UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

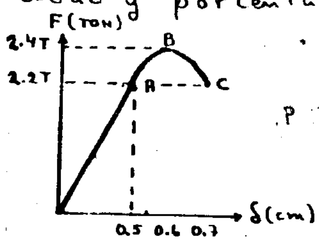
MECÁNICA DE MATERIALES.

PROBLEMAS RESUELTOS.

L. JORGE GONZALEZ MORENO.

SERIE II.

1- En un ensaye a tensión de un material se obtuvo la siguiente gráfica carga-deformación. Si el área de la sección transversal de la probeta es de $1.25\ cm^2$ y la longitud de la medición es de 10 cm. Obtener la gráfica esfuerzo-deformación correspondiente y los valores del módulo de elasticidad y porcentaje de alargamiento.



La gráfica carga-deformación puede transformarse en gráficas esfuerzo-deformación unitaria aplicando las ecuaciones:

$$\boxed{f = \frac{P}{A}} \; ; \; \boxed{\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}} \quad \text{(M.M. 1 pag. 21)}$$

Para ello calcularemos los puntos de interés de la gráfica:

Para el punto A: $f = \frac{P}{A} = \frac{2200}{1.25} = 1760\ Kg/cm^2$

En el cálculo anterior las toneladas se transformaron a Kilogramos.

La deformación unitaria en el punto A, valdrá:

$$\varepsilon = \frac{0.5}{10.0} = 0.05$$

Para el punto B:

$$f = \frac{P}{A} = \frac{2400}{1.25} = 1920\ Kg/cm^2$$

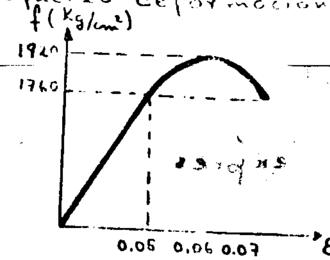
Para este punto la deformación unitaria, valdrá:

$$\varepsilon = \frac{0.6}{10.0} = 0.06$$

Para el punto C, el esfuerzo valdrá lo mismo que en el punto A, pero la deformación unitaria, será:

$$\varepsilon = \frac{0.7}{} = 0.07$$

Con estos puntos podemos trazar la gráfica esfuerzo-deformación unitaria.



En la gráfica esfuerzo-deformación unitaria se aprecia una etapa inicial con una relación Lineal. Debido a esto para calcular el módulo de Elasticidad ó Módulo de Young, podemos usar la Ley de Hooke:

$$E = \frac{f}{\varepsilon} \qquad \text{(M.M.I. pag. 23)}$$

de donde

$$E = \frac{f}{\varepsilon} = \frac{1760}{0.05} = \boxed{35200\ Kg/cm^2}$$

El porcentaje de alargamiento es la medida usual de la ductilidad bajo carga axial, el cual se calcula con la fórmula:

$$\delta = \frac{l_f - l_0}{l_0} \times 100 \qquad \text{(M. M. 1, pag. 30)}$$

Debido a que el porcentaje de alargamiento, es el correspondiente a la falla, usaremos los siguientes valores:

$$\delta = \frac{10.7 - 10.0}{10} \times 100 = \frac{0.7}{10} \times 100 = 7\%$$

$$\boxed{\delta = 7\%}$$

2° Una cinta de acero usada en un levantamiento topográfico tiene una longitud de 20 m. de 0.8 mm por 10 mm de ancho. Determinar el alargamiento cuando se estira toda la cinta y se mantiene tirante bajo una fuerza de 8 Kg, considere $E = 2.1 \times 10^6\ Kg/cm^2$.

Solución $\Delta L = 0.0952$ cm.

Considerando que el material es elástico, podremos usar la ley de Hooke, de la cual se deduce la siguiente expresión para el alargamiento:

$$\boxed{\Delta = \frac{PL}{AE}}$$ (M.M.1, pag. 36)

Transformando todas las unidades de Longitud a cm., y sustituyendo en la fórmula:

$$\Delta = \frac{8 \times 2000}{2.1 \times 10^6 \times 0.08 \times 1} = 0.09524 \text{ cm.}$$

$$\boxed{\Delta = 0.095 \text{ cm.}}$$

13

3.- En una prueba a tensión de un material con una sección transversal de 0.63 cm X 2.5 cm y longitud de medición de 20 cm. se obtuvó la información siguiente: carga inferior de fluencia 4000 Kg, carga última 7000 Kg, deformación total 5.6 cm., deformación a los 1360 Kg. $\Delta = 0.0083$ cm. Determinar el esfuerzo correspondiente al punto inferior de fluencia y el máximo esfuerzo durante la prueba, así como el módulo de elasticidad del material y el % de alargamiento de la probeta de prueba.

El esfuerzo en el punto inferior de fluencia se suele considerar como el límite de fluencia, o sea, el esfuerzo que corresponde a la transición de la etapa elástica a la inelástica. Para el caso de cargas axiales se podrá calcular el esfuerzo por la siguiente fórmula:

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A}}$$ (M.M.1, pag. 21)

a) Para calcular el esfuerzo correspondiente al punto inferior de fluencia, utilizamos la carga inferior de fluencia.

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{4000}{0.63 \times 2.5} = 2539.68\ Kg/cm^2$$

$$\boxed{\sigma = 2540\ Kg/cm^2}$$

b) Para calcular el máximo esfuerzo utilizamos el valor correspondiente a la carga última

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{7000}{0.63 \times 2.5} = 4444\ Kg/cm^2$$

$$\therefore \boxed{\sigma_{max} = 4444\ Kg/cm^2}$$

c) Para calcular el módulo de Elasticidad, debemos encontrar la relación de la tensión unitaria a la deformación unitaria.

$\sigma = E\,\varepsilon$ (M.M.1, pag. 23)

Calculamos el esfuerzo y la deformación unitaria para los siguientes valores de carga y deformación:

P = 1360 Kg , $\Delta = 0.083$ cm.

El esfuerzo será:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{1360}{0.63 \times 2.5} = 863.49$$

La deformación unitaria es:

$$\varepsilon = \frac{0.0083}{20} = 4.15 \times 10^{-4}$$

Sustituyendo estos valores:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{863.49}{4.15 \times 10^{-4}} = 2\ 080\ 698\ \text{Kg/cm}^2$$

$$\boxed{E = 2.08 \times 10^6\ \text{Kg/cm}^2}$$

d) El porcentaje de alargamiento correspondiente a la falla es una medida usual de la ductilidad, y lo podremos calcular con la fórmula (3.5) de los apuntes de M.M.1,

$$\delta = \frac{l_f - l_o}{l_o} \times 100 = \frac{25.6 - 20.0}{20} \times 100 = 28\ \%$$

$$\therefore \boxed{\delta = 28\ \%}$$

4. Durante un ensaye de tensión de un acero estirado en frío, de 13 mm de diámetro se obtuvieron los datos siguientes:

Carga axial Kg.	Alargamiento (cm)	Carga Axial Kg	Alargamiento cm
0	0	2750	0.0050
570	0.0010	3040	0.0055
800	0.0015	3300	0.0060
1090	0.0020	3110	0.0100
1380	0.0025	3140	0.0200
1650	0.0030	3140	0.0300
1920	0.0035	3140	0.0400
2200	0.0040	3120	0.0500
2460	0.0045	3140	0.0600

Carga axial (Kg)	Alargamiento (cm)
3160	0.1250
3500	0.2500
4230	0.5000
4460	0.7500
4500	1.0000
4560	1.2500
4460	1.5000
4300	1.7500
4020	1.8750

Al momento de ocurrir la falla la longitud de la barra como se aprecia en la tabla anterior fue de 6.875 cm. Determine el límite de proporcionalidad, el módulo de Elasticidad, el % de alargamiento y la resistencia a la falla de la barra.

a) De la gráfica se puede apreciar que la carga que corresponde a la transición de la etapa elástica a la inelástica, y que corresponde aproximadamente a la carga de fluencia es de 3300 Kg., y por lo tanto:

$$\sigma_{LP} = \frac{P}{A} = \frac{3300}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{3300 \times 4}{\pi \times 1.3 \times 1.3} = 2486.2\ \text{Kg/cm}^2$$

$$\therefore \boxed{\sigma_{LP} = 2486\ \text{Kg/cm}^2}$$

Este esfuerzo nos da el valor al cual se encuentra el límite de proporcionalidad.

b) El módulo de elasticidad será la relación entre el esfuerzo y la deformación unitaria, para calcular ésta última sigamos considerando el punto dado por el límite de fluencia del inciso (a), por tener ya calculado el esfuerzo para dicho punto.

Por medio de la fórmula (3.2) de los apuntes de M.M.1, podremos calcular la deformación unitaria:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_o} = \frac{0.006}{5} = 1.2 \times 10^{-3}.$$

$$\therefore \quad \boxed{\varepsilon = 1.2 \times 10^{-3}}$$

El módulo de Elasticidad estará dado por la fórmula: $\sigma = E\,\varepsilon$ (M.M.1 pag. 23)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{2486}{1.2 \times 10^{-3}} = 2\ 071\ 666\ \text{Kg/cm}^2$$

$$\therefore \quad \boxed{E = 2.07 \times 10^{6}\ \text{Kg/cm}^2}$$

c) El % de alargamiento lo podremos calcular con la fórmula (3.5) de los apuntes de M.M.1.

$$\delta = \frac{l_f - l_o}{l_o} \times 100 = \frac{6.875 - 5}{5} \times 100 = 37.5\ \%$$

$$\therefore \quad \boxed{\delta = 37.5\ \%}$$

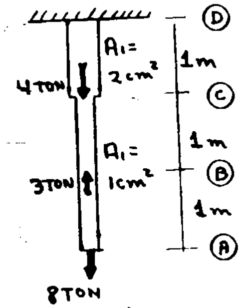
d) El valor del esfuerzo correspondiente a la falla, lo podemos calcular con la ecuación (3.1) de los apuntes de M.M.1, pag. 21, en la cual sustituimos la carga P por la de falla

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{4020 \times 4}{\pi\,(1.3)^2} = 3028.65\ \text{Kg/cm}^2$$

$$\therefore \quad \boxed{\sigma = 3028.65\ \text{Kg/cm}^2}$$

SERIE III.

1. Para la barra mostrada en la figura calcular la deformación total, considérese la $E = 2 \times 10^6\ \text{Kg/cm}^2$



Las cargas en la barra están actuando simultáneamente, pero puede hallarse el efecto resultante solo con sumar los efectos de cada una cuando lo hacen por separado, esto es, aplicando el principio de superposición de efectos.

En la (A-B) de la barra actúe una fuerza de 8 TON, en la sección B-C actúa una de 5 TON y en la C-D actúa una de 9 TON.

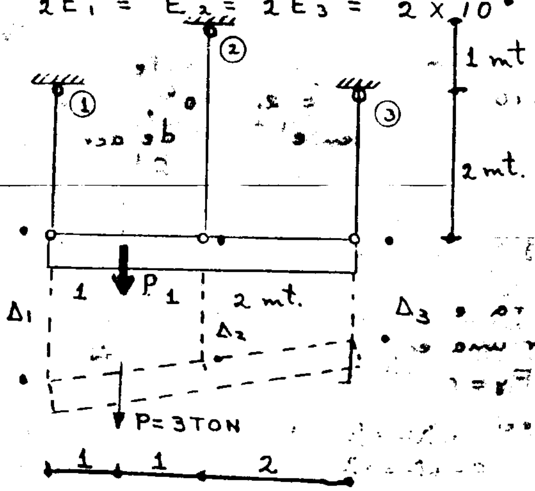
Aplicando la ecuación para obtener el alargamiento que se encuentra en la pag. 36 de los apuntes de mecánica de materiales 1, y considerando la suma de los tres efectos:

$$\Delta = \sum \frac{PL}{AE} = \frac{8000 \times 100}{1 \times 2 \times 10^6} + \frac{5000 \times 100}{1 \times 2 \times 10^6} + \frac{9000 \times}{2 \times 2 \times}$$

$$= 0.4 + 0.25 + 0.225 = 0.875\ \text{cm}.$$

$$\therefore \quad \boxed{\Delta = 0.875\ \text{cm}}$$

2. Calcular el alargamiento de cada barra cuando se aplica la carga $P = 3\,TON$. $A_1 = A_2 = A_3 = 10\ cm^2$; $2E_1 = E_2 = 2E_3 = 2\times10^6\ Kg/cm^2$



Observando el tipo de deformación de la estructura en conjunto, vemos que existen tres incógnitas, por equilibrio estático podemos plantear dos ecuaciones,: $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M = 0$, por lo que el sistema es indeterminado en primer grado

Para quitar la indeterminación debemos establecer una ecuación adicional, dada por la compatibilidad de deformaciones. Por geometría podemos establecer:

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2} \qquad (I)$$

la cual viene a ser la ecuación de compatibilidad.

$$\Sigma F_y \Rightarrow \quad N_1 + N_2 + N_3 = 3 \qquad (II)$$

$$\Sigma M_3 \Rightarrow \quad N_1(4) + N_2(2) = 3(3) \qquad (III)$$

Las cuales vienen a ser las ecuaciones de la estática, con lo cual se tienen 3 ecuaciones con 3 incógnitas lo que nos hace determinado el problema.

utilizando la ecuación de deformación debida a carga axial.

$$\Delta i = \frac{N_i L_i}{E_i A_i} \qquad \text{(M.M.I. pag. 36 cuaderno 1)} \qquad (IV)$$

De la ecuación (I)

$$2\Delta_2 = \Delta_1 + \Delta_3$$

sustituyendo la ecuación IV:

$$2\left[\frac{N_2(3)}{2\times10^6\times5}\right] = \frac{N_1(2)}{10^6\times10} + \frac{N_3(2)}{10^6\times10}$$

$$\therefore \quad 3N_2 = N_1 + N_3 \qquad (III\,a)$$

El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\left.\begin{array}{l} N_1 + N_2 + N_3 = 3 \\ 4N_1 + 2N_2 \qquad = 9 \\ +N_1 - 3N_2 + N_3 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} N_1 = 1.875\ TON \\ N_2 = 0.750\ TON \\ N_3 = 0.375\ TON \end{array}$$

Utilizamos la ecuación IV para calcular las deformaciones en cada una de las barras:

$$\Delta_1 = \frac{1875(200)}{10^6(10)} = 0.0375\ cm.$$

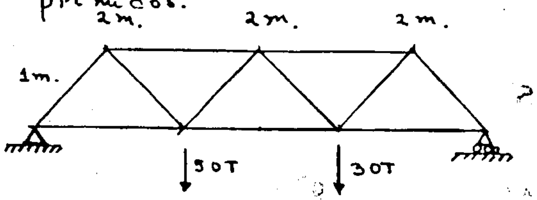
$$\Delta_2 = \frac{750(300)}{2\times10^6(5)} = 0.0225\ cm.$$

$$\Delta_3 = \frac{375(200)}{10^6(10)} = 0.0075\ cm.$$

$$\boxed{\Delta_1 = 0.0375\ cm.} \qquad \boxed{\Delta_2 = 0.0225\ cm.}$$

$$\boxed{\Delta_3 = 0.0075\ cm.}$$

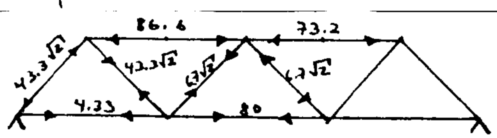
Problema 3.- La armadura que se muestra a continuación tiene sus miembros formados por un material cuyo esfuerzo permisible a tensión y a compresión es de 2000 Kg/cm². Determine el área necesaria para el miembro más cargado. No considere efecto de pandeo en los miembros comprimidos.



La armadura es isostática por lo que para resolverla tendremos que encontrar las reacciones.

$$R_A = \frac{50\times 4 + 30\times 2}{6} = 43.3\ \text{TON} \qquad R_B = \frac{50\times 2 + 30\times 4}{6} = 36.7\,T$$

Para el estudio algebraico de los esfuerzos de una armadura articulada y cargada en los nudos, utilizando las ecuaciones de equilibrio, pueden usarse dos métodos; a saber, el método de los nudos y el método de las secciones. En ambos métodos se hace pasar una sección por la estructura con el fin de separar la parte de la estructura que se ha de considerar como cuerpo libre. Utilizando cualquiera de los dos métodos podemos llegar al siguiente estado de esfuerzos:

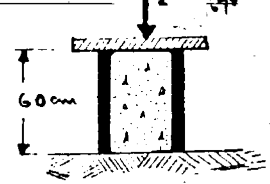


El miembro más cargado será aquél que se encuentre sujeto a la mayor fuerza normal ∴ F = ____
y utilizando la ecuación:

$$f = \frac{P}{A} \Longrightarrow A = \frac{P}{f} = \frac{86600}{2000} \qquad \text{M.M.I. pag. 21}$$

$$\boxed{A = 43.3\ cm^2}$$

Problema 4.- Para la columna que se muestra cuyas dimensiones son: altura = 60cm., diámetro interior = 12.82 cm, diámetro exterior = 14.13cm, $E_{concreto} = 2.1\times10^5$, $E_{acero} = 2.1\times10^6$. Determinar los esfuerzos en el concreto y en el tubo de acero así como el acortamiento de la columna. El suelo y la placa se consideran infinitamente rígidos. P = 22700 Kg.



Para este sistema podemos establecer una ecuación de equilibrio estático

$$\Sigma F_y = 0 \quad \therefore \quad P_{co} + P_{ac} = P \qquad (1)$$

Llegamos a una ecuación con dos incógnitas, por lo que el problema es estáticamente indeterminado. Tendremos que complementar la ecuación de la estática con otra deducida de las deformaciones de la estructura. Al considerar las fronteras rígidas se obliga a que las deformaciones axiales de los dos materiales sean iguales.

Utilizando la ecuación de deformación debida a carga axial: $\boxed{\delta = \frac{PL}{AE}}$, (2) (M.M.1 pag.36 cuaderno 1)

$$\frac{P_{co}\,\cancel{L_{co}}}{A_{co}\,E_{co}} = \frac{P_{ac}\,\cancel{L_{ac}}}{A_{ac}\,E_{ac}} \Rightarrow \frac{P_{co}}{(129)(2.1\times10^5)} = \frac{P_{ac}}{(28)(2.1\times10^6)}$$

$\therefore P_{ac} = 2.17\,P_{co}$, sustituyendo en (1): $P_{co} + 2.17\,P_{co} = 22700$

$\therefore\ P_{co} = 7160\ Kg. \qquad P_{ac} = 15540\ Kg.$

Dividiendo las fuerzas resultantes en cada material por su sección, se obtienen los esfuerzos buscados:

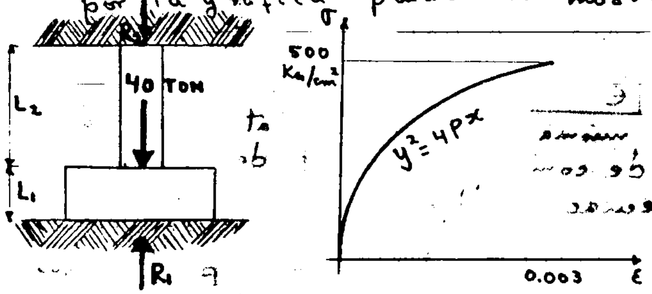
$$\boxed{f_{co} = \frac{P_{co}}{A_{co}} = 55.5\ Kg/cm^2} \qquad \boxed{f_{ac} = \frac{15540}{28} = 555.5\ Kg/cm^2}$$

Utilizando la fórmula (2), y sabiendo que las deformaciones son iguales para los dos materiales:

$$\delta = \delta_{co} = \delta_{ac} = \frac{PL}{AE} = \frac{15540\times 60}{28\times 2.1\times10^6} = \boxed{1.59\times10^{-2}\ cm = \delta}$$

SERIE IV

Problema 1.- Una barra está sujeta rígidamente entre dos losas y cargada con una fuerza axial de 40 TON, como se muestra en la figura. Considerar que el material es no elástico, y que se rige por la gráfica parabólica mostrada:



Datos:
$L_2 = 500 \text{ cm}$.
$L_1 = 200 \text{ cm}$.
$A_2 = 10 \text{ cm}^2$
$A_1 = 20 \text{ cm}^2$

Por suma de fuerzas verticales, podemos establecer la siguiente ecuación de equilibrio:

$\Sigma F_y = 0 \quad \therefore \quad R_1 + R_2 = 40 \Rightarrow \boxed{R_1 = 40 - R_2}$ (1)

la cual es una ecuación con dos incógnitas, por lo que habrá que completarla con otra dada por la compatibilidad de deformaciones.

La ecuación de la parábola la podemos expresar como:

$\sigma^2 = 4P\epsilon$, de donde: $\boxed{\epsilon = \dfrac{\sigma^2}{4P}}$ (2)

Para usar la expresión (2), haremos uso de la ecuación 3.2 de la pag. 21 de los apuntes de M.M. 1, cuad. 1.

$\epsilon = \dfrac{\delta}{L} \Rightarrow \boxed{\delta = \epsilon L}$ (3)

Sustituyendo la expresión (2) en la (3) y aplicando la ecuación resultante a cada uno de los tramos:

$$\delta_2 = L_2 \epsilon_2 = L_2 \frac{\sigma^2}{4P} = \frac{L_2}{4P}\left(\frac{R_2}{A_2}\right)^2$$

$$\delta_1 = L_1 \epsilon_1 = L_1 \frac{\sigma^2}{4P} = \frac{L_1}{4P}\left(\frac{R_1}{A_1}\right)^2$$

se hizo uso de la ecuación

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Por compatibilidad de deformaciones se puede escribir

$\delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \dfrac{L_1}{4P}\left(\dfrac{R_1}{A_1}\right)^2 = \dfrac{L_2}{4P}\left(\dfrac{R_2}{A_2}\right)^2$

sustituyendo valores:

$$500\left(\frac{R_2}{10}\right)^2 = 200\left(\frac{R_1}{20}\right)^2$$

$$5R_2^2 = 0.5R_1^2 \quad (4)$$

Sustituyendo (1) en (4)

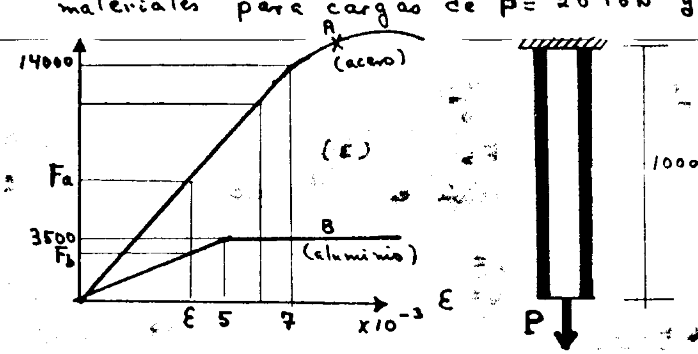
$$5R_2^2 = 0.5(40 - R_2)^2 = 0.5(1600 - 80R_2 + R_2^2)$$
$$= 800 - 40R_2 + 0.5R_2^2$$
$$4.5R_2^2 + 40R_2 - 800 = 0$$

$$R_2 = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 + 14400}}{9} = \frac{-40 \pm 126}{9}$$

$R_2 = 9.6$ TON.

$R_1 = 40 - 9.6 = 30.4$ TON $\Longrightarrow$ $\boxed{R_1 = 30.4 \text{ TON}}$ $\boxed{R_2 = 9.6 \text{ TON.}}$

Problema 2.- Una barra de aluminio dentro de un tubo de acero, se somete la pieza compuesta a tensión. Si los materiales tienen las gráficas indicadas. Calcular las deformaciones y esfuerzos en ambos materiales para cargas de P = 20 TON y P = 80 TON.



$A_a = 5 \text{ cm}^2$
$A_b = 5 \text{ cm}^2$

Por suma de fuerzas verticales podemos establecer la siguiente ecuación de la estática:

$$\boxed{5\ F_a + 5\ F_b = 20\,000\ Kg} \quad (1)$$

De acuerdo con la ecuación (1) tenemos dos incógnitas y una sola ecuación, por lo que el sistema tiene un grado de indeterminación, para resolverlo necesitamos establecer una segunda ecuación utilizando la compatibilidad de deformaciones.

$$\therefore \boxed{\epsilon_a = \epsilon_b} \quad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Para utilizar la ecuación 2 podremos utilizar las gráficas que nos indican el comportamiento del material, y para ello determinaremos límites de deformación, consideremos primero valores menores de 0.005

$$\tan \alpha_A = \frac{F_a}{\epsilon_A} = \frac{14000}{0.007} \Rightarrow \frac{F_a}{\epsilon_a} = \frac{14000}{0.007}$$

$$\therefore\ \epsilon_a = \frac{0.007}{14000} F_a$$

Similarmente: $\epsilon_B = \dfrac{0.005}{3500} F_b$ (2')

Sustituyendo en la ecuación (2)

$$\frac{0.007}{14\,000} F_a = \frac{0.005}{3\,500} F_b$$

$$\frac{F_a}{F_b} = \frac{0.005 \times 14000}{0.007 \times 3500} = 2.86$$

$$\therefore\ F_a = 2.86\ F_b \quad (3)$$

Sustituyendo la relación encontrada en la ecuación (1) de la estática:

$$5 \times 2.86\ F_b + 5\ F_b = 20000\ Kg$$

$$3.86 F_b = 4000\ Kg. \quad \therefore \boxed{F_b = 1036\ Kg} < 3500$$

$$F_a = 2.86\ F_b = 2.86 \times 1036\ Kg = 2963 < 14000$$

$$\therefore \boxed{F_a = 2963\ Kg/cm^2}$$

Con lo cual se han encontrado los valores de esfuerzo al que trabajan los dos materiales a una carga de 20 TON.

Como comprobación encontremos el valor de deformación para estos rangos de esfuerzo por medio de las ecuaciones (2')

$$\epsilon = \frac{0.007}{14\,000} \times 2967 = 0.0015$$

$$\boxed{\epsilon = 0.0015}$$

La cual es la misma para los dos materiales por la condición de compatibilidad de deformaciones dada por la ecuación (2).

Calculemos ahora valores de esfuerzo para rangos de deformación mayores que 0.005 pero menores que 0.007. Considérese P = 80000 Kg.

(1) Para valores menores de 0.007 la curva A se encuentra todavía en el rango elástico, por lo que la ecuación 2' para A sigue siendo válida:

$$\epsilon_A = \frac{0.007}{14\,000} F_a$$

Por suma de fuerzas verticales: $5 \times F_a + 5 \times F_b = 80000\ Kg.$

A partir de $\epsilon = 0.005$ el valor de F_b por ser una curva elastoplástica se mantiene constante por lo que $F_b = 3500\ Kg/cm^2$

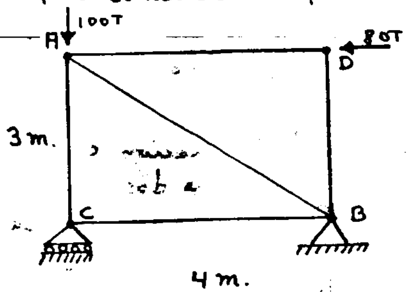
$$\therefore\ 5\ F_a + 5 \times 3500 = 80\,000 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} F_b = 3500\ Kg/cm^2 \\ F_a = 12500\ Kg/cm^2 \end{array}}$$

La deformación correspondiente a este esfuerzo es:

$$\epsilon = \frac{0.007}{14000}\ 12500 = 0.0063 \quad \therefore \boxed{\epsilon = 0.063}$$

Para valores mayores de 0.007 el material A ya no es elástico, por lo que ya no se puede seguir aplicando la ley de Hooke.

Probleme No. 3.- Determinar el área necesaria en el miembro AB de la armadura siguiente; escoger un perfil I del manual de Monterrey que satisfaga dicha necesidad de área. Considere el esfuerzo permisible $\sigma_s = 0.6\sigma_y = 2530\ kg/cm^2$. No considere efectos de pandeo.



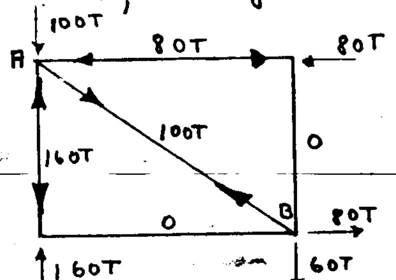
Por ser isostática la armadura podemos resolverla con el uso de las tres ecuaciones de la estática, y aplicando el método de los nudos.
Para ello obtengamos primero el valor de las reacciones.

$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -400 - 240 + 4R_A = 0$

$\Sigma F_x = 0 = -80 + R_{Bx} \therefore \boxed{R_{Bx} = 80\ TON \rightarrow}$; $\boxed{R_C = 160\ TON \uparrow}$

$\Sigma M_C = 0 = -240 + 4R_{By} = 0$ $\boxed{R_{By} = 60\ T \downarrow}$

Resolviendo la armadura por el metodo de los nudos, se llega:



Para calcular el área del miembro AB, utilizamos como dato la carga axial de 100 TON obtenida del análisis.
Para el caso de cargas axiales Tenemos la siguiente fórmula para calcular el esfuerzo:

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A}}$$ (M.M.1. pag. 21 cuaderno 1)

$$2530 = \frac{100\,000}{A} \Longrightarrow A = \frac{100\,000}{2530} = 39.52\ cm^2$$

$$\boxed{A = 39.52\ cm^2}$$

Problema 4.- A un cilindro de acero sólido con $\phi = 15\ cm$ y 50 cm. de longitud se le aplica una carga de tensión de 5400 Kg. considerando $E = 2.1 \times 10^6\ Kg/cm^2$ y la relación de Poisson $\nu = 0.3$. Determine el incremento de longitud y la disminución de diámetro.

El alargamiento lo podemos calcular de la ecuación deducida de la ley de Hooke para materiales elásticos

$$\boxed{\delta = \frac{PL}{AE}}$$ (M.M.I pag. 36 cuaderno 1)

sustituyendo los datos:

$$\delta = \frac{5400 \times 50 \times 4}{2.1 \times 10^6 \times \pi \times 15^2} = \boxed{0.0007275\ cm.}$$

Para determinar el acortamiento del diámetro superponemos las componentes de la deformación originada por la contracción lateral debida al efecto de Poisson a las deformaciones directas, obteniendo el enunciado general de la ley de Hooke.

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \quad *$$

donde $\sigma_y = \sigma_z = 0$ $\therefore \boxed{\varepsilon_y = -\frac{1}{E}\nu\sigma_x}$

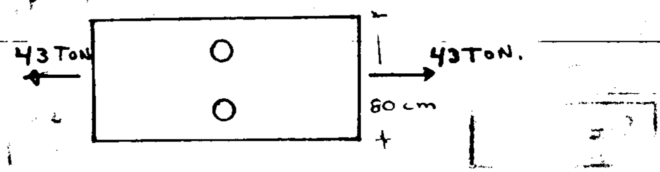
$$\varepsilon_y = -\frac{0.3 \times 5400 \times 4}{2.1 \times 10^6 \times \pi \times 15^2} = 4.365 \times 10^{-6}$$

$$A_{cort.} = \varepsilon_y \times d = 0.0000657\ cm.$$

$$\boxed{A_{cort} = 0.0000657\ cm.}$$

* Resistencia de materiales
William A. Nash.
Serie Schaum.

Problema 5.- Determine el espesor de la placa que se muestra en la figura, si el esfuerzo permisible en el acero A-36 es de 2530 Kg/cm². Ancho de la placa = 80 cm. Agujeros de 10 cm. de diámetro.



Se considera como sección crítica la que pasa a través de los agujeros, por lo que para considerarlos, únicamente se disminuirá el ancho de la placa quitándole la suma de los diámetros de los agujeros:

$$A = (80-20)t \qquad (1)$$

considerando la ecuación:

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A}} \qquad (2)$$

y sustituyendo (1) en (2)

$$\sigma = \frac{P}{(80-20)\,t}$$

dando valores:

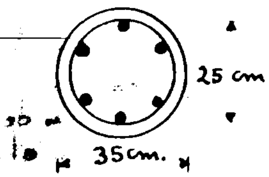
$$2530 = \frac{43\,000}{60t}$$

$$t = \frac{43000}{2530 \times 60} = 0.28 \text{ cm}$$

$$\boxed{t = 0.28 \text{ cm}}$$

SERIE V

Problema 1.- Calcule el primero y segundo máximo de una columna de concreto zunchada, con las propiedades siguientes:



6 Vs del # 8 ⇒ Area total = 30.6 cm²
Varilla del Zuncho # 2.5 ⇒ A_s = 0.49 cm²
f'_c = 150 Kg/cm² f_y = 4000 Kg/cm²

La gráfica carga-deformación de una columna de este tipo tiene dos máximos, por lo que habrá que calcularlos, ya que la resistencia será el mayor de ellos.

El primer máximo es la suma de las resistencias del área total de la sección de concreto y del refuerzo longitudinal. (M.M.I, pag. 67, cuad 1)

$$\boxed{P_1 = 0.85 f'_c A_g + A_s f_y} = 0.85 \times 150 \times \pi(35)^2/4 + 30.6 \times 4000$$
$$= 122\,699.66 + 122\,400 = 245\,069.66$$

$$\boxed{P_1 = 245 \text{ TON.}}$$

El segundo máximo es la suma de las resistencias del núcleo de concreto confinado por la hélice, del refuerzo longitudinal y de la resistencia adicional del núcleo debida al confinamiento de la hélice:

$$\boxed{P_2 = 0.85 f'_c A_c + A_s f_y + 2 \rho_s f_y A_c} \quad \text{(M.M.1) pag. 68).}$$

Por no ser dato, habrá que calcular el porcentaje de refuerzo helicoidal mínimo, el reglamento ACI-71, Sección 10.9.2, dice: La relación del refuerzo en espiral, ρ_s, no será menor que el valor dado por:

$$\boxed{\rho_s = 0.45 \left(\frac{A_g}{A_c} - 1\right) \frac{f'_c}{f_y}}$$

donde f_y es la resistencia a la fluencia especificada del refuerzo en espiral, la cual no debe ser mayor que 4200 Kg/cm². Las columnas que contienen la cantidad de refuerzo en espiral requerida por esta sección presentan tenacidad y ductilidad suficientes.

$$A_c = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (25)^2}{4} = 490.87 \text{ cm}^2$$

$$\rho_s = 0.45 \left(\frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} = 0.45 \left(\frac{(35)^2}{(25)^2} - 1 \right) \frac{150}{4000} = 0.0162$$

$$\boxed{\rho_s = 0.0162}$$

Para calcular el paso del zuncho utilizamos la ecuación 3.11, de los apuntes M.M.1, pag. 68. cuaderno 1.

$$\rho_s = \frac{4\, a_s}{s\, d_n} \Longrightarrow s = \frac{4\, a_s}{\rho_s\, d_n}$$

$$s = \frac{4 \times 0.49}{0.0162 \times 25} = 4.84 \text{ cm.}$$

$$\boxed{s = 4.84 \text{ cm.}}$$

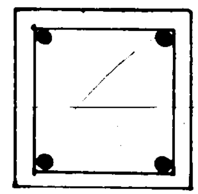
Aplicando la ecuación dada para obtener el segundo máximo, y, notando que A_c es el área del núcleo de concreto confinado por el refuerzo helicoidal:

$$P_2 = 0.85 \times 180 \times 490.87 + 30.6 \times 4000 + 2(0.0162) \times 4000 \times 490.87$$

$$= 75103.11 + 122400 + 63616.752 = 261119.86$$

$$\boxed{P_2 = 261 \text{ TON}}$$

Problema 2.- Calcular la carga de falla máxima de compresión para la columna.



30 cm.

30 cm.

Datos:
$4\ V_s\ \#4$, $A_s = 4.9 \text{ cm}^2$
$f'_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$
$f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2$

La resistencia de una columna cuadrada de concreto reforzado estará dada por la resistencia del concreto simple más la contribución del refuerzo longitudinal en compresión, este último se puede estimar como el producto del área de acero por el esfuerzo de fluencia f_y.

Por lo tanto, la resistencia o carga máxima de una columna de concreto con refuerzo longitudinal y estribos transversales es capaz de alcanzar, está dada por:

$$\boxed{P = 0.85\, f'_c\, A_g + A_s f_y}$$ M.M.I pag. 67

$$P = 0.85 \times 200\ (30 \times 30) + 4.9 \times 4000$$

$$= 153000 + 19600 = 172\,600 \text{ Kg.}$$

$$\boxed{P = 172.6 \text{ TON.}}$$

Problema No.3.- Determinar el área de concreto y el área de acero para que una columna cuadrada soporte una carga de 182 TON. Considerando que el porcentaje de refuerzo longitudinal recomendable es de 4 %. $f'_c = 210\ Kg/cm^2$ $f_y = 4000\ Kg/cm^2$

La resistencia de una columna cuadrada con refuerzo longitudinal, está dada por

$$\boxed{P = 0.85 f'_c A_g + A_s f_y} \quad \text{(M.M.I. pag. 67)}$$

Para utilizar la fórmula, debemos dejarla en función del área de concreto, por lo que utilizamos la ecuación:

$$\rho = \frac{A_s}{A_g} \quad \therefore \quad \boxed{A_s = \rho A_g} \quad \text{(M.M.I. pag. 74)}$$

$\therefore$

$$P = 0.85 f'_c A_g + \rho A_g f_y = 0.85 \times 210 \times A_g + 0.04 \times A_g \times 4000 = 182000\ Kg.$$

$$A_g = \frac{182\ 000}{0.85 \times 210 + 0.04 \times 4000} = 537.66\ cm^2$$

$$\therefore \boxed{A_g = 537.66\ cm^2}$$

y el área de acero:

$$A_s = \rho A_g = 0.04 \times 537.66 = 21.506\ cm^2$$

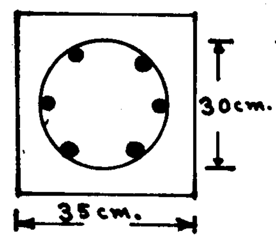
$$\therefore \boxed{A_s = 21.5\ cm^2}$$

Problema No. 4.- Calcule para la siguiente columna zunchada lo siguiente:

a) Primero y segundo máximos

b) Investigue esfuerzos en el acero y en el concreto por el método de la sección transformada para un 75 % de la carga dada por el primer máximo.

c) Calcule el porcentaje de refuerzo helicoidal mínimo según especificaciones.



$f'_c = 250\ Kg/cm^2$

$f_y = 4000\ \text{"} = f_y'$

$A_s = 6\ Vs. No. 8 = 30 cm^2$

$s = 5\ cm.$

$a_s = 0.71\ cm^2$ (Vs. No. 3)

$C_v = 0.25$

$E_s = 2.1 \times 10^6\ Kg/cm^2$

$E_c = 10000 \sqrt{f'_c}$

Para tomar en cuenta la variabilidad de los materiales y la calidad de la mano de obra, consideraremos valores reducidos de la resistencia del concreto y del límite de fluencia del acero, de acuerdo a las recomendaciones del Reglamento del Distrito Federal 1966. (M. M. I, pag. 70, cuaderno 1).

Esfuerzos reducidos:

$$\boxed{f^*_c = 0.9\,(1 - C_v)\, f'_c} \quad (\text{Ec. } 3\text{-}13)$$

$$f^*_c = 0.9\,(1 - 0.25)\ 250 = 168\ Kg/cm^2 \Rightarrow \boxed{f^*_c = 168\ Kg/cm^2}$$

$$f^*_y = 0.8 f_y = 0.8 \times 4200 = 3360\ Kg/cm^2 \Rightarrow \boxed{f^*_y = 3360\ Kg/cm^2}$$

Primer máximo: Debido a que hasta llegar al primer máximo, el comportamiento de una columna zunchada es igual al de una columna con estribos, podemos calcular este valor con la ecuación 3.9:

$$P_1 = 0.85 f^*_c A_g + A_s f^*_y$$

$P_1 = 0.85 \times 168 \times 1225 + 30 \times 3360 = 275730$ Kg.

$$\boxed{P_1 = 275.73 \text{ TON}}$$

Segundo Máximo: En caso de que el efecto confinante del zuncho sea suficiente, y la columna puede llegar a alcanzar un segundo máximo superior al primero, que puede calcularse con:

$$\boxed{P_2 = 0.85 f_c^* A_n + A_s f_y^* + 2 \rho f_y^* A_n} \quad \text{(Ec. 3.10) (M.M.I, pag. 68)}$$

Para poder aplicar la fórmula debemos calcular primeramente el porcentaje volumétrico del zuncho "ρ", utilizando la Ec. (3-11) de los apuntes de (M.M.I) pag. 68:

$$\boxed{\rho = \frac{4 a_s}{s d_n}} = \frac{4 \times 0.71}{(30)(5)} = 0.0189$$

$$\boxed{\rho = 0.0189}$$

$P_2 = 0.85(160)(706.86) + 100800 + 2(0.0189)(3360)(706.86)$
$= 291516$ Kg.

$$\therefore \quad \boxed{P_2 = 291.6 \text{ TON.}}$$

b) Cálculo de los esfuerzos: Para calcular los esfuerzos bajo condiciones de servicio, utilizaremos el método denominado sección transformada. Para ello utilizaremos la Ec. (3.20) (M.M.I pag. 74):

$$f_c = \frac{P}{A_g [1 + (n-1)\rho]}$$

$$f_c = \frac{0.75 \times 275730}{1225 [1 + (12.2)(0.0244)]} = 130 \text{ Kg/cm}^2$$

donde:

$$n = \frac{E_s}{E_c} = 13.2 \; ; \; \rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{30}{1225} = 0.0245$$

$$\therefore \quad \boxed{f_c = 130 \text{ Kg/cm}^2}$$

La relación entre los esfuerzos del concreto y del acero puede expresarse como sigue:

$$\boxed{f_s = \frac{E_s}{E_c} f_c = n f_c} \quad \text{(Ec. 3 16, pag. 73)}$$

$\therefore \quad f_s = n f_c = 13.2 \times 130 = 1716$

$$\boxed{f_s = 1716 \text{ Kg/cm}^2}$$

c) El porcentaje de refuerzo helicoidal mínimo, está dado en el Reglamento ACI-71, en la sección 10.9.2, por la ecuación:

$$\boxed{\rho = 0.45 \left(\frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y}}$$

$$\rho = 0.45 \left(\frac{1225}{706.85} - 1 \right) \frac{250}{4200} = 0.019$$

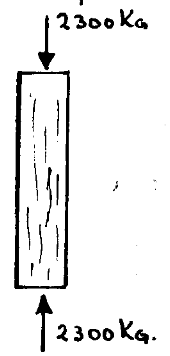
$$\boxed{\rho = 0.019}$$

De acuerdo con la Sección 10.9.1 del mismo reglamento, el refuerzo longitudinal para miembros no compuestos, deberá encontrarse entre 1 y 8%, por lo que el valor obtenido se encuentra dentro de especificaciones.

SERIE VI

Problema 1.- Diseñar la columna de madera de sección transversal cuadrada, actuando una carga $P = 2300$ Kg. La madera es de pino blanco. Despreciense efectos de esbeltez.

De acuerdo a la tabla 3.8, pag. 130 de los apuntes de M.M.1, cuaderno 1. el esfuerzo permisible de compresión paralelamente a la fibra tiene un valor de 60 Kg/cm^2.



Para calcular los esfuerzos en este caso basta dividir la carga aplicada entre el area de la sección transversal.
$\therefore$ Utilizando la ecuación (3.1) de M.M.1, pag. 21.

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A}}$$

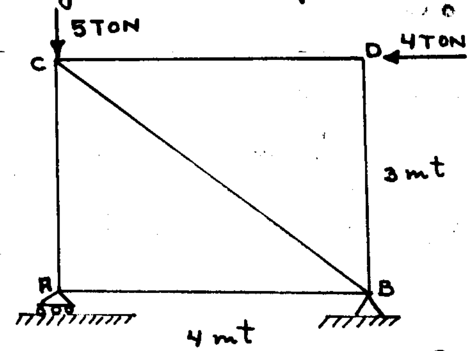
$$\therefore \quad \sigma = \frac{P}{A} = \frac{2300}{h^2} = 60 \ Kg/cm^2$$

$$\therefore \quad h^2 = \frac{2300}{60} = 38.33 \ cm^2$$

de donde:

$$\boxed{h = 6.20 \ cm.}$$

Problema 2.- De la armadura siguiente, formada por elementos de madera, determinar el área necesaria, en el elemento más cargado de la misma. Considere que el esfuerzo permisible de tensión es de 110 Kg/cm^2 y el de compresión 100 Kg/cm^2.



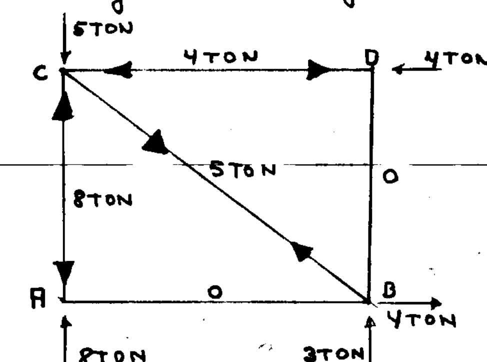
La estructura que se propone es isostática por lo que se puede solucionar por cualquiera de los procedimientos usados en estática, por ejemplo usemos el método de los nudos.

El calculo de las reacciones da:

$R_{Ay} = +8T \qquad R_{By} = 3 \ TON$

$R_{Ax} = 0 \qquad R_{Bx} = 4 \ TON.$

Utilizando el método propuesto se puede llegar a la siguiente condición de cargas:



El elemento más CARGADO A compresión (AC) necesitará un área:

$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{P}{\sigma}$$

$$A = \frac{8000}{100} = 80 \ cm^2$$

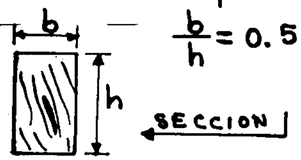
$$\boxed{A_{compresión} = 80 \ cm^2}$$

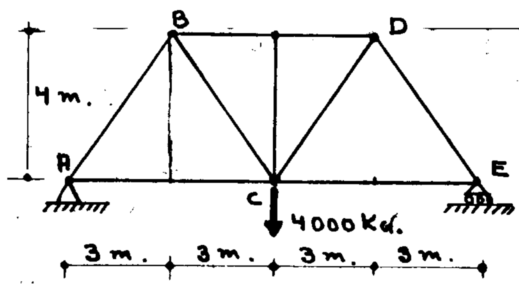
El elemento más cargado a tensión BC:

$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{5000}{110} = 45.45 \quad \therefore \quad \boxed{A_{tensión} = 45.45 \ cm^2}$$

Problema No. 3.- Determinar las dimensiones del elemento más cargado de la armadura mostrada enseguida. Considere que dicha armadura está formada por elementos de madera cuyo esfuerzos permisibles de tensión y compresión son 110 Kg/cm^2 y 100 Kg/cm^2 respectivamente. Considere que la relación

$\frac{b}{h} = 0.5$



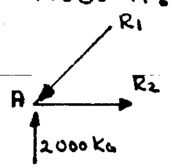


Aprovechando la simetría en cargas y geometría, podemos encontrar las reacciones:

$R_A = 2000$ Kg , $R_B = 2000$ Kg.

Por medio del método de los nudos encontraremos las tensiones a que están sometidas las barras.

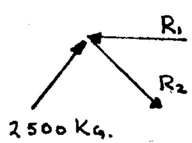
Nudo A: $\Sigma F_y = 0 = 2000 - R_1 \frac{4}{5} = 0$



$R_1 = \frac{5}{4} 2000 = 2500$ Kg.

$\Sigma F_x = 0 = R_2 - 2500 \frac{3}{5} = 0$; $R_2 = 1500$ Kg.

Nudo B: $\Sigma F_y = 0 = 2500 \frac{4}{5} - R_2 \frac{4}{5} = 0$

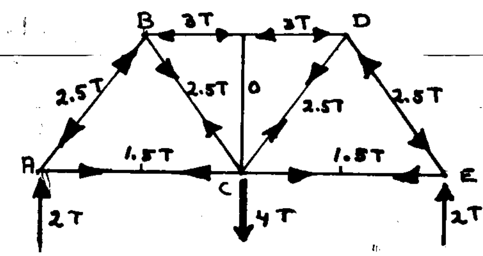


$R_2 = 2500$ Kg.

$\Sigma F_x = 0 = 2 \times 2500 \frac{3}{5} - R_1 = 0$

$R_1 = 3000$ Kg.

Volviendo a aprovechar la simetría de la estructura en cargas y geometría, podemos conocer sin cálculo alguno los valores restantes en las barras, quedando el siguiente estado de tensiones:



Los miembros entre B y D son los más esforzados por lo tanto diseñaremos para ellos. Para ello nos bastará con usar la Ec. (3.1) de M. M. 1, pag. 21, la cual nos liga el esfuerzo con la tensión y el área de la sección transversal.

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A}} \Longrightarrow A = \frac{P}{\sigma} = \frac{3000}{100} = 30 cm^2$$

Por los datos sabemos que $A = bh = b \cdot 2b = 2b^2$

$\therefore$ $2b^2 = 30 cm.$, $b^2 = 15 cm$ $b = 3.87$ cm.

$\therefore$ $h = 7.74$ cm.

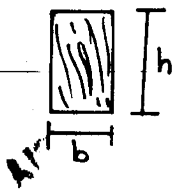
Chequemos que las barras a tensión no den un área mayor:

$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{2500}{110} = 22.72 cm^2 < 30 cm^2$$

Por lo cual las dimensiones en los miembros de las armadura, serán:

$\boxed{b = 3.87 \text{ cm.}}$ $\boxed{h = 7.74 \text{ cm.}}$

Problema No.4.- Determinar la carga P que soporta la columna si la madera de la cual está formada tiene un esfuerzo permisible de compresión de 60 Kg/cm². b = 20 cm, h = 40 cm.



Para el caso de cargas axiales podemos usar la siguiente fórmula:

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A}}$$

despejando la carga:

$$\underline{P = \sigma_c A}$$

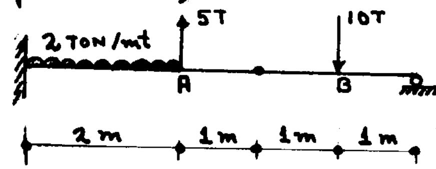
Obtenemos una ecuación que nos liga la carga en función del esfuerzo permisible del material a compresión y del área transversal de la columna.
Sustituyendo:

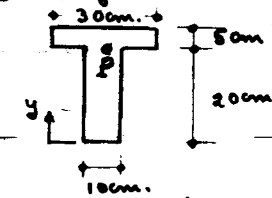
$$P = \sigma_c A = 60 \times 20 \times 40 = 48000 \text{ Kg.}$$

$$\boxed{P = 48 \text{ TON.}}$$

SERIE VII.

Problema No.1.- Para la viga que se muestra en la figura, determine el esfuerzo normal en el punto P, en las secciones A y B.

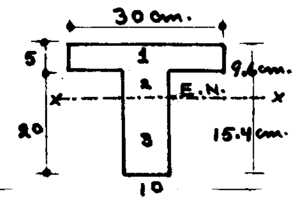




Para calcular los esfuerzos normales debemos usar la fórmula de la escuadría ó fórmula de flexión, establezcamos primeramente el valor del momento de inercia, ya que este será una cantidad constante a todo lo largo del eje. El momento de inercia utilizado en la fórmula es el centroidal, por lo que calcularemos primeramente la colocación del centroide de la sección:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma A y}{\Sigma A} = \frac{150 \times 22.5 + 200 \times 10}{150 \times 200} = \frac{3375 + 2000}{350}$$

$$\boxed{\bar{y} = 15.4 \text{ cm.}}$$



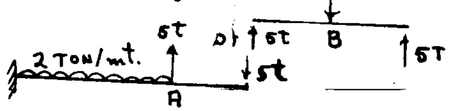
SECCION

Para el cálculo del momento de inercia al rededor del eje centroidal, dividamos la sección en tres partes (1, 2, 3), en la número uno usaremos el teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner, para las secciones dos y tres se utilizará la fórmula para calcular el momento de inercia de un rectángulo con respecto a la base.

$$I_x = \frac{30(5)^3}{12} + (30 \times 5)(7.1)^2 + \frac{10(4.6)^3}{3} + \frac{10(15.4)^3}{3} = 20372 \text{ cm}^4$$

$$\boxed{I_x = 20400 \text{ cm}^4}$$

Por el hecho de haber una articulación en la viga, podemos aprovechar que en ella no existe momento, sin embargo, si hay transmisión de cortante, utilizando ésta última propiedad podemos dividirla en dos secciones:



El momento en la sección B vale:

$M_B = 5 \times 1 = 5$ TON-mt.

sustituyendo en la fórmula de flexión:

$$\sigma_B = \frac{M}{I} y = \frac{500\,000 \times (4.6)}{20400} = 112.75 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\therefore \boxed{\sigma_B = 112 \text{ Kg/cm}^2}$$ compresión

En la sección A el momento vale:

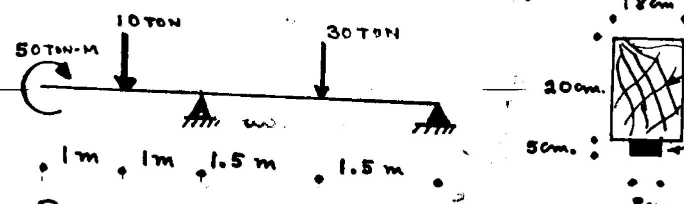
$M = -5 \times 1 = -5$ TON-mt.

sustituyendo en la fórmula de flexión

$$\sigma_A = \frac{M}{I} y = \frac{500\,000\,(4.6)}{20400} = 112 \text{ Kg/cm}^2$$

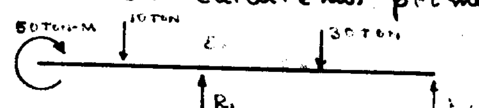
$$\boxed{\sigma_A = 112 \text{ Kg/cm}^2}$$ Tensión

Problema No. 2.- Para la viga que se muestra en la figura, determine los valores del esfuerzo normal en madera y acero (en las fibras más esforzadas) en la sección de momento flexionante máximo. $E_{acero} = 2 \times 10^6$ Kg/cm², $E_{madera} = 8 \times 10^5$ Kg/cm²



Para calcular el esfuerzo normal en los materiales en la sección de momento flexionante máximo, habrá que calcular el diagrama de momentos flexionantes para ver en que lugar se encuentra a su valor máximo.

Para ello calculemos primero las reacciones.



$\Sigma M_2 = 0$

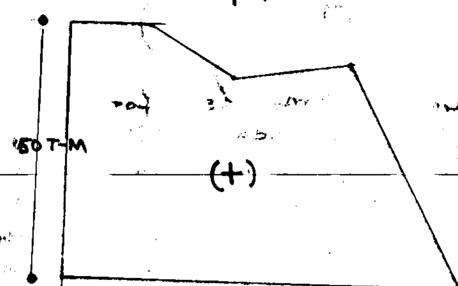
$50 - 4(10) + R_1(3) - 30(1.5) = 0$

$R_1 = 11.7$ TON

$\Sigma F_y = 0$

$-10 + R_1 + R_2 - 30 = 0$

$R_2 = 28.3$ TON.



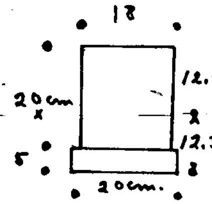
Del diagrama de momentos se nota que el valor máximo es de 50 T-mt.

La teoría de flexión no se puede aplicar directamente, ya que se basa en la hipótesis de homogeneidad del material. Por lo que se transformará la viga compuesta en una viga homogénea equivalente

Para ello utilizaremos la siguiente expresión

$$\boxed{A_m = n\,A_a}$$

donde: $n = \dfrac{E_a}{E_m}$



$$n = \frac{E_a}{E_m} = \frac{20 \times 10^5}{8 \times 10^5} = \underline{\underline{2.5}}$$

$b\,n = 8 \times 2.5 = 20$ cm. con lo cual la sección de acero queda transformada a una equivalente en madera.

Calculemos el centroide de la sección:

$$\bar{y} = \frac{360 \times 15 + 100 \times 2.5}{360 + 100} = \underline{\underline{12.30 \text{ cm.}}}$$

Aplicando el teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner podemos encontrar el momento de inercia de la sección con respecto al eje centroidal:

$$I_{xx} = I_o + A d^2$$

$$I_{xx} = \frac{18 \times (20)^3}{12} + (18)(20)(2.7)^2 + \frac{(20)(5)^3}{12} + (20)(5)(9.8)^2 =$$

$$\boxed{I_{xx} = 24420 \text{ cm}^4}$$

El esfuerzo en la madera para la fibras más esforzada será de compresión, ya que es la más alejada del eje neutro, y lo calcularemos con la fórmula de la escuadría, para el acero el esfuerzo mayor será de tensión, pero como estamos trabajando con seccion transformada en madera, debemos obtener el esfuerzo para acero mediante la fórmula:

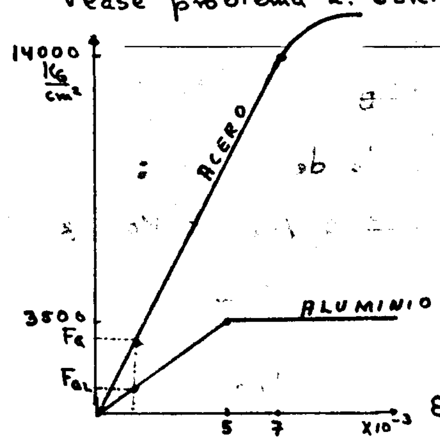
$$\boxed{\sigma_a = n\,\sigma_m}$$

$$\sigma_{max.\,madera} = \frac{M}{I} y_m = \frac{50 \times 10^5}{2.44 \times 10^4}(12.7) = 260 \text{ Kg/cm}^2 \quad (C)$$

$$\sigma_{max.\,acero} = \frac{n\,M}{I} y_a = \frac{2.5 \times 50 \times 10^5}{2.44 \times 10^4}(12.3) = 630 \text{ Kg/cm}^2 \quad (T)$$

$\sigma_{max.\,madera} = 260$ Kg/cm²	(compresión)
$\sigma_{max.\,acero} = 630$ Kg/cm²	(Tensión)

Problema. 3.- Una barra de aluminio dentro de un tubo de acero, se somete a tensión la pieza compuesta. Si los materiales tienen las gráficas indicadas. Calcular los esfuerzos en ambos materiales para una carga de 20 TON. Utilizando el método de sección transformada. Vease problema 2. SERIE IV. $A_a = A_{AL} = 5$ cm²



Por medio de la fórmula de la ley de Hooke $\boxed{\sigma = E\varepsilon}$ podemos calcular los módulos de elasticidad, despejando $\boxed{E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}}$

$$E_a = \frac{14000}{7 \times 10^{-3}} = 2000 \times 10^3 = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2 \text{ (acero)}$$

Para el aluminio:

$$E_{AL} = \frac{3500}{5 \times 10^{-3}} = 700 \times 10^3 = 0.7 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

La relación modular será:

$$n = \frac{E_{AL}}{E_a} = \frac{0.7 \times 10^6}{2 \times 10^6} = 0.350$$

Está constante obtenida nos muestra, o nos da la relación que existe entre las áreas del aluminio y del acero.

Para transformar la sección compuesta en una viga homogénea equivalente, utilizaremos la siguiente expresión:

$$A_a = \frac{E_{AL}}{E_a} A_{AL}$$

$$\therefore \boxed{A_a = n A_{AL}}$$

El área total de la sección será la suma de las dos áreas, la del aluminio y la del acero:

$$\boxed{A_T = A_a + A_L}$$

utilizando la fórmula que relaciona el esfuerzo a que está sometida una pieza sujeta a una carga axial, y con un área transversal A:

$$\sigma = \frac{P}{A_T} = \frac{P}{A_a + A_{AL}} = \frac{P}{A_a + n A_{AL}}$$

sustituyendo:

$$\sigma_a = \frac{20000}{5 + 5 \times 0.350} = 2963 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\therefore \boxed{\sigma_a = 2963 \text{ Kg/cm}^2}$$

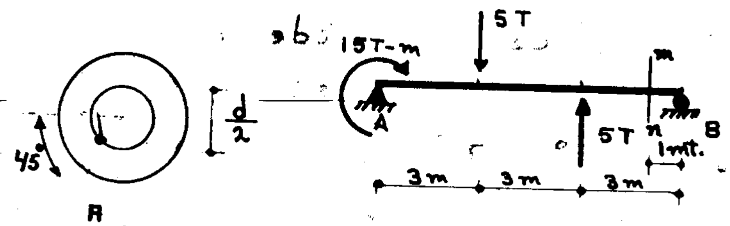
Para encontrar el ~~area~~ esfuerzo en el aluminio convertimos el área de acero en una equivalente en aluminio

$$\sigma_{AL} = \frac{P}{A_a \frac{1}{n} + A_{AL}} = \frac{20000}{5 \frac{2}{0.7} + 5} = 1037 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\therefore \boxed{\sigma_{AL} = 1037 \text{ Kg/cm}^2}$$

Se ve en las gráficas que los valores obtenidos se encuentran en el rango elástico, por lo que la teoría no se ve violada. Nótese además que los resultados obtenidos concuerdan con los calculados en el problema 2, Serie IV.

PROBLEMA No. 4.- Determinar las magnitudes de los esfuerzos ($\sigma_{A\,max.}$ y $\sigma_{A\,min}$) máximos del punto A, y en la sección m-n calcularlos en el mismo punto A. Considerese d= 30cm.



Obtengamos primeramente el diagrama de momentos, para conocer el valor de este en las secciones pedidas. Para ello calculemos primero las reacciones:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B = 15 + 15 - 30 = 0 \quad \therefore \quad R_B = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A = 15 + 15 - 30 = 0 \quad \therefore \quad R_A = 0$$

El diagrama de momentos de la sección nos queda:

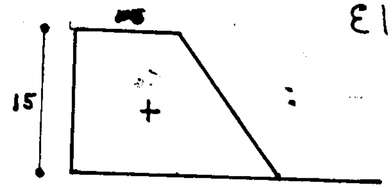


DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES.

De acuerdo con el diagrama no hay momentos en la sección m-n, por lo que el esfuerzo normal será nulo.

$$\therefore \boxed{\sigma_{A\,m-n} = 0}$$

Para obtener el valor del esfuerzo, ~~en~~ donde el momento es máximo calculemos primeramente el valor del momento de inercia de un anillo circular con respecto a un eje que pasa por su centro.

$$I = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^4}{64} = 37\,275 \text{ cm}^4$$

$$\therefore \boxed{I = 37\,275 \text{ cm}^4}$$

La distancia del centroide al punto A en dirección vertical es:

$$y = 7.5 \cos 45° = 7.5 \times 0.7071 = 5.3032$$

$$y = 5.3032 \text{ cm.}$$

Para el cálculo del esfuerzo normal utilizamos la ecuación:

$$\sigma = \frac{M}{I}\, y$$

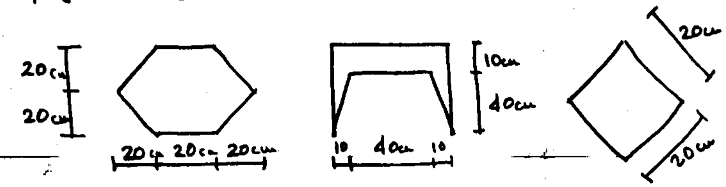
sustituyendo valores:

$$\sigma_A = \frac{1\,500\,000\,(5.3032)}{37\,275} = 213.4 \text{ Kg/cm}^2$$

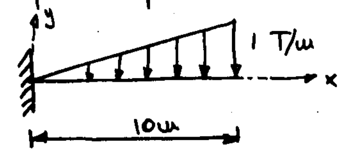
$$\therefore \boxed{\sigma_{A_{máx}} = 213.4 \text{ Kg/cm}^2}$$

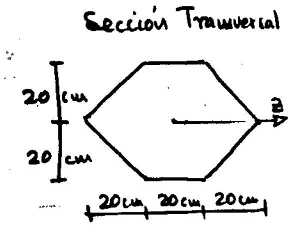
Correspondiente a Serie VIII ①

1.- Determine los módulos de sección elástica de las figuras siguientes:



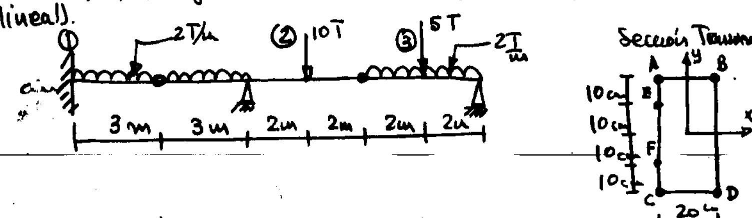
2.- Determinar la curvatura y radio de curvatura en $x = 5$m para la pieza mostrada



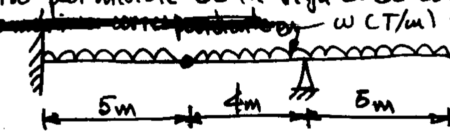


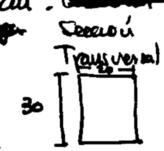
$E = 2.1 \times 10^6$ Kg/cm²

3.- Determinar en las secciones ①, ② y ③ de la viga mostrada en la figura, el estado de esfuerzos debidos a flexión en los puntos A, B, C, D y F (Material de la viga de comportamiento elástico lineal).

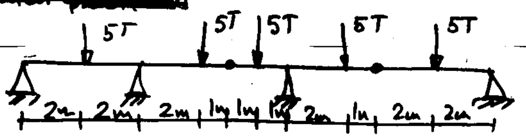


4.- Determinar el valor de ω (T/m) dado que el esfuerzo permisible de la viga es de 2000 Kg/cm². [redacted] el [redacted]

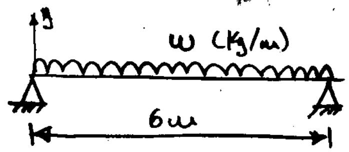


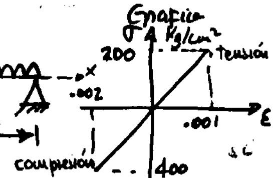


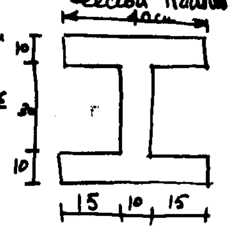
5.- Dimensione la viga I de acero sujeta a las cargas mostradas en la figura, utilizando el criterio de esfuerzos permisibles. Suponiendo que el esfuerzo de fluencia del acero es de 4000 Kg/cm². Utilice el manual Monterrey para especificación de esfuerzo permisible a flexión y elección de sección [redacted]



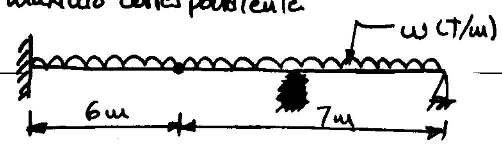
6.- Determine la curvatura, radio de curvatura en x=3 y la carga última de la viga mostrada en la figura. Considere un factor de carga de 1.4.

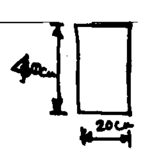




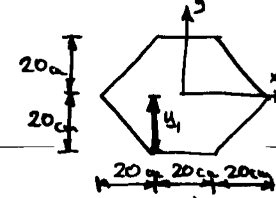


7.- Determinar el valor de w (t/m) dado que el esfuerzo permisible de la viga es de 2000 Kg/cm². Calcule el momento máximo correspondiente.

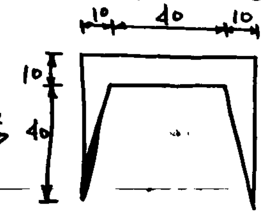




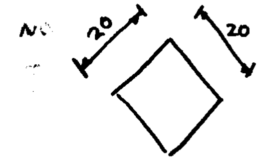
1.- Determine los módulos de sección elásticos de las figuras siguientes



(a)



(b)



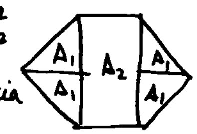
(c)

Para determinar el modulo de sección de una figura cualquiera se emplea la expresión

$$S = \frac{I}{y}$$

Donde I es el momento de inercia de la figura alrededor del eje sobre el cual se presenta la flexión y y es la distancia de este eje a la fibra mas alejada. Por lo tanto para obtener el módulo de sección elástico de una figura cualquiera debemos calcular el momento de inercia respecto al eje neutro de la sección. Para la figura (a) el eje neutro esta localizado a $y_1 = 20$ (puesto que es una sección con doble simetría) de la base del polígono. El momento de inercia es utilizando el teorema de los ejes paralelos

(a) $I = (I_1 + A_1 y_1^2)4 + I_2 + A_2 y_2^2$



o usando la expresión del momento de inercia de triangulos respecto a su base $\frac{bd^3}{12}$

(b) $I = 4I_1' + I_2'$

Con la expresión (a) I_1 = Momento de inercia del triangulo respecto a su eje centroidal $= \frac{bh^3}{36}$ $y_1 = \frac{h}{3}$ $A = \frac{bh}{2}$

$$I = \left[\frac{20^4}{36} + \frac{20 \times 20}{2}\left(\frac{20}{3}\right)^2\right]4 + \frac{20 \times 40^3}{12} + 20 \times 40 \times 0$$

$$I = 160000 \ cm^4$$

Con la expresión (b)

$$I = 4\left(\frac{20^4}{12}\right) + \frac{20 \times 40^3}{12}$$

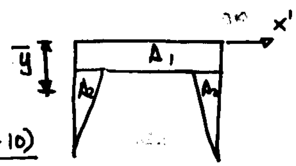
$$I = 160000 \ cm^4$$

$$S_x = \frac{I}{y} \quad \text{como } y = 20 \ cm$$

$$S_x = \frac{160000}{20} = 8000 \ cm^3$$

Para la figura (b) por no ser simétrica respecto al eje x se deberá encontrar en primer término la posición del eje neutro para lo cual se deberá tomar momentos estáticos de áreas respecto a un eje cualquiera (en este caso se elige el eje que pasa por la parte superior de la pieza) x'

$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + 2(A_2 y_2)}{A_1 + A_2}$$



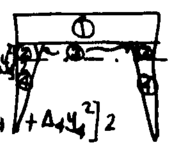
(b)

$$\bar{y} = \frac{(10 \times 60)5 + 2\left(10 \times \frac{40}{2}\right)\left(\frac{40}{3} + 10\right)}{(10 \times 60) + 2\left(10 \times \frac{40}{2}\right)}$$

$$\bar{y} = 12.333$$

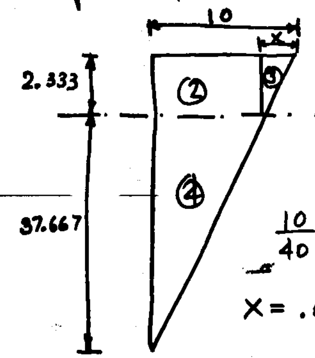
Utilizando la expresión del momento de inercia para secciones transversales compuestas. ó usando el teorema de los ejes paralelos. Por teorema de ejes paralelos

$$I = I_1 + A_1 y_1^2 + [I_2 + A_2 y_2^2]2 + [I_3 + A_3 y_3^2]2 + [I_4 + A_4 y_4^2]2$$



$$I = \frac{60 \times 10^3}{12} + (60 \times 10)(7.33)^2 + [I_2 + A_2 y_2^2]2 + [I_3 + A_3 y_3^2]2 + [I_4 + A_4 y_4^2]2$$

Ampliando las secciones ②, ③ y ④ y por triángulos semejantes



$$\frac{10}{40} = \frac{x}{2.333}$$

$$x = .5833$$

$$I_2 = \frac{bh^3}{12} = \frac{(10 - .5833)(2.333)^3}{12} = 9.9689 \ cm^4$$

$$A_2 y_2^2 = (10 - .5833)\left(\frac{2.333}{2}\right)^2 = 12.8171 \ cm^4$$

$$I_2 + A_2 y_2^2 = 22.786 \ cm^4$$

$$2[I_2 + A_2 y_2^2] = 45.572 \ cm^4$$

$$I_3 = \frac{bh^3}{36} = \frac{.5833(2.333)^3}{36} = .2058 \ cm^4$$

$$A_3 y_3^2 = .5833 \times \frac{2.333}{2} \times \left(\frac{2}{3} \times 2.333\right)^2 = 1.64668 \ cm^4$$

$$2[I_3 + A_3 y_3^2] = 2(1.85248) = 3.7049 \ cm^4$$

$$I_4 = \frac{9.4167 \times (37.667)^3}{36} = 13979.10381 \ cm^4$$

$$A_4 y_4^2 = \frac{9.4167 \times (37.667)}{2} \times \left(\frac{37.667}{3}\right)^2 = 27958.2076$$

$$2[I_4 + A_4 y_4^2] = 2[41937.31141] = 83874.62282 \ cm^4$$

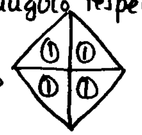
$$I = I_1 + A_1 y_1^2 + 2[I_2 + A_2 y_2^2] + 2[I_3 + A_3 y_3^2] + 2[I_4 + A_4 y_4^2] = 121161.2449$$

$$I = 121161.2449 \ cm^4$$

$$S = \frac{121161.2449}{37.667} = 3216.64$$

Para la figura c utilizando la fórmula para determinar el momento de inercia de un triangulo respecto a su base

$I_1 = \frac{bh^3}{12}$ $\quad b = 20\cos 45°$ $\quad h = b = 20\cos 45°$



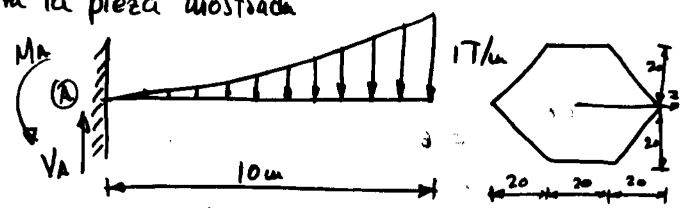
$\Delta 45°$

$$I = 4 I_1 = 4\left(\frac{(14.1421356)^4}{12}\right)$$

$$I = 13333.33324 \text{ cm}^4$$

$$S = \frac{1333.33324}{14.1421356} = 942.809 \text{ cm}^3$$

2.- Determinar la curvatura y radio de curvatura en $X = 5$m para la pieza mostrada



La curvatura de una viga en un punto determinado cualquiera viene dado por la expresión

$$\phi = \frac{M}{EI}$$

Para lo cual debemos calcular el valor que tiene el momento en $X = 5$m. Determinemos primero las reacciones de la viga

$$\Sigma M = 0 \qquad \frac{1000}{100}\text{Kg} \; \frac{1000\text{cm}}{2} \times \frac{2}{3}(1000) - M_A = 0$$

$$M_A = 3333333333 \times 10^{-2} \text{ Kg-cm}$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad \frac{1000}{100}\text{Kg} \times \frac{1000\text{cm}}{2} - V_A = 0$$

$$V_A = 500000 \text{ Kg}$$

Usando I del problema anterior

$$I = 160000 \text{ cm}^4$$

$$\phi_{x=5} = \frac{M_{x=5}}{EI}$$

$$M_{x=5} = M_A - V_A\,500 + \frac{500}{100} \times \frac{500}{2} \times \frac{500}{3}$$

$$M_{x=5} = 3333333333 - 500000(500) + \frac{500}{100}(250)\left(\frac{500}{3}\right)$$

$$M_{x=5} = 1041666.666 \text{ Kg-cm}$$

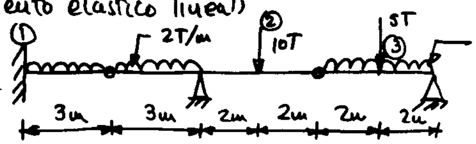
$$\phi = \frac{1041666.666}{2.1\times10^6 \times 160000} = 3.1\times10^{-6}$$

El radio de curvatura esta dado por la expresión

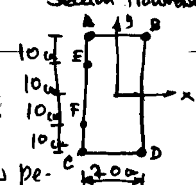
$$\phi = \frac{1}{r} \qquad \therefore \; r = \frac{1}{\phi}$$

$$r = 322560.0 \text{ cm}$$

3.- Determinar en las secciones ①, ② y ③ de la viga mostrada en la figura, el estado de esfuerzos debidos a flexión en los puntos A, B, C, D, y F (Material de la viga de comportamiento elástico lineal)

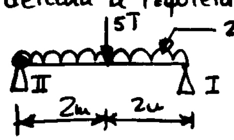


Sección Transversal



Para poder determinar los esfuerzos pedidos debemos conocer el momento flexionante en las secciones ①, ② y ③ de la pieza; para poder conocer dichos momentos es necesario determinar en primer término el valor de las reacciones de la viga. Comenzando de derecha a izquierda

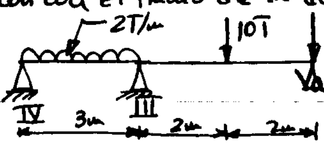
Aislando la viga



$$R_I = R_{II} = \frac{5 + 2(4)}{2}$$

$$R_I = R_{II} = \frac{13}{2} = 6.5 \text{ Ton} \uparrow$$

Aislando la parte siguiente de la viga; considerando la interacción con el tramo de la derecha tenemos:



Valor de interacción

(+) Por $\Sigma M_{IV} = 0$ $\quad 6.5(7) + 10(5) + 3(2)(1.5) - R_{III}(3) = 0$

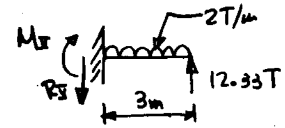
$$R_{III} = 34.83 \text{ T} \uparrow$$

Por $\Sigma F_y = 0$ $\quad \uparrow$

$$-6.5 - 10 + 34.83 - 3(2) - R_{IV} = 0$$

$$R_{IV} = 12.33 \text{ T} \downarrow$$

Considerando el tramo externo con la interacción con los tramos anteriores tenemos



Por $\Sigma M_V = 0$ (+)

$$-12.33(3) + 3(2)(1.5) + M_V = 0$$

$$M_V = 27.99 \text{ Ton-m}$$

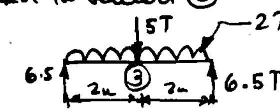
Por $\Sigma F_y = 0$

$$12.33 - 6 - R_V = 0$$

$$R_V = 6.33 \text{ T} \downarrow$$

Con las reacciones ya determinadas podemos ahora conocer el valor del momento en las secciones en las cuales se nos pide determinar los esfuerzos debidos a flexión

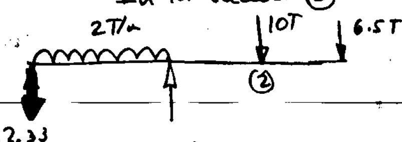
En la sección ③



Izquierda a derecha

$$M_③ = 6.5 \times 2 - 2(2)(1) = 13 - 4 = 9 \text{ T-m}$$

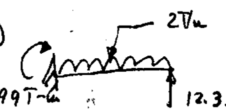
En la sección ②



M_2 de derecha a izquierda

$$M_2 = 6.5 \times 2 = 13 \text{ T-m}$$

En la sección ①



$$M_V = M_① = 27.99 \text{T-m}$$

En la sección ③ determinemos ahora los esfuerzos en los puntos A, B, C, D, E y F. Para hacer esto necesitamos determinar el momento de inercia de la sección alrededor del eje x

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{.20 \times .40^3}{12} = 1.0666 \times 10^{-3}\ m^4$$

Considerando positivo a la tensión y negativo a la compresión

$$\sigma_{A_3} = \frac{M}{I}y = \frac{-9\ T\text{-}m \times .2\ m}{1.0666 \times 10^{-3}\ m^4} = 1687.499\ \frac{T}{m^2}$$

$$\sigma_{A_3} = -168.7499\ Kg/cm^2$$

$$\sigma_{B_3} = \sigma_{A_3}$$

$$\sigma_{E_3} = \frac{-9\ T\text{-}m \times .1\ m}{1.0666 \times 10^{-3}\ m^4} = -843.7495\ \frac{T}{m^2} =$$

$$\sigma_{E_3} = -84.37\ Kg/cm^2$$

$$\sigma_{F_3} = -\sigma_{E_3} = 84.37\ Kg/cm^2$$

$$\sigma_{C_3} = \sigma_{D_3} = -\sigma_{B_3} = 168.7499\ Kg/cm^2$$

En la sección ②

$$\sigma_{A_2} = \frac{13\ T\text{-}m \times .2\ m}{1.0666 \times 10^{-3}\ m^4} = 2437.5\ \frac{T}{m^2} = 243.75\ Kg/cm^2$$

$$\sigma_{B_2} = \sigma_{A_2} = 243.75\ Kg/cm^2$$

$$\sigma_E = \frac{13\ T\text{-}m \times .1\ m}{1.0666 \times 10^{-3}\ m^4} = 1218.75\ \frac{T}{m^2} = 121.875\ Kg/cm^2$$

$$\sigma_C = \sigma_D = -\sigma_{A_2} = -243.75\ Kg/cm^2$$

$$\sigma_F = -\sigma_E = -121.875\ Kg/cm^2$$

En la sección ①

$$\sigma_{A_1} = \frac{-27.99\ T\text{-}m \times .2\ m}{1.0666 \times 10^{-3}\ m^4} = -5248.125\ \frac{T}{m^2}$$

$$\sigma_{A_1} = \sigma_{B_1} = -524.81\ Kg/cm^2$$

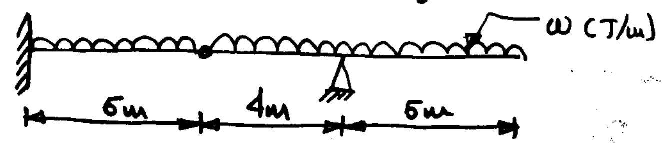
$$\sigma_{E_1} = \frac{-27.99\ T\text{-}m \times .1\ m}{1.0666 \times 10^{-3}\ m^4} = -2624.0625\ \frac{T}{m^2}$$

$$\sigma_{E_1} = -262.406\ Kg/cm^2$$

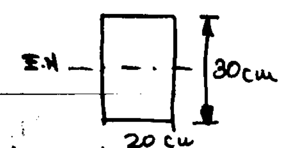
$$\sigma_{D_1} = \sigma_{C_1} = -\sigma_{A_1} = 524.81\ Kg/cm^2$$

$$\sigma_{F_1} = -\sigma_{E_1} = 262.406\ Kg/cm^2$$

4.- Determinar el valor de w (T/m) dado que el esfuerzo permisible de la viga es $\sigma = 2000\ Kg/cm^2$



Sección Transversal



Se deberá encontrar el valor del máximo momento flexionante que se presenta en la viga (en función de w) para poder emplear la expresión

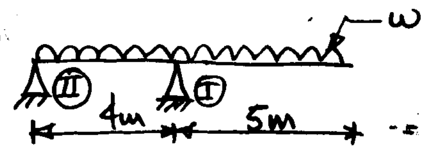
$$\sigma = \frac{M}{I}y$$

Obtengamos el momento de inercia de la sección transversal mostrada ~~en la~~

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 30^3}{12} = 45000\ cm^4$$

A continuación se calcularan las reacciones en los apoyos de la viga, para poder trazar el diagrama de momento flexionante de la misma (en función de w) y encontrar el valor máximo de momento flexionante, para utilizarlo en la fórmula de la escuadría

Aislando la sección derecha de la viga.



Por $\Sigma M_{II} = 0$ encontramos la reacción R_I

$$9\,w\,(4.5) - R_I\,(4) = 0$$

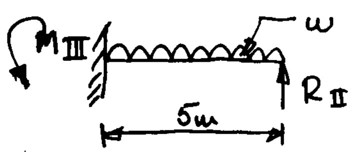
$$R_I = 10.125\,w \uparrow$$

Por $\Sigma F_y = 0$ encontramos la reacción R_{II}

$$9w - 10.125\,w + R_{II} = 0$$

$$R_{II} = 1.125\,w \downarrow$$

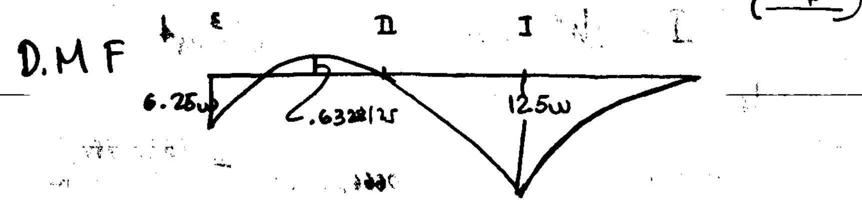
Aislando la sección izquierda de la viga



R_{II} se toma en sentido contrario al calculado en aislando la sección derecha de la viga puesto que es la ~~fuerza~~ de interacción entre ambas secciones de viga (acción sobre la viga aislada izquierda).

Por ΣM_{III} $\quad -5R_{II} + 5w(2.5) - M_{III} = 0$

Con las reacciones R_I y R_{II} podemos trazar el diagrama de momentos flexionante de la pieza



$$M_I = 5\,w\,(2.5) = 12.5\,w$$

$$M_{II} = 9\,w\,(4.5) - 4\,(10.125)w = 40.5w - 40.5\,w = 0$$

M_{II} (es cero puesto que es una articulación).

$$M_{III} = -5\,(1.125)w + 5\,(2.5)\,w = 6.25\,w$$

El momento máximo positivo de la pieza se puede determinar mediante derivación de la expresión de momentos en el tramo izquierdo de la viga

$$M_{III}\,(x) = 1.125\,w\,(x) - \frac{w\,x^2}{2} \quad (a)$$

$$\frac{d\,M_{III}(x)}{dx} = 0 = 1.125\,w - w\,x$$

$$x = 1.125$$

Sust $x = 1.125$ en (a) M_{III} (max positivo) $= 1.125\,w\,(1.125) - \dfrac{w\,(1.125)^2}{2}$

M_{III} (max positivo) $= 1.265625\,w - .6328125\,w$

M_{III} (max positivo) $= .6328125\,w$

Del diagrama de momentos flexionantes de la viga se observa que el máximo momento es: 12.5w. Sustituyendo este valor, junto con el del momento de inercia y la distancia de la fibra mas alejada de la sección transversal al eje neutro:

$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

Igualando σ con $\sigma_{permisible} = 2000\ Kg/cm^2$ y haciendo congruentes las unidades

$$2000\ Kg/cm^2 = \frac{M}{45000\ cm^4}\ 15\ cm$$

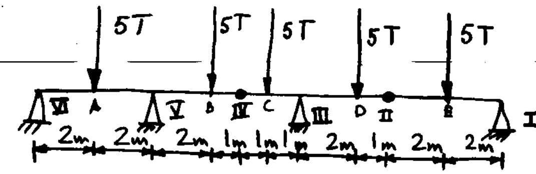
$$M = \frac{45000 \times 2000}{15\ cm - cm^2}\ Kg-cm^4 = 60\times10^5\ Kg-cm$$

$$M = 60\times10^5\ Kg-cm = 60\ T-m$$

Como $M = 12.5\ w/m^2$

$$w = \frac{60}{12.5}\ \frac{T-m}{m^2} = 4.8\ T/m$$

5.- Dimensione la viga I de acero sujeta a las cargas mostradas en la figura, utilizando el criterio de esfuerzos permisibles. Suponiendo que el esfuerzo de fluencia del acero es de $4000\ kg/cm^2$. Utilice el Manual Monterrey para especificación de esfuerzo permisible a flexión y elección de sección.



Del manual Monterrey el esfuerzo permisible a flexión viene dado por

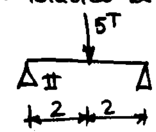
$$\sigma_{perm} = 0.6\,\sigma_y = 0.6\times4000 = 2400\ kg/cm^2$$

Para resolver el problema necesitamos conocer el momento máximo en la viga; para aplicar la formula de la escuadría y de ella despejar el area de acero necesario para resistir dicho momento flexionante máximo.

Para poder trazar o conocer el diagrama de momento flexionante de la pieza resolvamos primero la viga; es decir encontremos el valor de las reacciones.

Aislando la sección izquierda de la viga

sección I - II



Suponiendo R_I ↑ y R_{II} ↑

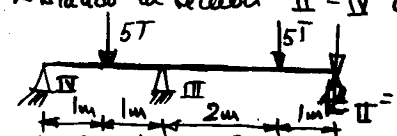
$\Sigma M_{II} = 0$

$(5)2 - R_I(4) = 0 \qquad R_I = 2.5\ T \uparrow$

Por $\Sigma F_y = 0 \qquad -5 + R_I + R_{II} = 0 \qquad -5 + 2.5 + R_{II} = 0$

$$R_{II} = 5 - 2.5 = 2.5\ T \uparrow$$

Aislando la sección II - IV de la viga



Suponiendo R_{III} ↑ y R_{IV} ↓

$\circlearrowright^{+}$ $\Sigma M_{IV}=0 \quad 2.5(5)+5(4)-R_{III}(2)+5(1)=0$

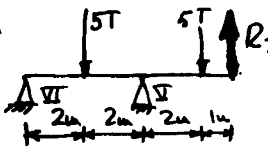
$R_{III}=\frac{37.5}{2}=18.75\,T\uparrow$

Por $\Sigma F_y=0 \quad -2.5-5+18.75-5+R_{IV}=0$

$R_{IV}=6.25\,Ton\downarrow$

I Aislando la sección V-VI de la viga

Suponiendo $R_V\uparrow$ y $R_{VI}\downarrow$



$\circlearrowright^{+}$ Por $\Sigma M_{VI}=0 \quad (-6.25)7+5(6)-R_V(4)+5(2)=0$

$R_V=\frac{-3.75}{4}=-.9375\,T$

El signo (−) indica que $R_V=.9375\,T\downarrow$ y habíamos supuesto equivocada la dirección de la reacción

Por $\Sigma F_y=0$

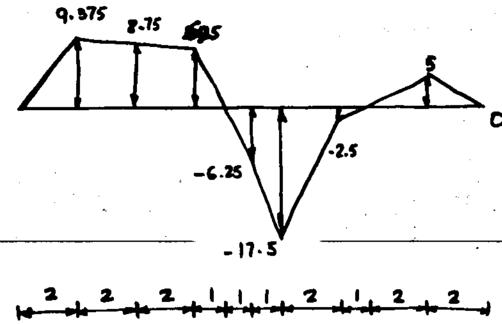
$6.25-5-.9375-5+R_{VI}=0$

$R_{VI}=-4.6875\,T$

o sea $R_{VI}=4.6875\,T\uparrow$ puesto que habíamos supuesto la dirección de R_{VI} hacia abajo y resultó negativo

Con las reacciones R_I, R_{III}, R_V y R_{VI} conocidas, podemos ya obtener el diagrama de momentos flexionantes de la viga. Se puede también aprovechar que se conocen R_{II} y R_{III} para abreviar operaciones para conocer el diagrama de momentos flexionantes de la viga.

DMF



$M_{VI}=0.0\,T\text{-}m$

$M_A=4.6875(2)=9.375\,T\text{-}m$

$M_V=4.6875(4)-5(2)=18.75-10=8.75\,T\text{-}m$

$M_B=4.6875(6)-5(4)-0.9375(2)=6.25\,T\text{-}m$

$M_{IV}=4.6875(7)-5(5)-0.9375(3)-5(1)=0.0\,T\text{-}m$

$M_C=4.6875(8)-5(6)-.9375(4)-5(2)=-6.25\,T\text{-}m$

$M_{III}=4.6875(9)-5(7)-.9375(5)-5(3)-5(1)=-17.5\,T\text{-}m$

$M_D=4.6875(11)-5(9)-.9375(7)-5(5)-5(3)+18.75(2)=-2.5\,T\text{-}m$

$M_{II}=4.6875(12)-5(10)-.9375(8)-5(6)-5(4)+18.75(3)-5(1)=0.0\,T\text{-}m$

$M_E=2.5(2)=5\,T\text{-}m$

$M_I=0.0\,T\text{-}m$

El momento máximo $M_{max}=17.5\,T\text{-}m$

De la fórmula de la escuadría

$$\sigma_{perm}=\frac{M}{S}$$

Donde S es el módulo de sección necesario del perfil que va a formar la viga

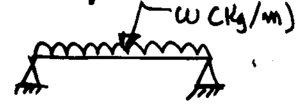
$$2400\ Kg/cm^2 = \frac{17500.00\ Kg\text{-}cm}{S}$$

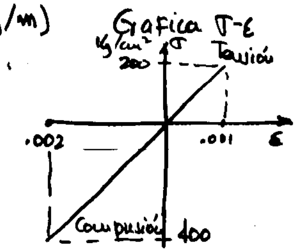
$$S = \frac{17500.00}{2400} = 729.1666\ cm^3$$

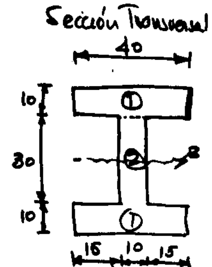
Del manual Monteney un perfil que I que tenga un modulo de sección $S \geq 729.1666$ se elige.

Se elige por ejemplo la seccion I de 304.8 mm de peralte y 60.72 Kg/m de peso.

6.- Determine la curvatura y radio de curvatura en la carga última de la viga mostrada en la figura. Considere un factor de carga de 1.4. Además obtenga el valor w de la carga de trabajo.







Para obtener el radio de curvatura se necesita conocer el momento flexionante actuante en x = 3 aplicando la expresión

$$\phi = \frac{M}{EI} \qquad r = \frac{1}{\phi} \quad \text{(radio de curvatura)}$$

Como desconocemos el valor de w; necesitaremos primero determinar dicho valor puesto que $M = \frac{w\ell^2}{8}$

De la gráfica esfuerzo deformación se tiene que el esfuerzo máximo a tensión que resiste el material es $\sigma = 200 kg/cm^2$ aplicando la formula de la escuadría (se puede aplicar puesto que la relación σ-ε es lineal elastica).

$$200\ Kg/cm^2 = \frac{M}{I}\, y_{max}$$

$$y_{max} = 25\ cm$$

El momento de inercia de la sección transversal se puede determinar aplicando el teorema de los ejes paralelos

$$I = \frac{b_1 h_1^3}{12} + A_1 y_1^2 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + A_2 y_2^2 + \frac{b_1 h_1^3}{12} + A_1 y_1^2$$

Factorizando

$$I = 2\left[\frac{b_1 h_1^3}{12} + A_1 y_1^2\right] + \frac{b_2 h_2^3}{12} + A_2 y_2^2$$

$b_1 = 40 \quad h_1 = 10 \quad b_2 = 10 \quad h_2 = 30$

$y_1 = 20 \quad y_2 = 0$

Siendo y_1 la distancia del centroide del area A_1 al eje z y y_2 la distancia del centroide de A_2 al eje z

$$I = 2\left[\frac{40(10)^3}{12} + 40 \times 10 \times 20^2\right] + \frac{10(30)^3}{12}$$

$$I = 349166.666 \text{ cm}^4$$

Aplicando la formula de la escuadría

$$200 \text{ Kg/cm}^2 = \frac{M}{349166.666}(25)$$

$$M = 2793333.332 \text{ Kg-cm}$$

$$M = 27.933 \text{ T-m}$$

No se consideró el valor máximo de compresión de 400 Kg/cm² puesto que la sección transversal es doblemente simétrica y por lo tanto el valor del esfuerzo de tensión en la fibra más alejada y el valor de compresión en la fibra más alejada, son iguales y por lo tanto al alcanzarse el esfuerzo de tensión primero (200 < 400) la pieza falla.

El momento ultimo resistente es M la carga última w_u de la pieza es:

$$M = \frac{w_u l^2}{8} \qquad w_u = \frac{8M}{l^2} = \frac{8(27.933)}{(6)^2}$$

$$w_u = 6.207 \text{ T/m} = w \times \text{Fact. carga.}$$

$$w = \frac{6.207}{1.4} = 4.433 \text{ T/m}$$

Mactuante en X = 3m

$$M = -w(3)\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{w(6)}{2}$$

Factorizando

$$M = w(3 - 1.5) = 4.433(1.5) = 6.6495 \text{ T-m}$$

La curvatura es en $x = 3$.

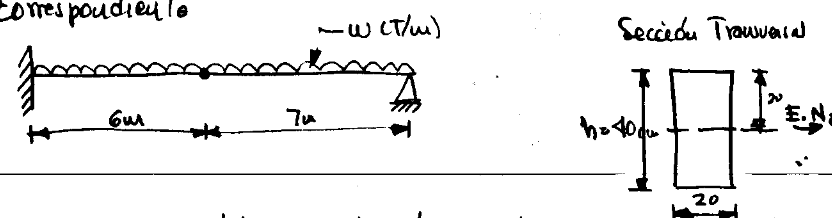
$$\phi = \frac{6.6495 \times 10^5 \text{ Kg-cm}}{E(349166.666)}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad E = \frac{200}{.001} = 2 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\phi = \frac{6.6495 \times 10^5}{2 \times 10^5 (349166.666)} = 9.52 \times 10^{-6} \text{/cm}$$

$$\phi = \frac{1}{r} \qquad r = 105020.42 \text{ cm}$$

7.- Determinar el valor de w (T/m) dado que el esfuerzo permisible de la viga es de 2000 Kg/cm². Calcule el momento máximo correspondiente



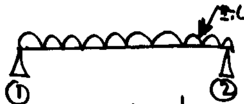
Se deberá resolver la viga de la figura, para poder encontrar el momento máximo en la viga en función de la carga w; aplicando para dicho momento la fórmula de la escuadría $\sigma = \frac{M}{S}$ en la que es conocido el esfuerzo permisible y el módulo de sección de la viga. Por lo tanto deberá calcularse en primer lugar para resolver el problema el momento de inercia de la sección y la posición del eje neutro. El eje neutro se localiza como se ve en la sección horizontal a 20 cm de la tapa porque es una sección doblemente simétrica, con carga que produce flexión alrededor de un solo eje; dicho eje neutro se encuentra a $\frac{h}{2}$ de la sección

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{20\,(40)^3}{12} = 106666.666\ cm^4$$

El módulo de sección es $\frac{I}{y}$ siendo $y = \frac{h}{2} = 20$

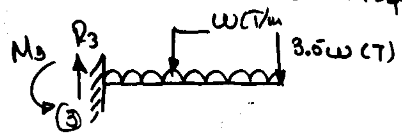
$$S = \frac{I}{y} = \frac{106666.666\ cm^4}{20} = 5333.33\ cm^3$$

Resolviendo la sección derecha de la viga



Por ser carga simétrica $R_1 = R_2 = \frac{\omega l}{2} = 3.5\omega \uparrow (T)$

Resolviendo la sección izquierda de la viga



Por $\Sigma M_{③}$ $\quad M_3 = 3.5\omega\,(6)\ (T\text{-}m) + 7\omega\,(3.5)\ T\text{-}m$

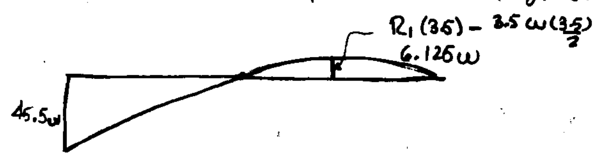
$M_3 = 21\omega\ T\text{-}m + 24.5\omega\ T\text{-}m = 45.5\omega\ T\text{-}m$

Por $\Sigma F_y = 0 \quad -3.5\omega - 7\omega + R_3 = 0$

$R_3 = +10.5\,\omega\,(T)\uparrow$

El diagrama de momentos flexionantes de la viga es:

D.M.F



Aplicando la formula de la escuadría para $M = 45.5\omega$

$$2000\ Kg/cm^2 = 20000\ T/m^2$$

$$T/m^2\ 20000 = \frac{45.5\omega\ (T\text{-}m)}{.533333\times10^{-2}\ m^3}$$

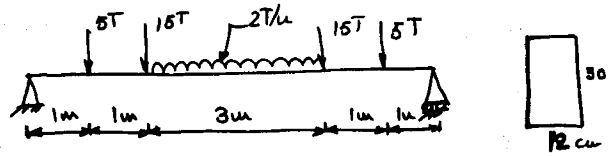
$$\omega = 2.344\ T/m$$

El momento maximo es:

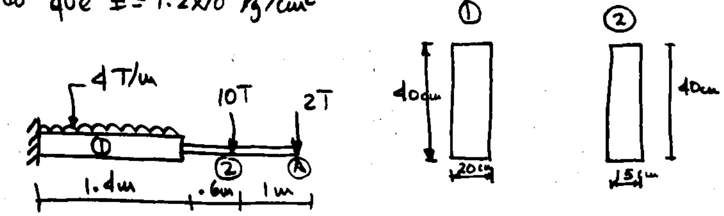
$$M = 45.5\,(2.344) = 106.652\ T\text{-}m$$

1.- Encuentre el valor de la flecha máxima y la rotación en los extremos de la viga que se muestra en la figura

$E = 10^6\ Kg/cm^2$

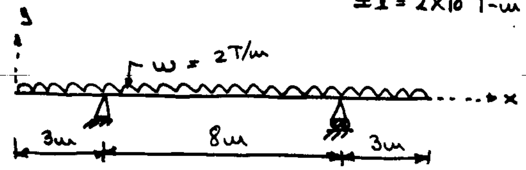


2.- Encuentre (utilizando viga conjugada) la flecha en el extremo A de la viga que se muestra en la figura, considerando que $E = 1.2 \times 10^5\ Kg/cm^2$

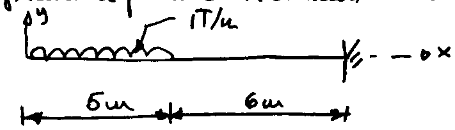


3.- Determine la flecha de la viga en los puntos $x=2$, $x=10$ y $x=12$ m. Utilice el método de integración a partir de la ecuación de la elástica

$EI = 2 \times 10^4\ T\text{-}m^2$

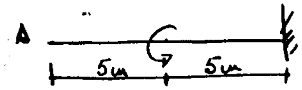


4.- Determinar la flecha en $x=1$ y $x=7$ utilizando el método de integración a partir de la ecuación de la elástica

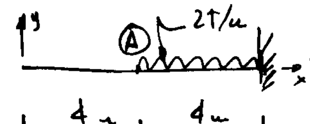


$EI = 2 \times 10^4\ T\text{-}m^2$

5.- Determine la flecha y la pendiente en el extremo A de la viga utilizando viga conjugada.

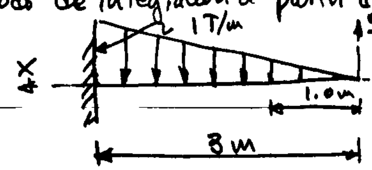


6.- Determine la flecha máxima y la flecha en el punto A de la viga, así como las pendientes en esos mismos puntos, utilizando viga conjugada [redacted]



$EI = 2 \times 10^4\ T\text{-}m$

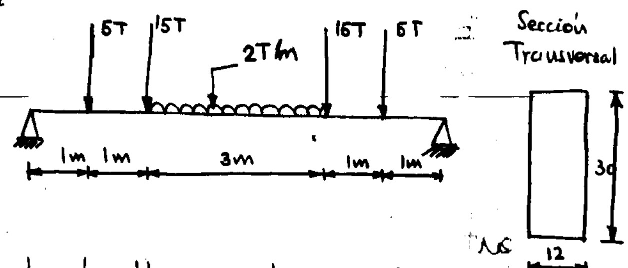
7.- Para la viga mostrada en la figura determine la pendiente y flecha en $x = 1.0$ m Usando el método de integración a partir de la ecuación de la elástica



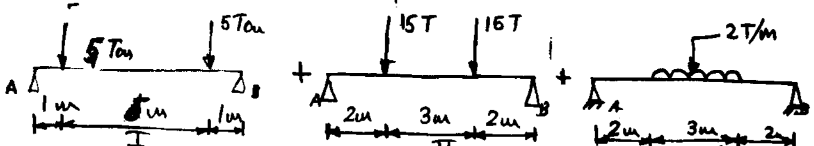
$E = 1400000\ T/m^2$
$I = 0.00186\ m^4$

1.- Encuentre el valor de la flecha máxima y la rotación en los extremos de la viga que se muestra en la figura (utilice los teoremas de Mohr)

$E = 10^6$ kg/cm²



Descomponiendo el problema por el principio de superposición en los tres problemas siguientes y aplicando los teoremas de Mohr.



Por la viga I las reacciones son (por ser carga simétrica) $R_A = 5$ Ton ↑ $R_B = 5$ Ton ↑

ó por $\Sigma M_A = 0$ $\quad 5(6) + 5(1) - 7R_B$ $\quad \therefore R_B = \frac{35}{7} = 5$ Ton ↑

y por $\Sigma F_y = 0$ $\quad -5 - 5 + 5 + R_A = 0$ $\quad \therefore R_A = 5$ Ton ↑

Para la viga II (las reacciones son (por ser carga simétrica) $R_{AII} = 15$ Ton ↑ $R_{BII} = 15$ Ton ↑ o por $\Sigma M_{AII} = 0$

$15(2) + 15(5) - 7R_{BII} = 0$ $\quad R_{BII} = 15$ Ton y por $\Sigma F_y = 0$ $\quad -15 - 15 + 15 + R_A = 0$

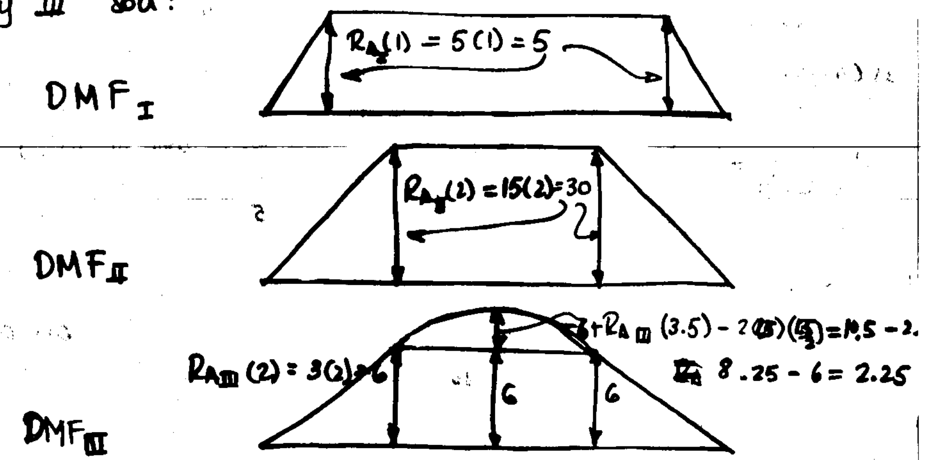
$\therefore R_{AII} = 15$ Ton ↑ Para la viga III (las reacciones son (por ser carga simétrica) $R_{AIII} = \frac{3(2)}{2} = 3$ Ton ↑ y $R_{BIII} = 3$ Ton ↑

ó por $\Sigma M_{AIII} = 0$ $\quad 3(2)\left(2 + \frac{3}{2}\right) - R_{BIII}(7) = 0$

$\therefore R_{BIII} = \frac{6(3.5)}{7} = 3$ Ton ↑ $\quad$ y por $\Sigma F_y = 0$ $\quad 3(2) - 3 - R_{AIII} = 0$

$\therefore R_{AIII} = 3$ Ton ↑

Los diagramas de momentos de las vigas I, II y III son:



Dividiendo el diagrama de momento flexionante de cada viga entre EI se obtiene el diagrama de curvatura de la viga. Aplicando para los diagramas de curvatura los teoremas de Mohr. Para encontrar el giro en el extremo de la viga (A, o B) se debe tener que

Por simetría $\theta_{A_{I+II+III}} = -\theta_{B_{I+II+III}} = \sum_A^{L/2}$ Áreas del diagrama de curvatura $_{I+II+III}$

Del DMF_I/EI

$$\theta_{A_I} = \frac{1}{EI}\left[\frac{5(1)}{2} + 5(2.5)\right] = \frac{2.5}{EI} + \frac{12.5}{EI} = \frac{15}{EI}$$

Del DMF_{II}/EI

$$\theta_{A_{II}} = \frac{1}{EI}\left[\frac{30(2)}{2} + 30(1.5)\right] = \frac{30}{EI} + \frac{45}{EI} = \frac{75}{EI}$$

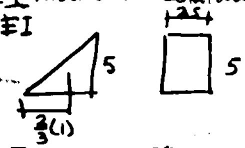
Del DMF/EI

$$\theta_{A_{III}} = \frac{1}{EI}\left[\frac{6(2)}{2} + 6(1.5) + \frac{2}{3}(1.5)\,2.25\right] = \frac{6}{EI} + \frac{9}{EI} + \frac{2.25}{EI} = \frac{17.25}{EI}$$

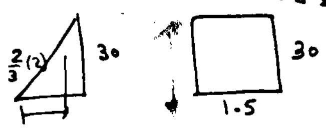
$$\theta_{A_{I+II+III}} = \frac{15}{EI} + \frac{75}{EI} + \frac{17.25}{EI} = \frac{107.25}{EI}$$

La flecha máxima se presenta al centro del claro. Esto de ser afirmado, en virtud de la simetría de la viga y la simetría [de] las cargas actuantes. Aplicando los teoremas de Mohr tenemos:

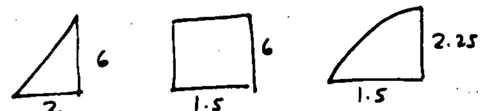
$$y_{I+II+III} = \sum_{A}^{L/2} (A \bar{x}_A) = \frac{\Sigma}{EI} \text{(momentos estáticos de áreas del D.MF)}$$



$$y_I = \left[\frac{5}{2}(1)\left(\frac{2}{3}\right)(1) + 5(2.5)\left(1+\frac{2.5}{2}\right)\right]\frac{1}{EI} = \frac{29.79}{EI}$$



$$y_{II} = \left[30\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{2}{3}(2)\right) + 30(1.5)\left(2+\frac{1.5}{2}\right)\right]\frac{1}{EI} = \frac{163.75}{EI}$$



$$y_{III} = \left[6\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{2}{3}(2)\right) + 6(1.5)\left(2+\frac{1.5}{2}\right) + 2.25\left([illegible](1.5)[illegible]\right)\right]\frac{1}{EI} = \frac{39.33}{EI}$$

De donde por superposición:

$$y = y_I + y_{II} + y_{III} = \frac{1}{EI}(293)$$

Para determinar y es por lo tanto necesario estimar E y I

Para la sección transversal del problema

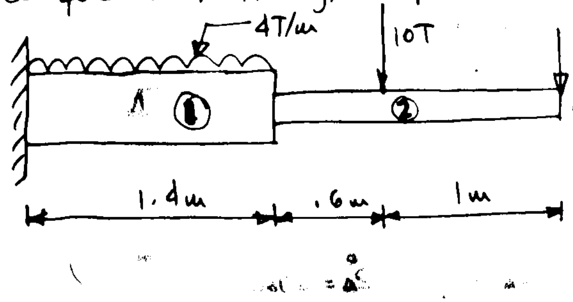
$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{.12(.3)^3}{12} = .00027 m^4$$

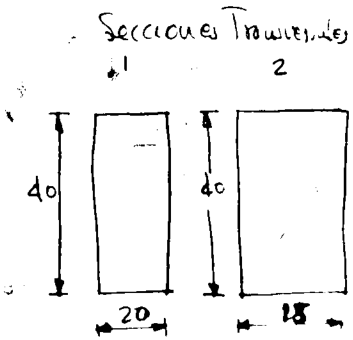
$$E = 10^6 kg/cm^2 = 10^7 T/m^2$$

$$\theta_A = \frac{107.25}{EI} = .3972\times10^{-3} \text{ rad}$$

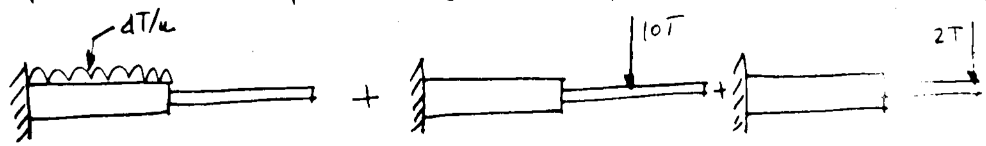
$$y_{I+II+III} = \frac{233}{.00027\times10^7} = 8.63\times10^{-3} m = .00863 m = .863 cm$$

2.- Encuentre, utilizando los teoremas de Mohr la flecha en el extremo A de la viga que se muestra en la figura considerando que $E = 1.2\times10^5 kg/cm^2$





Descomponiendo el problema anterior por el principio de superposición en los tres problemas siguientes y aplicando los teoremas de Mohr

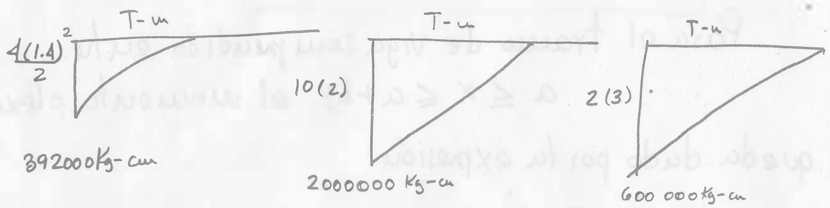


Se pueden trazar los diagramas de momentos flexionantes de estas vigas, sin necesidad de conocer el valor de las reacciones en el extremo empotrado simplemente tomando momentos de derecha a izquierda de la viga. Para poder encontrar el diagrama de curvatura de las vigas ($\frac{M}{EI}$) es necesario conocer para cada tramo 1 y 2 el valor del momento de inercia en virtud de que se tienen dos secciones transversales diferentes.

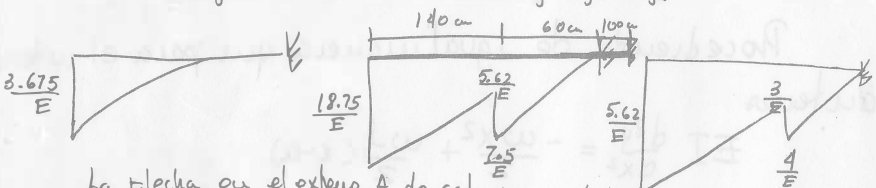
$$I_1 = \frac{20(40)^3}{12} = 106.666 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{15(40)^3}{12} = 80000 \text{ cm}^4$$

Diagramas de momentos flexionantes de las vigas



Diagramas de curvatura y viga conj.



La flecha en el extremo A de cada viga es el momento flexionante en ese punto:

$$y_I = \left[3.675\left(\tfrac{1}{3}\right)(140)\left(\tfrac{3}{4}(140)+160\right)\right]\frac{1}{E} = \frac{45447.5}{E}$$

[redacted]

$$y_{II} = \left[7.5\left(\tfrac{60}{2}\right)\left(\tfrac{2}{3}(60)+100\right) + 5.62(140)\left(\tfrac{140}{2}+160\right) + 13.13\left(\tfrac{140}{2}\right)\left(\tfrac{2}{3}(140)+160\right)\right]\frac{1}{E}$$

$$y_{II} = \frac{d29566.7}{E}$$

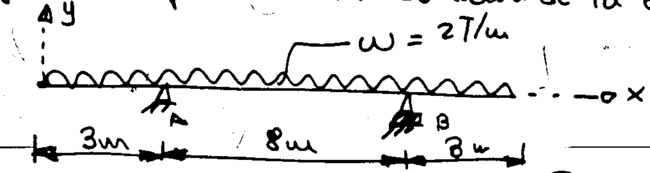
$$y_{III} = \left[4\left(\tfrac{160}{2}\right)\left(\tfrac{2}{3}(160)\right) + 3(140)(70+160) + 2.62\left(\tfrac{140}{2}\right)\left(\tfrac{2}{3}(140)+160\right)\right]\frac{1}{E}$$

$$y_{III} = \frac{177194.6}{E}$$

$$y_I + y_{II} + y_{III} = \frac{652208}{E}$$

$$y = \frac{652208}{1.2 \times 10^5} = 5.43 \text{ cm}$$

3.- Determine la flecha de la viga en los puntos $x = 2m$, $x = 10m$ y $x = 12m$. Utilice el método de integración a partir de la ecuación de la elástica



$EI = 2\times10^4 \ T\cdot m^2$

Convención de momentos (+) de izq. a derecha

Eligiendo como origen de coordenadas el extremo izquierdo de la viga. Tenemos que obtener como primer paso las reacciones en los apoyos de la viga; por simetría de cargas y de la viga en sí; $R_A = R_B = \frac{wl}{2} = \frac{14\times2}{2} = 14$ Ton

Para el intervalo de la viga $0 \le x \le a$ el momento flexionante queda dado por la expresión

(1)... $M = -\frac{wx^2}{2}$

Pero como el momento flexionante dividido entre EI es la curvatura; $\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$

(2) $M = \frac{d^2y}{dx^2}EI$

Sustituyendo (2) en (1)

(3) $EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{wx^2}{2}$

Integrando la expresión (3) como EI es constante a lo largo de la viga se tiene que:

$$EI\int\frac{d^2y}{dx^2} = -\int\frac{wx^2}{2}dx$$

$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{wx^3}{6} + C_1$; $\frac{dy}{dx}$ es la pendiente de la viga.

Integrando nuevamente obtenemos:

$EIy = -\frac{wx^4}{24} + C_1x + C_2$; y es la flecha

Para el tramo de viga comprendido entre ($a \le x \le a+b$) el momento flexionante queda dado por la expresión:

$M = -\frac{wx^2}{2} + \frac{wl}{2}(x-a)$, Donde $\frac{wl}{2} = R_A$

Procediendo de igual manera que para el intervalo anterior

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{wx^2}{2} + \frac{wl}{2}(x-a)$$

Integrando esta expresión una vez se obtiene

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{wx^3}{6} + \frac{wl}{4}(x-a)^2 + C_3$$

Integrando nuevamente esta expresión se tiene

$$EIy = -\frac{wx^4}{24} + \frac{wl}{12}(x-a)^3 + C_3x + C_4$$

No es necesario obtener las expresiones para la flecha y la pendiente y la curvatura para el tramo $(a+b) < x < l$ porque por la simetría de la viga y de las cargas, las flechas en la mitad izquierda de la viga son iguales a las de la mitad derecha.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Para poder valorar las flechas de la viga de las ecuaciones obtenidas, es necesario encontrar el valor de las constantes C_1, C_2, C_3, C_4; las cuales se obtienen sustituyendo en las ecuaciones, los valores de la flecha en lugares donde ésta se conozca, por ejemplo:

Para el intervalo $0 \le x \le a$ en $x=a$

$$EI\, y(0) = 0 = -\frac{wa^4}{24} + C_1 a + C_2 \quad \ldots (3)$$

Para el intervalo $a \le x \le (a+b)$ en $x=a$

$$EI\, y(0) = 0 = -\frac{wa^4}{24} + C_3 a + C_4 \quad \ldots (4)$$

Cuando $x=a$ la pendiente de la viga a la derecha debe ser por continuidad igual a la pendiente a la izquierda de la viga. Y por lo tanto las ecuaciones para el intervalo $0 \le x \le a$ y $a \le x \le (a+b)$ de las pendientes se igualan

$$0 \le x \le a \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \frac{-wa^3}{6EI} + \frac{C_1}{EI} \quad ; \quad a \le x \le a+b \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \frac{-wa^3}{6EI} + \frac{C_3}{EI}$$

$$-\frac{wa^3}{6EI} + \frac{C_1}{EI} = -\frac{wa^3}{6EI} + \frac{C_3}{EI}$$

$$C_1 = C_3$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

De las ecuaciones (3) y (4) considerando que $C_1 = C_3$ se obtiene que:

$$-\frac{wa^4}{24} + C_1 a + C_2 = -\frac{wa^4}{24} + C_3 a + C_4$$

$$-\frac{wa^4}{24} + C_1 a + C_2 + \frac{wa^4}{24} - C_1 a = C_4$$

$$C_2 = C_4$$

Por la simetría de la viga y la simetría de las carga se sabe que la pendiente en $x = \frac{l}{2}$ es nula

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{l}{2}} = 0$$ y por lo tanto empleando la expresión para $a \le x \le a+b$

$$EI \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{l}{2}} = 0 = -\frac{w}{6}\left(\frac{l}{2}\right)^3 + \frac{wl}{4}\left(\frac{l}{2}-a\right)^2 + C_3$$

$$C_3 = \frac{w}{6}\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{wl}{4}\left(\frac{l}{2}-a\right)^2$$

Sustituyendo este valor de C_3 en la ecuación llamada (4)

$$EI\, y(0) = 0 = -\frac{wa^4}{24} + \frac{w}{6}\left(\frac{l}{2}\right)^3 a - \frac{wl}{4}\left(\frac{l}{2}-a\right)^2 + C_4$$

$$C_4 = \frac{wa^4}{24} - \frac{wl^3 a}{48} + \frac{wl}{4} a \left(\frac{l}{2}-a\right)^2$$

Conociendose ahora todos los valores de las constantes ya que $C_3 = C_1$ y $C_4 = C_2$ podemos obtener las expresiones generales de la flecha para cualquier punto en el intervalo $0 \le x \le a$

Universidad Nacional Autónoma de México

y para el intervalo $a \le x \le a+b$

Para $0 \le x \le a$

$$y = -\frac{wx^4}{24EI} + \frac{wl^3x}{48EI} - \frac{wlx}{4EI}\left(\frac{l}{2}-a\right)^2 + \frac{wa^4}{24EI} - \frac{wl^3a}{48EI} + \frac{wla}{4EI}\left(\frac{l}{2}-a\right)^2$$

Para $a \le x \le a+b$

$$y = -\frac{wx^4}{24EI} + \frac{wl(x-a)^3}{12EI} + \frac{wl^3x}{48EI} - \frac{wlx}{4EI}\left(\frac{l}{2}-a\right) + \frac{wa^4}{24EI} - \frac{wl^3a}{48EI} + \frac{wla}{4EI}\left(\frac{l}{2}-a\right)^2$$

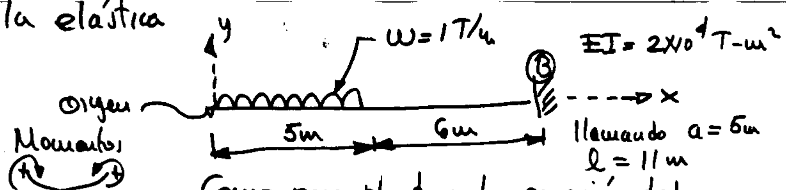
~~4.- Determinar la flecha en x~~

Para la flecha en $x=2$ por simetría es igual a la flecha en $x=12$. se emplea la expresión para $0 \le x \le a$ sustituyendo $x=2$ $\quad y = 1.51 \times 10^{-4}\,m$

Para $x=10$ se emplea $a \le x \le a+b$

$$y = 4.99 \times 10^{-2}\,m$$

4.- Determinar la flecha en $x=1$ y $x=7$ Utilizando el método de integración a partir de la ecuación de la elástica



Como para plantear la ecuación del momento no intervienen las reacciones en (B) no es necesario determinarlas.

Universidad Nacional Autónoma de México

Para $0 \le x \le a$ el momento está dado por $M = -\frac{wx^2}{2}$ y como $EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{wx^2}{2}$$

Integrando una vez tenemos:

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{wx^3}{6} + C_1 \qquad (1)$$

Integrando otra vez tenemos:

$$EI\,y = -\frac{wx^4}{24} + C_1x + C_2 \qquad (2)$$

Para $a \le x \le l$; $M = -wa\left(x-\frac{a}{2}\right)$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -wa\left(x-\frac{a}{2}\right)$$

Integrando una vez:

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{wa}{2}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + C_3 \qquad (3)$$

Integrando otra vez:

$$EI\,y = -\frac{wa}{6}\left(x-\frac{a}{2}\right)^3 + C_3x + C_4 \qquad (4)$$

Sustituyendo valores conocidos de y y $\frac{dy}{dx}$ en algunos x se encuentra el valor de las constantes C_1, C_2, C_3, C_4.

Por ejemplo: en $x=l$ $y=0$ y $\frac{dy}{dx}=0$ por ser empotramiento y de la expresión (3)

$$EI\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=l} = 0 = -\frac{wa}{2}\left(l-\frac{a}{2}\right)^2 + C_3$$

$\therefore \; C_3 = \frac{wa}{2}(l - \frac{a}{2})^2$

De la expresión (4), sustituyendo C_3

$$EI\, y(l) = 0 = -\frac{wa}{6}(l-\frac{a}{2})^3 + \frac{wa}{2}(l-\frac{a}{2})^2 + C_4$$

$$\therefore \; C_4 = \frac{wa}{6}(l-\frac{a}{2})^3 - \frac{wa}{2}(l-\frac{a}{2})^2$$

Como en el punto $x=a$ por continuidad la pendiente a la izquierda es igual a la pendiente a la derecha las ecuaciones (1) y (3) deben cumplirse simultaneamente. y como se conoce el valor de C_3 tenemos:

$$-\frac{wa^3}{6} + C_1 = -\frac{wa}{2}(\frac{a}{2})^2 + C_3$$

$$-\frac{wa^3}{6} + C_1 = -\frac{wa^3}{8} + \frac{wa}{2}(l-\frac{a}{2})^2$$

$$C_1 = \frac{2wa^3}{48} + \frac{wa}{2}(l-\frac{a}{2})^2 = \frac{wa^3}{24} + \frac{wa}{2}(l-\frac{a}{2})^2$$

Igualando las expresiones para la flecha en $x=a$ de las ecuaciones (2) y (4) tenemos que conocido C_4

$$-\frac{wa^4}{24} + \frac{wa^4}{24} + \frac{wa^2}{2}(l-\frac{a}{2})^2 + C_2 = -\frac{wa}{6}(\frac{a}{2})^3 + \frac{wa^2}{2}(l-\frac{a}{2})^2$$

$$+ \frac{wa}{6}(l-\frac{a}{2})^3 - \frac{wal}{2}(l-\frac{a}{2})^2$$

Despejando C_2

$$C_2 = -\frac{wa^4}{48} + \frac{wa}{6}(l-\frac{a}{2})^3 - \frac{wal}{2}(l-\frac{a}{2})^2$$

Por lo tanto las expresiones para la flecha en los intervalos $0 < x \leq a$ y : $a \leq x \leq l$ son :

Para $0 < x \leq a$

$$y = \frac{-wx^4}{24EI} + \frac{wa^3x}{24EI} + \frac{wax}{2EI}(l-\frac{a}{2})^2 - \frac{wa^4}{48EI} + \frac{wa}{6EI}(l-\frac{a}{2})^3 - \frac{wal}{2EI}(l-\frac{a}{2})^2$$

La flecha para $a \leq x \leq l$

$$y = -\frac{wa}{6EI}(x-\frac{a}{2})^3 + \frac{wax}{2EI}(l-\frac{a}{2})^2 + \frac{wa}{6EI}(l-\frac{a}{2})^3 - \frac{wal}{2EI}(l-\frac{a}{2})^2$$

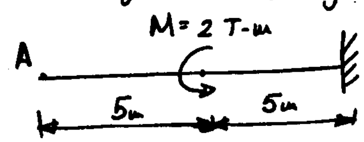
Empleando la expresión adecuada $(0 < x \leq a)$ para obtener la flecha en $x=1$ tenemos

$$y(1) = -6.51 \times 10^{-2}\ m$$

Empleando la expresión para $a \leq x \leq l$ para $x=7$

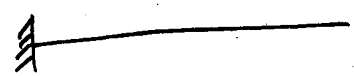
$$y(7) = -1.433 \times 10^{-2}\ m$$

5.- Determine la flecha y la pendiente en el extremo (A) de la viga utilice viga conjugada.



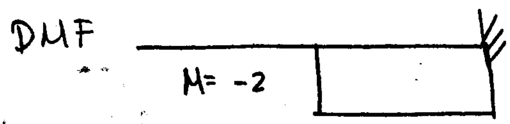
$EI = 2 \times 10^4$ T-m

Se conoce que la viga conjugada de la anterior es el extremo libre se empotra y el empotrado se deja libre y por lo tanto las condiciones de apoyo de la viga conjugada son llamando $\frac{l}{2} = 5$

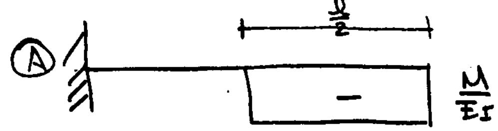


Esta viga deberá cargarse con el diagrama de momentos flexionantes de la viga original dividido entre EI.

El diagrama de momentos flexionantes de la viga ~~anterior es~~ original es:



La viga conjugada resultante es por lo tanto



En el extremo (A) θ_A es el cortante en la viga conjugada en (A)

En viga conj: $V_{XC} = \theta_A = -\frac{Ml}{2EI}$

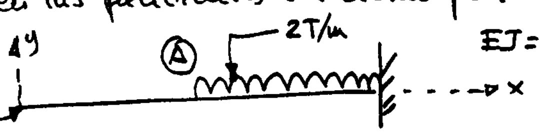
La flecha en (A) de la viga original es igual al momento en el punto (A)

$$M_{A\,\text{viga conj}} = y_A = -\frac{Ml}{2EI}\left(\frac{3}{4}l\right) = -\frac{3Ml^2}{8EI}$$

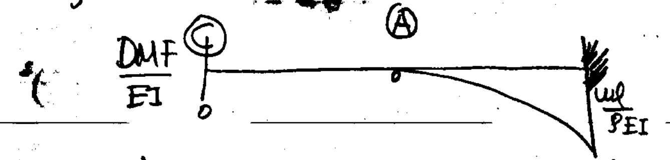
Sustituyendo valores

$\theta_A = -.0005$ rad $\qquad y_A = -3.75\times10^{-3}$ m

6.- Determine la flecha máxima y la flecha en el punto (A) de la viga mostrada en la figura; obtenga también las pendientes en dichos puntos. Utilizando viga conjugada

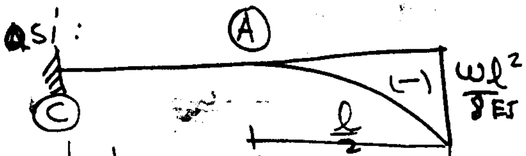


Como en el problema anterior las condiciones de apoyo se cambian del empotramiento se convierte en un extremo libre y el extremo libre se empotra. El diagrama de momentos flexionantes dividido entre EI con que se debe cargar la viga conjugada es el de la viga original.



La viga conjugada es por lo tanto

Cargada así:



Donde el cortante en cualquier punto es igual a la pendiente y el momento flexionante es igual a la flecha.

$$\theta_A = -\frac{wl}{8EI}\left(\frac{1}{3}\frac{l}{2}\right) = -\frac{wl^3}{48EI}$$

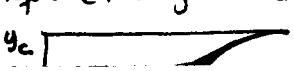
$$\theta_C = -\frac{wl}{8EI}\left(\frac{1}{3}\frac{l}{2}\right) = \frac{-wl^3}{48EI}$$

El momento flexionante de la viga conjugada o sea la flecha de la viga original es:

$$y_A = -\frac{wl^2}{8EI}\left(\frac{1}{3}\frac{l}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\frac{l}{2}\right) = -\frac{wl^4}{128EI}$$

$$y_C = y_{max} = -\frac{wl^2}{8EI}\left(\frac{1}{3}\frac{l}{2}\right)\left(\frac{7}{4}\frac{l}{2}\right) = -\frac{7wl^4}{384EI}$$

y_c es la máxima porque el diagrama de momentos de la viga conjugada es.



81

Sustituyendo valores tenemos:

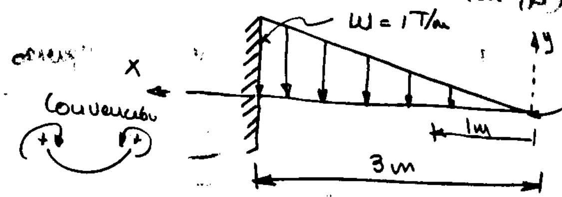
$\theta_C = -1.066\times10^{-3}$ rad

$\theta_A = -1.066\times10^{-3}$ rad

$y_A = -3.2\times10^{-3}$ m

$y_C = -7.161\times10^{-3}$ m

7.- Para la viga mostrada en la figura determine la pendiente y la flecha en x=1.0m Usando el método de integración a partir de la ~~elástica~~ ecuación de la elástica (N)



$E = 1400000\,T/m^2$

$I = .00186\,m^4$

$l = 3m$

El momento en cualquier sección $0 < x \leq l$ queda expresado por: $\frac{w}{l} = \frac{w_x}{x}$

$$w_x = \frac{wx}{l}$$

$$M = \frac{wx}{l}\,\frac{x}{2}\left(\frac{1}{3}x\right) = -\frac{wx^3}{6l}$$

Como $M = EI\frac{d^2y}{dx^2}$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{wx^3}{6l}$$

Integrando una vez

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{wx^4}{24l} + C_1$$

Integrando otra vez:

$$EIy = -\frac{wx^5}{120l} + C_1x + C_2 \qquad (a)$$

Conociendo que para $x = l$ $\quad y = 0$

$$EI\,y(l) = 0 = -\frac{wl^5}{120l} + C_1 l + C_2 \qquad (1)$$

Y además para $x = l$ $\quad \frac{dy}{dx} = 0$

$$EI\frac{dy}{dx}\Big|_{x=l} = 0 = -\frac{wl^4}{24l} + C_1$$

$$C_1 = \frac{wl^3}{24}$$

Sustituyendo este valor en (1) se tiene que:

$$\frac{wl^5}{120l} - \frac{wl^4}{24} = C_2$$

$$C_2 = \frac{wl^4}{120} - \frac{wl^4}{24}$$

Por lo tanto la expresión para determinar la flecha en cualquier punto entre $0 < x \leq l$ es: de (a)

$$y = -\frac{wx^5}{120lEI} + \frac{wl^3}{24EI}x + \frac{wl^4}{120EI} - \frac{wl^4}{24EI}$$

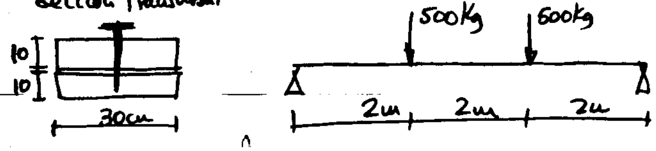
$$y = -\frac{wx^5}{120lEI} + \frac{wl^3x}{24EI} - \frac{4wl^4}{120EI}$$

Sustituyendo valores

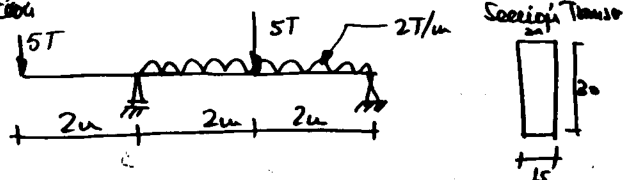
$y(1)$

1.- Encuentre la separación a la que deberán colocarse los clavos para lograr que la sección compuesta por dos tablares, mostrada en la figura, trabaje como unidad. Considere que los clavos usados pueden trabajar a una fuerza cortante de 70 Kgs.

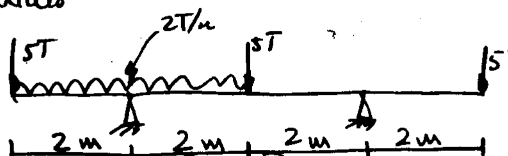
Sección Transversal



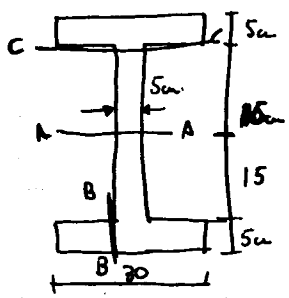
2.- Obtenga el valor máximo que alcanza el esfuerzo cortante en la viga, así como la distribución de esfuerzos cortantes en esa misma sección.



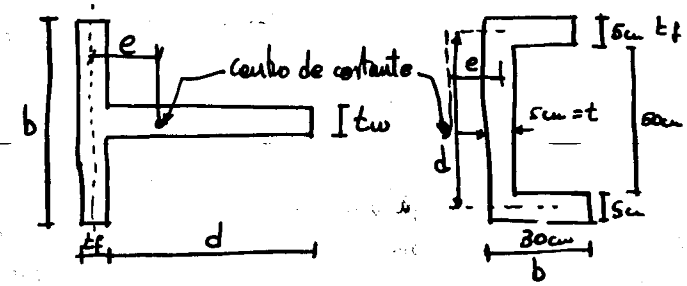
3.- Determinar los esfuerzos cortantes en las secciones A-A, B-B y C-C en la sección de viga en que el cortante sea máximo.



Sección Transversal

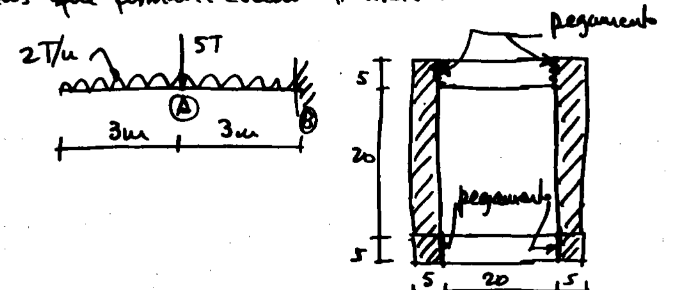


4.- Determinar el centro de cortante de la figuras siguiente:

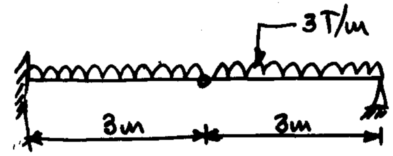


(a)

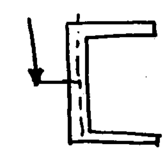
5.- Determine en las secciones A y B de la viga el esfuerzo cortante a que se encuentra sometido el pegamento que une las cuatro piezas que forman la sección transversal.



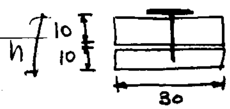
6.- Determine el valor máximo que alcanza el esfuerzo cortante en la viga, así como la distribución de esfuerzos cortantes en esa misma sección.

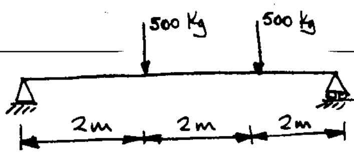


Sección Transversal



1.- Encuentre la separación a la que deberan colocarse los clavos para lograr que la sección compuesta por dos tablones trabaje como una unidad. Considere que los clavos usados pueden trabajar a una fuerza costante de 70 Kg





Para determinar la separación de clavos para que el juego de tablones actue como unidad, deberá calcularse el flujo de cortante existente entre los tablones

$$q = \frac{VQ}{I}$$

Donde I es el momento de inercia de la sección completa

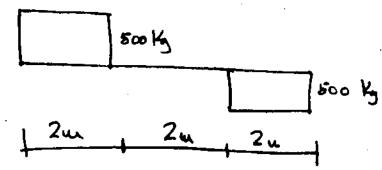
$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{30(20)^3}{12} = 20000 \text{ cm}^4$$

Q es el momento estático del area de uno de los tablones con respecto a su eje que pasa entre los dos tablones

$$Q = \underline{bh_1}\,\frac{h_1}{2} = 30(10)\left(\frac{10}{2}\right) = 1500 \text{cm}^3$$

V es el cortante actuante en la viga. Se debe trazar el diagrama de cortante de la viga para localizar las secciones en donde el cortante toma valores distintos y por lo tanto donde el flujo de cortante toma diversos valores

Diagrama de Fuerza Cortante



El diagrama de fuerza cortante es de esa forma por ser

$$R_A = R_B = 500 \text{ Kg}$$

Como el cortante toma dos valores distintos para la longitud de la viga (500 Kg y 0 Kg)

~~[illegible]~~ El flujo de cortante en donde $V = 500$ Kg es:

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{500 \times 1500}{20000} = 37.5 \text{ Kg/cm}$$

Para el tramo de viga central

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{0 \times 1500}{20000} = 0 \text{ Kg/cm}$$

Para determinar la distancia a la que deben colocarse los clavos se emplea la expresión:

$$S = \frac{V_R}{q}$$

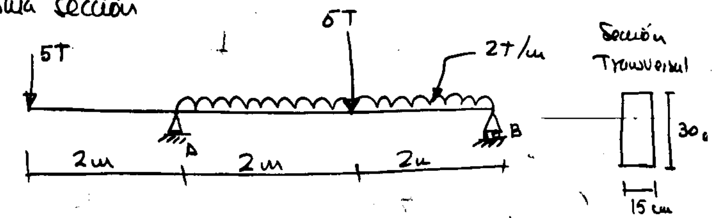
Donde V_R es el cortante resistente del clavo

Para $V = 500$ $\quad S = \frac{70}{37.5} = 1.86 \text{ cm}$

Para el tramo central $V = 0$ $\quad q = 0$ y no se necesitan clavos en la parte central

$$S = \frac{70}{0} \rightarrow \infty$$

2.- Obtenga el valor máximo que alcanza el esfuerzo cortante en la viga, así como la distribución de esfuerzos cortantes en esa misma sección



Se deben encontrar primeramente las reacciones R_A y R_B de la viga para poder trazar el diagrama de fuerza cortante de la viga y localizar en este el lugar de máximo cortante, para valuar en este lugar el esfuerzo cortante máximo en la sección transversal y la distribución de esfuerzos cortantes a lo largo de la sección transversal.

Por ΣM_A (+)

$$-5(2) + 2(4)(2) + 5(2) - 4R_B = 0$$

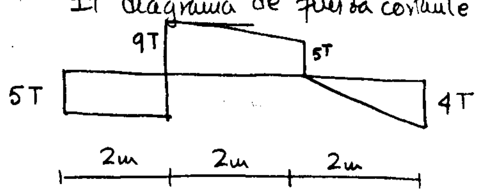
$$R_B = \frac{-10+16+10}{4} = 4 \text{ Ton} \uparrow$$

Por $\Sigma F_y = 0$

$$-5 + R_A - 4(2) - 5 + 4 = 0$$

$$R_A = 18 - 4 = 14 \text{ Ton} \uparrow$$

El diagrama de fuerza cortante de la viga es:

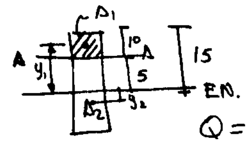


El cortante máximo en la viga es $V = 9T$

El esfuerzo cortante en cualquier sección de la sección transversal de la viga donde el cortante V es 9T queda expresado por

$$\tau = \frac{9\,000 \text{ kg } Q}{I b}$$

Q es variable según la sección que se seleccione para estimar el esfuerzo cortante en la sección transversal. Es el momento estático de el área, de arriba o del área de abajo de la sección A-A del ejemplo siguiente



Se desea conocer el esfuerzo cortante en la sección A-A

$$Q = A_1 y_1 = A_2 y_2$$

Donde y_1 y y_2 son las distancias del centroide del area elegida al eje neutro

I es el momento de inercia de la sección transversal completa

b es el ancho de la sección transversal.

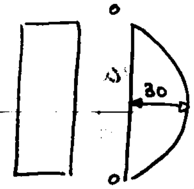
El valor máximo de τ se localiza exactamente en el eje neutro, por ser el lugar donde Q es máxima para la sección transversal. $Q = A y = (15 \times 15)(7.5)$

$$\tau = \frac{9000\,(15 \times 15)(7.5)}{I\ b}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{15(15)^3}{12} \qquad b = 15$$

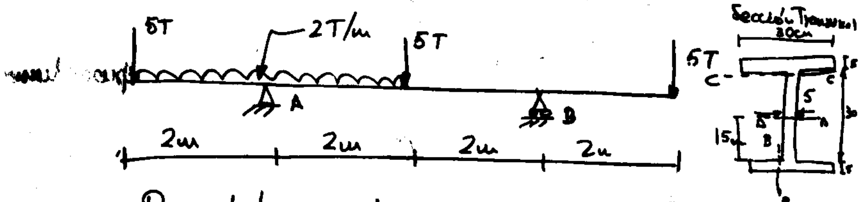
$$\tau = \frac{9000(15)(15)7.5}{33750(15)} = 30\,kg/cm^2$$

∴ La variación del esfuerzo cortante en esta sección es:



Variación parabólica porque: Q varía en esa forma.

3.- Determinar los esfuerzos cortantes en las secciones A-A, B-B, C-C en la sección de la viga en la que el cortante sea máximo.



Para determinar los esfuerzos pedidos en la sección de cortante máximo, es necesario determinar los valores de las reacciones R_A y R_B de la viga para trazar el diagrama de fuerza cortante de la viga y determinar el valor del cortante máximo en la misma.

Por $\Sigma M_A = 0$ (+)

$$-5(2) - 2(2)(1) + 2(2)(1) + 5(2) - 4R_B + 5(6) = 0$$

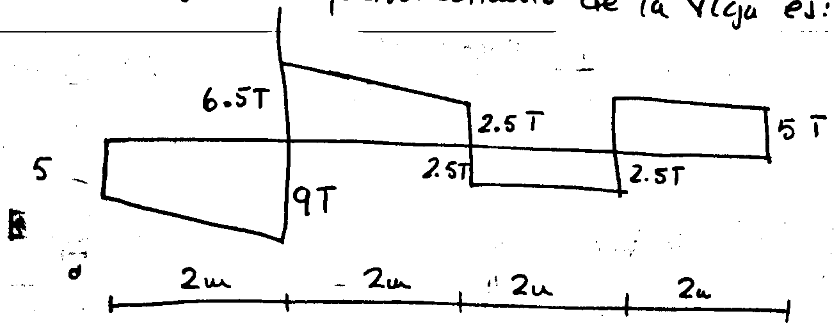
$$R_B = \frac{30}{4} = 7.5\ Ton \uparrow$$

Por $\Sigma F_y = 0$

$$-5 - 4(2) - 5 - 5 + 7.5 + R_A = 0$$

$$R_A = 23 - 7.5 = 15.5\ Ton \uparrow$$

El diagrama de fuerza cortante de la viga es:



El cortante máximo de la viga es $V_{max} = 9T = 9000\,kg$

El momento de inercia de la sección transversal es por medio del teorema de los ejes paralelos

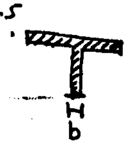
$$I = \frac{5(30)^3}{12} + 2\left[\frac{30(5)^3}{12} + (30\times5)(17.5)^2\right] = 103750\ cm^4$$

Para la sección A-A

$$Q = 30(5)y_1 + 5(15)y_2$$

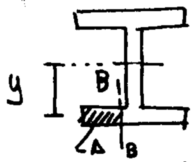
$$y_1 = 15 + \frac{5}{2} = 17.5 \qquad y_2 = \frac{15}{2} = 7.5$$

$$Q = 30(5)(17.5) + 5(15)(7.5) = 3187.5\,cm^3$$



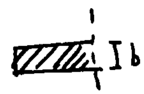
$$\tau_{A-A} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{9000(3187.5)}{103750(5)} = 55.3\,kg/cm^2$$

Para la sección B-B



$Q = A\bar{y} = 12.5(5)\,\bar{y}$

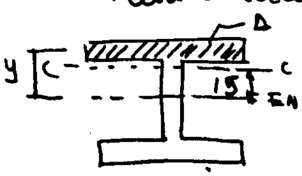
$\bar{y} = 15 + \frac{5}{2} = 17.5$



$Q = 12.5(5)(17.5) = 1093.75\,cm^3$

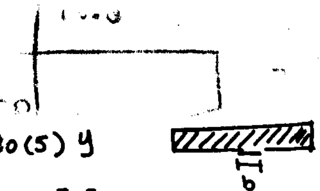
$$\tau_{B-B} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{9000\,(1093.75)}{(103750)\,(5)} = 18.98\,Kg/cm^2$$

Para la sección C-C



$Q = A\bar{y} = 80(5)\,\bar{y}$

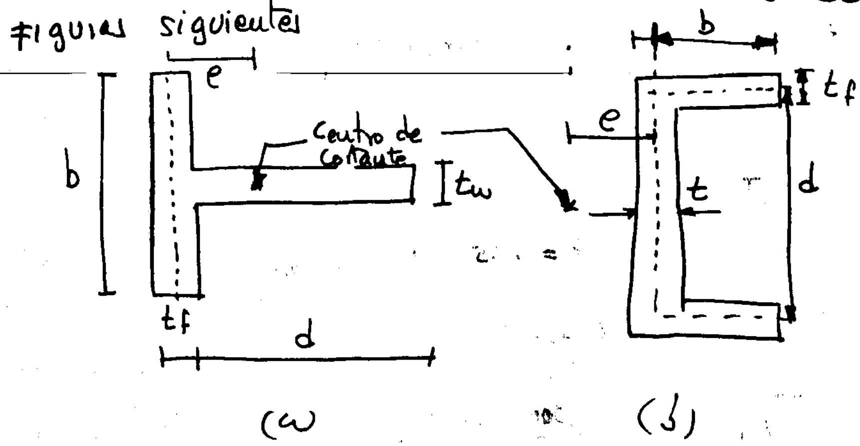
$\bar{y} = 15 + 2.5 = 17.5$



$Q = 30(5)(17.5) = 2625\,cm^3$

$$\tau_{C-C} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{9000\,(2625)}{(103750)(5)} = 45.54\,Kg/cm^2$$

4.- Determine el centro de cortante de las figuras siguientes



Para la figura (a) empleando la expresión

$$e = \frac{\Sigma I_x\,x}{\Sigma I_x}$$

x = distancia de un eje vertical al eje vertical centroidal de la sección.

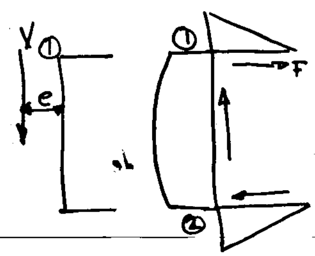
que se emplea para determinar la posición del centro de cortante cuando la pieza tiene un eje de simetría

$$\Sigma I_x x = \frac{t_f b^3}{12}(0) + \frac{d t_w^3}{12}\left(\frac{t_f}{2} + \frac{d}{2}\right)$$

$$\Sigma I_x x = \frac{d t_w^3 (t_f + d)}{12(2)} = \frac{d t_w^3 (t_f + d)}{24}$$

$$e = \frac{d t_w^3 (t_f + d)}{24\, I_x}$$

Para la sección en canal usando el procedimiento convencional



En ① el valor de q es:

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V(b t_f)(d/2)}{I_x}$$

$F = \frac{1}{2} q b$ = Area del triangulo

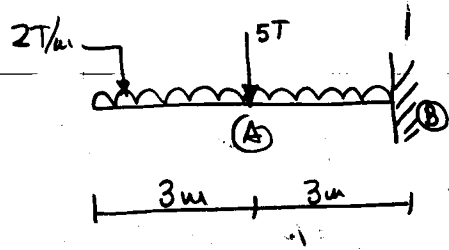
$$F = \frac{V b^2 d t_f}{4 I_x}$$

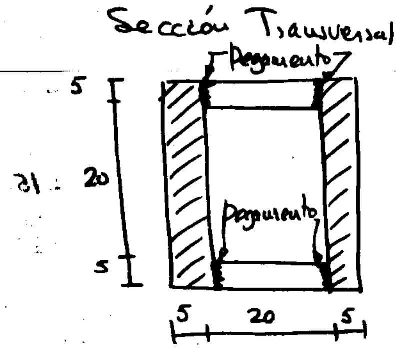
Por Σ de Momentos en ② = 0

$Fd - Ve = 0$

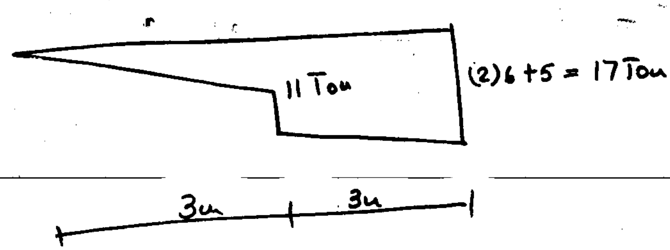
$$e = \frac{Fd}{V} = \frac{V b^2 d^2 t_f}{4 V I_x} = \frac{b^2 d^2 t_f}{4 I_x}$$

5.- Determine en las secciones A y B de la viga el esfuerzo cortante a que se encuentra sometido el pegamento que une las cuatro piezas que forman la sección transversal.





De la viga se determina el diagrama de fuerza cortante en la misma



Por teorema de los ejes paralelos

$$I = 2\left(\frac{5(30)^3}{12}\right) + 2\left[\frac{20(5)^3}{12} + 20(5)(12.5)^2\right] = 54166.7\,cm^4$$

Para la sección en el pegamento

$$Q = A\,y = 20(5)\,y = 20(5)\,12.5 = 1250\,cm^3$$

En la sección A $\quad V = 11\ Ton = 11000\,Kg$

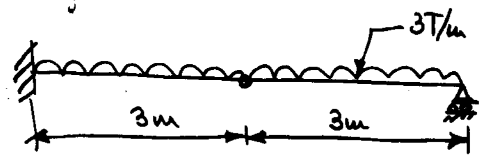
y el esfuerzo en el pegamento es:

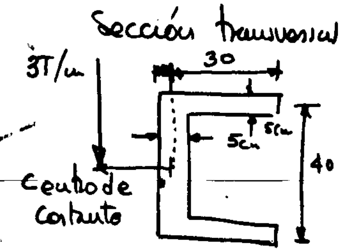
$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{11000(1250)}{54166.7(5)} = 25.4\,Kg/cm^2$$

En la sección B $\quad V = 17000\,Kg$

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{17000(1250)}{54166.7(5)} = 34.2\,Kg/cm^2$$

6.- Determine el valor máximo que alcanza el esfuerzo cortante en la viga, así como la distribución de esfuerzos cortantes en esa misma sección

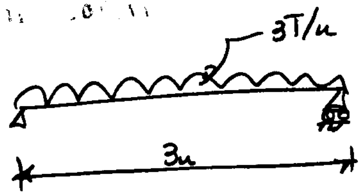




Por estar aplicada la carga en el centro de cortante, no se presenta torsión en la pieza, sólo se presenta cortante puro y flexión.

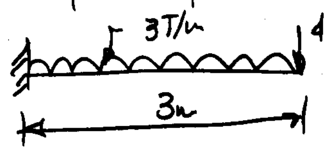
Resolviendo la viga para determinar el diagrama de fuerza cortante y el punto en el que dicho diagrama tiene un valor máximo.

Aislando la parte derecha de la viga tenemos:



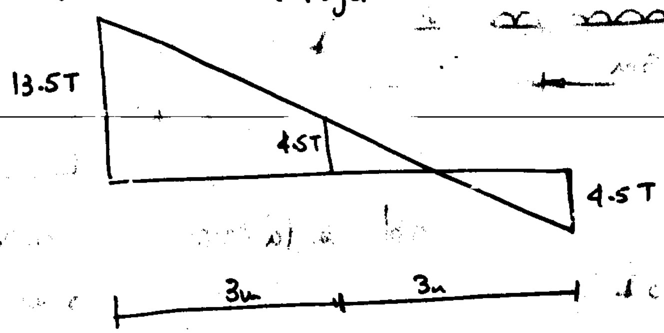
Por simetría de la viga $R_A = R_B = \frac{3(3)}{2} = 4.5$ Ton ↑

Aislando la parte izquierda de la viga



$R_A = 4.5 + 3(3) = 13.5$ Ton ↑

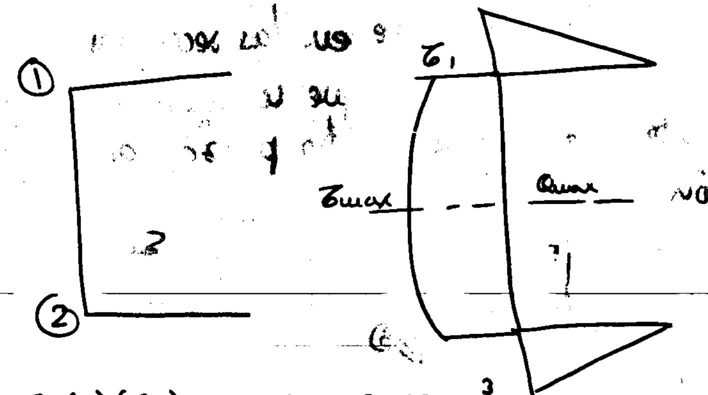
Con estos valores se puede trazar el diagrama de fuerza cortante de la viga



El cortante máximo V = 13.5 Ton = 13500 Kg

$Q_{max} = Ay$

$Q_{max} \doteq 30(5)(20) + 20(5)(10) = 4000 \text{ cm}^3$



$Q_1 = Q_2 = 30(5)(20) = 150(20) = 3000 \text{ cm}^3$

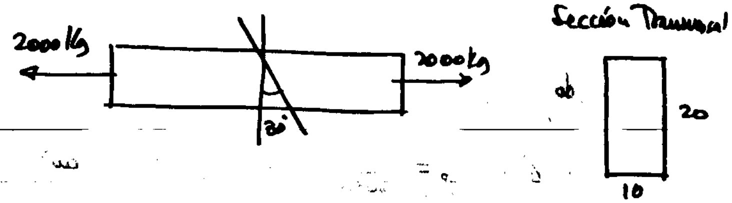
$I = \frac{5(45)^3}{12} + 2\left[\frac{27.5(5)^3}{12} + 27.5(5)(20)^2\right] = 148541.7$

$\tau_{max} = \frac{13500(4000)}{148541.7(5)} = 72.7 \text{ Kg/cm}^2$

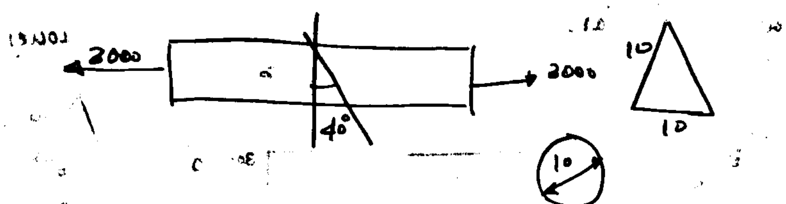
Para la sección ①

$\tau_1 = \frac{13500(3000)}{148541.7(5)} = 54.53 \text{ Kg/cm}^2$

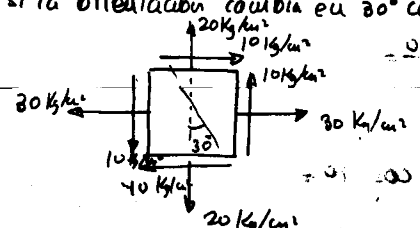
Determine los esfuerzos normales y tangenciales al plano que forma 30° con la vertical, según se muestra en la figura encontrando también el cortante máximo en cualquier plano de la pieza



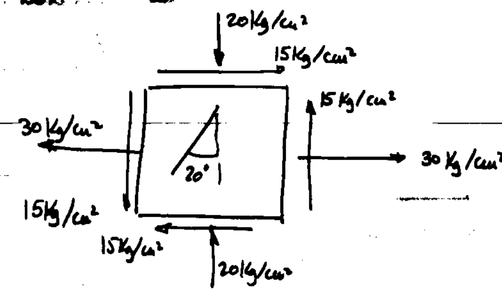
Determinar los esfuerzos normales y tangenciales actuando en un plano formando 40° con la vertical, como se muestra en la figura, para la sección triangular y para la sección circular. Determine también para ambas secciones, el valor máximo del esfuerzo cortante.



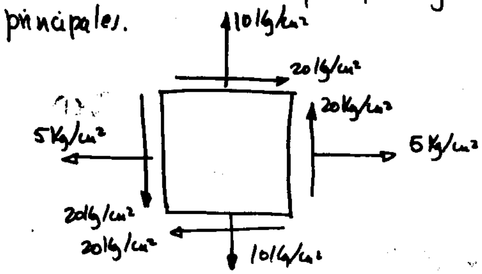
Determine el estado de esfuerzos del elemento mostrado en la figura si la orientación cambia en 30° como se muestra en la figura.



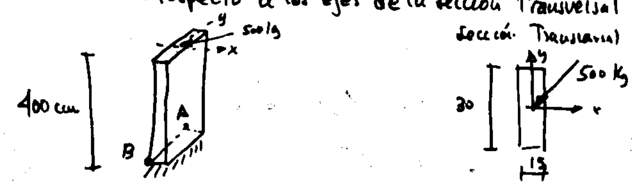
Determine el estado de esfuerzos del elemento mostrado en la figura siguiente, si la orientación cambia 20°



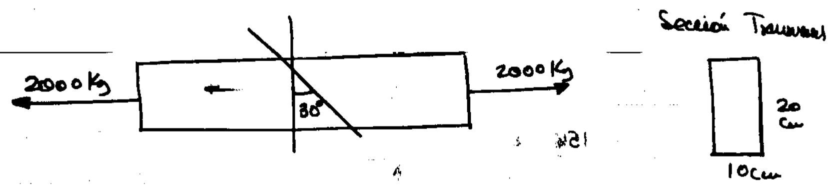
Obtenga para el estado de esfuerzos en el elemento mostrado en la figura, los esfuerzos principales y la orientación de los planos principales.



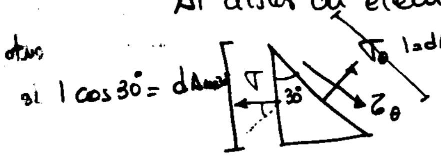
Determine los esfuerzos en los puntos A y B de la viga los cuales se localizan en la sección empotrada. Observe que la carga P está inclinada con respecto a los ejes de la sección transversal de la viga



1.- Determine los esfuerzos normales y tangenciales al plano que forma 30° con la vertical, según se muestra en la figura encontrando también el cortante máximo en cualquier plano de la pieza.



Al aislar un elemento como



$$\sigma = \frac{2000}{A} = \frac{2000}{20\times10} \qquad F_{\sigma\theta} = \sigma_\theta(1) \qquad F_{\tau\theta} = \tau_\theta(1)$$

$$F = \frac{2000}{20\times10}\cos 30^\circ$$

Por $\Sigma F_{\sigma\theta} = 0$

$$-\frac{2000}{20\times10}\cos 30^\circ(\cos 30^\circ) + \sigma_\theta(1) = 0$$

$$\sigma_\theta = \frac{2000}{20\times10}(\cos^2 30^\circ) = 7.5\ Kg/cm^2$$

Por $\Sigma F_{\tau\theta} = 0$

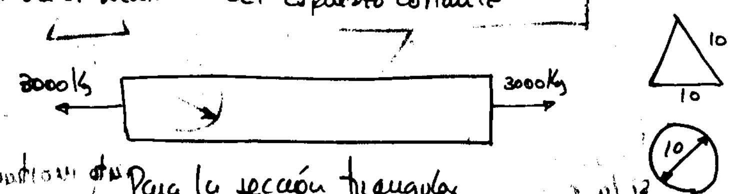
$$+\frac{2000}{20\times10}\cos 30^\circ(\text{sen } 30^\circ) + \tau_\theta(1) = 0$$

$$\tau_\theta = \frac{2000}{20\times10}\cos 30^\circ \text{ sen } 30^\circ = 4.33\ Kg/cm^2$$

El cortante máximo se presenta cuando el producto sen α cos α es máximo; y esto se produce cuando $\alpha = 45°$

$$\therefore\ \tau_{max_{45^\circ}} = \frac{2000}{20\times10}\cos 45^\circ \text{ sen } 45^\circ = 5\ Kg/cm^2$$

2.- Determinar los esfuerzos tangenciales y normales actuando en un plano formando 40° con la vertical como se muestra en la figura para la sección triangular y para la sección circular. Determine también para ambas secciones el valor máximo del esfuerzo cortante



Para la sección triangular.

$$A = \frac{10\times10}{2} = 50\ cm^2$$

Aplicando la expresión obtenida para el problema anterior

$$\sigma_{\theta_{40^\circ}} = \frac{3000}{50}\cos^2 40^\circ = 35.21\ Kg/cm^2$$

$$\tau_{\theta_{40^\circ}} = \frac{3000}{50}\cos 40^\circ \text{ sen } 40^\circ = 29.54\ Kg/cm^2$$

$$\tau_{max_{45°}} = \frac{3000}{50} \cos 45° \operatorname{sen} 45° = 30 \, Kg/cm^2$$

Para el círculo

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = 78.54 \, cm^2$$

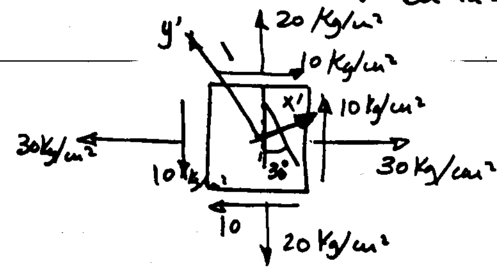
Aplicando las expresiones deducidas en el problema anterior

$$\sigma_{\theta_{40°}} = \frac{3000}{78.54} \cos^2 40° = 22.41 \, Kg/cm^2$$

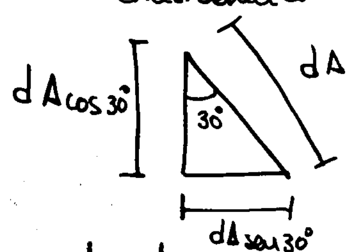
$$\tau_{\theta_{40°}} = \frac{3000}{78.54} \cos 40° \operatorname{sen} 40° = 18.81 \, Kg/cm^2$$

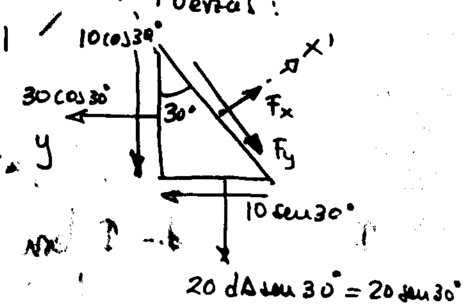
$$\tau_{max_{45°}} = \frac{3000}{78.54} \cos 45° \operatorname{sen} 45° = 19.1 \, Kg/cm^2$$

Problema 3.- Determinar el estado de esfuerzos del elemento mostrado en la figura, si la orientación cambia en 30° como se muestra en la figura.



Considerando





Haciendo equilibrio en la dirección x' y y'

$$\Sigma F_{x'} = 0$$

$$-20 \operatorname{sen}^2 30° - F_x - 30 \cos^2 30° - 10 \cos 30° \operatorname{sen} 30° - 10 \operatorname{sen}^2 30° \cos 30° = 0$$

$$F_x = 36.16 \, Kg$$

Pero como $dA = 1$ y $\sigma = \frac{F}{A}$

$$F_x = \sigma_{x'} = 36.16 \, Kg/cm^2$$

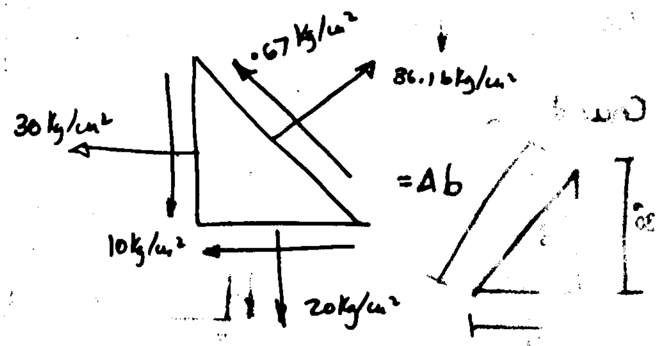
Por $\Sigma F_{y'} = 0$

$$-10\cos^2 30° + 30\cos 30° \operatorname{sen} 30° + 10\operatorname{sen}^2 30° - 20\operatorname{sen} 30° \cos 30° - F_y = 0$$

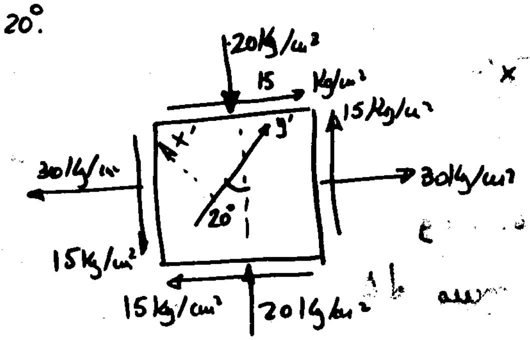
$F_y = -.67$ Kg Se cambia la dirección del esfuerzo

Como $\sigma = \dfrac{F_y}{A}$ y $dA = 1$

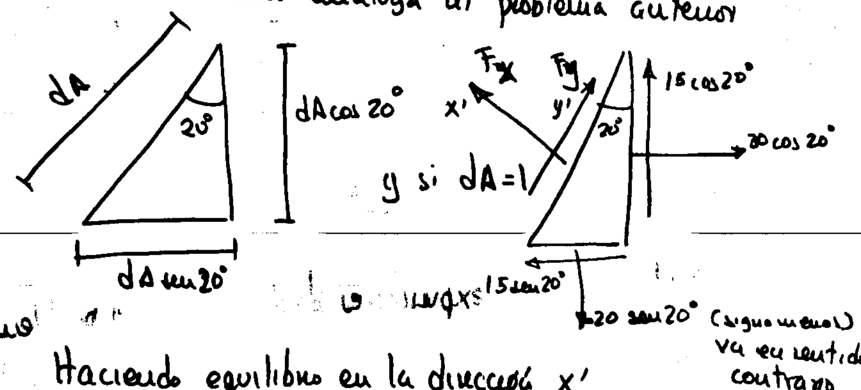
$$F_y = \sigma_{y'} = .67 \text{ Kg/cm}^2$$



Problema 4.- Determine el estado de esfuerzos el elemento mostrado en la figura siguiente, si la orientación cambia 20°.



De manera análoga al problema anterior



Haciendo equilibrio en la dirección x'

$$F_x + 20\operatorname{sen}^2 20° + 15\cos 20° \operatorname{sen} 20° - 30\cos^2 20° + 15\cos 20° \operatorname{sen} 20° = 0$$

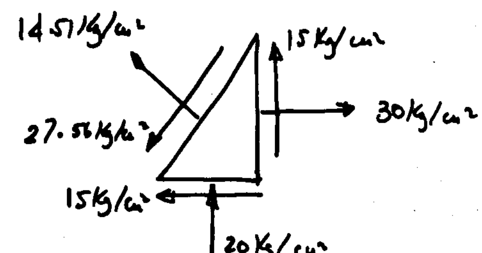
$$\sigma_{x'} = \frac{F_x}{dA} = \frac{14.51 \text{ Kg/cm}^2}{1}$$

Por $\Sigma F_{y'} = 0$

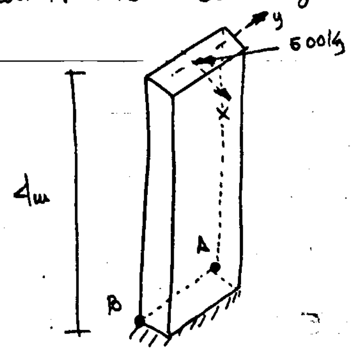
$$F_y + 15\cos^2 20° + 30\cos 20° \operatorname{sen} 20° + 20\operatorname{sen} 20° \cos 20° + 15\operatorname{sen}^2 20° = 0$$

$F_y = -27.56$ (va en sentido contrario al supuesto)

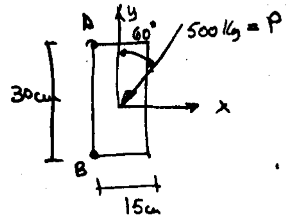
$$\sigma_{y'} = \frac{F_y}{dA} = -27.56$$



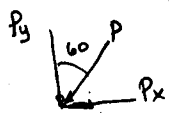
Problema 6 Determinar los esfuerzos en los puntos A y B de la viga, los cuales se localizan en la sección empotrada. Observe que la carga P esta inclinada con respecto a los ejes de la sección transversal de la viga.



Sección Transversal



Descomponiendo la fuerza P en dos P_x y P_y



$P_y = 500 \cos 60° = 250 kg$

$P_x = 500 \operatorname{sen} 60° = 433 kg$

La flexion alrededor del eje x la produce $P_y = 250$ kg

el momento de inercia alrededor de x es $I_x = \frac{15 \times 30^3}{12} = 33750 cm^4$

$\sigma = \frac{M}{I} y$ (Tensión) $\sigma_A' = \frac{250(400)}{33750}(15) = 44.44 kg/cm^2$

Compresión $\sigma_B' = \frac{M}{I} y = \frac{250(400)(15)}{33750} = 44.44 kg/cm^2$

La flexión alrededor del eje y la produce $P_x = 433$ kg

el momento de inercia alrededor de y es

$$I_y = \frac{30(15)^3}{12} = 8437.5 cm^4$$

Por formula de la escuadría

(compresión) $\sigma_A'' = \frac{433(400)(7.5)}{8437.5} = 153.9 kg/cm^2$

(compresión) $\sigma_B'' = \frac{433(400)(7.5)}{8437.5} = 153.9 kg/cm^2$

Aplicando el principio de superposición considerando + tensiones y − compresiones

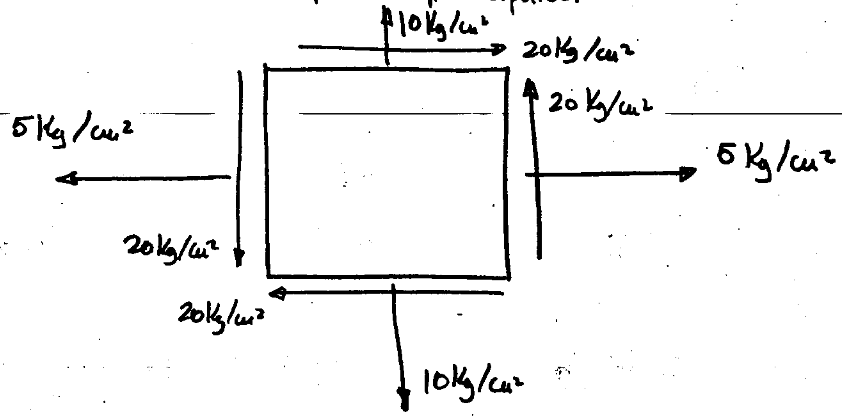
$\sigma_A = \sigma_A' + \sigma_A'' =$ (Tensión) + (Compresión) $= 44.44 - 153.9 = -109.46$

$\sigma_A = -109.46 kg/cm^2$

$\sigma_B = \sigma_B' + \sigma_B'' =$ (compresión) + (compresión) $= -44.44 - 153.9$

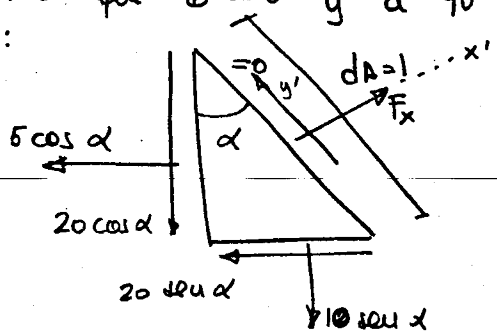
$\sigma_B = -198.34 kg/cm^2$

Problema 5.- Obtenga para el estado de esfuerzos en el elemento mostrado en la figura, los esfuerzos principales y la orientación de los planos principales.



Por definición los planos principales se localizan en la inclinación en que $\tau = 0$ y a 90° entre sí

Tomando:



Por $\Sigma F_{x'} = 0$

$$F_x - 5\cos^2\alpha - 20 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 20\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha - 10\operatorname{sen}^2\alpha = 0 \qquad (a)$$

Por $\Sigma F_{y'} = 0$

$$-20\cos^2\alpha - 10\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 20\operatorname{sen}^2\alpha + 5\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha = 0$$

Dividiendo entre $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

$$-\frac{20\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - 10 + \frac{20\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + 5 = 0$$

$$\frac{-20\cos^2\alpha + 20\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = 5$$

$$\frac{-20(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = 5$$

Como $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos 2\alpha$

y como $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha-\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha+\alpha)) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\alpha$

$$-\frac{20\cos 2\alpha}{\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2}} = 5$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha} = -\frac{5}{40} \qquad \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{40}{5} = -8$$

$\tan 2\alpha = -8 \qquad \therefore \text{ang} \tan(-8) = -82.87$

Angulo $\alpha_1 = -\frac{82.87}{2} = -41.43°$

Sumando 90° obtenemos

$$\alpha_2 = -41.48° + 90 = 48.75°$$

Sustituyendo α_1 en la expresión (a) obtenemos

$\sigma_x = \frac{F_x}{1} = -12.65$ Kg/cm² (Esf. principal menor)

Sustituyendo $\alpha_2 = 41.57°$ en la expresión (a) obtenemos $\sigma_x = 27.66$ Kg/cm² (Esf. principal ....