



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA DIVISIÓN DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO CUASI-CONTINUO DE MODOS DESLIZANTES EN UN MOTOR DE CORRIENTE DIRECTA

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERA ELÉCTRICA ELECTRÓNICA
(ÁREA ELECTRÓNICA)

P R E S E N T A:
ARIATNE ADRIANA HERNÁNDEZ LÓPEZ

DIRECTOR: DR. LEONID FRIDMAN



MEXICO, D.F.

NOVIEMBRE 2005

Agradecimientos

A mis padres por la formación, el apoyo y la guía que me han dado a lo largo de mi vida, pero sobretodo, gracias por el infinito amor con el que lo han hecho.

A mi hermana por siempre tener tiempo para intercambiar ideas y aprender de ellas, por tantas noches en vela, gracias por lo más importante de todo tu constante amor y apoyo.

A mis profesores que no solo me enseñaron de manera magnífica sus asignaturas, si no que además dejaron una profunda huella en mi memoria con sus consejos e historias; héroes y modelos a seguir en mis recuerdos.

A aquellos que caminaron a mi lado durante la aventura que fue la carrera, gracias por los momentos alegres y tristes, por compartir su tiempo y por las increíbles pláticas que me permitieron conocerlos y llamarlos amigos.

Por la palabra adecuada en el momento justo, gracias amor, porque comprendiste los momentos difíciles, porque me apoyaste cada día con tu sonrisa y porque me diste ánimo para seguir adelante.

Índice

ÍNDICE DE FIGURAS	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
OBJETIVOS	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
INTRODUCCIÓN	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
1. CAPÍTULO 1. BASES: LA TEORÍA DE MODOS DESLIZANTES	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
1.1. Espacio de estados	¡Error! Marcador no definido.
1.1.1. Concepto	¡Error! Marcador no definido.
1.1.2. Utilidad del espacio de estados	¡Error! Marcador no definido.
1.1.3. Trayectorias de estados	¡Error! Marcador no definido.
1.1.4. Espacio de estados para sistemas de segundo orden	¡Error! Marcador no definido.
1.1.5. Simulación en el espacio de estados del sistema caracterizado.	¡Error! Marcador no definido.
1.2. Modos deslizantes de Primer Orden[2]	¡Error! Marcador no definido.
1.2.1. Concepto	¡Error! Marcador no definido.
1.2.2. Descripción del funcionamiento	¡Error! Marcador no definido.
1.2.3. El problema del <i>Chattering</i>	¡Error! Marcador no definido.
1.2.4. Constantes para el controlador de modos deslizantes de primer orden	¡Error! Marcador no definido.
1.2.5. Algoritmo de primer orden para el motor de corriente directa.	¡Error! Marcador no definido.
1.3. Simulación del algoritmo de primer orden.	¡Error! Marcador no definido.
1.3.1. Respuesta a una entrada escalón	¡Error! Marcador no definido.
1.3.2. Respuesta ante una perturbación senoidal	¡Error! Marcador no definido.
2. CAPÍTULO 2. ALGORITMO DE MODOS DESLIZANTES DE SEGUNDO ORDEN	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
2.1. Modos Deslizantes de Segundo Orden	¡Error! Marcador no definido.

2.1.1.	Concepto	¡Error! Marcador no definido.
2.1.2.	Características principales	¡Error! Marcador no definido.
2.2.	Controlador Cuasi-Continuo de Modos Deslizantes de Segundo Orden	¡Error! Marcador no definido.
2.2.1.	Concepto	¡Error! Marcador no definido.
2.2.2.	Ajuste de las constantes para el motor	¡Error! Marcador no definido.
2.2.3.	Aplicación del algoritmo cuasi-continuo al motor de corriente directa[3]	¡Error! Marcador no definido.
2.3.	Simulaciones del algoritmo Cuasi-Continuo	¡Error! Marcador no definido.
2.3.1.	Respuesta a una entrada Escalón	¡Error! Marcador no definido.
2.3.2.	Respuesta ante una perturbación senoidal	¡Error! Marcador no definido.
3.	CAPÍTULO 3. ALGORITMO DE MODOS DESLIZANTES DE SEGUNDO ORDEN CON FILTRO.	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
3.1.	Incrementando el orden del sistema de manera artificial.	¡Error! Marcador no definido.
3.1.1.	Incrementando el orden de la planta para el algoritmo cuasi-continuo	¡Error! Marcador no definido.
3.1.2.	Cálculo de las constantes para el motor	¡Error! Marcador no definido.
3.2.	Simulaciones del algoritmo Cuasi-Continuo con filtro	¡Error! Marcador no definido.
3.2.1.	Respuesta a una entrada escalón	¡Error! Marcador no definido.
3.2.2.	Respuesta ante una perturbación senoidal	¡Error! Marcador no definido.
4.	CAPÍTULO 4. DIFERENCIADORES	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
4.1.	Análisis de diferenciadores por Modos Deslizantes	¡Error! Marcador no definido.
4.1.1.	Diferenciador de primer orden[6]	¡Error! Marcador no definido.
4.1.2.	Diferenciador de Levant[6][7]	¡Error! Marcador no definido.
4.1.3.	Diferenciador SSZL[6][8]	¡Error! Marcador no definido.
4.2.	Simulaciones	¡Error! Marcador no definido.
4.2.1.	Diferenciador de prmer orden para una señal cuadrada	¡Error! Marcador no definido.
4.2.2.	Diferenciador de Levant para una señal cuadrada	¡Error! Marcador no definido.
4.2.3.	Diferenciador SSZL para una señal cuadrada	¡Error! Marcador no definido.

5. CAPÍTULO 5. COMPARACIÓN DEL FUNCIONAMIENTO DE LOS MODOS DESLIZANTES.

¡Error! Marcador no definido.

5.1. Acciones de control básicas[10][11]

¡Error! Marcador no definido.

5.1.1. Acción de control proporcional ¡Error! Marcador no definido.

5.1.2. Acción de control proporcional y derivativo ¡Error! Marcador no definido.

5.1.3. Acción de control proporcional e integral ¡Error! Marcador no definido.

5.1.4. Acción de control proporcional, derivativo e integral ¡Error! Marcador no definido.

5.2. Regla de sintonización de Ziegler-Nichols

¡Error! Marcador no definido.

5.2.1. Primer método ¡Error! Marcador no definido.

5.2.2. Segundo método ¡Error! Marcador no definido.

5.2.3. Sintonización para el motor caracterizado ¡Error! Marcador no definido.

5.3. Simulaciones del controlador PID

¡Error! Marcador no definido.

5.3.1. Simulación del motor con control básico ¡Error! Marcador no definido.

5.3.2. Respuesta del controlador PID ante una perturbación senoidal. ¡Error! Marcador no definido.

5.4. Comparaciones

¡Error! Marcador no definido.

5.4.1. Comparación entre diferenciadores ¡Error! Marcador no definido.

5.4.2. Comparación entre diversos tipos de controladores ¡Error! Marcador no definido.

CONCLUSIONES

¡Error! Marcador no definido.

ANEXOS

¡Error! Marcador no definido.

A) Funcionamiento del motor de corriente directa ¡Error! Marcador no definido.

B) Modelado del motor. ¡Error! Marcador no definido.

C) Caracterización del motor ¡Error! Marcador no definido.

BIBLIOGRAFÍA

¡Error! Marcador no definido.

Índice de Figuras

Figura 1-1. Sistemas amortiguados estables _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-2. Dos polos reales diferentes de cero. Forma canónica _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-3. Dos polos reales, uno de ellos igual a cero. Forma canónica _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-4. Dos polos reales iguales. Forma canónica _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-5. Sistema no amortiguado _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-6. Polos complejos. Forma canónica _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-7. Respuesta exponencial de un sistema en el espacio de estados. _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-8. Salida en el espacio de estados _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-9. Error de la salida en el espacio de estados _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-10. Se muestran 2 condiciones iniciales. _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-11. El controlador de modos deslizantes. _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-12. Ubicación gráfica de c . _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-13. Chattering en modos deslizantes de primer orden. _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-14. Diagrama del controlador de modos deslizantes de primer orden _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-15. Bloque FOSM _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-16. Comparación de la velocidad de salida para diferentes valores de c . _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-17. Salida del motor de CD en el espacio de estados _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-18. Error en la salida del motor en el espacio de estados _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-19. Salida del controlador (FOSM) _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-20. Comparación de la velocidad de salida del motor de CD para diferentes valores de u_0 . _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-21. Salida del motor con una perturbación. _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-22. Salida del motor añadiendo una perturbación. _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-23. Salida del motor añadiendo una perturbación. _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-24. Salida del motor añadiendo una perturbación. _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-25. Acercamiento de la Figura 1-24. _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-26. Salida del motor añadiendo una perturbación. _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 1-27. Salida del motor añadiendo una perturbación. _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 2-1. Gráfica del comportamiento del controlador cuasi-continuo. _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 2-2. Diagrama del controlador de modos deslizantes de orden superior utilizando el algoritmo cuasi-continuo. _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 2-3. Diagrama del bloque de control, algoritmo cuasi-continuo. _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 2-4. Salida del motor para un valor pequeño de λ . _____	¡Error! Marcador no definido.
Figura 2-5. Salida del motor para diferentes valores de λ . _____	¡Error! Marcador no definido.

Figura 2-6. Salida del motor para diferentes valores de α . _____ ¡Error! Marcador no definido.

Figura 2-7. Salida del algoritmo Cuasi-Continuo de modos deslizantes de orden superior. ¡Error! Marcador no definido.

Figura 2-8. Salida en el espacio de estados del motor de CD. _____ ¡Error! Marcador no definido.

Figura 2-9. Error en el espacio de estados del motor de CD _____ ¡Error! Marcador no definido.

Figura 2-10. Salida del motor agregando una perturbación senoidal a la salida del motor. ¡Error! Marcador no definido.

Figura 2-11. Salida del motor agregando una perturbación senoidal a la salida del motor. ¡Error! Marcador no definido.

Figura 2-12. Salida del motor agregando una perturbación a la señal de control. _____ ¡Error! Marcador no definido.

Figura 2-13. Salida del motor agregando una perturbación a la señal de control. _____ ¡Error! Marcador no definido.

Figura 2-14. Salida del motor agregando una perturbación a la señal de control. _____ ¡Error! Marcador no definido.

Figura 2-15. Salida del motor agregando una perturbación a la señal de control. _____ ¡Error! Marcador no definido.

Figura 3-1. Diagrama de simulación del algoritmo cuasi-continuo con filtro. ¡Error! Marcador no definido.

Figura 3-2. Salida del motor para diferentes valores de λ . _____ ¡Error! Marcador no definido.

Figura 3-3. Gráfica de la señal de salida del motor, para diferentes valores de c . _____ ¡Error! Marcador no definido.

Figura 3-4. Trayectorias de estados del sistema para diferentes valores de c _ ¡Error! Marcador no definido.

Figura 3-5. Salida del motor para diferentes valores de α . _____ ¡Error! Marcador no definido.

Figura 3-6. Salida del controlador para diferentes valores de α . _____ ¡Error! Marcador no definido.

Figura 3-7. Gráficas con respecto al tiempo de la salida y el error del motor. ¡Error! Marcador no definido.

Figura 3-8. Trayectorias de estados de la salida y del error del motor. _____ ¡Error! Marcador no definido.

Figura 3-9. Salida del controlador. _____ ¡Error! Marcador no definido.

Figura 3-10. Salida del motor aplicando una perturbación senoidal a la salida del motor. ¡Error! Marcador no definido.

Figura 3-11. Salida del motor aplicando una perturbación senoidal a la salida del motor. ¡Error! Marcador no definido.

Figura 3-12. Salida del motor aplicando una perturbación senoidal a la salida del control. ¡Error! Marcador no definido.

Figura 3-13. Salida del motor aplicando una perturbación senoidal a la salida del control. ¡Error! Marcador no definido.

Figura 3-14. Salida del motor aplicando una perturbación senoidal a la salida del control. ¡Error! Marcador no definido.

Figura 3-15. Salida del motor aplicando una perturbación senoidal a la salida del control. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 4-1. Diagrama del diferenciador con una señal cuadrada de entrada. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 4-2. Entrada al diferenciador y valor estimado de la entrada. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 4-3. Señal diferenciada. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 4-4. Entrada al diferenciador y valor estimado de la entrada. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 4-5. Señal diferenciada. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 4-6. Entrada al diferenciador y valor estimado de la entrada. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 4-7. Señal diferenciada. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-1. Respuesta de un sistema de primer orden con retardo a una entrada escalón **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-2. Diagrama de conexión de la planta para el segundo método de Ziegler –Nichols. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-3. Respuesta del sistema para el segundo método de sintonización de Ziegler-Nichols **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-4. Punto de inflexión de la respuesta escalón del motor. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-5. Diagrama del controlador proporcional **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-6. Gráficas de la velocidad de salida para el controlador PID. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-7. Gráficas del error para el controlador PID. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-8. Salida del controlador proporcional. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-9. Diagrama del controlador proporcional integral **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-10. Bloque control PI **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-11. Gráficas de la velocidad de salida para el controlador PID. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-12. Gráficas del error para el controlador PID. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-13. Salida del controlador proporcional e integral **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-14. Diagrama del controlador proporcional integral derivativo **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-15. Bloque control PID **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-16. Gráficas de la velocidad de salida para el controlador PID. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-17. Salida del controlador proporcional, derivativo e integral **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-18. Salida del motor añadiendo una perturbación senoidal a la salida del motor. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-19. Salida del motor añadiendo una perturbación senoidal a la salida del motor. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-20. Salida del motor añadiendo una perturbación a la salida del control. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-21. Salida del motor añadiendo una perturbación a la salida del control. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-22. Acercamiento de la Figura 5-21. **¡Error! Marcador no definido.**

Figura 5-23. Salida del motor aplicando una perturbación a la salida del control. ____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-24. Salida del motor aplicando una perturbación a la salida del control. ____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-25. Comparación entre diferenciadores para el controlador PID. __; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-26. Ampliación de la Figura 5-25. _____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-27. Comparación entre diferenciadores para el controlador FOSM. ; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-28. Ampliación de la Figura 5-27. _____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-29. Comparación entre diferenciadores para el controlador HOSM. ; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-30. Ampliación de la Figura 5-29. _____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-31. Comparación entre diferenciadores para el controlador HOSM con filtro. ; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-32. Ampliación de la Figura 5-31. _____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-33. Gráficas de salida de los controladores con el mejor diferenciador. ____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-34. Comparación de las gráficas del error en el espacio de estados de los controladores. __; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-35. Comparación de las gráficas de la señal de control para todos los controladores. ____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-36. Comparación de las gráficas de la corriente para todos los controladores. ; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-37. Comparación del comportamiento del motor con los diferentes controladores.; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-38. Comparación del comportamiento del motor para los diferentes controladores agregando PID saturado. (es la negra) _____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-39. Chattering en la señal de salida del motor de CD. _____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-40. Salida del motor para una perturbación a la salida del controlador. ____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-41. Acercamiento de la Figura 5-40 _____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-42. Comparación entre el chattering del algoritmo de primer orden y el algoritmo cuasi-continuo de modos deslizantes. _____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-43. Salida del motor con una perturbación a la salida del motor. ____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-44. Ampliación de la Figura 5-43. _____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-45. Fuerza ejercida por un conductor en un campo magnético. ____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-46. Dirección de las corrientes de armadura en un motor con rotación en sentido de las manecillas del reloj. _____; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-47. Diagrama de un motor controlado por el voltaje de armadura __; **Error! Marcador no definido.**

Figura 5-48. Comportamiento de un sistema de primer orden _____; **Error! Marcador no definido.**

Objetivos

El objetivo principal de esta tesis es estudiar las características de la velocidad de salida del comportamiento de un motor de CD cuando es controlado por el algoritmo cuasi-continuo de modos deslizantes de órdenes superiores, para la obtención del grado de Ingeniera Eléctrica Electrónica.

Es necesario estudiar las características del algoritmo de modos deslizantes de primer orden, como base de la teoría de modos deslizantes. Se realizará una comparación de la velocidad de salida del motor entre estos dos algoritmos.

Otro objetivo de esta tesis es estudiar las diferencias en el comportamiento de la velocidad de salida del motor cuando se utiliza como controlador el algoritmo cuasi-continuo con filtro, en comparación con la velocidad de salida del motor utilizando como controlador el algoritmo cuasi-continuo.

Se estudian los algoritmos mencionados, así como sus principios básicos, y las características de velocidad a la salida del motor cuando son aplicados. Como punto de comparación se estudia brevemente el comportamiento de la velocidad de salida del motor utilizando un controlador PID, sintonizado con la regla de sintonización de Ziegler y Nichols.

También se tiene como objetivo realizar un estudio del funcionamiento de diferenciadores que utilizan la teoría de modos deslizantes aplicados a los controladores mencionados anteriormente, para observar el comportamiento de los mismos, así como la mejora que realizan los diferenciadores cuando son agregados al lazo de control.

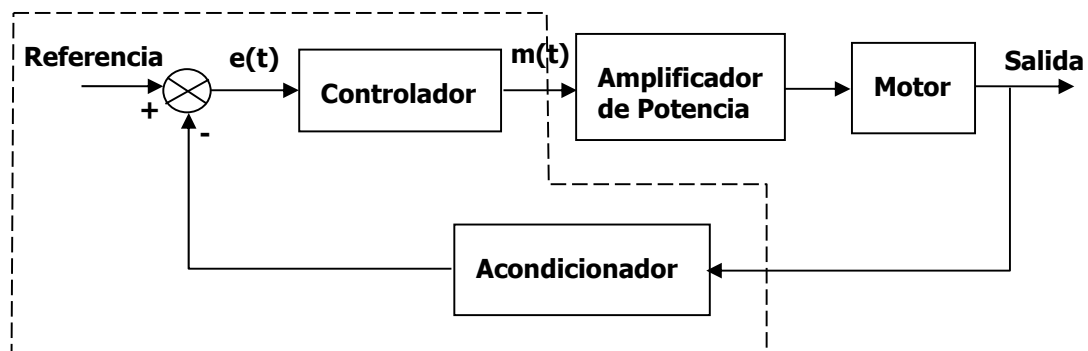
Introducción

Cuando se necesita un sistema para una aplicación, también suele necesitarse un valor particular a la salida del mismo, este valor deseado del sistema es la referencia, y se vuelve necesario realizar un control sobre él para que la alcance.

Para realizar el control del sistema para un valor deseado de salida es necesario realimentar la salida de la planta, para que se lleve a cabo una comparación entre la salida del sistema y la salida deseada del mismo (referencia) de esta manera el control actúa sobre la diferencia entre estas últimas, actúa sobre el error, para hacer que la diferencia llegue a ser cero. Una vez que el sistema alcanzó el valor de referencia el control ayudará a que se mantenga en él.

Lazo de control

El lazo de control¹ que se utilizará durante esta tesis para comparar diferentes acciones de control por modos deslizantes, contra acciones básicas de control aplicadas al motor, se describe en el siguiente diagrama, donde se muestra la señal de error $e(t)$, la salida del controlador $m(t)$, la señal de referencia y salida de la planta.



Lazo de Control

En la figura anterior el controlador variará de acuerdo con la acción de control que se esté estudiando. Cabe mencionar que los bloques encerrados por la

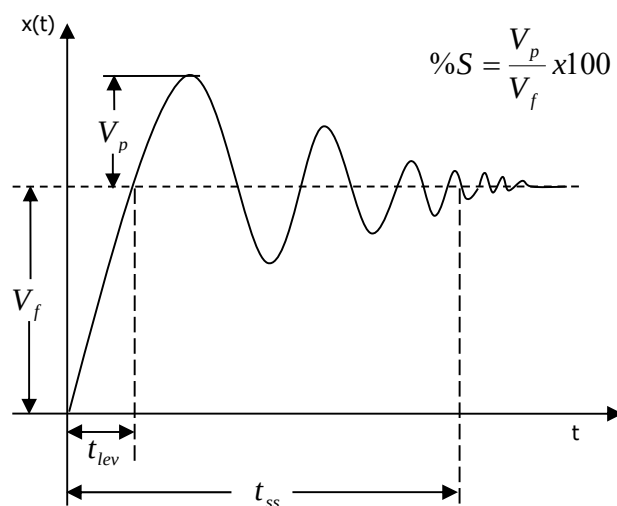
¹ Es el término que se utiliza para hablar de un sistema que tiene un control realimentado.

línea punteada indican la parte del lazo que estará siendo realizada por la computadora en la implementación de los controladores.

Para las simulaciones se omite el amplificador de potencia, suponiendo que tiene una relación uno a uno de voltaje y que soporta las exigencias de corriente que el motor demanda de acuerdo con la salida del controlador.

Los términos que se utilizarán de referencia para la realización de las comparaciones entre los algoritmos que se estudian serán: el tiempo de levantamiento, el tiempo de asentamiento y el porcentaje de sobrepaso.**iError! No se encuentra el origen de la referencia.**

En este trabajo se considerará el tiempo de levantamiento, como el tiempo requerido para que la respuesta del sistema pase del 0 al 100% de su valor final; el tiempo de asentamiento, como el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango de entre el 2 y el 5%**iError! No se encuentra el origen de la referencia.** del valor final y permanezca dentro de él; y el porcentaje de sobrepaso, como la relación del valor del pico máximo de la curva de respuesta medido a partir del valor de estado estable de la misma entre el valor de estado estable de la repuesta, por cien. Estos conceptos se pueden observar en la siguiente figura.



Transitorio de la respuesta al escalón de un sistema de segundo orden subamortiguado.

Durante la comparación entre el funcionamiento de los algoritmos de control con los que se trabajará se realiza la simulación de perturbaciones externas al motor, para observar el comportamiento de la respuesta del sistema. Una perturbación es una señal que tiende a afectar negativamente al valor de salida del sistema, y es llamada externa cuando es producida fuera del sistema y es una entrada al lazo del sistema.

A lo largo del trabajo se realiza una explicación más extensa del algoritmo de primer orden de modos deslizantes, por ser la base de la teoría de modos deslizantes, y por que se definen conceptos que son utilizados posteriormente por el resto de los algoritmos bajo estudio.

1. Capítulo 1. Bases: la teoría de Modos Deslizantes

1.1. Espacio de estados

1.1.1. CONCEPTO

Comúnmente, la respuesta de un sistema para condiciones iniciales dadas se analiza con una o más curvas donde uno de sus ejes es el tiempo (comúnmente el eje x), con respecto del cual se analiza el comportamiento del sistema. Cuando el sistema tiene n variables se obtienen n gráficas de este tipo.

Supongamos un sistema *SISO* (single input, single output) donde solo hay una señal de entrada y una señal de salida del sistema, y el resto de las variables de interés deben obtenerse a partir de estos valores². El conjunto de la señal de entrada (x) y sus derivadas describen el espacio de estados de un sistema.

El espacio de estados se utiliza para el análisis del comportamiento de un sistema. Y consiste en dibujar la gráfica de las variables que describen el comportamiento del sistema, es decir $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \text{etc.}$, cada una como un eje en la gráfica, sin incluir el tiempo como uno de los ejes. La cantidad de ejes de esta gráfica dependerá del orden del sistema que se esté analizando. Esto puede ser un impedimento, ya que si el sistema es de altos órdenes se puede utilizar el análisis más no la gráfica.

Para un sistema de segundo orden, la representación gráfica es sencilla pues tendremos un plano en el que se dibujará x vs $\dot{x}$, donde cada punto representará un estado del sistema.

Existen varias gráficas en el espacio de estados para un mismo sistema que dependen de las condiciones iniciales que tenga el sistema cuando se esté analizando. Las gráficas varían debido a que el comportamiento del sistema es diferente en los diferentes puntos (estados) de este plano, lo cual es de esperarse,

² Usualmente derivadas de la variable de salida

porque aunque el valor de x del sistema sea el mismo para dos puntos, la derivada de x será diferente, lo cual implica que la variación que tendrá x en los siguientes instantes de tiempo será diferente en ambos puntos. A la trayectoria que toma el comportamiento del sistema para una condición inicial dada se le llama trayectoria de estados. Si tratamos con sistemas lineales, tenemos sistemas que tienen un solo comportamiento en el espacio de estados para cada condición inicial³.

El espacio de estados describe al sistema porque se pueden “agrupar” estas trayectorias para poder tener una idea del comportamiento del sistema para cualquier condición inicial.

El caso que agruparía a las gráficas en el espacio de estados para segundo orden es el plano de fase, el cual consiste en marcar para muchos y diferentes puntos dentro del espacio de estados el ángulo de inclinación que tendría la trayectoria que pasara por este punto de acuerdo con el análisis del comportamiento del sistema. Este plano es muy útil y fácil de obtener cuando el sistema es modelable. Calculando y marcando puntos y pendientes estratégicos, podemos tener una idea del comportamiento del sistema para cualquier condición inicial⁴.

El tiempo está implícitamente descrito en la gráfica del espacio de estados, ya que el sistema cambiará de un estado a otro conforme el tiempo varíe. Usualmente, en las gráficas en el plano de estados se utilizan flechas que indican el orden de cómo los estados fueron tomando lugar a través del tiempo. La variación del tiempo dentro de una trayectoria de estados en general no será lineal; es decir, si se seleccionan dos segmentos que tengan la misma longitud dentro de la trayectoria y se analiza el tiempo que el sistema tardó en recorrerlos (en llegar del primer estado al segundo estado) se encontrará que este tiempo no es necesariamente el mismo.

³ Las soluciones a las ecuaciones diferenciales lineales tienen una única solución para una condición inicial dada.

⁴ En sistemas lineales las trayectorias en el espacio de estados para condiciones iniciales diferentes no se cruzan entre sí, esto se explica recordando que la solución es única para cada condición inicial en un sistema lineal.

Las trayectorias de estados para un sistema estable convergen a un punto en el espacio de estados o a una trayectoria de igual energía⁵, y la forma o la velocidad con que lo hagan depende de las condiciones iniciales así como del comportamiento del sistema. Cuando estas trayectorias se acercan a algún punto de estabilidad⁶ se vuelven tangentes a los vectores característicos⁷ del sistema, lo que las obliga a converger al punto de estabilidad.

Dado que el origen del sistema de coordenadas es más sencillo, cuando tenemos ecuaciones complicadas se suelen utilizar transformaciones para analizar el sistema de modo que las variables que se dibujen en el espacio de estados sean tales que su origen sea el origen del sistema de coordenadas⁸.

Si tenemos un sistema *MIMO* (multiple inputs, multiple outputs) tendríamos las derivadas sucesivas de las diferentes señales de entrada para el análisis del espacio de estados, esto es: $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \dots$ para la primera entrada, $\dot{x}_1, \ddot{x}_1, \dddot{x}_1, \dots$ para la segunda entrada, $\dot{x}_2, \ddot{x}_2, \dddot{x}_2, \dots$ para la tercera entrada,.... En este caso, dependiendo del número de entradas del sistema es la cantidad de gráficas del espacio de estados que se obtienen, de la misma manera el orden del sistema indicará la cantidad de ejes de cada una de estas gráficas.

1.1.2. UTILIDAD DEL ESPACIO DE ESTADOS

El espacio de estados es un medio para analizar el comportamiento del sistema ante una entrada dada. Una vez que logramos conocer el sistema y que decidimos una dinámica deseada con base en la utilidad que se requiere del

⁵ Una trayectoria donde el sistema conserva la misma cantidad de energía en cualquier punto, y en la cual se mantendrá hasta que exista una perturbación que cambie la cantidad de energía del sistema.

⁶ Puede ser una trayectoria estable; es decir, de igual energía para el sistema en cualquier punto de la misma.

⁷ Los vectores característicos son los vectores a través de los cuales es posible generar todos los vectores del sistema, mediante combinaciones lineales de ellos.

⁸ Esto implicaría suponiendo un sistema de segundo orden, que tanto la variable como su derivada (su razón de cambio) tiendan al origen.

mismo, agregaremos a nuestro sistema la dinámica de un controlador y ahora el espacio de estados nos ayudará a conocer la dinámica del sistema controlado.

Lo que se busca cuando se controla un sistema es hacer que el sistema se encuentre en el estado que se desea cuando lo deseamos. En muchos casos solo deseamos que el sistema sea estable; es decir, que después de un estado transitorio tenga un estado de salida predefinido (acotado).

Se puede lograr que el origen del espacio de estados sea un punto predefinido, un valor deseado de x y $\dot{x}$, que puede ser constante, cuando deseamos que nuestro sistema llegue a un valor predeterminado y fijo de estado permanente. O un valor deseado que puede ser variable; es decir, si se quiere que el sistema siga una curva de comportamiento prediseñada⁹.

En la gráfica del espacio de estados (realizando la transformación adecuada) estos dos casos se pueden apreciar como el mismo. Ya que la gráfica del espacio de estados convergerá al origen en ambos casos, esto no significa que la gráfica del espacio de estados sea igual para ambos. En el caso de un valor deseado variable al estar modificando el valor deseado, la trayectoria de estados estará constantemente buscando llegar al origen. En comparación con el valor deseado constante, una vez que el sistema se encuentra en el origen solo alguna perturbación provocará que el sistema salga de este estado.

Entonces el problema del análisis del control del sistema en el espacio de estados se resume en lograr que el estado llegue al origen del sistema.

1.1.3. TRAYECTORIAS DE ESTADOS

Como se tiene el modelo del sistema se conoce el comportamiento del sistema en el espacio de estados resolviendo la ecuación diferencial para cada condición inicial, mientras más condiciones iniciales se requieren analizar, más complejo se vuelve el problema. Encontrar la solución de las ecuaciones

⁹ En este caso se obtiene que el sistema se comporta de acuerdo con la curva deseada para el sistema.

diferenciales para cada condición inicial es un tanto tardado, debido a ello hay técnicas que facilitan el conocimiento del sistema en el espacio de estados.

- En el espacio de estados hay líneas llamadas vectores característicos (*eigenvectors*) que son líneas que tienen dirección¹⁰ hacia el origen. Así cualquier trayectoria de respuesta libre que cruce o que inicie en un vector característico se mantendrá en él hasta llegar al origen.

Un sistema de orden n tiene n vectores característicos linealmente independientes, si estos valores característicos son distintos y reales pueden servir como vectores base¹¹.

Para obtener estos vectores, es necesario realizar un procedimiento matemático que en muchos casos no es sencillo y depende del modelo matemático del sistema. **Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

- El método de isoclinas es una técnica gráfica sencilla para encontrar cualquier trayectoria de un sistema de segundo orden. El método busca una familia de curvas llamadas isoclinas en el plano de estados, donde estas líneas tienen la característica de que cualquier trayectoria que las cruce siempre lo hará con la misma pendiente. Para sistemas de segundo orden, lineales y estacionarios, las isoclinas son líneas rectas.

Una vez determinadas las isoclinas, será sencillo determinar la trayectoria del sistema desde cualquier condición inicial, pues se tendrá la pendiente a seguir de la trayectoria después de cada cruce con las isoclinas. Si se realizara un análisis cerca del origen, se encontraría que en este punto todas las trayectorias son tangentes a los vectores característicos.

El problema que presentan estas técnicas es que es necesario conocer el modelo del sistema.

¹⁰ La dirección de una línea en el espacio de estados la define el tiempo.

¹¹ Los vectores característicos son los vectores a través de los cuales es posible generar todos los vectores del sistema, mediante combinaciones lineales de ellos.

1.1.4. ESPACIO DE ESTADOS PARA SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Como se mencionó anteriormente la gráfica del espacio de estados para un sistema de segundo orden es relativamente sencilla pues se trabaja con un plano cuyos ejes serán x vs $\dot{x}$.

Para un sistema de este tipo las isoclinas son líneas rectas y se pueden utilizar tantas como sean necesarias en el plano de fase.

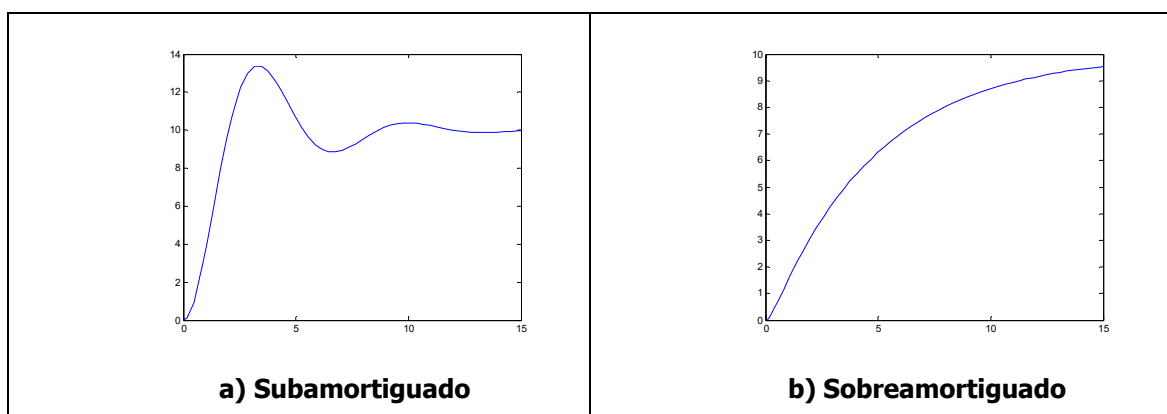


Figura 1-1. Sistemas amortiguados estables

Para sistemas amortiguados (Ver Figura 1-1) el comportamiento en el plano de estados en su forma canónica es el de un conjunto de espirales logarítmicas que tienden al origen (Ver Figura 1-2). El hecho de que tengan convergencia hacia el origen o divergencia depende de si el sistema es estable o inestable respectivamente.

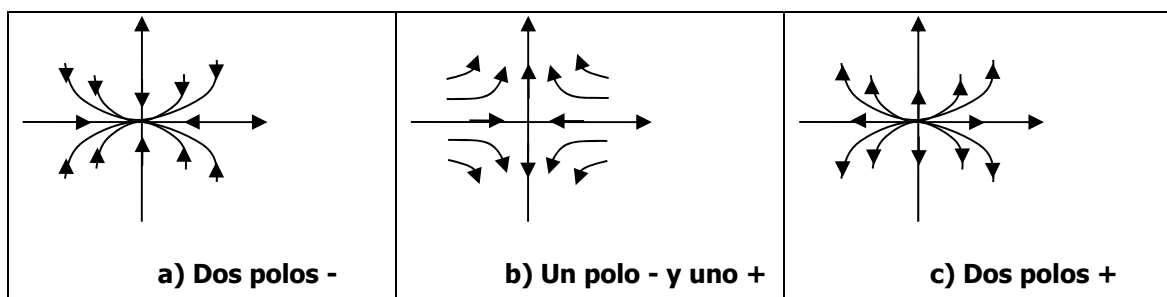


Figura 1-2. Dos polos reales diferentes de cero. Forma canónica

Un sistema con estabilidad relativa tiene un plano de estados formado de líneas paralelas con respecto a un eje y varios puntos que son los estados de estabilidad relativa del sistema (Ver Figura 1-3 y Figura 1-4)

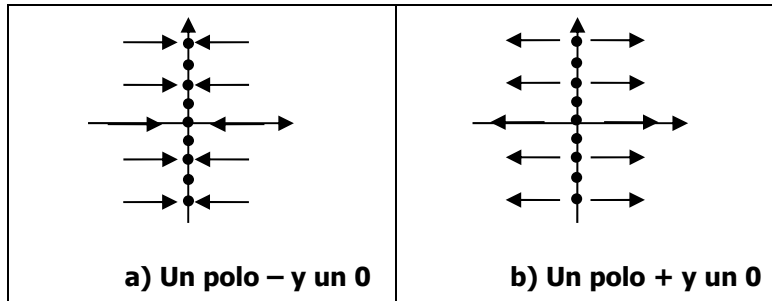


Figura 1-3. Dos polos reales, uno de ellos igual a cero. Forma canónica

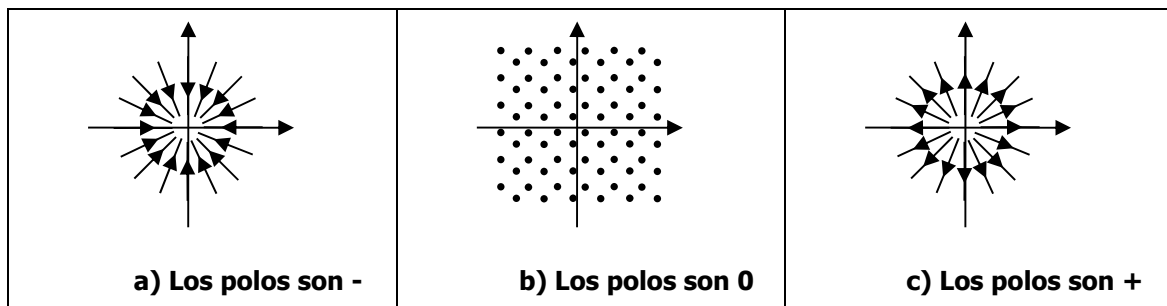


Figura 1-4. Dos polos reales iguales. Forma canónica

Los puntos en las gráficas indican puntos de estabilidad relativa, esto es puntos para los cuales una vez que el sistema se encuentra en ellos ya no cambiará de estado a menos que exista una perturbación externa que cambie su estado.

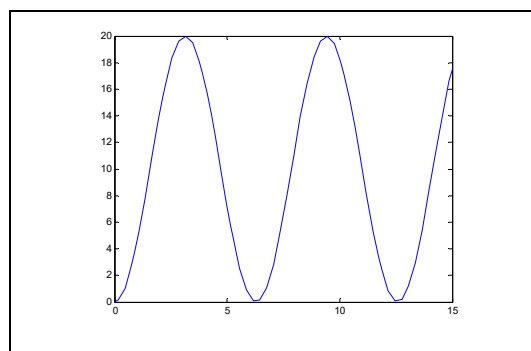


Figura 1-5. Sistema no amortiguado

Para sistemas de segundo orden no amortiguado¹² (Ver Figura 1-5), esto es sistemas oscilatorios¹³, las trayectorias en el plano de estados son círculos concéntricos, en su forma canónica, ésta es la representación de una trayectoria de energía constante. (Ver Figura 1-6)

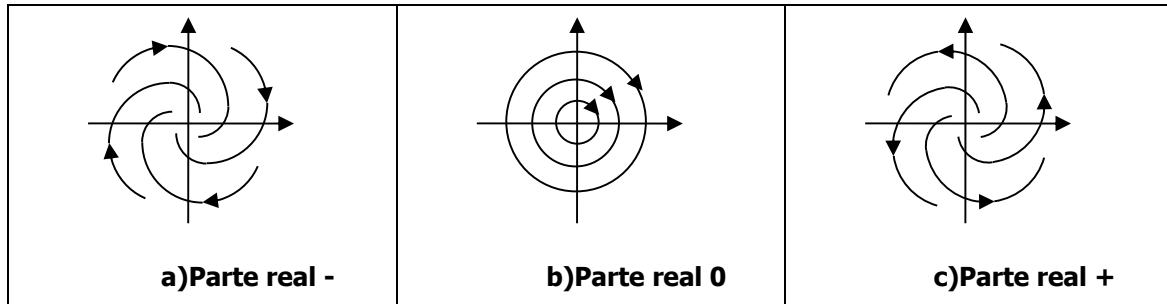


Figura 1-6. Polos complejos. Forma canónica

Un ejemplo sencillo en el espacio de estados es la línea recta. Que se obtiene en el espacio de estados cuando la salida del sistema con el que se trabaja es una exponencial, esto en ecuaciones es:

$$x = e^{-\alpha t} \quad \text{Ec 1.1}$$

$$\dot{x} = -\alpha e^{-\alpha t} \quad \text{Ec 1.2}$$

sustituyendo x

$$\dot{x} = -\alpha x \quad \rightarrow \quad \text{Lo cual es una línea recta} \quad \text{Ec 1.3}$$

Veamos este mismo caso gráficamente. Si obtenemos las gráficas x vs t y $\dot{x}$ vs t , y hacemos coincidir los ejes x y $\dot{x}$ del espacio de estados con los de estas gráficas, tenemos la Figura 1-7. Donde se puede observar de donde provienen los puntos (estados) que generan a la gráfica del espacio de estados.

¹² Que tienen un par de polos complejos conjugados con parte real cero, y que no tienen vectores característicos en el plano de fase

¹³ Son sistemas que tienen un nivel de energía constante.

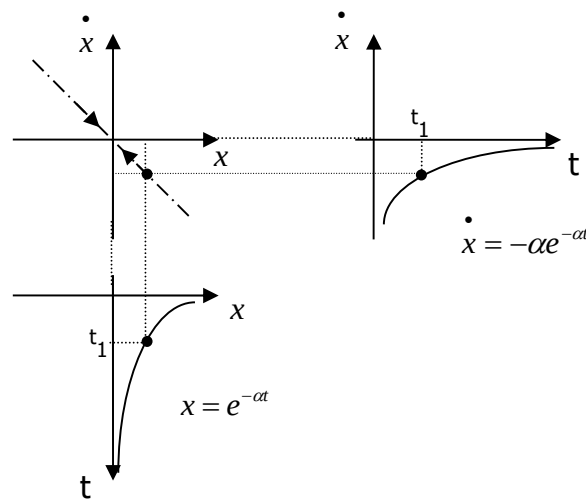


Figura 1-7. Respuesta exponencial de un sistema en el espacio de estados.

Este ejemplo también nos sirve para observar que el tiempo no es lineal en el espacio de estados, puesto que la exponencial llega al valor deseado en el infinito, mientras que los primeros valores que toma representan un tiempo definido y menor.

Otro detalle que será de utilidad es tomar en cuenta que la pendiente de la línea en el espacio de estados describe indirectamente la velocidad con la que se llegará al origen del espacio de estados.

1.1.5. SIMULACIÓN EN EL ESPACIO DE ESTADOS DEL SISTEMA CARACTERIZADO.

La simulación que se muestra a continuación, muestra el comportamiento del motor de CD en el espacio de estados (Ver Figura 1-8), debido a que se está dibujando la gráfica de la salida del motor, la gráfica del espacio de estados no converge al origen, sino converge al punto (100,0), que equivale al valor de velocidad de referencia en rad/s.

Las ecuaciones que describen la dinámica del motor son:

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} = -R_a i_a(t) - k_{bf} \omega(t) + v_a(t)$$

Ec 1.4

$$J_{eq} \frac{d\omega(t)}{dt} = k_{bf} i_a(t) - f_{eq} \omega(t) \quad \text{Ec 1.5}$$

particularizando para el motor de CD con el que se trabajó, las matrices de estados son:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 125 & 0 \\ -15635 & -25 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 224.32 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{Ec 1.6}$$

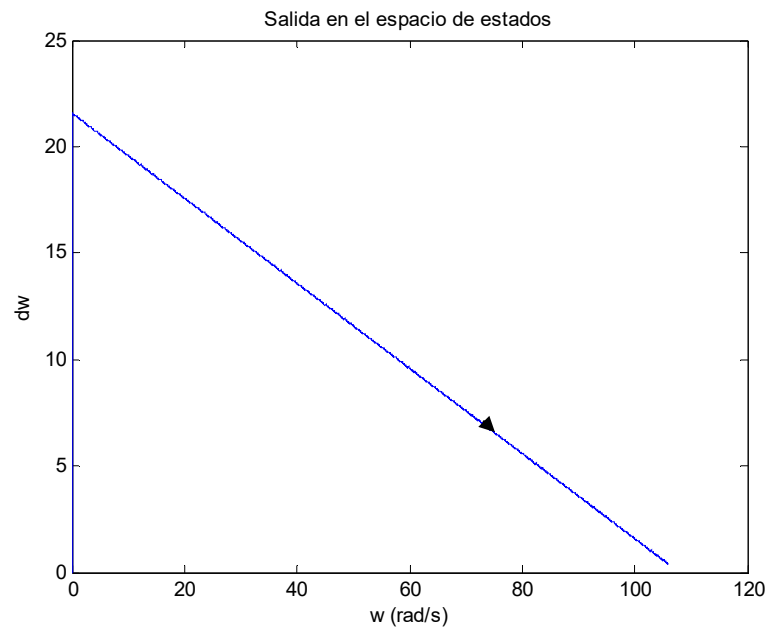


Figura 1-8. Salida en el espacio de estados

Observemos en esta gráfica que la derivada de la velocidad es muy grande al inicio, lo cual refleja el intento del motor de llegar de la manera más rápida al valor de referencia que se le está aplicando a la entrada.

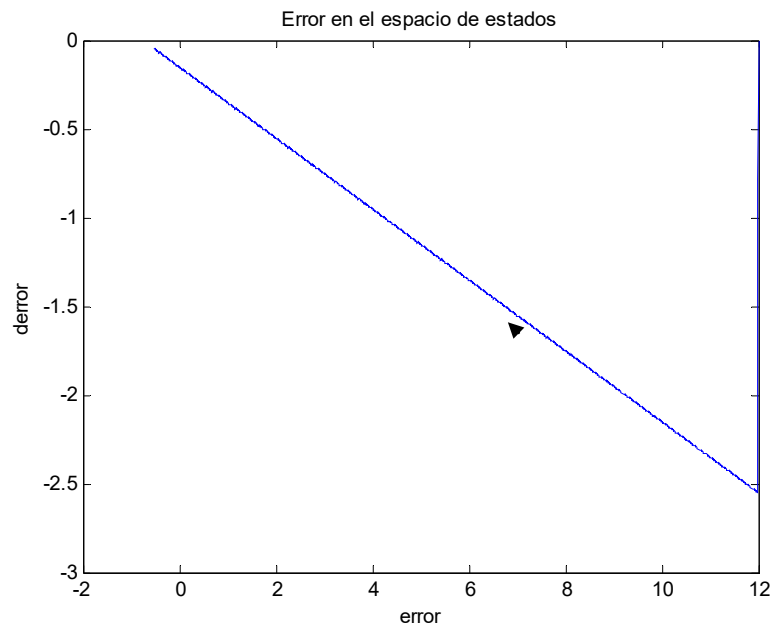


Figura 1-9. Error de la salida en el espacio de estados

Si se realiza la gráfica del error en el espacio de estados se observará como la salida del sistema y su derivada convergen al origen (Ver Figura 1-9). De igual manera que en el caso anterior la derivada del error al inicio es muy grande, buscando así contrarrestar al error.

Por otro lado veamos que en la misma Figura 1-9, el error es muy grande al inicio por que está definido como el valor de la variable deseada menos el valor de la variable de salida.

1.2. Modos deslizantes de Primer Orden! *No se encuentra el origen de la referencia.*

El diseño de un controlador de modos deslizantes provee un acercamiento sistemático al problema de mantener la estabilidad y el comportamiento consistente en la fase de imprecisión del modelado¹⁴. Por otro lado, permite el intercambio entre modelado y comportamiento para ser cuantificado en la manera

¹⁴ El modelo del sistema suele encontrarse de manera aproximada esto provoca un error inherente en el modelado.

acostumbrada, esto puede iluminar todo el proceso de diseño siendo así posible ajustar el controlador.

Los modos deslizantes son un control que se diseña para sistemas continuos, su objetivo principal es hacer que el sistema tome un nuevo comportamiento (un valor deseado que puede ser una función en el tiempo) que es seleccionado por el diseñador y que lo lleve a la estabilidad.

El propósito del control conmutado es llevar a cualquier trayectoria de estado del sistema a una superficie prespecificada en el espacio de estados (la manera de llevarla depende de un algoritmo definido, llamado modos deslizantes¹⁵) y mantener la trayectoria de estados de la planta en esta superficie para cualquier instante posterior que se tome. Esta superficie es llamada superficie de conmutación o de deslizamiento.

Idealmente una vez interceptada la superficie de deslizamiento, el control conmutado mantiene la trayectoria de estado de la planta en esta superficie para cualquier tiempo posterior así se dice que la trayectoria de estado de la planta se desliza por la superficie¹⁶. Esto solo ocurre si se tiene una frecuencia infinita de conmutación verificando constantemente el estado de la planta y sus perturbaciones para actuar de modo que se eliminen; como esto no es posible en la práctica, tenemos el problema para el sistema llamado *chattering*¹⁷; una forma de arreglarlo es utilizando algoritmos de órdenes superiores que se encargan de reducirlo por las características inherentes con las que fueron diseñados¹⁸.

1.2.1. CONCEPTO

Los modos deslizantes de primer orden realizan, desde el punto inicial del sistema, una conmutación que depende del control definido como u , el cual solo

¹⁵ Estos algoritmos fueron diseñados para estabilizar al sistema al que se apliquen. Las características de control dependerán del algoritmo que se utilice (*chattering*, tiempo de estado estable, sobrepaso, etc.)

¹⁶ De aquí el termino de superficie de deslizamiento.

¹⁷ En la Sección 1.2.3 se hablara sobre el *chattering*.

¹⁸ En el Capítulo 2 y 3 se estudian los principios de funcionamiento y algunos algoritmos de órdenes superiores de modos deslizantes.

toma dos valores¹⁹, lo que este control busca es que la derivada de la variable sea de signo contrario a la variable (el argumento de *sign*²⁰). Esto es:

$$\dot{s} = -\text{sign}(s) \rightarrow s \dot{s} < 0 \quad \text{Ec 1.7}$$

lo cual nos llevaría al estado del sistema donde s es igual a cero y la ecuación 1.7 ya no puede moverse para lograr controlar el sistema (se ha llegado a la discontinuidad del control). En la Figura 1-10 se puede ver gráficamente la dinámica que se logra cuando la variable y su derivada son de signo contrario.

En esta misma figura se muestra el comportamiento de un sistema para dos condiciones iniciales una de ellas positiva y la otra negativa. Cuando la función $s(t)$ tiene un valor positivo y la derivada un valor de signo contrario, se logra que la función $s(t)$ decrezca tendiendo hacia cero. En el caso contrario, cuando $s(t)$ tiene un valor negativo y su derivada un valor positivo, $s(t)$ crecerá, alcanzando así el valor deseado, cero.

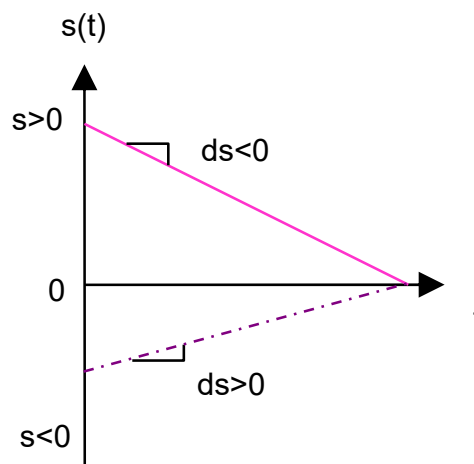


Figura 1-10. Se muestran 2 condiciones iniciales.

El control de modos deslizantes de primer orden es robusto por que sin importar el valor de la condición inicial, s llega a cero. Es insensible a perturbaciones por que se aplica la máxima magnitud de control ante cualquier

¹⁹ Estos dos valores entre los que se conmutan son magnitudes máximas para el sistema, lo que provoca una acción robusta de control. Esto se verá a detalle en la sección 1.2.2.

²⁰ La función *sign*, es la función que devuelve el signo de la variable que tiene por argumento.

valor de error, la magnitud de las perturbaciones a las que el control es insensible depende de la magnitud que se utilice para el controlador²¹.

Para los modos deslizantes de primer orden la trayectoria de estados que se alcanza (la superficie de deslizamiento) es una línea recta en el espacio de estados que es un acercamiento al origen del sistema de manera exponencial, como ya se vio en la sección 1.1.4

En el espacio de estados, cuando la trayectoria de estado de la planta está por "arriba" de la superficie preespecificada s , el lazo de realimentación tiene una ganancia tal que hace que el estado de la planta tienda a la superficie de deslizamiento, y tiene una ganancia de signo diferente si la trayectoria cae "por debajo" de la superficie para lograr el mismo fin. Esta superficie define la regla para la conmutación y de ella se desprende el argumento de $sign$ ²².

Para modos deslizantes de primer orden, la ecuación de control u , está definida como $u = -M \text{sign}(s) = \dot{s}$, donde s será la variable que se desea controlar y M la magnitud máxima aplicable al sistema para su control (Ver Figura 1-11).

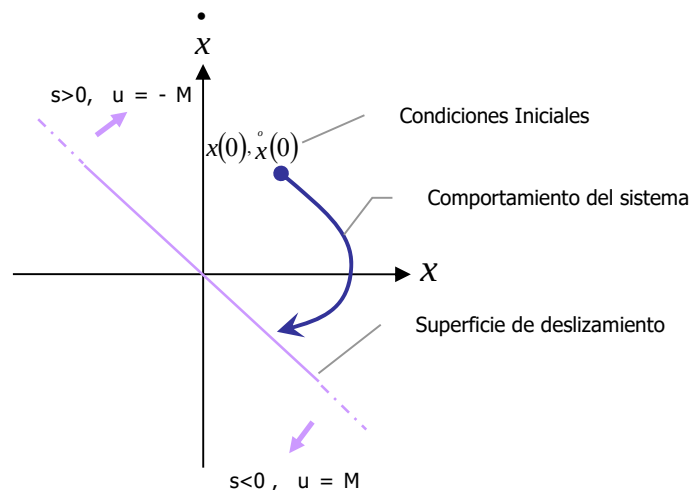


Figura 1-11. El controlador de modos deslizantes.

Cuando se llega al valor de $s = 0$ (el argumento de la función $sign$ es igual a cero), tenemos la discontinuidad del control; es decir, la función donde el control

²¹ Esta magnitud estará delimitada por las características del sistema a controlar como se define en la sección 1.2.5

²² Es llamada también superficie de conmutación.

es “conmutado”, porque ahora se está trabajando con la ecuación de movimiento del sistema (superficie de deslizamiento) es decir, la ecuación de control es modificada, quedando ahora la ecuación que se tenía cuando el argumento de *sign* tiende a cero, donde esta ecuación está definida por el algoritmo²³ de acuerdo con la forma en que se desea se comporte el estado del sistema mientras tiende a cero.

Aunque con este control podemos alcanzar la superficie de deslizamiento rápidamente, e incluso mantenernos en un margen cercano a está²⁴, el sistema llegará al origen del espacio de estados en un tiempo infinito, debido a la función exponencial que caracteriza su deslizamiento.

1.2.2. DESCRIPCIÓN DEL FUNCIONAMIENTO

Generalizando podemos decir que el objetivo es que nuestro sistema se encuentre siempre en el origen del espacio de estados (0,0), que sería lo mismo que decir que $x=0$ y que $\dot{x}=0$ ²⁵. Para lograr esta estabilidad de la planta se propone una ecuación de movimiento **Error! No se encuentra el origen de la referencia.** (s), que equivale al comportamiento que se desea del sistema en la discontinuidad del control u , para modos deslizantes de primer orden donde el control u está definido como:

$$u = -M \text{sign}(s) \quad \text{Ec 1.8}$$

y la ecuación de movimiento para primer orden es:

$$s = cx + \dot{x} \quad \text{Ec 1.9}$$

donde s es el argumento de la función *sign* que se encuentra en la definición de u , esto implica que $s = 0$ en algún tiempo finito después de iniciado el control. Al igualar a cero esta función se obtiene que:

²³ Para los modos deslizantes de primer orden, este algoritmo en el espacio de estados es una línea recta. Ver sección 1.2.2.

²⁴ No podemos mantenernos en la superficie por las imperfecciones del sistema durante la conmutación, las cuales definen este rango de cercanía a la superficie de deslizamiento.

²⁵ Esto se puede lograr haciendo un cambio de variable, posteriormente en esta sección se verá de manera más detenida como hacerlo.

$$\dot{x} = -cx$$

Ec 1.10

en el espacio de estados esto representa una línea recta²⁶, que será la superficie de conmutación y que tendrá una pendiente que depende del valor de c . Como se ve en la Figura 1-12.

Esto mantiene la misma idea de control inicial: que es que la función y su derivada sean de signos contrarios para hacer que el sistema converja, por lo cual solo puede ocurrir en los cuadrantes *II* y *IV*, que como se ve en la Figura 1-12 es en los cuadrantes donde se ubica la línea.

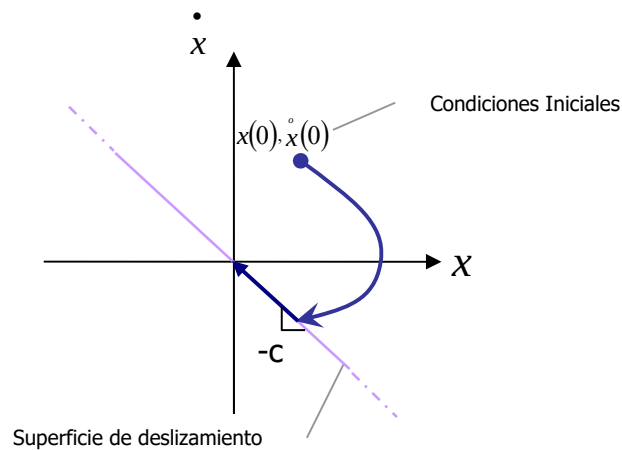


Figura 1-12. Ubicación gráfica de c .

Si hacemos la transformada inversa de Laplace de la ecuación donde $s = 0$ obtenemos:

$$x = x(0)e^{-ct}$$

Ec 1.11

de donde la salida del sistema x , depende del estado inicial de la derivada de x y del valor de c .

En resumen, y como se puede ver en la Figura 1-12, el control de la planta es u , y toma el valor de M o $-M$ dependiendo del signo de s , solo mientras se alcanza la superficie de deslizamiento. En ese momento, s toma el valor de cero y u se vuelve indefinida, por lo que u ya no realiza control alguno sobre la planta, pero al volverse $s = 0$, se obliga a que el comportamiento del sistema sea estable

²⁶ Como ya se mencionó en la sección 1.1.4, una línea en el espacio de estados equivale a un comportamiento exponencial en el tiempo, tanto de x como de su derivada.

y llegue al valor deseado de manera exponencial²⁷. Si por alguna perturbación externa o incluso propia del sistema²⁸ el comportamiento del sistema se aleja de la superficie de deslizamiento, el control u vuelve a activarse y a controlar el sistema hasta que regrese a la superficie de deslizamiento, obligando así el control u a que la dinámica de la planta sea la superficie de deslizamiento.

Todo el análisis que se ha hecho hasta el momento, es suponiendo que el objetivo es llegar al origen del sistema, pero ¿qué pasa si queremos una velocidad constante del sistema (que la derivada de x sea una constante) o una posición diferente de cero ($x \neq 0$)? Hay dos maneras de analizar este caso, una de ellas es haciendo que el punto al que se quiere llegar para estabilizar el sistema sea diferente del origen. Esto requiere modificar las ecuaciones del algoritmo de control.

La otra forma, que es la utilizada, es realizar una transformación (cambio de variable) que iguale el punto que deseamos de estabilidad del sistema con el origen del plano de estados. La transformación que utilizaremos será tal que la variable por controlar sea el error²⁹, así el objetivo será que el error del sistema sea cero, lo cual implica que el comportamiento del sistema sea igual al comportamiento deseado. Esto mismo en ecuaciones es:

$$s = ce + \dot{e} \quad \text{Superficie de Deslizamiento} \quad \text{Ec 1.12}$$

$$u = -M \text{sign}(s) \quad \text{El control del sistema} \quad \text{Ec 1.13}$$

donde

$$e = x_0 - x$$

x – variable de salida del sistema

x_0 – valor deseado

El funcionamiento de los modos deslizantes ideales en este caso será:

²⁷ La función exponencial se representa como una línea recta en el espacio de estados.

²⁸ Pueden considerarse las imperfecciones en el modelado del sistema, o en la toma de mediciones del estado del sistema como perturbaciones propias del sistema

²⁹ Es decir que la variable se vuelva el valor deseado menos el valor del sistema.

- Con el control $u = -M\text{sign}(s)$ se llegará a la superficie de deslizamiento donde $s = 0$, sin importar la condición inicial del sistema.
- Una vez en la superficie ($\dot{e} = -Ce$), el sistema se deslizará sobre ella hasta llegar al origen del espacio de estados (plano que ahora es e vs $\dot{e}$).
- El origen de este plano indica que $e = 0$ y por lo tanto que $x = x_0$; y que $\dot{e} = 0$ y por lo tanto $\dot{x} = \dot{x}_0$ que era lo que deseábamos para el comportamiento del sistema.

Cabe mencionar que los modos deslizantes ideales no existen debido a que no es posible obtener una frecuencia infinita de conmutación, para lograr el deslizamiento ideal, dando lugar a problemas para la implementación y correcto funcionamiento de este tipo de control, esto se verá con detalle en la sección 1.2.3

Los modos deslizantes de primer orden se pueden aplicar para controlar sistemas de diferente orden, la diferencia en la aplicación de esta metodología de control es que será necesario un control extra (otra $u_k = -M_k\text{sign}(s)$, y otra superficie de deslizamiento) por cada orden del sistema (cuando el orden es mayor que dos).

1.2.3. EL PROBLEMA DEL *CHATTERING*

Un modo deslizante ideal existe sólo cuando la trayectoria de estado de la planta controlada es igual a la trayectoria deseada ($s = 0$) en cada $t \geq t_0$ para cualquier t_0 , lo cual puede requerir una velocidad infinita de conmutación. En sistemas reales, un controlador de conmutación tiene imperfecciones que limitan la conmutación a una frecuencia finita. Así el punto que está representando al sistema oscila en el vecindario de la superficie de conmutación (ver Figura 1-13). Esta frecuencia generada en la salida de la dinámica del sistema debida a la acción de control de modos deslizantes es llamada *chattering*.

La región de oscilación cercana a la superficie de deslizamiento (la amplitud del *chattering*) depende del comportamiento del sistema (que tan rápido cambie

de estado) del tiempo de muestreo, de la magnitud de M dentro del control (u), del tiempo en que se realiza la conmutación de la función *sign* y de los errores en la toma de las mediciones.

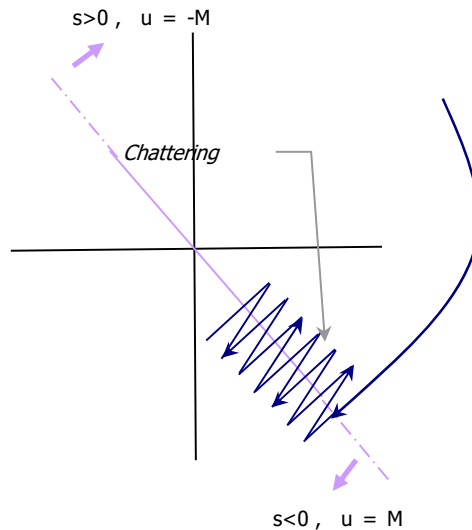


Figura 1-13. *Chattering* en modos deslizantes de primer orden.

Se debe tener en cuenta que para conocer el estado del sistema necesitamos estar muestreando el estado del mismo constantemente. Para esto necesitamos definir un paso de tiempo que puede ser variable o constante para intentar conocer nuestro sistema durante todos los instantes de tiempo. Por más pequeño que hagamos este paso de tiempo siempre habrá cambios en el sistema entre un tiempo y el siguiente.

Cuando se está cerca de la superficie de deslizamiento el tamaño de este paso afectará el valor que tiene a la salida el control u . Este control además, por característica propia de los modos deslizantes, conmuta entre valores grandes y de signos opuestos, provocando cambios rápidos en el comportamiento del sistema que no le permitirán alcanzar exactamente la superficie de deslizamiento. Este efecto, llamado *chattering*, se puede ver en la Figura 1-13.

En otras palabras, si se supone que para un tiempo de muestreo dado se tiene $u = M$ y el sistema se comporta de acuerdo con la regla de control, provocando que la dinámica de la planta tienda a la superficie de deslizamiento, una vez en la cercanía de la superficie de deslizamiento, el muestreo se realiza

cuando todavía es necesaria una acción positiva de control; es decir, $u = M$. Para el siguiente tiempo de muestreo ya es necesaria una acción de control de signo contrario, es decir, $u = -M$, esto debido a que la dinámica de la planta se “pasó” de la superficie de deslizamiento. Esta acción de control $u = -M$ se mantiene, pero si para el próximo tiempo de muestreo la dinámica de la planta ya volvió a cruzar a la superficie de deslizamiento, el control volverá a conmutar, buscando que la dinámica del sistema regrese a la superficie de deslizamiento, repitiendo este fenómeno mientras la dinámica del sistema se encuentre en la cercanía de la superficie de deslizamiento.

Aun si se tuviera de manera analógica la medición del estado, el tiempo que tarda la conmutación del control produciría el mismo efecto en la trayectoria de estado del sistema, la diferencia consistiría en que el rango de error que envuelve a la superficie de deslizamiento (la amplitud del *chattering*) dependería del tiempo en el que se realiza la conmutación.

1.2.4. CONSTANTES PARA EL CONTROLADOR DE MODOS DESLIZANTES DE PRIMER ORDEN

Para sistemas del mismo orden y de diferentes parámetros, la variación estará en el coeficiente de sign y en el valor de c . Esto hace práctico este método, ya que solo es necesario variar dos parámetros para poder controlar sistemas con diferentes características mientras mantengan el mismo orden.

El control que se utilizará será el de estructura integrada, donde solo se realiza un lazo de control y se busca controlar la velocidad angular y por consiguiente el par³⁰. Para ello es necesario que el sistema sea expresado de modo que el control solo se encuentre en la ecuación de la mayor derivada. Para este caso en la ecuación de la segunda derivada.

Lo primero que es necesario ubicar es la variable que se controlará, que como ya habíamos mencionado será el error, el cual está definido como la

³⁰ Si se logra controlar la velocidad del motor dentro de un rango de variación de la carga, se estará controlando también la corriente en este rango y el par generado. **Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

diferencia entre la señal deseada y la señal de salida del sistema $e = (\omega^* - \omega)$, posteriormente se define la superficie de conmutación $s = ce + \dot{e}$ y el control que para modos deslizantes de primer orden es $u = -u_0 \text{sign}(s)$.

De acuerdo con la dinámica deseada de la planta se selecciona un valor de u_0 y de c , donde u_0 estará limitado por los valores máximos de conmutación del sistema; es decir, las limitantes físicas del mismo y también tendrá un límite inferior definido por los parámetros del sistema³¹. El valor de c tendrá que ver con el comportamiento exponencial con el cual se alcanza al valor de cero del error, es decir con la curva de deslizamiento sobre la cual se alcanzarán los valores deseados del comportamiento del sistema³².

1.2.5. ALGORITMO DE PRIMER ORDEN PARA EL MOTOR DE CORRIENTE DIRECTA³³.

El modelo del motor está definido por las siguientes ecuaciones:

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} = -R_a i_a(t) - k_{bf} \omega(t) + v_a(t) \quad \text{Ec 1.14}$$

$$J_{eq} \frac{d\omega(t)}{dt} = k_{bf} i_a(t) - f_{eq} \omega(t) \quad \text{Ec 1.15}$$

Para poder aplicar el control de estructura integrada necesitamos que el modelo esté expresado de manera que el control se encuentre solo en la ecuación de la última derivada del error, esto es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 + f(t) - bu \end{aligned} \quad \text{Ec 1.16}$$

³¹ Este límite para el motor de DC se estudiará en la sección 1.2.5.

³² En la sección 1.2.5 se propondrán valores de C y u_0 para el motor de DC con el que se está trabajando.

³³ Para mayor información sobre el funcionamiento, caracterización y modelado del motor con el que se trabajó en esta tesis vea los anexos **iError! No se encuentra el origen de la referencia.**, **iError! No se encuentra el origen de la referencia.** y **iError! No se encuentra el origen de la referencia.**.

Lo primero que se debe hacer es definir la variable que se controlará por modos deslizantes, como el objetivo es controlar la velocidad angular, se definirá a las variables de estado del sistema como el error entre la velocidad angular deseada y la velocidad angular medida, esto es:

$$x_1 = e = (\omega^* - \omega) \quad \text{Ec 1.17}$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{e} = \dot{\omega}^* - \dot{\omega} \quad \text{Ec 1.18}$$

Con éstas y por medio de sustituciones algebraicas llegaremos a la forma deseada del sistema, pasos que se realizarán a continuación. El sistema al que queremos llegar es:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \text{Ec 1.19}$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{e} = \ddot{\omega}^* - \ddot{\omega} \quad \text{Ec 1.20}$$

Para ello es necesario conocer solamente la segunda derivada de la velocidad angular, puesto que suponemos que ya conocemos la segunda derivada de la velocidad angular de referencia. La segunda derivada de la velocidad angular se debe obtener a partir de las ecuaciones del modelo del motor, esto es:

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} = -R_a i_a(t) - k_{bf} \omega(t) + v_a(t) \quad \text{Ec 1.21}$$

$$i_a(t) = \frac{J_{eq}}{k_{bf}} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{f_{eq}}{k_{bf}} \omega(t) \quad \text{Ec 1.22}$$

Sustituyendo la corriente obtenida de la segunda ecuación en la primera ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} L_a \frac{d}{dt} \left[\frac{J_{eq}}{k_{bf}} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{f_{eq}}{k_{bf}} \omega(t) \right] &= -R_a \left[\frac{J_{eq}}{k_{bf}} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{f_{eq}}{k_{bf}} \omega(t) \right] - k_{bf} \omega(t) + v_a(t) \\ \frac{L_a J_{eq}}{k_{bf}} \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + \frac{L_a f_{eq}}{k_{bf}} \frac{d\omega(t)}{dt} &= -\frac{R_a J_{eq}}{k_{bf}} \frac{d\omega(t)}{dt} - \frac{R_a f_{eq}}{k_{bf}} \omega(t) - k_{bf} \omega(t) + v_a(t) \end{aligned} \quad \text{Ec 1.23}$$

despejando la segunda derivada de la velocidad angular, se obtiene:

$$\begin{aligned}
-\frac{L_a J_{eq}}{k_{bf}} \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} &= \frac{L_a f_{eq}}{k_{bf}} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{R_a J_{eq}}{k_{bf}} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{R_a f_{eq}}{k_{bf}} \omega(t) + k_{bf} \omega(t) - v_a(t) \\
\frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} &= \frac{-k_{bf}}{L_a J_{eq}} \left[\frac{L_a f_{eq}}{k_{bf}} + \frac{R_a J_{eq}}{k_{bf}} \right] \frac{d\omega(t)}{dt} - \frac{k_{bf}}{L_a J_{eq}} \left[\frac{R_a f_{eq}}{k_{bf}} + k_{bf} \right] \omega(t) + \frac{k_{bf}}{L_a J_{eq}} v_a(t)
\end{aligned}$$

Ec 1.24

substituyendo la segunda derivada de la velocidad angular

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \ddot{\omega}^* - \left[\frac{-k_{bf}}{L_a J_{eq}} \left[\frac{L_a f_{eq}}{k_{bf}} + \frac{R_a J_{eq}}{k_{bf}} \right] \dot{\omega} - \frac{k_{bf}}{L_a J_{eq}} \left[\frac{R_a f_{eq}}{k_{bf}} + k_{bf} \right] \omega + \frac{k_{bf}}{L_a J_{eq}} v_a \right] \\
\dot{x}_2 &= \ddot{\omega}^* + \left(\frac{f_{eq}}{J_{eq}} + \frac{R_a}{L_a} \right) \dot{\omega} + \left(\frac{R_a f_{eq}}{L_a J_{eq}} + \frac{k_{bf}^2}{L_a J_{eq}} \right) \omega - \frac{k_{bf}}{L_a J_{eq}} v_a
\end{aligned}$$

Ec 1.25

Sumando y restando los términos necesarios para los valores de referencia de la velocidad angular y su derivada:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= \ddot{\omega}^* + \left(\frac{f_{eq}}{J_{eq}} + \frac{R_a}{L_a} \right) \dot{\omega} + \left(\frac{R_a f_{eq}}{L_a J_{eq}} + \frac{k_{bf}^2}{L_a J_{eq}} \right) \omega - \frac{k_{bf}}{L_a J_{eq}} v_a + \left(\frac{f_{eq}}{J_{eq}} + \frac{R_a}{L_a} \right) \dot{\omega}^* - \left(\frac{f_{eq}}{J_{eq}} + \frac{R_a}{L_a} \right) \dot{\omega}^* \\
&\quad + \left(\frac{R_a f_{eq}}{L_a J_{eq}} + \frac{k_{bf}^2}{L_a J_{eq}} \right) \omega^* - \left(\frac{R_a f_{eq}}{L_a J_{eq}} + \frac{k_{bf}^2}{L_a J_{eq}} \right) \omega^*
\end{aligned}$$

Ec 1.26

y por último agrupando términos:

$$\dot{x}_2 = - \left(\frac{R_a f_{eq}}{L_a J_{eq}} + \frac{k_{bf}^2}{L_a J_{eq}} \right) x_1 - \left(\frac{f_{eq}}{J_{eq}} + \frac{R_a}{L_a} \right) x_2 + \ddot{\omega}^* + \left(\frac{f_{eq}}{J_{eq}} + \frac{R_a}{L_a} \right) \dot{\omega}^* + \left(\frac{R_a f_{eq}}{L_a J_{eq}} + \frac{k_{bf}^2}{L_a J_{eq}} \right) \omega^* - \frac{k_{bf}}{L_a J_{eq}} v_a$$

Ec 1.27

De esta manera tenemos al sistema de la forma necesaria, donde los valores de los términos de la ecuación son:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 + f(t) - bu
\end{aligned}$$

Ec 1.28

donde

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{R_a f_{eq}}{L_a J_{eq}} + \frac{k_{bf}^2}{L_a J_{eq}} \\
a_2 &= \frac{f_{eq}}{J_{eq}} + \frac{R_a}{L_a} \\
f(t) &= \ddot{\omega}^* + \left(\frac{f_{eq}}{J_{eq}} + \frac{R_a}{L_a} \right) \dot{\omega}^* + \left(\frac{R_a f_{eq}}{L_a J_{eq}} + \frac{k_{bf}^2}{L_a J_{eq}} \right) \omega^* \\
b &= \frac{k_{bf}}{L_a J_{eq}} \\
u &= v_a
\end{aligned}
\tag{Ec 1.29}$$

Ahora, es necesario diseñar la superficie de conmutación que dependerá del comportamiento que deseemos del sistema para que se acerque al valor deseado, de acuerdo con la siguiente ecuación³⁴:

$$s = cx_1 + x_2 = cx_1 + \dot{x}_1 \tag{Ec 1.30}$$

Y donde el control es:

$$u = -u_0 \text{sign}(s) \tag{Ec 1.31}$$

Siguiendo la condición de modos deslizantes $s \dot{s} < 0$

$$s \dot{s} = \dot{s}(cx_1 - a_1 x_1 - a_2 x_2 + f(t) - bu_0) < 0 \tag{Ec 1.32}$$

$$cx_1 - a_1 x_1 - a_2 x_2 + f(t) - bu_0 < 0 \tag{Ec 1.33}$$

$$bu_0 > cx_1 - a_1 x_1 - a_2 x_2 + f(t) \tag{Ec 1.34}$$

$$u_0 > \frac{1}{b} |cx_1 - a_1 x_1 - a_2 x_2 + f(t)| \tag{Ec 1.35}$$

El valor mínimo de u_0 está delimitado por el valor de las perturbaciones, los límites de la variable de control del sistema x_1 , y de las derivadas de la misma x_2 , además del valor c que describe la aproximación del sistema al origen del plano de estados.

³⁴ El valor de c se selecciona de manera que mejor cumpla con la respuesta que se desee a la salida del sistema, en las simulaciones de este capítulo (sección 1.3) se verán diferentes valores de c y de u_0 para el motor de CD.

1.3. Simulación del algoritmo de primer orden.

Las simulaciones de este capítulo se realizan con las matrices que definen el modelo del motor en espacio de estados. El modelo generalizado de un motor de CD esta expresado en las siguientes ecuaciones:

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} = -R_a i_a(t) - k_{bf} \omega(t) + v_a(t) \quad \text{Ec 1.36}$$

$$J_{eq} \frac{d\omega(t)}{dt} = k_{bf} i_a(t) - f_{eq} \omega(t) \quad \text{Ec 1.37}$$

De ellas podemos obtener una representación del sistema en el espacio de estados. Despejando las derivadas tanto de la velocidad como de la corriente, en la correspondiente ecuación, y definiendo los vectores de estado del sistema de la siguiente manera:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{d\omega(t)}{dt} \\ \frac{di_a(t)}{dt} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} \quad \text{Ec 1.38}$$

así las matrices que definen al motor son:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{k_{bf}}{J_{eq}} & \frac{f_{eq}}{J_{eq}} \\ -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k_{bf}}{L_a} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} \quad \text{Ec 1.39}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

donde el vector de entradas está definido como:

$$U = [v_a(t)] \quad \text{Ec 1.40}$$

Substituyendo los valores de los parámetros que caracterizan a nuestro motor en particular³⁵ y suponiendo que el coeficiente de fricción viscosa f_{eq} es cero³⁶, obtenemos los valores numéricos de las matrices de estados; es decir:

³⁵ Ver anexo **iError! No se encuentra el origen de la referencia.** sobre los parámetros del motor

$$A = \begin{bmatrix} 125 & 0 \\ -15635 & -25 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 224.32 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Ec 1.41

Para encontrar los valores de c y u_0 que definen el comportamiento deseado a la salida del sistema, en nuestro caso el motor de CD, es necesario simular el comportamiento del sistema para diferentes valores, tanto de c como de u_0 , de manera que se encuentren los valores que mejor se ajusten.

El diagrama que se utilizó en simulink para el algoritmo de modos deslizantes de primer orden se muestra en la Figura 1-14, el bloque del controlador es llamado *FOSM* (*First Order Sliding Modes*) el diagrama del controlador se muestra en la Figura 1-15.

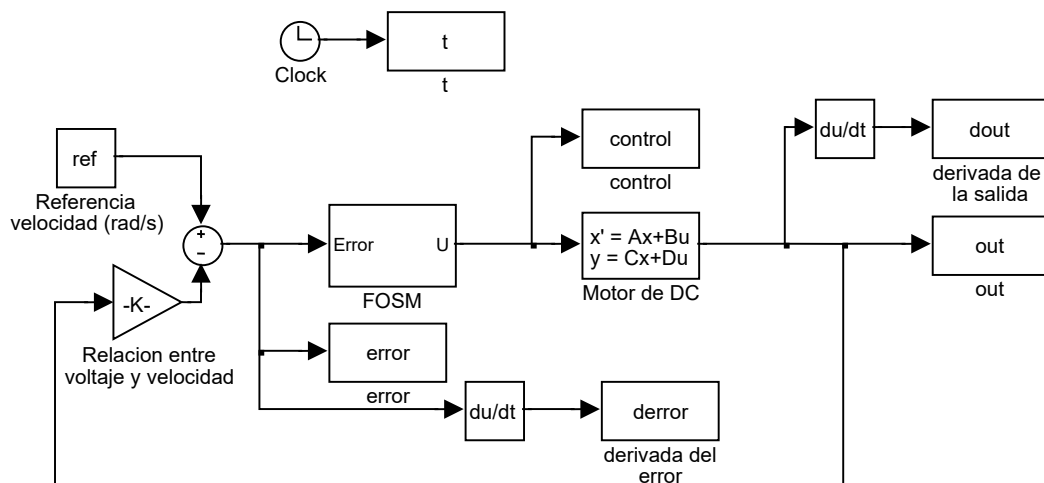


Figura 1-14. Diagrama del controlador de modos deslizantes de primer orden

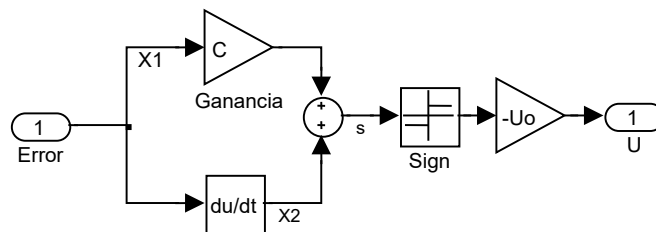


Figura 1-15. Bloque FOSM

³⁶ Se realiza esta suposición debido a que el valor del coeficiente de fricción viscosa rotacional suele ser pequeño, y difícil de medir.

Las simulaciones se realizaron con un tiempo de muestreo de 0.1[ms], en modo continuo de paso fijo (ODE1³⁷)**Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

Durante esta tesis se aplica una entrada escalón como señal de referencia del controlador para la realización de las simulaciones, debido a que es una manera clásica de observar el comportamiento de un sistema**Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

1.3.1. RESPUESTA A UNA ENTRADA ESCALÓN

Durante las simulaciones se utilizó un valor de referencia de la velocidad deseada³⁸ a la salida del motor de 100 *rad/s*, además se utilizó el valor de $u_0 = 24$ para las simulaciones debido a que es el valor del voltaje nominal de entrada al sistema, por lo que sería el valor máximo de salida del controlador. Por otro lado se realizaron simulaciones para diferentes valores de c , de esta manera podremos observar el comportamiento del sistema con base en los parámetros del controlador, como se ve en la Figura 1-16.

En la última gráfica de salida de la Figura 1-16 se alcanzó el valor de referencia dentro de un rango cercano al valor deseado, utilizaremos estos parámetros del controlador para analizar el funcionamiento del controlador.

Obsérvese que existe un error en estado estable para todos los valores de c con los que se simuló, pero este error disminuye conforme se aumenta el valor del mismo. Para los valores de $c = 15$ y $c = 30$ obtengo un error en estado estable del 2% y del 0.5% respectivamente. La magnitud de esta oscilación se puede disminuir, de acuerdo con las necesidades del sistema, si se incrementa el valor de c , o si se disminuye el tiempo de muestreo.

c=1	c=5
------------	------------

³⁷ Utilizando el método de integración numérica de Euler para encontrar el estado continuo del sistema a partir de las derivadas de estado del modelo.

³⁸ Constante de entrada *ref* en la Figura 1-14

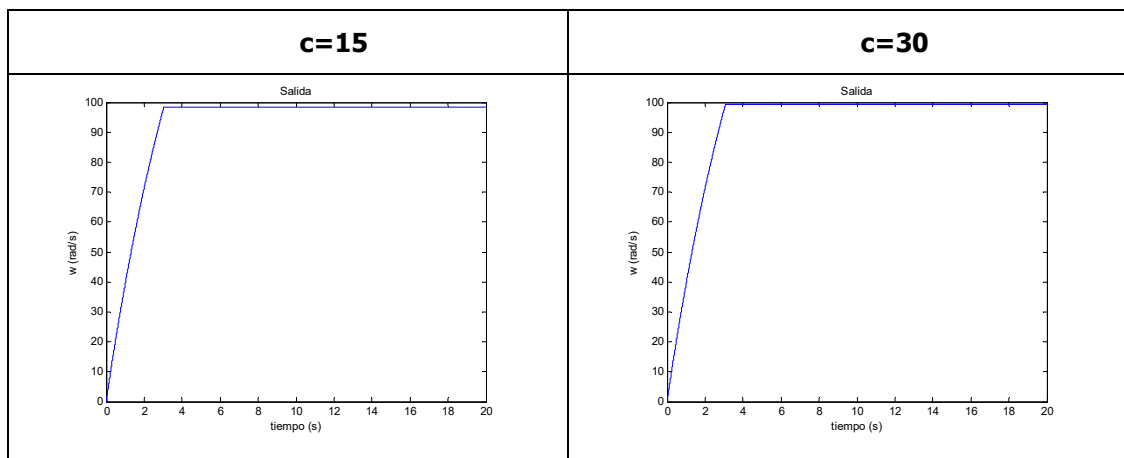
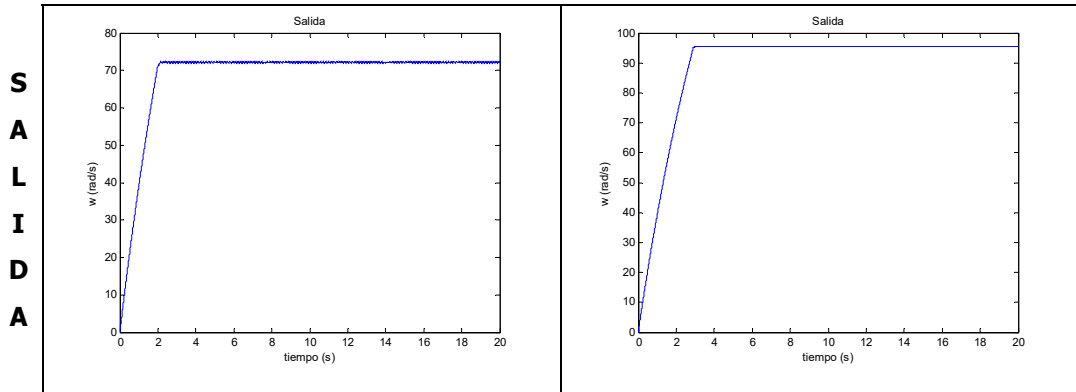


Figura 1-16. Comparación de la velocidad de salida para diferentes valores de c .

Se observa que el tiempo de levantamiento es el mismo para los dos últimos casos, esto se debe a que u_0 tiene el mismo valor³⁹; es decir, llegan a la superficie de deslizamiento en el mismo intervalo de tiempo, el cual depende de la dinámica del sistema. También observemos que no existe sobrepaso a la salida del sistema.

Para analizar el comportamiento del sistema como se vio durante el capítulo, es necesario tener las gráficas en el espacio de estados del sistema, tanto del error como de la salida del motor.

Para el valor de $u_0 = 24$ y $c = 30$ la gráfica de salida del sistema en el espacio de estados se muestra en la Figura 1-17, donde se observa que tiende al punto con coordenadas $(100,0)$; es decir, que el motor tiende a una velocidad de 100 rad/s y sin aceleración.

³⁹ Esto se puede observar en las gráficas de salida del controlador para cada simulación.

En la Figura 1-18 se muestra la gráfica en el espacio de estados del error entre el valor deseado y la salida del sistema, en esta gráfica se puede observar que el comportamiento del sistema tiende al origen, ya que el objetivo es que tanto el error como su derivada sean cero.

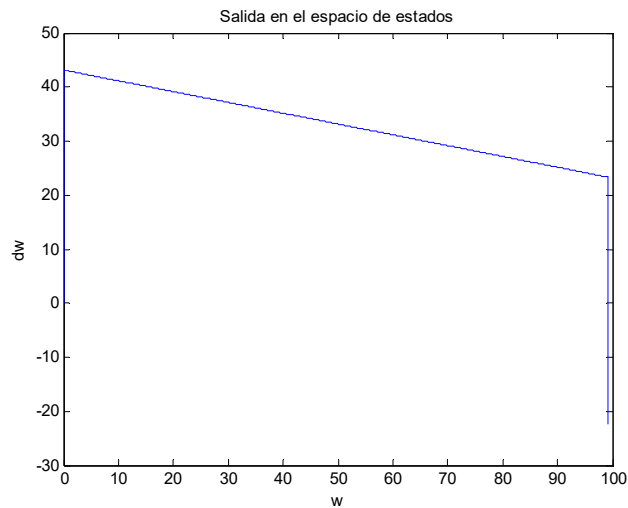


Figura 1-17. Salida del motor de CD en el espacio de estados

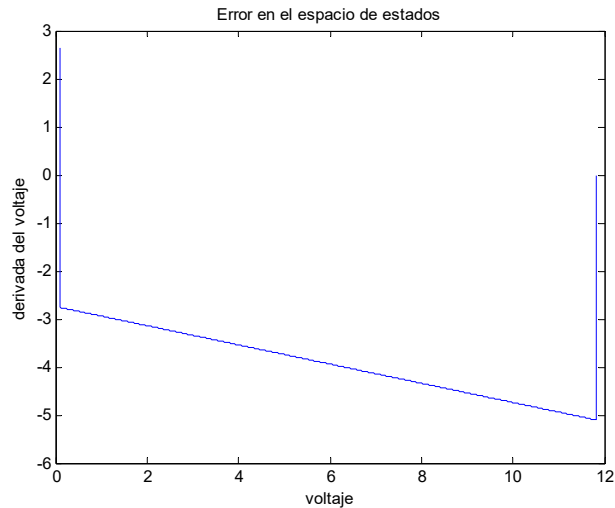


Figura 1-18. Error en la salida del motor en el espacio de estados

Además en la Figura 1-19 se muestra el comportamiento del control para el sistema, y como se mantiene en el valor máximo hasta que alcanza a la superficie de deslizamiento, que es cuando inicia la conmutación para de esta manera lograr mantenerse en ella.

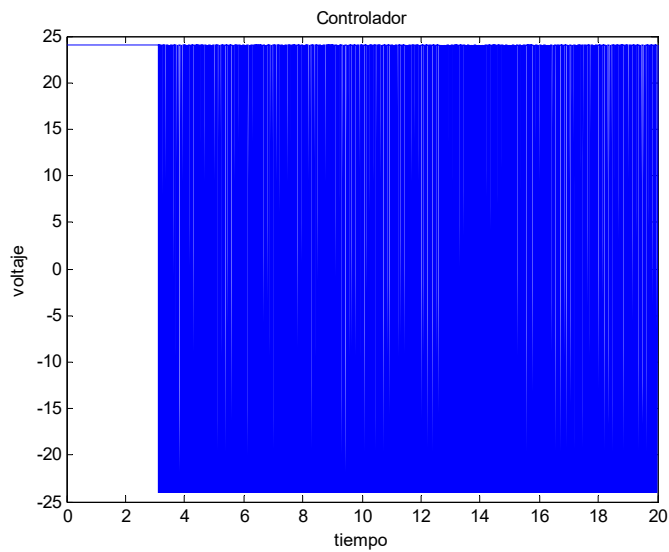


Figura 1-19. Salida del controlador (FOSM)

Analicemos ahora el comportamiento del sistema si mantenemos constante el valor de c y la variación la realizamos en el valor de u_0 . Éste podría ser el caso de un sistema para el cual el valor de entrada pudiera ser mayor o menor. Mantengamos $c = 30$.

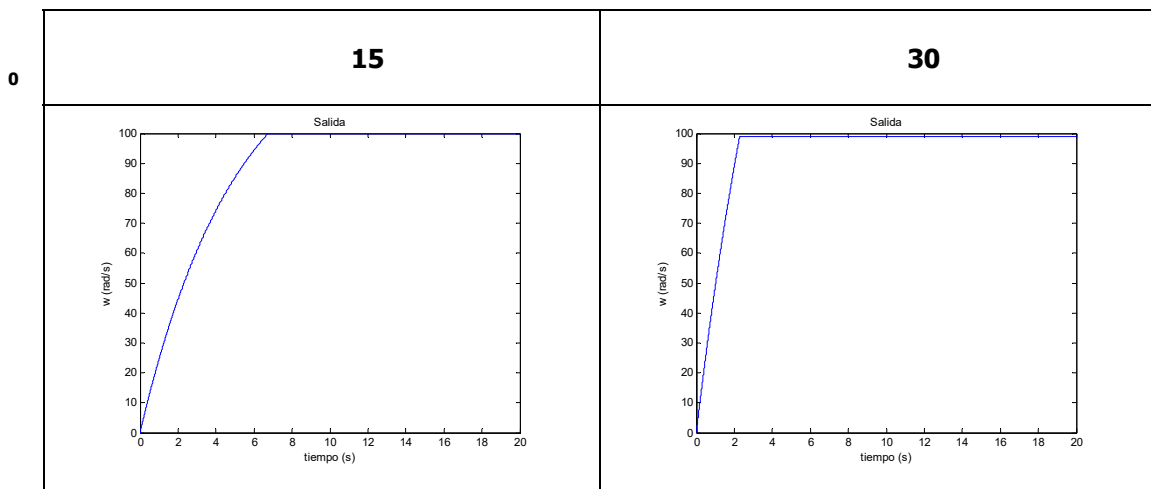


Figura 1-20. Comparación de la velocidad de salida del motor de CD para diferentes valores de u_0 .

Observemos que el valor del tiempo de levantamiento para la salida del sistema cambia notoriamente, siendo menor en el caso de $u_0 = 30$, esto debido a que el sistema llega a la superficie de deslizamiento mas rápidamente, de acuerdo con su propia dinámica.

Mas el hecho de tener un valor mayor en u_0 provoca una oscilación con un periodo y amplitud mayor, teniendo un error en estado permanente de mayor amplitud, y que puede afectar la dinámica deseada del motor por ser de menor frecuencia.

Por otro lado este valor de u_0 excede las especificaciones de voltaje de entrada del motor, pudiendo provocar una corriente mayor a la nominal que podría provocar daños en el motor. Debido a que trabajamos con control conmutado, lo que obtenemos son picos de corriente dentro del motor, los cuales se ven atenuados por la acción inductiva propia del motor⁴⁰. También es necesario verificar que la fuente sea capaz de entregar los picos de corriente que se requieren si no se desea ver afectado el comportamiento deseado a la salida del motor.

1.3.2. RESPUESTA ANTE UNA PERTURBACIÓN SENOIDAL

Las perturbaciones son señales externas, no deseadas y que debido al medio en el que se encuentra el sistema se agregan a la dinámica del mismo, provocando respuestas del sistema diferentes a los valores de referencia, volviendo así tarea del controlador contrarrestar estas señales para llegar al valor deseado de salida del motor.

De acuerdo con el lazo de control que manejamos en este trabajo⁴¹ tanto el controlador como el acondicionar se encuentra en la computadora, mientras que el amplificador de potencia y el motor son elementos externos, dando así estos últimos cabida a la existencia de perturbaciones que afecten el comportamiento del motor.

Se le agrega en la simulación una perturbación a la salida del motor⁴², simulando un error en la medición de la variable de salida del motor. Primero

⁴⁰ Es recomendable verificar dentro de las especificaciones del motor la corriente instantánea que es capaz de soportar.

⁴¹ El lazo de control señalado en la introducción de este trabajo.

⁴² En la simulación se suma una señal senoidal a la salida del bloque de espacio de estados que describe el motor.

añadiremos una perturbación senoidal de una amplitud de 1 rad/s ⁴³ y una frecuencia de 1000 rad/s , como se observa en la Figura 1-21.

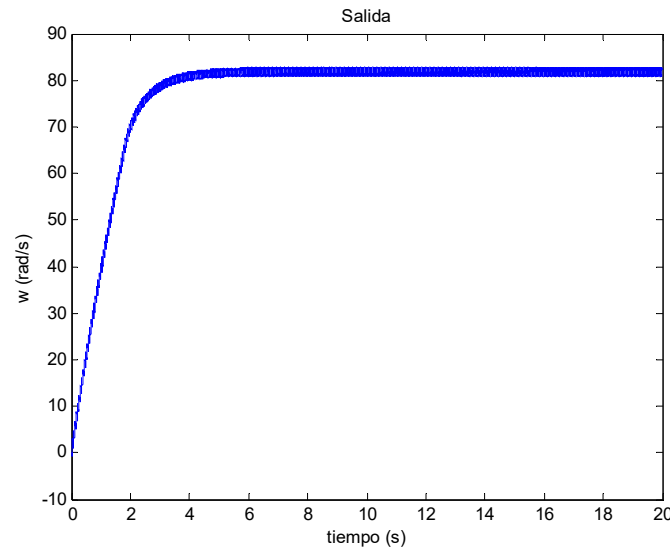


Figura 1-21. Salida del motor con una perturbación.

La amplitud de la perturbación anterior equivalía al 1% del valor de salida deseado que afectó el valor de estado estable a la salida del motor, agregando la forma de la señal de la perturbación a la salida⁴⁴.

Si la perturbación que se agrega al motor es de mayor amplitud pero menor frecuencia, al controlador le es más sencillo contrarrestarla. En la Figura 1-22 se agregó una perturbación de amplitud 25 rad/s con una frecuencia de 1 rad/s al motor, teniendo *chattering* a la salida del motor⁴⁵, aun así llega al valor deseado de salida del motor.

Para este caso la amplitud de la perturbación es del 25% del valor de salida, sin embargo el controlador logra un mejor control para la señal de salida del motor.

⁴³ Unidades de la velocidad de salida del motor.

⁴⁴ Las oscilaciones que presenta la señal de salida del motor son de la misma frecuencia que la perturbación que se le agregó al motor.

⁴⁵ Recordemos que para este controlador en el caso donde no existían perturbaciones, también había *chattering*.

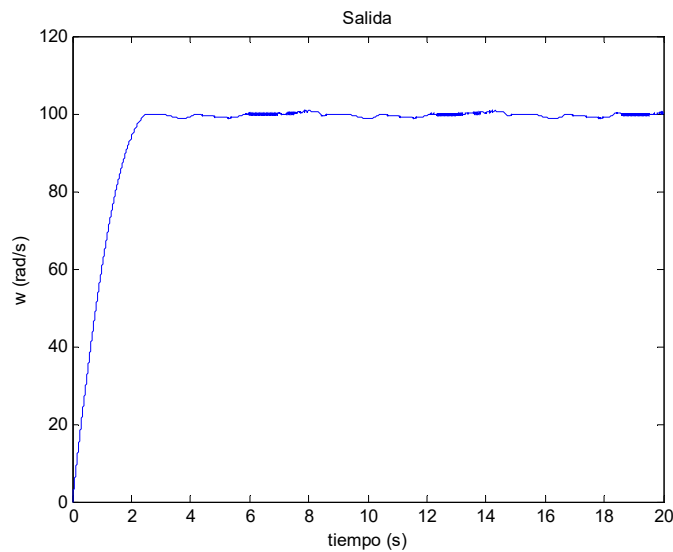


Figura 1-22. Salida del motor añadiendo una perturbación.

Se observa que conforme aumenta la frecuencia en la perturbación agregada, al controlador se le dificulta seguirla, esto es debido a que la frecuencia de esta perturbación se acerca a la frecuencia de muestreo, ocurriendo un efecto similar al del *chattering*⁴⁶, solo que no es provocado por el algoritmo.

Simularemos ahora el lazo de control del motor, sumando una perturbación a la salida del control, es equivalente que el amplificador de potencia agregara al sistema una perturbación.

Primero se agregan perturbaciones de alta frecuencia 1000 *rad/s* y de diferentes amplitudes, en la Figura 1-23 se muestra la salida del motor para una perturbación de 1V de amplitud, mientras que en la Figura 1-24 se muestra la salida para una perturbación de amplitud 12V.

⁴⁶ Ver sección 1.2.3, sobre el *chattering* en este algoritmo.

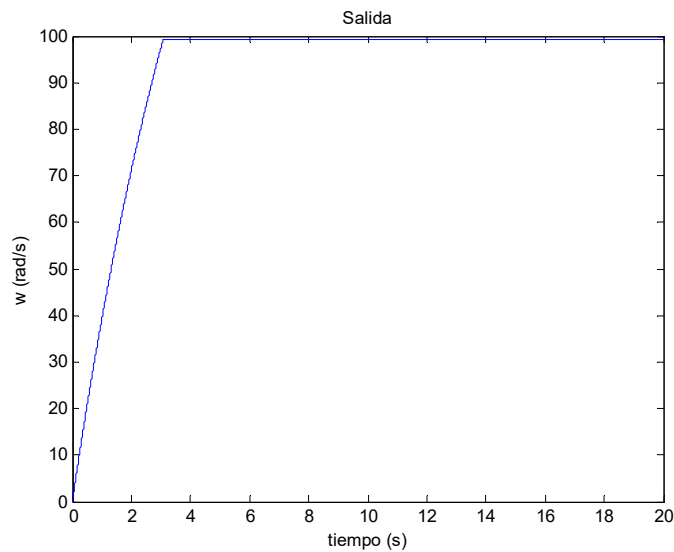


Figura 1-23. Salida del motor añadiendo una perturbación.

Las altas frecuencias de la perturbación que entran al motor son filtradas por el mismo, permitiéndole al controlador realizar su acción de control. A pesar de que la perturbación es filtrada, solo logra disminuir su amplitud sin eliminar la señal de alta frecuencia, es por esto que en la gráfica de salida del motor se encuentra montada la señal de alta frecuencia en la señal de *chattering* propia del algoritmo. Esto se puede observar en la Figura 1-25 que es un acercamiento de la Figura 1-24.

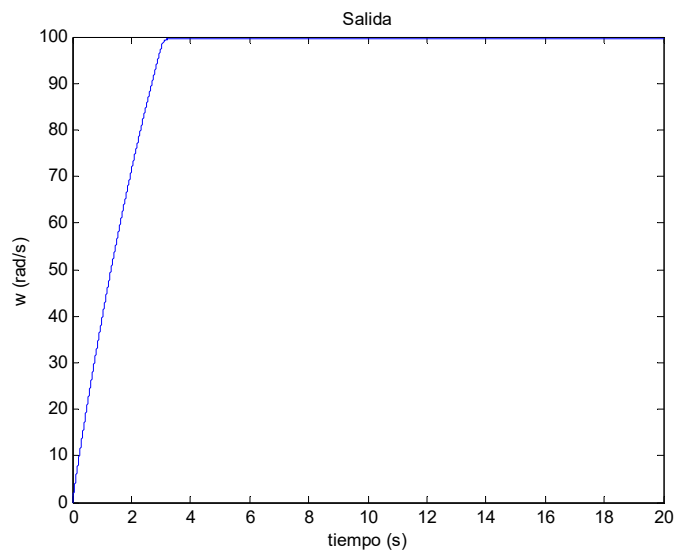


Figura 1-24. Salida del motor añadiendo una perturbación.

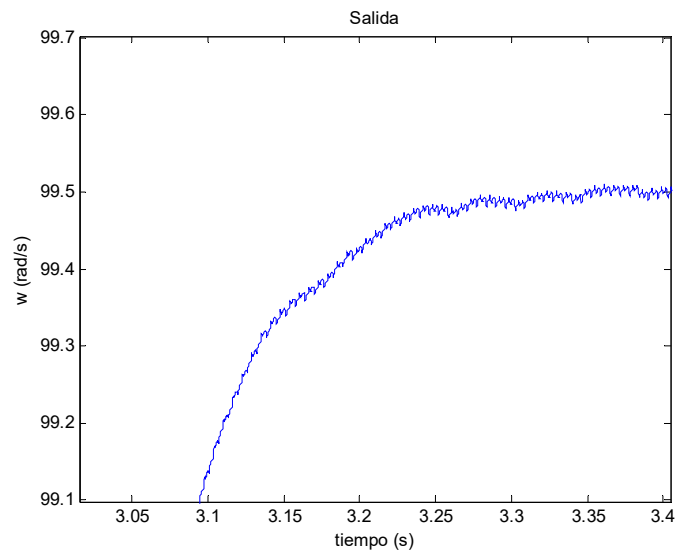


Figura 1-25. Acercamiento de la Figura 1-24.

Debido a que el motor se comporta como un filtro paso bajas, deja pasar las perturbaciones que tengan una frecuencia pequeña hacia el controlador con su correspondiente amplitud, es por esta razón que la amplitud de estas señales afectará más el comportamiento de salida del motor. Esto se puede ver en las gráficas de la salida del motor, donde se realizó la simulación para una frecuencia de la perturbación de 1 rad/s , en la Figura 1-26 se muestra una perturbación de amplitud 12V, mientras que en la Figura 1-27 la amplitud es de 20V.

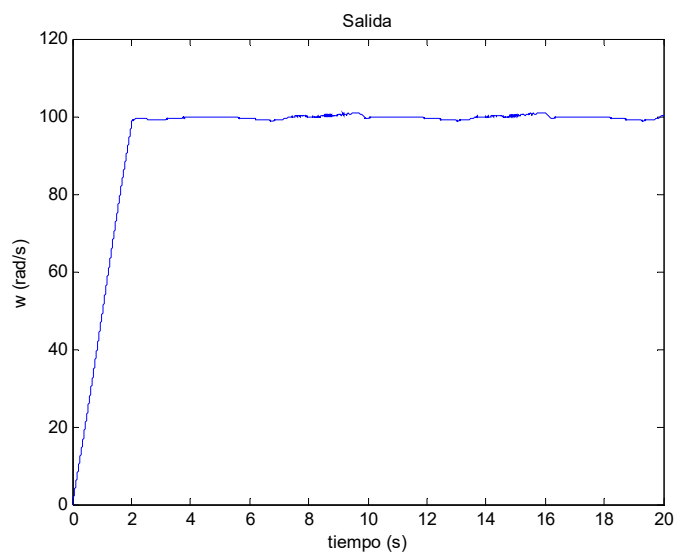


Figura 1-26. Salida del motor añadiendo una perturbación.

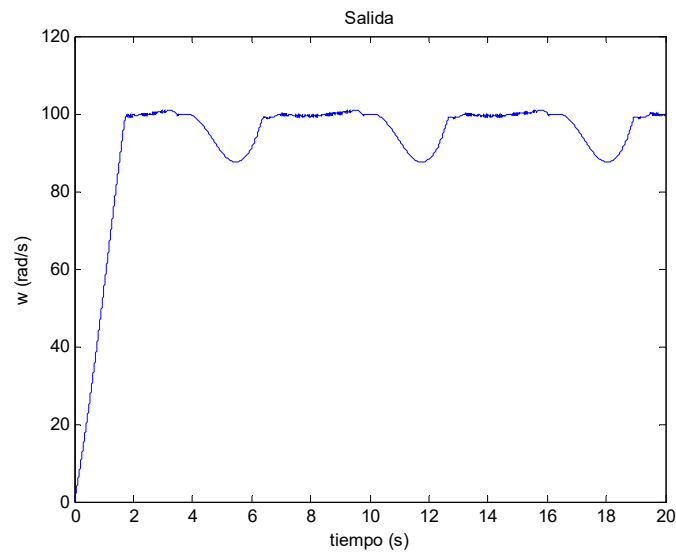


Figura 1-27. Salida del motor añadiendo una perturbación.

Se observa que en este caso el controlador de modos deslizantes de primer orden es capaz de controlar de manera eficaz⁴⁷ una perturbación de hasta el 50% de su valor de salida. Para amplitudes de la perturbación mayores la señal de salida del motor muestra diferencias con el valor de referencia.

⁴⁷ Con un error de estado permanente menor al 5%.

2. Capítulo 2. Algoritmo de Modos Deslizantes de Segundo Orden

2.1. Modos Deslizantes de Segundo Orden

Los modos deslizantes de orden superior surgen como una necesidad de eliminar el *chattering* inherente en los modos deslizantes de primer orden, pero sin perder las ventajas que se obtienen de ellos⁴⁸.

Es por esta razón que se mantiene el control discontinuo, pero ahora se aplica en las derivadas de orden superior de la variable de deslizamiento, forzando la dinámica del sistema a la curva del comportamiento deseado, de esta manera se logran mantener las ventajas principales, remover parcialmente el efecto del *chattering* y se logra una mayor precisión.

A diferencia de modos deslizantes de primer orden, los modos deslizantes de orden superior se pueden aplicar de diferente manera y con diferentes características, esto dependerá del algoritmo de modos deslizantes que se utilice, de acuerdo con el algoritmo que se aplique se tendrá diferente amplitud del *chattering* y se tendrá o no convergencia en tiempo finito.

Para algunos de estos algoritmos de modos deslizantes de orden superior, el orden del sistema de control dependerá directamente del orden de la planta por controlar, esto es el orden de los modos deslizantes será el mismo que el orden de la planta⁴⁹. Ésta es una ventaja de los modos deslizantes de orden superior, que solo es necesario conocer el orden del sistema para controlarlo.

El caso que se trata es un sistema de segundo orden, donde la conmutación de los modos deslizantes actuará en la segunda derivada de la variable de deslizamiento, tomando el nombre de modos deslizantes de segundo orden.

⁴⁸ La robustez y la convergencia.

⁴⁹ Este será el caso del algoritmo cuasi-continuo, que se trata más adelante.

2.1.1. CONCEPTO

El objetivo de los modos deslizantes de órdenes superiores es lograr que la variable de deslizamiento y sus derivadas sucesivas alcancen el valor de cero en la vecindad de deslizamiento, para un sistema de orden r esto es:

$$s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0 \quad \text{Ec 2.1}$$

En modos deslizantes de orden superior el deslizamiento se realiza en el origen; es decir, el deslizamiento ocurre mientras se está intentando llegar al origen del espacio de estado, y ocurre en la cercanía al mismo. Esto por que de igual manera que en los modos deslizantes de primer orden existe una superficie de deslizamiento, solo que esta vez la superficie corresponde al origen del plano de estados, el punto que define la conmutación.

Para el caso de segundo orden, esta condición se reduce a:

$$s = \dot{s} = 0 \quad \text{Ec 2.2}$$

Para lograr que se cumpla esta condición se utilizará un control conmutado⁵⁰, aplicado en la ecuación de la derivada de orden r de la variable de deslizamiento, s .

Para que esto sea posible el sistema debe tener grado relativo r entre la variable deslizamiento y el control, esto es, que el control u debe aparecer de manera explícita solo en la ecuación de la última derivada de la variable de deslizamiento; es decir, en la r derivada, de s . Para segundo orden, si llamamos a la variable de deslizamiento x_1 , tenemos⁵¹:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x}_1 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 + f(t) - bu \end{aligned} \quad \text{Ec 2.3}$$

Donde la condición de existencia de los modos deslizantes de segundo orden queda de la siguiente manera:

⁵⁰ La ecuación del control conmutado dependerá del algoritmo que se utilice. En este caso se utilizará el algoritmo cuasi-continuo.

⁵¹ Si la ecuación de la planta no se encuentra de esta forma, será necesario hacer un cambio de variable tal que se pueda expresar así.

$$\dot{x}_1 = \ddot{x}_1 = 0$$

Ec 2.4

$$\dot{x}_1 \ddot{x}_1 < 0$$

Ec 2.5

Definiendo de esta manera a la variable de deslizamiento, x_1 , se puede tratar como el error⁵², y u es el control conmutado, que se definirá por el algoritmo de modos deslizantes de segundo orden a utilizar.

El orden de deslizamiento caracteriza el grado de suavidad de la variable deslizante en la vecindad de los modos deslizantes.

Una de las desventajas de este modelo de control es que se vuelve necesario conocer las derivadas sucesivas de la variable de deslizamiento, las cuales no siempre es posible medir. Esta desventaja hace necesaria la utilización de diferenciadores⁵³ o de observadores que tengan una convergencia finita.

Recordemos que los modos deslizantes son una aproximación ideal del comportamiento real del sistema, esto debido al tiempo de conmutación necesario para poder realizar el control. En el caso ideal, suponiendo una frecuencia infinita de conmutación, se obtendrá una superficie que sigue a la forma de onda del control que se desea de manera suave. En el caso real se obtendrá un error acotado que es proporcional al tiempo de muestreo y a las perturbaciones.

2.1.2. CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES

Los modos deslizantes de orden superior tienen características que los definen como tales, es decir: alcanzan alguna de las superficies de deslizamiento en tiempo finito⁵⁴, la superficie de movimiento deslizante tiene una codimensión diferente de cero⁵⁵, cualquier movimiento deslizante es realizado en una superficie de discontinuidad del sistema y existe en el límite cuando la frecuencia de conmutación tiende a infinito y las imperfecciones de conmutación tienden a cero.

⁵² De la misma manera en la que se definió el error en la sección **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..** Esto se verá con más detalle en la sección 2.2.1.

⁵³ Se verán algunos diferenciadores basados en la teoría de modos deslizantes de altos órdenes en el capítulo 4.

⁵⁴ No por esto el sistema converge en tiempo finito.

⁵⁵ Debe haber varios ejes que se intercepten en cero; es decir, debe ser de orden mayor de uno.

2.2. Controlador Cuasi-Continuo de Modos Deslizantes de Segundo Orden

2.2.1. CONCEPTO

Una de las ventajas de los modos deslizantes de orden superior, es que solo es necesario conocer el orden del sistema para controlarlo. Éste es el caso del algoritmo cuasi-continuo, donde la ecuación que lo define cambia con respecto al orden del sistema.

Otra de las características principales de este algoritmo es que tiene una convergencia en tiempo finito.

Por ser un controlador de modos deslizantes de orden superior el algoritmo cuasi-continuo cumple con la característica que los define; es decir, que las derivadas sucesivas de la variable por controlar sean cero. Para el caso de modos deslizantes de segundo orden⁵⁶:

$$\sigma = \dot{\sigma} = 0 \quad \text{Ec 2.6}$$

Donde σ está definida como el error entre el valor deseado del sistema ω^* y la señal de salida medida del sistema ω .

$$\sigma = \omega - \omega^* \quad \text{Ec 2.7}$$

Además será necesario que el sistema, tenga el control de manera explícita solo en la última derivada de σ ; es decir, que el sistema sea de grado relativo r con respecto al control.

Del algoritmo cuasi-continuo de modos deslizantes el control para un sistema de orden dos es de la forma **Error! No se encuentra el origen de la referencia.:**

⁵⁶ Se analizará el algoritmo cuasi-continuo de orden dos por ser el orden del motor de DC, que es el sistema por controlar objetivo de esta tesis.

$$u = -\alpha \left(\left| \dot{\sigma} \right| + \lambda |\sigma|^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \left(\dot{\sigma} + \lambda |\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign} \sigma \right) = \frac{-\alpha \left(\dot{\sigma} + \lambda \sqrt{|\sigma|} \text{sign} \sigma \right)}{\left| \dot{\sigma} \right| + \lambda \sqrt{|\sigma|}} \quad \text{Ec 2.8}$$

De la ecuación anterior se puede ver que el control es continuo, excepto para $\sigma = \dot{\sigma} = 0$, de aquí el nombre de controlador cuasi-continuo. Esto se puede ver en Figura 2-1.

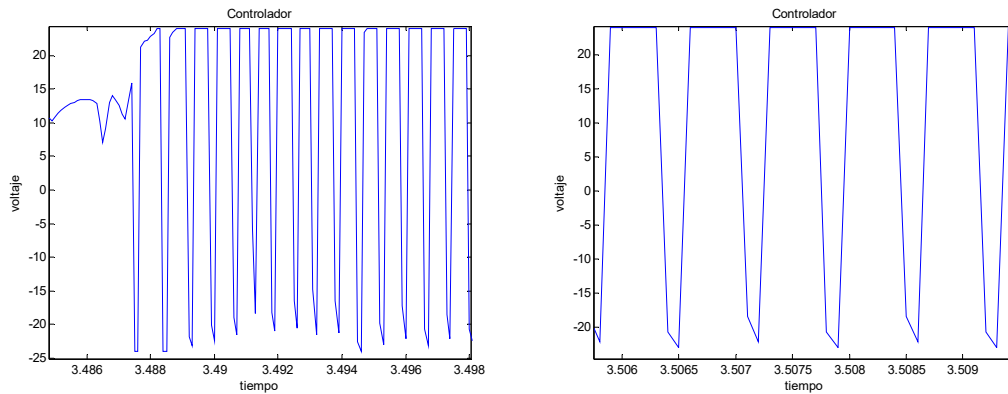


Figura 2-1. Gráfica del comportamiento del controlador cuasi-continuo.

Este algoritmo alcanza la superficie $\sigma = \dot{\sigma} = 0$, si se supone que el error en la medición de σ es cero y si se realiza de manera continua. Debido a que en la práctica no es posible, ya que existe un periodo de muestreo y un probable error en las mediciones de σ , el algoritmo logrará acercarse a la superficie $\sigma = 0$ dentro de un rango cercano de valores, que será proporcional al error de medición y al periodo de muestreo.

Consideremos el error **Error! No se encuentra el origen de la referencia.** en la medición de la variable de deslizamiento ε , este error de medición provoca un error acotado en la cercanía de la superficie de deslizamiento, que es proporcional a $\varepsilon^{\frac{r-i}{r}}$ para la i -ésima derivada de σ en un sistema de orden r , por lo que podemos decir que el control es robusto respecto a los errores en las mediciones **Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

Además es importante mencionar que el controlador cuasi-continuo produce, para cada valor de λ , una nueva combinación válida de parámetros,

efectiva para un sistema *SISO*, especificando un grado relativo y considerando una ganancia lo suficientemente grande **Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

2.2.2. AJUSTE DE LAS CONSTANTES PARA EL MOTOR

El algoritmo cuasi-continuo, como ya se indicó, está definido por el orden del sistema r y por las constantes α y λ que define su comportamiento.

Aunque en teoría un conjunto de constantes r, α y λ del algoritmo para un grado relativo seleccionado es suficiente **Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, en la práctica es necesario ajustar estos parámetros de acuerdo con la dinámica deseada (si se desea un transitorio rápido, o un transitorio lento y suave).

Como ya se mencionó, el orden del sistema en el caso del motor de CD es dos, así $r = 2$. Una vez definido el orden que llevó a la selección del algoritmo se selecciona el valor de α , que debe ser lo suficientemente grande para que logre que cualquier trayectoria del sistema entre en una región específica en tiempo finito y se mantenga en ella. Debe considerarse que el valor de salida del control para un valor seleccionado de α no exceda las condiciones de entrada máxima del motor.

Por otro lado, de la constante λ dependerá la velocidad de convergencia del sistema, es decir, mientras mayor sea λ el sistema tendrá una convergencia más rápida pero menos suave.

Como se puede observar de la ecuación del algoritmo α define el valor máximo en la conmutación y éste depende del límite superior de entrada a la planta. Para nuestro caso de análisis, la planta es un motor y su voltaje nominal es de 24V.

2.2.3. APLICACIÓN DEL ALGORITMO CUASI-CONTINUO AL MOTOR DE CORRIENTE DIRECTA

¡Error! NO SE ENCUENTRA EL ORIGEN DE LA REFERENCIA.

Para la aplicación del algoritmo cuasi-continuo de modos deslizantes se utilizará el bloque diferenciador que Simulink provee, por lo que las ecuaciones del sistema no se ven modificadas por el diferenciador.

La ecuación del motor incluyendo el control será de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 + f(t) - bu \\ u &= -\alpha \left(\left| \dot{x}_1 \right| + \lambda |x_1|^{1/2} \right)^{-1} \left(\dot{x}_1 + \lambda |x_1|^{1/2} \text{sign } x_1 \right)\end{aligned}\quad \text{Ec 2.9}$$

La variable de deslizamiento x_1 está definida como el error de la velocidad del sistema, de la siguiente manera:

$$x_1 = (\omega^* - \omega) \quad \text{Ec 2.10}$$

donde como ya habíamos mencionado ω es la velocidad de salida del motor y $\dot{\omega}$ es la velocidad de referencia.

2.3. Simulaciones del algoritmo Cuasi-Continuo

Las simulaciones de esta sección se realizaron utilizando el modelo del motor mencionado en el anexo **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, utilizado también en la sección **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, además el diagrama realizado en Simulink es el mostrado en la Figura 2-2. El bloque que representa al controlador, se encuentra en la Figura 2-3.

El valor del tiempo de muestreo con el que se simuló fue de 0.1[ms], en modo continuo de paso fijo (ODE1)**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, de igual manera que en la sección **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**.

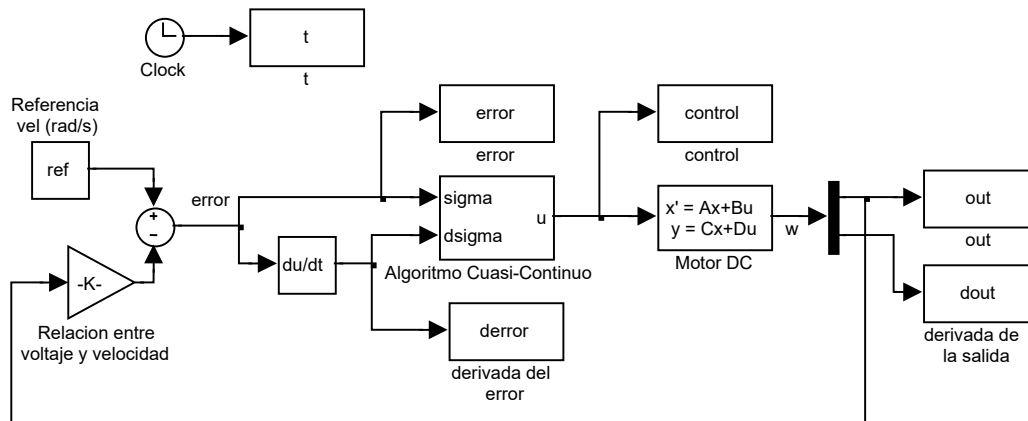


Figura 2-2. Diagrama del controlador de modos deslizantes de orden superior utilizando el algoritmo cuasi-continuo.

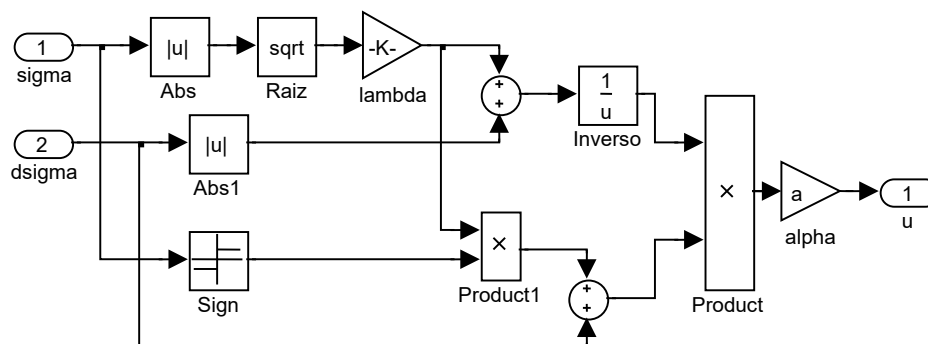


Figura 2-3. Diagrama del bloque de control, algoritmo cuasi-continuo.

2.3.1. RESPUESTA A UNA ENTRADA ESCALÓN

Para observar el comportamiento del motor controlado por el algoritmo cuasi-continuo, así como para observar el funcionamiento de los parámetros que definen al controlador se simulará con diferentes valores de α y λ .

Primero dejaremos fijo el valor de $\alpha = 24$, ya que este es el voltaje nominal de entrada al motor y la máxima salida del controlador, y modificaremos el valor de λ en las simulaciones. Si el valor de λ tiene un valor pequeño la salida del motor no alcanza el valor deseado, como se puede ver en la Figura 2-4.

En la Figura 2-5 podemos observar que mientras λ tenga un valor mayor, el tiempo de levantamiento es menor, tendiendo a un límite.

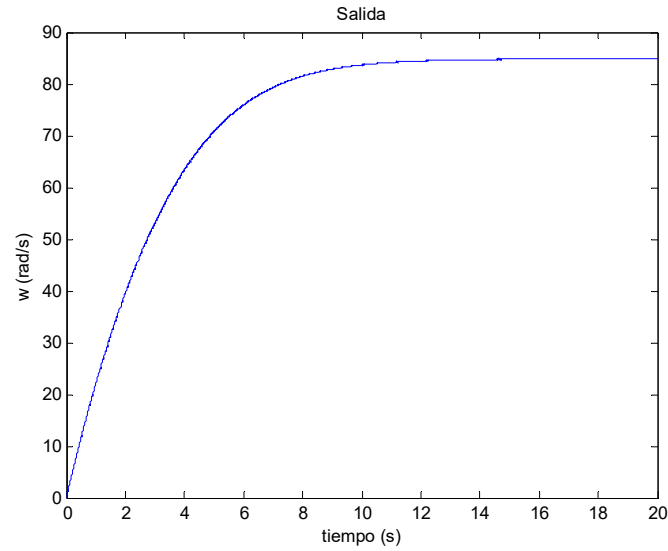


Figura 2-4. Salida del motor para un valor pequeño de lambda.

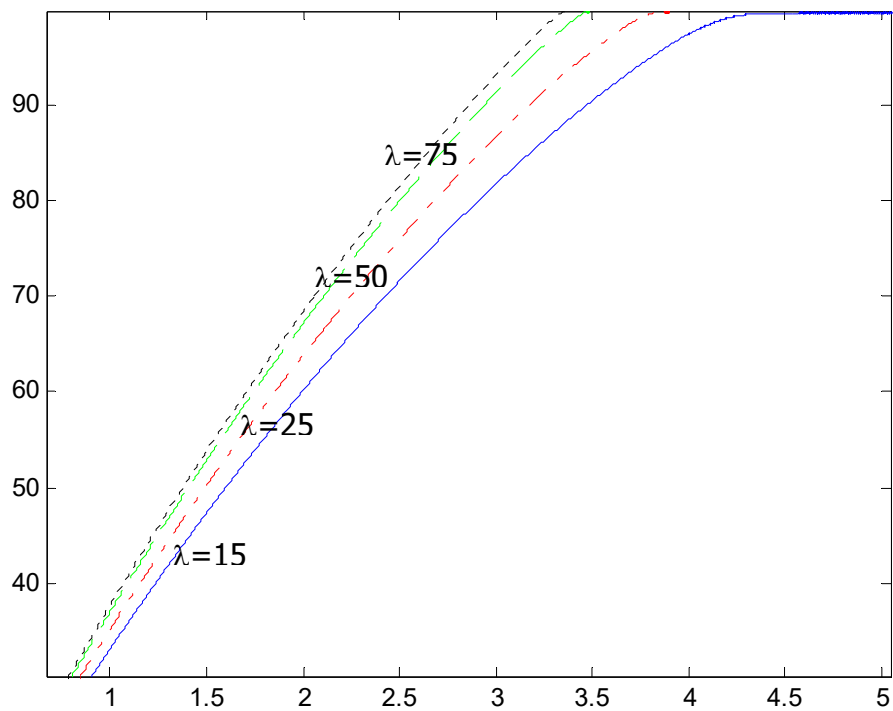


Figura 2-5. Salida del motor para diferentes valores de lambda.

De la Figura 2-5 observamos que la salida del motor cuando $\lambda = 50$ tiene un comportamiento prácticamente igual que para $\lambda = 75$. Pero conforme crece el valor de λ también crece la amplitud del *chattering* en la salida⁵⁷, es por esta razón que utilizaremos el valor de $\lambda = 50$ para el resto de las simulaciones. Observemos ahora el comportamiento del sistema cuando variamos α en el algoritmo en la Figura 2-6.

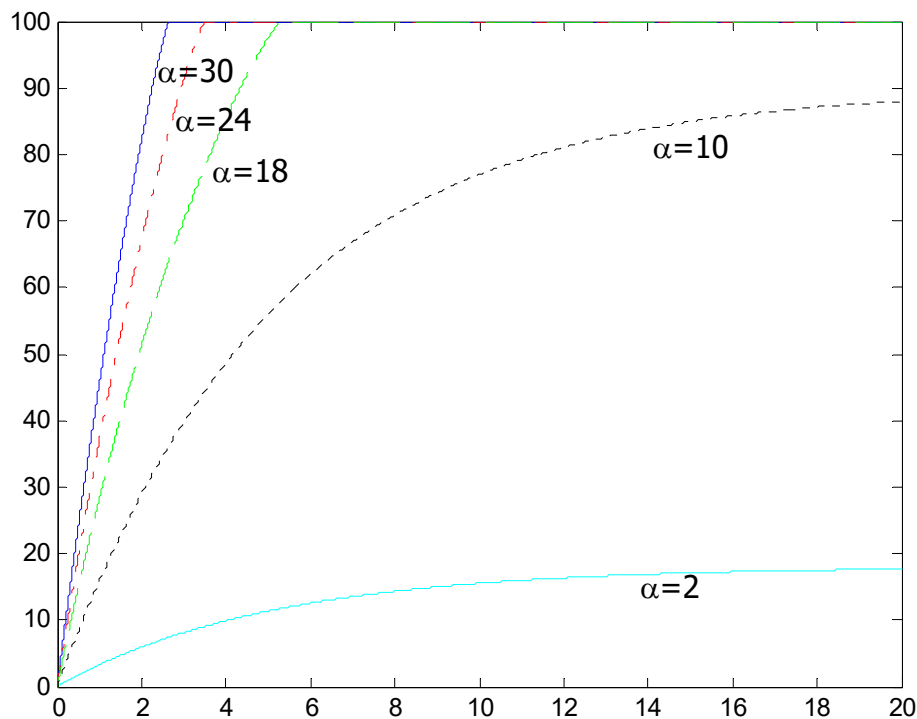


Figura 2-6. Salida del motor para diferentes valores de alfa.

El valor de α también afectará el tiempo de levantamiento, en este caso igual que con los modos deslizantes de primer orden, el valor a seleccionar de α dependerá de la máxima entrada al sistema permitida, como el voltaje nominal del motor es 24V, para no dañarlo seleccionaremos este valor⁵⁸.

⁵⁷ A pesar de esto la amplitud del *chattering* es mucho menor del 0.1% del valor de la salida.

⁵⁸ De acuerdo con el voltaje nominal del motor se podría seleccionar el valor de α mayor, teniendo en consideración que este voltaje no se mantuviera por largos periodos de tiempo para no dañar al motor.

Con los parámetros obtenidos anteriormente $\alpha = 24$ y $\lambda = 50$ y realizando la simulación obtenemos la gráfica del control, Figura 2-7, la gráfica de la salida en el espacio de estados, Figura 2-8, y el error en el espacio de estados, Figura 2-9.

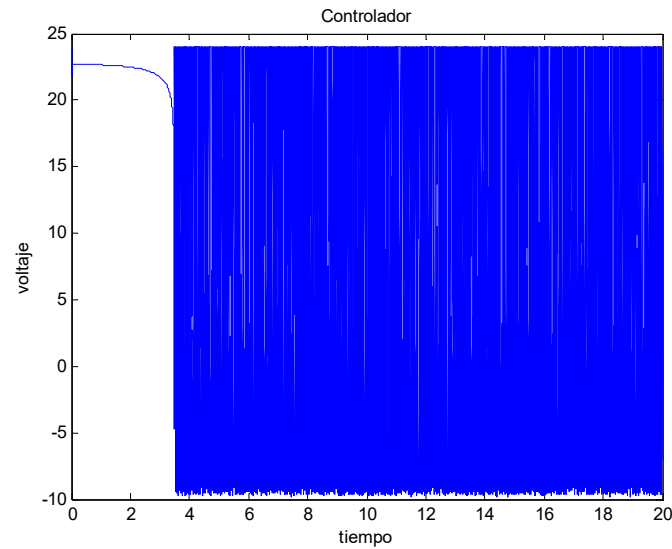


Figura 2-7. Salida del algoritmo Cuasi-Continuo de modos deslizantes de orden superior.

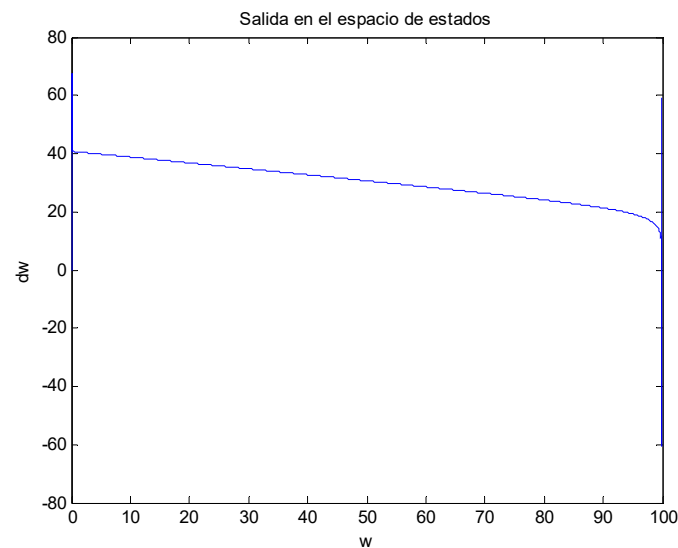


Figura 2-8. Salida en el espacio de estados del motor de CD.

Podemos observar en la Figura 2-7, que la salida del controlador a pesar de estar basada en conmutaciones como en el caso de modos deslizantes de primer orden, cambia la amplitud entre conmutaciones, de la misma manera vemos que

cuando el error es muy grande el controlador tiene una respuesta continua, esto se observa en los primeros segundos de tiempo.

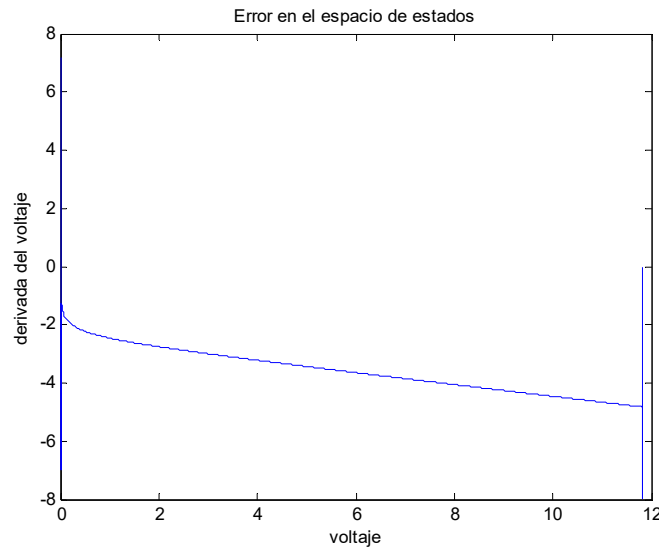


Figura 2-9. Error en el espacio de estados del motor de CD

En modos deslizantes de primer orden observamos que los puntos de estabilidad en ambas gráficas son diferentes, pero significan el mismo estado en el motor, esto es en la Figura 2-9 se observa que el error tiende a llegar al origen. Mientras en la Figura 2-8 se observa que la salida tiende a llegar a la velocidad de referencia. A pesar de que existe *chattering*, lo cual se observa en el valor diferente de cero de la derivada tanto de la salida como del error, éste es de una amplitud muy pequeña, por lo cual no se percibe en las gráficas de salida.

2.3.2. RESPUESTA ANTE UNA PERTURBACIÓN SENOIDAL

En la sección **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, donde se utilizaron modos deslizantes de primer orden, agregaremos una perturbación a la salida del bloque que describe el comportamiento del motor y posteriormente agregaremos una perturbación a la salida del controlador, compararemos estos resultados con los obtenidos con el controlador de modos deslizantes de primer orden.

Agregamos primero una perturbación de amplitud 1 rad/s y de frecuencia 1000 rad/s , a la salida del bloque que describe al motor, obteniendo como resultado la gráfica de salida del motor que se encuentra en la Figura 2-10.

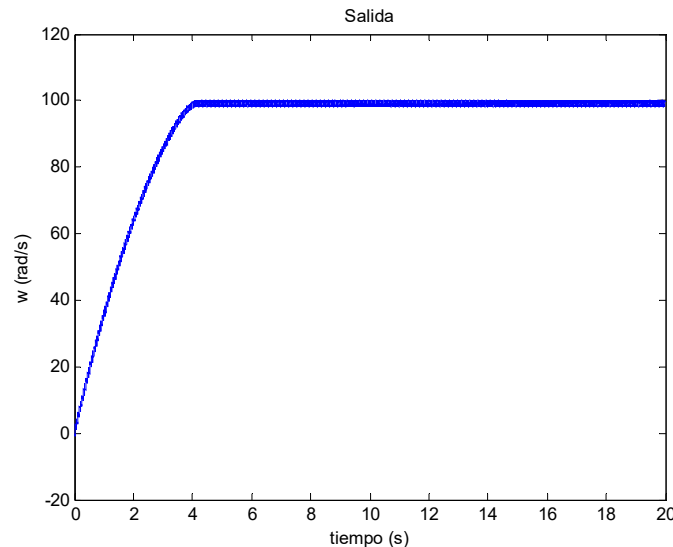


Figura 2-10. Salida del motor agregando una perturbación senoidal a la salida del motor.

El *chattering* que se muestra en la Figura 2-10 de la gráfica de salida del motor debido a la perturbación es aproximadamente de la misma amplitud que en el caso de primer orden; es decir, es de menos del 1% del valor final. La diferencia entre esta gráfica y la obtenida para el caso de primer orden radica en el valor de estado permanente, en el caso del algoritmo cuasi-continuo se mantiene el valor de estado permanente llegando al valor de referencia, mientras que en el caso del algoritmo de primer orden no.

Ahora se le agrega una perturbación senoidal de mayor amplitud pero menor frecuencia, como en la sección **iError! No se encuentra el origen de la referencia.** utilizaremos una amplitud de 25 rad/s y una frecuencia de 1 rad/s , la gráfica de salida del motor se puede observar en la Figura 2-11.

A pesar de que la amplitud de la perturbación equivale al 25% del valor final de referencia deseado, el comportamiento de la gráfica de salida mantiene su valor de estado permanente y el error que presenta es menor del 2% del valor final, esto se puede ver en la Figura 2-11. Comparándolo con el algoritmo de primer

orden, donde este último presenta una amplitud del error en estado permanente mayor.

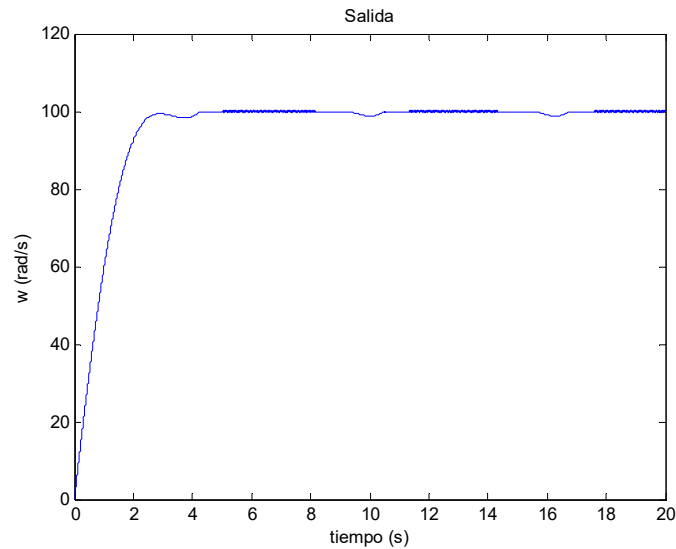


Figura 2-11. Salida del motor agregando una perturbación senoidal a la salida del motor.

Ahora se añaden la perturbación a la salida del controlador, primero se agrega una perturbación de alta frecuencia 1000 rad/s y se comparan dos valores diferentes de amplitud 1V y 12V, que se muestran respectivamente en la Figura 2-12 y en la Figura 2-13.

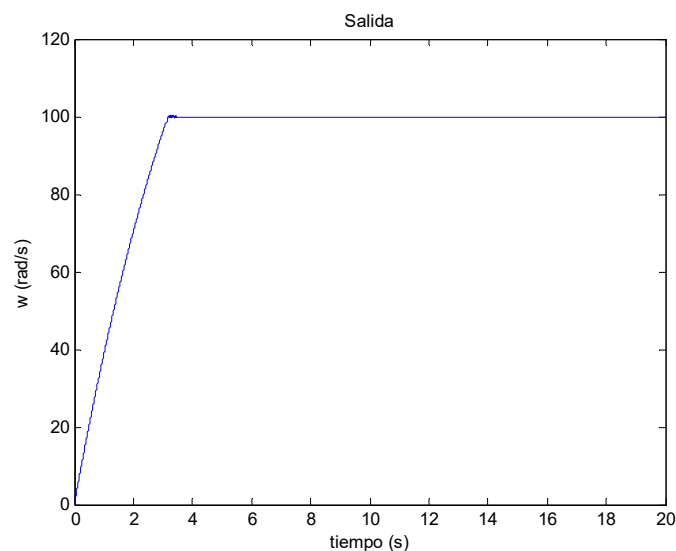


Figura 2-12. Salida del motor agregando una perturbación a la señal de control.

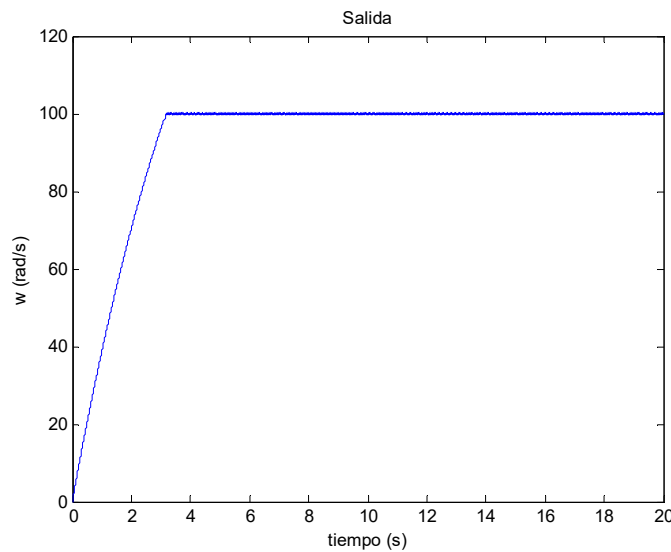


Figura 2-13. Salida del motor agregando una perturbación a la señal de control.

Como se vio en la sección **Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, las perturbaciones que se encuentran a la salida del controlador afectarán si tienen una amplitud grande y una frecuencia pequeña, porque a una frecuencia grande el motor ayudará a filtrarlas a pesar de tener una amplitud grande, mientras que a una frecuencia pequeña será el control el que realice una acción correctiva con su amplitud. Esto se observa en las figuras anteriores, ya que el *chattering* en las gráficas de salida no es significativamente diferente a pesar de las diferentes amplitudes en las perturbaciones.

Al agregar perturbaciones de amplitudes considerables y de frecuencias pequeñas al comportamiento del controlador se obtienen las figuras 2-14 y 2-15. Primero se analiza el caso de una perturbación de frecuencia 1 *rad/s* y de amplitud 12V, y la gráfica de salida del motor se muestra en la Figura 2-14.

El *chattering* mostrado a la salida de la planta para una perturbación de 12V de entrada es considerablemente menor cuando utilizamos el algoritmo cuasi-continuo que cuando utilizamos el algoritmo de primer orden, eso se puede observar si se comparan la **Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y la Figura 2-14.

Se agrega una perturbación de la misma frecuencia pero de 24V, en la Figura 2-15 se observa que la amplitud de esta perturbación es demasiado grande para ser controlada, debido a que equivale al 100% del valor de entrada al controlador. Para este caso el comportamiento del algoritmo cuasi-continuo es similar al de primer orden, porque el valor máximo de salida del controlador para ambos casos es 24V.

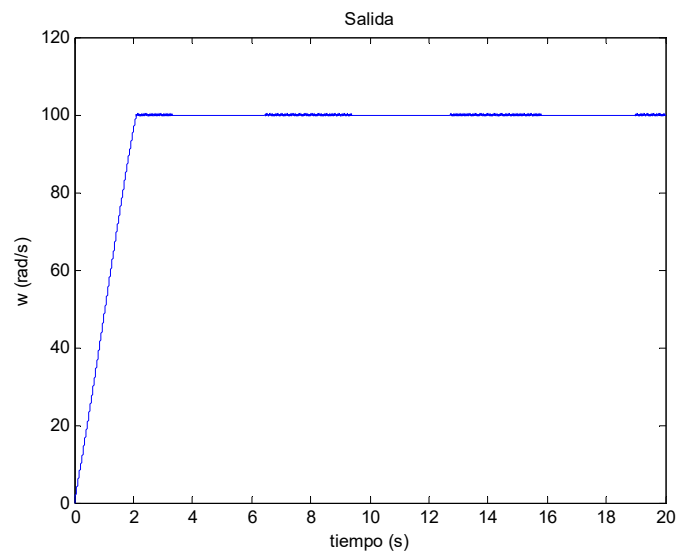


Figura 2-14. Salida del motor agregando una perturbación a la señal de control.

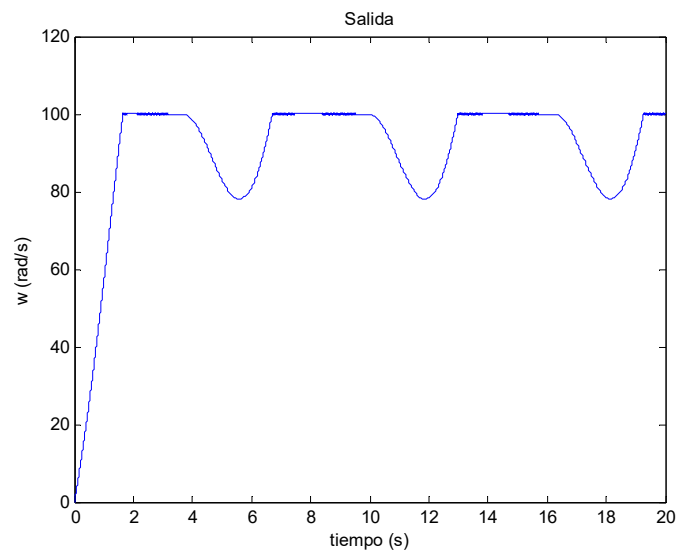


Figura 2-15. Salida del motor agregando una perturbación a la señal de control.

3. Capítulo 3. Algoritmo de Modos Deslizantes de Segundo Orden con Filtro.

Una de las características principales de modos deslizantes son las conmutaciones que lo definen, estas conmutaciones dependerán del tiempo de muestreo con el que se adquieran datos del sistema a la entrada del control y del actuador que sea capaz de seguir la frecuencia de salida del controlador.

Cuando se trabaja con modos deslizantes y no es posible tener un actuador lo suficientemente rápido para que siga a la dinámica del controlador, se requerirá una salida del controlador más suave, para que el actuador pueda seguirla.

Por otro lado cuando se trabaja con actuadores muy rápidos, éstos son capaces de seguir a la frecuencia del *chattering* y por lo tanto de incorporarla a la dinámica de la planta, acentuando el efecto del *chattering*. La ventaja de los actuadores rápidos es que la planta sigue de una manera más precisa la superficie de deslizamiento que se diseñó para ella, y la desventaja es que existen altas frecuencias en el comportamiento de salida deseado de la planta.

Aun para un control de modos deslizantes de segundo orden, existe *chattering* que afecta el comportamiento de salida de la planta. **Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, es por ello que muchas veces se incrementa de manera artificial el orden de la misma, agregando también a la salida del controlador un integrador que actúa de filtro de altas frecuencias⁵⁹.

3.1. Incrementando el orden del sistema de manera artificial.

Como ya se mencionó, al agregar un integrador se incrementa el orden del sistema, lo que nos obliga a modificar el algoritmo de modos deslizantes que se utiliza. Al incrementar el orden del sistema se vuelve necesario un algoritmo de modos deslizantes de tercer orden, lo cual implicaría que necesitamos conocer otra

⁵⁹ Esto es agregar una dinámica diferente para el actuador. Esta dinámica es agregada después del control, a la entrada de la planta.

derivada superior de la variable de deslizamiento, lo que nos regresa al problema original, ya que se agrega otra incertidumbre debido a la obtención de la derivada, y por esta misma razón mantiene el *chattering* del control, complicando la solución.

En lugar de esto se redefine la ecuación de la variable de deslizamiento y se agrega un integrador a la salida del controlador; es decir, se define la variable de deslizamiento de la manera en la que se hizo con los modos deslizantes de primer orden:

$$s = cx_1 + \dot{x}_1 \quad \text{Ec 3.1}$$

Lo que se obtiene es un cambio en la ecuación de deslizamiento, de un punto, que se tenía para modos deslizantes de segundo orden, a una superficie de deslizamiento, cuyo trayectoria está definida por s .

Con el integrador que se agregó a la salida del controlador a manera de filtro se obtiene una señal de control suave de entrada a la planta, lo cual evita el *chattering* en la salida del motor.

Así el control de modos deslizantes de orden superior hace que el sistema tenga una convergencia en tiempo finito a la superficie de deslizamiento $s = 0$, a partir de donde utilizando la misma ecuación de control de orden superior u se logra que deslice a través de ella, llegando de manera exponencial al estado

$$x_1 = \dot{x}_1 = 0 \quad \text{Ec 3.2}$$

Si se define x_1 como el error, como se hace en los capítulos anteriores, logramos seguir nuestra señal de referencia con el controlador de modos deslizantes de orden superior.

Con la ventaja de que el control conmutado no actuará sino en la última derivada de la variable de deslizamiento⁶⁰, haciendo que el deslizamiento de la variable controlada sea más suave sobre la nueva superficie de conmutación definida, debido al integrador.

⁶⁰De la misma manera que en modos deslizantes de orden superior. Esto se aprecia mejor en sistemas de órdenes mayores.

También se logra que cada vez que alguna dinámica interna o externa provoque una diferencia entre el comportamiento de la planta y la dinámica descrita por la superficie deseada, actúe el algoritmo de modos deslizantes de orden superior asegurando la convergencia a la superficie de deslizamiento en tiempo finito. El tiempo de convergencia a la superficie de deslizamiento ya no dependerá de la dinámica de la planta, como en el caso de modos deslizantes de primer orden. Una desventaja del algoritmo es que debido al integrador que actúa de filtro, la robustez del controlador en presencia de perturbaciones disminuye, aun así realiza el control de manera efectiva.

3.1.1. INCREMENTANDO EL ORDEN DE LA PLANTA PARA EL ALGORITMO CUASI-CONTINUO

Se definirá al error, la variable por controlar, de la manera en la que se ha hecho durante los capítulos anteriores, es decir:

$$x_1 = (\omega^* - \omega) \quad \text{Ec 3.3}$$

Ahora de acuerdo con la ecuación de modos deslizantes de primer orden, la variable de deslizamiento sera:

$$s = Cx_1 + \dot{x}_1 \quad \text{Ec 3.4}$$

Y la ecuación del algoritmo cuasi-continuo equivaldría a la derivada del control, de manera que sea necesario integrar la salida del controlador antes de entrar a la planta, de esta forma la ecuación del controlador quedaría en función de la variable de deslizamiento s , esto es⁶¹:

$$\dot{u} = -\alpha \left(\left| \dot{s} \right| + \lambda |s|^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \left(\dot{s} + \lambda |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign } s \right) \quad \text{Ec 3.5}$$

Suponiendo el mismo modelo del sistema con el que se ha trabajado hasta el momento, es decir:

⁶¹ Para mayor información sobre el algoritmo cuasi-continuo de modos deslizantes de orden superior vea el Capítulo 2.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 + f(t) - bu$$

Ec 3.6

3.1.2. CÁLCULO DE LAS CONSTANTES PARA EL MOTOR

Debido a la dinámica que agrega el integrador al controlador, es necesario ajustar el parámetro c que corresponde a la nueva definición de la variable de deslizamiento y además es necesario ajustar los parámetros del algoritmo cuasi-continuo α y λ que definen al controlador.

Como se vio en el capítulo anterior, el valor de λ está relacionado con el valor del tiempo de levantamiento a la salida de la planta, por lo que se será el primero que seleccionemos, dejando fijo c y α .

Posteriormente seleccionaremos el valor de c , que definirá que tan pronunciada será la pendiente de la gráfica en el espacio de estados durante la llegada al valor deseado de salida de la planta.

Al último escogeremos el parámetro, α , que terminará de definir el comportamiento de salida del motor, el valor máximo de α ya no estará definido por la máxima entrada al motor, debido a que la salida del algoritmo cuasi-continuo no es la entrada directa del motor, por otro lado estará definida de tal manera que el comportamiento a la salida del integrador no tenga un valor excesivo que pudiera dañar al motor.

3.2. Simulaciones del algoritmo Cuasi-Continuo con filtro

Las simulaciones de esta sección se realizaron utilizando el modelo del motor mencionado en la sección **iError! No se encuentra el origen de la referencia.**, además el diagrama realizado en Simulink es el mostrado en la Figura 3-1. Los bloques *FOSM* (*First Order Sliding Modes*) y Algoritmo cuasi-continuo son los mismos bloques descritos en las secciones anteriores en la **iError! No se encuentra el origen de la referencia.** y en la **iError! No se encuentra el origen de la referencia.** respectivamente.

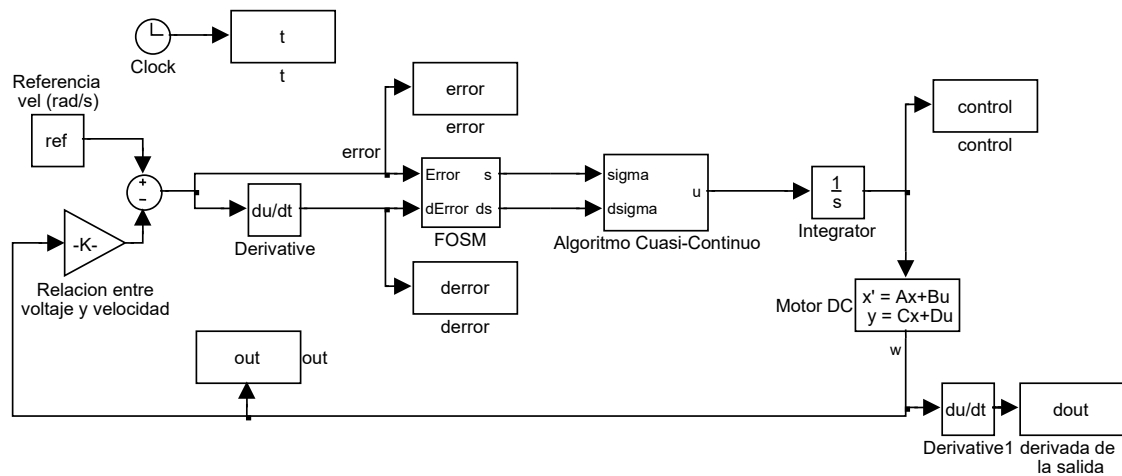


Figura 3-1. Diagrama de simulación del algoritmo cuasi-continuo con filtro.

El valor del tiempo de muestreo con el que se simuló fue de 0.1[ms], en modo continuo de paso fijo (ODE1)**iError! No se encuentra el origen de la referencia.,** de igual manera que en la sección **iError! No se encuentra el origen de la referencia..**

3.2.1. RESPUESTA A UNA ENTRADA ESCALÓN

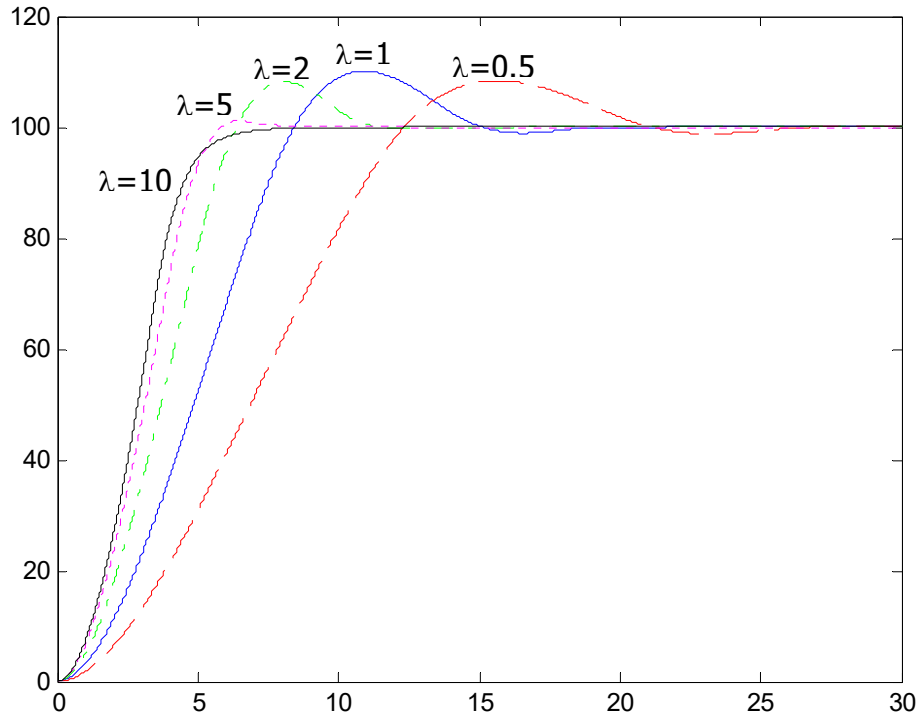


Figura 3-2. Salida del motor para diferentes valores de λ .

Para seleccionar el valor de λ , dejaremos fijo el valor de $\alpha = 10$ y $c = 1$, de acuerdo con la Figura 3-2 donde se muestran las gráficas de salida del motor para distintos valores de λ . Observemos que mientras mayor sea el valor de λ , menor será el valor del tiempo de levantamiento, además observemos que cuando se aumenta por arriba de 5, la mejoría en la respuesta es cada vez menos significativa. Seleccionemos el valor de $\lambda = 10$ como el que presenta un mejor valor de tiempo de levantamiento.

En la Figura 3-3 tenemos la comparación para diferentes valores de c , manteniendo fijos los valores de $\lambda = 10$ y $\alpha = 10$.

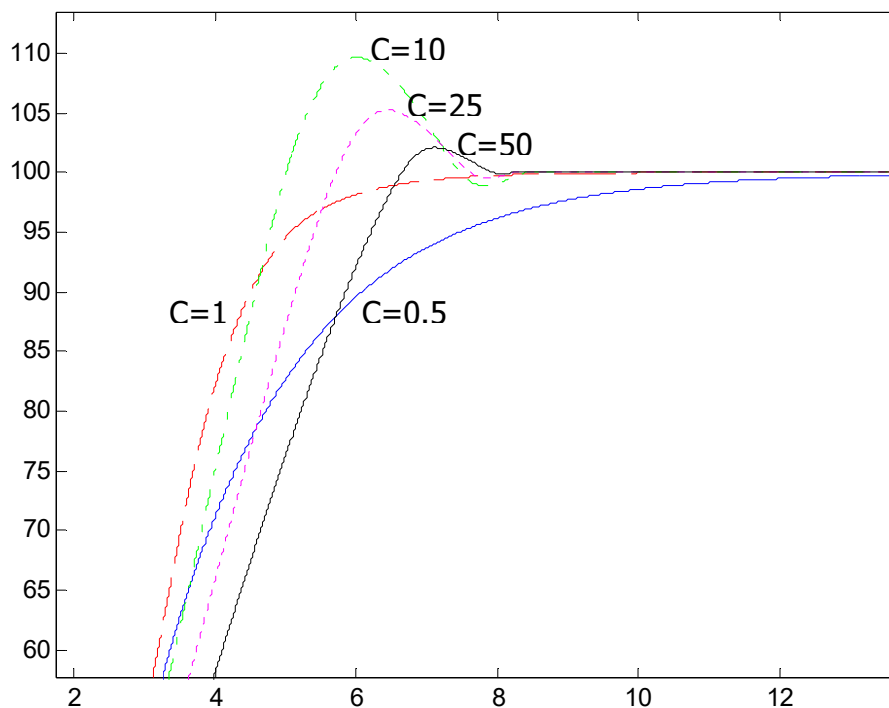


Figura 3-3. Gráfica de la señal de salida del motor, para diferentes valores de c .

En este trabajo se ha seleccionado la salida de tal manera que no presente un sobrepaso significativo, y que exista el menor tiempo de levantamiento posible⁶², el valor de $c = 1$ es el que cumple con ambas condiciones, razón por la cual se seleccionará para posteriormente escoger un valor de α .

El valor de c en el algoritmo de control tiene una función similar al caso del algoritmo de primer orden; es decir, es la pendiente de la línea a través de la cual la trayectoria de estados del sistema se acerca al origen, esto se puede observar en la Figura 3-4. En el caso de valores de c mayores que uno, la trayectoria de estados de la planta llega a la superficie de deslizamiento por la parte inferior de la superficie de deslizamiento, lo que provoca el sobrepaso de velocidad a la salida del sistema.

⁶² Para comparar el funcionamiento de los algoritmos de modos deslizantes contra el controlador PID.

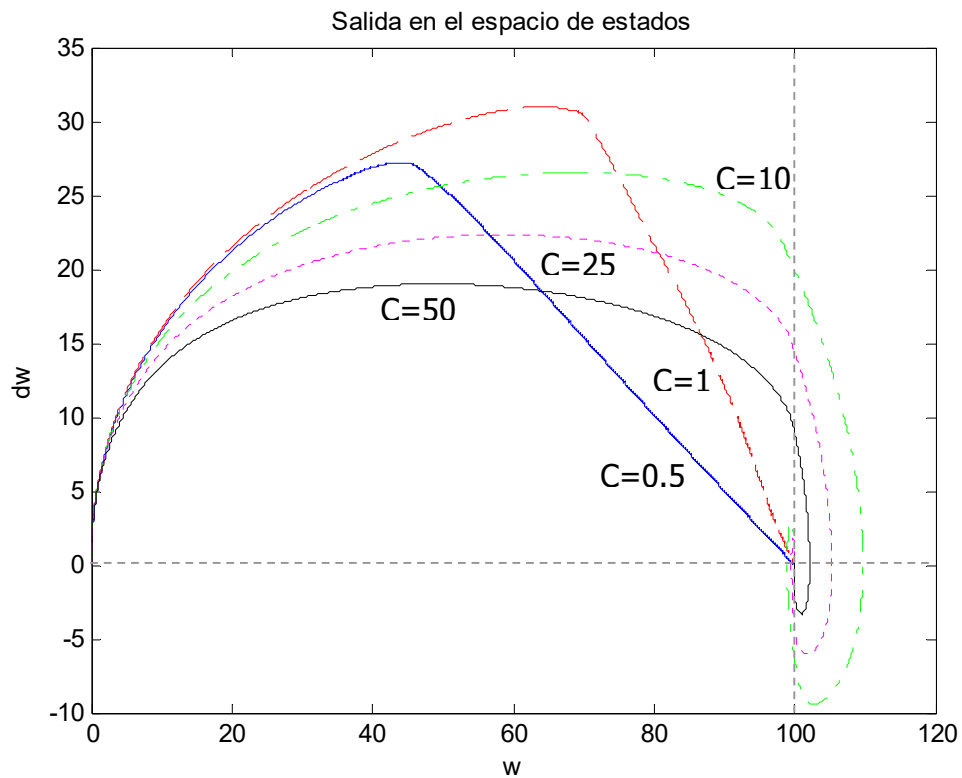


Figura 3-4. Trayectorias de estados del sistema para diferentes valores de c

Para elegir el último de los parámetros α , realizaremos las simulaciones con los parámetros que seleccionamos anteriormente, es decir, $\lambda = 10$ y $c = 1$.

Para observar el comportamiento del algoritmo escogeremos valores representativos de α ; es decir, un valor muy pequeño que no logre una buena acción de control, el valor de voltaje de CD de entrada al motor que equivaldría a la salida de referencia que tenemos, y valores mayores tomando como límite el valor del voltaje nominal de entrada al motor. Los resultados se muestran en la Figura 3-5.

De los datos de esta figura, podríamos concluir que el mejor valor de α es 24, que equivaldría a la entrada de voltaje nominal del motor, mas este algoritmo de control consta de un integrador a la salida del controlador, el cual trabaja como filtro para lograr que la señal de control sea suave, pero además de acuerdo con

su función integral⁶³ acumula los eventos anteriores. Esto lo podemos observar en la Figura 3-6 donde tenemos la salida del controlador para diferentes valores del parámetro α .

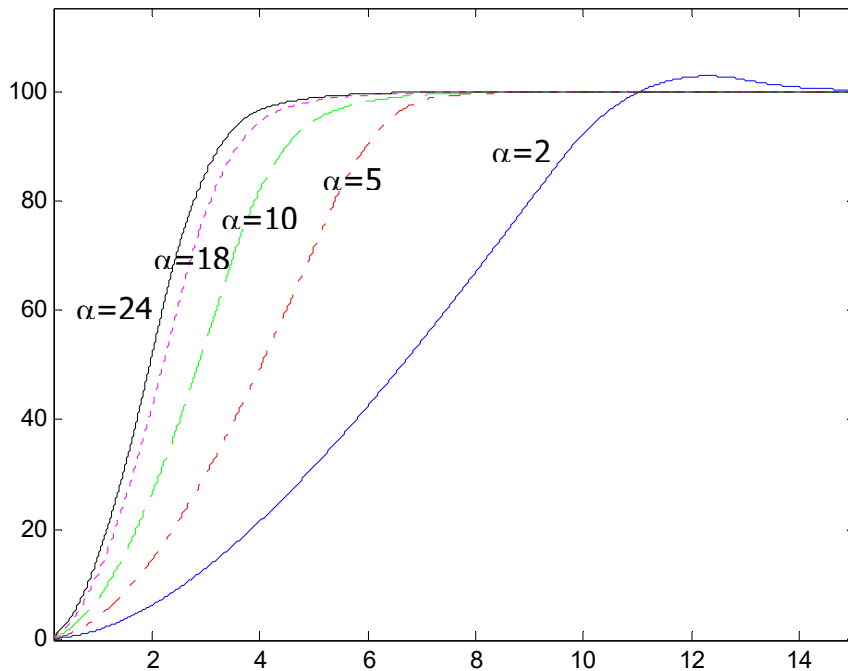


Figura 3-5. Salida del motor para diferentes valores de α .

De la Figura 3-6 observamos que el tiempo durante el cual el motor trabaja con un voltaje mayor al del valor nominal es de algunos segundos, para no dañar nuestro motor⁶⁴ y debido a que la gráfica de salida del motor no varía demasiado entre el valor de $\alpha = 10$ y $\alpha = 24$ podemos concluir que el mejor valor para el parámetro α es 10V, ya que con este valor el control no sobrepasa el voltaje nominal.

⁶³ Ver sección **iError! No se encuentra el origen de la referencia.**y **iError! No se encuentra el origen de la referencia.** para más información sobre el control integral.

⁶⁴ Sí la salida del controlador sobrepasa el valor nominal de entrada del motor, en el momento en el que existiera una perturbación, la salida del controlador aumentaría aún mas y con ella aumentará la probabilidad de que el motor resultara dañado.

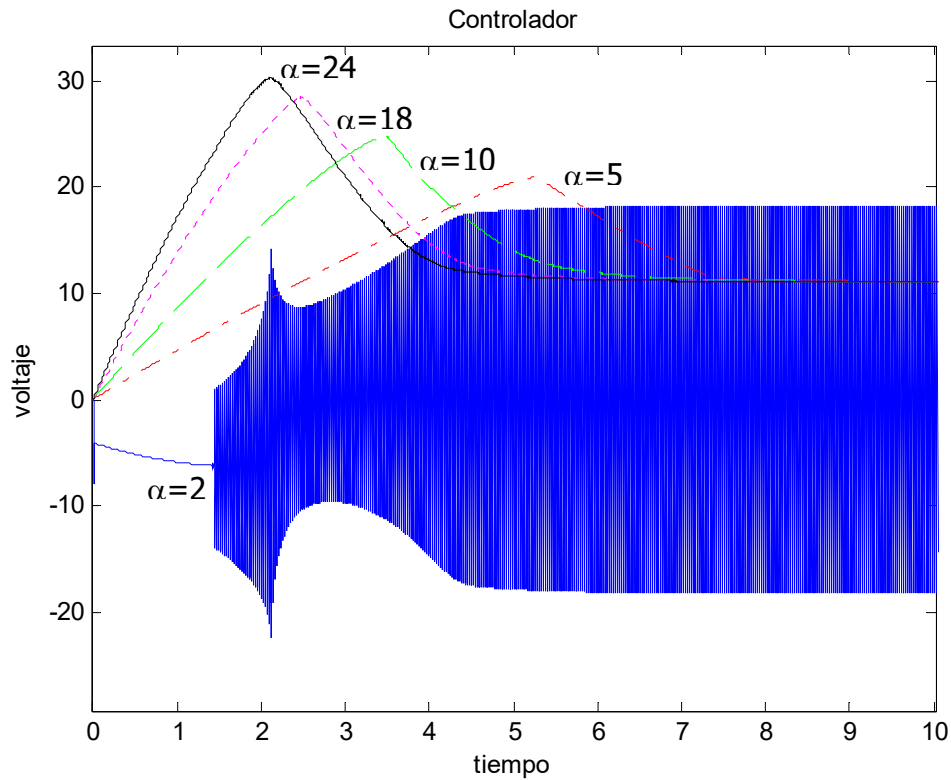


Figura 3-6. Salida del controlador para diferentes valores de α .

Las gráficas que describen el comportamiento del sistema para los parámetros $\alpha = 10$, $\lambda = 10$ y $c = 1$ del algoritmo cuasi-continuo con filtro se encuentran en las figuras siguientes. En la Figura 3-7 se muestra el error y salida del motor con respecto al tiempo, en la Figura 3-8 también se muestran el error y la salida del sistema pero en el espacio de estados, y en la Figura 3-9 se muestra la salida del controlador, que es la entrada a la planta.

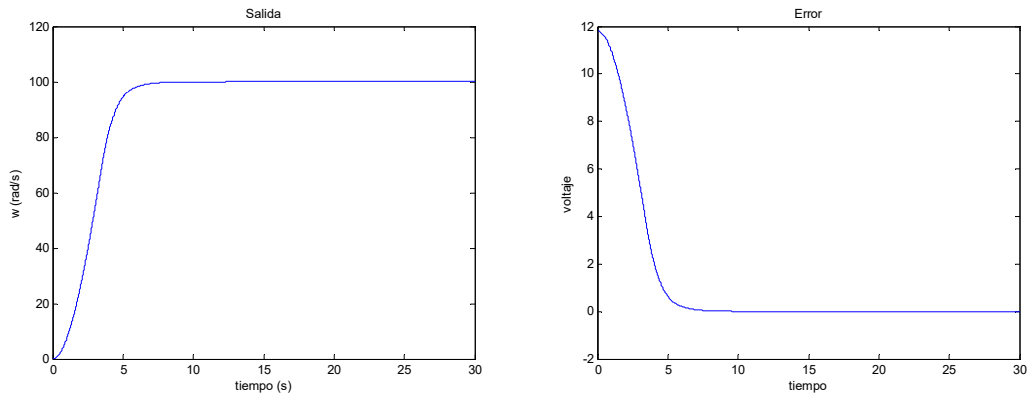


Figura 3-7. Gráficas con respecto al tiempo de la salida y el error del motor.

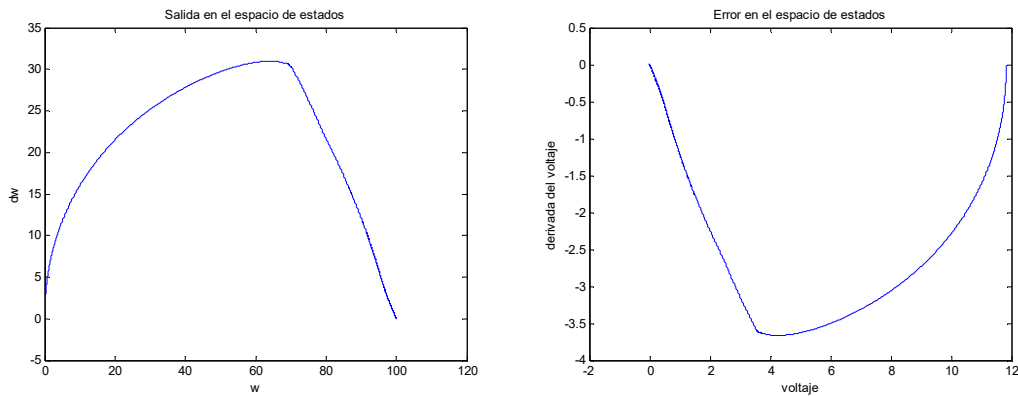


Figura 3-8. Trayectorias de estados de la salida y del error del motor.

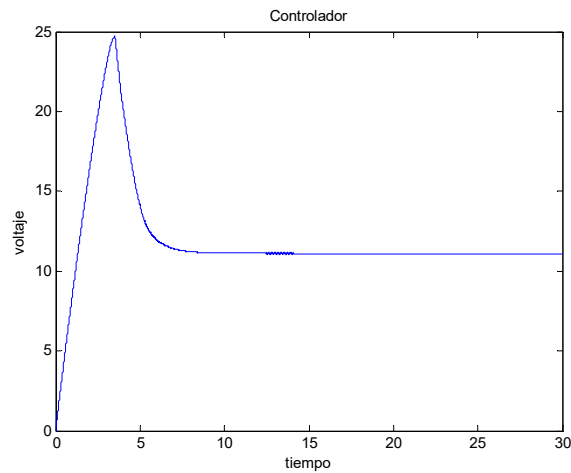


Figura 3-9. Salida del controlador.

3.2.2. RESPUESTA ANTE UNA PERTURBACIÓN SENOIDAL

De la misma manera que en los capítulos anteriores, en este capítulo realizaremos la simulación del algoritmo agregando una perturbación posterior a la planta y una perturbación posterior al controlador. También compararemos los resultados obtenidos contra los resultados para el algoritmo de primer orden y para el algoritmo cuasi-continuo sin filtro.

Simularemos primero la perturbación añadida a la salida del motor con una frecuencia de 1000rad/s y una amplitud de 1rad/s , la cual se muestra en la Figura 3-10.

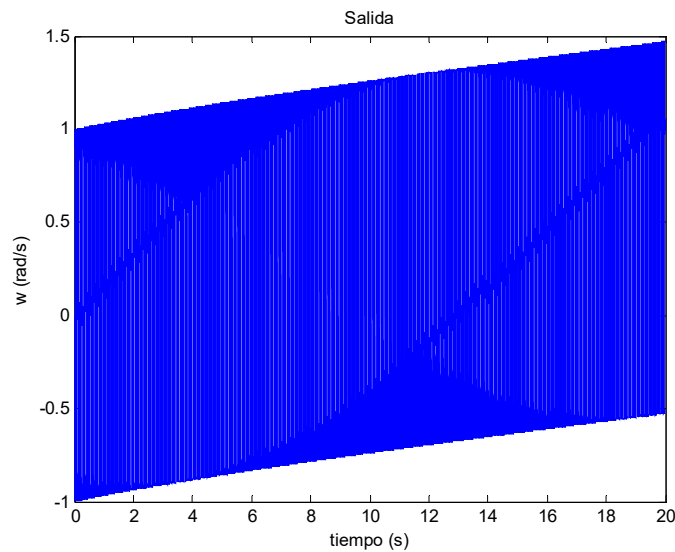


Figura 3-10. Salida del motor aplicando una perturbación senoidal a la salida del motor.

El control, debido al integrador que actúa como filtro, no es capaz de contrarrestar una perturbación de esta frecuencia, esto porque el integrador aumenta el tiempo de acción de la señal de control y disminuye su amplitud.

Si le agregamos una perturbación de frecuencia 1rad/s y de amplitud 25rad/s obtenemos la salida que se muestra en la Figura 3-11, donde podemos ver que el controlador no puede contrarrestar la perturbación, esto debido a la acción integral⁶⁵ que tiene gracias al filtro que se le agrega al algoritmo.

⁶⁵ Para más información sobre la acción integral, ver la sección **iError! No se encuentra el origen de la referencia..**

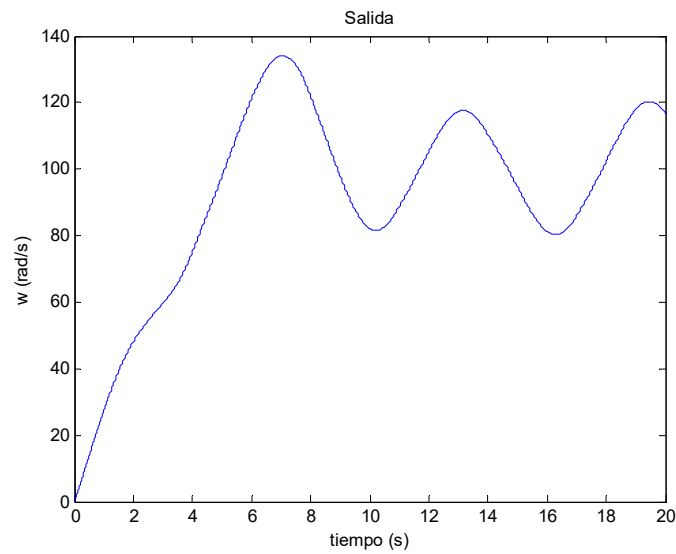


Figura 3-11. Salida del motor aplicando una perturbación senoidal a la salida del motor.

Ahora simularemos el caso en el que la perturbación se encontrará a la salida del control, consideraremos primero una frecuencia grande de 1000rad/s y una amplitud de 1V como se muestra en la Figura 3-12

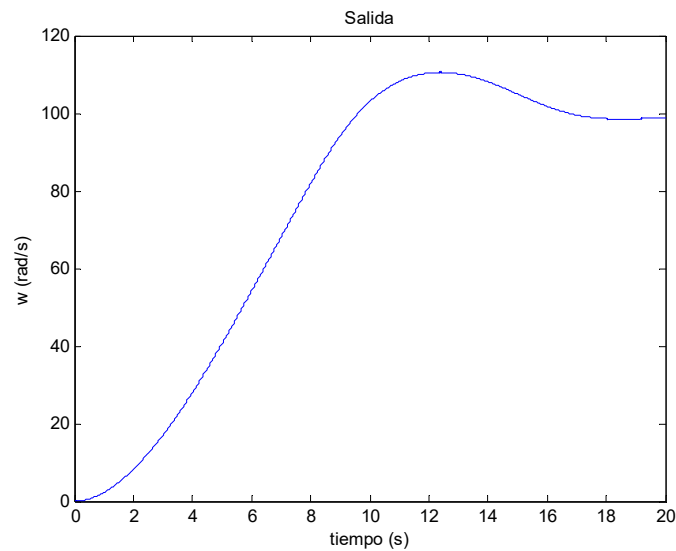


Figura 3-12. Salida del motor aplicando una perturbación senoidal a la salida del control.

Ahora consideraremos para la misma frecuencia una amplitud de la perturbación de 12V, la gráfica de salida para este caso se encuentra en la Figura 3-13.

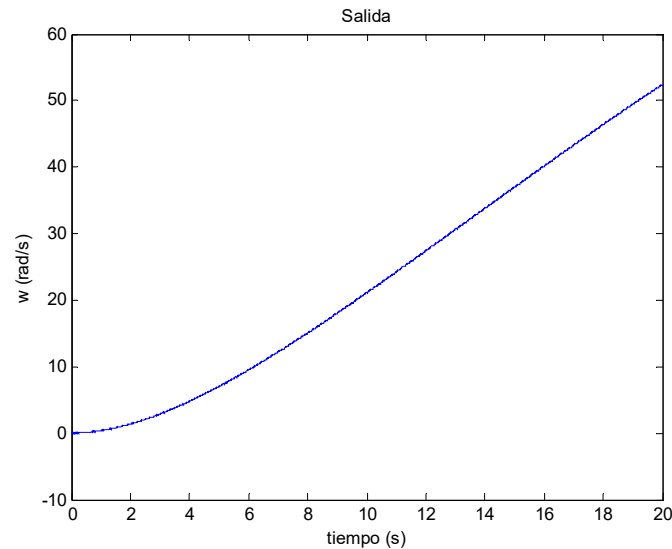


Figura 3-13. Salida del motor aplicando una perturbación senoidal a la salida del control.

De las dos últimas gráficas podemos observar que aumenta mucho el tiempo de levantamiento debido a la perturbación. Razón por la cual no se logra un buen control de la salida del motor, para mejorarlo sería necesario volver a ajustar los parámetros que definen al algoritmo.

Simulando una perturbación de menor frecuencia 1rad/s y de amplitud 12V, como se muestra en la Figura 3-14, vemos que encontramos la forma de onda de la perturbación en la señal de salida del motor en su estado permanente.

Obsérvese que la magnitud de la perturbación es del 100% del valor de salida del algoritmo de control, antes de pasar por el integrador. Si se realiza otra simulación con la misma frecuencia pero ahora con una amplitud mayor, 24V, obtenemos la gráfica de la Figura 3-15.

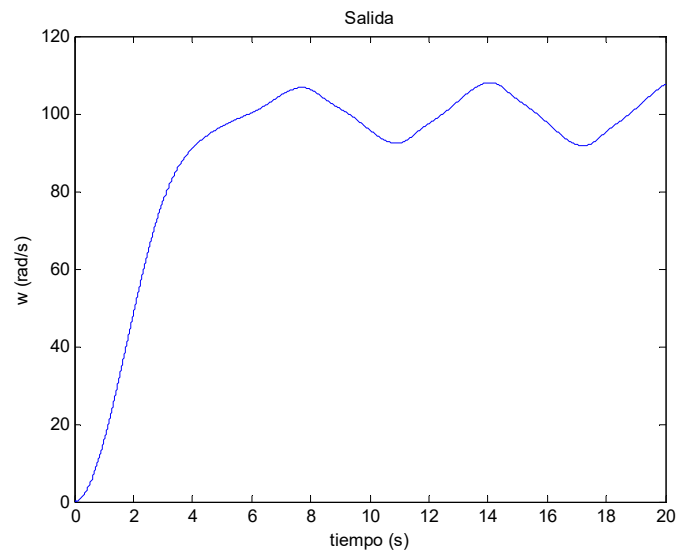


Figura 3-14. Salida del motor aplicando una perturbación senoidal a la salida del control.

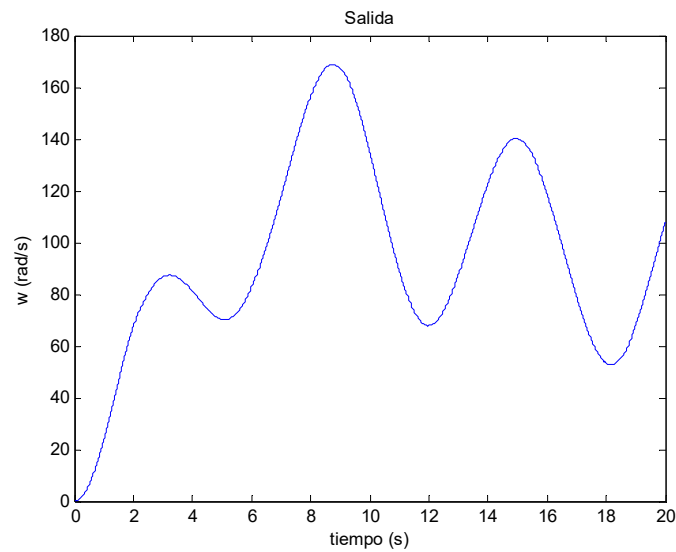


Figura 3-15. Salida del motor aplicando una perturbación senoidal a la salida del control.

El integrador que trabaja como filtro en este algoritmo hace más lenta la acción de control, evitando que el controlador logre alcanzar la señal de referencia deseada a la salida del motor. Los resultados obtenidos para el algoritmo cuasi-continuo sin filtro cuando se tiene una perturbación dentro del lazo de control son mejores que los resultados del algoritmo cuasi-continuo con filtro.

4. Capítulo 4. Diferenciadores

Para los modos deslizantes de altos órdenes es necesario conocer las derivadas de orden superior de la variable de deslizamiento, es por esta razón que es necesario tener un diferenciador de tiempo real que sea exacto y que tenga convergencia en tiempo finito⁶⁶.

En los capítulos anteriores se utilizó el bloque de diferenciación que provee Simulink, durante este capítulo se estudiarán diferentes diferenciadores basados en algoritmos de modos deslizantes, para comparar los resultados de las simulaciones de los algoritmos que se realizaron en los tres primeros capítulos, con las simulaciones que se verán en este capítulo.

Los diferenciadores que se estudiarán cumplen con las características de convergencia en tiempo finito y de precisión.

En el análisis del funcionamiento de cada diferenciador se consideró que solo es necesario obtener la primera derivada de la variable medida. Para el caso de nuestro sistema, un motor de CD, y con los controladores que utilizaremos solo es necesario la primera derivada.

4.1. Análisis de diferenciadores por Modos Deslizantes

Los diferenciadores basados en la teoría de modos deslizantes, son algoritmos de modos deslizantes que se utilizan a manera de diferenciador, buscando controlar el error entre el valor medido y el estimado.

La forma de onda del valor estimado de la variable de entrada así como de su derivada dada una misma señal de entrada será diferente dependiendo del tipo de algoritmo de modos deslizantes que se utilice como diferenciador.

En esta sección veremos tres diferenciadores basados en tres distintos algoritmos de modos deslizantes.

⁶⁶ Un diferenciador común no tiene la característica de exactitud que necesitan los algoritmos de modos deslizantes. Como se vio en las simulaciones de los capítulos anteriores, el diferenciador ordinario incrementa el ruido que existe en la derivada de la variable de interés, esto se puede observar en las trayectorias de estados de los capítulos anteriores.

4.1.1. DIFERENCIADOR DE PRIMER ORDEN ¡ERROR! NO SE ENCUENTRA EL ORIGEN DE LA REFERENCIA.

El diferenciador de primer orden, está basado en el algoritmo de modos deslizantes de primer orden⁶⁷, y está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= v \\ v &= \lambda \text{sign}(x_1 - z) \end{aligned} \quad \text{Ec 4.1}$$

donde v es el valor estimado de la derivada de la variable x_1 , y esta última es la variable de entrada. Físicamente x_1 es la variable de la cual se realizan mediciones.

Como se puede observar de las ecuaciones anteriores, la variable z es el valor estimado de la entrada x_1 , grosso modo se puede decir que el algoritmo de primer orden intenta hacer que su variable de entrada ($x_1 - z$) llegue a cero; es decir, que el error entre la señal medida y la señal estimada sea cero. Debido a los cambios en la señal medida z no es igual a x_1 en el mismo instante, pero al tratar de alcanzarla se obtiene la diferencia entre el estado anterior de x_1 y el estado actual de x_1 , obteniendo como resultado el signo de la derivada de x_1 , la magnitud del estimado de la derivada de x_1 dependerá del valor del parámetro λ ⁶⁸.

Este diferenciador tiene un gran contenido armónico debido a que la función *sign* se encuentra directamente en la ecuación de la derivada. Es por esta razón que se agrega un filtro paso bajas de primer orden y lineal a la salida del diferenciador, es decir aplicado a v , de esta manera se obtendrá una derivada más suave, en ecuaciones esto es:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= v \\ v &= \lambda \text{sign}(x_1 - z) \\ \dot{v}_f &= a(v - v_f) \end{aligned} \quad \text{Ec 4.2}$$

de esta manera la salida del diferenciador sería v_f . Y a sería la frecuencia de corte del filtro paso bajas.

⁶⁷ Para más información sobre este algoritmo ver el capítulo 1.

⁶⁸ Más adelante se verá con detalle los límites de este parámetro.

Obsérvese que es necesario conocer el máximo valor de la derivada que se desea obtener para ajustar el valor de la constante λ que caracteriza el diferenciador. Un valor muy grande de λ puede provocar una amplificación del *chattering*, mientras que un valor pequeño de λ provocaría que el valor de la derivada estimada se encontrará lejos del valor real.

4.1.2. DIFERENCIADOR DE LEVANT **¡ERROR! NO SE ENCUENTRA EL ORIGEN DE LA REFERENCIA.¡ERROR! NO SE ENCUENTRA EL ORIGEN DE LA REFERENCIA.**

El diferenciador propuesto por Levant está basado en el algoritmo *super-twisting* de modos deslizantes, y está definido por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\dot{z}_0 &= v_0, & v_0 &= -\lambda_0 |z_0 - \sigma|^{1/2} \text{sign}(z_0 - \sigma) + z_1 \\ \dot{z}_1 &= -\lambda_1 \text{sign}(z_1 - \sigma)\end{aligned}\tag{Ec 4.3}$$

donde σ será la variable medida, z_0 el estimado de la variable medida, y $\dot{z}_0$ la derivada estimada de la variable medida. El problema, de la misma manera que en el caso anterior, surge por que $\dot{z}_0$ está definido mediante la función *sign*, lo cual añade *chattering* al estimado de la derivada, si se considera como salida a z_1 ⁶⁹ se observa que se puede tomar como la derivada de z_0 ; es decir, se puede tomar como el estimado de la derivada de la variable medida, donde z_1 no depende de una función discontinua, ya que es la salida de un integrador, dando así una señal de salida suave.

Es posible utilizar este diferenciador de manera recursiva, debido a ello se han obtenido valores que ayudan a calcular los parámetros del diferenciador⁷⁰ que son:

⁶⁹ Considerando el diferenciador como un observador lineal diseñado para estimar el estado en un sistema de grado relativo uno **¡ERROR! No se encuentra el origen de la referencia..**

⁷⁰ Las constantes para calcular estos parámetros se pueden utilizar mientras el orden del sistema sea menor o igual a seis **¡ERROR! No se encuentra el origen de la referencia..**

$$\lambda_{r-1} = 1.1L, \quad \lambda_{r-2} = 1.5L^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_{r-3} = 2L^{\frac{1}{3}}, \\ \lambda_{r-4} = 3L^{\frac{1}{4}}, \quad \lambda_{r-5} = 5L^{\frac{1}{5}}, \quad \lambda_{r-6} = 8L^{\frac{1}{6}},$$

Los cuales pueden ser utilizados sin importar el orden⁷¹ del sistema r . En este caso que solo necesitamos la primera derivada de la variable, solamente utilizaremos los parámetros: λ_0 y λ_1 . Los parámetros son seleccionados de acuerdo con la condición:

$$|\sigma^{(r)}| \leq L \quad \text{Ec 4.4}$$

donde se vuelve necesario conocer el valor máximo de la derivada de orden mayor $\sigma^{(r)}$, en el caso del diferenciador de primer orden el valor máximo de $\dot{\sigma}$. De otra manera será necesario encontrar L en simulaciones.

4.1.3. DIFERENCIADOR SSZL

¡ERROR! NO SE ENCUENTRA EL ORIGEN DE LA REFERENCIA. ¡ERROR! NO SE ENCUENTRA EL ORIGEN DE LA REFERENCIA.

El diferenciador SSZL⁷², o filtro SSZL, dependiendo de la salida que se utilice, tiene un comportamiento similar a un filtro paso banda lineal, y está definido por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= z_1 \\ \dot{z}_1 &= \rho_0 \text{sign}(z_2 + e) \\ \dot{z}_2 &= b_1 |e|^{0.5} \text{sign}(e) - a_1 |z_2 + e|^{0.5} \text{sign}(z_2 + e) \\ e &= x_1 - z_0 \end{aligned} \quad \text{Ec 4.5}$$

donde z_1 es la salida estimada del diferenciador, x_1 es la variable medida a la salida de la planta, y ρ_0 , a_1 y b_1 son constantes positivas que definen el comportamiento del diferenciador, el ajuste de estas constantes es complicado

⁷¹ El orden del sistema para el diferenciador estará definido por el número de derivadas de orden superior de la variable de deslizamiento que se deseen.

⁷² La abreviatura SSZL proviene de los apellidos de los autores, Shkolnikov Shtessel Zarchan Lianos.

debido a la naturaleza no lineal del algoritmo, es por esta razón que se tomarán los valores de las constantes consideradas en la Bibliografía **iError! No se encuentra el origen de la referencia..**

$$\rho_0 = 200, \quad a_1 = 20, \quad b_1 = 0.5$$

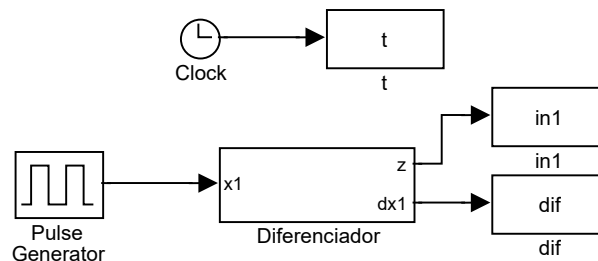
Grosso modo, para ajustar el diferenciador se puede suponer al algoritmo como un filtro paso bandas, donde podemos decir aproximadamente que el parámetro a_1 está relacionado con la frecuencia central, mientras que b_1 está relacionado con la calidad del filtro. Por otro lado el valor ρ_0 debe de ser aproximadamente el doble del valor deseado a la salida de la variable, sin ser demasiado grande ya que genera mucho ruido, ni muy pequeño porque la respuesta de la dinámica del sistema puede ser muy lenta.

En este diferenciador la derivada estimada es la salida de un integrador, razón por la cual gran parte del *chattering* provocado por las funciones *sign* del algoritmo es eliminado.

4.2. Simulaciones

En esta sección se presentan las simulaciones de los diferenciadores basados en algoritmos de modos deslizantes.

Los diferenciadores de modos deslizantes pueden tener diferentes salidas, dependiendo la salida que se tome se estará estimando la variable de entrada o se estará derivando la misma⁷³. En la Figura 4-1 se muestra un diagrama de bloques de las simulaciones que se realizaron.



⁷³ Sí se observan las ecuaciones de cada diferenciador, existe una variable que esta estimando a la variable de entrada.

Figura 4-1. Diagrama del diferenciador con una señal cuadrada de entrada.

Consideraremos una señal cuadrada de entrada al diferenciador, con una frecuencia de 0.1s, y una amplitud de 1V, para observar el comportamiento de los diferentes diferenciadores que vimos durante este capítulo.

De igual manera que en el resto de las secciones, las simulaciones de los diferenciadores se realizaron con un tiempo de muestreo de 0.1[ms] y con pasos fijos, también se utilizó ODE1iError! No se encuentra el origen de la referencia. para la integración a un modelo continuo.

4.2.1. DIFERENCIADOR DE PRMER ORDEN PARA UNA SEÑAL CUADRADA

Para la simulación del diferenciador clásico, se tomaron los parámetros $a=150$, $\lambda=10$ iError! No se encuentra el origen de la referencia., la señal cuadrada de entrada y el valor estimado de la variable se encuentran en la Figura 4-2

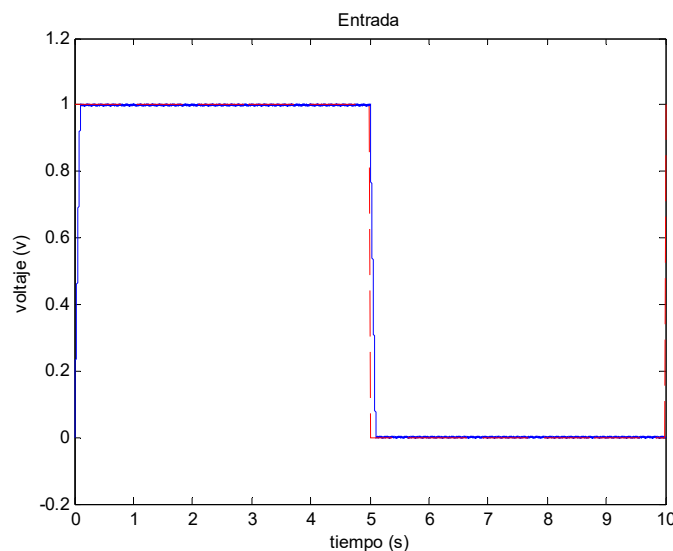


Figura 4-2. Entrada al diferenciador y valor estimado de la entrada.

La derivada de la variable de entrada se encuentra en la Figura 4-3, de esta última gráfica podemos observar que el impulso obtenido tiene una amplitud máxima de 10, eso es el valor de λ , es por esta razón que es necesario conocer la

cota superior del valor de λ para obtener una estimación real de la derivada de la variable.

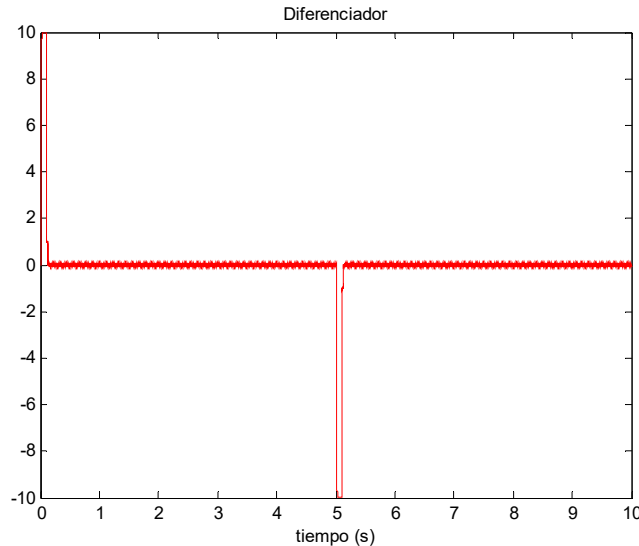


Figura 4-3. Señal diferenciada.

4.2.2. DIFERENCIADOR DE LEVANT PARA UNA SEÑAL CUADRADA

En la simulación del diferenciador de Levant, que utiliza el algoritmo super-twisting, los parámetros utilizados fueron $\lambda_0 = 40$ y $\lambda_1 = 200$ **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** en la Figura 4-4 encontramos la señal de entrada y el valor estimado de la misma. Observemos que en esta figura las dos señales prácticamente se superponen, excepto por el sobrepaso que tiene la señal estimada de la variable de entrada.

Debido a que la estimación de la señal de entrada es más precisa con el diferenciador de Levant en comparación al diferenciador clásico, la derivada también lo es, obteniendo una derivada más exacta de la variable de entrada. Esto se puede ver en la Figura 4-5.

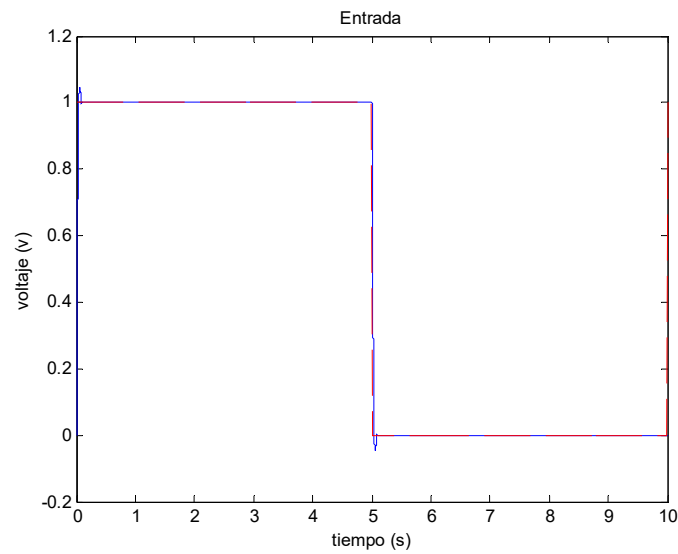


Figura 4-4. Entrada al diferenciador y valor estimado de la entrada.

También obsérvese que el tiempo de duración del impulso que es la derivada de la variable de entrada es menor, esto es porque la señal que estima el valor de la variable de entrada tiene un tiempo de levantamiento menor cuando se estima con el diferenciador de Levant en comparación con el tiempo de levantamiento de la señal estimada con el diferenciador clásico.

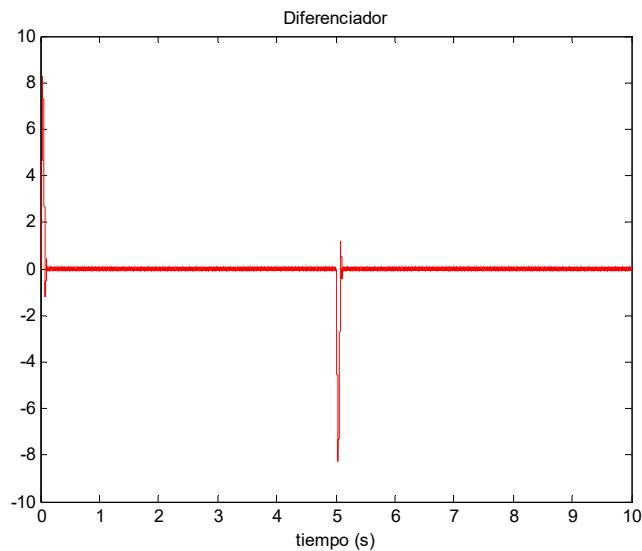


Figura 4-5. Señal diferenciada.

4.2.3. DIFERENCIADOR SSZL PARA UNA SEÑAL CUADRADA

Durante la simulación del diferenciador SSZL se utilizaron como valores de los parámetros del diferenciador $\rho_0 = 200$, $a_1 = 20$, $b_1 = 0.5$ **Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, la gráfica de la variable de entrada así como la gráfica de la variable estimada se encuentran en la Figura 4-6. Donde podemos observar que el sobrepaso de la señal estimada es mayor del 20% del valor final, el valor de la señal estimada se puede mejorar modificando el parámetro ρ_0 , ya que es demasiado grande para la amplitud de la señal de entrada⁷⁴.

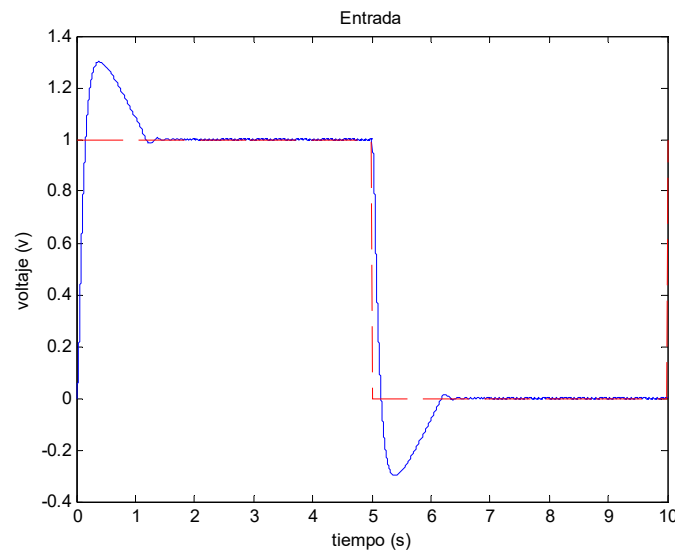


Figura 4-6. Entrada al diferenciador y valor estimado de la entrada.

Por otro lado en la Figura 4-7 podemos ver la derivada de la variable de entrada, donde la amplitud del impulso, resultado de derivar una señal cuadrada, es mayor en comparación con el diferenciador de Levant para la misma señal de entrada, esto se debe a que el sobrepaso de la variable estimada con respecto a la señal de entrada del diferenciador SSZL es mucho mayor que en el caso del diferenciador de Levant.

⁷⁴ Recordemos que estos parámetros están ajustados para un motor de DC, posteriormente los aplicaremos a nuestro motor para observar su comportamiento.

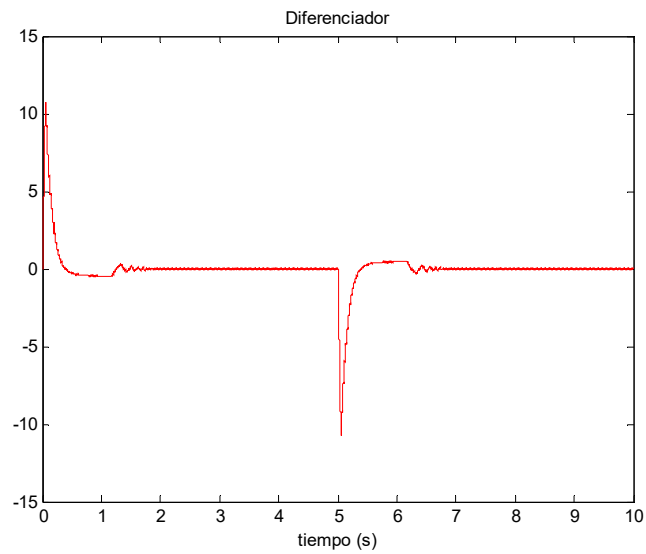


Figura 4-7. Señal diferenciada.

También observemos que el sobrepaso de la señal estimada conduce a un transitorio más largo en la señal diferenciada ya que el algoritmo necesita ajustar el sobrepaso.

5. Capítulo 5. Comparación del Funcionamiento de los Modos Deslizantes.

5.1. Acciones de control básicas*Error! No se encuentra el origen de la referencia.iError! No se encuentra el origen de la referencia.*

Siendo los controladores P , PI , PD , PID las acciones básicas de control y contra las que se comparará el desempeño de los modos deslizantes tanto de primer orden como de segundo orden (utilizando el algoritmo cuasi-continuo) se profundizará en su teoría.

5.1.1. ACCIÓN DE CONTROL PROPORCIONAL

La relación entre la salida del controlador $m(t)$ y la señal de error actuante $e(t)$ se representa mediante la ecuación:

$$m(t) = K_p e(t) \quad \text{Ec 5.1}$$

o, realizando la transformada de Laplace:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \quad \text{Ec 5.2}$$

donde: K_p se denomina sensibilidad o ganancia proporcional.

Se le llama control proporcional porque el control $m(t)$ lleva una proporción constante con respecto del error $e(t)$. Esto es de utilidad ya que, si el error aumenta, el control también lo hará para contrarrestar esta acción, logrando que el error decrezca. Por otro lado, si el error disminuye, la acción de control también lo hará, evitando así el incremento del error de la salida con respecto a la entrada.

Su ventaja principal es que disminuye el tiempo de levantamiento, su desventaja radica en el control de perturbaciones⁷⁵ que ocurren en estado permanente, donde la acción proporcional al contrarrestarlas agrega oscilaciones,

⁷⁵ Perturbaciones externas, como picos instantáneos.

un transitorio que modifica el valor de estado estable, viéndose afectada la estabilidad del sistema aun si sólo es por un instante de tiempo, lo que no ocurriría sin esta acción de control.

El sobrepaso del sistema dependerá del valor de la constante de proporcionalidad, por lo cual no es deseable escoger un valor muy grande, pero se debe tomar en cuenta que mientras mayor sea, menor será el tiempo de levantamiento.

5.1.2. ACCIÓN DE CONTROL PROPORCIONAL Y DERIVATIVO

La acción de control proporcional y derivativo queda definida por la siguiente ecuación:

$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad \text{Ec 5.3}$$

y la función de transferencia es

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s) \quad \text{Ec 5.4}$$

donde K_p es la sensibilidad proporcional y T_d es el tiempo⁷⁶ derivativo. Tanto K_p como T_d son regulables. La acción de control derivativa logra que el valor de salida del control sea proporcional a la variación de la señal de error actuante; es decir, es un control predictivo, característica que lo vuelve muy sensible.

En un control derivativo ideal, una de sus ventajas es que se adelanta al comportamiento del error produciendo una corrección significativa del mismo antes de que la magnitud del error crezca demasiado. Además, debido a que añade amortiguamiento al sistema, reduce el tiempo de asentamiento del mismo, y permite un valor de la constante de acción de control proporcional mayor, lo cual se puede utilizar para mejorar la precisión en estado estable del sistema.

⁷⁶ Se le llama tiempo por las unidades que debe tener la constante para que correspondan con el otro término del error con el cual se suma.

La desventaja principal de este control radica en el hecho de que no es un control implementable. Lo cual es un reflejo de las desventajas que se listan a continuación.

Cuando hay una variación grande en la señal de referencia, el control derivativo provoca una variación grande en la señal de error, haciendo el control muy grande para un instante de tiempo. Si el controlador real no soporta este valor de control, el tiempo de corrección del error será mayor al calculado en las ecuaciones, provocando en la práctica un retraso en la señal de salida con respecto a la calculada.

Otra desventaja real de este tipo de controlador, es que produce una ganancia para las señales de entrada que depende de la frecuencia de las mismas, haciendo mayor la ganancia conforme mayor sea la frecuencia. En un sistema real esto genera una amplificación de las señales de ruido en altas frecuencias.

5.1.3. ACCIÓN DE CONTROL PROPORCIONAL E INTEGRAL

La acción de control proporcional e integral queda definida por la siguiente ecuación:

$$m(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad \text{Ec 5.5}$$

donde a la acción de control proporcional agregamos una acción de control integral aplicando el teorema de superposición. La forma más común de la ecuación de control PI en Laplace es:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad \text{Ec 5.6}$$

donde K_p representa la sensibilidad proporcional o ganancia y T_i el tiempo⁷⁷ integral. Tanto K_p como T_i son regulables. El tiempo integral regula la acción de control integral, mientras una modificación de K_p afecta tanto a la parte integral como a la proporcional de la acción de control.

⁷⁷ Se le llama tiempo por las unidades que debe tener la constante para que correspondan con el otro término del error con el cual se suma.

Este control tiene memoria; es decir, toma en cuenta el comportamiento que ha tenido el error en el tiempo transcurrido para asignar el valor de control que se utilizará. La ventaja de este control es que es más suave que el proporcional, ya que no es afectado tanto por las perturbaciones instantáneas, mejorando así el error en estado estable. Su desventaja principal es que aumenta el sobrepaso del sistema; esto ocurre cuando hay un gran cambio en el valor de entrada de referencia, ya que al ir sumando los valores de error durante la integración va aumentando la acción de control aun cuando ya se haya alcanzado el valor deseado de la variable⁷⁸, esta acción de control sigue creciendo hasta que el error cambie de signo para que el mismo efecto de integración realice una reducción a la acción de control, esto produce un retraso en la acción de control con respecto al valor deseado del sistema, haciendo mayor la duración del transitorio y del sobrepaso.

5.1.4. ACCIÓN DE CONTROL PROPORCIONAL, DERIVATIVO E INTEGRAL

La combinación de los efectos de acción proporcional, acción de control derivativa y acción de control integral, tiene la ventaja de cada una de las tres acciones de control individuales. La ecuación de un control con esta acción de control combinada está dada por:

$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad \text{Ec 5.7}$$

o la función de transferencia

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \quad \text{Ec 5.8}$$

Este tipo de controlador hereda las ventajas y desventajas de los tres tipos mencionados y mediante una correcta sintonización de las constantes de las acciones de control, se puede obtener un mejor resultado que utilizándolos de

⁷⁸ Cuando el error sea cero.

manera independiente, logrando de esta forma disminuir el tiempo de levantamiento y el sobrepaso, ajustando la precisión deseada en el valor de estado estable.

5.2. Regla de sintonización de Ziegler-Nichols

Es importante ajustar los valores de las constantes que se utilizarán en los controladores de las acciones de control mostradas con anterioridad, de manera que los valores de las constantes no sean tan grandes que puedan desestabilizar el sistema, ni tan pequeñas tal que no lo controlen. Para realizar este ajuste se usará la regla de sintonización de Ziegler y Nichols que consta de dos métodos. Los cuales solo consideran la sintonización de plantas de primero y segundo orden. Para sistemas de órdenes superiores la sintonización de los controladores P , PI y PID se complica.

Este método es totalmente práctico; es decir, es necesario realizar pruebas con la planta que se desea controlar para poder encontrar los valores de los parámetros que nos llevarán al ajuste de los controladores.

Las características más importantes de la regla de sintonización de Ziegler y Nichols son que ajusta el máximo sobrepaso del sistema en lazo cerrado al 25%, además este ajuste reduce la amplitud de la oscilación del transitorio en un cuarto cada ciclo⁷⁹.

5.2.1. PRIMER MÉTODO

Este método se basa en la característica del proceso, ya que se utiliza la respuesta al escalón unitario de la planta. La función de transferencia del sistema se aproxima a la de un sistema de primer orden con un retardo, representado por:

$$\frac{Ke^{-Ls}}{\tau s + 1}$$

⁷⁹ Esta optimación es un buen punto intermedio entre una respuesta excesivamente oscilatoria pero rápida y una respuesta estable pero lenta. Se puede realizar un refinamiento final en el ajuste de las constantes de control para adecuarse a las especificaciones del control que se requieran.

donde el tiempo de retardo L y la constante de tiempo τ ⁸⁰ se definen a partir del punto de inflexión en la Figura 5-1.

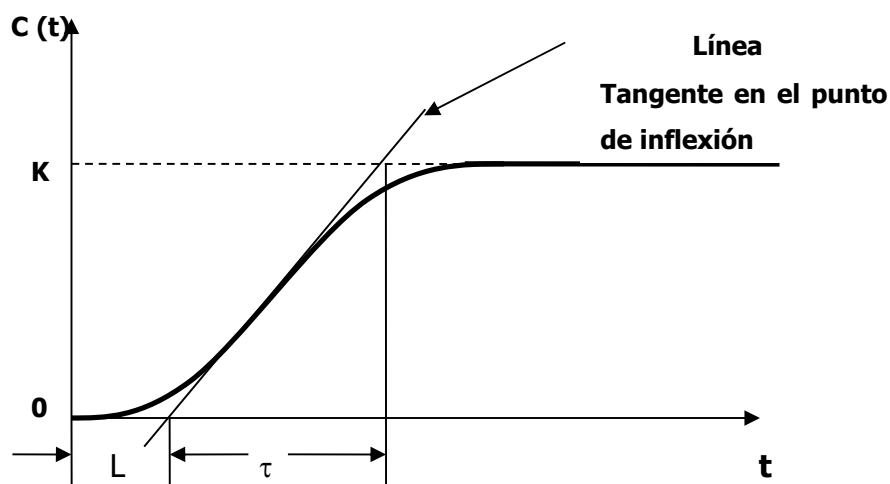


Figura 5-1. Respuesta de un sistema de primer orden con retardo a una entrada escalón

La regla de sintonización basada en la respuesta escalón de la planta está dada de acuerdo con los valores de la siguiente tabla:

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0.9 \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2 \frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

Si seleccionamos el controlador *PID*, de acuerdo con Ziegler-Nichols de la tabla anterior, se tiene:

$$K_p = 1.2 \frac{T}{L}$$

$$T_i = 2L$$

$$T_d = 0.5L$$

Ec 5.9

⁸⁰ Es el tiempo que transcurre para que la respuesta escalón del sistema alcance el 63.2% del valor final.

$$\begin{aligned}
\frac{M(s)}{E(s)} &= K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \\
&= 1.2 \frac{T}{L} \left(1 + 0.5 L s + \frac{1}{2 L s} \right) \\
&= \frac{1.2 T}{2 L^2 s} (2 L s + L^2 s^2 + 1) \\
&= 0.6 \frac{T}{L^2} \left(\frac{(L s + 1)^2}{s} \right)
\end{aligned}$$

Ec 5.10

5.2.2. SEGUNDO MÉTODO

El segundo método está basado en la respuesta del sistema en lazo cerrado, donde se utiliza dentro del lazo una acción de control proporcional. El objetivo de este método es encontrar la constante K_p para la cual el sistema mantiene oscilaciones constantes; es decir, donde el sistema es marginalmente estable.

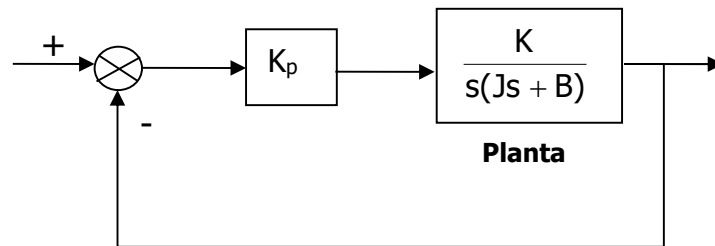


Figura 5-2. Diagrama de conexión de la planta para el segundo método de Ziegler –Nichols.

Ya que estos métodos fueron pensados para trabajar de manera experimental⁸¹, lo que se busca es variar la constante de control proporcional desde cero hasta un valor K_{cr} para el cual la salida del sistema retroalimentado exhiba oscilaciones sostenidas. Así la ganancia crítica y el periodo de oscilación se determinan experimentalmente, de acuerdo con la Figura 5-3.

⁸¹ Donde no necesariamente se tiene el modelo del sistema.

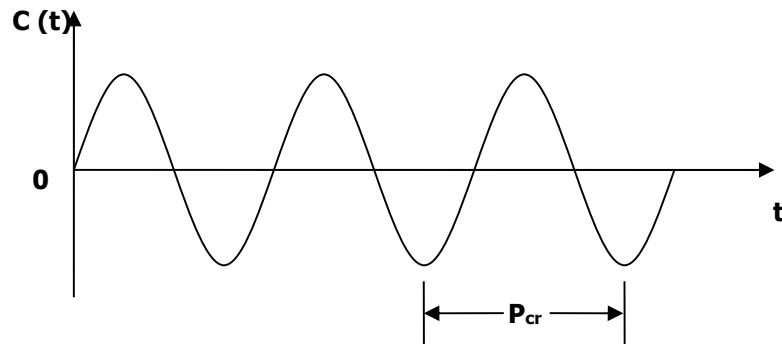


Figura 5-3. Respuesta del sistema para el segundo método de sintonización de Ziegler-Nichols

Si se cuenta con el modelo del sistema también es posible encontrar el valor K_{cr} que vuelve al sistema marginalmente estable mediante procedimientos matemáticos⁸².

La regla de sintonización basada en los valores de K_{cr} y P_{cr} obtenidos de la respuesta de lazo cerrado de la planta son:

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Si seleccionamos el controlador *PID*, de acuerdo con el segundo método de Ziegler y Nichols de la tabla anterior, se tiene:

$$K_p = 0.6K_{cr}$$

$$T_i = 0.5P_{cr}$$

$$T_d = 0.125P_{cr}$$

Ec 5.11

⁸² Por ejemplo simulando o realizando la gráfica del lugar geométrico del sistema con el controlador proporcional.

$$\begin{aligned}
\frac{M(s)}{E(s)} &= K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \\
&= 0.6K_{cr} \left(1 + 0.125P_{cr}s + \frac{1}{0.5P_{cr}s} \right) \\
&= \frac{0.6K_{cr}}{0.5P_{cr}s} (0.5P_{cr}s + 0.0625P_{cr}^2s^2 + 1) \\
&= \frac{0.6K_{cr}}{0.5P_{cr}} \left(\frac{(0.25P_{cr}s + 1)}{s} \right)
\end{aligned}$$

Ec 5.12

La constante de la acción de control proporcional dentro del control *PI* es 10% menor que en el caso del control *P* debido al efecto de desestabilización que provoca la acción de control integral. Esta misma constante de la acción de control proporcional es alrededor del 20% mayor en el control *PID* debido al efecto estabilizador de la acción de control Derivativa.

Ambos métodos se han utilizado en los sistemas de control de procesos donde no se suele conocer con precisión la dinámica de la planta, por esto se basan en la experimentación.

En general para aquellas plantas con una dinámica complicada y sin integradores, se aplican las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols. Si la planta tiene integradores, no siempre es pertinente utilizar estas reglas.

5.2.3. SINTONIZACIÓN PARA EL MOTOR CARACTERIZADO

De las simulaciones del motor⁸³ sin carga en lazo abierto para una entrada escalón y utilizando el primer método de Ziegler y Nichols, tomamos el punto aproximado de inflexión⁸⁴. Los valores de los parámetros para el punto de inflexión que definen la regla de sintonización son: $L = 1.1s$, $T = 5.75s$, como se ve en la Figura 5-4.

⁸³ Simulando el motor de acuerdo con el modelo matemático obtenido en el anexo **iError! No se encuentra el origen de la referencia.**

⁸⁴ El punto de inflexión es el punto en el que cambia el signo de la derivada de la pendiente, y está dado por la característica de inercia del motor en el arranque.

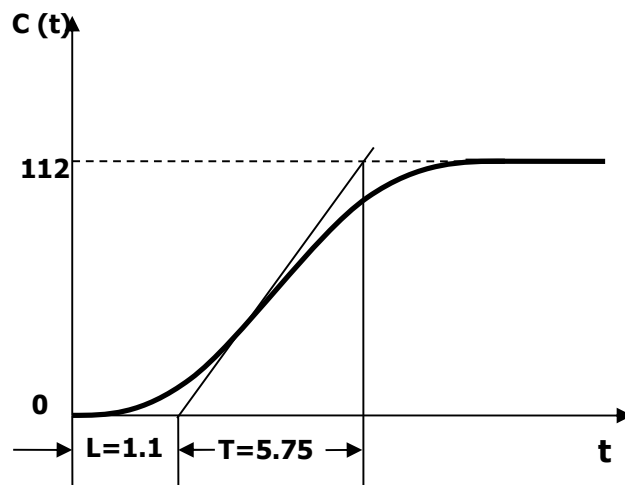


Figura 5-4. Punto de inflexión de la respuesta escalón del motor.

De la primera regla de sintonización de Ziegler y Nichols para los valores anteriores de L y T , tenemos que los valores de las constantes para los controladores son:

P	PI	PID
$K_p = \frac{T}{L} = 5.227$	$K_p = 0.9 \frac{T}{L} = 4.7$ $T_i = \frac{L}{0.3} = 3.67$	$K_p = 1.2 \frac{T}{L} = 6.27$ $T_i = 2L = 2.2$ $T_d = 0.5L = 0.55$

Los valores de estas constantes se utilizaron en las simulaciones que se realizaron para los diferentes controladores, como se muestra en la siguiente sección.

5.3. Simulaciones del controlador PID

5.3.1. SIMULACIÓN DEL MOTOR CON CONTROL BÁSICO

Se realizaron las simulaciones de acuerdo con el modelo del motor obtenido en el anexo b), y de acuerdo con las constantes para los controladores P , PI , PID sintonizados en la sección anterior.

El diagrama que se utilizó en simulink para la simulación del controlador proporcional se muestra en la Figura 5-5.

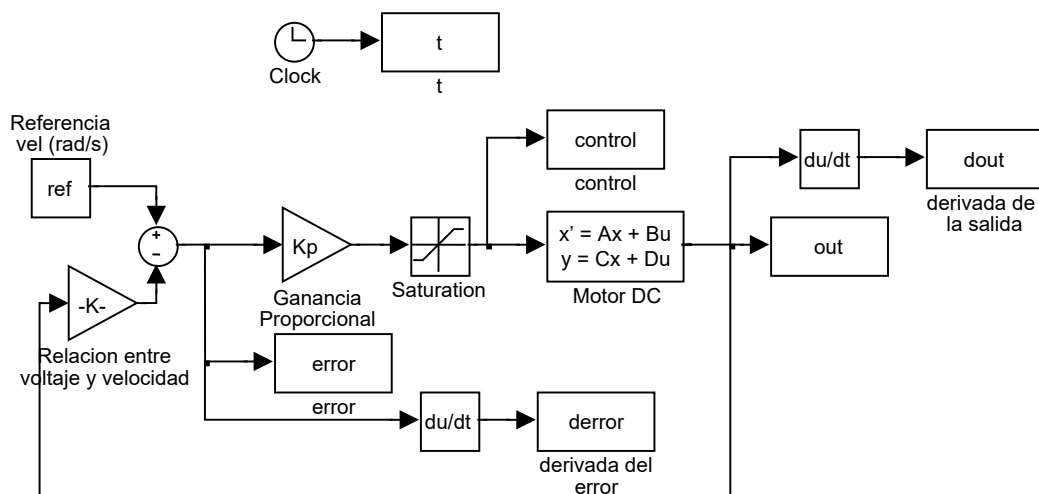


Figura 5-5. Diagrama del controlador proporcional

Se agregó un bloque de saturación a todas las simulaciones P, PI y PID, debido a que en la práctica es costoso tener una fuente que soporte administrar picos de voltajes tan grandes y porque si se tuviera una fuente con dichas características no sería posible implementarla para que alimentara al motor de CD⁸⁵, ya que este se dañaría. Los límites del bloque de saturación son $\pm 24V$, debido a que es el voltaje nominal del motor.

Las salidas obtenidas se muestran en la siguiente tabla:

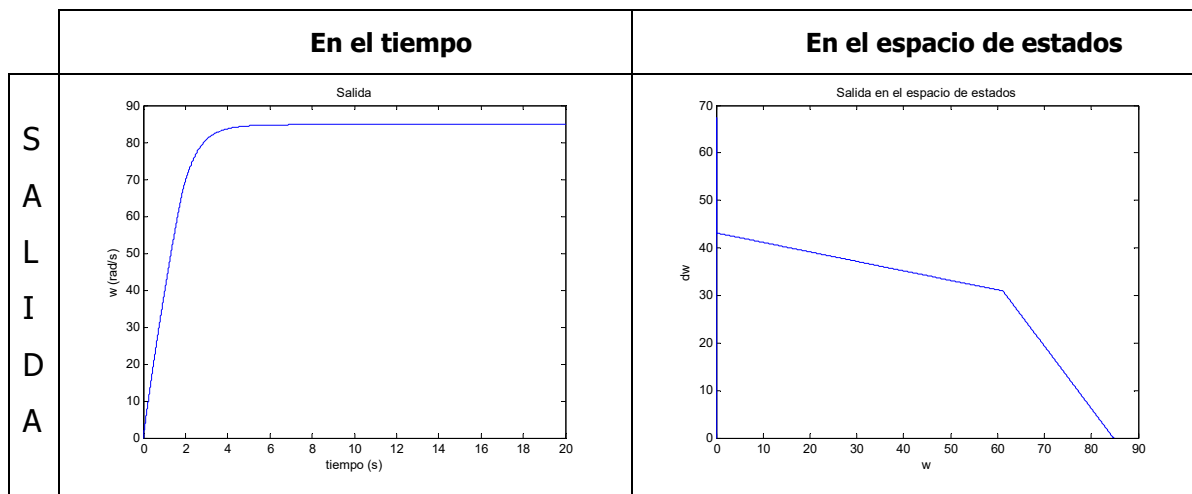


Figura 5-6. Gráficas de la velocidad de salida para el controlador PID.

⁸⁵ En general se considera que durante el arranque el motor soportará valores mayores a los nominales tanto de corriente como de voltaje. A pesar de ello, un controlador de este tipo puede, debido al control de las perturbaciones, presentar este tipo de valores de manera continua; lo que podría afectar a largo plazo la vida útil del motor.

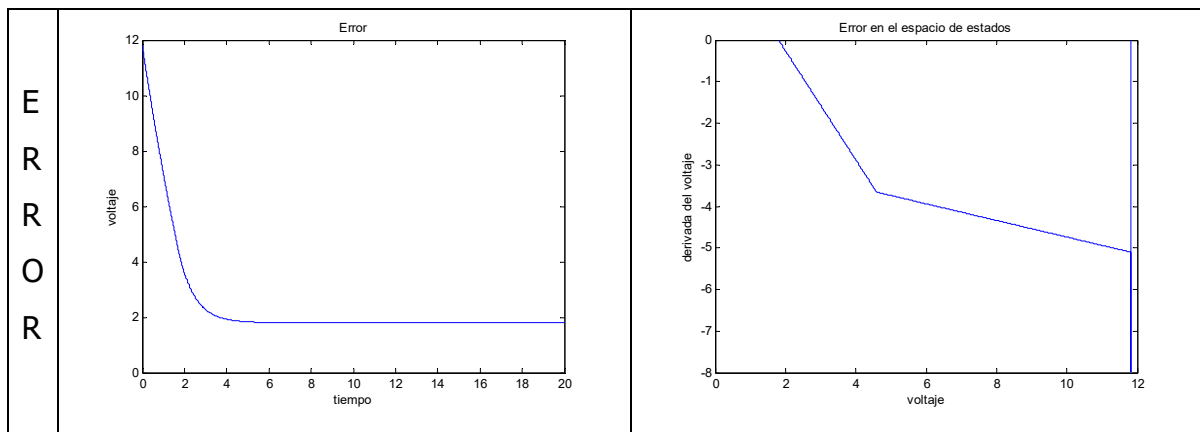


Figura 5-7. Gráficas del error para el controlador PID.

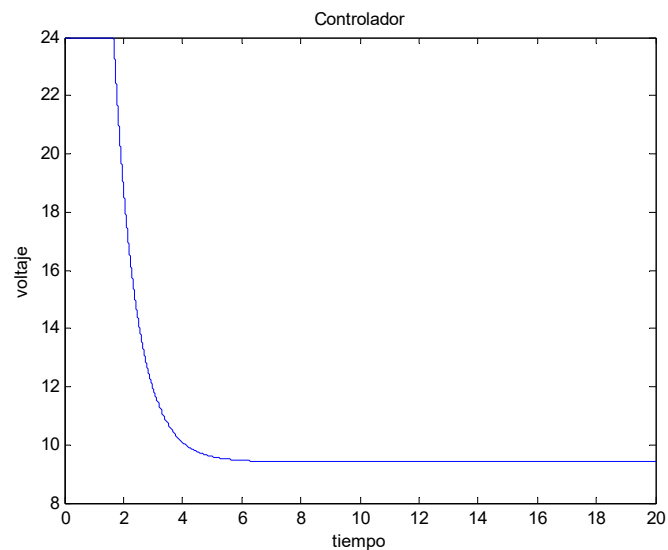


Figura 5-8. Salida del controlador proporcional.

En la Figura 5-8 se puede ver la saturación de 24V que se aplicó al voltaje de salida del controlador, esta saturación afecta el valor del tiempo de levantamiento que presenta la gráfica de velocidad de salida del motor de CD.

Para la simulación del controlador proporcional e integral se utilizó el diagrama en simulink que se muestra en la Figura 5-9.

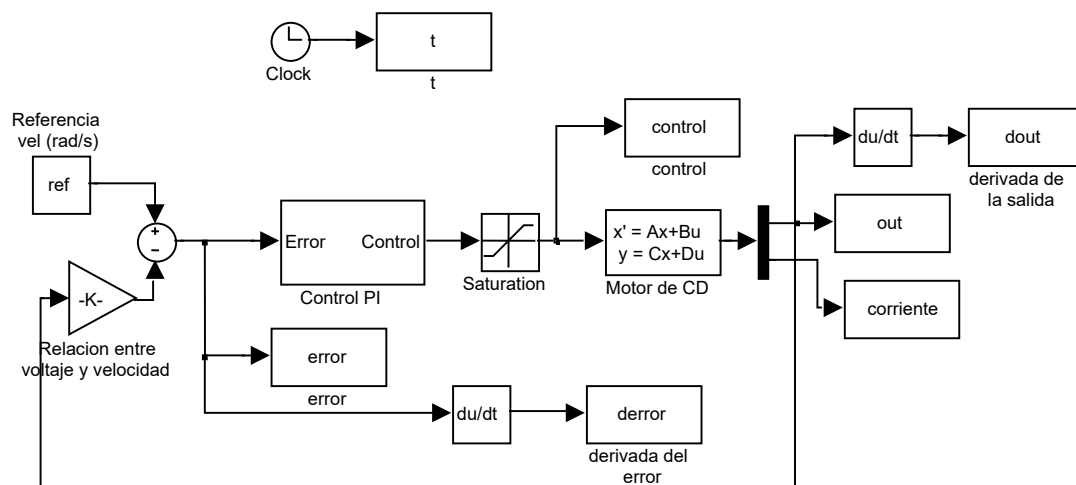


Figura 5-9. Diagrama del controlador proporcional integral

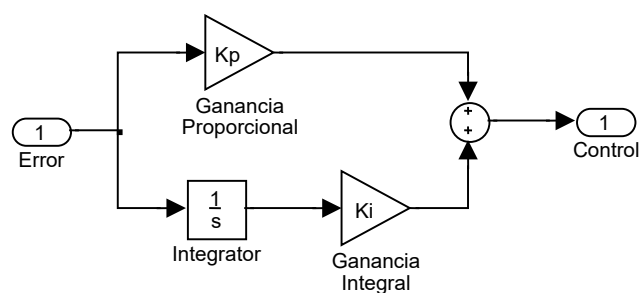


Figura 5-10. Bloque control PI

Las salidas obtenidas fueron:

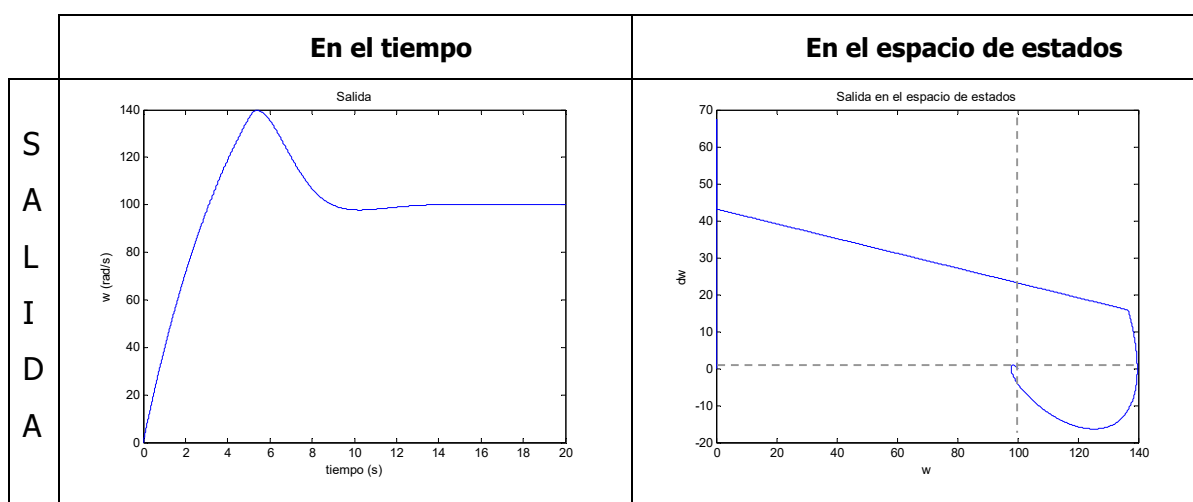


Figura 5-11. Gráficas de la velocidad de salida para el controlador PID.

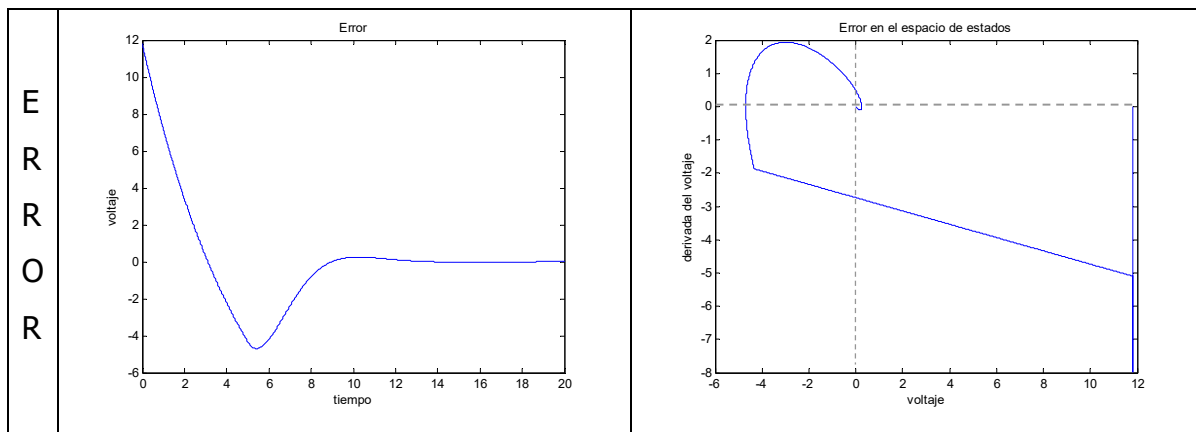


Figura 5-12. Gráficas del error para el controlador PID.

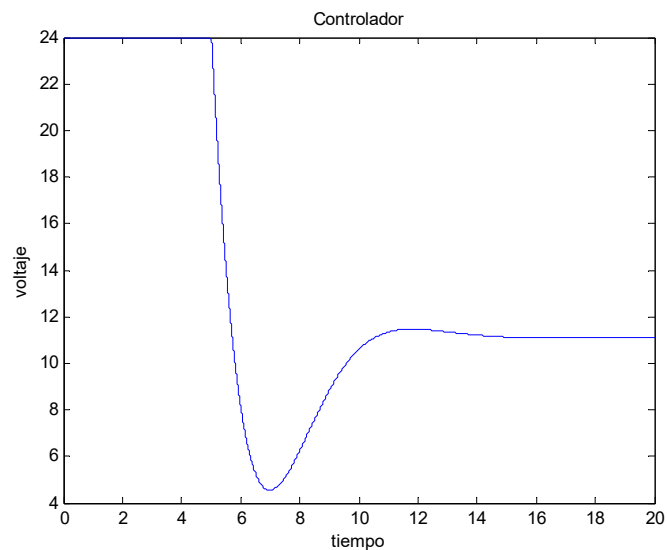


Figura 5-13. Salida del controlador proporcional e integral

De la misma manera que en el control P, la saturación aumenta el tiempo de levantamiento del motor y debido a la acción integral además aumenta el sobrepaso en la velocidad de salida del motor.

El diagrama que se utilizó en simulink para la simulación del controlador proporcional, derivativo e integral se muestra en la Figura 5-14.

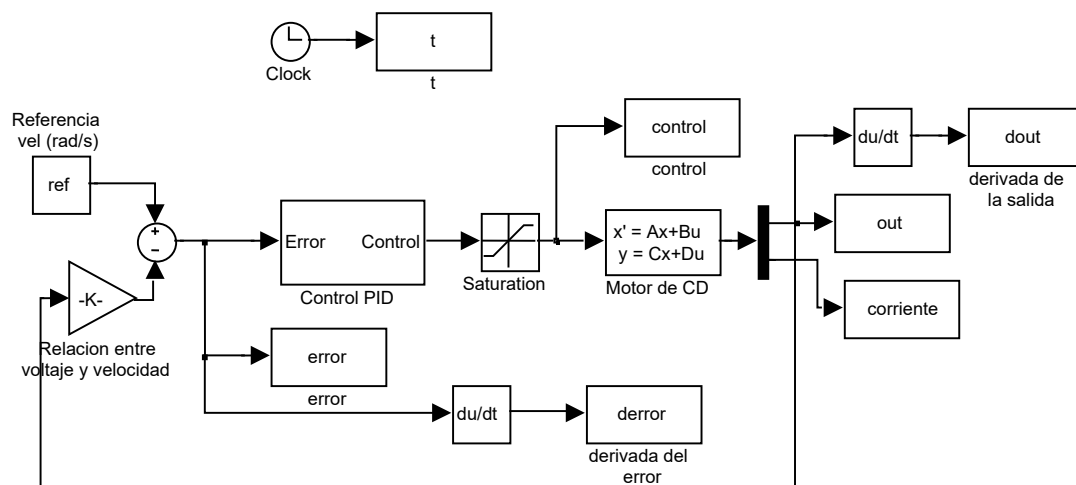


Figura 5-14. Diagrama del controlador proporcional integral derivativo

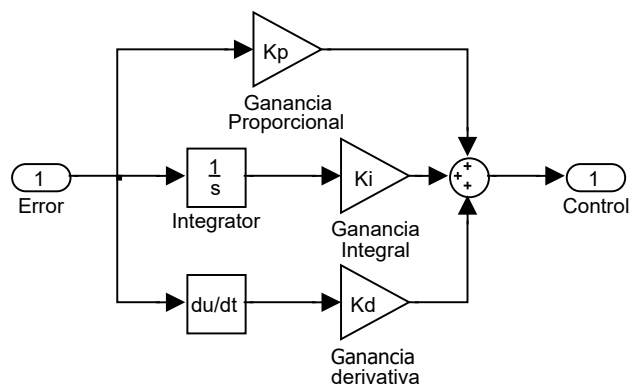
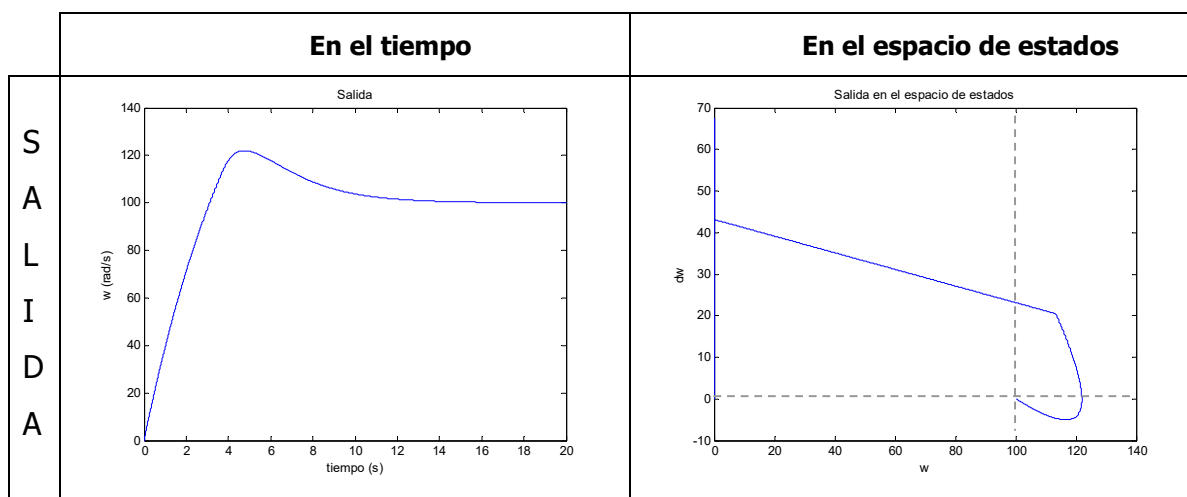


Figura 5-15. Bloque control PID

Las salidas obtenidas fueron:



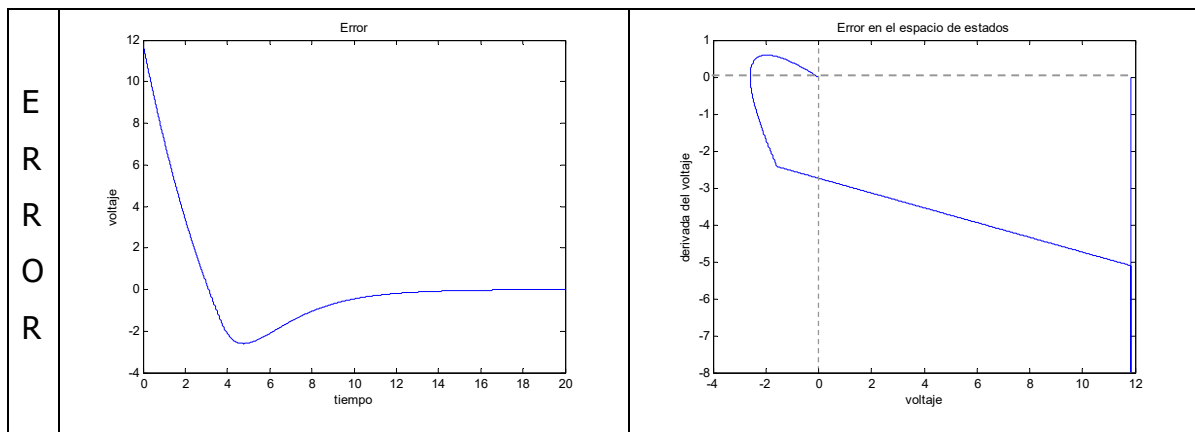


Figura 5-16. Gráficas de la velocidad de salida para el controlador PID.

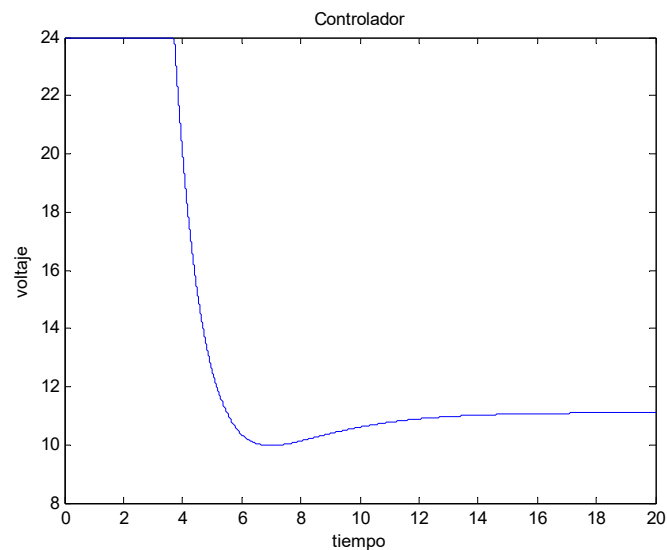


Figura 5-17. Salida del controlador proporcional, derivativo e integral

Los controladores PI , PID , tienen un tiempo de levantamiento menor que el controlador P , pero también tienen sobrepaso, lo que no ocurre con el controlador P . Mientras que el tiempo de asentamiento es menor en el caso del controlador P en comparación con el control PI y PID .

Entre el controlador PI y el PID , el control PID tiene un menor sobrepaso y un tiempo de asentamiento menor que el de controlador PI , mientras que el tiempo de levantamiento del controlador PI es menor que el del controlador PID .

Debido a la saturación de la señal de control y al integrador que forma parte de ellos, el sobrepaso que presentan tanto el controlador PI como el PID es más grande que en el caso de no saturar la señal de control.

5.3.2. RESPUESTA DEL CONTROLADOR PID ANTE UNA PERTURBACIÓN SENOIDAL.

Comparando la respuesta entre los controladores P , PI y PID , cuyos parámetros fueron sintonizados utilizando la regla de sintonización de Ziegler y Nichols, podemos concluir que la mejor gráfica de salida la obtenemos con el controlador PID ⁸⁶, razón por la cual se trabajará con este controlador para realizar la comparación con los algoritmos de modos deslizantes que se han estudiado en los capítulos anteriores.

Simularemos una perturbación senoidal de la manera en que lo hicimos en los capítulos anteriores pero ahora utilizando el controlador PID , primero añadiremos una perturbación senoidal a la salida del motor, de frecuencia 1000rad/s y de amplitud 1rad/s. La gráfica del comportamiento de la velocidad de salida del motor la tenemos en la Figura 5-18.

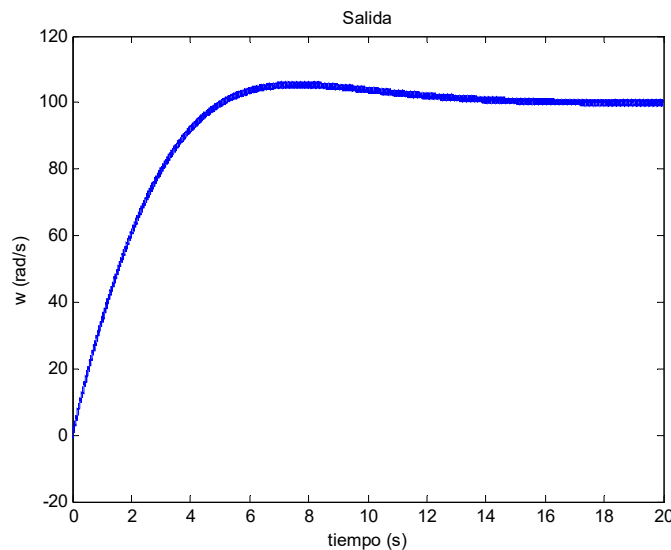


Figura 5-18. Salida del motor añadiendo una perturbación senoidal a la salida del motor.

Igual que los controladores de modos deslizantes, el controlador PID agrega la señal de entrada a la salida del sistema, provocando un error en estado

⁸⁶ Porque tiene valores intermedios de tiempo de levantamiento, tiempo de asentamiento y sobrepaso.

permanente, pero este error es de una amplitud menor al 1%, por lo que no afecta considerablemente la salida del motor.

Si agregamos una perturbación de mayor amplitud y de frecuencia menor, como se ve en la Figura 5-19, donde agregamos una perturbación senoidal con frecuencia de 1rad/s y amplitud 25rad/s, vemos que al controlador no le es posible contrarrestar esta señal, razón por la cual aparece en la gráfica de velocidad de salida del motor.

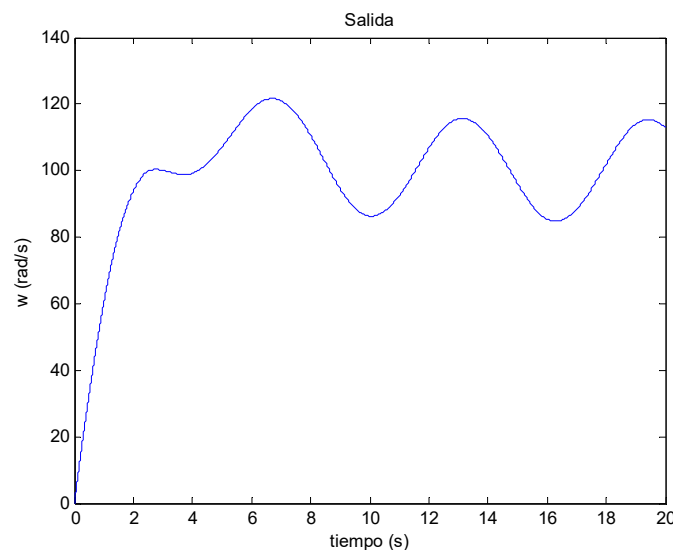


Figura 5-19. Salida del motor añadiendo una perturbación senoidal a la salida del motor.

Si la perturbación se encuentra a la salida del control, como anteriormente lo hicimos agregaremos primero una perturbación de alta frecuencia, 1000rad/s , pero esta vez la perturbación que se simulara será de distintas amplitudes, 1 y 12V, la respuesta del sistema se muestra en la Figura 5-20 y en la Figura 5-21 respectivamente, donde se puede observar que el controlador *PID* logra mantener la forma de la señal de salida, aunque para el segundo caso en el valor de estado permanente se encuentra una oscilación de una amplitud muy pequeña cuya frecuencia corresponde a la frecuencia de la perturbación de entrada. Esto se puede ver en la Figura 5-22.

En este caso el motor que trabaja como filtro paso bajas ayuda al controlador a eliminar las altas frecuencias que entran a él y cuando no logra

eliminarlas logra disminuir su amplitud lo que simplifica el trabajo del controlador para perturbaciones de altas frecuencias.

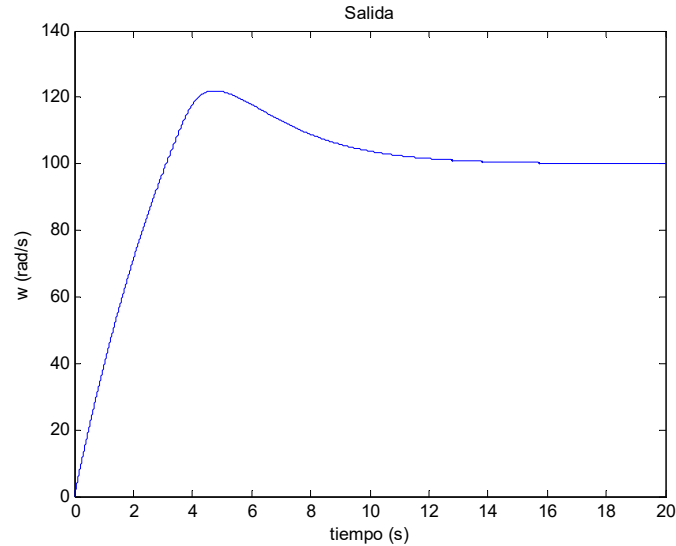


Figura 5-20. Salida del motor añadiendo una perturbación a la salida del control.

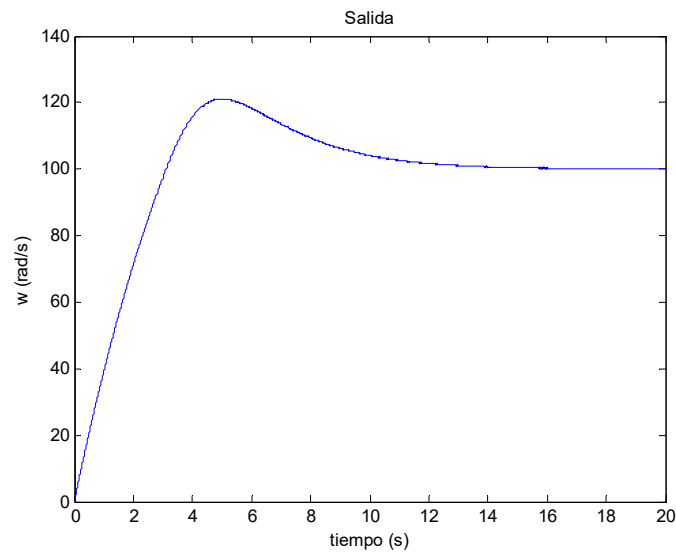


Figura 5-21. Salida del motor añadiendo una perturbación a la salida del control.

Sí ahora modificamos la frecuencia de la perturbación reduciéndola a 1 rad/s , también para distintos valores de amplitud, 12 y 20V, como se muestra en la Figura 5-23 y en la Figura 5-24, podemos observar que el controlador no es capaz de contrarrestar la perturbación en ninguno de los dos casos; ya que en la

gráfica de la velocidad de salida del motor encontramos una oscilación que corresponde a la frecuencia y a la amplitud de la perturbación de entrada.

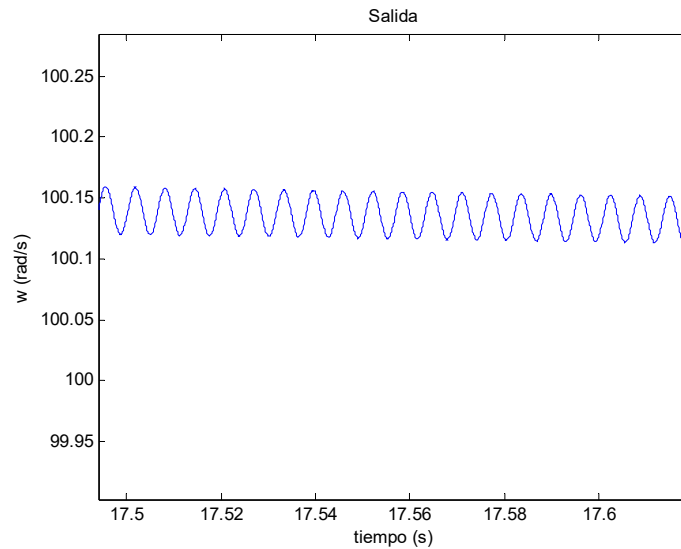


Figura 5-22. Acercamiento de la Figura 5-21.

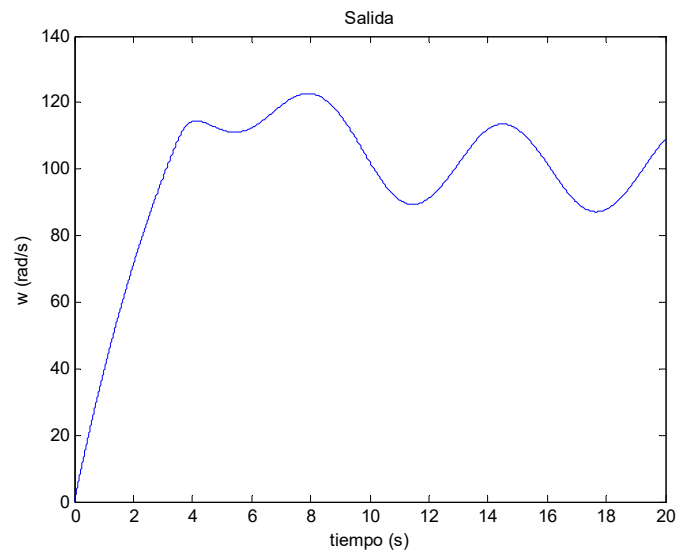


Figura 5-23. Salida del motor aplicando una perturbación a la salida del control.

La acción integral del controlador no le permite actuar lo suficientemente rápido al control, de manera que no le es posible contrarrestar las oscilaciones que la perturbación provoca en la salida del motor. Esto mismo se puede observar en el caso del algoritmo cuasi-continuo con filtro que también consta de un integrador dentro del controlador.

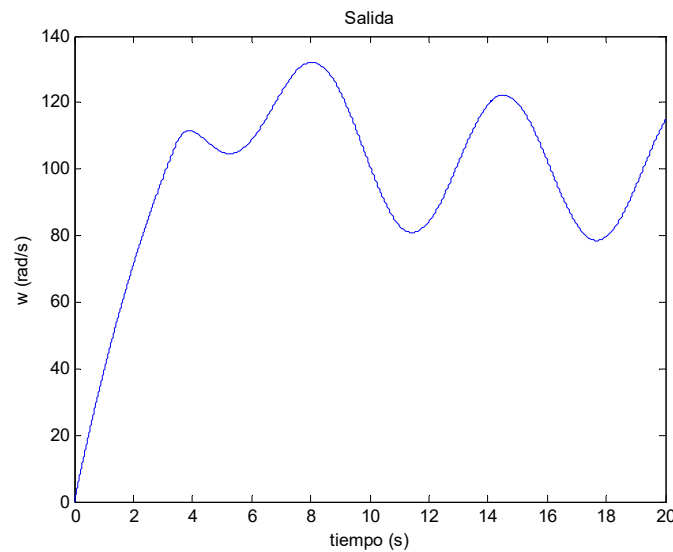


Figura 5-24. Salida del motor aplicando una perturbación a la salida del control.

5.4. Comparaciones

5.4.1. COMPARACIÓN ENTRE DIFERENCIADORES

Debido a que los algoritmos de modos deslizantes requieren de las derivadas sucesivas de la variable por controlar, el diferenciador se vuelve una parte importante del lazo de control, es por esta razón que se diseñaron diferenciadores aplicando la teoría de modos deslizantes para obtener con más exactitud la derivada de la variable por controlar.

Se estudió la teoría de diferentes diferenciadores en el capítulo 4, en esta sección se ajustarán los parámetros de dichos diferenciadores aplicados a los algoritmos de control⁸⁷ que se han visto durante este trabajo, y se verán los resultados de las simulaciones.

En la Figura 5-25 y en la Figura 5-26 se muestran las simulaciones para el controlador *PID* y los diferenciadores vistos en el capítulo 4. En la Figura 5-26 se especifica que gráfica corresponde a cual diferenciador.

⁸⁷ Modos deslizantes de primer orden, algoritmo cuasi-continuo de modos deslizantes de orden superior, algoritmo cuasi-continuo con filtro de modos deslizantes de orden superior y PID.

Los diferenciadores se ajustaron con base en su comportamiento durante las simulaciones, los valores de los parámetros a los cuales se llegó son:

- Diferenciador Clásico $\lambda = 10, a = 100$, el valor de lambda se toma como un valor intermedio, ya que un valor muy grande incrementa el valor de la derivada pero también aumenta el control y un valor muy chico no alcanza a la derivada de la variable.

Mientras menor sea el valor de a , menor será la cantidad de *chattering* que tenga la derivada de la variable, pero si se disminuye demasiado aparece el *chattering* nuevamente.

- Diferenciador de Levant $\lambda_0 = 40, \lambda_1 = 200$, estos valores se tomaron de acuerdo con el artículo de la bibliografía **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, no fue necesario ajustarlos. Para realizar un ajuste en ellos debe considerarse a λ_1 mayor que el mayor valor deseado a la salida del sistema y el valor de λ_0 debe ser mucho menor que λ_1 .

- Diferenciador *SSZL* $\rho_0 = 200, a_1 = 65, b_1 = 0.5$, el valor de ρ_0 debe ser al menos el doble del valor de salida deseado, pero conforme se incrementa, también se incrementan los picos en la señal de control. El valor de a_1 se trata como la frecuencia de corte, si es lo suficientemente grande filtra las oscilaciones durante el transitorio.

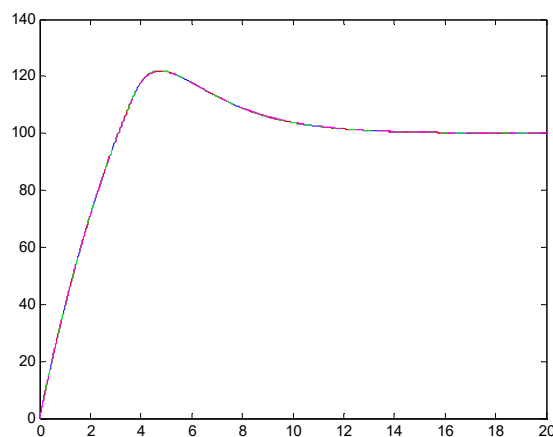


Figura 5-25. Comparación entre diferenciadores para el controlador PID.

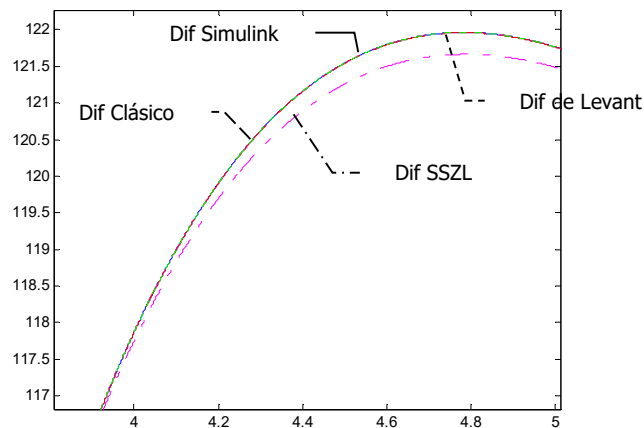


Figura 5-26. Ampliación de la Figura 5-25.

Podemos observar de la Figura 5-26 que la salida del motor utilizando el diferenciador clásico y el diferenciador de Levant son prácticamente iguales, si se realiza un acercamiento se ve que la diferencia entre ellas es muy pequeña y que es mejor el diferenciador de Levant. De esta misma figura podemos concluir que el diferenciador con el cual se obtiene una mejor respuesta de salida del motor cuando se utiliza el controlador *PID* es el diferenciador *SSZL*. Ya que la gráfica presenta un menor sobrepaso y un menor tiempo de levantamiento.

En la Figura 5-27 y en la Figura 5-28 encontramos las gráficas de salida del motor para los diferentes diferenciadores que utilizamos en el lazo de controlador cuando se utiliza el algoritmo de modos deslizantes de primer orden. Los parámetros de los diferenciadores que se utilizaron son:

- Diferenciador Clásico $\lambda = 10, a = 50$
- Diferenciador de Levant $\lambda_0 = 40, \lambda_1 = 200$
- Diferenciador SSZL $\rho_0 = 200, a_1 = 30, b_1 = 0.5$

La manera de ajustar estos parámetros es la mencionada anteriormente, cuando se realizó la comparación entre los diferenciadores para el controlador *PID*.

De la Figura 5-28 podemos observar que con el diferenciador de Levant es con el que se obtiene la mejor gráfica de salida para el algoritmo de modos

deslizantes de primer orden, además observemos que todos los diferenciadores de modos deslizantes reducen la amplitud del *chattering* significativamente.

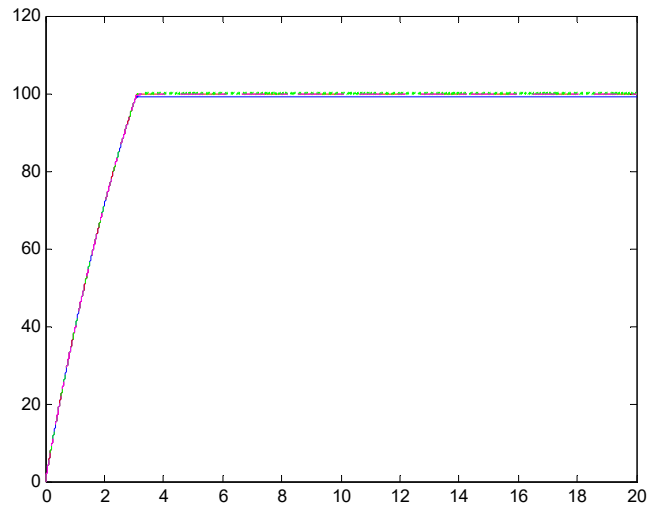


Figura 5-27. Comparación entre diferenciadores para el controlador FOSM.

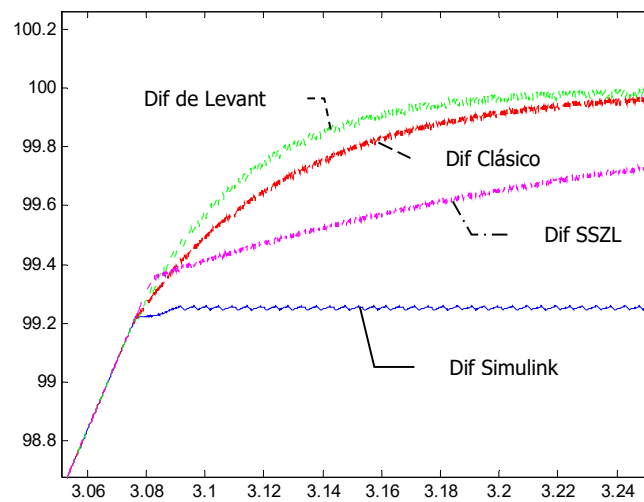


Figura 5-28. Ampliación de la Figura 5-27.

Las simulaciones de los diferentes diferenciadores vistos en la capítulo 4 aplicados al controlador cuasi-continuo de modos deslizantes de orden superior se encuentran en la Figura 5-29 y una ampliación del momento en que llega al valor de referencia se encuentra en la Figura 5-30.

Los parámetros de los diferenciadores ajustados⁸⁸ para este controlador son:

- Diferenciador Clásico $\lambda = 10, a = 1$
- Diferenciador de Levant $\lambda_0 = 40, \lambda_1 = 200$
- Diferenciador *SSZL* $\rho_0 = 200, a_1 = 70, b_1 = 0.5$

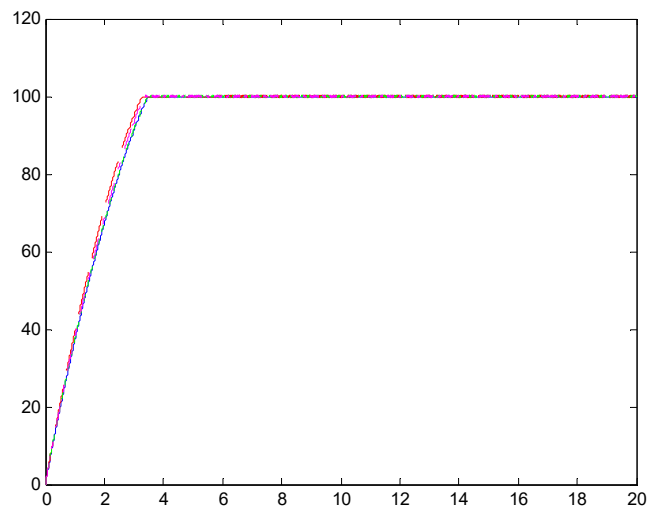


Figura 5-29. Comparación entre diferenciadores para el controlador HOSM.

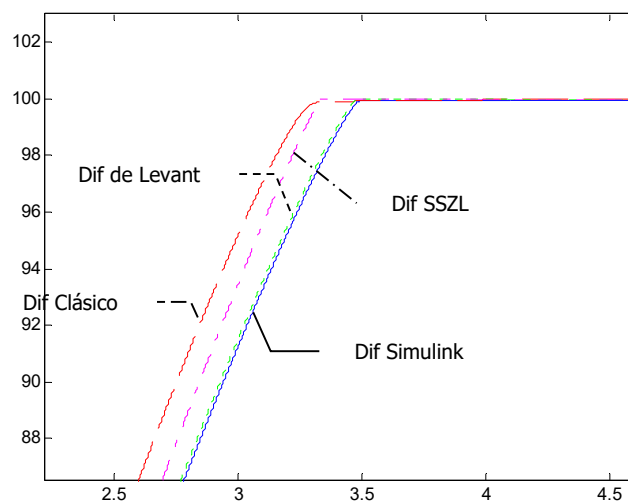


Figura 5-30. Ampliación de la Figura 5-29.

⁸⁸ Se realizó el ajuste como se señala en el capítulo 4.

En este caso al aplicar el diferenciador de Levant se obtiene una gráfica similar a la obtenida aplicando el diferenciador de Simulink, mas es visible que aunque pequeña, existe una mejoría en la aplicación del diferenciador Levant. En la Figura 5-30 se puede ver que el diferenciador que mejor actúa con el controlador cuasi-continuo es el diferenciador de primer orden.

Aplicando el controlador cuasi-continuo con filtro utilizando los diferentes diferenciadores obtenemos las gráficas que se muestran en la Figura 5-31 y en ampliación en la Figura 5-32. Donde podemos ver que el diferenciador con el que se obtienen los mejores resultados es el diferenciador clásico. En este caso el diferenciador *SSZL* tiene un mejor tiempo de levantamiento, pero también provoca un sobrepaso en la gráfica de salida y el diferenciador de clásico no.

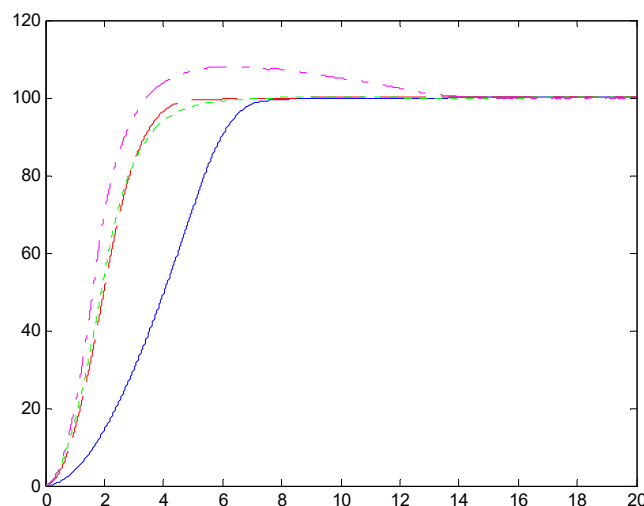


Figura 5-31. Comparación entre diferenciadores para el controlador HOSM con filtro.

Los parámetros ajustados con base en simulaciones para los diferenciadores son:

- Diferenciador Clásico $\lambda = 100, a = 150$
- Diferenciador de Levant $\lambda_0 = 40, \lambda_1 = 200$
- Diferenciador *SSZL* $\rho_0 = 200, a_1 = 100, b_1 = 0.5$

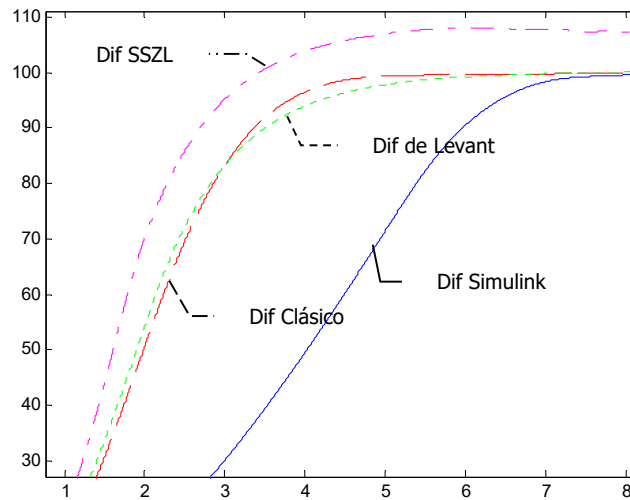
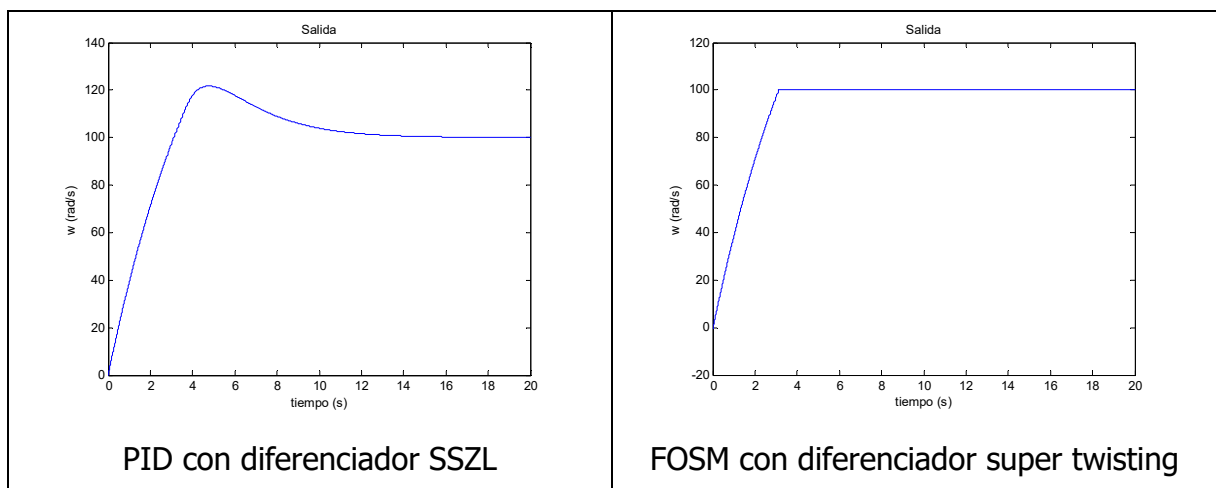


Figura 5-32. Ampliación de la Figura 5-31.

5.4.2. COMPARACIÓN ENTRE DIVERSOS TIPOS DE CONTROLADORES

A continuación se muestra una tabla donde se comparan los controladores vistos durante este trabajo, utilizando el diferenciador con el cual se obtuvieron los mejores resultados para cada uno de ellos. Dicha comparación se hace con base en las gráficas de salidas del motor, las gráficas del error en el espacio de estados, las señales de control, y las gráficas de la corriente del motor.



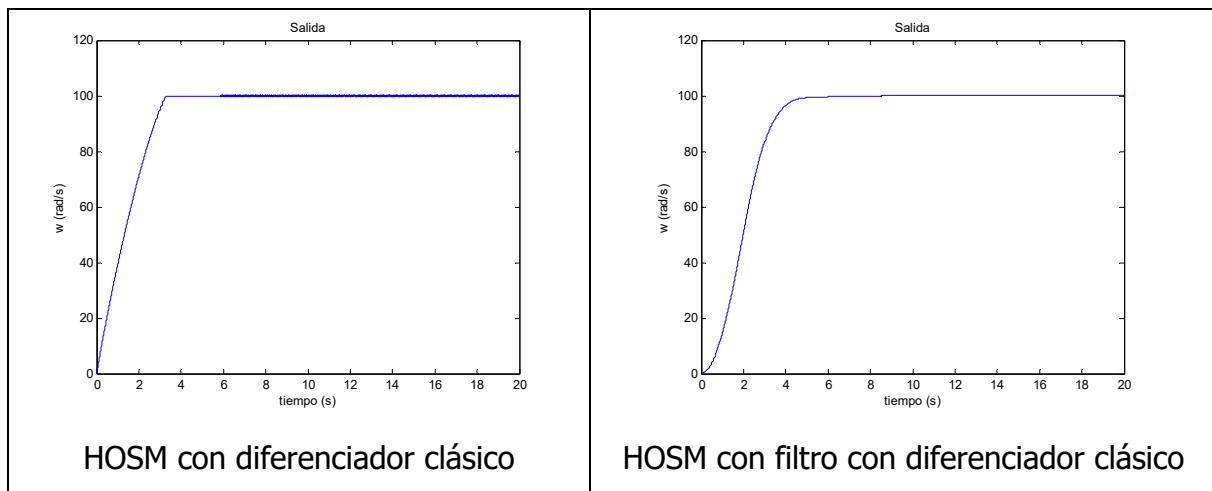


Figura 5-33. Gráficas de salida de los controladores con el mejor diferenciador.

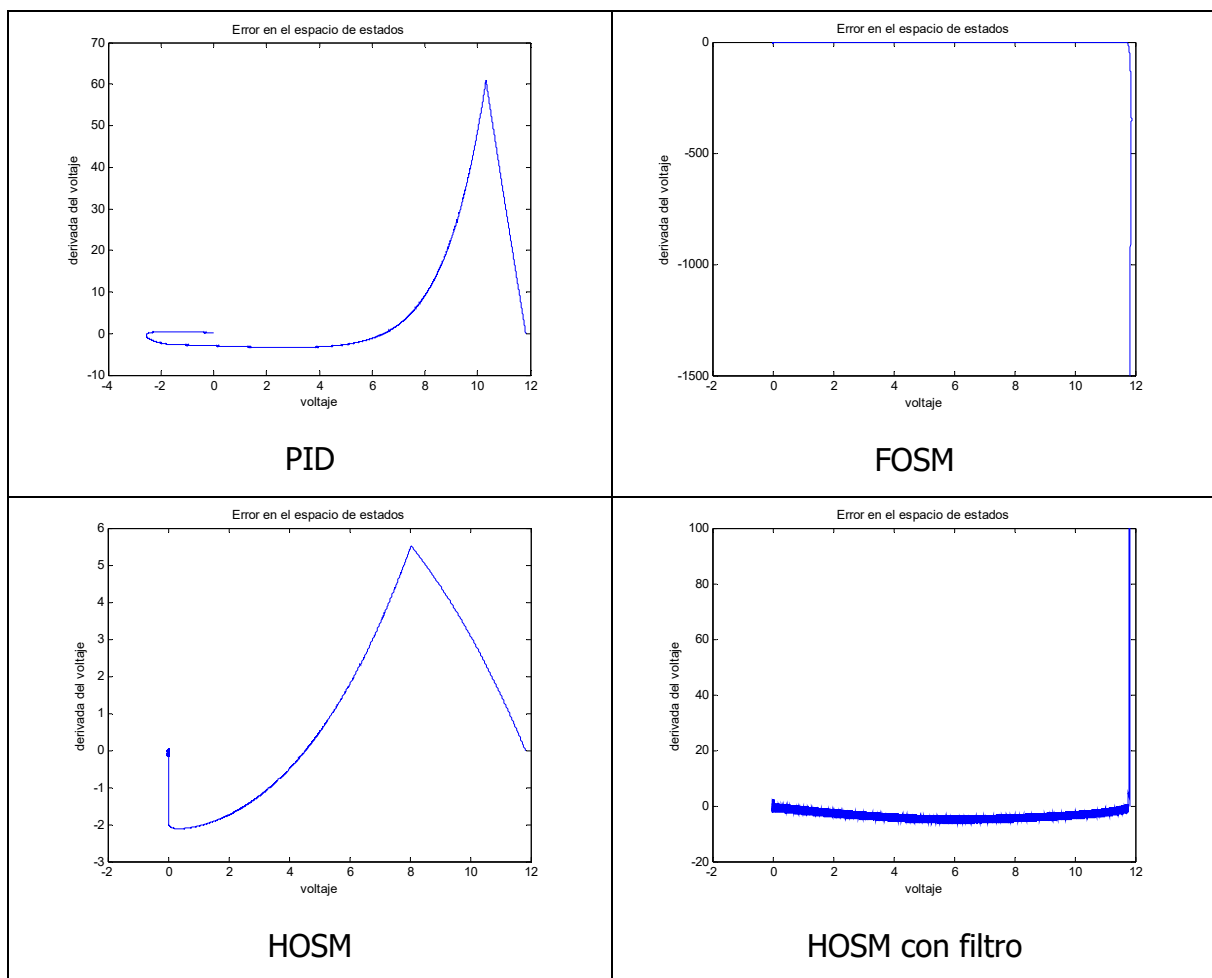


Figura 5-34. Comparación de las gráficas del error en el espacio de estados de los controladores.

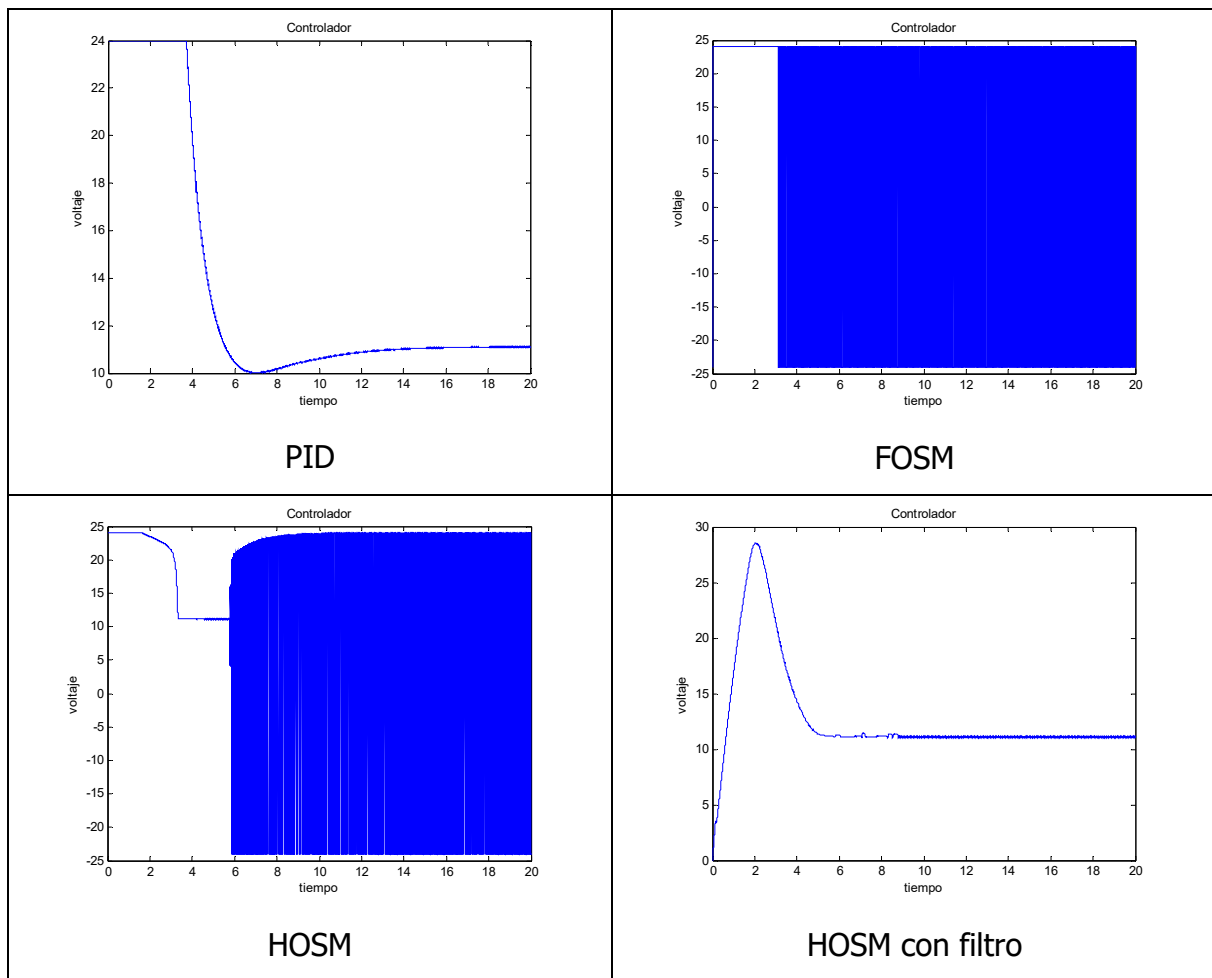
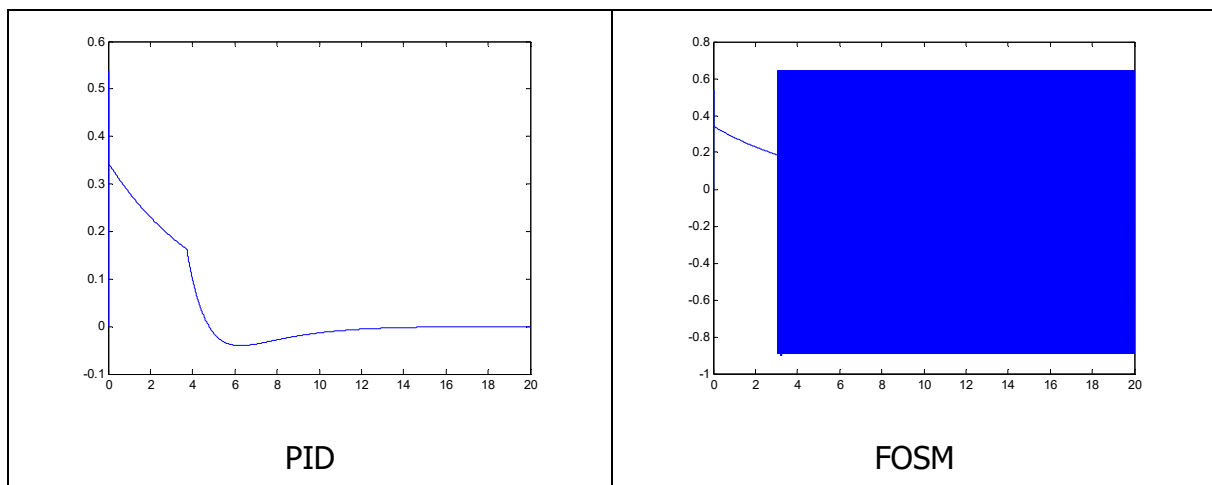


Figura 5-35. Comparación de las gráficas de la señal de control para todos los controladores.



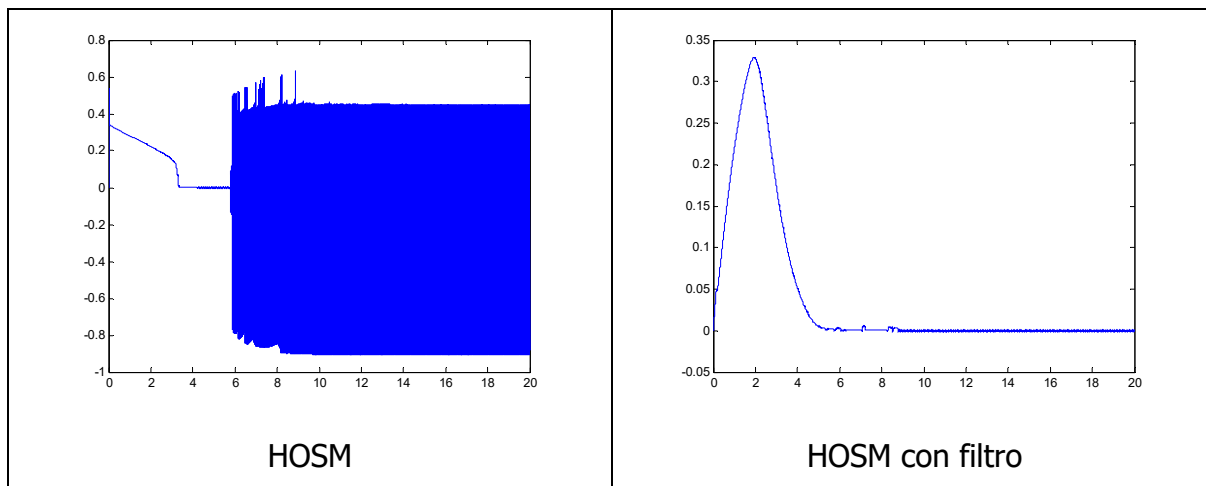


Figura 5-36. Comparación de las gráficas de la corriente para todos los controladores.

De la tabla anterior vemos que para implementar el control por modos deslizantes es necesario tener un amplificador de potencia lo suficientemente rápido de modo que nos proporcione la frecuencia de conmutación necesaria tanto de voltaje como de corriente, que requieren los algoritmos basados en modos deslizantes para su implementación.

Por otro lado para el *PID* y el algoritmo cuasi-continuo con filtro es necesario tener una fuente de energía que pueda proporcionarnos los picos de voltaje y corriente que demanda el controlador durante el arranque del motor.

Observemos también que gracias a los diferenciadores de modos deslizantes que se utilizaron los valores de las derivadas de la señal de error, y por lo tanto la derivada de la señal de salida, son curvas con muchas menos conmutaciones que las derivadas obtenidas por simulink⁸⁹.

En la Figura 5-37, se encuentran las gráficas de salida del motor utilizando los controladores *PID*, modos deslizantes de primer orden⁹⁰, algoritmo cuasi-continuo⁹¹, algoritmo cuasi-continuo con filtro⁹². En esta figura se puede ver que el

⁸⁹ Se pueden comparar las gráficas del error en el espacio de estados con las obtenidas para cada controlador en el capítulo correspondiente de este trabajo.

⁹⁰ En las figuras de simulación se llamará FOSM (first order sliding modes) por simplicidad.

⁹¹ En las gráficas de las simulaciones se llamará HOSM (high order sliding modes) debido a que el algoritmo pertenece a los modos deslizantes de orden superior.

⁹² En las gráficas se llamará HOSM con filtro, a la salida del motor de CD cuando se utilizó como controlador el algoritmo cuasi-continuo con filtro.

tiempo de levantamiento que presentan los controladores PID, modos deslizantes de primer orden y el algoritmo cuasi-continuo son iguales, esto se debe a que el valor de salida del controlador al inicio es máximo e igual para todos los controladores y está limitado por el voltaje nominal de entrada al motor, esto se aprecia en la Figura 5-35. El algoritmo cuasi-continuo con filtro tiene un tiempo de levantamiento mayor debido a la acción del integrador, la señal de control de la Figura 5-35 explica el comportamiento de la salida.

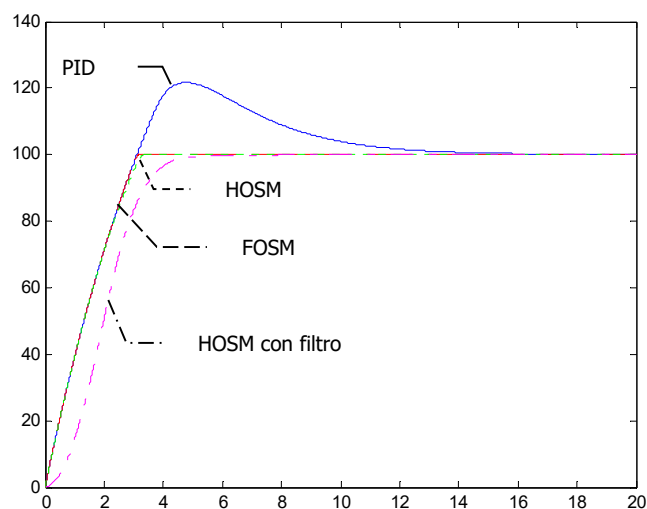


Figura 5-37. Comparación del comportamiento del motor con los diferentes controladores.

El comportamiento ideal del PID tendría un tiempo de levantamiento y un sobrepaso menor, esto se muestra en la Figura 5-38, pero para este caso se necesitaría una fuente ideal que fuera capaz de administrar un límite alto de voltaje y de corriente, además se supondría que el motor soportaría este pico de voltaje y corriente sin dañarse. En comparación bajo características ideales, ganancia y frecuencia de conmutaciones infinita, modos deslizantes seguirían exactamente la señal de entrada.

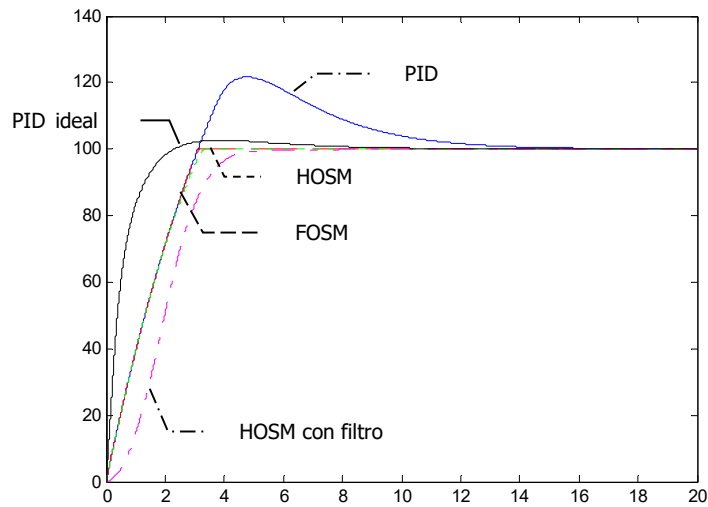


Figura 5-38. Comparación del comportamiento del motor para los diferentes controladores agregando PID saturado. (es la negra)

Si en el sistema por controlar es necesario evitar el sobrepaso, los modos deslizantes muestran el comportamiento deseado, ya que no tienen sobrepaso alguno a la salida, en la Figura 5-38 se puede ver que el comportamiento de salida del motor para modos deslizantes de primer orden y de segundo orden es muy similar, si se hace un acercamiento al valor de estado estable se observa que la diferencia se encuentra en la amplitud del *chattering*, la amplitud del algoritmo de primer orden es casi cinco veces mayor que la amplitud del *chattering* del algoritmo cuasi-continuo, como se ve en la Figura 5-39.

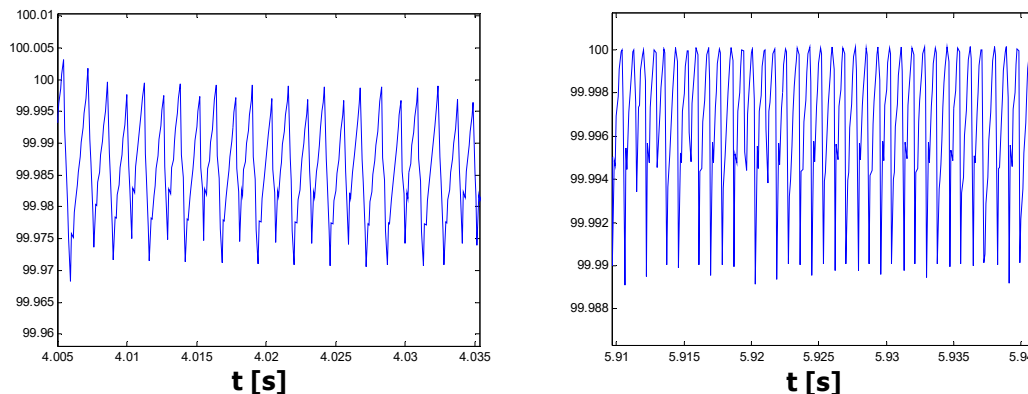


Figura 5-39. *Chattering* en la señal de salida del motor de CD.

Si necesitamos un control robusto frente a perturbaciones, de tal manera que a pesar de las perturbaciones externas el sistema mantenga su comportamiento a la salida, los controladores de modos deslizantes cumplen este objetivo. En la Figura 5-40 y en la Figura 5-41 se muestra la simulación del comportamiento de la salida del motor cuando se agrega una perturbación senoidal a la salida del controlador⁹³, en las figuras podemos ver que la respuesta del PID tiene una componente oscilatoria, al igual que la respuesta del algoritmo cuasi-continuo con filtro, esto se debe al integrador⁹⁴ que forma parte del controlador.

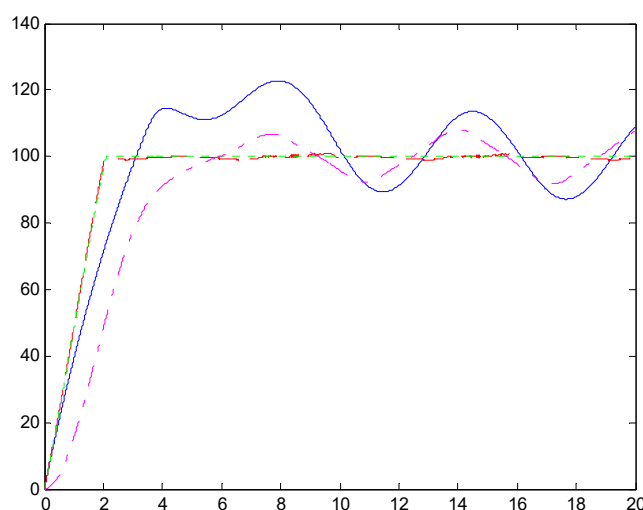


Figura 5-40. Salida del motor para una perturbación a la salida del controlador.

De la Figura 5-41 observemos que el mejor comportamiento es obtenido por el algoritmo de modos deslizantes de primer orden, cuyo comportamiento a la salida del motor es muy similar al del algoritmo cuasi-continuo de modos deslizantes de orden superior. La diferencia radica en su valor de estado estable, como se puede ver en la Figura 5-42, donde para el algoritmo de primer orden se

⁹³ La amplitud de esta señal es de 12V, el 50% del valor máximo de entrada al motor y de frecuencia 1rad/s. Se vio en los capítulos anteriores que las frecuencias pequeñas eran las que afectaban más la salida del sistema debido a que el motor se encarga de filtrar las perturbaciones que tenían señales de alta frecuencia.

⁹⁴ Como se vio anteriormente en este capítulo, la acción integral va sumando el error y sigue actuando después de que el error llegó a cero, es por esta razón que no es capaz de contrarrestar una perturbación senoidal de una amplitud grande.

tienen rastros de la perturbación, mientras que el algoritmo cuasi-continuo muestra un valor de estado estable sin perturbaciones.

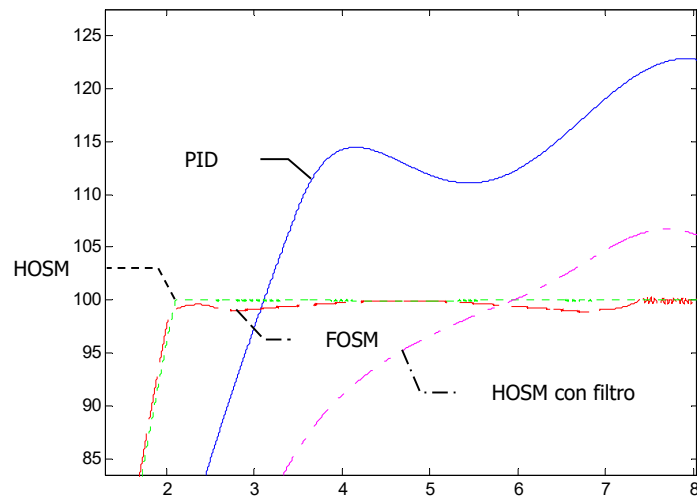


Figura 5-41. Acercamiento de la Figura 5-40

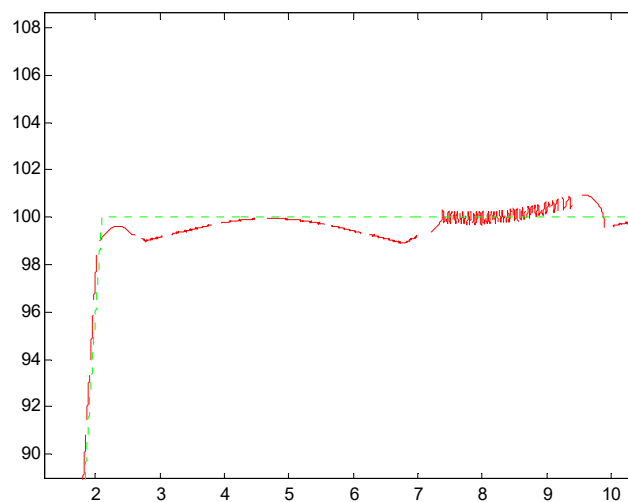


Figura 5-42. Comparación entre el *chattering* del algoritmo de primer orden y el algoritmo cuasi-continuo de modos deslizantes.

Si la perturbación⁹⁵ la agregamos a la salida del motor, esto equivaldría a agregarla en el acondicionar de señal, utilizando los controladores *PID* y el algoritmo cuasi-continuo con filtro tenemos de igual manera que en el caso anterior oscilaciones en gráfica de la salida del motor. Ver Figura 5-43

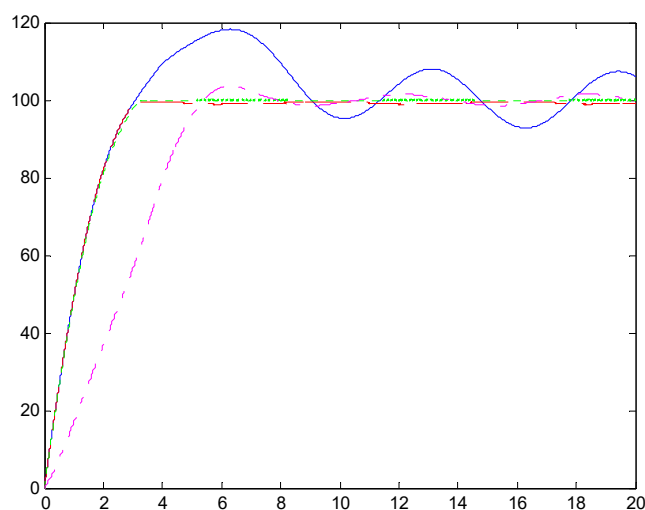


Figura 5-43. Salida del motor con una perturbación a la salida del motor.

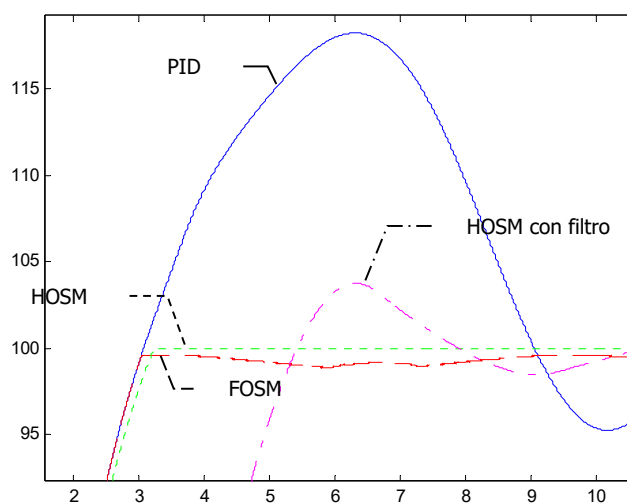


Figura 5-44. Ampliación de la Figura 5-43.

⁹⁵ Agregamos una perturbación senoidal con una frecuencia de 1rad/s y una amplitud de velocidad de 12rad/s, que equivale al 12% el valor deseado.

El tiempo de levantamiento más rápido lo tiene el algoritmo de primer orden, pero como se puede ver en la Figura 5-44 es más robusto el algoritmo cuasi-continuo, ya que logra mantener el valor de estado estable a pesar de la perturbación.

De las figuras anteriores podemos concluir que el controlador *PID* no es tan robusto, ya que no soporta amplitudes grandes de perturbaciones debido a que presenta oscilaciones a la salida del sistema. Mientras que el algoritmo cuasi-continuo con filtro también muestra oscilaciones a la salida del motor, para una perturbación senoidal de entrada, pero son de menor amplitud. Por lo que el algoritmo de primer orden de modos deslizantes y el algoritmo cuasi-continuo son los más robustos.

Conclusiones

Dependiendo de los requerimientos que se tengan para controlar el motor, será el controlador que se deberá seleccionar. El controlador *PID* es un control fácil de implementar y su respuesta tiene un tiempo de levantamiento y un sobrepaso pequeño, pero para que se den estas condiciones es necesario tener una fuente que soporte los picos de voltaje y corriente máxima que de manera inicial demanda el controlador, aun cuando se tenga este tipo de fuente es necesario verificar que el motor los soporte también. Se debe considerar, si se elige este controlador, que las perturbaciones que es capaz de contrarrestar no son grandes, por lo que no es un control muy robusto.

Si se requiere un control robusto que sea capaz de soportar perturbaciones de amplitudes mayores y sin tener un sobrepaso, es necesario utilizar un controlador de modos deslizantes. El algoritmo de primer orden de modos deslizantes es con el que se obtiene una mejor salida del motor, menor tiempo de levantamiento y sin sobrepaso. Pero para la correcta implementación de este controlador es necesario tener un buen diferenciador de manera que sea preciso en el cálculo de la derivada de la variable de entrada, para eliminar el *chattering* del controlador. Esto hace necesario una mayor programación para la implementación de este algoritmo, lo cual aumenta el tiempo de muestreo, este aumento puede provocar *chattering* a la salida de la planta.

Muy de cerca se encuentra el algoritmo cuasi-continuo que tiene prácticamente las mismas características de robustez que el algoritmo de primer orden que de igual manera que el algoritmo de primer orden no presenta sobrepaso y tiene un tiempo de levantamiento pequeño. La ventaja del algoritmo cuasi-continuo sobre el de primer orden es la gran reducción del *chattering* a la salida del sistema que presenta, debido a que aun sin la utilización de un diferenciador exacto, presenta *chattering* de menos del 0.1% a la salida del motor. Además por tratarse de un algoritmo continuo para cualquier valor de entrada, excepto cero, es más sencillo de implementar físicamente, ya que la señal a la

salida del controlador no consta de conmutaciones, pues por ser casi continuo el algoritmo toma varios valores intermedios mientras cambia el control entre valores grandes y muy diferentes, estos valores no siempre son máximos, ésta es otra diferencia con el algoritmo de primer orden. La velocidad de conmutación que se requiere para el adecuado funcionamiento de estos algoritmos en la implementación está alrededor de 10kHz⁹⁶, por supuesto que mientras mayor sea esta velocidad mejor será el funcionamiento de los algoritmos de modos deslizantes. No solo es necesaria esta velocidad de conmutación, también es necesaria una velocidad mayor en la adquisición de datos y en el procesamiento de los mismos, para la implementación del algoritmo.

Si se tiene la velocidad de adquisición de datos y la velocidad de procesamiento, pero no se tiene la velocidad de conmutación necesaria en la etapa de potencia para que la planta sea controlada por el algoritmo, es posible agregar un integrador a la salida del algoritmo cuasi-continuo, teniendo así modos deslizantes de orden superior con filtro. Con esto se obtiene una salida del controlador suave, se disminuye considerablemente el *chattering* a la salida de la planta y aunque se tienen picos de voltaje y corriente son mucho menores que los picos a la salida del controlador *PID*. La desventaja principal está en el hecho de que pierde gran parte de la robustez que caracteriza a los modos deslizantes, debido al integrador que actúa como filtro.

Los diferenciadores basados en la teoría de modos deslizantes vistos durante este trabajo probaron su exactitud y su eficacia cuando se aplicaron a la par de los algoritmos de control de modos deslizantes e incluso con el controlador *PID*, además se muestra que el mejor diferenciador depende del algoritmo que se esté utilizando.

Durante este trabajo el diferenciador que mejor trabajó con los modos deslizantes fue el diferenciador clásico, esto debido a que solo era necesaria la primera derivada de la variable de entrada, cuando se necesitan derivadas de

⁹⁶ De acuerdo con las simulaciones realizadas, con esta velocidad se obtendrían las gráficas mostradas en este trabajo.

orden superior de la variable de entrada, es necesario aplicar diferenciadores que utilizan algoritmos de modos deslizantes de orden superior⁹⁷ debido a que agregan menos ruido a las derivadas superiores deseada. Además observamos que el diferenciador de Levant es lo suficientemente robusto como para no ser necesario un ajuste de sus parámetros para los diferentes controladores, esto lo vuelve sencillo de implementar.

⁹⁷ Diferenciador de Levant y Diferenciador SSZL.

Anexos

A) FUNCIONAMIENTO DEL MOTOR DE CORRIENTE DIRECTA

En el desarrollo del presente trabajo la planta que se estudió fue un motor de corriente directa, en este anexo se verá su funcionamiento básico.

El motor es una máquina eléctrica que se encarga de convertir energía eléctrica en energía mecánica; formado por un estator, la parte del motor que se queda fija y un rotor, la parte que se encuentra girando. En el caso de motores de CD el estator consiste de polos que conforman el campo, mientras que el rotor es la armadura⁹⁸.

Los polos en motores pequeños suelen ser imanes permanentes que son los generadores del campo magnético constante. Algunas veces alrededor de estos imanes permanentes hay bobinas de campo, que alimentadas por un voltaje de corriente directa ayudan en el proceso de magnetización de los polos.

La armadura que se encuentra dentro del campo magnético generado por los polos, está formada por conductores que a su vez forman bobinas, a través de estos conductores circula una corriente alterna que será responsable de la tendencia al giro del motor.

El motor de CD también consta de un conmutador y sus escobillas, que en conjunto tienen la función de transformar la corriente directa que es alimentada al motor en corriente alterna dentro de los conductores de la armadura para que sea posible la generación del movimiento del motor.

Teoría Básica del funcionamiento de un motor de CD

Para que un motor desarrolle un torque⁹⁹ es necesario primero crear pares de fuerzas, ubicando varios conductores a través de los cuales circulará una corriente dentro de un campo magnético.

⁹⁸ Para el caso más simple del motor de DC.

⁹⁹ Tendencia a producir rotación.

Si por un conductor circula corriente y éste se encuentra dentro de un campo magnético no uniforme, tal que la densidad de flujo en un lado del conductor sea mayor que en el otro lado, el conductor experimentará la acción de una fuerza que lo alejará de donde existe la mayor densidad dirigiéndolo hacia la menor densidad. Ver la Figura **iError! No hay texto con el estilo especificado en el documento.-1.**

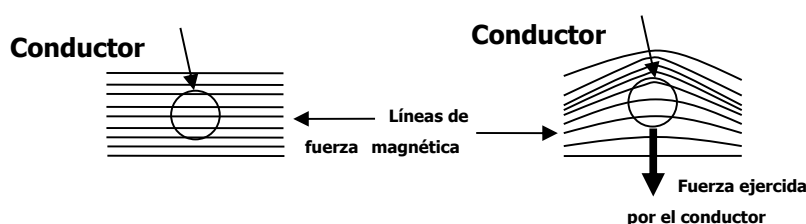


Figura iError! No hay texto con el estilo especificado en el documento.-1. Fuerza ejercida por un conductor en un campo magnético.

En el motor de CD esta distribución de flujo no uniforme resulta de la interacción de dos campos magnéticos, el campo producido por los polos estacionarios y el creado por un gran número de conductores a través de los cuales circula la corriente de armadura, con lo que se provoca la fuerza necesaria para que se obtenga un torque. La configuración con la que es armado el motor de CD permite que, para cualquier posición de la armadura, la dirección de la corriente en los conductores se ajuste¹⁰⁰ de tal manera que para todos aquellos conductores que se encuentren debajo de un polo norte circulará la corriente siempre en una dirección, mientras que en todos aquellos conductores debajo del polo sur circulará la corriente siempre en sentido opuesto¹⁰¹. Ver Figura **iError! No hay texto con el estilo especificado en el documento.-2.**

Si por todos los conductores debajo del polo sur circulan corrientes que se alejan del observador, y por todos los conductores debajo de los polos norte

¹⁰⁰ Este ajuste en la dirección de circulación de la corriente en los conductores debajo de un polo se tiene gracias al conmutador.

¹⁰¹ Podemos trazar líneas imaginarias que dividan a la mitad las distancias interpolares asumiendo densidades de flujo uniformes, así delimitaremos la cantidad de conductores que se encuentran debajo de cada polo.

circulan corrientes que se dirigen hacia el observador, el sentido de giro de la armadura será el sentido de las manecillas del reloj. Ver Figura **iError! No hay texto con el estilo especificado en el documento.-2**

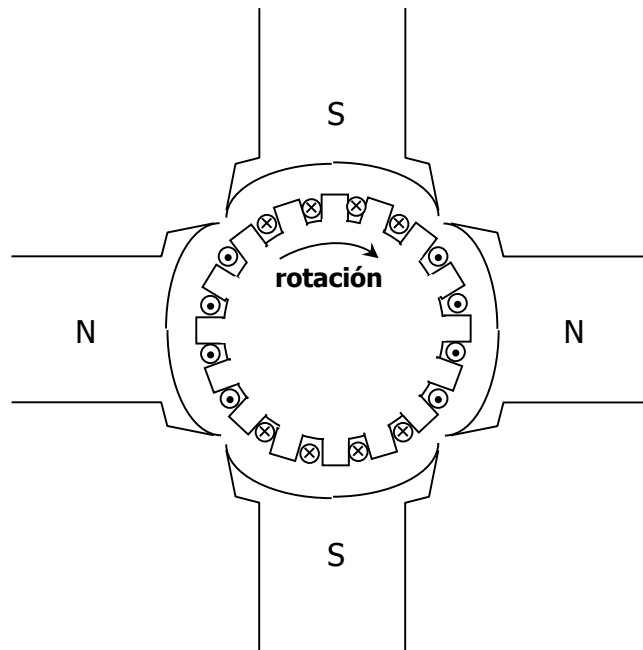


Figura iError! No hay texto con el estilo especificado en el documento.-2. Dirección de las corrientes de armadura en un motor con rotación en sentido de las manecillas del reloj.

La dirección de rotación de un motor de CD puede ser revertida cambiando ya sea la dirección de la corriente que circula a través de los conductores o la polaridad de los polos. Un motor no cambiará su sentido de giro si ambos, tanto la polaridad como la dirección de la corriente de los conductores de la armadura cambian.

En el estudio del movimiento del motor, obsérvese que la dirección del campo magnético, la dirección de la corriente a través de los conductores y la fuerza resultante producida por los conductores son perpendiculares entre sí.

B) MODELADO DEL MOTOR.

Dependiendo del tipo de motor con el que se trabaje, el tipo de campo que tenga y la conexión de este último con la armadura, serán los detalles que se tomarán en cuenta durante el modelado del motor.

Para motores pequeños¹⁰² (como es el caso del motor con el que se trabajó en esta tesis) el campo suele consistir de imanes permanentes que generan el flujo magnético constante. Para la obtención del modelo matemático del motor la condición anterior se puede obtener también cuando el campo está alimentado por una corriente constante.

Ya que el motor con el que se trabajó tiene un imán permanente como campo, la única manera de controlar su velocidad será mediante el voltaje de entrada a la armadura. Esto vuelve necesario un amplificador de potencia a la salida de la señal de control para que la armadura del motor pueda trabajar adecuadamente.

El motor con el que se trabajó, tiene como entrada el voltaje y la corriente de armadura¹⁰³, donde como entrada de control se tomará el voltaje de armadura, ya que es más sencillo de manipular que la corriente, y la corriente se substituirá en términos de la velocidad del motor.

Para el análisis que se realizará a continuación se supone una distribución de flujo magnético uniforme en el entrehierro.

Análisis Eléctrico - Magnético

Un motor suele representarse como muestra el diagrama de la Figura **¡Error! No hay texto con el estilo especificado en el documento.**-3, donde la armadura está representada por un valor de inductancia y una resistencia además de la fem que es generada por la interacción de los campos magnéticos de la armadura y de los polos. El campo se representa como una bobina. Para este

¹⁰² En la bibliografía se refieren a motores pequeños, como motores cuya potencia es menor a un caballo de fuerza.

¹⁰³ Esto se puede ver claramente en las ecuaciones de modelado del motor.

caso supondremos constante el flujo de los polos por que el motor tiene un campo formado por imanes permanentes.

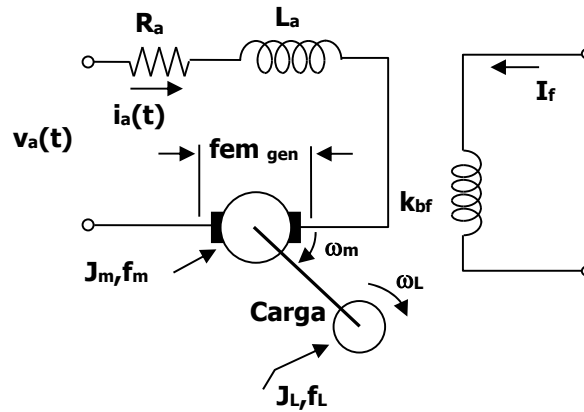


Figura iError! No hay texto con el estilo especificado en el documento.-3. Diagrama de un motor controlado por el voltaje de armadura

En el circuito de la armadura tenemos tres caídas de voltaje. Las primeras dos caídas de voltaje se deben a la resistencia y a la inductancia y se modelan de la siguiente manera:

$$v_{R_a} = R_a i_a(t) \quad \text{y} \quad v_{L_a} = L_a \frac{di_a(t)}{dt}$$

donde R_a es la resistencia de la armadura y L_a es la inductancia de la misma.

La tercera caída corresponde a la fuerza contra electromotriz generada por la interacción entre los campos magnéticos del campo y de la armadura, que se puede expresar de la siguiente manera:

$$fem_{gen} = k_{qf} \omega_m(t) i_f(t) \quad ^{104}$$

o en términos del campo magnético:

$$fem_{gen} = k_q \omega_m(t) \phi(t)$$

donde esta ultima constante de proporcionalidad k_q depende de parámetros del motor como la cantidad de polos, de conductores, y del número de trayectorias

¹⁰⁴ Para motores pequeños se puede considerar que la relación entre el flujo de campo y la corriente de campo es lineal, esto es suponer una estructura magnética no saturable de las bobinas de campo.

paralelas. Para el modelado de nuestro motor se utilizará la última ecuación, ya que no tenemos corriente de campo, por tener un motor cuyo campo está formado por imanes permanentes.

Así el voltaje aplicado en armadura se puede modelar a partir de las ecuaciones anteriores como sigue:

$$v_a = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + k_q \omega_m(t) \phi(t)$$

$$\text{para } \phi(t) = \text{cte}$$

$$v_a = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + k_{bf} \omega_m(t)$$

Además de la velocidad, el motor desarrolla una fuerza o par que se describe en términos de las corrientes del motor

$$T_m = k_q \phi(t) i_a(t)$$

$$\text{para } \phi(t) = \text{cte}$$

$$T_m = k_{bf} i_a(t)$$

Análisis Mecánico

Para obtener el par así como la velocidad desarrollados por el motor, es necesario conocer las componentes que intervienen mecánicamente en el torque.

$$\tau = \frac{d}{dt}(J\omega)$$

Una de ellas es el momento de inercia, que está definido por la siguiente ecuación:

$$J = mr^2$$

donde J es el momento de inercia y r el radio de giro. Tanto la armadura como la carga tienen un momento de inercia (J_m, J_L respectivamente, mostrados en la Figura **iError! No hay texto con el estilo especificado en el documento.-3**), y puesto que están acoplados mediante sus ejes la velocidad es la misma para ambos, esto nos lleva a obtener un momento de inercia equivalente, es decir:

$$J_{eq} = J_m + J_L$$

Otra componente que interviene en el torque mecánico es la fricción viscosa provocada por el movimiento rotacional del eje de la armadura y la carga sobre un punto de apoyo fijo, y ésta se define como:

$$\tau = f\omega$$

donde f es el coeficiente de fricción viscosa rotacional. Análogamente al momento de inercia obtenemos un coeficiente de fricción viscosa rotacional equivalente, que estará dado por:

$$f_{eq} = f_m + f_L$$

El par mecánico expresado en términos del momento de inercia equivalente y la fricción viscosa equivalente del motor y de la carga es:

$$\tau_m = J_{eq} \dot{\omega} + f_{eq} \omega$$

Modelo del motor

Las ecuaciones de voltaje y del par hacen el modelo del motor, esto es:

$$v_a = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + k_{bf} \omega_m(t)$$

$$\tau_m = k_{bf} i_a(t)$$

$$\tau_m = J_{eq} \dot{\omega} + f_{eq} \omega$$

La constante k_{bf} en este análisis tendrá el mismo valor tanto en las ecuaciones mecánicas como en las eléctricas si los valores de los parámetros del motor se trabajan en el sistema internacional de unidades. Haciendo la transformada de la Laplace y suponiendo condiciones iniciales cero, obtenemos:

$$v_a(s) = (R_a + sL_a) i_a(s) + k_{bf} \omega_m(s)$$

$$\tau_m = k_{bf} i_a(s)$$

$$\tau_m = (J_{eq}s + f_{eq}) \omega(s)$$

Igualando el par mecánico producido con el par electromagnético generado tenemos:

$$k_{bf} i_a(s) = (J_{eq}s + f_{eq}) \omega(s)$$

despejando la derivada de la velocidad de esta misma ecuación, tenemos:

$$J_{eq} s \omega(s) = k_{bf} i_a(s) - f_{eq} \omega(s)$$

Y las ecuaciones que describen al motor quedarían:

$$\begin{aligned} L_a s i_a(s) &= -R_a i_a(s) - k_{bf} \omega_m(s) + v_a(s) \\ J_{eq} s \omega(s) &= k_{bf} i_a(s) - f_{eq} \omega(s) \end{aligned} \quad \text{ó} \quad \begin{aligned} L_a \frac{di_a(t)}{dt} &= -R_a i_a(t) - k_{bf} \omega_m(t) + v_a \\ J_{eq} \frac{d\omega}{dt} &= k_{bf} i_a(t) - f_{eq} \omega \end{aligned}$$

Para encontrar la función de transferencia, despejamos el valor de la corriente de la segunda ecuación y la sustituimos en la primera ecuación, donde podemos ver que la velocidad queda en función del voltaje de entrada al motor¹⁰⁵:

$$\frac{\omega_m(s)}{v(s)} = \frac{k_{bf}}{(R_a + sL_a)(f_{eq} + sJ_{eq}) + k_{bf}^2}$$

desarrollando el denominador:

$$\frac{\omega_m(s)}{v(s)} = \frac{k_{bf}}{L_a J_{eq} s^2 + s(R_a J_{eq} + L_a f_{eq}) + f_{eq} R_a + k_{bf}^2}$$

En términos de la posición

$$\frac{\phi_m(s)}{v(s)} = \frac{k_{bf}}{s(R_a + sL_a)(f_{eq} + sJ_{eq}) + s k_{bf}^2}$$

¹⁰⁵ Esta relación dependerá de los parámetros del motor, los cuales describen las características físicas del mismo.

C) CARACTERIZACIÓN DEL MOTOR

La ecuación que define al motor se puede expresar como una planta de primer orden realizando el siguiente desarrollo a la ecuación del modelo del motor:

$$\frac{\omega_m(s)}{v(s)} = \frac{k_{bf}}{L_a J_{eq} s^2 + s(R_a J_{eq} + L_a f_{eq}) + f_{eq} R_a + k_{bf}^2}$$

$$= \frac{k_{bf} / J_{eq}}{L_a s^2 + s(R_a + L_a f_{eq} / J_{eq}) + (f_{eq} R_a + k_{bf}^2) / J_{eq}}$$

si de esta última ecuación suponemos $L_a \ll 1$ y $f_{eq} \ll 1$, quedaría:

$$\frac{\omega_m(s)}{v(s)} = \frac{\frac{k_{bf}}{J_{eq}}}{R_a s + \frac{k_{bf}^2}{J_{eq}}}$$

$$\frac{\omega_m(s)}{v(s)} = \frac{k_{bf} / R_a J_{eq}}{s + \frac{k_{bf}^2}{R_a J_{eq}}}$$

que es una ecuación de primer orden, expresada de la forma:

$$\frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{s + B}$$

donde

$$\text{Ganancia } K = \frac{k_{bf}}{R_a J_{eq}}$$

$$\text{Polo } B = \frac{k_{bf}^2}{R_a J_{eq}}$$

Así para caracterizar el motor, lo suponemos una planta de primer orden, cuyo comportamiento se muestra en la Figura **iError! No hay texto con el estilo especificado en el documento.**-4 ante una entrada escalón:

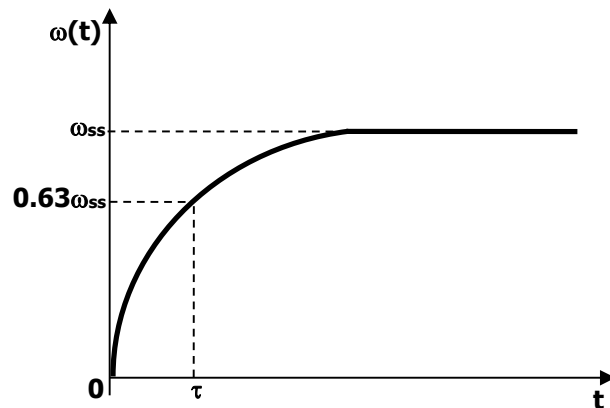


Figura ¡Error! No hay texto con el estilo especificado en el documento.-4.
Comportamiento de un sistema de primer orden

Las ecuaciones particulares para el motor de CD que describen el comportamiento de la Figura **¡Error! No hay texto con el estilo especificado en el documento.-4**, se obtienen de las ecuaciones del modelo del motor cuando se supone sistema de primer orden ante una entrada escalón unitario, $V(s) = \frac{1}{s}$, esto es:

$$\begin{aligned}\frac{\omega(s)}{V(s)} &= \frac{K}{s+B} \\ \omega(s) &= \frac{K}{s+B} * V(s) = \frac{K}{s(s+B)} \\ &= \frac{a}{s} + \frac{b}{s+B}\end{aligned}$$

Realizando el desarrollo en fracciones parciales, y evaluando las constantes de los numeradores se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}a &= \left. \frac{K}{s+B} \right|_{s=0} = \frac{K}{B} \\ b &= \left. \frac{K}{s} \right|_{s=-B} = -\frac{K}{B} \\ \omega(s) &= \frac{K}{B} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+B} \right) \\ \omega(t) &= \frac{K}{B} (1 - e^{-Bt})\end{aligned}$$

Con esta ecuación de comportamiento del motor en el tiempo, podemos obtener los valores de las constantes K y B que caracterizan al motor, midiendo experimentalmente los valores de la velocidad en estado permanente y de la velocidad para $t = \tau$.

Los parámetros para el motor de CD con el que se trabajó

Con la ayuda de la tarjeta de adquisición de datos de LabView NIPCI6036E, se tomaron los datos del comportamiento del motor en lazo abierto, para una entrada escalón de 10V.

Para la entrada escalón al motor mencionada, la ecuación de primer orden del motor en el tiempo es:

$$\omega(t) = \frac{10K}{B} (1 - e^{-Bt})$$

substituyendo el valor de la velocidad para estado permanente, tengo:

$$\omega(t \rightarrow \infty) = \frac{10K}{B} = 92.6 \frac{rad}{s}$$

$$\frac{K}{B} = 9.26$$

para el valor de $t = \tau = 5s$, la velocidad medida fue de $57.4 rad/s$, sustituyendo estos valores en la ecuación del motor de primer orden en el tiempo:

$$\omega(t = \tau) = \frac{10K}{B} (1 - e^{-B(5)}) = 57.4 \frac{rad}{s}$$

$$57.4 = 10(9.26)(1 - e^{-5B})$$

$$\frac{57.4}{92.6} = 1 - e^{-5B}$$

$$e^{-5B} = 1 - 0.62$$

$$-5B = \ln(0.38)$$

de donde los valores de las constantes K y B quedan:

$$B = 0.1934 \approx 0.2$$

$$K = 1.7913 \approx 1.8$$

así la ecuación de primer orden que define al motor quedaría:

$$H(s) = \frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{1.8}{(s + 0.2)}$$

Del modelo de primer orden a un modelo aproximado de segundo orden

Como se mencionó en la sección anterior, los valores de K y de B del modelo de primer orden se pueden expresar en función de las constantes¹⁰⁶ que definen al motor, esto es:

$$K = \frac{k_{bf}}{R_a J_{eq}} = 1.8$$

$$B = \frac{k_{bf}^2}{R_a J_{eq}} = 0.2$$

De la segunda ecuación podemos encontrar el valor de k_{bf}

$$B = K * k_{bf}$$

$$0.2 = 1.8 * k_{bf}$$

$$k_{bf} = 0.111$$

Y midiendo el valor de la resistencia del embobinado del motor con un puente de impedancias $R_a = 69.7$, podemos encontrar también el valor del momento de inercia J_{eq} , esto es:

$$1.8 = \frac{k_{bf}}{R_a J_{eq}}$$

$$1.8 * R_a * J_{eq} = k_{bf}$$

$$J_{eq} = \frac{k_{bf}}{R_a * 1.8} = \frac{0.111}{69.7 * 1.8}$$

$$J_{eq} = 8.86 \times 10^{-4}$$

Así los parámetros aproximados que definen al motor son:

¹⁰⁶ Recordemos que los valores de los parámetros del motor deben de estar expresados de acuerdo con las unidades del sistema internacional de unidades.

Eléctricos

$$R_a = 69.7[\Omega]$$

$$k_{bf} = 0.1111 \left[\frac{V}{rad/s} \right]$$

$$L_a = 4.458 \times 10^{-3} [H]$$

Mecánicos

$$k_{bf} = 0.1111 \left[\frac{N \cdot m}{A} \right]$$

$$J_{eq} = 8.86 \times 10^{-4} [Kg \cdot m^2]$$

$$[\omega]_u = \frac{rad}{s}$$

Donde el valor de la inductancia L_a también fue medido con un puente de impedancias.

Con las constantes que se obtuvieron anteriormente, podemos proponer un modelo aproximado del motor de CD para segundo orden, para el cual supondremos $f_{eq} = 0$, esto es:

$$\frac{\omega_m(s)}{v(s)} = \frac{k_{bf}}{L_a J_{eq} s^2 + s(R_a J_{eq} + L_a f_{eq}) + f_{eq} R_a + k_{bf}^2}$$

$$\frac{\omega_m(s)}{v(s)} = \frac{k_{bf}}{L_a J_{eq} s^2 + R_a J_{eq} s + k_{bf}^2}$$

substituyendo los valores aproximados de las constantes que definen el motor encontradas:

$$\frac{\omega_m(s)}{v(s)} = \frac{0.1111}{(4.458 \times 10^{-3})(8.86 \times 10^{-4}) s^2 + (69.7)(8.86 \times 10^{-4}) s + (0.1111)^2}$$

$$\frac{\omega_m(s)}{v(s)} = \frac{0.1111}{3.95 \times 10^{-6} s^2 + 0.0618 s + 0.0123}$$

Simulación del comportamiento del motor

Las simulaciones que se realizan a lo largo de esta tesis son realizadas en MATLAB, se utilizan conjuntamente simulink y la programación en archivos *m*. Además, se utiliza el modelo aproximado de segundo orden del motor de CD que obtuvimos en la sección anterior.

El diagrama en simulink con el cual se realizaron las simulaciones del motor en lazo abierto se encuentra a continuación.

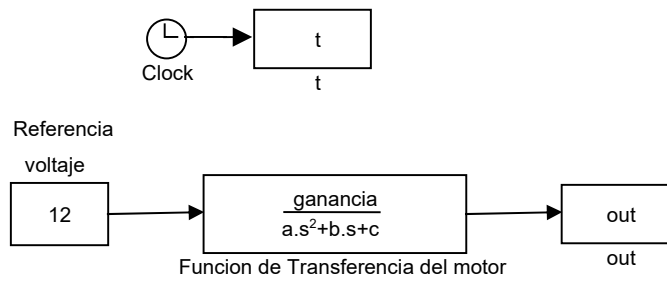
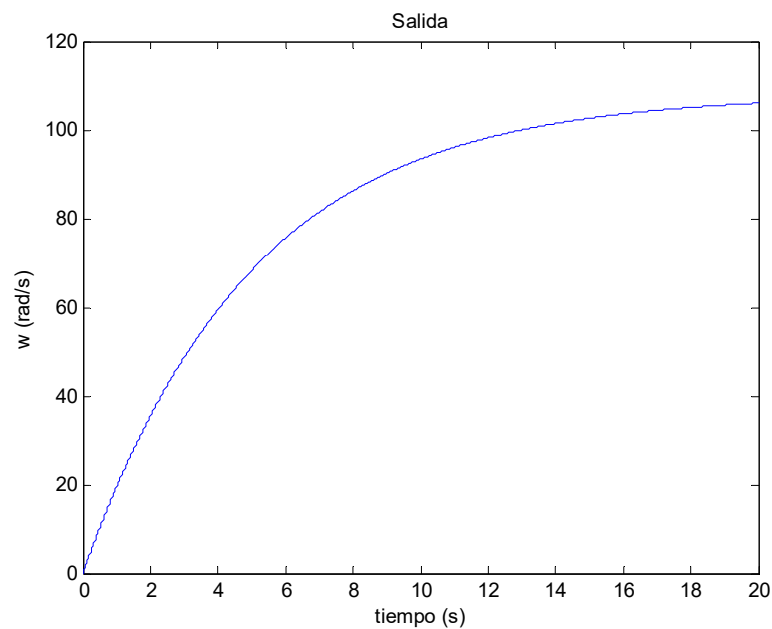


Diagrama del motor de CD en lazo abierto.

La señal de salida del motor en lazo abierto para una entrada escalón de 12V se muestra en la siguiente figura.



Salida con respecto al tiempo

Bibliografía

- [1] Y. Takahashi, M.J. Robins, D.M. Auslander, "Control and dynamic systems", Addison-Wesley Publishing Company, United States of America, 1972.
- [2] V.I. Utkin, "Sliding mode control design principles and applications to electric drives" IEEE Trans. Ind. Electrón.
- [3] Levant, "Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers" Israel, 2004.
- [4] A. Levant, "Adjustment of high-order sliding-mode controllers", Israel, 2005.
- [5] Damiano, G.L.Gatto, I. Marongiu, A. Pisano, "Second-Order Sliding-Mode Control of DC Drives".
- [6] R. Garrido, Y.B. Shtessel, L.M. Fridman, "Application of VS differentiators to DC servomechanisms".
- [7] A. Levant, "Higher Order Sliding Modes and arbitrary-order sliding differentiation". Proc. Of the European Control Conf. 2001.
- [8] I. A. Shkolnikov, Y. B. Shtessel, P. Zarchan, D. P. Lianos, "Simulation study of homing interceptor guidance loop with sliding mode observers versus Kalman filters". University of Alabama. Huntsville, AL, USA.
- [9] Manual de MATLAB versión 6.5.
- [10] K. Ogata, "Ingeniería de Control Moderna" Tercera Edición, Prentice Hall, 1998.
- [11] C. Kuo, "Sistemas de Control Automático" Prentice Hall, 1996.
- [12] P.H. Lewis, C. Yang, "Sistemas de control en ingeniería" Prentice Hall, Madrid, 1999.
- [13] V.M. Sánchez Esquivel, A. Salva Calleja, "Prácticas de laboratorio de análisis de circuitos eléctricos", FI, UNAM 2001.

- [14] Oppenheim, Willsky, "Señales y Sistemas" Segunda Edición. Pearson Educación.
- [15] S. Siskind, "Electrical Machines" Second Edition, McGraw-Hill, 1959.
- [16] Electro-Craft Corporation, "DC Motors Speed Controls Servo Systems: An Engineering HandBook".