FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA

"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001

C-6

CURSOS INSTITUCIONALES

DIPLOMADO EN USO EFICIENTE DEL AGUA EN CIUDADES

MOD. III USO EFICIENTE DEL AGUA POTABLE EN CIUDADES

Del 14 al 22 de septiembre de 2001

APUNTES GENERALES

Ing. Enrique Cesar Valdés
Comisión Nacional del Agua
Agosto – septiembre /2001

CAPITULO 6. FLUJO NO PERMANENTE EN RIOS

6.1 INTRODUCCION

El estudio del flujo no permanente en ríos adquiere cada vez más importancia, tanto en problemas de predicción (por ejemplo, de daños por inundaciones) como en el diseño de obras. Con los métodos que se describen en este capítulo se calcula la evolución del gasto y nivel del agua en una sección dada y a lo largo de un río o canal. Además, se obtiene el tiempo de llegada del pico de una avenida, así como el gasto y nivel del agua correspondientes. Esta información es necesaria para diseñar la altura de bordos, para planear medidas de emergencia y definir políticas de control o regulación. Los métodos aquí analizados se utilizan también en el diseño de redes telemétricas para predicción de avenidas y de acciones de alarma, así como para estudiar el efecto de medidas estructurales o no estructurales, como rectificación de tramos, bordos, etc.

Aunque el análisis del flujo no permanente es aparentemente complejo, se trata aquí de presentarlo en forma sencilla, incluyendo sólo los aspectos teóricos necesarios. A lo largo del texto se indican las referencias para que el lector interesado pueda profundizar en el tema.

En el subcap 6.2 se discuten las ecuaciones fundamentales que describen el flujo no permanente en cauces y canales. Se comenta la validez de las formulaciones presentadas; se dan indicaciones para la selección de las ecuaciones adecuadas según el problema que se desea resolver. Se ven también los requerimientos de datos iniciales y de condiciones de fronteras, así como la validez de las ecuaciones cuando hay discontinuidades en el flujo.
En el subcap 6.3 se describen los que aquí se definen como métodos hidrológicos, que se basan en versiones simplificadas de las ecuaciones fundamentales. Estos métodos son sólo útiles para transitar avenidas cuando se dispone de poca información topográfica del tramo en estudio. Los métodos más generales para el tránsito de avenidas en ríos se ven en el subcap 6.4. Estos métodos requieren más información topográfica, de rugosidad, etc, pero dan mejores resultados que los del subcap 6.3; son además útiles para otros problemas de flujo no permanente como el estudio de propagación de ondas de marea, cálculo de redes de canales de riego, etc; además, dan información de niveles y velocidades a lo largo del cauce. En este subcapítulo se incluye el cálculo del flujo en llanuras de inundación.
En el subcap 6.5 se describe un modelo para el cálculo de la evolución del fondo en cauces arenosos. Se da una versión sencilla del algoritmo, útil para predicción de procesos de erosión y sedimentación en el largo plazo.
El capítulo incluye ejemplos detallados de los principales métodos descritos a lo largo del texto. El estudio del flujo no permanente ha avanzado a grandes pasos principalmente en la última década gracias al desarrollo de la computación. Incluso se ha dado lugar a lo que ahora se llama Hidráulica Computacional. Por ello, se incluyen programas de cómputo en apéndices al final del capítulo, cada uno documentado y con su manual de usuario. Los programas se han hecho usando programación estructurada, en lenguaje FORTRAN 77 y en versión para PC compatible. Estos programas están basados en los desarrollos de los subcap 6.2 a 6.4.

6.2 ECUACIONES FUNDAMENTALES

6.2.1 Hipótesis básicas

El flujo en ríos es un fenómeno complejo que es necesario describir de alguna forma para poder resolver problemas de Ingeniería. Esta descripción se hace con las llamadas ecuaciones fundamentales. De estas ecua ciones existen distintas versiones, cada una de las cuáles considera con mayor o menor precisión al fenómeno físico que se quiere representar. Por tanto, al usar un grupo de ecuaciones se debe conocer cuales son sus limitaciones y qué tan bien modelan el fenómeno.

Las ecuaciones más generales de la mecánica de fluidos son las llamadas ecuaciones de Navier-Stokes; pero debido a su complejidad sólo tienen solución para unos cuantos casos. Sin embargo, pueden establecerse ecuaciones que describan al flujo no permanente en cauces con una aproximación suficiente. Estas ecuaciones son un modelo simplificado de la realidad pero incluyen los efectos más importantes del flujo desde el punto de vista de la Ingeniería.

Las hipótesis que permiten describir el escurrimiento en cauces y canales, con una aproximación aceptable desde el punto de vista ingenieril, son las llamadas hipótesis de Saint-Venant:

a) el flujo es unidimensional por lo que la velocidad es uniforme en la sección trasversal; además, el nivel del agua en dirección normal al flujo es horizontal
b) la curvatura de las líneas de corriente y las aceleraciones verticales son pequeñas; la distribución de presiones es hidrostática
c) las leyes de fricción y turbulencia usadas para flujo uniforme permanente son válidas para el flujo no permanente
d) la pendiente del fondo del cauce o canal es pequeña
e) la densidad del agua es constante

La sección del cauce es de forma arbitraria y puede variar a lo largo del mismo, siempre y cuando dicha variación no cause curvatura fuerte en las líneas de corriente.

El flujo no permanente en cauces y canales se describe con dos variables dependientes, como el tirante y el gasto, a lo largo del río; estas dos variables dependientes son, por tanto, función de las variables independientes espacio, x, y tiempo, t.

Aunque en hidráulica se dispone de tres ecuaciones fundamentales (continuidad, energía y cantidad de movimiento), dado que son suficientes dos variables para describir el flujo no permanente, sólo se requieren dos ecuaciones fundamentales. Puede demostrarse (ver por ejemplo, Abbott (1979)) que cuando las variables que describen el flujo son discontinuas (como en el salto hidráulico, en ondas generadas por compuertas o en frentes de ondas), los resultados que se obtienen si se usa una formulación basada en el par de ecuaciones continuidad-cantidad de movimiento, o en el par continuidad-energía son diferentes, y que sólamente es correcto el obtenido si se emplea la ecuación de cantidad de movi

miento. Sin embargo, cuando las variables son continuas cualquiera de las dos representaciones puede usarse puesto que son equivalentes. La selección de la formulación adecuada es muy importante pues en ella se basa el desarrollo de los modelos matemáticos. En función de la formulación escogida es el tipo de problemas que pueden o no resolverse. Un tratamiento completo de este tema sale del objetivo del Manual pero puede verse en Abbott(1979) y Aparicio(1985). Por ser más general se utilizan aquí las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento.
En el Apéndice 1 se presenta la deducción de las distintas versiones de las ecuaciones fundamentales. A continuación se resumen dichas ecuaciones, y se comenta la aplicabilidad de cada versión.

6.2.2 Resumen de las ecuaciones fundamentales

<u>Versión integral conservativa</u>

Ecuación de continuidad

$$\int_{x1}^{x2} [(A)_{t2} - (A)_{t1}]dx + \int_{t1}^{t2} [(Q)_{x2} - (Q)_{x1}]dt = 0 \qquad (6.2.1)$$

Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

$$\int_{x1}^{x2} (Q_{t2} - Q_{t1})dx = \int_{t1}^{t2} [(Q^2/A)_{x1} - (Q^2/A)_{x2}]dt$$

$$+ g\int_{t1}^{t2} [(I1)_{x1} - (I1)_{x2}]dt + g\int_{t1}^{t2}\int_{x1}^{x2} I2dxdt$$

$$+ g\int_{t1}^{t2}\int_{x1}^{x2} A(S_0 - S_f)dxdt \qquad (6.2.2)$$

En las ecs 6.2.1 y 6.2.2

- A área hidráulica
- U velocidad media en la sección trasversal
- Q=AU gasto o caudal
- $S_0 = -\partial Z/\partial x = \text{sen}\,\alpha \cong \tan\alpha$, pendiente del fondo
- S_f pendiente de fricción
- g aceleración de la gravedad
- x1 indica la sección a una distancia x1

t_1 indica el tiempo t_1

I_1 e I_2 se definen con las siguientes integrales

$$I_1 = \int_0^{h(x)} [h(x)-\eta]\sigma(x,\eta)d\eta \qquad (6.2.3)$$

$$I_2 = \int_0^{h(x)} [h(x)-\eta]\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right]_{ho} d\eta \qquad (6.2.4)$$

donde (ver las figuras del Anexo 1)

- h tirante
- η altura desde el fondo del canal
- σ ancho del canal a la altura η
- B ancho de la superficie libre del agua

Versión diferencial (divergente)

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad (6.2.5)$$

Ecuación de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A} + gI_1\right) = gA(S_0 - S_f) + gI_2 \qquad (6.2.6)$$

Versión diferencial de la ecuación dinámica

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) + gA\frac{\partial h}{\partial x} + gA(S_f - S_0) = 0 \qquad (6.2.7)$$

Ecuaciones simplificadas

Ecuación de convección-difusión

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \left(\frac{Q}{BK_r}\frac{dK_r}{dh}\right)\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{K_r^2}{2B|Q|}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \qquad (6.2.8)$$

donde K_r es el factor de conducción definido según la fórmula de resistencia al flujo que se emplea; en general estas ecuaciones pueden expresarse como

$$Q = Kr \; (\; S_f \;)^{\alpha} \qquad (6.2.9)$$

donde α es un exponente. Si se usa la fórmula de Manning, α = 1/2

Ecuación de la onda cinemática

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \left(\frac{dQ}{dA}\right)_{x_o} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad (6.2.10)$$

donde $(dQ/dA)_{x_o}$ es la celeridad de onda en la sección x_o

Métodos de almacenamiento

Ecuación de almacenamiento

$$\frac{dS}{dt} = Qi - Qs \qquad (6.2.11)$$

donde

S volumen almacenado

Qi, Qs gasto de entrada y salida al tramo, respectivamente

Ecuación de Muskingum

$$S = K \; [\; \varepsilon Qi + (1-\varepsilon)Qs \;] \qquad (6.2.12)$$

donde

K parámetro de almacenamiento

ε factor de peso

La versión integral de las ecuaciones fundamentales, ecs 6 2.1 y 6.2.2, es la más general posible. Estas ecuaciones son validas para cualquier volumen de control en el plano (x,t) y las variables pueden ser continuas o discontinuas. Al calcular las integrales se garantiza que se conserve el volumen de liquido y la cantidad de movimiento, esto es, no hay pérdidas de estas propiedades ni a lo largo del canal ni en el tiempo. Por ello, estas ecuaciones, son válidas para cualquier problema de flujo no permanente a superficie libre.

Si las variables son continuas y derivables puede usarse la versión diferencial divergente dada por las ecs 6.2.5 y 6.2.6. Si la ec 6 2.6 se iguala a cero se satisface que la divergencia de los vectores A y Q sea nula y por definición se conserva continuidad y cantidad de movimiento. Por tanto, si se considera que el lado derecho de la ec 6.2.6 es pequeño, las ecuaciones son en esencia conservativas, es decir, es la versión diferencial de las ecuaciones integrales, pero aplicables únicamente cuando las variables son continuas.

En sentido estricto, al usar la ecuación de continuidad y la ecuación dinámica, ecs 6.2.5 y 6.2.7, ya no se conserva la cantidad de movimiento puesto que se han cancelado algunos términos de la ec 6.2.6 y además ya no es posible obtener divergencia nula. Es más, al combinar las ecs 6.2.5 y 6.2.7 se llega a una ecuación semejante a la de energía y por tanto la ecuación dinámica no es aplicable cuando, además de discontinuidades (como el salto hidraúlico), existan fuerzas que no están incluidas, como las causadas en escalones, cambios de sección, etc. De cualquier manera, pueden resolverse una gran cantidad de problemas con esta versión, entre ellos el tránsito de avenidas.

Estas versiones forman un sistema diferencial hiperbólico y por tanto requieren dos condiciones de frontera; en flujo subcrítico, que es el más común en cauces, se da una condición de frontera aguas arriba y otra aguas abajo. Se requieren además datos iniciales; ver subcap 6.2.3.

El método de convección-difusión, ec 6.2.8, es aplicable cuando los primeros dos términos de la ec 6.2.7 son pequeños comparados con los otros; esto se da en general en cauces con pendiente relativamente fuerte. La ecuación 6.2.8 tiene dos partes, una en que la onda es transportada (convección) y otra en que se atenua el pico (dispersión).

La ec 6.2.8 es aplicable únicamente para tránsito de avenidas y puede incluirse el efecto de remansos. Esta ecuación diferencial es de tipo parabólico, y requiere por tanto, dos condiciones de frontera, (una aguas arriba y otra aguas abajo) e información de una variable como datos iniciales.

La ecuación de la onda cinemática, ec 6.2.10, describe el movimiento de una onda que viaja hacia aguas abajo, sin ser atenuada. Esto solo sucede en tramos cortos de cauces, donde además de despreciarse los términos de inercia, la variacion longitudinal del tirante es pequeña, lo que sucede en general en cauces con pendiente relativamente fuerte. Se requiere información de una variable en la frontera de aguas arriba y de una variable a lo largo del cauce como datos iniciales.

El método de Muskingum (ecs 6.2.11 y 6.2.12) es un procedimiento semi-empírico, útil únicamente para transitar avenidas en tramos cortos, donde no hay efectos de remansos, sean naturales o causados por la entrada de tributarios. En este método se requieren únicamente datos en la frontera de aguas arriba.

Como se ha visto es posible hacer el cálculo de flujo no permanente en ríos con varios métodos o grupos de ecuaciones. Hay problemas en que solamente es aplicable un método y otros en que es posible emplear varios. Además, debe tenerse en cuenta que cada método tiene requerimientos de datos distintos. En la tabla 6.2.1 se resume, para cada aproximación, el método y ecuaciones resultantes. En la tabla 6.2.2 se dan para cada método los requerimientos de datos para poder resolver las ecuaciones respectivas.

TABLA 6.2.1 Versiones de las ecuaciones fundamentales

Formulación	Aproximación	Ecuaciones
1) Versión integral de las ecuaciones de Saint-Venat	ninguna	6.2.1 y 6.2.2
2) Versión diferencial divergente	funciones continuas y derivables	6.2.5 y 6.2.6
3) Versión diferencial no divergente	ecuación dinámica	6.2.5 y 6.2.7
4) Convección-difusión	se desprecian los términos de inercia, $\partial U/\partial t$ y $U \partial U/\partial x$	6.2.8
5) Onda cinemática	$\partial h/\partial x$ es pequeño	6.2.10
6) Método de almacenamiento	remplaza la ecuación dinámica por una relación lineal (Muskingum) para el almacenamiento	6.2.11 y 6.2.12

En el subcap 6.4 se discuten métodos para la solución de las ecuaciones que se obtienen con las formulaciones 1 a 3 de la tabla 6.2.1, y que son los más generales; en el subcap 6.3 se ven los métodos adecuados para resolver las ecuaciones de las formulaciones 4 a 6.
Para poder resolver las ecuaciones fundamentales (sean la versión integral o diferencial) se requiere de datos iniciales y condiciones de frontera. La definición del tipo y número datos necesarios puede hacerse con ayuda del método de las características que se presenta

brevemente a continuación. La discusión se centra en la formulación 3 de la tabla 6.2.1; para las formulaciones 4 a 6 ver subcap 6.2.4.3.

TABLA 6.2.2 Requerimiento de datos para las formulaciones de la tabla 6.2.1

Formulación	Datos necesarios
1 al 3	Geometría de secciones trasversales, rugosidad, condiciones de frontera aguas arriba y aguas abajo
4 al 6	Pendientes y topografía simplificada. Avenidas previas aforadas

6.2.3 Método de las características

En lo que sigue, se habla de propagación de disturbios. Un disturbio es cualquier alteración en el flujo, como la que causaría un aumento del gasto, un movimiento de compuertas, etc; formalmente estos disturbios son pequeños, por lo que, por ejemplo una onda de avenida puede considerarse como la suma de muchos disturbios. Cualquier disturbio en un canal con flujo subcrítico se propaga (a lo largo del canal y en el tiempo) hacia aguas arriba y hacia aguas abajo. Por ello, si se provoca un disturbio en el punto Q de la fig 6.2.1a, este influye en la región sombreada limitada por las dos curvas C+ y C-, que representan la trayectoria de los disturbios; es decir, un observador en la zona sombreada vería pasar la alteración en el flujo mientras que otro fuera de ella no la percibiría. De manera semejante, puede definirse la región en la cual, de haber disturbios, se afectaría un punto P; dicho de otra manera, cualquier disturbio fuera de la región sombreada en la fig 6.2.1b no tendrá influencia en el punto P. Las líneas que forman las fronteras de las regiones de influencia o de dependencia de las figuras son llamadas curvas características.

La velocidad con que se propagan discontinuidades en la pendiente de la superficie libre del agua o en el gradiente de la velocidad es la celeridad de ondas en aguas bajas

$$\frac{dx}{dt} = U \pm c = U \pm \left(g\frac{A}{B}\right)^{1/2} \qquad (6.2.13)$$

A.1 OBTENCION DE LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES

Para obtener las ecuaciones fundamentales, se toman en cuenta las llamadas hipótesis de Saint-Venant dadas en el subcap 6.2.1. La deducción se presenta empezando con la forma más general de las ecuaciones. Una discusión más extensa puede verse en Liggett (1975), Cunge *et al* (1980) y Aparicio(1985).

A.1.1 Forma integral

Se considera el volumen de control en el plano (x,t) definido entre las secciones $x=x_1$ y $x=x_2$; se conocen los valores en el tiempo $t=t_1$, y se desea calcular en el tiempo $t=t_2$, fig A.1.1.

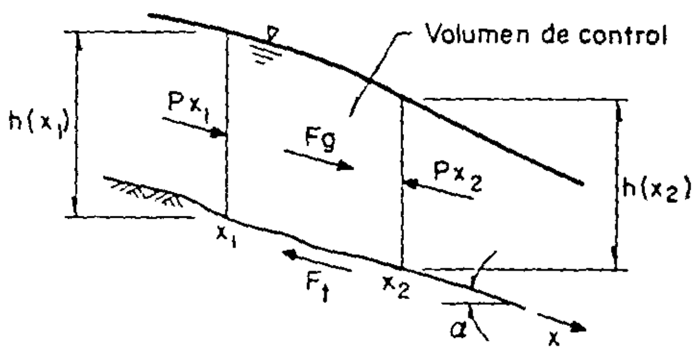


Fig A.1.1 Volumen de control (corte longitudinal)

El principio de conservación de la masa, aplicado al volumen de control de la figura establece que el flujo neto de masa hacia el volumen de control es igual al cambio de almacenamiento en el mismo entre los tiempos t_1 y t_2. La entrada neta de masa por los flujos hacia el volumen de control es

$$\int_{t1}^{t2} [(\rho UA)_{x1} - (\rho UA)_{x2}]dt$$

donde

- ρ densidad del agua
- U velocidad media en la sección
- A área de la sección trasversal
- x_1 indica la sección a una distancia x_1

$(\rho UA)_{x1}$ es el flujo de masa por la sección x_1 en la unidad de tiempo. El cambio de almacenamiento de la masa de líquido dentro del volumen de control entre los tiempos t_1 y t_2 es

$$\int_{x1}^{x2} [(\rho A)_{t2} - (\rho A)_{t1}]dx$$

La relación integral que define la conservación de masa (ecuación de continuidad), si se considera que la densidad es constante, resulta por tanto

$$\int_{x1}^{x2} [(A)_{t2} - (A)_{t1}]dx + \int_{t1}^{t2} [(Q)_{x2} - (Q)_{x1}]dt = 0 \qquad (A.1.1)$$

donde Q=AU es el gasto.

El principio de conservación de la cantidad de movimiento aplicado al volumen de control de la fig A.1.1 establece que el cambio de cantidad de movimiento dentro del volumen, entre los tiempos t_1 y t_2 es igual a la suma de la cantidad de movimiento neta que entra al volumen con el flujo, más la integral de las fuerzas externas que actúan sobre él. La cantidad de movimiento se define como el producto de la masa por la velocidad; la cantidad de movimiento que entra con el flujo será entonces $\rho UA\ U = \rho U^2 A$. La cantidad de movimiento neta que entra al volumen de control entre los tiempos t_1 y t_2 es por tanto

$$\int_{t1}^{t2} [(\rho U^2 A)_{x1} - (\rho U^2 A)_{x2}]dt \qquad (A.1.2)$$

La cantidad de movimiento contenida en el volumen de control de la fig A.1.1 en cualquier instante t es $\int_{x1}^{x2} [\rho UA]_t dx$ y el cambio de dicha cantidad de movimiento dentro del volumen de control, entre los tiempos t_1 a t_2 será

$$\Delta M = \int_{x1}^{x2} [(\rho UA)_{t2} - (\rho UA)_{t1}]dx \qquad (A.1.3)$$

Las fuerzas externas que actúan sobre el volumen de control en la dirección x son las de presión, gravedad y resistencia al flujo.

Presión. Es la resultante de las fuerzas aplicadas en las fronteras $x = x_1$ y $x = x_2$ del volumen de control de la fig A.1.1. Aceptando la hipótesis de distribución hidrostática de presiones en la vertical, la fuerza de presión que actúa en cualquier sección x del volumen de control es (ver fig A.1.2)

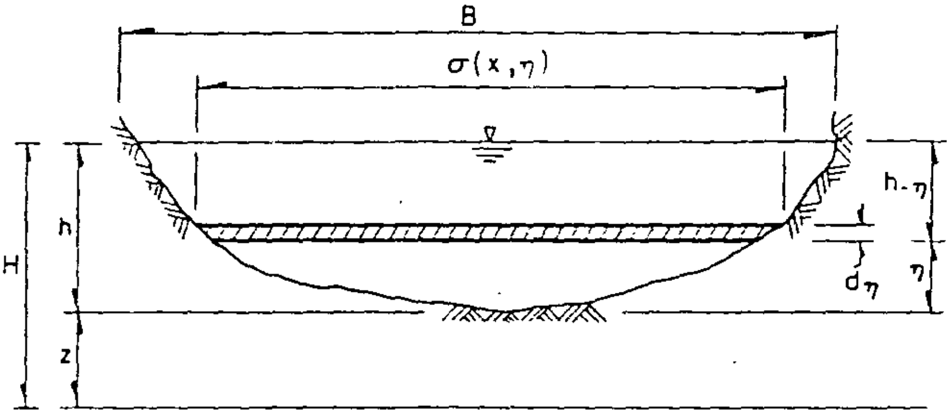


Fig A.1.2 Sección trasversal

$$P_x = g\int_0^{h(x)} \rho[h(x) - \eta]\sigma(x,\eta)d\eta$$

donde η es una altura cualquiera desde el fondo del canal y σ es el ancho del canal a la altura η. El impulso debido a la fuerza de presión que actúa en la dirección x es la integral en el tiempo de la resultante de las fuerzas en las secciones x_1 y x_2, esto es

$$\int_{t1}^{t2}(P_{x1} - P_{x2})dt = \rho g\int_{t1}^{t2}[(I_1)_{x1} - (I_1)_{x2}]dt \qquad (A.1.4)$$

donde I_1 se define con la siguiente integral

$$I_1 = \int_0^{h(x)}[h(x)-\eta]\sigma(x,\eta)d\eta \qquad (A.1.5)$$

Cuando el canal no es prismático, existe una fuerza adicional de presión debida al cambio de geometría del canal, Vx (fig A.1.3), dada por

$$V_x = \rho g\int_{x1}^{x2}\int_0^{h(x)}[h(x) - \eta]\left[\frac{\partial\sigma(x,\eta)}{\partial x}\right]_{ho} d\eta dx$$

El término $(\partial\sigma/\partial x)d\eta dx$ es el incremento del área hidráulica A a una altura ho medida desde el fondo del canal, en una longitud infinitesimal dx en la dirección x, $dA=d\sigma d\eta = (\partial\sigma/\partial x)dxd\eta$, y $[h(x) - \eta]$ es la distancia vertical de la superficie libre al centroide del elemento de área $\sigma d\eta$. Por tanto la fuerza que actúa en el volumen de control debido al cambio de geometría de la sección, entre los tiempos t_1 a t_2 es

$$\int_{t1}^{t2}\int_{x1}^{x2} V_x dxdt = \rho g \int_{t1}^{t2}\int_{x1}^{x2}\int_{0}^{h(x)} [h(x)-\eta]\left[\frac{\partial\sigma(x,\eta)}{\partial x}\right]_{ho} d\eta dxdt = \rho g \int_{t1}^{t2}\int_{x1}^{x2} I_2\, dxdt \qquad (A.1.6)$$

donde I_2 se define con la integral siguiente

$$I_2 = \int_{0}^{h(x)} [h(x)-\eta]\left[\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right]_{ho} d\eta \qquad (A.1.7)$$

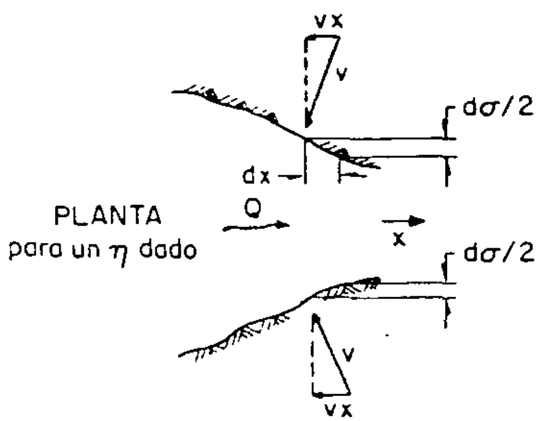


Fig A.1.3 Fuerza por cambio de ancho

Se hace notar que para un canal prismático, sea cual sea la forma de su sección transversal, $\sigma(x,ho)$=cte, y por tanto $I_2=0$. Debe tenerse en cuenta que $\partial\sigma/\partial x$ debe ser pequeño, (es decir, el cambio de ancho suficientemente gradual) para que la curvatura de las líneas de corriente se pueda considerar despreciable, y no se violen las hipótesis de Saint-Venant. En general la fuerza dada por la ec A.1.6 es pequeña comparada con la de la presión hidrostática dada por la ec A.1.4.

Gravedad. La fuerza debida a la gravedad es el componente del peso del agua, contenida en el volumen de control de la fig A.1.1, en la dirección del eje del canal; en cualquier instante se calcula como

$$F_g = \rho g \int_{x1}^{x2} S_0 A dx \qquad (A.1.8)$$

donde $S_0 = -\partial Z/\partial x = \operatorname{sen}\alpha \cong \tan\alpha$, pendiente del fondo.

Resistencia al flujo. Esta fuerza, comúnmente conocida como fricción, se aplica al volumen de control considerando los esfuerzos cortantes en el fondo y las márgenes del canal; se acostumbra expresarla de modo similar a la ec A.1.8, mediante una *pendiente de fricción*, S_f, equivalente a la pendiente de la línea de energía necesaria para vencer la resistencia al flujo producida por la rugosidad del fondo y las márgenes. Así, la fuerza debida a la resistencia al flujo o fricción que actúa sobre el volumen de control es $Fr = \rho g \int_{x1}^{x2} [S_f A] dx$. Como Fg y Fr actúan en direcciones opuestas, la combinación de ambas en el intervalo de t_1 a t_2, expresada en la dirección x, es

$$\int_{t1}^{t2} (Fg - Fr) dt = \rho g \int_{t1}^{t2} \int_{x1}^{x2} A(S_0 - S_f) dx dt \qquad (A.1.9)$$

Tomando en cuenta las ecs A.1.2 a A.1.4, A.1.6 y A.1.9 al aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento enunciado arriba resulta, para densidad constante

$$\int_{x1}^{x2} (Q_{t2} - Q_{t1}) dx = \int_{t1}^{t2} [(U^2 A)_{x1} - (U^2 A)_{x2}] dt +$$

$$g \int_{t1}^{t2} [(I_1)_{x1} - (I_1)_{x2}] dt + g \int_{t1}^{t2} \int_{x1}^{x2} I_2 \, dx \, dt +$$

$$g \int_{t1}^{t2} \int_{x1}^{x2} A(S_0 - S_f) dx \, dt \qquad (A.1.10)$$

que es la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en forma integral para canales de cualquier sección trasversal.

Las ecs A.1.1 y A.1.10 describen el flujo transitorio a superficie libre. No se requiere que ninguna variable sea continua ni derivable, y tampoco se ha impuesto que los intervalos (x_1, x_2) y (t_1, t_2) sean infinitamente pequeños. Las ecuaciones son, por tanto, rigurosamente válidas para cualquier volumen de control en el plano (x, t) y para fenómenos en los cuales puedan presentarse discontinuidades en las variables.

A.1.2 Forma diferencial

A.1.2.1 Versión conservativa

Si se acepta que las variables dependientes de las ecs A.1.1 y A.1.10 son continuas y derivables se puede escribir, por expansión en series de Taylor

$$(A)_{t2} = (A)_{t1} + \left[\frac{\partial A}{\partial t}\right] \Delta t + \left[\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right] \frac{\Delta t^2}{2!} + \ldots$$

$$(Q)_{x2} = (Q)_{x1} + \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\right] \Delta x + \left[\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right] \frac{\Delta x^2}{2!} + \ldots$$

De la primera de éstas expresiones

$$\int_{x1}^{x2} [(A)_{t2} - (A)_{t1}]dx = \int_{x1}^{x2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t + \left[\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right] \frac{\Delta t^2}{2!} + \ldots \right\} dx$$

si se hace que Δt tienda a cero y se integra en el tiempo se obtiene

$$\int_{x1}^{x2} \int_{t1}^{t2} \frac{\partial A}{\partial t}\, dt\, dx$$

puesto que los términos de orden dos en adelante son pequeños comparados con $\partial A/\partial t$. De manera semejante, a partir de la expansión en serie de $(Q)_{x2}$

$$\int_{t1}^{t2} [(Q)_{x2} - (Q)_{x1}]dt = \int_{t1}^{t2} \int_{x1}^{x2} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dt$$

Por lo que la ec A.1.1 queda

$$\int_{x1}^{x2} \int_{t1}^{t2} \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right] dt\, dx = 0 \qquad (A.1.11)$$

Haciendo sustituciones similares para los términos que aparecen en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento A.1.10 se obtiene

$$\int_{x1}^{x2} \int_{t1}^{t2} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (U^2 A)}{\partial x}\right] dt\, dx = -g \int_{x1}^{x2} \int_{t1}^{t2} \left[\frac{\partial I_1}{\partial x} - I_2 - A(S_o - S_f)\right] dt\, dx \qquad (A.1.12)$$

Para que las integrales A.1.11 y A.1.12 sean válidas en todo el plano (x,t), los integrandos deben ser nulos. De la ec A.1.11 se obtiene la versión diferencial de la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad (A.1.13)$$

Haciendo $U=Q/A$ en la ec A.1.12 y ordenando

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A} + gI_1\right) = gA(S_o - S_f) + gI_2 \qquad (A.1.14)$$

La ec A.1.14 establece, en forma diferencial, el principio de conserva ción de la cantidad de movimiento. La única condición impuesta es que las variables séan continuas y tengan derivadas continuas.

Las ecuaciones diferenciales de continuidad y cantidad de movimiento, ecs A.1.13 y A.1.14 están escritas en la llamada forma *divergente* de las ecuaciones diferenciales parciales. Si ambas ecuaciones están igualadas a cero, se cumple que la derivada total (estos es, la derivada en el tiempo más la divergencia) de las funciones vectoriales de masa y cantidad de movimiento es nula en un contorno cerrado en el plano (x,t); por definición, si la divergencia de una función es nula, dicha función se conserva en un volumen de control. Cuando los términos del lado derecho de la ec A.1.14 son diferentes de cero, la cantidad de movimiento no se conserva; a estos términos suele dárseles la interpretación de fuentes o sumideros de cantidad de movimiento. El concepto de divergencia de una función puede verse por ejemplo, en Kreyszig(1972).

A.1.3.2 Versión no conservativa

En la ec A.1.14 queda por evaluar la derivada de I_1

$$\frac{\partial}{\partial x}(gI_1) = g\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(x)}[h(x)-\eta]\sigma(x,\eta)d\eta$$

La regla de Leibniz permite la diferenciación de una integral definida [Wylie(1982)]. Si se considera que $\sigma(x,h)=B(x)$ y que la integral de $\sigma d\eta$ es igual al área de la sección, al aplicar dicha regla resulta

$$\frac{\partial}{\partial x}(gI_1) = g\frac{\partial h}{\partial x}\int_0^{h(x)}\sigma(x,\eta)\,d\eta + g\int_0^{h(h)}[(h(x)-\eta]\left[\frac{\partial B}{\partial x}\right]_{h=cte}d\eta$$

y como el último término es igual al dado por la ec A.1.7

$$\frac{\partial}{\partial x}(gI_1) = g\,A(x)\frac{\partial h}{\partial x} + gI_2$$

Sustituyendo en la ec A.1.14 resulta

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) + gA\frac{\partial h}{\partial x} + gA(S_f - S_0) = 0 \qquad (A.1.15)$$

Al eliminar gI_1 ya no es posible escribir esta ecuación en la forma de la A.1.14 por lo que ya no se puede obtener divergencia nula; en sentido estricto esto significa que ya no se conserva la cantidad de movimiento. Esto en sí no implica un error. Por esta razón en la ec A.1.15 ya no se habla de conservación de cantidad de movimiento. A esta expresión se le denomina en la práctica ecuación dinámica.

La única hipótesis adicional que se introdujo para pasar de las ecs A.1.1 y A.1.10 a las A.1.13 y A.1.14 es que las variables sean continuas y derivables al menos una vez. Por ello, ambos sistemas son equivalentes si y solo si se cumple dicha hipótesis. Por otro lado, aunque sólo se ha hecho un manejo algebraico con la ec A.1.14 para obtener la ecuación dinámica A.1.15, es también equivalente a la ec A.1.14 pero en está no puede controlarse la conservación de la cantidad de movimiento (o dicho de otra manera, que la divergencia sea nula). Por ello, según el problema que se está resolviendo se usa una versión u otra de las ecuaciones. Si las variables no son derivables, esto es, si en las soluciones hay discontinuidades (como en un salto hidráulico o en ondas generadas por compuertas) los sistemas diferenciales no son válidos y es necesario usar las versiones integrales. Es importante recordar que ninguna de las versiones anteriores es válida si se violan las hipótesis de Saint-Venant como en zonas donde hay aceleraciones verticales importantes (ver la discusión del subcap 6.2.7).

A.1.3 Ecuaciones simplificadas

Las ecuaciones ya vistas permiten una descripción suficiente del flujo no permanente en ríos. Sin embargo, en algunos casos de antemano puede estimarse que ciertos efectos físicos no son importantes por lo que su influencia es pequeña. De aquí que existan versiones simplificadas de las ecuaciones que se emplean fundamentalmente en los métodos hidrológicos. Estos métodos son útiles siempre y cuando se toman en cuenta sus limitaciones.

Las ecs A.1.13 y A.1.15 pueden escribirse para un canal prismático como

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{B}\frac{\partial (UA)}{\partial x} = 0 \qquad (A.1.16)$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} + S_f = 0 \qquad (A.1.17)$$

donde H=Z+h (fig A.1.2)

Cada término de la ecuación dinámica representa una pendiente; los primeros dos términos son los términos de inercia: el primero representa la pendiente de la línea de energía debida a la variación de la aceleración del flujo; el segundo, llamado convectivo, a la pendiente debida a la variación de la carga de velocidad ($U^2/2g$) con la distancia. El tercer término es la pendiente de la superficie libre y el último es la contribución a la pendiente debida a la resistencia al flujo.

Dependiendo del problema que se está resolviendo, los términos de la ec A.1.17 toman distintos valores y cambian su importancia relativa según las condiciones hidráulicas o hidrológicas. En Henderson(1966), Flood Studies Report(1975) y Cunge *et al*(1980) pueden verse ejemplos del orden del valor de cada uno de los términos. En muchos ríos, los dos primeros términos son del orden de 100 veces más pequeños que los otros dos por lo que si el interés principal está en el desarrollo global de la avenida, en ríos con pendientes relativamente fuertes, los términos de inercia o aceleración pueden despreciarse. Si además la $\partial H/\partial x$ es pequeña comparada con la pendiente del fondo $\partial Z/\partial x$, la ecuación dinámica se reduce a $S_f - S_0 = 0$, en los que se conoce como métodos cinemáticos.

A.1.3.1 Convección-difusión

Si los términos inerciales son pequeños, la ec A.1.17 queda como

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{Kr^2} = 0 \qquad (A.1.18)$$

donde a $Kr(h)$ se le llama factor de conducción y depende de la ecuación de resistencia al flujo que se esté empleando. Si se supone que el ancho de superficie libre B es constante, se deriva la ec A.1.16 respecto a x y la A.1.18 con respecto a t se obtienen las siguientes dos expresiones

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + \frac{1}{B}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + \frac{2|Q|}{Kr^2}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2Q|Q|}{Kr^3}\frac{\partial Kr}{\partial t} = 0$$

Si se utiliza la ec A.1.16, la derivada parcial de Kr se calcula como

$$\frac{\partial Kr}{\partial t} = \frac{dKr}{dh}\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dKr}{dh}\left[-\frac{1}{B}\frac{\partial Q}{\partial x}\right]$$

Eliminando $\partial^2 h/\partial x \partial t$ de las dos ecuaciones y ordenando, se obtiene

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \left[\frac{Q}{BKr}\frac{dKr}{dh}\right]\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Kr^2}{2B|Q|}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \qquad (A.1.19)$$

que es una ecuación diferencial parabólica del tipo de convección-difusión en la que, el gasto Q es transportado por convección con celeridad $(Q/BKr)(dKr/dh)$; habiendo difusión durante el tránsito (o aplastamiento del pico); el coeficiente de difusión es $Kr^2/(2B|Q|)$. Por tanto, si los términos de inercia se pueden despreciar, la ec A.1.19 permite una buena aproximación para el tránsito de avenidas. Dado que este tipo de ecuación diferencial requiere una condición de frontera aguas arriba, y otra aguas abajo, es posible considerar el efecto de remansos.

A.1.3.2 Métodos cinemáticos

Si además de despreciar los términos de inercia, se considera que la pendiente es relativamente fuerte, no hay efectos de remansos, y el término $\partial h/\partial x$ es pequeño comparado con $\partial Z/\partial x$ y puede despreciarse, la ec A.1.17 se reduce a

$$Q = K_r \sqrt{S_o} \qquad (A.1.20)$$

esto es, hay un valor único del gasto Q para cada tirante. Tomando esto en cuenta, en la ecuación de continuidad se obtiene

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \left(\frac{dQ}{dA}\right)_{x_o} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad (A.1.21)$$

que es la llamada ecuación de la onda cinemática. En esta ecuación la onda es transportada con celeridad $(dQ/dA)_{x_o}$ pero no se altera ni modifica a lo largo del río (es decir, no hay atenuación del pico).

A.1.3.3 Métodos de almacenamiento

Los métodos que consideran el almacenamiento son los más simples de todos. Se basan en suponer que en el almacenamiento no influyen ni los efectos de resistencia al flujo ni la inercia. El tránsito de la avenida se basa únicamente en la ecuación de continuidad. El cambio en el almacenamiento es igual al flujo neto en el tramo

$$\frac{dS}{dt} = Q_i - Q_s \qquad (A.1.22)$$

donde

S volumen de almacenamiento

Q_i, Q_s gastos de entrada y salida al tramo, respectivamente

Para completar el problema se requiere una segunda relación algebraica entre el almacenamiento y los flujos. La más común es la debida a McCarthy(1938) que da lugar al llamado método de Muskingum. McCarthy propuso la siguiente relación lineal

$$S = K\,[\varepsilon Q_i + (1-\varepsilon)Q_s] \qquad (A.1.23)$$

donde K es el llamado parámetro de almacenamiento, y ε es un factor de

peso que afecta los gastos de entrada y salida del tramo. El problema está en la determinación de estos parámetros (ver subcap 6.3).
En el Método de Muskingum hay una relación única entre el gasto y el tirante a lo largo del río, lo cual es más una excepción que una norma en la naturaleza y no incluye efecto de remansos. No obstante el método es muy empleado por su sencillez, principalmente cuando no hay datos suficientes para aplicar los otros métodos.

APENDICE 2. PROGRAMA PARA LA OBTENCION DE PARAMETROS DEL METODO DE MUSKINGUM

El programa está escrito en Fortran 77 y sigue el procedimiento descrito en el subcap 6.3.1. La lectura de datos, el proceso de cálculo y la impresión de resultados están contenidos dentro del programa principal.

Restricciones y recomendaciones de uso del programa

a) Tanto para los datos de entrada, como para los resultados se usan valores en sistema métrico
b) El número máximo de puntos para los hidrogramas es 40
c) Se pueden probar máximo 8 valores de Epsilon, ε
d) Los valores de Epsilon deben estar entre 0.0 y 0.5
f) El incremento de tiempo Δt debe darse en segundos

Instructivo de uso

Los datos se dan en un archivo creado con caracteres ASCII como sigue:

Primera y segunda linea: TITUL(I)
TITUL(I) TITULO DE LA CORRIDA

Tercera linea: N, DT
N NUMERO DE PUNTOS DE LOS HIDROGRAMAS
DT INTERVALO DE TIEMPO ENTRE PUNTOS CONSECUTIVOS DE LOS HIDROGRAMAS, EN S

Siguientes lineas: (QE(J), J=1,N)
QE(J) GASTOS DE ENTRADA, EN M^3/S. HABRA N VALORES

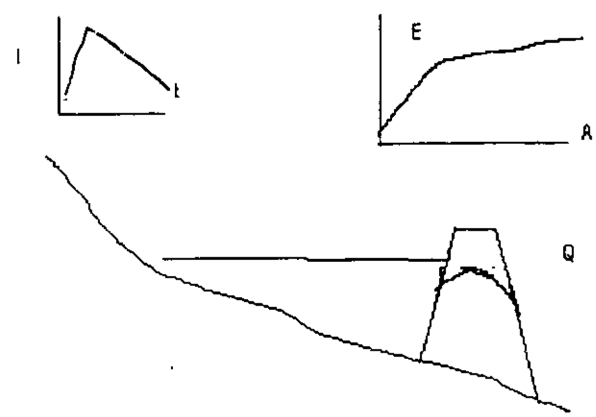
Ultimas lineas: (QS(J), J=1,N)
QS(J) GASTOS DE SALIDA, EN M^3/S. HABRA N VALORES

Impresión de resultados

En la pantalla se sugiere un valor de ε y se pregunta cuantas ε se desean proponer; después pide los valores de ε. Para cada valor propuesto, aparece en pantalla el valor de K y el coeficiente de correlación, R, de la recta ajustada.
En el archivo de resultados imprime primero el título de la corrida y los datos de los hidrogramas. Después escribe la tabla de optimización de parámetros. Al final de la tabla, se dan los valores de K, ε y el coeficiente de correlación, R.

Tránsito de avenidas en vasos

En una vaso, el efecto más importante es el almacenamiento; por ello, la ecuación de gobierno es la ecuación de continuidad. El objetivo del tránsito es obtener, el hidrograma de salida, así como la evolución de los niveles en el almacenamiento; con esto es posible estimar el volumen de la avenida que se almacena. Sea el sistema mostrado en la figura.



Se tiene el hidrograma de entrada dado por una relación I(t), (avenida de entrada); se tienen además los datos del vertedor; con estos es posible establecer una ecuación de la forma:

$$Q = CL\,(H - H_C)^{3/2} \qquad (1)$$

donde Q es el gasto por el vertedor, en m^3/s, C, coeficiente de descarga, L, longitud de vertido, en m, H, elevación del agua en el embalse, en m, H_c elevación de la cresta del vertedor, en m, o bien, una curva elevaciones- gastos de vertido. Finalmente, a partir de planos fotográficos, se obtiene una curva elevaciones-áreas inundadas del vaso. Con esta información es suficiente para realizar el tránsito de la avenida y obtener el hidrograma de salida.

La ecuación de continuidad para un almacenamiento se escribe:

$$\frac{dV}{dt} = I - Q \tag{2}$$

donde V es el volumen, en m^3, t es el tiempo, en s, I el caudal de entrada, en m^3/s, Q, el de salida, en m^3/s, y R otros caudales (evaporación, infiltración, precipitación en el embalse, etc.), en m^3/s. Dado que en general el cambio en el almacenamiento es lento, es posible escribir la ecuación anterior como

$$A\frac{dH}{dt} = I - Q \tag{3}$$

donde A es el área en planta del almacenamiento, en m^2 esta se obtiene a partir de la curva elevaciones-áreas.y H son la elevaciones del agua en el embalse, en m

La ecuación 2 es una ecuación diferencial ordinaria, que en el caso de almacenamientos reales no tiene solución analítica; se resuelve por ello numéricamente. Existen infinidad de métodos. Aquí se ve uno muy sencillo basado en el método de Heun. Se usan superíndices para indicar los instantes de tiempo; si el instante en el que se inicia el tránsito es el n Δt, se desea obtener el nivel al final del intervalo, es decir en el instante $(n+1)\,\Delta t$.

La ecuación (3) se escribe:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{I - Q}{A}$$

En el método, primero se obtienen I, Q y A en el instante $n\,\Delta t$, es decir I^n, Q^n y A^n; I^n se obtiene del hidrograma Q^n con la ec 1 y A^n con la curva elevaciones-áreas

Sea

$$k_1 = \frac{I^n - Q^n}{A^n}\Delta t$$

$$H^* = H^n + k_1\,\Delta t$$

Con H* se obtienen I*, Q* y A*

Luego $$k_2 = \frac{I^* - Q^*}{A^*} \Delta t$$

La elevación del embalse al final del intervalo es

$$H^{n+1} = H^n + (k_1 + k_2)/2$$

Se continua el cálculo para todos los instantes deseados

4. METODOLOGÍA DE CÁLCULO DE PERFILES EN RÍOS

4.1 Procedimiento general

De los métodos para el cálculo de perfiles hidráulicos en ríos (que pueden verse, en textos especializados, como Chow (1959), Henderson (1969), Berezowsky (1980) y Sotelo (1986), se escoge aquí el llamado método de pasos, ya que se adapta a condiciones variables: distancia entre secciones cualesquiera, secciones trasversales irregulares, rugosidad diferente a lo largo del río, etc; además de ser relativamente sencillo, el cálculo se hace en general rápidamente.

Se describe el cálculo de perfiles para flujo subcrítico que es la condición más común en la práctica. En las referencias arriba citadas puede verse el caso del flujo supercrítico.

En flujo subcrítico, el cálculo se realiza desde una sección aguas abajo, en la que se conoce el nivel de la superficie libre del agua, hacia aguas arriba. Considérese un tramo de río limitado por las secciones j y j+1 localizadas aguas arriba y aguas abajo del tramo, respectivamente; la separación entre las secciones es Δx, (fig 4.1). La ecuación de la energía para el tramo de interés se escribe como

$$H_j + \frac{Q^2}{2gA_j^2} = H_{j-1} + \frac{Q^2}{2gA_{j-1}^2} \; h_f \tag{4.1}$$

donde

H	elevación de la superficie libre del agua, H = z + h
z	cota o elevación, sobre un plano de referencia, del punto más bajo de la sección trasversal
h	tirante
A	área hidráulica
Q	gasto o caudal
h_f	pérdida de energía entre las secciones j y j+1

En la ec 4.1 se ha considerado que el coeficiente de Coriolis, α, es uno; para valuar dicho coeficiente se requiere conocer la distribución de velocidades en la sección. Desafortunadamente, en general no se dispone de información al respecto, aunque en ríos con secciones irregulares, este efecto no es despreciable. En lugar de ello, en muchos casos, se incluye su efecto en las pérdidas.

El término de las pérdidas, h_f, engloba todas las pérdidas de energía en el tramo: pérdidas por curvatura, por estrechamiento, por la resistencia al flujo por la fricción, etc; si hubiera otras pérdidas no asociadas al cauce, por ejemplo las causadas por puentes, etc, se deben sumar a h_f. En general, la pérdida más importante es la debida a la resistencia al flujo y será la que se considere aquí en el análisis y que se relaciona con la llamada pendiente de fricción media en el tramo como sigue

$$h_f = (S_j + S_{j-1}) \; \Delta x \; / 2 \tag{4.2}$$

En el cálculo de perfiles de flujo gradualmente variado se acepta la hipótesis de que son válidos los métodos de resistencia desarrollados para flujo uniforme, como discuten por ejemplo Chow (1959), Henderson (1966) o Sotelo (1986). Por tanto, la variable S se obtiene aquí con los métodos de resistencia al flujo descritos en el cap 3.

Sustituyendo la ec 4.2 en la 4.1 y agrupando los términos conocidos a cada lado de la ecuación se obtiene

$$H_j + \frac{Q^2}{2gA_j^2} - \frac{S_j \Delta x}{2} = H_{j+1} + \frac{Q^2}{2gA_{j+1}^2} + \frac{S_{j+1} \Delta x}{2} \tag{4.3}$$

Puesto que para un nivel del agua conocido en la sección j+1, se valúan todos los términos del lado derecho de esta ecuación, queda por tanto, el problema de determinar la cota del agua en la sección j aguas arriba; en general, en este método se procede iterativamente proponiendo valores de H_j, de tal manera que se satisfaga la ec 4.3.

Para hacer las iteraciones de manera sencilla y rápida, se recomienda emplear el método de Newton y Raphson, ver por ejemplo, Berezowsky (1980). Sea el lado derecho de la ec 4.3 como

$$ENER1 = H_{j+1} + \frac{Q^2}{2gA_{j+1}^2} + \frac{1}{2} S_{j+1} \Delta x \tag{4.4}$$

La ec 4.3 se escribe entonces como

$$\Delta E_j^i = \left| H_j + \frac{Q^2}{2gA_j^2} - \frac{1}{2} S_j \Delta x \right| - ENER1 \tag{4.5}$$

En caso de que al suponer un nivel H_j de la superficie libre se satisfaga la ecuación de la energía, ec 4.5, entonces $\Delta E_j = 0$; por ello, cualquier elevación del agua en la iteración i que no satisfaga la ec 4.5, resultará que ΔE_j^i no sea nulo. El valor de ΔE_j^i mide el error en dicha ecuación. Con el método de Newton y Raphson, el valor del nivel en la siguiente iteración se obtiene como

$$H_j^{i+1} = H_j^{i} - (\Delta H_j)^{i} \tag{4.6}$$

donde

$$(\Delta H_j)^{i} = \frac{\Delta E_j^{i}}{\frac{dE}{dh}} \approx \left[\frac{\Delta E_j}{1 - F_{r_j}^2 - \frac{1}{2}\,\Delta x \,\frac{dS}{dh_j}} \right]^{i} \quad \frac{\partial S}{\partial H_j} \tag{4.7}$$

donde

F_r número de Froude del flujo

$\frac{dS}{dh_j}$ derivada de la pendiente de fricción con respecto al tirante

El denominador del último término es, aproximadamente, la derivada de la ec 4.4 con respecto al tirante; la derivada de S se obtiene con las expresiones del cap 3.8.

En algunos casos, como cuando las secciones son muy irregulares, o se cambia de configuración de flujo (dunas a fondo plano, por ejemplo), no se logra una rápida convergencia con Newton y Raphson; por ello, y después de probar distintos procedimientos, se propone el siguiente: en las primeras 10 iteraciones se emplea, en lugar de la ec 4.7, la ecuación

$$(\Delta H_j)^{i} = \left[\frac{\Delta E}{1 - \frac{1}{2}\,\Delta x\, \frac{dS}{dh_j}} \right]^{i} \tag{4.8}$$

lo que equivale a suponer que el número de Froude es pequeño; si no se ha llegado a la solución, en las siguientes iteraciones se emplea

$$(\Delta H_j)^i = C_2 \ (\Delta E_j)^i \tag{4.9}$$

donde C_2 es una constante. $C_2 \approx 0.1$. En general, para una tolerancia de 0.005 m en la ecuación de la energía (ec 4.3), se logra convergencia con 5 o 7 iteraciones.

Procedimiento resumido de cálculo

Para un gasto dado, conocida la geometría de las secciones y el nivel del agua en la última sección aguas abajo, se calcula el perfil de la superficie libre del agua como sigue:

1. Se calculan los parámetros geométricos y la pendiente de fricción en la sección j+1
2. Se calcula ENER1, ec 4.4
3. Se supone un nivel del agua en la sección j de aguas arriba; puede empezarse por ejemplo con H_j = 1.05 ENER1
4. Se calcula ΔE_j con la ec 4.5; si se aproxima a cero, ir al paso 7
5. Se calcula ΔH_j; en las primeras 10 iteraciones se emplea la ec 4.8; en las siguientes, la 4.9
6. Se corrige la elevación de la superficie libre con la ec 4.6 y se va al paso 4
7. Se termina el cálulo en el tramo; se pasa a la siguiente sección aguas arriba, reiniciando el procedimiento en el paso 1.