



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Aplicación de FEM en problemas de
conducción de calor y flujo de
fluidos en medios porosos**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Petrolero

P R E S E N T A

Luis Daniel Gómez Ledesma

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Teodoro Iván Guerrero Sarabia



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2026



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL**
(Titulación con trabajo escrito)



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado APLICACION DE FEM EN PROBLEMAS DE CONDUCCION DE CALOR Y FLUJO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS que presenté para obtener el título de INGENIERO PETROLERO es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

LUIS DANIEL GÓMEZ LEDESMA
Número de cuenta: 317212235

Un agradecimiento especial al Grupo de Investigación en Ingeniería Multifásica y Aseguramiento de Flujo (GIIMAF) de la Facultad de Ingeniería por las facilidades otorgadas para la realización de este trabajo.



Resumen

Una problemática frecuente en la explotación de los yacimientos de petróleo pesado y extrapesado radica en los valores extremos de viscosidad que este tipo de fluidos suelen presentar en algunos casos. En este escenario, resulta conveniente la implementación de procesos térmicos de recuperación mejorada para reducir su viscosidad y favorecer la movilidad del fluido en el medio poroso. Entre los métodos térmicos pueden mencionarse la inyección de vapor, la combustión in-situ y el drene gravitacional asistido por vapor (SAGD, por sus siglas en inglés). Este último, ha sido implementado exitosamente en yacimientos de Canadá, y podría constituir una opción en algunos campos de México.

Ahora bien, para estudiar y simular computacionalmente el comportamiento de este tipo sistemas, es importante conocer, además del modelado de flujo de fluidos en medios porosos, los fundamentos de la transferencia de calor en este tipo de sistemas. Al respecto, es pertinente mencionar que en la carrera de ingeniería petrolera se aborda extensivamente el modelado analítico y numérico del flujo de fluidos en medios porosos en condiciones isotérmicas. De esta manera, el estudiantado no está familiarizado con los procesos de transferencia de calor. Este aspecto constituye una primera motivación para el desarrollo del presente trabajo.

Por otra parte, con relación a la simulación numérica de yacimientos en ingeniería petrolera, es conveniente mencionar que tradicionalmente está basada en el método de diferencias finitas. No obstante, en otras disciplinas existen diversos métodos numéricos para simular el flujo de fluidos; entre ellos, puede mencionarse el método de elemento finito, el cual permite capturar con mayor aproximación geometrías complejas, como sería el caso de los yacimientos petroleros. Este tema no es abordado en el plan de estudios vigente de la carrera de ingeniería petrolera, por lo que constituye una segunda motivación en esta tesis.

Con base en lo expuesto, el presente trabajo tiene como objetivo aplicar el método de elemento finito para resolver problemas de conducción de calor y de flujo de fluidos en medios porosos en régimen transitorio, en una y dos dimensiones. En el documento, primeramente, se abordan las problemáticas en la explotación de los yacimientos de petróleo pesado y extrapesado. Se presenta un panorama de los métodos de recuperación existentes, con énfasis en los métodos térmicos de recuperación mejorada y, en particular, el drene gravitacional asistido con vapor (SAGD). Se abordan las ecuaciones de difusividad térmica y de difusividad hidráulica en medios porosos. Posteriormente, se presentan los fundamentos del método de elemento finito. Finalmente, se ejemplifica y discute la resolución de problemas de conducción de calor y de flujo de fluidos en medios porosos mediante el método de elemento finito.

Prefacio

Una problemática de actualidad en la industria petrolera de México radica en que los grandes campos que sostuvieron la producción de petróleo convencional en las últimas décadas se encuentran en su etapa de declinación. Por lo tanto, para sostener la plataforma de producción, los esfuerzos se han orientado en la explotación de los yacimientos de petróleo pesado y extrapesado, cuya extracción resultar más compleja debido a que, entre otros aspectos, pueden ser extremadamente viscosos. Como referencia, la viscosidad puede alcanzar valores del orden de decenas de miles de centipoises en algunos casos.

Por lo tanto, los yacimientos que presentan esta problemática demandan la implementación de métodos térmicos de recuperación mejorada, cuyo objetivo es abatir la viscosidad del aceite para favorecer su movilidad en el medio poroso. Entre ellos, pueden mencionarse la inyección de vapor, la combustión in-situ y el drene gravitacional asistido por vapor (SAGD, Steam Assisted Gravity Drainage, por sus siglas en inglés). Este último ha sido utilizado exitosamente en Canadá, y podría constituir una opción en algunos campos de México.

El sistema SAGD está conformado por dos pozos horizontales paralelos, uno por encima del otro a cierta distancia; el superior opera como pozo inyector de vapor, en tanto que el inferior es el productor. En el proceso se forma una cámara de vapor que calienta el aceite en el yacimiento, reduciendo así su viscosidad; como resultado, el aceite se desplaza hacia el pozo productor por efecto de la gravedad. Como puede intuirse, durante la implementación de este sistema ocurren procesos complejos de conducción y convección de calor en sistemas multifásicos.

En este contexto, es claro que la ingeniería detrás de estos métodos térmicos requiere conocimientos sólidos en temas de transferencia de calor y de flujo de fluidos en medios porosos. Al respecto, es pertinente mencionar que en la carrera de ingeniería petrolera se aborda extensivamente el modelado analítico y numérico del flujo de fluidos en medios porosos, pero en condiciones isotérmicas. De esta manera, el estudiantado no necesariamente está familiarizado con los procesos de transferencia de calor.

Ahora bien, con relación a la simulación numérica de yacimientos en ingeniería petrolera, es conveniente destacar que tradicionalmente está basada en el método de diferencias finitas. No obstante, en otras disciplinas existen diversos métodos numéricos para simular el flujo de fluidos; entre ellos, puede mencionarse el método de elemento finito (FEM, Finite Element Method, por sus siglas en inglés), el cual permite capturar con mayor aproximación geometrías complejas, como sería el caso de los yacimientos petroleros. Este tema no es abordado en el plan de estudios vigente de la carrera de ingeniería petrolera, por lo que constituye una motivación adicional para el desarrollo de esta tesis.

Reconociendo la complejidad de los procesos físicos que ocurren durante la implementación de los métodos térmicos de recuperación mejorada, los cuales demandan conocimientos avanzados de transferencia de calor y flujo multifásico en medios porosos, así como de métodos numéricos para simularlos, este trabajo de licenciatura está acotado a presentar conocimientos introductorios para resolver problemas de conducción de calor y de flujo en medios porosos mediante el método de elemento finito. Los objetivos y contenido de la tesis se indican a continuación.

Objetivo general

Aplicar el método de elemento finito para resolver problemas de flujo de fluidos y de conducción de calor en condiciones transitorias en medios porosos, en una y dos dimensiones.

Objetivos específicos

- Documentar los fundamentos de los temas siguientes: a) flujo de fluidos en medios porosos; b) conducción de calor; y c) método de elemento finito.
- Obtener la formulación requerida en el método de elemento finito para resolver problemas de conducción de calor y de flujo en medios porosos, en una y dos dimensiones, en condiciones estacionarias y transitorias, con diferentes tipos de condiciones de frontera.
- Implementar computacionalmente el método de elemento finito para resolver los problemas de transporte planteados.
- Verificar los resultados del programa computacional desarrollado.

Contenido de la tesis

En el capítulo 1, se presenta un panorama general de producción del petróleo pesado y extrapesado en México y el mundo, y se abordan los retos técnicos en su explotación. Asimismo, se describen los principales métodos térmicos utilizados en la industria para recuperar este tipo de fluidos, destacando el sistema de drene gravitacional asistido por vapor.

La deducción de la ecuación de difusividad hidráulica en medios porosos se aborda en el capítulo 2. Se discute cómo puede linealizarse en el caso de un fluido ligeramente compresible y, como caso particular, se presenta una solución analítica para una condición de flujo en régimen estacionario, útil para verificar los resultados del programa computacional desarrollado en este trabajo.

El capítulo 3 está orientado a presentar fundamentos de transferencia de calor, abordando los modos en que ocurre y sus respectivos mecanismos físicos y leyes fenomenológicas. Posteriormente, se presenta la deducción de la ecuación que gobierna

la conducción de calor en régimen transitorio. Se presenta una solución analítica para régimen estacionario, la cual se utiliza en desarrollos posteriores.

Una introducción al método de elemento finito se presenta en el capítulo 4. A lo largo del capítulo, se explica detalladamente cómo se obtiene la formulación requerida en el método de elemento finito para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden en una y dos dimensiones, en condiciones estacionarias y transitorias. Se mencionan los tipos de mallas numéricas y se explica cómo se construye la matriz de rigidez y el vector de fuerza para elementos finitos triangulares. Finalmente, se describe el programa computacional desarrollado en el marco del presente trabajo.

En el capítulo 5, se presentan diversos problemas de conducción de calor y de flujo en medios porosos, explicando el procedimiento para resolverlos mediante el método de elemento finito. Se consideran problemas en 1D y 2D, en regímenes estacionario y transitorio, y con condiciones de frontera de tipo Dirichlet y Neumann. En cada caso, se discute la verificación de resultados de las simulaciones realizadas en el programa de cómputo desarrollado.

Finalmente, se presentan las conclusiones y recomendaciones del presente trabajo.

Contenido

Resumen	i
Prefacio	iii
Lista de Figuras	x
Lista de Tablas.....	xiii
Nomenclatura.....	xiv
Capítulo 1. Antecedentes	1
1.1 Problemáticas de los crudos pesados	1
1.1.1 Panorama de la producción de petróleo pesado/extrapesado	1
1.1.2 Problemática en la extracción de petróleo pesado/extrapesado.....	3
1.2 Métodos térmicos recuperación mejorada.....	5
1.2.1 Inyección continua de vapor.....	7
1.2.2 Inyección cíclica de vapor	8
1.2.3 Combustión In-Situ.....	8
1.3 Drene gravitacional asistido con vapor.....	9
1.3.1 Ventajas y desventajas	11
1.3.2 Caso de aplicación exitoso.....	11
1.3.3 Motivación.....	12
Capítulo 2. Flujo de fluidos en medios porosos.....	14
2.1 Ley de Darcy.....	14
2.2 Ecuación de balance de materia	15
2.3 Ecuación de difusión hidráulica en medios porosos	17
2.3.1 Simplificación para un fluido ligeramente compresible	17

2.3.2 Ecuación de difusión en coordenadas radiales	19
Capítulo 3. Conducción de calor	22
3.1 Modos de transferencia de calor	22
3.1.1 Conducción	22
3.1.2 Convección	24
3.1.3 Radiación	25
3.2 Ecuación de balance de energía	27
3.3 Ecuación de difusividad térmica	29
3.3.1 Tipos de condiciones de frontera.....	30
3.3.2 Solución analítica en régimen estacionario en coordenadas radiales	30
Capítulo 4. Método de elemento finito.....	32
4.1 Preliminares	32
4.1.1 Generalidades	33
4.2 Método de Galerkin.....	35
4.3 Mallado y elementos finitos en 2D	38
4.3.1 Mallado del dominio	38
4.3.2 Elementos finitos triangulares	39
4.4 Discretización en tiempo	43
4.5 Implementación computacional	45
4.5.1 Estructura del programa computacional	45
Capítulo 5 Problemas de aplicación	51
5.1 Problemas de conducción de calor	51
5.1.1 Conducción de calor 1D en régimen estacionario	52

5.1.2 Conducción de calor 2D, con condiciones de frontera Dirichlet- Dirichlet..	57
5.1.3 Conducción de calor 2D, con condiciones de frontera Neumann-Dirichlet	68
5.2 Problemas de flujo de fluidos en medios porosos	80
5.2.1 Flujo de un medio poroso 2D, con condiciones de frontera Dirichlet - Dirichlet.....	80
5.2.2 Flujo de un medio poroso 2D, con condiciones de frontera Neumann- Dirichlet.....	92
Conclusiones y recomendaciones	104
Referencias bibliográficas	107

Listas de figuras

Figura 1.1 Producción en México y reservas mundiales por tipo de petróleo crudo (CNH, 2026; Schlumberger, 2018).....	2
Figura 1.2 Producción diaria por provincia petrolera en México (modificado de CONAHCYT, 2026).....	3
Figura 1.3 Variación de la viscosidad del petróleo con la densidad API (modificado de Alvarado y Manrique, 2010).	4
Figura 1.4 Variación típica de la viscosidad del petróleo con la temperatura (oilsandsmagazine, 2017).	4
Figura 1.5 Clasificación de los métodos de recuperación del petróleo (Green D.W., 1998).	6
Figura 1.6 Procesos de recuperación mejorada recomendados de acuerdo con la viscosidad del petróleo (modificado de Dong, Liu y Chen, 2020).	6
Figura 1.7 Etapas de la inyección continua de vapor (Vishnyakov. V ,2019).	8
Figura 1.8 Proceso de combustión in-situ (Ingeniería de Petróleo, 2010).....	9
Figura 1.9 Esquema del sistema SAGD (modificado de Singfield, 2016)	10
Figura 1.10 Proyecto SAGD en Foster Creek, Canadá (Cenovus Energy, 2025).	12
Figuras 2.1 Volumen de control para plantear el balance de materia	16
Figuras 2.2 Perfil de la presión en un sistema de coordenadas radiales	20
Figura 3.1 Volumen de control en coordenadas cilíndricas (Incropera et al., 2020).....	24
Figura 3.2 Volumen de control en coordenadas cartesianas (Incropera et al., 2020). .	27
Figura 3.3 Perfil de temperatura en régimen estacionario en coordenadas radiales ...	31
Figuras 4.1 Discretización de un sistema 1D en cinco elementos y seis nodos	33
Figuras 4.2 Visualización de funciones de peso en 1D	34
Figura 4.3 Ejemplo de una malla ortogonal. (El-Zafrany. A, 2014)	38
Figura 4.4 Ejemplo de una malla no ortogonal	39

Figura 4.5 Ejemplo de un elemento finito triangular	40
Figura 4.6 Arista de un elemento triangular en la frontera	42
Figura 4.7 Programa computacional en macros de VB para Excel.....	45
Figura 4.8 Código de visualización de resultados en el entorno de Python	47
Figura 4.9 Algoritmo de simulación en régimen estacionario.....	48
Figura 4.10 Algoritmo de simulación en régimen transitorio.	49
Figura 5.1 Conducción de calor en una barra en condiciones de régimen estacionario	52
Figura 5.2 Comparación de resultados con FEM y la solución exacta para el problema 5.1.1.....	56
Figura 5.3 Sistema analizado para el problema 5.1.2.....	57
Figura 5.4 Malla generada para el problema 5.1.2.	58
Figura 5.5 Comparación de las temperaturas calculadas con FEM y con la solución analítica para el problema 5.1.2.	62
Figura 5.6 Evolución temporal de los perfiles de temperatura para el problema 5.1.2... ..	66
Figura 5.7 Mapas de contorno con la distribución de la temperatura en el sistema a diferentes tiempos para el problema 5.1.2.	67
Figura 5.8 Sistema analizado para el problema 5.1.3.....	68
Figura 5.9 Comparación de las temperaturas calculadas con FEM y con la solución analítica para el problema 5.1.3.	73
Figura 5.10 Evolución temporal de los perfiles de temperatura para el ejercicio 5.1.2	78
Figura 5.11 Mapas de contorno con la distribución de la temperatura en el sistema a diferentes tiempos para el problema 5.1.3.	79
Figura 5.12 Sistema analizado para el problema 5.2.1.....	81
Figura 5.13 Malla generada para el problema 5.2.1.	82

Figura 5.14 Comparación de presiones calculadas con FEM y con la solución analítica para el problema 5.2.1	85
Figura 5.15 Evolución temporal de los perfiles de presión para el ejercicio 5.2.1.	89
Figura 5.16 Mapas de contorno con la distribución de la presión en el sistema a diferentes tiempos para el problema 5.2.1.	91
Figura 5.17 Sistema analizado para el problema 5.2.2.....	92
Figura 5.18 Comparación de las presiones calculadas con FEM y con la solución analítica para el problema 5.2.2.	97
Figura 5.19 Evolución temporal de los perfiles de presión para el ejercicio 5.2.2	102
Figura 5.20 Mapas de contorno con la distribución de la presión en el sistema a diferentes tiempos para el problema 5.2.2	103

Listas de tablas

Tabla 3.1 Modos de transferencia de calor con sus mecanismos y leyes fenomenológicas.....	26
Tabla 5.1 Datos de entrada para el problema 5.1.2.....	58
Tabla 5.2 Datos de los nodos que conforman al elemento 25	59
Tabla 5.3 Comparación de las temperaturas calculadas con FEM y con la solución analítica para el problema 5.1.2.....	62
Tabla 5.4 Perfiles de temperatura a distintos tiempos para el problema 5.1.2.....	66
Tabla 5.5 Datos de los nodos que conforman al elemento 34	69
Tabla 5.6 Datos de los nodos que conforman al elemento 1	70
Tabla 5.7 Comparación de las temperaturas calculadas con FEM y con la solución analítica para el problema 5.1.3.....	73
Tabla 5.8 Perfiles de temperatura a distintos tiempos para el ejercicio 5.1.3.....	77
Tabla 5.9 Verificación del perfil de temperatura a 22 días	78
Tabla 5.10 Datos de entrada para el problema 5.2.1.....	81
Tabla 5.11 Datos de los nodos que conforman al elemento 1368.....	82
Tabla 5.12 Comparación de las presiones calculadas con FEM y la solución analítica para el problema 5.2.1.....	86
Tabla 5.13 Perfiles de presión a distintos tiempos para el problema 5.2.1.....	90
Tabla 5.14 Datos de los nodos que conforman al elemento 23	93
Tabla 5.15 Datos de los nodos que conforman al elemento 1	94
Tabla 5.16 Comparación de las presiones calculadas con FEM y la solución analítica para el problema 5.2.2.....	97
Tabla 5.17 Perfiles de presión a distintos tiempos para el ejercicio 5.2.2.....	101
Tabla 5.18 Verificación del perfil de presión a 90 min.....	102

Nomenclatura

Propiedad	Símbolo	Unidad S.I	Unidad Campo
Área	A	$[m^2]$	$[ft^2]$
Capacidad térmica específica	C_p	$[J/K \text{ kg}]$	$[BTU/lb \cdot R]$
Coefficiente de convección de calor	h	$[K \cdot W/m^2]$	$[R \cdot BTU/ft^2]$
Compresibilidad total	c_t	$[Pa^{-1}]$	$[psi^{-1}]$
Conductividad térmica	k	$[W/m \cdot K]$	$[BTU/s \cdot ft \cdot R]$
Densidad	ρ	$[kg/m^3]$	$[lb/ft^3]$
Difusividad térmica	α	$[m^2/s]$	$[ft^2/s]$
Energía	E	$[J]$	$[BTU]$
Espesor	t	$[m]$	$[ft]$
Flujo de calor	q''	$[W/m^2]$	$[BTU/ft^2]$
Gasto masico	\dot{m}	$[Kg/s]$	$[lb/s]$
Permeabilidad	k	$[m^2]$	$[mD]$
Porosidad	ϕ	$[\%]$	$[\%]$
Presión	p	$[Pa]$	$[psi]$
Radio	r	$[m]$	$[ft]$
Ritmo de transferencia de calor	\dot{q}	$[W]$	$[BTU]$
Temperatura	T	$[K]$	$[R]$
Viscosidad	μ	$[Pa \cdot s]$	$[cp]$

Capítulo 1

Antecedentes

En este capítulo se presenta un panorama general de la producción del petróleo pesado y extrapesado en México y el mundo, y se menciona el reto que representa su explotación debido a que puede ser extremadamente viscoso. Posteriormente, se describen los principales métodos térmicos utilizados en la industria para recuperar este tipo de fluidos. En particular, se describe el método de drenaje gravitacional asistido por vapor, el cual ha sido aplicado exitosamente en yacimientos de arenas bituminosas en Canadá.

1.1 Petróleo pesado/extrapesado: producción y problemática

En esta sección, se presentan algunos datos estadísticos de la producción petrolera en México y el mundo, destacando la relevancia del petróleo pesado y extrapesado. Asimismo, se describe una de las problemáticas más comunes en la explotación de los yacimientos que contienen este tipo de fluidos, y que ha motivado la realización de este trabajo.

1.1.1 Panorama de la producción de petróleo pesado/extrapesado

En México y el mundo existen reservas importantes de hidrocarburos en el subsuelo. Al respecto, las reservas mundiales de petróleo en años recientes se estimaron del orden de 13 billones de barriles, divididas por tipo de recurso en: convencional (30%), pesados (15%), extrapesados (25%), y bitumen/arenas bituminosas (30%), como se ilustra en la **Figura 1.1** (Schlumberger, 2016). De acuerdo con estos datos, el 40% corresponde a crudos pesados y extrapesados, los cuales son de difícil extracción, como se describe más adelante.

En México, la producción petrolera en el año 2024 fue de aproximadamente 1,820 MBD (CNH, 2024), distribuidos en (**Figura 1.1**): súper ligero (19.8%), ligero (20%), mediano (21%), pesado (33.4%) y extrapesado (5.7%). De esta manera, aproximadamente casi el 40% de la producción correspondió a los tipos pesado y extrapesado.

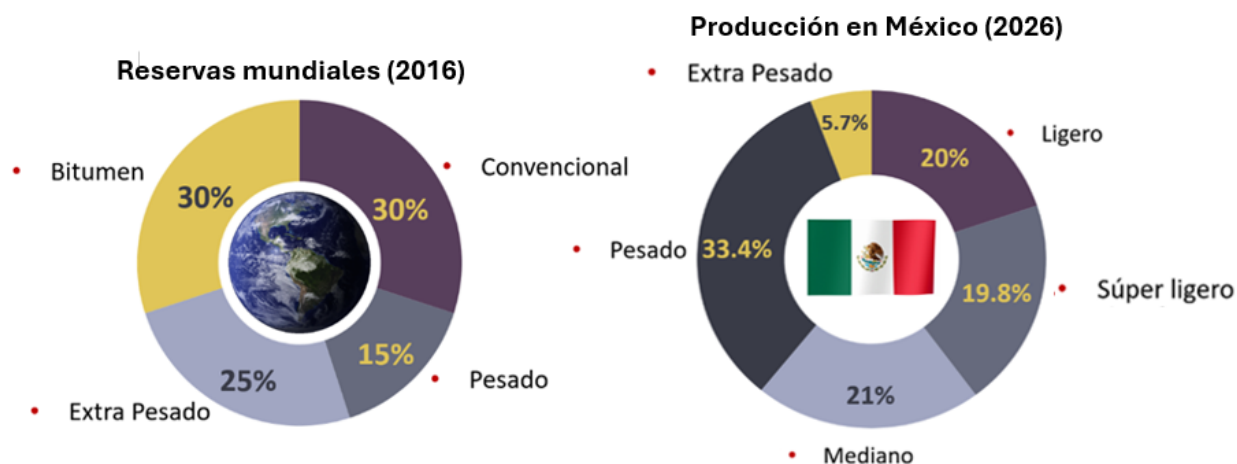


Figura 1.1 Producción en México y reservas mundiales por tipo de petróleo crudo (CNH, 2026; Schlumberger, 2016).

En la actualidad, los grandes campos petroleros del México se encuentran en su etapa de declinación. Como puede observarse en la **Figura 1.2**, la producción petrolera ha estado soportada desde principios de la década de los años 70 por los campos de las cuencas del sureste, representando hasta el 90% del total. En particular, el campo súper gigante Akal (del complejo Cantarell), aportó en el año 2004 casi el 60% de la producción nacional (3,400 MBD), alcanzando su pico de producción del orden de 2,000 MBD (CONAHCYT, 2024). Cabe resaltar que el crudo producido en este campo es de tipo pesado.

A partir del comienzo de la declinación del campo Akal, la producción nacional comenzó a disminuir progresivamente; sin embargo, con la incorporación de otros campos costa afuera, la producción se ha mantenido en los últimos años del orden 1,700 MBD. Es claro que la explotación de estos recursos continuará siendo de relevancia para el país en los próximos lustros. Cabe resaltar que más del 60% de las reservas de crudo son del tipo pesado/extrapesado.

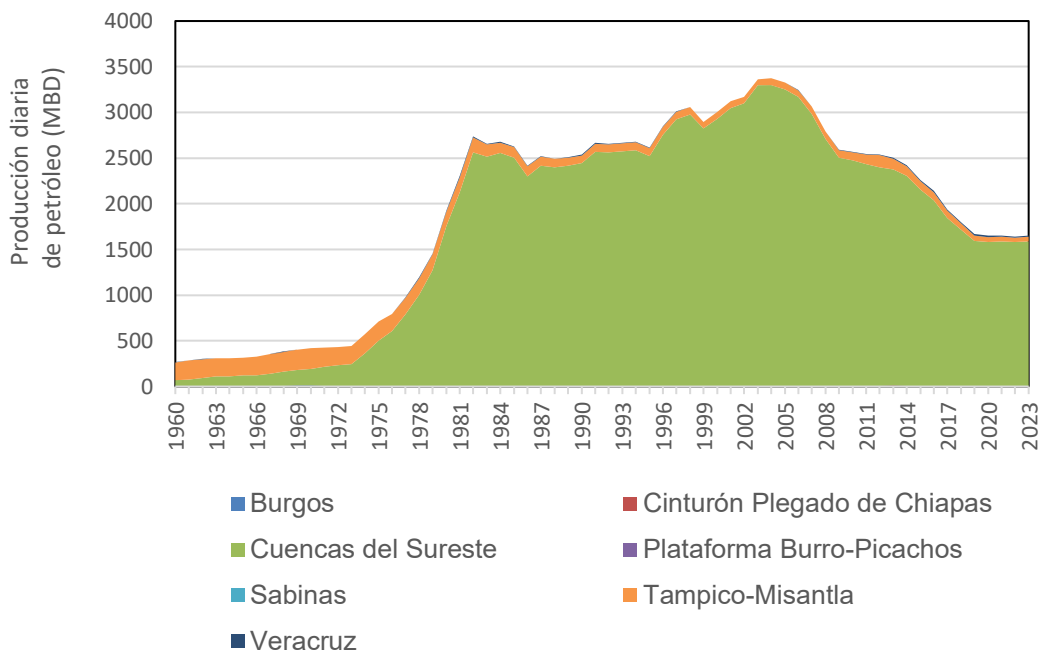


Figura 1.2 Producción diaria por provincia petrolera en México (modificado de CONAHCYT, 2026).

1.1.2 Problemática en la extracción de petróleo pesado/extrapesado

Una problemática frecuente en la extracción del petróleo pesado y extrapesado radica en que suelen ser muy viscosos. Para visualizar la relación entre la densidad API del petróleo crudo y su viscosidad, se presenta la **Figura 1.3** (Alvarado y Manrique, 2010). Como puede observarse, la viscosidad del crudo se incrementa exponencialmente conforme el aceite es más pesado (menor °API). Para los aceites pesados ($22 \geq \text{°API} > 10$), la viscosidad puede variar de 10^4 a 10^2 [cp]; en el caso de los aceites extrapesados ($\text{°API} \leq 10$), observar que la viscosidad puede alcanzar valores hasta de 10^6 [cp].

Por lo tanto, la explotación de este tipo de recursos demanda la implementación de procesos especiales de recuperación mejorada. En particular, los métodos térmicos constituyen la mejor opción debido a que la viscosidad del aceite es una propiedad termodinámica que depende fuertemente de la temperatura, como se muestra en la **Figura 1.4**.

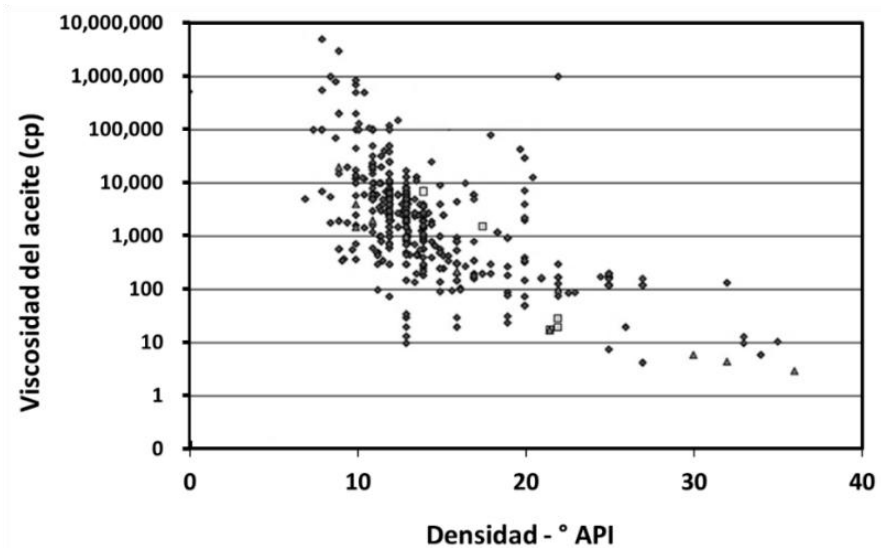


Figura 1.3 Variación de la viscosidad del petróleo con la densidad API (modificado de Alvarado y Manrique, 2010).

Como se indica en la **Figura 1.4**, la viscosidad del aceite no representa un impedimento para que fluya si se mantiene en valores del orden de 10^2 [cp], o menores. En contraparte, a valores más grandes, será cada vez más complicado su extracción del medio poroso.

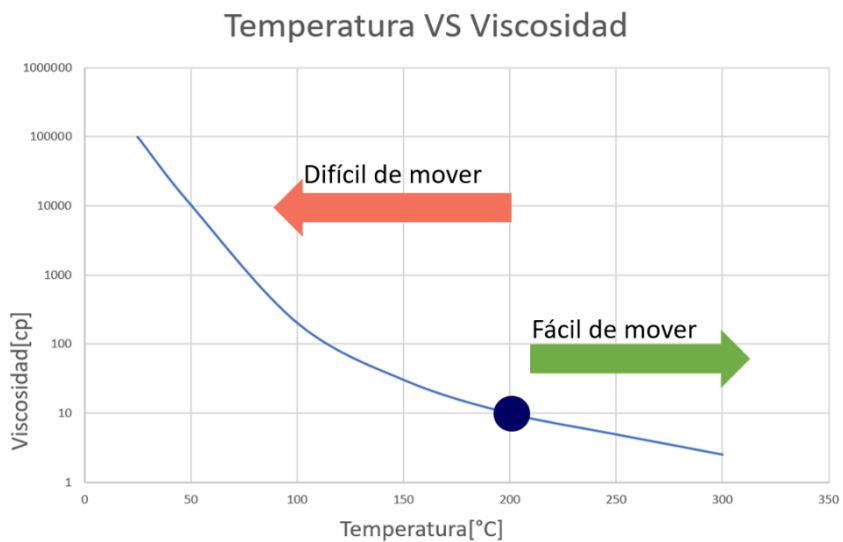


Figura 1.4 Variación típica de la viscosidad del petróleo con la temperatura (Oil Sands Magazine. 2024).

1.2 Métodos térmicos recuperación mejorada

Antes de abordar los métodos térmicos, es importante diferenciar las características de los métodos primarios, secundarios y terciarios de recuperación de hidrocarburos en yacimientos (Green D.W., 1998), como se indica en la **Figura 1.5**:

- 1) Los métodos primarios se caracterizan porque la producción se sostiene por la propia energía natural del yacimiento; los principales mecanismos de empuje son por gas en solución, casquete de gas, expansión roca-fluido, acuífero, y/o drene gravitacional.
- 2) Los métodos secundarios consisten en la inyección de agua y/o gas en el medio poroso con el objetivo de mantener la presión del yacimiento, sin alterar las propiedades físico-químicas del sistema roca-fluido.
- 3) Finalmente, los métodos terciarios o de recuperación mejorada (EOR, por sus siglas en inglés, Enhanced Oil Recovery), se caracterizan porque modifican las propiedades del sistema roca/fluido para facilitar el flujo de fluidos en el yacimiento; pueden modificar la mojabilidad de la roca, reducir la viscosidad del aceite y/o reducir las fuerzas interfaciales, entre otras. Se diferencian los métodos térmicos y aquellos en que se inyectan sustancias miscibles (p.e., CO₂ o gas hidrocarburo) y/o productos químicos (p.e., polímeros, solventes y surfactantes).

En el caso de los métodos térmicos de recuperación mejorada, el objetivo es reducir la viscosidad de los aceites pesados y extrapesados, favoreciendo así su movilidad en el medio poroso (**Figura 1.6**). Los principales métodos en este rubro son los siguientes:

- 1) Inyección cíclica de vapor.
- 2) Inyección continua de vapor.
- 3) Combustión in-situ.
- 4) Drene gravitacional asistido por vapor (SAGD).

A continuación, se describen sus principales características.

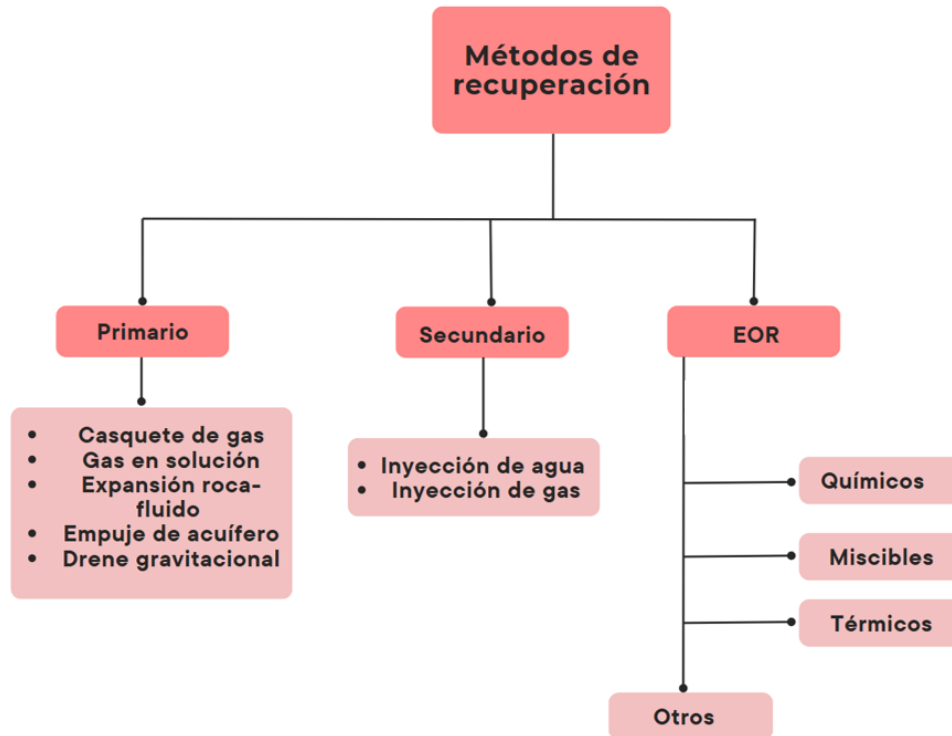


Figura 1.5 Clasificación de los métodos de recuperación del petróleo (Green D.W., 1998).

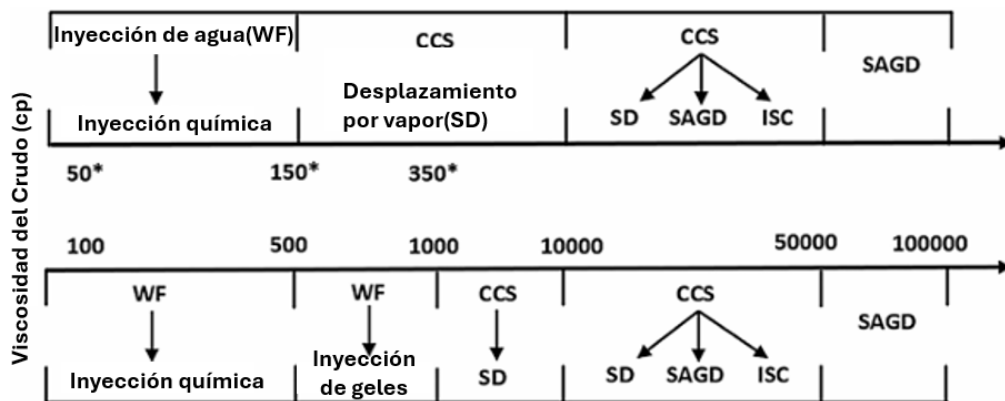


Figura 1.6 Procesos de recuperación mejorada recomendados de acuerdo con la viscosidad del petróleo (modificado de Dong, Liu y Chen, 2020).

1.2.1 Inyección continua de vapor

En este método de recuperación térmica (CSI por sus siglas en inglés, Continuous Steam Injection), como su nombre lo indica, se inyecta vapor de agua a altas temperaturas al yacimiento con el fin de reducir la viscosidad de los petróleos pesados y extrapesados. La inyección se realiza a través de pozos acondicionados para tal efecto. En el proceso, se diferencian tres regiones (**Figura 1.7**):

- a) **Región 1.** El vapor calienta la zona alrededor del pozo inyector. En esta región, parte de petróleo se destila, liberando sus fracciones más ligeras. Los fluidos comienzan a desplazarse hacia los pozos productores.
- b) **Región 2.** El vapor se condensa, generando un banco de agua caliente que desplaza al petróleo corriente abajo.
- c) **Región 3.** Corriente abajo del banco de agua caliente, el aceite se desplaza hacia los pozos, perdiendo parte del calor que tenía. Su movimiento se debe principalmente al avance del frente de agua caliente.

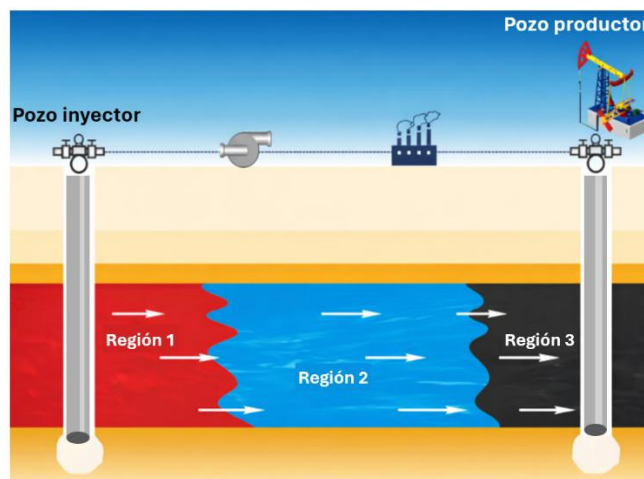


Figura 1.7 Etapas de la inyección continua de vapor (Vishnyakov. V ,2019).

Conforme continúa la inyección, las regiones correspondientes a las fases 1 y 2 crecen, en tanto que la zona de aceite corriente abajo disminuye. El proceso de inyección termina cuando se alcanza el límite económico del proyecto o cuando el corte de agua en los pozos productores se acerca al 80%.

1.2.2 Inyección cíclica de vapor

Este método se caracteriza porque un mismo pozo opera como inyector y productor en diferentes etapas. Su implementación está recomendada en yacimientos capaces de producir aún bajo un mecanismo de empuje natural (p.e., con la acción de un acuífero o un casquete de gas), con permeabilidades de tres o más darcies, y en los que la viscosidad del aceite esté en el rango de 100 a 10,000 [cp] (Green D.W., 1998).

El proceso comienza con la inyección del vapor durante un periodo de 2 a 4 semanas; en esta etapa, la región del yacimiento cercana al pozo se calienta; allí, la viscosidad del aceite disminuye por el incremento de la temperatura, favoreciendo su movilidad.

Terminada la inyección, el pozo se abre a producción luego de un periodo de remojo; la producción inicial es alta debido al abatimiento de la viscosidad. Conforme transcurre el tiempo de producción, la temperatura del aceite disminuye y su viscosidad tiende a incrementarse nuevamente. Por lo tanto, la producción comienza a declinar; es entonces que puede resultar necesario implementar un nuevo ciclo de inyección/producción. Al respecto, en algunos campos se ha reportado hasta 20 ciclos (Green D.W., 1998).

1.2.3 Combustión In-Situ

Este método tiene como objetivo el craqueo del petróleo a través de un proceso de combustión en el propio yacimiento. Como resultado, las moléculas más pesadas del aceite se rompen, resultando en la disminución de su viscosidad y densidad. La combustión en el medio poroso se lleva a cabo mediante la inyección de aire en pozos acondicionados con calentadores en el fondo, los cuales generan la ignición del petróleo. En estas circunstancias, se genera un frente de combustión que se propaga a lo largo del yacimiento, como se muestra en la **Figura 1.8**. Este método puede aplicarse en

yacimientos de aceite con una densidad de 9 a 40 °API, y es factible incluso en formaciones profundas y con altas presiones (Green D.W., 1998).

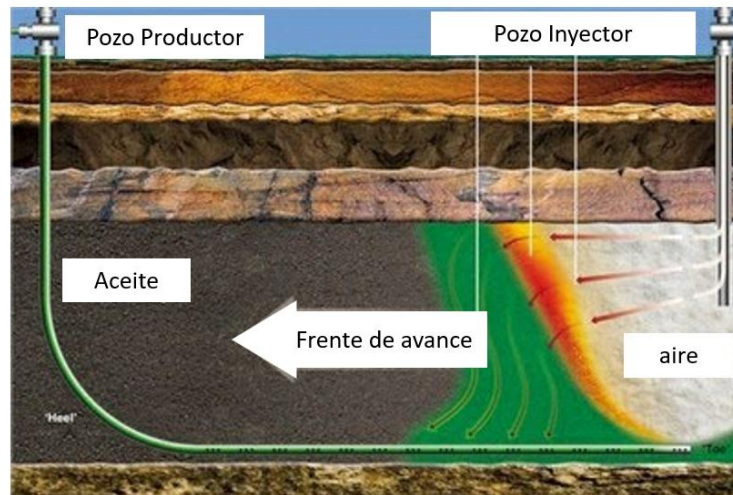


Figura 1.8 Proceso de combustión in-situ (El Petróleo y sus Avances, 2016).

1.3 Drene gravitacional asistido con vapor

El método de recuperación térmico denominado drene gravitacional asistido por vapor (SAGD por sus siglas en inglés, Steam Assisted Gravity Drainage) fue desarrollado por Butler en el 1980, como una alternativa en la explotación de arenas bituminosas. Fue hasta el año 2001, que se implementó comercialmente por primera vez en Canadá.

El SAGD consiste en dos pozos horizontales paralelos entre sí, separados por una distancia de 5 a 7 metros (**Figura 1.9**); el superior se utiliza como inyector de vapor de agua a alta temperatura, en tanto que el inferior será el pozo productor. Como principio de operación, se considera que el vapor caliente asciende en el yacimiento, formando una cámara. En esta región, luego de cierto periodo de tiempo, la temperatura del aceite se incrementa, derivando en la reducción de su viscosidad y favoreciendo su movilidad en el medio poroso. Aunado a esto, el aceite se desplaza hacia el pozo productor por efecto de la acción de la gravedad.

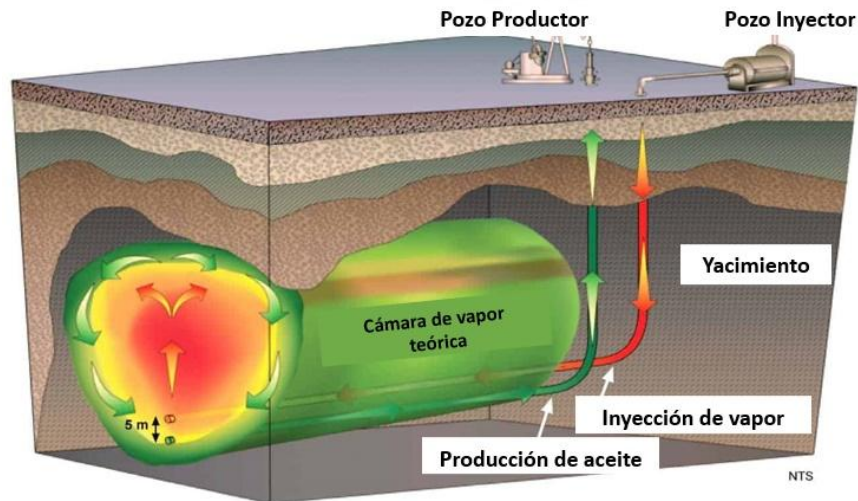


Figura 1.9 Esquema del sistema SAGD (modificado de Singfield, 2016).

En los procesos SAGD se diferencian dos etapas. La primera corresponde al calentamiento de la formación con la inyección del vapor durante un periodo aproximado de tres meses; en esta etapa, la producción de aceite es mínima o prácticamente nula. En la segunda etapa, el pozo productor se abre a producción cuando el aceite alcanzó la temperatura suficiente para fluir en el medio poroso y alcanzar el gasto de producción esperado.

Las condiciones recomendadas para implementar este método de recuperación son las siguientes (Dong, 2020): el yacimiento tiene que ser homogéneo verticalmente, con un mínimo de 10 metros de arenas continuas, permeabilidad de 1 darcy, y menos del 10% de arcillas, de 75% a 85% de saturación de aceite (de 6 a 15 °API). Finalmente, debe evitarse que la cámara de vapor se forme cerca de un acuífero.

1.3.1 Ventajas y desventajas

Ventajas

- El sistema opera con presiones relativamente bajas en comparación con los procesos convencionales de inyección de vapor. Por lo tanto, se tiene un mejor control del pozo, y no está sometido a altas presiones.
- La segregación gravitacional es un proceso estable, lo que facilita la operación del sistema.
- Puede implementarse en yacimientos de lutitas, siempre que el espesor sea 3 a 6 [m]. En conjunto con el fracturamiento, pueden alcanzarse factores de recuperación de 60% a 70% en este tipo de sistemas.

Desventajas

- No es recomendable para profundidades mayores de 1000 m debido a que el vapor no podría formar la cámara (el vapor pierde aproximadamente el 4% de su energía térmica cada 100 m).
- Debe mantenerse un equilibrio riguroso en los ritmos de extracción e inyección de materia para que el efecto de segregación gravitacional domine en la producción.
- No es recomendable aplicarlo en formaciones de espesores pequeños, debido a que el crecimiento lateral de la cámara de vapor es de aproximadamente cuatro veces el espesor de la zona vertical.

1.3.2 Caso de aplicación exitoso

La empresa Cenovus Energy comenzó la implementación del SAGD para la explotación de arenas bituminosas en Canadá con el proyecto Foster Creek en el año 1997 (**Figura 1.10**), estimado un volumen de 1.5 mil millones de barriles de bitumen de alta calidad. Luego de cuatro años, en el 2001 se obtuvo la primera producción comercial. Ya para el año 2015, se registraron producciones mayores a los 30 MBD. De acuerdo con "Oil

Sands Magazine”, la producción promedio al finalizar el año 2023 fue de 190 MBD, y se espera mantener producciones de este orden en la siguiente década.

Es importante destacar que el SAGD no ha sido utilizado como método térmico de recuperación mejorada en los campos de aceite pesado/extrapesado de México. Al respecto, cabe mencionar que únicamente se ha implementado la inyección de vapor, obteniéndose resultados exitosos en el campo Samaría-Luna (PEMEX,2020). De esta manera, considerando los avances en la ingeniería de perforación horizontal y de los sistemas SAGD, convendría considerar y evaluar su implementación en campos de México que presenten condiciones favorables para su implementación.

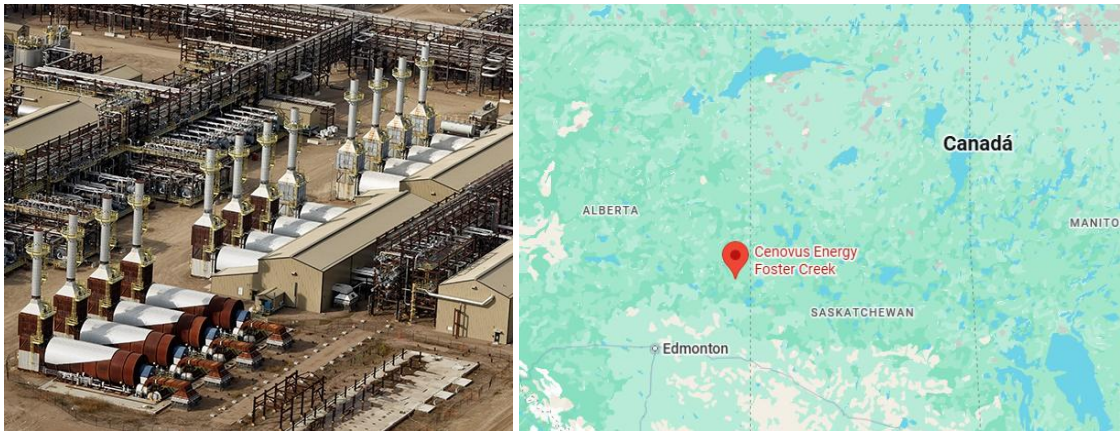


Figura 1.10 Proyecto SAGD en Foster Creek, Canadá (Cenovus Energy,2013).

1.3.4 Motivación

De acuerdo con lo expuesto en este capítulo, es importante que los estudiantes y profesionales de ingeniería petrolera y áreas afines consoliden sus conocimientos en temas relacionados con el flujo de fluidos y transferencia de calor en medios porosos. En particular, si se pretende profundizar en el modelado y simulación numérica de procesos de recuperación térmica en yacimientos de aceite pesado y extrapesado.

En este contexto, una motivación para el desarrollo de este trabajo se derivó de conocer el método SAGD y los procesos térmicos que involucra, como es la conducción y

convección de calor en medios porosos. Como primer paso en el camino para comprender este tipo de sistemas, en este trabajo se abordará la resolución numérica de problemas independientes de flujo de fluidos y de conducción de calor en un disco poroso, dos dimensiones, en régimen de flujo estacionario y transitorio.

Como segunda motivación, se aplicará el método de elementos finitos para resolver numéricamente los problemas planteados. Al respecto, se espera que este trabajo resulte también de utilidad, en otros aspectos, para que los estudiantes de ingeniería petrolera conozcan los fundamentos de este método numérico, ampliamente utilizado en otras disciplinas.

Capítulo 2

Flujo de fluidos en medios porosos

En este capítulo se presenta la deducción de la ecuación de difusividad hidráulica en medios porosos, a partir de un balance de materia y la ley de Darcy. Se discute cómo puede linealizarse en el caso de un fluido ligeramente compresible. Como caso particular, se presenta su solución analítica en coordenadas radiales para una condición de flujo en régimen estacionario.

2.1 Ley de Darcy

En 1856, Henry Darcy estudió experimentalmente el flujo de agua en empacamientos de arena. A partir de sus resultados, determinó que el gasto volumétrico era directamente proporcional al gradiente hidráulico y al área transversal al flujo. La constante de proporcionalidad resultó ser dependiente del tipo de fluido y de una propiedad del medio poroso, aún no reconocida en ese entonces. Con los desarrollos posteriores de otros investigadores, tal propiedad del medio poroso se denominó permeabilidad. La forma más general de la ley de Darcy establece que:

$$\bar{u} = -\frac{\bar{k}}{\mu}(\nabla p \pm \rho \bar{g}), \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

donde \bar{u} es el vector velocidad, ∇p es el gradiente de presión, \bar{g} es el vector de aceleración gravitacional, ρ y μ son la densidad y viscosidad del fluido, y \bar{k} es el tensor de permeabilidad. Es importante destacar que, para que la ecuación 2.1 sea válida, el régimen de flujo debe ser laminar; por otra parte, el fluido debe ser homogéneo, monofásico, newtoniano y saturar al 100% el medio poroso.

En cuanto a la permeabilidad, su unidad de medida es el darcy. Se dice que un medio poroso tiene una permeabilidad de 1 darcy, si el gradiente de presión es de 1 atm/cm para un gasto volumétrico de 1 cm³/s, para un fluido con una viscosidad de 1 cp, y el área transversal al flujo del medio poroso es 1 cm².

Como se mencionó anteriormente, la permeabilidad es un tensor de nueve componentes en un sistema de referencia; ahora bien, considerando que se trata de un tensor simétrico, en un sistema cartesiano se identificarán entonces tres componentes: k_x , k_y y k_z . Si la permeabilidad es la misma en todas las direcciones, se dice que el medio es isotrópico; en caso contrario, se denomina anisotrópico.

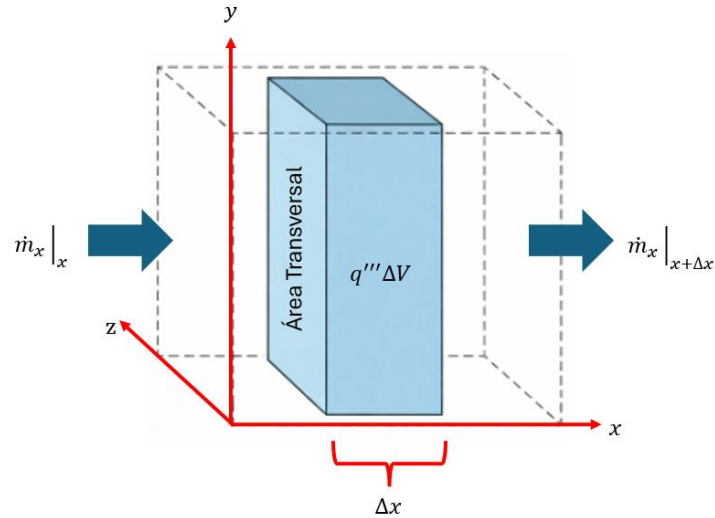
2.2 Ecuación de balance de materia

El primer paso para modelar el flujo de fluidos en un medio poroso comienza con el planteamiento de un balance de materia. Para tal efecto, considerar el volumen de control mostrado en la **Figura 2.1**. A continuación, por brevedad, se desarrolla el balance de materia solo en la dirección x; posteriormente, se generalizarán los resultados para todas las direcciones.

De esta manera, el balance de materia establece que el ritmo con el cual se acumula la materia en el volumen de control es igual la diferencia de los gastos másicos a la entrada (en x) y salida (en x+Δx) a través de las superficies de control, más cualquier otro término fuente o sumidero de materia. Por lo tanto, debe cumplirse que:

$$\Delta V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) \right] = (\dot{m}_x|_x - \dot{m}_x|_{x+\Delta x}) \pm \dot{q}''' \Delta V. \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

En la ecuación 2.2, ρ es la densidad del fluido, ϕ es la porosidad de la roca y \dot{q}''' es un término fuente/sumidero según sea el caso, e indica el ritmo de entrada o salida de materia del volumen de control, por unidad de volumen de roca. En simulación numérica de yacimientos, correspondería a la presencia de pozos inyectores/productores.



Figuras 2.1 Volumen de control para plantear el balance de materia.

Ahora bien, los gastos máxicos a través de las superficies de control, \dot{m}_x , pueden expresarse en términos de la densidad del fluido, el área transversal al flujo y la velocidad, como:

$$\dot{m}_x = \rho A u_x . \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

Por lo tanto, la ecuación 2.2 queda como:

$$\Delta V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) \right] = (\rho A u_x|_x - \rho A u_x|_{x+\Delta x}) \pm \dot{q}''' \Delta V . \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

Dividiendo la ecuación 2.4 entre $\Delta V = A\Delta x$, resulta que:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) = \frac{\rho u_x|_x - \rho u_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} \pm \dot{q}''' , \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

Tomando el límite de la ecuación 2.5 cuando $\Delta x \rightarrow 0$, y aplicando la definición de derivada, se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) = -\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) \pm \dot{q}''' . \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

Aplicando el mismo procedimiento de análisis en las otras direcciones, resulta que:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) = -\frac{\partial\rho u_x}{\partial x} - \frac{\partial\rho u_y}{\partial y} - \frac{\partial\rho u_z}{\partial z} \pm \dot{q}''' . \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

La forma más general de la ecuación 2.7, independiente del sistema de referencia, es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) + \nabla \cdot (\rho\bar{u}) = \pm \dot{q}''' . \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

2.3 Ecuación de difusión hidráulica en medios porosos

La ecuación de difusividad hidráulica describe el movimiento de un fluido en un medio poroso, y se obtiene al sustituir la ley de Darcy en la ecuación de balance de materia. Por lo tanto, de las ecuaciones 2.1 y 2.8, en coordenadas cartesianas, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) = & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho k_x}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho k_y}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho k_z}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \right) \right) \pm \dot{q}''' . \quad \dots\dots\dots (2.9) \end{aligned}$$

Con relación a la ecuación 2.9, observar que se trata de una ecuación no lineal en derivadas parciales, de segundo orden. Por lo tanto, debe linealizarse para obtener una solución analítica o resolverse numéricamente.

2.3.1 Simplificación para un fluido ligeramente compresible

La ecuación 2.9 puede simplificarse considerando que el fluido es ligeramente compresible. Para tal efecto, el coeficiente de compresibilidad del fluido se expresa como:

$$c_o = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial p} \Big|_T . \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

En el caso de la compresibilidad de la formación, se tiene que:

$$c_f = \frac{1}{\varphi} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right|_T \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

Por otra parte, considerando que la densidad es función de la presión, entonces:

$$\frac{\partial \rho_o}{\partial x} = \frac{\partial \rho_o}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \rho_o c_o \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

y

$$\frac{\partial \rho_o}{\partial t} = \frac{\partial \rho_o}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \rho_o c_o \frac{\partial p}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

Similarmente, en el caso de la porosidad, se tiene que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \varphi c_f \frac{\partial p}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones 2.12 a 2.14 en 2.9, luego de un desarrollo algebraico se obtiene que (en la dirección x, por brevedad):

$$\rho_o \varphi c_T \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho_o c_o k_x}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \rho_o \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (2.15)$$

donde $c_T = c_o + c_f$.

Si se considera que los gradientes de presión durante el flujo de fluidos en medios porosos son “pequeños”, entonces el término cuadrático de la ecuación 2.15 puede despreciarse. Por lo tanto:

$$\varphi c_T \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (2.16)$$

La ecuación 2.16 puede linealizarse si se considera que la viscosidad del fluido es constante y que el medio es isotrópico, de permeabilidad constante. De esta manera, se tiene una ecuación lineal en derivadas parciales en términos de la presión:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

donde η se denomina coeficiente de difusividad hidráulica:

$$\eta = \frac{k}{\phi \mu c_T} \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

Observar que la ecuación 2.17 es de tipo parabólico y que para resolverla es necesario especificar dos condiciones de frontera y una condición inicial.

2.3.2 Ecuación de difusión en coordenadas radiales

Para un sistema de coordenadas radiales, la ley de Darcy se expresa como:

$$v_r = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

o bien, en términos del gasto volumétrico:

$$Q = -\frac{2\pi k h r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

Ahora bien, siguiendo un procedimiento similar al utilizado en la sección 2.3.1, puede demostrarse que la ecuación de difusividad hidráulica linealizada para un fluido ligeramente compresible queda como (Aziz y Settari, 1979):

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right). \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

a) Solución analítica en régimen estacionario

En este apartado, se presenta la solución analítica de la ecuación 2.21 en condiciones de régimen estacionario, ya que será utilizada en capítulos posteriores para verificar resultados de simulación con el método de elemento finito.

Primeramente, en régimen estacionario no hay variación de la presión en el tiempo, por lo que:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) = 0. \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

Observar que la ecuación 2.22 se transformó en una ecuación diferencial ordinaria, de segundo orden y lineal que puede resolverse analíticamente. Por lo tanto, integrándola dos veces, se obtiene que:

$$p(r) = C_1 \ln(r) + C_2. \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

Para determinar las constantes de integración, C_1 y C_2 , deben establecerse dos condiciones de frontera; en este caso, se especificarán las presiones $p_1(r = r_1)$ y $p_2(r = r_2)$. Luego de un desarrollo algebraico se obtiene que:

$$p(r) = p_1 + \frac{(p_2 - p_1)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right). \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

De acuerdo con la ecuación 2.24, observar que la presión varía de manera logarítmica en la dirección radial (**Figura 2.2**).

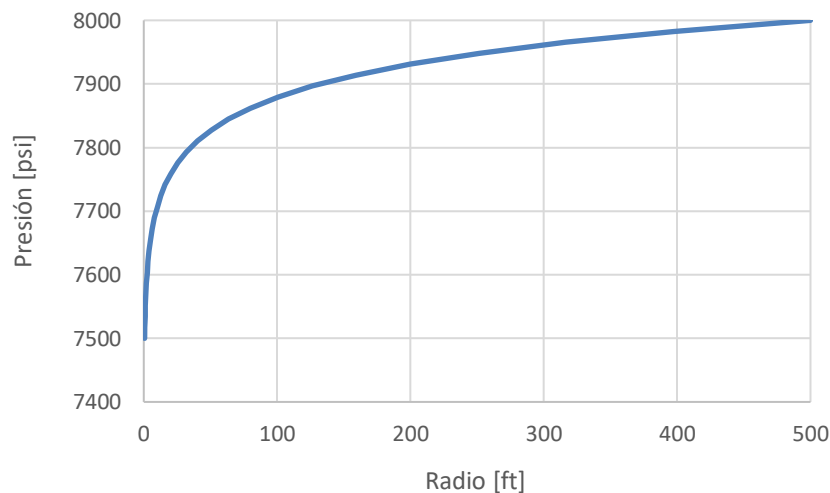


Figura 2.2 Perfil de la presión en un sistema de coordenadas radiales.

Por otra parte, expresando la ecuación 2.19 en términos del gasto volumétrico a condiciones estándar, Q_o , y el factor de volumen, B_o , y el espesor del medio poroso, h , se tiene:

$$Q_o = \frac{2\pi khr}{\mu_o B_o} \frac{dp}{dr}, \quad \dots\dots\dots (2.25)$$

donde se ha adoptado la convención de signos con relación a que el gasto de producción se considera positivo. Ahora bien, integrando la ecuación 2.25, entre los límites de integración $p_1(r = r_1)$ y $p_2(r = r_2)$, se obtiene que:

$$Q_o = \frac{2\pi kh(p_2 - p_1)}{\mu_o B_o \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}. \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

Finalmente, de 2.26 en 2.24, puede demostrarse que:

$$p(r) = p_1 + \frac{Q_o \mu_o B_o}{2\pi kh \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right). \quad \dots\dots\dots (2.27)$$

Capítulo 3

Conducción de calor

En este capítulo, se abordan fundamentos de transferencia de calor. En particular, se describen los modos de transferencia de calor y sus leyes fenomenológicas correspondientes. Posteriormente, se presentan las deducciones de la ecuación de balance de energía y de difusividad térmica, requeridas para analizar cómo se propaga el calor en un cuerpo sólido. Finalmente, se presenta la solución analítica para un problema de conducción de calor en régimen estacionario y coordenadas radiales, la cual se utilizará en capítulos posteriores para verificar resultados numéricos obtenidos con FEM.

3.1 Modos de transferencia de calor

El calor es energía térmica que se transfiere debido a una diferencia de temperatura entre dos puntos, y siempre ocurre en la dirección en que la temperatura disminuye (Incropera et al., 2004; Zedillo, 2010). Se manifiesta en tres formas o modos: conducción, convección y radiación. A continuación, se abordan sus respectivos mecanismos y leyes fenomenológicas.

3.1.1 Conducción

Este modo de transferencia de calor ocurre en sólidos y fluidos en reposo, y tiene como mecanismo físico la difusión de energía térmica a nivel molecular. Al respecto, es conveniente mencionar que la energía cinética de las moléculas está asociada a movimientos de traslación, rotación, oscilación y vibración. Así, la energía se transmite de unas a otras al momento de colisionar, de tal manera que las moléculas de mayor

energía impactan a las de menor energía. En el caso de los metales, la transferencia del calor se debe principalmente al movimiento de electrones libres; en los sólidos no metálicos, se atribuye a las vibraciones en sus arreglos cristalinos. Cabe destacar que la energía cinética de las moléculas aumenta conforme se incrementa la temperatura, estableciéndose así una relación directa entre ambas.

La ley fenomenológica asociada a la conducción de calor es la ley de Fourier, la cual establece que el flujo de calor, $q'' [W/m^2]$, es directamente proporcional al gradiente de temperatura $\nabla T [^\circ C]$, en la dirección en que ésta disminuye:

$$\bar{q}'' = -\bar{k} \nabla T , \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

Donde, $k [W/m \cdot R]$ es una propiedad del material que indica qué tan fácil conduce el calor, y se denomina precisamente conductividad térmica; en general, se trata de un tensor simétrico, por lo que esta propiedad puede variar en las tres direcciones. Si no depende de la dirección, entonces se dice que el medio es isotrópico; en caso contrario, es anisotrópico. Por otra parte, siendo una propiedad de la materia, en general es función de su composición, así como de la presión y la temperatura.

En coordenadas cartesianas, la ley de Fourier se expresa como:

$$\bar{q}'' = -\left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + k_z \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k}\right), \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

mientras que, en coordenadas cilíndricas (**Figura 3.1**), se tiene que:

$$\bar{q}'' = -\left(k_r \frac{\partial T}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{k_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + k_z \frac{\partial T}{\partial z} \hat{e}_z\right), \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

donde \hat{e}_r , \hat{e}_θ y \hat{e}_z son los vectores ortogonales unitarios en las direcciones radial, angular y axial, respectivamente.

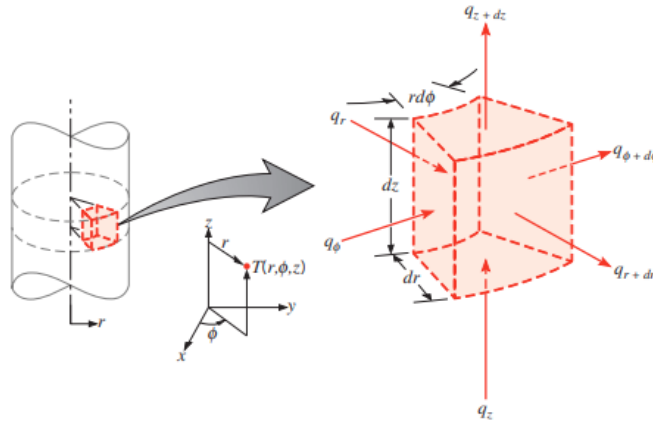


Figura 3.1 Volumen de control en coordenadas cilíndricas (Incropera et al., 2020).

3.1.2 Convección

La convección se refiere al transporte de calor mediante el flujo de un fluido en contacto con una superficie que se encuentra a una temperatura distinta. Sus mecanismos físicos son la difusión molecular y la advección (movimiento macroscópico).

En un proceso convectivo se desarrollan dos regiones en el seno del fluido que presentan gradientes importantes de velocidad y temperatura. En el primer caso, se habla de una capa límite hidrodinámica; en esta región, la velocidad varía desde cero en la superficie de contacto (condición de no deslizamiento) hasta un 99% del valor de velocidad que el fluido tiene “lejos” del efecto de la presencia de la superficie, u_{∞} . En cuanto a la capa límite térmica, en ella la temperatura del fluido varía desde la correspondiente a la superficie, T_{sup} , hasta un valor de 99% de aquella que tiene “lejos” de esta zona de influencia, T_{∞} .

La convección se clasifica en natural y forzada:

- **Natural:** Cuando el movimiento del fluido se genera por cambios locales de densidad y un efecto de flotación, resultado de gradientes temperatura.
- **Forzada:** Cuando el movimiento del fluido se origina por un medio externo; por ejemplo, una bomba o un ventilador, por mencionar algunos.

Ahora bien, la ley fenomenológica que gobierna la convección es la ley de enfriamiento de Newton:

$$q'' = h \cdot (T_{sup} - T_{\infty}) , \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

donde $h[K \cdot W/m^2]$ es el coeficiente de convección de calor, el cual depende de las propiedades físicas del fluido, la geometría de la superficie de contacto y la velocidad.

3.1.3 Radiación

La radiación es la energía térmica que se transmite en forma de ondas electromagnéticas o fotones, como resultado de cambios a nivel molecular o atómico en la materia cuando se encuentra a una temperatura diferente al cero absoluto. Como rasgo característico, este modo de transferencia de calor no necesita la presencia de un medio material, por lo que puede llevarse a cabo en el vacío. La ley fenomenológica relacionada con la radiación es la ley de Stefan-Boltzmann:

$$E_b = \sigma * T_s^4 , \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

la cual describe la máxima potencia con que un cuerpo negro emite radiación térmica por unidad de área; $E_b [W/m^2]$; $T_s[K]$ es la temperatura absoluta de la superficie y $\sigma = 5.67 * 10^{-8} [W/K^4 \cdot m^2]$ es la constante de Stefan-Boltzmann. Al respecto del cuerpo negro, éste es un sistema ideal capaz de absorber toda la radiación térmica que incide sobre él, en todas las longitudes de onda y direcciones; y, a su vez, es un emisor perfecto (Soto et al., 2023). En el caso de los cuerpos no ideales, en la ecuación 3.5 se introduce una propiedad del material, la emisividad, ε :

$$E = \varepsilon * \sigma * T_s^4 , \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

donde $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Ahora bien, del mismo modo en que la materia emite radiación térmica, también puede absorberla. De esta manera, la energía que incide sobre un objeto por unidad área, G_{abs} , con respecto a la de un cuerpo negro, G , está dada por:

$$G_{abs} = \alpha G , \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

donde α es la absorptividad, y $0 \leq \alpha \leq 1$.

Considerando que la materia emite radiación térmica, pero también la absorbe, entonces el flujo neto de calor puede obtenerse mediante la siguiente expresión:

$$q_{rad}'' = \frac{q}{A} = \varepsilon E_b(T_s) - \alpha G = \varepsilon \sigma (T_s^4 - T_{sur}^4), \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

donde, T_s es la temperatura de la superficie, T_{sur} es la temperatura de los alrededores y se ha considerado que $\varepsilon = \alpha$. Finalmente, de la ecuación 3.8, se obtiene que el ritmo neto de transferencia de calor por radiación, $\dot{Q}_{rad}[W]$, puede expresarse como:

$$\dot{Q}_{rad} = h_r (T_s^4 - T_{sur}^4), \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

donde

$$h_r = \varepsilon \sigma (T_s + T_{sur})(T_s^2 - T_{sur}^2). \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

La **Tabla 3.1** presenta un resumen de las leyes fenomenológicas y mecanismos correspondientes a los tres modos de transferencia de calor.

Tabla 3.1 Modos de transferencia de calor con sus mecanismos y leyes fenomenológicas.

Fenómeno	Leyes fenomenológicas	Mecanismos
<i>Conducción</i>	Ley de Fourier $q_x'' = -k \frac{dT}{dx}$	Difusión molecular
<i>Convección</i>	Ley de enfriamiento de Newton $q'' = h(T_s - T_\infty)$	Difusión molecular y advección
<i>Radiación</i>	Ley de Stefan - Boltzmann $E_b = \sigma * T_s^4$	Ondas electromagnéticas o fotones

3.2 Ecuación de balance de energía

A continuación, se presenta la deducción de la ecuación de energía para el caso de la propagación de calor en un cuerpo sólido. Para tal efecto, se considera el volumen de control mostrado en la **Figura 3.2**, en un sistema de coordenadas cartesianas.

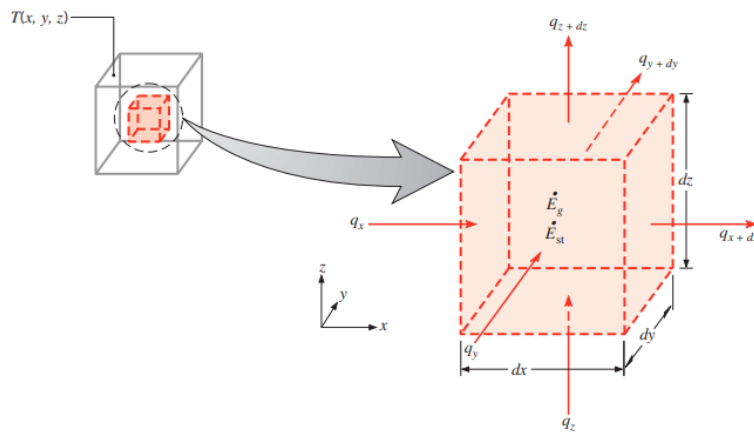


Figura 3.2 Volumen de control en coordenadas cartesianas (Incropera et al., 2020).

De acuerdo con la primera ley de la termodinámica, la energía no se crea ni se destruye. Por lo tanto, debe cumplirse que el ritmo con que cambia la energía total, E_t , del sistema en el volumen de control es igual al ritmo con que la energía entra a través de las superficies de frontera, menos al ritmo con que ésta sale, más/menos la generación de energía dentro del mismo, \dot{E}_g :

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} = \dot{E}_{entra} - \dot{E}_{sale} \pm \dot{E}_g + \delta \dot{Q}_{neto}. \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

En el caso particular de problemas de conducción de calor en sólidos, se tiene que:

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz, \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

Donde se ha considerado que la densidad, ρ , y la capacidad térmica específica, c_p , son constantes. Es importante notar que, al tratarse de un sólido, la única contribución a la energía total del sistema está asociada a la energía interna, la cual depende de c_p y T .

Por otra parte, el término de generación puede expresarse como:

$$\dot{E}_g = q''' \cdot dx dy dz \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

donde q''' es un término fuente/sumidero de energía térmica por unidad de tiempo, por unidad de volumen; por ejemplo, podría estar asociado a energía eléctrica, energía nuclear, energía química, entre otras. Cabe agregar que, cuando se trata de problemas de propagación de calor en un sólido, no se considera la realización de ningún tipo de trabajo. Con relación al signo que debe asignársele en la ecuación 3.11, se considera positivo cuando se adiciona energía al sistema; si se extrae energía, será negativo.

En cuanto a los términos de entrada y salida de energía a través de las superficies de control, considerando únicamente energía en forma de calor, se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{entra} &= q''_x dy dz + q''_y dx dz + q''_z dx dy, \\ \dot{E}_{sale} &= - \left(q''_x + \frac{\partial q''_x}{\partial x} dx \right) dy dz \\ &\quad - \left(q''_y + \frac{\partial q''_y}{\partial y} dy \right) dx dz \quad \dots\dots\dots (3.14) \\ &\quad - \left(q''_z + \frac{\partial q''_z}{\partial z} dz \right) dx dy. \end{aligned}$$

donde q'' es el ritmo de transferencia de calor unidad de área en la dirección respectiva. Por lo tanto, sustituyendo las ecuaciones 3.12, 3.13 y 3.14 en 3.11, luego de simplificar términos, la ecuación de balance de energía se expresa como:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \bar{q}'' + q''', \quad \dots\dots\dots (3.15)$$

donde se observa el carácter vectorial del flujo de calor, \bar{q}'' :

$$\bar{q}'' = -\left(\frac{\partial q''_x}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial q''_y}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial q''_z}{\partial z} \hat{k}\right). \quad \dots\dots\dots (3.16)$$

3.3 Ecuación de difusividad térmica

Para obtener la ecuación de difusividad térmica, primeramente, el flujo de calor debe expresarse en términos de la ley de Fourier. Por lo tanto, al sustituir la ecuación 3.2 en 3.16, se obtiene la ecuación de difusividad térmica en un medio sólido:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + q'''. \quad \dots\dots\dots (3.17)$$

Observar que, en general, la ecuación 3.17 es no lineal debido que la conductividad térmica, k , depende de la temperatura. Ahora bien, cuando ésta se considera constante, la ecuación se linealiza, obteniéndose que:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q'''}{k}. \quad \dots\dots\dots (3.18)$$

donde $\alpha = k/\rho c_p$ se denomina coeficiente de difusión térmica. En coordenadas radiales, se tiene:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{q'''}{k}. \quad \dots\dots\dots (3.19)$$

3.3.1 Tipos de condiciones de frontera

Debido a que la ecuación de difusión es de segundo orden en espacio y de primer orden en el tiempo, es necesario establecer condiciones de frontera y una condición inicial para resolverla. A continuación, se mencionan las condiciones de frontera más comunes:

1. **Tipo Dirichlet.** Se establece la temperatura en la frontera:

$$T(0, t) = T_0 . \quad \dots\dots\dots (3.20)$$

2. **Tipo Newmann.** Se establece el flujo de calor en la frontera:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_0'' . \quad \dots\dots\dots (3.21)$$

3. **Tipo Robin.** Se considera el efecto de la conducción y la convección en la frontera, de tal manera que debe cumplirse que:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)] . \quad \dots\dots\dots (3.22)$$

4. Si la superficie de frontera es adiabática, entonces:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 . \quad \dots\dots\dots (3.23)$$

3.3.2 Solución analítica en régimen estacionario en coordenadas radiales

En este apartado, se presenta la solución analítica de la ecuación 3.19 considerando una condición de régimen estacionario, ya que será utilizada en capítulos posteriores para verificar resultados de simulación con el método de elemento finito.

Considerando régimen estacionario y que no hay términos de generación, entonces:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0. \quad \dots\dots\dots (3.24)$$

Siguiendo un procedimiento similar al indicado en la sección 2.3.2, puede demostrarse que la solución es:

$$T(r) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right). \quad \dots\dots\dots (3.25)$$

En la **Figura 3.3**, se ejemplifica un perfil de temperatura calculado con la ecuación 3.25.

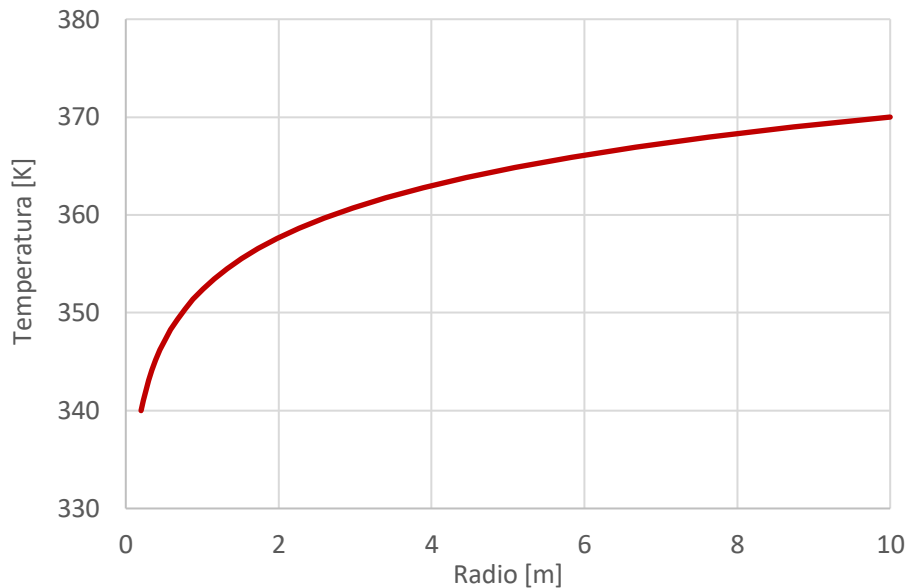


Figura 3.3 Perfil de temperatura en régimen estacionario en coordenadas radiales.

Capítulo 4

Método de elemento finito

En este capítulo se presentan los fundamentos del método de elemento finito. Primeramente, se ejemplifica cómo aproximar la solución de una ecuación diferencial ordinaria mediante funciones de interpolación con información en puntos discretos del dominio. Posteriormente, se aborda la formulación integral de la ecuación diferencial y se describe el método de Galerkin. Se mencionan los tipos de mallas numéricas y se explica cómo se construye la matriz de rigidez y el vector de fuerza para elementos finitos triangulares. Se mencionan los esquemas explícito e implícito para problemas que dependen del tiempo. Finalmente, se describe el programa computacional desarrollado en el marco del presente proyecto.

4.1 Preliminares

El método de elemento finito (FEM, Finite Element Method, por sus siglas en inglés) es una técnica numérica que permite aproximar la solución de ecuaciones diferenciales con valores en la frontera, y que resulta particularmente útil en sistemas de geometría irregular o medios anisotrópicos. Para tal efecto, el dominio de integración se discretiza en elementos geométricos “sencillos”, en los cuales se formula la integración de la ecuación diferencial de interés utilizando funciones de peso convenientes que dependen de la posición y que dan origen a diferentes esquemas de solución. Como resultado, luego de la integración por elemento, se realiza su acoplamiento obteniéndose un sistema de ecuaciones algebraicas que dan solución al problema en puntos discretos o nodos. Como elementos, comúnmente se utilizan triángulos y cuadriláteros en 2D, y tetraedros en 3D.

4.1.1 Generalidades

Para ejemplificar la metodología del elemento finito, se optó por una ecuación diferencial ordinaria genérica de segundo orden, tal que:

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} + f(x) = 0, \quad \text{en } 0 < x < 1, \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

con valores en la frontera $y(0) = c_1$, y $y(1) = c_2$. Primeramente, el dominio se particiona en segmentos. Como ejemplo, en la **Figura 4.1**, se consideran cinco elementos de longitud Δx ; de esta manera, resultan seis nodos que conectan cada par de elementos.

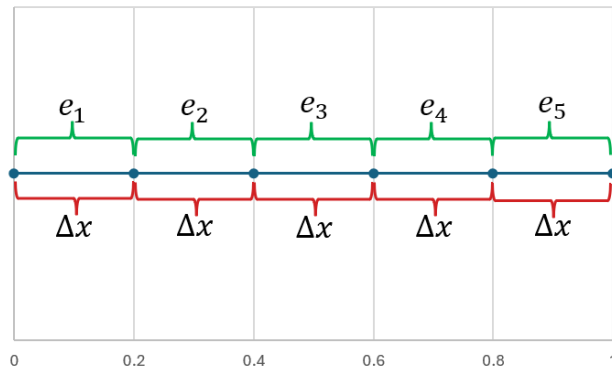


Figura 4.1 Discretización de un sistema 1D en cinco elementos y seis nodos.

Ahora bien, la función $y(x)$ se aproxima de la siguiente manera:

$$\tilde{T}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} T_i N_i(x), \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

donde n indica el número de elementos, las T_i corresponden a valores de la función en los nodos, y $N_i(x)$ son funciones de interpolación, forma o prueba para cada elemento. Estas funciones de prueba tienen la característica de reducir las dimensiones del sistema, buscando obtener un único valor por función; entre las más elementales, se tienen las de interpolación lineal:

$$\begin{aligned}
N_i(x) &= \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} && \text{si } x_{i-1} < x < x_i, \\
N_i(x) &= \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} && \text{si } x_i < x < x_{i+1}, \quad \dots\dots\dots (4.3) \\
N_i(x) &= 0 && \text{si } x \leq x_i, x \geq x_{i+1}.
\end{aligned}$$

La visualización de estas funciones de prueba se presenta en la **Figura 4.2**.

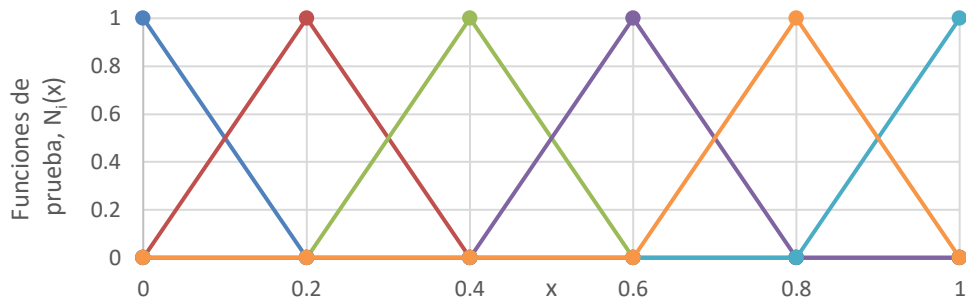


Figura 4.2 Visualización de funciones de peso en 1D.

De esta manera, la ecuación 4.2 puede expresarse para un elemento como:

$$\tilde{T}(x) = T_i N_i(x) + T_{i+1} N_{i+1}(x) . \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

Por otra parte, observar que se generará un residuo al aproximar la solución de la ecuación diferencial, de tal manera que:

$$R(x) = D_x[\tilde{T}(x)] + f(x) \neq 0, \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

donde $D_x = \frac{d^2}{dx^2}$, es el operador diferencial asociado al problema y $R(x)$ es la función de residuos; observar que si $R(x) = 0$, la solución es exacta. Por lo tanto, para evaluar el error global en el elemento, debe realizarse la integración de la función de residuos; al respecto, en el método de elemento finito se busca hacerlo cero mediante la introducción de funciones de peso convenientes, $W_i(x)$, tales que:

$$\int_x^{x_i} R(x)W_i(x)dx = 0 . \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

Cabe mencionar que a la ecuación 4.6, se le denomina formulación “débil” del problema, y, dependiendo de cómo se construyen las funciones de peso, surgen diferentes esquemas de solución. A continuación, se describe el correspondiente al método de Galerkin.

4.2 Método de Galerkin

En el método de Galerkin, se utilizan las funciones de prueba, $N_i(x)$, como funciones de peso, $W_i(x)$, en la integral de la ecuación 4.6. Como condicionante, las funciones de peso deben ser ortogonales a la función de residuos. Para describir el método, considerar la ecuación diferencial 4.1; en este caso, considerando las ecuaciones 4.5 y 4.6, para el elemento correspondiente a los nodos 1 y 2, se tiene que:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d^2T}{dx^2} + f(x) \right) N_i dx = 0 , \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

o bien,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2T}{dx^2} \cdot N_i(x)dx = - \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot N_i(x)dx . \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

Integrando por partes la integral de lado izquierdo de la ecuación 4.8, se tiene que:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d^2T}{dx^2} \right] N_i dx = \left(N_i \frac{dT}{dx} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dT}{dx} \cdot \frac{dN_i}{dx} dx; \quad i = 1, 2. \quad \dots\dots\dots (4.9)$$

Considerando las funciones de peso, N_i , definidas en la ecuación 4.3, se tiene que:

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{-1}{x_2 - x_1}, \quad \dots\dots\dots (4.10)$$

$$\frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1}.$$

Luego de la integración y evaluación correspondientes en la ecuación 4.9, tanto para N_1 y N_2 , se obtienen las siguientes dos ecuaciones, una para el nodo 1 y otra para el nodo 2, respectivamente:

$$\frac{1}{x_2 - x_1} T_1 - \frac{1}{x_2 - x_1} T_2 = - \frac{dT}{dx} \Big|_{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_1 dx, \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

$$- \frac{1}{x_2 - x_1} T_1 + \frac{1}{x_2 - x_1} T_2 = \frac{dT}{dx} \Big|_{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_2 dx,$$

o bien, en forma matricial:

$$[K_{e1}] \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = [F_{e1}]. \quad \dots\dots\dots (4.12)$$

donde

$$[K_{e1}] = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

se denomina comúnmente como matriz de “rigidez”, con referencia a los términos utilizados en la mecánica de sólidos donde el FEM tuvo sus primeras aplicaciones. El subíndice e_1 se agrega para diferenciar a qué elemento corresponde; en este caso, el elemento 1. Por otra parte, $[F_{e1}]$ es el vector “fuerza”:

$$[F_{e1}] = \begin{pmatrix} -\frac{dT}{dx}\Big|_{x_1} \\ \frac{dT}{dx}\Big|_{x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_1 dx \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_2 dx \end{pmatrix}. \quad \dots\dots\dots (4.14)$$

Finalmente, la ecuación matricial 4.12 se aplica para todos los elementos del sistema, de tal manera que los elementos quedan acoplados y hay continuidad en las soluciones de los nodos. Como resultado se genera un sistema de n ecuaciones algebraicas. Para el caso analizado, donde los nodos están equiespaciados una distancia Δx , se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 1/\Delta x & -1/\Delta x & 0 & 0 & 0 \\ -1/\Delta x & 1/2\Delta x & -1/\Delta x & 0 & 0 \\ 0 & -1/\Delta x & 1/2\Delta x & -1/\Delta x & 0 \\ 0 & 0 & -1/\Delta x & 1/2\Delta x & -1/\Delta x \\ 0 & 0 & 0 & -1/\Delta x & 1/\Delta x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{dT}{dx}\Big|_{x_1} + I \\ 2I \\ 2I \\ 2I \\ \frac{dT}{dx}\Big|_{x_5} + I \end{pmatrix}, \quad \dots\dots\dots (4.15)$$

donde las I corresponden a las integrales de la ecuación 4.14. Observar que las condiciones de frontera deben sustituirse en la primera y última ecuaciones, según se especifique en el problema.

4.3 Mallado y elementos finitos en 2D

En esta sección, se describen los tipos de mallas y el procedimiento para calcular elementos finitos de forma triangular.

4.3.1 Mallado del dominio

La discretización del dominio de integración en el espacio queda definida mediante la construcción de una malla de simulación. Al respecto, se busca que la mallas preserven los rasgos esenciales de la geometría del sistema analizado, y que el número y forma de los elementos discretos resultantes resulten convenientes para resolver numéricamente el problema de interés. Pueden clasificarse en dos grandes rubos:

- 1) **Mallas ortogonales:** Se caracterizan por presentar líneas de cuadrícula rectas y perpendiculares en el sistema coordenado de referencia, resultando en una estructura regular (**Figura 4.3**). Esta regularidad facilita la discretización y resolución numérica de las ecuaciones diferenciales del problema. Por otra parte, los mallados ortogonales tienden a ser más estables numéricamente (El-Zafrany, A,2014).

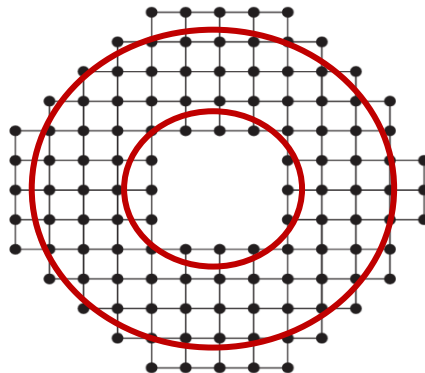


Figura 4.3 Ejemplo de una malla ortogonal. (El-Zafrany. A, 2014)

- 2) **Mallas no ortogonales:** Presentan líneas de cuadrícula que no son perpendiculares entre sí, lo que les confiere una mayor flexibilidad geométrica para adaptarse a geometrías irregulares o complejas (**Figura 4.4**). Estos mallados pueden concentrar más puntos en áreas de interés específicas, lo que mejora la precisión de la solución

en esas regiones. Ahora bien, debido a su estructura no regular, los cálculos asociados con los mallados no ortogonales suelen ser más complejos y pueden requerir más recursos computacionales.

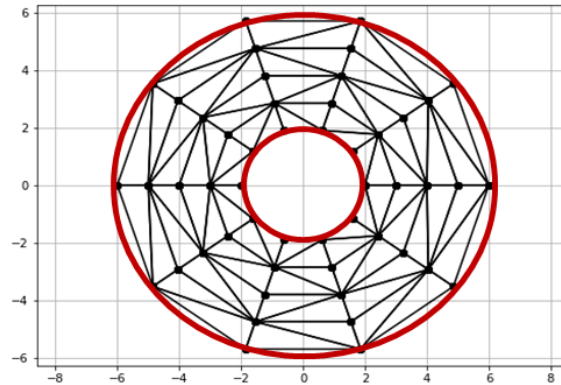


Figura 4.4 Ejemplo de una malla no ortogonal.

Es conveniente mencionar que se utilizarán mallas no ortogonales en el presente trabajo, como elementos finitos triangulares. La geometría del sistema analizado es similar a la que se ejemplifica en la **Figura 4.4**, excepto que se considera una distribución logarítmica en la dirección radial, como se describe en el siguiente capítulo.

4.3.2 Elementos finitos triangulares

En el presente trabajo se consideran elementos triangulares en la aplicación del método de elemento finito para resolver los problemas de conducción de calor y flujo de fluidos en medios porosos. Como referencia para los siguientes desarrollos, considerar el elemento triangular mostrado en la **Figura 4.5**.

Con referencia a la **Figura 4.5**, una función de dos variables en el espacio, $T = T(x, y)$, puede aproximarse a partir de los valores de T en los nodos 1, 2, 3, conforme a la siguiente función de interpolación lineal:

$$T(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y . \quad \dots\dots\dots (4.16)$$

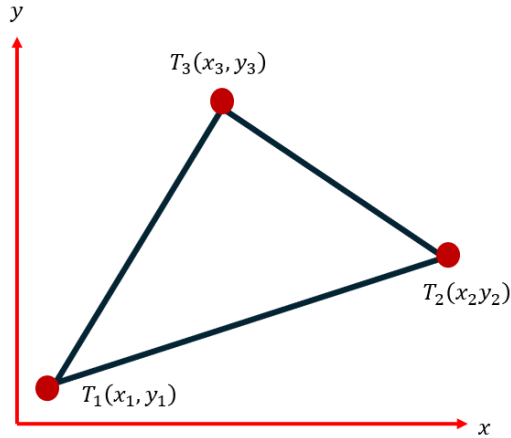


Figura 4.5 Ejemplo de un elemento finito triangular.

Por lo tanto, en los vértices del triángulo, debe cumplirse que:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1, \\
 T_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2, \quad \dots\dots\dots (4.17) \\
 T_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3.
 \end{aligned}$$

Luego de resolver el sistema de ecuaciones algebraicas lineales en 4.17, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) T_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) T_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) T_3], \\
 \alpha_2 &= \frac{1}{2A} [(y_2 - y_3) T_1 + (y_3 - y_1) T_2 + (y_1 - y_2) T_3], \quad \dots (4.18) \\
 \alpha_3 &= \frac{1}{2A} [(x_3 - x_2) T_1 + (x_1 - x_3) T_2 + (x_2 - x_1) T_3],
 \end{aligned}$$

donde A es el área del elemento triangular, tal que:

$$2A = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_2). \quad \dots\dots\dots (4.19)$$

Ahora bien, sustituyendo los coeficientes α_n en 4.17, se obtiene que:

$$T = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}, \quad \dots\dots\dots (4.20)$$

donde:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2A} (\alpha_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1), \\ N_2 &= \frac{1}{2A} (\alpha_2 + b_2 x_2 + c_2 y_2), \quad \dots\dots\dots (4.21) \\ N_3 &= \frac{1}{2A} (\alpha_3 + b_3 x_3 + c_3 y_3), \end{aligned}$$

y los parámetros b y c se calculan como:

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3 \quad , \quad c_1 = x_3 - x_2 \quad , \\ b_2 &= y_3 - y_1 \quad , \quad c_2 = x_1 - x_3 \quad , \quad \dots\dots\dots (4.22) \\ b_3 &= y_1 - y_2 \quad , \quad c_3 = x_2 - x_1 \quad . \end{aligned}$$

Ahora bien, considerando los resultados previos, entonces la matriz de rigidez asociada a un elemento finito triangular puede expresarse como:

$$[k_e] = \frac{h}{4A} \left[k_x \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_1 b_2 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ b_1 b_3 & b_2 b_3 & b_3^2 \end{bmatrix} + k_y \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_1 c_2 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_1 c_3 & c_2 c_3 & c_3^2 \end{bmatrix} \right], \quad \dots\dots\dots (4.23)$$

donde h es el espesor, k_x y k_y corresponderían a las conductividades térmicas o las permeabilidades en las direcciones x-y, en problemas de conducción de calor o de flujo de fluidos en medios porosos, respectivamente. Cuando el medio es isotrópico, entonces:

$$[k_e] = \frac{h * k_{xy}}{4A} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_1 b_3 + c_1 c_3 & b_2 b_3 + c_1 c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix}. \quad \dots\dots\dots (4.24)$$

En cuanto al tratamiento de las condiciones de frontera en los elementos triangulares, considere la **Figura 4.6**. Al respecto, éstas pueden incorporarse a través del vector fuerza asociado al problema, o bien pueden modificarse los coeficientes de la matriz de rigidez correspondiente, como se indica a continuación.

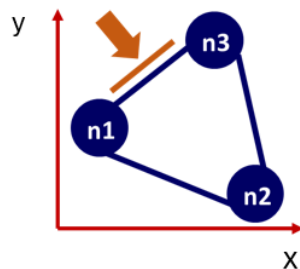


Figura 4.6 Arista de un elemento triangular en la frontera.

Considerando que la arista definida por los nodos $n_1 - n_3$ del elemento mostrado en la **Figura 4.6** está sujeta a una condición de frontera de tipo Neumann, el vector fuerza puede expresarse como (Lewis,2004):

$$[F_g] = -\frac{ql_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \dots\dots\dots (4.25)$$

donde q'' es el flujo que incide hacia el elemento y l_{ij} es la longitud de la arista. Por otra parte, el vector de 1×3 está asociado a los tres nodos que conforman el triángulo; se asignará un valor 1 únicamente en las posiciones correspondientes a los nodos que definen la arista en la frontera.

Ahora bien, si la condición de frontera es de tipo Dirichlet, la matriz de rigidez debe modificarse, de tal manera que (Hutton,2004):

$$[k_e] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{hk_{xy}}{4A}(b_1b_2 + c_1c_2) & \frac{hk_{xy}}{4A}(b_2^2 + c_2^2) & \frac{hk_{xy}}{4A}(b_2b_3 + c_2c_3) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dots \quad (4.26)$$

donde se le colocara el valor de 1 en la posición correspondiente al nodo donde se conoce la variable, mientras que los demás coeficientes serán cero.

Para finalizar, se construyen la matriz de rigidez y el vector de fuerzas para todos los elementos del sistema, siguiendo el procedimiento expuesto en la sección 4.2. Como resultado se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que debe resolverse para el vector de incógnitas $[T]$.

4.4 Discretización en tiempo

En problemas que involucran la evolución de un sistema en el tiempo será necesario capturar los cambios con el cual se acumula materia, cantidad de movimiento o energía en el volumen de control correspondiente, en pasos de tiempo preestablecidos; para tal efecto, en el método de elemento finito se define una matriz de capacitancia, $[C_e]$, que puede expresarse para un elemento en dos dimensiones, como (Lewis,2004):

$$[C_e] = \int_A c [N]^T [N] dA, \quad \dots \quad (4.27)$$

donde $[N]$ es el vector de funciones de forma (p.e., ecuación 4.21), y c es el coeficiente de capacitancia, el cual está relacionado con las propiedades del material que resulten pertinentes para representar el ritmo con el que se acumula la variable de interés en el elemento, por unidad de volumen; por ejemplo, en problemas de conducción de calor correspondería al producto de la densidad del material por su capacidad térmica específica. Para un elemento triangular, se tiene que (Lewis,2004):

$$[C_e] = \frac{cA}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad \dots \quad (4.28)$$

Conjuntando los resultados obtenidos al momento, la formulación FEM que describe la evolución de un sistema en el tiempo puede expresarse como:

$$[C_e][\dot{T}_e] + [k_e][T_e] = [F_{ge}], \quad \dots\dots\dots (4.29)$$

donde $[\dot{T}_e]$ es el vector que aproxima las derivadas de la propiedad de interés en los nodos con respecto al tiempo, como diferencias finitas:

$$[\dot{T}_e] \cong \frac{[T_e(t_{i+1} = t_i + \Delta t)] - [T_e(t_i)]}{\Delta t}. \quad \dots\dots\dots (4.30)$$

Con relación a la ecuación 4.30, observe que la incógnita del problema será el vector $[T_e(t_{i+1})]$. Al respecto, es importante mencionar que si la matriz de capacitancia, la matriz de rigidez y/o el vector de fuerza dependen de $T_e(t_{i+1})$, la ecuación puede resultar en su sistema no lineal. En este sentido, considerando los alcances del presente trabajo, se considerará que los tres son constantes, de tal manera que el problema es lineal.

Ahora bien, dependiendo del nivel de tiempo en el que se evalúe el vector $[T_e]$ que multiplica a la matriz de rigidez, se diferencian dos esquemas de solución:

a) Esquema explícito

El vector $[T_e]$ que multiplica a la matriz de rigidez en la ecuación 4.29 se evalúa en el tiempo t_i . Por lo tanto, la solución del sistema al tiempo t_{i+1} puede expresarse como:

$$[C_e][T_e(t_{i+1})] = [C_e][T_e(t_i)] - [k_e][T_e(t_i)] \Delta t + [F_{ge}] \Delta t. \quad \dots\dots\dots (4.31)$$

Con respecto a este esquema, puede mencionarse que es condicionalmente estable, y puede requerir pasos de tiempo prohibitivos dependiendo de la naturaleza del problema.

b) Esquema implícito:

En este caso, el vector $[T_e]$ que multiplica a la matriz de rigidez en la ecuación 4.29 se evalúa en el tiempo t_{i+1} . Por lo tanto, se genera un sistema de ecuaciones algebraicas lineales en términos de los elementos del vector $T_e(t_{i+1})$. De esta manera, se tiene que:

$$[[C_e] + [k_e] \Delta t] [T_e(t_{i+1})] = [C_e][T_e(t_i)] + [F_{ge}] \Delta t . \quad \dots\dots\dots (4.32)$$

Cabe destacar que este esquema es incondicionalmente estable, y es el utilizado para los fines de este trabajo. Para finalizar la formulación de la solución, se aplica la ecuación 4.32 en todos los elementos que conforman el sistema, resultando en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales.

4.5 Implementación computacional

Conforme a lo objetivos de este trabajo, se desarrolló un programa computacional para resolver problemas de conducción de calor y de flujo en medios porosos aplicando el método de elemento finito, como se describe en el siguiente capítulo. Para tal efecto, se escribieron subrutinas computacionales en lenguaje de programación en macros de VB para Excel. En cuanto a la visualización de resultados, se utilizaron librerías de Python. A continuación, se describen las características generales del programa.

4.5.1 Estructura del programa computacional

El programa computacional en macros de VB utiliza hojas de Excel como interfaz gráfica para la entrada de datos, así como para la impresión de resultados numéricos en archivos de texto plano (**Figura 4.7**). Cabe destacar que se utilizaron macros con la finalidad de que el programa pueda ejecutarse en prácticamente cualquier computadora de escritorio que tenga instalado Excel.

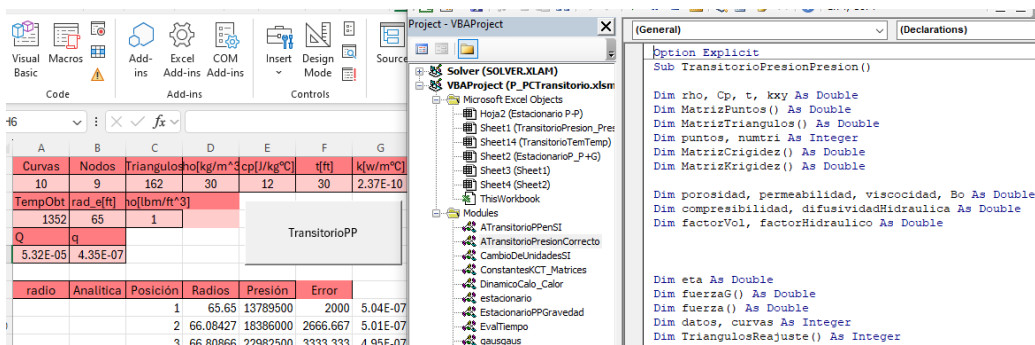


Figura 4.7 Programa computacional en macros de VB para Excel.

El programa está construido en forma modular, agrupando acciones en los siguientes rubros:

- 1) Subrutina principal, "Main". Se encarga de la declaración de las variables principales y de la lectura de los datos de entrada, así como de la impresión de resultados en hojas de cálculo y en archivos de texto plano. En esta subrutina principal se invoca a las subrutinas que realizan los cálculos numéricos.
- 2) Construcción del mallado. En este módulo se construye la malla de simulación. Para los sistemas analizados, y que se describen en el siguiente capítulo, el programa construye una malla no ortogonal 2D (x-y) sobre una corona circular, con elementos finitos triangulares distribuidos logarítmicamente en la dirección radial. Como datos, se especifican el número de curvas concéntricas y el número de nodos por curva. Después de generar la distribución de los nodos, las coordenadas de los vértices de los elementos triangulares se guardan en una matriz, siguiendo una secuencia antihoraria.
- 3) Construcción de las matrices de rigidez y de capacitancia. En este módulo se calculan y guardan las matrices totales de rigidez y capacitancia.
- 4) Subrutinas para la incorporación de las condiciones de frontera. Dependiendo del tipo de condición de frontera en el problema, se modifica la matriz de rigidez o el vector fuerza, de acuerdo con lo expuesto en la sección 4.3.2.
- 5) Resolución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales. Se cuenta con un módulo con subrutinas para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas resultante de la aplicación del método de elemento finito. Para tal efecto, se incorporó una librería que utiliza el método de Gauss-Jordan.
- 6) Simulación en tiempo. El programa cuenta con subrutinas para resolver problemas que involucran cambios en el tiempo, utilizando una formulación implícita.
- 7) Generación de archivos de resultados. Los resultados numéricos del programa se imprimen en hojas de Excel y en un archivo de texto plano.

8) Visualización de resultados. Para visualizar resultados, se desarrolló código en el entorno de Python. Para tal efecto, se utiliza el archivo de texto generado con el programa de macros, y se utilizaron las librerías numpy, matplotlib.pyplot, imageio y os (Figura 4.8).

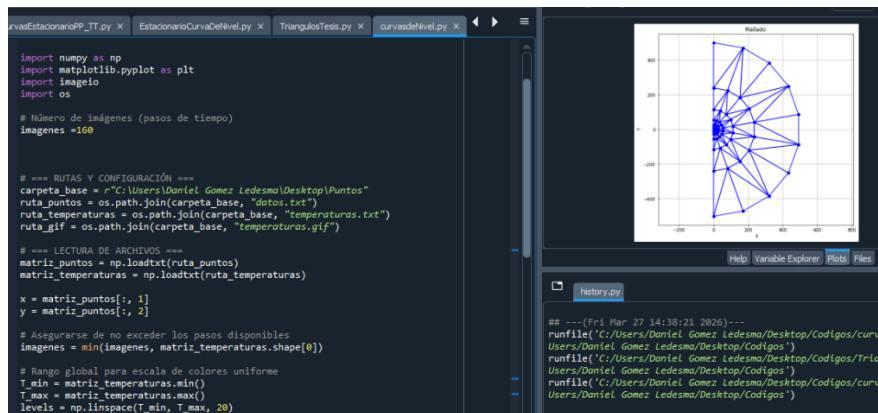


Figura 4.8 Código de visualización de resultados en el entorno de Python.

Los algoritmos para realizar los cálculos correspondientes a las simulaciones en régimen estacionario y en transitorio se muestran en las Figuras 4.9 y 4.10, respectivamente.

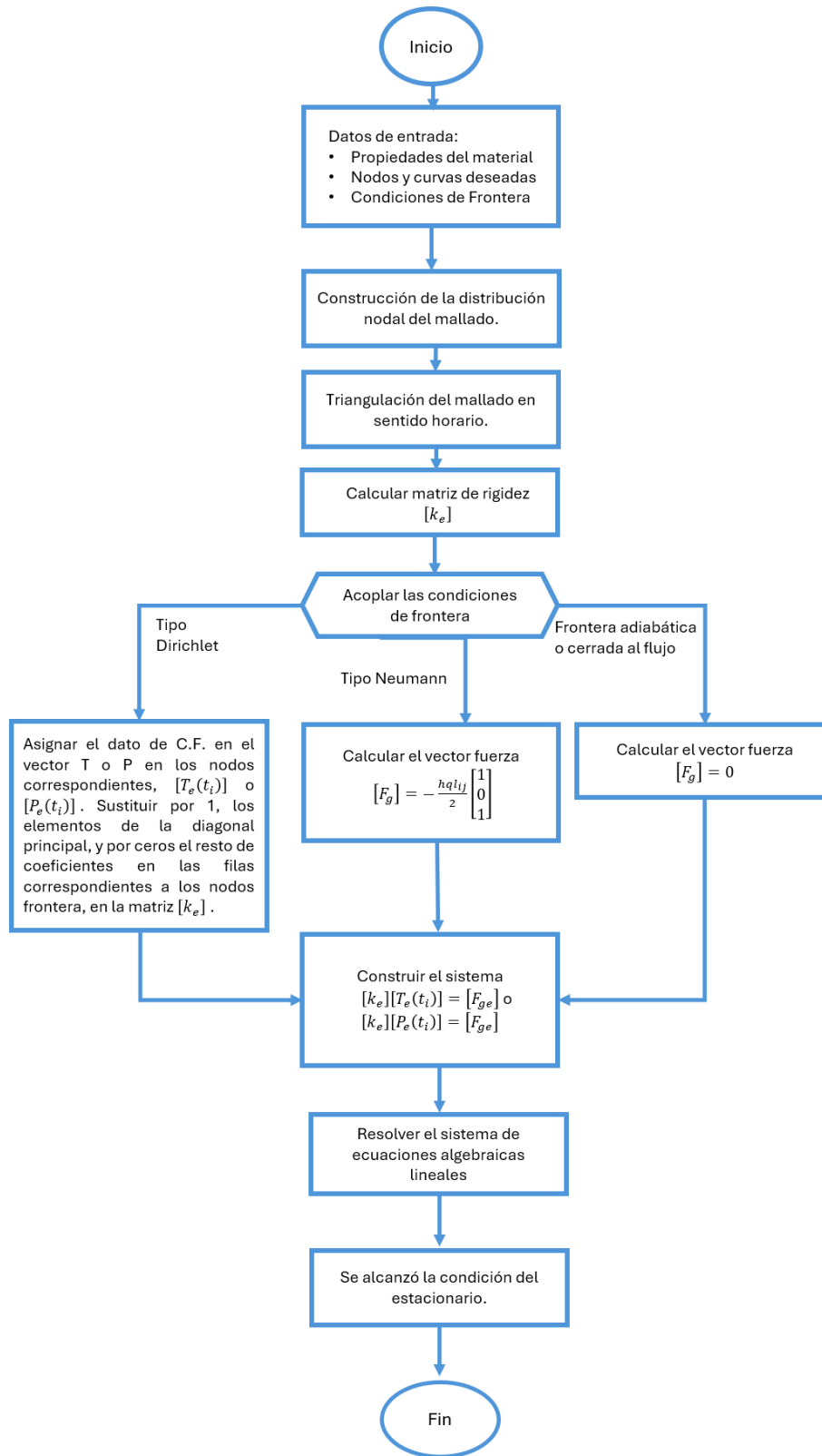


Figura 4.9 Algoritmo de simulación en régimen estacionario.

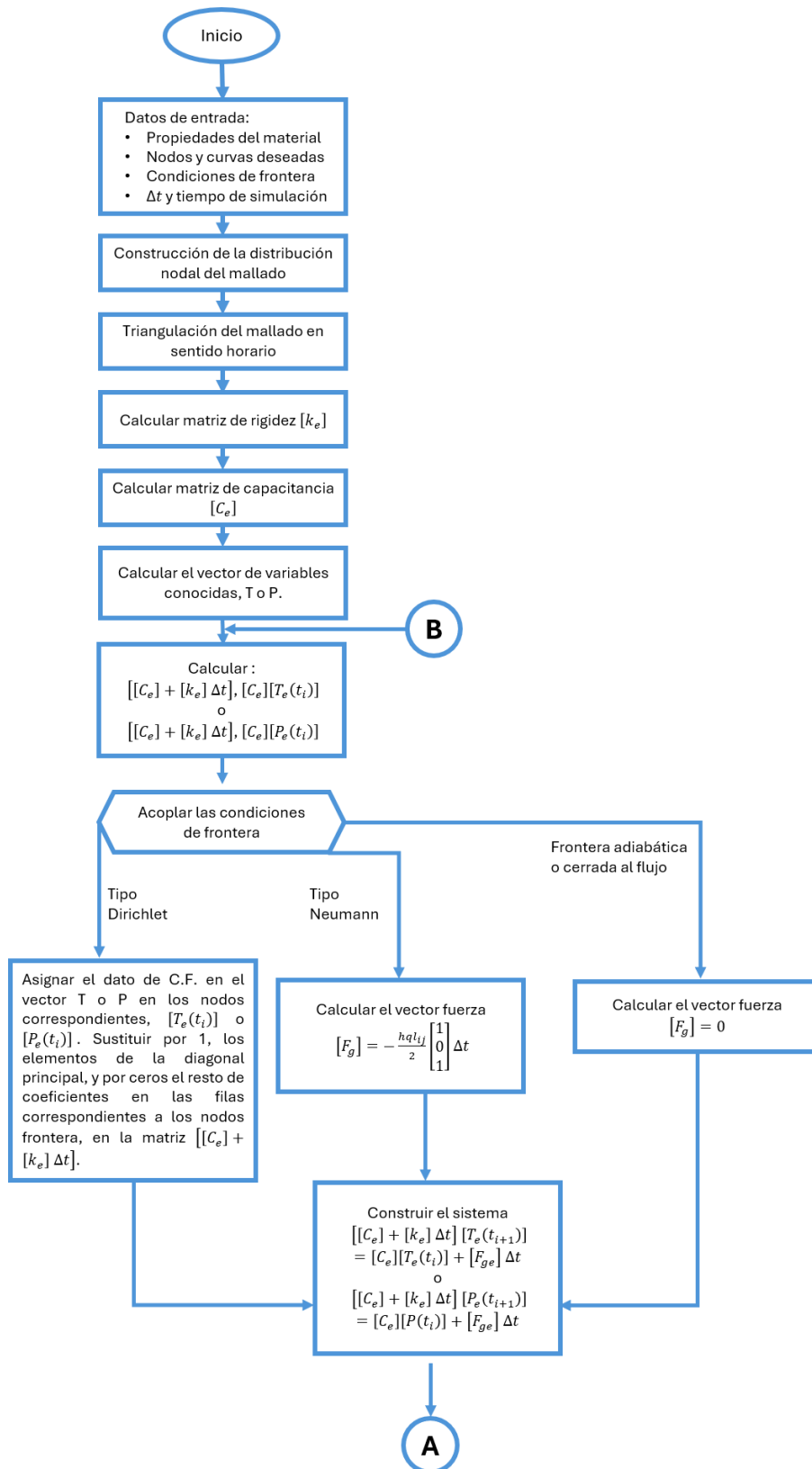


Figura 4.10 Algoritmo de simulación en régimen transitorio.

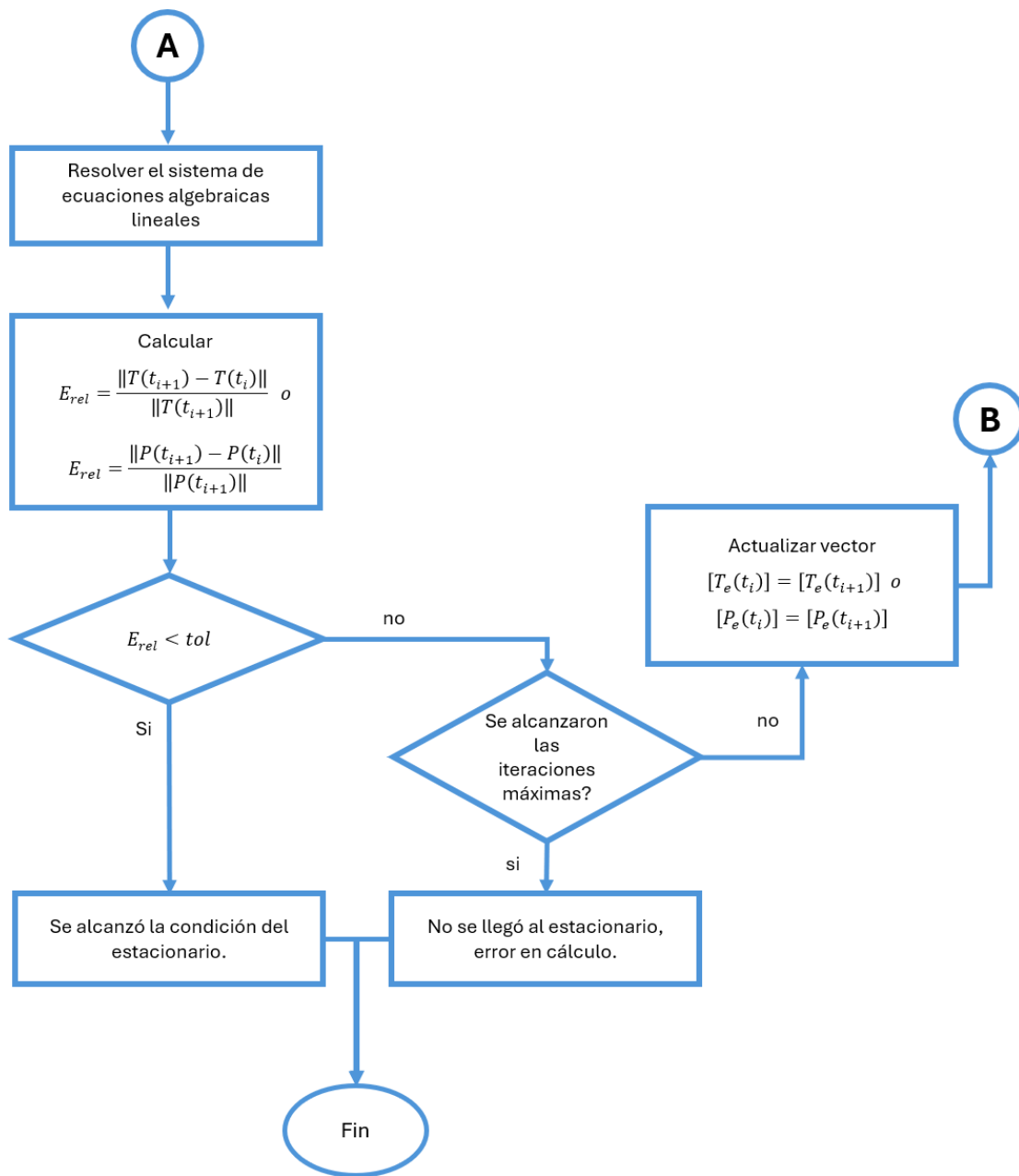


Figura 4.10 (cont.) Algoritmo de simulación en régimen transitorio.

Capítulo 5

Problemas de aplicación

En este capítulo se aborda el procedimiento de resolución de diversos problemas de conducción de calor y de flujo en medios porosos, mediante el método de elemento finito. Se consideran problemas en 1D y 2D, en regímenes estacionario y transitorio, y con condiciones de frontera de tipo Dirichlet y Neumann. En cada caso, se ejemplifica cómo se construyen las matrices de rigidez y capacitancia, así como el vector de fuerza, con la finalidad de obtener un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que permita calcular la distribución de temperaturas o presiones en el medio, según corresponda. Asimismo, se discute la verificación de resultados de las simulaciones desarrolladas.

Antes de continuar, es conveniente destacar el modelado numérico de los métodos térmicos de recuperación mejorada, como el SAGD, es complejo y está fuera de los alcances de este trabajo, como se mencionó en el capítulo 1. Ahora bien, los problemas que se presentan a continuación pueden servir como base para desarrollos posteriores más avanzados.

5.1 Problemas de conducción de calor

En esta sección, se presentan problemas de conducción de calor. Para tal efecto, se resuelve la ecuación de difusividad térmica, tanto en condiciones estacionarias como transitorias, mediante FEM. Los problemas considerados son los siguientes:

1. Conducción de calor 1D en régimen estacionario.
2. Conducción de calor 2D, con condiciones de frontera Dirichlet-Dirichlet.
3. Conducción de calor 2D, con condiciones de frontera Neumann-Dirichlet.

5.1.1 Conducción de calor 1D en régimen estacionario

En este problema se busca determinar el perfil de la temperatura, $T(x)$, en una barra sujeta a condiciones de frontera Dirichlet en sus extremos (**Figura 5.1**), aplicando el método de elemento finito. La ecuación que describe la conducción de calor con un término fuente, $f(x) = -10$, está representada por la siguiente ecuación:

$$d^2T/dx^2 = -10, \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

donde la temperatura está en [°C], y la distancia en [cm]. Como datos, la longitud de la barra es de 10 [cm], y las condiciones de frontera son: $T_1(0) = 40$ y $T_2(10) = 200$.

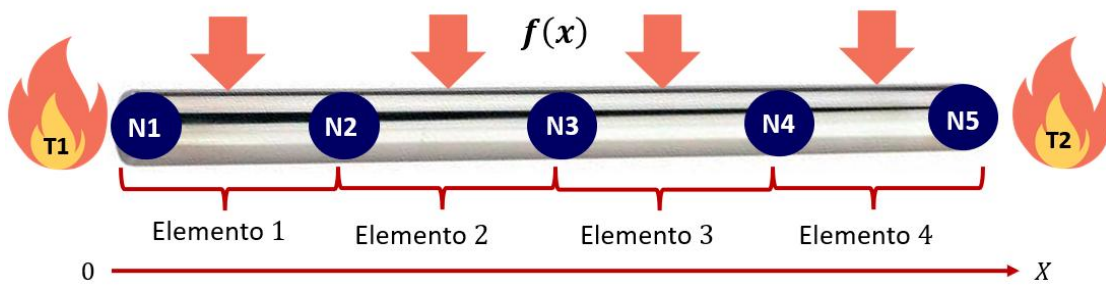


Figura 5.1 Conducción de calor en una barra en condiciones de régimen estacionario.

Resolución

Para efectos de ilustrar la aplicación del método de elemento finito, se considera la discretización de la barra en cuatro elementos, como se ilustra en la **Figura 5.1**. De esta manera, resultan cinco nodos, dos de los cuales incluyen las fronteras; por lo tanto, las incógnitas del problema son las temperaturas en los nodos 2, 3 y 4, y las derivadas de la temperatura en los extremos. El procedimiento para formular el problema en términos de elementos finitos es el siguiente.

1) La matriz de rigidez y el vector fuerza para el elemento 1 (definido entre $x_1 = 0$ y $x_2 = 2.5$), se expresan, conforme a las ecuaciones 4.13 y 4.11, respectivamente, como:

$$[k_{e1}] = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2.5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[F_{e1}] = \begin{pmatrix} -\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} 10 * \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right) dx \\ \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} 10 * \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) dx \end{pmatrix}.$$

Resolviendo las integrales en el vector de fuerza para el elemento 1, se tiene que:

$$[F_{e1}] = \begin{pmatrix} -\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_1} + 10 \left(\frac{x_2 x - 0.5x^2}{x_2 - x_1} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_2} + 10 \left(\frac{0.5x^2 - x_1 x}{x_2 - x_1} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \end{pmatrix},$$

por lo que:

$$[F_{e1}] = \begin{pmatrix} -\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_1} + 12.5 \\ \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_2} + 12.5 \end{pmatrix}.$$

2) Para los tres elementos restantes, se repite el proceso del paso 1. Posteriormente, se procede a construir la matriz de rigidez y el vector fuerza totales:

$$[k_T] = [k_{e1}] + [k_{e2}] + [k_{e3}] + [k_{e4}],$$

obteniéndose que:

$$2.5[k_T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde:

$$[k_T] = \frac{1}{2.5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el caso del vector fuerza total, se procede de manera similar:

$$[F_T] = [F_{e1}] + [F_{e2}] + [F_{e3}] + [F_{e4}],$$

de tal manera que:

$$[F_T] = \begin{pmatrix} -\frac{dT}{dx}\Big|_{x_1} + 12.5 \\ \frac{dT}{dx}\Big|_{x_2} + 12.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{dT}{dx}\Big|_{x_2} + 12.5 \\ \frac{dT}{dx}\Big|_{x_3} + 12.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{dT}{dx}\Big|_{x_3} + 12.5 \\ \frac{dT}{dx}\Big|_{x_4} + 12.5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{dT}{dx}\Big|_{x_4} + 12.5 \\ \frac{dT}{dx}\Big|_{x_5} + 12.5 \end{pmatrix},$$

de donde:

$$[F_t] = \begin{pmatrix} -\frac{dT}{dx}\Big|_{x_1} + 12.5 \\ 2 \cdot 12.5 \\ 2 \cdot 12.5 \\ 2 \cdot 12.5 \\ \frac{dT}{dx}\Big|_{x_5} + 12.5 \end{pmatrix}.$$

3) De esta manera, la ecuación matricial para el sistema de ecuaciones algebraicas lineales resultante es:

$$[k_t][T_t] = [F_t].$$

Ahora bien, se procede a sustituir las condiciones de frontera conocidas, sea en el vector $[T_t]$ o en $[F_t]$. Como en este caso se conocen las temperaturas en los extremos de la barra, entonces:

$$[T_t] = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2.5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{dT}{dx}\bigg|_{x_1} + 12.5 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ \frac{dT}{dx}\bigg|_{x_5} + 12.5 \end{pmatrix}.$$

4) En consecuencia, el vector de incógnitas queda como:

$$\frac{1}{2.5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dT}{dx}\bigg|_{x_1} \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ -\frac{dT}{dx}\bigg|_{x_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 + 12.5 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ -200 + 12.5 \end{pmatrix}.$$

5) La solución al sistema de ecuaciones algebraicas lineales es la siguiente:

$$\frac{dT}{dx}\bigg|_{x_1} = 66, \quad T_2 = 173.75, \quad T_3 = 245, \quad T_4 = 253.75 \quad \text{y} \quad \frac{dT}{dx}\bigg|_{x_5} = -34.$$

Verificación de resultados

Puede demostrarse fácilmente que la solución analítica para el problema es: $T(x) = -5x^2 + 66x + 40$. De esta manera, en la **Figura 5.2**, se comparan los resultados numéricos con la solución exacta. Como puede observarse, se verifica que son correctos.

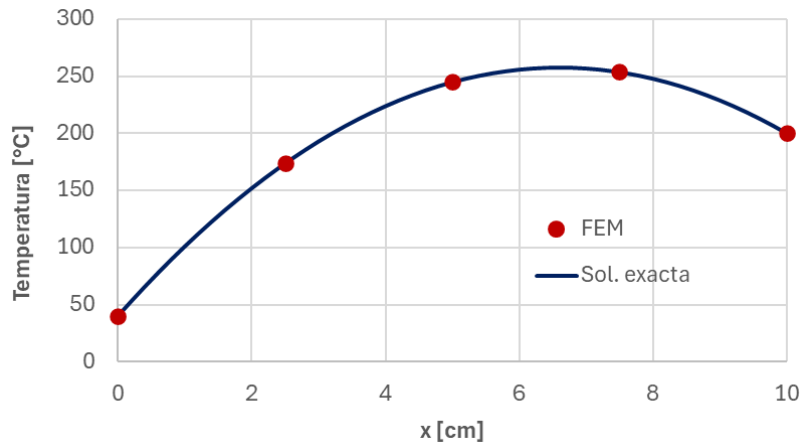


Figura 5.2 Comparación de resultados con FEM y la solución exacta para el problema 5.1.1.

5.1.2 Conducción de calor 2D, con condiciones de frontera Dirichlet- Dirichlet

El sistema analizado se muestra en la **Figura 5.3**. Consiste en la mitad de un disco de arena con las siguientes condiciones de frontera: tipo Dirichlet en los radios interno y externo; en las superficies verticales, se tienen condiciones de frontera adiabáticas. Como condición inicial, se considera que la temperatura es la misma en todo el dominio. Las propiedades del sistema se indican en la **Tabla 5.1**.

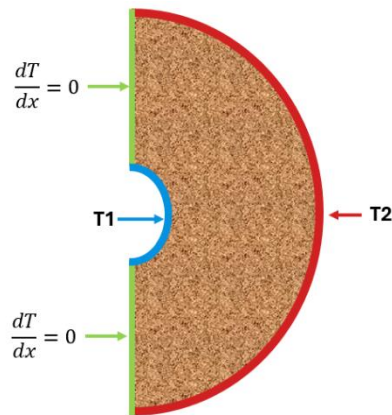


Figura 5.3 Sistema analizado para el problema 5.1.2.

Ahora bien, aun cuando el problema originalmente es de conducción de calor en régimen transitorio, es interesante notar que el sistema eventualmente alcanzará una condición estacionaria debido a la naturaleza de las condiciones de frontera establecidas y a que no se consideran términos de generación. Por lo tanto, este problema se utilizará para simular dos casos: 1) en régimen estacionario y 2) en régimen transitorio.

Para resolver ambos escenarios mediante el método de elemento finito, se utilizó el programa computacional desarrollado en este trabajo. Al respecto, la malla de simulación utilizada se muestra en la **Figura 5.4**; como puede observarse, los nodos en la dirección radial se encuentran distribuidos logarítmicamente. Se consideraron 15 curvas, con 15 nodos en cada una de ellas. De esta manera, la malla está conforma por 392 elementos.

Tabla 5.1 Datos de entrada para el problema 5.1.2.

Variable	Valor
Radio interior	0.2 [m]
Radio exterior	10 [m]
Espesor	30 [m]
Temperatura en el radio interior	340 [K]
Temperatura en el radio exterior	370 [K]
Temperatura inicial del dominio	340 [K]
Conductividad térmica	2.9 [W/m K]
Capacidad térmica específica	745 [J/kg K]
Densidad	2150 [kg/m ³]

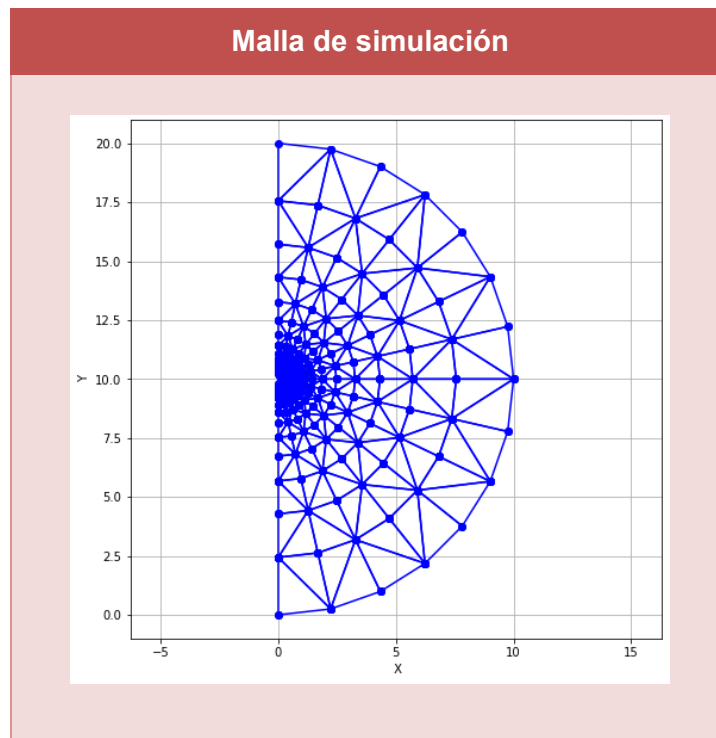


Figura 5.4 Malla generada para el problema 5.1.2.

a) Simulación en régimen estacionario

Para ejemplificar cómo se construyen las matrices de rigidez y el vector fuerza para un elemento genérico, considere el elemento 25; para éste, sus vértices corresponden a los nodos 13, 12 y 28 (en sentido antihorario). Las coordenadas x-y correspondientes se indican en la **Tabla 5.2**. Es importante notar que, aun cuando el sistema tiene una geometría radial, el programa computacional cuenta con funcionalidades para la transformación de coordenadas a cartesianas, x-y.

Tabla 5.2 Datos de los nodos que conforman al elemento 25.

Nodo	Abscisa	Ordenada
13	$8.677 \cdot 10^{-2}$	10.1801
12	0.1246	10.1563
28	0.114747	10.238

El procedimiento es el siguiente:

1) Mediante la ecuación 4.19, se calcula el área del elemento 25:

$$A = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|,$$
$$A = \frac{1}{2} |-7.09 \cdot 10^{-3} + 0.0072 + 0.0027| = 1.43 \cdot 10^{-3} [m^2].$$

2) A continuación, se calcula la matriz de rigidez para el elemento 25, $[k_{25}]$, con la ecuación 4.24:

$$[k_{25}] = \frac{2.9 \left[\frac{W}{m K} \right] * 30 [m]}{4 * 1.43 \cdot 10^{-3} [m^2]} \begin{bmatrix} 6.81 \cdot 10^{-3} & -4.48 \cdot 10^{-3} & -2.33 \cdot 10^{-3} \\ -4.48 \cdot 10^{-3} & 4.16 \cdot 10^{-3} & 3.23 \cdot 10^{-4} \\ -2.33 \cdot 10^{-3} & 3.23 \cdot 10^{-4} & 2.01 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

3) Los pasos 1 y 2 se repiten para todos los elementos de la malla para obtener su respectiva matriz de rigidez $[k_i]$. Posteriormente, se procede a su acoplamiento para generar la matriz de rigidez total, $[k_T]$:

$$[k_T] = \begin{bmatrix} 103.2 & -67.92 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -67.92 & 206.46 & -67.92 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -67.92 & 206.46 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 156.1 & -42.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -42.75 & 156.128 & -42.75 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -42.7 & 78.0 \end{bmatrix}.$$

4) En la malla de simulación, los nodos que coinciden con el radio interno del sistema son los correspondientes del 1 al 15; en ellos se asigna el valor de la temperatura $T_{ri} = 340 [K]$. En el radio externo, los nodos frontera van del 211 al 225, a los cuales se les asigna el valor de la temperatura $T_{re} = 370 [K]$. Así, el vector de temperatura toma la forma siguiente, observando que la temperatura en el resto de los nodos es desconocida.

$$[T_T] = \begin{bmatrix} 340 \\ 340 \\ 340 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 370 \\ 370 \\ 370 \end{bmatrix}.$$

5) En cuanto al vector de fuerza, es interesante destacar que corresponde al vector nulo, $[F_T] = [0]$. Esto se explica porque no hay términos de generación de calor en el sistema y a que las fronteras verticales son adiabáticas ($dT/dn = 0$). Por lo tanto, la ecuación matricial correspondiente al problema es:

$$[K_T][T_T] = [0].$$

6) Ahora bien, considerando que se conocen las temperaturas en los nodos que coinciden con las fronteras en los radios interno y externo, la matriz de rigidez debe modificarse para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas resultante. Para tal efecto, todos los elementos de la matriz de rigidez en las filas correspondientes a los

nodos donde la temperatura se conoce se hacen cero, excepto aquellos en la diagonal principal, los cuales toman un valor de 1:

$$[k_T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En las filas donde se desconocen las temperaturas, es importante mencionar que se conservan los elementos calculados luego del acoplamiento de las matrices de rigidez por elemento. Valores iniciales y finales mostrados por limitación de espacio.

7) El programa computacional desarrollado cuenta con funcionalidades para construir automáticamente la matriz de rigidez y el vector de temperatura, así como para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas resultante.

Verificación de resultados

Para verificar los resultados del programa, primeramente, se calculó la distribución de la temperatura en la dirección radial con la solución analítica presentada en el capítulo 3 (ecuación 3.25). Posteriormente, las temperaturas calculadas mediante FEM para un conjunto de nodos distribuidos sobre un mismo radio, se compararon con los resultados exactos. Los resultados obtenidos se presentan en la **Tabla 5.3** y la **Figura 5.5**. Como puede observarse existe un buen acuerdo de los resultados numéricos y la solución exacta (error relativo menor de 0.04%).

Tabla 5.3 Comparación de las temperaturas calculadas con FEM y con la solución analítica para el problema 5.1.2.

Radios [m]	Temperatura [K]		Error relativo [%]
	Sol. Exacta	FEM	
0.2	340.0	340	---
0.26	342.0	342.1	0.03
0.35	344.3	344.3	0.00
0.46	346.4	346.4	0.00
0.61	348.6	348.5	0.01
0.81	350.7	350.7	0.01
1.07	352.9	352.8	0.02
1.41	355.0	355	0.01
1.87	357.1	357.1	0.01
2.47	359.3	359.2	0.02
3.27	361.4	361.4	0.01
4.32	363.6	363.5	0.02
5.72	365.7	365.7	0.00
7.56	367.9	367.8	0.01
10	370.0	370	---

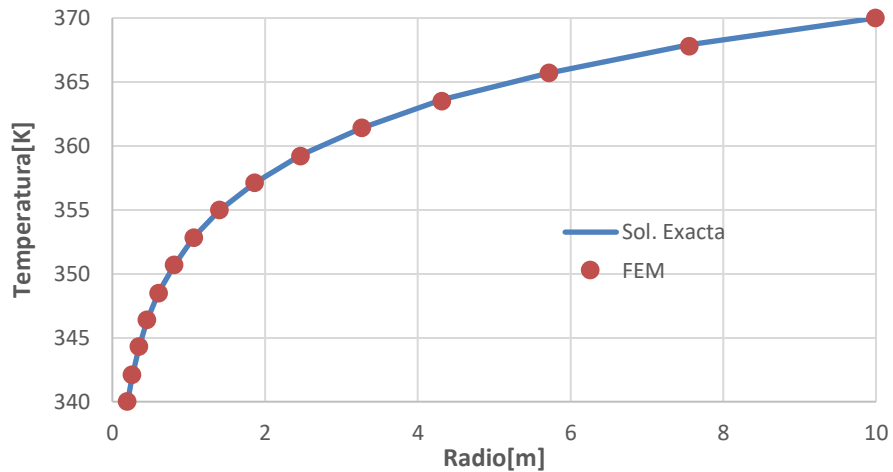


Figura 5.5 Comparación de las temperaturas calculadas con FEM y con la solución analítica para el problema 5.1.2.

b) Simulación en régimen transitorio

El procedimiento es el siguiente:

1) Para construir la matriz de rigidez del problema, se sigue el mismo procedimiento que se describió para el escenario en régimen estacionario, pasos 1 a 3.

2) Una vez obtenida la matriz de rigidez, se procede a calcular la matriz de capacitancia por elemento. Para dar continuidad a lo ejemplificado para el escenario de régimen estacionario, considere el elemento genérico 25. Con base en la ecuación 4.28, se tiene que:

$$[C_{25}] = \frac{1.43 \cdot 10^{-3} [m^2] * 2150 \left[\frac{kg}{m^3} \right] * 745 \left[\frac{J}{kg K} \right]}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3) Luego de calcular las matrices de capacitancia correspondientes a todos los elementos, se procede a su acoplamiento para generar la matriz de capacitancia total, $[C_T]$, obteniéndose que:

$$[C_T] = \begin{bmatrix} 383 & 191.5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 191.5 & 1779 & 191.5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 191.5 & 766 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1448182 & 362045 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 362045 & 2543319 & 362045 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 362045 & 724091 \end{bmatrix}.$$

4) A partir de la ecuación 4.32, se construye el sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$[A] \cdot [T(t_{i+1})] = [C_T] \cdot [T(t_i)],$$

donde

$$[A] = [[C_T] + [k_T] \Delta t],$$

y se ha omitido el vector fuerza por la naturaleza de las condiciones de frontera del problema, como se explicó en el escenario estacionario. Por otra parte, el coeficiente de difusividad térmica se calcula como:

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} = \frac{2.9 \left[\frac{W}{mK} \right]}{2150 \left[\frac{kg}{m^3} \right] * 745 \left[\frac{J}{kg K} \right]} = 1.8 \cdot 10^{-6} \left[\frac{m^2}{s} \right].$$

Considerando que el proceso de difusión de calor en el sistema es relativamente lento por su bajo coeficiente de difusividad, el paso de tiempo se estableció en $\Delta t = 2.3$ días.

5) En cuanto a la construcción de los vectores de temperatura a los tiempos t_i y t_{i+1} , en ambos se sustituyen los valores establecidos como condiciones de frontera del problema, $T_{ri} = 340 [K]$ y $T_{re} = 370 [K]$, en los nodos que coinciden con los radios interno y externo del sistema, según corresponda. Ahora bien, para el resto de los elementos del vector $T(t_i)$ en el primer paso de tiempo, se sustituye el valor de temperatura establecido como condición inicial del problema, $T_{inicial} = 340 [K]$; posteriormente, se irán actualizando conforme la simulación avance en tiempo. Con respecto al vector $T(t_{i+1})$, los elementos restantes constituyen las incógnitas del problema, y corresponderán a la solución de sistema al finalizar el paso de tiempo. De esta manera, se tiene que:

$$[T(t_i)] = \begin{bmatrix} 340 \\ 340 \\ 340 \\ \vdots \\ 340 \\ \vdots \\ 370 \\ 370 \\ 370 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [T(t_{i+1})] = \begin{bmatrix} 340 \\ 340 \\ 340 \\ \vdots \\ i T_i? \\ \vdots \\ 370 \\ 370 \\ 370 \end{bmatrix}.$$

6) De manera similar a lo explicado en el tratamiento de la matriz de rigidez en el caso estacionario, inciso 6, se asignan valores unitarios en los elementos de la diagonal principal que corresponden a los nodos frontera en la matriz $[C_T]$ y en la matriz $[A]$; otros elementos en la misma fila tomarán el valor de cero. Por ejemplo, para $[A]$, se tiene que:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los elementos calculados en las filas donde se desconoce la temperatura se conservan en ambas matrices. Por restricciones de espacio, se incluye una sección representativa de la matriz.

7) Una vez construidas las matrices $[A]$ y $[C_T]$, así como los vectores de temperatura, $T(t_i)$ y $T(t_{i+1})$, se procede a resolver el sistema de ecuaciones algebraicas lineales del paso 4. El programa computacional desarrollado construye automáticamente las matrices de rigidez y capacitancia, y resuelve el sistema.

8) Una vez obtenida la solución para el vector $T(t_{i+1})$, el vector $T(t_i)$ se actualiza en la siguiente iteración con estos valores nuevos calculados en las posiciones correspondientes a los nodos internos del sistema; así, el algoritmo de cálculo se repite hasta alcanzar el tiempo total simulado o cuando se alcanza una condición estacionaria. Los resultados obtenidos se presentan la **Tabla 5.4** y las **Figuras 5.6** y **5.7**. Al respecto, considerando la naturaleza de las condiciones de frontera del problema, se determinó que se alcanza una condición estacionaria luego de aproximadamente 21 días.

Verificación de resultados

Para verificar los resultados de la simulación en régimen transitorio, primeramente, es importante destacar que el programa computacional desarrollado captura correctamente la propagación del calor en la dirección radial, como puede observarse en los mapas de contorno de la **Figura 5.7**. Por otra parte, se comparó un perfil de temperatura en dirección radial luego de alcanzar una condición estacionaria (21 días), y se comparó con los resultados calculados en el inciso a) del problema 5.1.2 (**Tabla 5.3**). Los resultados de la simulación transitoria reprodujeron correctamente los obtenidos para el escenario estacionario.

Tabla 5.4 Perfiles de temperatura a distintos tiempos para el problema 5.1.2.

Radio [m]	Temperatura [K]					
	0 días	5 días	9 días	12 días	16 días	21 días
0.2	340	340.0	340.0	340.0	340.0	340.0
0.26	340	341.3	341.9	342.0	342.1	342.1
0.35	340	342.5	343.8	344.0	344.2	344.3
0.46	340	343.8	345.7	346.0	346.3	346.4
0.61	340	345.1	347.6	348.1	348.4	348.5
0.81	340	346.3	349.5	350.1	350.5	350.7
1.07	340	347.6	351.4	352.1	352.7	352.8
1.41	340	349.0	353.3	354.1	354.8	354.9
1.87	340	350.4	355.2	356.2	356.9	357.1
2.47	340	351.9	357.2	358.2	359.0	359.2
3.27	340	353.6	359.3	360.3	361.1	361.4
4.32	340	355.8	361.5	362.5	363.3	363.5
5.72	340	359.0	364.0	364.8	365.5	365.7
7.56	340	363.5	366.8	367.3	367.7	367.8
10	370	370.0	370.0	370.0	370.0	370.0

*Solución luego de alcanzar una condición en régimen estacionario.

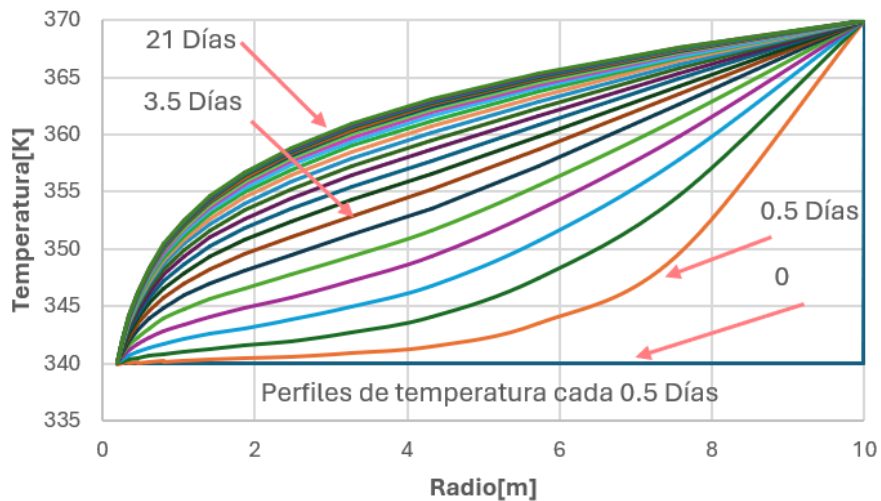


Figura 5.6 Evolución temporal de los perfiles de temperatura para el problema 5.1.2.

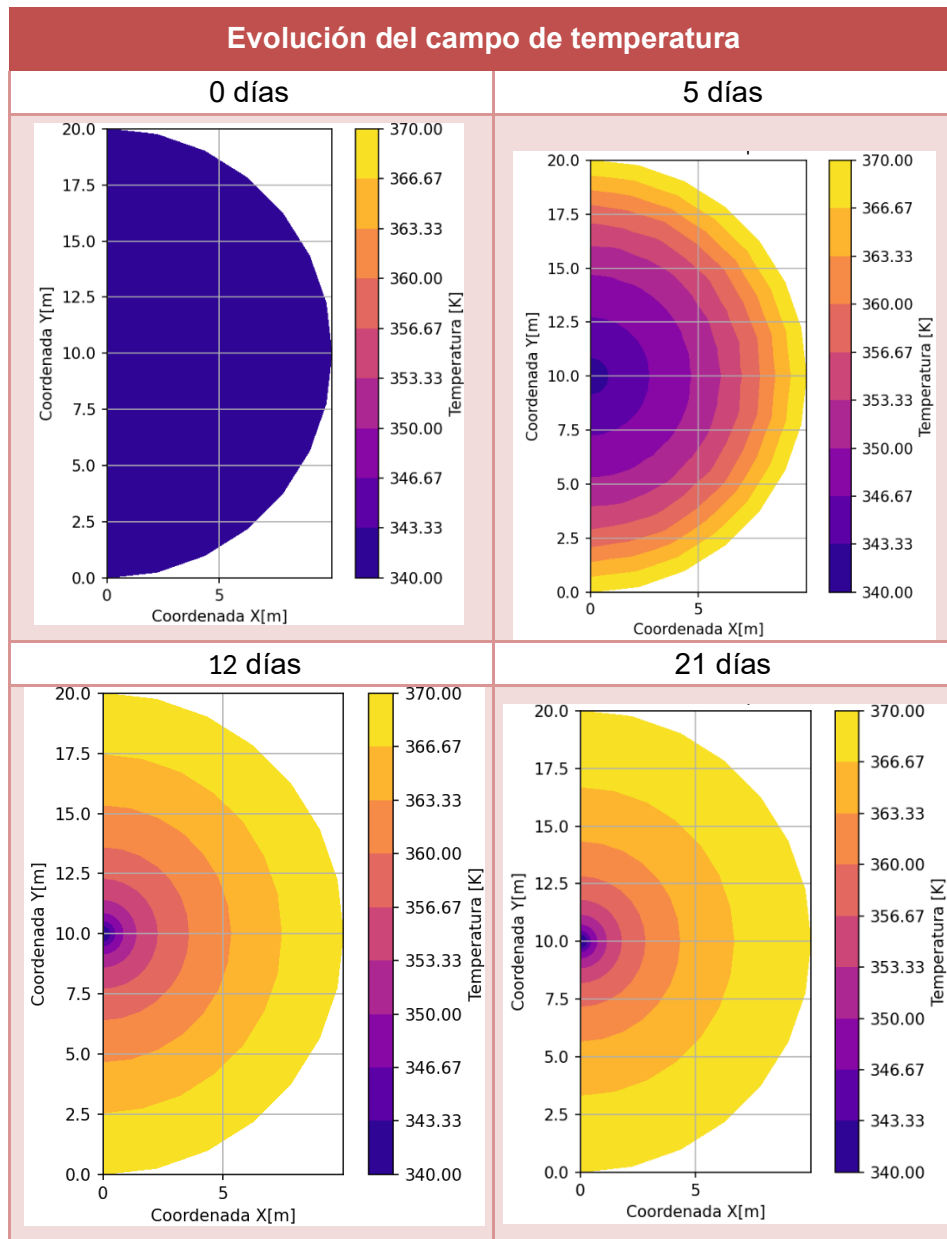


Figura 5.7 Mapas de contorno con la distribución de la temperatura en el sistema a diferentes tiempos para el problema 5.1.2.

5.1.3 Conducción de calor 2D, con condiciones de frontera Neumann-Dirichlet

El sistema analizado es el mismo del problema 5.1.2, excepto que se modificó la condición de frontera en el radio interno, estableciendo en este caso el flujo de calor en la dirección radial (condición tipo Neumann), como se indica en la **Figura 5.8**.

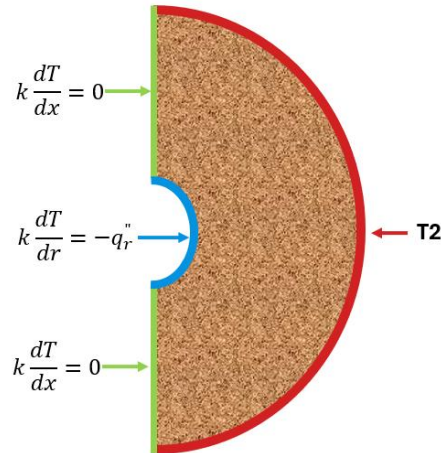


Figura 5.8 Sistema analizado para el problema 5.1.3.

Es importante destacar que, por las condiciones del problema, es de esperar que el sistema alcance eventualmente una condición estacionaria después de cierto tiempo. Por lo tanto, se consideraron dos casos: 1) en régimen estacionario y 2) en régimen transitorio.

Cabe resaltar que el valor del flujo de calor se estableció considerando los resultados obtenidos en la simulación en régimen estacionario del problema 5.1.2, obteniéndose que $q'' = 111 [W/m^2]$. Esto con la finalidad de verificar que las temperaturas calculadas en el radio interno (ahora desconocidas) al alcanzar la condición estacionaria correspondan con las establecidas como condición de frontera en ese problema ($T_{ri} = 340 [K]$).

a) Simulación en régimen estacionario

De la misma forma que en el ejercicio 5.1.2, a continuación, se ejemplifica cómo se construye la matriz de rigidez y el vector fuerza. Para tal efecto, se toma como referencia el elemento identificado como 34: en la **Tabla 5.5**, se indican los nodos que lo conforman, con sus respectivas coordenadas x-y.

Tabla 5.5 Datos de los nodos que conforman al elemento 34.

Nodo	Abscisa	Ordenada
20	$-4.857 \cdot 10^{-6}$	10.26447
19	0.090451	10.24852
29	0.119610	10.32864

El procedimiento es el siguiente:

1) A partir de la ecuación 4.19, se calcula el área del elemento 34:

$$A = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|,$$

$$A = \frac{1}{2} |3.89 \cdot 10^{-7} + 0.0058 + 0.0019| = 3.86 \cdot 10^{-3} [m^2].$$

2) Posteriormente, con base en la ecuación 4.24, se calcula la matriz de rigidez del elemento 34:

$$[k_{34}] = \frac{2.9 \left[\frac{W}{m K} \right] * 30 [m]}{4 * 3.86 \cdot 10^{-3} [m^2]} \begin{bmatrix} 0.00726 & -0.0086 & 0.00135 \\ -0.0086 & 0.018425 & -0.00979 \\ 0.00135 & -0.00979 & 0.00843 \end{bmatrix}.$$

3) Las matrices de rigidez para todos los elementos $[k_i]$ se calculan como se indicó en los pasos 1 y 2, y éstas se acoplan para obtener la matriz de rigidez total, $[k_T]$. Como resultado, se tiene que:

$$[k_T] = \begin{bmatrix} 103.9 & -48.67 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -48.67 & 207.85 & -48.67 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -48.67 & 207.855 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 157.183 & -23.335 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -23.33 & 157.183 & -23.335 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -23.335 & 78.59 \end{bmatrix}.$$

4) A diferencia del problema 5.1.2, en este caso el vector fuerza es diferente de cero debido a que se tiene una condición de frontera tipo Neumann. De esta manera, el dato de flujo de calor se asigna en las posiciones correspondientes a los nodos que coinciden con el radio interno. Para ejemplificar cómo se construye el vector fuerza por elemento, considerar el elemento 1 (coincidente con la frontera interna); los nodos que lo conforman, con sus respectivas coordenadas x-y, se indican en la **Tabla 5.6**.

Tabla 5.6 Datos de los nodos que conforman al elemento 1.

Nodo	Abscisa	Ordenada
11	$2.9144 \cdot 10^{-6}$	9.7355
2	$6.84 \cdot 10^{-2}$	9.812
1	$2.203 \cdot 10^{-6}$	9.80

La arista del elemento 1 afectada por el flujo de calor está asociada a los nodos 2 y 1. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación 4.25, su longitud se calcula como:

$$l_{n2,n1} = \sqrt{|(2.203 \cdot 10^{-6} - 6.84 \cdot 10^{-2})^2 + (9.80 - 9.812)^2|} = 6.9 \cdot 10^{-2} [m],$$

por lo que:

$$[F_1] = -\frac{30[m] * 111 \left[\frac{W}{m^2} \right] * 6.9 \cdot 10^{-2} [m]}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -111.45 \\ -111.45 \end{bmatrix} [W].$$

5) El paso 4 se aplica para el resto de los elementos cuyas aristas están en la frontera interna del sistema, sujetas al flujo de calor. Posteriormente, se realiza su acoplamiento para generar el vector fuerza total. Cabe destacar que se asigna un valor de cero en las posiciones correspondientes al resto de los nodos. De esta manera, se tiene que:

$$[F_T] = \begin{bmatrix} -111.45 \\ -222.91 \\ -222.91 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6) Para construir el vector de temperatura se considera lo siguiente. A los nodos que coinciden con el radio externo del sistema se les asigna el valor establecido como condición de frontera, $T_{re} = 370[K]$. La temperatura en el resto de los nodos son incógnitas. Por lo tanto:

$$[T_T] = \begin{bmatrix} ? T_1 \\ ? T_2 \\ ? T_3 \\ \vdots \\ ? T_i \\ \vdots \\ 370 \\ 370 \\ 370 \end{bmatrix}.$$

7) Debido a que se conoce la temperatura en los nodos que coinciden con el radio externo del sistema, sólo se modifican las filas respectivas de la matriz total de rigidez $[K_T]$, como se indicó en el problema 5.1.2. De esta manera:

$$[k_T] = \begin{bmatrix} 103.9 & -48.67 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -48.67 & 207.85 & -48.67 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -48.67 & 207.855 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8) De esta manera, se construye el sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$[K_T][T_T] = [F_T].$$

$$\begin{bmatrix} 103.9 & -48.67 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -48.67 & 207.85 & -48.67 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -48.67 & 207.855 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? T_1 \\ ? T_2 \\ ? T_3 \\ \vdots \\ 370 \\ 370 \\ 370 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -111.45 \\ -222.91 \\ -222.91 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La construcción del sistema de ecuaciones anterior se realiza de manera automática en el programa computacional desarrollado, el cual cuenta con una librería para resolverlo.

Verificación de resultados

Con base en los resultados del programa computacional desarrollado, las temperaturas calculadas en nodos distribuidos sobre un mismo radio se presentan en la **Tabla 5.7** y la **Figura 5.9**. En ambas, se compara la solución numérica con la solución analítica en régimen estacionario. Se observa que el programa reproduce los valores exactos con un error relativo menor del 0.2%.

Con relación a los resultados obtenidos, es importante destacar lo siguiente; como se indicó en la descripción del problema, la temperatura en los nodos distribuidos en el radio interno del sistema debe corresponder a $T_{ri} = 340 [K]$, ya que el flujo de calor establecido como condición de frontera fue establecido considerando este valor. En estos nodos, la máxima diferencia de temperatura que se determinó fue menor de $0.6 [K]$, por lo que los resultados del programa computacional son correctos.

Tabla 5.7 Comparación de las temperaturas calculadas con FEM y con la solución analítica para el problema 5.1.3.

Radios [m]	Temperatura [K]		Error relativo [%]
	Sol. Exacta	FEM	
0.2	340	340.56	0.16
0.26	342	342.66	0.19
0.35	344.3	344.77	0.14
0.46	346.4	346.87	0.14
0.61	348.6	348.97	0.11
0.81	350.7	350.07	0.18
1.07	352.9	352.18	0.20
1.41	355	355.28	0.08
1.87	357.1	357.38	0.08
2.47	359.3	359.49	0.05
3.27	361.4	361.59	0.05
4.32	363.6	363.69	0.02
5.72	365.7	365.79	0.02
7.56	367.9	367.9	0.00
10	370	370	---

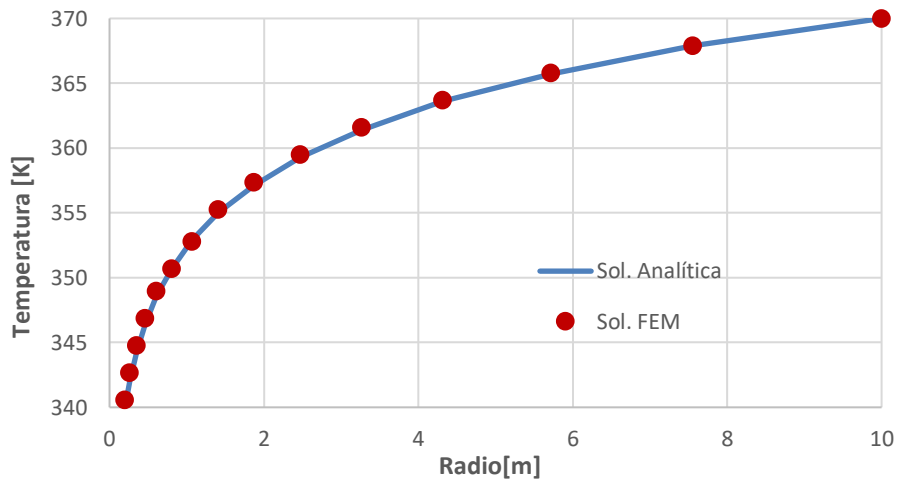


Figura 5.9 Comparación de las temperaturas calculadas con FEM y con la solución analítica para el problema 5.1.3.

b) Simulación en régimen transitorio

El procedimiento es el siguiente:

1) Para construir la matriz de rigidez total se siguen los pasos 1 a 3 descritos para el caso de la simulación en régimen estacionario.

2) Para este problema, se procede a calcular las matrices de capacitancia por elemento. El procedimiento correspondiente se ejemplifica para el elemento 34. De esta manera, a partir de la ecuación 4.28, se tiene que:

$$[c_{34}] = \frac{1.43 \cdot 10^{-3} [m^2] * 2150 \left[\frac{kg}{m^3} \right] * 745 \left[\frac{J}{kg K} \right]}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

3) Una vez calculadas las respectivas matrices de capacitancia para todos los elementos, se procede a su acoplamiento. El resultado es el siguiente:

$$[C_T] = \begin{bmatrix} 588.7 & 294.34 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 294.34 & 2734.3 & 294.34 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 294.34 & 1177.38 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 2225891.6 & 556472.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 556472.9 & 3909143.13 & 556472.9 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 556472.9 & 1112945.8 \end{bmatrix}.$$

4) En cuanto a los vectores de fuerza por elemento, estos se construyen como se indicó en el inciso a) del problema. Luego del acoplamiento, se obtiene que:

$$[F_T] = \begin{bmatrix} -111.45 \\ -222.91 \\ -222.91 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5) Para construir los vectores de temperatura a los tiempos t_i y t_{i+1} , en ambos se sustituye el valor establecido como condición de frontera en el radio externo, $T_{re} = 370 [K]$. Para el resto de los elementos del vector $T(t_i)$, se sustituye el valor de temperatura inicial, $T_{inicial} = 340 [K]$, en el primer paso de tiempo; posteriormente, estos se actualizarán en cada paso de tiempo. En cuanto al vector $T(t_{i+1})$, los elementos restantes constituyen las incógnitas del problema. Por lo tanto:

$$[T(t_i)] = \begin{bmatrix} 340 \\ 340 \\ 340 \\ \vdots \\ 340 \\ \vdots \\ 370 \\ 370 \\ 370 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [T(t_{i+1})] = \begin{bmatrix} ? T_1 \\ ? T_2 \\ ? T_3 \\ \vdots \\ ? T_i \\ \vdots \\ 370 \\ 370 \\ 370 \end{bmatrix} .$$

6) De acuerdo con la ecuación 4.32, el sistema de ecuaciones algebraicas lineales correspondiente al sistema analizado es:

$$[A] [T(t_{i+1})] = [C_T][T(t_i)] + [F_T] \Delta t ,$$

donde

$$[A] = [[C_T] + [k_T] \Delta t] .$$

El paso de tiempo se estableció en $\Delta t = 0.38 [Días]$.

7) Posteriormente, se procede a modificar las matrices $[A]$ y $[C_T]$ en las filas correspondientes a los nodos coincidentes con el radio externo del sistema, ya que en ellos se conoce la temperatura (condición de frontera tipo Dirichlet). Por lo tanto, siguiendo el procedimiento descrito en el escenario de régimen estacionario, en el caso de la matriz $[C_T]$, se tiene que:

$$[C_T] = \begin{bmatrix} 588.7 & 294.34 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 294.34 & 2734.3 & 294.34 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 294.34 & 1177.38 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los elementos calculados en las filas donde se desconoce la temperatura se conservan en ambas matrices. No se muestran por aspectos de espacio.

8) Después de resolver el sistema de ecuaciones lineales referido para el vector $T(t_{i+1})$ en el primer paso de tiempo, se procede a actualizar el vector $T(t_i)$ con estos valores nuevos calculados en las posiciones correspondientes a los nodos internos del sistema. El algoritmo se repite hasta alcanzar una condición estacionaria o el tiempo total de la simulación. En las **Tablas 5.8 y 5.9**, y las **Figuras 5.10 y 5.11** se presentan resultados del problema, calculados con el programa computacional desarrollado. Se determinó que se alcanza una condición de régimen estacionario luego de aproximadamente 22 días.

Verificación de resultados

Los perfiles de temperatura calculados a diferentes tiempos para un mismo radio mediante el modelo de simulación transitoria en la **Tabla 5.8** y la **Figura 5.10**. Como puede observarse, los perfiles convergen a una condición estacionaria en aproximadamente 22 días. Para verificar restos resultados, en la **Tabla 5.9**, se compara el perfil a 22 días, contra los obtenidos con la solución analítica y la simulación en estado estacionario con FEM (**Tabla 5.7**). Al reproducir el perfil estacionario, se concluye que los resultados del modelo transitorio son correctos.

Como discusión adicional, es interesante observar en los mapas de contorno mostrados en la **Figura 5.11** que el sistema se enfría inicialmente en las cercanías del radio interno por la extracción de calor en esta frontera. El medio estaba inicialmente a una temperatura de 340 [K], pero disminuye hasta alcanzar valores de aproximadamente 320 [K]. Por otra parte, en la región cercana a la frontera externa se tiene el efecto

contrario; esto es, el calor comienza a propagarse radialmente hacia el interior debido a que la temperatura en esta frontera se estableció en 370 [K].

De esta manera, luego de transcurrido cierto tiempo, la temperatura en la vecindad del radio interno comienza a incrementarse por el efecto del calor proveniente de la frontera externa. Una vez que se alcanza la condición estacionaria, la temperatura en el radio interno se establece en 340.6 [K]; esto es correcto, ya que el flujo de calor establecido como condición de frontera se calculó considerado en un valor de 340 [K].

Tabla 5.8 Perfiles de temperatura a distintos tiempos para el ejercicio 5.1.3.

Radio [m]	Temperatura [K]					
	0 días	1 días	2 días	4 días	10 días	22 días
0.2	340	320.8	322.9	329.1	338.4	340.6
0.26	340	322.9	325.0	331.2	340.5	342.7
0.35	340	325.0	327.1	333.3	342.6	344.8
0.46	340	327.1	329.2	335.4	344.7	346.9
0.61	340	329.2	331.3	337.6	346.8	349.0
0.81	340	331.2	333.5	339.7	348.9	351.1
1.07	340	333.3	335.6	341.9	351.0	353.2
1.41	340	335.3	337.8	344.1	353.1	355.3
1.87	340	337.3	340.2	346.4	355.2	357.4
2.47	340	339.3	342.7	348.9	357.4	359.5
3.27	340	341.5	345.6	351.7	359.7	361.6
4.32	340	344.2	349.2	355.0	362.0	363.7
5.72	340	348.4	354.0	359.0	364.5	365.8
7.56	340	356.3	360.8	364.0	367.1	367.9
10	370	370.0	370.0	370.0	370.0	370.0

*Solución luego de alcanzar una condición en régimen estacionario.

Tabla 5.9 Verificación del perfil de temperatura a 22 días.

Radio [m]	Temperatura [K]			
	Sol. exacta	FEM estacionario	FEM transitorio a 22 días	Error relativo [%]
0.2	340	340	340.6	0.179
0.26	342	342.1	342.7	0.175
0.35	344.3	344.3	344.8	0.143
0.46	346.4	346.4	346.9	0.14
0.61	348.6	348.5	349	0.138
0.81	350.7	350.7	351.1	0.106
1.07	352.9	352.8	353.2	0.104
1.41	355	355	355.3	0.073
1.87	357.1	357.1	357.4	0.072
2.47	359.3	359.2	359.5	0.07
3.27	361.4	361.4	361.6	0.042
4.32	363.6	363.5	363.7	0.042
5.72	365.7	365.7	365.8	0.017
7.56	367.9	367.8	367.9	0.021
10	370	370	370	0

*Solución luego de alcanzar una condición en régimen estacionario.

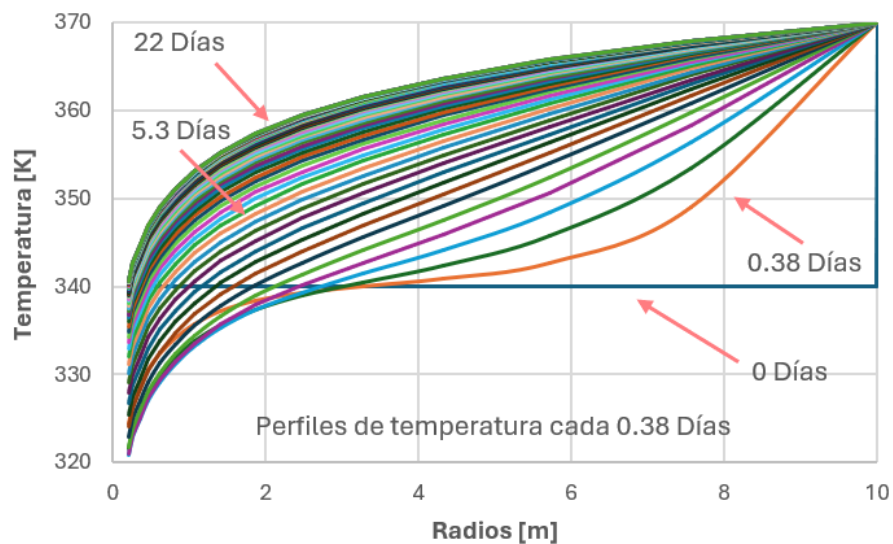


Figura 5.10 Evolución temporal de los perfiles de temperatura para el ejercicio 5.1.2.

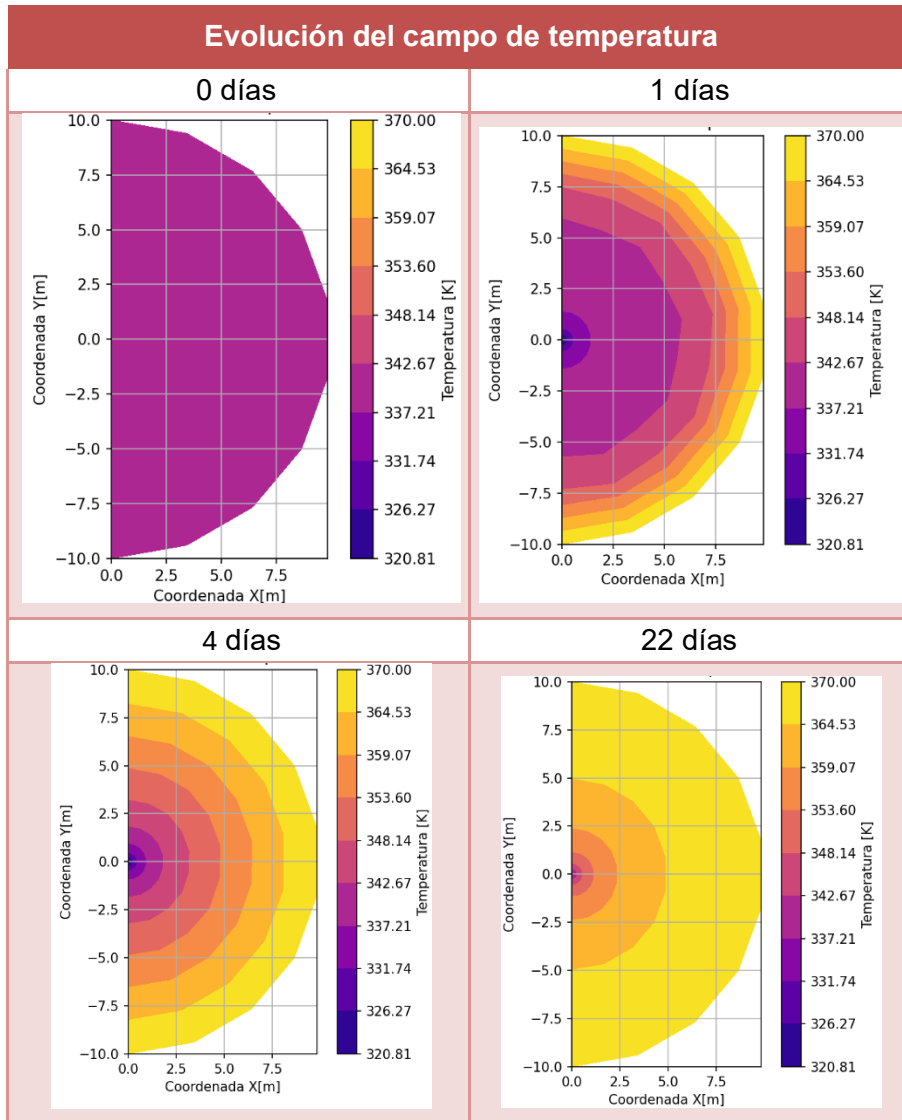


Figura 5.11 Mapas de contorno con la distribución de la temperatura en el sistema a diferentes tiempos para el problema 5.1.3.

5.2 Problemas de flujo de fluidos en medios porosos

En esta sección, se presenta la formulación y resolución de dos problemas relacionados con el flujo de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso. Para tal efecto, se resuelve la ecuación de difusividad hidráulica en dos dimensiones mediante el método de elemento finito, tanto en condiciones estacionarias como transitorias, y con diversas condiciones de frontera. En cada caso, se ejemplifica cómo se construyen las matrices de rigidez y de capacitancia, así como el vector fuerza y el vector de incógnitas. Los problemas que se abordan son:

1. Flujo de un fluido en un medio poroso 2D, con condiciones de frontera Dirichlet-Dirichlet.
2. Flujo de un fluido en un medio poroso 2D, con condiciones de frontera Neumann-Dirichlet.

5.2.1 Flujo de un fluido en un medio poroso 2D, con condiciones de frontera Dirichlet- Dirichlet

En la **Figura 5.12**, se muestra el sistema analizado. Se trata de la mitad de un disco poroso de arenisca en el cual fluye un fluido ligeramente compresible. Las propiedades del fluido y del material se indican en la **Tabla 5.10**. El problema consiste en determinar el campo de presión en el disco en función de las condiciones de frontera e inicial. En este caso, se establecen las presiones en los radios interno y externo; por otra parte, las superficies verticales se encuentran cerradas al flujo; en cuanto a la condición inicial, se considera que la presión es la misma en todo el dominio.

Es importante comentar que, por la naturaleza del problema, eventualmente se alcanzará una condición estacionaria. Por lo tanto, se consideran dos escenarios: 1) régimen estacionario y 2) régimen transitorio. Para resolverlos, se utilizó el programa computacional desarrollado. La malla de simulación utilizada se muestra en la **Figura 5.13**; está conformada por 30 curvas y 30 nodos por cada una de ellas, distribuidos logarítmicamente en la dirección radial.

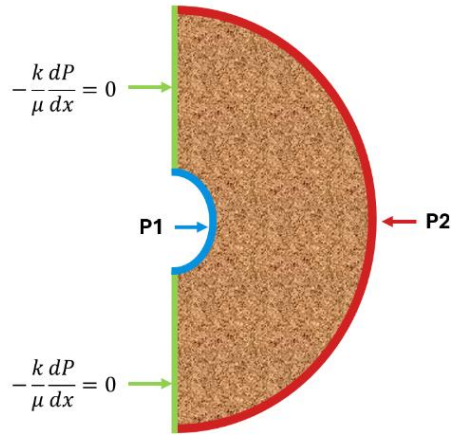


Figura 5.12 Sistema analizado para el problema 5.2.1.

Tabla 5.10 Datos de entrada para el problema 5.2.1.

Variable	valor
Radio interior	0.65 [ft] / 0.198 [m]
Radio exterior	500 [ft] / 152.4 [m]
Espesor	100 [ft] / 30.48 [m]
Presión en el radio interior	7,500 [psi] / $5.17 \cdot 10^{-6}$ [Pa]
Presión en el radio exterior	8,000 [psi] / $5.51 \cdot 10^{-6}$ [Pa]
Presión inicial	7,500 [psi] / $5.17 \cdot 10^{-6}$ [Pa]
Viscosidad	0.5 [cp] / $5 \cdot 10^{-4}$ [Pa.s]
Permeabilidad	200[md] / $1.973 \cdot 10^{-13}$ [m ²]
Compresibilidad total	$5 \cdot 10^{-6}$ [psi ⁻¹] / $7.39 \cdot 10^{-10}$ [Pa ⁻¹]
Porosidad	12%

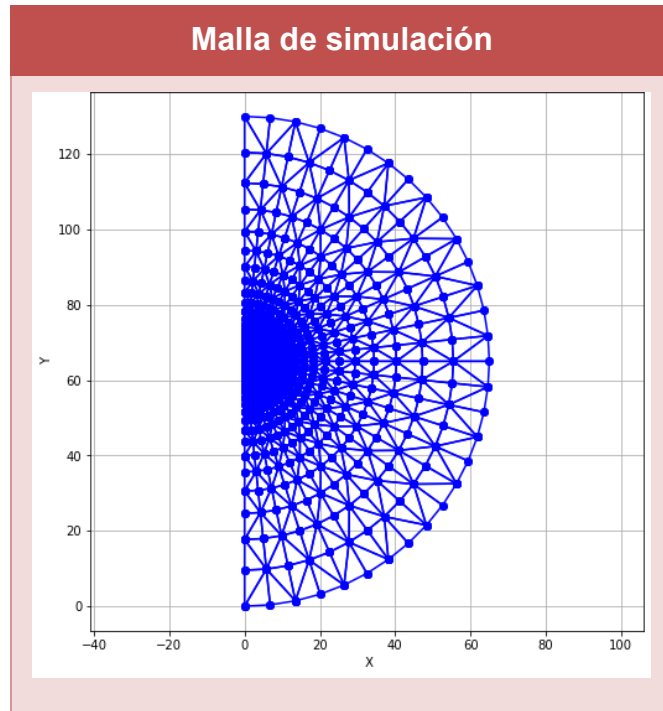


Figura 5.13 Malla generada para el problema 5.2.1.

a) Simulación en régimen estacionario

Para ejemplificar como se construyen las matrices de rigidez y el vector fuerza para un elemento genérico, se considera la solución para el elemento 1368. Las coordenadas los nodos que lo conforman se indican en la **Tabla 5.11**.

Tabla 5.11 Datos de los nodos que conforman al elemento 1368.

Nodo	Abscisa	Ordenada
708	37.13	162.71
738	46.69	165.36
739	45.018	170.33

El procedimiento de resolución es el siguiente:

1) Calcular el coeficiente de difusividad hidráulica, η :

$$\eta = \frac{k}{\phi * \mu * c_t} = \frac{1.973 \cdot 10^{-13} [m^2]}{0.12 * 0.0005 [Pa * s] * 7.25 \cdot 10^{-10} [Pa^{-1}]} = 4.528 \left[\frac{m^2}{s} \right].$$

2) Mediante la ecuación 4.19, se calcula el área del elemento 1368:

$$A = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|,$$

$$A_{1368} = \frac{1}{2} |-184.5 + 355.7 - 119.3| = 25.97 [m^2].$$

3) Calcular la matriz de rigidez para el elemento 1368 $[k_{1368}]$ con la ecuación 4.24:

$$[k_{1368}] = \frac{(4.528) \left[\frac{m^2}{s} \right] * 9.144 [m]}{25.97 [m^2]} \begin{bmatrix} 130.5 & -94 & -36.5 \\ -94 & 91.2 & -2.86 \\ -36.5 & -2.86 & 33.6 \end{bmatrix}.$$

4) Las matrices de rigidez de todos los elementos restantes, $[k_i]$, se determinan siguiendo los pasos 1 a 3, explicados arriba. Posteriormente, se procede a acoplarlas para construir la matriz de rigidez total $[k_T]$:

$$[k_T] = \begin{bmatrix} 2.935 & -2.45 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -2.45 & 5.87 & -2.45 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.45 & 5.87 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4.66 & -1.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1.85 & 4.66 & -1.85 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1.854 & 2.33 \end{bmatrix}.$$

5) En la definición del vector de incógnitas, primeramente, se identifican los nodos de la malla de simulación que coinciden con las fronteras: nodos 1 a 30 sobre el radio interno, y nodos 871 al 900 sobre el radio externo. A continuación, se asigna el valor de las

presiones conocidas en estas fronteras, $P_{ri} = 5.17 \cdot 10^7 [Pa]$ y $P_{re} = 5.51 \cdot 10^7 [Pa]$, respectivamente:

$$[P_T] = \begin{bmatrix} 5.17 \cdot 10^7 \\ 5.17 \cdot 10^7 \\ 5.17 \cdot 10^7 \\ \vdots \\ i P_i? \\ \vdots \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ 5.51 \cdot 10^7 \end{bmatrix} [Pa].$$

6) Respecto al vector fuerza $[F_T]$, debido a que no hay términos fuente al interior del dominio y que las condiciones de frontera en la dirección vertical son cerradas al flujo ($dP/dn = 0$), entonces $[F_T] = [0]$. De esta manera, el sistema de ecuaciones algebraicas lineales asociado al problema es:

$$[K_T][T_T] = [0].$$

7) Para el tratamiento de las condiciones de frontera en la matriz de rigidez, se sustituyen por ceros todos los coeficientes de la fila correspondientes a los nodos coincidentes con los radios interno y externo, a excepción del término diagonal principal, el cual se reemplaza por el valor de 1. Fuera de esos casos, se conservan los elementos calculados previamente.

$$[k_T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es conveniente destacar que, en las filas donde se desconocen las presiones, se deben conservar los elementos calculados luego del acoplamiento de las matrices de rigidez por elemento. Por restricciones de espacio, se incluye una sección representativa.

8) Finalmente, para dar solución al sistema de ecuaciones algebraicas resultante, se implementó el programa computacional desarrollado.

Verificación de resultados

Para verificar los resultados del programa, se compararon valores de presión calculados mediante FEM y con la solución exacta al problema de flujo de un fluido ligeramente compresible en un medio poros en régimen estacionario (ecuación 2.24). Los resultados (en unidades de campo) se presentan en la **Tabla 5.12** y la **Figura 5.14**. Como puede observarse, existe un excelente acuerdo de la solución numérica con la solución exacta, con un error relativo menor del 0.01%.

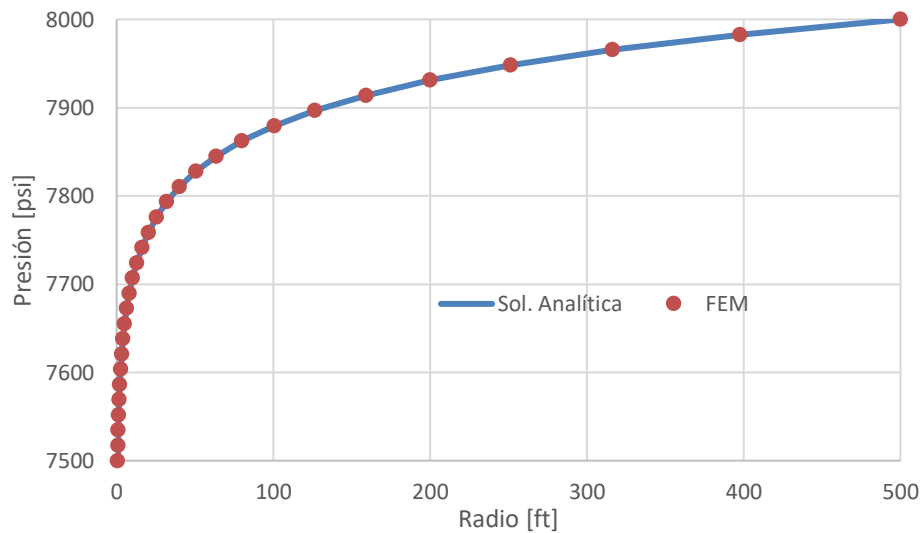


Figura 5.14 Comparación de presiones calculadas con FEM y con la solución analítica para el problema 5.2.1.

Tabla 5.12 Comparación de las presiones calculadas con FEM y la solución analítica para el problema 5.2.1.

Radio [m]	Presión [psi]		Error relativo
	Sol. Exacta	FEM	[%]
0.65	7500	7500	---
0.82	7517.2	7517.2	10^{-8}
1.03	7534.5	7534.5	$2 \cdot 10^{-8}$
1.29	7551.7	7551.7	$3 \cdot 10^{-8}$
1.63	7569	7569	$5 \cdot 10^{-8}$
2.04	7586.2	7586.2	$6 \cdot 10^{-8}$
2.57	7603.4	7603.4	$7 \cdot 10^{-8}$
3.23	7620.7	7620.7	$8 \cdot 10^{-8}$
4.07	7637.9	7637.9	$9 \cdot 10^{-8}$
5.11	7655.2	7655.2	10^{-7}
6.43	7672.4	7672.4	10^{-7}
8.08	7689.7	7689.7	10^{-7}
10.17	7706.9	7706.9	10^{-7}
12.78	7724.1	7724.1	10^{-7}
16.08	7741.4	7741.4	$2 \cdot 10^{-7}$
20.22	7758.6	7758.6	$2 \cdot 10^{-7}$
25.42	7775.9	7775.9	$2 \cdot 10^{-7}$
31.97	7793.1	7793.1	$2 \cdot 10^{-7}$
40.2	7810.3	7810.3	$2 \cdot 10^{-7}$
50.56	7827.6	7827.6	$2 \cdot 10^{-7}$
63.58	7844.8	7844.8	$2 \cdot 10^{-7}$
79.95	7862.1	7862.1	$2 \cdot 10^{-7}$
100.54	7879.3	7879.3	$2 \cdot 10^{-7}$
126.43	7896.6	7896.6	$2 \cdot 10^{-7}$
158.99	7913.8	7913.8	$2 \cdot 10^{-7}$
199.94	7931	7931	$2 \cdot 10^{-7}$
251.43	7948.3	7948.3	$2 \cdot 10^{-7}$
316.18	7965.5	7965.5	10^{-7}
397.6	7982.8	7982.8	$8 \cdot 10^{-8}$
500	8000	8000	---

b) Simulación en régimen transitorio

El procedimiento de resolución es el siguiente:

1) La matriz de rigidez total, $[k_T]$, del problema es la misma que la del caso estacionario. Por lo que deberán seguirse los pasos 1 a 4 del inciso a) del problema 5.2.1.

2) A continuación, se procede a construir la matriz de capacitancia total, $[C_T]$. Para ejemplificar, se calcula la matriz de capacitancia para el elemento 1368, $[C_{1368}]$:

$$[C_{1368}] = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

3) Tras generar las matrices de capacitancia individuales de cada elemento, $[C_i]$, se procede a acoplarlas para obtener la matriz de capacitancia total $[C_T]$:

$$[C_T] = \begin{bmatrix} 9.1 \cdot 10^{-5} & 4.5 \cdot 10^{-5} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 4.5 \cdot 10^{-5} & 4.1 \cdot 10^{-4} & 4.5 \cdot 10^{-5} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.5 \cdot 10^{-5} & 1.82 \cdot 10^{-4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 85.71 & 21.42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 21.42 & 153.86 & 21.42 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 21.42 & 42.85 \end{bmatrix}.$$

4) Posteriormente, se construye el sistema de ecuaciones algebraicas lineales asociado al problema, de acuerdo con la ecuación 4.32:

$$[A][P(t_{i+1})] = [C_T][P(t_i)] + [F_T(t_i)]\Delta t,$$

donde

$$[A] = [[C_T] + [k_T] \Delta t].$$

Cabe destacar que, debido a que no hay términos fuente en el dominio y a que se consideran fronteras cerradas al flujo, el vector de fuerzas $[F_T]$ es nulo. Por otra parte, el paso de tiempo se estableció en $\Delta t = 40s$.

5) En el sistema de ecuaciones previo, se presentan dos vectores de presiones: $[P(t_i)]$ corresponde a las presiones conocidas, y $[P(t_{i+1})]$ al vector de presiones futuras. Al respecto, en los nodos que coinciden con los radios interior y exterior se les asignan los valores de presión en las fronteras, $P_{ri} = 7500 [psi]$ y $P_{re} = 8000 [psi]$, respectivamente. Para el vector $[P(t_i)]$, se asigna el valor de presión inicial, $P_{inicial} = 7500 [psi]$, en las posiciones correspondientes a los nodos internos del dominio; en el caso del vector $[P(t_{i+1})]$, en esas posiciones se tendrán las incógnitas del problema. De esta manera, se tiene que:

$$[P(t_i)] = \begin{bmatrix} 5.17 \cdot 10^7 \\ 5.17 \cdot 10^7 \\ 5.17 \cdot 10^7 \\ \vdots \\ 5.17 \cdot 10^7 \\ \vdots \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ 5.51 \cdot 10^7 \end{bmatrix} [Pa] \quad y \quad [P(t_{i+1})] = \begin{bmatrix} 5.17 \cdot 10^7 \\ 5.17 \cdot 10^7 \\ 5.17 \cdot 10^7 \\ \vdots \\ \dot{?} P_i? \\ \vdots \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ 5.51 \cdot 10^7 \end{bmatrix} [Pa].$$

6) Para el tratamiento de las condiciones de frontera en las matrices $[C_T]$ y $[A]$, se procede como se discutió en el paso 7 del escenario estacionario. Como ejemplo, para la matriz $[A]$, se tiene que:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los coeficientes de las matrices $[C_T]$ y $[A]$ correspondientes a los nodos internos no se ven afectados por este tratamiento. No se muestran por cuestiones de espacio.

7) A continuación, se procede a resolver el sistema de ecuaciones algebraicas lineales asociado del problema. Para tal efecto, se utilizó el programa computacional desarrollado. Ahora bien, con los valores calculados de $[P(t_{i+1})]$, se procede a avanzar

en un nuevo paso de tiempo; previamente, el vector $[P(t_i)]$ debe actualizarse con los datos recién calculados en los nodos internos.

8) El proceso descrito se repite hasta alcanzar un perfil de presiones estacionario o cuando se alcanza el tiempo total de simulación establecido. Los resultados obtenidos se presentan en la **Tabla 5.13**, y en las **Figuras 5.15** y **5.16**. De acuerdo con la simulación, el sistema evoluciona a una condición estacionaria después de aproximadamente 87 minutos.

Verificación de resultados

En la **Figura 5.15** se muestran perfiles de presión calculados en la dirección radial a diferentes tiempos. Como puede observarse, todos convergen correctamente a los valores de presión establecidos como condiciones de frontera. Por otra parte, al comparar el perfil de presión calculado a 87 min (**Tabla 5.13**), contra el obtenido con la solución analítica correspondiente a flujo en régimen estacionario (ver **Tabla 5.12**), se concluye que el programa reproduce correctamente la condición estacionaria. Finalmente, los mapas de contorno (**Figura 5.15**) permiten identificar que el programa captura correctamente la propagación de la presión en la dirección radial.

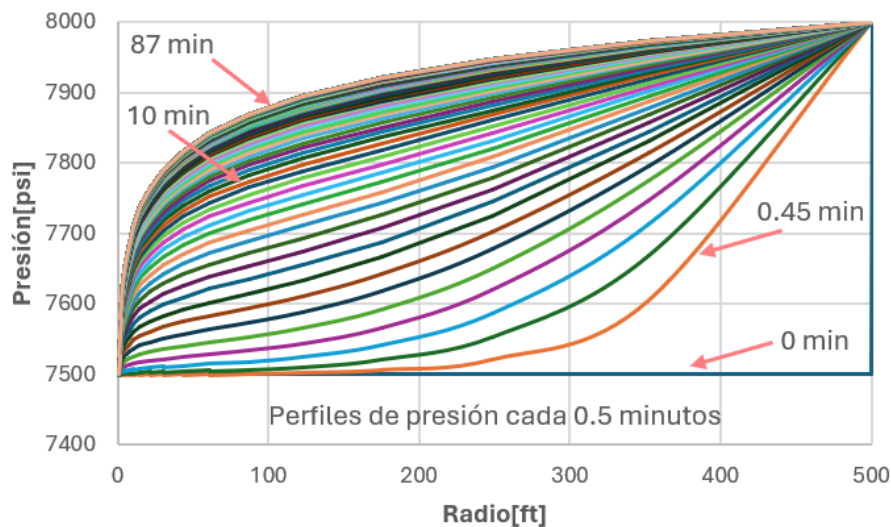


Figura 5.15 Evolución temporal de los perfiles de presión para el ejercicio 5.2.1.

Tabla 5.13 Perfiles de presión a distintos tiempos para el problema 5.2.1

Radios [ft]	Presión[psi]					
	0 min	2 min	5 min	10 min	20 min	87 min
0.65	7500	7500.0	7500.0	7500.0	7500.0	7500.0
0.82	7500	7501.3	7507.3	7513.5	7516.7	7517.2
1.03	7500	7502.5	7514.5	7526.9	7533.4	7534.5
1.29	7500	7503.8	7521.8	7540.4	7550.2	7551.7
1.63	7500	7505.1	7529.1	7553.9	7566.9	7569.0
2.04	7500	7506.3	7536.3	7567.4	7583.6	7586.2
2.57	7500	7507.6	7543.6	7580.8	7600.3	7603.4
3.23	7500	7508.9	7550.8	7594.3	7617.0	7620.7
4.07	7500	7510.1	7558.1	7607.8	7633.8	7637.9
5.11	7500	7511.4	7565.4	7621.2	7650.5	7655.2
6.43	7500	7512.7	7572.6	7634.7	7667.2	7672.4
8.08	7500	7514.0	7579.9	7648.2	7683.9	7689.7
10.17	7500	7515.2	7587.2	7661.7	7700.6	7706.9
12.78	7500	7516.5	7594.5	7675.2	7717.4	7724.1
16.08	7500	7517.9	7601.9	7688.7	7734.1	7741.4
20.22	7500	7519.2	7609.2	7702.2	7750.8	7758.6
25.42	7500	7520.7	7616.7	7715.7	7767.5	7775.9
31.97	7500	7522.2	7624.3	7729.4	7784.3	7793.1
40.20	7500	7524.0	7632.2	7743.1	7801.0	7810.3
50.56	7500	7526.1	7640.5	7757.0	7817.8	7827.6
63.58	7500	7528.8	7649.5	7771.1	7834.6	7844.8
79.95	7500	7532.5	7659.6	7785.7	7851.5	7862.1
100.54	7500	7538.0	7671.6	7801.1	7868.5	7879.3
126.43	7500	7546.5	7686.6	7817.7	7885.6	7896.6
158.99	7500	7560.5	7706.6	7836.2	7903.1	7913.8
199.94	7500	7584.5	7734.3	7857.6	7920.9	7931.0
251.43	7500	7626.9	7773.7	7883.5	7939.3	7948.3
316.18	7500	7701.5	7829.6	7915.5	7958.6	7965.5
397.60	7500	7825.4	7906.0	7954.7	7978.9	7982.8
500.00	8000	8000.0	8000.0	8000.0	8000.0	8000.0

*Solución luego de alcanzar una condición en régimen estacionario.

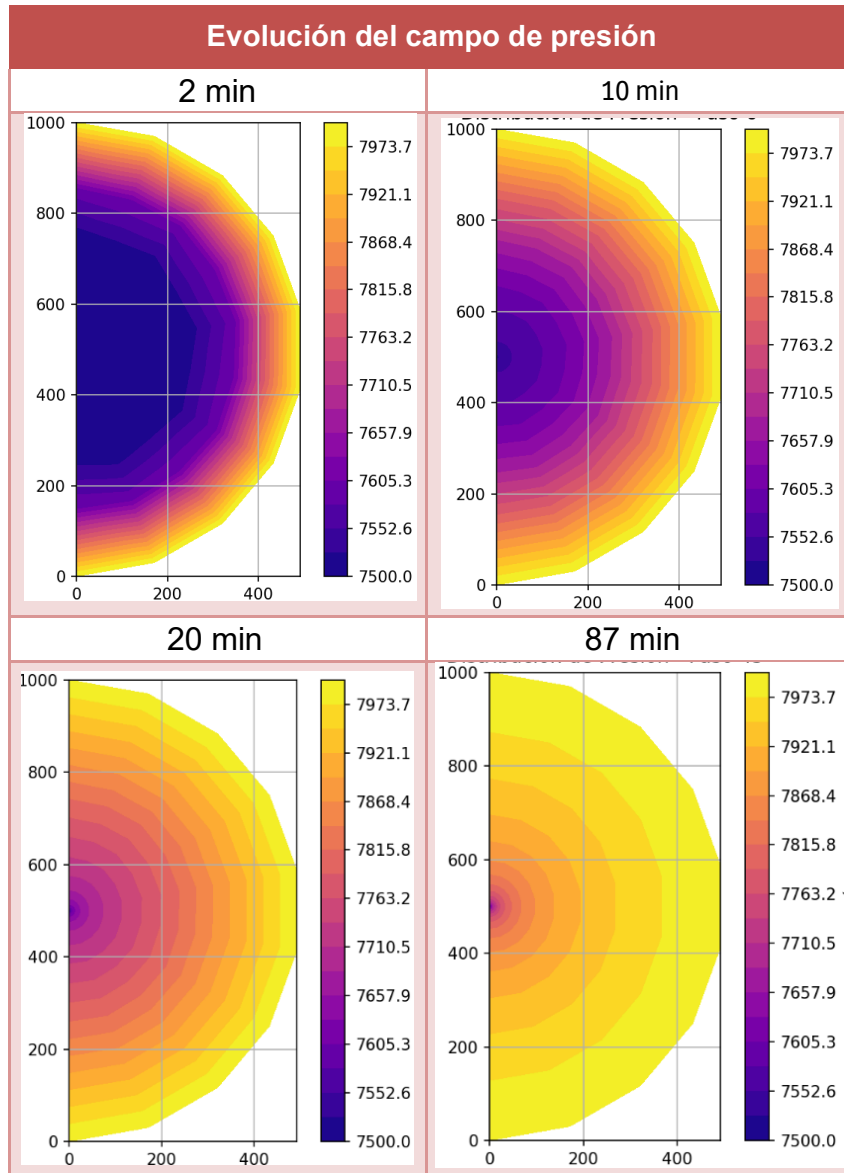


Figura 5.16 Mapas de contorno con la distribución de la presión en el sistema a diferentes tiempos para el problema 5.2.1.

5.2.2 Flujo de un fluido en un medio poroso 2D, con condiciones de frontera Neumann-Dirichlet

El sistema analizado es el mismo del problema 5.2.1, con la diferencia de que aquí se establece una condición de frontera tipo Neumann en el radio interno del sistema, como se muestra en la **Figura 5.17**.

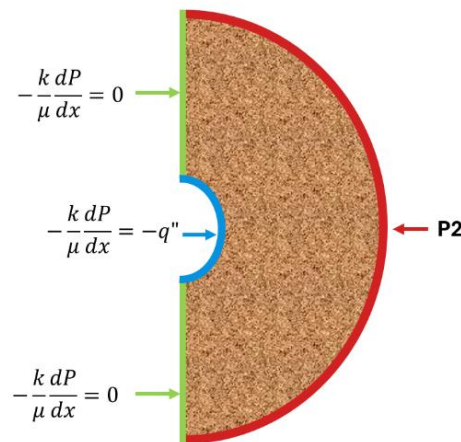


Figura 5.17 Sistema analizado para el problema 5.2.2.

Considerando la naturaleza del fenómeno y las condiciones de frontera establecidas, observar que el sistema alcanzará un régimen de flujo estacionario. De esta manera, se simularán dos escenarios: 1) régimen estacionario y 2) régimen transitorio.

Con relación a la condición de frontera tipo Neumann del problema, el flujo volumétrico (gasto volumétrico por unidad de área transversal al flujo) se estableció en $q'' = 1,722$ [m/s]; este valor se calculó en función de las condiciones de frontera establecidas en el problema 5.2.1. Esto con la finalidad de verificar que la simulación transitoria reproduzca aquella condición estacionaria, de tal manera que la presión en el radio interno resulte en un valor aproximado de $P_{ri} = 5.17 \cdot 10^7$ [Pa] (7,500 [psi]). Como condición inicial, la presión se estableció en $P_{inicial} = 5.51 \cdot 10^7$ [Pa] (8,000 [psi]).

a) Simulación en régimen estacionario

De manera análoga que en el ejercicio 5.2.1, se ejemplificará el desarrollo de la matriz de rigidez para un elemento genérico al interior del dominio. Se considera el elemento 23, cuyas coordenadas x-y se indican en la **Tabla 5.14**.

Tabla 5.14 Datos de los nodos que conforma al elemento 23.

Nodo	Abscisa	Ordenada
24	0.268	-0.825
13	0.128	-0.394
12	$4.56 \cdot 10^{-6}$	-0.414

El procedimiento es el siguiente:

1) El área del elemento 23 se determina con base en la ecuación 4.19, de tal forma que:

$$A = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|,$$

$$A = \frac{1}{2} |0.00536 + 0.0526 - 1.9 \cdot 10^{-6}| = 0.0289[m^2].$$

2) A partir de la ecuación 4.24, se procede a calcular la matriz de rigidez del elemento 23, $[k_{23}]$. Para tal efecto, el coeficiente de difusividad hidráulica se calculó en el problema 5.2.1 como $\eta = 4.528 \left[\frac{m^2}{s} \right]$. Por lo tanto, se tiene que:

$$[k_{34}] = \frac{4.528 \left[\frac{m^2}{s} \right] * 30.48[m]}{0.0289[m^2]} \begin{bmatrix} 0.0167 & -0.026 & 0.0092 \\ -0.026 & 0.2407 & -0.214 \\ 0.0092 & -0.214 & 0.205 \end{bmatrix}.$$

3) Siguiendo los pasos 1 y 2, se calculan las matrices de rigidez para el resto de los elementos del dominio, $[k_i]$, y se procede a su acoplamiento. Como resultado, se obtiene que la matriz de rigidez total, $[k_T]$, es:

$$[k_T] = \begin{bmatrix} 267.58 & -233.07 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ -233.07 & 535.16 & -233.07 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -233.07 & 535.16 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 255.75 & -93.36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -93.36 & 255.75 & -93.36 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -93.36 & 127.87 \end{bmatrix}.$$

4) Considerando la condición de frontera tipo Neumann del problema, se procede a calcular el vector fuerza. Para tal efecto, debe asignarse el flujo volumétrico en las posiciones correspondientes a los nodos que coinciden con el radio interno. A modo de ejemplo, a continuación, se muestra cómo se construye el vector fuerza para el elemento 1, $[F_1]$, cuyos nodos con sus respectivas coordenadas se presentan en la **Tabla 5.15**.

Tabla 5.15 Datos de los nodos que conforma al elemento 1.

Nodo	Abcisa	Ordenada
11	0.175	152.30
2	$2.142 \cdot 10^{-2}$	152.20
1	$2.183 \cdot 10^{-6}$	152.20

Para el elemento 1, los nodos que coinciden con la frontera con flujo volumétrico son el 1 y 2. Por lo tanto, antes de construir el vector fuerza, se procede a calcular la longitud de la arista respectiva mediante la ecuación 4.25; de esta manera:

$$l_{n2,n1} = \sqrt{|(2.142 \cdot 10^{-2} - 2.183 \cdot 10^{-6})^2 + (152.20 - 152.20)^2|} = 6.88 \cdot 10^{-2} [m],$$

por lo que:

$$[F_1] = -\frac{1722.3 \left[\frac{m}{s}\right] * 6.88 \cdot 10^{-2} [m] * 30.48 [m]}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.81 \cdot 10^3 \\ -1.81 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \left[\frac{m^3}{s}\right].$$

5) El paso 4 se replica para el resto de los elementos cuyos nodos coinciden con el radio interno del sistema. Posteriormente, se procede al acoplamiento de los vectores fuerza por elemento, obteniéndose el vector fuerza total, $[F_T]$:

$$[F_T] = \begin{bmatrix} -1.81 \cdot 10^3 \\ -3.61 \cdot 10^3 \\ -3.61 \cdot 10^3 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6) Para construir el vector de presiones, en las posiciones correspondientes a los nodos coincidentes con el radio externo, esto es del 91 al 100, se sustituyen los valores de presión conocidos en la frontera, $5.51 \cdot 10^7$. Por lo tanto:

$$[P_i] = \begin{bmatrix} i P_i? \\ i P_i? \\ i P_i? \\ \vdots \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ 5.51 \cdot 10^7 \end{bmatrix} [Pa].$$

7) Por otra parte, considerando la condición de frontera tipo Dirichlet en el radio externo, se procede a modificar la matriz de rigidez en las filas correspondientes a los nodos que coinciden con éste. Por lo tanto, todos los coeficientes en esas filas se hacen cero, excepto los de la diagonal principal, los cuales toman el valor de uno. De esta manera, se tiene que:

$$[k_T] = \begin{bmatrix} 267.58 & -233.07 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -233.07 & 535.16 & -233.07 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -233.07 & 535.16 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8) Finalmente, se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas lineales para el problema:

$$[K_T][P_T] = [F_T],$$

$$\begin{bmatrix} 267.58 & -233.07 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -233.07 & 535.16 & -233.07 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -233.07 & 535.16 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{P}_i? \\ \dot{P}_i? \\ \dot{P}_i? \\ \vdots \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ 5.51 \cdot 10^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.81 \cdot 10^3 \\ -3.61 \cdot 10^3 \\ -3.61 \cdot 10^3 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Verificación de resultados

Con el objetivo de validar los resultados del programa desarrollado, primeramente, se obtuvo la solución exacta para el flujo de un fluido ligeramente compresible en régimen estacionario, en coordenadas radiales (ecuación 2.24). Posteriormente, se comparó el perfil de presión obtenido mediante la simulación con FEM, contra la solución exacta. Los resultados se presentan en la **Tabla 5.16** y la **Figura 5.18**. Como puede observarse, el error relativo en el cálculo numérico de las presiones es menor al 0.6%. La presión calculada en el radio interno fue de 7545 [psi], la cual es muy cercana al valor esperado de 7500 [psi]. De esta manera, se concluye que el programa computacional calcula bien los campos de presión en régimen estacionario con condiciones de frontera Neumann-Dirichlet.

Tabla 5.16 Comparación de las presiones calculadas con FEM y la solución analítica para el problema 5.2.2.

Radios [ft]	Presión [psi]		Error relativo
	Sol. Exacta	FEM	[%]
0.65	7500	7545.45	$6.1 \cdot 10^{-1}$
1.36	7555.6	7596	$1.9 \cdot 10^{-3}$
2.85	7611.1	7646.54	$4.7 \cdot 10^{-1}$
5.96	7666.7	7697.09	$9.7 \cdot 10^{-5}$
12.46	7722.2	7747.64	$3.3 \cdot 10^{-1}$
26.08	7777.8	7798.18	$1.5 \cdot 10^{-6}$
54.57	7833.3	7848.73	$2.0 \cdot 10^{-1}$
114.19	7888.9	7899.25	$1.5 \cdot 10^{-9}$
238.94	7944.4	7949.71	$6.6 \cdot 10^{-2}$
500	8000	8000	---

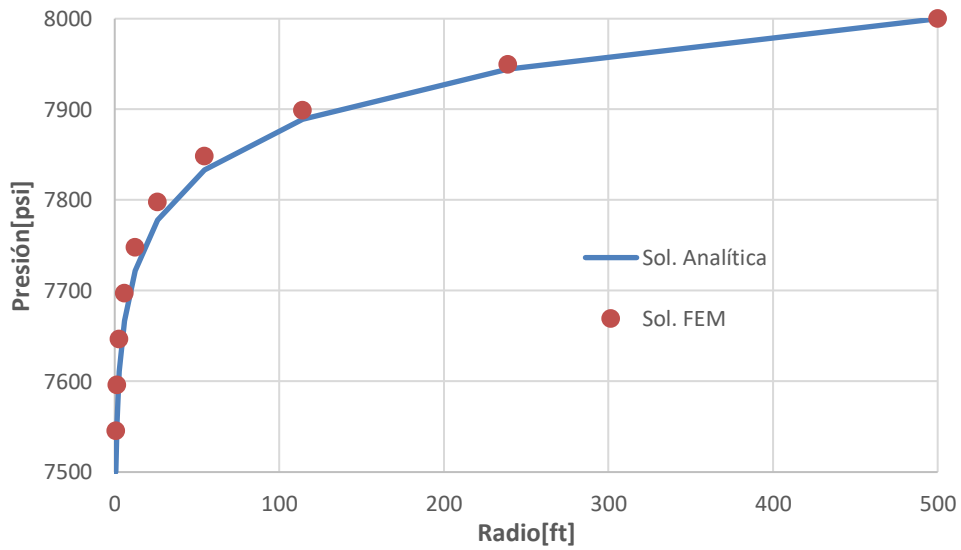


Figura 5.18 Comparación de las presiones calculadas con FEM y con la solución analítica para el problema 5.2.2.

b) Simulación en régimen transitorio:

El procedimiento es el siguiente:

1) La matriz de rigidez total se construye siguiendo los pasos 1 a 3 del inciso a) del problema 5.2.2.

2) A continuación, se procede a calcular la matriz de capacitancia por elemento, $[C_i]$. Como ejemplo, para el elemento 23, se tiene que:

$$[C_{23}] = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

3) Después de calcular las matrices de capacitancia de todos los elementos, se procede a su acoplamiento. De esta manera, la matriz de capacitancia total, $[C_T]$, queda como:

$$[C_T] = \begin{bmatrix} 9.107 \cdot 10^{-5} & 5.67 \cdot 10^{-5} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 5.67 \cdot 10^{-5} & 7.02 \cdot 10^{-4} & 5.67 \cdot 10^{-5} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.67 \cdot 10^{-5} & 2.27 \cdot 10^{-4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 64.21 & 16.054 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 16.054 & 94.90 & 16.054 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 16.054 & 32.109 \end{bmatrix}.$$

4) En cuanto a la construcción de los vectores fuerza por elemento, estos se construyen como se describió en los pasos 4 y 5 del inciso a) de problema 5.2.2. Por lo tanto, el vector fuerza total es $[F_T]$:

$$[F_T] = \begin{bmatrix} -1.81 \cdot 10^3 \\ -3.61 \cdot 10^3 \\ -3.61 \cdot 10^3 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5) Para la construcción de los vectores de presión a los tiempos t_i y t_{i+1} , en ambos se sustituye el valor establecido como condición de frontera en el radio externo, $P_{re} = 5.51 \cdot 10^7 [Pa]$ (8,000 [psi]). Por otra parte, en el primer paso de tiempo, se sustituye el valor de presión inicial, $P_{inicial} = 5.51 \cdot 10^7 [Pa]$ en el resto de los elementos del vector $P(t_i)$. En el caso del vector $P(t_{i+1})$, los elementos restantes constituyen las incógnitas del problema. De esta manera, se tiene que:

$$[P(t_i)] = \begin{bmatrix} 5.51 \cdot 10^7 \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ \vdots \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ \vdots \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ 5.51 \cdot 10^7 \end{bmatrix} [Pa] \quad \text{y} \quad [P(t_{i+1})] = \begin{bmatrix} ? P_i \\ ? P_i \\ ? P_i \\ \vdots \\ ? P_i \\ \vdots \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ 5.51 \cdot 10^7 \\ 5.51 \cdot 10^7 \end{bmatrix} [Pa].$$

6) De acuerdo con la ecuación 4.32, el sistema de ecuaciones algebraicas lineales correspondiente al sistema analizado es:

$$[A] [P(t_{i+1})] = [C_T][P(t_i)] + [F_T] \Delta t ,$$

donde

$$[A] = [[C_T] + [k_T] \Delta t] .$$

El paso de tiempo se estableció en la simulación en $\Delta t = 1.4 [min]$.

7) Antes de resolver el sistema de ecuaciones algebraicas lineales anterior, es necesario modificar las matrices $[A]$ y de capacitancia $[C_T]$, por el efecto de la condición de frontera tipo Dirichlet en el radio externo. Para tal efecto, todos los coeficientes de las filas correspondientes a los nodos coincidentes con el radio externo se hacen cero, excepto los que están en la diagonal principal, los cuales se sustituyen por un valor unitario. Por ejemplo, en el caso de la matriz de capacitancia total, $[C_t]$, ésta queda como:

$$[C_T] = \begin{bmatrix} 9.107 \cdot 10^{-5} & 5.67 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.67 \cdot 10^{-5} & 7.02 \cdot 10^{-4} & 5.67 \cdot 10^{-5} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.67 \cdot 10^{-5} & 2.27 \cdot 10^{-4} & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es conveniente resaltar que el resto de los coeficientes calculados para las matrices $[A]$ y $[C_T]$ se conservan sin modificación. La matriz se trunca por razones de espacio.

8) Después de resolver el sistema de ecuaciones lineales para el vector $P(t_{i+1})$ en el primer paso de tiempo, se procede a actualizar el vector $P(t_i)$ con base en los valores calculados en las posiciones correspondientes a los nodos internos del sistema. Así, esta secuencia de pasos se repite hasta alcanzar una condición estacionaria o el tiempo total de la simulación.

Los perfiles de presión en la dirección radial que se obtuvieron con el programa computacional desarrollado se presentan en las **Tablas 5.17** y **5.18**, y la **Figura 5.19**. La evolución temporal del campo de presiones se puede visualizar en los mapas de contorno mostrados en la **Figura 5.20**. De acuerdo con los resultados obtenidos, se determinó que el sistema se establece en una condición de régimen estacionario luego de aproximadamente 90 minutos.

Verificación de resultados

Para verificar los resultados de la simulación transitoria, se comparó el perfil de presión obtenido a los 90 minutos contra la solución analítica del problema en régimen estacionario; como puede observarse en la **Tabla 5.18**, el error relativo en el cálculo numérico del perfil de la presión en la dirección radial es menor de 0.5%. En el caso de la presión calculada en el radio interno, $P_{ri} = 7529$ [psi], cabe resaltar que es bastante próxima al valor esperado de $P_{ri} = 7500$ [psi].

Continuando con la verificación de los resultados, en la **Figura 5.19** se observa que los perfiles de presión convergen correctamente a los valores establecidos como condiciones de frontera. Por otra parte, en los mapas de contorno de la **Figura 5.20**, se verifica que el programa computacional captura correctamente la evolución temporal del campo de presión en el sistema.

Por lo tanto, con base en lo expuesto anteriormente, puede concluirse que los resultados del programa computacional para resolver los problemas planteados para el flujo de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso 2D, mediante la aplicación del método de elemento finito, son correctos.

Tabla 5.17 Perfiles de presión a distintos tiempos para el ejercicio 5.2.2.

Radio [ft]	Presión [psi]					
	0 min	3 min	5 min	10 min	40 min	90 min
0.65	8000	7711.5	7600.43	7575.91	7559.12	7529.24
1.360	8000	7762.0	7650.98	7626.46	7609.66	7581.58
2.846	8000	7812.3	7701.53	7677.00	7660.21	7633.92
5.955	8000	7862.00	7752.06	7727.54	7710.75	7686.26
12.462	8000	7909.75	7802.55	7778.06	7761.29	7738.60
26.078	8000	7952.30	7852.85	7828.49	7811.78	7790.94
54.569	8000	7983.57	7902.39	7878.54	7862.10	7843.28
114.188	8000	7998.06	7948.95	7927.07	7911.74	7895.60
238.944	8000	8000.16	7985.58	7970.23	7958.93	7947.87
500	8000	8000	8000	8000	8000	8000.00

*Solución luego de alcanzar una condición en régimen estacionario.

Tabla 5.18 Verificación del perfil de presión a 90 min.

Radio [ft]	Presión [psi]			Error relativo [%]
	Sol. exacta	FEM Estacionario	FEM Transitorio a 90 min	
0.2	7500	7545.45	7529.24	0.39
0.26	7555.6	7596	7581.58	0.34
0.35	7611.1	7646.54	7633.92	0.3
0.46	7666.7	7697.09	7686.26	0.26
0.61	7722.2	7747.64	7738.6	0.21
0.81	7777.8	7798.18	7790.94	0.17
1.07	7833.3	7848.73	7843.28	0.13
1.41	7888.9	7899.25	7895.6	0.08
1.87	7944.4	7949.71	7947.87	0.04
2.47	8000	8000	8000	---

*Solución luego de alcanzar una condición en régimen estacionario.

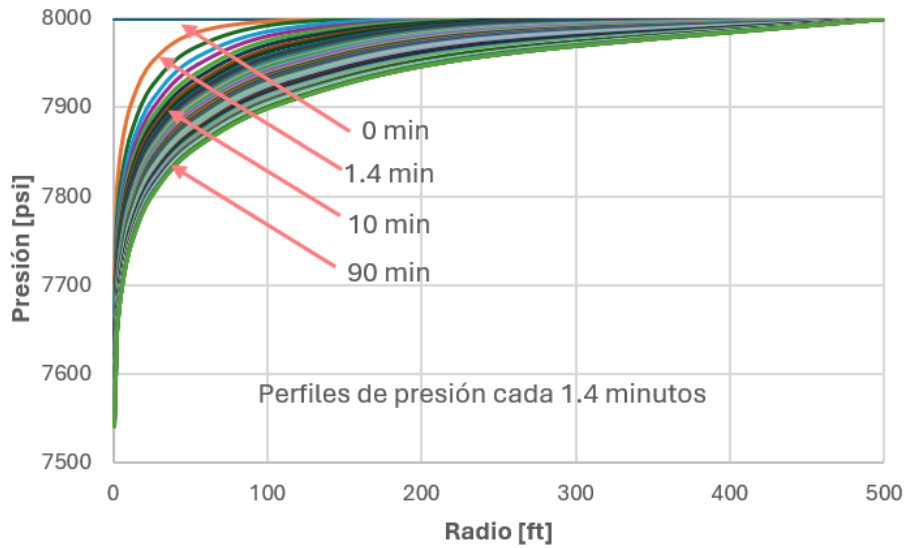


Figura 5.19 Evolución temporal de los perfiles de presión para el ejercicio 5.2.2.

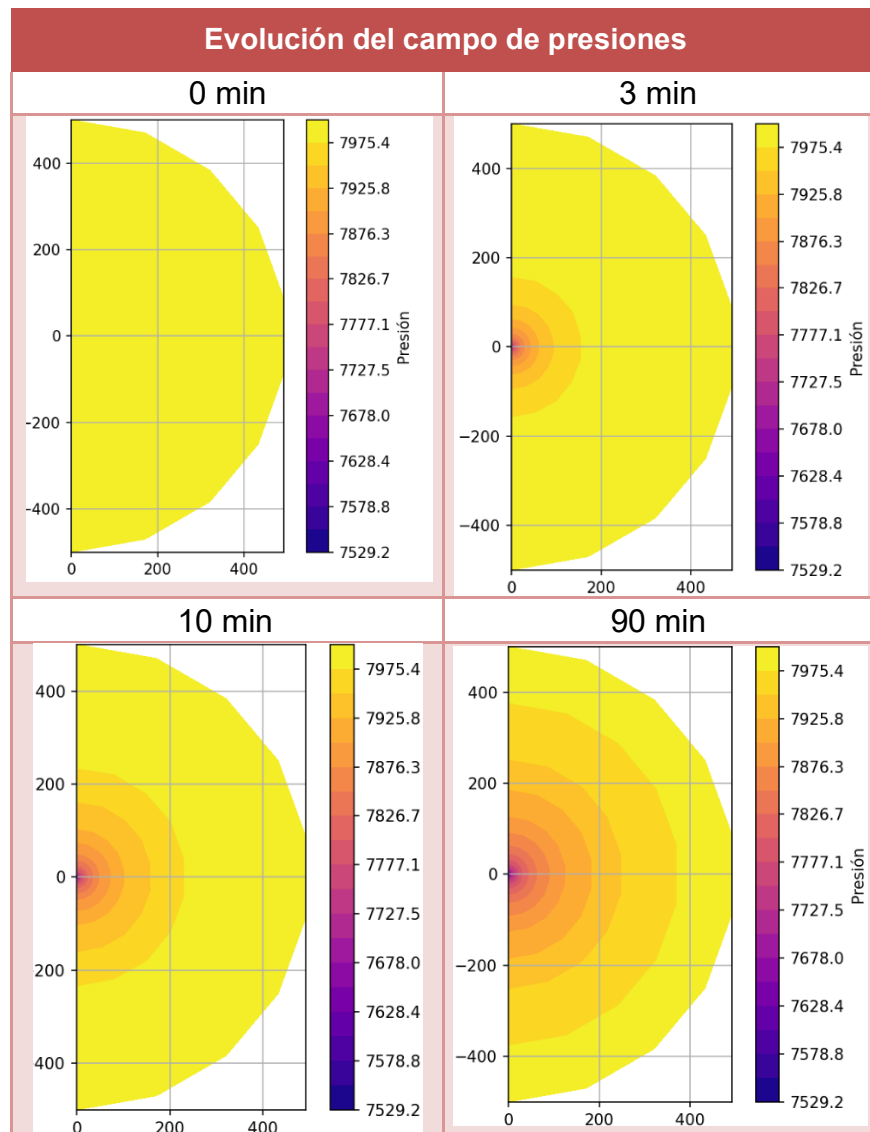


Figura 5.20 Mapas de contorno con la distribución de la presión en el sistema a diferentes tiempos para el problema 5.2.2.

Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones

1. Se revisaron y documentaron los fundamentos de los temas siguientes:
 - a) Flujo de fluidos en medios porosos. Se presentó la deducción de la ecuación de difusividad hidráulica en medios porosos, a partir de un balance de materia y la ley de Darcy. Se discutió su linealización en el caso de un fluido ligeramente compresible, incluyendo una solución analítica para flujo en régimen estacionario.
 - b) Conducción de calor. Se describieron los modos de transferencia de calor y sus leyes fenomenológicas. Se desarrollaron las ecuaciones de balance de energía y de difusividad térmica para analizar la propagación del calor en un medio sólido. Se presentó la solución analítica para la conducción de calor en régimen estacionario.
 - c) Método de elemento finito. Se ejemplificó cómo aproximar la solución de una ecuación diferencial ordinaria mediante funciones de interpolación con información en puntos discretos del dominio. Se abordó la formulación integral de la ecuación diferencial y se describió el método de Galerkin. Se mencionaron los tipos de mallas numéricas y se explicó cómo se construyen la matriz de rigidez y el vector de fuerza para elementos finitos triangulares. Se mencionaron los esquemas explícito e implícito para problemas que dependen del tiempo. Cabe destacar que las mallas de elementos triangulares en FEM, a diferencia de las mallas ortogonales características del método de diferencias finitas, permiten una mejor representación de sistemas con geometrías irregulares.
2. Se describió detalladamente el procedimiento de resolución de diversos problemas de conducción de calor y de flujo de fluidos en medios porosos, mediante el método de elemento finito. Se consideraron problemas en una y dos dimensiones, en

régimen estacionario y régimen transitorio, y con diversas combinaciones de condiciones de frontera (tipos Dirichlet y Neumann).

3. Se desarrolló un programa computacional en macros de VB de Excel para resolver diversos problemas de conducción de calor y de flujo de fluidos en medios porosos, mediante el método de elemento finito. Entre las características principales del programa, pueden mencionarse:
 - a) Genera una malla de simulación 2D con elementos finitos triangulares, con nodos distribuidos logarítmicamente en la dirección radial.
 - b) Cuenta con funcionalidades para calcular de manera automática las matrices de rigidez y de capacitancia, así como los vectores de fuerza y de incógnitas, considerando las condiciones de frontera e inicial, según corresponda.
 - c) Resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas lineales mediante un método directo de eliminación.
 - d) Utiliza un esquema implícito para resolver problemas en régimen transitorio.
4. Adicionalmente, se desarrolló código computacional en Python para visualizar los resultados de las simulaciones en régimen transitorio mediante mapas de contorno.
5. Los resultados del programa computacional se verificaron exitosamente comparándolos con las soluciones analíticas en régimen estacionario para los problemas planteados.

Recomendaciones

1. Extender los alcances del presente trabajo, considerando la resolución de problemas de flujo de calor y de flujo en medios porosos en 3D, en condiciones estacionarias y transitorias, utilizando tetraedros como elementos finitos.
2. Investigar la implementación del FEM para modelar celdas de convección en medios porosos, lo cual requiere el acoplamiento y resolución simultánea de las ecuaciones de energía y de difusividad hidráulica, considerando en esta última la componente

gravitacional. Para tal efecto, convendría explorar la aplicación de la aproximación de Boussinesq, ampliamente utilizada en herramientas de la mecánica de fluidos computacional.

3. Investigar el modelado computacional de los sistemas de drenaje gravitacional asistido con vapor, SAGD, lo cual demanda una comprensión profunda de los complejos procesos físicos de transferencia de calor y de flujo multifásico en medios porosos.

Referencias bibliográficas

Alvarado, V., y Manrique, E. (2010). *Enhanced oil recovery: Field planning and development strategies*. Gulf Professional Publishing.

Aziz, K., & Settari, A. (1979). *Petroleum reservoir simulation*. Applied Science Publishers.

Bahrami, M. (s.f.). *Natural Convection* (Apuntes de curso ENSC 388). Simon Fraser University.

Bejan, A. (2013). *Convection heat transfer* (4.^a ed.). John Wiley & Sons.

Bejan, A., & Anderson, R. (1983). Natural Convection at the Interface Between a Vertical Porous Layer and an Open Space. *Journal of Heat Transfer*, 105(2), 337–345. <https://doi.org/10.1115/1.3245585>

Borouchaki, H., & George, P. L. (2017). *Meshing, Geometric Modeling and Numerical Simulation 1: Form Functions, Triangulations and Geometric Modeling*. ISTE Ltd.; John Wiley & Sons, Inc. <https://doi.org/10.1002/9781119420606>

Çengel, Y. A., & Ghajar, A. J. (2015). *Heat and mass transfer: Fundamentals & applications* (5.^a ed.). McGraw-Hill Education.

Çengel, Y. A., & Turner, R. H. (2002). Natural Convection. En *Fundamentals of Thermal-Fluid Sciences* (Capítulo 9, pp. 459–514). McGraw-Hill.

Cenovus Energy. (2013). *Oil sands and heavy oil*. <https://www.cenovus.com/Our-operations/Oil-sands-and-heavy-oil>

Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías. (16/02/26). *Producción de crudo*. Planeas. Recuperado el 16 de febrero de 2026, de <https://energia.conacyt.mx/planeas/hidrocarburos/produccion-crudo>

Dong, X., Liu, H., & Chen, Z. (2020). *Hybrid enhanced oil recovery processes for heavy oil reservoirs* (Vol. 73). Elsevier.

El Petróleo y sus Avances. (1 de diciembre de 2016). *Nuevas Tecnologías en la Recuperación Mejorada de Petróleo*. WordPress. <https://elpetroleoyesusavances.wordpress.com/2016/12/01/nuevas-tecnologias-en-la-recuperacion-mejorada-de-petroleo/>

Green, D. W., & Willhite, G. P. (1998). *Enhanced oil recovery*. Society of Petroleum Engineers.

Hewitt, D. R. (2020). Vigorous convection in porous media. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 476(2239), 20200111. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2020.0111>

Hutton, D. V. (2004). *Fundamentals of finite element analysis* (1.^a ed.). McGraw-Hill.

Lagrange, J. L. (1997). *Analytical Mechanics* (A. Boissonnade & V. N. Vagliente, Trad. y Eds.). Springer Science+Business Media. (Obra original publicada en 1811). <https://doi.org/10.1007/978-94-015-8903-1>

Lawson, C. L. (1977). *Software for C¹ Surface Interpolation* (JPL Publication 77-30). Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology. <https://ntrs.nasa.gov/citations/19770025725>

Lewis, R. W., Nithiarasu, P., & Seetharamu, K. N. (2004). *Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow*. John Wiley & Sons.

Liseikin, V. D. (2017). *Grid Generation Methods* (3.^a ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-57846-0>

Matthäi, S. K., Mezentsev, A., & Belayneh, M. (2007). Finite Element-Node-Centered Finite-Volume Two-Phase-Flow Experiments With Fractured Rock Represented by Unstructured Hybrid-Element Meshes. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 10(06), 740–756. <https://doi.org/10.2118/99379-PA>

Oilsands Magazine. (24 de octubre de 2024). *SAGD vs CSS: Understanding the differences in thermal in-situ oil recovery*. Oilsands Magazine. <https://www.oilsandsmagazine.com/news/2024/10/24/sagd-vs-css-thermal-in-situ-recovery-differences>

PEMEX Exploración y producción. 2011. *Inyección Alternada de Vapor en el Campo Samaria Neógeno*.

Schlumberger. (17/03/16). *Defining Heavy Oil*. Schlumberger Resource Library. <https://www.slb.com/resource-library/oilfield-review/defining-series/defining-heavy-oil>

ScienceDirect. (23/02/26.). *Continuous Steam Injection*. Recuperado el 23 de febrero de 2026, de <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/continuous-steam-injection>

Singfield, A. (2, de septiembre de 2016). *SA-SAGD tech: Oil sands economic & environmental benefits*. Vista Projects. <https://www.vistaprojects.com/solvent-technology-promises-oil-sands-benefits/>

Soto Ayala, R., Arellano Gil, J., Pérez Martínez, A. L., Muñoz Hernández, G., & Rojas Tapia, A. (2023). *Termodinámica para Ciencias de la Tierra: fundamentos y aplicaciones*

(Proyecto PAPIME PE 101920). Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

Su, Y., & Davidson, J. H. (2015). *Modeling Approaches to Natural Convection in Porous Media*. Springer Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-14237-1>

Vishnyakov, V., Suleimanov, B., Salmanov, A., & Zeynalov, E. (2019). *Primer on Enhanced Oil Recovery*. Gulf Professional Publishing. <https://doi.org/10.1016/C2017-0-03909-5>