



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Aplicación del algoritmo de  
gradiente global extendido para el  
análisis transitorio del sistema de  
combustible en aeronaves de ala  
fija**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero Aeroespacial**

**P R E S E N T A**

Jeremy Dimitri Larios Hernández

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. José Enrique Guzmán Vázquez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2026



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y  
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL  
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado APLICACION DEL ALGORITMO DE GRADIENTE GLOBAL EXTENDIDO PARA EL ANALISIS TRANSITORIO DEL SISTEMA DE COMBUSTIBLE EN AERONAVES DE ALA FIJA que presenté para obtener el título de INGENIERO AEROESPACIAL es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

---

JEREMY DIMITRI LARIOS HERNANDEZ

Número de cuenta: 318318433

## Jurado Asignado

Presidente: **M.C. Libia Georgina Carmona Paredes**

Vocal: **Dr. José Enrique Guzmán Vázquez**

Secretario: **Dr. César Abraham Luna Estrada**

Suplente 1: **M.C. Gibran Jalil Garnica Castro**

Suplente 2: **Dr. Jonathan Hernández García**

*“Scio me nihil scire”.*

— **Sócrates**

# Resumen

En el presente trabajo se plantea la aplicación del Algoritmo de Gradiente Global Extendido, el cual fue originalmente desarrollado para el análisis de redes de distribución de agua, al estudio de sistemas aeronáuticos, específicamente en el reabastecimiento de combustible de una aeronave de ala fija. Como objetivo principal se tiene implementar y validar que el Algoritmo del Gradiente Global Extendido permite simular y analizar de manera precisa y correcta el proceso de reabastecimiento de los tanques de combustible.

Se realiza el estudio teórico del algoritmo y posteriormente su implementación computacional usando una arquitectura modular con el lenguaje de programación Python. La arquitectura modular permite garantizar un código flexible y bien estructurado. Posteriormente se validan el código del algoritmo mediante un caso de estudio propuesto por la literatura especializada comparando los resultados del código con los reportados.

Una vez validado el algoritmo, este se implementa en un caso de estudio correspondiente al proceso de reabastecimiento de combustible de una aeronave de ala fija, con el fin de evaluar su utilidad en un sistema aeronáutico real. Los resultados obtenidos muestran la versatilidad y capacidad del algoritmo y del programa desarrollado para su aplicación en distintas redes de flujo en estado transitorio.

Finalmente, los resultados obtenidos se comparan con los del software Flomaster de Siemens, lo que permite validar el modelo y la simulación desarrollada para el análisis del sistema de combustible de una aeronave. Evidenciando su potencial aplicación en otros sistemas aeronáuticos de flujo en estado transitorio.

# Agradecimientos

Este trabajo está dedicado a toda mi familia por su apoyo incondicional, ya que siempre me impulsaron a seguir adelante y me apoyaron cuando quise ir más lejos.

De igual manera, a doña Chocholito, mi jefa, quien ya se encuentra descansando; a mi otra jefa, Sujey —gracias, madres—.

También, a mi tutor, el Dr. Enrique, por su constante apoyo, paciencia, asesoramiento y acompañamiento durante todo este trabajo, así como al grupo de trabajo del Dr.

A mi amigo José Miguel, por su disposición para ayudarme a resolver dudas y discutir vastos temas interesantes.

A mi amigo Héctor, por su valiosa amistad y las charlas debajo del CIA.

Por último, pero no menos importante, reconozco el esfuerzo personal, la constancia y la disciplina necesarias para completar este trabajo, aún en momentos de cansancio y mucha duda.

*Nos vemos cuando nos veamos*

# Contenido

<b>Resumen</b>	III
<b>Agradecimientos</b>	IV
<b>1. Introducción</b>	1
<b>1.1. Antecedentes</b> . . . . .	1
<b>1.2. Formulación del problema</b> . . . . .	6
<b>1.2.1. Caso de estudio</b> . . . . .	6
<b>1.2.2. Problema técnico</b> . . . . .	8
<b>1.3. Objetivo</b> . . . . .	10
<b>1.3.1. Objetivos secundarios</b> . . . . .	10
<b>1.4. Hipótesis</b> . . . . .	11
<b>2. Marco Teórico</b>	12
<b>2.1. Principio de conservación de la masa</b> . . . . .	14
<b>2.2. Principio de conservación de la energía</b> . . . . .	15

2.3. Esquema de Todini . . . . .	17
2.4. Estado estacionario - algoritmo del gradiente global . . . . .	18
2.5. Estado transitorio - extensión del algoritmo . . . . .	20
2.6. Definición de las matrices . . . . .	21
2.7. Caracterización de la red . . . . .	25
<b>3. Programa Numérico</b>	<b>28</b>
3.1. Estructura del código . . . . .	28
3.2. Flujo de ejecución de los módulos . . . . .	30
3.3. Lectura y preparación de datos . . . . .	34
3.4. Almacenamiento de resultados . . . . .	37
3.5. Validación . . . . .	39
<b>4. Resultados</b>	<b>52</b>
4.1. Descripción del sistema de combustible de una aeronave . . . . .	52
4.2. Resultados numéricos . . . . .	57
4.3. Análisis y discusión . . . . .	63
<b>5. Conclusiones</b>	<b>68</b>
5.1. Generales . . . . .	68
5.2. Contribuciones . . . . .	70
5.3. Recomendaciones y trabajo futuro . . . . .	71

<b>A. Estructura del CSV de entrada</b>	<b>72</b>
<b>B. Desarrollo de las pérdidas primarias y secundarias</b>	<b>73</b>
<b>C. Configuración y datos del caso de estudio en Flomaster</b>	<b>75</b>
<b>D. Cálculos de la longitud equivalente (<math>L_{eq}</math>)</b>	<b>77</b>
<b>E. Cálculo de la bomba hidráulica</b>	<b>79</b>
E.0.1. Determinación de la carga requerida del sistema . . . . .	79
E.0.2. Diseño inicial de la curva de la bomba . . . . .	81
<b>F. Definición de la red de combustible</b>	<b>83</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>

# Lista de Figuras

1.1. Red de tubería en Refinería de Dos Bocas. Fuente: Tomado de Secretaría de Energía (2026).	2
1.2. Tanques de almacenamiento en Refinería de Dos Bocas. Fuente: Tomado de Refinería Olmeca-Dos Bocas (2024).	3
1.3. Sistema Cutzamala. Fuente: Tomado de Miranda (2022).	3
1.4. Sistema de combustible y sistema neumático de una turbina GEnx. Fuente: tomado de Wikimedia Commons (2026).	4
1.5. Distribución del sistema de tuberías hidráulicas de la aeronave. Fuente: Traducido y adaptado de GAO et al. (2021).	4
1.6. Diferentes enfoques para la solución del problema de análisis de redes de tuberías; las variables en las que se basa la linealización se muestran entre paréntesis. Fuente: Traducido de Todini and Rossman (2013).	5
1.7. Modelo de simulación de un sistema de combustible basado en Elomaster. Fuente: Tomado de Tu et al. (2022a)	7
1.8. Reabastecimiento de combustible de una aeronave. Fuente: Tomado de ARC Refuellers (2025)	8
2.1. Diagrama de componentes físicos del sistema hidráulico	12

2.2. Esquema de una red hidráulica constituida por nodos interconectados mediante tubos. Note los flujos (o demandas) especificadas en ciertos nodos de interés. $H_1$ representa un reservorio y los demás nodos representan conexiones. $q_i$ representa demandas nodales y $Q_i$ son los flujos de los tubos. Fuente: Tomada de Foglianti et al. (2020) . . . . .	13
3.1. Estructura del código desarrollado para el análisis de redes de flujo. . . . .	29
3.2. Menú mostrado después de ejecutar <code>main.py</code> . . . . .	31
3.3. Función principal del programa en Python. . . . .	32
3.4. Diagrama de flujo para resolución de redes hidráulicas en estado transitorio. . . . .	33
3.5. Esquema de una red hidráulica base. Nótese que cuenta con todos los elementos para formar una red sencilla. . . . .	34
3.6. Estructura de archivos de salida del código. . . . .	37
3.7. Caso de estudio de Todini. . . . .	39
3.8. Comparación de resultados de Todini y el código implementado. Para $\Delta t = 60$ [s]. . . . .	42
3.9. Comparación de resultados de Todini y el código implementado. Para $\Delta t = 300$ [s]. . . . .	44
3.10. Comparación de los resultados de Todini y el código programado. Para $\Delta t = 600$ [s]. . . . .	45
3.11. Comparación de los resultados de Todini y el algoritmo programado. Para $\Delta t = 900$ [s]. . . . .	47
3.12. Comparación de los resultados de Todini y el código. Para $\Delta t = 1800$ [s]. . . . .	48
3.13. Comparación de los resultados de Todini y el código. Para $\Delta t = 3600$ [s]. . . . .	50
4.1. Esquema final del sistema de combustible. . . . .	54

4.2. Componente denominado "Pérdidas Discretas dentro de Flomaster". . . . .	54
4.3. Esquema de la red de combustible a analizar. . . . .	55
4.4. Tiempos de llenado de los tanques del sistema de combustible: Validación del Algoritmo de Todini bajo hipótesis de reservorio y nodo cerrado frente a Flomaster. . . . .	57
4.5. Evolución temporal del flujo volumétrico entrando a los tanques del sistema, obtenidos por Flomaster y el Algoritmo (Todini-Reservorio y Todini-Cerrado). . . . .	59
4.6. Evolución temporal del nivel de los tanques y flujo volumétrico entrante a los tanques bajo la condición de tanques cerrados una vez que alcanzan su nivel máximo (Todini-Cerrado) . . . . .	61
4.7. Curva característica de la bomba empleada en la simulación usando el Algoritmo de Todini bajo la condición de tanques cerrados, incluyendo puntos de operación de la bomba correspondientes a las distintas etapas de llenado de los tanques. . . . .	62

# Lista de Tablas

2.1. Variables para caracterizar la red . . . . .	26
3.1. Datos de uniones y reservorios del ejemplo de la Fig. 3.5]. . . . .	35
3.2. Datos de los tanques del ejemplo de la Fig. 3.5]. . . . .	35
3.3. Datos de los tubos del ejemplo de la Fig. 3.5]. . . . .	35
3.4. Datos de las bombas del ejemplo de la Fig. 3.5]. . . . .	35
3.5. Datos de las uniones y reservorios del caso de estudio de Todini. . . . .	40
3.6. Datos de los tanques del caso de estudio de Todini. . . . .	40
3.7. Datos de los tubos del caso de estudio de Todini. . . . .	40
4.1. Comparación de tiempos de llenado entre Flomaster y las dos propuestas para modelar los tanques al alcanzar su nivel máximo (reservorio y nodo cerrado). . . . .	57
4.2. Flujos volumétricos resultantes conforme los tanques alcanzan su nivel máximo [ $\times 10^{-2}$ m <sup>3</sup> /s] para Todini-Cerrado y Flomaster. . . . .	63
C.1. Parámetros de las Pérdidas Discretas - Simcenter Flomaster . . . . .	75
C.2. Parámetros de las Tuberías - Simcenter Flomaster . . . . .	76

C.3. Parámetros de los Tanques (Reservoir: 3-arm) . . . . .	76
C.4. Parámetros de la Fuente de Flujo - Simcenter Flomaster . . . . .	76
D.1. Coeficientes de pérdida discreta ( $K$ ) y área transversal por componente . . . . .	77
F.1. Datos de uniones y reservorios de la red de combustible. . . . .	83
F.2. Datos de los tanques de la red de combustible. . . . .	83
F.3. Datos de los tubos de la red de combustible. . . . .	84
F.4. Datos de la bomba de combustible. . . . .	84
F.5. Propiedades del fluido y condiciones iniciales (JET A / JP-8). . . . .	84

# Nomenclatura

## Variables

Descripción	Variable	Unidad
Tiempo	$t$	$s$
Longitud	$L$	$m$
Volumen	$V$	$m^3$
Flujo volumétrico	$Q$	$m^3/s$
Flujo másico	$\dot{m}$	$kg/s$
Demanda nodal	$q$	$m^3/s$
Presión	$P$	Pa
Velocidad	$u$	$m/s$
Área	$A$	$m^2$
Diámetro	$D$	$m$
Gravedad	$g$	$m/s^2$
Altura	$z$	$m$
Carga	$H$	$m$
Número de Reynolds	Re	–
Factor de fricción	$f$	–

**Letras griegas**

<b>Descripción</b>	<b>Variable</b>	<b>Unidad</b>
Densidad	$\rho$	$kg/m^3$
Viscosidad cinemática	$\nu$	$m^2/s$
Viscosidad dinámica	$\mu$	$Pa \cdot s$
Peso	$\vartheta$	–
Rugosidad	$\epsilon$	$m$

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se introduce al análisis de redes de distribución de flujo en estado estacionario y transitorio. Se presenta el contexto general del problema, así como los antecedentes más relevantes relacionados con el modelado y análisis. De igual manera, se formula el problema de investigación, junto con los objetivos e hipótesis que guían el desarrollo del presente trabajo de tesis.

### 1.1. Antecedentes

A lo largo de los años, grandes matemáticos, físicos e ingenieros han desarrollado vasta teoría sobre los fluidos con el principal objetivo de obtener un modelo que permita comprender y predecir el comportamiento de los fluidos. Una de las áreas de más interés para los ingenieros son las redes de distribución de flujo, las cuales se refieren al conjunto de tuberías, accesorios y estructuras que conducen algún fluido (CONAGUA, 2007). Las tuberías, o sistemas de tuberías, se refieren a una red interconectada de conductos y equipos relacionados utilizados para transportar gas o líquidos (Oliver, 2021).

Oliver (2021) señala que el flujo a través de tuberías tiene una amplia variedad de aplicaciones, particularmente en el transporte de combustibles como gas natural e hidrocarburos líquidos, entre ellos el petróleo crudo. Estas aplicaciones se deben a que las tuberías constitu-

yen un medio altamente eficiente para el transporte de estos fluidos. Permitiendo la conexión entre productores, refinerías, distribuidores, plantas de generación de energía, etc.

Otra gran aplicación de las redes de distribución es el transporte de agua a largas distancias para el suministro urbano. Swamee and Sharma (2008) menciona que un suministro de agua potable es una necesidad básica para la sociedad. Los sistemas de abastecimiento de agua son el servicio público más importante. A nivel mundial, anualmente se gasta una cantidad colosal de dinero para proporcionar o mejorar las instalaciones de agua potable. Además, la mayor parte de la inversión se destina a la red de distribución de agua. Swamee and Sharma (2008) afirma que entre el 80 % y el 85 % del costo de un proyecto de abastecimiento de agua se utiliza en el sistema de distribución.

Dado lo anterior, queda claro que las redes de distribución (ya sean de agua, hidrocarburos u otros fluidos) son sistemas indispensables para la sociedad. Motivo por el cual, contar con modelos y métodos numéricos confiables para analizar el comportamiento del flujo en dichas redes es fundamental. Estos métodos no solo permiten diseñar la red acorde a las necesidades específicas, sino también evaluar escenarios, monitorear y detectar fallas. Al resolver una red, el algoritmo debe proporcionar información como las presiones en cada nodo y los flujos volumétricos en cada tubo.



**Figura 1.1:** Red de tubería en Refinería de Dos Bocas. Fuente: Tomado de Secretaría de Energía (2026).

Por ejemplo, suponga que se desea estudiar el flujo en la red de tubería de una refinería

como la mostrada en la Fig. 1.1. Conocer las presiones en cada nodo y el flujo en los distintos tramos de la red proporciona la información necesaria para evaluar su operación, detectar pérdidas de carga y verificar el funcionamiento de toda la red. Sin embargo, un algoritmo capaz de analizar el flujo en estado transitorio permitiría estudiar el comportamiento del almacenamiento en tanques a lo largo del tiempo, como se ilustra en la Fig. 1.2.



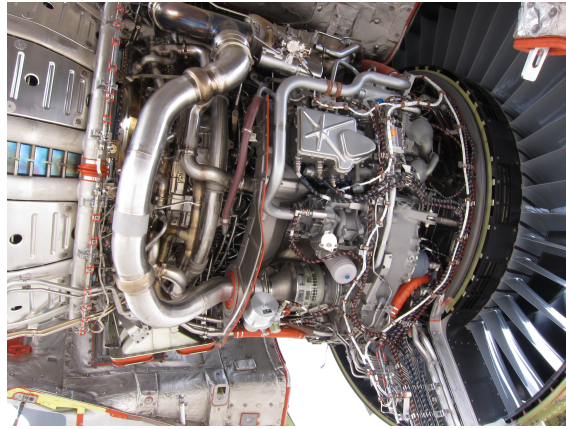
**Figura 1.2:** Tanques de almacenamiento en Refinería de Dos Bocas. Fuente: Tomado de Refinería Olmeca-Dos Bocas (2024).

Otra área de aplicación son las redes de agua potable mencionadas previamente. El análisis puede abarcar desde la red de una vivienda o un edificio, hasta infraestructura más compleja como la red de abastecimiento de una colonia o zona urbana más grande. Un caso de estudio se muestran en la Fig. 1.3.



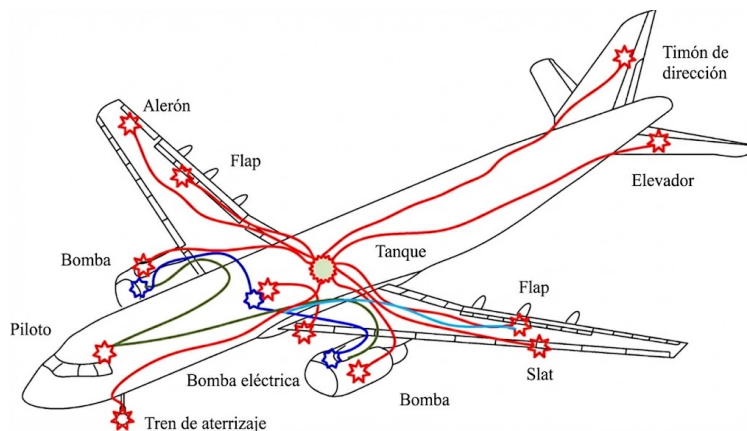
**Figura 1.3:** Sistema Cutzamala. Fuente: Tomado de Miranda (2022).

En la industria aeroespacial existen numerosos ejemplos de gran relevancia. Cabe resaltar, por ejemplo, el sistema de combustible de un turboreactor, así como los conductos para el manejo de aire a través de la máquina. Ambos sistemas se pueden observar en la Fig. 1.4 a continuación.



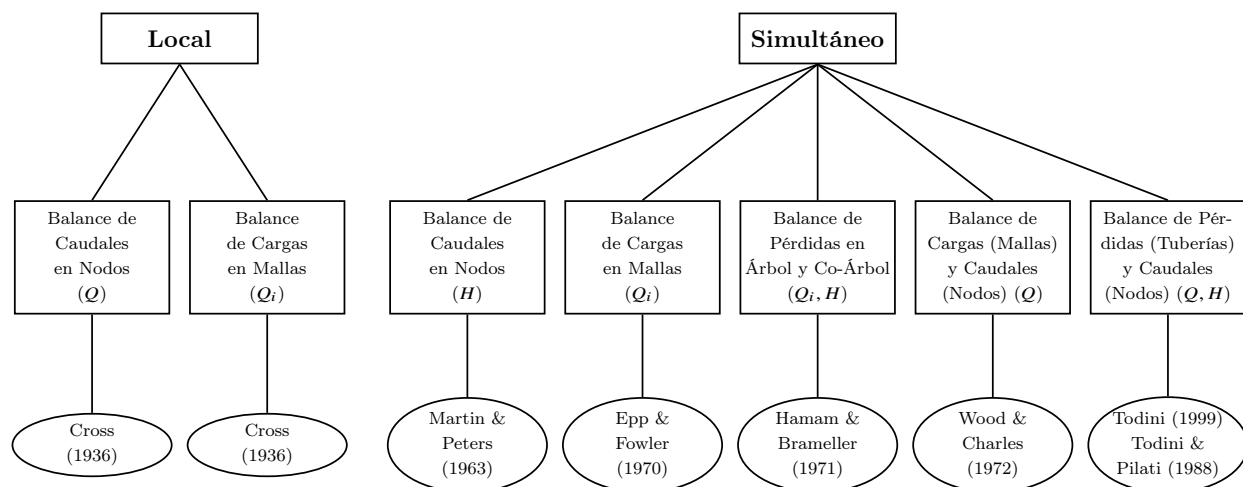
**Figura 1.4:** Sistema de combustible y sistema neumático de una turbina GEnx. Fuente: tomado de [Wikimedia Commons](#) (2026).

No menos importantes son los sistemas hidráulicos para el control de sistemas mecánicos. Conocer las presiones y flujos volumétricos de estos es de vital importancia ([Moir and Seabridge, 2008](#)) ya que permite diseñar sistemas confiables así como poder monitorear el correcto funcionamiento de la red durante su funcionamiento. Ejemplo de estas aplicación se muestran en la Fig. 1.5.



**Figura 1.5:** Distribución del sistema de tuberías hidráulicas de la aeronave. Fuente: Traducido y adaptado de [GAO et al. \(2021\)](#).

Como se observa en la Fig. 1.6, se han propuesto diversos métodos y enfoques para resolver las ecuaciones de balance de energía y masa en redes de distribución de agua las cuales resultan ser no lineales. Estos algoritmos especializados permiten resolver el sistema de ecuaciones que gobiernan la hidráulica en estado estacionario.



**Figura 1.6:** Diferentes enfoques para la solución del problema de análisis de redes de tuberías; las variables en las que se basa la linealización se muestran entre paréntesis. Fuente: Traducido de [Todini and Rossman \(2013\)](#).

Por un lado, los métodos denominados *locales* (Fig. 1.6), resuelven una ecuación a la vez, ajustando los caudales y cargas de forma iterativa en cada malla o nodo de manera independiente. Es decir, los flujos volumétricos y las cargas se tratan de manera aislada; el sistema está desacoplado. Por otro lado, en la misma figura se identifica el enfoque denominado *simultáneo*, donde el sistema completo de ecuaciones se resuelve de manera acoplada.

Al analizar [Todini and Rossman \(2013\)](#) y [Ormsbee \(2006\)](#), se concluye que al trabajar de manera local, ajustar una malla afecta el equilibrio de las mallas adyacentes, lo que ralentiza significativamente la convergencia del cálculo. En contraste, de manera simultánea, se considera la interdependencia global de la red en cada iteración. Esto permite encontrar la solución en menos pasos y garantiza una mayor estabilidad numérica. Esto nos lleva a escoger un método simultáneo sobre uno local.

Dentro de los algoritmos simultáneos se encuentran la linealización de Newton–Raphson (NR) o la Teoría Lineal (LT) de aproximación sucesiva. Existen diversos métodos basados en Newton–Raphson (NR). Uno de ellos es el método del Algoritmo de Gradiente Global

(AGG) desarrollado por Todini y Pilati en 1988 (Todini and Rossman, 2013).

El presente trabajo se basará exclusivamente en el enfoque Newton–Raphson. Empleando como método el Algoritmo del Gradiente Global de Todini, el cual constituye el estándar actual en la solución de redes (Ormsbee, 2006).

De acuerdo con Todini (2010), el Algoritmo del Gradiente Global, inicialmente propuesto por Todini (1979) y posteriormente formalizado por Todini and Pilati (1988), fue seleccionado por Rossman L. como el fundamento técnico del software EPANET desarrollado por la Agencia de Protección Ambiental de los Estados Unidos (US-EPA). En las últimas décadas, EPANET se ha convertido en el estándar mundial para el análisis de redes de distribución de agua (WDN, por sus siglas en inglés).

EPANET fue desarrollada como una herramienta para analizar el transporte y el destino de los constituyentes presentes en el agua dentro de toda la red. EPANET es usado para diseñar y dimensionar la infraestructura hidráulica, así como rehabilitar la infraestructura envejecida y optimizar la operación de tanques y bombas. Además, permite estudiar el uso de energía, investigar problemas de calidad del agua y prepararse para emergencias (U.S. Environmental Protection Agency, 2025).

## 1.2. Formulación del problema

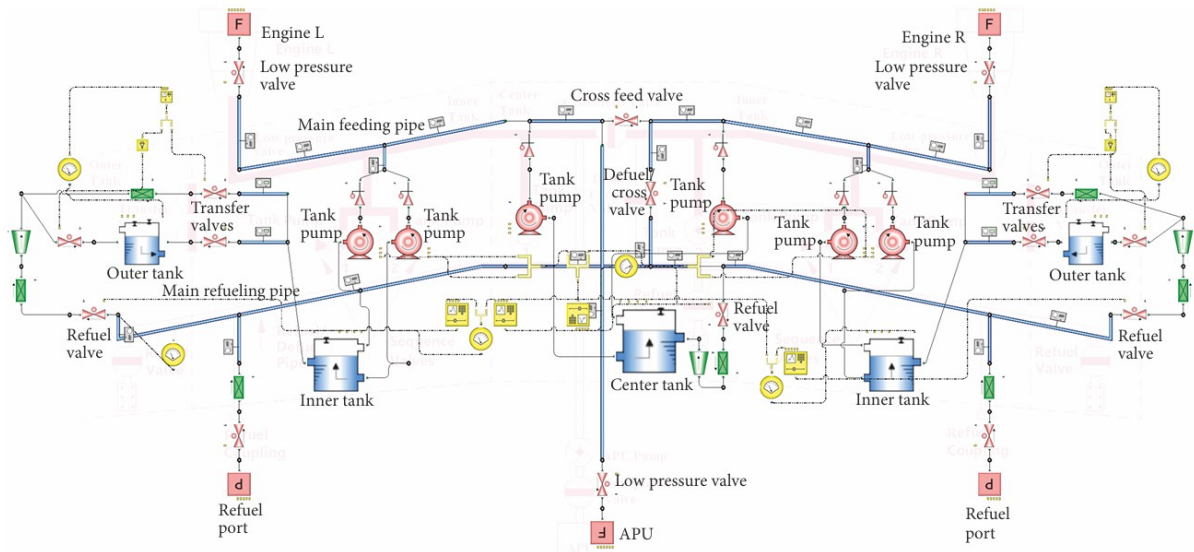
### 1.2.1. Caso de estudio

El sistema de combustible en una aeronave representa un elemento crucial. El análisis de este sistema abarca desde el llenado de los tanques (reabastecimiento de combustible) ubicados en el ala y fuselaje, hasta la inyección precisa en los motores. Motivo por el cual, conocer de manera exacta las presiones y caudales es vital para hacer un buen diseño así como monitorear el funcionamiento de éste. Además, el sistema de alimentación de combustible de las aeronaves grandes está equipado con múltiples tanques de combustible (Tu et al., 2022b).

Cabe mencionar que los tanques de combustible van conectados con los motores, los puntos de reabastecimiento y con otros tanques mediante un sistema de tuberías complejo, con el

objetivo de asegurar la capacidad de suministro independiente de cada tanque hacia todos los motores. Por otro lado, el reabastecimiento de aeronaves se realiza, en la mayoría de los casos, conectando el sistema de combustible de la aeronave a un sistema de reabastecimiento terrestre. El sistema terrestre suministra el combustible a la aeronave con flujos volumétricos y presiones suficientemente elevados para permitir el llenado de los tanques en un periodo de tiempo corto (Langton et al., 2009).

Conocer las presiones y flujos volumétricos permite garantizar un suministro ininterrumpido al motor, así como identificar fugas o fallas durante la operación de la aeronave. Un ejemplo de caso de estudio se muestra en las Fig. 1.7 y Fig. 1.8.



**Figura 1.7:** Modelo de simulación de un sistema de combustible basado en Flomaster. Fuente: Tomado de Tu et al. (2022a)



**Figura 1.8:** Reabastecimiento de combustible de una aeronave. Fuente: Tomado de [ARC Refuellers](#) (2025)

### 1.2.2. Problema técnico

Como ya se mencionó, la literatura especializada ha demostrado que el Algoritmo del Gradiente Global constituye uno de los métodos más robustos y eficientes para el análisis hidráulico en redes de distribución de agua en estado estacionario. El Software EPANET está basado en este algoritmo. Sin embargo, para poder analizar una red en estado transitorio, se requiere de un algoritmo que sea capaz de analizar la red en el tiempo.

El flujo en estado transitorio en redes de distribución de agua puede reducirse a las siguientes ecuaciones de balance de masa y energía ([Todini, 2010](#)):

$$\begin{cases} \frac{\partial V_i}{\partial t} = \sum_k^{n_i} Q_{ik} + q_i \\ \frac{\partial h}{\partial x} = -K|Q|^{n-1}Q \end{cases} \quad (1.1)$$

donde  $V_i$  es el volumen del fluido almacenado en el nodo  $i$ ;  $Q_{ik}$  es el caudal en la tubería que conecta los nodos  $i$  y  $k$ ;  $q_i$  es el caudal externo de entrada al nodo  $i$ ;  $n_i$  es el número de nodos conectados al nodo  $i$ ;  $h$  representa la carga hidráulica;  $K$  es el coeficiente de resistencia; y  $n$  es el exponente de la fórmula de pérdidas de carga.

La Ecuación [\(1.1\)](#) expresa ecuaciones diferenciales parciales con una simplificación impor-

tante. Desprecia los términos de aceleración local  $(\partial Q/\partial t)$  y convectiva  $(Q\partial Q/\partial t)$  (Todini, 2010). Motivo por el cual, la Ecuación (1.1) no puede ser utilizada para modelar transitorios rápidos, como oscilaciones por golpe de ariete (donde los efectos inerciales son indispensables). Sin embargo, este sistema de ecuaciones sí permite representar la variación lenta del flujo (estacionarios lentos<sup>1</sup>) en el tiempo.

EPANET es un software robusto y ampliamente utilizado para el análisis de redes hidráulicas. Sin embargo, presenta una gran limitación para el estudio de fenómenos transitorios. Existe la ausencia de términos cruzados, como lo son la derivada espacial de la carga hidráulica  $H$  en las ecuaciones de conservación de masa y la derivada temporal del volumen  $V$  en la ecuación de cantidad de energía (Todini, 2010).

Al eliminar estos términos, EPANET desacopla matemáticamente el problema. Resuelve dos sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) independientes, en lugar de un solo sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP). EPANET resuelve los siguientes dos problemas de EDO's:

**1. Integración espacial (Snapshot hidráulico):** La primera es la integración en el espacio en un tiempo fijo (llamado “snapshot” o estado instantáneo). Se asume un instante de tiempo fijo  $dt$ :

$$\begin{cases} \sum_k^{n_i} Q_{ik} + q_i = 0 \\ \frac{dh}{dx} = -K |Q|^{n-1} Q \end{cases} \quad (1.2)$$

**2. Integración temporal (Almacenamiento nodal):** La segunda, es la integración en el tiempo de la ecuación de balance de masa. Esto se realiza en los tanques independientemente de cualquier interacción espacial, utilizando esquemas clásicos como Euler, Runge–Kutta o el predictor–corrector de Milne (Todini, 2010).

$$\left\{ \frac{dV_i}{dt} = \sum_k^{n_i} Q_{ik} + q_i \quad (\text{En nodos de almacenamiento}) \right. \quad (1.3)$$

De las Ecuaciones (1.2) y (1.3) se observa que las derivadas parciales son sustituidas por derivadas sustanciales por lo que ambos conjuntos de ecuaciones se integran de manera in-

---

<sup>1</sup>Estos transitorios también se conocen como *transitorios cuasi-estacionarios*.

dependiente. La evolución temporal de la masa y la distribución espacial de la energía se tratan como procesos independientes. Sin embargo, aunque es matemáticamente posible, es físicamente inconsistente.

El problema de desacoplar las ecuaciones de masa y energía para integrarlas como dos sistemas distintos de ecuaciones diferenciales ordinarias radica en que se tendrá una pérdida en las interacciones espacio-tiempo establecidas en la Ecuación (1.1).

Ante estas limitaciones, es necesaria una formulación que permita describir de manera consistente el comportamiento transitorio de redes hidráulicas. En este trabajo, se adopta la formulación propuesta por Todini (2010) para el análisis transitorio de redes hidráulicas, el cual se modela mediante la resolución en el tiempo y el espacio de las ecuaciones gobernantes del fluido, simultáneamente.

### 1.3. Objetivo

Aplicar el Algoritmo del Gradiente Global Extendido (AGGE) para el análisis de los flujos estacionarios y transitorios en un sistema de combustible de aeronaves de ala fija, mediante el desarrollo de un código computacional.

#### 1.3.1. Objetivos secundarios

- Implementar el modelo matemático basado en las ecuaciones de conservación de masa y energía para redes hidráulicas en estado estacionario y transitorio (GGA y GGA Extendido).
- Desarrollar el código para el algoritmo empleando una arquitectura de programación modular en Python.
- Validar el algoritmo mediante la comparación de presiones y flujos máxicos con los resultados reportados en la literatura especializada.
- Aplicar el algoritmo GGAE para simular el sistema de combustible de una aeronave de ala fija.

- Comparar los resultados numéricos con los resultados proporcionados por un software especializado.

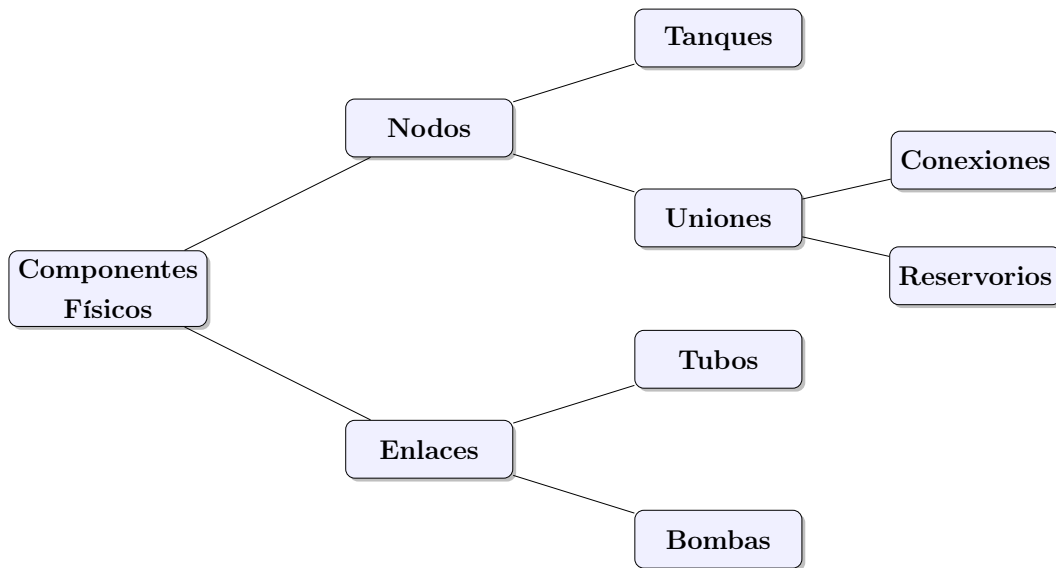
## 1.4. Hipótesis

La implementación computacional del Algoritmo del Gradiente Global (AGG) y su Extensión para transitorios (AGGE) reproducirá los valores de flujo volumétrico, presión y comportamiento reportados por el software especializado.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

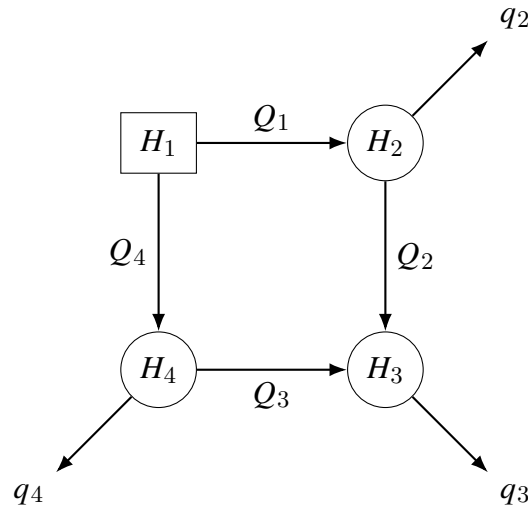
Un sistema de distribución de flujo representa un conjunto de enlaces conectados a nodos. Los nodos representan uniones, reservorios y tanques, mientras que los enlaces representan tuberías y bombas, tal como se muestra en la Fig. 2.1



**Figura 2.1:** Diagrama de componentes físicos del sistema hidráulico

La Fig. 2.2 ilustra cómo algunos de los elementos antes mencionados pueden conectarse entre sí para formar una red. Destacando que la red no necesariamente debe ser de agua; una red de combustible, como se ha hecho hincapié.

Las válvulas no se incluyen dentro de los objetivos de este trabajo. No obstante, estas se consideran como un tipo de enlace, por lo que sería posible incorporar su modelado al programa numérico desarrollado.



**Figura 2.2:** Esquema de una red hidráulica constituida por nodos interconectados mediante tubos. Note los flujos (o demandas) especificadas en ciertos nodos de interés.  $H_1$  representa un reservorio y los demás nodos representan conexiones.  $q_i$  representa demandas nodales y  $Q_i$  son los flujos de los tubos. Fuente: Tomada de Foglianti et al. (2020)

Considere el caso de estudio mostrado en la Fig. 2.2 (Foglianti et al., 2020). El problema consiste en determinar los flujos volumétricos  $\mathbf{Q}$  en todos los tubos y las cargas totales  $\mathbf{H}$  en todos los nodos. Se asumen conocidas las características de la tubería, las cuales incluyen diámetros, longitudes, rugosidad, entre otros. También se conocen las demandas nodales, es decir los flujos  $\mathbf{q}$  en todos los nodos y la carga total de referencia  $H_1$ ; este nodo constituye, en efecto, un reservorio de referencia. El cual es indispensable para poder resolver una red.

Los principios físicos de conservación de la masa y de conservación de la energía constituyen la base teórica del modelo. A partir de ellos se deducen las ecuaciones que definen los flujos volumétricos  $\mathbf{Q}$  y las cargas hidráulicas totales  $\mathbf{H}$  en la red.

## 2.1. Principio de conservación de la masa

El sistema hidráulico debe cumplir, en primera instancia, con el principio fundamental de conservación de la masa (LCM) (Kundu and Dowling, 2016). En su forma integral, aplicada a un volumen de control  $V(t)$  con superficie cerrada  $A(t)$ , la conservación de la masa se expresa como:

$$\iiint_{V(t)} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \iint_{A(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dA = 0. \quad (2.1)$$

Considerando un volumen de control fijo  $V$  con superficie cerrada  $A$ , la conservación de la masa se expresa como:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \iint_A \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dA = 0. \quad (2.2)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\mathbf{u}$  el campo de velocidades y  $\mathbf{n}$  el vector normal a la superficie de control.

Suponiendo fluido incompresible y estado estacionario. La Ecuación (2.2) se reduce a un balance de caudales:

$$\iint_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (2.3)$$

$$Q_{net} = \iint_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.4)$$

Aplicando la Ecuación (2.2) a un nodo  $i$  cualquiera, el balance de masa en estado estacionario se expresa de la siguiente manera (Todini and Rossman, 2013):

$$\sum_{k=1}^{n_i} Q_{k,i,j} + q_i = 0 \quad (2.5)$$

donde:

- $Q_{k,i,j}$ : Caudal en la tubería genérica  $k_{i,j}$  conectada al nodo  $i$ , y proviene del nodo  $j$ .
- $n_i$ : Número de tuberías conectadas al nodo  $i$

- $q_i$ : Demanda conocida (o tasa de extracción) en el nodo  $i$ .

El flujo que *entra* a un nodo es *positivo*, mientras que el flujo que *sale* de un nodo es *negativo*.

De la Ecuación (2.1), la LCM para estado transitorio aplicada a un nodo  $i$  suponiendo densidad constante, puede expresarse de manera reducida de la siguiente forma (Todini, 2010):

$$\frac{\partial V(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n_i} Q_{k,i,j} + q_i \quad (2.6)$$

donde  $V(t)$  representa el volumen en el nodo  $i$ .

## 2.2. Principio de conservación de la energía

El sistema hidráulico también debe satisfacer el principio fundamental de conservación de la energía mecánica (LCEM). La conservación de la energía interna por unidad de masa  $e$  y la energía cinética por unidad de masa  $\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2$  para un fluido puede establecerse como (Kundu and Dowling, 2016):

$$\begin{aligned} \iiint_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho e + \frac{\rho}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) dV + \iint_{A(t)} \left( \rho e + \frac{\rho}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = \\ \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV + \iint_{A(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dA - \iint_{A(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \end{aligned} \quad (2.7)$$

Considerando estado estacionario, flujo incompresible, despreciando la energía interna y efectos térmicos. Al aplicar la ley a lo largo de un tubo  $k$  de nodos  $i, j$ , esta se expresa como:

$$H_i - H_j - \Phi = 0 \quad (2.8)$$

donde:

- $H_i$ : Carga total en el nodo  $i$ .
- $H_j$ : Carga total en el nodo  $j$ .

- $i, j$ : Nodos ubicados en los extremos del tubo  $k$ .
- $\Phi$ : Término de pérdida de carga por fricción, el cual puede ampliarse para incluir tanto pérdidas primarias como pérdidas secundarias o menores (Todini and Rossman, 2013).

Por convención, el flujo se considera dirigido del nodo  $i$  hacia el nodo  $j$ . Sin embargo, durante la resolución del sistema de ecuaciones, el flujo volumétrico puede resultar negativo, indicando un cambio en el sentido real del flujo. La formulación inicial supone que  $H_i \geq H_j$ .

Para el análisis en estado transitorio, la ecuación de conservación de la energía a lo largo del tubo  $k$  se expresa como (Todini and Rossman, 2013):

$$\frac{\partial H(x, t)}{\partial x} + \Phi = 0 \quad (2.9)$$

El término  $\Phi$  representa la pérdida total de carga, la cual se modela como la suma de las pérdidas primarias y secundarias. Se expresa como (Todini, 2010):

$$\Phi = r_k |Q_k|^{n-1} Q_k + m_k |Q_k| Q_k \quad (2.10)$$

donde:

- $r_k$ : Coeficiente asociado a las pérdidas primarias del tubo  $k$ .
- $Q_k$ : Flujo volumétrico que circula por el tubo  $k$  entre los nodos  $i$  y  $j$ .
- $m_k$ : Coeficiente asociado a las pérdidas secundarias o menores.
- $n$ : Exponente dependiente de la ecuación utilizada para modelar las pérdidas primarias.

En el presente trabajo se adopta  $n = 2$ , correspondiente a la ecuación de Darcy–Weisbach, debido a que esta considera explícitamente los efectos de la viscosidad del fluido. La ecuación de Hazen–Williams no se emplea, ya que es de naturaleza empírica y desprecia dichos efectos.

De la Ecuación (2.10):

$$\Phi = h_f + h_m \quad (2.11)$$

donde:

- $h_f$ : Pérdidas primarias por fricción.
- $h_m$ : Pérdidas secundarias o menores.

El desarrollo matemático detallado que conduce a la obtención de los coeficientes  $r_k$  y  $m_k$  se presenta en el Apéndice [B](#).

### 2.3. Esquema de Todini

[Todini \(2010\)](#) desarrolló una solución físicamente consistente y matemáticamente rigurosa de las Ecuaciones [\(2.6\)](#) y [\(2.9\)](#) las cuales describen el flujo y energía en redes de distribución de flujo en estado transitorio. Dicha formulación se obtuvo extendiendo el Algoritmo del Gradiente Global, donde el autor propone expresar la variación del almacenamiento en los tanques como función del nivel del tanque, es decir, de la carga. Para un tanque en el nodo  $i$ , el volumen puede escribirse como:

$$V_i = V_i(H_i) \quad (2.12)$$

de donde se obtiene la relación diferencial:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} = \Omega_i \frac{\partial H_i}{\partial t}, \quad \forall H_i \geq H_{0,i} \quad (2.13)$$

siendo  $\Omega_i$  el área de la base del tanque y  $H_{0,i}$  la elevación del fondo del tanque. Para valores de  $H_i < H_{0,i}$ , se cumple que  $\Omega_i(H_i) = 0$ . Sustituyendo la Ecuación [\(2.13\)](#) en la Ecuación [\(2.6\)](#), correspondiente a la conservación de la masa, se obtiene:

$$\Omega_i \frac{\partial H_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n_i} Q_{ik} + q_i \quad (2.14)$$

En consecuencia, el Algoritmo del Gradiente Global Extendido propuesto por Todini para analizar flujo en estado transitorio lento queda definido por:

$$\begin{cases} \Omega_i \frac{\partial H_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n_i} Q_{ik} + q_i \\ \frac{\partial H_i}{\partial x} = \Phi \end{cases} \quad (2.15)$$

Nótese que no se reintroducen los términos cruzados de acoplamiento espacio–tiempo. Cada ecuación contiene derivadas respecto a una única variable independiente, por lo que el sistema no constituye un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales acopladas desde el sentido clásico. Sin embargo, la extensión del Algoritmo del Gradiente Global resuelve de forma implícita y simultánea las ecuaciones de continuidad y energía (Todini, 2010). Esto genera un acoplamiento algebraico entre cargas y caudales.

Dentro de las ventajas de este algoritmo se encuentran:

1. Sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDP's) en el tiempo y en el espacio se resuelve simultáneamente.
2. Solución implícita de las ecuaciones.
3. Efectos espaciales son considerados en la integración de las derivadas temporales.
4. Permite analizar transitorios lentos.
5. En los nodos tipo tanques, la incógnita principal es la carga hidráulica.

Una limitación que se tiene es que este algoritmo no es adecuado para el análisis de transitorios rápidos.

## 2.4. Estado estacionario - algoritmo del gradiente global

El Algoritmo del Gradiente Global es una reformulación de las Ecuaciones (2.5) y (2.8) en notación matricial. Esta representación tiene como objetivo poder trabajar con todas las ecuaciones simultáneamente y resolverlas.

A continuación, se presenta el Algoritmo del Gradiente Global (Todini and Rossman (2013))

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \vdots & \mathbf{A}_{12} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{21} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \dots \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_0 \\ \dots \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

donde:

- $\mathbf{Q}^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_{P_b}] \in \mathbb{R}^{1 \times P_b}$ : Vector de caudales desconocidos.
- $\mathbf{H}^T = [H_1, H_2, \dots, H_n] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ : Vector de cargas hidráulicas desconocidas.
- $\mathbf{H}_0^T = [H_{n+1}, H_{n+2}, \dots, H_N] \in \mathbb{R}^{1 \times (N-n)}$ : Vector de cargas conocidas.
- $\mathbf{q}^T = [q_1, q_2, \dots, q_n] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ : Vector de demandas conocidas.

El sistema matricial mostrado en la Ecuación (2.16), es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales ordinarias, simultáneo. Sin embargo, al ser estacionario, las derivadas parciales respecto al tiempo se anula.

La solución del Algoritmo del Gradiente Global (Ecuación (2.16)) se obtiene aplicando el método de Newton-Raphson. El esquema iterativo de Newton-Raphson se obtiene al diferenciar ambos miembros de las ecuaciones con respecto a los flujos desconocidos individuales  $Q$  y las cargas (o alturas totales)  $H$ . Este esquema iterativo se expresa como (Todini and Rossman, 2013):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \vdots & \mathbf{A}_{12} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{21} & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{Q} \\ \dots \\ d\mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^r \\ \dots \\ \mathbf{f}_2^r \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

donde  $\mathbf{D}$  representa una matriz diagonal obtenida al diferenciar las ecuaciones de balance de energía con respecto al flujo volumétrico. Este sistema se resuelve iterativamente para encontrar los valores desconocidos de  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{H}$ . Sin perder el hecho de que estas incógnitas, son matrices.

Al resolver el sistema de ecuaciones, se llega a las siguientes ecuaciones iterativas:

$$\mathbf{H}^{\tau+1} = (\mathbf{A}_{21}(\mathbf{D}^\tau)^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1}[\mathbf{A}_{21}(\mathbf{I} - (\mathbf{D}^\tau)^{-1}\mathbf{A}_{11}^\tau)(\mathbf{Q}^\tau)^\tau - \mathbf{q} - \mathbf{A}_{21}(\mathbf{D}^\tau)^{-1}\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_0] \quad (2.18)$$

y

$$\mathbf{Q}^{\tau+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}_{11})\mathbf{Q}^\tau - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}_{12}\mathbf{H}^{\tau+1} + \mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_0) \quad (2.19)$$

Las Ecuaciones (2.18) y (2.19) representan la solución iterativa del método Algoritmo del Gradiente Global. Dado que el modelo está en régimen estacionario, el parámetro  $\tau$  no representa un tiempo físico, sino un índice iterativo del proceso numérico empleado para alcanzar la convergencia del sistema. Motivo por el cual se usa  $\tau$  y  $\tau + 1$ .

De la Ecuación (2.18), observamos que  $\mathbf{H}^{\tau+1}$ , solo depende de los flujos  $\mathbf{Q}^{\tau}$  (iteración previa  $\tau$ ). Por otro lado, los flujos  $\mathbf{Q}^{\tau+1}$  dependen de los flujos  $\mathbf{Q}^{\tau}$  y de las cargas totales  $\mathbf{H}^{\tau+1}$ , calculadas en la misma iteración  $\tau + 1$ .

Para finalizar, estas ecuaciones representan un “snapshot” o “fotografía instantánea” en el tiempo. Posteriormente, se desarrollará cada una de las matrices.

## 2.5. Estado transitorio - extensión del algoritmo

Desarrollado por Ezio Todini (Todini, 2010), las Simulaciones de Período Extendido del Algoritmo del Gradiente Global o “EPS - GGA (Extended Period Simulation - Global Gradient Algorithm), por sus siglas en inglés. Es un algoritmo que permite analizar redes de distribución de agua.

En la Simulación de Período Extendido de Redes, deben considerarse condiciones tales que hagan que el sistema varíe lentamente en el tiempo. Por ejemplo, cambios en la demanda, cambios en la acumulación del fluido en los tanques, etc. Estos cambios generan condiciones de flujo transitorio lento. Donde los efectos inerciales y dinámicos son despreciables (Todini, 2010). El esquema matricial se presenta a continuación. Posteriormente, se definen las matrices que lo componen, indicando su dimensión e interpretación.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^t & \vdots & \mathbf{A}_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{21} & \vdots & \mathbf{A}_{22}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_t \\ \cdots \\ \mathbf{H}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{10}\mathbf{H}_{0,t} \\ \cdots \\ -\mathbf{q}_t^* \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

donde:

- $\mathbf{Q}_t^T = [Q_{1,t}, Q_{2,t}, \cdots, Q_{P_b,t}] \in \mathbb{R}^{1 \times P_b}$ : Vector de caudales desconocidos.
- $\mathbf{H}_t^T = [h_{1,t}, h_{2,t}, \cdots, h_{n,t}] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ : Vector de cargas hidráulicas desconocidas.<sup>[1]</sup>
- $\mathbf{H}_{0,t}^T = [h_{n+1,t}, h_{n+2,t}, \cdots, h_{N,t}] \in \mathbb{R}^{1 \times (N-n)}$ : Vector de cargas conocidas.
- $\mathbf{q}_t^{*T} = [q_{1,t}, q_{2,t}, \cdots, q_{n,t}] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ : Vector de demandas conocidas.

---

<sup>1</sup>Nótese que  $h_i = H_i$  en cuestión de notación. Sin embargo, se prefiere la notación de  $H_i$ .

Al resolver el sistema de ecuaciones, se llega a las siguientes ecuaciones iterativas:

$$\mathbf{H}_t^{\tau+1} = A_t^{-1} F_t \quad (2.21)$$

y

$$\mathbf{Q}_t^{\tau+1} = \mathbf{Q}_t^\tau - (D_{11}^t)^{-1} (A_{11}^t \mathbf{Q}_t^\tau + A_{12} \mathbf{H}_t^{\tau+1} + A_{10} \mathbf{H}_{0,t}) \quad (2.22)$$

de donde se tiene que:

$$\mathbf{A}_t = A_{21} (D_{11}^t)^{-1} A_{12} - D_{22}^t \quad (2.23)$$

y

$$\mathbf{F}_t = A_{21} \mathbf{Q}_t^\tau + A_{22} \mathbf{H}_t^\tau - A_{21} (D_{11}^t)^{-1} A_{11}^t \mathbf{Q}_t^\tau - A_{21} (D_{11}^t)^{-1} A_{10} \mathbf{H}_{0,t} + q_t^* \quad (2.24)$$

Las Ecuaciones (2.21) y (2.22) representan la solución iterativa del método Algoritmo del Gradiente Global en estado transitorio. Como se observa, se tienen dos índices. El índice  $t$  hace referencia a la iteración temporal, mientras que el índice  $\tau$  representa la iteración del método numérico para converger a la solución, para un  $t$  fijo. Esto implica una doble iteración.

De la Ecuación (2.21), se observa que para un tiempo fijo  $t$ ,  $\mathbf{H}_t^{\tau+1}$ , depende de los flujos  $\mathbf{Q}_t^\tau$  (de la iteración previa  $\tau$ ). Por otro lado, para un tiempo  $t$ , los flujos  $\mathbf{Q}_t^{\tau+1}$ , dependen de los flujos  $\mathbf{Q}_t^\tau$  y de las cargas totales  $\mathbf{H}_t$  de la iteración  $\tau + 1$ ; calculadas en la misma iteración  $\tau + 1$ . Estas ecuaciones representan un “snapshot” o “fotografía instantánea” en el tiempo. De igual manera, posteriormente, se desarrollará cada una de las matrices.

Para resolver el problema transitorio, primero se debe determinar un *estado inicial*, el cual corresponde a la solución del sistema en estado estacionario ( $t = 0$ ). Esto implica que los tanques son modelados como reservorios de carga fija. Lo cual permite obtener los flujos volumétricos en los tubos y las cargas en los nodos en  $t = 0$ . El estado estacionario es, en otras palabras, la condición inicial a partir de la cual se inicia la simulación en período extendido.

## 2.6. Definición de las matrices

$\mathbf{A}_{11}$  es una matriz cuadrada diagonal de dimensión  $[P_b \times P_b]$  que modela las pérdidas primarias y secundarias (también denominadas pérdidas menores). En régimen estacionario,

al depender del flujo, esta matriz debe calcularse en cada iteración  $\tau$  para un tiempo fijo  $t$ , denotándose como  $\mathbf{A}_{11}^\tau$ . Para el caso transitorio, debe calcularse para cada tiempo  $t$  como  $\mathbf{A}_{11}^t$ . En este último caso queda implícita la iteración  $\tau$ .

$$A_{11}^t(k, k) = \begin{cases} r_k |Q_{ij,t}^\tau|^{n-1} + m_k |Q_{ij,t}^\tau| & \text{si el elemento es un tubo} \\ - \left( \frac{a_0 \omega^2}{Q_{ij,t}^\tau} + b_0 \omega + c_0 Q_{ij,t}^\tau \right) & \text{si el elemento es una bomba} \end{cases} \quad (2.25a)$$

$$(2.25b)$$

donde:

- $r$ : Coeficiente asociado a las pérdidas primarias.
- $Q_{ij,t}$ : Es el flujo del tubo cuyos nodos y sentido son  $i \rightarrow j$ .
- $m$ : Coeficiente asociado a las pérdidas secundarias o menores.
- $n$ : Exponente cuyo valor depende de la ecuación usada para calcular las pérdidas primarias. ( $n = 2$  para Darcy-Weisbach ó  $n = 1.852$  si es Hazen-Williams).
- $a_0, b_0, c_0$ : Coeficientes de la función cuadrática que modela la curva característica de la bomba.  $c_0$  es el coeficiente del término cuadrático,  $b_0$  del término lineal y  $a_0$  del término independiente.
- $\omega$ : Velocidad angular adimensional.

El coeficiente  $r$  se define mediante la siguiente expresión, la cual se describe a detalle en el Apéndice [B](#):

$$r = f \left( \frac{8L}{\pi^2 g D^5} \right) \quad (2.26)$$

Nótese que la complejidad de esta expresión radica en el factor de fricción  $f$ , el cual es función de la rugosidad relativa, el número de Reynolds y la forma del tubo. Para su cálculo, en el presente trabajo se calculó de manera explícita usando la ecuación de Haaland ([White, 2011](#)).

$\mathbf{A}_{22}$  es una matriz cuadrada diagonal de dimensión  $[n \times n]$  que carga el almacenamiento en los nodos con carga desconocida. Como se observa en la Ecuación [\(2.27\)](#), durante la

primera iteración ( $t = 0$ ) el sistema corresponde al caso estacionario, por lo que los términos transitorios de  $A_{22}^t$  son nulos. Solo a partir de  $t = \Delta t$  esta matriz incorpora los efectos de almacenamiento en los tanques.

$$A_{22}^t(i, i) = \begin{cases} 0 & \text{si el nodo } i \text{ es una conexión} & (2.27a) \\ -\frac{\bar{\Omega}_{i,h_{i,t},h_{i,t-\Delta t}}}{\vartheta\Delta t}, & \text{si el nodo } i \text{ es un tanque} & (2.27b) \end{cases}$$

donde:

- $\bar{\Omega}_{i,h_{i,t},h_{i,t-\Delta t}}$ : Sección transversal promedio del tanque en el intervalo  $\Delta t$ .
- $\vartheta$ : Peso del promedio temporal donde  $0 \leq \vartheta \leq 1$ .
- $\Delta t$ : Paso de tiempo.

La Ecuación (2.27b) establece que para  $t = 0$  se resuelve el estado estacionario (porque no hay paso de tiempo anterior), mientras que para  $t \geq \Delta t$  se activa la formulación transitoria completa.

$\bar{\Omega}_{i,h_{i,t},h_{i,t-\Delta t}}$  se define como:

$$\bar{\Omega}_{i,h_{i,t},h_{i,t-\Delta t}} = \frac{1}{h_{i,t} - h_{i,t-\Delta t}} \int_{h_{i,t-\Delta t}}^{h_{i,t}} \Omega_{i,h_i} dh_i \quad (2.28)$$

$\mathbf{D}_{11}^t$  es una matriz cuadrada diagonal de  $[P_b \times P_b]$  que representa el jacobiano de  $\mathbf{A}_{11}\mathbf{Q}$ :

$$D_{11}(k, k) = \begin{cases} nr|Q_{ij,t}|^{n-1} + 2m|Q_{ij,t}| & \text{si el elemento } k \text{ es un tubo} & (2.29a) \\ -(b_0\omega + 2c_0Q_{ij,t}) & \text{si el elemento } k \text{ es una bomba} & (2.29b) \end{cases}$$

$\mathbf{D}_{22}$  es una matriz cuadrada diagonal de dimensión  $[n \times n]$ . Como se observa en la Ecuación (2.27), durante la primera iteración ( $t = 0$ ) el sistema corresponde al caso estacionario, por lo que los términos transitorios de  $D_{22}^t$  no existen (El Algoritmo del Gradiente Global no la requiere). Solo a partir de  $t = \Delta t$  esta matriz comienza a incorporar los efectos de almacenamiento en tanques.

$$D_{22}^t(i, i) = \begin{cases} 0 & \text{si el nodo } i \text{ es una conexión} \\ -\frac{\bar{\Omega}_{i, h_{i,t}, h_{i,t-\Delta t}}}{\vartheta \Delta t}, & \text{si el nodo } i \text{ es un tanque} \end{cases} \quad (2.30a)$$

$$(2.30b)$$

donde:

- $\bar{\Omega}_{i, h_{i,t}, h_{i,t-\Delta t}}$ : Sección transversal promedio del tanque en el intervalo  $\Delta t$ .
- $\vartheta$ : Peso del promedio temporal donde  $0 \leq \vartheta \leq 1$ .
- $\Delta t$ : Paso de tiempo.

Nótese su semejanza con la matriz  $A_{22}$  (Ecuación (2.27)), por lo que ambas matrices presentan el mismo comportamiento.

Sea  $\bar{\mathbf{A}}_{12}$ , una matriz de incidencia de dimensión  $[P_b \times N]$  en la cual las **filas** representan los **enlaces**, y las **columnas** representan los **nodos** que conforman la red en forma de grafo. La matriz se construye bajo las direcciones de flujo asumidas, siguiendo la convención de que las entradas a un nodo se consideran positivas y las salidas negativas.

$$\bar{\mathbf{A}}_{12}(k, l) = \begin{cases} -1 & \text{si el enlace } k \text{ deja el nodo } l \\ 0 & \text{si el enlace } k \text{ no está conectada al nodo } l \\ +1 & \text{si el enlace } k \text{ entra al nodo } l \end{cases} \quad (2.31)$$

La matriz  $\bar{\mathbf{A}}_{12}$  se puede dividir en dos submatrices:

$$\bar{\mathbf{A}}_{12} = \left[ \mathbf{A}_{12} \quad \vdots \quad \mathbf{A}_{10} \right] \quad (2.32)$$

$\mathbf{A}_{10}$  es la matriz de incidencia de dimensión  $[P_b \times n_0]$  que relaciona las tuberías con los nodos de carga conocida. Para  $t = 0$ , las cargas conocidas incluyen tanto los reservorios como los tanques. En el caso transitorio ( $t > 0$ ), las cargas conocidas corresponden únicamente a los reservorios, mientras que los tanques se manejan como cargas desconocidas. Esto implica que  $\mathbf{A}_{10}$  debe calcularse una vez para el estado estacionario y otra para el caso transitorio.

Esta matriz no depende de ningún parámetro y es propia de la red. Por lo tanto, una vez calculada para cada caso, permanece constante y no requiere recalcularse durante el análisis.

$\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21}^T$  es la matriz de incidencia de dimensión  $[P_b \times n]$  que relaciona la tubería con los nodos de carga desconocida. Es importante destacar que para  $t = 0$ , las cargas desconocidas representan únicamente los nodos que son conexiones. Sin embargo, cuando  $t > 0$  las cargas desconocidas representan tanto las conexiones como los tanques. Esto implica que es necesario volver a calcular esta matriz para el caso transitorio ( $t > 0$ ).

Un ejemplo de cómo se asigna los valores en la Ecuación (2.31). Supongamos que el tubo  $k$  de nodos  $i, j$  tiene un flujo que va de los nodos  $i \rightarrow j$ . Si  $l = i$  se le asigna  $-1$  pero si  $l = j$  se le asigna 1. Sin embargo, si  $l \neq i$  y  $l \neq j$ , entonces se le asigna 0. Recordando el caso de estudio mostrado en la Fig. 2.2, sus matrices serían:

$$\mathbf{A}_{12} : \begin{array}{c|ccc} & N_2 & N_3 & N_4 \\ \hline P_1 & 1 & 0 & 0 \\ P_2 & -1 & 1 & 0 \\ P_3 & 0 & 1 & -1 \\ P_4 & 0 & 0 & 1 \end{array} ; \quad \mathbf{A}_{10} : \begin{array}{c|c} & N_1 \\ \hline P_1 & -1 \\ P_2 & 0 \\ P_3 & 0 \\ P_4 & -1 \end{array} \quad (2.33)$$

$\mathbf{q}$  es la matriz columna de dimensión  $[n \times 1]$  que representa las demandas nodales conocidas. Cabe mencionar que esta matriz no contempla demandas en los reservorios, ya que estos no presentan demandas nodales. Sin embargo los nodos que no son tanques, si pueden presentar una demanda nodal. Nótese que  $q_t^*$  para tanques solo existe cuando  $t > 0$ . Cuando  $t = 0$ , el algoritmo solo requiere de  $q_t$ . La matriz se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{q}_t^*(i) = \begin{cases} \mathbf{q}_t & \text{si el nodo } i \text{ es una conexión} & (2.34a) \\ \mathbf{q}_t + \frac{1 - \vartheta}{\vartheta} (\mathbf{A}_{21} \mathbf{Q}_{t-\Delta t} + \mathbf{q}_{t-\Delta t}) - \mathbf{A}_{22}^{t-\Delta t} \mathbf{H}_{t-\Delta t} & \text{si el nodo } i \text{ es un tanque} & (2.34b) \end{cases}$$

## 2.7. Caracterización de la red

Las variables utilizadas para dimensionar las matrices del modelo se definen a continuación (Véase la Tabla 2.1):

**Tabla 2.1:** Variables para caracterizar la red

Símbolo	Descripción
$p$	Número de tubos en la red
$b$	Número de bombas
$P_b$	Número total de enlaces (tubos y bombas)
$n$	Número de nodos con carga desconocida
$n_0$	Número de nodos con carga conocida
$N$	Número total de nodos
$n_R$	Número de reservorios
$n_W$	Número de tanques
$n_C$	Número de conexiones
$n_j$	Número de uniones (conexiones y reservorios)

Para el planteamiento del modelo en estado estacionario, se consideran las siguientes relaciones:

$$P_b = p + b \quad (2.35)$$

$$N = n_0 + n \quad (2.36)$$

En el estado estacionario, los tanques se consideran como reservorios con carga conocida.

$$n_0 = n_R + n_W \quad (2.37)$$

$$n = n_C \quad (2.38)$$

Por lo tanto, el número total de nodos en la red puede expresarse como:

$$N = (n_R + n_W) + n_C \quad (2.39)$$

$$= (n_R + n_C) + n_W \quad (2.40)$$

$$= n_j + n_W \quad (2.41)$$

El planteamiento del modelo en estado transitorio considera las siguientes relaciones y se cumplen las Ecuaciones (2.35) y (2.36). En el estado transitorio, los tanques ya no se consideran como reservorios, sino como nodos con carga desconocida.

$$n_0 = n_R \quad (2.42)$$

$$n = n_W + n_C \quad (2.43)$$

Por lo tanto, el número total de nodos en la red puede expresarse como:

$$N = n_R + (n_C + n_W) \quad (2.44)$$

$$= (n_R + n_C) + n_W \quad (2.45)$$

$$= n_j + n_W \quad (2.46)$$

# Capítulo 3

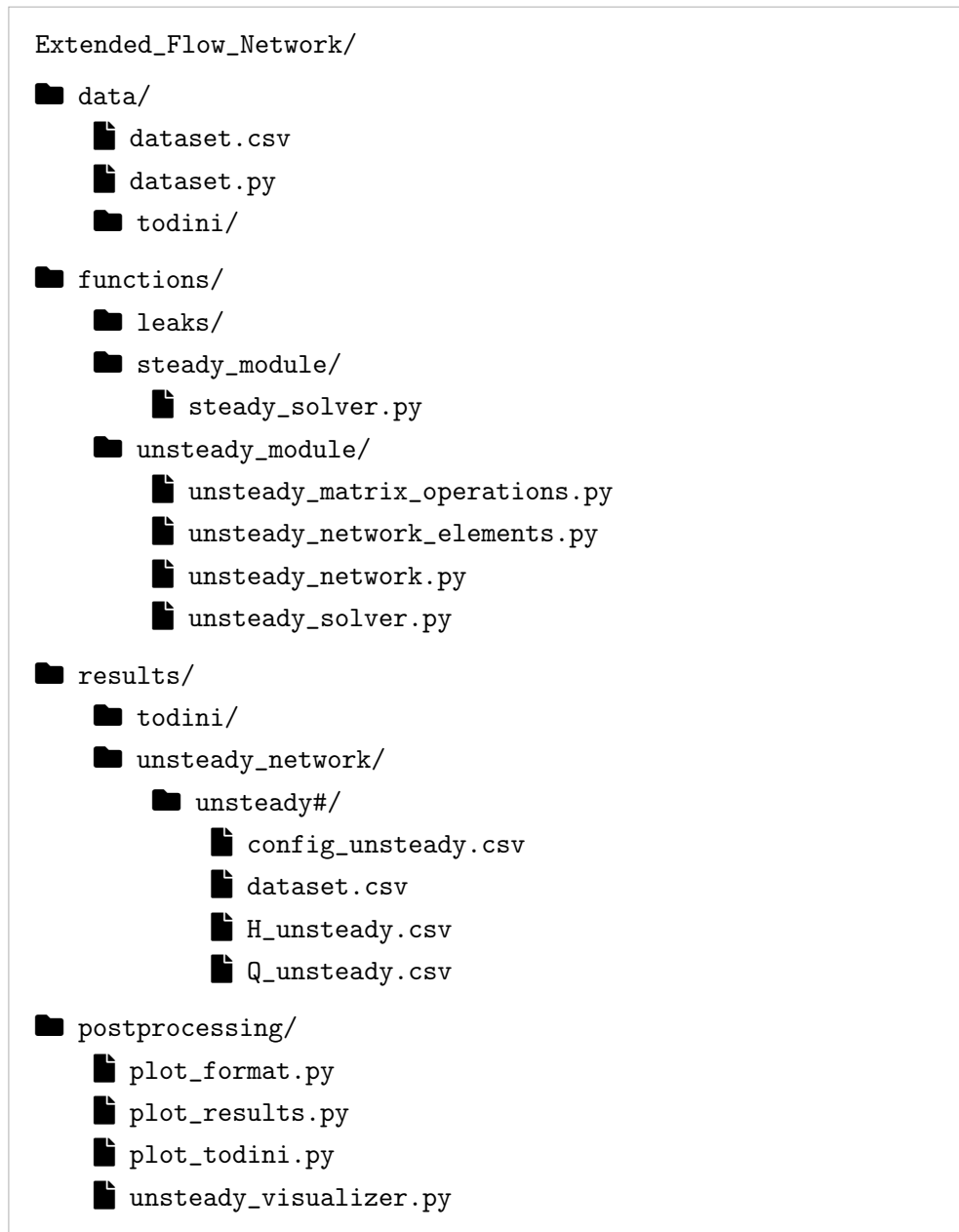
## Programa Numérico

### 3.1. Estructura del código

El programa fue desarrollado en el lenguaje de programación **Python 3.10.9** debido a su facilidad para generar código. Python posee bibliotecas para el cómputo científico. Además, este lenguaje de programación permite una gran facilidad para la manipulación de datos matriciales. Este último punto es importante debido a que como se ha observado en las secciones anteriores, todo el problema se resume a generar y resolver sistemas matriciales.

La programación del algoritmo **se desarrolló de manera modular**. La programación modular consiste en dividir todo el código en secciones o módulos con el objetivo principal de facilitar su comprensión o legibilidad y mantenimiento. Una gran ventaja de la programación modular es que permite incorporar nuevos módulos con el propósito de ampliar el código con nuevas funcionalidades del algoritmo sin interferir con los módulos ya existentes. Este enfoque permite distinguir las partes del programa y hacerlo más manejable.

El código desarrollado en este trabajo de tesis abarca desde la creación del módulo para la lectura de datos (preprocesamiento), el procesamiento de los mismos y la solución numérica, la generación de resultados y su posterior postprocesamiento. Todo ello se implementó a partir de las ecuaciones y procedimientos previamente formulados.



**Figura 3.1:** Estructura del código desarrollado para el análisis de redes de flujo.

La Fig. [3.1](#) presenta la jerarquía de directorios y archivos del código, donde se distinguen los módulos requeridos para el preprocesamiento de datos, resolución de la red (estado estacionario y transitorio) y procesamiento de resultados. La estructura del proyecto se organiza en cuatro componentes principales:

<b>data/</b>	Agrupar los archivos de entrada y el módulo para el preprocesamiento de datos ( <code>dataset.py</code> ). El archivo <code>dataset.csv</code> es donde se encuentran los datos de la red hidráulica.
<b>functions/</b>	Agrupar los módulos del procesamiento de los datos. Estos módulos generan las matrices según el tipo de análisis. El directorio <code>steady_module</code> contiene el módulo con el solver para la red en estado estacionario, mientras que <code>unsteady_module</code> resuelve el flujo transitorio.
<b>results/</b>	Almacena los archivos de salida generados por las simulaciones, organizados en subdirectorios.
<b>postprocessing/</b>	Agrupar los módulos dedicados a la generación y visualización de resultados. El módulo <code>unsteady_visualizer.py</code> se encarga de almacenar y organizar los resultados obtenidos; <code>plot_format.py</code> define el formato gráfico de las figuras; <code>plot_results.py</code> genera las visualizaciones correspondientes.

En la Fig. 3.1, el subdirectorio `leaks` resalta el enfoque modular del trabajo. Bastaría con incorporar los módulos necesarios dentro de este directorio para la detección y caracterización de fugas. Esto no tendría por qué interferir con los módulos ya programados.

## 3.2. Flujo de ejecución de los módulos

Todo el algoritmo está controlado por un archivo principal denominado `main.py`. Este archivo es el cerebro ya que al ejecutarlo manda a llamar a todas las funciones necesarias para llevar a cabo la tarea escogida por el usuario. Esto, debido a que al principio, despliega un menú donde se pregunta al usuario qué es lo que desea hacer. Ya sea resolver una red en estado transitorio, graficar resultados, etc. Una vez elegida la opción, este mismo archivo se encarga de mandar a llamar a todos los módulos en el orden necesario para realizar la tarea especificada.

A continuación se muestra la Fig. 3.2 donde se muestran las instrucciones una vez ejecutado el archivo principal.

```
What do you want to do?
1.- Solve a Steady Network
2.- Solve a Network with Leaks
3.- Graphic the results of a simple WDN with Leaks
4.- Solve an Unsteady Network
5.- Postprocessing Results
6.- Exit
Note: If results are saved. Choose Postprocessing to visualize.
Choose an option:
█
```

**Figura 3.2:** Menú mostrado después de ejecutar `main.py`

La Fig. 3.3 representa los principales módulos que mandan a llamar el algoritmo según la opción deseada. Cabe mencionar que los módulos de `solve_network_leaks` y `graphics_leaks` no se encuentran en la Fig. 3.2 ya que son módulos que todavía no se desarrollan debido a que salen de los objetivos de este trabajo.

Una vez que ya se tiene listo el archivo `csv` con los datos de la red colocado dentro de la ruta `data/dataset.csv`, el usuario puede seleccionar la “opción 4” del menú. Al elegir esta opción, el archivo `main.py` hace un llamado a todos los módulos necesarios para resolverla. Desde la lectura de datos, creación de matrices, ejecución del solver y finalmente el empaquetamiento y guardado de los resultados.

```
def main():
    """
    Executes the code through its menu of options.
    """

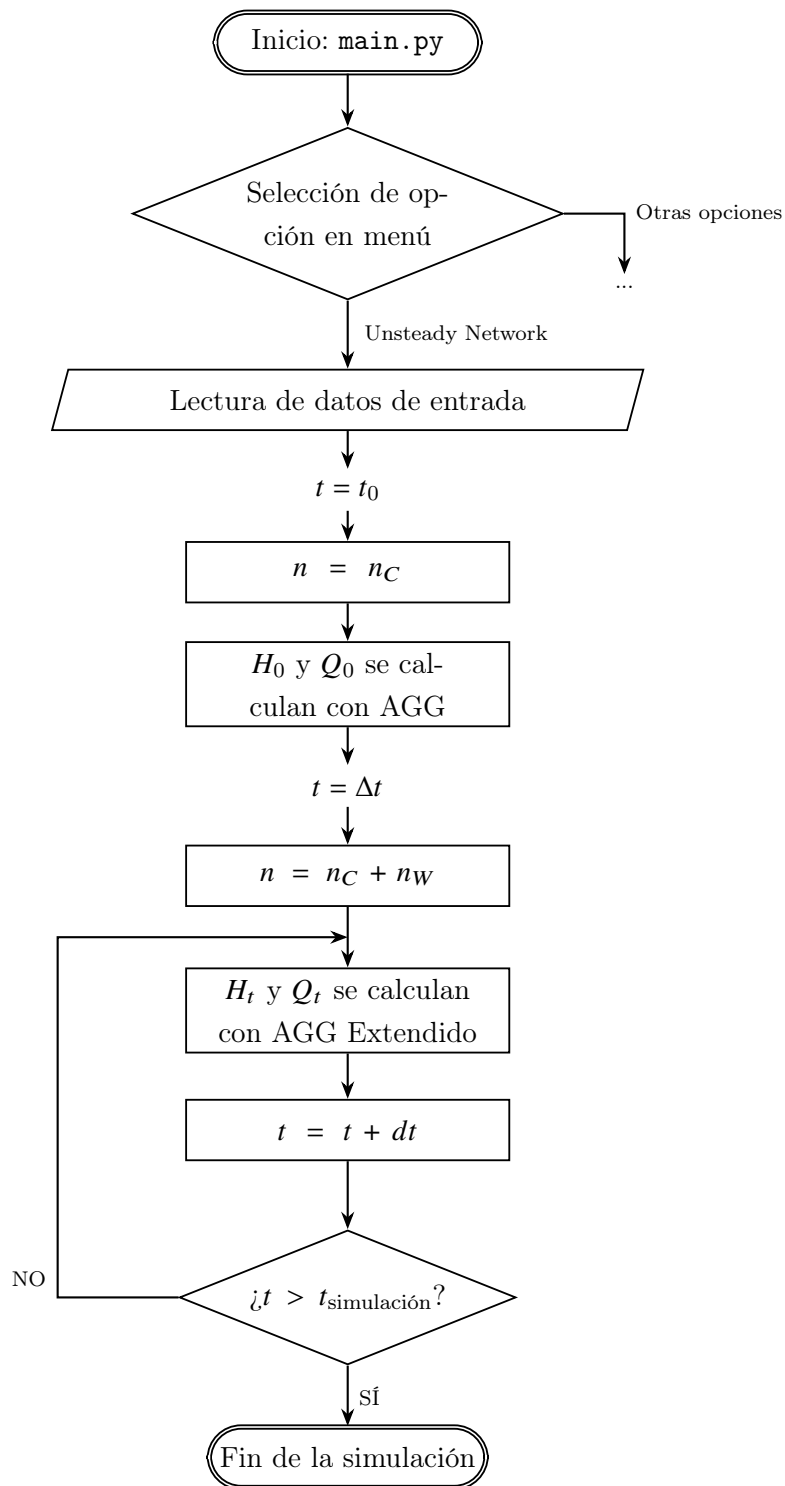
    while True:
        print("\n\nWhat do you want to do?")
        print("1.- Solve a Steady Network")
        print("2.- Solve a Network with Leaks")
        print("3.- Graphic the results of a simple WDN with Leaks")
        print("4.- Solve an Unsteady Network")
        print("5.- Postprocessing Results")
        print("6.- Exit")
        print("Note: If results are saved. Choose Postprocessing to visualize.")

        option = int(input("Choose an option: \n"))
        selection = problem_selection(option)

        if selection == 1:
            solve_steady_network()
        if selection == 2:
            solve_network_leaks()
        if selection == 3:
            graphics_leaks()
        if selection == 4:
            solve_unsteady_network()
        if selection == 5:
            postprocessing_results()
        elif selection == 6:
            print("Exiting the program...")
            break
        input("Press Enter to return to the main menu...")
```

**Figura 3.3:** Función principal del programa en Python.

La Fig. [3.4](#) muestra el diagrama de flujo del código para cuando se escoge la opción de resolver una red en estado transitorio.

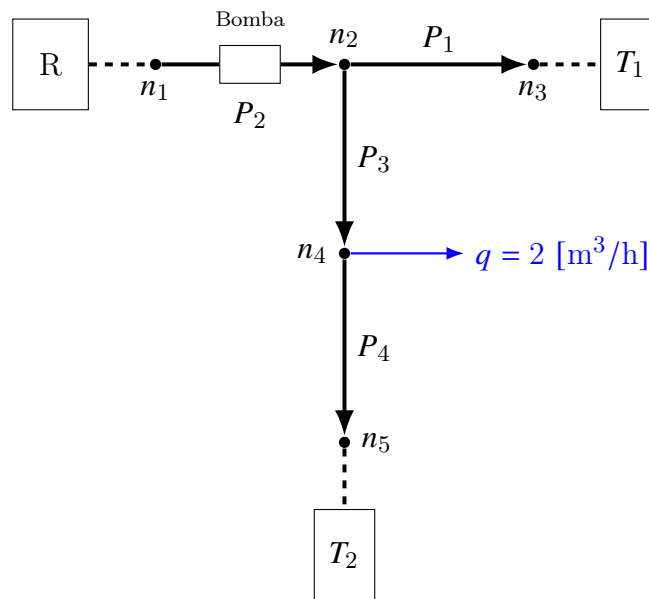


**Figura 3.4:** Diagrama de flujo para resolución de redes hidráulicas en estado transitorio.

### 3.3. Lectura y preparación de datos

El algoritmo requiere un archivo en formato CSV (Comma-Separated Values) como entrada, el cual contiene la información necesaria para llevar a cabo la simulación. Para generar dicho archivo, es necesario suponer un estado inicial para los sentidos de los flujos. Aunque a priori se desconoce la dirección real de los flujos, se asigna una dirección inicial al flujo en cada tubo. El hecho de que el sentido propuesto coincida o no con el real no representa un problema, ya que el signo correcto será dado por las ecuaciones al resolverse el sistema.

Suponga que se cuenta con una red como la que se muestra en la Fig. 3.5



**Figura 3.5:** Esquema de una red hidráulica base. Nótese que cuenta con todos los elementos para formar una red sencilla.

La red de la Fig. 3.5, está formada por 5 nodos, de los cuales uno es un reservorio denotado con la letra  $R$  ( $n_1$ ), dos son conexiones denotados como  $n_2$  y  $n_4$ , y dos tanques denotados con la letra  $T$  ( $n_3$  y  $n_5$ ). La  $P_1$ ,  $P_3$  y  $P_4$  representan 3 tubos, mientras que la  $P_2$  es una bomba. Nótese que en el nodo  $n_4$  existe una demanda nodal  $q$ . Las flechas indican las direcciones propuestas para los flujos en cada tubo. En la Tablas 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 se muestran los datos técnicos de la red de la Fig. 3.5.

**Tabla 3.1:** Datos de uniones y reservorios del ejemplo de la Fig. 3.5

ID	Tipo	Elevación [m]	Demanda [m <sup>3</sup> /h]
1	Reservorio	0	-
2	Unión	0	0
4	Unión	0	2

**Tabla 3.2:** Datos de los tanques del ejemplo de la Fig. 3.5

TANQUES						
ID	Elevación z [m]	Nivel inicial [m]	Nivel mínimo [m]	Nivel máximo [m]	Diámetro [m]	Volumen mínimo [m <sup>3</sup> ]
3	33	3.57	0	10	2	0
5	30	3.57	0	10	2	0

**Tabla 3.3:** Datos de los tubos del ejemplo de la Fig. 3.5

TUBOS					
ID	N1	N2	Diámetro [m]	Longitud [m]	Rugosidad [m]
1	2	3	0.508	122	$1.1e-4$
3	2	4	0.508	100	$1.1e-4$
4	4	5	0.508	100	$1.1e-4$

**Tabla 3.4:** Datos de las bombas del ejemplo de la Fig. 3.5

BOMBAS						
ID	N1	N2	a0	b0	c0	w0
2	1	2	50	0	2	1

Como se observa en la Fig. 3.5, el flujo del tubo  $P_1$  (correspondiente al tubo con  $ID = 1$ ), establece que la dirección del flujo va del nodo  $N_1 = 2$  hacia el nodo  $N_2 = 3$ . Motivo por el

cual, en la Tabla [3.3](#), el tubo con  $ID = 1$  establece que el  $N_1 = 2$  y el  $N_2 = 3$ . Al resolver la red, si el flujo obtenido tiene signo negativo, lo único que nos indica es que la suposición inicial era incorrecta, es decir, en realidad el flujo va de  $N_2 \rightarrow N_1$ . Motivo por el cual, es indispensable ser consistentes desde el principio. El archivo `.csv` se construye de la siguiente manera y se observa en el Listado [A.1](#):

1. En primer lugar, se escriben los metadatos del archivo, tales como el título del proyecto, el autor y la fuente de los datos.
2. Posteriormente, se incorpora la información correspondiente a los nodos (NODES), la cual se divide en dos secciones:
  - En la primera sección se registran los nodos que representan reservorios y conexiones. Para los nodos que son reservorios, se debe asignar el valor 1 en la columna denominada **Reservoirs**. Por otro lado, a las conexiones se les asigna el valor 0.
  - En la segunda sección se registra la información correspondiente a los tanques (Tanks).
3. Finalmente, se asigna la información de los enlaces (LINKS), también dividida en dos secciones:
  - En la primera sección se incluyen los enlaces que corresponden a los tubos. En la columna **N1** se coloca el identificador (ID) del nodo de origen y en la columna **N2** el ID del nodo destino.
  - En la segunda sección se escribe la información de las bombas.
4. Notas:
  - Si alguno de los campos requeridos para generar el archivo de datos no cuenta con información (bombas o tanques) este debe dejarse vacío, manteniendo las comas que delimitan las columnas del CSV.
  - El `id` de cada elemento se asigna por el usuario, y como se observa, existen `id` tanto para los enlaces como para los nodos. Y además, se inicializa en 0.

La estructura del archivo CSV generado con los datos mencionados previamente, se puede

consultar en el Apéndice [A](#). Nótese que desarrollar una “Interfaz Gráfica de Usuario” [1](#) sería otra forma de generar dicho archivo CSV sin la necesidad de generar el CSV manualmente.

### 3.4. Almacenamiento de resultados

Una vez finalizado el proceso de cálculo para el caso transitorio, el programa genera archivos de salida en formato `.csv`. Estos archivos se pueden apreciar en la Fig. [3.6](#)



**Figura 3.6:** Estructura de archivos de salida del código.

El archivo `config_unsteady.csv` contiene los parámetros y sus valores correspondientes. Estos parámetros son el tiempo total de simulación, el número de intervalos generados, el paso de tiempo ( $\Delta t$ ) y el peso utilizado (posteriormente se abordará más acerca de este término). El archivo `dataset.csv` corresponde al conjunto de datos de entrada para generar la simulación correspondiente al caso de estudio. Finalmente, los archivos `H_unsteady.csv` y `Q_unsteady.csv` almacenan los resultados obtenidos durante la simulación en estado transitorio.

El archivo de la configuración para la simulación en estado transitorio se muestra en el Listado [3.1](#)

---

<sup>1</sup>Conocida también como GUI (del inglés: graphical user interface)

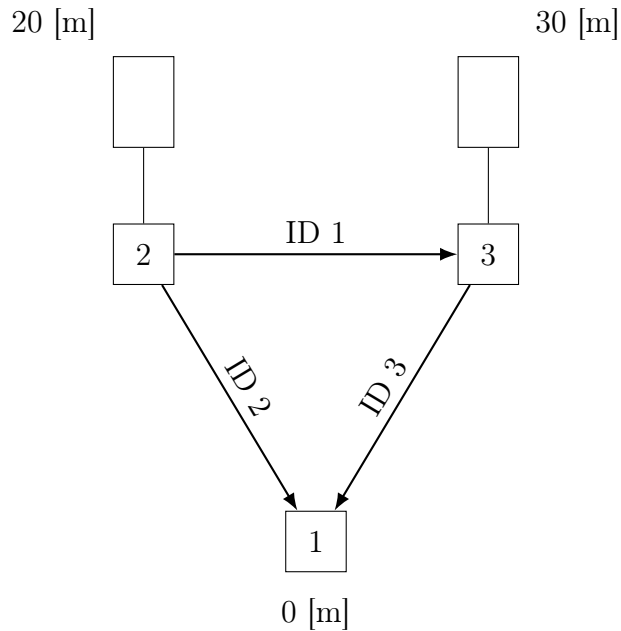
**Listado 3.1:** Archivo de configuración `config_unsteady.csv`

```
1 Parameter , Value
2 Time [s] , 14400.0
3 Interval , 24
4 Delta_time , 600
5 Weight , 0.85
```

- El parámetro *Time* se refiere al tiempo total de simulación definido manualmente por el usuario en segundos.
- El parámetro *Interval* indica la cantidad de intervalos en los que se divide dicho tiempo de simulación.
- El parámetro *Delta\_time* es el tamaño del paso de tiempo en segundos.
- El parámetro *Weight* corresponde al parámetro  $\vartheta$  (peso) del método implícito ponderado empleado para la discretización temporal. Este parámetro define el promedio temporal entre el estado previo y el estado actual en cada paso de tiempo. Influye directamente en la estabilidad y convergencia del esquema numérico. Para mayor información, se puede consultar [Avesani et al. \(2012\)](#).

### 3.5. Validación

Lo primero que se busca demostrar es que el código desarrollado en este trabajo es capaz de reproducir los resultados del caso de estudio propuesto en [Todini \(2010\)](#).



**Figura 3.7:** Caso de estudio de Todini.

Describiendo el caso de estudio. Como se muestra en la Fig. [3.7](#) se cuenta con dos tanques circulares interconectados, cuya sección transversal se considera constante. Estos tanques se están vaciando debido a la diferencia de presiones que existen entre los tanques y el reservorio. Las demandas nodales en cada nodo son cero. Las variables a resolver son el nivel del fluido en los dos tanques (carga) y el caudal en los tres tubos (flujo).

En las Tablas [3.5](#), [3.6](#) y [3.7](#) se presentan los datos característicos de la red extraídos del artículo.

**Tabla 3.5:** Datos de las uniones y reservorios del caso de estudio de Todini.

UNIONES			RESERVORIOS	
ID	Elevación [m]	Demanda [m <sup>3</sup> /h]	ID	Elevación [m]
-	-	-	1	0

**Tabla 3.6:** Datos de los tanques del caso de estudio de Todini.

TANQUES						
ID	Elevación z [m]	Nivel inicial [m]	Nivel mínimo [m]	Nivel máximo [m]	Diámetro [m]	Volumen mínimo [m <sup>3</sup> ]
2	0	20	0	50	3.56	0
3	0	30	0	50	3.56	0

**Tabla 3.7:** Datos de los tubos del caso de estudio de Todini.

TUBOS					
ID	N1	N2	Diámetro [m]	Longitud [m]	Rugosidad [m]
1	2	3	0.2	100	$1.2e-4$
2	2	1	0.1	100	$1.2e-4$
3	3	1	0.1	100	$1.2e-4$

Es importante considerar lo siguiente:

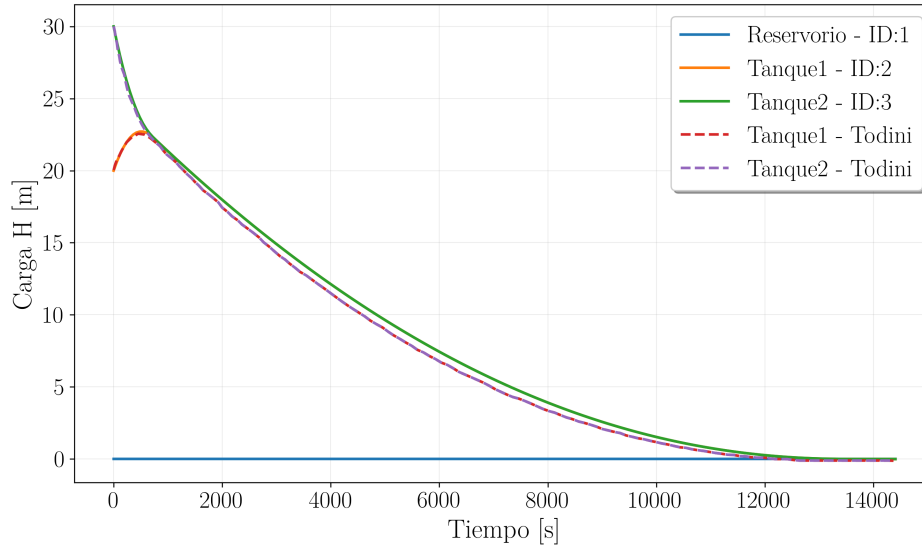
- En el artículo, la fórmula usada para calcular las pérdidas de carga por fricción (pérdida de energía debida a la fricción del fluido con las paredes de la tubería) es Hazen–Williams, sin embargo, en el presente trabajo se usa Darcy–Weisbach.
- El artículo utiliza un coeficiente de Hazen–Williams de 130. Por ende, primero se buscó el material asociado a dicho valor y posteriormente se indagó en la literatura un valor de rugosidad asociado a dicho material. Se consultaron las siguientes fuentes: [White \(2011\)](#) y [Engineers Edge \(2025\)](#).

## Resultados

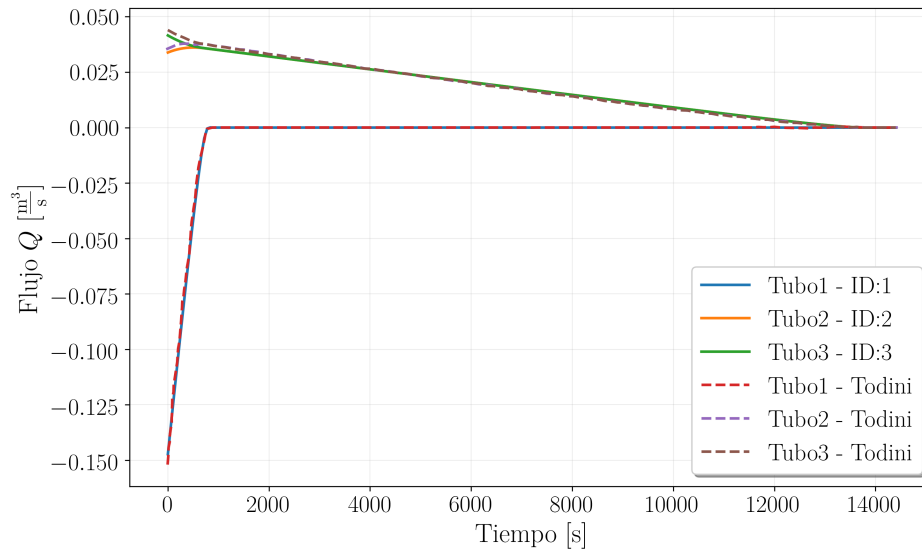
Se simularon seis intervalos diferentes de discretización temporal. Este intervalo es usado para la integración en el tiempo. Los tiempos fueron: 60 segundos, 300 segundos, 600 segundos, 900 segundos, 1800 segundos y 3600 segundos.

Los resultados obtenidos por Todini se compararon con los resultados obtenidos de código desarrollado en python. Esto con el objetivo de verificar el algoritmo. Cabe mencionar que para todos los casos, se ejecutó con un peso (promedio temporal en el esquema implícito) de  $\nu = 0.822$ , el cual es el mismo usado por el autor en el artículo.

■ Caso 1 ( $\Delta t = 60$  [s])



(a) Carga H[m] vs Tiempo [s]



(b) Flujo Q[m³/s] vs Tiempo [s]

**Figura 3.8:** Comparación de resultados de Todini y el código implementado. Para  $\Delta t = 60$  [s].

Observaciones de la Fig. 3.8a: Los resultados obtenidos en Todini (2010), son muy similares a los obtenidos por el código. Existe una ligera variación en la carga obtenida en cada tiempo.

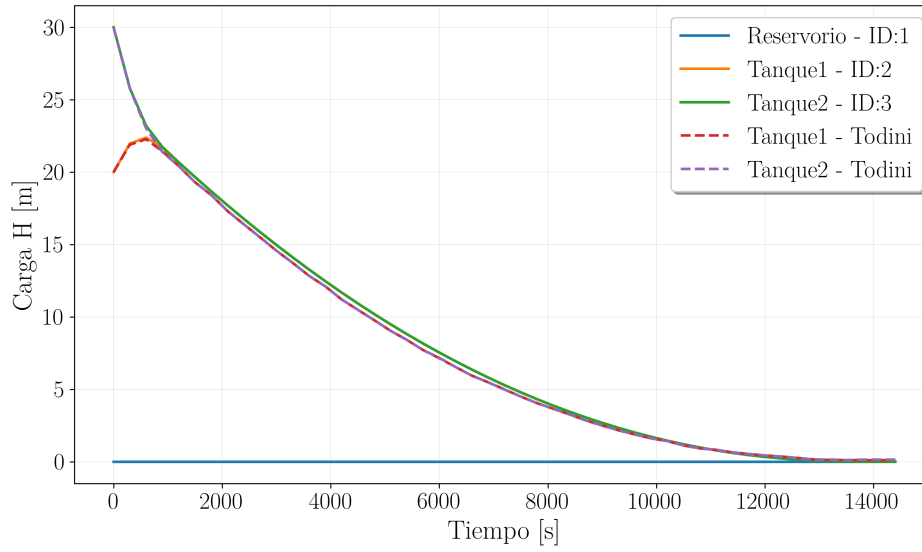
Las cargas del tanque 1 y tanque 2, obtenidas en cada tiempo, son la misma (como se observa en los resultados de Todini). La simulación es estable ya que la carga no presenta cambios abruptos o un comportamiento irregular. Los cambios en las curvas son suaves. Durante los primeros 900 [s] el sistema busca alcanzar un equilibrio en la carga hasta que las cargas de los tanques 1 y 2 se igualan.

Observaciones de la Fig. 3.8b: Los resultados obtenidos en Todini (2010), son muy similares a los obtenidos por el código. Existe una ligera variación en el flujo durante los primeros 900 [s]. Posteriormente los resultados obtenidos en el código se igualan a los de Todini. Esto no sucedió en las cargas. La simulación obtenida es estable ya que el flujo no presenta cambios drásticos o un comportamiento anormal. Los cambios en las curvas son suaves, ya que el paso de tiempo de integración es pequeño. En el intervalo de  $0 [s] \leq t \leq 1800 [s]$  se observa que el flujo del tubo 1 cae de  $-0.150 [m^3/s]$  a valores cercanos a cero. Los tubos 2 y 3 inician con flujos positivos, además, el tubo 2 crece suavemente mientras que el tubo 3 decrece hasta que se igualan. Al llegar a las 4 horas (14000 [s]), ya no hay flujo en la tubería. El flujo negativo del tubo 1 indica que la dirección del flujo propuesto no fue el correcto.

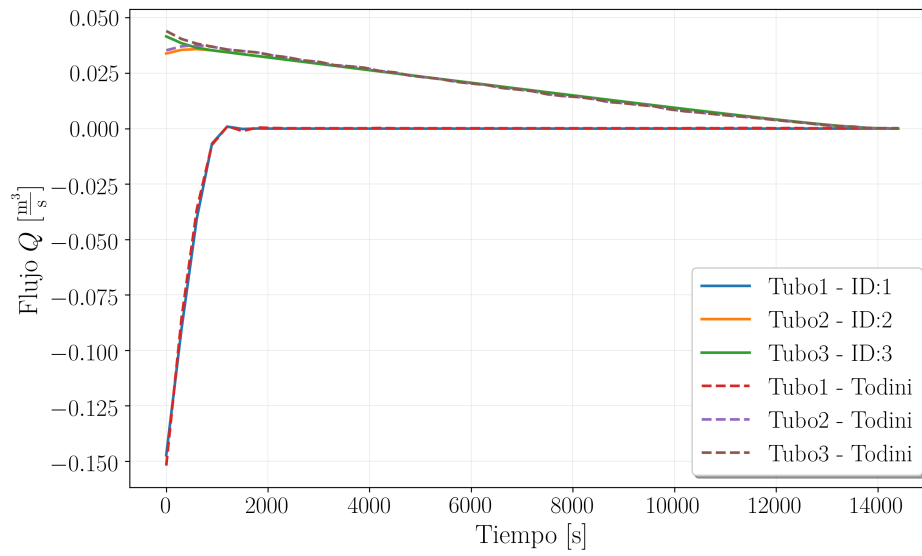
- **Caso 2 ( $\Delta t = 300 [s]$ )**

Observaciones de la Fig, 3.9a: Existe una ligera variación en la carga obtenida en cada tiempo. La simulación sigue siendo estable ya que la carga no presenta cambios drástico o un comportamiento anormal. Los cambios en las curvas todavía son suaves, ya que el paso de tiempo de integración sigue siendo pequeño.

Observaciones de la Fig. 3.9b: Los resultados obtenidos en Todini (2010), siguen siendo similares a los obtenidos por el código. Se observa el mismo comportamiento que en la Fig. 3.8b. Sin embargo, antes de los 1800 [s], la curva del tubo 1, tiene cambios bruscos en la pendiente. No se logra captar de manera suave la transición del momento en el que el flujo dentro del tubo se vuelve nulo. El paso de tiempo de integración comienza a tener un impacto en las curvas.



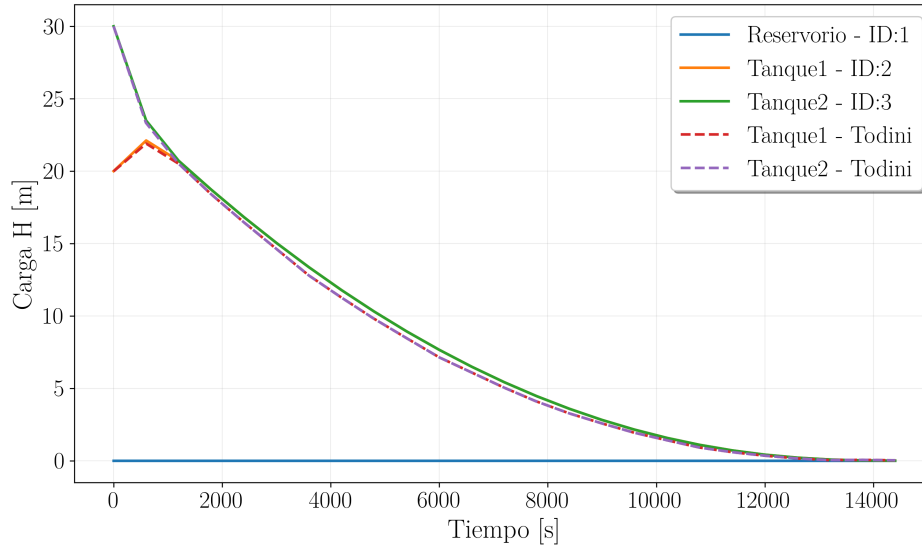
(a) Carga H[m] vs Tiempo [s]



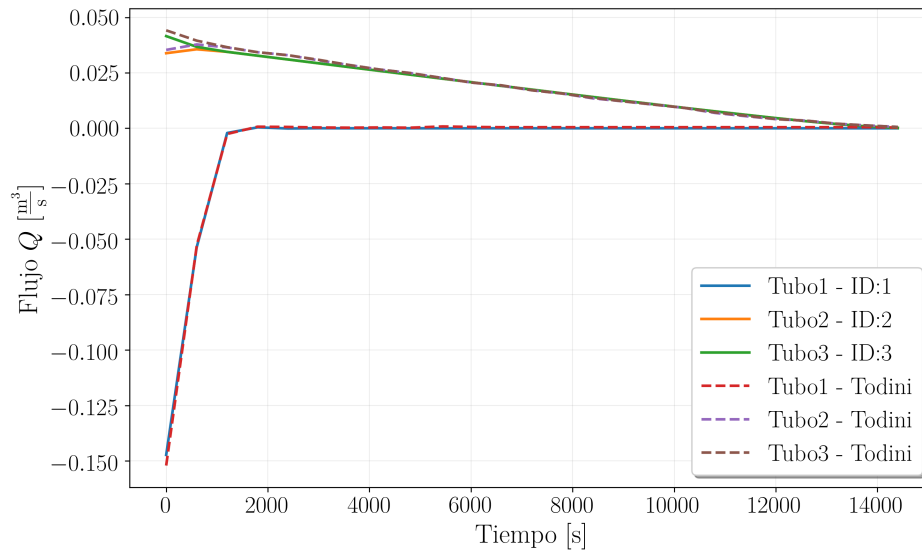
(b) Flujo Q[m³/s] vs Tiempo [s]

**Figura 3.9:** Comparación de resultados de Todini y el código implementado. Para  $\Delta t = 300$  [s].

■ Caso 3 ( $\Delta t = 600$  [s])



(a) Carga H[m] vs Tiempo [s]



(b) Flujo Q[m³/s] vs Tiempo [s]

**Figura 3.10:** Comparación de los resultados de Todini y el código programado. Para  $\Delta t = 600$  [s].

Observaciones de la Fig. 3.10a: Los resultados obtenidos en el artículo concuerdan con los obtenidos por el código. Por el contrario de los anteriores resultados, ahora ya existen cambios

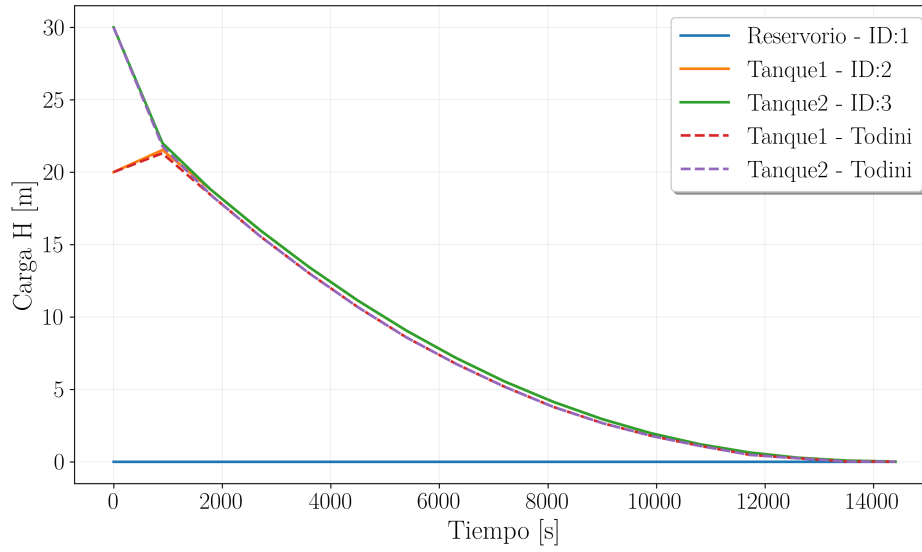
más bruscos en las cargas. Las curvas dejan de ser suaves y comienzan a tener cambios más pronunciados en las pendientes. Esto se observa cuando las cargas del tanque 1 y 2, se igualan. Las cargas en los tanques 1 y 2, todavía se igualan antes de los 1800 [s].

Observaciones de la Fig. 3.10b: De igual manera, los resultados obtenidos en el código se igualan a los de Todini. La transición del flujo del tubo 1 cuando el flujo se vuelve nulo, es abrupta. No hay una transición suave. El paso de tiempo de integración ya comienza a tener un mayor impacto en la suavidad de las curvas (más que en la Fig. 3.9b).

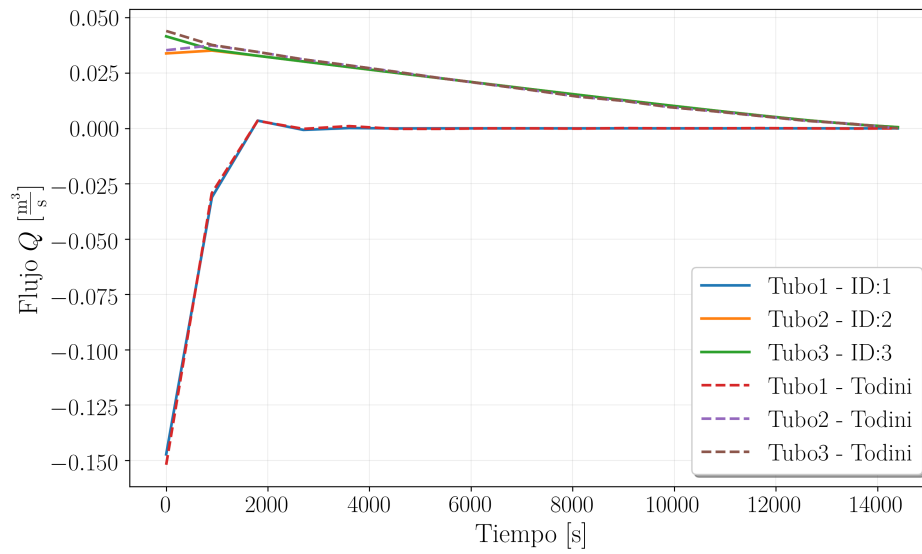
#### ■ Caso 4 ( $\Delta t = 900$ [s])

Observaciones de la Fig. 3.11a: Sigue existiendo concordancia en los resultados. El paso de tiempo ya comienza a ser un factor clave en las curvas. Las cargas en los tanques 1 y 2, se igualan exactamente a los 900 [s]. Lo cual concuerda con el primer paso de tiempo  $\Delta t$ . La transición es brusca debido al paso de tiempo. Sin embargo, los demás puntos de las curvas, siguen teniendo una transición suave.

Observaciones de la Fig. 3.11b: Existe una ligera variación en el flujo durante los primeros 3600 [s]. La simulación obtenida es estable; sin embargo, antes de cumplirse la primera hora, la curva del tubo 1 presenta cambios muy bruscos. Esto se debe al impacto severo que tiene el paso de tiempo en las curvas, como ya se ha mencionado anteriormente. El flujo en el tubo 1 tiende a presentar variaciones, ya que pasa de ser un flujo negativo a uno positivo para posteriormente volverse nulo. Las curvas ya no son tan suaves como en los casos anteriores. El paso de tiempo está generando una pérdida de información durante la transición del flujo.



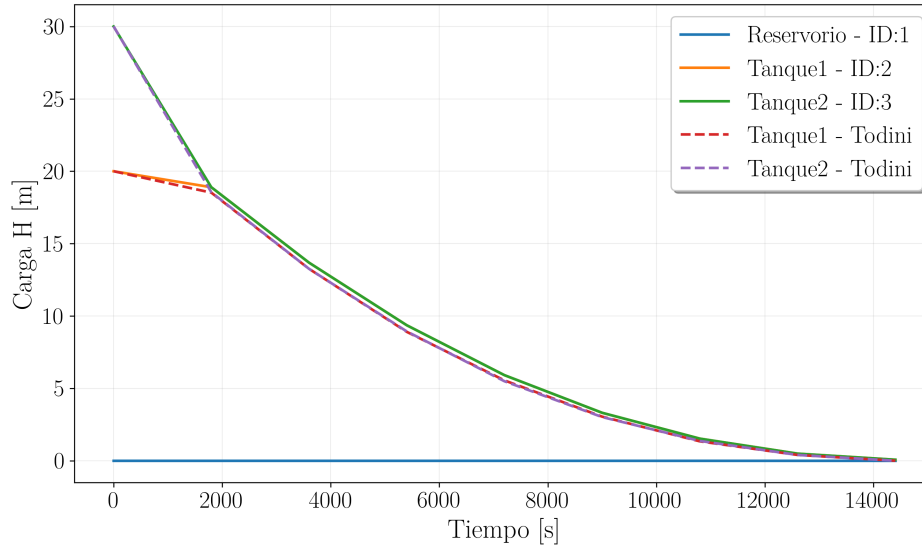
(a) Carga H[m] vs Tiempo [h]



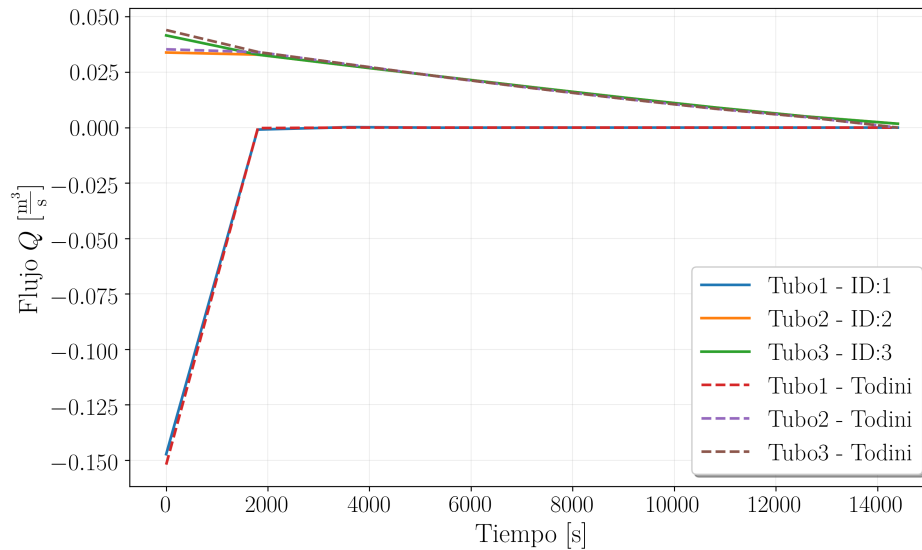
(b) Flujo Q[m³/s] vs Tiempo [s]

**Figura 3.11:** Comparación de los resultados de Todini y el algoritmo programado. Para  $\Delta t = 900$  [s].

■ Caso 5 ( $\Delta t = 1800$  [s])



(a) Carga H[m] vs Tiempo [s]



(b) Flujo Q[m³/s] vs Tiempo [s]

**Figura 3.12:** Comparación de los resultados de Todini y el código. Para  $\Delta t = 1800$  [s].

Observaciones de la Fig. [3.12a](#): El cambio más brusco en la carga se da a los 1800 [s] exactamente. Lo cual coincide con el primer  $\Delta t$ . La curva del tanque 1, y la curva del tanque 2,

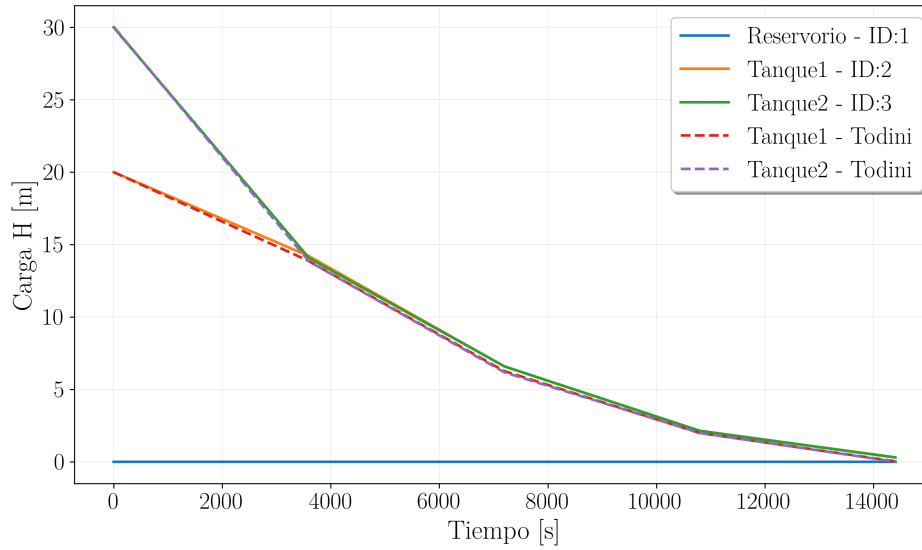
se igualan en ese momento. Nuestro  $\Delta t$  ya es muy grande. Comenzamos a perder información de las transiciones de las cargas en los dos tanques.

Observaciones de la Fig. 3.12b: Los resultados obtenidos en Todini (2010) son muy similares a los obtenidos por el código. El flujo del tubo 1 ya no varía, sino que en el primer  $\Delta t = 1800[s]$  el flujo se vuelve nulo. Se observa que el paso de tiempo ya afecta la simulación; a pesar de esto, el resultado sigue siendo estable. Sin embargo, la transición en el tubo 1 cuando el flujo se anula es muy brusca, pasando de una pendiente positiva considerable ( $m \approx 0.150/0.5 = 0.3$ ) a una pendiente nula.

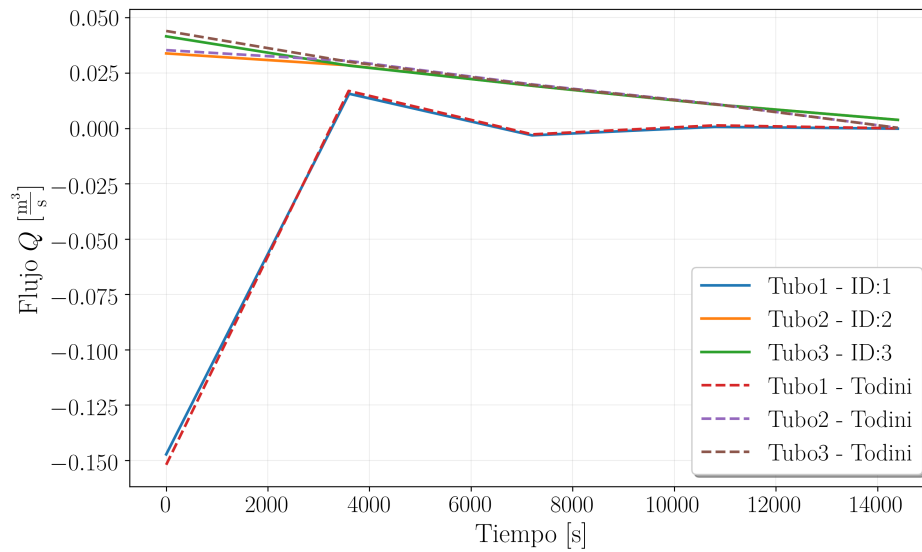
- **Caso 6 ( $\Delta t = 3600 [s]$ )**

Observaciones de la Fig. 3.13a: Los resultados obtenidos en Todini (2010), son bastante similares a los obtenidos por el código. Existe una ligera variación en la carga obtenida en cada tiempo. El  $\Delta t$  ya es bastante grande. Se ha perdido mucha información de las transiciones de las cargas en los dos tanques. Pero a pesar de esto, sigue teniendo un comportamiento lógico la caída de las cargas totales. De nuevo, en el primer  $\Delta t$  es cuando las cargas de ambos tanques se igualan.

Observaciones de la Fig. 3.13b: El código sigue dando resultados similares a los de Todini (2010). La simulación se observa que no es estable, ya que el flujo en el tubo 1 varía entre los valores negativos y positivos. Ahora dicho flujo se vuelve nulo hasta las 10800 [s], aproximadamente. Los flujos en los tubos 2 y 3, se igualan en la primera hora, que es cuando pasa el primer paso de tiempo  $\Delta t$ . Los cambios en las curvas ya no son suaves, sino que existen cambios de signo en las pendientes. El paso de tiempo de integración es exagerado. Se pierde mucha información.



(a) Carga H[m] vs Tiempo [s]



(b) Flujo Q[m<sup>3</sup>/s] vs Tiempo [s]

**Figura 3.13:** Comparación de los resultados de Todini y el código. Para  $\Delta t = 3600$  [s].

A partir de las comparaciones realizadas, se verifica que el Algoritmo programado reproduce resultados equivalentes a los reportados en la literatura de Todini. Esto valida el código desarrollado. Además, queda evidenciada la importancia del paso de tiempo  $\Delta t$ . Valores excesivamente grandes provocan pérdida de información, debido a que se obtienen menos

puntos temporales en la simulación. Por otro lado, pasos de tiempo más pequeños permiten capturar de mejor manera la evolución de los flujos y las cargas en la red.

Por ejemplo, al definir un paso de tiempo  $\Delta t = 1800$  [s] la simulación no permite representar adecuadamente el comportamiento del sistema ya que en la primera iteración ( $t = \Delta t$ ), el modelo indica que el flujo entre los tanques es  $0$  [ $m^3/s$ ]. Sin embargo, al reducir el paso de tiempo a  $\Delta t = 60$  [s] se observa que el equilibrio entre los dos tanques se alcanza a los  $900$  [s]. Si tomamos la primera como correcta, se cae en un error debido a que el paso de tiempo no es el adecuado.

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. Descripción del sistema de combustible de una aeronave

El caso de estudio bajo consideración se basa en los datos del modelo de referencia proporcionado por SIEMENS para la simulación con el software especializado **Simcenter Flomaster**<sup>1</sup>, titulado «*Aircraft Fuel System (1) Basic Twin Engine Jet*» (Sistema de combustible de aeronave para un jet bimotor básico). Este modelo permite configurar y analizar tres escenarios de interés:

- **Escenario 1:** Reabastecimiento de combustible previo al vuelo empleando un solo puerto de carga.
- **Escenario 2:** Reabastecimiento de combustible previo al vuelo empleando simultáneamente ambos puertos de carga.
- **Escenario 3:** Análisis del consumo de combustible durante la fase de vuelo de crucero.

Por fines de la validación del código desarrollado en este trabajo de investigación la simulación correspondiente se centra únicamente en el **Escenario 1**. Cabe mencionar que el código

---

<sup>1</sup>Página oficial en [Siemens Digital Industries Software](#) (2026).

desarrollado posee la capacidad necesaria para simular los tres escenarios mencionados, así como otros que pueden incluir los consumo de combustible durante otras fases de vuelo.

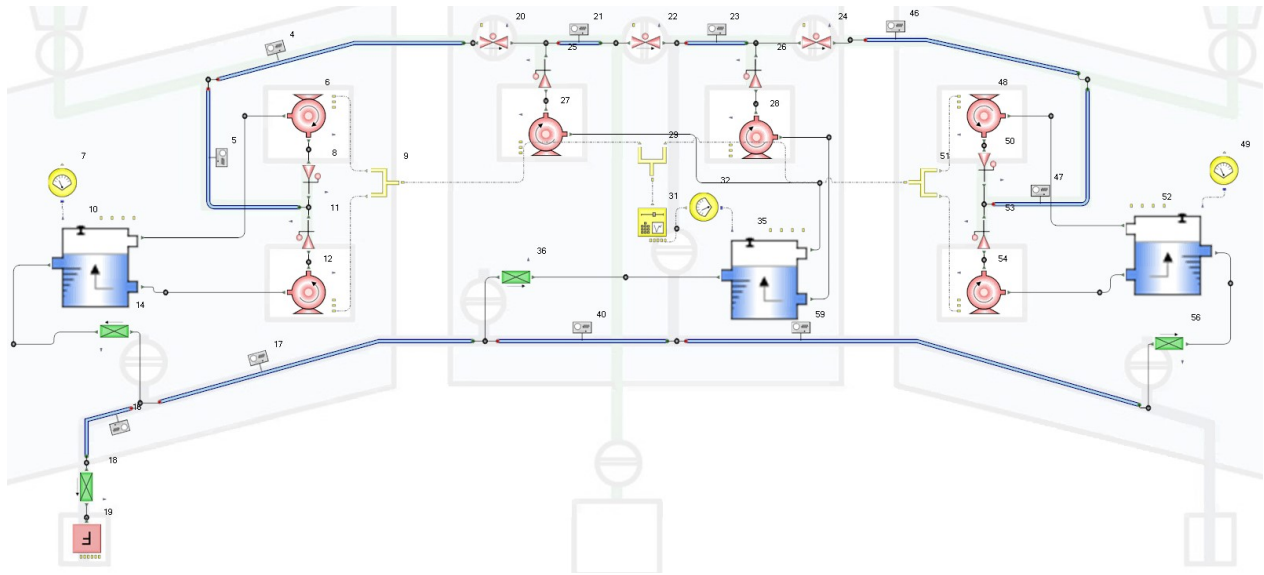
El caso de estudio está formado por las siguientes tres secciones importantes (Siemens, 2019):

- **Tanque de combustible del ala izquierda y acoplamiento de reabastecimiento:** Incluye todos los componentes asociados al ala izquierda, tales como el tanque, el motor y el puerto de carga.
- **Tanque de combustible central y Unidad de Potencia Auxiliar (APU):** Comprende la sección central del modelo que alberga el tanque principal de fuselaje y la APU.
- **Tanque de combustible del ala derecha y acoplamiento de reabastecimiento:** Contiene los componentes del ala derecha, incluyendo el tanque, el motor y su respectivo acoplamiento de carga.

Dado que el análisis se centra exclusivamente en el escenario 1, se eliminaron los componentes excedentes del caso de estudio original con el objetivo de simplificar el modelo.

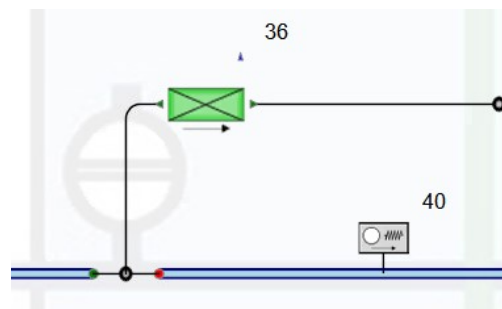
Es importante señalar que las bombas se mantuvieron tal como se indica en el esquema, porque el software Flomaster requiere que todos los nodos, tanques, componentes, y otros elementos del circuito, estén perfectamente vinculados. Estos elementos no afectan los resultados de la simulación del escenario 1, ya que permanecen inactivos y las válvulas asociadas están cerradas.

El modelo simplificado se presenta en la Fig. 4.1. Asimismo, la información requerida para la configuración de la simulación en Flomaster se presenta en el Apéndice C.



**Figura 4.1:** Esquema final del sistema de combustible.

Dentro de los componentes del modelo se encuentran las denominadas “Pérdidas Discretas” (véase la Fig. 4.2). En el código elaborado, estas pérdidas no pueden representarse de manera directa como lo hace el software Flomaster. Sin embargo, no es posible eliminarlas, ya que corresponden a pérdidas menores o secundarias presentes en cualquier sistema hidráulico. Estas se modelan mediante una longitud equivalente, cuyo desarrollo se presenta en el Apéndice D.

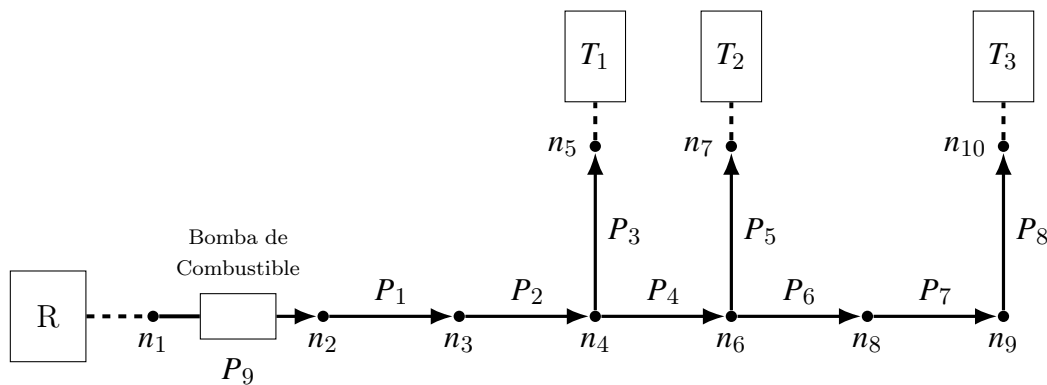


**Figura 4.2:** Componente denominado "Pérdidas Discretas dentro de Flomaster".

La simulación del sistema de combustible establece un flujo volumétrico constante de  $0.06 \text{ [m}^3/\text{s]}$ . Debido a que el código desarrollado no permite implementar una fuente de flujo constante como lo hace Flomaster, esta se modeló mediante un reservorio acoplado a

una bomba. Se diseñó la bomba de tal manera que replicara el comportamiento de la fuente original y garantizara el flujo de entrada. Para más detalle, consultar el Apéndice [E](#).

La red de combustible con los índices propuestos se muestra en la Fig. [4.3](#). Los datos necesarios para el código se muestran en las Tablas [F.1](#), [F.2](#), [F.3](#) y [F.4](#) dentro del Apéndice [F](#). Para las propiedades del fluido, véase la Tabla [F.5](#). El tiempo de simulación fueron 1800 [s], y se escogió un  $\Delta t = 10$  [s].



**Figura 4.3:** Esquema de la red de combustible a analizar.

En el esquema cuasiestacionario empleado en este trabajo, el nivel del tanque se actualiza en cada paso de tiempo  $\Delta t$  a partir del flujo neto que ingresa o sale del mismo. Sin embargo, cuando el tanque alcanza su nivel máximo o mínimo, el modelo debe imponer una condición que modifique su comportamiento hidráulico.

Dado que la implementación de Flomaster no es pública, no es posible afirmar con certeza cuál es el tratamiento exacto que el software emplea para modelar el comportamiento del tanque cuando este alcanza su nivel máximo. Sin embargo, a partir del comportamiento observado en las simulaciones, se plantea la siguiente hipótesis: Cuando el tanque alcanza su nivel máximo, el tanque es tratado de manera equivalente a un nodo tipo reservorio. Es decir, se comporta como un elemento con carga hidráulica fija lo cual permite intercambiar flujo con el sistema mientras sea posible.

Bajo esta interpretación, el tanque lleno deja de comportarse como un elemento acumulativo e impone una condición de carga fija conocida dentro de la red. Esto permitiría la continuidad

del flujo aun cuando el nivel del tanque ya no pueda incrementarse. Lo anterior se concluyó, debido a que se observó que el comportamiento del flujo entrante al tanque en Flomaster es diferente respecto al modelo implementado en este trabajo (cuando el tanque se llena). En el presente código, el flujo entrante al tanque tiende a cero cuando el tanque alcanza su capacidad máxima (ya que se asume tanque cerrado y no se permite el rebose), mientras que en la simulación realizada con Flomaster, el flujo no se anula.

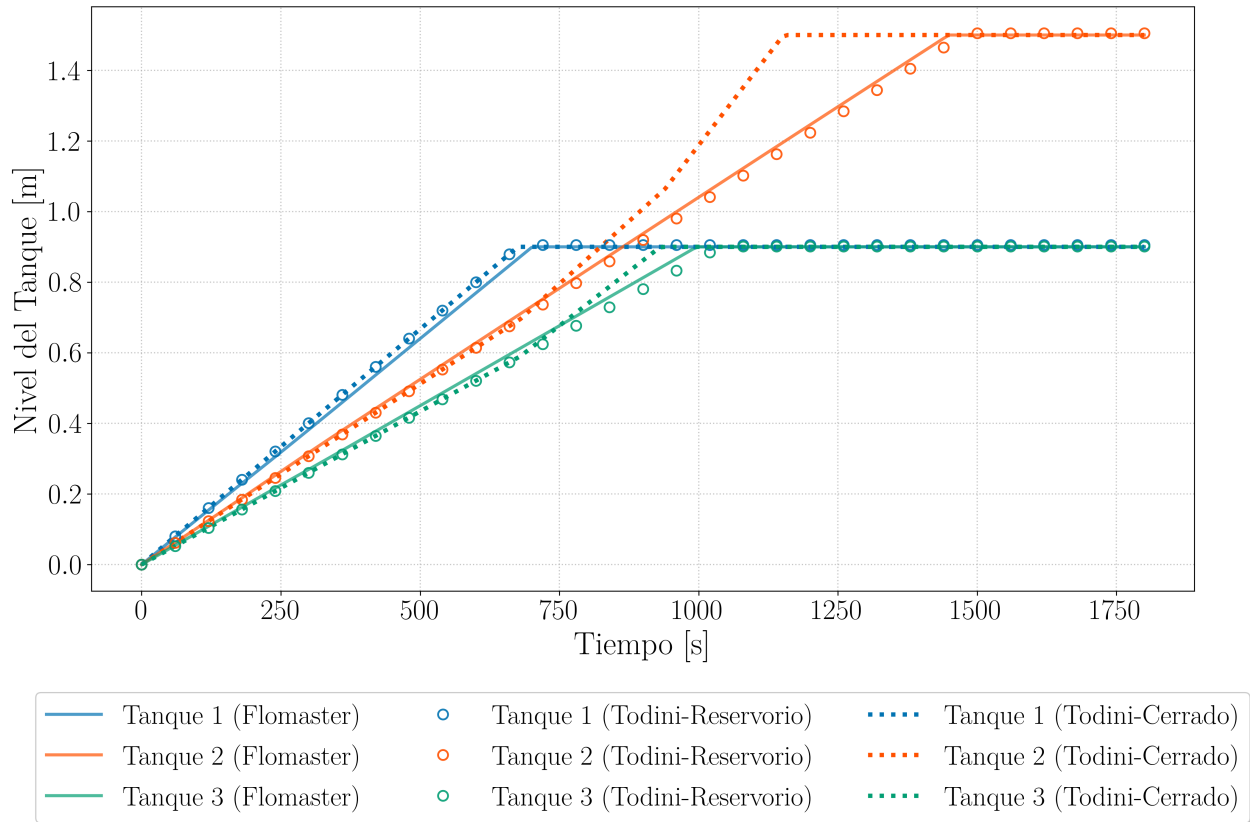
Con el propósito de validar el algoritmo y poder analizar el impacto de la diferencia de formulación (tanque cerrado), en el presente trabajo se consideran dos enfoques para el tratamiento del tanque al alcanzar su capacidad máxima:

- **Modelo tipo reservorio (hipótesis consistente con el comportamiento observado en Flomaster):** el tanque al llenarse mantiene carga constante y puede intercambiar flujo con la red.
- **Modelo tipo nodo cerrado (propuesto en este trabajo):** una vez que el tanque alcanza el nivel máximo, este se reinterpreta en el siguiente paso de tiempo como un nodo tipo conexión sin demanda nodal asociada, imponiendo flujo neto nulo.

Dado que los tanques se encuentran conectados únicamente a un solo nodo de la red, la reinterpretación como nodo tipo conexión no genera redistribuciones adicionales de flujo en otras ramas del sistema. Desde un punto de vista matemático, ambas formulaciones corresponden a condiciones de frontera distintas para la simulación cuasiestacionaria. Motivo por el cual, las diferencias observadas en los resultados no deben interpretarse necesariamente como errores numéricos del algoritmo, sino posiblemente como consecuencia directa de la hipótesis adoptada para modelar los tanques cuando alcanzan su nivel máximo.

Es importante mencionar que existen diversas metodologías para modelar el nivel máximo y mínimo de tanques, como lo hace por ejemplo EPANET (Rossman, 1993), Todini (2010) y Avesani et al. (2012). Sin embargo, el objetivo de este trabajo no es comparar dichas metodologías, sino adoptar una formulación consistente con la topología de la red y poder llevar a cabo el análisis del caso de estudio y su validación.

## 4.2. Resultados numéricos



**Figura 4.4:** Tiempos de llenado de los tanques del sistema de combustible: Validación del Algoritmo de Todini bajo hipótesis de reservorio y nodo cerrado frente a Flomaster.

**Tabla 4.1:** Comparación de tiempos de llenado entre Flomaster y las dos propuestas para modelar los tanques al alcanzar su nivel máximo (reservorio y nodo cerrado).

Ubicación	Flomaster	Todini-Reservorio			Todini-Cerrado		
	[s]	[s]	Dif.[s]	Err[ %]	[s]	Dif.[s]	Err[ %]
Tanque 1 (Izq.)	710	690	20	2.82	680	30	4.23
Tanque 2 (Cen.)	1450	1480	30	2.07	1160	290	20.00
Tanque 3 (Der.)	1000	1050	50	5.00	940	60	6.00

El error relativo se calculó usando los valores de Flomaster como referencia, mediante la ecuación  $(|Ref - Calc|/Ref) * 100\%$ .

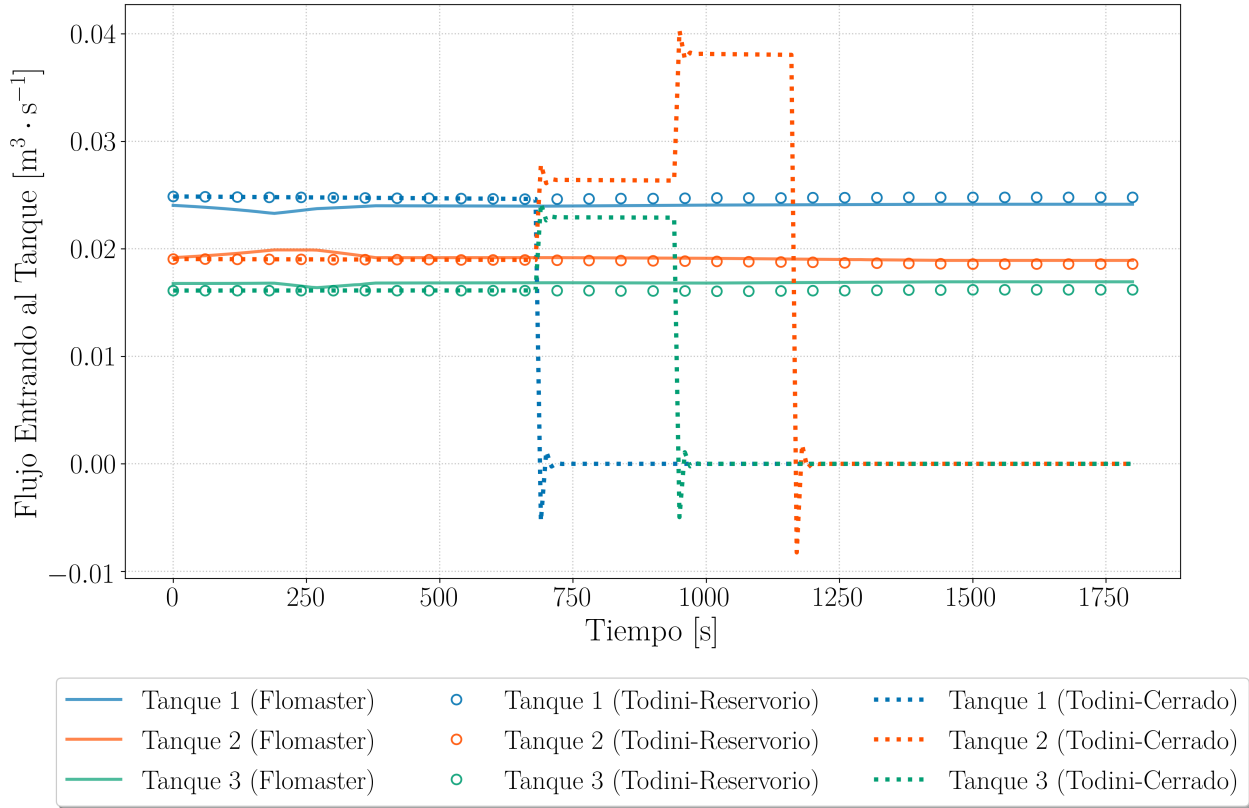
Observaciones de la Fig. 4.4: Los niveles en los tres tanques presentan un comportamiento creciente hasta alcanzar su nivel máximo. Los tiempos de llenado correspondientes se muestran en la Tabla 4.1. En términos generales, Flomaster y el Algoritmo reproducen el mismo orden de llenado de los tanques. El primer tanque en llenarse es el Tanque 1, el cual corresponde al tanque izquierdo y el más cercano a la entrada del sistema. El siguiente tanque en llenarse es el Tanque 3, el cual corresponde al tanque derecho de la aeronave y el más alejado de la entrada. El último tanque en llenarse es el central (Tanque 2) el cual es el más grande en capacidad.

Bajo la suposición de que el tanque al llenarse se comporta como un reservorio (Todini-Reservorio), los resultados presentan una notable precisión en los tiempos de llenado con respecto a Flomaster. Para el Tanque 1 (Izquierdo), el error es de 2.82% (20 [s] de diferencia). Para el Tanque 2 (Central), la diferencia respecto a Flomaster es de 30 [s], con un error relativo de 2.07%. Estos resultados sugieren que Flomaster modela al tanque como un reservorio una vez que alcanza su nivel máximo, como se supuso. Para el Tanque 3 se tiene un error del 5%, siendo el mayor de los tres.

Por el contrario, cuando el tanque se comporta como un nodo cerrado al llenarse, el error aumenta conforme avanza el proceso de llenado de los tanques. El Tanque 1 presenta un error de 4.23% (30 [s] de diferencia), mientras que el Tanque 3 (Derecho) tiene un error del 6.00% (60 [s] de diferencia). La diferencia más notable se da en el Tanque 2 (Central), teniendo una en una diferencia de 290 [s] y un error del 20.00%.

Nótese que el Algoritmo de Todini, al cerrar los tanques (Todini-Cerrado), predice tiempos de llenado menores para los tres tanques que el predicho por Flomaster y Todini-Reservorio, siendo la mayor diferencia en el Tanque 2, y de igual manera el mayor error, 20%. Estas diferencias podrían estar asociadas a la representación de las pérdidas de carga y/o a la forma en que se modela el tanque cuando este alcanza su nivel máximo.

Finalmente, la curva del Tanque 3 en Todini-Cerrado presenta dos cambios notables en la pendiente (a los 680 [s] y 940 [s] aproximadamente). Esto sugiere que dichos cambios pueden estar relacionados con los eventos del llenado de los tanques, hipótesis que se analiza en detalle en la sección siguiente. La curva del Tanque 2 presenta de igual manera cambios en la pendiente de su curva.



**Figura 4.5:** Evolución temporal del flujo volumétrico entrando a los tanques del sistema, obtenidos por Flomaster y el Algoritmo (Todini-Reservorio y Todini-Cerrado).

Observaciones de la Fig. 4.5: El flujo en el Tanque 1 según Flomaster es de aproximadamente  $0.024 [m^3/s]$  durante los  $1800 [s]$  de simulación. Presentando variaciones entre los  $200 [s]$  y  $350 [s]$ . Estas variaciones se observan en las curvas de los tres tanques de Flomaster. Esto no se observa en los obtenidos por el Algoritmo (Todini-Reservorio y Todini-Cerrado).

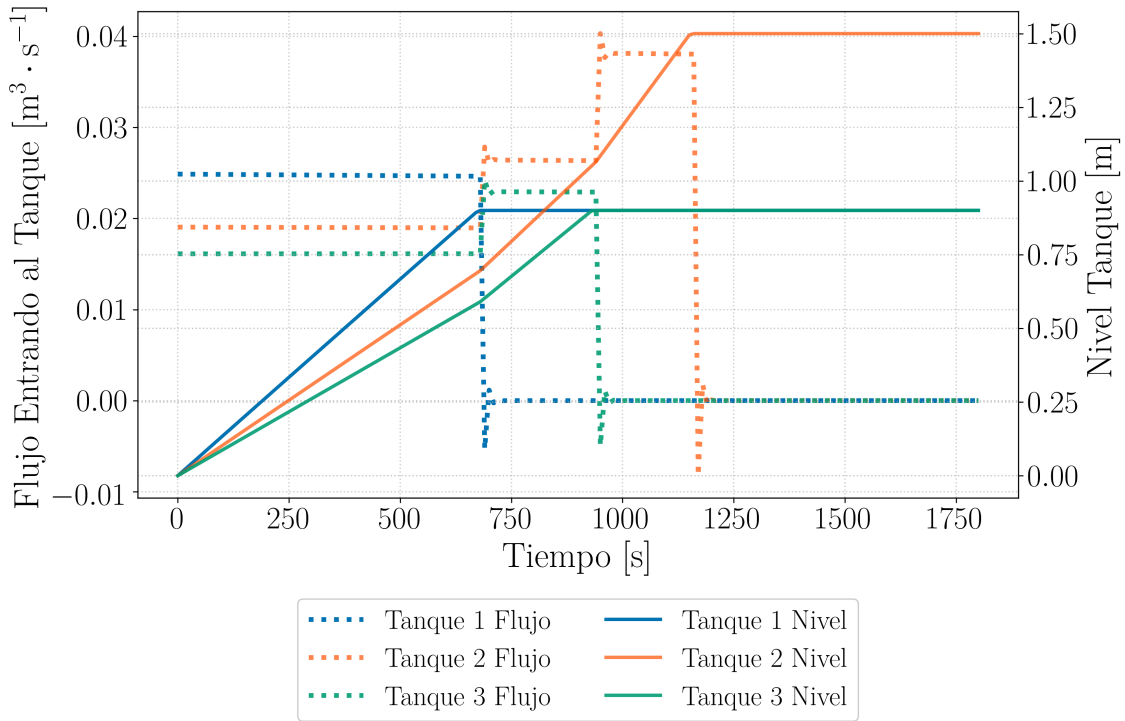
Cuando los tanques llenos se comportan como reservorios (Todini-Reservorio), se observa un flujo de  $0.025 [m^3/s]$  durante los  $1800[s]$  para el Tanque 1. Por el contrario, cuando se manejan los tanques llenos como nodos cerrados (Todini-Cerrado), el flujo en el Tanque 1 es de aproximadamente  $0.025 [m^3/s]$  hasta los  $680 [s]$ , siendo similares en ese intervalo de tiempo. El flujo en el Tanque 1 (Todini-Cerrado), a partir de los  $680 [s]$ , el flujo se vuelve nulo, sin embargo, Flomaster y Todini-Reservorio muestra que el flujo se mantiene durante toda la simulación. A partir de los  $690 [s]$ , Flomaster lo mantiene en  $0.0241 [m^3/s]$  aproximadamente y Todini-Reservorio en  $0.0248 [m^3/s]$ . Básicamente el mismo resultado, ya que la diferencia

es numérica,  $0.024 [m^3/s]$ .

El flujo del Tanque 2 y Tanque 3 aumentan según los resultados obtenidos con el Algoritmo para Todini-Cerrado. Esto no se observa en la simulación de Flomaster ni en Todini-Reservorio. Además, el flujo del Tanque 2 (Central) siempre es mayor al flujo del Tanque 3 (Derecho) en los tres casos.

La curva del Tanque 3 (Todini-Cerrado) muestra que aproximadamente entre los 680 [s] hasta los 940 [s] el flujo del Tanque 3 llega a su flujo máximo y en el siguiente  $\Delta t$  dicho flujo se vuelve nulo, mientras que el flujo del Tanque 2 de Todini-Cerrado aumenta drásticamente hasta llegar a  $0.038 [m^3/s]$  después de los 940 [s]. Esto ya no coincide con los  $0.06 [m^3/s]$ , aún cuando todo el fluido va hacia el Tanque 2. Esto se puede asociar a la curva de operación de la bomba.

Por otro lado, observe que de los resultados de Flomaster y Todini-Reservorio, no es posible determinar en qué momento un tanque alcanza su máximo nivel ya que los flujos nunca tienden a cero y tienden a mantenerse en un mismo valor. De las curvas Todini-Cerrado, cuando el flujo de un tanque se anula, los flujos restantes presentan un periodo de reajuste caracterizado por un escalón precedido con variaciones. Lo cual se puede asociar a los llenados de los tanques.



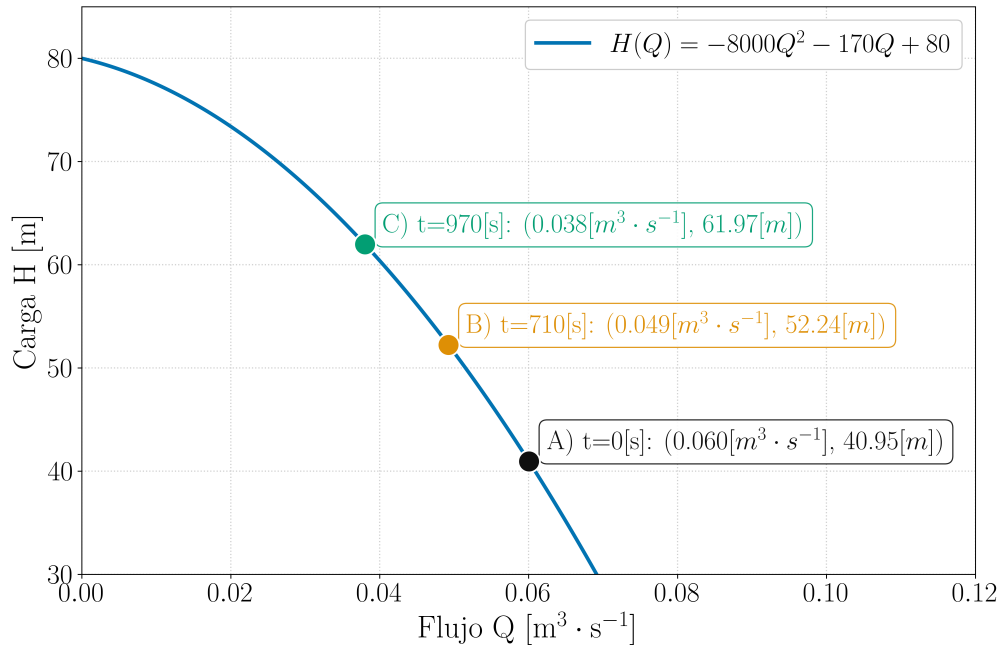
**Figura 4.6:** Evolución temporal del nivel de los tanques y flujo volumétrico entrante a los tanques bajo la condición de tanques cerrados una vez que alcanzan su nivel máximo (Todini-Cerrado)

Observaciones de la Fig. 4.6: En esta figura se muestra únicamente los resultados obtenidos con el Algoritmo bajo la suposición de tanques cerrados, es decir, Todini-Cerrado. La comparación con Flomaster ya fue realizado previamente con fines de validación; sin embargo, el objetivo de la presente figura es analizar con mayor claridad la relación entre los flujos volumétricos y los niveles de los tanques.

Nótese que la simulación parte de un estado estacionario en  $t = 0 [s]$ , transcurren los transitorios lentos y estos terminan en un estacionario permanente, correspondiente a los tanques llenos y a los flujos nulos. Cada uno en sus respectivos tiempos.

Se corrobora que cuando un tanque llega a su nivel máximo, en el siguiente  $\Delta t$  se tiene un salto en escalón en las curvas de flujo volumétrico, indicando que el flujo incidente en el tanque se volvió nulo, sin embargo, los flujos de los tanques restantes presentan un aumento en el flujo así como una variación hasta estabilizarse en su nuevo flujo volumétrico. De igual manera, los cambios de pendiente en las curvas del nivel de los Tanques 2 y 3, corresponden

a los instantes donde los flujos se reajustan debido a que algún tanque ya se llenó.



**Figura 4.7:** Curva característica de la bomba empleada en la simulación usando el Algoritmo de Todini bajo la condición de tanques cerrados, incluyendo puntos de operación de la bomba correspondientes a las distintas etapas de llenado de los tanques.

Observaciones de la Fig. 4.7: Se muestra la curva característica de la bomba empleada en la simulación con el Algoritmo de Todini. También, la evolución de su punto de operación durante el régimen transitorio. El punto *A* corresponde al punto de operación inicial, asociado al flujo volumétrico de diseño de  $0.06 \text{ [m}^3/\text{s}]$ . Cuando el Tanque 1 alcanza su nivel máximo, el punto de operación se desplaza a *B*; posteriormente, cuando el Tanque 3 se llena, el punto de operación cambia a *C*.

Los puntos  $A(t = 0 \text{ [s]})$ ,  $B(t = 710 \text{ [s]})$  y  $C(t = 970 \text{ [s]})$  se determinaron seleccionando instantes posteriores a la atenuación de las variaciones transitorias de los flujos, de modo que cada punto represente el punto de operación de la bomba, después de que un tanque llegó a su nivel máximo.

**Tabla 4.2:** Flujos volumétricos resultantes conforme los tanques alcanzan su nivel máximo [ $\times 10^{-2}$  m<sup>3</sup>/s] para Todini-Cerrado y Flomaster.

Elemento	$T_1 \rightarrow 0.9$ [m]		$T_2 \rightarrow 1.5$ [m]		$T_3 \rightarrow 0.9$ [m]	
	Algoritmo	Flomaster	Algoritmo	Flomaster	Algoritmo	Flomaster
	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s]
Bomba Fuente	6.00	6.00	3.8	6.00	4.92	6.00
Tanque 1	2.46	2.39	0	2.41	0	2.40
Tanque 3	1.61	1.68	0	1.69	2.28	1.68
Tanque 2	1.89	1.91	3.8	1.89	2.63	1.91
$Q_{neto}$	0.04	0.02	0.0	0.01	0.01	0.01

Observaciones de la Tabla 4.2: Se tabularon los datos de los flujos obtenidos en los tanques y la bomba de combustible en los instantes en los que un tanque llegaba a su nivel máximo permitido (tiempos obtenidos de la Tabla 4.1), tanto de Flomaster como los del Algoritmo. El flujo neto es entre los tres tanques y el generado por la bomba de combustible o la fuente constante.

### 4.3. Análisis y discusión

En primer lugar, se confirma que la suposición de que Flomaster maneja los tanques como reservorios cuando estos alcanzan su nivel máximo es correcta. A partir de esta premisa, los resultados obtenidos permitieron validar nuevamente el código programado así como el algoritmo. Al comparar los resultados de Flomaster con los obtenidos mediante dicha suposición (Todini-Reservorio), los errores relativos registrados en el tiempo de llenado de los tanques fueron inferiores al 5% para los tres, lo cual permite validar la suposición inicial sobre el funcionamiento del algoritmo interno del software Flomaster.

Si bien el funcionamiento exacto del software Flomaster permanece reservado por el fabricante, la evidencia numérica y la concordancia de los resultados sugieren que esta interpretación es correcta.

El comportamiento de los flujos dados por Flomaster y Todini-Reservorio concuerdan, ya que ambos muestran que a pesar de que los tanques se llenan, sigue existiendo un flujo entrando a los tanques (aún cuando estos ya no aumentan su nivel). El hecho de tratar los tanques como reservorios cuando estos alcanzan su límite superior, fija la condición de una carga constante en el tanque, lo cual permite que el flujo entre al depósito (ahora reservorio). Esto da la idea de un tanque abierto.

Por otro lado, al apegarse a una mayor fidelidad física considerando que los tanques al llenarse se comportan como tanques cerrados, se identifica que el algoritmo (Todini-Cerrado) representar de manera adecuada los niveles de los tanques, ya que se alcanzan los niveles máximos permitidos (Flomaster y Todini-Cerrado). Sin embargo, con respecto a los flujos, se observa en la Fig. 4.5 que Flomaster predice la entrada de un flujo entrante aún cuando estos ya alcanzaron su capacidad máxima. Esta condición no es consistente con la representación de tanques cerrados. A pesar de ello, Flomaster logra obtener los niveles máximos permitidos debido a su configuración interna como reservorios, como ya se discutió previamente.

El hecho de que Flomaster siga permitiendo la entrada de flujo a los tanques repercute directamente en los tiempos de llenado, particularmente en el Tanque 2, donde la diferencia de tiempo de llenado entre Flomaster y el Algoritmo (Todini-Cerrado) fue la más significativa, aproximadamente 290 [s]. Esta diferencia se debe a que bajo esa condición no se permite la entrada de flujo una vez que el tanque alcanza su nivel máximo, mientras que Flomaster mantiene una condición de entrada continua de flujo.

Los flujos predichos por el Algoritmo bajo la condición de tanque cerrado presentan un comportamiento más consistente desde el punto de vista físico. Una vez que el tanque alcanza su máximo nivel, el flujo entrante al tanque tiende a cero (Fig. 4.5). Esta condición, genera una redistribución de los flujos por toda la red. Incrementando el flujo hacia los tanques que aún no se llenan.

Se sabe que los Tanques 1 y 3 tienen la misma capacidad, mientras que el Tanque 2 es el de mayor volumen. Además, los Tanques 1 y 3, ubicados en el ala, son simétricos en cuanto a su diseño (longitudes, diámetros y alturas) y posición. Dado esto, a priori el orden de llenado sería Tanque 1, después el Tanque 3 y por último el segundo. De la Tabla 4.1, el orden de llenado de los tanques para los tres casos es coherente con lo esperado. El tanque más cercano a la fuente es el que se llena primero (Tanque 1). Le sigue el tanque derecho

(Tanque 3), y finalmente, el Tanque 2. Este último, a pesar de estar más cerca de la entrada que el Tanque 3, al ser más grande, demora más en llenarse.

Considerando un flujo de entrada de  $0.06 [m^3/s]$ , el cual no es despreciable tratándose de una red con diámetros de aproximadamente  $0.08 [m]$ , el sistema requirió aproximadamente  $1450 [s]$  para llenar completamente los tanques según Flomaster. El orden de magnitud de este resultado es correcto y puede verificarse mediante la siguiente estimación directa. Suponiendo un flujo constante de  $0.06 [m^3/s]$  y que el volumen total de los tres tanques es  $61.31 [m^3]$ , el tiempo aproximado de llenado sería

$$t \approx \frac{V}{Q} = \frac{61.31 [m^3]}{0.06 [m^3/s]} \approx 1021 [s],$$

ambos valores son del mismo orden ( $10^3 [s]$ ), lo cual confirma que el resultado obtenido numéricamente es consistente. A considerar los tanques cerrados, el tiempo fue de  $1160 [s]$ , el cual es más cercano a los  $1021 [s]$ . Estos resultados evidencian la importancia de la capacidad de suministro en los procesos de reabastecimiento de combustible. Demostrando la ventaja de tener múltiples puntos de entrada en el sistema de combustible, así como un sistema de reabastecimiento con capacidad hidráulica suficiente.

Por otro lado, cuando un tanque alcanza su máximo nivel permitido, el flujo entrante al tanque tiende a cero bajo la consideración de tanque cerrado. Esto impacta directamente en el comportamiento del método numérico, generando las variaciones observadas en los flujos de la Fig. 4.5. Cuando un nodo deja de comportarse como un tanque y se convierte en una conexión (tanque cerrado), este cambio representa una transición abrupta en las condiciones del sistema. Como consecuencia, el algoritmo presenta variaciones en los flujos volumétricos, las cuales persisten hasta que el método se estabiliza dadas las nuevas condiciones.

Retomando el punto anterior. El flujo que ya no está entrando al tanque se redistribuye hacia los tanques restantes. Observe que el tiempo que le toma en estabilizarse son aproximadamente  $30 [s]$ . Flomaster no presenta este tipo de variaciones y se debe al hecho de considerar un tanque lleno como reservorio. La ventaja de esta consideración, es que las condiciones del sistema no cambian por lo que no existen variaciones numéricas.

Como se mencionó en la descripción del problema, el software Flomaster modela la con-

dición de entrada mediante una fuente constante, imponiendo un flujo de  $0.06 [m^3/s]$ . Sin embargo, el algoritmo no usa una fuente constante, sino una bomba. Motivo por el cual, los resultados muestran que el flujo entregado por la bomba se modificó a lo largo del tiempo (Tabla 4.2) cuando se consideró el tanque cerrado. El llenado de los tanques provoca un desplazamiento del punto de operación de la bomba. El punto de operación se desplaza hacia menores caudales y mayores cargas obedeciendo la propia curva de la bomba. Este efecto se aprecia claramente en la Fig. 4.7.

El motivo por el cual sucede esto es que al cerrarse la admisión de uno de los tanques, el caudal que anteriormente se repartía en tres ramales ahora debe circular por solo dos ramales. Esto incrementa la velocidad del fluido en dichos tubos. Al aumentar la velocidad, se elevan las pérdidas de carga por fricción las cuales son proporcionales al cuadrado de la velocidad. Este aumento en la pérdida de carga total de la red de combustible, provoque que la bomba tenga que operar en un punto de mayor carga hidrostática, pero con una reducción simultánea en el flujo volumétrico entregado (de acuerdo con su curva característica).

Este resultado confirma que el Algoritmo es capaz de capturar adecuadamente la interacción entre la bomba y las condiciones hidráulicas del sistema durante el régimen transitorio. Reproduciendo de forma coherente la evolución del punto de operación conforme cambian las condiciones del sistema.

De los resultados cuando el tanque se considera cerrado mostrados en la Tabla 4.2. Se analiza que cuando el Tanque 1 se está llenando ( $T_1 \rightarrow 0.9 [m]$ ), existe flujo entrando a los 3 tanques, sin embargo, una vez que el Tanque 1 ya alcanzó su nivel máximo, deja de existir flujo entrando al Tanque 1 y todo se va al Tanque 3 y Tanque 2 lo cual se observa cuando  $T_3 \rightarrow 0.9 [m]$ . Una vez que el Tanque 3 ya alcanzó su nivel máximo, todo el flujo que entra a la red se va directamente al Tanque 2. Motivo por el cual, los flujos en los Tanques 1 y 3 son nulos ( $T_2 \rightarrow 1.5 [m]$ ). El hecho de que los flujos netos ( $Q_{neto}$ ) de ambos (Algoritmo y Flomaster) sean del orden de  $10^{-4} [m^3/s]$  implica que ambos cumplen con la ley de conservación de masa. Todo lo que entra a la red se almacena en los tanques.

El algoritmo bajo la condición de tanques cerrados presenta tiempos de llenado menores en comparación con Flomaster, aún cuando el flujo suministrado por la bomba disminuye conforme transcurre el tiempo (Fig. 4.7). En el caso de Flomaster, durante los  $1800 [s]$  de simulación no se presenta una redistribución del flujo volumétrico cuando los tanques alcanzan

su nivel máximo, por lo que no se obtienen los mismos tiempos de llenado. Por el contrario, en el algoritmo (tanque cerrado), a pesar de que el flujo entregado por la bomba disminuye en el transcurso del tiempo, la redistribución del fluido hacia los tanques que no han alcanzado su límite superior permite obtener tiempos menores.

Finalmente, el hecho de haber implementado longitudes equivalentes para representar las pérdidas discretas no tuvo un impacto negativo en los resultados, ya que físicamente solo se reformuló el problema empleando conceptos hidráulicos equivalentes mas no iguales. De igual manera, a pesar de que Flomaster usa una fuente de flujo constante, y para implementar el algoritmo se usó una bomba de flujo, ambos enfoques permiten analizar de manera global el comportamiento en estado transitorio de redes hidráulicas.

# Capítulo 5

## Conclusiones

### 5.1. Generales

Se logró desarrollar, programar, implementar y verificar el Algoritmo del Gradiente Global y su extensión para analizar redes hidráulicas en estado transitorio. Lo más importante, se demostró la versatilidad y aplicabilidad del algoritmo al modelado del sistema de combustible de una aeronave, específicamente al reabastecimiento de combustible, cumpliendo con el objetivo principal de este trabajo.

El modelo matemático de E. Todini basado en las ecuaciones de conservación de masa y energía fue implementado de manera adecuada. Este sistema de ecuaciones diferenciales permitió analizar el comportamiento de la red.

La mayor parte de este trabajo se invirtió en la programación del algoritmo mediante una arquitectura modular, lo cual facilitó su desarrollo y validación logrando obtener un software funcional. Esta arquitectura permitió una mayor flexibilidad para su modificación y extensión. La estructura modular demostró ser capaz de resolver configuraciones más complejas sin necesidad de reprogramar todo. Abriendo la oportunidad a mejorar el algoritmo, y agregar más componentes para analizar redes más completas y complejas.

Por otro lado, una vez programado el Algoritmo del Gradiente Global Extendido, se validó cualitativamente al comparar los resultados obtenidos con los resultados reportados en la

literatura por el autor de referencia, E. Todini. Se confirmó que la implementación reproduce los valores de caudal y presión descritos por el caso original. Esto respalda la correcta formulación y programación del algoritmo.

La aplicación del algoritmo al sistema de combustible de una aeronave de ala fija permitió analizar de manera correcta el proceso de reabastecimiento de combustible en estado transitorio. Demostrando que analizar sistemas reales aeronáuticos desde este enfoque es posible. Aún cuando el propósito original de algoritmo es analizar redes de agua.

Cabe destacar que, a pesar de desconocer el método con el que Flomaster configura los tanques cuando estos alcanzan su nivel máximo, la suposición de que estos se comportan como reservorios al llegar a su límite superior resultó correcta. La comparación entre los resultados de Flomaster y la variante Todini-Reservorio mostró una alta concordancia, reproduciendo los tiempos de llenado con errores menores al 5%. Esto valida la implementación del Algoritmo del Gradiente Global Extendido, así como su aplicación. Obteniendo así una doble validación numérica. Claro está, que una validación experimental sería la opción indiscutible.

El aporte más importante fue que al modelar los tanques de manera más realista, es decir, como tanques cerrados, el algoritmo desarrollado permitió representar de mejor manera el comportamiento de los flujos y predecir tiempos de llenado de los tanques más precisos y más apegados a la realidad.

La comparación de los resultados obtenidos con el algoritmo (Todini-Cerrado) y los del software Flomaster de Siemens demostró que el algoritmo es capaz de reproducir de forma correcta el llenado de los tanques del sistema de combustible ya que se alcanzaron los niveles máximos esperados. Además, los errores relativos en los tiempos de llenado fueron del 4.6%, 6% y 20% para los tanques 1, 3 y 2, respectivamente. Destacando que la discrepancia del 20% en el Tanque 2 no representa una deficiencia del Algoritmo o un error, todo lo contrario, sino una mayor precisión física del Algoritmo, específicamente del modelo del tanque empleado (tanque cerrado). Esto refuerza la validez del algoritmo para el análisis de redes de combustible aeronáuticas. Además de ofrecer valores físicamente más realistas que Flomaster en los flujos volumétricos.

Finalmente, se concluye que la hipótesis planteada es correcta, ya que la implementación computacional del Algoritmo del Gradiente Global y su extensión para transitorios reproduce los valores de flujo volumétrico, presión y el comportamiento global reportado por herramien-

tas especializadas, así como las condiciones físicas propias del caso de estudio. Sin embargo, se abre la puerta para poder investigar a fondo la mejor manera de modelar tanques cerrados y abiertos.

## 5.2. Contribuciones

Se enlistan las contribuciones del presente trabajo:

- Programa modular capaz de resolver redes en estado estacionario y transitorio, con topologías de cualquier complejidad, que contienen como elementos de la red: bombas de flujo, reservorios, tanques, nodos con demandas nodales y tubos con propiedades geométricas.
- Se demostró que el Algoritmo del Gradiente Global Extendido, a pesar de haber sido desarrollado para el análisis de redes de distribución de agua, puede aplicarse al análisis de sistemas aeronáuticos, particularmente al sistema de combustible de una aeronave. Y sobre todo, el régimen transitorio.
- Se demostró que a pesar de desconocer la forma en que el software Flomaster maneja los tanques cuando alcanzan su nivel máximo, al suponer que se comportan como reservorios al llenarse, los resultados obtenidos con el algoritmo son bastante precisos y semejantes a los de Flomaster. Validando esta hipótesis.
- Bajo la condición de tanque cerrado, la cual es más congruente con la realidad, se obtuvo resultados más exactos que los proporcionados por el software Flomaster. A pesar de que ambos alcanzan los mismos niveles máximos (aunque a distinto tiempo), en Flomaster los flujos de entrada continúan existiendo incluso cuando el tanque ya se llenó. Por el contrario, el algoritmo asigna correctamente los flujos que entran al tanque a cero una vez que el tanque alcanza su límite superior bajo la condición de tanque cerrado (nodo cerrado).
- Se abre la puerta a que más colaboradores puedan participar en la programación y desarrollo del proyecto, mejorando y ampliando sus funcionalidades. De igual manera, se destaca el potencial de extender el algoritmo a otras áreas de estudio. En este trabajo,

el reabastecimiento del sistema de combustible fue un caso particular, sin embargo, el análisis del consumo de combustible en las distintas fases de vuelo representa nuevas posibilidades de aplicación.

### 5.3. Recomendaciones y trabajo futuro

Como recomendaciones y trabajo futuro, se propone lo siguiente:

- Implementar un módulo de lectura capaz de leer las pérdidas secundarias debido a accesorios desde un archivo CSV.
- Como se recomendó en presentaciones previas, generar una interfaz gráfica para poder introducir los datos de la red a analizar (GUI Integrada) es importante. Esto con el propósito de hacer más práctico el uso del software.
- Estudiar y programar distintos métodos para modelar los límites superiores e inferiores de los niveles del tanque. Considerando dos tipos de tanques: abiertos y cerrados.
- Incorporar la programación necesaria para poder integrar válvulas con el fin de simular sistemas más complejos, completos y con más aplicaciones.
- Comparar los resultados con datos experimentales de transitorios lentos.
- Modificar el Algoritmo del Gradiente Global Extendido para que sea capaz de resolver no solo transitorios lentos, sino también transitorios rápidos. Y comparar con literatura especializada.

Como trabajo futuro se plantea la propuesta de extender el problema de flujo monofásico a flujo bifásico, problema de gran importancia en el grupo de trabajo en el que fue realizado el presente trabajo, en el Instituto de Ingeniería, UNAM. Esta evolución permitiría desarrollar un solver para aplicaciones industriales de alta complejidad, iniciando con el modelado en estado estacionario para posteriormente expandirlo al estado transitorio.

# Apéndice A

## Estructura del CSV de entrada

Listado A.1: Ejemplo de estructura del archivo .csv

```
1 Title of the CSV,,,,,
2 Author:,,,,,
3 Source:,,,,,
4 ,,,,,
5 NODES,,,,,
6 Junctions,Elevation,Demand,Reservoirs,Elevation,,
7 id,z[m],q[m^3/h],R[-],hp[m],,
8 1,0,0,1,6.096,,
9 2,0,0,0,0,,
10 4,0,2,0,0,,
11 ,,,,,
12 Tanks,,,,,
13 id,z[m],InitialLevel[m],MinLevel[m],MaxLevel[m],Diameter[m],MinVol[m^3]
14 3,33,3.57,0,10,2,0
15 5,30,3.57,0,10,2,0
16 ,,,,,
17 LINKS,,,,,
18 Pipes,,,,,
19 id,N1,N2,Diameter[m],Lenght[m],Roughness[m],
20 1,2,3,0.508,122,1.1e-4,
21 3,2,4,0.508,100,1.1e-4,
22 4,4,5,0.508,100,1.1e-4,
23 ,,,,,
24 Pumps,,,,,
25 id,N1,N2,a0,b0,c0,w0
26 2,1,2,50,0,2,1
```

## Apéndice B

# Desarrollo de las pérdidas primarias y secundarias

En este apéndice se presenta el desarrollo matemático del término de pérdidas primarias a partir de la ecuación de Darcy–Weisbach, así como su relación con la formulación general utilizada en el modelo hidráulico.

La ecuación de Darcy–Weisbach para las pérdidas por fricción en una tubería se expresa como:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (\text{B.1})$$

donde  $f$  es el factor de fricción,  $L$  la longitud de la tubería,  $D$  su diámetro hidráulico,  $v$  la velocidad media del flujo y  $g$  la aceleración de la gravedad.

El caudal volumétrico  $Q$  se relaciona con la velocidad mediante:

$$Q = Av \quad (\text{B.2})$$

Para una tubería de sección circular, el área transversal es:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad (\text{B.3})$$

Sustituyendo, la velocidad se expresa como:

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} \quad (\text{B.4})$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación de Darcy–Weisbach:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{\left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right)^2}{2g} \quad (\text{B.5})$$

$$h_f = \left(f \frac{8L}{\pi^2 g D^5}\right) Q^2 \quad (\text{B.6})$$

De la Ecuación (2.10), el coeficiente  $r_k$  se expresa como:

$$r_k = f \frac{8L}{\pi^2 g D^5} \quad (\text{B.7})$$

$$h_{f_k} = r_k |Q_k| Q_k \quad (\text{B.8})$$

Análogamente, para las pérdidas secundarias  $\sum K = K_1 + \dots + K_n$

$$h_{m_k} = \sum K \frac{v_k^2}{2g} \quad (\text{B.9})$$

$$h_{m_k} = \left(\sum K \frac{8}{\pi^2 g D_k^4}\right) Q_k^2 \quad (\text{B.10})$$

$$m_k = \sum K \frac{8}{\pi^2 g D^4} \quad (\text{B.11})$$

# Apéndice C

## Configuración y datos del caso de estudio en Flomaster

Los datos requeridos para poder realizar la simulación en Flomaster se enuncian a continuación. Con el propósito de no extender demasiado esta sección, solo se pondrán los parámetros más importantes. La referencia numérica de cada elemento corresponde a la nomenclatura del modelo presentada en la Fig. [4.1](#).

**Tabla C.1:** Parámetros de las Pérdidas Discretas - Simcenter Flomaster

Parámetro	C14, C36, C56	C18	Unidades
Número de vías de flujo	1	1	N/A
Área de la sección transversal	0.00387097	0.00387097	$m^2$
Coefficiente de pérdida directa	10	2	N/A
Coefficiente de pérdida inversa	10	2	N/A
Presión de vapor	0.02062	0.02062	bar
Resultados (Activar/Desactivar)	1	1	N/A

**Tabla C.2:** Parámetros de las Tuberías - Simcenter Flomaster

Parámetro	C17, C59	C16	C40	Unidades
Longitud	12.192	0.6096	1.524	m
Diámetro	0.0762	0.0762	0.0762	m
Presión de vapor	0.02062	0.02062	0.02062	bar
Velocidad de la onda	396.24	396.24	396.24	m/s
Rugosidad absoluta	0.0254	0.0254	0.0254	mm
Coef. de fricción Hazen-Williams	110	110	110	N/A
Factor de fricción	0.02	0.02	0.02	N/A
Estado de resultados (On/Off)	1	1	1	N/A

**Tabla C.3:** Parámetros de los Tanques (Reservoir: 3-arm)

Parámetro	C10, C52	C35	Unidades
Coef. pérdida (Entrada/Salida) - Brazos 1, 2 y 3	1	1	N/A
Diámetro de tubería - Brazos 1, 2	0.0508	0.0508	m
Diámetro de tubería - Brazo 3	0.0702	0.0508	m
Altura sobre la base - Brazo 1 y 2	0.01524	0.01524	m
Altura sobre la base - Brazo 3	0	0	m
Altura de la parte superior sobre la base	0.9	1.5	m
Nivel de la base sobre la referencia	0.9	0	m
Área de la sección transversal horizontal	18.5806	18.5806	$m^2$
Presión superficial	1.01325	1.01325	bar
Nivel de líquido inicial	0.9	1.5	m
Presión máxima	1.37893	1.37893	bar
Estado de resultados (On/Off)	1	1	N/A

**Tabla C.4:** Parámetros de la Fuente de Flujo - Simcenter Flomaster

Parámetro	Componente 19	Unidades
Caudal volumétrico	0.06	$m^3/s$
Frontera de modelo externa (Activa)	2	N/A
Estado de resultados (Activar/Desactivar)	1	N/A

# Apéndice D

## Cálculos de la longitud equivalente ( $L_{eq}$ )

Cálculos realizados para obtener la longitud equivalente ( $L_{eq}$ ) a las pérdidas discretas especificadas en el caso de estudio. Calcular dichas longitudes permite integrar pérdidas locales discretas dentro del código generado.

De la Fig. 4.1 se observa que en total se tienen 4 pérdidas correspondientes a los componentes con índices 14, 36, 56 y 18 en la figura. Los valores referentes se muestran en la Tabla D.1 y fueron obtenidos del propio modelo propuesto por Flomaster.

**Tabla D.1:** Coeficientes de pérdida discreta ( $K$ ) y área transversal por componente

Componente	$C_{14}$	$C_{36}$	$C_{56}$	$C_{18}$
Coeficiente $K$	10	10	10	2
Área $A$ [ $m^2$ ])	0.00387097			

**Pérdida discreta  $C_{14}$ :** Los datos técnicos proporcionados establecen que el componente de pérdida discreta (*Discrete Loss*) posee un área transversal de paso de  $A = 0.00387097 \text{ m}^2$ . Asumiendo una sección circular, el diámetro hidráulico característico ( $D_e$ ) se calcula como:

$$D_e = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4(0.00387097 \text{ m}^2)}{\pi}} \approx 0.0702 \text{ m} \quad (\text{D.1})$$

La relación entre el coeficiente de pérdida secundarias o discretas (como las denominan en el software),  $K$ , y la ecuación de Darcy-Weisbach se define mediante la igualdad de las caídas de presión:

$$h_m = h_f \implies K \frac{v^2}{2g} = f \frac{L_{eq}}{D_e} \frac{v^2}{2g} \quad (D.2)$$

Despejando la longitud equivalente:

$$L_{eq} = \frac{K \cdot D_e}{f} \quad (D.3)$$

donde:

- Coeficiente de pérdida secundaria ( $K$ ): 10
- Factor de fricción asumido ( $f$ ): 0.02
- Diámetro equivalente ( $D_e$ ): 0.0702 [m]

Sustituyendo en la Ecuación (D.3):

$$L_{eq} = \frac{10 \cdot 0.0702 \text{ m}}{0.02} = 35.1 \text{ m} \quad (D.4)$$

Dado que los componentes  $C_{14}$ ,  $C_{36}$  y  $C_{56}$  presentan los mismos datos, el diámetro es el mismo, así como la longitud equivalente.

**Pérdida discreta  $C_{18}$ :**

$$D_e = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4(0.00387097 \text{ m}^2)}{\pi}} \approx 0.0702 \text{ m} \quad (D.5)$$

$$L_{eq} = \frac{2 \cdot 0.0702 \text{ m}}{0.02} = 7.02 \text{ m} \quad (D.6)$$

# Apéndice E

## Cálculo de la bomba hidráulica

Este apéndice describe el procedimiento analítico para determinar los coeficientes de la bomba que sustituye a la fuente de flujo constante. De la Ecuación (2.25), el modelo hidráulico de la bomba es:

$$H(Q) = a_0\omega^2 + b_0\omega Q + c_0Q^2 \quad (\text{E.1})$$

Este modelo permite representar la curva característica decreciente de bombas centrífugas.

### E.0.1. Determinación de la carga requerida del sistema

Para calcular los coeficientes de la bomba, se requiere de un cálculo aproximado de la red. Para ello, se realizan suposiciones que a priori no se sabe si son correctas pero tienen el objetivo de poder realizar un diseño preliminar de la bomba.

De la Fig. 4.3, se harán las siguientes suposiciones:

$$Q_{P_1} = 0.06[m^3/s] \quad (\text{E.2})$$

$$Q_{P_1} = Q_{P_2} \quad (\text{E.3})$$

$$Q_{P_4} = 0.03[m^3/s] \quad (\text{E.4})$$

$$Q_{P_6} = 0.015[m^3/s] \quad (\text{E.5})$$

$$Q_{P_6} = Q_{P_7} = Q_{P_8} \quad (\text{E.6})$$

El Balance de energía entre los nodos  $n_2$  y  $n_10$  queda como:

$$H_{\text{bomba}} = H_{\text{est}} + \sum h_0 \quad (\text{E.7})$$

donde  $H_{\text{bomba}}$  es la carga estática asociada al nivel del tanque cuando están llenos (caso extremo),  $\sum h_0$  es la suma de las pérdidas de carga primarias de la red. Recordemos que las pérdidas secundarias ya se trabajaron como longitudes equivalentes.

$$H_{\text{est}} = H_{T_3} \quad (\text{E.8})$$

$$H_T = z + h_{\text{max}} \quad (\text{E.9})$$

Donde  $z$  es la altura de la base del tanque y  $h_{\text{max}}$  es la altura máxima del tanque. Por lo que:

$$H_{\text{est}} = (0.9 [m] + 0.9 [m]) \quad (\text{E.10})$$

$$H_{\text{est}} = 1.8 [m] \quad (\text{E.11})$$

Aprovechando que tenemos parámetros en común en la red, y de la Fig. [4.3](#):

$$V_1 = \frac{4(0.06)}{\pi(0.0702)^2} = 15.5020 \text{ m/s} \quad (\text{E.12})$$

$$V_2 = \frac{4(0.06)}{\pi(0.0762)^2} = 13.1568 \text{ m/s} \quad (\text{E.13})$$

$$V_4 = \frac{4(0.03)}{\pi(0.0762)^2} = 6.5784 \text{ m/s} \quad (\text{E.14})$$

$$V_6 = V_7 = \frac{4(0.015)}{\pi(0.0762)^2} = 3.2892 \text{ m/s} \quad (\text{E.15})$$

$$V_8 = \frac{4(0.015)}{\pi(0.0702)^2} = 3.8755 \text{ m/s} \quad (\text{E.16})$$

$$h_1 = \frac{f_1 V_1^2}{D_1 2g}(L_1) = \frac{0.02}{0.0702} \frac{15.5020^2}{19.62}(7.02) = 24.4966 \text{ m} \quad (\text{E.17})$$

$$h_2 = \frac{0.02}{0.0762} \frac{13.1568^2}{19.62}(0.6096) = 1.4118 \text{ m} \quad (\text{E.18})$$

$$h_4 = \frac{0.02}{0.0762} \frac{6.5784^2}{19.62}(12.192) = 7.0601 \text{ m} \quad (\text{E.19})$$

$$h_{6,7} = \frac{0.02}{0.0762} \frac{3.2892^2}{19.62}(1.524 + 12.192) = 1.9863 \text{ m} \quad (\text{E.20})$$

$$h_8 = \frac{0.02}{0.0702} \frac{3.8755^2}{19.62}(35.1) = 7.6622 \text{ m} \quad (\text{E.21})$$

$$\begin{aligned} H_{\text{bomba}} &= 1.8 + 24.4966 + 1.4118 + 7.0601 + 1.9863 + 7.6622 \\ H_{\text{bomba}} &= 44.4170 \text{ m} \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

## E.0.2. Diseño inicial de la curva de la bomba

El diseño inicial de la bomba se realizó imponiendo que el punto de operación coincidiera con el caudal objetivo  $Q = 0.06 \text{ [m}^3/\text{s]}$ , de modo que:

$$H_{\text{bomba}}(Q = 0.06[\text{m}^3/\text{s}]) = 44.4170 \text{ m} \quad (\text{E.23})$$

A partir de esta condición y considerando valores realistas de carga a caudal cero y pendiente de la curva, se propuso la siguiente curva característica inicial:

$$H_1(Q) = a_0 + b_0Q + c_0Q^2 \quad (\text{E.24})$$

$$H_1(0.06) = a_0 + b_0Q + c_0Q^2 = 44.5 \text{ [m]} \quad (\text{E.25})$$

Los coeficientes deben de cumplir:

- Curva decreciente  $\rightarrow b_0, c_0 < 0$
- Altura a caudal cero debe ser mayor que el de operación  $\rightarrow a_0 > 45 \text{ [m]}$

Supongamos que  $c_0 = -8000$ :

$$\begin{aligned}44.5 &= 80 - b_0(0.06) - 8000(0.06^2) \\ b_0 &= \frac{44.5 - 80 + 8000(0.06^2)}{0.06} \\ b_0 &\approx -112\end{aligned}\tag{E.26}$$

Por lo tanto, los coeficientes son:

$$a_1 = 80, \quad b_1 = -112, \quad c_1 = -8000\tag{E.27}$$

Esta curva presenta una forma decreciente adecuada y cruza la curva del sistema en el punto de diseño deseado. Al verificar en el código, arroja que la bomba entrega un flujo de  $0.065[m^3/s]$ , lo cual se debe a las suposiciones que hicimos para diseñar la bomba. Para lograr alcanzar exactamente  $0.06 m^3/s$ , se modifica el parámetro de  $b \rightarrow -170$  y al simularlo se encuentra que efectivamente, esta bomba cumple con el flujo buscado de  $Q = 0.06 [m^3/s]$ .

# Apéndice F

## Definición de la red de combustible

**Tabla F.1:** Datos de uniones y reservorios de la red de combustible.

UNIONES			RESERVORIOS	
ID	Elevación [m]	Demanda [m <sup>3</sup> /h]	ID	Elevación [m]
2	0	0	1	0
3	0	0		
4	0	0		
6	0	0		
8	0	0		
9	0	0		

**Tabla F.2:** Datos de los tanques de la red de combustible.

TANQUES						
ID	Elevación z [m]	Nivel inicial [m]	Nivel mínimo [m]	Nivel máximo [m]	Diámetro [m]	Volumen mínimo [m <sup>3</sup> ]
5	0.9	0	0	0.9	4.864	0
7	0	0	0	1.5	4.864	0
10	0.9	0	0	0.9	4.864	0

**Tabla F.3:** Datos de los tubos de la red de combustible.

TUBOS					
ID	N1	N2	Diámetro [m]	Longitud [m]	Rugosidad [m]
1	2	3	0.0702	7.02	$2.54e-5$
2	3	4	0.0762	0.6096	$2.54e-5$
3	4	5	0.0702	35.1	$2.54e-5$
4	4	6	0.0762	12.192	$2.54e-5$
5	6	7	0.0702	35.1	$2.54e-5$
6	6	8	0.0762	1.524	$2.54e-5$
7	8	9	0.0762	12.192	$2.54e-5$
8	9	10	0.0702	35.1	$2.54e-5$

**Tabla F.4:** Datos de la bomba de combustible.

BOMBAS						
ID	N1	N2	a0	b0	c0	w0
9	1	2	80	-112	-8000	1

**Tabla F.5:** Propiedades del fluido y condiciones iniciales (JET A / JP-8).

Propiedad	Símbolo	Valor
Nombre	-	JET A (JP-8)
Densidad	$\rho$	805 kg/m <sup>3</sup>
Viscosidad Dinámica	$\mu$	0.00161 Ns/m <sup>2</sup>
Viscosidad Cinemática	$\nu$	0.000002 m <sup>2</sup> /s
Temperatura Ambiente	$T$	20 °C
Gravedad	$g$	9.81 m/s <sup>2</sup>
Caudal	$Q$	0.06 m <sup>3</sup> /s

# Bibliografía

Secretaría de Energía. Historial fotográfico - refinería olmeca en dos bocas, 2026. URL [https://dosbocas.energia.gob.mx/historial\\_foto06.aspx](https://dosbocas.energia.gob.mx/historial_foto06.aspx). Imagen del historial de construcción.

Refinería Olmeca-Dos Bocas. Aquí inserta las primeras palabras del post... [imagen adjunta]. Facebook, oct 2024. URL <https://www.facebook.com/photo/?fbid=526171343472515&set=a.138047248951595>. Accedido: 10 de diciembre de 2025.

Fanny Miranda. Sistema cutzamala celebra 40 aniversario en su tercer nivel más bajo. Milenio, may 2022. URL <https://www.milenio.com/politica/comunidad/sistema-cutzamala-celebra-40-aniversario-tercer-nivel-mas-bajo>. Accedido: 10 de diciembre de 2025.

Wikimedia Commons. Sistema de combustible y sistema neumático de una turbina genx, 2026.

Peixin GAO, Tao YU, Yuanlin ZHANG, Jiao WANG, and Jingyu ZHAI. Vibration analysis and control technologies of hydraulic pipeline system in aircraft: A review. *Chinese Journal of Aeronautics*, 34(4):83–114, 2021. ISSN 1000-9361. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2020.07.007>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1000936120303265>.

Ezio Todini and Lewis A. Rossman. Unified framework for deriving simultaneous equation algorithms for water distribution networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 139(5):511–526, 2013. doi: [10.1061/\(ASCE\)HY.1943-7900.0000703](https://doi.org/10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000703). URL <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/%28ASCE%29HY.1943-7900.0000703>.

Yi Tu, Xuanren Chen, Liang Yin, Qiuyun Zheng, and Yu Zeng. Numerical study on pipeline pressure surge of the large aircraft fuel system. *Mathematical Problems in Engineering*, 2022:2984501, may 2022a. doi: [10.1155/2022/2984501](https://doi.org/10.1155/2022/2984501).

- ARC Refuellers. Aircraft ground refueling procedures: A comprehensive guide, may 2025. URL <https://arc-refuellers.be/aircraft-ground-refueling/>. Accedido: 10 de diciembre de 2025.
- Gioia Foglianti, Stefano Alvisi, Marco Franchini, and Ezio Todini. Extending the global-gradient algorithm to solve pressure-control valves. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 146(8):04020055, 2020. doi: 10.1061/(ASCE)WR.1943-5452.0001247. URL <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/%28ASCE%29WR.1943-5452.0001247>
- CONAGUA. *Manual de Agua Potable, Alcantarillado y Saneamiento: Redes de Distribución*. Comisión Nacional del Agua (CONAGUA), México, 2007. URL <https://www.conagua.gob.mx/conagua07/publicaciones/publicaciones/Libros/43RedesDeDistribucion.pdf>
- Matthew E. Oliver. Pipelines. Technical report, Georgia Institute of Technology, School of Economics, Atlanta, GA, USA, 2021. Available via email: matthew.oliver@econ.gatech.edu.
- Prabhata K. Swamee and Ashok K. Sharma. *Design of Water Supply Pipe Networks*. Wiley, Hoboken, NJ, 2008. ISBN 978-0470131464.
- Ian Moir and Allan Seabridge. *Aircraft Systems: Mechanical, Electrical, and Avionics Subsystems Integration*. John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, UK, 3rd edition, 2008. ISBN 9780470059968. doi: 10.1002/9780470770931.
- Lindell E. Ormsbee. The evolution of water distribution models. In *Water Distribution Systems Analysis Symposium 2006*, pages 1–7, Cincinnati, Ohio, USA, 2006. American Society of Civil Engineers. doi: 10.1061/40941(247)1.
- Ezio Todini. Extending the global gradient algorithm to unsteady flow extended period simulations of water distribution systems. *Journal of Hydroinformatics*, 13(2):167–180, 04 2010. ISSN 1464-7141. doi: 10.2166/hydro.2010.164. URL <https://doi.org/10.2166/hydro.2010.164>
- E. Todini. Un metodo del gradiente per la verifica delle reti idrauliche. *Bollettino degli Ingegneri della Toscana*, 11:11–14, 1979. in Italian.
- Ezio Todini and Stefania Pilati. A gradient algorithm for the analysis of pipe networks. In B. Coulbeck and C.H. Orr, editors, *Computer Applications in Water Supply: Vol. 1 - Systems Analysis and Simulation*, pages 1–20, London, 1988. John Wiley & Sons.

- U.S. Environmental Protection Agency. Epanet. <https://www.epa.gov/water-research/epanet>, 2025. Accessed: 2025-12-01.
- Yi Tu, Xuanren Chen, Liang Yin, Qiuyun Zheng, and Yu Zeng. Numerical study on pipeline pressure surge of the large aircraft fuel system. *Shock and Vibration*, 2022:1–13, 2022b. doi: 10.1155/2022/7529857.
- Roy Langton, Chuck Clark, Martin Hewitt, and Lonnie Richards. *Aircraft Fuel Systems*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, West Sussex, PO19 8SQ, United Kingdom, 2009. Retired Group VP Engineering, Parker Aerospace, USA; Retired Marketing Manager, Air & Fuel Division, Parker Aerospace, USA; Retired Director of Marketing, Electronic Systems Division, Parker Aerospace, USA; Senior Expert, Fuel Systems, Airbus UK, Filton, UK.
- Cohen Ira M. Kundu, Pijush K. and David R. Dowling. *Fluid Mechanics*. Academic Press, an imprint of Elsevier, Amsterdam; Boston; Heidelberg; London; New York; Oxford; Paris; San Diego; San Francisco; Singapore; Sydney; Tokyo, 6th edition, 2016. With contributions by Grétar Tryggvason.
- Frank M. White. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hil, seventh edition, 2011. University of Rhode Island.
- Diego Avesani, Maurizio Righetti, Davide Righetti, and Paolo Bertola. The extension of epanet source code to simulate unsteady flow in water distribution networks with variable head tanks. *Journal of Hydroinformatics*, 14(4):960–973, 2012. doi: 10.2166/hydro.2012.013.
- Engineers Edge. Pipe roughness – engineers edge. [https://www.engineersedge.com/fluid\\_flow/pipe-roughness.htm](https://www.engineersedge.com/fluid_flow/pipe-roughness.htm), 2025. Accessed: 25 August 2025.
- Siemens Digital Industries Software. Simcenter Flomaster, 2026. URL <https://plm.sw.siemens.com/en-US/simcenter/systems-simulation/flomaster/>. Consultado el 5 de enero de 2026.
- Siemens. *Simcenter Flomaster Sample System: Aircraft Fuel System (1) Basic Twin Engine Jet, Pre-flight Refueling*. Siemens, Plano, TX, USA, October 2019. Software Version 2019.2. Documentation provided within the Simcenter Flomaster virtual environment.
- L. A. Rossman. *EPANET Users Manual*. Environmental Protection Agency, Cincinnati, OH, 1993. United States Environmental Protection Agency.