efectos de torsión ( $\beta = 0$ ).

Barra	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\delta_u$	$\delta_v$	$\alpha$ Grados
1	$\theta_5$	$\theta_{11}$	$\delta_1$	$\delta_7$	$\delta_3$	$\delta_9$	68.2
2	$\theta_{11}$	$\theta_{12}$	$\delta_7$	$\delta_8$	$\delta_9$	$\delta_{10}$	0
3	$\theta_6$	$\theta_{12}$	$\delta_2$	$\delta_8$	$\delta_4$	$\delta_{10}$	111.8

Empleando la tabla 1 se obtienen las matrices de rigidez de las barras 1, 2 y 3, las cuales se muestran en la tabla 2. La matriz de rigidez de la estructura completa en el sistema global es la suma de las matrices de todas y cada una de las barras.

Sumando las matrices de las barras 1, 2 y 3 (tabla 2) obtenemos

$$K = \begin{bmatrix} \delta_7 & \delta_8 & \delta_9 & \delta_{10} & \theta_{11} & \theta_{12} \\ 32578.02 & -664.2 & 12719.58 & 0 & -1877.77 & -1992.6 \\ -664.2 & 32578.02 & 0 & -12719.58 & 1992.6 & 1877.77 \\ 12719.58 & 0 & 71622.66 & -66420 & -287.08 & 0 \\ 0 & -12719.58 & -66420 & 71622.66 & 0 & -287.08 \\ -1877.77 & 1992.6 & -287.08 & 0 & 9080.45 & 3985.2 \\ -1992.6 & 1877.77 & 0 & -287.08 & 3985.2 & 9080.45 \end{bmatrix}$$

$$P^e = \begin{bmatrix} -24 \\ -24 \\ 0 \\ 0 \\ 24 \\ -24 \end{bmatrix} \begin{matrix} GL \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \quad P^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} GL \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

A continuación planteamos la ecuación matricial

$$K \delta + P^e + P^c = 0$$

(ec 1)

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes desplazamientos:

$$\begin{aligned} \delta_7 &= 0.00080245 \text{ m} & \delta_8 &= 0.00080245 \text{ m} \\ \delta_9 &= -0.00008378 \text{ m} & \delta_{10} &= 0.00008378 \text{ m} \\ \theta_{11} &= -0.00473308 & \theta_{12} &= 0.00473308 \end{aligned}$$

Además  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0$

Los elementos mecánicos en cada barra se hallan con el empleo de la ec 11:

$$P'_1 = K'_1 \delta'_1 + (P_1^e)' \quad (\text{ec 11})$$

Las matrices de cada barra en el sistema local ( $K'_1$ ) se obtienen con la ec 12. En la tabla 3 se exhiben estas matrices para las tres barras de la estructura.

El vector de desplazamientos  $\delta'_1$  se halla con el uso de las ecs 19 a 26, mientras que los elementos mecánicos en cada barra (sistema local) se determinan con el empleo de las ecs 2 a 9. La tabla 4 contiene el cómputo de desplazamientos y elementos mecánicos para las barras 1, 2 y 3.

### Ejemplo 2

Determinar los elementos mecánicos en los nudos de la estructura de la fig 9a. Despreciar el fenómeno de acortamiento de barras.

### Solución

Primeramente numeramos las barras y los grados de libertad de la estructura (fig 9b):

#### SISTEMA GLOBAL x-y

Barra	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\theta_a$	$\theta_b$
1	-	$\theta_2$	-	$\delta_1$	-	$\theta_3$
2	$\theta_2$	-	$\delta_1$	-	$\theta_3$	-

#### SISTEMA LOCAL x'-y'

Barra	$\theta'_p$	$\theta'_q$	$\delta'_r$	$\delta'_s$	$\theta'_a$	$\theta'_b$
1	-	$\theta'_2$	-	$\delta'_1$	-	$\theta'_3$
2	$\theta'_3$	-	$\delta'_1$	-	$\theta'_2$	-

Los desplazamientos están relacionados entre sí, de acuerdo con las ecs 19 a 26

Barra 1

$$\delta'_1 = \delta_1, \quad \theta'_2 = \theta_2, \quad \theta'_3 = \theta_3$$

Barra 2

$$\delta'_1 = \delta_1, \quad \theta'_2 = \theta_2, \quad \theta'_3 = -\theta_3$$

Las matrices de rigidez y los vectores de empotramiento en el sistema global, se hallan con los valores de la tabla 1 y las ecs 34 ó 35:

$$K_1 = \begin{bmatrix} & \theta_2 & & & \\ & 7970.40 & & & \\ & 1992.60 & & \delta_1 & \\ & 0 & & 664.20 & \\ & & & 0 & \theta_3 \\ & & & & 384.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$P_1^e = \begin{bmatrix} -24 \\ -24 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} & \theta_2 & & & \\ & 384.38 & & & \\ & 0 & & \delta_1 & \\ & 0 & & 664.20 & \\ & & & 1992.60 & \theta_3 \\ & & & 1992.60 & 7970.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$P_2^e = \begin{bmatrix} 0 \\ -24 \\ -24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez global es la suma de las matrices de cada una de las barras, es decir

$$K = \begin{bmatrix} & \delta_1 & & & \\ & 1328.40 & & & \\ & 1992.60 & & \theta_2 & \\ & 1992.60 & & 8354.78 & \\ & & & 0 & \theta_3 \\ & & & & 8354.78 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$P^e = \begin{bmatrix} -48 \\ -24 \\ -24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$P^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

A continuación planteamos la ecuación matricial

$$K \underline{\delta} + P^e + P^c = 0 \quad (\text{ec } 1)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes desplazamientos:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.09671 \text{ m} \\ \theta_2 &= -0.020194 & \theta_3 &= -0.020194 \end{aligned}$$

Para obtener los elementos mecánicos en las barras, trabajamos en el sistema local, en el que las matrices  $K'_m$  valen (ec 12):

$$K'_1 = \begin{bmatrix} \theta'_2 & \delta'_1 & \theta'_3 \\ 7970.40 & 1992.60 & 0 \\ 1992.60 & 664.20 & 0 \\ 0 & 0 & 384.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta'_2 \\ \delta'_1 \\ \theta'_3 \end{matrix}$$

$$\underline{\delta}'_1 = \begin{bmatrix} \theta'_2 \\ \delta'_1 \\ \theta'_3 \end{bmatrix}$$

$$K'_2 = \begin{bmatrix} \theta'_3 & \delta'_1 & \theta'_2 \\ 7970.40 & 1992.60 & 0 \\ 1992.60 & 664.20 & 0 \\ 0 & 0 & 384.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta'_3 \\ \delta'_1 \\ \theta'_2 \end{matrix}$$

$$\underline{\delta}'_2 = \begin{bmatrix} \theta'_3 \\ \delta'_1 \\ \theta'_2 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ec 11

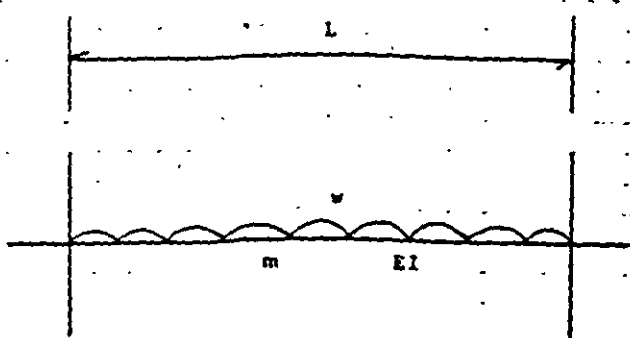
Barra 1  
 $M'_2 = 7.75 \text{ t.m}$                        $V'_1 = 0$                        $M'_3 = - 7.76 \text{ t.m}$

Barra 2  
 $M'_3 = - 7.75 \text{ t.m}$                        $V'_1 = 0$                        $M'_2 = - 7.76 \text{ t.m}$

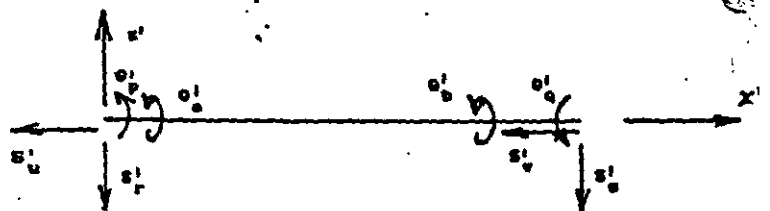
Los momentos obtenidos son de barra sobre nudo; éstos se exhiben en la fig 9c.

REFERENCIA

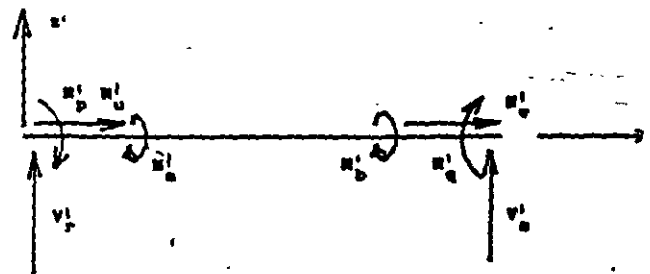
Beaufait, F W, Rowan, W H, Hoadley, P G y Hackett, R M, Computer Methods of Structural Analysis, Prentice-Hall, 1970



Barra n  
 FIGURA 1



a) Desplazamientos



b) Elementos mecánicos  
 (barra sobre nudo)

CONVENCIÓN DE SIGNOS

(ADSMRI9)

FIGURA 2



TABLA 1

NOBRE: MATRIZ DE RIGIDEZ. BARRA INCLINADA  
 FECHA: 23/04/96  
 PROGRAMA: MARIGBI

Sean	$D = 4 EI/L$ $F = GI/L$	$H = 6 EI/L^2$		$N = 12 EI/L^3$		$Q = AE/L$		
	$SA = \text{sen } A$ $CA = \text{cos } A$	$S2A = \text{sen}^2 A$ $C2A = \text{cos}^2 A$		$SB = \text{sen } B$ $CB = \text{cos } B$		$S2B = \text{sen}^2 B$ $C2B = \text{cos}^2 B$		
tp	tq	dr	ds	du	dv	ta	tb	
$D C2B$ $- S2B$	$(D/2) C2B$ $- F S2B$	$- H CB CA$	$H CB CA$	$H CB SA$	$- H CB SA$	$- D CB SB$ $+ F CB SB$	$-(D/2) CB SB$ $- F SB CB$	tp
$(D/2) C2B$ $- F S2B$	$D C2B$ $+ F S2B$	$- H CB CA$	$H CB CA$	$H CB SA$	$- H CB SA$	$-(D/2) CB SB$ $- F CB SB$	$- D CB SB$ $+ F CB SB$	tq
$- H CA CB$	$- H CA CB$	$H C2A$ $+ Q S2A$	$- H C2A$ $- Q S2A$	$- H CA SA$ $+ Q CA SA$	$H CA SA$ $- Q CA SA$	$H CA SB$	$H CA SB$	dr
$H CA CB$	$H CA CB$	$- H C2A$ $- Q S2A$	$H C2A$ $+ Q S2A$	$H CA SA$ $- Q CA SA$	$- H CA SA$ $+ Q CA SA$	$- H CA SB$	$- H CA SB$	ds
$H SA CB$	$H SA CB$	$- H CA SA$ $+ Q CA SA$	$H CA SA$ $- Q CA SA$	$H S2A$ $+ Q C2A$	$- H S2A$ $- Q C2A$	$- H SA SB$	$- H SA SB$	du
$- H SA CB$	$- H SA CB$	$H CA SA$ $- Q CA SA$	$- H CA SA$ $+ Q CA SA$	$- H S2A$ $- Q C2A$	$H S2A$ $+ Q C2A$	$H SA SB$	$H SA SB$	dv
$- D CB SB$ $+ F CB SB$	$-(D/2) CB SB$ $- F CB SB$	$H CA SB$	$- H CA SB$	$- H SA SB$	$H SA SB$	$D S2B$ $+ F C2B$	$(D/2) S2B$ $- F C2B$	ta
$(D/2) CB SB$ $- F CB SB$	$- D CB SB$ $+ F CB SB$	$H CA SB$	$- H CA SB$	$- H SA SB$	$H SA SB$	$(D/2) S2B$ $- F C2B$	$D S2B$ $+ F C2B$	tb

TABLA 2

-NOMBRE: CALCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA BARRA INCLINADA  
 FECHA: 23/04/96  
 PROGRAMA: MARIBI43

11

Sistema global  
 Matriz de rigidez de la barra 1

	5	11	1	7	3	9			
tp	tq	dr	ds	du	dv	ta	tb		
1110.049	555.0247	-114.832	114.8326	287.0818	-287.081	0	0	tp	5
555.0247	1110.049	-114.832	114.8326	287.0818	-287.081	0	0	tq	11
-114.832	-114.832	31913.82	-31913.8	12719.58	-12719.5	0	0	dr	1
114.8326	114.8326	-31913.8	31913.82	-12719.5	12719.58	0	0	ds	7
287.0818	287.0818	12719.58	-12719.5	5202.665	-5202.66	0	0	du	3
37.081	-287.081	-12719.5	12719.58	-5202.66	5202.665	0	0	dv	9
0	0	0	0	0	0	0	0	ta	
0	0	0	0	0	0	0	0	tb	

Sistema global  
 Matriz de rigidez de la barra 2

	11	12	7	8	9	10			
tp	tq	dr	ds	du	dv	ta	tb		
7970.4	3985.2	-1992.6	1992.6	0	0	0	0	tp	11
3985.2	7970.4	-1992.6	1992.6	0	0	0	0	tq	12
-1992.6	-1992.6	664.2	-664.2	0	0	0	0	dr	7
1992.6	1992.6	-664.2	664.2	0	0	0	0	ds	8
0	0	0	0	66420	-66420	0	0	du	9
0	0	0	0	-66420	66420	0	0	dv	10
0	0	0	0	0	0	0	0	ta	
0	0	0	0	0	0	0	0	tb	

Sistema global  
 Matriz de rigidez de la barra 3

	6	12	2	8	4	10			
tp	tq	dr	ds	du	dv	ta	tb		
1110.049	555.0247	114.8326	-114.832	287.0818	-287.081	0	0	tp	6
555.0247	1110.049	114.8326	-114.832	287.0818	-287.081	0	0	tq	12
114.8326	114.8326	31913.82	-31913.8	-12719.5	12719.58	0	0	dr	2
-114.832	-114.832	-31913.8	31913.82	12719.58	-12719.5	0	0	ds	8
287.0818	287.0818	-12719.5	12719.58	5202.665	-5202.66	0	0	du	4
-287.081	-287.081	12719.58	-12719.5	-5202.66	5202.665	0	0	dv	10
0	0	0	0	0	0	0	0	ta	
0	0	0	0	0	0	0	0	tb	

TABLA 3

Sistema local

Matriz de rigidez de la barra 1

5	11	1	7	3	9				
tp'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'		
1110.049	555.0247	-309.196	309.1965	0	0	0	0	tp'	5
555.0247	1110.049	-309.196	309.1965	0	0	0	0	tq'	11
-309.196	-309.196	114.8327	-114.832	0	0	0	0	dr'	1
309.1965	309.1965	-114.832	114.8327	0	0	0	0	ds'	7
0	0	0	0	37001.65	-37001.6	0	0	du'	3
0	0	0	0	-37001.6	37001.65	0	0	dv'	9
0	0	0	0	0	0	0	0	ta'	
0	0	0	0	0	0	0	0	tb'	

Sistema local

Matriz de rigidez de la barra 2

11	12	7	8	9	10				
tp'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'	GL	
7970.4	3985.2	-1992.6	1992.6	0	0	0	0	tp'	11
3985.2	7970.4	-1992.6	1992.6	0	0	0	0	tq'	12
-1992.6	-1992.6	664.2	-664.2	0	0	0	0	dr'	7
1992.6	1992.6	-664.2	664.2	0	0	0	0	ds'	8
0	0	0	0	66420	-66420	0	0	du'	9
0	0	0	0	-66420	66420	0	0	dv'	10
0	0	0	0	0	0	0	0	ta'	
0	0	0	0	0	0	0	0	tb'	

Sistema local

Matriz de rigidez de la barra 3

6	12	2	8	4	10				
tp'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'		
10.049	555.0247	-309.196	309.1965	0	0	0	0	tp'	5
555.0247	1110.049	-309.196	309.1965	0	0	0	0	tq'	11
-309.196	-309.196	114.8327	-114.832	0	0	0	0	dr'	1
309.1965	309.1965	-114.832	114.8327	0	0	0	0	ds'	7
0	0	0	0	37001.65	-37001.6	0	0	du'	3
0	0	0	0	-37001.6	37001.65	0	0	dv'	9
0	0	0	0	0	0	0	0	ta'	
0	0	0	0	0	0	0	0	tb'	

TABLA 4

Sistema local

Barra 1

p'	5	11	1	7	3	9	tb'
	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	
0	-0.00473		0 0.000375		0 0.000713	0	0 -2.51077 Mp'
0	-0.00473		0 0.000375		0 0.000713	0	0 -5.13775 Mq'
0	-0.00473		0 0.000375		0 0.000713	0	0 1.420296 Vr'
0	-0.00473		0 0.000375		0 0.000713	0	0 -1.42029 Vs'
0	-0.00473		0 0.000375		0 0.000713	0	0 -26.4169 Vu'
0	-0.00473		0 0.000375		0 0.000713	0	0 26.41699 Vv'
0	-0.00473		0 0.000375		0 0.000713	0	0 0 Ma'
0	-0.00473		0 0.000375		0 0.000713	0	0 0 Mb'

Sistema local

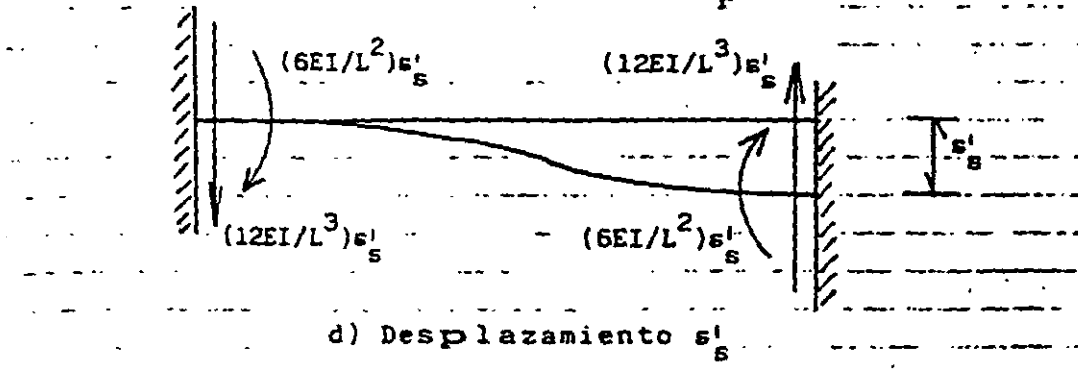
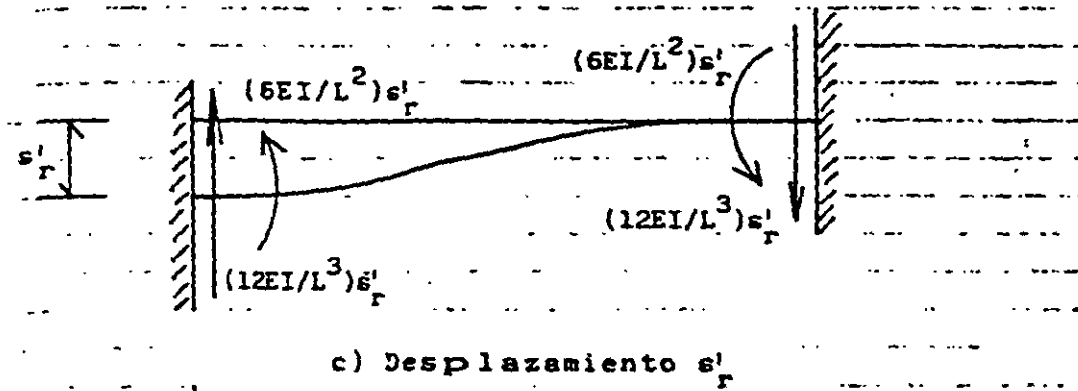
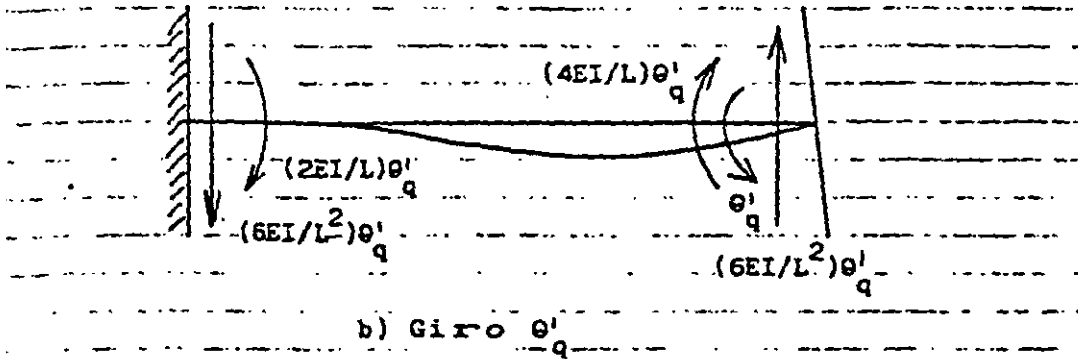
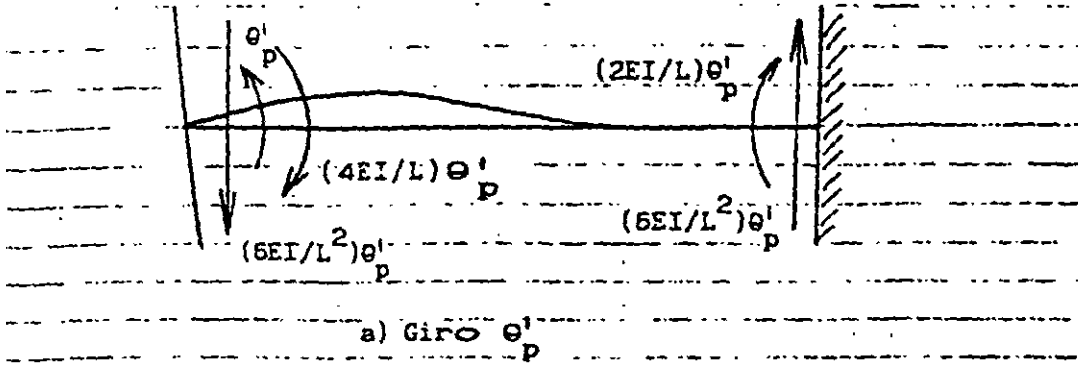
Barra 2

p'	5	11	1	7	3	9	tb'
	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	
-0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 5.137729 Mp'
-0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 -5.13772 Mq'
-0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 24 Vr'
-0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 24 Vs'
-0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 -11.1293 Vu'
-0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 11.12933 Vv'
0	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 0 Ma'
-0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 0 Mb'

Sistema local

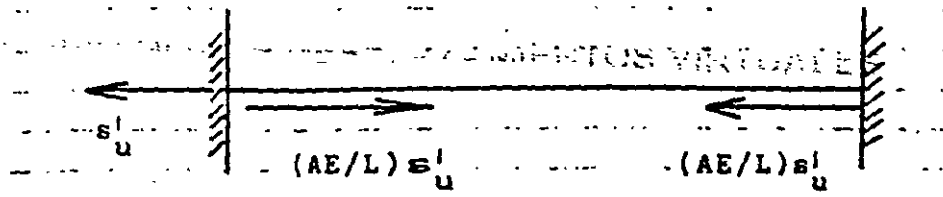
Barra 3

p'	5	11	1	7	3	9	tb'
	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	
0	0.004733		0 -0.00037		0 0.000713	0	0 2.510777 Mp'
0	0.004733		0 -0.00037		0 0.000713	0	0 5.137754 Mq'
0	0.004733		0 -0.00037		0 0.000713	0	0 -1.42029 Vr'
0	0.004733		0 -0.00037		0 0.000713	0	0 1.420296 Vs'
0	0.004733		0 -0.00037		0 0.000713	0	0 -26.4169 Vu'
0	0.004733		0 -0.00037		0 0.000713	0	0 26.41699 Vv'
0	0.004733		0 -0.00037		0 0.000713	0	0 0 Ma'
0	0.004733		0 -0.00037		0 0.000713	0	0 0 Mb'

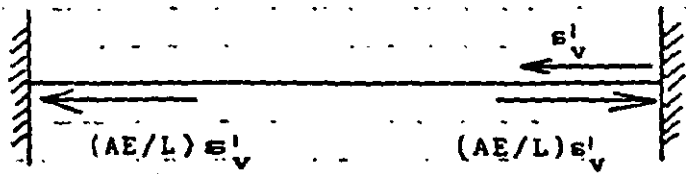


ELEMENTOS MECÁNICOS OCACIONADOS POR DESPLAZAMIENTOS ANGULARES Y LINEALES

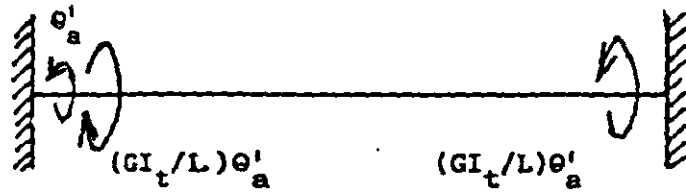
FIGURA 3



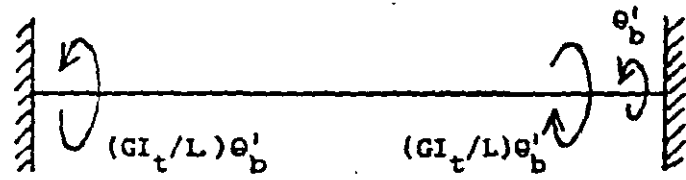
e) Desplazamiento  $s'_u$



f) Desplazamiento  $s'_v$



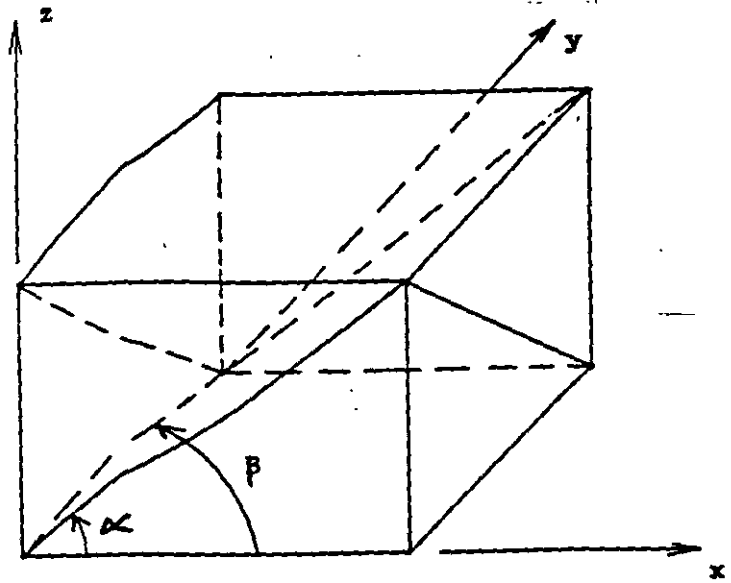
g) Giro  $\theta'_a$



h) Giro  $\theta'_b$

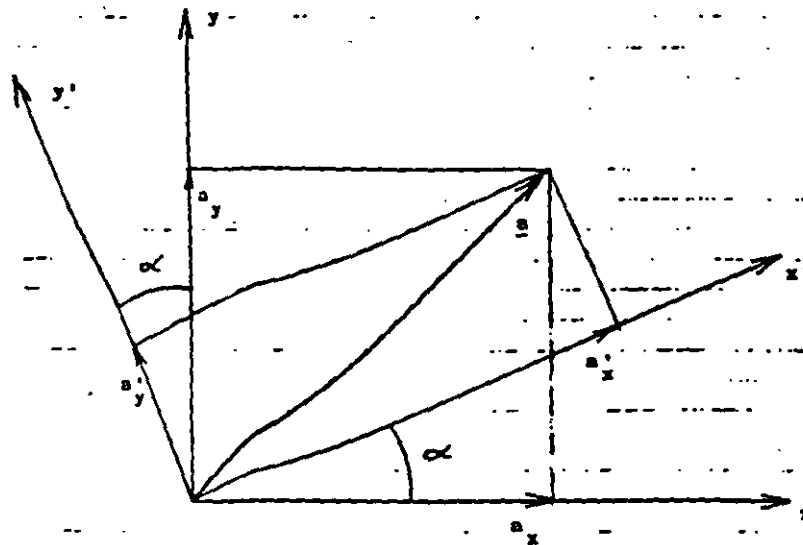
ELEMENTOS MECÁNICOS OCACIONADOS POR  
DESPLAZAMIENTOS ANGULARES Y LINEALES

FIGURA 3



MARCOS PLANOS ORTOGONALES ENTRE SÍ

FIGURA 4

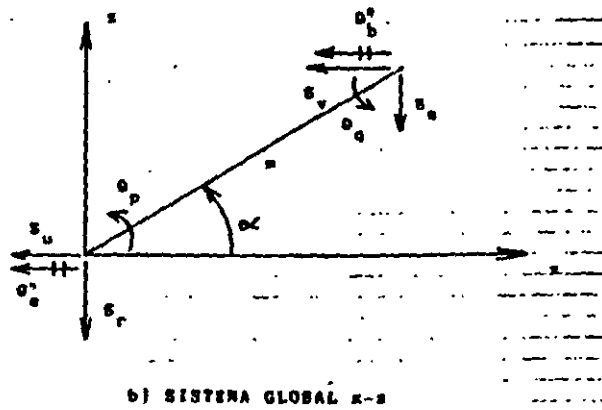
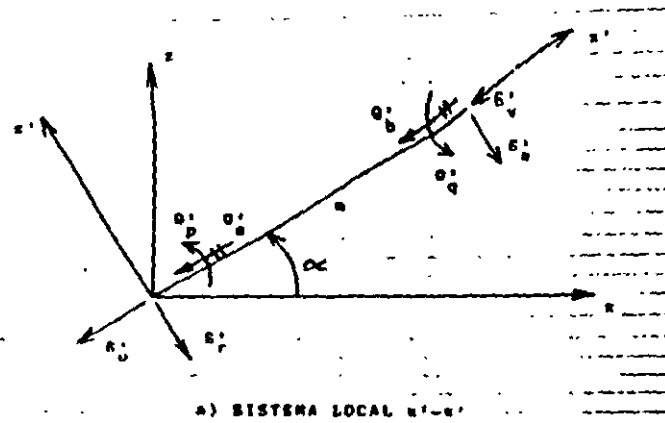


$$a'_x = a_x \cos \alpha + a_y \sin \alpha$$

$$a'_y = -a_x \sin \alpha + a_y \cos \alpha$$

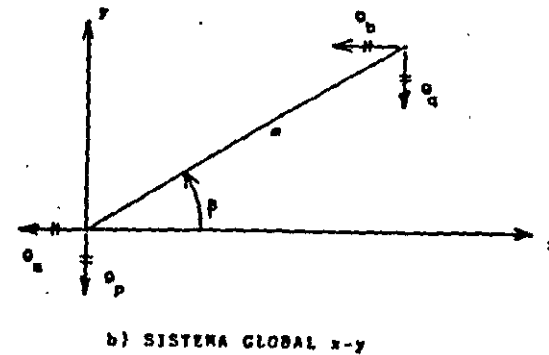
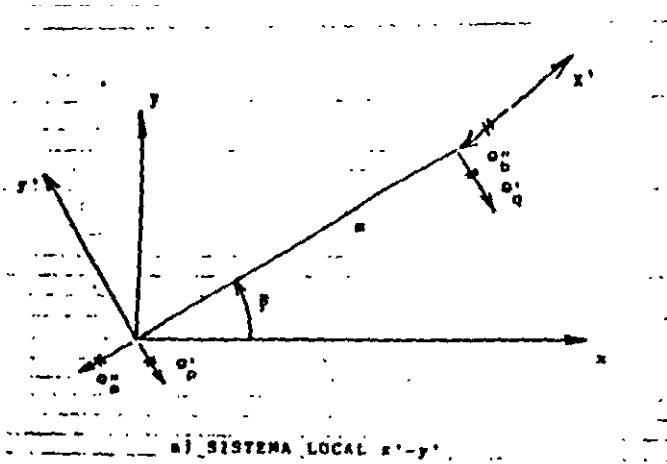
TRANSFORMACIÓN DE UN VECTOR DEL SISTEMA GLOBAL x-y AL SISTEMA LOCAL x'-y'

FIGURA 5



DESPLAZAMIENTOS DE LA BARRA INCLINADA

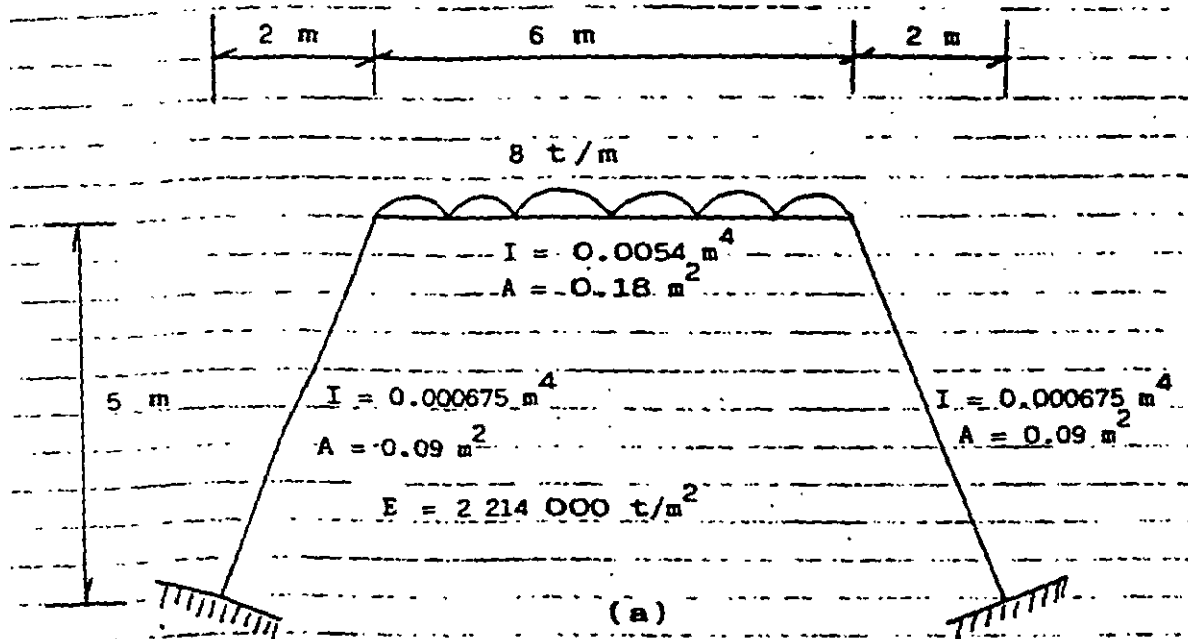
FIGURA 6



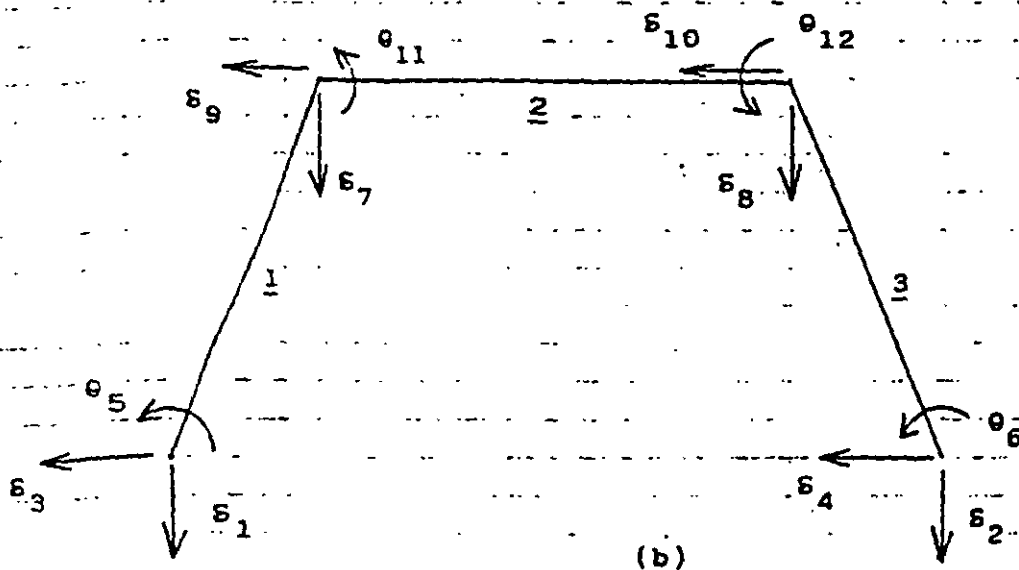
GIROS DE LA BARRA PARALELOS AL PLANO  $x-y$

FIGURA 7



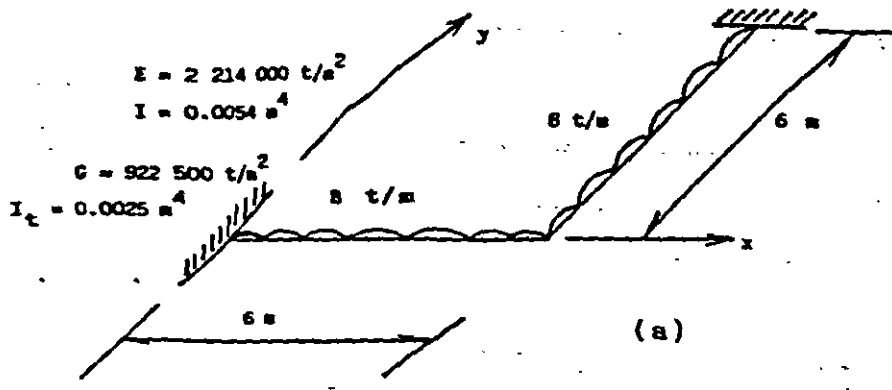


GEOMETRIA Y CARGAS EN LA ESTRUCTURA (EJEMPLO)

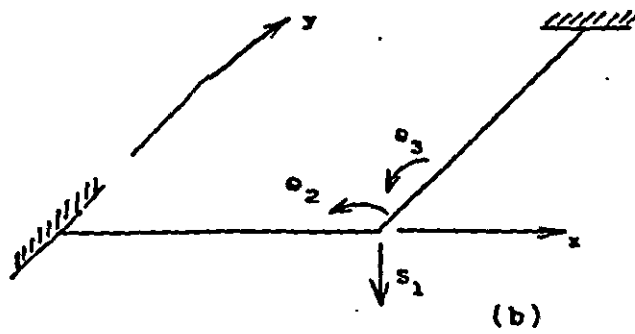


NUMERACIÓN DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD (EJEMPLO)

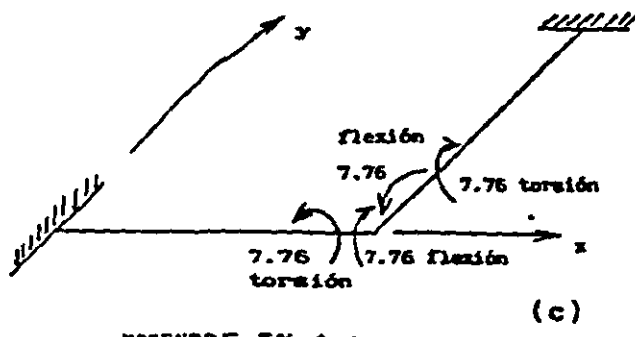
FIGURA 8



GEOMETRÍA Y CARGAS (EJEMPLO)



GRADOS DE LIBERTAD



MOMENTOS EN t.m

FIGURA 9

ANEXO 2  
 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA BARRA. SISTEMA GLOBAL  
 MARCO CON BARRAS ORTOGONALES  
 SIN CONSIDERAR ACORTAMIENTO DE BARRAS, NI EFECTOS DE TORSIÓN

Barras horizontales

$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	
$4EI/L$	$2EI/L$	$-6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$\theta_p$
$2EI/L$	$4EI/L$	$-6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$\theta_q$
$-6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$12EI/L^3$	$-12EI/L^3$	$\delta_r$
$6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$-12EI/L^3$	$12EI/L^3$	$\delta_s$

Elementos mecánicos (barra sobre nudo)

$$M_p = wL^2 + (4EI/L) \theta_p + (2EI/L) \theta_q - (6EI/L^2) \delta_r + (6EI/L^2) \delta_s$$

$$M_q = -wL^2 + (2EI/L) \theta_p + (4EI/L) \theta_q - (6EI/L^2) \delta_r + (6EI/L^2) \delta_s$$

$$V_r = -wL/2 - (6EI/L^2) \theta_p - (6EI/L^2) \theta_q + (12EI/L^3) \delta_r - (12EI/L^3) \delta_s$$

$$V_s = -wL/2 + (6EI/L^2) \theta_p + (6EI/L^2) \theta_q - (12EI/L^3) \delta_r + (12EI/L^3) \delta_s$$

Barras verticales

$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_u$	$\delta_v$	
$4EI/L$	$2EI/L$	$6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$\theta_p$
$2EI/L$	$4EI/L$	$6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$\theta_q$
$6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$12EI/L^3$	$-12EI/L^3$	$\delta_u$
$-6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$-12EI/L^3$	$12EI/L^3$	$\delta_v$

Elementos mecánicos (barra sobre nudo)

$$M_p = wL^2 + (4EI/L) \theta_p + (2EI/L) \theta_q + (6EI/L^2) \delta_u - (6EI/L^2) \delta_v$$

$$M_q = -wL^2 + (2EI/L) \theta_p + (4EI/L) \theta_q + (6EI/L^2) \delta_u + (6EI/L^2) \delta_v$$

$$V_u = -wL/2 + (6EI/L^2) \theta_p + (6EI/L^2) \theta_q + (12EI/L^3) \delta_u - (12EI/L^3) \delta_v$$

$$V_v = -wL/2 - (6EI/L^2) \theta_p - (6EI/L^2) \theta_q - (12EI/L^3) \delta_u + (12EI/L^3) \delta_v$$

ANEXO 3

MATRIZ DE RIGIDEZ. BARRA DE UNA RETÍCULA DE CIMENTACIÓN,  $\alpha = 0$   
 SISTEMA GLOBAL  
 SIN CONSIDERAR ACORTAMIENTO DE BARRAS

DIRECCIÓN x,  $\beta = 0$

$\theta_p$	$\theta_a$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\theta_b$	$\theta_b$	
$4EI/L$	$2EI/L$	$-6EI/L^2$	$6EI/L^2$	0	0	$\theta_p$
$2EI/L$	$4EI/L$	$-6EI/L^2$	$6EI/L^2$	0	0	$\theta_a$
$-6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$12EI/L^3$	$-12EI/L^3$	0	0	$\delta_r$
$6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$-12EI/L^3$	$12EI/L^3$	0	0	$\delta_s$
0	0	0	0	$GI/L$	$-GI/L$	$\theta_p$
0	0	0	0	$-GI/L$	$GI/L$	$\theta_b$

DIRECCIÓN y,  $\beta = 90^\circ$

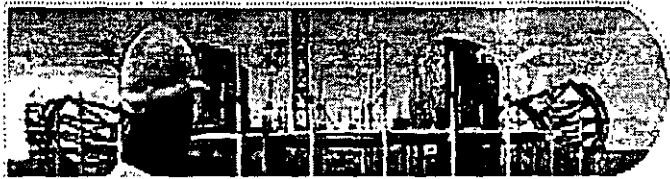
$\theta_p$	$\theta_a$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\theta_b$	$\theta_b$	
$GI/L$	$-GI/L$	0	0	0	0	$\theta_p$
$-GI/L$	$GI/L$	0	0	0	0	$\theta_a$
0	0	$12EI/L^3$	$-12EI/L^3$	$6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$\delta_r$
0	0	$-12EI/L^3$	$12EI/L^3$	$-6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$\delta_s$
0	0	$6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$4EI/L$	$2EI/L$	$\theta_p$
0	0	$6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$2EI/L$	$4EI/L$	$\theta_b$

VECTOR DE CARGAS DE EMPOTRAMIENTO. BARRA DE CIMENTACIÓN. SISTEMA GLOBAL

$$P_p^* = \begin{bmatrix} [wL^2/12 - (11/192)L^2 r_r - (5/192)L^2 r_s] \cos \beta \\ [-wL^2/12 + (5/192)L^2 r_r + (11/192)L^2 r_s] \cos \beta \\ [-wL/2 + (13/32)L r_r + (3/32)L r_s] \cos \alpha \\ [-wL/2 + (3/32)L r_r + (13/32)L r_s] \cos \alpha \\ [-wL^2/12 + (11/192)L^2 r_r + (5/192)L^2 r_s] \sin \beta \\ [wL^2/12 - (5/192)L^2 r_r - (11/192)L^2 r_s] \sin \beta \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \theta_a \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \theta_p \\ \theta_b \end{matrix}$$



FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA



...: Ingeniería de Civil

# CURSOS ABIERTOS

## ANÁLISIS ESTRUCTURAL CA 467

TEMA

APUNTES DE CIMENTACIONES  
INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA

**EXPOSITOR: ING. IGNACIO E. HERNÁNDEZ QUINTO**  
**DEL 27 DE JUNIO AL 01 DE JULIO DE 2005**  
**PALACIO DE MINERÍA**

## APUNTES DE CIMENTACIONES INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA

Agustín Deméneghi Colina  
Héctor Sanginés García

### NOTA PRELIMINAR

La interacción suelo-estructura es aquella parte de la ingeniería que estudia las deformaciones del terreno de cimentación cuando éstas se ven afectadas por la presencia y rigidez de la propia estructura. La influencia de la estructura puede ser en condiciones estáticas, lo cual es tratado por la *interacción estática suelo-estructura*, o puede ser en condiciones dinámicas, lo cual cae en el campo de la *interacción dinámica suelo-estructura*.

### INTERACCIÓN ESTÁTICA SUELO-ESTRUCTURA

Se conocen como métodos de interacción estática suelo-estructura aquellos procedimientos que para el cálculo de las deformaciones del terreno de cimentación toman en cuenta la rigidez de la estructura. Todos estos métodos están basados en el principio de que en el contacto cimiento-terreno los desplazamientos tanto de la subestructura como los del terreno son iguales, es decir, existe compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo.

En términos generales, el procedimiento de cálculo para la interacción suelo-estructura consiste en tres pasos: (a) se calculan los desplazamientos de la subestructura, (b) se calculan los desplazamientos del terreno de cimentación, y (c) se establece la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo.

Podemos distinguir dos clases de situaciones en relación con la interacción: (i) cuando los cimientos están suficientemente separados, de tal forma que la carga sobre un apoyo no ejerce influencia sobre los desplazamientos de los

apoyos vecinos (este fenómeno se presenta usualmente en zapatas aisladas), y (ii) cuando se trata de un cimiento continuo donde el desplazamiento de un punto de dicho cimiento está afectado por la carga repartida en toda la subestructura (es el caso de zapatas corridas o losas de cimentación).

### Interacción suelo-zapatas aisladas

#### *Definición de módulo de reacción*

Para llevar a cabo la interacción suelo-zapatas aisladas, se hace uso del concepto de módulo de reacción o módulo de rigidez del terreno de cimentación, el cual se presenta en los siguientes párrafos.

Definamos el módulo de reacción o rigidez lineal vertical de un cimiento de la siguiente forma

$$K_v = Q_v / \delta_v \quad (1)$$

donde  $Q_v$  es la fuerza vertical aplicada al cimiento y  $\delta_v$  es el asentamiento vertical ocasionado por  $Q_v$ .

Se define la rigidez lineal horizontal de un cimiento

$$K_h = Q_h / \delta_h \quad (2)$$

donde  $Q_h$  es la fuerza horizontal aplicada al cimiento y  $\delta_h$  es el desplazamiento horizontal producido por  $Q_h$ .

Se define la rigidez a la rotación de un cimiento

$$K_r = M / \theta \quad (3)$$

---

\* Profesores del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

donde  $M$  es el momento aplicado al cimiento y  $\theta$  el ángulo -en radianes- producido por dicho momento.

#### Análisis de la interacción suelo-zapatas aisladas

Ilustremos la solución de la interacción suelo-zapatas aisladas con el marco de la fig 1 (ejemplo 1). La rigidez vertical del terreno de cimentación vale  $K_v = 2331.96$  t/m, la rigidez horizontal  $K_h = 1901.38$  t/m y la rigidez a la rotación  $K_r = 1102.81$  t.m/rad.

Utilizaremos el método de rigideces para el análisis de la estructura (véase el anexo 1), en el que se debe cumplir

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (4)$$

donde

$\underline{K}$  = matriz de rigidez de la estructura

$\underline{\delta}$  = vector de desplazamientos

$\underline{P}^e$  = vector de cargas de empotramiento

$\underline{P}^c$  = vector de cargas concentradas

La formación de la matriz  $\underline{K}$  y de los vectores  $\underline{\delta}$ ,  $\underline{P}^e$  y  $\underline{P}^c$ , para el marco de la fig 1, viene descrito en el anexo 1; como resultado de esto, en la fig 2 se exhiben los grados de libertad de la estructura, y en las tablas 1, 2 y 3 la matriz de rigidez  $\underline{K}$ , el vector de cargas de empotramiento  $\underline{P}^e$  y el vector de cargas concentradas  $\underline{P}^c$  de toda la estructura, respectivamente (En la tabla 1 sólo incluimos los renglones de  $\delta_1, \delta_3, \theta_5, \delta_7, \delta_9$  y  $\theta_{11}$ , porque, por simetría  $\delta_2 = \delta_1, \delta_4 = -\delta_3, \theta_6 = -\theta_5, \delta_8 = \delta_7, \delta_{10} = -\delta_9, \theta_{12} = -\theta_{11}$ .)

La rigidez del terreno de cimentación se puede incluir en el vector de cargas concentradas  $\underline{P}^c$ , de la siguiente forma: las fuerzas  $Q_v, Q_h$  y  $M$  se pueden obtener con las ecs 1 a 3

$$Q_v = K_v \delta_v \quad (5)$$

$$Q_h = K_h \delta_h \quad (6)$$

$$M = K_r \theta \quad (7)$$

En la fig 3 se muestran las reacciones del terreno en función de las rigideces del mismo y de los desplazamientos.

Usando las ecs 5 a 7 calculamos las fuerzas  $Q_{v1}, Q_{v2}, Q_{h3}, Q_{h4}, M_5$  y  $M_6$ :

$$\begin{aligned} Q_{v1} &= 2231.96 \delta_1, & Q_{v2} &= 2231.96 \delta_2 \\ Q_{h3} &= 1901.38 \delta_3, & Q_{h4} &= 1901.38 \delta_4 \\ M_5 &= 1102.81 \theta_5, & M_6 &= 1102.81 \theta_6 \end{aligned}$$

El vector de cargas concentradas queda

$$\underline{P}^c = \begin{bmatrix} 2231.96 \delta_1 \\ 2231.96 \delta_2 \\ 1901.38 \delta_3 \\ 1901.38 \delta_4 \\ 1102.81 \theta_5 \\ 1102.81 \theta_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Reemplazando en la ec 4 los valores de  $\underline{K}$  (tabla 1),  $\underline{P}^e$  (tabla 2) y  $\underline{P}^c$  (ec 8), y resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.010291 \text{ m}, & \delta_3 &= 0.0055104 \text{ m} \\ \theta_5 &= 0.00049148, & \delta_7 &= 0.013289 \text{ m} \\ \delta_9 &= -0.000078886 \text{ m}, & \theta_{11} &= -0.0054707 \end{aligned}$$

Los elementos mecánicos en las barras de estructura se calculan siguiendo el procedimiento indicado en el anexo 1. (Lo dejamos como ejercicio al lector.)

Las fuerzas en los apoyos se determinan con las ecs 5 a 7

$$\begin{aligned} Q_{v1} &= Q_{v2} = 2331.96(0.010291) = 23.998 \text{ t} \\ Q_{h3} &= 1901.38(0.0055104) = 10.477 \text{ t} \\ Q_{h4} &= 1901.38(-0.0055104) = -10.477 \text{ t} \\ M_5 &= 1102.81(0.00049148) = 0.542 \text{ t.m} \\ M_6 &= 1102.81(-0.00049148) = -0.542 \text{ t.m} \end{aligned}$$

Resolvamos otro ejemplo, el de la fig 4 (ejemplo 2), despreciando los efectos de acortamiento de barras. En la fig 5 y en la tabla 4 se muestra la numeración de barras y grados de libertad. Las matrices de rigidez y los vectores de cargas de

empotramiento se hallan con los valores del anexo 3 (marcos planos con barras ortogonales, sin considerar el acortamiento de barras).

Barra 1

Matriz de rigidez

$\theta_5$	$\theta_7$	$\delta_3$	
1299.52	649.76	423.76	$\theta_5$
649.76	1299.52	423.76	$\theta_7$
423.76	423.76	184.24	$\delta_3$

$$P^*_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \theta_5 \\ \theta_7 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

Barra 2

Matriz de rigidez

$\theta_6$	$\theta_8$	$\delta_4$	
1299.52	649.76	423.76	$\theta_6$
649.76	1299.52	423.76	$\theta_8$
423.76	423.76	184.24	$\delta_4$

$$P^*_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \theta_6 \\ \theta_8 \\ \delta_4 \end{matrix}$$

Barra 3

Matriz de rigidez

$\theta_7$	$\theta_8$	$\delta_1$	$\delta_2$	
7970.4	3985.2	-1992.6	1992.6	$\theta_7$
3985.2	7970.4	-1992.6	1992.6	$\theta_8$
-1992.6	-1992.6	664.2	-664.2	$\delta_1$
1992.6	1992.6	-664.2	664.2	$\delta_2$

$$P^*_3 = \begin{bmatrix} -wL/2 \\ -wL/2 \\ wL^2/12 \\ -wL^2/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.62 \\ -4.62 \\ 4.62 \\ -4.62 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de toda la estructura se exhiben en las tablas 5 y 6. (En la tabla 5 sólo incluimos los renglones de  $\delta_1$ ,  $\delta_3$ ,  $\theta_5$  y  $\theta_7$ , porque, por simetría  $\delta_2 = \delta_1$ ,  $\delta_4 = -\delta_3$ ,  $\theta_6 = -\theta_5$ ,  $\theta_8 = -\theta_7$ .)

El vector  $\delta$  es

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas concentradas vale (fig 4)

$$P^c = \begin{bmatrix} Q_{v1}-1.2 \\ Q_{v2}-1.2 \\ Q_{h3} \\ Q_{h4} \\ M_5 \\ M_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La rigidez del terreno de cimentación la incluimos con las ecs 5 a 7 (obtenidas de las ecs 1 a 3)

$$Q_v = K_v \delta_v \quad (9)$$

$$Q_h = K_h \delta_h \quad (10)$$

$$M = K_r \theta \quad (11)$$

En la fig 6 se indican las reacciones del suelo en función de las rigideces y los desplazamientos.

Sustituyendo valores

$$Q_{v1} = 2331.96 \delta_1, \quad Q_{v2} = 2331.96 \delta_2$$

$$Q_{h3} = 1901.38 \delta_3, \quad Q_{h4} = 1901.38 \delta_4$$

$$M_5 = 1102.81 \theta_5, \quad M_6 = 1102.81 \theta_6$$

El vector de cargas concentradas queda

$$P^c = \begin{bmatrix} 2331.96 \delta_1 - 1.2 \\ 2331.96 \delta_2 - 1.2 \\ 1901.38 \delta_3 \\ 1901.38 \delta_4 \\ 1102.81 \theta_5 \\ 1102.81 \theta_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reemplazando en la ec 4



$$\begin{aligned} -4.62 - 1.2 + 2331.96 \delta_1 &= 0 & (6_1) \\ 184.24 \delta_3 + 423.76 \theta_5 + 423.76 \theta_7 + 1901.38 \delta_5 &= 0 & (6_2) \\ 423.76 \delta_3 + 1299.52 \theta_5 + 649.76 \theta_7 + 1102.81 \delta_5 &= 0 & (6_3) \\ 426.76 \delta_3 + 649.76 \theta_5 + 5284.72 \theta_7 + 4.62 &= 0 & (6_4) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.0024958 \text{ m}, \delta_3 = 0.00014033 \text{ m} \\ \theta_5 &= 0.00022213, \theta_7 = -0.00091278 \end{aligned}$$

Para hallar los elementos mecánicos, se utiliza el procedimiento indicado en el anexo 1. (Lo dejamos como ejercicio al lector).

Las fuerzas en los apoyos se determinan con las ecs 5 a 7

$$\begin{aligned} Q_{v1} = Q_{v2} &= 2331.96(0.0024958) = 5.82 \text{ t} \\ Q_{h3} &= 1901.38(0.00014033) = 0.267 \text{ t} \\ Q_{h4} &= 1901.38(-0.00014033) = -0.267 \text{ t} \\ M_5 &= 1102.81(0.00022213) = 0.245 \text{ t.m} \\ M_6 &= 1102.81(-0.00022213) = -0.245 \text{ t.m} \end{aligned}$$

#### Determinación de los módulos de reacción del suelo

La determinación de las rigideces  $K_v$ ,  $K_h$  y  $K_r$  se lleva a cabo usando su definición dada por las ecs 1 a 3. Por ejemplo, el módulo  $K_v$  se obtiene aplicando a la zapata una carga vertical  $Q_v$  y calculando el asentamiento que produce dicha carga.

Dado el carácter no lineal de los suelos, es necesario que tanto la carga sobre el cimiento, como sus dimensiones, sean lo más cercano posible a sus magnitudes definitivas en la estructura, pues de otro modo la determinación de las rigideces será sólo aproximada.

#### Ejemplo

Determinar la rigidez lineal vertical  $K_v$  de la zapata de la fig E-1, utilizando para ello la fórmula de Burland y Burbridge. El subsuelo está formado por una arena normalmente cargada,  $N = 15$  golpes.

#### Solución

El asentamiento en milímetros de la zapata está dado por (Burland y Burbridge, 1985):

$$\begin{aligned} \delta &= q_n B^{0.7} I_c \\ I_c &= 1.17/N^{1.4} \end{aligned}$$

$q_n$  = incremento neto de presión, en kPa  
 $B$  = ancho de la cimentación, en metros

Sustituyendo valores

$$q_n = 26/1.7(2) = 7.647 \text{ t/m}^2 = 74.995 \text{ kPa}$$

$$I_c = 0.0264$$

$$B = 1.7 \text{ m}$$

$$\delta = 2.870 \text{ mm} = 0.00287 \text{ m}$$

El módulo  $K_v$  vale (ec 1)

$$K_v = 26/0.00287 = 9059.2 \text{ t/m}$$

La teoría de la elasticidad proporciona los siguientes valores de los módulos de reacción, para un cimiento somero de planta circular

$$K_v = 2ER/(1-\nu^2) \quad (12)$$

$$K_h = 32(1-\nu)GR/(7-8\nu) \quad (13)$$

$$K_r = 8GR^3/3(1-\nu) \quad (14)$$

Estas fórmulas se pueden usar en zapatas rectangulares cuando  $B < L < 2.5B$ , mediante el siguiente artificio:

Sea  $A = BL$  el área del cimiento rectangular,

$$R = \sqrt{A/\pi} \quad (15)$$

Para calcular  $K_v$  y  $K_h$  usamos las ecs 12 y 13 con  $R$  obtenida de la ec 15.

Sea  $I$  = momento de inercia del cimiento alrededor del eje que se desea calcular  $K_r$

$$R = \sqrt[4]{4I/\pi} \quad (16)$$

$K_r$  se computa con la ec 14, con  $R$  obtenida de la ec 16.

Por lo ya señalado antes, los cálculos de los módulos de reacción con las ecs 12 a 14 son sólo aproximados, pues el comportamiento real de los suelos es no lineal.

Otra forma aproximada de obtener los módulos de reacción es mediante la realización de pruebas de placa (Zeevaert, 1973). Sea  $k_u$  el módulo de rigidez unitario, definido como

$$k_u = Q_v/\delta_v A \quad (17)$$

Siendo  $A$  = área del cimiento.

Si  $\bar{k}_{v1}$  es el módulo de rigidez vertical determinado con una prueba de placa de un  $\dots$  de

lado, se puede emplear la siguiente fórmula (Terzaghi, 1955)

$$k_v = k_{v1} [(B+0.3)/2B]^2 \quad (18)$$

donde B es el ancho de la zapata en metros. En el caso de arcillas

$$k_v = k_{v1} [(n+0.5)/1.5n] \quad (19)$$

donde  $n = L/B$ , siendo L la longitud del cimiento.

La tabla 7 contiene valores propuestos por Terzaghi (1955) para  $k_{v1}$ . Cabe destacar que las ecs 18 y 19 se deben usar con precaución, pues sólo son aproximadamente válidas cuando el suelo es isotrópico hasta una profundidad bajo el desplante del cimiento igual al ancho del mismo (Zeevaert, 1973). Por lo mismo, dichas ecuaciones no son aplicables a suelos estratificados.

#### Interacción suelo-cimiento continuo

Sea un cimiento totalmente flexible con carga uniforme apoyado en un suelo cohesivo totalmente saturado. El asentamiento a largo plazo toma la forma indicada en la fig 7a; el diagrama de reacción del terreno en este caso es igual al de la carga, es decir, la reacción es uniforme. Si dicho cimiento se apoya sobre un suelo friccionante, el asentamiento se distribuye como se indica en la fig 7b; por ser el cimiento totalmente flexible, la reacción del suelo es también uniforme.

Sea ahora una placa de una rigidez infinita apoyada en una arcilla totalmente saturada (fig 8a). El hundimiento es uniforme, pero el diagrama de reacción a largo plazo toma la forma indicada en la fig 8a. Si la placa se apoya sobre un suelo friccionante, el diagrama de reacción toma la forma de la fig 8b.

Vemos entonces que los diagramas de asentamientos y de reacciones del terreno dependen de la clase de suelo y de la rigidez de la estructura. Un cimiento real puede quedar entre los dos casos extremos señalados, pues su rigidez no necesariamente es nula o infinita. En los siguientes incisos veremos cómo se realiza la interacción suelo-estructura para estructuras de cimentación de rigidez finita.

#### *Interacción suelo-zapata corrida*

Consideremos un marco estructural con una cimentación a base de una zapata corrida (fig 9a), en el cual se trata de obtener los diagramas de asentamientos y de reacciones del terreno de cimentación (fig 9, b y c).

Comencamos con el diagrama de reacciones. En el caso general, la forma del diagrama es diferente de una reacción uniforme (fig 9b). Sustituycamos la curva de reacción del terreno por una serie de reacciones uniformes  $r_1, r_2, \dots, r_n$  (fig 10a); el análisis estructural lo llevamos a cabo utilizando el método de rigideces, considerando las reacciones  $r_i$  como incógnitas. A continuación, aplicando la tercera ley de Newton, aplicamos las cargas  $r_i$  sobre el terreno (fig 10b), y obtenemos los hundimientos de éste en función de las  $r_i$ , empleando el método de Chamecki (1956). El problema de la interacción se resuelve estableciendo la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo, es decir, si el suelo está en contacto con la estructura de cimentación, las deformaciones de ambos medios deben ser iguales.

#### a) Análisis estructural

El análisis estructural lo realizamos empleando el método de rigideces. La matriz de rigidez, el vector de cargas de empotramiento y el vector de cargas concentradas se obtienen como se indica en el anexo 1.

En una barra de cimentación (fig 11), el vector de cargas de empotramiento para el sistema local vale

$$(P_n)^T = \begin{bmatrix} wL^2/12 - (11/192)L^2 r_1 - (5/192)L^2 r_2 & 0 \\ -wL^2/12 + (5/192)L^2 r_1 + (11/192)L^2 r_2 & 0 \\ -wL/2 + (13/32)L r_1 + (3/32)L r_2 & \delta_1 \\ -wL/2 + (3/32)L r_1 + (13/32)L r_2 & \delta_2 \\ 0 & \delta_3 \\ 0 & \delta_4 \\ 0 & \delta_5 \\ 0 & \delta_6 \end{bmatrix}$$

En el sistema global, dado que  $\alpha = \beta = 0$ , el vector de cargas de empotramiento queda (anexo 1)

$$E_m = \begin{bmatrix} \omega L^2/12 - (11/192)L^2 r_1 - (5/192)L^2 r_2 & \theta_1 \\ -\omega L^2/12 + (5/192)L^2 r_1 + (11/192)L^2 r_2 & \theta_2 \\ -\omega L/2 + (13/32)L r_1 + (3/32)L r_2 & \delta_1 \\ -\omega L/2 + (3/32)L r_1 + (13/32)L r_2 & \delta_2 \\ 0 & \theta_3 \\ 0 & \theta_4 \\ 0 & \theta_5 \\ 0 & \theta_6 \end{bmatrix} \quad (20)$$

### b) Cálculo de deformaciones del suelo

Las cargas que transmite la estructura al terreno de cimentación son iguales en magnitud y de sentido contrario a las reacciones del suelo sobre la estructura, por la tercera ley de Newton (Deméneghi, 1996). Calculemos los asentamientos del terreno en función de estas cargas: consideremos una reacción  $r_k$  actuando en la superficie (fig 12); la presión vertical vale  $r_k d_k/a_k$ , donde  $d_k$  y  $a_k$  son la longitud y el área en las que actúa la carga, respectivamente. La deformación del estrato de espesor  $H_j$ , debida a la carga  $r_k$  vale

$$\delta_{jk} = (1/E_{zj}) H_j \sigma_{zjk}$$

pero

$$\sigma_{zjk} = I_{zjk} r_k d_k/a_k \quad (21)$$

donde  $I_{zjk}$  es el valor de influencia vertical, el cual es igual al esfuerzo normal vertical en el punto  $ij$ , producido por una presión unitaria actuando en el área  $a_k$  (Zeevaert, 1973).

$E_{zj}$  es el módulo lineal de deformación, el cual se define como el cociente del esfuerzo normal vertical entre la deformación unitaria vertical que se presenta, en el punto  $ij$ .

Sustituyendo

$$\delta_{jk} = (1/E_{zj}) H_j I_{zjk} r_k d_k/a_k$$

La deformación del estrato  $j$ , debida a todas las cargas vale

$$\delta_{jk} = (1/E_{zj}) H_j \sum_{k=1}^n I_{zjk} r_k d_k/a_k$$

donde  $n$  = número total de cargas  $r_k$ .

Si consideramos además una deformación previa  $\delta_{oi}$ , el asentamiento bajo el punto  $i$  vale

$$\delta_i = \delta_{oi} + \sum_{j=1}^{n_e} (1/E_{zj}) H_j \sum_{k=1}^n I_{zjk} r_k d_k/a_k \quad (22)$$

donde  $n_e$  = número total de estratos.

En la ec 22, los hundimientos del terreno quedan en función de las cargas  $r_k$ .

Cabe aclarar que, aunque aparentemente el procedimiento es unidimensional, en la práctica se pueden tomar en cuenta, en la estimación de  $E_{zj}$  tanto los incrementos de esfuerzo horizontal como el efecto de la presión de confinamiento en la rigidez del suelo, así como el hecho de que la curva esfuerzo-deformación unitaria es no lineal. En efecto,  $E_{zj}$  está dado por

$$E_{zj} = \sigma_{zj}/\epsilon_{zj} \quad (23)$$

Siendo  $\sigma_{zj}$  el esfuerzo normal vertical en el punto  $ij$  (a la mitad del estrato  $j$ ), y  $\epsilon_{zj}$  la deformación lineal unitaria vertical del estrato  $j$ .  $\epsilon_{zj}$  se puede calcular usando una teoría no lineal o una teoría lineal.

Los esfuerzos normales vertical y horizontales se obtienen aplicando la ec 21 para todas las cargas  $r_k$ , es decir

$$\sigma_{zj} = \sum_{k=1}^n I_{zjk} r_k d_k/a_k \quad (24)$$

$$\sigma_{xj} = \sum_{k=1}^n I_{xjk} r_k d_k/a_k \quad (25)$$

$$\sigma_{yj} = \sum_{k=1}^n I_{yjk} r_k d_k/a_k \quad (26)$$

### c) Compatibilidad de deformaciones

En esta etapa se establece la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo de cimentación, lo que equivale a considerar que tanto los desplazamientos de la estructura como los del terreno son iguales, es decir, que el suelo no se despegue de la estructura (Deméneghi, 1996).

#### Comportamiento no lineal

Ilustraremos la forma de realizar el análisis de interacción no lineal suelo-zapata corrida con el cimientamiento de la fig 13 (ejemplo 3). Para el cálculo de las deformaciones del suelo usar el método

no lineal del anexo 1 del capítulo 2, con las propiedades indicadas en la tabla 8.

a) Análisis estructural

El análisis estructural se lleva a cabo empleando el método de rigideces, descrito en el anexo 1. En la fig 14 se muestran los grados de libertad y en la fig 15 el sistema de cargas sobre la estructura. Las matrices de rigidez se obtienen con los valores del anexo 3, dado que se trata de barras horizontales. Los vectores de cargas de empotramiento se calculan con la ec 20.

Matriz de rigidez. Barra 1

$\theta_4$	$\theta_5$	$\delta_1$	$\delta_2$	
72927.375	36463.688	-34184.707	34184.707	$\theta_4$
36463.688	72927.375	-34184.707	34184.707	$\theta_5$
-34184.707	-34184.707	21365.442	-21365.442	$\delta_1$
34184.707	34184.707	-21365.442	21365.442	$\delta_2$

Matriz de rigidez. Barra 2

$\theta_5$	$\theta_6$	$\delta_2$	$\delta_3$	
72927.375	36463.688	-34184.707	34184.707	$\theta_5$
36463.688	72927.375	-34184.707	34184.707	$\theta_6$
-34184.707	-34184.707	21365.442	-21365.442	$\delta_2$
34184.707	34184.707	-21365.442	21365.442	$\delta_3$

Vector de cargas de empotramiento. Barra 1

$$P_1^* = \begin{bmatrix} 3.15733 - 0.58667r_1 - 0.26667r_2 \\ -3.15733 + 0.26667r_1 + 0.58667r_2 \\ -5.92 + 1.3r_1 + 0.3r_2 \\ -5.92 + 0.3r_1 + 1.3r_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_4 \\ \theta_5 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{matrix}$$

Vector de cargas de empotramiento. Barra 2

$$P_2^* = \begin{bmatrix} 3.15733 - 0.58667r_2 - 0.26667r_3 \\ -3.15733 + 0.26667r_2 + 0.58667r_3 \\ -5.92 + 1.3r_2 + 0.3r_3 \\ -5.92 + 0.3r_2 + 1.3r_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez de toda la estructura (tabla 9) es la suma de las matrices de rigidez de cada una de las barras. El vector de cargas de empotramiento de toda la estructura es la suma de los vectores de carga de empotramiento de cada una de las barras, el cual vale

$$P^* = \begin{bmatrix} -5.92 + 1.3r_1 + 0.3r_2 \\ -11.84 + 0.6r_1 + 2.6r_2 \\ 3.15733 - 0.58667r_1 - 0.26667r_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_4 \end{matrix}$$

(Sólo se muestran los renglones correspondientes a  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  y  $\theta_4$  porque, por simetría  $\delta_3 = \delta_1$ ,  $\theta_6 = -\theta_4$  y  $\theta_5 = 0$ ).

El vector de cargas concentradas vale

$$P^c = \begin{bmatrix} -35 \\ -50 \\ -35 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_6 \end{matrix}$$

La condición de equilibrio de cargas en los nudos de la estructura conduce a la siguiente expresión (anexo 1)

$$K\delta + P^* + P^c = 0$$

Sustituyendo valores

$$(\delta_1): 21365.442\delta_1 - 21365.442\delta_2 - 34184.707\theta_4 + 1.3r_1 + 0.3r_2 - 5.92 - 35 = 0 \quad (27)$$

$$(\delta_2): -42730.884\delta_1 + 42730.884\delta_2 + 68369.414\theta_4 + 0.6r_1 + 2.6r_2 - 11.84 - 50 = 0. \quad (28)$$

$$(\theta_4): -34184.707\delta_1 + 34184.707\delta_2 + 72927.375\theta_4 - 0.58667r_1 - 0.26667r_2 + 3.15733 = 0 \quad (29)$$

b) Cálculo de asentamientos

Hallemos el asentamiento bajo el punto 1 (fig 15a). Haciendo  $i = 1$  en la ec 21

$$\delta_1 = (1/E_{211})H_1(l_{211}r_1d_1/a_1 + l_{212}r_2d_2/a_2 + l_{213}r_3d_3/a_3) + (1/E_{212})H_2(l_{212}r_1d_1/a_1 + l_{212}r_2d_2/a_2 + l_{213}r_3d_3/a_3) \quad (30)$$

Los módulos de deformación  $E_{211}$  y  $E_{212}$  están dados por (ec 23)

$$E_{211} = \sigma_{211}/\epsilon_{211} \quad (31)$$

$$E_{212} = \sigma_{212}/\epsilon_{212} \quad (32)$$

Las deformaciones unitarias  $\epsilon_{211}$  y  $\epsilon_{212}$  obtendremos usando el procedimiento no lineal expuesto en el anexo 1 del cap 2, con siguientes expresiones:

Deformación por cambio de forma

$$\epsilon_{cf} = 1 - \exp \left\{ - \frac{p_{oe}^{s-2}}{A_{cf}} \left( \frac{f_2}{c} \right) \left[ - \frac{1}{(s-2)(p_{oe} + c\sigma_z)^{s-2}} + \frac{p_{oe}}{(s-1)(p_{oe} + c\sigma_z)^{s-1}} + \frac{1}{(s-2)(s-1)p_{oe}^{s-2}} \right] \right\} \quad (33)$$

$$p_{oe} = b_3 p_1 + p_{oo} \quad (34)$$

$$f = 1 - v \left[ (\sigma_x + \sigma_y) / \sigma_z \right] \quad (35)$$

$$c = b_1 + b_2 \left[ (\sigma_x + \sigma_y) / \sigma_z \right] \quad (36)$$

$$b_1 = b_2 = 1/3$$

Deformación por cambio de volumen

$$\epsilon_{cv} = 1 - \exp \left\{ - \frac{f \left[ (p_{oe} + \sigma_z)^{1-s} - p_{oe}^{1-s} \right]}{A_{cv} p_{oe}^{1-s} (1-s)} \right\} \quad (37)$$

$$p_{ve} = b_3 p_1 + p_{vo} \quad (38)$$

Ilustremos la aplicación del procedimiento calculando el módulo  $E_{x11}$ . Los esfuerzos  $\sigma_{x11}$ ,  $\sigma_{y11}$  y  $\sigma_{z11}$  se obtienen con las ecs 24 a 26.

$$\sigma_{z11} = I_{z111} r_1 d_1 / a_1 + I_{z112} r_2 d_2 / a_2 + I_{z113} r_3 d_3 / a_3 \quad (39)$$

$$\sigma_{x11} = I_{x111} r_1 d_1 / a_1 + I_{x112} r_2 d_2 / a_2 + I_{x113} r_3 d_3 / a_3 \quad (40)$$

$$\sigma_{y11} = I_{y111} r_1 d_1 / a_1 + I_{y112} r_2 d_2 / a_2 + I_{y113} r_3 d_3 / a_3 \quad (41)$$

Obtenemos como ejemplo los valores de influencia  $I_{z111}$ ,  $I_{x111}$  e  $I_{y111}$ . Se coloca una presión unitaria  $q = 1 \text{ t/m}^2$  en el área  $a_1$  (fig 16) y se computan los esfuerzos normales  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  debidos a esta carga, a la mitad del estrato 1. Obtenemos

$$\sigma_z = I_{z111} = 0.4868711 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_x = I_{x111} = 0.227869 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_y = I_{y111} = 0.2098534 \text{ t/m}^2$$

Los demas valores de influencia se determinan en forma similar. En la tabla 10 se presentan sus magnitudes.

Sustituyendo en la ec 39

$$\begin{aligned} \sigma_{z11} &= 0.4868711 r_1 (1.6) / 1.6 (2) + 0.001743138 r_2 (3.2) / 3.2 (2) \\ &+ 0.00001886467 r_3 (1.6) / 1.6 (2) \\ \sigma_{z11} &= 0.24343555 r_1 + 0.000871569 r_2 + 0.000009432435 r_3 \quad (42) \end{aligned}$$

En forma análoga se obtienen  $\sigma_{x11}$  y  $\sigma_{y11}$

$$\sigma_{x11} = 0.1139345 r_1 + 0.00665339 r_2 + 0.00131314 r_3 \quad (43)$$

$$\sigma_{y11} = 0.1049267 r_1 + 0.017307215 r_2 + 0.002810045 r_3 \quad (44)$$

Para el inicio de los cálculos consideramos una reacción uniforme

$$r_1 = r_2 = r_3 = [35(2) + 50] / 6.4 + 3.7 = 22.45 \text{ t/m}$$

Reemplazando en las ecs 42 a 44

$$\sigma_{z11} = 5.4849 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_{x11} = 2.7367 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_{y11} = 2.8072 \text{ t/m}^2$$

A continuación calculamos las deformaciones por cambio de forma y por cambio de volumen.

Cambio de forma (ecs 33 a 36)

$$p_{oe} = 0.9914 \text{ t/m}^2$$

$v = 0.5$  (se considera que la deformación por cambio de forma ocurre a volumen constante)

$$f = 0.4946, c = 0.6703$$

$$\epsilon_{cf} = 0.00075907$$

Cambio de volumen (ecs 37 y 38)

$$p_{ve} = 1.62 \text{ t/m}^2$$

$$\epsilon_{cv} = 0.001028$$

$$\epsilon_{z11} = \epsilon_{cf} + \epsilon_{cv} = 0.00178703$$

Sustituyendo valores en la ec 31

$$E_{x11} = 5.4849 / 0.00178703 = 3069.334 \text{ t/m}^2$$

En forma similar se obtiene

$$E_{x12} = 3293.065 \text{ t/m}^2$$

Reemplazando en la ec 30, y considerando que por simetría  $r_1 = r_3$

$$\delta_1 = 0.00013151 r_1 + 0.0000099976 r_2 \quad (45)$$

De manera similar obtenemos

$$\delta_2 = 0.000021166 r_1 + 0.00027335 r_2 \quad (46)$$

c) Compatibilidad de deformaciones

La compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo equivale a resolver el sistema formado por las ecuaciones 27, 28, 29, 45 y 46. Obtenemos

$$\delta_1 = 0.0044939 \text{ m}, \delta_2 = 0.0038785 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 0.00055543$$

$$r_1 = 33.289 \text{ t/m}, r_2 = 11.611 \text{ t/m}$$

Con los nuevos valores de  $r_1 = r_3$  (por simetría) y  $r_2$  se repite el proceso hasta que éstos ya no cambien en dos iteraciones sucesivas. Esto se logra en la iteración 6, en la que se obtiene

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.0046612 \text{ m}, \delta_2 = 0.0037665 \text{ m} \\ \theta_4 &= 0.00067864 \\ r_1 &= 31.534 \text{ t/m}, r_2 = 13.366 \text{ t/m} \end{aligned}$$

### Comportamiento lineal

En forma aproximada, se puede resolver la interacción considerando que la deformación bajo el punto  $i$  de un estrato de suelo de espesor  $H_i$  está dada por

$$\delta_i = (H_i/E_i) [\sigma_{zi} - \nu(\sigma_{xi} + \sigma_{yi})] \quad (47)$$

donde  $E_i$  es el módulo de deformación del suelo y  $\nu$  su relación de Poisson.

Sustituyendo las ecs 24 a 26 en la ec 47

$$\delta_i = (H_i/E_i) \sum_{k=1}^{nr} [l_{zpk} - \nu(l_{xpk} + l_{ypk})] r_k d_k / a_k$$

Sea

$$l_{pk} = l_{zpk} - \nu(l_{xpk} + l_{ypk}) \quad (48)$$

$$\delta_i = (H_i/E_i) \sum_{k=1}^{nr} l_{pk} r_k d_k / a_k$$

Tomando en cuenta todos los estratos de subsuelo, y una posible deformación previa  $\delta_{oi}$ , la deformación del punto  $i$  es

$$\delta_i = \delta_{oi} + \sum_{k=1}^{nr} (H_i/E_i) \sum_{k=1}^{nr} l_{pk} r_k d_k / a_k \quad (49)$$

Ilustremos el desarrollo del procedimiento lineal con la zapata de la fig 17 (ejemplo 4).

El análisis estructural es similar al del ejemplo 3 del método no lineal.

En el suelo, desarrollamos la ec 49 para  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (H_1/E_{11}) (l_{111}r_1d_1/a_1 + l_{112}r_2d_2/a_2 + l_{113}r_3d_3/a_3) \\ &+ (H_{12}/E_{12}) (l_{121}r_1d_1/a_1 + l_{122}r_2d_2/a_2 + l_{123}r_3d_3/a_3) \end{aligned}$$

En la tabla 10 se muestran los valores de influencia para este problema. Sustituyendo valores

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (0.8/500) [(0.194828/2)r_1 - (0.02614844/2)r_2 \\ &- (0.00174077/2)r_3] + (1.6)/(560) [(0.23528931/2)r_1 \\ &- (0.00780255/2)r_2 - (0.00481864/2)r_3] \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que  $r_1 = r_3$

$$\delta_1 = 0.000483712 r_1 - 0.00003206525 r_2 \quad (50)$$

En forma análoga se obtiene

$$\delta_2 = -0.000031436 r_1 + 0.00098398 r_2 \quad (51)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 27, 28, 29, 50 y 51:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.014285 \text{ m}, \delta_2 = 0.013224 \text{ m} \\ \theta_4 &= 0.00075212 \\ r_1 &= 30.487 \text{ t/m}, r_2 = 14.413 \text{ t/m} \end{aligned}$$

[Nota: Es importante que los módulos de deformación  $E_i$  se determinen considerando el efecto de la presión de confinamiento en el terreno, el hecho de que la curva esfuerzo-deformación unitaria de los suelos es no lineal, así como la posible variación con el tiempo de las propiedades mecánicas.]

### Interacción estructura-suelo plástico parcialmente saturado

En un suelo plástico parcialmente saturado, además de los asentamientos producidos por las cargas de una estructura, se presentan deformaciones debidas a cambios de humedad en el suelo. Un ejemplo de esta clase de fenómeno lo constituyen las arcillas expansivas, que sufren fuertes cambios volumétricos al variar su humedad natural.

Para ilustrar el fenómeno anterior, consideremos el cimiento de la fig 18 (ejemplo 5). La aplicación de la ec 4

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0$$

conduce al siguiente sistema de ecuaciones

$$(\delta_1): 10939.1\delta_1 - 10939.1\delta_2 - 21878.12\theta_4 + 1.625r_1 + 0.375r_2 - 7.4 - 35 = 0 \quad (52)$$

$$(\delta_2): -21878.2\delta_1 + 21878.2\delta_2 + 43756.4\theta_4 + 0.75r_1 + 3.25r_2 - 14.8 - 50 = 0 \quad (53)$$

$$(\theta_4): -21878.2\delta_1 + 21878.2\delta_2 + 58341.9\theta_4 - 0.91667r_1 - 0.41667r_2 + 4.9333 = 0 \quad (54)$$

Supongamos que con las consideraciones hechas en los incisos anteriores, se hallan las siguientes deformaciones del suelo en función de las cargas (matriz de flexibilidades del suelo)

$$\delta_1 = 0.000817668 r_1 + 0.0000349723 r_2 \quad (55)$$

$$\delta_2 = 0.0000634471 r_1 + 0.00163405 r_2 \quad (56)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 52 a 56 obtenemos

$$\delta_1 = 0.021759 \text{ m}, \delta_2 = 0.020075 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 0.0010381$$

$$r_1 = 26.129 \text{ t/m}, r_2 = 11.271 \text{ t/m}$$

Supongamos que por un aumento de humedad en el suelo, en campo libre la arcilla sufre una expansión de 3 cm en los puntos 1 y 3, y de 5 cm en el punto 2 (fig 16). Aplicando la ec 49 en las ecs 55 y 56 obtenemos

$$\delta_1 = -0.03 + 0.000817668r_1 + 0.0000349723r_2 \quad (57)$$

$$\delta_2 = -0.05 + 0.0000634471r_1 + 0.00163405r_2 \quad (58)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 52, 53, 54, 57 y 58

$$\delta_1 = -0.013950 \text{ m}, \delta_2 = -0.018469 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 0.0020384$$

$$r_1 = 18.835 \text{ t/m}, r_2 = 18.565 \text{ t/m}$$

Nótese el cambio notable en las reacciones del suelo por las expansiones de la arcilla.

#### Método iterativo

La interacción suelo-estructura se puede resolver mediante un método iterativo. Esto tiene aplicación en la práctica cuando se dispone de un paquete o un programa de computadora que sustituye al terreno de cimentación por "resortes", que representan el módulo de reacción de dicho terreno. Dado que no se conoce a priori la "constante del resorte", pues depende del diagrama de reacción del suelo, que es lo que justamente se está buscando, se tiene que recurrir a un procedimiento iterativo (Chamecki, 1956), que consiste en suponer valores iniciales de las "constantes de los resortes", y con ellas computar por una parte las deformaciones de la

estructura, y por otra las deformaciones del suelo; la diferencia entre deformaciones de estructura y suelo permite ajustar la "constante del resorte"; el proceso se repite hasta que coinciden las deformaciones de estructura y terreno.

El método se usa de la siguiente forma:

- a) En el terreno se entra con las cargas  $r_i$  y se determinan las deformaciones  $\delta_i$  con la matriz de flexibilidades del suelo (se puede iniciar con la reacción uniforme); los módulos de reacción (o "constantes de los resortes") se obtienen

$$K_{wi} = r_i d_i / \delta_i \quad (59)$$

- b) En la estructura se entra con las  $K_{wi}$  y se calculan las deformaciones; las reacciones  $r_i$  por unidad de longitud (en t/m) se obtienen

$$r_i = K_{wi} \delta_i / d_i \quad (60)$$

donde  $d_i$  es la longitud en que actúa  $r_i$ .

Con estos valores de  $r_i$  se entra nuevamente al suelo (inciso a), y el proceso se repite hasta que coinciden las deformaciones de estructura y suelo.

Ilustremos el proceso anterior con la zapata de la fig 19 (ejemplo 6). Los datos de estructura y suelo son los mismos del ejemplo 3 (fig 13). De acuerdo con la ec 4

$$K \delta + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0$$

Las reacciones del terreno se pueden incorporar en el vector de cargas concentradas  $\underline{P}^c$  (fig 19b). De esta forma, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$(\delta_1): (21365.442 + K_{w1})\delta_1 - 21365.442\delta_2 - 34184.707\theta_4 - 5.92 - 35 = 0 \quad (61)$$

$$(\delta_2): -42730.884\delta_1 + (42730.884 + K_{w2})\delta_2 + 58369.414\theta_4 - 11.84 - 50 = 0 \quad (62)$$

$$(\theta_4): -34184.707\delta_1 + 34184.707\delta_2 + 72827.375\theta_4 + 3.15733 = 0 \quad (63)$$

En el terreno de cimentación hablamos obtenido la siguiente matriz de flexibilidades (ecs 50 y 51)

$$\delta_1 = 0.000483712 r_1 - 0.00003206525 r_2 \quad (64)$$

$$\delta_2 = -0.000031436 r_1 + 0.00098398 r_2 \quad (65)$$

Las iteraciones se realizan de la siguiente forma

1ra iteración

Iniciamos el proceso considerando una reacción uniforme  $r_1 = r_2 = r_3 = 22.45 \text{ t/m}$

Terreno de cimentación. Aplicando las ecs 64, 65 y 59

$\delta_1$	$\delta_2$	$K_{v1}$	$K_{v2}$
m	m	t/m	t/m
0.010139	0.021385	3542.592	3359.425

Estructura. Con los  $K_n$  anteriores, y aplicando las ecs 61, 62, 63 y 60

$\delta_1$	$\delta_2$	$r_1$	$r_2$
m	m	t/m	t/m
0.013295	0.014729	29.437	15.463

2da iteración

Terreno de cimentación. Con los  $r_i$  anteriores y aplicando las ecs 64, 65 y 59

$\delta_1$	$\delta_2$	$K_{v1}$	$K_{v2}$
m	m	t/m	t/m
0.013743	0.014290	3427.089	3462.699

Estructura. Con los  $K_n$  anteriores, y aplicando las ecs 61, 62, 63 y 60

$\delta_1$	$\delta_2$	$r_1$	$r_2$
m	m	t/m	t/m
0.013498	0.014775	28.912	15.988

3ra iteración

Terreno de cimentación. Aplicando las ecs 64, 65 y 59

$\delta_1$	$\delta_2$	$K_{v1}$	$K_{v2}$
m	m	t/m	t/m
0.013473	0.014823	3433.619	3451.506

Estructura. Con los  $K_n$  anteriores, y aplicando las ecs 61, 62, 63 y 60

$\delta_1$	$\delta_2$	$r_1$	$r_2$
m	m	t/m	t/m
0.013493	0.014783	28.956	15.944

4ta iteración

Terreno de cimentación. Aplicando las ecs 64, 65 y 59

$\delta_1$	$\delta_2$	$K_{v1}$	$K_{v2}$
m	m	t/m	t/m
0.013495	0.014779	3433.069	3452.402

Estructura. Con los  $K_n$  anteriores, y aplicando las ecs 61, 62, 63 y 60

$\delta_1$	$\delta_2$	$r_1$	$r_2$
m	m	t/m	t/m
0.013493	0.014782	28.952	15.948

Apreciamos que en la 4ta iteración las deformaciones de suelo y estructura prácticamente coinciden.

*Método aproximado para tomar en cuenta la rigidez angular de las columnas que llegan a la estructura de cimentación*

Los procedimientos de interacción vistos en los incisos anteriores permiten tomar en cuenta todos los pisos de la estructura. Con el propósito de presentar ejemplos que se puedan resolver "a mano", sin el auxilio de la computadora, hemos presentado ejemplos muy sencillos, en los cuales, y sólo para fines didácticos, se considera únicamente la estructura de cimentación.

Supongamos que se desea hacer el análisis preliminar de una subestructura, sin tomar en cuenta los niveles superiores. En este caso, las columnas transmiten las cargas a la cimentación, pero como están unidas a la infraestructura, también imponen una condición de continuidad estructural en los nudos correspondientes. La presencia de una columna provoca que en el nudo se presente un momento flexionante que vale  $K_c \theta$ , donde  $K_c$  es la rigidez a la rotación de la columna (rigidez angular) y  $\theta$  es el ángulo que gira el nudo en cuestión. Este momento flexionante se agrega en el vector de cargas concentradas  $P^c$  de la ec 4

$$K \delta + P^e + P^c = 0 \quad (\text{ec } 4)$$

Ilustremos el procedimiento con el ejemplo 4, considerando que las columnas tienen una rigidez angular  $K_c = 6215.222 \text{ t.m/rad}$ . El vector  $P^c$  es

$$P^c = \begin{bmatrix} -35 \\ -50 \\ -35 \\ 6215.222\theta_4 \\ 6215.222\theta_5 \\ 6215.222\theta_6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Grado de libertad} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$



Aplicando la ec 4, el sistema de ecuaciones 27 a 29 queda modificado de la siguiente forma

$$(\delta_1): 21365.442\delta_1 - 21365.442\delta_2 - 34184.707\theta_4 + 1.3 r_1 + 0.3 r_2 - 5.92 - 35 = 0 \quad (66)$$

$$(\delta_2): -42730.884\delta_1 + 42730.884\delta_2 + 68369.414\theta_4 + 0.6 r_1 + 2.6 r_2 - 11.84 - 50 = 0 \quad (67)$$

$$(\theta_4): -34184.707\delta_1 + 34184.707\delta_2 + 72927.375\theta_4 - 0.58667r_1 - 0.26667r_2 + 3.15733 + 6215.222\theta_4 = 0 \quad (68)$$

En el terreno habíamos obtenido (ecs 50 y 51)

$$\delta_1 = 0.000483712 r_1 - 0.00003206525 r_2 \quad (69)$$

$$\delta_2 = -0.000031436 r_1 + 0.00098398 r_2 \quad (70)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 66 a 70

$$\delta_1 = 0.014190 \text{ m}, \delta_2 = 0.013411 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 0.00057055$$

$$r_1 = 30.303 \text{ t/m}, r_2 = 14.597 \text{ t/m}$$

#### Determinación de elementos mecánicos

Los elementos mecánicos se obtienen como se indica en el anexo 1. Para una barra horizontal de cimentación, despreciando el acortamiento de la misma, son las siguientes (sistema global, fig 20)

Dirección x (sistema global)

$$M_c = wL^2/12 - (11/192)L^2r_r - (5/192)L^2r_s + (4EI/L)\theta_p + (2EI/L)\theta_b - (6EI/L^2)\delta_r + (6EI/L^2)\delta_s \quad (71)$$

$$M_b = -wL^2/12 + (5/192)L^2r_r + (11/192)L^2r_s + (2EI/L)\theta_p + (4EI/L)\theta_b - (6EI/L^2)\delta_r + (6EI/L^2)\delta_s \quad (72)$$

$$V_r = -wL/2 + (13/32)Lr_r + (3/32)Lr_s - (6EI/L^2)\theta_p - (6EI/L^2)\theta_b + (12EI/L^3)\delta_r - (12EI/L^3)\delta_s \quad (73)$$

$$V_s = -wL/2 + (3/32)Lr_r + (13/32)Lr_s + (6EI/L^2)\theta_p + (6EI/L^2)\theta_b - (12EI/L^3)\delta_r + (12EI/L^3)\delta_s \quad (74)$$

$$M_a = (GI/L)\theta_b - (GI/L)\theta_a \quad (75)$$

$$M_c = - (GI/L)\theta_a + (GI/L)\theta_b \quad (76)$$

Dirección y (sistema global)

$$M_b = -wL^2/12 + (11/192)L^2r_r + (5/192)L^2r_s - (4EI/L)\theta_p - (2EI/L)\theta_b - (6EI/L^2)\delta_r + (6EI/L^2)\delta_s \quad (77)$$

$$M_b = wL^2/12 - (5/192)L^2r_r - (11/192)L^2r_s - (2EI/L)\theta_p - (4EI/L)\theta_b - (6EI/L^2)\delta_r + (6EI/L^2)\delta_s \quad (78)$$

$$V_r = -wL/2 + (13/32)Lr_r + (3/32)Lr_s + (6EI/L^2)\theta_p + (6EI/L^2)\theta_b + (12EI/L^3)\delta_r - (12EI/L^3)\delta_s \quad (79)$$

$$V_s = -wL/2 + (3/32)Lr_r + (13/32)Lr_s - (6EI/L^2)\theta_p - (6EI/L^2)\theta_b - (12EI/L^3)\delta_r + (12EI/L^3)\delta_s \quad (80)$$

$$M_p = - (GI/L)\theta_p + (GI/L)\theta_a \quad (81)$$

$$M_a = (GI/L)\theta_p - (GI/L)\theta_a \quad (82)$$

Los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante en una barra de la cimentación (fig 20) se obtienen con las siguientes expresiones (dirección x)

$$x \leq L/2: V = -V_r + (r_r - w)x \quad (83)$$

$$M = -M_p - V_r x - (r_r - w)x^2/2 \quad (84)$$

$$M_{r,max} \text{ para } x = V_r/(r_r - w) \quad (85)$$

$$x \geq L/2: V = -V_r - wx + r_r L/2 + r_s(x - L/2) \quad (86)$$

$$M = -V_r x - wx^2/2 + (r_r L/2)(x - L/4) + (r_s/2)(x - L/2)^2 \quad (87)$$

$$M_{r,max} \text{ para } x = [V_r + (r_s - r_r)L/2]/(r_s - w)$$

En las ecs 83 a 88, el cortante es positivo si va hacia arriba a la izquierda de la barra, mientras que el momento es positivo si produce compresión en las fibras superiores de la barra.

Calculemos los elementos mecánicos en los nudos de la estructura del inciso anterior (ejemplo 4, fig 17, con  $K_a = 6215.222 \text{ t.m/rad}$  en las columnas). Habíamos obtenido

$$\delta_1 = 0.014190 \text{ m}, \delta_2 = 0.013411 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 0.00057055$$

$$r_1 = 30.303 \text{ t/m}, r_2 = 14.597 \text{ t/m}$$

Aplicando las ecs 71 a 74

$$M_p = 3.7(3.2)^2/12 - (11/192)(3.2)^2(30.303) - (5/192)(3.2)^2(14.597) + [(4)(1130000)(0.05163)/(3.2)](0.00057055) + [(2)(1130000)(0.05163)/(3.2)](0)$$

$$- (6)(1130000)(0.05163)/(3.2)^2(0.01419) - (6)(1130000)(0.05163)/(3.2)^2(0.013411)$$

$$M_p = -3.534 \text{ t.m}$$

$$M_a = 7.662 \text{ t.m}$$

$$V_r = 35 \text{ t}$$

$$V_s = 25 t$$

Los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante se hallan con las ecs 83 a 88. Sin embargo, en la práctica conviene modelar la estructura de cimentación con cuatro o más barras, para obtener mayor precisión. En el siguiente capítulo se presenta un ejemplo de análisis y diseño de una zapata corrida empleando ocho barras en la estructura de cimentación; en ese ejemplo se expone la forma de obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

#### Interacción suelo-losa de cimentación

Una losa de cimentación se puede modelar como una red de barras ortogonales entre sí. La solución es más precisa a medida que se incrementa el número de éstas. Para una red de barras horizontales, se puede despreciar el acortamiento de barras; además  $\alpha = 0$ . La matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de una barra quedan como se muestra en el anexo 3 (para su obtención se tomaron las fórmulas del anexo 1).

Ilustraremos el análisis de una losa con la red de la fig 21 (Deméneghi, 1996). La estratigrafía y propiedades se muestran en la fig 22. Se desprecian los efectos de acortamiento de barras. La numeración de barras y de grados de libertad se exhiben en la fig 23. Como ilustración presentamos los de las barras 1 y 7, para el sistema global:

Barra	$\theta_2$	$\theta_3$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta_4$	$\theta_5$
1	$\theta_{10}$	$\theta_{12}$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta_{11}$	$\theta_{13}$
7	$\theta_{10}$	$\theta_{15}$	$\delta_1$	$\delta_4$	$\theta_{11}$	$\theta_{17}$

A continuación hallaremos las matrices de rigidez y los vectores de empotramiento de las barras 1 y 7. Utilizando los valores del anexo 3 se obtienen las matrices  $\underline{K}_1$  y  $\underline{K}_7$ , que se muestran en las tablas 12 y 13, respectivamente. La matriz de rigidez de toda la estructura es la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras de la estructura (el rango de cada matriz se toma de 27 por 27). A manera de ejemplo, en la tabla 14 se presenta la matriz de rigidez de la estructura para los primeros 5 grados de libertad.

Determinemos a continuación los vectores de empotramiento de las barras 1 y 7. Aplicando la ec 20

$$\underline{P}_1^e = \begin{bmatrix} 1.233-1.0593r_1-0.4815r_2 \\ -1.233+0.4815r_1+1.0593r_2 \\ -1.72+1.747r_1+0.4031r_2 \\ -1.72+0.4031r_1+1.747r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{GL} \\ 10 \\ 12 \\ 1 \\ 2 \\ 11 \\ 13 \end{matrix}$$

GL = grado de libertad

$$\underline{P}_7^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.72+1.747r_1+0.4031r_4 \\ -1.72+0.4031r_1+1.747r_4 \\ 1.233-1.0593r_1-0.4815r_4 \\ -1.233+0.4815r_1+1.0593r_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{GL} \\ 10 \\ 16 \\ 1 \\ 4 \\ 11 \\ 17 \end{matrix}$$

Como ejemplo presentamos a continuación el vector de cargas de empotramiento de la estructura, para los primeros 5 grados de libertad

$$\underline{P}^e = \begin{bmatrix} -3.44+3.494r_1+0.4031r_2+0.4031r_4 \\ -6.88+0.4031r_1+5.241r_2+0.4031r_3+0.4031r_5 \\ -3.44+0.4031r_2+3.494r_3+0.4031r_6 \\ -6.88+0.4031r_1+5.241r_4+0.4031r_5+0.4031r_7 \\ -13.76+0.4031r_2+0.4031r_4+6.988r_3+0.4031r_6 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad +0.4031r_8 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas concentradas, para los primeros 5 grados de libertad vale

$$\underline{P}^c = \begin{bmatrix} -9.6 \\ 0 \\ -9.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{GL} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Sustituyendo valores en la ec 4 y tomando en cuenta que por simetría

$$\begin{aligned} \delta_1 = \delta_3 = \delta_7 = \delta_9 & \quad \delta_2 = \delta_4 = \delta_6 = \delta_8 \\ r_1 = r_3 = r_7 = r_9 & \quad r_2 = r_4 = r_6 = r_8 \\ \theta_{10} = \theta_{11} = -\theta_{14} = \theta_{15} = \theta_{22} = -\theta_{23} = -\theta_{26} = -\theta_{27} \\ \theta_{13} = \theta_{16} = -\theta_{20} = -\theta_{25} \end{aligned}$$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones (que representa el equilibrio de cortantes o de momentos en el grado de libertad correspondiente):

Grado de libertad 1

$$773.14\delta_1 - 773.14\delta_2 - 1662.24\theta_{10} + 3.494r_1 + 0.8062r_2 - 3.44 - 9.6 = 0 \quad (a)$$

Grado de libertad 2

$$-773.14\delta_1 + 859.767\delta_2 - 86.62\delta_5 + 1662.24\theta_{10} - 186.23\theta_{13} + 0.8062r_1 + 5.24r_2 + 0.403r_3 - 6.88 = 0 \quad (b)$$

Grado de libertad 5

$$-346.48\delta_2 + 346.48\delta_5 + 744.92\theta_{13} + 1.6124r_2 + 6.988r_3 - 13.76 = 0 \quad (c)$$

Grado de libertad 10

$$-831.12\delta_1 + 831.12\delta_2 + 2692.76\theta_{10} - 310.23\theta_{13} - 1.0593r_1 - 0.4815r_2 + 1.233 = 0 \quad (d)$$

Grado de libertad 13

$$-186.23\delta_2 + 186.23\delta_5 - 620.46\theta_{10} + 1154.32\theta_{13} - 1.0593r_2 - 0.4815r_3 + 2.465 = 0 \quad (e)$$

Las deformaciones del terreno de cimentación se determinan con el procedimiento indicado en el inciso de análisis lineal. Presentamos a continuación como ejemplo la obtención de  $\delta_1$

$$\begin{aligned} \delta_1 = & 0.0154(2.4) \{ 0.2271(4.3r_1) / 4.6225 \\ & + 0.009375(6.45r_2) / 9.245 + 0.0001528(4.3r_3) / 4.6225 \\ & + 0.009375(6.45r_4) / 9.245 + 0.002988(8.6r_5) / 18.49 \\ & + 0.0001625(6.45r_6) / 9.245 + 0.0001528(4.3r_7) / 4.6225 \\ & + 0.0001625(6.45r_8) / 9.245 + 0.00002824(4.3r_9) / 4.6225 \} \\ & + 0.0222(2.0) \{ 0.1139(4.3r_1) / 4.6225 \\ & + 0.04407(6.45r_2) / 9.245 + 0.002284(4.3r_3) / 4.6225 \\ & + 0.04407(6.45r_4) / 9.245 + 0.028026(8.6r_5) / 18.49 \\ & + 0.002638(6.45r_6) / 9.245 + 0.0022836(4.3r_7) / 4.6225 \\ & + 0.002638(6.45r_8) / 9.245 + 0.0005157(4.3r_9) / 4.6225 \} \end{aligned}$$

Aprovechando la simetría de la estructura obtenemos (Demèneghi, 1996)

$$\begin{aligned} \delta_1 = & 0.012733r_1 + 0.0033854r_2 + 0.00063012r_3 \quad (f) \\ \delta_2 = & 0.0036877r_1 + 0.020326r_2 + 0.0021424r_3 \quad (g) \\ \delta_5 = & 0.0028714r_1 + 0.010629r_2 + 0.025023r_3 \quad (h) \end{aligned}$$

La compatibilidad de deformaciones entre la estructura y el terreno de cimentación se logra reemplazando las ecs f, g y h en las ecs a, b, c, d y e, o resolviendo el sistema de ecuaciones de la a a la h:

$$\begin{aligned} r_1 = & 3.235 \text{ t/m}, r_2 = 1.082 \text{ t/m}, r_3 = 1.149 \text{ t/m} \\ \theta_{10} = & 0.003760, \theta_{13} = -0.0007646 \end{aligned}$$

$$\delta_1 = 0.04558 \text{ m}, \delta_2 = 0.03638 \text{ m}, \delta_5 = 0.04953 \text{ m}$$

Como ilustración, hallaremos los elementos mecánicos en las barras 1 y 7 (sistema local para lo que se aplican las ecs 71 a 82)

Barra 1 (dirección x)

$$\begin{aligned} M_{10} = & -1.403 \text{ t.m}, M_{12} = -1.697 \text{ t.m} \\ V_1 = & 4.8 \text{ t}, V_2 = 1.042 \text{ t} \\ M_{11} = & -1.404 \text{ t.m}, M_{13} = 1.404 \text{ t.m} \end{aligned}$$

Barra 7 (dirección y)

$$\begin{aligned} M_{17} = & -1.403 \text{ t.m}, M_{17} = -1.697 \text{ t.m} \\ V_1 = & 4.8 \text{ t}, V_4 = 1.042 \text{ t} \\ M_{10} = & 1.404 \text{ t.m}, M_{16} = -1.404 \text{ t.m} \end{aligned}$$

## REFERENCIAS

Burland, J B y Burbridge, M C, "Settlement of foundations on sand and gravel", Proc Inst Civil Eng, part I: 1325-1381, 1985

Chamecki, S, "Structural rigidity in calculating settlements", Jour Soil Mech Found Div, Proc ASCE, Vol 88, N° SM1, 1956

Demèneghi, A, "Interacción estática estructura, considerando efectos de torsión y acortamiento de barras", XVIII Reunión Nat Mec Suelos, Vol 1: 303-310, Morelia, Soc Mex Mec Suelos, 1996

Sowers, G F, "Shallow foundations", cap 6 de Foundation Engineering, ed por G A Leonards, McGraw-Hill, 1962

Terzaghi, K, "Evaluation of coefficients of subgrade reaction", Géotechnique, V, 1955

Zeevaert, L, *Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions*, Van Nostrand Reinhold, 1973

(Acise9, Acisef3, Isezc24, Isezc3, Isezc31, Isezc3, Iske7, Iske84, Iske85, Maribo8, Iske86, Isicbf)

TABLA 1 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA (EJEMPLO 1)												
Delta 1	Delta 2	Delta 3	Delta 4	Theta 5	Theta 6	Delta 7	Delta 8	Delta 9	Delta 10	Theta 11	Theta 12	
31913.82	0	12719.58	0	-114.832	0	-31913.8	0	-12719.5	0	-114.832	0	Delta 1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	Delta 2
12719.58	0	5202.665	0	287.082	0	-12719.5	0	-5202.66	0	287.082	0	Delta 3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	Delta 4
-114.832	0	287.082	0	1110.049	0	114.833	0	-287.082	0	555.025	0	Theta 5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	Theta 6
-31913.82	0	-12719.5	0	114.833	0	32578.02	-684.2	12719.58	0	-1877.77	-1992.6	Delta 7
---	---	---	---	---	---	-684.2	32578.02	0	-12719.58	1892.8	1877.77	Delta 8
-12719.5	0	-5202.665	0	-287.081	0	12719.58	0	71822.68	-88420	-287.08	0	Delta 9
---	---	---	---	---	---	0	-12719.58	-88420	71822.68	0	-287.08	Delta 10
-114.832	0	287.082	0	555.025	0	-1877.77	1892.8	-287.08	0	9080.45	3985.2	Theta 11
---	---	---	---	---	---	-1992.6	1877.77	0	-287.08	3985.2	9080.45	Theta 12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	
TABLA 2 VECTOR DE CARGAS DE EMPOTRAMIENTO (EJEMPLO 1)						TABLA 3 VECTOR DE CARGAS CONCENTRADAS (EJEMPLO 1)						
0	Delta 1					Qv1	Delta 1					
0	Delta 2					Qv2	Delta 2					
0	Delta 3					Qh3	Delta 3					
0	Delta 4					Qh4	Delta 4					
0	Theta 5					M5	Theta 5					
0	Theta 6					M6	Theta 6					
-24	Delta 7					0	Delta 7					
-24	Delta 8					0	Delta 8					
0	Delta 9					0	Delta 9					
0	Delta 10					0	Delta 10					
24	Theta 11					0	Theta 11					
-24	Theta 12					0	Theta 12					
(Acise)												

TABLA 4  
 NUMERACIÓN DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD (EJEMPLO 2)

Barra	$\theta_5$	$\theta_6$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\alpha$
						grados
1	$\theta_5$	$\theta_7$	$\delta_1$	$\delta_1$	$\delta_3$	90
2	$\theta_6$	$\theta_8$	$\delta_2$	$\delta_2$	$\delta_4$	90
3	$\theta_7$	$\theta_8$	$\delta_1$	$\delta_2$	-	0

TABLA 5  
 MATRIZ DE RIGIDEZ DE TODA LA ESTRUCTURA (EJEMPLO 2)

$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$	$\theta_8$	
664.2	-664.2	0	0	0	0	-1992.6	-1992.6	$\delta_1$
—	—	—	—	—	—	—	—	$\delta_2$
0	0	184.24	0	423.76	0	423.76	0	$\delta_3$
—	—	—	—	—	—	—	—	$\delta_4$
0	0	423.76	0	1299.52	0	649.76	0	$\theta_5$
—	—	—	—	—	—	—	—	$\theta_6$
-1992.6	1992.6	423.76	0	649.76	0	9269.92	3985.2	$\theta_7$
—	—	—	—	—	—	—	—	$\theta_8$

TABLA 6  
 VECTOR DE CARGAS DE EMPOTRAMIENTO  
 DE TODA LA ESTRUCTURA (EJEMPLO 2)

-4.62	$\delta_1$
-4.62	$\delta_2$
0	$\delta_3$
0	$\delta_4$
0	$\theta_5$
0	$\theta_6$
4.62	$\theta_7$
-4.62	$\theta_8$

TABLA 8  
 PROPIEDADES DE DEFORMACIÓN. EJEMPLO 3

Estrato	$A_{cr}$	$s_{cr}$	$A_{cv}$	$s_{cv}$	$v$	$K_0$	$\gamma$ , t/m <sup>3</sup>
1	360	1.69	733	0.705	0.295	0.418	1.8
2	480	1.67	879	0.715	0.295	0.418	1.8

(Acise, Acisef3, lsezc24, lsezc3, lsezc31, lsezc32)

TABLA 9					
MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA (EJEMPLO 3)					
Delta 1	Delta 2	Delta 3	Theta 4	Theta 6	
21365.442	-21365.442	0	-34184.707	0	Delta 1
-21365.442	42730.884	-21365.442	34184.707	-34184.707	Delta 2
-34184.707	34184.707	0	72927.375	0	Theta 4
TABLA 10					
VALORES DE INFLUENCIA (EJEMPLO 3)					
RELACIÓN DE POISSON = 0.295					
Punto	lzijk	bijk	lyijk		
1,1,1	0.4868711	0.227869	0.2098534		
1,1,2	0.00174314	0.01330678	0.03461443		
1,1,3	1.8865E-05	0.00262627	0.00566201		
1,2,1	0.2791369	0.03057748	0.00698428		
1,2,2	0.0402185	0.06823199	0.00918785		
1,2,3	0.000992	0.00672907	0.00316839		
2,1,1	0.00163603	0.0152252	0.02429731		
2,1,2	0.9737421	0.455738	0.4197068		
2,1,3	0.001636	0.01522519	0.02429731		
2,2,1	0.03557754	0.04996888	0.00492169		
2,2,2	0.5582739	0.06115496	0.01396855		
2,2,3	0.03557754	0.04996888	0.00492169		
3,1,1	1.8865E-05	0.00262627	0.00566202		
3,1,2	0.00174314	0.01330677	0.03461443		
3,1,3	0.4868711	0.227869	0.2098534		
3,2,1	0.000992	0.00672907	0.00316839		
3,2,2	0.0402185	0.06823199	0.00918784		
3,2,3	0.2791369	0.03057749	0.00698429		
(Aceise)					

TABLA 11					
VALORES DE INFLUENCIA (EJEMPLO 4)					
RELACIÓN DE POISSON = 0.5					
Punto	lzijk	bxjk	lyijk	nu	lijk
1,1,1	0.4868711	0.3181542	0.265932	0.5	0.194828
1,1,2	0.001743138	0.05265242	0.003130734	0.5	-0.02614844
1,1,3	1.88649E-05	0.003480822	0.000038445	0.5	-0.00174077
1,2,1	0.2791369	0.05794332	0.02975186	0.5	0.23528931
1,2,2	0.0402185	0.09123936	0.004802749	0.5	-0.00780255
1,2,3	0.000992	0.0114948	0.000126474	0.5	-0.00481864
2,1,1	0.001636028	0.04312015	0.002917856	0.5	-0.02138298
2,1,2	0.9737421	0.6363085	0.531864	0.5	0.38965585
2,1,3	0.001635999	0.04312015	0.002917856	0.5	-0.021383
2,2,1	0.03557754	0.06498982	0.004221957	0.5	0.00097165
2,2,2	0.5582739	0.1158866	0.05950371	0.5	0.47057875
2,2,3	0.03557754	0.06498982	0.004221957	0.5	0.00097165
3,1,1	1.88649E-05	0.003480822	0.000038445	0.5	-0.00174077
3,1,2	0.001743138	0.05265242	0.003130734	0.5	-0.02614844
3,1,3	0.4868711	0.3181542	0.265932	0.5	0.194828
3,2,1	0.000992	0.0114948	0.000126474	0.5	-0.00481864
3,2,2	0.0402185	0.09123936	0.004802749	0.5	-0.00780255
3,2,3	0.2791369	0.05794332	0.02975186	0.5	0.23528931
(Isezc3)					

TABLA 12  
MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA 1,  $K_1$

$\theta_{10}$	$\theta_{12}$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta_{11}$	$\theta_{13}$	
2382.530	1191.265	-831.115	831.115	0	0	$\theta_{10}$
1191.265	2382.530	-831.115	831.115	0	0	$\theta_{12}$
-831.115	-831.115	386.565	-386.565	0	0	$\delta_1$
831.115	831.115	-386.565	386.565	0	0	$\delta_2$
0	0	0	0	310.08	-310.08	$\theta_{11}$
0	0	0	0	-310.08	310.08	$\theta_{13}$

TABLA 13  
MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA 7,  $K_7$

$\theta_{10}$	$\theta_{16}$	$\delta_1$	$\delta_4$	$\theta_{11}$	$\theta_{17}$	
310.08	-310.08	0	0	0	0	$\theta_{10}$
-310.08	310.08	0	0	0	0	$\theta_{16}$
0	0	386.565	-386.565	831.115	831.115	$\delta_1$
0	0	-386.565	386.565	-831.115	-831.115	$\delta_4$
0	0	831.115	-831.115	2382.530	1191.265	$\theta_{11}$
0	0	831.115	-831.115	1191.265	2382.530	$\theta_{17}$

TABLA 14  
MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA  $K$ , PARA LOS PRIMEROS CINCO  
GRADOS DE LIBERTAD. SISTEMA GLOBAL

$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_5$	
773.130	-3866.565	0	-386.565	0	$\delta_1$
-386.565	859.750	-386.565	0	-86.619	$\delta_2$
0	-386.565	773.130	0	0	$\delta_3$
-386.565	0	0	859.750	-86.619	$\delta_4$
0	-86.619	0	-86.619	346.477	$\delta_5$

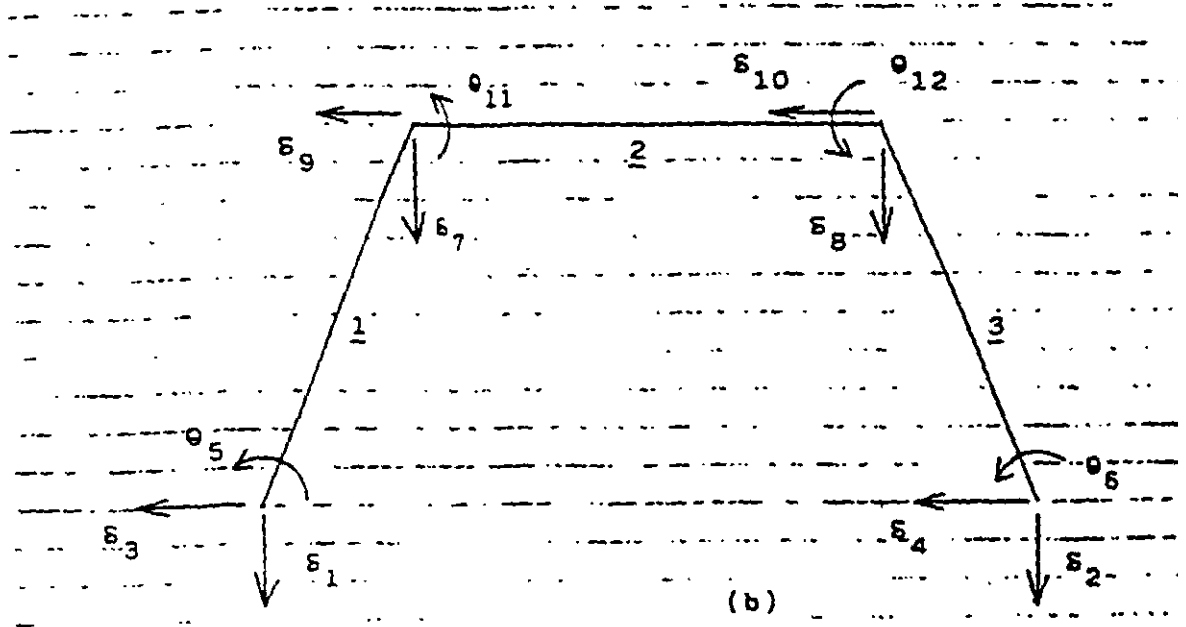


**TABLA 7**

Proposed average values of  $\bar{k}_{s1}$  for 1-ft X 1-ft square plates and long 1-ft wide strips, after Karl Terzaghi (1955)

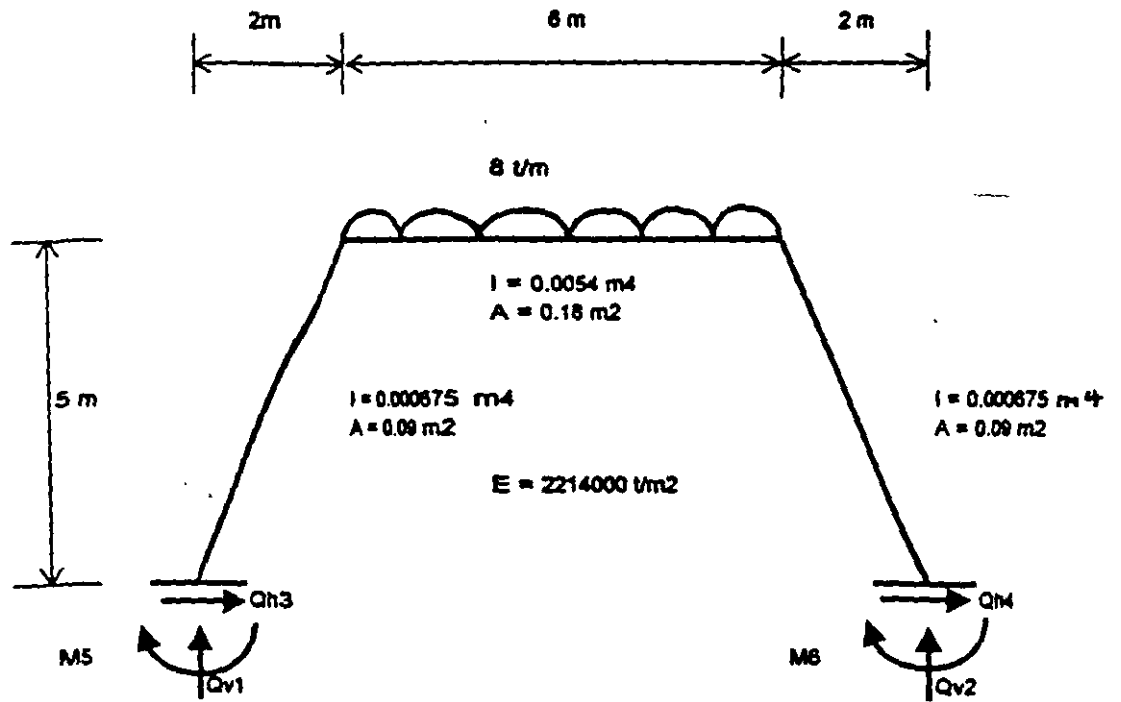
	Average $\bar{k}_{s1}$ values		Range of $\bar{k}_{s1}$ values	
	tons/ft <sup>3</sup>	kg/cm <sup>3</sup>	tons/ft <sup>3</sup>	kg/cm <sup>3</sup>
Sand: loose	40	1.29	20-60	0.64-1.92
medium	130	4.17	60-300	1.92-9.62
dense	500	16.10	300-1000	9.62-32.1
Clay: stiff	75	2.41	50-100	1.6-3.21
very stiff	150	4.82	100-200	3.21-6.42
hard	300	9.64	300	9.60

For dry sand multiply by 1.5 and for submerged sand by 0.6. Here 1 ton = 2000 lb.



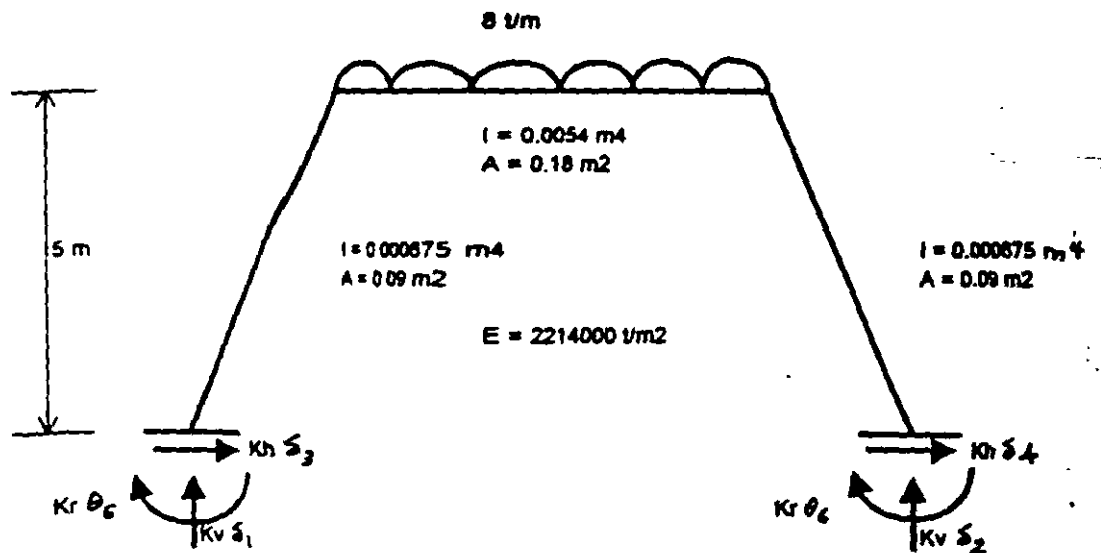
NUMERACIÓN DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD (EJEMPLO)

FIGURA 2

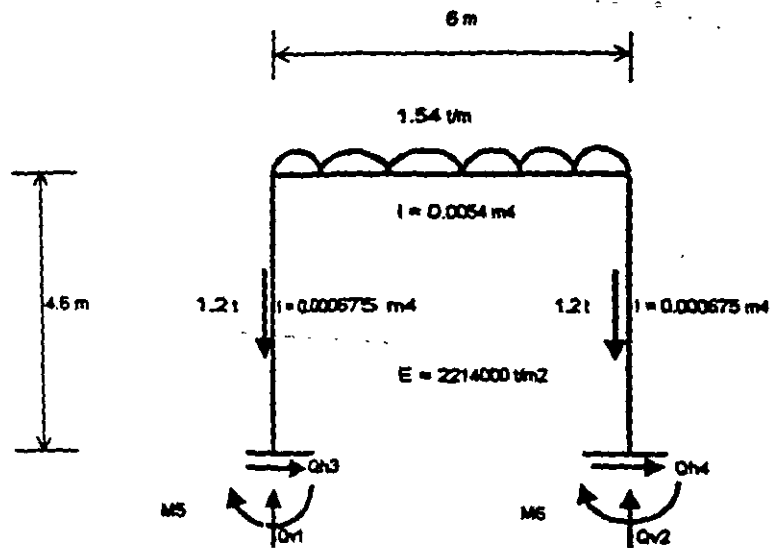


(Aciser)

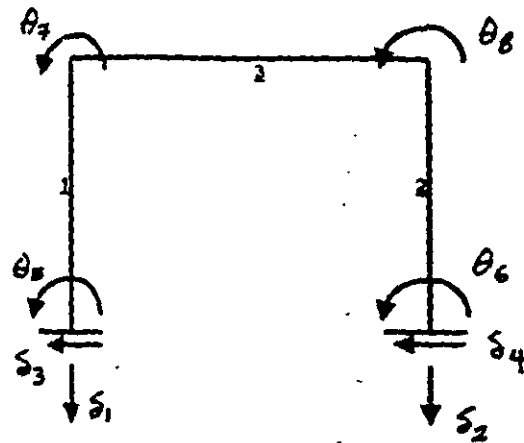
GEOMETRÍA Y CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA  
BARRAS INCLINADAS  
FIGURA 1



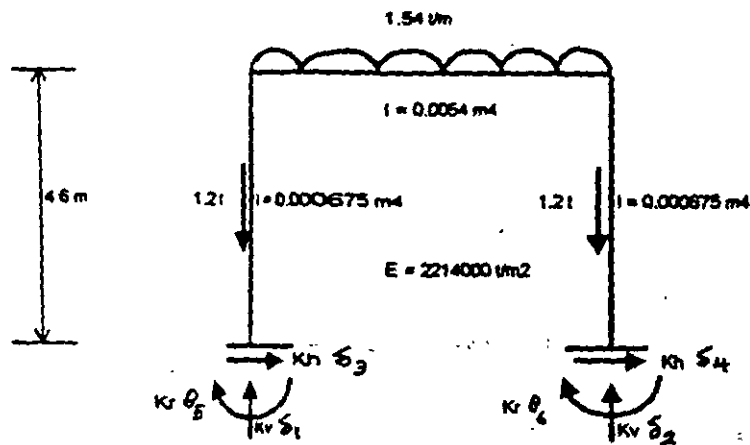
REACCIONES DEL TERRENO DE CIMENTACIÓN  
FIGURA 3



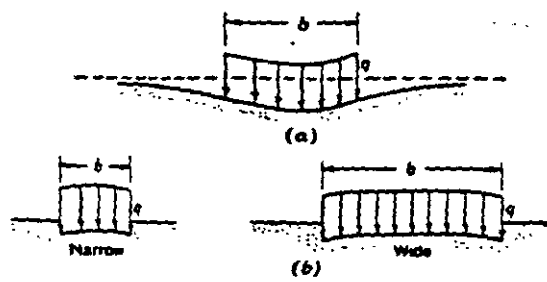
GOMETRÍA Y CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA  
FIGURA 4



NUMERACION DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD  
FIGURA 5

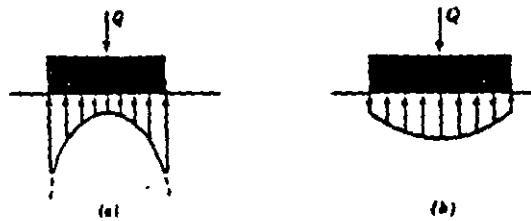


REACCIONES DEL TERRENO  
FIGURA 6



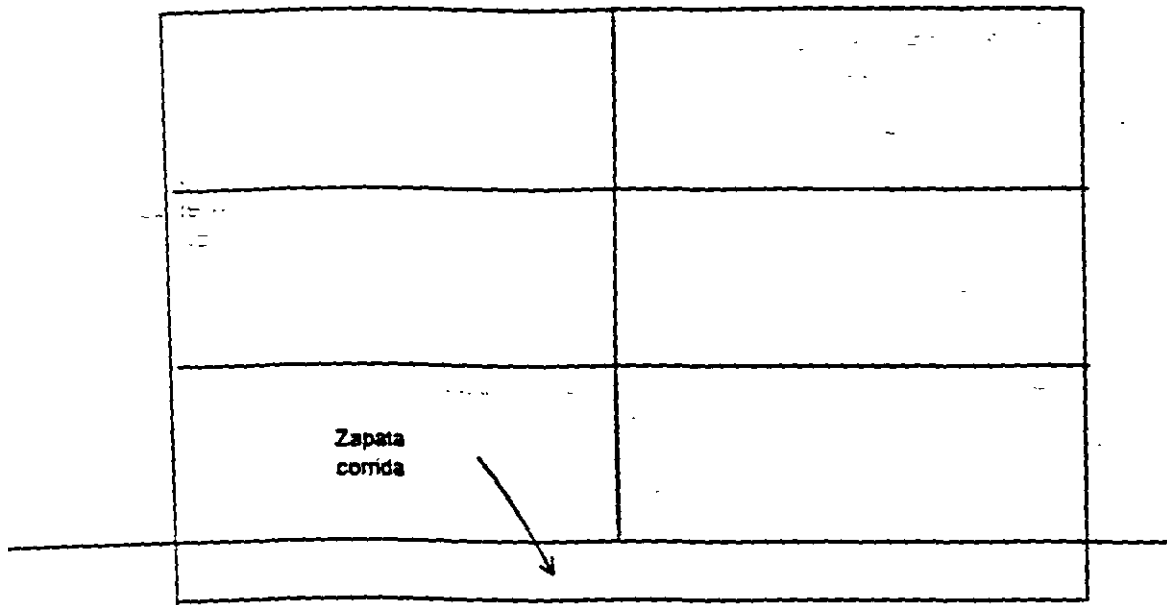
Profile of distortion settlement of a uniform load on the surface of a soil mass. (a) Homogeneous elastic isotropic material, such as a saturated clay; (b) homogeneous elastic material whose rigidity increases with confinement, such as a cohesionless sand or gravel. (Sowers, 1962)

FIGURA 7



Contact pressure on the base of a rigid foundation on the surface of a soil mass. (a) Homogeneous elastic isotropic material, such as a saturated clay; (b) homogeneous elastic material whose rigidity increases with confinement, such as a cohesionless sand or gravel. (Sowers, 1962)

FIGURA 8



MARCO ESTRUCTURAL (a)

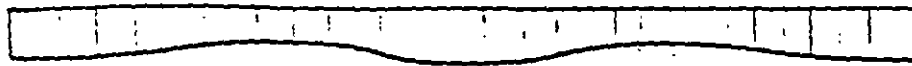


DIAGRAMA DE ASENTAMIENTOS (b)

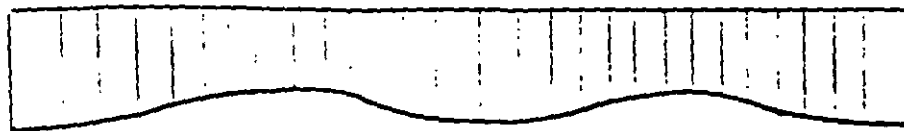
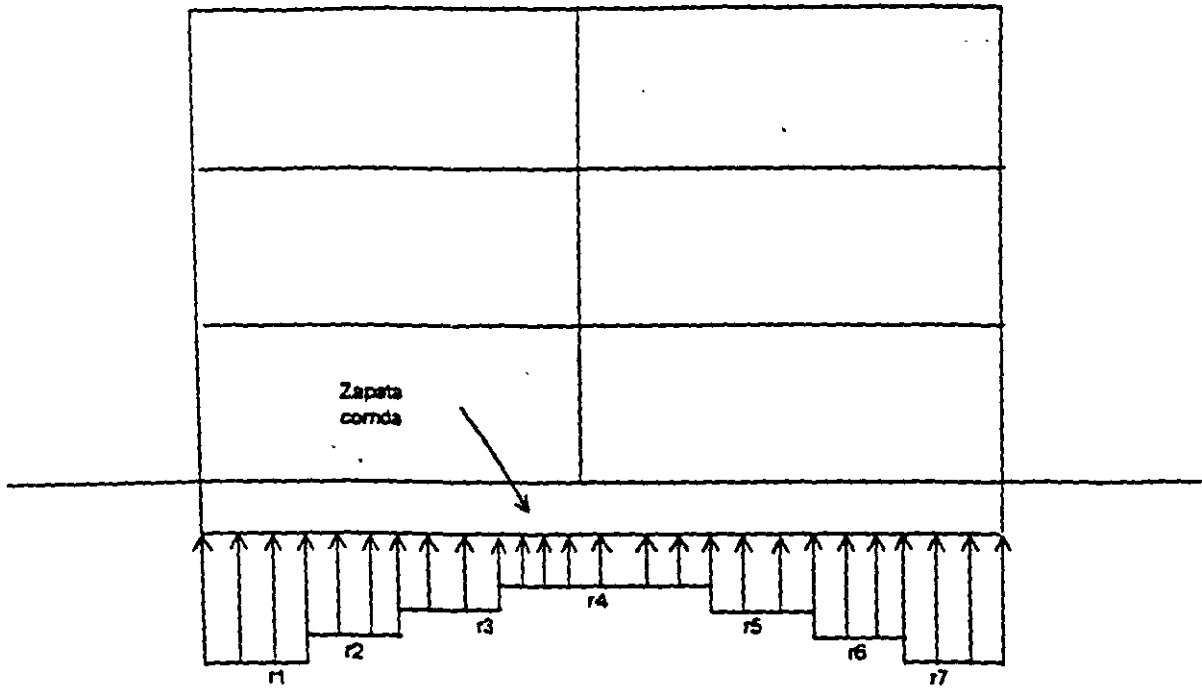


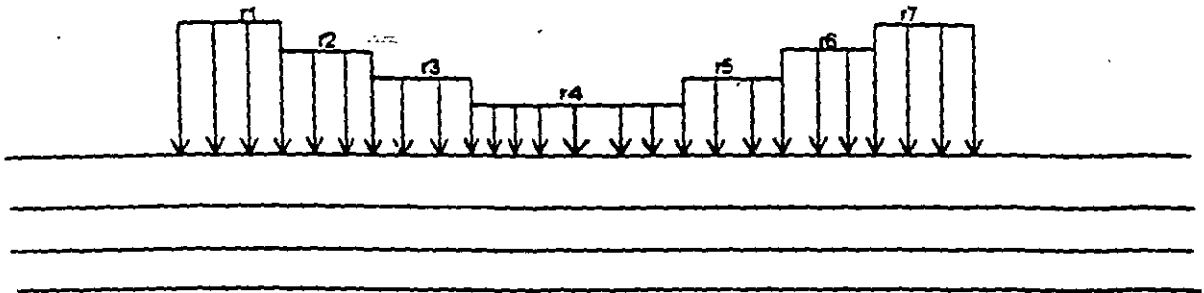
DIAGRAMA DE REACCIONES (c)

(Acisef3)

MARCO ESTRUCTURAL CON CIMENTACIÓN  
A BASE DE ZAPATA CORRIDA  
FIGURA 9

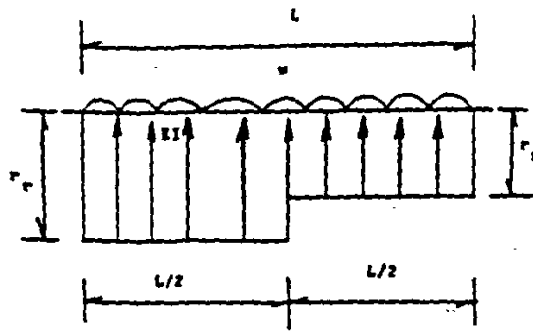


(a) REACCIONES DEL TERRENO



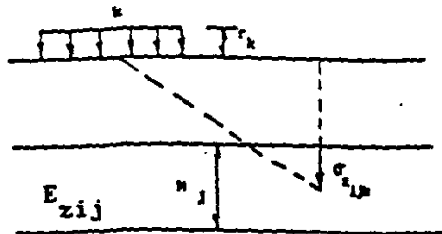
(b) CARGAS SOBRE EL TERRENO

CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA Y EL SUELO  
FIGURA 10



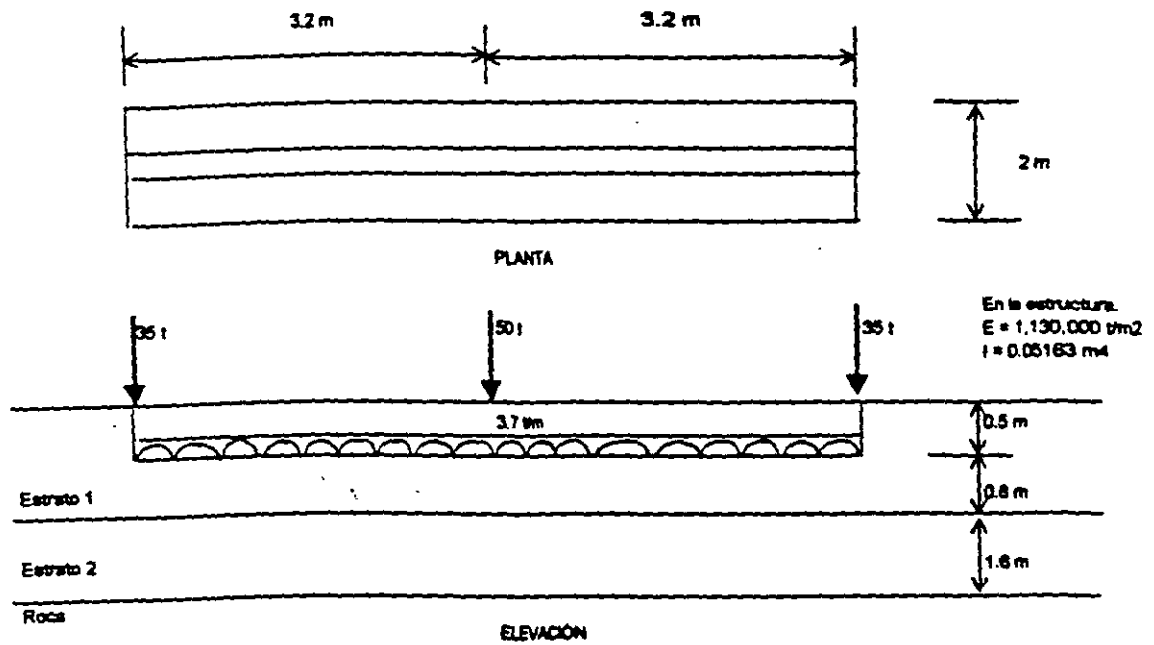
GEOMETRÍA Y CARGAS  
BARRA DE CIMENTACIÓN

FIGURA 11  
(Deméneghi, 1996)-

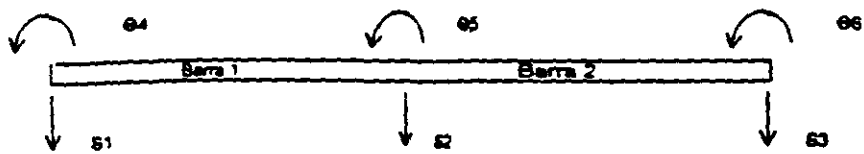


CÁLCULO DE LOS HUNDIMIENTOS  
DEL TERRENO

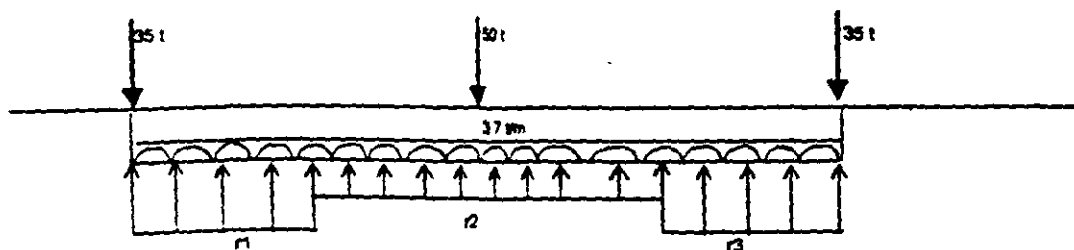
FIGURA 12  
(Deméneghi, 1996)



CARACTERÍSTICAS DE ESTRUCTURA Y TERRENO DE CIMENTACIÓN (EJEMPLO 3)  
 FIGURA 13

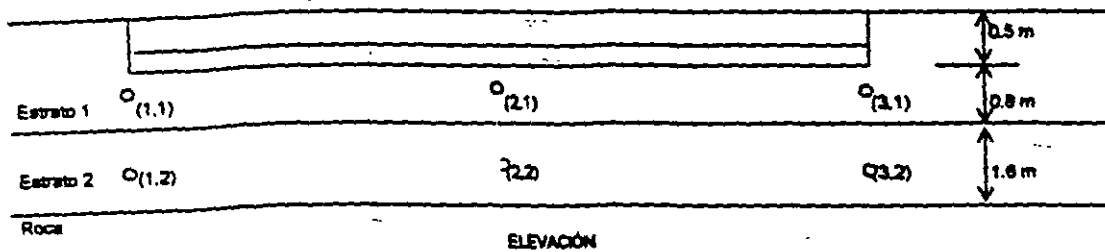
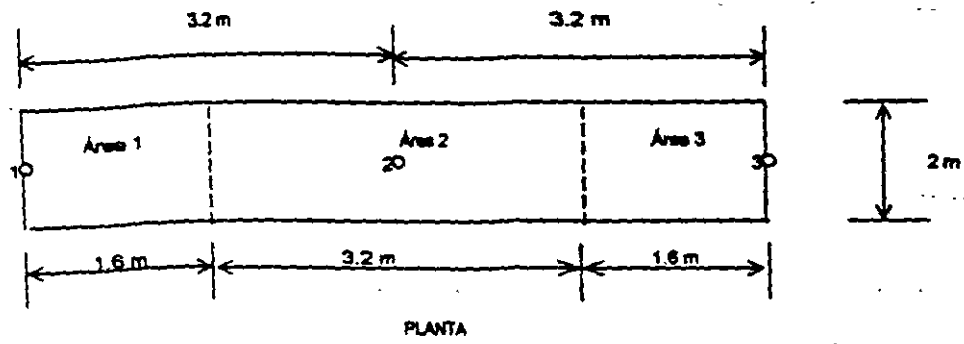


NUMERACIÓN DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD (EJEMPLO 3)  
 FIGURA 14

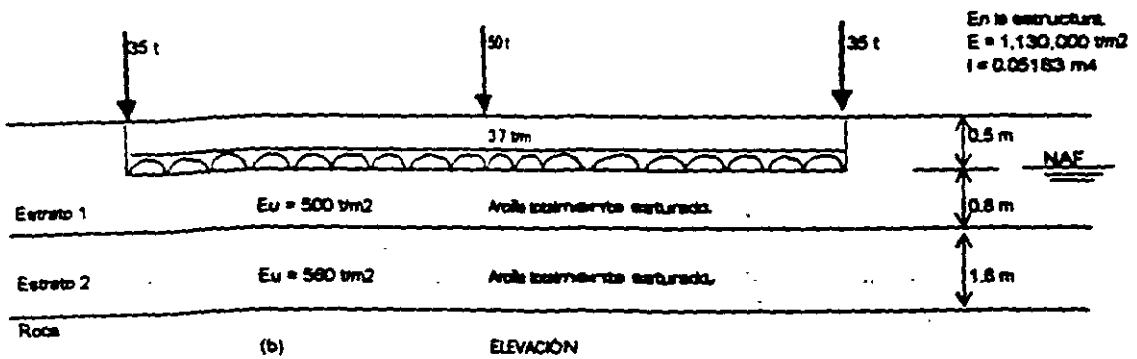
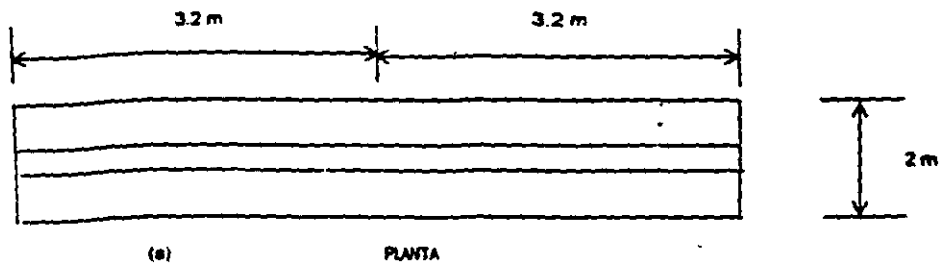


SISTEMA DE CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA (EJEMPLO 3)  
 FIGURA 15

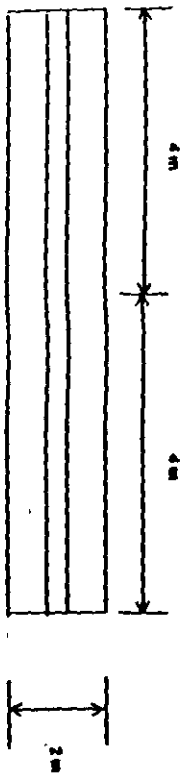




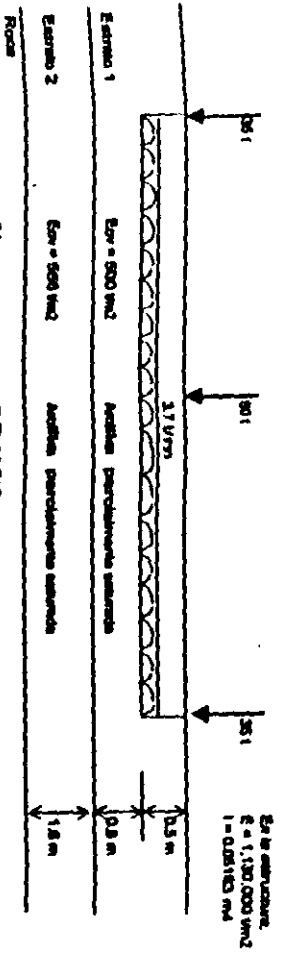
CÁLCULO DE LOS VALORES DE INFLUENCIA (EJEMPLO 3)  
FIGURA 16



CARACTERÍSTICAS DE ESTRUCTURA Y TERRENO DE CIMENTACIÓN (EJEMPLO 4)  
FIGURA 17



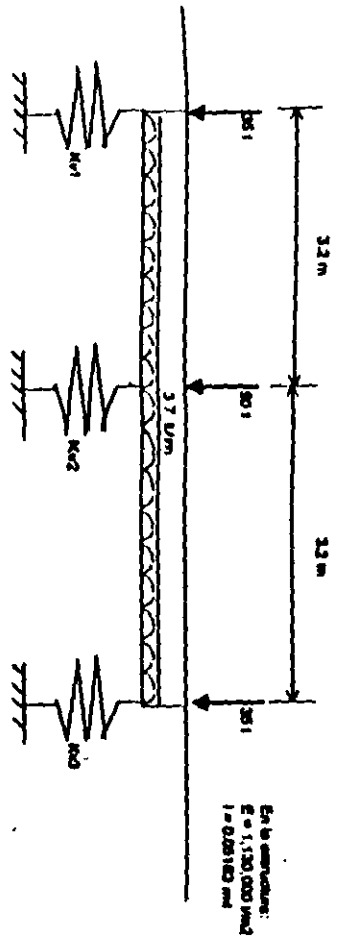
(a) PLANTA



(b) ELEVACION

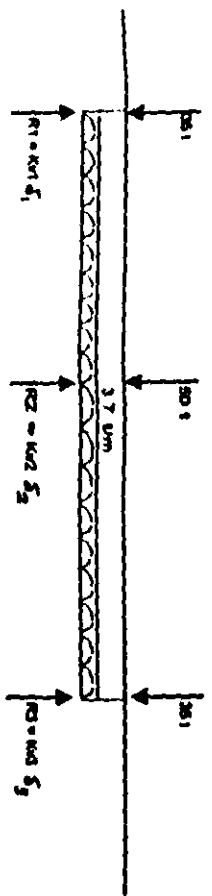
CARACTERÍSTICAS DE ESTRUCTURA Y TERRENO DE CIMENTACION FIGURA 18

Es el módulo de deformación por cambio de volumen



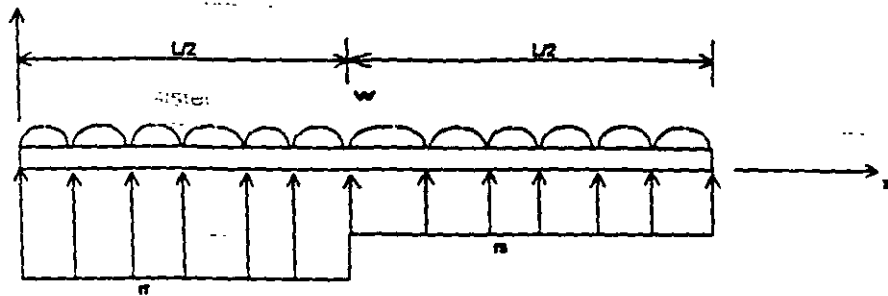
(a) MODULOS DE REACCION

Es la constante:  
 $E = 1,130,000 \text{ kg/cm}^2$   
 $I = 0.05183 \text{ m}^4$

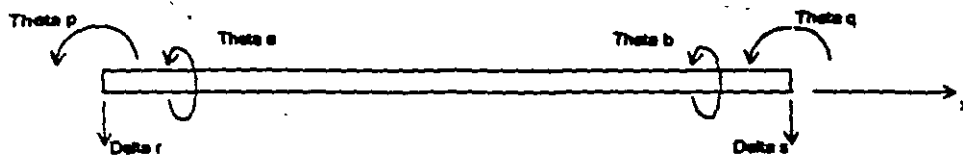


(b) REACCIONES DEL TERRENO

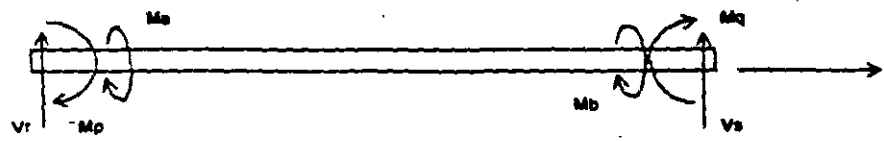
METODO ITERATIVO (EJEMPLO 8) FIGURA 19



a) Cargas sobre la barra



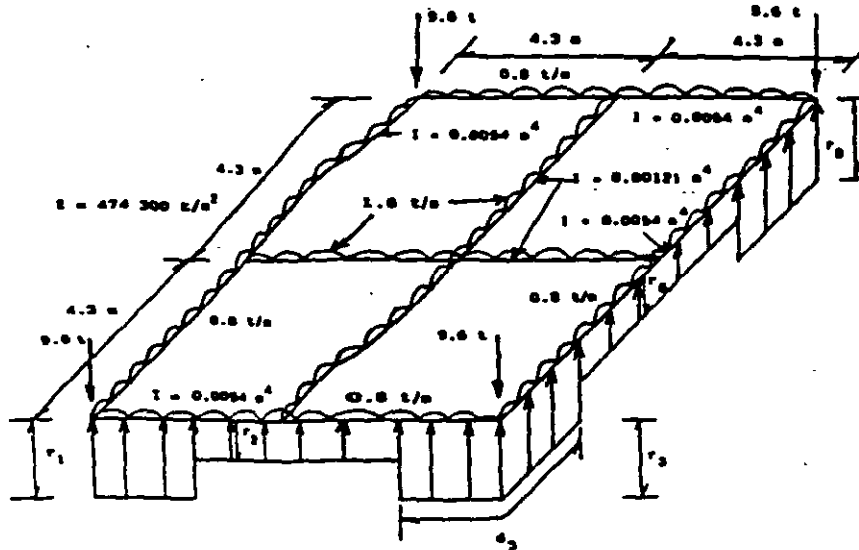
b) Grados de libertad



c) Elementos mecánicos  
(Barra sobre nudo)

(Acad3)

ELEMENTOS MECÁNICOS SOBRE UNA BARRA DE CIMENTACIÓN  
SISTEMA GLOBAL  
FIGURA 20



GEOMETRÍA Y SISTEMA DE CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA

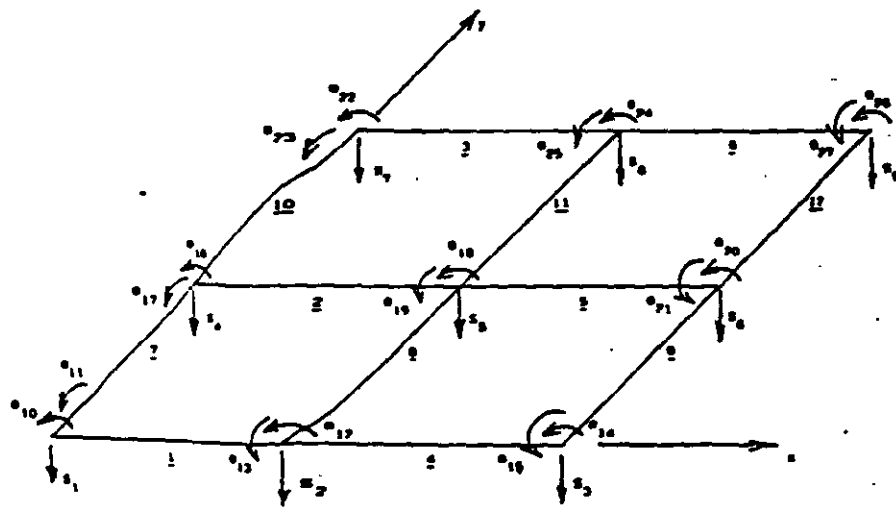
(Deméneghi, 1946)

FIGURA 21

$1/E_s = 0.0154 \text{ m}^2/\text{t}, \nu=0$	2.4 = Estrato 1
$1/E_s = 0.0222 \text{ m}^2/\text{t}, \nu>0$	2.0 = Estrato 2

ESTRATIGRAFÍA Y PROPIEDADES (EJEMPLO)

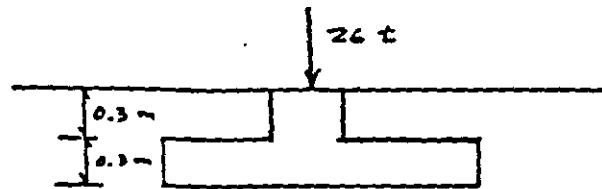
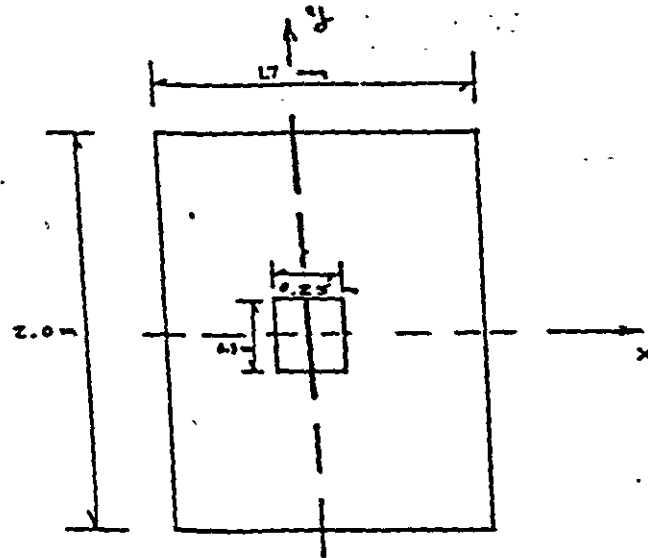
FIGURA 22



NUMERACIÓN DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD

(Deméneghi, 1946)

FIGURA 23



$D_r = 50\%$ ,  $\phi^* = 37^\circ$ ,  $\gamma_s = 1.6 \text{ t/m}^3$

Arena  $c_u = 2.6$

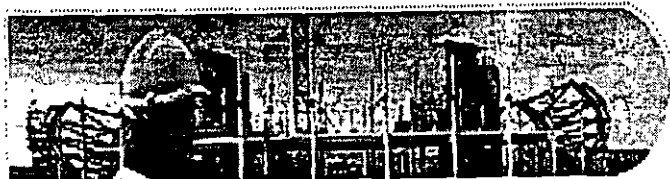
$N = 15$  golpes

SUELO FRICCIONANTE

FIGURA E-1



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**



...: Ingeniería de Civil —

# **CURSOS ABIERTOS**

## **ANÁLISIS ESTRUCTURAL CA 467**

**TEMA**

**ANÁLISIS SÍSMICO DE CIMENTACIONES**

**EXPOSITOR: ING. IGNACIO E. HERNÁNDEZ QUINTO  
DEL 27 DE JUNIO AL 01 DE JULIO DE 2005  
PALACIO DE MINERÍA**

## ANÁLISIS SÍSMICO DE CIMENTACIONES

Agustin Deméneghi Colina\*

Cuando se realiza el análisis sísmico de una cimentación, es usual que se cuente con un coeficiente sísmico para la región en cuestión, dado por el código del Estado donde se construirá la estructura correspondiente. Con este coeficiente sísmico se procede al análisis y diseño de la estructura, incluyendo desde luego en éste al de la estructura de cimentación.

Sin embargo, cuando el subsuelo del sitio está formado por sedimentos de consistencia blanda, se presenta un fenómeno de amplificación de las ondas sísmicas que llegan al lugar, el cual consiste en que, en la base constituida por terreno firme, se presenta una cierta aceleración, mientras que en la superficie del suelo blando la aceleración puede ser varias veces mayor que la del terreno firme (fig 1).

El comportamiento anterior se debe a que ocurre, por lo menos en forma parcial, la resonancia del suelo blando. Para ilustrar este fenómeno consideremos un sistema de un grado de libertad como el mostrado en la fig 2, en el que la base se somete a un movimiento dado por

$$x_0 = a \sin \Omega t$$

La velocidad de la base vale  $\dot{x}_0 = a \Omega \cos \Omega t$

y la aceleración  $\ddot{x}_0 = -a \Omega^2 \sin \Omega t$

La respuesta de la masa está dada por (Newmark y Rosenblueth 1976)

Desplazamiento relativo  $y = a B_d \sin (\Omega t - \phi)$

Velocidad relativa  $\dot{y} = a \Omega B_d \cos (\Omega t - \phi)$

Aceleración relativa  $\ddot{y} = -a \Omega^2 B_d \sin (\Omega t - \phi)$

En las expresiones anteriores

\* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

$$B_d = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\Omega}{\omega_1}\right]^2}}$$

$$\phi = \text{ang tan} \frac{2\zeta \frac{\Omega}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2}$$

$\omega_1$  es la frecuencia circular del sistema

$$\omega_1 = \sqrt{K/M}$$

Los desplazamientos absolutos están dados por

Desplazamiento	$x = x_0 + y$
Velocidad	$\dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{y}$
Aceleración	$\ddot{x} = \ddot{x}_0 + \ddot{y}$

Definamos el factor de amplificación de la aceleración como el cociente entre la máxima aceleración absoluta de la masa y la máxima aceleración de la base:

$$f_a = \max \ddot{x} / \max \ddot{x}_0$$

En la fig 3 se muestra la variación de  $f_a$  con el cociente  $T_1 / T$ , para amortiguamientos de 2 y 10 % del amortiguamiento crítico.

Recordemos que los periodos están dados por

$$T_1 = 2\pi / \omega_1 \text{ (masa que vibra)} \quad \text{y} \quad T = 2\pi / \Omega \text{ (base)}$$

Se observa en la fig 3 que la amplificación de la aceleración depende del cociente  $T_1 / T$  y del amortiguamiento. La máxima amplificación presenta cuando  $T_1 / T = 1$ ; al aumentar el amortiguamiento decrece el factor  $f_a$ . Para  $T_1 / T \rightarrow \infty$  la amplificación de la aceleración nula.

Un fenómeno similar sucede en el suelo blando, en el que éste es las veces de la masa del ejemplo anterior. Consideremos un estrato espesor  $H$  como el indicado en la fig 1, y supongamos que el desplazamiento de la base rígida está dado por



$$x_0(t) = C \exp(i\Omega t) = C (\cos \Omega t + i \sin \Omega t)$$

$$i = \sqrt{-1}$$

lo que implica que la base tiene un movimiento armónico de frecuencia  $\Omega$ .

La solución del movimiento cuando existe amortiguamiento cae en el campo de los números complejos, lo que conduce a que haya un cambio tanto en la amplitud como en la fase del movimiento. Definiendo la función de amplificación  $f_a = A(\Omega)$  como el valor absoluto del cociente de la máxima aceleración en la superficie del estrato entre la máxima aceleración en la base rígida, se obtiene (Roesset 1969)

$$A(\Omega) = 1 / \sqrt{\cosh^2 \alpha \cos^2 \beta + \sinh^2 \alpha \sin^2 \beta} \quad (1)$$

donde

$$\alpha = H \Omega \sqrt{[\sqrt{1 + (\eta \Omega / G)^2} - 1] / [1 + (\eta \Omega / G)^2]} / \sqrt{2} C_s \quad (2)$$

$$\beta = H \Omega \sqrt{[\sqrt{1 + (\eta \Omega / G)^2} + 1] / [1 + (\eta \Omega / G)^2]} / \sqrt{2} C_s \quad (3)$$

donde  $C_s = \sqrt{G / \rho}$  = velocidad de la onda de cortante en el suelo blando

$\eta$  = amortiguamiento del suelo blando

$\Omega$  = frecuencia circular natural de la base rígida

$H$  = espesor del suelo blando

$G$  = módulo de rigidez al cortante dinámico del suelo blando

$\rho$  = masa específica del suelo blando

La respuesta depende de la hipótesis que se haga respecto al amortiguamiento. Se puede considerar que la viscosidad es inversamente proporcional a la frecuencia, de tal modo que  $\eta \Omega / G = 2 \zeta$  sea una constante. Aplicando las ecs 1 a 3 se obtiene la respuesta del estrato.

Las frecuencias correspondientes a los modos naturales de vibrar del estrato se hallan con las siguientes expresiones

$\omega_n$  = frecuencia circular del modo  $n$  de vibrar

$$\omega_n = (2n - 1) \pi \sqrt{G / \rho} / 2 H = (2n - 1) \pi C_s / 2 H \quad (4)$$

Para pequeños valores de  $(\eta \Omega / G)$ , la función de amplificación, para los modos naturales de vibrar, vale aproximadamente (Roesset 1969):

$$A(\omega_n) = 4 / (2n - 1) \pi (2\zeta) \quad (5)$$

$\zeta$  = fracción del amortiguamiento crítico

En la fig 4 se muestra la variación de la función de amplificación con la frecuencia de vibración de la base firme, para un estrato de espesor  $H = 30.5$  m, con una velocidad de la onda de cortante en suelo blando  $C_s = 229$  m/s y un peso volumétrico del suelo  $\gamma = 2$  t/

La función de amplificación se obtiene empleando las ecs 1 a 3, considerando que  $\eta \cdot \Omega / G = 2 \zeta$ .

Vemos que la máxima respuesta se presenta cuando el terreno firme vibra con una frecuencia igual a la frecuencia correspondiente al primer modo de vibrar del estrato blando. Esto significa que si la frecuencia dominante de las ondas sísmicas que arriban a un sitio coincide o está cercana a la frecuencia del primer modo de vibrar de un estrato de suelo blando, la aceleración en la superficie de éste puede ser varias veces superior a la aceleración en el terreno firme. En este ejemplo la amplificación de la aceleración es de 3.18, para un amortiguamiento del suelo blando de 20 % del crítico.

En forma aproximada se pueden calcular las frecuencias de vibración y los valores correspondientes a los "picos" de la función de amplificación (fig 4), empleando las ecs 4 y 5. En la tabla 1 se presentan los resultados para los primeros cinco modos de vibrar, considerando un amortiguamiento del 20 % del amortiguamiento crítico.

TABLA 1  
VALORES APROXIMADOS DE LA FUNCIÓN DE AMPLIFICACIÓN A ( $\omega_n$ )

n	$\omega_n$ s <sup>-1</sup>	f ciclos/s	$T_{nn}$ s	A ( $\omega_n$ )
1	11.78	1.875	0.533	3.183
2	35.34	5.625	0.178	1.061
3	58.90	9.375	0.107	0.637
4	82.47	13.125	0.076	0.455
5	106.03	16.875	0.059	0.354

$$\omega_n = (2n - 1) \pi C_s / 2 H \quad A(\omega_n) = 4 / (2n - 1)\pi (2\zeta)$$

$$f = \omega_n / 2\pi \quad T_{nn} = 2\pi / \omega_n$$

Desafortunadamente, no se puede controlar la frecuencia dominante de vibración de las ondas sísmicas que llegan a un sitio; en todo caso es conveniente observar las frecuencias dominantes de los temblores que llegan a una localidad, para reconocer los estratos en los que se puede presentar el fenómeno de amplificación de aceleración que hemos comentado en los párrafos anteriores.

El razonamiento anterior es válido también en términos de los periodos de vibración de ondas y suelo blando. Vemos que la máxima respuesta de aceleración se presenta cuando el periodo de vibración de la base firme coincide con el periodo natural del primer modo de vibrar, siendo esta respuesta de 3.18 en nuestro ejemplo (fig 4). Es decir, la aceleración en la superficie del terreno blando será 3 veces mayor que la aceleración en la base, si el amortiguamiento

suelo es de 20 %. Vemos entonces que la aceleración en la superficie del suelo blando depende fundamentalmente del cociente  $T_{n1} / T$ , donde  $T_{n1}$  es el periodo natural de vibración del estrato blando y  $T$  es el periodo dominante de vibración de las ondas sísmicas.

Para un estrato de suelo homogéneo (fig 1), los periodos de vibración están dados por

$$T_{n1} = 4 H \sqrt{\rho / G} / (2n - 1) \quad (6)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

donde  $\rho$  = masa específica del suelo  
 $G$  = módulo de rigidez al cortante dinámico del suelo

El primer modo de vibrar, o modo fundamental, se obtiene para  $n = 1$ :

$$T_{11} = 4 H \sqrt{\rho / G} \quad (7)$$

Para la estimación del periodo natural de vibración de un suelo estratificado véase Zeevaert (1973, 1980). Para la determinación del módulo de rigidez dinámico de la arcilla del valle de México, puede consultarse a Jaime et al (1987).

El periodo de vibración de la estructura se halla con los métodos usuales del análisis estructural. Sin embargo, cuando el terreno de cimentación está formado por un suelo blando, es importante considerar además el efecto de balanceo y de traslación horizontal de la cimentación. Así, el periodo de vibración acoplado de una estructura vale (Normas de Sismo 1987):

$$T_1 = \sqrt{T_0^2 + T_x^2 + T_r^2} \quad (8)$$

donde  $T_0$  = periodo fundamental que tendría la estructura si se apoyara sobre una base rígida (este periodo se debe a la flexibilidad propia de la estructura)

$T_x$  = periodo natural que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base solo pudiera trasladarse en la dirección que se analiza

$T_r$  = periodo natural que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base solo pudiera girar con respecto a un eje horizontal que pasara por el centroide de la superficie de desplante de la estructura y fuera perpendicular a la dirección que se analiza

El periodo natural de vibración por rotación de una masa está dado por

$$T_r = 2 \pi \sqrt{M H^2 / K_r} = 2 \pi H \sqrt{M / K_r} \quad (9)$$

$$T_r = 2 \pi \sqrt{W H^2 / g K_r} \quad g = \text{aceleración de la gravedad} \quad (10)$$

Las Normas de Sismo, en el inciso A.7 del Apéndice, establecen que "para el cálculo de  $T_x$  se supondrá que el desplazamiento de la base está restringido por un elemento elástico cuya rigidez vale  $K_x$ , en t/m:

$$T_x = 2 \pi (W'_0 / g K_x)^{1/2} \quad (11)$$

donde  $T_x$  está en segundos,  $W'_0$  es el peso neto de la construcción, al nivel de su desplante, incluyendo el peso de los cimientos y descontando el del suelo que es desplazado por la infraestructura, en toneladas, y "g" es la aceleración de la gravedad, en  $m/s^2$ . El valor de  $W'_0$  no se tomará menor de  $0.7 W_0$ .

"Para el cálculo de  $T_r$  se supondrá que la rotación de la base está restringida por un elemento elástico de rigidez  $K_r$ , en t.m/radián:

$$T_r = 2 \pi (J / g K_r)^{1/2} \quad (12)$$

donde  $T_r$  está en segundos y "J" es el momento neto de inercia de peso de la construcción, en  $t.m^2$ , con respecto al eje de rotación, descontando el momento de inercia de la masa del suelo desplazado por la infraestructura. Esta diferencia no se tomará menor de 0.7 veces el momento de inercia calculado con el peso de la construcción.

"Tratándose de construcciones que se apoyan sobre zapatas corridas con dimensión mayor en la dirección que se analiza o sobre losa o cascarón que abarque toda el área de cimentación, y que posean suficiente rigidez y resistencia para suponer que su base se desplaza como cuerpo rígido, los valores de  $K_x$  y  $K_r$  se obtendrán de la tabla 1, en que G es el módulo de rigidez medio, en  $t/m^2$ , del estrato en que se apoya la construcción, y los radios equivalentes  $R_x$  y  $R_r$ , en metros, se calcularán empleando las expresiones

$$R_x = (A / \pi)^{1/2} \quad (13)$$

$$R_r = (4 I / \pi)^{1/4} \quad (14)$$

"en las que A, en  $m^2$ , es el área de la superficie neta de cimentación, e I, en  $m^4$ , es el momento de inercia de dicha superficie neta con respecto a su eje centroidal perpendicular a la dirección que se analiza" (Normas de Sismo 1987).

Una vez que se conocen los periodos de vibración del suelo  $T_{s1}$  y de la estructura  $T_1$ , se puede emplear el espectro de respuesta sísmica de Zeevaert (1980) para la determinación del factor de amplificación  $f_s$  (fig 5), definido como el cociente de la máxima aceleración en el centro de gravedad de la estructura entre la máxima aceleración en la superficie del terreno blando. Para entrar en el espectro de la fig 5 necesitamos el amortiguamiento acoplado del sistema, el cual está dado por (Zeevaert 1980):

$$\zeta_1 = \sqrt{1 - g_1} \quad (15)$$

donde  $g_1 = g_o g_r (T'_1)^2 / (g_o T_r^2 + g_r T_o^2) \quad (16)$

$$T'_1 = \sqrt{T_o^2 + T_r^2}$$

$$g_o = 1 - \zeta_o^2$$

$$g_r = 1 - \zeta_r^2$$

Vemos en el espectro que la máxima respuesta se obtiene cuando  $T_1 / T_{s1} = 1$ . Por lo visto anteriormente, no se puede evitar la amplificación de la aceleración de un suelo blando, pero si es factible evitar que coincidan el periodo natural de vibración del suelo con el periodo natural de vibración de una estructura.

La aceleración en la superficie del terreno la proporciona, en la ciudad de México, el Reglamento de Construcciones en las Normas de Sismo. Así, en el inciso 3 de éstas se señala que "la ordenada del espectro de aceleraciones para diseño sísmico "a", expresada como fracción de la aceleración de la gravedad, está dada por la siguiente expresión:

$$a = (1 + 3 T / T_s) \cdot c / 4, \text{ si } T \text{ es menor que } T_s."$$

La aceleración en la superficie del suelo se obtiene haciendo  $T = 0$  en esta expresión (pues para  $T = 0$  la estructura vibra igual que la superficie del terreno), por lo tanto  $a = c_s = c / 4$  en la superficie. Las aceleraciones para las diferentes zonas estratigráficas de Distrito Federal se presentan a continuación (artículo 206 de Reglamento):

Zona	Coficiente sismico c	Coficiente $c_s$ (superficie)	Aceleración (superficie) $cm/s^2$
I	0.16	0.04	39
II	0.32	0.08	78
III	0.40	0.10	98

Vemos entonces que, por ejemplo, en la zona III la aceleración diseño de la superficie del terreno es de 98  $cm/s^2$ .

También se puede utilizar el siguiente criterio para hallar  $c$  (Normas de Sismo, Apéndice): "en sitios en que se conozca el período dominante del terreno  $T_{s1}$ , y que se hallen en las partes sombreadas de la fig 3.1 (de esas Normas), también se adoptará  $c = 0.4$  para estructuras del grupo B, y 0.6 para las del A; fuera de las partes sombreadas se adoptará

$$c = 1.6 T_{s1} / (4 + T_{s1}^2) \quad (17)$$

Vemos que el coeficiente sísmico depende del período de vibración dominante del suelo  $T_{s1}$ . Considerando que el coeficiente sísmico en la superficie  $c_s = c / 4$  y que la aceleración en la superficie, en  $\text{cm/s}^2$ , es igual a  $c_s$  por 980, en la fig 6 se presenta la variación de esta aceleración en función del período  $T_{s1}$ .

#### EJEMPLO

Determinar la respuesta de aceleración de un edificio sobre un estrato de suelo blando, con las siguientes características:

Masa = 217.5 t.s<sup>2</sup>/m

Peso = 2133 t

Período de la estructura  $T_o = 0.3$  s

Amortiguamiento en la estructura  $\zeta_o = 5$  %

Período por rotación  $T_r = 0.76$  s

Amortiguamiento en el terreno de cimentación  $\zeta_r = 15$  %

Período por traslación  $T_x = 0.22$  s

Período del terreno de cimentación  $T_{s1} = 2.4$  s

#### Solución

El período acoplado de la estructura vale

$$T_1 = \sqrt{T_o^2 + T_x^2 + T_r^2} = 0.85 \text{ s}$$

Obtenemos el cociente  $T_1 / T_{s1} = 0.35$

Para entrar en el espectro de la fig 5 necesitamos el amortiguamiento acoplado del sistema, el cual está dado por (Zeevaert 1980):

$$\zeta_1 = \sqrt{1 - g_1}$$

$$g_1 = g_o g_r (T'_1)^2 / (g_o T_r^2 + g_r T_o^2)$$

donde  $T'_1 = \sqrt{T_o^2 + T_r^2} = 0.817$  s

$$g_o = 1 - \zeta_o^2 = 0.9975$$

$$g_r = 1 - \zeta_r^2 = 0.9775$$

Sustituyendo

$$g_1 = 0.98$$

$$\zeta_o = 0.141$$

Es decir, el sistema acoplado tiene un amortiguamiento de 14.1 % .

Entrando al espectro para diseño sísmico (fig 5, Zeevaert 1980), se obtiene un factor de amplificación  $f_s = 1.9$  .

Considerando una aceleración en la superficie de  $98 \text{ cm/s}^2$ , la aceleración en el centro de gravedad de la estructura está dada por  $(98)(1.9) = 186 \text{ cm/s}^2$  .

#### REFERENCIAS

Jaime, A, Romo, M P, Ovando, E y Legorreta, H, "Algunos aspectos del comportamiento dinámico de la arcilla del valle de México", Simposio sobre Generación, Propagación y Efectos de Temblores, SMF, SMMS, UGM y SMIS, México, D F, abril de 1987

Newmark, N M y Rosenblueth, E, Fundamentos de Ingeniería Sísmica Diana, 1976

Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo (RCDF), 1987

Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, 1986

Roesset, J M, "Fundamentals of soil amplification", Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1969

Zeevaert, L, Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions, Van Nostrand Reinhold, 1973

Zeevaert, L, Interacción Suelo-Estructura de Cimentación, Lituania, 1980

Tabla A7.1 Valores de  $K_x$ ,  $K_y$  y  $K_z$

En la zona II

Profundidad de desplante (1)	$K_x$	$K_y$ (2)	$K_z$ Losa	$K_z$ Zapata
$< 1$ m	$11GR_x$	$7GR_y^3$	$20CR_x$	$12CR_x$
$\geq 3$ m	$16CR_x$	$11GR_y^3$	$29CR_x$	$20CR_x$

En la zona III

Profundidad de desplante (1)	$K_x$	$K_y$			$K_z$
		Sobre el terreno	Sobre pilotes de fricción (3)	Sobre pilotes de punta (4)	
$< 1$ m	$7GR_x$	$6CR_y^3$	$7GR_y^3$	$6GR_y^3 + \frac{1}{1/43GR_y^3 + 1/K_p}$	$12CR_x$
$\geq 3$ m	$8CR_x$	$9CR_y^3$	$11GR_y^3$	$9GR_y^3 + \frac{1}{1/43GR_y^3 + 1/K_p}$	$16CR_x$

1. Para profundidades de desplante intermedias entre 1 y 3 m interpólese linealmente entre los valores de la tabla.

2. Para estructuras cimentadas sobre pilotes o pilas en la zona II supóngase  $K_p$  infinita.

3. Si éstos son capaces de resistir por adherencia con el suelo circundante, al menos la mitad del peso bruto de la construcción incluyendo el de sus cimientos. Cuando tienen menos de esta capacidad, interpólese línea entre los valores consignados en la tabla.

4.  $K_p$  se calculará teniendo en cuenta los pilotes de punta que contribuyan a resistir el momento de volteo, calculando la rigidez de estos elementos ante fuerza axial como si su punta no se desplazara verticalmente.



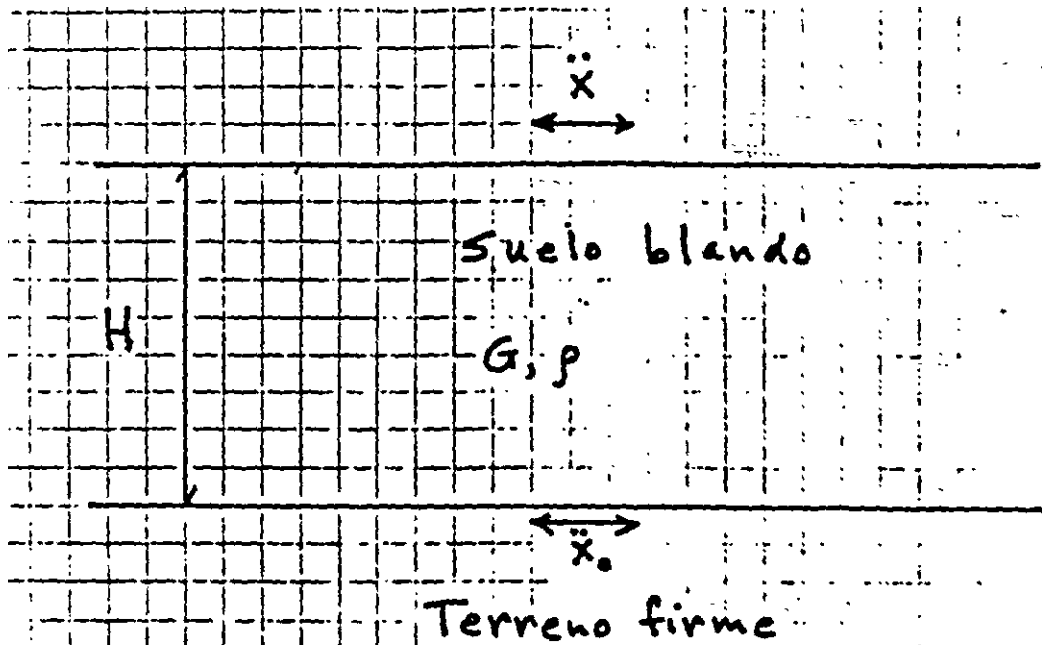


FIG 1

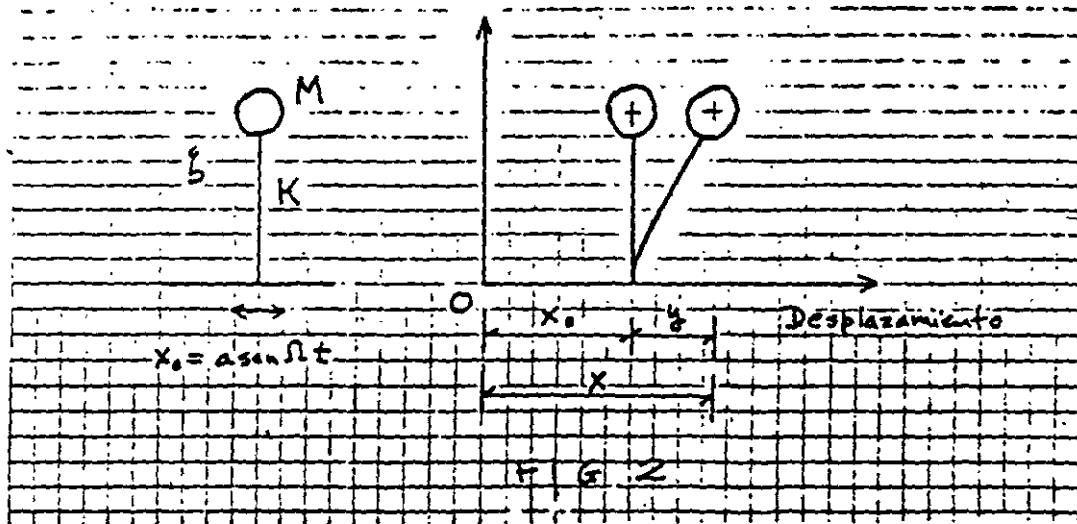


FIG 2

### VARIACIÓN DEL FACTOR DE AMPLIFICACIÓN

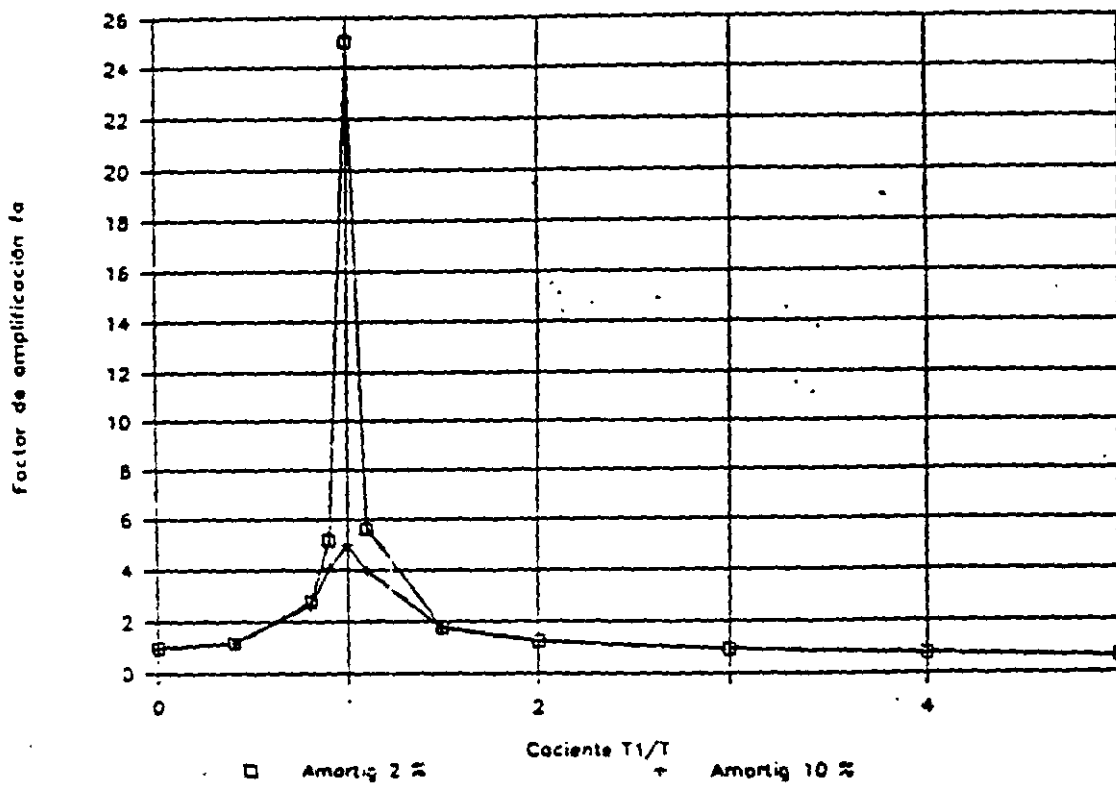


FIG 3

# VARIACIÓN DEL FACTOR DE AMPLIFICACIÓN

AMORTIGUAMIENTO 20 % DEL CRÍTICO

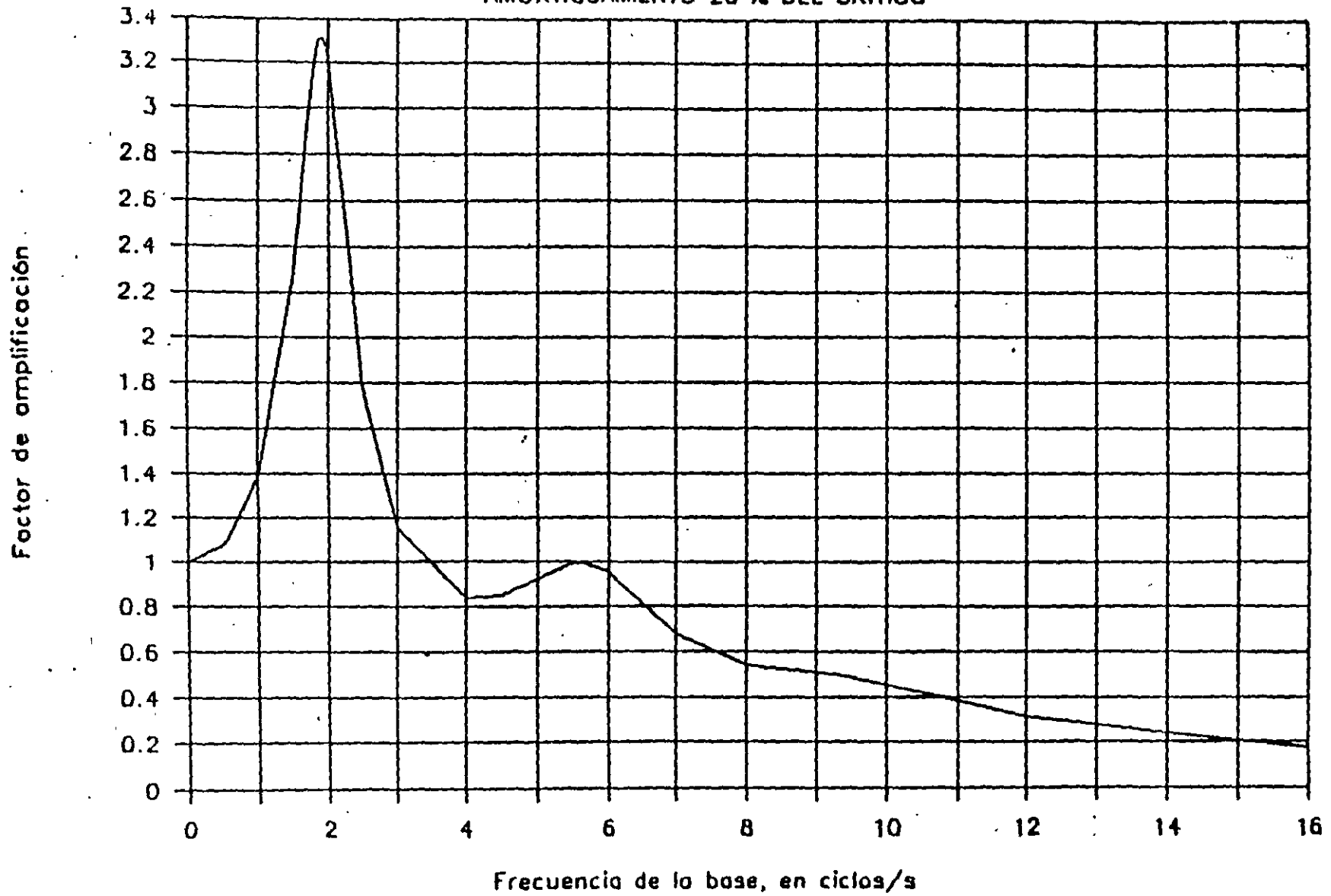
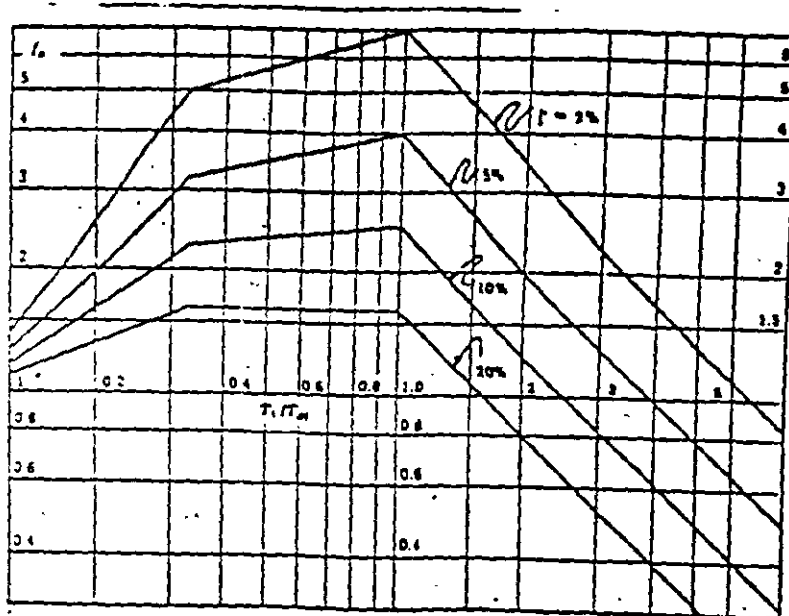


FIG 4



Espectro envolvente para diseño sísmico. (Zeevaert 1960)

FIG 5

ESPECTRO DE RESPUESTA DEL TERRENO  
CIUDAD DE MÉXICO

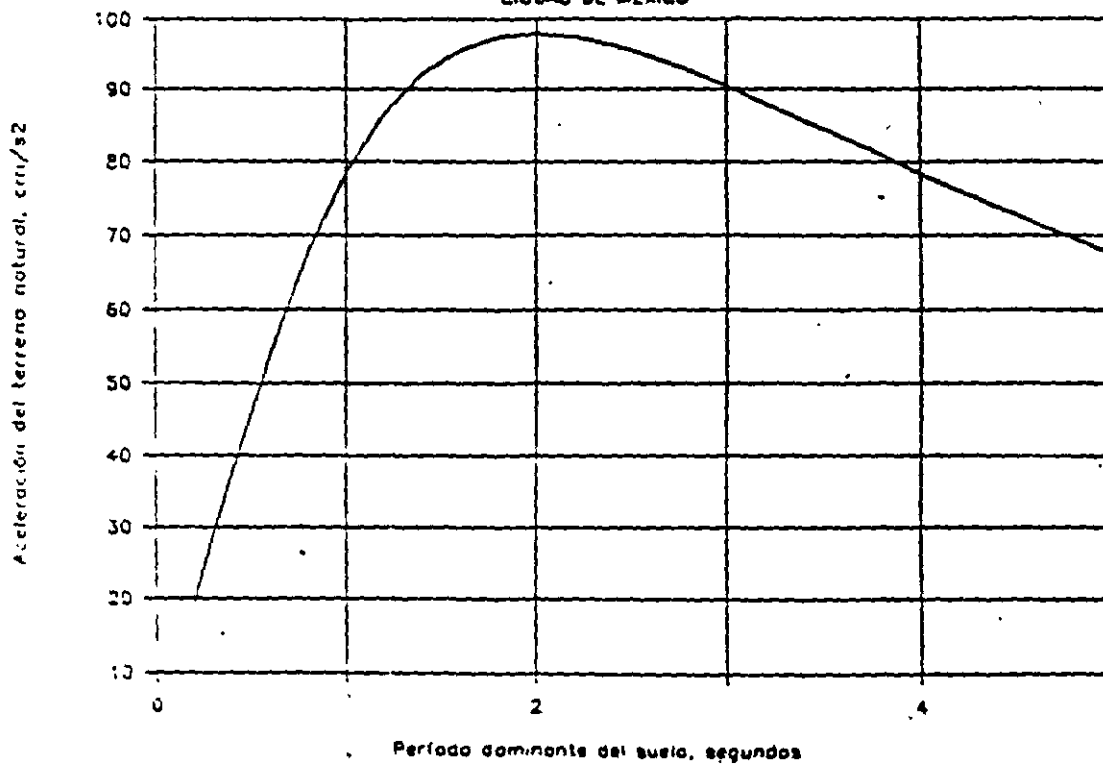
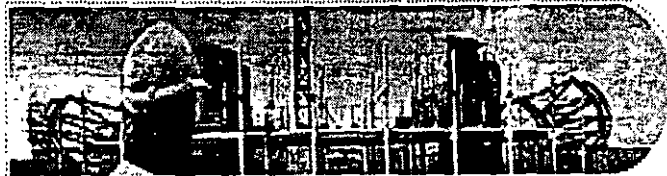


FIG 6



FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA



...: Ingeniería de Civil

# CURSOS ABIERTOS

## ANÁLISIS ESTRUCTURAL CA 467

TEMA

INTERACCIÓN SUELO-PILOTE  
MÉTODO SIMPLIFICADO

**EXPOSITOR: ING. IGNACIO E. HERNÁNDEZ QUINTO**  
**DEL 27 DE JUNIO AL 01 DE JULIO DE 2005**  
**PALACIO DE MINERÍA**

## INTERACCIÓN SUELO-PILOTE MÉTODO SIMPLIFICADO

Agustin Deméneghi Colina

Ilustraremos el método simplificado de interacción suelo-pilote con el siguiente ejemplo:

Pilote circular de diámetro = 35 cm, L = 3 m.

$P_c = 250 \text{ kg/cm}^2$

$E = 158000 \text{ kg/cm}^2$

$I = 73\,661.76 \text{ cm}^4$

Carga en la cabeza del pilote 3.4 t

Rigidez de la subestructura (contratraves)  $K_{cs} = 702\,658.62 \text{ t.m/rad}$ .

En el terreno de cimentación  $G = 330 \text{ t/m}^2$

En la punta del pilote  $K_{cr} = 8.575 \text{ t.m/rad}$

$K_{cs} = 298.941 \text{ t/m}$

### SOLUCIÓN

En la fig 1 se muestra el sistema de cargas sobre el pilote, y en la fig 2 se indican los desplazamientos que sufre el pilote.

La matriz de rigidez del pilote y el vector de cargas de empotramiento sobre el pilote se obtienen en forma similar a lo tratado en capítulos anteriores, considerando los tramos del pilote como vigas continuas.

El vector de cargas concentradas está dado por

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 0 \\ K_{cs} \delta_3 \\ K_{cr} \theta_4 \\ 0 \\ K_{cs} \theta_6 \end{bmatrix}$$

Considerando dos "estratos verticales", el primero de espesor 0.25 m y el segundo de espesor 0.30 m, y con un  $M_z = 0.001045 \text{ m}^2/\text{t}$ , se obtiene la matriz de flexibilidades del suelo

$$\delta_1 = 0.00056007 r_1 + 0.00000042478 r_2 + 0 r_3 \quad (\text{a})$$

$$\delta_2 = 0.0000004012 r_1 + 0.0011201 r_2 + 0.0000004012 r_3 \quad (\text{b})$$

$$\delta_3 = 0 r_1 + 0.00000042478 r_2 + 0.00056007 r_3 \quad (\text{c})$$

Aplicando la ecuación general de equilibrio

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^* + \underline{P}^e = 0$$

y las ecs (a), (b) y (c), se obtienen los siguientes resultados

$$\delta_1 = -0.0013347 \text{ m}$$

$$\delta_2 = 0.000026597 \text{ m}$$

$$\delta_3 = 0.000033870 \text{ m}$$

$$\theta_4 = -0.0000029552$$

$$\theta_5 = -0.00025682$$

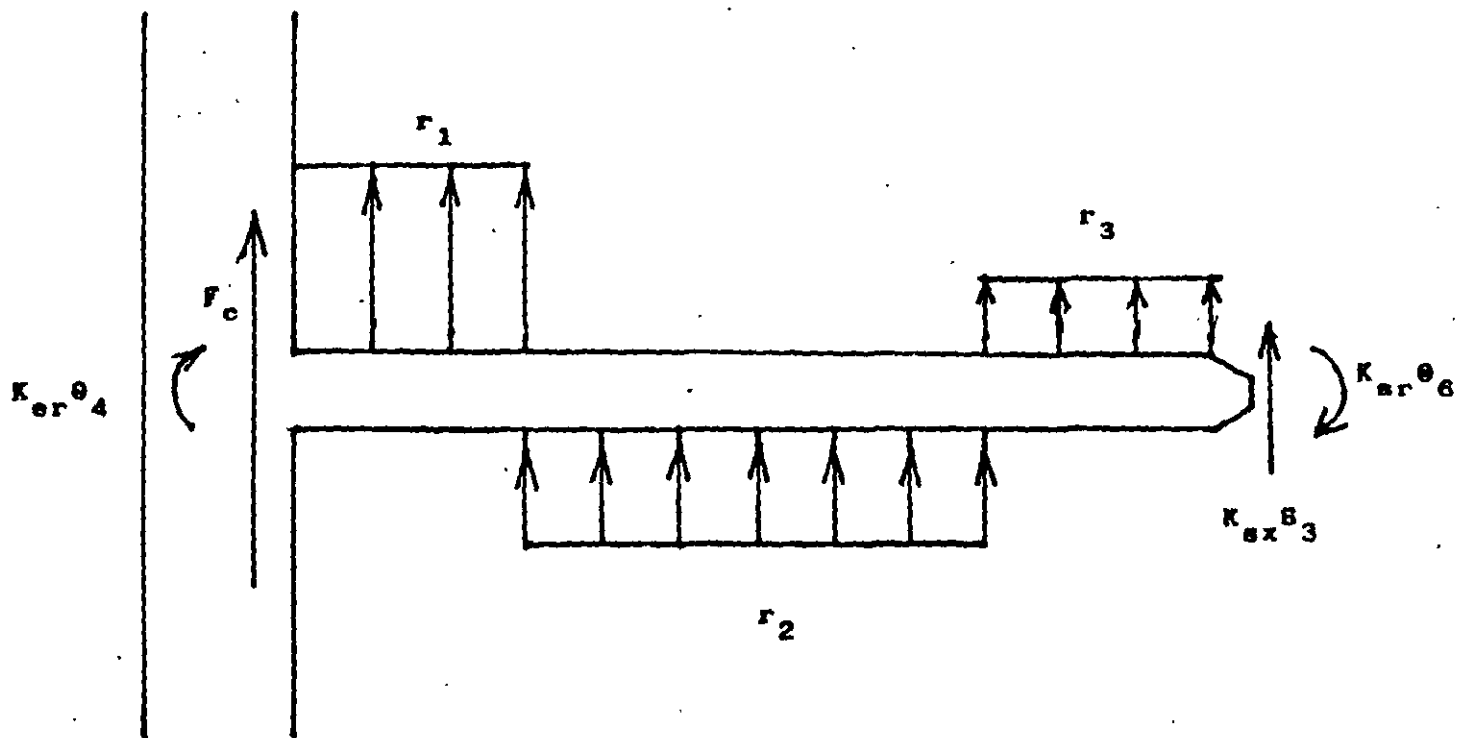
$$\theta_6 = 0.00013503$$

$$r_1 = -2.38304 \text{ t/m}$$

$$r_2 = 0.024577 \text{ t/m}$$

$$r_3 = 0.060472 \text{ t/m}$$

(ISEPILOT)

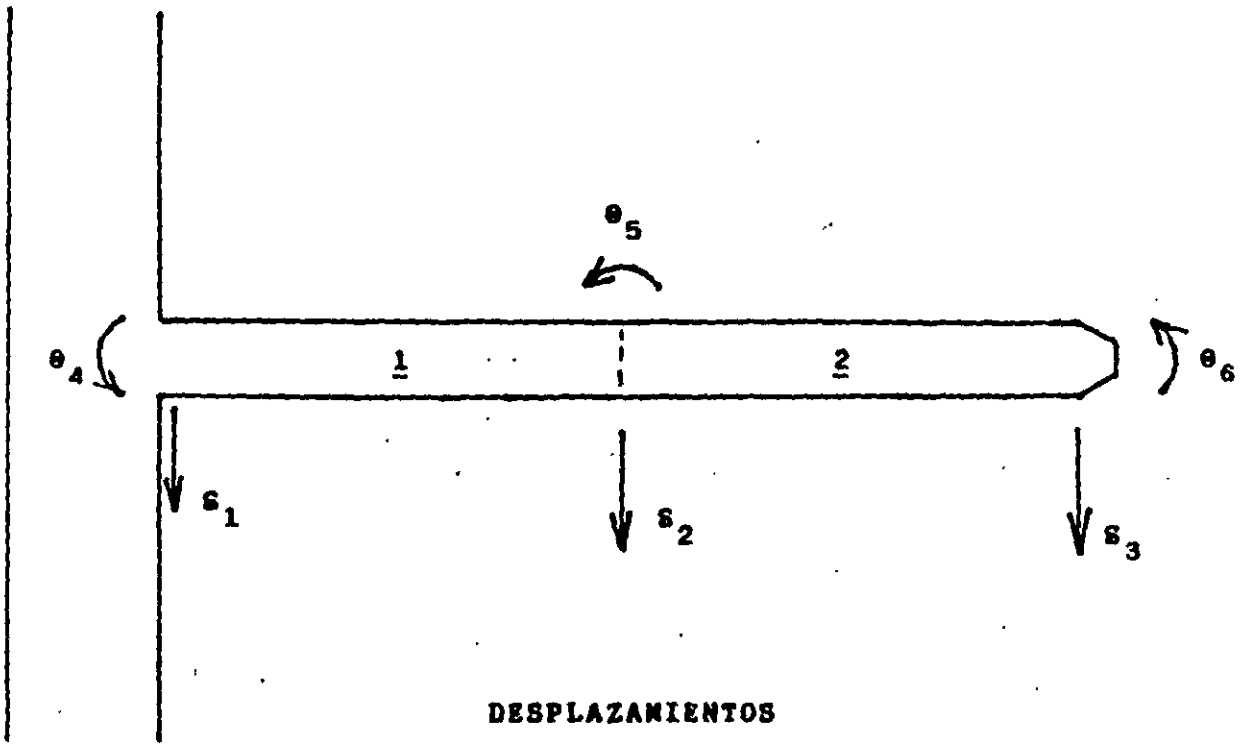


3

SISTEMA DE CARGAS SOBRE EL PILOTE

FIGURA 1





DESPLAZAMIENTOS

FIGURA 2

## DETERMINACIÓN DE LA RIGIDEZ DE LA SUBESTRUCTURA, PARA LA REDUCCIÓN DE ASENTAMIENTOS DIFERENCIALES

Agustín Deméneghi Colina

En ocasiones se tiene la necesidad de apoyar una estructura de cimentación sobre un terreno de mediana compresibilidad, lo que conduce a la aparición de asentamientos diferenciales que pueden exceder el asentamiento permisible para la estructura. Si éste es el caso, se requiere acrecentar la rigidez de la subestructura, hasta que la magnitud del hundimiento diferencial quede por abajo del límite tolerable.

El problema anterior se resuelve llevando a cabo análisis de interacción suelo-estructura, aumentando la rigidez de ésta hasta que el asentamiento diferencial resulte menor que el límite permisible.

Para determinar el posible daño en una estructura se emplea el concepto de distorsión angular, la cual se define como el asentamiento diferencial entre dos puntos, dividido entre la distancia horizontal entre ellos. Para el caso de muros de mampostería de tabique, la distorsión angular tolerable varía desde 0.0005 hasta 0.003 [véase por ejemplo Sowers (1962), Bjerrum (1963), Lambe y Whitman (1969)]. En este artículo tomaremos un valor de la distorsión angular permisible de 0.002.

Tomemos el ejemplo de la fig 1, el cual es representativo de una obra que transmite su carga a la subestructura mediante columnas, y establezcamos una distorsión angular tolerable  $\theta_{perm} = 0.002$  en el tramo AB. Haciendo un análisis de interacción suelo-estructura llegamos a que con un momento de inercia de la estructura de cimentación  $I = 0.00935 \text{ m}^4$  se cumple con  $\theta_{perm}$ . Las reacciones y los asentamientos del terreno se muestran en la fig 2, mientras que los diagramas de momento flexionante y fuerza cortante se exhiben en la fig 3. Con estos resultados se puede hacer el diseño estructural de la zapata de la fig 1, con lo que se garantiza que no habrá daños por asentamientos diferenciales de la cimentación.

Consideremos ahora la estructura de la fig 4, la cual sería el ejemplo de una obra que transmite su peso a base de un muro de carga, y establezcamos la misma distorsión permisible  $\theta_{perm} = 0.002$  en el tramo AB. Mediante un análisis de interacción suelo-estructura, determinamos que el momento de inercia de la estructura de cimentación debe ser  $I = 0.0222 \text{ m}^4$ . En este caso particular notamos que cuando la carga es repartida (estructura con muro de carga) se necesita una rigidez mayor de la subestructura -para reducir asentamientos diferenciales- que cuando las cargas son concentradas (estructura a base de columnas). En la fig 5 se exhiben las magnitudes de reacciones y asentamientos del terreno, mientras que en la fig 6 se muestran los diagramas de momento flexionante y fuerza cortante, con los cuales se puede hacer el diseño estructural de la zapata de la fig 4. Con este criterio se pretende prevenir que no se presenten daños por hundimientos diferenciales.

Con el propósito de reducir los asentamientos diferenciales, se puede hacer una estimación aproximada de la rigidez de la infraestructura, haciendo uso del concepto de rigidez relativa  $K_r$  de la cimentación (Brown, 1974; Meyerhof, 1979), la cual se define de la siguiente forma

$$K_r = \frac{[(1 - \nu_s)^2 E I']}{[(1 - \nu^2) E_s B^3]} \quad (1)$$

donde

$\nu$  = relación de Poisson de la subestructura  
 $E$  = módulo de deformación de la subestructura  
 $I'$  = momento de inercia de la subestructura por unidad de ancho

$$I' = I/B \quad (2)$$

$I$  = momento de inercia de la contratrabes de cimentación  
 $\nu_s$  = relación de Poisson del terreno de cimentación

Profesor del Departamento de Geotecnia, División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica, Facultad de Ingeniería, UNAM

$E_s$  = módulo de deformación del terreno de cimentación  
 $B$  = ancho del cimiento

Consideremos el cimiento como sometido a las cargas concentradas indicadas en la fig 7. Sea  $q' = \Sigma Q/(3L) = 6Q/(3L) = 2Q/L$  = carga por unidad de longitud del cimiento. En la fig 8 se muestra la variación aproximada de  $K_r$  con  $q'$ , mientras que en la fig 9 se exhibe la variación del máximo momento flexionante en función de la misma  $q'$ . Ambas gráficas están obtenidas para que se alcance una distorsión angular permisible de 0.005. El máximo valor absoluto de la fuerza cortante es aproximadamente igual a  $Q$ .

En la fig 8 apreciamos que la rigidez relativa, para no sobrepasar un cierto valor de la distorsión angular, es función de las cargas de la estructura, pero depende además de la rigidez del terreno de cimentación: a medida que aumenta ésta se requiere mucho menos rigidez de la estructura para satisfacer los requisitos de hundimiento diferencial permisible. De la misma forma, el momento flexionante máximo (fig 9) disminuye al aumentar la rigidez del terreno, aun cuando su variación es mucho menos sensible que la variación de  $K_r$ .

Sea la estructura mostrada en la fig 10, sometida a una carga repartida  $w$ . En este caso  $q' = \Sigma Q/(3L) = w(3L)/(3L) = w$ . La fig 11 contiene la magnitud aproximada de  $K_r$  en función de  $q'$ , mientras que las figs 12 y 13 muestran las magnitudes del máximo momento flexionante y de la máxima fuerza cortante en la estructura de cimentación, respectivamente. Las gráficas están obtenidas para que se alcance una distorsión angular igual a 0.002.

De la misma forma, para carga repartida la rigidez necesaria de la estructura de cimentación para que no haya asentamientos diferenciales excesivos es función de la carga de la estructura (fig 11), pero también depende en forma importante de la rigidez del terreno de cimentación cuando ésta aumenta la rigidez necesaria de la subestructura disminuye apreciablemente. Un fenómeno similar ocurre con el máximo momento flexionante y con la máxima fuerza cortante, como se puede apreciar en las figs 12 y 13.

Las gráficas de las figs 8 y 9 se usan de la siguiente forma dada la estructura y el terreno

de cimentación de la fig 7, se obtiene la carga repartida por unidad de longitud  $q'$ . Con este valor se entra a la fig 8 y se halla la rigidez relativa  $K_r$ ; el momento de inercia de la subestructura se determina despejándolo de la ec 1

$$I = [K_r (1 - v_s^2) E_s B^3] / [(1 - v_s^2) E] \quad (3)$$

El momento de inercia de la contratrabe se obtiene con la ec 2

$$I = I' B \quad (4)$$

Conocido  $I$ , el peralte  $h$  de un cimiento de sección rectangular de ancho  $b$  vale

$$h = \sqrt[3]{12 I / b} \quad (5)$$

El máximo momento flexionante se obtiene con la fig 9, y la máxima fuerza cortante vale aproximadamente

$$V_{max} \approx Q \quad (6)$$

El uso de las figs 11, 12 y 13 es similar al de las figs 8 y 9.

**Ejemplo**

Una estructura a base de columnas tiene las características indicadas en la fig 7:

En la estructura:  $Q = 30$  t,  $\Sigma Q = 180$  t; claro entre columnas  $L = 4$  m;  $q' = 180/12 = 15$  t/m;  $E = 1,130,000$  t/m<sup>2</sup>;  $v = 0.2$ ; ancho =  $B = 2$  m. En el terreno de cimentación:  $E_s = 800$  t/m<sup>2</sup>;  $v_s = 0.25$ .

Obtener las dimensiones aproximadas de contratrabe de cimentación, el máximo momento flexionante y la máxima fuerza cortante, para que la distorsión angular sea 0.002.

**Solución**

$E_s/(1-v_s^2) = 800/(1-0.25^2) = 853.3$  t/m<sup>2</sup>. De la fig 8:  $K_r = 0.8$

Sustituyendo en la ec 3

$$I = [0.77(1-0.2^2)(800)(2^3)]/[(1-0.25^2)(1,130,000)] = 0.0046397 \text{ m}^3$$

Usando la ec 4

$$I = 0.0046397(2) = 0.0092794 \text{ m}^4$$

Reemplazando en la ec 5 con  $b = 0.2$  m

$$h = \sqrt[3]{12(0.0092794)/0.2} = 0.823 \text{ m}$$

De la fig 9, con  $E_s/(1-v_s^2) = 853.3$  t/m<sup>2</sup>.  $M_{max} = 25.5$  t m

Usando la ec 6

$$V_{max} \approx Q = 30 \text{ t}$$

### Ejemplo

Una estructura transmite a través de un muro una carga de 15 t/m al nivel de desplante del cimiento. Subestructura y terreno tienen las siguientes características (fig 10):

En la subestructura.  $q' = 15$  t/m; longitud total = 12 m.  $L = 4$  m (fig 10);  $E = 1,130,000$  t/m<sup>2</sup>;  $\nu = 0.2$ ; ancho =  $B = 2$  m

En el terreno de cimentación.  $E_s = 800$  t/m<sup>2</sup>;  $\nu_s = 0.25$

Obtener las dimensiones aproximadas de la contratrabe de cimentación, el máximo momento flexionante y la máxima fuerza cortante, para que la distorsión angular sea 0.002.

### Solución

$$E_s/(1-\nu_s^2) = 800/(1-0.25^2) = 853.3 \text{ t/m}^2$$

De la fig 11:  $K_r = 1.8$

Sustituyendo en la ec 3

$$I' = [1.8(1-0.2^2)(800)(2^3)]/[(1-0.25^2)(1,130,000)] = 0.0104393 \text{ m}^3$$

Usando la ec 4

$$I = 0.0104393(2) = 0.0208787 \text{ m}^4$$

Reemplazando en la ec 5 con  $b = 0.3$  m

$$h = \sqrt[3]{12(0.0208787)/0.3} = 0.9^2 \text{ m}$$

De la fig 12. con  $E_s/(1-\nu_s^2) = 853.3$  t/m<sup>2</sup>

$$M_{\max} = 14.2 \text{ t.m}$$

De la fig 13. con  $E_s/(1-\nu_s^2) = 853.3$  t/m<sup>2</sup>

$$V_{\max} = 4.8 \text{ t}$$

Como conclusión de lo tratado en los párrafos anteriores observamos que mediante análisis de interacción suelo-estructura se puede obtener la rigidez del cimiento tal que no se sobrepase una distorsión angular permisible

Para los ejemplos presentados en este artículo, la rigidez relativa, para no sobrepasar un cierto valor de la distorsión angular, es función de las cargas de la estructura, pero depende además de la rigidez del terreno de cimentación, a medida que aumenta ésta se requiere mucho menos rigidez de la estructura para satisfacer los requisitos de hundimiento diferencial permisible. De la misma forma, los elementos mecánicos disminuyen al aumentar la rigidez del terreno. Por ejemplo, en una infraestructura sujeta a cargas concentradas, para la geometría de la fig 8, para  $q' = 20$  t/m (fig 9), en el intervalo  $500 < E_s/(1-\nu_s^2) < 1200$  t/m<sup>2</sup>, el máximo momento flexionante varía de 42 a 34 t.m, con una reducción de 19%

Sin embargo, las conclusiones anteriores son válidas para los rangos de variación de la

rigidez del terreno y del nivel de cargas indicados en las figs 8, 9, 11, 12 y 13, y no conviene extrapolarlos para otras condiciones.

Otro aspecto interesante de la interacción suelo-estructura ocurre cuando la rigidez del terreno es alta comparada con el nivel de cargas transmitido al terreno. Ilustremos este fenómeno con el ejemplo de la fig 14. En la fig 15 se muestran los diagramas de reacción y de asentamientos del terreno, mientras que en la fig 16 se exhiben los diagramas de momento flexionante y fuerza cortante a lo largo de la estructura de cimentación. Observamos en la fig 15 que en un tramo la reacción del suelo vuelve cero, lo que indica que en este sitio el terreno no trabaja. Esto implica que se prefiere el uso de una zapata aislada, o, si por razones constructivas se utiliza un cimiento corrido, el diseño de éste se podrá llevar a cabo con los resultados de la interacción suelo-estructura.

Por ejemplo, para la zapata corrida de la fig 14, el máximo momento vale  $M = 22.4$  t.m (fig 16). Suponiendo una contratrabe de 0.5 m de peralte efectivo (fig 17), la fuerza cortante en cada sección crítica vale

$$V = [80 - 35.165(1.5)]/2 = 13.63 \text{ t}$$

Con las magnitudes de  $M$  y  $V$  se puede hacer el diseño estructural de la contratrabe de la zapata corrida.

Por otra parte, podemos comparar el máximo momento para diferentes rigideces del terreno. De la fig 12, para  $E_s/(1-\nu_s^2) = 500$  t/m<sup>2</sup>, el máximo momento resulta de 42 t.m, mientras que para la zapata de la fig 14, con  $E_s/(1-\nu_s^2) = 7500/(1-0.25^2) = 8000$  t/m<sup>2</sup>, el máximo momento es 22.4 t.m. La reducción es de 47%.

Con el propósito de ilustrar algunos aspectos de la interacción suelo-estructura relacionados con los asentamientos diferenciales, hemos expuesto ejemplos con cierta geometría y cierto sistema de cargas, como los de las figs 7, 10 y 14. Es obvio que las conclusiones que hemos presentado son válidas únicamente para dichos ejemplos, y no se pueden extrapolar otras condiciones. Por lo tanto, es recomendable que se hagan análisis de interacción para cada estructura y terrenos específicos, para diseñar subestructuras que cumplan con los requisitos

de seguridad, pero que su costo a su vez sea razonable.

Ciudad Universitaria, D F, septiembre de 2002

#### *Referencias*

Bjerrum, L. Discussion to European Conf Soil Mech Found Eng (Wiesbaden), vol II: 135, 1963

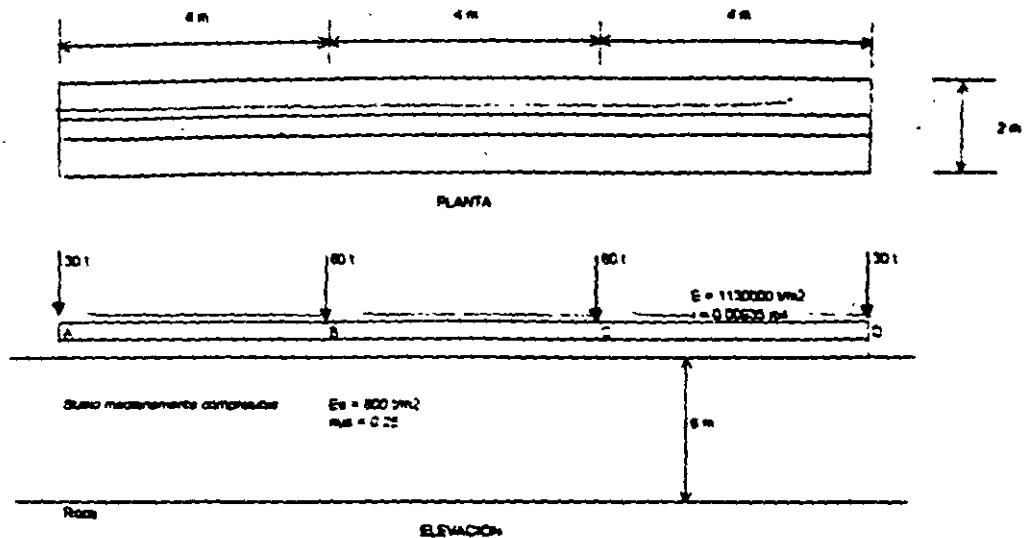
Brown, P T, "Influence of soil inhomogeneity on raft behavior", Soils and Foundations, Japan, vol 14: 61-70, 1974

Lambe, T W y Whitman, R V. *Soil Mechanics*. Wiley, 1969

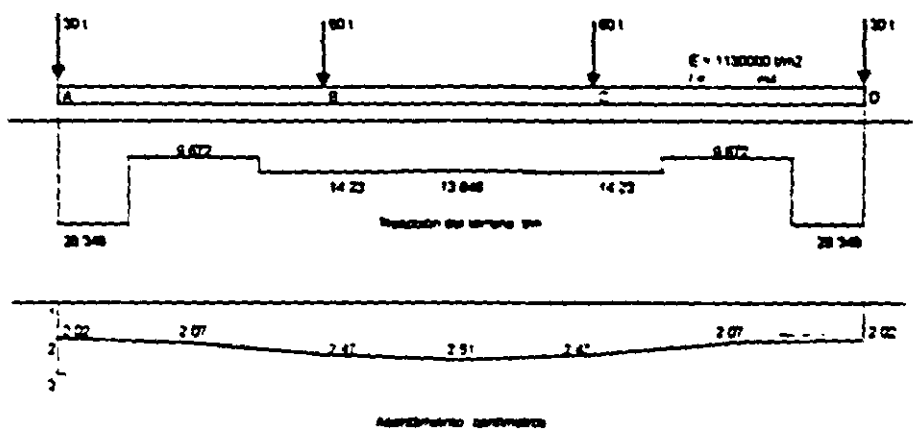
Meyershof, G G. Soil-structure interaction and foundations, General Report, Memorias VI Congr Panamericano Mec Suelos Ing Ciment, vol I: 109-140, Lima, 1979

Sowers G F, "Shallow foundations", cap 6 de *Foundation Engineering*, ed por G A Leonards, McGraw-Hill, 1962

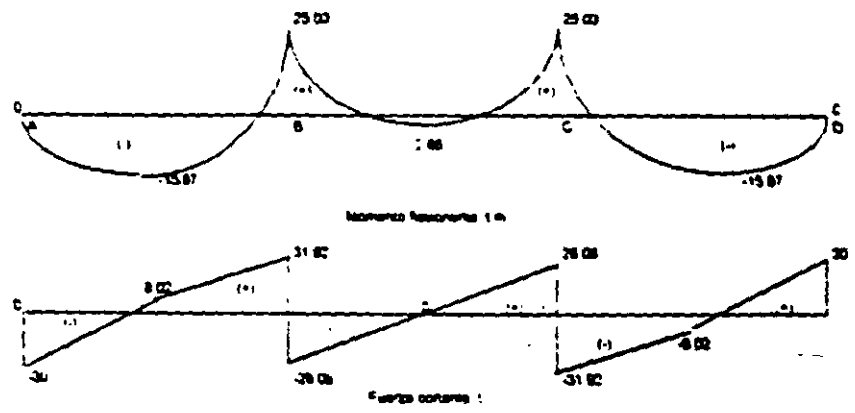
(Isekr9 Isekr62 Isekr81 Isekr93 Isekr94 Isekr96)



CARACTERISTICAS DE ESTRUCTURA Y  
TERRENO DE OBRERACION  
CARGAS CONCENTRADAS  
FIGURA 1

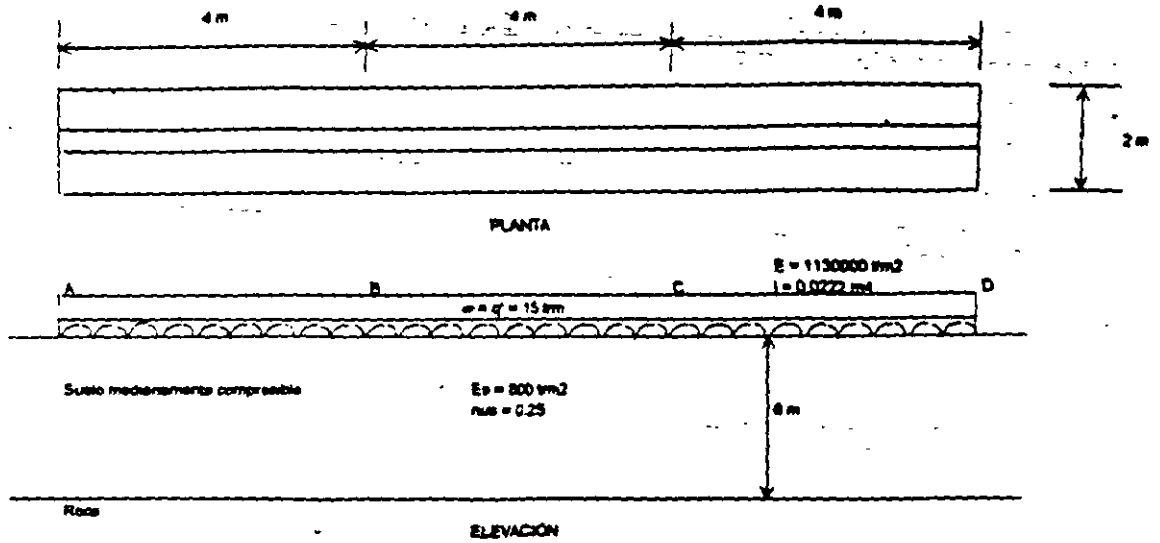


RELACIONES Y ASIENTAMIENTOS DEL TERRENO  
CARGAS CONCENTRADAS  
FIGURA 2

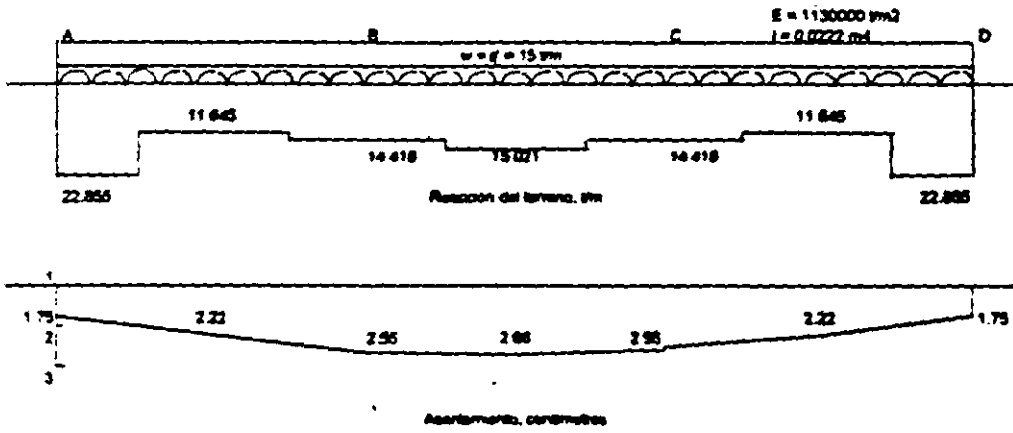


DIAGRAMAS DE MOMENTO FLEXIONANTE Y FUERZA CORTANTE  
CARGAS CONCENTRADAS  
FIGURA 3

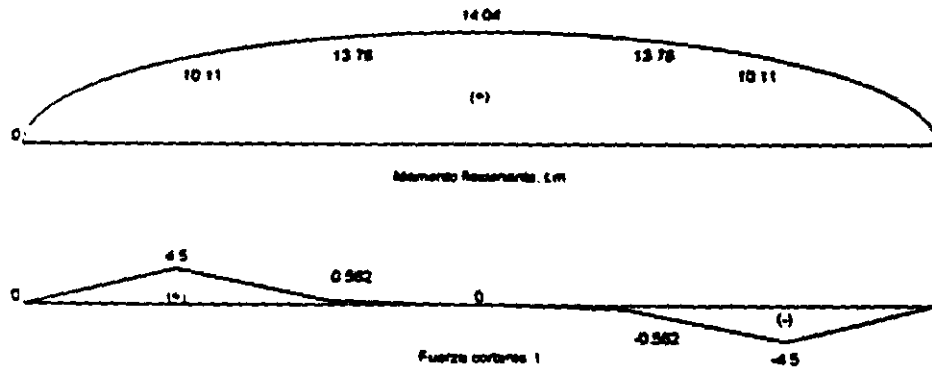
(continúa)



CARACTERÍSTICAS DE ESTRUCTURA Y  
 TERRENO DE CIMENTACION  
 CARGA REPARTIDA  
 FIGURA 4

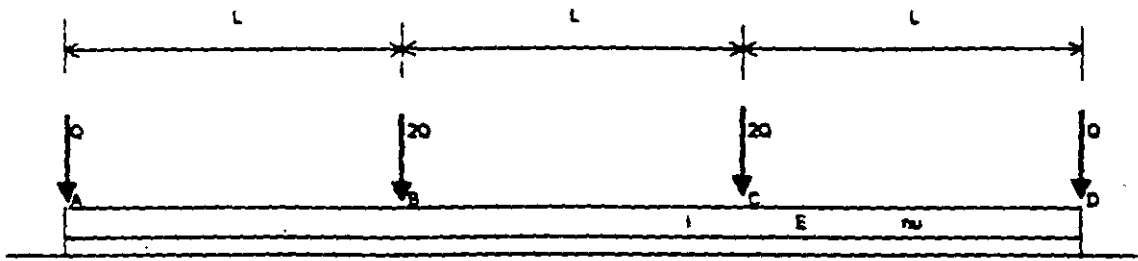


REACCIONES Y ASENTAMIENTOS DEL TERRENO  
 CARGA REPARTIDA  
 FIGURA 5



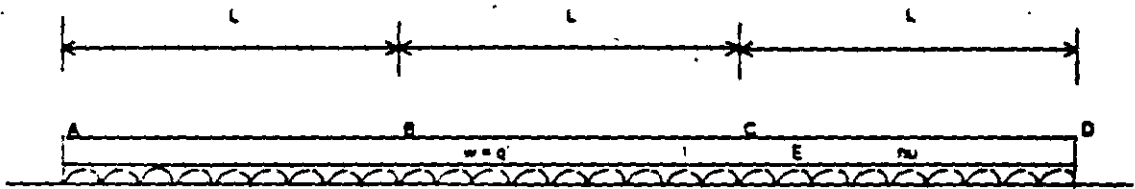
DIAGRAMAS DE MOMENTO FLEXIONANTE Y FUERZA CORTANTE  
 CARGA REPARTIDA  
 FIGURA 6

(Instituto)



Es  
 $3L$

CARGAS CONCENTRADAS  
 FIGURA 7



Es  
 $3L$

CARGA REPARTIDA  
 FIGURA 10

(1000/52)



# RIGIDEZ RELATIVA $K_r$ , $L = 4$ m

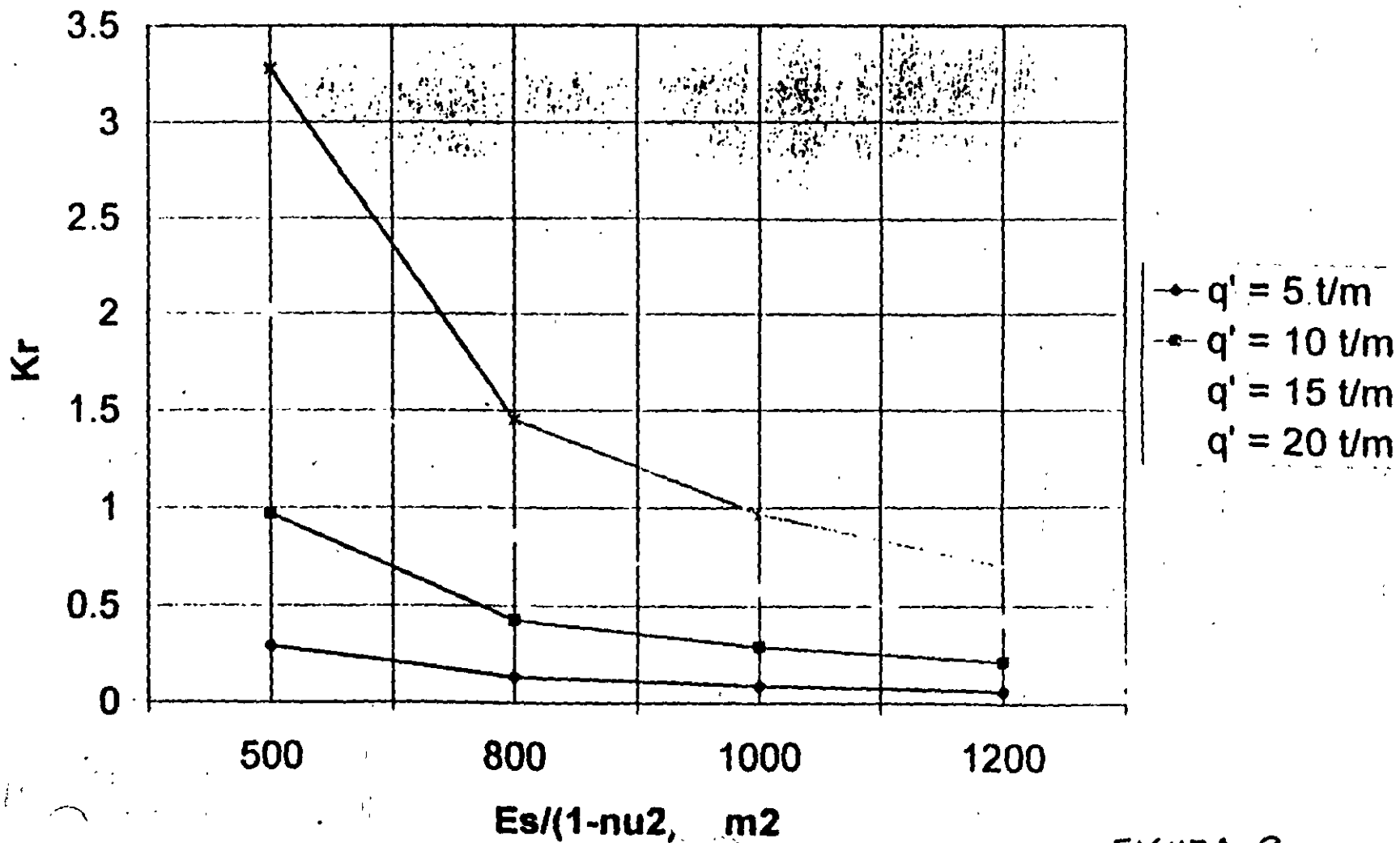


FIGURA 2

# MOMENTO FLEXIONANTE MÁXIMO, L = 4 m. CARGAS CONCENTRADAS

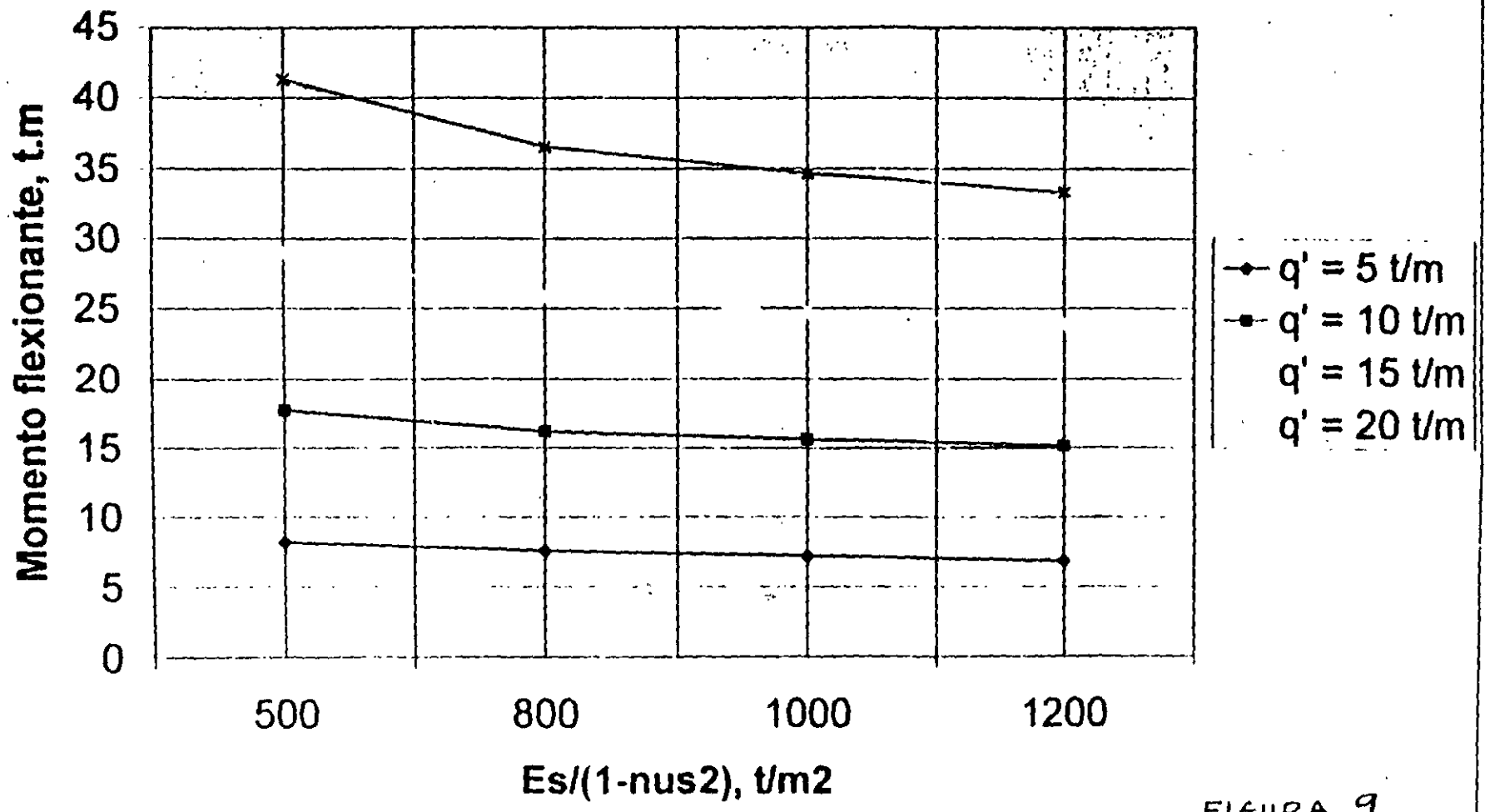
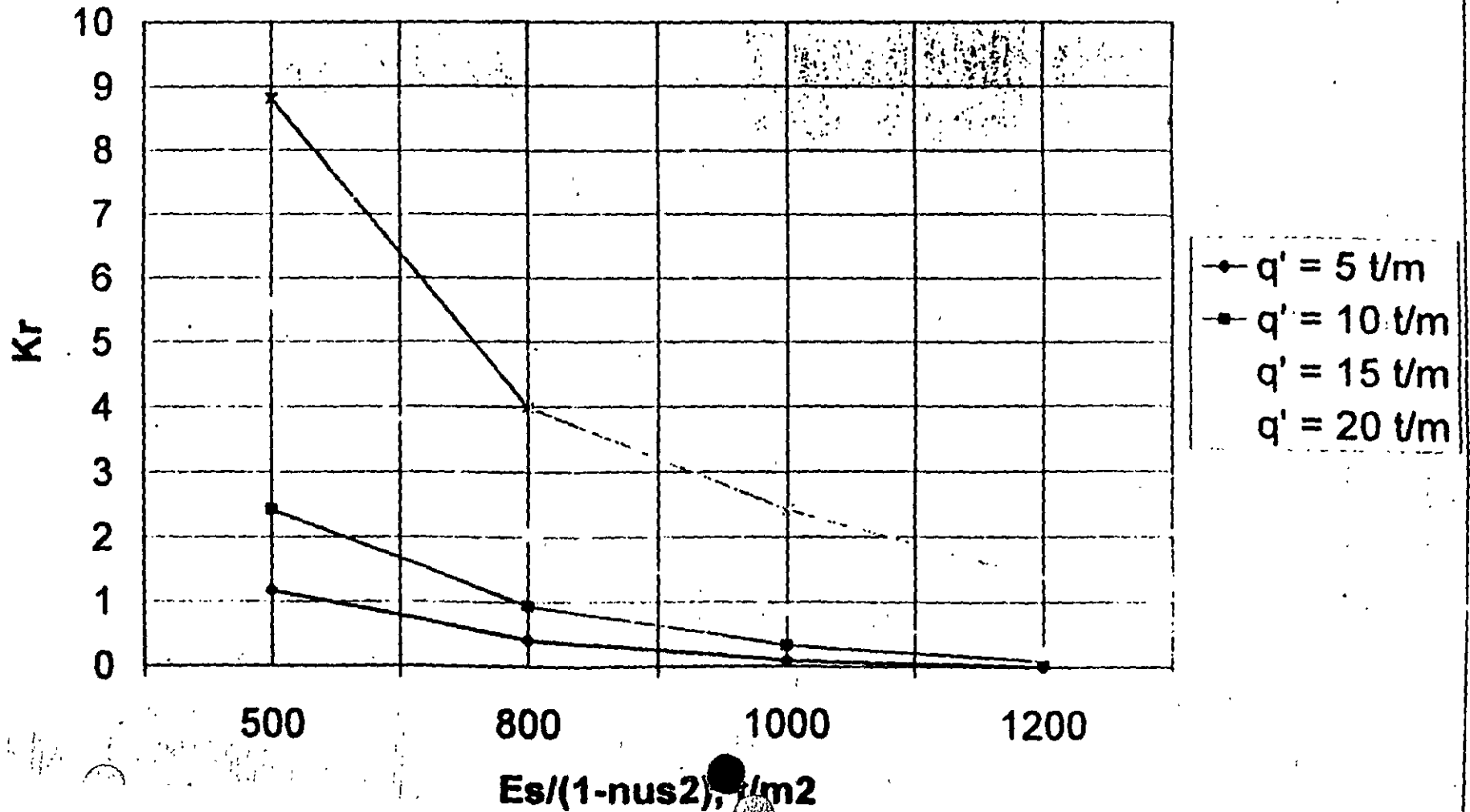


FIGURA 9

# RIGIDEZ RELATIVA $K_r$ , $L = 4$ m. CARGA REPARTIDA



FIGURA

# MOMENTO FLEXIONANTE MÁXIMO, $L = 4$ m. CARGA REPARTIDA

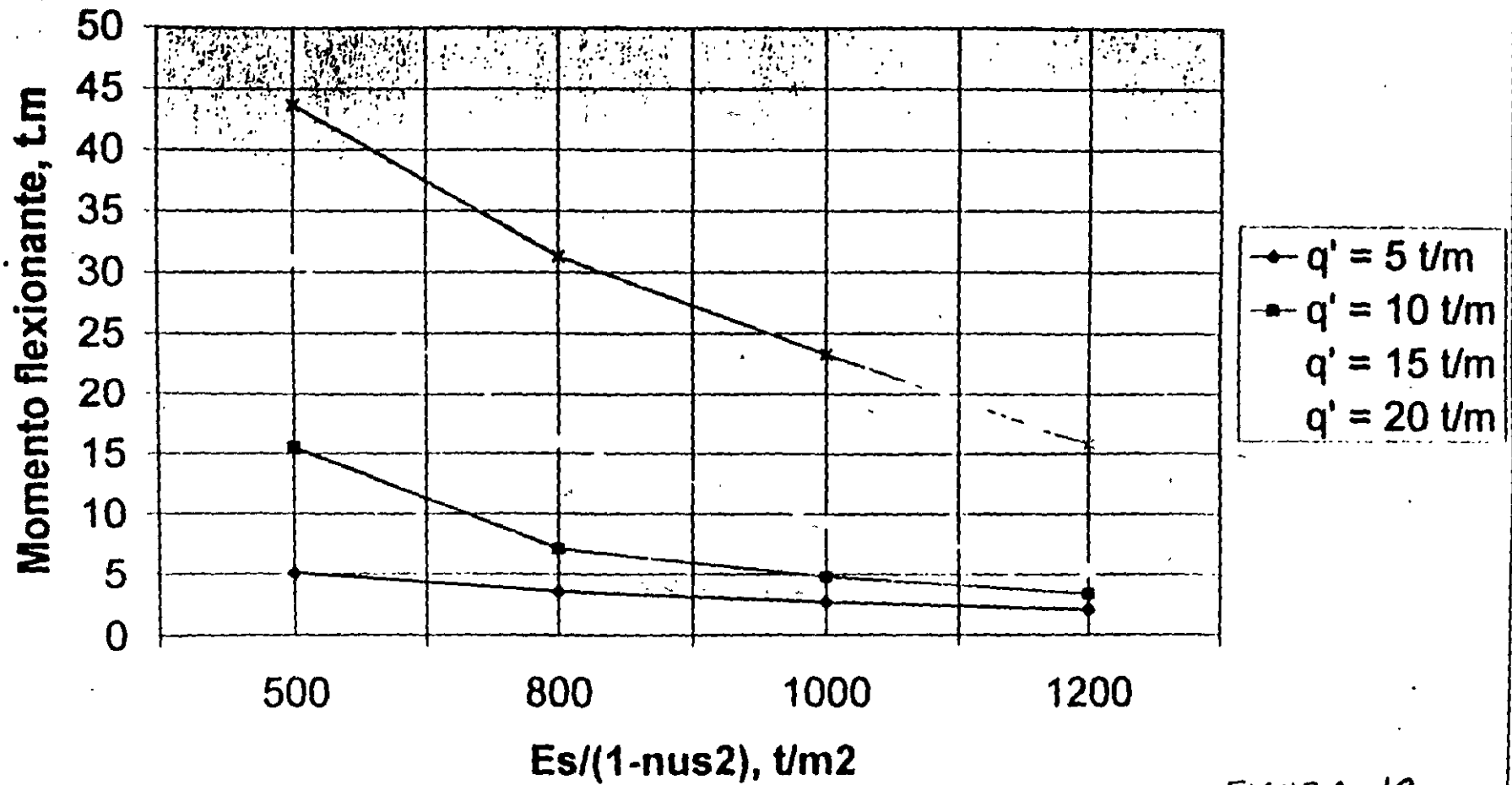


FIGURA 12

# FUERZA CORTANTE MÁXIMA, $L = 4$ m. CARGA REPARTIDA

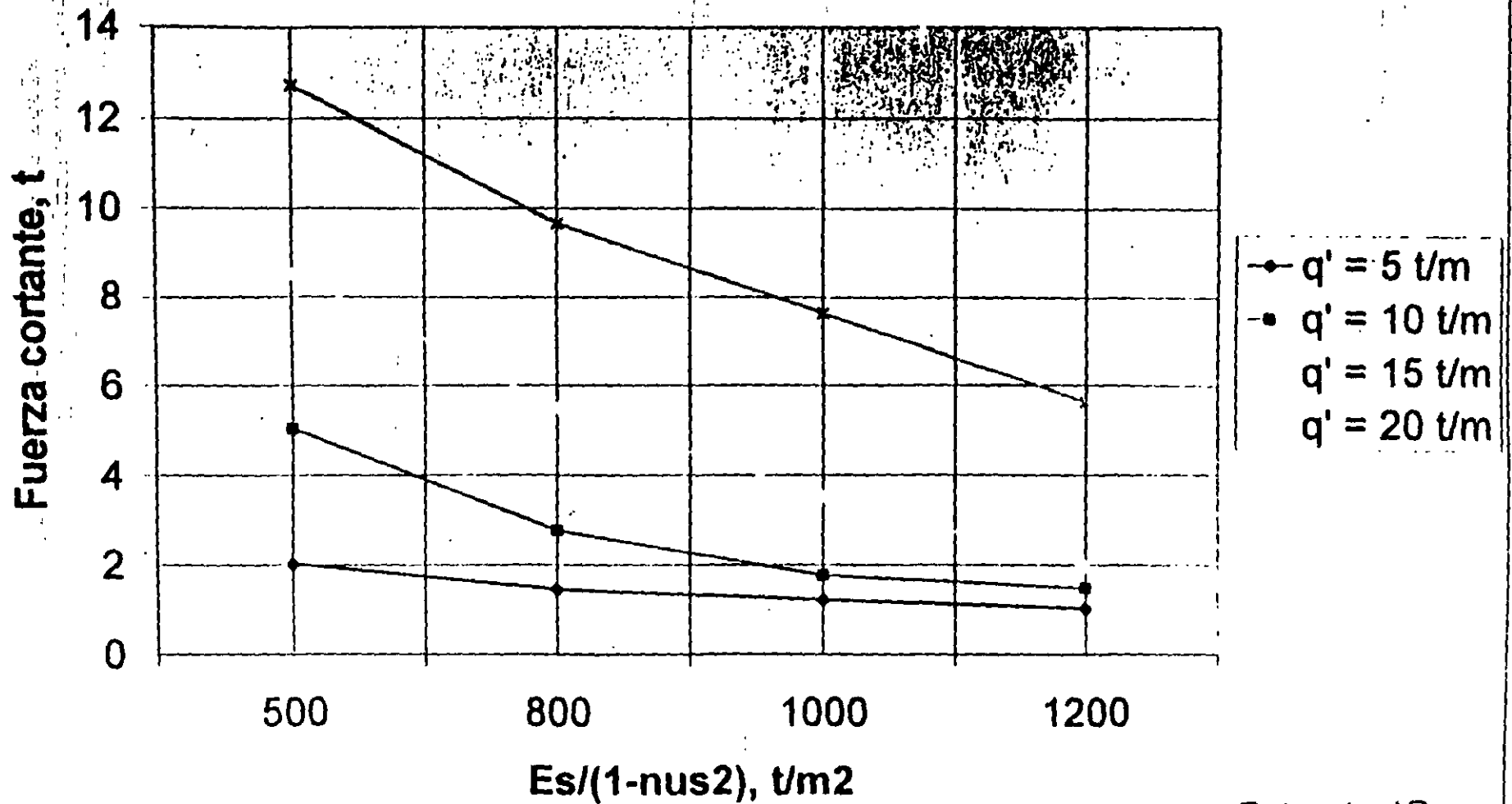
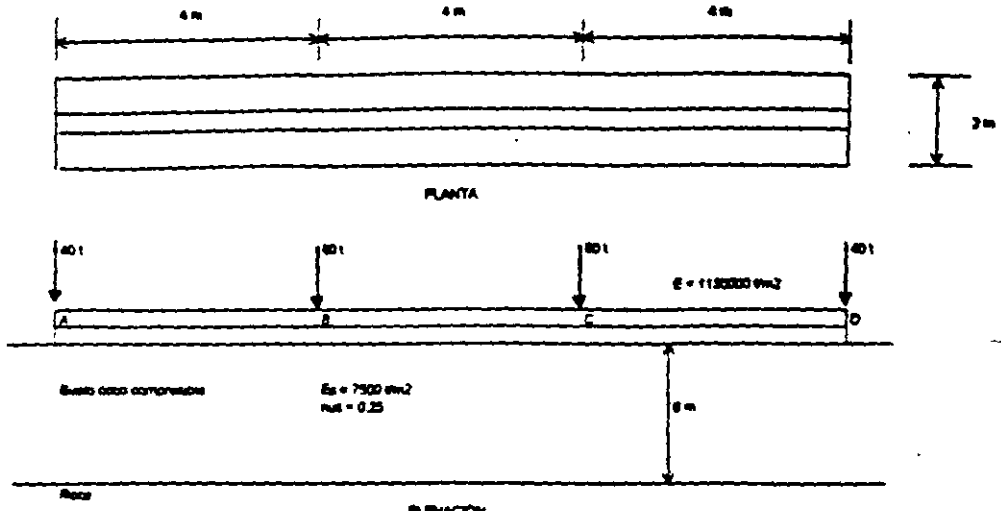
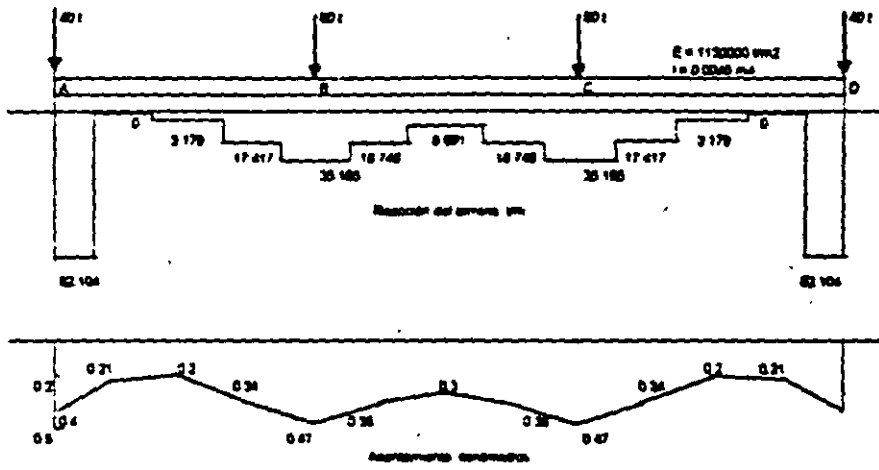


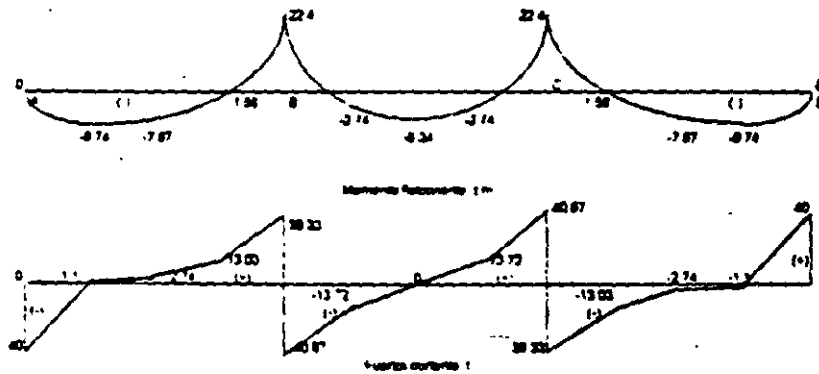
FIGURA 13



CARACTERÍSTICAS DE ESTRUCTURA Y TERRENO DE CIMENTACIÓN CARGAS CONCENTRADAS FIGURA 14

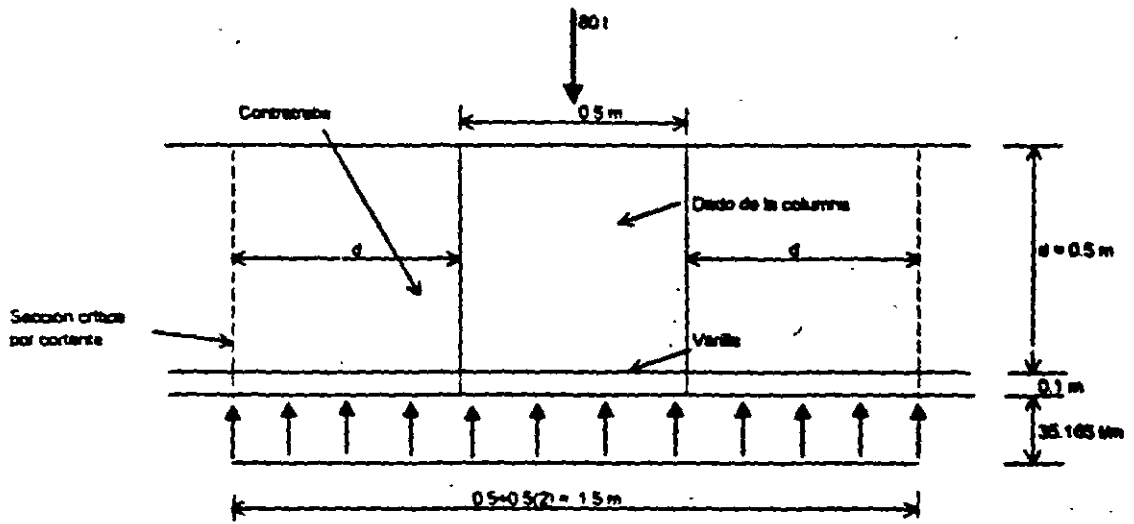


REACCIONES Y ASENTAMIENTOS DEL TERRENO CARGAS CONCENTRADAS FIGURA 15



DIAGRAMAS DE MOMENTO FLEXIONANTE Y FUERZA CORTANTE CARGAS CONCENTRADAS FIGURA 16

(Cont.)

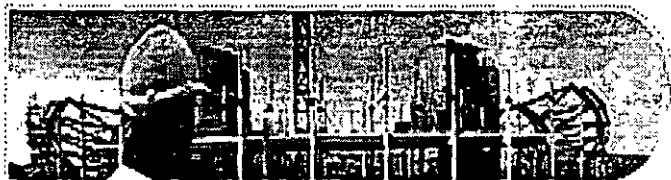


UBICACIÓN DE LA SECCIÓN CRÍTICA  
FIGURA 17

(sección 62)



FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA



...: Ingeniería de Civil

# CURSOS ABIERTOS

## ANÁLISIS ESTRUCTURAL CA 467

TEMA

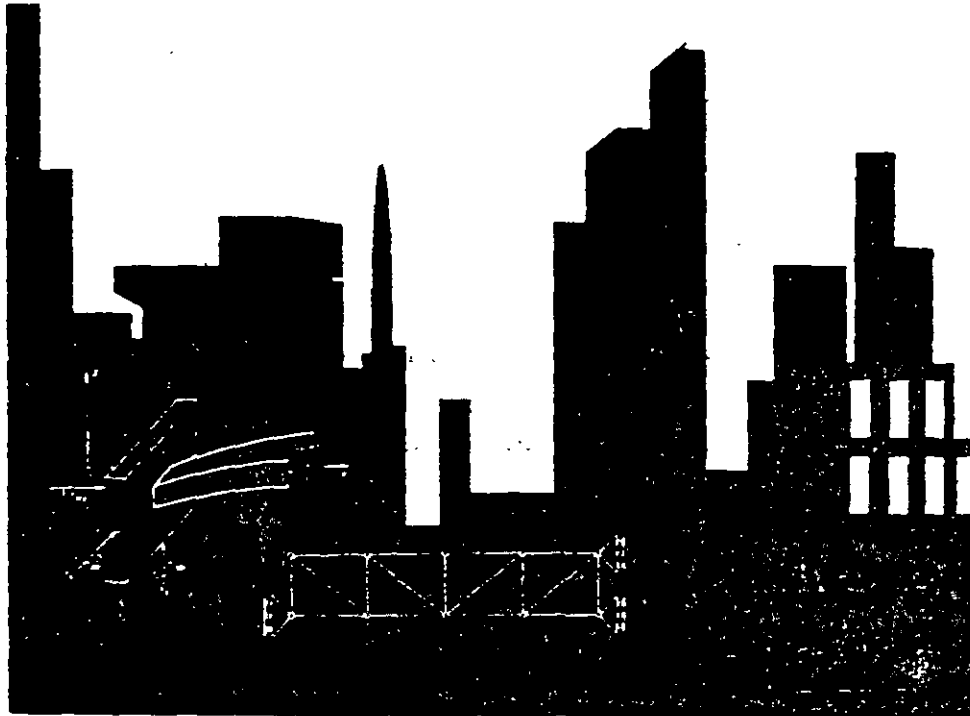
APUNTES DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL

**EXPOSITOR: ING. IGNACIO E. HERNÁNDEZ RUIZ  
DEL 27 DE JUNIO AL 01 DE JULIO DE 2005  
PALACIO DE MINERÍA**



# Apuntes de la ENEP ARAGON

44



## *Apuntes de Análisis Estructural I*

RODOLFO LÓPEZ RUELAS

JULIO 1993



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES ARAGON



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**Dr. José Sarukhán**

*Rector*

**Dr. Francisco Barnés de Castro**

*Secretario General*

**Dr. Salvador Malo Alvarez**

*Secretario Administrativo*

**Dr. Roberto Castañón Romo**

*Secretario de Servicios Académicos*

**Lic. Rafael Cordera Campos**

*Secretario de Asuntos Estudiantiles*

**Lic. Fernando Serrano Migallón**

*Abogado General*



ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES ARAGON

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES ARAGON

**M. en I. Claudio C. Merrifield Castro**

*Director*

**Lic. Guillermina Sánchez Hinojosa**

*Secretaria General*

**C.P. Armando Ramírez Manjarrez**

*Secretario Administrativo*

**Lic. Victoria Alicia Avila Ceniceros**

*Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Inv.*

**Ing. Jorge F. Paniagua Ballinas**

*Jefe de la División de Humanidades y Ciencias Básicas*

**Mtro. Fernando Pineda Navarro**

*Jefe de la División de Ciencias Sociales*

**Lic. Alberto Ibarra Rosas**

*Jefe de la Unidad Académica*

**Arq. Lilia Turcott González**

*Jefe de la Unidad de Planeación*

**Lic. Emilio Aguilar Rodríguez**

*Jefe de la Unidad de Extensión Universitaria*

## P R O L O G O

El principal objetivo de estos apuntes de la materia de Análisis Estructural I, es el de poder contribuir como fuente bibliográfica en el curso impartido, ya que actualmente no existe un libro que cubra satisfactoriamente los temas señalados en el programa.

Queriendo dar una respuesta al estudiante de Ingeniería Civil en el Área de Estructuras, se tomó la decisión de elaborar un trabajo que permita contemplar todos los temas, así como una serie de ejemplos ilustrativos como vigas, armaduras y marcos rígidos, se dió especial interés a este último punto, para reforzar los conocimientos adquiridos.

El desarrollo inicia con la definición de los conceptos básicos del Análisis Estructural, proporciona los criterios fundamentales para estabilidad y linealidad de las estructuras; se exponen los conceptos y teoremas básicos de trabajos y energía para obtener desplazamientos de Estructuras Isostáticas así como, algunos métodos aproximados para obtener elementos mecánicos en marcos sujetos a fuerzas laterales (sismo o viento).

Se continúa con el método de las "fuerzas o las flexibilidades" para obtener los elementos mecánicos y desplazamientos en estructuras hiperestáticas; se estudia el método de los "desplazamientos o las rigideces" también para la obtención de elementos mecánicos en estructuras de cualquier grado de hiperestaticidad. Aquí mismo se presentan dos métodos muy usuales: METODO DE CROSS Y METODO DE KANI, que resultan de gran importancia y utilidad en la práctica profesional. Es importante dominar los conocimientos básicos de esta materia, para lograr el uso de la computadora como herramienta, en la solución a estructuras indeterminadas.

Como se dijo inicialmente, el fin fue reunir una serie de información que sea de utilidad a la comunidad estudiantil de Ingeniería Civil, consideramos que este trabajo es susceptible de aceptar mejoras, hasta lograr un texto que satisfaga las necesidades de enseñanza.

Loable es reconocer el interés y tiempo, al ahora Ing. Rodolfo López Ruelas, porque estas notas lleguen finalmente a los interesados para lograr una mejor superación profesional.

ING. JOSE PAULO MEJORADA MOTA.

NOTA: Se agradecerá a profesores y alumnos, el comunicar las fallas y/u omisiones en que se haya incurrido en el presente texto, con el fin de llevar a cabo las correcciones que sean necesarias. Favor de hacerlo al autor.

# CONTENIDO

## CAPITULO 1 CONCEPTOS INTRODUCTORIOS

1.1.	Equilibrio entre fuerzas internas y externas	3
1.2.	Compatibilidad o congruencia de deformaciones	4
1.3.	Relación fuerza - desplazamiento	5

## CAPITULO 2 ESTABILIDAD Y GRADO DE INDETERMINACION

2.1.	Estabilidad	7
2.2.	Grado de indeterminación	9
2.3.	Criterios para el establecimiento de la estabilidad e indeterminación de las estructuras	10
2.3.1.	Vigas	10
2.3.2.	Marcos	11
2.3.3.	Armaduras	12

### CAPITULO 3 METODOS ENERGETICOS

3.1.	Introducción	15
3.2.	Trabajo y energía	15
3.2.1.	Energía de deformación en el caso de fuerza axial	18
3.2.2.	Energía de deformación en el caso de flexión	18
3.2.3.	Energía de deformación para fuerza cortante	19
3.2.4.	Energía de deformación debida al efecto de momento torsionante	21
3.3.	Principio de los desplazamientos virtuales	23
3.4.	Principio de trabajo virtual	24
3.5.	Teorema de Betti	25
3.6.	Teorema de Maxwell	27
3.7.	Teorema de Castigliano	27
3.7.1.	Primer teorema de Castigliano	28
3.7.2.	Segundo teorema de Castigliano	29
3.8.	Método del trabajo virtual	30
3.9.	Ejemplos de aplicación	33

### CAPITULO 4 METODOS APROXIMADOS

4.1.	Introducción	53
4.2.	Método de Bowman	55
4.3.	Método del Portal	58
4.4.	Método del Voladizo	59
4.5.	Método del Factor	60
4.6.	Ejemplos de aplicación	63

### CAPITULO 5 METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

5.1.	Introducción	79
5.2.	Análisis de vigas	81
5.3.	Solución particular y complementaria	82
5.4.	Cálculo de flexibilidades	83
5.5.	Análisis de armaduras	85

5.5.1.	Estructura isostática interiormente e hiperestática exteriormente	85
5.5.2.	Estructura hiperestática interiormente e isostática exteriormente	86
5.5.3.	Estructura hiperestática interior y exteriormente	86
5.6.	Ejemplos de aplicación	89

## CAPITULO 6 METODO DE LAS RIGIDECES

6.1.	Introducción	133
6.2.	Cálculo de momentos de empotramiento y rigideces	133
6.3.	Estructuras sin desplazamientos lineales	135
6.4.	Estructuras con desplazamientos lineales	136
6.5.	Ejemplos de aplicación	139

## CAPITULO 7 METODO DE CROSS

7.1.	Introducción	187
7.2.	Conceptos básicos	187
7.2.1.	Convención de signos para la designación de momentos	189
7.2.2.	Factor de distribución	189
7.2.3.	Factor de transporte	190
7.3.	Estructuras sin desplazamientos lineales	190
7.4.	Estructuras con desplazamientos lineales	193
7.5.	Ejemplos de aplicación	195

## CAPITULO 8 METODO MODIFICADO DE KANI

8.1.	Introducción	243
8.2.	Método de Kani	245
8.2.1.	Obtención de la ecuación del giro en un nudo	245

8.2.2.	Obtención de la ecuación del desplazamiento lineal de un piso	246
8.3.	Casos particulares	248
8.3.1.	Entrepiso con columnas de diferentes alturas	248
8.3.2.	Apoyos articulados	249
8.4.	Ejemplos de aplicación	253

## APENDICES

A	Uniones internas y externas más comúnmente utilizadas	291
B	Tabla de integración de diagramas de elementos mecánicos	292
C	Diagramas de vigas	293
D	Propiedades de secciones geométricas	296
E	Momentos de empotramiento en vigas prismáticas	299
F	Rigideces angulares y lineales para desplazamientos unitarios	300
G	Tabla de factores de conversión de unidades	301

## BIBLIOGRAFIA



# Símbolos y Abreviaturas

Los símbolos se definen donde aparecen. Aquí se da una relación de los más importantes. Se observará que algunos de ellos tienen varias definiciones según el contexto en que se emplean:

A	área de la sección transversal de un elemento.
C	energía complementaria de deformación; ecuación de - condición adicional para evaluar reacciones; columna, en el método de Cross.
CS	columna superior en el método de Cross.
CI	columna inferior en el método de Cross.
D	diámetro.
E	módulo de elasticidad; momento equilibrado en el mé- todo de Cross.
F	carga concentrada.
G	módulo de elasticidad al esfuerzo cortante.
I	momento de inercia del área transversal.
J	momento polar de inercia del área transversal.
K	rigidez relativa de elementos a flexión ( $I/L$ ); coeficien- te de rigidez utilizado en el método de los desplazamien- tos.
L	longitud; claro de una viga.
M	momento de una fuerza (o par); momento flexionante; - momento de empotramiento.

MF	momento final en el extremo de una barra en el método de Cross.
N	fuerza normal.
P	carga concentrada.
Q	momento estático (o primer momento) de una área.
R	reacción.
T	momento torsionante; momento transportado en el método de Cross.
TD	trabe derecha en el método de Cross.
TI	trabe izquierda en el método de Cross.
V	fuerza cortante.
$V_i$	fuerza cortante isostática en el método de Cross.
$V_h$	fuerza cortante hiperestática en el método de Cross.
VF	fuerza cortante final en el método de Cross.
W	energía o trabajo de deformación.
X	fuerza redundante utilizada en el método de flexibilidades.
$\bar{C}$	línea de centro.
a	dimensión de longitud.
b	dimensión de longitud; ancho de la sección transversal; número de barras en un marco o una armadura.
c	dimensión de longitud; factor de corrección en el método de Cross.
d	factor de distribución en el método de Cross.
f	coeficiente de flexibilidad en el método de las fuerzas.
h	altura de una viga; altura de un piso de un edificio.
n	grado de indeterminación de una estructura.
r	radio de giro; número de elementos de reacción independientes de un marco o una armadura; número de columnas en un entrepiso en el método de Kani.
t	espesor; factor de transporte en el método de Cross.
w	carga por unidad de longitud.
x, y	coordenadas rectangulares.
y	distancia desde el eje neutro.

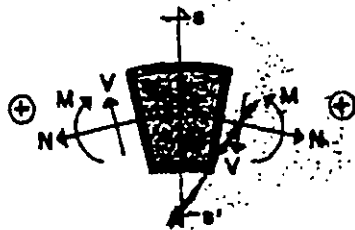
# Símbolos con Letras Griegas

$\gamma$	(gamma)	deformación angular por cortante.
$\Delta, \delta$	(delta)	desplazamiento lineal.
$\epsilon$	(épsilon)	deformación longitudinal unitaria.
$\theta$	(teta)	ángulo; giro de un nudo en los métodos de los desplazamientos y de Cross.
$\lambda$	(lambda)	ángulo torsional en radianes.
$\mu$	(mu)	factor de distribución angular en el método de Kani.
$\sigma$	(sigma)	esfuerzo normal (de tensión o de compresión).
	minúscula	
$\Sigma$	(sigma)	sumatoria.
	mayúscula	
$\tau$	(tau)	esfuerzo cortante.
$\nu$	(ipsilon)	factor de distribución lineal en el método de Kani.
$\phi$	(fi)	giro de nudo en el método de Kani.
$\psi$	(psi)	desplazamiento lateral de un entrepiso en el método de Kani.

# Notas generales

- Todas las dimensiones señaladas se encuentran dadas en metros, a menos que se especifique otra cosa.
- Con el término fuerzas se hace referencia tanto a fuerzas concentradas como a momentos y al mencionar desplazamientos se incluyen desplazamientos lineales y angulares.
- La convención de signos es que los momentos de flexión de nudo sobre barra son positivos cuando tienen el sentido de las manecillas de un reloj.
- Las unidades de los momentos son en ton.-m., excepto cuando se indique otra cosa.
- Las unidades de las fuerzas cortante y normal son en ton., excepto cuando se indique otra cosa.
- Los diagramas de los elementos mecánicos no están necesariamente a escala.
- La convención de signos utilizada en los diagramas de elementos mecánicos es como se indica enseguida:

a la izquierda  
de la sección



a la derecha  
de la sección

# Conceptos introdutorios

El propósito fundamental del Análisis Estructural es determinar en cada uno de los elementos de una estructura las acciones internas resultantes de la aplicación de las solicitaciones exteriores a la estructura total, así como también evaluar las deformaciones inducidas por dichas solicitaciones.

Para poder analizar una estructura es necesario idealizarla. Por ejemplo, -- idealización frecuente en el análisis de edificios es considerar la estructura formada por series de marcos planos en dos direcciones. De este modo se reduce el problema real tridimensional a uno de dos dimensiones. Se considera, además, -- que las propiedades mecánicas de los elementos en cada marco están concentradas a lo largo de sus ejes. Así, las solicitaciones se aplican sobre esta estructura idealizada.

Los aspectos que se toman en cuenta para el análisis estructural son los siguientes:

- Equilibrio entre fuerzas internas y externas.
- Compatibilidad o congruencia de deformaciones.
- Relación fuerza - desplazamiento.

## CONCEPTOS INTRODUCTORIOS

### 1.1 EQUILIBRIO ENTRE FUERZAS INTERNAS Y EXTERNAS

Al considerar una estructura sometida a la acción de un sistema de cargas externo, si la misma en su conjunto se encuentra en equilibrio, cualquier elemento que forme parte de la estructura lo estará de igual manera.

Como se mencionó anteriormente, para el análisis de estructuras se realizará considerando que éstas al igual que los sistemas de fuerzas actuantes se encuentran en el mismo plano, por lo que las ecuaciones requeridas para el equilibrio son:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M = 0$$

Para una mayor comprensión de lo antes expuesto, consideremos la estructura de la Fig. 1.1., de la que se ha aislado el nudo C, mostrándose el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la Fig. 1.2., en la misma se representan las fuerzas externas actuantes al igual que las acciones internas desarrolladas por la acción de las primeras en su conjunto.

Las fuerzas referidas anteriormente mantienen en equilibrio al nudo porque éste forma parte de una estructura que se encuentra en equilibrio, este equilibrio recibe el nombre de equilibrio nodal.

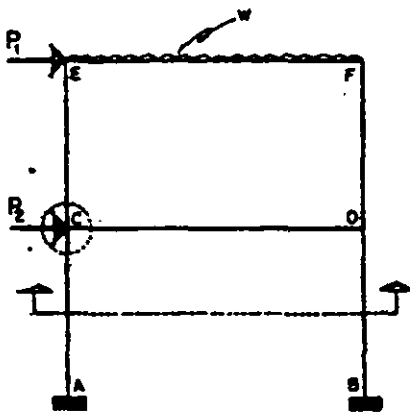


Fig. 1.1. Estructura en equilibrio.

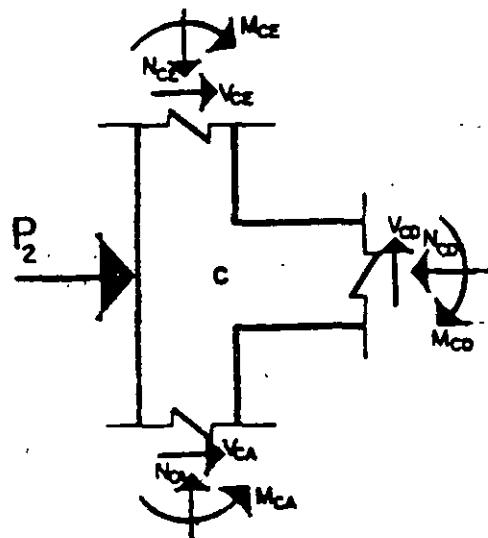


Fig. 1.2. Equilibrio nodal.

## CONCEPTOS INTRODUCTORIOS

De igual manera se hace el corte de entrepiso indicado en la Fig. 1.1., - la parte aislada por el corte deberá permanecer en equilibrio debido a que pertenece a una estructura que se encuentra en equilibrio, dicho sistema se conoce como equilibrio de entrepiso (Fig. 1.3)

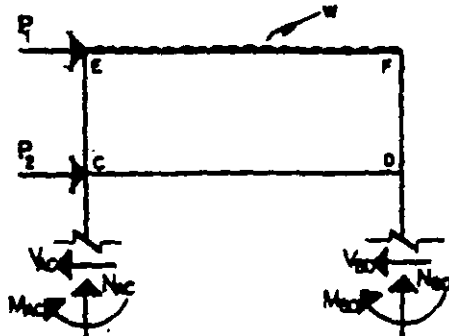


Fig. 1.3. Equilibrio de entrepiso.

De lo expresado anteriormente se puede concluir que las fuerzas aplicadas - exteriormente a un lado de un corte arbitrario tienen que estar en equilibrio con las fuerzas internas desarrolladas en la sección del corte, o sea las fuerzas externas son equilibradas por las fuerzas internas.

### 1.2. COMPATIBILIDAD O CONGRUENCIA DE DEFORMACIONES

Las solicitaciones deforman a una estructura dando lugar en las diferentes - partes que la componen, a rotaciones y desplazamientos lineales, pero siempre - conservando las condiciones de continuidad iniciales.

La compatibilidad expresa la necesidad de que todos los elementos de la estructura deformada permanezcan unidos entre si durante todas las etapas de carga.

Los desplazamientos finales en la estructura serán congruentes con los grados de libertad que tienen los diferentes tipos de uniones exteriores e interiores.

En general, se denomina unión a los elementos que constituyen la liga de - una barra con otra barra del mismo sistema, o del sistema tierra. Su función es

## CONCEPTOS INTRODUCTORIOS

restringir algunos o todos los desplazamientos entre los elementos que une.

Como grado de libertad de un punto, de una recta o de un cuerpo, se define el número de posibilidades de desplazamientos independientes que tienen, sean lineales o angulares.

Si hacemos referencia a la fig. 1.4., el marco sufre la deformación mostrada en la misma, en donde los nudos C y D sufren dos desplazamientos lineales - así como el giro de los mismos. Por otro lado, el apoyo A tiene restringidos toda clase de desplazamientos, tanto lineales como angulares.

Sin embargo, el apoyo B permite el giro, más impide los desplazamientos lineales.

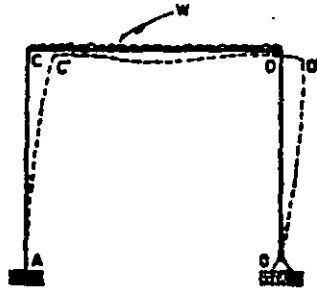


Fig. 1.4. Congruencia de deformaciones.

### 1.3. RELACION FUERZA - DESPLAZAMIENTO

Cuando una estructura tiene uniones superabundantes para su estabilidad, se denomina hiperestática y el problema de su equilibrio puede resolverse considerando la elasticidad del material empleado, es decir su deformabilidad.

De acuerdo a lo anterior es necesario conocer la relación entre fuerza y desplazamiento, para lo cual existen dos teorías: la elástica y la plástica. En la teoría elástica se supone que las fuerzas son proporcionales a los desplazamientos es decir, existe una relación lineal (Fig. 1.5.) Debido a que casi todos los mate-



## CONCEPTOS INTRODUCTORIOS

riales utilizados en Ingeniería tales como el acero, concreto, madera, etc., cumplen el requisito de elasticidad lineal (Ley de Hooke) se puede aplicar el principio fundamental en el análisis de estructuras indeterminadas, dicho principio es el de la superposición de causas y efectos, que establece:

"El efecto producido por varias fuerzas\* que actúan simultáneamente sobre una estructura, es igual a la suma de los efectos producidos por las fuerzas\* aisladas suponiendo que actúan separadamente".

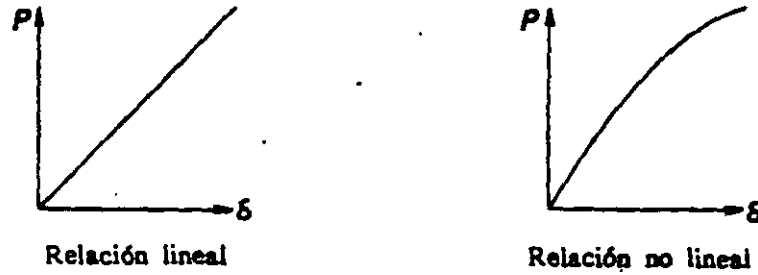


Fig. 1.5.

\* Con el término fuerzas se hace referencia tanto a fuerzas como a momentos y al mencionar desplazamientos se incluyen desplazamientos lineales y angulares.

# Estabilidad y grado de indeterminación

## 2.1. ESTABILIDAD

Una estructura es estable cuando al encontrarse bajo cualquier sistema concebible de cargas, resiste estas cargas elástica e inmediatamente a su aplicación, considerando la resistencia de todos los miembros y la capacidad de todos los soportes, infinita.

Las condiciones de estabilidad de un sistema estructural cualquiera tienen por objeto lograr, empleando uniones externas e internas, la estabilidad externa e interna de la estructura, es decir, conseguir que ambos tipos de estabilidad se presenten simultáneamente.

Esto equivale a evitar, en un determinado elemento, los desplazamientos relativos (lineales y angulares) con respecto a los demás elementos de la estructura, y los desplazamientos (lineales y angulares) con respecto al sistema fijo, llamado tierra.

Un sistema estructural cualquiera, asociado al sistema tierra, es estable exteriormente, si todos los grados de libertad de cualquiera de sus elementos se encuentran restringidos.

## ESTABILIDAD Y GRADO DE INDETERMINACION

Por otra parte, una estructura cualquiera es estable internamente si todos los desplazamientos relativos (lineales y angulares) de elementos de la estructura se encuentran restringidos.

Para fijar una estructura bidimensional, es necesario evitar tres desplazamientos, o sea, restringir tres grados de libertad (desplazamientos vertical y horizontal y el giro). Para ésto son necesarias y suficientes tres componentes de reacción que no sean ni concurrentes ni paralelas simultáneamente, ésto es comprensible, si se toma en cuenta que cada nueva componente de reacción agregada debe restringir uno de sus grados de libertad.

Aun cuando una estructura puede ser estable para una carga particular o sistema de cargas, a menos que sea también estable para cualquier otro sistema concebible de cargas, se clasifica como inestable. Frecuentemente una estructura será estable bajo un sistema particular de cargas aplicadas; cuando se encuentra en esta condición se dice que está en equilibrio inestable.

Puesto que una estructura para clasificarse como estable debe serlo bajo cualquier sistema concebible de cargas, es recomendable el suprimir todas las cargas cuando se considera la cuestión de estabilidad.

### 2.2. GRADO DE INDETERMINACION

Una estructura indeterminada es aquella para la que las componentes de reacción y esfuerzos no pueden determinarse completamente por la aplicación de las tres ecuaciones necesarias para el equilibrio estático ( $\sum F_x = 0$ ;  $\sum F_y = 0$ ;  $\sum M = 0$ ).

Las estructuras indeterminadas difieren en cuanto al grado de indeterminación. El grado de indeterminación para una estructura dada es el número de incógnitas que se cuentan sobre el número de ecuaciones de condición disponible para la solución.

Si el número de componentes de reacción excede al número de ecuaciones de condición independientes para el equilibrio de la estructura, ésta es externamente indeterminada hasta el grado para el cual el número de reacciones externas exceda al número de ecuaciones de condición. Las ecuaciones de condición son  $\sum F_x = 0$ ,

## ESTABILIDAD Y GRADO DE INDETERMINACION

$\sum F_y = 0$  y  $\sum M = 0$ , además de cualesquiera otras ecuaciones dadas por las particularidades de construcción tales como pasadores, etc. Así, cada pasador insertado hará posible la rotación relativa de las partes de la estructura, suministrando una ecuación de condición adicional ( $\sum M = 0$ ) para la evaluación de las componentes de reacción.

Si una estructura es indeterminada tanto externa como internamente, entran en la solución tanto las reacciones como los esfuerzos de los miembros, por lo que en el análisis final lo que interesa es la indeterminación total de la estructura.

### 2.3. CRITERIOS PARA EL ESTABLECIMIENTO DE LA ESTABILIDAD E INDETERMINACION DE LAS ESTRUCTURAS

#### 2.3.1. VIGAS

Las ecuaciones que nos establecen tales condiciones son las siguientes:

- 1) Si  $r < C + 3$ , la viga se considera inestable.
- 2) Si  $r = C + 3$ , la viga es estáticamente determinada siempre y cuando no se tenga inestabilidad geométrica.
- 3) Si  $r > C + 3$ , la viga es indeterminada.

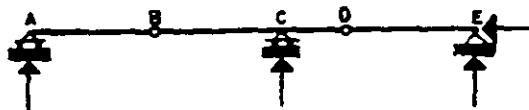
En las ecuaciones anteriores:

$r$  = número de elementos de reacción.

$C$  = número de condiciones adicionales.

Ejemplos:

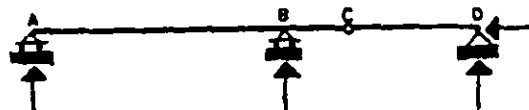
VIGA 1



$$4 < 2 + 3$$

*inestable*

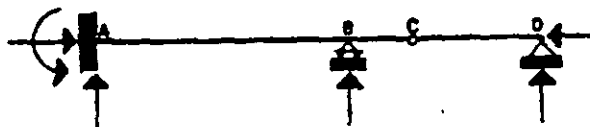
VIGA 2



$$4 = 1 + 3$$

*isostática*

VIGA 3



$$6 > 1 + 3$$

*indeterminada*

## ESTABILIDAD Y GRADO DE INDETERMINACION

La inestabilidad geométrica se presenta debido a la disposición geométrica de los miembros. Considérese la viga 4, en la que existe inestabilidad geométrica pues hay desplazamientos relativos entre los elementos que la forman. Es decir, los elementos AB y BC constituyen un mecanismo, por medio del cual la estructura se desploma, o sea que llega al reposo en alguna posición como se muestra por las líneas punteadas.

VIGA 4



*inestabilidad  
geométrica*

### 2.3.2. MARCOS

Un marco es una estructura formada por elementos que se intersectan (vigas y columnas) y cuyos ejes se encuentran todos en un mismo plano. Por lo tanto - están sujetos a momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal, si se conocen estas magnitudes en una sección de un elemento, podrán determinarse las correspondientes a otra sección cualquiera del elemento.

Sea  $b$  = número total de elementos,  $r$  = número de elementos reaccionantes, - por lo que el total de incógnitas independientes en un marco es  $(3b + r)$ . Estableciéndose el siguiente criterio:

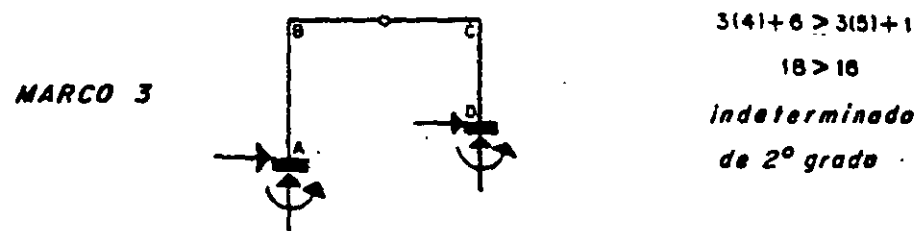
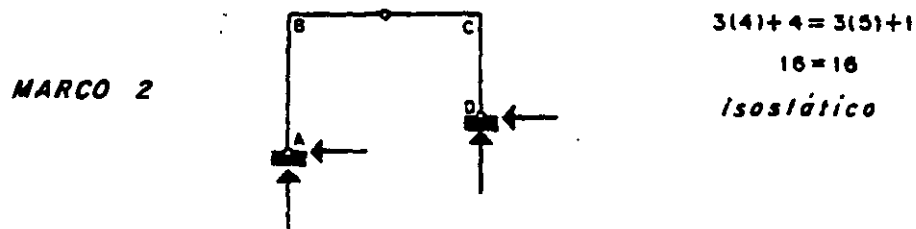
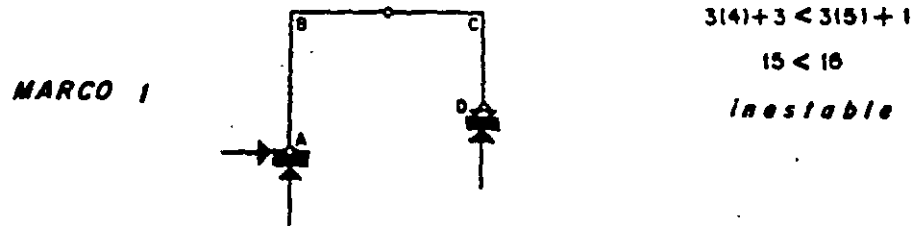
- 1) Si  $3b + r < 3j + C$ , el marco se considera inestable.
- 2) Si  $3b + r = 3j + C$ , el marco es determinado siempre y cuando sea estable.
- 3) Si  $3b + r > 3j + C$ , el marco es indeterminado.

(C tiene el mismo significado anotado anteriormente).

$j$  = número de juntas o nudos.

## ESTABILIDAD Y GRADO DE INDETERMINACION

Ejemplos:



### 2.3.3. ARMADURAS

En una armadura cada junta arroja dos ecuaciones de condición ( $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$ ), para la determinación de todas las fuerzas desconocidas que actúan en las juntas, incluyéndose esfuerzos en las barras y elementos de reacción.

Resultando la ecuación:

$$2j = b + r$$

donde

$j$  = número de juntas o nudos.

$b$  = número de barras.

$r$  = número de reacciones.

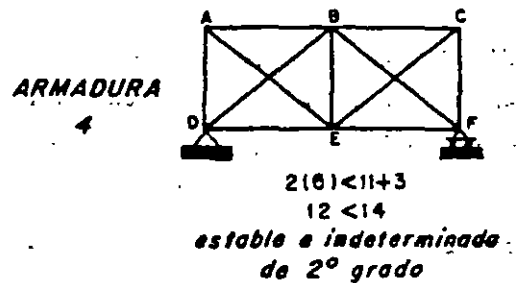
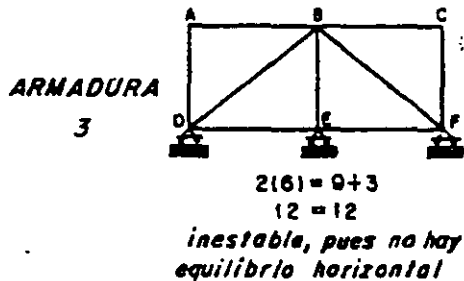
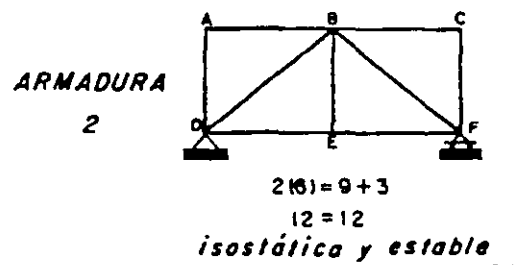
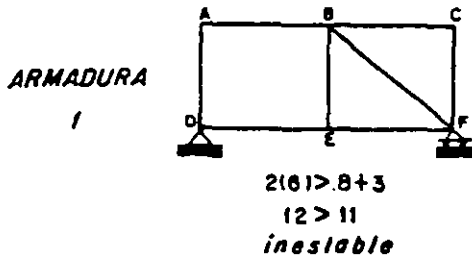
En la expresión anterior el miembro de la izquierda  $2j$ , representa el número de ecuaciones de condición simultáneas, disponibles para la solución de los esfuerzos desconocidos de las barras y reacciones,  $b + r$ .

## ESTABILIDAD Y GRADO DE INDETERMINACION

Por lo que se puede establecer el siguiente criterio:

- 1) Si  $2j > b + r$ , la armadura es inestable.
- 2) Si  $2j = b + r$ , la armadura es isostática siendo estable a la vez.
- 3) Si  $2j < b + r$ , la armadura es indeterminada.

Ejemplos:



Se llama particularmente la atención al hecho de que la satisfacción de las ecuaciones anteriores es una condición necesaria para la indeterminación o determinación y la estabilidad de una estructura, pero no es suficiente.

La decisión final de que la estructura sea determinada y estable deberá basarse sobre el sentido común y sobre una consideración de las trayectorias de esfuerzos.

# **MÉTODOS energéticos**

## **3.1 INTRODUCCION**

En este capítulo se hace mención a los conceptos y teoremas más importantes relacionados con los métodos energéticos aplicables a sistemas mecánicos, basados en el principio de conservación de la energía.

La energía se define como la capacidad de realizar un trabajo, y el trabajo se estima como el producto de una fuerza y la distancia recorrida en la dirección de la fuerza.

En el caso de cuerpos sólidos deformables, los esfuerzos multiplicados por las áreas respectivas dan fuerzas, y las deformaciones equivalen a distancias recorridas. El producto de estas dos cantidades dadas es el trabajo interno efectuado sobre un cuerpo por fuerzas exteriormente aplicadas.

## **3.2 TRABAJO Y ENERGIA**

Si se supone un sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo, éste se deforma hasta que las fuerzas internas equilibren al sistema de fuerzas externas. Las fuerzas externas realizan un trabajo que se transforma y acumula en el cuerpo. Este trabajo o energía de deformación es el utilizado por el cuerpo para recuperar su forma cuando cesa la acción del sistema de fuerzas externas.

Si el cuerpo recupera exactamente, su forma inicial se trata de un cuerpo -



## METODOS ENERGETICOS

perfectamente elástico, e indica que el trabajo de las fuerzas externas durante la deformación del cuerpo se transformó íntegramente en energía de deformación, despreciándose las pérdidas pequeñas por cambio de temperatura.

En los sistemas elásticos son despreciadas las pérdidas por calor y la energía del sistema es la energía o trabajo de deformación de dicho sistema.

De lo anterior se concluye que la energía de deformación depende del diagrama carga - deformación del cuerpo. Si éste está hecho de un material linealmente elástico, la carga es proporcional a la deformación. (Fig. 3.1.)

En consecuencia, si el elemento está inicialmente libre de esfuerzos, la carga que actúa finalmente sobre él aumentará en forma lineal hasta alcanzar su valor total. Por otra parte, si el elemento sigue un comportamiento elástico no lineal, el diagrama carga - deformación será el presentado en la Fig. 3.2. En ambos casos el área bajo la línea inclinada en el diagrama carga - deformación nos representa la energía de deformación, mientras que el área limitada por dicha línea y el eje vertical se llama energía complementaria de deformación.

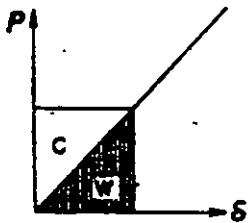


Fig. 3.1. Diagrama carga - def.  
caso lineal

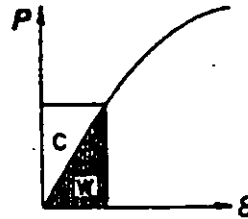


Fig. 3.2. Diagrama carga - def.  
caso no lineal

En el caso de energía de deformación, caso lineal, el trabajo desarrollado por las fuerzas externas será:

$$W = \int P d\delta = \text{energía de deformación}$$

y, la energía complementaria de deformación se evalúa con la integral

$$C = \int \delta dP$$

La energía de deformación puede presentarse debido a los elementos mecánicos como: fuerza normal, fuerzas cortantes, momentos flexionantes y momento torsionante.

Enseguida se consideran por separado cada uno de los elementos mecánicos, para después aplicar el principio de superposición de causas y efectos.

## METODOS ENERGETICOS

### 3.2.1. ENERGIA DE DEFORMACION EN EL CASO DE FUERZA AXIAL

Considérese la viga primática de la Fig. 3.3. cuya área transversal es constante  $A$  y de longitud  $L$ . La aplicación gradual de la fuerza  $N$  causará una deflexión final  $\delta$ .

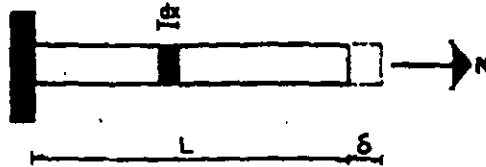


Fig. 3.3. Elemento sujeto a fuerza normal.

El trabajo interno producido en una longitud  $dx$  será

$$dW = \frac{1}{2} N \epsilon dx$$

en donde la deformación unitaria es

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{A E}$$

de lo que resulta

$$dW = \frac{1}{2} N \frac{N}{A E} dx = \frac{N^2}{2 A E} dx$$

y el trabajo de deformación total para toda la viga será

$$W_N = \int_0^L \frac{N^2}{2 A E} dx$$

donde  $W_N$  es la energía de deformación por fuerza normal.

### 3.2.2. ENERGIA DE DEFORMACION EN EL CASO DE FLEXION

En este caso se sabe que el esfuerzo varía linealmente desde el eje neutro, - como se muestra en la Fig. 3.4.

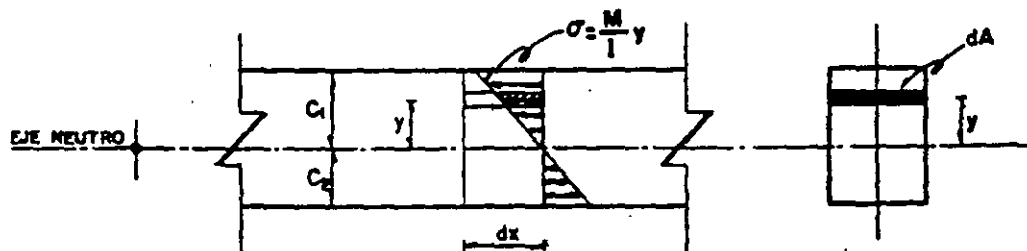


Fig. 3.4. Segmento de viga empleado en la deducción de la expresión para la energía de deformación en el caso de flexión.

## MÉTODOS ENERGÉTICOS

La deformación en una fibra a una distancia  $y$  del eje neutro en la longitud  $dx$ , será

$$\delta = \epsilon \, dx$$

en donde la deformación unitaria es:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

por lo que se tiene

$$\delta = \frac{M y}{E I} dx$$

El valor de la carga que actúa sobre el área  $dA$  es

$$dP = \sigma \, dA = \left[ \frac{M y}{I} \right] dA$$

Puesto que la carga externa se aplica gradualmente la energía de deformación interna de la longitud  $dx$  de la fibra en estudio es por lo tanto:

$$dW = \frac{1}{2} dP \, dx = \frac{1}{2} \left( \frac{M y}{E I} dx \right) \left( \frac{M y}{I} dA \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{M y}{I} \right)^2 \frac{dx \, dA}{E}$$

y el trabajo interno total para todas las fibras en la longitud  $dx$  es

$$dW = \frac{1}{2} \int_{c_2}^{c_1} \left( \frac{M y}{I} \right)^2 \frac{dx \, dA}{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2 dx}{E I^2} \int_{c_2}^{c_1} y^2 dA$$

en donde por definición:

$$\int_{c_2}^{c_1} y^2 dA = I$$
$$\therefore dW = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2 dx}{E I}$$

En la longitud  $L$ , la energía de deformación interna total será

$$W_M = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

que es el trabajo de deformación por momento flexionante.

### 3.2.3. ENERGÍA DE DEFORMACION PARA FUERZA CORTANTE

La expresión para el trabajo de deformación al cortante interno se desarrollará haciendo uso de la viga de la Fig. 3.5, la misma se supondrá de sección transversal recta constante en toda su longitud. En la misma figura se encuentra indicada la distorsión por corte de la fibra a una distancia  $y$  del eje neutro. El ángulo de esta distorsión que es muy pequeño se designa como  $\delta$ .

METODOS ENERGETICOS

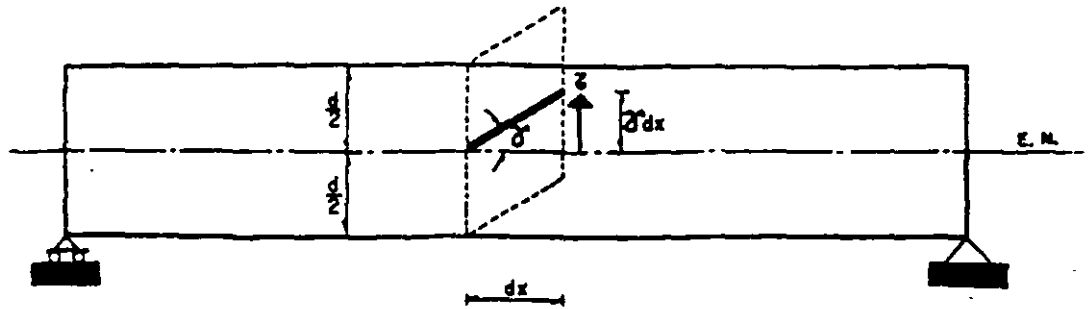


Fig. 3.5.

La expresión para la energía de deformación interna por corte cuando el segmento  $dx$  se deforma es

$$dw = \frac{1}{2} (\tau dA) (\delta dx)$$

en donde por la teoría del esfuerzo cortante se tiene

$$\tau = \frac{V Q}{I b}$$

siendo

$Q$  = momento estático del área limitada entre la fibra en estudio y la fibra más alejada de la sección.

$b$  = ancho de la fibra en estudio.

además

$$\delta = \frac{\tau}{G} = \frac{V Q}{G I b}$$

en donde  $G$  es el módulo de elasticidad transversal y varía entre  $0.4E$  y  $0.5E$ .

Por lo tanto el trabajo de deformación será

$$dw = \frac{1}{2} \left( \frac{V Q}{I b} \right) \left( \frac{V Q}{G I b} \right) dx dA = \frac{V^2 Q^2}{2 G I^2 b^2} dx dA$$

Para obtener el valor de todo el segmento, se integra la ecuación anterior para el peralte de la viga teniéndose

$$dw = \frac{V^2 dx}{2 G A} \cdot \frac{A}{I^2} \int_{-u/2}^{u/2} \frac{Q^2}{b^2} dA$$

como  $V, G, A$  son constantes en una sección, y

$$K = \frac{A}{I^2} \int_{-u/2}^{u/2} \frac{Q^2}{b^2} dA$$

## MÉTODOS ENERGETICOS

por lo tanto

$$dw = \frac{KV^2}{2GA} dx$$

Integrando la ecuación anterior para toda la longitud de la viga se tiene

$$W_v = \int_0^L K \frac{V^2 dx}{2GA}$$

que es el trabajo de deformación por fuerza cortante.

El coeficiente K es el llamado factor de forma y sólo depende de la forma de la sección transversal. Esta constante vale 1.2 para secciones rectangulares y triangulares, 10/9 para secciones circulares y  $A_{\text{sección}}/A_{\text{alma}}$  para perfiles laminados.

### 3.2.4. ENERGIA DE DEFORMACION DEBIDA AL EFECTO DE MOMENTO TORSIONANTE

La flecha circular de la Fig. 3.6. está sujeta al momento torsionante T en una sección x a lo largo de la misma.

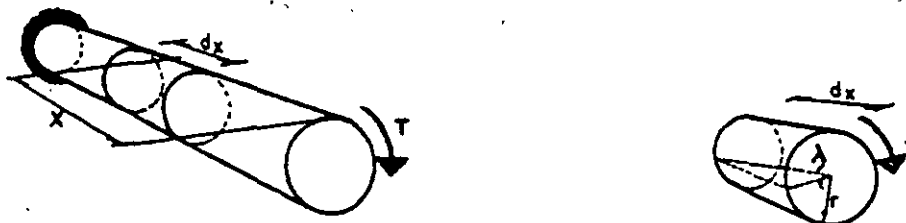


Fig. 3.6.

La acción de la torsión se aplica gradualmente siendo la energía de deformación torsional para un segmento dx:

$$dw = \frac{1}{2} T \lambda$$

donde  $\lambda$  es el ángulo torsional en radianes de una cara del segmento con respecto a la otra. Este valor es

$$\lambda = \frac{T r}{J G} \cdot \frac{dx}{r}$$

en donde

## METODOS ENERGETICOS

$J$  = momento polar de inercia de la sección transversal.

$G$  = módulo de elasticidad transversal.

por lo que la energía de torsión para el segmento será

$$dw = \frac{T^2 dx}{2 GJ}$$

Y para todo el miembro de longitud  $L$ , la energía está dada por

$$W_T = \int_0^L \frac{T^2 dx}{2 GJ}$$

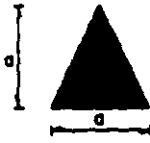
donde  $W_T$  es la energía de deformación por momento torsionante.

Enseguida se dan valores de  $J$  para diferentes secciones transversales.

### SECCIONES LLENAS



$$J = \frac{\pi D^4}{32}$$



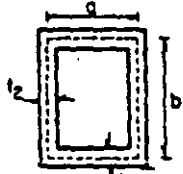
$$J = 0.02 a^4$$



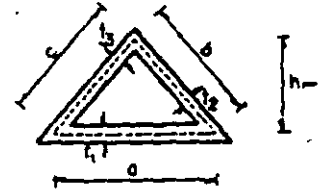
$$J = \frac{b^3 h^3}{3.6(b^2 + h^2)}$$

### SECCIONES HUECAS

Expresión general:  $J = \frac{4 A^2}{\int \frac{ds}{t}}$



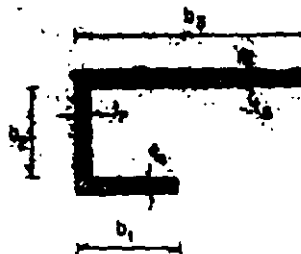
$$A = \pi (r_2^2 - r_1^2) ; \int \frac{ds}{t} = \frac{2\pi r_2}{t}$$



$$A = \frac{1}{2} a h_m ; \int \frac{ds}{t} = \frac{a}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{c}{t_3}$$

### SECCIONES ABIERTAS

Expresión general:  $J = \frac{b^3}{3}$



En el caso de una barra sujeta a los elementos mecánicos citados anteriormente, se tiene:

$$W = \int_0^L \frac{N^2}{2AE} dx + \int_0^L K \frac{V^2}{2GA} dx + \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx + \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$$

esta expresión puede aplicarse a elementos de eje curvo en donde el radio de curvatura en un punto del eje no es menor que cinco veces la dimensión máxima en ese punto.

### 3.3. PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES

Este concepto es de gran importancia pues constituye la base para la aplicación del método del trabajo virtual en el cálculo de deformaciones en las estructuras.

La palabra virtual significa "en esencia o en efecto, pero no de hecho". Un desplazamiento virtual señala un desplazamiento hipotético, ya sea finito o infinitesimal, de un punto o sistema de puntos sobre un cuerpo rígido en equilibrio, tal -- que las ecuaciones de equilibrio del cuerpo no se violan.

El sistema reactivo de apoyos debe ser tal que el desplazamiento virtual sea posible aunque no necesariamente debe efectuarse. Las condiciones de compatibilidad se satisfacen en los apoyos antes y después de la deformación, que debe ser de manera que una estructura permanezca como tal después de la deformación.

El desplazamiento virtual es independiente del sistema original de cargas, durante este proceso las fuerzas reales que actúan en el cuerpo rígido se mueven según los desplazamientos virtuales.

El trabajo realizado por el sistema de fuerzas original durante el desplazamiento virtual recibe el nombre de Trabajo Virtual.

Por lo tanto puede establecerse el siguiente enunciado:

"Si un sistema de fuerzas actuando sobre un cuerpo rígido está en equilibrio y permanece en equilibrio cuando el cuerpo sufre un pequeño desplazamiento virtual, el trabajo realizado por el sistema de fuerzas es cero".

3.4. PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

Para el establecimiento de este principio considérese el cuerpo deformable de la Fig. 3.7., el mismo se encuentra en equilibrio estático bajo el sistema de cargas dado.

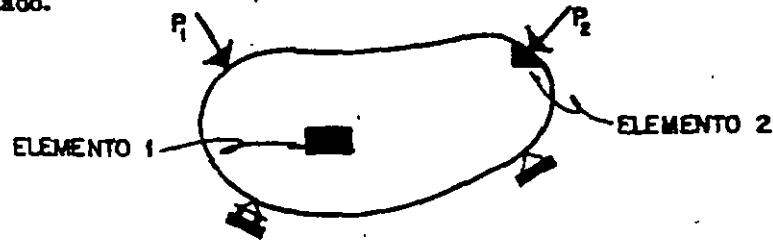


Fig. 3.7.

En la misma figura se muestran los elementos 1 y 2, de los que se presenta el diagrama de cuerpo libre correspondiente en la fig. 3.8.



Fig. 3.8. Diagramas de cuerpo libre de los elementos 1 y 2.

El elemento 1 por ser interno se encuentra sujeto a esfuerzos en todos sus lados por las reacciones de los elementos adyacentes. El elemento 2 se encuentra en el contorno, en el punto de aplicación de la fuerza  $P_2$  y está por lo tanto sujeto a la acción de la misma fuerza en uno de sus lados y a esfuerzos intersegmentales en los otros dos lados. Los esfuerzos internos existen también en cada elemento, y ambos están en equilibrio.

Si se aplica una fuerza virtual al cuerpo, se producirán desplazamientos del mismo tipo tanto en las fuerzas externas como en las internas. Debido a dichas deformaciones los sistemas de fuerzas externas e internas realizan un trabajo virtual.

Por lo que cualquier elemento del cuerpo deformable sufrirá un desplazamiento lineal, uno angular y una deformación virtual.

Representando por  $dW_e$  el trabajo desarrollado por las cargas externas en el elemento tendremos:



## METODOS ENERGETICOS

$$dW_e = dW_D + dW_i$$

en donde  $dW_D$  indica el trabajo virtual debido a los desplazamientos del elemento - tratado como cuerpo rígido y  $dW_i$  es el trabajo virtual de deformación del elemento.

Pero del principio de los desplazamientos virtuales se sabe que

$$dW_D = 0$$

por lo que únicamente queda

$$dW_e = dW_i$$

Si se incluye todo el trabajo interno desarrollado en el cuerpo tenemos:

$$W_e = W_i$$

en esta expresión  $W_e$  representa el trabajo exterior de desplazamiento causado por el sistema real de fuerzas y  $W_i$  indica el trabajo de deformación interno virtual - del cuerpo.

De lo antes expuesto se puede establecer la ley del trabajo virtual que expresa:

"Si un cuerpo deformable está en equilibrio bajo un sistema de fuerzas externas y permanece en equilibrio al ser sometido a un pequeño desplazamiento virtual el trabajo virtual exterior realizado por el sistema de fuerzas actuando sobre el - cuerpo es igual al trabajo de deformación virtual interno realizado por las fuerzas internas".

Esta ley representa el principio más general de la conservación de la energía y, en nuestro caso, indica que el trabajo realizado sirve exclusivamente para vencer las resistencias elásticas internas, transformándose en energía potencial elástica que es restituida, siempre en forma de trabajo, cuando el cuerpo recupera su forma primitiva.

### 3.5. TEOREMA DE BETTI

En la deducción de este teorema se hace uso del cuerpo elástico mostrado - en la Fig. 3.9. sobre el cual actúan los sistemas de fuerzas A y B, independientemente.

## MÉTODOS ENERGÉTICOS

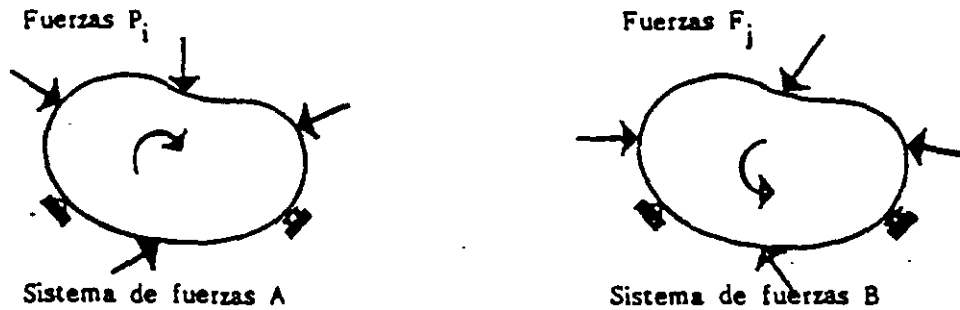


Fig. 3.9.

Cada uno de los sistemas de carga se encuentra en equilibrio independiente al igual que su aplicación simultánea.

Si se aplica gradualmente primero el sistema A y después el sistema B, se tiene:

$$W = \frac{1}{2} P_i \delta_i + \frac{1}{2} F_j \delta_j + P_i \delta_{ij}$$

en donde  $\delta_i$  representa los desplazamientos causados por las fuerzas  $P_i$ ,  $\delta_j$  son los desplazamientos correspondientes a las fuerzas  $F_j$ , y  $\delta_{ij}$  indican los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas  $P_i$  debido a la aplicación del sistema  $F_j$ .

De manera análoga, si se aplica primero el sistema B y después el sistema A se obtiene:

$$W = \frac{1}{2} F_j \delta_j + \frac{1}{2} P_i \delta_i + F_j \delta_{ji}$$

donde  $\delta_{ji}$  son los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas  $F_j$  debido a la aplicación del sistema  $P_i$ .

Las expresiones anteriores son iguales ya que representan el mismo trabajo de deformación, debido a que no depende del orden de aplicación de los sistemas de carga.

Iguando dichas expresiones

$$\frac{1}{2} P_i \delta_i + \frac{1}{2} F_j \delta_j + P_i \delta_{ij} = \frac{1}{2} F_j \delta_j + \frac{1}{2} P_i \delta_i + F_j \delta_{ji}$$

resultando

$$P_i \delta_{ij} = F_j \delta_{ji}$$

que es el teorema de Betti, cuyo enunciado es:

## MÉTODOS ENERGÉTICOS

"El trabajo de las fuerzas de un sistema debido a los desplazamientos que en sus puntos de aplicación le produce otro sistema de cargas, es igual al trabajo de las fuerzas del segundo sistema debido a la aplicación del primer sistema de fuerzas".

### 3.6. TEOREMA DE MAXWELL

Es conocido también con el nombre de teorema de los trabajos recíprocos y es un caso particular del teorema de Betti.

Considérese la viga sobre la que actúa una fuerza  $P$  en un punto 1 y después en un punto 2, como se muestra en la Fig. 3.10.

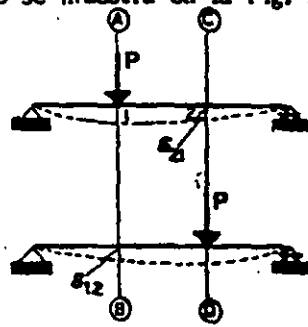


Fig. 3.10.

Por el teorema de Betti

$$P \delta_{12} = P \delta_{21}$$

$$\therefore \delta_{12} = \delta_{21}$$

en donde  $\delta_{12}$  es el desplazamiento en 1 cuando  $P$  se aplica en 2, y  $\delta_{21}$  es el desplazamiento en 2 cuando  $P$  se aplica en 1.

De lo anterior puede enunciarse:

"El desplazamiento de un punto 1 en la dirección AB cuando en el punto 2 actúa una fuerza  $P$  en la dirección CD es igual al desplazamiento del punto 2 en la dirección CD cuando en el punto 1 actúa una fuerza  $P$  en la dirección AB".

### 3.7. TEOREMAS DE CASTIGLIANO

Los dos teoremas de Castigliano sirven para determinar desplazamientos en cualquier punto de una estructura y en la dirección deseada.

## METODOS ENERGETICOS

### 3.7.1. PRIMER TEOREMA DE CASTIGLIANO

Considérese la viga mostrada en la Fig. 3.11., a la cual se aplica gradualmente la fuerza  $P_i$

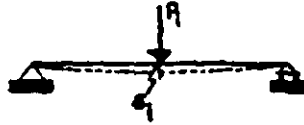


Fig. 3.11. Viga sometida a la acción de la fuerza  $P_i$ .

El trabajo de deformación ocasionado por la fuerza  $P_i$  es

$$W = \frac{1}{2} P_i \delta_1 \quad (A)$$

Si ahora al sistema de fuerzas inicial se agrega una pequeña carga adicional  $dP_i$ , se causará una deflexión adicional a la viga, por lo que el incremento de energía de deformación será:

$$dW = \left[ \frac{P_i + (P_i + dP_i)}{2} \right] d\delta_1 = \left[ \frac{2P_i + dP_i}{2} \right] d\delta_1$$

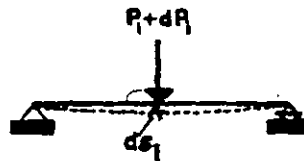


Fig. 3.12. Acción de la fuerza  $P_i$  más el incremento  $dP_i$  despreciando el producto de las diferencias, lo anterior se convierte en

$$dW = P_i d\delta_1 \quad (B)$$

Otra forma de evaluar  $dW$  es suponiendo que ahora se aplican  $P_i + dP_i$  gradual y simultáneamente, por lo que el trabajo total es:

$$W_{T'} = \frac{1}{2} (P_i + dP_i) (\delta_1 + d\delta_1)$$

despreciando el producto de las diferenciales

$$W_{T'} = \frac{P_i \delta_1}{2} + \frac{\delta_1 dP_i}{2} + \frac{P_i d\delta_1}{2} \quad (C)$$

## METODOS ENERGETICOS

además

$$W_{T'} = W + dW$$

por lo que

$$dW = W_{T'} - W$$

sustituyendo A y C en la ecuación anterior

$$dW = \frac{P_i \delta_i}{2} + \frac{\delta_i dP_i}{2} + \frac{P_j d\delta_j}{2} - \frac{P_j \delta_j}{2} = \frac{\delta_i dP_i}{2} + \frac{P_j d\delta_j}{2} \quad (D)$$

reemplazando ahora B en D

$$dW = \frac{\delta_i dP_i}{2} + \frac{dW}{2} \quad ; \quad dW - \frac{dW}{2} = \frac{\delta_i dP_i}{2}$$

$$\therefore dW = \delta_i dP_i$$

donde se obtiene finalmente

$$\delta_i = \frac{dW}{dP_i}$$

Del razonamiento anterior puede enunciarse el primer teorema de Castigliano que establece:

"La derivada parcial del trabajo de deformación con respecto a una fuerza que actúa en un cuerpo es igual al desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y en la dirección de la misma".

### 3.7.2. SEGUNDO TEOREMA DE CASTIGLIANO

La deducción de este teorema se realiza en forma similar a como se hizo para el primero, con la salvedad de que ahora se aplica gradualmente un momento en el punto en estudio, resultando la siguiente expresión:

$$\theta_i = \frac{dW}{dM_i}$$

de donde se establece el segundo teorema de Castigliano, que dice:

"La derivada parcial del trabajo de deformación con respecto a un momento aplicado en un punto, es igual al giro correspondiente producido en la dirección de ese momento en dicho punto".

3.8. METODO DEL TRABAJO VIRTUAL

Es un procedimiento bastante útil, ya que sirve en el análisis de problemas de deformación de naturaleza muy general como pueden ser los debidos a cargas de cualquier tipo, comportamiento inelástico del material, deformaciones por cambio de temperatura, desplazamientos de los apoyos, errores de fabricación, etc.

En el caso de sistemas linealmente elásticos la expresión básica para el método del trabajo virtual se puede adaptar para hacer más fácil la resolución de problemas. A continuación se dan las fórmulas necesarias para calcular desplazamientos cuando el sistema estructural está sujeto a los elementos mecánicos.

Para tal efecto se hace uso de la Fig. 3.13., en la misma, la viga está sometida a un sistema de fuerzas cualquiera. Si se desea estimar el desplazamiento lineal en el punto  $i$  de la viga en donde no actúa ninguna fuerza del sistema y en una dirección determinada, se procede como sigue: se aplica una carga virtual  $p_v$  en el punto en la dirección y sentido en que se desea el desplazamiento. Para desplazamiento lineal la carga virtual es una fuerza concentrada y para desplazamiento angular se aplica un par virtual, es particularmente útil en las aplicaciones elegir dichas fuerzas como unitarias.

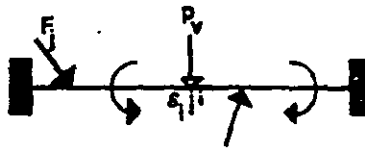


Fig. 3.13.

Debido a la carga virtual  $p_v$  se dará lugar a los elementos mecánicos  $n$ ,  $v$ ,  $m$ ,  $t$ , estos valores son característicos para cada sección transversal y variables a lo largo de la viga.

El trabajo de deformación total es:

$$W_T = \int_0^L \frac{(N+nR)^2}{2AE} dx + \int_0^L \frac{K(V+vR)^2}{2GA} dx + \int_0^L \frac{(M+mR)^2}{2EI} dx + \int_0^L \frac{(T+tR)^2}{2GJ} dx$$

El desplazamiento producido por el sistema real de fuerzas y la carga virtual  $p_v$ , aplicando el primer teorema de Castigliano es

## METODOS ENERGETICOS

$$\delta_T = \frac{\delta W_T}{\delta R_v} = \int_0^L \frac{(N+nR)n}{AE} dx + \int_0^L K \frac{(V+vR)v}{GA} dx + \int_0^L \frac{(M+mR)m}{EI} dx + \int_0^L \frac{(T+tR)t}{GJ} dx$$

ya que los elementos mecánicos del sistema real de fuerzas son independientes de la carga virtual.

Para calcular el desplazamiento real del punto de interés, es necesario anular el valor de la carga virtual, obteniéndose finalmente

$$\delta_1 = \int_0^L \frac{Nn}{AE} dx + \int_0^L K \frac{Vv}{GA} dx + \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx + \int_0^L \frac{Tt}{GJ} dx$$

en donde N, V, M, T son los elementos mecánicos del sistema real de fuerzas y n, v, m, t son los correspondientes pero producidos por una carga unitaria aplicada en el punto y en la dirección en la que se desea el desplazamiento. Para calcular desplazamientos lineales se aplican fuerzas concentradas unitarias y para desplazamientos angulares se aplican pares unitarios en el punto y en la dirección en la que se desea el giro.

**3.9. Ejemplos**

**de**

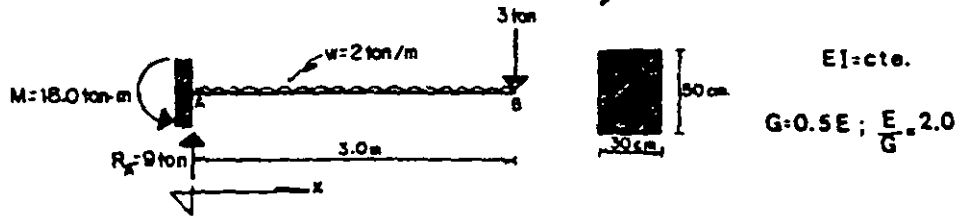
**Aplicación**



# METODOS ENERGETICOS

## ENERGIA DE DEFORMACION

- 3.1. Calcular la energía de deformación considerando los efectos de momento flexionante y de fuerza cortante de la siguiente viga. ¿Qué porcentaje de la energía por momento flex. es la energía por cortante?



Ecuación de momentos:

$$0 \leq x \leq 3 ; M = -18.0 + 9x - \frac{wx^2}{2} = -18.0 + 9x - x^2$$

Ecuación de cortante:

$$0 \leq x \leq 3 ; V = 9 - wx = 9 - 2x$$

Las expresiones para calcular el trabajo de deformación son:

$$W_M = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \text{ (flexión)} ; W_V = \int_0^L \frac{V^2}{2GA} dx \text{ (cortante)}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0.3)(0.5)^3}{12} = 0.003125 \text{ m}^4 ; A = 0.3(0.5) = 0.15 \text{ m}^2 ; k = 1.2$$

Cálculo de  $W_M$ :

$$W_M = \frac{1}{2E(0.003125)} \left[ \int_0^3 (-18 + 9x - x^2)^2 dx \right] = \frac{1}{2E(0.003125)} \left[ \int_0^3 (x^4 - 18x^3 + 117x^2 - 324x + 324) dx \right]$$

$$W_M = \frac{1}{2E(0.003125)} \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{18x^4}{4} + 39x^3 - 162x^2 + 324x \right]_0^3 = \frac{40176.0}{E} \text{ t.m}$$

$$W_M = \frac{40176}{E} \text{ t.m}$$

Cálculo de  $W_V$ :

$$W_V = \frac{1.2}{2G(0.15)} \left[ \int_0^3 (9 - 2x)^2 dx \right] = \frac{4}{G} \left[ \int_0^3 (81 - 36x + 4x^2) dx \right]$$

$$W_V = \frac{4}{G} \left[ 81x - 18x^2 + \frac{4x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{468}{G} \text{ t.m} ; W_V = \frac{468}{G} \text{ t.m}$$

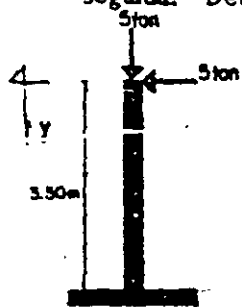
METODOS ENERGETICOS

Cálculo del porcentaje: 
$$\frac{W_V}{W_M} = \frac{\frac{468}{G}}{\frac{40176}{E}} = \frac{468E}{40176G} = \frac{936}{40176} = 0.023$$

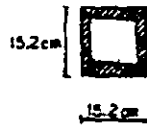
Es decir:  $W_V = 2.3\% W_M$

Regularmente, el efecto de la fuerza cortante es muy pequeño en comparación con el efecto por flexión, por lo que normalmente solo se considera el efecto de momento flexionante.

3.2. Una columna de acero está sujeta al sistema de cargas como se muestra en seguida. Determinar la energía de deformación del elemento.



Sección: dos ángulos de lados iguales en ca-  
jón.



15.2 x 15.2 x 1.9 cm.

$A = 108.90 \text{ cm}^2$

$I = 3389.9 \text{ cm}^4$

$E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

Energía total=  $W = W_N + W_M$

$W_N = \frac{PS}{2} ; S = \frac{PL}{AE} ; W_N = \frac{P^2L}{2AE}$

$W_N = \frac{(5000)^2(350)}{2(108.90)(2.1 \times 10^6)} = 19.131 \text{ kg.cm}$

$W_M = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dy = \frac{1}{2} \int_0^{350} \frac{(5000y)^2}{EI} dy = \left[ \frac{25x^3}{6EI} \right]_0^{350} = \left[ \frac{25 \times 10^6 (350)^3}{6(2.1 \times 10^6)(3389.9)} \right] =$

$25,095 \text{ Kg.cm} \therefore W = 19.131 + 25,095 = 25,114.131 \text{ kg.cm}$

3.3. Obtener la energía de deformación de la barra de acero doblada en escua--  
dra, de sección circular empotrada en un extremo y cargada con una fuerza  
de 30 ton en el otro extremo.



$D = 1.0 \text{ pie} = 30.5 \text{ cm.}$

$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

$\frac{\pi D^4}{32} = 42,475 \text{ cm}^4$

$\frac{\pi D^4}{32} = 42,475$

$\frac{\pi D^4}{32} = 42,475$

$\frac{\pi D^4}{32} = 42,475$

## MÉTODOS ENERGÉTICOS

La energía de deformación es:  $W = W_M + W_T$

Cálculo de  $W_M$ .

$$0 \leq x \leq 2 \quad ; \quad M = -20x$$

$$0 \leq y \leq 3 \quad ; \quad M = -20y$$

$$W_M = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$W_M = \int_0^2 \frac{(-20x)^2}{2EI} dx + \int_0^3 \frac{(-20y)^2}{2EI} dy = \left[ \frac{400x^3}{6EI} \right]_0^2 + \left[ \frac{400y^3}{6EI} \right]_0^3 = W_M$$

$$W_M = \frac{533.333 + 1800}{EI} = \frac{2333.333}{EI}$$

Cálculo de  $W_T$ :  $W_T = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$   $G = 0.48$

$$T = 20(2) = 40 \quad ; \quad W_T = \int_0^3 \frac{(40)^2}{2GJ} dx = \left[ \frac{1600x}{2GJ} \right]_0^3 = \frac{2400}{GJ}$$

$$W = \frac{2333.333}{EI} + \frac{2400}{GJ}$$

$$EI = 2.1 \times 10^6 (42,478) = 8.920 \times 10^{10} \text{ kg} \times \text{cm}^2 = 8,920 \text{ ton} \cdot \text{m}^2$$

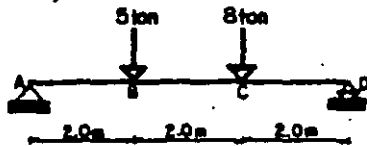
$$G = 0.48 = 0.4(2.1 \times 10^6) = 0.84 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$GJ = 0.84 \times 10^6 (84,957) = 7.136 \times 10^{10} \text{ kg} \times \text{cm}^2 = 7,136 \text{ ton} \cdot \text{m}^2$$

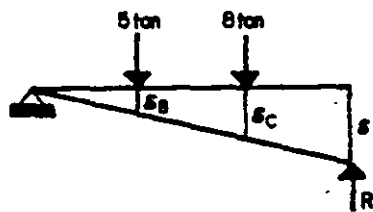
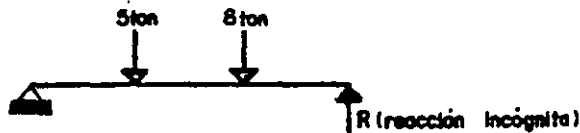
Sustituyendo:  $W = \frac{2333.333}{8,920} + \frac{2400}{7,136} = 0.598 \text{ ton} \cdot \text{m}$

## PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES

3.4. Determinar las reacciones de la siguiente viga utilizando el principio de los desplazamientos virtuales.



$\delta$  = desplazamiento virtual



METODOS ENERGETICOS

Para un  $\delta$  arbitrario correspondiente a  $R$  se tienen las cargas, los desplazamientos  $\delta_B$  y  $\delta_C$ , para los cuales se obtiene:

$$R \delta = P_B \delta_B + P_C \delta_C \quad \text{--- 1}$$

para  $\delta_B$  se tiene:

$$\frac{\delta}{L} = \frac{\delta_B}{L/3} \Rightarrow \delta_B = \frac{\delta}{3}$$

para  $\delta_C$  se tiene:

$$\frac{\delta}{L} = \frac{\delta_C}{2L/3} \Rightarrow \delta_C = \frac{2\delta}{3}$$

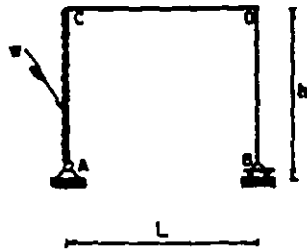
Sustituyendo en 1  $\delta_B$ ,  $\delta_C$  y los valores de las cargas

$$R \delta = 5 \left[ \frac{\delta}{3} \right] + 8 \left[ \frac{2\delta}{3} \right] = \frac{5\delta}{3} + \frac{16\delta}{3} = \frac{21\delta}{3} = 7\delta$$

$$R = 7 \text{ ton} ; \quad \sum F_y = 0 ; \quad R_A = 6 \text{ ton}$$

3.5. Determinar el momento en el punto C del marco siguiente.

Insertando una articulación en el punto de interés.



$$W = -M\theta + \frac{wh\delta}{2}$$

$$\theta = \delta/h$$

Sustituyendo en W

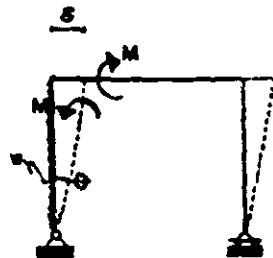
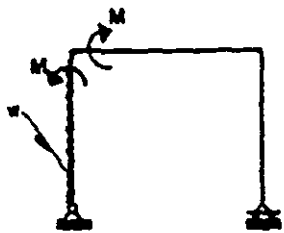
$$W = -M \left( \frac{\delta}{h} \right) + \frac{w \times \delta}{2}$$

Por equilibrio  $W = 0$

$$-\frac{M\delta}{h} + \frac{wh\delta}{2} = 0$$

$$M = \frac{wh\delta}{2} \left( \frac{h}{\delta} \right) = \frac{wh^2}{2}$$

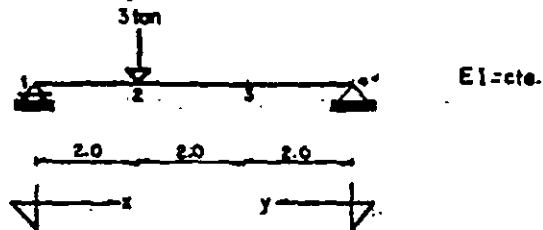
el sentido del momento es correcto.



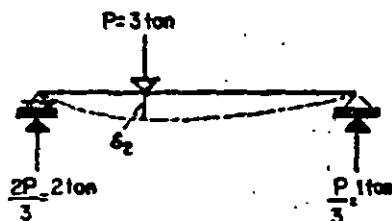
# MÉTODOS ENERGÉTICOS

## PROBLEMAS DE CASTIGLIANO

3.6. Calcular el desplazamiento vertical en el punto 3 de la siguiente viga, así como el desplazamiento del punto 2.



a) desplazamiento del punto 2.



Ecuaciones de momentos:

$$0 \leq x \leq 2; \quad M = \frac{2P}{3}x; \quad M^2 = \frac{4P^2x^2}{9}$$

$$0 \leq y \leq 4; \quad M = \frac{P}{3}y; \quad M^2 = \frac{P^2y^2}{9}$$

El trabajo de deformación será:  $W = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} ds$

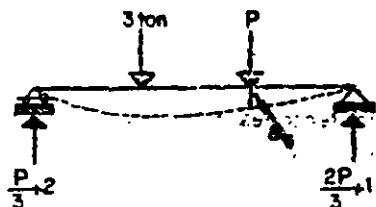
$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^2 \frac{4P^2x^2}{9} dx + \frac{1}{2EI} \int_0^4 \frac{P^2y^2}{9} dy = \frac{2P^2}{9EI} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \frac{P^2}{18EI} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^4$$

$$W = \frac{2P^2}{9EI} \left[ \frac{8}{3} \right] + \frac{P^2}{18EI} \left[ \frac{64}{3} \right] = \frac{16P^2}{27EI} + \frac{64P^2}{54EI} = \frac{32P^2}{54EI} + \frac{64P^2}{54EI} = \frac{96P^2}{54EI} = \frac{16P^2}{9EI}$$

∴ el desplazamiento es:

$$\delta_2 = \frac{\partial W}{\partial P_2} = \frac{32P}{9EI} \text{ sust. } P = 3 \text{ ton} \quad \delta_2 = \frac{32}{3EI}$$

b) desplazamiento del punto 3.



Debido a que en el punto 3 no existe aplicada ninguna fuerza, se supone una fuerza imaginaria en dicho punto, en la dirección en que se quiere el desplazamiento lineal.

$$\text{Ecuaciones de momentos: } 0 \leq x \leq 2; \quad M = \frac{Px}{3} + 2x$$

$$2 \leq x \leq 4; \quad M = \frac{Px}{3} - x + 6$$

METODOS ENERGETICOS

$$0 \leq x \leq 2 ; m = \frac{2P}{3}y + y$$

$$W = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^2 \left[ \frac{Px}{3} + 2x \right]^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_2^4 \left[ \frac{Px}{3} - x + 6 \right]^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^2 \left[ \frac{2P}{3}y + y \right]^2 dy$$

$$\delta_3 = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left[ \frac{Px}{3} + 2x \right] \left[ \frac{x}{3} \right] dx + \frac{1}{EI} \int_2^4 \left[ \frac{Px}{3} - x + 6 \right] \left[ \frac{x}{3} \right] dx + \frac{1}{EI} \int_0^2 \left[ \frac{2P}{3}y + y \right] \left[ \frac{2}{3} \right]$$

$$\delta_3 = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left[ \frac{Px^2}{9} + \frac{2x^2}{3} \right] dx + \frac{1}{EI} \int_2^4 \left[ \frac{Px^2}{9} - \frac{x^2}{3} + 2x \right] dx + \frac{4P}{EI} \int_0^2 \left[ \frac{4Py^2}{9} + \frac{2y^2}{3} \right] dy$$

$$\delta_3 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Px^3}{27} + \frac{2x^3}{9} \right]_0^2 + \frac{1}{EI} \left[ \frac{Px^3}{27} - \frac{x^3}{9} + X^2 \right]_2^4 + \frac{1}{EI} \left[ \frac{4Py^3}{27} + \frac{2y^3}{9} \right]_0^2$$

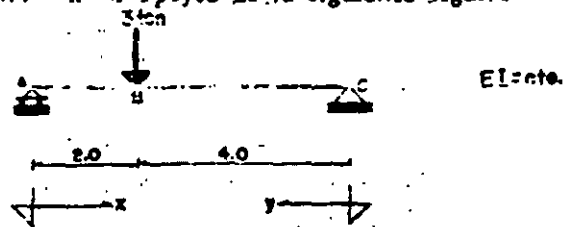
$$\delta_3 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{8P}{27} + \frac{16}{9} \right] + \frac{1}{EI} \left[ \frac{64P}{27} - \frac{64}{9} + 16 - \frac{8P}{27} + \frac{8}{9} - 4 \right] + \frac{1}{EI} \left[ \frac{32P}{27} + \frac{16}{9} \right]$$

$$\delta_3 = \frac{96P}{27EI} + \frac{84}{9EI} = \frac{32P}{9EI} + \frac{28}{3EI}$$

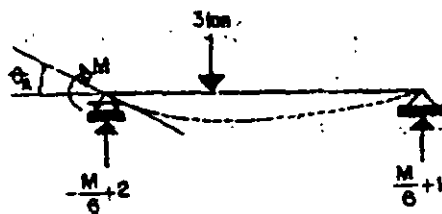
como  $P = 0$ , dicho desplazamiento se anula, por lo que el desplazamiento requerido es:

$$\delta_3 = \frac{28}{3EI}$$

3.7. Calcular los giros en los apoyos de la siguiente viga...



a) giro del apoyo A.



Se supondrá un momento en el apoyo A, en la dirección en la que se desea el giro.

## MÉTODOS ENERGÉTICOS

Ecuaciones de momentos:

$$0 \leq x \leq 2 ; M = M - \frac{M}{6}x + 2x$$

$$0 \leq y \leq 4 ; M = M - \frac{M}{8}y + y$$

Trabajo de deformación:

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^2 \left[ M - \frac{M}{6}x + 2x \right]^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^4 \left[ \frac{M}{6}y + y \right]^2 dy$$

$$\theta_A = \frac{\partial W}{\partial M} = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left[ M - \frac{M}{6}x + 2x \right] \left[ 1 - \frac{x}{6} \right] dx + \frac{1}{EI} \int_0^4 \left[ \frac{M}{6}y + y \right] \left[ \frac{y}{6} \right] dy$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left[ M - \frac{Mx}{6} + 2x - \frac{Mx^2}{6} + \frac{Mx^2}{27} - \frac{x^2}{3} \right] dx + \frac{1}{EI} \int_0^4 \left[ \frac{My^2}{36} + \frac{y^2}{6} \right] dy$$

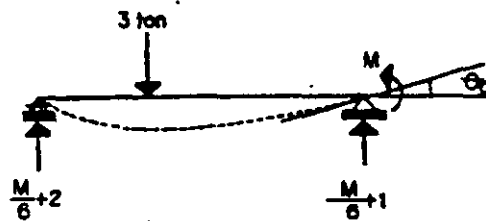
$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left[ Mx - \frac{Mx^2}{6} + x^2 - \frac{Mx^3}{108} + \frac{x^3}{9} \right]_0^2 + \frac{1}{EI} \left[ \frac{My^3}{108} + \frac{y^3}{18} \right]_0^4$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left[ 2M - \frac{2M}{3} + 4 + \frac{2M}{27} - \frac{8}{9} \right] + \frac{1}{EI} \left[ \frac{16M}{27} + \frac{32}{9} \right] = \frac{54M}{27EI} + \frac{60}{9EI} = \frac{2M}{EI} + \frac{20}{3EI}$$

como  $M = 0$ , el giro debido a este par se anula, por lo que:

$$\theta_A = \frac{20}{3EI}$$

b) Giro del apoyo C.



Se supondrá un momento en el apoyo C, en la dirección en la que se desea el giro.

Ecuaciones de momentos:

$$0 \leq x \leq 2 ; M = \frac{M}{6}x + 2x$$

$$0 \leq y \leq 4 ; M = M - \frac{M}{6}y + y$$

Energía de deformación:

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^2 \left[ \frac{M}{6}x + 2x \right]^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^4 \left[ M - \frac{M}{6}y + y \right]^2 dy$$

$$\theta_C = \frac{\partial W}{\partial M} = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left[ \frac{M}{6}x + 2x \right] \left[ \frac{x}{6} \right] dx + \frac{1}{EI} \int_0^4 \left[ M - \frac{M}{6}y + y \right] \left[ 1 - \frac{y}{6} \right] dy$$

METODOS ENERGETICOS

$$\theta_c = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left[ \frac{Mx^2}{36} + \frac{x^2}{3} \right] dx + \frac{1}{EI} \int_0^4 \left[ M - \frac{My}{6} + y - \frac{My}{6} + \frac{My^2}{36} - \frac{y^2}{6} \right] dy$$

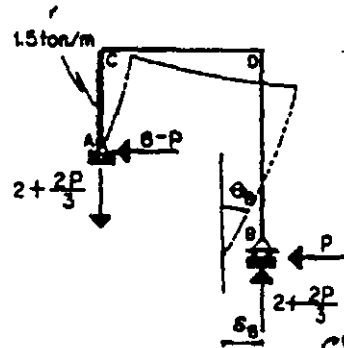
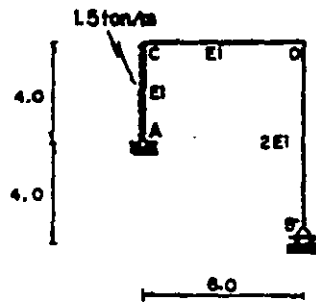
$$\theta_c = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Mx^3}{108} + \frac{x^3}{9} \right]_0^2 + \frac{1}{EI} \left[ My - \frac{My^2}{6} + \frac{y^2}{2} - \frac{My^3}{108} - \frac{y^3}{18} \right]_0^4$$

$$\theta_c = \frac{1}{EI} \left[ \frac{2M}{27} + \frac{8}{9} \right] + \frac{1}{EI} \left[ 4M - \frac{8M}{3} + 8 + \frac{16M}{27} - \frac{32}{9} \right] = \frac{54M}{27EI} + \frac{48}{9EI} + \frac{2M}{EI} + \frac{16}{3EI}$$

como  $M = 0$ , el giro debido a este par se anula, por tanto:

$$\theta_c = \frac{16}{3EI}$$

3.8. DETERMINAR EL DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL Y EL GIRO EN EL APOYO B DEL SIGUIENTE MARCO, CONSIDERANDO UNICAMENTE EFECTOS POR FLEXION.



a) Desplazamiento horizontal del apoyo B. Se supondrá una carga ficticia en dicho apoyo en el sentido y en la dirección en la que se desea el desplazamiento.

Ecuaciones de momento:

tramo A - C  $0 \leq y \leq 4$   
 $M = -Py + 6y - \frac{wy^2}{2}$  si  $y = 4$  ;  
 $M = -4P + 12$

tramo C - D  $0 \leq x \leq 6$   
 $M = -4P + 12 - 2x - \frac{2P}{3}x$

tramo B - D  $0 \leq y \leq 8$   
 $M = -Py$

Energía de deformación:  $W = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} ds$



## MÉTODOS ENERGÉTICOS

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^8 \left[ -Py + 6y - \frac{wy^2}{2} \right]^2 dy + \frac{1}{2EI} \int_0^6 \left[ 4P + 12 - 2x - \frac{2P}{3}x \right]^2 dx + \frac{1}{4EI} \int_0^8 \left[ -Py \right]^2 dx$$

$$EI \delta_P = \frac{\partial W}{\partial P} = \int_0^8 \left[ -Py + 6y - \frac{wy^2}{2} \right] (-y) dy + \int_0^6 \left[ 4P + 12 - 2x - \frac{2P}{3}x \right] \left[ -4 - \frac{2x}{3} \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^8 \left[ -Py \right] (-y) dy$$

$$EI \delta_P = \int_0^8 \left[ Py^2 - 6y^2 + \frac{wy^3}{2} \right] dy + \int_0^6 \left[ 16P - 48 + 8x + \frac{8P}{3}x - \frac{8P}{3}x + \frac{4x^2}{3} + \frac{4Px^2}{9} \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^8 Py^2 dy$$

$$EI \delta_P = \left[ \frac{Py^3}{3} - 2y^3 + \frac{wy^4}{8} \right]_0^8 + \left[ 16Px - 48x + \frac{8Px^2}{3} + \frac{4x^3}{9} + \frac{4Px^3}{27} \right]_0^6 + \frac{1}{2} \left[ \frac{Py^3}{3} \right]_0^8$$

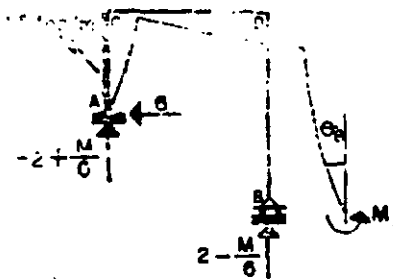
$$EI \delta_P = \left[ \frac{64P}{3} - 128 + 48 \right] + \left[ 96P - 288 + 96P + 96 + 32P \right] + \left[ \frac{256P}{3} \right] = \frac{992P}{3} - 272$$

como  $P = 0$ , dicho valor se anula quedando únicamente:

$$\delta_P = \frac{272}{EI} \quad (\text{sentido contrario al eje } x)$$

6) Cálculo de la deflexión:

Desplazamiento en el punto:



Energía de deformación:

Consideramos la estructura:

donde  $0 \leq y \leq 4$

$$M = 6y - \frac{wy^2}{2} \quad \text{si } y = 4; M = 12.0 \text{ unidades}$$

tramo C - D  $0 \leq x \leq 6$

$$M = 12 - 2x + \frac{Mx}{6}$$

Tramo B - D  $0 \leq y \leq 8$

$$M = M$$

$$W = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} ds$$

METODOS ENERGETICOS

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^6 \left[ 6y - \frac{wy^2}{2} \right]^2 dy + \frac{1}{2EI} \int_0^6 \left[ 12 - 2x + \frac{Mx}{6} \right]^2 dx + \frac{1}{4EI} \int_0^6 M^2 dy$$

$$EI\theta_B = \frac{\partial W}{\partial M} = \int_0^6 \left[ 2 \cdot \frac{Mx}{6} \right] \frac{1}{6} dx + \frac{1}{2} \int_0^6 M dy$$

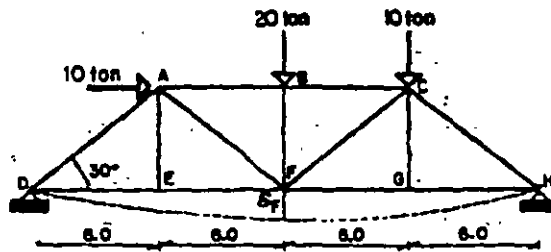
$$EI\theta_B = \int_0^6 \left[ 2x - \frac{x^2}{3} + \frac{Mx^2}{36} \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^6 M dy = \left[ x^2 - \frac{x^3}{9} + \frac{Mx^3}{108} \right]_0^6 + \frac{1}{2} [My]_0^6$$

$$EI\theta_B = [36 - 24 + 2M] + 4M = 6M + 12$$

como  $M = 0$ , el giro debido a este par se anula. por consiguiente:

$$\theta_B = \frac{12}{EI} \text{ (el sentido supuesto es correcto)}$$

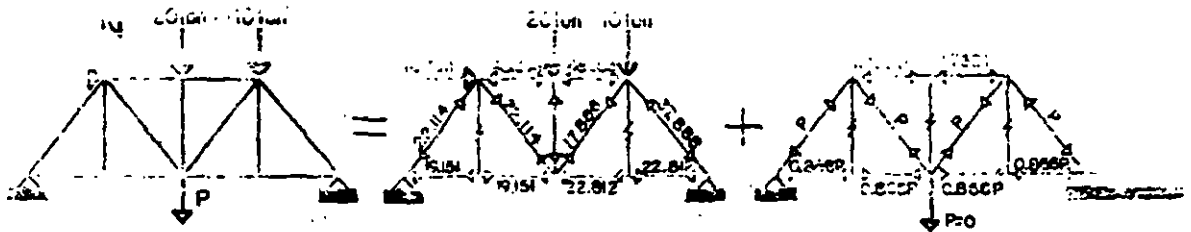
3.9. Calcular el desplazamiento lineal en el nudo F, de la siguiente armadura:



Para calcular el desplazamiento en el nudo F, se aplica una fuerza unitaria en el nudo F, en la dirección del desplazamiento deseado.

El desplazamiento en el nudo F, se calcula como:

El desplazamiento en el nudo F, se calcula como:



La expresión para calcular la energía de deformación por efecto de fuerza normal es:

es:

$$W_N = \int_0^L \frac{N^2}{2AE} ds$$

METODOS ENERGETICOS

por lo que el desplazamiento es:

$$\delta_P = \frac{\partial W_N}{\partial P} = \int_0^L \frac{N}{AE} \left( \frac{\partial N}{\partial P} \right) ds$$

que se puede representar de la siguiente manera:

$$\delta_P = \sum_{i=1}^b \frac{N \left( \frac{\partial N}{\partial P} \right) L}{AE}$$

	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{E}{AE}$	L	A	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$N \frac{\partial N}{\partial P}$	$\frac{N \partial N L}{\partial P A E}$	
A-B	6.000	2	- 48.303 - 1.732 P	- 1.732	83.661	250.982	
B-C	6.000	2	- 48.303 - 1.732 P	- 1.732	83.661	250.982	
D-E	6.000	2	19.151 + 0.866 P	0.866	16.585	49.754	
E-F	6.000	2	19.151 + 0.866 P	0.866	- 16.585	49.754	
F-G	6.000	2	22.812 + 0.866 P	0.866	19.755	59.265	
G-H	6.000	2	22.812 + 0.866 P	0.866	19.755	59.265	
D-A	6.928	2	- 22.114 - P	- 1.000	22.114	76.603	
A-E	3.464	1	0.000	0.000	0.000	0.000	
A-F	6.928	1	22.114 + P	1.000	22.114	153.206	
B-F	3.464	1	- 20.000	0.000	0.000	0.000	
F-C	6.928	1	17.886 + P	1.000	17.886	123.914	
C-G	3.464	1	0.000	0.000	0.000	0.000	
C-H	6.928	2	- 37.888 - P	- 1.000	37.888	131.244	
							$\Sigma 1204.969$

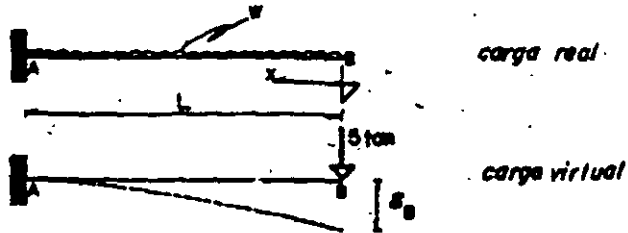
En la columna 6 se consideró el valor real de P que es nulo, por tanto el desplazamiento requerido es:

$$\delta_P = \frac{1204.969}{AE} \text{ (el sentido supuesto es el correcto).}$$

METODOS ENERGETICOS

METODO DEL TRABAJO VIRTUAL

3.10. Determinar el desplazamiento lineal en el extremo libre de la viga siguiente.



Trabajo virtual interno por efecto de flexión:

$$W_{vi} = \int_0^L \frac{Mm}{2EI} ds$$

Ecuaciones de momentos:

Carga real:  $M = -\frac{wx^2}{2}$  ; Carga virtual:  $m = -5x$

$$W_{vi} = \frac{1}{2EI} \int_0^L \left[ \frac{wx^2}{2} (-5x) \right] dx = -\frac{5w}{4EI} \int_0^L x^3 dx = -\frac{5w}{4EI} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^L = -\frac{5wL^4}{16EI}$$

Trabajo virtual externo:

$$W_{ve} = \frac{1}{2} x \cdot 5 \cdot 8$$

Según Betti se tiene

$$W_{vi} = W_{ve} ; \frac{5wL^4}{16EI} = \frac{5}{2} \delta_B \Rightarrow \delta_B = \frac{wL^4}{8EI}$$

Otra alternativa de solución es utilizando las tablas de integración.

$$W_{vi} = \int_0^L \frac{Mm}{2EI} ds$$

$i = \frac{wL^2}{2}$ 
 $M(\text{carga real,})$

$k = 5L$ 
 $m(\text{carga virtual})$

$$W_{vi} = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{4} Li k \right] = \frac{L}{2EI} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{wL^2}{2} \right) 5L \right] = \frac{5wL^4}{16EI}$$

MÉTODOS ENERGÉTICOS

$$W_{ve} = \frac{1}{2} 5 \delta_B$$

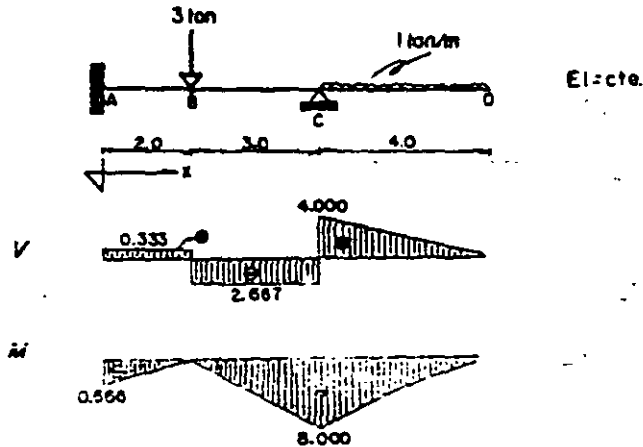
Según Betti:  $W_{vi} = W_{ve}$

$$\frac{5wL^4}{16EI} = \frac{5\delta_B}{2}$$

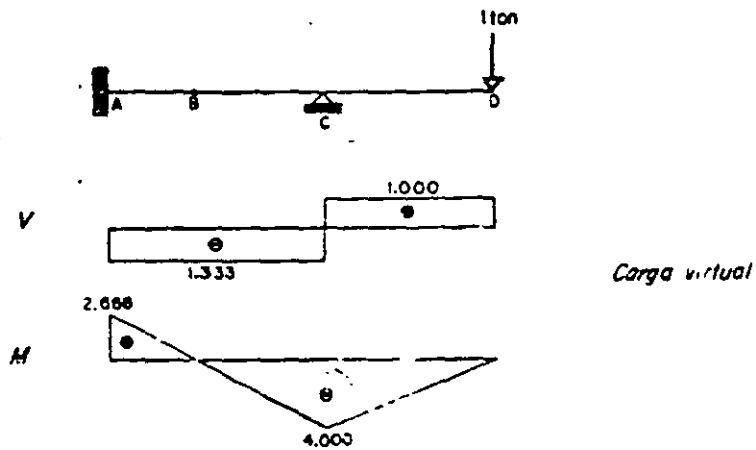
$$\delta_B = \frac{wL^4}{8EI}$$

3.11. Determinar el desplazamiento vertical en D, así como el giro en B teniendo en cuenta:

- a) Únicamente efectos por flexión.
- b) Efectos por flexión y cortante.

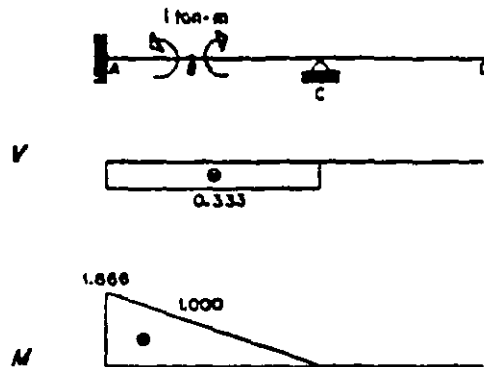


Para el desplazamiento vertical en D se supondrá una carga virtual



## METODOS ENERGETICOS

Para el giro en D se supone un momento unitario en este punto.



Momento virtual

a) Utilizando solo efectos de flexión.

$$\theta_D^M = \int_0^L \frac{Mm}{EI} ds$$

$$EI \theta_D^M = \int_0^2 0.666 \triangle 2.666 \triangle dx + \int_2^5 \triangle 8.0 \triangle 4.0 dx + \int_5^8 \triangle 8.0 \triangle 4.0 \triangle dx$$

$$EI \theta_D^M = \frac{2(0.666)(2.666)}{3} + \frac{3(8)(4)}{3} + \frac{4(8)(4)}{4} = 60.444$$

$$\theta_D^M = \frac{60.444}{EI}$$

(El sentido depende de como sea)

$$\theta_B^M = \int_0^L \frac{Mm}{EI} ds$$

$$EI \theta_B^M = \int_0^2 0.666 \triangle 1.666 \triangle dx + \int_2^5 \triangle 8.0 \triangle 1.0 \triangle dx$$

$$EI \theta_B^M = \frac{2(0.666)(1.666)}{3} + \frac{3(8)(1)}{3} = -4.963$$

$$\theta_B^M = \frac{-4.963}{EI}$$

(El sentido depende de como sea)

## METODOS ENERGETICOS

b) Efectos por flexión y cortante.

$$\delta_D^V = \int_0^L k \frac{Vv}{GA} ds \quad ; \quad \text{sección rectangular, } k=1.2 \quad ; \quad G=0.5E$$

$$\frac{0.5EA}{1.2} \delta_D^V = \int_0^2 0.333 \boxed{+} 1.333 \boxed{-} dx + \int_2^6 2.667 \boxed{-} 1.333 \boxed{-} dx + \int_6^8 4 \boxed{-} 1.0 \boxed{+} dx$$

$$\frac{0.5EA}{1.2} \delta_D^V = -2(0.333)(1.333) + 3(2.667)(1.333) + \frac{4(4)}{2} = 17.778$$

$$\delta_D^V = \frac{42.066}{EA}$$

$$\delta_D = \delta_D^M + \delta_D^V = \frac{80.444}{EI} + \frac{42.066}{EA}$$

$$\Theta_B^V = \int_0^L k \frac{Vv}{GA} ds$$

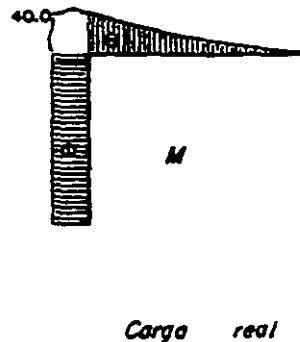
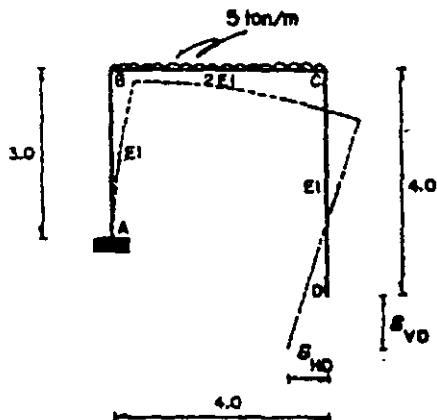
$$\frac{0.5EA}{1.2} \Theta_B^V = \int_0^2 0.333 \boxed{+} 0.333 \boxed{-} dx + \int_2^6 2.667 \boxed{-} 0.333 \boxed{-} dx$$

$$\frac{0.5EA}{1.2} \Theta_B^V = -2(0.333)(0.333) + 3(2.667)(0.333) = 2.444$$

$$\Theta_B^V = \frac{5.866}{EA}$$

$$\Theta_B = \Theta_B^M + \Theta_B^V = -\frac{4.963}{EI} + \frac{5.866}{EA}$$

3.12. Obtener los desplazamientos vertical y horizontal del punto D, del siguiente marco.

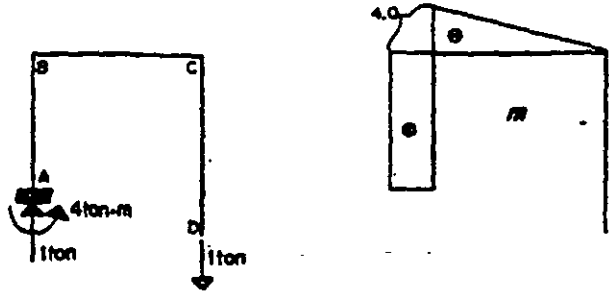


METODOS ENERGETICOS

a) desplazamiento vertical.

$$\delta_{Vo} = \int_0^L \frac{M m}{EI} ds$$

aplicando una carga virtual unitaria



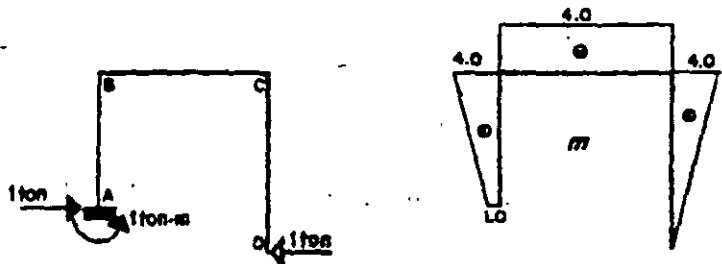
$$EI \delta_{Vo} = \int_0^3 40 \cdot 4 \cdot dy + \frac{1}{2} \int_0^4 40 \cdot 4 \cdot dx = 3(40)4 + \frac{4(40)4}{8} = 560$$

$$\delta_{Vo} = \frac{560}{EI} \quad (\text{sentido correcto})$$

b) desplazamiento horizontal.

$$\delta_{Ho} = \int_0^L \frac{M m}{EI} ds$$

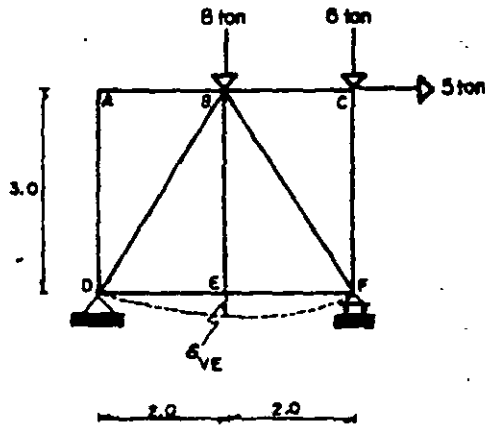
aplicando una carga virtual unitaria



$$EI \delta_{Ho} = \int_0^3 40 \cdot 4 \cdot dy + \frac{1}{2} \int_0^4 40 \cdot 4 \cdot dx = \frac{3(40)(1+4)}{2} + \frac{4(40)4}{8} = 406.666$$

$$\delta_{Ho} = \frac{406.666}{EI} \quad (\text{sentido correcto})$$

3.13. Calcular el desplazamiento vertical en el punto E de la siguiente armadura.

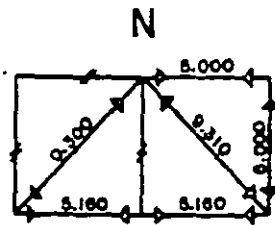


AE=cte.



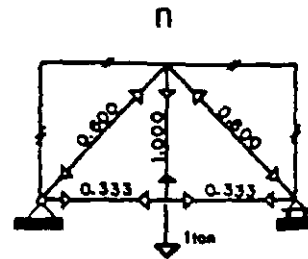
# METODOS ENERGETICOS

Se supondrá una carga virtual unitaria en la dirección en que se desea el desplazamiento:



Carga real

fuerzas  
(ton)



Carga virtual

El desplazamiento será:

$$\delta_{VE} = \sum_{i=1}^p \frac{Nn}{AE} L$$

BARRA	L	N	n	$\frac{Nn}{AE} L$
A-B	2.000	0.000	0.000	0.000
B-C	2.000	5.000	0.000	0.000
D-E	2.000	5.160	0.333	3.440
E-F	2.000	5.160	0.333	3.440
A-D	3.000	0.000	0.000	0.000
B-E	3.000	0.000	1.000	0.000
C-F	3.000	-6.000	0.000	0.000
B-D	$\sqrt{13}$	-0.300	-0.600	0.649
B-F	$\sqrt{13}$	-9.310	-0.600	20.141
			$\Sigma$	27.670

$$\therefore \delta_{VE} = \frac{27.670}{AE}$$

# Métodos aproximados

## 4.1. INTRODUCCION

Cuando se inicia el estudio de una estructura estáticamente indeterminada - no se conocen las secciones ni los momentos de inercia de sus elementos. Por - tanto es necesario hacer un análisis aproximado de los esfuerzos en la estructura para obtener una idea de las dimensiones generales de los miembros. Una vez - asignadas estas dimensiones de prueba se puede realizar el estudio elástico. En - general, este primer estudio elástico hará ver que esas dimensiones no son satis- factorias, y que sólo se llegará a una solución satisfactoria mediante diseños suce- sivos. Por tanto, el análisis aproximado de las estructuras estáticamente indeter- minadas es importante para los pasos preliminares de diseño.

Para los tipos de estructuras presentadas ordinariamente, pueden aprovechar- se métodos aproximados creados por otros y cuya precisión está comprobada, por lo que se utilizan con cierta confianza. Sin embargo, los métodos aproximados en- contrados comúnmente en los libros no cubren todos los casos. Por lo que para - hacer un buen análisis se debe estar suficientemente familiarizado con el compor- tamiento de las estructuras estáticamente indeterminadas para poder establecer - simplificaciones propias cuando se encuentran casos que no están en los libros.

## METODOS APROXIMADOS

En este capítulo se da un cierto número de soluciones aproximadas para los tipos normales de estructuras estáticamente indeterminadas. Es importante el conocimiento de estos métodos, pero quizá es de mayor importancia aún el hecho - de que los procedimientos bosquejados aquí sirvan de base para formular hipótesis que permitan simplificar los análisis aproximados de otros tipos de estructuras estáticamente indeterminadas.

### 4.2. METODO DE BOWMAN

Las hipótesis en que se basa este método son las siguientes:

- 1) Los puntos de inflexión en vigas exteriores se encuentran a 0.55 de su claro a partir del extremo exterior. En vigas interiores el punto de inflexión está en el centro del claro, excepto en la crujía central cuando el número de éstas es impar, o en las dos centrales si es par. En ambos casos los puntos de inflexión estarán forzados por condiciones de simetría y equilibrio.
- 2) En las columnas del primer entrepiso los puntos de inflexión se localizan a 0.60 de la altura, partiendo de la base.

En marcos de dos entrepisos o más, los puntos de inflexión en las columnas de los entrepisos último, penúltimo y antepenúltimo, se encuentran, respectivamente a 0.65, 0.60 y 0.55 de la altura correspondiente a partir del extremo superior de la columna.

En estructuras de cinco o más entrepisos los puntos de inflexión en columnas para las cuales no se especificó la posición, los mismos se encuentran - al centro de su altura.

- 3) La fuerza cortante de cada entrepiso se distribuye como se indica enseguida:

Para el primer entrepiso:

## METODOS APROXIMADOS

La fuerza cortante en columnas es igual a:

$$V_c = \frac{N - 0.5}{N + 1.0} V$$

la que se distribuye en las columnas de acuerdo a su rigidez particular.

La fuerza cortante en traveses será:

$$V_t = V - V_c$$

esta fuerza cortante la toman proporcionalmente a su rigidez las vigas que limitan a las crujeas en su parte superior. A su vez, la fuerza cortante anterior se distribuye en partes iguales entre las dos columnas que limitan a la crujía.

Para entresijos superiores:

La fuerza cortante en columnas será:

$$V_c = \frac{N - 2}{N + 1} V$$

la que se distribuye en las columnas de acuerdo a su rigidez particular.

La fuerza cortante en las traveses será:

$$V_t = V - V_c$$

esta se distribuye de la misma manera como se indicó para la planta baja.

en las expresiones anteriores el significado de las literales es:

$V_c$  = fuerza cortante en columnas.

$V$  = fuerza cortante en el entresijo.

## METODOS APROXIMADOS

$N$  = número de crujeas en el entrepiso de interés.

$V_i$  = fuerza cortante en trabes.

Para calcular los momentos en las columnas se multiplican los valores de las fuerzas cortantes por sus correspondientes brazos de palanca, pues se conocen los puntos de inflexión.

Finalmente se equilibran los momentos de las columnas con los de las vigas valiéndonos de que son conocidos los puntos de inflexión de las vigas.

En la Fig. 4.1. se muestra la localización de los puntos de inflexión de las columnas para los diferentes entrepisos.

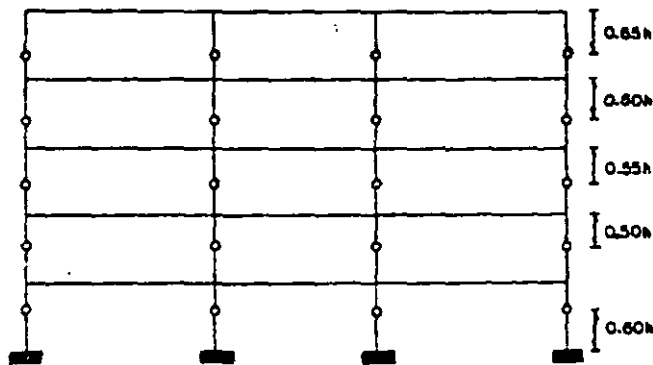


Fig. 4.1. Localización de los puntos de inflexión en los diferentes entrepisos.

En la fig. 4.2.a se muestra un edificio sometido a cargas laterales, en la Fig. 4.2.b se representa en forma exagerada la deformación sufrida por el pórtico bajo la acción de las cargas laterales.

Finalmente, en la Fig. 4.2.c se presentan los diagramas de momentos, los que son del tipo como ahí se indica.

## METODOS APROXIMADOS

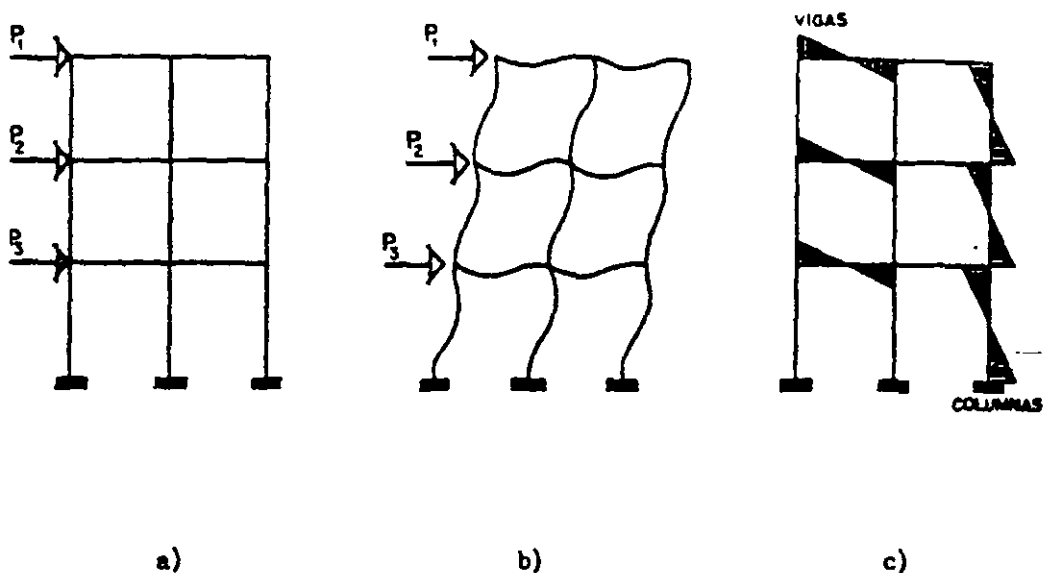


Fig. 4.2. Pórtico de edificio sujeto a cargas laterales.

### 4.3. METODO DEL PORTAL

En el método del Portal se formulan las siguientes hipótesis:

- 1) Los puntos de inflexión de vigas y columnas se encuentran en sus puntos medios.
- 2) El cortante total en cada piso se divide entre las columnas del mismo piso, de tal modo que cada columna interior soporte el doble de cortante que cada una de las columnas exteriores.

Los pasos a seguir para la aplicación de este procedimiento se indican a continuación:

1. Se determina la fuerza cortante en cada piso o nivel.
2. Se determina el cortante en cada columna utilizando para esto la hipótesis 2).

## METODOS APROXIMADOS

3. Calcular los momentos en los extremos de las columnas de acuerdo con lo establecido en la hipótesis 1).
4. Determinar los momentos en los extremos de las vigas por equilibrio con los momentos de las columnas en cada extremo. Es necesario hacerlo inicialmente en los nudos en donde concurre una sola viga y considerar que los momentos en los extremos de una viga son iguales.
5. Obtener las fuerzas cortantes en las vigas partiendo de los momentos actuales en sus extremos.
6. Obtener las fuerzas axiales en las columnas sumando, partiendo de la parte más alta, los cortantes transmitidos por las vigas.

Aunque las fuerzas axiales en las vigas no tienen gran importancia para el diseño, se pueden obtener de un modo análogo al paso 6) sumando, a partir de un extremo, los cortantes transmitidos por las columnas; obviamente, hay que incluir en esa suma los efectos de las propias cargas laterales.

### 4.4. METODO DEL VOLADIZO

El método se basa en las siguientes hipótesis:

- 1) Los puntos de inflexión de vigas y columnas se localizan en sus puntos medios.
- 2) La intensidad del esfuerzo axial en cada columna de un piso es proporcional a la distancia horizontal desde esa columna al centro de gravedad de todas las columnas del piso considerado.

La secuela de cálculo en la aplicación de este método es:

## METODOS APROXIMADOS

1. Determinar la fuerza cortante en cada piso.
2. Se calcula la fuerza axial en las columnas haciendo uso de la hipótesis 2).
3. Obtener las fuerzas cortantes en las vigas partiendo de las fuerzas en las columnas axiales en las columnas de los diversos nudos.
4. Determinar los momentos en los extremos de las vigas, multiplicando el cortante en la viga por la mitad de su longitud (hipótesis 1).
5. Obtener los momentos en las cabezas de las columnas descendiendo hacia la base.

### 4.5. METODO DEL FACTOR

Está basado en las ecuaciones pendiente - deformación haciendo modificaciones bajo las siguientes hipótesis:

- 1) En el cálculo de los desplazamientos lineales y angulares en un piso, se considera que el valor  $\Delta$  en dos entrepisos consecutivos es igual. El valor  $\Delta$  - es la diferencia de desplazamientos laterales de dos niveles consecutivos dividida - por la altura del entrepiso.
- 2) El giro de un nudo y de los extremos opuestos de todas las barras que concurren al mismo son iguales.

El método del factor se aplica siguiendo los pasos posteriores:

1. En cada nudo se calcula el factor  $v$  de las vigas según la relación - - -  
$$v = \sum K_c / \sum K$$
, en donde  $\sum K_c$  representa la suma de los valores de las rigideces de las columnas que concurren al nudo, y  $\sum K$  es la suma de los valores de las rigideces para todos los elementos que llegan al mismo nudo. Se escribe el valor de  $v$  obteniendo así, en el extremo de cada viga contiguo al - nudo para el que se ha hallado.



## METODOS APROXIMADOS

2. En cada nudo se calcula el factor  $c$  de las columnas con la relación siguiente:  $c = 1 - v$  siendo  $v$  el factor de la viga calculado en el paso 1. Se escribe cada valor  $c$  obteniendo así en el extremo de cada columna junto al nudo en el que se ha calculado. En la base de las columnas empotradas - del primer piso se toma  $c = 1$ .
3. Existe un número obtenido en 1. y 2., en cada extremo de todos los elementos del marco. A cada uno de dichos números se le suma la mitad del correspondiente al otro extremo del elemento.
4. Se multiplica cada suma hallada en el paso 3. por el valor de la rigidez relativa del elemento al que corresponde dicha suma. Para las columnas, a este producto se le llama factor de momento de columna  $C$ ; para las vigas, - factor de momento de viga,  $V$ .
5. Los factores de momento de columna  $C$ , hallados en el paso 4., son realmente los valores relativos aproximados de los momentos en los extremos de la columna para el piso correspondiente. Por la estática se ve que la suma de los momentos extremos de las columnas en un piso determinado es igual al cortante horizontal total en ese piso multiplicado por la altura del piso.

Por tanto, los factores de momento de columna  $C$  se pueden transformar en momentos en los extremos de las columnas, por proporción directa, en cada piso.

6. Los factores de momento de viga  $V$ , hallados en el paso 4., son realmente - los valores relativos aproximados de los momentos en los extremos de las vigas en cada nudo es igual, por la estática, a la suma de los momentos en los extremos de las columnas en ese nudo, que pueden obtenerse en el paso 5. Por tanto, los factores de momento de viga  $V$  se pueden transformar en momentos en los extremos de éstas, por proporción directa en cada nudo.

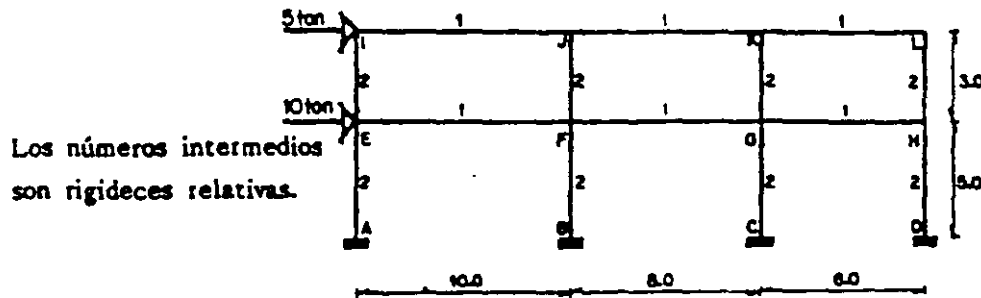
**4.6. Ejemplos**

**de**

**Aplicación**

## METODOS APROXIMADOS

### 4.1. UTILIZANDO EL METODO DE BOWMAN DETERMINAR LOS CORTANTES Y LOS MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DE CADA ELEMENTO DEL MARCO SIGUIENTE



#### ENTREPISO 1

Fuerza cortante en el piso 1.  $V = 5 + 10 = 15 \text{ ton.}$  ;  $N = 3$

- Cortante en las columnas:

$$V_c = \frac{N - 0.5}{N + 1} V = \frac{3 - 0.5}{3 + 1} (15) = 9.375 \text{ ton.}$$

Cortante en cada columna.

Como todas las columnas tienen la misma sección, se tiene:

$$V' = \frac{9.375}{4} = 2.344 \text{ ton.}$$

- Cortante en trabes:

$$V_t = V - V_c = 15.0 - 9.375 = 5.625 \text{ ton.}$$

el cortante en cada viga es:

$$V = \frac{5.625}{3} = 1.875 \text{ ton.}$$

#### ENTREPISO 2

Fuerza cortante en el piso 2.  $V = 5 \text{ ton.}$  ;  $N = 3$

- Cortante en las columnas:

$$V_c = \frac{N - 2}{N + 1} V = \frac{3 - 2}{3 + 1} (5) = 1.250 \text{ ton.}$$

cortante en cada columna.

$$V' = \frac{1.250}{4} = 0.312 \text{ ton.}$$

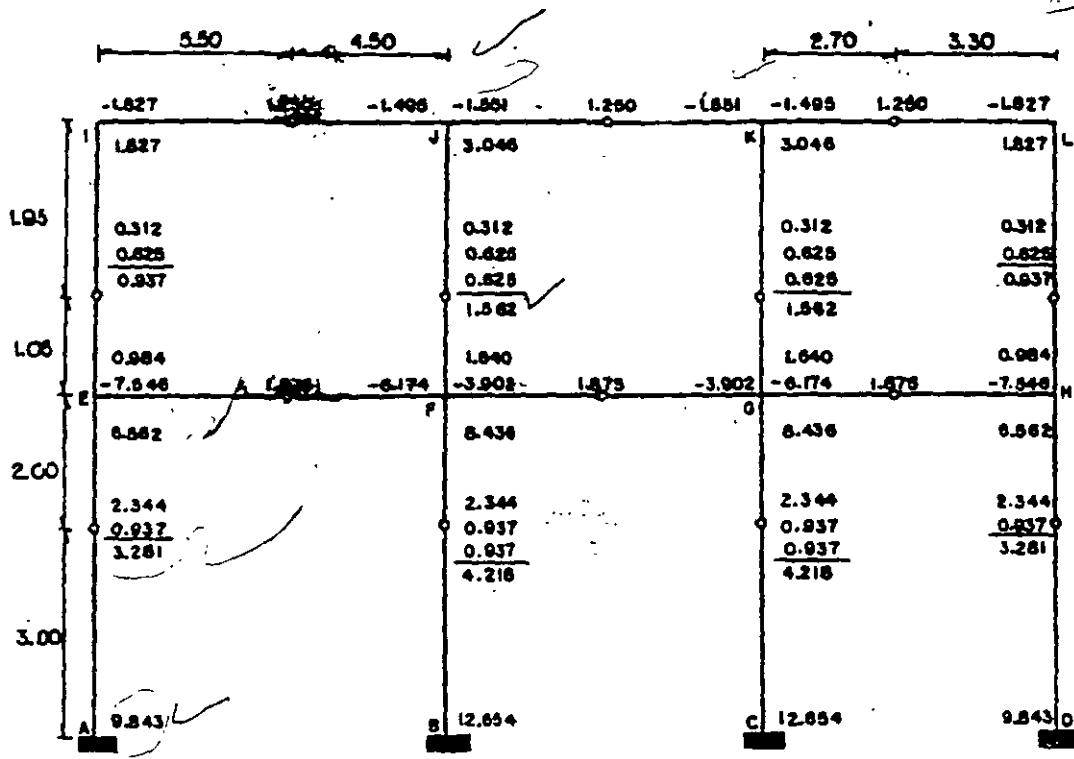
METODOS APROXIMADOS

- Cortante en traves:

$$V_t = V - V_c = 5 - 1.250 = 3.750 \text{ ton.}$$

el cortante en cada viga es:

$$V = \frac{3.750}{3} = 1.250 \text{ ton.}$$



La fuerza cortante en cada trabe se distribuye igualmente entre las dos columnas inferiores que la limitan. Así:

ENTREPISO 1

$$\frac{1.875}{2} = 0.937 \text{ ton.}$$

ENTREPISO 2

$$\frac{1.250}{2} = 0.625$$

Los momentos en las columnas se calculan multiplicando las fuerzas cortantes por sus correspondientes brazos de palanca.

## METODOS APROXIMADOS

Ejemplo:

Columna FB.

Momento FB = 4.218 (2) = 8.436 t.m.

Momento BF = 4.218 (3) = 12.654 t.m.

Los momentos en traveses se calcularon como sigue:

- En nudos donde concurre una trabe solo se hizo el equilibrio.
- En traveses exteriores, el momento en el interior se calculó como:

$$M_2 = \frac{M_1}{d} (L - d) \text{ donde: } M_1 = \text{momento en el extremo exterior}$$

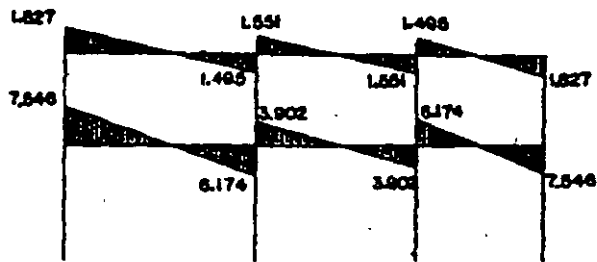
L = claro de la trabe.

d = distancia al punto de inflexión, medida desde el extremo exterior.

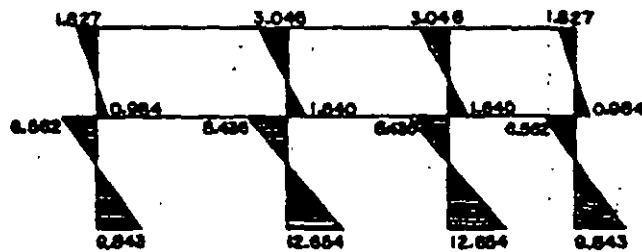
Ejemplo:  $M_{II} = \frac{-1.827}{5.50} (10 - 5.5) = -1.495 \text{ t.m.}$

### DIAGRAMAS:

Momentos  
en vigas

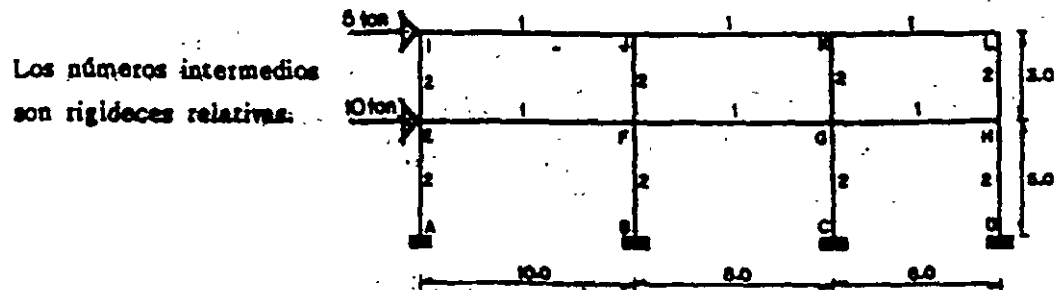


Momentos en  
columnas



## MÉTODOS APROXIMADOS

### 4.2 UTILIZANDO EL MÉTODO DEL PORTAL DETERMINAR LOS CORTANTES Y LOS MOMENTOS DE LOS EXTREMOS DE CADA ELEMENTO DEL SIGUIENTE MARCO



#### CORTANTE EN EL NIVEL 2

$$V = 5 \text{ ton.}$$

cortante en columnas interiores:

$$V_c = \frac{V}{r-1} \quad ; \quad V = \text{cortante en el piso}$$

$r = \text{número de columnas en el entrepiso } r \geq 3$

$$V_c = \frac{5}{4-1} = 1.667 \text{ ton.}$$

cortante en columnas exteriores:

$$V_c = \frac{1.667}{2} = 0.833 \text{ ton.}$$

#### CORTANTE EN EL NIVEL 1

$$V = 5 + 10 = 15 \text{ ton.}$$

cortante en columnas interiores:

$$V_c = \frac{15}{4-1} = 5.000 \text{ ton.}$$

cortante en columnas exteriores:

$$V_c = \frac{5.000}{2} = 2.500 \text{ ton.}$$

Los momentos en los extremos de las columnas son iguales al cortante en las mismas, multiplicados por la mitad de su longitud.

METODOS APROXIMADOS

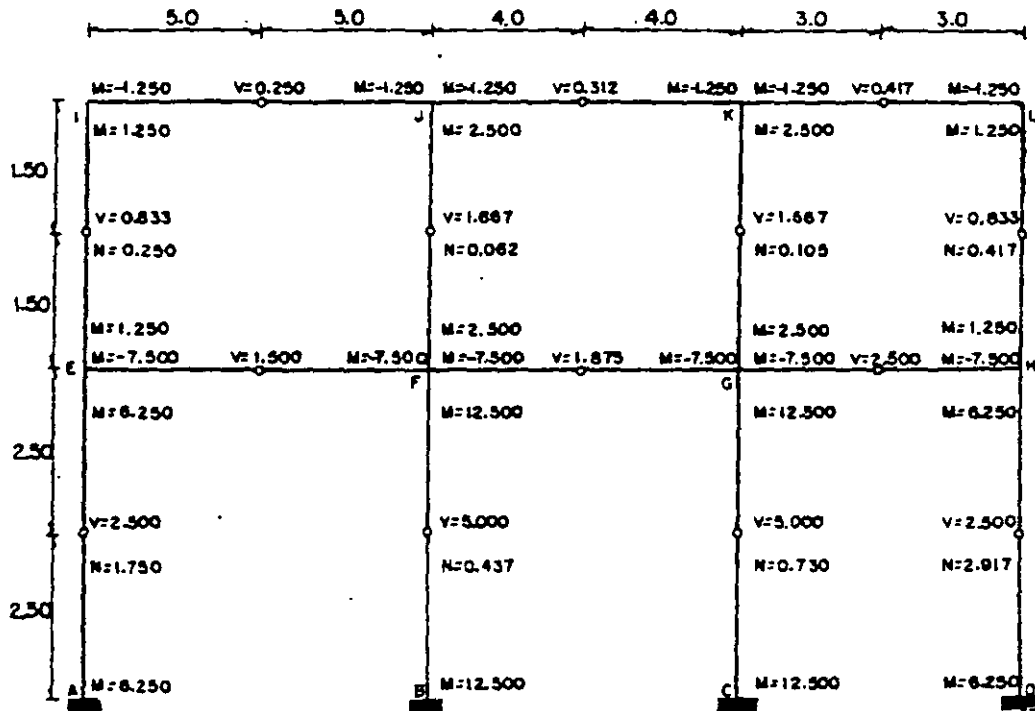
Ejemplo: Columna FB.  $M_{FB} = M_{BF} = 5.0(2.5) = 12.500 \text{ t.m}$

Columna LH.  $M_{LH} = M_{HL} = 0.833(1.50) = 1.250 \text{ t.m}$

Los momentos en las trabes se calculan por equilibrio. Primero se hace en nudos donde concurre una trabe.

Ejemplo: Nudo E.  $M_{EA} = 6.250 \text{ t.m.} ; M_{EI} = 1.250 \text{ t.m}$

$\therefore M_{EF} = M_{FE} = -7.500 \text{ t.m}$



Equilibrio del nudo F.

como  $M_{EF} = M_{FE} = -7.500 \text{ t.m}$

$M_{FB} = 12.50 \text{ t.m}; M_{FJ} = 2.50 \text{ t.m}$

$\therefore M_{FG} = -7.500 \text{ t.m}$

Fuerzas cortantes en las vigas:

como  $M = Vd \implies V = \frac{M}{d}$

## MÉTODOS APROXIMADOS

V = fza. cortante en traves.

M = momento externo en vigas.

d = mitad de la longitud de la trabe.

Ejemplo:

$$\text{trabe IJ. } V = \frac{1.250}{5} = 0.250 \text{ ton.}$$

$$\text{trabe GH. } V = \frac{7.500}{3} = 2.500 \text{ ton.}$$

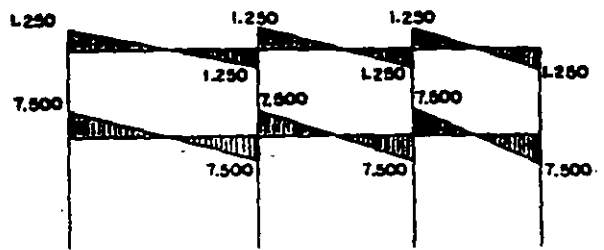
Fuerzas axiales en columnas:

Columna IE : N = 0.250 ton = cortante transmitido por la trabe IJ.

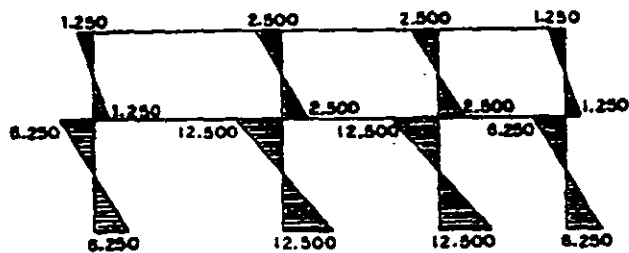
Columna EA ; N = 0.250 + 1.500 = 1.750 ton = cortante transmitido por la trabe IJ más el correspondiente de la trabe EF.

### D I A G R A M A S :

Momentos  
en vigas

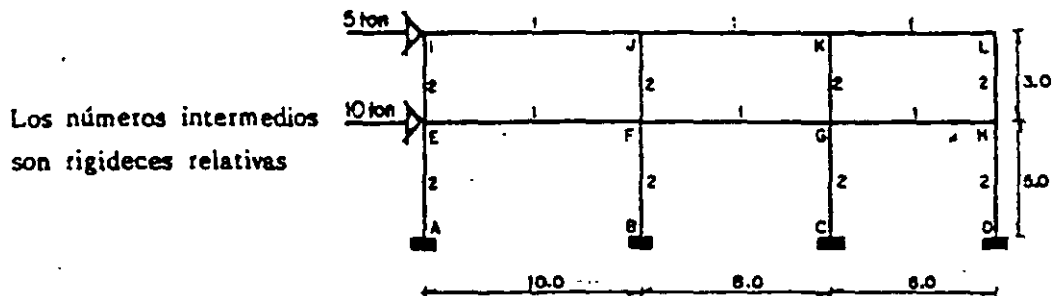


Momentos  
en columnas





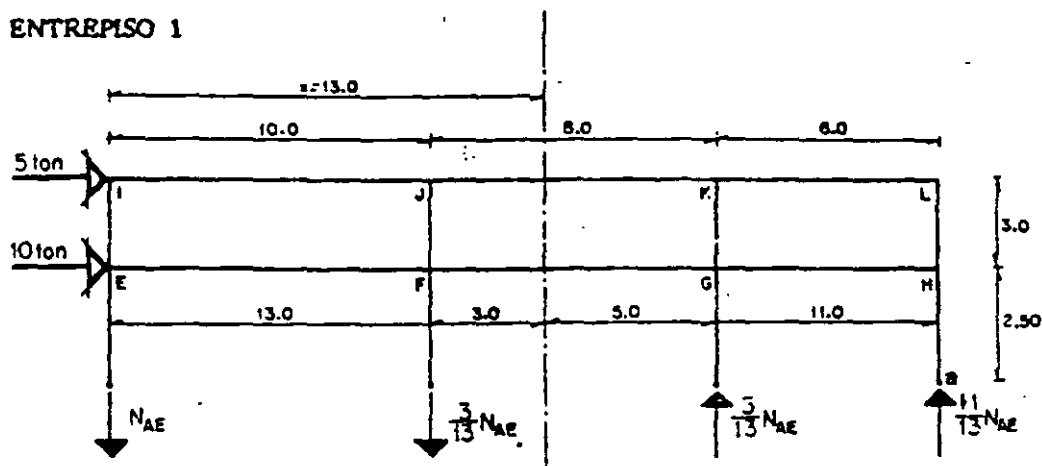
4.3 UTILIZANDO EL METODO DEL VOLADIZO DETERMINAR LOS CORTANTES Y LOS MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DE CADA ELEMENTO DEL SIGUIENTE MARCO



Los números intermedios son rigideces relativas

- Cálculo de las fuerzas axiales en las columnas.

ENTREPISO 1



Centro de gravedad de las columnas.

$$X = \frac{10 + 18 + 24}{4} = 13.0 \text{ m. (desde AEI)}$$

Expresando la fuerza axial en AE por  $N_{AE}$ , por la hipótesis 2), las fuerzas axiales en las columnas restantes serán:

Columna BF	Columna CG	Columna DH
$\frac{3}{13} N_{AE}$	$\frac{5}{13} N_{AE}$	$\frac{11}{13} N_{AE}$

Tomando momentos respecto al punto de inflexión a de la columna DH, tenemos:

$$\sum M_a = 0 ; 5(5.50) + 10(2.50) - 24N_{AE} - \frac{3}{13} N_{AE}(14) + \frac{5}{13} N_{AE}(6) = 0$$

METODOS APROXIMADOS

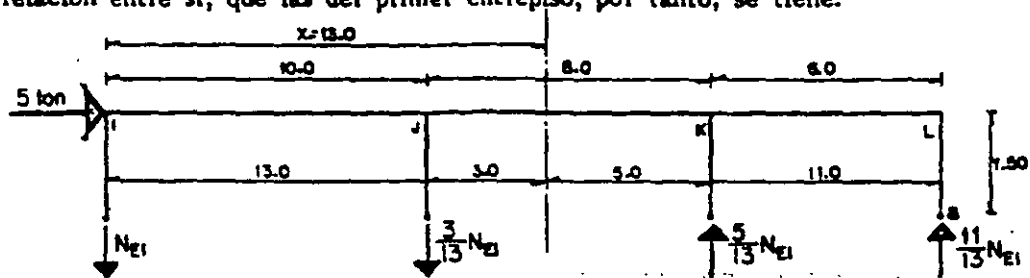
$$27.5 + 25.0 - 24 N_{AE} - \frac{42}{13} N_{AE} + \frac{30}{13} N_{AE} = 0 \quad \therefore N_{AE} = 2.106 \text{ ton}$$

$$N_{BF} = \frac{3}{13} (2.106) = 0.486 \text{ ton}; N_{CG} = -\frac{5}{13} (2.106) = -0.810 \text{ ton}; N_{DH} =$$

$$-\frac{11}{13} (2.106) = -1.782 \text{ ton}$$

ENTREPISO 2

Para este entrepiso las fuerzas axiales en las columnas están en la misma relación entre sí, que las del primer entrepiso, por tanto, se tiene:



Tomando momentos respecto al punto de inflexión a de la columna HL, tenemos:

$$\sum M_a = 0 ; 5(1.50) - 24 N_{EI} - \frac{3}{13} N_{EI} (14) + \frac{5}{13} N_{EI} (6) = 0$$

$$7.50 - 24 N_{EI} - \frac{42}{13} N_{EI} + \frac{30}{13} N_{EI} = 0 \quad \therefore N_{EI} = 0.300 \text{ ton}$$

$$N_{FJ} = \frac{3}{13} (0.300) = 0.069 \text{ ton} ; N_{GK} = -\frac{5}{13} (0.300) = -0.115 \text{ ton} ;$$

$$N_{HL} = \frac{11}{13} (0.300) = -0.254 \text{ ton.}$$

Las fuerzas cortantes en las traveses se obtienen a partir de las fuerzas axiales en las columnas. Por ejemplo, en el nudo E.

$$V_{EF} = N_{EI} - N_{AE} = 0.300 - 2.106 = -1.806 \text{ ton}$$

en el nudo F.

$$V_{FG} = V_{EF} + N_{FJ} - N_{BF} = -1.806 + 0.069 - 0.486 = -2.223 \text{ ton}$$

Los momentos en vigas se encuentran multiplicando el cortante en la trabe por la mitad de su longitud. Por ejemplo:

$$M_{EF} = V_{EF} \times 5 = 1.806(5) = 9.030 \text{ ton.m}$$

$$M_{KL} = V_{KL} \times 3 = 0.254(3) = 0.762 \text{ ton.m}$$

Los momentos en las columnas se determinan en la cabeza de las mismas, descendiendo hacia la base. Por ejemplo, considérese el nudo J.

MÉTODOS APROXIMADOS

$$M_{JF} = M_{JI} + M_{JK} = 1.500 + 1.476 = 2.976 \text{ ton.m}$$

como existe un punto de inflexión en el centro de FJ,  $M_{FJ} = 2.976 \text{ ton.m}$

Para el nudo F:  $M_{FB} + M_{FJ} = M_{FE} + M_{FG}$ ; lo que nos indica que los momentos en las vigas y en las columnas actúan, en un nudo, en sentidos opuestos (véase Fig. 4.2.b.) Por tanto:

$$M_{FB} = 9.030 + 8.892 - 2.976 = 14.946 \text{ ton.m}$$

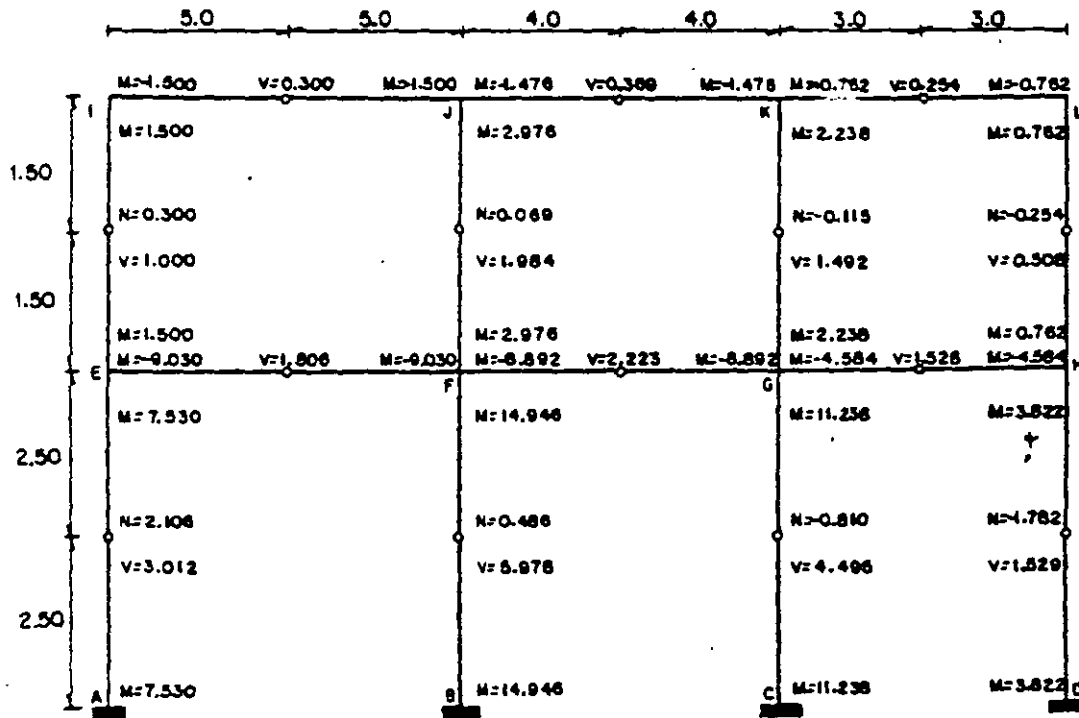
Ahora,  $M_{BF} = 14.946$  porque hay un punto de inflexión en la mitad de BF.

La fuerza cortante en columnas se obtiene dividiendo el momento en el extremo por la mitad de su longitud.

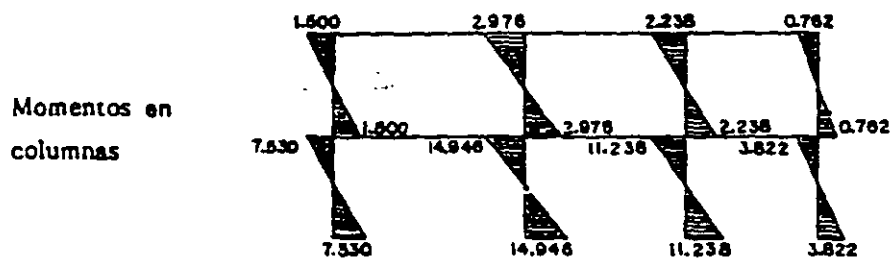
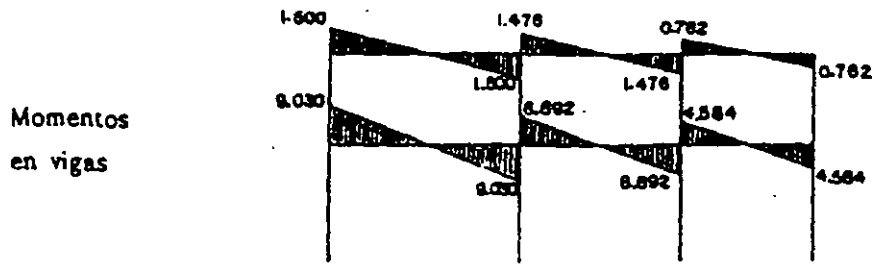
Por ejemplo:

Columna AE.

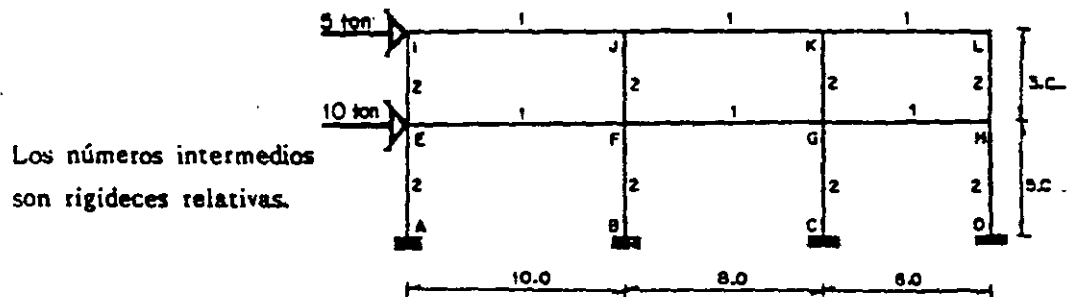
$$V = \frac{7.530}{2.50} = 3.012 \text{ ton.}$$



DIAGRAMAS:



4.4 UTILIZANDO EL METODO DEL FACTOR DETERMINAR LOS CORTANTES Y LOS MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DE CADA ELEMENTO DEL SIGUIENTE MARCO.



## MÉTODOS APROXIMADOS

### - CÁLCULO DE LOS FACTORES DE VIGA.

$$\text{NUDO E. } \Sigma K_C = 4 ; \Sigma K = 5 ; V_E = \frac{4}{5} = 0.800$$

$$\text{NUDO F. } \Sigma K_C = 4 ; \Sigma K = 6 ; V_F = \frac{4}{6} = 0.667$$

$$\text{NUDO G. } V_G = 0.667 ; \text{NUDO H. } V_H = 0.800$$

$$\text{NUDO I. } \Sigma K_C = 2 ; \Sigma K = 3 ; V_I = \frac{2}{3} = 0.667$$

$$\text{NUDO J. } \Sigma K_C = 2 ; \Sigma K = 4 ; V_J = \frac{2}{4} = 0.500$$

$$\text{NUDO K. } V_K = 0.500 ; \text{NUDO L. } V_L = 0.667$$

### - CÁLCULO DE LOS FACTORES DE COLUMNA.

$$\text{NUDO E. } C_E = 1 - 0.800 = 0.200 ; \text{NUDO F. } C_F = 1 - 0.667 = 0.333$$

$$\text{NUDO G. } C_G = 1 - 0.667 = 0.333 ; \text{NUDO H. } C_H = 1 - 0.800 = 0.200$$

$$\text{NUDO I. } C_I = 1 - 0.667 = 0.333 ; \text{NUDO J. } C_J = 1 - 0.500 = 0.500$$

$$\text{NUDO K. } C_K = 1 - 0.500 = 0.500 ; \text{NUDO L. } C_L = 1 - 0.667 = 0.333$$

$$\text{NUDO A. } C_A = 1.000$$

### - AUMENTAR EN NUMERO DE CADA EXTREMO DE CADA ELEMENTO EN LA MITAD DEL NUMERO DEL OTRO EXTREMO DEL MISMO.

$$\text{NUDO A: elemento AE ; } 1.000 + 0.5(0.200) = 1.100$$

$$\text{NUDO E: elemento EI ; } 0.200 + 0.5(0.333) = 0.366$$

$$\text{elemento EF ; } 0.800 + 0.5(0.666) = 1.133$$

$$\text{elemento EA ; } 0.200 + 0.5(1.000) = 0.700$$

se hacen cálculos en forma similar para todos los nudos.

### - CÁLCULO DE LOS FACTORES DE MOMENTO PARA COLUMNAS Y VIGAS

$$\text{NUDO A: elemento AE ; } C_{AE} = 1.100(2) = 2.200$$

$$\text{NUDO E: elemento EI ; } 0.366(2) = 0.733$$

$$\text{elemento EF ; } 1.133(1) = 1.133$$

$$\text{elemento EA ; } 0.700(2) = 1.400$$

se hacen cálculos en forma similar para todos los nudos.

### - MOMENTOS EN LAS COLUMNAS.

#### = ENTREPISO 1.

$$M = Vh = 15(5) = 75 \text{ ton.m}$$

## METODOS APROXIMADOS

este momento se distribuye en los extremos de las columnas en proporción directa en los factores de momento C, en el entrepiso.

$$M_{ij} = \frac{C_{ij}}{\Sigma C} M$$

$$\Sigma C = 1.400 + 2.200 + 1.666 + 2.332 + 1.666 + 2.332 + 1.400 + 2.200 = 15.196$$

Por lo que los momentos son:

$$M_{AB} = \frac{2.200}{15.196} (75) = 10.858 \text{ ton.m} ; M_{EA} = \frac{1.400}{15.196} (75) = 6.910 \text{ ton.m}$$

$$M_{BF} = 11.510 \text{ ton.m}; M_{FB} = 8.222 \text{ ton.m}; M_{CG} = 11.510 \text{ ton.m}; M_{GC} = 8.222 \text{ ton.m}$$

$$M_{DH} = 10.858 \text{ ton.m}; M_{HD} = 6.910 \text{ ton.m}$$

= ENTREPISO 2

$$M = Vh = 5(3) = 15.0 \text{ ton.m}$$

$$\Sigma C = 8.094$$

- MOMENTOS EN LAS TRABES.

Estos serán proporcionales a los factores de momento de viga V. Por ejemplo, para el nudo J.

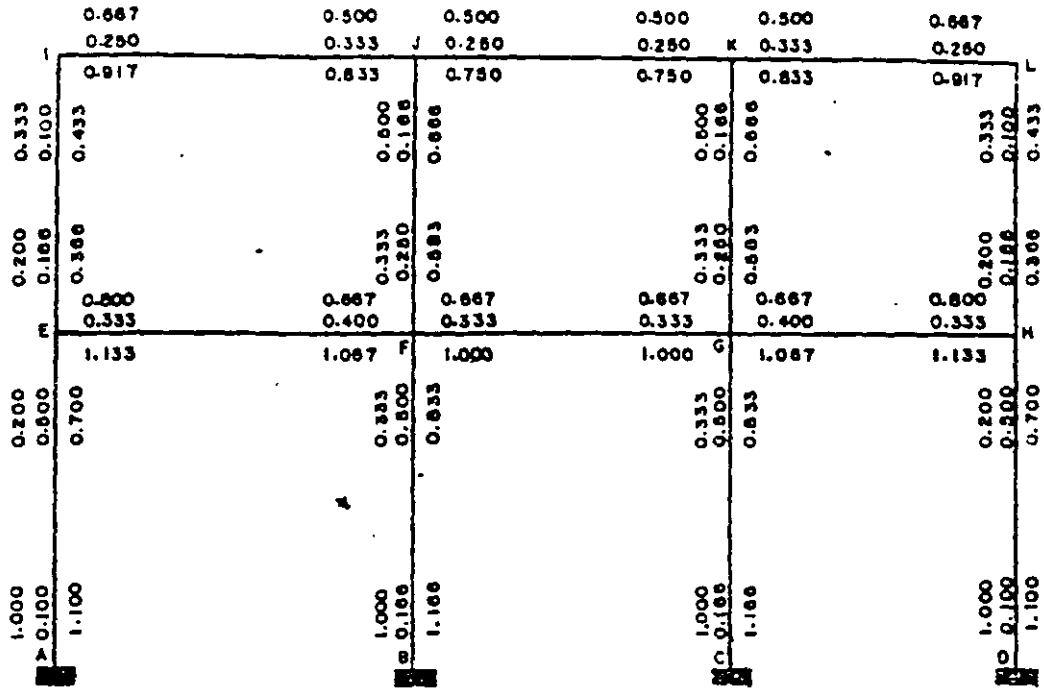
$$M_{JI} = - \frac{V_{JI}}{(V_{JI} + V_{JK})} M_{JF} = - \frac{0.833}{(0.833 + 0.75)} (2.470) = - 1.300 \text{ ton.m}$$

$$M_{JK} = - \frac{V_{JK}}{(V_{JI} + V_{JK})} M_{JF} = - \frac{0.750}{(0.833 + 0.75)} (2.470) = - 1.170 \text{ ton.m}$$

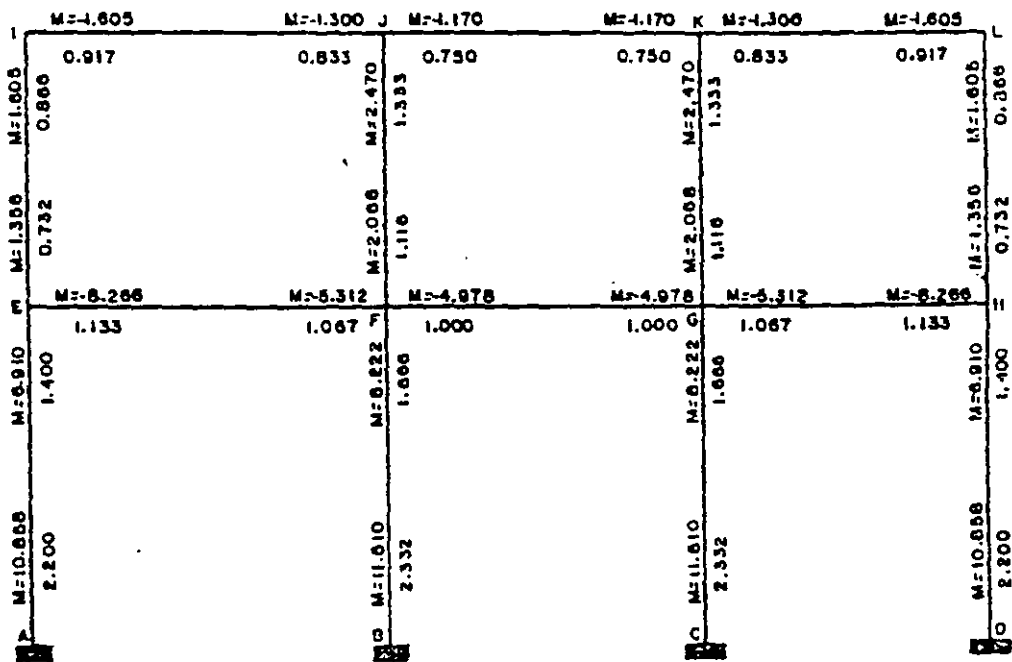
en nudos en donde concurre una viga el momento en ésta se encuentra por equilibrio.

- Factores de vigas y columnas más la mitad del correspondiente al otro extremo del elemento.

METODOS APROXIMADOS

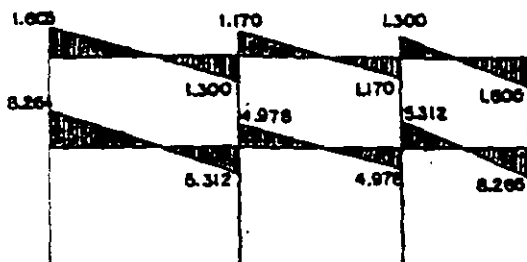


- Factores de momentos de vigas y columnas y momentos extremos.

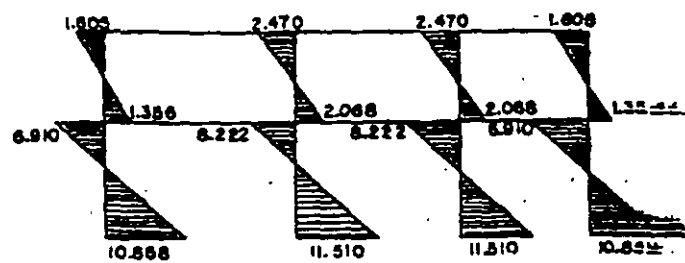


METODOS APROXIMADOS

DIAGRAMAS:



Momentos en vigas.



Momentos en columnas.



# Método de las Flexibilidades

## 5.1. INTRODUCCION

El procedimiento general para la solución de estructuras indeterminadas se basa en la necesidad de que las deformaciones de la estructura deben satisfacer las condiciones de compatibilidad con los requisitos estructurales.

Utilizando este método, un sistema indeterminado se descompone en una serie de estructuras determinadas, esto se logra suprimiendo los esfuerzos y/o componentes de reacción redundantes, pero siempre teniendo una estructura estable e isostática. Debido a que las fuerzas redundantes son manejadas como incógnitas, el procedimiento recibe el nombre de método de las Fuerzas.

Posteriormente se escriben las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones para cada punto de aplicación de los esfuerzos y/o reacciones redundantes, aplicando el principio de superposición.

Resolviendo simultáneamente estas ecuaciones se obtienen las magnitudes y sentidos de las redundantes (esfuerzos y/o reacciones).

Este método no es recomendable para la solución de estructuras como por ejemplo un marco continuo de varios pisos, sin embargo, se puede usar ventajosamente en el caso de marcos de una nave y un piso de formas poco usuales.

# METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

## 5.2. ANALISIS DE VIGAS

Para mostrar la aplicación del procedimiento considérese la viga apoyada de la Fig. 5.1. cuyo grado de indeterminación es uno. Tomando la reacción en B como redundante se tiene una estructura isostática y estable denominada estructura primaria, habiendo hecho ésto, el extremo B queda en libertad de flexionarse bajo la acción de la carga, como se muestra en la Fig. 5.1.b. la carga  $w$  se quita ahora y se aplica una carga vertical en el punto y a lo largo de la línea de acción de la reacción redundante  $R_B$ , calculándose la deflexión  $\delta_B$  en términos de  $R_B$  (Fig. 5.1.c.)

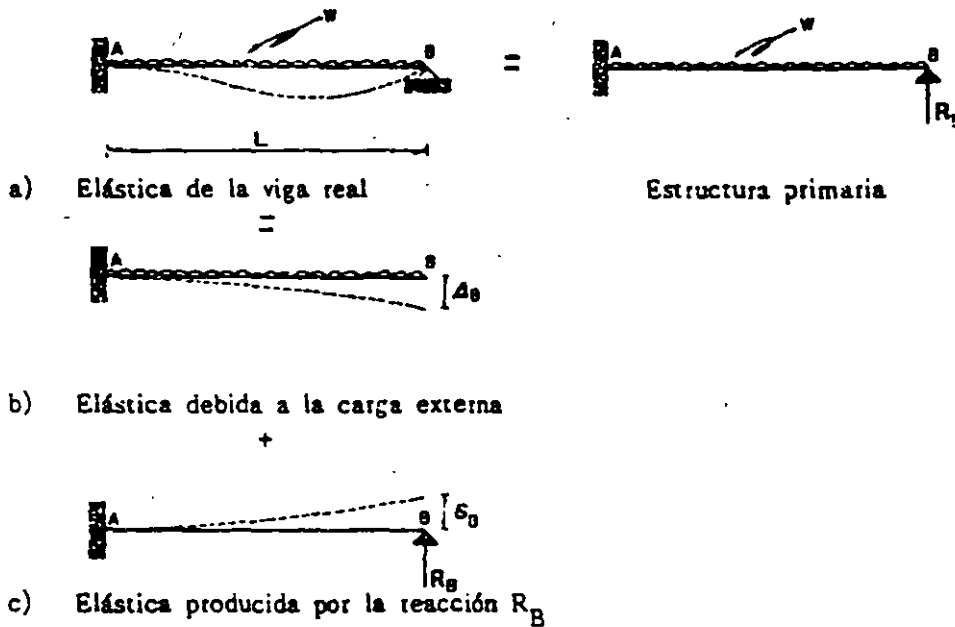


Fig. 5.1.

Enseguida, superponiendo los dos desplazamientos puesto que

$$\Delta_B + \delta_B = 0 \quad \text{Ec. de compatibilidad}$$

se halla una solución para  $R_B$ , el efecto de esta superposición se debe a que en realidad no se mueve el punto B por la acción de las fuerzas aplicadas y la reacción redundante. Una vez conocida  $R_B$  las reacciones restantes pueden obtenerse por medio de las ecuaciones de la estática.

Se hace notar el hecho de que la reacción  $R_B$  se supuso hacia arriba porque así lo indica el sentido estructural, sin embargo, ésto en realidad carece de importancia, pues si se supone incorrectamente, entonces la reacción hubiera resultado con signo negativo.

## METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

Si se tiene una estructura con  $n$  redundantes, los desplazamientos se calcularán para  $n + 1$  sistemas de cargas:

- a) Un análisis para el sistema de cargas original <sup>99</sup>
- b) Un análisis para efectos de cada redundante.

Las ecuaciones de compatibilidad implican  $n$  ecuaciones lineales, donde cada una expresa una condición geométrica de la estructura real. <sup>99</sup> En ocasiones es necesario hacer más de un análisis si el problema se resuelve mediante el uso de tablas.

### 5.3. SOLUCION PARTICULAR Y COMPLEMENTARIA

Haciendo referencia a lo señalado en la introducción, una estructura hiperestática se puede resolver proponiendo cualquier combinación de componentes de esfuerzos y/o reacciones redundantes, a estas combinaciones se les llama estructuras primarias.

La elección de la estructura primaria no es única, sino principalmente es un asunto de conveniencia el determinar cuáles serán las incógnitas o redundantes de manera que se realice el menor trabajo posible.

De acuerdo a la selección de la estructura primaria se pueden tener varias alternativas, dicha estructura se obtiene eliminando apoyos, transformando un tipo de apoyo en otro más sencillo o insertando articulaciones en la estructura original, siempre teniendo presente que la estructura primaria será isostática y estable para cualquier sistema de cargas aplicado.

Ilustraremos lo anterior considerando la estructura de la Fig. 5.2.a cuyo grado de hiperestaticidad es 3, las alternativas de solución, entre otras se señalan en los incisos b), c) y d) de la misma figura.

En el inciso b) se hizo la supresión de las reacciones del apoyo D, la alternativa del inciso c) se basó en la transformación de los apoyos originales en otros más simples y, finalmente la solución presentada en d) tiene como redundantes los momentos en los nudos B, C y D en donde se insertaron articulaciones.

METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

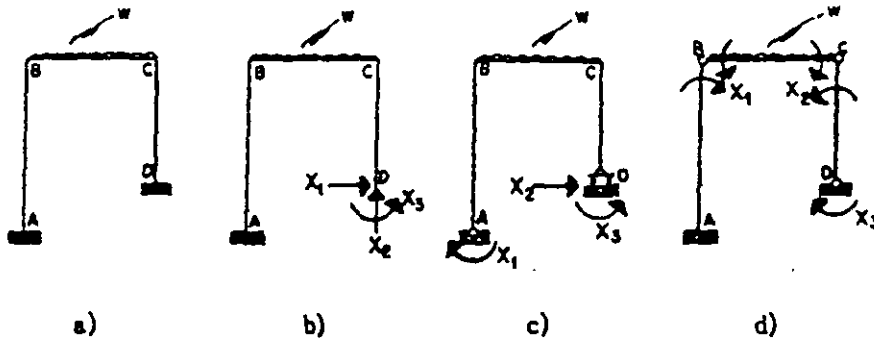


Fig. 5.2.

Para el análisis de estas estructuras se llamará solución particular a la estructura primaria sobre la cual obra el sistema original de cargas y solución complementaria a la estructura primaria considerando la acción de cada una de las redundantes o incógnitas.

5.4. CALCULO DE LAS FLEXIBILIDADES

Como ejemplo para la obtención de las flexibilidades y el establecimiento de las ecuaciones de compatibilidad o congruencia, considérese el marco de la Fig. 5.3.a. Suprimiendo las reacciones del apoyo D, se tiene el marco isostático de la fig. 5.3.b. el cual es la estructura primaria.

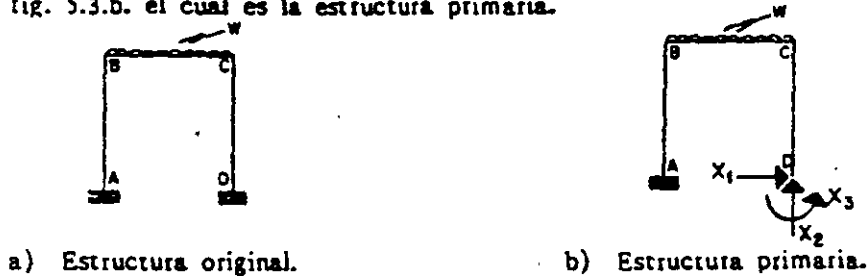


Fig. 5.3.

Aplicando el principio de superposición de causas y efectos, el marco original se puede descomponer como se muestra en la Fig. 5.4. con los efectos indicados.

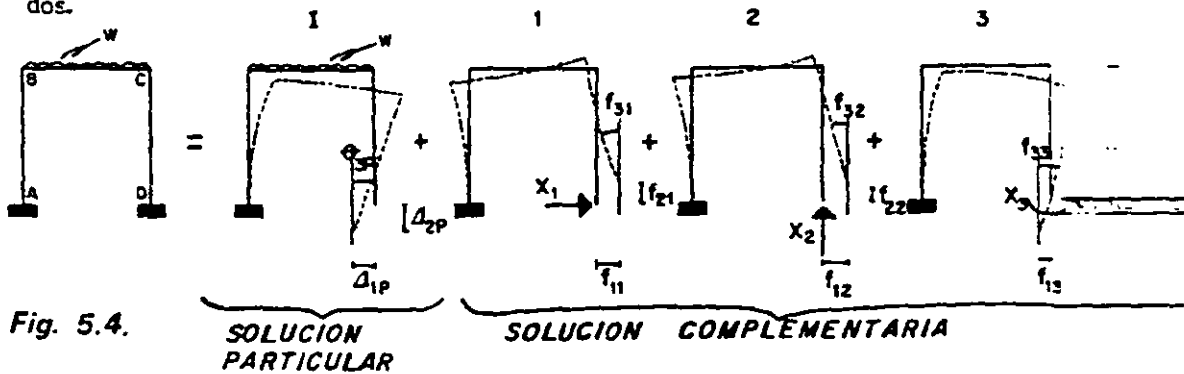


Fig. 5.4.

## METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

En base a las condiciones frontera de la estructura real las ecuaciones de compatibilidad se basarán en lo siguiente: están restringidos los desplazamientos vertical y horizontal, así como el giro en el punto D.

Si se establecen las ecuaciones que garantizan la compatibilidad de deformaciones se tiene:

- a) El desplazamiento horizontal en D es cero:

$$\Delta_{DX} = \Delta_{1P} + f_{11} X_1 + f_{12} X_2 + f_{13} X_3 = 0$$

- b) El desplazamiento vertical en D es cero:

$$\Delta_{DY} = \Delta_{2P} + f_{21} X_1 + f_{22} X_2 + f_{23} X_3 = 0$$

- c) El desplazamiento angular en D es cero:

$$\Theta_D = \Theta_{3P} + f_{31} X_1 + f_{32} X_2 + f_{33} X_3 = 0$$

Resolviendo simultáneamente esas ecuaciones se obtienen las magnitudes de las incógnitas, si alguna de éstas resulta con signo negativo indica que el sentido es contrario al supuesto originalmente.

La ecuación matricial del método de flexibilidades es la siguiente:

$$[S][F] = [A]$$

en donde  $[A]$  indica desplazamientos lineales y angulares,  $[F]$  las incógnitas (momentos y/o reacciones) y  $[S]$  es la matriz de flexibilidad, la que es simétrica debido al teorema de los trabajos recíprocos de Maxwell.

Los coeficientes de flexibilidad pueden obtenerse por cualquier método, más en lo siguiente se calculan aplicando el principio del trabajo virtual. En los mismos coeficientes el primer subíndice indica la correspondencia con el grado de libertad y el segundo la causa que provoca el desplazamiento.

Por lo tanto para resolver una estructura utilizando el método de las fuerzas se procede de la siguiente manera:

- 1) Se determina el número de reacciones de la estructura, si el número de éstas es igual al número de ecuaciones independientes de equilibrio, el problema es isostático, si es mayor el problema es hiperestático y se obtiene el grado de indeterminación  $n$ .
- 2) Se considera la estructura primaria eliminando las  $n$  reacciones redundantes, teniendo siempre una estructura isostática y estable.

## METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

- 3) Se aplica el principio de superposición de causas y efectos, estableciéndose una ecuación por cada redundante de modo que se cumplan las condiciones de compatibilidad de deformaciones en la estructura real.
- 4) Se resuelven las  $n + 1$  estructuras, calculando los desplazamientos (lineales y/o angulares) en los puntos donde se eliminaron las reacciones redundantes, expresándolos en función de las fuerzas originales y de las reacciones redundantes.
- 5) Resolver el sistema de  $n$  ecuaciones obteniendo el valor de las incógnitas, las reacciones restantes se calculan haciendo uso de las ecuaciones de la estática.
- 6) Trazar los diagramas de los elementos mecánicos. En ocasiones es necesario hacer más de un análisis debido a la carga externa cuando el problema se resuelve mediante el uso de tablas.

### 5.5 ANALISIS DE ARMADURAS

Cuando se aplica el método de las fuerzas a la solución de una armadura hiperestática, el problema puede ser que exista hiperestaticidad externa, interna o la combinación de las dos. A continuación se enuncian dichos casos.

#### 5.5.1 ESTRUCTURA ISOSTATICA INTERIORMENTE E HIPERESTATICA EXTERIORMENTE

Consideremos la armadura de la Fig. 5.5a, la estructura se convierte en isostática exteriormente si se quita un apoyo, el intermedio por ejemplo, debido a esto se produce el desplazamiento  $\Delta_{1P}$  causado por la acción de las fuerzas externas. Enseguida se añade la estructura 5.5.c en donde se aplica la reacción en E, la cual produce el desplazamiento  $f_{11}$ . Utilizando el principio de superposición la condición de deformación en el apoyo E de la estructura original implica que el desplazamiento vertical es nulo, por lo que la ecuación de compatibilidad es:

$$\Delta_{1P} + f_{11} X_1 = 0$$

una vez calculado el valor de la incógnita se encuentran los esfuerzos finales en las barras sumando algebraicamente las fuerzas producidas por el sistema externo de cargas y al efecto de la redundante.

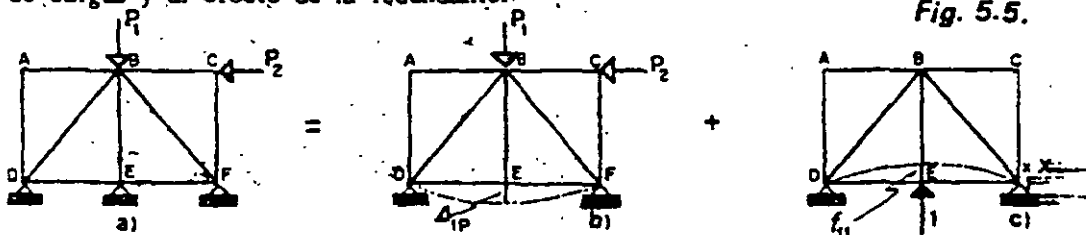


Fig. 5.5.

## METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

### 5.5.2. ESTRUCTURA HIPERESTATICA INTERIORMENTE E ISOSTATICA EXTERIORMENTE

En este caso se dice que hay barras o miembros redundantes, tantos como:  
barras redundantes =  $b - 2j + 3$

donde

$b$  = número de barras

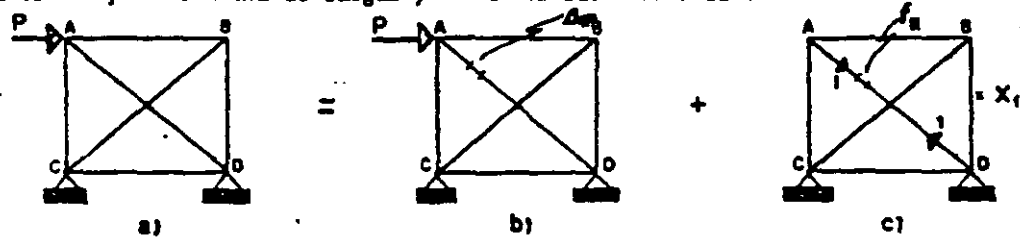
$j$  = número de nudos

Analicemos la armadura de la Fig. 5.6.a, la solución de este problema se limita a cortar la barra redundante, calculando el desplazamiento relativo entre los nudos que limitan la barra.

Primero se encuentra el valor del desplazamiento relativo ocasionado por el sistema de cargas aplicado (Fig. 5.6.b) y después el debido a la barra redundante (Fig. 5.6.c), se aplica la ecuación de compatibilidad que es:

$$\Delta_{1P} + f_{11} X_1 = 0$$

de donde se encuentra la incógnita y los resultados finales son la suma de los esfuerzos bajo el sistema de cargas y los de la barra redundante.



$$b = 6 ; j = 4 ; \text{barras redundantes} = 6 - 8 + 3 = 1$$

Fig. 5.6.

### 5.5.3. ESTRUCTURA HIPERESTATICA INTERIOR Y EXTERIORMENTE

Este problema se resuelve con la combinación de los casos anteriores o sea eliminando los apoyos y barras redundantes y aplicando las condiciones de compatibilidad.

Los desplazamientos debidos a carga axial se calculan por medio de la siguiente fórmula:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{N_i n_i}{A_i E_i} L_i$$

## METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

en donde:

$N_i$  = fuerzas normales debidas al sistema de cargas.

$n_i$  = fuerzas normales debidas a la carga unitaria.

$A_i$  = área transversal de la barra  $i$ .

$E_i$  = módulo de elasticidad de la barra  $i$ .

$L_i$  = longitud de la barra  $i$ .

$b$  = número total de barras.

la aplicación de esta fórmula se simplifica efectuándola por medio de la siguiente tabla:

B A R R A	L	A	N	n	DESPLAZAMIENTOS		NFINALES = N + $\bar{n} \cdot X_i$	
					$\Delta_{iP}$	$f_{ii}$	$\bar{n} \cdot X_i$	NFINALES
					$\frac{N \bar{n}}{AE L}$	$\frac{\bar{n} \bar{n}}{AE L}$	ton	ton
A - C								
B - D								
A - B								
C - D								
A - D								
B - C								

En resumen, para la solución de armaduras aplicando el método de flexibilidades se procede de la siguiente manera:

- 1) Se determina el número de reacciones y el número de barras de la armadura. Si el número de las incógnitas es igual al de ecuaciones independientes de equilibrio, el problema es isostático, si es mayor el problema es hiperestático y el grado de indeterminación es el número de incógnitas en exceso ( $n$ ).
- 2) Se considera una estructura primaria suprimiendo las redundancias (apoyos y/o barras), teniendo siempre una estructura isostática y estable.
- 3) Se aplica el principio de superposición añadiéndole a la estructura primaria las redundancias, formulando una ecuación por cada una de éstas de manera que se cumpla con la compatibilidad de deformaciones de la estructura original.
- 4) Se calculan los desplazamientos en los puntos en donde se quitaron los elementos redundantes, causados por el sistema real de cargas y por cada una de las redundantes.
- 5) Se procede a la solución del sistema de  $n$  ecuaciones obteniendo los valores de las redundancias, los elementos de reacción faltantes se evalúan por medio de las ecuaciones de la estática.



## METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

6) Los esfuerzos finales en las barras se calculan sumando algebraicamente los valores producidos bajo el sistema externo de cargas y los debidos al efecto de las redundantes.

NOTA . - Debido a que para el cálculo de desplazamientos en los ejemplos de aplicación se utilizó el método del trabajo virtual, suponiendo fuerzas concentradas y/o momentos en los puntos de interés en la dirección en que se deseaban los desplazamientos, fue necesario, para la formulación de las ecuaciones de compatibilidad establecer la convención de signos de que son positivos los desplazamientos lineales horizontales a la derecha, los verticales hacia arriba, al igual que los giros en sentido contrario al de las manecillas de un reloj (excepto en el ejemplo 5.10. en donde los giros tienen convención contraria a la anterior). Por otra parte, las figuras sombreadas indican momentos positivos y, por consiguiente, las que se encuentran en blanco corresponden a momentos negativos.

**5.6. Ejemplos**

**de**

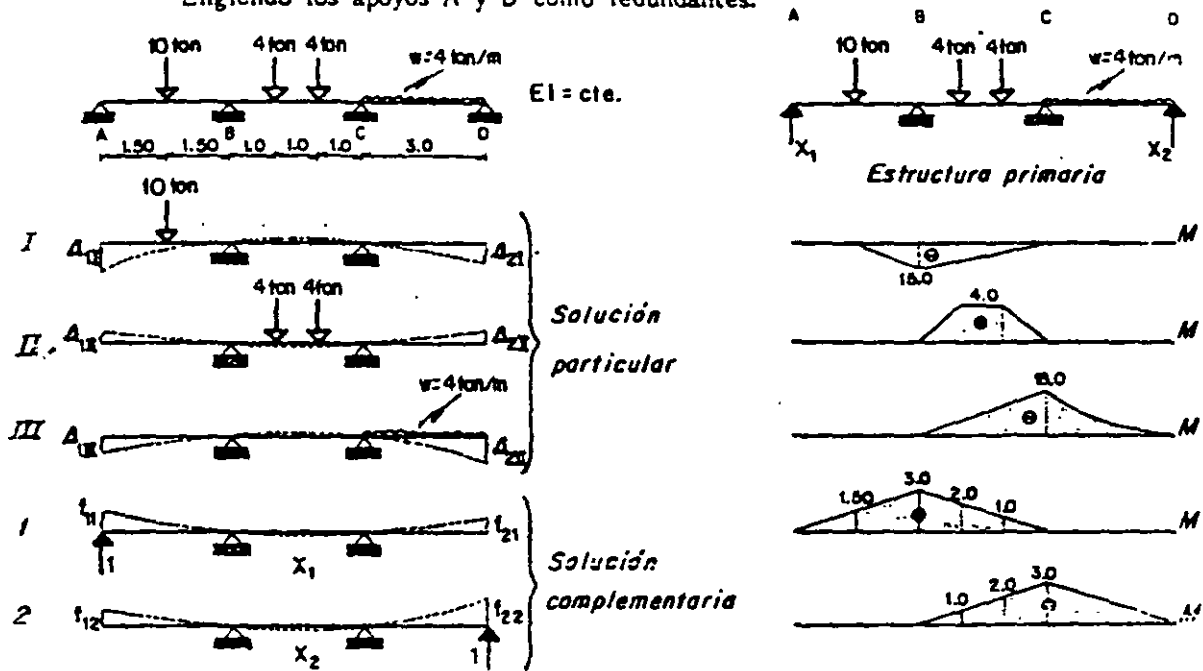
**Aplicación**

# METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

5.1. Resolver la estructura que se indica.

El grado de indeterminación es:  $n = 4 - 2 = 2$

Eligiendo los apoyos A y D como redundantes.



Condiciones frontera:  $\Delta_{Ay} = 0$  ;  $\Delta_{Dy} = 0$

Ecuaciones de compatibilidad:

$$\Delta_{1I} + \Delta_{1II} + \Delta_{1III} + f_{11} X_1 + f_{12} X_2 = 0 = \Delta_1$$

$$\Delta_{2I} + \Delta_{2II} + \Delta_{2III} + f_{21} X_1 + f_{22} X_2 = 0 = \Delta_2$$

Cálculo de desplazamientos.

-VIGA I-

$$EI \Delta_{1I} = \int_{1.5}^3 15 \cdot 1.5 \cdot 3 dx + \int_3^6 15 \cdot 3 dx = 1.5(15) \left[ 1.5 + 6 \right] + \frac{3(15)3}{3} = 73.125$$

$$EI \Delta_{2I} = \int_3^6 15 \cdot 3 dx = \frac{3(15)3}{6} = 22.500$$

-VIGA II-

$$EI \Delta_{1II} = \int_3^4 4 \cdot 3 \cdot 2 dx + \int_4^5 4 \cdot 2 \cdot 1 dx + \int_5^6 4 \cdot 1 dx = \frac{1(4)}{6} [4+3] + \frac{1(4)}{2} [1+2] + \frac{1(4)1}{3} = 12.000$$

$$EI \Delta_{2II} = \int_3^4 4 \cdot 1 dx + \int_4^5 4 \cdot 2 dx + \int_5^6 4 \cdot 3 dx = \frac{1(4)1}{3} + \frac{1(4)}{2} [1+2] + \frac{1(4)}{6} [4+3] = 12.000$$

METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

- VIGA III -

$$EI \Delta_{III} = \int_3^6 \triangle 18 \ 3 \triangle dx = \frac{3(18)3}{6} = 27.000$$

$$EI \Delta_{II} = \int_3^6 \triangle 18 \ 3 dx + \int_6^9 \triangle 18 \ 3 \triangle dx = \frac{3(18)3}{3} + \frac{3(18)3}{4} = 94.500$$

- VIGA 1 -

$$EI f_{11} = \int_0^3 \triangle 3 \ 3 \triangle dx = \frac{6(3)3}{3} = 18.000 ; \quad EI f_{21} = \int_3^6 \triangle 3 \ 3 \triangle dx = \frac{3(3)3}{6} = 4.500$$

- VIGA 2 -

$$EI f_{12} = \int_3^6 \triangle 3 \ 3 \triangle dx = \frac{3(3)3}{6} = 4.500 ; \quad EI f_{22} = \int_6^9 \triangle 3 \ 3 \triangle dx = \frac{6(3)3}{3} = 18.000$$

Sustituyendo en las ecuaciones de compatibilidad, se tiene:

$$-73.125 + 12.000 - 27.000 + 18.000 X_1 + 4.500 X_2 = 0$$

$$-22.500 + 12.000 - 94.500 + 4.500 X_1 + 18.000 X_2 = 0$$

$$18.000 X_1 + 4.500 X_2 = 88.125$$

$$4.500 X_1 + 18.000 X_2 = 105.000$$

$$\begin{bmatrix} 18.000 & 4.500 \\ 4.500 & 18.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88.125 \\ 105.000 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema es:

$$X_1 = 3.667 \text{ ton}$$

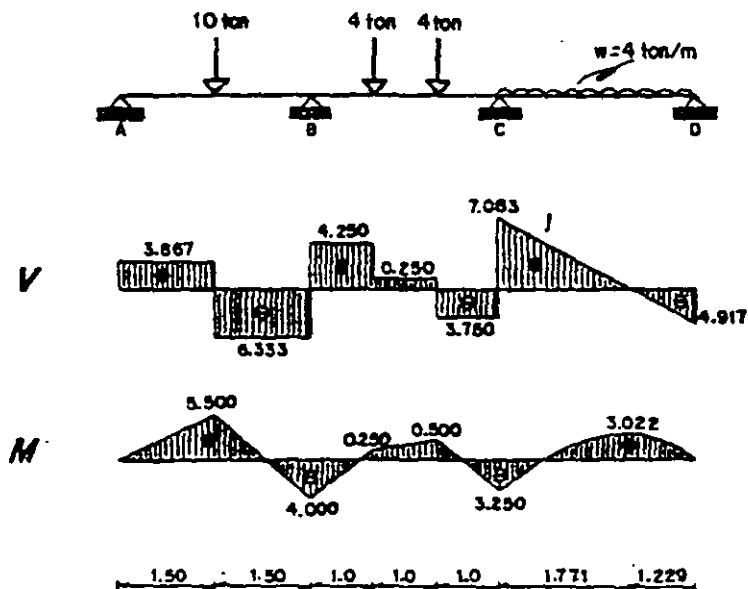
$$X_2 = 4.917 \text{ ton}$$

Por condiciones de equilibrio:

$$B_y = 10.583 \text{ ton}$$

$$C_y = 10.833 \text{ ton}$$

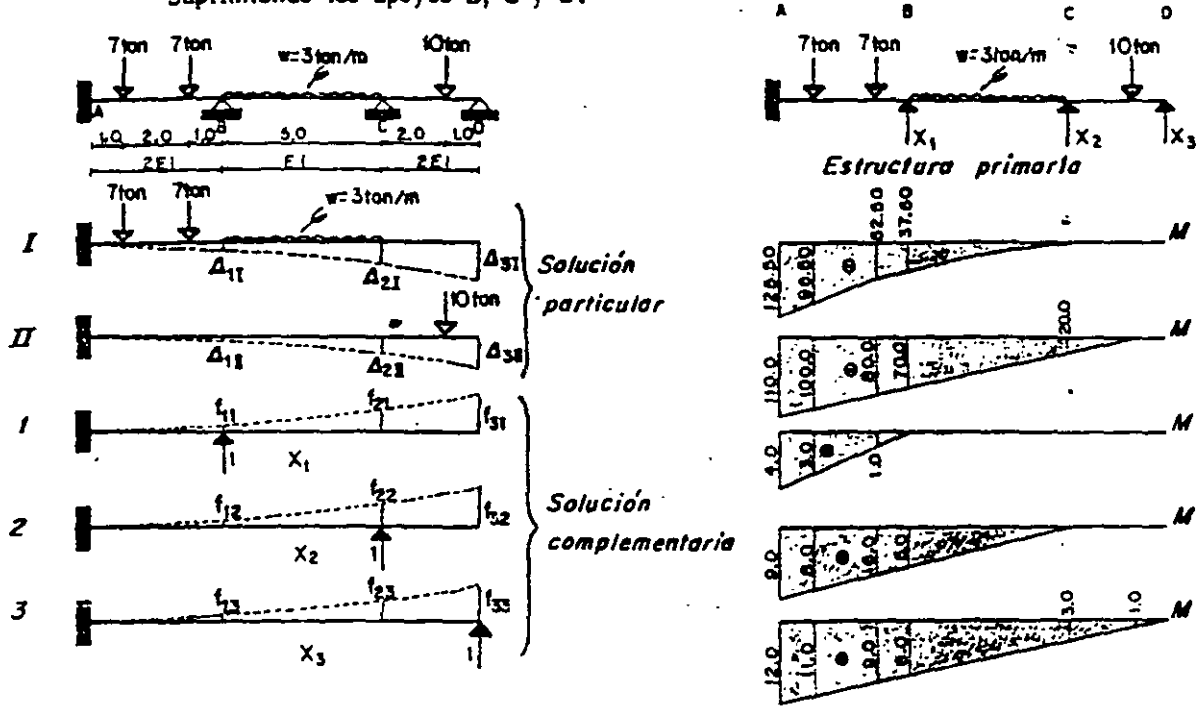
Diagramas finales:



5.2. Resolver la viga continua que se muestra:

El grado de indeterminación es:  $n = 6 - 3 = 3$

Suprimiendo los apoyos B, C y D.



Condiciones frontera:  $\Delta_{Bv} = 0$   $\Delta_{Cv} = 0$   $\Delta_{Dv} = 0$

Ecs. de compatibilidad:

$$\begin{aligned} \Delta_{1I} + \Delta_{1II} + f_{11} X_1 + f_{12} X_2 + f_{13} X_3 &= 0 \\ \Delta_{2I} + \Delta_{2II} + f_{21} X_1 + f_{22} X_2 + f_{23} X_3 &= 0 \\ \Delta_{3I} + \Delta_{3II} + f_{31} X_1 + f_{32} X_2 + f_{33} X_3 &= 0 \end{aligned}$$

Cálculo de desplazamientos.

- VIGA I -

$$\begin{aligned} EI \Delta_{1I} &= \frac{1}{2} \int_0^1 125.5 \square 96.5 \square 4 \square 3 \square dx + \frac{1}{2} \int_1^3 96.5 \square 52.5 \square 3 \square 1 \square dx + \frac{1}{2} \int_3^4 52.5 \square 37.5 \square 1 \square dx \\ EI \Delta_{1II} &= \frac{1}{12} [193(3) + 125.5(3) + 96.5(4) + 25(4)] + \frac{2}{12} [105(1) + 96.5(1) + 52.5(3) + 193(3)] + \frac{1(1)}{12} [37.5 + 105] = 363.667 \\ EI \Delta_{2I} &= \frac{1}{2} \int_0^1 125.5 \square 96.5 \square 9 \square 8 \square dx + \frac{1}{2} \int_1^3 96.5 \square 52.5 \square 8 \square 6 \square dx + \frac{1}{2} \int_3^4 52.5 \square 37.5 \square 6 \square 5 \square dx + \\ &+ \int_4^5 37.5 \square 5 \square dx = \frac{1}{12} [198(8) + 125.5(8) + 96.5(9) + 25(9)] + \frac{2}{12} [105(6) + 96.5(6) + 52.5(8) + 193(8)] + \\ &+ \frac{1}{12} [75(5) + 52.5(5) + 37.5(6) + 105(6)] + \frac{5(37.5)5}{4} = 1360.542 \end{aligned}$$

METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

$$EI \Delta_x = \frac{1}{2} \int_0^1 125.5 \square 96.5 \square 12 \square 11 dx + \frac{1}{2} \int_1^5 96.5 \square 52.5 \square 11 \square 9 dx + \frac{1}{2} \int_5^9 52.5 \square 37.5 \square 9 \square 8 dx -$$

$$+ \int_4^9 37.5 \square 8 \square 3 dx = \frac{1}{12} [193(11) + 125.5(11) + 96.5(12) + 25(12)] + \frac{2}{12} [105(9) + 96.5(9) +$$

$$+ 52.5(11) + 193(11)] + \frac{1}{12} [75(8) + 52.5(8) + 37.5(9) + 105(9)] + \frac{5(37.5)}{12} [3+24] = 2005.542$$

- VIGA II -

$$EI \Delta_{1B} = \frac{1}{2} \int_0^4 110 \square 70 \square 4 dx = \frac{4(4)}{12} [70 + 220] = 386.667$$

$$EI \Delta_{2x} = \frac{1}{2} \int_0^4 110 \square 70 \square 9 \square 5 dx + \int_4^9 70 \square 20 \square 5 dx = \frac{4}{12} [140(5) + 110(5) + 70(9) + 220(9)] + \frac{5(5)}{6} [20 + 140]$$

$$EI \Delta_{3x} = \frac{1}{2} \int_0^4 110 \square 70 \square 12 \square 8 dx + \int_4^9 70 \square 20 \square 8 \square 3 dx + \frac{1}{2} \int_9^{12} 20 \square 3 \square 1 dx = \frac{4}{12} [140(8) + 110(8) + 70(12) +$$

$$+ 220(12)] + \frac{5}{6} [40(3) + 70(3) + 20(8) + 140(8)] + \frac{2(20)}{12} [1+6] = 3,191.667$$

- VIGA 1 -

$$EI f_{11} = \frac{1}{2} \int_0^4 4 \square 4 dx = \frac{4(4)}{6} = 10.667 \quad ; \quad EI f_{21} = \frac{1}{2} \int_0^4 4 \square 9 \square 5 dx = \frac{4(4)}{12} [5+18] = 30.667$$

$$EI f_{31} = \frac{1}{2} \int_0^4 4 \square 12 \square 8 dx = \frac{4(4)}{12} [8+24] = 42.667$$

- VIGA 2 -

$$EI f_{12} = \frac{1}{2} \int_0^4 9 \square 5 \square 4 dx = \frac{4(4)}{12} [5+18] = 30.667$$

$$EI f_{22} = \frac{1}{2} \int_0^4 9 \square 5 \square 9 \square 5 dx + \int_4^9 5 \square 5 dx = \frac{4}{12} [10(5) + 9(5) + 5(9) + 18(9)] + \frac{5(5)}{3} = 142.333$$

$$EI f_{32} = \frac{1}{2} \int_0^4 9 \square 5 \square 12 \square 8 dx + \int_4^9 5 \square 8 \square 3 dx = \frac{4}{12} [10(8) + 9(8) + 5(12) + 18(12)] + \frac{5(5)}{6} [3+16] = 221.833$$

- VIGA 3 -

$$EI f_{13} = \frac{1}{2} \int_0^4 12 \square 8 \square 4 dx = \frac{4(4)}{12} [8+24] = 42.667$$

$$EI f_{23} = \frac{1}{2} \int_0^4 12 \square 8 \square 9 \square 5 dx + \int_4^9 8 \square 3 \square 5 dx = \frac{4}{12} [16(5) + 12(5) + 8(9) + 24(9)] + \frac{5(5)}{6} [3+16] = 221.833$$

$$EI f_{33} = \frac{1}{2} \int_0^4 12 \square 8 \square 12 \square 8 dx + \int_4^9 8 \square 3 \square 8 \square 3 dx + \frac{1}{2} \int_9^{12} 3 \square 3 dx = \frac{4}{12} [16(8) + 12(8) + 8(12) + 24(12)] +$$

$$+ \frac{5}{6} [6(3) + 8(3) + 3(8) + 16(8)] + \frac{3(3)}{6} = 368.833$$

Reemplazando valores en las ecuaciones resulta:

$$\begin{bmatrix} 10.667 & 30.667 & 42.667 \\ 30.667 & 142.333 & 221.833 \\ 42.667 & 221.833 & 368.833 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750.333 \\ 3,313.875 \\ 5,197.209 \end{bmatrix}$$

**METODO DE LAS FLEXIBILIDADES**

La solución del sistema es:

$X_1 = 14.904 \text{ ton}$

$X_2 = 12.728 \text{ ton}$

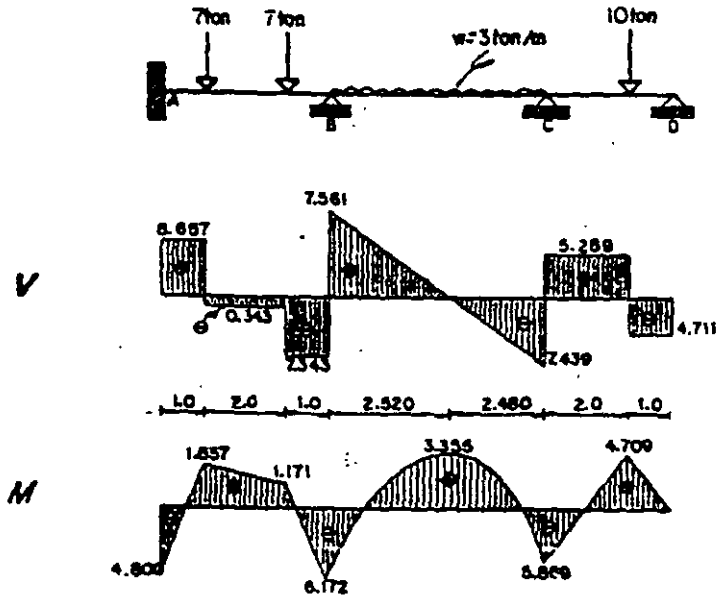
$X_3 = 4.711 \text{ ton}$

Por condiciones de equilibrio:

$A_7 = 6.657 \text{ ton}$

$M = 4.800 \text{ ton}\cdot\text{m}$

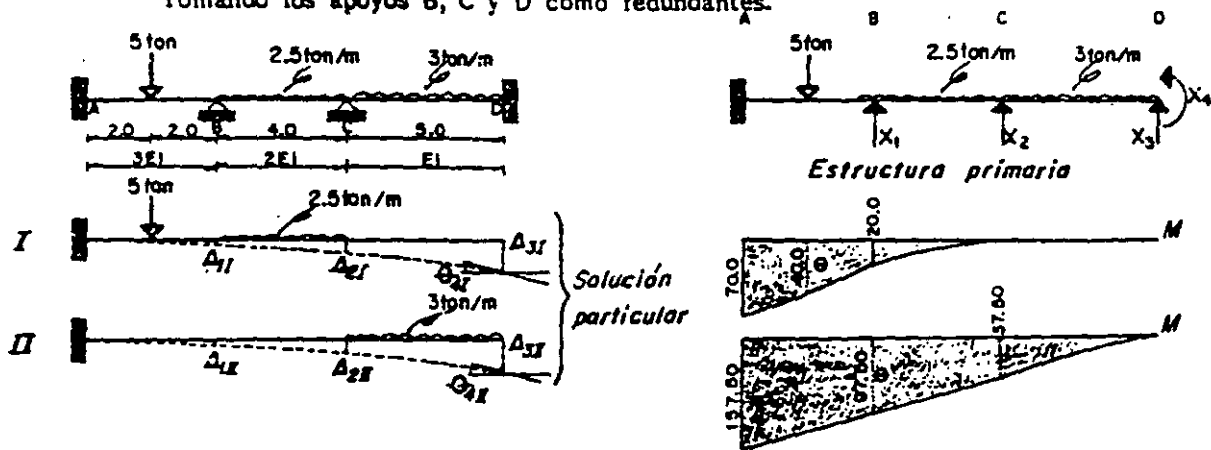
Diagramas finales:



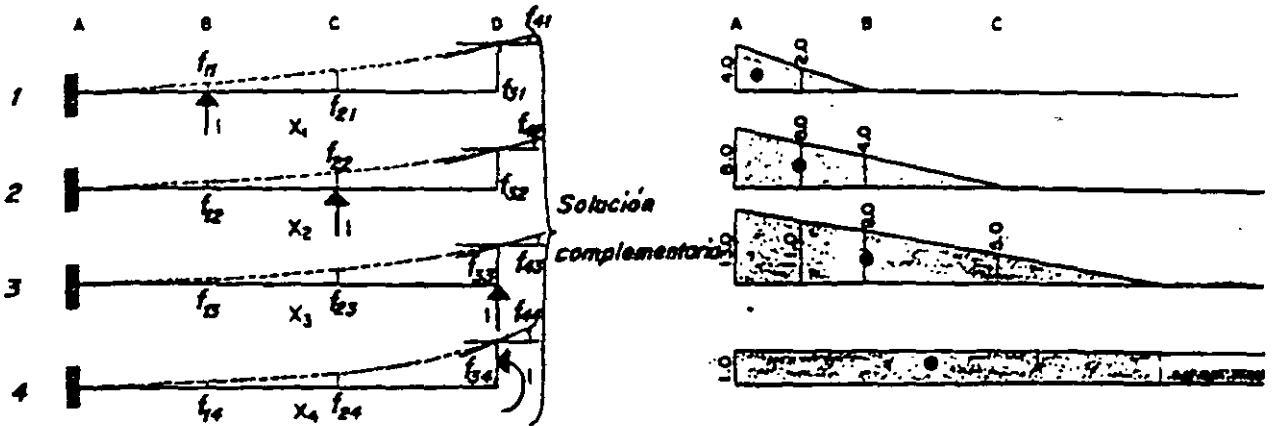
5.3. Calcular los momentos en los apoyos de la viga siguiente.

El grado de indeterminación es:  $n = 8 - 3 = 5$

Tomando los apoyos B, C y D como redundantes.



METODO DE LAS FLEXIBILIDADES



Condiciones frontera:  $\Delta_{BY} = 0$  ,  $\Delta_{CY} = 0$  ,  $\Delta_{DY} = 0$  ,  $\theta_D = 0$

Ecs. de compatibilidad:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} + \Delta_{12} + f_{11} X_1 + f_{12} X_2 + f_{13} X_3 + f_{14} X_4 &= 0 \\ \Delta_{21} + \Delta_{22} + f_{21} X_1 + f_{22} X_2 + f_{23} X_3 + f_{24} X_4 &= 0 \\ \Delta_{31} + \Delta_{32} + f_{31} X_1 + f_{32} X_2 + f_{33} X_3 + f_{34} X_4 &= 0 \\ \theta_{41} + \theta_{42} + f_{41} X_1 + f_{42} X_2 + f_{43} X_3 + f_{44} X_4 &= 0 \end{aligned}$$

Cálculo de desplazamientos.

-VIGA I-

$$EI \Delta_{11} = \frac{1}{3} \int_0^2 70 \square 40 \square 4 \square dx + \frac{1}{3} \int_2^4 40 \square 20 \square 2 \square dx = \frac{2}{18} [80(2) + 70(2) + 40(4) + 140(4)] + \frac{2(1)}{18} [20 + 80] = 135.556$$

$$EI \Delta_{21} = \frac{1}{3} \int_0^2 70 \square 40 \square 8 \square dx + \frac{1}{3} \int_2^4 40 \square 20 \square 6 \square dx + \frac{1}{2} \int_4^8 20 \square 4 \square dx = \frac{2}{18} [80(6) + 70(6) + 40(8) + 140(8)] + \frac{2}{18} [40(4) + 40(4) + 20(6) + 80(6)] + \frac{4(20)4}{8} = 402.222$$

$$EI \Delta_{31} = \frac{1}{3} \int_0^2 70 \square 40 \square 13 \square dx + \frac{1}{3} \int_2^4 40 \square 20 \square 11 \square dx + \frac{1}{2} \int_4^8 20 \square 9 \square 5 \square dx = \frac{2}{18} [80(11) + 70(11) + 40(13) + 140(13)] + \frac{2}{18} [40(9) + 40(9) + 20(11) + 80(11)] + \frac{4(20)}{24} [5 + 27] = 752.222$$

$$EI \theta_{41} = \frac{1}{3} \int_0^2 70 \square 40 \square 1 \square dx + \frac{1}{3} \int_2^4 40 \square 20 \square 1 \square dx + \frac{1}{2} \int_4^8 20 \square 1 \square dx = \frac{2(1)}{6} [40 + 70] + \frac{2(1)}{6} [20 + 40] + \frac{4(1)20}{6} = 200$$

-VIGA II-

$$EI \Delta_{12} = \frac{1}{3} \int_0^4 157.5 \square 97.5 \square 4 \square dx = \frac{4(4)}{18} [97.5 + 315] = 366.667$$

$$EI \Delta_{22} = \frac{1}{3} \int_0^4 157.5 \square 97.5 \square 8 \square dx + \frac{1}{2} \int_4^8 97.5 \square 37.5 \square 4 \square dx = \frac{4}{18} [195(4) + 157.5(4) + 97.5(8) + 315(8)] + \frac{4(4)}{12} [37.5 + 195] = 1356.667$$



METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

$$EI \Delta_{3F} = \frac{1}{3} \int_0^4 (157.5 - 97.5) dx + \frac{1}{2} \int_2^4 (97.5 - 37.5) dx + \int_4^{13} (37.5 - 5) dx = \frac{4}{18} [195(9) + 157.5(9) + 97.5(13) + 315(13)] + \frac{4}{12} [75(5) + 97.5(5) + 37.5(9) + 195(9)] + \frac{5(37.5)5}{4} = 3116.042$$

$$EI \Theta_{4I} = \frac{1}{3} \int_0^4 (157.5 - 97.5) dx + \frac{1}{2} \int_2^4 (97.5 - 37.5) dx + \int_4^{13} (37.5 - 5) dx = \frac{4(1)}{6} [97.5 + 157.5] + \frac{4(1)}{3} [37.5 + 97.5] + \frac{5(37.5)1}{3} = 307.500$$

- VIGA 1 -

$$EI f_{11} = \frac{1}{3} \int_0^4 (4 - 4) dx = \frac{4(4)}{9} = 7.111 \quad ; \quad EI f_{21} = \frac{1}{3} \int_0^4 (4 - 8) dx = \frac{4(4)}{18} [4 + 16] = 17.778$$

$$EI f_{31} = \frac{1}{3} \int_0^4 (4 - 13) dx = \frac{4(4)}{18} [9 + 26] = 31.111 \quad ; \quad EI f_{41} = \frac{1}{3} \int_0^4 (4 - 1) dx = \frac{4(4)1}{6} = 2.667$$

- VIGA 2 -

$$EI f_{12} = \frac{1}{3} \int_0^4 (8 - 4) dx = \frac{4(4)}{18} [4 + 16] = 17.788$$

$$EI f_{22} = \frac{1}{3} \int_0^4 (8 - 8) dx + \frac{1}{2} \int_4^8 (4 - 4) dx = \frac{4}{18} [8(4) + 8(4) + 4(8) + 16(8)] + \frac{4(4)4}{6} = 60.444$$

$$EI f_{32} = \frac{1}{3} \int_0^4 (8 - 13) dx + \frac{1}{2} \int_4^8 (4 - 9) dx = \frac{4}{18} [8(9) + 8(9) + 4(13) + 16(13)] + \frac{4(4)}{12} [5 + 18] = 120.444$$

$$EI f_{42} = \frac{1}{3} \int_0^4 (8 - 4) dx + \frac{1}{2} \int_4^8 (4 - 1) dx = \frac{4(1)}{6} [4 + 8] + \frac{4(4)1}{4} = 12.000$$

- VIGA 3 -

$$EI f_{13} = \frac{1}{3} \int_0^4 (13 - 9) dx = \frac{4(4)}{18} [9 + 26] = 31.111$$

$$EI f_{23} = \frac{1}{3} \int_0^4 (13 - 9) dx + \frac{1}{2} \int_4^8 (9 - 5) dx = \frac{4}{18} [13(4) + 13(4) + 9(8) + 26(8)] + \frac{4(4)}{12} [5 + 18] = 120.444$$

$$EI f_{33} = \frac{1}{3} \int_0^4 (13 - 9) dx + \frac{1}{2} \int_4^8 (9 - 5) dx + \int_8^{13} (5 - 5) dx = \frac{4}{18} [18(9) + 13(9) + 9(13) + 26(13)] + \frac{4}{12} [10(5) + 9(5) + 5(9) + 18(9)] + \frac{5(5)5}{3} = 305.444$$

$$EI f_{43} = \frac{1}{3} \int_0^4 (13 - 9) dx + \frac{1}{2} \int_4^8 (9 - 5) dx + \int_8^{13} (5 - 5) dx = \frac{4(1)}{6} [9 + 13] + \frac{4(1)}{4} [5 + 9] + \frac{5(5)1}{2} = 41.167$$

- VIGA 4 -

$$EI f_{14} = \frac{1}{3} \int_0^4 (1 - 4) dx = \frac{4(1)4}{6} = 2.667$$

$$EI f_{24} = \frac{1}{3} \int_0^4 (1 - 8) dx + \frac{1}{2} \int_4^8 (1 - 4) dx = \frac{4(1)}{6} [4 + 8] + \frac{4(1)4}{4} = 12.000$$

$$EI f_{34} = \frac{1}{3} \int_0^4 (1 - 13) dx + \frac{1}{2} \int_4^8 (1 - 5) dx + \int_8^{13} (1 - 5) dx = \frac{4(1)}{6} [9 + 13] + \frac{4(1)}{4} [5 + 9] + \frac{5(1)5}{2} = 41.167$$

METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

$$EI f_{44} = \frac{1}{3} \int_0^4 1 \cdot 1 \cdot dx + \frac{1}{2} \int_4^8 1 \cdot 1 \cdot dx + \int_8^{12} 1 \cdot 1 \cdot dx = \frac{4(111)}{3} + \frac{4(111)}{2} + 5(111) = 8.333$$

Sustituyendo los desplazamientos en las ecs. queda:

$$\begin{aligned} -135.555 - 366.667 + 7.111 X_1 + 17.778 X_2 + 31.111 X_3 + 2.667 X_4 &= 0 \\ -402.222 - 1356.667 + 17.778 X_1 + 60.444 X_2 + 120.444 X_3 + 12.000 X_4 &= 0 \\ -752.222 - 3116.042 + 31.111 X_1 + 120.444 X_2 + 305.444 X_3 + 41.667 X_4 &= 0 \\ -70.000 - 367.500 + 2.667 X_1 + 12.000 X_2 + 41.667 X_3 + 8.333 X_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 7.111 & 17.778 & 31.111 & 2.667 \\ 17.778 & 60.444 & 120.444 & 12.000 \\ 31.111 & 120.444 & 305.444 & 41.167 \\ 2.667 & 12.000 & 41.167 & 8.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 502.222 \\ 1758.888 \\ 3868.264 \\ 437.500 \end{bmatrix}$$

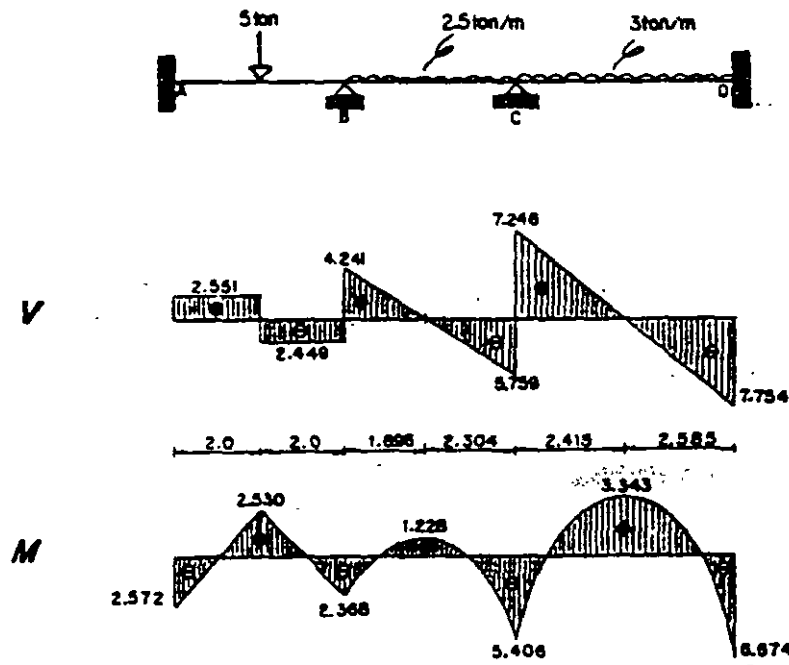
Cuya solución es:

$$X_1 = 6.690 \text{ ton} ; X_2 = 13.005 \text{ ton} ; X_3 = 7.754 \text{ ton} ; X_4 = -6.674 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

Por equilibrio:

$$A_y = 2.551 \text{ ton} ; M = 2.572 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

Diagramas finales:

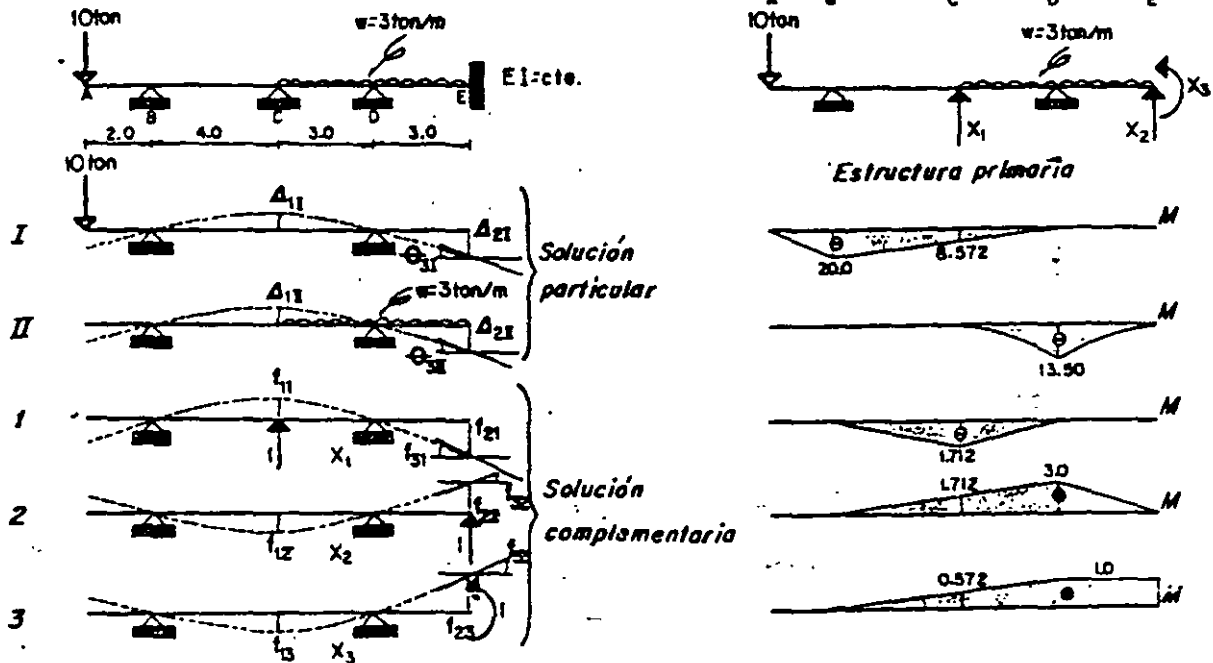


# METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

5.4. Resolver la estructura que se indica.

El grado de indeterminación es:  $n = 6 - 3 = 3$

Eligiendo como redundancias los apoyos C y E.



Condiciones frontera:  $\Delta_{C'} = 0 ; \Delta_{E'} = 0 ; \Theta_E = 0$

Ecs. de compatibilidad:

$$\Delta_{1I} + \Delta_{1E} + f_{11} X_1 + f_{12} X_2 + f_{13} X_3 = 0$$

$$\Delta_{2I} + \Delta_{2E} + f_{21} X_1 + f_{22} X_2 + f_{23} X_3 = 0$$

$$\Theta_{3I} + \Theta_{3E} + f_{31} X_1 + f_{32} X_2 + f_{33} X_3 = 0$$

Cálculo de desplazamientos.

-VIGA I-

$$EI \Delta_{1I} = \int_2^9 20 \Delta \quad 1.712 \frac{\Delta}{3} dx = \frac{7(20)1.712}{6} \left[ 1 + \frac{3}{7} \right] = 57.068$$

$$EI \Delta_{2I} = \int_2^9 20 \Delta \quad \Delta \quad 3 dx = \frac{7(20)3}{6} = 70.000 \quad ; \quad EI \Theta_{3I} = \int_2^9 20 \Delta \quad \Delta \quad 1 dx = \frac{7(20)1}{6} = 23.333$$

-VIGA II-

$$EI \Delta_{1E} = \int_0^9 13.5 \quad 1.712 \Delta \quad dx = \frac{3(13.5)1.712}{12} = 5.778$$

$$EI \Delta_{2E} = \int_0^9 13.5 \quad 1.712 \Delta \quad 3 dx + \int_9^{12} 13.5 \quad 3 \Delta \quad dx = \frac{3(13.5) \left[ 1.712 + 9 \right]}{12} + \frac{3(13.5)3}{4} = 66.528$$

METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

$$EI \theta_{31} = \int_0^9 \frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot 0.572 \cdot dx + \int_0^{12} \frac{1}{2} \cdot 13.5 \cdot dx = \frac{3(13.5)}{12} [0.572 + 3] + \frac{3(13.5)1}{3} = 25.555$$

-VIGA 1-

$$EI f_{11} = \int_2^9 \frac{1.712}{4} \cdot \frac{1.712}{4} dx = \frac{7(1.712)1.712}{3} = 6.839 ; EI f_{21} = \int_2^9 \frac{1.712}{4} \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{7(1.712)1}{6} \left[ 1 + \frac{4}{7} \right] = 2.416$$

$$EI f_{31} = \int_2^9 \frac{1.712}{4} \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{7(1.712)1}{6} \left[ 1 + \frac{4}{7} \right] = 3.138$$

-VIGA 2-

$$EI f_{12} = \int_2^9 \frac{3}{4} \cdot \frac{1.712}{4} dx = \frac{7(3)1.712}{6} \left[ 1 + \frac{4}{7} \right] = 9.416 ; EI f_{22} = \int_2^9 \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} dx = \frac{10(3)3}{3} = 30.000$$

$$EI f_{32} = \int_2^9 \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} dx + \int_9^{12} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{7(3)1}{3} + \frac{3(3)1}{2} = 11.500$$

-VIGA 3-

$$EI f_{13} = \int_2^9 \frac{1}{4} \cdot \frac{1.712}{4} dx = \frac{7(1)1.712}{6} \left[ 1 + \frac{4}{7} \right] = 3.138$$

$$EI f_{23} = \int_2^9 \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} dx + \int_9^{12} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} dx = \frac{7(1)3}{3} + \frac{3(1)3}{2} = 11.500$$

$$EI f_{33} = \int_2^9 \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} dx + \int_9^{12} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{7(1)1}{3} + 3(1)1 = 5.333$$

Sustituyendo en las ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{bmatrix} 6.839 & -9.416 & -3.138 \\ -9.416 & 30.000 & 11.500 \\ -3.138 & 11.500 & 5.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52.844 \\ 136.528 \\ 48.988 \end{bmatrix}$$

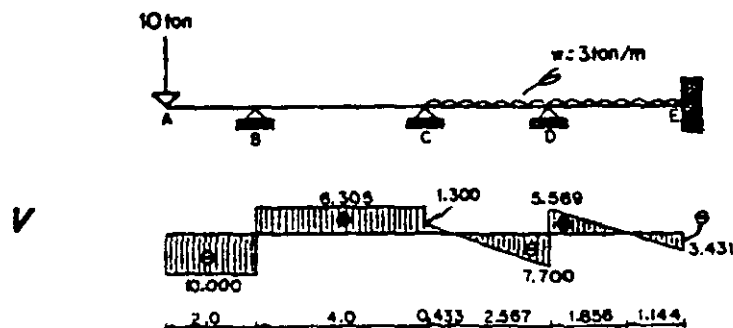
La solución del sistema es:

$$X_1 = -5.005 \text{ ton} ; \quad X_2 = 3.431 \text{ ton} ; \quad X_3 = -1.777 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

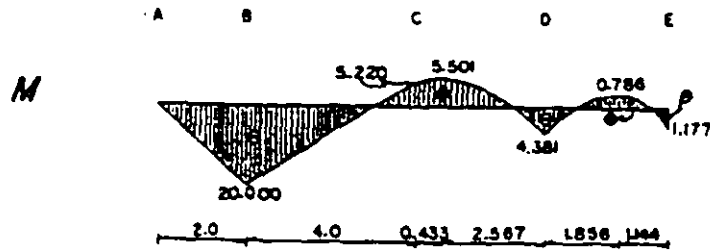
Por equilibrio las reacciones restantes son:

$$B_y = 16.305 \text{ ton} ; \quad D_y = 13.269 \text{ ton}$$

Diagramas finales:



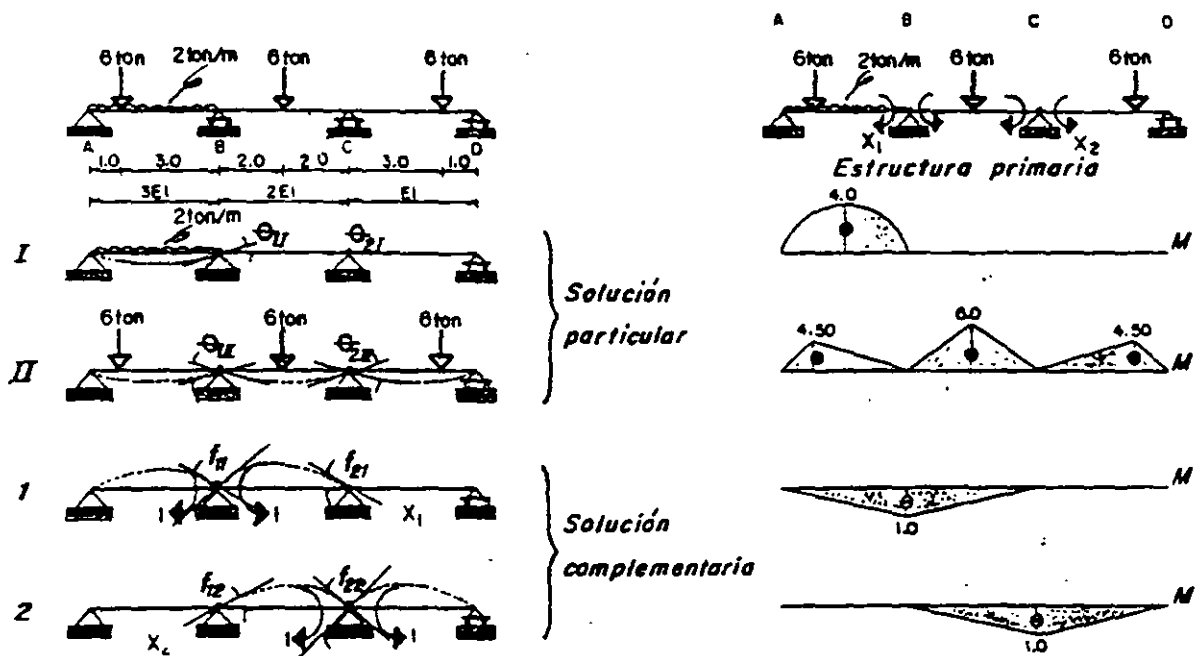
# METODO DE LAS FLEXIBILIDADES



5.5. Resolver la viga continua que se muestra.

El grado de indeterminación es:  $n = 4 - 2 = 2$

Alternativa añadiendo una articulación en los apoyos intermedios y aplicando momentos correctivos para restituir la condición de continuidad en los apoyos.



## MÉTODO DE LAS FLEXIBILIDADES

Ecs. de compatibilidad:

$$\Theta_1 + \Theta_{12} + f_{11} X_1 + f_{12} X_2 = 0$$

$$\Theta_2 + \Theta_{22} + f_{21} X_1 + f_{22} X_2 = 0$$

Cálculo de desplazamientos.

-VIGA I-

$$EI \Theta_{11} = \frac{1}{3} \int_0^4 \frac{4}{2} \frac{x^2}{2} \Delta dx = -\frac{4(4)1}{3(3)} = -1.777 \quad ; \quad EI \Theta_{21} = 0$$

-VIGA II-

$$EI \Theta_{12} = \frac{1}{3} \int_0^4 4.5 \frac{x^2}{2} \Delta dx + \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{6}{2} \frac{x^2}{2} \Delta dx = -\frac{4(4.5)1}{18} [1+0.25] - \frac{4(6)1}{12} [1+0.5] = -4.250$$

$$EI \Theta_{22} = \frac{1}{2} \int_0^8 \frac{6}{2} \frac{x^2}{2} \Delta dx + \int_8^{12} \frac{4.5}{3} \frac{x^2}{2} \Delta dx = -\frac{4(6)1}{12} [1+0.5] - \frac{4(4.5)1}{6} [1+0.25] = -6.750$$

-VIGA 1-

$$EI f_{11} = \frac{1}{3} \int_0^4 \frac{4}{2} \frac{x^2}{2} \Delta dx + \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{6}{2} \frac{x^2}{2} \Delta dx = \frac{4(1)1}{9} + \frac{4(1)1}{6} = 1.111$$

$$EI f_{21} = \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{6}{2} \frac{x^2}{2} \Delta dx = \frac{4(1)1}{12} = 0.333$$

-VIGA 2-

$$EI f_{12} = \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{6}{2} \frac{x^2}{2} \Delta dx = \frac{4(1)1}{12} = 0.333$$

$$EI f_{22} = \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{6}{2} \frac{x^2}{2} \Delta dx + \int_8^{12} \frac{4.5}{3} \frac{x^2}{2} \Delta dx = \frac{4(1)1}{6} + \frac{4(1)1}{3} = 2.000$$

Sustituyendo valores, resulta:

$$\begin{aligned} -1.777 - 4.250 + 1.111 X_1 + 0.333 X_2 &= 0 \\ -6.750 + 0.333 X_1 + 2.000 X_2 &= 0 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1.111 & 0.333 \\ 0.333 & 2.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.027 \\ 6.750 \end{bmatrix}$$

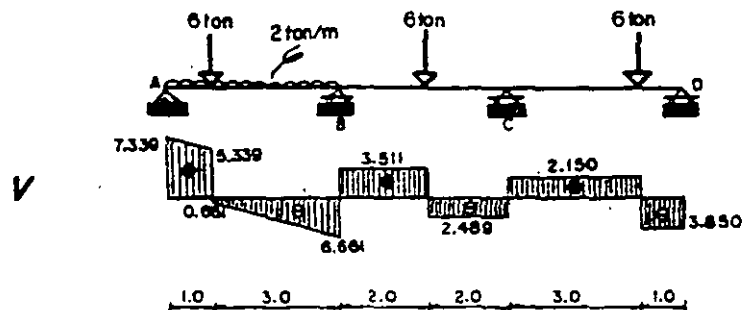
La solución es:

$$X_1 = 4.645 \text{ ton}\cdot\text{m} \quad ; \quad X_2 = 2.601 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

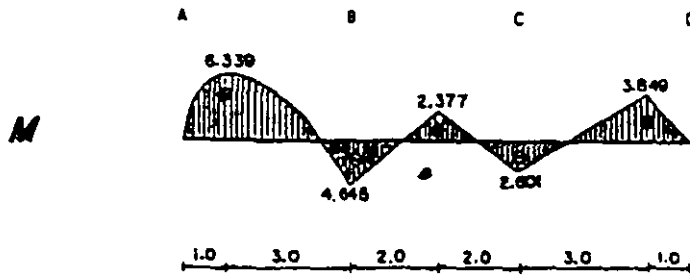
Por equilibrio:

$$A = 7.339 \text{ ton} \quad ; \quad B = 10.172 \text{ ton} \quad ; \quad C = 4.639 \text{ ton} \quad ; \quad D = 3.850 \text{ ton}$$

Diagramas finales:



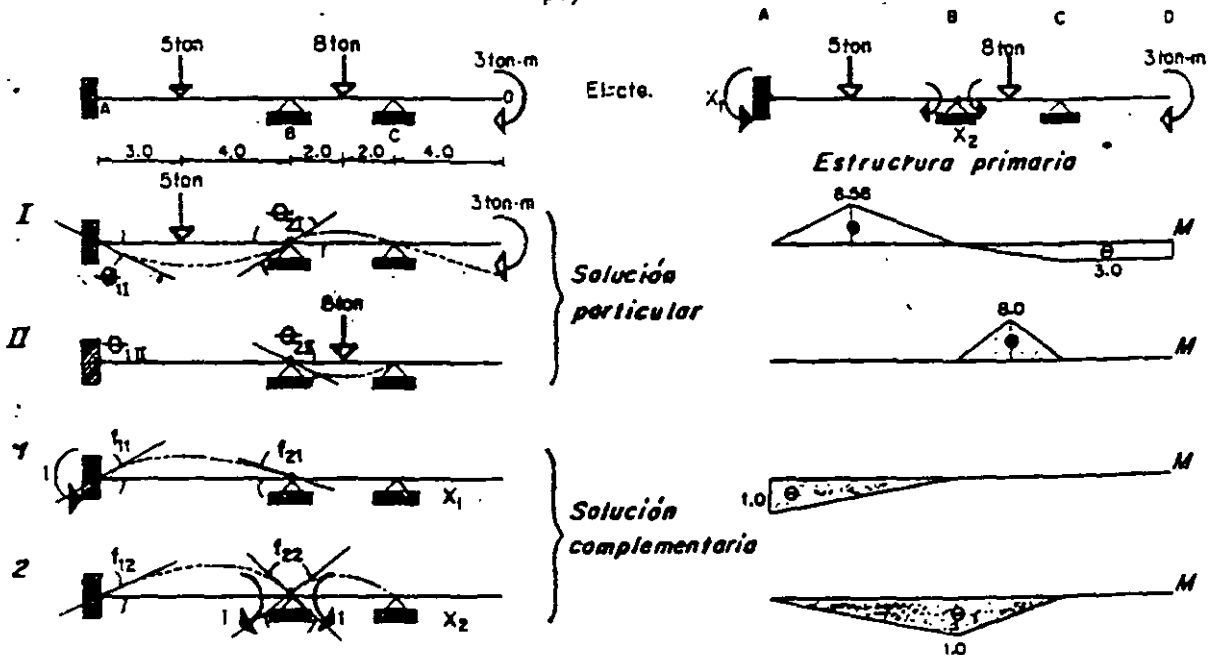
METODO DE LAS FLEXIBILIDADES



5.6. Calcular los momentos en los apoyos de la siguiente viga.

El grado de indeterminación es:  $n = 5 - 3 = 2$

Alternativa transformando el empotramiento en un apoyo más sencillo y colocando una articulación intermedia, aplicando un momento correctivo para restituir la condición de continuidad en el apoyo.



## METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

Ecs. de compatibilidad:

$$\theta_{1I} + \theta_{1II} + f_{11} X_1 + f_{12} X_2 = 0$$

$$\theta_{2I} + \theta_{2II} + f_{21} X_1 + f_{22} X_2 = 0$$

Cálculo de desplazamientos:

-VIGA I-

$$EI \theta_{1I} = \int_0^7 8.58 \frac{\Delta}{3.4} dx = -\frac{7(8.58)}{6} [1+0.57] = -15.730$$

$$EI \theta_{2I} = \int_0^7 8.58 \frac{\Delta}{3.4} dx + \int_7^{11} 3 \frac{\Delta}{1} dx = -\frac{7(8.58)}{6} [1+0.428] + \frac{4(3)}{6} = -12.300$$

-VIGA II-

$$EI \theta_{1II} = 0 \quad ; \quad EI \theta_{2II} = \int_0^{11} 8 \frac{\Delta}{2.2} dx = -\frac{4(8)}{6} [1+0.5] = -8.000$$

-VIGA 1-

$$EI f_{11} = \int_0^7 1 \frac{\Delta}{3} dx = \frac{7(1)}{3} = 2.333 \quad ; \quad EI f_{21} = \int_0^7 1 \frac{\Delta}{6} dx = \frac{7(1)}{6} = 1.166$$

-VIGA 2-

$$EI f_{12} = \int_0^7 1 \frac{\Delta}{6} dx = \frac{7(1)}{6} = 1.166 \quad ; \quad EI f_{22} = \int_0^{11} 1 \frac{\Delta}{3} dx = \frac{11(1)}{3} = 3.666$$

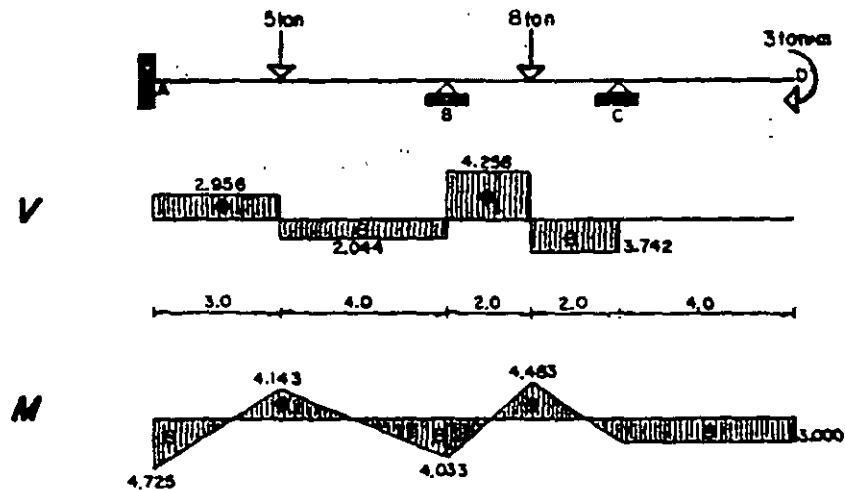
Reemplazando valores se tiene:

$$\begin{aligned} -15.730 + 2.333 X_1 + 1.166 X_2 &= 0 \\ -12.300 - 8.000 + 1.166 X_1 + 3.666 X_2 &= 0 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 2.333 & 1.166 \\ 1.166 & 3.666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.730 \\ 20.300 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es:  $X_1 = 4.725 \text{ ton}\cdot\text{m}$  ;  $X_2 = 4.033 \text{ ton}\cdot\text{m}$

Y, por equilibrio:  $A = 2.956 \text{ ton}$  ;  $B = 6.302 \text{ ton}$  ;  $C = 3.742 \text{ ton}$

Diagramas finales:



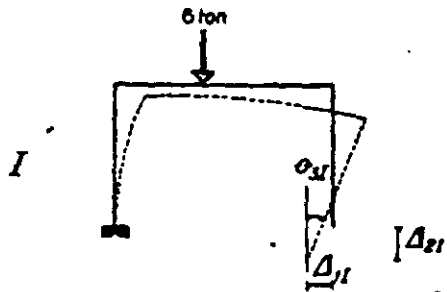
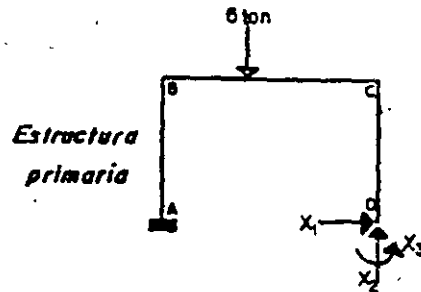
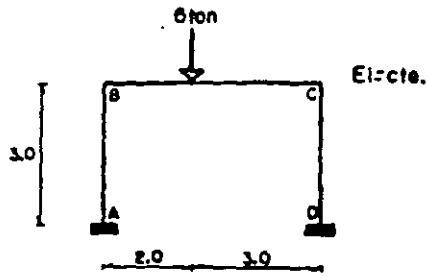


# METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

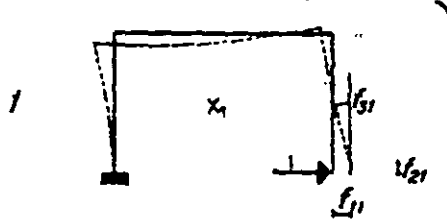
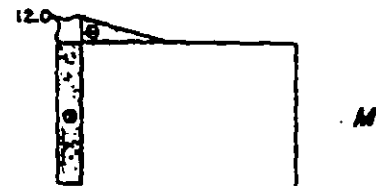
5.7. Resolver el marco que se indica.

El grado de indeterminación es:  $n = 6 - 3 = 3$

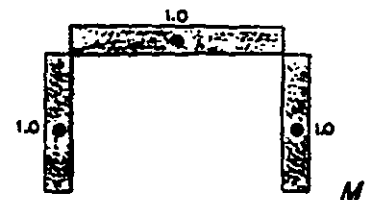
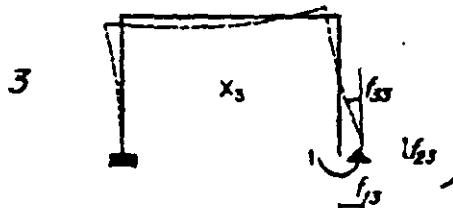
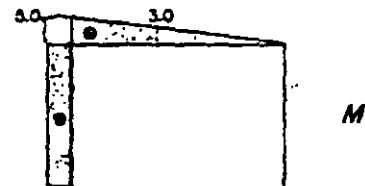
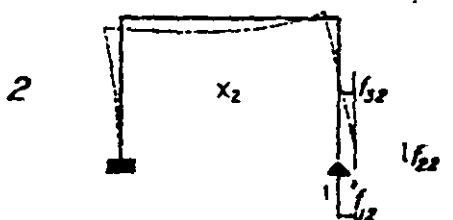
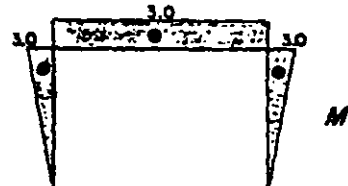
Suprimiendo el apoyo D, se obtiene:



*Solución particular*



*Solución complementaria*  
(grados de libertad)



Condiciones frontera:

$$A_{D\bar{x}} = 0 ; A_{D\bar{y}} = 0 ; \theta_D = 0$$

## METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

Ecuaciones de compatibilidad:

$$\Delta_{11} + f_{11} X_1 + f_{12} X_2 + f_{13} X_3 = 0$$

$$\Delta_{21} + f_{21} X_1 + f_{22} X_2 + f_{23} X_3 = 0$$

$$\Theta_{31} + f_{31} X_1 + f_{32} X_2 + f_{33} X_3 = 0$$

Cálculo de desplazamientos.

-MARCO 1-

$$EI \Delta_{11} = \int_0^3 12 \square \triangle 3 dy + \int_0^2 12 \triangle \square 3 dx = \frac{3(12)3}{2} + \frac{2(12)3}{2} = 90.000$$

$$EI \Delta_{21} = \int_0^3 12 \square \square 5 dy + \int_0^2 12 \triangle 5 \square 3 dx = 3(12)5 + \frac{2(12)}{6} [3+10] = 232.000$$

$$EI \Theta_{31} = \int_0^3 12 \square \square 1 dy + \int_0^2 12 \triangle \square 1 dx = 3(12)1 + \frac{2(12)1}{2} = 48.000$$

-MARCO 1-

$$EI f_{11} = 2 \int_0^3 \triangle 3 \triangle 3 dy + \int_0^3 \square \square 3 dx = \frac{2(3)(3)3}{3} + 5(3)3 = 63.000$$

$$EI f_{21} = \int_0^3 \triangle 3 \square 5 dy + \int_0^3 \square \square 5 \triangle dx = \frac{3(3)5}{2} + \frac{5(3)5}{2} = 60.000$$

$$EI f_{31} = 2 \int_0^3 \triangle 3 \square 1 dy + \int_0^3 \square \square 1 dx = \frac{2(3)(3)1}{2} + 5(3)1 = 24.000$$

-MARCO 2-

$$EI f_{12} = \int_0^3 5 \square \triangle 3 dy + \int_0^5 \triangle \square 3 dx = \frac{3(5)3}{2} + \frac{5(5)3}{2} = 80.000$$

$$EI f_{22} = \int_0^3 5 \square \square 5 dy + \int_0^5 \triangle \square 5 \triangle dx = 3(5)5 + \frac{5(5)5}{3} = 116.666$$

$$EI f_{32} = \int_0^3 5 \square \square 1 dy + \int_0^5 \triangle \square 1 dx = 3(5)1 + \frac{5(5)1}{2} = 27.500$$

-MARCO 3-

$$EI f_{13} = 2 \int_0^3 1 \square \triangle 3 dy + \int_0^1 \square \square 3 dx = \frac{2(3)(1)3}{2} + 5(1)3 = 24.000$$

$$EI f_{23} = \int_0^3 1 \square \square 5 dy + \int_0^1 \square \square 5 \triangle dx = 3(1)5 + \frac{5(1)5}{2} = 27.500$$

$$EI f_{33} = 2 \int_0^3 1 \square \square 1 dy + \int_0^1 \square \square 1 dx = 2(3)(1)1 + 5(1)1 = 11.000$$

Reemplazando valores da:

$$\begin{bmatrix} 63.000 & 60.000 & 24.000 \\ 60.000 & 116.666 & 27.500 \\ 24.000 & 27.500 & 11.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90.000 \\ 232.000 \\ 48.000 \end{bmatrix}$$

## METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

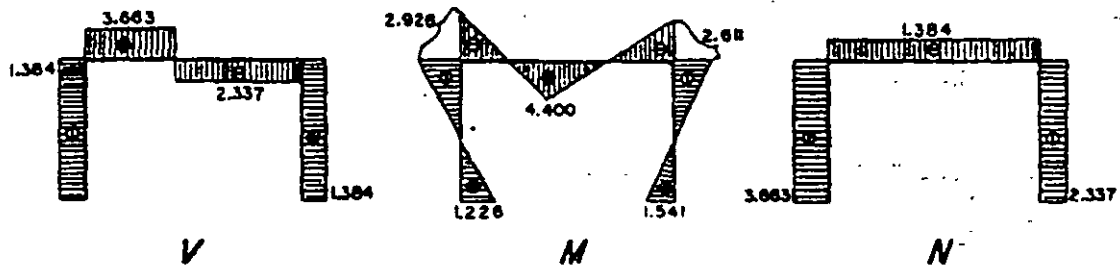
Resolviendo se tiene:

$$X_1 = -1.384 \text{ ton} \quad ; \quad X_2 = 2.337 \text{ ton} \quad ; \quad X_3 = 1.541 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

Por condiciones de equilibrio:

$$M_A = 1.226 \text{ ton}\cdot\text{m} \quad ; \quad A_x = 1.384 \text{ ton} \quad ; \quad A_y = 3.663 \text{ ton}$$

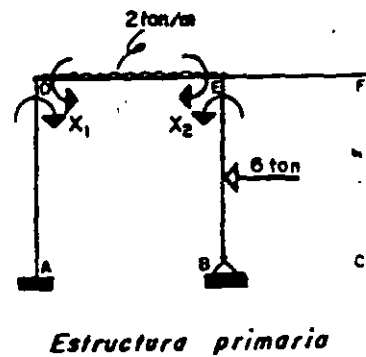
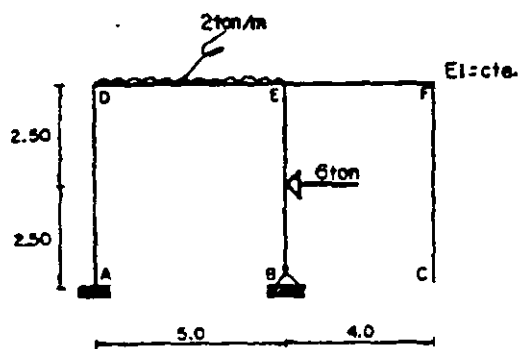
Diagramas finales:



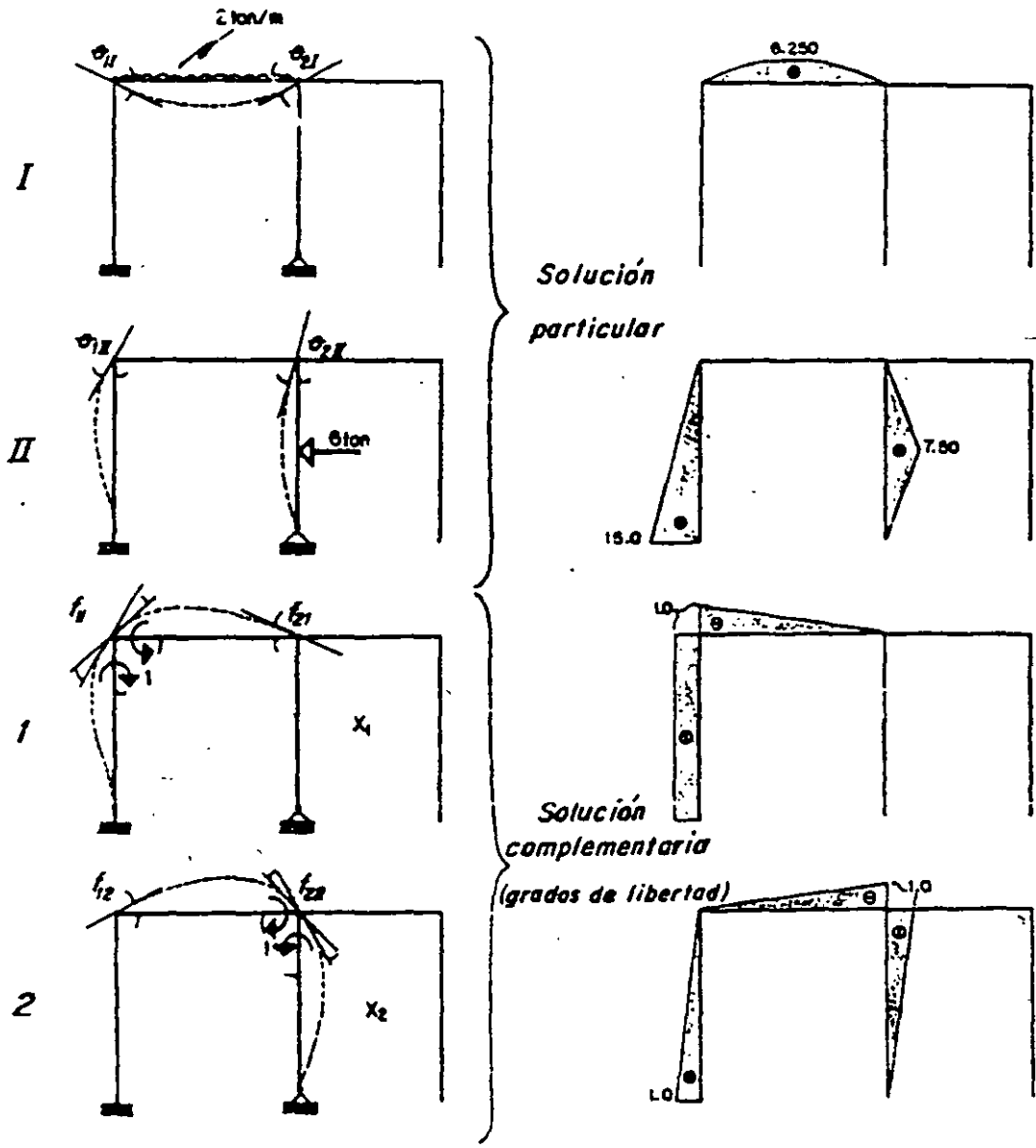
5.8. Trazar los diagramas de elementos mecánicos del siguiente marco.

El grado de indeterminación es:  $n = 5 - 3 = 2$

Para la solución se insertarán 2 articulaciones como se indica siendo las incógnitas los momentos  $X_1$  y  $X_2$ .



METODO DE LAS FLEXIBILIDADES



Se calculan los giros en las articulaciones, y por continuidad deben cumplirse

las ecuaciones siguientes:

$$\theta_{11} + \theta_{12} + f_{11} X_1 + f_{12} X_2 = 0$$

$$\theta_{21} + \theta_{22} + f_{21} X_1 + f_{22} X_2 = 0$$

Cálculo de desplazamientos.

-MARCO I-

$$EI \theta_{11} = \int_0^5 0.25 \frac{x}{2.5} dx = -\frac{5(0.25)1}{3} = -10.416$$

$$EI \theta_{21} = \int_0^5 0.25 \frac{x}{2.5} dx = -\frac{5(0.25)1}{3} = -10.416$$

METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

- MARCO II -

$$EI \theta_{1x} = \int_0^5 15 \triangle 1 \square dy = -\frac{5(15)1}{2} = -37.500$$

$$EI \theta_{2x} = \int_0^5 15 \triangle 1 \triangle dy + \int_0^5 7.5 \triangle 1 \triangle dx = \frac{5(15)1}{3} - \frac{5(7.5)1}{6} [1+0.5] = 15.625$$

- MARCO 1 -

$$EI f_{11} = \int_0^5 1 \square 1 \square dy + \int_0^5 1 \triangle 1 \triangle dx = 5(1)1 + \frac{5(1)1}{3} = 6.666$$

$$EI f_{21} = \int_0^5 1 \square 1 \triangle dy + \int_0^5 1 \triangle 1 \triangle dx = \frac{-5(1)1}{2} + \frac{5(1)1}{6} = -1.666$$

- MARCO 2 -

$$EI f_{12} = \int_0^5 1 \triangle 1 \square dy + \int_0^5 1 \triangle 1 \triangle dx = \frac{-5(1)1}{2} + \frac{5(1)1}{6} = -1.666$$

$$EI f_{22} = \int_0^5 1 \triangle 1 \triangle dy + \int_0^5 1 \triangle 1 \triangle dx + \int_0^5 1 \triangle 1 \triangle dx = \frac{5(1)1}{3} + \frac{5(1)1}{3} + \frac{5(1)1}{3} = 5.000$$

Sustituyendo en las ecs. de compatibilidad:

$$\begin{bmatrix} 6.666 & -1.666 \\ -1.666 & 5.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47.916 \\ -5.208 \end{bmatrix}$$

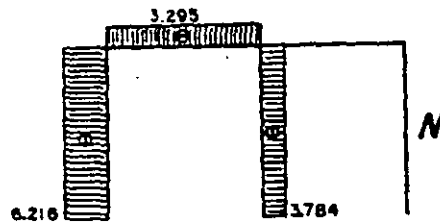
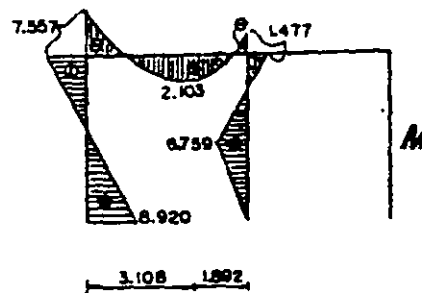
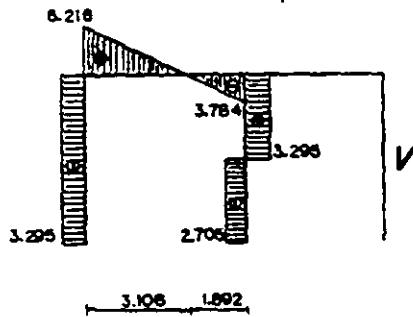
Cuya solución es:

$$X_1 = 7.557 \text{ ton}\cdot\text{m} \quad ; \quad X_2 = 1.477 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

Por equilibrio:

$$M_A = 8.920 \text{ ton}\cdot\text{m} ; A_x = 3.295 \text{ ton} ; A_y = 6.216 \text{ ton} ; B_x = 2.705 \text{ ton} ; B_y = 3.784 \text{ ton}$$

Diagramas finales:



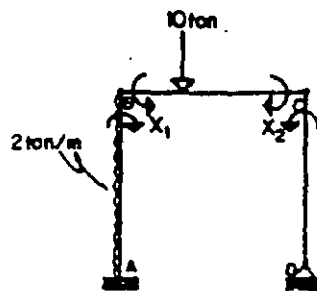
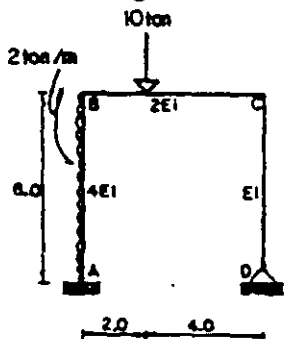
METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

5.9. Determinar los momentos en los vértices del marco.

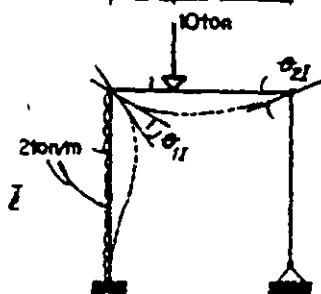
El grado de indeterminación es:  $n = 5 - 3 = 2$

Se insertarán 2 articulaciones como se indica, siendo las incógnitas los momentos

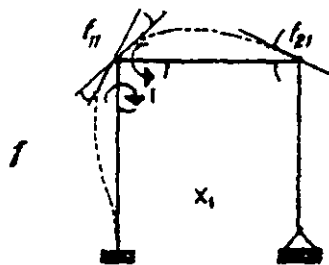
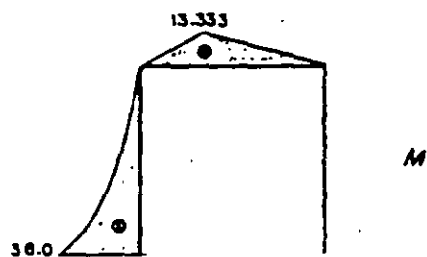
los  $X_1$  y  $X_2$ .



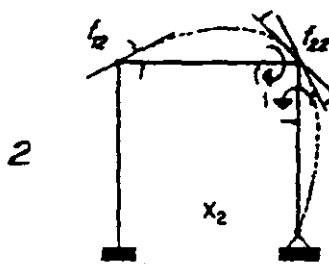
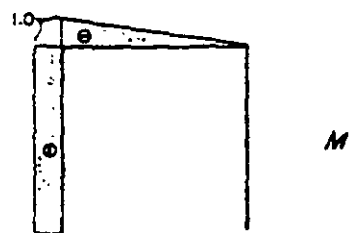
Estructura primaria



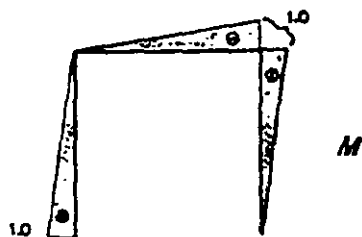
Solución particular



Solución complementaria



(grados de libertad)



Se calculan los giros en las articulaciones, y por la condición de continuidad se cumplirán las expresiones:

METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

$$\theta_{11} + f_{11} X_1 + f_{12} X_2 = 0$$

$$\theta_{21} + f_{21} X_1 + f_{22} X_2 = 0$$

Cálculo de desplazamientos.

-MARCO 1-

$$EI \theta_{11} = \frac{1}{4} \int_0^6 36 \square \square dy + \frac{1}{2} \int_0^6 13.333 \triangle \triangle dx = \frac{6(36)1}{12} - \frac{6(13.333)1}{12} [1+0.666] = 6.888$$

$$EI \theta_{21} = \frac{1}{4} \int_0^6 36 \square \triangle dy + \frac{1}{2} \int_0^6 13.333 \triangle \triangle dx = \frac{6(36)1}{12} - \frac{6(13.333)1}{12} [1+0.333] = -22.388$$

-MARCO 1-

$$EI f_{11} = \frac{1}{4} \int_0^6 \square \square dy + \frac{1}{2} \int_0^6 \triangle \triangle dx = \frac{6(1)1}{4} + \frac{6(1)1}{6} = 2.500$$

$$EI f_{21} = \frac{1}{4} \int_0^6 \square \triangle dy + \frac{1}{2} \int_0^6 \triangle \triangle dx = \frac{6(1)1}{8} + \frac{6(1)1}{12} = 0.250$$

-MARCO 2-

$$EI f_{12} = \frac{1}{4} \int_0^6 \triangle \square dy + \frac{1}{2} \int_0^6 \triangle \triangle dx = \frac{6(1)1}{8} + \frac{6(1)1}{12} = 0.250$$

$$EI f_{22} = \frac{1}{4} \int_0^6 \triangle \triangle dy + \frac{1}{2} \int_0^6 \triangle \triangle dx + \int_0^6 \triangle \triangle dy = \frac{6(1)1}{12} + \frac{6(1)1}{3} + \frac{6(1)1}{3} = 3.500$$

Sustituyendo valores:

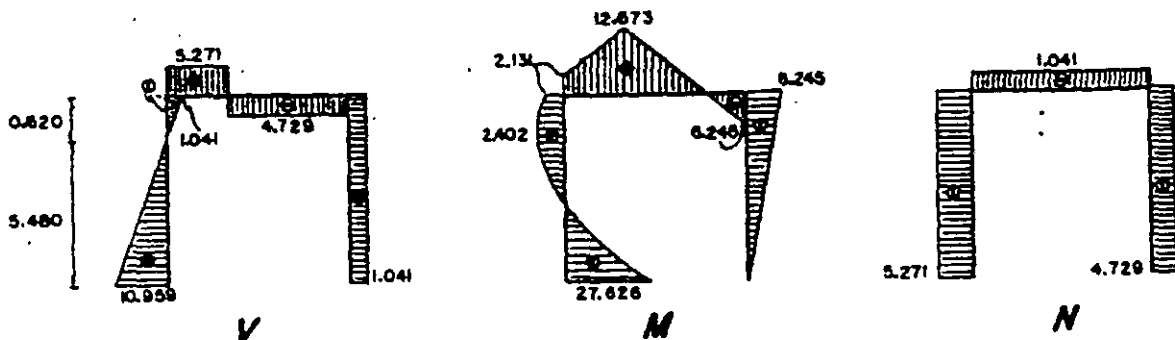
$$\begin{bmatrix} 2.500 & -0.250 \\ -0.250 & 3.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.888 \\ 22.388 \end{bmatrix}$$

De donde resulta:  $X_1 = -2.131 \text{ ton}\cdot\text{m}$  ;  $X_2 = 6.245 \text{ ton}\cdot\text{m}$

Y, por condiciones de equilibrio:

$$M_A = 27.626 \text{ ton}\cdot\text{m} ; A_x = 10.959 \text{ ton} ; A_y = 5.271 \text{ ton} ; D_x = 1.041 ; D_y = 4.729 \text{ ton}$$

Momentos finales:

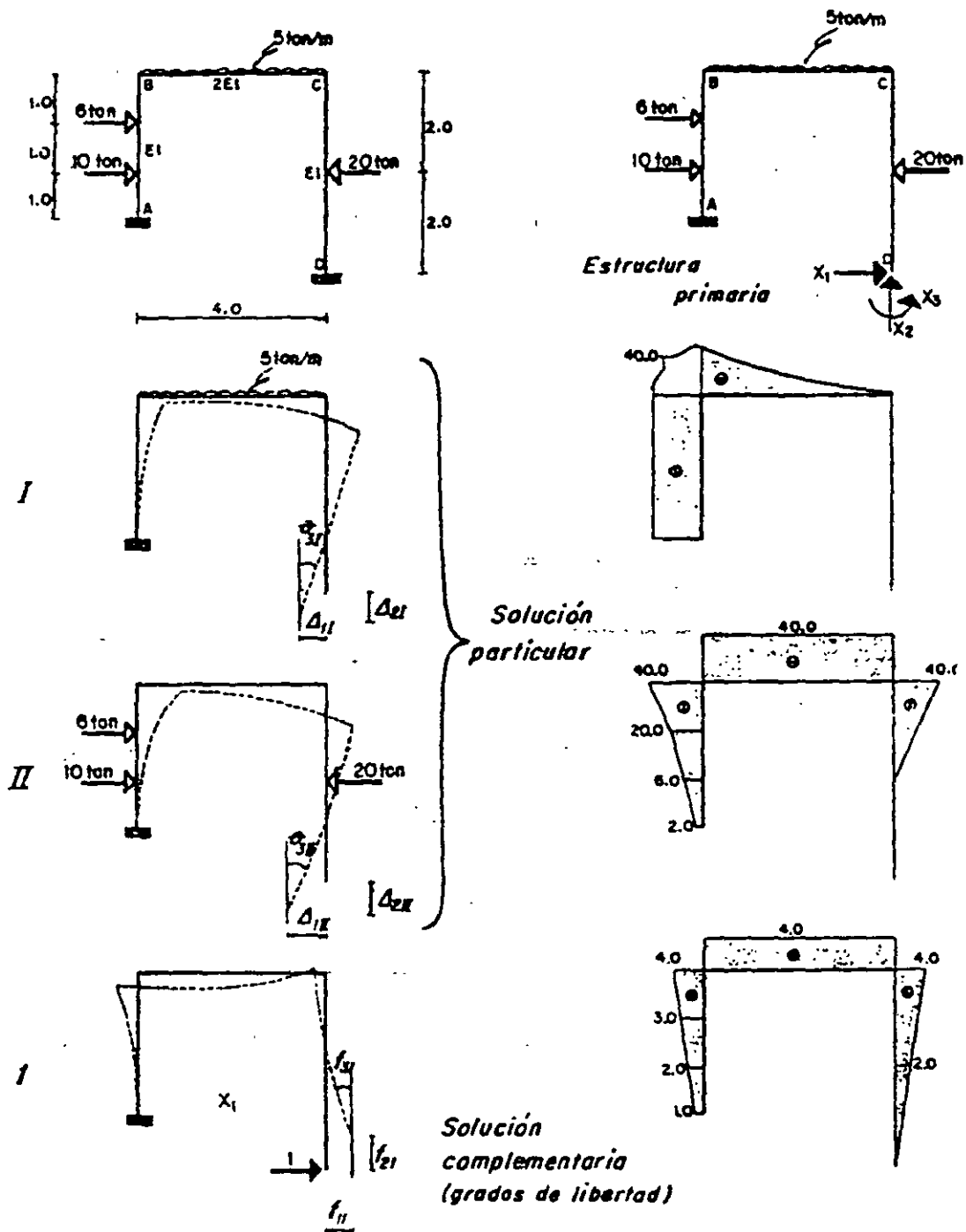


METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

5.10. Encontrar los momentos finales del marco hiperestático.

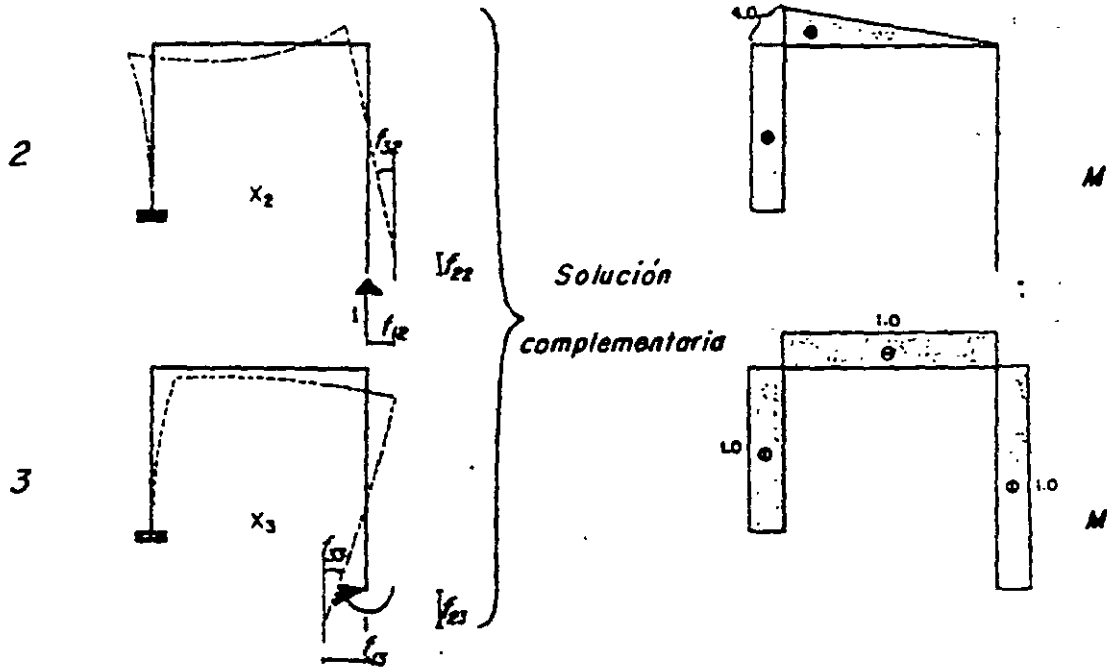
El grado de indeterminación es:  $n = 6 - 3 = 3$

Eliminando el apoyo D se tiene:





METODO DE LAS FLEXIBILIDADES



Condiciones frontera:  $\Delta_{2I} = 0$  ;  $\Delta_{0I} = 0$  ;  $\Theta_0 = 0$

Ecuaciones de compatibilidad:

$$\Delta_{1I} + \Delta_{1II} + f_{11} X_1 + f_{12} X_2 + f_{13} X_3 = 0$$

$$\Delta_{2I} + \Delta_{2II} + f_{21} X_1 + f_{22} X_2 + f_{23} X_3 = 0$$

$$\Theta_{3I} + \Theta_{3II} + f_{31} X_1 + f_{32} X_2 + f_{33} X_3 = 0$$

Cálculo de desplazamientos.

- MARCO I -

$$EI \Delta_{1I} = \int_0^4 40 \cdot 1 \cdot 4 \, dy + \frac{1}{2} \int_0^4 40 \cdot 4 \, dx = \frac{3(40)}{2} [1+4] + \frac{4(4)40}{3(2)} = 408.887$$

$$EI \Delta_{2I} = \int_0^4 40 \cdot 4 \, dy + \frac{1}{2} \int_0^4 40 \cdot 4 \, dx = 3(4)40 + \frac{4(4)40}{4(2)} = 560.000$$

$$EI \Theta_{3I} = \int_0^4 40 \cdot 1 \, dy + \frac{1}{2} \int_0^4 40 \cdot 1 \, dx = 3(1)40 + \frac{4(40)1}{3(2)} = 146.887$$

- MARCO II -

$$EI \Delta_{1II} = \int_0^1 2 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \, dy + \int_1^2 6 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 3 \, dy + \int_2^3 20 \cdot 40 \cdot 3 \cdot 4 \, dy + \frac{1}{2} \int_0^4 40 \cdot 4 \, dx + \int_0^2 40 \cdot 2 \, dy$$

$$EI \Delta_{1II} = \frac{1}{6} (4+6+4+24) + \frac{1}{6} (24+40+18+120) + \frac{1}{6} (120+120+80+320) + \frac{40(4)4}{2} + \frac{2(2+8)40}{6} = 600.000$$

$$EI \Delta_{2II} = \int_0^1 2 \cdot 6 \cdot 4 \, dy + \int_1^2 6 \cdot 20 \cdot 4 \, dy + \int_2^3 20 \cdot 40 \cdot 4 \, dy + \frac{1}{2} \int_0^4 40 \cdot 4 \, dx$$

METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

$$EI \Delta_{21} = \frac{1(4)}{2} [2+6] + \frac{4(1)}{2} [6+20] + \frac{4(1)}{2} [20+40] + \frac{4(40)4}{2(2)} = 348.000$$

$$EI \Theta_{21} = \int_0^1 6 \square dy + \int_1^2 20 \square dy + \int_2^4 40 \square dy + \frac{1}{2} \int_0^4 40 \square dx + \int_0^2 40 \square dy$$

$$EI \Theta_{21} = \frac{1(1)}{2} [2+6] + \frac{1(1)}{2} [6+20] + \frac{1(1)}{2} [20+40] + \frac{4(40)1}{2} + \frac{2(40)1}{2} = 167.000$$

- MARCO 1-

$$EI f_{11} = \int_0^1 4 \square dy + \frac{1}{2} \int_0^4 4 \square dx + \int_0^4 4 \square dy = \frac{1}{2} (2+4+4+32) + \frac{4(4)4}{2} + \frac{4(4)4}{3} = 74.333$$

$$EI f_{21} = \int_0^1 4 \square dy + \frac{1}{2} \int_0^4 4 \square dx = \frac{12}{2} [1+4] + \frac{4(4)4}{4} = 46.000$$

$$EI f_{31} = \int_0^1 4 \square dy + \frac{1}{2} \int_0^4 1 \square dx + \int_0^4 1 \square dy = \frac{3}{2} [1+4] + \frac{4(4)1}{2} + \frac{4(4)1}{2} = 23.500$$

- MARCO 2-

$$EI f_{12} = \int_0^1 1 \square dy + \frac{1}{2} \int_0^4 4 \square dx = \frac{3(4)}{2} [1+4] + \frac{4(4)4}{4} = 48.000$$

$$EI f_{22} = \int_0^1 4 \square dy + \frac{1}{2} \int_0^4 4 \square dx = 4(4)3 + \frac{4(4)4}{6} = 58.667$$

$$EI f_{32} = \int_0^1 1 \square dy + \frac{1}{2} \int_0^4 1 \square dx = 3(4)1 + \frac{4(4)1}{4} = 16.000$$

- MARCO 3-

$$EI f_{13} = \int_0^1 1 \square dy + \frac{1}{2} \int_0^4 4 \square dx + \int_0^4 4 \square dy = \frac{3(1)}{2} [1+4] + \frac{4(4)4}{2} + \frac{4(4)1}{2} = 23.500$$

$$EI f_{23} = \int_0^1 1 \square dy + \frac{1}{2} \int_0^4 1 \square dx = 3(1)4 + \frac{4(1)4}{4} = 16.000$$

$$EI f_{33} = \int_0^1 1 \square dy + \frac{1}{2} \int_0^4 1 \square dx + \int_0^4 1 \square dy = 3(1)1 + \frac{4(1)1}{2} + 4(1)1 = 9.000$$

Reemplazando los desplazamientos queda:

$$\begin{bmatrix} 74.333 & 46.000 & -23.500 \\ 46.000 & 58.667 & -16.000 \\ -23.500 & -16.000 & 9.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.006.667 \\ 908.000 \\ -313.667 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema matricial es:

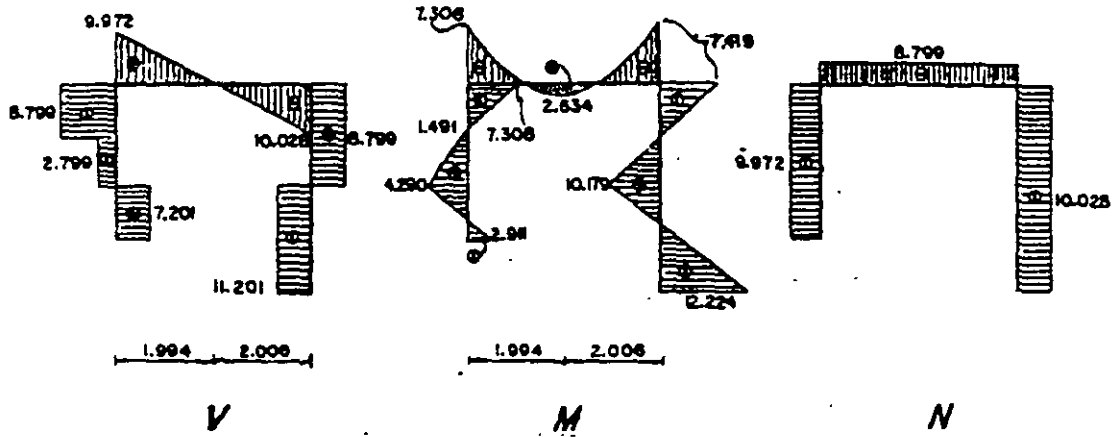
$$X_1 = 11.201 \text{ ton} ; \quad X_2 = 10.028 \text{ ton} ; \quad X_3 = 12.224 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

Por equilibrio:

$$M_A = 2.911 \text{ ton}\cdot\text{m} ; \quad A_x = 7.201 \text{ ton} ; \quad A_y = 9.972 \text{ ton}$$

METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

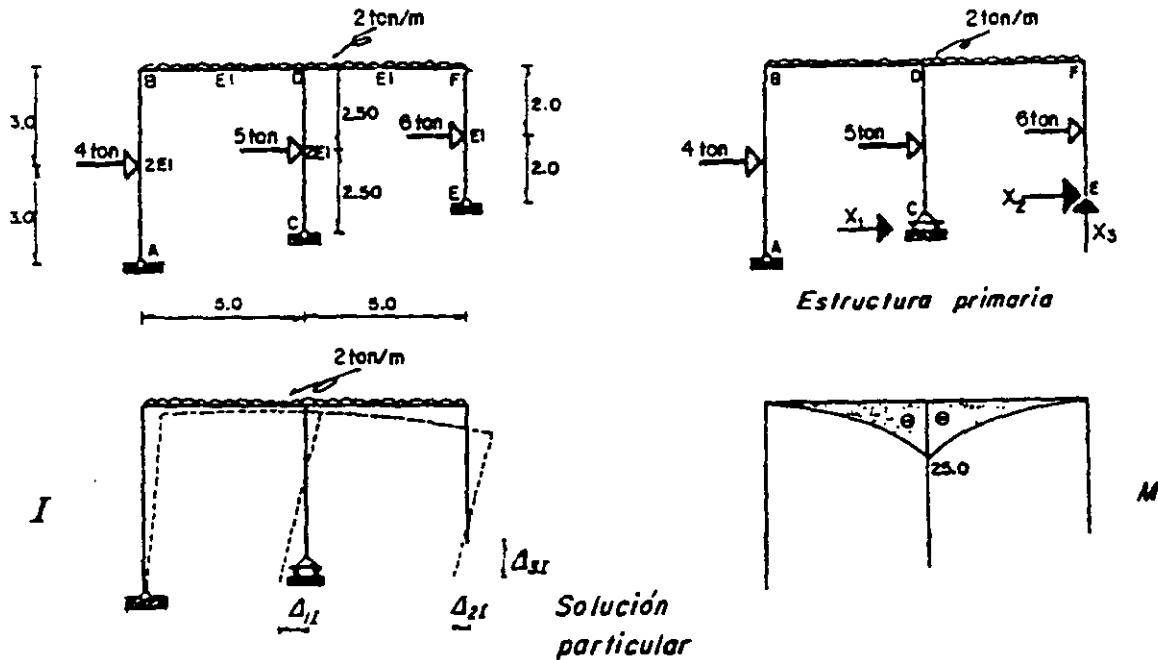
Diagramas finales:



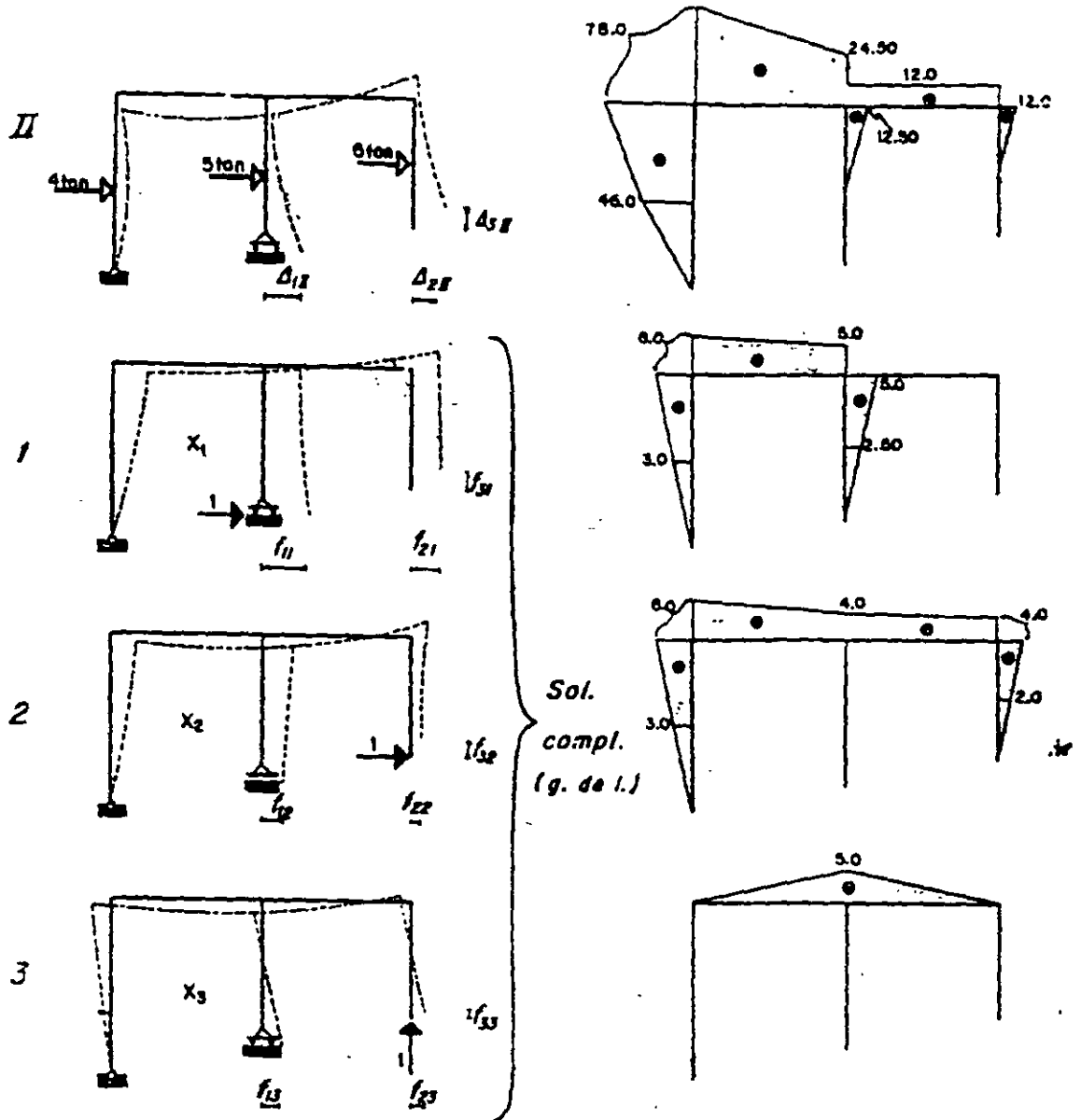
5.11. Resolver el marco hiperestático que se indica.

El grado de indeterminación es:  $n = 6 - 3 = 3$

Suprimiendo el apoyo E y la reacción horizontal en C, queda:



METODO DE LAS FLEXIBILIDADES



Sol. compl. (g. de l.)

Condiciones frontera:  $\Delta_{CX} = 0$  ;  $\Delta_{EX} = 0$  ;  $\Delta_{EY} = 0$

Ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} + \Delta_{12} + f_{11} X_1 + f_{12} X_2 + f_{13} X_3 &= 0 \\ \Delta_{21} + \Delta_{22} + f_{21} X_1 + f_{22} X_2 + f_{23} X_3 &= 0 \\ \Delta_{31} + \Delta_{32} + f_{31} X_1 + f_{32} X_2 + f_{33} X_3 &= 0 \end{aligned}$$

Cálculo de desplazamientos:

-MARCO I-

$$EI \Delta_{11} = \int_0^3 \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 6 \cdot dx = \frac{51251}{12} [15+6] = 218.750$$

METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

$$EI\Delta_{2I} = \int_0^5 \triangle 25 \square 6 \square 4 dx + \int_5^{10} \triangle 25 \square 4 \square dx = \frac{5(25)}{12} [12+6] + \frac{5(25)4}{3} = 354.166$$

$$EI\Delta_{3I} = \int_0^5 \triangle 25 \triangle 5 dx + \int_5^{10} \triangle 25 \triangle 8 dx = \frac{5(25)5}{4} + \frac{5(25)5}{4} = 312.500$$

- MARCO II -

$$EI\Delta_{1II} = \frac{1}{2} \int_0^5 \triangle 45 \triangle 3 dy + \frac{1}{2} \int_5^8 \triangle 45 \triangle 78 \triangle 3 \triangle 6 dy + \int_0^5 \triangle 78 \triangle 24.5 \triangle 6 \triangle 5 + \frac{1}{2} \int_{2.5}^5 \triangle 12.5 \triangle 5 \triangle 2.5 dy$$

$$EI\Delta_{1II} = \frac{3(45)3}{6} + \frac{3}{2} [90(3)+78(3)+45(6)+156(6)] + \frac{5}{6} [49(5)+78(5)+24.5(6)+156(6)] + \frac{2.5(12.5)}{2} [2.5+10] = 1959.218$$

$$EI\Delta_{2II} = \frac{1}{2} \int_0^5 \triangle 45 \triangle 3 dy + \frac{1}{2} \int_5^8 \triangle 45 \triangle 78 \triangle 3 \triangle 6 dx + \int_0^5 \triangle 78 \triangle 24.5 \triangle 6 \triangle 4 dx + \int_2^4 \triangle 12 \triangle 4 \triangle 2 dy + \frac{3(45)3}{6} + \frac{3}{2} [90(3)+78(3)+45(6)+156(6)] + \frac{5}{6} [49(4)+78(4)+24.5(6)+156(6)] + \frac{5(12)4}{6} + \frac{2(12)}{6} [2+8]$$

$$EI\Delta_{2II} = 2100.833$$

$$EI\Delta_{3II} = \int_0^5 \triangle 78 \triangle 24.5 \triangle 5 dx + \int_5^{10} \triangle 12 \triangle 5 \triangle dx = \frac{5(5)}{6} [49+78] + \frac{5(12)5}{2} = 679.166$$

- MARCO 1 -

$$EI f_{11} = \frac{1}{2} \int_0^5 \triangle 6 \triangle 6 dy + \int_0^5 \triangle 6 \triangle 5 \triangle 6 dx + \frac{1}{2} \int_0^5 \triangle 5 \triangle 5 \triangle dy = \frac{6(6)6}{6} + \frac{5}{6} [10(5)+6(5)+5(6)+12(6)] + \frac{5(5)5}{6} = 208.5$$

$$EI f_{21} = \frac{1}{2} \int_0^5 \triangle 6 \triangle 6 dy + \int_0^5 \triangle 6 \triangle 5 \triangle 4 dx = \frac{6(6)6}{6} + \frac{5}{6} [10(4)+6(4)+5(6)+12(6)] = 174.333$$

$$EI f_{31} = \int_0^5 \triangle 6 \triangle 5 \triangle 5 dx = \frac{5(5)}{6} [10+6] = 66.666$$

- MARCO 2 -

$$EI f_{12} = \frac{1}{2} \int_0^5 \triangle 6 \triangle 6 dy + \int_0^5 \triangle 6 \triangle 4 \triangle 6 \triangle 5 dx = \frac{6(6)6}{6} + \frac{5}{6} [8(5)+6(5)+4(6)+12(6)] = 174.333$$

$$EI f_{22} = \frac{1}{2} \int_0^5 \triangle 6 \triangle 6 dy + \int_0^5 \triangle 6 \triangle 4 \triangle 6 \triangle 4 dx + \int_5^{10} \triangle 4 \triangle 4 \triangle dx + \int_0^4 \triangle 4 \triangle 4 \triangle dy$$

$$EI f_{22} = \frac{6(6)6}{6} + \frac{5}{6} [8(4)+6(4)+4(6)+12(6)] + 5(4)4 + \frac{4(4)4}{3} = 264.000$$

$$EI f_{32} = \int_0^5 \triangle 6 \triangle 4 \triangle 5 dx + \int_5^{10} \triangle 4 \triangle 5 \triangle dx = \frac{5(5)}{6} [8+6] + \frac{5(4)5}{2} = 108.333$$

- MARCO 3 -

$$EI f_{13} = \int_0^5 \triangle 5 \triangle 6 \triangle 5 dx = \frac{5(5)}{6} [10+6] = 66.666$$

$$EI f_{23} = \int_0^5 \triangle 5 \triangle 6 \triangle 4 dx + \int_5^{10} \triangle 5 \triangle 4 \triangle dx = \frac{5(5)}{6} [8+6] + \frac{5(5)4}{2} = 108.333$$

$$EI f_{33} = \int_0^{10} \triangle 5 \triangle 5 \triangle dx = \frac{10(5)5}{3} = 83.333$$

## METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

Sustituyendo valores se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 208.500 & 174.333 & 66.666 \\ 174.333 & 264.000 & 108.333 \\ 66.666 & 108.333 & 83.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1740.468 \\ -1746.666 \\ -366.666 \end{bmatrix}$$

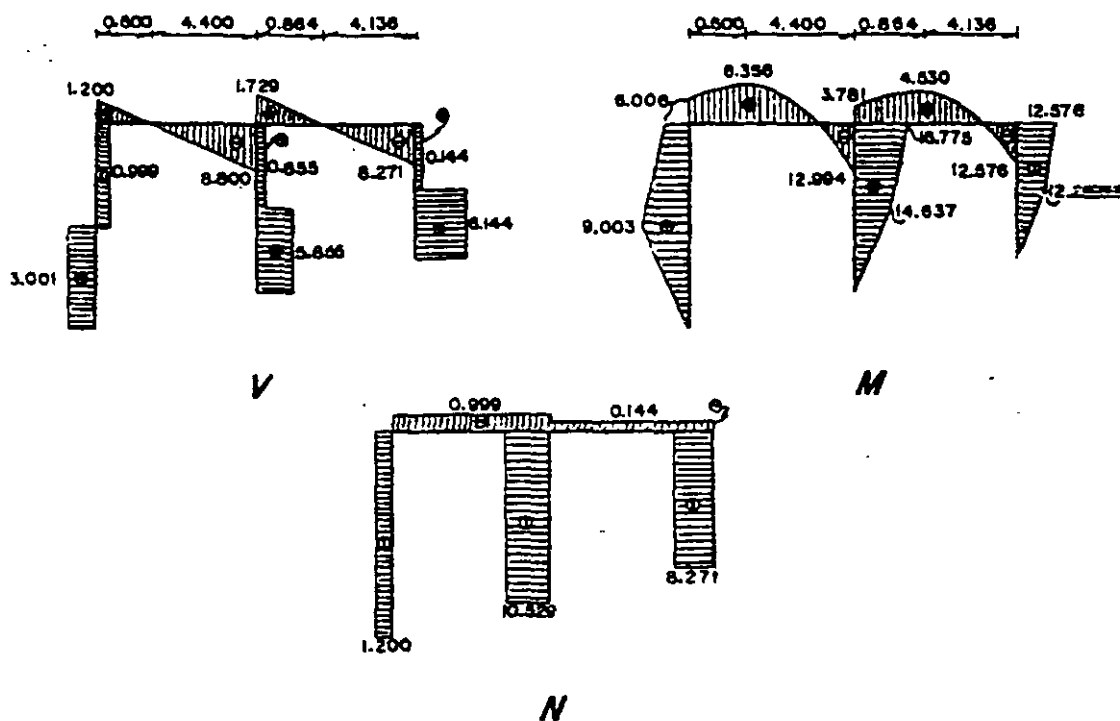
Cuya solución es:

$$X_1 = -5.855 \text{ ton} \quad ; \quad X_2 = -6.144 \text{ ton} \quad ; \quad X_3 = 8.271 \text{ ton}$$

Y, por condiciones de equilibrio:

$$A_r = 3.001 \text{ ton} \quad ; \quad A_y = 1.200 \text{ ton} \quad ; \quad C_r = 10.529 \text{ ton}$$

Diagramas finales:

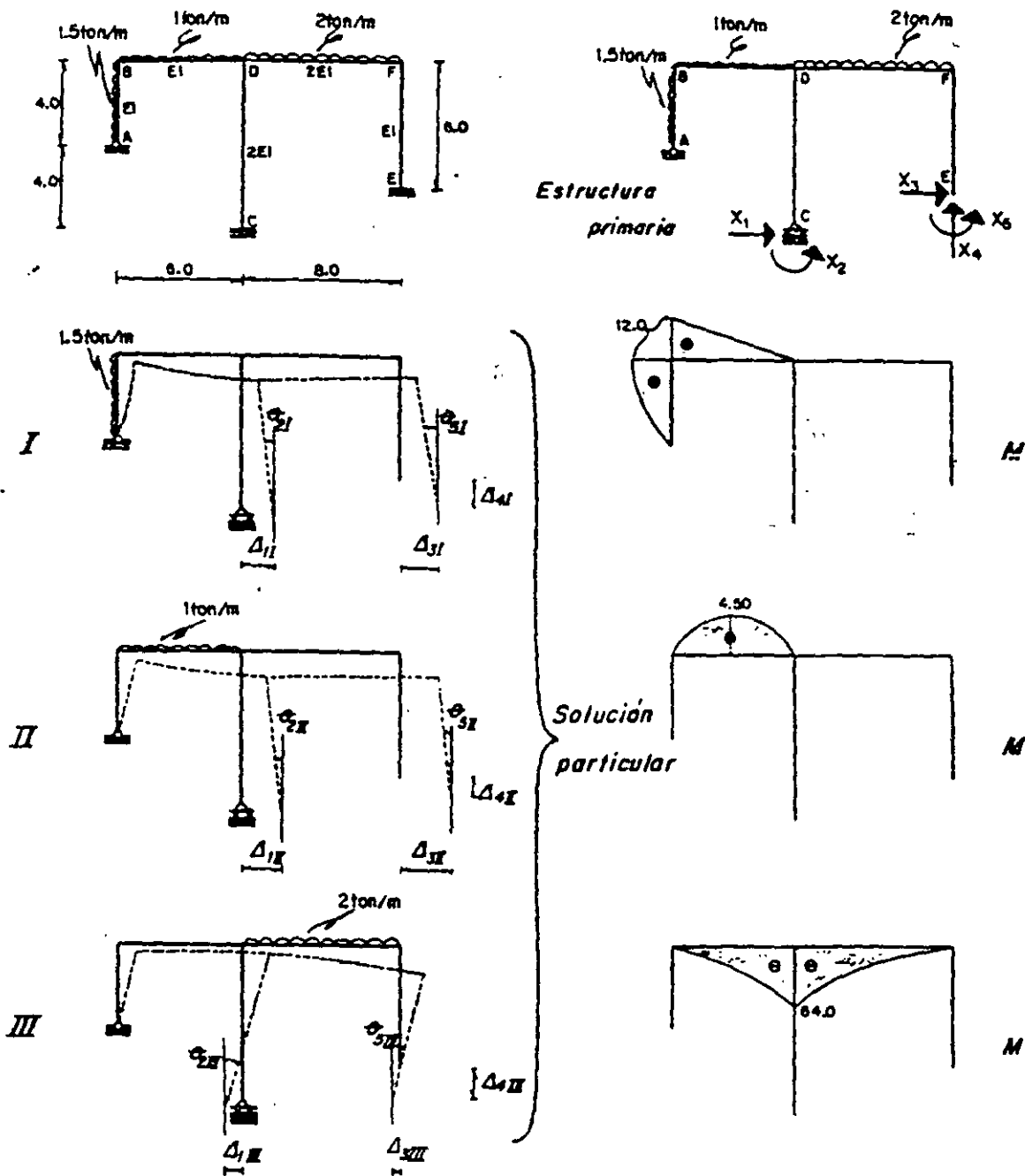


# METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

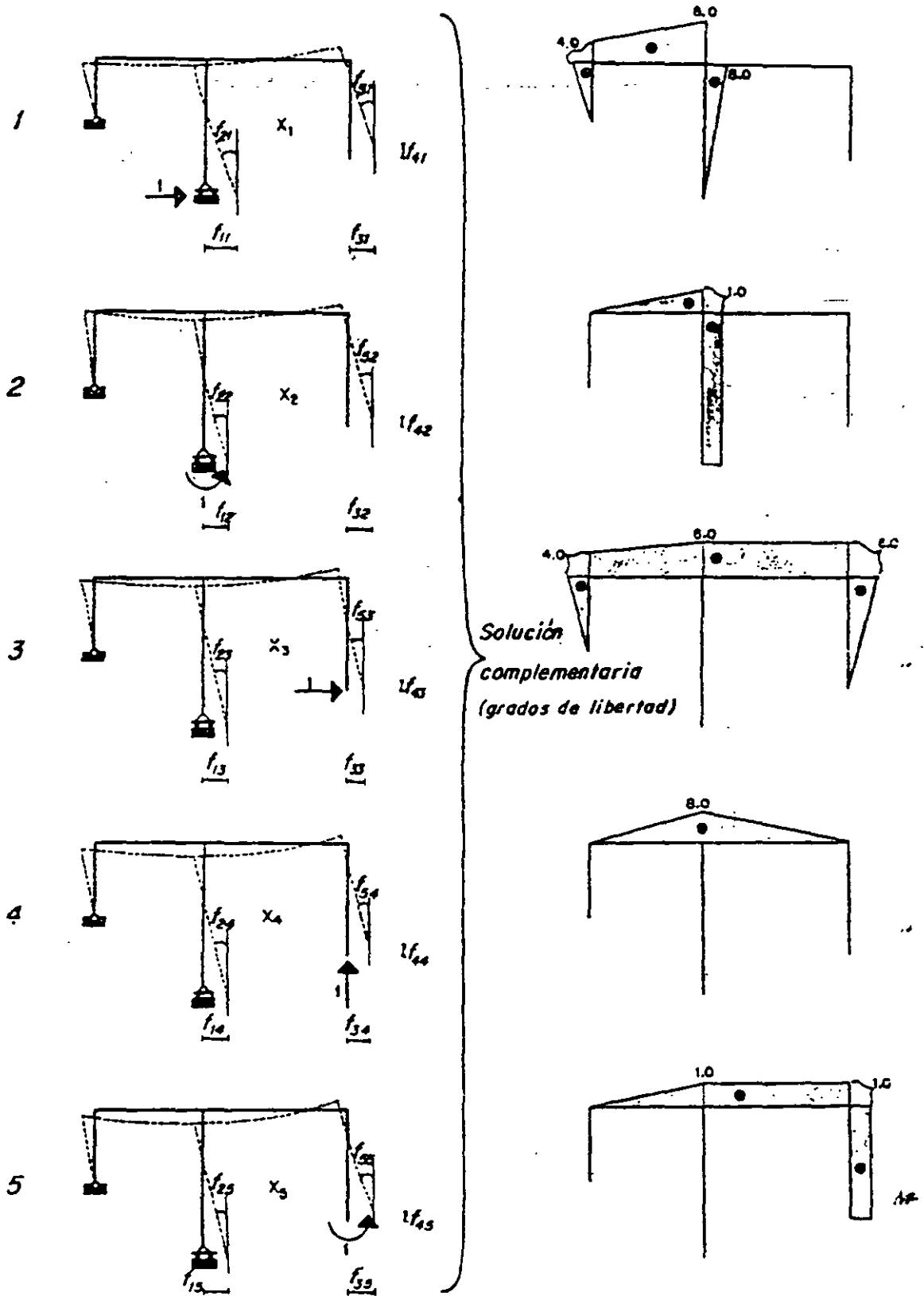
5.12. Determinar los momentos en los vértices del marco.

Su grado de indeterminación es:  $n = 8 - 3 = 5$

Tomando el apoyo E, así como la reacción horizontal y el momento en C como redundantes, se tiene:



METODO DE LAS FLEXIBILIDADES





METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

Condiciones frontera:  $\Delta_{2I} = 0$  ;  $\Theta_C = 0$  ;  $\Delta_{2II} = 0$  ;  $\Delta_{2III} = 0$  ;  $\Theta_E = 0$

Ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{aligned} \Delta_{1I} + \Delta_{1II} + \Delta_{1III} + f_{11} X_1 + f_{12} X_2 + f_{13} X_3 + f_{14} X_4 + f_{15} X_5 &= 0 \\ \Theta_{2I} + \Theta_{2II} + \Theta_{2III} + f_{21} X_1 + f_{22} X_2 + f_{23} X_3 + f_{24} X_4 + f_{25} X_5 &= 0 \\ \Delta_{3I} + \Delta_{3II} + \Delta_{3III} + f_{31} X_1 + f_{32} X_2 + f_{33} X_3 + f_{34} X_4 + f_{35} X_5 &= 0 \\ \Delta_{4I} + \Delta_{4II} + \Delta_{4III} + f_{41} X_1 + f_{42} X_2 + f_{43} X_3 + f_{44} X_4 + f_{45} X_5 &= 0 \\ \Theta_{5I} + \Theta_{5II} + \Theta_{5III} + f_{51} X_1 + f_{52} X_2 + f_{53} X_3 + f_{54} X_4 + f_{55} X_5 &= 0 \end{aligned}$$

Cálculo de desplazamientos.

- MARCO I -

$$EI \Delta_{1I} = \int_0^4 12 \triangle 4 dy + \int_0^6 12 \triangle 4 \square 8 dx = \frac{5(4)(12)4}{12} + \frac{6(12)}{6} [8+8] = 272.000$$

$$EI \Theta_{2I} = \int_0^6 12 \triangle 1 dx = \frac{6(12)1}{6} = 12.000$$

$$EI \Delta_{3I} = \int_0^4 12 \triangle 4 dy + \int_0^6 12 \triangle 4 \square 6 dx = \frac{5(12)(4)4}{12} + \frac{6(12)}{6} [8+6] = 248.000$$

$$EI \Delta_{4I} = \int_0^6 12 \triangle 8 dx = \frac{6(12)8}{6} = 96.000 \quad ; \quad EI \Theta_{5I} = \int_0^6 12 \triangle 1 dx = \frac{6(12)1}{6} = 12.000$$

- MARCO II -

$$EI \Delta_{1II} = \int_0^{4.5} \frac{4}{3} \square 8 dx = \frac{6(4.5)}{3} [4+8] = 108.000 \quad ; \quad EI \Theta_{2II} = \int_0^{4.5} \frac{4}{3} \triangle 1 dx = \frac{6(1)4.5}{3} = 9.000$$

$$EI \Delta_{3II} = \int_0^{4.5} \frac{4}{3} \square 6 dx = \frac{6(4.5)}{6} [4+6] = 90.000 \quad ; \quad EI \Delta_{4II} = \int_0^{4.5} \frac{4}{3} \square 8 dx = \frac{6(8)4.5}{3} = 72.000$$

$$EI \Theta_{5II} = \int_0^{4.5} \frac{4}{3} \triangle 1 dx = \frac{6(4.5)1}{3} = 9.000$$

- MARCO III -

$$EI \Delta_{1III} = \int_0^6 64 \triangle 8 dx = \frac{6(64)}{6} [4+16] = 1280.000 \quad ; \quad EI \Theta_{2III} = \int_0^6 64 \triangle 1 dx = \frac{6(64)1}{3} = 128.000$$

$$EI \Delta_{3III} = \int_0^6 64 \triangle 8 dx + \frac{1}{2} \int_0^6 64 \square 8 dx = \frac{6(64)}{6} [4+12] + \frac{8(64)6}{6} = 1536.000$$

$$EI \Delta_{4III} = \int_0^6 64 \triangle 8 dx + \frac{1}{2} \int_0^6 64 \square 8 dx = \frac{6(64)8}{3} + \frac{8(64)6}{6} = 1536.000$$

$$EI \Theta_{5III} = \int_0^6 64 \triangle 1 dx + \frac{1}{2} \int_0^6 64 \square 1 dx = \frac{6(64)1}{3} + \frac{8(64)1}{6} = 213.333$$

METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

- MARCO 1 -

$$EI f_{11} = \int_0^4 \frac{1}{2} (4-x) (4-x) dy + \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dy$$

$$EI f_{11} = \frac{4(4)4}{3} + \frac{8(8)8}{6} + \frac{6}{6} [8(4)+8(4)+4(8)+16(8)] = 330.666$$

$$EI f_{21} = \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dy = \frac{6(11)}{6} [4+16] + \frac{8(8)1}{4} = 36.000$$

$$EI f_{31} = \int_0^4 \frac{1}{2} (4-x) (4-x) dy + \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx = \frac{4(4)4}{3} + \frac{6}{6} [8(4)+8(4)+4(8)+16(8)] = 205.333$$

$$EI f_{41} = \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx = \frac{6(8)}{6} [4+16] = 160.000 ; EI f_{51} = \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx = \frac{6(11)}{6} [4+16] = 20.000$$

- MARCO 2 -

$$EI f_{12} = \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dy = \frac{6(11)}{6} [4+16] + \frac{8(11)8}{4} = 36.000$$

$$EI f_{22} = \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dy = \frac{6(11)}{3} + \frac{8(11)1}{2} = 6.000$$

$$EI f_{32} = \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx = \frac{6(11)}{6} [4+12] = 16.000 ; EI f_{42} = \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx = \frac{6(11)8}{3} = 16.000$$

$$EI f_{52} = \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx = \frac{6(11)1}{3} = 2.000$$

- MARCO 3 -

$$EI f_{13} = \int_0^4 \frac{1}{2} (4-x) (4-x) dy + \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx = \frac{4(4)4}{3} + \frac{6}{6} [8(4)+8(4)+4(8)+12(8)] = 205.333$$

$$EI f_{23} = \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx = \frac{6(11)}{6} [4+12] = 16.000$$

$$EI f_{33} = \int_0^4 \frac{1}{2} (4-x) (4-x) dy + \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx + \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dy$$

$$EI f_{33} = \frac{4(4)4}{3} + \frac{6}{6} [8(4)+8(4)+4(8)+12(8)] + \frac{8(8)8}{2} + \frac{6(8)8}{3} = 389.333$$

$$EI f_{43} = \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx = \frac{6(8)}{6} [4+12] + \frac{8(8)8}{4} = 224.000$$

$$EI f_{53} = \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx + \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dy = \frac{6(11)}{6} [4+12] + \frac{8(8)8}{2} + \frac{6(8)1}{2} = 58.000$$

- MARCO 4 -

$$EI f_{14} = \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx = \frac{6(8)}{6} [4+16] = 160.000 ; EI f_{24} = \int_0^8 \frac{1}{2} (8-x) (8-x) dx = \frac{6(8)1}{3} = 16.000$$

METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

$$EI f_{34} = \int_0^6 \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot 8 dx + \frac{1}{2} \int_6^{14} \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 dx = \frac{6(8)}{8} [4+12] + \frac{8(8)6}{4} = 224.000$$

$$EI f_{44} = \int_0^6 \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 dx + \frac{1}{2} \int_6^{14} \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 dx = \frac{6(8)8}{3} + \frac{8(8)8}{6} = 213.333$$

$$EI f_{64} = \int_0^6 \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 dx + \frac{1}{2} \int_6^{14} \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 dx = \frac{6(8)1}{3} + \frac{8(8)1}{4} = 32.000$$

- MARCO 5 -

$$EI f_{16} = \int_0^6 \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 8 dx = \frac{6(1)}{6} [4+16] = 20.000 ; \quad EI f_{25} = \int_0^6 \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 dx = \frac{6(1)1}{3} = 2.000$$

$$EI f_{36} = \int_0^6 \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 8 dx + \frac{1}{2} \int_6^{14} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 dx + \int_0^6 \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 dy = \frac{6(1)}{6} [4+12] + \frac{8(1)6}{2} + \frac{6(1)6}{2} = 58.000$$

$$EI f_{46} = \int_0^6 \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 dx + \frac{1}{2} \int_6^{14} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 dx = \frac{6(1)8}{3} + \frac{8(1)8}{4} = 32.000$$

$$EI f_{55} = \int_0^6 \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 dx + \frac{1}{2} \int_6^{14} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 dx + \int_0^6 \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 dy = \frac{6(1)1}{3} + \frac{8(1)1}{2} + 6(1)1 = 12.000$$

Reemplazando valores se tiene:

$$\begin{bmatrix} 330.666 & 36.000 & 205.333 & 160.000 & 20.000 \\ 36.000 & 6.000 & 16.000 & 16.000 & 2.000 \\ 205.333 & 16.000 & 389.333 & 224.000 & 58.000 \\ 160.000 & 16.000 & 224.000 & 213.333 & 32.000 \\ 20.000 & 2.000 & 58.000 & 32.000 & 12.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900.000 \\ 107.000 \\ 1.198.000 \\ 1.368.000 \\ 192.333 \end{bmatrix}$$

Y la solución del sistema es:

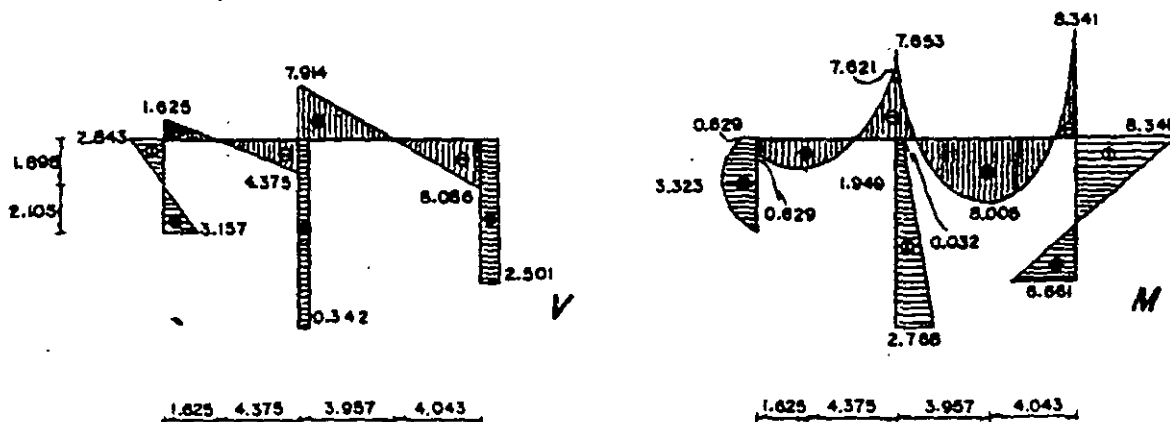
$$X_1 = -0.342 \text{ ton} ; \quad X_2 = 2.768 \text{ ton} \cdot \text{m} ; \quad X_3 = -2.501 \text{ ton}$$

$$X_4 = 8.086 \text{ ton} ; \quad X_5 = 6.661 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

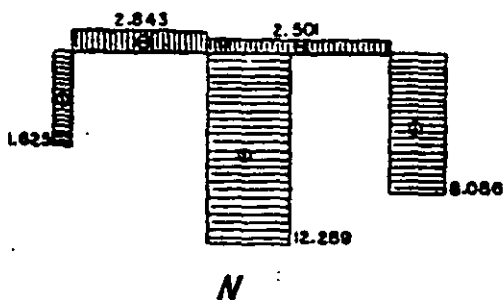
Además, por equilibrio:

$$A_x = 3.157 \text{ ton} ; \quad A_y = 1.625 \text{ ton} ; \quad G = 12.289 \text{ ton}$$

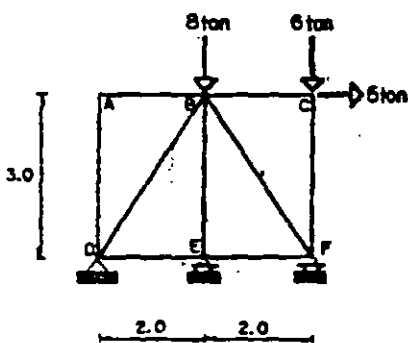
Diagramas finales:



METODO DE LAS FLEXIBILIDADES



5.13. Calcular las fuerzas axiales en la armadura isostática interiormente e hiperestática exteriormente que se indica.



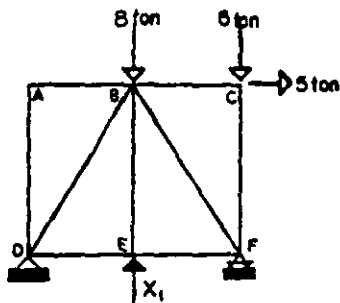
Isostaticidad interna

$$b=9 ; j=6 ; b=2j - 3 = 12-3 = 9$$

Grado de indeterminación

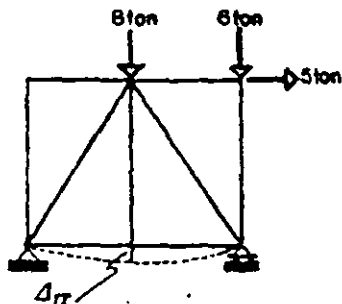
$$n = 4 - 3 = 1$$

Suprimiendo el apoyo E, resulta:

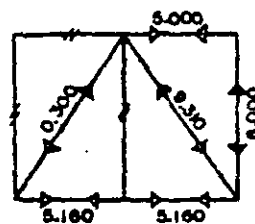


Estructura primaria

Solución particular



Fuerzas en las barras (ton)

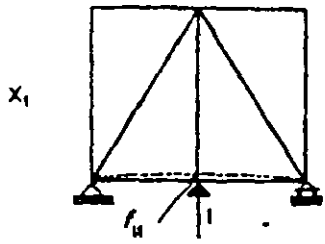


$N_I$

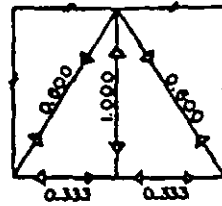
METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

Solución complementaria

Fuerzas en las barras (ton)



$X_1$



Condición frontera:  $\Delta_{ET} = 0$

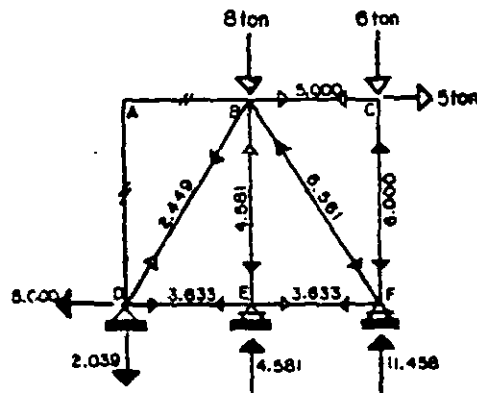
Ecuación de compatibilidad:  $\Delta_{II} + f_{II} X_1 = 0$

Cálculo de desplazamientos.

B A R A	L	$N_I$	$n_1$	DESPLAZAMIENTOS		NFINALES = $N_I + n_1 X_1$	
				$\Delta_{II}$	$f_{II}$	$n_1 X_1$	NFINALES
				$\frac{N_I n_1}{A E} L$	$\frac{n_1 n_1}{A E} L$	ton	ton
A-B	2.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
B-C	2.000	5.000	0.000	0.000	0.000	0.000	5.000
D-E	2.000	5.160	-0.333	3.440	0.222	-1.527	3.633
E-F	2.000	5.160	-0.333	3.440	0.222	-1.527	3.633
A-D	3.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
B-E	3.000	0.000	-1.000	0.000	3.000	-4.561	-4.561
C-F	3.000	-6.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-6.000
B-D	$\sqrt{13}$	-0.300	0.600	0.649	1.298	2.749	2.449
B-F	$\sqrt{13}$	-9.310	0.600	20.141	1.298	2.749	-6.561
				$\Sigma$ 27.670	6.040		

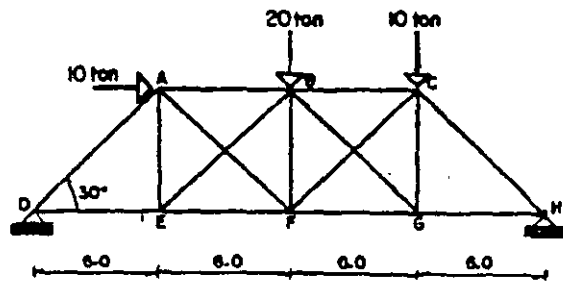
Sustituyendo valores:  $-27.670 + 6.040 X_1 = 0$  ;  $X_1 = 4.581 \text{ ton}$

Reacciones y fuerzas finales en las barras:



## METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

5.14. Determinar las reacciones y fuerzas internas de la armadura hiperestática interiormente e isostática exteriormente mostrada.



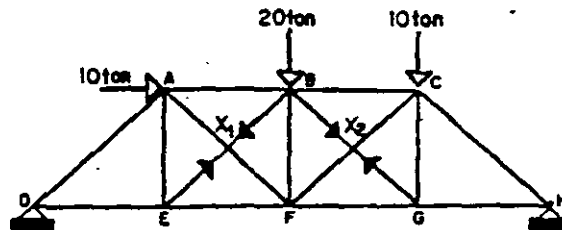
Barras redundantes:

$$n = b - 2j + 3$$

$$n = 15 - 2(8) + 3 = 2$$

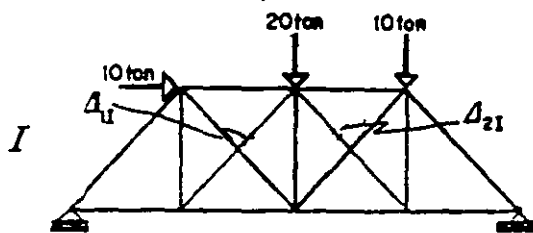
Área de barras exteriores = 2 (área de barras interiores)

Se escogerán las barras BE y BG como redundantes, por tanto:

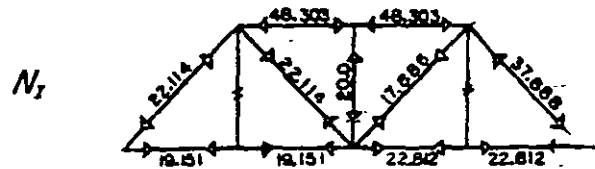


Estructura  
primaria

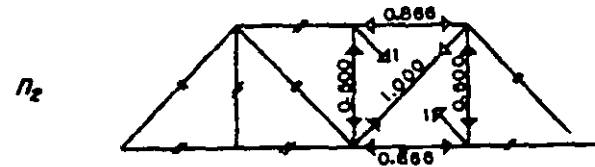
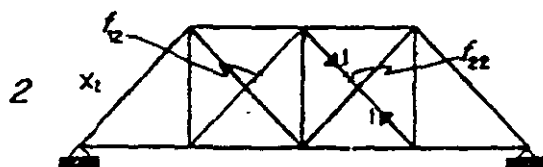
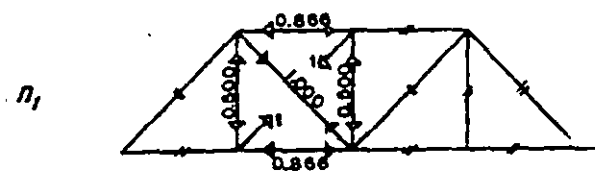
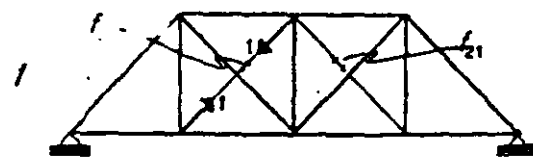
Solución particular



Fuerzas en las barras (ton)



Solución complementaria



METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

Condiciones frontera:  $\Delta_{01} = 0 ; \Delta_{02} = 0$

Ecuaciones de compatibilidad:  $\Delta_{11} \Delta_{11} + f_{11} X_1 + f_{12} X_2 = 0$

Cálculo de desplazamientos.

$\Delta_{21} \Delta_{21} + f_{21} X_1 + f_{22} X_2 = 0$

A B C D E F G H	L	A	N <sub>i</sub>	n <sub>1</sub>	n <sub>2</sub>	D E S P L A Z A M I E N T O S						N o r m a l e s = N <sub>1</sub> + n <sub>1</sub> X <sub>1</sub> + n <sub>2</sub> X <sub>2</sub>			
						$\Delta_{11}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$\Delta_{21}$	$f_{21}$	$f_{22}$	$\Delta_1 X_1$	$\Delta_2 X_2$	N o r m a l e s	
						$N_i n_1 / AE$	$n_1 n_1 L / AE$	$n_1 n_2 L / AE$	$N_i n_2 / AE$	$n_2 n_1 L / AE$	$n_2 n_2 L / AE$	1 0 0	0 0 1	1 0 0	
A-B	4.000	2	-48.303	-0.866	0.000	125.491	2.250	0.000	0.000	0.000	0.000	10.964	0.000	-37.337	
B-C	4.000	2	-48.303	0.000	-0.866	0.000	0.000	0.000	125.491	0.000	2.250	0.000	9.716	-29.081	
D-E	4.000	2	19.151	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	19.151	
E-F	4.000	2	19.151	-0.866	0.000	-49.754	2.250	0.000	0.000	0.000	0.000	10.966	0.000	30.117	
F-G	4.000	2	22.812	0.000	-0.866	0.000	0.000	0.000	-59.623	0.000	2.250	0.000	9.718	22.020	
B-H	4.000	2	22.812	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	22.812	
A-D	6.928	2	-22.114	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-22.114	
A-E	2.444	1	0.000	-0.500	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	4.221	0.000	4.221	
A-F	6.928	1	22.114	1.000	0.000	122.204	6.928	0.000	0.000	0.000	0.000	-12.862	0.000	9.432	
B-E	6.928	1	-----	1.000	-----	0.000	6.928	0.000	0.000	0.000	0.000	-12.862	0.000	-12.862	
B-F	2.464	1	-10.000	-0.500	-0.500	24.64	0.866	0.866	-24.640	0.866	0.866	6.221	2.222	-8.222	
B-G	6.928	1	-----	-----	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	6.928	0.000	-10.644	-10.644	
C-F	6.928	1	17.886	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	122.914	0.000	6.928	0.000	-10.644	7.341	
C-G	2.464	1	0.000	0.000	-0.500	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.866	0.000	2.222	2.222	
C-H	6.928	1	-17.886	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-17.886	
						$\Sigma$	267.583	20.089	0.000	224.780	0.866	20.089			

Reemplazando valores se tiene:

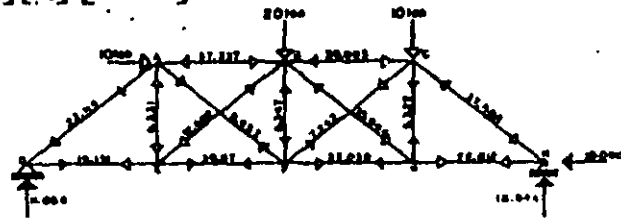
$$\begin{bmatrix} 20.089 & 0.866 \\ 0.866 & 20.089 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -267.583 \\ -224.780 \end{bmatrix}$$

La solución es:

$$X_1 = -12.662 \text{ ton}$$

$$X_2 = -10.644 \text{ ton}$$

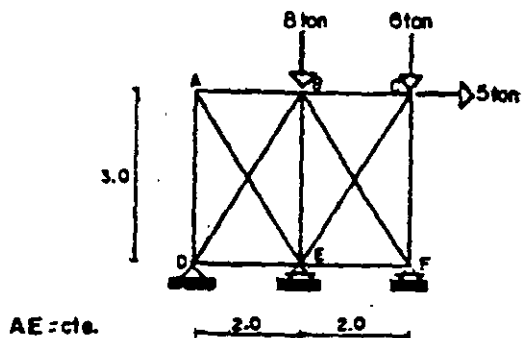
Reacciones y fuerzas finales



# METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

5.15. Resolver la armadura hiperestática interior y exteriormente que se muestra

seguida:



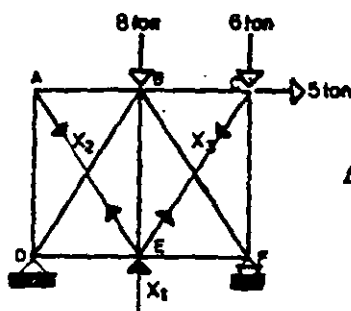
Barras redundantes:

$$BR = b - 2j + 3$$

$$BR = 11 - 2(6) + 3 = 2$$

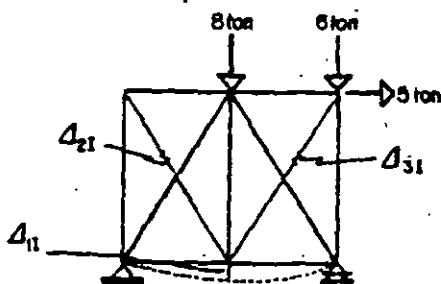
Se escogerán las barras AE y CE como redundantes, al igual que el apoyo E,

teniendo:



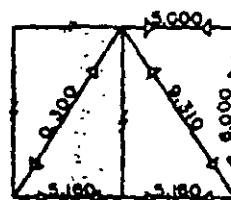
*Estructura primaria*

*Solución particular*

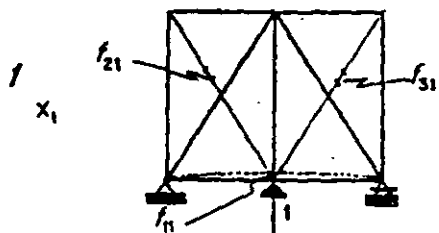


*Fuerzas en las barras (ton)*

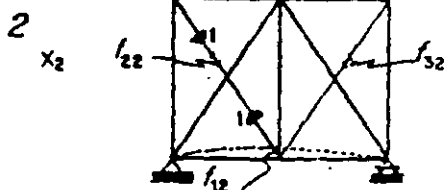
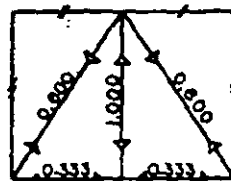
$N_1$



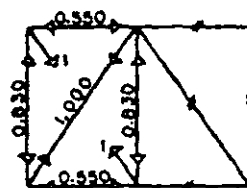
*Solución complementaria*



$n_1$



$n_2$



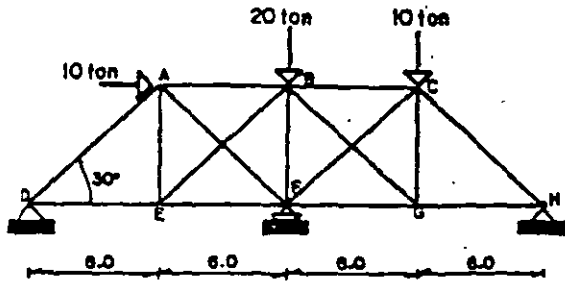




# METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

5.16. Calcular las fuerzas internas de la armadura hiperestática interior

y exteriormente indicada a continuación.



Barras redundantes:

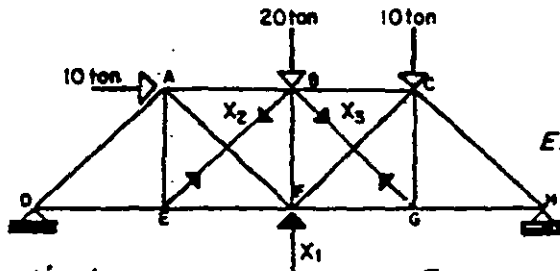
$$BR = b - 2j + 3$$

$$BR = 15 - 2(8) + 3 = 2$$

Area de Barras exteriores = 2 (área de barras interiores)

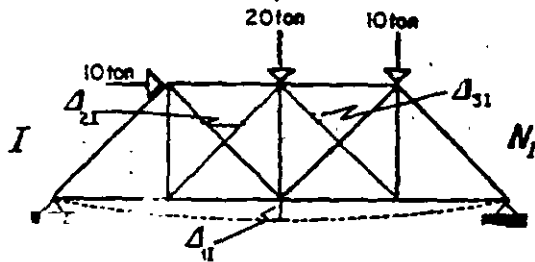
Se escogerán las barras BE y BG como redundantes, así como el apoyo F, ob-

teniendo:

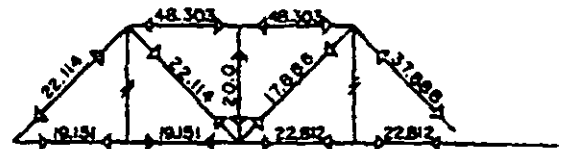


Estructura primaria

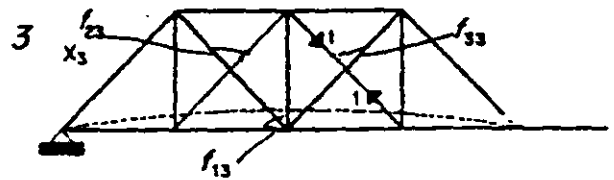
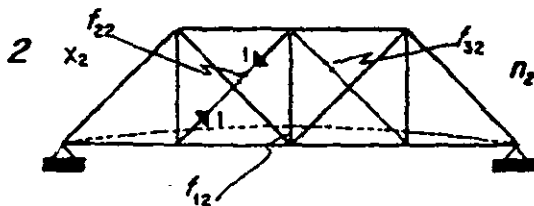
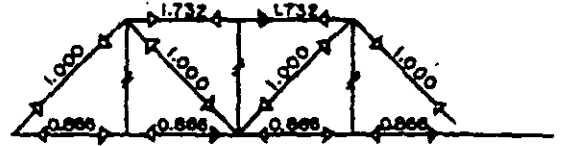
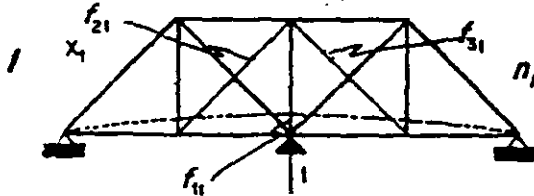
Solución particular



Fuerzas en las barras (ton)



Solución complementaria





# Método de las Rigideces

## 6.1. INTRODUCCION

En la aplicación del método de las Rigideces, los desplazamientos lineal y angular de los nudos o juntas (puntos de contacto de los elementos con los apoyos, puntos de intersección de dos o más elementos, o bien los extremos libres de elementos voladizos) se consideran como incógnitas. La estructura se reduce primero a una serie de sistemas cuyas juntas se consideran impedidas de todo movimiento. Las juntas van liberándose luego en el grado suficiente para satisfacer las condiciones de equilibrio de fuerzas en cada junta. A los desplazamientos de juntas se les llama indeterminaciones cinemáticas o grados de libertad. Este procedimiento se aplica a estructuras linealmente elásticas que sufren pequeñas deformaciones.

## 6.2. CALCULO DE MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO Y RIGIDECES

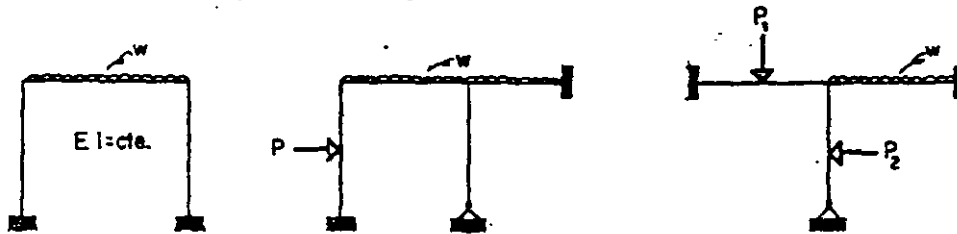
La supresión de los grados de libertad de la estructura nos lleva a la necesidad de estimar los momentos generados en vigas empotradas, para lo cual se recurrirá a la tabla del apéndice E, donde se muestran los casos más comunes que pueden presentarse.

Además, debido a que los nudos se fijan lineal y angularmente para después liberarlos, es conveniente conocer las acciones causadas para producir desplazamientos unitarios en dichas juntas, estas acciones reciben el nombre de rigideces (para giros se les llama rigidez angular y para traslaciones rigidez lineal). En el apéndice

ce  $F$  se encuentran mencionadas las rigideces para diferentes condiciones en los apoyos de las barras.

### 6.3. ESTRUCTURAS SIN DESPLAZAMIENTOS LINEALES

Una estructura hiperestática se considera sin desplazamiento lineal cuando existe simetría tanto en su geometría como en el sistema de cargas aplicado exteriormente, o bien, cuando los apoyos son colocados de tal manera que se restrinja la posibilidad de que se produzca dicha traslación. En la fig. 6.1. se muestran algunas estructuras impedidas al desplazamiento lineal.



Estructuras sin desplazamientos lineales.

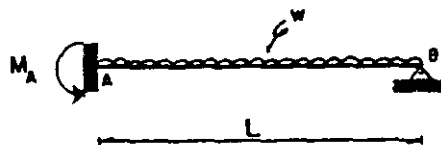
Fig. 6.1.

Para la aplicación del método a este tipo de estructuras sólo es menester fijar angularmente los nudos, y después someterlos a rotaciones unitarias, una por cada junta. En la Fig. 6.2. se presenta la solución de una viga utilizando este procedimiento.

Suponiendo que se desprecian las deformaciones axiales, la viga tiene sólo un grado de libertad que es el giro en el apoyo B (Fig. 6.2a), si se restringe todo movimiento en este apoyo se tiene una viga doblemente empotrada, para la cual se determinan los momentos en los extremos causados por el sistema real de cargas (Fig. 6.2b). Enseguida giramos un ángulo unitario el extremo B siendo requerido, para ésto, un momento  $K_{BA}$  (Fig. 6.2c). Superponiendo los dos momentos y sabiendo que, en realidad el momento de empotramiento en el apoyo B es nulo, se obtiene la ecuación de equilibrio de la cual se encuentra una solución para  $\phi_B$ .

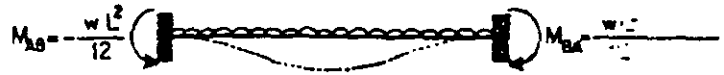
Haciendo uso de la superposición nuevamente se obtiene el momento real en el extremo A de la viga original.

a) Viga real.



METODO DE LAS RIGIDECES

b) Solución particular.



c) Solución complementaria.

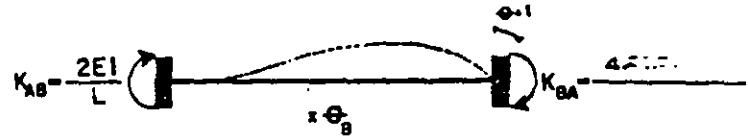


Fig. 6.2.

Ecuación de equilibrio:

$$M_B = 0 = M_{BA} + K_{BA} \theta_B$$

$$M_B = -\frac{wL^2}{12} + \frac{4EI}{L} \theta_B = 0$$

$$\theta_B = -\frac{wL^2}{12} \left( \frac{L}{4EI} \right) = -\frac{wL^3}{48EI}$$

(sentido contrario al supuesto)

Momento real en A.

Superponiendo tenemos:

$$M_A = M_{A0} + K_{AB} \theta_B$$

$$M_A = -\frac{wL^2}{12} + \frac{2EI}{L} \left( -\frac{wL^3}{48EI} \right)$$

$$M_A = -\frac{wL^2}{8}$$

6.4. ESTRUCTURAS CON DESPLAZAMIENTOS LINEALES

Para ilustrar las consideraciones necesarias en la solución de este tipo de problemas, se hace referencia a la Fig. 6.3.

La estructura tiene cuatro grados de libertad o indeterminaciones cinemáticas, que son los giros de los nudos A, B y C así como el desplazamiento lineal en el cabezal.

Lo primero es fijar lineal y angularmente los nudos antes mencionados (estructura 1), para después permitir su giro uno a la vez (estructuras 1, 2 y 3), para finalmente desplazarla linealmente como se muestra en la estructura 4.

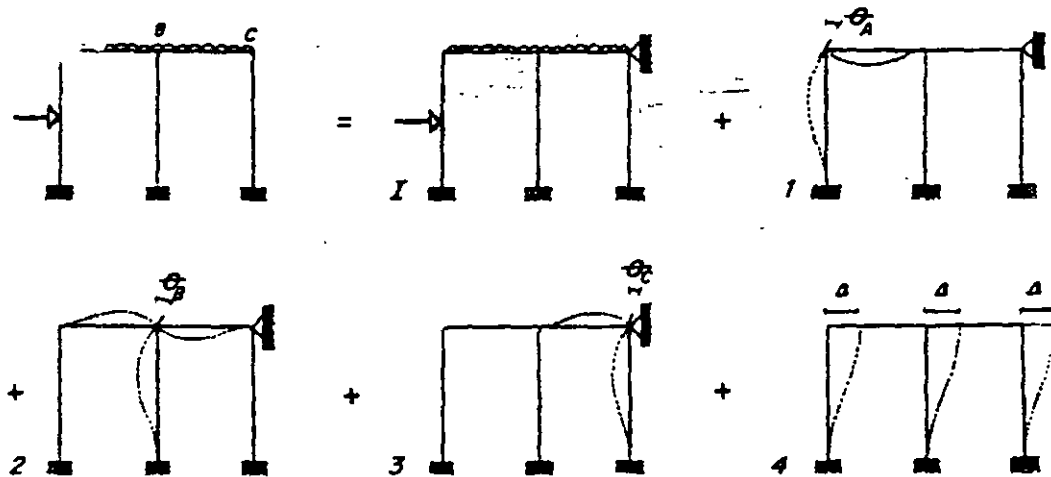


Fig. 6.3. Solución de una estructura por el método de Rigideces.

## METODO DE LAS RIGIDECES

Posteriormente es necesario estimar lo siguiente:

1) En la estructura 1 se calculan los momentos de empotramiento causados por el sistema externo de cargas, así como también las reacciones en el cabezal, este paso recibe el nombre de solución particular.

2) Para la estructura 1 se calculan las rigideces angulares debidas al giro  $\theta_A$ , así como las reacciones en el cabezal.

3) Para la estructura 2 se calculan las rigideces angulares debidas al giro  $\theta_B$ , así como las reacciones en el cabezal.

4) Para la estructura 3 se calculan las rigideces angulares debidas al giro  $\theta_C$ , así como las reacciones en el cabezal.

5) Se calculan las rigideces lineales al igual que las reacciones en el cabezal debidas al desplazamiento  $\Delta$ , estructura 4.

Los pasos 2 al 5 reciben el nombre de solución complementaria.

De acuerdo a que la estructura tiene cuatro grados de libertad, es necesario establecer cuatro ecuaciones independientes de equilibrio para la solución del problema. La ecuación de equilibrio de momentos en los nudos A, B y C proporciona tres ecuaciones (una por cada nudo) y la cuarta se obtiene considerando el equilibrio horizontal de fuerzas en el cabezal.

La presentación de las ecuaciones en forma matricial es la siguiente:

$$[K][\Delta] = [F]$$

en donde  $[\Delta]$  nos indica desplazamientos angulares y lineales,  $[F]$  momentos de equilibrio y fuerzas cortantes en los pisos y  $[K]$  es la matriz de rigidez, la cual es simétrica y la diagonal principal es positiva por la aplicación del teorema de trabajos recíprocos de Maxwell. Sin embargo, si no se cumple esto, no indica un error necesariamente, pues depende de la convención de signos utilizada y de la forma en como se aislen los elementos al hacer el equilibrio de fuerzas.

Siguiendo una secuela de cálculo para la aplicación del método de los desplazamientos (recibe este nombre porque las incógnitas son los desplazamientos de las juntas) se tiene la secuela posterior:

1) Se establece el número de grados de libertad  $n$  de la estructura, tanto lineales como angulares (en el caso de giros es recomendable calcular éstos en los nudos en donde concurren dos o más barras).

## METODO DE LAS RIGIDECES

- 2) Fijar angularmente, y linealmente cuando sea necesario, los nudos para después permitir su giro uno a la vez, y posteriormente el desplazamiento lineal de el o los cabezales. Obteniendo los momentos de empotramiento producidos por el sistema externo de cargas y las reacciones en los cabezales. Por otra parte, calcular las rigideces angulares y lineales debidas a desplazamientos unitarios, según el caso, de igual manera las reacciones en los cabezales.
- 3) Establecer las  $n$  ecuaciones independientes de equilibrio, es decir, las ecuaciones de equilibrio de momentos en los nudos y considerando el equilibrio de fuerzas en los cabezales.
- 4) Se procede a la solución del sistema de ecuaciones obteniendo los valores de los  $n$  desplazamientos.
- 5) Utilizando el principio de superposición de causas y efectos obtener los momentos finales en los extremos de todas las barras de la estructura y, posteriormente los elementos mecánicos restantes (fuerzas cortante y normal).
- 6) Trazar los diagramas de los elementos mecánicos.



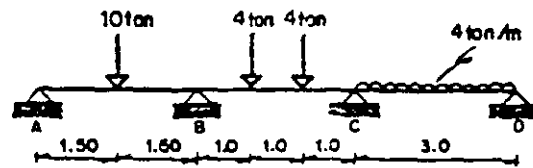
**6.5. Ejemplos**

**de**

**Aplicación**

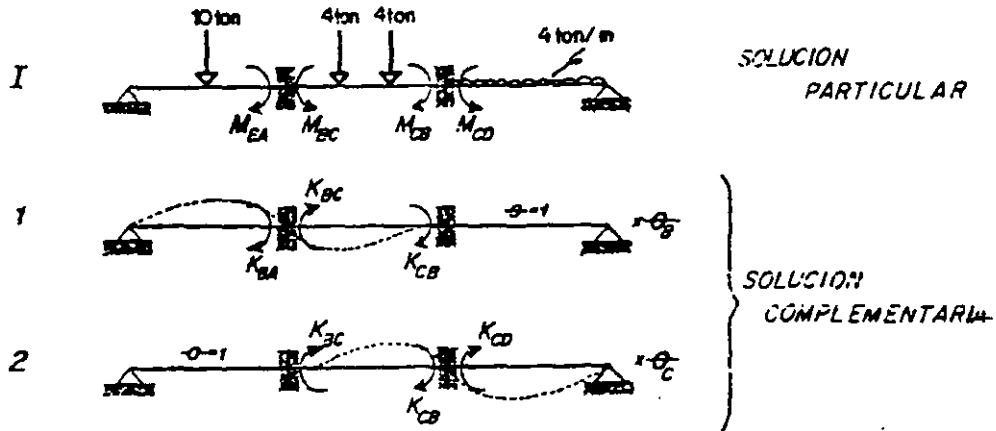
## METODO DE LAS RIGIDECES

6.1. Resolver la viga continua que se muestra.



$EI = \text{cte.}$

La viga tiene 4 grados de libertad, sin embargo, si solo se fijan los nudos en donde concurren dos barras o más, utilizándose las expresiones para momentos de empotramiento y rigideces respectivas, resulta suficiente para la solución del problema (este criterio se conserva en los ejemplos posteriores).



-VIGA 1. Momentos de empotramiento.-

$$M_{BA} = \frac{3(10)13}{16} = 5.625$$

$$M_{BC} = -\frac{4(1)(3-1)}{3} = -2.667$$

$$M_{CB} = 2.667$$

$$M_{CD} = -\frac{4(3)^2}{8} = -4.500$$

-Cálculo de Rigideces.

-VIGA 1-

$$K_{BC} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{CB} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI$$

$$K_{BA} = \frac{3EI}{3} = EI$$

-VIGA 2-

$$K_{CD} = \frac{3EI}{3} = EI$$

$$K_{BC} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI$$

$$K_{CB} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

Las ecuaciones de equilibrio de los nudos B y C son

$$M_B = M_B^I + K_B^I \theta_B + K_B^2 \theta_C = 0$$

$$M_C = M_C^I + K_C^1 \theta_B + K_C^2 \theta_C = 0$$

## METODO DE LAS RIGIDECES

Obteniendo valores:

• NUDO B •  $M_B^I = M_{BA}^I + M_{BC}^I = 2.958$

$K_B^I = K_{BA}^I + K_{BC}^I = 2.333EI$

$K_B^2 = K_{BC}^2 = 0.667EI$

• NUDO C •  $M_C^I = M_{CB}^I + M_{CD}^I = -1.833$

$K_C^I = K_{CB}^I = 0.667EI$

$K_C^2 = K_{CB}^2 + K_{CD}^2 = 2.333EI$

Reemplazando en las ecuaciones de equilibrio, resulta:

$$\begin{bmatrix} 2.333 & 0.667 \\ 0.667 & 2.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.958 \\ 1.833 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es

$\theta_B = -\frac{1.825}{EI}$

$\theta_C = \frac{1.250}{EI}$

Y, aplicando el principio de superposición los momentos finales son:

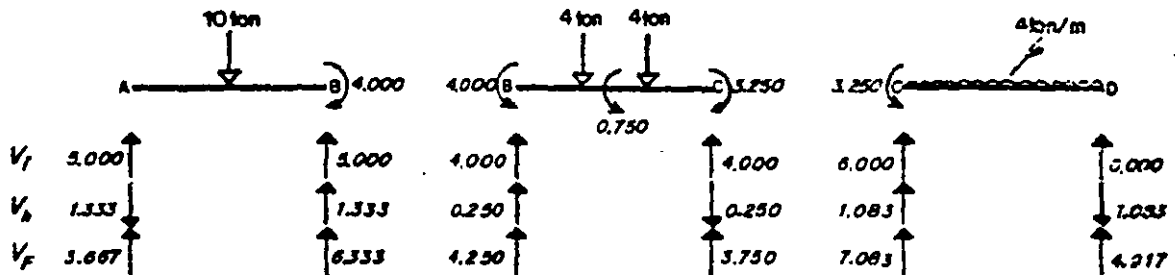
$M_{BA} = M_{BA}^I + K_{BA}^I \theta_B = 4.000$

$M_{BC} = M_{BC}^I + K_{BC}^I \theta_B + K_{BC}^2 \theta_C = -4.000$

$M_{CB} = M_{CB}^I + K_{CB}^I \theta_B + K_{CB}^2 \theta_C = 3.250$

$M_{CD} = M_{CD}^I + K_{CD}^2 \theta_C = -3.250$

Determinación de la fuerza cortante.



Procedimiento:

Como la viga en su conjunto se encuentra en equilibrio, cada una de las barras debe estarlo en forma aislada. Basándose en este concepto se hizo el diagrama de cuerpo libre de cada elemento, calculándose las fuerzas reaccionantes en los extremos de los mismos. A continuación se detallan las operaciones ejecutadas.

• Barra AB.

- Cortante isostático.- Son las reacciones producidas por las cargas actuantes externas en el elemento. Así:

## METODO DE LAS RIGIDECES

En el extremo A.  $V_i = 10/2 = 5.000$  (por simetría de cargas)

En el extremo B.  $V_i = 10/2 = 5.000$

(la dirección vertical hacia arriba es porque así lo indica el sentido estructural).

- Cortante hiperestático.- Este es causado por la diferencia de momentos existente al sumar algebraicamente los mismos en los extremos de las barras. - Su valor se obtiene como se indica enseguida.

Diferencia de momentos = 4.000 (giro en el sentido de las manecillas de un reloj.)

Para lograr el equilibrio es necesario un par en sentido contrario al anotado por el momento anterior. Esto se obtiene dividiendo dicho valor entre la longitud del elemento, de esta manera se tiene:

En el extremo A.  $V_h = -4/3 = -1.333$

En el extremo B.  $V_h = 4/3 = 1.333$

(los signos son consecuencia de lo señalado anteriormente).

- Cortante final.- Es la suma algebraica de los cortantes isostático e hiperestático en los extremos de cada una de las barras.

En el extremo A.  $V_f = 5.000 - 1.333 = 3.667$

En el extremo B.  $V_f = 5.000 + 1.333 = 6.333$

= Barra BC.

- Cortante isostático.

En el extremo B.  $V_i = 4.000$  (por simetría de cargas)

En el extremo C.  $V_i = 4.000$

- Cortante hiperestático.

Diferencias de momentos =  $-4.000 + 3.250 = -0.750$

En el extremo B.  $V_h = 0.750/3 = 0.250$

En el extremo C.  $V_h = -0.750/3 = -0.250$

- Cortante final.

En el extremo B.  $V_f = 4.000 + 0.250 = 4.250$

En el extremo C.  $V_f = 4.000 - 0.250 = 3.750$

= Barra CD.

- Cortante isostático.

En el extremo C.  $V_i = 4(3)/2 = 6.000$  (por simetría de cargas)

En el extremo D.  $V_i = 4(3)/2 = 6.000$

MÉTODO DE LOS MOMENTOS

- Cortante hiperestático.

Diferencias de momentos = -3.250

En el extremo C.  $V_b = 3.250/3 = 1.083$

En el extremo D.  $V_b = -3.250/3 = -1.083$

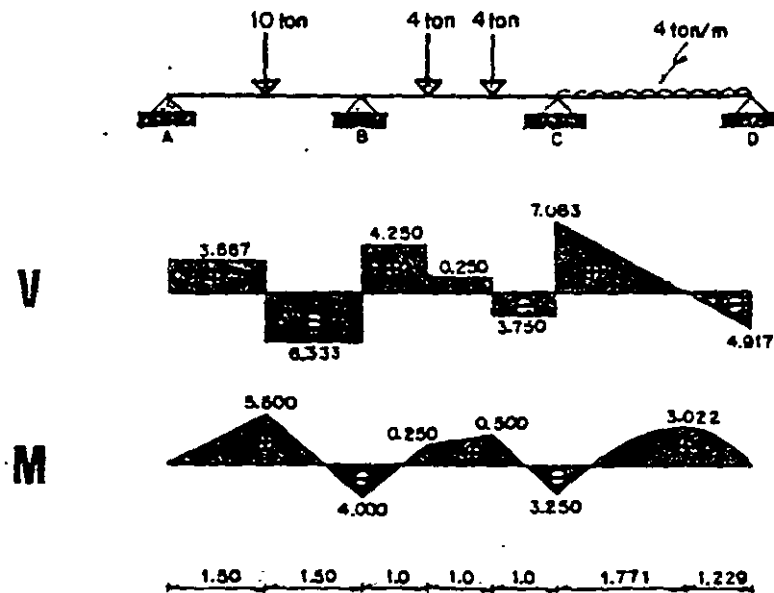
- Cortante final.

En el extremo C.  $V_f = 6.000 + 1.083 = 7.083$

En el extremo D.  $V_f = 6.000 - 1.083 = 4.917$

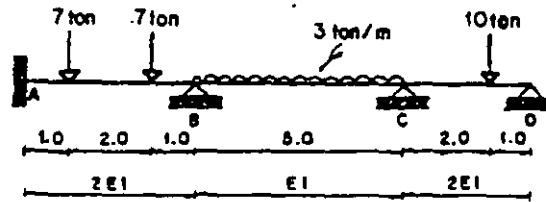
La obtención de la fuerza cortante en las vigas de todos los ejemplos siguientes se realizó como se ilustró anteriormente. En el caso de los marcos, las fuerzas cortante y normal se calcularon utilizando el mismo procedimiento, aunque en estas estructuras se cuenta con columnas, la diferencia estriba en que son elementos verticales, pero los cálculos se hacen de igual forma.

DIAGRAMAS

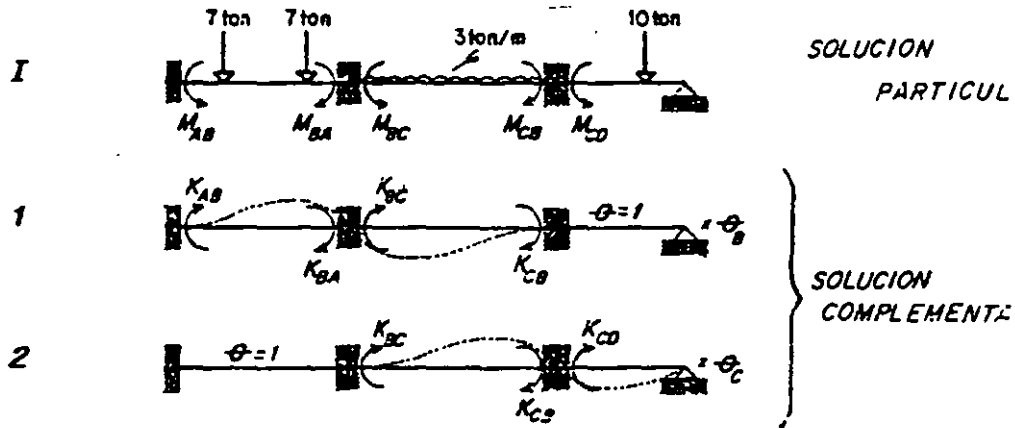


METODO DE LAS RIGIDECES

6.2. Calcular los momentos en los apoyos de la viga siguiente:



Se empotran los nudos B y C.



-VIGA 1.- Cálculo de los momentos de empotramiento.-

$$M_{AB} = -\frac{7(1)(4-1)}{4} = -5.250 \quad M_{BA} = 5.250 \quad M_{BC} = -\frac{3(5)^2}{12} = -6.250$$

$$M_{CB} = 6.250 \quad M_{CD} = -\frac{10(2)(1+3)}{2(3)^2} = -4.444$$

-Cálculo de rigideces.

-VIGA 1-

$$K_{AB} = \frac{2(2EI)}{4} = EI \quad K_{BA} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI \quad K_{BC} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI \quad K_{CB} = \frac{2EI}{5} = 0.40EI$$

-VIGA 2-

$$K_{BC} = \frac{2EI}{5} = 0.40EI \quad K_{CB} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI \quad K_{CD} = \frac{3(2EI)}{3} = 2EI$$

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$M_B = M_B^I + K_B^I \theta_B + K_B^I \theta_C = 0$$

$$M_C = M_C^I + K_C^I \theta_B + K_C^I \theta_C = 0$$

## METODO DE LAS RIGIDEZES

Obteniendo valores:

•NUDO B•

$$M_B^I = M_{BA}^I + M_{BC}^I = -1.000$$

$$K_B^I = K_{BA}^I + K_{BC}^I = 2.80EI$$

$$K_B^2 = K_{BC}^2 = 0.40EI$$

•NUDO C•

$$M_C^I = M_{CB}^I + M_{CD}^I = 1.800$$

$$K_C^I = K_{CB}^I = 0.40EI$$

$$K_C^2 = K_{CB}^2 + K_{CD}^2 = 2.80EI$$

Sustituyendo queda:

$$\begin{bmatrix} 2.800 & 0.400 \\ 0.400 & 2.800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -1.800 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema es:

$$\theta_B = \frac{0.458}{EI}$$

$$\theta_C = -\frac{0.708}{EI}$$

Por último, los momentos finales en las barras son:

$$M_{AB} = M_{AB}^I + K_{AB}^I \theta_B = -4.792$$

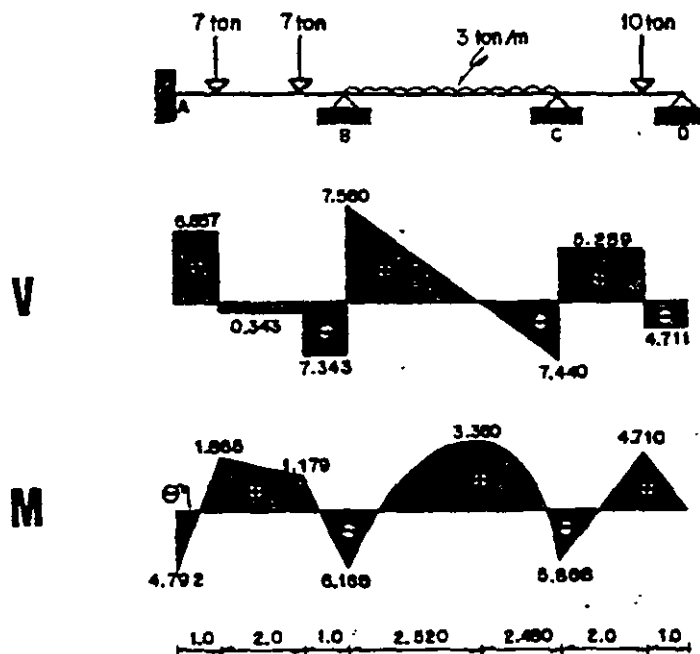
$$M_{BA} = M_{BA}^I + K_{BA}^I \theta_B = 6.166$$

$$M_{BC} = M_{BC}^I + K_{BC}^I \theta_B + K_{BC}^2 \theta_C = -0.168$$

$$M_{CB} = M_{CB}^I + K_{CB}^I \theta_B + K_{CB}^2 \theta_C = 5.868$$

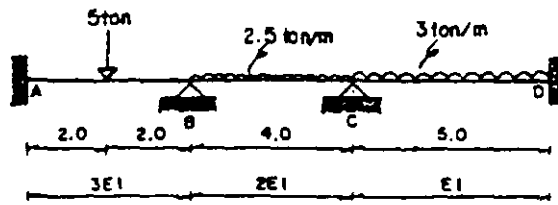
$$M_{CD} = M_{CD}^I + K_{CD}^2 \theta_C = -5.858$$

### •DIAGRAMAS•

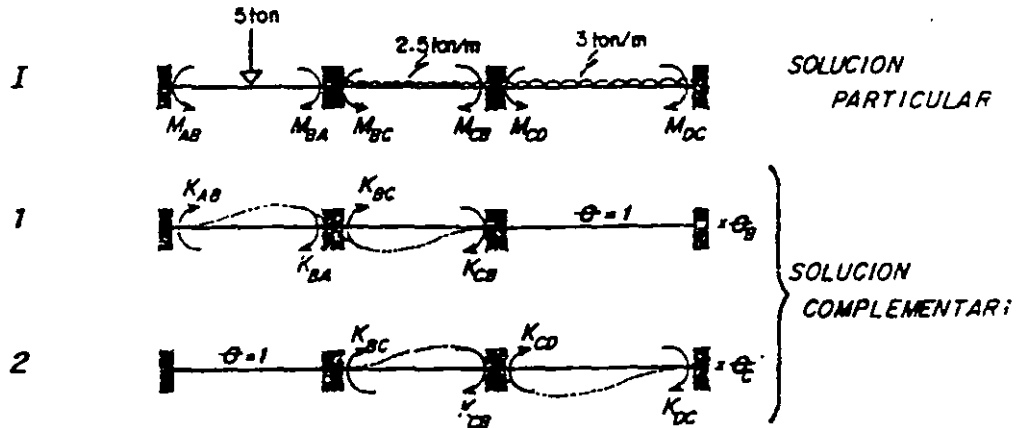


# METODO DE LAS RIGIDECES

6.3. Resolver la estructura que se indica enseguida.



Se fijarán los nudos B y C.



-VIGA 1- Momentos de empotramiento.-

$$M_{AB} = -\frac{5(4)}{8} = -2.500$$

$$M_{BA} = 2.500$$

$$M_{BC} = -\frac{2.5(4)^2}{12} = -3.333$$

$$M_{CB} = 3.333$$

$$M_{CD} = -\frac{3(5)^2}{12} = -6.250$$

$$M_{DC} = 6.250$$

-Cálculo de rigideces.

-VIGA 1-

$$K_{AB} = \frac{2(3EI)}{4} = 1.50EI$$

$$K_{BA} = \frac{4(3EI)}{4} = 3EI$$

$$K_{BC} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_{CB} = \frac{2(2EI)}{4} = EI$$

-VIGA 2-

$$K_{BC} = \frac{2(2EI)}{4} = EI$$

$$K_{CB} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_{CD} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI$$

$$K_{DC} = \frac{2EI}{5} = 0.40EI$$

Ecuaciones de equilibrio.

$$M_B = M_B^I + K_B^1 \theta_B + K_B^2 \theta_C = 0$$

$$M_C = M_C^I + K_C^1 \theta_B + K_C^2 \theta_C = 0$$



## METODO DE LAS RIGIDECES

Obteniendo valores:

• NUDO B •  $M_B^I = M_{BA}^I + M_{BC}^I = -0.833$

$$K_B^I = K_{BA}^I + K_{BC}^I = 5EI \qquad K_B^2 = K_{BC}^2 = EI$$

• NUDO C •  $M_C^I = M_{CB}^I + M_{CD}^I = -2.917$

$$K_C^I = K_{CB}^I = EI \qquad K_C^2 = K_{CB}^2 + K_{CD}^2 = 2.80EI$$

Sustituyendo valores

$$\begin{bmatrix} 5.000 & 1.000 \\ 1.000 & 2.800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.833 \\ 2.917 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se tiene:  $\theta_B = -\frac{0.045}{EI}$   $\theta_C = \frac{1.058}{EI}$

Los momentos últimos en las barras serán:

$$M_{AB} = M_{AB}^I + K_{AB}^I \theta_B = -2.567$$

$$M_{BA} = M_{BA}^I + K_{BA}^I \theta_B = 2.365$$

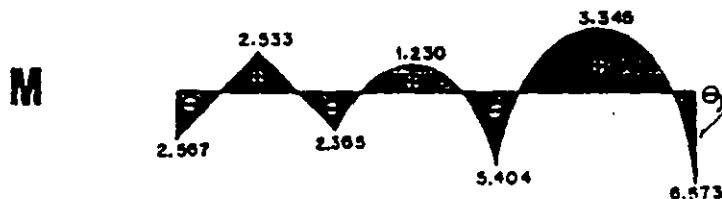
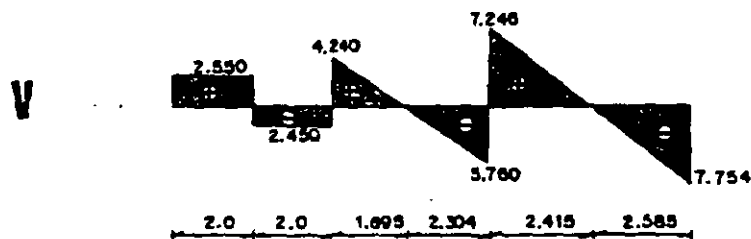
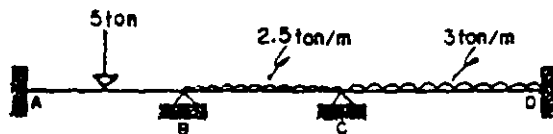
$$M_{BC} = M_{BC}^I + K_{BC}^I \theta_B + K_{BC}^2 \theta_C = -2.365$$

$$M_{CB} = M_{CB}^I + K_{CB}^I \theta_B + K_{CB}^2 \theta_C = 5.404$$

$$M_{CD} = M_{CD}^I + K_{CD}^2 \theta_C = -5.404$$

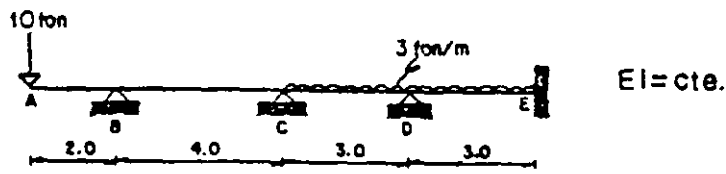
$$M_{DC} = M_{DC}^I + K_{DC}^2 \theta_C = 6.673$$

### DIAGRAMAS

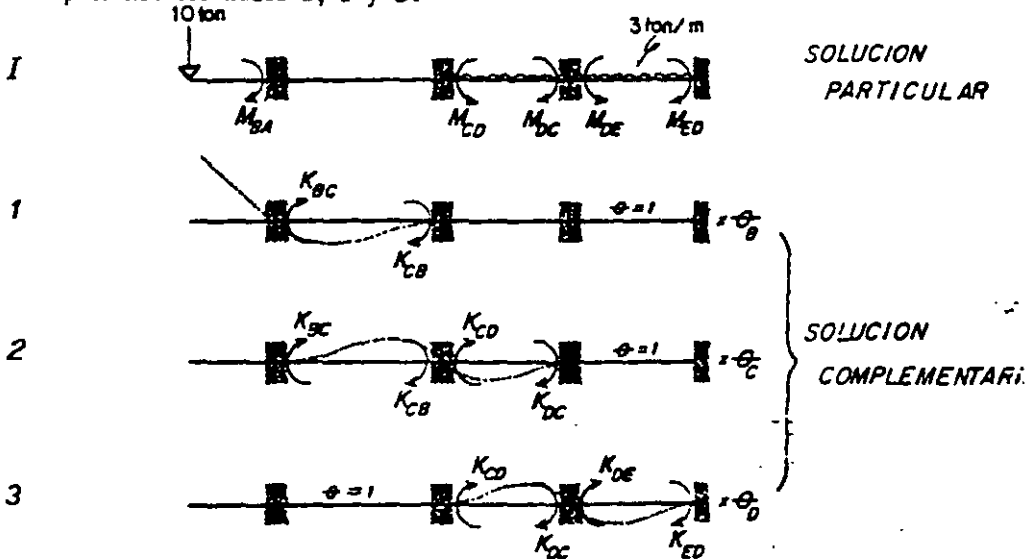


METODO DE LAS RIGIDEZES

6.4. Determinar los momentos en los apoyos de la siguiente viga.



Empotrando los nudos B, C y D.



- VIGA 1.- Momentos de empotramiento.-

$$M_{BA} = 10(2) = 20.000 \quad M_{CD} = M_{DE} = -\frac{3(3)^2}{12} = -2.250 \quad M_{DC} = 2.250 = M_{ED}$$

-Rigideces

-VIGA 1-

$$K_{BC} = \frac{4EI}{4} = EI \quad K_{CB} = \frac{2EI}{4} = 0.50EI$$

-VIGA 2-

$$K_{BC} = \frac{2EI}{4} = 0.500EI \quad K_{CB} = \frac{4EI}{4} = EI \quad K_{CD} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI \quad K_{DC} = \frac{2EI}{3} = 0.666EI$$

-VIGA 3-

$$K_{CD} = \frac{2EI}{3} = 0.666EI \quad K_{DC} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI \quad K_{DE} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI \quad K_{ED} = \frac{2EI}{3} = 0.666EI$$

Ecuaciones de equilibrio.

$$\begin{aligned} M_B &= M_B^1 + K_{BC}^1 \theta_B + K_{CB}^2 \theta_C + K_{BC}^3 \theta_D = 0 \\ M_C &= M_C^1 + K_{CB}^1 \theta_B + K_{CD}^2 \theta_C + K_{DC}^3 \theta_D = 0 \\ M_D &= M_D^1 + K_{DC}^1 \theta_C + K_{DE}^2 \theta_D + K_{ED}^3 \theta_D = 0 \end{aligned}$$

## METODO DE LAS RIGIDECES

Obteniendo valores:

• NUDO B •	$M_B^I = M_{BA}^I = 20.000$	$K_B^I = K_{BC}^I = EI$
	$K_B^2 = K_{BC}^2 = 0.50EI$	$K_B^3 = 0.000$
• NUDO C •	$M_C^I = M_{CD}^I = -2.250$	$K_C^I = K_{CB}^I = 0.50EI$
	$K_C^2 = K_{CB}^2 + K_{CD}^2 = 2.333EI$	$K_C^3 = K_{CD}^3 = 0.666EI$
• NUDO D •	$M_D^I = M_{DC}^I + M_{DE}^I = 0.000$	$K_D^I = 0.000$
	$K_D^2 = K_{DC}^2 = 0.666EI$	$K_D^3 = K_{DC}^3 + K_{DE}^3 = 2.666EI$

Reemplazando valores queda:

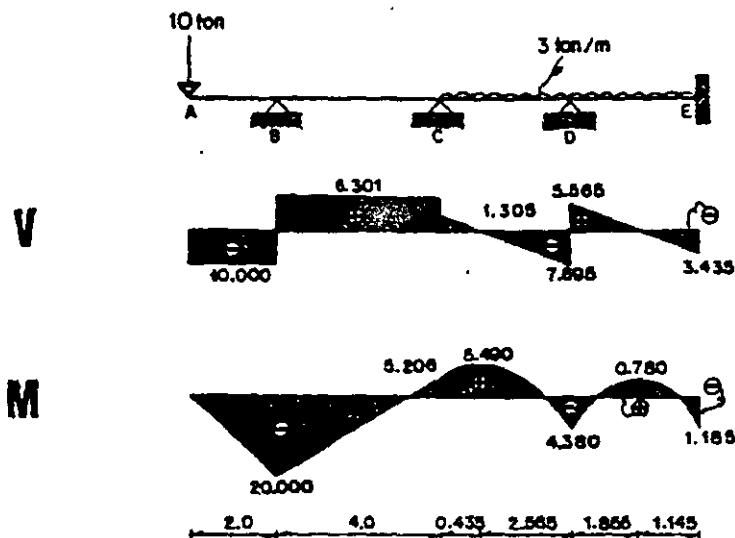
$$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 2.333 & 0.666 \\ 0.000 & 0.666 & 2.666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20.000 \\ 2.250 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

La solución es:  $\theta_B = -\frac{23.195}{EI}$        $\theta_C = \frac{0.391}{EI}$        $\theta_D = -\frac{1.598}{EI}$

Y, los momentos finales son:

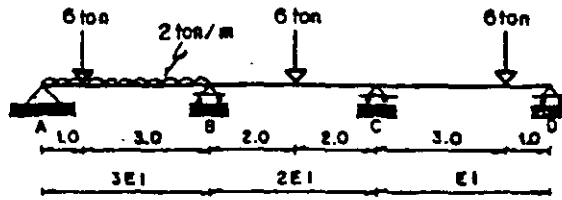
$M_{BA} = M_{BA}^I = 20.000$	$M_{BC} = K_{BC}^I \theta_B + K_{BC}^2 \frac{\theta}{L} = -20.000$
$M_{CB} = K_{CB}^I \theta_B + K_{CB}^2 \theta_C = -5.208$	$M_{CD} = M_{CD}^I + K_{CD}^2 \theta_C + K_{CD}^3 \theta_D = 5.208$
$M_{DC} = M_{DC}^I + K_{DC}^2 \theta_C + K_{DC}^3 \theta_D = 4.380$	$M_{DE} = M_{DE}^I + K_{DE}^3 \theta_D = -4.380$
$M_{ED} = M_{ED}^I + K_{ED}^3 \theta_D = 1.185$	

### DIAGRAMAS

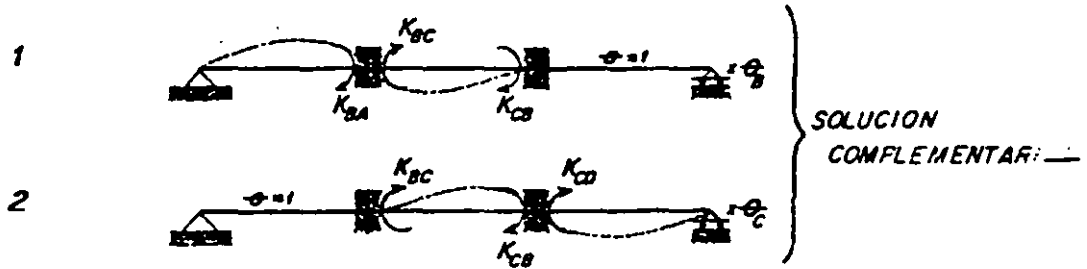
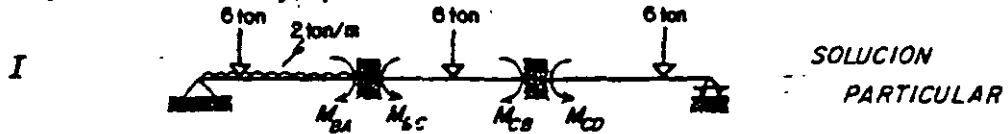


METODO DE LAS RIGIDECES

6.5. Resolver la viga continua que se muestra.



Fijando los nudos B y C, resulta:



-VIGA 1.- Momentos de empotramiento.-

$$M_{BA} = \frac{2(4)^2}{8} + \frac{6(1)(3)(1+4)}{2(4)^2} = 0.813$$

$$M_{BC} = -\frac{6(4)}{8} = -3.000$$

$$M_{CB} = 3.000$$

$$M_{CD} = -\frac{6(3)(1)(1+4)}{2(4)^2} = -2.813$$

-Rigideces

-VIGA 1-

$$K_{BA} = \frac{3(3EI)}{4} = 2.250EI$$

$$K_{BC} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_{CB} = \frac{2(2EI)}{4} = EI$$

-VIGA 2-

$$K_{BC} = \frac{2(2EI)}{4} = EI$$

$$K_{CB} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_{CD} = \frac{3EI}{4} = 0.750EI$$

Ecuaciones de equilibrio:

$$M_B = M_B^i + K_B^i \theta_B + K_B^e \theta_C = 0$$

$$M_C = M_C^i + K_C^i \theta_B + K_C^e \theta_C = 0$$

## METODO DE LAS RIGIDECES

Obteniendo valores:

• NUDO B •

$$M_B^I = M_{BA}^I + M_{BC}^I = 3.813$$

$$K_B^I = K_{BA}^I + K_{BC}^I = 4.250EI$$

$$K_B^2 = K_{BC}^2 = EI$$

• NUDO C •

$$M_C^I = M_{CB}^I + M_{CD}^I = 0.187$$

$$K_C^I = K_{CB}^I = EI$$

$$K_C^2 = K_{CB}^2 + K_{CD}^2 = 2.750EI$$

Sustituyendo valores en las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{bmatrix} 4.250 & 1.000 \\ 1.000 & 2.750 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.813 \\ -0.187 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema es:

$$\theta_B = -\frac{0.964}{EI}$$

$$\theta_C = \frac{0.282}{EI}$$

Cálculo de los momentos finales.

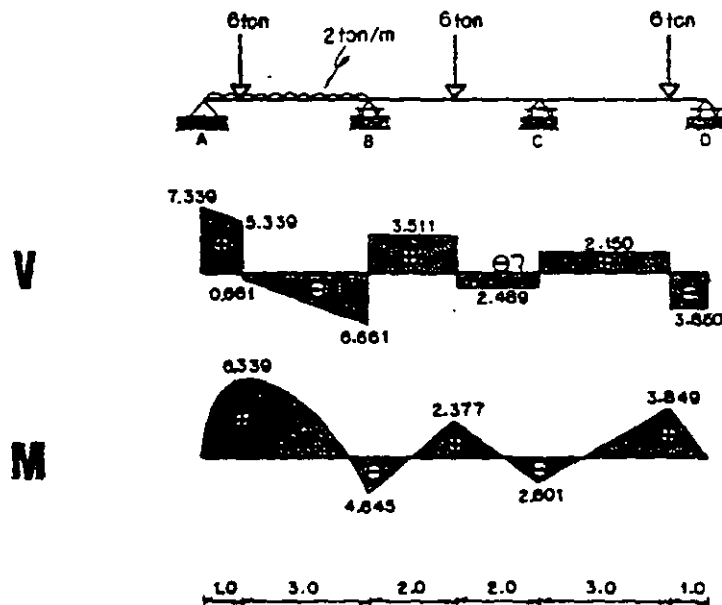
$$M_{BA} = M_{BA}^I + K_{BA}^I \theta_B = 4.645$$

$$M_{BC} = M_{BC}^I + K_{BC}^I \theta_B + K_{BC}^2 \theta_C = -4.645$$

$$M_{CB} = M_{CB}^I + K_{CB}^I \theta_B + K_{CB}^2 \theta_C = 2.601$$

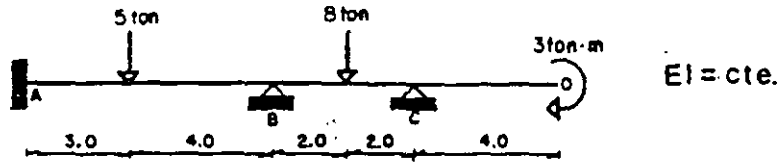
$$M_{CD} = M_{CD}^I + K_{CD}^2 \theta_C = -2.601$$

## DIAGRAMAS

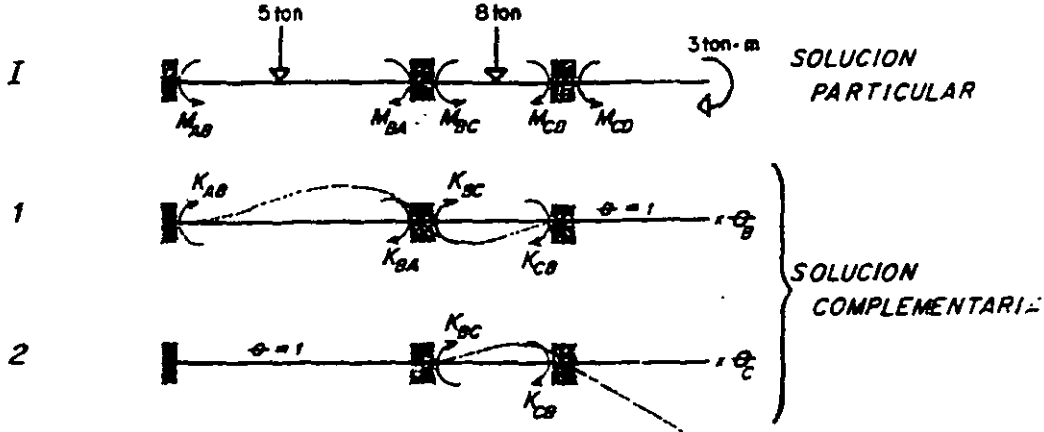


METODO DE LAS RIGIDECES

6.6. Obtener los diagramas de cortante y momento flexionante de la viga.



Empotrando únicamente los nudos B y C.



-VIGA 1.- Momentos de empotramiento.-

$$M_{AB} = -\frac{5(3)(4)^2}{17^2} = -4.898 \quad M_{BA} = \frac{5(3)^2(4)}{17^2} = 3.673$$

$$M_{BC} = -\frac{8(4)}{8} = -4.000 \quad M_{CB} = 4.000 \quad M_{CD} = -3.000$$

-Rigideces

-VIGA 1-

$$K_{AB} = \frac{2EI}{7} = 0.288EI \quad K_{BA} = \frac{4EI}{7} = 0.572EI \quad K_{BC} = \frac{4EI}{4} = EI \quad K_{CB} = \frac{2EI}{4} = 0.50EI$$

-VIGA 2-

$$K_{BC} = \frac{2EI}{4} = 0.50EI \quad K_{CB} = \frac{4EI}{4} = EI$$

Ecuaciones de equilibrio.

$$M_B = M_B^I + K_B^I \theta_B + K_B^2 \theta_C = 0$$

$$M_C = M_C^I + K_C^I \theta_B + K_C^2 \theta_C = 0$$

Obteniendo valores.

• NUDO B •  $M_B^I = M_{BA}^I + M_{BC}^I = -0.327$

METODO DE LAS RIGIDEZES

$K_B^1 = K_{BA}^1 + K_{BC}^1 = 1.572EI$        $K_B^2 = K_{BC}^2 = 0.500EI$   
**NUDO C:**  
 $M_C^1 = M_{CB}^1 + M_{CD}^1 = 1.000$   
 $K_C^1 = K_{CB}^1 = 0.500EI$        $K_C^2 = K_{CD}^2 = EI$

Reemplazando valores:

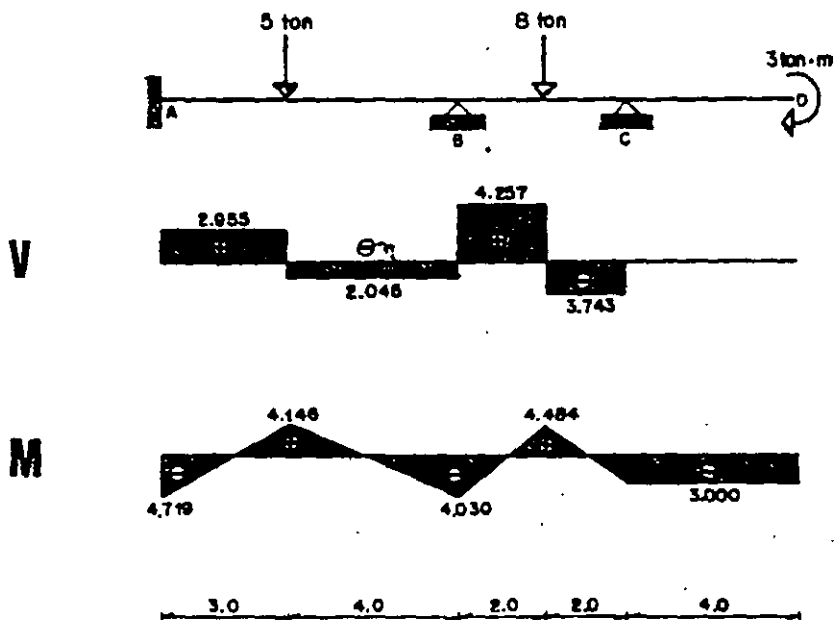
$$\begin{bmatrix} 1.572 & 0.500 \\ 0.500 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.327 \\ -1.000 \end{bmatrix}$$

Resolviendo se tiene:       $\theta_B = \frac{0.625}{EI}$        $\theta_C = -\frac{1.313}{EI}$

Y, los momentos finales son:

$$\begin{aligned}
 M_{AB} &= M_{AB}^I + K_{AB}^1 \theta_B = -4.719 & M_{BA} &= M_{BA}^I + K_{BA}^1 \theta_B = 4.030 \\
 M_{BC} &= M_{BC}^I + K_{BC}^1 \theta_B + K_{BC}^2 \theta_C = -4.031 & M_{CB} &= M_{CB}^I + K_{CB}^1 \theta_B + K_{CB}^2 \theta_C = 3.000 \\
 M_{CD} &= M_{CD}^I = -3.000
 \end{aligned}$$

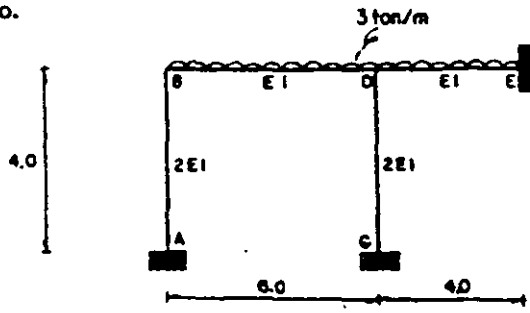
◻ DIAGRAMAS ◻



METODO DE LAS RIGIDEZES

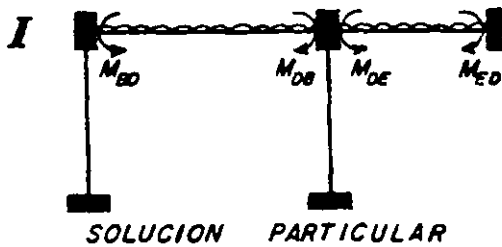
6.7. Encontrar los momentos finales en los extremos de las barras del marco hiperestático.

hiperestático.



Las incógnitas son

$$\theta_B \text{ y } \theta_D$$

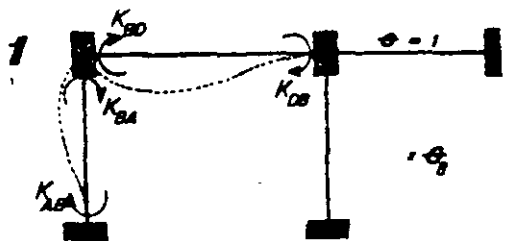


Momentos de empotramiento:

MARCO 1

$$M_{BD} = \frac{3(6)^2}{12} = -9.000 = -M_{DB}$$

$$M_{DE} = \frac{3(4)^2}{12} = -4.000 = -M_{ED}$$



Rigideces

MARCO 1

$$K_{BD} = \frac{2(2EI)}{4} = EI$$

$$K_{BA} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_{DB} = \frac{4EI}{6} = 0.666EI$$

$$K_{DB} = \frac{2EI}{6} = 0.333EI$$

SOLUCION COMPLEMENTARIA

MARCO 2

$$K_{BD} = \frac{2EI}{6} = 0.333EI$$

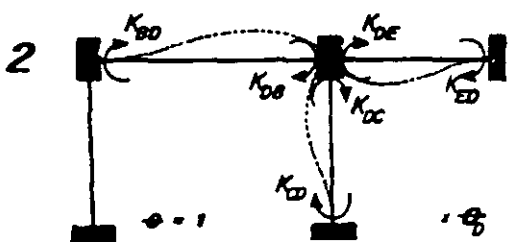
$$K_{DB} = \frac{4EI}{6} = 0.666EI$$

$$K_{DE} = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$K_{ED} = \frac{2EI}{4} = 0.50EI$$

$$K_{DC} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_{CD} = \frac{2(2EI)}{4} = EI$$



Ecuaciones de equilibrio:

$$M_B = M_B^I + K_B^1 \theta_B + K_B^2 \theta_D = 0$$

$$M_D = M_D^I + K_D^1 \theta_B + K_D^2 \theta_D = 0$$



METODO DE LAS RIGIDEZES

Obteniendo valores:

•NUDO B•  $M_B^1 = M_{BD}^1 = -9.000$

$K_B^1 = K_{BA}^1 + K_{BD}^1 = 2.666 EI$

$K_B^2 = K_{BD}^2 = 0.333 EI$

•NUDO D•  $M_D^1 = M_{DB}^1 + M_{DE}^1 = 5.000$

$K_D^1 = K_{DB}^1 = 0.333 EI$

$K_D^2 = K_{DB}^2 + K_{DC}^2 + K_{DE}^2 = 3.666 EI$

Sustituyendo en las ecuaciones de equilibrio.

$$\begin{bmatrix} 2.666 & 0.333 \\ 0.333 & 3.666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.000 \\ -5.000 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es:

$\theta_B = \frac{3.586}{EI}$

$\theta_D = \frac{-1.689}{EI}$

Los momentos finales son:

$M_{AB} = K_{AB}^1 \theta_B = 3.586$

$M_{BA} = K_{BA}^1 \theta_B = 7.172$

$M_{BD} = M_{BD}^1 + K_{BD}^1 \theta_B + K_{BD}^2 \theta_D = -7.172$

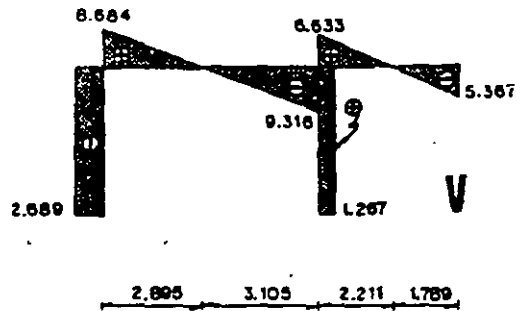
$M_{DB} = M_{DB}^1 + K_{DB}^1 \theta_B + K_{DB}^2 \theta_D = 9.069$

$M_{DC} = K_{DC}^2 \theta_D = -3.378$

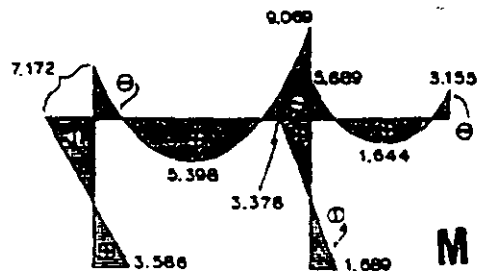
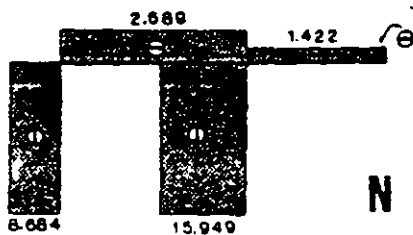
$M_{CD} = K_{CD}^2 \theta_D = -1.689$

$M_{DE} = M_{DE}^1 + K_{DE}^2 \theta_D = -5.689$

$M_{ED} = M_{ED}^1 + K_{ED}^2 \theta_D = 3.155$

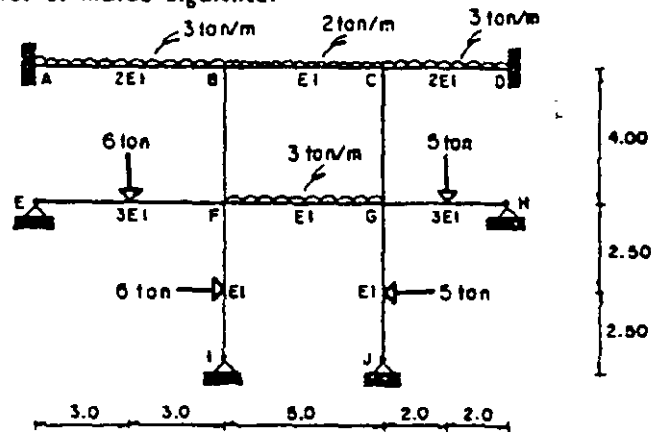


•DIAGRAMAS•



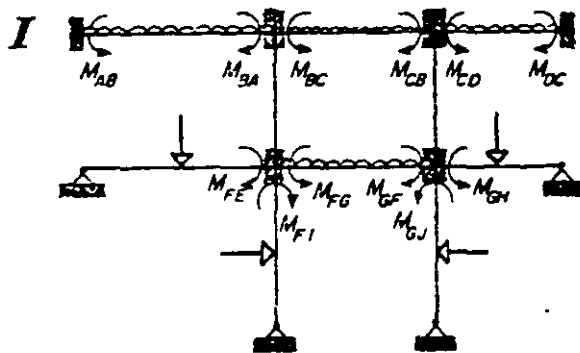
METODO DE LAS RIGIDECES

6.B. Resolver el marco siguiente.

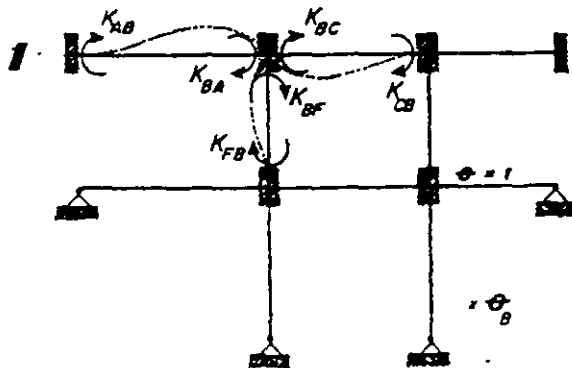


Las incógnitas son  $\theta_B$ ,  $\theta_C$ ,  $\theta_F$  y  $\theta_G$

SOLUCION PARTICULAR



SOLUCION COMPLEMENTARIA



Momentos de empotramiento

MARCO 1

$$M_{CB} = -\frac{316f^2}{12} = -9.000 = -M_{BA}$$

$$M_{BC} = -\frac{215f^2}{12} = -4.167 = -M_{CB}$$

$$M_{CD} = -\frac{314f^2}{12} = -4.000 = -M_{DC}$$

$$M_{FE} = \frac{31616}{16} = 6.750$$

$$M_{FG} = -\frac{315f^2}{12} = -6.250 = -M_{GF}$$

$$M_{GH} = -\frac{31514}{16} = -3.750$$

$$M_{FI} = \frac{31615}{16} = 5.625$$

$$M_{GJ} = -\frac{31515}{16} = -4.687$$

Rigideces

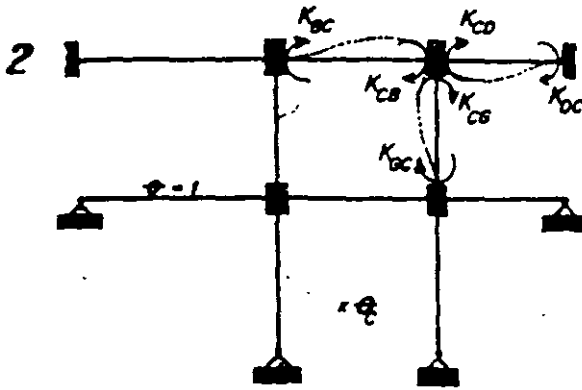
MARCO 1

$$K_{AB} = \frac{2(2EI)}{6} = 0.667EI ; K_{BA} = \frac{4(2EI)}{6} = 1.333EI$$

$$K_{BC} = \frac{4EI}{5} = 0.800EI ; K_{CB} = \frac{2EI}{5} = 0.400EI$$

$$K_{BF} = \frac{4EI}{4} = EI ; K_{FB} = \frac{2EI}{4} = 0.500EI$$

METODO DE LAS RIGIDEZES

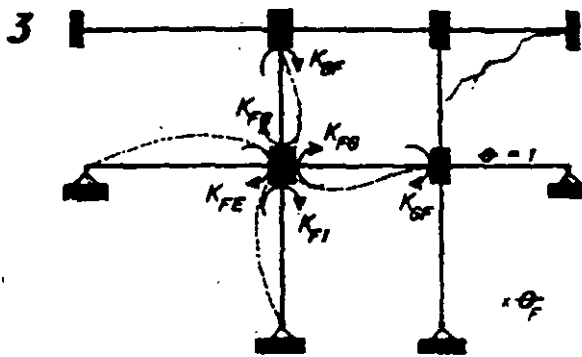


MARCO 2

$$K_{BC} = \frac{2EI}{5} = 0.400EI ; K_{CB} = \frac{4EI}{5} = 0.800EI$$

$$K_{CD} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI ; K_{DC} = \frac{2(2EI)}{4} = EI$$

$$K_{CA} = \frac{4EI}{4} = EI ; K_{AC} = \frac{2EI}{4} = 0.500EI$$

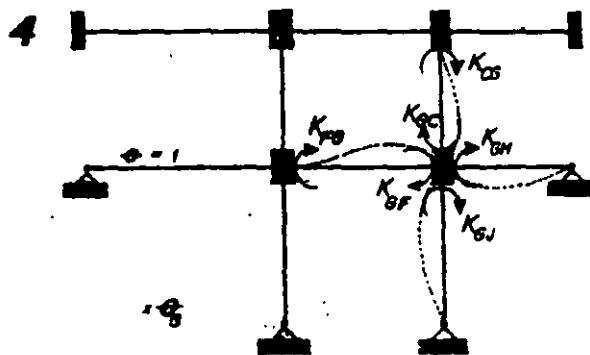


MARCO 3

$$K_{FE} = \frac{3(3EI)}{6} = 1.50EI ; K_{EF} = \frac{4EI}{5} = 0.800EI$$

$$K_{FB} = \frac{2EI}{5} = 0.40EI ; K_{BF} = \frac{2EI}{4} = 0.500EI$$

$$K_{FD} = \frac{4EI}{4} = EI ; K_{DF} = \frac{3EI}{5} = 0.600EI$$



MARCO 4

$$K_{FB} = \frac{2EI}{5} = 0.40EI ; K_{BF} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI$$

$$K_{FD} = \frac{3(2EI)}{4} = 2.25EI ; K_{DF} = \frac{2EI}{4} = 0.50EI$$

$$K_{DC} = \frac{4EI}{4} = EI ; K_{CD} = \frac{3EI}{5} = 0.60EI$$

Ecuaciones de equilibrio.

$$M_B = M_B^I + K_B^1 \theta_B + K_B^2 \theta_C + K_B^3 \theta_F + K_B^4 \theta_G = 0$$

$$M_C = M_C^I + K_C^1 \theta_B + K_C^2 \theta_C + K_C^3 \theta_F + K_C^4 \theta_G = 0$$

$$M_F = M_F^I + K_F^1 \theta_B + K_F^2 \theta_C + K_F^3 \theta_F + K_F^4 \theta_G = 0$$

$$M_G = M_G^I + K_G^1 \theta_B + K_G^2 \theta_C + K_G^3 \theta_F + K_G^4 \theta_G = 0$$

## METODO DE LAS RIGIDECES

Obteniendo valores:

$$\bullet \text{ NUDO B} \bullet M_B^I = M_{BA}^I + M_{BC}^I = -4.833 \quad ; \quad K_B^1 = K_{BA}^1 + K_{BC}^1 + K_{BF}^1 = 3.133EI$$

$$K_B^2 = K_{BC}^2 = 0.400EI \quad ; \quad K_B^3 = 0.0 \quad ; \quad K_B^4 = K_{BF}^4 = 0.500EI$$

$$\bullet \text{ NUDO C} \bullet M_C^I = M_{CB}^I + M_{CD}^I = 0.167 \quad ; \quad K_C^1 = K_{CB}^1 = 0.400EI$$

$$K_C^2 = K_{CB}^2 + K_{CD}^2 + K_{CG}^2 = 3.800EI \quad ; \quad K_C^3 = 0.0 \quad ; \quad K_C^4 = K_{CG}^4 = 0.500EI$$

$$\bullet \text{ NUDO F} \bullet M_F^I = M_{FE}^I + M_{FB}^I + M_{FI}^I = 6.125 \quad ; \quad K_F^1 = K_{FB}^1 = 0.500EI \quad ; \quad K_F^2 = 0.0$$

$$K_F^3 = K_{FB}^3 + K_{FE}^3 + K_{FG}^3 + K_{FI}^3 = 3.900EI \quad ; \quad K_F^4 = K_{FB}^4 = 0.400EI$$

$$\bullet \text{ NUDO G} \bullet M_G^I = M_{GF}^I + M_{GH}^I + M_{GJ}^I = -2.187 \quad ; \quad K_G^1 = 0.0 \quad ; \quad K_G^2 = K_{GC}^2 = 0.500EI$$

$$K_G^3 = K_{GF}^3 = 0.400EI \quad ; \quad K_G^4 = K_{GC}^4 + K_{GF}^4 + K_{GH}^4 + K_{GJ}^4 = 4.650EI$$

Reemplazando se tiene:

$$\begin{bmatrix} 3.133 & 0.400 & 0.500 & 0.000 \\ 0.400 & 3.800 & 0.000 & 0.500 \\ 0.500 & 0.000 & 3.900 & 0.400 \\ 0.000 & 0.500 & 0.400 & 4.650 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_F \\ \theta_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.833 \\ -0.167 \\ -6.125 \\ 2.187 \end{bmatrix}$$

La solución es:

$$\theta_B = -\frac{1.310}{EI} \quad ; \quad \theta_C = \frac{0.0157}{EI}$$

$$\theta_F = -\frac{1.467}{EI} \quad ; \quad \theta_G = \frac{0.593}{EI}$$

Los momentos finales en las barras son:

$$M_{AB} = M_{AB}^I + K_{AB}^1 \theta_B = -9.874$$

$$M_{BA} = M_{BA}^I + K_{BA}^1 \theta_B = -7.254$$

$$M_{BC} = M_{BC}^I + K_{BC}^1 \theta_B + K_{BC}^2 \theta_C = -5.209$$

$$M_{CB} = M_{CB}^I + K_{CB}^1 \theta_B + K_{CB}^2 \theta_C = 3.655$$

$$M_{CD} = M_{CD}^I + K_{CD}^2 \theta_C = -3.968$$

$$M_{DC} = M_{DC}^I + K_{DC}^2 \theta_C = 4.016$$

$$M_{FE} = M_{FE}^I + K_{FE}^3 \theta_F = 4.549$$

$$M_{FB} = M_{FB}^I + K_{FB}^3 \theta_F + K_{FB}^4 \theta_G = -7.185$$

$$M_{GF} = M_{GF}^I + K_{GF}^3 \theta_F + K_{GF}^4 \theta_G = 6.139$$

$$M_{GH} = M_{GH}^I + K_{GH}^4 \theta_G = -2.411$$

$$M_{BF} = K_{BF}^1 \theta_B + K_{BF}^3 \theta_F = -2.043$$

$$M_{FB} = K_{FB}^1 \theta_B + K_{FB}^3 \theta_F = -2.122$$

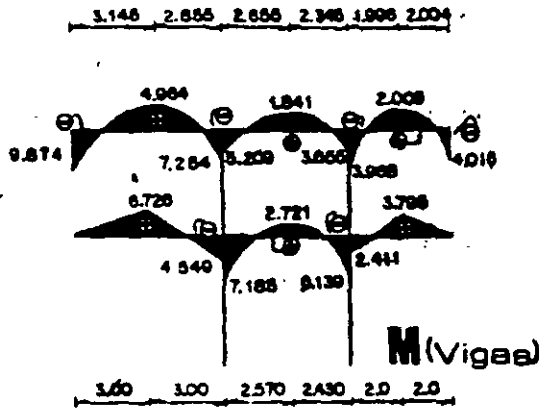
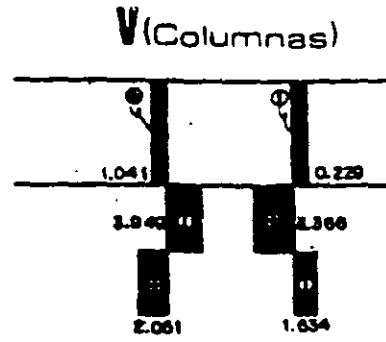
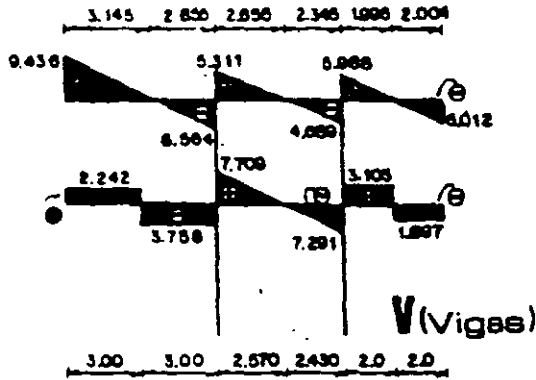
$$M_{CG} = K_{CG}^2 \theta_C + K_{CG}^4 \theta_G = 0.313$$

$$M_{GC} = K_{GC}^2 \theta_C + K_{GC}^4 \theta_G = 0.603$$

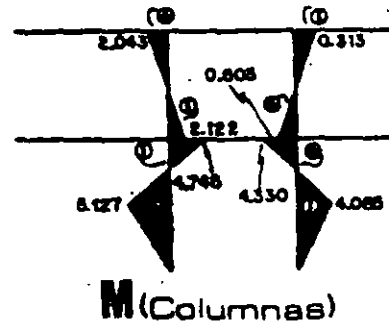
$$M_{FI} = M_{FI}^I + K_{FI}^3 \theta_F = 4.745$$

$$M_{GJ} = M_{GJ}^I + K_{GJ}^4 \theta_G = -4.330$$

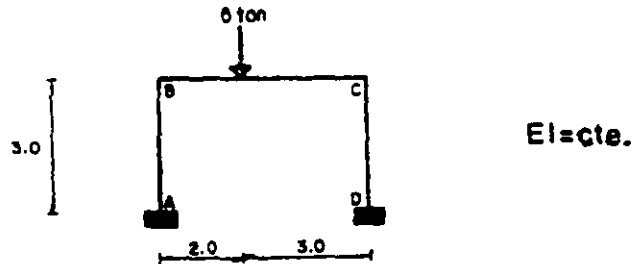
METODO DE LAS RIGIDEZES



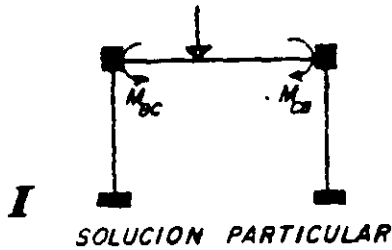
DIAGRAMAS



6.9. Determinar los momentos en los vértices de la estructura.



Las incógnitas son  $\theta_B$ ,  $\theta_C$  y  $\Delta$



Momentos de empotramiento.

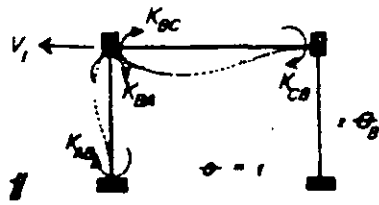
MARCO I

$$M_{bc} = -\frac{0.1(2)(3)^2}{(5)^2} = -4.320$$

$$M_{cb} = \frac{0.1(2)^2(3)}{(5)^2} = 2.880$$

METODO DE LAS RIGIDEZES

SOLUCION COMPLEMENTARIA



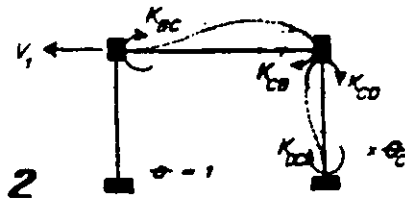
Rigideces

MARCO 1

$$K_{AB} = \frac{2EI}{3} = 0.666EI \quad K_{BA} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{BC} = \frac{4EI}{5} = 0.800EI \quad K_{CB} = \frac{2EI}{5} = 0.400EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{(3)^2} = -0.666EI$$

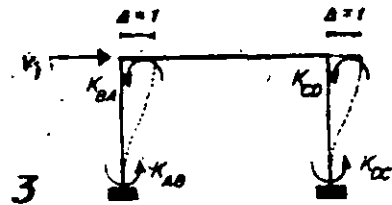


MARCO 2

$$K_{CB} = \frac{2EI}{5} = 0.400EI \quad K_{BC} = \frac{4EI}{5} = 0.800EI$$

$$K_{CD} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI \quad K_{DC} = \frac{2EI}{3} = 0.666EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{(3)^2} = -0.666EI$$



MARCO 3

$$K_{AB} = K_{BA} = K_{CD} = K_{DC} = -\frac{6EI}{(3)^2} = -0.666EI$$

$$V_1 = \frac{2(12EI)}{(3)^3} = 0.888EI$$

Ecuaciones de equilibrio

$$M_B = M_B^I + K_B^I \theta_B + K_B^2 \theta_C + K_B^3 \Delta = 0$$

$$M_C = M_C^I + K_C^1 \theta_B + K_C^2 \theta_C + K_C^3 \Delta = 0$$

$$V_1 = V_1^I + V_1^I \theta_B + V_1^2 \theta_C + V_1^3 \Delta = 0$$

Obteniendo valores:

●NUDO B●  $M_B^I = M_{BC}^I = -4.320$

$$K_B^1 = K_{BA}^1 + K_{BC}^1 = 2.133E$$

$$K_B^2 = K_{BC}^2 = 0.400EI$$

$$K_B^3 = K_{BA}^3 = -0.666EI$$

●NUDO C●  $M_C^I = M_{CB}^I = 2.880$

$$K_C^1 = K_{CB}^1 = 0.400EI$$

$$K_C^2 = K_{CB}^2 + K_{CD}^2 = 2.133EI$$

$$K_C^3 = K_{CD}^3 = -0.666EI$$

●CABEZAL●  $V_1^I = 0.000$  ;  $V_1^I = -0.666EI$  ;  $V_1^2 = -0.666EI$  ;  $V_1^3 = 0.888EI$

METODO DE LAS RIGIDEZES

Sustituyendo estos valores:

$$\begin{bmatrix} 2.133 & 0.400 & -0.666 \\ 0.400 & 2.133 & -0.666 \\ -0.666 & -0.666 & 0.888 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.320 \\ -2.880 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema:  $\theta_B = \frac{2.547}{EI}$        $\theta_C = \frac{1.607}{EI}$        $\Delta = \frac{0.704}{EI}$

Así, los momentos finales son:

$$M_{AB} = K_{AB}^1 \theta_B + K_{AB}^3 \Delta = 1.229$$

$$M_{BA} = K_{BA}^1 \theta_B + K_{BA}^3 \Delta = 2.927$$

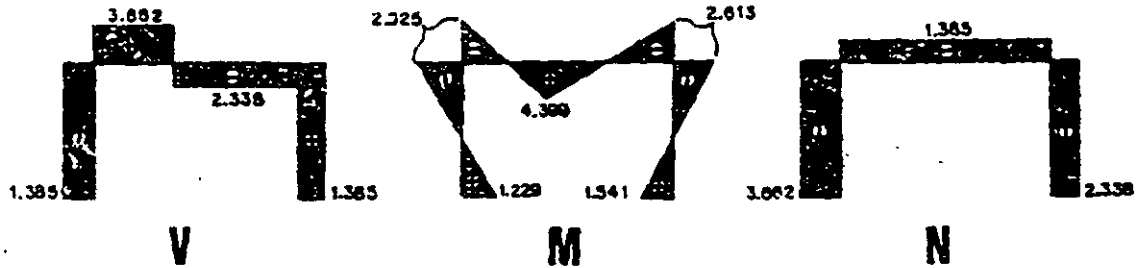
$$M_{BC} = M_{BC}^1 + K_{BC}^1 \theta_B + K_{BC}^2 \theta_C = -2.925$$

$$M_{CB} = M_{CB}^1 + K_{CB}^1 \theta_B + K_{CB}^2 \theta_C = 2.613$$

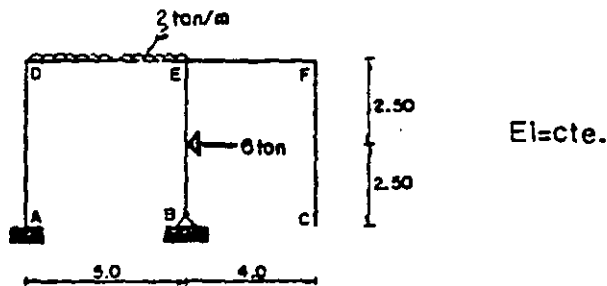
$$M_{CD} = K_{CD}^2 \theta_C + K_{CD}^3 \Delta = -2.612$$

$$M_{DC} = K_{DC}^2 \theta_C + K_{DC}^3 \Delta = -1.541$$

DIAGRAMAS



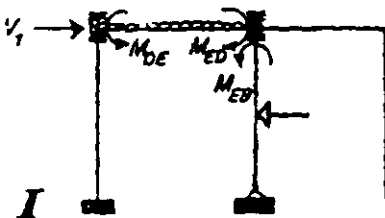
6.10. Resolver el marco hiperestático que se muestra a continuación.



Las incógnitas son

$$\theta_D, \theta_E \text{ y } \Delta$$

SOLUCION PARTICULAR



Momentos de empotramiento

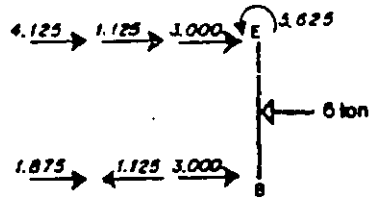
MARCO I

$$M_{DE} = -\frac{2(5)^2}{12} = -4.166 = -M_{ED}$$

$$M_{EB} = -\frac{3(0.5)}{16} = -5.625$$

METODO DE LAS RIGIDECES

Cálculo de  $V_1$  en el MARCO 1.



Rigideces

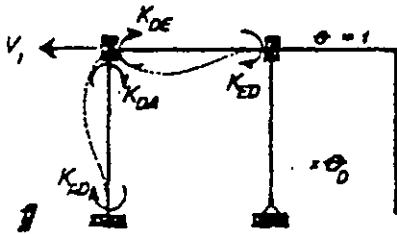
MARCO 1

$$K_{AD} = \frac{2EI}{5} = 0.400EI \quad K_{DA} = \frac{4EI}{5} = 0.800EI$$

$$K_{DE} = \frac{4EI}{5} = 0.800EI \quad K_{ED} = \frac{2EI}{5} = 0.400EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{15)^2} = -0.240EI$$

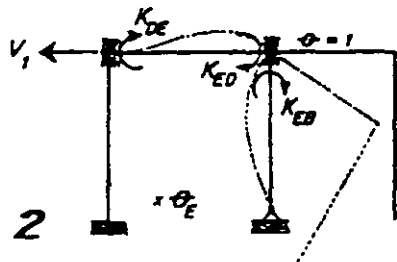
SOLUCION COMPLEMENTARIA



MARCO 2

$$K_{DE} = \frac{2EI}{5} = 0.400EI \quad K_{ED} = \frac{4EI}{5} = 0.800EI$$

$$K_{EB} = \frac{3EI}{5} = 0.600EI \quad V_1 = -\frac{3EI}{15)^2} = -0.120EI$$

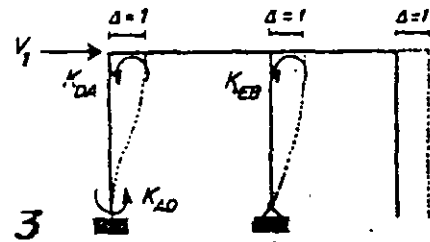


MARCO 3

$$K_{DA} = -\frac{6EI}{15)^2} = -0.240EI = K_{AD}$$

$$K_{EB} = -\frac{3EI}{15)^2} = -0.120EI$$

$$V_1 = \frac{12EI}{15)^3} + \frac{3EI}{15)^3} = 0.120EI$$



Ecuaciones de equilibrio:

$$M_D = M_D^I + K_D^I \theta_D + K_D^2 \theta_E + K_D^3 \Delta = 0$$

$$M_E = M_E^I + K_E^I \theta_D + K_E^2 \theta_E + K_E^3 \Delta = 0$$

$$V_1 = V_1^I + V_1^I \theta_D + V_1^2 \theta_E + V_1^3 \Delta = 0$$

Obtención de val-res.  $M_D^I = M_{DE}^I = -4.160$

$$K_D^I = K_{DA}^I + K_{DE}^I = 1.600EI$$



METODO DE LAS RIGIDECES

	$K_D^2 = K_{DE}^2 = 0.400EI$	$K_D^3 = K_{DA}^3 = -0.240EI$
●NUDO E●	$M_E^I = M_{ED}^I + M_{EB}^I = -1.459$	$K_E^1 = K_{ED}^1 = 0.400EI$
	$K_E^2 = K_{ED}^2 + K_{EB}^2 = 1.400EI$	$K_E^3 = K_{EB}^3 = -0.120EI$
●CABEZAL●	$V_1^I = 4.125$	$V_1^I = -0.240EI$
	$V_1^2 = -0.120EI$	$V_1^3 = 0.120EI$

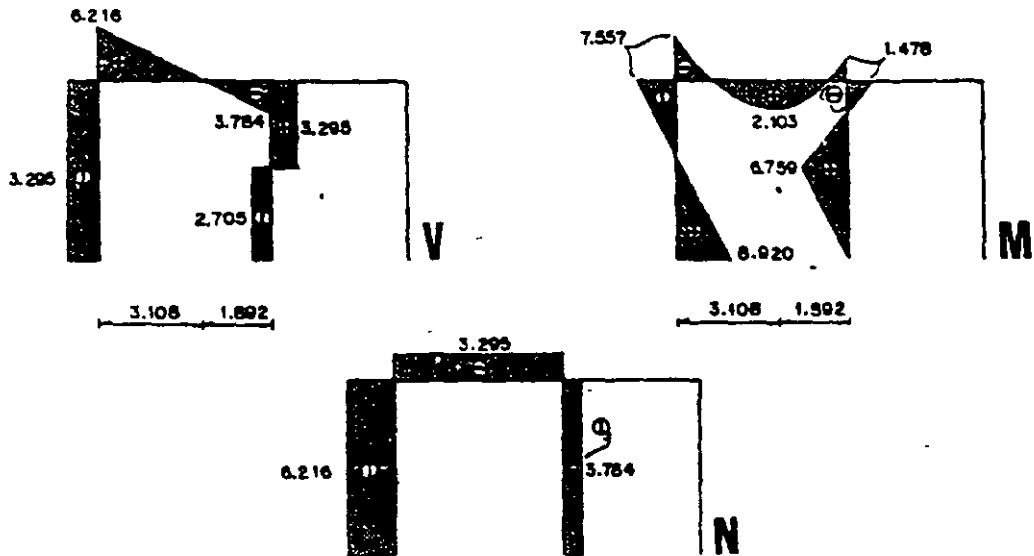
Sustituyendo queda:

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.400 & -0.240 \\ 0.400 & 1.400 & -0.120 \\ -0.240 & -0.120 & 0.120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_D \\ \theta_E \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.158 \\ 1.459 \\ -4.125 \end{bmatrix}$$

Y, resolviendo se tiene:  $\theta_D = -\frac{3.409}{EI}$        $\theta_E = -\frac{1.657}{EI}$        $\Delta = -\frac{42.850}{EI}$

Para obtener los momentos finales siguientes:

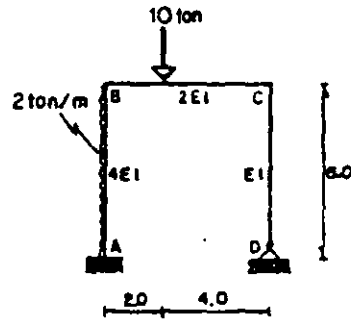
$M_{AD} = K_{AD}^1 \theta_D + K_{AD}^3 \Delta = 8.920$	$M_{DA} = K_{DA}^1 \theta_D + K_{DA}^3 \Delta = 7.557$
$M_{DE} = M_{DE}^I + K_{DE}^1 \theta_D + K_{DE}^2 \theta_E = -7.557$	$M_{ED} = M_{ED}^I + K_{ED}^1 \theta_D + K_{ED}^2 \theta_E = 1.478$
$M_{EB} = M_{EB}^I + K_{EB}^2 \theta_E + K_{EB}^3 \Delta = -1.478$	



●DIAGRAMAS●

METODO DE LAS RIGIDECES

6.11. Determinar los momentos en los vértices del siguiente marco.



Las incógnitas son

$$\theta_B, \theta_C \text{ y } \Delta$$

Momentos de empotramiento.

MARCO 1

$$M_{AB} = -\frac{2(6)^2}{12} = -0.000 = -M_{BA}$$

$$M_{BC} = -\frac{10(2)(4)^2}{16^2} = -0.888$$

$$M_{CD} = -\frac{10(2)^2(4)}{16^2} = -0.444$$

Rigideces.

MARCO 1

$$K_{AB} = \frac{2(4EI)}{6} = 1.333EI$$

$$K_{BA} = \frac{4(4EI)}{6} = 2.667EI$$

$$K_{BC} = \frac{4(2EI)}{6} = 1.333EI$$

$$V_1 = -\frac{6(4EI)}{16^2} = -0.667EI$$

$$K_{CB} = \frac{2(2EI)}{6} = 0.667EI$$

MARCO 2

$$K_{BC} = \frac{2(2EI)}{6} = 0.667EI$$

$$K_{CB} = \frac{4(2EI)}{6} = 1.333EI$$

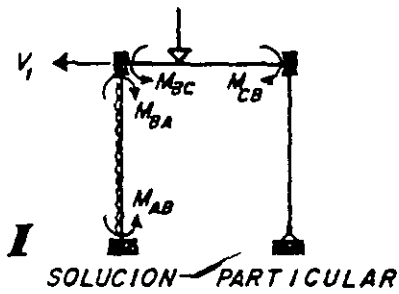
$$K_{CD} = \frac{3EI}{6} = 0.500EI$$

$$V_1 = -\frac{3EI}{16^2} = -0.083EI$$

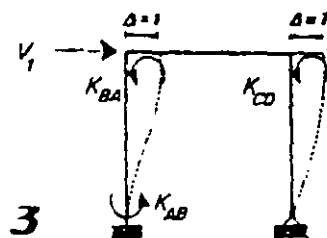
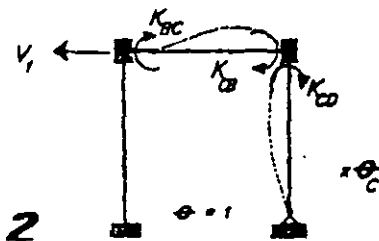
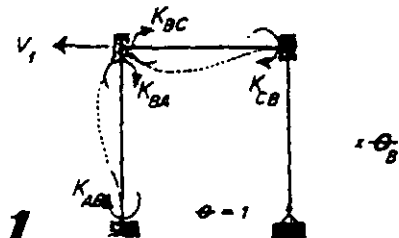
MARCO 3

$$K_{AB} = K_{BA} = -\frac{6(4EI)}{16^2} = -0.667EI ; K_{CD} = -\frac{3EI}{16^2} = -0.083EI$$

$$V_1 = -\frac{3EI}{16^2} + \frac{12(4EI)}{16^2} = 0.236EI$$

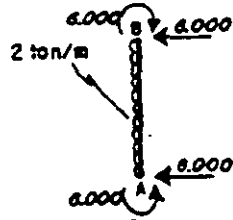


SOLUCION COMPLEMENTARIA



METODO DE LAS RIGIDECES

Cálculo de  $V_1$  en el MARCO I



Ecuaciones de equilibrio:

$$M_B = M_B^I + K_B^I \theta_B + K_B^2 \theta_C + K_B^3 \Delta = 0$$

$$M_C = M_C^I + K_C^1 \theta_B + K_C^2 \theta_C + K_C^3 \Delta = 0$$

$$V_1 = V_1^I + V_1^1 \theta_B + V_1^2 \theta_C + V_1^3 \Delta = 0$$

Obtención de valores.

●NUDO B●  $M_B^I = M_{BA}^I + M_{BC}^I = -2.889$   $K_B^1 = K_{BA}^1 + K_{BC}^1 = 4EI$

$K_B^2 = K_{BC}^2 = 0.667EI$   $K_B^3 = K_{BA}^3 = -0.667EI$

●NUDO C●  $M_C^I = M_{CB}^I = 4.444$   $K_C^1 = K_{CB}^1 = 0.667EI$

$K_C^2 = K_{CB}^2 + K_{CD}^2 = 1.833EI$   $K_C^3 = K_{CD}^3 = -0.083EI$

●CABEZAL●  $V_1^I = -0.600$   $V_1^1 = -0.667EI$

$V_1^2 = -0.083EI$   $V_1^3 = 0.236EI$

Reemplazando se tiene:

$$\begin{bmatrix} 4.000 & 0.667 & -0.667 \\ 0.667 & 1.833 & -0.083 \\ -0.667 & -0.083 & 0.236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.889 \\ -4.444 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Resultando:  $\theta_B = \frac{10.128}{EI}$   $\theta_C = -\frac{3.710}{EI}$   $\Delta = \frac{52.723}{EI}$

Y, los momentos finales son:

$M_{AB} = M_{AB}^I + K_{AB}^1 \theta_B + K_{AB}^3 \Delta = -27.648$

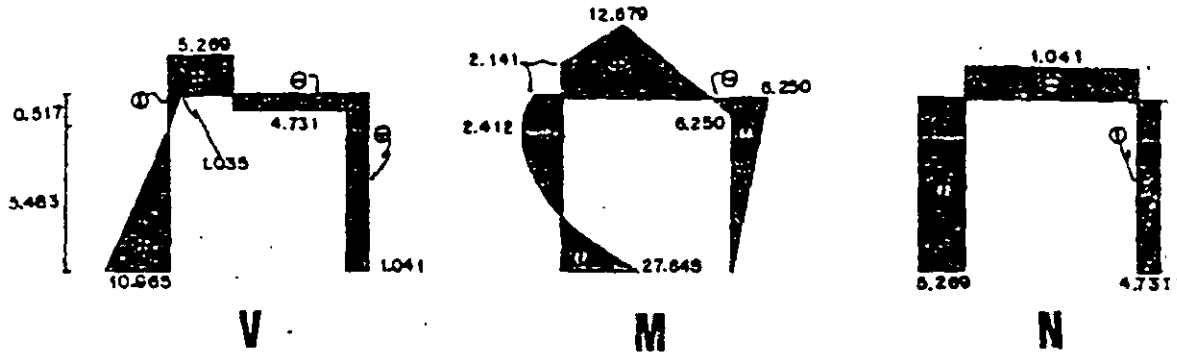
$M_{BA} = M_{BA}^I + K_{BA}^1 \theta_B + K_{BA}^3 \Delta = -2.141$

$M_{BC} = M_{BC}^I + K_{BC}^1 \theta_B + K_{BC}^2 \theta_C = 2.141$

$M_{CB} = M_{CB}^I + K_{CB}^1 \theta_B + K_{CB}^2 \theta_C = 6.250$

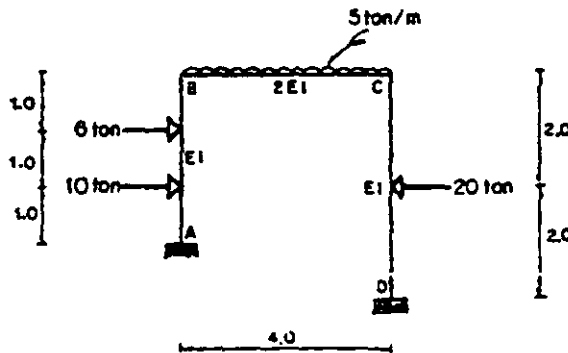
$M_{CD} = K_{CD}^2 \theta_C + K_{CD}^3 \Delta = -6.250$

METODO DE LAS RIGIDECES



• DIAGRAMAS •

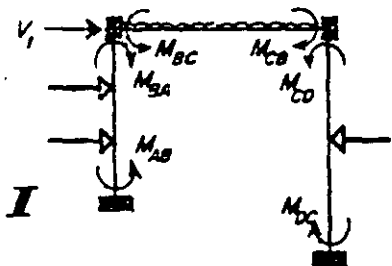
6.12. Encontrar los momentos finales del marco hiperestático.



Las incógnitas son

$$\theta_B, \theta_C \text{ y } \Delta$$

SOLUCION PARTICULAR



Momentos de empotramiento:

MARCO I

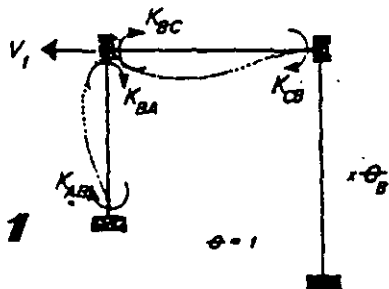
$$M_{CB} = -\frac{10(1)(2)^2}{13^2} - \frac{6(2)(1)^2}{13^2} = -5.778$$

$$M_{BA} = \frac{10(1)^2(2)}{13^2} + \frac{6(2)^2(1)}{13^2} = 4.880$$

$$M_{BC} = -\frac{5(4)^2}{12} = -0.666 = -M_{CB}$$

$$M_{CD} = -\frac{20(4)}{8} = -10.000 = -M_{DC}$$

SOLUCION COMPLEMENTARIA



Rigideces.

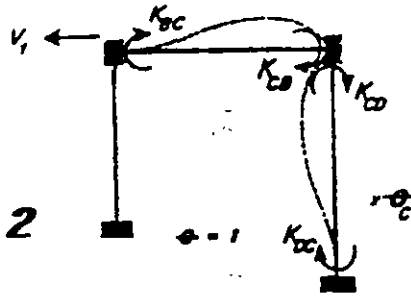
MARCO I

$$K_{AB} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI \quad K_{BA} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{BC} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI \quad K_{CB} = \frac{2(2EI)}{4} = EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{13^2} = -0.667EI$$

METODO DE LAS RIGIDEZES



MARCO 2

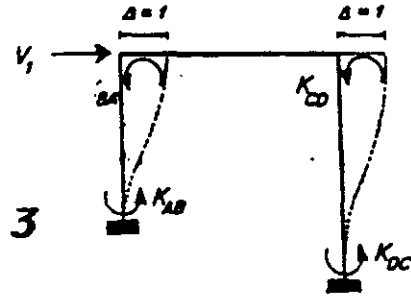
$$K_{BA} = \frac{2(2EI)}{4} = EI$$

$$K_{CB} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_{CD} = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$K_{DC} = \frac{2EI}{4} = 0.500EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{(4)^2} = -0.375EI$$



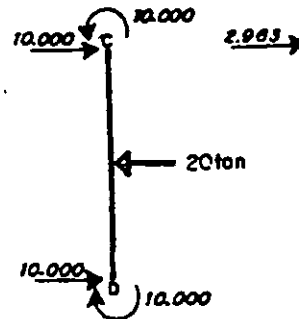
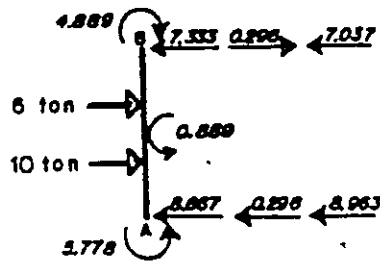
MARCO 3

$$K_{BA} = \frac{6EI}{(3)^2} = -0.667EI = K_{AB}$$

$$K_{CD} = \frac{6EI}{(4)^2} = -0.375EI = K_{DC}$$

$$V_1 = \frac{12EI}{(3)^3} + \frac{12EI}{(4)^3} = 0.032EI$$

Cálculo de  $V_1$  en el MARCO I



Ecuaciones de equilibrio.

$$M_B = M_B^I + K_B^I \theta_B + K_B^2 \theta_C + K_B^3 \Delta = 0$$

$$M_C = M_C^I + K_C^I \theta_B + K_C^2 \theta_C + K_C^3 \Delta = 0$$

$$V_1 = V_1^I + V_1^I \theta_B + V_1^2 \theta_C + V_1^3 \Delta = 0$$

Obtención de valores.

• NUDO B •  $M_B^I = M_{BA}^I + M_{BC}^I = -1.778$

$$K_B^I = K_{BA}^I + K_{BC}^I = 3.333EI$$

$$K_B^2 = K_{BC}^2 = EI$$

$$K_B^3 = K_{BA}^3 = -0.667EI$$

• NUDO C •  $M_C^I = M_{CB}^I + M_{CD}^I = -3.333$

$$K_C^I = K_{CB}^I = EI$$

METODO DE LAS RIGIDEZES

$K_C^2 = K_{CB}^2 + K_{CD}^2 = 3EI$ 
 $K_C^3 = K_{CD}^3 = -0.375EI$   
**● CABEZAL ●**
 $V_1^1 = 2.963$ 
 $V_1^2 = -0.375EI$ 
 $V_1^3 = -0.667EI$ 
 $V_1^4 = 0.632EI$

Sustituyendo obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 3.333 & 1.000 & -0.667 \\ 1.000 & 3.000 & -0.375 \\ -0.667 & -0.375 & 0.632 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_B \\ \phi_C \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.778 \\ 3.333 \\ -2.963 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema matricial:  $\phi_B = \frac{0.676}{EI}$      $\phi_C = \frac{0.714}{EI}$      $\Delta = \frac{4.978}{EI}$

Así, los moentos finales quedan:

$$M_{AB} = M_{AB}^I + K_{AB}^1 \phi_B + K_{AB}^3 \Delta = -2.908$$

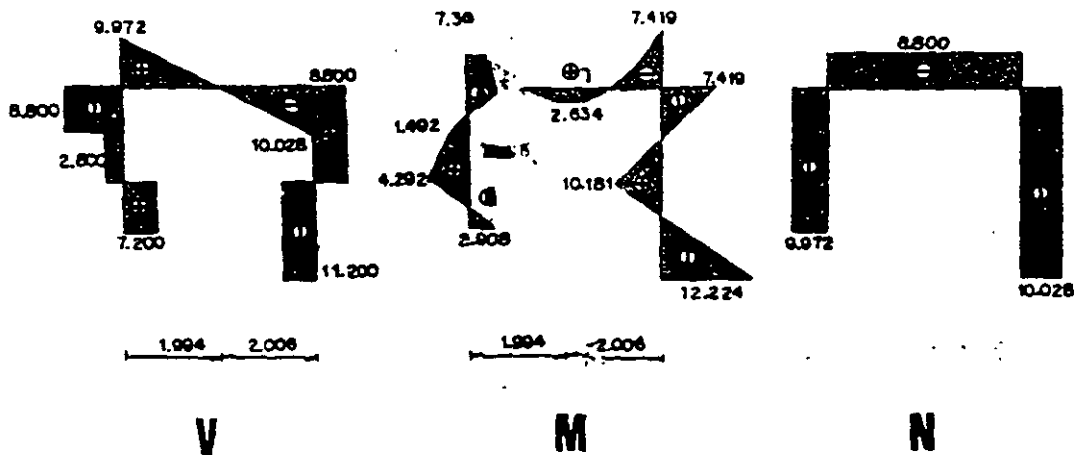
$$M_{BA} = M_{BA}^I + K_{BA}^1 \phi_B + K_{BA}^3 \Delta = 7.308$$

$$M_{BC} = M_{BC}^I + K_{BC}^1 \phi_B + K_{BC}^2 \phi_C = -7.308$$

$$M_{CB} = M_{CB}^I + K_{CB}^1 \phi_B + K_{CB}^2 \phi_C = 7.419$$

$$M_{CD} = M_{CD}^I + K_{CD}^2 \phi_C + K_{CD}^3 \Delta = -1.19$$

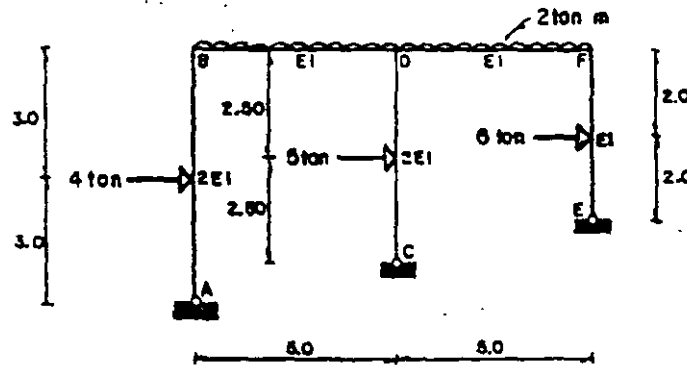
$$M_{DC} = M_{DC}^I + K_{DC}^2 \phi_C + K_{DC}^3 \Delta = 12.224$$



● DIAGRAMAS ●

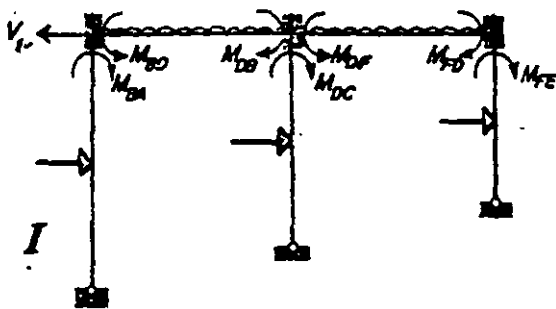
METODO DE LAS RIGIDECES

6.13. Trazar los diagramas de elementos mecánicos de la siguiente estructura.



Las incógnitas son  $\theta_B, \theta_D, \theta_F$  y  $\Delta$

SOLUCION PARTICULAR



Momentos de empotramiento.

MARCO 1

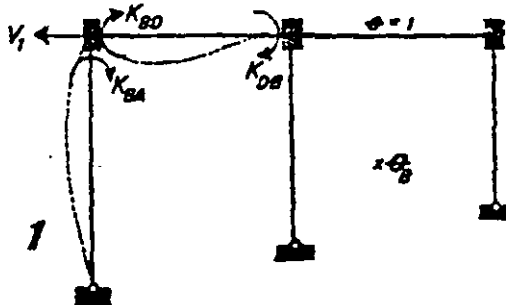
$$M_{BA} = \frac{3(4)6}{16} = 4.500$$

$$M_{BD} = -\frac{2(5)^2}{12} = -4.166 = M_{DF} = -M_{DB} = -M_{FD}$$

$$M_{DC} = \frac{3(5)5}{12} = 4.687$$

$$M_{FE} = \frac{3(0)4}{16} = 4.500$$

SOLUCION COMPLEMENTARIA



Rigideces

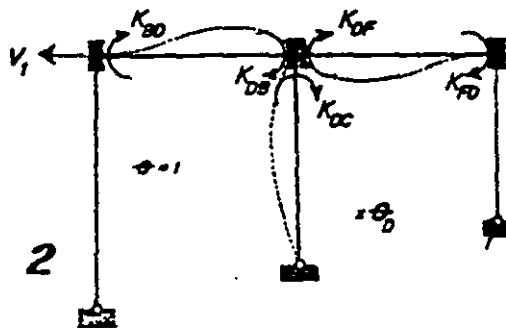
MARCO 1

$$K_{BA} = \frac{3(2EI)}{6} = EI$$

$$K_{BD} = \frac{4EI}{5} = 0.800EI$$

$$K_{DB} = \frac{2EI}{5} = 0.400EI$$

$$V_1 = -\frac{3(2EI)}{(0)^2} = -0.168EI$$



MARCO 2

$$K_{BD} = \frac{2EI}{5} = 0.400EI$$

$$K_{DB} = \frac{4EI}{5} = 0.800EI$$

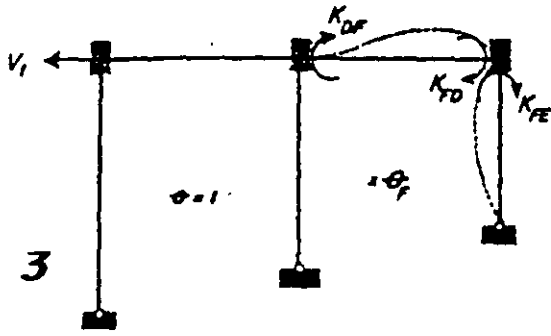
$$K_{DF} = \frac{4EI}{5} = 0.800EI$$

$$K_{FD} = \frac{2EI}{5} = 0.400EI$$

$$K_{DC} = \frac{3(2EI)}{5} = 1.200EI$$

$$V_1 = \frac{3(2EI)}{(5)^2} = 0.240EI$$

METODO DE LAS RIGIDECES



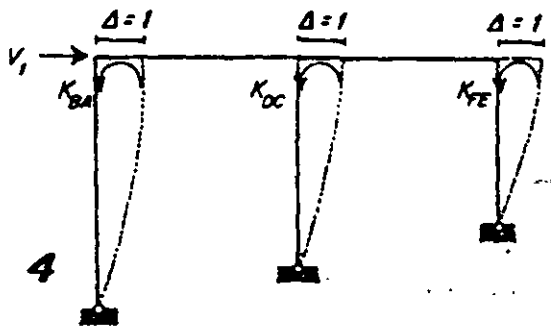
MARCO 3

$$K_{DF} = \frac{2EI}{5} = 0.400EI$$

$$K_{FD} = \frac{4EI}{5} = 0.800EI$$

$$K_{FE} = \frac{3EI}{4} = 0.750EI$$

$$V_1 = \frac{3EI}{14^3} = 0.1875EI$$



MARCO 4

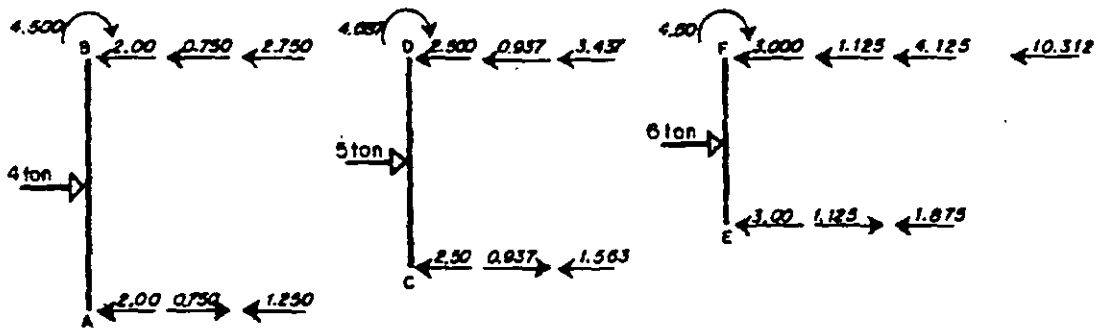
$$K_{BA} = \frac{3(2EI)}{10^3} = 0.168EI$$

$$K_{DC} = \frac{3(2EI)}{15^3} = 0.240EI$$

$$K_{FE} = \frac{3EI}{14^3} = 0.1875EI$$

$$V_1 = \frac{3(2EI)}{10^3} + \frac{3(2EI)}{15^3} + \frac{3EI}{14^3} = 0.123EI$$

Cálculo de  $V_1$  en el MARCO I



Ecuaciones de equilibrio.

$$M_B = M_B^I + K_B^1 \theta_B + K_B^2 \theta_D + K_B^3 \theta_F + K_B^4 \Delta = 0$$

$$M_D = M_D^I + K_D^1 \theta_B + K_D^2 \theta_D + K_D^3 \theta_F + K_D^4 \Delta = 0$$

$$M_F = M_F^I + K_F^1 \theta_B + K_F^2 \theta_D + K_F^3 \theta_F + K_F^4 \Delta = 0$$

$$V_1 = V_1^I + V_1^2 \theta_B + V_1^3 \theta_D + V_1^4 \theta_F + V_1^5 \Delta = 0$$



## METODO DE LAS RIGIDECES

Otteniendo valores:

**●NUDO B●**  $M_B^I - M_{BA}^I + M_{BD}^I = 0.334$  ;  $K_B^I - K_{BA}^I + K_{BD}^I = 1.800 EI$   
 $K_B^2 - K_{BD}^2 = 0.400 EI$  ;  $K_B^3 = 0.0$  ;  $K_B^4 - K_{BA}^4 = -0.188 EI$

**●NUDO D●**  $M_D^I - M_{DB}^I + M_{DF}^I + M_{DC}^I = 4.687$  ;  $K_D^I - K_{DB}^I = 0.400 EI$   
 $K_D^2 - K_{DB}^2 + K_{DC}^2 + K_{DF}^2 = 2.800 EI$  ;  $K_D^3 - K_{DF}^3 = 0.400 EI$  ;  $K_D^4 - K_{DC}^4 = -0.240 EI$

**●NUDO F●**  $M_F^I - M_{FD}^I + M_{FE}^I = 8.666$  ;  $K_F^I = 0.0$   
 $K_F^2 - K_{FD}^2 = 0.400 EI$  ;  $K_F^3 - K_{FD}^3 + K_{FE}^3 = 1.550 EI$  ;  $K_F^4 - K_{FE}^4 = -0.1875 EI$

**●CABEZAL●**  $V_1^I = -10.312$  ;  $V_1^I = -0.186 EI$  ;  $V_1^2 = -0.240 EI$   
 $V_1^3 = -0.1875 EI$  ;  $V_1^4 = 0.123 EI$

Reemplazando queda:

$$\begin{bmatrix} 1.800 & 0.400 & 0.000 & -0.188 \\ 0.400 & 2.800 & 0.400 & -0.240 \\ 0.000 & 0.400 & 1.550 & -0.1875 \\ -0.188 & -0.240 & -0.1875 & 0.123 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_D \\ \theta_F \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.334 \\ -4.687 \\ -8.666 \\ 10.312 \end{bmatrix}$$

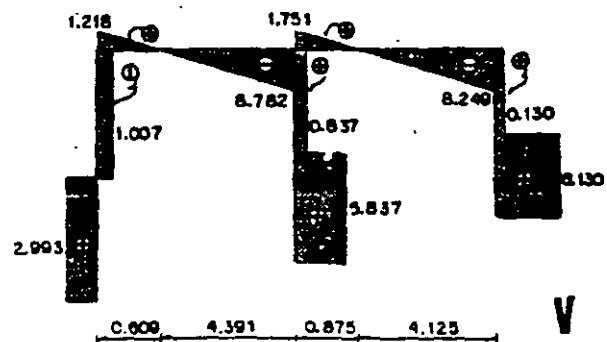
Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{8.553}{EI} & \theta_D &= \frac{8.205}{EI} \\ \theta_F &= \frac{7.332}{EI} & \Delta &= \frac{120.066}{EI} \end{aligned}$$

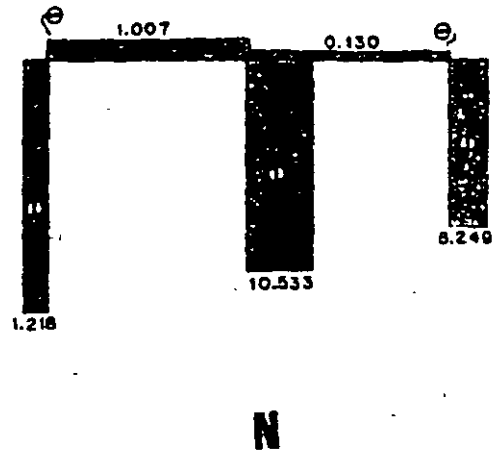
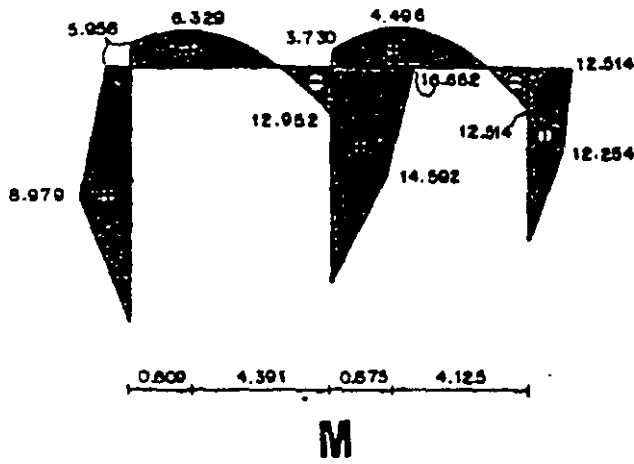
Para obtener los momentos finales que son:

$$\begin{aligned} M_{BA} &= M_{BA}^I + K_{BA}^1 \theta_B + K_{BA}^4 \Delta = -5.958 & M_{BD} &= M_{BD}^I + K_{BD}^1 \theta_B + K_{BD}^2 \theta_D = 5.958 \\ M_{DB} &= M_{DB}^I + K_{DB}^1 \theta_B + K_{DB}^2 \theta_D = 12.952 & M_{DF} &= M_{DF}^I + K_{DF}^2 \theta_D + K_{DF}^3 \theta_F = 3.730 \\ M_{DC} &= M_{DC}^I + K_{DC}^2 \theta_D + K_{DC}^4 \Delta = -16.682 & M_{FD} &= M_{FD}^I + K_{FD}^2 \theta_D + K_{FD}^3 \theta_F = 12.514 \\ M_{FE} &= M_{FE}^I + K_{FE}^3 \theta_F + K_{FE}^4 \Delta = -12.514 \end{aligned}$$

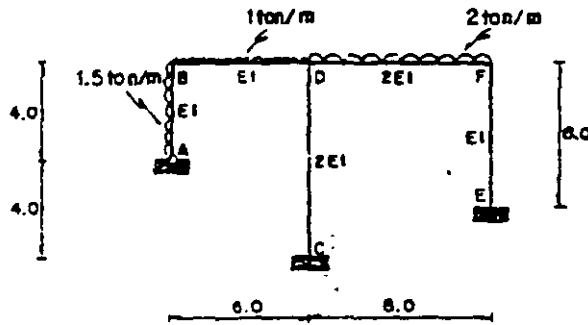
## ●DIAGRAMAS●



METODO DE LAS RIGIDECES



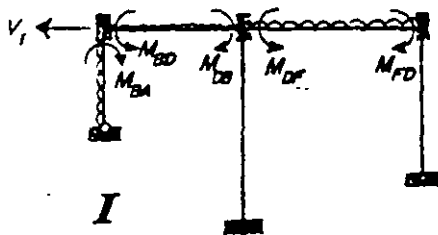
6.14. Encontrar los momentos finales en las barras del marco hiperestático.



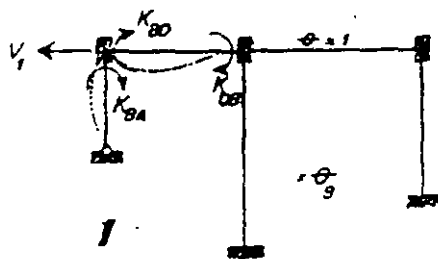
Las incógnitas son

$$\theta_B, \theta_D, \theta_F \text{ y } \Delta$$

SOLUCION PARTICULAR



SOLUCION COMPLEMENTARIA



. Momentos de empotramiento.

MARCO I

$$M_{BA} = \frac{1.5(4)^2}{8} = 3.000$$

$$M_{BD} = -\frac{1(8)^2}{12} = -3.000 = -M_{DB}$$

$$M_{DF} = -\frac{2(8)^2}{12} = -10.666 = -M_{FD}$$

Rigideces.

MARCO I

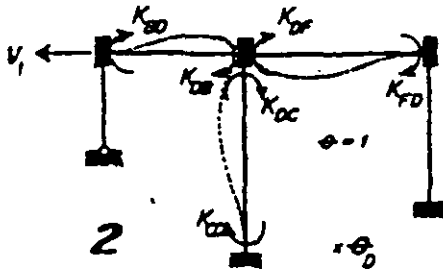
$$K_{BA} = \frac{3EI}{4} = 0.750EI$$

$$K_{BD} = \frac{4EI}{6} = 0.666EI$$

$$K_{DB} = \frac{2EI}{6} = 0.333EI$$

$$V_1 = -\frac{3EI}{(4)^2} = -0.1875EI$$

METODO DE LAS RIGIDECES



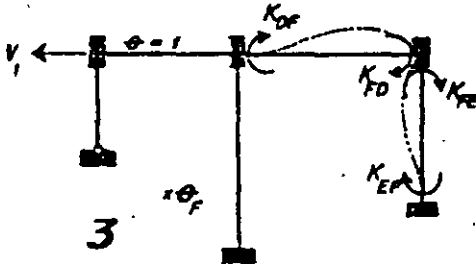
MARCO 2

$$K_{BD} = \frac{2EI}{6} = 0.333EI \quad K_{DB} = \frac{4EI}{6} = 0.666EI$$

$$K_{DF} = \frac{4(2EI)}{8} = EI \quad K_{FD} = \frac{2(2EI)}{8} = 0.50EI$$

$$K_{DC} = \frac{4(2EI)}{8} = EI \quad K_{CD} = \frac{2(2EI)}{8} = 0.50EI$$

$$V_1 = -\frac{6(2EI)}{(8)^2} = -0.1875EI$$

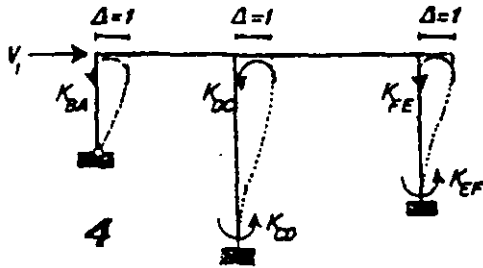


MARCO 3

$$K_{DF} = \frac{2(2EI)}{8} = 0.50EI \quad K_{FD} = \frac{4(2EI)}{8} = EI$$

$$K_{FE} = \frac{4EI}{6} = 0.666EI \quad K_{EF} = \frac{2EI}{6} = 0.333EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{(8)^2} = -0.1875EI$$



MARCO 4

$$K_{BA} = -\frac{3EI}{(4)^2} = -0.1875EI$$

$$K_{DC} = \frac{6(2EI)}{(8)^2} = 0.1875EI = K_{CD}$$

$$K_{FE} = -\frac{6EI}{(6)^2} = -0.1666EI = K_{EF}$$

$$V_1 = \frac{3EI}{(4)^3} + \frac{12(2EI)}{(8)^3} + \frac{12EI}{(6)^3} = 0.1493EI$$

Ecuaciones de equilibrio.

$$M_B = M_B^I + K_B^1 \theta_B + K_B^2 \theta_D + K_B^3 \theta_F + K_B^4 \Delta = 0$$

$$M_D = M_D^I + K_D^1 \theta_B + K_D^2 \theta_D + K_D^3 \theta_F + K_D^4 \Delta = 0$$

$$M_F = M_F^I + K_F^1 \theta_B + K_F^2 \theta_D + K_F^3 \theta_F + K_F^4 \Delta = 0$$

$$V_1 = V_1^I + V_1^1 \theta_B + V_1^2 \theta_D + V_1^3 \theta_F + V_1^4 \Delta = 0$$

Obtención de valores.

• NUDO B •  $M_B^I = M_{BA}^I + M_{BD}^I = 0.000$  ;  $K_B^1 = K_{BA}^1 + K_{BD}^1 = 1.4166EI$

$K_B^2 = K_{BD}^2 = 0.333EI$  ;  $K_B^3 = 0.0$  ;  $K_B^4 = K_{BA}^4 = -0.1875EI$

METODO DE LAS RIGIDEZES

**NUDO D**  $M_D^I - M_{DB}^I + M_{DF}^I = -7.6666$  ;  $K_D^I = K_{DB}^I = 0.3333EI$   
 $K_D^2 = K_{DB}^2 + K_{DC}^2 + K_{DF}^2 = 2.0000EI$  ;  $K_D^3 = K_{DF}^3 = 0.5000EI$  ;  $K_D^4 = K_{DC}^4 = -0.1875EI$   
**NUDO F**  $M_F^I = M_{FD}^I = 10.6666$  ;  $K_F^I = 0.0$   
 $K_F^2 = K_{FD}^2 = 0.5000EI$  ;  $K_F^3 = K_{FD}^3 + K_{FE}^3 = 1.6666EI$  ;  $K_F^4 = K_{FE}^4 = -0.1666EI$   
**CASEZAL**  $V_1^I = -3.7500$  ;  $V_1^3 = -0.1875EI$  ;  $V_1^2 = -0.1875EI$   
 $V_1^3 = -0.1666EI$  ;  $V_1^4 = 0.1493EI$

Sustituyendo en las ecuaciones de equilibrio.

$$\begin{bmatrix} 1.4166 & 0.3333 & 0.000 & -0.1875 \\ 0.3333 & 2.0666 & 0.5000 & -0.1875 \\ 0.0000 & 0.5000 & 1.6666 & -0.1666 \\ -0.1875 & -0.1666 & -0.1666 & 0.1493 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_D \\ \theta_F \\ \Delta \end{bmatrix} =
 \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 7.6666 \\ -10.6666 \\ 3.7500 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es:

$$\theta_B = \frac{2.619}{EI}$$

$$\theta_D = \frac{2.246}{EI}$$

$$\theta_F = \frac{5.105}{EI}$$

$$\Delta = \frac{29.734}{EI}$$

Así, los momentos finales son.

$$M_{BA} = M_{CA}^I + K_{BA}^I \theta_B + K_{BA}^4 \Delta = -0.611$$

$$M_{ED} = M_{BD}^I + K_{BD}^I \theta_B + K_{BD}^2 \theta_D = 0.611$$

$$M_{DB} = M_{DB}^I + K_{DB}^I \theta_D + K_{DB}^2 \theta_B = 7.500$$

$$M_{DF} = M_{DF}^I + K_{DF}^I \theta_D + K_{DF}^3 \theta_F = -7.621$$

$$M_{FD} = M_{FD}^I + K_{FD}^I \theta_D + K_{FD}^3 \theta_F = 8.359$$

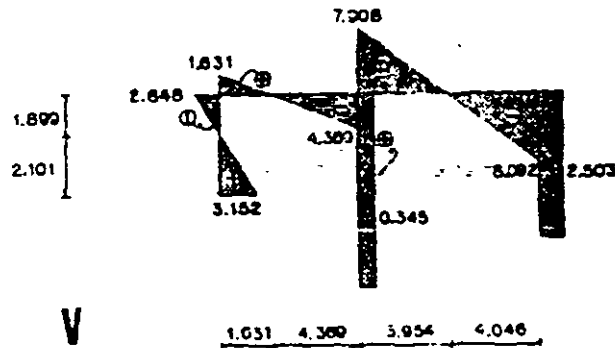
$$M_{DC} = K_{DC}^2 \theta_D + K_{DC}^4 \Delta = 0.021$$

$$M_{CD} = K_{CD}^2 \theta_D + K_{CD}^4 \Delta = -2.777$$

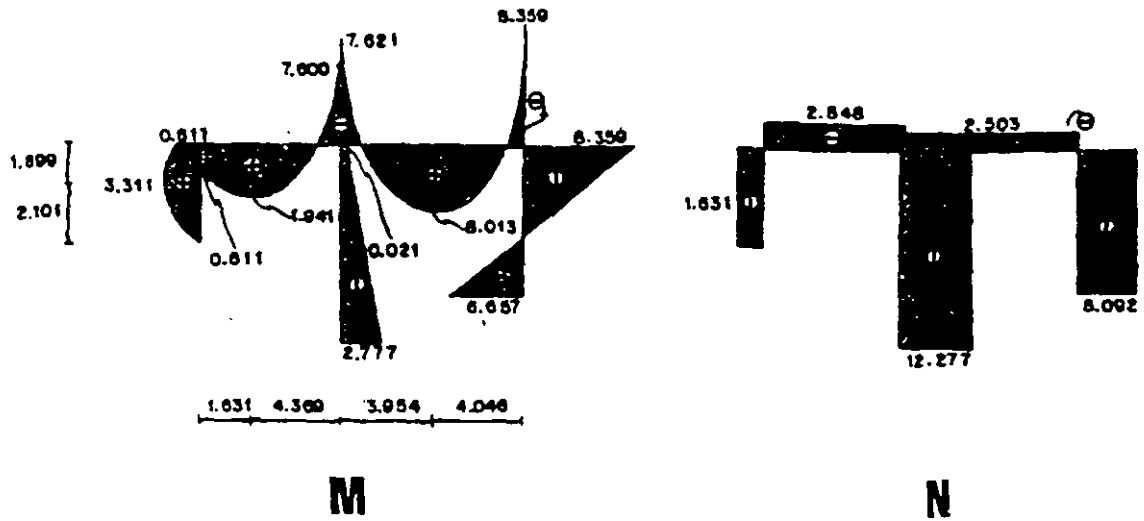
$$M_{FE} = K_{FE}^3 \theta_F + K_{FE}^4 \Delta = -8.359$$

$$M_{EF} = K_{EF}^3 \theta_F + K_{EF}^4 \Delta = -6.657$$

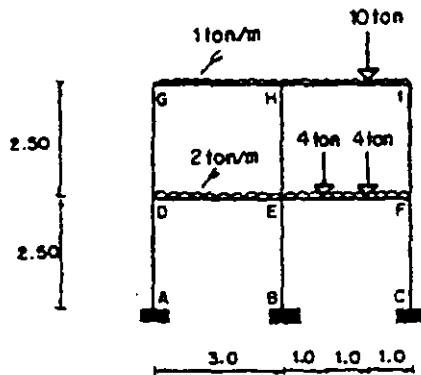
DIAGRAMAS



METODO DE LAS RIGIDEZES



6.15. Resolver el marco de dos niveles que se muestra enseguida:

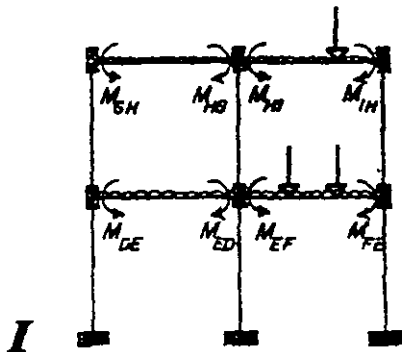


$EI = cte.$

Las incógnitas son

$\theta_B, \theta_H, \theta_I, \theta_D, \theta_E, \theta_F, \Delta_1, \text{ y } \Delta_2$

SOLUCION PARTICULAR



Momentos de empotramiento.

MARCO I

$$M_{GH} = -\frac{113^2}{12} = -0.750 = -M_{HG}$$

$$M_{HI} = -\frac{113^2}{12} - \frac{10(2)(11)^2}{13^2} = -2.972$$

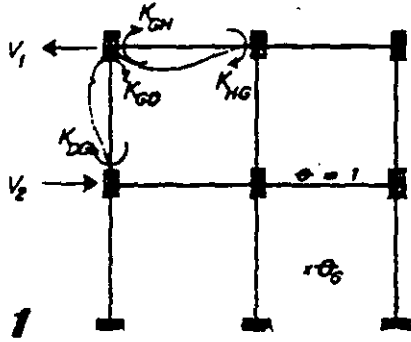
$$M_{IH} = -\frac{113^2}{12} + \frac{10(2)^2(11)}{13^2} = 5.194$$

$$M_{DE} = -\frac{2(3)^2}{12} = -1.500 = -M_{ED}$$

$$M_{EF} = -\frac{2(3)^2}{12} - \frac{4(11)(3-1)}{3} = -4.166 = -M_{FE}$$

METODO DE LAS RIGIDECES

SOLUCION COMPLEMENTARIA



Rigideces.

MARCO 1

$$K_{GD} = \frac{2EI}{2.5} = 0.800EI$$

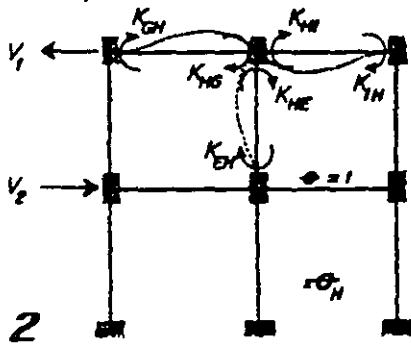
$$K_{GD} = \frac{4EI}{2.5} = 1.600EI$$

$$K_{GH} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{HG} = \frac{2EI}{3} = 0.666EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{(2.5)^2} = -0.960EI$$

$$V_2 = \frac{6EI}{(2.5)^2} = 0.960EI$$



MARCO 2

$$K_{GH} = \frac{2EI}{3} = 0.666EI$$

$$K_{HG} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{EH} = \frac{2EI}{2.5} = 0.800EI$$

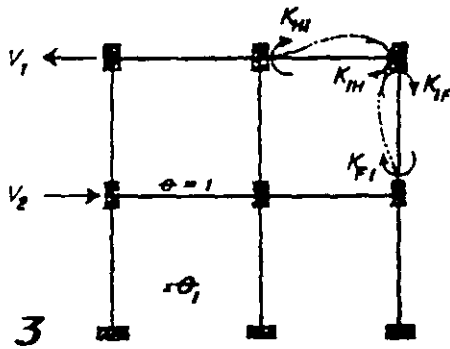
$$K_{HE} = \frac{4EI}{2.5} = 1.600EI$$

$$K_{HN} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{NH} = \frac{2EI}{3} = 0.666EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{(2.5)^2} = -0.960EI$$

$$V_2 = \frac{6EI}{(2.5)^2} = 0.960EI$$



MARCO 3

$$K_{HI} = \frac{2EI}{3} = 0.666EI$$

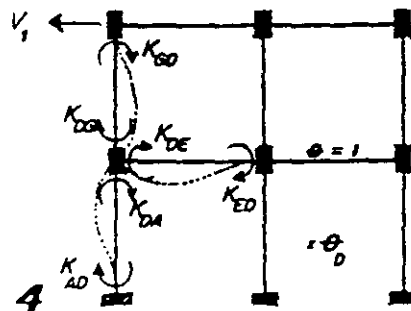
$$K_{IH} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{IF} = \frac{4EI}{2.5} = 1.600EI$$

$$K_{FI} = \frac{2EI}{2.5} = 0.800EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{(2.5)^2} = -0.960EI$$

$$V_2 = \frac{6EI}{(2.5)^2} = 0.960EI$$



MARCO 4

$$K_{AD} = \frac{2EI}{2.5} = 0.800EI$$

$$K_{DA} = \frac{4EI}{2.5} = 1.600EI$$

$$K_{DE} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{ED} = \frac{2EI}{3} = 0.666EI$$

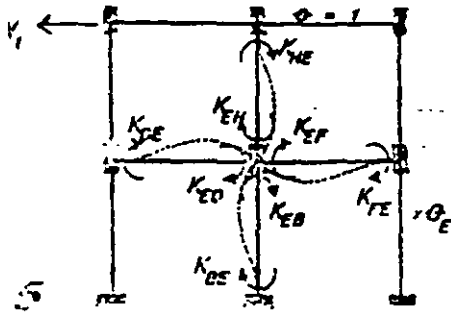
$$K_{DE} = \frac{4EI}{2.5} = 1.600EI$$

$$K_{ED} = \frac{2EI}{2.5} = 0.800EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{(2.5)^2} = -0.960EI$$

$$V_2 = 0.000$$

METODO DE LAS RIGIDEZES



MARCO 5

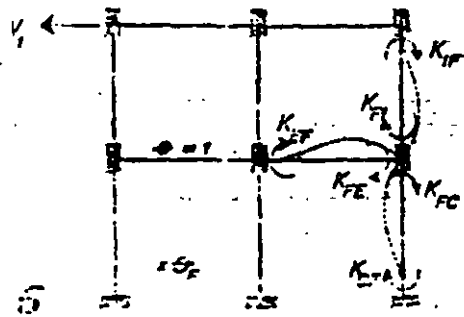
$$K_{DE} = \frac{2EI}{3} = 0.666EI \quad K_{ED} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{BE} = \frac{2EI}{2.5} = 0.800EI \quad K_{EB} = \frac{4EI}{2.5} = 1.600EI$$

$$K_{HE} = \frac{2EI}{2.5} = 0.800EI \quad K_{EH} = \frac{4EI}{2.5} = 1.600EI$$

$$K_{EF} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI \quad K_{FE} = \frac{2EI}{3} = 0.666EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{12.5^2} = -0.960EI \quad V_2 = 0.000$$



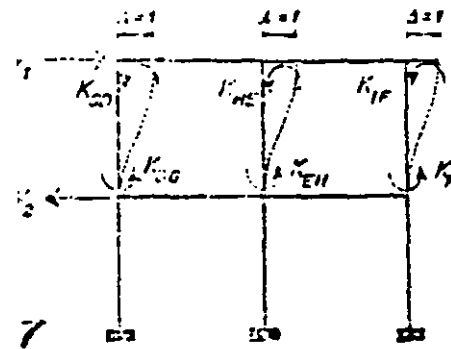
MARCO 6

$$K_{EF} = \frac{2EI}{3} = 0.666EI \quad K_{FE} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{GF} = \frac{2EI}{2.5} = 0.800EI \quad K_{FG} = \frac{4EI}{2.5} = 1.600EI$$

$$K_{IF} = \frac{2EI}{2.5} = 0.800EI \quad K_{FI} = \frac{4EI}{2.5} = 1.600EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{12.5^2} = -0.960EI \quad V_2 = 0.000$$

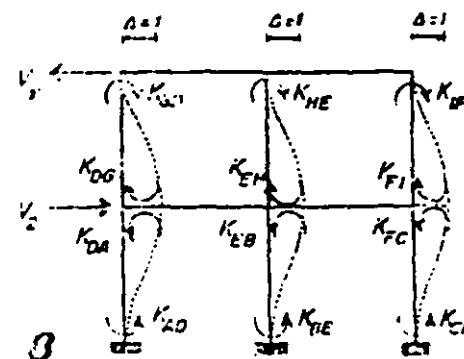


MARCO 7

$$K_{DG} = K_{GD} = K_{EH} = K_{HE} = K_{FI} = K_{IF} = -\frac{6EI}{12.5^2} = -0.960EI$$

$$V_1 = \frac{3(12EI)}{12.5^3} = 2.304EI$$

$$V_2 = -\frac{3(12EI)}{12.5^3} = -2.304EI$$



MARCO 8

$$K_{DG} = K_{GD} = K_{EH} = K_{HE} = K_{FI} = K_{IF} = \frac{6EI}{12.5^2} = 0.960EI$$

$$K_{AD} = K_{DA} = K_{BE} = K_{EB} = K_{CF} = K_{FC} = -\frac{6EI}{12.5^2} = -0.960EI$$

$$V_1 = -\frac{3(12EI)}{12.5^3} = -2.304EI$$

$$V_2 = \frac{6(12EI)}{12.5^3} = 4.608EI$$

METODO DE LAS RIGIDECES

Ecuaciones de equilibrio:

$$M_G = M_G^I + K_G^I \theta_G + K_G^2 \theta_H + K_G^3 \theta_I + K_G^4 \theta_D + K_G^5 \theta_E + K_G^6 \theta_F + K_G^7 \Delta_1 + K_G^8 \Delta_2 = 0$$

$$M_H = M_H^I + K_H^1 \theta_G + K_H^2 \theta_H + K_H^3 \theta_I + K_H^4 \theta_D + K_H^5 \theta_E + K_H^6 \theta_F + K_H^7 \Delta_1 + K_H^8 \Delta_2 = 0$$

$$M_I = M_I^I + K_I^1 \theta_G + K_I^2 \theta_H + K_I^3 \theta_I + K_I^4 \theta_D + K_I^5 \theta_E + K_I^6 \theta_F + K_I^7 \Delta_1 + K_I^8 \Delta_2 = 0$$

$$M_D = M_D^I + K_D^1 \theta_G + K_D^2 \theta_H + K_D^3 \theta_I + K_D^4 \theta_D + K_D^5 \theta_E + K_D^6 \theta_F + K_D^7 \Delta_1 + K_D^8 \Delta_2 = 0$$

$$M_E = M_E^I + K_E^1 \theta_G + K_E^2 \theta_H + K_E^3 \theta_I + K_E^4 \theta_D + K_E^5 \theta_E + K_E^6 \theta_F + K_E^7 \Delta_1 + K_E^8 \Delta_2 = 0$$

$$M_F = M_F^I + K_F^1 \theta_G + K_F^2 \theta_H + K_F^3 \theta_I + K_F^4 \theta_D + K_F^5 \theta_E + K_F^6 \theta_F + K_F^7 \Delta_1 + K_F^8 \Delta_2 = 0$$

$$V_1 = V_1^I + V_1^1 \theta_G + V_1^2 \theta_H + V_1^3 \theta_I + V_1^4 \theta_D + V_1^5 \theta_E + V_1^6 \theta_F + V_1^7 \Delta_1 + V_1^8 \Delta_2 = 0$$

$$V_2 = V_2^I + V_2^1 \theta_G + V_2^2 \theta_H + V_2^3 \theta_I + V_2^4 \theta_D + V_2^5 \theta_E + V_2^6 \theta_F + V_2^7 \Delta_1 + V_2^8 \Delta_2 = 0$$

Obtención de valores.

● NUDO G ●  $M_G^I = M_{GH}^I = -0.750$  ;  $K_G^1 = K_{GD}^1 + K_{GH}^1 = 2.933EI$   
 $K_G^2 = K_{GH}^2 = 0.666EI$  ;  $K_G^3 = 0.0$  ;  $K_G^4 = K_{GD}^4 = 0.800EI$   
 $K_G^5 = 0.0$  ;  $K_G^6 = 0.0$  ;  $K_G^7 = K_{GD}^7 = -0.960EI$  ;  $K_G^8 = K_D^8 = 0.960EI$

● NUDO H ●  $M_H^I = M_{HG}^I + M_{HI}^I = -2.222$  ;  $K_H^1 = K_{HG}^1 = 0.666EI$   
 $K_H^2 = K_{HE}^2 + K_{HG}^2 + K_{HI}^2 = 4.266EI$  ;  $K_H^3 = K_{HI}^3 = 0.666EI$  ;  $K_H^4 = 0.0$   
 $K_H^5 = K_{HE}^5 = 0.800EI$  ;  $K_H^6 = 0.0$  ;  $K_H^7 = K_{HE}^7 = -0.960EI$  ;  $K_H^8 = K_{HE}^8 = 0.960EI$

● NUDO I ●  $M_I^I = M_{IH}^I = 5.194$  ;  $K_I^1 = 0.0$  ;  $K_I^2 = K_{IH}^2 = 0.666EI$   
 $K_I^3 = K_{IF}^3 + K_{IH}^3 = 2.933EI$  ;  $K_I^4 = 0.0$  ;  $K_I^5 = 0.0$   
 $K_I^6 = K_{IF}^6 = 0.800EI$  ;  $K_I^7 = K_{IF}^7 = -0.960EI$  ;  $K_I^8 = K_{IF}^8 = 0.960EI$

● NUDO D ●  $M_D^I = M_{DE}^I = -1.500$  ;  $K_D^1 = K_{DG}^1 = 0.800EI$  ;  $K_D^2 = 0.0$   
 $K_D^3 = 0.0$  ;  $K_D^4 = K_{DA}^4 + K_{DE}^4 + K_{DG}^4 = 4.533EI$  ;  $K_D^5 = K_{DE}^5 = 0.666EI$   
 $K_D^6 = 0.0$  ;  $K_D^7 = K_{DG}^7 = -0.960EI$  ;  $K_D^8 = K_{DA}^8 + K_{DG}^8 = 0.0$

● NUDO E ●  $M_E^I = M_{ED}^I + M_{EF}^I = -2.667$  ;  $K_E^1 = 0.0$  ;  $K_E^2 = K_{EH}^2 = 0.800EI$   
 $K_E^3 = 0.0$  ;  $K_E^4 = K_{ED}^4 = 0.666EI$  ;  $K_E^5 = K_{EB}^5 + K_{ED}^5 + K_{EF}^5 + K_{EH}^5 = 5.866EI$



METODO DE LAS RIGIDECES

$$K_E^0 = K_{EF}^0 = 0.666EI ; K_E^7 = K_{EH}^7 = -0.960EI ; K_E^8 = K_{EB}^8 + K_{EH}^8 = 0.0$$

● NUDO F ●  $M_F^1 = M_{FE}^1 = 4.167 ; K_F^1 = 0.0 ; K_F^2 = 0.0 ; K_F^3 = K_{FI}^3 = 0.80EI$

$$K_F^4 = 0.0 ; K_F^5 = K_{FE}^5 = 0.666EI ; K_F^6 = K_{FC}^6 + K_{FE}^6 + K_{FI}^6 = 4.533EI$$

$$K_F^7 = K_{FI}^7 = -0.960EI ; K_F^8 = 0.0$$

● CABEZAL 1 ●  
(superior)

$$V_1^1 = 0.000 ; V_1^7 = -0.960EI ; V_1^8 = -0.960EI$$

$$V_1^3 = -0.960EI ; V_1^4 = -0.960EI ; V_1^5 = -0.960EI$$

$$V_1^6 = -0.960EI ; V_1^7 = 2.304EI ; V_1^8 = -2.304EI$$

● CABEZAL 2 ●  
(inferior)

$$V_2^1 = 0.000 ; V_2^7 = 0.960EI ; V_2^8 = 0.960EI$$

$$V_2^3 = 0.960EI ; V_2^4 = 0.000 ; V_2^5 = 0.000$$

$$V_2^6 = 0.000 ; V_2^7 = -2.304EI ; V_2^8 = 4.608EI$$

Sustituyendo valores:

2.533	0.666	0.000	0.800	0.000	0.000	-0.960	0.960	$\theta_G$	=	0.750
0.566	4.266	0.666	0.000	0.800	0.000	-0.960	0.960	$\theta_H$		2.222
0.000	0.666	2.933	0.000	0.000	0.800	-0.960	0.960	$\theta_I$		-5.194
0.800	0.000	0.000	4.533	0.666	0.000	-0.960	0.000	$\theta_D$		1.500
0.000	0.800	0.000	0.666	5.866	0.666	-0.960	0.000	$\theta_E$		2.667
0.000	0.000	0.800	0.000	0.666	4.533	-0.960	0.000	$\theta_F$		-4.167
-0.960	-0.960	-0.960	-0.960	-0.960	-0.960	2.304	-2.304	$\Delta_1$		0.000
0.960	0.960	0.960	0.000	0.000	0.000	-2.304	4.608	$\Delta_2$		0.000

Resolviendo el sistema se tiene:

$$\theta_G = \frac{0.179}{EI} ; \theta_H = \frac{0.618}{EI} ; \theta_I = \frac{-1.950}{EI} ; \theta_D = \frac{0.112}{EI}$$

$$\theta_E = \frac{0.291}{EI} ; \theta_F = \frac{-0.820}{EI} ; \Delta_1 = \frac{-0.983}{EI} ; \Delta_2 = \frac{-0.177}{EI}$$

Así, los momentos finales son:

$$M_{AD} = K_{AD}^4 \theta_D + K_{AD}^8 \Delta_2 = 0.259$$

$$M_{DA} = K_{DA}^4 \theta_D + K_{DA}^8 \Delta_2 = 0.349$$

$$M_{DE} = M_{DE}^1 + K_{DE}^4 \theta_D + K_{DE}^5 \theta_E = -1.157$$

$$M_{ED} = M_{ED}^1 + K_{ED}^4 \theta_D + K_{ED}^5 \theta_E = 1.983$$

$$M_{DG} = K_{DG}^1 \theta_G + K_{DG}^4 \theta_D + K_{DG}^7 \Delta_1 + K_{DG}^8 \Delta_2 = 0.810$$

$$M_{GD} = K_{GD}^1 \theta_G + K_{GD}^4 \theta_D + K_{GD}^7 \Delta_1 + K_{GD}^8 \Delta_2 = -0.577$$

METODO DE LAS RIGIDEZES

$$M_{GH} = M_{GH}^I + K_{GH}^I \theta_G + K_{GH}^E \theta_H = -0.577$$

$$M_{HE} = K_{HE}^2 \theta_H + K_{HE}^3 \theta_E + K_{HE}^7 \Delta_1 + K_{HE}^8 \Delta_2 = 1.995$$

$$M_{HI} = M_{HI}^I + K_{HI}^2 \theta_H + K_{HI}^3 \theta_I = -3.448$$

$$M_{IF} = K_{IF}^2 \theta_I + K_{IF}^6 \theta_F + K_{IF}^7 \Delta_1 + K_{IF}^8 \Delta_2 = -3.007$$

$$M_{BE} = K_{BE}^5 \theta_E + K_{BE}^8 \Delta_2 = 0.403$$

$$M_{EF} = M_{EF}^I + K_{EF}^5 \theta_E + K_{EF}^6 \theta_F = -4.330$$

$$M_{FC} = K_{FC}^6 \theta_F + K_{FC}^8 \Delta_2 = -1.152$$

$$M_{HG} = M_{HG}^I + K_{HG}^1 \theta_G + K_{HG}^2 \theta_H = 1.455$$

$$M_{EH} = K_{EH}^2 \theta_H + K_{EH}^3 \theta_E + K_{EH}^7 \Delta_1 + K_{EH}^8 \Delta_2 = 1.734$$

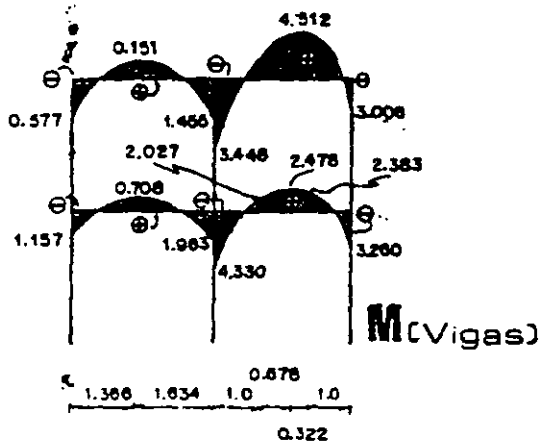
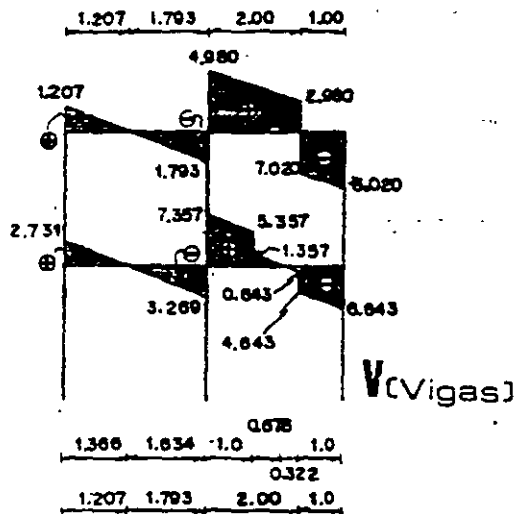
$$M_{IH} = M_{IH}^I + K_{IH}^2 \theta_H + K_{IH}^3 \theta_I = 3.008$$

$$M_{FI} = K_{FI}^3 \theta_I + K_{FI}^6 \theta_F + K_{FI}^7 \Delta_1 + K_{FI}^8 \Delta_2 = 2.108$$

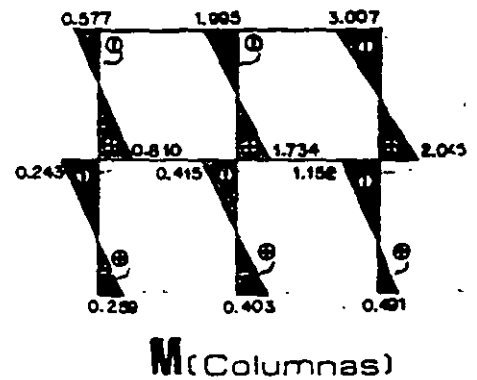
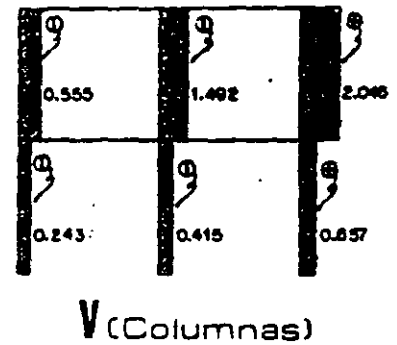
$$M_{EB} = K_{EB}^5 \theta_E + K_{EB}^8 \Delta_2 = 0.835$$

$$M_{FE} = K_{FE}^5 \theta_E + K_{FE}^6 \theta_F + M_{FE}^I = 3.260$$

$$M_{CF} = K_{CF}^6 \theta_F + K_{CF}^8 \Delta_2 = -0.491$$

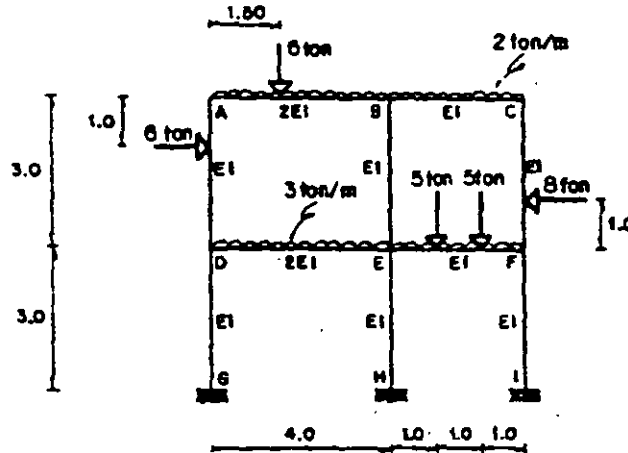


DIAGRAMAS



METODO DE LAS RIGIDECES

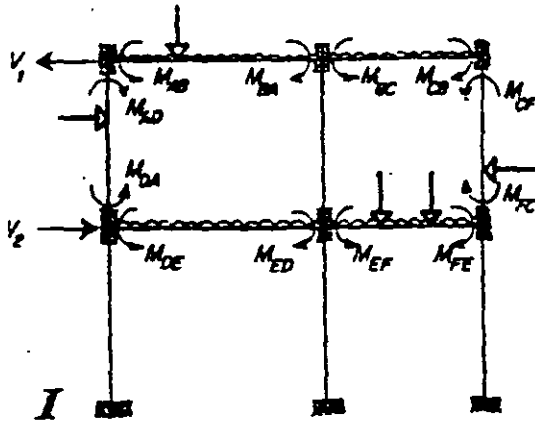
6.16. Determinar los momentos en los vértices del marco hiperestático.



Las incógnitas son

$$\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D, \theta_E, \theta_F, \Delta_1, \text{ y } \Delta_2$$

SOLUCION PARTICULAR



Momentos de emparramiento.

MARCO I

$$M_{AB} = \frac{2(4)^2}{12} - \frac{6(1.5)(12.5)}{14^2} = -0.182$$

$$M_{BA} = \frac{2(4)^2}{12} + \frac{6(1.5)^2(12.5)}{14^2} = 4.776$$

$$M_{BC} = \frac{2(3)^2}{12} = -1.500 = -M_{CB}$$

$$M_{DE} = \frac{3(4)^2}{12} = -4.000 = -M_{ED}$$

$$M_{EF} = \frac{3(3)^2}{12} - \frac{5(1)(3-1)}{3} = -5.583 = -M_{FE}$$

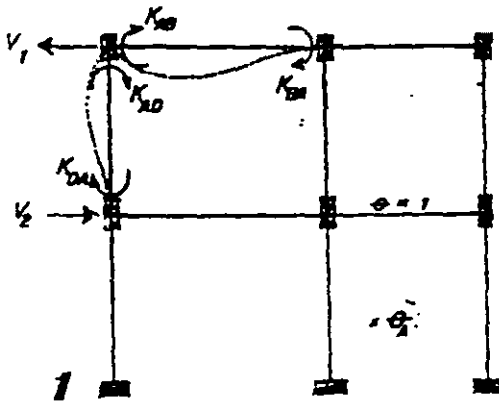
$$M_{AD} = \frac{6(2)^2(11)}{13^2} = 2.007$$

$$M_{DA} = \frac{6(2)(11)^2}{13^2} = 1.333$$

$$M_{CF} = \frac{8(2)(11)^2}{13^2} = -1.778$$

$$M_{FC} = \frac{8(2)^2(11)}{13^2} = -3.555$$

SOLUCION COMPLEMENTARIA



Rigideces.

MARCO 1

$$K_{AB} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_{BA} = \frac{2(2EI)}{4} = EI$$

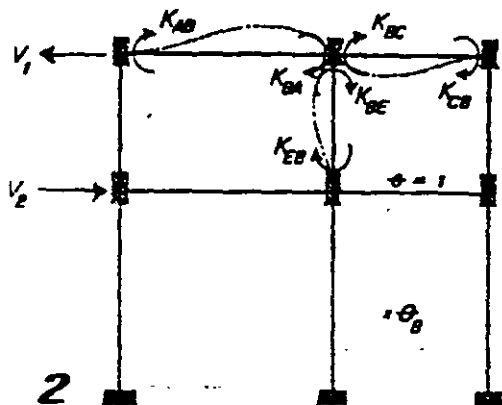
$$K_{AD} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{DA} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI$$

METODO DE LAS RIGIDECES

$$V_1 = -\frac{6EI}{(3)^2} = -0.667EI$$

$$V_2 = \frac{6EI}{(3)^2} = 0.667EI$$



MARCO 2

$$K_{AB} = \frac{2(2EI)}{4} = EI$$

$$K_{BA} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_{BC} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

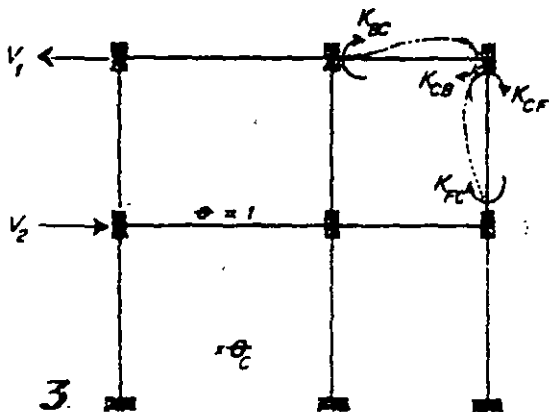
$$K_{CB} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI$$

$$K_{BE} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{EB} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{(3)^2} = -0.667EI$$

$$V_2 = \frac{6EI}{(3)^2} = 0.667EI$$



MARCO 3

$$K_{BC} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI$$

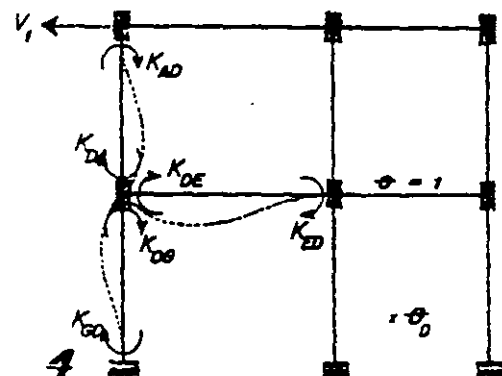
$$K_{CB} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{CD} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{DC} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{(3)^2} = -0.667EI$$

$$V_2 = \frac{6EI}{(3)^2} = 0.667EI$$



MARCO 4

$$K_{AD} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI$$

$$K_{DA} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{DE} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_{ED} = \frac{2(2EI)}{4} = EI$$

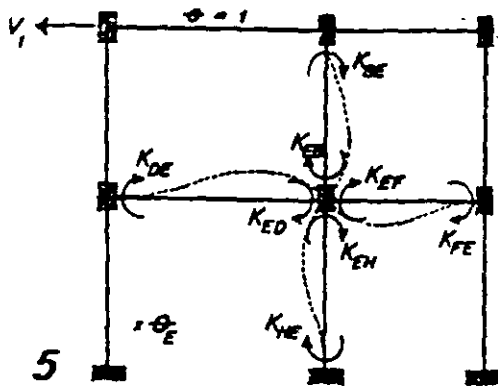
$$K_{DB} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{BD} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{(3)^2} = -0.667EI$$

$$V_2 = 0.000$$

METODO DE LAS RIGIDEZES



MARCO 5

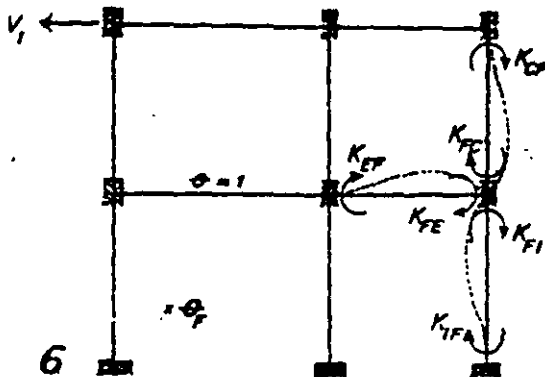
$$K_{DE} = \frac{2(2EI)}{4} = EI \quad K_{ED} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_{EF} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI \quad K_{FE} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI$$

$$K_{BE} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI \quad K_{EB} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{EN} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI \quad K_{NE} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{(3)^2} = -0.667EI \quad V_2 = 0.000$$



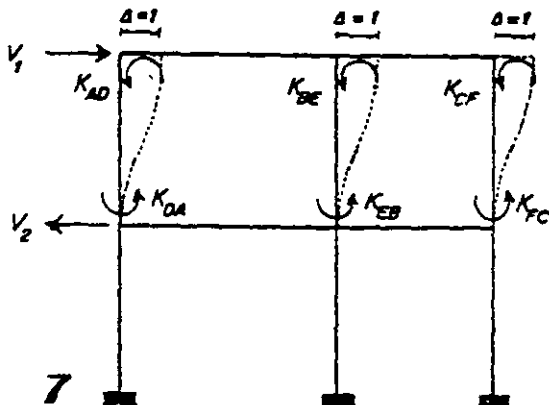
MARCO 6

$$K_{EF} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI \quad K_{FE} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{CF} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI \quad K_{FC} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{FI} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI \quad K_{IF} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI$$

$$V_1 = -\frac{6EI}{(3)^2} = -0.667EI \quad V_2 = 0.000$$

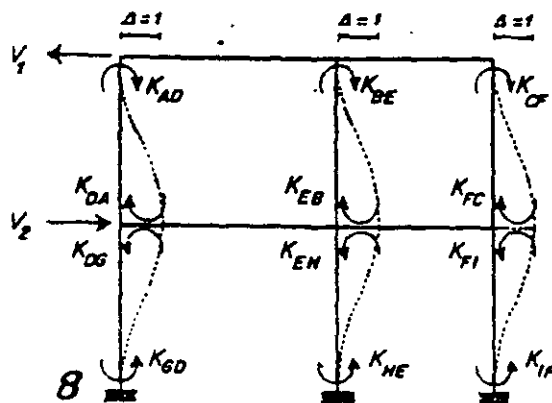


MARCO 7

$$K_{AD} = K_{DA} = K_{BE} = K_{EB} = K_{CF} = K_{FC} = -\frac{6EI}{(3)^2} = -0.667EI$$

$$V_1 = \frac{3(12EI)}{(3)^3} = 1.333EI$$

$$V_2 = -\frac{3(12EI)}{(3)^3} = -1.333EI$$



MARCO 8

$$K_{AD} = K_{DA} = K_{BE} = K_{EB} = K_{CF} = K_{FC} = \frac{6EI}{(3)^2} = 0.667EI$$

$$K_{DG} = K_{GD} = K_{EH} = K_{HE} = K_{FI} = K_{IF} = -\frac{6EI}{(3)^2} = -0.667EI$$

$$V_1 = -\frac{3(12EI)}{(3)^3} = -1.333EI$$

$$V_2 = \frac{6(12EI)}{(3)^3} = 2.667EI$$

## METODO DE LAS RIGIDEZES

Ecuaciones de equilibrio.

$$M_A = M_A^I + K_A^1 \theta_A + K_A^2 \theta_B + K_A^3 \theta_C + K_A^4 \theta_D + K_A^5 \theta_E + K_A^6 \theta_F + K_A^7 \Delta_1 + K_A^8 \Delta_2 = 0$$

$$M_B = M_B^I + K_B^1 \theta_A + K_B^2 \theta_B + K_B^3 \theta_C + K_B^4 \theta_D + K_B^5 \theta_E + K_B^6 \theta_F + K_B^7 \Delta_1 + K_B^8 \Delta_2 = 0$$

$$M_C = M_C^I + K_C^1 \theta_A + K_C^2 \theta_B + K_C^3 \theta_C + K_C^4 \theta_D + K_C^5 \theta_E + K_C^6 \theta_F + K_C^7 \Delta_1 + K_C^8 \Delta_2 = 0$$

$$M_D = M_D^I + K_D^1 \theta_A + K_D^2 \theta_B + K_D^3 \theta_C + K_D^4 \theta_D + K_D^5 \theta_E + K_D^6 \theta_F + K_D^7 \Delta_1 + K_D^8 \Delta_2 = 0$$

$$M_E = M_E^I + K_E^1 \theta_A + K_E^2 \theta_B + K_E^3 \theta_C + K_E^4 \theta_D + K_E^5 \theta_E + K_E^6 \theta_F + K_E^7 \Delta_1 + K_E^8 \Delta_2 = 0$$

$$M_F = M_F^I + K_F^1 \theta_A + K_F^2 \theta_B + K_F^3 \theta_C + K_F^4 \theta_D + K_F^5 \theta_E + K_F^6 \theta_F + K_F^7 \Delta_1 + K_F^8 \Delta_2 = 0$$

$$V_1 = V_1^I + V_1^1 \theta_A + V_1^2 \theta_B + V_1^3 \theta_C + V_1^4 \theta_D + V_1^5 \theta_E + V_1^6 \theta_F + V_1^7 \Delta_1 + V_1^8 \Delta_2 = 0$$

$$V_2 = V_2^I + V_2^1 \theta_A + V_2^2 \theta_B + V_2^3 \theta_C + V_2^4 \theta_D + V_2^5 \theta_E + V_2^6 \theta_F + V_2^7 \Delta_1 + V_2^8 \Delta_2 = 0$$

Obtención de valores.

● NUDO A ●  $M_A^I - M_{AB}^I + M_{AD}^I = -3.515$  ;  $K_A^1 - K_{AB}^1 + K_{AD}^1 = 3.333EI$   
 $K_A^2 - K_{AB}^2 = EI$  ;  $K_A^3 = 0.0$  ;  $K_A^4 - K_{AD}^4 = 0.667EI$  ;  $K_A^5 = 0.0$   
 $K_A^6 = 0.0$  ;  $K_A^7 - K_{AD}^7 = -0.667EI$  ;  $K_A^8 - K_{AD}^8 = 0.667EI$

● NUDO B ●  $M_B^I - M_{BA}^I + M_{BC}^I = 3.278$  ;  $K_B^1 - K_{BA}^1 = EI$   
 $K_B^2 - K_{BA}^2 + K_{BC}^2 + K_{BE}^2 = 4.666EI$  ;  $K_B^3 - K_{BC}^3 = 0.667EI$  ;  $K_B^4 = 0.0$   
 $K_B^5 - K_{BE}^5 = 0.667EI$  ;  $K_B^6 = 0.0$  ;  $K_B^7 - K_{BE}^7 = -0.667EI$  ;  $K_B^8 - K_{BE}^8 = 0.667EI$

● NUDO C ●  $M_C^I - M_{CB}^I + M_{CF}^I = -0.278$  ;  $K_C^1 = 0.0$  ;  $K_C^2 - K_{CB}^2 = 0.667EI$   
 $K_C^3 - K_{CB}^3 + K_{CF}^3 = 2.666EI$  ;  $K_C^4 = 0.0$  ;  $K_C^5 = 0.0$   
 $K_C^6 - K_{CF}^6 = 0.667EI$  ;  $K_C^7 - K_{CF}^7 = -0.667EI$  ;  $K_C^8 - K_{CF}^8 = 0.667EI$

● NUDO D ●  $M_D^I - M_{DA}^I + M_{DE}^I = -5.333$  ;  $K_D^1 - K_{DA}^1 = 0.667EI$  ;  $K_D^2 = 0.0$   
 $K_D^3 = 0.0$  ;  $K_D^4 - K_{DA}^4 + K_{DE}^4 + K_{DG}^4 = 4.666EI$  ;  $K_D^5 - K_{DE}^5 = EI$   
 $K_D^6 = 0.0$  ;  $K_D^7 - K_{DA}^7 = -0.667EI$  ;  $K_D^8 - K_{DA}^8 + K_{DG}^8 = 0.0$

● NUDO E ●  $M_E^I - M_{ED}^I + M_{EF}^I = -1.593$  ;  $K_E^1 = 0.0$  ;  $K_E^2 - K_{EB}^2 = 0.667EI$   
 $K_E^3 = 0.0$  ;  $K_E^4 - K_{ED}^4 = EI$  ;  $K_E^5 - K_{EB}^5 + K_{ED}^5 + K_{EF}^5 + K_{EH}^5 = 6EI$   
 $K_E^6 - K_{EF}^6 = 0.667EI$  ;  $K_E^7 - K_{EB}^7 = -0.667EI$  ;  $K_E^8 - K_{EB}^8 + K_{EH}^8 = 0.0$

METODO DE LAS RIGIDECES

●NUDO F●  $M_F^I = M_{FE}^I + M_{FC}^I = -0.138$  ;  $K_F^I = 0.0$  ;  $K_F^2 = 0.0$   
 $K_F^3 = K_{FC}^3 = 0.667EI$  ;  $K_F^5 = K_{FE}^5 = 0.667EI$  ;  $K_F^4 = 0.0$   
 $K_F^6 = K_{FC}^6 + K_{FE}^6 + K_{FI}^6 = 4EI$  ;  $K_F^7 = K_{FC}^7 = -0.667EI$  ;  $K_F^8 = K_{FC}^8 + K_{FI}^8 = 0.0$

●CABEZAL 1● (superior)  $V_1^I = -2.370$  ;  $V_1^I = -0.667EI$  ;  $V_1^2 = -0.667EI$   
 $V_1^3 = -0.667EI$  ;  $V_1^4 = -0.667EI$  ;  $V_1^5 = -0.667EI$   
 $V_1^6 = -0.667EI$  ;  $V_1^7 = 1.333EI$  ;  $V_1^8 = -1.333EI$

●CABEZAL 2● (inferior)  $V_2^I = 4.370$  ;  $V_2^I = 0.667EI$  ;  $V_2^2 = 0.667EI$   
 $V_2^3 = 0.667EI$  ;  $V_2^4 = 0.000$  ;  $V_2^5 = 0.000$   
 $V_2^6 = 0.000$  ;  $V_2^7 = -1.333EI$  ;  $V_2^8 = 2.667EI$

Sustituyendo valores en las ecuaciones.

3.323	1.000	0.000	0.667	0.000	0.000	-0.667	0.667	$\theta_A$	3.515
1.000	4.668	0.567	2.000	0.567	0.000	-0.667	0.667	$\theta_B$	-3.276
0.000	0.667	2.668	0.000	0.000	0.667	-0.667	0.667	$\theta_C$	0.278
0.667	0.000	0.000	4.668	1.000	0.000	-0.667	0.000	$\theta_D$	5.333
0.000	0.667	0.000	1.000	6.000	0.667	-0.667	0.000	$\theta_E$	1.583
0.000	0.000	0.667	0.000	0.667	4.000	-0.667	0.000	$\theta_F$	-0.138
-0.667	-0.667	-0.667	-0.667	-0.667	-0.667	1.333	-1.333	$\Delta_1$	2.370
0.667	0.667	0.667	0.000	0.000	0.000	-1.333	2.667	$\Delta_2$	-4.370

Resolviendo el sistema matricial.

$\theta_A = \frac{1.658}{EI}$  ;  $\theta_B = \frac{1.041}{EI}$  ;  $\theta_C = \frac{1.581}{EI}$  ;  $\theta_D = \frac{0.804}{EI}$   
 $\theta_E = \frac{0.549}{EI}$  ;  $\theta_F = \frac{2.623}{EI}$  ;  $\Delta_1 = \frac{0.106}{EI}$  ;  $\Delta_2 = \frac{2.136}{EI}$

Dando como resultado los momentos finales siguientes.

$M_{AB} = M_{AB}^I + K_{AB}^I \theta_A + K_{AB}^2 \theta_B = -3.911$  ;  $M_{BA} = M_{BA}^I + K_{BA}^1 \theta_A + K_{BA}^2 \theta_B = 4.350$   
 $M_{BC} = M_{BC}^I + K_{BC}^2 \theta_B + K_{BC}^3 \theta_C = -1.833$  ;  $M_{CB} = M_{CB}^I + K_{CB}^2 \theta_B + K_{CB}^3 \theta_C = 2.913$   
 $M_{DE} = M_{DE}^I + K_{DE}^4 \theta_D + K_{DE}^5 \theta_E = -1.843$  ;  $M_{ED} = M_{ED}^I + K_{ED}^4 \theta_D + K_{ED}^5 \theta_E = 5.902$

# Método de Cross

## 7.1. INTRODUCCION

El método de Hardy Cross es conocido también como de la distribución de momentos, debido a que en la solución del sistema de ecuaciones se utiliza el procedimiento de relajaciones. Desde su principio en que fue entregado a la profesión en las Transacciones de 1932 de la American Society of Civil Engineers, en un artículo titulado "Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments", ha sido el método más popular de uso manual en la solución de estructuras indeterminadas.

Puede aplicarse a piezas de sección transversal constante o variable, así como también para estructuras de eje recto o curvo. El procedimiento es usado para un número cualquiera de nudos, equilibrando momentos de nudo en nudo, primero para giros y después para desplazamientos lineales, hasta obtener la precisión deseada.

## 7.2. CONCEPTOS BASICOS

La aplicación del método requiere de los siguientes conceptos.



## METODO DE CROSS

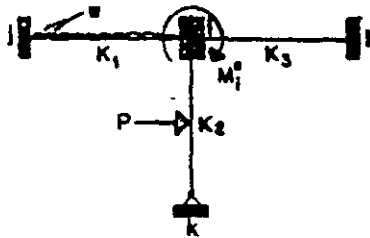
### 7.2.1. CONVENCION DE SIGNOS PARA LA DESIGNACION DE MOMENTOS

La convención de signos es que cualquier momento de flexión de nudo sobre barra se considerará positivo cuando tiene el sentido de las manecillas de un reloj.

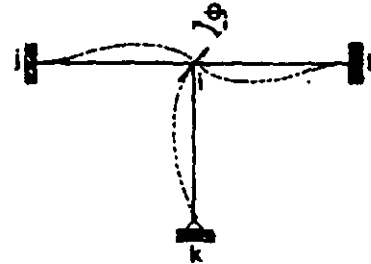
### 7.2.2. FACTOR DE DISTRIBUCION

Para la comprensión de este concepto se hace referencia a la Fig. 7.1. Empotrando el nudo  $i$  se obtienen los momentos de empotramiento en las barras de la estructura, la suma de éstos en dicho nudo ocasiona un momento de desequilibrio  $M_i^0$ , el cual se equilibra en cada miembro en proporción a su capacidad para resistir la rotación de su extremo en  $i$ . Cada miembro pues, habrá de tomar una proporción del momento de desequilibrio, para satisfacer la condición de que

$\Sigma M = 0$  en el nudo  $i$ . O sea:



a) Momento de desequilibrio en el nudo  $i$ .



b) Giro del nudo  $i$ .

Fig. 7.1

$$M_{ij} = \frac{K_j}{K_i} M_i^0 \quad ; \quad M_{ik} = \frac{K_k}{K_i} M_i^0 \quad ; \quad M_{il} = \frac{K_l}{K_i} M_i^0$$

en donde  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  son las rigideces angulares de cada barra y  $K_i$  se denomina como la rigidez del nudo  $i$  y es la suma de las rigideces angulares de las barras que concurren a dicho nudo.

Resulta entonces la siguiente definición:

"El factor de distribución para cualquier miembro de una junta es igual a la rigidez del miembro dividida por la suma de las rigideces de todos los miembros que concurren a dicha junta".

## METODO DE CROSS

Es conveniente hacer notar que la suma de los factores de distribución en cualquier nudo debe ser igual a la unidad.

### 7.2.3. FACTOR DE TRANSPORTE

La consideración del marco deformado de la Fig. 7.1.b hace aparente que, cuando se desarrolla un momento resistente en un extremo de un miembro en  $i$ , entonces se induce también un momento en el extremo opuesto de ese miembro. El momento inducido en el extremo fijo de cualquier miembro, cuando gira el extremo opuesto, tiene siempre una relación definida con el momento resistente desarrollado en el extremo que gira. Por lo que se puede establecer:

"El factor de transporte es el factor por el cual debe multiplicarse el momento desarrollado en el extremo girado (siendo el otro extremo fijo) para dar el momento inducido en el extremo opuesto fijo".

Los momentos inducidos solo pueden existir si se evita la rotación de las juntas.

### 7.3. ESTRUCTURAS SIN DESPLAZAMIENTOS LINEALES

Considérese la estructura de la Fig. 7.2 en la que no existe desplazamiento lineal, utilizando el principio de superposición se tiene:

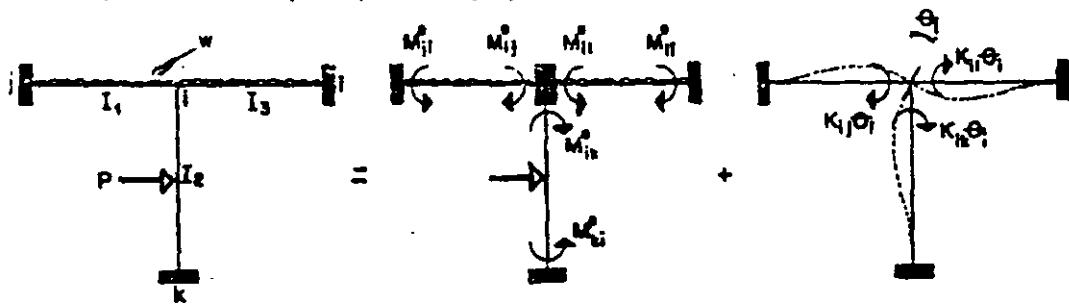


Fig. 7.2.

Basándose en la Fig. 7.2. los momentos en las barras que concurren en el nudo  $i$  son:

METODO DE CROSS

$$\begin{aligned}
 M_{ij} &= M_{ij}^e + K_{ij} \phi_i \\
 M_{ik} &= M_{ik}^e + K_{ik} \phi_i \quad \dots \dots \dots (7.1) \\
 M_{il} &= M_{il}^e + K_{il} \phi_i
 \end{aligned}$$

La condición de equilibrio que debe satisfacerse en el nudo i está dada por la ecuación:

$$\begin{aligned}
 M_i &= M_{ij} + M_{ik} + M_{il} \\
 \text{es decir} \\
 M_i^e + K_i \phi_i &= 0 \quad \therefore \phi_i = \frac{M_i^e}{K_i} \quad \dots \dots \dots (7.2)
 \end{aligned}$$

en donde

$M_i^e$  = momento de desequilibrio del nudo i.

$K_i$  = rigidez angular del nudo i, o sea la suma de las rigideces angulares de los miembros que concurren a dicho nudo.

Reemplazando (7.2.) en (7.1.):

$$\begin{aligned}
 M_{ij} &= M_{ij}^e + \frac{K_{ij}}{K_i} M_i^e \\
 M_{ik} &= M_{ik}^e + \frac{K_{ik}}{K_i} M_i^e \quad \dots \dots \dots (7.3) \\
 M_{il} &= M_{il}^e + \frac{K_{il}}{K_i} M_i^e
 \end{aligned}$$

si ahora en (7.3.) hacemos:

$$d_{ij} = \frac{K_{ij}}{K_i}$$

## METODO DE CROSS

$$d_{ik} = \frac{K_{ik}}{K_i}$$

$$d_{il} = \frac{K_{il}}{K_i}$$

que son los factores de distribución de los miembros que llegan al nudo i.

Si sustituimos los factores de distribución en (7.3.) resultan los momentos finales de las barras que concurren al nudo i, ésto es:

$$M_{ij} = M_{ij}^e + d_{ij} M_i^e$$

$$M_{ik} = M_{ik}^e + d_{ik} M_i^e$$

$$M_{il} = M_{il}^e + d_{il} M_i^e$$

y los momentos finales en los extremos opuestos de las barras serán:

$$M_{ji} = M_{ji}^e + t_{ij} d_{ij} M_i^e$$

$$M_{ki} = M_{ki}^e + t_{ik} d_{ik} M_i^e$$

$$M_{li} = M_{li}^e + t_{il} d_{il} M_i^e$$

en donde  $t_{ij}$ ,  $t_{ik}$  y  $t_{il}$  son los factores de transporte de los miembros que llegan al nudo i.

Sintetizando el proceso anterior el método de Cross puede aplicarse mediante las siguientes etapas:

- 1) Se empotran los nudos donde concurren dos o más barras y se calculan los momentos correspondientes en cada uno de los extremos de las mismas.

## METODO DE CROSS

- 2) Permitiendo que los nudos giren determinar los factores de distribución en cada uno y para cada uno de los miembros que concurren al nudo, estableciendo los factores de transporte respectivos.
- 3) Se calcula el momento de desequilibrio en cada nudo, este momento con signo invertido, se distribuye a los miembros que se intersectan en el nudo de acuerdo a los factores de distribución.
- 4) Se transportan los momentos a los extremos opuestos multiplicando los valores obtenidos en 3) por los correspondientes factores de transporte angular.
- 5) Se repite el proceso de equilibrar todos los nudos y transportar los momentos, hasta que los momentos de desequilibrio sean despreciables comparados con los momentos de empujamiento originales.
- 6) Se procede al cálculo de los elementos mecánicos restantes y el dibujo de los diagramas.

### 7.4. ESTRUCTURAS CON DESPLAZAMIENTOS LINEALES

Para la solución de este tipo de estructuras utilizando el método de Cross. es necesario recurrir al principio de superposición de los efectos de desplazamientos separados de las juntas.

Considerando el marco de la Fig. 7.3. se tendría lo siguiente:

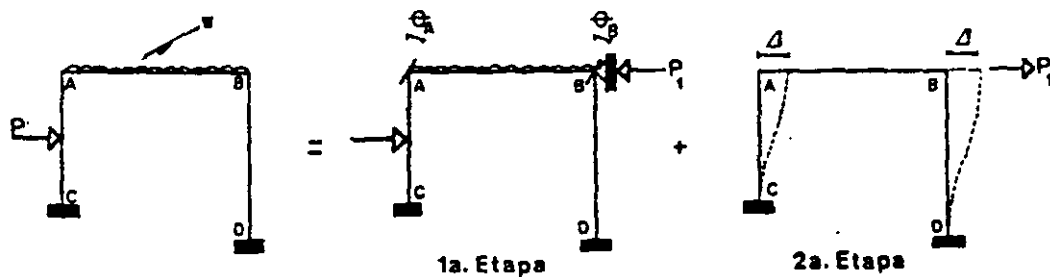


Fig. 7.3.

El primer paso es el de desarrollar la distribución usual de momentos, considerando que los nudos giran pero sin permitir el desplazamiento lineal de los mismos.

## METODO DE CROSS

Como se observa en la Fig. existe una tendencia de la fuerza horizontal a - inclinar el marco hacia la derecha, con objeto de evitar el movimiento lateral - que permitiría la existencia de estos momentos (1a. etapa), es necesario considerar una fuerza horizontal imaginaria, actuando hacia la izquierda ( $P_1$ ).

La fuerza  $P_1$ , sin embargo, no puede permanecer, por lo que deben anularse sus efectos, ésto se logra aplicando dicha fuerza en sentido opuesto al inicial y - aplicándola en el cabezal. Es obvio que no se satisface la condición de equilibrio para los nudos A y B, por lo tanto, estos nudos deberán girarse hasta que se logre el equilibrio (2a. etapa).

Del razonamiento anterior se puede establecer la siguiente secuela de cálculo para la solución de problemas de este tipo.

- 1) Resolver la estructura en forma convencional, considerando los nudos empotrados y permitiendo su giro, sin desplazamiento lineal, obteniendo la fuerza  $P_1$  - que impidió dicho desplazamiento (1a. etapa).
- 2) En la segunda etapa se puede suponer un desplazamiento  $\Delta$  del cabezal y - calcular los momentos que lo producen, sin embargo, el procedimiento apropiado es el de elegir valores para estos momentos de empujamiento y calcular la magnitud del desplazamiento. Posteriormente se permite el giro de los nudos hasta - lograr su equilibrio, determinándose la fuerza  $P_2$  que produjo el desplazamiento - del cabezal.
- 3) Debido a que la fuerza  $P_1$  que impidió el desplazamiento del cabezal es diferente de la obtenida en 2), es necesario multiplicar los momentos que resultaron del segundo balance por un factor de corrección que es  $c = P_1/P_2$ .
- 4) Los momentos finales se obtienen de sumar algebraicamente los resultados del primer balance (1a. etapa) con los del paso 3) (segundo balance afectados - por el factor correctivo).
- 5) Calcular los elementos mecánicos restantes (fuerzas cortante y normal).
- 6) Trazar los diagramas de los elementos mecánicos.

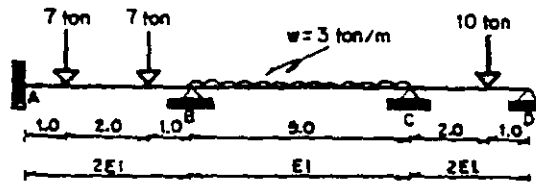
**7.5. Ejemplos**

**de**

**Aplicación**

METODO DE CROSS

7.1. Calcular los momentos en los apoyos de la siguiente viga.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{AB} = -\frac{7(1)(4-1)}{4} = -5.250$$

$$M_{BA} = 5.250$$

$$M_{BC} = \frac{3(5)^2}{12} = -6.250$$

$$M_{CB} = 6.250$$

$$M_{CD} = -\frac{10(2)(1+3)}{2(3)^2} = -4.444$$

- Factores de distribución.

-NUDO B-

$$K_{BA} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_{BC} = \frac{4EI}{5} = 0.8EI$$

$$K_B = 2.8EI$$

$$d_{BA} = \frac{2EI}{2.8EI} = 0.71$$

$$d_{BC} = \frac{0.8EI}{2.8EI} = 0.29$$

-NUDO C-

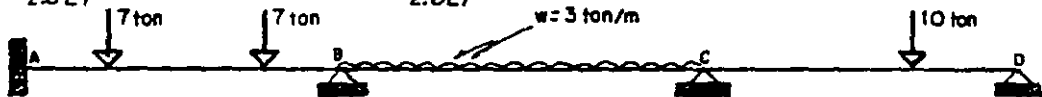
$$K_{CB} = \frac{4EI}{5} = 0.8EI$$

$$K_{CD} = \frac{3(2EI)}{3} = 2EI$$

$$K_C = 2.8EI$$

$$d_{CB} = \frac{0.8EI}{2.8EI} = 0.29$$

$$d_{CD} = \frac{2EI}{2.8EI} = 0.71$$



$d_{ij}$	0.71	0.29	0.29	0.71		
$M$	-5.250	5.250	-6.250	6.250	-4.444	
$E$	0.710	0.290	-0.524	-1.282		
$T$	0.355	0.0	-0.262	0.145		
$E$	0.186	0.076	-0.042	-0.103		
$T$	0.093	0.0	-0.021	0.038		
$E$	0.015	0.006	-0.011	-0.027		
$T$	0.007	0.0	-0.005	0.003		
$E$	0.003	0.002	-0.001	-0.002		
$MF$	-4.795	6.164	-6.164	5.858	-5.858	
$V_i$	7.000	7.000	7.500	7.500	3.333	6.667
$V_h$	-0.342	0.342	0.061	-0.061	1.953	-1.953
$VF$	6.658	7.342	7.561	7.439	5.286	4.714



## METODO DE CROSS

Desarrollo:

Como ejemplo de los cálculos realizados en la tabla se tiene lo siguiente:

- Primer equilibrio.- Distribución de momentos de desequilibrio en los nudos B y C.

NUDO B. Momento de desequilibrio:  $M_B = M_{BA} + M_{BC} = 5.250 - 6.250 = -1.000$  como el momento de desequilibrio es negativo, éste se distribuirá con signo contrario como se indica enseguida.

Barra BA:  $d_{BA} M_B = 0.71(-1.0) = 0.71$

Barra BC:  $d_{BC} M_B = 0.29(-1.0) = 0.29$

NUDO C.  $M_C = M_{CB} + M_{CD} = 6.250 - 4.444 = 1.806$

Barra CB:  $d_{CB} M_C = 0.29(-1.806) = -0.524$

Barra CD:  $d_{CD} M_C = 0.71(-1.806) = -1.282$

Momentos transportados.

NUDO B.

Barra BA:  $t_{BA} d_{BA} M_B = 0.5(0.71) = 0.355$

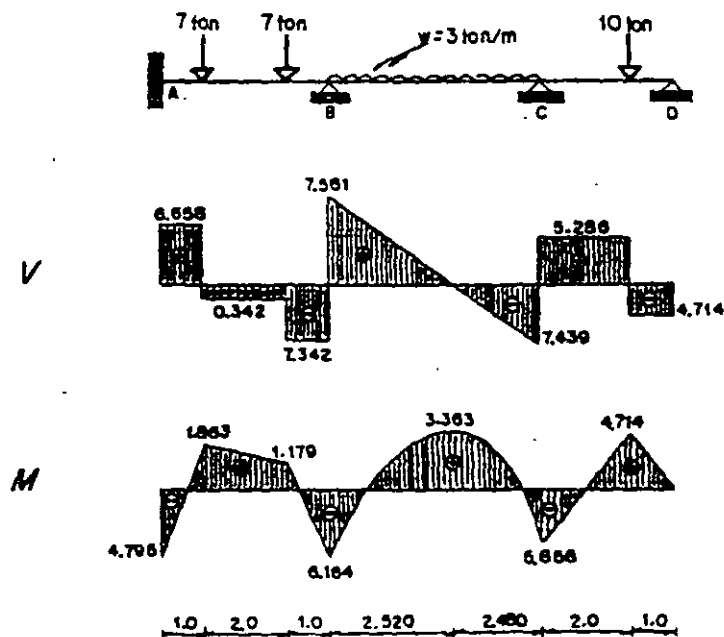
Barra BC:  $t_{BC} d_{BC} M_B = 0.5(0.29) = 0.145$

NUDO C.

Barra CB:  $t_{CB} d_{CB} M_C = 0.5(-0.524) = -0.262$

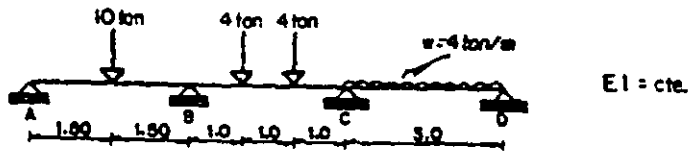
Barra CD:  $t_{CD} d_{CD} M_C = 0.0(-1.282) = 0.0$

El proceso de equilibrar primero todos los nudos y después proceder al transporte correspondiente se repite hasta obtener la precisión deseada. Dicho proceso finalizará siempre con un equilibrio de momentos. Por último, los momentos finales resultan de sumar algebraicamente los momentos que aparecen en cada columna (tanto de empotramiento como los distribuidos y los transportados).



METODO DE CROSS

7.2. Resolver la viga continua que se muestra.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{BA} = \frac{10(1.5)^2(1.5+3)}{2(3)^2} = 5.625$$

$$M_{BC} = -\frac{4(1)(3-1)}{3} = -2.666$$

$$M_{CB} = 2.000$$

$$M_{CD} = \frac{4(3)^2}{8} = -4.500$$

- Factores de distribución.

-NUDO B.-

$$K_{BA} = \frac{3EI}{3} = EI$$

$$K_{BC} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_B = 2.333EI$$

$$d_{BA} = \frac{EI}{2.333EI} = 0.43$$

$$d_{BC} = \frac{1.333EI}{2.333EI} = 0.57$$

-NUDO C.-

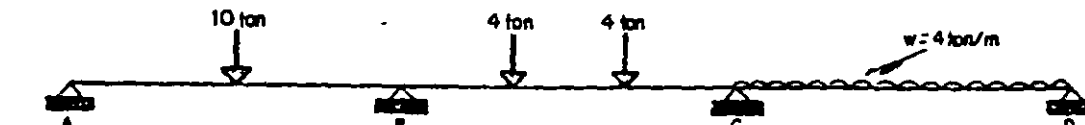
$$K_{CB} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{CD} = \frac{3EI}{3} = EI$$

$$K_C = 2.333EI$$

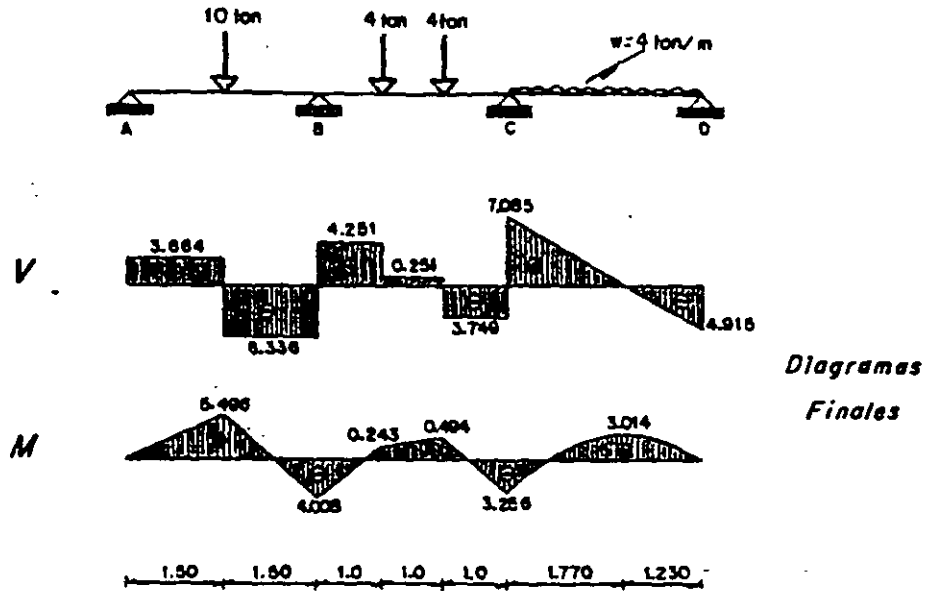
$$d_{CB} = 0.57$$

$$d_{CD} = 0.43$$

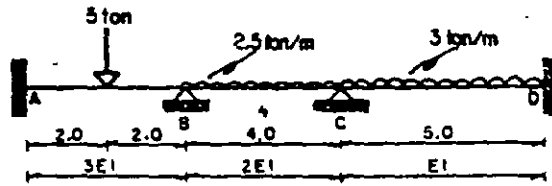


$d_{ij}$	0.43	0.57	0.57	0.43		
$M$	5.625	-2.666	2.666	-4.500		
$E$	-1.272	-1.687	1.045	0.789		
$T$		0.572	0.843			
$E$	-0.224	-0.298	0.481	0.362		
$T$		0.240	-0.149			
$E$	-0.103	-0.137	0.085	0.064		
$T$		0.042	-0.068			
$E$	-0.018	-0.024	0.039	0.029		
$MF$	0.0	4.008	-4.008	3.256	-3.256	0.0
$V_f$	5.000	5.000	4.000	4.000	6.000	6.000
$V_b$	-1.336	1.336	0.251	-0.251	1.085	-1.085
$V_F$	3.664	6.336	4.251	3.749	7.085	4.915

METODO DE CROSS



7.3. Resolver la estructura que se indica enseguida.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{AB} = -\frac{5(4)}{8} = -2.500$$

$$M_{BA} = 2.500$$

$$M_{BC} = -\frac{2.5(4)^2}{12} = -3.333$$

$$M_{CB} = 3.333$$

$$M_{CD} = -\frac{3(5)^2}{12} = -6.250$$

$$M_{DC} = 6.250$$

- Factores de distribución.

-NUDO B-

$$K_{BA} = \frac{4(3EI)}{4} = 3EI$$

$$K_{BC} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_B = 5EI$$

$$d_{BA} = \frac{3EI}{5EI} = 0.60$$

$$d_{BC} = \frac{2EI}{5EI} = 0.40$$

-NUDO C-

$$K_{CB} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

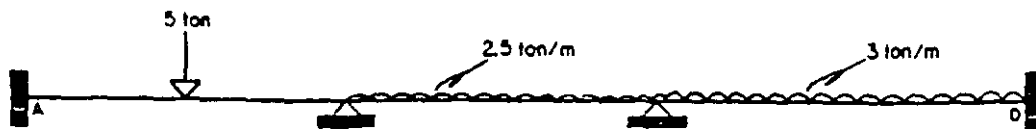
$$K_{CD} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI$$

$$K_C = 2.80EI$$

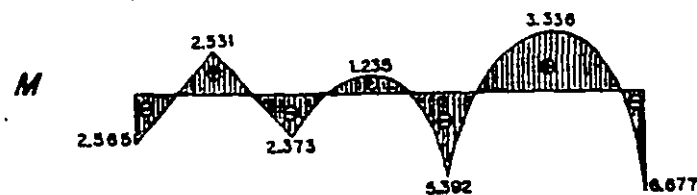
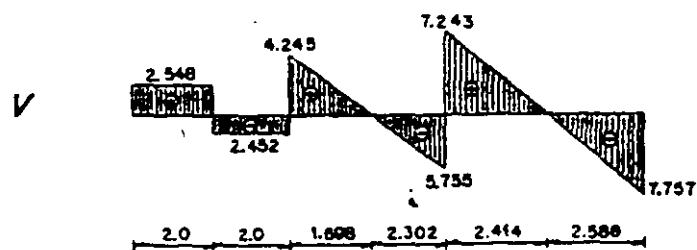
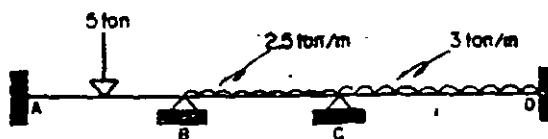
$$d_{CB} = \frac{2EI}{2.80EI} = 0.71$$

$$d_{CD} = \frac{0.80EI}{2.80EI} = 0.29$$

METODO DE CROSS



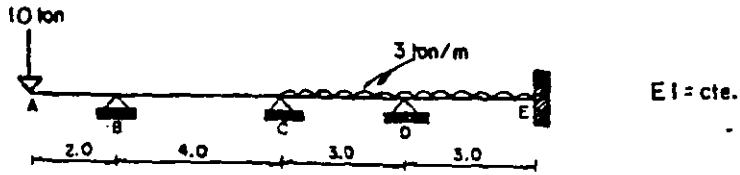
$d_{ij}$		0.60	0.40	0.71	0.29	
$M$	-2.500	2.500	-3.333	3.333	-6.250	6.250
$E$		0.500	0.333	2.071	0.846	
$T$	0.250	0.000	1.035	0.166	0.000	0.423
$E$		-0.621	-0.414	-0.118	-0.048	
$T$	-0.310	0.000	-0.059	-0.207	0.000	-0.024
$E$		0.035	0.024	0.147	0.060	
$T$	0.017	0.000	0.073	0.012	0.000	0.030
$E$		-0.044	-0.029	-0.008	-0.004	
$T$	-0.022	0.000	-0.004	-0.014	0.000	-0.002
$E$		0.003	0.001	0.010	0.004	
$MF$	-2.565	2.373	-2.373	5.392	-5.392	6.677
$V_i$	2.500	2.500	5.000	5.000	7.500	7.500
$V_A$	0.048	-0.048	-0.755	0.755	-0.257	0.257
$VF$	2.548	2.452	4.245	5.755	7.243	7.757



Diagramas  
Finales

METODO DE CROSS

7.4. Calcular los momentos en los apoyos de la siguiente viga.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{BA} = 10(2) = 20.0$$

$$M_{CD} = M_{DE} = -\frac{3(3)^2}{12} = -2.250$$

$$M_{DC} = 2.250 = M_{ED}$$

- Factores de distribución.

-NUDO B-

$$K_{BC} = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$K_{BA} = 0.0$$

$$d_{BC} = 1.0$$

-NUDO C-

$$K_{CB} = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$K_{CD} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_C = 2.333EI$$

$$d_{CB} = \frac{EI}{2.333EI} = 0.43$$

$$d_{CD} = \frac{1.333EI}{2.333EI} = 0.57$$

-NUDO D-

$$K_{DC} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{DE} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_D = 2.666EI$$

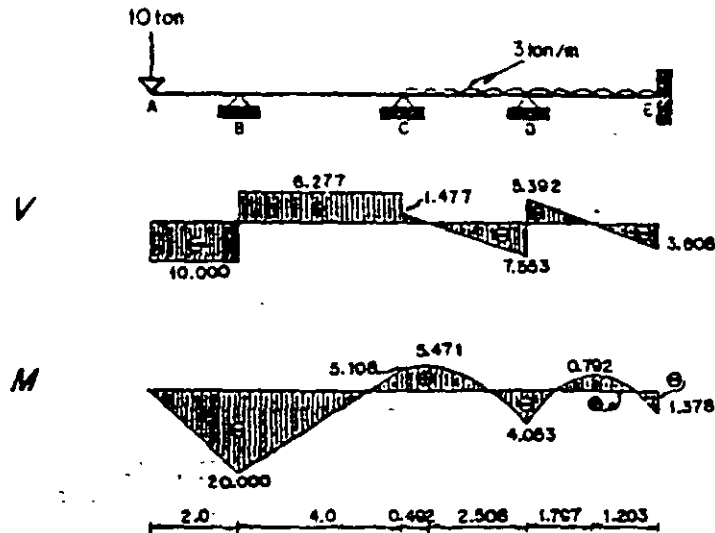
10 ton

$$d_{DC} = 0.50 = d_{DE}$$

3 ton/m

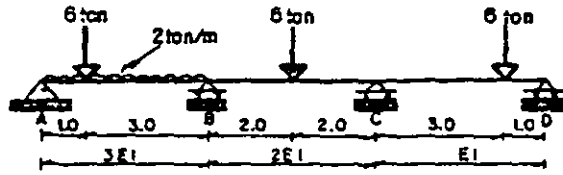
$d_{ij}$		1.0	0.43	0.57	0.5	0.5	
M	20.00	0.0	0.0	-2.25	2.25	-2.25	2.25
E		-2.0	0.967	1.283	0.0	0.0	
T		0.483	-1.0	0.0	0.641		0.0
E		-0.483	4.30	5.70	-0.32	-0.32	
T		2.15	-0.241	-0.160	2.85		-0.16
E		-2.15	0.172	0.228	-1.425	-1.425	
T		0.086	-1.075	-0.712	0.114		-0.712
E		-0.086	0.768	1.019	-0.057	-0.057	
MF	20.00	-20.00	-5.108	5.108	4.053	-4.053	1.378
$V_i$	10.00	0.0	0.0	4.50	4.50	4.50	4.50
$V_n$		6.277	-6.277	-3.053	3.053	0.892	-0.892
VF	10.00	6.277	-6.277	1.447	7.553	5.392	3.608

METODO DE CROSS



Diagramas  
Finales

7.5. Resolver la viga continua que se muestra.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{BA} = \frac{2(4)^2}{8} + \frac{6(1)3(1+4)}{2(4)^2} = 6.813$$

$$M_{BC} = \frac{6(4)}{8} = -3.000$$

$$M_{CB} = 3.000$$

$$M_{CD} = \frac{6(3)1(1+4)}{2(4)^2} = -2.813$$

- Factores de distribución.

- NUDO B -

$$K_{BA} = \frac{3(3EI)}{4} = 2.250EI$$

$$K_{BC} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_B = 4.250EI$$

$$d_{BA} = \frac{2.250EI}{4.250EI} = 0.53$$

$$d_{BC} = \frac{2EI}{4.250EI} = 0.47$$

- NUDO C -

$$K_{CB} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

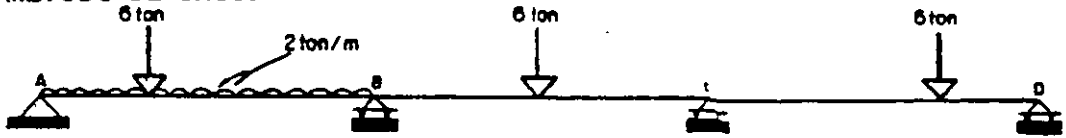
$$K_{CD} = \frac{3EI}{4} = 0.750EI$$

$$K_C = 2.750EI$$

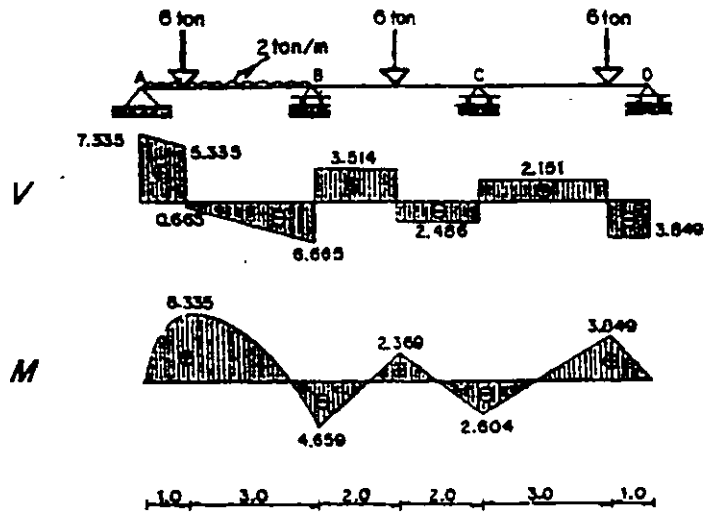
$$d_{CB} = \frac{2EI}{2.750EI} = 0.73$$

$$d_{CD} = \frac{0.750EI}{2.750EI} = 0.27$$

METODO DE CROSS

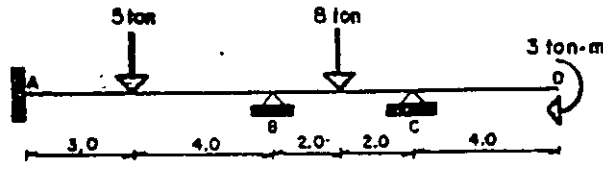


$d_{ij}$	0.53	0.47	0.73	1.27		
$M$	6.813	-3.000	3.000	-2.813		
$E$	-2.021	-1.792	-0.137	-0.150		
$T$		-0.069	-0.896			
$E$	0.037	0.032	0.654	0.242		
$T$		0.327	0.016			
$E$	-0.173	-0.154	-0.012	-0.004		
$T$		-0.006	-0.077			
$E$	0.003	0.003	0.056	0.021		
$MF$	4.659	-4.659	2.604	-2.604		
$V_i$	8.500	5.500	3.000	3.000	1.500	4.500
$V_R$	-1.165	1.165	0.514	-0.514	0.651	-0.651
$V_F$	7.335	6.665	3.514	2.486	2.151	3.849



Diagramas Finales

7.6. Resolver la estructura que se indica.



EI=cte.

- Momentos de empotramiento.

$$M_{AB} = -\frac{5(3)^2(4)}{(7)^2} = -4.808$$

$$M_{BA} = \frac{5(3)^2(4)}{(7)^2} = 3.673$$

METODO DE CROSS

$$M_{BC} = -\frac{8142}{8} = -4.000$$

$$M_{CB} = 4.000$$

$$M_{CD} = -3.000$$

- Factores de distribución.

- NUDO B -

$$K_{BA} = \frac{4EI}{7} = 0.571EI$$

$$K_{BC} = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$K_B = 1.571EI$$

$$d_{BA} = \frac{0.571EI}{1.571EI} = 0.36$$

$$d_{BC} = \frac{EI}{1.571EI} = 0.64$$

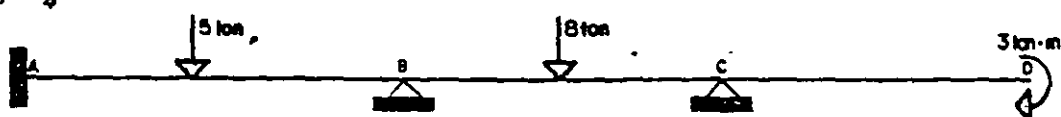
- NUDO C -

$$K_{CB} = \frac{4EI}{4} = EI$$

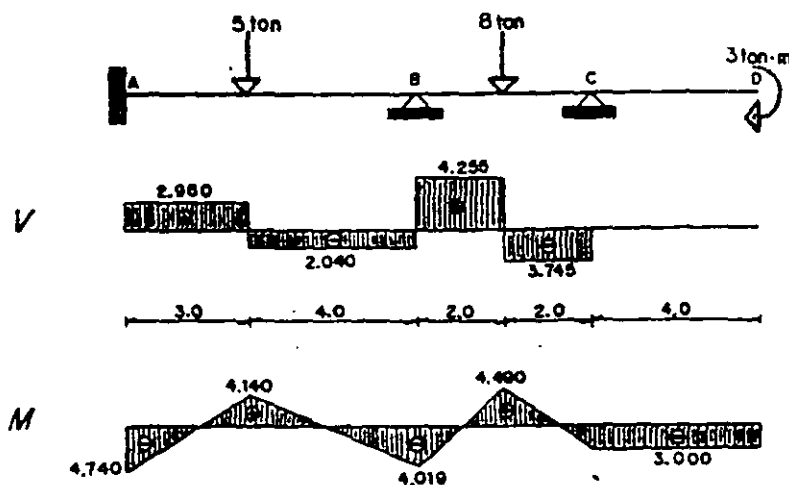
$$K_{CD} = 0.0$$

$$K_C = EI$$

$$d_{CB} = 1.0$$



$d_{ij}$		0.36	0.64	1.00		
$M$	-4.898	3.673	-4.000	4.000	-3.000	3.000
$E$		0.118	0.209	-1.000		
$T$	0.059		-0.500	0.104		
$E$		0.180	0.320	-0.104		
$T$	0.090		-0.052	0.160		
$E$		0.019	0.033	-0.160		
$T$	0.009		-0.080	0.016		
$E$		0.029	0.051	-0.016		
$MF$	-4.740	4.019	-4.109	3.000	-3.000	3.000
$V_i$	2.857	2.143	4.000	4.000		
$V_h$	0.103	-0.103	0.255	-0.255		
$VF$	2.960	2.040	4.255	3.745		

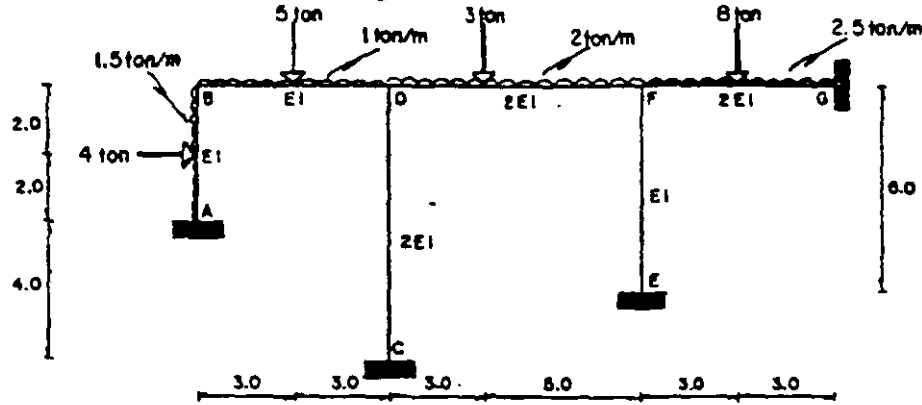


Diagramas  
Finales



METODO DE CROSS

7.7 Resolver el marco siguiente.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{BA} = \frac{1.5(4)^2}{8} + \frac{3(4)(4)}{16} = 6.000$$

$$M_{BD} = -\frac{1(8)^2}{12} - \frac{3(8)}{8} = -6.750$$

$$M_{DB} = 6.750$$

$$M_{DF} = -\frac{2(8)^2}{12} - \frac{3(3)(15)}{18^2} = -14.182$$

$$M_{FD} = \frac{2(8)^2}{12} + \frac{3(3)^2(15)}{(8)^2} = 12.776$$

$$M_{FG} = -\frac{2.5(6)^2}{12} - \frac{8(6)}{8} = -13.500$$

$$M_{GF} = 13.500$$

- Factores de distribución.

- NUDO B -

$$K_{BA} = \frac{3EI}{4} = 0.75EI$$

$$K_{BD} = \frac{4EI}{8} = 0.66EI$$

$$K_B = 1.41EI$$

$$d_{BA} = \frac{0.75EI}{1.41EI} = 0.53$$

$$d_{BD} = \frac{0.66EI}{1.41EI} = 0.47$$

- NUDO D -

$$K_{DB} = \frac{4EI}{8} = 0.66EI$$

$$K_{DC} = \frac{4(2EI)}{8} = EI$$

$$K_{DF} = \frac{4(2EI)}{8} = EI$$

$$K_D = 2.66EI$$

$$d_{DB} = \frac{0.66EI}{2.66EI} = 0.250$$

$$d_{DC} = \frac{EI}{2.66EI} = 0.375$$

$$d_{DF} = 0.375$$

- NUDO F -

$$K_{FD} = \frac{4(2EI)}{8} = EI$$

$$K_{FE} = \frac{4EI}{8} = 0.66EI$$

$$K_{FG} = \frac{4(2EI)}{8} = 1.33EI$$

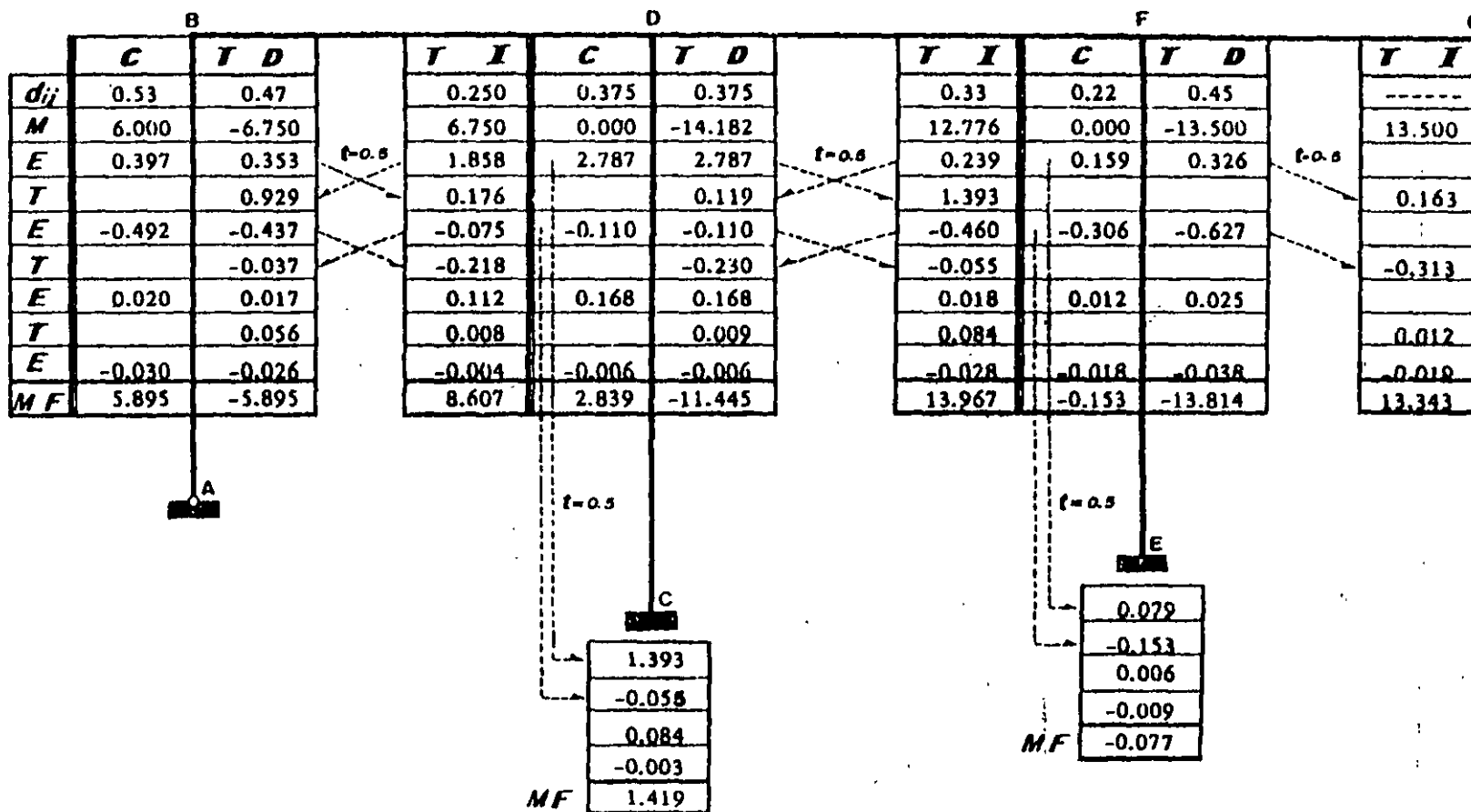
$$K_F = 2.99EI$$

$$d_{FD} = \frac{EI}{2.99EI} = 0.33$$

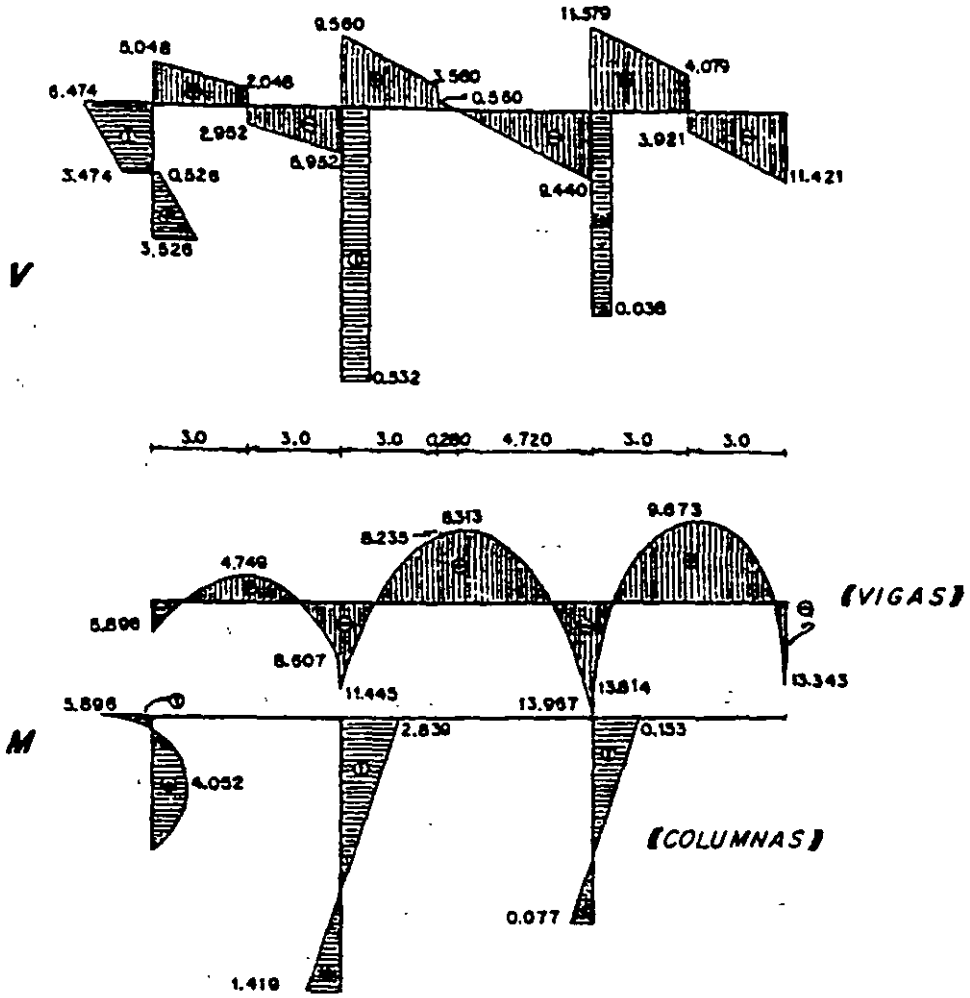
$$d_{FE} = \frac{0.66EI}{2.99EI} = 0.22$$

$$d_{FG} = \frac{1.33EI}{2.99EI} = 0.45$$

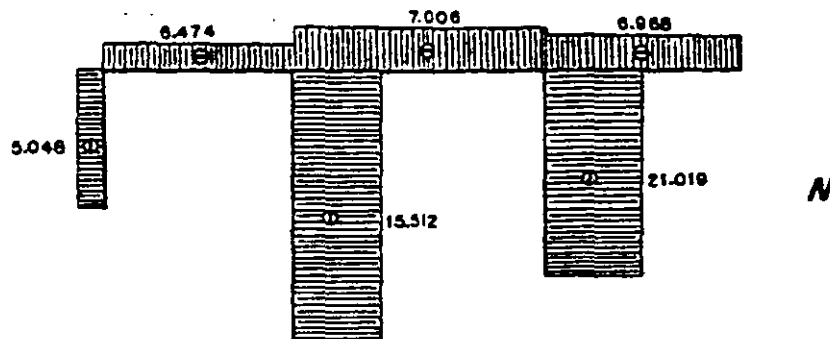
El arreglo tabulado de solución es el indicado a continuación.



METODO DE CROSS

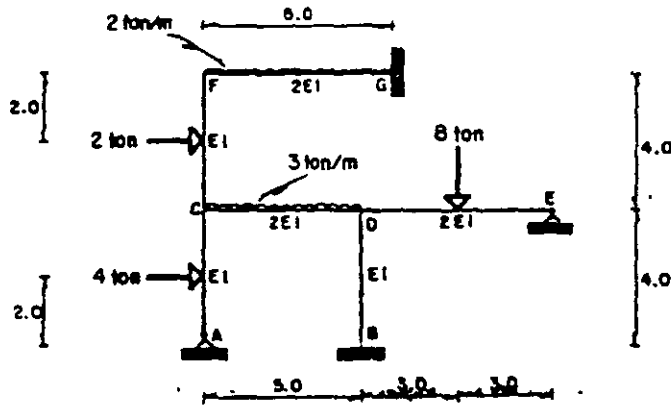


Diagramas finales:



METODO DE CROSS

7.8. Trazar los diagramas de elementos mecánicos del siguiente marco.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{CA} = \frac{3(4)4}{16} = 3.000 \quad M_{CF} = -\frac{2(4)}{8} = -1.000 \quad M_{FC} = 1.000 \quad M_{FG} = -\frac{2(6)^2}{12} = -6.000$$

$$M_{GF} = 6.000 \quad M_{CD} = \frac{3(3)^2}{12} = -0.250 \quad M_{DC} = 0.250 \quad M_{DE} = -\frac{3(8)8}{16} = -9.000$$

- Factores de distribución.

-NUDO C-

$$K_{CA} = \frac{3EI}{4} = 0.75EI \quad K_{CD} = \frac{4(2EI)}{5} = 1.6EI \quad K_{CF} = \frac{4EI}{4} = EI \quad K_C = 3.35EI$$

$$d_{CA} = \frac{0.75EI}{3.35EI} = 0.22 \quad d_{CD} = \frac{1.6EI}{3.35EI} = 0.48 \quad d_{CF} = \frac{EI}{3.35EI} = 0.30$$

-NUDO D-

$$K_{DB} = \frac{4EI}{4} = EI \quad K_{DC} = \frac{4(2EI)}{5} = 1.6EI \quad K_{DE} = \frac{3(2EI)}{6} = EI \quad K_D = 3.6EI$$

$$d_{DB} = \frac{EI}{3.6EI} = 0.28 \quad d_{DC} = \frac{1.6EI}{3.6EI} = 0.44 \quad d_{DE} = \frac{EI}{3.6EI} = 0.28$$

-NUDO F-

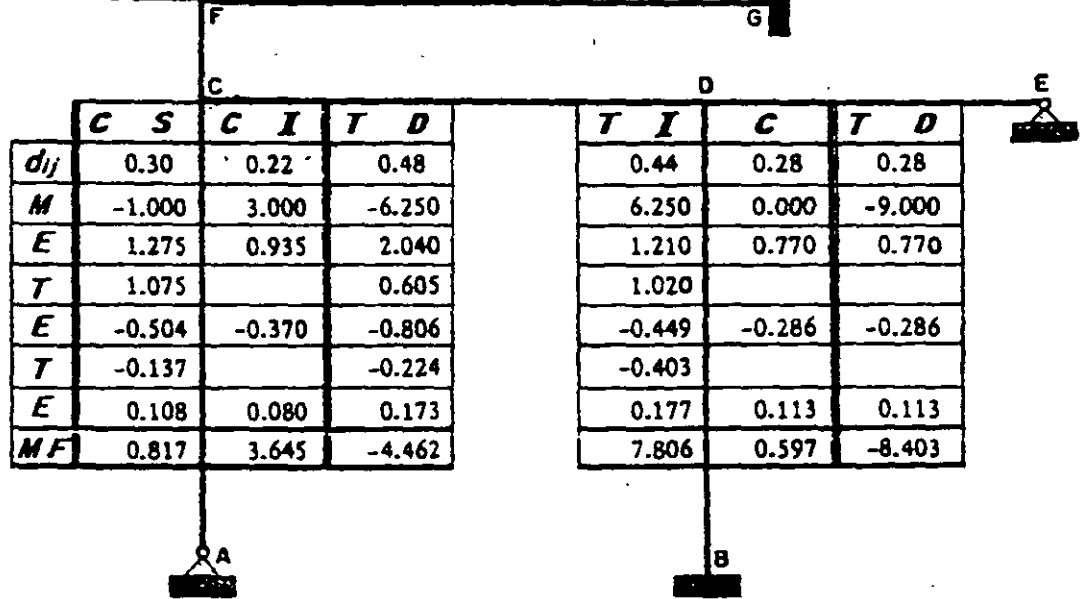
$$K_{FC} = \frac{4EI}{4} = EI \quad K_{FG} = \frac{4(2EI)}{6} = 1.333EI \quad K_F = 2.333EI$$

$$d_{FC} = \frac{EI}{2.333EI} = 0.43 \quad d_{FG} = \frac{1.333EI}{2.333EI} = 0.57$$

METODO DE CROSS

<i>MF</i>	3.369	-3.369
<i>E</i>	0.108	0.144
<i>T</i>	-0.252	
<i>E</i>	-0.274	-0.363
<i>T</i>	0.637	
<i>E</i>	2.150	2.850
<i>M</i>	1.000	-6.000
<i>d<sub>ij</sub></i>	0.43	0.57
	<i>C</i>	<i>T D</i>

	7.316
	0.072
	-0.181
	1.425
	6.000
	<i>T I</i>

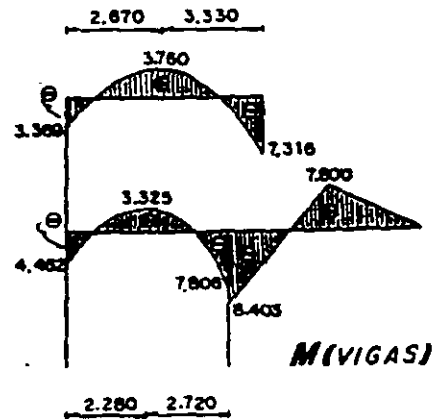
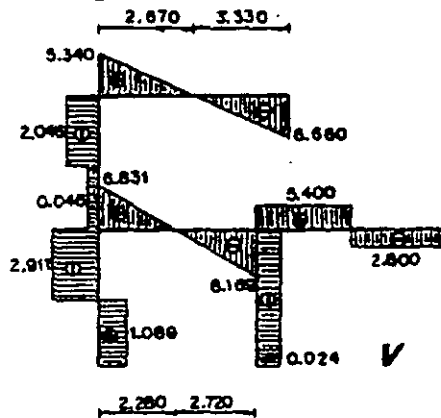


	<i>C</i>	<i>S</i>	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>T</i>	<i>D</i>
<i>d<sub>ij</sub></i>	0.30		0.22		0.48	
<i>M</i>	-1.000		3.000		-6.250	
<i>E</i>	1.275		0.935		2.040	
<i>T</i>	1.075				0.605	
<i>E</i>	-0.504		-0.370		-0.806	
<i>T</i>	-0.137				-0.224	
<i>E</i>	0.108		0.080		0.173	
<i>MF</i>	0.817		3.645		-4.462	

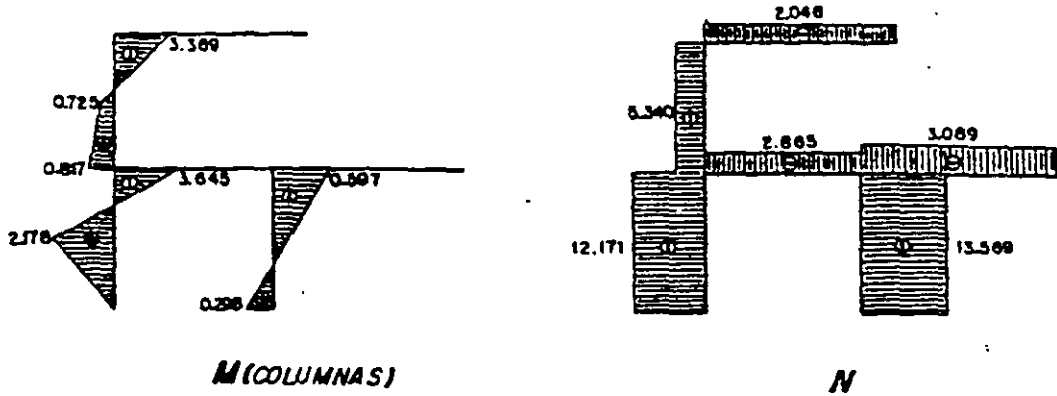
	<i>T</i>	<i>I</i>	<i>C</i>	<i>T</i>	<i>D</i>
	0.44		0.28		0.28
	6.250		0.000		-9.000
	1.210		0.770		0.770
	1.020				
	-0.449		-0.286		-0.286
	-0.403				
	0.177		0.113		0.113
	7.806		0.597		-8.403

	0.385
	-0.143
	0.056
<i>MF</i>	0.298

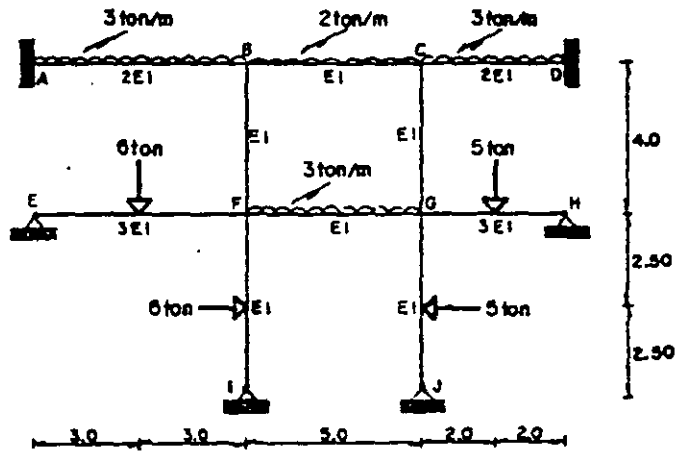
Diagramas finales:



METODO DE CROSS



7.9. Encontrar los momentos finales en los extremos de las barras, del marco hiperestático.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{AB} = -\frac{3(6)^2}{12} = -9.000 \quad M_{BA} = 9.000$$

$$M_{BC} = -\frac{2(5)^2}{12} = -4.167$$

$$M_{CB} = 4.167$$

$$M_{CD} = -\frac{3(4)^2}{12} = -4.000$$

$$M_{DC} = 4.000$$

$$M_{FE} = \frac{3(6)(6)}{16} = 6.750 \quad M_{FO} = -\frac{3(5)^2}{12} = -6.250$$

$$M_{GF} = 6.250$$

$$M_{GH} = -\frac{3(5)(4)}{16} = -3.750 \quad M_{GI} = \frac{3(6)(5)}{16} = 5.625$$

$$M_{GJ} = -\frac{3(5)(5)}{16} = -4.687$$

METODO DE CROSS

- Factores de distribución.

- NUDO B -

$$K_{BA} = \frac{4(2EI)}{6} = 1.333EI \quad K_{BC} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI \quad K_{BF} = \frac{4EI}{4} = EI \quad K_B = 3.133EI$$

$$d_{BA} = \frac{1.333EI}{3.133EI} = 0.43 \quad d_{BC} = \frac{0.80EI}{3.133EI} = 0.25 \quad d_{BF} = \frac{EI}{3.133EI} = 0.32$$

- NUDO C -

$$K_{CB} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI \quad K_{CD} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI \quad K_{CG} = \frac{4EI}{4} = EI \quad K_C = 3.80EI$$

$$d_{CB} = \frac{0.80EI}{3.80EI} = 0.21 \quad d_{CD} = \frac{2EI}{3.80EI} = 0.53 \quad d_{CG} = \frac{EI}{3.80EI} = 0.26$$

- NUDO F -

$$K_{FE} = \frac{3(2EI)}{6} = 1.50EI \quad K_{FB} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI \quad K_{FG} = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$K_{FI} = \frac{3EI}{5} = 0.60EI \quad K_F = 3.90EI$$

$$d_{FE} = \frac{1.50EI}{3.90EI} = 0.38 \quad d_{FB} = \frac{0.80EI}{3.90EI} = 0.21 \quad d_{FG} = \frac{EI}{3.90EI} = 0.26 \quad d_{FI} = \frac{0.60EI}{3.90EI} = 0.15$$

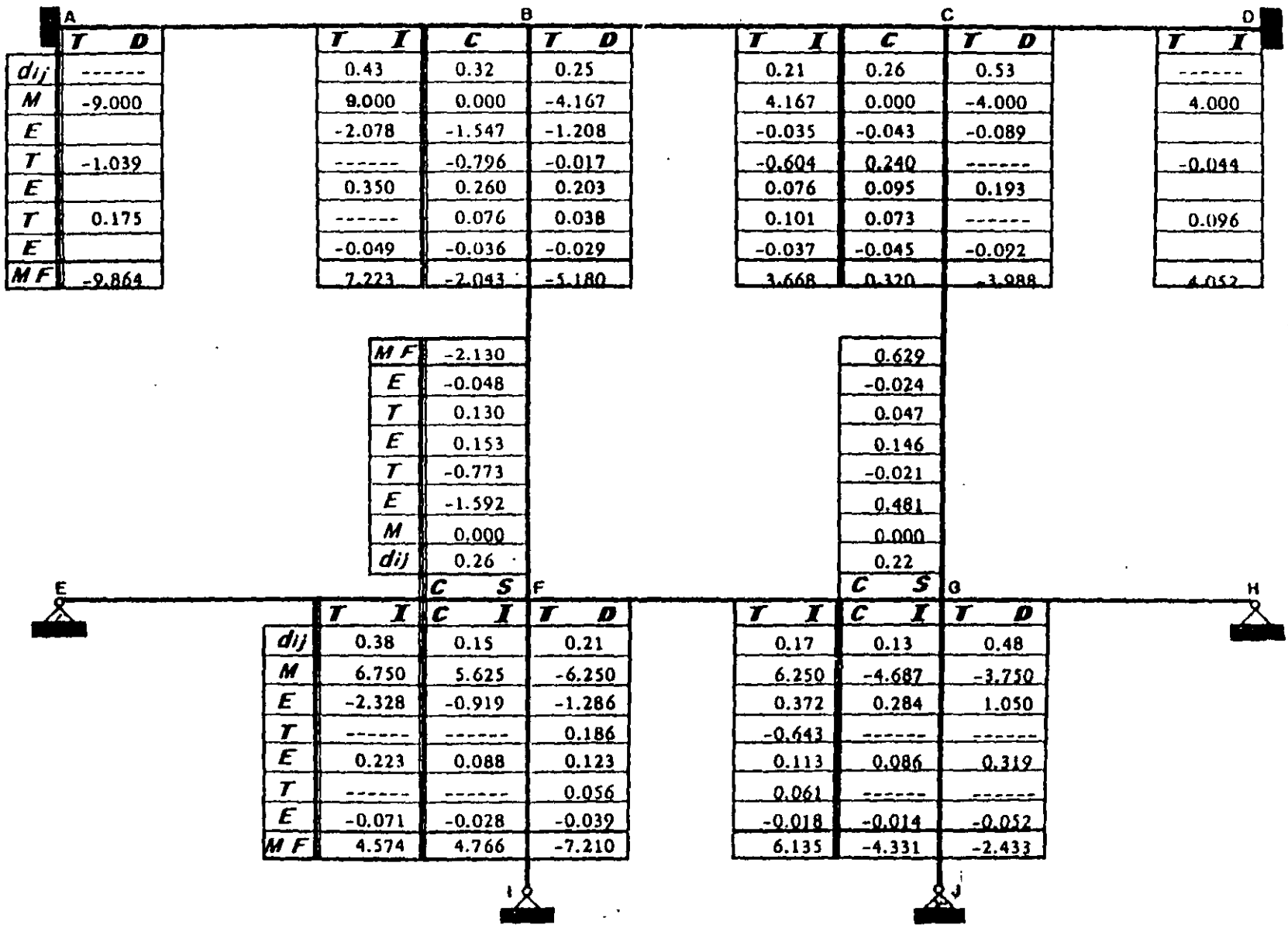
- NUDO G -

$$K_{GF} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI \quad K_{GN} = \frac{3(2EI)}{4} = 2.25EI \quad K_{GC} = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$K_{GJ} = \frac{3EI}{5} = 0.60EI \quad K_G = 4.65EI$$

$$d_{GF} = \frac{0.80EI}{4.65EI} = 0.17 \quad d_{GN} = \frac{2.25EI}{4.65EI} = 0.48 \quad d_{GC} = \frac{EI}{4.65EI} = 0.22 \quad d_{GJ} = \frac{0.60EI}{4.65EI} = 0.13$$

El arreglo tabulado de solución se presenta enseguida.



	T	D
$d_{ij}$	-----	
M	-9.000	
E		
T	-1.039	
E		
T	0.175	
E		
MF	-9.864	

	T	I	C	T	D
	0.43	0.32	0.25		
	9.000	0.000	-4.167		
	-2.078	-1.547	-1.208		
	-----	-0.796	-0.017		
	0.350	0.260	0.203		
	-----	0.076	0.038		
	-0.049	-0.036	-0.029		
	7.223	-2.043	-5.180		

	T	I	C	T	D
	0.21	0.26	0.53		
	4.167	0.000	-4.000		
	-0.035	-0.043	-0.089		
	-0.604	0.240	-----		
	0.076	0.095	0.193		
	0.101	0.073	-----		
	-0.037	-0.045	-0.092		
	3.668	0.320	-3.988		

	T	I
$d_{ij}$	-----	
	4.000	
	-0.044	
	0.096	
	4.052	

MF	-2.130
E	-0.048
T	0.130
E	0.153
T	-0.773
E	-1.592
M	0.000
$d_{ij}$	0.26

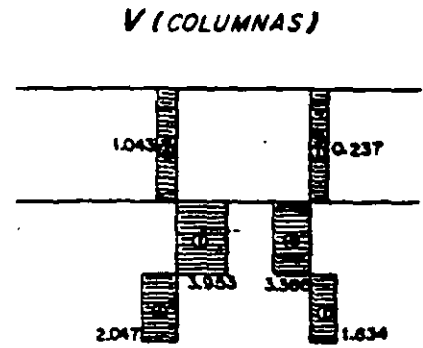
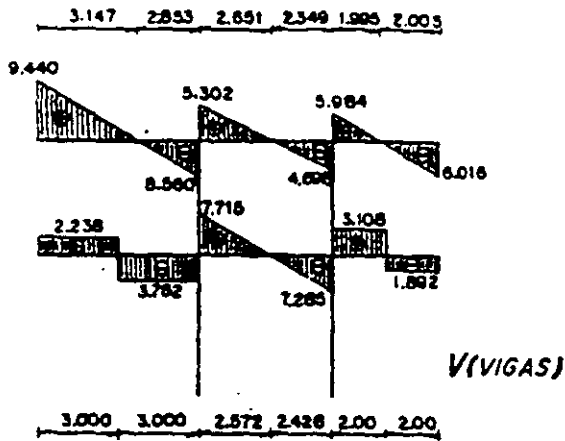
	0.629
	-0.024
	0.047
	0.146
	-0.021
	0.481
	0.000
	0.22

	T	I	C	I	T	D
$d_{ij}$	0.38	0.15	0.21			
M	6.750	5.625	-6.250			
E	-2.328	-0.919	-1.286			
T	-----	-----	0.186			
E	0.223	0.088	0.123			
T	-----	-----	0.056			
E	-0.071	-0.028	-0.039			
MF	4.574	4.766	-7.210			

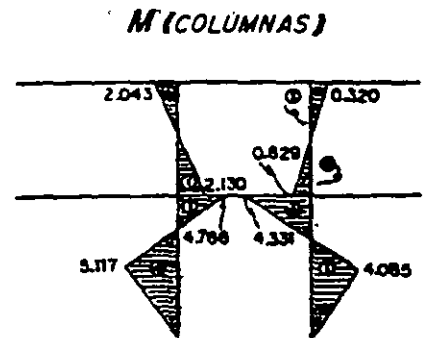
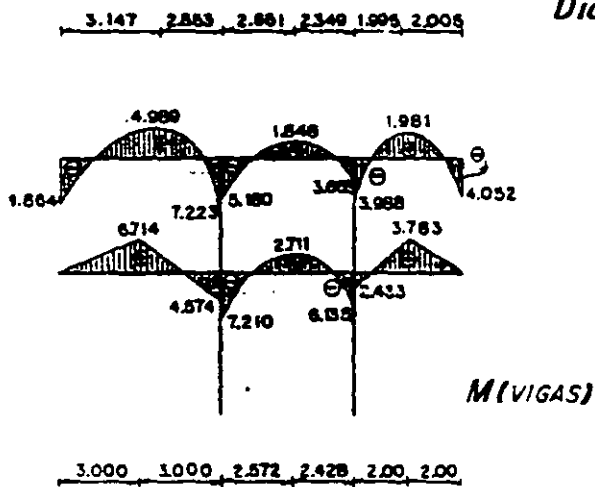
	T	I	C	I	T	D
	0.17	0.13	0.48			
	6.250	-4.687	-3.750			
	0.372	0.284	1.050			
	-0.643	-----	-----			
	0.113	0.086	0.319			
	0.061	-----	-----			
	-0.018	-0.014	-0.052			
	6.135	-4.331	-2.433			



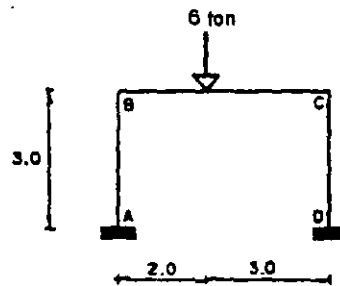
METODO DE CROSS



Diagramas finales:



7.10. Determinar los momentos en los vértices de la estructura.



$EI = cte.$

1a. ETAPA.- Se consideran los nudos empotrados y después se permite que giren (no existe desplazamiento lineal).

METODO DE CROSS

- Momentos de empotramiento.

$$M_{BC} = -\frac{6(2)(3)^2}{15^2} = -4.320$$

$$M_{CB} = \frac{6(2)^2(3)}{15^2} = 2.880$$

- Factores de distribución.

-NUDO B-

$$K_{BA} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{BC} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI$$

$$K_B = 2.133EI$$

$$d_{BA} = \frac{1.333EI}{2.133EI} = 0.625$$

$$d_{BC} = \frac{0.80EI}{2.133EI} = 0.375$$

-NUDO C-

$$K_{CB} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI$$

$$K_{CD} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_C = 2.133EI$$

$$d_{CB} = \frac{0.80EI}{2.133EI} = 0.375$$

$$d_{CD} = \frac{1.333EI}{2.133EI} = 0.625$$

	B		C	
	C	T D	T I	C
<i>d<sub>ij</sub></i>	0.625	0.375	0.375	0.625
<i>M</i>	0.00	-4.320	2.880	0.000
<i>E</i>	2.700	1.620	-1.080	-1.800
<i>T</i>		-0.540	0.810	
<i>E</i>	0.338	0.202	-0.304	-0.506
<i>T</i>		-0.152	0.101	
<i>E</i>	0.095	0.057	-0.038	-0.063
<i>T</i>		-0.019	0.028	
<i>E</i>	0.012	0.007	-0.010	-0.018
<i>MF</i>	3.145	-3.145	2.387	-2.387

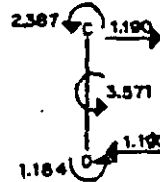
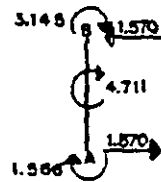
  

A	
1.350	
0.169	
0.047	
<i>MF</i> 1.566	

D	
-0.900	
-0.253	
-0.031	
<i>MF</i> -1.184	

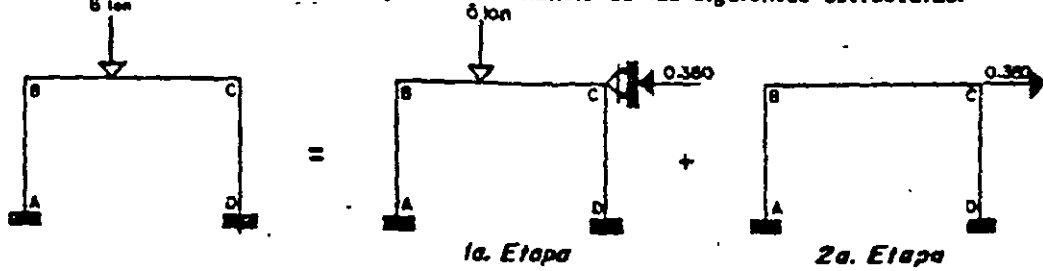
Fuerza que ha impedido el desplazamiento del cabezal.



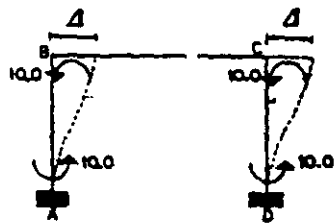
← 0.300

# METODO DE CROSS

La solución del marco requiere del análisis de las siguientes estructuras.



2a. ETAPA.- Desplazamiento del cabezal.



Estructura I

Suponiendo momentos de 10 ton·m, tenemos:

$$M = \frac{6EI}{L^2} \Delta ; 10 = \frac{6EI}{(3)^2} \Delta$$

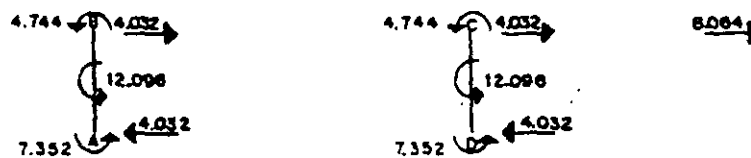
$$\Delta = \frac{90}{6EI} = \frac{15}{EI}$$

	B		C	
	C	T D	T I	C
<i>dij</i>	0.625	0.375	0.375	0.625
<i>M</i>	-10.000	0.000	0.000	-10.000
<i>E</i>	6.250	3.750	3.750	6.250
<i>T</i>		1.875	1.875	
<i>E</i>	-1.172	-0.703	-0.703	-1.172
<i>T</i>		-0.351	-0.351	
<i>E</i>	0.219	0.132	0.132	0.219
<i>T</i>		0.066	0.066	
<i>E</i>	-0.041	-0.025	-0.025	-0.041
<i>MF</i>	-4.744	4.744	4.744	-4.744

	A	D
<i>MF</i>	-10.000	-10.000
	3.125	3.125
	-0.586	-0.586
	0.109	0.109
<i>MF</i>	-7.352	-7.352

Fuerza que produjo el desplazamiento Δ del cabezal.

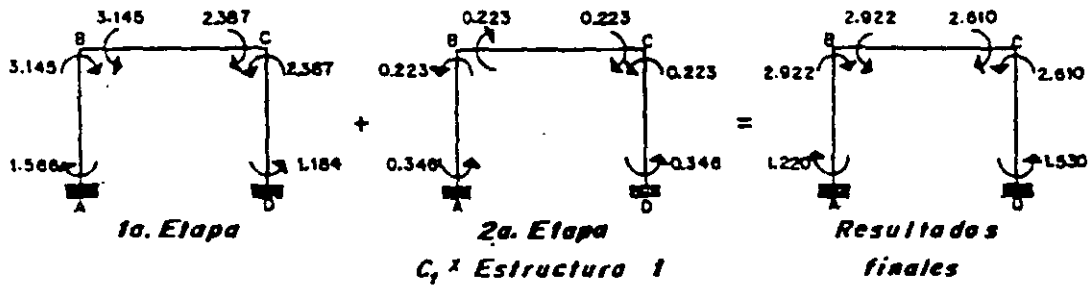


METODO DE CROSS

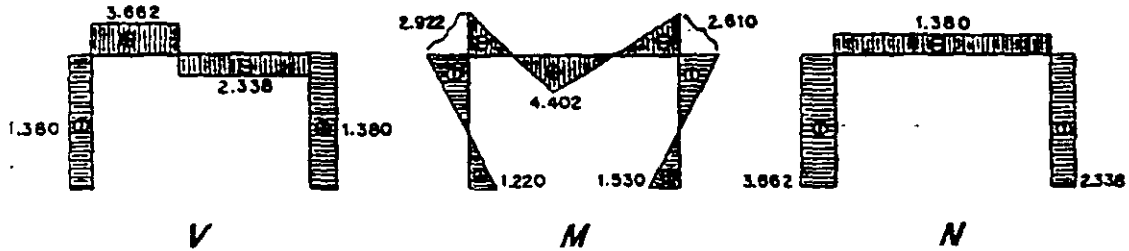
Factor de corrección:

$$C_1 = \frac{0.380}{8.084} = 0.04712300$$

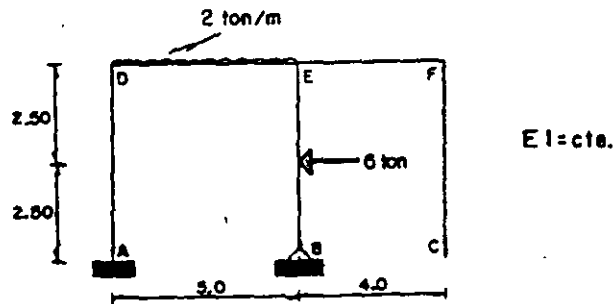
2a. Etapa  
**Resultados Finales = 1a. Etapa +  $C_1 \times$  Estructura 1**



**Diagramas finales:**



7.11. Resolver el marco hiperestático que se muestra a continuación.



1a. ETAPA.- Se fijan los nudos y después se permite el giro.

- Momentos de empotramiento.

$$M_{DE} = -\frac{2151^2}{12} = -4.166$$

$$M_{ED} = 4.166$$

$$M_{EB} = -\frac{31615}{18} = -5.625$$

METODO DE CROSS

- Factores de distribución.

-NUDO D-

$$K_{DA} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI$$

$$K_{DE} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI$$

$$K_D = 1.60EI$$

$$d_{DA} = \frac{0.80EI}{1.60EI} = 0.50$$

$$d_{DE} = \frac{0.80EI}{1.60EI} = 0.50$$

-NUDO E-

$$K_{ED} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI$$

$$K_{EB} = \frac{3EI}{5} = 0.60EI$$

$$K_E = 1.40EI$$

$$d_{ED} = \frac{0.80EI}{1.40EI} = 0.57$$

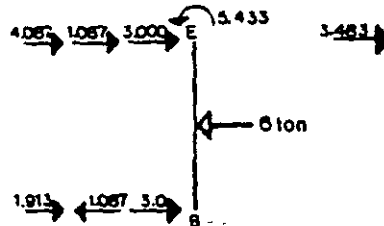
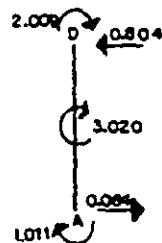
$$d_{EB} = \frac{0.60EI}{1.40EI} = 0.43$$

	D			E		
	C	T	D	T	I	C
<i>d<sub>ij</sub></i>	0.50		0.50		0.57	0.43
<i>M</i>	0.000		-4.166	4.166		-5.625
<i>E</i>	2.083		2.083	0.832		0.627
<i>T</i>			0.416	1.041		
<i>E</i>	-0.208		-0.208	-0.593		-0.448
<i>T</i>			-0.296	-0.104		
<i>E</i>	0.148		0.148	0.059		0.045
<i>T</i>			0.029	0.074		
<i>E</i>	-0.014		-0.014	-0.042		-0.032
<i>MF</i>	2.009		-2.009	5.433		-5.433

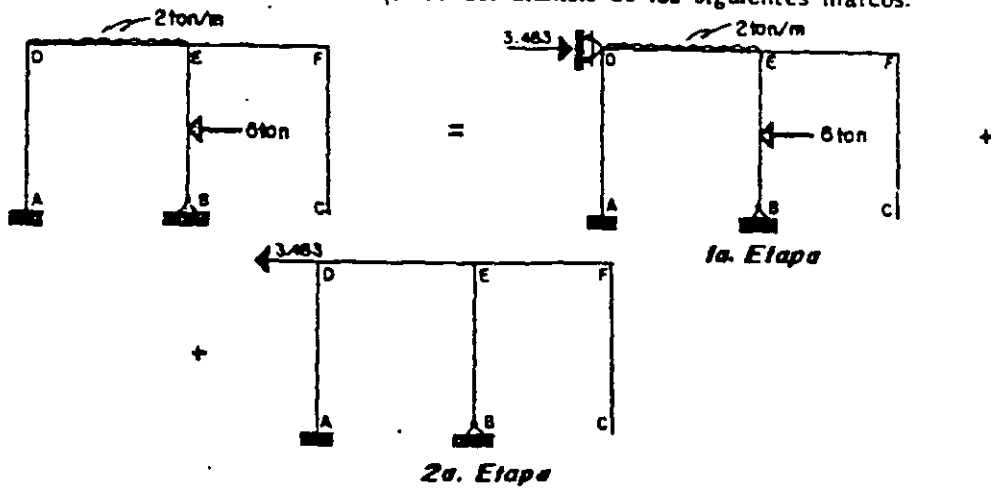
	1.041
	-0.104
	0.074
<i>MF</i>	1.011

Fuerza que ha impedido el desplazamiento del cabezal.

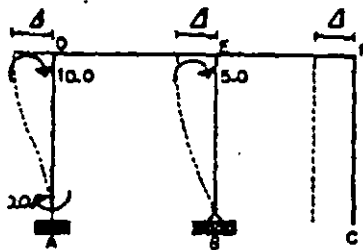


METODO DE CROSS

La solución de la estructura requiere del análisis de los siguientes marcos:



2a. ETAPA.- Desplazamiento del cabezal



Suponiendo momentos de 10 ton·m en la columna AD, da:

$$M_{AD} = \frac{6EI}{15^2} \Delta ; 10 = \frac{6EI}{25} \Delta$$

$$\Delta = \frac{250}{6EI} = \frac{125}{3EI}$$

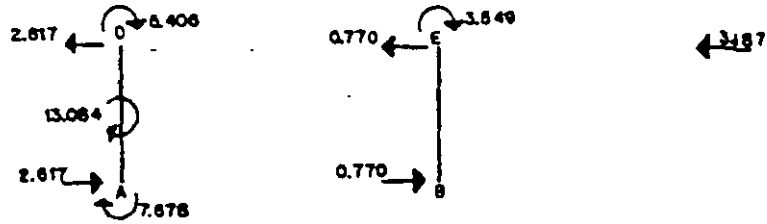
$$M_{EB} = \frac{3EI}{L^2} \Delta = \frac{3EI}{15^2} \cdot \frac{125}{3EI} = 3 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

	D			E	
	C	T	D	T	C
dij	0.50	0.50		0.57	0.43
M	10.000	0.000		0.000	5.000
E	-5.000	-5.000		-2.850	-2.150
T		-1.425		-2.500	
E	+0.712	+0.712		1.425	1.075
T		0.712		+0.356	
E	-0.356	-0.356		-0.203	-0.153
T		-0.101		-0.178	
E	+0.050	+0.050		0.101	0.077
MF	5.406	-5.406		-3.849	3.849

M	
	10.000
	-2.500
	+0.356
	-0.178
MF	7.678

METODO DE CROSS

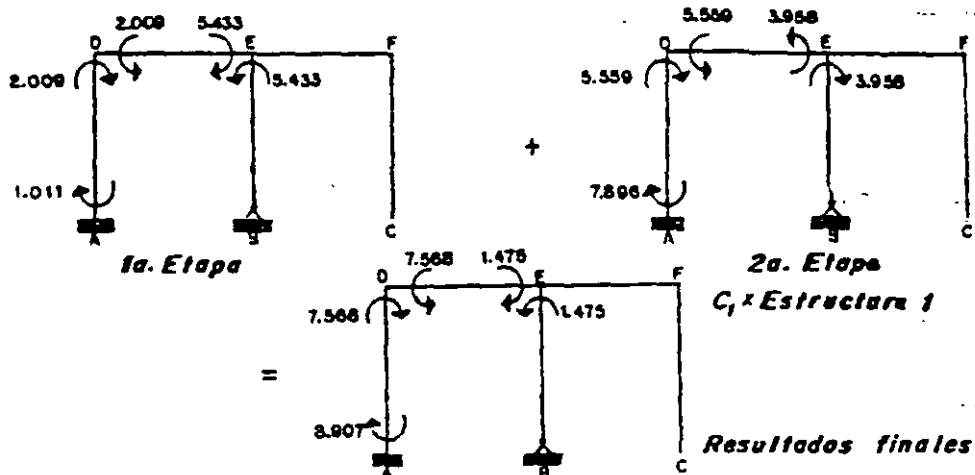
Fuerza que ha producido el desplazamiento  $\Delta$  del cabeza:



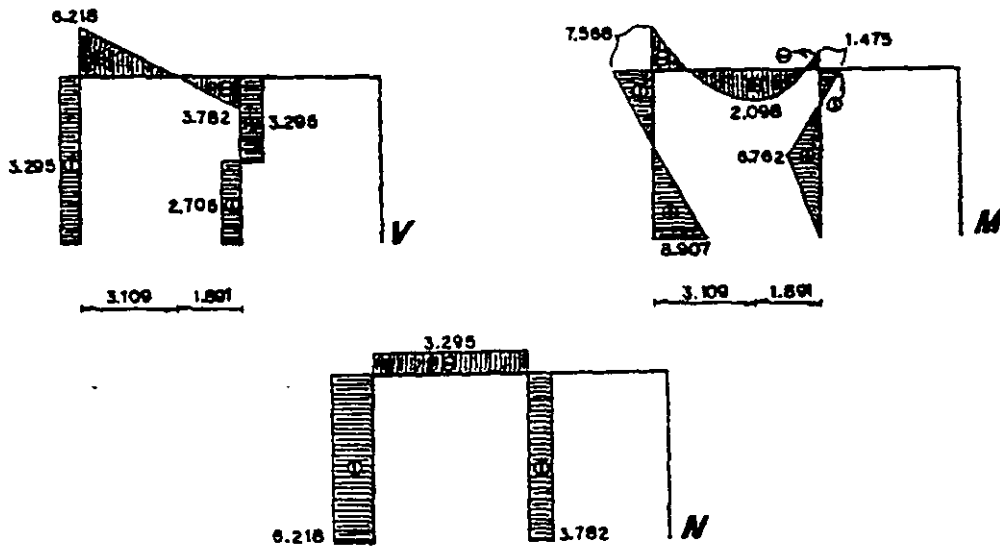
Factor de corrección:

$$C_1 = \frac{3.483}{3.387} = 1.0283437$$

*2 a. Etapa*  
**Resultados Finales = 1a. Etapa +  $C_1$  Estructura 1**

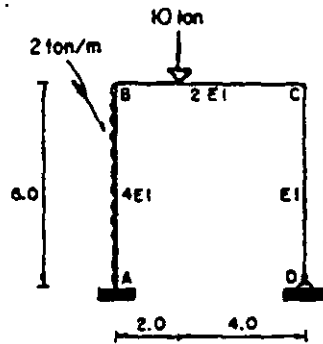


**Diagramas finales:**



METODO DE CROSS

7.12. Determinar los momentos en los vértices del siguiente marco.



1a. ETAPA.- Se consideran los nudos fijos y después se giran.

- Momentos de empotramiento.

$$M_{AB} = -\frac{2(6)^2}{12} = -6.000$$

$$M_{BA} = 6.000$$

$$M_{BC} = -\frac{10(2)(4)^2}{(6)^2} = -8.888$$

$$M_{CB} = \frac{10(2)^2(4)}{(6)^2} = 4.444$$

- Factores de distribución.

- NUDO B -

$$K_{BA} = \frac{4(4EI)}{6} = 2.666EI$$

$$K_{BC} = \frac{4(2EI)}{6} = 1.333EI$$

$$K_B = 4EI$$

$$d_{BA} = \frac{2.666EI}{4EI} = 0.67$$

$$d_{BC} = \frac{1.333EI}{4EI} = 0.33$$

- NUDO C -

$$K_{CB} = \frac{4(2EI)}{6} = 1.333EI$$

$$K_{CD} = \frac{3EI}{6} = 0.500EI$$

$$K_C = 1.833EI$$

$$d_{CB} = \frac{1.333EI}{1.833EI} = 0.73$$

$$d_{CD} = \frac{0.500EI}{1.833EI} = 0.27$$



METODO DE CROS

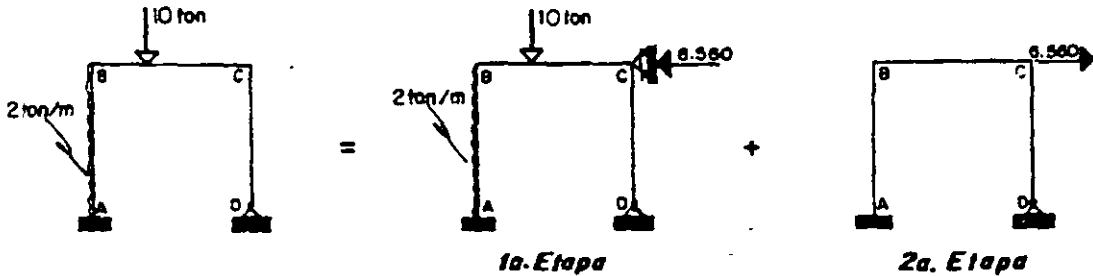
	B			C		
	C	T	D	T	I	C
dij	0.67	0.33		0.73	0.27	
M	6.000	-1.888		4.444	0.000	
E	1.935	0.253		-3.244	-1.200	
T		-1.02		0.476		
E	1.087	0.535		-0.347	-0.129	
T		-0.173		0.267		
E	0.116	0.057		-0.195	-0.072	
T		-0.097		0.028		
E	0.065	0.032		-0.020	-0.008	
MF	9.203	-9.203		1.409	-1.409	

M	-6.000
	0.967
	0.543
	0.058
MF	-4.432

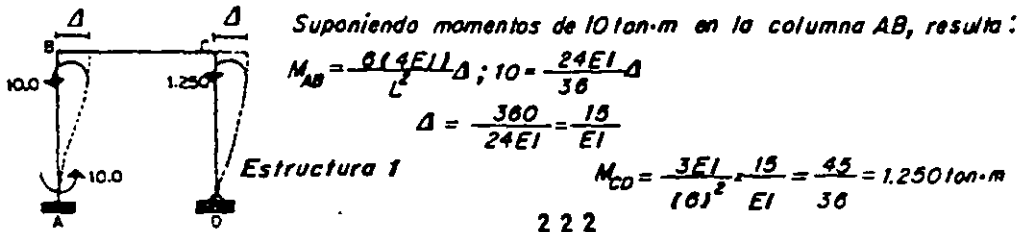
Fuerza que ha impedido el desplazamiento del cabezal.



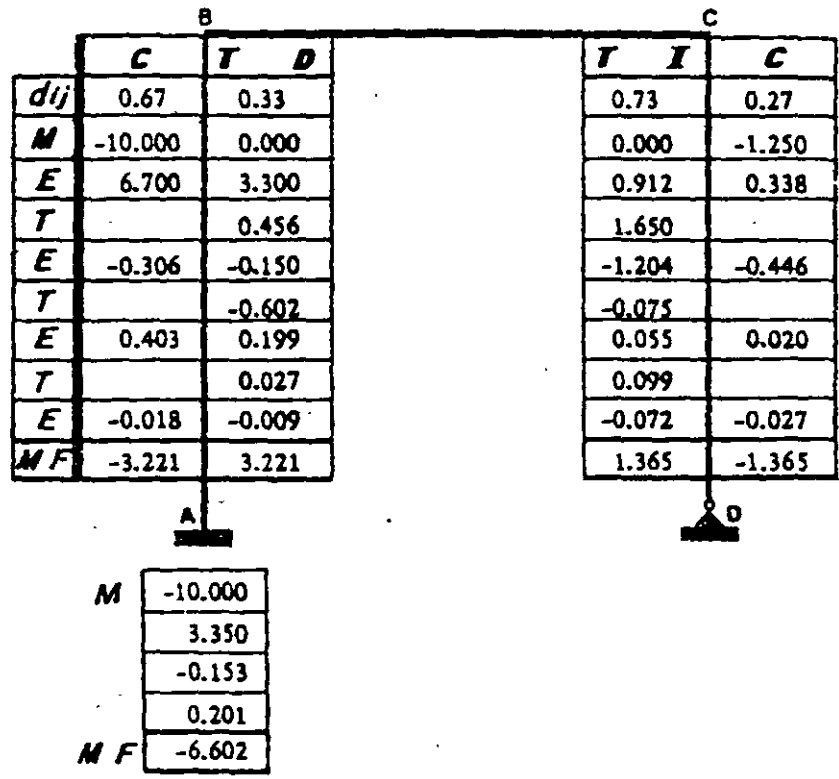
La sol. del marco requiere del análisis de las siguientes estructuras:



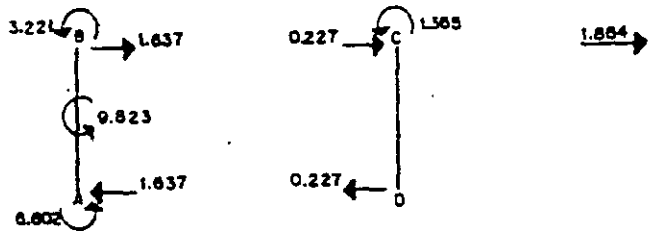
2a. ETAPA.- Desplazamiento del cabezal.



METODO DE CROSS



Fuerza que ha producido el desplazamiento Δ del cabezal.

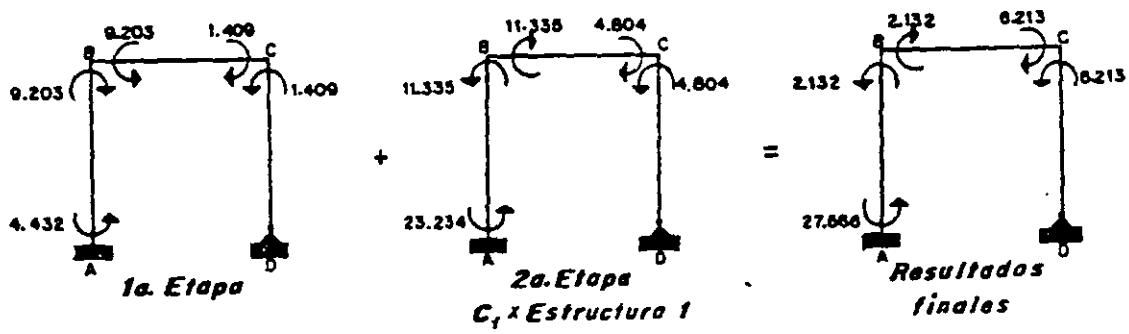


Factor de corrección:

$$C_1 = \frac{0.560}{1.864} = 0.299356$$

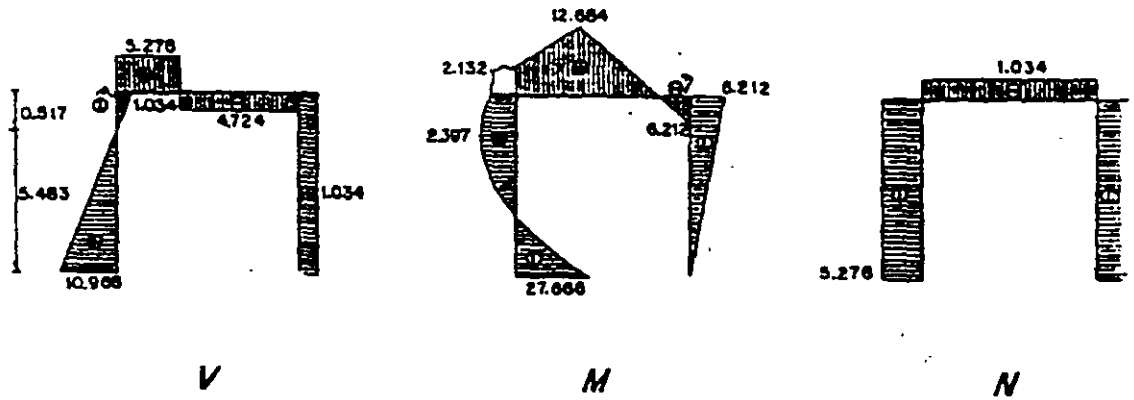
2a. Etapa

Resultados Finales = 1a. Etapa +  $C_1 \times$  Estructura 1

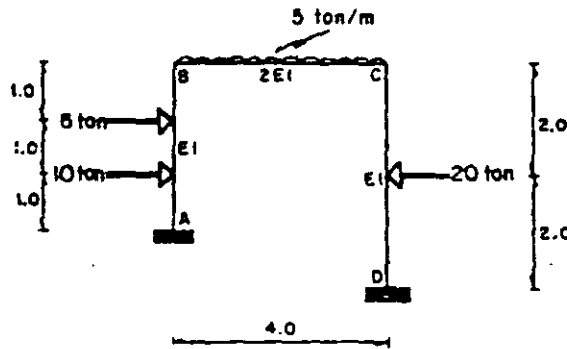


METODO DE CROSS

Diagramas finales:



7.13. Encontrar los momentos finales del marco hiperestático.



1a. ETAPA.- Empotrar los nudos para posteriormente permitir su giro.

- Momentos de empotramiento.

$$M_{AB} = -\frac{10(1)(2)^2}{(3)^2} - \frac{6(2)(1)^2}{(3)^2} = -5.778$$

$$M_{BA} = \frac{10(1)^2(2)}{(3)^2} + \frac{6(2)^2(1)}{(3)^2} = 4.889$$

$$M_{BC} = -\frac{5(4)^2}{12} = -6.667 \quad M_{CB} = 6.667$$

$$M_{CD} = -\frac{20(4)}{8} = -10.000 \quad M_{DC} = 10.000$$

- Factores de distribución.

- NUDO B -

$$K_{BA} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{BC} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_B = 3.333EI$$

$$d_{BA} = \frac{1.333EI}{3.333EI} = 0.40$$

$$d_{BC} = \frac{2EI}{3.333EI} = 0.60$$

METODO DE CROSS

-NUDO C-

$$K_{CB} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_{CD} = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$K_C = 3EI$$

$$d_{CB} = \frac{2EI}{3EI} = 0.67$$

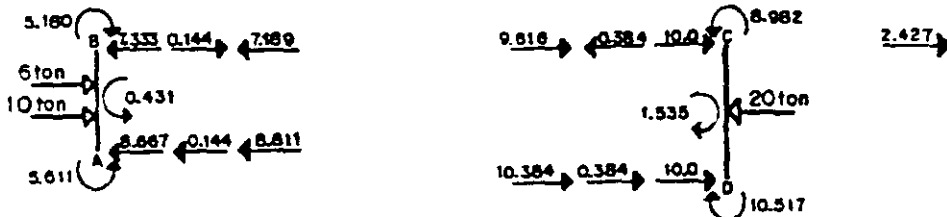
$$d_{CD} = \frac{EI}{3EI} = 0.33$$

	B		C	
	C	D	T	I
<i>d<sub>ij</sub></i>	0.40	0.60	0.67	0.33
<i>M</i>	4.889	-6.667	6.667	-10.000
<i>E</i>	0.711	1.067	2.233	1.100
<i>T</i>	-----	1.116	0.533	-----
<i>E</i>	-0.446	-0.670	-0.357	-0.176
<i>T</i>	-----	-0.178	-0.335	-----
<i>E</i>	-0.071	0.107	0.224	0.111
<i>T</i>	-----	0.112	0.053	-----
<i>E</i>	-0.045	-0.067	-0.036	-0.017
<i>M F</i>	5.180	-5.180	8.982	-8.982

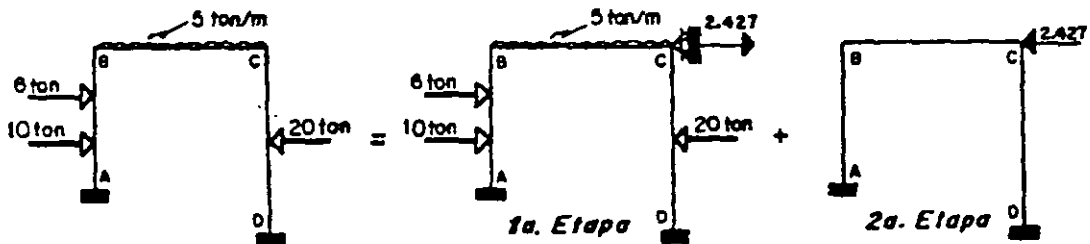
  

A		D	
<i>M</i>	-5.778	10.000	
	0.355	0.550	
	-0.223	-0.088	
	0.035	0.055	
<i>M F</i>	-5.611	10.517	

Fuerza que ha impedido el desplazamiento del cabezal.



La solución de la estructura requiere del análisis de los siguientes marcos.

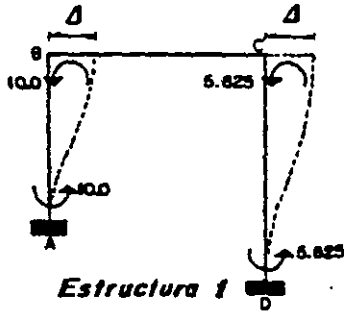


De acuerdo a lo anterior, en la 2a. Etapa, es necesario trasladar el cabezal -

METODO DE CROSS

hacia la izquierda, sin embargo, se tendrá otra variante del método, desplazando el cabezal hacia la derecha, lo que traerá consigo únicamente que el factor correctivo resultará con signo negativo (esta variante de trasladar los cabezales hacia la derecha, sin importar el sentido del desplazamiento requerido, se conservará en los ejemplos restantes).

2a. ETAPA.- Desplazamiento del cabezal.



Suponiendo momentos de 10 ton·m en la columna AB,

tenemos:  $M_{AB} = \frac{6EI}{L^2} \Delta$  ;  $10 = \frac{6EI}{13^2} \Delta$

$$\Delta = \frac{90}{6EI} = \frac{15}{EI}$$

$$M_{DC} = \frac{6EI}{14^2} \frac{15}{EI} = \frac{90}{14^2} = 5.625 \text{ ton·m}$$

	B		C	
	C	T	T	C
$d_{ij}$	0.40	0.60	0.67	0.33
$M$	-10.000	0.000	0.000	-5.625
$E$	4.000	6.000	3.769	1.856
$T$	-----	1.884	3.000	-----
$E$	-0.754	-1.130	-2.010	-0.990
$T$	-----	-1.005	-0.565	-----
$E$	0.402	0.603	0.379	0.186
$T$	-----	0.189	0.301	-----
$E$	-0.076	-0.113	-0.202	-0.099
$M F$	-6.428	6.428	4.672	-4.672

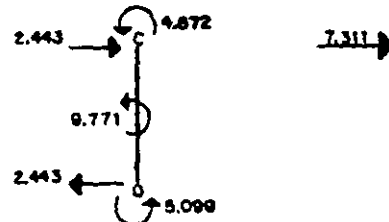
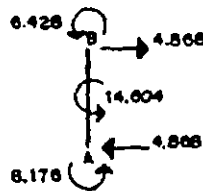
A

$M$	-10.000
	2.000
	-0.377
	0.201
$M F$	-8.176

D

$M$	-5.625
	0.928
	-0.495
	0.093
$M F$	-5.099

Fuerza que ha producido el desplazamiento Δ del cabezal.



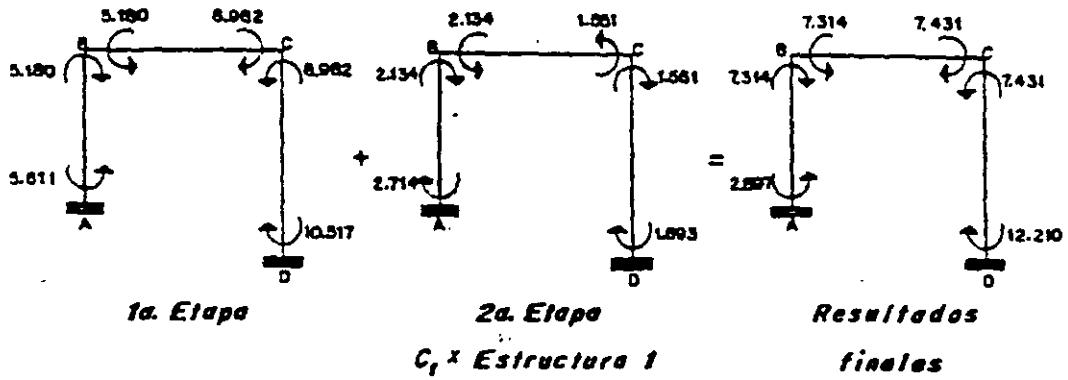
METODO DE CROSS

Factor de corrección:

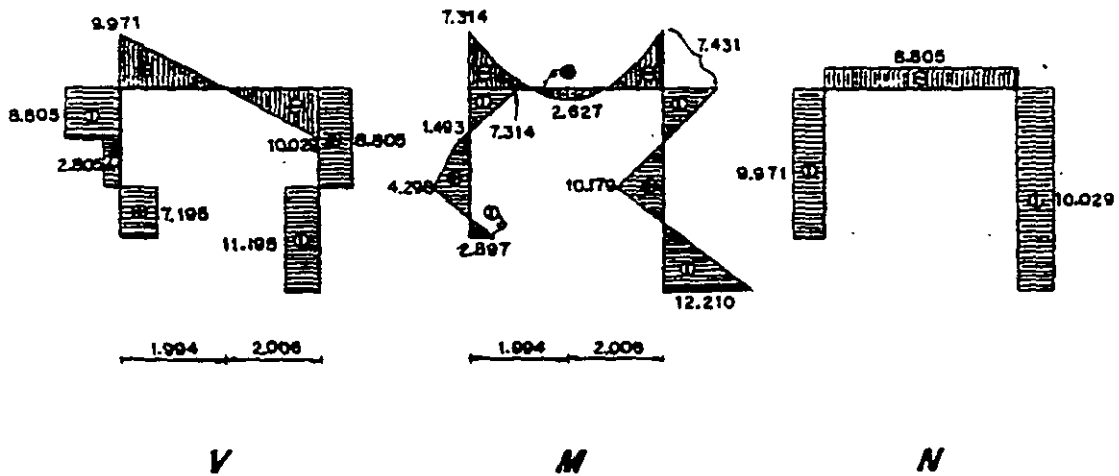
$$C_1 = -\frac{2.427}{7.311} = -0.3319655$$

2a. Etapa

Resultados Finales = 1a. Etapa +  $C_1 \times$  Estructura 1

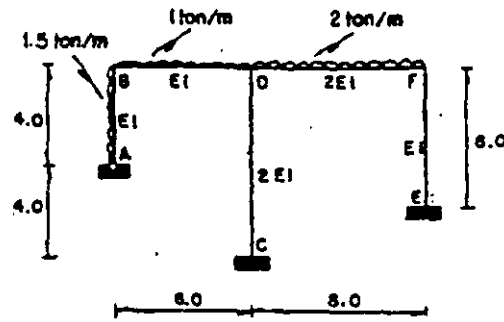


Diagramas finales:



METODO DE CROSS

7.14. Trazar los diagramas de elementos mecánicos de la estructura siguiente.



1a. ETAPA.- Se empujan los nudos y posteriormente se permite su giro.

- Momentos de empotramiento.

$$M_{BA} = \frac{1.5(4)^2}{8} = 3.000 \quad M_{BD} = \frac{1(6)^2}{12} = 3.000 \quad M_{DB} = 3.000$$

$$M_{DF} = \frac{2(6)^2}{12} = 6.000 \quad M_{FD} = 6.000$$

- Factores de distribución.

-NUDO B-

$$K_{BA} = \frac{3EI}{4} = 0.750EI \quad K_{BD} = \frac{4EI}{6} = 0.666EI \quad K_B = 1.416EI$$

$$d_{BA} = \frac{0.750EI}{1.416EI} = 0.53 \quad d_{BD} = \frac{0.666EI}{1.416EI} = 0.47$$

-NUDO D-

$$K_{DB} = \frac{4EI}{6} = 0.666EI \quad K_{DF} = \frac{4(2EI)}{6} = EI \quad K_{DC} = \frac{4(2EI)}{6} = EI \quad K_D = 2.666EI$$

$$d_{DB} = \frac{0.666EI}{2.666EI} = 0.250 \quad d_{DF} = \frac{EI}{2.666EI} = 0.375 \quad d_{DC} = \frac{EI}{2.666EI} = 0.375$$

-NUDO F-

$$K_{FD} = \frac{4(2EI)}{6} = EI \quad K_{FE} = \frac{4EI}{6} = 0.666EI \quad K_F = 1.666EI$$

$$d_{FD} = \frac{EI}{1.666EI} = 0.60 \quad d_{FE} = \frac{0.666EI}{1.666EI} = 0.40$$

METODO DE CROSS

	B			D			F				
	C	T	D	T	I	C	T	D	T	I	C
<i>d<sub>ij</sub></i>	0.53	0.47		0.250	0.375	0.375			0.60	0.40	
<i>M</i>	3.000	-3.000		3.000	0.000	-10.666			10.666	0.000	
<i>E</i>	0.000	0.000		1.916	2.875	2.875			-6.400	-4.266	
<i>T</i>		0.958		0.000		-3.200			1.437		
<i>E</i>	-0.508	-0.450		0.800	1.200	1.200			-0.862	-0.575	
<i>T</i>		0.400		-0.225		-0.431			0.600		
<i>E</i>	-0.212	-0.188		0.164	0.246	0.246			-0.360	-0.240	
<i>T</i>		0.082		-0.098		-0.180			0.123		
<i>E</i>	-0.043	-0.039		0.070	0.104	0.104			-0.074	-0.049	
<i>T</i>		0.035		-0.019		-0.037			0.052		
<i>E</i>	-0.019	-0.016		0.014	0.021	0.021			-0.031	-0.021	
<i>T</i>		0.007		-0.008		-0.015			0.010		
<i>E</i>	-0.004	-0.003		0.005	0.009	0.009			-0.006	-0.004	
<i>M.F</i>	2.214	-2.214		5.619	4.455	-10.074			5.155	-5.155	

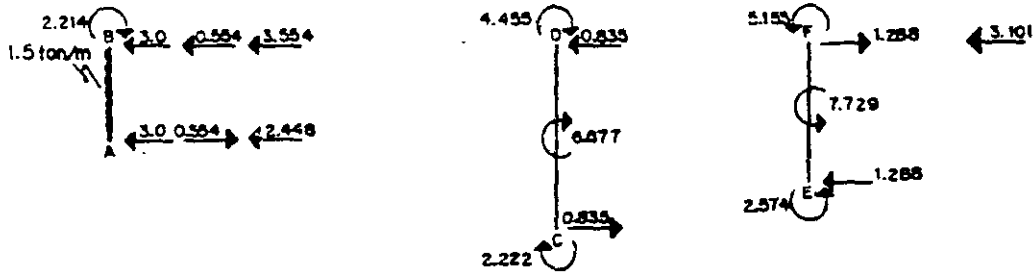
  

	1.437
	0.600
	0.123
	0.052
	0.010
<i>M.F</i>	2.222

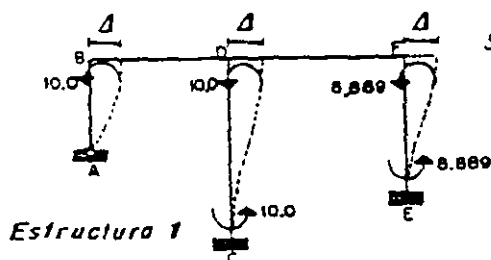
  

	-2.133
	-0.287
	-0.120
	-0.024
	-0.010
<i>M.F</i>	-2.574

Fuerza que ha impedido el desplazamiento del cabezal.



2a. ETAPA.- Desplazamiento del cabezal.



$$\text{Suponiendo } M_{DC} = 10 = \frac{6(2EI)}{18} \Delta ; 10 = \frac{12EI}{64} \Delta$$

$$\Delta = \frac{640}{12EI} = \frac{160}{3EI}$$

$$M_{BA} = \frac{3EI}{16} \cdot \frac{160}{3EI} = 10 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$M_{FE} = \frac{6EI}{36} \cdot \frac{160}{3EI} = 8.889 \text{ ton}\cdot\text{m}$$



METODO DE CROSS

	B	
	C	D
dij	0.53	0.47
M	-10.000	0.000
E	5.300	4.700
T		1.250
E	-0.662	-0.588
T		-0.627
E	0.332	0.295
T		0.107
E	-0.057	-0.050
T		-0.053
E	0.028	0.025
T		0.009
E	-0.005	-0.004
MF	-5.064	5.064

	D		
	T	I	C
	0.250	0.375	0.375
	0.000	-10.000	0.000
	2.500	3.750	3.750
	2.350		2.666
	-1.254	-1.881	-1.881
	-0.294		-0.562
	0.214	0.321	0.321
	0.147		0.282
	-0.107	-0.161	-0.161
	-0.025		-0.048
	0.019	0.027	0.027
	0.012		0.024
	-0.010	-0.013	-0.013
	3.552	-7.957	4.405

	F	
	T	I
	0.60	0.40
	0.000	-8.889
	5.333	3.556
	1.875	
	-1.125	-0.750
	-0.940	
	0.564	0.376
	0.160	
	-0.096	-0.064
	-0.080	
	0.048	0.032
	0.013	
	-0.008	-0.005
	5.744	-5.744

A

C

E

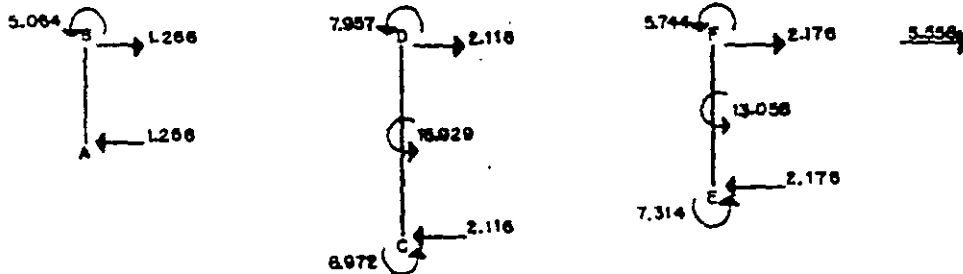
M

-10.000
1.875
-0.940
0.160
-0.080
0.013
MF -8.972

M

-8.889
1.778
-0.375
0.188
-0.032
0.016
MF -7.314

Fuerza que produjo el desplazamiento Δ del cabezal.



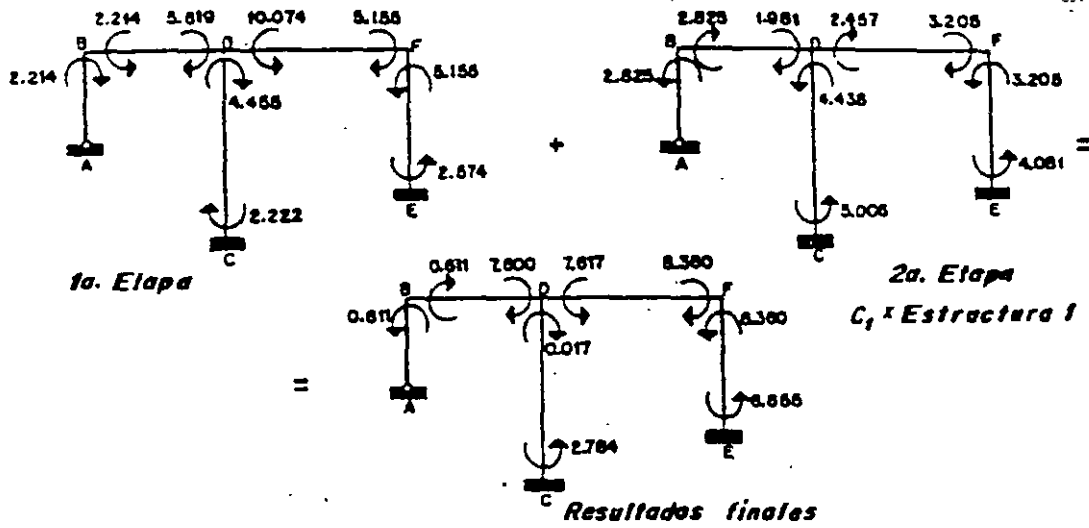
Factor de corrección.

$$C_1 = -\frac{3.101}{5.558} = -0.5579345$$

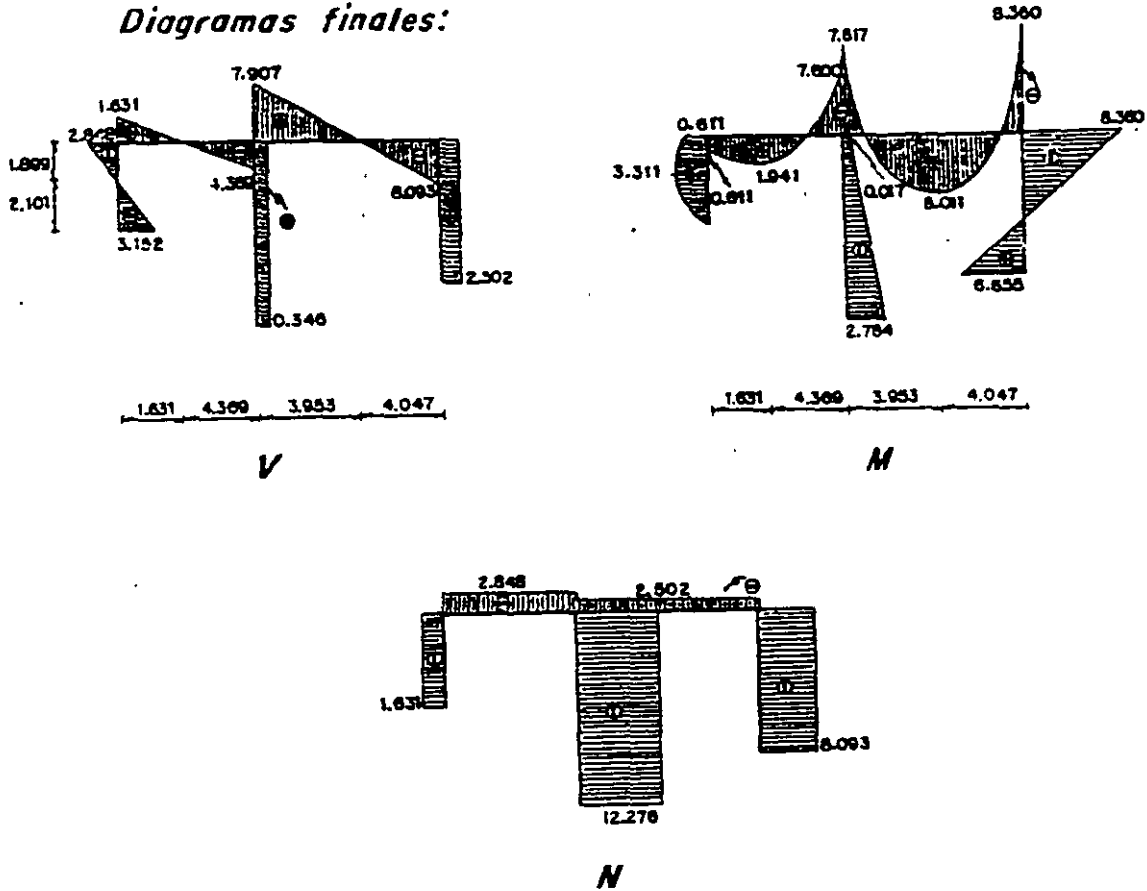
2a. Etapa

Resultados Finales = 1a. Etapa +  $C_1$  \* Estructura 1

METODO DE CROSS

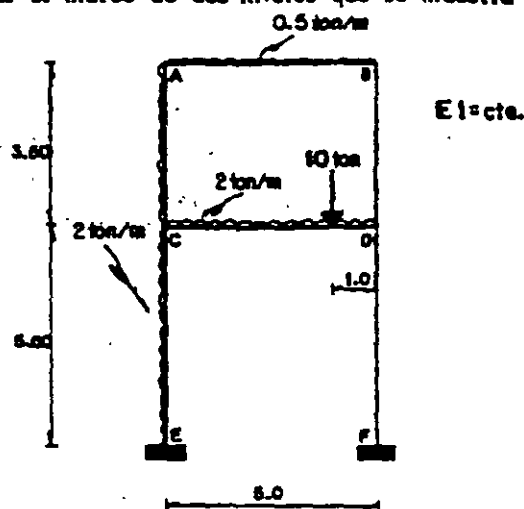


Diagramas finales:



METODO DE CROSS

7.15. Resolver el marco de dos niveles que se muestra enseguida.



1a. ETAPA.- Se empotran los nudos para posteriormente permitir su giro.

- Momentos de empotramiento.

$$M_{AB} = \frac{0.5151^2}{12} = 1.042 \quad M_{BA} = 1.042 \quad M_{CD} = \frac{2(5)^2}{12} + \frac{10(4)(11)}{15^2} = 5.707$$

$$M_{DC} = \frac{2(5)^2}{12} + \frac{10(4)(11)}{15^2} = 10.507 \quad M_{AC} = \frac{2(3.5)^2}{12} = 2.042 = -M_{CA} \quad M_{CE} = \frac{2(5)^2}{12} = 4.167 = -M_{EC}$$

- Factores de distribución.

- NUDO A -

$$K_{AB} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI \quad K_{AC} = \frac{4EI}{3.5} = 1.143EI \quad K_A = 1.943EI$$

$$d_{AB} = \frac{0.80EI}{1.943EI} = 0.41 \quad d_{AC} = \frac{1.143EI}{1.943EI} = 0.59$$

- NUDO B -

Por simetría geométrica:  $d_{BA} = 0.41 \quad d_{BD} = 0.59$

- NUDO C -

$$K_{CA} = \frac{4EI}{3.50} = 1.143EI \quad K_{CD} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI \quad K_{CE} = \frac{4EI}{5} = 0.80EI \quad K_C = 2.743EI$$

$$d_{CA} = \frac{1.143EI}{2.743EI} = 0.416 \quad d_{CD} = \frac{0.80EI}{2.743EI} = 0.292 = d_{CE}$$

- NUDO D -

Por simetría geométrica:  $d_{DB} = 0.416 \quad d_{DC} = 0.292 = d_{DF}$

METODO DE CROSS

A			B		
	C	T D		T I	C
<i>d<sub>ij</sub></i>	0.59	0.41		0.41	0.59
M	2.042	-1.042		0.042	
E	-0.590	-0.410		-0.427	-0.615
T	0.758	-0.214		-0.205	-2.198
E	-0.321	-0.223		0.985	1.418
T	0.382	0.493		-0.112	-0.047
E	-0.516	-0.359		0.065	0.094
T	0.040	0.033		-0.180	-0.203
E	-0.043	-0.030		0.157	0.226
T	0.084	0.079		-0.015	-0.016
E	-0.096	-0.067		0.013	0.019
MF	1.740	-1.740		1.323	-1.323

C				D			
	C	S	T D		T	I	C S
<i>d<sub>ij</sub></i>	0.416	0.292	0.292		0.292	0.292	0.416
M	-2.042	4.167	-5.767		10.567		
E	1.516	1.063	1.063		-3.086	-3.086	-4.396
T	-0.295		-1.543		0.532		-0.308
E	0.764	0.537	0.537		-0.065	-0.065	-0.094
T	-0.161		-0.033		0.269		0.709
E	0.080	0.057	0.057		-0.286	-0.286	-0.406
T	-0.258		-0.143		0.029		0.047
E	0.0167	0.117	0.117		-0.022	-0.022	-0.032
T	-0.022		-0.011		0.059		0.113
E	0.013	0.010	0.010		-0.050	-0.050	-0.072
MF	-0.238	5.951	-5.713		7.947	-3.509	-4.439

E	
M	-4.167
	0.532
	0.269
	0.029
	0.059
	0.005
MF	3.273

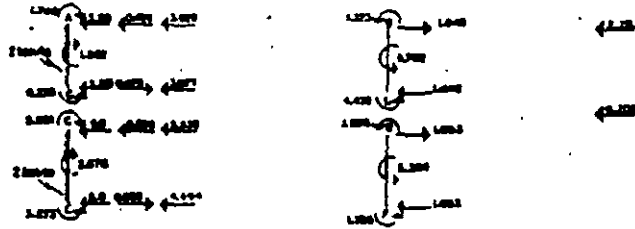
  

F	
	0.000
	-1.543
	-0.033
	-0.143
	-0.011
	-0.025
	1.755

Arreglo tabulado de solución (1a. ETAPA).

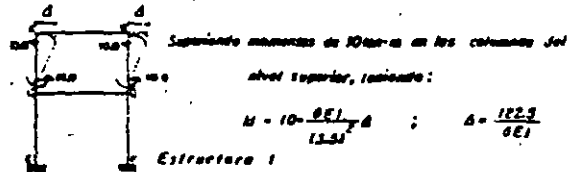
METODO DE CROSS

Puentes que han impedido el desplazamiento de los cabezales.



2a. ETAPA.- Desplazamiento de los cabezales.

- Desplazamiento del cabezal superior.

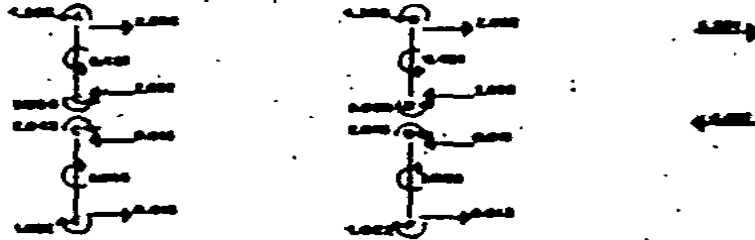


	A			B		
	C	T	D	T	I	C
dif	0.57	0.41		0.41	0.57	
M	-10.000	0.000		0.000	-10.000	
E	1.900	4.110		4.100	1.900	
T	2.080	2.080		2.080	2.080	
E	-2.437	-1.693		-1.693	-2.437	
T	-0.917	-0.847		-0.847	-0.917	
E	1.041	0.723		0.723	1.041	
T	0.348	0.362		0.362	0.348	
E	-0.443	-0.307		-0.307	-0.443	
T	-0.165	-0.154		-0.154	-0.165	
E	0.148	0.131		0.131	0.148	
M.F.	-4.363	4.363		4.363	-4.363	

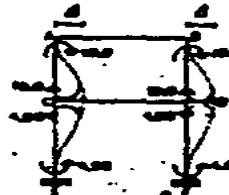
	C			D		
	C	S	T	T	I	C
dif	0.416	0.292	0.292	0.292	0.292	0.416
M	-10.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-10.000
E	4.160	2.920	2.920	2.920	2.920	4.160
T	2.920		3.660	3.660		2.920
E	-1.834	-1.288	-1.288	-1.288	-1.288	-1.834
T	-1.218		-0.644	-0.644		-1.218
E	0.773	0.544	0.544	0.544	0.544	0.773
T	0.321		0.272	0.272		0.321
E	-0.129	-0.112	-0.112	-0.112	-0.112	-0.129
T	-0.223		-0.116	-0.116		-0.223
E	0.140	0.099	0.099	0.099	0.099	0.140
M.F.	-3.256	2.063	3.013	3.013	2.063	-3.256

	C	D
M.F.	1.460	1.460
	-0.644	-0.644
	0.272	0.272
	-0.116	-0.116
	0.090	0.090
	1.022	1.022

Cálculo de fuerzas en las columnas.



- Desplazamiento del cabalzo inferior.



Suponiendo momentos de 10.000 en las columnas del nivel superior, se obtiene aproximadamente  $\Delta = \frac{100.00}{6EI}$

resultante para el nivel inferior:

$$M = \frac{9EI}{20} \frac{100.00}{6EI} = 1.500 \text{ mm}$$

Estructura 2

	C	T	D		T	I	C
dj	0.372	0.41			0.41	0.372	
M	10.000	0.000			0.000	10.000	
E	-1.909	-1.100			-1.100	-1.909	
T	-1.061	-1.050			-1.050	-1.061	
E	1.833	1.276			1.276	1.833	
T	0.762	0.628			0.628	0.762	
E	-0.630	-0.577			-0.577	-0.630	
T	-0.303	-0.289			-0.289	-0.303	
E	0.249	0.243			0.243	0.249	
T	0.131	0.122			0.122	0.131	
E	-0.149	-0.104			-0.104	-0.149	
MF	-1.841	-1.841			-1.841	-1.841	

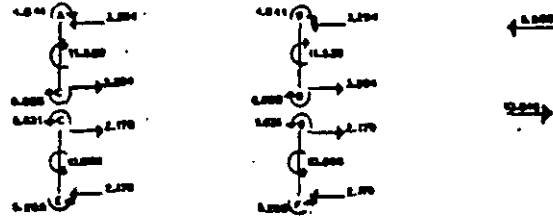
	C	S	C	I	T	D	T	I	C	I	C	S
dj	0.416	0.292	0.292				-0.292	0.292	0.416			
M	10.000	-1.900	0.000				0.000	-1.900	10.000			
E	-2.122	-1.487	-1.487				-1.487	-1.487	-2.122			
T	-2.722						-0.745	-0.745	-2.722			
E	1.877	1.079	1.079				1.079	1.079	1.877			
T	0.818						0.540	0.540	0.818			
E	-0.686	-0.426	-0.426				-0.426	-0.426	-0.686			
T	-0.415						-0.213	-0.213	-0.415			
E	0.262	0.183	0.183				0.183	0.183	0.262			
T	0.172						0.092	0.092	0.172			
E	-0.111	-0.078	-0.078				-0.078	-0.078	-0.111			
MF	1.688	-1.611	-1.611				-1.611	1.611	1.688			

M	-1.900
	-0.745
	0.540
	-0.213
	0.092
	-0.078
MF	-1.263

	-1.900
	-0.745
	0.540
	-0.213
	0.092
	-0.078
	-1.263

**METODO DE CROSS**

Cálculo de fuerzas en las cabezas.



Factores de corrección.

$$2.283 = 3.364C_1 - 0.588C_2$$

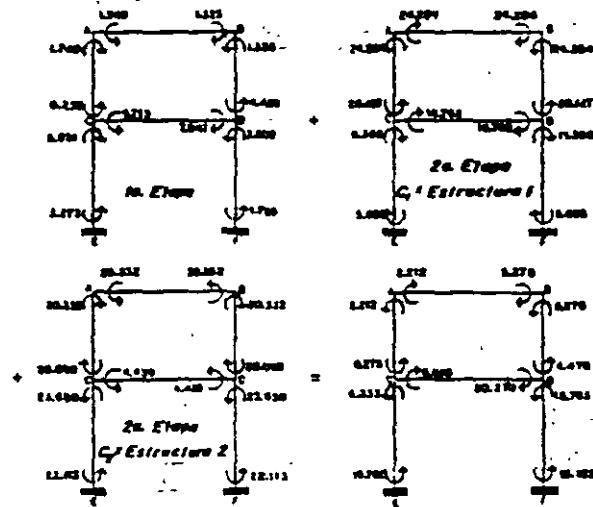
$$0.700 = -0.810C_1 + 10.040C_2$$

La solución es:

$$C_1 = 3.3622438 ; C_2 = 4.1000865$$

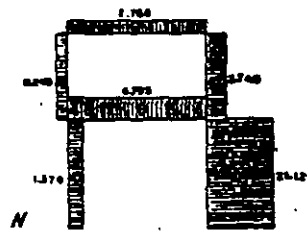
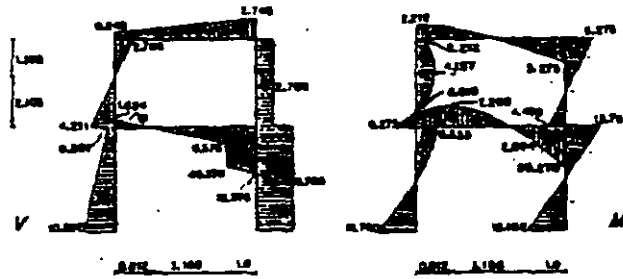
2a. Etapa

Resultados Finales = 1a. Etapa +  $C_1$  Estructura 1 +  $C_2$  Estructura 2



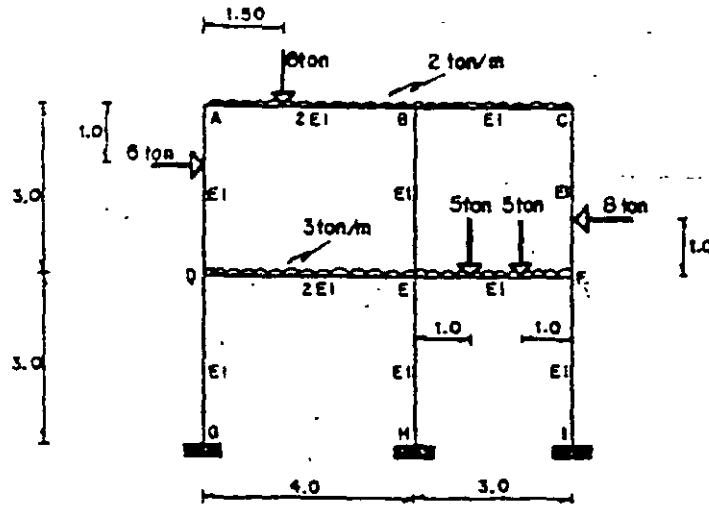
Resultados finales

Diagramas finales:



METODO DE CROSS

7.16. Determinar los momentos en los vértices del siguiente marco.



1a. ETAPA.- Se fijan los nudos y después se giran.

- Momentos de empotramiento.

$$M_{AB} = -\frac{2(4)^2}{12} - \frac{8(1.5)(2.5)^2}{14^2} = -0.182$$

$$M_{BA} = \frac{2(4)^2}{12} + \frac{8(1.5)^2(2.5)}{14^2} = 4.770$$

$$M_{BC} = -\frac{2(3)^2}{12} = -1.500 \quad M_{CB} = 1.500$$

$$M_{DE} = -\frac{3(4)^2}{12} = -4.000 \quad M_{ED} = 4.000$$

$$M_{EF} = -\frac{3(3)^2}{12} - \frac{5(1)(3-1)}{3} = -5.583$$

$$M_{FE} = 5.583$$

$$M_{AD} = \frac{6(2)^2(1)}{13^2} = 2.067$$

$$M_{DA} = -\frac{6(2)(1)^2}{13^2} = -1.333$$

$$M_{CE} = -\frac{8(2)(1)^2}{13^2} = -1.778$$

$$M_{EC} = \frac{8(2)^2(1)}{13^2} = 3.555$$

- Factores de distribución.

-NUDO A-

$$K_{AB} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_{AD} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_A = 3.333EI$$

$$d_{AB} = \frac{2EI}{3.333EI} = 0.60$$

$$d_{AD} = \frac{1.333EI}{3.333EI} = 0.40$$

-NUDO B-

$$K_{BA} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI$$

$$K_{BC} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_{BE} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$K_B = 4.666EI$$

$$d_{BA} = \frac{2EI}{4.666EI} = 0.42$$

$$d_{BC} = \frac{1.333EI}{4.666EI} = 0.29 = d_{BE}$$



METODO DE CROSS

- MUDO C -

$$K_{C1} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI \quad K_{C2} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI \quad K_C = 2.666EI$$

$$d_{C1} = d_{C2} = \frac{1.333EI \cdot 0.50}{2.666EI} = 0.25$$

- MUDO D -

$$K_{D1} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI \quad K_{D2} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI \quad K_D = 2.666EI$$

$$d_{D1} = d_{D2} = \frac{1.333EI \cdot 0.29}{2.666EI} = 0.145$$

- MUDO E -

$$K_{E1} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI \quad K_{E2} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI \quad K_E = 2.666EI$$

$$d_{E1} = d_{E2} = \frac{2EI}{3EI} = 0.67$$

- MUDO F -

$$K_{F1} = K_{F2} = K_{F3} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI \quad K_F = 4EI$$

$$d_{F1} = d_{F2} = d_{F3} = \frac{1.333EI}{4EI} = 0.33$$

A			B			C		
C	T	D	T	C	T	T	I	C
d <sub>ij</sub>	0.40	0.60	0.42	0.29	0.29	0.50	0.50	0.50
M	2.667	-1.882	4.778	0.000	-1.500	1.500	-1.778	-1.778
E	1.406	1.109	-1.376	-0.950	-0.950	0.139	0.139	0.139
T	0.773	-0.958	1.034	0.174	0.069	-0.473	-1.523	-1.523
E	-0.034	-0.051	-0.545	-0.176	-0.176	0.999	0.999	0.999
T	-0.141	-0.272	-0.023	0.096	0.590	-0.188	-0.640	-0.640
E	0.165	0.248	-1.240	-0.168	-0.165	0.114	0.114	0.114
T	-0.019	-0.120	0.124	0.047	0.057	-0.082	-0.099	-0.099
E	0.053	0.083	-0.096	-0.066	-0.066	0.090	0.090	0.090
MF	4.872	-4.872	1.673	-1.240	-2.431	2.097	-2.097	-2.097

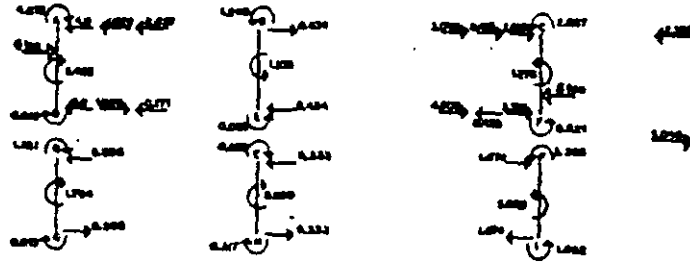
D					E					F					
C	S	C	T	D	T	I	C	S	C	T	D	T	I	C	S
d <sub>ij</sub>	0.29	0.29	0.47	0.47	0.34	0.22	0.22	0.22	0.22	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33
M	-1.333	0.000	-4.000	-4.000	4.000	0.000	0.000	-5.583	-5.583	5.583	0.000	5.555	5.555	5.555	5.555
E	1.546	1.546	2.240	2.240	0.539	0.348	0.348	0.348	0.348	-2.046	-2.046	-2.046	-2.046	-2.046	-2.046
T	0.703	0.703	0.269	0.269	1.120	-0.473	1.323	1.323	1.323	0.174	0.174	0.174	0.174	0.174	0.174
E	-0.282	-0.282	-0.408	-0.408	0.298	0.193	0.193	0.193	0.193	-0.081	-0.081	-0.081	-0.081	-0.081	-0.081
T	-0.017	-0.017	0.149	0.149	-0.204	-0.188	0.000	0.000	0.000	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096
E	-0.038	-0.038	-0.055	-0.055	0.147	0.095	0.095	0.095	0.095	-0.128	-0.128	-0.128	-0.128	-0.128	-0.128
T	0.082	0.082	0.073	0.073	-0.037	-0.087	0.000	0.000	0.000	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087
E	-0.045	-0.045	-0.065	-0.065	0.071	0.046	0.046	0.046	0.046	-0.035	-0.035	-0.035	-0.035	-0.035	-0.035
MF	0.016	1.181	-1.797	-1.797	5.944	-0.063	0.682	-6.363	-6.363	2.140	-3.360	0.871	0.871	0.871	0.871

G			H			I		
C	T	D	T	C	T	T	I	C
d <sub>ij</sub>	0.773	0.773	0.124	0.124	0.124	0.124	0.124	0.124
M	-0.141	-0.141	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096
E	-0.019	-0.019	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047
MF	0.613	0.613	0.317	0.317	0.317	0.317	0.317	0.317

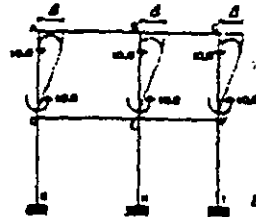
METODO DE CROSS

Fuerzas que han impedido el desplazamiento de los cabeceros.



2a. ETAPA.- Desplazamiento de los cabeceros.

- Desplazamiento del cabezal superior:



Si suponemos momentos de 10 ton-m en las columnas del nivel superior, tenemos:

$$M = 10 \frac{2EI}{L^2} \delta = \frac{10}{13^2} \delta = \frac{10}{169} \delta$$

Estructura I

	A		B			C		
	C	T D	T	C	T D	T	C	T D
d/I	0.40	0.40	0.42	0.29	0.29	0.30	0.30	
M	-10.000	0.000	0.000	-10.000	0.000	0.000	-10.000	0.000
E	4.000	6.000	4.200	2.900	2.900	5.000	5.000	
T	1.450	2.100	3.000	1.100	2.5000	1.450	1.666	
E	-1.420	-2.130	-2.772	-1.914	-1.914	-1.558	-1.558	
T	-0.536	-1.380	-1.063	-0.573	-0.779	-0.957	-0.600	
E	0.789	1.153	1.015	0.701	0.701	0.778	0.778	
T	0.231	0.507	0.578	0.256	0.389	0.350	0.223	
E	-0.293	-0.443	-0.513	-0.354	-0.354	-0.287	-0.287	
M F	-1.801	5.801	4.441	-7.884	1.643	4.776	-4.776	

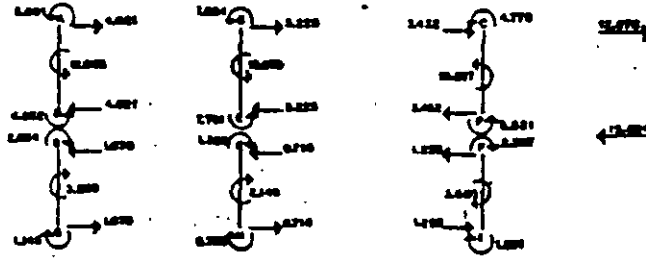
	D			E				F		
	C	S	T D	T	C	S	T D	T	C	S
d/I	0.39	0.29	0.42	0.14	0.22	0.22	0.22	0.33	0.33	0.33
M	10.000	0.000	0.000	0.000	-10.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-10.000
E	2.900	2.900	4.200	1.400	2.200	2.200	2.200	3.333	3.333	3.333
T	2.000	---	1.700	2.100	1.450	---	1.666	1.100	---	2.500
E	-1.873	---	-1.554	1.773	-1.147	---	-1.147	-1.208	---	-1.208
T	-0.710	---	-0.886	-0.777	-0.957	---	-0.600	-0.573	---	-0.779
E	0.443	---	0.670	0.794	0.513	---	0.513	0.451	---	0.451
T	0.384	---	0.397	0.335	0.350	---	0.225	0.256	---	0.389
E	-0.236	---	-0.328	-0.309	-0.200	---	-0.200	-0.215	---	-0.215
M F	-4.262	2.064	4.199	3.770	-7.791	1.366	2.657	3.152	2.369	-3.523

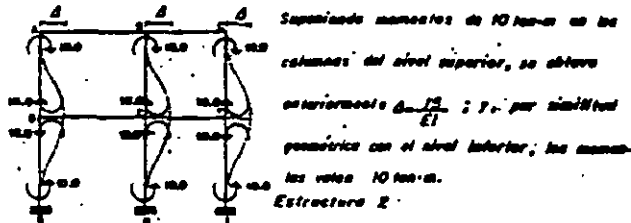
	G	H	I
M F	1.450	1.100	1.666
	-0.536	-0.573	-0.600
	0.231	0.256	0.223
	1.145	0.783	1.291

METODO DE CROSS

Fuerzas de las cabezas.



- Desplazamiento del cabezal inferior.



		A			B			C		
		C	T	D	T	C	T	D	T	C
d <sub>ij</sub>		0.40	0.60		0.42	0.29	0.29		0.30	0.50
M		10.000	0.000		0.000	10.000	0.000		0.000	10.000
E		-1.000	-4.000		-1.200	-2.900	-2.900		-1.000	-3.000
T		0.000	-2.100		-1.000	0.000	-2.500		-1.500	0.000
E		0.840	1.260		2.110	1.190	1.190		0.720	0.720
T		0.200	1.150		0.430	0.150	0.360		0.700	0.410
E		-0.870	-0.960		-0.480	-0.330	-0.330		-0.600	-0.600
T		-0.090	-0.240		-0.430	-0.170	-0.300		-0.160	-0.080
E		0.130	0.200		0.380	0.260	0.260		0.120	0.120
MF		6.390	-6.390		-4.790	6.600	-3.810		-3.370	3.370

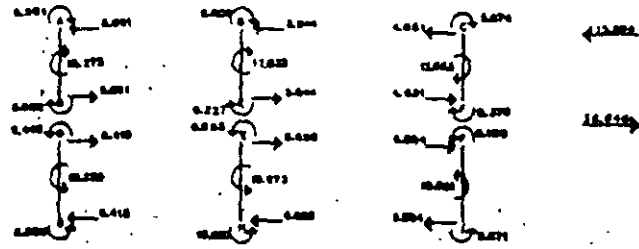
		D			E			F		
		C	T	D	T	C	T	D	T	C
d <sub>ij</sub>		0.29	0.29	0.42	0.34	0.22	0.22	0.22	0.33	0.33
M		10.000	-10.000	0.000	0.000	10.000	-10.000	0.000	0.000	-10.000
E		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
T		-1.000	---	0.000	0.000	-1.450	---	0.000	0.000	---
E		0.340	0.580	0.840	0.490	0.310	0.310	0.310	0.430	0.430
T		0.420	---	0.240	0.420	0.290	---	0.410	0.150	---
E		-0.190	-0.190	-0.280	-0.330	-0.330	-0.330	-0.330	-0.170	-0.170
T		-0.280	---	-0.170	-0.140	-0.140	---	-0.080	-0.170	---
E		0.160	0.160	0.230	0.130	0.080	0.080	0.080	0.160	0.160
MF		6.680	-9.440	0.760	0.330	9.220	-9.930	0.170	0.000	-9.180

		G	H	I
M		10.000	0.000	0.000
T		0.290	0.150	0.410
E		-0.090	-0.170	-0.080
MF		-9.800	-10.000	-9.670

**METODO DE CROSS**

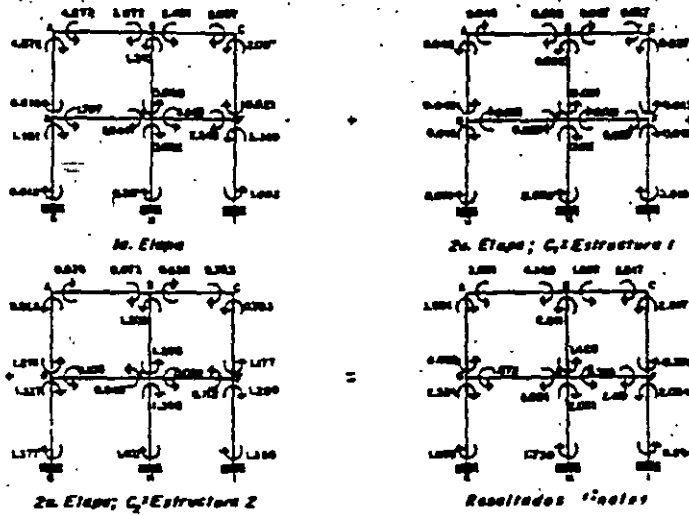
Calculo de fuerzas en los cabezales.



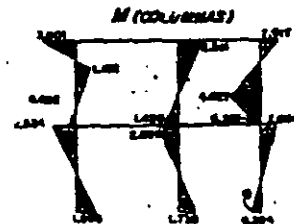
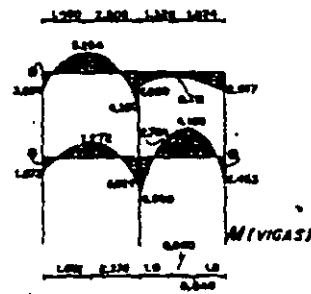
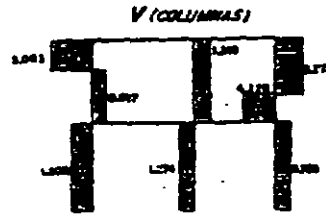
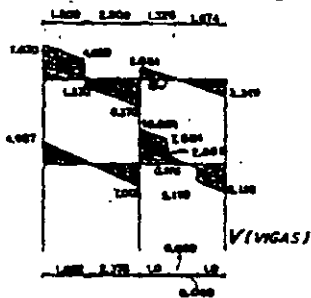
Factores de corrección.

$1.303 = 12.878C_1 - 15.886C_2$     La solución es:  
 $-0.046 = -15.884C_1 + 38.048C_2$      $C_1 = 0.0078640$      $C_2 = 0.004420$   
 2a. Etapa

Resultados Finales = 1a. Etapa +  $C_1$  Estructura 1 +  $C_2$  Estructura 2



Diagramas finales:



# Método modificado de Kani

## 8.1. INTRODUCCION

Este método permite obtener los momentos flexionantes finales en los extremos de todos los elementos de una estructura, no considerándose los efectos de las fuerzas cortante y normal.

La ventaja del método es que considera simultáneamente tanto el giro como los desplazamientos lineales de los nudos. El procedimiento es semejante al método de Cross, y hay necesidad de equilibrar nudo por nudo y piso por piso cuando hay desplazamientos laterales.

Las incógnitas son los giros y los desplazamientos laterales, utilizándose el método iterativo de Gauss - Seidel en la solución del sistema de ecuaciones. Dicho método establece que una incógnita se expresa como función de otras, suponiéndoseles valores arbitrarios para determinar el valor de la incógnita despejada y repitiendo el ciclo de sustitución un número suficiente de veces, se encuentra el valor exacto de la solución. El proceso iterativo finaliza una vez que las incógnitas tienen la precisión deseada.

El método se puede generalizar para marcos no ortogonales y con cualquier tipo de apoyos.

## METODO MODIFICADO DE KANI

### 8.2. METODO DE KANI

#### 8.2.1 OBTENCION DE LA ECUACION DEL GIRO DE UN NUDO

En base al proceso utilizado en el método de Rigideces se observa que el momento flexionante final en el extremo i de la barra ij, puede expresarse como:

$$M_{ij} = M_{ij}^0 + \frac{4EI}{L} \theta_i + \frac{2EI}{L} \theta_j - \frac{6EI}{L^2} \Delta_{ij}$$

si hacemos

$$K_{ij} = \frac{EI}{L} = K_{ji} \text{ (rigidez relativa a la flexión)}$$

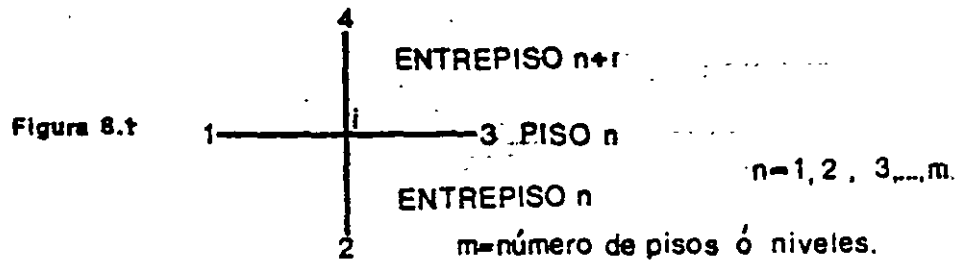
$$\phi_i = 2\theta_i \quad ; \quad \phi_j = 2\theta_j \quad ; \quad \psi_{ij} = \frac{6\Delta_{ij}}{L}$$

se tiene

$$M_{ij} = M_{ij}^0 + 2K_{ij} \phi_i + K_{ij} \phi_j - K_{ij} \psi_{ij} \quad (8.1.)$$

La convención de signos es que los momentos de flexión de nudo sobre barra son positivos cuando tienen el sentido de las manecillas de un reloj.

Haciendo referencia a la fig. 8.1 en donde se muestra el nudo i y las barras que concurren a dicho nudo



la condición de equilibrio está dada por

$$M_{i1} + M_{i2} + M_{i3} + M_{i4} = 0$$

en forma general

$$\sum_{j=1}^b M_{ij} = 0$$

en donde b indica el número de barras concurrentes al nudo i.

Reemplazando (8.1) en la suma anterior tenemos:

$$\sum_{j=1}^b M_{ij} = 0 = \sum_{j=1}^b M_{ij}^0 + 2\phi_i \sum_{j=1}^b K_{ij} + \sum_{j=1}^b K_{ij} \phi_j - \sum_{j=1}^b K_{ij} \psi_{ij}$$

si ahora hacemos

$$M_i = \sum_{j=1}^b M_{ij}^0 = \text{momento de disequilibrio en el nudo i.}$$

METODO MODIFICADO DE KANI

y 
$$K_i = \sum_{j=1}^2 K_{ij} = \text{rigidez angular del nudo } i.$$

resulta 
$$0 = \bar{m}_i + 2\phi_i K_i + \sum_{j=1}^2 K_{ij} \phi_j - \sum_{j=1}^2 K_{ij} \psi_{ij}$$

de donde se despeja el giro del nudo i, quedando

$$\phi_i = -\frac{M_i}{2K_i} - \frac{1}{2K_i} \sum_{j=1}^2 K_{ij} \phi_j + \frac{1}{2K_i} \sum_{j=1}^2 K_{ij} \psi_{ij}$$

esta ecuación expresa el giro del nudo i en función de los giros y desplazamientos relativos de los extremos de las barras que concurren al nudo.

8.2.2. OBTENCION DE LA ECUACION DEL DESPLAZAMIENTO LINEAL DE UN PISO

Considerando la fig. 8.2 en donde se ha aislado el piso n, obtenemos la ecuación general de equilibrio que establece:

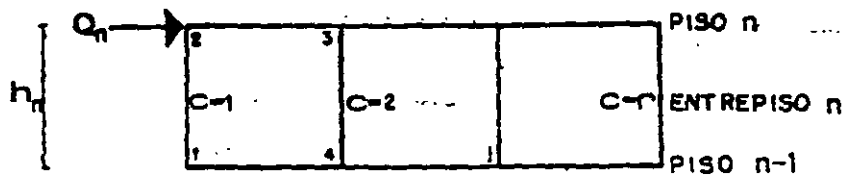


Fig. 8.2 Equilibrio horizontal del piso n.

$$\sum_{c=1}^r (M_{ij} + M_{ji}) = Q_n h_n$$

en donde

- r = número de columnas en el entrepiso n.
- \$Q\_n\$ = cortante acumulado arriba del piso n - 1 (positivo hacia la derecha).
- \$h\_n\$ = altura del entrepiso n.

Sustituyendo (8.1) en la ecuación anterior obtenemos la expresión de equilibrio del piso n, es decir:

$$\sum_{c=1}^r (M_{ij}^o + M_{ji}^o) + 3 \sum_{c=1}^r K_{ij} \phi_i + 3 \sum_{c=1}^r K_{ij} \phi_j - 2 \psi_n \sum_{c=1}^r K_{ij} = Q_n h_n$$

en la que si se iguala

$$M_n = \sum_{c=1}^r (M_{ij}^o + M_{ji}^o) = \text{momento de desequilibrio del entrepiso n.}$$

y

$$K_n = \sum_{c=1}^r K_{ij} = \text{rigidez del entrepiso } n.$$

resulta

$$M_n + 3 \sum_{c=1}^r K_{ij} (\phi_i + \phi_j) - 2 \psi_n K_n - Q_n h_n$$

de la cual se despeja el desplazamiento lineal, obteniendo:

$$\psi_n = \frac{Q_n h_n + M_n}{2 K_n} + \frac{3}{2 K_n} \sum_{c=1}^r K_{ij} (\phi_i + \phi_j)$$

La ecuación anterior expresa el desplazamiento del piso n, que es incógnita, como función de los giros de los extremos de las columnas del entrepiso n, que también son incógnitas.

En algunos casos  $M_n$  es igual a cero, excepto cuando existen fuerzas concentradas en la altura de las columnas, o columnas sujetas a carga distribuida no uniforme.

En la aplicación del método se calculan los factores

$$\mu_{ij} = \frac{K_{ij}}{2 K_i} \quad ; \quad \nu_{ij} = \frac{3 K_{ij}}{2 K_n}$$

por lo que las ecuaciones de equilibrio quedan:

$$\phi_i = -\frac{M_i}{2 K_i} + \sum_{j=1}^r \mu_{ij} \phi_j - \sum_{j=1}^r \mu_{ij} \psi_j \quad (8.2)$$

$$\psi_n = \frac{Q_n h_n + M_n}{2 K_n} - \sum_{c=1}^r \nu_{ij} (\phi_i + \phi_j) \quad (8.3)$$

Como comprobación, se tiene:

a) Para el nudo i 
$$\sum_{j=1}^r \mu_{ij} = \frac{1}{2}$$

b) Para el entrepiso n 
$$\sum_{c=1}^r \nu_{ij} = \frac{3}{2}$$



## METODO MODIFICADO DE KANI

Aplicando las expresiones (8.2) y (8.3) se obtiene un número de ecuaciones igual al número de incógnitas, o sea existen tantas ecuaciones (8.2) como nudos tienen giro y tantas (8.3) como pisos con desplazamiento en la estructura.

### 8.3. CASOS PARTICULARES

Se consideran como tales; cuando se tiene un entrepiso con columnas de diferentes alturas y cuando alguno de los apoyos es una articulación.

#### 8.3.1. ENTREPISO CON COLUMNAS DE DIFERENTES ALTURAS

La ecuación de equilibrio de piso se puede escribir como

$$Q_n = \sum_{c=1}^r \frac{M_{1j} + M_{j1}}{h_{1j}}$$

Si  $\bar{h}$  es una altura arbitraria que puede ser la más común del entrepiso en estudio, multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por dicha altura se obtiene

$$Q_n \bar{h} = \bar{h} \sum_{c=1}^r \frac{M_{1j} + M_{j1}}{h_{1j}} \quad (8.4)$$

sustituyendo (8.1) en (8.4) y si

$$a_{1j} = \frac{\bar{h}}{h_{1j}}$$

se obtiene 
$$Q_n \bar{h} = \sum_{c=1}^r (M_{1j}^o + M_{j1}^o) a_{1j} + 3 \sum_{c=1}^r K_{1j} a_{1j} (\phi_1 + \phi_j) - 2 \psi_n \sum_{c=1}^r K_{1j} a_{1j}^2 \quad (8.5)$$

en donde en el último término aparece  $a_{1j}$  al cuadrado debido a que

$$\psi_j = a_{1j} \psi_n \quad (8.6)$$

Haciendo

$$\sum_{c=1}^r (M_{1j}^o + M_{j1}^o) a_{1j} = \bar{M}_n$$

y

$$\sum_{c=1}^r K_{1j} a_{1j}^2 = \bar{R}_n$$

la expresión (8.5) queda

$$Q_n \bar{h} = \bar{M}_n + 3 \sum_{c=1}^r K_{1j} a_{1j} (\phi_1 + \phi_j) - 2 \psi_n \bar{R}_n$$

de donde se despeja el desplazamiento

## METODO MODIFICADO DE KANI

6.- Obtener los elementos mecánicos de fuerzas cortante y normal, para finalmente trazar los diagramas correspondientes.

Por último, es conveniente hacer notar que los desplazamientos lineales y angulares calculados con este método son múltiplos de los obtenidos con el método de Rigideces, esto debido a las relaciones utilizadas en la obtención de la expresión (8.1). Por otra parte, los giros positivos indican giros con el sentido de las manecillas del reloj. De igual manera, los desplazamientos lineales de las cuerdas son positivos en el sentido de las manecillas del reloj.

$$\psi_o = \frac{Q_o \bar{h} + \bar{M}_o}{2K_o} + \frac{3}{2K_o} \sum_{c=1}^r K_{ij} a_{ij} (\phi_i + \phi_j) \quad (8.7)$$

Aquí se calculan los factores

$$v_{ij} = \frac{3K_{ij}a_{ij}}{2K_o} \quad (8.8)$$

y como comprobación

$$\sum_{c=1}^r v_{ij} a_{ij} = \frac{3}{2}$$

reemplazando (8.8) en (8.7) se tiene

$$\psi_o = \frac{Q_o \bar{h} + \bar{M}_o}{2K_o} - \sum_{c=1}^r v_{ij} (\phi_i + \phi_j) \quad (8.9)$$

El proceso iterativo se aplica a las ecuaciones (8.2) en donde hay que tener en cuenta la ec. (8.6) cuando sea necesario, y a la ec. (8.9). Conocidos los valores de las incógnitas, se sustituyen en la ec. (8.1) teniendo en cuenta la ec. (8.6) cuando sea necesario.

### 8.3.2. APOYOS ARTICULADOS

Se procede de la siguiente manera:

Calcular el momento de empotramiento considerando la columna real. La rigidez relativa  $K_{ij}$  se multiplica por 0.75 para obtener la nueva rigidez relativa  $K'_{ij}$  de manera que con esta nueva rigidez el giro en el extremo superior considerando la base empotrada sea igual al giro con la rigidez  $K_{ij}$  cuando la columna está articulada.

La altura se tiene que multiplicar por 1.5 para que el desplazamiento superior considerando la base empotrada sea igual al desplazamiento cuando la columna está articulada, después de hacer lo anterior se aplica la ec. (8.2). Sin embargo, las fuerzas cortantes por desplazamiento no coinciden en las columnas -- real articulada y ficticia empotrada, requiriéndose un factor correctivo adicional que es:

$$b_{ij} = 0.75$$

Al sustituir una columna ficticia de altura distinta a la original, se tiene el caso de columnas de diferente altura, visto anteriormente. Se aplica la ec. (8.2) en la que se tendrá en cuenta (8.6) cuando sea necesario. El factor co--

## METODO MODIFICADO DE KANI

rectivo  $b_{ij}$  aparece en la ecuación de piso, con la componente de desplazamiento, por lo que sólo aparece en el último término de la ec. (8.5), por lo que ahora se considerará:

$$\bar{R}_i = \sum_{c=1}^r K_{ij} a_{ij}^2 b_{ij}$$

aplicándose la ec. (8.9).

La verificación será

$$\sum_{c=1}^r v_{ij} a_{ij} b_{ij} \frac{3}{2}$$

El proceso iterativo de solución se inicia suponiendo valores a las incógnitas (usualmente se suponen iguales a cero), y mejorando los valores supuestos por la aplicación de las ecuaciones de los giros y los desplazamientos. Los valores obtenidos son comparados con los supuestos y si se excede cierta tolerancia especificada, se repite el ciclo iterativo hasta que los últimos valores obtenidos no excedan la tolerancia, con respecto a los valores previos correspondientes.

Una vez determinados los desplazamientos lineales y angulares, se sustituyen en la ec. (8.1) obteniéndose los momentos flexionantes finales en los extremos de todas las barras de la estructura.

Estableciendo una secuela de cálculo para la aplicación del método modificado de Kani se tendría lo siguiente:

- 1.- Establecer el número de grados de libertad  $n$  de la estructura, tanto lineales como angulares (en el caso de giros se recomienda calcular éstos en los nudos donde concurren dos o más barras).
- 2.- Calcular los momentos de empotramiento causados por el sistema externo de cargas, así como los factores de distribución tanto angulares como lineales.
- 3.- Establecer el número  $n$  de ecuaciones, utilizando las expresiones correspondientes para giros y desplazamientos lineales de la estructura. Teniendo en consideración si la estructura tiene articulaciones como apoyos y/o columnas de diferente altura en un entrepiso.
- 4.- Aplicar el proceso iterativo de Gauss-Seidel al sistema de ecuaciones establecido, hasta obtener la precisión deseada.
- 5.- Conocidos los valores de los desplazamientos, calcular los momentos finales en los extremos de todas las barras de la estructura.

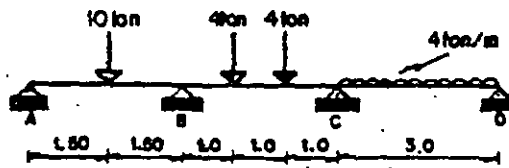
**8.4. Ejemplos**

**de**

**Aplicación**

## METODO MODIFICADO DE KANI

8.1. Resolver la viga continua que se muestra.



$EI = \text{cte.}$

- Cálculo de los momentos de empotramiento.

$$M_{BA} = \frac{10(1.5)(1.5+3)}{2(3)^2} = 5.025$$

$$M_{BC} = -\frac{4(1)(3-1)}{3} = -2.666$$

$$M_{CB} = 2.666$$

$$M_{CD} = -\frac{4(3)^2}{8} = -4.500$$

- Cálculo de los factores de distribución.

- NUDO B -

$$K'_{BA} = \frac{0.75EI}{3} = 0.250EI$$

$$K_{BC} = \frac{EI}{3} = 0.333EI$$

$$K_D = 0.583EI$$

$$\mu_{BA} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.250}{0.583} \right) = -0.214$$

$$\mu_{BC} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.333}{0.583} \right) = -0.286$$

$$\Sigma \mu = -0.500$$

- NUDO C -

$$K_{CB} = \frac{EI}{3} = 0.333EI$$

$$K'_{CD} = \frac{0.75EI}{3} = 0.250EI$$

$$K_C = 0.583EI$$

$$\mu_{CB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.333}{0.583} \right) = -0.286$$

$$\mu_{CD} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.250}{0.583} \right) = -0.214$$

$$\Sigma \mu = -0.500$$

También

$$\frac{M_B}{2K_B} = \frac{2.959}{2(0.583EI)} = -2.535 = EI \alpha_B$$

$$\frac{M_C}{2K_C} = \frac{-1.833}{2(0.583EI)} = 1.571 = EI \alpha_C$$

En este problema no hay desplazamientos relativos, por lo tanto las incógnitas son los giros en los nudos B y C.

$$\phi_B = \frac{M_B}{2K_B} + \mu_{BC} \phi_C$$

$$\phi_C = \frac{M_C}{2K_C} + \mu_{CB} \phi_B$$

Aplicando sucesivamente las dos ecuaciones anteriores se puede formar la siguiente tabla para la solución del problema.

METODO MODIFICADO DE KANI

	G I R O S	
	N U D O B	N U D O C
$-EI\Delta/2K_i$	$EI \alpha_B = -2.535$	$EI \alpha_C = 1.571$
$\mu_{ij}$	$\mu_{BC} = -0.286 \cdot \phi_C$	$\mu_{CB} = -0.286 \cdot \phi_B$
iteración	$EI \phi_B$	$EI \phi_C$
0	0	0
1	$EI \alpha_B = -2.535$ $\mu_{BC}(0) = 0.000 = -2.535$	$EI \alpha_C = 1.571$ $\mu_{CB}(-2.535) = 0.725 = 2.296$
2	$EI \alpha_B = -2.535$ $\mu_{BC}(2.296) = -0.657 = -3.192$	$EI \alpha_C = 1.571$ $\mu_{CB}(3.192) = 0.913 = 2.484$
3	-3.245	2.400
4	-3.250	2.500
5	-3.250	2.500

Así los giros son:  $\phi_B = \frac{3.250}{EI}$  y  $\phi_C = \frac{2.500}{EI}$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 8.1. se obtienen los momentos finales

en los extremos de las barras, teniéndose

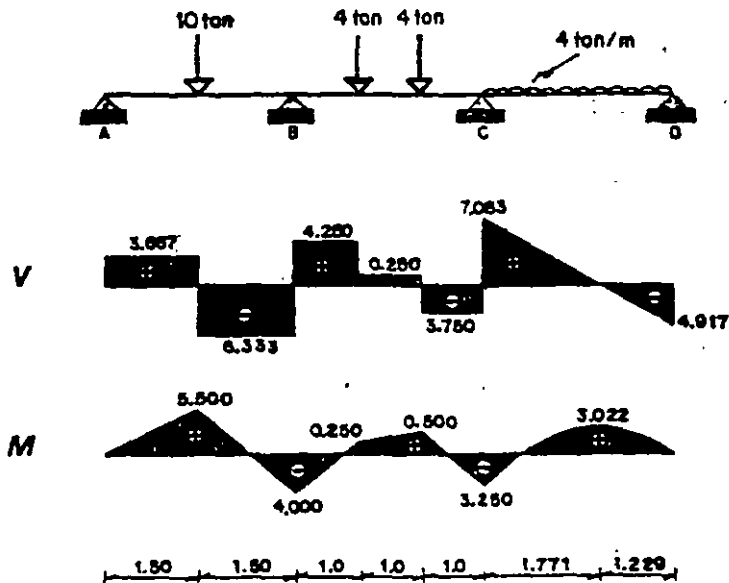
$$M_{BA} = M_{BA}^0 + 2K_{BA}\phi_B = 4.000$$

$$M_{BC} = M_{BC}^0 + 2K_{BC}\phi_B + K_{BC}\phi_C = 4.000$$

$$M_{CB} = M_{CB}^0 + 2K_{CB}\phi_C + K_{CB}\phi_B = 3.250$$

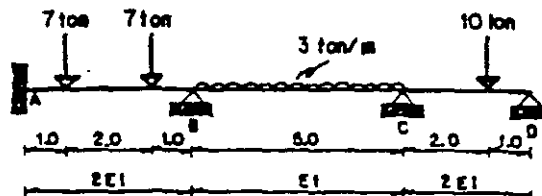
$$M_{CD} = M_{CD}^0 + 2K_{CD}\phi_C = 3.250$$

DIAGRAMAS



METODO MODIFICADO DE KANI

8.2. Calcular los momentos en los apoyos de la siguiente viga.



- Cálculo de los momentos de empotramiento.

$$M_{AB} = -\frac{7(1)(4-1)}{4} = -5.250 \quad M_{BA} = 5.250 \quad M_{BC} = -\frac{3(6)^2}{12} = -9.250$$

$$M_{CB} = 9.250 \quad M_{CD} = -\frac{10(2)(1)(1+3)}{2(3)^2} = -4.444$$

- Cálculo de los factores de distribución.

- NUDO B -

$$K_{BA} = \frac{2EI}{4} = 0.50EI \quad K_{BC} = \frac{EI}{6} = 0.167EI \quad K_B = 0.667EI$$

$$\mu_{BA} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.50}{0.667} \right) = -0.375 \quad \mu_{BC} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.167}{0.667} \right) = -0.125 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

- NUDO C -

$$K_{CB} = \frac{EI}{6} = 0.167EI \quad K_{CD} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI \quad K_C = 0.834EI$$

$$\mu_{CB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.167}{0.834} \right) = -0.100 \quad \mu_{CD} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.667}{0.834} \right) = -0.400 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

Además

$$-\frac{M_B}{2K_B} = \frac{-1.000}{2(0.667EI)} = 0.714 = EI \alpha_B \quad -\frac{M_C}{2K_C} = \frac{-1.806}{2(0.834EI)} = 1.290 = EI \alpha_C$$

Las incógnitas son los giros en los nudos B y C, por consiguiente

$$\phi_B = \frac{M_B}{2K_B} + \mu_{BC} \phi_C$$

$$\phi_C = -\frac{M_C}{2K_C} + \mu_{CB} \phi_B$$

	G I R O S	
	N U D O B	N U D O C
$-EI M_i / 2K_i$	$EI \alpha_B = 0.714$	$EI \alpha_C = 1.290$
$\mu_{ij}$	$\mu_{BC} = -0.125 \phi_C$	$\mu_{CB} = -0.100 \phi_B$
iteración	$EI \phi_B$	$EI \phi_C$
0	0	0
1	0.714	-1.392
2	0.913	-1.420
3	0.917	-1.421
4	0.917	-1.421



## METODO MODIFICADO DE KANI

Aplicando la fórmula 8.1. se obtienen los momentos finales que son

$$M_{AB} = M_{AB}^0 + K_{AB} \phi_B = -4.792$$

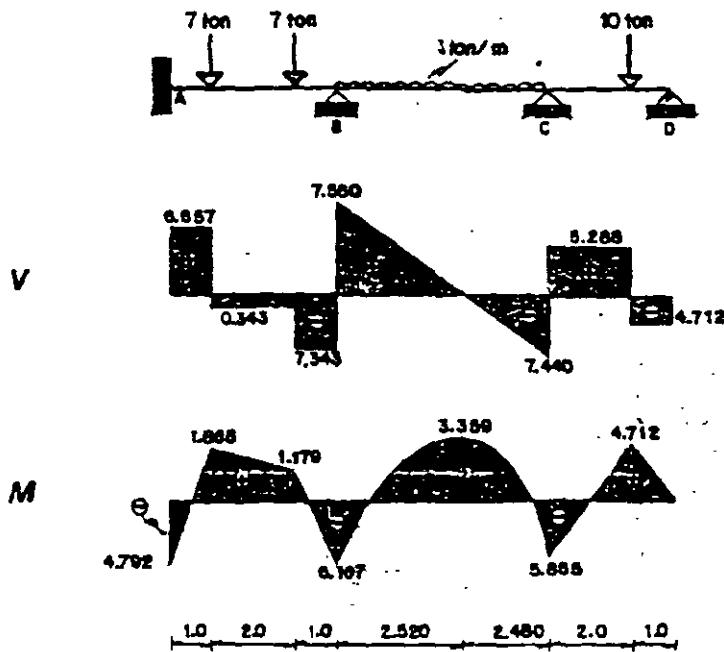
$$M_{BA} = M_{BA}^0 + 2K_{BA} \phi_B = -0.167$$

$$M_{BC} = M_{BC}^0 + 2K_{BC} \phi_B + K_{BC} \phi_C = -0.167$$

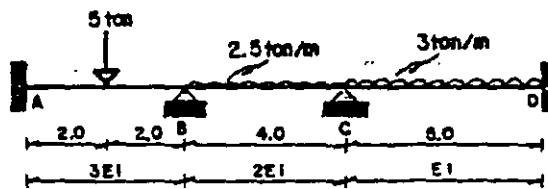
$$M_{CB} = M_{CB}^0 + 2K_{CB} \phi_C + K_{CB} \phi_B = -5.865$$

$$M_{CD} = M_{CD}^0 + 2K_{CD} \phi_C = -5.865$$

### DIAGRAMAS



8.3. Resolver la estructura que se indica enseguida.



Cálculo de los momentos de empotramiento.

$$M_{AB} = -\frac{5(4)}{8} = -2.500$$

$$M_{BA} = 2.500$$

$$M_{BC} = -\frac{2.5(4)^2}{12} = -3.333$$

METODO MODIFICADO DE KANI

$$M_{CB} = -3.333$$

$$M_{CD} = -\frac{3(3)E}{12} = -0.250$$

$$M_{DC} = 0.250$$

Cálculo de los factores de distribución.

NUDO B

$$K_{BA} = \frac{3EI}{4} = 0.750EI$$

$$K_{BC} = \frac{2EI}{4} = 0.500EI$$

$$K_B = 1.250EI$$

$$\mu_{BA} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.750}{1.250} \right) = -0.300$$

$$\mu_{BC} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.500}{1.250} \right) = -0.200 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

NUDO C

$$K_{CB} = \frac{2EI}{4} = 0.500EI$$

$$K_{CD} = \frac{EI}{5} = 0.200EI$$

$$K_C = 0.700EI$$

$$\mu_{CB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.50}{0.70} \right) = -0.357$$

$$\mu_{CD} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.20}{0.70} \right) = -0.143 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

También

$$\frac{M_B}{2K_B} = \frac{(-0.833)}{2(1.250EI)} = 0.333 = EI \alpha_B$$

$$\frac{M_C}{2K_C} = \frac{(-2.917)}{2(0.70EI)} = 2.084 = EI \alpha_C$$

Como no hay desplazamientos relativos, se determinarán los giros en los nudos B y C.

$$\phi_B = \frac{M_B}{2K_B} + \mu_{BC} \phi_C$$

$$\phi_C = -\frac{M_C}{2K_C} + \mu_{CB} \phi_B$$

	G	I	R	O	S
	NUDO B		NUDO C		
$-EI M_i / 2K_i$	$EI \alpha_B = 0.333$		$EI \alpha_C = 2.084$		
$\mu_{ij}$	$\mu_{BC} = -0.200 \phi_C$		$\mu_{CB} = -0.357 \phi_B$		
iteración	$EI \phi_B$		$EI \phi_C$		
0	0		0		
1	0.333		1.965		
2	-0.060		2.105		
3	-0.088		2.115		
4	-0.090		2.116		
5	-0.090		2.116		

Los momentos finales en los extremos de las barras son

$$M_{AB} = M_{AB}^0 + K_{AB} \phi_B = -2.587$$

$$M_{BA} = M_{BA}^0 + 2K_{BA} \phi_B + K_{BA} \phi_A = 2.365$$

$$M_{BC} = M_{BC}^0 + 2K_{BC} \phi_B + K_{BC} \phi_C = -2.305$$

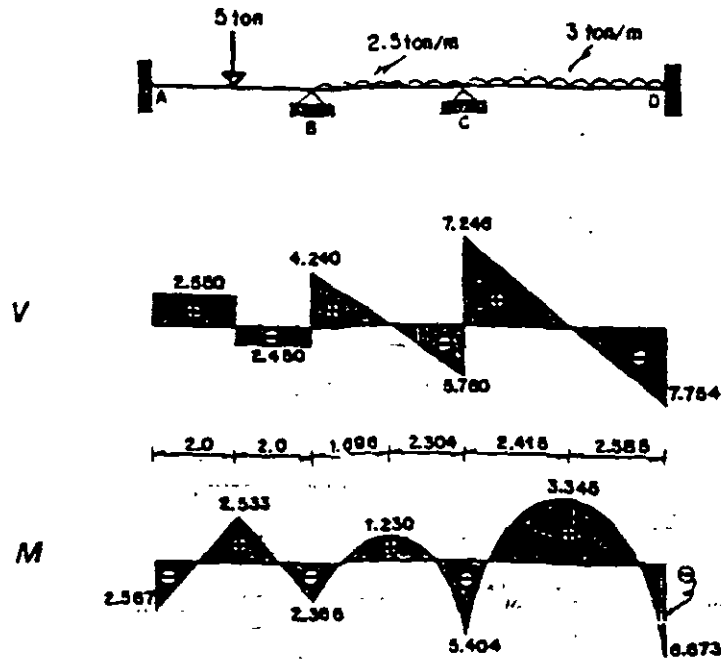
$$M_{CB} = M_{CB}^0 + 2K_{CB} \phi_C + K_{CB} \phi_B = -5.404$$

$$M_{CD} = M_{CD}^0 + 2K_{CD} \phi_C = -5.404$$

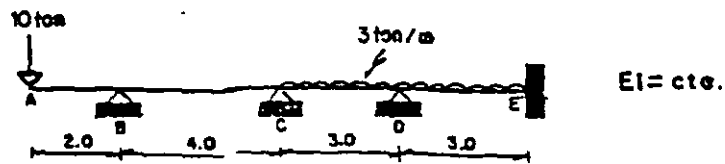
$$M_{DC} = M_{DC}^0 + K_{DC} \phi_C = 0.073$$

METODO MODIFICADO DE KANI

DIAGRAMAS



8.4. Calcular los momentos en los apoyos de la siguiente viga.



- Cálculo de los momentos de empotramiento.

$$M_{BA} = 10(2) = 20.0$$

$$M_{CD} = M_{DC} = \frac{3(3)^2}{12} = 2.250$$

$$M_{DC} = 2.250 = M_{ED}$$

- Factores de distribución.

- NUDO B -

$$K_{BA} = 0.0$$

$$K_{BC} = \frac{EI}{4} = 0.250EI$$

$$K_B = 0.250EI$$

$$\mu_{BA} = 0.0$$

$$\mu_{BC} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.250}{0.250} \right) = -0.500$$

$$\sum \mu = -0.500$$

- NUDO C -

$$K_{CB} = \frac{EI}{4} = 0.250EI$$

$$K_{CD} = \frac{EI}{3} = 0.333EI$$

$$K_C = 0.593EI$$

METODO MODIFICADO DE KANI

$$\mu_{cb} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.250}{0.583} \right) = -0.214 \quad \mu_{cd} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.333}{0.583} \right) = -0.286 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

- NUDO D -

$$K_{dc} = \frac{EI}{3} = 0.333EI$$

$$K_{de} = \frac{EI}{3} = 0.333EI$$

$$K_D = 0.666EI$$

$$\mu_{dc} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.333}{0.666} \right) = -0.250 = \mu_{de}$$

$$\Sigma \mu = -0.500$$

Además

$$\frac{M_B}{2K_B} = \frac{20.0}{2(0.250EI)} = \frac{40.0}{EI} \quad \frac{M_C}{2K_C} = \frac{-2.250}{2(0.583EI)} = \frac{-1.929}{EI} \quad \frac{M_D}{2K_D} = \frac{0.0}{2(0.666EI)} = \frac{0.0}{EI}$$

Las incógnitas son los giros de los nudos B, C y D.

$$\phi_B = \frac{M_B}{2K_B} + \mu_{bc} \phi_C$$

$$\phi_C = \frac{M_C}{2K_C} + \mu_{cb} \phi_B + \mu_{cd} \phi_D$$

$$\phi_D = \frac{M_D}{2K_D} + \mu_{dc} \phi_C$$

	G	I	R	O	S	
	N U D O B		N U D O C		N U D O D	
$-EI\alpha/2K_i$	$EI \alpha_B = -40.000$		$EI \alpha_C = 1.929$		$EI \alpha_D = 0.000$	
$\mu_{ij}$	$\mu_{bc} = -0.500 + \phi_C$		$\mu_{cb} = -0.214 + \phi_B$ $\mu_{cd} = -0.286 + \phi_D$		$\mu_{dc} = -0.250 + \phi_C$	
iteración	$EI \phi_B$		$EI \phi_C$		$EI \phi_D$	
0	0		0		0	
1	-40.000		10.489		-2.622	
2	-45.244		12.361		-3.090	
3	-46.180		12.695		-3.174	
4	-46.347		12.755		-3.189	
5	-46.377		12.766		-3.191	
6	-46.383		12.767		-3.192	
7	-46.384		12.768		-3.192	
8	-46.384		12.768		-3.192	

Cálculo de los momentos finales.

$$M_{BA} = M_{AB} = 20.0$$

$$M_{BC} = M_{CB} + 2K_{BC}\phi_B + K_{BC}\phi_C = -20.0$$

$$M_{CB} = M_{BC} + 2K_{CB}\phi_C + K_{CB}\phi_B = -5.212$$

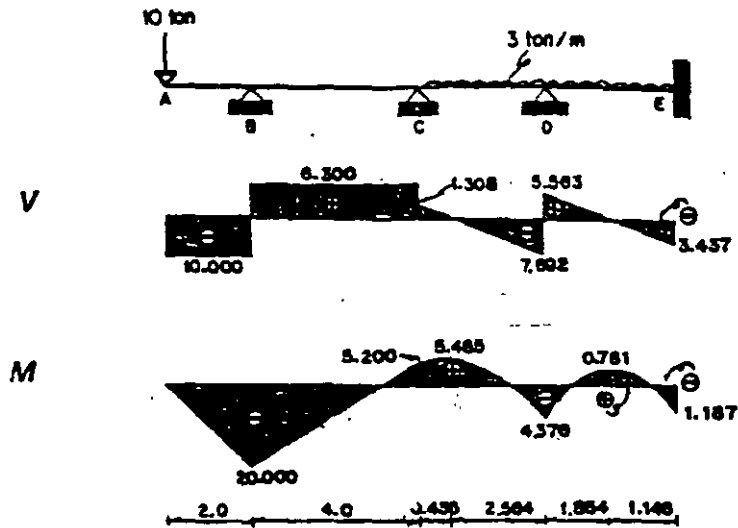
$$M_{CD} = M_{DC} + 2K_{CD}\phi_C + K_{CD}\phi_D = 5.200$$

$$M_{DC} = M_{CD} + 2K_{DC}\phi_D + K_{DC}\phi_C = 4.376$$

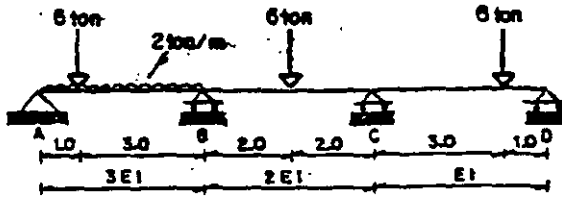
$$M_{DE} = M_{ED} + 2K_{DE}\phi_D = 4.376 \quad M_{ED} = M_{DE} + K_{ED}\phi_D = 1.187$$

METODO MODIFICADO DE KANI

DIAGRAMAS



8.5. Resolver la viga continua que se muestra.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{BA} = \frac{2(4)^2 + 6(1)(1+4)}{8 \cdot 2(4)^2} = 0.813$$

$$M_{BC} = -\frac{6(4)}{8} = -3.000$$

$$M_{CB} = 3.000$$

$$M_{CD} = -\frac{6(3)(1+4)}{2(4)^2} = -2.813$$

- Factores de distribución.

-NUDO B-

$$K_{BA}' = \frac{0.75(3EI)}{4} = 0.5625EI$$

$$K_{BC}' = \frac{2EI}{4} = 0.500EI$$

$$K_B = 1.0625EI$$

$$\mu_{BA} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.5625}{1.0625} \right) = -0.265$$

$$\mu_{BC} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.500}{1.0625} \right) = -0.235 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

-NUDO C-

$$K_{CB}' = \frac{2EI}{4} = 0.500EI$$

$$K_{CD}' = \frac{0.75EI}{4} = 0.1875EI$$

$$K_C = 0.6875EI$$

$$\mu_{CB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.500}{0.6875} \right) = -0.364$$

$$\mu_{CD} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.1875}{0.6875} \right) = -0.136 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

# METODO MODIFICADO DE KANI

Por otra parte tenemos

$$\frac{M_B}{2K_B} = \frac{3.813}{211.0625EI} - \frac{1.794}{EI} = \alpha_B$$

$$\frac{M_C}{2K_C} = -\frac{0.187}{210.6875EI} - \frac{0.136}{EI} = \alpha_C$$

Las incógnitas son los giros en los nudos B y C.

$$\phi_B = \frac{M_B}{2K_B} + \mu_{BC} \phi_C$$

$$\phi_C = -\frac{M_C}{2K_C} + \mu_{CB} \phi_B$$

	G I R O S	
	N U D O B	N U D O C
$-EI M_i / 2K_i$	$EI \alpha_B = -1.794$	$EI \alpha_C = -0.136$
$\mu_{ij}$	$\mu_{BC} = -0.233 \phi_C$	$\mu_{CB} = -0.384 \phi_B$
iteración	$EI \phi_B$	$EI \phi_C$
0	0	0
1	-1.794	0.517
2	-1.915	0.561
3	-1.926	0.565
4	-1.927	0.565
5	-1.927	0.565

Los momentos finales son

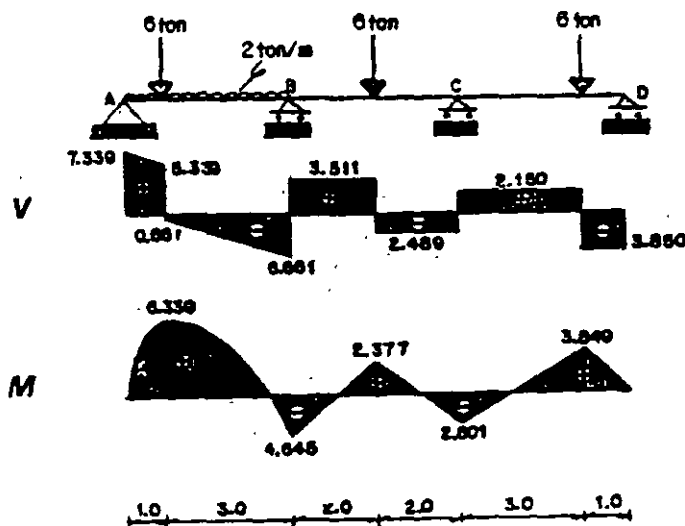
$$M_{BA} = M_{BA}^0 + 2K_{BA} \phi_B = 4.645$$

$$M_{BC} = M_{BC}^0 + 2K_{BC} \phi_B + K_{BC} \phi_C = -4.645$$

$$M_{CB} = M_{CB}^0 + 2K_{CB} \phi_C + K_{CB} \phi_B = 2.602$$

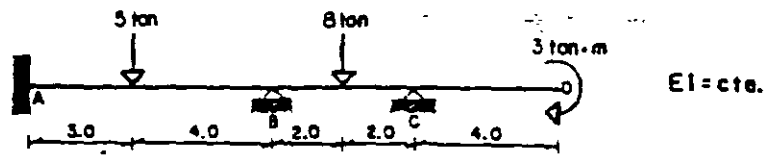
$$M_{CD} = M_{CD}^0 + 2K_{CD} \phi_C = -2.601$$

## DIAGRAMAS



METODO MODIFICADO DE KANI

8.6. Resolver la estructura que se indica.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{AB} = -\frac{5(3)(4)^2}{17^2} = -4.898 \quad M_{BA} = -\frac{5(3)^2(4)}{17^2} = -3.673$$

$$M_{BC} = -\frac{8(4)}{8} = -4.000 \quad M_{CB} = 4.000 \quad M_{CD} = -3.000$$

- Factores de distribución.

-NUDO B-

$$K_{BA} = \frac{EI}{7} = 0.143EI \quad K_{BC} = \frac{EI}{4} = 0.250EI \quad K_B = 0.393EI$$

$$\mu_{BA} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.143}{0.393} \right) = 0.182 \quad \mu_{BC} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.250}{0.393} \right) = 0.318 \quad \Sigma \mu = 0.500$$

-NUDO C-

$$K_{CB} = \frac{EI}{4} = 0.250EI \quad K_{CD} = 0.0 \quad K_C = 0.250EI$$

$$\mu_{CB} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.250}{0.250} \right) = 0.500 \quad \mu_{CD} = 0.0 \quad \Sigma \mu = 0.500$$

También

$$\frac{M_B}{2K_B} = -\frac{(-0.327)}{2(0.393EI)} = \frac{0.416}{EI} = \alpha_B \quad \frac{M_C}{2K_C} = -\frac{1.000}{2(0.250EI)} = \frac{-2.000}{EI} = \alpha_C$$

Las incógnitas son los giros en los nudos B y C.

$$\phi_B = -\frac{M_B}{2K_B} + \mu_{BC} \phi_C \quad \phi_C = -\frac{M_C}{2K_C} + \mu_{CB} \phi_B$$

	G I R O S	
	N U D O B	N U D O C
$-EI M_i / 2K_i$	$EI \alpha_B = 0.416$	$-EI \alpha_C = -2.000$
$\mu_{ij}$	$\mu_{BC} = -0.318 \phi_C$	$\mu_{CB} = -0.500 \phi_B$
iteración	$EI \phi_B$	$EI \phi_C$
0	0	0
1	0.416	-2.208
2	1.118	-2.559
3	1.230	-2.615
4	1.247	-2.624
5	1.250	-2.625

METODO MODIFICADO DE KANI

Momentos finales en las barras.

$$M_{AB} = M_{AB}^0 + K_{AB} \phi_B = -4.719$$

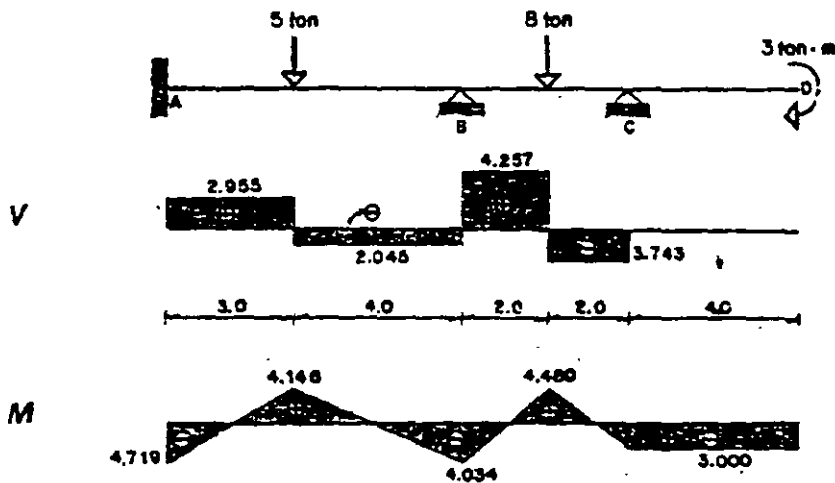
$$M_{BA} = M_{BA}^0 + 2K_{BA} \phi_B = 4.030$$

$$M_{BC} = M_{BC}^0 + 2K_{BC} \phi_B + K_{BC} \phi_C = -4.030$$

$$M_{CB} = M_{CB}^0 + 2K_{CB} \phi_C + K_{CB} \phi_B = 3.030$$

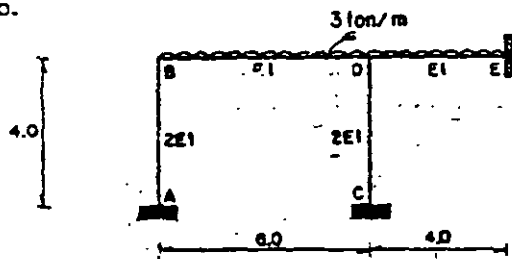
$$M_{CD} = M_{CD}^0 = -3.000$$

DIAGRAMAS



8.7. Encontrar los momentos finales en los extremos de las barras del marco

hiperestático.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{BD} = \frac{3(8)^2}{12} = -9.000 = -M_{DB}$$

$$M_{DE} = -\frac{3(4)^2}{12} = -4.000 = -M_{ED}$$

- Factores de distribución.

- NUDO B -

$$K_{BA} = \frac{2EI}{4} = 0.50EI$$

$$K_{BD} = \frac{EI}{6} = 0.166EI$$

$$K_B = 0.666EI$$



METODO MODIFICADO DE KANI

$$\mu_{BA} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.500}{0.666} \right) = -0.375 \quad \mu_{BD} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.166}{0.666} \right) = -0.125 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

-NUDO D-

$$K_{DB} = \frac{EI}{8} = 0.1888EI \quad K_{DE} = \frac{EI}{4} = 0.250EI \quad K_{DC} = \frac{2EI}{4} = 0.500EI \quad K_D = 0.9188EI$$

$$\mu_{DB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.1888}{0.9188} \right) = -0.091 \quad \mu_{DE} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.250}{0.9188} \right) = -0.138 \quad \mu_{DC} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.500}{0.9188} \right) = -0.273 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

Además, se tiene

$$\frac{M_B}{2K_B} = \frac{(-9.000)}{2(0.666)} = \frac{0.750}{EI} = \alpha_B \quad \frac{M_D}{2K_D} = \frac{5.000}{2(0.9188)} = \frac{2.727}{EI} = \alpha_D$$

Al no existir desplazamientos laterales las ecuaciones son

$$\phi_B - \frac{M_B}{2K_B} + \mu_{BD} \phi_D \quad \phi_D - \frac{M_D}{2K_D} + \mu_{DB} \phi_B$$

	G	I	R	O	S
	N U D O B		N U D O D		
$-EI M/2K_i$	$EI \alpha_B = 0.750$		$EI \alpha_D = -2.727$		
$\mu_{ij}$	$\mu_{BD} = -0.125; \phi_D$		$\mu_{DB} = -0.091; \phi_B$		
iteración	$EI \phi_B$		$EI \phi_D$		
0	0		0		
1	6.750		-3.341		
2	7.168		-3.379		
3	7.172		-3.380		
4	7.172		-3.380		

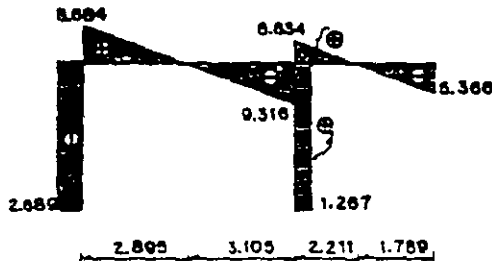
Cálculo de los momentos finales.

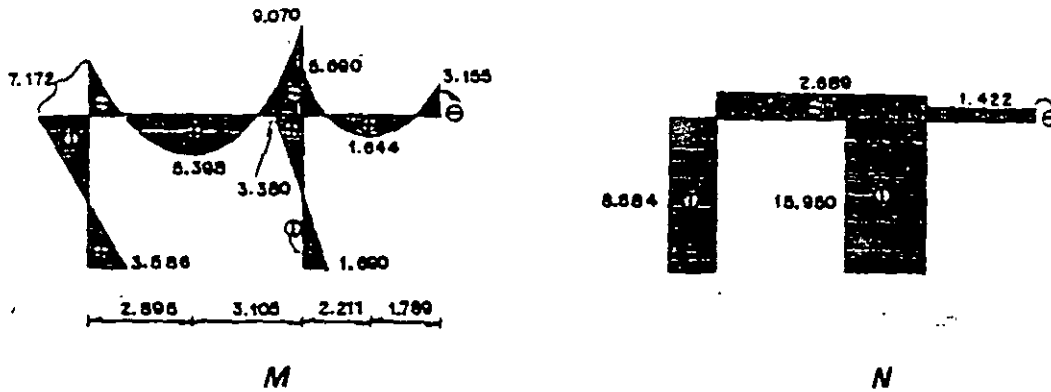
$$M_{AB} = K_{AB} \phi_B = 3.588 \quad M_{BA} = 2K_{BA} \phi_B = 7.172 \quad M_{BD} = M_{BD}^0 + 2K_{BD} \phi_B + K_{BD} \phi_D = -7.172$$

$$M_{DB} = M_{DB}^0 + 2K_{DB} \phi_D + K_{DB} \phi_B = 0.070 \quad M_{DC} = 2K_{DC} \phi_D = -3.380 \quad M_{CD} = K_{CD} \phi_D = -1.690$$

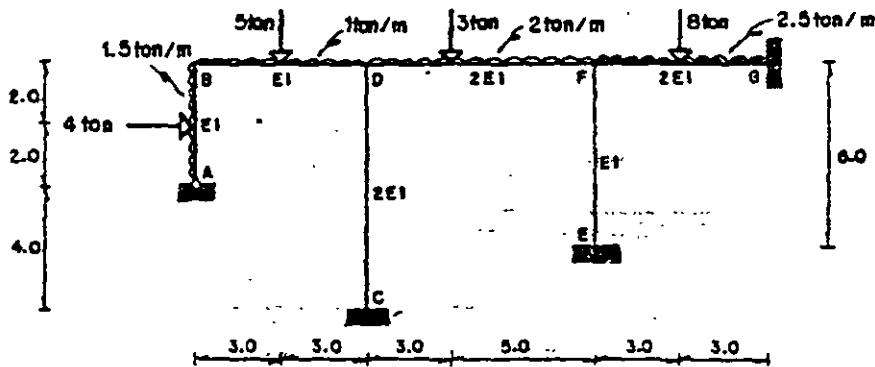
$$M_{DE} = M_{DE}^0 + 2K_{DE} \phi_D = -5.690 \quad M_{ED} = M_{ED}^0 + K_{ED} \phi_D = 3.155$$

••DIAGRAMAS••





8.8. Resolver el marco siguiente.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{BA} = \frac{1.5(4)^2}{8} + \frac{3(4)(4)}{16} = 6.000 \quad M_{BD} = -\frac{1(6)^2}{12} - \frac{5(6)}{8} = -6.750 \quad M_{DB} = 6.750$$

$$M_{BF} = \frac{2(8)^2}{12} - \frac{3(3)(15)}{18} = -14.182 \quad M_{FD} = \frac{2(8)^2}{12} + \frac{3(3)^2(5)}{18} = 12.776$$

$$M_{FG} = \frac{2.5(6)^2}{12} - \frac{8(6)}{8} = -13.500 \quad M_{GF} = 13.500$$

- Factores de distribución.

- NUDO B -

$$K_{BA} = \frac{0.75EI}{4} = 0.18750EI \quad K_{BD} = \frac{EI}{6} = 0.16666EI \quad K_B = 0.35416EI$$

$$\mu_{BA} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.18750}{0.35416} \right) = -0.265 \quad \mu_{BD} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.16666}{0.35416} \right) = -0.235 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

- NUDO D -

$$K_{DB} = \frac{EI}{6} = 0.1666EI \quad K_{DF} = \frac{2EI}{8} = 0.250EI \quad K_{DG} = \frac{2EI}{8} = 0.250EI \quad K_D = 0.6666EI$$

$$\mu_{DB} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.1666}{0.6666} \right) = 0.1250 \quad \mu_{DF} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.250}{0.6666} \right) = 0.1875 = \mu_{DG} \quad \Sigma \mu = 0.500$$

- NUDO F -

$$K_{FD} = \frac{2EI}{8} = 0.250EI \quad K_{FG} = \frac{2EI}{6} = 0.333EI \quad K_{FE} = \frac{EI}{6} = 0.1666EI \quad K_F = 0.750EI$$

METODO MODIFICADO DE KANI

$$\mu_{FD} = \frac{1(0.250)}{2(0.750)} = 0.167 \quad \mu_{FB} = -\frac{1(0.333)}{2(0.750)} = -0.222 \quad \mu_{FE} = -\frac{1(0.166)}{2(0.750)} = -0.111 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

Además, se tiene

$$\frac{M_B}{2K_B} = \frac{(-0.750)}{2(0.35416EI)} = \frac{-1.059}{EI} = \alpha_B \quad \frac{M_D}{2K_D} = \frac{(-7.4321)}{2(10.666EI)} = \frac{-5.574}{EI} = \alpha_D$$

$$\frac{M_F}{2K_F} = \frac{(-0.724)}{2(10.750EI)} = \frac{-0.483}{EI} = \alpha_F$$

Así, obtenemos las ecuaciones

$$\phi_B = \frac{M_B}{2K_B} + \mu_{BD} \phi_D = \frac{-1.059}{EI} - 0.235 \phi_D$$

$$\phi_D = \frac{M_D}{2K_D} + \mu_{DB} \phi_B + \mu_{DF} \phi_F = \frac{-5.574}{EI} - 0.1250 \phi_B - 0.1875 \phi_F$$

$$\phi_F = \frac{M_F}{2K_F} + \mu_{FD} \phi_D = \frac{-0.483}{EI} - 0.167 \phi_D$$

	G	I	R	O	S	
	N U D O B		N U D O D		N U D O F	
$-EI M_i / 2K_i$	$EI \alpha_B = -1.059$		$EI \alpha_D = -5.574$		$EI \alpha_F = -0.483$	
$\mu_{ij}$	$\mu_{BD} = -0.235 \phi_D$		$\mu_{DB} = -0.1250 \phi_B$ $\mu_{DF} = -0.1875 \phi_F$		$\mu_{FD} = -0.167 \phi_D$	
iteración	$EI \phi_B$		$EI \phi_D$		$EI \phi_F$	
0	0		0		0	
1	1.059		5.442		-0.426	
2	-0.220		5.681		-0.466	
3	-0.276		5.696		-0.468	
4	-0.280		5.697		-0.468	
5	-0.280		5.697		-0.468	

Cálculo de momentos finales.

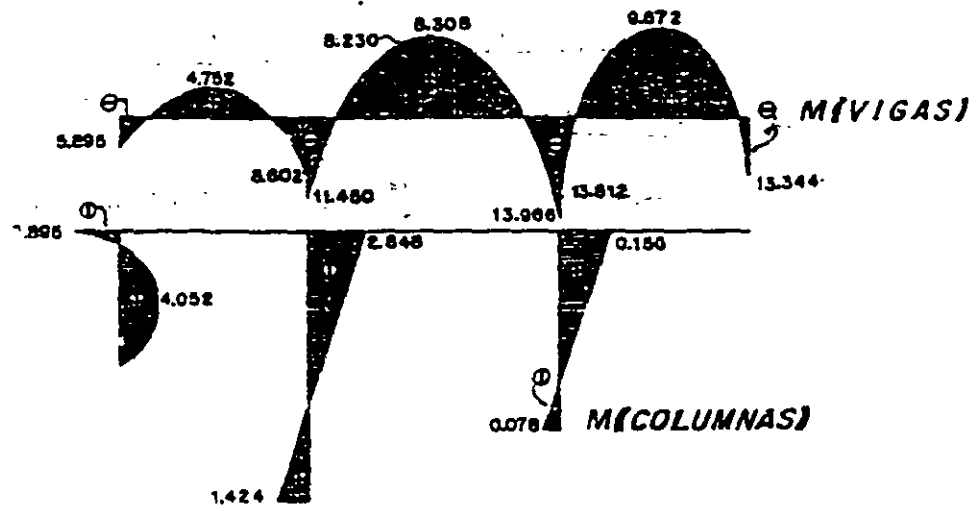
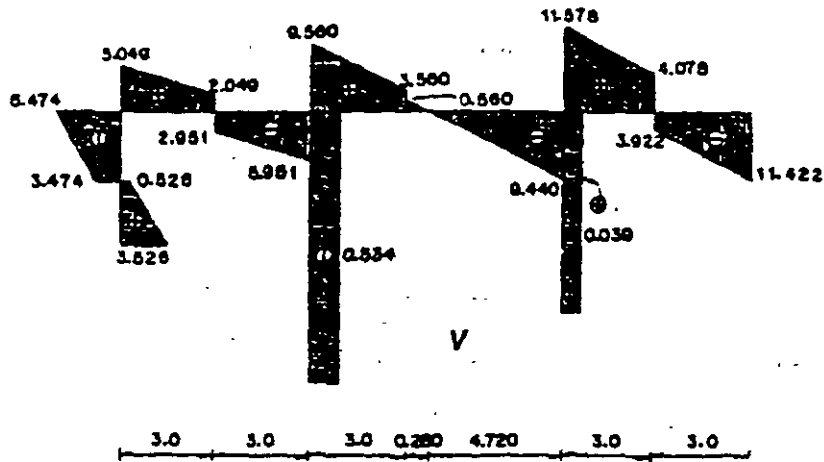
$$M_{BA} = M_{BA}^0 + 2K_{BA} \phi_B = 5.895 \quad M_{DC} = 2K_{DC} \phi_D = 2.848 \quad M_{ED} = K_{ED} \phi_D = 1.424$$

$$M_{FE} = 2K_{FE} \phi_F = -0.158 \quad M_{EF} = K_{EF} \phi_F = -0.076$$

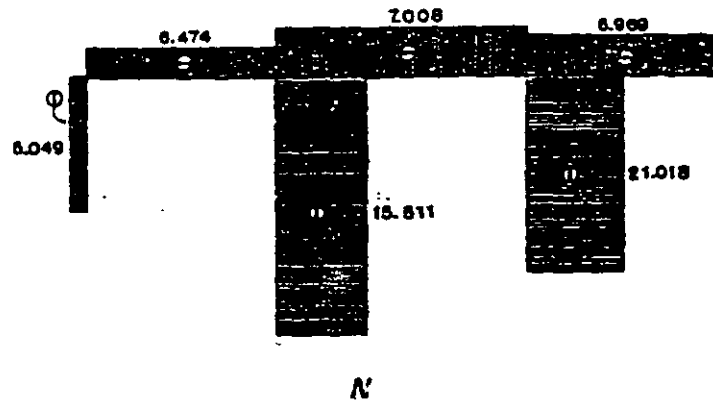
$$M_{BD} = M_{BD}^0 + 2K_{BD} \phi_B + K_{BD} \phi_D = -5.86 \quad M_{DB} = M_{DB}^0 + 2K_{DB} \phi_D + K_{DB} \phi_B = 8.602$$

$$M_{DF} = M_{DF}^0 + 2K_{DF} \phi_D + K_{DF} \phi_F = -11.450 \quad M_{FD} = M_{FD}^0 + 2K_{FD} \phi_F + K_{FD} \phi_D = 13.966$$

$$M_{FG} = M_{FG}^0 + 2K_{FG} \phi_F = -13.812 \quad M_{GF} = M_{GF}^0 + K_{GF} \phi_F = 13.344$$

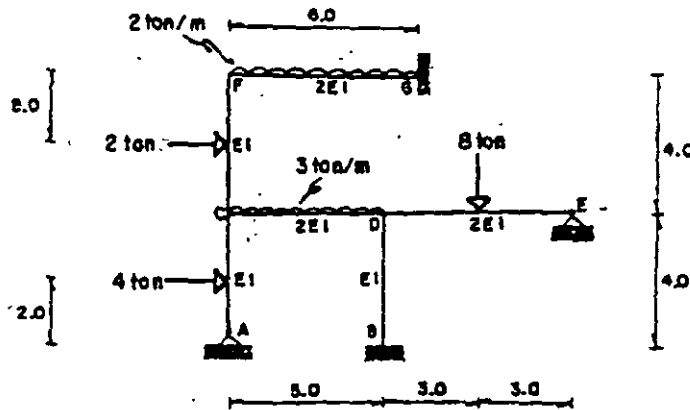


••DIAGRAMAS••



METODO MODIFICADO DE KANI

8.9. Trazar los diagramas de elementos mecánicos del siguiente marco.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{CA} = \frac{31414}{16} = 3.000 \quad M_{CB} = -\frac{2141}{8} = 1.000 \quad M_{CE} = 1.000 \quad M_{CF} = -\frac{31414}{16} = -3.000$$

$$M_{CA} = 6.000 \quad M_{CB} = -\frac{3151^2}{12} = -6.250 \quad M_{DC} = 6.250 \quad M_{DE} = -\frac{318}{16} = -1.9875$$

- Factores de distribución.

- NUDO C -

$$K'_{CA} = \frac{0.75EI}{4} = 0.1875EI \quad K'_{CB} = \frac{2EI}{4} = 0.40EI \quad K'_{CE} = \frac{EI}{4} = 0.250EI \quad K'_F = 0.58375EI$$

$$\mu_{CA} = \frac{1(0.1875)}{2(0.6375)} = 0.112 \quad \mu_{CB} = \frac{1(0.40)}{2(0.6375)} = 0.239 \quad \mu_{CF} = \frac{1(0.250)}{2(0.6375)} = 0.149 \quad \Sigma \mu = 0.500$$

- NUDO D -

$$K'_{DC} = \frac{2EI}{5} = 0.40EI \quad K'_{DB} = \frac{EI}{4} = 0.250EI \quad K'_{DE} = \frac{0.75(2EI)}{6} = 0.250EI \quad K'_F = 0.58375EI$$

$$\mu_{DC} = \frac{1(0.40)}{2(0.900)} = 0.222 \quad \mu_{DB} = \frac{1(0.250)}{2(0.900)} = 0.139 = \mu_{DE} \quad \Sigma \mu = 0.500$$

- NUDO F -

$$K'_{FC} = \frac{EI}{4} = 0.250EI \quad K'_{FE} = \frac{2EI}{6} = 0.333EI \quad K'_F = 0.58375EI$$

$$\mu_{FC} = \frac{1(0.250)}{2(0.58375)} = 0.214 \quad \mu_{FE} = \frac{1(0.333)}{2(0.58375)} = 0.286 \quad \Sigma \mu = 0.500$$

Además, se tiene

$$\frac{M_C}{2K_C} = \frac{1 + 2.501}{2(0.6375EI)} = \frac{2.537}{EI} = \alpha_C \quad \frac{M_D}{2K_D} = \frac{1 + 2.7501}{2(0.900EI)} = \frac{1.5277}{EI} = \alpha_D$$

$$\frac{M_F}{2K_F} = \frac{1 + 5.0001}{2(0.58375EI)} = \frac{1.286}{EI} = \alpha_F$$

METODO MODIFICADO DE KANI

Así, tenemos las ecuaciones

$$\phi_C = -\frac{M_C}{2K_C} + \mu_{CD}\phi_D + \mu_{CF}\phi_F = \frac{2.537}{EI} - 0.239\phi_D - 0.149\phi_F$$

$$\phi_D = -\frac{M_D}{2K_D} + \mu_{DC}\phi_C = \frac{1.527}{EI} - 0.222\phi_C \quad \phi_F = -\frac{M_F}{2K_F} + \mu_{FC}\phi_C = \frac{4.286}{EI} - 0.214\phi_C$$

	G	I	R	O	S
	N U D O C	N U D O D	N U D O F		
$-EI M_0/2K_0$	$EI \alpha_C = 2.537$	$EI \alpha_D = 1.527$	$EI \alpha_F = 4.286$		
$\mu_{ij}$	$\mu_{CD} = -0.239; \phi_D$ $\mu_{CF} = -0.149; \phi_F$	$\mu_{DC} = -0.222; \phi_C$	$\mu_{FC} = -0.214; \phi_C$		
iteración	$EI \phi_C$	$EI \phi_D$	$EI \phi_F$		
0	0	0	0		
1	2.537	0.965	3.743		
2	1.749	1.140	3.912		
3	1.682	1.154	3.926		
4	1.676	1.156	3.927		
5	1.675	1.156	3.927		
6	1.675	1.156	3.927		

Cálculo de momentos finales.

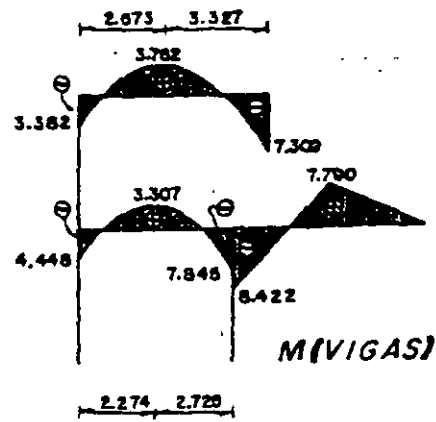
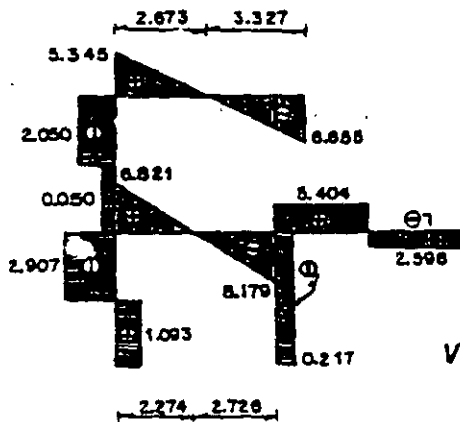
$$M_{CA} = M_{CA}^0 + 2K_{CA}\phi_C = 3.828 \quad M_{DB} = 2K_{DB}\phi_D = 0.578 \quad M_{FD} = K_{FD}\phi_D = 0.289$$

$$M_{FC} = M_{FC}^0 + 2K_{FC}\phi_F + K_{FC}\phi_C = 3.382 \quad M_{CF} = M_{CF}^0 + 2K_{CF}\phi_C + K_{CF}\phi_F = 0.819 \quad M_{FG} = M_{FG}^0 + 2K_{FG}\phi_F = 3.382$$

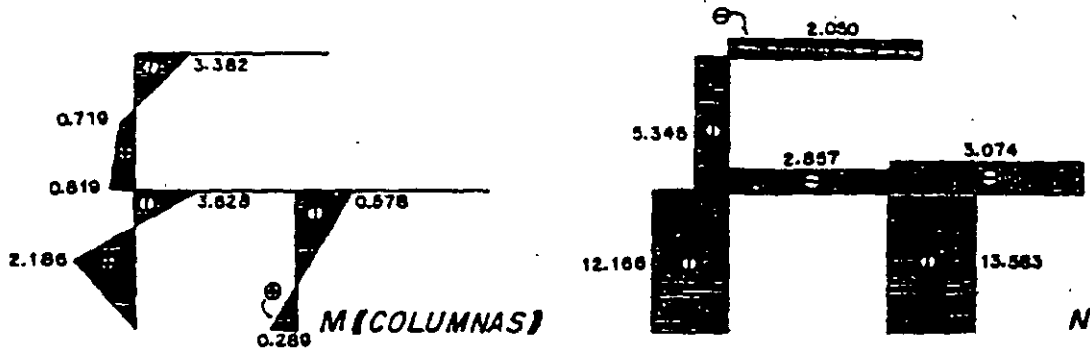
$$M_{GF} = M_{GF}^0 + K_{GF}\phi_F = 7.309 \quad M_{CD} = M_{CD}^0 + 2K_{CD}\phi_C + K_{CD}\phi_D = -4.448$$

$$M_{DC} = M_{DC}^0 + 2K_{DC}\phi_D + K_{DC}\phi_C = 7.845 \quad M_{DE} = M_{DE}^0 + 2K_{DE}\phi_D = -8.422$$

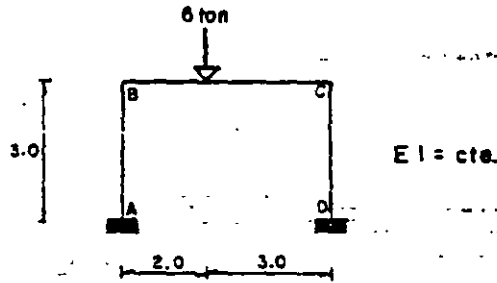
DIAGRAMAS



METODO MODIFICADO DE KANI



8.10. Determinar los momentos en los vértices de la estructura.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{BA} = \frac{6(2)^2(3)^2}{(5)^2} = 4.320$$

$$M_{CB} = \frac{6(2)^2(3)}{(5)^2} = 2.880$$

- Factores de distribución.

- NUDO B -

$$K_{BA} = \frac{EI}{3} = 0.333EI$$

$$K_{BC} = \frac{EI}{5} = 0.200EI$$

$$K_B = 0.533EI$$

$$\mu_{BA} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.333}{0.533} \right) = -0.3125$$

$$\mu_{BC} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.200}{0.533} \right) = -0.1875$$

$$\Sigma \mu = -0.500$$

- NUDO C -

$$K_{CB} = \frac{EI}{5} = 0.200EI$$

$$K_{CD} = \frac{EI}{3} = 0.333EI$$

$$K_C = 0.533EI$$

$$\mu_{CB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.200}{0.533} \right) = -0.1875$$

$$\mu_{CD} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.333}{0.533} \right) = -0.3125$$

$$\Sigma \mu = -0.500$$

- NIVEL 1 -

$$K_{A=1} = \frac{EI}{3} + \frac{EI}{3} = \frac{2EI}{3}$$

METODO MODIFICADO DE KANI

$$V_{AB} = \frac{3(1)3}{2} = -0.750$$

$$V_{DC} = \frac{3(1)3}{2} = -0.750$$

$$\Sigma V = -1.500$$

Se tiene

$$\frac{M_B}{2K_B} = \frac{(-4.320)}{2(10.533EI)} = \frac{4.050}{EI} = \alpha_B$$

$$\frac{M_C}{2K_C} = \frac{2.880}{2(10.533EI)} = \frac{2.700}{EI} = \alpha_C$$

$$M_n = 0.0 ; \quad Q_n = 0.0 \quad \therefore \quad \frac{Q_n h_n + M_n}{2K_n} = 0.0 = \beta_1$$

Por tanto se forman las ecuaciones.

$$\phi_B = -\frac{M_B}{2K_B} + \mu_{BC}\phi_C + \mu_{BA}\phi_A - \mu_{BA}\psi_1$$

$$\phi_C = -\frac{M_C}{2K_C} + \mu_{CB}\phi_B + \mu_{CD}\phi_D - \mu_{CD}\psi_1$$

$$\psi_1 = \frac{Q_n h_n + M_n}{2K_n} - V_{AB}(\phi_A + \phi_B) - V_{DC}(\phi_D + \phi_C)$$

Considerando que:

$$\phi_A = \phi_D = \psi_{BC} = 0$$

Tenemos:

$$\phi_B = -\frac{M_B}{2K_B} + \mu_{BC}\phi_C - \mu_{BA}\psi_1$$

$$\phi_C = -\frac{M_C}{2K_C} + \mu_{CB}\phi_B - \mu_{CD}\psi_1$$

$$\psi_1 = \frac{Q_n h_n + M_n}{2K_n} - V_{AB}\phi_B - V_{DC}\phi_C$$

Utilizando sucesivamente las ecuaciones anteriores se forma la tabla siguiente:

	G	I	R	O	S	DESPLAZAMIENTOS																
	N	U	D	O	B	N	U	D	O	C	N	N	I	V	E	L	1					
$\frac{M_i}{2K_i} EI$																	$EI \alpha_B = 4.050$	$EI \alpha_C = -2.700$	$EI \frac{Q_n h_n + M_n}{2K_n} = 0 = \beta_1 EI$			
$\mu_{ij} ; \nu_{ij}$																	$\mu_{BC} = -0.1875 ; \nu_{BC}$	$\mu_{CB} = -0.1875 ; \nu_{CB}$	$\mu_{CD} = 0.3125 ; \nu_{CD}$	$\mu_{DC} = 0.3125 ; \nu_{DC}$	$V_{AB} = 0.750 ; \nu_{AB}$	$V_{DC} = 0.750 ; \nu_{DC}$
iteración																	$EI \phi_B$	$EI \phi_C$	$EI \psi_1$			
0																	0	0	0			
1																	4.050	-3.459	0.443			
2																	4.837	-3.468	1.026			
3																	5.021	-3.321	1.275			
4																	5.071	-3.252	1.364			
5																	5.086	-3.227	1.394			
6																	5.091	-3.219	1.404			
7																	5.092	-3.216	1.407			
8																	5.093	-3.215	1.408			

Momentos finales en las barras.

$$M_{AB} = K_{AB}\phi_B - K_{AB}\psi_1 = 1.228$$

$$M_{BA} = 2K_{BA}\phi_B - K_{BA}\psi_1 = 2.926$$

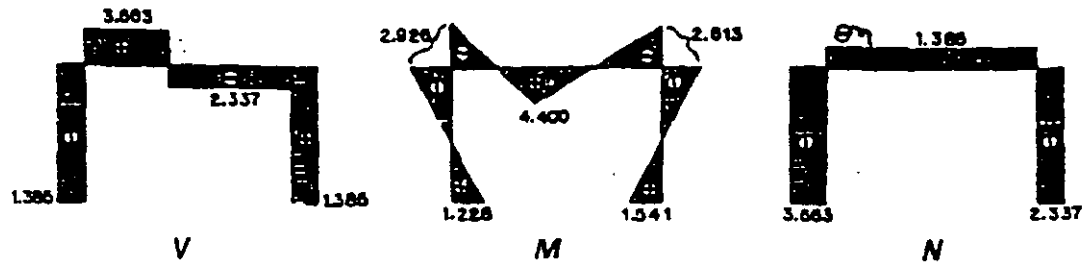
$$M_{BC} = M_{BC}^0 + 2K_{BC}\phi_B + K_{BC}\phi_C = -2.925$$



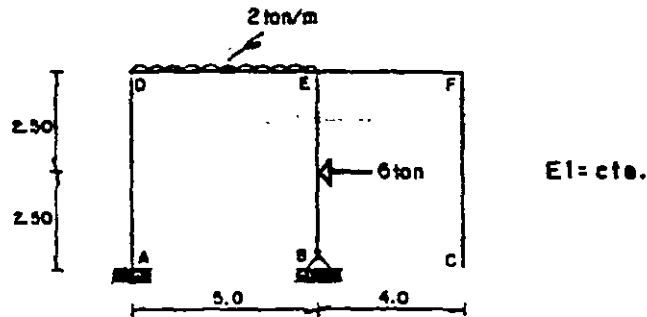
METODO MODIFICADO DE KANI

$$M_{CB} = M_{CB}^0 + 2K_{CB} \phi_C + K_{CB} \phi_B = 2.613 \quad M_{CD} = 2K_{CD} \phi_C - K_{CD} \phi_B = -2.613 \quad M_{DC} = K_{DC} \phi_C - K_{DC} \phi_B = -1.541$$

••DIAGRAMAS••



8.11. Resolver el marco hiperestático que se muestra a continuación.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{DE}^0 = \frac{2151^2}{12} = -4.166$$

$$M_{ED}^0 = 4.166$$

$$M_{EB}^0 = \frac{31615}{18} = -5.625$$

- Factores de distribución.

- NUDO D -

$$K_{DA} = \frac{EI}{5} = 0.20EI$$

$$K_{DE} = \frac{EI}{5} = 0.20EI$$

$$K_D = 0.40EI$$

$$\mu_{DA} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.20}{0.40} \right) = -0.250$$

$$\mu_{DE} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.20}{0.40} \right) = -0.250$$

$$\Sigma \mu = -0.500$$

- NUDO E -

$$K_{ED} = \frac{EI}{5} = 0.200EI$$

$$K'_{EB} = \frac{0.75EI}{5} = 0.150EI$$

$$K_E = 0.350EI$$

$$\mu_{ED} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.200}{0.350} \right) = -0.286$$

$$\mu_{EB} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.150}{0.350} \right) = -0.214$$

$$\Sigma \mu = -0.500$$

- NIVEL 1 -

La altura de la columna articulada se multiplica por 1.5, así:

METODO MODIFICADO DE KANI

$h_{AD} = 5.0 \text{ m}$

Por lo que:  $a_{AD} = \frac{h}{h_0} = \frac{5}{5} = 1.00$   
 $b_0 = \psi_1$

$h_{BE} = 7.50 \text{ m}$  ; Sea  $\bar{h} = 5.00 \text{ m}$

$a_{BE} = \frac{\bar{h}}{h_{BE}} = \frac{5}{7.5} = 0.666$   
 $b_{BE} = 0.666 \psi_1$

La rigidez del entrepiso será:

$R_{m1} = \frac{EI}{3} (1)^2 + \frac{0.15EI}{3} (0.666)^2 = 0.250EI$

$V_{AD} = \frac{310.2011}{210.2501} = -1.200$

$V_{BE} = \frac{310.15010.666}{210.2501} = -0.600$

Como comprobación:  $\sum_{c=1}^2 V_{ij} a_{ij} b_{ij} = -1.200(1) - 0.600(0.666)(0.75) = -1.500$

Además:

$\frac{M_D}{2K_D} = \frac{1-4.1661}{210.400EI} = \frac{5.2083}{EI} = \alpha_D$

$\frac{M_E}{2K_E} = \frac{1-1.4583}{210.350EI} = \frac{2.0833}{EI} = \alpha_E$

$\bar{M}_n = -5.825$

$Q_n = \frac{6.0}{2} = 3.0$  Así:  $\frac{Q_n \bar{h} + \bar{M}_n}{2K_n} = \frac{-3151 - 5.825}{210.25EI} = -\frac{41.250}{EI}$

Teniéndose las ecuaciones

$\phi_D = -\frac{M_D}{2K_D} + \mu_{DE} \phi_E - \mu_{DA} \psi_1 = \frac{5.2083}{EI} - 0.250 \phi_E + 0.250 \psi_1$

$\phi_E = -\frac{M_E}{2K_E} + \mu_{ED} \phi_D - \mu_{EB} (0.666) \psi_1 = \frac{2.0833}{EI} - 0.286 \phi_D + 0.143 \psi_1$

$\psi_1 = \frac{Q_n \bar{h} + \bar{M}_n}{2K_n} - V_{AD} \phi_D - V_{BE} \phi_E = -\frac{41.250}{EI} + 1.200 \phi_D + 0.600 \phi_E$

Las que al aplicar simultáneamente dan como resultado la siguiente tabla:

	G	I	R	O	S	DESPLAZAMIENTOS
	N U D O D		N U D O E		N I V E L 1	
$-\frac{M_i}{2K_i} EI$	$EI \alpha_D = 5.2083$		$EI \alpha_E = 2.0833$		$EI \frac{Q_n \bar{h} + \bar{M}_n}{2K_n} = \frac{41.250}{EI}$	
$\mu_{ij} ; V_{ij}$	$\mu_{DE} = -0.250 ; \psi_1$ $\mu_{DA} = 0.250 ; \psi_1$		$\mu_{ED} = -0.286 ; \phi_D$ $\mu_{EB} = 0.143 ; \psi_1$		$V_{AD} = 1.200 ; \phi_D$ $V_{BE} = 0.600 ; \phi_E$	
iteración	$EI \phi_D$		$EI \phi_E$		$EI \psi_1$	
0	0		0		0	
1	5.208		0.594		-34.644	
2	-3.601		-1.841		-46.676	
3	-6.000		-2.875		-50.175	
4	-6.617		-3.199		-51.110	
5	-6.769		-3.289		-51.346	
6	-6.806		-3.313		-51.405	
7	-6.815		-3.319		-51.419	
8	-6.817		-3.320		-51.422	

METODO MODIFICADO DE KANI

Momentos finales

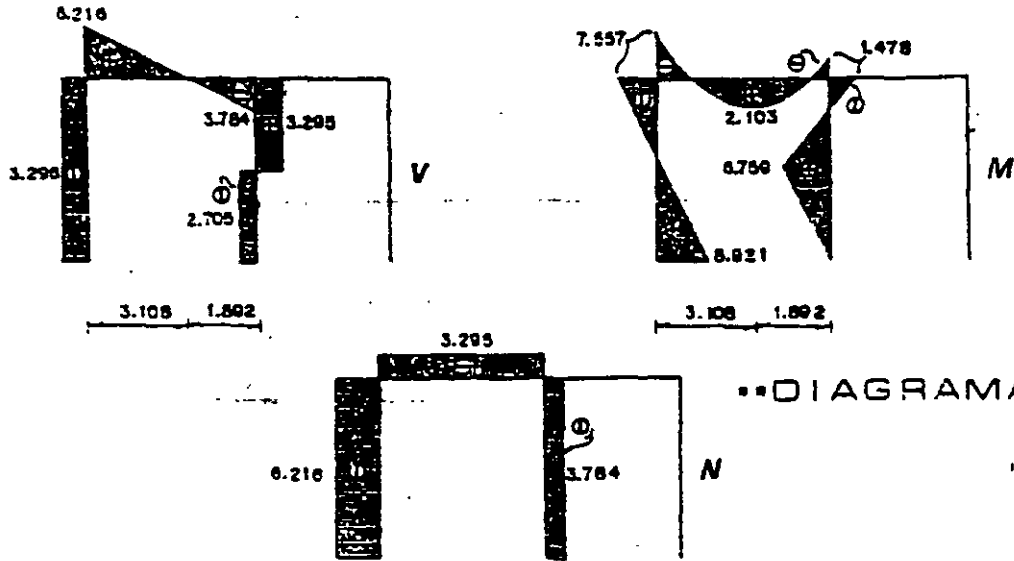
$$M_{AD} = K_{AD} \phi_D - K_{AD} \psi_1 = 8.921$$

$$M_{DA} = 2K_{DA} \phi_D - K_{DA} \psi_1 = 7.557$$

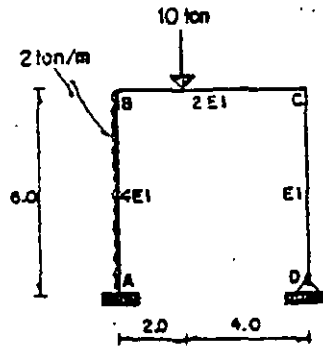
$$M_{DE} = M_{DE}^0 + 2K_{DE} \phi_D + K_{DE} \phi_E = -7.557$$

$$M_{ED} = M_{ED}^0 + 2K_{ED} \phi_E + K_{ED} \phi_D = 1.478$$

$$M_{EB} = M_{EB}^0 + 2K_{EB} \phi_E - K_{EB} \psi_1 = -1.478$$



8.12. Determinar los momentos en los vértices del siguiente marco.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{AB} = \frac{2(6)^2}{12} = 6.000$$

$$M_{BA} = 6.000$$

$$M_{BC} = \frac{10(2)(4)^2}{(6)^2} = 8.888$$

$$M_{CB} = \frac{10(2)^2(4)}{(6)^2} = 4.444$$

- Factores de distribución.

- NUDO B -

$$K_{BA} = \frac{4EI}{6} = 0.6666EI$$

$$K_{BC} = \frac{2EI}{6} = 0.3333EI$$

$$K_B = EI$$

METODO MODIFICADO DE KANI

$$\mu_{2a} = -\frac{1}{2} \frac{10.000}{210.708511} = -0.233 \quad \mu_{2c} = -\frac{1}{2} \frac{10.000}{210.708511} = -0.233 \quad \Sigma \mu = -0.466$$

- NUDO C -

$$K_{2a} = \frac{2EK}{L} = 0.333511 \quad K_{2c} = \frac{2EK}{L} = 0.333511 \quad K_c = 0.667022$$

$$\mu_{2a} = -\frac{1}{2} \frac{10.000}{210.708511} = -0.233 \quad \mu_{2c} = -\frac{1}{2} \frac{10.000}{210.708511} = -0.233 \quad \Sigma \mu = -0.466$$

- NIVEL 1 -

La altura de la columna articulada se multiplica por el factor 1.5, así:  
 $A_0 = 6.00$  ;  $A_0 = 9.00$  ;  $S_0 = 6.00$

Por tanto:  $a_0 = \frac{h}{A_0} = \frac{9.00}{9.00} = 1.00$  ;  $a_0 = \frac{h}{A_0} = \frac{6.00}{9.00} = 0.667$   
 $b_0 = h$  ;  $b_0 = 6.00$

La acción del empujón será:

$$R_{2a} = \frac{2EK}{L} \left( \frac{1}{2} \mu_{2a}^2 + \frac{0.75K}{210.708511} \mu_{2a} \right) = 0.70833511$$

$$\mu_{2a} = \frac{210.708511}{210.708511} = -1.412 \quad \mu_{2c} = \frac{210.708511}{210.708511} = -0.176$$

Como comprobación:  $\sum_{i=1}^n V_i \mu_i b_i = -1.412 - 0.176(210.708511)(0.75) = -1.500$

También:

$$\frac{M_0}{2K_0} = \frac{1.000}{2EI} = \frac{1.000}{EI} \quad \frac{M_c}{2K_c} = \frac{1.000}{2(0.667)EI} = \frac{0.750}{EI}$$

$$\bar{a} = 6.0 - 6.0 = 0 \quad \bar{a} = \frac{2(6.0) - 6.0}{2} = 3.0 \quad \bar{a} = \frac{0.667 + 6.0}{2} = \frac{6.667 + 0.0}{210.708511} = \frac{6.667}{210.708511}$$

Reemplazando las ecuaciones

$$f_0 = \frac{M_0}{2K_0} + \mu_{2c} f_c - \mu_{2a} f_a = \frac{1.000}{EI} - 0.176 f_c + 0.333 f_a$$

$$f_c = \frac{M_c}{2K_c} + \mu_{2a} f_a - \mu_{2c} (10.000) f_0 = \frac{0.750}{EI} - 0.384 f_a + 0.001 f_0$$

$$f_0 = \frac{0.667 + 6.0}{2EI} - \mu_{2c} f_c - \mu_{2a} f_a = \frac{6.667}{2EI} + 1.412 f_0 + 0.176 f_c$$

Los que al utilizar sucesivamente dan lugar a la tabla siguiente:

	G	I	R	O	S	DESPLAZAMIENTOS
	N U D O B		N U D O C		N I V E L 1	
$\frac{M_0}{2K_0 EI}$	$EI \alpha_0 = 1.000$		$EI \alpha_c = -0.668$		$EI \frac{\alpha_0 \bar{a} + \bar{a}}{2K_0} = -0.5412$	
$\mu_{2c} ; \mu_{2a}$	$\mu_{2c} = -0.176 ; f_c$ $\mu_{2a} = 0.333 ; f_a$		$\mu_{2a} = -0.384 ; f_0$ $\mu_{2c} = 0.001 ; f_c$		$\mu_{2a} = 1.412 ; f_0$ $\mu_{2c} = 0.176 ; f_c$	
Iteración	$EI f_0$		$EI f_c$		$EI f_a$	
0	0		0		0	
1	1.244		-5.374		76.504	
2	11.175		-6.504		40.064	
3	15.877		-6.985		46.607	
4	18.143		-7.211		49.259	
5	19.253		-7.321		51.280	
6	19.758		-7.373		51.813	
7	20.011		-7.399		52.165	
8	20.133		-7.411		52.325	
9	20.191		-7.417		52.366	
10	20.219		-7.420		52.385	
11	20.233		-7.421		52.395	
12	20.240		-7.422		52.405	
13	20.243		-7.422		52.409	
14	20.244		-7.422		52.410	
15	20.244		-7.422		52.410	

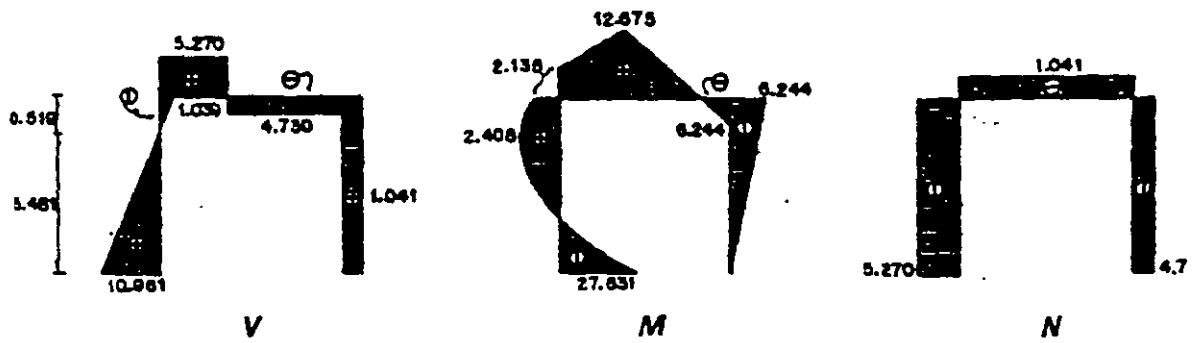
METODO MODIFICADO DE KANI

Momentos finales.

$$M_{AB} = M_{AB}^0 + K_{AB} \phi_B - K_{AB} \psi_1 = -27.631 \quad M_{BA} = M_{BA}^0 + 2K_{BA} \phi_B - K_{BA} \psi_1 = -2.135$$

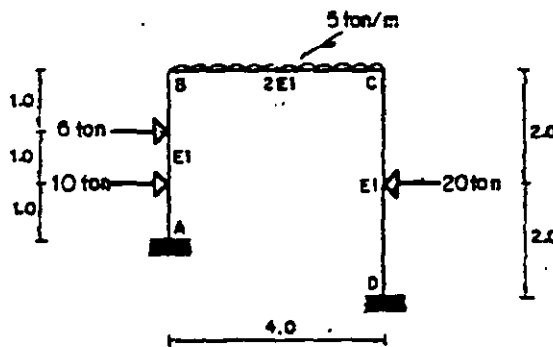
$$M_{BC} = M_{BC}^0 + 2K_{BC} \phi_B + K_{BC} \phi_C = 2.134 \quad M_{CB} = M_{CB}^0 + 2K_{CB} \phi_C + K_{CB} \phi_B = 0.244$$

$$M_{CD} = 2K_{CD} \phi_C - K_{CD} \psi_1 = -0.248$$



==DIAGRAMAS==

8.13. Encontrar los momentos finales del marco hiperestático.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{AB} = \frac{10(1)(2)^2}{(3)^2} - \frac{6(2)(1)^2}{(3)^2} = 5.778$$

$$M_{BA} = \frac{10(1)^2(2)}{(3)^2} + \frac{6(2)^2(1)}{(3)^2} = 4.889$$

$$M_{BC} = \frac{5(4)^2}{12} = 6.668 = -M_{CB}$$

$$M_{CD} = \frac{20(4)}{8} = 10.000 = -M_{DC}$$

- Factores de distribución.

- NUDO B -

$$K_{BA} = \frac{EI}{3} = 0.333EI$$

$$K_{BC} = \frac{2EI}{4} = 0.500EI$$

$$K_B = 0.833EI$$

$$\mu_{BA} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.333}{0.833} \right) = 0.200$$

$$\mu_{BC} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.500}{0.833} \right) = 0.300$$

$$\sum \mu = 0.500$$

METODO MODIFICADO DE KANI

- NUDO C -

$$K_{CB} = \frac{2EI}{4} = 0.500EI \quad K_{CD} = \frac{EI}{4} = 0.250EI \quad K_C = 0.750EI$$

$$\mu_{CB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.500}{0.750} \right) = -0.333 \quad \mu_{CD} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.250}{0.750} \right) = -0.167 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

- NIVEL 1 -

Debido a que las columnas son de diferente altura, si hacemos:  $\bar{h} = 3.0m$

Teniéndose

$$a_{BA} = \frac{\bar{h}}{h_{BA}} = \frac{3.0}{3.0} = 1.00 \quad ; \quad a_{DC} = \frac{\bar{h}}{h_{DC}} = \frac{3.0}{4.0} = 0.750$$

$$\psi_{BA} = \psi_1 \quad \psi_{DC} = 0.750 \psi_1$$

Rigidez de entrepiso:

$$\bar{K}_{n-1} = K_{BA} a_{BA}^2 + K_{DC} a_{DC}^2 = \frac{EI}{3}(1)^2 + \frac{EI}{4}(0.75)^2 = 0.474EI$$

$$V_{2B} = \frac{3(0.333)1}{2(0.474)} = -1.055 \quad V_{DC} = \frac{3(0.250)0.75}{2(0.474)} = -0.593$$

Como comprobación:  $\sum_{c=1}^2 V_{ij} a_{ij} = -1.055(1) - 0.593(0.75) = -1.500$

Además:

$$\frac{M_B}{2K_B} = \frac{-1.777}{2(0.833EI)} = \frac{1.0668}{EI} \quad \frac{M_C}{2K_C} = \frac{-3.333}{2(0.750EI)} = \frac{2.222}{EI}$$

$$\bar{M}_n = (-5.778 + 4.889)1.0 + (10.0 - 10.0)0.750 = -0.888 \quad ; \quad O_n = 7.333 - 10.0 = -2.668$$

$$\frac{O_n \bar{h} + \bar{M}_n}{2\bar{K}_n} = \frac{-2.668(3.0) - 0.888}{2(0.474EI)} = \frac{9.376}{EI}$$

Dando lugar a las ecuaciones:

$$\phi_B = -\frac{M_B}{2K_B} + \mu_{BC}\phi_C - \mu_{BA}a_{BA}\psi_1 = \frac{1.0668}{EI} - 0.300\phi_C + 0.200\psi_1$$

$$\phi_C = -\frac{M_C}{2K_C} + \mu_{CB}\phi_B - \mu_{CD}a_{CD}\psi_1 = \frac{2.222}{EI} - 0.333\phi_B + 0.125\psi_1$$

$$\psi_1 = \frac{O_n \bar{h} + \bar{M}_n}{2\bar{K}_n} - V_{2B}\phi_B - V_{DC}\phi_C = \frac{9.376}{EI} + 1.055\phi_B + 0.593\phi_C$$

Y, al aplicarlas sucesivamente dan lugar a la siguiente tabla.

	G I R O S		DESPLAZAMIENTOS
	N U D O B	N U D O C	N I V E L 1
$\frac{M_i}{2K_i EI}$	$EI \alpha_B = 1.0666$	$EI \alpha_C = 2.222$	$EI \frac{Q_n \bar{h}_n + \bar{M}_n}{2\bar{K}_n} = -0.376$
$\mu_{ij} ; \nu_{ij}$	$\mu_{BC} = -0.300 ; \nu_{BC}$ $\mu_{BA} = 0.200 ; \nu_{BA}$	$\mu_{CB} = -0.333 ; \nu_{CB}$ $\mu_{CD} = 0.125 ; \nu_{CD}$	$\nu_{AB} = 1.055 ; \nu_{AB}$ $\nu_{DC} = 0.593 ; \nu_{DC}$
iteración	$EI \phi_B$	$EI \phi_C$	$EI \psi_1$
0	0	0	0
1	1.066	1.867	-7.144
2	-0.923	1.637	-9.379
3	-1.301	1.483	-9.869
4	-1.353	1.439	-9.950
5	-1.356	1.430	-9.958
6	-1.355	1.429	-9.958
7	-1.355	1.428	-9.957
8	-1.354	1.428	-9.957

Cálculo de momentos finales.

$$M_{AB} = M_{AB}^0 + K_{AB} \phi_B - K_{AB} \psi_1 = -2.190$$

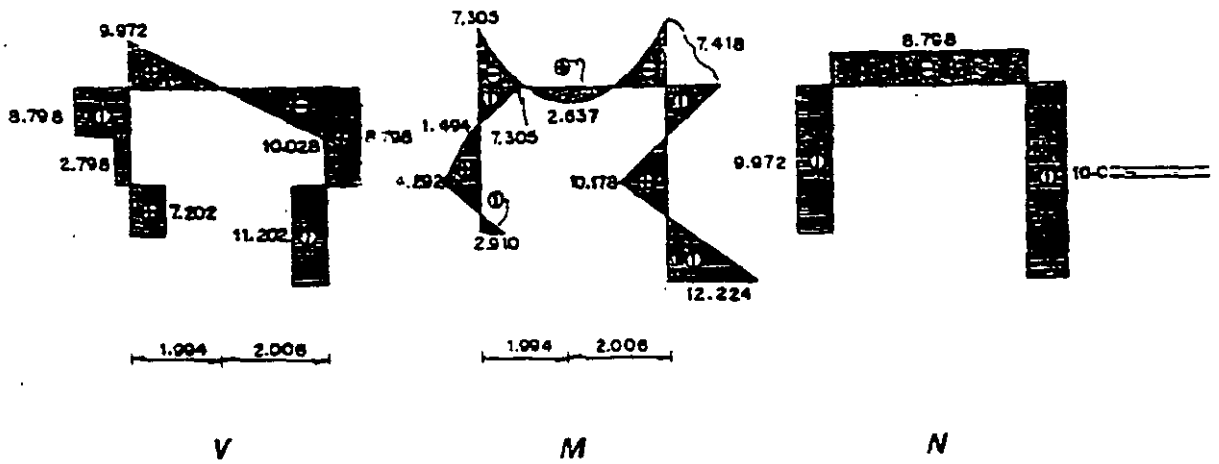
$$M_{BA} = M_{BA}^0 + 2K_{BA} \phi_B - K_{BA} \psi_1 = 7.305$$

$$M_{BC} = M_{BC}^0 + 2K_{BC} \phi_B + K_{BC} \phi_C = -7.306$$

$$M_{CB} = M_{CB}^0 + 2K_{CB} \phi_C + K_{CB} \phi_B = 7.418$$

$$M_{CD} = M_{CD}^0 + 2K_{CD} \phi_C - K_{CD} \psi_1 = -7.419$$

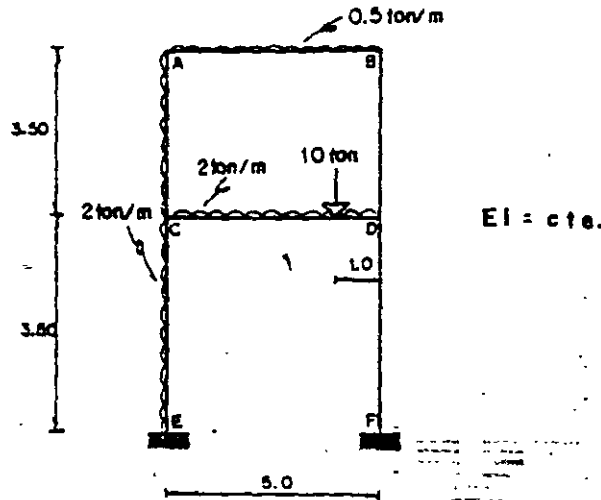
$$M_{DC} = M_{DC}^0 + K_{DC} \phi_C - K_{DC} \psi_1 = 12.224$$



••DIAGRAMAS••

METODO MODIFICADO DE KANI

8.14. Resolver el marco de dos niveles que se muestra enseguida.



- Momentos de empotramiento.

$$M_{AB} = \frac{0.515l^2}{12} = -1.042 = -M_{BA} \quad M_{CD} = \frac{215l^2}{12} - \frac{10(4)(1)l^2}{15^2} = -5.767$$

$$M_{CC} = \frac{215l^2}{12} + \frac{10(4)(1)l^2}{15^2} = 12.567; \quad M_{AC} = \frac{213.5l^2}{12} = -2.042 = -M_{CA}; \quad M_{CE} = \frac{215l^2}{12} = 4.167 = -M_{EC}$$

- Factores de distribución.

- NUDO A -

$$K_{AB} = \frac{EI}{5} = 0.200EI \quad K_{AC} = \frac{EI}{3.5} = 0.286EI \quad K_A = 0.486EI$$

$$\mu_{AB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.200}{0.486} \right) = -0.206 \quad \mu_{AC} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.286}{0.486} \right) = -0.294 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

- NUDO B - *Par simetría geométrica:*

$$K_{BA} = 0.200EI \quad K_{BD} = 0.286EI \quad K_B = 0.486EI \quad \mu_{BA} = -0.206 \quad \mu_{BD} = -0.294$$

- NUDO C -

$$K_{CA} = \frac{EI}{3.5} = 0.286EI \quad K_{CD} = \frac{EI}{5} = 0.200EI \quad K_{CE} = \frac{EI}{5} = 0.200EI \quad K_C = 0.686EI$$

$$\mu_{CA} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.286}{0.686} \right) = -0.208 \quad \mu_{CD} = -\frac{1}{2} \left( \frac{0.200}{0.686} \right) = -0.146 = \mu_{CE} \quad \Sigma \mu = -0.500$$

- NUDO D - *Par simetría geométrica:*

$$K_{DB} = 0.286EI \quad K_{DC} = K_{DF} = 0.200EI \quad K_D = 0.686EI \quad \mu_{DB} = -0.208 \quad \mu_{DC} = \mu_{DF} = -0.146$$

Además, se tiene

$$\frac{M_A}{2K_A} = \frac{1.000}{2(0.486EI)} = \frac{1.029}{EI} = \alpha_A \quad \frac{M_B}{2K_B} = \frac{1.042}{2(0.486EI)} = \frac{1.072}{EI} = \alpha_B$$



METODO MODIFICADO DE KANI

$$\frac{M_0}{2K_0} = \frac{1.9821}{210.880E11} = \frac{2.843}{E1} \alpha_c$$

$$\frac{M_0}{2K_0} = \frac{10.587}{217.288E11} = \frac{1.702}{E1} \alpha_c$$

- NIVEL 2 -

$$K_{02} = \frac{EI}{1.5} + \frac{EI}{1.5} = 0.371E1$$

$$V_{02} = V_{01} = \frac{110.228L}{210.3711} = 0.750 \quad \Sigma V = -1.500$$

$$M_{02} = 0.0$$

$$Q_2 = 1.500$$

$$\text{Por Nudo: } \frac{Q_2 L + M_0}{2K_0} = \frac{1.500(1.500) + 0.0}{210.371E11} = \frac{10.777}{E1}$$

- NIVEL 1 -

$$K_{01} = \frac{EI}{3} + \frac{EI}{3} = 0.400E1$$

$$V_{01} = V_{02} = \frac{310.200L}{210.4001} = 0.750 \quad \Sigma V = -1.500$$

$$M_{01} = 0.0$$

$$Q_1 = 1.500$$

$$\text{Por Nudo: } \frac{Q_1 L + M_0}{2K_0} = \frac{1.500(1.500) + 0.0}{210.400E11} = \frac{10.777}{E1}$$

Así, obtenemos las ecuaciones

$$\phi_2 = \frac{M_0}{2K_0} + M_{02}\phi_2 + M_{01}\phi_1 - M_{02}\phi_1 = \frac{10.777}{E1} = 0.200\phi_2 - 0.200\phi_1 + 0.200\phi_1$$

$$\phi_1 = \frac{M_0}{2K_0} + M_{01}\phi_1 + M_{02}\phi_2 - M_{01}\phi_2 = \frac{10.777}{E1} = 0.200\phi_1 - 0.200\phi_2 + 0.200\phi_2$$

$$\delta_2 = \frac{M_0}{2K_0} + M_{02}\phi_2 + M_{01}\phi_1 - M_{02}\phi_1 - M_{01}\phi_2 = \frac{10.777}{E1} = 0.200\phi_2 - 0.200\phi_1 + 0.200\phi_1 - 0.200\phi_2$$

$$\phi_0 = \frac{M_0}{2K_0} + M_{00}\phi_0 + M_{01}\phi_1 - M_{00}\phi_1 - M_{01}\phi_0 = \frac{10.777}{E1} = 0.200\phi_0 - 0.200\phi_1 + 0.200\phi_1 - 0.200\phi_0$$

$$\delta_{01} = \frac{Q_1 L + M_0}{2K_0} - V_{01}\delta_1 - V_{02}\delta_2 = \frac{10.777}{E1} = 0.200\delta_1 + 0.200\delta_2$$

$$\delta_{02} = \frac{Q_2 L + M_0}{2K_0} - V_{02}(\delta_1 + \delta_2) - V_{01}(\delta_2 + \delta_1) = \frac{10.777}{E1} = 0.200(\delta_1 + \delta_2) + 0.200(\delta_2 + \delta_1)$$

Cuya aplicación sucesiva da origen a la siguiente tabla:

G	I	R	O	S	DESPLAZAMIENTOS	
NUDO A	NUDO B	NUDO C	NUDO D	NIVEL 1	NIVEL 2	
-EIΔ/RK;				EIΔ, Δ, + M <sub>0</sub> /2K		
-1020	-1.072	2.655	-1.702	73.000	10.777	
$M_{02} = 0.200 \cdot \phi_2$	$M_{01} = -0.200 \cdot \phi_1$	$M_{02} = -0.200 \cdot \phi_1$	$M_{01} = -0.200 \cdot \phi_2$	$M_{01} = 0.200 \cdot \phi_1$	$M_{02} = 0.200 \cdot \phi_2$	$M_{01} = 0.200 \cdot \phi_1 + \phi_2$
$M_{01} = -0.200 \cdot \phi_1$	$M_{02} = -0.200 \cdot \phi_2$	$M_{01} = -0.200 \cdot \phi_2$	$M_{02} = -0.200 \cdot \phi_1$	$M_{02} = 0.200 \cdot \phi_2$	$M_{01} = 0.200 \cdot \phi_1$	$M_{02} = 0.200 \cdot \phi_2 + \phi_1$
$M_{02} = 0.200 \cdot \phi_2$	$M_{01} = 0.200 \cdot \phi_1$	$M_{02} = 0.200 \cdot \phi_1$	$M_{01} = 0.200 \cdot \phi_2$	$M_{01} = 0.200 \cdot \phi_1$	$M_{02} = 0.200 \cdot \phi_2$	$M_{01} = 0.200 \cdot \phi_1 + \phi_2$
$M_{01} = -0.200 \cdot \phi_1$	$M_{02} = -0.200 \cdot \phi_2$	$M_{01} = -0.200 \cdot \phi_2$	$M_{02} = -0.200 \cdot \phi_1$	$M_{02} = 0.200 \cdot \phi_2$	$M_{01} = 0.200 \cdot \phi_1$	$M_{02} = 0.200 \cdot \phi_2 + \phi_1$
$M_{02} = 0.200 \cdot \phi_2$	$M_{01} = 0.200 \cdot \phi_1$	$M_{02} = 0.200 \cdot \phi_1$	$M_{01} = 0.200 \cdot \phi_2$	$M_{01} = 0.200 \cdot \phi_1$	$M_{02} = 0.200 \cdot \phi_2$	$M_{01} = 0.200 \cdot \phi_1 + \phi_2$
$EI \phi_2$	$EI \phi_1$	$EI \phi_2$	$EI \phi_1$	$EI \phi_1$	$EI \phi_2$	
0	0	0	0	0	0	
-1.029	-0.860	1.869	-7.942	71.195	1.506	
-0.077	2.897	15.378	0.991	87.271	25.113	
1.239	5.765	20.218	6.112	94.748	35.728	
2.343	7.152	22.540	8.784	98.493	41.341	
3.025	7.877	23.722	10.175	100.423	44.326	
3.406	8.283	24.343	10.906	101.437	45.919	
3.611	8.478	24.623	11.293	101.975	46.768	
3.720	8.591	24.846	11.499	102.260	47.220	
3.779	8.651	24.942	11.609	102.413	47.463	
3.810	8.684	24.992	11.667	102.495	47.592	
3.826	8.702	25.019	11.698	102.538	47.661	
3.835	8.711	25.033	11.715	102.561	47.698	
3.840	8.716	25.041	11.724	102.574	47.718	
3.842	8.719	25.045	11.729	102.580	47.728	
3.844	8.720	25.047	11.731	102.583	47.733	

Cálculo de momentos finales.

$$M_{02} = M_{02} + 2K_{02}\phi_2 + K_{01}\phi_1 = 2.200$$

$$M_{01} = M_{01} + 2K_{01}\phi_1 + K_{02}\phi_2 - K_{01}\phi_2 = 2.200$$

$$M_{01} = M_{01} + 2K_{01}\phi_1 + K_{02}\phi_2 = 2.200$$

$$M_{02} = M_{02} + 2K_{02}\phi_2 + K_{01}\phi_1 - K_{02}\phi_1 = 2.200$$

METODO MODIFICADO DE KANI

$$M_{CA} = M_{CA}^0 + 2K_{CA}\phi_C + K_{CA}\phi_A - K_{CA}\psi_2 = -0.267$$

$$M_{CE} = M_{CE}^0 + 2K_{CE}\phi_C - K_{CE}\psi_1 = -0.331$$

$$M_{CD} = 2K_{CD}\phi_D + K_{CD}\phi_C - K_{CD}\psi_2 = -4.447$$

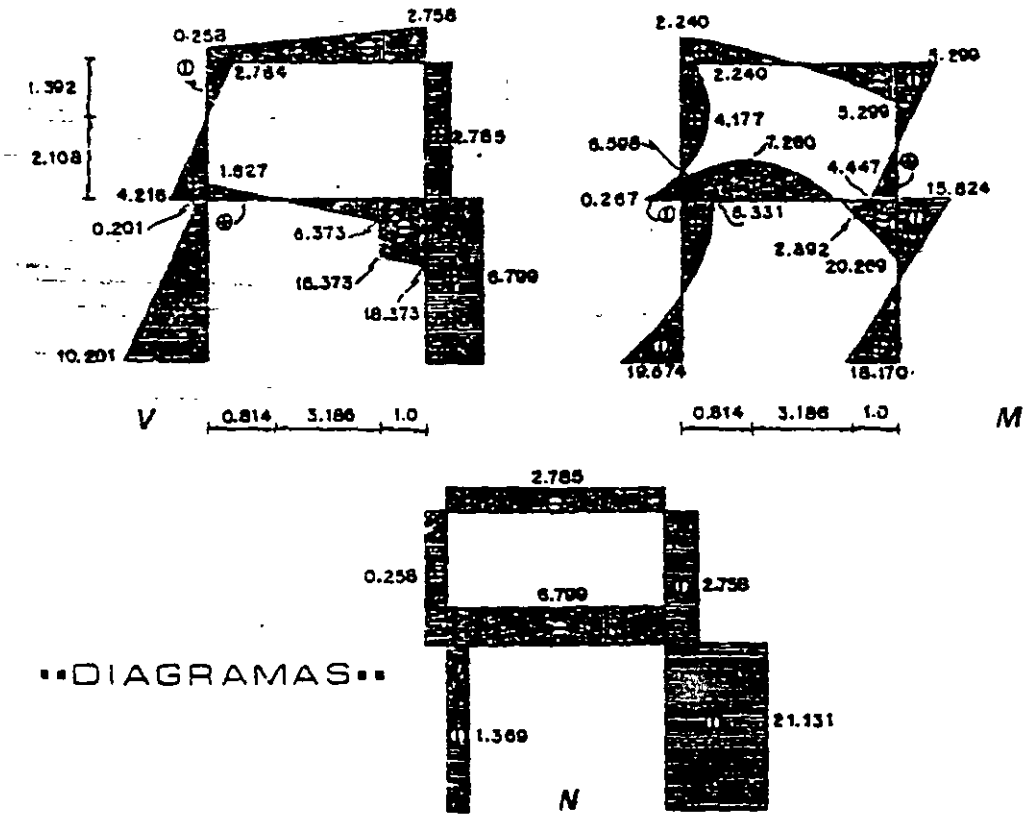
$$M_{DF} = 2K_{DF}\phi_D - K_{DF}\psi_1 = -15.824$$

$$M_{CD} = M_{CD}^0 + 2K_{CD}\phi_C + K_{CD}\phi_D = -0.598$$

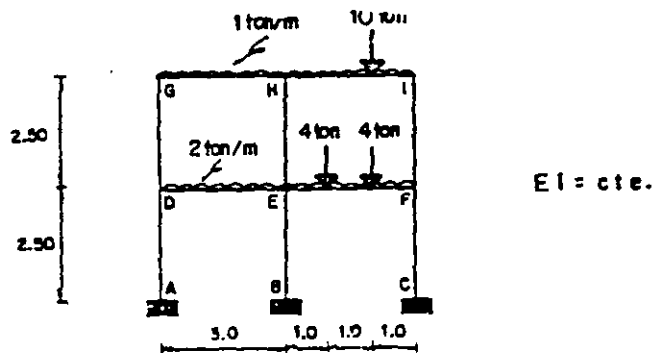
$$M_{EC} = M_{EC}^0 + K_{EC}\phi_C - K_{EC}\psi_1 = -12.874$$

$$M_{DC} = M_{DC}^0 + 2K_{DC}\phi_D + K_{DC}\phi_C = 20.269$$

$$M_{FD} = K_{FD}\phi_D - K_{FD}\psi_1 = -18.170$$



8.15. Determinar los momentos en los vértices del marco hiperestático.



METODO MODIFICADO DE KANI

- Cálculo de los momentos de empotramiento.

$$M_{GN} = -\frac{113f^2}{12} = -0.750 = -M_{NG} \quad M_{NI} = \frac{113f^2}{12} \cdot \frac{10(2)(11f)}{13^2} = 2.972$$

$$M_{HN} = \frac{113f^2}{12} + \frac{10(2f^2)(11)}{13^2} = 5.194 \quad M_{DE} = -\frac{2(3f^2)}{12} = -1.500 = -M_{ED}$$

$$M_{EF} = -\frac{2(3f^2)}{12} - \frac{4(11)(3-1)}{3} = -4.186 = -M_{FE}$$

- Cálculo de los factores de distribución.

- NUDO G -

$$K_{GN} = \frac{EI}{3} = 0.333EI \quad K_{GD} = \frac{EI}{2.5} = 0.400EI \quad K_G = 0.733EI$$

$$\mu_{GN} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.333}{0.733} \right) = -0.227 \quad \mu_{GD} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.400}{0.733} \right) = -0.273 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

- NUDO H -

$$K_{HG} = \frac{EI}{3} = 0.333EI \quad K_{HI} = \frac{EI}{3} = 0.333EI \quad K_{HE} = \frac{EI}{2.5} = 0.400EI \quad K_H = 1.066EI$$

$$\mu_{HG} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.333}{1.066} \right) = -0.156 = \mu_{HI} \quad \mu_{HE} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.400}{1.066} \right) = -0.188 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

- NUDO I -

Por simetría geométrica:

$$K_{IN} = 0.333EI \quad K_{IF} = 0.400EI \quad K_I = 0.733EI \quad \mu_{IN} = -0.227 \quad \mu_{IF} = -0.273$$

- NUDO D -

$$K_{DG} = \frac{EI}{2.5} = 0.400EI \quad K_{DE} = \frac{EI}{3} = 0.333EI \quad K_{DA} = \frac{EI}{2.5} = 0.400EI \quad K_D = 1.133EI$$

$$\mu_{DG} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.400}{1.133} \right) = -0.1765 = \mu_{DA} \quad \mu_{DE} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.333}{1.133} \right) = -0.1470 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

- NUDO E -

$$K_{EN} = K_{EB} = \frac{EI}{2.5} = 0.400EI \quad K_{ED} = K_{EF} = \frac{EI}{3} = 0.333EI \quad K_E = 1.466EI$$

$$\mu_{EN} = \mu_{EB} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.400}{1.466} \right) = -0.136 \quad \mu_{ED} = \mu_{EF} = \frac{1}{2} \left( \frac{0.333}{1.466} \right) = -0.114 \quad \Sigma \mu = -0.500$$

- NUDO F -

Por simetría geométrica:

$$K_{FI} = K_{FC} = 0.400EI \quad K_{FE} = 0.333EI \quad K_F = 1.133EI \quad \mu_{FI} = \mu_{FC} = -0.1765 \quad \mu_{FE} = -0.147$$

Por otro lado, se tiene

$$\frac{M_G}{2K_G} = \frac{(-0.750)}{2(0.733EI)} = \frac{0.511}{EI}$$

$$\frac{M_I}{2K_I} = \frac{5.194}{2(0.733EI)} = \frac{3.54166}{EI}$$

$$\frac{M_E}{2K_E} = \frac{(-2.666)}{2(1.466EI)} = \frac{0.909}{EI}$$

$$\frac{M_H}{2K_H} = \frac{(-2.222)}{2(1.066EI)} = \frac{1.04166}{EI}$$

$$\frac{M_D}{2K_D} = \frac{(-1.500)}{2(1.133EI)} = \frac{0.662}{EI}$$

$$\frac{M_F}{2K_F} = \frac{4.166}{2(1.133EI)} = \frac{1.838}{EI}$$

METODO MODIFICADO DE KANI

- NIVEL 2 -

$$K_{n=2} = \frac{EI}{2.5} + \frac{EI}{2.5} + \frac{EI}{2.5} = 1.200EI \quad V_{GD} = V_{HE} = V_{IF} = -\frac{3(0.400)}{2(1.200)} = -0.500 \quad V_2 = -1.50$$

$$M_n = 0.0 \quad y \quad Q_n = 0.0 \quad \text{Por tanto:} \quad \frac{Q_n h_n + M_n}{2K_n} = 0.0$$

- NIVEL 1 -

$$K_{n=1} = \frac{EI}{2.5} + \frac{EI}{2.5} + \frac{EI}{2.5} = 1.200EI \quad V_{DA} = V_{EB} = V_{FC} = -\frac{3(0.400)}{2(1.200)} = -0.500 \quad V_1 = -1.50$$

$$M_n = 0.0 \quad y \quad Q_n = 0.0 \quad \text{De modo que:} \quad \frac{Q_n h_n + M_n}{2K_n} = 0.0$$

Así, se obtienen las ecuaciones para giros y desplazamientos laterales.

$$\phi_G = -\frac{M_G}{2K_G} + \mu_{GN}\phi_H + \mu_{GD}\phi_D - \mu_{GD}\psi_2 = \frac{0.571}{EI} - 0.227\phi_H - 0.273\phi_D + 0.273\psi_2$$

$$\phi_H = -\frac{M_H}{2K_H} + \mu_{HG}\phi_G + \mu_{HI}\phi_I + \mu_{HE}\phi_E - \mu_{HE}\psi_2 = \frac{1.0418}{EI} - 0.156\phi_G - 0.156\phi_I - 0.188\phi_E + 0.188\psi_2$$

$$\phi_I = -\frac{M_I}{2K_I} + \mu_{IH}\phi_H + \mu_{IF}\phi_F - \mu_{IF}\psi_2 = \frac{3.54188}{EI} - 0.227\phi_H - 0.273\phi_F + 0.273\psi_2$$

$$\phi_D = -\frac{M_D}{2K_D} + \mu_{DG}\phi_G + \mu_{DE}\phi_E - \mu_{DA}\psi_1 - \mu_{DF}\psi_2 = \frac{0.662}{EI} - 0.1765\phi_G - 0.147\phi_E + 0.1765(\psi_1 + \psi_2)$$

$$\phi_E = -\frac{M_E}{2K_E} + \mu_{EH}\phi_H + \mu_{ED}\phi_D + \mu_{EF}\phi_F - \mu_{EB}\psi_1 - \mu_{EN}\psi_2 = \frac{0.908}{EI} - 0.136\phi_H - 0.114(\phi_D + \phi_F) + 0.136(\psi_1 + \psi_2)$$

$$\phi_F = -\frac{M_F}{2K_F} + \mu_{FI}\phi_I + \mu_{FE}\phi_E - \mu_{FC}\psi_1 - \mu_{FI}\psi_2 = \frac{1.838}{EI} - 0.1765\phi_I - 0.147\phi_E + 0.1765(\psi_1 + \psi_2)$$

$$\psi_{n=1} = \frac{Q_n h_n + M_n}{2K_n} - V_{DA}\phi_D - V_{EB}\phi_E - V_{FC}\phi_F = 0.500\phi_D + 0.500\phi_E + 0.500\phi_F$$

$$\psi_{n=2} = \frac{Q_n h_n + M_n}{2K_n} - V_{GD}(\phi_G + \phi_D) - V_{HE}(\phi_H + \phi_E) - V_{IF}(\phi_I + \phi_F) = 0.500(\phi_G + \phi_D) + 0.500(\phi_H + \phi_E) + 0.500(\phi_I + \phi_F)$$

Las que al aplicar sucesivamente dan como resultado la tabla que se muestra a

continuación.

Arreglo tabulado de solución.

METODO MODIFICADO DE KANI

G I R O S						DESPLAZAMIENTOS	
NUDO G	NUDO H	NUDO I	NUDO D	NUDO E	NUDO F	NIVEL 1	NIVEL 2
$-\frac{M_i}{2K_i} EI$						$EI \frac{Q_n A_n + M_n}{2K_n}$	
0.511	1.04168	-3.54188	0.662	0.909	-1.838	0.000	0.000
$\mu_{ij}$	$\mu_{ij}$	$\mu_{ij}$	$\mu_{ij}$	$\mu_{ij}$	$\mu_{ij}$	$v_{ij}$	$v_{ij}$
GH = -0.227; $\phi_H$	HG = -0.158; $\phi_G$ HI = -0.158; $\phi_I$	IH = -0.227; $\phi_H$ IF = -0.273; $\phi_F$	DG = -0.1785; $\phi_G$ DE = -0.147; $\phi_E$	EH = -0.138; $\phi_H$ ED = -0.114; $\phi_D$ EF = -0.114; $\phi_F$	FI = -0.1785; $\phi_I$ FE = -0.147; $\phi_E$ FC = 0.1785; $\phi_C$ FI = 0.1785; $\phi_I$	DA = 0.500; $\phi_D$	GD = 0.50; $\phi_G + \phi_D$ HE = 0.50; $\phi_H + \phi_E$ IF = 0.50; $\phi_I + \phi_F$
$EI \phi_G$	$EI \phi_H$	$EI \phi_I$	$EI \phi_D$	$EI \phi_E$	$EI \phi_F$	$EI \phi_I$	$EI \phi_E$
0	0	0	0	0	0	0	0
0.511	0.962	-3.760	0.572	0.713	-1.279	0.003	-1.140
-0.175	1.307	-3.800	0.387	0.678	-1.468	-0.201	-1.536
-0.311	1.267	-3.848	0.311	0.632	-1.558	-0.308	-1.754
-0.340	1.246	-3.878	0.265	0.606	-1.607	-0.368	-1.854
-0.350	1.239	-3.890	0.243	0.594	-1.631	-0.397	-1.898
-0.355	1.235	-3.895	0.232	0.588	-1.642	-0.411	-1.919
-0.356	1.234	-3.897	0.227	0.586	-1.648	-0.417	-1.927
-0.357	1.233	-3.898	0.225	0.585	-1.650	-0.420	-1.931
-0.357	1.232	-3.898	0.224	0.584	-1.651	-0.421	-1.933
-0.358	1.232	-3.898	0.224	0.584	-1.651	-0.422	-1.934
-0.358	1.232	-3.898	0.224	0.584	-1.651	-0.422	-1.934

METODO MODIFICADO DE KANI

Cálculo de momentos finales.

$$M_{AD} = K_{AD}\phi_D - K_{AD}\psi_1 = 0.238$$

$$M_{DE} = M_{DE}^0 + 2K_{DE}\phi_D + K_{DE}\phi_E = -1.156$$

$$M_{DG} = 2K_{DG}\phi_D + K_{DG}\phi_G - K_{DG}\psi_2 = 0.810$$

$$M_{GH} = M_{GH}^0 + 2K_{GH}\phi_G + K_{GH}\phi_H = -0.578$$

$$M_{HE} = 2K_{HE}\phi_H + K_{HE}\phi_E - K_{HE}\psi_2 = 1.993$$

$$M_{HI} = M_{HI}^0 + 2K_{HI}\phi_H + K_{HI}\phi_I = -3.449$$

$$M_{IF} = 2K_{IF}\phi_I + K_{IF}\phi_F - K_{IF}\psi_2 = -3.006$$

$$M_{BE} = K_{BE}\phi_E - K_{BE}\psi_1 = 0.402$$

$$M_{EF} = M_{EF}^0 + 2K_{EF}\phi_E + K_{EF}\phi_F = 4.328$$

$$M_{FC} = 2K_{FC}\phi_F - K_{FC}\psi_1 = -1.152$$

$$M_{DA} = 2K_{DA}\phi_D - K_{DA}\psi_1 = 0.348$$

$$M_{ED} = M_{ED}^0 + 2K_{ED}\phi_E + K_{ED}\phi_D = 1.964$$

$$M_{GD} = 2K_{GD}\phi_G + K_{GD}\phi_D - K_{GD}\psi_2 = 0.577$$

$$M_{HG} = M_{HG}^0 + 2K_{HG}\phi_H + K_{HG}\phi_G = 1.452$$

$$M_{EH} = 2K_{EH}\phi_E + K_{EH}\phi_H - K_{EH}\psi_2 = 1.734$$

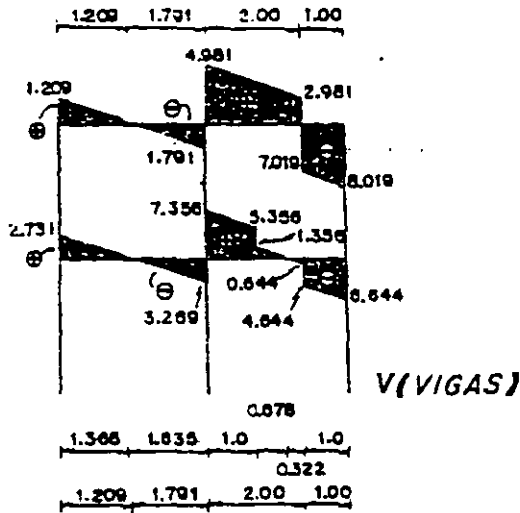
$$M_{IH} = M_{IH}^0 + 2K_{IH}\phi_I + K_{IH}\phi_H = 3.006$$

$$M_{FI} = 2K_{FI}\phi_F + K_{FI}\phi_I - K_{FI}\psi_2 = -2.106$$

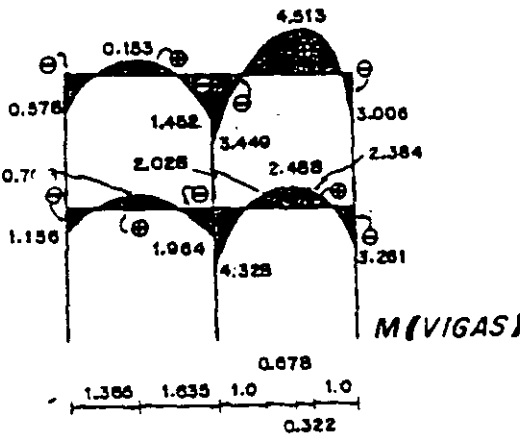
$$M_{EB} = 2K_{EB}\phi_E - K_{EB}\psi_1 = 0.636$$

$$M_{FE} = M_{FE}^0 + 2K_{FE}\phi_F + K_{FE}\phi_E = 3.281$$

$$M_{CF} = K_{CF}\phi_F - K_{CF}\psi_1 = -0.492$$

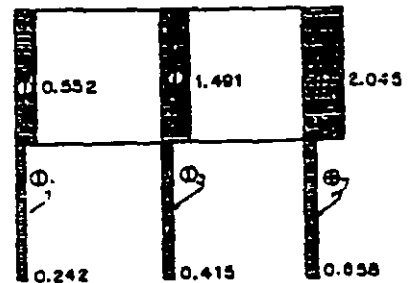


V (VIGAS)

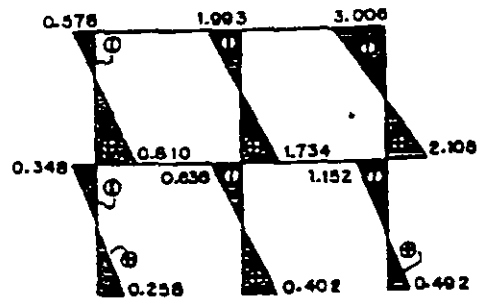


M (VIGAS)

DIAGRAMAS



V (COLUMNAS)


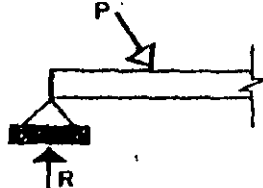
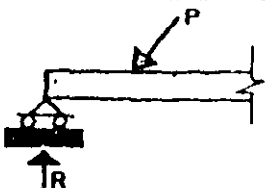
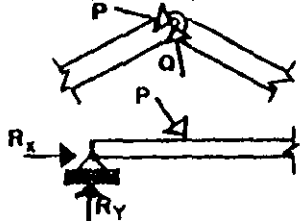
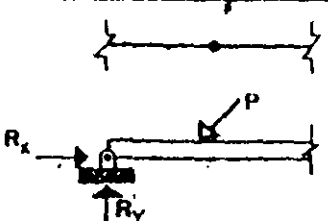
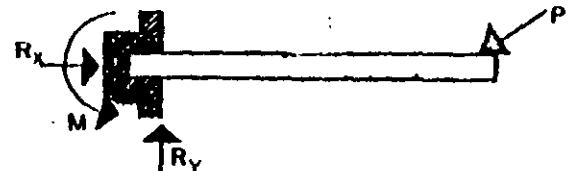
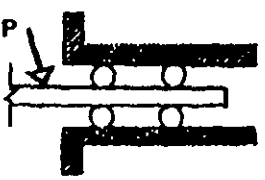

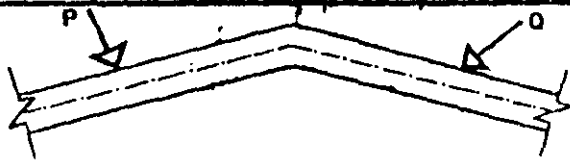


M (COLUMNAS)

# **A P E N D I C E S**

# Uniones internas y externas más comúnmente utilizadas.

**A**

 NOMBRE	DESPLAZAMIENTOS		NUMERO DE INCOGNITAS	S I M B O L O	
	LINEALES $\Delta_x$	ANGULARES $\Delta_y$		$\theta$	
APOYO LIBRE	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	1	 
ARTICULACION	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	2	 
EMPOTRAMIENTO	$= 0$	$= 0$	$= 0$	3	
APOYO GUIADO	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	2	 
NUDO FIASICO	$= 0$	$= 0$	$= 0$	3	

291



## VALORES DE $\int M_i M_k dL$


















		1	2	3	4	5	6	7
Mk	Mi							
	1		$Lik$	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{2}L(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}Likm$	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{3}Li$
2		$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{6}L(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}Likm$	$\frac{4}{12}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+a)ik$
3		$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}Lik$	$\frac{1}{6}L(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}Likm$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+b)ik$
4		$\frac{1}{2}L(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1+i_2k_1+i_1k_2+2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1+i_2)km$	$\frac{1}{12}L(3i_1+5i_2)k$	$\frac{1}{12}L(i_1+3i_2)k$	$\frac{1}{6}Lk \left\{ (1+b)i_1 + (1+a)i_2 \right\}$
5		$\frac{2}{3}Limk$	$\frac{1}{3}Limk$	$\frac{1}{3}Lm(k_1+k_2)$	$\frac{8}{15}Limkm$	$\frac{7}{15}Limk$	$\frac{1}{5}Limk$	$\frac{1}{3}L(1+ab)imk$
6		$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{12}L(3k_1+5k_2)$	$\frac{7}{15}Likm$	$\frac{8}{15}Lik$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-b-b^2)ik$
7		$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}L(5k_1+3k_2)$	$\frac{7}{15}Likm$	$\frac{11}{30}Lik$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-a-a^2)ik$
8		$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}L(k_1+3k_2)$	$\frac{1}{5}Likm$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{5}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+a+a^2)ik$
9		$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{12}L(3k_1+k_2)$	$\frac{1}{5}Likm$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{30}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+b+b^2)ik$
10		$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+a)ik$	$\frac{1}{6}Li \left\{ (1+b)k_1 + (1+a)k_2 \right\}$	$\frac{1}{3}L(1+ab)ikm$	$\frac{1}{12}L(5-b-b^2)ik$	$\frac{1}{12}L(1+a+a^2)ik$	$\frac{1}{3}Lik$

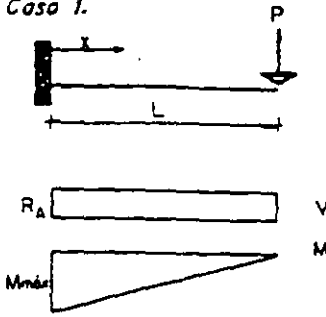
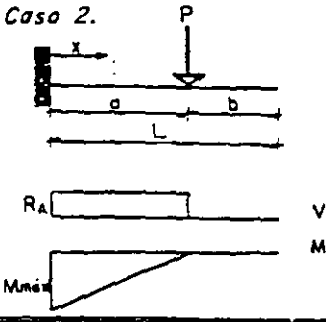
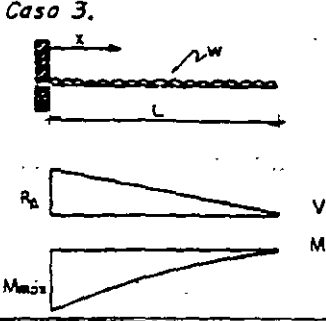
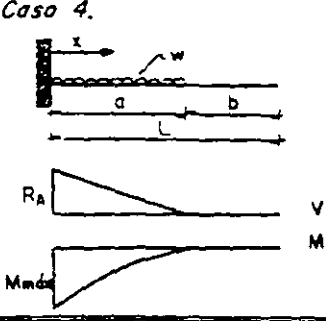
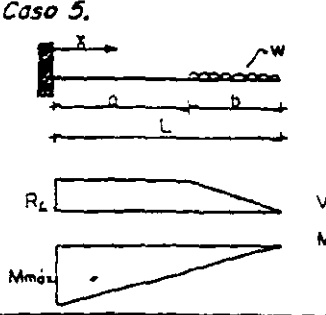
Tabla de integración de diagramas de elementos mecánicos.



VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS			
ESTRUCTURA Y DIAGRAMAS	REACCIONES	MOMENTO MAXIMO	DEFLEXION
<p>Caso 1.</p>	$R_A = R_B = P/2$	en $x=L/2$ $M = \frac{PL}{4}$	$0 \leq x \leq L/2$ $\Delta_x = \frac{Px}{48EI} (3L^2 - 4x^2)$ $\Delta_{\text{máx}} = \frac{PL^3}{48EI}$ en $\xi$
<p>Caso 2.</p>	$R_A = \frac{Pb}{L}$ $R_B = \frac{Pa}{L}$	$M = \frac{Pab}{L}$ en el punto de aplicación de la carga.	$0 \leq x \leq a$ $\Delta_x = \frac{Pbx}{6LEI} (L^2 - x^2 - b^2)$ $a \leq x \leq L$ $\Delta_x = \frac{Pb}{6LEI} \left[ \frac{L}{b} (L-x)^3 + (L^2 - b^2) - x^3 \right]$ $\Delta_{\text{máx}} = \frac{Pab(a+2b)\sqrt{3a(a+2b)}}{27LEI}$
<p>Caso 3.</p>	$R_A = R_B = P$	en $x=a$ $M = Pa$	$0 \leq x \leq a$ $\Delta_x = \frac{Px}{6EI} (3La - 3a^2 - x^2)$ $\Delta_{\text{máx}} = \frac{Pa}{24EI} (3L^2 - 4a^2)$ en $\xi$
<p>Caso 4.</p>	$R_A = R_B = \frac{wL}{2}$	$M = \frac{wL^2}{8}$ en $\xi$	$\Delta_x = \frac{wx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3)$ $\Delta_{\text{máx}} = \frac{5wL^4}{384EI}$ en $\xi$

VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS			
ESTRUCTURA Y CARGAS	REACCIONES	MOMENTO MAXIMO	DEFLEXION
<p>Caso 5.</p>	$R_A = R_B = wa$	<p>en <math>x=a</math></p> $M = \frac{wa^2}{2}$	<p><math>0 \leq x \leq a</math></p> $\Delta x = \frac{wx}{24EI} (6a^2L - 4a^3 - 4ax^2 + x^3)$ <p>en <math>\underline{c}</math></p> $\Delta_{m\acute{o}x} = \frac{wa^2}{24EI} (a^2 - 4aL + 3L^2)$
<p>Caso 6.</p>	$R_A = \frac{3wL}{8}$  $R_B = \frac{wL}{8}$	<p>en <math>x = \frac{3L}{8}</math></p> $M = \frac{9wL^2}{128}$	<p><math>0 \leq x \leq L/2</math></p> $\Delta x = \frac{wx}{96EI} (4x^3 - 6Lx^2 + 11L^2)$ <p><math>L/2 \leq x \leq L</math></p> $\Delta x = \frac{wL}{192EI} (4x^3 - 12Lx^2 - 9L^2x + 17L^3)$
<p>Caso 7.</p>	$R_A = \frac{wL}{6}$  $R_B = \frac{wL}{3}$	<p>en <math>x = \frac{L}{\sqrt{3}}</math></p> $M = \frac{wL^2}{9\sqrt{3}}$	$\Delta x = \frac{wx}{360LEI} (7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$ <p>en <math>x = 0.519L</math></p> $\Delta_{m\acute{o}x} = 0.00652 \frac{wL^4}{EI}$
<p>Caso 8.</p>	$R_A = -\frac{M}{L}$  $R_B = \frac{M}{L}$	<p>en <math>x=0</math></p> $M = M$	$\Delta x = \frac{Mx}{6LEI} (2L^2 - 3Lx + x^2)$ <p>en <math>x = 0.423L</math></p> $\Delta_{m\acute{o}x} = 0.064 \frac{ML^2}{EI}$

# VIGAS EN CANTILIVER

ESTRUCTURA Y DIAGRAMAS	REACCIONES	MOMENTO MAXIMO	DEFLEXION
<p>Caso 1.</p> 	$R_A = P$	en $x=0$ $M = PL$	$\Delta_x = \frac{Px^2}{6EI}(3L-x)$ $\Delta_{\text{máx}} = \frac{PL^3}{3EI}$ en el extremo libre.
<p>Caso 2.</p> 	$R_A = P$	en $x=0$ $M = Pa$	$0 \leq x \leq a$ $\Delta_x = \frac{Px^2}{6EI}(3a-x)$ $a \leq x \leq L$ $\Delta_x = \frac{Pa^2}{6EI}(3x-a)$ $\Delta_{\text{máx}} = \frac{Pa^2}{6EI}(3L-a)$ en el extremo libre.
<p>Caso 3.</p> 	$R_A = wL$	en $x=0$ $M = \frac{wL^2}{2}$	$\Delta_x = \frac{wx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2)$ $\Delta_{\text{máx}} = \frac{wL^4}{8EI}$ en el extremo libre.
<p>Caso 4.</p> 	$R_A = wa$	en $x=0$ $M = \frac{wa^2}{2}$	$0 \leq x \leq a$ $\Delta_x = \frac{wx^2}{24EI}(6a^2 - 4ax + x^2)$ $a \leq x \leq L$ $\Delta_x = \frac{wa^3}{24EI}(4x-a)$ $\Delta_{\text{máx}} = \frac{wa^3}{24EI}(4L-a)$ en el extremo libre.
<p>Caso 5.</p> 	$R_A = wb$	en $x=0$ $M = wb \left[ a + \frac{b}{2} \right]$	$0 \leq x \leq a$ $\Delta_x = \frac{wbx^2}{12EI}(6a+3b-2x)$ $a \leq x \leq L$ $\Delta_x = \frac{wab}{12EI}(6ax+6bx-3ab-2a^2)$ $\Delta_{\text{máx}} = \frac{wab}{12EI}(6aL+6bL-3ab-2a^2)$ en el extremo libre.

Propiedades de secciones geométricas.



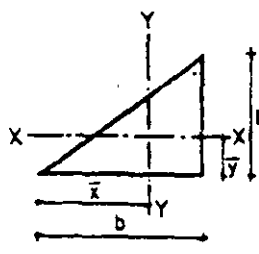
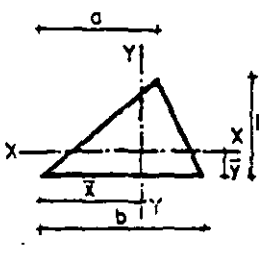
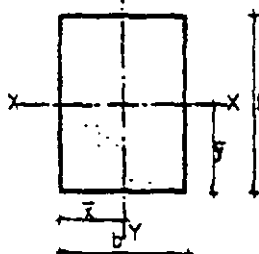
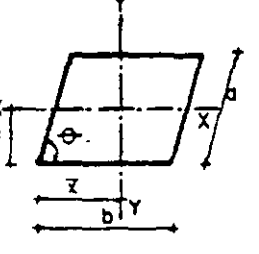
F I G U R A	A R E A Y CENTROIDE	M O M E N T O D E I N E R C I A	$r^2$
<p><i>Triángulo rectángulo</i></p> 	$A = \frac{bh}{2}$ $\bar{x} = \frac{2b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{b^3h}{36}$	$r_x^2 = \frac{h^2}{18}$ $r_y^2 = \frac{b^2}{18}$
<p><i>Triángulo</i></p> 	$A = \frac{bh}{2}$ $\bar{x} = \frac{b(a+b)}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{bh}{36}(b^2 - ab + a^2)$	$r_x^2 = \frac{h^2}{18}$ $r_y^2 = \frac{1}{18}(b^2 - ab + a^2)$
<p><i>Rectángulo</i></p> 	$A = bh$ $\bar{x} = \frac{b}{2}$ $\bar{y} = \frac{h}{2}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{b^3h}{12}$	$r_x^2 = \frac{h^2}{12}$ $r_y^2 = \frac{b^2}{12}$
<p><i>Paralelogramo</i></p> 	$A = ab \sin \theta$ $\bar{x} = \frac{1}{2}(b + a \cos \theta)$ $\bar{y} = \frac{1}{2}(a \sin \theta)$	$I_x = \frac{a^3b}{12} \sin^3 \theta$ $I_y = \frac{ab}{12} \sin \theta (b^2 + a^2 \cos^2 \theta)$	$r_x^2 = \frac{1}{12}(a \sin \theta)^2$ $r_y^2 = \frac{1}{12}(b^2 + a^2 \cos^2 \theta)$

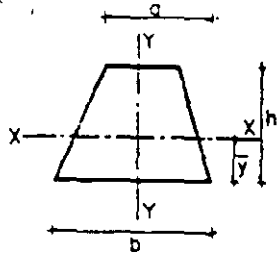
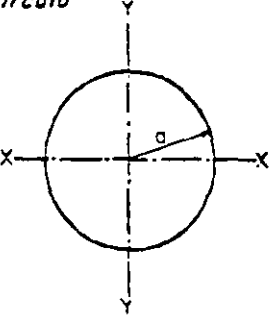
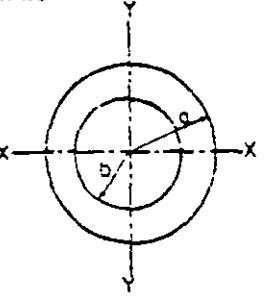
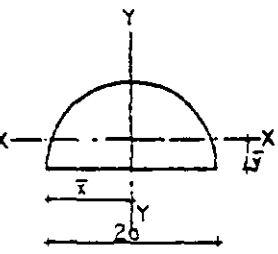
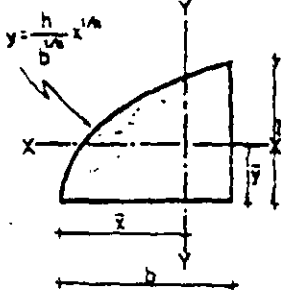
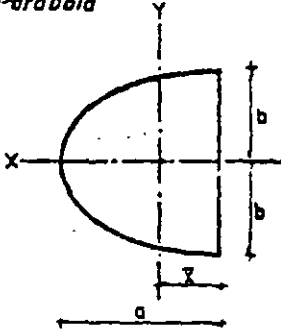
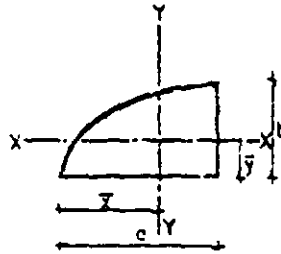
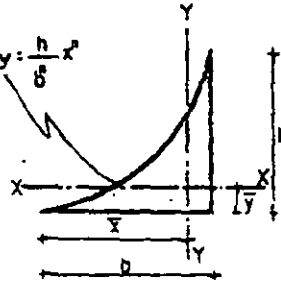
FIGURA	AREA Y CENTROIDE	MOMENTO DE INERCIA	$i^2$
<p data-bbox="272 214 406 241"><i>Trapezoida</i></p> 	$A = \frac{h}{2}(a+b)$ $\bar{y} = \frac{h}{3} \frac{2a+b}{a+b}$	$I_{\bar{x}} = \frac{h^3(d^2+4ab+b^2)}{36(a+b)}$	$r_{\bar{x}}^2 = \frac{h^2(d^2+4ab+b^2)}{18(a+b)^2}$
<p data-bbox="272 604 357 632"><i>Circulo</i></p> 	$A = \pi a^2$ $\bar{x} = a$ $\bar{y} = a$	$I_{\bar{x}} = I_{\bar{y}} = \frac{1}{4} \pi a^4$	$r_{\bar{x}}^2 = r_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{4} a^2$
<p data-bbox="272 989 341 1016"><i>Anillo</i></p> 	$A = \pi(a^2 - b^2)$ $\bar{x} = 0$ $\bar{y} = 0$	$I_{\bar{x}} = I_{\bar{y}} = \frac{\pi}{2}(a^4 - b^4)$	$r_{\bar{x}}^2 = r_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$
<p data-bbox="272 1373 414 1400"><i>Semicirculo</i></p> 	$A = \frac{1}{2} \pi a^2$ $\bar{x} = 0$ $\bar{y} = \frac{4a}{3\pi}$	$I_{\bar{x}} = \frac{a^4(9\pi^2 - 64)}{72\pi}$ $I_{\bar{y}} = \frac{1}{8} \pi a^4$	$r_{\bar{x}}^2 = \frac{a^2(9\pi^2 - 64)}{36\pi^2}$ $r_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{4} a^2$

FIGURA	AREA Y CENTROIDE	MOMENTO DE INERCIA	$r^2$
<p>Parábola grado <math>n</math></p> 	$A = \frac{n}{n+1} bh$ $\bar{x} = \frac{n+1}{2n+1} b$ $\bar{y} = \frac{n+1}{2(n+2)} h$		
<p>Parábola</p> 	$A = \frac{4}{3} ab$ $\bar{x} = \frac{3}{5} a$ $y = 0$	$I_x = \frac{4}{15} ab^3$ $I_y = \frac{16}{175} a^3 b$	$r_x^2 = \frac{1}{5} b^2$ $r_y^2 = \frac{12}{175} a^2$
<p>Semiparábola</p> 	$A = \frac{2}{3} ab$ $\bar{x} = \frac{3}{5} a$ $\bar{y} = \frac{3}{8} b$		
<p>Parábola grado <math>n</math></p> 	$A = \frac{bh}{n+1}$ $\bar{x} = \frac{n+1}{n+2} b$ $\bar{y} = \frac{h}{2} \left[ \frac{n+1}{2n+1} \right]$		

Todas las propiedades de las secciones anteriores están tomadas con relación a los ejes centroidales.

# Momentos de empotramiento en vigas prismáticas.

E

<p><math>\frac{WL^2}{12}</math> <math>W(\text{ton/m})</math> <math>\frac{WL^2}{12}</math></p>	<p><math>\frac{WL^2}{8}</math> <math>W(\text{ton/m})</math></p>
<p><math>\frac{PL}{8}</math> <math>P</math> <math>\frac{PL}{8}</math></p> <p><math>L/2</math> <math>L/2</math></p>	<p><math>\frac{3PL}{16}</math> <math>P</math></p> <p><math>L/2</math> <math>L/2</math></p>
<p><math>\frac{Pa^2b}{L^2}</math> <math>P</math> <math>\frac{Pb^2a}{L^2}</math></p> <p><math>a</math> <math>b</math></p>	<p><math>M = \frac{Pab(b+L)}{2L^2}</math></p> <p><math>a</math> <math>b</math></p>
<p><math>M</math> <math>P</math> <math>P</math> <math>M</math></p> <p><math>a</math> <math>a</math></p> <p><math>M = \frac{Pa(L-a)}{L}</math></p>	<p><math>\frac{PL}{3}</math> <math>P</math> <math>P</math></p> <p><math>L/3</math> <math>L/3</math> <math>L/3</math></p>
<p>W=carga total</p> <p><math>\frac{5WL}{48}</math> <math>W</math> <math>\frac{5WL}{48}</math></p> <p><math>L</math></p>	<p>W=carga total</p> <p><math>\frac{5WL}{32}</math> <math>W</math></p> <p><math>L</math></p>
<p><math>M_o = \frac{M_1}{L}(4La - 3a^2 - L^2)</math> ; <math>M_i = \frac{M_1}{L}(2La - 3a^2)</math></p> <p><math>M_o</math> <math>M_i</math></p> <p><math>a</math> <math>b</math></p>	<p><math>M_o = \frac{M_1}{2L}(2L^2 + 3a^2 - 6aL)</math></p> <p><math>M_o</math> <math>M_i</math></p> <p><math>a</math> <math>b</math></p>
<p>W=carga total</p> <p><math>\frac{WL}{10}</math> <math>W</math> <math>\frac{WL}{15}</math></p> <p><math>L</math></p>	<p>W=carga total</p> <p><math>\frac{2WL}{15}</math> <math>W</math></p> <p><math>L</math></p>
<p><math>\frac{WL^2}{6}</math> <math>W(\text{ton/m})</math> <math>\frac{WL^2}{5}</math></p> <p><math>L</math></p>	<p>W=carga total ; <math>M = 0.0646WL</math></p> <p><math>M</math></p> <p><math>L</math></p>
<p><math>M</math> <math>W(\text{ton/m})</math></p> <p><math>a</math> <math>c</math> <math>b</math></p> <p><math>L</math></p>	<p><math>M = \frac{W}{8L} \{ a^4 - (b+c)^4 + 2L^2 c(2b+c) \}</math></p>
<p><math>M_i = \frac{W}{L} \left\{ \frac{(a+c)^3 - a^3}{3} - \frac{(a+c)^4 - a^4}{4} \right\}</math></p> <p><math>a</math> <math>c</math> <math>b</math></p> <p><math>M_i</math></p>	
<p><math>M_o = \frac{W}{L} \left\{ L \left[ \frac{(a+c)^2 - a^2}{2} - 2L \left[ \frac{(a+c)^3 - a^3}{3} \right] + \frac{(a+c)^4 - a^4}{4} \right] \right\}</math></p> <p><math>a</math> <math>c</math> <math>b</math></p> <p><math>M_o</math> <math>M_i</math></p>	



Rigideces angulares y lineales para desplazamientos unitarios.

F

	ESTRUCTURA	*F. T.	REACCIONES
RIGIDECES ANGULARES		$\frac{1}{2}$	$\frac{6EI}{L^2}$
		0	$\frac{3EI}{L^2}$
RIGIDECES LINEALES		1	$\frac{12EI}{L^3}$
		0	$\frac{3EI}{L^3}$

\* F. T., factor de transporte.

MULTIPLIQUENSE	P O R	PARA OBTENER
centímetros	0.0100	metros
centímetros	$3.2808 \times 10^{-2}$	pies
centímetros	0.3937	pulgadas
metros	100.0000	centímetros
metros	3.2808	pies
metros	39.3701	pulgadas
pies	0.3048	metros
pies	30.4801	centímetros
pulgadas	0.0254	metros
pulgadas	2.5400	centímetros
toneladas	1000.0000	kilogramos
toneladas	2204.6200	libras o poundal
kilogramos	0.0010	toneladas
kilogramos	2.2046	libras o poundal
libras	0.00045	toneladas
libras	0.45359	kilogramos
metros cuadrados	$1 \times 10^4$	centímetros cuadrados
metros cuadrados	10.7638	pies cuadrados
metros cuadrados	$15.5 \times 10^2$	pulgadas cuadradas
centímetros cuadrados	$1 \times 10^{-4}$	metros cuadrados
centímetros cuadrados	$1.0764 \times 10^{-3}$	pies cuadrados
centímetros cuadrados	0.1550	pulgadas cuadradas
metros cuartos	$1 \times 10^8$	centímetros cuartos
metros cuartos	$1.1586 \times 10^2$	pies cuartos
metros cuartos	$24.0249 \times 10^5$	pulgadas cuartas
centímetros cuartos	$1 \times 10^{-8}$	metros cuartos
centímetros cuartos	$1.1586 \times 10^{-6}$	pies cuartos
centímetros cuartos	$2.4025 \times 10^{-2}$	pulgadas cuartas
toneladas/metro cuadrado	0.1000	kilogramos/centímetro cuadrado
toneladas/metro cuadrado	204.8199	libras/pie cuadrado
toneladas/metro cuadrado	1.4223	libras/pulgada cuadrada
kilogramos/centímetro cuadrado	10.0000	toneladas/metro cuadrado
kilogramos/centímetro cuadrado	$2.04819 \times 10^3$	libras/pie cuadrado
kilogramos/centímetro cuadrado	14.2233	libras/pulgada cuadrada
toneladas x metro	$1 \times 10^5$	kilogramos x centímetro
toneladas x metro	$7.2329 \times 10^3$	libras x pie
toneladas x metro	$8.6796 \times 10^4$	libras x pulgada
kilogramos x centímetro	$1 \times 10^{-5}$	toneladas x metro
kilogramos x centímetro	$7.2329 \times 10^{-2}$	libras x pie
kilogramos x centímetro	$8.6796 \times 10^{-1}$	libras x pulgada
toneladas x metro cuadrado	$1 \times 10^7$	kilogramos x centímetro cuadrado
toneladas x metro cuadrado	$2.3730 \times 10^4$	libras x pie cuadrado
toneladas x metro cuadrado	$3.4172 \times 10^6$	libras x pulgada cuadrada
kilogramos x centímetro cuadrado	$1 \times 10^{-7}$	toneladas x metro cuadrado
kilogramos x centímetro cuadrado	0.3417	libras x pulgada cuadrada
kilogramos x centímetro cuadrado	$2.3730 \times 10^{-3}$	libras x pie cuadrado

## Factores de conversión de unidades



# BIBLIOGRAFIA

- 1) Análisis de Estructuras Indeterminadas  
J. Sterling Kinney  
C. E. C. S. A., 1960
- 2) Análisis y Diseño Estructural  
Heberto Castillo Martínez  
Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1976
- 3) Resistencia de Materiales  
Robert W. Fitzgerald  
Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1980
- 4) Análisis Estructural  
Rodolfo Luche García  
Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1983
- 5) Nueva Teoría de las Estructuras  
Heberto Castillo Martínez  
Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1975
- 6) Mecánica de Materiales  
Egor P. Popov  
LIMUSA, 1982
- 7) Análisis Elemental de Estructuras  
Norris, Wilbur, Utku  
Mc Graw Hill Inc., 1983
- 8) Aplicaciones de la Estática  
Murrieta, Bacelis y Mora  
LIMUSA, 1982

**Este texto se terminó de imprimir en  
julio de 1993.**

**Bajo el Cuidado del Area de Publicaciones del  
Departamento de Apoyos Educativos a cargo  
de la Lic. Alicia Berthier Villaseñor.  
2ª Reimpresión.**

# TITULOS PUBLICADOS

1. Barragán, José Antonio.  
*Nota Informativa y Crónica Noticiosa.*
2. Guerrero Verdejo, Sergio.  
*Apuntes de Derecho Internacional Privado.*
3. Olguín Olguín, Gerardo.  
*Glosario de Elementos Arquitectónicos.*
4. Román Medina, Freddy.  
*El Desarrollo de los Medios de Comunicación.*
5. Sánchez Rodríguez, Alma Rosa.  
*Taller de Redacción y Técnicas de Investigación.*
6. Olguín Olguín, Gerardo.  
*Glosario de Elementos Arquitectónicos de la Catedral Metropolitana.*
7. Giovanini García, Fernando.  
*Dibujos Arquitectónicos.*
8. Avila Ceniceros, Victoria Alicia y otros.  
*La Televisión en México (Aspectos Administrativos).*
9. Avila y Lugo, José.  
*Economía I.*
10. Laraque y Espinosa, Lourdes.  
*Demografía.*
11. Negrete Vargas, Amalia Belén.  
*Economía I.*
12. Del Valle Orta, Raúl.  
*Interfase serie ELA RS-232.*
13. Rojas Nava, Raúl (compilador)  
*Fundamentos Teóricos de Organización Educativa I.*
14. Rivero Morales, Samuel.  
*Economía de la Producción (Notas y ejercicios de apoyo).*
15. Quezada Catalán, José Luis.  
*Introducción a los Problemas Gnoseológicos y Epistemológicos del Conocimiento Científico.*
16. Díaz Barriga, Angel y Barrón Tirado, Concepción (compiladores).  
*Curriculum de Pedagogía.*
17. Oropeza Aguirre, Diocleciano.  
*Derecho Romano I.*
18. Oropeza Aguirre, Diocleciano.  
*Derecho Romano II.*
19. Avila y Lugo, José.  
*Apuntes de Economía I.*
20. Angeles Cravioto, Sergio  
*Laboratorio de Aire acondicionado y Refrigeración.*
21. Espinosa y Montes, Angel R. (compilador).  
*Construcción y Elaboración del Proyecto de Tesis: Elementos, Propuestas y Críticas.*
22. Bedoya, Ma. Teresa.  
*Educación, Comunicación y Lenguaje.*
23. Giovanini García, Fernando.  
*Apoyo didáctico a los seminarios de integración profesional I, II y III.*
24. Peña Alcalá, Benjamín.  
*Apuntes de Topografía 2a. Reimpresión.*
25. Souza Abad, Julio.  
*Resistencia de Materiales.*
26. Mercado Marín, Carlos.  
*Estática.*
27. Ordoñez Saleme, Latife E.  
*América Latina, Política e Historia.*
28. Avila y Lugo, José.  
*Análisis e Interpretación de los Estados Financieros.*
29. Souza Abad, Julio.  
*Diseño Estructural de casa-habitación.*
30. Fernández Calvo, Silvestre.  
*Diseño Solar en la Arquitectura.*
31. Avila y Lugo, José.  
*Introducción a la Economía.*
32. Trejo, Alberto.  
*Curso de Matemáticas I.*
33. Fernández Calvo, Silvestre.  
*Energía Solar.*
34. Rojas Nava, Raúl.  
*Técnicas de Planeación y Organización Educativa II.*

35. Gonzáles Valdés, Alejandro.  
*Análisis geométrico de cubiertas.*

36. Caloca Galindo, Carlos.  
*Perspectiva I, el trazo de la perspectiva.*

37. Ortega Lara, Ma. de Jesús L.  
*Prácticas y Laboratorio de Teoría Electromagnética I.*

38. Verdejo P. T., Ma. Eugenia.  
*Introducción a la teoría y práctica de la Planeación Especial y Física.*

39. Alcántara Rodríguez, Fernando.  
*Fundamentos de Física y Matemáticas para Estudiantes.*

40. Ramírez Balcázar, Esperanza.  
*Elementos y Sistemas Constructivos VI.*

41. Colín Vázquez, José.  
*Apuntes de Elementos y Sistemas Constructivos III.*

42. González Landero, Ana María y Rodríguez Pérez, Ma. de Lourdes.  
*Técnicas del Aprendizaje y la Disertación.*

43. Romero Hernández, Jose Luis y Hernández Chávez, Jorge.  
*Apuntes para la Asignatura de Legislación Educativa Mexicana.*

44. López Ruelas Rodolfo.  
*Análisis Estructural I.*

45. Sánchez Parrá, Marino.  
*Introducción a los sistemas de Control Digital.*

46. Galán Carretero, Juan Antonio.  
*Introducción al Cálculo en Diferencias Finitas.*

47. Sánchez Parra, Marino.  
*Método de la Transformada Z.*

48. Alcántara Rodríguez Fernando.  
*Introducción al la computación.*

49. Fernández Calvo, Silvestre; Ramírez Balcázar, Esperanza.  
*Diseño Bioclimático.*

50. Avila y Lugo, José.  
*Elementos Introdutorios para el Estudio de la Economía.*

51. Fernández, Silvestre. Arq.  
*Aplicación de la Gráfica Solar en Problemas Arquitectónicos.*

52. Vargas Menchaca, José Manuel.  
*Cuadro Comparativo de las Reformas y Adiciones al Artículo 123 Constitucional, Ley Federal del trabajo y Ley Federal de los Trabajadores al Servicio del Estado.*



División de Humanidades y Ciencias Básicas  
Departamento de Apoyos Educativos  
Jefatura de Carrera de Ingeniería

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES ARAGON