



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA**

**APUNTES DE
FLUJO DE FLUIDOS
EN MEDIOS POROSOS**

**AGUSTIN V. MEJIA DIAZ
RICARDO GOMEZ SAAVEDRA
JORGE A. OSORNO MANZO
RAFAEL RODRIGUEZ NIETO**

1875
1876
1877
1878
1879
1880
1881
1882
1883
1884
1885
1886
1887
1888
1889
1890
1891
1892
1893
1894
1895
1896
1897
1898
1899
1900

1875
1876
1877
1878
1879
1880
1881
1882
1883
1884
1885
1886
1887
1888
1889
1890
1891
1892
1893
1894
1895
1896
1897
1898
1899
1900

1875
1876
1877
1878
1879
1880
1881
1882
1883
1884
1885
1886
1887
1888
1889
1890
1891
1892
1893
1894
1895
1896
1897
1898
1899
1900

1875
1876
1877
1878
1879
1880
1881
1882
1883
1884
1885
1886
1887
1888
1889
1890
1891
1892
1893
1894
1895
1896
1897
1898
1899
1900

1875
1876
1877
1878
1879
1880
1881
1882
1883
1884
1885
1886
1887
1888
1889
1890
1891
1892
1893
1894
1895
1896
1897
1898
1899
1900

P R E F A C I O

En febrero de 1979 se firmó un convenio de colaboración entre la UNAM, PEMEX, IMP y el CÍPM (Colegio de Ingenieros Petroleros de México). El objeto del convenio ha sido elevar el nivel académico de los alumnos del área de Ingeniería Petrolera en la Facultad de Ingeniería, tanto de licenciatura como de posgrado, así como crear el Doctorado, y promover la superación de un mayor número de profesionales que laboran en la industria petrolera, por medio de cursos de actualización y especialización.

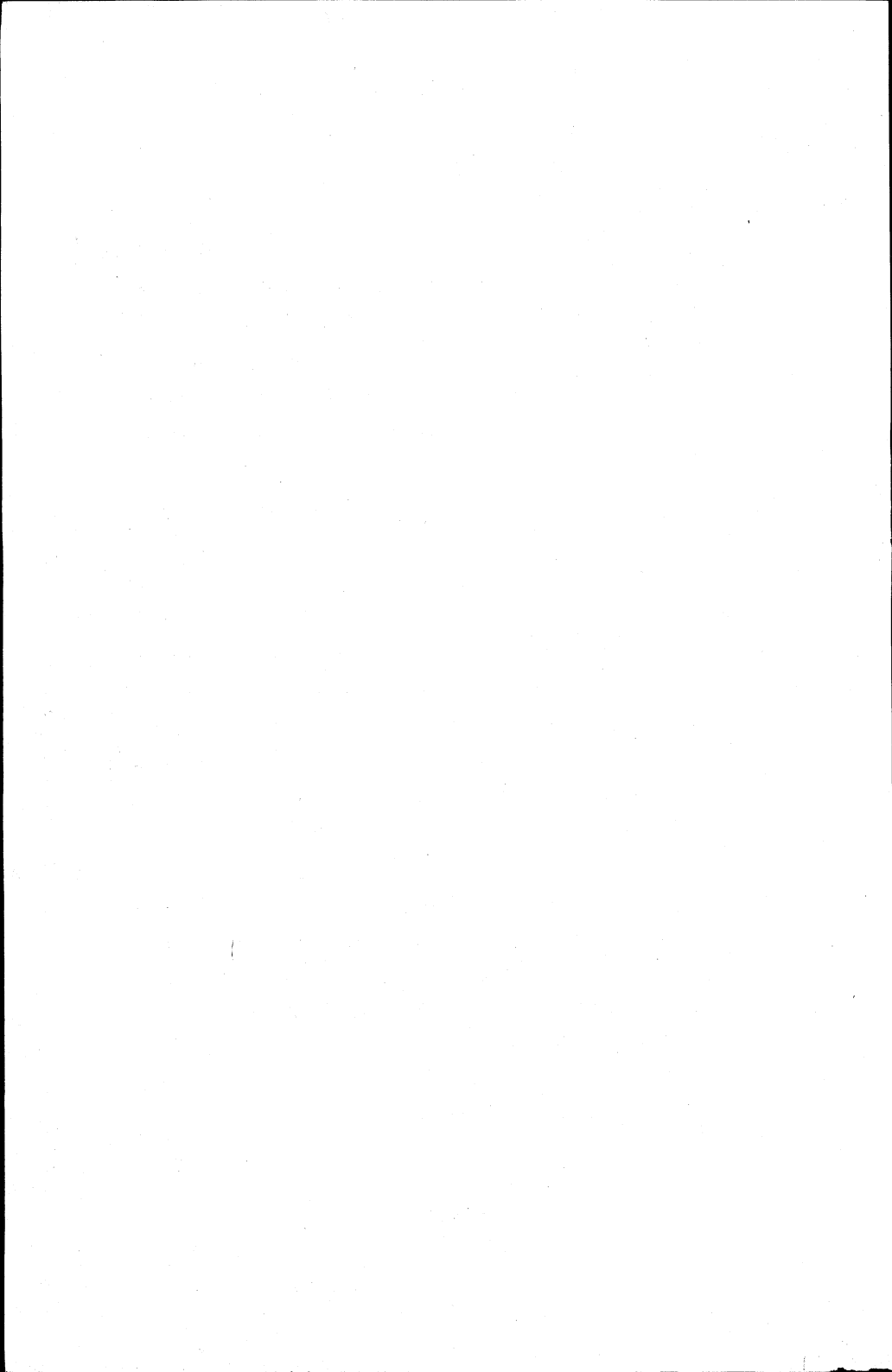
Uno de los programas que se están llevando a cabo a nivel de licenciatura, dentro del marco del Convenio, es la elaboración y actualización de apuntes de las materias de la carrera de Ingeniero Petrolero. Con esto se pretende dotar al alumno de más y mejores medios para elevar su nivel académico, a la vez que proporcionar al profesor material didáctico que lo auxilie en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Estos apuntes fueron preparados en la Sección de Yacimientos-Petroleros, a cargo del candidato a doctorado M. en C. Rafael Rodríguez Nieto, a partir de la Tesis profesional del Ing. Agustín V. Mejía Díaz, que fue dirigida y revisada por el M. en I. Ricardo Gómez Saavedra.

DEPARTAMENTO DE EXPLOTACION DEL PETROLEO.

Noviembre de 1984.

Primera Edición



I N D I C E

Página

I N T R O D U C C I O N :	1
-------------------------------------	---

C A P I T U L O I

EL MEDIO POROSO

Definición:	3
Clasificación:	4
Descripción Estadística del Medio Poroso:	4
Superficie Específica:	7
Homogeneidad, Heterogeneidad, Isotropía y Anisotropía.	10

C A P I T U L O I I

CONCEPTOS MATEMATICOS

Función Error:	15
Función Gamma:	17
Teoría Elemental de Ecuaciones Diferenciales:	24
Ecuación de Bessel:	25

C A P I T U L O I I I

TEORIA DE FLUJO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS

Mecanismo y Tipo de Flujo, Limitaciones de la Hidrodinámica:	35
Potencial de Corriente:	49
Ley de Darcy:	53

	<u>Página</u>
Ecuación de Forcheimer:	54
Permeabilidad Relativa:	56
Condiciones de Frontera:	56
Ley de Darcy en Forma Diferencial para Medio Anisótropo:	57
Diferentes Tipos de Ecuaciones de Estado	59

C A P I T U L O I V

APLICACIONES

Ecuaciones de Flujo en Diferentes Sistemas de Coordenadas:	66
Solución de Ecuaciones de Difusión para Diferentes Condiciones de - Frontera (Yacimiento Infinito; Gasto Constante, Yacimiento Cilindri- co, Gasto Constante en el Pozo y Cero Flujo en la Frontera Externa, etc.):	72
Simulación Numérica de Yacimientos:	92
 NOMENCLATURA	 96
BIBLIOGRAFIA	98

I N T R O D U C C I O N :

El nombre de la materia sugiere las relaciones de un fluido con un medio conductor de él; se tendrán algunas limitaciones en el estudio de esta materia. Pero dada la complejidad matemática que puede presentarse al -- tratar casos complicados, estas limitaciones serán impuestas tanto a las características del fluido, restringiéndolo a ser homogéneo, como a la -- naturaleza del medio poroso, forzado por conveniencia a ser continuo, co municado y homogéneo.

Así pues, por fluido homogéneo debe entenderse un fluido con las mismas -- características en cualquier porción de él, de una sola fase, ya sea --- agua, aceite o gas, o inclusive aceite conteniendo gas disuelto, sin que ello signifique que el gas pueda ser liberado del aceite durante el estu dio de su movimiento a través del medio poroso; lo anterior involucra -- consideraciones de miscibilidad entre fluidos y excluye el de inmisci--- bles.

En cuanto al medio poroso, las simplificaciones de carácter práctico, -- nos llevan a un medio poroso con porosidad efectiva, ésto es, con una co municación de poro a poro, sin cambio o ausencia del medio conductor y -- con características iguales de él en toda su extensión, tanto geométricas como litológicas.

No se tomarán en cuenta los cambios del medio poroso en el tiempo y en -- el espacio, aún cuando estos últimos podrán considerarse mediante funcio nes que expresen dichos cambios. En otras palabras, no va a tener signi- ficado el cambio de porosidad por factores geológicos, ya que la simpli- ficación a un medio poroso homogéneo así lo amerita; en cambio, pueden -- existir porosidades diferentes como intergranular y de canales, siempre -- y cuando estén presentes en la misma forma homogénea en todo el medio en estudio.

También se intentará hacer comprender algunos de los problemas básicos -- de flujo de fluidos a través de medios porosos, con el estudio de las ca racterísticas físicas básicas de los materiales y de los fluidos que con tienen.

Así mismo, se desarrollará la teoría elemental del flujo y su expresión matemática por medio de ecuaciones que permitirán resolver problemas -- prácticos reales, haciendo hincapié en el flujo de tipo laminar, dado - que en la Ingeniería Petrolera es de interés fundamental, en tanto que - el flujo turbulento se mencionará cuando se trate de comprender otro ti po de fenómenos.

C A P I T U L O I

EL MEDIO POROSO *

DEFINICION:

Un material poroso es aquel sólido que contiene huecos o cavidades conectados o no, dispersos dentro de él de una manera regular o aleatoria y que se presentan con una frecuencia relativamente alta dentro del sólido.

En dichos espacios vacíos, sobre todo si son pequeños, las fuerzas moleculares entre el sólido y el fluido, son de gran importancia y en esos casos, la porosidad es llamada de intersticios moleculares; en cambio en los huecos grandes, la pared porosa influye sólo parcialmente en el movimiento de fluidos; naturalmente que para el fin de esta materia importará solamente los espacios vacíos o huecos que estén comunicados.

Algunos autores definen el medio poroso como el portador de fluidos a través de huecos dejados entre los granos de roca que hace que los fluidos tomen trayectorias impredecibles y que formen redes complicadas de canales de flujo.

Precisamente esta conexión múltiple de canales y aberturas que caracteriza al medio poroso, lo diferencia completamente de la hidrodinámica clásica.

También hay que citar que los problemas que se presenten se restringirán a la dinámica del flujo y no a las fuerzas o esfuerzos en la estructura porosa.

* Conceptos tomados del "Collins" (Ver la Bibliografía).

CLASIFICACION :

La clasificación del medio poroso, puede diversificarse bastante; así puede hablarse del medio poroso homogéneo o heterogéneo; por el tamaño de los poros en intersticio cavernoso o intermedio entre estos dos, de acuerdo a la distribución de espacios vacíos; en ordenado o disperso; comunicado o no comunicado. En todo caso como la realidad de los yacimientos lo muestra, el medio poroso podrá ser descrito solamente en términos estadísticos y --tratando el problema en particular, en forma macroscópica ante la imposibilidad de hacerlo en forma microscópica, dada la complejidad de las variables que intervienen, así como su difícil determinación.

DESCRIPCION ESTADISTICA DEL MEDIO POROSO:

Existen a la fecha muchas teorías que intentan relacionar la distribución del tamaño del poro o hueco, con propiedades macroscópicas del material y aunque ello ha contribuido a comprender los procesos físicos básicos dentro del medio poroso, no ha ayudado a solucionar el problema en una escala macroscópica.

La teoría macroscópica del flujo en medios porosos se ha desarrollado en dos formas; una que parte de una teoría estadística microscópica que muestra cómo ello conduce a leyes macroscópicas, tal y como sucede con la teoría cinética de los gases que concluye y concretiza con la ley de Boyle; - la otra se basa en leyes macroscópicas establecidas a partir de relaciones empíricas obtenidas experimentalmente.

Dado que ninguna de las teorías establecidas encaja satisfactoriamente con todos los fenómenos macroscópicos, se ha aceptado más la primera forma; esto es, la estadística. Solamente donde se considere necesario se traerá a discusión la estructura porosa microscópica para entender fenómenos macroscópicos. Así las propiedades macroscópicas de los materiales porosos tendrán significado sólo para muestras de material poroso que contenga relativamente gran número de poros.

Distribución de porosidad.

En virtud de que los materiales porosos naturales poseen una estructura -- más o menos aleatoria, no es sorprendente que muestras pequeñas del mismo material tengan porosidad y permeabilidad diferentes. Se ha observado que a mayor volumen, para una muestra, son más parecidos los valores de los -- respectivos parámetros; esta característica del material poroso natural -- puede entenderse por medio del siguiente análisis:

Considere un volumen grande de material poroso e imagine que está dividido en paralelepípedos rectangulares muy pequeños. Estos elementos tendrán una distribución de porosidad debido a una estructura porosa aleatoria, lo --- cual permite denotar a la función de distribución de porosidad por $F(\varnothing)$, -- por lo que $F(\varnothing) d\varnothing$ es la fracción de los elementos que tienen porosidad -- entre \varnothing y $\varnothing + d\varnothing$.

La porosidad media de estos elementos, que es la porosidad real del volu-- men de material, está dada por: $\bar{\varnothing} = \int_0^1 \varnothing F(\varnothing) d\varnothing$.

Asimismo, la desviación estándar, (Γ) , de la distribución de \varnothing está definida por:

$$\Gamma^2 = \int_0^1 (\varnothing - \bar{\varnothing})^2 F(\varnothing) d\varnothing.$$

Ahora supóngase que se toman muestras del material poroso. El volumen V de cada muestra estará compuesto de n paralelepípedos elementales. Entonces, - la porosidad de la muestra es

$$\varnothing_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varnothing_i,$$

donde θ_i son las porosidades de los bloques elementales.

Según el teorema del límite central, la función de distribución para θ_s deberá aproximarse, para valores grandes de n a la distribución Gaussiana. De este modo, denotando a la función de distribución de θ por $G(\theta_s)$, se tiene:

$$G(\theta_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (\sigma/\sqrt{n})} \exp - \left[\frac{(\theta_s - \bar{\theta})^2}{2(\sigma/\sqrt{n})^2} \right],$$

dado que $0 \leq \bar{\theta} \leq 1$. Esto es, la media de la distribución de la muestra es la misma que la media de la distribución de los bloques elementales, y la desviación estándar de la distribución de la muestra es la desviación estándar de la distribución de los bloques elementales dividida por \sqrt{n} .

Ya que el número de elementos, n , en una muestra es proporcional al volumen V de la muestra, entonces la desviación estándar observada para las muestras es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del volumen de la muestra. De este modo, si se denota por ϵ al volumen de un paralelepípedo elemental, se tiene que:

$$n = \frac{V}{\epsilon}$$

y por tanto:

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\epsilon}{V}} \sigma_s$$

donde σ_s es la desviación estándar para la distribución de la muestra.

Para bloques elementales muy pequeños ($\epsilon \rightarrow 0$) se obtiene una sola distribución. Como ϵ se aproxima a cero, son posibles dos valores de porosidad para los bloques elementales, es decir 0 ó 1. Además, la fracción de bloques que tienen cero de porosidad se aproxima a $1 - \bar{\theta}$, y la fracción que tiene porosidad igual a uno se aproxima a $\bar{\theta}$. De este modo, se puede esperar que para algunos valores pequeños de ϵ , digamos ϵ_0 ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \int_0^{\Delta\theta} F(\theta) d\theta = 1 - \bar{\theta}$$

y

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \int_{\bar{\theta}}^{\bar{\theta} + \Delta\theta} F(\theta) d\theta = \bar{\theta}$$

donde $\Delta\theta$ es un incremento infinitesimal en θ .

Entonces de la definición de σ , se tiene.

$$\sigma^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \int_0^1 (\theta - \bar{\theta})^2 F(\theta) d\theta = \bar{\theta} (1 - \bar{\theta})$$

y, por tanto, la función de distribución de porosidad para muestras con volúmenes $V \gg \epsilon_0$, es

$$G(\theta_s) = \sqrt{\frac{V}{2\pi \epsilon_0 \bar{\theta} (1 - \bar{\theta})}} \exp \left[-\frac{V(\theta_s - \bar{\theta})^2}{2\epsilon_0 \bar{\theta} (1 - \bar{\theta})} \right]$$

Las aplicaciones de esta ecuación en materiales porosos naturales han sido poco investigadas. El volumen característico, ϵ_0 , puede relacionarse con el tamaño y uniformidad de los poros y consecuentemente, puede relacionarse con la permeabilidad; esto ya ha sido estudiado para el caso de areniscas.

Distribución del tamaño del grano:

Debido a la complejidad de la distribución del tamaño del poro en el medio poroso y a su difícil cuantificación, es usual determinar mejor el tamaño del grano y su distribución como representativo del medio poroso; -- por lo anterior, es aceptable suponer que el tamaño del grano es equivalente al tamaño del poro.

SUPERFICIE ESPECIFICA:

La superficie específica (ξ), de un material poroso es definida como el área superficial intersticial de los poros por unidad de volumen de roca de material poroso. Los materiales estructurados finamente exhiben una mayor área de superficie específica que los materiales ordinarios.

La superficie específica juega un papel muy importante en los diseños de columnas de filtros, columnas de reactores y columnas de cambio de iones.

Es también un parámetro importante con respecto a la conductibilidad del fluido o permeabilidad de un material poroso; sus dimensiones -- son:

$$(L^{-1})$$

Mediciones de la Superficie Específica:

Ya que la superficie interna de algún material poroso natural es de extrema complejidad, el área de la superficie específica (ξ) puede ser determinado por medios estadísticos o indirectos; aquí se describen tres métodos:

1.- Método Estadístico:

El método estadístico para determinar la porosidad desarrollada por Chalkley, Cornfield y Park, fue también extendido para la determinación de la superficie específica.

En su método se usa una microfotografía ampliada de una sección de un medio poroso.

Si una aguja de largo "L" es bajada un gran número de veces sobre la fotografía y se cuenta el número de veces al terminar, - de los puntos que cayeron dentro de los poros, y el número de veces que la aguja intersectó el perímetro de los poros, entonces una ecuación basada en la teoría de la probabilidad puede ser aplicada para calcular (ξ).

Llamando "n" el número de veces que los puntos cayeron dentro de los poros, y "C" el número de intersecciones del perímetro, - esta ecuación es:

$$\xi = \frac{4 \theta C}{nL} M,$$

donde M es la amplificación de la figura.

2.- Método de Adsorción:

Este método se basa en la medición de la cantidad de vapor que puede ser adsorbido sobre una superficie, pero como esta superficie -- queda restringida al área expuesta al flujo, no a la superficie total que incluye los pequeños intersticios moleculares del material-poroso, el método no es más que una aproximación y da siempre valores menores de lo que realmente existe.

3.- Método basado en el flujo de fluidos:

La ecuación de Kozeny o la ecuación de Kozeny-Carman (ambas) relacionan la conductividad del fluido, la permeabilidad y la superficie específica de un medio poroso.

Por ello, las mediciones de la conductividad del fluido se han usado para calcular la superficie específica a partir de estas ecuaciones.

Ya que la ecuación de Kozeny no es estrictamente correcta, los valores de superficie específica determinados de esta manera no son más que aproximaciones.

En la Tabla I se muestran valores típicos para las características básicas de tipos de materiales porosos. Estos ejemplos sirven para ubicar los rangos que pueden ser encontrados en las características físicas básicas.

T A B L A I

SUBSTANCIA	POROSIDAD (Fracción)	SUPERFICIE ESPECIFICA *	PERMEABILIDAD (Darcy)	REFERENCIA
Polvo de sílice.	.37 - .49	(6.8 - 8.9) 10^3	(1.3 - 5.1) 10^{-2}	Carman
Arena suelta	.37 - .50	(1.5 - 2.2) 10^2	20 - 180	Carman
Tierra	.43 - .54	(2 - 4) 10^3	19 - 140	Peerlkamp
Arenisca	.08 - .38	(1.5 - 10) 10^3	5×10^{-4} - 3.	Muskat
Limonita	.04 - .10	(.15 - 1.3) 10^4	2×10^{-4} 4.5×10^{-2}	Locke Bliss
Ladrillo	.12 - .34	3×10^3 5×10^4 -	4.8×10^{-3} 2.2×10^{-1}	Stull Johnson
Cuero	.56 - .59	(1.2 - 1.6) 10^4	9.5×10^{-2} 1.2×10^{-1}	Milton
Fibra de vidrio.	.88 - .93	(5.6 - 7.7) 10^2	24 - 51	Wiggins et al

HOMOGENEIDAD Y HETEROGENEIDAD:

Un medio homogéneo es aquél en el cual se considera que la porosidad de un punto a otro es constante para cualquier tipo de empaquetamiento.

Generalmente las rocas que se encuentran en el subsuelo que son acumuladoras de fluidos, o sea de carácter poroso, tienen la porosidad diferente de un punto a otro; ésto es lo que se llama un medio heterogéneo. En realidad, se supone casi siempre medios homogéneos debido a la gran dificultad para resolver las ecuaciones de flujo y sintetizar las soluciones.

-1
*En cm.

En la práctica, cuando se simula al yacimiento, se le considera dividido - en bloques o celdas y de esta manera se puede representar a éste según con venga como un medio homogéneo o heterogéneo; de esta manera se tiene una - mayor aproximación en los resultados.

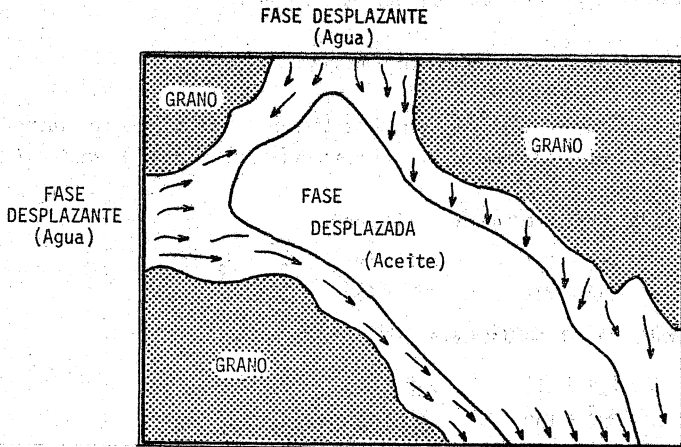


Fig. 1 Desplazamiento de aceite por agua en un medio mojable por agua.

En una roca saturada de aceite y agua, mojada por ésta, la superficie específica juega un papel muy importante cuando se sujeta a inyección de agua, ya que el aceite es expulsado por la compresión o empuje que origina el aumento en la saturación del agua que cubre o rodea la superficie de los granos (Fig. 1).

ISOTROPIA y ANISOTROPIA:

Un medio poroso contiene poros comunicados y no comunicados; para el flujo de fluidos los de importancia son los poros comunicados; por otro lado, -

La permeabilidad de un medio poroso, se define como la habilidad de éste para permitir el flujo de fluidos a través de él.

Se dice que un medio poroso es isótropo si la permeabilidad de éste es la misma en cualquier dirección y se dice que es anisótropo si la permeabilidad es diferente, en distintas direcciones.

Para un mejor entendimiento, se incluye lo siguiente:

Supongamos que en un medio poroso se tienen 2 puntos como se ilustra en la Fig. 2, bidimensionalmente, se presentan las siguientes posibilidades:

1.- Medio poroso homogéneo e isótropo.

$$\begin{array}{lll} K_{x1} = K_{y1} & k_{x1} = k_{y2} & \theta_1 = \theta_2 \\ K_{x2} = K_{y2} & K_{y1} = k_{x2} & \end{array}$$

2.- Medio poroso homogéneo y anisótropo.

$$\begin{array}{lll} - K_{x1} \neq K_{y1} & K_{x1} = K_{x2} & \theta_1 = \theta_2 \\ K_{x2} \neq K_{y2} & K_{y1} = K_{y2} & \end{array}$$

3.- Medio poroso heterogéneo e isótropo.

$$\begin{array}{lll} K_{x1} = K_{y1} & K_{x1} \neq K_{x2} & \theta_1 \neq \theta_2 \\ K_{x2} = K_{y2} & K_{y1} \neq K_{y2} & \end{array}$$

4.- Medio poroso heterogéneo y anisótropo.

$$K_{x1} \neq K_{x2} \neq K_{y2} \neq K_{y1} \quad \theta_1 \neq \theta_2$$

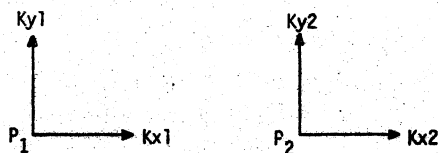


Fig. 2 Homogeneidad e isotropía (o falta de) de un medio poroso.

Los yacimientos de aceite por lo general son heterocéneos, anisótropos y naturalmente fracturados: * en base a mediciones hechas a núcleos se observa que en general la permeabilidad en la dirección horizontal (k_x , k_y) es mayor que la permeabilidad en la dirección vertical (k_z), debido a la sobrecarga.

En realidad la permeabilidad se puede representar matemáticamente como un tensor K_i (Ver el "Collins"):

$$\hat{\hat{K}}_i = \begin{Bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{Bmatrix}$$

en el que la Matriz tensorial es simétrica;

esto es,

$$K_{xy} = K_{yx} \quad K_{yz} = K_{zy} \quad K_{xz} = K_{zx}$$

Si se giran los ejes hasta llegar a encontrar los ejes principales de una matriz simétrica, se tiene una matriz diagonal,

donde:

$$K_{xx}, \quad K_{yy}, \quad K_{zz}$$

Son los únicos valores** y representan las permeabilidades en las direcciones principales, siendo ortogonales entre sí; naturalmente indicarán las direcciones de flujo principal. De este modo puede decirse que un medio es isótropo si:

$$K_{xx} = K_{yy} = K_{zz},$$

* Aunque sea con un mínimo grado de fracturamiento.

** No nulos.

siendo la dirección de flujo igual a la dirección del gradiente de presión que se aplique.

Un medio es anisótropo si:

$$K_{xx} \neq K_{yy} \neq K_{zz}$$

Y en este caso, la dirección de flujo es diferente a la dirección del gradiente de presión aplicado.

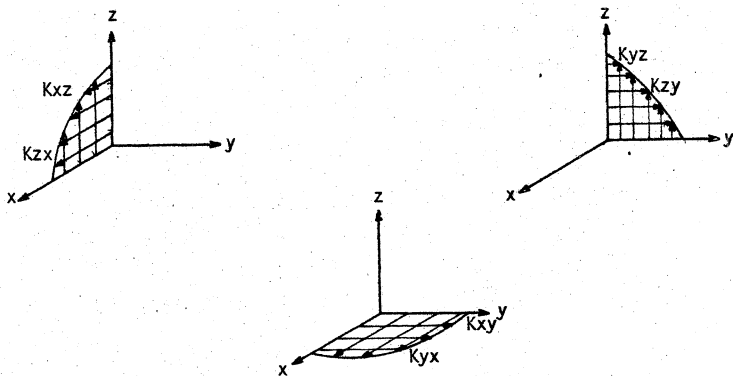


Fig. 3 Distribución de la permeabilidad.

En la Fig.3 se muestra la distribución de permeabilidad en cada una de las direcciones a lo largo de los diversos planos, por ejemplo: K_{xy} , es la permeabilidad en la dirección "y" a lo largo del plano XY; así en forma análoga se interpretan los diversos casos existentes.

C A P I T U L O I I

CONCEPTOS MATEMATICOS:

Frecuentemente se encuentran, en problemas de flujo de fluidos a través de medios porosos, modelos matemáticos complicados que para su fácil solución se recurre a simplificaciones y uso de funciones tales como la función gamma, función error, transformada de Laplace, función de Bessel, etc.. A continuación se expone en forma breve cómo se definen dichas funciones, cuándo se usan y qué se consigue con ellas.

FUNCION ERROR.

Se define como:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \quad \dots \dots \dots (1)$$

Está programada en algunos sistemas computacionales para mayor facilidad, pero es conveniente ilustrar la manera de calcularla por tres diversos métodos:

Método (a):

Sustituyendo el integrando por la serie:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} + \dots \right) dt$$

Aquí se integra cada término de la serie, truncando hasta la aproximación deseada.

Método (b):

Solución analítica, integrando por partes:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x \operatorname{Exp}(-x^2)}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{2x^2}{1 \cdot 3} + \frac{(2x^2)^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{(2x^2)^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{(2x^2)^\eta}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\eta + 1)} \right) \dots \dots (2)$$

Que es una serie no alternante y por lo tanto, no sufre problemas de cancelación.

Método (c):

Aproximación tomada mediante la función:

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{1}{(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4)^2} \dots \dots \dots (3)$$

donde:

- $\alpha_1 = 0.278393$
- $\alpha_2 = 0.230389$
- $\alpha_3 = 0.000972$
- $\alpha_4 = 0.000089$

Como un ejemplo de aplicación en Ingeniería Petrolera, se tiene que la función error es utilizada en la solución que describe el comportamiento de presión para el caso de flujo lineal (Figura 4), en un yacimiento semi-infinito, cuya expresión es:

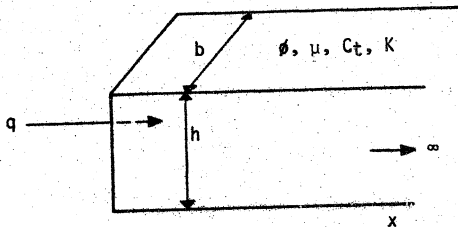


Fig. 4 Flujo lineal.

$$P(x,t) = P_i - \frac{qU}{kbh} \frac{1}{2\sqrt{\theta_1 C_t \pi}} \exp\left(-\frac{\theta_1 C_t x^2}{4kt}\right) - x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{kt}{\theta_1 C_t}}}\right),$$

de donde

$$p(0,t) = P_i - 2 \frac{qU}{kbh} \sqrt{\frac{k}{\pi \theta_1 C_t}} \sqrt{t}$$

La expresión para $p(x,t)$ es la solución de la ecuación diferencial parcial.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\theta_1 C_t}{t} \frac{\partial P}{\partial t}$$

con las condiciones siguientes:

$$C.I \quad P(x,t=0) = P_i$$

$$C.Fi \quad \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{qU}{kbh} \quad \forall t$$

$$C.Fe \quad \lim_{x \rightarrow \infty} P(x,t) = P_i, \quad \forall t$$

siendo C.I, C.Fi, D.Fe las condiciones inicial, de frontera interna y -- frontera externa, respectivamente, en tanto que erfc es la función error complementaria y es igual a $1 - \operatorname{erf}$.

FUNCION GAMMA.

Es una función no elemental definida por la integral:

$$\Gamma(\infty) = \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{\alpha-1} dt, \quad \alpha > 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

donde $\alpha > 0$, es evidente al considerar:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^c \text{Exp}(-t) t^{\alpha-1} dt + \int_c^\infty \text{Exp}(-t) t^{\alpha-1} dt \dots \dots \dots (5)$$

$c =$ Constante positiva.

La segunda integral de la Ec. 5 existe para toda α .

En cambio la primera integral:

$$\int_0^c \text{Exp}(-t) t^{\alpha-1} dt = k \int_0^c t^{\alpha-1} dt \dots \dots \dots (6)$$

De la Ec. 6:

$$k \int_0^c t^{\alpha-1} dt = k \left[\frac{t^\alpha}{\alpha} \right]_0^c$$

En esta solución:

Si $\alpha > 0$, entonces $t^\alpha \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$, por lo tanto la integral es ta definida.

Si $\alpha < 0$, entonces $t^\alpha \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow 0$, y la integral no existe.

Para $\alpha = 0$, se tiene de Ec. 6:

$$k \int_0^c t^{\alpha-1} dt = k \ln t \Big|_0^c$$

Que tiende a infinito cuando t tiende a cero.

De lo anterior se concluye que la integral de la Ec. 4 sólo está definida para $\alpha > 0$.

De la definición de la función gamma se tiene que para el argumento $\alpha + 1$:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} \text{Exp}(-t) t^{\alpha} dt$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= t^{\alpha} \\ du &= \alpha t^{\alpha-1} dt \\ dv &= \text{Exp}(-t) dt \\ v &= -\text{Exp}(-t) \end{aligned}$$

$$\Gamma(\alpha + 1) = -\text{Exp}(-t) t^{\alpha} \Big|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} \text{Exp}(-t) t^{\alpha-1} dt$$

$$\Gamma(\alpha + 1) = -\text{Exp}(-t) t^{\alpha} \Big|_0^{\infty} + \alpha \Gamma(\alpha) \quad \alpha > 0$$

Pero:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{\alpha}}{\text{Exp}(t)} = 0$$

Y utilizando el teorema del L'Hopital:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\alpha}}{\text{Exp}(t)} = 0$$

Por lo que: $-\text{Exp}(-t) t^{\alpha} \Big|_0^{\infty} = 0$

Así:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha); \quad \alpha > 0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

Si $\alpha = n$; y "n" es un número entero

$$\begin{aligned} \Gamma(n + 1) &= n [\Gamma(n)] = n [(n-1) \Gamma(n-1)] = \\ &= n (n-1)(n-2) \dots (3)(2)(1)\Gamma(1) \\ &= n! \Gamma(1) \end{aligned}$$

Por definición:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \text{Exp}(-t) dt = \int_0^{\infty} -\text{Exp}(-t) d t$$

$$\Gamma(1) = -\text{Exp}(-t) \Big|_0^{\infty} = - (0 - 1) = 1 ,$$

por lo que

$$\Gamma(\eta + 1) = \eta = 0, 1, 2 \dots \dots \dots (8)$$

Definiendo la función gamma cuando el argumento α es negativo, de la Ec. 7 se tiene:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} (\Gamma(\alpha + 1)) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha + 1} \right) = \frac{1}{\alpha(\alpha + 1)} \left(\frac{\Gamma(\alpha + 3)}{\alpha + 2} \right) = \dots \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \eta + 1)}{\alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + \eta)} , \quad \alpha \neq 0, -1, -2, \dots (9) \end{aligned}$$

El numerador de esta ecuación se puede obtener de la definición de función gamma para $\alpha < 0$, pero de tal manera que $\alpha + \eta + 1 > 0$.

Así es posible calcular $\Gamma(\alpha)$, para $\alpha < 0$, pero α diferente de $-1, -2, \dots$

Ejemplo: Aplicando la primera parte de la Ec. 9

$$\Gamma(-1/2) = \frac{\Gamma(-1/2 + X + 1)}{-1/2} = \frac{-\Gamma(1/2)}{-1/2} = \frac{\pi}{-1/2}$$

A continuación se demostrará que: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \int_0^{\infty} \text{Exp}(-t) t^{-1/2} dt = \int_0^{\infty} \text{Exp}(-v^2) \frac{2v dv}{v} = 2 \int_0^{\infty} \text{Exp}(-v^2) dv \end{aligned}$$

Haciendo:

$$t = u^2$$

$$dt = 2u du$$

$$[\Gamma(1/2)]^2 = 4 \int_0^{\infty} \text{Exp}(-u^2) du \int_0^{\infty} \text{Exp}(-v^2) dv = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{Exp}^{-(u^2+v^2)} du dv$$

$$u = r \cos\theta \quad 0 < \rho < \infty$$

$$v = r \sin\theta \quad 0 < \theta < \pi/2$$

$$dA = r dr d\theta$$

$$[\Gamma(1/2)]^2 = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \text{Exp}(-r^2) r dr d\theta = 4 \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \text{Exp}(-r^2) r dr$$

$$\eta = -r^2$$

$$d\eta = -2r dr \quad \therefore [\Gamma(1/2)]^2 = 4 \frac{\pi}{2} (-1/2) \int_0^{\infty} \text{Exp}(-r^2) (-2r dr)$$

$$= -\pi \text{Exp}(-r^2) \Big|_0^{\infty}$$

$$[\Gamma(1/2)]^2 = -\pi \left[\frac{1}{\text{Exp}(\infty^2)} - 1 \right] = \pi$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

La función gamma se relaciona con la transformada de Laplace, en la forma siguiente:

Si:

$$f(t) = t^\alpha$$

$$L\{t^\alpha\} = \int_0^{\infty} \text{Exp}(-st) t^\alpha dt$$

Definiendo:

$$t = \frac{x}{S}; \quad dt = \frac{dx}{S}$$

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \int_0^\infty \text{Exp}(-x) \left(\frac{x}{S}\right)^\alpha \frac{dx}{S}$$

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{1}{S^{\alpha+1}} \int_0^\infty \text{Exp}(-x) x^\alpha dx$$

Recordando que:

$$\int_0^\infty \text{Exp}(-x) x^\alpha dx = \Gamma(\alpha + 1)$$

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{S^{\alpha+1}}$$

Y si "n" es un número entero:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n + 1)}{S^{n+1}} = \frac{n!}{S^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(S - \alpha) = \int_0^\infty \text{Exp}^{-(S-\alpha)t} f(t) dt = \int_0^\infty \text{Exp}(-St) [\text{Exp}(\alpha t) f(t) dt]$$

De este modelo:

$$\mathcal{L}(S - \alpha) = \mathcal{L}\{\text{Exp}(\alpha t) f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{\text{Exp}(\alpha t) f(t)\} = f(S - \alpha)$$

$$\mathcal{L}\{\text{Exp}(\alpha t) t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(S - \alpha)^{\alpha+1}}$$

$$\mathcal{L}\{\text{Exp}(\alpha t) \cos \omega t\} = \frac{S - \alpha}{(S - \alpha)^2 + \omega^2}$$

Como un ejemplo ilustrativo de la utilización de la función gamma en Ingeniería Petrolera, se tiene el análisis de pruebas de presión para el caso de un pozo fracturado; esto se ilustra en la Fig. 5

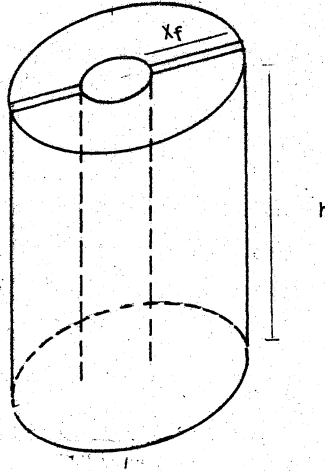


Fig. 5 Pozo fracturado.

Se entiende por flujo bilineal aquél que ocurre simultáneo en dos líneas, uno de tipo de flujo lineal incompresible en la fractura y otro de flujo lineal compresible en la formación, como se ilustra en la Fig. 6

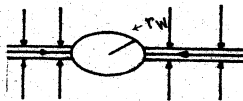


Fig. 6 Flujo bilineal

Aquí la caída de presión adimensional en el pozo, está dada por:

$$P_{\omega D} = \frac{\pi}{\Gamma(1.25) \sqrt{2} (k_f b_f)_D} t_{D_{xf}}^{1/4}$$

$(k_f b_f)_D$ = Conductividad de la fractura, adimensional.

$P_{\omega D}$ = Caída de presión en el pozo, adimensional.

$t_{D_{xf}}$ = Tiempo adimensional.

TEORIA ELEMENTAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES:

A una solución de una ecuación diferencial de segundo orden, se le llama - solución general si contiene dos constantes arbitrarias independientes, - constantes que no pueden ser reducidas a una sola.

Una solución particular se obtiene asignando valores definidos a estas dos constantes.

Dos funciones, $G(x)$, $H(x)$, son linealmente dependientes en un intervalo si son proporcionales entre sí, para toda x en el intervalo.

Dos soluciones linealmente independientes forman un sistema fundamental de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales que tienen coeficientes constantes, pueden ser resueltas por métodos algebraicos y las soluciones son funciones elementales; en cambio si los coeficientes son variables, es necesario utilizar otros métodos de solución, como el llamado en serie de potencias.

ECUACION DE BESSEL:

Una ecuación diferencial de la forma:

$$y'' + \frac{A(x)}{x} y' + \frac{B(x)}{x^2} y = 0, \dots \dots \dots (10)$$

donde A(x) y B(x) son funciones definidas en x = 0, tiene al menos - una solución que puede escribirse:

$$Y(x) = X^r \sum_{m=0}^{\infty} C_m X^m = X^r (C_0 + C_1 X + C_2 X^2 + \dots + C_m X^m) \dots \dots \dots (11)$$

$$C_0 \neq 0,$$

donde:

r = No. real o complejo.

A continuación se presenta el procedimiento de solución, ilustrándose con un ejemplo:

M E T O D O :

- a) Se supone una solución de "y" en serie de potencias.
- b) Se calculan Y', Y''.
- c) Se sustituyen y, y', y'' en la ecuación diferencial del tipo (10).
- d) Se igualan a cero los coeficientes de X, X², X³..obteniéndose sucesivamente los valores de cada una de las constantes, con lo que se completa la solución.

Si por ejemplo, se tiene la ecuación diferencial:

$$Y' - \text{Exp}(x) Y = 0$$

Entonces:

$$Y = C_0 X^r + C_1 X^{r+1} + C_2 X^{r+2} + \dots + C_n X^{r+n}$$

$$Y' = r C_0 X^{r-1} + (r+1) C_1 X^r + (r+2) C_2 X^{r+1} + \dots + (r+n) C_n X^{r+n-1}$$

$$Y' - \text{Exp}(x)Y = [rC_0 X^{r-1} + (r+1)C_1 X^r + (r+2)C_2 X^{r+1} + \dots + (r+n)C_n X^{r+n-1}] - \text{Exp}(x)[C_0 X^r + C_1 X^{r+1} + C_2 X^{r+2} + \dots + C_n X^{r+n}] = 0$$

$$X^{r-1}(rC_0) + X^r((r+1)C_1 - C_0 \text{Exp}(x)) + X^{r+1}((r+2)C_2 - C_1 \text{Exp}(x)) + \dots + X^{r+n-1}((r+n)C_n - C_{n-1} \text{Exp}(x)) = 0$$

Haciendo igual a cero, los coeficientes de cada potencia de X:

$$rC_0 = 0 \quad (a)$$

$$(r+1)C_1 - C_0 = 0 \quad (b)$$

$$(r+2)C_2 - C_1 = 0 \quad (c)$$

$$(r+n)C_n - C_{n-1} = 0 \quad (d)$$

De (a) dado que $C_0 \neq 0$, $r = 0$

De (b) $C_1 = C_0$

De (c) $2C_2 = C_1 \quad < = > \quad C_3 = 2C_2$

De (d) $nC_n = C_{n-1}$

Por lo tanto:

$$Y = C_0 \left(1 + X + 1 \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + \dots + \frac{X^n}{n!} \right)$$

Solución de $Y' + \text{Exp}(x)Y = 0$,

para $A(x) = \text{Exp}(x)$

$$X = 0$$

Si la ecuación es de segundo orden, de (10)

$$x^2 Y'' + x A(x) Y' + B(x) Y = 0 \quad \dots \dots \dots (11)'$$

De:

$$Y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r} \quad \dots \dots \dots (11)''$$

Derivando la ecuación anterior:

$$Y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (m+r) x^{m+r-1} \quad \dots \dots \dots (12)$$

Tomando segunda derivada:

$$Y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (m+r)(m+r-1) x^{m+r-2} \quad \dots \dots \dots (13)$$

Sustituyendo (11)'', (12) y (13) en la Ec. 11''.

$$x^2 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) C_m x^{m+r-2} + x A(x) \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) C_m x^{m+r-1} + B(x) \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r} = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) C_m x^{m+r} + A(x) \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) C_m x^{m+r} + B(x) \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r} = 0$$

$$\therefore \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) C_m x^{m+r} + x \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} (m+r) C_m x^{m+r-1} \right) + \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r} \right) = 0$$

$$\cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r} \right)$$

Igualando a cero los coeficientes de cada potencia de x, se obtiene un sistema de ecuaciones que involucra los coeficientes con incógnita "C_m". La potencia mas pequeña es x^r, cuyo coeficiente es:

$$[r(r-1) + a_0 r + b_0] C_0 = 0 \quad ,$$

de donde:

$$r^2 + (a_0 - 1)r + b_0 = 0 \quad \dots \dots \dots (14)$$

A esta ecuación se le llama "ecuación de índices" de la Ec. 10 y se puede de mostrar que para obtener una segunda solución linealmente independiente de (11) se tienen tres posibilidades, que corresponden a los siguientes casos:

- 1.- Las raíces de la ecuación de índices son diferentes y no difieren por un entero. La segunda solución es también de la forma (11).
- 2.- Las dos raíces de la Ec. 14 son iguales. La segunda solución es de la forma:

$$Y_2(x) = Y_1(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} d_m x^{m+r} \quad \dots \dots \dots (15)$$

- 3.- Las raíces difieren por un entero. La segunda solución es de la forma:

$$Y_2(x) = k Y_1(x) \ln(x) + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} \quad \dots \dots \dots (16)$$

La ecuación de Bessel es:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad \dots \dots \dots (17)$$

donde ν es un número real, positivo; es una de las ecuaciones diferenciales ordinarias que aparecen con más frecuencia en Ingeniería de Yacimientos, y en general, es de las más importantes en las matemáticas aplicadas.

Como se ve, la ecuación de Bessel tiene la forma (11)', haciendo - - - -
 $A(x) = 1$ y $B(x) = x^2 - \nu^2$ y por lo consiguiente tendrá por lo menos una solu-
 ción de la forma (11); la ecuación de índices correspondiente a (17) es:

$$(r + \nu)(r - \nu) = 0, \dots \dots \dots (18)$$

siendo:

$$\begin{aligned} r_1 &= \nu \\ r_2 &= -\nu \end{aligned} \dots \dots \dots (19)$$

Se demuestra, también mediante el procedimiento del método (1) que para -
 $r = \nu$.

$$C_1 = C_3 = C_5 = \dots = 0$$

También se puede demostrar (pág. 180, Kreyszig) que:

$$C_{2m} = - \frac{1}{2^{2m} (m + \nu)} C_2 (m - 1), m = 1, 2, \dots$$

Aplicando esta fórmula sucesivamente, se obtiene:

$$C_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! (m + \nu)(\nu + m - 1) \dots (\nu + 1)} C_0, \nu \neq -1, -2, \dots \dots (20)$$

Recordando las relaciones de la función gamma,

$$(\nu + m)(\nu + m - 1) \dots (\nu + 1) = \frac{\Gamma(\nu + m + 1)}{\Gamma(\nu + 1)}$$

entonces:

$$C_{2m} = \frac{(-1)^m 2^\nu \Gamma(\nu + 1)}{2^{2m} m! \Gamma(\nu + m + 1)} C_0$$

Por lo tanto, una solución particular de la ecuación de Bessel es:

$$Y_1(x) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) C_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

Hasta ahora C_0 es una constante arbitraria.

Si se escoge:

$$C_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \quad \text{se tiene}$$

$$Y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

A esta solución particular se le llama función Bessel de primera clase de orden ν y se denota por $J_\nu(x)$. Es decir:

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)} \dots \dots \dots (21)$$

Para $r_2 = -\nu$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-\nu}}{2^{2m-\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)} \dots \dots \dots (22)$$

que es linealmente independiente de J_ν si ν no es entero. Por lo anterior, para $\nu \neq$ entero, la solución general de la ecuación de Bessel es:

$$Y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) \dots \dots \dots (23)$$

Si $\nu = n$, entero; $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son linealmente dependientes.

Si $v = 0$, la ecuación de índices tiene las raíces $r_1 = r_2 = 0$, por lo que la segunda solución linealmente independiente es:

$$\begin{aligned}
 Y_2(x) &= Y_1(x) \operatorname{Ln}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} d_m x^{m+r} \\
 &= J_0(x) \operatorname{Ln}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} d_m x^{m+r} \dots \dots \dots (24)
 \end{aligned}$$

Los coeficientes d_m se pueden evaluar en forma similar a lo visto con anterioridad.

$$Y_2(x) = J_0(x) \operatorname{Ln} x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}} \frac{h_m}{(m!)^2} x^{-2m} \Big| ,$$

en donde:

$$h_m = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}$$

Por lo tanto, la solución general en este caso, es de la forma:

$$Y(x) = A J_0(x) + B Y_2(x) \dots \dots \dots (25)$$

Si $A = a$; $B = b$

$$Y(x) = a [Y_2(x) + b J_0(x)]$$

por facilidad, se escoge:

$$\begin{aligned}
 a &= 2/\pi \\
 b &= r - \operatorname{Ln} 2 \\
 r &= 0.5772
 \end{aligned}$$

$$Y(x) = \frac{2}{\pi} \left(J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + r \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} \right) \dots (26)$$

A esta solución se le llama función Bessel de segunda clase, de orden cero ó función de Neumann de orden cero y se denota por $Y_0(x)$.

La Ec. 23 es la solución de la Bessel si $\nu \neq n$. Con el fin de tener una solución general, válida para todo valor de ν , se define una segunda solución, que se llama función Bessel de segunda clase, de orden ν o función de Neumann de orden ν ; la ecuación es:

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \pi \nu} (J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)) \dots (27)$$

Por lo tanto la solución general para todo valor de ν es:

$$Y(x) = A J_\nu(x) + B Y_\nu(x) \dots (27')$$

$Y_n(x)$ se obtiene tomando el límite de $Y_\nu(x)$ cuando $\nu \rightarrow n$. El desarrollo en serie de $Y_n(x)$ se calcula a partir de las series de $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$, considerando el límite cuando $\nu \rightarrow n$ también como resultado de problemas de flujo en medios porosos, se ha podido definir otras soluciones de la ecuación de Bessel, que son complejas para valores reales del argumento x . Estas son:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i Y_\nu(x) \dots (28)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i Y_\nu(x) \dots (29)$$

Y se denominan Funciones Bessel de tercera clase de orden ν ó funciones primera y segunda de Hankel de orden ν .

A continuación se presentan dos relaciones entre funciones Bessel, que se pueden obtener a partir de las representaciones en serie correspondiente:

$$\frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x) \dots (30)$$

$$\frac{d}{dx} (x^{-\nu} J_\nu(x)) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \dots (31)$$

De estas ecuaciones se obtienen las siguientes relaciones de recurrencia:

$$J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x) \dots \dots \dots (32)$$

$$J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x) = 2 J_v'(x) \dots \dots \dots (33)$$

Como en el caso de la función error, en la solución de ecuaciones diferenciales que describen el flujo de fluidos a través de medios porosos, se llega a planteamientos tales que para su solución se tiene que utilizar funciones Bessel de primera y segunda clase, de primer y segundo orden como el siguiente caso:

Sea el sistema, mostrado en la Figura 7.

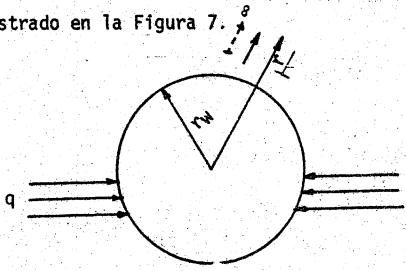


Fig. 7

Cuyo modelo matemático describe el flujo de un fluido de compresibilidad constante, para un yacimiento infinito en flujo radial; como condición de frontera interna del yacimiento, se supone producción a gasto constante y para la frontera externa, que se considera infinita, se supone presión constante e igual a la inicial. Matemáticamente se expresa a continuación:

$$\nabla^2 p = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$C.I \quad P(r, 0) = P_i; \quad r_w < r < \infty$$

$$C.Fi \quad \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r_w} = - \frac{q \mu}{2 \pi k h} \quad t > 0$$

$$C.Fe \quad \lim_{r \rightarrow \infty} P(r, t) = P_i \quad t > 0$$

Si se define en forma adimensional al radio, tiempo y presión como t_D , r_D y P_D respectivamente, se pueden expresar matemáticamente:

$$r_D = \frac{r}{r_w}$$

$$t_D = \frac{kt}{\phi \mu C t r_w^2}$$

$$P_D = \frac{2 \pi k h (P_i - P(r, t))}{q \mu}$$

La solución al problema planteado es:

$$P_D(r_D, t_D) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \text{Exp}(-u^2 t_D)) [J_1(u) Y_0(u r_D) - Y_1(u) J_0(u r_D)]}{u^2 [J_0^2(u) + Y_0^2(u)]} du$$

La solución gráfica se muestra en la Fig. 8.

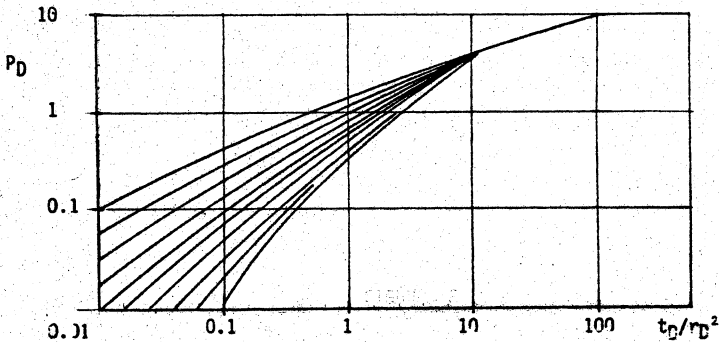


Fig. 8 Solución gráfica del problema.

C A P I T U L O I I I

TEORIA DE FLUJO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS.

MECANISMO Y TIPO DE FLUJO, ECUACIONES Y LIMITACIONES DE LA HIDRODINAMICA:

Si se analizan los principios fundamentales de la hidrodinámica, se encuentra que son adaptaciones de los principios de mecánica adaptados al flujo de fluidos; por ello, aunque éstos no son sistemas rígidos, están sujetos a la ley de la conservación de la materia que dice: "En un sistema cerrado la masa no se crea ni se destruye".

Para el propósito de fluidos en movimiento, puede definirse la ley de la conservación de la siguiente forma:

El flujo de masa por unidad de tiempo que entra o sale de cualquier elemento de volumen infinitesimal de un sistema de fluidos, es --- igual al cambio por unidad de tiempo de la densidad de los fluidos en el elemento, multiplicado por el volumen de él.

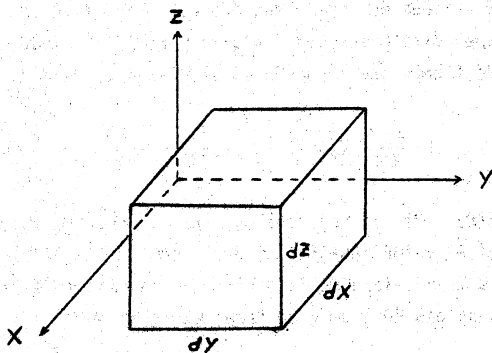


Fig. 9 Elemento de volumen dV .

Si el principio se aplica a un elemento paralelepípedo rectangular de lados dx , dy , dz paralelos a los ejes coordenados y con centro en el punto $P(X, Y, Z)$, la masa que fluye por la cara de entrada $(dy \cdot dz)$ perpendicular al eje X a una distancia $x - dx/2$ del plano Y, Z , por unidad de tiempo, es:

$$\left[\rho v_x - \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) \frac{dx}{2} \right] dy dz.$$

En la cara de salida $(dy \cdot dz)$ a una distancia $x + dx/2$ será:

$$\left[\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) \frac{dx}{2} \right] dy dz.$$

Por lo anterior, el flujo neto que queda en el paralelepípedo, será la resta algebraica, esto es:

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) dx dy dz.$$

Si se procede en forma idéntica para las caras $dx \cdot dz$ y $dx \cdot dy$ y se suman las tres direcciones de posibles flujos, el flujo resultante total por unidad de tiempo que se queda en el elemento $dV = dx dy dz$ es:

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] dx dy dz.$$

Por otro lado, la masa que está en elemento de volumen es $f \rho dx dy dz$, siendo " ρ " el valor instantáneo de la densidad y " f " la porosidad del medio; por lo mismo, la pérdida o ganancia de masa en el elemento $dV = dx dy dz$ en la unidad de tiempo se puede expresar por:

$$f \frac{d\rho}{dt} dx dy dz$$

Igualando estas expresiones y usando la forma vectorial, se llega a lo siguiente:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = -f \frac{\partial \rho}{\partial t} \dots \dots \dots (1)$$

A ésta se le llama "ecuación de continuidad" y aparece en todas las ramas de la física, expresando en este caso la ley de la conservación de la materia; la de conservación de energía en termodinámica. Puede llegar a simplificarse y asumir otras formas, como cuando el flujo es independiente del tiempo (régimen permanente), entonces:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

Como la ley de conservación de masa en este caso involucra fluidos, debe especificarse la naturaleza de él, así como las características termodinámicas y tipo de movimiento; por ello hará falta asociarla a una ecuación de estado y a una de movimiento.

Cualquier ecuación de estado puede representarse analíticamente por una función:

$$T \text{ (Presión, densidad, temperatura)} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Un líquido incompresible tendrá por ecuación de estado $\rho = \text{cte}$, mientras que un gas ideal tendrá $P - \frac{\rho R t}{m} = 0$; más adelante se especificará cuáles son los diversos tipos de ecuaciones de estado.

El carácter termodinámico del flujo puede usar otra ecuación de la misma forma de la Ec. 2 y por lo mismo, podrá agruparse con la de estado. Con lo anterior, podría verse que la ecuación para un líquido incompresible tendría por ecuación de continuidad $\nabla \cdot \rho \vec{v} = 0$; pero analíticamente no podríamos determinar las componentes de la velocidad, ni se podría discriminar entre 2 fluidos incompresibles, tampoco podría distinguirse entre sistemas de flujo sujetos a fuerzas de cuerpo o de diferenciales-

de presión, ni entre fluidos que fluyen en medios porosos o en tuberías libres. Por ello es evidente que se tiene que caracterizar el fluido también dinámicamente y establecer cómo reacciona a gradientes de presión y fuerzas externas. Para ello, se partirá de la ley de Newton que dice: "LAS FUERZAS QUE ACTUAN EN UN CUERPO, SON IGUALES AL PRODUCTO DE LA MASA POR LA ACELERACION".

Un elemento de volumen está sujeto a tres tipos de fuerzas: de cuerpo, de inercia y externas.

Considerando estas fuerzas se tiene:*

$$\rho g \frac{Dv_x}{Dt} = - \frac{\partial P}{\partial x} + F_x + \mu \nabla^2 v_x + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\rho g \frac{Dv_y}{Dt} = - \frac{\partial P}{\partial y} + F_y + \mu \nabla^2 v_y + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\rho g \frac{Dv_z}{Dt} = - \frac{\partial P}{\partial z} + F_z + \mu \nabla^2 v_z + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

Estas ecuaciones son las obtenidas originalmente por Navier-Stokes y definen totalmente un sistema hidráulico, junto con la ecuación de continuidad y la de estado, para solucionar las cinco incógnitas que son ρ , P , v_x , v_y , v_z de cualquier sistema de fluidos en movimiento.

Dado que el tratamiento de problemas de flujo a través de canales irregulares y tortuosos como los de arenas son complejos, se tiene que recurrir a otras ecuaciones diferentes a las de Navier-Stokes.

* Collins, R.E.

Es posible entender mejor las leyes de flujo, incluyendo la de Darcy, si se considera antes la teoría dimensional.

Utilizando el mecanismo de esta teoría se puede ver que la caída de presión ΔP , en una columna de arena de longitud L , que tiene un fluido de densidad ρ y viscosidad μ con una velocidad v media, debe relacionarse como sigue:

Considerando: (F,L,T) o (M,L,T) y utilizando el teorema π de Buckingham
Número de variables $m = 6$

$$m - n = 6 - 3 = 3$$

$$m_1 = \rho [F T^2 L^{-4}] \quad m_3 = \mu [F T L^{-2}] \quad m_5 = \Delta S [L]$$

$$m_2 = \Delta P [F L^{-2}] \quad m_4 = d [L] \quad m_6 = \vec{v} [L T^{-1}]$$

$$\pi_1 = \rho^{x_1} d^{y_1} \mu^{z_1} \Delta P$$

$$\pi_2 = \rho^{x_2} d^{y_2} \mu^{z_2} v$$

$$\pi_3 = \rho^{x_3} d^{y_3} \mu^{z_3} \Delta S$$

$$\pi_1 = \rho^{x_1} d^{y_1} \mu^{z_1} \Delta P = F^0 L^0 T^0$$

$$F^0 L^0 T^0 = [F T^2 L^{-4}]^{x_1} [L]^{y_1} [F T L^{-2}]^{z_1} [F L^{-2}]$$

$$\Sigma F = 0; x_1 + z_1 + 1 = 0 \quad x_1 = 1$$

$$\Sigma L = 0; -4x_1 + y_1 - 2z_1 - 2 = 0 \quad \longrightarrow \quad y_1 = 2$$

$$\Sigma T = 0; 2x_1 + z_1 = 0 \quad z_1 = -2$$

$$\pi_1 = \rho d^2 \mu^{-2} \Delta P$$

$$\pi_2 = \rho^{x_2} d^{y_2} \mu^{z_2} v = F^0 L^0 T^0$$

$$F^0 L^0 T^0 = [F T^2 L^{-4}]^{x_2} [L]^{y_2} [F T L^{-2}]^{z_2} [L T^{-1}]$$

$$x_2 + z_2 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$-4x_2 + y_2 - 2z_2 + 1 = 0 \longrightarrow$$

$$y_2 = 1$$

$$2x_2 + z_2 - 1 = 0$$

$$z_2 = -1$$

$$\pi_2 = \rho d \mu^{-1} v$$

$$\pi_3 = \rho^{x_3} d^{y_3} \mu^{z_3} \Delta_S = F^0 L^0 T^0$$

$$F^0 L^0 T^0 = [F T^2 L^{-4}]^{x_3} [L]^{y_3} [F T L^{-2}]^{z_3} [L]$$

$$x_3 + z_3 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$-4x_3 + y_3 - 2z_3 + 1 = 0 \longrightarrow$$

$$z_3 = 0$$

$$2x_3 + z_3 = 0$$

$$y_3 = -1$$

$$\pi_3 = d^{-1} \Delta_S$$

$$\therefore \alpha \left(\frac{\Delta_S}{d}, \frac{\rho v d}{\mu}, \frac{\rho d^2 \Delta P}{\mu^2} \right) = 0 \dots \dots \dots (3)$$

0 bien:

$$\frac{\Delta P}{\Delta_S} = C \alpha \left(\frac{\rho v d}{\mu} \right) \frac{\mu^2}{\rho d^3}$$

C = Constante que depende de las unidades.

En esta ecuación α es una función que se determina empíricamente y d es un parámetro que representa el tamaño del poro o el tamaño del grano.

Numerosos investigadores han coincidido en que el argumento de la función esté elevado a la primera potencia, lo cual hace que la Ec. 3 quede:

$$\frac{\Delta P}{\Delta S} = C \frac{\mu^2}{\rho d^3} \alpha \left(\frac{\rho v d}{\mu} \right) \dots \dots \dots (4)$$

Si ρv es constante a lo largo de un sistema lineal en régimen permanente, entonces el gradiente de presión en líquidos será uniforme sin tomar en cuenta el carácter de flujo.

Así se ve que el argumento de α representa el número de Reynolds (d representa el diámetro de la tubería).

Si además se tiene un sistema de flujo con bajas velocidades, bajas densidades de fluido y diámetros pequeños de tubería, entonces α es el argumento mismo, por lo tanto, la Ec. 4 queda:

$$\frac{\Delta P}{\Delta S} = C \frac{\mu v}{d^2} \dots \dots \dots (5)$$

Este resultado es el mismo a que se llega por la hidrodinámica clásica y conocido como la ley de Poiseville para fluidos viscosos.

Comparando el flujo viscoso en tuberías con el flujo viscoso de fluidos en medios porosos, vemos que la distribución del campo de velocidades es diferente como se observa en las figuras siguientes:

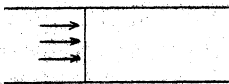


Fig. 11 Flujo en medios porosos

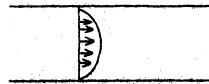


Fig. 12 Flujo en tuberías

Se observa que la distribución de velocidades para tuberías es de tipo parabólico con $V_{m\acute{a}x}$ en el centro y cero en las paredes de la tubería y para el flujo en medios porosos, la velocidad macroscópica es lineal y uniforme en toda la sección, o sea que estadísticamente el campo de velocidades es lineal y la justificación de lo anterior, estriba en el hecho de que los fluidos soportan fuerzas que cambian la distribución de velocidades, debido a la heterogeneidad del medio poroso. Esto se debe a que los fluidos tienen masa; y por lo tanto, se pueden ejercer fuerzas en ellos para cambiar la magnitud o la dirección de la velocidad, según la segunda ley de Newton del movimiento. Así, cuando un fluido fluye en un medio poroso, la velocidad de un elemento de él, cambia rápidamente de punto a punto a lo largo de su trayectoria tortuosa y las fuerzas que producen estos cambios, también varían rápidamente; -- sin embargo, en el medio poroso puede esperarse que la multitud de trayectorias de él, tengan un carácter aleatorio y puede suponerse que -- tanto las variaciones en dirección y en magnitud promedian cero. Así -- para el flujo laminar permanente, las fuerzas laterales asociadas con las variaciones microscópicas de la velocidad en la superficie expuesta al flujo en un medio poroso, pueden considerarse nulas en promedio.

No sucede lo mismo con las fuerzas de inercia en la dirección del flujo, las cuales sólo pueden despreciarse para gastos bajos. Así mientras que para el flujo de Poiseuille, este es proporcional al cuadrado del área de la sección, en el medio poroso es proporcional sólo a la -- primera potencia del área. La forma encontrada por Poiseuille es la siguiente:

$$Q = \frac{c \cdot A \cdot \Delta h}{8L} = \frac{(\rho g)^2 \Delta h r^4}{8\mu L} \dots \dots \dots (6)$$

Por otro lado, para valores altos de v , D , ρ ó $\frac{1}{\mu}$ o sea grandes valores del número de Reynolds, que pasen de 2 000, la naturaleza de flujo en tuberías libres cambia súbitamente de una trayectoria suave y ordenada, a una que muestra fluctuaciones o distribuciones irregulares de remolinos y que se denomina "flujo turbulento".

La transición aquí es siempre bien marcada, aún cuando hay que hacer notar que el incremento o decremento de velocidad en la región de -- transición muestra histéresis.

Aún cuando no se han explicado las razones de discrepancia entre muchos autores, se tiene establecido lo que parece ser la representación de los resultados más relevantes de las investigaciones a la -- ley de Darcy; que son:

- 1.- A bajas velocidades (bajo número de Reynolds) el gradiente de -- presión varía con la velocidad v .

$$\frac{\Delta P}{\Delta S} = C v \dots\dots\dots (7)$$

Esto lo dio originalmente Darcy y en contraste con la Ec. 12, debe recordarse que la selección de la función α , trae consigo una explicación de la variación de $\frac{\Delta P}{\Delta S}$ con las otras variables d , ρ , μ y es de notar que si en la Ec. 12 los valores de n exceden de 2, significaría que $\frac{\Delta P}{\Delta S}$ disminuiría al crecer μ , lo cual no es razonable físicamente.

- 2.- El tipo de flujo que describe la Ec. 7 puede ser llamado de tipo viscoso.

- 3.- A medida que el número de Reynolds se incrementa, el gradiente de presión $\frac{\Delta P}{\Delta S}$ se incrementa más rápido que v y asume una variación que es descrita mejor por la Ec. 11, conocida como la ecuación de Forchheimer.

Una figura publicada por Fancher, Lewis y Barner; da una representación de datos de flujo para un número de arenas consolidadas y no consolidadas, utilizando el factor de fricción (ξ).

Aquí la cantidad $\xi = d\Delta p / 2 L \rho v^2$, es dimensionalmente equivalente al factor de fricción, usado en el estudio de flujo de fluidos en tuberías. Las abscisas son el número de Reynolds $\rho v d / \mu$ y el factor de fricción ξ sigue siendo proporcional al diámetro del grano definido por la ecuación:

$$d = \sqrt[3]{\frac{\xi n s d s^3}{\xi n s}} \dots \dots \dots (8)$$

ds = Medida aritmética del diámetro
 ns = Número de granos de diámetro ds .

Para $R = 1$

Los datos obedecen a la relación:

$$\text{Log } \xi = a - \text{log } R, \dots \dots \dots (9)$$

donde se define $\frac{\Delta P}{\Delta s} = C$, que está de acuerdo con la ley de Darcy.

Se puede interpretar que esta ley admite pérdidas en ciertas situaciones y que el flujo es parcialmente turbulento para grandes valores de v y $p/\Delta s$.

Los datos empíricos pueden ser expresados en todos los casos de una forma semejante a la Ec. 10, con 'n' teniendo un valor en el exponente de 2.

Un ejemplo de este tipo de representación, con 'n' exactamente = 2, está publicado por Lindquist, sobre el flujo de agua a través de columnas de medida uniforme.

- 5.- Físicamente, 'd' debe representar el poro promedio, más que el diámetro del grano; pero como el primero sólo puede ser medido directamente por examen microscópico de la sección del medio poroso, se -- prefiere usar el diámetro del grano.

Como puede verse, la ley de Darcy pierde su valor, a medida que v o el número de Reynolds aumentan, y parece no haber una modificación - única a dicha ley para adecuarla a valores altos de v ; Lindquist y Nemenyi así como Fancher, Lewis y Barnes, que han efectuado estudios para encontrar relaciones o rangos de aplicabilidad a la ley de Darcy, atribuyen la desviación de flujo viscoso cuando la velocidad sube al aumento de las fuerzas de inercia comparadas con las fuerzas viscosas, más que a una turbulencia real.

Lo anterior es lógico, ya que no se puede ganar energía cinética en un canal lineal, de modo que las caídas de presión se consumen sólo en pérdida por fricción.

Nemenyi observó que el número de Reynolds en que aparece la desviación, es mucho menor que aquél en que se desarrolla turbulencia para tuberías libres; lo anterior es debido a que las velocidades reales en los poros son aumentadas en ocho o más veces que la velocidad macroscópica v , ya que el flujo tiene lugar realmente en canales de variación marcada, por lo anterior, no es aceptable ya que la desviación de la ley de Darcy, que aparece en rangos del número de Reynolds de $1 < Re < 10$, sean manifestaciones de turbulencia real-diseminada en el sistema de flujo; puede decirse entonces que los datos empíricos de un experimento, pueden expresarse en todos los casos por una ecuación de la forma de la Ec. 11, con 'n' cercano a 2.

Como ya se dijo, la desviación del flujo de tipo viscoso (Ec. 7), es debida a la naturaleza capilar e irregularidades de los canales porosos, por lo que se desarrolla gradualmente, y no súbitamente como en canales libres. De hecho, la ausencia de una zona de transición marcada, da lugar a la Ec. 6 la aceptan muchos investigadores como descriptiva de flujo en medios porosos.

Es claro que esta ecuación se aproxima a la relación lineal, a medida que v disminuye. Sólo que los datos sean de una precisión considerable en flujo de bajas velocidades, puede notarse que existe desviación.

Es importante hacer notar que la ley de flujo en medios porosos, dada por la Ec. 4, es la misma para gases y líquidos con el mismo número de Reynolds; la variación de densidad para gases se tiene en cuenta con el término $\rho g \frac{\Delta P}{\Delta S}$ o su equivalente $\frac{\Delta P^2}{\Delta S}$, cuando el flujo es isotérmico ($\rho = \rho_0 P$).

De hecho Chalmers, Taliaferro y Rawlins encontraron de sus experimentos, que la variación de $\frac{\Delta P^2}{\Delta S}$ se podía representar por:

$$\frac{\Delta P}{\Delta S} = a (\rho v) + b (\rho v)^n,$$

con 'n' variando entre 1.75 y 2.01 para medios porosos diferentes. - También debido a la baja viscosidad de los gases, se encuentran desviaciones apreciables de la ley de Darcy para bajas velocidades, inferiores a las que se tienen en líquidos.

Como se ve, todas las consideraciones anteriores referentes a la ley de Darcy, llevan a afirmar la proporcionalidad entre la v macroscópica en el medio poroso y el gradiente de presión para bajas velocidades, lo que es más difícil es precisar de alguna manera el rango de vali-

dez, ya que la dificultad reside en definir 'd', del número de Reynolds; así Lindquist limita la validez a un Re igual a 4, mientras que otros autores con experimentos en empacamientos de vidrio señalan Re igual a 12.

Por otro lado, se tiene que para un medio heterogéneo y consolidado, el límite de desviación es Re igual a 1; pero se debe al grado de variación en el tamaño de poros, angularidad de granos y grado de cementación. Como dato curioso puede citarse que en un tubo libre de 2 cm. de diámetro, la relación de superficie a volumen es de 2 (cm.^{-1}), mientras que en el mismo tubo relleno de granos esféricos de 0.1 mm. de diámetro y con una porosidad del medio del 20%, la misma relación es de 1200 (cm.^{-1}). Por todo lo dicho antes, puede aceptarse como límite seguro, donde aún no se tienen desviaciones apreciables, el valor de $Re = 1$, con 'd' definido como el diámetro promedio de los granos de arena del medio.

ASPECTO PRACTICO:

Habiendo indicado lo anterior, queda por analizar en qué rango superior a uno, el número de Reynolds es de interés práctico.

Debe tenerse presente que en muchos flujos se tienen altos gastos y ahí Re puede ser superior a 1.

Por principio, no es probable en un yacimiento que las velocidades macroscópicas de flujo puedan exceder la que se tiene en la cara productora del pozo.

Si se ejemplifica un pozo con 6 pulgadas de diámetro, que produce 1 000 BPD de aceite de densidad de 1 (gr/cc) y .01 (poises) de viscosidad que cruza un yacimiento de espesor igual a 10 pies y con un diámetro de grano

'd' igual a .05 (cm.), la velocidad sería de .126 (cm/seg), con lo cual el número de Re sería de .63 y por lo tanto, menor a 1.

Similarmente un pozo de gas de las mismas características del anterior, que produce a 20 grados centígrados, 100 000 pies cúbicos por día de gas, con densidad igual .7 con respecto al aire, con una viscosidad igual a la del metano, el número de Reynolds sería de .79 también menor que 1; claro que este gasto debe relacionarse a sólo 10 pies de espesor; a 100 pies se tendría un gasto de 1×10^6 pies cúbicos por día. Cabe decir que las velocidades de flujo de agua en pozos artesianos, con gastos de 1 a 3 millones de pies cúbicos por años son de .005 (cm/seg.), con lo cual el número de Reynolds también es menor a 1.

Como ya se dijo, dado que la convergencia geométrica del flujo radial en un pozo, hace que la velocidad a sólo 2.5 pies del centro del pozo, se reduzca a un décimo del valor que tendría en la cara productora, puede concluirse que en la mayoría de los casos de interés práctico, el flujo es descrito estrictamente por la ley de Darcy.

Otro concepto a favor del uso de esta ley, comparada con modificaciones propuestas para rangos completos de velocidades es la flexibilidad, dada su simplicidad analítica, que lleva rápidamente a otras ecuaciones generales como la de Laplace, que hace posible tratar cuantitativamente una gran variedad de problemas prácticos de flujo.

Es fácil ver que las ecuaciones 11 y 12 consideradas como modificaciones simples, llevan sin embargo de inmediato a ecuaciones diferenciales complicadas, de modo que no es posible generalizar resultados a sistemas de flujo con geometría diferente.

POTENCIAL DE CORRIENTE:

El flujo de fluidos a través de medios porosos, está relacionado con 4 tipos de potencial de energía o fuerzas:

- 1º Gravitacional.
- 2º Presión.
- 3º Capilar.
- 4º Cinética (despreciable debido a la velocidad del fluido).

1º Potencial Gravitacional:

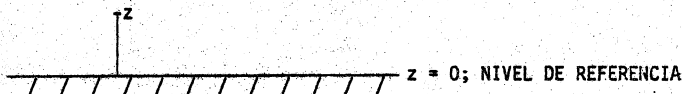
$$F_g = mg$$

Si esta masa "m" se mueve bajo la acción de la fuerza F_g el cambio en energía gravitacional (trabajo) está dado por:

$$dE_g = F_g dz = mg dz$$

$$\int_{E_0}^{E_g} dE_g = mg \int_{z_0}^z dz$$

$$E_g - E_0 = mg (z - z_0)$$



Se considera que $z_0 = 0$ y que $E_0 = 0$

$$E_g = mgz$$

Por la definición: Potencial = Energía/masa.

$$\phi_g = \frac{E_g}{m} = \frac{mgz}{m} = gz$$

2º Potencial de Presión:

En general para procesos de desplazamiento de fluidos la expresión para el trabajo es:

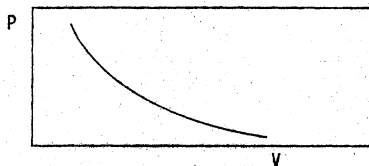
$$W = Fd = A \dots$$

$$dW = VdP$$

$$dE_p = VdP$$

Entonces, la energía disponible en un fluido a cierta presión es equivalente al trabajo efectuado para comprimir el fluido hasta llevarlo a su estado actual.

$$\int_{E_0}^{E_p} dE_p = \int_{P_0}^P VdP \longrightarrow E_p = V_p P$$



$$\rho = \frac{m}{V} ; \quad V = \frac{m}{\rho}$$

Si $E_0 = 0$

$$E_p = m \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} ; \quad \phi_p = \frac{E_p}{m} = \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho}$$

El Concepto de Potencial de Flujo (ϕ).

Para llevar un fluido a un punto es necesario efectuar varios tipos de trabajo. La suma de estos trabajos (potenciales) es la energía mecánica del fluido en ese punto:

$$\phi = \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2g_c}$$

Los cambios de potencial cinético (energía cinética), son pequeños comparados con los de potencial de presión y gravitacional.

$$\phi = \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} + gz$$

Otra definición para el potencial es:

$$\phi' = \frac{\phi}{g} = \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho g} + z$$

Para condiciones de un fluido incompresible ($\rho = \text{cte.}, \rho g \rightarrow \text{cte.}$)

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{P - P_0}{\rho} + z \\ \phi' &= \frac{P - P_0}{\rho g} + z \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Si: } P_0 = 0 \\ \text{En: } z_0 = 0 \end{array}$$

$$\phi = \frac{P}{\rho} + z$$

$$\phi' = \frac{P}{\rho g} + z$$

Otra definición para el potencial en fluidos incompresibles es:

$$\phi^2 = \rho g \phi^1 = P + \rho g z .$$

Para el caso general de aceite, gas y agua:

ACEITE:

$$\phi_o = \int \frac{P}{\rho_o} \frac{dP_o}{\rho_o} + gz$$

G A S :

$$\phi_g = \int \frac{P_g}{\rho_g} \frac{dP_g}{\rho_g} + gz$$

A G U A :

$$\phi_w = \int \frac{P}{\rho_o} \frac{dP_w}{\rho_w} + gz$$

LEY DE DARCY:

Los principios físicos que rigen el comportamiento de flujo de fluidos viscosos en tuberías fueron estudiados inicialmente por Navier-Stokes entre otros investigadores de la hidrodinámica, cuya base es la distribución del campo de velocidades en cualquier sistema fluyente, estableciendo el equilibrio dinámico entre las fuerzas de inercia, viscosas, fuerzas de cuerpo externas y la distribución interna de presiones del fluido.

Esto es, sirvió de base para que Henry Darcy realizara experimentos en filtros empacados con arena en los que hacía fluir agua, que lo condujeron a establecer su teoría de flujo de fluidos homogéneos en un medio poroso (Figura 13).

Darcy encontró empíricamente que:

$$Q = C \frac{A \Delta h_w}{L}$$

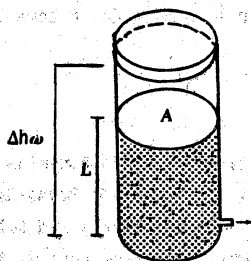


Figura 13 Empacamiento de arena

donde

Q = Flujo volumétrico de agua.

A = Sección transversal.

L = Longitud del empacamiento de arena

Δh_w = Altura de la columna de agua.

C = Constante que depende de las características del medio poroso y propiedades del fluido.

Este resultado puede intuirse a partir de la hidrodinámica clásica por analogía a la ley de Poiseville, y su justificación analítica por medio de la ecuación de Navier-Stokes. Se puede dar el caso de flujo lento, esto es, despreciando las fuerzas de inercia en el flujo de fluido viscoso debido a las bajas velocidades que tiene el fluido a través de medios porosos; lo anterior ha motivado que se hayan hecho estudios acerca de la validez de la ley de Darcy; estas investigaciones son de dos tipos:

- a) Las que llevan el objetivo de verificar la ecuación o determinar modificaciones apropiadas a ella.
- b) Las concernientes a la naturaleza de la constante C, determinada por las propiedades del medio poroso.

ECUACION DE FORCHHEIMER

El flujo turbulento se caracteriza dinámicamente, por el hecho de que la función α es proporcional al cuadrado de su argumento, en particular la velocidad, por lo que la Ec. 4 toma la forma:

$$\frac{\Delta P}{\Delta s} = C \frac{\rho \cdot v^2}{d} \dots \dots \dots (10)$$

Cabe decir que lo anterior es para tuberías rugosas, ya que para tubos lisos de equivalencia del número de Reynolds es menor que 2. De acuerdo a los resultados de la Ingeniería Hidráulica, muchos autores han intentado representaciones similares para el flujo en columnas de arena, habiendo encontrado que debido a los canales irregulares y tortuosos del medio poroso, la zona de transición entre flujo viscoso a turbulento no es marcada como en tuberías libres; por ello se ha sugerido una representación del gradiente $\Delta P/\Delta s$ como la suma de términos de varias potencias de v (la velocidad macroscópica del flujo por unidad de área del medio). En este caso, - - - - -

la ley de flujo queda expresada por algunos autores como:

$$\frac{\Delta P}{\Delta s} = a v + b v^n \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta s} = a v^n \longrightarrow 1 < n < 2 \dots\dots\dots (12)$$

Como puede verse de las Ecs. 10, 11 y 12, el gradiente de presión es independiente de la viscosidad del fluido y en cambio en flujo viscoso laminar es proporcional a la viscosidad.

Las ecuaciones anteriores son en principio consistentes con los requerimientos dimensionales de la Ec. 4, ya que las constantes a y b son - - ajustadas para absorber el factor $\mu^2/\rho d^3$, y las potencias de $\rho d/\mu$, sobrantes al separar v del número de Reynolds.

PERMEABILIDAD RELATIVA:

Cuando un medio poroso está saturado por un solo fluido o existen 2 fases, pero una de ellas es inmóvil, a la facilidad con que puede fluir la otra fase a través del medio poroso, se le denomina permeabilidad absoluta. Cuando el medio está saturado por 2 ó más fases - con facilidad de flujo, cada una de ellas tiene permeabilidad llamándose a ésta permeabilidad efectiva.

Puede definirse a la permeabilidad relativa como el cociente de la permeabilidad efectiva con respecto a la permeabilidad absoluta.

Matemáticamente se expresa como:

$$K_{ri} = \frac{K_i}{K}$$

$$i = 0, g, \omega.$$

CONDICIONES DE FRONTERA:

En problemas específicos de Ingeniería de Yacimientos, es necesario conocer ciertos parámetros del yacimiento bajo determinadas condiciones de flujo o hacer suposiciones que describan el yacimiento, para poder resolver tales problemas. En general es posible representar matemáticamente, mediante un modelo, el comportamiento de flujo de un yacimiento; normalmente se obtiene una ecuación diferencial parcial de segundo orden y para desarrollar soluciones específicas de ella es necesario aplicar condiciones de frontera interna y externa del yacimiento; las condiciones en forma general pueden ser:

FRONTERA INTERNA: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Presión constante o} \\ \text{Gasto constante.} \end{array} \right.$

FRONTERA EXTERNA: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Presión constante o} \\ \text{Gasto constante.} \end{array} \right.$

Cualquier combinación es válida; todo depende del fenómeno físico a representar matemáticamente.

LEY DE DARCY EN FORMA DIFERENCIAL PARA UN MEDIO ANISOTROPO:

La ley de Darcy es de naturaleza estadística, debido a que la velocidad macroscópica, el valor de 'd' y las variables dinámicas son solo promedios. Además, como está restringida a una dimensión, es necesario generalizar los resultados antes de desarrollar una teoría completa aplicable a cualquier sistema de flujo.

Por ello, se supondrá que la velocidad resultante en cualquier punto es directamente proporcional en magnitud y dirección a la resultante del gradiente de presión en ese punto, por lo que puede descomponerse en tres componentes paralelas a los ejes:

$$v_x = - \frac{K_x}{\mu} \frac{dP}{dx} \qquad v_y = - \frac{K_y}{\mu} \frac{dP}{dy}$$

$$v_z = - \frac{K_z}{\mu} \frac{dP}{dz}$$

La permeabilidad varía de un punto a otro y es diferente para las tres direcciones a menos que el medio sea isótropo.

Si llegan a tenerse componentes de velocidad verticales, las ecuaciones anteriores no serán suficientes para cubrir esa posibilidad, ya que es obvio que la gravedad no está interviniendo.

Por ello, se incluirán todas las fuerzas de cuerpo con componentes F_x , F_y , F_z por unidad de volumen, que actúan en el fluido y afectan la velocidad de igual forma que el gradiente de presión. De este modo se tiene:

$$v_x = - \frac{K_x}{\mu} \left(\frac{dP}{dx} - F_x \right)$$

$$v_y = - \frac{K_y}{\mu} \left(\frac{dP}{dy} - F_y \right)$$

$$v_z = - \frac{K_z}{\mu} \left(\frac{dP}{dz} - F_z \right)$$

O bien si F tiene un potencial $\bar{\phi}$ se podría determinar:

$$\bar{\phi} = \frac{k}{\mu} (P + \tau)$$

De modo que el sistema queda:

$$v_x = - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} ; \qquad v_y = - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} ; \qquad v_z = - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z}$$

O sea \bar{v} es una función cuyo gradiente da el vector velocidad y entonces queda más simple:

$$\bar{v} = - \nabla \bar{\phi} \dots \dots \dots (13)$$

Esta última ecuación es considerada como la ley de Darcy, generalizada y es tomada como la base dinámica para todos los problemas de flujo viscoso en medios porosos y flujo homogéneo. Dado que no contiene la variable que representa las fuerzas de inercia o de aceleración en el fluido ($\frac{D}{t}$), indica que estas fuerzas se desprecian, debido a la gran superficie del medio poroso expuesta al flujo, que hace que las fuerzas viscosas de resistencia excedan en mucho a las de inercia o aceleración, a menos que haya turbulencia.

DIFERENTES TIPOS DE ECUACIONES DE ESTADO:

Una ecuación de estado, predice el comportamiento de un fluido en función de la presión, densidad y temperatura; a continuación se establecen únicamente los principales tipos usados en la Ingeniería Petrolera.

1.- Para un fluido incompresible.

$$\rho = \text{constante.}$$

2.- Para un fluido de compresibilidad constante:

$$\rho = \rho_0 e^{c(P - P_0)}$$

3.- Para un fluido ligeramente compresible:

$$\rho = \rho_0 [1 + c(P - P_0)]$$

4.- Para un gas ideal:

$$PV = \eta R T$$

5.- Para un gas real:

$$PV = Z n R T$$

Si una ecuación de estado para un fluido incompresible, junto con una de movimiento (Ley de Darcy) se introducen a la ecuación de continuidad, se forma un sistema que describe por completo al flujo en espacio y en tiempo; a la ecuación resultante se le llama "ecuación de difusión" y se forma de la siguiente manera:

Partiendo de:

$$-\nabla \cdot \rho \bar{v} = \frac{\partial}{\partial t} \phi \rho, \dots \dots \dots (14)$$

si el medio poroso es incompresible, se tiene que ϕ sale del operador:

$$-\nabla \cdot \rho \bar{v} = \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} \dots \dots \dots (15)$$

Si aquí se sustituye la ecuación de estado para un fluido incompresible y la ecuación de movimiento; agregando el término ω_{xyz} y expresando la ecuación en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{k_x}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{k_z}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \omega_{xyz} = 0,$$

donde: ω_{xyz} = Ritmo de inyección de masa por unidad de volumen.

Si el medio es homogéneo e isótropo ($k_x = k_y = k_z$) y la viscosidad es independiente de la presión, se tiene:

$$\nabla^2 P + \frac{\mu \omega_{xyz}}{k} = 0, \dots \dots \dots (16)$$

que corresponde a la ecuación de Poisson.

* Además $K_x = K_y = K_z = K$

Aquí xyz corresponde al punto fuente (inyección) o sumidero (producción).

Si no existe el punto fuente o sumidero, se tendrá la ecuación de difusión más simple llamada "ecuación de Laplace":

$$\nabla^2 P = 0 \quad \dots \dots \dots (17)$$

Si se considera la ecuación de estado para un fluido de compresibilidad - constante junto con la ecuación de movimiento, considerando el gradiente de presión en lugar de la función potencial, se tendrá:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{k_x}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{k_z}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \omega_{xyz} = \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \dots (18)$$

Usando la regla de la cadena y la definición de compresibilidad isotérmica c:

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} \quad \longrightarrow \quad \frac{dP}{dx} = \frac{1}{c\rho} \frac{d\rho}{dx}$$

Sustituyendo en la Ec. 18:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{k_x}{\mu} \frac{1}{c\rho} \frac{d\rho}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{k_y}{\mu} \frac{1}{c\rho} \frac{d\rho}{dy} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{k_z}{\mu} \frac{1}{c\rho} \frac{d\rho}{dz} \right) + \omega_{xyz} = \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \dots \dots (19)$$

donde para:

$$k = \text{cte.} \quad \mu = \text{cte.} \quad c = \text{cte.}$$

$$\omega_{xyz} = 0$$

Se tiene:

$$\nabla^2 \rho = \frac{\phi \mu c t}{k} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \dots \dots \dots (20)$$

que corresponde a la ecuación de difusión para fluidos de compresibilidad c constante y yacimientos con caídas pequeñas de presión y flujo compresible.

De la ecuación de estado para un fluido de compresibilidad constante y considerando $P_0 = 0$ se tiene:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{cP}$$

Usando la serie de Taylor:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + f''(a) \frac{(z-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(z-a)^n}{n!}$$

$$e^{cP} = 1 + \frac{cP}{1!} + \frac{c^2 P^2}{2!} + \dots + \frac{c^n P^n}{n!}$$

$$cP < 0.01 \longrightarrow c^2 P^2 \ll 0.01 \quad \therefore e^{cP} \cong 1 + cP$$

$$\therefore \rho = \rho_0 (1 + cP) \dots \dots \dots (21)$$

La Ec. 21 es la ecuación de estado para fluidos ligeramente compresibles - (aceite con gas disuelto).

Derivando se tiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho_0 \left(c \frac{\partial P}{\partial x} \right) \dots \dots \dots (22)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \rho_0 \left(c \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) \dots \dots \dots (23)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 (1 + cP)) = \rho_0 \left(c \frac{\partial P}{\partial t} \right) \dots \dots \dots (24)$$

Sustituyendo (23), (24) en (20):

$$c_{p0} \nabla^2 P = \frac{\phi \mu c}{k} c_{p0} \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\nabla^2 P = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t} \dots \dots \dots (25)$$

Que corresponde a la ecuación de difusión para un fluido ligeramente compresible (considerando las demás suposiciones de la Ec. 20)

Por otra lado, a partir de la ecuación 1 y de $P_y = Z n R T$, en la ecuación de difusión se tendrá:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{PM}{zRT} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \frac{PM}{zRT} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{PM}{zRT} \right) + \omega_{xyz} = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{PM}{zRT} \right) \dots (27)$$

Simplificando queda:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{\mu z} P \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y}{\mu z} P \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{\mu z} P \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{\omega_{xyz} P}{z \rho} = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{z} \right) \text{ de } \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (P/z) = \frac{\partial}{\partial P} (P/z) \frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{z - P}{z^2} \frac{\partial z}{\partial P} \right) \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial P} (P/z) \frac{\partial P}{\partial t} = (1/z - P/z^2) \frac{\partial z}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P}{z} \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial P} \right) \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\phi}{5.615} \frac{P_c}{z} \frac{\partial P}{\partial t} \dots \dots (28)$$

donde:

$$\omega_{xyz} = \rho q_{vol} B$$

De la ecuación de Boyle:

$$Pq = P_1 q_1 \rightarrow q_{c.s} = P_y q_y / P_c s; \quad c = \frac{1}{P} \sim \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial P}$$

$$\frac{\omega_{xyz} P_y}{z_y P_{c.s}} = \frac{\rho_{c.s} q_{vol} c.s}{z_y \rho_{c.s}} \frac{B_g P_y}{P_{c.s}} = \frac{q_{vol} c.s}{z_y} P_y \left(\frac{z_y T_y P_{c.s}}{T_{c.s} P_y} \right) =$$

$$= \frac{P_{c.s} T_y q_{vol} c.s}{T_{c.s}} ; \quad B_g = \frac{z_y T_y P_{c.s}}{z_{c.s} T_{c.s} P_y}$$

$$\omega_{xyz} = \frac{P_y}{z_y \rho_{c.s}} = \frac{14.7 T_y q_{vol}}{520 \times 5.615} \dots \dots \dots (29)$$

Sustituyendo las Ecs. 28 y 29 en 27:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x P}{\mu z} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y P}{\mu z} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z P}{\mu z} \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{14.7 T_y q_{vol}}{520 \times 5.615} = \phi \frac{P_c}{5.615 z} \frac{\partial P}{\partial t} \dots (30)$$

donde:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x P}{\mu z} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{k_x P}{\mu z} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{k_x P}{\mu z} \right) \frac{\partial P}{\partial x} =$$

$$= \frac{k_x P}{\mu z} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{k_x P}{\mu z} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 \dots \dots \dots (31)$$

Para reducir la no linealidad de la ecuación 31, se define el potencial de un gas real como:

$$P^* = \int_{P_0}^P \frac{\xi}{\mu(\xi) z(\xi)} d\xi$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} = \frac{\partial P^*}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P}{\mu z} \frac{\partial P}{\partial x}$$

La ecuación 30, también puede ser representada como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial P^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial P^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial P^*}{\partial z} \right) + \frac{14.7 T_y q_{vol}}{520 \times 5.615} = \phi \frac{\partial}{\partial t} (P/z) ,$$

donde:

$$\frac{\partial}{\partial t} (P/z) = \frac{P_c}{z} \frac{\partial P}{\partial P^*} \frac{\partial P^*}{\partial t}$$

$$\frac{\partial P}{\partial P^*} = \frac{1}{dP^*/dP} \quad \text{---} \quad \frac{\partial}{\partial t} (P/z) = \frac{P_c}{z} \frac{\partial P}{\partial P^*} \frac{\partial P^*}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (P/z) = \frac{P_c}{z} \frac{\partial P}{\partial P^*} \frac{\partial P^*}{\partial t} = \frac{P_c}{z} \frac{1}{P/\mu z} \frac{\partial P^*}{\partial t} = \mu c \frac{\partial P^*}{\partial t},$$

por lo que la última ecuación de la página anterior puede expresarse como:

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial P^*}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \frac{\partial P^*}{\partial y}) + \frac{\partial P^*}{\partial z} + \frac{14.7 T_y q_{vol}}{520 \times 5.615} = \frac{\emptyset \mu c}{5.615} \frac{\partial P^*}{\partial t} \quad \dots (32)$$

donde el factor 1/5.615 del lado derecho es un factor de conversión de unidades para uso en el sistema inglés.

$$K(1.127 \times \text{Darcy}), T(^{\circ}\text{R}), P(\text{psia})$$

$$q_{vol} (\text{STB/dfa}), \mu(\text{cP}), t(\text{seg}), c(\text{psia})^{-1}$$

La Ec. 32 es la ecuación de difusión de un gas real, con fuente o sumidero, flujo laminar, viscoso, medio poroso incompresible, homogéneo, -- anisótropo, isotérmico.

Con viscosidad dependiente de la presión, para un medio heterogéneo, -- compresible y anisótropo, el planteamiento de la ecuación de flujo transitorio para la fase aceite es el siguiente:

$$\nabla \cdot \left(\frac{K}{\mu_0} \frac{K_{ro}}{B_0} \nabla \Delta \tau_0 \right) \Delta + q_0 (\text{STB/dfa}) = \frac{Vb}{5.615} \frac{\partial}{\partial t} \left(\emptyset \frac{S_0}{B_0} \right)$$

C A P I T U L O I V

A P L I C A C I O N E S

ECUACIONES DE FLUJO EN DIFERENTES SISTEMAS DE COORDENADAS:

Dada la ecuación de Laplace de la forma:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \dots\dots\dots (1)$$

para transformarla de coordenadas cartesianas a cilíndricas (Figura 14), - se hace lo siguiente:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

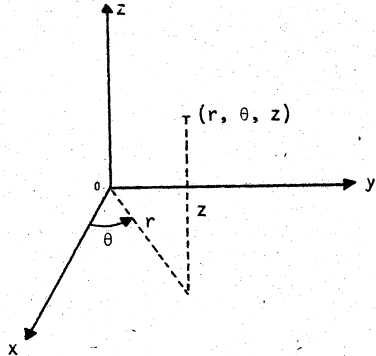


Fig. 14 Sistemas de coordenadas.

Derivando con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x} (x) = r (-\operatorname{sen} \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial r}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (y) = r (\cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial r}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (z) = \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

De las tres últimas ecuaciones se tiene:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1 + r \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}}{\cos \theta} \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\operatorname{sen} \theta \frac{\partial r}{\partial x}}{r \cos \theta} \dots \dots \dots (3)$$

Sustituyendo (3) en (2):

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1 + r \operatorname{sen} \theta (-\operatorname{sen} \theta \frac{\partial r}{\partial x} / r \cos \theta)}{\cos \theta} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial r}{\partial x} / \cos \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \theta / \cos \theta}{\cos \theta} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta$$

Sustituyendo este último valor en (3):

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{r \cos \theta} = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{r}$$

Análogamente, derivando con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y} (x) = r (-\operatorname{sen} \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial r}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (y) = r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial r}{\partial y} = 1$$

Resolviendo simultáneamente:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{r \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}}{\cos \theta} \dots \dots \dots (2)'$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1 - \operatorname{sen} \theta \frac{\partial r}{\partial y}}{r \cos \theta} \dots \dots \dots (3)'$$

Sustituyendo (2)' en (3)':

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1 - \operatorname{sen} \theta \left(\frac{r \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}}{\cos \theta} \right)}{r \cos \theta}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1 - r \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y}}{r \cos \theta}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta - r \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}}{r \cos^2 \theta}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} (r \cos^2 \theta + r \operatorname{sen}^2 \theta) = \cos \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}$$

Sustituyendo este último valor en (2)':

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{r \operatorname{sen} \theta \frac{\cos \theta}{r}}{\cos \theta} = \operatorname{sen} \theta$$

Además utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \dots \dots \dots (2)''$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \dots \dots \dots (3)''$$

Con lo anterior se puede determinar:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial P}{\partial \theta} \left(-\frac{\text{sen } \theta}{r} \right) \dots \dots \dots (2)'''$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial r} \text{sen } \theta + \frac{\partial P}{\partial \theta} \left(\frac{\text{cos } \theta}{r} \right) \dots \dots \dots (3)'''$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \dots \dots \dots (4)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} \dots \dots \dots (5)$$

Además de (4):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial P}{\partial r} \cos \theta - \frac{\text{sen } \theta}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial P}{\partial r} \cos \theta - \frac{\text{sen } \theta}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left[\cos \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \text{sen } \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right) \right] \cos \theta +$$

$$+ \left[\cos \theta \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \theta \partial r} \right) + \frac{\partial P}{\partial r} (-\text{sen } \theta) - \frac{1}{r} (\text{sen } \theta \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial P}{\partial \theta} \cos \theta) \right]$$

$$\cdot \left(-\frac{\text{sen } \theta}{r} \right)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left[\cos^2 \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \text{sen } \theta \cos \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \text{sen } \theta \cos \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] +$$

$$+ \left[-\frac{1}{r} \text{sen } \theta \cos \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \text{sen}^2 \theta \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \text{sen}^2 \theta \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2} \text{sen } \theta \cos \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right]$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\cdot \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta}$$

De (5):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial P}{\partial r} \operatorname{sen} \theta + \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right] \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial P}{\partial r} \operatorname{sen} \theta + \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right] \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \left[\operatorname{sen} \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \cos \theta \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right] \operatorname{sen} \theta +$$

$$+ \left[\frac{\partial P}{\partial r} \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial P}{\partial \theta} \left(-\operatorname{sen} \theta \right) \right) \right] \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{1}{r} \cos^2 \theta \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

$$\cdot \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \operatorname{sen} \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta} +$$

$$+ \frac{1}{r} \cos^2 \theta \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}$$

Además como:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}; \quad \text{ya que } z = z$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} &= [\cos^2 \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial P}{\partial r} + \\
&+ \frac{1}{r^2} \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta}] + [\operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \\
&- \frac{2}{r^2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \cos^2 \theta \frac{\partial P}{\partial r} + \\
&+ \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}] + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \\
\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \nabla^2 P &= \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} [\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta] + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} [\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta] \\
&+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} [\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta] + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\nabla^2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

Para el caso de pasar la ecuación de Laplace de coordenadas cartesianas a esféricas (figura 15), las relaciones son:

$$\begin{aligned}
x &= r \cos \theta \operatorname{sen} \phi \\
y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\
z &= r \cos \phi
\end{aligned}$$

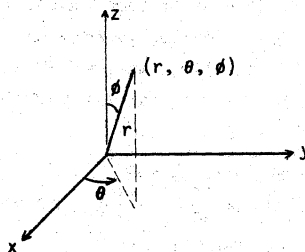


Fig. 15 Sistemas de coordenadas cartesiano y esférico.

Si siguiendo el mismo mecanismo, puede llegarse a:

$$\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{Cot} \vartheta}{r^2} \frac{\partial P}{\partial \vartheta} + \frac{2}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = 0 \dots (7)$$

SOLUCIONES DE ECUACIONES DE DIFUSION PARA DIFERENTES CONDICIONES DE FRONTERA (YACIMIENTO INFINITO; GASTO CONSTANTE, YACIMIENTO CILINDRICO, GASTO CONSTANTE EN EL POZO Y CERO FLUJO EN LA FRONTERA EXTERNA, etc.):

La ecuación de difusión presentada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\varnothing \mu c}{k} \frac{\partial P}{\partial t} \dots (8)$$

tiene como suposiciones principales:

- I.- Medio poroso homogéneo e isótropo.
- II.- Medio poroso incompresible.
- III.- Viscosidad independiente de la presión.
- IV.- No existe variación de la presión en la dirección Z.
- V.- Para un radio determinado 'r' la presión es la misma en todas direcciones.
- VI.- Efectos capilares y gravitacionales despreciables.
- VII.- No existen fuentes ni sumideros.
- VIII.- Fluido ligeramente compresible.
- IX.- Flujo laminar. Para obtener una solución de la Ec. 8 es necesario usar dos condiciones de frontera y una condición inicial:

- a) $P(r, 0) = P_i$; $r \geq 0$ (condición inicial).
- b) $\left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r_w} = - q \mu / 2 \pi kh$, $t > 0$ (condición de frontera interna)
- c) $\lim_{r \rightarrow \infty} P(r, t) = P_i$, $t \geq 0$ (condición de frontera externa)

La condición (b) puede ser aproximada por:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial P}{\partial r} = - \frac{q \mu}{2 \pi h k} \quad (b)'$$

Lo anterior, facilita la solución del problema planteado.

Si se define la variable:

$$Y = \frac{\phi \mu c r^2}{4 k t} \quad , \quad \dots \dots \dots (9)$$

llamada transformación de Boltzman, es posible expresar la presión como función a esta variable únicamente, es decir la Ec. 8 se transforma en una ecuación diferencial ordinaria.

$$\frac{\partial Y}{\partial r} = \frac{\phi \mu c r}{4 k t} (2) \left(\frac{r}{r}\right) = \left(\frac{2}{r}\right) \frac{\phi \mu c r^2}{4 k t} = \frac{2}{r} Y \quad \dots \dots (10)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = - \frac{\phi \mu c r^2 (4 k)}{(4 k t)^2} = - \frac{\phi \mu c r^2}{4 k t} \frac{(4 k)}{(4 k t)} = - \left(\frac{1}{t}\right) Y \quad \dots \dots (11)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial Y} \left(\frac{2 Y}{r}\right) \quad \dots \dots \dots (12)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial r}\right) \frac{\partial Y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right) \frac{\partial^2 Y}{\partial Y \partial r} + \frac{\partial Y}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial Y^2}\right) \frac{\partial Y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right) \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2}\right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial r}\right)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2y}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{r} \cdot \frac{\emptyset \mu c r^2}{4 k t} \right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = \frac{2 \emptyset \mu c}{4 k t} = \frac{\emptyset \mu c}{4 k t} \left(\frac{r^2}{r^2} \right) 2 = \frac{2y}{r^2} \dots \dots \dots (13)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \frac{2y}{r^2} + \left(\frac{2y}{r} \right)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{2y}{r^2} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{4y^2}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \dots \dots \dots (14)$$

Sustituyendo (12), y la expresión correspondiente a $\frac{\partial P}{\partial t}$ en la Ec. 8:

$$\frac{2y}{r^2} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{4y^2}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{2y}{r} \right) = \frac{\emptyset \mu c}{k t} \left(-\frac{y}{t} \right) \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{4y}{r^2} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{4y^2}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\emptyset \mu c}{k t} y \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$y \frac{\partial P}{\partial y} + y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\emptyset \mu c}{k t} \left(\frac{r^2}{4} \right) y \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$y \frac{\partial P}{\partial y} + y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -y^2 \frac{\partial P}{\partial y} ; \frac{\partial P}{\partial y} + y \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -y \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} (1 + y) + y \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

(Aquí puede usarse la notación de derivadas ordinarias)*

Por otra parte, de las condiciones (c) y (b)' y de la Ec. 9:

$$\text{Lím } P(y) \rightarrow \text{Lim } P \left(-\frac{\emptyset \mu c r^2}{4 k t} \right) = P_i \quad (d)$$

Si $t \rightarrow 0$ $\frac{\emptyset \mu c r^2}{4 k t} \rightarrow \infty$
 Es decir, $y \rightarrow \infty$

$$\text{Lim } r \left(\frac{\partial P}{\partial y} \frac{2y}{r} \right) = -\frac{q \mu}{2 \pi h k}$$

$y \rightarrow 0$

* puesto que "y" queda únicamente en función de P.

Si:

$$P^1 = \frac{dP}{dy}$$

$$Y \frac{dP^1}{dy} + (1 + Y) P^1 = 0$$

$$Y \frac{dP^1}{dy} = -(1 + Y) P^1$$

$$\int \frac{dP^1}{P^1} = - \int (1 + Y) \frac{dy}{y}$$

$$\ln P^1 = - \ln Y - Y + C1$$

$$P^1 = \exp(- \ln Y - Y) \exp(C1) = \frac{\exp(- Y)}{Y} \exp(C1); \dots (15)$$

Haciendo:

$$C2 = \exp(C1)$$

$$P^1 = \frac{1}{Y} \exp(- Y) C2 = \frac{dP}{dy}; \quad 2Y \frac{dP}{dy} = 2 C2 \exp(- Y) \dots (16)$$

De la condición:

$$\lim_{Y \rightarrow 0} 2Y \frac{dP}{dy} = \lim_{Y \rightarrow 0} 2 \exp(- Y) C2 = - 9 \mu/2 \pi k h$$

$$Y \rightarrow 0 \quad Y \rightarrow 0$$

$$C2 = - 9 \mu/4 \pi k h$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{1}{y} \exp(- Y) (- 9 \mu/4 \pi k h)$$

$$dP = \frac{dy}{y} \text{Exp}(-Y) (-q \mu / 4 \pi k h)$$

Integrando ambos miembros y utilizando la condición (d):

$$\int_{P_i}^P dP = \int_{\infty}^Y \frac{\text{Exp}(-Y)}{Y} dy (-q \mu / 4 \pi k h) = -q \mu / 4 \pi k h \int_{\infty}^Y \frac{\text{Exp}(-Y)}{Y} dy$$

$$P = P_i - \frac{q \mu}{4 \pi k h} \text{Ei}(-Y) = P_i - \frac{q \mu}{4 \pi k h} \text{Ei}\left(-\frac{\phi \mu c r^2}{4 k t}\right) \dots \dots \dots (17)$$

$$\text{Ei}(-Y) = \int_{\infty}^Y \frac{\text{Exp}(-Y)}{Y} dy$$

Esta última expresiones la función integral exponencial; para valores del - argumento menores de 0.0025, la función anterior puede aproximarse por:

$$\text{Ei}(-Y) \approx \text{Ln } Y + \gamma; \quad \gamma = 0.5772$$

La Ec. 17 es la solución fuente lineal continua de la Ec. 8

Para radios pequeños y/o tiempos grandes, la Ec. 17 se puede aproximar por:

$$P = P_i - \frac{q \mu}{4 \pi k h} (\text{Ln } Y + \gamma)$$

Puede verse que con la aproximación:

$$r \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r_w} = - \frac{q \mu}{2 \pi h k} \approx \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial P}{\partial r} = - \frac{q \mu}{2 \pi h k} ,$$

Se hizo más sencillo resolver el problema matemático.

La diferencia de los dos resultados obtenidos usando:

$$P = P_i - \frac{q \mu}{4 \pi h k} E_i \left(- \frac{\theta \mu c r^2}{4 k t} \right),$$

en relación de los que se obtienen aplicando la condición:

$$r \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r_w} = - \frac{q \mu}{2 \pi h k},$$

sólo es notable para tiempos de explotación muy cortos (del orden de unos segundos).

El desarrollo de la solución con las condiciones (a), (b), (c) es más complicado que dicho desarrollo con las condiciones (a), (b), (c); pero el resultado para fines prácticos es el mismo; sin embargo la condición (b) es más general, y se puede evaluar, por ejemplo: Para $r = r_e$; esto es aplicable en problemas de entrada de agua a los yacimientos:

A continuación se presenta el desarrollo con las condiciones (a), (b), (c). Utilizando variables adimensionales, lo que permite tener una solución más general, siendo una ventaja adicional el que las ecuaciones quedan en forma más compacta; definiendo:

$$t_D = \frac{k t}{\theta \mu c_t r_f^2} \quad \dots \dots \dots (19)$$

$$r_D = \frac{r}{r_f} \quad \dots \dots \dots (20)$$

$$P_D = \frac{P - P_i}{q \mu / 2 \pi k h} \quad \dots \dots \dots (21)$$

t (seg), c(1/atm), μ (cp), r_f (cm), donde r_f es el radio de la frontera interna (del pozo o del yacimiento).

Utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial r_D} \frac{\partial r_D}{\partial r} = \left(\frac{q\mu}{2\pi kh} \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right) \left(\frac{1}{r_f} \right) \dots \dots \dots (22)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r_D} \left(\frac{q\mu}{2\pi kh} \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \frac{1}{r_f} \right) \frac{\partial r_D}{\partial r} = \frac{q\mu}{2\pi kh} \frac{1}{r_f} \frac{\partial^2 P_D}{\partial r_D^2} \frac{1}{r_f}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{q\mu}{2\pi kh} \frac{1}{r_f^2} \frac{\partial^2 P_D}{\partial r_D^2} \dots \dots \dots (23)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t_D} \frac{\partial t_D}{\partial t}$$

$$\frac{\partial t_D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k t}{\phi \mu c r_f^2} \right) = \frac{k}{\phi \mu c r_f^2}$$

$$\frac{\partial P_D}{\partial t_D} = \frac{\partial}{\partial t_D} \left(\frac{P - P_i}{q \mu / 2 \pi k h} \right) = \frac{2 \pi k h}{q \mu} \frac{\partial P}{\partial t_D}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t_D} = \frac{q \mu}{2 \pi k h} \frac{\partial P_D}{\partial t_D}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{q \mu}{2 \pi k h} \frac{\partial P_D}{\partial t_D} \frac{k}{\phi \mu c r_f^2} \dots \dots \dots (24)$$

Substituyendo las Ecs. 22, 23 y 24 en la Ec. 8 y,

simplificando:

$$\frac{\partial^2 P_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial P_D}{\partial r_D} = \frac{\partial P_D}{\partial t_D} \dots \dots \dots (25)$$

que es la ecuación de difusión en forma adimensional, cuando las características de flujo varían con r_D y t_D .

Con los cambios de variables anteriores, las condiciones (a), (b), (c) se transforman como sigue:

$$P(r, 0) = P_i, \quad r \geq 0$$

De:

$$P_D = \frac{P - P_i}{q \mu / 2 \pi k h}; \quad \text{haciendo } P = P_i$$

$$P_D = 0 \quad \therefore \quad P_D(r_D, 0) = 0, \quad r_D \geq 0 \quad \dots \dots (a)$$

De la condición (b):

$$\left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r_w} = - \frac{q \mu}{2 \pi k h}, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial r_D} \frac{\partial r_D}{\partial r}$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{q \mu}{2 \pi k h} \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \frac{1}{r_f}$$

$$\therefore r_D r_w \frac{q \mu}{2 \pi k h} \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \frac{1}{r_w} = - \frac{q \mu}{2 \pi k h}$$

$$\frac{\partial P_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = -1, \quad t_D > 0 \quad \text{----- (b')}$$

De la condición (c):

$$\begin{aligned} \text{Lím } P(r, t) &= P_i, & t &\geq 0 \\ r &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

De:

$$P_D = \frac{P - P_i}{q \mu / 2 \pi h k} \quad \text{para } P = P_i$$

$$P_D = 0$$

Si:

$$r \rightarrow \infty; \quad r_D \rightarrow \infty$$

$$\therefore \text{Lím } P_D(r_D, t_D) = 0, \quad t_D \geq 0 \quad \text{----- (c')}$$

$$r_D \rightarrow \infty$$

Si ahora se aplica la transformación de Laplace a cada término de la Ec. 25, recordando el teorema de transformada de Laplace de derivadas:

$$\frac{d^2 P_D}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d P_D}{dr_D} - P_D = s P_D, \text{ ----- (26)}$$

donde se ha utilizado (á) y $P_D(r_D, s)$ es la transformada de Laplace de $P_D(r_D, t_D)$. En forma similar se tiene de las condiciones (b) y (c):

$$(b) \left(-\frac{d P_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = -\frac{1}{s}$$

$$(c) \lim_{r_D \rightarrow \infty} P_D(r_D, s) = 0$$

Por otro lado, recordando que la ecuación de Bessel modificada es:

$$x^2 Y'' + xY' - (x^2 + \gamma^2) Y = 0,$$

la Ec. 26 puede escribirse en esta forma, haciendo el cambio de variable:

$$w = \sqrt{s} r_D$$

$$\frac{d^2 P_D}{dr_D^2} = \frac{d P_D}{dw} \frac{dw}{dr_D} = \sqrt{s} \frac{d P_D}{dw}$$

Y:

$$\frac{d^2 P_D}{dr_D^2} = \frac{d}{dw} \left(\frac{d P_D}{dr_D} \right) \frac{dw}{dr_D} = s \frac{d^2 P_D}{dw^2}$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ec. 26 y simplificando, se llega a:

$$w^2 \frac{d^2 \bar{P}_D}{dw^2} + w \frac{d \bar{P}_D}{dw} - w^2 \bar{P}_D = 0 \dots\dots\dots (27)$$

De ésta, se deduce que $\gamma = 0$ y por lo tanto una solución particular de la Ec. 27 es $I_0(w) = I_0(\sqrt{S} r_D)$, que es la función Bessel modificada de primera clase de orden cero.

Una segunda solución de la Ec. 27, linealmente independiente de $I_0(\sqrt{S} r_D)$, es la función Bessel modificada de segunda clase de orden cero, que se denota por $K_0(\sqrt{S} r_D)$.

Por consiguiente, la solución general de la Ec. 26 es:

$$\bar{P}_D(r_D, S) = A I_0(\sqrt{S} r_D) + B K_0(\sqrt{S} r_D) \dots\dots\dots (28)$$

Si el argumento:

$$\sqrt{S} r_D \longrightarrow \infty, \text{ entonces } I_0(\sqrt{S} r_D) \longrightarrow \infty$$

Y:

$$K_0(\sqrt{S} r_D) \longrightarrow 0$$

Entonces aplicando (c)", se tiene $A = 0$ y la Ec. 28 se reduce a:

$$\bar{P}_D(r_D, S) = B K_0(\sqrt{S} r_D) \dots\dots\dots (29)$$

Además, se puede demostrar que:

$$\frac{d}{dr_D} K_0(\sqrt{S} r_D) = -\sqrt{S} K_1(\sqrt{S} r_D)$$

Por consiguiente, de la Ec. 29:

$$\frac{d \bar{P}_D}{dr_D} = B \frac{d K_0}{dr_D}(\sqrt{S} r_D) = -B \sqrt{S} K_1(\sqrt{S} r_D),$$

Aplicando (b)''

$$B = \frac{1}{S^{3/2} k_1(\sqrt{S})}$$

Sustituyendo en (29):

$$\bar{P}_D(r_D, S) = \frac{k_0(\sqrt{S} \cdot r_D)}{S^{3/2} k_1(\sqrt{S})}, \dots \dots \dots (30)$$

Que es la solución del problema en el espacio transformado.

Hurst y Van Everdigen, presentan el desarrollo de la solución $P_D(r_D, t_D)$, empleando la transformada inversa, a partir de (30), esta solución es:

$$P_D(r_D, t_D) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 - \text{Exp}(-v^2 t_D)) [J_1(v) \cdot Y_0(v r_D) - Y_1(v) J_0(v r_D)]}{v^2 [J_1^2(v) + Y_1^2(v)]} dv \dots (31)$$

en donde J_0, J_1 son las funciones Bessel de primera clase de orden 0 y 1, respectivamente; Y_0 y Y_1 son las funciones Bessel de segunda clase de orden 0 y 1, respectivamente y v es la variable de integración.

En la práctica es posible simplificar la solución en el espacio transformado antes de aplicar la fórmula de inversión.

Así:

$$\lim_{t_D \rightarrow 0} f(t_D) = \lim_{S \rightarrow \infty} S F(S) \dots \dots \dots (32)$$

$$\lim_{t_D \rightarrow \infty} f(t_D) = \lim_{S \rightarrow 0} S F(S), \dots \dots \dots (33)$$

En donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t_D)$. De acuerdo con las propiedades anteriores, las simplificaciones posibles -- son para tiempos pequeños, que corresponden a valores grandes -- del parámetro 'S' y para tiempos grandes, que corresponden a valores pequeños de S, en la función transformada.

Considerando la Ec. 19, la aproximación para tiempos adimensionales ' t_D ' pequeños es aplicable cuando $r_f = r_e$, hasta un valor de terminado del tiempo real 't'; es decir, esta aproximación es -- útil en problemas en los cuales la frontera interna del sistema -- es el radio del yacimiento. En forma similar, la segunda aproximación es aplicable si $r_f = r_w$, incluso para pequeños valores -- del tiempo real 't'.

En la práctica se considera que el tiempo adimensional es grande si éste es mayor de 100.

Aplicando la aproximación para tiempos adimensionales pequeños y para $r_D = 1$ se tiene, de la Ec. 30:

$$\bar{P}_D(1, S) = \frac{1}{S^{3/2}}, \dots \dots \dots (34)$$

puesto que:

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \text{Exp}(-z), \dots \dots \dots (35)$$

para argumentos z grandes.

De Tablas de transformadas de Laplace, se obtiene la función original correspondiente a $\bar{P}_D(1, S)$:

$$P_D(1, t_D) = 2 \sqrt{t_D/\pi} \dots \dots \dots (36)$$

Esta es la aproximación de la solución, evaluada en $r_D = 1$, para un sistema infinito con un gasto constante a través de la frontera interna de radio 're'.

La segunda simplificación de la Ec. 30 que es para tiempos adimensionales grandes, se puede escribir como:

$$P_D(1, S) = - \frac{\ln S}{2S} + \frac{\ln 2 - \gamma}{S} \dots \dots \dots (37)$$

en donde $\gamma = .5772$ es la constante de Euler, puesto que, si el argumento Z es pequeño,

$$K_0(z) = - (\ln \frac{z}{2} + \gamma)$$

$$K_1(z) = 1/z$$

La función original correspondiente al segundo miembro de la ecuación 37 es:

$$P_D(1, t_D) = \frac{1}{2} (\ln 4 t_D - \gamma) = \frac{1}{2} (\ln t_D + 0.80907), \dots \dots (38)$$

que es la aproximación para un sistema infinito con un gasto constante a través de la frontera interna de radio 'rw'.

Obsérvese que la ecuación 38 es equivalente a la ecuación 17, cuando en esta última el argumento de la función integral exponencial es pequeño.

YACIMIENTO CIRCULAR. GASTO CONSTANTE EN LA FRONTERA INTERNA
Y CERO FLUJO EN LA FRONTERA EXTERNA

En este caso, se trata de resolver la ecuación 8 con las condiciones siguientes:

- (d) $P(r, 0) = P_i, \quad r \geq 0$
- (e) $(r \frac{\partial P}{\partial r})_{r_w} = -q \mu/2 \pi k h, \quad t > 0$
- (f) $(\frac{\partial P}{\partial r})_{r_a} = 0, \quad t \geq 0$

Considerando los cambios de variable de las ecuaciones 19 y 21 y tomando en cuenta que ahora el radio de la frontera interna es r_w se obtiene la ecuación adimensional:

$$\frac{\partial^2 P_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial P_D}{\partial r_D} = \frac{\partial P_D}{\partial t_D}, \dots \dots \dots (39)$$

con las condiciones:

- (d)' $P_D(r_{eD}, 0) = 0, \quad r_D \geq 0$
- (e)' $(\frac{\partial P_D}{\partial r_D})_{r_D} = -1, \quad t_D > 0$
- (f)' $(\frac{\partial P_D}{\partial r_D})_{r_{eD}} = 0, \quad t_D \geq 0$

Aplicando la transformación de Laplace a la ecuación 39 y a las condiciones (d)' a (f)', en forma similar al problema anterior, se tiene:

$$\frac{d^2 \bar{P}_D}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \bar{P}_D}{dr_D} = S \bar{P}_D \dots \dots \dots (40)$$

$$(e) \quad \left(\frac{d P_D}{dr_D} \right) = - 1/S$$

$$(f) \quad \left(\frac{d \bar{P}_D}{dr_D} \right)_{r_{eD}} = 0 \quad , \text{ respectivamente}$$

La solución general de la ecuación 40 es:

$$\bar{P}_D(r_D, S) = A I_0(\sqrt{S} r_D) + B K_0(\sqrt{S} r_D) \dots \dots \dots (41)$$

Derivando esta ecuación con respecto a r_D , evaluando en $r_D = 1$ y r_{eD} y aplicando las condiciones (e)" y (f)" se tiene:

$$A \sqrt{S} I_1(\sqrt{S}) - B \sqrt{S} K_1(\sqrt{S}) = - 1/S$$

$$A \sqrt{S} I_1(r_{eD} \sqrt{S}) - B \sqrt{S} K_1(r_{eD} \sqrt{S}) = 0 \quad ,$$

de donde:

$$A = \frac{K_1(r_{eD} \sqrt{S})}{S^{3/2} [I_1(r_{eD} \sqrt{S}) K_1(\sqrt{S}) - I_1(\sqrt{S}) K_1(r_{eD} \sqrt{S})]}$$

Y:

$$B = \frac{I_1(r_{eD} \sqrt{S})}{S^{3/2} [I_1(r_{eD} \sqrt{S}) K_1(\sqrt{S}) - I_1(\sqrt{S}) K_1(r_{eD} \sqrt{S})]}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 41, se obtiene:

$$\bar{P}_D(r_D, S) = \frac{K_1(r_{eD} \sqrt{S}) I_0(r_D \sqrt{S}) + I_1(r_{eD} \sqrt{S}) K_0(r_D \sqrt{S})}{S^{3/2} [I_1(r_{eD} \sqrt{S}) K_1(\sqrt{S}) - I_1(\sqrt{S}) K_1(r_{eD} \sqrt{S})]} \dots \dots \dots (42)$$

que es la transformada de Laplace de la solución, cuando se tiene un yacimiento circular con un pozo situado en el centro del mismo, que produce a gasto constante.

Para valores pequeños del parámetro "S", la Ec. 42 se puede aproximar por:

$$P_D(r_D, S) = \frac{1}{S} \left(\frac{re_{D^2}}{re_{D^2}-1} \ln\left(\frac{re_D}{r_D}\right) - \frac{re_{D^2} \cdot r_{D^2}}{(2 re_{D^2}-1)} + \frac{re_{D^2} \ln re_D}{(re_{D^2}-1)^2} - \frac{re_D^2 + 1}{4(re_{D^2}-1)} + \frac{1}{S^2} \frac{2}{re_{D^2}-1}, \dots \dots \dots (43) \right)$$

a la cual corresponde la función original:

$$\bar{P}_D(r_D, t_D) = \frac{2}{re_{D^2}-1} \left(\frac{r_{D^2}}{4} + t_D \right) - \frac{re_{D^2}}{re_{D^2}-1} \ln r_D - \frac{3 re_{D^2} - 4 re_D^2 \ln re_D}{4(re_{D^2}-1)} - \frac{2 re_{D^2} - 1}{4(re_{D^2}-1)^2}, \dots \dots \dots (44)$$

que es válida para valores grandes del tiempo adimensional t_D .

Para obtener la función original correspondiente a la Ec. 42, se utiliza el teorema de residuos de Cauchy (Pressure Buildup and Flow tests in Wells, Matthews and Russell, pag. 132).

Esta función es:

$$P_D(r_D, t_D) = \frac{2}{re_{D^2}-1} \left(\frac{r_{D^2}}{4} + t_D \right) - \frac{re_{D^2}}{re_{D^2}-1} \ln r_D - \frac{3 re_{D^2} - 4 re_D^2 \ln re_D - 2 re_{D^2} - 1}{4(re_{D^2}-1)^2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Exp}(-\alpha n^2 t_D) J_0^2(\alpha n re_D)}{\dots} *$$

* Termina en la siguiente página.

$$\frac{[J_1(\alpha\eta) Y_0(\alpha\eta r_D) - Y_1(\alpha\eta) J_0(\alpha\eta r_D)]}{\alpha\eta [J_1^2(\alpha\eta r_D) - J_1^2(\alpha\eta)]} \dots \dots \dots (45)$$

En donde $\alpha\eta$ son las raíces de:

$$J_1(\alpha\eta r_D) Y_1(\alpha\eta) - J_1(\alpha\eta) Y_1(\alpha\eta r_D) = 0,$$

con la que se obtiene $P_D(r_D, t_D)$ para cualquier valor de t_D .

Para valores grandes del tiempo adimensional, la serie infinita de la Ec. 45 tiende a cero.

Suponiendo que $re \gg rw$, para $r_D = 1$ la ecuación se puede aproximar por:

$$P_D(1, t_D) = \frac{2t_D}{re_D^2} + \ln re_D - \frac{3}{4} + 2 \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{\text{Exp}(-\alpha\eta^2 t_D) J_1^2(\alpha\eta re_D)}{\alpha\eta^2 [J_1(\alpha\eta re_D) - J_1^2(\alpha\eta)]} \dots \dots \dots (46)$$

Puesto que:

$$J_1(\alpha\eta) Y_0(\alpha\eta) - Y_1(\alpha\eta) J_0(\alpha\eta) = \frac{2}{\pi \alpha\eta} \dots \dots \dots (47)$$

YACIMIENTO CIRCULAR, GASTO CONSTANTE EN LA FRONTERA INTERNA Y PRESION CONSTANTE EN LA FRONTERA EXTERNA

La única diferencia con el problema anterior es la segunda condición de frontera. Esta se expresa como:

$$(g) \quad P(r_e, t) = P_i, \quad t \geq 0$$

En forma similar a como se obtuvo la Ec. 42, se llega a:

* continuación de la ecuación.

$$P_D(r_D, s) = \frac{I_0(r_{eD} \sqrt{s}) K_0(r_D \sqrt{s}) - K_0(r_{eD} \sqrt{s}) I_0(r_D \sqrt{s})}{s^{3/2} [I_1(\sqrt{s}) K_0(r_{eD} \sqrt{s}) + K_1(\sqrt{s}) I_0(r_{eD} \sqrt{s})]} \dots (48)$$

que es la solución del problema en el espacio transformado. La función original correspondiente es:

$$P_D(r_D, t_D) = \ln \frac{r_{eD}}{r_D} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Exp}(-\beta_n^2 t_D) J_0(\beta_n r_{eD}) [J_1(\beta_n) Y_0(\beta_n r_D)]}{\beta_n [J_1^2(\beta_n) - J_0^2(\beta_n r_{eD})]} - \frac{Y_1(\beta_n) J_0(\beta_n r_D)}{\beta_n [J_1^2(\beta_n) - J_0^2(\beta_n r_{eD})]}, \dots (49)$$

en donde β_n son soluciones de la ecuación:

$$J_1(\beta_n) Y_0(\beta_n r_{eD}) - Y_1(\beta_n) J_0(\beta_n r_{eD}) = 0$$

Si $r_D = 1$, de la Ec. 49 se tiene, considerando la Ec. 47.

$$P_D(1, t_D) = \ln r_{eD} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Exp}(-\beta_n^2 t_D) J_0^2(\beta_n r_{eD})}{\beta_n^2 [J_1^2(\beta_n) - J_0^2(\beta_n r_{eD})]}, \dots (50)$$

con la cual se puede calcular la caída de presión en el pozo.

A medida que t_D aumenta, la serie infinita de la Ec. 49, tiende a cero, por consiguiente, para tiempos adimensionales grandes:

$$P_D(r_D) = \ln \frac{r_{eD}}{r_D} = \ln \frac{r_e}{r} \dots (51)$$

lo que significa que las condiciones de flujo llegan a ser en régimen permanente, para tiempos suficientemente grandes.

Puesto que la caída de presión adimensional está dada por:

$$P_D = \frac{P - P_i}{q \mu / 2 \pi k h}$$

entonces, de la ecuación anterior:

$$q = \frac{2 \pi k h (P - P_i)}{\mu LN re/r}, \dots \dots \dots (52)$$

que es una de las ecuaciones más conocidas en yacimientos, en la cual 'P', es la presión a una distancia 'r' del pozo.

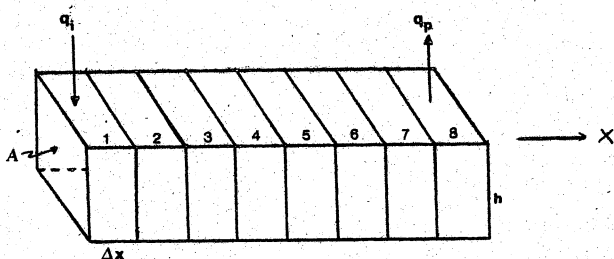


Fig. 16 Flujo lineal

SIMULACION NUMERICA DE YACIMIENTOS:

Considérese la ecuación de flujo monofásico, unidimensional, en régimen permanente (el caso más sencillo) con el siguiente arreglo de pozos que se muestra en la Fig. 16

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x A}{\mu B} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right) \cdot \Delta z + q = 0 ,$$

de donde, para k_x , A , μ y B constantes

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = - \frac{q \mu B}{\Delta z k_x A} = 0 .$$

Utilizando la serie Taylor y usando diferencias centrales, para expresar la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{P_i - 1 - 2 P_i + P_i + 1}{(\Delta x)^2} + o(\Delta x^2)$$

Sustituyendo:

$$\frac{P_i - 1 - 2 P_i + P_i + 1}{\Delta x^2} + \frac{q \mu B}{\Delta z k x A} = 0 ,$$

donde se tiene un error al aproximar la segunda derivada.

A continuación se ilustra con un programa de cómputo la solución de este problema:

```

DIMENSION A(50), B(50), C(50), D(50), X(50)
15 READ (5, 81, END = 1)N
81  FØRMAT (I2)
    READ (5,100)(A(I), B(I), C(I), D(I), I = 1, N)
100 FØRMAT (4F10.3)
    IF(N.IE.0) GØ TØ 1
    CALL THØMAS (N, A, B, C, D, X)
    WRITE (6, 99)
99  FØRMAT (1H1, 60X, 'LA SØLUCIØN DEL SISTEMA PØR THØMAS ES'///)
    DØ 7 I = 1, N
    WRITE (6, 200)(A(I), B(I), C(I), D(I), X(I)), N
7   CØNTINUE
200 FØRMAT (5X, 4F12.7, 9X, F12.7, 6X,I2)
    GØ TØ 15
1   STØP
    END

```

```

C
C
C  SUBROUTINE THØMAS
SUBROUTINE THØMAS (N, A, B, C, D, X)
DIMENSION A(50), B(50), C(50), D(50), X(50), U(50), Y(50), Z(50)
U(1) = B(1)
Y(1) = C(1)/U(1)
DØ 5 I = 2, N
U(I) = B(I) - A(I)* Y(I - 1)
Y(I) = C(I)/U(I)
5  CØNTINUE
Z(I) = D(I)/U(I)
DØ 6 I = 2, N
Z(I) = (D(I) - A(I)* Z(I - 1))/U(I)
6  CØNTINUE
I = N
35 I = N - 1
X(I) = Z(I) - Y(I)* X(I + 1)
N = 1
IF(N.GT.1) GØ TØ 35
N = 1
RETURN

```

RESULTADOS :

$$q_1 = 800 \quad \text{BPD}$$

$$q_8 = - 800 \quad \text{BPD}$$

$$q_2 = \dots \dots = q_7 = 0$$

$$P_1 = 800 \quad (\text{psi})$$

$$P_2 = 728.57 \quad (\text{psi})$$

$$P_3 = 657.14 \quad (\text{psi})$$

$$P_4 = 585.71 \quad (\text{psi})$$

$$P_5 = 514.28 \quad (\text{psi})$$

$$P_6 = 442.85 \quad (\text{psi})$$

$$P_7 = 371.42 \quad (\text{psi})$$

$$P_8 = 300.00 \quad (\text{psi})$$

NOMENCLATURA

A	Area.
B	Factor de volumen.
C	Constante.
C_t	Compresibilidad del sistema roca - fluidos.
E	Energía.
Exp(x)	Función exponencial.
F	Frontera.
G, H	Funciones.
J_v	Función Bessel de 1ra. clase de orden v.
K	Permeabilidad absoluta.
L	Longitud.
M	Peso molecular.
P	Presión.
P^*	Potencial de un gas real.
R	Constante universal de los gases.
S	Parámetro en el plano de Laplace.
T	Gradiente gravitacional.
V	Volumen.
W	Trabajo.
Z	Factor de compresibilidad.
d	Diámetro.
f	Porosidad del medio poroso.
g	Aceleración de la gravedad.
h	Espesor.
i	Inicial.
m	Masa.
n	Elementos.
o	Aceite.

q	Gasto.
r	Distancia radial.
t	Tiempo.
x	Dirección en x.
y	Dirección en y.
z	Dirección en z.
ϕ	Porosidad media.
$\bar{\phi}$	Potencial de flujo.
ϕ	Porosidad.
σ^2	Desviación estándar.
ϵ	Volumen de la celda.
ξ	Superficie específica.
μ	Viscosidad.
$\Gamma(\infty)$	Función Gamma.
v	No. real positivo.
Y_ν	Función Bessel de 2a. clase de orden ν .
∇	Gradiente.
∂	Parcial.
ρ	Densidad.
v	Velocidad.
ξ	Factor de fricción.
θ	Angulo.

SUBINDICES

s	Muestra.
D	Adimensional.
f	Fractura.
o	Inicial.
r	Relativo.
ω	Pozo.

BIBLIOGRAFIA

- COLLINS, R.E. Flow of Fluids Through
Porous Materials, Reinhold
Publishing Corporation (1961)
- MATTHEWS, C.S. Y RUSSEL D.G. Pressure Buildup and Flow
Test in Wells, SPE of AIME (1967)
- L.P. DAKE Fundamentals of Reservoir
Engineering. (1982)
- SCHEIDEGGER, A.E. The Physics of Flow
Through Porous Media
- RODRIGUEZ NIETO R. Matemáticas aplicadas a
Flujo de Fluidos en Medios
Porosos, Publicación 72
BH/095 del I.M.P. (1972)
- HENRY B. CRICLOW Modern Reservoir Engineering
A Simulation Approach.

