



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Simulación numérica de plasma en la
salida de un canal de descarga
rectangular de un propulsor de efecto
Hall mediante el método Particle-in-Cell**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Aeroespacial

P R E S E N T A

Roberto Escalante Urrea

DIRECTOR DE TESIS

M. en C. Gibran Jalil Garnica



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2026



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado SIMULACION NUMERICA DE PLASMA EN LA SALIDA DE UN CANAL DE DESCARGA RECTANGULAR DE UN PROPULSOR DE EFECTO HALL MEDIANTE EL METODO PARTICLE-IN-CELL que presenté para obtener el título de INGENIERO AEROESPACIAL es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.



ROBERTO ESCALANTE URREA
Número de cuenta: 319098415

1. Resumen

Simulación numérica de plasma en la salida de un canal de descarga rectangular de un propulsor de efecto Hall mediante el método Particle-in-Cell.

El presente trabajo desarrolla una simulación numérica de plasma aplicada a un propulsor de efecto Hall con canal de descarga de geometría rectangular utilizando el método Particle-in-Cell (PIC). El objetivo principal es validar la implementación numérica, comparando resultados obtenidos con datos experimentales reportados en la literatura. Se analizan parámetros de desempeño como el empuje, el flujo másico y la distribución del potencial eléctrico, corroborando la fidelidad del modelo. Adicionalmente, se examina el comportamiento del fluido mediante un análisis de vorticidad en la zona de salida del canal de descarga, lo cual permite caracterizar la dinámica del plasma y demostrar la reducción de ruido numérico al utilizar la B-Spline modificada en estructuras conformes.

Abstract

Numerical plasma simulation at the exit of a rectangular discharge channel of a Hall effect thruster using the Particle-in-Cell method.

This work develops a numerical plasma simulation applied to a Hall effect thruster with a rectangular discharge channel geometry, utilizing the Particle-in-Cell (PIC) method. The primary objective is to validate the numerical implementation by comparing the obtained results with experimental data reported in the literature. Performance parameters, such as thrust, mass flow rate, and electric potential distribution, are analyzed, corroborating the model's fidelity. Furthermore, the fluid behavior is examined through a vorticity analysis at the discharge channel exit zone, allowing for the characterization of plasma dynamics and demonstrating the reduction of numerical noise when utilizing the modified B-Spline within conformal structures.

Índice

1. Resumen	1
Índice de figuras	4
Índice de tablas	5
2. Objetivos	7
2.1. Objetivo General	7
2.2. Objetivos Particulares	7
3. Introducción	8
3.1. Estado del Arte	8
3.2. Importancia del estudio	11
Importancia del estudio	11
4. Marco Teórico	13
4.1. Antecedentes	13
4.2. Particle in cell	15
4.2.1. Introducción al método PIC.	15
4.2.2. Fundamentos numéricos del método.	15
4.2.3. Solución del paso Lagrangiano y Euleriano	16
4.2.4. Implementación de la ecuación de Boltzmann.	18
4.2.5. Limitaciones del método.	19
4.2.6. Marco teórico de la vorticidad.	20
5. Desarrollo	22
5.1. Configuración del Dominio y Geometría	22
5.1.1. Definición del Canal de Descarga Rectangular	22
5.1.2. Condiciones Iniciales y de Frontera	24

ÍNDICE

5.2. Implementación del método numérico PIC	25
5.3. Cálculo de Variables Físicas y de Desempeño	26
5.3.1. Obtención de las variables macroscópicas	26
6. Resultados	28
6.1. Octante con evolución de electrones	28
6.2. Análisis de Flujo Cruzado entre Dos Familias de Electrones	33
6.3. Adaptación Geométrica a un Canal de Descarga Rectangular	40
6.4. Simulación Final bajo Condiciones Nominales del Propulsor NASA-173M	49
7. Análisis de Resultados	55
7.1. Obtención de variables de desempeño finales.	55
8. Conclusiones y Trabajo futuro	58
Referencias	59
glosario	60

Índice de figuras

1.	Funcionamiento de un motor de efecto Hall donde un campo magnético permite la circulación de electrones dentro del canal de descarga, mientras que se inyectan partículas de Xenón que, al momento de colisionar con dichos electrones, aumentan su energía cinética generando empuje.	11
2.	Fuerzas de reacción entre cuatro cargas puntuales.	12
3.	Dominio en una dimensión y una velocidad mostrando la evolución de un conjunto de partículas.	13
4.	Método de interpolación de las partículas en el método PIC [1]	16
5.	Representación de la participación real de una partícula a las celdas contiguas, recuperado de [1]	20
6.	Diagrama esquemático de las dimensiones del canal de descarga NASA-173Mv1.	22
7.	Configuración inicial de los electrones, $t = 0ns$	29
8.	Evolución de los electrones a lo largo del tiempo, representado con color azul.	29
9.	Evolución del campo eléctrico a lo largo del tiempo	30
10.	Velocidad promedio a lo largo del tiempo de simulación	31
11.	Vorticidad promedio a lo largo del tiempo	31
12.	Análisis visual de vorticidad en 1.6ns	32
13.	Análisis visual de vorticidad en 2.5ns	32
14.	Análisis visual de vorticidad en 3.7ns	32
15.	Análisis visual de vorticidad en 4.1ns	33
16.	Configuración inicial de flujo cruzado	34
17.	Evolución del flujo de partículas en distintos instantes de tiempo	34
18.	Campo eléctrico del flujo cruzado a lo largo de 40ns.	35
19.	Corte transversal del campo eléctrico a lo largo de $-z$ en $t = 14ns$	36
20.	Gráficas de vorticidad y velocidad en flujo cruzado a lo largo de $t = 40ns$	36
21.	Primer máximo local en $t = 6ns$	37
22.	Segundo máximo local en $t = 17ns$	38

ÍNDICE DE TABLAS

23.	Mínimo de vorticidad y velocidad en $t = 21ns$	38
24.	Vorticidad y velocidad una vez desarrollado el flujo cruzado (a partir de $t = 27ns$) .	39
25.	Estructuras conformes de vorticidad generadas en $t = 15 ns$	40
26.	Configuración inicial del jet rectangular en $t = 0 [ns]$	42
27.	Evolución temporal de las partículas en una configuración de jet rectangular	42
28.	$t = 10ns$	43
29.	Magnitud de velocidad respecto al tiempo.	44
30.	Magnitud de vorticidad respecto al tiempo.	45
31.	Flujo de vorticidad en $t = 15[ns]$	46
32.	Generación de vórtices completamente desarrollados en $t = 26 [ns]$	46
33.	Cortes transversales de la magnitud de campo eléctrico en $t = 15 [ns]$	47
34.	Magnitud de campo eléctrico en el eje z	48
35.	Configuración del fondo de electrones constante.	50
36.	Configuración inicial de las partículas de Xenón en $t = 0 ns$	50
37.	Evolución temporal de las partículas de xenón en una configuración de condiciones de operación nominales.	51
38.	Velocidad de las partículas de Xenón a lo largo del tiempo de simulación	52
39.	Visualización en tres dimensiones de las condiciones de campo eléctrico establecidas.	53
40.	Corte transversal a lo largo del eje z del campo eléctrico	53
41.	Magnitud de campo eléctrico a lo largo del tiempo de simulación	54
42.	Abstract de Artículo de Investigación en revisión en la Revista Mexicana de Física.	62
43.	Artículo de Investigación como co-autor en la Revista Mexicana de Física.	62

Índice de tablas

1.	Parámetros operativos nominales del propulsor NASA-173Mv1 [17].	23
2.	Dimensiones geométricas de la salida del canal de descarga	40
3.	Resultados numéricos obtenidos con base en las simulaciones.	55

ÍNDICE DE TABLAS

4. Comparativas entre el propulsor NASA-173M y los valores obtenidos en el proceso de simulación con su respectivo porcentaje de error. 56

2. Objetivos

2.1. Objetivo General

Simular la dinámica del plasma en la salida de un canal de descarga con geometría rectangular de un propulsor de efecto Hall, implementando el método Particle-in-Cell (PIC) con B-Spline modificada, con la finalidad de validar el modelo numérico comparando las variables físicas obtenidas frente a datos experimentales reportados en la literatura.

2.2. Objetivos Particulares

- Identificar los parámetros de diseño y las características físicas de un propulsor de efecto Hall para su correcta definición dentro del código.
- Definir las condiciones de frontera y los parámetros de operación iniciales que representen la geometría rectangular del canal de descarga.
- Obtener las variables de desempeño del propulsor, como el empuje, el flujo másico, el impulso específico y la distribución de potencial eléctrico, a partir de la evolución de las partículas en la simulación.
- Validar el modelo, comparando los resultados obtenidos con datos experimentales y teóricos reportados en la literatura para propulsores de características similares, determinando el porcentaje de error a comparación del método desarrollado.
- Analizar el flujo de plasma en la salida del canal mediante los resultados obtenidos.
- Integrar el algoritmo para el cálculo de vorticidad dentro del método numérico Particle-in-Cell para validar un menor ruido en las estructuras conformes al utilizar la B-Spline modificada.

3. Introducción

3.1. Estado del Arte

Aunque los conceptos de propulsión eléctrica han sido estudiados desde el siglo XX debido a su potencial para aplicaciones espaciales [1], su desarrollo se ha centrado en la optimización de la eficiencia y el desempeño. Sin embargo, este avance se ha centrado en pruebas empíricas. Si bien este enfoque valida la operatividad de los diseños, esto deja rezagos en la comprensión de la física de su funcionamiento. Como menciona Goebel, “la comprensión fundamental de cómo operan los propulsores ha quedado rezagada respecto a los avances tecnológicos y a la aplicación de motores eléctricos en el espacio” [2].

La propulsión eléctrica tiene como propósito maximizar el impulso específico, incrementando la velocidad de salida del plasma y reduciendo así el propelente necesario [2] y los costos operativos de la misión. Este proceso depende de la eficiencia de ionización a través del impacto de electrones con átomos neutros de Xenón. Esto hace que el desafío principal radique en diseñar sistemas capaces de optimizar la tasa de estas colisiones y expulsar de manera eficiente el plasma resultante.

De este modo, tres parámetros de desempeño que rigen el diseño y análisis de los sistemas de propulsión eléctrica son los siguientes [3]:

- Empuje (T): Representa la fuerza de reacción generada por el sistema. Para propulsores eléctricos, donde el término de presión suele ser despreciable, se define como el producto del flujo másico de propelente y su velocidad de escape efectiva. Su expresión general es:

$$T = \dot{m}u_e$$

Donde \dot{m} es el gasto másico y u_e es la velocidad de salida del chorro de plasma.

- Impulso Específico (I_{sp}): Es una medida de la eficiencia en el uso del propelente. Relaciona la velocidad de escape con la aceleración de la gravedad estándar (g_0). Se define como:

$$I_{sp} = \frac{u_e}{g_0}$$

Donde g_0 se considera típicamente como la constante estándar $9.80665 [m/s^2]$ para normalizar el valor en segundos, independientemente de la ubicación del vehículo.

- Eficiencia Total (η_T): Menciona la conversión de energía eléctrica en energía cinética. Se define como la relación entre la potencia del canal de descarga (P_{jet}) y la potencia eléctrica

3.1 Estado del Arte

total suministrada al sistema (P_{in}):

$$\eta_T = \frac{P_{jet}}{P_{in}} = \frac{T u_e}{2P_{in}}$$

Los motores de propulsión eléctrica presentan rangos de operación de potencia desde los cientos a los miles de Watts, con impulsos específicos de miles de segundos, a cambio de generar empujes de fracciones de Newton [8]. Para optimizar este rendimiento, se ocupan gases inertes como el *Xenón* (Xe), cuya alta masa atómica y bajo potencial de ionización apoyan a la generación de empuje. Estas características hacen que la propulsión eléctrica sea una solución para sistemas de exploración espacial de masa pequeña.

El primer registro que se tiene del avance en propulsión eléctrica viene por R.H. Goddard en 1906, observó que una descarga eléctrica en un tubo lleno de gas cargado positivamente, generaba velocidades altas manteniendo la temperatura del tubo baja, creando un estudio denominado "*High-velocity streams of negative and positive particles*" [9].

En 1896 Tsiolkovsky proporcionó la ecuación ideal del cohete para la propulsión, denotando las limitaciones del propelente para la exploración espacial, llegando a proponer hidrógeno líquido como un sustituto. En 1912, Hermann Orberth trabajó en un primer diseño de un cohete basado en hidrógeno líquido, sin llegar a más que un concepto teórico. No fue hasta 1930 que empezó a existir un desarrollo en estas tecnologías, con Herbert Radd proponiendo partículas aceleradas eléctricamente para ahorrar el uso de combustible. Poco después se relacionó la ecuación de Einstein $E = mc^2$ como un primer acercamiento a la idea de que la masa del propelente podría ser convertida en energía cinética para posteriormente transformarla en empuje. [13]

En 1953, E. Saenger [9] derivó múltiples fórmulas para cualquier sistema cohete, y con ello se encontraron relaciones para aquellos basados en sistemas ionizados, obteniendo que este tipo de motores contaría con empuje muy limitado, cuestionando el uso de este tipo de motores en la industria. Pero poco después, en el mismo año, H.S. Tsein encontró que no se necesita una aceleración grande para poder cambiar la trayectoria de un cohete, notando nuevamente la importancia de este tipo de sistemas de propulsión.

En 1957, los estudios que se tenían anteriormente detallaban solamente la factibilidad de diseño de este tipo de propulsión, llamando la atención de distintas organizaciones y grupos de ingenieros que decidieron desarrollar distintos tipos de motores de propulsión eléctrica, lo que dio paso finalmente a la implementación de estas tecnologías. [13]

En conjunto, se desarrollaron distintos tipos de motores de propulsión eléctrica, clasificándose según la forma en que se genera la aceleración de partículas para generar empuje: electrotérmicos, electrostáticos y electromagnéticos. Ejemplos de estos tipos de motores involucran:

3.1 Estado del Arte

- **Resistojet:** Propulsor electrotérmico que incrementa la temperatura del propelente mediante transferencia de calor, utilizando un elemento resistivo o intercambiador de calor.
- **Arcjet:** Motor electrotérmico en el cual el flujo de gas es calentado al atravesar un arco eléctrico de alta intensidad sostenido entre dos electrodos, logrando velocidades de salida superiores a las de un resistojet.
- **Propulsor Ionico:** Motor electrostático que ioniza el gas neutro y acelera los iones positivos mediante la interacción con un campo eléctrico estático.

El motor de efecto Hall basa su funcionamiento en la interacción entre una corriente eléctrica y un campo magnético perpendicular, lo cual induce un campo eléctrico transversal que acelera los iones a altas velocidades. Si bien su eficiencia suele ser menor a la de otros propulsores eléctricos como los motores iónicos, este motor genera un empuje significativamente mayor ante una misma potencia eléctrica. Esta relación, además de su geometría anular, resulta en un dispositivo que simplifica su estudio, operación y hace que su manufactura sea mucho más accesible [10].

Un motor de efecto Hall consiste en tres componentes principales: un canal de salida fabricado generalmente de un material cerámico, un ánodo metálico y un cátodo. Se aplica un voltaje entre el ánodo y el cátodo, creando un campo eléctrico.

Se tiene además electroimanes en el sistema, lo que hace que se generen campos magnéticos perpendiculares al campo eléctrico ya establecido. Esto hace que los electrones no puedan completar el circuito de ánodo a cátodo, ya que van a tender a circular alrededor del campo magnético.

De igual forma, se inyecta mediante el ánodo el gas inerte (Xenón), a través de esta "nube de electrones". Cuando el gas colisiona con un electrón dentro de nuestra nube, el átomo se separa en dos partes: un electrón que se incorpora nuevamente a esta nube, y la misma partícula cargada positivamente. Esta colisión genera energía cinética, haciendo que la velocidad del ion creado aumente, y dirigiendo esta partícula es como podemos generar empuje en nuestro motor. A continuación se presenta una imagen recuperada de [11] que denota visualmente el funcionamiento de un motor de efecto Hall.

3.2 Importancia del estudio

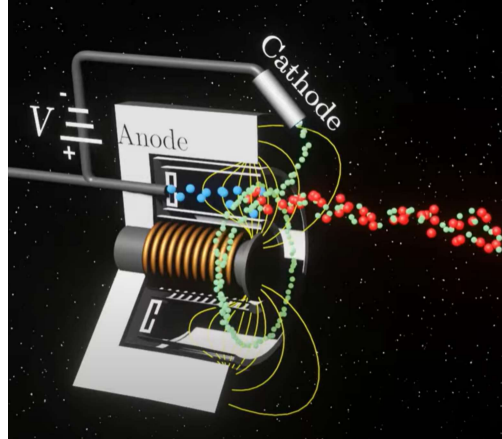


Figura 1: Funcionamiento de un motor de efecto Hall donde un campo magnético permite la circulación de electrones dentro del canal de descarga, mientras que se inyectan partículas de Xenón que, al momento de colisionar con dichos electrones, aumentan su energía cinética generando empuje.

3.2. Importancia del estudio

Una de las complicaciones en el estudio de los motores de efecto Hall radica en las colisiones entre las partículas de Xenón y los electrones. Cada vez que una partícula de Xenón colisiona con un electrón, este último pierde momento, lo que hace que se acerque más al ánodo. Así, los electrones pueden completar el circuito cátodo-ánodo, haciendo que el motor pierda eficiencia.

Debido a la naturaleza aleatoria y microscópica de estos eventos, un análisis de fluidos convencional resulta insuficiente. Por ende, un enfoque cinético que estudie el sistema como un conjunto de elementos discretos, analizando las interacciones individuales de cada partícula es propuesto.

Considerando una cantidad n de partículas. Cada una de ellas se encuentra aplicando $n - 1$ fuerzas al resto, teniendo un total de $n(n - 1)$ fuerzas en el sistema. La Figura 2 muestra un ejemplo de la interacción de fuerzas entre cuatro partículas.

Partiendo de la segunda ley de Newton:

$$\sum F = ma \rightarrow m \frac{du_i}{dt} = F_i(r_i, u_i) \quad (3.1)$$

Donde F_i es representado mediante la fuerza de Coulomb para un campo electromagnético:

$$F_i = q(\bar{E} \times u_i \bar{B}) \quad (3.2)$$

3.2 Importancia del estudio

$$\vec{F}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=i}^N q_n \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_n}{|\vec{r}_i - \vec{r}_n|^3} + \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 c^2} \vec{v}_i \times \sum_{n=1}^N q_n \frac{\vec{v}_n \times (\vec{r}_i - \vec{r}_n)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_n|^3} \quad (3.3)$$

Donde:

- q_i, q_n : cargas eléctricas
- \vec{r}_i, \vec{r}_n : posiciones de las partículas
- \vec{v}_i, \vec{v}_n : velocidades
- ϵ_0 : permitividad del vacío
- c : velocidad de la luz

Se observa que si se quisiera analizar un mol (6×10^{23}) de partículas, se requeriría realizar esta ecuación $6 \times 10^{23}(6 \times 10^{23} - 1)$ veces, lo cual implica un tiempo de cómputo inviable.

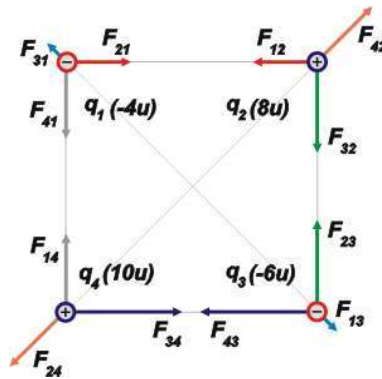


Figura 2: Fuerzas de reacción entre cuatro cargas puntuales.

Para resolver estos problemas, se han propuesto tres métodos para simplificar los cálculos: El método continuo, que hace uso de las ecuaciones de Navier-Stokes con apoyo de las leyes de Maxwell para poder predecir el comportamiento de las partículas.

El método de partículas, que sigue las trayectorias de las partículas para definir las propiedades de las mismas y cómo afectan a su campo.

Finalmente, el método cinético, que propone una solución de la ecuación de Boltzmann. Donde se modela la función de distribución de cada partícula, para analizar la probabilidad de tener una cierta velocidad, en cierta posición específica. Esta última es la utilizada para el método Particle-in-Cell.

4. Marco Teórico

4.1. Antecedentes

El desarrollo teórico se plantea con base en la ecuación de Boltzmann, la cual plantea las propiedades de transporte de carga o energía de partículas, modelando la evolución temporal de una función de distribución $f(r_i, u_i, t)$, donde:

- $f(x, u, t)$ es la función de distribución de las partículas, detallada anteriormente.
- Factores como u y x representan las propiedades de la partícula, como su posición y velocidad.
- El término a es la aceleración que presenta la partícula, la cual, para los factores del desarrollo del modelo, será representada por la fuerza de Lorentz

$$\vec{a} = \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (4.1)$$

Es importante mencionar que dicha función no describe las propiedades individuales de las partículas, sino una aproximación de un conjunto de ellas. En otras palabras, menciona la probabilidad de encontrar cierta partícula con una posición y velocidad determinadas en un instante de tiempo, permitiéndonos representar esta función como la suma de las propiedades individuales, para ser asignada a una "macropartícula". [14]

Se define un dominio en el espacio de fases donde están en movimiento un conjunto de partículas. Analizando un segmento de dicho dominio, centrado en $(\delta\bar{r}, \delta\bar{v}, t)$, en el siguiente instante de tiempo este pasa a ser $(\delta r, \delta v, t + \delta t)$.

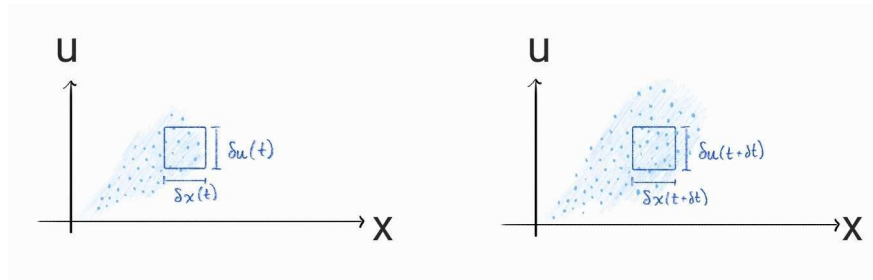


Figura 3: Dominio en una dimensión y una velocidad mostrando la evolución de un conjunto de partículas.

4.1 Antecedentes

Podemos analizar el flujo de partículas que entran y salen de un segmento en una dimensión denominado $\delta\Gamma = \delta u \delta x$ a partir de la función de distribución del conjunto de partículas.

Se define como la tasa de cambio del número de partículas que entran y salen de $\delta\Gamma$ como:

$$\frac{d\delta\Gamma}{dt} = \int_x \int_u \frac{\delta f(x, u, t)}{\delta t} dx du \quad (4.2)$$

Al aplicar el teorema de la divergencia de Gauss para visualizar la diferencia de densidad de partículas en $\delta\Gamma$, donde dicho proceso es recuperado de [19]

$$\nabla \cdot \bar{\omega} = \frac{\delta u f(x, u, t)}{\delta x} + \frac{\delta a f(x, u, t)}{\delta u} \quad (4.3)$$

Y teniendo en cuenta que en el sistema se debe cumplir la ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{\delta f(x, u, t)}{\delta t} + \nabla \cdot \omega = 0 \quad (4.4)$$

Sustituyendo 4.3 en 4.4 se obtiene

$$\frac{\delta f(x, u, t)}{\delta t} + u \frac{\delta f(x, u, t)}{\delta x} + a \frac{\delta f(x, u, t)}{\delta u} = 0 \quad (4.5)$$

La ecuación 4.5 obtenida es conocida como la ecuación de Vlasov, o la ecuación de Boltzmann sin colisiones. Esta ecuación describe que los cambios debido a las fuerzas exteriores conservan su densidad de partículas, por lo que la diferencia de densidad en $\delta\Gamma$ que pueda existir entre t y $t + \delta t$ solamente puede ser dada por procesos de dispersión debidos a las colisiones, por lo que es necesario tomar en cuenta dicho factor [14].

$$\boxed{\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial t} + u \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x} + a \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} = \left(\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial t} \right)_{\text{coll}}} \quad (4.6)$$

Así se llega a la ecuación 4.6, o la ecuación de Boltzmann.

La ecuación completa se define entonces como

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla_x f + \underbrace{\frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})}_{\vec{a}} \cdot \nabla_u f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \quad (4.7)$$

4.2 Particle in cell

4.2. Particle in cell

4.2.1. Introducción al método PIC.

Como se mencionó anteriormente, las limitaciones computacionales para simular una nube de partículas han implicado la creación de distintos métodos numéricos que permiten simplificar la cantidad de operaciones matemáticas para observar la dinámica entre ellas. Para esto, el análisis se enfoca en el método *Particle-in-Cell* (PIC).

Esta metodología se fundamenta desde dos factores principales. Por un lado, se representa la función de distribución mediante macropartículas, donde cada una representa estadísticamente a un gran número de partículas reales, además, se discretiza el dominio mediante una malla de celdas para el cálculo de los campos, permitiendo la interacción entre las macropartículas y el entorno para un proceso iterativo [1].

4.2.2. Fundamentos numéricos del método.

La base del método parte de separar nuestro problema en dos marcos de referencia complementarios, uno **Lagrangiano** y otro **Euleriano**.

En el paso Lagrangiano se sigue el movimiento general de las macropartículas a lo largo del tiempo, resolviendo su trayectoria según las fuerzas que actúan sobre ellas. Mientras que en el paso Euleriano se analiza el campo mediante una malla fija. Es decir, se analiza cómo se deforma el campo dado el movimiento de las partículas en un instante de tiempo fijo.

Esta separación de los marcos de referencia permite llegar a un proceso de interpolación, donde se proponen propiedades iniciales de las partículas, para así resolver el campo correspondiente a la configuración de las mismas. Este campo hace que las partículas se desplacen, haciendo que se obtengan las nuevas propiedades de las partículas, lo que deforma el campo, y así recursivamente. A continuación se muestra un diagrama recuperado de [1] que representa el modelo de interpolación.

4.2 Particle in cell

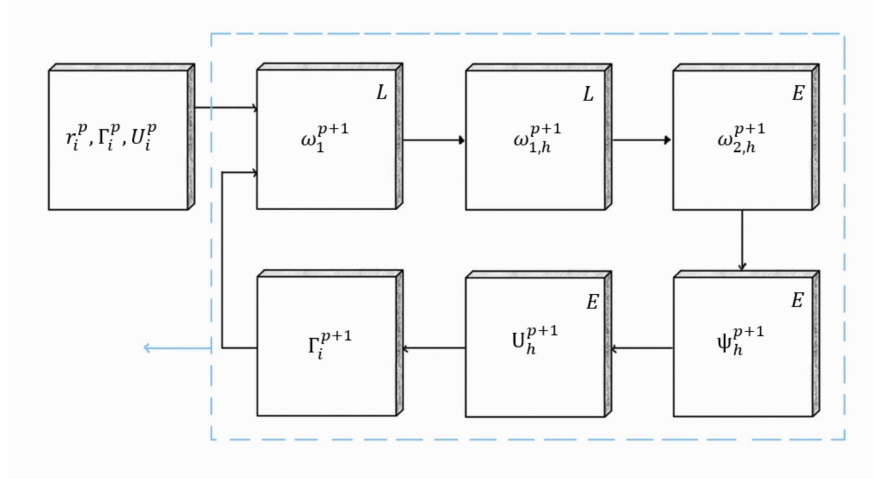


Figura 4: Método de interpolación de las partículas en el método PIC [1]

Así, el modelo parte de una ecuación de transporte generalizada propuesta por Grigoryev [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A\mathbf{q} = 0 \quad (4.8)$$

donde $A = E + L$.

E representa a la solución del paso euleriano y L la solución del paso lagrangiano. De igual forma, \mathbf{q} es un vector que representa las propiedades de transporte de las partículas, es decir $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$. Así, se puede descomponer la ecuación 4.8 en su representación lagrangiana y euleriana.

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + L\mathbf{q} = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} + E\tilde{\mathbf{q}} = 0 \quad (4.10)$$

Cabe destacar que $\tilde{\mathbf{q}}$ representa las propiedades parciales de la partícula, es decir, $\mathbf{q}(t_p) = \tilde{\mathbf{q}}(t_p + \tau)$. Donde t_p representa el tiempo de la partícula y τ el paso de tiempo.

4.2.3. Solución del paso Lagrangiano y Euleriano

Se define un número ω_α de celdas en nuestro dominio Ω , de las cuales la suma de las propiedades individuales de cada partícula serán establecidas en los centros de cada una de ellas, denominados \mathbf{u}_α .

4.2 Particle in cell

Para el paso Lagrangiano, se puede modificar la ecuación 4.9:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{q} \mathbf{U}}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (4.11)$$

Al integrar y realizar operaciones vectoriales sobre el dominio Ω , obtenemos la representación continua del paso lagrangiano:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{q} d\mathbf{u} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \mathbf{U} dS \quad (4.12)$$

Pero, como se mencionó anteriormente, el método se basa en la discretización del dominio con base en las propiedades de las macropartículas encontradas en los centros \mathbf{u}_{α} de las celdas. Así, Grigoryev [1] propone la fórmula de interpolación:

$$\mathbf{q}(t, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{Q}_j R(\mathbf{u}, \mathbf{u}_j(t)) \quad (4.13)$$

Donde \mathbf{Q}_j representa alguna característica de las partículas. Recordemos que estamos trabajando en el paso lagrangiano, por lo que estas características no dependen del tiempo. Además, \mathbf{u} representa las coordenadas lógicas del centro de las macropartículas en el dominio. Finalmente, R suele ser llamado el "Kernel" de las partículas; este representa la función de distribución de las propiedades de las partículas. Donde se representa como una B-Spline, la cuál es una suavización de puntos de interés, para poder representar una ecuación que generalmente tendría un desarrollo complejo, en una serie de polinomios del grado del sistema.

Debido a que \mathbf{Q}_j no depende del tiempo, se tiene que cumplir la ecuación de conservación discreta:

$$\mathbf{Q} = \sum_{j=1}^N \mathbf{Q}_j \quad (4.14)$$

Siguiendo el proceso matemático que propone Grigoryev en [1], se propone una función auxiliar finita $\phi(\mathbf{u})$, se puede sustituir 4.13 en 4.9 obteniendo:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{Q}_j \int_{\Omega} \left(\frac{\partial R}{\partial \mathbf{u}_j} \frac{d\mathbf{u}_j}{dt} \phi(\mathbf{u}) + R \mathbf{U} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}} \right) d\mathbf{u} = 0 \quad (4.15)$$

Simplificando esta ecuación:

4.2 Particle in cell

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{Q}_j \int_{\Omega} R \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}_j} \left[\frac{d\mathbf{u}_j}{dt} - \mathbf{U}(\mathbf{u}_j) \right] d\mathbf{u}_j = 0 \quad (4.16)$$

Y debido a que la función auxiliar fue elegida arbitrariamente, se puede desarrollar la operación para llegar a la condición de que $\frac{d\mathbf{u}_j}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{u}_j(t))$.

Entonces, la ecuación 4.16 representa la evolución de las propiedades \mathbf{u} de la j -ésima partícula, las cuales, recordemos, son las propiedades de transporte para la solución de q .

Centrándonos en el paso lagrangiano obtuvimos la solución de q , por lo que el paso Euleriano puede ser resuelto directamente mediante la ecuación 4.10.

4.2.4. Implementación de la ecuación de Boltzmann.

Siguiendo un proceso similar a la deducción del paso lagrangiano, se asume la ecuación de Boltzmann 4.6 de forma discreta como:

$$f_s(r_k, r_{j,k}, t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{Q}_j R(r_k, r_{j,k}) R(v_k, v_{j,k}) \quad (4.17)$$

Donde el *kernel* en el espacio velocidades es representado como una delta de Dirac, y el *kernel* en el espacio de posiciones es representado como en el paso Lagrangiano.

A demás, si se asume un fenómeno electrostático, y realizando un proceso similar al mostrado anteriormente, se llega a:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{Q}_j \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\phi R) + \frac{\partial u_j}{\partial r_j}(\phi R) - \frac{q_s E_j}{m_s} R \frac{\partial \phi}{\partial v_j} \right] = 0 \quad (4.18)$$

Desarrollando los términos:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{Q}_j \left(\int_{\Omega} \left[\left(\frac{dr_j}{dt} - v_j \right) \frac{\partial \phi}{\partial r_j} \right] dr_j + \int_{\Omega} \left[\frac{dv_j}{dt} - \frac{q_s E_j}{m_s} R \frac{\partial \phi}{\partial v_j} \right] dr_j \right) = 0 \quad (4.19)$$

Debido a que ϕ es una función auxiliar arbitraria, la ecuación debe cumplir las siguientes dos propiedades:

4.2 Particle in cell

$$\frac{dr_j}{dt} = v_j \quad (4.20)$$

$$\frac{dv_j}{dt} = \frac{q_s}{m_s} E_j \quad (4.21)$$

Además, E_j , el cuál representa el campo eléctrico generalizado, tiene que ser representado de la siguiente manera;

$$E_j = \int_{\Omega} E_j R dr_j \quad (4.22)$$

Dichas ecuaciones diferenciales son resueltas para poder obtener las propiedades de campo y de las partículas en un instante de tiempo definido, lo cuál sirve como parámetro inicial para el siguiente paso de tiempo.

4.2.5. Limitaciones del método.

Una limitante del método PIC es el ruido numérico asociado a la discretización de la función de distribución mediante un número finito de macro-partículas. Este fenómeno, conocido como ruido estadístico, genera fluctuaciones en las magnitudes de campo.

Adicionalmente, el proceso de interpolación de carga a la malla introduce errores sistemáticos. En esquemas de bajo orden, la carga de una partícula se asigna al nodo más próximo. Esto provoca que, cuando una partícula cruza la frontera entre dos celdas, la densidad de carga experimente una discontinuidad. Este cambio brusco induce fluctuaciones en el campo eléctrico y en las fuerzas que actúan sobre las partículas.

Este efecto introduce energía no física al sistema, lo cual puede desestabilizar la simulación si no se emplean funciones de forma de orden superior como las B-Splines o un número suficientemente elevado de partículas. Puede amplificarse a lo largo de la simulación.

4.2 Particle in cell

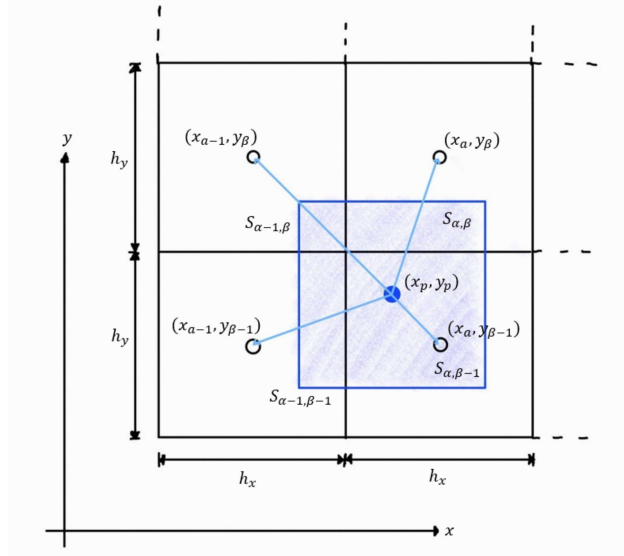


Figura 5: Representación de la participación real de una partícula a las celdas contiguas, recuperado de [1]

Este ruido numérico tendrá que ser tomado en consideración mediante distintas iteraciones de simulación. Además, el presente código parte del estudio de Garnica [16], el cual genera un Kernel modificado para generar una disminución en las fluctuaciones, en comparación con Kernel's que se ha propuesto y utilizado en estudios anteriores.

4.2.6. Marco teórico de la vorticidad.

La vorticidad es definida por Majda [17] como una magnitud vectorial que describe la tendencia de un fluido a girar localmente y se define como el rotacional del campo de velocidades $\omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$. Enfocado en el estudio de plasma, el principio de vorticidad mantiene la definición declarada anteriormente.

Partiendo de la ecuación de Boltzmann y de las ecuaciones auxiliares previamente establecidas, es posible iniciar el análisis a partir de una condición inicial de potencial eléctrico, donde en el método *Particle-in-Cell* implica el resolver un paso Euleriano (espacial) dadas estas condiciones arbitrarias establecidas.

Dado dicho potencial inicial, se puede resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r_j^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4.23)$$

4.2 Particle in cell

Esta ecuación describe la distribución espacial del potencial eléctrico en un instante de tiempo. Así, podemos resolver el campo eléctrico dada la Ley de Gauss para un campo electrostático:

$$E_j = -\frac{\partial\phi}{\partial x_j} \quad (4.24)$$

En torno a la velocidad, esta es obtenida mediante la ley de Lorentz:

$$\frac{du_j}{dt} = \frac{q}{m} (E_j + \epsilon_{jkl}u_k B_l) \quad (4.25)$$

Para finalmente realizar el rotacional de esta última ecuación.

5. Desarrollo

5.1. Configuración del Dominio y Geometría

A continuación, se detalla la configuración del dominio computacional, estableciendo las condiciones de frontera y los parámetros de operación nominales del propulsor NASA-173Mv1 con el objetivo de validar el modelo numérico y caracterizar el comportamiento del plasma para replicar los resultados experimentales.

5.1.1. Definición del Canal de Descarga Rectangular

Para la definición geométrica del dominio, se tomaron como referencia los parámetros de diseño del propulsor *NASA-173Mv1*, documentado por Hofer [17]. La elección de este modelo se justifica por la disponibilidad de datos experimentales, lo que permite una validación de los resultados numéricos.

Las especificaciones geométricas establecen un diámetro exterior de 173 mm, un ancho de canal de descarga de 25 mm y una profundidad del canal de 38 mm. La Figura 6 presenta un diagrama esquemático con las dimensiones adaptadas para el análisis.

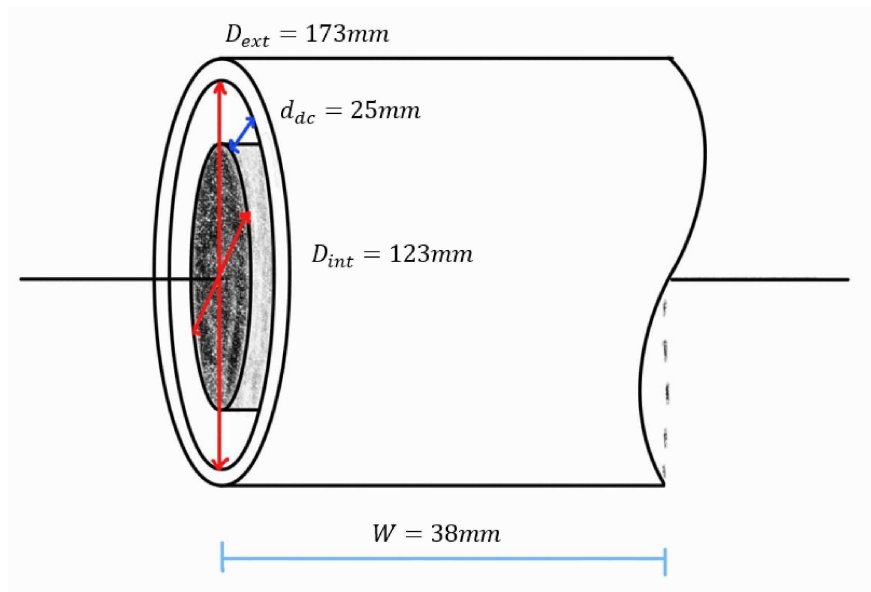


Figura 6: Diagrama esquemático de las dimensiones del canal de descarga NASA-173Mv1.

Aproximación Geométrica y Escalamiento

Dado que la simulación se realiza en un dominio cartesiano rectangular, se asume la simplificación

5.1 Configuración del Dominio y Geometría

de la curvatura del canal circular. Para mantener la consistencia física, se trabaja con un diferencial de arco representativo del propulsor.

Esta simplificación se basa en la relación de aspecto del propulsor, donde el ancho del canal es significativamente menor que su diámetro medio $d_{dc} \ll D_{med}$, lo que permite despreciar los términos de curvatura en las ecuaciones de campo sin comprometer la física.

Con el objetivo de conservar los parámetros de operación reales, las dimensiones del dominio rectangular corresponden a las magnitudes físicas completas del dispositivo:

- Eje X : Longitud del canal de descarga.
- Eje Y : Ancho del canal.
- Eje Z : Corresponde a la longitud de la circunferencia media del propulsor ($L_z = \pi \cdot D_{med}$), abarcando la totalidad del volumen de descarga.

Al modelar el volumen completo, los parámetros de entrada se ingresan con sus valores nominales totales.

Parámetros de Operación

A partir de los datos experimentales reportados en [17], se definieron las condiciones de operación nominales para el propulsor NASA-173Mv1. La Tabla 1 resume estas variables, las cuales cumplen una doble función en el presente estudio: los parámetros de operación (como V_d y \dot{m}_a) establecen las condiciones de frontera del dominio computacional, mientras que las métricas de desempeño (como T y η_a) constituyen los valores de referencia para la validación del modelo numérico.

Parámetro	Símbolo	Valor Reportado
Voltaje de descarga	V_d	495 V
Corriente de descarga	I_d	20.2 A
Flujo másico del ánodo	\dot{m}_a	20.3 mg/s
Flujo másico del cátodo	\dot{m}_c	1.5 mg/s
Potencia total	P	10.2 kW
<i>Parámetros de Validación</i>		
Empuje	T	511 mN
Impulso Específico	I_{sp}	2390 s
Eficiencia del ánodo	η_a	0.59

Tabla 1: Parámetros operativos nominales del propulsor NASA-173Mv1 [17].

5.1 Configuración del Dominio y Geometría

5.1.2. Condiciones Iniciales y de Frontera

Discretización del Dominio

Se definió un dominio computacional con dimensiones físicas de $100 \times 100 \times 400$ mm. Para la resolución numérica, este volumen se discretizó en una malla de $81 \times 81 \times 162$ celdas respectivamente.

Condiciones Iniciales.

Para representar la condición de cuasi-neutralidad del plasma en la región de descarga, se inicializó el dominio con un fondo de electrones uniformemente distribuido.

Respecto a los iones, se estableció un esquema de inyección en el plano de origen ($z = 0$), en el área de la sección del canal de descarga. La tasa de inyección de partículas se determinó a partir del flujo másico del ánodo reportado para el propulsor [17]. Considerando un flujo de $\dot{m} = 20.3$ mg/s y la masa atómica del Xenón ($m_{Xe} \approx 2.18 \times 10^{-25}$ kg), el flujo de partículas numéricas se calcula como:

$$\dot{N} = \frac{\dot{m}}{m_{Xe}} \left[\frac{part}{s} \right] \quad (5.1)$$

Estas partículas se inyectan progresivamente en cada paso de tiempo durante un periodo de 10 ns.

Condiciones de Frontera

Para la resolución de la Ecuación de Poisson se tomó como referencia el voltaje de descarga nominal (V_d), se impuso un campo eléctrico en la salida del canal de descarga estimado mediante la relación:

$$E_{axial} \approx \frac{V_d}{d_{dc}} = \frac{495 \text{ V}}{0.025 \text{ m}} = 19800 \text{ V/m} \quad (5.2)$$

Donde se asume una caída de potencial lineal. El potencial eléctrico en el extremo lejano del dominio ($z_{max} = 400\text{mm}$) se fijó en $\phi = 0$, simulando el ambiente de espacio profundo.

Finalmente, para el tratamiento de partículas que alcanzan los límites del dominio, se implementaron condiciones de frontera absorbentes [15]. Esto implica que cualquier partícula que cruce los límites de la malla es eliminada de la simulación y sus propiedades dejan de computarse, permitiendo observar el flujo en estado estacionario sin efectos de rebote o acumulación en los bordes.

5.2 Implementación del método numérico PIC

5.2. Implementación del método numérico PIC

Tras definir los fundamentos teóricos, se detalla la implementación realizada en C++. El ciclo principal sigue la estructura del método *Particle-in-Cell* definida anteriormente, ejecutándose en cada paso de tiempo ($\Delta t = 1e^{-10}[s]$).

En primera instancia, se establece el dominio de $81 \times 81 \times 162$ celdas ($100 \times 100 \times 400$ mm). Se generan las marcopartículas representativas para electrones e iones de xenón, asignándoles sus propiedades físicas como su masa m y carga q . Estas especies se inyectan en sus posiciones iniciales correspondientes.

A continuación, se describe el ciclo de resolución ejecutado en cada iteración temporal:

El primer paso consiste en obtener la densidad de carga en los nodos de la malla a partir de las posiciones discretas de las partículas. La densidad de carga $\rho_{i,j,k}$ en cada celda se calcula mediante la ponderación de las cargas (Q) de todas las especies presentes:

$$\rho_{i,j,k} = \frac{1}{V_{celda}} \sum q_p \quad (5.3)$$

Con la densidad de carga conocida, se resuelve la Ecuación de Poisson discretizada basado en el método de Gauss-Seidel:

$$\phi_{i,j,k}^* = \frac{\frac{\rho_{i,j,k}}{\epsilon_0} + \frac{\phi_{i-1} + \phi_{i+1}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{j-1} + \phi_{j+1}}{\Delta y^2} + \frac{\phi_{k-1} + \phi_{k+1}}{\Delta z^2}}{2 \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)} \quad (5.4)$$

Siguiendo la propuesta de Breida [20], se adopta un coeficiente de relajación de $\omega = 1.4$ para acelerar la convergencia.

$$\phi_{i,j,k}^{n+1} = \phi_{i,j,k}^n + \omega(\phi_{i,j,k}^* - \phi_{i,j,k}^n) \quad (5.5)$$

El ciclo itera hasta que el error cuadrático medio es menor a la tolerancia establecida de 1×10^{-4} .

El campo eléctrico $\vec{E} = -\nabla\phi$ se obtiene mediante diferencias finitas. Para garantizar la estabilidad numérica en todo el dominio, se aplicaron esquemas específicos según la posición del nodo:

En nodos internos, se utilizan diferencias centradas de segundo orden:

$$E_i = \frac{\phi_{i-1} - \phi_{i+1}}{2\Delta x} \quad (5.6)$$

5.3 Cálculo de Variables Físicas y de Desempeño

En las fronteras se implementaron esquemas de diferencias finitas de segundo orden, tanto adelantadas como atrasadas. Debido a la naturaleza de las funciones B-Spline, estas requieren información de las celdas adyacentes para garantizar la continuidad de la solución. En los límites del dominio, dicha dependencia se interrumpe por la falta de nodos exteriores, provocando una discontinuidad que genera ruido numérico que puede amplificarse y propagarse hacia el interior de la simulación.

$$E_{forward} = \frac{-3\phi_i + 4\phi_{i+1} - \phi_{i+2}}{2\Delta x} \quad (5.7)$$

$$E_{backward} = \frac{3\phi_i - 4\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{2\Delta x} \quad (5.8)$$

Una vez calculado el campo eléctrico, se interpolan los valores desde los nodos hacia la posición de cada partícula. Las velocidades y posiciones se actualizan mediante la Ley de Lorentz:

$$\vec{u}_{n+1} = \frac{q}{m} \vec{E} \Delta t \quad (5.9)$$

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{u}_{n+1} \Delta t \quad (5.10)$$

Cabe mencionar que, para evitar velocidades irrealmente altas debido al ruido numérico en zonas de baja densidad, se aplica un proceso de normalización del campo de velocidades basado en la densidad local de partículas antes de proceder al cálculo de la vorticidad.

Finalmente, se calcula el campo de vorticidad ($\omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$) utilizando los mismos esquemas de diferencias finitas de segundo orden que los aplicados para el campo eléctrico.

Este proceso se repite iterativamente, permitiendo la evolución temporal del plasma hasta alcanzar un estado estacionario.

5.3. Cálculo de Variables Físicas y de Desempeño

5.3.1. Obtención de las variables macroscópicas

Para evaluar el rendimiento del propulsor simulado y validar el modelo frente a los datos experimentales de Hofer [17], es necesario interpretar las variables obtenidas en nuestra simulación a factores de desempeño de nuestro propulsor.

Dado que el método PIC presenta ruido estadístico, todas las variables descritas a continuación se

5.3 Cálculo de Variables Físicas y de Desempeño

calculan promediando sus valores sobre un intervalo de tiempo representativo en estado estacionario.

1. Empuje (T)

El empuje total se calcula sumando la contribución de momento de cada ión que cruza el plano de salida del propulsor por unidad de tiempo. Numéricamente, se define como:

$$T = \sum_{p=1}^N \dot{m}_p u_z \quad (5.11)$$

Donde \dot{m}_p es el flujo másico asociado a la partícula acelerada, con u_z siendo la velocidad de salida del canal de descarga en el eje transversal.

2. Corriente de Descarga (I_d)

La corriente de descarga se obtiene contabilizando la carga neta que fluye a través de las fronteras del sistema por unidad de tiempo:

$$I_d = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\sum |q_{iones}| + \sum |q_{electrones}|}{\Delta t} \quad (5.12)$$

3. Flujo Másico

El flujo másico total (\dot{m}_{total}) considera tanto el aporte del ánodo como el del cátodo, valores definidos en las condiciones de operación (Tabla 1):

$$\dot{m}_{total} = \dot{m}_a + \dot{m}_c \quad (5.13)$$

4. Impulso Específico (I_{sp})

El impulso específico, que representa la eficiencia en el uso del propelente, se calcula relacionando el empuje obtenido con el flujo másico total.

$$I_{sp} = \frac{T}{\dot{m}_{total}} \quad (5.14)$$

5. Eficiencia Total del Propulsor (η_T)

Finalmente, la eficiencia total del sistema relaciona la potencia de salida con la potencia eléctrica suministrada ($P_{in} = V_d I_d$). Se define mediante la ecuación:

$$\eta_T = \frac{T^2}{2\dot{m}_{total} P_{in}} = \frac{T^2}{2\dot{m}_{total} (V_d I_d)} \quad (5.15)$$

6. Resultados

La obtención de resultados siguió una metodología acumulativa. En lugar de abordar la totalidad del propulsor NASA-173M desde el inicio, el proceso de simulación se dividió en etapas para asegurar la estabilidad numérica y la validez en cada paso.

El análisis comenzó con la implementación de un modelo base siguiendo las condiciones planteadas, al cual se integró el algoritmo de cálculo de vorticidad. Esta primera etapa tuvo como objetivo validar la integridad del código y verificar que la implementación de las nuevas subrutinas no introdujera inestabilidades numéricas.

A partir de esta base validada, cada iteración incorporó progresivamente elementos de mayor complejidad, como la geometría rectangular y los parámetros de operación reales. Las siguientes secciones detallan este proceso de cada fase.

6.1. Octante con evolución de electrones

Como punto de partida, se retomó una simulación base preexistente [15] configurada en una geometría de octante. El objetivo de esta etapa no fue la obtención de datos físicos nuevos, sino la verificación del algoritmo de vorticidad implementado. Se procesaron los campos de velocidad de esta simulación estable para asegurar que las subrutinas no introdujeran ruido o inestabilidades en el procesamiento.

La primera iteración del código presenta un dominio cúbico de $0.2 \times 0.2 \times 0.2$ metros, con una discretización de 81 celdas en cada eje coordenado (recordando que cada celda, acorde al método "Particle-in-Cell", son aquellas que almacenarán la información y propiedades de cada partícula individual).

Dentro de dicho dominio se presenta en un octante una configuración de 1×10^{10} electrones ordenados uniformemente. Esta configuración no representa ninguna relación física, simplemente fue rescatada del código de Garnica [15] para observar comportamientos similares, así como resultados coherentes a los parámetros del campo de velocidad y, por consiguiente, a la vorticidad agregados.

A continuación se presenta la configuración inicial del dominio, así como la evolución de los electrones a lo largo del tiempo. Es importante mencionar que dicha simulación representa la evolución a lo largo de 40 ns de tiempo; sin embargo, se muestran los primeros 12 ns, los cuales son el factor más significativo en el proceso de esta iteración de simulación.

6.1 Octante con evolución de electrones

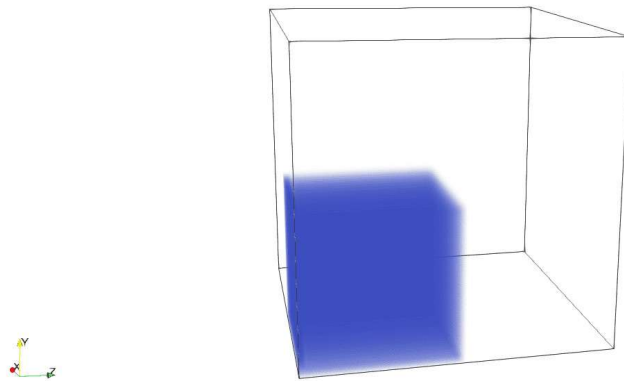


Figura 7: Configuración inicial de los electrones, $t = 0ns$

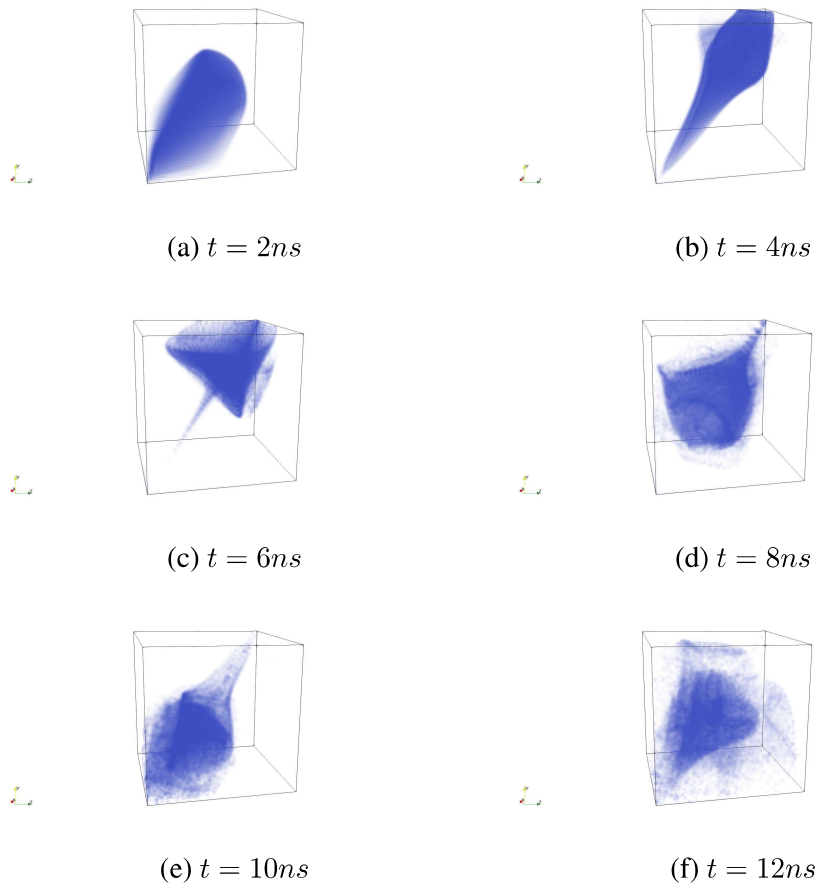


Figura 8: Evolución de los electrones a lo largo del tiempo, representado con color azul.

6.1 Octante con evolución de electrones

Se observa un dinámica acorde a lo presentado en [15], mencionado anteriormente. Con esto, se obtuvieron gráficas correspondientes a las diversas propiedades del sistema.

En primera instancia, se obtienela gráfica de campo eléctrico a lo largo del tiempo.

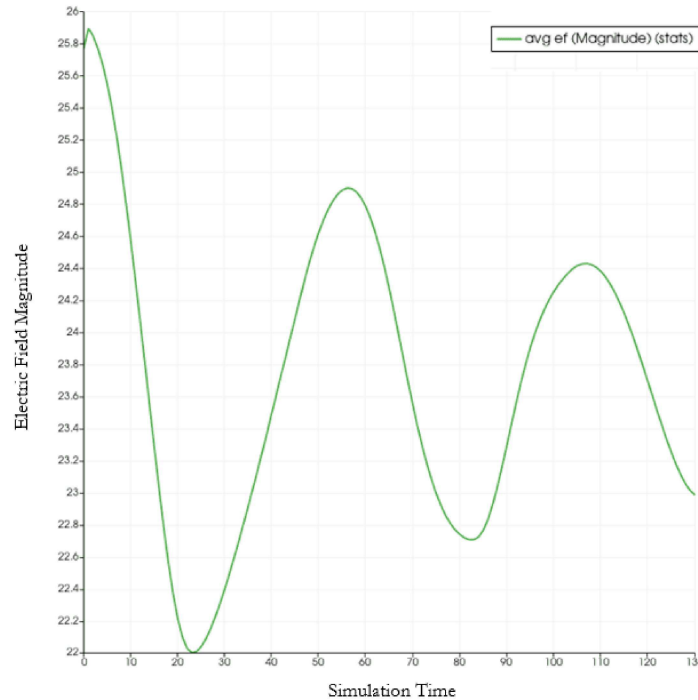


Figura 9: Evolución del campo eléctrico a lo largo del tiempo

En la figura 9 se observa un comportamiento senoidal que decrece en magnitud a lo largo del tiempo; esto se explica debido a que, conforme las partículas evolucionan respecto al tiempo, la concentración de estas en un espacio determinado disminuye, por lo que el promedio de la magnitud del campo, como tal, decrece de igual forma.

De igual manera, se observa la evolución de la energía cinética y la vorticidad del sistema. Las siguientes gráficas presentan la magnitud promedio de la velocidad y la vorticidad calculada, respectivamente:

6.1 Octante con evolución de electrones

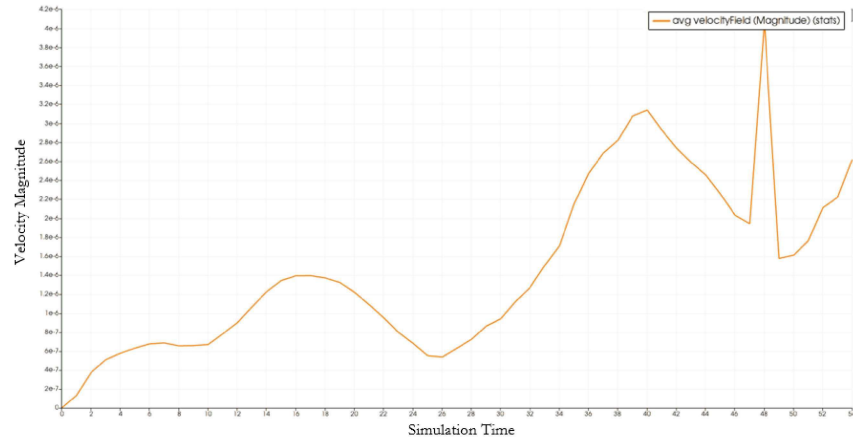


Figura 10: Velocidad promedio a lo largo del tiempo de simulación

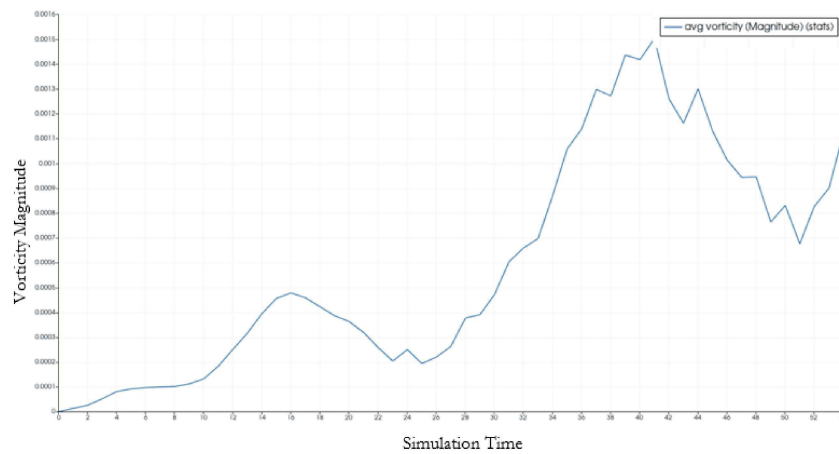


Figura 11: Vorticidad promedio a lo largo del tiempo

Se observa una aparente correlación entre las gráficas de velocidad y vorticidad. Si bien las magnitudes resultan bajas en este escenario, es importante reiterar que el objetivo de esta etapa no es el análisis cuantitativo, sino la verificación del código. Por tanto, nos enfocaremos en que las tendencias como incrementos y decrementos sean coherentes con la física de las partículas.

En el caso de las magnitudes de vorticidad, debido a que el flujo de partículas presenta una evolución uniforme, el flujo es cuasi-irrotacional y muestra valores cercanos a una magnitud cero, lo que valida que la implementación del algoritmo no introduce rotación artificial o ruido en el sistema. A continuación se muestran correlaciones entre la visualización de la evolución de electrones con los puntos de interés de la gráfica.

La línea verde en la gráfica representa el punto en el tiempo de simulación en el que se encuentra

6.1 Octante con evolución de electrones

el análisis.

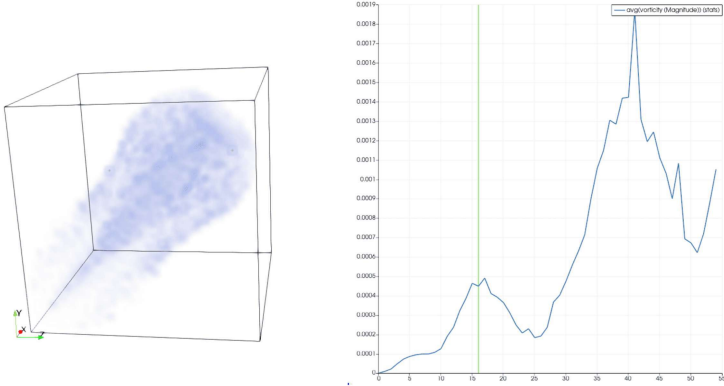


Figura 12: Análisis visual de vorticidad en 1.6ns

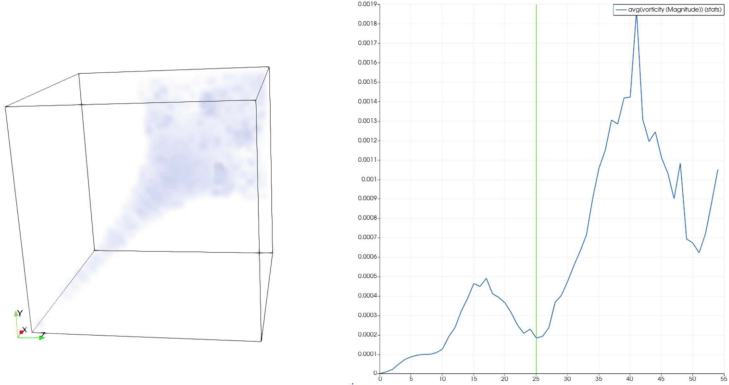


Figura 13: Análisis visual de vorticidad en 2.5ns

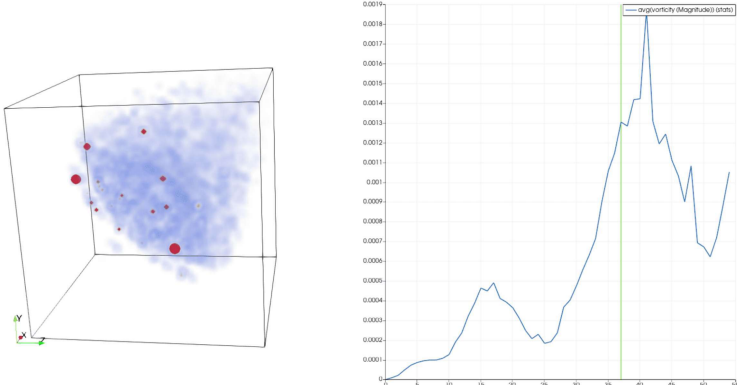


Figura 14: Análisis visual de vorticidad en 3.7ns

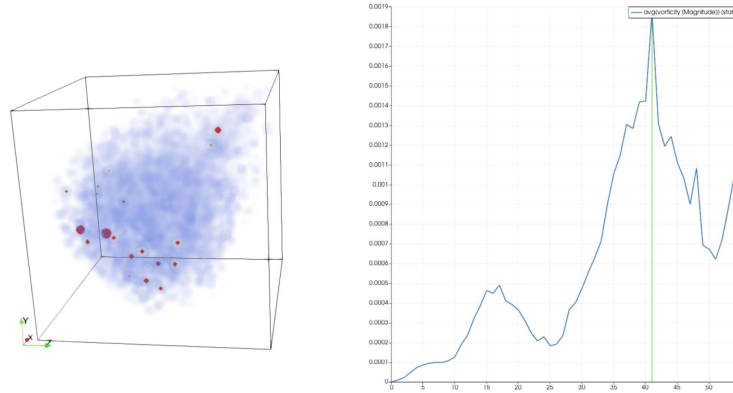


Figura 15: Análisis visual de vorticidad en 4.1ns

El pico menor de vorticidad, observado en la Figura 12, ocurre en los instantes en el que el flujo es reflejado tras llegar al borde del dominio. No obstante, se mantiene un arreglo relativamente uniforme entre las partículas.

Por otro lado, la Figura 13 corresponde al mínimo global de vorticidad. En este instante, el flujo atraviesa el dominio de manera continua sin perturbaciones significativas ni interacciones complejas que induzcan rotación local.

Finalmente, las Figuras 14 y 15 muestran los puntos los máximos relativos de vorticidad en la simulación. Estos picos se localizan en la frontera entre los electrones y el vacío. Esto sugiere que la vorticidad calculada responde correctamente a los gradientes de densidad y velocidad presentes en los bordes de la nube de electrones.

La coherencia física de estos resultados, donde la vorticidad es mínima en el centro y aumenta solo en zonas de alto gradiente o interacción con paredes, valida la estabilidad del algoritmo. Con esto, la siguiente etapa consiste en evaluar la capacidad de capturar estructuras conformes bajo condiciones de flujo cruzado.

6.2. Análisis de Flujo Cruzado entre Dos Familias de Electrones

Para esta segunda etapa, cuya validación de vorticidad se detalla en el artículo de investigación adjunto en el Anexo A, se conservaron las propiedades geométricas y la discretización utilizadas en el caso del octante. El dominio computacional se mantiene como un volumen cúbico de $0.2 \times 0.2 \times 0.2$ metros, con una malla estructurada de 81 celdas por eje coordenado.

La configuración consiste en la inicialización de dos familias distintas de electrones, situadas en extremos opuestos del dominio. Cada agrupación está compuesta por un total de 1×10^6 partículas.

La Figura 16 muestra la distribución inicial de ambas familias dentro del volumen de control.

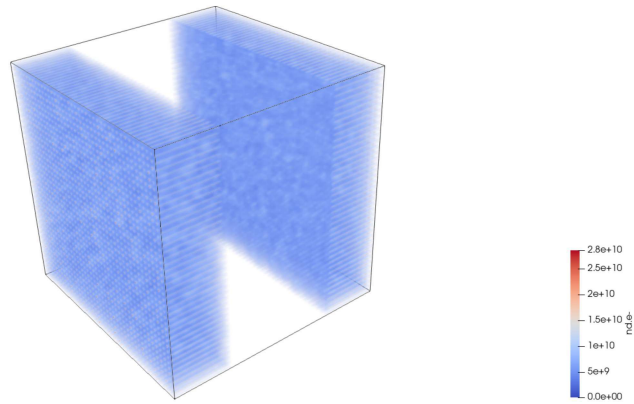


Figura 16: Configuración inicial de flujo cruzado

De manera similar, se presenta la evolución de los electrones a lo largo del tiempo:

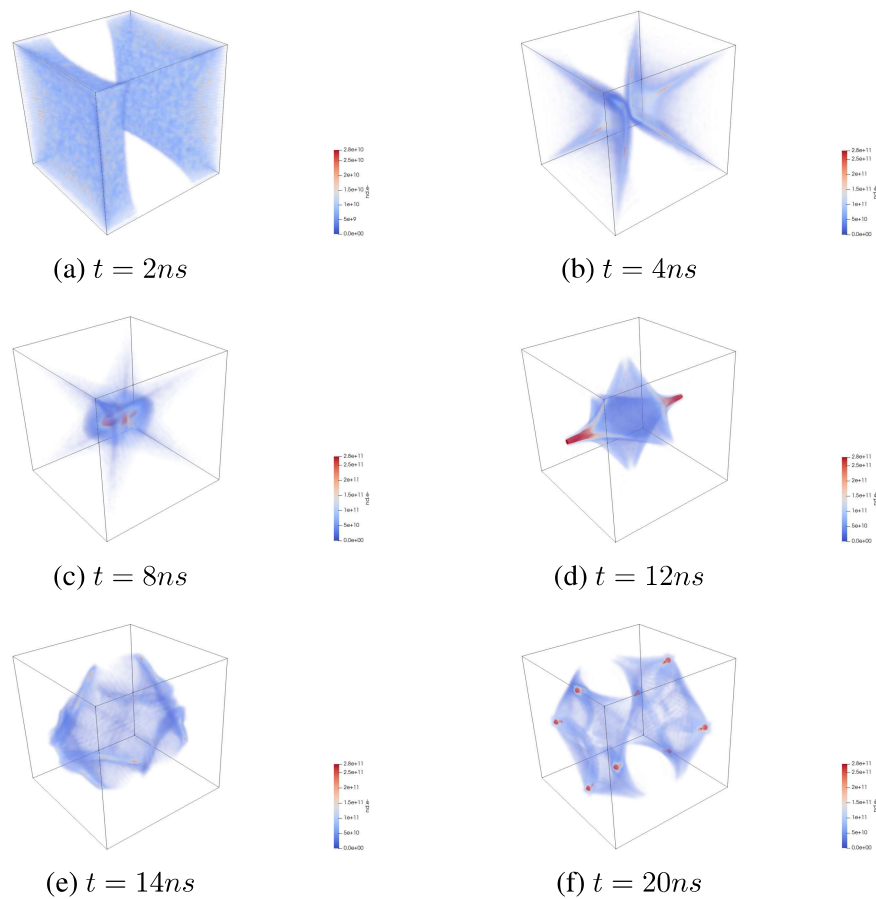


Figura 17: Evolución del flujo de partículas en distintos instantes de tiempo

La secuencia de imágenes muestra la evolución temporal de las dos poblaciones de electrones.

Ambas distribuciones se inicializaron con la misma densidad numérica y magnitud de velocidad, difiriendo únicamente en la dirección de su vector de velocidad. A partir de $t = 4$ ns, se muestra la interacción entre los frentes de onda; las zonas de mayor densidad de partículas se muestran mediante una escala de color rojo.

La evolución del campo eléctrico a lo largo del tiempo, representada en la imagen 18 sigue presentando un comportamiento generalmente senoidal; Sin embargo, la señal presenta deformaciones. Estas variaciones son causadas por las perturbaciones del flujo cruzado con el campo, lo que genera fluctuaciones locales en la amplitud sin modificar la tendencia general del campo electrostático.

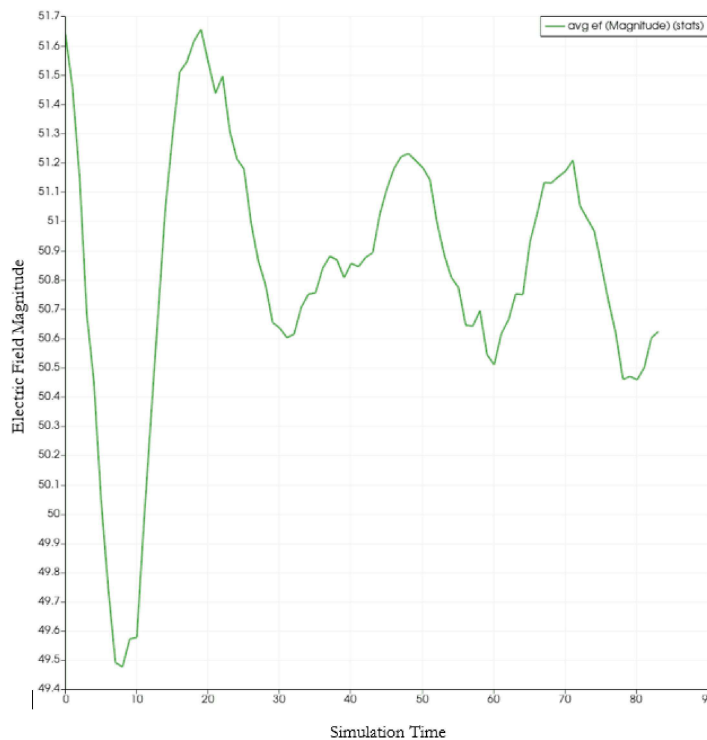


Figura 18: Campo eléctrico del flujo cruzado a lo largo de $40ns$.

Para poder observar el comportamiento senoidal esperado de manera más nítida, se puede realizar un corte transversal a lo largo de un eje en cualquier instante de tiempo. En este caso se presenta un corte en el eje $-z$ en el instante $t = 14ns$

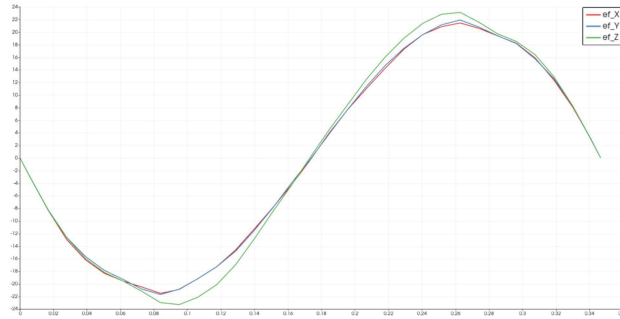
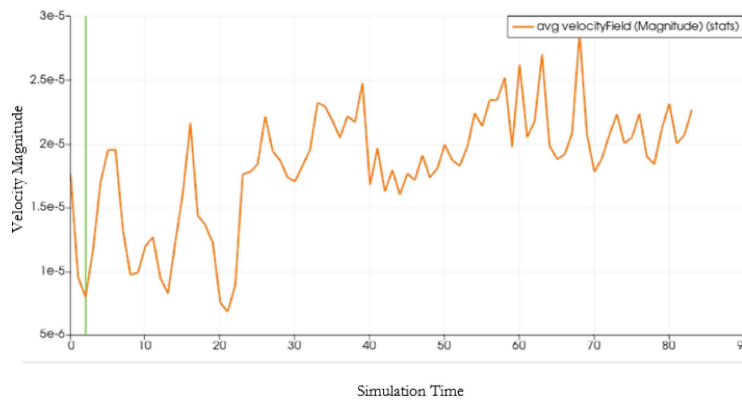
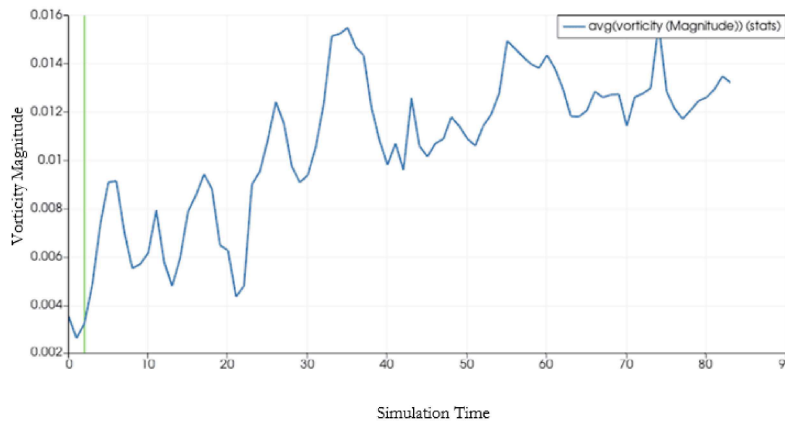


Figura 19: Corte transversal del campo eléctrico a lo largo de $-z$ en $t = 14ns$.

La siguiente figura presenta la evolución temporal de la magnitud promedio de la vorticidad y la velocidad durante los 40 ns de simulación. Donde la línea verde representa el instante de tiempo en el que se encuentra el análisis cualitativo.



(a) Velocidad a lo largo del tiempo de simulación



(b) vorticidad a lo largo del tiempo de simulación

Figura 20: Gráficas de vorticidad y velocidad en flujo cruzado a lo largo de $t = 40ns$

A diferencia del caso de expansión libre en un octante, las señales obtenidas en este escenario no muestran una tendencia suave ni un único máximo global definido. Por el contrario, se observa un comportamiento complejo con múltiples fluctuaciones. Este patrón es indicativo de la naturaleza no lineal de la interacción entre ambas familias.

El primer máximo local significativo se muestra en el instante $t = 6 \text{ ns}$. Este instante corresponde a la intersección inicial de ambas partes de las familias de electrones.

Físicamente, este aumento en la vorticidad corresponde a la superposición de los campos de velocidad de ambas familias de electrones. Al cruzarse partículas con vectores de velocidad opuestos, se generan fuertes gradientes de velocidad ($\nabla \times \vec{u}$), lo cual es capturado correctamente como un incremento en la vorticidad del sistema.

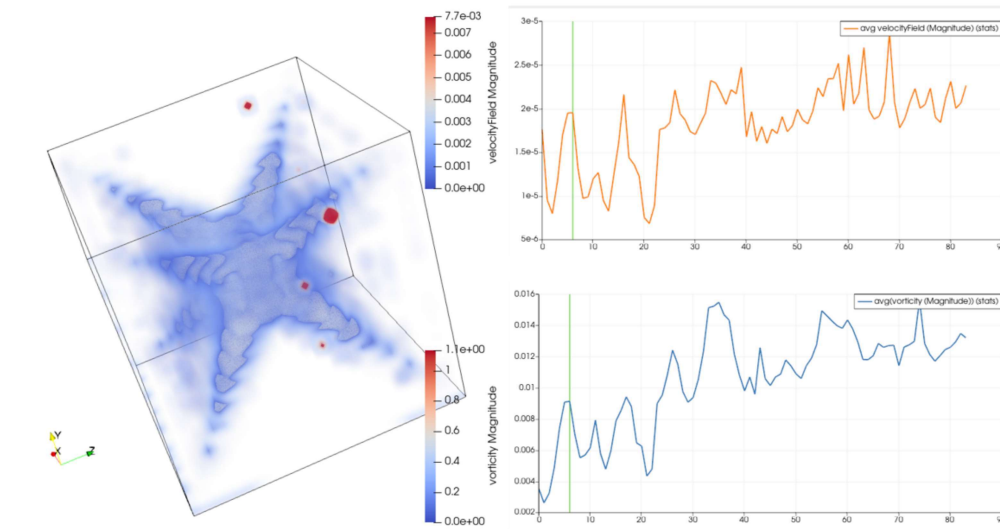


Figura 21: Primer máximo local en $t = 6 \text{ ns}$

El segundo máximo local significativo se registra en el instante $t = 17 \text{ ns}$, tal como se muestra en la Figura 22.

Este incremento en la magnitud de la velocidad y la vorticidad no se atribuye a la colisión entre las nubes, sino a la interacción del plasma con los límites del dominio. Se observa que se alcanza el extremo opuesto del volumen, provocando una reflexión de las partículas.

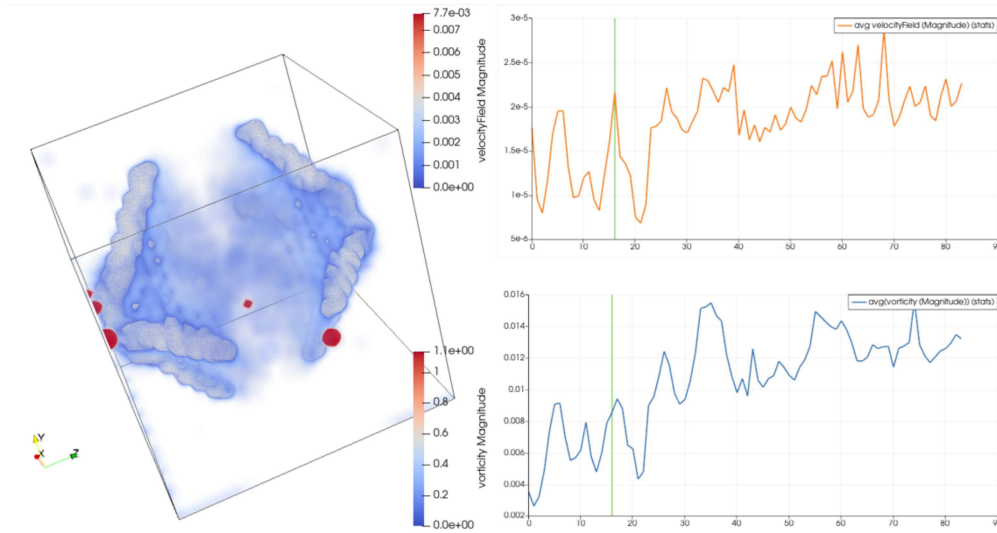


Figura 22: Segundo máximo local en $t = 17ns$

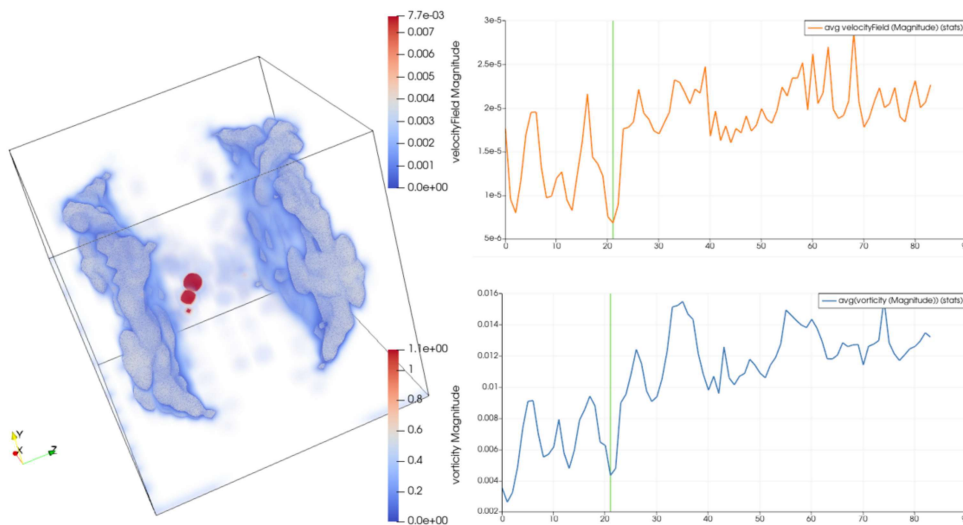


Figura 23: Mínimo de vorticidad y velocidad en $t = 21ns$

El tercer evento de interés se muestra en la Figura 23 y corresponde a un mínimo local en la magnitud de vorticidad.

En este intervalo, las partículas se encuentran en la región central del dominio tras haber superado el cruce inicial y antes de interactuar con las fronteras. Al disminuir las interacciones de colisión directas, el flujo recupera momentáneamente un comportamiento laminar, lo cual se muestra correctamente en la disminución de los valores de vorticidad.

Los datos posteriores a estos eventos se omiten del análisis. Esto se debe a que, tras múltiples reflexiones en las fronteras del dominio, el sistema evoluciona hacia un estado caótico. En este

régimen, la distribución de partículas pierde sus estructuras coherentes y la vorticidad comienza a estar dominada por fluctuaciones estocásticas y ruido numérico acumulado.

Concluimos un resultado coherente con los resultados obtenidos con las gráficas a lo largo del tiempo, teniendo una relación acertada entre lo ocurrido en la simulación y lo observado en las gráficas.

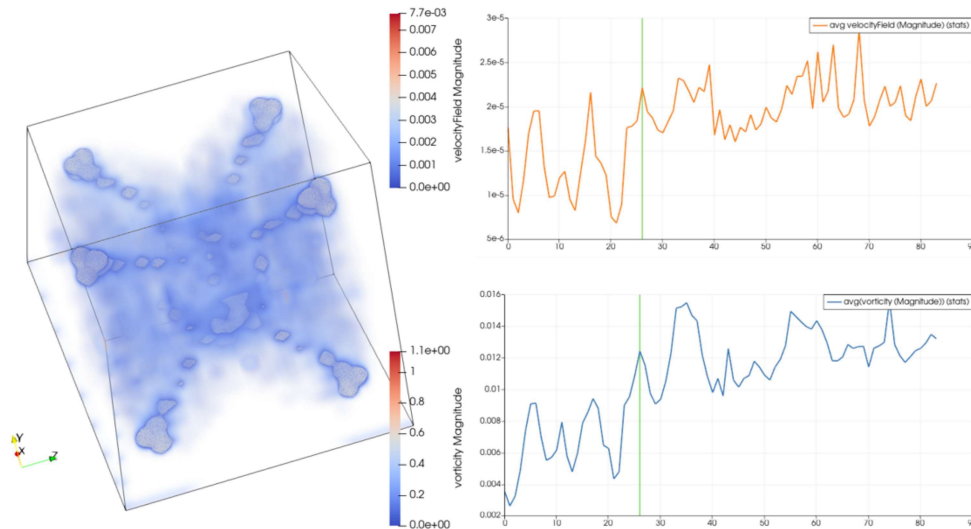


Figura 24: Vorticidad y velocidad una vez desarrollado el flujo cruzado (a partir de $t = 27ns$)

Complementariamente, la Figura 25 presenta una visualización del campo de flujo en un instante $t = 15[ns]$. La identificación de zonas de recirculación y estructuras coherentes corrobora gráficamente la naturaleza de la dinámica observada. El desarrollo completo de la validación de vorticidad se detalla en el artículo de investigación presentado en el Anexo A, donde se discuten en profundidad los criterios de identificación y la consistencia física del modelo.

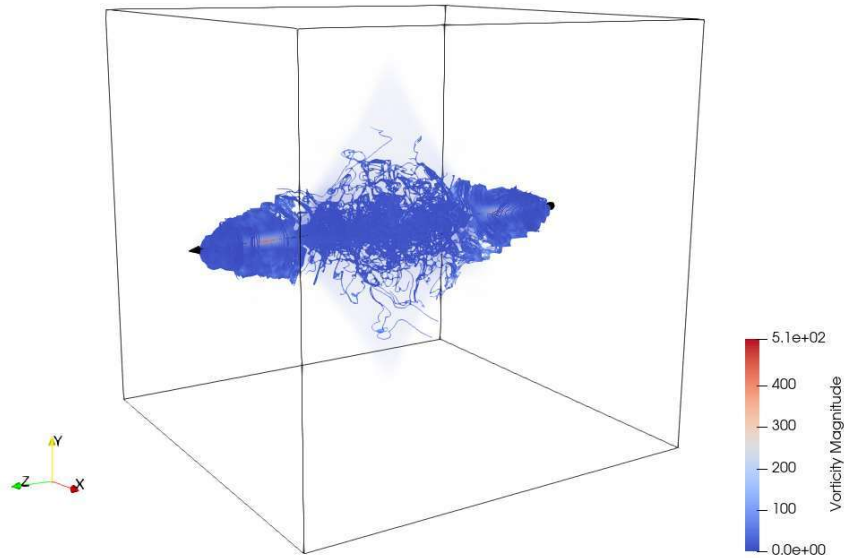


Figura 25: Estructuras conformes de vorticidad generadas en $t = 15$ ns

6.3. Adaptación Geométrica a un Canal de Descarga Rectangular

Esta etapa es la transición de los modelos de validación presentados anteriormente, hacia una aproximación representativa de las condiciones operativas de un propulsor eléctrico real.

Debido a las restricciones de un mallado cartesiano, la implementación de una geometría cilíndrica conlleva una complejidad numérica que excede el alcance de este estudio. Se optó por modelar un segmento diferencial rectangular en la salida del propulsor. Esta aproximación es representativa a las dimensiones presentadas en la Figura 6.

Para las dimensiones geométricas, se tomó la relación presentada en el subtema 5.1.1.

Eje	Descripción	Dimensión física
X	Diámetro del canal de descarga	123 [mm]
Y	Ancho del canal de descarga	25 [mm]
Z	Sección diferencial de salida	0.1 [mm]

Tabla 2: Dimensiones geométricas de la salida del canal de descarga

Para capturar la evolución de la pluma de plasma, se extendió el dominio a lo largo del eje z . La nueva discretización se estableció en $81 \times 81 \times 162$ celdas, duplicando la distancia respecto a los casos anteriores.

Se mantuvo un fondo de iones de oxígeno como condición inicial, centrando el análisis en la evolución de electrones. Cabe señalar que la incorporación de las propiedades físicas del Xenón se detalla en la sección siguiente.

A diferencia de una única inyección utilizada en los modelos anteriores, se implementó una inyección continua para simular un flujo másico constante. Se configuró el código para introducir 10,000 macropartículas cada 10 pasos de tiempo. Considerando una simulación total de 10,000 pasos, equivalentes a 10 ns. Esto resulta en una inyección acumulada de partículas (N_{total}) que permite establecer un flujo másico.

El cálculo del flujo másico inyectado (\dot{m}) se determina mediante la relación:

$$\dot{m} = \frac{N_{total} \cdot m_e}{t_{sim}} = \frac{(10 \times 10^8)(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})}{10 \times 10^{-9} \text{ s}} \approx 9.11 \times 10^{-14} \text{ kg/s} \quad (6.1)$$

Si bien este valor es significativamente inferior a los flujos operativos reales (como los presentados en la Tabla 1, esta configuración cumple el propósito de validar el algoritmo de inyección continua y transporte de masa antes de escalar a las propiedades del Xenón.

Finalmente, se modificó el tratamiento de las fronteras en el eje (Z_{max}). En un escenario de flujo continuo, las condiciones de reflexión provocarían una acumulación artificial de ruido numérico al final del dominio. Para evitar esto, se implementaron condiciones de frontera absorbentes, las cuales eliminan del cómputo a las partículas que abandonan el dominio, simulando la expansión libre hacia el vacío.

La Figura 26 muestra la configuración inicial del dominio y la zona de inyección.

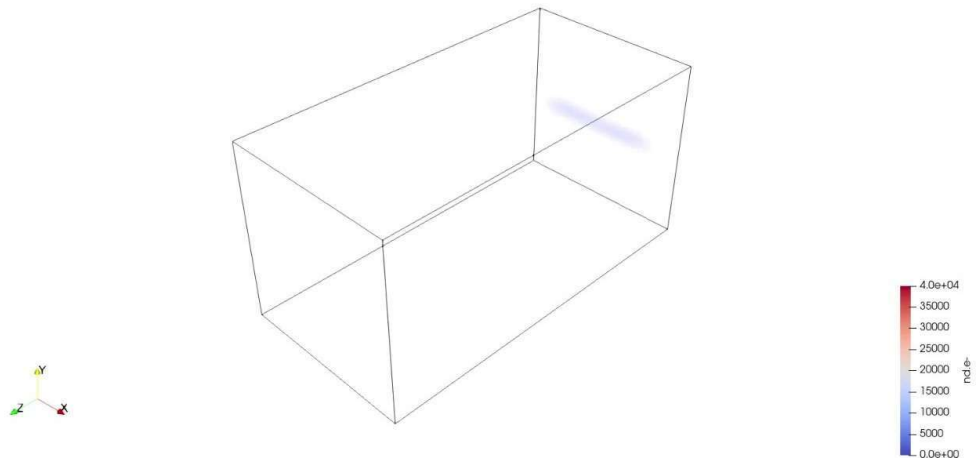


Figura 26: Configuración inicial del jet rectangular en $t = 0$ [ns].

En la figura 27 se observa la evolución temporal de las partículas:

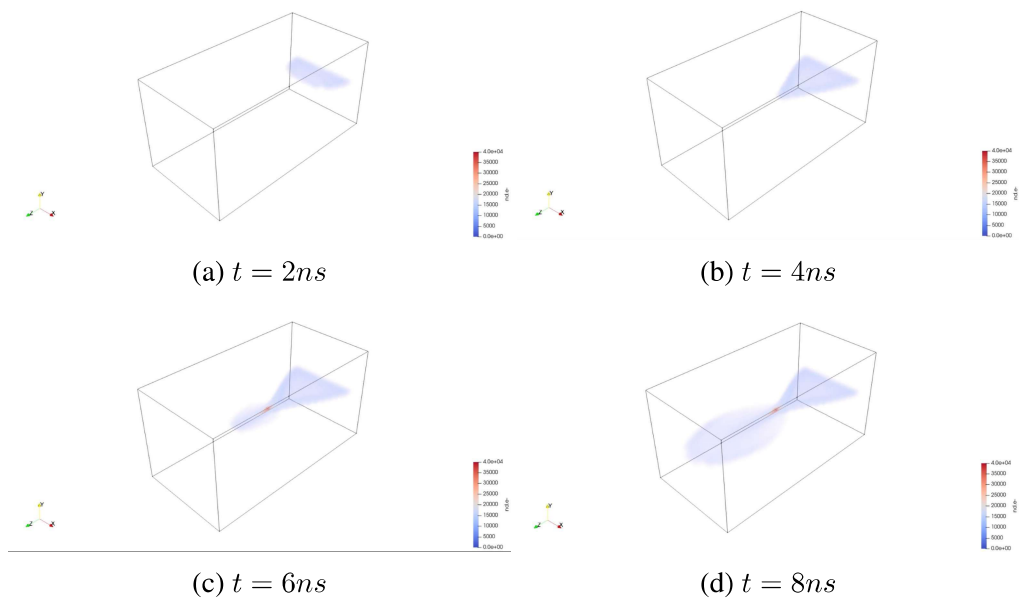


Figura 27: Evolución temporal de las partículas en una configuración de jet rectangular

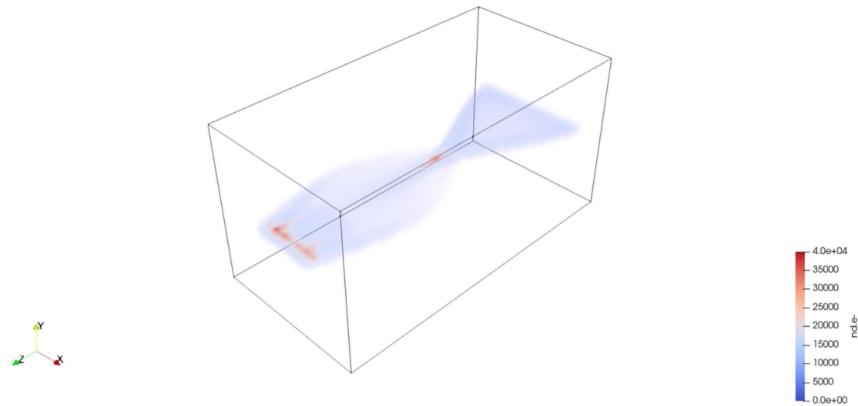


Figura 28: $t = 10ns$

No se presentan imágenes posteriores debido a que, por las condiciones establecidas, la Figura 28 es la condición final de simulación, representando un flujo completamente desarrollado.

Se analiza a continuación a detalle las imágenes presentadas. Este análisis es fundamental debido a que la estructura de generación de la pluma es, a grandes rasgos, la geometría de flujo que se observará en las simulaciones posteriores.

En el instante $t = 0$ ns, mostrado en la Figura 26, se muestra la inyección inicial de partículas, mostrando a detalle el área de salida del canal de descarga rectangular propuesto.

Al avanzar a $t = 2$ ns y $t = 4$ ns, mostradas en las Figuras 27 (a) y 27 (b) respectivamente, se muestra la interacción de los campos eléctricos autoinducidos con la dinámica de partículas. Se observa que los electrones en la región central mantienen una trayectoria rectilínea, mientras que las partículas en los extremos experimentan una fuerza de atracción hacia el eje central. Este fenómeno da origen a la estructura de la pluma, donde se presenta una alta densidad de partículas en el núcleo de la misma, que disminuye hacia los extremos.

A partir de $t = 4$ ns, (Figura 27 (b)) la pluma comienza a definirse. Además de observar una aceleración de partículas a partir de este instante. Mientras que en los primeros 4 ns el frente del flujo recorre un tercio del dominio, en los siguientes 4 ns (de $t = 4$ a $t = 8$) las partículas logran atravesar los dos tercios restantes.

En los instantes $t = 6$ ns y $t = 8$ ns (Figuras 27 (c) y 27 (d) respectivamente) se observa el inicio de

la dispersión de los electrones después de haber sido acelerados. Este comportamiento es similar al observado en propulsores reales.

Es importante destacar la aparición de dos zonas de alta densidad localizadas cerca del final del dominio en el eje Z . Dada la alta velocidad de los electrones registrada ($\sim 85,000$ m/s), estas estructuras sugieren la formación de frentes de onda o agrupamientos de carga resultantes de la dinámica de inyección.

Finalmente, en $t = 10$ ns, mostrado en la Figura 28 se presenta el flujo en su estado estacionario. Observando una pluma con un alta densidad de partículas, seguida de la dispersión natural de las partículas, para finalizar con las condiciones de frontera absorbentes al final del dominio.

Se presentan a continuación las gráficas de velocidad y vorticidad de nuestro sistema a lo largo del tiempo de simulación:

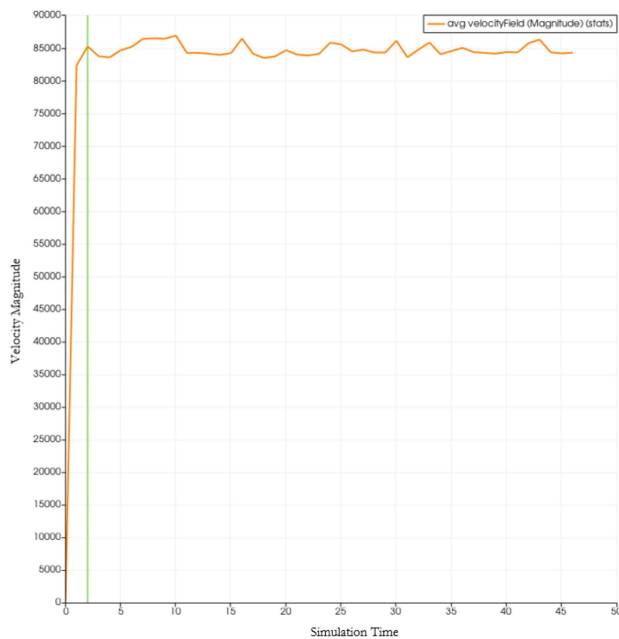


Figura 29: Magnitud de velocidad respecto al tiempo.

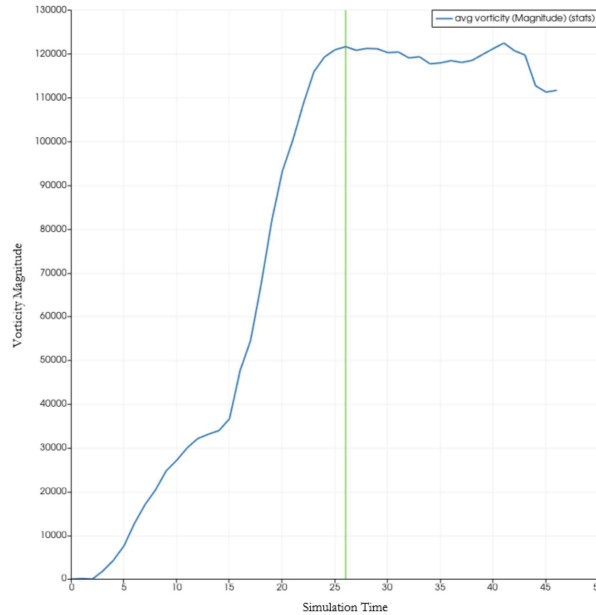


Figura 30: Magnitud de vorticidad respecto al tiempo.

Las Figuras 29 y 30 presentan la evolución temporal de las magnitudes promedio de velocidad y vorticidad. En ambas gráficas, la línea vertical verde indica el instante estimado en el cual el sistema alcanza el estado estacionario.

En el caso de la velocidad, se observa un incremento abrupto en la magnitud promedio durante los primeros 2 ns, estabilizándose rápidamente en una magnitud de 85,000 m/s. El régimen estacionario se establece a partir de los 4 ns, coincidiendo con la consolidación de la pluma visualizada en la simulación.

Es importante notar que la magnitud de velocidad obtenida es inferior a los valores característicos reportados en la literatura para velocidades de electrones siendo acelerados por campos eléctricos [5]. Este es un factor que se ajustó en simulaciones futuras para poder coincidir con los parámetros establecidos.

Por otro lado, la vorticidad muestra una respuesta temporal más lenta. La magnitud aumenta gradualmente hasta alcanzar un aumento drástico en los 15 ns, para posteriormente estabilizarse.

El estado estacionario de la vorticidad se alcanza hasta los 26 ns. La vorticidad es una propiedad que depende de la estructura global del flujo. El tiempo es el necesario para que el último instante de partículas inyectadas recorra la longitud total del dominio en el eje z . Una vez que estas partícu-

las abandonan el sistema, las perturbaciones en el campo eléctrico autoinducido deja de variar y la generación de vorticidad se vuelve constante.

Se presenta a continuación la generación de vórtices en la simulación a los 15 ns:

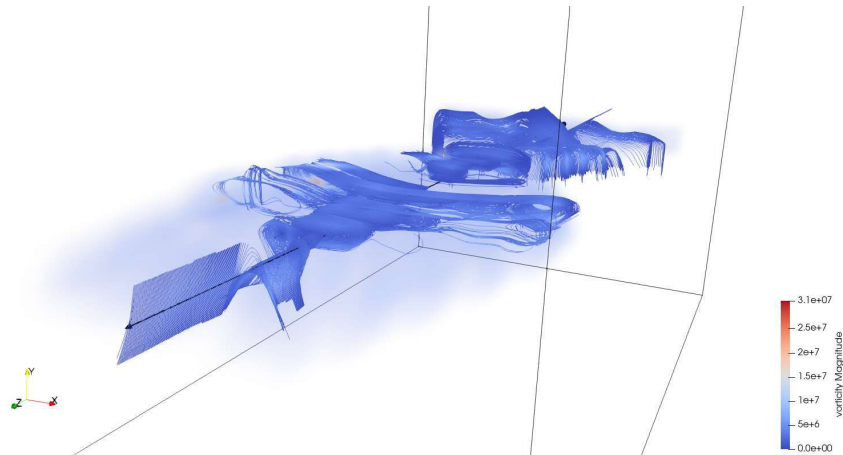


Figura 31: Flujo de vorticidad en $t = 15$ [ns]

Se observa la formación de vórtices localizados después del núcleo de la pluma, asociados a la dispersión de electrones en el medio.

De igual manera, se presentan los vórtices completamente desarrollados en el instante $t = 26$ ns en la Figura 32. La organización de estas estructuras indica que la dinámica del flujo se ha desarrollado, como se detalla de igual forma de manera cuantitativa en la Figura 30. El hecho de que los vórtices se muestren distintivos entre sí confirma la formación de patrones de flujo estable, característicos de un régimen de flujo plenamente desarrollado.

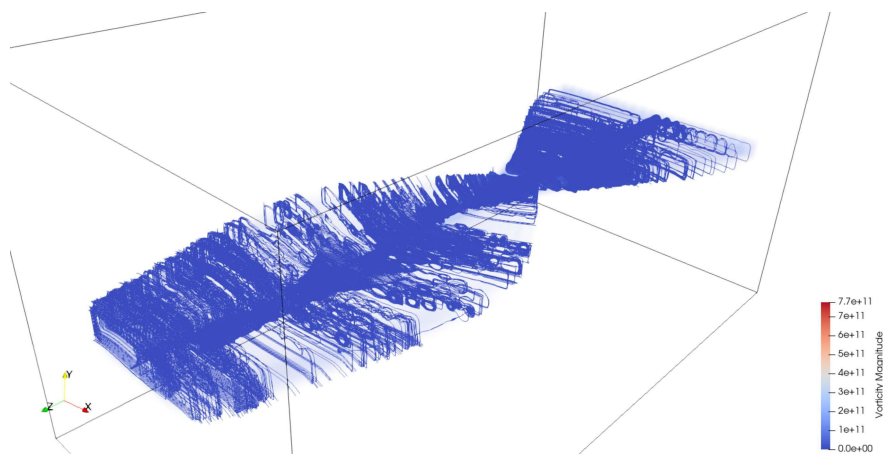


Figura 32: Generación de vórtices completamente desarrollados en $t = 26$ [ns]

En perspectiva de desempeño del propulsor, la dinámica en este punto no tiene una influencia sobre el empuje total o la eficiencia del motor, dado que la aceleración no es presentada en estas zonas. No obstante, la identificación de estas estructuras coherentes en la zona lejana es importante para la caracterización de captura la disipación turbulenta del chorro.

Con esto, concluimos que el factor más importante en esta etapa de simulación es la generación del campo eléctrico autoinducido por las partículas. Se presenta la sección transversal de campo eléctrico a lo largo del dominio, así como la gráfica de magnitud de campo eléctrico respecto a nuestro eje de interés, en este caso el eje z en el instante $t = 15$ [ns]:

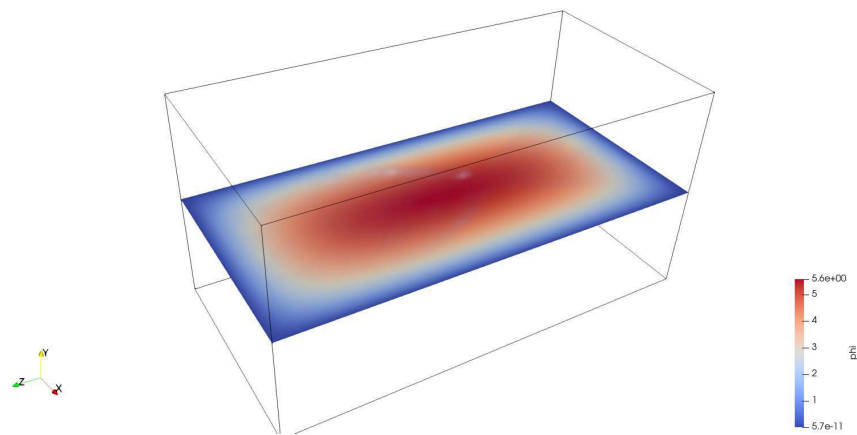


Figura 33: Cortes transversales de la magnitud de campo eléctrico en $t = 15$ [ns].

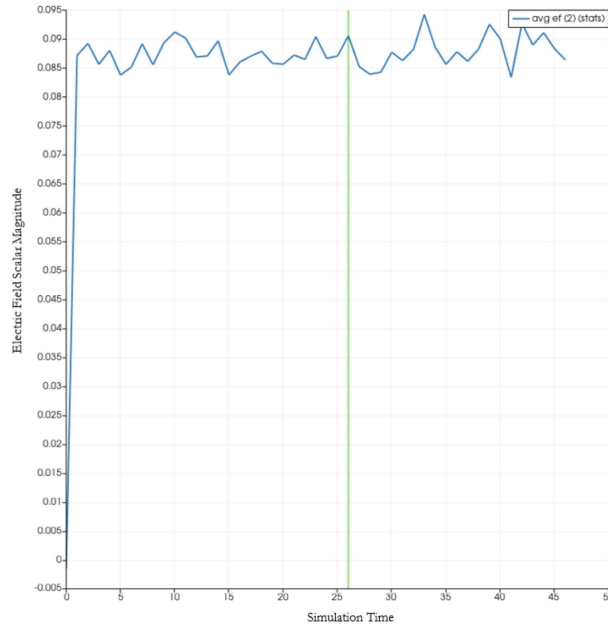


Figura 34: Magnitud de campo eléctrico en el eje z .

El análisis de la distribución del campo eléctrico, presentado en el corte transversal de la Figura 33, muestra una mayor magnitud en la región central del dominio. Esta concentración de energía coincide con la zona de generación de la pluma, mostrando los campos autoconsistentes generados por la distribución de carga de las propias partículas.

Por su parte, al analizar la evolución de la magnitud a lo largo del eje z en la figura 34, se muestra un comportamiento dinámico característico en dos fases, una transitoria donde se muestra un aumento abrupto en la magnitud del campo eléctrico durante los primeros dos nanosegundos. Este pico es consistente con la etapa inicial de inyección, donde las fuerzas de atracción de Coulomb comienzan a actuar antes de que la estructura del flujo esté consolidada. Posteriormente, la magnitud se estabiliza y se mantiene constante a lo largo del tiempo de simulación.

Es importante destacar que el pico de intensidad del campo eléctrico precede a la formación de la pluma completamente desarrollada. Esto demuestra que el campo eléctrico actúa como el mecanismo que atrae y confina las partículas, por lo tanto, su magnitud máxima se manifiesta en los instantes de mayor fuerza de atracción, justo antes de que el agrupamiento se estabilice en la forma de jet observada.

6.4. Simulación Final bajo Condiciones Nominales del Propulsor NASA-173M

En esta etapa se integraron los módulos validados previamente para configurar la simulación completa bajo las condiciones de operación nominales del propulsor NASA-173M.

Sobre la geometría rectangular extendida, se sustituyó el modelo de inyección de electrones por un esquema de plasma de dos componentes:

- Iones de Xenón (Xe^+)
- Fondo de Electrones, distribuidos para mantener la condición de cuasi-neutralidad ($n_i \approx n_e$) para la estabilidad del plasma.

Para poder realizar esto, se definió la unidad de masa atómica como $AMU = 1.66 \times 10^{-27}$ kg para definir el peso atómico del Xenón como $131 \times AMU$.

La generación de macropartículas se parametrizó para corresponder con el flujo másico del ánodo reportado experimentalmente, estableciendo una tasa de inyección de $\dot{m}_a \approx 20.3$ mg/s.

El cálculo realizado se muestra en la ecuación 5.1:

$$\dot{N} = \frac{\dot{m}}{m_{Xe}} = \frac{20.3 \times 10^{-6} \text{ kg/s}}{2.1801 \times 10^{-25} \text{ kg}} = 9.31 \times 10^{19} \text{ part/s} \quad (6.2)$$

Dicha inyección de partículas por segundo se multiplicó por los 10 ns que se propusieron en la simulación anterior, para tener una inyección de 9.31×10^{11} partículas. El proceso de inyección es igual al anterior, inyectando las partículas cada diez pasos de tiempo, teniendo una inyección de 9.31×10^{10} partículas siendo cicladas en nuestro ciclo de simulación.

En torno al fondo de electrones, se contempló un valor constante a lo largo del proceso de simulación del total de partículas que serían inyectadas. Tanto la distribución inicial de Xenón, como el fondo de electrones es presentado en las imágenes posteriores:

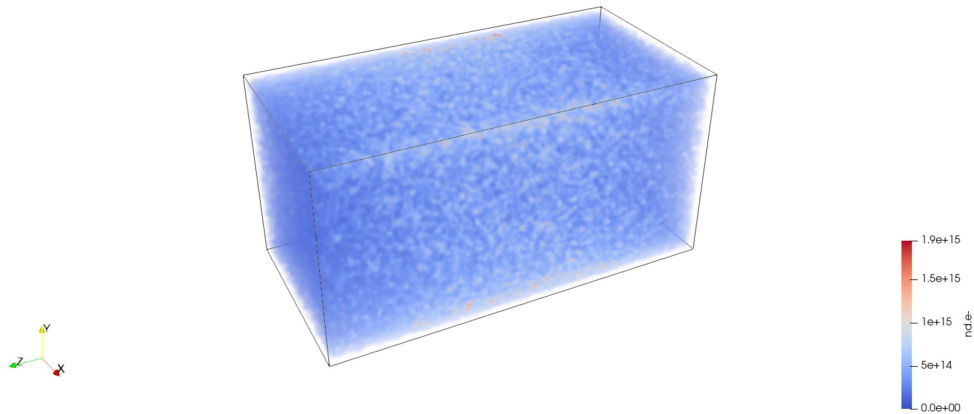


Figura 35: Configuración del fondo de electrones constante.

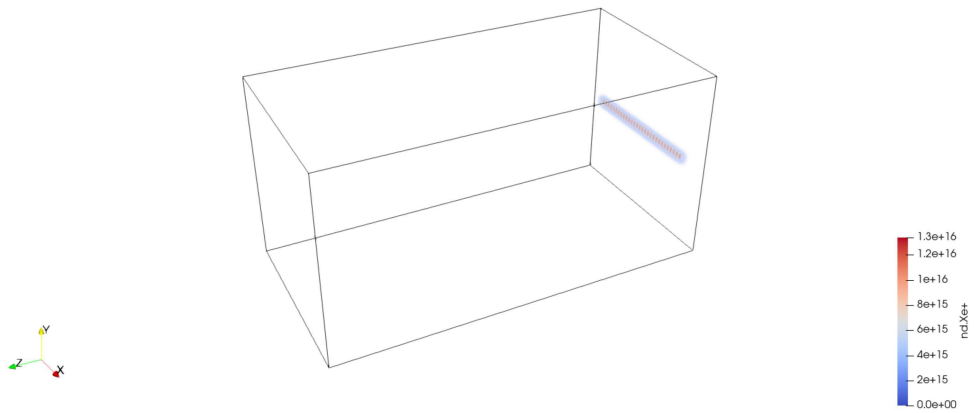


Figura 36: Configuración inicial de las partículas de Xenón en $t = 0$ ns

La generación de la pluma tiene un comportamiento similar visto en la simulación pasada, por lo que el análisis a detalle de la generación de la pluma y expansión de las partículas de Xenón permanece similar a lo analizado anteriormente. Se presentan a continuación los instantes de tiempo de mayor interés en esta simulación:

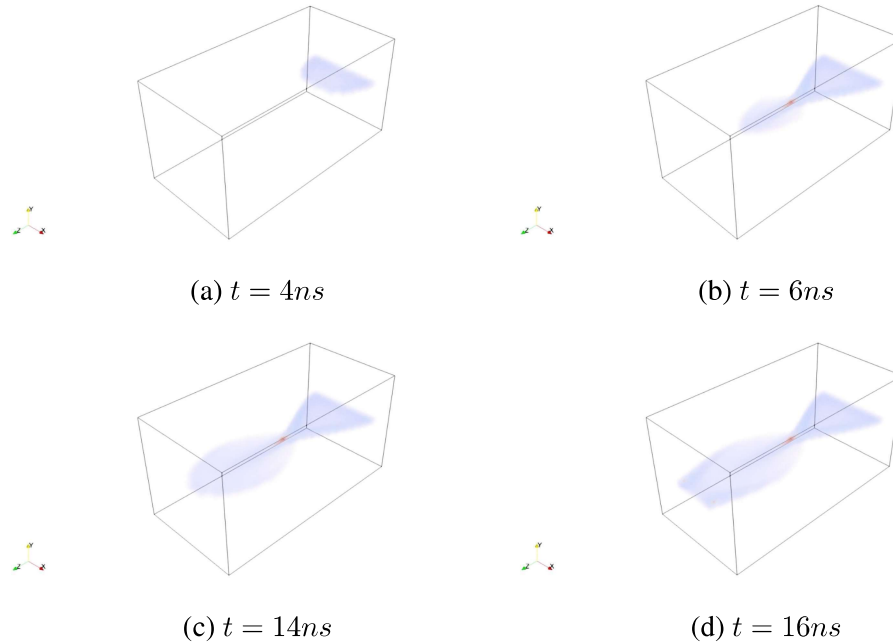


Figura 37: Evolución temporal de las partículas de xenón en una configuración de condiciones de operación nominales.

Observamos que el tiempo de aceleración de las partículas es mucho menor a comparación de cuando se trabajaba con electrones, esto se debe al mayor peso molecular de las mismas, lo que genera un mayor tiempo de aceleración en comparación.

Aun así, observamos que la pluma se genera en tiempos similares, en este caso en $t = 6$ ns presentado en la Figura 37 (b), pero la dispersión de electrones y el llegar al extremo contrario del dominio es mucho más lento a comparativa del caso anterior.

Para corroborar de manera cuantitativa los resultados, se presenta a continuación la gráfica de velocidad de las partículas de Xenón:

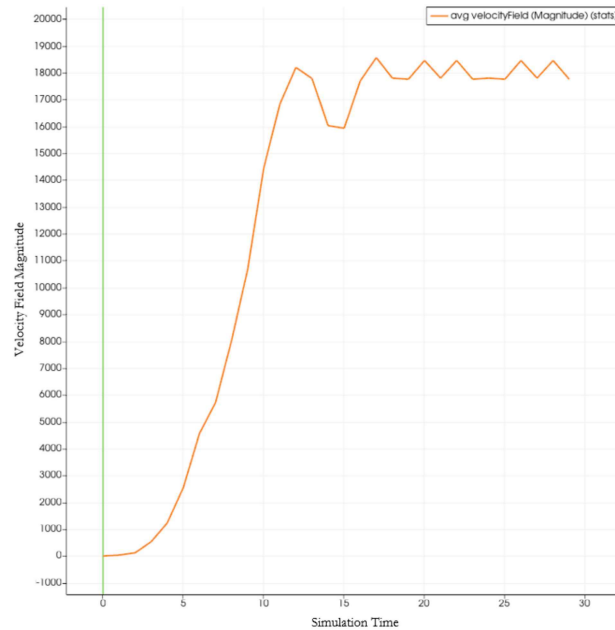


Figura 38: Velocidad de las partículas de Xenón a lo largo del tiempo de simulación

Se observa un comportamiento congruente con la evolución visualizada en la simulación. Inicialmente, la velocidad presenta un crecimiento gradual hasta $t = 6$ ns, instante en el cual experimenta un incremento abrupto seguido de una respuesta oscilatoria amortiguada. El sistema alcanza la estabilidad a partir de $t = 16$ ns, instante que coincide con las partículas llegando a la frontera del dominio. La velocidad converge en $v = 18000$ m/s, valor que se adoptará posteriormente como parámetro de operación funcional.

Finalmente, se integró el diferencial de potencial. Se aplicaron condiciones de frontera para establecer un voltaje de descarga nominal de $V_d = 495$ V a través del dominio. Considerando una distancia axial del canal de descarga de 0.025 m. Se obtuvo el valor de campo eléctrico objetivo de $E = 19800 \frac{V}{m}$ Retomada de 5.2

Esta diferencia de potencial es la responsable de generar el campo eléctrico que acelera los iones de Xenón, transformando la energía potencial eléctrica en energía cinética. Esta configuración representa la simulación completa, a partir de la cual se extraerán las variables de desempeño macroscópicas para su validación final.

Se presenta en la Figura 39 la representación tridimensional de la condición de campo eléctrico inducida:

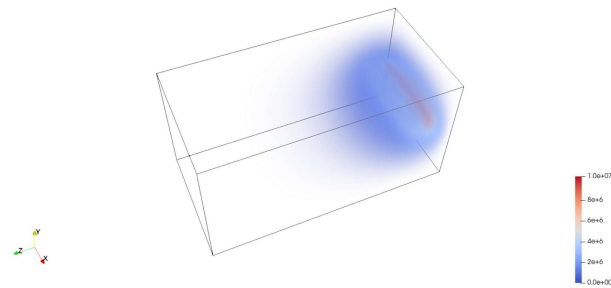


Figura 39: Visualización en tres dimensiones de las condiciones de campo eléctrico establecidas.

Así como la visualización a lo largo del eje z para visualizar de una manera más detallada la distribución de magnitud en la Figura 40:

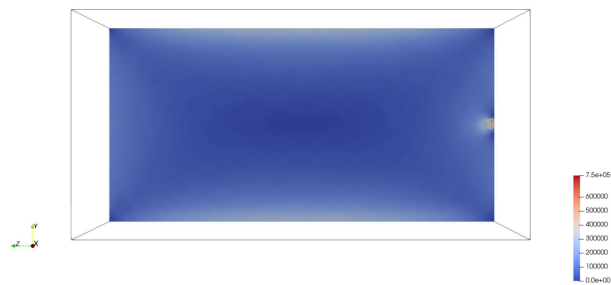


Figura 40: Corte transversal a lo largo del eje z del campo eléctrico

Se detalla como el diferencial de potencial fue establecido a la salida del canal de descarga, con condiciones de campo eléctrico nulo en los extremos lejanos del dominio, simulando un vacío en dichas zonas.

Se presenta la gráfica de campo eléctrico a lo largo del periodo de simulación en la Figura 41:

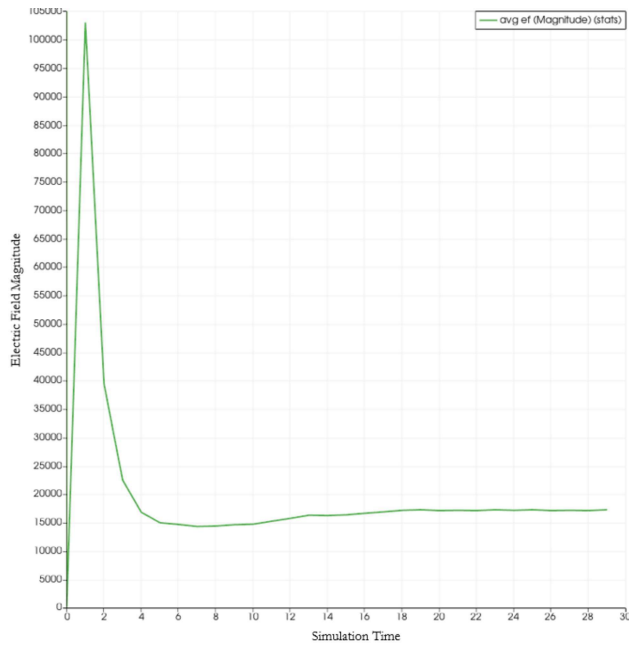


Figura 41: Magnitud de campo eléctrico a lo largo del tiempo de simulación

Se observa un pico inicial de magnitudes altas en los primeros instantes de tiempo, esto tiene coherencia debido a que en estos instantes las partículas de xenón se encuentran compactas en la salida del canal de descarga, mostrando la interacción de los campos eléctricos autoinducidos por dichas partículas y cómo son un factor importante a considerar en la operación nominal del propulsor.

Una vez el flujo empieza a desarrollarse, se nota el campo eléctrico estabilizado a un valor constante de $15000 \frac{V}{m}$. Presentando un valor menor al establecido, que se puede deber a pérdidas por el diseño de motor o por la dispersión de los electrones a lo largo de simulación.

7. Análisis de Resultados

7.1. Obtención de variables de desempeño finales.

Partiendo de los datos de simulación obtenidos en la sección anterior, se rescatan los siguientes dos datos de importancia:

Características	Valor en simulación
Campo Eléctrico	15000 $[\frac{V}{m}]$
Velocidad de Salida	18000 $[\frac{m}{s}]$

Tabla 3: Resultados numéricos obtenidos con base en las simulaciones.

Dados estos datos, las relaciones obtenidas por Hofer [17] para obtener los parámetros de operación nominales de nuestra propuesta se detallan a continuación.

1. **Empuje (T)** El empuje total de nuestro sistema, este es definido como:

$$T = \sum_{p=1}^N \dot{m}_p u_z \quad (7.1)$$

El flujo másico de cada especie de partícula se puede simplificar al de las partículas de Xenón utilizado como parámetro de nuestra simulación. Obviando el flujo másico de electrones debido a que se tomaron como un valor constante a lo largo de nuestro tiempo de simulación, es decir, no se inyectan o reduce la cantidad de electrones en nuestro dominio. Así, nuestro empuje queda definido como:

$$T = \dot{m}_{Xe} u_{Xe} \rightarrow T = 20.3 \times 10^{-6} [\frac{kg}{s}] \times 18000 [\frac{m}{s}] = 0.3654 [N] = 365.4 [mN] \quad (7.2)$$

2. **Corriente de Descarga (I_d)**

En el caso de la corriente de descarga del propulsor, se define como:

$$I_d = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\sum |q_{iones}| + \sum |q_{electrones}|}{\Delta t} \quad (7.3)$$

Tomando en consideración el total de partículas de iones de xenón que fueron ingresadas a la simulación, y retomando la condición de cuasi-neutralidad en nuestra simulación, se

7.1 Obtención de variables de desempeño finales.

desprecia la carga total de los electrones y se toma solamente la carga de los iones de Xenón en la simulación, por lo que:

$$I_d = \frac{(9.31 \times 10^{11})(1.602 \times 10^{-19})}{10 \times 10^{-6}} \left[\frac{C_{Xe}}{s} \right] = 14.91[A] \quad (7.4)$$

3. Impulso Específico (I_{sp})

El impulso específico se obtiene como la relación del empuje y el flujo másico total, definido como:

$$I_{sp} = \frac{T}{\dot{m}_{total} \times g_0} \quad (7.5)$$

En el caso del flujo másico, este es dado por el flujo másico del ánodo.

$$I_{sp} = \frac{0.3654}{20.3 \times 10^{-6} \times 9.81} [s] = 1834.86[s] \quad (7.6)$$

4. Eficiencia total del propulsor (η_T)

La eficiencia de salida, rescatada del subtema 5.3, es la relación de potencia de salida con la potencia eléctrica suministrada:

$$\eta_T = \frac{T^2}{2\dot{m}(V_d I_d)} = \frac{0.3654^2}{2(20.3 \times 10^{-6})(495 \times 14.91)} = 0.44 \quad (7.7)$$

Los resultados, así como la comparativa con los resultados reportados por [17] en la siguiente tabla:

Parámetro	Valor obtenido	Valor Reportado	Error relativo
Voltaje de descarga	495 V	495 V	-
Corriente de descarga	14.91 A	20.2 A	26.19 %
Flujo másico del ánodo	20.3 mg/s	20.3 mg/s	-
Flujo másico del cátodo	0 mg/s	1.5 mg/s	-
Potencia total	7.38045 kW	10.2 kW	27.64 %
Empuje	365.4 mN	511 mN	28.49 %
Impulso Específico	1834.86 s	2390 s	23.23 %
Eficiencia anódica	0.44	0.59	25.42 %

Tabla 4: Comparativas entre el propulsor NASA-173M y los valores obtenidos en el proceso de simulación con su respectivo porcentaje de error.

7.1 Obtención de variables de desempeño finales.

Observamos una concordancia directa en los parámetros de control (voltaje y flujo másico del ánodo), lo cual valida que las condiciones de frontera y el algoritmo de inyección de partículas operaron según lo programado.

Sin embargo, al analizar las variables de desempeño resultantes (corriente, empuje e impulso específico), se detecta una subestimación en los valores simulados de aproximadamente un 25 % a 30 % respecto a los datos experimentales reportados por Hofer [17]. A continuación se discuten las causas físicas y numéricas de estas discrepancias:

Ausencia del Flujo de Cátodo La diferencia más notable en las condiciones de entrada es el flujo másico del cátodo (0 mg/s en la simulación vs 1.5 mg/s en el reporte). En el experimento físico, el cátodo hueco no solo emite electrones, sino también una fracción de gas neutro que contribuye a la densidad total y, por ende, al empuje. Al no modelar este flujo adicional, se reduce la masa total disponible para la generación de momento, lo que impacta directamente en la magnitud del empuje (365.4 mN vs 511 mN).

Simplificación Geométrica El modelo implementado utiliza un dominio rectangular para aproximar el canal anular del propulsor. Esta abstracción ignora los efectos de curvatura.

8. Conclusiones y Trabajo futuro

El presente trabajo implementa y valida un modelo de simulación numérica fundamentado en el método Particle-in-Cell (PIC), diseñado para caracterizar el plasma en la salida de un propulsor de efecto Hall con canal de descarga rectangular, logrando reproducir la dinámica en un ambiente macroscópico del propulsor.

Cuantitativamente, el modelo arrojó un error relativo aproximado del 25 % respecto a los datos experimentales reportados. En el contexto de la física de plasmas, este margen de error representa un resultado exitoso. Las simulaciones PIC conllevan una complejidad donde factores como las fluctuaciones estocásticas de las macropartículas y la ausencia de modelos colisionales introducen ruido numérico. A pesar de estas restricciones, el código demostró una capacidad para capturar las tendencias generales del sistema, arrojando valores congruentes en la magnitud del campo eléctrico, la velocidad de salida de iones, el empuje y el impulso específico.

En la industria, el ciclo de desarrollo de sistemas de propulsión eléctrica requiere de pruebas físicas iterativas, las cuales implican altos costos de manufactura. Este código actúa como una forma de prototipado, permitiendo evaluar el impacto de distintas geometrías o condiciones de frontera antes de la construcción del propulsor a diseñar, reduciendo así los costos y tiempos en las fases tempranas de validación de un motor.

Finalmente, el modelo establece una base para investigaciones futuras. Actualmente se trabaja en la evolución del código hacia un entorno electromagnético. La integración del cálculo de campos magnéticos autoconsistentes generados por el propio movimiento de las partículas permitirá analizar con mayor profundidad fenómenos como la circulación de electrones dentro del canal de descarga, acercando la simulación a una predicción de desempeño más exacta.

Referencias

- [1] Choueiri, E. (2004) .^ Critical History of Electric Propulsion: The First Fifty Years (1906-1956)Prinston University. DOI: AIAA-2004-3334
- [2] Dan M. Goebel, Ira Katz (2008). "Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall ThrustersÇalifornia Institute of Technology,
- [3] Sutton, G. P. Biblarz, O. (2016). Rocket Propulsion Elements (9th ed.). John Wiley.
- [4] Fedoruk, M.P.; Grigorev, Y. N. "Numerical Particle-in-Cell methods: theory and applications" Edited by V. A. Vshikov, De Gruyter: Berlin, 2012; ISBN 9783110916706
- [5] Tomomi, U.; Masahiro, K. "Direct Numerical Simulation of a Jet Issuing From Rectangular Nozzle by the Vortex in Cell Method" Open Journal of Fluid Dynamics, 2013,3. 321-330.
- [6] Cottet, G. "Advances in Direct Numerical Simulations of 3D wall-bounded flows by Vortex-in-Cell Methods". Journal of Computational Physics 193 (2003) 136-158.
- [7] Henryk, K. "Modeling vortex rings dynamics with vortex in cell method" Journal of Physics: Conference Series 318 062014
- [8] Cottet, G. (2000) "Vortex Methods: Theory and Practice", Cambridge University Press, ISBN 0 5216 2186 0
- [9] Lippman. S (2012) "C++, Primer" Addison-Wesley Professional, Fifth edition, ISBN: 9780133053043
- [10] Langtangen, H (1998) "Optimizing C++ Code for Explicit Finite Difference Schemes", recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/2782181_Optimizing_C_Code_for_Explicit_Finite_Difference_Schemes
- [11] Stuhlinger, E. (1964), "Ion Propulsion for Space Flight"McGraw-Hill, New York, DOI: 10.1126/science.145.3636.1037.b
- [12] Texas Instruments (2020) "What Is a Hall-effect Sensor?recuperado de: <https://www.ti.com/document-viewer/lit/html/SSZT164>
- [13] UMitch (2022) "How Hall thrusters work (and why we can't simulate them)Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=mAfjmGMp43w>
- [14] Cabrera, R. (2012) .^apuntes teóricos y ejercicios del CBCRecuperado de: https://ricuti.com.ar/no_me_salen/ELECTRICIDAD/Nee_02.html [imagen] .

REFERENCIAS

- [15] Universitat de Valencia. (2018) "LECCIÓN 3 TRATAMIENTO GENERAL DE LAS PROPIEDADES DE TRANSPORTE: ECUACIÓN DE BOLTZMANN" Recuperado de: <https://www.uv.es/electfis/ef/Lecc3.pdf>
- [16] Garnica-Castro, G. J. (2025). "Impact of modified B-splines on particle-in-cell modeling for electron-ion nonlinear dynamics. Cogent Engineering ", 12(1). <https://doi.org/10.1080/23311916.2025.2575106>
- [17] Majda, A. (2001) "Vorticity and Incompressible Flow" Cambridge University Press, ISBN: 9780511613203
- [18] Hofer, R. (2004) "Development and Characterization of High-Efficiency, High-Specific Impulse Xenon Hall Thrusters" NASA, University of Michigan, NASA/CR-2004-213099
- [19] . Colonna and A. D'Angola, eds., Plasma Modeling: Methods and Applications, (IOP Publishing).
- [20] L. Brieda, Plasma Simulations by Example (CRC Press, 2019), 10.1201/9780429447050.

Glosario

- **Ánodo:** Electrodo positivo del propulsor. En los motores de efecto Hall, comúnmente actúa también como el distribuidor de gas para la inyección del propelente neutro en el canal de descarga.
- **Cátodo:** Electrodo negativo situado externamente al canal de descarga. Su función es emitir electrones tanto para neutralizar el haz de iones de salida como para sostener la descarga dentro del canal.
- **Condición de Frontera:** Conjunto de restricciones matemáticas impuestas en los límites del dominio computacional para garantizar la estabilidad de la solución de las ecuaciones diferenciales
- **Efecto Hall:** Fenómeno físico por el cual los electrones en presencia de campos eléctrico y magnético perpendiculares experimentan una fuerza de deriva perpendicular a ambos campos.
- **Empuje:** Fuerza de reacción generada por la expulsión de masa a alta velocidad. En propulsión eléctrica, se presenta principalmente de la aceleración electrostática de los iones.

REFERENCIAS

- Impulso Específico (I_{sp}): Medida de la eficiencia del uso del propelente en un motor cohete. Representa el impulso entregado por unidad de peso de propelente consumido al nivel del mar.
- Macropartícula: Entidad computacional utilizada en el método PIC que representa un gran número de partículas físicas reales para hacer viable la simulación numéricamente.
- Método Particle-in-Cell (PIC): Método numérico que modela el plasma rastreando partículas individuales en un espacio continuo (Lagrangiano) mientras calcula los campos electromagnéticos en una malla fija (Euleriano).
- Plasma: Estado de la materia constituido por un gas ionizado cuasineutral que exhibe comportamiento colectivo debido a las fuerzas electromagnéticas.
- Propulsor de Efecto Hall: Tipo de propulsor eléctrico que utiliza un campo magnético radial y un campo eléctrico axial para atrapar electrones en una deriva azimutal, ionizando el gas y acelerando los iones para generar empuje.
- Ruido Numérico: Fluctuaciones estadísticas en las simulaciones PIC causadas por el uso de un número finito de macropartículas para representar una función de distribución continua.
- Vorticidad: Medida vectorial de la rotación local de un fluido. En el contexto del plasma, identifica estructuras coherentes de flujo y turbulencia en la pluma de descarga.
- Xenón: Gas noble de alta masa atómica y bajo potencial de ionización, utilizado comúnmente como propelente en propulsión eléctrica debido a su eficiencia y facilidad de almacenamiento.

Anexo A. Productos

Modified B-Spline Interpolation for Vorticity Analysis in an Electron Cross-Cloud PIC Simulation.

Roberto Escalante-Urrea *, Gibran J. Garnica-Castro †, Jorge A. Ferrer-Pérez
Unidad de Alta Tecnología, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

Oliver Marcel Huerta-Chavez , Raul Alberto Bernal-Orozco
Instituto Politécnico Nacional, ESIME Ticóman, Mexico City 07340, Mexico

Received 04 February 2026; accepted -

Standard Particle-in-Cell (PIC) simulations often face challenges in accurately resolving small-scale vorticity structures due to numerical noise inherent in traditional interpolation methods. This work describes the implementation of a vorticity calculation module directly integrated into a PIC code, utilizing a modified B-spline interpolation scheme designed to enhance resolution and stability.

To evaluate the performance of this implementation, we apply a cross-flow configuration in two distinct electron populations. We conduct a comparative analysis between the modified B-spline scheme and standard formulations, focusing on the resolution of small-scale structures. Our results indicate that the modified B-spline implementation significantly improves the definition of vorticity structures, specifically by observing a higher resolution on small sub-vortices, concluding that our approach successfully resolves these features.

Keywords: Particle-in-Cell, Electron-Ion Dynamics, Vorticity, Plasma Simulation, Cross-Cloud.

Figura 42: Abstract de Artículo de Investigación en revisión en la Revista Mexicana de Física.

Comparative of Parallel Modified B-Spline Interpolation against Classic Interpolation Methods in Particle-Mesh Step for Non-linear Electro-ion Dynamics

Gibran Jalil Garnica-Castro *, Georgiy Polupan
Instituto Politécnico Nacional, ESIME Zacatenco, Mexico City 07738, Mexico

Oliver Marcel Huerta-Chavez †, Raul Alberto Bernal-Orozco
Instituto Politécnico Nacional, ESIME Ticóman, Mexico City 07340, Mexico

Roberto Escalante
Unidad de Alta Tecnología, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

Received 04 September 2025; accepted 05 January 2026

This work presents a comparative study of interpolation schemes for the Particle-Mesh step in Particle-in-Cell (PIC) simulations of nonlinear electron-ion dynamics, emphasizing an OpenMP parallel implementation of a modified cubic B-Spline kernel. The modified B-spline introduces a small, zero-mean perturbation close to the standard cubic B-Spline to mimic microscale fluctuations and mitigate oscillations caused by superparticle clustering. We compare this approach against non-parallel modified B-spline, classical cubic B-Spline, and trilinear (cloud-in-cell) interpolation.

We propose a three-dimensional cubic benchmark with controlled initial conditions (following Brieda) to ensure a fair comparison. The metrics include the number of electrons, the electric field, and the conservation of energy. The classical modified B-Spline consistently attenuates noise and suppresses oscillations relative to the CIC and the standard cubic kernel, while preserving force accuracy and not degrading energy conservation beyond baseline levels. The OpenMP implementation achieves substantial speedups; the per-thread, seedable randomization adds only marginal overhead and maintains parallel scalability. Sensitivity analyzes (perturbation amplitude and random seed) indicate stable behavior and reproducibility.

Overall, the OpenMP-parallel randomized cubic B-Spline provides a favorable trade-off between accuracy, robustness, and performance, making it a practical option for high-fidelity PIC of nonlinear electron-ion plasmas.

Figura 43: Artículo de Investigación como co-autor en la Revista Mexicana de Física.