

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería



**“TÉCNICAS DE CONTROL ACTIVO DE
RUIDO”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO ELÉCTRICO ELECTRÓNICO

PRESENTAN:

**JULIO RICARDO SÁNCHEZ DÍAZ
OSCAR DAVID SÁNCHEZ DÍAZ**

DIRECTOR DE TESIS: DR. BOHUMIL PSENICKA

México D.F.

Diciembre, 2006.

GRACIAS,

Primeramente a Dios el cual nos ha dado la oportunidad de poder concluir esta etapa de nuestras vidas.

A nuestro abuelito Aurelio, el cual aunque ya no esta con nosotros agradecemos el apoyo incondicional que nos brindo durante el tiempo que estuvo con nosotros. ¡Gracias Abuelito!

A nuestra abuelita Rita, dándonos siempre su consejo y dirección. ¡Gracias por que has sido como una segunda madre!

A nuestro tío Carlos por el apoyo recibido cuando más lo necesitamos. Una parte de este triunfo es tuyo.

A nuestra mamá, la cual nos ha inspirado y contagiado de su espíritu vencedor.

Oscar y Julio

*A mis suegros Felipe y Teresa por su invaluable apoyo. Son súper!
A mi esposa Adriana por su paciencia y a mi Hija Ivana, Las Amo!*

Oscar

*Claudia gracias por formar parte de mi vida
Apoyándome siempre, te amo.*

Julio

TÉCNICAS DE CONTROL ACTIVO DE RUIDO

INDICE.

Capitulo 1. Introducción General	
1.1 Marco Histórico.....	6
1.2 Aplicaciones Generales del Control Activo de Ruido.....	9
1.3 Objetivos.....	9
Capitulo 2. Control Acústico e Introducción al Control Activo de Ruido.....	10
2.1 Concepto.....	11
2.2 Control de Ruido por Métodos Pasivos.....	12
2.3 Fundamentos Acústicos.....	22
2.3.1 Acoplamiento Acústico de Fuentes de Ruido.....	22
2.3.2 Principio de Young.....	26
2.3.3 Principio de Huygens.....	29
2.4 Tipos de Ruido.....	30
2.5 Entornos Acústicos de Cancelación.....	32
Capitulo 3. Sistemas de Control Activo de Ruido y sus Características.....	36
3.1 Aspectos Generales.....	37
3.2 Filtros Adaptables.....	41
3.3 Algoritmos Adaptables.....	42
3.3.1 Rendimiento de la Superficie MSE.....	42
3.3.2 Método de Pendiente Descendente.....	45
3.3.3 Algoritmo LMS.....	46
3.3.4 Comportamiento del MSE en el Algoritmo LMS.....	47
3.3.4A Curva de Aprendizaje	48
3.3.4B Exceso y Mal Ajuste en MSE.....	52
3.3.4C Estabilidad del LMS.....	53
3.4 La Constante de Tiempo en Procesos Adaptables.....	55
Capitulo 4. Técnicas de Control Activo de Ruido.....	57
4.1 Tecnología de CAR (ANC) de Banda Ancha (Ruido Aleatorio).....	58
4.1.2 Tasa de Muestreo y Longitud del Filtro.....	60
4.1.3 Efectos de la Trayectoria Secundaria y el Algoritmo.....	61
4.1.4 Algoritmo FXLMS	65
4.1.5 Obtención del Algoritmo FLMS.....	65
4.1.6 Técnica de Modelado OFF-LINE.....	68
4.1.7 Efectos de la Retroalimentación	69
4.2 Técnica de CAR (ANC) de Banda Estrecha (Ruido Periódico).....	71
4.2.1 Técnica de Síntesis de Forma de Onda.....	72
4.2.2 Efectos de la Trayectoria Secundaria y el Algoritmo FXLMS.....	74
Capitulo 5. Simulación de un Control Activo de Ruido en un Ducto de Ventilación Empleando Matlab	77
Simulación.....	78
Conclusiones.....	90
Apéndice.....	91
Bibliografía.....	93

Capítulo 1

INTRODUCCION GENERAL

Primero se intenta situar al control activo de ruido en su contexto histórico, exponer las limitaciones de esta técnica de control y los alcances que se han tenido.

1.1 MARCO HISTORICO

El control activo de ruido es una de las áreas de la ingeniería que a tenido un desarrollo sustancial en los últimos años. Cuando esta técnica se aplica de una forma adecuada en la solución de problemas de ruido se puede obtener resultados imposibles de igualar con el uso de las técnicas pasivas tradicionales. Lo anterior es particularmente cierto para problemas de ruido a bajas frecuencias en donde los métodos de control de ruido pasivos requieren un gran espacio, tamaño y dinero.

Una de las frases claves en el párrafo anterior es “la aplicación correcta” ya que así como la aplicación correcta de esta técnica puede producir resultados increíbles, la aplicación incorrecta puede resultar realmente decepcionante.

Hoy en día los problemas de ruido acústico han aumentado en gran manera debidos principalmente a los siguientes factores:

- El desarrollo de la industria en nuestros tiempos ha tenido como consecuencia el aumento de la maquinaria industrial lo que ha provocado que los problemas relacionados con el ruido se hagan cada vez más evidentes debido al aumento en el número de motores, ventiladores, transformadores, compresores, etc. así como la vibración que estas producen.
- El aumento en la población ha tenido como consecuencia que el número de habitantes por kilómetro cuadrado aumente, lo que implica que las personas estén más expuestas al ruido debido a la proximidad que existe entre sus casas, al tráfico y a diversos factores relacionados con el tipo de vida que se lleva hoy en día.

En una primera instancia los problemas mencionados anteriormente se trataron de resolver mediante la utilización de técnicas pasivas para la eliminación del ruido, como pueden ser barreras y silenciadores y de esta manera atenuar los niveles de ruido producido por las maquinas mencionadas anteriormente debido a que pueden operar dentro de un rango amplio de frecuencias. Los silenciadores pasivos utilizan ya sea el concepto de cambio de impedancia ocasionado por una combinación de pantallas acústicas y tubos para eliminar el sonido indeseable o el concepto de pérdida de energía causado por la propagación del sonido en un conducto alineado con materiales que absorben el sonido para atenuar el ruido, a este tipo de sistemas se les denomina silenciadores resistivos.

Los silenciadores reactivos se utilizan comúnmente como silenciadores en las máquinas de combustión interna, mientras que los silenciadores resistivos se utilizan en los conductos de ventilación. Estos silenciadores pasivos son requeridos debido a la alta atenuación que tienen sobre un amplio rango de frecuencias.

Por otra parte las técnicas pasivas tienen la desventaja de ocupar espacios grandes, son costosas y son inefectivos a bajas frecuencias.

Con lo que respecta a las técnicas de control activo podemos decir que estos sistemas están constituidos por un dispositivo electrónico que cancela el sonido indeseable a través de la generación de un pseudo ruido de igual amplitud pero de fase opuesta como se explicara posteriormente.

Este tipo de control de ruido se ha venido desarrollando rápidamente ya que en comparación con el control pasivo presenta mejoras significativas como son:

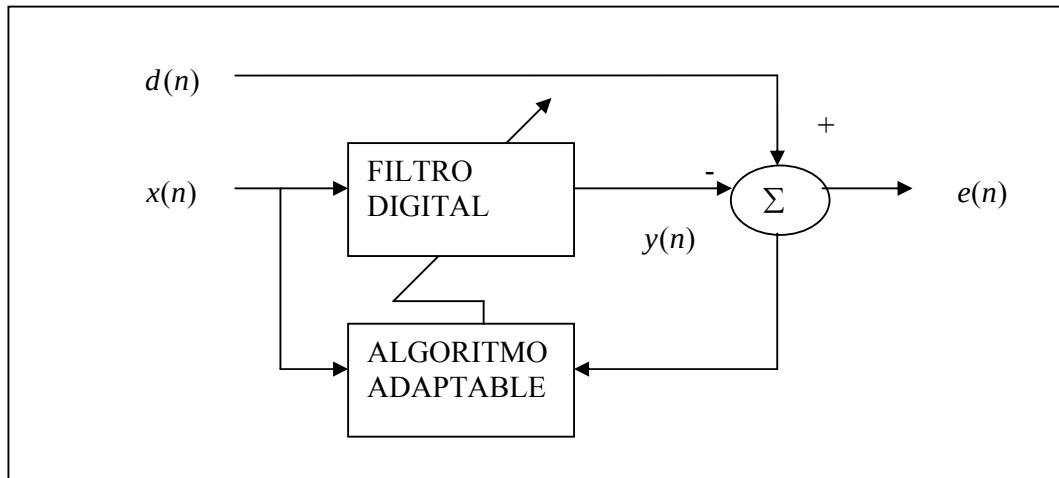
- Mejoras en el control de ruido
- El tamaño
- El peso
- Costo del sistema.

Esta técnica se remonta a los años 30 en donde Lueg en Alemania y Coanda en Francia patentaron los esquemas en los que se basa dicho control.

En lo que es el área del procesamiento digital de señales existen sistemas adaptables¹ usados para la cancelación del ruido, en donde una señal es transmitida a través de un canal de comunicación a un sensor, el cual, recibe la señal transmitida más ruido del entorno. La combinación de la señal y el ruido $(s + n_0)$ forman lo que es la primera señal de entrada al cancelador. Un segundo sensor recibe una señal de ruido (n_1) , la cual esta relacionada de alguna manera con (n_0) . Este sensor proporciona la señal de referencia. El ruido (n_1) es filtrado² para producir la salida $y \approx n_0$. Esta señal de salida es restada de la primera señal de entrada $(s + n_0)$ para producir la salida del sistema dada por $Y = (s + n_0) - y$.

¹ El adjetivo adaptable puede ser entendido al considerar a un sistema que trata de adaptarse a si mismo para responder a un fenómeno, el cual esta tomando lugar en sus alrededores. Ref. "Introduction to adaptive filters" Haykin Simon

² Proceso efectuado por un dispositivo o sistema, el cual toma una mezcla de partículas/elementos mediante su entrada, a los cuales, procesa de acuerdo a reglas específicas con el fin de generar una serie de partículas/elementos, en su salida. Ref. "Introduction to adaptive filters" Haykin Simon



En el sistema ilustrado la entrada de referencia es procesada por un filtro adaptable que automáticamente ajusta su respuesta al impulso a través de un algoritmo como el LMS el cual responde a una señal de error. De esta manera con el algoritmo adecuado el filtro puede operar bajo condiciones variables, reajustándose así mismo con el fin de minimizar el error al momento de cancelar la señal de interferencia.

Uno de los acontecimientos que hizo que el control adaptable de ruido se viera en gran manera afectado fue la aparición del microprocesador que tiene lugar en el año de 1972 el cual era de propósito general. Para el año de 1980 surge el primer microprocesador especializándose en el tratamiento de señales comúnmente denominado DSP, diseñado para realizar el cálculo reiterado de la combinación producto-acumulación que es la operación básica en la convolución. Al mismo tiempo, comienza un desarrollo vertiginoso de la teoría fundamental de tratamiento digital de la señal y la exploración de su aplicación práctica en un sinnúmero de campos. De esta manera se logra que la manipulación de las señales sea una cuestión de cálculo numérico realizada en un DSP.

En 1981 Burgess desarrolló un sistema de cancelación de ruido en ductos basado en la teoría de filtros adaptables y así con ayuda de los poderosos procesadores digitales de señales (DSPs) y en combinación con el desarrollo de algoritmos adaptables el control de ruido tuvo un gran impulso.

1.2 APLICACIONES GENERALES DEL CONTRL ACTIVO DE RUIDO

Las aplicaciones del control activo de ruido están determinadas por la restricción o poca eficacia de las técnicas pasivas de control de ruido.

Esto es porque a bajas frecuencias en donde no se pueden utilizar sistemas a base de elementos pasivos los filtros adaptables entran en acción. A esas frecuencias, donde las tasas de muestreo son bajas y sólo se permite propagación de onda plana, el control activo ofrece numerosas ventajas.

Entre las aplicaciones del control activo de ruido podemos encontrar las siguientes categorías:

- Ruido en conductos: Se refiere al ruido existente en ductos de una sola dimensión como son los de ventilación, de aire acondicionado, de escape etc.
- Ruido interior : Es el ruido existente en los espacios cerrados
- Protección auditiva personal
- Ruido en el espacio libre

Dentro de las aplicaciones específicas podemos encontrar las siguientes:

- Industria automotriz
- Sistemas de canales múltiples (tridimensionales): Silenciadores electrónicos para sistemas de escape, sistemas de inducción.
- Accesorios.
- Sistemas de un solo canal: Ductos de aire, refrigeradores, lavadoras, etc.
- Industriales: Ventiladores, chimeneas, transformadores, compresoras, bombas, túneles de viento, protector de oídos, cabinas telefónicas, etc.
- Transporte: Aviones, barcos, botes, helicópteros, motocicletas, etc.

1.3 OJETIVOS

Exposición de la técnica de control adaptable de ruido, sus ventajas y desventajas, así como, su fundamento teórico. Finalmente se ilustrara la técnica mediante la simulación del filtrado adaptable en un ducto de ventilación mediante el uso de Matlab.

- Análisis y comparación de los algoritmos de control adaptable existentes. Con esto se busca obtener los valores óptimos de los parámetros que rigen su funcionamiento, teniendo en cuenta que se tiene que obtener la máxima robustez, estabilidad y atenuación acústica posible.
- Desarrollar algoritmos de control más simples, en función de las características del tipo d ruido a cancelar.

Capítulo 2

CONTROL ACÚSTICO E INTRODUCCIÓN AL CONTROL ACTIVO DE RUIDO

En este capítulo se presenta una introducción general del concepto acústico de la cancelación activa de ruido, justificando la necesidad de tal técnica para mejorar las prestaciones en bajas frecuencias que ofrecen las técnicas pasivas de control. Se analizan los fundamentos acústicos basados en la superposición de ondas de presión (Principios de Young y Huygens). Por último, se enumeran los distintos tipos de ruidos acústicos y los escenarios o entornos acústicos de cancelación.

2.1. CONCEPTO.

El control activo de ruido hace referencia a situaciones en donde ondas acústicas destructivas son generadas mediante circuitos electrónicos. Esto es posible cuando las ondas de presión acústica de ambos ruidos estén en oposición de fase figura 2.1.

Esta simple e ingeniosa idea fue propuesta ya en los años 30. Los primeros intentos de cancelación tuvieron que esperar hasta los años 50, con unos resultados pobres debido a que la tecnología contemporánea no permitía implementar el control necesario para realizar la cancelación activa de ruido acústico. El estudio y desarrollo de técnicas de procesamiento digital de la señal [Oppenheim], más concretamente herramientas digitales de procesamiento adaptable de señales, unido al continuo desarrollo tecnológico de los procesadores digitales de señal en los últimos años, permiten hoy en día la implementación de este tipo de técnicas activas de control. Existen referencias excelentes que muestran el actual estado del arte del control activo del ruido

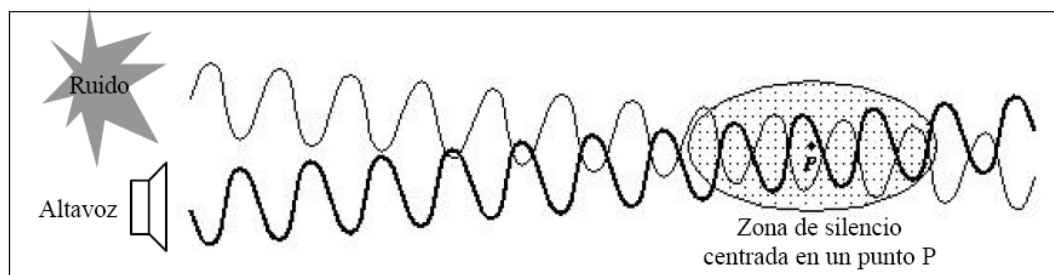


Figura 2.1. Interferencia destructiva de ondas de presión sinusoidales de la misma frecuencia.

La técnica de control a emplear permitirá situar estas "zonas de silencio", más o menos numerosas y de mayor o menor tamaño, en aquellos lugares del recinto que se desee. Los elementos que constituyen todo el conjunto controlador son los siguientes: un sensor (micrófono) de referencia acústica, un controlador que varíe las características de la señal referencia, un actuador (altavoz) que genere ondas de presión y un sensor de realimentación (micrófono) que sirva al controlador para modificar su funcionamiento y conseguir disminuciones de presión acústica justamente donde esté colocado este sensor.

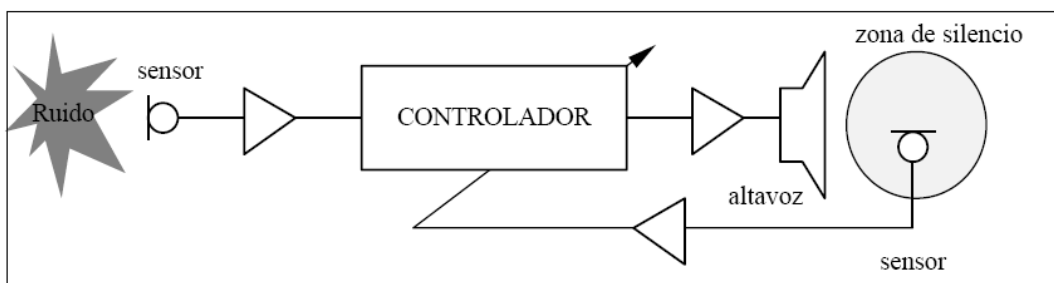


Figura 2. 2. Elementos de un sistema de control activo de ruido.

Con tales elementos se intentará conseguir una disminución de nivel de presión acústica en una determinada zona del espacio. El sistema puede generalizarse para un sistema múltiple, es decir, para conseguir la atenuación de varias zonas espaciales de un determinado recinto. En este caso, se necesitarán tantos sensores de error como zonas a cancelar. La complejidad del controlador es directamente proporcional al número de zonas de cancelación.

Las características de todos y cada uno de los elementos influyen en el funcionamiento óptimo del sistema de control. La linealidad de los subsistemas y transductores (micrófonos y altavoces), así como la correcta ubicación de estos últimos en el escenario de cancelación, son de vital importancia para conseguir la máxima disminución del nivel de presión acústica.

Mención especial merece el controlador. Este deberá modificar sus parámetros de funcionamiento rápidamente conforme varían las características del ruido. Esta adaptabilidad del controlador es imprescindible para lograr la correcta cancelación en todo momento. Un controlador mal diseñado puede provocar inestabilidades de funcionamiento, con continuas variaciones de niveles de presión acústica en la zona de cancelación.

2.2. CONTROL DE RUIDO POR MÉTODOS PASIVOS.

La técnica de control activo de ruido acústico es muy atractiva e ingeniosa desde el punto de vista tecnológico, aunque estas no son las razones de su actual desarrollo. Las causas se deben buscar en las regulares prestaciones acústicas de aislamiento y atenuación que aportan las técnicas pasivas, para ondas de presión acústica de baja frecuencia. Esta problemática ha existido siempre, pero ha sido desde mediados de la década de los ochenta cuando la tecnología ha permitido desarrollar las técnicas activas de control.

Cuando se desear atenuar o eliminar el ruido que genera una fuente acústica lo mas inmediato es actuar allí donde se encuentra dicha fuente, y en caso de no ser posible, actuar entonces sobre el lugar donde se requiere una disminución de ruido. En ambos casos, es necesaria una barrera que impida el paso de la energía acústica desde la fuente al recinto de interés.

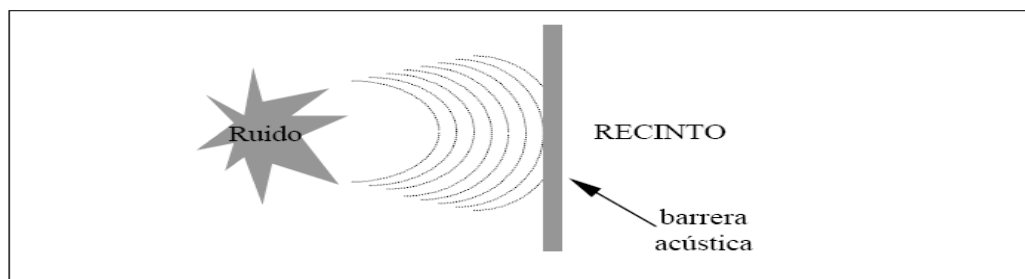


Figura 2. 3. Recinto acústico aislado con barrera acústica.

Veamos los fenómenos de transmisión acústica que se producen sobre la onda de presión acústica ruidosa al encontrarse una barrera acústica como la mostrada en la figura 2.3, y cual han de ser las características de esta para producir una elevada atenuación acústica.

Cuando una onda acústica que viaja en un medio encuentra la frontera de un segundo medio, se generan ondas reflejadas y transmitidas. Las razones de las amplitudes de presión e intensidades de las ondas transmitidas y reflejadas con respecto a las de la onda incidente, dependen de las impedancias acústicas características denotada como $Z_0 = \rho_0 c_0$, de la velocidad de la onda acústica en los dos medios denotada como u y del ángulo de incidencia que la onda hace con la normal a la *interfase*. A

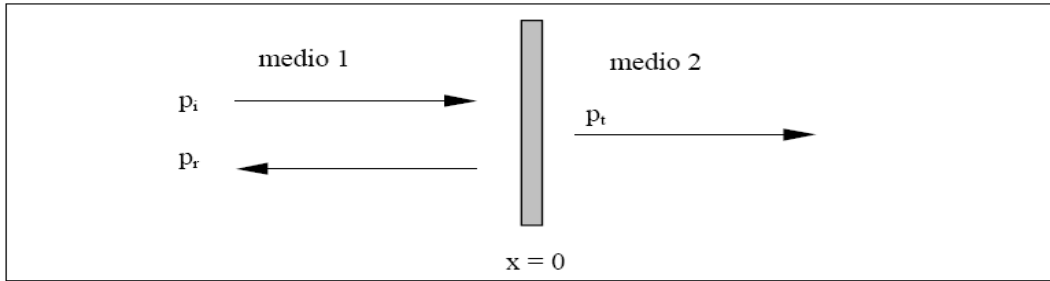


Figura 2. 4. Reflexión y transmisión de ondas que inciden en una barrera acústica.

Conociendo una onda con trayectoria positiva P^+ y que es normalmente incidente a una interfase entre dos medios (podría ser aire y agua), en donde cada medio cuenta con una impedancia característica $Z_1 = \rho_1 c_1$ y $Z_2 = \rho_2 c_2$, siendo ρ la densidad del medio y c la velocidad de la onda acústica en el mismo. Esta onda es parcialmente reflejada y parcialmente transmitida. Con esto podemos decir que la presión de cada onda es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Onda incidente: } P^+ &= p^+ \left(t - \frac{x}{c_1} \right) \\ \text{Onda reflejada: } P^- &= p^- \left(t - \frac{x}{c_1} \right) \\ \text{Onda transmitida: } P_{tr} &= p^+ \left(t - \frac{x}{c_2} \right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si escogemos que la frontera de los dos medios sea $x=0$ entonces podemos expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
P^+ &= p^+ e^{jk_1 x} \\
P^- &= p^- e^{jk_1 x} \\
P_{tr} &= p^+ e^{jk_2 x}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

La onda transmitida tiene la misma frecuencia que la onda incidente pero, debido a las diferentes velocidades de fase c_1 y c_2 , los números de onda $k_1 = \frac{\rho}{c_1}$ en

el medio 1 y $k_2 = \frac{\rho}{c_2}$ en el medio 2, son diferentes.

Lo siguiente es definir a los coeficientes de transmisión y reflexión como sigue:

$$R = \frac{P^-}{P^+} \tag{2.3}$$

$$T = \frac{P_{tr}}{P^+} \tag{2.4}$$

El definir los coeficientes enunciados en las ecuaciones (2.3) y (2.4) exige el cumplimiento de dos condiciones:

- a) La presión es la misma para cualquiera de las dos interfaces, es decir:

$$p^+ + p^- = p_{tr} \tag{2.5}$$

De no cumplir con esta condición se tendría una aceleración infinita por tener una frontera carente de masa.

- b) La componente normal de la velocidad debe de ser continua a través de la frontera:

$$u^+ + u^- = u_{tr} \tag{2.6}$$

Empleando las dos ecuaciones podemos encontrar una relación entre el coeficiente de reflexión y el de transmisión:

$$\begin{aligned}
\frac{p^+}{p^+} + \frac{p^-}{p^+} &= \frac{p_{tr}}{p^+} \\
1 + \frac{p^-}{p^+} &= \frac{p_{tr}}{p^+} \\
\text{siendo } R &= \frac{p^-}{p^+} \text{ y } T = \frac{p_{tr}}{p^+}
\end{aligned}$$

$$1 + R = T \tag{2.7}$$

De la segunda condición sabemos que de (2.6) $u^+ + u^- = u_{tr}$ y que $\rho = Z_0 u$ o $\rho = -Z_0 u$ dependiendo de la dirección de propagación de la onda. Despejando, obtenemos:

$$u = \frac{\rho}{Z_0} \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.8) en (2.6) y tomando en cuenta el sentido de propagación, así como la convención de $Z_{01} = Z_1$ y $Z_{02} = Z_2$, hacemos el siguiente desarrollo:

$$u^+ = \frac{p^+}{z_1}$$

$$u^- = \frac{p^-}{z_1}$$

$$u_{tr} = \frac{p_{tr}}{z_2}$$

$$\frac{p^+}{z_1} - \frac{p^-}{z_1} = \frac{p_{tr}}{z_2}$$

Aplicando (2.3) y (2.4)

$$(p^+ - p^-) \frac{1}{z_1} = \frac{p_{tr}}{z_2}$$

$$(p^+ - p^-) = \frac{z_1}{z_2} p_{tr}$$

dividiendo entre p^+

$$\left(1 - \frac{p^-}{p^+}\right) = \frac{z_1}{z_2} \frac{p_{tr}}{p^+}$$

Quedando finalmente

$$1 - R = T \frac{z_1}{z_2} \quad (2.9)$$

De (2.7) y (2.9) podemos obtener que

$$R = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} \quad (2.10)$$

$$T = \frac{2z_2}{z_1 + z_2} \quad (2.11)$$

Que son los resultados que necesitamos.

En algunas ocasiones los coeficientes R y T son llamados coeficientes de presión reflejada y presión transmitida o coeficiente de potencia del sonido.

Si analizamos los resultados podemos decir lo siguiente:

Cuando una onda incidente p se encuentra en la interfase la señal de la onda en el tiempo justo después de dejar la interfase es: $p^-(t) = Rp^+(t)$, como podemos ver la onda reflejada presenta la misma forma que la onda incidente pero con una amplitud diferente (a reserva de que $|R|=1$), si $R > 0$, la onda reflejada presenta la misma fase que la incidente y si $|R| < 0$, resulta en un cambio de fase de 180° .

Si las velocidades de propagación son c_1 y c_2 respectivamente, son diferentes, tenemos dos casos: uno si $c_2 > c_1$, la onda transmitida se estira y si $c_2 < c_1$, está se comprime.

Una vez analizado los fenómenos de transmisión de las ondas de presión acústica al atravesar dos medios diferentes, el estudio se centra en el análisis del fenómeno de transmisión del ruido acústico a través de una barrera acústica de espesor L e impedancia acústica z_2 .

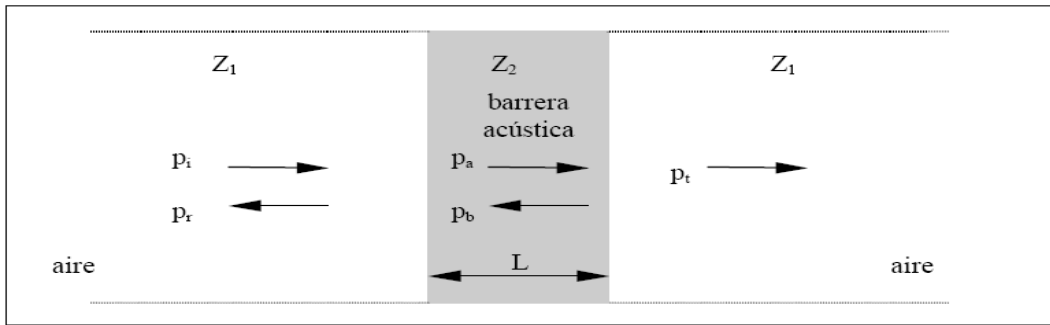


Figura 2. 5. Reflexión y transmisión de ondas que inciden sobre una barrera acústica.

Cuando una onda incidente en el medio 1 llega a la frontera de la barrera acústica, una parte de la energía acústica se refleja y otra se transmite a través de dicha barrera. La onda transmitida pasará por la barrera acústica hasta interactuar nuevamente con el medio 1, donde a su vez algo de energía se refleja y algo se transmite. La onda reflejada regresa hasta la unión de los dos medios, donde se repite el proceso.

Lo siguiente es obtener el desarrollo matemático de este comportamiento. Partiendo de tres ecuaciones básicas:

$$\text{Presion en el medio I: } P_I = A_1 e^{-jk_1 x} + B_1 e^{jk_1 x} \quad (2.12)$$

$$\text{Presion en el medio II: } P_{II} = A_2 e^{-jk_2 x} + B_2 e^{jk_2 x} \quad (2.13)$$

$$\text{Presion en el medio III: } P_{III} = A_3 e^{-jk_3(x-L)} \quad (2.14)$$

Analizando cuando $x = 0$ y aplicando las condiciones en cuanto a continuidad de la presión y velocidad se presenta lo siguiente:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \quad (2.15)$$

$$A_1 - B_1 = \frac{Z_1}{Z_2} (A_2 - B_2) \quad (2.16)$$

Para $x = L$

$$A_2 e^{-jk_2 L} + B_2 e^{jk_2 L} = A_3 \quad (2.17)$$

$$A_2 e^{-jk_2 L} - B_2 e^{jk_2 L} = \frac{Z_2}{Z_3} A_3 \quad (2.18)$$

Si se suma (2.15) y (2.16) se obtiene

$$2A_1 = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) A_2 + \left(1 - \frac{Z_1}{Z_2}\right) B_2 \quad (2.19)$$

Sí se suma (2.17) y (2.18) se obtiene

$$2A_2 e^{-jk_2 L} = \left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right) A_3 \quad (2.20)$$

Sí se resta (2.17) y (2.18) se obtiene

$$2B_2 e^{jk_2 L} = \left(1 - \frac{Z_2}{Z_3}\right) A_3 \quad (2.21)$$

Despejando A_2 y B_2 de (2.20) y (2.21)

$$A_2 = \frac{\left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right) A_3}{2} e^{jk_2 L} \quad (2.22)$$

$$B_2 = \frac{\left(1 - \frac{Z_2}{Z_3}\right) A_3}{2} e^{-jk_2 L} \quad (2.23)$$

Sustituyendo (2.22) y (2.23) en (2.19)

$$\begin{aligned}
2A_1 &= \frac{\left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)\left(1 + \frac{z_2}{z_3}\right)A_3}{2} e^{jk_2L} + \frac{\left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)\left(1 - \frac{z_2}{z_3}\right)A_3}{2} e^{-jk_2L} \\
A_1 &= \frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)\left(1 + \frac{z_2}{z_3}\right) e^{jk_2L} + \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)\left(1 - \frac{z_2}{z_3}\right) e^{-jk_2L} \right] A_3 \\
\frac{A_3}{A_1} &= \frac{4}{\left[\left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)\left(1 + \frac{z_2}{z_3}\right) e^{jk_2L} + \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)\left(1 - \frac{z_2}{z_3}\right) e^{-jk_2L} \right]}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Sí de (2.4) $T = \frac{P_{tr}}{P^+} = \frac{A_3}{A_1}$

$$T = \frac{4}{\left[\left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)\left(1 + \frac{z_2}{z_3}\right) e^{jk_2L} + \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)\left(1 - \frac{z_2}{z_3}\right) e^{-jk_2L} \right]}$$

donde $\Delta =$ al denominador

Trabajando con Δ

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left[\left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)\left(1 + \frac{z_2}{z_3}\right) (\cos k_2L + j \sin k_2L) + \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)\left(1 - \frac{z_2}{z_3}\right) (\cos k_2L - j \sin k_2L) \right] \\
\Delta &= \left(1 + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3}\right) (\cos k_2L + j \sin k_2L) + \left(1 - \frac{z_2}{z_3} - \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3}\right) (\cos k_2L - j \sin k_2L) \\
\Delta &= 2 \left(1 + \frac{z_1}{z_3}\right) (\cos k_2L) + 2 \left(\frac{z_2}{z_3} + \frac{z_1}{z_2}\right) (j \sin k_2L)
\end{aligned}$$

$$T = \frac{2}{\left(1 + \frac{z_1}{z_3}\right) (\cos k_2L) + \left(\frac{z_2}{z_3} + \frac{z_1}{z_2}\right) (j \sin k_2L)} \tag{2.25}$$

Ahora obtenemos el coeficiente de reflexión primario:

Sí de (2.3) $R = \frac{P^-}{P^+} = \frac{B_1}{A_1}$

Sí en (2.15) sustituimos (2.22) y (2.23)

$$\begin{aligned}
A_1 + B_1 &= \frac{\left(1 + \frac{z_2}{z_3}\right) A_3}{2} e^{jk_2 L} + \frac{\left(1 - \frac{z_2}{z_3}\right) A_3}{2} e^{-jk_2 L} \\
1 + \frac{B_1}{A_1} &= 1 + R = \frac{\left(1 + \frac{z_2}{z_3}\right) e^{jk_2 L}}{2} T + \frac{\left(1 - \frac{z_2}{z_3}\right) e^{-jk_2 L}}{2} T \\
1 + R &= \frac{\left(1 + \frac{z_2}{z_3}\right) (\cos k_2 L + j \sin k_2 L)}{2} + \frac{\left(1 - \frac{z_2}{z_3}\right) (\cos k_2 L - j \sin k_2 L)}{2} \\
1 + R &= \left(\cos k_2 L + \frac{z_2}{z_3} j \sin k_2 L \right) T \\
R &= \frac{\left(1 - \frac{z_1}{z_3}\right) \cos k_2 L + \left(\frac{z_2}{z_3} - \frac{z_1}{z_2}\right) j \sin k_2 L}{\left(1 + \frac{z_1}{z_3}\right) \cos k_2 L + \left(\frac{z_2}{z_3} + \frac{z_1}{z_2}\right) j \sin k_2 L} \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Para nuestro estudio consideramos los siguientes lineamientos

$$z_1 = z_3$$

$$z_2 \gg z_1$$

Y por trabajar con un grosor pequeño

$$k_2 L \ll 1$$

Aplicando lo anterior

$$\cos k_2 L = 1$$

$$\sin k_2 L \approx k_2 L$$

Entonces

$$T = \frac{2}{\left(1 + \frac{z_1}{z_1}\right) + j \left(\frac{z_2}{z_1} + 0\right) k_2 L}$$

$$T = \frac{2}{2 + j \frac{z_2}{z_1} k_2 L}$$

$$T = \frac{2z_1}{2z_1 + jz_2 k_2 L}$$

Sí

$$z_2 = \rho_2 c_2$$

$$k = \frac{\omega}{c_2}$$

$$\rho_2 L = m$$

Entonces

$$T = \frac{1}{1 + \frac{j\omega m}{2z_1}} \quad (2.27)$$

Por la forma de la ecuación (2.27) hace referencia a un filtro paso bajas. Existe un parámetro que nos indica esta disminución de la potencia acústica. Este parámetro, TL (*Transmission Loss*), define la pérdida de transmisión para una barrera acústica para condiciones de campo sonoro difuso.

En este caso tenemos que

$$TL = 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\pi f m}{z_1} \right)^2 \right] \quad (2.28)$$

Podemos hablar de una barrera como un filtro cuando nos referimos a la pérdida de transmisión

Si consideramos el caso de las altas frecuencias $\frac{\omega m}{2z_1} \gg 1$ y T se expresa de la siguiente manera:

$$T = \frac{2z_1}{j\omega m} \quad (2.29)$$

Entonces

$$TL = 20 \log_{10} \left[\frac{\pi f m}{z_1} \right] \quad (2.30)$$

Donde m es la masa por unidad de superficie dada en Kg/m^2 y f es la frecuencia en Hertz. Esta ecuación se la conoce como la ley de la masa la cual nos permite calcular la densidad de portadores mayoritarios y minoritarios en un material extrínseco. $np = \text{cte}$. Donde, n es la concentración de electrones y p es la concentración de huecos. Cada vez que se duplica la frecuencia para una masa por unidad de superficie o cada vez que se duplique la masa por unidad de superficie para una frecuencia dada, se produce una pérdida de transmisión de 6 dB. A continuación se presenta la forma típica de atenuación que suelen tener las barreras acústicas

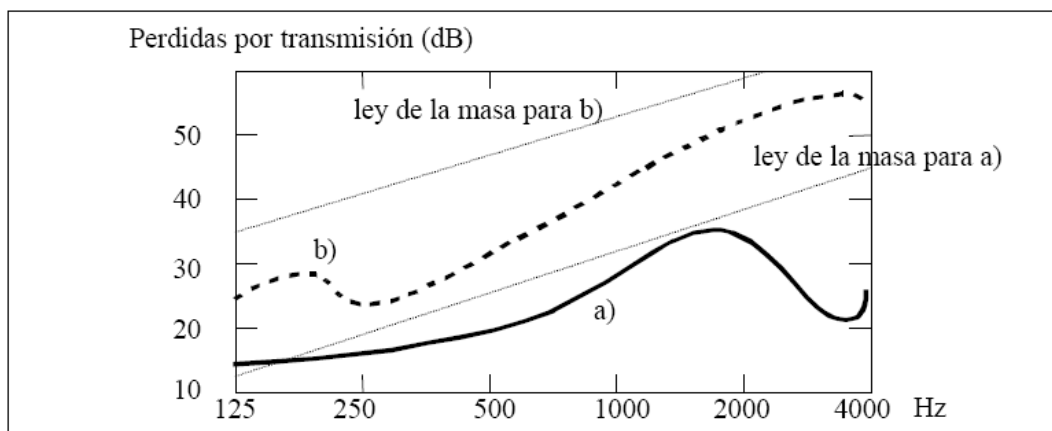


Figura 2. 6. Respuestas típicas de barreras acústicas. a) 10 Kg/m², b) 110 Kg/m².

Esto significa que las bajas frecuencias van a ser mucho menos atenuadas que las altas frecuencias, y si se quiere aumentar la atenuación será a costa de materiales mas pesados para un determinado espesor de la barrera acústica, o a costa de aumentar el espesor para un mismo material. Estas soluciones no son prácticas en la mayoría de las situaciones. Piénsese por ejemplo en la reducción de ruido en vehículos de transporte (automóviles, aviones, trenes), lo que supone aumentar el peso y/o el volumen de los materiales: vehículos menos ligeros, mayor consumo de combustible, mayor coste de material, etc.

Se puede apreciar en la figura 2.6. que la atenuación no sigue una linealidad en todo el margen de frecuencias. Esto es debido a que existe una frecuencia crítica para la cual las pérdidas del material son menores a las predichas por la ley de la masa. Esta frecuencia tiene la expresión

$$f_c = \frac{\sqrt{3}c^2}{L\pi} \sqrt{\frac{\rho}{\gamma}} \quad (2.31)$$

donde “c” es la velocidad de la onda acústica en el aire, “L” es el espesor de la barrera, “ ρ ” es la densidad del material que la forma e “Y” es el modulo de Young.

2.3. FUNDAMENTOS ACÚSTICOS.

La poca eficacia de los métodos pasivos de control para la atenuación de las ondas de presión acústica de baja frecuencia hace necesario otro tipo de solución ante el problema del ruido.

Las técnicas activas de control generan un nuevo ruido que se añade al existente, del cual se desea atenuar su nivel de presión acústica. Dependiendo de la situación de la nueva fuente de ruido -fuente secundaria-, con respecto a la fuente original de ruido -fuente primaria-, se puede realizar una disminución de energía acústica global, en todo el espacio tridimensional, ó únicamente pequeñas zonas de cancelación -zonas de silencio-.

En el primer caso, se produce un acoplamiento acústico de fuentes generadoras de ruido, cuando las mismas están próximas entre si. En el otro caso, se trata simplemente de interferencias destructivas de las ondas de presión acústica, principio de superposición.

2.3.1. Acoplamiento acústico de fuentes de ruido.

Consideremos una fuente puntual de presión acústica de una determinada frecuencia situada en el espacio libre.

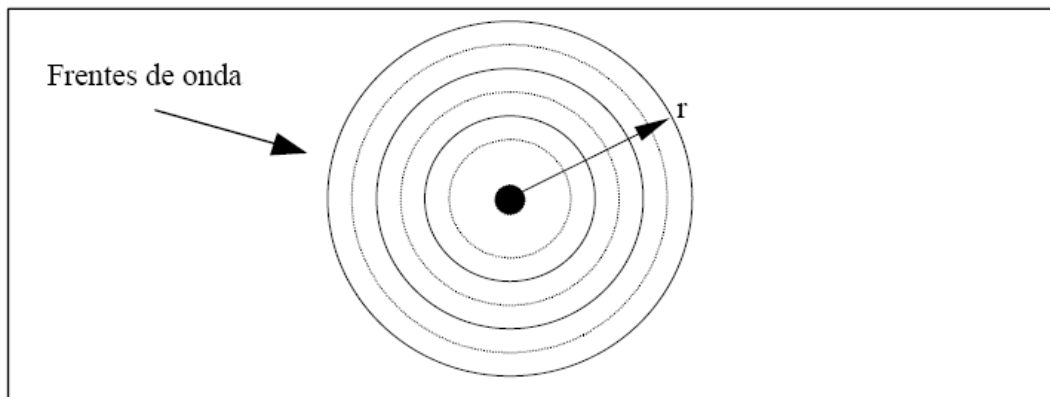


Figura 2. 7. Fuente puntual de presión acústica.

En la figura 2.7. se observan los sucesivos frente de onda desfasados unos de otro π radianes. La presión instantánea que genera esta fuente en un punto del espacio tiene la siguiente expresión:

$$p(r,t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi) \quad (2.32)$$

donde A es la amplitud de la presión, r la distancia de la fuente al punto de observación, ω la pulsación de la fuente, $k = \frac{\omega}{c}$ el número de onda y φ la fase inicial de la fuente.

Si en vez de una fuente puntual tenemos varias fuentes, entonces la presión en un determinado punto es la suma de las presiones que genera cada una de las fuentes. Determinando la velocidad vibratoria de las partículas -u-, dentro de la onda esférica de presión se puede hallar la intensidad acústica, vector de flujo de la energía acústica. La intensidad acústica es el valor medio del producto *presión x velocidad*.

Sumando por separado las presiones y velocidades y promediando en el tiempo el producto de p total y u total, se llega a la expresión general de intensidad para el caso de N fuentes, en cualquier punto del espacio.

$$I(r) = \frac{1}{2c\rho} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \frac{A_m A_n}{kr_m^2 r_n} (kr_m \cos \theta_{nm} + \sin \theta_{nm}) e_m \quad (2.33)$$

siendo ρ la densidad del medio, c la velocidad de la onda de presión en el mismo, r_m distancia al punto de observación desde la fuente m, $\theta_{nm} = k(r_n - r_m) - (\varphi_n - \varphi_m)$ y e es el vector unitario desde la fuente m hacia el punto de observación.

Al evaluar el vector intensidad I, se tendrá información de la potencia acústica. Es decir, si una fuente emite o absorbe potencia, y cual es la valor de la misma. Según se demuestra en la expresión de la intensidad acústica en un punto infinitesimalmente cercano a una de las fuentes es :

$$I(r)_{r \approx 0} = \frac{A_i B_i}{2c\rho r_i^2} e_m \quad (2.34)$$

donde:

$$B_i = A_i + \sum_{n=1, n \neq i}^N A_n \frac{\sin[kR_n - (\varphi_n - \varphi_i)]}{kR_n} \quad (2.35)$$

R_n es la distancia de cada una de las fuentes a la fuente "i". La magnitud B_i puede ser tanto positiva como negativa, es decir, el vector intensidad puede salir de la fuente o entrar a la misma. Este resultado es muy importante ya que nos muestra que la fuente actúa como emisor de potencia cuando $B_i > 0$ y absorbe potencia cuando $B_i < 0$. La expresión del vector de intensidad también muestra la simetría radial. Es decir, la radiación acústica cerca de la fuente es omnidireccional. Por tanto, la potencia acústica emitida o absorbida por la fuente "i" se calcula inmediatamente:

$$W_i = 4\pi r_i^2 I_i = \frac{2\pi}{c\rho} A_i B_i \quad (2.36)$$

De esta forma, al conocer la potencia que aporta cada fuente, se puede hallar la potencia total radiada por el sistema de N fuentes:

$$W_T = \sum_{i=1}^N W_i = \frac{2\pi}{c\rho} \sum_{i=1}^N \left\{ A_i^2 + A_i \sum_{n=1, n \neq i}^N A_n \frac{\sin[kR_n - (\varphi_n - \varphi_i)]}{kR_n} \right\} \quad (2.37)$$

La amplitud y fase de cada una de las fuentes se puede seleccionar a voluntad para hacer disminuir ó aumentar la potencia radiada por el conjunto de las N fuentes.

Si se particulariza para el caso de un dipolo, por ejemplo una de ellas es la fuente ruidosa -fuente primaria- y la otra -fuente secundaria- colocada a una distancia "b" para reducir la potencia total, con amplitudes respectivas A_1 y A_2 , se puede hallar nuevamente la intensidad acústica en las proximidades de la fuente primaria:

$$I(r)_{n=0} = \frac{A_1 B_1}{2c\rho r_1^2} e_1 \quad (2.38)$$

$$B_1 = A_1 + A_2 \frac{\sin[kb - (\varphi_1 - \varphi_2)]}{kb} \quad (2.39)$$

Para que la fuente secundaria actúe como sumidero de energía acústica es necesario que B_1 sea negativo, esto es:

- a) diferencia de fases de π radianes;
- b) amplitud de la fuente secundaria mayor que la amplitud de la fuente primaria ($A_1 < A_2$);
- c) distancia entre fuentes lo bastante pequeña para aproximar: $\sin(kb) \approx kb$

Si la fuente secundaria actúa como sumidero, esto no significa que se reduzca necesariamente la potencia total emitida por el dipolo. Puede maximizarse la absorción de energía acústica por parte de la fuente secundaria y al mismo tiempo puede incrementarse la potencia total del dipolo. Si se quiere evaluar la potencia acústica que emite el dipolo tiene que emplearse la ecuación (2.33) y particularizarla para el caso de 2 fuentes. Esto es:

$$\frac{W_T}{W_1} = 1 + \frac{A_2^2}{A_1^2} \pm 2 \frac{A_2}{A_1} \frac{\text{Sen}(kb)}{kb} \quad (2.40)$$

donde W_1 es la potencia que radia la fuente primaria en ausencia de la fuente secundaria ("+" para fuentes en fase y "-" para fuentes en oposición de fase). Si se desea una reducción de la potencia radiada por el dipolo ha de cumplirse, según la ecuación anterior, que:

- a) las fuentes estén en oposición de fase;
- b) las amplitudes de las dos fuentes sean iguales (reducción máxima);
- c) la separación entre ambas sea mínima, idealmente en el mismo punto (reducción máxima), según se muestra en la figura 2.9.

Esta situación, según puede apreciarse en las expresiones (2.38) y (2.39), equivale a que la fuente secundaria no emita ni absorba potencia, es decir cuando el vector de intensidad es nulo.

Cuando se controla una fuente secundaria para maximizar su absorción de potencia, lo que se está haciendo es variar la impedancia vista por la fuente primaria y así, permitir a esta última radiar más y más potencia acústica. Esta técnica no es útil para el control activo de ruido.

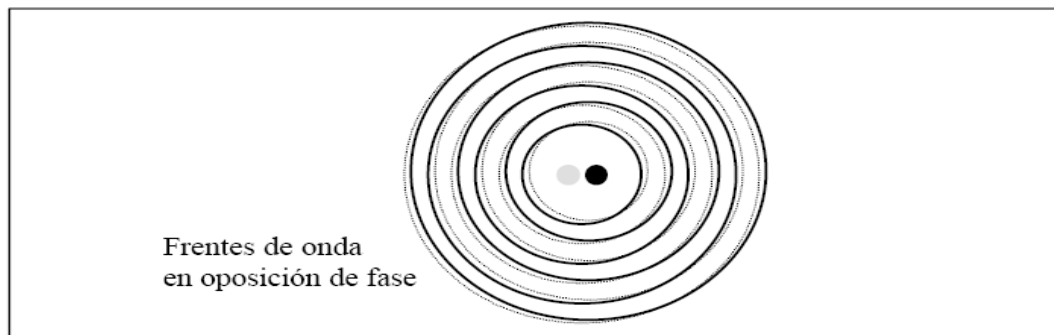


Figura 2. 8. Cancelación de frentes de onda de un dipolo en oposición de fase.

A continuación, en la figura 2.9., se presenta la gráfica que indica cual es la reducción de potencia acústica de un dipolo (monopolos en oposición de fase) en función de la separación entre ambas fuentes.

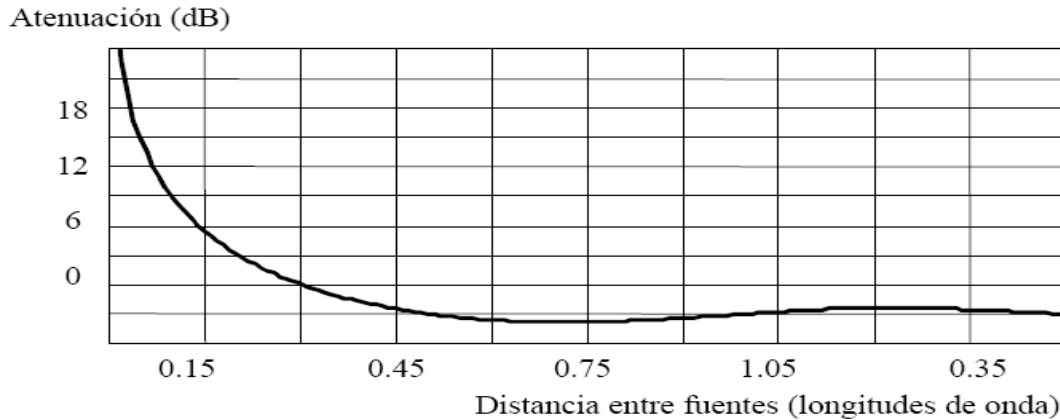


Figura 2. 9. Disminución de la potencia total de un dipolo en contrafase.

Es importante destacar que la disminución de la potencia acústica radiada sólo es realmente significativa para una separación de las fuentes inferior a una décima parte de la longitud de onda radiada. Para una frecuencia de 100 Hz la longitud de onda es 3.4 m., es decir, una separación de unos 34 cm. Obviamente, para una frecuencia de 5 kHz esta separación es de sólo 0.68 cm. Esto indica que realmente el margen de frecuencias de trabajo va a ser muy bajo, generalmente hasta los 500 Hz. En cualquier caso, este es el margen de frecuencias donde las técnicas pasivas de control pierden efectividad. Ambas técnicas han de complementarse en una implementación eficaz de control.

2.3.2 . Principio de Young.

La interferencia es un fenómeno característico de todo tipo de ondas que transportan alguna energía en un determinado medio de propagación y que se produce en regiones del medio donde se cruzan frentes de ondas diferentes. Este principio, particularizado para las ondas de presión acústica, establece que *una onda de presión acústica de una determinada frecuencia, que se propaga en un medio elástico, puede cancelarse en un determinado punto de dicho medio, mediante la superposición de otra onda de presión acústica de la misma frecuencia que se encuentre en oposición de fase en ese punto*. Este principio fue demostrado por Thomas Young en 1802 mediante frentes de ondas de luz generadas en dos orificios de una superficie.

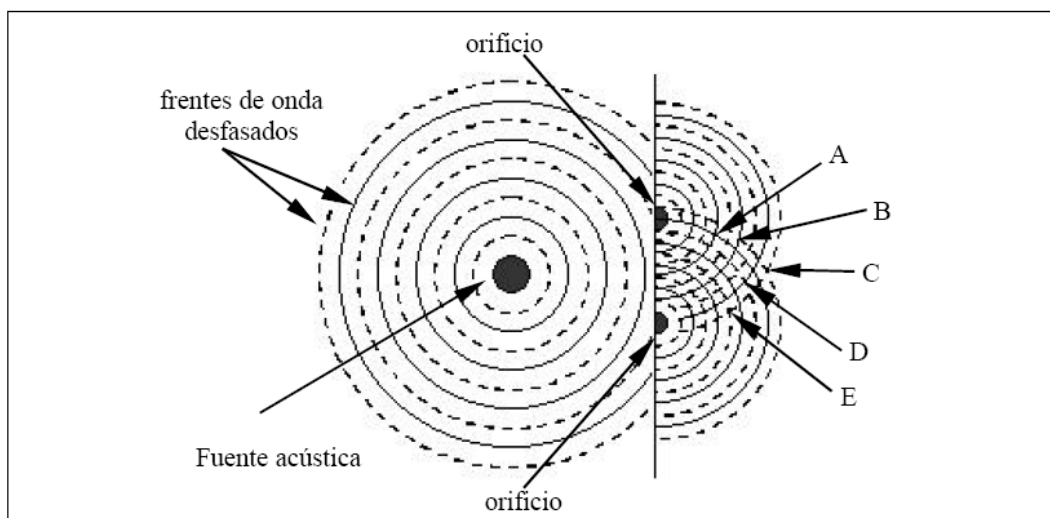


Figura 2. 10. Principio de Young. Interferencia de ondas generadas a través de dos orificios.

En la figura se muestran diferentes frentes de ondas. En los puntos A, C y E (intersección de línea continua con línea continua) las ondas procedentes de los dos orificios llegan en fase y se produce un aumento de intensidad (interferencia constructiva). En otros puntos, tales como B y D (intersección de línea continua con línea discontinua), las ondas están desfasadas 180 grados y se cancelan entre si (interferencia destructiva).

Los sistemas de control activo de ruido optimizan su funcionamiento para situar zonas de interferencia destructiva en los lugares deseados. Se generan ondas de presión acústica que cancelan a otras ondas de presión en aquellas zonas objeto de control acústico. La idea puede parecer simple pero su realización práctica no lo es en absoluto. La onda de presión acústica generada ha de ser una imagen exacta pero invertida, de la onda de presión acústica a cancelar. Si existen variaciones de amplitud, fase y, por supuesto, en frecuencia, la cancelación se pierde rápidamente. A continuación, en la figura 2.11, se presenta una gráfica que muestra la atenuación de la presión acústica que se obtiene en función de las diferencias de amplitud y fase de dos ondas de presión acústica de una determinada frecuencia. En el caso ideal la cancelación es total (4dB).

Se puede apreciar que para conseguir atenuaciones de presión acústica superiores a 20 dB es necesario que la variación de la fase entre las ondas sea inferior a 5 grados

$(180^\circ \pm 5^\circ)$ y que la variación en amplitud sea inferior al 5%. Si se desea cancelar una onda de presión acústica completamente, es necesario cancelar en todos y cada uno de los puntos del medio elástico por el que se propaga dicha onda. Lógicamente, esto es prácticamente imposible, ya que cada fuente acústica tiene su propio diagrama de radiación y es imposible realizar tal superposición en todos los puntos.

En situaciones reales no se fijan objetivos de cancelación tan exigentes. Generalmente, se pretenden conseguir pequeñas zonas de silencio o de atenuación, en aquellos lugares más críticos, donde una persona pueda percibir la sensación de 30dB atenuación acústica, es decir, en una zona de dimensión tal, que englobe la cabeza. Este objetivo puede cumplirse hoy en día.

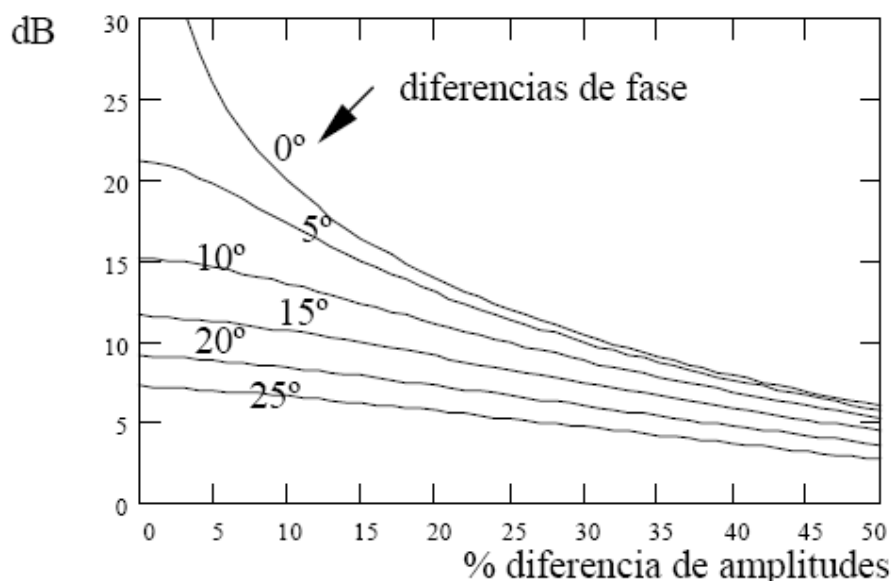


Figura 2. 11. Atenuación de la presión acústica en un punto por interferencia destructiva de ondas de presión acústica en oposición de fase. Variaciones de atenuación vs. diferencias de fase y de amplitud.

La dimensión máxima de esta zona virtual de cancelación, depende de la frecuencia máxima a cancelar o a atenuar. Resultados experimentales en un campo acústico difuso, de ondas de presión de una determinada frecuencia, demuestran que pueden conseguirse valores de atenuación superiores a 10 dB para una esfera espacial de diámetro la décima parte de la longitud de onda acústica. Por ejemplo, una frecuencia de 100 Hz tiene una longitud de onda de 3,4 metros y la zona de cancelación tendría unas dimensiones equivalentes a la de una esfera de diámetro unos 34 centímetros. Lógicamente, conforme se aumenta la frecuencia estas dimensiones se van haciendo más pequeñas y no resulta práctico para frecuencias superiores a 500 Hz. En cualquier caso, hay que recordar que la técnica de control activo de ruido sólo es necesaria para las bajas frecuencias, justamente para las cuales los elementos pasivos pierden efectividad.

Es posible alargar la zona de cancelación de la forma esférica de diámetro $\frac{\lambda}{10}$ a

una forma elipsoidal, de diámetro $\frac{\lambda}{10}$ y largo $\frac{\lambda}{2}$. Dicho aumento puede conseguirse cuando se aproximan dos zonas de cancelación (interferencia destructiva) como se aprecia en la figura 2.12. Este incremento resulta

importante para situaciones en las que la frecuencia del ruido empieza a ser de un valor alto, en torno a los 500 Hz, y la zona de cancelación esférica producida por una sola fuente empieza a resultar pequeña (7 centímetros).

Así mismo, según se analiza, cuando la zona de cancelación acústica se crea en las proximidades de un cuerpo rígido, se produce un aumento de la misma. Esta situación se presenta, cuando la zona de atenuación acústica se realiza en el entorno de la cabeza de una persona.

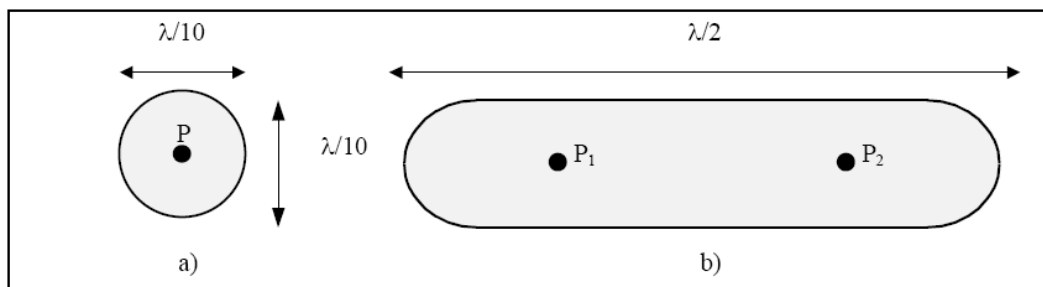


Figura 2. 12. Dimensiones de la zona de cancelación acústica. a) Interferencia destructiva, centrada en un punto P, creada por una fuente secundaria de cancelación. b) Interferencias destructivas, centradas en dos puntos P1 y P2, creadas por dos fuentes secundarias de cancelación.

2.3.3. Principio de Huygens.

Esta basado en el principio de Young y proporciona un procedimiento para llevar a cabo la cancelación acústica en una determinada región del espacio. Christian Huygens estableció una teoría sobre la propagación de los frentes de onda. Cada frente de onda, genera en cada uno de sus puntos, nuevos frentes de onda esféricos. La interferencia de estas ondas esféricas describe la propagación del frente de onda, es decir, es necesario calcular la suma de todas estas ondas en un determinado punto de observación.

El principio de Huygens establece que *el campo acústico en cualquier punto en el interior de una superficie cerrada, producido por una fuente exterior a la misma, puede ser reproducido de una forma exacta, mediante un conjunto de fuentes acústicas secundarias distribuidas alrededor de dicha superficie.*

Zona de silencio. La presión acústica en todos los puntos que engloba una superficie cerrada, puede anularse si se generan ondas acústicas en todos los puntos de la misma, de forma que sean réplicas invertidas en fase, de las ondas de presión que inciden inicialmente en dicha superficie.

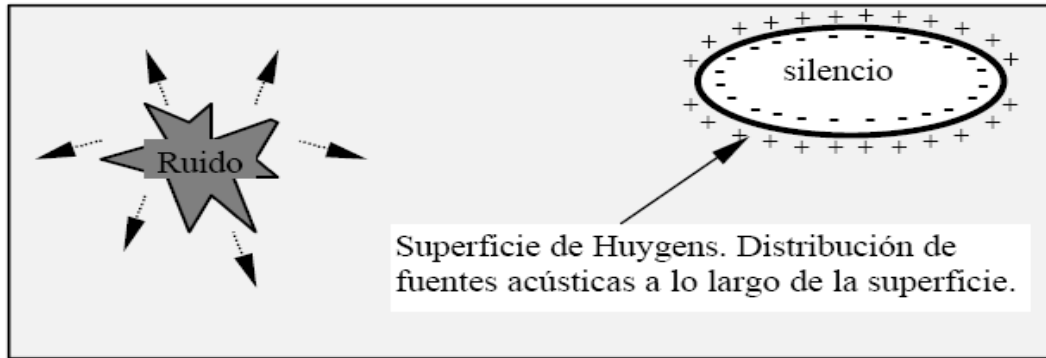


Figura 2. 13. Principio de Huygens. La superficie engloba a una zona de silencio. Las fuentes acústicas en la superficie generan un modelo invertido del campo acústico.

Control de fuentes acústicas. Un procedimiento para cancelar fuentes acústicas ruidosas, es encerrarlas dentro de una superficie de Huygens. Igual que antes, generando una réplica invertida del campo acústico en la superficie, es posible anular la presión acústica que genera dicha fuente, en este caso, en el exterior de la misma.

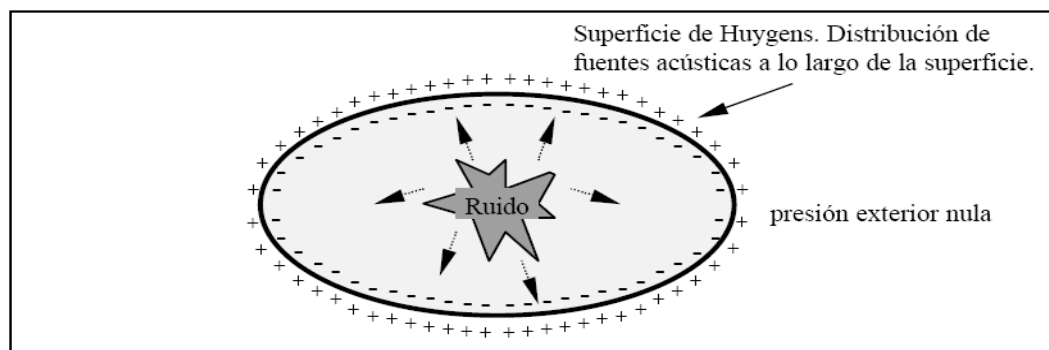


Figura 2. 14. Cancelación acústica de una fuente ruidosa mediante una superficie de Huygens.

El problema que presenta el principio de Huygens es que son necesarias infinitas fuentes acústicas dispuestas a lo largo de la superficie cerrada. Por lo tanto, no es posible realizar tal experimento en una implementación real. Sin embargo, puede hacerse una aproximación con un número finito de fuentes, separadas unas de otras una distancia en torno a la mitad de la longitud onda de la máxima frecuencia a cancelar. Se obtienen valores de atenuación acústica importantes, de hasta 20 dB, incluso con sólo 6 fuentes secundarias.

2.4. TIPOS DE RUIDO

Existen varios tipos de ruido acústico que son objeto de control activo. Las características del ruido dependen fundamentalmente de la fuente acústica que lo origina y, en menor medida, del camino acústico recorrido desde la propia fuente hasta el punto objeto de control. El margen de frecuencias de trabajo para

un sistema de control activo de ruido llega aproximadamente hasta los 500 Hz. Las dimensiones de cancelación acústica que se obtienen disminuyen con la frecuencia. Estas zonas, para atenuaciones de presión acústica superiores a 20 dB, pueden considerarse como esferas virtuales de diámetro la décima parte de la longitud de la onda acústica. Para un ruido de frecuencia 500 Hz esta zona de atenuación sería solamente de unos 7 cm. El ruido acústico a partir de estas frecuencias es mejor atenuarlos con métodos pasivos, ya que se obtienen mejores resultados. A continuación, se enumeran los distintos tipos de ruido acústico atendiendo a su distribución espectral.

Ruido tonal. Este ruido corresponde a una senoide pura y habitualmente sirve como señal de prueba en la experimentación de los sistemas de control activo de ruido. A veces, se utiliza conjuntamente con una señal enmascarante como el ruido blanco, ruido aleatorio de nivel espectral constante. También suele emplearse una senoide con una frecuencia variable cíclicamente en un determinado intervalo de interés, por ejemplo entre 100 y 200 Hz. Ruidos predominantemente sinusoidales son fáciles de atenuar con un sistema de control activo de ruido, alcanzándose atenuaciones mayores a 20 dB.

Ruido periódico. Este tipo de ruido acústico es el que se encuentra habitualmente en situaciones reales. Las fuentes de ruido son generalmente sistemas que tienen algún tipo de funcionamiento cíclico. Ejemplos típicos suelen ser: ruido producido por *sistemas de movimiento de aire* en el interior de conductos [Eriksson 88] (sistemas de aire acondicionado, sistemas extractores, etc.), *ruidos de motor* en el interior de los vehículos de transporte [Elliott 88], *ruido de movimiento de hélices* en aviones, *ruido de transformadores de alta potencia*, etc. Son ruidos constituidos por una frecuencia fundamental acompañada de los correspondientes armónicos, enmascarados con ruido aleatorio de banda ancha. Algunos ruidos suelen mantener constante el período de trabajo, como por ejemplo, los ruidos de los sistemas de movimiento de aire y el ruido de red en los transformadores de alta potencia. Otros ruidos por el contrario tienen una frecuencia de trabajo variable, como por ejemplo el ruido del motor de un coche sometido a diferentes aceleraciones y cambios de marcha. Los sistemas de control activo tienen un funcionamiento óptimo para la frecuencia de mayor nivel espectral, generalmente la frecuencia fundamental. La cancelación de los armónicos es menor conforme se incrementa la frecuencia de estos. La frecuencia fundamental en estos ruidos suele estar entre los 100 y 200 Hz. Aunque la reducción de los armónicos no sea tan acusada, esto no significa problema alguno. A mayor frecuencia, son los sistemas pasivos los que han de producir la atenuación acústica del ruido.

Ruido de banda ancha. Este tipo de ruido presenta un nivel espectral constante con respecto a la frecuencia. Puede ser de carácter aleatorio como el producido por el *viento al chocar contra la estructura de un automóvil*, el ruido de *rodadura de un vehículo* o el producido en el *interior de un conducto con al fluir el aire entre sinuosos recodos*. Cuando el ruido presenta estas características se asemeja al ruido blanco gaussiano o uniforme, y puede analizarse según estos modelos. En

ambos casos, son ruidos de difícil control y los sistemas de control activo de ruido ofrecen unas escasas prestaciones de atenuación, debido sin duda, a la imposibilidad de obtener una correcta predicción de los mismos y al no disponer de buenas referencias de ellos. Otro tipo de ruido de banda ancha, es el que corresponde al ruido impulsivo. La mayor o menor atenuación del mismo, depende fundamentalmente de la existencia de una referencia que esté altamente correlacionada con el ruido a cancelar.

2.5. ENTORNOS ACÚSTICOS DE CANCELACIÓN.

El ruido acústico puede ser cancelado teóricamente en cualquier punto del medio de transmisión donde se propagan las ondas de presión. Las dimensiones de cancelación acústica dependen del entorno acústico donde se produce dicha cancelación. A continuación, se describen los distintos entornos acústicos de cancelación del ruido y las dimensiones de la atenuación acústica para cada entorno.

Cancelación acústica próxima a la fuente de ruido. Esta situación suele ser la más efectiva para la cancelación del ruido. Suele utilizarse este escenario de control, cuando la fuente ruidosa esta localizable y accesible, dadas las condiciones medio- ambientales de trabajo de la propia fuente generadora del ruido. Cuando se coloca una nueva fuente de ruido para cancelar a la original se reducen los niveles de presión acústica en todo el espacio tridimensional. Esta atenuación acústica, es tanto mayor cuantas más fuentes canceladoras, fuentes secundarias, se sitúen en las proximidades de la fuente de ruido, y cuanto mas cerca estén de la misma En la figura 2.15. se puede observar este hecho. Las distintas gráficas, dado un número de fuentes secundarias, muestran los niveles atenuación acústica alcanzados en función de la proximidad de las fuentes secundarias con respecto a la fuente de ruido. Las fuentes secundarias están equiespaciadas con respecto a la fuente puntual de ruido.

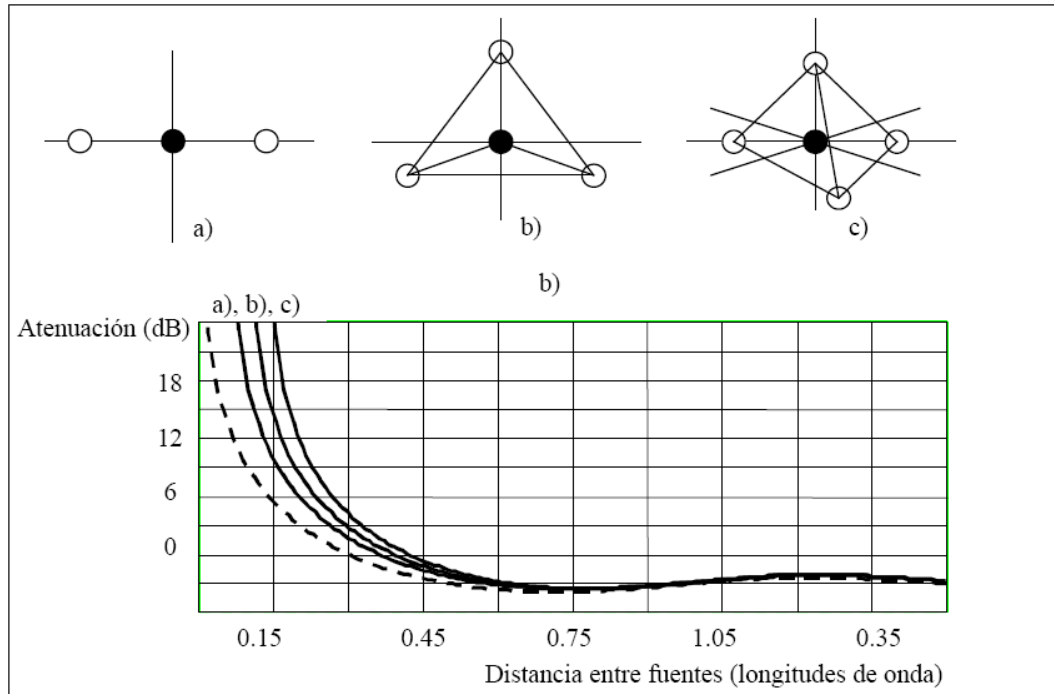


Figura 2. 15. Reducción de la potencia acústica radiada por una fuente puntual en presencia de un array de fuentes secundarias. La fuente primaria está representada por un punto sólido. En línea discontinua esta representada la atenuación producida por una única fuente secundaria.

La reducción empieza a producirse para una separación inferior a media longitud de onda. La pendiente de la curva es directamente proporcional al número de fuentes secundarias, obteniéndose valores importantes de cancelación a partir 3 fuentes situadas a una distancia inferior a la décima parte de la longitud de onda acústica. La atenuación acústica es debida al aumento de la impedancia acústica de radiación que experimenta la fuente inicial de ruido en presencia del array de fuentes secundarias canceladoras.

Cancelación acústica en el interior de un conducto. Una gran parte de los trabajos realizados en control activo se han centrado en la cancelación acústica de ondas planas en el interior de un conducto. Los fundamentos de la cancelación acústica activa se remontan a Paul Lueg, quien analizó la superposición de frentes de ondas planas en un tubo con objeto de conseguir una interferencia destructiva del ruido, en todo el camino de propagación.

La idea que propuso Paul Lueg se muestra en la figura 2.16. Un dispositivo de control, a partir de la señal recogida por un micrófono en el interior de un conducto, genera una nueva señal ajustada en amplitud y fase, tal que convertida en ondas depresión acústica por un dispositivo electro-acústico (altavoz) produce por interferencia destructiva una cancelación acústica en el interior del tubo, a partir del punto donde se encuentra el altavoz y en el sentido de propagación de las ondas.

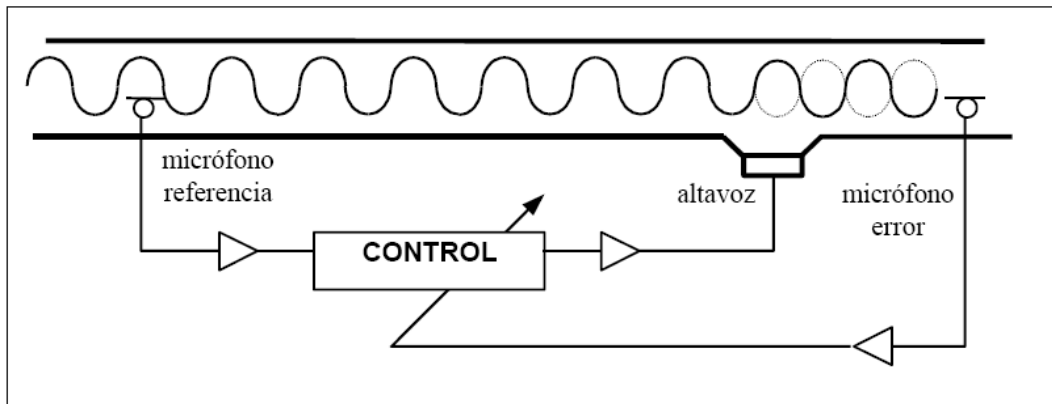


Figura 2. 16. Configuración de un sistema de control activo de ruido en un conducto.

El sistema de control modifica dinámicamente su funcionamiento para conseguir en todo momento la cancelación acústica. Un micrófono (micrófono de error), situado a continuación del altavoz, entrega una señal eléctrica al controlador, para que este autoajuste el control y obtenga la mínima señal eléctrica del micrófono.

La cancelación acústica a partir del punto donde se encuentra el altavoz, puede asemejarse a una inserción en el interior del tubo en ese mismo punto, de una superficie reflectante de alta impedancia acústica, que refleje las ondas de presión hacia la parte anterior del conducto, e impida la propagación de las ondas acústicas en el sentido contrario. Este hecho se muestra en la figura 2.17. Cuando se realiza una cancelación acústica en el interior de un tubo se produce una reflexión de ondas acústicas en el del mismo, que provoca un aumento de presión acústica en la parte anterior al punto del tubo, a partir del cual se produce la atenuación acústica.

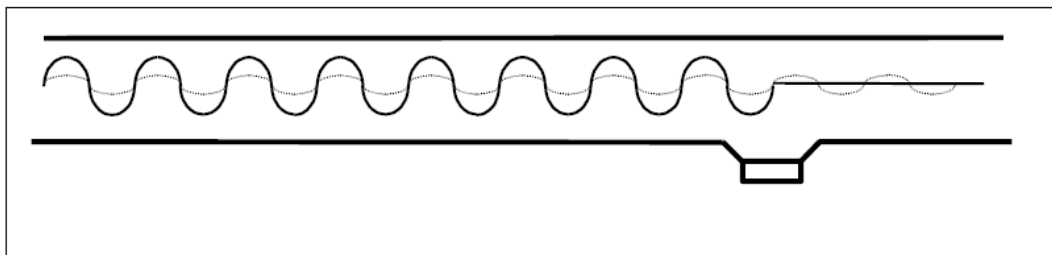


Figura 2. 17. Perfil de niveles de presión acústica en el interior de un tubo con cancelación activa de un ruido sinusoidal. En línea discontinua se muestra la onda de presión acústica antes de producirse la cancelación activa.

Cancelación acústica en recintos cerrados. El campo acústico que se produce en el interior de un recinto cerrado, está determinado por los modos propios del mismo. Las superficies que delimitan dicho recinto reflejan las ondas de presión acústica, produciéndose a ciertas frecuencias ondas estacionarias

tridimensionales. Las frecuencias de los modos propios de un recinto rectangular de dimensiones L_x , L_y , y L_z , viene dado por la expresión:

$$f_{\pi x, \pi y, \pi z} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{n_x \pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{L_z}\right)^2} \quad (2.41)$$

donde $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$, y “ c ” es la velocidad del sonido en el aire.

Una forma de evaluar el campo de energía acústica en el interior del recinto, es sumando los valores de los cuadrados de presión de cada uno de los modos característicos del mismo. El valor obtenido corresponde a la energía acústica potencial del recinto, y es directamente proporcional a las características acústicas de los materiales que forman las superficies.

Un sistema de control activo intentará minimizar este parámetro mediante la emisión de nuevas ondas de presión acústica a través de fuentes acústicas secundarias (altavoces). Los resultados de la atenuación que pueden obtenerse, dependen fundamentalmente del número de modos propios que existen, en el margen de frecuencias a controlar. Si en este margen, sólo existe un modo propio dominante, a bajas frecuencias, se utiliza una única fuente secundaria, para controlar este modo propio, pudiéndose alcanzar atenuaciones cercanas a los 20 dB. Si el margen de frecuencias contienen varios modos propios, frecuencias altas, es necesario utilizar varias fuentes secundarias. Cada fuente secundaria, controla un determinado modo propio. Sin embargo, los resultados que se pueden obtener son bastante pobres, ya que es imposible cancelar un modo propio sin realzar los modos próximos. La única manera de disminuir la energía potencial acústica es incrementando el coeficiente de absorción del recinto mediante fuentes secundarias activas, situadas en las superficies del recinto, de manera que sean capaces de absorber energía acústica. los micrófonos que miden la energía potencial acústica han de situarse en puntos del recinto sometidos a los modos propios del mismo. Por otra parte, las fuentes secundarias estarán ubicadas en puntos capaces de excitar los modos propios del recinto. Estudios analíticos y resultados experimentales demuestran que para tener una estimación correcta de la energía acústica potencial, es necesario tener al menos el doble de micrófonos que de altavoces.

Capítulo 3

SISTEMAS DE CONTROL ACTIVO DE RUIDO Y SUS CARACTERISTICAS

Una vez tratado el control activo de ruido de manera general se hablara de dos tipos de sistemas, control en laso abierto o en laso cerrado (feedforward control o feedback control). Se efectuará un análisis de ambos tipos de control, posteriormente se generalizará el análisis a sistemas multicanal. Dentro de éste capitulo se hará mención de los algoritmos adaptables utilizados en los sistemas de control, los cuales se basan en el algoritmo adaptable conocido como LMS por sus siglas en Ingles (Least-Mean-Square), se desarrollarán los algoritmos FXLMS y FULMS que son algoritmos de entrada filtrada.

3.1 ASPECTOS GENERALES

FILTRADO

EL termino “filtro” es comúnmente usado para referirse a cualquier dispositivo o sistema que toma una mezcla de partículas/elementos de su entrada, a los cuales procesa de acuerdo a reglas establecidas con el fin de generar un conjunto de elementos/partículas a la salida del mismo. Para el contexto de procesamiento de señales y sistemas, los elementos y partículas hacen referencia a componentes de frecuencia de las señales analizadas, y por lo general, los filtros son empleados para retener todos los componentes de frecuencia pertenecientes a una banda de frecuencias y eliminando el resto lo mejor posible.

La respuesta en frecuencia de un filtro depende de los valores que toman sus coeficientes. Estos valores comúnmente resultan ser valores de tipo flotante y son representados comúnmente con una precisión bastante aceptable. Pero cuando un filtro digital es implementado mediante hardware se intenta representar dichos coeficientes con el menor número de bits posible teniendo en cuenta desde luego la precisión. Dentro de los filtros digitales se puede hacer mención de dos clases de filtros, los filtros FIR (por su nombre en inglés Finite Impulse Response) e IIR (por su nombre en Inglés Infinite Impulse Response).

FILTROS FIR

Un filtro digital de respuesta finita al impulso (FIR) es aquel que presenta como su nombre lo indica una respuesta al impulso finita. La estructura de un filtro FIR se muestra en la figura 3.1

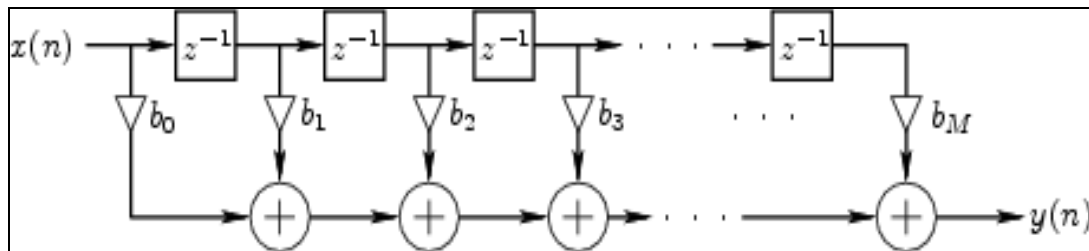


Figura 3.1 Estructura de un filtro FIR

De la figura podemos obtener la ecuación en diferencias siguiente

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M) \quad (3.1)$$

donde M es el orden del filtro, $x(n)$ la señal de entrada, $y(n)$ la señal de salida y b_i son los coeficientes del filtro. Otra forma de expresar la ecuación pasada es de la siguiente manera

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) \quad (3.2)$$

Para encontrar la repuesta al impulso asignamos como entrada $x(n) = \delta(n)$ (a $\delta(n)$ se le conoce como delta de Kronecker¹). La respuesta al impulso para un filtro FIR es como sigue

$$h(n) = \sum_{i=0}^M b_i \delta(n-i) \quad (3.3)$$

luego obtenemos la transformada Z de la función de transferencia del filtro

$$H(z) = Z \{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} \quad (3.4)$$

como sabemos $Z \{\delta(n)\} = 1$, tenemos

$$H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \quad (3.5)$$

De la función de transferencia podemos ver que el sistema es BIBO² estable, esto lo podemos comprobar aplicando el criterio BIBO de estabilidad. Ese establece que todos los polos de la función de transferencia deben tener un valor absoluto menor a uno. Esto se traduce a que los polos deben de estar ubicados dentro del círculo unitario en el plano Z . Para encontrar los polos de la función de transferencia realizamos la siguiente operación

$$H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \left(\frac{z^p}{z^p} \right) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{p-i}}{z^p} \quad (3.6)$$

como podemos observar el filtro FIR contiene todos sus polos en el origen, esto quiere decir que están contenidos dentro del círculo unitario en el plano Z . Por lo tanto los filtros FIR son estables.

¹ Delta de Kronecker: Nombrada después de Leopold Kronecker, es una función de dos variables en la que tiene el valor de uno si ambas son iguales y cero si son diferentes.

² Estabilidad BIBO: En sistemas y señales es un tipo de estabilidad la cual se refiere a *Bounded Input/Bounded Output*. Si un sistema BIBO es estable, entonces la salida estará limitada por cada entrada del sistema que este limitada.

Entre las propiedades de los filtros FIR podemos enunciar las siguientes:

- a) Son estables, esto se comprobó anteriormente
- b) No requieren de retroalimentación, esto se debe que el mismo error ocurre en cada calculo
- c) Pueden tener fase lineal³
- d) Pueden tener fase mínima⁴

FILTROS IIR

A diferencia de los filtros de tipo FIR un filtro con respuesta IIR presenta una respuesta infinita a un impulso dado, de ahí su nombre. Por lo general un filtro IIR esta representado por una ecuación en diferencias en donde la señal de salida en un instante dado esta regida por una combinación lineal de muestras de las señales de entrada y salida en instantes de tiempo previos. En la figura 3.2 podemos observar el diagrama a bloques de un filtro IIR.

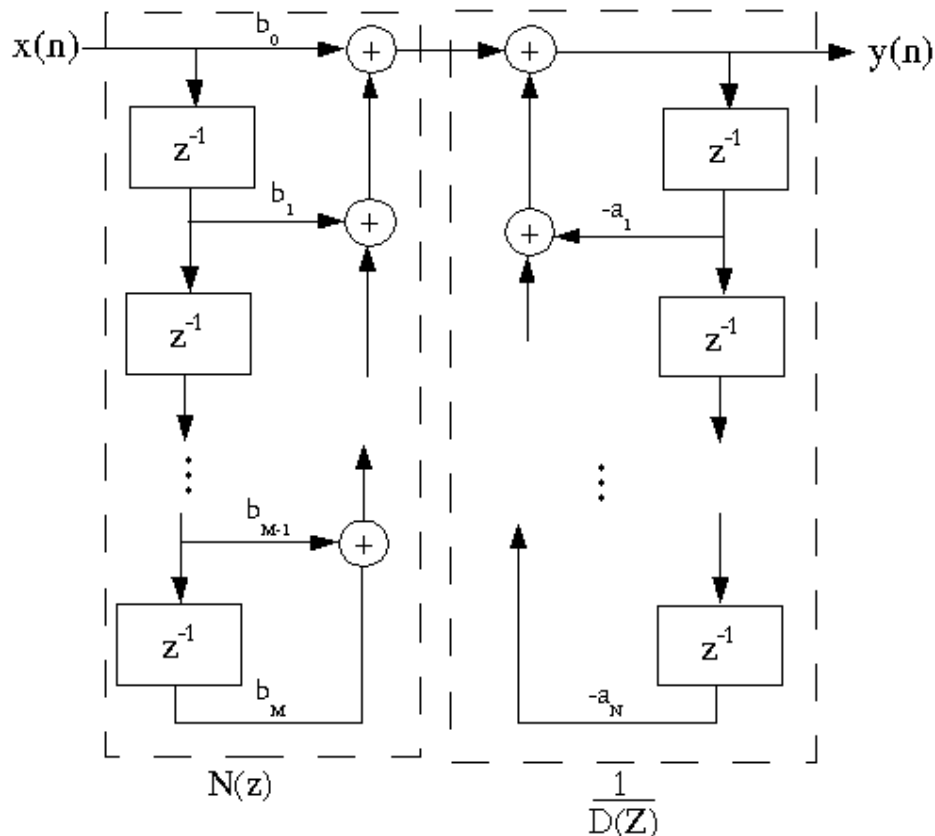


Figura 3.2 Estructura de un filtro IIR

³ Fase Lineal: Es una propiedad de los filtros en donde la respuesta de fase (relación entre la fase de una entrada sinusoidal y una señal de salida que pase por algún dispositivo), es una función lineal o frecuencia.

⁴ Fase Mínima: Un sistema lineal e invariante en el tiempo es de fase mínima si el sistema y su inverso son causales y estables.

A continuación se presenta la ecuación en diferencias que rige a un filtro IIR

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M) + a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_N y(n-N) \quad (3.7)$$

en donde M es el orden posterior del filtro y b_i son los coeficientes posteriores del filtro. N es el orden de retroalimentación del filtro y a_i son los coeficientes de retroalimentación del filtro. $x(n)$ es la señal de entrada al filtro y $y(n)$ la señal de salida.

Una forma más condensada de la ecuación (3.7) es la siguiente

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i(n) x(n-i) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k(n) y(n-k) \quad (3.8)$$

Para encontrar la respuesta al impulso sustituimos $x(n) = \delta(n)$, quedando

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i(n) \delta(n-i) + \sum_{k=1}^{M-1} a_k(n) h(n-k) \quad (3.9)$$

Obteniendo la transformada Z de la respuesta al impulso

$$H(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} H(z) \quad (3.10)$$

Si ordenamos la ecuación (3.10), queda de la siguiente manera

$$H(z) - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} H(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \quad (3.11)$$

De la función de transferencia encontrada podemos determinar si el sistema es estable

(BIBO). Para tal motivo realizamos el siguiente arreglo $\frac{z^O}{z^O}$, donde $O = \max(M, N)$. Por lo que la ecuación (3.11) queda de la siguiente forma

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{O-i}}{z^O - \sum_{k=1}^M a_k z^{O-k}} \quad (3.12)$$

Los polos de la función de transferencia del filtro IIR son los ceros en el denominador de la función de transferencia, a los cuales evaluamos así

$$0 = z^O - \sum_{k=1}^M a_k z^{O-k}$$

Claramente podemos observar que si $a_k \neq 0$, los polos no estarán encontrados en el origen del plano Z

3.2 FILTROS ADAPTABLES:

Los filtros adaptables tienen la propiedad de variar los coeficientes del filtro de acuerdo con las variaciones estadísticas del ambiente en el cual operan. Los filtros adaptables tienen aplicación en problemas, tales como ecualización del canal de comunicaciones, cancelación de ruido, identificación de sistemas, entre otros. Este tipo de filtros requieren de consideraciones estadísticas. La adaptación de los coeficientes se realiza de tal manera que el error se minimice, considerando como error a la diferencia entre la señal deseada y la señal obtenida a la salida del filtro.

El filtro adaptable se basa en algoritmos recursivos que comienzan a partir de ciertas condiciones iniciales y convergen a una solución óptima. Entre las propiedades que se deben tomar en cuenta al diseñar algoritmos adaptables son las siguientes:

- Velocidad de convergencia a la solución
- Desajuste entre el valor final del error y el valor mínimo
- Detección de variaciones estadísticas
- Requerimientos computacionales.

Conceptualmente el esquema de un sistema adaptable es muy simple y se puede representar a través de la siguiente figura 3.2:

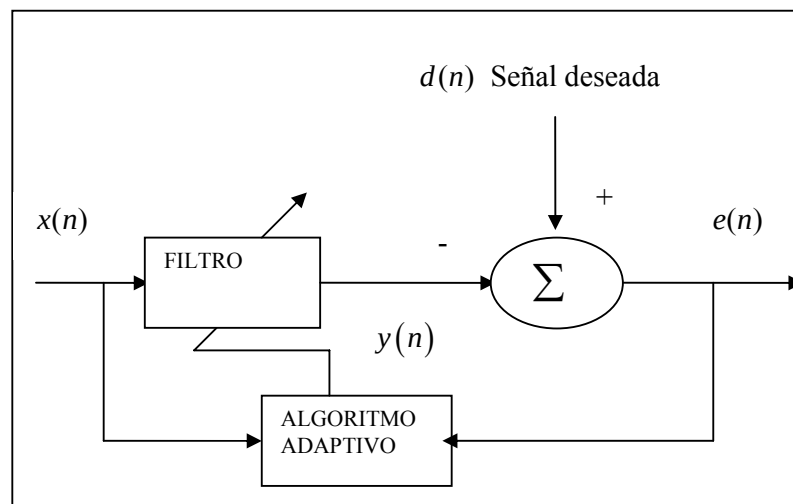


Figura 3.3 Diagrama de bloques de un filtro adaptable

La señal deseada en la práctica es la mas difícil de obtener. El reto de aplicar las técnicas adaptables es imaginarnos donde obtener la señal deseada d.

3.3 ALGORITMOS ADAPTABLES:

La función del algoritmo adaptable es de ajustar los coeficientes del filtro digital para minimizar el valor medio cuadrático de $e(n)$. Por lo que los coeficientes del filtro tienen que ser actualizados constante mente con el fin de que el error sea progresivamente minimizado, de ahí el adjetivo “adaptable”.

Las técnicas de filtrado adaptable han llamado la atención de varios investigadores a lo largo de los últimos años. Como resultado de esto varias estructuras de filtros y algoritmos adaptables han sido desarrolladas. Se puede ver en la figura 3.3 el filtro adaptable actualiza sus coeficientes para optimizar algún criterio de desempeño predeterminado con anterioridad. La gran mayoría de los algoritmos adaptables hacen uso del algoritmo de máxima pendiente (stepes descent algorithm) según la dirección opuesta del gradiente de la superficie de error para encontrar los coeficientes óptimos que hagan que el error sea mínimo entre la señal de salida y la señal de entrada. El desarrollo matemático del método se puede simplificar si se ve desde el punto de vista geométrico haciendo uso de la superficie que describe el error medio cuadrático (MSE).

3.3.1 RENDIMIENTO DE LA SUPERFICIE MSE

Como se menciona anteriormente un filtro adaptable actualiza los coeficientes del filtro digital para optimizar el desempeño de un criterio determinado. Uno de los criterios mas dominantes es el de Error Medio Cuadrático (siglas en Ingles MSE).

$$\xi(n) = E[e^2(n)] \quad (3.13)$$

La ecuación (3.13) representa al MSE, en donde, $E[\bullet]$ denota el valor esperado.

Para un filtro adaptable de tipo FIR(al cual nos estaremos enfocando), $\xi(n)$ dependerá de los L' esimos “pesos” del filtro, es decir $w_0(n), w_1(n), \dots, w_{L-1}(n)$. Si asumimos por un instante que el vector de pesos adaptable $\mathbf{w}(n)$ es una secuencia determinística, entonces el comportamiento de la función MSE puede ser determinada mediante

$$\xi(n) = E[d^2(n)] - 2\mathbf{p}^T \mathbf{w}(n) + \mathbf{w}^T(n) \mathbf{R} \mathbf{w}(n) \quad (3.14)$$

en donde $\mathbf{p}$ es el vector de correlación-cruzada (cross-correlation⁵ vector, en ingles), deseado en la entrada y $\mathbf{R}$ es la matriz de auto-correlación (auto-correlation matriz, en ingles). A los anteriores los podemos definir como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &\equiv E[d(n)x(n)] \\ &= [r_{dx} \quad r_{dx}(1) \quad \cdots \quad r_{dx}(L-1)]^T\end{aligned}\quad (3.15)$$

siendo

$$r_{dx}(k) \equiv E[d(n)x(n-k)] \quad (3.16)$$

la función de correlación-cruzada entre $d(n)$ y $x(n)$, así como,

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &\equiv E[x(n)\mathbf{x}^T(n)] \\ &= \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(L-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(L-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(L-1) & r_{xx}(L-2) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.17)$$

siendo

$$r_{xx}(k) \equiv E[x(n)x(n-k)] \quad (3.18)$$

la función de auto correlación de $x(n)$.

La función (3.14) es la expresión general para el funcionamiento de un filtro causal FIR adaptable con pesos proporcionados, es decir, el MSE es una función de los coeficientes $w(n)$ del filtro. Es importante notar que el MSE es una función cuadrática ya que los pesos aparecen únicamente en los primeros y segundos grados de la ecuación (3.14). Para cada valor del vector de coeficientes $\mathbf{w}(n)$, existe un valor escalar correspondiente del MSE. Es por este motivo que los valores asociados con $\mathbf{w}(n)$ forman un espacio de $(L+1)$ dimensiones, al cual llamamos *superficie MSE* o *superficie de ejecución*. Para $L=2$ tenemos una superficie tridimensional, la cual esta ilustrada en la figura 3.4, donde $\mathbf{w}^o = [w_0^o \quad w_1^o]^T$, es el vector optimo de coeficientes y $\xi_{\min}$ es el error cuadrático medio mínimo.

La matriz de auto correlación juega un rol muy importante en el diseño y análisis de filtros adaptables. Presenta las siguientes propiedades:

⁵ Cross-Correlation es un termino que se usa para referirnos a la covarianza entre dos vectores. Para procesamiento de señales esta palabra es usada para cuantificar la similitud entre dos señales

- a) La matriz de auto correlación de un proceso estocástico (proceso aleatorio) y estacionario es simétrica es decir $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$ (asumiendo que la señal es de valores reales).
- b) La matriz $\mathbf{R}$ de un proceso estacionario y estocástico cumple con la propiedad de Toeplitz⁶ ya que todos sus elementos de cualquier diagonal paralela a la diagonal principal son iguales.
- c) Todos los egivalores de la matriz $\mathbf{R}$ deben de ser reales ya que todos los elementos de $\mathbf{R}$ son reales y simétricos.
- d) $\mathbf{R}$ es positiva.

El filtro optimo $\mathbf{w}^o$ minimiza la función de costo del MSE ξ , mediante la diferenciación de (3.14), la cual da a $\mathbf{w}^o$ como solución a

$$\mathbf{R}\mathbf{w}^o = \mathbf{p} \quad (3.19)$$

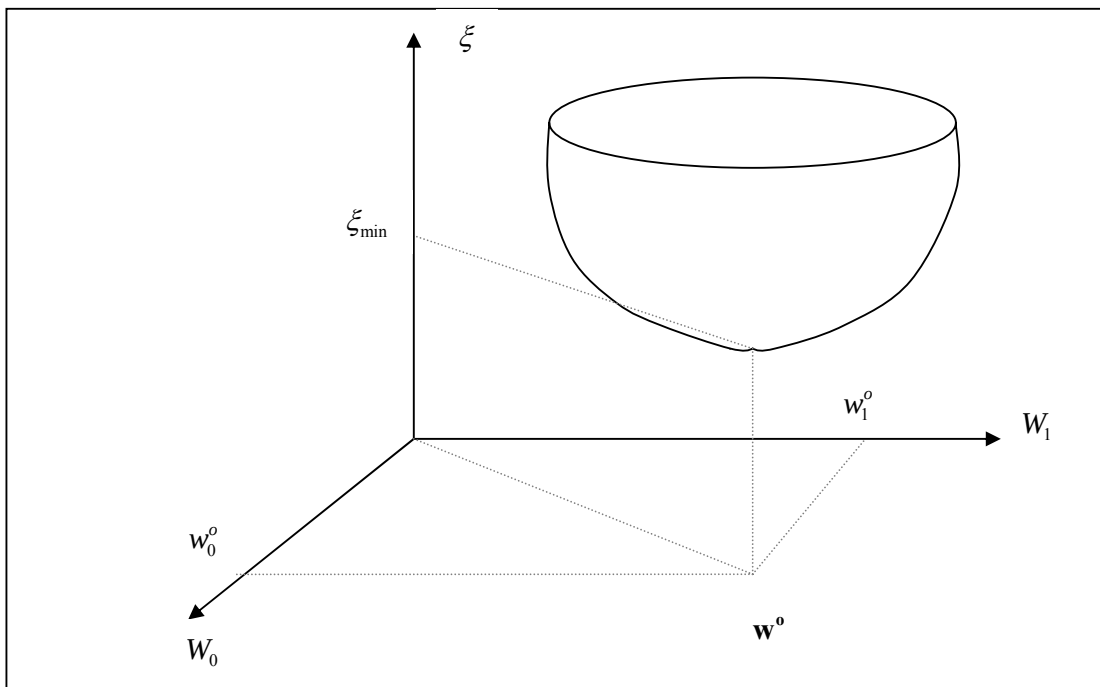


Figura 3.4 Superficie de ejecución de tres dimensiones para $L=2$

La ecuación (3.19) da solución al problema del filtrado adaptable. Esta solución algebraica requiere de una estimación continua de la matriz de auto correlación y del vector de correlación cruzada.

Para obtener el MSE mínimo usamos el vector de peso óptimo $\mathbf{w}^o$ de la ecuación (3.19) para $\mathbf{w}(n)$ en la ecuación (3.14), dando

⁶ Matriz de Toeplitz: Hace referencia a una matriz en la cual todas sus diagonales que descienden de izquierda a derecha son constantes.

$$\xi_{\min} = E[d^2(n)] - \mathbf{p}^T \mathbf{w}^0 \quad (3.20)$$

al combinar esta ecuación con (3.14) y (3.19), puede expresarse el MSE como

$$\begin{aligned} \xi(n) &= \xi_{\min} + [\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^0]^T \mathbf{R} [\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^0] \\ &= \xi_{\min} + \mathbf{v}^T(n) \mathbf{R} \mathbf{v}(n) \end{aligned} \quad (3.21)$$

siendo

$$\mathbf{v}(n) \equiv \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^0 \quad (3.22)$$

el vector de peso mis alineado, que viene siendo la diferencia entre los coeficientes del filtro adaptable y la solución óptima.

3.3.2 MÉTODO DE PENDIENTE DESCENDENTE

Como se mostró anteriormente el MSE es una función cuadrática en la que sus pesos se pueden apreciar como una superficie hiperbólica de concavidad positiva. El ajustar los pesos para minimizar el error involucra descender por la superficie hasta “llegar al fondo”. Existen varios algoritmos basados en el gradiente descendente, tales como el de Newton y el de pendiente descendente. El de Newton (no se desarrollara) presenta una convergencia más rápida. Este método presenta la desventaja de que requiere de un estimado $\mathbf{R}^{-1}$, lo que requiere un gran procesamiento computacional. Por otra parte el método de pendiente descendente llega a lo mínimo ir en la dirección en la que la superficie presenta la mayor variación descendente, es decir, es un algoritmo que sigue al gradiente negativo de la superficie. Esta técnica es ideal para derivar un algoritmo adaptable ya que la superficie de error esta garantizada a ser cuadrática con respecto a los pesos del filtro.

Si proponemos a $\xi(0)$ para representar el valor de MSE en el tiempo $n=0$, teniendo un valor de vector peso $\mathbf{w}(0)$. La idea es de moverse a través de la superficie de error en la dirección de la tangente en ese punto. Los pesos del filtro son actualizados en cada iteración, en dirección del gradiente negativo. Con la suposición anterior tenemos $[\mathbf{w}(0) \ \xi(0)]$, los cuales recordamos que fueron elegidos arbitrariamente. Una orientación específica de la superficie es descrita entonces mediante las derivaciones direccionales de la superficie en ese instante, eso con el fin de cuantificar el ritmo de cambio de la superficie MSE con respecto a las coordenadas de $\mathbf{w}(n)$ en ese momento. Esto es en el punto de la superficie $[\mathbf{w}(0) \ \xi(0)]$, en el cual hay una pendiente instantánea a la superficie. Estas pendientes instantáneas de la superficie tienen valores definidos por las derivadas direccionales $\frac{\delta \xi(n)}{\delta \mathbf{w}_i}$. El gradiente de la superficie de

error $\nabla \xi(n)$ es definido como el vector de estas derivadas direccionales. El

concepto de pendientes descendientes puede ser implementado en el siguiente algoritmo

$$w(n+1) = w(n) - \frac{\mu}{2} \nabla \xi(n) \quad (3.23)$$

en donde μ es un factor de convergencia que controla estabilidad y el ritmo en que se desciende al fondo de la superficie(se considera un factor de 2 para simplificar la forma final del algoritmo). El vector $\nabla \xi(n)$ denota el gradiente de la función de error con respecto a $w(n)$ y el signo negativo incrementa el vector de peso adaptable en la dirección negativa del gradiente. Para ilustrar esto recurrimos a nuestro diagrama del filtro FIR en la figura 3.1. Suponiendo que definimos al vector de entrada en el tiempo n como

$$\mathbf{x}(n) \equiv [x(n) \quad x(n-1) \quad \cdots \quad x(n-L+1)]^T \quad (3.24)$$

y el vector de pesos en el tiempo n como

$$\mathbf{w}(n) \equiv [w_0(n) \quad w_1(n) \quad \cdots \quad w_{L-1}(n)]^T \quad (3.25)$$

entonces nuestra señal de salida $y(n)$ de la ecuación (3.2) puede ser expresada mediante la operación vectorial siguiente

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \\ &= \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}(n) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Generalmente la salida $y(n)$ es comparada con la respuesta deseada $d(n)$, en lo que resulta en la señal de diferencia (señal de error)

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - y(n) \\ &= d(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \end{aligned} \quad (3.27)$$

después de este paréntesis y obteniendo la ecuación de error, calculamos el gradiente de error a partir de ella (3.27)

$$\nabla \xi(n) = -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R}\mathbf{w}(n) \quad (3.28)$$

Sustituyendo en (3.23) nos da la forma final del algoritmo de pendiente descendiente

$$w(n+1) = w(n) + \mu [\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{w}(n)] \quad (3.29)$$

Cuando $\mathbf{w}(n)$ haya convergido a $\mathbf{w}^0$, es cuando ha llegado al punto mínimo de la superficie, es decir, el gradiente $\nabla \xi(n) = 0$.

3.3.3 ALGORITMO LMS

Como hemos visto antes, la ecuación de un filtro transversal o FIR es la (3.2) y el error es el de la ecuación (3.27). También sabemos que los coeficientes de peso $w(n)$ están siendo adaptados constantemente de tal forma que cualquier variación en la estadística de la señal sea rastreada. Cuando el proceso de $x(n)$ y $d(n)$ son juntamente estacionarios, este algoritmo converge a un filtro de tipo Wiener. El algoritmo LMS

convencional es una implementación estocástica del algoritmo de pendiente descendente, es decir, se remplace la función $\xi(n) = E[e^2(n)]$ con su contraparte instantánea $\hat{\xi} = e^2(n)$ y se remplace el índice de iteración de k a n , obteniendo

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \nabla e^2(n) \quad (3.30)$$

en donde $\mathbf{w}(n) = [w_0(n) \ w_1(n) \ \dots \ w_{L-1}(n)]^T$, μ es el factor de convergencia como vimos anteriormente, ∇ es el operador gradiente definido como un vector columna

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta w_0} & \frac{\delta}{\delta w_1} & \dots & \frac{\delta}{\delta w_{L-1}} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Notamos que el i_{esimo} elemento del vector gradiente $\nabla e^2(n)$ es

$$\frac{\delta e^2(n)}{\delta w_i} = 2e(n) \frac{\delta e(n)}{\delta w_i} \quad (3.32)$$

Sustituyendo (3.27) en el ultimo factor en la parte de (3.32) y tomando en cuenta que $d(n)$ es independiente de w_i se obtiene

$$\frac{\delta e^2(n)}{\delta w_i} = -2e(n) \frac{\delta y(n)}{\delta w_i} \quad (3.33)$$

Sustituyendo por $y(n)$ de (3.2) tenemos

$$\frac{\delta e^2(n)}{\delta w_i} = -2e(n)x(n-i) \quad (3.34)$$

Usando (3.31) y (3.34), obtenemos

$$\nabla e^2(n) = -2e(n)\mathbf{x}(n) \quad (3.35)$$

Donde $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-L+1)]^T$. Sustituyendo este resultado en (3.30) obtenemos

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{x}(n) \quad (3.36)$$

Esta ecuación es a la que nos referimos como reexcursión LMS

3.3.4 COMPORTAMIENTO DEL MSE EN EL ALGORITMO LMS

En este inciso se estará tratando principalmente la convergencia del algoritmo LMS, para esto y durante el resto del inciso se asumirá lo siguiente:

- la entrada, $x(n)$ y la salida deseada, $d(n)$, son ambas de media cero y proceso estacionario
- $x(n)$ y $d(n)$ son variables distribuidas aleatoriamente mediante una distribución Gaussiana
- en el tiempo n , el vector de peso $\mathbf{w}(n)$ es independiente del vector de entrada $\mathbf{x}(n)$ y de la salida deseada $d(n)$

La validez de la última asunción tiene validez para valores pequeños del parámetro μ . La asunción b es empleada para realizar algunas simplificaciones en el resultado final ya que, los momentos de tercer orden y de orden superior pueden ser expresados en términos de momentos de segundo orden.

3.3.4A CURVA DE APRENDIZAGE

Antes que nada debemos desarrollar un poco la ecuación (3.27) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 e(n) &= d(n) - y(n) \\
 &= d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n) \\
 &= d(n) - \mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n) \\
 &= d(n) - \mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}_0 - \mathbf{x}^T(n)(\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_0) \\
 &= e_0(n) - \mathbf{x}^T(n)\mathbf{v}(n)
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 e_0(n) &= d(n) - \mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}_0 \\
 \mathbf{v}(n) &= \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_0(n)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

$e_0(n)$ la estimación de error cuando los pesos del filtro son óptimos y $\mathbf{v}(n)$ el vector de error de los pesos.

Notamos que la ecuación (3.37) puede tomar la siguiente forma

$$e(n) = e_0(n) - \mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n) \tag{3.39}$$

Elevando ambos miembros de (3.39) al cuadrado y aplicando el valor esperado en ambos extremos, obtenemos

$$E[e^2(n)] = E[e_0^2(n)] + E[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n)^2] - 2E[e_0(n)\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n)] \tag{3.40}$$

Notando que $\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n) = \mathbf{x}^T(n)\mathbf{v}(n)$ y usando de la asunción de independencia, el segundo término del lado derecho de la ecuación (3.40) puede ser expresado como

$$\begin{aligned}
 E[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n)^2] &= E[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{v}(n)] \\
 &= E[\mathbf{v}^T(n)E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{v}(n)] \\
 &= E[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{R}\mathbf{v}(n)]
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

En donde $\mathbf{R}$ es la matriz de correlación (autocorrelation matrix (3.17)) del vector de entrada $\mathbf{x}(n)$. Para la ecuación (3.41), conociendo que para dos variables independientes, digamos x e y

$$E[xy] = E[x]E[y] = E[xE[y]]$$

$$E[x^2y^2] = E[x^2]E[y^2] = E[xE[y^2]x]$$

Como podemos ver, $E[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n)^2]$ es un escalar y si usamos (3.41) también podemos escribir

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n)^2] &= \text{tr}[E[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n)^2]] \\ &= \text{tr}[E[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{R}\mathbf{v}(n)]] \\ &= E[\text{tr}[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{R}\mathbf{v}(n)]] \end{aligned} \quad (3.42)$$

en donde $\text{tr}[\cdot]$ denota la traza de una matriz y al escribir esta ecuación nos damos cuenta que la traza y el valor esperado son operadores lineales y por lo tanto podemos intercambiarlos. Este resultado puede ser simplificado aun más. Si usamos algebra matricial, aplicando $\text{tr}[\mathbf{AB}] = \text{tr}[\mathbf{BA}]$ obtenemos

$$\begin{aligned} E[\text{tr}[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{R}\mathbf{v}(n)]] &= E[\text{tr}[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)\mathbf{R}]] \\ &= \text{tr}[E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)]\mathbf{R}] \end{aligned} \quad (3.43)$$

Definiendo a la matriz de correlación del vector de error de los pesos (3.38) como

$$\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)] \quad (3.44)$$

El resultado anterior se reduce a

$$E[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n)^2] = \text{tr}[\mathbf{K}(n)\mathbf{R}] \quad (3.45)$$

Usando la asunción de independencia y viendo que $e_0(n)$ es un escalar, el último término en la parte derecha de la ecuación (3.40) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} E[e_0(n)\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n)] &= E[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n)e_0(n)] \\ &= E[\mathbf{v}^T(n)]E[\mathbf{x}(n)e_0(n)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

En donde el último paso sigue el principio de ortogonalidad el cual enuncia “*que la optima estimación de error y las muestras de entrada a un filtro Wiener son ortogonales, es decir, no correlacionados*”.

Empleando (3.45) y (3.46) en (3.40), obtenemos

$$\xi(n) = E[e^2(n)] = \xi_{\min} + \text{tr}[\mathbf{K}(n)\mathbf{R}] \quad (3.47)$$

en donde $\xi_{\min} = E[e_0^2(n)]$ es el error cuadrático-medio mínimo (MSE), en la salida del filtro.

El resultado anterior puede ser escrito de otra forma más conveniente para nosotros. La matriz de correlación (autocorrelation matrix), puede ser decompuesta como

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T \quad (3.48)$$

donde $\mathbf{Q}$ es la matriz modal formada por los eigenvectores de $\mathbf{R}$ y satisface

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{L} \quad (3.49)$$

y

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_L \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

es una matriz diagonal cuyos valores consisten en los eigenvalores de la matriz $\mathbf{R}$.

Definiendo un vector de pesos mis alineado y rotado como

$$\mathbf{v}'(n) = \mathbf{Q}^T\mathbf{v}(n) \quad (3.51)$$

Si restamos a ambos lados de la ecuación (3.36) $\mathbf{w}_0$ y por (3.38) obtenemos

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{x}(n) \quad (3.52)$$

Sustituyendo (3.37) en (3.52) y reagrupando, obtenemos

$$\mathbf{v}(n+1) = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n))\mathbf{v}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{x}(n) \quad (3.53)$$

En donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad. Tomando el valor esperado a ambos lados de la ecuación (3.53) obtenemos

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}(n+1)] &= E[(\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n))\mathbf{v}(n)] + 2\mu E[e(n)\mathbf{x}(n)] \\ &= E[(\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n))\mathbf{v}(n)] \end{aligned} \quad (3.54)$$

Siendo el último termino igual a cero por el principio de ortogonalidad (el cual se menciono anteriormente).

La principal dificultad en el análisis del extremo derecho de (3.54) es el que involucra la evaluación de un vector de momento de tercer orden $E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{v}(n)]$, que en general es una tarea matemática difícil. Diferentes procedimientos han sido adoptados para evitar tal tarea, el más usado es el de asunción matemática. Se asume que las observaciones presentes $(\mathbf{x}(n), \mathbf{d}(n))$ son independientes de las observaciones anteriores $(\mathbf{x}(n-1), \mathbf{d}(n-1))$, $(\mathbf{x}(n-2), \mathbf{d}(n-2))$, a este procedimiento se le conoce como asunción independiente y al usarla podemos decir que: como $\mathbf{v}(n)$ depende únicamente en las observaciones anteriores es independiente de $\mathbf{x}(n)$ y por lo tanto

$$E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{v}(n)] = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]E[\mathbf{v}(n)] \quad (3.55)$$

Cabe decir que en algunos casos la asunción independiente es cuestionada. Como por ejemplo en el caso de un filtro FIR de longitud N , en donde los vectores de entrada son

$$\mathbf{x}(n) = [x(n) \quad x(n-1) \quad \dots \quad x(n-N+1)]^T$$

y

$$\mathbf{x}(n-1) = [x(n-1) \quad x(n-2) \quad \dots \quad x(n-N)]^T$$

Los cuales tienen $(N-1)$ términos en común, afuera de N . Por el contrario la experiencia con el algoritmo LMS que las predicciones realizadas tomando en cuenta el criterio de asunción independiente dan los mismos resultados que las simulaciones realizadas por computadora. Esto se puede explicar de la siguiente manera. El vector de peso $\mathbf{w}(n)$ en cualquier instante dado a sido afectado por todo el historial de las muestras pasadas. Cuando el parámetro μ es pequeño la porción de la ultima observación N en el valor presente de $\mathbf{w}(n)$ es pequeño y por tanto decimos que $\mathbf{w}(n)$ y $\mathbf{x}(n)$ son poco dependientes.

Regresando a nuestro estudio, sustituyendo (3.55) en (3.54) obtenemos

$$E[\mathbf{v}(n+1)] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})E[\mathbf{v}(n)] \quad (3.56)$$

siendo $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]$.

Si a la ecuación (3.56) podemos obtener lo siguiente

$$\bar{\mathbf{v}}(n+1) = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})\bar{\mathbf{v}}(n) \quad (3.57)$$

aplicando (3.51) y de las ecuaciones (3.57)-(3.49)

$$\bar{\mathbf{v}}'(n+1) = [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{\Lambda}]\bar{\mathbf{v}}'(n) \quad (3.58)$$

Los componentes de esta expresión vectorial pueden ser desacoplados en

$$\bar{v}_l'(n+1) = (1 - 2\mu\lambda_l)\bar{v}_l'(n) \quad l = 0, 1, \dots, L-1 \quad (3.59)$$

La solución de esta ecuación en diferencias de primer orden esta expresada como

$$\bar{v}_l'(n) = (1 - 2\mu\lambda_l)^n \bar{v}_l'(0) \quad (3.60)$$

Si sustituimos la ecuación (3.48) en (3.21) y usando (3.51), podemos expresar al MSE en el sistema de coordenadas rotado como

$$\begin{aligned} \xi(n) &= \xi_{\min} + \mathbf{v}^T(n)\mathbf{\Lambda}\mathbf{v}'(n) \\ &= \xi_{\min} + \sum_{l=0}^{L-1} \lambda_l v_l'^2(n) \end{aligned} \quad (3.61)$$

para una adaptación lenta $\bar{v}_l'(n) \approx \bar{v}_l'(n)$ y sustituyendo (3.60) nos da la solución explicita del MSE

$$\xi(n) \approx \xi_{\min} + \sum_{l=0}^{L-1} \lambda_l (1 - 2\mu\lambda_l)^{2n} v_l'^2(0) \quad (3.62)$$

Como va aumentando el tamaño del parámetro μ para una convergencia más rápida $v_l'(n)$ divaga significativamente de $\bar{v}_l'(n)$ provocando un exceso en el MSE.

3.3.4B EXCESO Y MAL AJUSTE EN MSE

Se ha notado que aun cuando el vector de peso $\mathbf{w}(n)$ se acerca a su valor optimo $\mathbf{w}_0$ y la media del vector gradiente estocástico $\nabla e^2(n)$ tiende a cero, el valor instantáneo de este vector puede que no sea cero. Esto da como resultado un perturbación del vector de pesos $\mathbf{w}(n)$ alrededor de su valor optimo $\mathbf{w}_0$, aun después que el algoritmo ha convergido. Todo esto provoca que aumente el MSE del algoritmo LMS a un nivel superior al MSE mínimo que se obtendría si los pesos del filtro estuvieran fijados en sus valores óptimos. Este error es conocido como exceso del MSE, en otras palabras, el exceso en el MSE de un filtro adaptable esta definido como la diferencia entre el MSE en su estado estable y el MSE mínimo.

El estado estable del MSE puede ser encontrado a partir de (3.47) al hacer que el índice de tiempo n tienda a infinito. Al restar a $\xi_{\min}$ en ambos lados de la ecuación (3.47) obtenemos

$$\xi_{\text{excess}} = \text{tr}[\mathbf{K}(\infty)\mathbf{R}] \quad (3.63)$$

donde ξ_{excess} denota el exceso en el MSE. Alternativamente si empleamos (3.61) y $v_l'^2 = k_{ii}'(n)$

$$\xi_{\text{excess}} = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i k_{ii}'(\infty) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{k}'(\infty) \quad (3.64)$$

Cuándo el algoritmo LMS es convergente, $\mathbf{k}'(n)$ converge a un valor en estado estable limitado y decimos que $\mathbf{k}'(n+1) = \mathbf{k}'(n); n \rightarrow \infty$ de tal forma obtenemos

$$\mathbf{k}'(\infty) = 4\mu^2 \xi_{\min} (\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \boldsymbol{\lambda} \quad (3.65)$$

Sustituyendo (3.65) en (3.64)

$$\xi_{\text{excess}} = 4\mu^2 \xi_{\min} \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \boldsymbol{\lambda} \quad (3.66)$$

Notamos que ξ_{excess} es proporcional a $\xi_{\min}$. Esto es entendible si vemos que cuando $\mathbf{w}(n)$ ha convergido a una vecindad de $\mathbf{w}_0$ la varianza de los elementos del Vector gradiente estocástico $\nabla e^2(n)$ son proporcionales a $\xi_{\min}$. También es de notar que similarmente a $\xi_{\min}$, ξ_{excess} presenta unidades de potencia. Es conveniente normalizar ξ_{excess} a $\xi_{\min}$ de tal forma que obtengamos un valor adimensional. El resultado se conoce como desajuste M . Para el algoritmo LMS

$$M = \frac{\xi_{\text{excess}}}{\xi_{\text{min}}} = 4\mu^2 \lambda^T (\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \lambda \quad (3.67)$$

Esta estructura especial de la matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{F})$ puede ser usada para encontrar su inversa. Al ver que $\mathbf{F} = \mathbf{diag}[\rho_0 \ \rho_1 \ \dots \ \rho_{N-1}] + 4\mu^2 \lambda \lambda^T$

$$\mathbf{I} - \mathbf{F} = \mathbf{diag}[1 - \rho_0 \ 1 - \rho_1 \ \dots \ 1 - \rho_{N-1}] - 4\mu^2 \lambda \lambda^T \quad (3.68)$$

además de teoría de matrices en donde se enuncia que si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son respectivamente $N \times N$, $M \times M$ y $N \times M$ y existe su inversa, entonces

$(\mathbf{A} + \mathbf{CBC}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}$, esto aplicado a una matriz $\mathbf{A}$ de $N \times N$, un vector $\mathbf{a}$ de $N \times 1$ y un escalar α

$$(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{a} \mathbf{a}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\alpha \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \alpha \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}} \quad (3.69)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{diag}[1 - \rho_0 \ 1 - \rho_1 \ \dots \ 1 - \rho_{N-1}]$$

Análogamente lo anterior (3.69) en (3.67), siendo $\mathbf{a} = \lambda$

$$\alpha = 4\mu^2$$

entonces

$$M = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\mu \lambda_i}{1 - 2\mu \lambda_i}}{1 - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\mu \lambda_i}{1 - 2\mu \lambda_i}} \quad (3.70)$$

Es conveniente el simplificar este resultado realizando una aproximación apropiada, de tal forma que sea usada convenientemente al seleccionar μ . En la practica uno usualmente selecciona a μ de tal forma que exista un desajuste del 10%, es decir $M=0.1$. En ese caso

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\mu \lambda_i}{1 - 2\mu \lambda_i} \approx \mu \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i = \mu \text{tr}[\mathbf{R}] \quad (3.71)$$

3.3.4C ESTABILIDAD DEL LMS

Se menciono anteriormente que el algoritmo de pendiente descendente se mantenía estable siempre y cuando μ tomara un valor entre cero y un valor limite que sea encontrado dependiente de los valores estadísticos de la entrada del filtro. Lo mismo es cierto para el algoritmo LMS como es de suponerse. Aunque, el uso de un gradiente

estocástico hace que sea más sensible a los valores de μ , y como resultado, el límite superior de μ , que puede asegurar el comportamiento estable del LMS es mucho menor.

Para encontrar el límite superior de μ que asegure la estabilidad del algoritmo LMS, trabajando en (3.70).

Definimos a

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\mu \lambda_i}{1 - 2\mu \lambda_i} \quad (3.72)$$

Si vemos que

$$M = \frac{J}{1 - J} \quad (3.73)$$

También

$$\frac{\delta J}{\delta \mu} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\lambda_i}{(1 - 2\mu \lambda_i)^2} \quad (3.74)$$

Del desarrollo anterior podemos ver que J es una función creciente con respecto a μ (3.74), ya que su derivada con respecto a μ es siempre positiva. De forma similar podemos decir que M es una función creciente de J . Esto implica que el desajuste de M de la ecuación (3.70) es una función creciente del parámetro μ . Si empezamos con $\mu = 0$ (la frontera inferior de μ) y vamos incrementando a μ , vemos que J y M también empiezan en cero y se van incrementando a la par de μ . En este proceso es de notar que J se aproxima a la unidad y M tiende a infinito, lo que coincide con la frontera superior, digamos $\mu_{\max}$. Debajo de la cual se tiene que mantener μ para asegurar la estabilidad. Para encontrar el valor de $\mu_{\max}$ tenemos que obtener la primera raíz positiva de la ecuación

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\mu \lambda_i}{1 - 2\mu \lambda_i} = 1 \quad (3.75)$$

El encontrar la solución del problema anterior es una tare matemática difícil. Desde el punto d vista practico, dicha solución nos es de gran ayuda ya que depende de la estadística de los valores de entrada del filtro de una forma complicada. Por otra parte tenemos esta expresión de la frontera superior de μ la cual depende únicamente de $\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i = \text{tr}[\mathbf{R}]$, esto resulta en un valor mas estricto de la frontera superior de μ , pero es un valor que puede ser medido fácilmente en la practica. Para esto notamos que

$$0 < \mu < \frac{1}{2 \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i} \quad (3.76)$$

la siguiente desigualdad siempre se sostiene

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\mu \lambda_i}{1 - 2\mu \lambda_i} \leq \frac{\mu \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i}{1 - 2\mu \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i} \quad (3.77)$$

Encontramos que el valor de μ que satisface esta ecuación

$$\frac{\mu \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i}{1 - 2\mu \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i} = 1 \quad (3.78)$$

Satisface la desigualdad

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\mu \lambda_i}{1 - 2\mu \lambda_i} \leq 1 \quad (3.79)$$

Es más cualquier valor de μ que este entre cero y la solución de (3.78) satisface (3.79). Esto quiere decir que (3.78) nos da una frontera superior para μ la cual es suficiente para brindar estabilidad al algoritmo LMS, pero por lo general no es necesario. Si renombramos la solución (3.78) $\mu_{\max}$ obtenemos

$$\mu'_{\max} = \frac{1}{3 \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i} = \frac{1}{3 \text{tr}[\mathbf{R}]} \quad (3.80)$$

Resumiendo, bajo las suposiciones hechas al inicio de esta sección el algoritmo LMS es estable dentro del intervalo

$$0 < \mu < \frac{1}{3 \text{tr}[\mathbf{R}]} \quad (3.81)$$

3.4 LA CONSTANTE DE TIEMPO EN PROCESOS ADAPTABLES

La constante de tiempo de convergencia es el tiempo que se requiere para que cualquier transitorio en decaer a $\frac{1}{e}$ ($\approx 37\%$) de su valor inicial. De la ecuación (3.60) podemos mostrar que para valores pequeños de $\bar{v}_l(0)$ μ , esto es $\mu \lambda_i \ll 1$

$$\bar{v}_l(n) \approx e^{-\mu \lambda_i n} \bar{v}_l(0) \quad (3.82)$$

Por consiguiente el tiempo requerido para $\bar{v}_l(n)$ en decaer de $\bar{v}_l(0)$ a $\frac{\bar{v}_l(0)}{e}$ es aproximadamente

$$\tau_1 \approx \frac{T}{\mu \lambda_i} (\text{segundos}) \quad (3.83)$$

En donde T es el periodo de muestreo. Esta ecuación muestra que cada modelo adaptable tiene su propia constante de tiempo, la cual esta dada por el parámetro μ y λ . Por otra parte la constante de tiempo del MSE es

$$\tau_{mse} \leq \frac{T}{\mu \lambda_{\min}} (\text{segundos}) \quad (3.84)$$

Donde $\lambda_{\min}$ es el eigenvalor mínimo de la matriz **R**. Como τ_{mse} es inversamente proporcional a μ , provoca tener una τ_{mse} grande cuando μ es pequeña y viceversa. Debido a que la frontera superior de τ_{mse} es inversamente proporcional a $\lambda_{\min}$, una $\lambda_{\min}$ puede resultar en una constante de tiempo grande, es decir una convergencia lenta. Desafortunadamente si $\lambda_{\min}$ es demasiado grande la selección de μ sería limitada ya que para que se cumpla la restricción de estabilidad μ tiene que ser pequeña.

Capítulo 4

TECNICAS DE CONTROL ACTIVO DE RUIDO

En este capítulo evaluaremos técnicas de control activo de ruido, empezando con un sistema de banda ancha con postalimentación el proceso será ejemplificado mediante un ducto acústico de canal único el cual posee un sistema de control activo de ruido (ANC). Después se hablara del sistema de control activo de ruido de banda estrecha con postalimentación. En esta última también se hará la ejemplificación con el sistema empleado anteriormente.

4.1 TECNIOCA DE CAR (ANC) DE BANDA ANCHA (RUIDO ALEATORIO)

El sistema básico de CAR (Control Adaptable de Ruido), ó ANC (Adaptive Noise Control), usado en el ducto estrecho mostrado en la figura 4.1, puede ser descrito de la siguiente manera. El ruido no deseado provocado por una fuente de ruido principal es medida mediante un micrófono de referencia en la entrada del sistema, filtrado mediante un filtro adaptable y usado para derivar a una fuente secundaria de sonido como una bocina, el cual es usado para cancelar el ruido en el ducto. La señal de entrada proveniente del micrófono de referencia debe de estar bien correlacionada con el ruido provocado por la primera fuente. En los sistemas que controlan ruido de banda ancha (ruido aleatorio), la señal de referencia presenta información sobre la fuente principal de ruido antes que llegue a la bocina para ser cancelado, lo cual es un requerimiento para un controlador causal. El ruido restante es detectado mediante un micrófono secundario al cual nos referimos como micrófono de error, el cual es usado para actualizar los coeficientes del filtro adaptable de tal forma que el ruido residual sea minimizado. Nuestro primer paso es suponer que nuestra señal de referencia no esta siendo afectada por nuestra fuente secundaria (en la realidad la señal de referencia si se ve afectada por la fuente secundaria, pero esto será estudiado mas adelante).

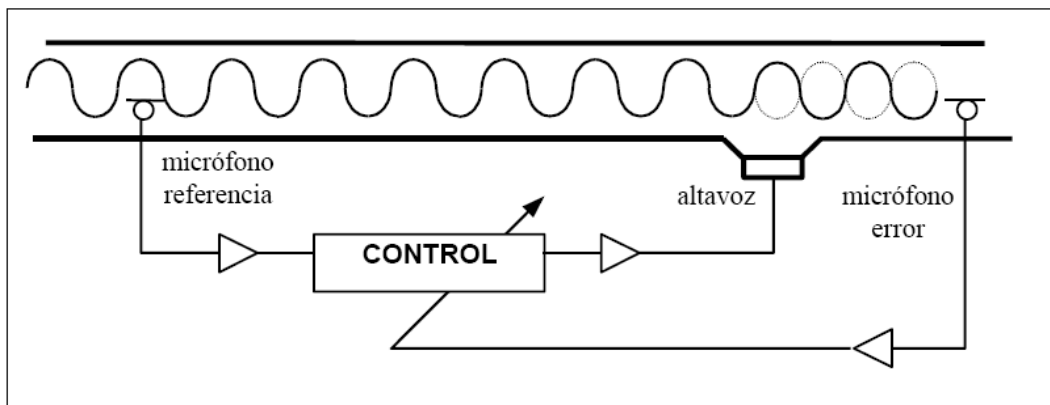


Figura 4.1 Sistema de control activo de ruido de banda estrecha con postalimentación.

Como se puede observar en la figura 4.2 se presenta el diagrama de bloques de nuestro estudio. En donde el filtro adaptable $W(z)$ es usado para estimar una planta desconocida $P(z)$. Se asume que la misma entrada $x(n)$ es llevada tanto al filtro como a la planta. La salida de la planta es la que provee al filtro adaptable de la señal "deseada" $d(n)$ (de hecho realmente la señal "deseada" es una señal no deseada, pero en el ámbito del filtrado adaptable así se le conoce). El algoritmo adaptable del cual hablamos en el capítulo pasado tiene la labor de mantener minimizado el error modelado mediante la supervisión constante de la dinámica de la planta. La trayectoria principal $P(z)$ consiste en la respuesta acústica del sensor de referencia a la entrada hasta el sensor de error en donde la atenuación será llevada acabo.

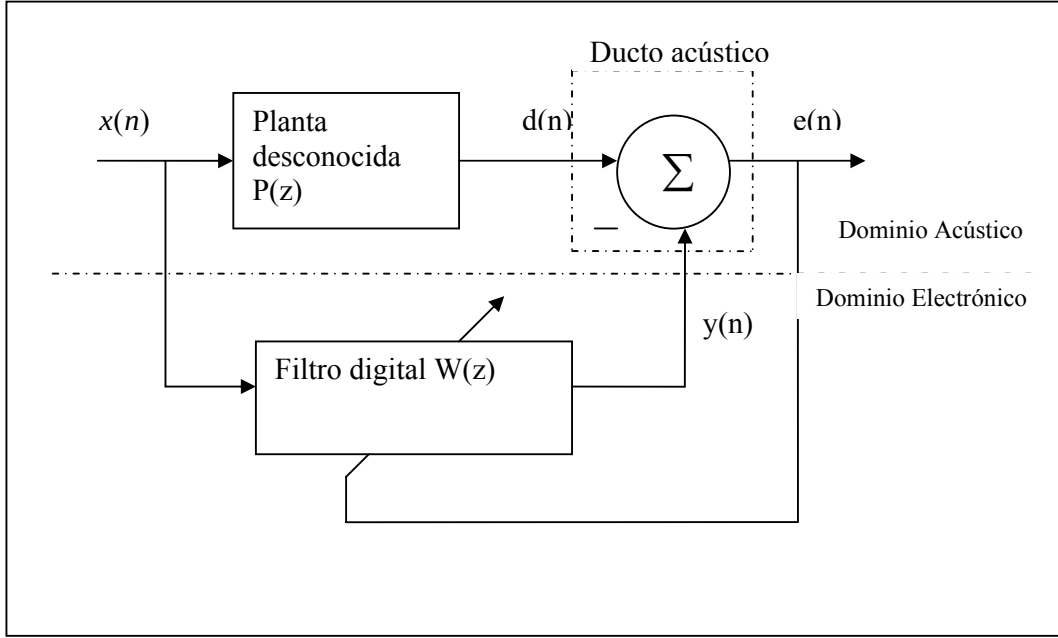


Figura 4.2 Sistema de bloques CAR (ANC)

Existen tres cuestiones importantes involucradas en los sistemas adaptables:

- La señal de excitación $x(n)$
- La estructura del filtro
- El mecanismo de adaptación

Si la señal de excitación o entrada $x(n)$ es rica en contenido de frecuencia (que excite a todos los modos del sistema) y si la planta interna de ruido es pequeña, el filtro adaptable convergirá hacia un buen modelo del sistema desconocido. El filtro puede ser un modelo de tipo Todo-cero, es decir un filtro FIR o un Todo-polo o Polo-cero el cual puede ser expresado por un filtro de tipo IIR. El mecanismo de adaptación puede ser el LMS, el cual se trató anteriormente. El objetivo del filtro adaptable $W(z)$ es minimizar el error residual $e(n)$.

De la figura 4.2, la transformación z de $e(n)$ esta representada como $E(z)$

$$\begin{aligned} E(z) &= D(z) - Y(z) \\ &= P(z)X(z) - W(z)X(z) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Idealmente $E(z)=0$, después de haber convergido el filtro $W(z)$. De la ecuación (4.1) tenemos que

$$W(z) = P(z) \quad (4.2)$$

para $X \neq 0$, lo que implica que

$$y(n) = d(n) \quad (4.3)$$

la ecuación (4.3) expresa que la salida del filtro adaptable $y(n)$ es idéntica a la alteración principal $d(n)$, por lo tanto cuando $y(n)$ y $d(n)$ son combinadas acústicamente el error residual $e(n)$

$$e(n) = d(n) - y(n) = 0 \quad (4.4)$$

lo que indica una perfecta cancelación de ambos sonidos mediante el principio de superposición.

Por lo que si el modelo $W(z)$ es una buena representación de la planta $P(z)$ la técnica de post alimentación es capaz de cancelar ruidos del tipo de banda ancha (ruido aleatorio), de una forma muy eficiente. Esto por ende supone que hay suficiente tiempo para realizar los cálculos necesarios, determinar la señal inversa y generar la señal de ruido secundaria, todo esto, antes que el ruido no deseado pase a través de la planta.

4.1.2 TASA DE MUESTREO Y LONGITUD DEL FILTRO

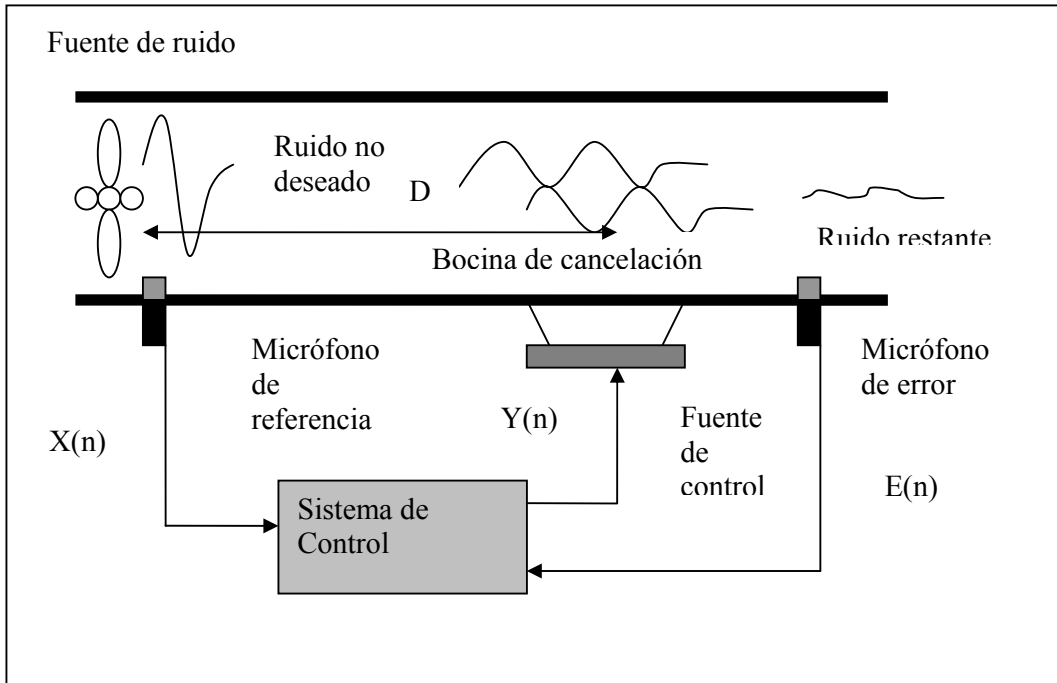


Figura 4.3 CAR (ANC) acústica en ductos largos y estrechos.

La tarea de un filtro digital es el estimar con precisión la trayectoria del micrófono de referencia a la bocina de cancelación. El procesamiento de señal en tiempo real requiere que el tiempo de procesamiento T_p sea menor que el tiempo de muestreo T

$$T_p < T = \frac{1}{f_s} \quad (4.5)$$

donde f_s es la frecuencia de muestreo, la cual debe de ser lo suficientemente grande para satisfacer el criterio de Nyquist

$$f_s \geq 2 f_{\max} \quad (4.6)$$

donde $f_{\max}$ es la frecuencia de interés mas alta.

La tasa de muestreo puede ser considerada en términos de la distancia física de propagación de onda y la habilidad del sistema en resolver estas distancias. La resolución del muestreo de la distancia puede ser expresado como

$$\Delta_s = \frac{c_0}{f_s} \quad (4.7)$$

donde c_0 es la velocidad del sonido teniendo al aire como medio, la cual es

$343 \frac{m}{s}$ a $75^\circ F$ por lo que una tasa de muestreo de 1.5 kHz permite una resolución en la distancia de 0.229m.

El modelo de la planta acústica es realizado en el dominio del tiempo usando el algoritmo FXLMS del cual se hablara mas adelante. La longitud del modelo, en distancia equivalente, es determinado con el numero de pesos directos en el filtro adaptable multiplicados por la resolución de la distancia de muestreo. Por lo que la distancia del ducto que puede ser modelado por un filtro adaptable de orden L es. Esto lo podemos ver ejemplificado en la figura 4.3.

$$D = L\Delta_s = \frac{Lc_0}{f_s} \quad (4.8)$$

4.1.3 EFECTOS DE LA TRAYECTORIA SECUNDARIA Y EL ALGORITMO

El uso del algoritmo LMS explicado anteriormente asume que existe una señal de error la cual se define mediante la ecuación (4.4). El emplear un sistema adaptable como el de la figura 4.2 y 4.1, se torna complicado por el hecho de que la señal de referencia debe ser adquirida mediante la presión acústica usando un micrófono. También se debe de adquirir una señal eléctrica de error del residuo de la señal acústica usando un micrófono de error y finalmente la señal de cancelación debe de ser originada mediante una señal eléctrica usando una bocina, lo que implica la introducción de funciones de transferencia adicionales que deben de ser incluidas. El punto suma de la figura 4.2 representa la superposición acústica que va de la bocina canceladota a el micrófono de error, donde el ruido primario se combina con la salida del filtro adaptable. Por esta razón es necesario compensar la función de transferencia de la trayectoria secundaria $S(z)$ que va de $y(n)$ a $e(n)$ y que incluye el convertidor digital-analógico, el filtro, el filtro de reconstrucción, el amplificador de potencia, el altavoz, la trayectoria acústica que va del altavoz al micrófono de error, el micrófono de error, el preamplificado, el filtro antialiasing y el convertidor analógico digital. Como se puede ver en la figura 4.4 la función de transferencia

de la trayectoria secundaria $S(z)$ puede ser separada en dos funciones de transferencia en cascada

$$S(z) = R(z)S'(z) \quad (4.9)$$

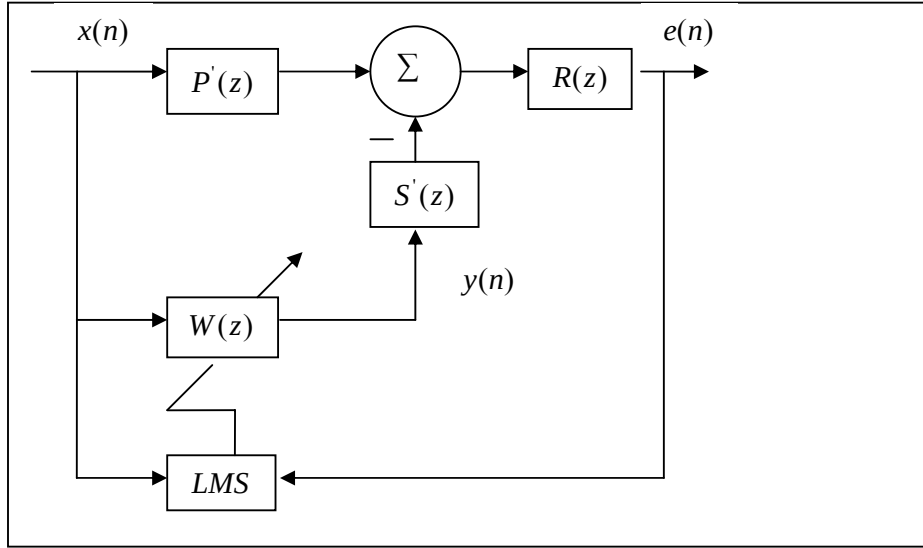


Figura 4.4 Diagrama de bloques de un sistema CAR (ANC)

Donde $S'(z)$ representa la función de transferencia secundaria, $R(z)$ representa la función de transferencia residual. Si tomamos el caso presentado con anterioridad (ducto acústico), $S'(z)$ esta formada por el sistema de la bocina (DAC, filtro de reconstrucción, el amplificador y la bocina), y $R(z)$ representa el sistema conformado por el micrófono, preamplificador, filtro antialiasing y DAC. Similarmente $P(z)$ puede ser descompuesta en:

$$P(z) = R(z)P'(z) \quad (4.10)$$

Donde $P'(z)$ es la función de transferencia del filtro adaptable (desconocido), que va del micrófono de referencia al punto suma.

Los coeficientes del filtro adaptable deben de converger a los valores que minimicen la señal de error a pesar de la presencia de las funciones de transferencia asociadas a los transductores.

De la figura 3.12 la transformada Z de la señal de error es:

$$E(z) = R(z)[P'(z) - S'(z)W(z)]X(z) \quad (4.11)$$

Asumiendo que $W(z)$ tiene el orden suficiente. Entonces después de que el filtro adaptable ha convergido, el error residual se vuelve cero. Lo anterior implica que $W(z)$ cumpla con la función de transferencia óptima en estado permanente:

$$W^0(z) = \frac{P'(z)}{S'(z)} \quad (4.12)$$

De esta forma el filtro adaptable invierte la función de transferencia de $S'(z)$, de cualquier forma es imposible compensar el retraso inherente ocasionado por $S'(z)$ si $P'(z)$ no contiene un retraso de al menos igual el tamaño. *Esta es en general la restricción de los sistemas feedforward de banda ancha y aun, de la ecuación (4.12) se puede ver que el sistema se vuelve inestable si existe una frecuencia ω tal que $S'(\omega) = 0$.* Esto lo podemos ilustrar con nuestro ejemplo clásico del ducto acústico: si existe un cero en la función de transferencia del sistema de la bocina $S'(z)$, implica que existe una frecuencia que no se puede controlar.

De la ecuación (4.11), el sistema de control no es efectivo si existe una frecuencia $R(\omega) = 0$, es decir, un cero en la función de transferencia del sensor de error, provocando que haya una frecuencia no observable. De cualquier forma si bajo estas circunstancias es posible la realización de un filtro adaptable, no es posible obtener una cancelación del ruido que sea significativa a esta frecuencia: $P'(\omega) - S'(\omega)W(\omega)$ y aunque puede tomar cualquier valor, el controlador no sabrá si $R(\omega) = 0$ (obviamente, el ruido primario solo es controlable si el sistema es observable por medio del sensor de error).

De la ecuación (4.12), el filtro adaptable $W(z)$ realiza un modelado directo de la función primaria acústica $P'(z)$ para generar el ruido cancelador y un modelado inverso de $S'(z)$ para compensar el efecto de la trayectoria secundaria. En término del procesamiento de señales en el dominio del tiempo, la introducción de la función de transferencia de la trayectoria secundaria en un controlador que usa el algoritmo LMS ocasionara inestabilidad. Esto se debe a que la señal de error no esta correctamente "alineada", en el tiempo con la señal de referencia debido a la presencia de $S(z)$.

Dado que la función de transferencia primaria como secundaria tienen a $R(z)$ en común, es conveniente absorber este término dentro del modelo esto lo podemos observar en la figura 4.5.

Es de notar que matemáticamente, es exactamente equivalente al de la figura 3.12, la única diferencia es que se redefinió el punto suma de forma que ahora esta en el dominio eléctrico en lugar del acústico.

De las ecuaciones (4.9) y (4.11), la función de transferencia en estado permanente del filtro adaptable puede ser expresada de una manera más sencilla. La transformada Z de la señal de error:

$$E(z) = [P(z) - S(z)W(z)]X(z) \quad (4.13)$$

Una vez que el filtro adaptable ha convergido, el error residual es cero, lo que implica que $W(z)$ debe realizar la función óptima de transferencia:

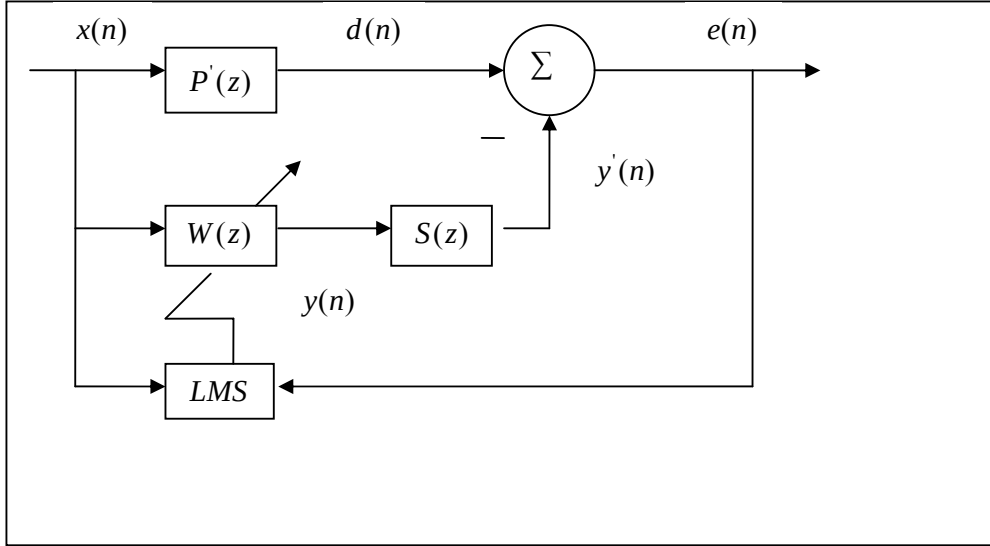


Figura 4.5 Diagrama de bloques simplificado de un sistema de CAR (ANC)

$$W^0(z) = \frac{P(z)}{S(z)} \quad (4.14)$$

En otras palabras, el filtro adaptable $W(z)$ tiene que modelar a $P(z)$ e inversamente modelar a $S'(z)$. Conociendo las funciones de respuesta primaria y secundaria podemos calcular los pesos óptimos para minimizar el error cuadrático medio en la superficie de desempeño. La respuesta del modelo actual es una función compleja que depende del contenido espectral de la fuente y la planta acústica del sistema. Debido a la incertidumbre en las características de la planta acústica, no es práctico determinar un modelo exacto antes de que el sistema empiece a operar. El filtro $W(z)$ proporciona un medio completamente adaptable para que simultáneamente modele a la planta primaria $P(z)$ y la trayectoria secundaria $S(z)$ con una fuente dada para minimizar el ruido residual. Una ventaja clave de seguir con este enfoque es que con un modelo apropiado de la planta, el sistema puede responder instantáneamente a cambios en la señal de entrada ocasionados por cambios en las fuentes de ruido.

Como fue mencionado en el análisis anterior, el desempeño del sistema de control activo de ruido depende en gran manera de la función de transferencia de la rama secundaria. Si una interrupción existe en la rama secundaria a cualquier frecuencia, solo una cantidad pequeña de señal será captada por el

micrófono de error, lo que resultaría en una pequeña cancelación o peor aun, en una no cancelación del ruido. Por lo que emplear este modelo para la contracción de un sistema de control activo de ruido resulta en una mala elección. Por esta razón una modificación en el algoritmo LMS es necesaria para asegurar la convergencia del sistema.

4.1.4 ALGORITMO FXLMS

Como fue mencionado en la sección anterior, debido a que la función de transferencia en la rama secundaria $S(z)$, sigue al filtro adaptable, el algoritmo convencional LMS debe de ser modificado para asegurar la convergencia del sistema. Existe una variedad de posibles alternativas que pueden ser utilizadas con el fin de compensar el efecto que ocasiona $S(z)$.

- a) La primera posible solución es el colocar un filtro inverso $\frac{1}{S(z)}$, en serie con $S(z)$.
- b) La segunda opción es el colocar un filtro idéntico en la trayectoria de la señal de referencia, de tal forma que proporcione una actualización con respecto a los pesos del algoritmo LMS, lo que involucra al algoritmo llamado **Filtro X** (FXLMS).

Debido a la complejidad y algunos casos la imposibilidad de encontrar una función inversa $\frac{1}{S(z)}$, la respuesta se enfoca en el uso del algoritmo FXLMS. El algoritmo FXLMS es una alternativa del LMS, que se emplea cuando hay una función de transferencia en la rama secundaria seguida de un filtro adaptable. Con el fin de asegurar la convergencia del algoritmo, la entrada al correlacionador de error es filtrada por una copia (estimada), de la función de transferencia en la rama secundaria.

4.1.5 OBTENCION DEL ALGORITMO FXLMS

La colocación de una función de transferencia en la rama secundaria seguida del filtro digital $W(z)$, controlado por el algoritmo LMS está mostrado en la figura 3.13. La señal residual se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - y'(n) \\ &= d(n) - s(n) * y(n) \\ &= d(n) - s(n) * [w^T(n)x(n)] \end{aligned} \quad (4.15)$$

en donde $s(n)$ es la respuesta al impulso de la rama secundaria $S(z)$ en el tiempo n y $*$ denota la convolución lineal,

$$w(n) = [w_0(n) \ w_1(n) \ \cdots \ w_{L-1}(n)]^T \quad (4.16)$$

es el vector de coeficientes de $W(s)$ en el tiempo n ,

$$x(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-L+1)]^T \quad (4.17)$$

es el vector señal en el tiempo n , L es el orden del filtro $W(s)$. Para señales de banda ancha, $w(n)$ debe de representar la respuesta al impulso de la función de transferencia $W^0(z) = \frac{P(z)}{S(z)}$, mientras para señales de banda estrecha $w(n)$ debe de cubrir una porción substancial del periodo de la señal. Por lo que el numero de coeficientes L del filtro deben de ser seleccionados, de tal forma que se pueda obtener una resolución en tiempo para modelar la respuesta requerida.

Como se ha mocionado el objetivo de un filtro adaptable es minimizar el error cuadrático instantáneo y también se ha afirmado que el método más común para lograr tal propósito es el uso del algoritmo LMS, el cual actualiza al vector de coeficientes en el gradiente negativo con un escalón de peso μ .

$$w(n+1) = w(n) - \frac{\mu}{2} \nabla \hat{\xi}(n) \quad (4.18)$$

Donde $\nabla \hat{\xi}$ es una estimación instantánea del gradiente MSE en el tiempo n , el cual se puede expresar como:

$$\nabla \hat{\xi}(n) = \nabla e^2(n) = 2[\nabla e(n)]e(n)$$

de la ecuación (4.15) tenemos que:

$$\nabla e(n) = -s(n) * x(n) = -x'(n)$$

en donde $x'(n) = [x'(n) \ x'(n-1) \ \dots \ x'(n-L+1)]^T$ y $x'(n) = s(n) * x(n)$

Por lo que la estimación del gradiente es la siguiente:

$$\nabla \hat{\xi}(n) = -2x'(n)e(n) \quad (4.19)$$

Si sustituimos (4.19) en (4.18) obtenemos lo siguiente:

$$w(n+1) = w(n) + \mu x'(n)e(n) \quad (4.20)$$

El resultado anterior muestra que cuando una función de transferencia $S(z)$, sigue a un filtro adaptable, esta de igual forma debe de ser colocada en la trayectoria de la actualización de pesos (por ejemplo el vector de entrada $x(n)$ es filtrado por $S(z)$).

En la práctica en las aplicaciones de control adaptable, $S(z)$ no se conoce y debe de ser estimada mediante un segundo filtro $\hat{S}(z)$, por lo tanto la referencia del filtro es generada al pasar la señal de referencia a través de esta estimación de la trayectoria secundaria como se muestra en la figura 4.6.

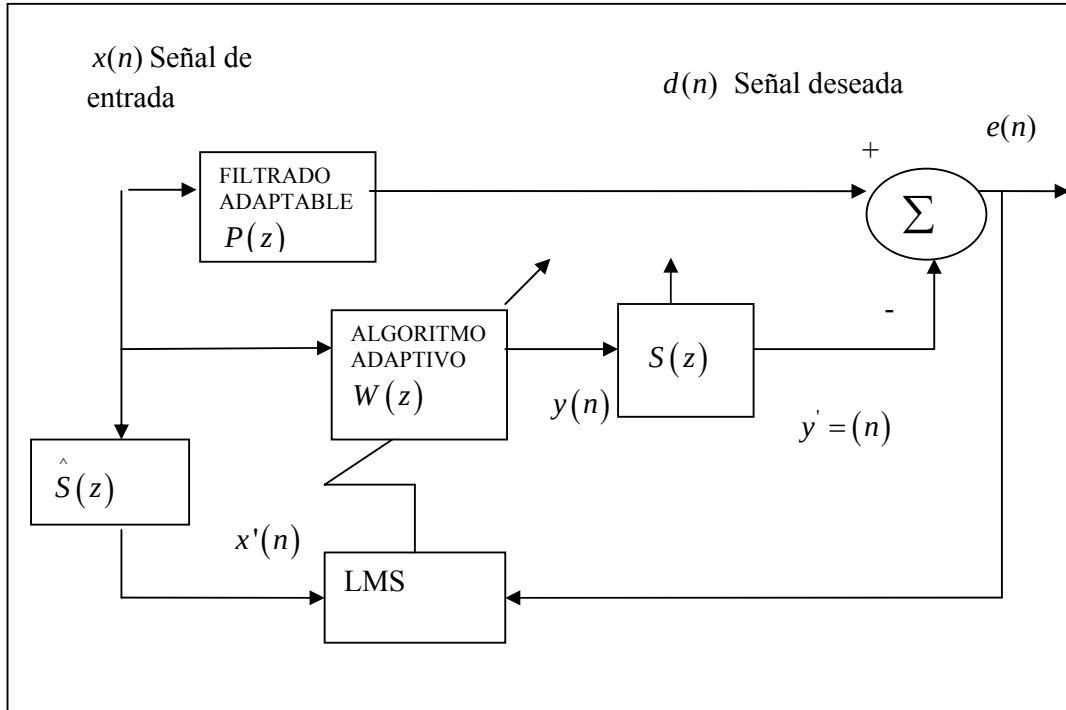


Figura: 4.6. Diagrama de bloques de un sistema de control adaptable FXLMS.

De la figura 3.14 el algoritmo FXLMS puede ser expresado como en la ecuación, excepto cuando:

$$x'(n) = \hat{s}(n) * x(n) \quad (4.21)$$

Donde $\hat{s}(n)$ es la respuesta al impulso estimado de la rama secundaria del filtro $\hat{S}(z)$. Al implementar este algoritmo, se ha logrado que la convergencia del filtro sea mucho más rápida de lo que la teoría indica, además se ha demostrado que el algoritmo es más tolerante con el error producido en la estimación de la función de transferencia $S(z)$ mediante el filtro $\hat{S}(z)$.

4.1.6 TECNICA DE MODELADO OFF-LINE

El algoritmo FXLMS requiere del conocimiento de la función de transferencia $S(z)$. Asumiendo que las características de $S(z)$ son invariantes con el tiempo, pero desconocidas, entonces la técnica de modelado fuera de línea puede ayudarnos a estimar a $S(z)$, durante una etapa inicial de entrenamiento.

Al final del intervalo de entrenamiento, el modelo estimado $\hat{S}(z)$ es corregido y está listo para usarse en la operación de control activo de ruido. El ruido blanco es ideal para la fase de entrenamiento de banda ancha, en la identificación del sistema ya que presenta una densidad espectral constante en cualquier frecuencia.

La configuración para el modelado fuera de línea de un sistema se muestra en la siguiente figura 4.7

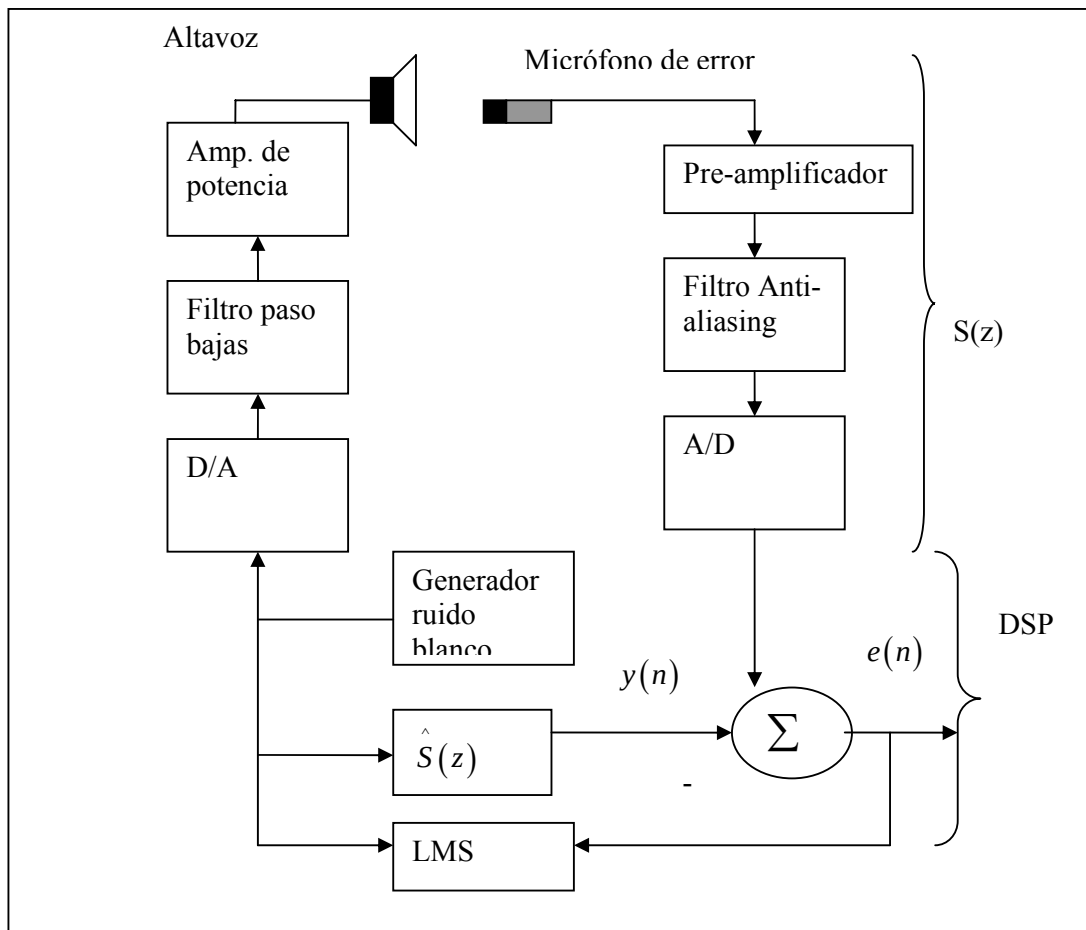


Figura 4.7. Sistema experimental para un modelo fuera de línea de una trayectoria secundaria

Podemos observar en la figura 4.7 el ruido blanco no correlacionado es generado por el DSP internamente. El generador de ruido blanco es usado como la entrada a una fuente secundaria, en este caso, disipado mediante un altavoz y

a su vez como entrada a un filtro adaptable $\hat{S}(z)$, siendo este el usado para modelar la trayectoria secundaria. Este tipo de modelado lo podemos sintetizar en :

- Generar una muestra de ruido blanco $x(n)$
- Obtener la señal deseada $d(n)$ del sensor de error.
- Aplicar el algoritmo del filtrado como se menciona:

Calcular la salida del filtro adaptable:

$$y(n) = \sum_{l=0}^{L-1} \hat{s}_l(n) x(n-l) \quad (4.22)$$

Siendo $\hat{s}(n)$ el coeficiente $\hat{s}_{l_{esimo}}$ del filtro de estimación de la trayectoria secundaria $\hat{S}(z)$ en el tiempo n .

Calcular la señal de error:

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (4.23)$$

Actualizar los coeficientes usando el algoritmo LMS

$$\hat{s}_l(n+1) = \hat{s}_l(n) + \mu x(n-l)e(n) \quad l=0,1,\dots,L-1 \quad (4.24)$$

Regresa al punto “a” para la siguiente iteración, hasta que el filtro $\hat{S}(z)$, convenga a una solución óptima, esto es, cuando $e(n)$ sea mínimo. Una vez logrado esto se emplean los coeficientes de $\hat{s}(n)$ en el sistema de control activo.

4.1.7 EFECTOS DE LA RETROALIMENTACION

Anteriormente se ha explicado el funcionamiento de un sistema de control de ruido acústico adaptable, se sabe que presenta un micrófono de referencia para captar el ruido de referencia $x(n)$ la cual procesa, generando un “antirruído” en su salida $y(n)$, también presenta un micrófono de error, por medio del cual se actualizan los coeficientes del filtro. Desafortunadamente una bocina en el ducto genera ondas planas las cuales se propagan tanto río arriba como río abajo. Por lo que el antirruído proveniente de la bocina no solo cancela el ruido proveniente río abajo, si no que también radia la cancelación río arriba al micrófono de referencia ocasionando una distorsión en la señal de referencia

$x(n)$. A dicho acoplamiento entre la señal de la bocina y el micrófono de referencia se le llama retroalimentación acústica.

La retroalimentación introduce polos en la respuesta del modelo, lo que provoca inestabilidad si la ganancia de este lazo de retroalimentación es muy grande.

A continuación en la figura 4.8 se presenta el diagrama de bloques de un sistema de CAR (ANC), el cual incluye la retroalimentación de la fuente secundaria del sensor de referencia, donde $u(n)$ es la fuente principal de ruido, $x(n)$ es la señal obtenida mediante la señal de referencia y $F(z)$ es la trayectoria de retroalimentación proveniente de la salida de $W(z)$ al micrófono de referencia. Para un sistema practico la función de transferencia $F(z)$ conlleva al convertidor analógico digital, filtro, amplificador de potencia, bocina, trayectoria de la bocina al micrófono de referencia, preamplificador, filtro antialiasing y convertidor digital analógico.

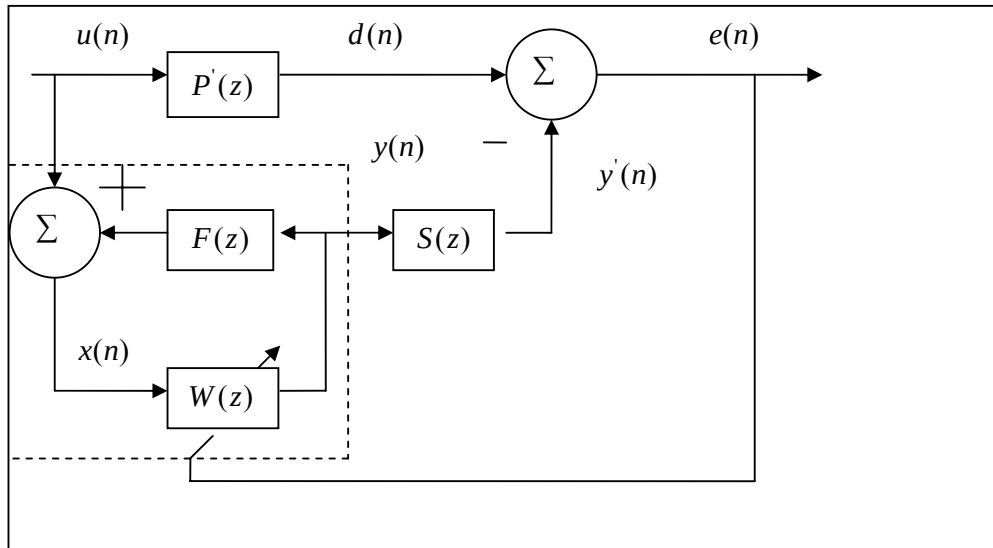


Figura 4.8 Sistema CAR (ANC) con retroalimentación

Del sistema de la figura 4.8, su transformada z de la señal de error esta expresado como:

$$\begin{aligned} E(z) &= P(z)U(z) - S(z)Y(z) \\ &= P(z)U(z) - S(z) \frac{W(z)U(z)}{1 - W(z)F(z)} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Teniendo en mente el objetivo del filtro adaptable, el cual es minimizar a $e(n)$ y asumiendo que $W(n)$ es de un orden suficiente, que μ es muy pequeño y que $P(z)$, $S(z)$ y $F(z)$ son invariantes con el tiempo, $E(z)$ será igual a cero después que haya convergido $W(z)$. Entonces igualando (4.25) a cero y asumiendo que $U(z)$ tiene energía en todas las frecuencias se determina la función de transferencia en estado estable de $W(z)$ esta dada por

$$W^0(z) = \frac{P(z)}{S(z) + P(z)F(z)} \quad (4.26)$$

De la figura 4.8 la función en lazo abierto asociado al lazo de retroalimentación esta dada por

$$H_{OL}(z) = W(z)F(z) \quad (4.27)$$

Si el filtro adaptable ha convergido a la solución optima sin ruido entonces

$$H(z)_{OL}(z) = \frac{P(z)F(z)}{S(z) + P(z)F(z)} \quad (4.28)$$

En el análisis se puede observar que para el problema del ruido acústico en un ducto muestra que la relación del ruido no deseado con la fuente secundaria de ruido esta en función de la posición del micrófono de referencia. Al ajustar la posición del micrófono de referencia hacia una posición que maximice la relación de la fuente principal de ruido acústico con la fuente secundaria de ruido acústico, la magnitud de la función de transferencia en lazo cerrado se reduce. Esto reduce la tendencia de retroalimentación acústica la cual provoca inestabilidad.

4.2 TECNICA DE CAR (ANC) DE BANDA ESTRECHA (RUIDO PERIODICO)

En general existen dos técnicas de tratar el CAR (ANC) de postalimentación. La primera es muestrear la fuente principal de ruido mediante un sensor de referencia, procesar esta entrada de referencia con filtro adaptable, el cual inyecta la señal anti-ruido de vuelta al campo de ruido mediante una fuente secundaria. La segunda implica es el sintetizar la entrada de referencia usando un sensor que no sea sensible al medio acústico. La señal de referencia que proporcione el sensor no será afectada por la acción de una fuente secundaria. Cabe mencionar que esta técnica es efectiva únicamente para ruido de tipo periódico ya que la frecuencia fundamental es la única referencia que podemos obtener. Empleando esta técnica podemos eliminar el problema de la retroalimentación, a la cual nos referimos en la sección anterior. Esto lo logramos al emplear un sensor no acústico el cual se sincroniza con la fuente de ruido de tal forma que se genere una señal de referencia, la cual contenga la frecuencia fundamental y todas las armónicas de la fuente principal de ruido. Esto podemos observarlo en la figura 4.9. Este tipo de sistema controla fuentes armónicas mediante la adaptación filtrada de una señal de referencia sintetizada $x(n)$, generada internamente por el CAR (ANC) para producir una señal de cancelación $y(n)$ a la salida. Esta señal sincronizada puede ser obtenida de la fuente directamente usando un sensor no acústico como un acelerómetro o un tacómetro. Un micrófono de error es colocado en el campo de ruido para medir

el ruido restante. Esta señal de error $e(n)$ es usada luego para ajustar los coeficientes del filtro adaptable. La técnica presente tiene las siguientes ventajas.

- a) Se evita la retroalimentación, la cual, provoca inestabilidad en el sistema
- b) Se evitan problemas por el envejecimiento del sistema y posibles no linealidades
- c) La periodicidad del ruido elimina la condición antes planteada de causalidad
- d) Solo se necesita modelar una planta cuya función de transferencia este basada sobre frecuencias en la vecindad de los tonos armónicos.

El sintetizador de la señal de referencia es activado mediante un pulso del sensor no acústico, como por ejemplo la señal de un tacómetro. Por lo general para sistemas de banda estrecha se pueden emplear dos tipos de señales de referencia: un tren de impulsos cuyo periodo sea igual al inverso de la frecuencia fundamental del ruido periódico u ondas sinusoidales, las cuales tengan la misma frecuencia que los correspondientes tonos armónicos que se desean cancelar.

4.2.1 TECNICA DE SINTESIS DE FORMA DE ONDA

Esta técnica asume que el ciclo próximo tendrá la misma forma de onda que el ciclo presente y además es apropiado para una amplia variedad de problemas asociados a bajas frecuencias. Este método de síntesis de forma de onda es efectivo para sistemas CAR(ANC) periódicos, especialmente cuando se dificulta el detectar el ruido en un ducto a altas temperaturas. En tal caso, el pulso cíclico de la fuente es usado como referencia de entrada.

El sintetizador de forma de onda produce una señal $y(n)$ que dirige a la bocina, la cual funciona como una fuente secundaria. Un micrófono de error en la zona de silencio censa los residuos actualizando la unidad adaptable la cual después modifica la forma de onda que cancelara el ruido. La cancelación solamente ocurre en las armónicas de la frecuencia fundamental. Esto da como resultado que solamente sea cancelado el ruido deseado sin afectar al habla en la zona de interés. La señal de sincronización puede ser generada mediante una rueda con engranes, la cual este acoplada al motor que sea la fuente de ruido. Aquí es colocado un sensor óptico el cual censa la rotación de la rueda con engranes. Al rotar la rueda al mismo ritmo que el motor, existen M pulsos censados por cada revolución del motor, siendo M el numero de dientes de la rueda con engranes. Idealmente el número de dientes debe corresponder al número de muestras deseado en la forma de onda. Bajo este esquema cada pulso de reloj puede ser usado para activar una muestra de la forma de onda de una forma sistemática. Si el numero de engranes es mayor que el numero de muestras por ciclo, la señal de sincronización deberá ocupar un divisor de frecuencia y si es menor un multiplicador de frecuencia. El sintetizador de forma de onda almacena las formas de onda del ruido cancelador

$\{w_l(n) \ l=0 \ 1 \ \dots \ L-1\}$ en localidades de memoria contiguas y únicas, en donde L es el número de muestras durante un ciclo de la forma de onda y n es el índice de tiempo. La señal de sincronización es empleada para que se asigne un apuntador de memoria, el cual puede ser un contador implementado por software, el cual este controlado por las interrupciones generadas por la señal de sincronización de tal forma que la memoria de la forma de onda sea disecionada de una forma secuencial durante cada ciclo. Estas muestras representan la forma de onda requerida para la cancelación, la cual es secuencialmente enviada a un convertidor D/A y de ahí a la bocina:

$$y(n) = w_{j(n)}(n) \quad (4.29)$$

Representa el $[j(n)]$ ésimo elemento de las muestras de la forma de onda $\{w_l(n) \ l=0 \ 1 \ \dots \ L-1\}$ en un tiempo n, donde

$$j(n) \equiv n \bmod L \quad (4.30)$$

el cual puede ser implementado como un apuntador que sea incrementado cíclicamente entre 0 y L - 1 para cada periodo de muestreo. Por tanto las L muestras deben de ser presentadas por cada repetición de la onda de ruido, de tal forma que la forma de onda de ruido secundaria sea generada.

El ruido restante es recogido por un micrófono de error y muestreado sincronizadamente con respecto a la señal de pulsos de referencia. Esta señal de error muestreada $e(n)$ es utilizada por la unidad adaptable para ajustar los valores de la forma de onda $w_l(n)$. En este proceso existen varios algoritmos que se emplean para minimizar el error cuadrático medio, nosotros emplearemos una versión del algoritmo LMS

$$w_l(n+1) = \begin{cases} w_l(n) + \mu \text{sgn}[e(n)], & l = j(n) \\ w_l(n), & \text{de cualquier otra forma} \end{cases} \quad (4.31)$$

en donde $\text{sgn}[e(n)]$ hace referencia al signo de $e(n)$.

En la practica la señal de error $e(n)$ no siempre corresponde al $[j(n)]$ ésimo elemento de la onda de cancelación $w_{j(n)}(n)$, esto se debe al hecho que en un sistema practico, existe un retraso de algunos milisegundos entre el tiempo que la señal $y(n) = w_{j(n)}(n)$ es alimentada a la bocina y el tiempo en el que es recibida en el micrófono de error. Esto se puede corregir si restamos un offset del apuntador cíclico $j(n)$ el cual esta disecionando la forma de onda

$$w_l(n+1) = \begin{cases} w_l(n) + \mu e(n), & l = j(n - \Delta) \\ w_l(n), & \text{de cualquier otra forma} \end{cases} \quad (4.32)$$

Donde Δ es el numero de muestras entre la aplicación de la señal del sintetizador de forma de onda y su máximo offset, esto en el micrófono de error en termino de muestras

$$\Delta = \left\lceil \frac{\tau}{T} \right\rceil \quad (4.33)$$

en donde τ es el tiempo de retardo, el cual es constante para un arreglo de bocina-micrófono de error dado. T es el periodo de muestreo. El número de offset debe de ser actualizado al ir variando el ritmo de muestreo ya que esta sincronizado con la fuente de ruido.

4.2.2 EFECTOS DE LA TRAYECTORIA SECUNDARIA Y EL ALGORITMO FXLMS

Como se ha mencionado los efectos de la trayectoria secundaria $S(z)$ deben de ser compensados usando el algoritmo FXLMS. El síntesis de forma de onda usando el algoritmo FXLMS es ilustrado en la figura 4.10, en donde $\hat{S}(z)$ es una estimación de $S(z)$.

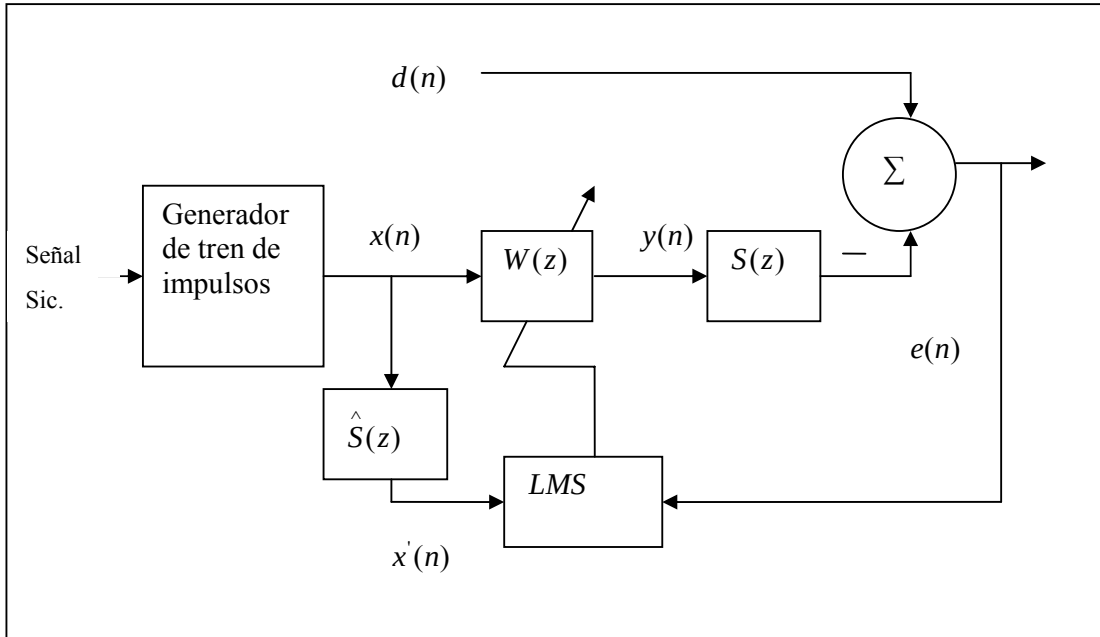


Figura 4.10 Técnica de sintetizado de forma de onda empleando el algoritmo FXLMS

Dado el numero de armónicas $N=L$ en este caso, la respuesta de $S(z)$ puede ser replicada en esas frecuencias empleando un filtro $\hat{S}(z)$ de L_{esimo} orden. En donde la salida de $\hat{S}(z)$ esta dada por

$$x'(n) = \sum_{l=0}^{L-1} \hat{S}_l x(n-l) \quad (4.34)$$

En donde $\hat{S}_l$ es el coeficiente l_{esimo} del filtro $\hat{S}(z)$. De nueva forma, para $L=N$ el periodo del tren de impulsos $x(n)$ expresado por

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-kN) \quad (4.35)$$

Coincide a la longitud del filtro. En donde $\delta(\square)$ es la delta de Kronecker [$\delta(n)=1$ si $n=0$, de otra manera $\delta(n)=0$]. El entero N satisface $N = \frac{T_0}{T}$, para T igual al periodo de muestreo y $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, que es el periodo del ruido con frecuencia angular fundamental ω_0 . Reduciéndose la ecuación (4.34) a

$$x'(n) = \hat{S}_{j(n)}, \quad L=N \quad (4.36)$$

en donde $j(n) \equiv n \bmod L$ es el mismo apuntador cíclico que el usado en la ecuación (4.30). Asumiendo que $S(z)$ puede también ser modelado usando un filtro FIR de orden L , la señal de error se expresa como

$$e(n) = d(n) - \sum_{l=0}^{L-1} s_l y(n-l) \quad (4.37)$$

donde s_l es la respuesta al impulso de $S(z)$. De la siguiente ecuación, que es la transformada de Fourier discreta de $x(n)$

$$X(\omega) = \frac{2}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (4.38)$$

la ecuación (4.37) puede reescribirse como

$$e(n) = d(n) - \sum_{k=0}^{L-1} s_k \sum_{l=0}^{L-1} w_l(n-k) x(n-k-l) \quad (4.39)$$

Si $w_l(n)$ varía con lentitud, el cambio del tiempo puede ser despreciable y las dos diferencias pueden ser reagrupadas como

$$e(n) \approx d(n) - \sum_{l=0}^{L-1} w_l(n) x'(n-l) \quad (4.40)$$

en donde asumimos que $\hat{S}(z) = S(z)$, para $x'(n)$ definida en la ecuación (4.34). Por lo tanto haciendo uso de (4.36), el algoritmo FXLMS para sistemas de CAR (ANC) por síntesis de forma de onda síncrono esta dado por

$$\begin{aligned} w_l(n+1) &= w_l(n) + \mu x'(n-l) e(n) \\ &= w_l(n) + \mu s_{k(n,l)} e(n), \quad \hat{l} = 0, 1, \dots, L-1 \end{aligned} \quad (4.41)$$

siendo $k(n,l) \equiv (n-l) \bmod L$

Como se ha mencionado anteriormente, el comportamiento de un CAR (ANC) puede ser evaluado en términos de su función de transferencia entre el ruido no deseado y la salida del error residual. La función de transferencia del controlador esta dada por

$$H(z) = \frac{1 - z^{-L}}{1 - [1 - \mu S(z)] z^{-L}} \quad (4.42)$$

Capítulo 5

SIMULACION DE UN CONTROL ACTIVO DE RUIDO EN UN DUCTO DE VENTILACION EMPLEANDO MATLAB

En este capítulo se usará Matlab para simular el funcionamiento del sistema de control activo de ruido. Se intentará reducir el volumen del ruido que se propaga a través del aire haciendo uso de un sistema electroacústico. Para poder censar los cambios de presión acústica del medio se utilizarán micrófonos y como actuador una bocina. Este sistema es el que se ha venido ejemplificando en el capítulo anterior.

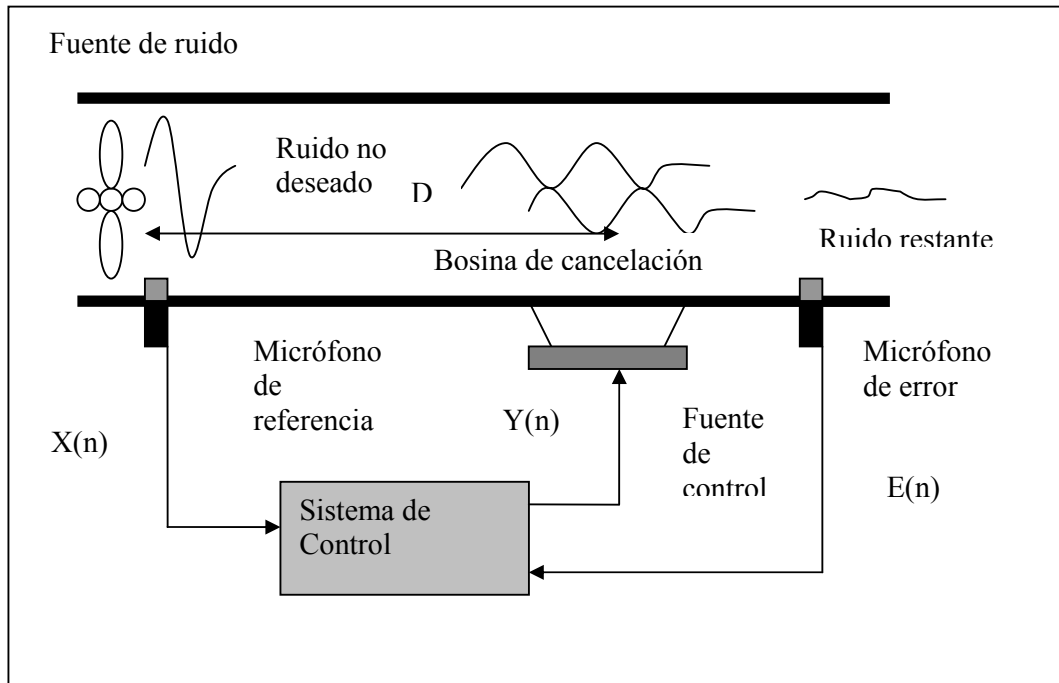


Figura 5.1 Sistema CAR (ANC) mono-canal.

El objetivo de la simulación es ilustrar el funcionamiento de un sistema adaptable de control de ruido acústico. Como se ha mencionado a lo largo de este documento, el control activo trata de reducir el volumen de ruido no deseado, el cual, se propaga a través de aire usando un sistema electro-acústico. En este se ven involucrados elementos de medición como sensores y actuadores de salida como bocinas. La fuente de ruido usualmente proviene de algún dispositivo tal como una maquina rotatoria, de tal forma que es posible medir el ruido cerca de la fuente que lo produce. Nuestra meta es el lograr producir un "anti-ruido" que tenga el efecto de interferencia destructiva, lo que según nuestro estudio provocara una atenuación de la fuente principal de ruido.

Para esta simulación se deben de tomarse en cuenta los siguientes puntos:

- a) La señal deseada no puede medirse directamente por lo que solamente contamos con la señal atenuada
- b) El sistema de control debe de tomar en cuenta la presencia de la trayectoria secundaria $S(n)$ para su proceso de adaptabilidad.

Ilustrado en la figura 5.1 esta presente el sistema que se simulara empleando Matlab.

Empecemos por generar la respuesta al impulso de la trayectoria "bocina-micrófono de error" la cual será limitada en banda entre 160Hz y 2000Hz y con la longitud del filtro igual a .1seg. Tomaremos una frecuencia de muestreo de 8000Hz. Los comandos que se estarán empleando son los siguientes:

- a) cheby2: Realiza el diseño de un filtro digital paso bajas de orden N con rizo en banda de corte R y borde de banda de corte W_n , del tipo Chebyshev 2. Cheby2 nos devuelve un vector B de longitud $N+1$ en el numerador y un vector A de igual longitud en el denominador, los cuales son los coeficientes del filtro.

- b) Hd = dfilt.estructure(coef): Nos devuelve un filtro en tiempo discreto que asocia los coeficientes “coef” con una estructura de un filtro en partícula.
- c) Df2t: Construye un filtro en tiempo discreto transpuesto
- d) Filter(A,B,X): Filtra la información del vector X mediante el filtro descrito por los vectores A y B.

%TRAYECTORIA SECUNDARIA	
Fs = 8000;	%Frecuencia de muestreo
N = 800;	%Numero de muestras
Retardo = 7;	%Atraso de la señal
[B,A] = cheby2(4, 20, [0.04 0.5]);	%Filtro paso bandas con banda de
paso de	% 160 a 2000 Hz.
Hd = dfilt.df2t (B,A) ;	%Implementa el filtro anterior
	%usando la forma II directa
	% (direct form II transposed filter)
resplmp=log(0.99*rand(1,N-Retardo))+0.01)	% respuesta al impulso
.*sign(randn(1,N-Retardo))	% de la trayectoria
.*exp(-0.01*(1:N-Retardo))	
resplmpRetardada = [zeros(1, Retardo)resplmp]	%respuesta al impulso retrasada.
H = filter(Hd,resplmpRetardada);	%Trayectoria secundaria “REAL”
H = H/norm(H);	%Normalizando la trayectoria
secundaria	
t = 1/Fs:1/Fs:N/Fs;	%Definición de la escala de tiempo

el resultado lo podemos ver en la figura 5.2.

Como se comento en el capítulo 4, lo primero que tenemos que hacer al diseñar nuestro sistema de CAR(ANC), es el estimar la respuesta al impulso de nuestra trayectoria secundaria. Esto normalmente se logra empleando una señal aleatoria y sistemática, la cual se reproduce empleando la bocina. Esto se realiza sin la presencia del ruido no deseado. La siguiente ejecución de comandos realiza el trabajo de generar una señal aleatoria la cual será la ejemplificación de la señal empleada en un ejemplo práctico. Tal señal será reproducida durante un tiempo de 3.75 segundo. Esta señal también será la censada por el micrófono de error.

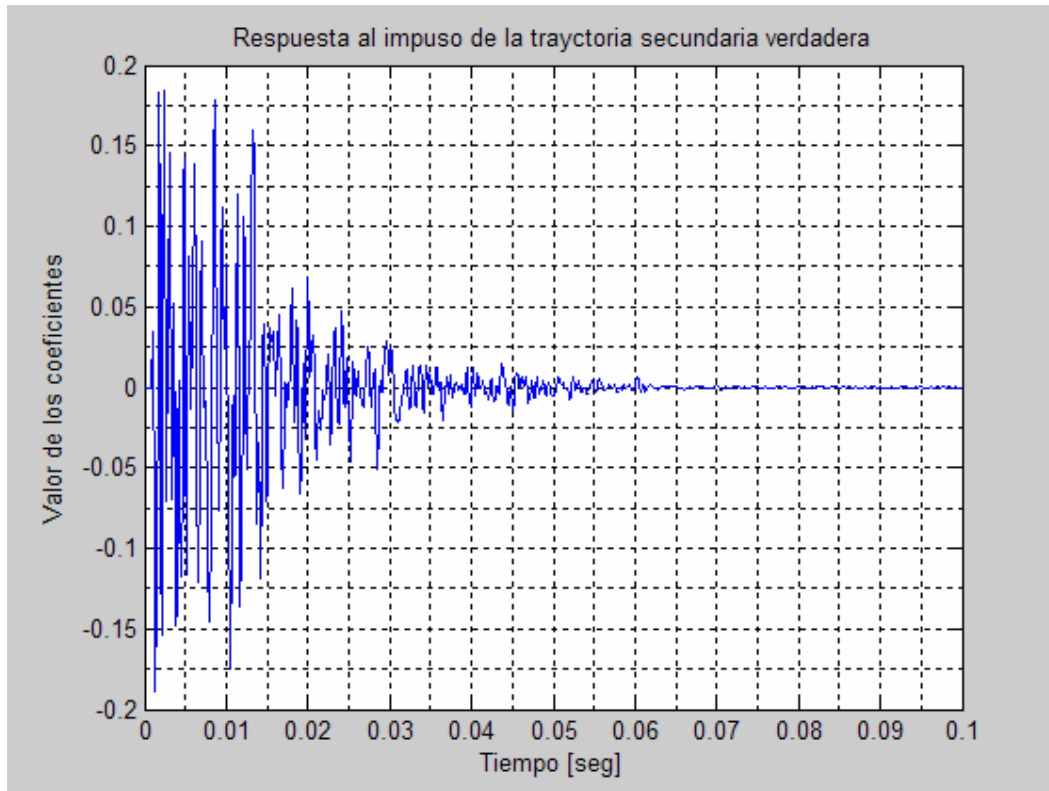


Figura 5.2 Respuesta al impulso de la trayectoria bocina-micrófono de error.

Los comandos empleados son:

- a) `randa`: Esta función nos devuelve una matriz de $N \times N$, la cual contiene valores pseudo aleatorios derivados de una distribución normal con media igual a cero y desviación estándar de uno.

%ESTIMACION DE LA TRAYECTORIA SECUNDARIA

Ns = 30000;

%Numero de muestras

senalMRef = randn(1,Ns);

% Señal censada por el micrófono de
% Ref.

**senalMError = filter(H, 1 , senalMRef)
+ 0.1*randn(1, Ns);**

%Señal censada por
%el micrófono de error

La respuesta al impulso de la trayectoria secundaria estimada esta ilustrada en la figura 5.3.

A continuación se estimara la trayectoria secundaria. Comúnmente la longitud de la trayectoria secundaria estimada no es tan grande como la longitud de la trayectoria real. Como el numero de derivaciones necesario para identificar a la planta depende de la frecuencia de muestreo y de la duración de la respuesta al impulso de la planta, la cual es la que se obtuvo con anterioridad, se hará uso de un filtro de 256 coeficientes lo cual equivale a una respuesta al

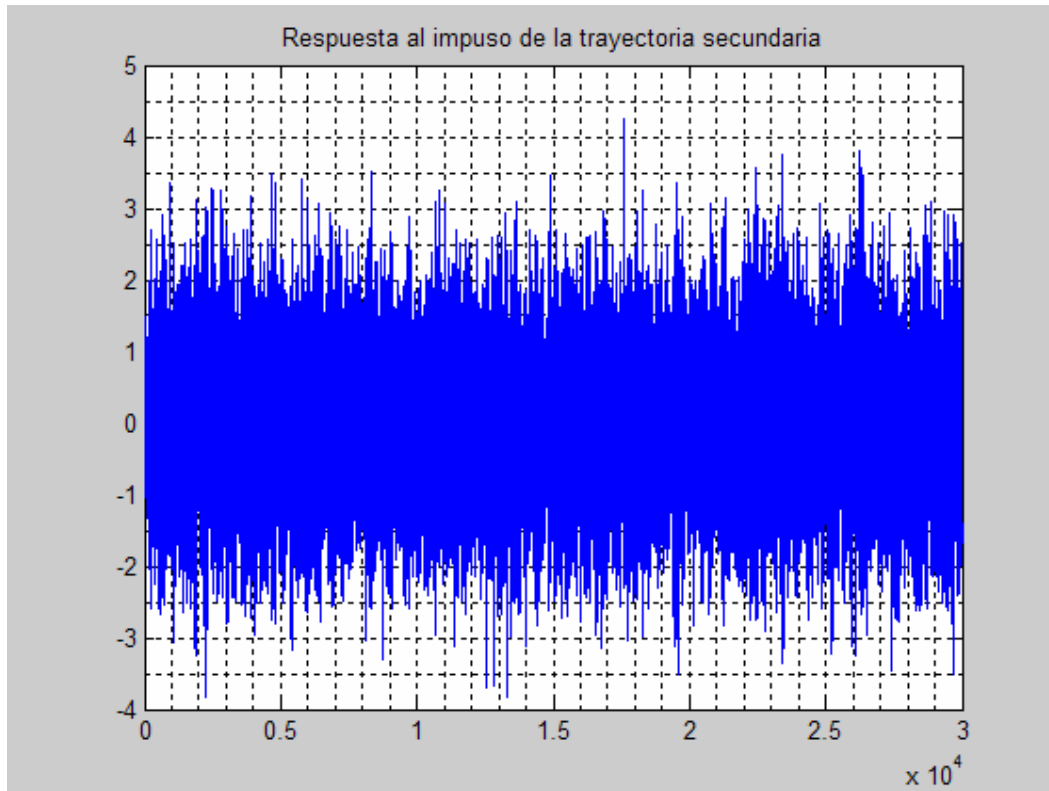


Figura 5.3 Respuesta al impulso de la trayectoria secundaria estimada antes de que se active el sistema de control adaptable.

impulso de 32 ms (si $F_s = 8000$, esto implica que $T = 0.000125$ seg, entonces $(256)(.000125 = 32 \text{ ms})$). Una vez que se tiene la longitud del filtro se hace uso de un algoritmo adaptable para la estimación de la trayectoria secundaria, comúnmente se utiliza el algoritmo LMS normalizado o NLMS debido a su simplicidad y robustez. Los comandos enmelados para las instrucciones que darán la estimación de la trayectoria secundaria en Matlab son:

- a) `adaptfilt`: `H=adaptfilt.algorithm(...)`, devuelve un filtro adaptable H usando el algoritmo indicado. Dependiendo del algoritmo se tendrán diferentes entradas a la función. Cuando se omiten algunas entradas se genera un filtro default.

```
%DISEÑANDO LA ESTIMACION DE LA TRAYECXTORIA SECUNDARIA
L = 256;                               % Longitud del filtro
mu = 0.1;                             % Paso de adaptación
w = adaptfilt.nlms(L, mu, 1, 0.1);    % Algoritmo NLMS de matlab
[He,e] = filter(w, senalMRef, senalMError);
```

De estos comandos podemos obtener tres figuras para evaluar los resultados de nuestro algoritmo. La primera es la figura 5.4 que es la señal deseada, la segunda es la figura 5.5 que es la salida del sistema y por ultimo la figura 5.6 que es la señal de error. En la figura 5.7 Podemos ver una comparación de las tres.

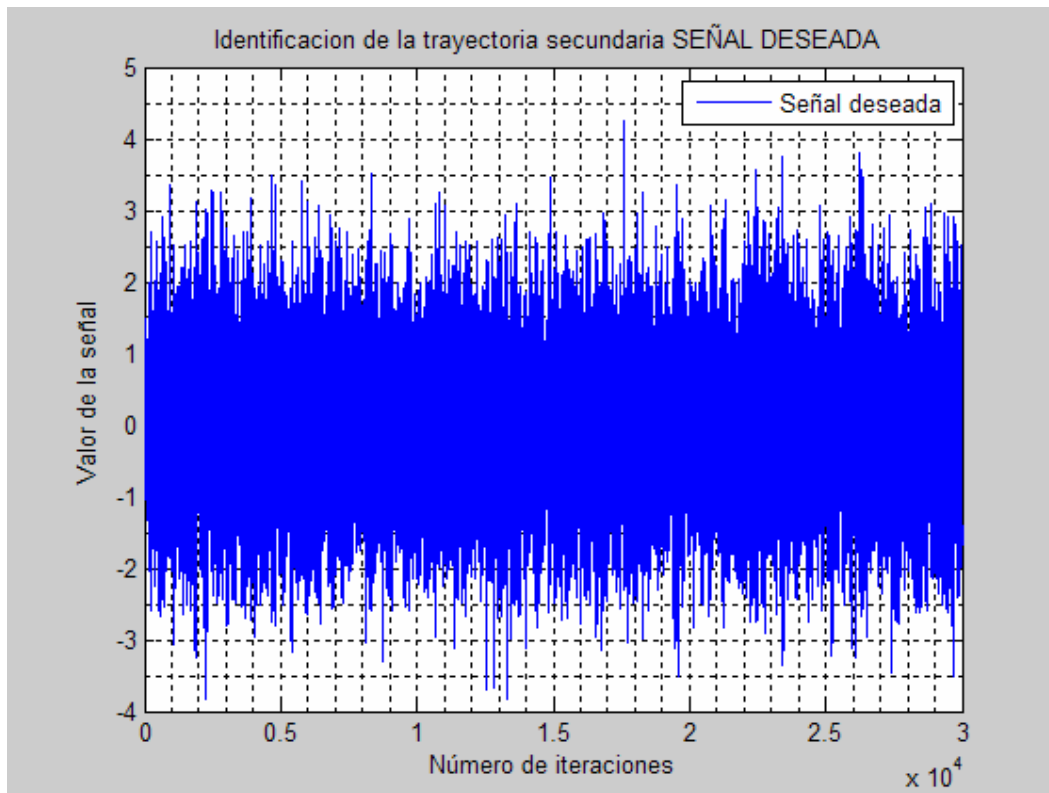


Figura 5.4. Señal Deseada

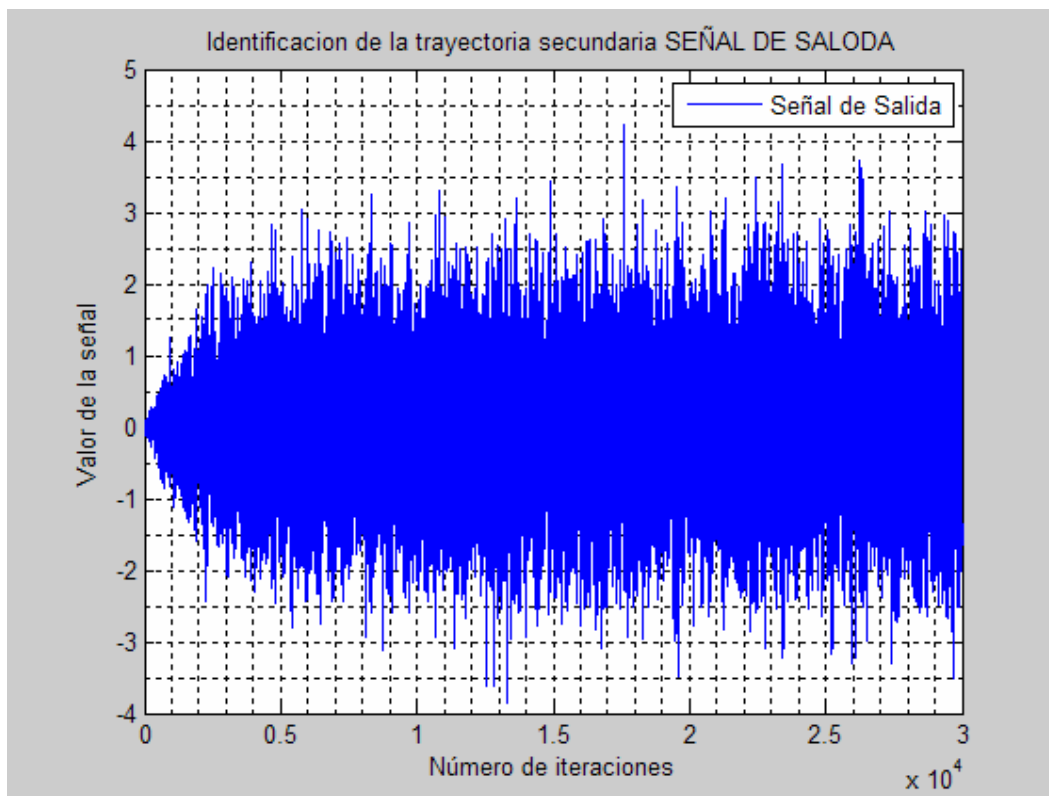


Figura 5.5. Señal de salida del filtro

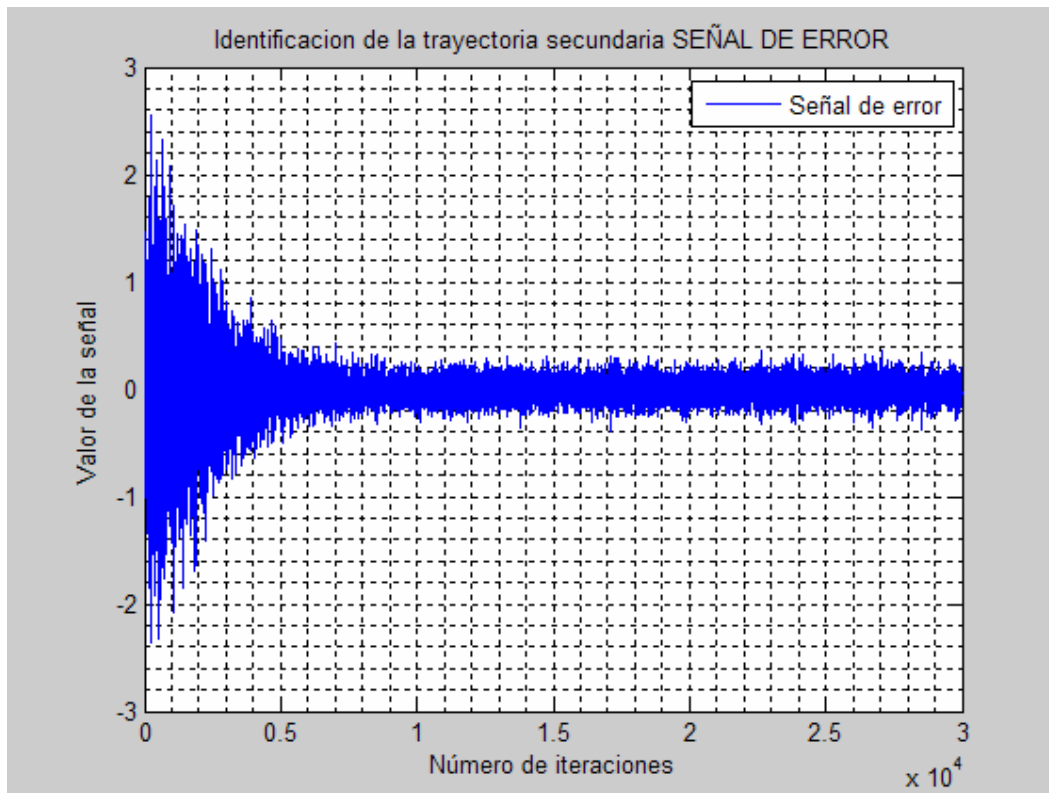


Figura 5.6. Señal de error

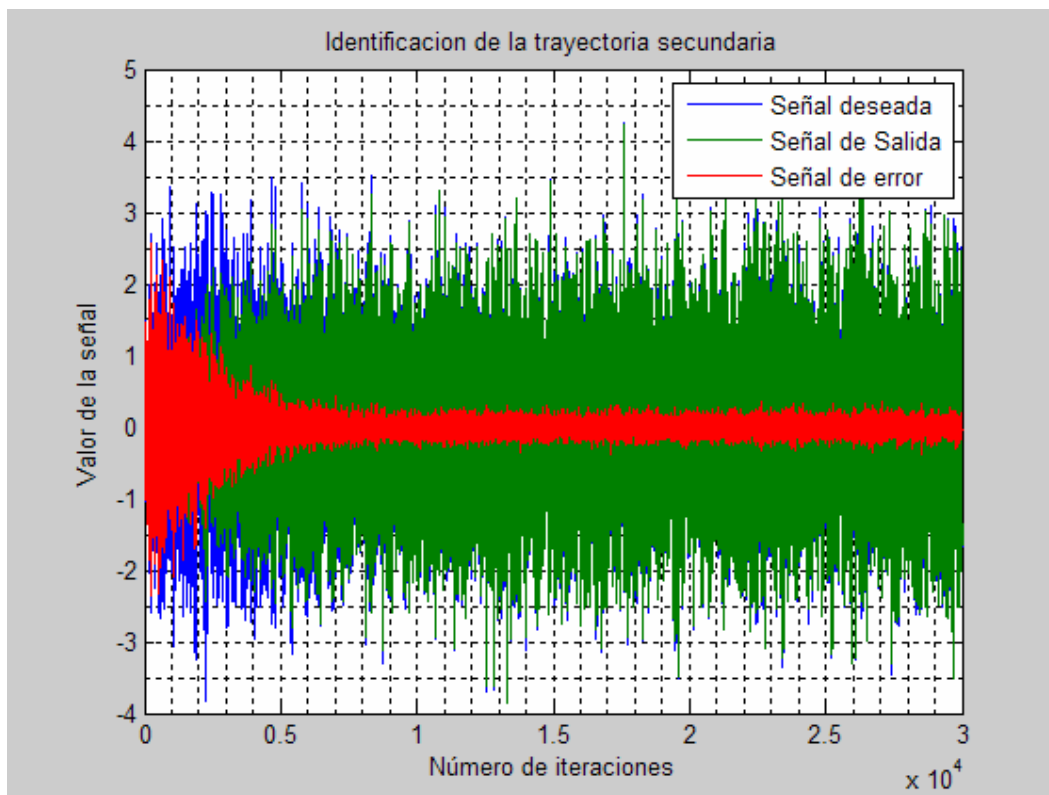


Figura 5.7. Figura comparativa de los resultados obtenidos

De la figura anterior resalta la pregunta, ¿Qué tan eficaz fue la estimación de la trayectoria secundaria?. En la siguiente grafica (figura 5.8) podemos ver y analizar el resultado.

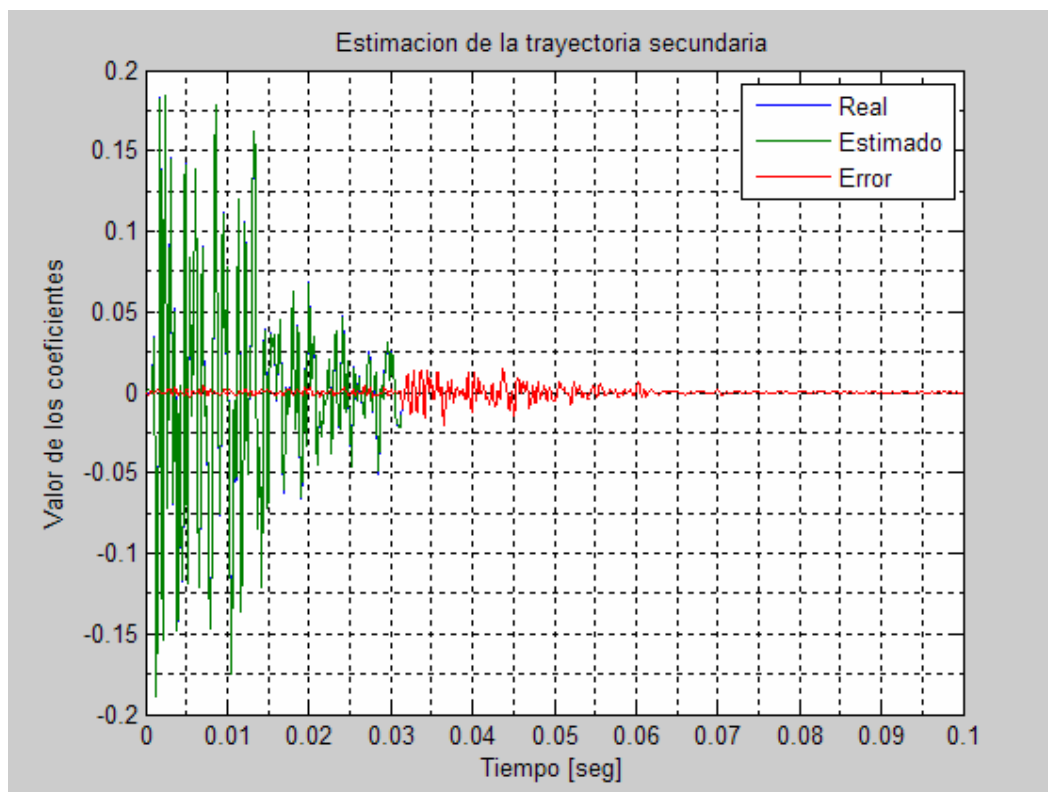


Figura 5.8. Coeficientes de la trayectoria secundaria real y la estimada.

Como podemos observar solamente la parte final de la respuesta al impulso de la trayectoria secundaria real no esta siendo estimada correctamente. Esto se debe al retardo que se menciono en el capitulo anterior que se debe al tiempo que la señal es alimentada a la bocina y el tiempo en el que es recibida en el micrófono de error.

Por otra parte, tenemos que calcular la respuesta al impulso de la función de transferencia de la trayectoria principal. Para ello hay que tomar en cuenta que se requiere que el sistema sea causal (por lo visto en el anterior capitulo), por tal motivo el retardo que se produzca debe de ser superior al introducido por H_e (función de transferencia de la trayectoria secundaria). Por lo establecido anteriormente podemos caracterizar la trayectoria de propagación del ruido a cancelar (Trayectoria Principal) con un filtro lineal. Las siguientes instrucciones generan la respuesta al impulso de la trayectoria entre la fuente de ruido y el micrófono de error (Trayectoria Principal). Debido a que el control activo de ruido, como ya se ha mencionado se usa para las bajas frecuencias, decidimos limitar en banda la respuesta al impulso en el rango de 200 a 800 Hz. Además como el retardo que produzca debe de ser mayor al de la trayectoria secundaria decidimos introducir un retardo de aproximadamente el doble del que se introdujo en la

trayectoria secundaria. Abajo en la figura 5.9 podemos observar la respuesta al impulso.

%TRAYECTORIA PRICIPAL

```
Retardo2 = 15; %Retardo introducido
[B,A] = cheby2( 5,20, [0.05 0.2]); %Filtro paso bandas con banda de
paso % 200 a 800 Hz

Hd2 = dfilt.df2t(B,A); %Implementa el filtro anterior usando la
%forma II directa (direct form II
%transposed filter)

respImp2 = log(0.99*rand(1,N-Retardo2) % respuesta al impulso
+0.01).*sign(randn(1,N-Retardo2)) % de la trayectoria primaria
.*exp(-0.01*(1:N-Retardo2))

respImpRetardada = [zeros(1, Retardo2 )respImp2] %respuesta al impulso retrasada.

Hp= fliter(H2, respImpRetardada); %Trayectoria principal

Hp = Hp / norm(Hp); % Normalizando Hp
```

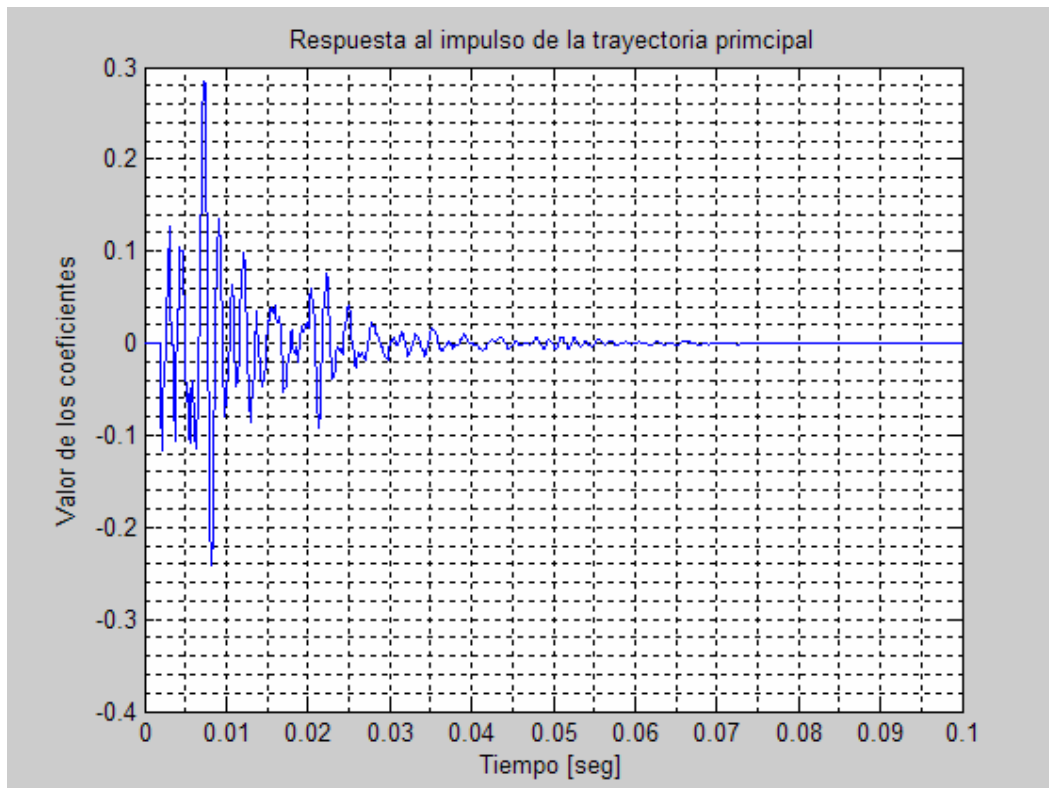


Figura 5.9. Respuesta al impulso de la trayectoria principal

Para poder seguir con nuestra simulación debemos trabajar en el ruido que se desea cancelar. La mayoría de los sistemas de CAR (ANC), están involucrados con maquinaria que presenta algún tipo de rotación la cual puede llegar a ser muy ruidosa y perturbable. Como simulación de este tipo de maquinas crearemos un ruido, el cual puede venir de un motor eléctrico común. Los comandos que emplearemos son los siguientes:

- a) pwelch: Esta función nos devuelve la densidad de potencia espectral de una señal X
- b) audioplayer: Crea un formato de audio a partir de una señal Y y una frecuencia de muestreo Fs.
- c) Playblocking: Reproduce un formato de audio del tipo “audioplayer”.

```

ntrW = 60000;           %Fs=8000 Ts=0.000125
F0 = 60;               %Tiempo de la señal 7.5 seg
n = 1:ntrW;            %ntrW=7.5/0.000125=60000 muestras

A = [0.01 0.01 0.02 0.2 0.3 0.4 0.3
     0.2 0.1 0.07 0.02 0.01];

x = zeros(1,ntrW);

for k=1:length(A);

    x = x + A(k)*sin(2*pi*(F0*k/Fs*n      %Generamos la señal x
    +rand(1)));

end

d = filter(G,1,x) + 0.1*randn(1,ntrW); %Se adiciona ruido a la señal

[Pd,F] = pwelch(d(ntrW-20000:ntrW),[],[],2048,Fs);

plot(F,10*log10(Pd(:,1)*Fs));

axis([0 2000 -25 30]);

xlabel('frecuencia en [Hz]');
ylabel('Estimacion de potencia espectral en [dB]');

title('Espectro del ruido a cancelar');

p8K = audioplayer(d/max(abs(d)),Fs); %Se cambia a formato de audio

playblocking(p8K);

```

Habiendo generado el ruido a cancelar proseguimos a generar nuestro control adaptable. Para ello emplearemos el algoritmo FXLMS. Nuestra señal de referencia será una versión de la señal de ruido generada anteriormente pero cerca de la fuente. Usaremos un filtro de control de 350 coeficientes, teniendo un $T=0.000125$, lo que me da una longitud del filtro de $350 \times 0.00125[s]=44\{ms\}$ y un parámetro de paso de 0.0001. Teniendo el siguiente código:

```
%CONTROLADOR ACTIVO DE RUIDO

xhat = x + 0.1*randn(1,ntrW);           %Señal de referencia
L = 350;                                %Coeficientes del filtro
muW = 0.0001;                           %Parametro de paso
h = adaptfilt.filtxllms(L,muW,1,Hhat);

[y,e] = filter(h,xhat,d);               %Señal de salida
plot(n,d,'b',n,y,'g',n,e,'r');

xlabel('Numero de iteraciones');
ylabel('Valor de la señal');
title('CAR(ANC) usando el algoritmo FXLMS');
grid minor;
legend('Ruido original','Anti-Ruido','Ruido restante');
p8K = audioplayer(e/max(abs(e)),Fs);
```

La figura 5.10 muestra la comparación entre el ruido original, el anti-ruido y el ruido restante del sistema. Como parte final de nuestra simulación compararemos la respuesta en frecuencia obtenida con la calculada anteriormente, la cual mostraremos en la figura 5.11. Al comparar el espectro final podemos observar la atenuación considerable de las componentes periódicas, el cual era nuestro objetivo ya que de tal manera el habla dentro de la región a cancelar no se ve afectada.

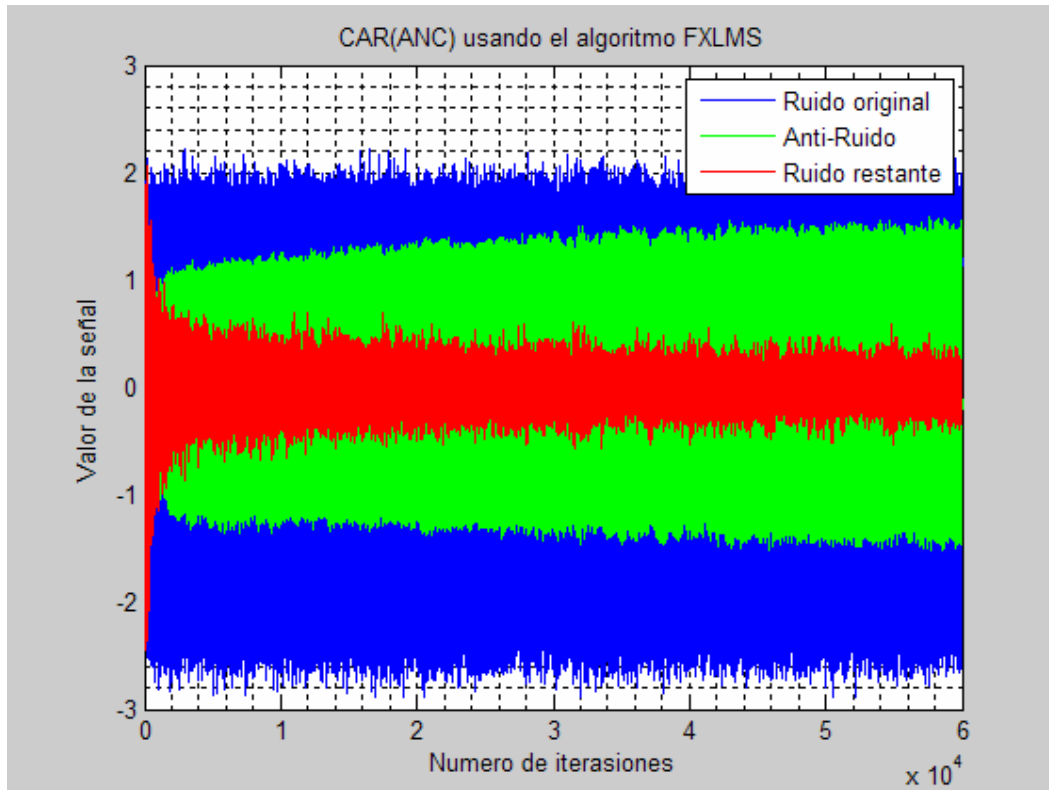


Figura 5.10 Comparación de la respuesta final del sistema

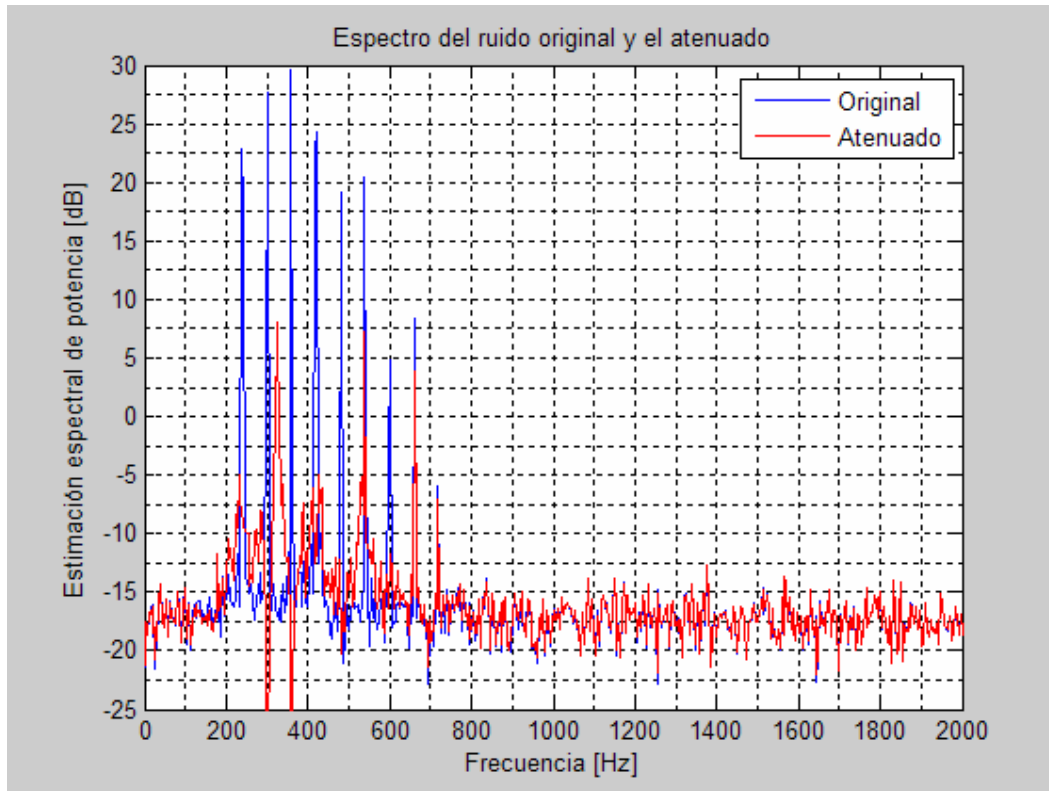


Figura 5.11 Comparación de Espectro con ruido y Espectro con ruido atenuado

CONCLUSIONES.

El desarrollo de un sistema de control activo de ruido acústico esta limitado por el fenómeno acústico, los transductores electro-acústicos y el controlador electrónico aun a esto, como se ha mencionado con anterioridad, la atenuación acústica por técnicas activas sólo es aplicable, a efectos prácticos, en bajas frecuencias hasta los 500 Hz, complementando el control menos eficiente que ofrecen las técnicas pasivas. Otro de los aspectos a considerar es la selección y ubicación de los transductores electro-acústicos (acelerómetros, micrófonos y altavoces) determina la bondad del sistema de control.

CONTRIBUCIONES APORTADAS.

Los objetivos de la tesis tenían como finalidad el análisis y comparación de los algoritmos de control adaptable existentes. Con esto se busco obtener los valores óptimos de los parámetros que rigen su funcionamiento, teniendo en cuenta que se tiene que obtener la máxima robustez, estabilidad y atenuación acústica posible. De igual manera expuso los diferentes algoritmos existentes para el control activo de ruido y por ultimo se ejemplifico el funcionamiento de un sistema de control de ruido mediante el uso de matlab. Al realizar lo anteriormente expuesto se llegaron a las siguientes conclusiones:

Las características de los elementos de un sistema de control activo de ruido (sensores, actuadores, recinto y controladores) determinan el funcionamiento óptimo del sistema. Los dispositivos electroacústicos han de tener una respuesta excelente únicamente en el margen de frecuencias de interés (0-500 Hz).

El funcionamiento del controlador está basado en algoritmos FIR e IIR adaptables. Los primeros son algoritmos estables cuyo número de coeficientes depende del retardo que tenga que realizar el controlador y de la frecuencia de muestreo utilizada.

Los filtros IIR son más eficientes desde el punto de vista del cómputo del proceso, ya que requieren menos coeficientes. Sin embargo, son potencialmente inestables al ser estructuras recursivas. Permiten además, cancelar la posible realimentación acústica que se pueda producir en una configuración de lazo cerrado.

Los coeficientes óptimos de los sistemas FIR e IIR del controlador se calculan a través de algoritmos adaptables que minimizan dinámicamente el nivel de la señal en el micrófono de error, el residuo final.

Esto con el fin de poder dar una visión más amplia de los alcances que este tipo de control de ruido puede tener.

APENDICE

A.1 FILTRO CHEBYSHEV

A.1.1 CHEBYSHEV TIPO I

Son los filtros mas comunes, La ganancia o amplitud responde a una función de frecuencia angula ω de un filtro paso bajas de orden n_{esimo} , la cual esta dada por

$$G_n(\omega) = |H_n(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}} \quad (1.1)$$

en donde ϵ es el factor de rizo, ω_0 la frecuencia de corte y $T()$ es el polinomio de Chebyshev de orden n_{esimo} . El paso banda presenta un comportamiento de rizo equitativo, estando el rizo determinado por ϵ . En la región de paso banda el polinomio de Chebyshev alterna entre 0 y 1. Por lo que la ganancia del filtro estará alternando entre una máxima de $G=1$ y una mínima de $G = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}$. En

la frecuencia de corte ω_0 la ganancia tiene el valor de $G = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}$, pero se va acercando a la región de corte de banda conforme la frecuencia se va incrementando. Esto lo pedemos ver en la figura A.1

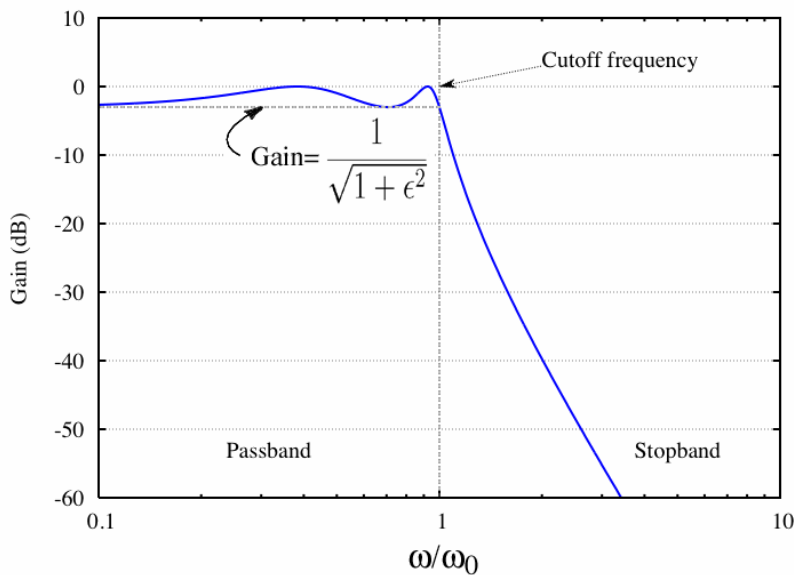


Figura A.1. Respuesta en frecuencia de un filtro paso bajas Chebyshev I de cuarto orden, con $\omega_0=1$ y $\epsilon=1$

A.1.2 CHEBYSHEV DE ORDEN II

Menos común que el anterior, también conocido como Chebyshev inverso. No presenta rizo en la región de banda de paso pero si presenta un rizo equitativo en la región de banda de corte. Su ganancia esta dada por

$$G_n(\omega, \omega_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}} \quad (1.2)$$

En donde la ganancia estará entre $0 < G < \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon^2}}}$ siendo la menor frecuencia en donde

este máximo es alcanzado ω_0 .

Esto lo podemos observar en la figura A.2

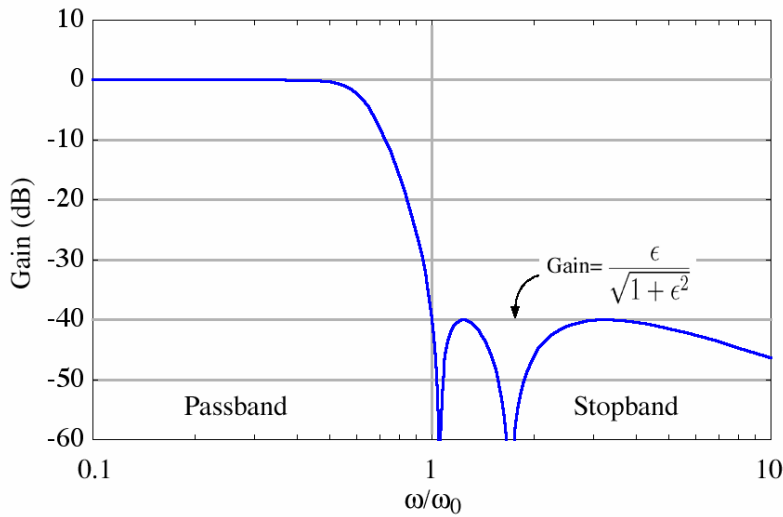


Figura A.2. Respuesta en frecuencia de un filtro paso bajas Chebyshev II de cuarto orden, con $\omega_0=1$ y $\epsilon=1.01$

BIBLIOGRAFIA

[Proakis 95] Jhon G. Proakis and Dimitris K. Manolakis, Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications (3rd Edition), Prentice Hall; 3rd edition 1995

[Oppenheim 89] Oppenheim A.V. and Schafer R.W., *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

[Stevens 2000] Active Noise Control Primer, Scout D. Snyder, AIP Press NY. 2000

[Kuo 92] Kuo S.M., Wang M. and Chen K., "Active Noise Control System with Parallel On-line Error Path Modeling Algorithm". *Noise Engineering Journal* Vol. 39, No. 3. Nov-Dec 1992.

[MATLAB 97] Matlab for Windows, Ver. 5.0, the MathWorks, Inc. 1997.

[Widrow 75] B. Widrow and J. Glover, Proceedings of the IEEE paper, Adaptive Noise Canceling: Principles and Applications

[Kuo 99] Sen M. Kuo and Dennis R. Morgan, Proceedings of the IEEE paper Active Noise Control: A Tutorial Review, Vol 87 No. 6 June 1999