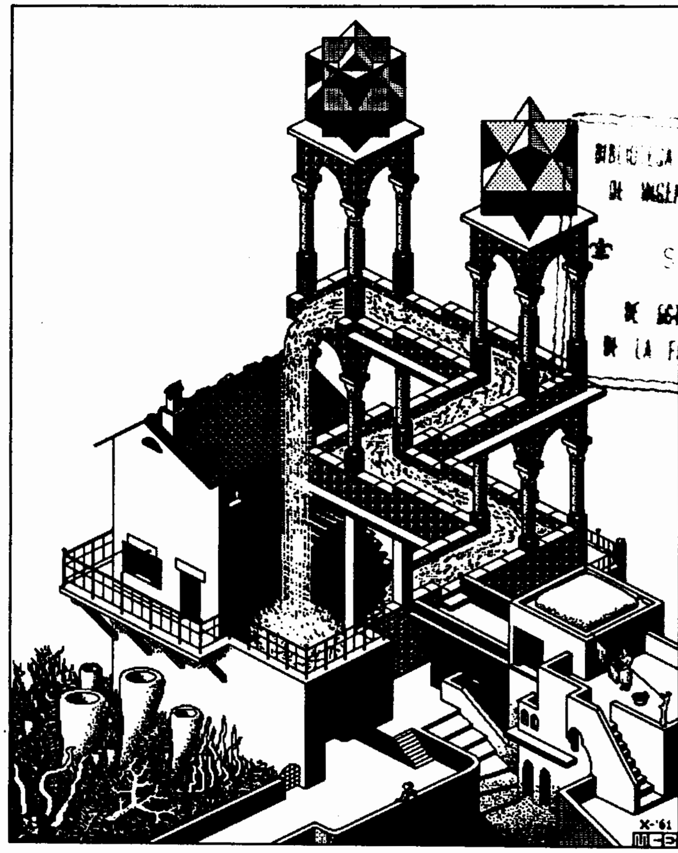
APUNTES DE MATEMATICAS APLICADAS I

IDALIA FLORES DE LA MOTA



Departamento de Ingeniería de Sistemas

División de Estudios de Posgrado Facultad de Ingeniería, U. N. A. M.

APUNTES DE MATEMATICAS APLICADAS I
PARTE 1

IDALIA FLORES DE LA MOTA

Como parte de las actividades del Departamento de Ingenieria de Sistemas de la Division de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingenieria UNAM, nos hemos propuesto el desarrollo de una serie de apuntes que sirvan de apoyo a los distintos cursos que se imparten y, desde luego, como material de referencia o de lectura para quien asi lo desee.

En dichos apuntes se busca mantener un alto nivel, de manera que contribuyan a una solida formacion teorica del alumno, pero al mismo tiempo se intenta mantenerlo cerca de las aplicaciones de tales conocimientos, como es en sintesis la aspiracion general del posgrado de ingenieria.

La presentación de los mismos es en siete capítulos divididos en dos partes: la primera de ellas abarca los primeros cuatro capítulos y la segunda los tres últimos.

Agradecemos a la Comisión Federal de Electricidad y al Instituto de Investigaciones Eléctricas el apoyo prestado para la realización de este proyecto (Convenio UNAM - CFE - IIE).

I N D I C E

PROLOGO

El Algebra Lineal es una estructura matemática de suma importancia en nuestro medio; ya que no sólo trata de resolver problemas de investigación de operaciones, también es una herramienta importante en electrónica, estructuras e ingeniería petrolera entre otras. Muchas veces los textos que tratan sobre esta disciplina son muy teóricos y se limitan a resolver unos cuantos ejemplos abundando en la demostración de teoremas, lo cual no es nuestro propósito. Mas bien, se pretende resolver una gran cantidad de ejemplos sobre todo de ingeniería y efectuar las demostraciones de los teoremas más relevantes. Es bajo ésta perspectiva que se presentan estos apuntes, donde lo que se busca es tener un apoyo didáctico para la clase y como un complemento de la bibliografía sugerida para el curso.

Los presentes apuntes van dirigidos a estudiantes de posgrado que ya teniendo conocimiento de la materia requieren de un cierto grado de conceptualización y una buena dosis de ejemplos y aplicaciones, se presentan también al final de cada capítulo unas notas históricas que buscan dar al lector una idea mas completa de las matemáticas, viéndolas desde una perspectiva histórica, inmersas en la realidad de la época:

> "La ciencia gana realidad cuando es visualizada no como una abstracción, sino como la suma concreta de los científicos, pasados y presentes, vivos y muertos. No hay estamentos en ciencia, ni una observación, ni un pensamiento que existan por si mismos. Cada uno de ellos es producto de un duro esfuerzo de algún hombre, y a menos que conozcáis al hombre y el mundo con el cual trabajaba, los supuestos que él aceptaba como verdades, los conceptos que él consideraba insostenibles, no podréis comprender sus afirmaciones, u observaciones, o pensamiento".
>
> Isaac Asimov

El orden en que se abordan los temas es el mismo que el orden del curso, lo considero adecuado ya que el problema central del Algebra Lineal es resolver sistemas de ecuaciones lineales y éste es el hilo conductor del curso.

Finalmente quisiera destacar que parte de este trabajo se apoyó en las notas de cursos anteriores impartidos por el Dr. Sergio Fuentes Maya.

CAPITULO 1

MODELOS MATEMATICOS.

"La formulación de un problema es a menudo mas importante que su solución"
A. Einstein.

1.1 INTRODUCCION

Un modelo es una representación de un problema o situación de la realidad. Esta representación la hacemos mediante diversos objetos o símbolos a través de un proceso de abstracción, que consiste, en tomar de la realidad, los elementos más importantes que intervienen en el problema y desechar todos aquellos que consideramos que no juegan un papel determinante en el mismo, estableciendo con precisión cuales son las distintas relaciones que guardan entre sí dichos elementos. Una vez establecidas éstas relaciones, podemos manipular los elementos del modelo en la búsqueda de una posible solución, o bien, demostrar que tal solución no existe.

Se considera que las funciones de un modelo son la predicción y la comparación para proporcionar una forma lógica de predecir los resultados que siguen las acciones alternativas, e indicar una preferencia entre ellas. Aunque éste uso de los modelos es importante, éste no es de ninguna manera su único propósito, la construcción de modelos proporciona una manera sistemática, explícita y eficiente para que un grupo de expertos y aquellos que toman las decisiones centren su juicio e intuición.

Uno de los principales elementos para resolver un problema es la construcción y el uso de un modelo. Dicho modelo puede tomar muchas formas, pero una de las más útiles, y ciertamente la que más se usa, es la matemática; lamentablemente no siempre es posible crear un modelo matemático en un sentido riguroso y estricto. Al estudiar la mayoría de los sistemas militares e industriales, podemos definir objetivos, especificar restricciones y discernir que el diseño sigue las leyes de ingeniería y/o economía. Las relaciones esenciales se pueden descubrir y representar matemáticamente, de una manera u otra.

Representar algún objeto, sistema o idea con un modelo es tan general que es difícil clasificar todas las funciones que satisfacen los modelos, algunas de ellas son:

a. Una ayuda para el pensamiento

b. Una ayuda para la comunicación

c. Para entrenamiento e instrucción

d. Una herramienta de predicción

e. Una ayuda para la experimentación.

En ingeniería, los modelos sirven como ayuda para diseñar nuevos sistemas o mejorar los existentes, mientras que en ciencias sociales y en economía, explican los sistemas existentes.

1.2 CARACTERISTICAS DE LOS MODELOS.

Empezaremos nuestro análisis con un problema hipotético:

El viejo y el lobo.

"A orillas del rio Balsas, un viejo llevaba un lobo, una oveja y una paca de alfalfa. El viejo quiere cruzar el río con todas sus pertenencias, pero lo único que tiene para cruzarlo es una barca donde solo cabe él y una de sus pertenencias de tal manera que tiene que llevarlas a la otra orilla una por una. Pero si deja al lobo con la oveja este se la comería y si deja a la oveja con la alfalfa esta se la comería". ¿Cómo puede el viejo llegar a la otra orilla del río con todas sus pertenencias?.

Antes de resolver el problema, debe estar claro que podemos considerarlo como un sistema, empecemos por diferenciar las relaciones que guardan entre sí los elementos del sistema:

1. En la barca solo cabe el viejo con una sola de sus pertenencias (lobo,oveja,alfalfa).

2. El lobo no se puede quedar solo con la oveja.

3. La oveja no se puede quedar sola con la alfalfa.

Una vez enumeradas las principales relaciones de interdependencia del sistema, podemos intentar diseñar una posible solución.

A continuación se enuncian los pasos a seguir para una solución satisfactoria del problema:

1. El viejo cruza el rio con la oveja.
2. El viejo regresa sólo.
3. El viejo cruza el río con el lobo.
4. El viejo regresa con la oveja.
5. El viejo cruza el río con la alfalfa.
6. El viejo regresa solo.
7. El viejo cruza con la oveja.

Ahora pasemos a verificar si ésta solución cumple las relaciones de interdependencia del sistema, esto es, hay que verificar que en ningún momento se pueda comer el lobo a la oveja ni la oveja a la alfalfa y que al final estén todos al otro lado del río. Una vez realizado lo anterior podemos ahora sí, estar seguros de que la solución propuesta es adecuada.

Hasta ahora, sin decirlo hemos seguido un método para resolver el problema, sin embargo es importante que conozcamos otros más y sepamos diferenciarlos.

El problema anterior lo pudimos resolver de manera sencilla en forma mental, para lo cual lo único que tuvimos que hacer fue imaginar el sistema, con sus relaciones de interdependencia y a través de estas representaciones mentales encontramos la solución, en otras palabras, elaboramos un modelo "mental" del sistema, a este método de solución le llamaremos RESOLUCION MENTAL.

Sin embargo no todos los problemas se pueden resolver tan fácilmente, existen problemas mucho más complicados por lo cual, necesitamos de otros métodos para resolverlos.

Regresemos al problema inicial y con la finalidad de dejar más claro el razonamiento que hemos seguido, resolvamos las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas veces tuvo que cruzar el viejo el río?

2. ¿Si la oveja no se comiera la alfalfa, cuantas veces cruzaría el río?

3. ¿Hay otras soluciones al problema?

4. ¿Existe una solución más corta?

5. ¿Si ponemos alfalfa donde diga lobo y lobo donde diga alfalfa en nuestra solución. Obtenemos otra solución?

6. Si intercambiamos alfalfa y oveja. Es solución?

7. Unicamente podemos resolver mentalmente nuestro problema?

8. ¿De que otra manera diferente a la mental podemos resolver el problema?

Preguntas como éstas, corresponden a lo que en investigación de operaciones se conoce como análisis de sensibilidad, las últimas nos sugieren que existen más métodos de solución y en caso de existir otras soluciones, la siguiente pregunta obligada es ¿cuál es la mejor solución o la solución óptima?

Otro método de solución, es trasladarnos al lugar de los hechos y ahí encontrar la solución del problema. Esto es trasladarnos al Balsas, conocer al viejo y demás entidades del sistema, decirle al viejo como pasar el río, cuidando de que no haya ningún error y una vez que se encontrase en la otra orilla sano y salvo con todas sus pertenencias regresarnos, este método de resolver el problema lo llamaremos RESOLUCION DIRECTA.

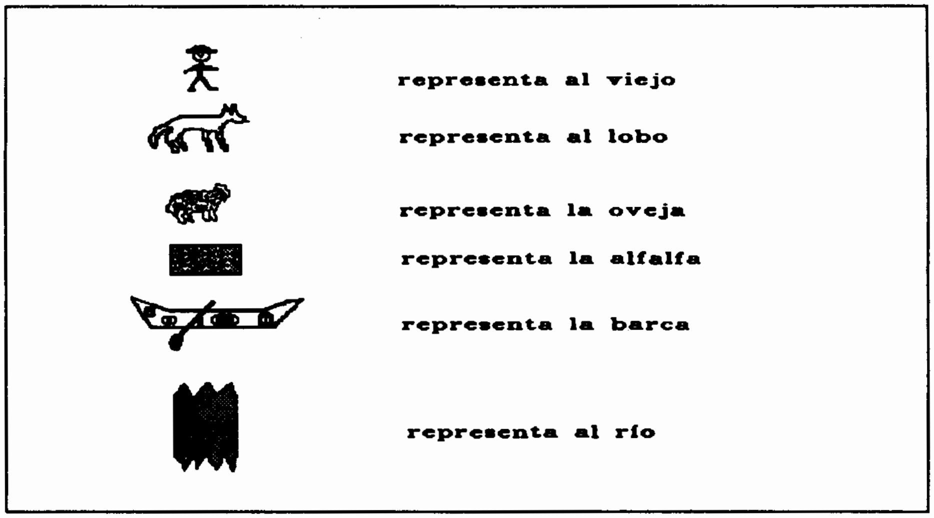
Obviamente que este método presentaría dificultades, y en el supuesto de nuestro problema, nuestra simple presencia, modificaría el problema original del viejo.

Existe otro método que es muy utilizado en la resolución de problemas y al cual le daremos el nombre de SIMULACION. Como su nombre lo indica, este método consiste en hacer una representación del sistema en cuestión, con personas, objetos, etc., interactuar con el modelo, hasta encontrar la solución, que suponemos válida para el problema real.

Finalmente, una clase importante de modelos, son aquellos que utilizan símbolos escritos en un papel, esta forma es la más usual, por su importancia y de acuerdo al hecho de que en este modelo se utilizan símbolos se les ha dado el nombre de modelos simbólicos.

Entonces los modelos simbólicos, son un método de resolución de problemas, mediante el cual, a través de dibujos y diagramas (símbolos) se representan las entidades del sistema, cuidando de utilizar símbolos diferentes para cada entidad distinta.

Así por ejemplo en nuestro problema del viejo podríamos representar los elementos del problema de la siguiente manera:



De ésta manera podríamos representar cada uno de los pasos a seguir en la resolución del problema, más sin embargo esto entraña el problema de que, algunos de nosotros no sabemos dibujar bien y esto sería muy complicado. Así que busquemos símbolos más sencillos de dibujar, por ejemplo sus iniciales, esto es, V,L,O,A,B, para designar al viejo,al lobo, la oveja, la alfalfa y la barca y usemos dos lineas verticales para representar al rio y una flecha para indicar la dirección en que se efectúa el cruce.

Así la solución de nuestro problema quedaría:

Todos los personajes en una orilla del rio	VLOA	B	
1. El viejo cruza el río con la oveja	LA	BVO	
	LA	B	VO
2. El viejo regresa solo	LA	VB	O
	LAV	B	O
3. El viejo cruza el rio con el lobo	A	BVL	O
	A	B	VLO
4. El viejo regresa con la oveja	A	BVO	L
	AOV	B	L
5. El viejo cruza el rio con la alfalfa	O	BVA	L
	O	B	VAL
6. El viejo regresa solo	O	BV	AL
7. El viejo cruza con la oveja		BVO	AL
		B	VOAL

De esta forma, el viejo y su pertenencias quedan a la otra orilla del río. Si observamos detenidamente nuestro modelo simbólico podemos observar, que se puede simplificar más, se deja de ejercicio simplificarlo.

1.3 LA ABSTRACCION

En todos los métodos de solución de problemas que vimos, tienen de común la utilización de un modelo. En el método mental, nuestro modelo fueron imágenes en nuestro cerebro. En el método directo nuestro modelo fue la realidad misma (sin lugar a dudas el mejor modelo). En el de simulación nuestro modelo consistió en representaciones del problema, por medio de personas o cosas, suponiendo que cada una de ellas, guardaban entre sí las mismas relaciones que las del problema y finalmente en el método simbólico, nuestro modelo consistió de símbolos en el papel.

Cabe resaltar que en los últimos dos métodos, utilizamos distintos modelos, fijaremos nuestra atención en los modelos simbólicos. En el primero para representar la situación del problema y sus personajes, lo hicimos por medio de dibujos, por ello de fácil comprensión para todos, pero tiene la desventaja de ser muy laborioso y para algunos de nosotros, que no sabemos dibujar, resulta casi imposible de construir.

En el segundo, utilizamos letras para representar a nuestros personajes, letras relacionadas con ellos. Este modelo tiene la ventaja de que es fácil de elaborar y la desventaja, de que para entenderlo necesitamos más información sobre el problema y requerimos un mayor esfuerzo mental. Esto debido a que nuestro modelo no se parece a la realidad.

1.4 RESUMEN

1. Los modelos simbólicos que utilizamos, cada vez eran menos reales y más abstractos.

2. En su elaboración efectuamos un proceso de abstracción.

3. Observe, que en los modelos que hemos construido, una vez que elegimos un objeto o símbolo para representar una entidad, ésta permanece sin cambiar a lo largo de todo el proceso, ésta es una característica que todo modelo debe satisfacer.

De los métodos de solución que hemos visto, existe una gran diferencia entre el método directo y los demás. En el método directo, nosotros no construimos el modelo, el modelo en éste caso es la realidad misma. Además de las entidades que hemos considerado intervienen muchas más, como por ejemplo: hay rápidos o las aguas son tranquilas, el río es ancho o angosto, es de día o de noche, etc., factores que sin lugar a dudas intervienen y pueden facilitar o dificultar la solución del problema. En los demás métodos, nosotros hemos construido el modelo, tomando de la realidad sólo las entidades que consideramos importantes y desechamos las demás.

Otra consideración importante es que si en nuestro modelo nos equivocamos en la búsqueda de la solución, lo único que se habrá perdido es tiempo y un pedazo de papel, mientras que un error, en el método directo, implica la perdida de una de las pertenencias del viejo. En los modelos un error lo podemos corregir sin mucha dificultad, mientras que en la realidad dificilmente podremos hacerlo, ya que la experiencia nos ha enseñado que toda acción conlleva un riesgo.

Se preguntará ahora, ¿de que nos sirve resolver un problema en un modelo, si como vimos en nuestro ejemplo, hemos olvidado, algunos factores que podrían imposibilitar la solución (a lo mejor cae tormenta)? a lo que podríamos contestar, la solución encontrada en nuestro modelo nos sirve de guía para la acción, para intentar solucionar felizmente un problema. Además, en nuestro modelo proponemos la solución al problema de cualquier viejo o joven, que se encuentre en esas condiciones y no sólo en el río balsas, sino en cualquier otro río, proponemos la solución no de uno, sino de muchos problemas. Por esto la solución en un modelo es más general.

Podemos afirmar, que entre más abstracto es un modelo, más generales son sus resultados, es decir se aplican a un mayor número de casos, pero también hay que recordar que para elaborar e interpretar un modelo, entre más abstracto es más difícil.

Finalmente no hay que perder de vista que existen diferencias sustanciales entre resolver un problema en un modelo y resolverlo en la realidad. Lo que significa, que no debemos ser tan mecánicos en la aplicación a la realidad de una solución obtenida a través de un modelo, ya que no podemos olvidar que en la realidad la situación es cambiante y por consiguiente elementos que en un principio desechamos al elaborar el modelo pudieron haberse convertido en determinantes, modificando con ello las condiciones reales del problema, lo cual imposibilita la aplicación de la solución encontrada.

CAPITULO 2

MATRICES

2.1. INTRODUCCION.

El problema central del Algebra Lineal es la solución de ecuaciones lineales simultáneas; el caso más importante y el más simple, es aquél en que el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones. Comenzaremos con dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x_1 y x_2:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 y b_2 son números dados. Cada una de éstas ecuaciones es la ecuación de una recta (en el plano x_1x_2). La pendiente de la primera recta es $-a_{11}/a_{12}$ y la pendiente de la segunda recta es $-a_{21}/a_{22}$ (si $a_{12} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$). Una solución de éste sistema es una pareja de números (x_1,x_2) que satisfacen el sistema.

Otra interpretación consiste en observar el sistema en forma de columnas, se tiene entonces:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

y se trata aqui de encontrar la combinación de los vectores en el lado izquierdo que dé como resultado el lado derecho. El ejemplo siguiente ilustra estas dos interpretaciones.

<u>Ejemplo 2.1</u> Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 2 \qquad (1) \\ 4x_1 + 11x_2 &= 1 \qquad (2) \end{aligned}$$

multiplicando la primer ecuación por dos y restándola a la segunda se tiene:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 &= 4 \qquad (1) \\ 4x_1 + 11x_2 &= 1 \qquad (2) \end{aligned}$$

de donde $x_2=-1$ y $x_1=3$, entonces la solución es $(x_1,x_2) = (3,-1)$, y geométricamente se representa, en la figura 2.1.

Si seguimos la segunda interpretación geométrica, consideramos entonces las columnas del sistema y no los renglones, y se tiene:

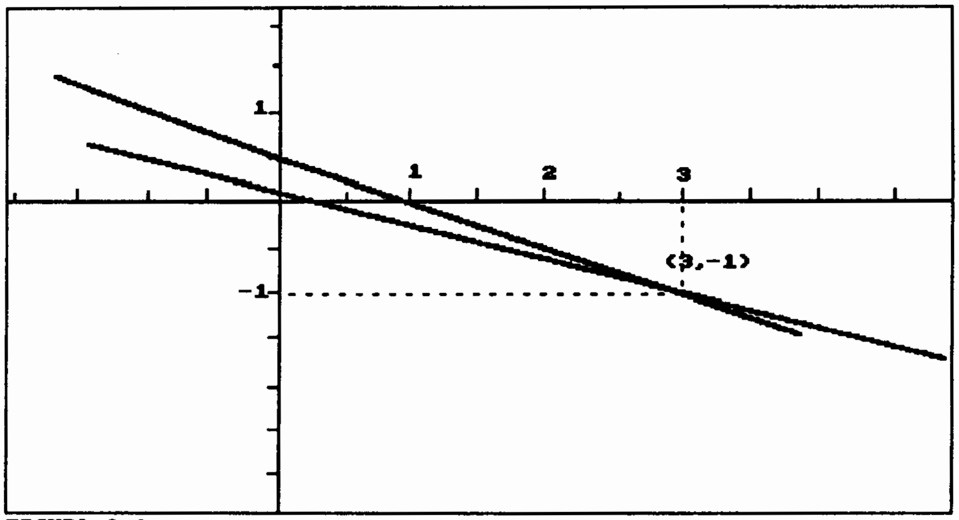


FIGURA 2.1

$$x_1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}4\\11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

Como ya decíamos, se quiere encontrar la combinación de los vectores en el lado izquierdo que dé como resultado el lado derecho. Geométricamente se representa en la figura 2.2

Multiplicamos el vector $[2,4]^t$ por 3 y su longitud se triplica

$$3\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\12\end{bmatrix}$$

Cuando el vector se multiplica por -1 su dirección se invierte

$$-\begin{bmatrix}4\\11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\-11\end{bmatrix}$$

Geométricamente, al sumar vectores se coloca un vector al inicio de donde el otro termina, o algebráicamente sumando sus componentes correspondientes:

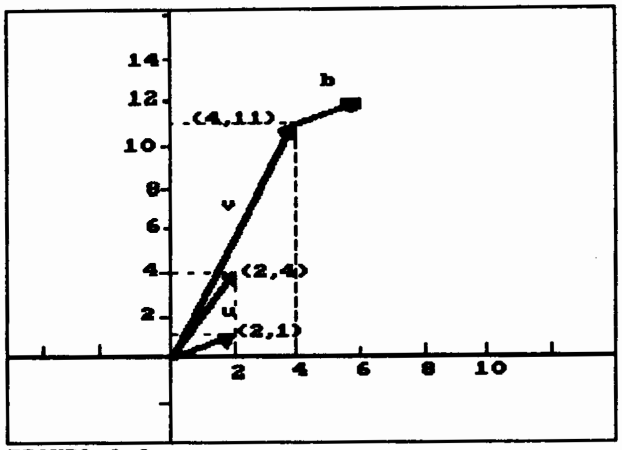


FIGURA 2.2

$$3\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} -1\begin{bmatrix}4\\11\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

Con ambos métodos se obtiene el mismo resultado $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$

Podemos plantearnos ahora la siguientes preguntas:

1. ¿ Cuándo tiene solución el sistema?
2. ¿ Cuántas soluciones tiene?

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.2 Considere el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 7 \\ x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$$

si sumamos las dos ecuaciones obtenemos: $x_1 = 6$ y $x_2 = -1$. Esta es la solución del sistema, es decir, cumple con las dos ecuaciones y además es única, lo que se puede comprobar geométricamente:

En la figura 2.3 se puede ver que la solución es el punto de intersección de las dos rectas.

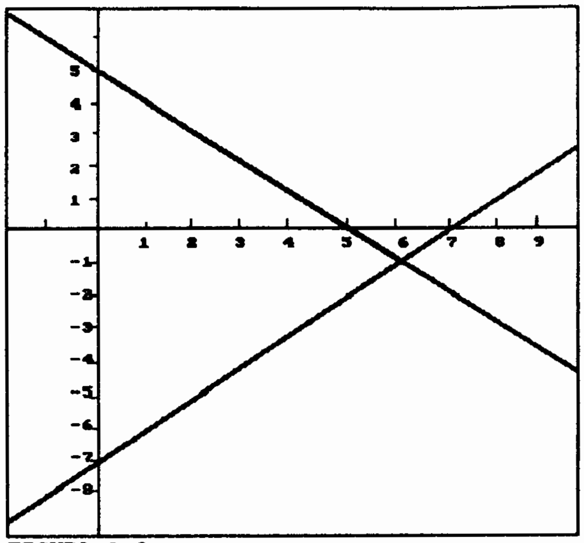


FIGURA 2.3

Ejemplo 2.3 Considere el sistema:

$$x_1 - x_2 = 7 \quad (1)$$
$$2x_1 - 2x_2 = 14 \quad (2)$$

Se puede ver claramente que la ecuación (2) es resultado de multiplicar la primera por (2) de aqui tenemos que $x_2 = x_1 - 7$. Así el par $(x_1, x_1 - 7)$ es una solución al sistema para cualquier número real x_1 por lo tanto el sistema tiene un número infinito de soluciones, tantas como valores pueda tomar x_1. Por ejemplo, los siguientes pares son soluciones:

$$(7,0),\ (0,-7),\ (8,1),\ (1,-6),\ (3,-4),\ \text{y}\ (-2,-9).$$

Lo podemos verificar geométricamente en la figura 2.4

Ejemplo 2.4 Considere el sistema:

$$x_1 - x_2 = 7 \quad (1)$$
$$2x_1 - 2x_2 = 13 \quad (2)$$

si multiplicamos la primer ecuación por dos tenemos:

$$2x_1 - 2x_2 = 14$$

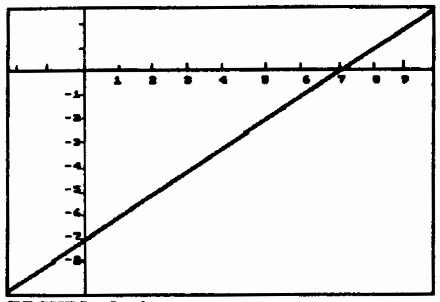


FIGURA 2.4

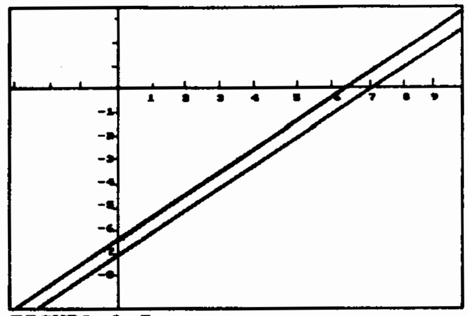


FIGURA 2.5

contrariamente a lo que se afirma en la segunda ecuación, por lo tanto, el sistema no tiene solución, ver figura 2.5.

Considere nuevamente el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 &= b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

si multiplicamos la primer ecuación por a_{22} y la segunda por a_{12} tenemos:

$$\begin{aligned} a_{11}\, a_{22}\, x_1 + a_{12}\, a_{22}\, x_2 &= a_{22}\, b_1 \\ a_{12}\, a_{21}\, x_1 + a_{12}\, a_{22}\, x_2 &= a_{12}\, b_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

El sistema (1) y el sistema (2) son equivalentes. Esto significa que cualquier solución del sistema (1) es una solución del sistema (2) y viceversa. Restando la segunda ecuación de la primera en el sistema (2) se tiene :

$$(a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21})x_1 = a_{22}\, b_1 - a_{12}\, b_2$$

si $(a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}) \neq 0$ se puede dividir entre ésta cantidad y se tiene:

$$x_1 = \frac{a_{22}\, b_1 - a_{12}\, b_2}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}$$

entonces se sustituye éste valor en el sistema (1) y se procede a resolver para x_2 y se habrá encontrado la única solución del sistema.

DEFINICION 2.1 Se define el determinante del sistema (1) como:

Determinante del sistema (1) = $(a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21})$

Y se ha mostrado que si el determinante del sistema (1) es diferente de cero, entonces el sistema tiene una única solución. Si es igual a cero no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.

2.2 MATRICES

Como veremos mas adelante la solución de un sistema de ecuaciones lineales se trata eficientemente ignorando las letras y los signos de igual. El resultado es un ordenamiento de números conocido como **matriz**. las matrices son una herramienta fundamental para realizar cálculos eficientes en álgebra lineal.

Una **matriz** es un ordenamiento rectangular de números, por lo general encerrados en paréntesis o corchetes, por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

es la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 7 \\ x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$$

en general A es una matriz de mxn si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

si $n = m$ la matriz es cuadrada y si $n \neq m$ la matriz es rectangular

OPERACIONES CON MATRICES

<u>Definición 2.2</u> Suma algebráica de matrices: sean A y B dos matrices de orden mxn la suma o diferencia de ambas $A \pm B$ es otra matriz C, de orden mxn, en la que cada elemento de C es igual a la suma o diferencia de los elementos correspondientes de A y B. por ejemplo

<u>Ejemplo 2.5</u> Sean A y B como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

entonces A + B esta dada por

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ 0-1 & 1+2 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Dos matrices de distinto orden no se pueden sumar ni restar. La suma de k matrices A es otra matriz del mismo orden que A cuyos elementos son iguales a los correspondientes de A multiplicados por k.

Ejemplo 2.6 Considere la matriz A como sigue

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

se tiene

$$A + A + A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = 3A$$

en particular -A se llama la matriz opuesta de A.

MULTIPLICACION DE MATRICES.

Considere el sistema lineal:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 - 4x_2 &= 2 \end{aligned} \qquad (3)$$

los datos importantes para éste sistema lineal están contenidos en la matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

y el vector columna

$$b = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

de las constantes que aparecen en el lado derecho. Sea también

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

el vector columna de las incógnitas del sistema (3). Es costumbre abreviar el sistema (3) como:

$$Ax = b$$

o bien

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

esta multiplicación sugiere la multiplicación de la matriz A por un vector columna x. Se define entonces:

<u>DEFINICION 2.3</u> **PRODUCTO PUNTO O ESCALAR.** Dados dos vectores a y b con el mismo número de componentes,el producto punto o escalar de a y b está dado por:

$$a\ b = a_1\ b_1 + a_2\ b_2 + \ldots + a_n\ b_n$$

es esencial diferenciar entre los conceptos de vector y número. El término escalar se suele utilizar en álgebra lineal en lugar de número. El producto punto también se llama <u>producto escalar</u> pues a.b es una cantidad escalar.

<u>Ejemplo 2.7</u> Efectúe el producto escalar de los vectores a y b donde

a) $a = (1, -3, 4)$ y $b = (2, 0, 8)^t$ se tiene entonces:

$$a.b = (1)(2) + (-3)(0) + (4)(8) = 2 + 0 + 32 = 34$$

b) $a = (1, 5, 6)$ y $b = (2, 4)$, se observa que a.b no está definido ya que no tienen el mismo número de componentes.

El producto AB de dos matrices A y B se forma tomando todos los productos punto posibles de los vectores renglón de A por los vectores columna de B. Para que éstos productos estén definidos, el número de componentes de cada renglón de A debe ser igual al número de componentes de cada columna de B. Si AB está definido y

A es de mxn, de modo que sus renglones tengan n componentes, entonces B debe ser de nxs para que las columnas de B tengan también n componentes.

$$AB = (c_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots & a_{in} \\ a_{m1} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \cdots & b_{1j} \cdots & b_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} \cdots & b_{nj} \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}$$

en términos de sumatoria tenemos:

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

AB está definida sólo cuando el número de columnas de A es igual al número de renglones de B. La matriz producto tiene tamaño:

(número de renglones de A)x(número de columnas de B)

<u>Ejemplo 2.8</u> Efectúe el producto de las siguentes matrices A y B

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 9 & -1 \\ 38 & -10 & 4 & 20 \end{bmatrix}$$

2.3 PROPIEDADES DE LAS MATRICES.

Consideremos ahora las siguientes propiedades de las matrices, donde se involucran la suma y el producto de las mismas.

1. A(B + C) = AB + AC (primer propiedad distributiva)
2. (A + B)C = AC + BC (segunda propiedad distributiva)
3. A(BC) = (AB)C (propiedad asociativa)

Sin embargo

4. $AB \neq BA$ en general
5. AB = 0 no implica necesariamente que A=0 o B=0
6. AB = AC no implica necesariamente que B = C

Si A y B son dos matrices cuadradas y se verifica que AB = BA dichas matrices se llaman permutables o conmutativas.

Ejemplo 2.9 Sean las matrices A, B, C y D como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se tiene entonces que $AB = AC$ y $B \neq C$

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

además $AD = 0$ con $A \neq 0$ y $D \neq 0$

CASOS PARTICULARES DE MATRICES CUADRADAS.

DEFINICION 2.4 Una matriz A de manera que $A^{k+1} = A$ siendo k un número entero positivo, se llama **PERIODICA**. Si k es el menor número entero positivo para el cual $A^{k+1} = A$, la matriz A tiene periodo k. Si k = 1, esto es $A^2 = A$, la matriz A se llama **IDEMPOTENTE**.

Ejemplo 2.9

a) Sea la matriz A como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

es periódica de periodo 2, ya que $A^3 = A$.

b) La matríz A es idempotente esto es, $A^2 = A$ con A definida como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

DEFINICION 2.5 Una matriz A tal que $A^p = 0$ siendo p un número entero positivo se llama **NILPOTENTE**. Si p es el menor número entero positivo para el cual $A^p = 0$, la matriz A es nilpotente de índice p.

Ejemplo 2.10

Sea la matriz A como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

es nilpotente de orden 3, $A^3 = 0$.

DEFINICION 2.6 **MATRIZ TRANSPUESTA.** La matriz transpuesta de una matriz A de orden mxn es la matriz A^t de orden nxm que se obtiene permutando los renglones por las columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.11 Encuentre la transpuesta de la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Observe que el elemento a_{ij} de A (renglón i, columna j) es el a_{ji} de A^t (renglón j, columna i)

o bién si

$$A = [a_1, \ldots, a_n] \qquad A^t = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ a_n \end{bmatrix}$$

el producto escalar de dos vectores columna x, y está dado por:

$$\langle x, y\rangle = x^t\, y = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \ldots + x_n\, y_n$$

o bien

$$\langle x, y\rangle = y^t\, x = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \ldots + x_n\, y_n$$

de donde

$$x^t\, y = y^t\, x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

PROPIEDADES DE LAS MATRICES TRANSPUESTAS.

Sean A^t y B^t las transpuestas de las matrices A y B respectivamente, y k un escalar cualquiera; de aqui que

a) $(A^t)^t = A$
b) $(kA)^t = kA^t$

Además se verifica que si $A = A^t$, entonces la matriz A es simétrica.

2.4 RESUMEN

1. Una matriz de mxn es una disposición rectangular ordenada de números que contiene m filas y n columnas.

2. Una matriz de mx1 es un vector columna con m componentes y una matriz de 1xn es un vector fila con n componentes.

3. El producto punto del vector a con componentes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ por el vector b con componentes $b_1, b_2, \ldots, b_n$ es el escalar

$$a.b = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + \ldots + a_n\, b_n.$$

4. El producto AB de una matriz A de mxn y de una matriz B de nxs es la matriz C de mxs cuyo elemento c_{ij} en la i-ésima fila y la j-ésima columna es el producto punto del i-ésimo vector fila de A por el j-ésimo vector columna de B. En general $AB \neq BA$.

5. Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices del mismo tamaño, entonces A + B es la matriz de ese tamaño con elemento $a_{ij} + b_{ij}$ en la i-ésima fila y la j-ésima columna.

6. Para cualquier matriz A y escalar r la matriz rA se halla multiplicando cada elemento de A por r.

7. La transpuesta de una matriz A de mxn es la matriz A^t de nxm que tiene como k-ésimo vector fila el k-ésimo vector columna da A.

2.5 NOTAS HISTORICAS

El término matríz se mencionó por primera vez en la literatura matemática en un artículo de 1850 de James Joseph Sylvester (1814-1897). El significado usual no técnico de ese término es "lugar donde algo se crea, produce o desarrolla". Para Sylvester, entonces, una matríz, que era "un ordenamiento oblongo de términos", era una entidad a partir de la cual uno podía formar varias porciones cuadradas para producir determinantes. Estas últimas cantidades, formadas a partir de matrices cuadradas, eran bastante bien conocidas en ésa epoca.

La multiplicación de matrices se originó en la composición de sustituciones lineales. Aunque hay indicios de dichas ideas en el trabajo de Euler y Lagrange, fue Karl Friedrich Gauss (1777-1855) quien las estudió de modo exhaustivo en su trabajo en 1801, Disquisitiones Arithmeticae, en conexión con formas cuadráticas (funciones con dos variables de la forma $Ax^2 + 2Bxy + cy^2$). En particular, una sustitución lineal de la forma

$$x = ax' + by' \quad y = cx' + dy' \qquad (1)$$

convierte una de dichas formas F en x e y en otra forma F' en x', y'. Si una segunda sustitución

$$x' = ex'' + fy'' \quad y' = gx'' + hy'' \qquad (2)$$

transforma F' en una forma F" en x", y", entonces la composición de las sustituciones, hallada al reemplazar x', y' en (1) por sus valores en (2), da una sustitución que transforma F en F":

$$x = (ae + bg)x'' + (af + bh)y'' \quad y = (ce+dg)x'' + (cf+dh)y'' \qquad (3)$$

La matríz de coeficientes de la sustitución (3) es el producto de las matrices de coeficientes de las sustituciones (1) y (2). Gauss realizó una composición análoga de sustituciones para formas con 3 variables, que da la multiplicación de matrices de 3 x 3.

A Gauss se le suele llamar "príncipe de las matemáticas", pues durante una larga carrera científica hizo importantes contribuciones a campos tan variados como teoría de los números, álgebra, geometría, análisis complejo, astronomía, geodesia y mecánica.

CAPITULO 3

SOLUCION DE SISTEMAS LINEALES

3.1 EL METODO DE REDUCCION DE GAUSS.

Recordemos nuevamente que se pretende resolver sistemas de ecuaciones lineales cuadrados, esto es, con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas;

Sea el sistema:

$$\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n = b_n \end{array} \tag{3.1}$$

Este sistema está completamente determinado por su matriz de coeficientes $A = (a_{ij})$ y el vector columna b con i-ésimo elemento b_i. La matriz aumentada se escribe

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \tag{3.2}$$

y se denota $(A|b)$. El vector columna

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot\cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

cuyas componentes satisfacen el sistema (3.1) es una <u>solución</u> de dicho sistema.

Es fácil ver que las soluciones del sistema (3.1) son las mismas que las de cualquier sistema obtenido de (3.1) por los siguientes procedimientos.

1. Intercambio de dos ecuaciones
2. Multiplicación de una ecuación del sistema (3.1) por una constante $\neq 0$.
3. Sustitución de una ecuación por la suma de si misma con un múltiplo de una ecuación diferente del sistema.

Aplicados al sistema (3.1), estos procedimientos corresponden a las <u>operaciones elementales en las filas</u> que se aplican a toda la matriz aumentada (3.2)

Para resolver el sistema (3.1) mediante el método de Gauss, tratamos de usar operaciones elementales en las filas para reducir la matriz (3.2) a una matriz de la forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & c_1 \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} & c_2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & u_{nn} & c_n \end{array}\right]$$

donde la parte cuadrada U a la izquierda de la partición tiene entradas igual a cero debajo de la diagonal principal. La matriz de coeficientes A original del sistema (3.1) se transforma en una <u>matriz triangular superior U</u> con ceros debajo de la diagonal principal. El sistema se convierte en:

$$Ux = c$$

Si una matriz B se puede obtener de una matriz A a través de operaciones elementales en las filas, entonces B es equivalente por filas a A. Por lo cual las matrices A y U descritas antes son equivalentes por filas.

<u>Ejemplo 3.1</u>

Si se tiene la matiz triangular superior aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right]$$

Halle la solución del sistema

<u>Solución</u>

las ecuaciones correspondientes serian:

$$\begin{aligned} -5x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 3x_2 + 5x_3 &= 8 \\ 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

de la última ecuación se tiene que $x_3 = -2$, sustituyendo en la segunda ecuación se tiene

$$3x_2 + 5(-2) = 8$$

y de aqui $x_2 = 6$

sustituyendo x_2 y x_3 en la primer ecuación se obtiene:

$$-5x_1 - 6 + 3(-2) = 3$$

y de aqui $x_1 = -3$

asi la solución es $x^T = [-3, 6, -2]$. Este procedimiento recibe el nombre de **sustitución regresiva**.

Ejemplo 3.2

Resuelva el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 10 \end{aligned}$$

a través del método de Gauss con sustitución regresiva.

Solución

Se reduce la matriz aumentada por medio de operaciones elementales en las filas. Los pivotes se encierran en un circulo.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array}\right]$$

se intercambian las filas 1 y 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

se suma la fila 1 multiplicada por -2 a la fila 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

se suma la fila 2 a la 3

De la última matriz obtenemos, por sustitución regresiva

$x_3 = 3$, $x_2 = 4$, $x_1 = -1$

REDUCCION DE GAUSS A LA FORMA TRIANGULAR SUPERIOR; CASO DE SOLUCION UNICA

PASO 1 Si la entrada superior de la columna 1 es cero, entonces efectuar una operación de intercambio de filas para obtener un elemento distinto de cero en la parte superior de la columna. Siempre es posible ésto en el caso de solución única. Llamamos pivote al elemento elegido distinto de cero.

PASO 2 Efectuar operaciones elementales en las filas de tal forma que las filas inferiores resultantes tengan cero como primer entrada.

PASO 3 Después del paso 2, la matriz tiene la forma:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & c_1 \\ \hline 0 & x & & x & x \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ 0 & x & & x & x \end{array}\right] \qquad (3.3)$$

y la primer columna está en la forma que queremos. Se elimina (mentalmente) la fila superior y la primera columna de la matriz (3.3) dejando la parte enmarcada de ésta. Se vuelve al paso 1 con ésta matriz mas pequeña y se repite el procedimiento para componer la siguiente columna. Se continúa hasta obtener la forma triangular superior.

3.2 EL METODO DE GAUSS-JORDAN.

Una matriz cuadrada está en la forma diagonal, si todas las entradas fuera de la diagonal principal son cero. El método de Gauss-Jordan es un avance del método de Gauss y usa operaciones elementales en las filas para reducir la parte izquierda de una matriz aumentada a la forma diagonal con todos los pivotes iguales a uno, esto es, a la matriz identidad I. Supóngase por ejemplo que una matriz aumentada se reduce a la forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

se ve de inmediato que la solución al sistema original está dada por $x_1 = 9$, $x_2 = 7$ y $x_3 = -1$

Ejemplo 3.3

Encuentre la solución del sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

mediante la reducción de Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & -5 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 8 & -4 & -20 \end{array}\right]$$

Se suma la fila 1 multiplicada por -2 a la fila 2 y se suma la fila 1 multiplicada por -3 a la fila 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 8 & -4 & -20 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & -4 & -20 \end{array}\right]$$

Se multiplica la fila 2 por -1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & -4 & -20 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & -84 \end{array}\right]$$

Se suma la fila 2 multiplicada por 2 a la fila 1 y se suma la fila 2 multiplicada por -8 a la fila 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & -84 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \end{array}\right]$$

Se multiplica la fila 3 por -1/4

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \end{array}\right]$$

Se suma la fila 3 multiplicada por -1 a la fila 1

de aqui se observa que la solución es $x_1 = 2$, $x_2 = 8$, $x_3 = 21$

3.3 SISTEMAS CON LA MISMA MATRIZ DE COEFICIENTES.

Dados dos sistemas lineales $Ax = b$ con la misma matriz de coeficientes A, pero distintos vectores columna b, suponga que queremos resolver los dos sistemas simultáneamente

$$Ax = b \qquad\qquad Ay = b'$$

entonces en lugar de resolver uno después de otro, es mas eficiente tomar una sola matriz aumentada con la matriz de coeficientes A a la izquierda de la partición y aumentarla con dos vectores columna b y b', a la derecha de la partición. Entonces se reduce esta matriz partida de modo que la parte izquierda tenga forma triangular superior o diagonal , resolviendo asi ambos sistemas simultáneamente por ejemplo:

<u>Ejemplo 3.4</u>

Resuelva los sistemas lineales:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 \phantom{{}- x_3 + 2x_4} &= -10 \\ x_1 - 3x_2 \phantom{{}- x_3} + x_4 &= -4 \\ x_1 \phantom{{}- 3x_2} - x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y_1 - 4y_2 \phantom{{}- y_3 + 2y_4} &= -8 \\ y_1 - 3y_2 \phantom{{}- y_3} + y_4 &= -2 \\ y_1 \phantom{{}- 3y_2} - y_3 + 2y_4 &= 9 \\ 3y_1 - 4y_2 + 3y_3 - y_4 &= -15 \end{aligned}$$

utilizando el método de Gauss- Jordan

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 2 & -4 & 0 & 0 & -10 & -8 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 4 & 9 \\ 3 & -4 & 3 & -1 & -11 & -15 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 & -5 & -4 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 4 & 9 \\ 3 & -4 & 3 & -1 & -11 & -15 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 9 & 13 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 9 & 13 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 11 & 17 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -11 & -17 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -11 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 39 & 52 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & -11 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

A partir de esta última matriz vemos que las soluciones son:

$x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1,\ x_4 = 3;\ y_1 = 0,\ y_2 = 2,\ y_3 = -1,\ y_4 = 4$

De aqui se puede concluir un resultado que se resume en el siguiente teorema:

<u>Teorema 3.1</u>

Sea $Ax = b$ un sistema de n ecuaciones lineales en n incógnitas. El sistema tiene una solución única si y solo si, la matriz A de los coeficientes, es equivalente en filas a la matriz identidad I de nxn.

3.4 MATRICES ELEMENTALES

Recordemos que las operaciones fila en una matriz son:

a) Intercambio de filas
b) Multiplicación de una fila por una constante diferente de cero
c) Sumar el múltiplo de una fila a otra.

Asimismo las operaciones columna de una matriz son las mismas que las operaciones fila. La colección de operaciones fila y columna en una matriz se dicen operaciones matriciales elementales.

Definición 3.1

Una matriz E se dice elemental si resulta de efectuar una operación matricial en la matriz identidad I de orden nxn.

Las matrices elementales son:

E_{pq} = intercambio de filas (columnas) p y q

$E_p^{(\alpha)}$ = multiplicar una fila (columna) p por $\alpha \neq 0$

$E_{pq}^{(\beta)}$ = multiplicar la fila p por β y sumarla a la fila q

Ejemplo 3.5

Sea

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considere las siguientes matrices elementales de 3x3

a) multiplicar la segunda fila de I_3 por -3

$$E_2^{(-3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) intercambiar las filas 2 y 3

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota: $E_{32} = E_{23}$

c) multiplicar la fila 1 por 4 y sumarla a la fila 3

$$E_{13}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que para

$$E_{32}\,A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

se intercambian las filas dos y tres de la matriz A

Si se hace A E_{32} se tiene:

$$A\ E_{32} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}$$

se intercambian las columnas dos y tres de la matriz A

De aqui podemos concluir que: Para efectuar una transformación elemental de fila sobre una matriz A de nxn se aplica la transformación a la matriz I de nxn obteniendose la matriz elemental E correspondiente y a continuación se multiplica A por la izquierda por E; equivalentemente para efectuar una transformación elemental de columna sobre una matriz A, se multiplica A por la derecha por la matriz E correspondiente.

<u>Uso de matrices elementales</u>

La reducción de una matriz cuadrada a la forma triangular superior U o diagonal se puede lograr a través de multiplicaciones sucesivas por la izquierda por matrices elementales en las filas, entonces existen matrices elementales E_1, E_2, ..., E_t tales que:

$$U = (E_t \ldots E_2\ E_1\ )\ A$$

<u>Ejemplo 3.6</u>

Considere las matrices

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

especifique si existe una matriz elemental E tal que AE = B o EA = B

Solución:

a) $AE_1^{(2)} = B$ o $BE_1^{(\frac{1}{2})} = A$

b) $E_{13}^{(-1)} A = B$ o $E_{13}^{(1)} B = A$

Ejemplo 3.7

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Encuentre una matriz C tal que CA sea una matriz triangular superior equivalente en filas a A.

Solución:

Sean: $E_1 = E_{12}$ $\quad E_2 = E_{13}^{(-2)}$ $\quad E_3 = E_{23}^{(1)}$

entonces $C = E_3\, E_2\, E_1$

3.5 MATRICES INVERSAS.

DEFINICION 3.2 Sea A una matriz de nxn. Una matriz C de nxn es una inversa de A si CA = AC = I, donde I es la matriz identidad de nxn.

TEOREMA 3.2 (UNICIDAD DE LA INVERSA) Sea A una matriz de nxn con inversa C de modo que CA = AC = I. Si D es una matriz de nxn tal que AD = I, entonces C = D

demostración:
Como el producto de matrices es asociativo, se tiene:

$$C(AD) = (CA)D$$

pero AD = I y CA = I entonces

$$C(AD) = CI = C \quad \text{y} \quad (CA)D = ID = D$$

de donde C = D

La inversa de una matriz A se denota por A^{-1}

DEFINICION 3.3 Una matriz cuadrada que tiene inversa se llama **invertible**. Si tal matriz cuadrada no tiene inversa se llama **singular**

Ejemplo 3.8

Determine la inversa de la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

haciendo el producto de AC e igualando a I se tiene:

$$\begin{array}{ll} c_{11} = \tfrac{1}{2} & c_{12} = c_{13} = 0 \\ c_{22} = \tfrac{1}{4} & c_{21} = c_{23} = 0 \\ c_{33} = 1 & c_{31} = c_{32} = 0 \end{array}$$

de donde

$$A^{-1} = C = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.9

Determine la inversa de la matriz B

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix}$$

donde B_i son matrices cuadradas.

Solución:

Sea C la inversa de B entonces:

$$BC = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n3} \end{bmatrix}$$

de aqui se tiene:

$$\begin{aligned} B_1\ C_{11} &= I_{n1} \\ B_2\ C_{22} &= I_{n2} \\ B_3\ C_{33} &= I_{n3} \end{aligned}$$

se despejan las c'is y se obtiene:

$$B^{-1} = C = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & B_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & B_3^{-1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.10

Sea la matriz A como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

donde $b \neq 0$ y $c \neq 0$ calcule la inversa de A

Solución:

Se puede expresar A como producto de matrices A_1, A_2 y A_3 tales que:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \underset{A_1}{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A_3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}}$$

entonces A^{-1} se puede ver como

$$\underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}} = \underset{A_3^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}} \underset{A_2^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A_1^{-1}}{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

PROPOSICION 3.1 Sean A y B matrices de nxn cuyas inversas son conocidas, entonces

a) $(A^{-1})^{-1} = A$ (significa que A^{-1} tiene inversa)
b) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ (significa que AB tiene inversa)

demostración

Se demostrará el inciso b) el a) se deja al estudiante como ejercicio.

b) Se da por supuesto que existen matrices A^{-1} y B^{-1} tales que $AA^{-1} = I$ y $BB^{-1} = I$. Utilizando la ley asociativa para producto de matrices, tenemos que:

$$(AB)(B^{-1} A^{-1}) = [A(BB^{-1})] A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I$$

en forma similar

$$(B^{-1} A^{-1})(AB) = [B^{-1} (A^{-1} A)]B = [B^{-1} (I)]B = BB^{-1} = I$$

por lo tanto $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

INVERSAS DE MATRICES ELEMENTALES

Sea E_{ik} una matriz elemental de intercambio de renglones obtenida al intercambiar los renglones ik. Recuerde que $E_{ik}A$ afecta intercambiando los renglones ik de A; donde A es cualquier matriz del mismo tamaño que E_{ik}. En particular al tomar $A = E_{ik}$ vemos que $E_{ik}E_{ik}$ intercambia las filas ik de E y por lo tanto, devuelve a E_{ik} a I así:

$$E_{ik} E_{ik} = I$$

si multiplicamos el renglón i por un escalar r distinto de cero, entonces

$$E_i^{(r)} E_i^{(1/r)} = I$$

si se tiene $E_{pq}^{(s)}$ entonces su inversa está dada por:

$$E_{pq}^{(s)} E_{pq}^{(-s)} = I$$

por lo tanto: toda matriz elemental es invertible.

Ejemplo 3.11

Encuentre las inversas de las siguientes matrices elementales:

$$E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_{31}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$[E_{12}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[E_1^{(3)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[E_{31}^{(4)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de Inversas

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de nxn. Para hallar A^{-1}, si es que existe, se debe encontrar una matriz $X = (x_{ij})$ de nxn tal que $AX = I$, esto es, tal que:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.4)$$

la ecuación matricial (3.4) corresponde a n^2 ecuaciones lineales con las n^2 incógnitas x_{ij}, hay una ecuación lineal para cada una de las n^2 entradas en una matriz de nxn. Por ejemplo, si se igualan las entradas de la posición de la segunda fila y primera columna a cada lado de la ecuación (3.4) obtenemos la ecuación lineal:

$$a_{21}\, x_{11} + a_{22}\, x_{21} + \dots + a_{2n}\, x_{n1} = 0$$

de estas n^2 ecuaciones lineales, n de ellas comprenden las n incógnitas x_{i1} para $i = 1,2,\dots,n$ y éstas ecuaciones están dadas por la ecuación con vectores columna

$$A\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \cdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

Hay también n ecuaciones que incluyen las n incógnitas x_{i2} para i = 1,2,...,n y así sucesivamente. Además de la ecuación (3.5) hay que resolver

$$A\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \cdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \qquad A\begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \cdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cada sistema tiene la matriz de coeficientes A por lo que podemos formar la matriz aumentada:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

Mediante operaciones elementales y usando Gauss-Jordan se obtiene

$$[I|D] = \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{array}\right]$$

de donde $D = A^{-1} = (d_{ij})$

Ejemplo 3.12

Encuentre la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

Escribimos $[A|I]$ y efectuamos operaciones elementales para obtener $[I|A^{-1}]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & 2/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 7/5 & 2/5 & -1/5 & 1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1/7 & 3/7 & -15/7 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & -1/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 & -1/7 & 5/7 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/7 & 5/7 & -11/7 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & -1/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 & -1/7 & 5/7 \end{array}\right] = [I|A^{-1}]$$

de aqui se tiene

$$\begin{bmatrix} -3/7 & 5/7 & -11/7 \\ 2/7 & -1/7 & -2/7 \\ 2/7 & -1/7 & 5/7 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Dada una matriz, a menudo no se sabe de antemano si es invertible o no. Si se trata de aplicar este procedimiento a una matriz que no es invertible, en algún momento durante el proceso, aparecerá un renglón de ceros en el lado izquierdo, como lo ilustra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.13

Encuentre la inversa de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución:

Escribimos $[A|I]$ y efectuamos operaciones elementales para obtener $[I|A^{-1}]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

de aqui se puede observar que ya no es posible seguir efectuando operaciones elementales por lo cual la matriz A no tiene inversa.

Podemos resumir el procedimiento para encontrar la inversa de una matriz de la siguiente manera:

> **Cálculo de A^{-1}**
>
> **Paso 1: Formar la matriz aumentada $[A|I]$**
>
> **Paso 2: Aplicar el método de Gauss-Jordan para reducir $[A|I]$ a $[I|D]$. Si se puede hacer la reducción entonces $A^{-1} = D$. De no ser asi A^{-1} no existe.**

CONDICIONES PARA QUE EXISTA A^{-1}

TEOREMA 3.3 **Si A es una matriz de nxn, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas**

a) A es invertible
b) $AX = 0$ unicamente tiene la solución trivial
c) A es equivalente por renglones a I_n

demostración:

a --> b) Suponga que A es invertible siendo x_0 cualquier solución de $AX = 0$, por lo tanto $Ax_0 = 0$. Multiplicando los dos lados de la ecuación por A^{-1} resulta $A^{-1}(Ax_0) = A^{-1}\,0$ o bién $(A^{-1}A)x_0 = 0$ es decir $Ix_0 = 0$ de donde $x_0 = 0$ por lo cual $AX = 0$ unicamente tiene la solución trivial.

b -->c) Sea $AX = 0$ la forma matricial asociada al sistema

$$\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = 0 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n = 0 \end{array} \qquad (3.6)$$

suponga también que el sistema solamente tiene la solución trivial. Si se resuelve empleando la eliminación de Gauss- Jordan, el sistema de ecuaciones correspondiente a la forma escalonada de la matriz aumentada será:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & & = 0 \\ & x_2 & & = 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & x_n & = 0 \end{array}$$

asi la matriz aumentada asociada a (3.6) es igual a:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{array}\right]$$

y se puede llevar a la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right]$$

mediante una serie de operaciones elementales en los renglones. Si se elimina la última columna (de ceros) en ambas matrices, se puede concluir que A se redujo a I_n mediante una serie de operaciones elementales en los renglones, es decir, A es equivalente por renglones a I_n.

c --> a) Suponga que A es equivalente por renglones a I_n, o lo que es lo mismo A se puede reducir a In mediante una serie finita de operaciones elementales en los renglones, esto se puede hacer multiplicando por la izquierda por una matriz elemental adecuada. De ésta manera, es posible hallar matrices elementales E_1, E_2, ..., E_k tales que

$$E_k \ldots E_2\, E_1\, A = I_n$$

como E_1, $E_2, \ldots,$ E_k son invertibles premultiplicando en forma sucesiva los dos lados de la ecuación por $E_k^{-1}, \ldots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$ se obtiene

$$A = E_1^{-1}\, E_2^{-1} \ldots\, E_k^{-1}\, I_n = E_1^{-1}\, E_2^{-1} \ldots\, E_k^{-1}$$

como A se puede expresar como un producto de matrices invertibles, entonces A es invertible.

Ejemplo 3.14

Calcule la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \underset{E_{12}}{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 1 & 0 \end{array}\right]} \approx$$

$$\approx \underset{E_{12}^{(-2)}}{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]} \approx \underset{E_{21}^{(-4)}}{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]}$$

por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora expresamos A como producto de matrices elementales:

si $E_{21}^{(-4)} E_{12}^{(-2)} E_{12} A = I$

entonces $A = E_{12} E_{12}^{(2)} E_{21}^{(4)}$ donde

$$E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{12}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad E_{21}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Recuerde, que queremos resolver un sistema $Ax = b$, esto lo podemos hacer a través del método de eliminación de Gauss y obtener un sistema equivalente $Ux = c$ donde U es una matriz triangular superior.

Ejemplo 3.15

Sea el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 \phantom{{}+ x_3} &= -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

en términos matriciales se tiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{vmatrix}$$

efectuando operaciones elementales se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \approx \underset{E_{12}^{(-2)}}{\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right]}$$

$$\approx \underset{E_{13}^{(1)}}{\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right]} \approx \underset{E_{23}^{(3)}}{\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right]}$$

y se obtiene

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

las matrices elementales usadas son:

$$E_{12}^{(-2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{13}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{23}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Todas estas matrices elementales son triangulares inferiores ya que:

a) Si se tiene $E_{p}^{(\alpha)}$ las matrices son diagonales, esto es son triangulares inferiores y superiores.

b) Si se tiene $E_{pq}^{(\beta)}$ las matrices son triangulares inferiores si q>p

Por lo tanto las operaciones matriciales que convierten a A en U son:

$$E_{23}^{(3)} \; E_{13}^{(1)} \; E_{12}^{(-2)} \; A = U$$

de manera semejante

$$E_{23}^{(3)} \; E_{13}^{(1)} \; E_{12}^{(-2)} \; b = c$$

3.6 FACTORIZACION LU

¿Qué hacemos para regresar de U a A? ¿Cómo podemos deshacer los pasos de la eliminación gaussiana?

No es difícil deshacer un solo paso, por ejemplo en el paso a) en lugar de restar, sumamos al segundo renglón el doble del primero, de ésta manera se invierte la matriz elemental $E_{12}^{(-2)}$ y se tiene:

$$E_{12}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

análogamente para b) y c) tenemos las matrices inversas

$$E_{13}^{(-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_{23}^{(-3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

respectivamente. Dichas matrices deshacen por separado cada uno de los pasos a), b) y c). Para deshacer todo el proceso y ver que matriz regresa a la matriz U en A, nos fijamos en que: c) fue el último paso en realizarse al ir de A a U, por lo que debe ser el primero en invertirse cuando se va en dirección contraria de aqui que:

$$A = E_{12}^{(2)} \; E_{13}^{(-1)} \; E_{23}^{(-3)} \; U$$

la matriz L que lleva a U de regreso a A debe ser el producto de las 3 matrices

$$L = E_{12}^{(2)}\ E_{13}^{(-1)}\ E_{23}^{(-3)}$$

de aqui que $A = LU$, es la factorización de la matriz A como producto de dos matrices L triangular inferior (L = lower) y U triangular superior (U = upper).

La matriz L es la clave de la eliminación gaussiana, es el vínculo entre la matriz A y la matriz U a la que llegamos.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz L asi construida es triangular inferior con unos en la diagonal principal. Los elementos debajo de la diagonal son precisamente los multiplicadores 2, -1, -3 usados en los 3 pasos de la eliminación. También podemos observar que:

$$L^{-1} = E_{23}^{(3)}\ E_{13}^{(1)}\ E_{12}^{(-2)}$$

por lo tanto

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

<u>Ejemplo 3.16</u>

Redusca la matriz A a la forma triangular superior U y cree la matriz L.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>Solución:</u>

Para hacer mas explicita la forma en que se construye la matriz L, haremos el proceso en dos columnas en una de las cuales se va a iniciar con la matriz A y en la otra con la matriz identidad, se van a ir efectuando las operaciones elementales simultáneamente en ambas matrices para asi al finalizar el proceso obtener las matrices U y L.

Reducción da A a U

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$E_{12}^{(-2)}$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$E_{12}^{(-2)}$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$E_{13}^{(1)}$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} = U$$

$E_{23}^{(-3)}$

Creación de L

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E_{12}^{(2)}$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E_{12}^{(-2)}$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E_{13}^{(-1)}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$E_{23}^{(-3)}$

Ahora veremos como se puede utilizar la información conservada en L de éste ejemplo para resolver un sistema lineal $Ax = b$ con ésta matriz A.

<u>Ejemplo 3.17</u>

Utilice la matriz L para hallar el vector columna c que se presentaría si redujeramos $(A|b)$ a $(U|c)$ aplicando esas mismas operaciones en los renglones.

$$b = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$l_{21} = 2$ significa multiplicar el renglón 1 por -2 y sumarlo al renglón 2 $\approx \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$

$l_{31} = -1$ significa multiplicar el renglón 1 por 1 y sumarlo al renglón 3 $\approx \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

$l_{32} = 3$ significa multiplicar el renglón 2 por -3 y sumarlo al renglón 3 $\approx \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix} = c$

PROPIEDADES

1. La matriz A puede escribirse, mientras que ninguno de los pivotes sea cero, como un producto LU de una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U.

2. Los elementos de la diagonal principal de L son unos, y debajo de la diagonal están los multiplicadores l_{ij}.

3. U es la matriz de coeficientes que obtenemos después de la eliminación y antes de la sustitución regresiva, los elementos de su diagonal son los pivotes.

Ejemplo 3.18

Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

entonces una factorización de A = LU sería:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

los 16 elementos de A se pueden usar para determinar parcialmente los 10 elementos desconocidos de L y el mismo número que los de U. Sin embargo si el procedimiento nos debe llevar a una solución única, se necesitan cuatro condiciones adicionales para los elementos de L y U, el método que hemos venido usando consiste en que $l_{11} = l_{22} = l_{33} = l_{44} = 1$. Este método se conoce como <u>Método de Doolittle</u>. Para éste ejemplo se tiene:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/5 & 1 & 0 \\ -1/6 & 1/10 & -9/37 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 10/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 37/10 & -9/10 \\ 0 & 0 & 0 & 191/74 \end{bmatrix}$$

Otro método comúnmente usado para factorizar es el Método de Crout el cual requiere que los elementos de la diagonal principal de U sean iguales a uno, y que la matriz A sea positiva definida o estrictamente dominante diagonalmente.

<u>TEOREMA 3.4</u>

Si el procedimiento de eliminación gaussiana puede aplicarse al sistema $Ax = b$ sin intercambio de renglones, entonces la matriz A puede factorizarse como producto de una matriz triangular inferior L con una matriz triangular superior U.

$$A = LU$$

VENTAJAS DE LA FORMA LU

1. Se puede ver que la forma LU sirve para ahorrar trabajo si se tiene una matriz de coeficientes A y se modifica el vector b por un nuevo vector b' entonces ya no se tiene que volver a resolver todo el sistema.

2. Mayor rapidéz en tiempo de computadora. Supongamos que a cada división y cada multiplicación-sustracción le asignamos una sola operación. Al principio cuando la primer ecuación tiene longitud n, lleva n operaciones por cada cero que logramos en la primera columna: una para encontrar el múltiplo l, y las otras para encontrar las nuevas entradas a lo largo del renglón. Hay n-1 renglones bajo la primera, de modo que el primer paso de la eliminación necesita $n(n-1) = n^2 - n$ operaciones. (Otra forma de obtener $n^2 - n$ es la siguiente: es necesario cambiar las n^2 entradas exceptuando la primera fila). Obsérvese ahora que las etapas posteriores son mas rápidas, porque las ecuaciones se vuelven progresivamente mas cortas: cuando la eliminación ha llegado a k ecuaciones, sólo se necesitan $k^2 - k$ operaciones para desalojar la columna debajo del pivote, empleando el mismo razonamiento

aplicado a la primera etapa, cuando k era igual a n, esto es

$$P = (1^2 + \ldots + n^2) - (1 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{-n(n+1)}{2} = \frac{n^3 - n}{3}$$

para n suficientemente grande $P \approx n^3/3$

La sustitución regresiva es mas rápida. La última incógnita se encuentra en una operación (una división entre el último pivote), la penúltima requiere dos, y asi sucesivamente. La sustitución regresiva requiere un total de operaciones de

$$Q = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n\ (n+1)}{2} \approx \frac{n^2}{2} \quad \text{para n grande}$$

Una vez que conocemos LU podemos encontrar la solución x' correspondiente a cualquier nuevo lado derecho b', en sólo n^2 operaciones. (Usar L^{-1} o U^{-1} sólo nos haría perder tiempo, igual si se tiene A^{-1} aunque el producto $A^{-1}b$ también requiere n^2 operaciones). Utilizar la técnica LU tiene al menos dos ventajas. En primer lugar para hallar U se requieren $n^3/3$ operaciones para n grande y para hallar A^{-1} se necesitan n^3 operaciones, si n = 1000 la diferencia en tiempo de computadora es grande, además lo que queremos es la solución no todas las entradas de la inversa.

OBSERVACIONES A LA FORMA LU

1. La forma LU es "asimétrica" en un sentido: a lo largo de su diagonal principal, U contiene los pivotes, mientras que L siempre unos. Esto es fácil de corregir, basta factorizar de U una matriz diagonal D constituida por los pivotes $d_1, d_2, \ldots, d_n$

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/d_1 & u_{13}/d_1 & \ldots u_{1n}/d_1 \\ & 1 & u_{23}/d_1 & \ldots u_{2n}/d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

y se escribe A como A = LDU. L es triangular inferior con unos en la diagonal, U es triangular superior con unos en la diagonal y D es la matriz diagonal de los pivotes.

2. No hay mucha libertad al efectuar el proceso de eliminación ya que las operaciones en los renglones de manera aleatoria podrían fácilmente destruir en un paso los ceros generados en un paso anterior.

Ejemplo 3.19

Se expresa A en la factorización LDU como sigue:

$$A = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}} \underset{D}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

3.7 LA FORMA PA = LU

¿Que pasa cuando el número que se va a usar como pivote es igual a cero? Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

no podemos usar ningún multiplo de la primer ecuación para aniquilar el coeficiente 3. Entonces intercambiamos las dos ecuaciones y en este caso sencillo la matriz será triangular superior y el sistema

$$\begin{aligned} 3\,x_1 + 4\,x_2 &= b_2 \\ 2\,x_2 &= b_1 \end{aligned}$$

se puede resolver fácilmente por sustitución regresiva. Expresando ésto en términos matriciales, necesitamos encontrar la matriz de permutación que produce el intercambio de renglones, esto es:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

lo mismo sucede con b por lo que $PAx = Pb$
Si A es una matriz mas grande por ejemplo de 4x4 y con $a_{22} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & d & 6 \\ 0 & c & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Nos fijamos en la columna con pivote igual a cero, si hay algún elemento diferente de cero se intercambia el renglón, si no entonces la matriz es singular. En éste caso se intercambian las filas 2 y 4 y la matriz de permutación P_{24} que produce el intercambio es:

$$P_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nótese que P_{24} es la matriz I_4 con las filas 2 y 4 intercambiadas. En general la matriz de permutación P_{kl} es la idéntica con las filas k y l intercambiadas y $P_{kl}A$ produce el mismo intercambio de filas en A, esto es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & d & 6 \\ 0 & c & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & c & 7 & 8 \\ 0 & 0 & d & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

seguimos con la siguiente columna, si d = 0 entonces hacemos P_{34} y el sistema es no singular entonces tenemos $P_{34}P_{24}$ A y terminamos. Otros dos ejemplos serían:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 2 & 8 & 8 \end{bmatrix} \text{-->} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{-->} \overset{PA}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}} \quad \text{(no singular)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 9 & 8 \end{bmatrix} \text{->} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(singular)}$$

¿Que sucede con la factorización LU (o LDU) cuando hay intercambio de renglones? Se obtiene U triangular superior, pero ahora no solo tenemos matrices elementales E_{ij} sino también matrices de permutación P_{kl}, cuyo producto no es triangular inferior. Asi que A no puede expresarse como A = LU. Sin embargo podemos reemplazar A por la matriz PA. Donde P es una matriz de permutación que es el producto de cada una de las permutaciones, resumiendo:

OBSERVACION:

En el caso no singular existe una matriz de permutación P que reordena los renglones de A de modo que PA admite una factorización con pivotes diferentes de cero, y PA = LU (o LDU). En éste caso hay solución única a Ax = b, la cual se encuentra a través de la eliminación. En el caso singular ningún reordenamiento puede producir pivotes distintos de cero.

Ejemplo 3.20

Dada la matriz A, factoricela a la forma LU

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

se observa que se necesitan intercambiar las filas 2 y 3; asi podemos usar:

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de tal forma que

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$

de donde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y se verifica que PA = LU

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = LU$$

La factorización LU también se puede usar para resolver sistemas donde la matriz A está elevada a una potencia, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.21

Resuelva el sistema lineal $A^3x = b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 9 \\ -17 \\ -44 \end{bmatrix}$$

Solución:

$A^3x = b$	lo podemos escribir como:
$A(A^2x) = b$	sea $y = A^2x$ entonces nos queda
$Ay = b$	como $A^2x = y$ entonces $A(Ax) = y$ entonces sea $z = Ax$ y obtenemos
$Az = y$	se resuelve $Az = y$ para z y finalmente resolvemos
$Ax = z$	para la x deseada.

Como en todo el proceso siempre usamos la misma matriz de coeficientes A es rentable hallar L y U.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvemos para $Ay = b$ con la información conservada en L y se tiene

$$b = \begin{bmatrix} 9 \\ -17 \\ -44 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -35 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -36 \end{bmatrix}$$

entonces usando U tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -36 \end{bmatrix}$$

y de aqui

$$y = \begin{bmatrix} -7 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Para resolver Az = y se aplica la información conservada en L a y

$$y = \begin{bmatrix} -7 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

y nuevamente usamos U

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

y de aqui

$$z = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

para resolver Ax = z usamos la información conservada en L para aplicarla a z y obtenemos

$$z = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y nuevamente usamos U

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y se tiene:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.8 MATRICES ESPECIALES

DEFINICION 3.4 Se dice que la matriz A de nxn es estrictamente dominante diagonalmente si satisface:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{para toda } i = 1,\ldots,n$$

y sólo dominante diagonalmente si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{para toda } i = 1,\ldots,n$$

Ejemplo 3.22

Sea la matriz A como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

se dice que A es estrictamente dominante diagonalmente ya que

$$|7| > |2| + |0| \qquad |5| > |3| + |-1| \qquad |-6| > |0| + |5|$$

TEOREMA 3.5

Si A es una matriz de nxn estrictamente dominante diagonalmente, entonces A es no-singular. Además, se puede efectuar eliminación gaussiana en cualquier sistema lineal de la forma Ax = b para obtener su solución única sin intercambio de renglones o columnas.

demostración:

Para probar que A es no singular, sea el sistema lineal Ax = 0, y supongamos que existe una solución $x = (x_i) \neq 0$ a este sistema, en este caso para alguna k tal que:

$$0 < |x_k| = \max_{1 \le j \le n} |x_j|$$

como $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = 0$ para toda i = 1,2,...,n esto es

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n &= 0 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n &= 0 \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n &= 0 \end{aligned}$$

para i = k

$$a_{k1}\, x_1 + a_{k2}\, x_2 + \ldots + a_{kk}\, x_k + \ldots + a_{kn}\, x_n = 0$$

despejando se tiene

$$a_{kk}\, x_k = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj}\, x_j$$

esto implica que

$$|a_{kk}|\, |x_k| \le - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|\, |x_j|$$

o

$$|a_{kk}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \le \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$$

lo que contradice el hecho de que A sea estrictamente dominante diagonalmente, y esto implica que la única solución de Ax = 0 es x=0 que como ya habíamos visto en el teorema 3.3 es equivalente a la no singularidad de A.

DEFINICION 3.5 Sea A una matriz simétrica, A es positiva definida si $x^tAx > 0$ para toda $x \neq 0$

Ejemplo 3.23

Verifique si las siguientes matrices son positivas definidas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$x^tAx = [x_1,\ x_2] \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = x_1^2 + 2x_2^2 > 0$$

para toda x, por lo tanto A es positiva definida.
de igual forma se efectúa para B y se tiene:

$$x^tBx = 4x_1^2 - x_2^2$$

si $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$ entonces $x^tBx < 0$ por lo tanto B no es positiva definida.

Para C se tiene:

$$x^tCx = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0$$

a menos que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

TEOREMA 3.6

Si A es una matriz de nxn positiva definida, entonces A es no singular. Además, la eliminación gaussiana se puede aplicar a cualquier sistema lineal de la forma Ax = b para obtener su solución única sin intercambios de renglones o de columnas.

demostración

--->) Si $x \neq 0$ es un vector que satisface Ax = 0, entonces $x^tAx = 0$ es imposible ya que A es positiva definida, lo que implica que Ax = 0 solo tiene la solución trivial y por lo tanto es no singular. La otra parte de la demostración se omite.

3.9 RESUMEN

1. Un sistema lineal tiene asociada una matriz partida (o aumentada), que tiene la matriz de coeficientes del sistema a la izquierda de la partición y el vector columna de constantes a la derecha de la partición.

2. Las operaciones elementales en las filas son:

   a) Intercambio de filas
   b) Multiplicación de una fila por una constante distinta de cero.
   c) Multiplicación de una fila por una constante distinta de cero y sumarla a otra fila.

3. En el método de Gauss, se resuelve un sistema lineal cuadrado usando operaciones elementales en filas y reduciendo la matriz partida de modo que la parte izquierda de la partición se convierta en triangular superior. Luego se halla la solución mediante sustitución regresiva.

4. El método de Gauss-Jordan es análogo al método de Gauss, excepto que la matriz de coeficientes del sistema se reduce a la matriz identidad I. Entonces, la solución aparece como el vector columna a la derecha de la partición en la matriz aumentada reducida.

5. Se pueden resolver al mismo tiempo varios sistema lineales con la misma matriz de coeficientes aumentando la matriz de coeficientes con los vectores columna de las constantes de todos los sistemas.

6. Sea A una matriz cuadrada. Una matriz cuadrada C tal que $CA = AC = I$ es la inversa de A y se expresa $C = A^{-1}$. Si tal inversa A^{-1} de A existe, entonces se dice que A es invertible. La inversa de una matriz invertible A es única. Una matriz cuadrada que no tiene inversa se llama singular.

7. La inversa de una matriz cuadrada A existe si, y sólo si, A puede reducirse a la matriz identidad I mediante operaciones elementales en las filas, o también, si y sólo si, A es igual a un producto de matrices elementales. En éste caso, A es igual al producto, tomado de izquierda a derecha, de las inversas de las matrices elementales sucesivas que corresponden a la sucesión de operaciones en las filas que reduce A a I.

8. Para hallar A^{-1}, si existe, se forma la matriz partida $(A|I)$ y se aplica el método de Gauss-Jordan para reducir esta matriz a $(I|D)$. Si se puede hacer ésto, entonces $A^{-1} = D$. De lo contrario, A no es invertible.

9. La inversa de un producto de matrices invertibles es el producto de las inversas en orden inverso.

10. Si A es una matriz invertible de nxn que puede reducirse por filas a una matriz triangular superior U sin intercambio de filas, entonces existe una matriz triangular inferior L de nxn tal que A = LU

11. La matriz L se puede hallar como sigue: se comienza con la matriz identidad I de nxn. Si durante la reducción de A a U se multiplica la fila i por r y se suma el resultado a la fila k, reemplazar el cero de l a fila k y columna i de la matriz identidad por -r. El resultado final obtenido de la matriz identidad es la matriz L.

12. Una vez que A se ha reducido a U y se ha hallado L se puede encontrar la solución de Ax = b para cualquier nuevo vector columna b.

13. Si A es como en el punto (10), entonces A tiene una factorización única de la forma A = LDU, donde

L es triangular inferior con todas las entradas diagonales 1,
U es triangular superior con todas las entradas diagonales 1,
D es una matriz diagonal con todas las entradas en la diagonal igual a los pivotes.

14. Para culaquier matriz invertible A, existe una matriz de permutación P tal que PA se puede reducir por filas a una matriz triangular superior U y tiene las propiedades descritas para A en los puntos 10, 11, 12 y 13.

3.10 NOTAS HISTORICAS

El método de solución de Gauss se llama asi debido a que Gauss lo describió en un artículo detallando los cálculos que hizo para deteminar la órbita del asteriode Pallas. Los parámetros de la órbita tenían que determinarse mediante observaciones del asteroide durante el periodo de seis años comprendido entre 1803 y 1809. Esto dió lugar a seis ecuaciones con seis incógnitas con coeficientes bastante complicados. Gauss mostró cómo resolver éstas ecuaciones reemplazándolas sistemáticamente por un nuevo sistema en el que sólo la primer ecuación tenía seis incógnitas, la segunda tenía cinco, la tercera sólo cuatro, y así sucesivamente, hasta que la sexta ecuación tenía sólo una incógnita. Evidentemente, ésta última ecuación se podía resolver con facilidad, las incógnitas restantes se hallaron entonces por sustitución regresiva.

La parte Jordan del método de Gauss-Jordan es, en esencia, una técnica sistemática de "sustitución regresiva". En ésta forma la describió Wilhelm Jordan (1842-1899), un profesor alemán de geodesia, en su Manual de geodesia. Este trabajo se publicó por primera vez en alemán en 1873 y desde entonces ha tenido diez ediciones además de traducciones a otras lenguas. Por otro lado, el propio Jordan atribuye el método a Friedrich Robert Helmert y Peter Andreas Hansen, unos años antes.

Wilhelm Jordan fue importante en su campo a finales del siglo XIX; participó en varias exploraciones geodésicas en Alemania, asi como en la primera exploración importante en el desierto de Libia. también fue editor fundador de la revista alemana de geodesia. Su interés por hallar un método sistemático para resolver grandes sistemas de ecuaciones surge de la frecuente aparición de éstos en problemas de triangulación.

Un método de reducción matricial para resover un sistema de ecuaciones lineales se encuentra en el antiguo trabajo chino "Nueve capítulos del arte matemático". El autor plantea la siguiente solución al sistema.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

El diagrama de los coeficientes se dispone en un ábaco como sigue:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Lo que nos induce a multiplicar la columna del centro por 3 y después restar a la columna de la derecha "el máximo de veces posible"; lo mismo se hace con la columna de la izquierda. Los nuevos diagramas son entonces:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

La siguiente instrucción es multiplicar la columna de la izquierda por 5 y restar de nuevo la columna del centro el máximo de veces posible, lo que da

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

Así, el sistema se redujo al sistema $3x + 2y + z = 39$, $5y + z = 24$, $36z = 99$, del cual se halla fácilmente la solución completa.

La noción de la inversa de una matriz apareció por primera vez en 1855 en un escrito de Arthur Cayley (1821-1895) y se amplió en un artículo publicado tres años más tarde titulado "Una memoria sobre la teoría de matrices". En éste trabajo, Cayley describe las propiedades básicas de las matrices, puntualizando que la mayoría se deriva del trabajo con conjuntos de ecuaciones lineales. En particular, la inversa procede de la idea de resolver un sistema

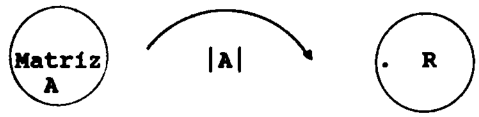
$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz \\ Y &= a'x + b'y + c'z \\ Z &= a''x + b''y + c''z \end{aligned}$$

para x, y, z en función de X, Y, Z. Cayley da una construcción explícita para la inversa en función de los determinantes de la matriz original y de los menores.

En 1842, Arthur Cayley se graduó en el Trinity College, Cambridge, pero no pudo hallar un puesto adecuado de profesor, por lo que al igual que Sylvester, estudió leyes y se hizo abogado en 1849. Durante sus catorce años de ejercicio escribió alrededor de 300 artículos matemáticos; finalmente en 1863 se hizo profesor de Cambridge, donde permaneció hasta su muerte. Fue durante su época de abogado cuando conoció a Sylvester; sus discusiones durante los 40 años siguientes fueron muy fructíferas para el progreso del álgebra. Durante su vida, Cayley escribió alrededor de 1000 artículos sobre matemática pura, dinámica teórica y astronomía matemática.

CAPITULO 4
DETERMINANTES

DEFINICION 4.1 Un determinante es una función que asigna un número a una matríz cuadrada.



Comenzaremos éste tema con una introducción a determinantes de 2x2 y de 3x3 motivada por cálculos de área y volúmen.

4.1 AREA DE UN PARALELOGRAMO

En la figura 4.1 se muestra el paralelogramo determinado por dos vectores distintos de cero, no paralelos $a = (a_1, a_2)$ y $b=(b_1, b_2)$ de R^2. Este paralelogramo tiene un vértice en el origen, y consideramos las flechas que representan a y b como los dos lados del paralelogramo con el origen como vértice común.

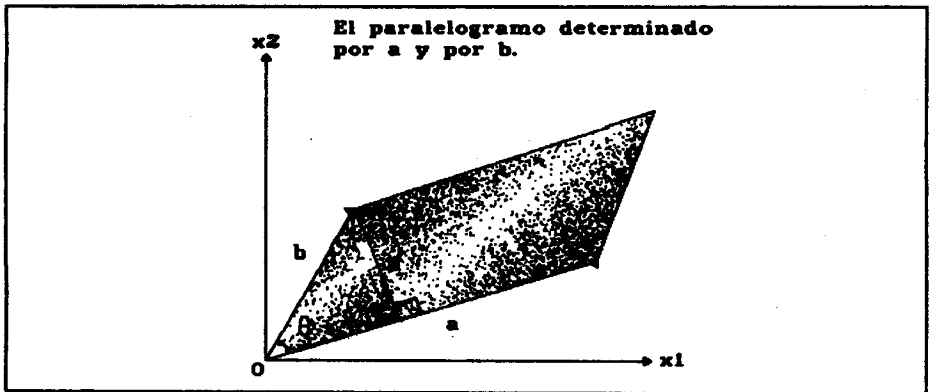


Figura 4.1

Podemos hallar el área de éste paralelogramo multiplicando la longitud $\|a\|$ de su base por su altura h obteniendo

$$\text{Area } (\square) = \|a\|h = \|a\| \, \|b\| \, (\text{sen } \theta) = \|a\| \, \|b\| \sqrt{1 - \cos^2\theta} \qquad (4.1)$$

Observación:

Recuerde que la magnitud de un vector a en R^n se define

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

y el ángulo entre dos vectores a y b como

$$\arccos\left[\frac{a\ \ b}{\|a\|\ \|b\|}\right]$$

donde se aplicó la ley de los cosenos:

$$\|a\|\ \|b\|\ \cos\theta = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$$

Ejemplo 4.1

Encuentre el ángulo θ entre los vectores (1, 2, 0, 2) y (-3, 1, 1, 5) en R^4

Solución

Tenemos:

$$\cos\theta = \frac{(1,\ 2,\ 0,\ 2)\cdot(-3,\ 1,\ 1,\ 5)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + 2^2}\ \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

asi $\theta = 60°$

Volviendo a la ecuación (4.1) tenemos que si usamos el resultado de que $a\ b = \|a\|\ \|b\|\ \cos\theta$ y elevando al cuadrado la ecuación:

$$\begin{aligned}(\text{Area})^2 &= \|a\|^2\ \|b\|^2 - \|a\|^2\ \|b\|^2 \cos^2\theta \\ &= \|a\|^2\ \|b\|^2 - (a\cdot b)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2)\ (b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \\ &= (a_1\ b_2 - a_2\ b_1)^2\end{aligned}$$

Tomando raices cuadradas tenemos:

$$\text{Area}\ (\sigma) = |a_1b_2 - a_2\ b_1| = \det A$$

donde A es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.2

Encuentre el área del paralelogramo en R^2 con vértices (1, 1), (2, 3), (2, 1), (3, 3)

Solución:

El paralelogramo se ilustra en la figura siguiente. Los lados que tienen (1,1) como vértice común se pueden considerar como los vectores a y b

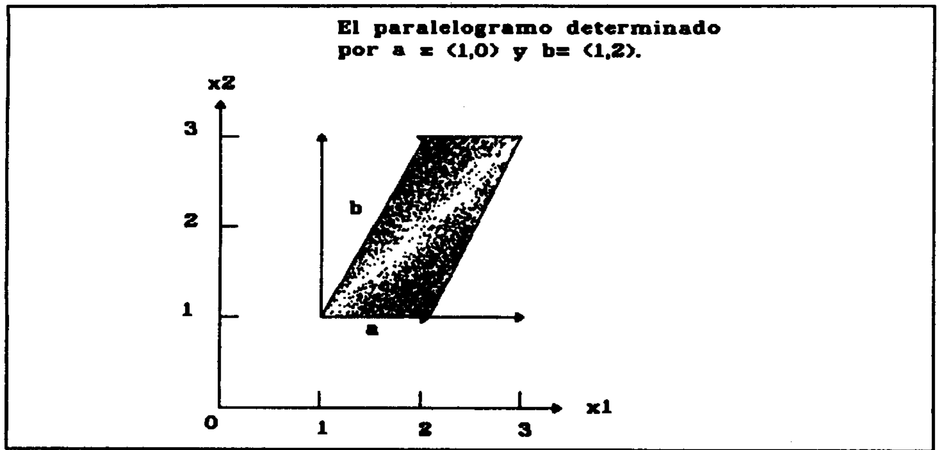


Figura 4.2 El paralelogramo determinado por a y b.

de aqui podemos encontrar que a y b están dados por:

$$a = (2, 1) - (1, 1) = (1, 0)$$
$$b = (2, 3) - (1, 1) = (1, 2)$$

por lo tanto el área del paralelogramo está dada por el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2) - (0)(1) = 2$$

4.2 PRODUCTO CRUZ

El determinante asociado con una matriz cuadrada de 2x2 se denomina <u>determinante de segundo orden</u>, otra aplicación de estos determinantes aparece cuando buscamos un vector de R^3 que sea perpendicular a cada uno de los dos vectores independientes dados:

$$b = (b_1, b_2, b_3) \text{ y } c = (c_1, c_2, c_3).$$

Los vectores coordenados unitarios de R^3 son $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ y $k = (0, 0, 1)$, entonces se verifica que:

$$p = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} k \qquad (4.2)$$

es un vector ortogonal a b y c. Esto se puede observar calculando $p\ b = p\ c = 0$. El vector p se conoce como producto cruz de b y c, y se denota por $p = bxc$. Hay una forma sencilla de recordar la fórmula (4.2) para el producto cruz bxc. Se forma la siguiente matriz de 3x3

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es igual a:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

que no es otra que la fórmula (4.2)

<u>Ejemplo 4.3</u>

Encuentre un vector perpendicular a (2, 1, 1) y (1, 2, 3) de R^3

<u>Solución</u>:

Se forma la matríz

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

y se encuentra que:

$$(2,\ 1,\ 1) \times (1,\ 2,\ 3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} k$$

$$= i - 5j + 3k = (1,\ 0,\ 0) - 5\ (0,\ 1,\ 0) + 3(0,\ 0,\ 1)$$
$$= (1,\ -5,\ 3)$$

El producto cruz $p = b\times c$ no sólo es perpendicular a b y c, sino que apunta en la dirección determinada por la conocida regla de la mano derecha: cuando los dedos de la mano derecha se curvan en la dirección de b a c, entonces el pulgar apunta en la dirección de bxc como en la figura 4.3.

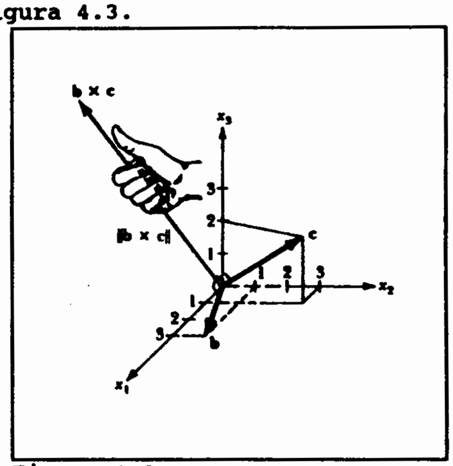


Figura 4.3

También tiene interés la magnitud del vector $p = b\times c$ de (4.2): es el área del paralelogramo con un vértice en el origen de R^3 y aristas en ése vértice dadas por los vectores b y c. Para ver esto se considera un diagrama como el de la figura 4.1 pero con a reemplazado por c y se calcula nuevamente el área como sigue:

$$(\text{Area})^2 = \|c\|^2\ \|b\|^2 - (c\cdot b)^2$$
$$= (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)\ (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3)^2$$
$$= \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2$$

tomando raices cuadradas obtenemos:
Area del paralelogramo en R^3 dado por b y c = $\|b \times c\|$.

Ejemplo 4.4

Encuentre el área del paralelogramo en R^3 determinado por los vectores b = (3, 1, 0) y c = (1, 3, 2)

Solución:

Se forma la matriz

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

de aqui:

$$bxc = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} k = (2, -6, 8)$$

por lo tanto $\|bxc\| = 2\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (4)^2} = 2\sqrt{26}$

Ejemplo 4.5

Encuentre el área del triángulo en R^3 con vértices (-1, 2, 0), (2, 1, 3) y (1, 1, -1)

Solución:

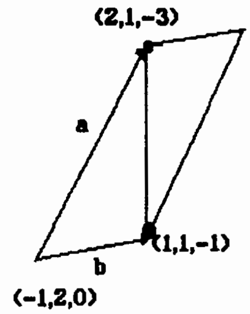
Si consideramos (-1, 2, 0) como un origen local y tomamos los vectores correspondientes a flechas que comiencen ahí y lleguen a (2, 1, 3) y (1, 1, -1) a saber:

$$a = (2, 1, 3) - (-1, 2, 0) = (3, -1, 3)$$
$$b = (1, 1, -1) - (-1, 2, 0) = (2, -1, -1)$$

ahora $\|axb\|$ es el área del paralelogramo determinado por éstos vectores y el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo, ver figura 4.4.

Se forma la matriz:

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



El triangulo es la mitad del paralelogramo.

Figura 4.4

de aqui:

$$axb = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} k = (4, \quad 9, -1)$$

por lo tanto $\|axb\| = \sqrt{(4)^2 + (\ 9)^2 + (-1)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$ de aqui que el area del triángulo es $7\sqrt{2}/2$

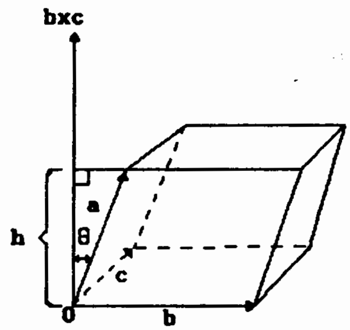
4.3 VOLUMEN DE UNA CAJA.

El producto cruz es útil para hallar el volúmen de la caja o paralelepípedo determinado por tres vectores distintos de cero $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ y $c = (c_1, c_2, c_3)$ en R^3 como se muestra en la figura 4.5.

El volúmen de la caja se puede calcular multiplicando el área de la base por la altura h: el área de la base de la caja es igual a $\|bxc\|$ y la altura se puede encontrar calculando

$$h = \|a\| \ |\cos\theta| = \frac{\|bxc\| \ \|a\| \ |\cos\theta|}{\|bxc\|} = \frac{|(bxc) \ a|}{\|bxc\|}$$

El valor absoluto se usa en el caso en que $\cos\theta$ es negativo. Este sería el caso si bxc tuviera dirección opuesta a la que se muestra en la figura 4.5. Asi



La caja en R3 determinada por a, b, y c.

Figura 4.5

Volúmen ($\mathcal{V}$) = area de la base x altura =

$$= \frac{\|bxc\| \; |(bxc)a|}{\|bxc\|}$$

$$= |(bxc) \; a|$$

es decir el volúmen queda definido como:

$$\text{Volúmen} = |\, a_1 \, (b_2 \, c_3 - b_3 \, c_2) - a_2(b_1 \, c_3 - b_3 \, c_1) + a_3(b_1 \, c_2 - b_2 \, c_1) \,|$$

$$= \det A$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.6

Encuentre el volúmen de la caja con vértice en el origen, determinada por los vectores a = (4, 1, 1), b = (2, 1, 0) y c = (0, 2, 3)

Solución:

La caja se muestra en la figura 4.6, y se forma la matriz,

cuyos renglones son los vectores a, b y c. Su volúmen está dado por el valor absoluto del determinante:

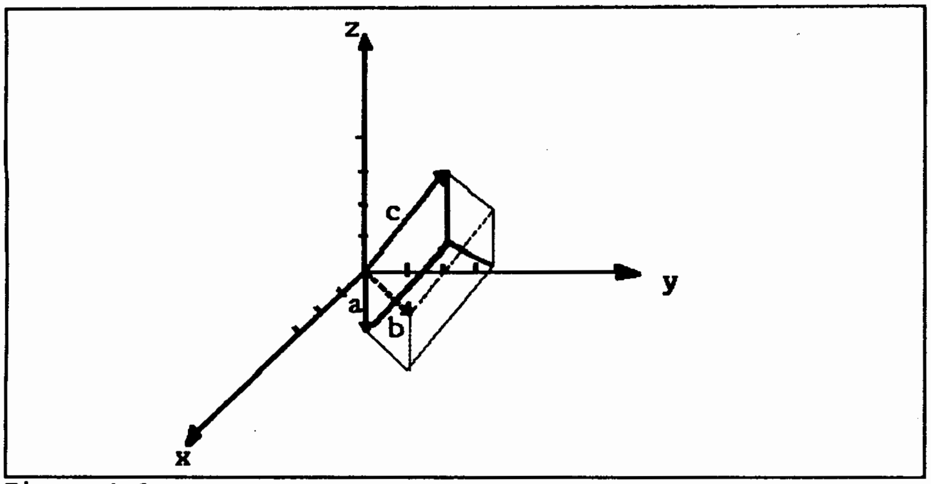


Figura 4.6

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

4.4 EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA.

El determinante de una matriz de 1x1 es su único registro. Así un determinante de segundo orden se puede definir como ya se dijo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

y un determinante de tercer orden en términos de uno de segundo orden

como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

o bien

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + \\ a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - \\ a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} \end{matrix}$$

Definimos un determinante de n-ésimo orden en términos de determinantes de orden n-1. Para lo cual se introduce la matriz menor A_{ij} de una matriz A de nxn, que es la matriz de (n-1)x(n-1) obtenida al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{i-ésima fila} \qquad (4.3)$$

j-ésima col.

Usando $|A_{ij}|$ como notación para el determinante de la matriz menor A_{ij} podemos expresar el determinante de una matriz A de 3x3 como:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, |A_{11}| - a_{12}\, |A_{12}| + a_{13}\, |A_{13}|$$

los números $a_{11}' = |A_{11}|$, $a_{12}' = -\,|A_{12}|$ y $a_{13}' = |A_{13}|$ son apropiadamente llamados cofactores de a_{11}, a_{12} y a_{13}

DEFINICION 4.3

El determinante de una matriz de 1x1 es su único registro. Sea n > 1 y supongamos definidos los determinantes de orden menor que n. Sea A = (A_{ij}) una matriz de orden nxn. El cofactor de a_{ij} en A es:

$$a_{ij}' = (-1)^{i+j} \det (A_{ij})$$

donde A_{ij} es la matriz menor de A dada en (4.3). El determinante de A es:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{11}' + a_{12}\, a_{12}' + \ldots + a_{1n}\, a_{1n}'$$

Ejemplo 4.7

Encuentre el cofactor del registro 3 o entrada a_{21} en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$a_{21}' = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

Ejemplo 4.8

Usando la definición 4.3 encuentre el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\ (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\ 4(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Calculando los determinantes de tercer orden se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -8$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -22$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 36$$

de donde $\det(A) = 5(-8) + 2(-22) + 4(10) + 1(36) = -8$

TEOREMA 4.2: DESARROLLO GENERAL POR MENORES

Sean A una matriz de 2x2 y r y s cualesquiera selecciones de la lista de números 1, 2,...,n entonces

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{r1}\, a'_{r1} + a_{r2}\, a'_{r2} + \ldots + a_{rn}\, a'_{rn} && (4.4)\\ &= a_{1s}\, a'_{1s} + a_{2s}\, a'_{2s} + \ldots + a_{ns}\, a'_{ns} && (4.5) \end{aligned}$$

La ecuación (4.4) es el desarrollo del determinante de A por menores en la r-ésima fila de A y la ecuación (4.5) es el desarrollo del determinante de A por menores en la s-ésima columna de A. Este teorema establece que se puede hallar el determinante de A desarrollando por menores en cualquier fila o columna de A.

Ejemplo 4.9

Encuentre el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

Se puede agilizar el cálculo desarrollando por menores en cada paso, en la fila o columna que contenga la mayoría de ceros:

$$\det(A) = 2(\ 1)^{5+5} \begin{vmatrix} 3 & 2 & \downarrow 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$ desarrollando en la 5a. fila

$$= 2(1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$ desarrollando en la 3er columna.

$$= -2 \left[3(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} -1\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right]$$

desarrollando en la 1er. columna

$= 12$

El uso de ésta definición para determinantes de 4x4 ya es un trabajo tremendo pues se involucran 4! productos como se podrá observaren la sección 4.7, por lo cual se usan propiedades de los determinantes para calcularlos mas fácilmente, esto se verá en la siguiente sección.

4.5 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES.

1. Si cualquier renglón o columna de A, tiene sólo componentes cero entonces det (A) = 0.

   por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det A = a(0) - b(0) = 0$$

2. Si A tiene dos renglones (o columnas) iguales o proporcionales entonces det (A) = 0
   por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{bmatrix}$$

   entonces det A = 2ab - 2ab = 0

3. Sea B una matriz que resulta de intercambiar dos renglones (columnas) de la matriz cuadrada A entonces det B = -det A

   por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

det A = ad - bc y det B = cb - ad = -(ad - bc)

4. Si A es una matriz cuadrada entonces det A = det A^t

5. Si B es la matriz que resulta de multiplicar por α un renglón i de A entonces:

$$\det B = \alpha \det A$$

por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{bmatrix}$$

det A = ad - bc   det B = αad - αbc = α(ad - bc)

6. Sea B = αA donde A es una matriz de nxn entonces det B = α^n det A.

por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$$

det A = ad - bc   det B = (αa)(αd) - (αb)(αc) = α^2(ad) - α^2(bc) = α^2(ad-bc)

como A es de 2x2 entonces $\alpha^n = \alpha^2$

7. El determinante de la matriz identidad es igual a 1

8. Si B se obtiene de A por medio de la operación elemental de sumar a un renglón un múltiplo de otro: $E_{pq}^{(\alpha)}$ entonces detB = det A

por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a + \alpha c & b + \alpha d \\ c & d \end{bmatrix}$$

det A = ad - bc   det B = (a + αc)d - (b + αd) c = ad + αcd - bc - αdc = ad - bc

9. Para A y B de orden nxn el determinante del producto es igual al producto de los determinantes:

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$\det A = ad - bc$ $\qquad$ $\det B = eh - gf$

$\det A \det B = (ad-bc)(eh-gf) = adeh - adgf - bceh + bcgf$

$$AB = \begin{bmatrix} ae + bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

$\det AB = (ae+bg)(cf+dh) - (ce+dg)(af+bh) = aedh - afdg + bgcf - bhce$

en particular si A es invertible, entonces
$\det A \det A^{-1} = \det AA^{-1} = \det I = 1$ luego $\det A^{-1} = 1/ \det A$

10. Si A es singular entonces $\det A = 0$. Si A es no singular $\det A \neq 0$.

Ejemplo 4.10

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es igual a 10 Usando propiedades del determinante calcule:

a) $\det(\alpha A)$
b) $\det(\alpha A^{-1})$
c) $[\det(\alpha A)]^{-1}$
d) $\det(4AA^{t})$

Solución:

a) α^4 (det A) $= \alpha^4$ (10)
b) α^4 (det A^{-1}) $= \alpha^4$ (1/det A) $= \alpha^4/10$
c) $(\alpha^4\ 10)^{-1}$
d) 4^4 (10)(10) $= 4^4(100)$

4.6 CALCULO DE DETERMINANTES MEDIANTE LA REDUCCION A UNA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR O INFERIOR.

Hemos visto que el cálculo de determinantes de orden superior es una tarea irracional si se realiza directamente a partir de la defición 4.3 usando solamente desarrollos repetidos por menores, sabemos también que una matriz se puede reducir a una matriz triangular superior al efectuar operaciones elementales por filas, el siguiente teorema nos permite usar esto para calcular determinantes de matrices de orden mayor que 3.

TEOREMA 4.3

Sea $A = (A_{ij})$ una matriz de orden nxn triangular superior o inferior, entonces

$$\det A = a_{11}\ a_{22} \ldots a_{nn}$$

lo que significa que el determinante de una matriz triangular es igual al producto de sus componentes diagonales.

demostración:

Sea U una matriz triangular superior tal que:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

si desarrollamos cada vez en las primeras columnas tenemos:

$$\det U = u_{11} \begin{vmatrix} u_{22} & \cdots\cdots & u_{2n} \\ 0 & u_{33} \cdots & u_{3n} \\ 0 & 0 \cdots\cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots & u_{nn} \end{vmatrix} = u_{11}\ u_{22} \begin{vmatrix} u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ 0 \cdots\cdots & & \\ & 0 \cdots\cdots & u_{nn} \end{vmatrix} = \ldots =$$

$$= u_{11}\ u_{22} \ldots u_{nn}$$

Además el efecto de las matrices elementales en los determinantes lo podemos encontrar en la siguiente proposición:

PROPOSICION 4.1

Sea A una matriz de nxn y E una matriz elemental. Entonces det EA = det E det A o bien det AE = det A det E.

demostración:

Existen tres tipos de matrices elementales:

a) $E = E_{pq}$ sea $B = E_{pq}$ A entonces:

$$\det E_{pq} A = \det B = - \det A = (-1) \det A = \det E_{pq} \det A$$

b) $E = E_p^{(\alpha)}$ Sea $B = E_p^{(\alpha)}$ A entonces:

$$\det E_p^{(\alpha)} A = \det B = \alpha \det A = \det E_p^{(\alpha)} \det A$$

c) $E = E_{pq}^{(\beta)}$ se deja de ejercicio.

Ejemplo 4.11

El determinante de la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es igual a $|A| = (2)(2)(1) = 4$

Ejemplo 4.12

Encuentre el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$ propiedad de multiplicación por un escalar

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$ se suman el 4° renglón y el primero multiplicado por -2

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$ se multiplica el primer renglón por -3 y se suma al segundo

$$=-2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$ se intercambian renglones

$$=-2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$ se multiplica el segundo renglón por 2 y se suma al cuarto

$$=(-2)(2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$ propiedad de multiplicación por un escalar

$$= (-2)(2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{vmatrix}$$ se multiplica el tercer renglón por -8 y se suma al cuarto

de aqui det A = (-2)(2)(17) = -68

El ejemplo anterior ilustra que si una matriz A de orden nxn se puede reducir a una matriz triangular superior U con n pivotes (distintos de cero) entonces det (A) es igual a ± el producto de los pivotes. Si en algún punto de la reducción no se puede hallar un pivote distinto de cero, entonces el determinante de ésta matriz y el determinante de A son igual a cero.

por ejemplo:

Sea A matriz de 5x5 que se ha reducido y se tiene:

$$\begin{bmatrix} p_1 & X & X & X & X \\ 0 & p_2 & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X & X \end{bmatrix}$$

desarrollando repetidamente por menores en las primeras columnas vemos fácilmente que el determinante es cero.

<u>TEOREMA 4.4: CRITERIO DE INVERTIBILIDAD PARA UNA MATRIZ CUADRADA</u>.

Sea A una matriz de nxn, entonces A tiene inversa si y solo si det $A \neq 0$.

<u>demostración:</u>

-->) Si A es invertible entonces $I = AA^{-1}$ por lo que $1 = \det(I) = \det(A)\det(A^{-1})$ por lo tanto $\det A \neq 0$.

<--) Se tiene $\det A \neq 0$ entonces se pueden aplicar operaciones elementales en A para expresarla como una matriz equivalente U, esto es

$$E_k \ldots E_2 E_1 A = U \quad \text{o} \quad A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1} U$$

de aqui que

$$\det A = \det(E_1^{-1}) \det(E_2^{-1}) \ldots \det(E_k^{-1}) \det U$$

como $\det A \neq 0$ entonces $\det(U) \neq 0$ de donde U no tiene renglones iguales a cero y por lo tanto $U = I$

<u>TEOREMA 4.5</u>

Para una matriz A de nxn las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a. La ecuación $Ax = 0$ tiene la única solución $x = 0$.
b. El sistema lineal $Ax = b$ tiene una solución única para cualquier vector columna b n-dimensional.
c. La matriz A es no-singular, es decir A^{-1} existe.
d. El determinante de A es distinto de cero.

e. El algoritmo de eliminación gaussiana se puede aplicar al sistema lineal $Ax = b$.

Ya hemos visto el método de desarrollo por cofactores para encontrar un determinante ahora encontraremos una fórmula para calcular la inversa de una matriz.

DEFINICION 4.4

Si A es una matriz de nxn y a'_{ij} es el cofactor de a_{ij} entonces la matriz

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

se llama la matriz de cofactores de A. La transpuesta de ésta matriz se denomina la adjunta de A y se denota por adj(A)

Ejemplo 4.13

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

los cofactores de A son

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = 12 & a'_{12} = 6 & a'_{13} = -16 \\ a'_{21} = -4 & a'_{22} = 2 & a'_{23} = 16 \\ a'_{31} = 12 & a'_{32} = -10 & a'_{33} = 16 \end{array}$$

por lo que la matriz de cofactores es:

$$A' = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ -4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

y la adjunta de A es

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Ahora es posible establecer una fórmula para calcular la inversa de una matriz invertible.

TEOREMA 4.6

Si A es una matriz invertible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}(A)$$

demostración:

Primero se demostrará que

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)\ I$$

considere el producto:

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{21} & \cdots & a'_{j1} & \cdots & a'_{n1} \\ a'_{11} & a'_{21} & \cdots & a'_{j1} & \cdots & a'_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{11} & a'_{21} & \cdots & a'_{j1} & \cdots & a'_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{11} & a'_{21} & \cdots & a'_{j1} & \cdots & a'_{n1} \end{bmatrix}$$

el elemento que se encuentra en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna de A adj(A) es:

$$a_{i1}\,a'_{j1} + a_{i2}\,a'_{j2} + \ldots + a_{in}\,a'_{jn} \qquad (4.6)$$

si i=j entonces (4.6) es el desarrollo por cofactores de det(A) a lo largo del i-ésimo renglón de A.

si $i \neq j$ entonces los elementos y los cofactores provienen de diferentes renglones de A por lo que el valor de (4.6) es cero. Note que:

$$a_{21}\,a'_{11} + a_{22}\,a'_{12} + \ldots + a_{2n}\,a'_{2n} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

por lo tanto:

$$A\,\mathrm{adj}\,(A) = \begin{bmatrix} \det A & & & \\ & \det A & & \\ & & \cdots & \\ & & & \det A \end{bmatrix} = (\det A) I \qquad (4.7)$$

como A es invertible det (A) $\neq$ 0 entonces la ecuación (4.7) se puede reescribir como :

$$\frac{1}{\det A}[A \operatorname{adj}(A)] = I$$

entonces

$$A\left[\frac{1}{\det A}\right]\operatorname{adj}(A) = I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)$$

Ejemplo 4.14

Encuentre la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

usando la fórmula para la inversa.

Solución:

Primero se verifica que el determinante de A sea diferente de cero: como el det (A) = 4 entonces A es invertible. Para calcular la adjunta de A tenemos que :

los cofactores de A son

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = 2 & a'_{12} = -2 & a'_{13} = -4 \\ a'_{21} = 1 & a'_{22} = 1 & a'_{23} = -4 \\ a'_{31} = -2 & a'_{32} = 2 & a'_{33} = 8 \end{array}$$

por lo que la matriz de cofactores es:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

y la adjunta de A es

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

de aqui que

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para matrices de orden mayor que 3x3 éste método para invertir matrices es operacionalmente inferior a la técnica de Gauss-Jordan.

De la misma manera, con frecuencia es útil tener una fórmula en términos de determinantes para la solución de un sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde A es una matriz invertible, por lo cual enunciamos el siguiente teorema.

TEOREMA 4.7: REGLA DE CRAMER

Si $Ax = b$ es un sistema de n ecuaciones lineales en n incógnitas tal que $\det(A) \neq 0$ entonces, el sistema tiene solución única y está dada por:

$$x_k = \frac{\det(B_k)}{\det(A)} \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n$$

donde B_k es la matriz que se obtiene al reemplazar los elementos de la j-ésima columna de A por los elementos del vector columna b.

demostración:

Como A es invertible, la solución única del sistema $Ax = b$ se puede expresar como:

$$x = A^{-1}b = \frac{\text{adj } A}{\det A}\, b$$

comparando con

$$x_k = \frac{\det(B_k)}{\det(A)} \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n$$

vemos que sólo se necesita demostrar que la k-ésima componente del vector columna $(\mathrm{adj}A)b$ está dado por el determinante de la matriz

$$B_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

obtenida de A mediante el reemplazo de la k-ésima columna por b, ésto es, el reemplazo de a_{jk} por b_j. Al desarrollar det B_k por menores en la k-ésima columna se tiene:

$$\det B_k = \sum_{j=1}^{n} a'_{jk}\, b_j$$

pero esta es la k-ésima componente de

$$(\mathrm{adj}\ A)\ b = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{21} & \dots & a'_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{1k} & a'_{2k} & \dots & a'_{nk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{1n} & a'_{2n} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} =$$

$$= a'_{1k}\, b_1 + \dots + a'_{nk}\, b_n$$

lo que completa la demostración.

Ejemplo 4.15

Resuelva el siguiente sistema lineal usando la regla de Cramer.

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\quad + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 44 \qquad \det B_1 = -40$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det B_2 = 72 \qquad \det B_1 = 152$$

por lo tanto

$$x_1 = \frac{\det\ (B_1)}{\det\ (A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$$

$$x_2 = \frac{\det\ (B_2)}{\det\ (A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$$

$$x_3 = \frac{\det\ (B_3)}{\det\ (A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

4.7 RESUMEN

1. Un determinante de segundo orden está definido por

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. El área del paralelogramo con vértice en el origen determinado por los vectores distintos de cero a y b de R^2 es el valor absoluto del determinante de la matriz que tiene vectores fila a y b.

3. El producto cruz de los vectores b y c de R^3 se puede calcular usando el determinante simbólico

$$\begin{matrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$$

este producto cruz bxc es perpendicular a b y c.

4. El área del paralelogramo determinado por los vectores distintos de cero b y c de R^3 es $\|b \times c\|$.

5. El volúmen de la caja determinada por los vectores distintos de cero a,b y c de R^3 es el valor absoluto del determinante de la matriz que tiene vectores fila a, b y c. Este determinante también es igual a a(bxc).

6. El cofactor de un elemento a_{ij} en una matriz cuadrada A es $(-1)^{i+j}\ |A_{ij}|$ donde A_{ij} es la matriz obtenida de A al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna.

7. El determinante de una matriz de nxn se puede definir inductivamente desarrollando por menores en la primera fila. El determinante se puede calcular desarrollando por menores usando cualquier fila o columna, es la suma de los productos de los registros en esa fila o columna con los cofactores de los registros. En general, dicho cálculo es muy largo.

8. Las operaciones elementales en filas tienen el efecto siguiente en el determinante de una matriz cuadrada A.

a) Si se intercambian dos filas diferentes de A cambia el signo del determinante.
b) Si se multiplica una sola fila de A por un escalar, el determinante se multiplica por el escalar.
c) Si un múltiplo de una fila se suma a una fila diferente el determinante no cambia.

9. La inversa de una matriz invertible A está dada por la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

10. Si A es invertible, entonces un sistema de ecuaciones Ax = b tiene la solución única x cuya k-ésima componente está dada explícitamente por la fórmula.

$$x_k = \frac{\det(B_k)}{\det(A)}$$

donde la matriz B_k se obtiene de A reemplazando la k-ésima columna de A por b.

4.8 NOTAS HISTORICAS

La noción de producto cruz surgió de los intentos de Sir William Rowan Hamilton para desarrollar una multiplicación para "ternas" esto es, vectores de R^3. La simbología actual para el producto cruz apareció por primera vez en el breve texto Elements of Vector Analysis (1881) del norteamericano Josiah Willard Gibbs (1839-1903), profesor de física matemática en Yale, que lo escribió para sus cursos de electricidad y magnetismo de Yale, y de mecánica en Johns Hopkins.

La interpretación como volumen de un determinante apareció por primera vez en 1773, en un artículo sobre mecánica de Joseph Louis Lagrange (1736- 1813). Lagrange observó que si los puntos M, M', M" tienen coordenadas (x, y, z), (x', y', z'), (x", y", z") respectivamente entonces el tetraédro con vértices en el origen y esos tres puntos tendrá volúmen:

$$(1/6)\ [z(x'y'' - y'x'') + z'(yx'' - xy'') + z''(xy' - yx')]$$

esto es,

$$(1/6)\ \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{bmatrix}$$

Lagrange nació en Turín y pasó la mayor parte de su carrera matemática en Berlín y París; aportó resultados importantes en temas tan variados como cálculo de variaciones, mecánica celeste, teoría de números y teoría de ecuaciones. Entre sus trabajos mas famosos están el Tratado de Mecánica Analítica (1788), en el cual presentó los distintos principios de la mecánica desde un solo punto de vista, y la Teoría de Funciones Analíticas (1797), donde intentó basar el cálculo diferencial en la teoría de series de potencias.

La teoría de los determinantes se desarrolló a partir de los esfuerzos de muchos matemáticos de finales del siglo XVIII y principios del XIX. Además de Gabriel Cramer (1704-1752), Etienne Bezout (1739-1783), en 1764, y Alexandre- Theophile Vandermonde (1735-1796), en 1771, dieron varios métodos para calcular determinantes. En un trabajo sobre cálculo integral Pierre Simon Laplace (1749-1827) trató sistemas de ecuaciones lineales repitiendo el trabajo de Cramer, pero también enunció y probó la regla de que elintercambio de dos columnas adyacentes del determinante cambia el signo, y mostró que un determinante con dos columnas iguales es cero.

El mas completo de los primeros trabajos sobre determinantes es el de Augustin- Louis Cauchy (1789-1857) en 1812. En éste trabajo Cauchy introducjo el nombre de "determinante" para reemplazar varios términos antiguos, usó la notación hoy en boga del doble subíndice para un arreglo cuadrado de números, definió el arreglo de adjuntos (o menores) a un arreglo dado, y mostró que podemos calcular el determinante desarrollando en cualquier fila o columna. Además Cauchy probó de nuevo muchos teoremas estándar sobre determinantes mas o menos conocidos durante los 50 años anteriores.

Cauchy fue el matemático mas prolífico del siglo XIX, hizo aportaciones a areas como análisis complejo, cálculo, ecuaciones diferenciales y mecánica. En particular, escribió el primer texto de cálculo usando el enfoque moderno de ϵ-δ para la continuidad. Políticamente fue conservador, y cuando la Revolución de julio de 1830 reemplazó al rey Borbón Carlos X por el rey Orleans Luis Felipe, Cauchy se negó a prestar el juramento de fidelidad, perdiendo asi sus puestos en la Ecole Polytechnique y en el College de France; y se exilió en Turín y Praga.

la **primera aparición del determinante de una matriz cuadrada** en Europa occidental ocurrió en 1683, en una carta de Gottfried von Leibniz al marqués de L'Hopital. Leibniz escribe un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas con coeficientes "numéricos" abstractos como sigue:

$$10 + 11x + 12y = 0$$
$$20 + 21x + 22y = 0$$
$$30 + 31x + 32y = 0$$

en donde se observa que cada número coeficiente tenía "dos caracteres, el primero que marca en que ecuación se presenta y el segundo que marca a que letra pertenece". Después procedió a eliminar primero y y después x, para mostrar que el criterio para que el sistema de ecuaciones tenga solución es (10) (21) (32) + (11) (22) (30) + (12) (20) (31) = (10)(22)(31) + (11) (20) (32) + (12) (21) (30). Es evidente que esto equivale a nuestra condición de que el determinante de la matriz de coeficientes se debe anular. Lamentablemente, la carta no se publicó hasta 1850, por lo que no influyó en trabajos posteriores.

Los determinantes también aprecieron en el trabajo contemporáneo del matemático japonés Takakazu Seki (1642-1708).

La regla de cramer apareció por primera vez en toda su generalidad en una obra de Gabriel Cramer (1704-1752) titulada Introducción al análisis de curvas algebráicas (1750). El problema en el que Cramer estaba interesado era el de determinar la ecuación de una curva plana de grado dado que pasara por cierto número de puntos dados. Formuló el teorema de que una curva de grado n-ésimo está determinada cuando se conocen ($\frac{1}{2}$)n (n+3) puntos de la curva. Por ejemplo, una curva de segundo grado que él escribía como

$$A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0 \qquad (*)$$

está determinada por cinco puntos. Entonces, la cuestión es cómo determinar A, B, C, D, E dados los cinco puntos. El método obvio es sustituir sucesivamente en la ecuación (*) las coordenadas de cada uno de los cinco puntos. Esto da cinco ecuaciones para los coeficientes desconocidos. Luego Cramer cita el apéndice del folleto, en onde da su regla general: "se halla el valor de cada incógnita formando n fracciones cuyo común denominador tiene tantos términos como permutaciones de n objetos hay" y pasa a explicar exactamente como se calculan éstos términos como productos de ciertos coeficientes de las n ecuaciones, cómo se determina el signo apropiado para cada término y cómo se determinan los n numeradores de las fracciones al reemplazar ciertos coeficientes de este cálculo por los términos constantes del sistema.

Cramer fue un matemático suizo que enseñó en la Académie de Calvin en Ginebra, desde 1724 hasta su muerte. Fue un gran sabio pero su trabajo se vió oscurecido por contemporáneos tan brillantes como Euler y los Bernoulli.

BIBLIOGRAFIA

1. ANTON, Howard, "Introducción al Algebra Lineal", Ed. Limusa, 1984.

2. FUENTES MAYA, Sergio, "Apuntes de Matemáticas Aplicadas I" DEPFI, 1989.

3. FRALEIGH, J.B. y BEAUREGARD, R.A. "Algebra Lineal" Ed. Addison- Wesley Iberoamericana, 1989.

4. GROSSMAN, Stanley I. "Aplicaciones de Algebra Lineal" Ed. Grupo Editorial Iberoamérica, 1988.

5. LOPEZ DE MEDRANO, Santiago, "Modelos Matemáticos", Ed. ANUIES, 1973.

6. LOPEZ DE MEDRANO, Santiago, "Lenguajes Simbólicos", Ed. ANUIES, 1973.

7. PERRY, William L. "Algebra Lineal con Aplicaciones" Ed. Mc. Graw Hill, 1990.

8. PROSKURIAKOV, I. "Problemas de Algebra Lineal" Ed. MIR, 1986.

9. RORRES, C. y ANTON, H. "Aplicaciones de Algebra Lineal" Ed. Limusa, 1979.

10. STRANG, Gilbert, "Algebra Lineal y sus Aplicaciones" Ed. Fondo Educativo Interamericano, 1982.

11. STRANG, Gilbert, "Introduction To Applied Mathematics" Ed. Wellesley-Cambridge Press, 1986.