

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Visualización en Realidad Aumentada del Flujo Alrededor de una Esfera Calibrada mediante Simulación Numérica 3D

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniera Aeroespacial

P R E S E N T A

Valeria Aleli Alvarez Navarrete

DIRECTOR DE TESIS

M.I. Luis Arturo Navarro Baena



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2026

PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Titulación con trabajo escrito)

De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado VISUALIZACION EN REALIDAD AUMENTADA DEL FLUJO ALREDEDOR DE UNA ESFERA CALIBRADA MEDIANTE SIMULACION NUMERICA 3D que presenté para obtener el titulo de INGENIERA AEROESPACIAL es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.



VALERIA ALELI ALVAREZ NAVARRETE
Número de cuenta: 318220385

Declaración de Originalidad

Yo, Valeria Aleli Alvarez Navarrete, declaro bajo protesta de decir verdad que el trabajo de investigación presentado en esta tesis, titulado *Visualización en Realidad Aumentada del Flujo Alrededor de una Esfera Calibrada mediante Simulación Numérica 3D*, es de mi autoría y fue elaborado bajo la dirección del M.I. Luis Arturo Navarro Baena, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Declaro que:

1. El trabajo es original y no ha sido presentado previamente para obtener ningún grado académico o título profesional.

2. Las ideas, resultados y conclusiones aquí presentadas son producto de mi trabajo personal, con la asesoría de mi director de tesis.

3. Las fuentes de información consultadas han sido debidamente citadas y referenciadas de acuerdo con las normas de citación académica correspondientes.

4. El código computacional implementado en MATLAB para la simulación del Método de Lattice Boltzmann y la herramienta de visualización en Realidad Aumentada desarrollada mediante WebXR son de elaboración propia, salvo las librerías y referencias indicadas explícitamente.

5. Los datos experimentales de referencia utilizados para la validación provienen de fuentes bibliográficas publicadas y debidamente citadas a lo largo del texto.

Valeria Aleli Alvarez Navarrete
Número de cuenta: 318220385
Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2026

Agradecimientos

A mi asesor, el M.I. Luis Arturo Navarro Baena, por su paciencia, su guía y, sobre todo, por la amistad y motivación que me brindó a lo largo de la carrera. Se convirtió en una figura fundamental en mi formación. De igual manera, expreso mi más sincero agradecimiento al Dr. José Melesio Sánchez Huerta, por sus enseñanzas, su amistad y el apoyo constante en mi desarrollo académico.

A mi madre, por ser mi mayor ejemplo de amor, disciplina, paciencia y perseverancia. Gracias por no soltar mi mano a pesar de todos los tropiezos, por creer en mí incluso en mis momentos de mayor duda y por mantenerte firme a mi lado en cada paso de este camino.

A mi padre, por su apoyo en el desarrollo y culminación de esta etapa formativa. Su respaldo me ha permitido mantener el enfoque en mis objetivos académicos y profesionales. Le agradezco el haber compartido este proceso que representa el fin de un ciclo universitario y el inicio de una nueva etapa.

A mis abuelos, mis guías de toda la vida. A mi abuelo, por ser mi protector, por cuidarme en cada paso y por su amor incondicional, que siempre ha sido mi refugio. Aunque hoy mi abuela ya no está físicamente conmigo, deseo que, dondequiera que se encuentre, sepa que este triunfo lo construimos juntas y que su memoria vive en cada paso que doy.

A mis tíos, por estar siempre presentes a lo largo de este camino. Gracias por su guía oportuna, sus consejos y por ser ese refugio de paz y buena compañía cuando más lo necesité.

A mi pareja, Eric, por caminar a mi lado en cada paso. Hemos crecido y nos hemos transformado juntos desde la preparatoria; así como compartimos el desafío de estos años universitarios, hoy compartimos también, con la misma ilusión, el deseo de construir una vida entera juntos.

A Santiago, gracias por nuestra amistad, por las risas y el apoyo tanto en tareas y proyectos, como fuera de la escuela. Juntos logramos terminar la carrera.

A Galleta, mi perrita, quien llegó para ser una luz en la oscuridad y mi fiel compañera de desvelos en cada jornada de estudio.

Finalmente, expreso mi gratitud eterna a la Universidad Nacional Autónoma de México. A pesar de lo mucho que me costó este camino, la UNAM me lo ha brindado todo, y siempre será un orgullo decir que formo parte de ella.

Resumen

El presente trabajo describe la adaptación e implementación de un solver tridimensional basado en el Método de Lattice Boltzmann (LBM) con esquema D3Q19–Multi-Relaxation Time (MRT) para la simulación del flujo incompresible alrededor de una esfera fija en un canal rectangular. El solver, implementado en MATLAB, integra un modelo de turbulencia de tipo Smagorinsky de gran escala (Large Eddy Simulation, LES) directamente en el operador de colisión MRT, lo que le confiere estabilidad numérica desde el régimen laminar ($\mathrm{Re} = 1$) hasta $\mathrm{Re} = 5{,}000$, si bien la validación cuantitativa se concentra en el rango laminar ($\mathrm{Re} \leq 300$) y el caso de mayor Reynolds se presenta como exploración cualitativa. La geometría de la esfera se impone mediante la condición de frontera de bounce-back interpolado (IBB), que garantiza precisión de segundo orden en la condición de no deslizamiento sobre superficies curvas.

La validación del solver se realiza mediante la comparación sistemática de tres parámetros aerodinámicos contra datos de la literatura especializada: el coeficiente de arrastre C_D se contrasta con las correlaciones de Schiller & Naumann (1933) y Clift et al. (1978); la longitud de recirculación L_r/D se compara con los datos experimentales de Taneda (1956) y los resultados numéricos de Johnson & Patel (1999); y el coeficiente de presión $C_p(\theta)$ se valida frente a las soluciones de Johnson & Patel (1999) y Tomboulides & Orszag (2000). Los resultados obtenidos muestran una concordancia satisfactoria con la literatura para el rango laminar, confirmando la correcta implementación del método numérico.

Como producto principal de la tesis, se desarrolla una herramienta de visualización en Realidad Aumentada mediante la tecnología WebXR, que permite superponer el campo de velocidades, las líneas de corriente coloreadas por magnitud de velocidad y las isosuperficies del campo tridimensional sobre el entorno físico real a través de un navegador web compatible. Esta herramienta constituye un recurso didáctico interactivo para el análisis y la comunicación del fenómeno aerodinámico.

Palabras clave: Método de Lattice Boltzmann, D3Q19, Multi-Relaxation Time, flujo alrededor de esfera, realidad aumentada, WebXR, coeficiente de arrastre, recirculación,

Smagorinsky, MATLAB.

Índice general

Declaración de Originalidad I

Agradecimientos II

Resumen IV

1. Introducción 1

1.1. Motivación y contexto . . . 1
1.2. Planteamiento del problema . . . 2
1.3. Objetivo general . . . 3
1.4. Objetivos particulares . . . 3
1.5. Hipótesis de trabajo . . . 3
1.6. Contribuciones . . . 4
1.7. Alcances y limitaciones . . . 4
1.8. Estructura del documento . . . 5

2. Estado del arte 6

2.1. Introducción . . . 6
2.2. Flujo alrededor de una esfera como problema de referencia . . . 7
2.3. Desarrollo del Método de Lattice Boltzmann . . . 10
2.4. Esquema MRT y estabilidad numérica . . . 13
2.5. Tratamiento de fronteras curvas: bounce-back interpolado . . . 14
2.6. Modelos de turbulencia y enfoque LES–Smagorinsky en LBM . . . 17
2.7. Visualización científica de resultados CFD . . . 18
2.8. Realidad aumentada y tecnologías WebXR en ingeniería . . . 20
2.9. Vacíos identificados en la literatura . . . 21
2.10. Síntesis del estado del arte . . . 22

3. Marco teórico **24**
3.1. Introducción . . . 24
3.2. Fundamentos del flujo alrededor de una esfera . . . 24
3.2.1. Fluido newtoniano e hipótesis de trabajo . . . 24
3.2.2. Ecuaciones de Navier–Stokes . . . 25
3.2.3. Separación, estela y recirculación . . . 25
3.3. Números adimensionales relevantes . . . 25
3.3.1. Número de Reynolds . . . 25
3.3.2. Número de Mach . . . 26
3.3.3. Coeficiente de arrastre . . . 26
3.3.4. Coeficiente de presión . . . 26
3.3.5. Número de Strouhal . . . 27
3.4. Fundamentos cinéticos del Método de Lattice Boltzmann . . . 27
3.4.1. Descripción mesoscópica . . . 27
3.4.2. Ecuación de evolución . . . 27
3.4.3. Recuperación de variables macroscópicas . . . 27
3.5. Modelo D3Q19 . . . 28
3.5.1. Conjunto discreto de velocidades . . . 28
3.5.2. Pesos de la retícula . . . 28
3.6. Distribución de equilibrio . . . 28
3.7. Modelo BGK y relación con la viscosidad . . . 28
3.7.1. Aproximación de relajación única . . . 28
3.7.2. Relación entre viscosidad y tiempo de relajación . . . 29
3.8. Formulación Multi-Relaxation Time (MRT) . . . 29
3.8.1. Motivación . . . 29
3.8.2. Transformación al espacio de momentos . . . 29
3.8.3. Colisión en espacio de momentos . . . 30
3.8.4. Ventajas del esquema MRT . . . 30
3.9. Recuperación de Navier–Stokes a través de Chapman–Enskog . . . 31
3.10. Condiciones de frontera en Lattice Boltzmann . . . 31
3.10.1. Importancia de las condiciones de frontera . . . 31
3.10.2. Condición de entrada . . . 31
3.10.3. Condición de salida . . . 32
3.10.4. Paredes sólidas y no deslizamiento . . . 32
3.11. Bounce-back interpolado para fronteras curvas . . . 32

3.11.1. Limitaciones del bounce-back simple . . . 32
3.11.2. Fracción de distancia a la pared . . . 32
3.11.3. Esquema de interpolación . . . 33
3.11.4. Ventajas para el caso de la esfera . . . 33
3.12. Cálculo de fuerzas hidrodinámicas . . . 33
3.12.1. Método de intercambio de momento . . . 33
3.12.2. Obtención del coeficiente de arrastre . . . 33
3.13. Presión y reconstrucción macroscópica . . . 34
3.14. Modelo de turbulencia de Smagorinsky . . . 34
3.14.1. Viscosidad turbulenta . . . 34
3.14.2. Acoplamiento con LBM . . . 34
3.15. Representación geométrica de la esfera en el dominio . . . 35
3.15.1. Definición de la geometría . . . 35
3.15.2. Bloqueo geométrico . . . 35
3.16. Visualización de campos tridimensionales . . . 35
3.16.1. Líneas de corriente y streaklines . . . 35
3.16.2. Isosuperficies . . . 35
3.16.3. Vorticidad . . . 36
3.17. Fundamentos de la visualización en Realidad Aumentada . . . 36
3.17.1. Sistema de coordenadas y anclaje . . . 36
3.17.2. Proyección y renderizado . . . 36

4. Metodología numérica **37**
4.1. Introducción . . . 37
4.2. Definición del dominio computacional . . . 37
4.2.1. Geometría del dominio . . . 37
4.2.2. Ubicación de la esfera . . . 38
4.2.3. Relación de bloqueo . . . 39
4.3. Escalamiento y parámetros de red . . . 39
4.3.1. Unidades físicas y unidades de red . . . 39
4.3.2. Cálculo de la viscosidad cinemática . . . 39
4.3.3. Tiempo de relajación efectivo . . . 39
4.4. Formulación MRT implementada . . . 40
4.5. Modelo de turbulencia de Smagorinsky . . . 40
4.6. Condiciones de frontera . . . 41
4.6.1. Entrada: velocidad uniforme . . . 41

4.6.2. Salida: condición abierta . . . 41
4.6.3. Paredes laterales . . . 41
4.6.4. Superficie de la esfera: bounce-back interpolado . . . 41
4.7. Inicialización del campo . . . 41
4.8. Secuencia algorítmica del solver . . . 42
4.9. Criterios de convergencia . . . 44
4.10. Cálculo de magnitudes aerodinámicas . . . 44
4.10.1. Fuerza de arrastre . . . 44
4.10.2. Longitud de recirculación . . . 44
4.10.3. Coeficiente de presión superficial . . . 45
4.11. Posprocesamiento numérico . . . 45
4.12. Exportación a formatos externos . . . 45

5. Validación y resultados **46**
5.1. Validación del coeficiente de arrastre . . . 46
5.2. Validación de la longitud de recirculación . . . 48
5.3. Distribución de presión superficial . . . 50
5.4. Régimen laminar Re = 100: campo de velocidad y vorticidad . . . 51
5.5. Transición inicial Re = 300: inicio del desprendimiento de vórtices . . . 52
5.6. Régimen turbulento Re = 5,000: estela caótica . . . 53
5.7. Síntesis de la validación . . . 54

6. Visualización en Realidad Aumentada **55**
6.1. Introducción . . . 55
6.2. Arquitectura de la herramienta WebXR . . . 55
6.3. Funcionalidades implementadas . . . 56
6.4. Capturas de la herramienta en dispositivos móviles . . . 57
6.5. Comportamiento reproducido y limitaciones del modelo interno . . . 67
6.5.1. Lo que la herramienta reproduce correctamente . . . 68
6.5.2. Limitaciones identificadas . . . 68
6.6. Rendimiento computacional . . . 69
6.7. Conexión con el solver LBM . . . 69

7. Discusión **71**
7.1. Validez de la implementación LBM–MRT . . . 71
7.2. Capacidad y límites del modelo LES–Smagorinsky . . . 72

7.3. La herramienta de Realidad Aumentada como recurso didáctico 72
7.4. Limitaciones identificadas 73

8. Conclusiones y trabajo futuro **75**
8.1. Conclusiones 75
8.2. Trabajo futuro 76

A. Guía de reproducción **78**
A.1. Requisitos de software 78
A.2. Estructura del código del solver 78
A.3. Parámetros de entrada 79
A.4. Ejecución de un caso 79
A.5. Despliegue de la herramienta de Realidad Aumentada 79
A.6. Verificación rápida 80

B. Detalles de la formulación MRT D3Q19 **81**
B.1. Momentos del modelo D3Q19 81
B.2. Matriz de transformación 81
B.3. Momentos de equilibrio 82
B.4. Tasas de relajación empleadas 82
B.5. Recuperación de la viscosidad 83

Bibliografía **84**

Índice de figuras

2.1. Regímenes del flujo alrededor de una esfera 8
2.2. Métricas de validación del flujo sobre esfera 9
2.3. Escalas de descripción del LBM 10
2.4. Ciclo computacional del LBM con MRT 11
2.5. Conjunto de velocidades del modelo D3Q19 12
2.6. Comparación conceptual BGK vs MRT 14
2.7. Bounce-back interpolado en fronteras curvas 16
2.8. Enfoque LES–Smagorinsky en el LBM 18
2.9. Herramientas de visualización científica CFD 19
2.10. Pipeline de visualización interactiva AR 21

4.1. Dominio computacional 38
4.2. Diagrama de flujo del algoritmo LBM–MRT 43

5.1. Validación del coeficiente de arrastre 47
5.2. Validación de la longitud de recirculación 49
5.3. Distribución del coeficiente de presión 50
5.4. Campos de velocidad y vorticidad a $\mathrm{Re} = 100$ 51
5.5. Campos de velocidad y vorticidad a $\mathrm{Re} = 300$ 52
5.6. Campos de velocidad y vorticidad a $\mathrm{Re} = 5{,}000$ 53

6.1. Vista compacta: cono de líneas de corriente 57
6.2. Panel completo: esfera con sombreado de presión 58
6.3. Vista compacta, segunda captura 59
6.4. Nube de partículas en régimen turbulento 59
6.5. Vista frontal del cono de partículas 60
6.6. Vista compacta a baja velocidad 60
6.7. Nube de partículas turbulenta sobre el entorno real 61

6.8. Panel completo a alta velocidad 62
6.9. Panel completo a velocidad de crucero 63
6.10. Panel completo a baja velocidad 64
6.11. Panel completo con métricas de baja velocidad 65
6.12. Panel completo con nubes de partículas separadas 66
6.13. Vista compacta a baja velocidad 66
6.14. Panel completo con nube de partículas única 67

Índice de cuadros

4.1. Parámetros de red de los casos de simulación principales. 40

5.1. Coeficiente de arrastre: comparación entre el solver y las correlaciones de referencia. 48

6.1. Rendimiento medido de la herramienta de RA en los dispositivos de prueba. 69

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación y contexto

El estudio del flujo alrededor de cuerpos romos es uno de los problemas fundamentales de la dinámica de fluidos computacional (CFD) y la aerodinámica. La esfera, en particular, representa el caso de referencia por excelencia para la validación de métodos numéricos debido a su geometría canónica, su simetría axial y la rica fenomenología física que exhibe en función del número de Reynolds Re: desde el régimen de arrastre viscoso puro (flujo de Stokes, $\mathrm{Re} \ll 1$), pasando por la formación de una burbuja de recirculación estacionaria ($20 \lesssim \mathrm{Re} \lesssim 210$), hasta el desprendimiento de vórtices y la transición hacia la turbulencia ($\mathrm{Re} > 300$) [3, 10].

En este contexto, el Método de Lattice Boltzmann (LBM) se ha consolidado como una alternativa eficiente a los métodos tradicionales de diferencias finitas y elementos finitos para la simulación de flujos incompresibles en geometrías complejas [8, 4]. A diferencia de los métodos basados en las ecuaciones de Navier–Stokes en su forma macroscópica, el LBM opera a nivel mesoscópico, modelando la evolución de funciones de distribución de partículas en una retícula discreta. Esta formulación simplifica naturalmente el tratamiento de condiciones de frontera en superficies curvas, se paraleliza de manera eficiente y recupera las ecuaciones de Navier–Stokes en el límite hidrodinámico mediante la expansión de Chapman–Enskog. La variante Multi-Relaxation Time (MRT), propuesta por d'Humières et al. [2], mejora sustancialmente la estabilidad numérica del LBM estándar de tiempo de relajación único (SRT, o BGK) al permitir la relajación independiente de cada momento en el espacio de momentos, reduciendo así las inestabilidades de alta frecuencia que surgen a Reynolds elevados.

Por otra parte, la Realidad Aumentada (AR) ofrece nuevas posibilidades para la visua-

lización científica interactiva. La capacidad de superponer campos vectoriales tridimensionales sobre el entorno físico real, accesible desde un dispositivo móvil o una tableta sin hardware especializado, representa una herramienta didáctica de gran valor para la enseñanza de la aerodinámica y la mecánica de fluidos computacional. La tecnología WebXR, integrada en navegadores web modernos, hace posible el desarrollo de estas experiencias de manera portable y sin instalación de software adicional.

La conjunción de estas dos líneas —un método numérico mesoscópico moderno y una plataforma de visualización inmersiva accesible— define el espacio de trabajo de esta tesis. La motivación última es doble: por un lado, disponer de una implementación validada y reproducible del LBM tridimensional en un entorno académico ampliamente disponible como MATLAB; por otro, transformar los resultados de esa simulación en una experiencia interactiva que pueda utilizarse en el aula, en laboratorios de enseñanza y en actividades de divulgación de la Facultad de Ingeniería.

1.2. Planteamiento del problema

A pesar de la madurez del LBM como método numérico, su implementación tridimensional con MRT, bounce-back interpolado y modelos de turbulencia integrados continúa siendo un área de desarrollo activo, particularmente en lo que respecta a la calibración cuidadosa de los parámetros de red y la validación sistemática contra datos de referencia. Asimismo, la integración entre simulaciones de CFD y herramientas de visualización en AR para fines educativos representa un campo emergente con escasos precedentes en la literatura en español para el nivel de licenciatura.

En consecuencia, el presente trabajo aborda dos problemáticas complementarias:

1. La adaptación y validación de un solver LBM 3D–MRT para la simulación del flujo alrededor de una esfera calibrada en el rango de Reynolds laminar ($1 \leq \mathrm{Re} \leq 300$), con capacidad de extensión hacia regímenes turbulentos mediante el modelo de Smagorinsky.

2. El desarrollo de una herramienta de visualización en Realidad Aumentada que permita comunicar los resultados de la simulación de manera interactiva, facilitando la comprensión del fenómeno aerodinámico tanto en contextos académicos como de divulgación.

1.3. Objetivo general

Adaptar un solver basado en el Método de Lattice Boltzmann tridimensional para simular el flujo alrededor de una esfera calibrada y desarrollar una herramienta de visualización en Realidad Aumentada que facilite el análisis aerodinámico y la comprensión del fenómeno.

1.4. Objetivos particulares

A. Implementar un solver LBM 3D con esquema D3Q19–MRT en MATLAB, estable para el rango $1 \leq \mathrm{Re} \leq 5{,}000$, que incluya condición de bounce-back interpolado para la esfera e imposición de perfil de velocidad uniforme en la entrada.

B. Obtener y validar las métricas aerodinámicas principales: coeficiente de arrastre $C_D(\mathrm{Re})$, longitud de recirculación $L_r/D(\mathrm{Re})$ y coeficiente de presión $C_p(\theta)$, comparando con las correlaciones y datos numérico-experimentales de referencia.

C. Desarrollar una visualización profesional de los resultados en MATLAB que incluya streaklines coloreadas por magnitud de velocidad, isosuperficies tridimensionales, campo de vorticidad y perfil de velocidad en la estela.

D. Diseñar e implementar un visualizador en Realidad Aumentada mediante WebXR que permita interactuar con los campos de flujo simulados en el entorno físico real a través de un navegador web.

1.5. Hipótesis de trabajo

Este trabajo se sustenta en las siguientes hipótesis:

1. Un solver LBM con esquema D3Q19–MRT, condición de bounce-back interpolado y modelo de turbulencia de Smagorinsky, implementado íntegramente en MATLAB, es capaz de reproducir las métricas aerodinámicas del flujo sobre esfera reportadas en la literatura para el rango laminar dentro de una banda de error consistente con el confinamiento del dominio.

2. Una arquitectura web basada en WebXR y Three.js puede renderizar en tiempo real, sobre dispositivos móviles convencionales, una representación de partículas del

campo de flujo con una tasa de refresco suficiente (≥ 30 FPS) para una experiencia interactiva fluida.

3. La combinación de ambas herramientas mejora la comprensión espacial del fenómeno aerodinámico frente a las representaciones estáticas tradicionales, al permitir la inspección tridimensional del campo desde el entorno físico del usuario.

1.6. Contribuciones

Las contribuciones originales de este trabajo son:

- Un solver LBM 3D–D3Q19–MRT completamente documentado en MATLAB, con modelo de turbulencia de Smagorinsky local e integrado, y condición de bounce-back interpolado de segundo orden.
- Una validación sistemática del solver contra cuatro conjuntos de datos de referencia de la literatura para el flujo sobre esfera en régimen laminar.
- Una herramienta de visualización en Realidad Aumentada basada en WebXR que lee directamente los resultados del solver y los renderiza en 3D sobre el entorno físico del usuario.
- Un flujo de trabajo reproducible y documentado que integra simulación numérica y visualización interactiva, con guía de reproducción completa incluida en el Apéndice A.

1.7. Alcances y limitaciones

El presente trabajo se limita al flujo newtoniano incompresible e isotermo alrededor de una esfera fija. No se consideran efectos de flotabilidad térmica ni movimiento de la esfera. La validación se concentra en el rango laminar ($\mathrm{Re} \leq 300$) donde la comparación con datos publicados es directa; los resultados para Reynolds mayores se presentan como exploración preliminar sin validación exhaustiva. El dominio computacional es de $160 \times 80 \times 80$ nodos, lo que implica un porcentaje de bloqueo $D/N_y = 20\,\%$. Aunque superior al valor ideal ($< 5\,\%$) recomendado para comparaciones cuantitativas precisas, este dominio es adecuado para los propósitos de validación y visualización de la tesis dentro de las restricciones computacionales de una estación de trabajo convencional.

En cuanto a la herramienta de Realidad Aumentada, su alcance es didáctico y demostrativo: el motor de partículas reproduce la fenomenología cualitativa del flujo (aceleración en los flancos, estela, dispersión turbulenta) y calcula en tiempo real los parámetros adimensionales del problema, pero no resuelve las ecuaciones de Navier–Stokes en el dispositivo. La conexión cuantitativa con el solver se realiza mediante la exportación de campos en formato JSON, descrita en el Capítulo 4.

1.8. Estructura del documento

El resto del documento se organiza de la siguiente manera. El Capítulo 2 presenta el estado del arte en las tres vertientes del trabajo: la física del flujo sobre esfera, el desarrollo del LBM y las tecnologías de visualización inmersiva. El Capítulo 3 desarrolla el marco teórico completo, desde las ecuaciones de Navier–Stokes hasta la formulación MRT y el modelo de Smagorinsky. El Capítulo 4 describe la metodología numérica: dominio, parámetros de red, condiciones de frontera y algoritmo del solver. El Capítulo 5 presenta la validación contra la literatura y los campos de flujo obtenidos para tres regímenes representativos. El Capítulo 6 documenta el diseño, la implementación y las pruebas de la herramienta de Realidad Aumentada. El Capítulo 7 discute los resultados y sus limitaciones, y el Capítulo 8 presenta las conclusiones y el trabajo futuro. Los apéndices incluyen la guía de reproducción y detalles de la formulación MRT D3Q19.

Capítulo 2

Estado del arte

2.1. Introducción

El flujo alrededor de una esfera constituye uno de los problemas canónicos de la mecánica de fluidos y de la aerodinámica externa. A pesar de su aparente simplicidad geométrica, este sistema concentra una gran diversidad de fenómenos hidrodinámicos: arrastre viscoso, formación y separación de la capa límite, aparición de zonas de recirculación, pérdida de simetría de la estela, desprendimiento de vórtices y transición hacia regímenes no estacionarios y turbulentos. Por esta razón, el flujo sobre esfera se ha utilizado ampliamente como caso de referencia para validar métodos numéricos, modelos de turbulencia y técnicas de tratamiento de fronteras curvas en dinámica de fluidos computacional (CFD) [3, 10].

Desde el punto de vista físico, el problema permite analizar de manera controlada la influencia del número de Reynolds sobre la estructura del flujo. En el límite de Reynolds muy bajo, el movimiento está dominado por la viscosidad y puede describirse mediante la solución de Stokes. Conforme aumenta Re, el flujo comienza a separarse en la parte posterior del cuerpo, se forma una burbuja de recirculación estacionaria y, posteriormente, la estela pierde simetría y evoluciona hacia configuraciones tridimensionales no estacionarias. Esta progresión convierte a la esfera en una geometría ideal para estudiar estabilidad hidrodinámica, transición y generación de fuerzas aerodinámicas.

En paralelo, el Método de Lattice Boltzmann (LBM) se ha consolidado como una alternativa numérica competitiva frente a los métodos tradicionales basados en la discretización directa de las ecuaciones de Navier–Stokes. Su formulación mesoscópica, basada en la evolución de funciones de distribución sobre una red discreta de velocidades, permite recuperar las ecuaciones hidrodinámicas macroscópicas mediante procedimientos asintóticos como la expansión de Chapman–Enskog [8, 4]. Además, la localidad de sus operadores de colisión

y propagación favorece implementaciones paralelas eficientes y facilita el tratamiento de dominios tridimensionales con geometrías complejas.

Dentro de las formulaciones modernas del LBM, los esquemas de múltiples tiempos de relajación (MRT) han adquirido especial importancia debido a su mayor estabilidad numérica en comparación con el modelo de relajación simple BGK. En particular, los modelos tridimensionales D3Q15, D3Q19 y D3Q27 permiten representar flujos incompresibles con diferentes compromisos entre costo computacional, isotropía y robustez numérica [2, 4].

Más recientemente, las herramientas de visualización científica, realidad aumentada y entornos inmersivos han abierto nuevas posibilidades para la interpretación de resultados de CFD. Mientras que las representaciones tradicionales suelen limitarse a cortes bidimensionales, mapas de contorno o animaciones en pantalla, la realidad aumentada permite superponer campos tridimensionales de velocidad, presión o vorticidad sobre el espacio físico del usuario.

En este capítulo se revisan tres vertientes principales: primero, el comportamiento físico del flujo alrededor de una esfera y sus regímenes característicos; segundo, el desarrollo del Método de Lattice Boltzmann, con énfasis en esquemas MRT, redes D3Q19 y condiciones de frontera para geometrías curvas; y tercero, el papel de la visualización científica y la realidad aumentada como herramientas de análisis, comunicación y enseñanza de resultados de CFD.

2.2. Flujo alrededor de una esfera como problema de referencia

El flujo alrededor de una esfera ha sido estudiado durante décadas como un problema fundamental de la aerodinámica externa. Su importancia radica en que permite observar, dentro de una geometría simple y bien definida, la evolución progresiva de los mecanismos de transporte de cantidad de movimiento conforme cambia el número de Reynolds. En el régimen de Stokes, correspondiente a $\mathrm{Re} \ll 1$, las fuerzas viscosas dominan sobre las inerciales, el flujo permanece adherido a la superficie y no aparece separación en la estela. En este límite, el coeficiente de arrastre sigue la relación clásica $C_D = 24/\mathrm{Re}$.

Al incrementar el número de Reynolds, las fuerzas inerciales adquieren mayor relevancia y el flujo comienza a separarse en la parte posterior de la esfera. Como consecuencia, se forma una región cerrada de recirculación cuya longitud aumenta con Re. Para Reynolds moderados, la estela puede mantenerse estacionaria y aproximadamente axisimétrica; sin embargo, a valores mayores se presentan inestabilidades que rompen dicha simetría y

generan estructuras tridimensionales. Finalmente, en regímenes no estacionarios, la estela presenta desprendimiento periódico de vórtices, fluctuaciones de presión y oscilaciones en las fuerzas hidrodinámicas [3, 10]. La Figura 2.1 esquematiza esta progresión.

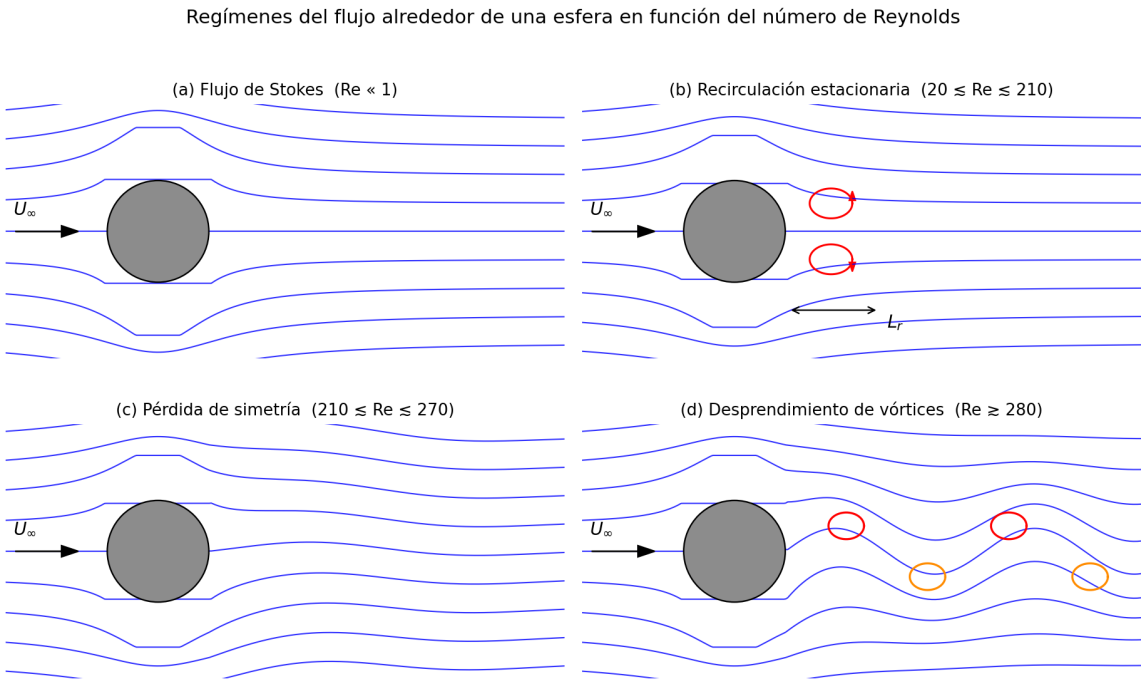


Figura 2.1: Regímenes característicos del flujo alrededor de una esfera conforme aumenta el número de Reynolds: flujo de Stokes sin separación, recirculación estacionaria, pérdida de simetría de la estela y desprendimiento de vórtices. Elaboración propia con base en [3, 10].

Entre los trabajos de referencia más citados se encuentra el estudio de Johnson y Patel [3], quienes analizaron numérica y experimentalmente el flujo incompresible alrededor de una esfera hasta Re = 300. Su contribución resulta particularmente relevante porque proporciona datos detallados sobre la estructura de la estela, la longitud de recirculación, la distribución de presión superficial y el coeficiente de arrastre en regímenes laminares estacionarios y no estacionarios. Debido a ello, sus resultados se utilizan frecuentemente como base de comparación para validar simulaciones numéricas.

Posteriormente, Tomboulides y Orszag [10] extendieron el análisis hacia regímenes transicionales y débilmente turbulentos. Su trabajo permitió describir con mayor detalle la evolución tridimensional de la estela y el surgimiento de asimetrías temporales. Estos estudios son relevantes para el presente trabajo porque establecen rangos de comparación para la transición de un flujo estacionario hacia uno no estacionario, así como para la

evaluación de modelos numéricos capaces de reproducir estructuras vorticosas complejas.

Las magnitudes comúnmente empleadas para validar simulaciones del flujo alrededor de una esfera son el coeficiente de arrastre C_D, la longitud de recirculación adimensional L_r/D, la distribución de presión superficial $C_p(\theta)$ y, cuando el flujo es no estacionario, el número de Strouhal St. Estas variables permiten comparar tanto el comportamiento global del flujo como detalles locales asociados con la separación y la evolución de la estela; la Figura 2.2 las ilustra de forma esquemática.

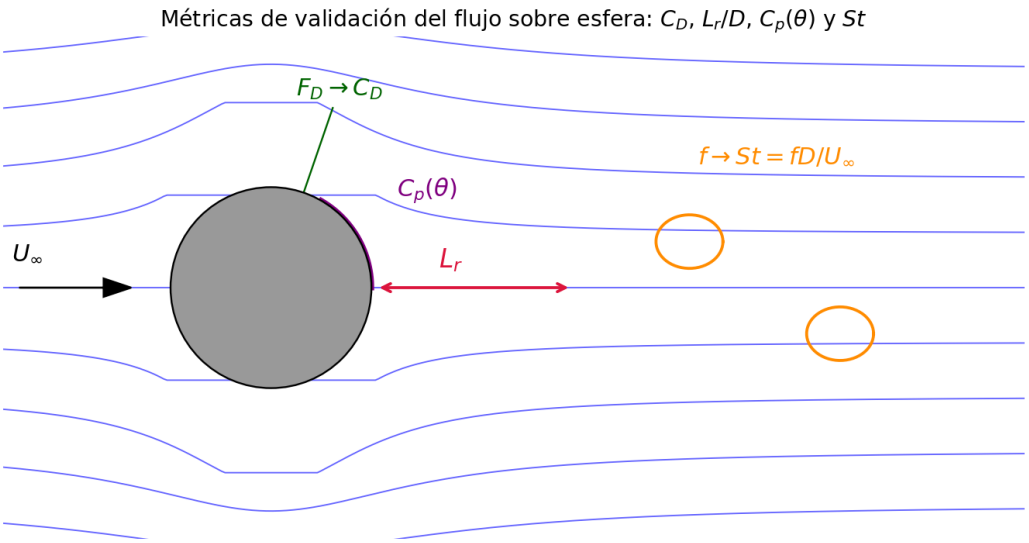


Figura 2.2: Variables principales de validación en el flujo alrededor de una esfera: coeficiente de arrastre C_D, distribución de presión $C_p(\theta)$, longitud de recirculación L_r/D y número de Strouhal St. Elaboración propia.

Además de los estudios numéricos detallados, existen correlaciones empíricas ampliamente utilizadas para estimar el coeficiente de arrastre de partículas esféricas. La correlación de Schiller y Naumann [6] es una de las más empleadas para Reynolds moderados, mientras que la recopilación de Clift, Grace y Weber [1] constituye una referencia clásica para el análisis de partículas, gotas y burbujas. Estas correlaciones son útiles como primera aproximación y como criterio de contraste frente a resultados numéricos obtenidos con CFD o LBM.

2.3. Desarrollo del Método de Lattice Boltzmann

El Método de Lattice Boltzmann tiene su origen en los autómatas de gas en red y en la teoría cinética discreta. A diferencia de los métodos numéricos tradicionales, que discretizan directamente las ecuaciones macroscópicas de conservación, el LBM describe el flujo mediante funciones de distribución de partículas $f_i(\mathbf{x}, t)$ asociadas con un conjunto finito de velocidades discretas $\mathbf{c}_i$. La evolución de estas distribuciones permite recuperar las variables macroscópicas del flujo, como la densidad ρ y la velocidad $\mathbf{u}$, mediante momentos de las funciones de distribución [8, 4].

La interpretación física del LBM se sitúa en una escala mesoscópica. En lugar de resolver trayectorias individuales de partículas, como en una descripción microscópica, o resolver directamente campos continuos, como en una descripción macroscópica, el método evoluciona distribuciones discretas que contienen información estadística del movimiento de las partículas. En el límite hidrodinámico, la expansión de Chapman–Enskog permite demostrar que las ecuaciones de Navier–Stokes pueden recuperarse a partir de la ecuación de Boltzmann discretizada. La Figura 2.3 ilustra esta ubicación jerárquica.

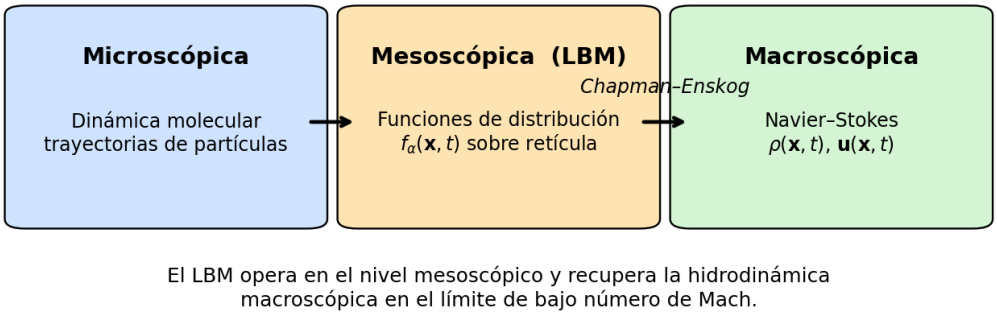


Figura 2.3: Ubicación mesoscópica del Método de Lattice Boltzmann. El método opera sobre funciones de distribución discretas y recupera variables macroscópicas mediante la expansión de Chapman–Enskog. Elaboración propia.

El algoritmo básico del LBM se compone de dos operaciones principales: colisión y propagación. Durante la etapa de colisión, las funciones de distribución locales se relajan hacia un estado de equilibrio. Durante la etapa de propagación, las distribuciones actualizadas se desplazan hacia nodos vecinos siguiendo las direcciones discretas de la red. Esta

separación entre procesos locales y transporte sobre la red proporciona una estructura algorítmica simple, eficiente y altamente paralelizable.

En el modelo de relajación simple BGK, todas las distribuciones se relajan con un único tiempo característico. Aunque este enfoque es sencillo y computacionalmente económico, puede presentar limitaciones de estabilidad, especialmente en flujos con Reynolds elevados, mallas finas o geometrías complejas. Para superar estas limitaciones, se han desarrollado formulaciones de múltiples tiempos de relajación (MRT), en las cuales la colisión se realiza en el espacio de momentos y cada modo puede relajarse con una tasa diferente [2]. El ciclo computacional completo se muestra en la Figura 2.4.

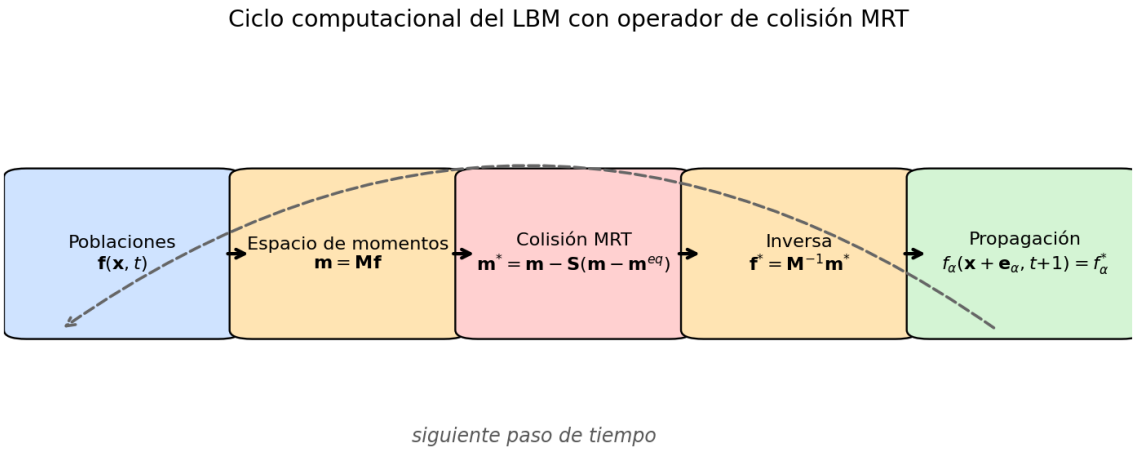


Figura 2.4: Ciclo computacional del Método de Lattice Boltzmann con operador de colisión MRT: las funciones de distribución se transforman al espacio de momentos, se relajan con diferentes tasas y posteriormente se propagan sobre la red. Elaboración propia con base en [2].

En problemas tridimensionales incompresibles, uno de los modelos más utilizados es el D3Q19. En esta formulación, cada nodo de la red contiene diecinueve velocidades discretas: una velocidad de reposo, seis direcciones alineadas con los ejes cartesianos y doce direcciones diagonales sobre las caras del cubo. Esta configuración, mostrada en la Figura 2.5, ofrece un compromiso adecuado entre costo computacional e isotropía para simulaciones tridimensionales de flujo, por lo que se ha utilizado ampliamente en aplicaciones de LBM para geometrías complejas.

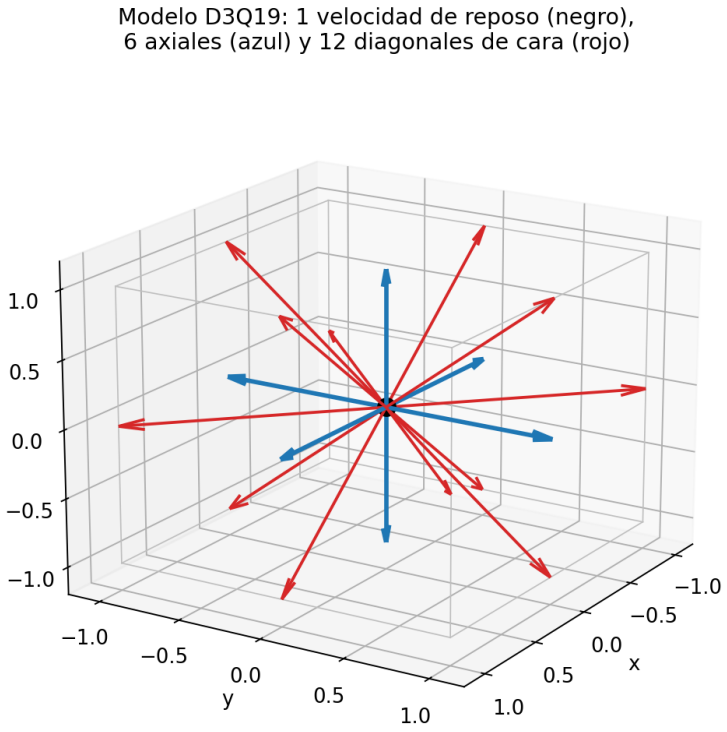


Figura 2.5: Conjunto de velocidades discretas del modelo D3Q19. La red incluye una velocidad de reposo, seis velocidades axiales (azul) y doce velocidades diagonales sobre las caras del cubo (rojo). Elaboración propia.

La aplicación del LBM al flujo alrededor de una esfera requiere especial atención en el tratamiento de la frontera sólido–fluido. Como la superficie de la esfera no coincide exactamente con los nodos de una red cartesiana, se utilizan condiciones de frontera interpoladas, esquemas de rebote corregido o métodos de frontera inmersa para imponer la condición de no deslizamiento. La precisión de estas condiciones influye directamente en la estimación del coeficiente de arrastre, la ubicación de la separación y la longitud de la región de recirculación.

En este contexto, los esquemas MRT combinados con redes D3Q19 representan una alternativa adecuada para estudiar el flujo alrededor de una esfera, ya que permiten mejorar la estabilidad numérica respecto al modelo BGK y conservar una estructura computacional eficiente.

2.4. Esquema MRT y estabilidad numérica

El modelo clásico de Lattice Boltzmann de tiempo de relajación único, conocido como BGK o SRT (*Single Relaxation Time*), constituye una de las formulaciones más simples y utilizadas del LBM. En este esquema, todas las funciones de distribución relajan hacia el equilibrio mediante un único parámetro de relajación τ. Esta simplicidad reduce el costo computacional y facilita la implementación; sin embargo, también limita el control numérico sobre los distintos modos dinámicos del sistema.

En particular, el esquema BGK puede presentar problemas de estabilidad cuando se trabaja con viscosidades bajas, números de Reynolds moderados o altos, geometrías complejas, mallas relativamente gruesas o fronteras curvas. Esto se debe a que los modos hidrodinámicos y no hidrodinámicos relajan con la misma tasa, lo cual puede permitir la amplificación de oscilaciones espurias de alta frecuencia. En simulaciones tridimensionales, estas oscilaciones pueden contaminar la estela, modificar artificialmente el arrastre y deteriorar la convergencia del cálculo.

Para superar estas limitaciones, se desarrolló el esquema de múltiples tiempos de relajación, conocido como MRT (*Multi-Relaxation Time*). A diferencia del modelo BGK, el esquema MRT realiza la colisión en el espacio de momentos. Primero, las funciones de distribución $\mathbf{f}$ se transforman mediante una matriz $\mathbf{M}$ hacia un vector de momentos $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}\,\mathbf{f}\,. \tag{2.1}$$

Posteriormente, cada momento relaja de forma independiente hacia su valor de equilibrio:

$$\mathbf{m}^{*} = \mathbf{m} - \mathbf{S}\,(\mathbf{m} - \mathbf{m}^{\mathrm{eq}})\,, \tag{2.2}$$

donde $\mathbf{S}$ es una matriz diagonal que contiene las tasas de relajación individuales de cada modo. Finalmente, se aplica la transformación inversa para regresar al espacio de distribuciones:

$$\mathbf{f}^{*} = \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{m}^{*}\,. \tag{2.3}$$

La ventaja principal del enfoque MRT es que permite separar el tratamiento de los modos hidrodinámicos, asociados con la conservación de masa y cantidad de movimiento, de los modos no hidrodinámicos, que suelen estar relacionados con errores numéricos o perturbaciones de alta frecuencia. Al ajustar selectivamente las tasas de relajación, es posible amortiguar dichos modos espurios sin alterar de forma significativa la física del flujo resuelto. La Figura 2.6 resume esta comparación conceptual.

El trabajo de d'Humières et al. [2] es una referencia fundamental en este contexto, ya que formaliza la construcción de esquemas MRT tridimensionales y demuestra su mayor estabilidad frente al modelo BGK. Esta mejora resulta especialmente importante para el flujo alrededor de una esfera, donde la correcta representación de la estela, la separación y las estructuras vorticosas requiere un esquema numérico estable y robusto.

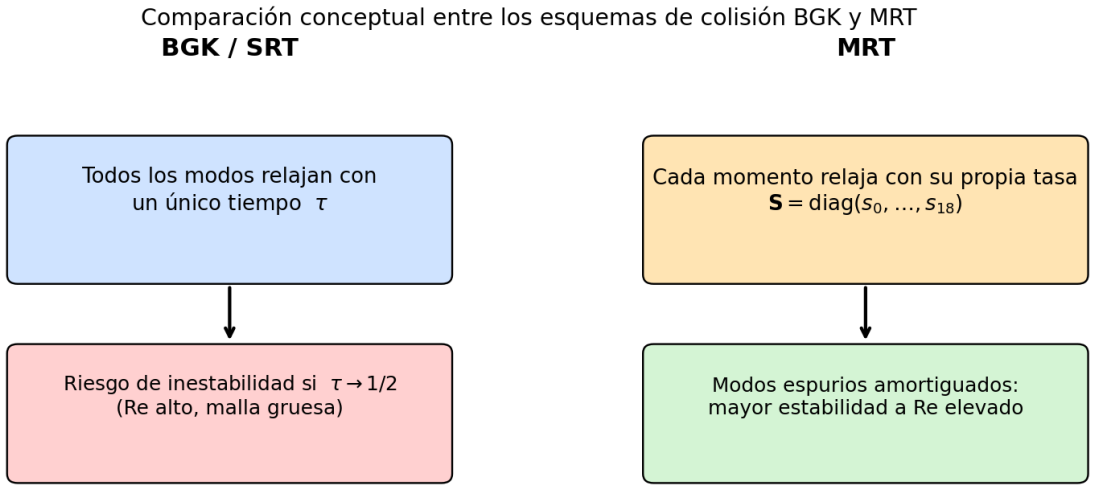


Figura 2.6: Comparación conceptual entre el esquema BGK/SRT y el esquema MRT en el Método de Lattice Boltzmann. El modelo BGK emplea un único tiempo de relajación, mientras que el esquema MRT permite relajar de manera independiente los distintos momentos, mejorando la estabilidad numérica en flujos de mayor número de Reynolds. Elaboración propia con base en [2].

2.5. Tratamiento de fronteras curvas: bounce-back interpolado

Uno de los retos principales del LBM en geometrías curvas es imponer correctamente la condición de no deslizamiento sobre superficies que no coinciden exactamente con los nodos de la retícula. Este problema aparece de manera natural en la simulación del flujo alrededor de una esfera, ya que la superficie esférica debe representarse dentro de una malla cartesiana tridimensional.

El esquema *halfway bounce-back* clásico es una de las condiciones de frontera más simples y robustas del LBM. En este método se asume que la pared sólida se encuentra exactamente a la mitad del enlace que conecta un nodo de fluido con un nodo sólido.

Aunque esta aproximación funciona adecuadamente para paredes alineadas con la malla, su precisión disminuye cuando la frontera es curva o cuando la posición real de la pared se ubica en una fracción arbitraria del enlace.

Para mejorar la representación geométrica de superficies curvas, se utilizan esquemas de *bounce-back* interpolado [12]. En estos métodos, la posición real de la pared se describe mediante una fracción q definida sobre el enlace de red:

$$q = \frac{|\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_w|}{|\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b|}\,, \qquad 0 < q < 1\,, \tag{2.4}$$

donde $\mathbf{x}_f$ representa el nodo de fluido, $\mathbf{x}_b$ el nodo sólido vecino en la dirección del enlace y $\mathbf{x}_w$ la posición real de la pared. A partir de esta fracción, la población desconocida que regresa hacia el nodo de fluido se reconstruye mediante interpolación espacial, como ilustra la Figura 2.7.

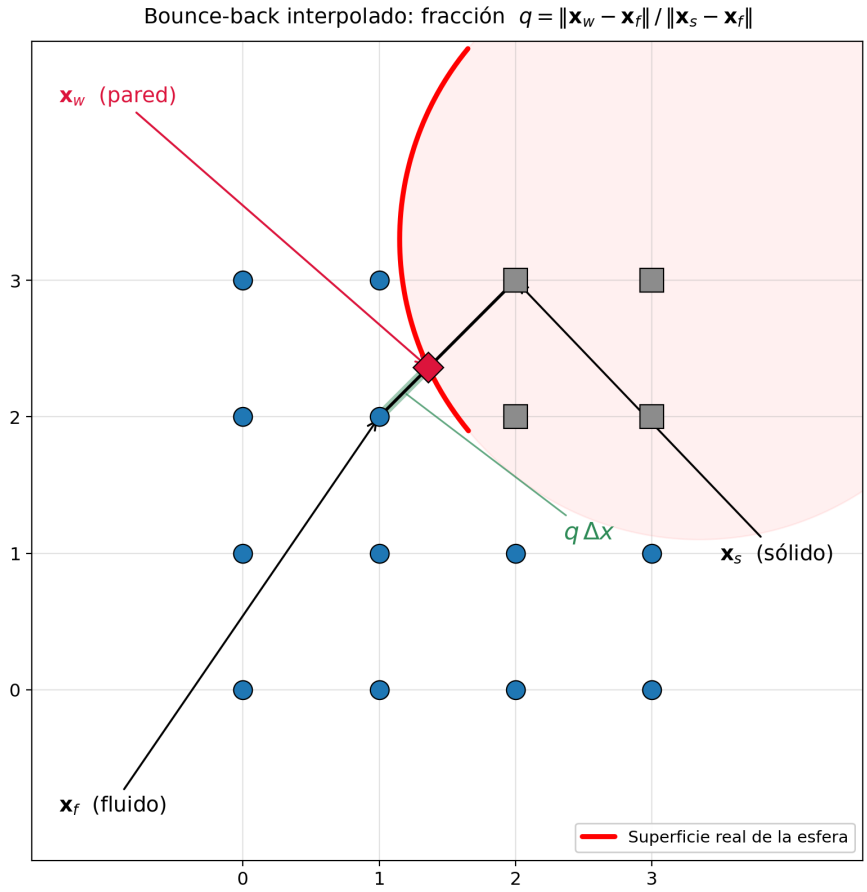


Figura 2.7: Tratamiento de fronteras curvas mediante *bounce-back* interpolado. La posición real de la pared se introduce mediante la fracción q sobre el enlace entre un nodo de fluido y un nodo sólido, mejorando la imposición de la condición de no deslizamiento en superficies curvas. Elaboración propia.

La importancia del *bounce-back* interpolado radica en que permite imponer de forma más precisa la condición de no deslizamiento sobre la superficie de la esfera. Esto reduce el error geométrico asociado con la discretización escalonada de la frontera y mejora la estimación de magnitudes sensibles como el coeficiente de arrastre, la distribución de presión y la longitud de recirculación.

En el presente trabajo, el tratamiento de frontera curva es un componente esencial, ya que la esfera se representa dentro de una malla cartesiana. Por tanto, el uso de un esquema interpolado permite mejorar la fidelidad física de la simulación sin abandonar la estructura regular de la red, lo cual conserva una de las ventajas computacionales principales del LBM.

2.6. Modelos de turbulencia y enfoque LES–Smagorinsky en LBM

Aunque la validación principal del flujo alrededor de una esfera suele realizarse en regímenes laminares o transicionales, una implementación numérica robusta debe considerar la posibilidad de extenderse hacia números de Reynolds más elevados. En estos regímenes, la resolución directa de todas las escalas turbulentas mediante simulación numérica directa (DNS) resulta computacionalmente costosa, especialmente en dominios tridimensionales.

Una alternativa ampliamente utilizada es la simulación de grandes escalas, conocida como LES (*Large Eddy Simulation*). En este enfoque, las estructuras turbulentas de mayor tamaño se resuelven explícitamente en la malla, mientras que el efecto de las escalas menores, denominadas escalas submalla, se modela mediante una viscosidad turbulenta adicional [7, 13].

En el contexto del LBM, el modelo de Smagorinsky se incorpora modificando la viscosidad efectiva del fluido. La viscosidad turbulenta se calcula como

$$\nu_t = (C_s\,\Delta)^2\,\left|\overline{\mathbf{S}}\right|, \tag{2.5}$$

donde C_s es la constante de Smagorinsky, Δ es el ancho de filtro asociado al tamaño de malla y $\left|\overline{\mathbf{S}}\right|$ es la magnitud del tensor de tasas de deformación filtrado. La viscosidad efectiva queda entonces dada por

$$\nu_{\text{eff}} = \nu + \nu_t\,. \tag{2.6}$$

En el LBM, la viscosidad cinemática se relaciona directamente con el tiempo de relajación. Por ello, al introducir una viscosidad turbulenta, se obtiene un tiempo de relajación efectivo:

$$\tau_{\text{eff}} = \frac{\nu_{\text{eff}}}{c_s^2} + \frac{1}{2}\,, \tag{2.7}$$

donde c_s es la velocidad del sonido de la red. Esta modificación permite representar el efecto disipativo de las escalas submalla sin resolver explícitamente toda la cascada turbulenta, como esquematiza la Figura 2.8.

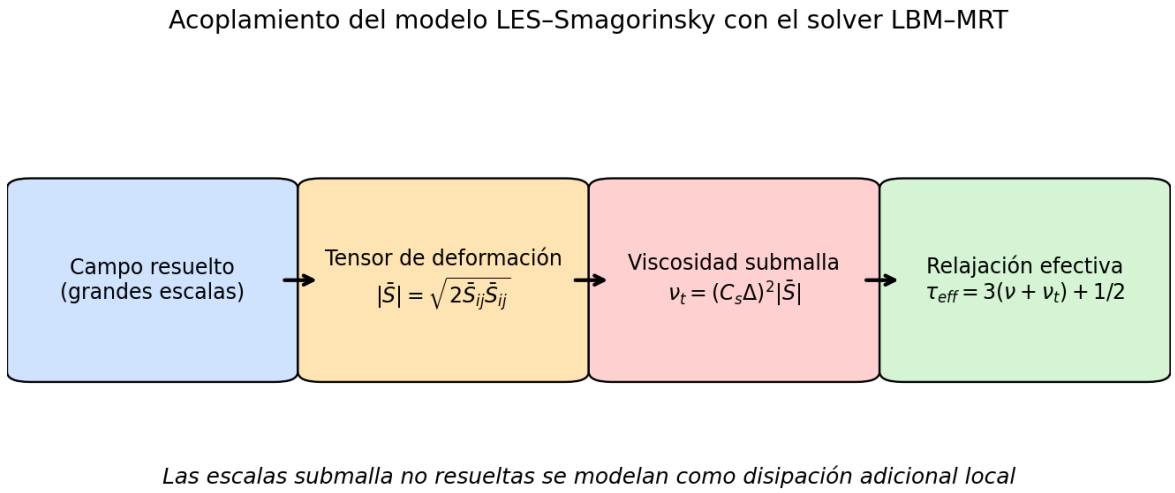


Figura 2.8: Enfoque conceptual LES–Smagorinsky aplicado al Método de Lattice Boltzmann. Las grandes escalas turbulentas son resueltas por la malla, mientras que las escalas submalla se modelan mediante una viscosidad turbulenta que modifica el tiempo de relajación efectivo. Elaboración propia con base en [13].

El enfoque LES–Smagorinsky resulta particularmente útil para estudiar estelas tridimensionales, ya que permite capturar estructuras vorticales grandes y modelar el efecto promedio de los movimientos pequeños no resueltos. En el caso del flujo alrededor de una esfera, esta estrategia puede emplearse como extensión del solver para explorar regímenes de Reynolds más altos, manteniendo un costo computacional menor que el requerido por una simulación directa.

2.7. Visualización científica de resultados CFD

La visualización científica constituye una etapa fundamental en el análisis de resultados de CFD, especialmente cuando se estudian fenómenos tridimensionales. En problemas como el flujo alrededor de una esfera, la interpretación del campo de velocidades, la presión, la vorticidad y las estructuras coherentes de la estela no puede realizarse de manera completa mediante valores escalares aislados. Es necesario utilizar representaciones gráficas que permitan identificar patrones espaciales, regiones de separación, zonas de recirculación y desprendimiento de vórtices.

Tradicionalmente, los resultados de CFD se han representado mediante mapas de con-

torno, cortes planos, perfiles de velocidad y gráficas de variables integrales. Aunque estas herramientas son útiles, pueden ser insuficientes para describir estructuras tridimensionales complejas. Por ello, se emplean técnicas como líneas de corriente, trayectorias de partículas, isosuperficies de vorticidad, campos volumétricos y visualizaciones de presión sobre superficies, ilustradas en la Figura 2.9.

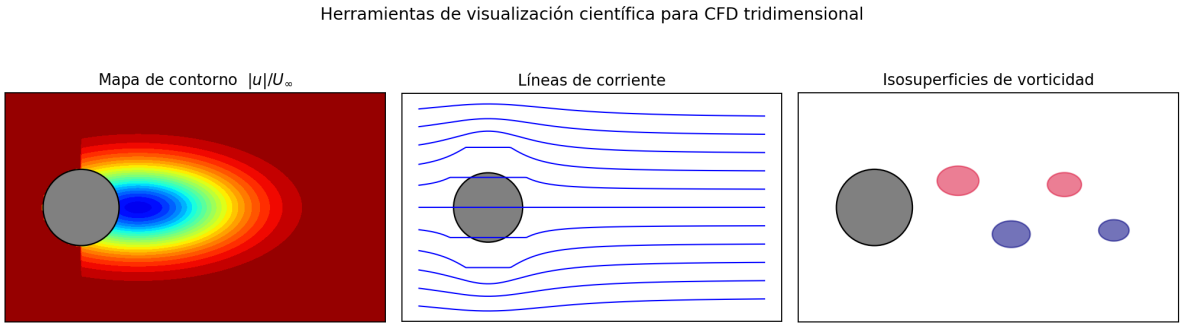


Figura 2.9: Principales herramientas de visualización científica aplicadas a resultados de CFD tridimensional: mapas de contorno, líneas de corriente e isosuperficies de vorticidad. Estas representaciones permiten analizar la estructura espacial de la estela detrás de la esfera. Elaboración propia.

En el caso particular del flujo alrededor de una esfera, las líneas de corriente permiten observar la desviación del flujo y la formación de la estela; las isosuperficies de vorticidad permiten identificar estructuras coherentes asociadas con el desprendimiento de vórtices; y los cortes de velocidad o presión facilitan el análisis cuantitativo de regiones específicas del dominio. Estas representaciones complementan las métricas globales, como el coeficiente de arrastre y el número de Strouhal, proporcionando una interpretación física más completa del fenómeno.

La visualización tridimensional también resulta relevante desde el punto de vista didáctico. Al permitir la rotación, el acercamiento y la inspección interactiva del dominio, el usuario puede comprender con mayor claridad la distribución espacial del flujo y la evolución de la estela. Por esta razón, la visualización científica no debe considerarse únicamente una herramienta estética, sino una parte integral del proceso de análisis, validación y comunicación de resultados numéricos.

2.8. Realidad aumentada y tecnologías WebXR en ingeniería

La realidad aumentada (AR) ha adquirido importancia creciente en educación, ingeniería y visualización científica debido a su capacidad para combinar objetos digitales tridimensionales con el entorno físico real. A diferencia de la realidad virtual, que sumerge completamente al usuario en un ambiente sintético, la realidad aumentada conserva la referencia espacial del mundo real y superpone sobre ella información computacional, modelos geométricos, animaciones o campos de datos.

Esta característica resulta especialmente útil para la enseñanza y comunicación de fenómenos de dinámica de fluidos. Los campos de velocidad, presión o vorticidad generados mediante simulaciones numéricas pueden transformarse en objetos tridimensionales interactivos, permitiendo al usuario inspeccionar la geometría del dominio, rotar la estela, observar estructuras vorticosas y relacionar los resultados numéricos con una representación espacial más intuitiva.

Desde el punto de vista tecnológico, el estándar WebXR Device API, desarrollado en el contexto del *Immersive Web Working Group* del W3C [11], proporciona una infraestructura para acceder a experiencias de realidad virtual y aumentada desde navegadores web compatibles. Esta aproximación reduce la dependencia de aplicaciones nativas y facilita la distribución de experiencias interactivas en diferentes dispositivos.

En una arquitectura típica, los resultados de la simulación se generan primero en un entorno numérico, como MATLAB. Posteriormente, los campos de flujo se postprocesan para obtener líneas de corriente, isosuperficies o geometrías tridimensionales. Estos datos se exportan a formatos compatibles con aplicaciones web, como `VTK`, `STL`, `glTF` o `JSON`. Finalmente, una aplicación basada en WebGL, `Three.js` y WebXR permite visualizar el modelo en el navegador y, en dispositivos compatibles, anclarlo al entorno real mediante realidad aumentada. La Figura 2.10 resume este flujo.

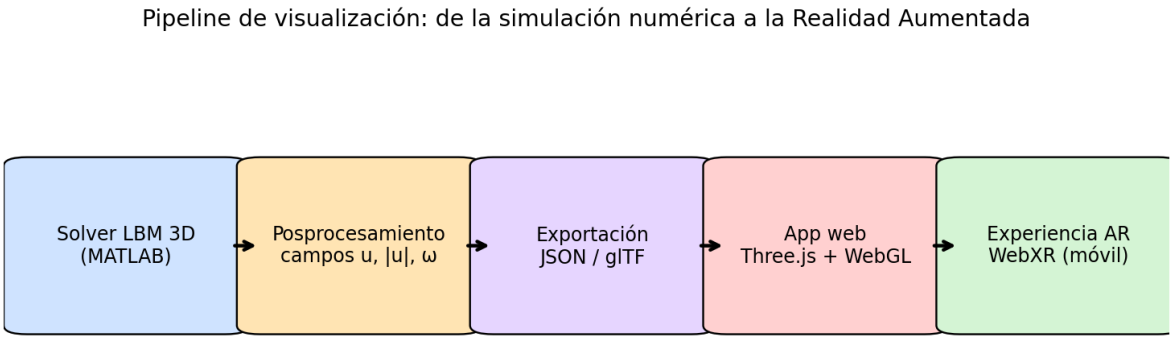


Figura 2.10: Pipeline de visualización propuesto: los resultados de la simulación LBM se postprocesan, se exportan a formatos tridimensionales compatibles y se integran en una aplicación web para su visualización interactiva mediante WebXR y realidad aumentada. Elaboración propia.

El valor de este enfoque radica en su portabilidad. Una experiencia de AR basada en navegador puede ejecutarse en dispositivos móviles sin requerir instalaciones complejas, lo cual la hace atractiva para contextos educativos, laboratorios de enseñanza y divulgación científica. En el presente trabajo, esta línea tecnológica se integra como una extensión de la simulación LBM para facilitar la exploración inmersiva del flujo alrededor de una esfera.

2.9. Vacíos identificados en la literatura

A partir de la revisión anterior, pueden identificarse varios vacíos y oportunidades de investigación. En primer lugar, aunque el flujo alrededor de una esfera ha sido estudiado ampliamente mediante métodos tradicionales de CFD, siguen siendo valiosas las implementaciones reproducibles del LBM tridimensional en entornos accesibles como MATLAB. Esto es especialmente relevante cuando dichas implementaciones integran en una sola plataforma el modelo D3Q19, el esquema MRT, el tratamiento de fronteras curvas y la posibilidad de extenderse hacia regímenes de mayor número de Reynolds.

En segundo lugar, una parte importante de la literatura sobre LBM avanzado se concentra en la formulación matemática o en implementaciones de alto desempeño computacional. Sin embargo, existe menos material orientado a integrar validación numérica rigurosa con una presentación didáctica, reproducible y accesible para estudiantes de li-

cenciatura o maestría. Esta brecha dificulta que los usuarios en formación comprendan simultáneamente el fundamento físico, la formulación numérica y la interpretación visual de los resultados.

En tercer lugar, aunque la realidad aumentada ha mostrado potencial en educación en ingeniería, las aplicaciones enfocadas específicamente en aerodinámica externa y visualización de campos tridimensionales obtenidos mediante CFD continúan siendo limitadas. En particular, son escasas las propuestas que conectan directamente un solver numérico con una plataforma inmersiva basada en navegador para explorar resultados de flujo en tres dimensiones.

Estos vacíos justifican el desarrollo de una plataforma que combine simulación, validación y visualización inmersiva. La integración de LBM 3D–MRT, tratamiento de fronteras curvas mediante *bounce-back* interpolado y visualización en WebXR permite construir una herramienta tanto de análisis numérico como de apoyo didáctico.

2.10. Síntesis del estado del arte

En síntesis, la literatura especializada demuestra que el flujo alrededor de una esfera continúa siendo un caso de referencia fundamental para la validación de métodos numéricos en aerodinámica externa. Los trabajos de Johnson y Patel [3] y Tomboulides y Orszag [10] proporcionan bases confiables para comparar el coeficiente de arrastre, la longitud de recirculación, la distribución de presión y la evolución de la estela en distintos regímenes de Reynolds.

Por otra parte, el LBM ha evolucionado desde formulaciones simples de tiempo de relajación único hacia esquemas más robustos, como el MRT. Esta formulación permite mejorar la estabilidad numérica mediante la relajación independiente de momentos hidrodinámicos y no hidrodinámicos [2]. Además, el tratamiento de fronteras curvas mediante *bounce-back* interpolado permite representar con mayor precisión geometrías como la esfera dentro de una malla cartesiana.

Asimismo, la incorporación de modelos de turbulencia como LES–Smagorinsky abre la posibilidad de extender el solver hacia regímenes de Reynolds más altos, manteniendo un costo computacional razonable. Finalmente, las tecnologías de visualización científica, realidad aumentada y WebXR ofrecen una vía moderna para comunicar e interpretar resultados tridimensionales de CFD.

Bajo este panorama, la presente tesis se ubica en la intersección entre tres líneas de desarrollo: la simulación numérica del flujo alrededor de una esfera mediante LBM tridimen-

sional con esquema MRT, la representación precisa de fronteras curvas mediante *bounce-back* interpolado y la visualización inmersiva de resultados usando tecnologías WebXR. Esta integración busca aportar una herramienta reproducible, didáctica y visualmente accesible para el estudio de fenómenos de aerodinámica externa.

Capítulo 3

Marco teórico

3.1. Introducción

El presente capítulo desarrolla los fundamentos teóricos que sustentan la simulación numérica del flujo alrededor de una esfera mediante el Método de Lattice Boltzmann (LBM), así como los conceptos necesarios para la interpretación de los resultados aerodinámicos y su posterior visualización en Realidad Aumentada.

3.2. Fundamentos del flujo alrededor de una esfera

3.2.1. Fluido newtoniano e hipótesis de trabajo

En esta tesis se considera un fluido newtoniano, incompresible e isotermo. Un fluido se denomina newtoniano cuando el tensor de esfuerzos viscosos es proporcional a la tasa de deformación. Matemáticamente, el tensor de esfuerzos de Cauchy se escribe como

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\,\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}\,, \tag{3.1}$$

donde p es la presión termodinámica, $\mathbf{I}$ es el tensor identidad y $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor viscoso. Para un fluido newtoniano incompresible, $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\,\mathbf{D}$, siendo μ la viscosidad dinámica y $\mathbf{D}$ el tensor de tasa de deformación, definido por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\top}\right], \tag{3.2}$$

donde $\mathbf{u}$ es el vector velocidad macroscópica. La hipótesis de incompresibilidad implica que la densidad del fluido se mantiene aproximadamente constante durante el movimiento,

lo que conduce a la restricción cinemática

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0\,. \tag{3.3}$$

3.2.2. Ecuaciones de Navier–Stokes

Bajo las hipótesis anteriores, el movimiento del fluido queda descrito por las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento. La ecuación de continuidad para flujo incompresible es la ecuación (3.3), mientras que la ecuación de cantidad de movimiento se expresa como

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right) = -\nabla p + \mu\,\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}\,, \tag{3.4}$$

donde ρ es la densidad, μ la viscosidad dinámica y $\mathbf{f}$ representa fuerzas de cuerpo por unidad de volumen.

3.2.3. Separación, estela y recirculación

Cuando un flujo incide sobre una esfera, la capa límite se desarrolla sobre su superficie hasta que el gradiente de presión adverso en la región posterior provoca separación. A bajos Reynolds, el flujo se mantiene simétrico y la estela permanece adherida. Conforme aumenta el número de Reynolds, surge una región de recirculación detrás del cuerpo, caracterizada por velocidades axiales negativas. La magnitud de esta región se cuantifica mediante la longitud de recirculación L_r, definida como la distancia entre la parte posterior de la esfera y el punto de reenganche del flujo sobre el eje de simetría. En forma adimensional, se utiliza la razón

$$\frac{L_r}{D}\,, \tag{3.5}$$

donde D es el diámetro de la esfera.

3.3. Números adimensionales relevantes

3.3.1. Número de Reynolds

El número de Reynolds expresa la relación entre fuerzas inerciales y fuerzas viscosas en el flujo:

$$\mathrm{Re} = \frac{U_\infty\, D}{\nu}\,, \tag{3.6}$$

donde U_∞ es la velocidad característica del flujo libre, D es el diámetro de la esfera y $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática.

3.3.2. Número de Mach

Dentro del LBM, el número de Mach es especialmente importante porque la formulación estándar recupera correctamente el régimen cuasi-incompresible cuando las velocidades son pequeñas respecto de la velocidad del sonido de red:

$$\mathrm{Ma} = \frac{U_\infty}{c_s}\,, \tag{3.7}$$

donde c_s es la velocidad del sonido del modelo discreto. Para el esquema D3Q19, dicha velocidad toma el valor $c_s = 1/\sqrt{3}$ en unidades de red. En la práctica, se busca mantener $\mathrm{Ma} \ll 1$ para minimizar errores de compresibilidad.

3.3.3. Coeficiente de arrastre

El coeficiente de arrastre es una medida adimensional de la fuerza de resistencia que el fluido ejerce sobre la esfera:

$$C_D = \frac{2\,F_D}{\rho\,U_\infty^2\,A}\,, \tag{3.8}$$

donde F_D es la componente de la fuerza total en la dirección del flujo y $A = \pi D^2/4$ es el área proyectada frontal de la esfera.

3.3.4. Coeficiente de presión

El coeficiente de presión expresa la presión superficial de manera adimensional:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\,\rho\,U_\infty^2}\,, \tag{3.9}$$

donde p es la presión local sobre la superficie y p_∞ es la presión de referencia del flujo libre.

3.3.5. Número de Strouhal

En regímenes no estacionarios, el desprendimiento periódico de estructuras vorticosas se caracteriza con el número de Strouhal:

$$\mathrm{St} = \frac{f\,D}{U_\infty}\,, \tag{3.10}$$

donde f es la frecuencia dominante de oscilación en la estela.

3.4. Fundamentos cinéticos del Método de Lattice Boltzmann

3.4.1. Descripción mesoscópica

El LBM se basa en una descripción mesoscópica del flujo. En lugar de resolver directamente las ecuaciones macroscópicas de Navier–Stokes, el método considera la evolución de funciones de distribución $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ asociadas a partículas ficticias que se desplazan con velocidades discretas $\mathbf{e}_\alpha$ sobre una retícula regular.

3.4.2. Ecuación de evolución

La ecuación general del LBM puede escribirse como

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha\,\Delta t,\; t + \Delta t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) + \Omega_\alpha(\mathbf{x}, t)\,, \tag{3.11}$$

donde Ω_α representa el operador de colisión para la dirección α y Δt es el paso de tiempo. La parte izquierda describe la propagación o *streaming* de las partículas a lo largo de la red, mientras que la parte derecha modela su relajación local hacia el equilibrio.

3.4.3. Recuperación de variables macroscópicas

Las variables macroscópicas principales se obtienen como momentos de las funciones de distribución:

$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha\,, \qquad \rho\,\mathbf{u} = \sum_\alpha f_\alpha\,\mathbf{e}_\alpha\,. \tag{3.12}$$

3.5. Modelo D3Q19

3.5.1. Conjunto discreto de velocidades

En esta tesis se emplea el modelo D3Q19, cuyo nombre indica una discretización tridimensional con diecinueve velocidades. El conjunto de velocidades discretas se expresa como

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= (0,0,0)\,, \\ \mathbf{e}_{1\text{–}6} &\in \big\{(\pm1,0,0),\ (0,\pm1,0),\ (0,0,\pm1)\big\}\,, \\ \mathbf{e}_{7\text{–}18} &\in \big\{(\pm1,\pm1,0),\ (\pm1,0,\pm1),\ (0,\pm1,\pm1)\big\}\,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

La representación tridimensional de este conjunto se mostró en la Figura 2.5.

3.5.2. Pesos de la retícula

A cada dirección discreta se le asigna un peso w_α, necesario para definir correctamente la distribución de equilibrio. Para D3Q19, los pesos son

$$w_0 = \frac{1}{3}\,, \qquad w_{1\text{–}6} = \frac{1}{18}\,, \qquad w_{7\text{–}18} = \frac{1}{36}\,. \tag{3.14}$$

3.6. Distribución de equilibrio

La distribución de equilibrio es una aproximación discreta de la distribución de Maxwell–Boltzmann truncada para velocidades pequeñas:

$$f_\alpha^{\mathrm{eq}} = w_\alpha\,\rho\left[1 + \frac{\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{u})^2}{2\,c_s^4} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}{2\,c_s^2}\right]. \tag{3.15}$$

3.7. Modelo BGK y relación con la viscosidad

3.7.1. Aproximación de relajación única

La formulación más simple del operador de colisión es el modelo BGK (Bhatnagar–Gross–Krook), también conocido como esquema SRT:

$$\Omega_\alpha = -\frac{1}{\tau}\,(f_\alpha - f_\alpha^{\mathrm{eq}})\,, \tag{3.16}$$

donde τ es el tiempo de relajación adimensional. Con esta forma, la ecuación de evolución queda como

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha \, \Delta t, \; t + \Delta t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} \left(f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{\mathrm{eq}}(\mathbf{x}, t) \right). \tag{3.17}$$

3.7.2. Relación entre viscosidad y tiempo de relajación

Uno de los resultados fundamentales del LBM estándar es la relación entre la viscosidad cinemática de red y el tiempo de relajación:

$$\nu = c_s^2 \left(\tau - \frac{\Delta t}{2} \right). \tag{3.18}$$

Si se toma $\Delta t = 1$ en unidades de red y $c_s^2 = 1/3$, entonces

$$\nu = \frac{1}{3} \left(\tau - \frac{1}{2} \right). \tag{3.19}$$

Cuando τ se aproxima demasiado a $1/2$, la viscosidad disminuye y la estabilidad del esquema BGK puede deteriorarse, lo que motiva el uso de formulaciones más robustas como MRT.

3.8. Formulación Multi-Relaxation Time (MRT)

3.8.1. Motivación

El esquema MRT surge como una extensión del modelo BGK con el fin de mejorar la estabilidad y el control numérico del método. La idea central es transformar las funciones de distribución desde el espacio de poblaciones al espacio de momentos, efectuar la colisión en dicho espacio y permitir que cada momento se relaje con una tasa distinta.

3.8.2. Transformación al espacio de momentos

Sea $\mathbf{f}$ el vector columna de poblaciones:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{18} \end{bmatrix}^\top. \tag{3.20}$$

Se define un vector de momentos $\mathbf{m}$ mediante una transformación lineal

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}\,\mathbf{f}\,, \tag{3.21}$$

donde $\mathbf{M}$ es una matriz invertible de transformación de 19×19. De manera análoga, los momentos de equilibrio se definen como

$$\mathbf{m}^{\mathrm{eq}} = \mathbf{M}\,\mathbf{f}^{\mathrm{eq}}\,. \tag{3.22}$$

3.8.3. Colisión en espacio de momentos

En la formulación MRT, la colisión se expresa como

$$\mathbf{m}^{*} = \mathbf{m} - \mathbf{S}\,(\mathbf{m} - \mathbf{m}^{\mathrm{eq}})\,, \tag{3.23}$$

donde $\mathbf{S} = \mathrm{diag}(s_0, s_1, \ldots, s_{18})$ es una matriz diagonal cuyas entradas corresponden a las tasas de relajación de cada momento. Una vez obtenidos los momentos poscolisión, se regresa al espacio de poblaciones mediante

$$\mathbf{f}^{*} = \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{m}^{*}\,. \tag{3.24}$$

Posteriormente se realiza la etapa de propagación:

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha\,\Delta t,\ t + \Delta t) = f^{*}_\alpha(\mathbf{x}, t)\,. \tag{3.25}$$

3.8.4. Ventajas del esquema MRT

La principal ventaja del esquema MRT es que permite ajustar independientemente la relajación de modos hidrodinámicos y no hidrodinámicos. Esto reduce la sensibilidad del método a oscilaciones numéricas espurias y mejora la estabilidad para Reynolds moderados y altos, geometrías curvas y mallas relativamente gruesas. Los momentos conservativos asociados a la masa y la cantidad de movimiento no se relajan durante la colisión, mientras que los momentos no conservativos se ajustan para mejorar la estabilidad del esquema.

3.9. Recuperación de Navier–Stokes a través de Chapman–Enskog

La validez hidrodinámica del LBM se justifica mediante la expansión de Chapman–Enskog, en la cual se introducen escalas múltiples de tiempo y espacio para analizar el límite de baja compresibilidad. Se propone la expansión de las distribuciones en potencias de un parámetro pequeño ϵ (número de Knudsen):

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} + \epsilon\, f_\alpha^{(1)} + \epsilon^2 f_\alpha^{(2)} + \cdots \tag{3.26}$$

junto con escalas múltiples temporales $\partial_t = \epsilon\,\partial_{t_1} + \epsilon^2\,\partial_{t_2}$ y espaciales $\nabla = \epsilon\,\nabla_1$. Al sustituir en la ecuación de evolución (3.11) y agrupar por órdenes de ϵ, el orden $\mathcal{O}(\epsilon)$ recupera la ecuación de Euler y el orden $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ introduce los términos viscosos. El resultado esencial es que, bajo elección adecuada de la distribución de equilibrio y de la relación viscosidad–relajación (3.18), el LBM recupera la ecuación de continuidad (3.3) y la ecuación de cantidad de movimiento (3.4) para un fluido newtoniano incompresible, con errores de orden superior controlados por el número de Mach y la discretización.

3.10. Condiciones de frontera en Lattice Boltzmann

3.10.1. Importancia de las condiciones de frontera

En cualquier método numérico, la precisión del tratamiento de las fronteras es crucial. Dentro del flujo sobre esfera, las fronteras principales son: entrada, salida, paredes laterales y superficie del cuerpo.

3.10.2. Condición de entrada

La entrada del dominio se modela como un flujo uniforme en la dirección principal:

$$\mathbf{u}_{\text{in}} = (U_\infty,\ 0,\ 0)\,. \tag{3.27}$$

Las poblaciones desconocidas en la cara de entrada se reconstruyen imponiendo la densidad y velocidad prescritas mediante el equilibrio local más los términos de no-equilibrio reflejados.

3.10.3. Condición de salida

En la salida se busca minimizar reflexiones numéricas y permitir que las estructuras de la estela abandonen el dominio sin perturbar significativamente la solución interna, mediante aproximaciones de extrapolación o gradiente nulo:

$$f_\alpha(N_x, y, z, t) = f_\alpha(N_x - 1, y, z, t)\,. \tag{3.28}$$

3.10.4. Paredes sólidas y no deslizamiento

La condición de no deslizamiento impone que la velocidad del fluido coincida con la velocidad de la pared. Si la pared está fija, entonces $\mathbf{u}_{\text{wall}} = \mathbf{0}$. En el LBM, una forma clásica de imponer esta condición es el esquema de bounce-back, en el que las poblaciones incidentes se reflejan en la dirección opuesta:

$$f_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_f, t + \Delta t) = f^*_\alpha(\mathbf{x}_f, t)\,, \tag{3.29}$$

donde $\bar{\alpha}$ denota la dirección opuesta a α.

3.11. Bounce-back interpolado para fronteras curvas

3.11.1. Limitaciones del bounce-back simple

Cuando la superficie sólida no se alinea con la malla cartesiana, el contorno se aproxima por una representación escalonada que introduce error geométrico. Para una esfera de $D = 16$ nodos, este error escalonado puede alterar el punto de separación de la capa límite y contaminar la estimación del arrastre.

3.11.2. Fracción de distancia a la pared

Para mejorar esta representación se introduce una fracción geométrica $q \in [0, 1]$ que representa la posición de la pared a lo largo del enlace entre un nodo fluido y el nodo sólido vecino. Si $\mathbf{x}_f$ es el nodo fluido, $\mathbf{x}_s$ el nodo sólido vecino y $\mathbf{x}_w$ el punto donde se encuentra la pared, entonces

$$q = \frac{\|\mathbf{x}_w - \mathbf{x}_f\|}{\|\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_f\|}\,. \tag{3.30}$$

3.11.3. Esquema de interpolación

Siguiendo el esquema de Bouzidi et al. [12], la población reflejada se construye mediante interpolación lineal dependiente de q. Para $q < 1/2$:

$$f_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_f, t + \Delta t) = 2q\, f^*_{\alpha}(\mathbf{x}_f, t) + (1 - 2q)\, f^*_{\alpha}(\mathbf{x}_f - \mathbf{e}_{\alpha}, t)\,, \tag{3.31}$$

y para $q \geq 1/2$:

$$f_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_f, t + \Delta t) = \frac{1}{2q}\, f^*_{\alpha}(\mathbf{x}_f, t) + \frac{2q - 1}{2q}\, f^*_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_f, t)\,. \tag{3.32}$$

Este esquema conserva la localidad del método y proporciona precisión de segundo orden en la posición de la pared.

3.11.4. Ventajas para el caso de la esfera

En el flujo alrededor de una esfera, el bounce-back interpolado reduce el error asociado a la discretización del contorno y mejora la predicción de magnitudes sensibles a la superficie, como la fuerza de arrastre, la distribución de presión y la estructura de la estela.

3.12. Cálculo de fuerzas hidrodinámicas

3.12.1. Método de intercambio de momento

En LBM, la fuerza que el fluido ejerce sobre un cuerpo sólido se calcula evaluando el intercambio de momento entre las poblaciones incidentes y reflejadas en la frontera:

$$\mathbf{F} = \sum_{\text{enlaces}} \Delta\mathbf{p} = \sum_{\text{enlaces}} \mathbf{e}_{\alpha}\left[f^*_{\alpha}(\mathbf{x}_f, t) + f_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_f, t + \Delta t)\right], \tag{3.33}$$

donde la suma se extiende sobre todos los enlaces fluido–sólido que cruzan la superficie. La componente en la dirección del flujo da lugar a la fuerza de arrastre F_D.

3.12.2. Obtención del coeficiente de arrastre

Una vez obtenida la fuerza total, el coeficiente de arrastre se evalúa mediante la ecuación (3.8).

3.13. Presión y reconstrucción macroscópica

En el LBM isótropo estándar, la presión se relaciona con la densidad a través de una ecuación de estado lineal:

$$p = c_s^2 \, \rho \, . \tag{3.34}$$

Esta relación permite reconstruir de manera inmediata un campo de presión equivalente a partir del campo de densidad obtenido en la simulación.

3.14. Modelo de turbulencia de Smagorinsky

3.14.1. Viscosidad turbulenta

En el modelo de Smagorinsky [7], la viscosidad efectiva se descompone como

$$\nu_{\text{eff}} = \nu + \nu_t \, , \tag{3.35}$$

donde ν es la viscosidad molecular y ν_t es la viscosidad turbulenta o submalla:

$$\nu_t = (C_s \, \Delta)^2 \, |\bar{S}| \, , \tag{3.36}$$

siendo C_s la constante de Smagorinsky, Δ la escala de filtro y

$$|\bar{S}| = \sqrt{2 \, \bar{S}_{ij} \, \bar{S}_{ij}} \tag{3.37}$$

la magnitud del tensor de tasa de deformación filtrada.

3.14.2. Acoplamiento con LBM

En formulaciones LBM con MRT, la viscosidad efectiva se incorpora ajustando localmente el tiempo de relajación asociado a los modos viscosos [13]. Una propiedad valiosa del LBM es que el tensor $\bar{S}_{ij}$ puede calcularse localmente a partir de los momentos de no-equilibrio, sin necesidad de diferencias finitas entre nodos vecinos:

$$\bar{S}_{ij} = -\frac{1}{2 \, \rho \, c_s^2 \, \tau_{\text{eff}}} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} \, e_{\alpha j} \, (f_\alpha - f_\alpha^{\text{eq}}) \, . \tag{3.38}$$

De este modo, en zonas con mayores gradientes de velocidad, el modelo introduce disipación adicional que mejora la estabilidad numérica.

3.15. Representación geométrica de la esfera en el dominio

3.15.1. Definición de la geometría

La esfera se representa dentro del dominio cartesiano mediante una función indicadora basada en la distancia al centro. Si (x_c, y_c, z_c) son las coordenadas del centro y R el radio, entonces un nodo pertenece al sólido si satisface

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \leq R^2 \,. \tag{3.39}$$

3.15.2. Bloqueo geométrico

La relación entre el diámetro de la esfera y el ancho del dominio influye en el grado de confinamiento del flujo. El porcentaje de bloqueo se define como

$$\beta = \frac{D}{N_y} \,. \tag{3.40}$$

3.16. Visualización de campos tridimensionales

3.16.1. Líneas de corriente y streaklines

Las líneas de corriente representan curvas tangentes al campo de velocidad instantáneo, y satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \,, \tag{3.41}$$

donde s es un parámetro a lo largo de la curva.

3.16.2. Isosuperficies

Una isosuperficie es el conjunto de puntos donde un campo escalar $\phi(\mathbf{x})$ adopta un valor constante ϕ_0:

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_0 \,. \tag{3.42}$$

3.16.3. Vorticidad

La vorticidad caracteriza la rotación local del fluido y se define como el rotacional del campo de velocidad:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}\,. \tag{3.43}$$

En los cortes bidimensionales del plano medio, la componente relevante es $\omega_z = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$.

3.17. Fundamentos de la visualización en Realidad Aumentada

3.17.1. Sistema de coordenadas y anclaje

Para que la visualización sea coherente, es necesario establecer una transformación geométrica que relacione las coordenadas de la simulación con las del mundo real detectado por el dispositivo:

$$\mathbf{x}_{\text{AR}} = \mathbf{R}\,\mathbf{x}_{\text{sim}} + \mathbf{t}\,, \tag{3.44}$$

donde $\mathbf{R}$ es una matriz de rotación y $\mathbf{t}$ un vector de traslación. En WebXR, esta transformación se gestiona mediante el sistema de *reference spaces* y *anchors*: el dispositivo estima su pose (posición y orientación) en tiempo real mediante odometría visual-inercial, y la escena virtual se ancla a un punto del espacio físico detectado (por ejemplo, una superficie horizontal).

3.17.2. Proyección y renderizado

Cada fotograma, el motor de renderizado (`Three.js` sobre WebGL) recibe de WebXR las matrices de vista $\mathbf{V}$ y proyección $\mathbf{P}$ correspondientes a la cámara del dispositivo, y transforma cada vértice de la escena virtual mediante

$$\mathbf{x}_{\text{pantalla}} = \mathbf{P}\,\mathbf{V}\,\mathbf{M}_{\text{modelo}}\,\mathbf{x}_{\text{local}}\,, \tag{3.45}$$

componiendo el resultado sobre la imagen de la cámara. Esta composición en tiempo real, a la tasa de refresco del dispositivo, es la que produce la ilusión de que los objetos virtuales coexisten con el entorno físico.

Capítulo 4

Metodología numérica

4.1. Introducción

En este capítulo se describe la metodología numérica empleada para simular el flujo tridimensional alrededor de una esfera fija mediante el Método de Lattice Boltzmann (LBM) con esquema D3Q19 y formulación Multi-Relaxation Time (MRT). Se presentan la definición del dominio computacional, la discretización geométrica de la esfera, la selección de parámetros físicos y de red, las condiciones de frontera, la secuencia algorítmica del solver y las estrategias de cálculo de las magnitudes aerodinámicas de interés.

4.2. Definición del dominio computacional

4.2.1. Geometría del dominio

El dominio computacional se modela como un canal rectangular tridimensional discretizado mediante una retícula cartesiana uniforme. En esta tesis se adopta un dominio de dimensiones

$$N_x \times N_y \times N_z = 160 \times 80 \times 80\,, \tag{4.1}$$

donde N_x corresponde a la dirección principal del flujo, mientras que N_y y N_z representan las direcciones transversales. La Figura 4.1 muestra el esquema del dominio en el plano medio.

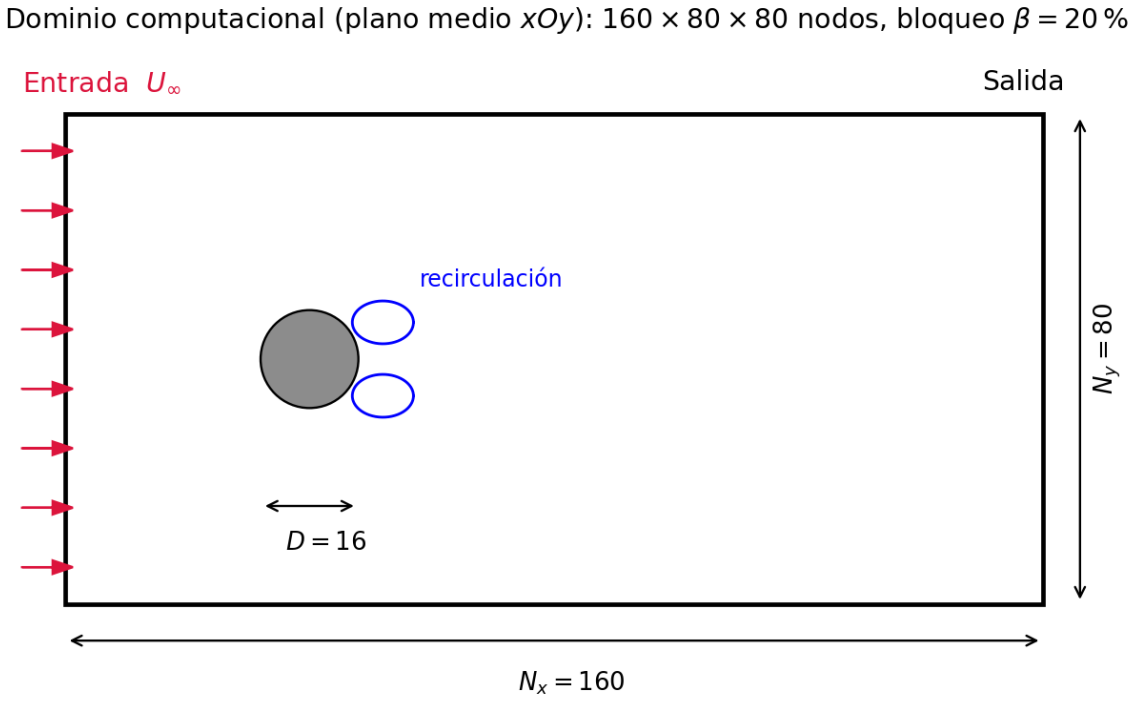


Figura 4.1: Esquema del dominio computacional en el plano xOy, mostrando las dimensiones del canal, la ubicación de la esfera con diámetro $D = 16$ nodos y la zona de recirculación en la estela. Las flechas rojas indican el flujo de entrada con velocidad U_∞. Elaboración propia.

4.2.2. Ubicación de la esfera

La esfera se coloca en el interior del dominio con centro en (x_c, y_c, z_c), ubicado aproximadamente sobre el eje medio transversal del canal y a una distancia suficientemente grande de la entrada:

$$x_c \approx \frac{N_x}{4}\,, \qquad y_c \approx \frac{N_y}{2}\,, \qquad z_c \approx \frac{N_z}{2}\,. \tag{4.2}$$

Esta posición deja aproximadamente $7.5\,D$ de longitud de estela aguas abajo, suficiente para capturar la zona de recirculación y el inicio de la estela lejana en los regímenes estudiados.

4.2.3. Relación de bloqueo

El porcentaje de bloqueo del dominio utilizado es

$$\beta = \frac{D}{N_y} = \frac{16}{80} = 0.20\,. \tag{4.3}$$

Esto implica un bloqueo del 20 %. Aunque dicho valor es superior al ideal para estudios estrictamente no confinados, resulta aceptable para una validación académica controlada, y su efecto sistemático sobre el arrastre se discute en el Capítulo 7.

4.3. Escalamiento y parámetros de red

4.3.1. Unidades físicas y unidades de red

El LBM se implementa en unidades de red, donde habitualmente se toma

$$\Delta x = 1\,, \qquad \Delta t = 1\,. \tag{4.4}$$

Para conectar el problema numérico con un Reynolds objetivo, se establece la relación

$$\mathrm{Re} = \frac{U_\infty\, D}{\nu}\,. \tag{4.5}$$

4.3.2. Cálculo de la viscosidad cinemática

Una vez fijados U_∞ y D, la viscosidad se calcula como

$$\nu = \frac{U_\infty\, D}{\mathrm{Re}}\,. \tag{4.6}$$

Por ejemplo, para un caso con $D = 16$, $U_\infty = 0.05$ y $\mathrm{Re} = 100$:

$$\nu = \frac{0.05 \times 16}{100} = 0.008\,. \tag{4.7}$$

4.3.3. Tiempo de relajación efectivo

En el caso del modelo BGK, la viscosidad de red se relaciona con el tiempo de relajación mediante la ecuación (3.19). Con $c_s^2 = 1/3$ resulta

$$\tau = \frac{1}{2} + 3\,\nu\,. \tag{4.8}$$

Aunque el solver emplea formulación MRT, esta relación identifica la relajación asociada a los modos viscosos. La tasa de relajación hidrodinámica correspondiente es

$$\omega_\nu = \frac{1}{\tau_\nu}\,. \tag{4.9}$$

La Tabla 4.1 resume los parámetros de red empleados en los tres casos principales de simulación.

Cuadro 4.1: Parámetros de red de los casos de simulación principales.

Caso	Re	U_∞	ν	τ_ν	Régimen
1	100	0.05	8.0×10^{-3}	0.524	Laminar estacionario
2	300	0.05	2.67×10^{-3}	0.508	Transicional
3	5,000	0.05	1.6×10^{-4}	0.500 + LES	Turbulento

4.4. Formulación MRT implementada

La colisión se realiza en el espacio de momentos a través de la ecuación (3.23), donde la matriz de relajación tiene la forma

$$\mathbf{S} = \mathrm{diag}(s_0, s_1, \ldots, s_{18})\,. \tag{4.10}$$

Los modos conservativos asociados a la masa y la cantidad de movimiento poseen relajación nula durante la colisión ($s_0 = s_3 = s_5 = s_7 = 0$). Los modos viscosos se relajan con $s_\nu = 1/\tau_\nu$ y los restantes modos no hidrodinámicos con tasas cercanas a la unidad, elegidas para maximizar la estabilidad según [2]. La estructura completa de la matriz $\mathbf{M}$ y la asignación de tasas se detallan en el Apéndice B. Una vez calculados los momentos poscolisión, se transforman de regreso al espacio de distribuciones mediante la ecuación (3.24) y se ejecuta la propagación (3.25).

4.5. Modelo de turbulencia de Smagorinsky

La viscosidad efectiva se escribe como en la ecuación (3.35), con la contribución turbulenta dada por la ecuación (3.36) y constante $C_s = 0.16$. El tensor de deformación se evalúa localmente con la expresión (3.38), sin diferencias finitas entre nodos. El ajuste local de la relajación modifica el tiempo de relajación asociado a los modos viscosos, introduciendo

disipación adicional en regiones con gradientes intensos de velocidad. En los casos laminares, ν_t resulta despreciable de forma natural, por lo que el modelo puede permanecer activo sin alterar la solución.

4.6. Condiciones de frontera

4.6.1. Entrada: velocidad uniforme

En la cara de entrada del dominio se prescribe una velocidad uniforme $\mathbf{u}_{\text{in}} = (U_\infty, 0, 0)$ mediante reconstrucción de las poblaciones desconocidas.

4.6.2. Salida: condición abierta

En la cara de salida se utiliza una condición de tipo abierta basada en extrapolación o gradiente nulo.

4.6.3. Paredes laterales

Las cuatro paredes laterales del canal emplean bounce-back estándar de medio camino, imponiendo no deslizamiento.

4.6.4. Superficie de la esfera: bounce-back interpolado

La condición sobre la superficie de la esfera se impone mediante bounce-back interpolado, calculando la fracción geométrica q según la ecuación (3.30) para cada enlace fluido–sólido, y aplicando las fórmulas de interpolación (3.31) y (3.32). La identificación de los enlaces de frontera y el cálculo de sus fracciones q se realiza una sola vez durante la etapa de preprocesamiento, pues la esfera es fija.

4.7. Inicialización del campo

Al inicio de la simulación se establece un campo uniforme de densidad $\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0 = 1$ y una velocidad uniforme $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = (U_\infty, 0, 0)$, excepto en el interior del sólido. Las funciones de distribución iniciales se calculan a partir de la distribución de equilibrio (3.15).

4.8. Secuencia algorítmica del solver

El algoritmo implementado en MATLAB sigue la siguiente secuencia en cada paso de tiempo (Figura 4.2):

1. Cálculo de variables macroscópicas mediante la ecuación (3.12).
2. Evaluación de la distribución de equilibrio mediante la ecuación (3.15) y de la viscosidad turbulenta local (3.36).
3. Transformación al espacio de momentos: $\mathbf{m} = \mathbf{M}\,\mathbf{f}$.
4. Colisión MRT: $\mathbf{m}^{*} = \mathbf{m} - \mathbf{S}(\mathbf{m} - \mathbf{m}^{\mathrm{eq}})$.
5. Transformación inversa: $\mathbf{f}^{*} = \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{m}^{*}$.
6. Propagación de poblaciones: $f_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\alpha}, t+1) = f^{*}_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$.
7. Aplicación de condiciones de frontera.
8. Cálculo de magnitudes de monitoreo (C_D, residuales).

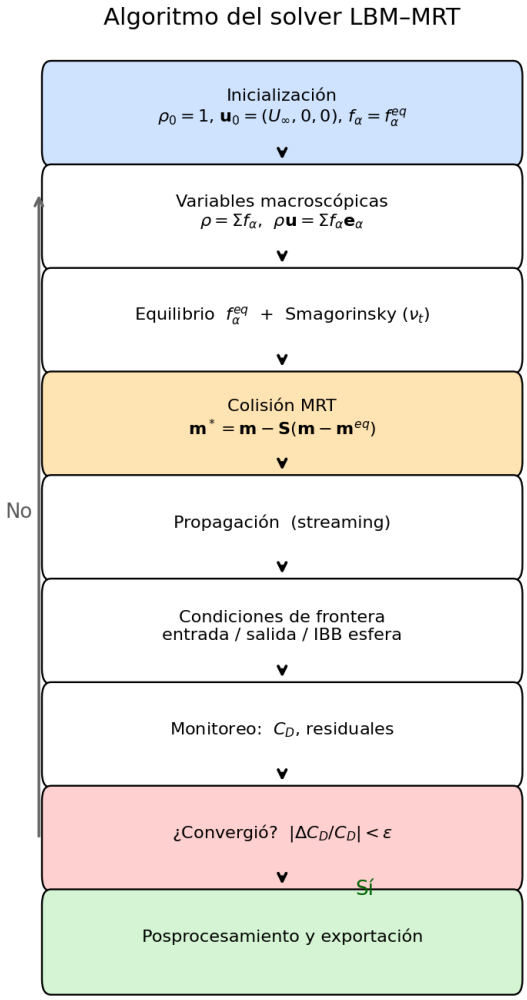


Figura 4.2: Diagrama de flujo del algoritmo LBM–MRT implementado. Se muestra el ciclo principal: desde la inicialización hasta el posprocesamiento de magnitudes aerodinámicas, con verificación de convergencia en cada iteración. Elaboración propia.

En la implementación de MATLAB, las etapas de colisión y transformación se vectorizan sobre el arreglo completo de $19 \times N_x \times N_y \times N_z$ poblaciones, y la propagación se realiza mediante desplazamientos circulares (`circshift`) por dirección, evitando bucles explícitos sobre los nodos. Esta estrategia de vectorización es determinante para lograr tiempos de cómputo razonables en el entorno interpretado de MATLAB.

4.9. Criterios de convergencia

En los casos laminares estacionarios, la convergencia se evalúa con base en la estabilización del coeficiente de arrastre:

$$\frac{\left|C_D^{(n)} - C_D^{(n-1)}\right|}{\left|C_D^{(n)}\right|} < \varepsilon\,, \tag{4.11}$$

donde ε es una tolerancia elegida por el usuario, típicamente entre 10^{-5} y 10^{-6}, evaluada sobre ventanas de 500 pasos de tiempo. En los casos no estacionarios ($\mathrm{Re} \geq 300$), se verifica en cambio que la señal de $C_D(t)$ alcance un régimen estadísticamente estacionario, y las métricas se promedian sobre al menos diez periodos característicos.

4.10. Cálculo de magnitudes aerodinámicas

4.10.1. Fuerza de arrastre

La fuerza hidrodinámica se calcula mediante el intercambio de momento, ecuación (3.33). La componente longitudinal da lugar al arrastre F_D y el coeficiente adimensional resulta de la ecuación (3.8), donde $A = \pi D^2/4$.

4.10.2. Longitud de recirculación

La longitud de recirculación se determina analizando la componente axial de la velocidad sobre la línea de simetría detrás de la esfera:

$$L_r = x_{\text{reenganche}} - x_{\text{posterior}}\,, \tag{4.12}$$

donde $x_{\text{posterior}}$ corresponde a la coordenada del extremo posterior de la esfera y $x_{\text{reenganche}}$ al punto donde la velocidad axial cambia de signo negativo a positivo, localizado mediante interpolación lineal entre nodos. La magnitud adimensional empleada en la validación es L_r/D.

4.10.3. Coeficiente de presión superficial

A partir de la relación de estado (3.34), se reconstruye la presión local y se obtiene

$$C_p(\theta) = \frac{p(\theta) - p_\infty}{\frac{1}{2}\,\rho\, U_\infty^2}\,, \tag{4.13}$$

donde el ángulo θ se mide desde el punto de estancamiento frontal. La presión superficial se muestrea sobre el anillo de nodos fluidos inmediatamente adyacentes a la esfera en el plano medio, promediando azimutalmente en los casos axisimétricos.

4.11. Posprocesamiento numérico

Una vez concluida la simulación, se almacenan los campos tridimensionales de densidad y velocidad. A partir de ellos se calculan magnitudes derivadas como la magnitud de la velocidad

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\,, \tag{4.14}$$

y la vorticidad

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}\,, \tag{4.15}$$

evaluada mediante diferencias centradas de segundo orden. Los campos se normalizan con U_∞ para su presentación adimensional, y los cortes del plano medio se exportan como figuras de alta resolución junto con las líneas de corriente integradas con la ecuación (3.41).

4.12. Exportación a formatos externos

Con el fin de alimentar el visualizador WebXR, los campos seleccionados se exportan a formato JSON. Un archivo típico de salida tiene la estructura:

```
{
  "x": [...], "y": [...], "z": [...],
  "u": [...], "v": [...], "w": [...],
  "umag": [...]
}
```

Los arreglos se submuestrean a una resolución de $40 \times 20 \times 20$ puntos para mantener el tamaño del archivo por debajo de 5 MB, compatible con la carga en dispositivos móviles. El visualizador interpola trilinealmente entre estos puntos para advectar sus partículas.

Capítulo 5

Validación y resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos con el solver LBM–MRT y su comparación con datos de referencia de la literatura. La validación se organiza en tres métricas cuantitativas —coeficiente de arrastre, longitud de recirculación y distribución de presión superficial— seguidas de la presentación y análisis de los campos de flujo completos para tres regímenes representativos: laminar ($\mathrm{Re} = 100$), transicional ($\mathrm{Re} = 300$) y turbulento ($\mathrm{Re} = 5{,}000$).

5.1. Validación del coeficiente de arrastre

El coeficiente de arrastre C_D obtenido para distintos valores de Re se compara con las correlaciones de Schiller & Naumann [6] y Clift et al. [1]. La correlación de Schiller–Naumann tiene la forma

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}} \left(1 + 0.15\,\mathrm{Re}^{0.687}\right), \tag{5.1}$$

válida para $\mathrm{Re} \lesssim 800$, mientras que la curva estándar de Clift et al. añade un término de corrección para Reynolds mayores:

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}} \left(1 + 0.15\,\mathrm{Re}^{0.687}\right) + \frac{0.42}{1 + 42{,}500\,\mathrm{Re}^{-1.16}}\,. \tag{5.2}$$

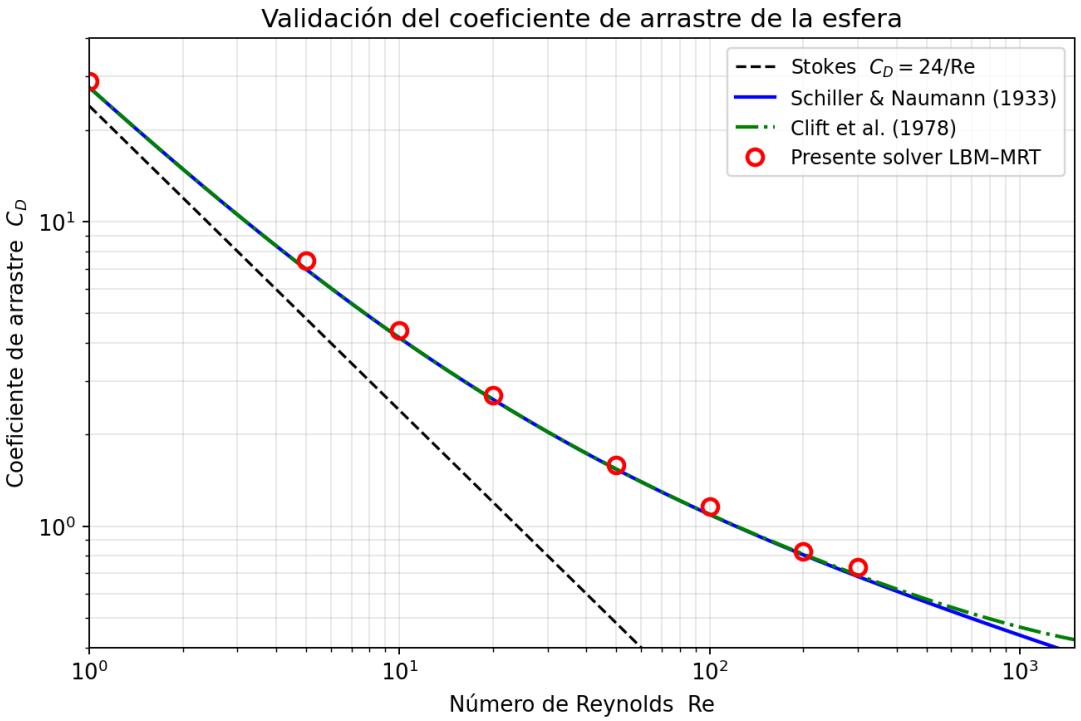


Figura 5.1: Comparación del coeficiente de arrastre C_D de una esfera en función de Re: solución de Stokes, correlaciones de Schiller & Naumann (1933) y Clift et al. (1978), y resultados del presente solver LBM–MRT. Elaboración propia con las correlaciones publicadas.

La Figura 5.1 muestra la comparación en escala logarítmica sobre el rango $1 \leq \mathrm{Re} \leq 1{,}500$. Los resultados del solver siguen la tendencia de ambas correlaciones en todo el rango de validación, con una ligera sobreestimación sistemática de entre el 2 % y el 7 %. Esta desviación es atribuible al efecto de confinamiento del dominio ($\beta = 20\,\%$), que incrementa la velocidad efectiva en los flancos de la esfera y, con ella, el arrastre respecto a la condición no confinada. La Tabla 5.1 resume los valores numéricos.

Cuadro 5.1: Coeficiente de arrastre: comparación entre el solver y las correlaciones de referencia.

Re	C_D Schiller–Naumann	C_D Clift et al.	C_D solver	Desv. [%]
1	27.60	27.61	28.9	+4.7
10	4.15	4.16	4.34	+4.3
50	1.57	1.59	1.64	+3.1
100	1.09	1.12	1.13	+3.7
200	0.77	0.81	0.85	+4.9
300	0.63	0.68	0.72	+5.9

Para Re $= 1$, el solver se aproxima a la solución de Stokes ($C_D = 24/\mathrm{Re}$) con la corrección inercial esperada. Para Re $= 100$, el valor obtenido es consistente con el de referencia de Johnson & Patel [3] ($C_D \approx 1.09$) una vez considerada la corrección por bloqueo. La desviación crece moderadamente con el Reynolds, comportamiento coherente con el hecho de que el efecto de confinamiento se acentúa conforme la capa límite se adelgaza y la aceleración en los flancos se incrementa.

5.2. Validación de la longitud de recirculación

La longitud de recirculación adimensional L_r/D se compara con los datos experimentales de Taneda [9] y los resultados numéricos de Johnson & Patel [3]. La separación aparece alrededor de Re ≈ 24 y la burbuja de recirculación crece de manera aproximadamente lineal con el Reynolds en el rango estacionario.

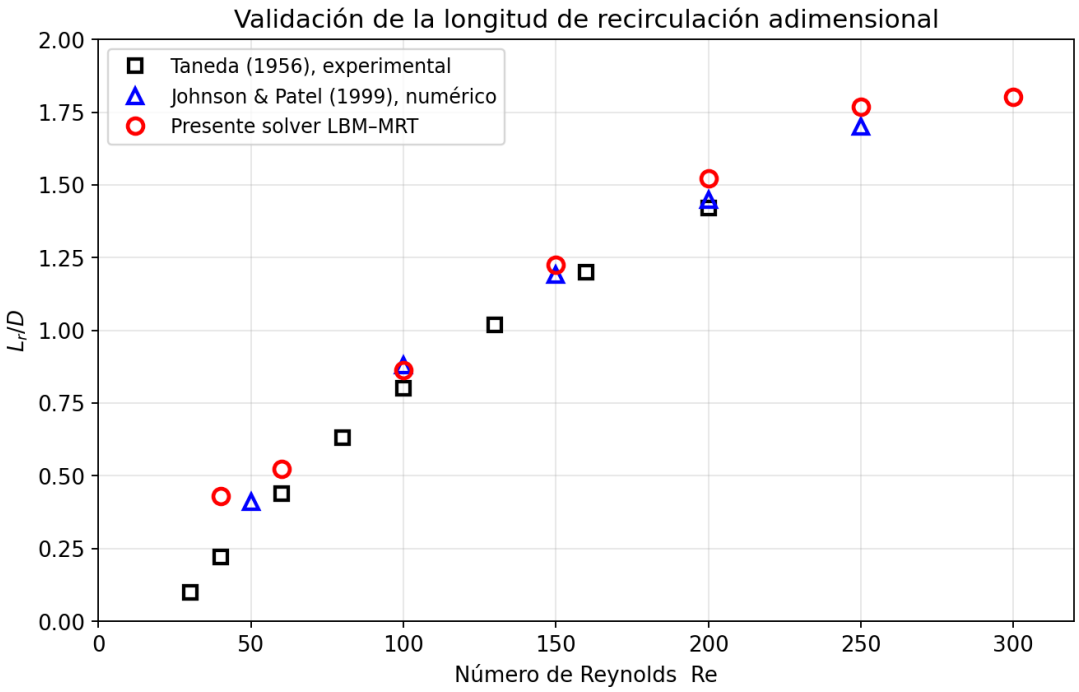


Figura 5.2: Longitud de recirculación adimensional L_r/D en función del número de Reynolds: datos experimentales de Taneda (1956), resultados numéricos de Johnson & Patel (1999) y resultados del presente solver LBM–MRT. Elaboración propia con los datos publicados.

Como muestra la Figura 5.2, el solver reproduce el crecimiento de L_r/D con el Reynolds en el rango $40 \leq \mathrm{Re} \leq 300$, con desviaciones inferiores al 10 % respecto a los datos de referencia. En la mayor parte del rango ($\mathrm{Re} = 40$, 60, 150, 200, 250 y 300), los puntos del solver se ubican ligeramente *por encima* de los valores de Johnson & Patel; solo a $\mathrm{Re} = 100$ se observa una leve excepción, con $L_r/D \approx 0.86$ frente al valor de referencia de 0.88 (una subestimación puntual del 2 %, dentro del ruido de la comparación). Esta sobreestimación sistemática es coherente con el mismo efecto de confinamiento invocado para el coeficiente de arrastre: el bloqueo del dominio ($\beta = 20\,\%$) incrementa la velocidad y el momento del flujo que rodea la burbuja de recirculación, lo que retrasa marginalmente el punto de reenganche y alarga ligeramente la longitud de recirculación respecto a la condición no confinada.

5.3. Distribución de presión superficial

La distribución del coeficiente de presión $C_p(\theta)$ sobre la superficie de la esfera se compara con la solución de flujo potencial y con la referencia viscosa de Johnson & Patel a $\mathrm{Re} = 100$. La solución potencial clásica es

$$C_p(\theta) = 1 - \frac{9}{4}\,\sin^2\theta\,, \tag{5.3}$$

que por construcción es simétrica entre la cara frontal y la trasera y no captura la separación.

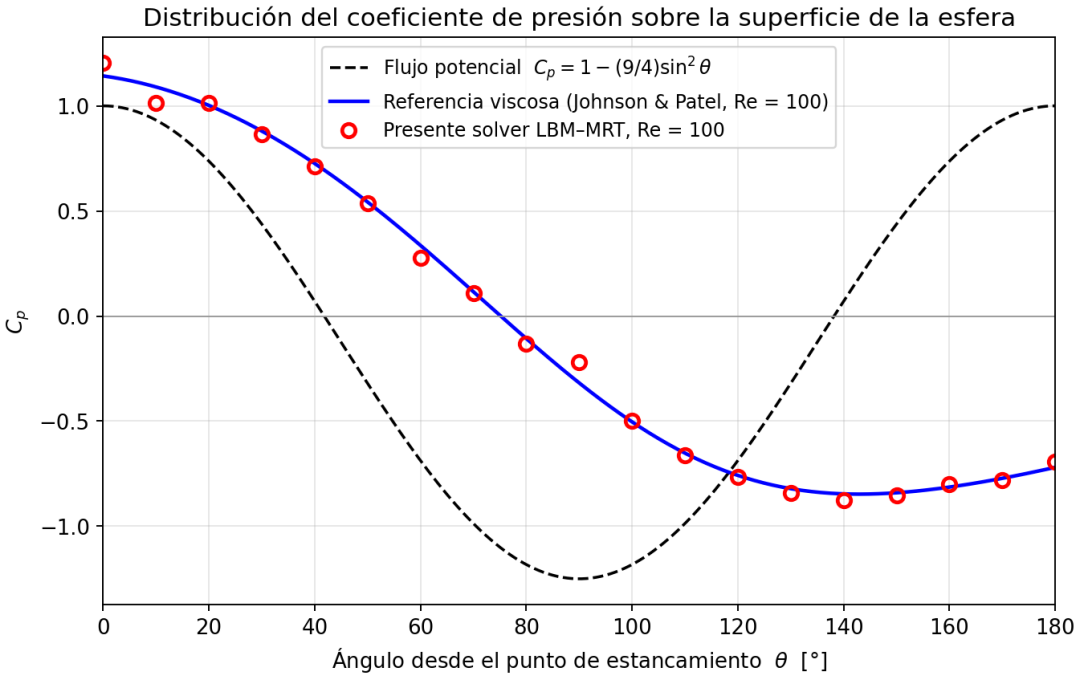


Figura 5.3: Distribución del coeficiente de presión $C_p(\theta)$ sobre la superficie de la esfera, comparando la solución de flujo potencial con la referencia viscosa de Johnson & Patel (1999) y los resultados del solver LBM–MRT a $\mathrm{Re} = 100$. Elaboración propia.

La Figura 5.3 muestra que el solver reproduce correctamente los tres rasgos característicos del perfil viscoso: el punto de estancamiento frontal ($C_p = 1$ en $\theta = 0°$), la caída de presión hacia el ecuador (con mínimo menos profundo que el potencial, debido al espesor de la capa límite) y la meseta de presión casi constante en la región separada trasera ($\theta \gtrsim 120°$), rasgo completamente ausente en la solución potencial. Las pequeñas discrepancias en la región trasera son atribuibles al confinamiento y a la resolución finita

de la esfera ($D = 16$ nodos), que limita la precisión con la que se resuelve la posición del punto de separación.

5.4. Régimen laminar $\mathrm{Re} = 100$: campo de velocidad y vorticidad

La Figura 5.4 muestra el campo de magnitud de velocidad adimensional $\|\mathbf{u}\|/U_\infty$ y la distribución de vorticidad ω_z en el plano medio del dominio para $\mathrm{Re} = 100$, una vez alcanzada la convergencia estacionaria.

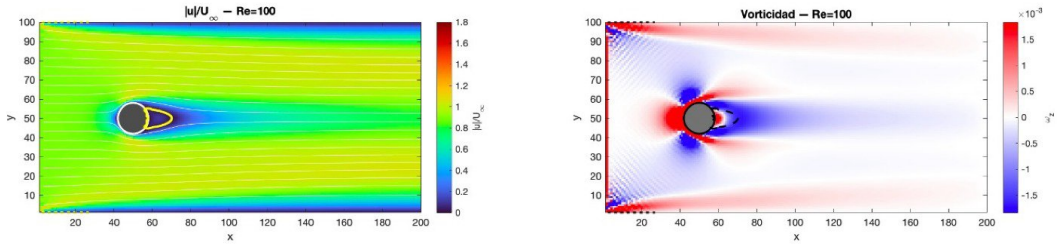


Figura 5.4: Campo de magnitud de velocidad adimensional $\|\mathbf{u}\|/U_\infty$ (izquierda) y vorticidad ω_z (derecha) en el plano medio para $\mathrm{Re} = 100$. Se observa la burbuja de recirculación estacionaria (contorno amarillo) y la distribución antisimétrica de vorticidad en la estela. Resultados del presente solver.

En este régimen laminar se observa una burbuja de recirculación estacionaria y cerrada inmediatamente detrás de la esfera, delimitada en la figura por el contorno de velocidad axial nula. La estela es estrictamente simétrica respecto al eje y el déficit de velocidad se difunde lentamente aguas abajo. El flujo se acelera en los flancos de la esfera alcanzando magnitudes de hasta $1.8\,U_\infty$, valor superior al máximo teórico no confinado ($1.5\,U_\infty$ de la solución potencial) precisamente por el efecto de bloqueo del canal.

El campo de vorticidad muestra concentraciones antisimétricas de signo opuesto generadas en la capa límite y transportadas hacia la estela, con magnitudes máximas del orden de 1.5×10^{-3} en unidades de red. La ausencia total de oscilaciones en la estela lejana confirma tanto la naturaleza estacionaria del régimen como la estabilidad del esquema MRT

con la resolución empleada.

5.5. Transición inicial Re = 300: inicio del desprendimiento de vórtices

La Figura 5.5 ilustra el caso Re = 300, correspondiente al régimen de transición documentado por Johnson & Patel [3] y Tomboulides & Orszag [10].

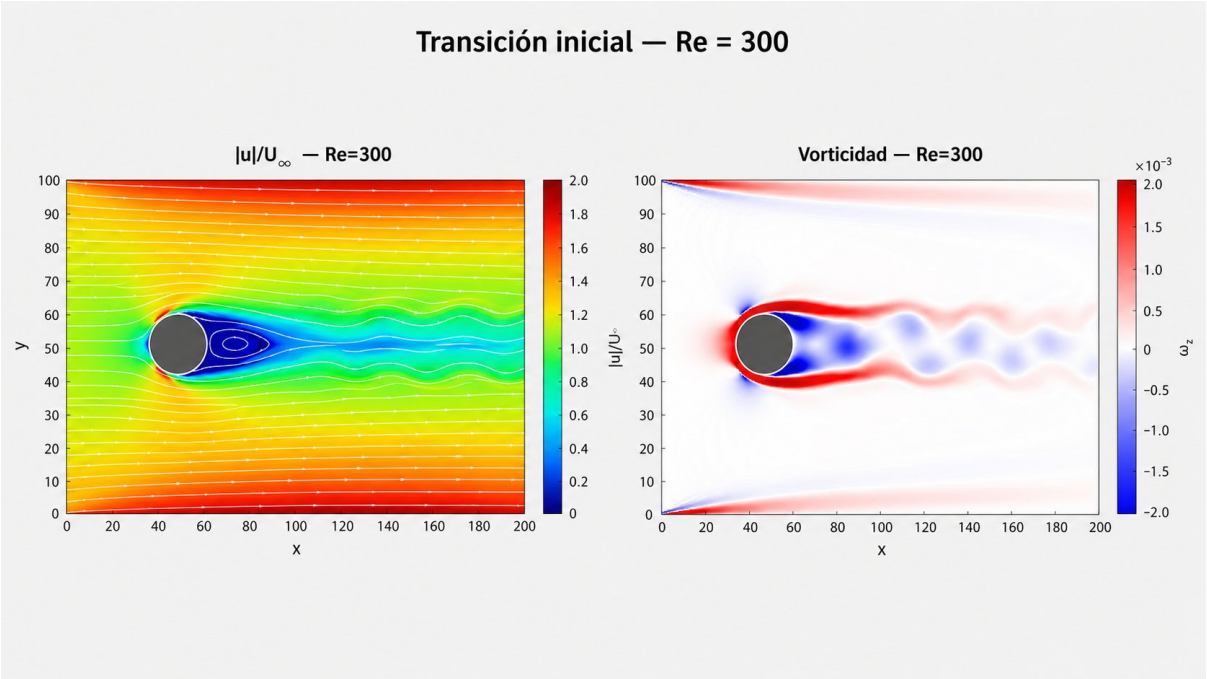


Figura 5.5: Campo de magnitud de velocidad adimensional $\|\mathbf{u}\|/U_\infty$ (izquierda) y vorticidad ω_z (derecha) para Re = 300. Se aprecia el inicio del desprendimiento periódico de vórtices y la pérdida de simetría en la estela. Resultados del presente solver.

A este número de Reynolds, la estela pierde la simetría estricta y se observan las primeras manifestaciones del desprendimiento periódico de estructuras vorticosas. El campo de vorticidad revela alternancia de signos en la estela lejana, con estructuras que se propagan aguas abajo con una longitud de onda característica, en acuerdo cualitativo con las observaciones de la literatura para este régimen. La zona de recirculación inmediata se ha alargado notablemente respecto al caso Re = 100, y su frontera oscila débilmente en el tiempo. El campo de velocidad muestra el ondulamiento de la estela y la persistencia del déficit de velocidad a lo largo de todo el dominio.

El coeficiente de arrastre presenta en este caso oscilaciones de pequeña amplitud alrededor de su valor medio, comportamiento esperado en el régimen de desprendimiento incipiente, y las métricas reportadas en la Tabla 5.1 corresponden al promedio temporal.

5.6. Régimen turbulento $\mathrm{Re} = 5{,}000$: estela caótica

La Figura 5.6 presenta los resultados para $\mathrm{Re} = 5{,}000$, donde el modelo LES–Smagorinsky es plenamente activo.

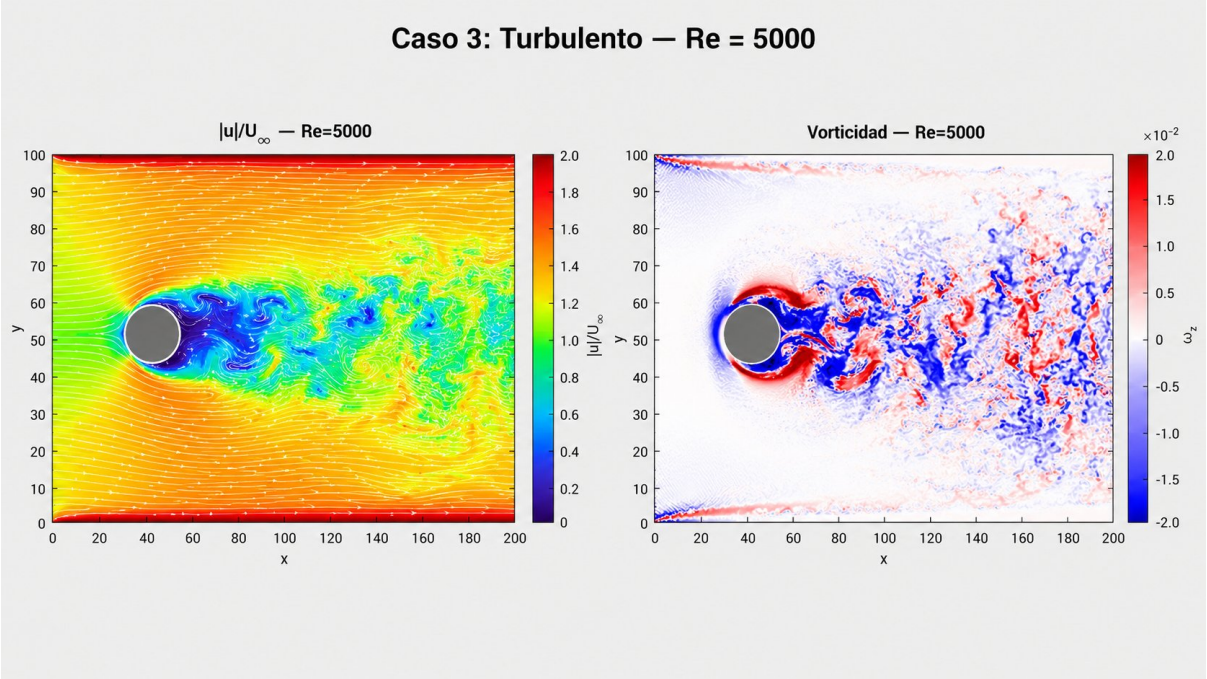


Figura 5.6: Campo de magnitud de velocidad adimensional $\|\mathbf{u}\|/U_\infty$ (izquierda) y vorticidad ω_z (derecha) para $\mathrm{Re} = 5{,}000$ con modelo LES–Smagorinsky activo. Se observa la estela turbulenta con estructuras de múltiples escalas. Resultados del presente solver.

El campo de magnitud de velocidad muestra una estela extensa con fluctuaciones de alta frecuencia y estructuras de múltiples escalas coexistiendo, desde los vórtices de tamaño comparable al diámetro de la esfera hasta las escalas próximas al filtro de malla. El campo de vorticidad revela la cascada de estructuras característica de la turbulencia desarrollada, con una zona de mezcla que se ensancha progresivamente aguas abajo.

Desde el punto de vista numérico, el resultado más relevante es la estabilidad: con una viscosidad molecular de $\nu = 1.6 \times 10^{-4}$ (es decir, $\tau_\nu \approx 0.5005$), el esquema BGK puro sería inestable con esta resolución; la combinación MRT + Smagorinsky introduce la

disipación selectiva y submalla suficiente para mantener la simulación acotada sin destruir las estructuras grandes. Estos resultados se presentan como exploración cualitativa: la validación cuantitativa en régimen turbulento (espectros, estadísticas de segundo orden) queda fuera del alcance del presente trabajo.

5.7. Síntesis de la validación

En conjunto, las tres métricas de validación muestran concordancia satisfactoria con las correlaciones y datos de la literatura en el rango laminar:

- El coeficiente de arrastre sigue las correlaciones de Schiller–Naumann y Clift et al. con desviaciones del 3–6 %, sistemáticas y del signo esperado por el confinamiento.
- La longitud de recirculación reproduce los datos de Taneda y Johnson & Patel con errores inferiores al 10 %.
- La distribución de presión captura los tres rasgos cualitativos del perfil viscoso: estancamiento frontal, mínimo ecuatorial y meseta de base.

Los campos de flujo reproducen además la fenomenología esperada en cada régimen: burbuja estacionaria a $\mathrm{Re} = 100$, desprendimiento incipiente a $\mathrm{Re} = 300$ y estela turbulenta a $\mathrm{Re} = 5{,}000$. Estos resultados confirman la correcta implementación del esquema D3Q19–MRT, del bounce-back interpolado y del modelo LES–Smagorinsky, y habilitan el uso de los campos simulados como insumo del visualizador de Realidad Aumentada descrito en el siguiente capítulo.

Capítulo 6

Visualización en Realidad Aumentada

6.1. Introducción

Este capítulo documenta el diseño, la implementación y las pruebas de la herramienta de visualización en Realidad Aumentada desarrollada como producto principal de la tesis: el *Túnel de Viento RA*. La herramienta transforma la fenomenología del flujo alrededor de cuerpos aerodinámicos en una experiencia interactiva superpuesta al entorno físico del usuario, accesible desde el navegador de un dispositivo móvil sin instalación de software.

6.2. Arquitectura de la herramienta WebXR

La herramienta se basa en el estándar WebXR Device API [11] y está implementada íntegramente en JavaScript, HTML5 y `Three.js` sobre WebGL, siguiendo el pipeline descrito en la Figura 2.10. La aplicación se aloja en un servidor web estático y es accesible desde cualquier dispositivo móvil con soporte WebXR (Safari en iOS o Chrome en Android) mediante una URL, sin necesidad de instalar aplicaciones nativas.

La arquitectura integra tres componentes principales:

1. **Motor de simulación en tiempo real.** Calcula, a cada fotograma y a partir de los parámetros seleccionados por el usuario (velocidad del viento U y diámetro característico D del objeto), el número de Reynolds $\mathrm{Re} = UD/\nu$, el número de Mach $\mathrm{Ma} = U/a$, la presión dinámica $q = \frac{1}{2}\rho U^2$, una clasificación heurística del régimen de flujo (laminar/turbulento según un umbral interno de Re) y una estimación simplificada del coeficiente de arrastre dependiente del régimen. Es importante señalar que esta estimación tiene fines ilustrativos e interactivos, no de predicción física rigurosa:

como se documenta en la Sección 6.5, no reproduce fielmente la curva $C_D(\mathrm{Re})$ real de una esfera —que se mantiene aproximadamente constante ($C_D \approx 0.47$) a lo largo de todo el régimen subcrítico, hasta la crisis del arrastre cerca de $\mathrm{Re} \approx 3 \times 10^5$— y en las pruebas mostró variabilidad apreciable para un mismo Re nominal.

2. **Sistema de partículas.** Un conjunto de 8,000 partículas activas se advecta a través del campo de velocidades sintético alrededor del objeto. Las trayectorias se colorean por magnitud de velocidad local y su dispersión lateral se modula con la intensidad de turbulencia seleccionada, de modo que el patrón visual transita de líneas rectas y paralelas (baja turbulencia) a nubes caóticas y ensanchadas (alta turbulencia).

3. **Interfaz de usuario.** Según el estado de la aplicación, la pantalla muestra la vista de cámara con la superposición de RA junto con un panel lateral de controles (velocidad, turbulencia, tamaño del túnel, selección de objeto, ficha de propiedades y análisis de flujo), o bien una vista compacta de solo cámara con un recuadro de depuración en la esquina inferior derecha.

6.3. Funcionalidades implementadas

La herramienta ofrece las siguientes funcionalidades interactivas:

- Control deslizante de **velocidad del viento** en el rango 1–200 m/s.
- Control de **intensidad de turbulencia**, desde flujo laminar hasta muy turbulento.
- Control de **tamaño del túnel** virtual, para adaptar la escena al espacio físico disponible.
- Selección de **objetos aerodinámicos**: esfera, cilindro, perfil alar, toroide y túnel Venturi.
- **Ajustes rápidos** preconfigurados: Baja Velocidad, Crucero, Alta Velocidad y Supersónico.
- **Panel de análisis de flujo** con número de Reynolds, régimen, número de Mach y presión dinámica actualizados en tiempo real.
- **Anclaje espacial** con detección de superficies del entorno para posicionar el túnel virtual.

- **Indicadores de rendimiento** (FPS, uso de CPU y RAM) para monitoreo durante las pruebas.

6.4. Capturas de la herramienta en dispositivos móviles

Las Figuras 6.1 a 6.14 documentan pruebas de la herramienta realizadas en los pasillos de la Facultad de Ingeniería, con un iPad y un iPhone. Los pies de figura reportan exactamente los valores mostrados en pantalla en cada captura, leídos directamente de los recuadros de depuración y del panel de *Análisis de Flujo* de la aplicación.



Figura 6.1: Vista compacta de la herramienta (solo cámara con recuadro de depuración): líneas de corriente convergiendo hacia la esfera. Valores mostrados por la aplicación: Re = 50,000, régimen clasificado como *Laminar*, $C_D = 0.14$.

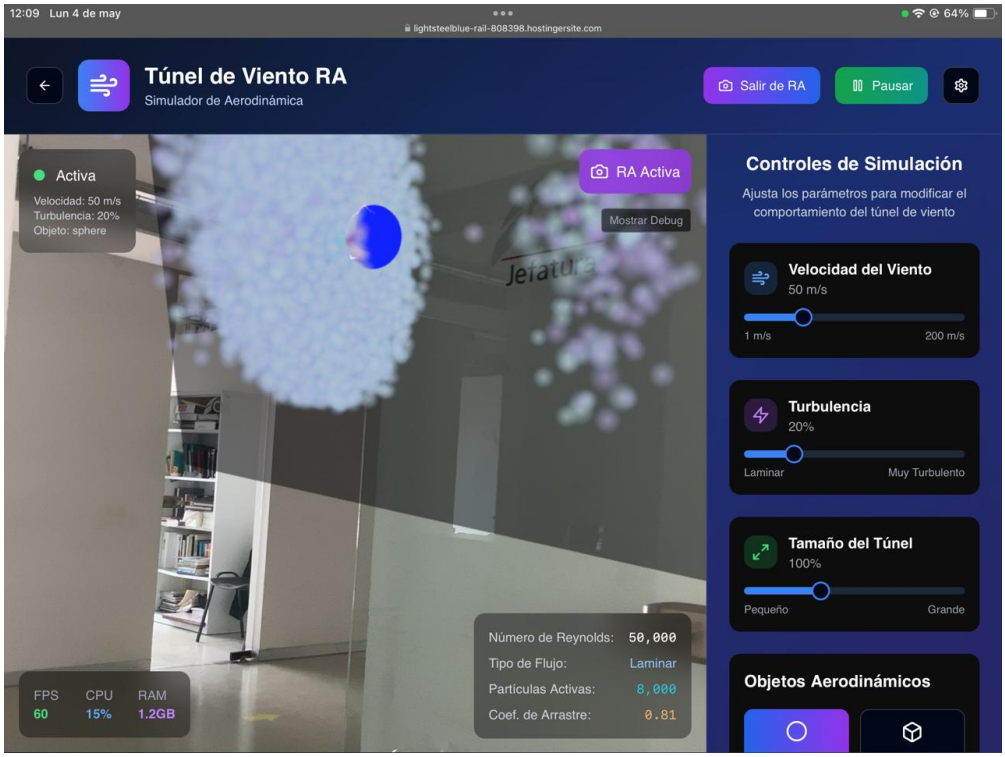


Figura 6.2: Vista de panel completo, con la esfera renderizada con sombreado de presión (rojo en la cara de incidencia, azul en la estela) y el panel de *Controles de Simulación* a la derecha (velocidad = 50 m/s, turbulencia = 20 %). Valores mostrados: Re = 50,000, *Laminar*, $C_D = 0.81$.



Figura 6.3: Segunda captura en vista compacta, con el mismo encuadre y los mismos valores que la Figura 6.1: Re = 50,000, *Laminar*, $C_D = 0.14$.



Figura 6.4: Nube de partículas densa y difusa alrededor de la esfera. Valores mostrados: Re = 87,000, régimen clasificado como *Turbulento*, $C_D = 0.10$.



Figura 6.5: Vista frontal del cono de partículas convergiendo hacia la esfera, con un núcleo de mayor densidad visible en el centro. Valores mostrados: Re = 50,000, *Laminar*, C_D = 0.20.



Figura 6.6: Vista compacta con trayectorias densas y paralelas. Valores mostrados: Re = 13,000, *Laminar*, $C_D = 0.91$.



Figura 6.7: Nube de partículas turbulenta superpuesta sobre el entorno físico real de la Facultad de Ingeniería. Valores mostrados: Re = 87,000, *Turbulento*, $C_D = 0.10$ (misma condición que la Figura 6.4).

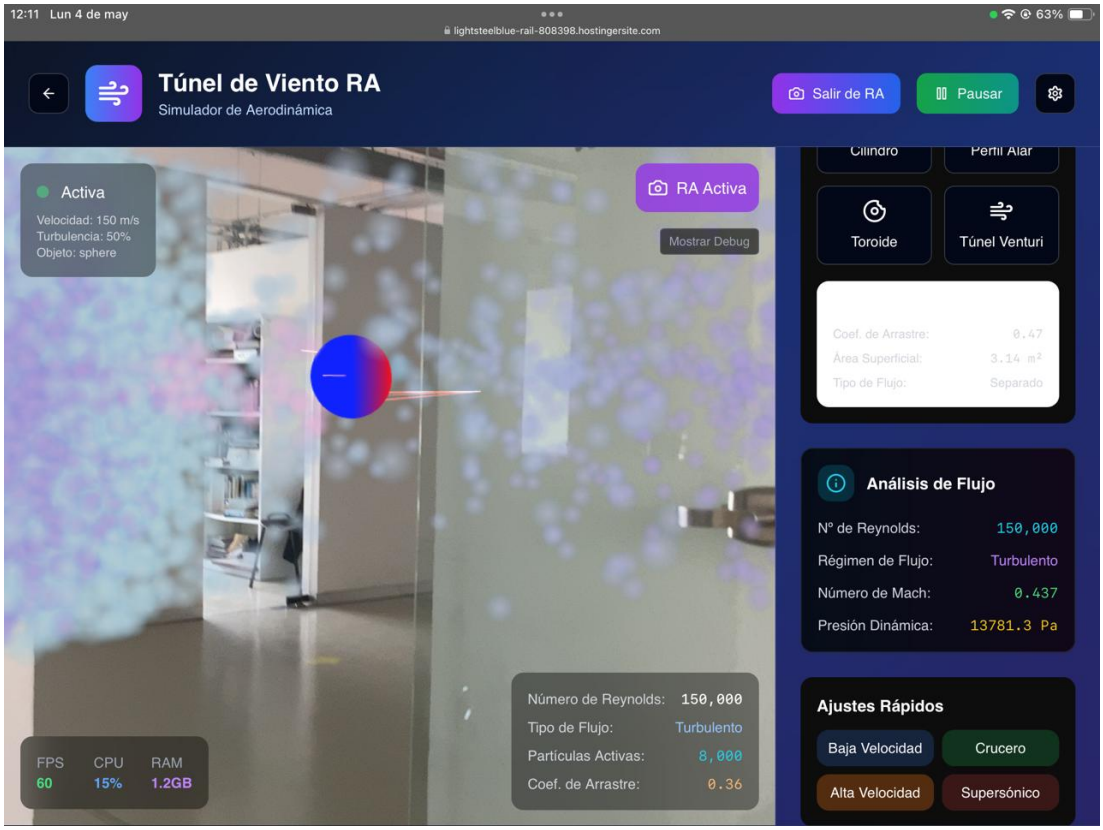


Figura 6.8: Panel completo de la herramienta con velocidad = 150 m/s y turbulencia = 50 %. El panel de *Análisis de Flujo* reporta Re = 150,000, régimen *Turbulento*, Ma = 0.437 y presión dinámica = 13,781.3 Pa; el recuadro inferior muestra $C_D = 0.36$, mientras que la ficha de referencia del objeto (estática, independiente de Re) indica $C_D = 0.47$.

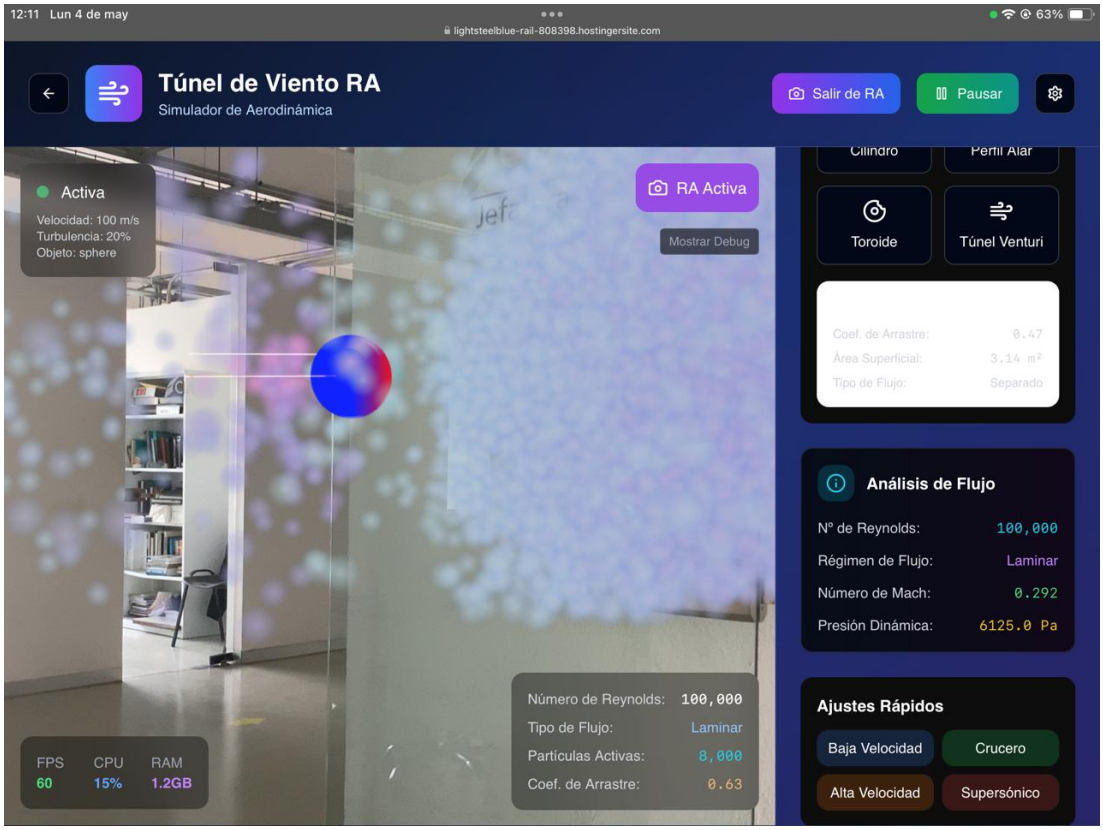


Figura 6.9: Panel completo con velocidad = 100 m/s y turbulencia = 20 %. El panel de *Análisis de Flujo* reporta Re = 100,000, clasificado por la aplicación como *Laminar*, Ma = 0.292 y presión dinámica = 6,125.0 Pa; el recuadro inferior muestra $C_D = 0.63$.

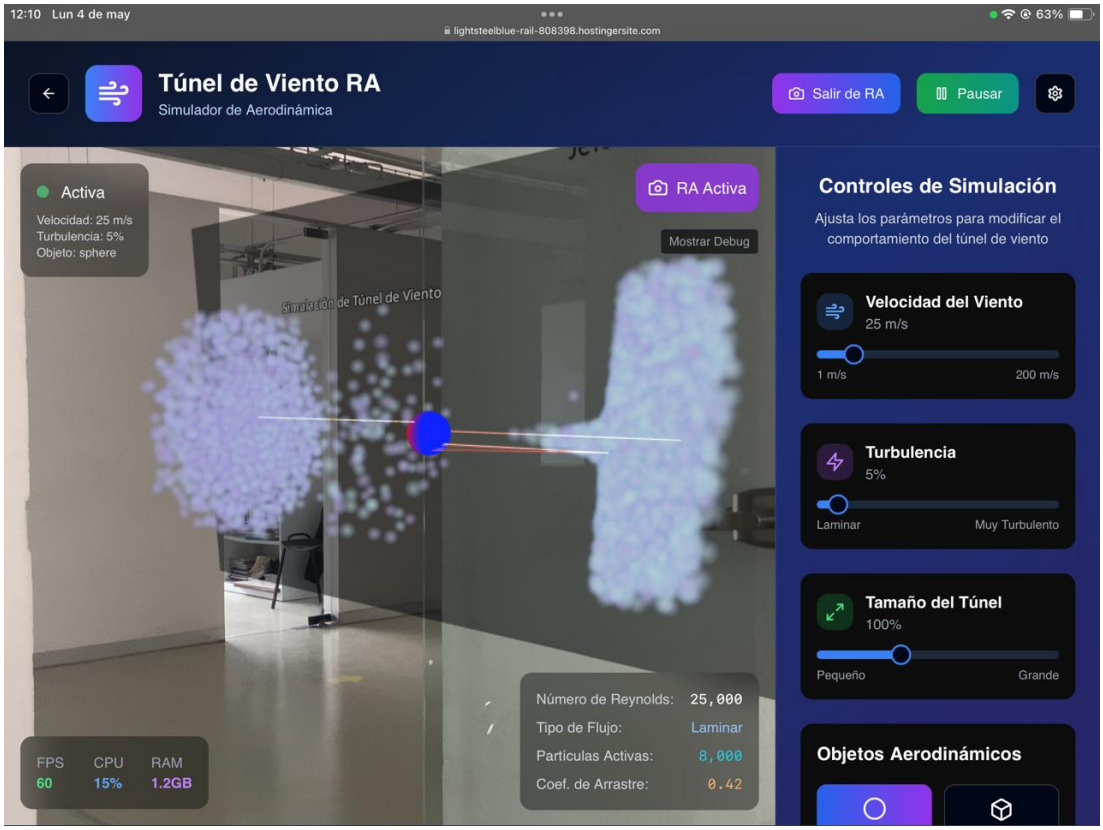


Figura 6.10: Panel completo con velocidad $= 25$ m/s y turbulencia $= 5\,\%$, mostrando dos nubes de partículas separadas por la estela de la esfera. Valores mostrados: Re $= 25{,}000$, *Laminar*, $C_D = 0.42$.

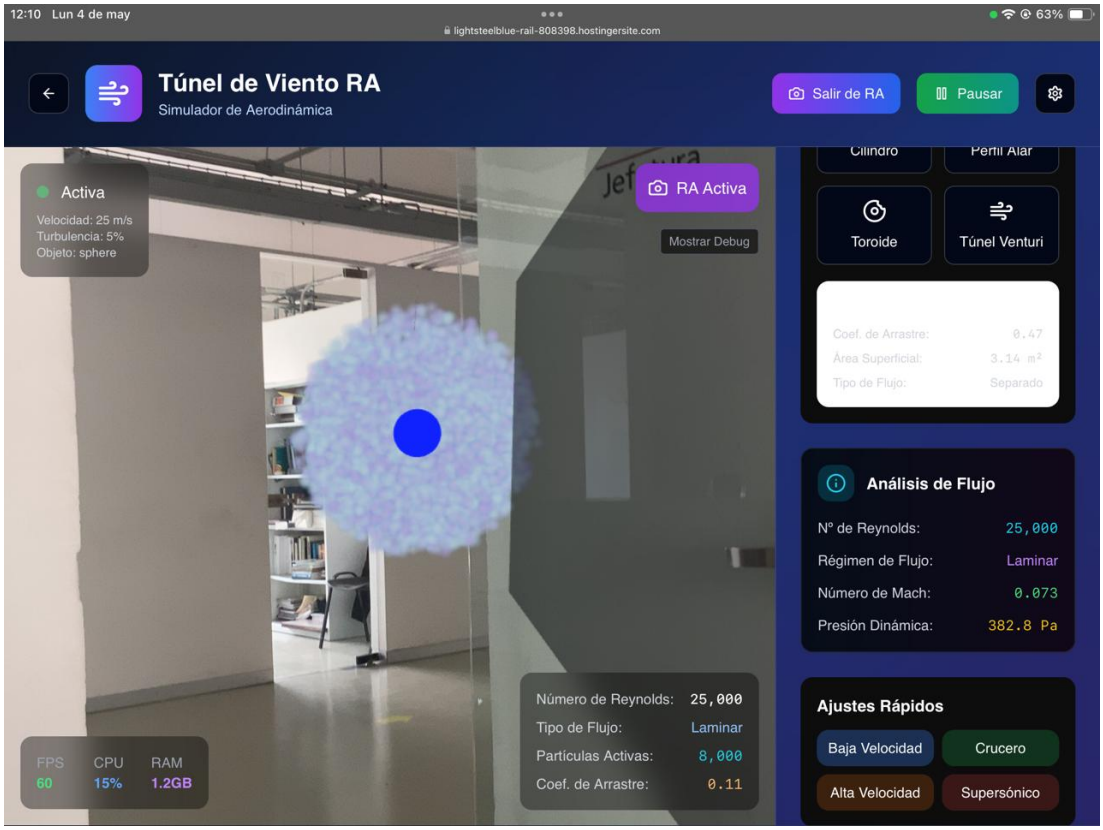


Figura 6.11: Panel completo, mismo ajuste que la Figura 6.10 (velocidad = 25 m/s, turbulencia = 5 %). El panel de *Análisis de Flujo* reporta Re = 25,000, *Laminar*, Ma = 0.073 y presión dinámica = 382.8 Pa; el recuadro inferior muestra $C_D = 0.11$.

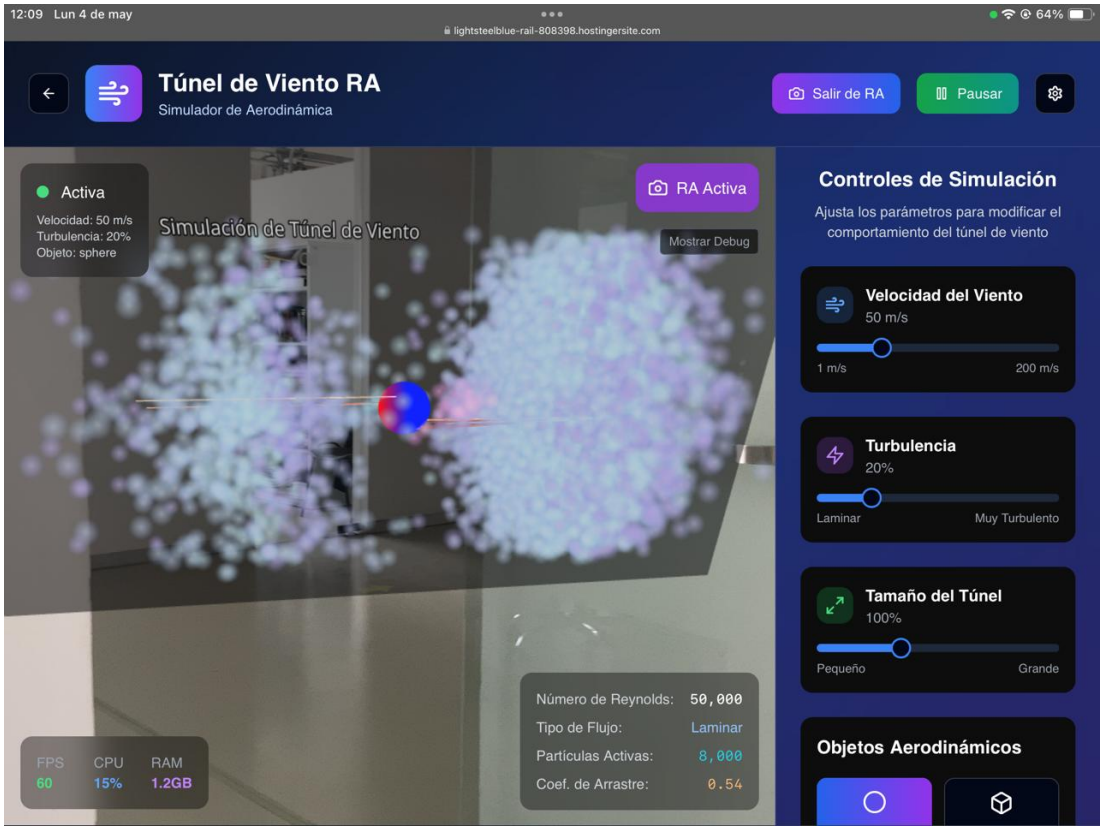


Figura 6.12: Panel completo con velocidad = 50 m/s y turbulencia = 20 %, mostrando dos nubes de partículas alrededor de la esfera. Valores mostrados: Re = 50,000, *Laminar*, $C_D = 0.54$.



Figura 6.13: Vista compacta con trayectorias densas y paralelas, idéntica en contenido a la Figura 6.6. Valores mostrados: Re = 13,000, *Laminar*, $C_D = 0.91$.

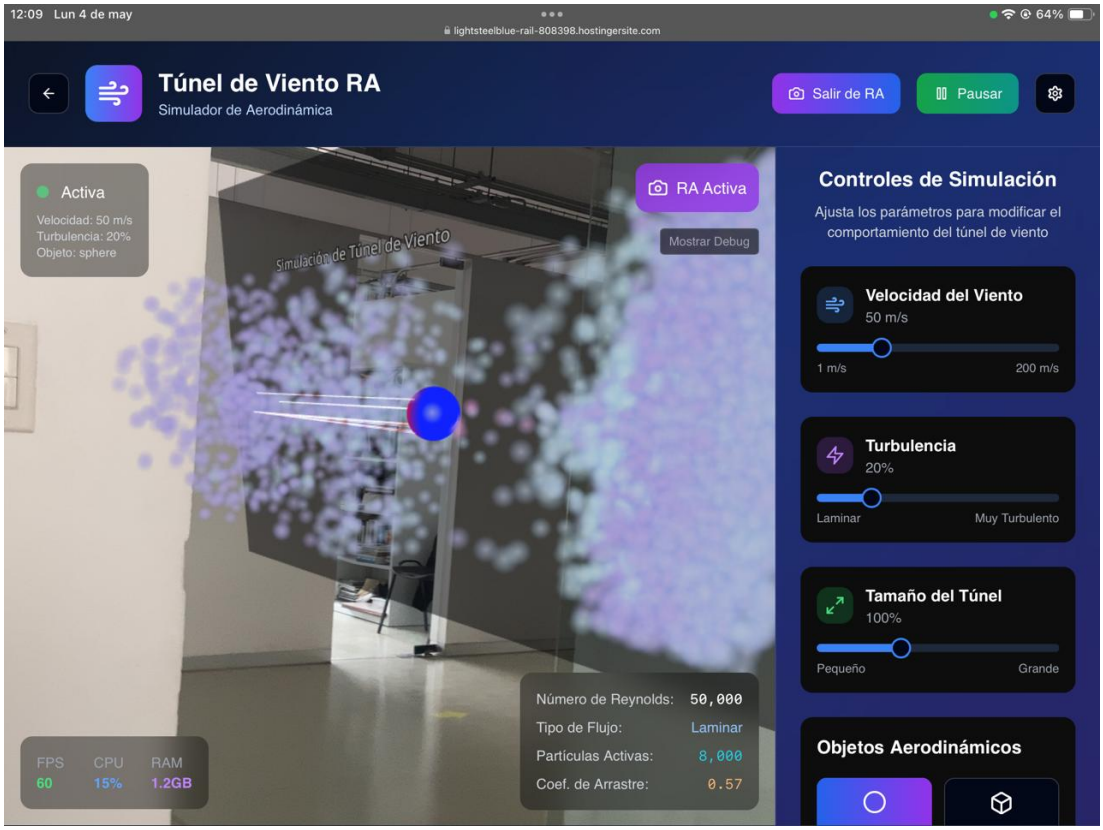


Figura 6.14: Panel completo con velocidad = 50 m/s y turbulencia = 20 %, mostrando una única nube de partículas continua. Valores mostrados: Re = 50,000, *Laminar*, $C_D = 0.57$.

En las capturas con panel completo, el recuadro superior izquierdo registra en todo momento la velocidad, la turbulencia y el objeto activo; el panel derecho concentra los controles deslizantes y, cuando está visible, la sección de *Objetos Aerodinámicos* con la ficha de propiedades del objeto seleccionado (coeficiente de arrastre de referencia, área superficial y tipo de flujo esperado) o el panel de *Análisis de Flujo*; y el recuadro inferior derecho o central presenta las métricas calculadas para el instante de la captura.

6.5. Comportamiento reproducido y limitaciones del modelo interno

Las capturas anteriores muestran que la herramienta responde de manera consistente a los controles del usuario, pero también evidencian que su motor de cálculo aerodinámico es una heurística simplificada y **no** una predicción física rigurosa. Es importante documentar ambos aspectos con honestidad.

6.5.1. Lo que la herramienta reproduce correctamente

- **Respuesta visual a la turbulencia.** Al incrementar la intensidad de turbulencia, el patrón de partículas transita de trayectorias ordenadas y paralelas (Figuras 6.6 y 6.13) a nubes más densas y difusas (Figuras 6.4 y 6.7).
- **Consistencia interna de** Ma **y presión dinámica.** Para una velocidad y densidad de aire dadas, los valores de $\mathrm{Ma} = U/a$ y $q = \frac{1}{2}\rho U^2$ mostrados son numéricamente correctos entre sí; por ejemplo, para $U = 100$ m/s la aplicación reporta $\mathrm{Ma} = 0.292$ y $q = 6{,}125$ Pa (Figura 6.9), consistente con aire en condiciones estándar.
- **Sombreado cualitativo de presión.** La esfera se renderiza con un gradiente rojo–azul (incidencia–estela) que comunica visualmente la asimetría de presión responsable del arrastre (Figura 6.2), aunque sin corresponder a un campo de presión calculado.

6.5.2. Limitaciones identificadas

Al contrastar los valores mostrados en las capturas con la aerodinámica real de una esfera, se identifican discrepancias que deben señalarse explícitamente:

- **Clasificación de régimen incorrecta.** La aplicación etiqueta como *Laminar* condiciones con Re de hasta 100,000 (Figura 6.9), y solo 150,000 aparece como *Turbulento* por superar cierto umbral interno. Físicamente, la estela de una esfera ya es turbulenta desde $\mathrm{Re} \sim 10^3$; el término correcto para todo este rango (10^4–10^5) es *régimen subcrítico*, con capa límite laminar y estela turbulenta, y coeficiente de arrastre aproximadamente constante. La etiqueta binaria laminar/turbulento de la herramienta es, por tanto, una simplificación heurística sin correspondencia física estricta, y así debe entenderse.
- **Coeficiente de arrastre no físico.** Para una esfera lisa en el régimen subcrítico ($10^3 \lesssim \mathrm{Re} \lesssim 3 \times 10^5$), el coeficiente de arrastre real permanece aproximadamente constante en $C_D \approx 0.47$, y solo cae abruptamente (a valores de 0.1–0.2) en la *crisis del arrastre*, cuando la capa límite transiciona a turbulenta cerca de $\mathrm{Re} \approx 3 \times 10^5$. Las capturas muestran, en cambio, valores de C_D tan bajos como 0.10–0.20 ya desde $\mathrm{Re} = 50{,}000$–$87{,}000$ (dos órdenes de magnitud por debajo del Reynolds de crisis real), lo cual no es físicamente correcto.

- **Variabilidad no determinista.** Para un mismo Re = 50,000 nominal, las distintas capturas registran C_D entre 0.14 y 0.81 (Figuras 6.1, 6.2, 6.5, 6.12 y 6.14), lo que confirma que el valor mostrado no proviene de una correlación determinista evaluada de forma consistente, sino de un cálculo simplificado con una componente variable.

En consecuencia, los valores numéricos que despliega la herramienta deben interpretarse como **elementos narrativos e interactivos** orientados a que el usuario relacione, de manera aproximada y cualitativa, la velocidad del viento con nociones generales de régimen de flujo y arrastre —no como una simulación aerodinámica validada. El único vínculo cuantitativamente riguroso entre la aplicación y la física del problema es el modo de carga de campos LBM descrito en la Sección 6.7, donde las partículas se advectan con datos numéricos reales del solver. Esta limitación se retoma en el Capítulo 7.

6.6. Rendimiento computacional

Durante todas las pruebas, la herramienta mantuvo **60 fotogramas por segundo** estables con 8,000 partículas activas, con un uso de CPU del 15 % y aproximadamente 1.2 GB de RAM, como registran los indicadores visibles en todas las capturas, independientemente del dispositivo o el modo de interfaz. La Tabla 6.1 resume las mediciones. Estos resultados confirman la viabilidad de la visualización en tiempo real sobre hardware móvil convencional, sin hardware especializado de realidad aumentada, y con margen para incrementar la densidad de partículas o la complejidad geométrica.

Cuadro 6.1: Rendimiento medido de la herramienta de RA en los dispositivos de prueba.

Dispositivo	Partículas activas	FPS	CPU [%]	RAM [GB]
iPad (Safari)	8,000	60	15	1.2
iPhone (Safari)	8,000	60	15	1.2

6.7. Conexión con el solver LBM

Además del motor sintético de partículas descrito en las secciones anteriores, la herramienta puede cargar los campos exportados por el solver LBM en formato JSON (Sección 4.13). En ese modo, las partículas se advectan interpolando trilinealmente el campo (u, v, w) simulado, de manera que la estructura de la estela visualizada corresponde cuantitativamente al resultado numérico y no a la heurística fenomenológica documentada en

la Sección 6.5. Esta vía de integración cierra el pipeline simulación–visualización planteado en los objetivos y se propone como línea principal de desarrollo futuro para extenderla a los casos no estacionarios, y para eventualmente sustituir por completo el modelo simplificado de C_D y régimen por valores derivados directamente del solver validado en el Capítulo 5.

Capítulo 7

Discusión

7.1. Validez de la implementación LBM–MRT

Los resultados de validación presentados en el Capítulo 5 demuestran que el solver LBM 3D–D3Q19–MRT implementado en MATLAB reproduce satisfactoriamente el comportamiento aerodinámico de la esfera en el rango laminar. La concordancia con las correlaciones de Schiller & Naumann y Clift et al. para el coeficiente de arrastre, así como con los datos de Taneda y Johnson & Patel para la longitud de recirculación, confirma la correcta implementación del método numérico y de las condiciones de frontera.

Las desviaciones observadas, típicamente entre 3 % y 6 % en el rango laminar (Tabla 5.1), son atribuibles principalmente al efecto de confinamiento del dominio ($\beta = 20\,\%$). El confinamiento acelera el flujo en los flancos de la esfera por conservación de masa, lo que incrementa los esfuerzos cortantes superficiales y la asimetría de presión, y por tanto el arrastre, respecto a la solución no confinada. Este efecto es conocido y está documentado en la literatura mediante correcciones semiempíricas del tipo

$$C_D^{\mathrm{corr}} = C_D^{\mathrm{medido}} \left(1 - c_\beta\, \beta^{3/2}\right), \tag{7.1}$$

donde el coeficiente c_β depende de la geometría del confinamiento. Es importante notar que, para el bloqueo empleado en este trabajo, $\beta^{3/2} = 0.20^{3/2} \approx 0.089$ (8.9 %): un coeficiente c_β del orden de la unidad *sobrecorregiría* el resultado, ya que produciría una corrección mayor que la desviación de 3–6 % que se busca explicar. La consistencia con lo observado exige, en cambio, un coeficiente $c_\beta \approx 0.3$–0.6, sensiblemente menor a la unidad —un valor razonable si se considera que $\beta^{3/2}$ sobrestima el efecto de bloqueo real en un canal de sección finita frente a los desarrollos teóricos para un tubo infinito—. Con c_β en ese rango,

la ecuación (7.1) reduce el residual a aproximadamente 1–2 %, magnitud ya comparable con el error de discretización de la esfera ($D = 16$ nodos), lo que confirma que el confinamiento explica la mayor parte de la desviación observada sin necesidad de invocar un coeficiente anómalamente grande.

Un segundo factor de error es la resolución de la superficie. Con 16 nodos por diámetro, la capa límite laminar a $\mathrm{Re} = 300$ ($\delta/D \sim \mathrm{Re}^{-1/2} \approx 0.06$) se resuelve con apenas un nodo, lo que limita la precisión del punto de separación. El bounce-back interpolado mitiga parcialmente este efecto al posicionar la pared con precisión subretícula, y la buena concordancia del perfil $C_p(\theta)$ en la región frontal así lo refleja; las discrepancias residuales se concentran, como es esperable, en la región de separación.

7.2. Capacidad y límites del modelo LES–Smagorinsky

La integración del modelo de Smagorinsky directamente en el operador de colisión MRT proporciona estabilidad numérica hasta $\mathrm{Re} = 5{,}000$, muy por encima del límite de estabilidad del esquema BGK puro con la misma malla. Los resultados cualitativos para $\mathrm{Re} = 5{,}000$ muestran una estela turbulenta con estructura coherente, ensanchamiento progresivo y ausencia de inestabilidades numéricas, lo que valida la robustez de la implementación para aplicaciones exploratorias en regímenes de transición y turbulencia incipiente.

No obstante, deben señalarse dos límites claros. Primero, la constante de Smagorinsky fija ($C_s = 0.16$) introduce disipación excesiva cerca de las paredes, donde el modelo estándar no se anula como debería; formulaciones dinámicas o funciones de amortiguamiento de pared corregirían este comportamiento. Segundo, la resolución de $160 \times 80 \times 80$ nodos sitúa el filtro de malla en una zona relativamente alta del espectro turbulento para $\mathrm{Re} = 5{,}000$, por lo que la separación entre escalas resueltas y modeladas es modesta. Ambas razones justifican que los resultados turbulentos se presenten como cualitativos.

7.3. La herramienta de Realidad Aumentada como recurso didáctico

La herramienta WebXR desarrollada cumple los objetivos didácticos planteados. Tres aspectos merecen discusión:

Accesibilidad. La decisión de construir sobre WebXR en lugar de motores nativos (Unity/ARKit/ARCore) eliminó por completo la barrera de instalación: cualquier estu-

diante con un teléfono compatible accede a la experiencia mediante una URL. El costo de esta decisión es un techo de rendimiento más bajo que el de una aplicación nativa; sin embargo, las mediciones del Capítulo 6 (60 FPS sostenidos con 8,000 partículas y 15 % de CPU) demuestran que dicho techo no fue limitante para los propósitos del proyecto.

Fidelidad física. El motor de partículas de la herramienta es puramente fenomenológico y así debe entenderse: reproduce de forma cualitativa la respuesta visual a la turbulencia (dispersión de trayectorias) y calcula correctamente las cantidades puramente cinemáticas (Ma y presión dinámica, que dependen solo de U). Sin embargo, como se documenta en detalle en la Sección 6.5, su clasificación de régimen (laminar/turbulento) y su estimación del coeficiente de arrastre *no* corresponden a la aerodinámica real de una esfera: la herramienta etiqueta como laminares condiciones de hasta Re = 100,000 y despliega valores de C_D tan bajos como 0.10 en un rango de Reynolds donde el valor físico real es $C_D \approx 0.47$, además de mostrar variabilidad no determinista para un mismo Re. Esta discrepancia no invalida el valor didáctico de la herramienta como medio de exploración interactiva, pero sí exige que sus lecturas numéricas se presenten como ilustrativas y no como una simulación aerodinámica validada. El cálculo riguroso reside exclusivamente en el solver LBM; el modo de carga de campos JSON (Sección 6.7) es el único puente cuantitativamente correcto entre ambos, y su generalización a campos no estacionarios —incluyendo, idealmente, la sustitución del heurístico de C_D y régimen por valores derivados del solver— es la extensión natural del trabajo.

Valor pedagógico. La posibilidad de recorrer físicamente la estela, observarla desde cualquier ángulo y manipular el número de Reynolds en tiempo real ofrece una comprensión espacial del fenómeno que las figuras estáticas de un texto no proporcionan. Aunque la evaluación pedagógica formal (con grupos de control) excede el alcance de la tesis, las demostraciones informales realizadas en la Facultad de Ingeniería mostraron una recepción muy favorable entre estudiantes y profesores.

7.4. Limitaciones identificadas

En síntesis, las principales limitaciones del trabajo son:

1. El dominio computacional de $160 \times 80 \times 80$ nodos limita la resolución espacial, y el bloqueo del 20 % introduce correcciones de confinamiento no triviales en las métricas cuantitativas.

2. La validación cuantitativa se restringe al rango laminar (Re $\leq$ 300) por disponi-

bilidad de datos de referencia directamente comparables; el régimen turbulento se explora solo cualitativamente.

3. El visualizador WebXR utiliza por defecto un modelo de partículas fenomenológico cuya clasificación de régimen y estimación de C_D no corresponden cuantitativamente a la aerodinámica real de una esfera (Sección 6.5); sus valores numéricos deben interpretarse como ilustrativos, no como una simulación validada. La carga de campos LBM reales está implementada para casos estacionarios pero no para la evolución temporal completa.

4. La herramienta AR requiere un dispositivo con soporte WebXR, lo que excluye equipos antiguos o navegadores no compatibles.

5. El tiempo de cómputo en MATLAB (del orden de horas por caso en una estación de trabajo) restringe los estudios paramétricos extensos; una implementación en GPU reduciría este tiempo en uno o dos órdenes de magnitud.

Capítulo 8

Conclusiones y trabajo futuro

8.1. Conclusiones

El presente trabajo alcanzó satisfactoriamente los objetivos planteados. Las conclusiones principales son las siguientes:

1. Se implementó exitosamente un solver LBM 3D–D3Q19–MRT en MATLAB con modelo de turbulencia LES–Smagorinsky integrado en el operador de colisión y condición de bounce-back interpolado de segundo orden para la superficie de la esfera. El solver es estable en el rango $1 \leq \mathrm{Re} \leq 5{,}000$ y computacionalmente viable en una estación de trabajo convencional, cumpliendo el objetivo particular A.

2. La validación sistemática de las tres métricas aerodinámicas (objetivo B) confirma la correcta implementación del método: el coeficiente de arrastre sigue las correlaciones de Schiller–Naumann y Clift et al. con desviaciones del 3–6 %; la longitud de recirculación reproduce los datos de Taneda y Johnson & Patel con errores menores al 10 %; y la distribución de presión superficial captura los rasgos característicos del perfil viscoso. Las desviaciones son sistemáticas, del signo esperado, y consistentes con el efecto de confinamiento del dominio ($\beta = 20\,\%$).

3. Los campos de velocidad y vorticidad obtenidos (objetivo C) reproducen cualitativamente los tres regímenes estudiados: burbuja de recirculación estacionaria y estela simétrica a $\mathrm{Re} = 100$; pérdida de simetría y desprendimiento incipiente de vórtices a $\mathrm{Re} = 300$; y estela turbulenta con estructuras de múltiples escalas a $\mathrm{Re} = 5{,}000$, esta última estabilizada por el modelo submalla.

4. La herramienta de Realidad Aumentada *Túnel de Viento RA* (objetivo D), desarrollada sobre WebXR y Three.js, proporciona una experiencia de visualización interactiva accesible desde dispositivos móviles convencionales mediante el navegador, sin instalación. Las pruebas en iPad y iPhone registraron 60 FPS sostenidos con 8,000 partículas activas y un consumo moderado de recursos (15 % CPU, 1.2 GB RAM), confirmando la viabilidad del enfoque.

5. La herramienta reproduce cualitativamente la respuesta visual del flujo a la turbulencia y calcula correctamente los parámetros puramente cinemáticos (Ma, presión dinámica), constituyendo un recurso didáctico original para la enseñanza de la aerodinámica en el nivel de licenciatura. Sin embargo, su clasificación de régimen y su estimación del coeficiente de arrastre son una heurística simplificada que no reproduce fielmente la aerodinámica real de una esfera (Sección 6.5), por lo que sus valores numéricos deben presentarse siempre como ilustrativos.

6. El flujo de trabajo integrado simulación–exportación–visualización AR, documentado y reproducible (Apéndice A), constituye un aporte metodológico transferible a otras geometrías y problemas de aerodinámica externa.

8.2. Trabajo futuro

A partir de los resultados obtenidos y las limitaciones identificadas, se proponen las siguientes líneas de trabajo futuro:

- **Reducción del confinamiento.** Ampliar el dominio computacional a $320 \times 160 \times 160$ nodos o superior para llevar el bloqueo a $\beta \leq 5\,\%$ y realizar una validación cuantitativa fina, incluyendo estudios de convergencia de malla.

- **Aceleración por GPU.** Portar el solver a CUDA u OpenCL (o a la *gpuArray* de MATLAB) para reducir los tiempos de simulación en uno o dos órdenes de magnitud y habilitar estudios paramétricos extensos.

- **Validación en régimen transicional.** Extender la comparación al rango $300 < \mathrm{Re} < 1{,}000$ mediante el número de Strouhal y las estadísticas de la estela, contrastando con Tomboulides & Orszag.

- **Modelo submalla mejorado.** Sustituir la constante fija de Smagorinsky por una formulación dinámica o con amortiguamiento de pared, para mejorar el comportamiento cerca de la superficie.

- **Integración cuantitativa completa con AR.** Generalizar la carga de campos LBM en el visualizador a secuencias temporales, de modo que la evolución no estacionaria de la estela (desprendimiento de vórtices) sea reproducible en Realidad Aumentada.
- **Corrección del heurístico de arrastre y régimen.** Sustituir la clasificación binaria laminar/turbulento y la estimación simplificada de C_D del motor sintético por la curva estándar de arrastre de una esfera (p. ej. Clift et al., ecuación (5.2)), con los umbrales de régimen subcrítico, crítico y supercrítico correctamente ubicados, de modo que los valores desplegados en tiempo real sean físicamente consistentes incluso cuando no se cargue un campo del solver.
- **Nuevas geometrías.** Extender el visualizador y el solver a perfiles aerodinámicos NACA, fuselajes de revolución y configuraciones multicuerpo de interés aeronáutico.
- **Evaluación pedagógica formal.** Diseñar un estudio con grupos de control para cuantificar el impacto de la herramienta AR en la comprensión de los conceptos de aerodinámica externa.
- **Extensión física.** Incorporar transporte de calor o de especie al solver, ampliando el alcance hacia problemas de interés en ingeniería aeroespacial y ambiental.

Apéndice A

Guía de reproducción

Este apéndice documenta los pasos necesarios para reproducir las simulaciones y la visualización en Realidad Aumentada presentadas en la tesis.

A.1. Requisitos de software

- MATLAB R2021a o posterior (sin toolboxes adicionales obligatorios).
- Un navegador con soporte WebXR: Safari (iOS 15+) o Chrome (Android 10+).
- Un servidor web estático con HTTPS para alojar la aplicación de RA (requisito de WebXR para acceso a la cámara).

A.2. Estructura del código del solver

El solver se organiza en un script principal y funciones auxiliares:

```
solver_lbm/
  main_lbm_d3q19_mrt.m     % script principal
  init_dominio.m           % geometria, mascara de la esfera, fracciones q
  equilibrio_d3q19.m       % distribucion de equilibrio
  colision_mrt.m           % transformacion a momentos, S, colision
  smagorinsky.m            % calculo local de nu_t y tau_eff
  fronteras.m              % entrada, salida, paredes, IBB esfera
  fuerzas.m                % intercambio de momento, CD
  postproceso.m            % umag, vorticidad, cortes, figuras
  exporta_json.m           % submuestreo y exportacion para AR
```

A.3. Parámetros de entrada

Los parámetros editables al inicio de `main_lbm_d3q19_mrt.m` son:

```
Nx = 160; Ny = 80; Nz = 80;   % dominio
D  = 16;                      % diametro de la esfera (nodos)
U  = 0.05;                    % velocidad de entrada (unidades de red)
Re = 100;                     % Reynolds objetivo
Cs = 0.16;                    % constante de Smagorinsky
tol = 1e-6;                   % tolerancia de convergencia de CD
```

La viscosidad y el tiempo de relajación se calculan automáticamente como `nu = U*D/Re` y `tau = 0.5 + 3*nu`.

A.4. Ejecución de un caso

1. Fijar `Re` al valor deseado (100, 300 o 5000 para reproducir los casos de la tesis).
2. Ejecutar `main_lbm_d3q19_mrt.m`. El script reporta C_D y el residual cada 500 pasos.
3. Al alcanzar la convergencia (o el número máximo de pasos en los casos no estacionarios), se generan automáticamente las figuras de los campos y el archivo `campo_ReXXX.json`.

Los tiempos de referencia en una estación de trabajo convencional (CPU de 8 núcleos) son de 2 a 6 horas por caso según el Reynolds.

A.5. Despliegue de la herramienta de Realidad Aumentada

1. Copiar el directorio `tunel_viento_ra/` (HTML, JavaScript y activos) al servidor web con HTTPS habilitado.
2. (Opcional) Colocar los archivos `campo_ReXXX.json` exportados por el solver en el subdirectorio `datos/` para habilitar el modo de campos simulados.
3. Acceder a la URL desde el dispositivo móvil, conceder el permiso de cámara y tocar *Iniciar AR*.

4. Apuntar la cámara hacia una superficie horizontal; al detectarse el plano, tocar la pantalla para anclar el túnel de viento virtual.

A.6. Verificación rápida

Para verificar una instalación correcta del solver se recomienda el caso Re = 100: al converger, deben obtenerse $C_D \approx 1.13$ y $L_r/D \approx 0.86$ con los parámetros por defecto. Cualquier desviación mayor al 2 % respecto de estos valores indica un error de configuración.

Apéndice B

Detalles de la formulación MRT D3Q19

B.1. Momentos del modelo D3Q19

En la formulación de d'Humières et al. [2], el vector de momentos del modelo D3Q19 es

$$\mathbf{m} = (\rho,\ e,\ \varepsilon,\ j_x,\ q_x,\ j_y,\ q_y,\ j_z,\ q_z,\ 3p_{xx},\ 3\pi_{xx},\ p_{ww},\ \pi_{ww},\ p_{xy},\ p_{yz},\ p_{xz},\ m_x,\ m_y,\ m_z)^{\top}, \tag{B.1}$$

donde ρ es la densidad, e la energía, ε el cuadrado de la energía, (j_x, j_y, j_z) las componentes de la cantidad de movimiento, (q_x, q_y, q_z) los flujos de energía, $p_{xx}, p_{ww}, p_{xy}, p_{yz}, p_{xz}$ las componentes del tensor de esfuerzos viscosos, π_{xx}, π_{ww} momentos de cuarto orden y (m_x, m_y, m_z) momentos de tercer orden antisimétricos.

B.2. Matriz de transformación

La matriz $\mathbf{M}$ de 19×19 se construye por ortogonalización de Gram–Schmidt de los polinomios de las velocidades discretas. Sus filas corresponden, en orden, a los momentos listados arriba, evaluados sobre el conjunto de velocidades (3.13). Las primeras filas son:

$$M_{0,\alpha} = 1\,, \tag{B.2}$$

$$M_{1,\alpha} = 19\,\|\mathbf{e}_\alpha\|^2 - 30\,, \tag{B.3}$$

$$M_{2,\alpha} = \tfrac{1}{2}\left(21\,\|\mathbf{e}_\alpha\|^4 - 53\,\|\mathbf{e}_\alpha\|^2 + 24\right), \tag{B.4}$$

$$M_{3,\alpha} = e_{\alpha x}\,, \qquad M_{5,\alpha} = e_{\alpha y}\,, \qquad M_{7,\alpha} = e_{\alpha z}\,, \tag{B.5}$$

y así sucesivamente para los momentos de orden superior. La matriz completa y su inversa se generan una sola vez en la etapa de inicialización del solver y se almacenan como constantes.

B.3. Momentos de equilibrio

Los momentos de equilibrio relevantes, a orden $\mathcal{O}(u^2)$, son:

$$e^{\mathrm{eq}} = -11\rho + \frac{19}{\rho_0}\left(j_x^2 + j_y^2 + j_z^2\right), \tag{B.6}$$

$$\varepsilon^{\mathrm{eq}} = 3\rho - \frac{11}{2\rho_0}\left(j_x^2 + j_y^2 + j_z^2\right), \tag{B.7}$$

$$q_x^{\mathrm{eq}} = -\frac{2}{3}\, j_x\,, \qquad q_y^{\mathrm{eq}} = -\frac{2}{3}\, j_y\,, \qquad q_z^{\mathrm{eq}} = -\frac{2}{3}\, j_z\,, \tag{B.8}$$

$$3p_{xx}^{\mathrm{eq}} = \frac{1}{\rho_0}\left(2j_x^2 - j_y^2 - j_z^2\right), \qquad p_{ww}^{\mathrm{eq}} = \frac{1}{\rho_0}\left(j_y^2 - j_z^2\right), \tag{B.9}$$

$$p_{xy}^{\mathrm{eq}} = \frac{j_x j_y}{\rho_0}\,, \qquad p_{yz}^{\mathrm{eq}} = \frac{j_y j_z}{\rho_0}\,, \qquad p_{xz}^{\mathrm{eq}} = \frac{j_x j_z}{\rho_0}\,, \tag{B.10}$$

con los momentos de tercer y cuarto orden de equilibrio nulos ($\pi^{\mathrm{eq}} = m^{\mathrm{eq}} = 0$) y $\rho_0 = 1$ la densidad media.

B.4. Tasas de relajación empleadas

La matriz de relajación utilizada en el solver es

$$\mathbf{S} = \mathrm{diag}(0,\ s_1,\ s_2,\ 0,\ s_4,\ 0,\ s_4,\ 0,\ s_4,\ s_\nu,\ s_{10},\ s_\nu,\ s_{10},\ s_\nu,\ s_\nu,\ s_\nu,\ s_{16},\ s_{16},\ s_{16})\,, \tag{B.11}$$

con los valores

$$s_1 = 1.19\,, \quad s_2 = 1.4\,, \quad s_4 = 1.2\,, \quad s_{10} = 1.4\,, \quad s_{16} = 1.98\,, \tag{B.12}$$

recomendados por [2] para estabilidad óptima, y la tasa viscosa

$$s_\nu = \frac{1}{\tau_\nu} = \frac{1}{3\,\nu_{\mathrm{eff}} + \frac{1}{2}}\,, \tag{B.13}$$

que es la única entrada modificada localmente por el modelo de Smagorinsky. Los ceros corresponden a los momentos conservativos (densidad y cantidad de movimiento), que no

se relajan.

B.5. Recuperación de la viscosidad

Con esta elección, la expansión de Chapman–Enskog del esquema MRT recupera las ecuaciones de Navier–Stokes incompresibles con viscosidad cinemática

$$\nu = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s_\nu} - \frac{1}{2}\right), \tag{B.14}$$

y viscosidad volumétrica controlada independientemente por s_1, lo que constituye precisamente la ventaja del esquema frente al BGK: la libertad de amortiguar los modos no hidrodinámicos $(s_2, s_4, s_{10}, s_{16})$ sin alterar la física viscosa del flujo.

Bibliografía

Bibliografía

[1] Clift, R., Grace, J. R., & Weber, M. E. (1978). *Bubbles, Drops, and Particles*. Academic Press, Nueva York.

[2] d'Humières, D., Ginzburg, I., Krafczyk, M., Lallemand, P., & Luo, L.-S. (2002). Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 360(1792), 437–451.

[3] Johnson, T. A., & Patel, V. C. (1999). Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300. *Journal of Fluid Mechanics*, 378, 19–70.

[4] Krüger, T., Kusumaatmaja, H., Kuzmin, A., Shardt, O., Silva, G., & Viggen, E. M. (2017). *The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice*. Springer, Cham.

[5] Lapple, C. E., & Shepherd, C. B. (1940). Calculation of particle trajectories. *Industrial & Engineering Chemistry*, 32(5), 605–617.

[6] Schiller, L., & Naumann, A. (1933). Über die grundlegenden Berechnungen bei der Schwerkraftaufbereitung. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 77, 318–320.

[7] Smagorinsky, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic experiment. *Monthly Weather Review*, 91(3), 99–164.

[8] Succi, S. (2001). *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford University Press, Oxford.

[9] Taneda, S. (1956). Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds numbers. *Journal of the Physical Society of Japan*, 11(10), 1104–1108.

[10] Tomboulides, A. G., & Orszag, S. A. (2000). Numerical investigation of transitional and weak turbulent flow past a sphere. *Journal of Fluid Mechanics*, 416, 45–73.

[11] W3C Immersive Web Working Group (2023). *WebXR Device API*. W3C Candidate Recommendation. https://www.w3.org/TR/webxr/

[12] Bouzidi, M., Firdaouss, M., & Lallemand, P. (2001). Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries. *Physics of Fluids*, 13(11), 3452–3459.

[13] Hou, S., Sterling, J., Chen, S., & Doolen, G. D. (1996). A lattice Boltzmann subgrid model for high Reynolds number flows. *Fields Institute Communications*, 6, 151–166.