#126

A P U N T E S

D E

I N G E N I E R I A   D E   S I S T E M A S

APUNTES DE INGENIERIA DE SISTEMAS

ISBN -968-58-0624-1

Impreso en México Printed in Mexico

P R E S E N T A C I O N

De acuerdo a las estadísticas de los últimos seis años, se inscriben a la carrera de Ingeniero Mecánico Electricista de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M. un promedio anual de mil doscientos alumnos de nuevo ingreso. Sin embargo, en ese mismo período sólo aprueban su examen profesional y reciben su título, aproximadamente trescientos alumnos. Considerando que un cincuenta por ciento de los estudiantes, por diversos motivos abandona definitivamente la Facultad en los dos primeros años posteriores a su inscripción, se puede concluir que sólo la mitad de los seiscientos restantes se recibe.

De esta manera aumenta año con año, el número de alumnos que deben una o varias materias y que ya han sobrepasado el tiempo límite de siete años y medio que fija la Legislación Universitaria para ser considerados como alumnos regulares con derecho a reinscripción.

Esta misma Legislación otorga a los estudiantes en esta situación tres alternativas para terminar sus estudios. La primera, aplicable a cualquier alumno, es la de presentar seis exámenes extraordinarios por semestre; la segunda, válida solamente para los estudiantes que ya hayan acreditado el sesenta por ciento de los créditos totales de la carrera, es la de inscribirse en dos materias como oyentes y presentar su examen final en el tercer período de exámenes extraordinarios del semestre; y la tercera, aplicable exclusivamente a los alumnos que ya han pagado su servicio social y acreditado su seminario y no deban más de dos materias, es la de presentarlas en "examen especial", en cualquier fecha.

Resultado de la situación analizada es la existencia de un gran número de alumnos que tienen que presentar exámenes extraordinarios para la terminación de sus estudios.

El alumno que decide presentar un examen extraordinario comúnmente, no encuentra un apoyo institucional adecuado, ni sabe con seguridad qué es lo que tiene que estudiar, ya que el contenido de los exámenes depende de los profesores y no existe, un texto básico con el que el estudiante se puede preparar adecuadamente.

Con el propósito de analizar y ayudar a resolver este problema, la División de Ingeniería Mecánica y Eléctrica convocó, en marzo de 1981, a un seminario para buscar una metodología adecuada tendiente a facilitar la preparación de exámenes extraordinarios. En este seminario participaron los funcionarios y profesores de la División y especialistas del Centro de Servicios Educativos de la Facultad de Ingeniería y del Sistema de Universidad Abierta de la U.N.A.M.

En él, se llegó a la unánime conclusión de que la mejor solución para ayudar a los alumnos en la prepración de exámenes extraordinarios, sería llevarlos a cabo a través del Sistema de Enseñanza Abierta, con el apoyo de un profesor que sirva de tutor personal del estudiante, asimismo se concluyó, que el éxito de esta actividad, es la de producir los textos adecuados de autoaprendizaje.

Para comenzar los trabajos se seleccionaron de las materias a cargo de los diferentes Departamentos de la División de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, aquéllas que habían presentado mayor dificultad de aprobación y se comisionó a

FACULTAD DE INGENIERIA

Director:
Octavio Agustín Rascón Chávez

Secretario General
Ramón Cervantes Beltrán

Jefe de la División de Ingeniería Mecánica y Eléctrica:
Jacinto Viqueira Landa

Secretario de la División:
Wilbert Arcila Rodríguez

Jefe de la Unidad de Apoyo Editorial:
Irma Hinojosa Félix

COORDINACION SISTEMA UNIVERSIDAD ABIERTA

Coordinador:
Oscar Zorrilla Velázquez

Secretario Académico:
Jaime E. Cortés Arellano

Secretario Técnico:
Ma. Teresa Quintanilla Martínez

I N D I C E G E N E R A L

MODULO V REDES

diferentes profesores para la elaboración de los textos de autoaprendizaje correspondientes.

Algunos de estos materiales fueron elaborados en colaboración con otros profesores, y otros por profesores que dirigían personalmente un seminario de tesis en colaboración con sus alumnos.

La obra de Ingeniería de Sistemas, representa el esfuerzo realizado en forma coordinada por profesores del Departamento de Ingeniería Industrial e Investigación de Operaciones, personal de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería y la Coordinación del Sistema de Universidad Abierta de la U.N.A.M.

Esperamos que estas publicaciones cumplan con su propósito fundamental, ayudar a los alumnos en la preparación de exámenes extraordinarios, y que sirvan adicionalmente de base para el desarrollo de una adecuada metodología de autoaprendizaje que ayude a la formación de los alumnos regulares que cursan normalmente estas materias.

Toda crítica constructiva de profesores y alumnos en general, nos permitirá el constante mejoramiento de los contenidos y presentación de esta obra.

A t e n t a m e n t e .

† Ing. Odón de Buen Lozano

P R O L O G O

La Ingeniería de Sistemas es una metodología para la resolución de problemas. Trata de combinar los conocimientos de varias ramas de la ciencia y la tecnología, a fin de solucionar problemas interdisciplinarios. Es evidente que un problema como el de la planeación urbana no puede resolverse hoy en día con la aplicación de las disciplinas académicas tradicionales como son la arquitectura, la ingeniería, la sociología, etcétera.

Pero no debe pensarse que la Ingeniería de Sistemas sólo puede aplicarse a problemas complejos. La metodología de la Ingeniería de Sistemas proporciona una forma lógica de analizar problemas y puede aplicarse a la toma de decisiones diarias.

Es muy conveniente que los alumnos de Ingeniería dominen esta metodología para la solución de problemas (que en realidad es una derivación del método científico) antes de cursar las materias que hemos llamado de "aplicación", de manera que puedan usar esta herramienta para resolver problemas de diversa índole que se les presentarán en las materias simultáneas y posteriores.

Los temas que se abordan no están tratados en forma exhaustiva. Se ha tratado de desarrollar el material a través de ejemplos y se ha obviado la demostración de teoremas para que sea más fácil la comprensión de conceptos importantes.

Al final de cada módulo se incluye una amplia bibliografía para la persona interesada en profundizar en los diferentes temas.

El contenido académico de este texto es exclusiva responsabilidad de la Facultad de Ingeniería y su índice temático pertenece al programa de la materia de Ingeniería de Sistemas.

Este trabajo fue desarrollado por el Ing. Víctor Flores Zavala, Coordinador de la materia, con la colaboración de los alumnos: Gerardo Rodríguez Ayala, Pedro Franco, Alberto Guajardo, Luis Alonso y Luis Ponce y la asesoría pedagógica para sistema abierto en enseñanza por la Srita. Irma Cruz Santillán.

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
E INVESTIGACION DE OPERACIONES

INSTRUCCIONES PARA EL MANEJO DEL TEXTO

Los presentes apuntes han sido elaborados tomando en cuenta los diferentes aspectos que caracterizan a los estudiantes de la División de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Por su amplitud, se dividió en cinco módulos el contenido temático de esta obra. El objetivo fundamental es facilitar al estudiante el aprendizaje. Asimismo, que le permita programar y comprobar los avances logrados en el estudio de la asignatura de Ingenieria de Sistemas.

A continuación se presentan los elementos didácticos que conforman estos apuntes, con el fin de facilitar el estudio y permitir un mayor aprovechamiento de los mismos.

1. Objetivo general. Indica la conducta que debe lograr el alumno al finalizar el estudio de la Unidad.
2. Introducción. Es un comentario general, motivador de los contenidos de la Unidad, en el que se resalta la importancia de estos contenidos.
3. Objetivos especificos. Tienden en su conjunto al logro del objetivo general, propuesto al comienzo de la Unidad.
4. Cuadro sinóptico. Presenta la síntesis del contenido en forma esquemática.
5. Contenido. Es el desarrollo de los temas, incluyendo problemas resueltos a nodo de ejemplos en los que se presentan aplicaciones concretas de los conceptos teóricos estudiados.
6. Cuestionario de Autoevaluación. Son actividades que el alumno debe realizar para reafirmar la comprensión

y aplicación del contenido. Adicionalmente le permiten medir el grado en que logró los objetivos de aprendizaje propuestos.

7. Bibliografía. Su finalidad es la de informar al alumno en dónde puede consultar, ampliar y profundizar sobre los temas que requiera.
8. Examen de Autoevaluación. Es un instrumento que le permite al alumno verificar por sí mismo si ha alcanzado el mínimo necesario de los objetivos de aprendizaje propuestos en la Unidad.
9. Soluciones a los cuestionarios de autoevaluación. Es donde se agrupan las respuestas correctas de los cuestionarios de autoevaluación.
10. Soluciones al examen de autoevaluación. Constituye la referencia a partir de la cual el alumno puede comprobar o cotejar las respuestas al examen de autoevaluación.

Se recomienda al alumno que se dedique con empeño al estudio de estos apuntes. Además, si se desea ampliar algún concepto o bien disipar dudas específicas respecto a la asignatura de Ingeniería de Sistemas,es conveniente que recurra al servicio de tutoría que el Departamento de Ingeniería Industrial e Investigación de Operaciones tiene establecido en la División de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

O B J E T I V O   G E N E R A L

El alumno aplicará los conceptos y la metodología de la Ingeniería de Sistemas, que le permitirán resolver problemas de Programación Lineal, Transporte y Redes.

INTRODUCCION A LA UNIDAD

La Ingeniería de Sistemas ha provocado una verdadera revolución dentro de la Ingeniería. Sus aplicaciones pueden ser tan variadas como la creatividad que demostremos los ingenieros.

La Ingeniería de Sistemas estudia los problemas como parte de un sistema. Esta metodología ha tenido éxitos rotundos sobre todo en sistemas complejos que serían muy difíciles de manejar de otra manera.

Existen muchos sistemas que tienen el mismo tipo de relaciones internas de manera que las conclusiones y resultados que se obtienen al estudiar uno solo de ellos, se pueden aplicar a todos los demás. Lo cual lleva a estudiar a los sistemas en sí, a sus estructuras más que su naturaleza específica.

Al estudiar los temas de estos apuntes, el alumno adquirirá las herramientas necesarias para el manejo de los conceptos de la Ingeniería de Sistemas. Como la Ingeniería de Sistemas es muy amplia, se pretende que los alumnos lleguen al nivel de aplicación en una parte de ella, que son los modelos lineales de optimización (Programación Lineal).

Ello le permitirá resolver problemas de índole muy variada, independientemente de su especialización.

MODULO I ELEMENTOS BASICOS DE LA INGENIERIA DE SISTEMAS

Objetivos Específicos:

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Explicará el concepto y los objetivos de la Ingeniería de Sistemas.

2. Clasificará sistemas de acuerdo con sus características.

3. Identificará el papel de la Investigación de Operaciones dentro de la Ingeniería dc Sistemas.

C U A D R O   S I N O P T I C O

- Sistema
  - Estructura
    - Entidades
    - Atributos
    - Actividades
    - Medio Ambiente
      - Endógenas
      - Exógenas
  - Clasificación
    - Continuo
      - Abierto
        - Estocástico
        - Determinístico
      - Cerrado
        - Estocástico
        - Determinístico
    - Discreto
      - Abierto
        - Estocástico
        - Determinístico
      - Cerrado
        - Estocástico
        - Determinístico
  - Evolución
    - Ingeniería de Sistemas (objetivos)
    - Investigación de Operaciones (metodología)

I.1. El concepto de Sistema

Un sistema es un conjunto de elementos que interactúan con un objetivo común. Esto es, todo sistema está integrado por objetos o actividades agrupados de tal manera, que constituya una unidad lógica y funcional. Se puede pensar en sistemas muy simples, como unas tijeras, o en sistemas muy complejos, como el sistema del transporte urbano, el sistema de las comunicaciones telefónicas nacionales, etcétera.

Sistema

La Ingeniería de Sistemas es un conjunto de técnicas que se emplean para combinar los conocimientos de otras ramas de la ciencia y la tecnología, para solucionar problemas interdisciplinarios. Los problemas relacionados con sistemas complejos (como los mencionados), no pueden analizarse empleando las disciplinas clásicas como la ingeniería, economía, sociología, etcétera. El enfoque de sistemas está principalmente dirigido a la planeación y diseño y, por tanto, requieren de la creatividad de aquellos que lo apliquen. Esto no impide que también se utilice para estudios a sistemas existentes para mejorar su funcionamiento.

Concepto de Ingeniería de Sistemas

La Ingeniería de Sistemas surgió como consecuencia de la necesidad de planificar, operar y controlar sistemas cada días más complejos. Se denomina "Ingeniería" ya que ésta pone su énfasis en la aplicación de conceptos cuantitativos a problemas concretos y "sistemas" por su tendencia a analizar problemas desde su punto de vista global (la parte sólo puede ser comprendida en el conjunto del todo).

Origen de la Ingeniería de Sistemas

La Ingeniería de Sistemas se ha popularizado como una disciplina que utiliza modelos de Investigación de Operacio-

Utilización de la Investigación

nes. Como se verá más adelante, éstos son modelos matemáticos que describen la relación entre los componentes. Los modelos son una representación de la realidad y, es prácticamente imposible que incluyan todos los aspectos del problema analizado.

de Operaciones en Ingeniería de Sistemas

En Investigación de Operaciones, por lo general, los modelos buscan una solución óptima. Sin embargo, en los problemas prácticos existen tantas alternativas que es virtualmente imposible llegar a lo óptimo. En estos casos la Ingeniería de Sistemas busca un compromiso entre lo óptimo y el costo para su obtención.

De aquí surgen dos tendencias en la Ingeniería de Sistemas. La primera se fundamenta en técnicas matemáticas, en especial con algoritmos. La segunda es más heterogénea y tiende a considerar los aspectos cualitativos del problema (por ejemplo, reacciones humanas), que no pueden incluir los modelos matemáticos.

Terminología de la Ingeniería de Sistemas

La metodología de la Ingeniería de Sistemas requiere el uso de conceptos económicos, ingenieriles, sociales, etcétera. Para tratarlos se han creado una serie de nombres como "análisis de sistemas", "teoría de sistemas", etcétera, cuyo significado varía con el criterio de las personas. Esto ha motivado que surjan una serie de problemas conceptuales o semánticos como consecuencia de su naturaleza interdisciplinaria.

La Ingeniería de Sistemas, al estudiar los problemas como parte de un sistema, ha tenido éxitos rotundos, sobre todo en sistemas complejos. Se piensa que el identificar todos los componentes de un sistema permite al analista evaluar el problema con más facilidad. *Esto es la contribución más importante de la Ingeniería de Sistemas.* Pero el simple hecho de ver un problema dentro del contexto de un sistema no es suficiente. Para resolver problemas concretos, el ingeniero de sistemas deberá aplicar técnicas específicas (matemáticas, computación, etc.).

I.2. Objetivos de la Ingeniería de Sistemas

El establecimiento de objetivos es una buena forma de definir la Ingeniería de Sistemas. Por tal motivo, se mencionarán a continuación algunos de los más importantes objetivos de la Ingeniería de Sistemas.

- Proporcionar a la dirección toda la información que sea posible y necesaria para una guía y control del programa general.

- Formular objetivos y planes a corto, mediano y largo plazo, como un marco para relacionar entre sí los proyectos individuales.

- Balancear el programa general de desarrollo a fin de asegurar el progreso a lo largo de todas las líneas de demandas, y haciendo al mismo tiempo el mejor empleo de los recursos (mano de obra, materiales).

- Desarrollar los objetivos y los planes para proyectos particulares y hacerlos consistentes con los objetivos más lejanos. Prever las necesidades futuras de la organización a fin de estar completamente preparado para el momento en que se requiera una acción.

- Emplear nuevas ideas, principios o métodos que le posibiliten mejorar su trabajo.

- Efectuar cada una de las operaciones del proceso de la Ingeniería de Sistemas en la forma más eficiente que sea posible, reconociendo que los requisitos para los detalles, la exactitud y la celeridad dependen sólo de la fase del proceso en que éste se encuentre trabajando.

Ejemplo

Un breve ejemplo práctico puede ayudar a comprender mejor los objetivos anteriores. Se trata del desarrollo de un sistema de televisión a colores.

Desde un principio, los ingenieros de sistemas asignados a este complicado proyecto, se enfrentaron a una serie de condiciones desfavorables y a problemas de diversa índole. En primer lugar, tenían que establecer que existía la demanda para la televisión a color. A continuación fue necesario determinar que la televisión a color era al mismo tiempo técnicamente posible y económicamente realizable.

Una aplicación de la I. S.

Posteriormente, tuvieron que considerar, de los elementos más significativos, los integrantes con los cuales se debería de iniciar y desarrollar el proyecto para lograr la televisión a color. Esto fue una de las más importantes consideraciones puesto que, la televisión en blanco y negro había aparecido primero, el público había hecho una gran inversión en la adquisición de los receptores para blanco y negro. A partir de estos elementos como integrantes, los ingenieros de sistemas llegaron a la conclusión de que el nuevo sistema a colores debería ser compatible con el servicio actual en blanco y negro. En otras palabras, el sistema a color se debería diseñar en forma de que las transmisiones a color se pudieran captar en monocromo en los receptores existentes en blanco y negro, y a su vez, que los nuevos receptores para color estuvieran en posibilidad de captar al mismo tiempo, las transmisiones a color o en blanco y negro.

Reflexionando sobre lo anterior, la elección de un sistema compatible parece totalmente lógico, pero no se presentó en esta forma durante el período preliminar de desarrollo. En efecto, un sistema incompatible que era reclamado con urgencia por algunos industriales, fue aprobado por el cuerpo gubernamental como un estándar. Este paso se tuvo que anular posteriormente ante los progresos para el establecimiento de un servicio práctico de televisión a color.

Otro gran problema para el grupo de ingeniería de sistemas fue la definición de las especificaciones técnicas. Dentro de este punto estaban comprendidas ciertas consideraciones, como el equilibrio de los requisitos de la visión humana para los detalles de la imagen y las características del color y el equilibrio de un rendimiento potencial de los aparatos y la disponibilidad de canales adecuados para las estaciones transmisoras.

Respecto al último punto, los primeros análisis indicaron la necesidad de mejorías indispensables en la tecnología y en la inventiva para fijar la información fotográfica dentro de una banda estrecha de frecuencia, que pudiera obtenerse por las más recientes y directas técnicas en comunicaciones. También era evidente que los nuevos aparatos tendrían que ser inventados o desarrollados -particularmente el tubo de la imagen- para que se pudieran reproducir las imágenes a color.

A medida que se adelantaba el trabajo con estas determinaciones iniciales en las etapas más prácticas, se tuvo que resolver un cúmulo de problemas más detallados. Los que se relacionaban con el diseño práctico del aparato, las operaciones prácticas bajo las condiciones de servicio de las transmisoras, la participación de la industria para la determinación de las especificaciones de la señal para la transmisión, y la aprobación de estas especificaciones como un estándar por la Comisión Federal de Comunicaciones.

Finalmente, se presentaron los problemas del establecimiento de un servicio de televisión a colores, la expansión de los estudios, las redes de intercomunicación, instalación de las transmisoras y la creación de un grupo de producción de programas. En la etapa final, también se presentaron los temas de la posibilidad de venta de los programas de la televisión a color a los anunciantes, la venta de los nuevos receptores y la estimación de la reacción del público.

Como se puede observar, el sistema de televisión a colores comprende todo un "libro de texto" como un ejemplo del concepto de los sistemas en acción. Todos estos puntos requieren una consideración completa por parte del grupo de ingeniería de sistemas, laborando sobre un simple objetivo definido.

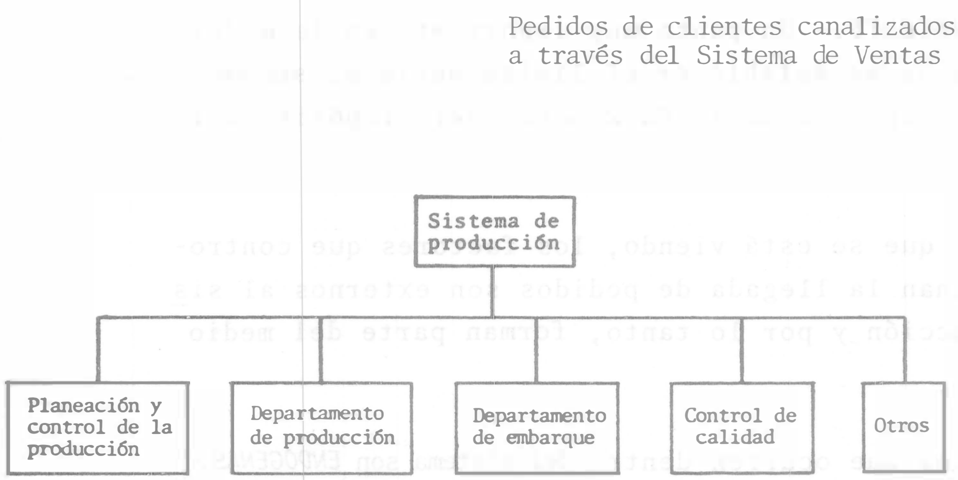
Un ejemplo práctico como el expuesto anteriormente, pretende despertar el interés en el lector sobre los trabajos de la Ingeniería de Sistemas.

Formas de definir los elementos de un sistema

Para definir los elementos que intervienen en el problema, la Ingeniería de Sistemas tiene que concretizarlos. Sin embargo, cuando los problemas prácticos se utilizan para la enseñanza, generalmente esto resulta muy complicado, puesto que es difícil mencionarlos bajo todos sus puntos de vista y porque, en algunas ocasiones, el proceso total para la solución de problemas, quizás con algún cambio de énfasis.

I.4 Clasificación de Sistemas

Cada disciplina tiene sus términos propios. Se tratará de ver la nomenclatura de los sistemas, la cual permitirá hacer una clasificación de los mismos. Considérese como ejemplo un sistema de producción:



Al estudiar este sistema, se ve que hay elementos distintos, cada uno de los cuales tiene ciertas propiedades de interés. Hay interacción entre estos elementos que producen cambios en el sistema.

Funciones de los elementos

Una *ENTIDAD* es un objeto de interés dentro del sistema (por ejemplo, el Departamento de Planeación y Control de la Producción). Un *ATRIBUTO* es una propiedad de una entidad, (por ejemplo, el número de máquinas del departamento de producción). Por supuesto que una entidad puede tener varios atributos.

Todo proceso que provoque cambios en el sistema se denomina *ACTIVIDAD* (por ejemplo, las actividades de fabricación, emisión de órdenes de producción, etcétera).

Se utiliza el término *ESTADO DEL SISTEMA* para indicar una descripción de todas las entidades, atributos y actividades en un momento dado.

Todo lo que rodea al sistema sin ser parte de él, se denomina *MEDIO AMBIENTE*. Un punto muy importante en la modelación de sistemas es establecer el límite entre el sistema y su medio ambiente. La decisión depende del propósito del estudio.

En el ejemplo que se está viendo, los factores que controlan o determinan la llegada de pedidos son externos al sistema de producción y por lo tanto, forman parte del medio ambiente.

Las actividades que ocurren dentro del sistema son *ENDOGENAS*.

Actividades internas y externas de los sistemas

Las actividades que ocurran en el medio ambiente y que afectan al sistema se llaman *EXOGENAS*. Un ejemplo de actividad exógena sería: El Gobierno Federal reduce drásticamente sus gastos y ello repercute de manera muy importante en las actividades del sistema de producción ejemplificado.

Clasificación de Sistemas

Hay sistemas para los que no hay actividad exógena. Estos sistemas se llaman *CERRADOS*.

Casi todos los sistemas tienen actividades exógenas y se les denomina *ABIERTOS*.

Hay sistemas en donde puede conocerse con certeza el resultado de una actividad, se dice que la actividad es *DETERMINISTICA*.

Cuando los resultados de una actividad varían aleatoriamente en distintas salidas, se dice que la actividad es *ESTOCASTICA ó PROBABILISTICA*, (con frecuencia las actividades estocásticas se expresan con una distribución de probabilidad).

Los sistemas que se estudian en esta materia son determinísticos (programación lineal, ruta crítica). En otra materia del área de Ingeniería Industrial que se denomina Investigación de Operaciones se estudian sistemas estocásticos (cadenas de Markov, Teoría de Decisiones, Líneas de Espera, etcétera).

En el ejemplo de sistema de producción, los cambios se producen en un determinado momento, (por ejemplo, cuando se termina un producto). Se dice entonces que es un *SISTEMA DISCRETO* (los cambios ocurren en forma discontinua). Cuando los cambios ocurren en forma continua en el tiempo, se trata de un *SISTEMA CONTINUO* (por ejemplo, los modelos de sistemas económicos).

Hay pocos sistemas totalmente discretos o totalmente continuos. En el sistema de producción hay una gran cantidad de cambios continuos. Sin embargo, en la mayoría de los sistemas predomina un tipo de cambio, de acuerdo con él, se les puede clasificar en sistemas continuos o discretos.

La descripción de los sistemas continuos tiene la forma de ecuaciones continuas que muestran la variación de atributos respecto al tiempo. A veces se hace una simplificación considerando que los cambios ocurren como una serie de pasos discretos.

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I. Contestar las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es el concepto de sistema?

2. ¿Cuáles son los objetivos de la Ingeniería de Sistemas?

3. Considere un supermercado como un sistema. ¿Cuáles son sus entidades? Describa algunos de sus atributos y actividades. ¿Cuál es su medio ambiente? ¿De que tipo de sistema se trata? Encuentre otros sistemas estructuralmente semejantes.

4. ¿Cuál es la metodología de trabajo de la Investigación de Operaciones?

BIBLIOGRAFIA

1. CARDENAS, MIGUEL A.
   La Ingeniería de Sistemas
   Editorial Limusa - 1978.

2. CARDENAS, MIGUEL A.
   El Enfoque de Sistemas
   Editorial Limusa - 1978.

3. FORRESTER, J. W.
   Principies of Systems
   Editorial Whright-Allen, Press - 1976.

4. GORDON, GEOFFREY·
   Simulación de Sistemas
   Editorial Diana - 1980.

5. CHURCHMAN, C. WEST
   El enfoque de Sistemas
   Editorial Diana - 1978.

6. HALL, ARTHUR D.
   Ingeniería de Sistemas
   Editorial CECSA - 1978.

7. GEREZ, GRIJALVA
   El Enfoque de Sistemas
   Editorial Limusa - 1978.

8. ACKOFF, RUSSELL L.
   Rediseñando el Futuro
   Editorial Limusa - 1979.

MODULO II MODELADO

Objetivos Específicos:

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Identificará un modelo.

2. Identificará la estructura de un modelo.

3. Aplicará el método general para estudiar sistemas usando modelos.

C U A D R O   S I N O P T I C O

Estructura de un Modelo

- Parámetros
- Variables
- Relaciones Funcionales

Clasificación:

- Modelo
  - Sistema
    - Estático
      - Determinístico
      - Probabilístico
    - Dinámico
      - Determinístico
      - Probabilístico
  - Naturaleza
    - Material
      - Réplica
      - Cuasi-réplica
      - Analogía
    - Simbólico
      - Descriptivo
      - Simulado
      - Formal

II.1. Definición de modelado

El modelado es el proceso de identificar y asociar objetos y procesos físicos o símbolos y sus relaciones, con las entidades, atributos, actividades y relaciones de un sistema, a fin de obtener resultados y conclusiones que sirvan al sistema original y a todos aquellos estructuralmente semejantes a él. Esta definición muestra que el modelado es un proceso creativo que implica el conocimiento del sistema. No es posible dar reglas fijas para este proceso de identificación, ya que depende de la imaginación, creatividad, intuición, perspicacia y otros procesos mentales de la persona que lo desarrolle. Sin embargo, en la experiencia surgen patrones que pueden estimular y guiar estas operaciones. Las pautas que se recomiendan para el modelado son las siguientes:

Importancia del modelado

- Dividir el sistema en sistemas más pequeños y simples.

- Establecer de manera clara las entidades, atributos, actividades y objetivos del sistema.

Reglas para formular el modelado

- Buscar analogías, es decir, encontrar otros sistemas estructuralmente semejantes y que sean más familiares.

- Apuntar lo que resulte obvio.

II.2. Definición de modelo y su estructura

Un modelo es una representación cualitativa y cuantitativa de un sistema, en el cual se muestran las relaciones predominantes entre sus elementos. En otras palabras, los objetos y procesos físicos y los símbolos y sus relaciones constituyen el modelo, de manera que la representación se hace generalmente, con medios de sustancia distinta a los del sistema original. A continuación se muestran dos ejemplos:

Consideraciones en la representación con modelos

1. Un sistema de distribución de agua contra incendios consistente en estaciones de bombeo, tuberías y aspersores, se puede representar por un circuito eléctrico en donde:

   · las bombas se representan por baterias ,
   · las tuberías se representan por focos ,
   · los aspersores se representan por resistores ,
   · el flujo del agua equivaldría al flujo de electricidad ,
   · la presión del agua equivaldría al voltaje en el circuito eléctrico ,
   · el circuito eléctrico sería el modelo del sistema de distribución de agua contra incendios.

2. El sistema de transporte colectivo que consiste en los vagones del metro, las estaciones, los usuarios y las líneas, elementos que se pueden representar por medio de símbolos y relaciones matemáticas donde:

   · la capacidad de los vagones y las estaciones se representarían por medio de constantes.

- el número de usuarios del metro se representaría con variables matemáticas y,
- el aumento y disminución de este número se obtendría por medio de ecuaciones matemáticas que relacionan a las variables.

La estructura de un modelo contiene los siguientes elementos:

Elementos que constituyen un Modelo

1. *PARAMETROS*: en el modelo son objetos o símbolos que representan a entidades o atributos del sistema que permanecen constantes durante el estudio. La persona que trabaja con el modelo les puede asignar un valor inicial.

2. *VARIABLES*: son objetos o símbolos en el modelo, que representan a entidades o atributos del sistema que cambian en el tiempo durante el estudio. Estos cambios pueden ser cualitativos o cuantitativos.

3. *RELACIONES FUNCIONALES*: son los procesos físicos o las relaciones entre los símbolos de un modelo, que representan a las actividades y a las relaciones entre los elementos de un sistema. Describen la forma en que cambian las variables y como los afectan los parámetros.

Ejemplo 1

En el modelo del sistema de distribución de agua contra incendios. La estructura sería:

La intensidad y tamaño de los focos, longitud y material de los alambres que los conectan y el voltaje de las baterías, serían parámetros, ya que permanecerían constantes durante el estudio, pero inicialmente podrían tomar cualquier valor.

El número de focos y conexiones, el voltaje en los focos y la resistencia de los resistores, serían variables ya que cambian continuamente durante el estudio.

Por último, la forma de hacer las conexiones, es decir, la forma en que están interrelacionados los elementos (focos, baterías, alambres, resistores) sería la relación funcional del modelo.

Ejemplo 2

En el modelo del sistema de transporte colectivo, el número de líneas, su ubicación, el número de estaciones y su capacidad, serían parámetros, ya que permanecerían constantes durante el estudio y se les podría dar al principio cualquier valor arbitrario.

El número de usuarios, su tiempo de espera, la velocidad de los trenes y el tiempo entre llegadas de cada tren serían variables ya que cambiarían continuamente durante el estudio.

Las ecuaciones matemáticas que darían el aumento o disminución de usuarios del sistema, serían las relaciones funcionales.

II.3. Ventajas en la utilización de los Modelos

Analizando los dos modelos anteriores (y otros que conozca el lector), se pueden apreciar algunas ventajas de disponer y trabajar con modelos, como son:

- La reducción de los costos que implica no trabajar directamente con el sistema real. Esta economía es claramente mostrada en los dos modelos discutidos anteriormente.

Reducción de costos

- La posibilidad de experimentar sobre los sistemas no existentes. En el ejemplo del modelo del metro, el objetivo de su estudio puede ser en dónde y cómo construir el sistema de transporte colectivo.

Probar sistemas no existentes

- El señalamiento de los problemas intrínsecos de los sistemas. Por ejemplo, en el modelo eléctrico del sistema de agua contra incendios, como hay correspondencia uno a uno de los elementos del modelo con los del sistema, al construirlo se pueden apreciar ciertas fallas o incongruencias en el sistema original, como pueden ser: número inadecuado de bombas, dificultad en el tendido de líneas de tubería, etcétera.

Problemas propios de los Sistemas

- Un solo modelo permite estudiar varios sistemas. Por ejemplo, el modelo eléctrico que estudia el flujo de agua en el sistema contra incendios, permitirá, estableciendo analogías apropiadas, estudiar el flujo de información en una empresa.

Estudio de Sistemas relacionados

II.4. Clasificación de los modelos

Existen dos principales formas de clasificar los modelos:

a. por el tipo de sistema que se está estudiando

b. por la naturaleza misma del modelo

De acuerdo al sistema que se pretenda estudiar, un modelo puede ser *ESTATICO*, que corresponde a un sistema discreto, o un modelo *DINAMICO*, que corresponde a un sistema continuo.

Tipo de Sistema de acuerdo a los resultados de sus actividades o de sus relaciones funcionales

Así como los sistemas discretos o continuos pueden ser determinísticos o probabilísticos, de acuerdo a si el resultado de sus actividades se conoce con certeza o si está sujeto a una distribución de probabilidad, los modelos estáticos o dinámicos también pueden ser *DETERMINISTICOS* o *PROBABILISTICOS*, dependiendo de si el resultado de sus relaciones funcionales se conoce con certeza o está sujeto a una distribución de probabilidad.

Por la naturaleza del modelo este puede ser:

MATERIAL cuando está formado por objetos y procesos físicos;

SIMBOLICO si está formado por símbolos y relaciones entre ellos.

Modelos de naturaleza material

Los modelos materiales se clasifican a su vez en:

1. *REPLICAS*.- son modelos en los cuales se conservan las mismas dimensiones que tiene el sistema origi-

nal y sólo se ha cambiado el material con que está contenido.
Ejemplo: una estatua.

2. *CUASI-REPLICAS*.- son modelos en los cuales se ha cambiado el material constitutivo y una o más dimensiones con respecto al sistema original.
Ejemplo: un mapa.

3. *ANALOGIA*.- son modelos que ya no tienen semejanza con el sistema original ni en materia ni en dimensiones, sin embargo puede establecerse correspondencia uno a uno de las propiedades esenciales.
Ejemplo: el modelo eléctrico del sistema de agua contra incendio.

Los modelos simbólicos se clasifican a su vez en:

Modelos de naturaleza simbólica

1. *DESCRIPTIVOS*.- modelos en los cuales el sistema se explica por medio del lenguaje cotidiano únicamente.
Ejemplo: la constitución que pretende ser modelo de un Sistema Federal.

2. *SIMULATIVOS*.- son modelos en los cuales pueden existir palabras de uso cotidiano, pero también deben contener expresiones y fórmulas matemáticas.
Ejemplo: el diagrama de flujo del algoritmo simplex.

3. *FORMALES*.- son modelos que consisten únicamente de símbolos matemáticos, los cuales se manejan con operaciones de alguna disciplina de las matemáticas.
Ejemplo.- Ley de Boyle de los gases ideales: $PV = NRT$.

Hay que observar que los modelos materiales de réplica son los más parecidos al sistema original, mientras que los modelos simbólicos formales son los menos parecidos. Sin embargo, el primero sólo serviría para estudiar el sistema original, mientras que con el segundo se pueden estudiar varios sistemas estructuralemente semejantes, es decir, es más general.

También es posible combinar las clasificaciones de un modelo, de acuerdo al sistema y de acuerdo a su naturaleza, en una sola, es decir, se puede hablar de modelos materiales cuasi-réplicas y probabilísticos, o de modelos simbólicos formales dinámicos y probabilísticos. Modelos múltiples

En la siguiente tabla se muestra la clasificación combinada y se indica un ejemplo de cada caso. Se muestra también cómo disminuye la semejanza del modelo con el sistema original y cómo aumenta su generalidad (su potencial aplicación al estudio de otros sistemas).

CLASIFICACION DE MODELOS DE ACUERDO A SU NATURALEZA

CLASIFICACION DE MODELOS DE ACUERDO AL SISTEMA Y EJEMPLOS

		MATERIALES			*SIMBOLICOS*		
		réplica	cuasi-réplica	analogía	descriptivas	simulativas	formales
ESTATICOS	*DETERMINISTICO*	estatua	mapa de carreteras	maqueta	los diez mandamientos	diagrama de flujo del simplex	ley de los gases ideales
	PROBABILISTICO	prueba de reacciones en pacientes	mapa de temperatura	simulación de una caminata aleatoria	reporte del tiempo	programa no adaptativo y variable, de ajedrez	número esperado de clientes en una línea de espera
DINAMICOS	*DETERMINISTICO*	simulador de avión	planetario	circuito eléctrico	constitución	algoritmo de ruta crítica	ecuaciones de Maxwell
	PROBABILISTICO	experimento genético	juego electrónico de ping-pong	generador de ruido blanco	evolución darwiniana	algoritmo de caminata aleatoria	ecuación diferencial estocástica

incremento de la generalidad

decremento de la realidad

II.5. Selección del modelo

La selección del modelo más adecuado depende de tres factores:

Factores para la selección de un modelo

1. El sistema
2. El estudio que se desea efectuar
3. Los medios disponibles

Por ejemplo, el sistema de agua contra incendio se modeló con un circuito eléctrico, es decir, con un modelo dinámico, determinístico, material y analógico, se hubiera podido hacer también, con un modelo dinámico, determinístico, simbólico y formal, estableciendo las ecuaciones dinámicas de flujo y la caída de presión que proporciona la dinámica de fluidos, e implementarlas en una computadora.

Consideraciones para la implementación de un modelo

Si el objeto es entrenar al personal de seguridad y mantenimiento, el primer modelo es el más adecuado, mientras que si se desea observar la respuesta del sistema para fines de diseño lo sería el segundo. Por otra parte, el circuito eléctrico requiere, además del material involucrado, una persona hábil para armar el modelo e interpretar sus resultados, mientras que el sistema de ecuaciones requiere además del matemático que formule las ecuaciones e interprete sus resultados, una calculadora o computadora adecuada para manejar la información.

De esta forma se observa que no hay reglas fijas y la relación queda a criterio de quienes estudian el sistema, aunque se han determinado ciertas características que un modelo adecuado debe tener:

- Ser simple, para que sea entendido por los que lo utilicen.

- Dar respuestas lógicas.
- Ser fácil de manipular y de controlar.
- Dar resultados completos e importantes.
- Ser adaptativo, esto es, de fácil modificación.
- Ser evolucionario, es decir, debe empezar con datos simples e ir a lo más complejo.

II.6. Validación del modelo

Validar un modelo es asignar un nivel de certeza adecuada a los resultados del modelo, es decir, asegurarse de que contiene todos los parámetros, variables y relaciones funcionales necesarios para que dé respuestas concretas.

Para validar un modelo se utilizan, por lo general, tres pruebas:

Pruebas para validar un modelo

1. Se construye el modelo y se analiza para estar seguro de que tiene apariencia de certeza, es decir, que tiene parecido o describe al sistema original.

2. Se efectúan una o más pruebas con el modelo y se pregunta si los resultados parecen razonables.

3. Se busca a gente directamente relacionada o involucrada en el sistema original y se le pide que compare los resultados del modelo con las respuestas actuales del sistema.

Se puede observar que la validación de un modelo implica comparar sus resultados con los del sistema real.

II.7. Método general para el estudio de sistemas utilizando modelos

A continuación se mencionan las etapas que se siguen cuando se desea estudiar un sistema utilizando modelos.

Fases o Etapas para el estudio de un Sistema con modelos

1. El sistema original se presenta casi siempre en el mundo real, en el muy pocas veces entendible ambiente cotidiano.

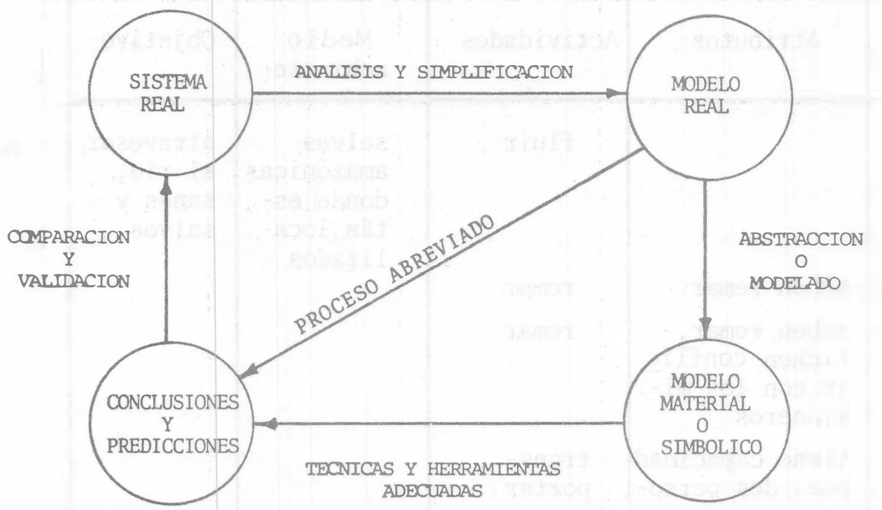
2. Identificado el sistema, se procede a analizarlo para simplificarlo, es decir, conservar únicamente las entidades, atributos, actividades e interacciones de interés, delimitar claramente su medio ambiente, y eliminar todo aquello que se considere como irrelevante. A esta aproximación del sistema real se le llama *modelo real*.

3. El modelo real se puede transformar en un modelo material o simbólico por medio de un proceso de abstracción, el cual consiste en representar a los componentes del sistema por medio de objetos y procesos físicos en el primer caso, o por símbolos y relaciones entre ellos en el segundo.

4. El modelo material y el simbólico se pueden manejar con técnicas y herramientas apropiadas con objeto de obtener resultados, que pueden ser conclusiones y predicciones acerca del sistema real.

5. Estos resultados se deben comparar con el sistema real, y si no son aplicables hay que repetir el ciclo, ya que tal vez la simplificación fue excesiva, o no se seleccionó el modelo adecuado o no se utilizaron las técnicas y herramientas apropiadas.

El siguiente diagrama ilustra el método general:



En el diagrama se puede observar que no siempre se requiere de un modelo material o simbólico para estudiar un sistema. Existe un proceso abreviado que a partir de ciertos análisis y simplificaciones del sistema real obtiene los resultados. Este proceso abreviado es el que siguen algunos directivos de empresas, estadístas y científicos.

El siguiente ejemplo ilustrará el método general.

Descripción del sistema real.
Se encuentran tres franciscanos y tres caníbales en la orilla derecha del río Amazonas, y quieren trasladarse a la orilla izquierda, por medio de un bote y es la única manera de hacerlo, el cual no puede llevar más de dos pasajeros a la vez. Si en cualquier momento y en cualquier lugar, el número de caníbales sobrepasa al de misioneros, matarán a estos últimos y se los comerán. Se quiere saber si pueden cruzar los seis integramente de una orilla a la otra, y en caso de que puedan, cuál es el menor número de viajes en que lo harán: Ejemplo

MODELO REAL

Entidades	Atributos	Actividades	Medio ambiente	Objetivo
un río		fluir	selvas amazónicas donde están localizados	atravesar el río, sanos y salvos
3 misioneros	saben remar	remar		
3 canibales	saben remar, tienen conflicto con los misioneros	remar		
un bote	tiene capacidad par. dos personas	transportar		

Modelo real

Se puede observar que por simplificación, sólo se han conservado los atributos esenciales, que imponen las restricciones del sistema y que a su vez permiten su solución:

. el conflicto entre los caníbales y los misioneros, ya que si los primeros llegan a ser más que los segundos en cualquier momento, se los comen.

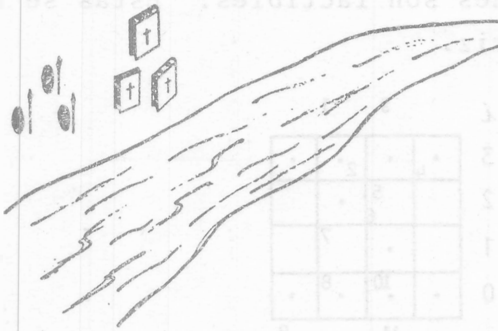
. que el bote sólo puede llevar cuando más a dos personas; y que todos, los seis, saben remar.

(NOTA: No se está tomando en consideración que es el río Amazonas, ni su anchura, ni la dirección y velocidad de la corriente, tampoco la tribu de los caníbales ni la orden de los misioneros, todo lo cual no aporta información para resolver el problema. La anterior descripción de entidades, atributos, actividades, medio ambiente y objetivos, constituye el modelo real).

SOLUCION

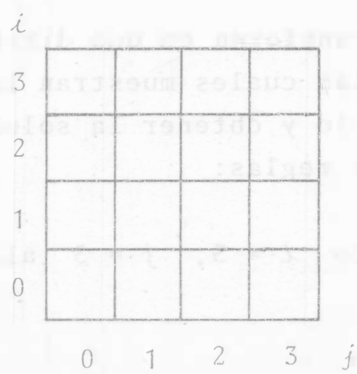
Para resolver el problema se pueden plantear varios modelos. Aquí se describirán sólo dos de ellos, y con uno solo se obtendrá la solución del problema.

1. Modelo dinámico, determinístico, material y analógico: Modelo material

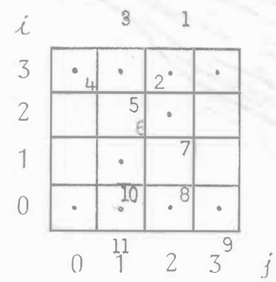


2. Modelo dinámico, determinístico, simbólico y simulativo: Modelo simbólico

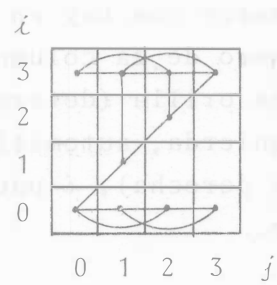
Se construye una matriz donde el número de renglón i será el número de misioneros que hay en la orilla izquierda del río y el número de la columna j será el de caníbales en la misma orilla (determinada la condición de la orilla izquierda, automáticamente queda determinada la de la derecha), i puede valer 0, 1, 2 o 3 y j igualmente.



En la matriz se tienen todas las posibles combinaciones que puede haber en esta orilla de misioneros y caníbales. Por ejemplo el punto $i = 1$, $j = 2$ indica que en la orilla izquierda hay un misionero y dos caníbales (en la derecha estarán los dos misioneros y el caníbal restante). Por la restricción de que el número de caníbales no puede ser mayor, en cualquier momento al de misioneros, sólo algunas de las 16 combinaciones son factibles. Estas se indican con puntos en la matriz.



Estos puntos se pueden conectar con líneas que representan todos los viajes transladando 1 ó 2 personas al lado opuesto del río. El resultado es una red no dirigida.

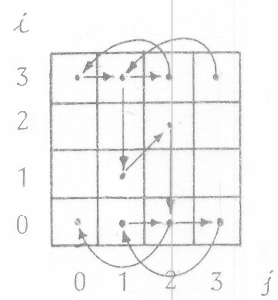


Esta red no dirigida se transforma en una dirigida, añadiendo flechas a las líneas, las cuales muestran la dirección de cada viaje. Para hacerlo y obtener la solución del problema, se deben seguir dos reglas:

1. Hay que ir del punto $i = 3$, $j = 3$ al punto $i = 0$, $j = 0$.

2. La trayectoria que se siga debe alternar movimientos hacia abajo o a la izquierda con movimientos hacia arriba o a la derecha, ya que cada paso abajo o a la izquierda significa un viaje hacia la orilla derecha y cada paso arriba o a la derecha corresponde a un viaje a la orilla izquierda.

Este es el modelo del sistema, y manipulándolo se llega a la solución:



Aparecen numeradas en las flechas los pasos necesarios.

El resultado es que sí pueden cruzar los seis íntegramente el río, con las restricciones impuestas por el sistema y requirieron cuando menos de 11 viajes.

Además manipulándo el modelo se pueden obtener otras tres trayectorias que requieran también de 11 viajes y llevan de $i = 3$, $j = 3$ a $i = 0$, $j = 0$.

Sólo resta validar el modelo, es decir, saber si es correcta la solución encontrada y esto sólo se puede saber aplicándola en el sistema real. En caso de que sirva, el modelo es correcto. En caso de que no, hay que repetir el análisis del sistema, ya que posiblemente se simplificó demasiado, eliminando algunos datos que si influyen, como puede ser; el empuje del bote por la corriente, la dirección de la corriente, la anchura del río, el clima de la región. Validación

Entonces se debe incluir en el modelo y obtener una nueva solución.

I. Contestar las siguientes preguntas.

1.* ¿Cuál es el concepto de sistema?

2.* ¿Cuáles son los objetivos de la Ingeniería de Sistemas?

3. Considere un supermercado como un sistema. ¿Cuáles son sus entidades? Describa algunos de sus atributos y actividades. ¿Cuál es su medio ambiente? ¿De que tipo de sistema se trata? Encuentre otros sistemas estructuralmente semejantes.

4.* ¿Cuál es la metodología de trabajo de la Investigación de Operaciones?

* Se sugiere recurrir a la asesoria.

BIBLIOGRAFIA

1. CEPEDA FLORES, FRANCISCO
Problemario de Ingeniería de Sistemas
Facultad de Ingeniería, U.N.A.M., 1982.

2. GORDON, GEOFFREY
Simulación de Sistemas
Editorial Diana, 1980.

3. RUDD, DALE Y WATSON
Strategy of Process Engineering
Editorial Wiley, 1968.

4. SHANONN, ROBERT E.
Systems Simulation, the Art and Science
Editorial Prentice Hall, 1975.

5. SCIENTIFIC AMERICAN
Marzo 1980, Vol. 242, No. 3, p. 18-24
"Mathematical Games". Martin Gardner.

6. GEREZ, GRIJALVA
El Enfoque de Sistemas
Editorial Limusa, 1978.

7. LOPEZ DE MEDRANO, SANTIAGO
Modelos matemáticos
ANUIES, 1972.

MODULO III PROGRAMACION LINEAL

Objetivos Específicos:

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Construirá un modelo de programación lineal para un problema determinado.

2. Aplicará el método gráfico para resolver problemas de programación lineal con dos variables.

3. Aplicará el método Simplex para resolver problemas de programación lineal con cualquier número de variables.

4. Aplicará el método de la gran M o de las dos fases para obtener una solución inicial al método Simplex.

5. Obtendrá el modelo dual asociado a todo modelo de programación lineal.

6. Obtendrá la solución del problema dual a partir del problema original y viceversa.

CUADRO SINOPTICO

Modelos de Programación Lineal

- Dos variables
  - Método gráfico
- Más de dos variables
  - Solución inicial factible
    - Método simplex
  - No tiene solución inicial factible
    - Método de la gran M
    - Método de las dos fases

Aspectos económicos del modelo de Programación Lineal → Modelo dual.

III.1. El Modelo de Programación Lineal

Entre las herramientas más útiles para estudiar los sistemas que se presentan en la ingeniería, se encuentran los métodos de optimización. Dentro de éstos, está la *PROGRAMACION MATEMATICA*, que pretende encontrar el valor óptimo del objetivo del sistema, sujetándose a una serie de restricciones que surgen de las relaciones que existen entre sus entidades. Una de sus técnicas más importantes y más utilizadas es la *PROGRAMACION LINEAL*, que recibe este nombre porque todas sus relaciones funcionales se pueden expresar como ecuaciones lineales.

Programación matemática y Programación lineal

La programación lineal trata con sistemas cuyo problema es asignar recursos limitados entre actividades que compiten, de la mejor forma posible, es decir, optimizar. Como ejemplos tenemos:

1. Una fábrica de alimento para pollos, produce dos marcas que se hacen con harina de pescado y nutriente. Tiene además capacidad limitada en el empaque de uno de sus productos. Debe decidir cómo emplear esta materia prima y su capacidad, en la fabricación, para obtener el máximo beneficio posible.

2. Un ganadero que cría ganado para engorda, debe decidir qué tipo de pasto proporcionará al ganado, y qué plan de engorda debe seguir, con objeto de obtener el máximo beneficio.

3. Un agricultor debe decidir qué cultivos plantar durante la siguiente temporada, tomando en cuenta la cantidad de agua de que dispone; la tierra cultivable, y alguna otra restricción en cuanto a cantida

des que debe proporcionar de uno de los cultivos obligado por un contrato, con objeto de obtener el máximo beneficio monetario.

4. La CFE debe decidir cómo distribuir el carbón de que dispone entre las termoeléctricas que alimentan al Valle de México, sujetas a las restricciones de cantidad de carbón y a la demanda y eficiencia de las termoeléctricas, de manera que incurra en el mínimo costo de producción de carbón y transporte.

5. PEMEX debe decidir cómo encausar el petróleo crudo que llega a una de sus refinerías tomando en cuenta la capacidad y eficiencia de los procesos, así como la demanda de los productos terminados, de manera que se minimice el costo de la operación.

Forma estándar del modelo

Para resolver estos problemas, se utiliza el *MODELO DE PROGRAMACION LINEAL* que tiene la siguiente estructura, denominada *FORMA ESTANDAR*:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & \left. z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \right\} \text{Función objetivo} \\
\text{Sujeto a} & \left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}\right\} \text{Restricciones explícitas} \\
 & \left. x_1 \,,\, x_2 \,, \ldots\, x_n \geq 0 \right\} \text{Restricciones implícitas}
\end{array}
$$

A continuación se explica la estructura del modelo matemático.

OBJETIVO DEL MODELO.- Se expresa como una ecuación matemática lineal que pretende encontrar el valor óptimo del problema; en este caso el máximo (función objetivo). En los ejemplos anteriores se aprecia que algunas veces puede ser objetivo del sistema encontrar el valor mínimo (costos, por ejemplo). Más adelante se verá que se puede transformar en un modelo o problema de maximización.

Función Objetivo

PARAMETROS DEL MODELO.- Existen tres grupos de parámetros en este modelo que se determinan en el sistema real y permanecen constantes.

Constantes del modelo

1. Parámetros de la función.- Son c_1, c_2,..., c_n, tantos como actividades compitan en el problema y se expresan por unidad de actividad o variable. Representarían: beneficio por producir empaques de alimento, beneficio por determinado pasto y plan de engorda, beneficio por cada hectárea dedicada a cada cultivo, costo por asignar una tonelada de carbón a cada termoeléctrica o costo por encauzar un barril de petróleo crudo a determinado proceso, etcétera. En general son el beneficio o costo por unidad de actividad.

2. Parámetros del lado derecho de las restricciones.- Son b_1, b_2,..., b_m, tantos como restricciones explícitas tenga el problema, son las cantidades límite de los recursos, por ejemplo, serían para cada uno de los ejemplos mencionados, la cantidad de harina de pescado, nutriente y capacidad de empaque; la cantidad de pasto que se pueda obtener y los límites de engorda; la cantidad de agua y tierra cultivable; la cantidad de carbón disponible y la demanda de cada termoeléctrica; la capacidad de cada proceso de la refinería y la demanda de los productos terminados.

3. Parámetros o Coeficientes de las Restricciones.- Son $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}$, tantos como el producto de las actividades que compiten por el número de restricciones. En general, un coeficiente a_{ij} indica cuántas unidades del recurso i consume una unidad de la actividad (o variable) j. Por ejemplo, dirían cuántas unidades de harina de pescado consume cada uno de los alimentos para pollo, cuántas unidades de nutrientes y cuántas unidades de capacidad de empaque. O en el caso del agricultor, dirían cuánta agua consume cada hectárea de cultivo o cuánta tierra requiere.

Elementos cambiantes del modelo

VARIABLES.- Son las actividades que compiten; se trata de determinar el nivel adecuado que satisfaga el objetivo del problema y las restricciones. Cambian continuamente al trabajar con el modelo e indicarán en los ejemplos mencionados la cantidad de pasto y el plan adecuado de engorda; el tipo de cultivo y el número de hectáreas que se le debe asignar; la cantidad de carbón que se debe asignar a cada termoeléctrica; el número de barriles de petróleo que se debe enviar a cada proceso de refinería.

RELACIONES FUNCIONALES.- Son ecuaciones matemáticas lineales y se clasifican en tres tipos:

a. *FUNCION OBJETIVO*.- Cada uno de sus términos indica el beneficio que se obtiene por cada actividad y al sumarse dan el beneficio total del sistema, se busca encontrar el máximo.

Restricciones del modelo

b. *RESTRICCIONES EXPLICITAS*.- Reciben este nombre porque se indican textualmente. Cada uno de sus términos indica cuánto recurso está consumiendo la actividad, y su suma cuánto recurso consume el sistema. Son desigualdades del tipo menor o igual que ($\leq$), e indican que se debe consumir menos o hasta lo que se tiene.

c. *RESTRICCIONES IMPLICITAS*.- Indican únicamente que el valor de las variables (o nivel de las actividades) debe ser cero o cualquier valor positivo.

Para ilustrar mejor la forma en que se construye el modelo de programación lineal, se mostrará el ejemplo de la fábrica de alimento para pollos que se puede considerar como de planeación de la producción.

Una compañía denominada "Alimentos para Pollos, S.A.", fabrica dos mezclas de comida para pollo: "chicken-pollo" y "coqui-pollo". Tiene disponible para la producción dos materias primas, harina de pescado y una base nutriente. Si los datos de la siguiente tabla se aplican al problema, la compañía quiere saber cuánto producir mensualmente de cada una de las dos marcas, con objeto de maximizar sus ganancias: Ejemplo

	CHICKEN-POLLO	COQUI-POLLO
Contenido del Paquete terminado	2.5 Kg	3.0 Kg
Precio de venta por paquete	$90.00	$75.00
Materias primas usadas por paquete:		
harina de pescado	1.0 Kg	2.0 Kg
nutriente	1.5 Kg	1.0 Kg
Costo de las materias primas:		
harina de pescado	$10.00/Kg	$10.00/Kg
nutriente	$20.00/Kg	$20.00/Kg
Costo de mezclado, empaque y demás costos variables por paquete	$14.00	$18.00
Recursos disponibles para la producción mensual:		
Materia prima:		
harina de pescado	240,000 Kg	
nutriente	180,000 Kg	
Capacidades de procesamiento:		
Empaque de Chicken-Pollo	un máximo de 110,000 paquetes por mes	
Mezclado de Chicken-Pollo	suficiente para producir cualquier mezcla de productos dentro de las disponibilidades de materia prima	
Empaque y mezclado de Coqui-Pollo	suficiente para producir cualquier mezcla de productos dentro de las disponibilidades de materia prima	

Se hacen las siguientes suposiciones:

1. El gerente de mercadotecnia estima que cualquier combinación factible de los dos productos, dada las restricciones de los recursos, se puede vender a los precios indicados.

2. La compañía ha establecido contrato a largo plazo con los proveedores de materia prima, de manera que cada mes se deben adquirir las cantidades mencionadas.

3. Cualquier cantidad de materia prima no utilizada al final de cada mes se pierde totalmente y no se puede vender ni utilizar al siguiente mes.

SOLUCION DEL PROBLEMA

Analizando el problema, queda claro que el objetivo es determinar cuántos paquetes mensuales hay que producir de "Chicken-Pollo" y de "Coqui-Pollo" con objeto de obtener la máxima utilidad posible sujetándose a las restricciones de disponibilidad de harina de pescado, nutriente, y capacidad de empaque; con esto se establece la estructura del modelo:

a. Variables: el número de paquetes de cada producto que se deben producir al mes.

   x_1 = Número de paquetes a producir por mes de "Chicken-Pollo"

   x_2 = Número de paquetes a producir por mes de "Coqui-Pollo"

b. Parámetros de la función objetivo: serán los beneficios brutos por paquete, que se obtienen de la siguiente forma:

   beneficio bruto = precio de venta - costo de producción

	Chicken-Pollo	Coqui-Pollo
Precio de venta	$ 90.00	$ 75.00
Costo de producción	$ 14.00	$ 18.00
Beneficio bruto	$ 76.00	$ 57.00

NOTA: No se incluyen los costos de la materia prima ya que son, por la suposición 2, costos fijos en el sistema y no dependen, por tanto, de la cantidad que se produzca de cada paquete ni de cuánto se utilice de cada materia prima.

c. Parámetros del lado derecho de las restricciones.- Son las cantidades disponible de cada uno de los recursos; 240,000 kgs. de harina de pescado, 180,000 kgs. de nutriente y 110,000 unidades de capacidad de empaque.

d. Parámetros o Coeficientes de las Restricciones.- Son las cantidades que consume cada paquete de "Chicken-Pollo" y de "Coqui-Pollo", de harina de pescado, nutriente y capacidad de empaque. Aparecen textualmente en el postulado del problema.

	Chicken-Pollo	Coqui-Pollo
Harina de Pescado	1.0 Kg/paquete	2.0 Kg/paquete
Nutriente	1.5 Kg/paquete	1.0 Kg/paquete
Capacidad de empaque	1.0 unidades de capacidad/paquete	

e. Función Objetivo.- Da el beneficio mensual bruto por la producción.

$$z = \underbrace{76.00 \ (\$/\text{paquete})\ x_1\ (\text{paquete/mes})}_{\substack{\text{Beneficio por producir} \\ \text{"Chicken-Pollo"}}} + \underbrace{57.00\ (\$/\text{paquete})\ x_2\ (\text{paquete/mes})}_{\substack{\text{Beneficio por producir} \\ \text{"Coqui-Pollo"}}}$$

Se pretende maximizar z (\$/mes) , el beneficio total bruto

$$\text{maximizar} \quad z = 76\, x_1 + 57\, x_2$$

f. Restricciones Explícitas.- Indican que no se puede consumir en la producción más recurso que el disponible.

Harina de pescado:

$$\underbrace{1.0 \left|\frac{\text{Kg de harina}}{\text{paquete}}\right| x_1 \left|\frac{\text{paquetes}}{\text{mes}}\right|}_{\substack{\text{consumo mensual de harina en la} \\ \text{producción de "Chicken-Pollo"}}} + \underbrace{2.0 \left|\frac{\text{Kg de harina}}{\text{paquete}}\right| x_2 \left|\frac{\text{paquetes}}{\text{mes}}\right|}_{\substack{\text{consumo mensual de harina en la} \\ \text{producción de "Coqui-Pollo"}}} \leq \underbrace{240{,}000 \left|\frac{\text{Kg de harina}}{\text{mes}}\right|}_{\substack{\text{disponibilidad mensual} \\ \text{de harina}}}$$

Nutriente:

$$\underbrace{1.5 \left|\frac{\text{Kg de nutriente}}{\text{paquete}}\right| x_1 \left|\frac{\text{paquetes}}{\text{mes}}\right|}_{\substack{\text{consumo de nutriente en la} \\ \text{producción de "Chicken-Pollo"}}} + \underbrace{1.0 \left|\frac{\text{Kg de nutriente}}{\text{paquete}}\right| x_2 \left|\frac{\text{paquetes}}{\text{mes}}\right|}_{\substack{\text{consumo de nutriente en la} \\ \text{producción de "Coqui-Pollo"}}} \leq \underbrace{180{,}000 \left|\frac{\text{Kg de nutriente}}{\text{mes}}\right|}_{\substack{\text{disponibilidad mensual} \\ \text{de nutriente}}}$$

Capacidad de empaque:

$$\underbrace{1.0 \left|\frac{\text{unidades de capacidad}}{\text{paquete}}\right| x_1 \left|\frac{\text{paquetes}}{\text{mes}}\right|}_{\substack{\text{consumo de unidades de capacidad de} \\ \text{empaque de "Chicken-Pollo"}}} \leq \underbrace{110{,}000 \left|\frac{\text{unidades de capacidad}}{\text{mes}}\right|}_{\substack{\text{disponibilidad mensual} \\ \text{de capacidad de empaque}}}$$

NOTA: En esta última restricción no aparece la variable x_2, ya que para mezclado y empaque de "Coqui-Pollo" hay suficiente capacidad, según el postulado del problema.

g. Restricciones Explícitas.- Indican que o no se produce alguno o ambos de los productos ($x_1 = 0$ ó $x_2 = 0$) ó que, si se producen, tiene que ser una cantidad positiva ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$). Ambas se combinan en una sola restricción

$$(x_1 \geq 0 \ , \quad x_2 \geq 0)$$

De manera que el modelo de programación lineal de este problema de planeación de producción es:

$$\begin{array}{lrcrl}
\text{Maximizar} & z = 76\,x_1 & + & 57\,x_2 & \\
\text{sujeto a:} & x_1 & + & 2\,x_2 & \leq 240{,}000 \\
 & 1.5x_1 & + & x_2 & \leq 180{,}000 \\
 & x_1 & & & \leq 110{,}000 \\
 & & & x_1 \ , \ x_2 & \geq 0
\end{array}$$

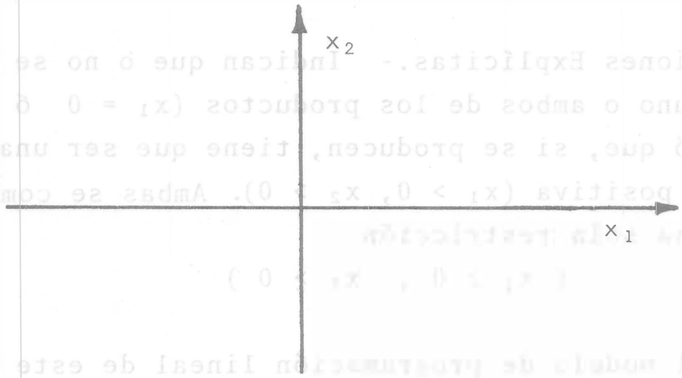
III.2. Algoritmo Simplex

El algoritmo Simplex permite encontrar la solución óptima (en caso de que exista), de los modelos de programación lineal. Algoritmo Simplex

III.2.1. Método Gráfico

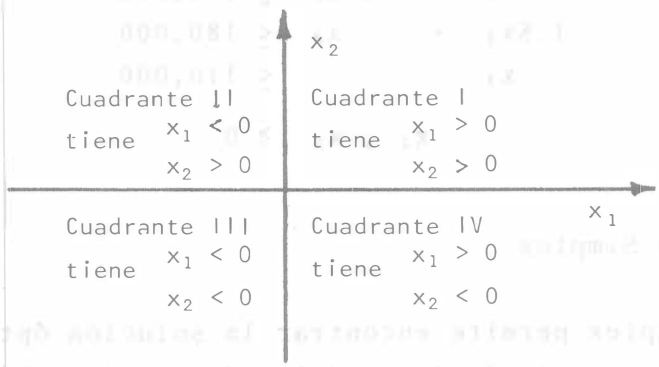
Los modelo de programación lineal que contienen dos o hasta tres variables, se pueden resolver gráficamente de la siguiente forma: Método gráfico

Si el problema contiene dos variables, se pueden representar en un plano cartesiano, donde uno de los ejes indicará los valores de la variable x_1 y el otro los de la variable x_2.



Análisis del plano cartesiano

Los ejes se cruzan en el punto ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) llamado origen y dividen al plano en cuatro cuadrantes que tienen las siguientes características:

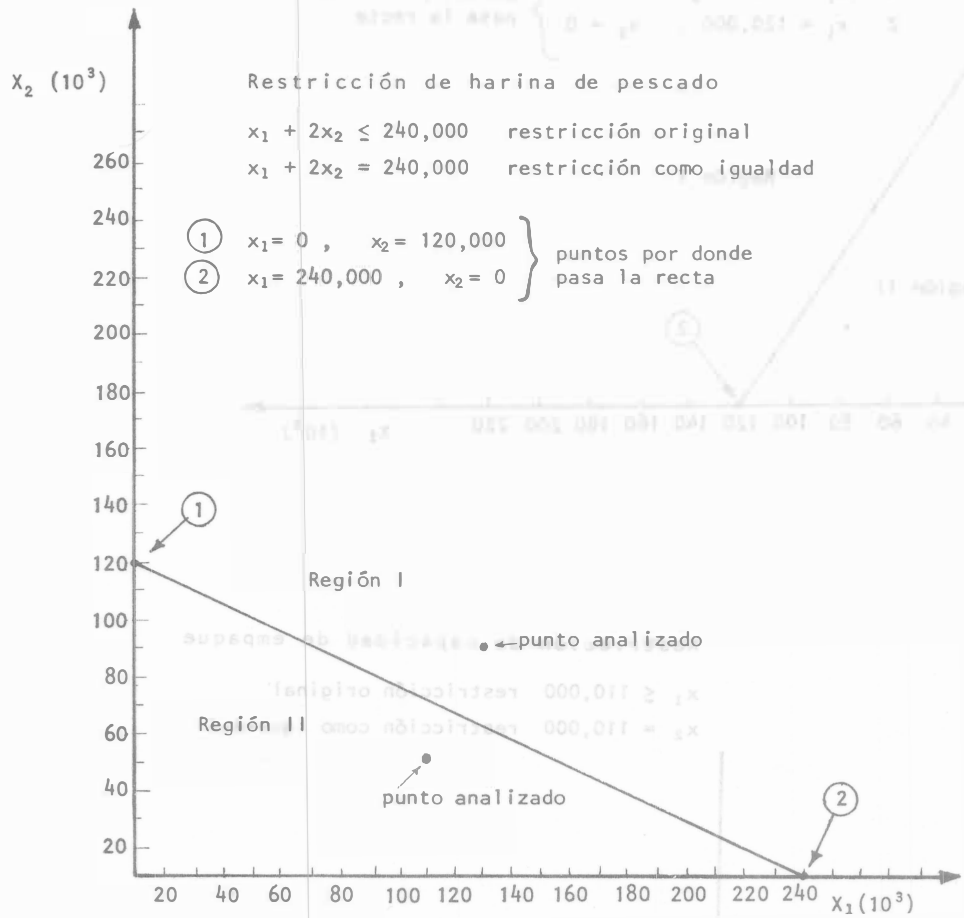


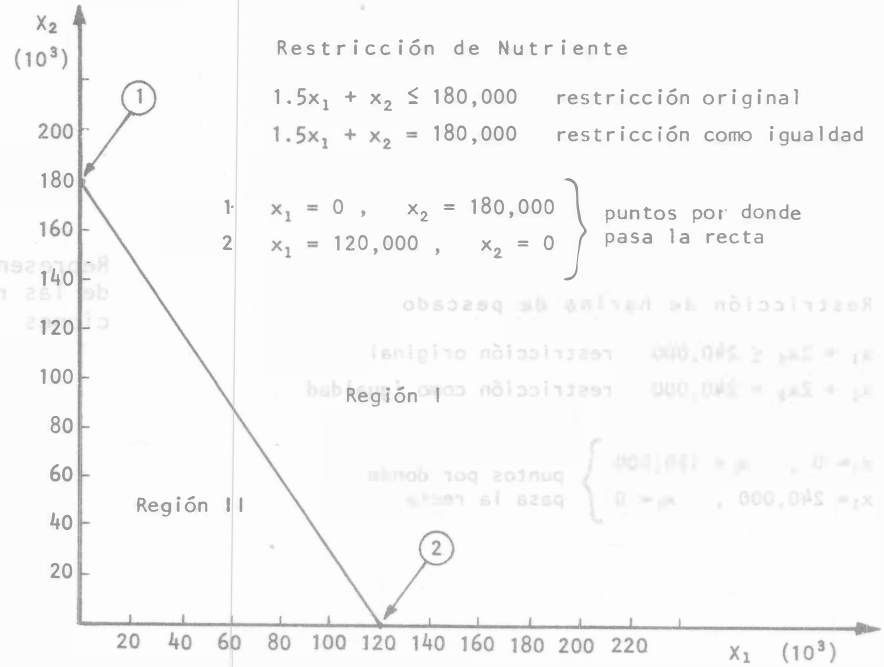
Las restricciones implícitas del problema llevan a considerar únicamente al cuadrante I ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$), donde la igualdad a cero se cumpliría directamente sobre los ejes.

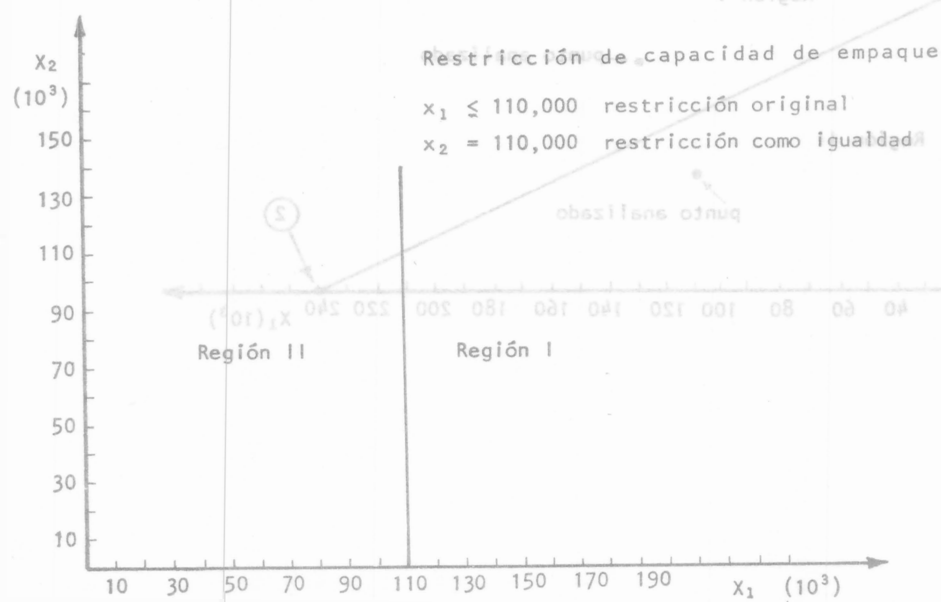
Ejemplo

Las restricciones explícitas son desigualdades del tipo menor o igual que ($\leq$). Consideradas como igualdades estrictas, son rectas en el plano cartesiano que se pueden graficar. Todos los puntos sobre esa recta satisfacen la igualdad. Esta recta divide al plano en dos regiones y los pun tos dentro de alguna de ellas cumplen con la desigualdad. Por ejemplo:

Representación de las restricciones




Restricción de Nutriente
1.5x1 + x2 ≤ 180,000 restricción original
1.5x1 + x2 = 180,000 restricción como igualdad
1 x1 = 0 , x2 = 180,000
2 x1 = 120,000 , x2 = 0
puntos por donde pasa la recta
Región I
Región II
X2 (10³)
X1 (10³)
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220


Restricción de capacidad de empaque
x1 ≤ 110,000 restricción original
x2 = 110,000 restricción como igualdad
Región II
Región I
X2 (10³)
X1 (10³)
150
130
110
90
70
50
30
10
10 30 50 70 90 110 130 150 170 190

En todos los casos los puntos en las regiones II son los que satisfacen las desigualdades. Esto se puede comprobar tomando un punto en alguna de las regiones y viendo si satisfacen la restricción.

Por ejemplo, para la harina de pescado, la restricción es $x_1 + 2x_2 \leq 240{,}000$;

un punto en la región I es $x_1 = 130{,}000$

y $x_2 = 90{,}000$

sustituyendo se tendrá:

$$(130{,}000) + (2)(90{,}000) = 310{,}000$$

que es mayor que 240,000 y por tanto no satisface la restricción

un punto en la región II es $x_1 = 110{,}000$

$x_2 = 50{,}000$

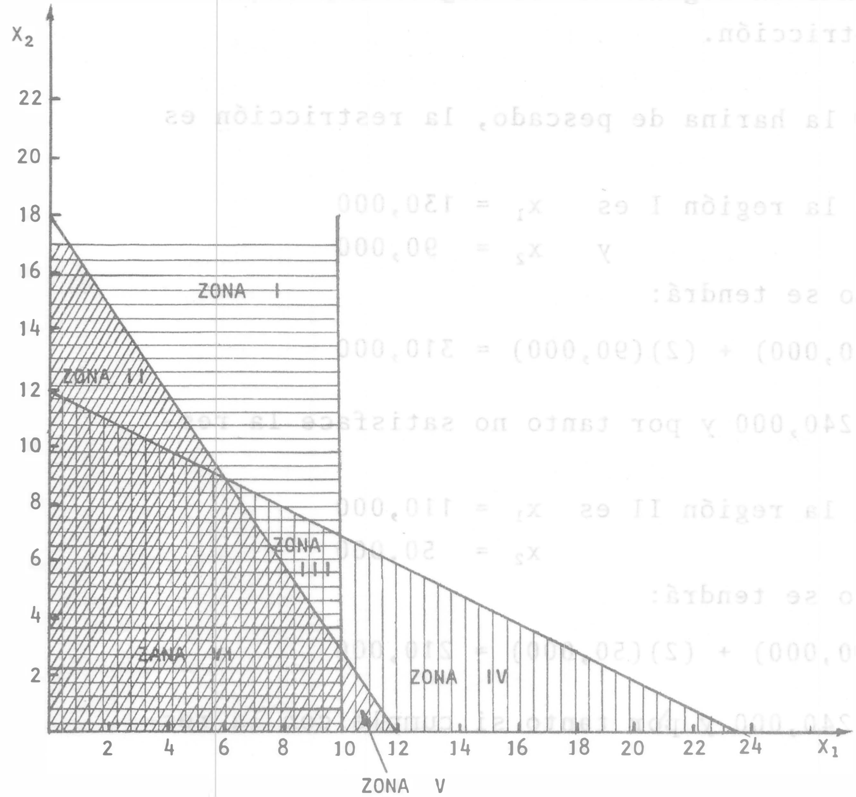
sustituyendo se tendrá:

$$(110{,}000) + (2)(50{,}000) = 210{,}000$$

que es menor que 240,000 y por tanto si cumple con la restricción.

Así se puede demostrar que todos los puntos en la recta y en la región II cumplen, independientemente con las restricciones del problema.

Considerando simultáneamente las tres restricciones se obtiene la siguiente gráfica:



Para este problema en particular surgen seis zonas que tie nen las siguientes características:

ZONA I. Todos los puntos en esta zona (≣) cumplen con la restricción de capacidad de empaque, pero no con la de la harina de pescado y de nutriente. Por ejemplo, si se quisieran fabricar 80,000 paquetes de "Chicken-Pollo" y 180,000 paquetes de "Coqui-Pollo" se tendría la suficiente capacidad de empaque, pero no se dispondría de las cantidades necesarias de harina de pescado y de nutriente. Se dice que no es una combinación factible.

Regiones delimitadas por las restricciones

ZONA II. Todos los puntos en esta zona (▨) cumplen con las restricciones de capacidad de empaque y de nutriente, pero no con la de la harina de pescado. Por ejemplo, si se quisieran fabricar 20,000 paquetes de "Chicken-Pollo" y 120,000 paquetes de "Coqui-Pollo", se tendría la suficiente capacidad de empaque y nutriente, pero no de la cantidad necesaria de la harina de pescado.

ZONA III. Todos los puntos de esta zona (▦) cumplen con las restricciones de la capacidad de empaque y de harina de pescado, pero no con la de nutriente. Por ejemplo, si se quisieran fabricar 100,000 paquetes de "Chicken-Pollo" y 60,000 paquetes de "Coqui-Pollo", se tendría suficiente capacidad de empaque, de harina de pescado, pero no de nutriente.

ZONA IV. Todos los puntos en esta zona (▥) cumplen con las restricciones de harina de pescado pero no con las de nutriente ni con la capacidad de empaque.

ZONA V. Todos los puntos en esta zona (▩) cumplen con las restricciones de harina de pescado y nutriente, pero no con la capacidad de empaque.

ZONA VI. Todos los puntos en esta zona (▦) cumplen con las restricciones de harina de pescado, de nutriente y de capacidad de empaque. Por ejemplo, si se quisieran producir 40,000 paquetes de "Chicken-Pollo y 60,000 paquetes de "Coqui-Pollo", se tendría suficiente harina, nutriente y capacidad de empaque. Esta zona corresponde a la intersección de las regiones que cumplen con cada restricción y se le denomina *REGION FACTIBLE*. Todos los puntos de esta región se denominan *SOLUCIONES FACTIBLES*, y tienen como característica que cumplen con todas las restricciones del problema incluyendo las de no negatividad. La solución óptima obviamente debe quedar dentro de la región factible.

Para obtener la solución óptima se procede como sigue: si a z en la función objetivo $76x_1 + 57x_2 = z$ se le da un valor arbitrario, cero por ejemplo, se tiene la ecuación de una recta que se puede graficar;

$$z = 76x_1 + 57x_2 = 0$$

es una recta que pasa por los puntos

$(x_1 = -7{,}500,\ x_2 = 10{,}000)$ y

$(x_1 = 15{,}000,\ x_2 = -20{,}000)$

Si ahora a z se le da un valor arbitrario de 1,750,000 , la ecuación

$$76x_1 + 57x_2 = 1{,}750{,}000$$

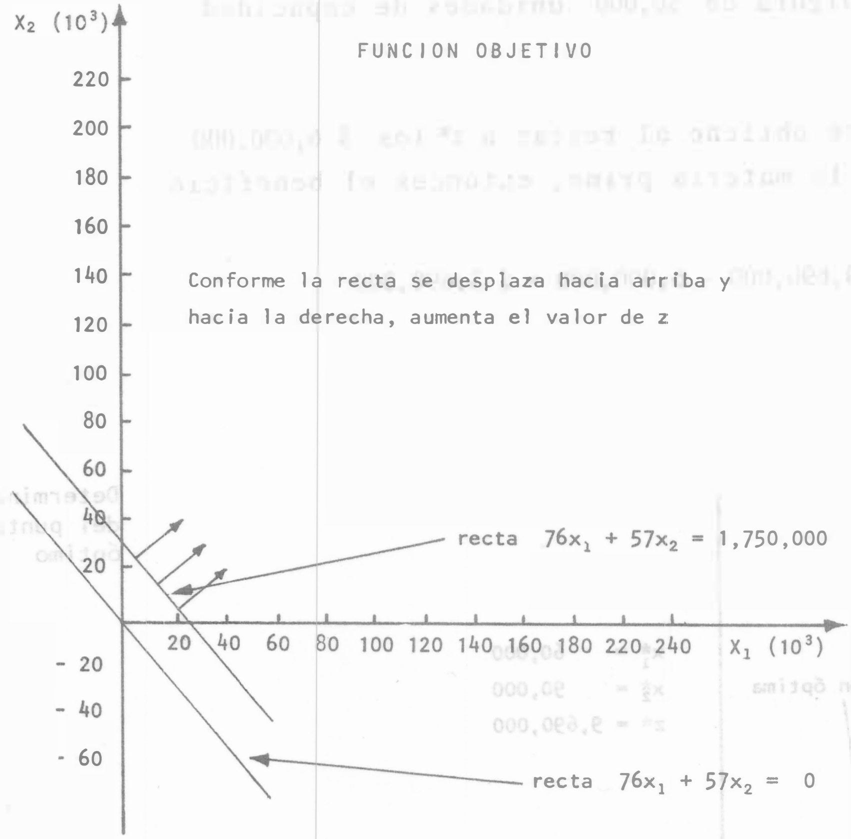
es la de una recta que se puede graficar y pasa por los puntos

$(x_1 = 0\ ;\ x_2 = 30{,}701)$ y

$(x_1 = 23{,}026\ ;\ x_2 = 0)$

Esta es una recta paralela a la anterior ó bien la misma recta desplazada a la derecha y con mayor valor de z, es decir, con mayor beneficio bruto. De manera que la solución óptima se obtiene desplazando esta recta hacia la derecha, incrementando el valor de z, hasta determinar cuál es el último punto que toca dentro de la región factible.

Representación de la función objetivo



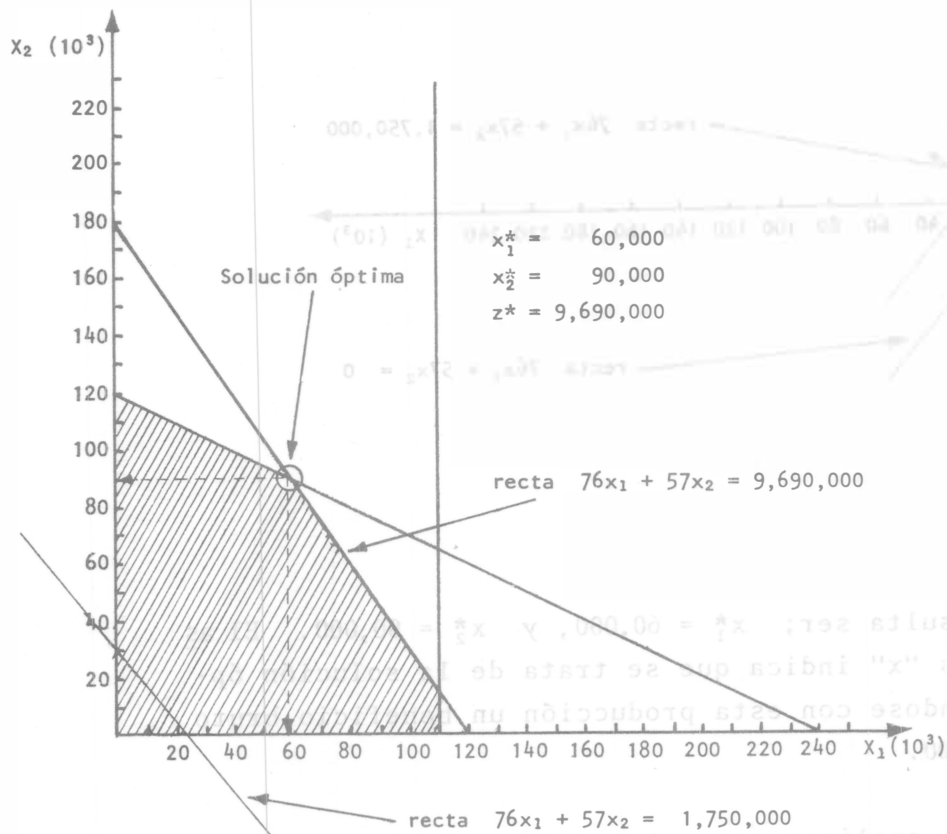
Este punto resulta ser; $x_1^* = 60,000$, y $x_2^* = 90,000$. El asterisco en las "x" indica que se trata de la solución óptima, obteniéndose con esta producción un beneficio bruto de \$ 9,690,000.00.

Es interesante analizar que este punto es la intersección de las dos rectas que marcan las restricciones de harina de pescado y nutriente, lo cual indica que estos recursos se utilizan en su totalidad, esto se puede comprobar al sustituir los valores óptimos en las ecuaciones de restricción. Como sólo se producen 60,000 paquetes de "Chicken--Pollo" queda una holgura de 50,000 unidades de capacidad de empaque.

El beneficio neto se obtiene al restar a z^* los \$ 6,000,000 de costos fijos de la materia prima, entonces el beneficio neto es:

$$9{,}690{,}000 - 6{,}000{,}000 = \$\ 3{,}690{,}000$$

Determinación
del punto
óptimo



Resumiendo, el método gráfico consiste en:

Esbozo secuencial del método gráfico

a. Considerar únicamente el Cuadrante I del plano cartesiano, ya que a él limitan las restricciones implícitas de no negatividad.

b. Las restricciones explícitas se escriben como igualdades estrictas, y se grafican como rectas en el plano, al cual dividen en dos regiones. Se determina cuál de ellas es la que se cumple con la desigualdad.

c. La intersección de las regiones que cumplen con todas las desigualdades del modelo es la región factible.

d. Se traza la recta de la función objetivo dándole a z un valor arbitrario (cero por ejemplo).

e. Desplazándose paralelamente a la recta de la función objetivo, se determina cuál es el último punto de la región factible que se toca. Este punto es la solución óptima del modelo de programación lineal.

Método gráfico para tres variables

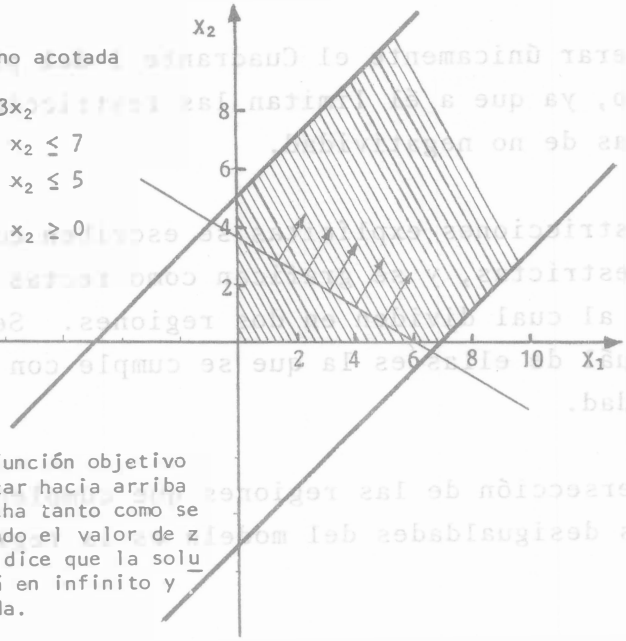
Si el modelo de Programación Lineal tiene tres variables, el procedimiento es semejante, sólo que ahora se tendrá un espacio y la región de no negatividad será un octante de este espacio. La función objetivo y las restricciones serán planos en lugar de rectas y la región factible será un volumen en el octante en lugar de una figura en el cuadrante.

Se pueden presentar algunos problemas al aplicar el método gráfico, como se muestra en los siguientes ejemplos:

1. Solución óptima no acotada

$$\text{Max} \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{sujeto a} \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 7 \\ -x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1, \ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



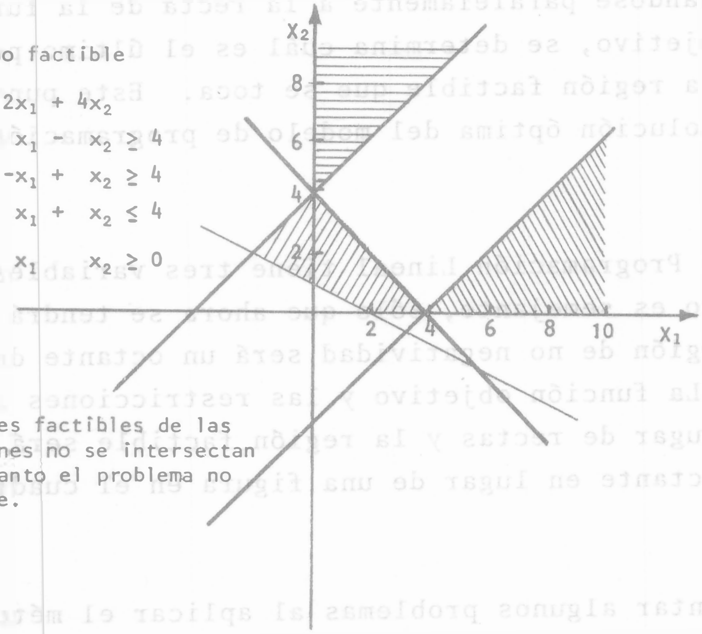
Caso con solución no acotada

La recta de la función objetivo se puede desplazar hacia arriba y hacia la derecha tanto como se quiera, aumentando el valor de z sin límite. Se dice que la solución óptima está en infinito y que es no acotada.

2. Problema no factible

$$\text{Max} \quad z = 2x_1 + 4x_2$$

$$\text{sujeto a} \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 4 \\ -x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, \ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



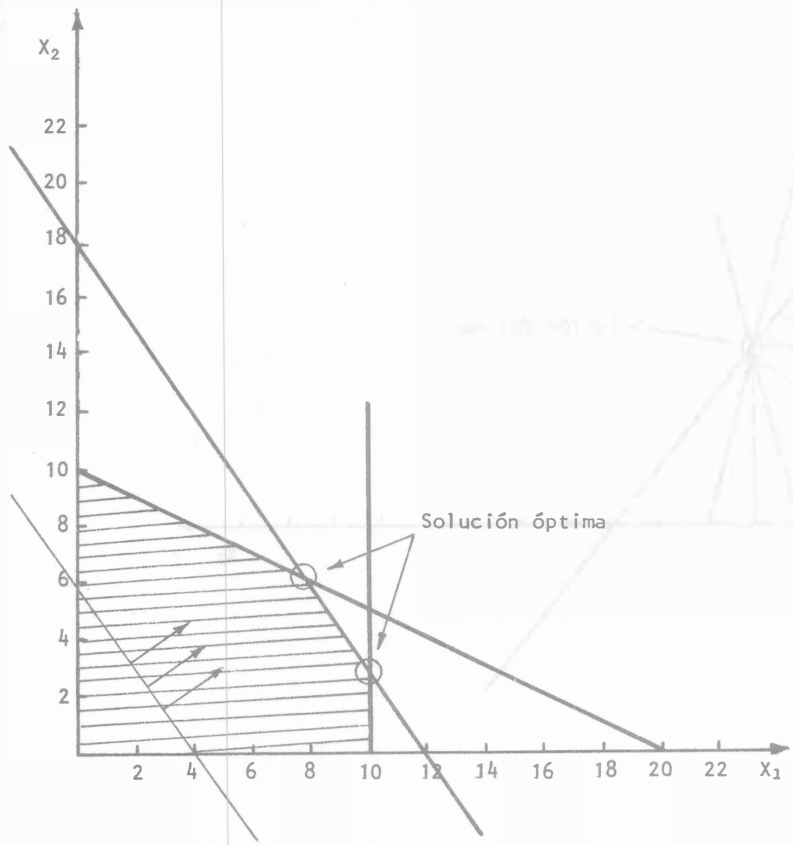
Caso con solución no factible

Las regiones factibles de las restricciones no se intersectan y por lo tanto el problema no es factible.

3. Problema con soluciones múltiples

$$\text{Max } z = 15x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a} \quad x_1 + 2x_2 &\leq 20 \\ 1.5x_1 + x_2 &\leq 18 \\ x_1 &\leq 10 \\ x_1 , \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Caso con soluciones múltiples

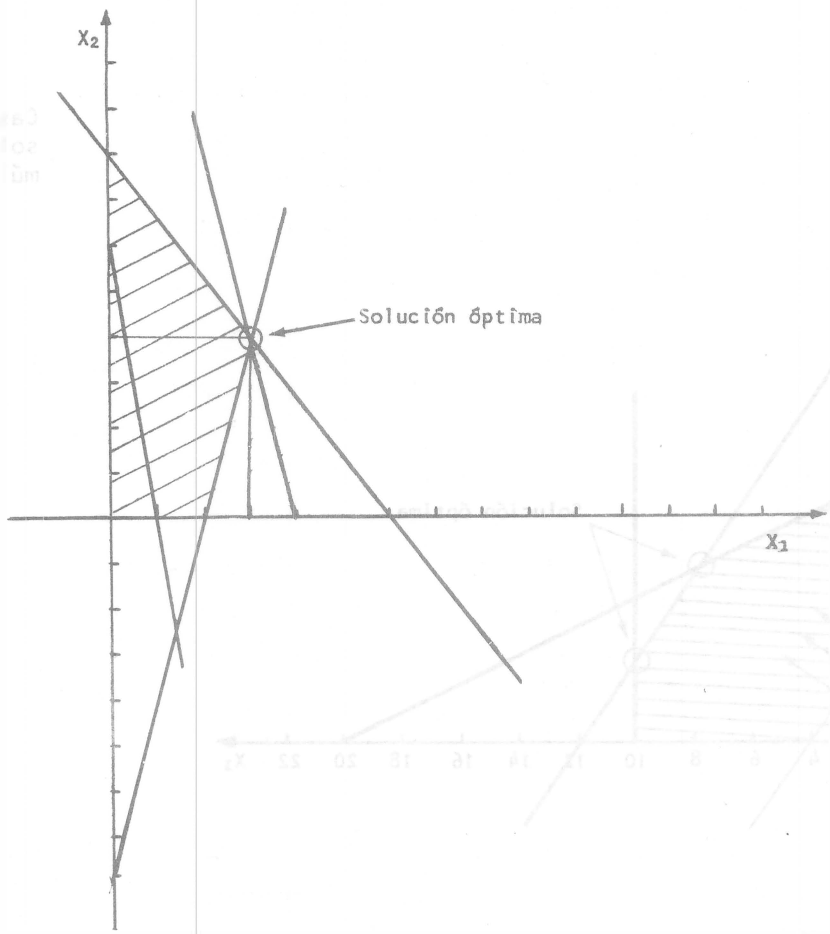
La función objetivo es paralela a una de las restricciones. El punto óptimo se obtiene en dos puntos ($x_1 = 8$, $x_2 = 6$) y ($x_1 = 10$, $x_2 = 3$), así como en cualquier punto del segmento de recta que los une, dando un valor de $z = 180$ en todos los casos. Se dice que hay un número infinito de soluciones óptimas.

4. Solución degenerada

$$\text{Max} \quad z = 2x_1 + \frac{1}{3} x_2$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a} \quad 4x_1 + 3\,x_2 &\leq 12 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 - x_2 &\leq 4 \\ x_1\,, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Caso con solución degenerada



La solución óptima está en un punto que es la intersección de más de dos restricciones. Se dice que la solución es degenerada. Este tipo de problemas da origen a que el método analítico pueda ciclar.

III.2.2. Método Analítico

Método analítico

Si el modelo de programación lineal tiene cuatro o más variables, ya no es posible su representación gráfica, aunque las nociones de dos y tres dimensiones se pueden generalizar a estos casos. Las restricciones en lugar de estar limitadas por rectas o por planos, lo están por hiper-planos. La región factible se dice que es ahora un hiperespacio, y la solución óptima se encuentra de manera similar al método anterior, es decir, encontrando cuál es el último punto que toca la función objetivo dentro de este hiperespacio factible. Con objeto de obtener la solución a estos modelos de 4 ó más variables, se desarrolló a fines de la década de los cuarenta, el método simplex analítico que se discute a continuación:

Considere nuevamente el modelo de programación lineal de "alimento para pollos, S.A."

Maximizar $z = 76x_1 + 57x_2$

Sujeto a:

$x_1 + 2x_2 \leq$	240,000	Restricción de harina de pescado.
$1.5x_1 + x_2 \leq$	180,000	Restricción de nutriente.
$x_1 \leq$	110,000	Restricción de capacidad de empaque.

$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$

Variables de holgura

Se definirán tres nuevas variables, que se añaden a cada una de las restricciones, con objeto de transformarlas en igualdades estrictas. Estas variable vienen a representar la holgura de la compañía en cada uno de los recursos, por esto mismo reciben el nombre de *VARIABLES DE HOLGURA*. Con esta adición el problema queda como:

$$\begin{array}{lrl} \text{Maximizar} & z = 76x_1 + 57x_2 & \\ \text{Sujeto a:} & x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad & = 240{,}000 \\ & 1.5x_1 + x_2 \quad + x_4 \qquad & = 180{,}000 \\ & x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 & = 110{,}000 \\ & x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Forma canónica del modelo

En este ejemplo x_3 representará la cantidad de harina de pescado que no se utiliza para fabricar alimento para pollo, x_4 daría la cantidad de nutriente que no se utiliza en la producción y x_5 la cantidad de unidades de capacidad de empaque que no se utiliza para fabricar alimento para pollos. La expresión de las ecuaciones es ahora, lo que se utiliza para fabricación más lo que no se utiliza en la fabricación igual a lo disponible del recurso. Esta última forma de representar el modelo de programación lineal se denomina *FORMA CANONICA* del modelo de Programación Lineal y tiene las siguientes características:

a. las restricciones están en forma de igualdad.

b. cada restricción tiene una variable con coeficiente +1, que aparece en ella únicamente y no aparece en la función objetivo.

c. estas variables también deben ser positivas.

Determinación del sistema de ecuaciones

Considerando únicamente a las restricciones y dejando momentáneamente, a un lado, a la función objetivo, se tiene un sistema de cinco variables con tres ecuaciones que, de acuerdo a los conceptos de álgebra lineal, tiene un número infinito de soluciones. Si hubiera tantas ecuaciones como variables, la solución sería única. Es posible obtener un sistema como este último con tres variables y tres ecuaciones, fijando a dos de las variables a nivel cero. Si hay cinco variables y se fijan dos para resolver el sistema de las tres restantes, se pueden obtener

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

sistemas de ecuaciones. Se pueden analizar algunos de ellos.

Sistema 1. Se fijan x_1 y x_2 en cero y se resuelve para x_3 , x_4 , x_5

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 240{,}000 \\ 1.5x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 180{,}000 \\ x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 110{,}000 \end{aligned}$$

se tiene:

$x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 240{,}000$; $x_4 = 180{,}000$; $x_5 = 110{,}000$

Sistema 2. Se fijan x_2 y x_3 en cero y se resuelve para x_1 , x_4 , x_5

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 240{,}000 \\ 1.5x_1 \qquad + x_4 \qquad &= 180{,}000 \\ x_1 \qquad\qquad + x_5 &= 110{,}000 \end{aligned}$$

se obtiene que:

$x_1 = 240{,}000$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = -180{,}000$; $x_5 = -130{,}000$

Sistema 3. Se fijan x_1 y x_3 en cero y se resuelve para x_2 , x_4 , x_5

$$\begin{aligned} 2x_2 \qquad\qquad\qquad &= 240{,}000 \\ x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 180{,}000 \\ + x_5 &= 110{,}000 \end{aligned}$$

se obtiene que:

$x_1 = 0$; $x_2 = 120{,}000$; $x_3 = 0$; $x_4 = 60{,}000$; $x_5 = 110{,}000$

Sistema 4. Se fijan x_1 y x_4 en cero y se resuelve para x_2 , x_3 , x_5

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 \qquad &= 240{,}000 \\ x_2 \qquad\qquad &= 180{,}000 \\ x_5 &= 110{,}000 \end{aligned}$$

se obtiene que:

$x_1 = 0$; $x_2 = 180{,}000$; $x_3 = -120{,}000$; $x_4 = 0$; $x_5 = 110{,}000$

Sistema 5. Se fijan x_3 y x_4 en cero y se resuelve para x_1 , x_2 , x_5

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad &= 240{,}000 \\ 1.5x_1 + x_2 \qquad &= 180{,}000 \\ x_1 \qquad + x_5 &= 110{,}000 \end{aligned}$$

se obtiene que:

$x_1 = 60{,}000$; $x_2 = 90{,}000$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 50{,}000$

En forma semejante se resuelven los cinco sistemas restantes.

Un análisis de los que se resolvieron muestra lo siguiente. Algunos de ellos, cumplen con las restricciones explícitas pero no con las restricciones implícitas de no negatividad como los sistemas 2 y 4. Otros cumplen con las restricciones explícitas y las de no negatividad como los sistemas 1, 3 y 5. Por último, el sistema 5 corresponde a la solución óptima del problema, como se puede comprobar con el método gráfico,

Antes de seguir adelante, conviene plantear algunas definiciones, ideas y conceptos centrales que definen el método.

a. Se llama *SOLUCION BASICA* a una solución al modelo de programación lineal en forma canónica, que se obtiene de fijar en cero tantas variables como sea necesario para obtener un sistema en igual número de ecuaciones que de variables. Solución básica

b. Una solución básica que cumple además con las restricciones de no negatividad de las variables se llama *SOLUCION BASICA FACTIBLE*. Básica factible

c. Al conjunto de variables para los que se resuelve el sistema se les denomina *VARIABLES BASICAS*; a las que se fijan en cero se les llaman *VARIABLES NO BASICAS*. Variables básicas y no básicas

d. Al conjunto de variables básicas se le denomina *BASE*. Base

El siguiente teorema garantiza lo que se había observado en el ejemplo anterior.

TEOREMA 1. Si el modelo de programación lineal tiene solución óptima finita, entonces ésta es una solución básica factible.

De manera que si el problema tiene solución óptima, ésta debe buscarse únicamente en las soluciones básicas factibles. El método simplex analítico concentra su búsqueda en ellas y por el algoritmo, no es necesario analizar todas sino sólo algunas de ellas.

Cuáles se deben analizar y cómo determinar que ya se está en el óptimo se discutirá a continuación, siguiendo con el ejemplo.

Debe comenzarse con una solución básica factible que se llama inicial. Por ejemplo: Ejemplo

1a. Solución $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 240{,}000$;
$x_4 = 180{,}000$ y $x_5 = 110{,}000$

que da un valor de $z = 0$. Es la más conveniente por la estructura de la forma canónica y corresponde a no producir nada y dejar sin utilizar todos los recursos. Desde luego no es la solución óptima ya que analizando la función objetivo

$$z = 76x_1 + 57x_2$$

se aprecia que por cada paquete que se produzca de "Chicken-Pollo" se aumenta el beneficio en \$ 76.00 y por cada paquete que se produce de "Coqui-Pollo" se aumenta en \$ 57.00. O sea que no conviene que x_1 y x_2 valgan cero, sino que tengan un valor positivo. Se aumentará el valor de x_1 únicamente, dejando a x_2 en cero. La siguiente tabla muestra qué sucede con las otras variables al realizar este aumento.

x_1	z	x_3	x_4	x_5
0	0	240,000	180,000	110,000
1	76	239,999	179,998.5	109,999
1,000	76,000	239,000	178,500	109,000
10,000	760,000	230,000	165,000	100,000
100,000	7,600,000	140,000	30,000	10,000
110,000	8,360,000	130,000	15,000	0
110,001	8,360,076	129,999	14,998.5	-1

El máximo valor que puede alcanzar x_1 es de 110,000 . Valores mayores que éste llevan a que se violen las restric ciones de no negatividad. El análisis de la tabla se puede simplificar de la siguiente forma: se dividen cada uno de los elementos del lado derecho de las restricciones (parámetros del lado derecho) entre los coeficientes, en esa restricción, de la variable que se aumenta. Por ejemplo, en la primera restricción el valor del lado derecho es 240,000 ; el coeficiente de x_1 es 1.0 la división da 240,000. Para la segunda es 180,000 entre el coeficiente de x_1 que es 1.5 el resultado es 120,000 y para la tercera es 110,000 , entre 1.0 que da 110,000. De los valores se toma el menor, que en este caso fue 110,000 y éste es el máximo valor al que se puede aumentar la variable x_1.

Se ha determinado que es más conveniente que x_1 sea variable básica, y su lugar se lo deja la variable x_5 la cual se dice que sale de la base.

La nueva solución se puede obtener fijando a x_2 y a x_5 en cero y resolviendo el sistema para x_1 , x_3 , x_4 . Sin embargo, se hará de la siguiente forma que es equivalente. De la tercera restricción que es la que dio el valor limite para x_1 se despeja a x_1 y se sustituye este valor en las demás restricciones y en la función objetivo, obteniéndose un nuevo modelo de programación lineal.

De la 3a. Restricción $x_1 + x_5 = 110{,}000 \Longrightarrow x_1 = 110{,}000 - x_5$

sustituyendo Maximizar $z = 76(110{,}000 - x_5) + 57x_2$

sujeto a:

$$
\begin{aligned}
(110{,}000 - x_5) + 2x_2 + x_3 &= 240{,}000\\
(1.5)(110{,}000 - x_5) + x_2 \qquad + x_4 &= 180{,}000\\
x_1 \qquad\qquad + x_5 &= 110{,}000
\end{aligned}
$$

que da:

Maximizar $z = 8{,}360{,}000 + 57x_2 - 76x_5$

sujeto a:

$$
\begin{aligned}
2x_2 + x_3 \qquad - x_5 &= 130{,}000\\
x_2 \qquad + x_4 - 1.5x_5 &= 15{,}000\\
x_1 \qquad\qquad + x_5 &= 110{,}000
\end{aligned}
$$

En este nuevo modelo que como se ve está en forma canónica, se pueden fijar x_2 y x_5 en cero obteniéndose inmediatamente la solución:

$$x_1 = 110{,}000\ ;\quad x_2 = 0\ ;\quad x_3 = 130{,}000\ ;$$
$$x_4 = 15{,}000 \quad \text{y} \quad x_5 = 0$$

dando un valor de

$$z = 8{,}360{,}000$$

Analizando la función objetivo de este nuevo modelo correspondiente a la 2a. solución básica factible, se puede observar que aún no se llega al óptimo, ya que si se aumenta el valor de x_2, se obtiene un beneficio adicional de \$ 57.00 por cada paquete. O sea que x_2 se debe convertir en variable básica. Para conocer qué variable le deja su lugar, es decir, conocer cuál sale de la base, se aplica el criterio de dividir los elementos del lado derecho de las restricciones, entre los coeficientes de la variable que se aumenta. En este caso serían 130,000 entre 2, que da como resultado 65,000 ; y 15,000 entre 1 que da 15,000. No se considera la tercera restricción ya que el coeficiente de x_2 ahí es cero. El valor menor es 15,000 lo que indica que x_2 se puede aumentar hasta ese límite y que debe ser x_4 la variable que sale de la base, ya que en ese momento se convierte en cero. Despejando a x_2 de esa ecuación y sustituyéndola en los restantes y en la función objetivo se obtiene un nuevo modelo en forma canónica.

De la 2a. Restricción $\quad x_2 + x_4 - 1.5x_5 = 15{,}000 \Longrightarrow x_2 = 15{,}000 - x_4 + 1.5x_5$

sustituyendo

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = 8{,}360{,}000 + 57(15{,}000 - x_4 + 1.5x_5) - 76x_5 \\ \text{sujeto a:} & (2)(15{,}000 - x_4 + 1.5x_5) + x_3 - x_5 = 130{,}000 \\ & x_2 + x_4 - 1.5x_5 = 15{,}000 \\ & x_1 + x_5 = 110{,}000 \end{array}$$

simplificando

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = 9{,}215{,}000 - 57x_4 + 9.5x_5 \\ \text{sujeto a:} & x_3 - 2x_4 + 2\,x_5 = 100{,}000 \\ & x_2 + x_4 - 1.5x_5 = 15{,}000 \\ & x_1 + x_5 = 110{,}000 \end{array}$$

En este nuevo modelo, al fijar a x_4 y x_5 en cero se obtiene de inmediato la solución básica factible en términos de x_1, x_2, x_3, que es:

$$x_1 = 110{,}000 \; ; \quad x_2 = 15{,}000 \; ; \quad x_3 = 100{,}000;$$
$$x_4 = 0 \quad ; \quad x_5 = 0$$

dando un valor de

$$z = 9{,}215{,}000.$$

Analizando la función objetivo en este modelo se puede ver que no es la solución óptima, ya que el valor de z se puede aumentar en \$ 9.5 por cada unidad que aumente x_5. Para encontrar hasta qué valor se puede aumentar x_5 y determinar qué variable es la que sale de la base, se desarrollará nuevamente la tabla, ya que se encontrarán algunos hechos que modificarán la regla dada anteriormente.

x_5	z	x_1	x_2	x_3
0	9,215,000	110,000	15,000	100,000
1	9,215,009.5	109,999	15,001.5	99,998
1,000	9,224,500	109,000	16,500	98,000
10,000	9,310,000	100,000	30,000	80,000
50,000	9,690,000	60,000	90,000	0

Al aumentar x_5, x_1 y x_3 disminuyen, siendo x_3 la primera en llegar a cero. Sin embargo, x_2 aumenta. Esto se debe a que el coeficiente de x_5 en la segunda restricción (que es donde aparece x_2) es negativo. De manera que la regla para determinar cuál es el máximo valor que alcanza la variable que entra a la base y cuál es la variable que sale de la base, es dividir el valor del lado derecho de las restricciones entre los coeficientes positivos (mayores que cero) de la variable que entra a la base. Si el coeficiente es negativo o cero, no se efectúa la división.

La última tabla indica que la variable x_5 debe entrar a la base y debe salir de ella x_3. Se efectúa el despeje de x_5 en la primera restricción, que es donde aparece x_3 y se sustituye en las demás, incluyendo la función objetivo.

Despejando de la 1a. restricción: $x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 100{,}000 \Longrightarrow x_5 = \dfrac{100{,}000 - x_3 + 2x_4}{2}$

$$\Longrightarrow x_5 = 50{,}000 - 0.5x_3 + x_4$$

sustituyendo **Maximizar** $z = 9{,}215{,}000 - 57x_4 + (9.5)(50{,}000 - 0.5x_3 + x_4)$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 100{,}000 \\ x_2 + x_4 - (1.5)(50{,}000 - 0.5x_3 + x_4) &= 15{,}000 \\ x_1 + (50{,}000 - 0.5x_3 + x_4) &= 110{,}000 \end{aligned}$$

simplificando **Maximizar** $z = 9{,}690{,}000 - 4.75x_3 - 47.5x_4$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_4 + x_5 &= 50{,}000 \\ x_2 + 0.75x_3 - 0.5x_4 &= 90{,}000 \\ x_1 - 0.5x_3 + x_4 &= 60{,}000 \end{aligned}$$

NOTA: La primera restricción se dividió entre dos para conservar la forma canónica.

Fijando a x_3 y x_4 en cero, se obtiene de inmediato la solución para x_1, x_2, x_5 que es:

$$x_1 = 60{,}000; \quad x_2 = 90{,}000; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 0; \quad x_5 = 50{,}000$$

dando un valor de

$$z = 9,690,000$$

Analizando la función objetivo de este nuevo modelo, se ve que la solución es la óptima, ya que si a x_3 se le diera un valor mayor que cero, z disminuirá en \$ 4.75 y si a x_4 se le diera un valor positivo, z disminuiría en \$ 47.5 por cada unidad de aumento. Es decir, ya no se puede obtener un aumento de la función objetivo, lo máximo que se puede conseguir es $z = \$ 9,690,000$, produciendo 60,000 paquetes mensuales de "Chicken-Pollo"; 90,000 paquetes mensuales de "Coqui-Pollo", utilizando toda la harina de pescado y nutriente, dejando sin utilizar 50,000 unidades de capacidad de empaque.

El método simplex analítico se puede resumir como sigue:

Secuencia del método Simplex

1. Evalúese la solución actual, si es óptima deténgase, si no pase a 2.

2. Selecciónese una variable que entre a la base. Escójase una que al aumentar su valor desde cero, aumente el valor de la función objetivo.

3. Determínese qué variable sale de la base. Exprésese el problema en términos de la nueva base.

Tableau Simplex

Por simplicidad, se acostumbra manejar únicamente los parámetros de cada modelo de la forma canónica, los cuales se acomodan en una tabla que se conoce como *TABLEAU SIMPLEX* y que tiene la siguiente estructura:

$$
\begin{array}{c|c|cccc|}
 & \multicolumn{1}{c}{} & x_1 & x_2 & \cdots & \multicolumn{1}{c}{x_n} \\
\cline{2-6}
 & a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\
\cline{2-6}
x_{B1} & a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
x_{B2} & a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
x_{Bm} & a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\
\cline{2-6}
\end{array}
$$

Arriba de la tabla se indican las variables a las que corresponden los parámetros. A la izquierda se indica cuáles son las variables básicas.

El elemento $\{a_{00}\}$ sería el valor de la función objetivo (z).

Los elementos $\{a_{0j}\}_{j=1,n}$ serían los coeficientes de las variables en la función objetivo, cambiados de signo.

Los elementos $\{a_{i0}\}_{i=1,m}$ serían los elementos del lado derecho de las restricciones.

Los elementos $\{a_{ij}\}_{i=1,m\ ;\ j=1,n}$ serían los coeficientes de las restricciones.

Una observación es que los coeficientes de la función objetivo de los modelos se pasan a la tabla con signo contrario y la solución óptima se logra cuando estos elementos son todos positivos.

Sobre este *TABLEAU SIMPLEX* se puede aplicar el algoritmo que se indica en el diagrama de flujo.

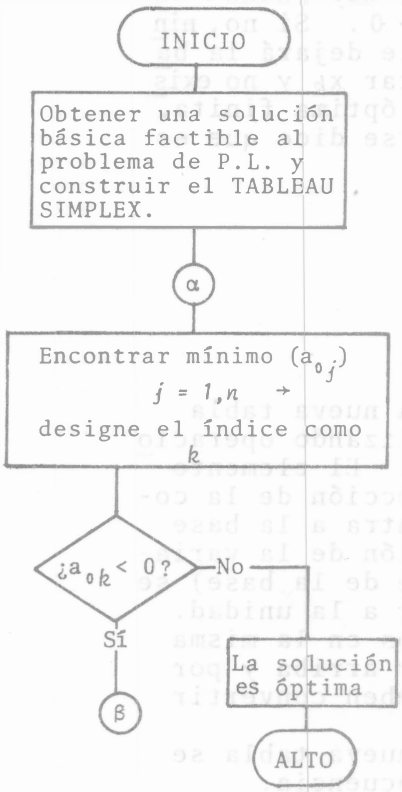
Se resolverá el problema de la planeación de la producción utilizando este algoritmo y el diagrama de flujo.

Se requiere en primer lugar el modelo de programación lineal en forma canónica, correspondiente a la primera solución básica factible.

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Maximizar} & z = & 76x_1 & + 57x_2 & & & & \\
\text{sujeto a:} & & x_1 & + 2x_2 & + x_3 & & & = 240{,}000 \\
 & & 1.5x_1 & + x_2 & & + x_4 & & = 180{,}000 \\
 & & x_1 & & & & + x_5 & = 110{,}000
\end{array}
$$

Los parámetros de este modelo se vacían en el Tableau Simplex, es pertinente recordar que a los coeficientes de la función objetivo se les cambia el signo.

DIAGRAMA DE FLUJO DEL METODO SIMPLEX

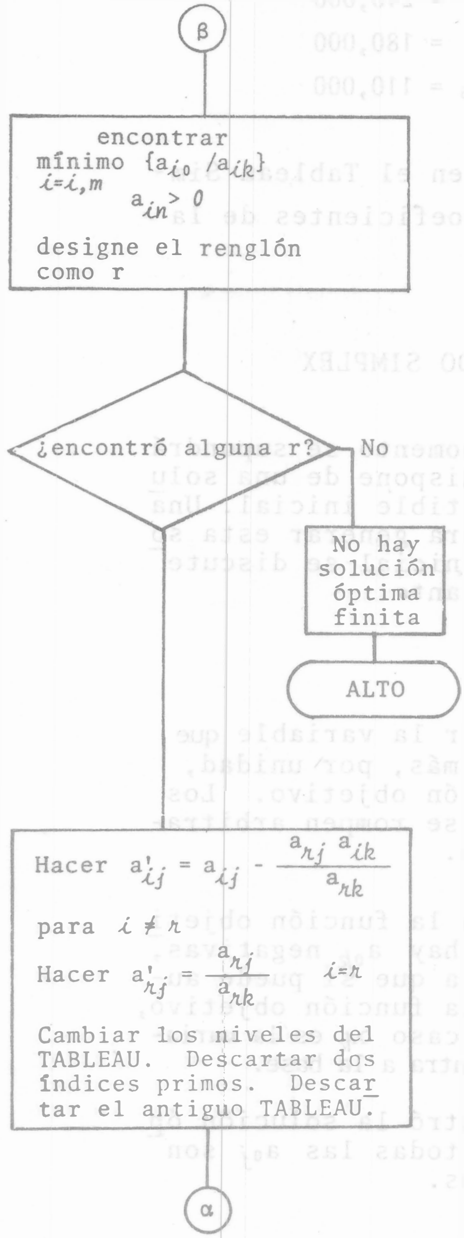


Por el momento se supondrá que se dispone de una solución factible inicial. Una forma para generar esta solución inicial se discute más adelante.

Encontrar la variable que aumente más, por unidad, la función objetivo. Los empates se rompen arbitrariamente.

¿Aumenta la función objetivo? Si hay a_{0k} negativas, significa que sí puede aumentar la función objetivo, en este caso x_k es la variable que entra a la base.

Se encontró la solución óptima si todas las a_{0j} son positivas.



Determinar cuál es la variable que sale de la base. Si hay empates, el problema es degenerado.

Compruebe si hay cuando menos una $a_{ik} > 0$. Si no, ninguna variable dejará la base al aumentar x_k y no existe solución óptima finita. La solución se dice que es no acotada.

Calcular una nueva tabla simplex utilizando operaciones renglón. El elemento a_{rk} (intersección de la columna que entra a la base con el renglón de la variable que sale de la base) se debe reducir a la unidad. Los elementos en la misma columna, por arriba y por abajo, se deben convertir en cero.
Sobre esta nueva tabla se repite la secuencia.

Ejemplo del método Simplex análitico

DIAGRAMA

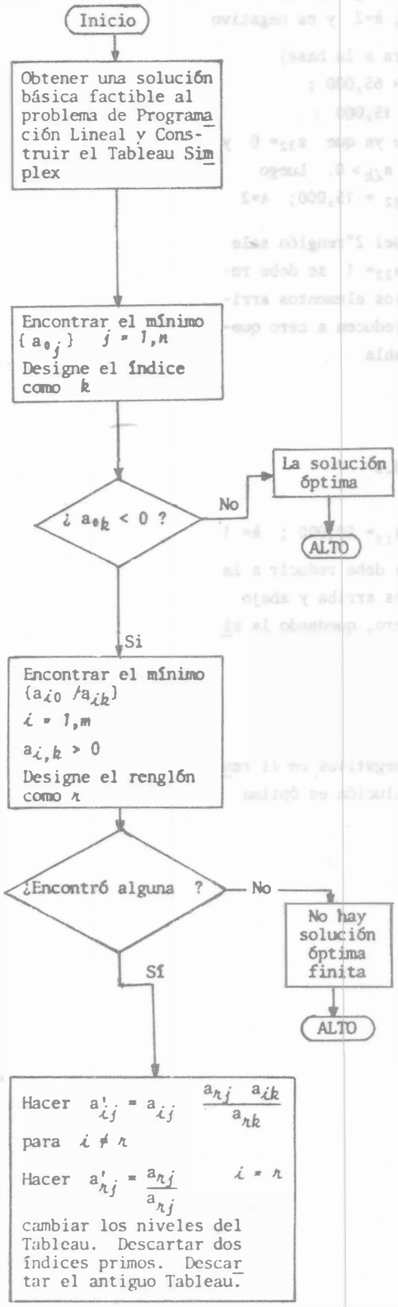


TABLEAU DEL EJERCICIO

EXPLICACION

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	-76	-57	0	0	0
x_3	240,000	1	2	1	0	0
x_4	180,000	1.5	1	0	1	0
x_5	110.000	1	0	0	0	1

Solución básica factible inicial 2 variables estructurales y 3 variables de holgura, en total $n+m = 2+3 = 5$ variables en el problema. La solución es básica ya que hay $n=2$ variables a nivel cero, x_1 y x_2. Y es factible ya que cumplen con todas las restricciones del problema, incluyendo las de no negatividad y es inicial porque en ella se empieza a aplicar el método Simplex.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	-76	-57	0	0	0
x_3	240,000	1	2	1	0	0
x_4	180,000	1.5	1	0	1	0
x_5	110,000	1	0	0	0	1

En este caso el mínimo (a_{0j}) es -76 y la x_k que entra a la base es x_1. Con la flecha se ilustra este proceso.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	-76	-57	0	0	0
x_3	240,000	1	2	1	0	0
x_4	180,000	1.5	1	0	1	0
x_5	110,000	$\boxed{1}$	0	0	0	1

La variable que sale de la base se determina de la siguiente forma

$$\frac{a_{10}}{a_{11}} = \frac{240,000}{1} = 240,000$$

$$\frac{a_{20}}{a_{21}} = \frac{180,000}{1.5} = 120,000$$

$$\frac{a_{30}}{a_{31}} = \frac{110,000}{1} = 110,000$$

en este caso el mínimo es

$$\frac{a_{30}}{a_{31}} = 110,000$$

es entonces $r = 3$. El pivote $A_{31} = 1$ es el que está encerrado en un rectángulo y la variable que sale es x_5 como se indica con la flecha.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	8,360,000	0	-57	0	0	76
x_3	130,000	0	2	1	0	-1
x_4	180,000	0	1	0	1	-1.5
x_1	110,000	1	0	0	0	1

El coeficiente a_{rk} se convierte en uno y los elementos de arriba y abajo de a_{rk} se deben convertir en cero por medio de operaciones elementales entre los renglones y se repite el mismo procedimiento sobre el nuevo Tableau.

TABLEAU 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	8,360,000	0	-57	0	0	76
x_3	130,000	0	2	1	0	-1
x_4	150,000	0	$\boxed{1}$	0	1	-1.5
x_1	110,000	1	0	0	0	1

$a_{01}=0$, $a_{02}=-57$, $a_{03}=0$; $a_{04}=0$, $a_{05}=76$

$\min\limits_j(a_{0j})= a_{02} = -57$; $k=2$ y es negativo (la variable x_2 entra a la base)

$a_{10}/a_{12} = 130{,}000/2 = 65{,}000$;

$a_{20}/a_{22} = 15{,}000/1 = 15{,}000$

a_{30}/a_{32} no es posible ya que $a_{32}= 0$ y se debe cumplir que $a_{ik} > 0$. Luego

$\min\limits_i(a_{i0}/a_{ik}) = a_{20}/a_{22} = 15{,}000$; $r=2$

(la variable básica del 2°renglón sale de la base) y $a_{rk}= a_{22}= 1$ se debe reducir a la unidad y los elementos arriba y abajo de él se reducen a cero quedando la siguiente tabla

TABLEAU 3

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	9,215,000	0	0	0	57	-9.5
x_3	100,000	0	0	1	-2	$\boxed{2}$
x_2	15,000	0	1	0	1	-1.5
x_1	110,000	1	0	0	0	1

$\text{Min.}_j\ (a_{0j}) = a_{05} = -9.5$ y es negativo; $k= 5$

$\text{Mín.}_i\ (a_{i0}/a_{ik})= a_{10}/a_{15}= 50{,}000$; $k= 1$

El elemento $a_{15}= 2$ se debe reducir a la unidad y los elementos arriba y abajo de él se reducen a cero, quedando la siguiente tabla.

TABLEAU 4

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	9,690,000	0	0	4.75	47.5	0
x_5	50,000	0	0	.5	-1	1
x_2	90,000	0	1	.75	-.5	0
x_1	60,000	1	0	-.5	1	0

Ya no hay elementos negativos en el renglón evaluador, la solución es óptima

$z^* = 9{,}690{,}000$

$x_1^* = 60{,}000$

$x_2^* = 90{,}000$

$x_3^* = 0$

$x_4^* = 0$

$x_5^* = 50{,}000$

III.2.3. Métodos de la gran M y de las dos fases

Si el modelo de P.L. aparece en forma estándar, al agregar las variables de holgura para obtener la forma canónica, se dispone de una solución básica factible inmediata, que es fijar las variables originales del problema en cero y resolver el sistema para las de holgura. Algunos modelos no aparecen originalmente en forma estándar, ya que son problemas de minimización o las restricciones son del tipo mayor o igual que (≥) o igualdades estrictas. Pero se pueden transformar a esta forma aplicando las siguientes reglas:

Métodos para obtener soluciones iniciales factibles

1. Si la función objetivo es minimizar z se puede convertir a maximizar ya que:

$$\text{Minimizar } z = -\text{ Maximizar } (-z)$$

Problemas de minimización

2. Una restricción del tipo $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$ equivale a $-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leq -b_i$

Restricciones mayor o igual que

3. Una restricción del tipo $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ equivale a dos desigualdades $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$ y $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$ ya que estas dos se satisfacen sólo en la igualdad.

Restricciones de igualdad

Por ejemplo el siguiente modelo:

$$\begin{array}{llrcrcrcl}
\text{Minimizar} & z = & 240{,}000y_1 & + & 180{,}000y_2 & + & 110{,}000y_3 & & \\
\text{sujeto a} & & y_1 & + & 1.5y_2 & + & y_3 & \geq & 76 \\
 & & 2y_1 & + & y_2 & & & \geq & 57 \\
 & & & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0
\end{array}$$

se puede transformar a la forma estándar:

$$
\begin{array}{lrl}
-\text{Maximizar} & z = -240{,}000y_1 - 180{,}000y_2 - 110{,}000y_3 & \\
\text{sujeto a} & -y_1 - 1.5y_2 - y_3 & \leq -76 \\
 & -2y_1 - y_2 & \leq -57 \\
 & y_1, y_2, y_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Para aplicar el método analítico del simplex se requiere que la función objetivo sea de maximizar y que los elementos del lado derecho de las restricciones sean positivos, sin importar el sentido de las desigualdades.

En el ejemplo, quedaría el problema

$$
\begin{array}{lrl}
-\text{Maximizar} & z = -240{,}000y_1 - 180{,}000y_2 - 110{,}000y_3 & \\
\text{sujeto a} & y_1 + 1.5y_2 + y_3 & \geq 76 \\
 & 2y_1 + y_2 & \geq 57 \\
 & y_1, y_2, y_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Este modelo se puede transformar a la forma canónica, por medio de variables de holgura, que en este caso, por ser las restricciones del tipo mayor o igual, se deben restar.

Forma canónica del modelo

$$
\begin{array}{lrl}
-\text{Maximizar} & z = -240{,}000y_1 - 180{,}000y_2 - 110{,}000y_3 & \\
\text{sujeto a} & y_1 + 1.5y_2 + y_3 - y_4 & = 76 \\
 & 2y_1 + y_2 - y_5 & = 57 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 & \geq 0
\end{array}
$$

Aquí no se dispone de una solución básica factible inmediata, ya que si se fijan las variables originales y_1, y_2, y_3

en cero, la solución para las restantes es $y_4 = -76$, $y_5 = -57$, que no cumplen con las restricciones de la no negatividad. Aunque se podrían fijar otras tres variables y resolver el sistema restante hasta encontrar una solución básica factible, existen métodos eficientes para hacerlo, como son el método de la gran M y el de las dos fases. Ambos requieren de variables auxiliares que no tienen ningún significado en el postulado original del problema y que sólo sirven para iniciar el método. Si el modelo tiene solución óptima, deben desaparecer durante el transcurso de la solución. Por esto se denominan *VARIABLES ARTIFICIALES*. Cada método difiere en la forma de manejar estas variables.

Variables artificiales

Las variables artificiales se añaden a cada restricción del tipo mayor o igual que (además de las de holgura) y a cada restricción de igualdad estricta.

METODO DE LA GRAN M. Como la función objetivo es una maximización, una forma de tratar de eliminar a las variables artificiales es asignándoles un costo muy alto, comparado con los beneficios que aparecen en el modelo. De esta manera serán valores poco atractivos que no aparecerán en la solución óptima, si esta existe. La selección del costo es arbitraria y se acostumbra representar como una constante algebraica denotada por M, en vez de representarlo explícitamente.

Método de la gran M

Por ejemplo, añadiendo variables artificiales a la forma canónica anterior:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & z = -240{,}000y_1 - 180{,}000y_2 - 110{,}000y_3 - My_{a1} - My_{a2} \\
\text{sujeto a} & y_1 + 1.5y_2 + y_3 - y_4 + y_{a1} = 76 \\
 & 2y_1 + y_2 - y_5 + y_{a2} = 57 \\
 & y_i \geq 0 \quad i = 1,5 \quad y_{a1}, y_{a2} \geq 0
\end{array}
$$

y_{a_1} , y_{a_2} son las variables artificiales que tienen costo M en la función objetivo. Analizando únicamente las restricciones se puede comprobar que si se fijan en cero y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 el sistema se resuelve para las artificiales, dando $y_{a_1} = 76$, $y_{a_2} = 57$ que ya es una solución básica factible. Sin embargo, el sistema no está en forma canónica, ya que si lo estuviera, no aparecerían y_{a_1}, y_{a_2} en la función objetivo, de manera que antes de proceder a la solución se debe conseguir la forma canónica. Esto se puede hacer en una tabla simplex y por medio de operaciones elementales entre renglones.

Ejemplo

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_{a1}	y_{a2}
	0	240,000	180,000	110,000	0	0	M	M
y_{a1}	76	1	1.5	1	-1	0	1	0
y_{a2}	57	2	1	0	0	-1	0	1

Para facilitar la operación el primer renglón de la tabla se dividirá entre mil durante los cálculos.

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_{a1}	y_{a2}
	-133M	240-3M	180-2.5M	110-M	M	M	0	0
y_{a1}	76	1	1.5	1	-1	0	1	0
y_{a2}	57	$\boxed{2}$	1	0	0	-1	0	1

Sobre esta tabla se puede aplicar el método Simplex.

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_{a1}	y_{a2}
	-47.5M -6840	0	60-M	110-M	M	-0.5M	0	-120+ +1.5M
y_{a1}	47.5	0	$\boxed{1}$	1	-1	0.5	1	-0.5
y_{a2}	28.5	1	0.5	0	0	-0.5	0	0.5

Cuando una variable artificial sale de la base, se le puede eliminar de la tabla.

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_{a1}
	-9,690	0	0	50	60	90	M-60
y_2	47.5	0	1	1	-1	0.5	1
y_1	4.75	1	0	-0.5	0.5	-0.75	0.5

Todos los elementos del primer renglón son positivos, de manera que la solución es óptima.

$Z^* = -9{,}690{,}000 \qquad y_1^* = 4.75 \; ; \quad y_2^* = 47.5 \; ; \quad y_3^* = 0$

$y_4^* = 0 \quad ; \quad y_5^* = 0$

En resumen, el método consiste en:

Síntesis secuencial del método de la gran M

1. Aumentar variables de holgura a todas las restricciones del tipo menor o igual (≤).

2. Restar una variable de holgura a todas las restricciones del tipo mayor o igual (≥).

3. Añadir una variable artificial a cada restricción del tipo mayor o igual ($\geq$) y una a cada restricción de igualdad (=).

4. Las variables artificiales si aparecen en la función objetivo. El coeficiente en esta función, para cada una de ellas, es de - M. Esta M es un número muy grande comparado con los que aparecen en el problema. No requiere de representación explícita por lo cual se usa la M.

5. Con el problema en esta nueva forma, se vacía la información en una tabla simplex.

6. Por medio de operaciones elementales con los renglones de la tabla, se convierten en cero los elementos de las variables artificiales en el renglón evaluador.

7. Se aplica el algoritmo del método simplex, manejando a la M como a una variable algebraica, hasta llegar a la condición óptima.

Alternativas para la solución.

1. Si se eliminaran de la base todas las variables artificiales el problema tiene solución factible.

2. Si no se pudieron eliminar, el problema no tiene solución factible.

3. Si alguna variable artificial queda básica pero con valor igual a cero esto indica que la restricción en la que fue añadida es redundante.

METODO DE LAS DOS FASES. Este método es similar al anterior, sólo que la M se considera tan grande que es prácticamente infinita. El método tiene dos objetivos:

Método de las dos Fases

1. El objetivo de la fase 1, es minimizar la suma de las variables artificiales o equivalentemente maximizar la resta. Ya que la M es infinita, el mínimo tiene que ser cuando las variables artificiales valgan cero. Una vez conseguido este objetivo se pasa a la fase 2.

Fase 1

2. El objetivo de la fase 2, es maximizar la función objetivo del problema original.

Fase 2

Al añadir variables artificiales, el problema anterior quedaría como:

Modelo matemático

$$
\begin{array}{lll}
\text{Fase I Minimizar} & z' = & + y_{a1} + y_{a2} \\
\text{Fase II —Maximizar} & z = & -240{,}000y_1 - 180{,}000y_2 - 110{,}000y_3 \\
\text{sujeto a} & & y_1 + 1.5y_2 + y_3 - y_4 + y_{a1} = 76 \\
 & & 2y_1 + y_2 - y_5 + y_{a2} = 57
\end{array}
$$

o bien

$$
\begin{array}{lll}
\text{Fase I —Maximizar} & z' = & - y_{a1} - y_{a1} \\
\text{Fase II —Maximizar} & z = & -240{,}000y_1 - 180{,}000y_2 - 110{,}000y_3 \\
\text{sujeto a} & & y_1 + 1.5y_2 + y_3 + y_4 + y_{a1} = 76 \\
 & & 2y_1 + y_2 - y_5 + y_{a2} = 57
\end{array}
$$

De nuevo, al añadir un objetivo para las variables artificiales, se pierde la forma canónica, la cual se debe recuperar.

Ejemplo método de las dos fases

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_{a1}	y_{a2}
Fase I	0	0	0	0	0	0	1	1
Fase II	0	240	180	110	0	0	0	0
y_{a1}	76	1	1.5	1	-1	0	1	0
y_{a2}	57	2	1	0	0	-1	0	1

Mientras existan variables artificiales, el objetivo de la fase I es el que se utiliza para decidir qué variable debe entrar a la base.

		$y_1 \downarrow$	y_2	y_3	y_4	y_5	y_{a1}	y_{a2}
Fase I	-133	-3	-2.5	-1	1	1	0	0
Fase II	0	240	180	110	0	0	0	0
y_{a1}	76	1	1.5	1	-1	0	1	0
$\leftarrow y_{a2}$	57	$\boxed{2}$	1	0	0	-1	0	1

Tableau correspondiente a la forma canónica. Sobre él se aplica el algoritmo Simplex.

		y_1	$y_2 \downarrow$	y_3	y_4	y_5	y_{a1}	y_{a2}
Fase I	-47.5	0	-1	-1	1	-0.5	0	1.5
Fase II	-6,840	0	60	110	0	120	0	-120
$\leftarrow y_{a1}$	47.5	0	$\boxed{1}$	1	-1	0.5	1	-0.5
y_1	28.5	1	0.5	0	0	-0.5	0	0.5

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_{a1}	y_{a2}
Fase I	0	0	0	0	0	0	1	1
Fase II	-9,690	0	0	50	60	90	-60	-60
y_2	47.5	0	1	1	-1	0.5	1	-0.5
y_1	4.75	1	0	-0.5	0.5	-0.75	-0.5	0.75

Aquí ya se consiguió el objetivo de la fase I, las variables artificiales valen cero, se pasa a la fase II.

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	-9,690	0	0	50	60	90
y_2	47.5	0	1	1	-1	0.5
y_1	4.75	1	0	-0.5	0.5	-0.75

Como todos los coeficientes de la función objetivo son positivos ya se consiguió el objetivo de la fase II. La solución es óptima.

El método de las fases se puede resumir como sigue:

Síntesis secuencial del Método de las dos Fases

1. Las variables artificiales requieren de un objetivo que es minimizar la suma de las variables artificiales (maximizar el negativo de su suma). No aparecen en la función objetivo original.

2. Este problema con dos objetivos se vacía en una tabla simplex, la cual contendrá dos renglones evaluadores.

3. Se hacen cero los coeficientes de las variables artificiales en la función objetivo de la fase I, por medio de operaciones elementales con los renglones.

4. Se aplica el algoritmo simplex. Cuando el objetivo de la fase 1 sea cero, se puede eliminar su correspondiente renglón evaluador.

5. Con la tabla simplex remanente se continúa aplicando el método simplex hasta llegar al óptimo.

La siguiente tabla resume el manejo de las desigualdades y de las variables artificiales en los dos métodos:

Manejo de desigualdades y variables artificiales

a. Método de la gran M.

Tipo de Restricción	Variable de Holgura	Variable Artificial	Coeficiente en Z
$\leq$	$+ X_h$		0
$\geq$	$- X_h$	$+ X_a$	- M
=		$+ X_a$	- M

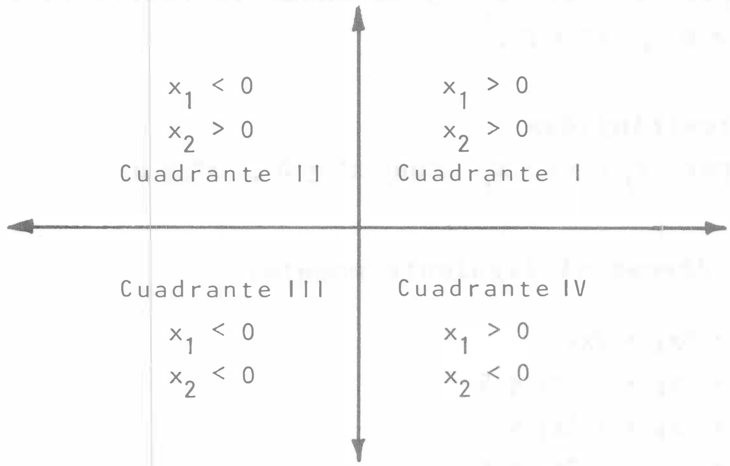
b. Método de las dos fases.

Tipo de Restricción	Variable de Holgura	Variable Artificial	Coeficiente en Z en Fase I	Coeficiente en Z en Fase II
$\leq$	$+ X_h$		0	0
$\geq$	$- X_h$	$+ X_a$	- 1	0
=		$+ X_a$	- 1	0

El método simplex estudiado hasta ahora, incluyendo el de la gran M y el de las dos fases, requiere que las variables involucradas en el modelo de programación lineal sean positivas. Sin embargo, es posible manejar variables negativas y variables no restringidas en signo, de la siguiente manera:

Variables negativas no restringidas en signo

En el método gráfico, si el problema es de dos variables, simplemente se considera todo el plano cartesiano con la siguiente división:



a. Cuadrantes I y IV si $x_1 \geq 0$ y x_2 es no restringida.
b. Cuadrantes I y II si x_1 es no restrigida y $x_2 \geq 0$.
c. Cuadrante II únicamente, si $x_2 \geq 0$ y x_1 es negativa.
d. Cuadrante IV únicamente, si $x_1 \geq 0$ y x_2 es negativa.
e. Cuadrante III únicamente, si x_1 y x_2 son negativas.
f. Todo el plano cartesiano en caso de que x_1 y x_2 sean no restringidas.

En el caso de 3 variables, ya no es práctico graficar problemas con variables negativas o no restringidas, es preferible usar el método analítico.

En el método analítico, se efectúan las siguientes transformaciones:

a. Variables negativas $x_j \leq 0$
   se sustituye por $x_j = x'_j - x''_j$ y se añade la restricción
   $x''_j \geq x'_j$, $x''_j > 0$, $x''_j > 0$.

b. Variables no restringidas
   se sustituye por $x_j = x'_j - x''_j$ con $x' \geq 0$, $x'' \geq 0$.

Por ejemplo considérese el siguiente modelo:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\
\text{sujeto a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\
 & 2x_1 + x_2 + 1.5x_3 \leq 7 \\
 & x_1 + 2x_3 \leq 8 \\
 & \\
 & x_1 \geq 0;\ x_2 \leq 0;\ x_3 \text{ no restringido}
\end{array}
$$

se puede transformar en uno con variables estrictamente positivas de la siguiente forma, x_2 se sustituye por $x_2 = x'_2 - x''_2$ y se añade la restricción de que $x''_2 \geq x'_2$ que es equivalente a $x''_2 - x'_2 \geq 0$, con x'_2 , $x''_2 \geq 0$, x_3 se sustituye por $x_3 = x'_3 - x''_3$ con x'_3 , $x''_3 \geq 0$ quedando el modelo como:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & z = 3x_1 + 5(x'_2 - x''_2) + 2(x'_3 - x''_3) \\
\text{sujeto a} & x_1 + (x'_2 - x''_2) + (x'_3 - x''_3) \leq 5 \\
 & 2x_1 + (x'_2 - x''_2) + 1.5(x'_3 - x''_3) \leq 7 \\
 & x_1 + 2(x'_3 - x''_3) \leq 8 \\
 & - x'_2 + x''_2 \geq 0 \\
 & \\
 & x_1 , x'_2 , x''_2 , x'_3 , x''_3 \geq 0
\end{array}
$$

el cual ya se puede resolver utilizando el método simplex analítico. Con la solución, se obtienen los valores de las variables originales.

III.3. Dualidad

Considérense los dos modelos con los que se han mostrado los métodos simplex, de la gran M y de las dos fases, y su solución óptima.

Modelo I:

Maximizar $z = 76x_1 + 57x_2$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 240{,}000$$
$$1.5x_1 + x_2 \leq 180{,}000$$
$$x_1 \leq 110{,}000$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

su solución óptima

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	9,690,000	0	0	4.75	47.5	0
x_5	50,000	0	0	0.5	-1	1
x_2	90,000	0	1	0.75	-0.5	0
x_1	60,000	1	0	-0.5	1	0

$\boxed{z^* = 9{,}690.000 \;;\; x_1^* = 60{,}000 \;;\; x_2^* = 90{,}000}$; $x_3^* = 0$

$x_4^* = 0$; $x_5^* = 50{,}000$

Modelo II:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Minimizar} & z = 240{,}000y_1 + 180{,}000y_2 + 110{,}000y_3 & & \\ \text{sujeto a} & y_1 + 1.5y_2 + y_3 & \geq & 76 \\ & 2y_1 + y_2 & \geq & 57 \\ & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

su solución óptima

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	-9,690,000	0	0	50,000	60,000	90,000
y_2	47.5	0	1	1	-1	0.5
y_1	4.75	1	0	-0.5	0.5	-0.75

$$\boxed{z^* = 9{,}690{,}000 \ ; \quad y_1^* = 4.75 \ ; \quad y_2^* = 47.5 \ ; \quad y_3^* = 0}$$

$$y_4^* = 0 \quad ; \quad y_5^* = 0$$

Comparándolos se pueden obtener las siguientes conclusiones:

1. Los dos modelos tienen el mismo valor de la función objetivo en la solución óptima.

2. Los coeficientes de la función objetivo en el modelo I, son los elementos del lado derecho en las restricciones del modelo II.

3. Los elementos del lado derecho en las restricciones del modelo I, son los coeficientes de la función objetivo en el modelo II.

4. Si los coeficientes de las restricciones de la forma estándar del modelo I, se expresan en forma de matriz, ésta sería:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si los coeficientes de las restricciones de la forma estándar del modelo II, se expresan en forma de matriz, ésta sería:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

se observa que la matriz B es la transpuesta de la matriz A.

5. La función objetivo en el modelo I es de maximizar. En el modelo II es de minimizar.

6. En la forma original, sin las variables de holgura, las restricciones del modelo I son del tipo menor o igual que. En el modelo II son del tipo mayor o igual que.

7. Los valores que aparecen en el renglón evaluador del Tableau óptimo del Modelo I son los de las variables del modelo II. Los valores que aparecen en el renglón evaluador del Tableau óptimo del modelo II son los de las variables del modelo I.

Estas relaciones entre los dos modelos no son casuales. En realidad se trata de dos caras del mismo problema y cuando se resuelve uno de ellos, simultáneamente y en forma implícita, se resuelve el otro:

Al modelo:

Dual

$$\begin{array}{llrcl} \text{Maximizar} & z = & 76x_1 + 57x_2 & & \\ \text{sujeto a} & & x_1 + 2x_2 & \leq & 240{,}000 \\ & & 1.5x_1 + x_2 & \leq & 180{,}000 \\ & & x_1 & \leq & 110{,}000 \\ & & x_1\ ,\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

se le llama *MODELO PRIMAL*

Al modelo:

$$\begin{array}{llrcl} \text{Minimizar} & z = & 240{,}000y_1 + 180{,}000y_2 + 110{,}000y_3 & & \\ \text{sujeto a} & & y_1 + 1.5y_2 + y_3 & \geq & 76 \\ & & 2y_1 + y_2 & \geq & 57 \\ & & y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

se le llama *MODELO DUAL*

En general cualquier problema de programación lineal se puede representar en la siguiente forma matricial:

Representación matricial del modelo Primal

a. Maximizar $z = \bar{c}\ \bar{x}$

sujeto a $A\ \bar{x} \leq \bar{b}$

$\bar{x} \geq \bar{0}$

Asociado a este problema existe uno con la siguiente forma:

Representación matricial del modelo Dual

b. Minimizar $z = \bar{b}^{-T}\ \bar{y}$

sujeto a $A\ \bar{y}^{-T} > \bar{c}^{-T}$

$\bar{y} \geq \bar{0}$

y tienen las siguientes características:

Características de los problemas primal y dual

Si uno de los problemas tiene solución óptima finita, también la tiene el otro, y los valores óptimos de la función objetivo son iguales.

Si uno de los problemas tiene solución no acotada, entonces el otro no tiene solución factible.

El problema a. se llama primal y el problema b. se llama dual.

La reglas a seguir para pasar cualquier problema de programación lineal a su forma dual son:

Con respecto al problema original:

1. La función objetivo del problema debe expresar como maximizar.

2. Todas las restricciones del problema deben ser del tipo menor o igual ($\leq$) sin importar el signo del elemento del lado derecho.

3. Todas las variables deben ser positivas.

La transformación es como sigue:

Reglas para obtener el dual

4. Los elementos del lado derecho de las restricciones pasan a ser los coeficientes de la función objetivo del dual que es una minimización.

5. Los coeficientes de la función objetivo pasan a ser los elementos de lado derecho de las restricciones del dual.

6. La matriz de coeficientes de las restricciones en el primal se debe transponer en el dual.

7. Las desigualdades del dual son todas del tipo mayor o igual ($\geq$).

8. Todas las variables duales son positivas.

Por ejemplo: obtener el dual del siguiente modelo: (Modelo V)

$$
\begin{array}{llrrrl}
\text{Minimizar} & z = & 3x_1 + & 5x_2 + & 2x_3 & \\
\text{sujeto a} & & x_1 + & x_2 + & x_3 & \leq 5 \\
& & 2x_1 + & x_2 + & 1.5x_3 & = 7 \\
& & x_1 + & + & 2x_3 & \geq 8 \\
& & \multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0; \quad x_2 \leq 0 \ ; \ x_3 \ \text{no restringida}}
\end{array}
$$

Debe expresarse primero como:

1. $-$Maximizar $z = -3x_1 - 5x_2 - 2x_3$ (la función objetivo se expresa como maximizar).

2. Sujeto a

$$
\begin{array}{rrrl}
x_1 + & x_2 + & x_3 & \leq 5 \\
2x_1 + & x_2 + & 1.5x_3 & \leq 7 \\
-2x_1 - & x_2 - & 1.5x_3 & \leq -7 \\
-x_1 & - & 2x_3 & \leq -8
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = \overline{1,3}$$

Las restricciones son todas del tipo menor o igual que ($\leq$)

3. Para transformar las variables en positivas se utilizan las transformaciones ya estudiadas anteriormente y el modelo queda:

Modelo VI

— Maximizar $z = -3x_1 - 5(x_2' - x_2'') - 2(x_3' - x_3'')$

sujeto a:

$$
\begin{aligned}
x_1 + (x_2' - x_2'') + (x_3' - x_3'') &\leq 5 \\
2x_1 + (x_2' - x_2'') + 1.5(x_3' - x_3'') &\leq 7 \\
-2x_1 - (x_2' - x_2'') - 1.5(x_3' - x_3'') &\leq -7 \\
-x_1 - 2(x_3' - x_3'') &\leq -8 \\
(x_2' - x_2'') &\leq 0 \\
x_1, x_2', x_2'', x_3', x_3'' &\geq 0
\end{aligned}
$$

El modelo dual es entonces aplicando los pasos 4, 5 y 6 (Modelo VII)

— Minimizar $z = 5y_1 + 7y_2 - 7y_3 - 8y_4$

sujeto a:

$$
\begin{aligned}
y_1 + 2y_2 - 2y_3 - y_4 &\geq -3 \\
y_1 + y_2 - y_3 + y_5 &\geq -5 \\
-y_1 - y_2 + y_3 - y_5 &\geq 5 \\
y_1 + 1.5y_2 - 1.5y_3 - 2y_4 &\geq -2 \\
-y_1 - 1.5y_2 + 1.5y_3 + 2y_4 &\geq 2 \\
y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

A este modelo se le pueden hacer algunas simplificaciones. Primero la diferencia entre las variables y_2, y_3 aparece en todas las restricciones y en la función objetivo, de manera que se puede sustituir por una sola variable $y_2' = y_2 - y_3$ que sería no restringida. Las restricciones segunda y tercera se pueden sustituir por una igualdad lo mismo que la cuarta y quinta, quedando el modelo como: (Modelo VIII)

Minimizar $z = 5y_1 + 7y_2' - 8y_4$

sujeto a:

$$
\begin{aligned}
y_1 + 2y_2' - y_4 &\geq -3 \\
-y_1 - y_2' - y_5 &= 5 \\
-y_1 - 1.5y_2' + 2y_4 &= 4
\end{aligned}
$$

$y_1, y_4, y_5 \geq 0 \qquad y_2'$ no restringida.

Comparando el modelo I con el modelo II; el V con el VIII y el VI con el VII se puede concluir que:

a. El modelo dual tiene tantas variables como restricciones tiene el primal.

b. El modelo dual tiene tantas restricciones como variables el primal.

De manera que existe la siguiente relación.

Variables primales $\longleftrightarrow$ Restricciones del dual

Variables duales $\longleftrightarrow$ Restricciones del primal

Relaciones primal-dual

Si las restricciones en cualquiera de los modelos, primal o dual, son desigualdades, se les debe de agregar variables de holgura; una por cada restricción, de manera que la relación se puede establecer como:

Variables primales $\longleftrightarrow$ Variables de holgura del dual

Variables duales $\longleftrightarrow$ Variables de holgura del primal

Por ejemplo, en los modelos I y II, las variables primales son x_1 y x_2 las variables de holgura del dual son, y_4 y y_5 Analizando, se puede ver que todos los coeficientes de x_1, dan origen a la primera restricción dual, en la cual se agrega y_4, la relación debe ser entre x_1 y y_4. Los coeficientes de x_2, dan origen a la segunda restricción dual, luego la relación debe ser entre x_2 y y_5. Las variables duales son y_1, y_2 y y_3 que están relacionadas con las variables de holgura primales x_3, x_4 y x_5 respectivamente. Resumiendo la relación es:

$$x_1 \longleftrightarrow y_4$$
$$x_2 \longleftrightarrow y_5$$
$$x_3 \longleftrightarrow y_1$$
$$x_4 \longleftrightarrow y_2$$
$$x_5 \longleftrightarrow y_3$$

Teorema de la holgura complementaria

La forma de encontrar el valor del problema dual, dada la solución óptima del primal, es a través del teorema de la holgura complementaria que dice:

Para una restricción primal y su correspondiente variable dual, los siguientes postulados concernientes a la solución óptima deben ser ciertos:

1. Si la restricción no se satisface totalmente (su correspondiente variable de holgura es mayor que cero), entonces la correspondiente variable dual es cero.

2. Si la variable dual es positiva, entonces la correspondiente restricción primal se satisface completamente.

En otras palabras, si la variable primal vale cero, la dual correspondiente tiene valor. Si la variable primal tiene valor positivo, la dual correspondiente vale cero. Los valores de las variables duales se encuentran en el renglón evaluador del tableau simplex óptimo, debajo de su variable primal asociada.

En el ejemplo se tiene que $x_1 = 60{,}000$, luego $y_4 = 0$; $x_2 = 90{,}000$ luego $y_5 = 0$, y $x_5 = 50{,}000$ luego $y_3 = 0$. Como x_3 y x_4 son cero, y_1 y y_2 tienen valor que se encuentra en el renglón superior de la tabla óptima del primal o sea $y_1 = 4.75$ que es el valor debajo de x_3 (con la cual está asociada) y $y_2 = 47.5$ que es el valor debajo de x_4 (con la cual está asociada).

Interpretación económica del dual

Por último, sólo resta darle un significado al modelo dual. Si el problema primal es uno de planeación, por ejemplo, planeación de la producción, planeación de cultivo, planeación de inventarios, en los cuales se desea maximizar un objetivo, sujeto a las limitaciones de los recursos, entonces el modelo dual es un problema de asignar precios a estos recursos, y da como resultado, el precio que debe tener el recurso para que la persona que está enfrentada con el problema sea indiferente a vender el recurso o utilizarlo para producir, sembrar, mantener inventario, etcétera. De manera que el dual es un problema de tipo económico que tiene gran importancia.

Otra interpretación a los resultados del modelo dual es que indican las cantidades en que disminuiría el valor óptimo de la función objetivo si faltara una unidad del recurso, o bien la cantidad en la que aumenta este valor, si se dispone de una unidad adicional del recurso.

Por ejemplo, en el problema de "Productos para Pollos,S.A." sus variables duales se pueden interpretar como:

a. Si la harina de pescado se pudiera vender en el mercado a \$ 4.75/Kg., y el nutriente a \$ 47.5/Kg, el fabricante sería indiferente entre vender y producir, ya que obtendría el mismo beneficio en uno y otro caso.

b. Si por algún motivo pierde harina de pescado o nutriente, por cada Kg. perdido, el beneficio de

$ 9,690,000 disminuiría en $ 4.75 y $ 47.5 respectivamente.

c. Si por algun motivo se puede disponer de más harina de pescado o nutriente, por cada Kg. en exceso el beneficio de $ 9,690,000 aumentaría en $ 4.75 y $ 47.5 respectivamente.

Es interesante observar que la capacidad de empaque tiene precio cero; esto se debe a que un recurso que sobra (50,000 unidades de capacidad de empaque) no influye económicamente en el problema. Sólo tienen precio aquellos recursos que se utilizan en su totalidad.

III.4. Implementación en Computadora

Programas de computadora con el método Simplex

Existen en las principales computadoras, paquetes que resuelven los problemas de programación lineal aplicando el método simplex, y otro similar a éste. Requieren únicamente que el problema se plantee en forma estándar y que se alimente como información los parámetros del modelo. Paquetes de este tipo son el TEMPO, disponible en máquinas BURROUGHS y el MPSX, similar al TEMPO para máquinas IBM.

Para implementar el método simplex en cualquier máquina (grande o pequeña) se presenta la siguiente bibliografía, que trae el algoritmo simplex codificado en los lenguajes BASIC Y FORTRAN

BASIC: "Aplicaciones de la Computación a la Ingeniería"
Murray Lasso, Chicuriel Uziel-Ed. LIMUSA 1975
Capítulo 7: Programación lineal por computadoras y su aplicación a la Ingeniería Industrial
pág. 147 a 163.

FORTRAN: "Optimization Technique with FORTRAN"
J. Kuester y J. Hize - Ed. McGraw-Hill
Capítulo 2: Linear Programming
pág. 9 a 91.

CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I. Resuelva los siguientes problemas por el método gráfico.

1. Un fabricante de chamarras de piel, se enfrenta a un problema para maximizar sus ganancias. El sabe que para conseguirlo debe fabricar cierto número de chamarras con forro y otra cantidad de éstas sin forro, su ganancia por las primeras es de $ 1,200.00 y por las segundas de $ 800.00, además sabe que hacer el forro duplica el tiempo para hacer una chamarra, el cual es de una hora.

   Su taller tiene disponibles 15 horas al día para producción, pero su proveedor sólo puede entregarle piel para 9 chamarras, y requieren la misma cantidad de piel cualquiera de los dos tipos.

   Recurriendo a la Cámara de Industria y Comercio, se enteró que existe una demanda diaria máxima de 6 chamarras con forro y 13 sin éste. Ahora el fabricante no sabe qué hacer con estos datos, y ha decidido consultar con un experto. ¿Cómo hará el experto para aprovechar esta información y resolver su problema?.

2. Un accionista de una Compañia fabricante de radios escuchó en una comida, una información veraz de la importancia que tendrá la radiodifusión en los próximos años, por lo cual ha pedido a sus expertos que investiguen la forma de maximizar las utilidades de la empresa, debidas a la venta de radios AM y AM-FM.

   Los expertos han consultado con sus proveedores y estos informan que pueden proporcionar 70 partes para radios AM-FM y 80 partes para radios AM semanalmente. Por condiciones de la empresa y los trabajadores, los expertos saben que se cuenta semanalmente con 300 horas/hombre para la producción de piezas, 175 horas/hombre para ensamble y 60 horas/hombre para inspección, el departamento de ingeniería de métodos les ha proporcionado la siguiente tabla respecto a lo que cada aparato requiere de cada concepto.

Aparato	Horas/hombre Producción	Horas/hombre Ensable	Horas/hombre Inspección
AM	2	1	3/4
AM-FM	3	2	1/2

   El departamento de finanzas informa que la utilidad neta por radio AM es de $ 900.00 y de $ 1,500.00 por radio AM-FM.

   ¿Cuántos aparatos de radio se deben producir?

3. La división de modulares Panasonic, S.A., desea maximizar sus utilidades por la venta de modulares con ecualizador integrado y sin ecualizador.

   El modular con ecualizador integrado obtendrá una ganancia de 3 unidades, mientras que una encuesta realizada con anterioridad demostró a la división que dejaría de ganar 2 unidades por la venta de un modular sin ecualizador.

   De acuerdo a la encuesta realizada y a las técnicas de la división en cuanto a producción y ensamble se tienen disponibles:

   Un máximo de una unidad de tiempo para producción de partes y no menos de cuatro unidades de tiempo para el ensamble. En ambos casos los modulares requieren una unidad de tiempo para producción de partes y dos unidades de tiempo para ensamble.

4. Un taller mecánico automotriz desea anunciarse por radio y/o televisión. Tiene disponible para esto \$ 62,500.00. Cada 10 segundos de un comercial por radio, cuestan \$ 2,500.00 y cada 10 segundos de un comercial por televisión, cuestan \$ 5,000.00.

Cada 10 segundos en radio alcanzan una audiencia de 12,000 personas y cada 10 segundos en televisión, llegan a 20,000 personas. El taller requiere maximizar la audiencia total pero está interesado también en atraer a dos grupos específicos: mujeres entre 21 y 35 años y hombres de más de 40. Quiere que su audiencia incluya cuando menos 10,000 mujeres en este grupo y 8,000 hombres. Los medios de difusión le proporcionaron los siguientes datos respecto a la audiencia que se consigue por cada 10 segundos de comercial.

Audiencia por 10 segundos de comercial		
	Mujeres (21-35)	Hombres (40)
Radio	2,000	1,500
T.V.	4,000	5,000

¿Cómo debe asignar el taller su presupuesto de publicidad?

II. Resuelva los siguientes modelos por el método gráfico

1. Maximizar $z = 21x_a + 15x_b$

sujeto a:
$$\begin{aligned} x_a + x_b &\le 10{,}000{,}000 \\ x_a &\le 6{,}000{,}000 \\ x_b &\le 8{,}000{,}000 \\ x_a,\ x_b &\ge 0 \end{aligned}$$

2. Maximizar $z = x_1 + 4x_2$

sujeto a:
$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 &\ge 0 \\ x_1 &\le 4 \\ x_2 &\le 3 \\ -3x_1 + x_2 &\le 0 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

3. Maximizar $z = 2x_1 + 4x_2$

sujeto a:
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 2x_1 - x_2 &\le 4 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

4. Maximizar $z = x_1 + x_2$

sujeto a:
$$\begin{aligned} x_1 \quad x_2 &\le 1 \\ -x_1 \quad x_2 &\le 1 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

5. Dé solución al siguiente modelo utilizando:
   a. El método de la gran M
   b. El método de las dos fases

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & z = 10y_1 + 16y_2 + 12y_3 \\
\text{sujeto a:} & -2y_1 + 4y_2 \quad 12y_3 \geq 8 \\
 & 2y_1 + 3y_2 - 4y_3 \geq 1 \\
 & y_1 , y_2 , y_3 \geq 0
\end{array}
$$

6. Resuelva el siguiente modelo utilizando:
   a. El método de la gran M
   b. El método de las dos fases

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & z = 180y_1 + 30y_2 + 60y_3 \\
\text{sujeto a:} & 6y_1 + 2y_2 + y_3 > 8 \\
 & y_1 - y_2 + y_3 \geq -2 \\
 & y_1 + y_2 - y_3 \geq 4 \\
 & y_1 , y_2 , y_3 \geq 0
\end{array}
$$

7. Resuelva el siguiente modelo utilizando el método de las dos fases:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & z = 8y_1 + 4y_2 \\
\text{sujeto a:} & y_1 + 2y_2 \geq 2 \\
 & 2y_1 - y_2 \geq 4 \\
 & y_1 , y_2 \geq 0
\end{array}
$$

8. Obtenga el modelo dual del siguiente modelo primal:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & z = 500x_1 + 400x_2 \\
\text{sujeto a:} & 2.5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\
 & x_1 \leq 6 \\
 & x_2 \leq 8 \\
 & x_1 , x_2 \geq 0
\end{array}
$$

9. Obtenga el modelo dual del siguiente modelo primal:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & z = 20y_1 + 10y_2 \\
\text{sujeto a:} & 2y_1 + 3y_2 \leq 25 \\
 & y_1 + y_2 \geq 1 \\
 & y_1 - y_2 = 1 \\
 & y_1 , y_2 \geq 0
\end{array}
$$

10. Obtenga el modelo dual del siguiente modelo primal:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{sujeto a:} & 2x_1 + 3x_2 \leq 25 \\
 & x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & x_1 - 2x_2 = 1 \\
 & x_1 , x_2 \geq 0
\end{array}
$$

BIBLIOGRAFIA

1. MARIN PINILLOS, BENITO

Apuntes de Programación Lineal
Facultad de Ingeniería, UNAM,
México, 1982.

2. HILLIER Y LIEBERMAN

Introducción a la investigación de operaciones
Editorial McGraw-Hill, 1982.

3. BAZARAA Y JARVIS

Programación lineal y flujo de redes
Editorial Limusa-Wiley, 1981.

4. TAHA, H.

Investigación de operaciones, una introducción
Representaciones y Servicios de ingeniería, S.A.
Edición 1981.

5. DANNENBRING Y STARR

Managament Science, an Introduction
Editorial McGraw-Hill, U.S.A., 1981.

MODULO IV ALGORITMOS ESPECIALES

Objetivos específicos:

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Modelará un problema de transporte como uno de programación lineal.

2. Obtendrá el modelo dual asociado al modelo de programación lineal.

3. Aplicará el método de la esquina noroeste o el de Vogel para obtener una solución inicial.

4. Aplicará el algoritmo de transporte para obtener la solución óptima.

5. Resolverá el problema de degeneración que se puede presentar en el algoritmo de transporte.

CUADRO SINOPTICO

Problema de Transporte
- Oferta igual a la demanda
- Coeficientes unitarios en las restricciones
- Minimiza costos de transporte

Modelo de Transporte
- Programación Lineal
- Dual

Algoritmo de Transporte ⟹ Solución Inicial
- Vogel
- Esquina noroeste

⟹ Solución óptima

IV.1. El problema de transporte

Una de las principales áreas de aplicación de la programación lineal, son los problemas de distribución y transporte. Este tipo de problemas requiere que determinados productos (bienes) situados en puntos orígenes (o fuentes), se transladen físicamente a puntos de destino (o demanda), de manera que se satisfagan las demandas, sin exceder las capacidades de las fuentes y a costo mínimo. Típicamente, los orígenes representan fábricas donde se producen los bienes, y los destinos a los almacenes que distribuyen los bienes a los clientes.

El título de "El problema de transporte", es sólo un emblema representativo de los primeros problemas que le dieron origen. En la actualidad se ha usado esta técnica en problemas de planeación de la producción, programas de maquinado, análisis de localización, programación de mano de obra, etcétera.

Una aplicación de Programación lineal

El problema de transporte se puede ajustar a un modelo de programación lineal y resolverse por medio del método Simplex. Sin embargo, tiene una estructura tan especial que se han desarrollado métodos más eficientes que el Simplex Las características de su estructura son:

- Los coeficientes de las variables en las restricciones son siempre unos (1) ó ceros (0).
- Si la oferta es igual a la demanda (lo cual siempre se puede lograr añadiendo orígenes o destinos ficticios), una de las restricciones es redundante.
- La variable dual correspondiente a una restricción redundante se puede fijar arbitrariamente.

Estas características se muestran en el siguiente ejemplo y dan origen al método de transporte que es un método rápido y eficiente.

Ejemplo

Aplicación del Método de transporte

Ferrocarriles Nacionales de México tiene disponibles en Zacapú, Michoacán 11 vagones de carga y en Toluca, Edo. de México 13 vagones, requiere de 6 vagones en Monterrey, Nuevo León , 4 en Tehuantepec, Oaxaca, y 14 en Jalapa, Veracruz.

Los costos de transporte están basados en los distintos costos de procesos, tienen poca relación con las distancias y son los que se muestran en la siguiente tabla:

	(1) Monterrey	(2) Tehuantepec	(3) Jalapa	vagones disponibles
(1) Zacapú	$ 6,000.00	$ 4,000.00	$ 3,000.00	11
(2) Toluca	$ 2,000.00	$ 3,000.00	$ 5,000.00	13
vagones requeridos	6	4	14	

¿Cuál es la distribución a costo mínimo de los vagones?

La tabla contiene todos los parámetros que requiere el modelo y las variables se definen como:

x_{ij} = número de vagones de ferrocarril del origen i que se transportan al destino j.

$$i = 1,\ 2 \qquad j = 1,\ 2,\ 3$$

Las relaciones funcionales son:

La función objetivo que minimiza el costo de distribución de los vagones:

$$\text{Min. } z = 6000x_{11} + 4000x_{12} + 3000x_{13} + 2000x_{21} + 3000x_{22} + 5000x_{23}$$

que se puede expresar como una maximización aplicando las transformaciones que se tienen en el módulo II.

$$-\text{Max. } z = -6000x_{11} - 4000x_{12} - 3000x_{13} - 2000x_{21} - 3000x_{22} - 5000x_{23}$$

Las restricciones se pueden dividir en dos conjuntos que expresan lo siguiente:

Restricciones de un modelo

- No se puede exceder la oferta en los orígenes.
- Se debe satisfacer la demanda en cada uno de los destinos

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11 \\ \qquad\qquad\qquad + x_{21} + x_{22} + x_{23} = 13 \end{array}\right\} \text{Restricciones de oferta}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} \qquad\qquad + x_{21} = 6 \\ \quad x_{12} \qquad\qquad + x_{22} = 4 \\ \qquad x_{13} \qquad\qquad + x_{23} = 14 \end{array}\right\} \text{Restricciones de demanda}$$

donde $x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2$

$\qquad\qquad\qquad\quad j = 1, 3$

La primera restricción indica que el número de vagones de ferrocarril, que se envían a Monterrey, Tehuantepec y Jalapa, desde Zacapú no puede ser mayor que los 11 de que se disponen en este lugar. La última restricción indica que el número de vagones de ferrocarril que se envían a Jalapa desde Zacapú y Toluca, tiene que ser 14, la cantidad demanda en este lugar.

El modelo queda como sigue:

Modelo de Programación lineal

Min. $z = 6000x_{11} + 4000x_{12} + 3000x_{13} + 2000x_{21} + 3000x_{22} + 5000x_{23}$

sujeto a:

$$
\begin{array}{llllllll}
x_{11} + x_{12} + x_{13} & & & & & & = 11 \\
 & + x_{21} + x_{22} + x_{23} & & & & & = 13 \\
x_{11} & + x_{21} & & & & & = 6 \\
+ x_{12} & + x_{22} & & & & & = 4 \\
+ x_{13} & + x_{23} & & & & & = 14
\end{array}
$$

donde $x_{ij} \geq 0$ $\quad i = 1, 2$

$\quad j = 1, 2, 3$

El modelo dual del problema de transporte, tendrá dos conjuntos de variables:

- Uno asociado a las restricciones de oferta y que se designan como U_i .
- Otro asociado a las restricciones de demanda y que se designan como V_j .

El modelo dual queda así:

Modelo Dual

Maximizar: $z = 11U_1 + 13U_2 + 6V_1 + 4V_2 + 14V_3$

sujeto a:

$$
\begin{array}{l}
U_1 + V_1 \leq 6000 \\
U_1 + V_2 \leq 4000 \\
U_1 + V_3 \leq 3000 \\
U_2 + V_1 \leq 2000 \\
U_2 + V_2 \leq 3000 \\
U_2 + V_3 \leq 5000
\end{array}
$$

donde U_i , V_j no restringidas

$i = 1, 2$

$j = 1, 2, 3$

Cuando la oferta es igual a la demanda, una de las restricciones del modelo primal es redundante, es decir, se puede expresar como función de las demás. Esto significa que en el modelo dual a una de las variables se le puede asignar un valor arbitrario.

En el modelo primal de este ejemplo, si se suman las tres últimas restricciones de demanda y se le resta la primera restricción de oferta, se obtiene la segunda.

La estructura del problema y estas características permiten utilizar un algoritmo más eficiente que el algoritmo simplex, este es el de *TRANSPORTE* en el cual sólo se requiere como información, los valores del renglón evaluador, cuáles son las variables básicas y cuál es su valor. Esto se puede llevar en una tabla más compacta que tiene la siguiente forma:

Tabla de transporte

	Destino 1	Destino 2	Destino 3
Origen 1	6000	4000	3000
Origen 2	2000	3000	5000

Celdas, restricciones y variables básicas

Cada celda de la tabla, tiene la siguiente información: el costo de transportar una unidad del producto (cuadro pequeño), del origen i al destino j, y cuántas unidades se transportan de i a j. Si la celda es básica, este será un valor positivo, si es no básica no se pone ningún valor.

En todo problema de transporte debe haber tantas celdas con variables básicas como la suma de restricciones de origen y destino menos uno. En el ejemplo que tiene dos origenes y tres destinos, habrá $2 + 3 - 1 = 4$ celdas con variables básicas.

IV.2. Solución inicial

El algoritmo con el que se resuelve el problema de transporte requiere para su aplicación, de una *SOLUCION INICIAL BASICA FACTIBLE*, la cual se puede obtener por alguno de los métodos siguientes:

- Método de la esquina noroeste
- Método de Vogel.

IV.2.1. Método de la esquina noroeste

En este método los pasos a seguir son:

Método para obtener una solución inicial básica factible

1. Seleccionar la celda de la esquina noroeste (en un mapa o en un plano, el norte queda hacia arriba y el oeste queda a la izquierda, de manera que la esquina noroeste es la esquina situada arriba y a la izquierda de la tabla).

   Fijar el embarque en esa celda igual a lo que sea menor: lo disponible en el origen o lo que se requiere en el destino.

   Si es cero, designar a la celda como básica a nivel cero.

2. Disminuir la cantidad en la celda a la cantidad en el origen y en el destino correspondientes.

Eliminar el renglón o la columna que se haya convertido en cero.

Si hay empate, la solución es degenerada.

Eliminar un solo renglón o columna, pero no ambos.

3. Si se terminaron los orígenes y la demanda se hace alto, en caso contrario, se regresa al paso (1).

Siguiendo con el ejemplo, se tiene:

Ejemplo

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	
Origen 1	$\boxed{6000}$	$\boxed{4000}$	$\boxed{3000}$	11
Origen 2	$\boxed{2000}$	$\boxed{3000}$	$\boxed{5000}$	13
	6	4	14	

1. La celda en la esquina noroeste es la celda del origen 1, destino 1. El origen tiene disponibles 11 vagones y el destino requiere 6, lo menor es 6, luego en esta cantidad se fija el embarque, es decir, $x_{11} = 6$.

   Nota: en todas las demás tablas los costos están divididos entre mil.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	
Origen 1	6 $\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	5
Origen 2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	13
	0	4	14	

2. Al efectuar esta asignación, lo que se tiene en el origen 1 es ahora 11 - 6 = 5 vagones y en el destino 1 se requieren 6 - 6 = 0 vagones, por lo cual se elimina la columna 1.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	
Origen 1	6 [6]	[4]	[3]	5
Origen 2	[2]	[3]	[5]	13
	0	4	14	

3. Aún quedan dos orígenes y dos demandas, se debe continuar con el método. La esquina noroeste es ahora la del origen 1 y el destino 2. El origen dispone de cinco vagones, y el destino requiere cuatro. Se deben asignar 4, es decir $x_{14} = 4$. Actualizando los valores, en el origen 1, se dispondrán de 5 - 4 = 1 vagón y el destino requiere de 4 - 4 = 0 vagones, por lo cual se elimina la columna 2.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	
Origen 1	6 [6]	4 [4]	[3]	~~5~~ 1
Origen 2	[2]	[3]	[5]	13
	0	4 0	14	

Aún queda un destino y dos orígenes, se debe continuar con el método.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	
Origen 1	6 $\boxed{6}$	4 $\boxed{4}$	1 $\boxed{3}$	~~1~~ 0
Origen 2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	13
	0	0	~~14~~ 13	

Se asigna 1 a la celda noroeste, que es la del origen 1 y el destino 3, se actualizan los valores y se elimina el primer renglón.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	
Origen 1	6 $\boxed{6}$	4 $\boxed{4}$	1 $\boxed{3}$	0
Origen 2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	13
	0	0	13	

Queda una sola celda a la que se le asignan 13 unidades.

La solución inicial con este método es:

	Destino 1	Destino 2	Destino 3
Origen 1	6 $\boxed{6}$	4 $\boxed{4}$	1 $\boxed{3}$
Origen 2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	13 $\boxed{5}$

Las variables básicas son:

$$x_{11} = 6 \quad , \quad x_{12} = 4 \quad , \quad x_{13} = 1 \quad , \quad x_{23} = 13$$

Las variables no básicas son:

$$x_{21} = 0 \quad , \quad x_{22} = 0$$

La función objetivo vale:

$$z = (6 \times 6) + (4 \times 4) + (3 \times 1) + (5 \times 13)$$
$$= 120 \text{ mil pesos}$$

IV.2.2. Método de Vogel

Requiere de los siguientes pasos:

Procedimiento del Método de Vogel

1. Calcular para cada renglón y columna la diferencia entre el menor elemento de costo y el segundo costo menor, expresada en valor absoluto.

2. Escoger el renglón o columna con la máxima diferencia.

   - asignar lo más posible a la celda con menor costo en el renglón o columna (aún cero en el caso degenerado).
   - disminuir el origen y destino en la cantidad asignada.
   - eliminar el origen o destino que sea cero, pero no ambos.

3. Si sólo queda un renglón o una columna, hacer la

asignación remanente con un elemento básico en cada celda del renglón o columna respectivamente y parar, si no, ir al paso (1). Aplicando este método al ejemplo.

Aplicación del Método

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	
Origen 1	6	4	3	11
Origen 2	2	3	5	13
	6	4	14	

En el renglón del origen 1, el menor elemento de costo es 3, el segundo menor elemento es 4. La diferencia es 4 - 3 = 1 . En el renglón del origen 2, el menor costo es 2, el segundo menor es 3, la diferencia es 3 - 2 = 1. Para cada columna la diferencia es 6 - 2 = 4; 4 - 3 = 1; y 5 - 3 =2. Estas diferencias siempre dan como resultado un número positivo.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Diferencia
Origen 1	6	4	3	1
Origen 2	2	3	5	1
Diferencia	4	1	2	

La mayor diferencia corresponde a la columna del destino 1. En esta columna, la celda con el menor costo es la correspondiente al origen 2, destino 1. Se le puede asignar 6 ó 13, se deben asignar 6, si se asignan más, se violarían las restricciones de no negatividad de las variables.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	
Origen 1	[6]	[4]	[3]	11
Origen 2	6 [2]	[3]	[5]	~~13~~ 7
	~~6~~ 0	4	14	

Actualizando los valores, se observa que se debe eliminar la columna del destino 1.

Quedan dos renglones y dos columnas, se debe continuar el método.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Diferencia
Origen 1	[6]	[4]	[3]	1
Origen 2	6 [2]	[3]	[5]	2
Diferencia		1	2	

La mayor diferencia es 2 y se puede tomar en el renglón o en la columna. Se tomará en el renglón. El menor elemento de costo es 3 y hay posibilidad de asignar 4 ó 7 vagones. Se asignan 4 y se actualizan los valores.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	
Origen 1	[6]	[4]	[3]	11
Origen 2	6 [2]	4 [3]	[5]	~~7~~ 3
	0	~~4~~ 0	14	

Como queda una sola columna, se debe asignar un valor a todas las celdas que restan.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	
Origen 1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	11 $\boxed{3}$	11
Origen 2	6 $\boxed{2}$	4 $\boxed{3}$	3 $\boxed{5}$	~~3~~ 0
	0	0	~~14~~ 11	

La solución inicial con el método de Vogel es:

	Destino 1	Destino 2	Destino 3
Origen 1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	11 $\boxed{3}$
Origen 2	6 $\boxed{2}$	4 $\boxed{3}$	3 $\boxed{5}$

Las variables básicas son:

$$x_{13} = 11 , \quad x_{21} = 6 , \quad x_{22} = 4 , \quad x_{23} = 3$$

Las variables no básicas son:

$$x_{11} = 0 , \quad x_{12} = 0$$

La función objetivo vale:

$$z = (3 \times 11) + (2 \times 6) + (3 \times 4) + (5 \times 3)$$
$$= 72 \text{ mil pesos}$$

Se puede observar que cada método da solución inicial distinta, aunque puede ser igual.

Se recomienda utilizar el método Vogel, ya que da una solución inicial más cercana a la solución óptima.

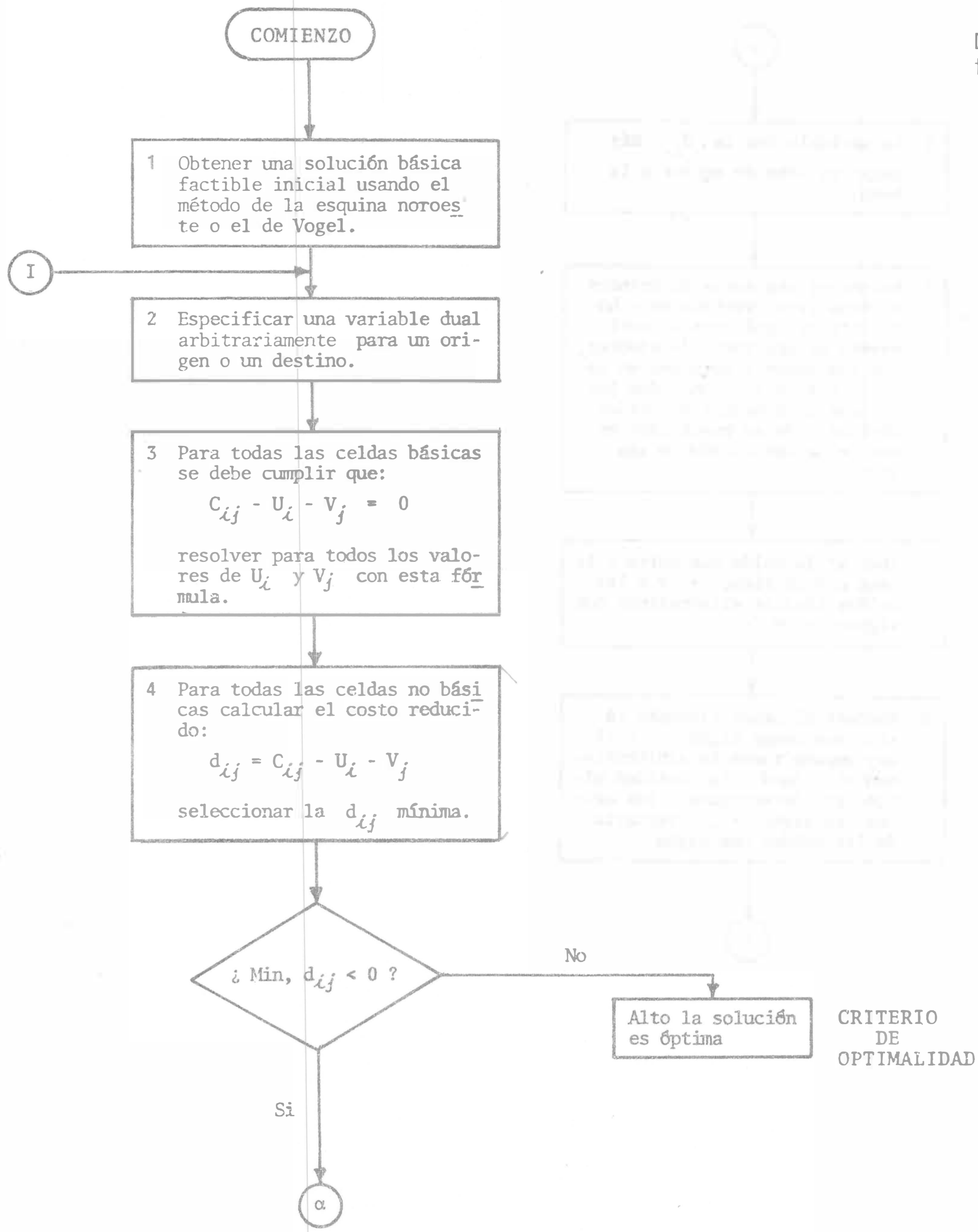
Problemas no balanceados

Siempre se requiere que la oferta sea igual a la demanda. Si la oferta es mayor que la demanda, se puede añadir un centro de demanda ficticio, que requiera lo necesario para conseguir la igualdad. Los costos de transportar a este centro ficticio son ceros. Si hay más demanda que oferta, se añade un centro de oferta ficticio, con costo de transporte igual a cero, que ofrezca lo necesario para igualar.

IV.3. Algoritmo de Transporte

Diagrama de flujo para resolver el modelo de transporte.

Diagrama de flujo



α

5 La variable con la d_{ij} más negativa debe de entrar a la base.

6 Encontrar una serie de brincos alternativos, verticales y horizontales, análogos al movimiento de una torre de ajedrez, que comiencen y terminen en la celda que entra, con todos los brincos intermedios en celdas básicas. No se puede caer en una celda básica más de una vez.

7 Indicar la celda que entra a la base con un signo + y a las celdas básicas alternativas con signos + y -

8 Escoger el menor elemento básico que tenga signo - (si hay empate romperlo arbitrariamente). Anadir la cantidad mínima así determinada a las celdas con signo + , y restarla de las celdas con signo - .

I

Se resolverá el ejemplo utilizando el algoritmo de transporte.

Aplicación del algoritmo

a. Se comenzará con la solución básica factible dada por el método de la esquina noroeste.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3
Origen 1	6 $\boxed{6}$	4 $\boxed{4}$	1 $\boxed{3}$
Origen 2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	13 $\boxed{5}$

Variables asociadas

Hay que recordar que existen variables duales U_i asociadas a cada origen y variables duales V_j asociadas a cada destino. Alguna de estas variables se puede fijar arbitrariamente. Por ejemplo $U_1 = 0$. Para las cuatro celdas básicas se debe cumplir que $C_{ij} - U_i - V_j = 0$. Así se calculan los demás valores de U_i y V_j

$C_{11} - U_1 - V_1 = 0$	$6 - 0 - V_1 = 0$	$V_1 = 6$
$C_{12} - U_1 - V_2 = 0$	$4 - 0 - V_2 = 0$	$V_2 = 4$
$C_{13} - U_1 - V_3 = 0$	$3 - 0 - V_3 = 0$	$V_3 = 3$
$C_{23} - U_2 - V_3 = 0$	$3 - U_2 - 3 = 0$	$U_2 = 0$

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	U_i
Origen 1	6 $\boxed{6}$	4 $\boxed{4}$	1 $\boxed{3}$	0
Origen 2	0 $\boxed{2}$	$\boxed{3}$	13 $\boxed{5}$	2
V_j	6	4	3	

Para las dos celdas no básicas, hay que calcular:

$$d_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

$$d_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 2 - 2 - 6 = -6$$

$$d_{22} = C_{22} - U_2 - V_2 = 3 - 2 - 4 = -4$$

El valor mínimo corresponde a la $d_{21} = -6$. Esto significa que la celda del origen dos y el destino uno, debe convertirse en básica. Para encontrar qué celda (variable) debe salir de la base, se realizan los movimientos indicados en el sexto bloque del Algoritmo de Transporte. Se comienza en la celda que entra a la base colocando un signo (+).

Celda básica

	Destino 1	Destino 2	Destino 3
Origen 1	6 $\boxed{6}$	4 $\boxed{4}$	1 $\boxed{3}$
Origen 2	(+) $\boxed{2}$	$\boxed{3}$	13 $\boxed{5}$

Se brinca a una celda básica, el brinco puede ser vertical u horizontal. Se hará horizontal en este ejemplo.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3
Origen 1	6 $\boxed{6}$	4 $\boxed{4}$	1 $\boxed{3}$
Origen 2	(+) $\boxed{2}$	$\boxed{3}$	13 $\boxed{5}$

Como este brinco fue horizontal, el siguiente tiene que ser vertical, esto es, que deben ser alternativos.

	Destino 1		Destino 2		Destino 3	
Origen 1	6	6	4	4	1	3
Origen 2	(+)	2		3	13	5

Después de este brinco vertical se debe efectuar uno horizontal.

	Destino 1		Destino 2		Destino 3	
Origen 1	6	6	4	4	1	3
Origen 2	(+)	2		3	13	5

Por último, se efectúa un brinco vertical que lleva nuevamente a la celda inicial.

	Destino 1		Destino 2		Destino 3	
Origen 1	6	6	4	4	1	3
Origen 2	(+)	2		3	13	5

En cada una de las celdas básicas a donde se llega en cada brinco se le asigna un (+) o un (-) en forma alterna, es decir, después de un (-) sigue un (+); después un (-) ..., etcétera. La celda que debe entrar a la base debe comenzar con (+) y terminar con (+). Estos signos indican que, al entrar una nueva variable a la base, algunas de las que ya estaban aumentarán su valor (las que tienen signo +), y las demás lo disminuirán (las que tienen signo -). Se quiere determinar, de entre las que disminuyen, cual es la primera que llegue a valer cero.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3
Origen 1	(-) 6 $\boxed{6}$	4 $\boxed{4}$	(+) 1 $\boxed{3}$
Origen 2	(+) $\boxed{2}$	$\boxed{3}$	(-) 13 $\boxed{5}$

Las celdas que tienen un (-) son la celda del origen 1 y destino 1, y la celda del origen 2 y destino 2, la que tiene el menor elemento básico es la primera, con $x_{11} = 6$. Esta es la variable que sale de la base. Esta cantidad se añade a las celdas con un (+) y se resta de las que tienen (-) quedando la nueva solución:

	Destino 1	Destino 2	Destino 3
Origen 1	$\boxed{6}$	4 $\boxed{4}$	7 $\boxed{3}$
Origen 2	6 $\boxed{2}$	$\boxed{3}$	7 $\boxed{5}$

Las variables básicas son:

$$x_{12} = 4 \;,\quad x_{13} = 7 \;,\quad x_{21} = 6 \quad y \quad x_{23} = 7$$

Las variables no básicas son:

$$x_{11} = 0 \;,\quad x_{22} = 0$$

La función objetivo vale:

$$\begin{aligned} z &= (4 \times 4) + (3 \times 7) + (2 \times 6) + (5 \times 7) \\ &= 84 \text{ mil pesos} \end{aligned}$$

Se puede comprobar que hubo una reducción de costo con respecto a la solución inicial.

Para esta nueva solución se deben evaluar sus variables duales y calcular las d_{ij} que indicarán si se llego a la solución óptima o hay que proseguir. La selección de la variable dual que se debe fijar es arbitraria, por ejemplo, ahora se puede fijar $V_2 = 0$ (cero es siempre el valor más conveniente).

Para las celdas básicas: $C_{ij} - U_i - V_j = 0$

Evaluación de Variables Duales

$C_{12} - U_1 - V_2 = 0$	$4 - U_1 - 0 = 0$	$U_1 = 4$
$C_{13} - U_1 - V_3 = 0$	$3 - 4 - V_3 = 0$	$V_3 = -1$
$C_{23} - U_2 - V_3 = 0$	$5 - U_2 - (-1) = 0$	$U_2 = 6$
$C_{21} - U_2 - V_1 = 0$	$2 - 6 - V_1 = 0$	$V_1 = -4$

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	U_i
Origen 1	$\boxed{6}$	4 $\boxed{4}$	7 $\boxed{3}$	4
Origen 2	6 $\boxed{2}$	0 $\boxed{3}$	7 $\boxed{5}$	6
V_j	-4	0	-1	

Obsérvese que las variables duales, por no ser restringidas, pueden tomar valores negativos.

Para las celdas no básicas, hay que calcular:

$$d_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

$$d_{11} = C_{11} - U_1 - V_1 = 6 - 4 - (-4) = 6$$

$$d_{22} = C_{22} - U_2 - V_2 = 3 - 6 - 0 = -3$$

El valor mínimo es -3, que indica que aún no es la solución óptima y que esta celda debe entrar a la base. Para encontrar la celda que sale de la base, se efectúan los brincos alternativos, que deben comenzar y terminar en la celda del origen 2 y destino 2.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3
Origen 1	$\boxed{6}$	(-) 4 $\boxed{4}$	(+) 7 $\boxed{3}$
Origen 2	6 $\boxed{2}$	(+) $\boxed{3}$	(-) 7 $\boxed{5}$

La celda con (-) que tiene el menor valor es la del origen 1 y destino 2 con $x_{12} = 4$. Esto indica que esta variable, sale de la base y que 4 se debe añadir a las celdas con (+) y restar de las celdas con (-). Quedando la tabla como sigue:

	Destino 1	Destino 2	Destino 3
Origen 1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	11 $\boxed{3}$
Origen 2	6 $\boxed{2}$	4 $\boxed{3}$	3 $\boxed{5}$

Las variables básicas son:

$$x_{13} = 11 , \quad x_{21} = 6 , \quad x_{22} = 4 , \quad x_{23} = 3$$

Las variables no básicas son:

$$x_{11} = 0 , \quad x_{12} = 0$$

La función objetivo vale:

$$\begin{aligned} z &= (3 \times 11) + (2 \times 6) + (3 \times 4) + (5 \times 3) \\ &= 72 \text{ mil pesos} \end{aligned}$$

La cual es menor que el costo de la anterior solución. Para comprobar si esta es la solución óptima o si se debe continuar, se deben evaluar las variables duales y las d_{ij}. Ahora se fijará $U_2 = 0$.

Para las celdas básicas se debe cumplir: $C_{ij} - U_i - V_j = 0$

$C_{21} - U_2 - V_1 = 0$	$2 - 0 - V_1 = 0$	$V_1 = 2$
$C_{22} - U_2 - V_2 = 0$	$3 - 0 - V_2 = 0$	$V_2 = 3$
$C_{23} - U_2 - V_3 = 0$	$5 - 0 - V_3 = 0$	$V_3 = 5$
$C_{13} - U_1 - V_3 = 0$	$3 - U_1 - 5 = 0$	$U_1 = -2$

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	U_i
Origen 1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	11 $\boxed{3}$	-2
Origen 2	6 $\boxed{2}$	4 $\boxed{3}$	3 $\boxed{5}$	0
V_j	2	3	5	

Para las celdas no básicas se calcula: $d_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$

$$d_{11} = C_{11} - U_1 - V_1 = 6 - (-2) - 2 = 6$$

$$d_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 4 - (-2) - 3 = 3$$

Como el valor de todas las d_{ij} es positivo, la solución es óptima (criterio de optimalidad), es decir $z^* = 72$ mil pesos, que el costo mínimo por trasladar 11 vagones de Zacapo a Jalapa, 6 vagones de Toluca a Monterrey, 4 vagones de Toluca a Tehuantepec y 3 vagones de Toluca a Jalapa.

Se puede comprobar en este caso, que la solución óptima es la misma que la inicial con el método Vogel. Esto no sucede siempre. Pero el método Vogel acerca más, por lo general, a la solución óptima, que el de la esquina noroeste.

Solución óptima

IV.4. Soluciones degeneradas

Una solución es *DEGENERADA* si una o más variables básicas son iguales a cero. Esto sucede en el método de la esquina noroeste o en el de Vogel cuando al asignarse el valor en una celda, lo disponible en el origen es igual a lo requerido en el destino, y en el transcurso del método de transporte, cuando dos o más celdas con (-) tienen el mismo valor mínimo, se debe entonces hacer una celda básica igual a cero. Para que no se confunda con una celda no básica se le asigna un valor muy pequeño, que se designa como ε. Para operar con él, se utiliza la siguiente tabla.

Concepto de soluciones degeneradas

Operación		Resultado	Ejemplo
$0 + \varepsilon$	=	ε	$0 + \varepsilon = \varepsilon$
$\varepsilon + \varepsilon$	=	ε	$\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon$
$\varepsilon - \varepsilon$	=	0	$\varepsilon - \varepsilon = 0$
$k + \varepsilon$	=	k	$5 + \varepsilon = 5$
$k - \varepsilon$	=	k	$3 - \varepsilon = 3$
$k * \varepsilon$	=	0	$7 * \varepsilon = 0$

Por ejemplo, considérese la siguiente tabla correspondiente a un problema de transporte.

Ejemplo

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Oferta
Origen 1	$\boxed{9}$	$\boxed{7}$	$\boxed{11}$	7
Origen 2	$\boxed{12}$	$\boxed{8}$	$\boxed{16}$	5
Demanda	3	4	5	

Aplicando el método de la esquina noroeste.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	
Origen 1	3 $\boxed{9}$	$\boxed{7}$	$\boxed{11}$	~~7~~ 4
Origen 2	$\boxed{12}$	$\boxed{8}$	$\boxed{16}$	5
	~~3~~ 0	4	5	

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	
Origen 1	3 $\boxed{9}$	4 $\boxed{7}$	$\boxed{11}$	~~7~~ ~~4~~ 0
Origen 2	$\boxed{12}$	$\boxed{8}$	$\boxed{16}$	5
	~~3~~ 0	~~4~~ 0	5	

Se debe tachar el renglón o la columna que se hiciera cero, pero no ambas. Se tachará el renglón.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	
Origen 1	[9] 3	[7] 4	[11]	~~7~~ ~~4~~ 0
Origen 2	[12]	[8] ε	[16] 5	5 0
	~~3~~ 0	~~4~~ 0	5	

En la celda de la esquina noroeste la (2,2) se puede asignar cero o cinco. Se escoge el menor, que es cero, es decir, la celda es básica a nivel cero. Se le asigna entonces una ε. Se actualizan valores: $5 - \varepsilon = 5$, $0 - \varepsilon = 0$.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	
Origen 1	[9] 3	[7] 4	[11]	~~7~~ ~~4~~ 0
Origen 1	[12]	[8] ε	[16] 5	~~5~~ 0
	~~3~~ 0	~~4~~ 0	~~5~~ 0	

	Destino 1	Destino 2	Destino 3
Origen 1	[9] 3	[7] 4	[11]
Origen 2	[12]	[8] ε	[16] 5

Las variables básicas son:

$$x_{11} = 3 \,, \quad x_{12} = 4 \,, \quad x_{22} = \varepsilon \,, \quad x_{23} = 5$$

Las variables no básicas son:

$$x_{13} = 0 \,, \quad x_{21} = 0$$

La función objetivo vale:

$$z = (9 \times 3) + (7 \times 4) + (8 \times \varepsilon) + (16 \times 5)$$
$$z = \quad 27 \quad + \quad 28 \quad + \quad 0 \quad + \quad 80 \quad = 135$$

nótese que la variable

$x_{22} = \varepsilon$, es básica a nivel cero.

Aplicando el algoritmo de transporte

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	U_i
Origen 1	[9] 3	[7] 4	[11] d_{13} =-6	0
Origen 2	[12] d_{21} = 4	[8] ε	[16] 5	-1
V_j	9	7	17	

	Destino 1	Destino 2	Destino 3
Origen 1	[9] 3	(-) [7] 4	(+) [11]
Origen 2	[12]	(+) [8] ε	(-) [16] 5

El menor valor en la celda con (-) es 4.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3
Origen 1	9 / 3	7 /	11 / 4
Origen 2	12 /	8 / 4	16 / 1

Para obtener la solución:

$$4 - 4 = 0$$
$$\varepsilon + 4 = 4$$
$$5 - 4 = 1$$
$$0 + 4 = 4$$

Se deja al lector llegar a la solución óptima.

IV.5. Problema de Asignación

El problema de asignación es un tipo especial de problemas de programación lineal, en el que los recursos se asignan a las actividades en relación de uno a uno. Así cada recurso (por ejemplo, un empleado, máquina, etcétera) se debe asignar de modo único a una actividad particular (por ejemplo una tarea, sitio, etcétera). Asignación

Se tiene un costo C_{ij} asociado con cada recurso i que se asigna a la actividad j. El objetivo es determinar en qué forma deben realizarse todas las asignaciones para minimizar los costos totales.

No se explicará en estos apuntes, el algoritmo para resolver este problema. Este se encuentra en HILLIER, F. y LIEBERMEN, G., Introducción a la Investigación de Operaciones, McGraw-Hill, 1982.

I. Resolver los siguientes problemas:

1. La Comisión Federal de Electricidad, tiene en su área cercana al Valle de México, cuatro termoeléctricas que se abastecen de carbón, en tres minas cercanas. Cada una de estas minas produce 750, 300 y 400 toneladas de carbón respectivamente. Cada termoeléctrica debe producir 125, 175, 300 y 200 Megawatts, respectivamente. El costo de producción de una tonelada de carbón es de \$ 10, \$ 15 y \$ 20 en las minas 1, 2 y 3 respectivamente. El costo de transportar una tonelada de carbón de la mina a la termoeléctrica se da en la siguiente tabla.

		Termoeléctrica 1	2	3	4
	1	5	4	3	2
Mina	2	4	6	7	3
	3	7	5	4	4

La eficiencia de las termoeléctricas es tal que una tonelada de carbón produce 0.5 Megawatts en la termoeléctrica 1, 0.5 Megawatts en la termoeléctrica 2, 1/3 de Megawatts en la 3 y 0.25 Megawatts en la 4.

Resuelva los siguientes incisos:

a. Formule el modelo de programación lineal.

b. Formule el modelo dual.

c. Obtenga la solución inicial por el método de la esquina noroeste.

d. Obtenga la solución inicial por el método de Vogel.

e. ¿Como se debe distribuir el carbón para minimizar el costo total y cuál es la potencia producida en cada termoeléctrica?

2. Una línea de autobuses urbanos requiere despachar sus autobuses a los puntos P_1 , P_2 , P_3 , P_4 dentro de la ciudad. Cada uno de estos puntos requiere respectivamente de 1, 6, 2 y 6 unidades respectivamente.

Esta línea cuenta con tres garages en cada uno de los cuales se encuentran 5 autobuses almacenados. El tiempo de viaje desde cada uno de los garages a los respectivos puntos se muestran en la siguiente tabla:

Puntos	P_1	P_2	P_3	P_4	Autobuses disponibles
$Garage_1$	5	4	3	2	5
$Garage_2$	10	8	4	7	5
$Garage_3$	9	9	8	4	5
Autobuses requeridos	1	6	2	6	

El despachador desea que el tiempo que les toma a cada uno de los autobuses desplazarse de su garage a su punto de destino, sea el mínimo posible.

Resuelva los siguientes incisos:

a. Obtenga el modelo de programación lineal.

b. Obtenga el modelo dual.

c. Obtenga la solución inicial por el método de la esquina noroeste.

d. Obtenga la solución inicial por el método de Vogel.

e. ¿Cómo se deben asignar los autobuses?

3. La compañía "Fertilizantes Mexicanos", posee una línea de tres fertilizantes, cuya oferta mensual es, en toneladas.

Fertilizante	Oferta
A	5000
B	2000
C	3000

En cuatro zonas de cosecha se requieren de estos fertilizantes, la cual se indica en la siguiente tabla (en toneladas mensuales)

Zona	Demanda
X	2000
Y	3000
Z	1000
W	2000

El costo de transportar cada fertilizante de la planta a la zona de cosecha es, en pesos por kilogramo, el que se muestra en la siguiente tabla:

		Zona		
	X	Y	Z	W
Fertilizante A	2	3	1	2
B	3	2	2	4
C	2	1	1	3

Resuelva los siguientes incisos:

a. Obtenga el modelo de programación lineal.

b. Obtenga el modelo dual.

c. Obtenga la solución inicial con el método de la esquina noroeste.

d. Obtenga la solución inicial con el método de Vogel.

e. ¿Qué tipo de fertilizante se debe asignar a cada zona y en que cantidad para minimizar los costos de transporte?

BIBLIOGRAFIA

1. HILLIER, F. y LIEBERMAN, G.
Introducción a la Investigación de Operaciones
McGraw-Hill, 1982.

2. DANNENBRING, D. y STAM, M.
Management Science an Introduction
McGraw-Hill, 1981.

3. ZIONTS, S.
Linear and Integer Programming
Prentice - Hall, 1974.

4. MARIN PINILLOS, BENITO.
Apuntes de Programación Lineal
Facultad de Ingeniería, UNAM, 1982.

MODULO V REDES

Objetivo específico:

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Aplicará los métodos apropiados para resolver problemas de flujo máximo, árbol de mínima expansión, ruta más corta y, planeación y control de proyectos.

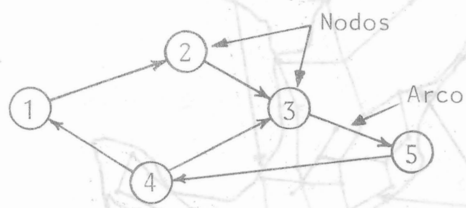
C U A D R O   S I N O P T I C O

- Red
  - Dirigida
  - No dirigida
- Conceptos
  - Cadena
  - Red conexa
  - Ciclo
  - Arbol
- Algoritmos
  - Flujo máximo
  - Arbol de mínima expansión
  - Ruta más corta
  - Ruta crítica

V.1. Concepto de Red

Concepto de Red, Nodo y Arco

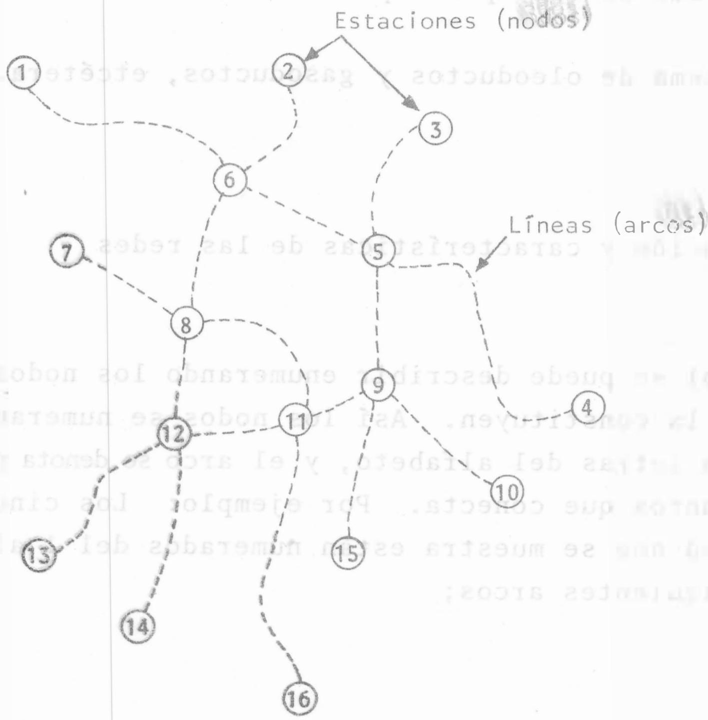
Una *RED* (grafo) es un conjunto de puntos llamados *NODOS*, que están unidos entre sí por líneas que se denominan *ARCOS*.



Algunos problemas que se presentan en la vida cotidiana se pueden modelar como una red, por ejemplo:

Ejemplos de redes

1. En el Sistema de Transporte Colectivo, las estaciones son los nodos y las líneas del metro los arcos.



2. En las rutas de los aviones las ciudades son los nodos y las trayectorias son los arcos.

3. El sistema de ejes viales.

4. El sistema de comunicaciones telefónicas.

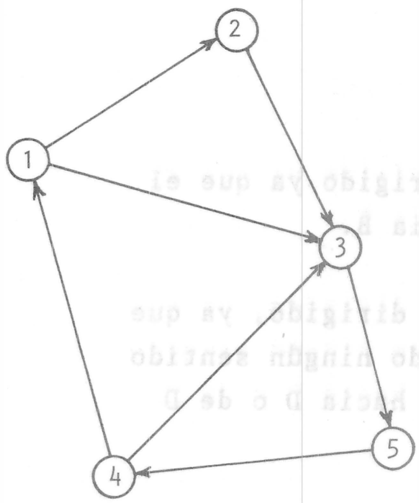
5. El sistema de transporte por carreteras.

6. El sistema de oleoductos y gasoductos, etcétera.

V.2. Descripción y características de las redes

Descripción de una red

Una red (grafo) se puede describir enumerando los nodos y los arcos que la constituyen. Así los nodos se numeran o se indican con letras del alfabeto, y el arco se denota por los nodos o puntos que conecta. Por ejemplo: Los cinco nodos de la red que se muestra están numerados del 1 al 5, y tiene los siguientes arcos;



Un arco conectado al nodo 1 con el nodo 2. Arco (1,2)

Un arco conectado al nodo 1 con el nodo 3. Arco (1,3)

Un arco conectado al nodo 2 con el nodo 3. Arco (2,3)

Un arco conectado al nodo 3 con el nodo 5. Arco (3,5)

Un arco conectado al nodo 4 con el nodo 3. Arco (4,3)

Un arco conectado al nodo 4 con el nodo 1. Arco (4,1)

Un arco conectado al nodo 5 con el nodo 4. Arco (5,4).

Además de la representación gráfica, una red también puede representarse como una matriz booleana (formada por ceros y unos), en donde los i renglones y las j columnas serán los nodos de la red. Un cero en el elemento (i,j) de la matriz indica que no hay arco uniendo al nodo i con j. Si el elemento (i,j) de la matriz es un uno, indica que sí hay un arco uniendo al nodo i con el nodo j. Así se tiene que la matriz booleana de la red anterior es:

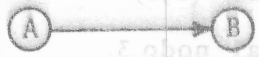
Representación Booleana

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Un arco puede ser *DIRIGIDO*, si tiene asociado un sentido o *NO DIRIGIDO* en el caso de que no tenga asignado un sentido.

Arco dirigido y no dirigido

Por ejemplo:

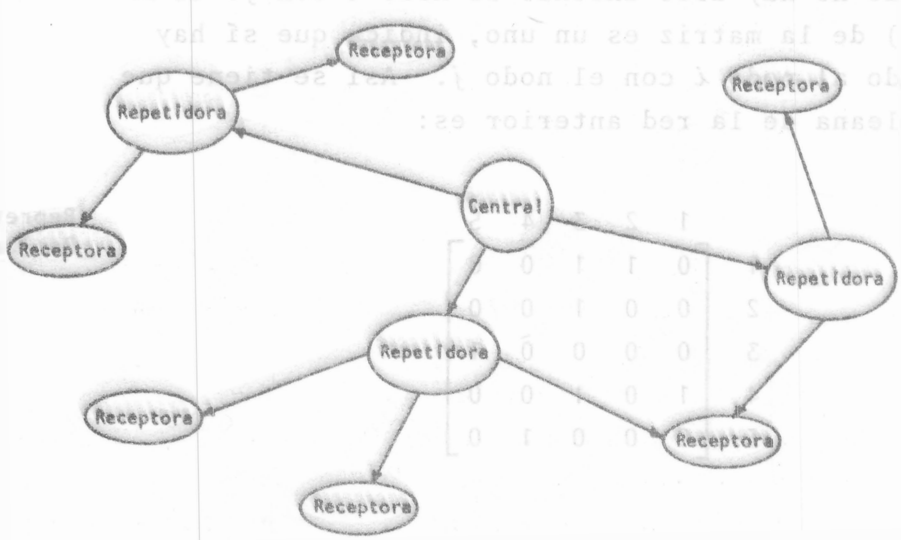


El arco (A,B) es dirigido ya que el sentido es de A hacia B.

El arco (C,D) es no dirigido, ya que no tiene especificado ningún sentido éste puede ser de C hacia D o de D hacia C.

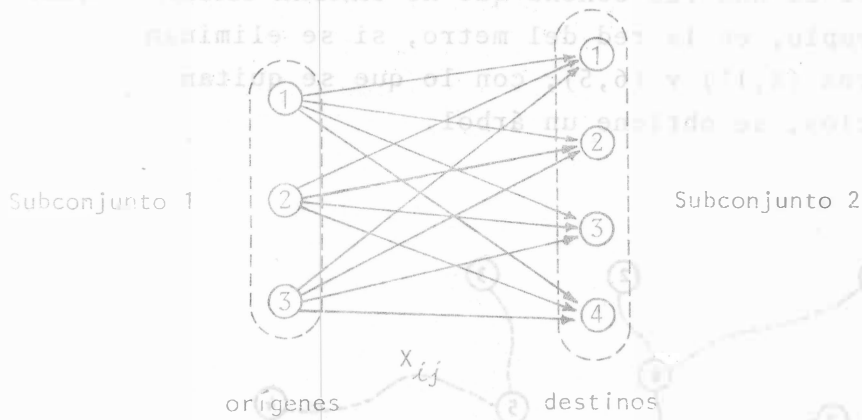
Si la red sólo tiene arcos dirigidos, se trata de una *RED DIRIGIDA*. Por ejemplo, las redes a las que dan origen los sistemas de comunicación por radio y televisión, serían redes dirigidas, ya que el flujo de la información tiene que ser nodo de la central de transmisión a los nodos que representan a las repetidoras, y de éstos a los nodos que representan a las radio receptoras.

Red dirigida



La red que, representa al sistema de transporte colectivo es una red no dirigida, ya que el flujo de pasajeros no tiene asignado un sentido, se puede viajar de la estación Zaragoza (que sería un nodo) a la estación Pino Suárez (que sería el otro nodo), o de Pino Suárez a Zaragoza. Red no dirigida

Algunos problemas se pueden representar por redes en los que los nodos se encuentran divididos en dos subconjuntos, con todos los arcos de la red uniendo a los nodos de un subconjunto con los nodos del otro. Se les conoce como *REDES BIPARTITAS*. Por ejemplo, los problemas de transporte dan origen a una red bipartita, con todos los orígenes en un subconjunto y los destinos en el otro. Los arcos representan el flujo de las unidades a transportar de un origen a un destino. Red bipartita



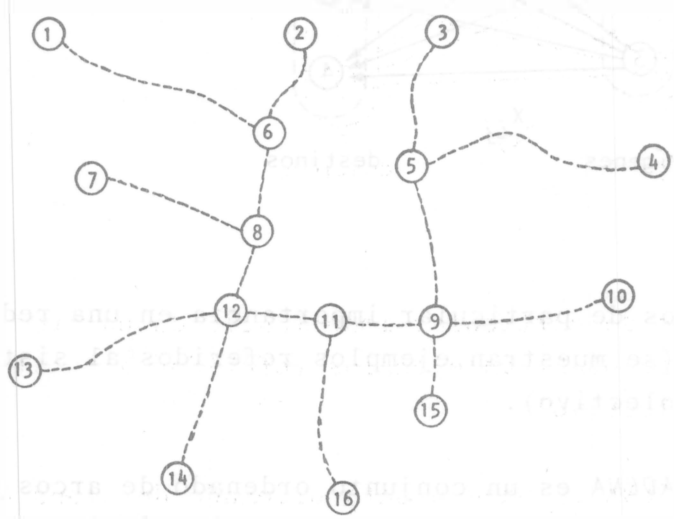
Algunos conceptos de particular importancia en una red son los siguientes (se muestran ejemplos referidos al sistema de transporte colectivo).

- Una *CADENA* es un conjunto ordenado de arcos que conectan a dos nodos por medio de nodos intermedios. Por ejemplo, en una red del metro, si un nodo es Cadena la estación Tacuba (nodo 15) y otro es la estación Taxqueña (nodo 1), una cadena que une estos dos nodos está formada por los arcos (16,11) (11,8), (8,6) y (6,1) (ver figura de la red del metro).

- Una *RED CONEXA* es una red para la cual existe una cadena entre cualquier par de nodos. Por ejemplo, la red del metro es una red conexa. Red conexa

- Un *CICLO* es una cadena que conecta a un nodo con el mismo. Por ejemplo, en la red del metro, la cadena (8,11), (11,12), (12,8) es un ciclo, ya que conecta al nodo 8 con el mismo. Ciclo

- Un *ARBOL* es una red conexa que no contiene ciclos. Por ejemplo, en la red del metro, si se eliminan los arcos (8,11) y (6,5), con lo que se quitan los ciclos, se obtiene un árbol. Arbol



Estudiando una red se puede obtener información importante para el sistema original, como puede ser, la de unir los nodos de una red, a costo mínimo o con la distancia mínima. Se puede determinar cuál es la ruta más corta entre dos nodos cualesquiera de una red, y cuál es el flujo máximo que se puede enviar a uno de ellos.

Importancia del estudio de una red

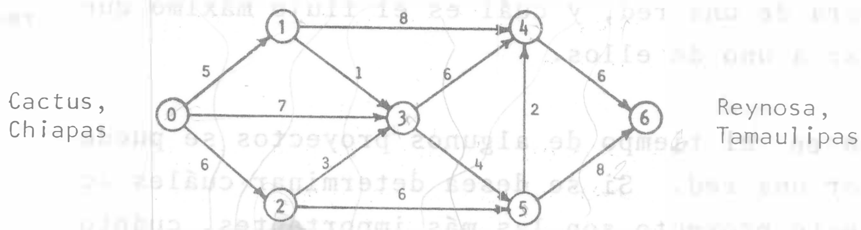
La realización en el tiempo de algunos proyectos se puede representar por una red. Si se desea determinar cuáles actividades de este proyecto son las más importantes, cuánto tiempo requerirá el proyecto y qué holgura se dispone para realizar las actividades que lo constituyen, se determinará la ruta crítica del proyecto. A continuación se explicarán los cuatro algoritmos que permiten obtener esta información.

V.3. Problema de flujo máximo

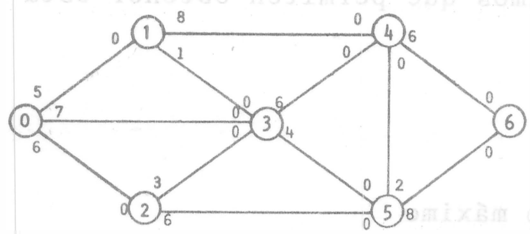
Flujo máximo

El problema de flujo máximo se presenta cuando se requiere determinar cuál es la mayor cantidad de un bien que se puede enviar de un nodo (nodo origen), a otro cualquiera de la red (nodo final), desde luego que deben existir una o más cadenas entre estos nodos, y los arcos que las constituyen tienen restricciones en cuanto a la cantidad, de ese bien que puede fluir.

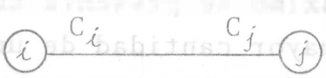
Considérese el siguiente ejemplo: El gasoducto que une a la ciudad de Reynosa, Tamaulipas con el campo productor de gas natural en Cactus, Chiapas, ha sufrido un desperfecto. Para cubrir las necesidades de la ciudad de Reynosa, se requiere determinar cuál es la máxima cantidad de gas que se puede enviar usando estaciones compresoras y gasoductos al ternativos. La capacidad de los gasoductos se muestra en cada arco de la red (en millones de metros cúbicos por día). Los nodos representan a las estaciones compresoras.



Esta red se puede representar de la siguiente forma:



donde cada arco dirigido que une al nodo i con el nodo j, se representa ahora como



siendo C_i es la cantidad del bien que puede fluir, como máximo, del nodo i al nodo j, y C_j sería la máxima cantidad del bien que puede fluir del nodo j al nodo i. Así, pueden fluir 5 unidades (millones de metros cúbicos de gas al día) del nodo 0 al nodo 1, y cero unidades del nodo 1 al nodo 0, etcétera.

Con la red en esta forma, se puede aplicar el siguiente algoritmo para determinar el flujo máximo.

Algoritmo para el flujo máximo

1. Encontrar una cadena del nodo origen al nodo final. Si no existe ninguna, el flujo neto asignado es el flujo óptimo.

Algoritmo

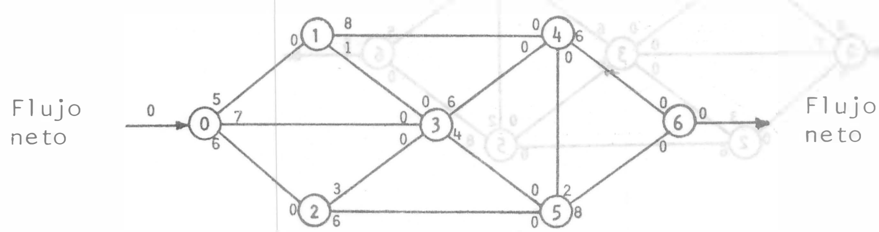
2. Encontrar en esta cadena el arco con la menor capacidad de flujo (mayor que cero). Denotar a esta capacidad como C*. Aumentar C* al flujo neto del origen al final.

3. Restar C* a la cantidad C_i de cada arco en la cadena. Sumar C* a la cantidad C_j de cada arco en la cadena. Regresar al punto 1.

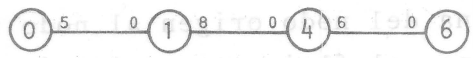
Se resolverá el problema del gasoducto utilizando este algoritmo.

Inicialmente, el flujo neto asignado es cero. Este flujo neto se denota con una flecha que entra al nodo origen y una flecha que sale del nodo final.

Ejemplo de Flujo máximo



1. Una cadena es un conjunto ordenado de arcos, que en este caso conectan al nodo origen con el nodo final. Por ejemplo:



2. En esta cadena, el arco con menor capacidad es el arco (0,1), con capacidad igual a 5, o sea que $C^* = 5$. El flujo neto es ahora $0 + C^* = 0 + 5 = 5$.

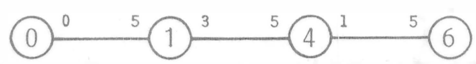
3. Sobre esta cadena, se resta C^* de las cantidades C_i,

$$C_0 - C^* = 5 - 5 = 0$$

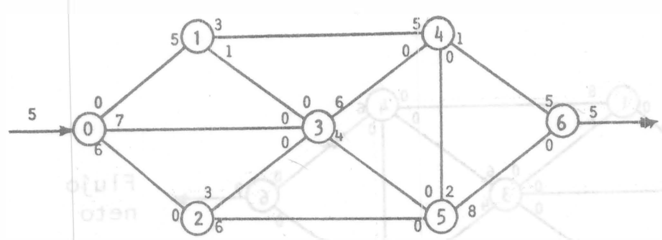
$$C_1 - C^* = 8 - 5 = 3$$

$$C_4 - C^* = 6 - 5 = 1$$

y se suma C^* a las cantidades C_j, $0 + 5 = 5$ en todos los casos, quedando la cadena ahora como



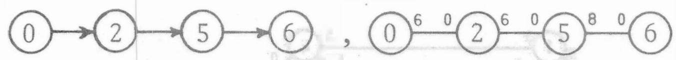
la nueva red es ahora



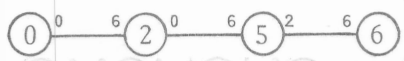
Esta nueva red indica que ya no es posible ir del nodo 0 al nodo 1, ya que la capacidad de flujo en este sentido es cero, pero sí es posible ir del nodo 1 al nodo 0.

Características del árbol de mínima expansión

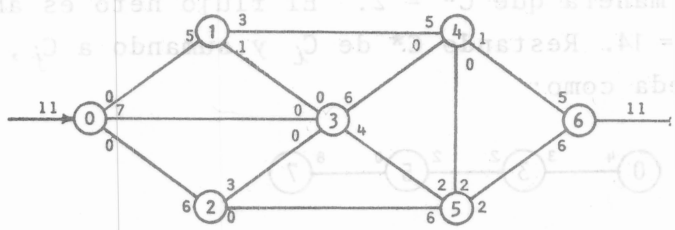
Una cadena de 0 a 6 es



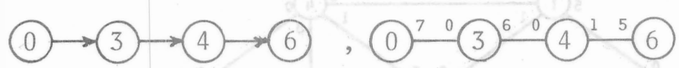
y los arcos con la menor capacidad de flujo son el (0,2) y (2,5), con una capacidad de 6, de manera que $C^* = 6$. El flujo neto será ahora $5 + 6 = 11$. Restando C^* de la cantidad C_i y sumándoselo a las C_j. Queda la cadena como



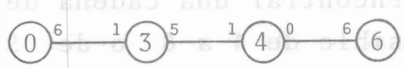
y la nueva red es ahora



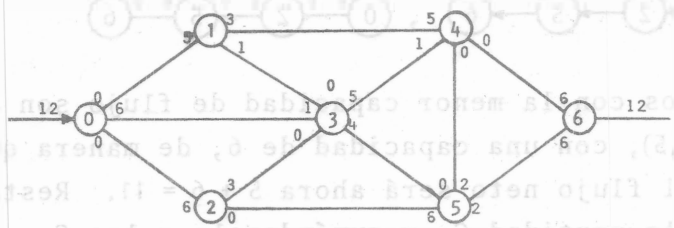
Una cadena de 0 a 6 es



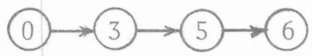
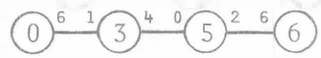
el arco de menor capacidad de flujo es el (4,6) con capacidad de 1, de manera que $C^* = 1$. El flujo neto es ahora $11 + 1 = 12$. Restando C^* de C_i y sumándola a la C_j, queda la cadena como:



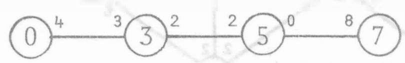
y la nueva red es ahora:



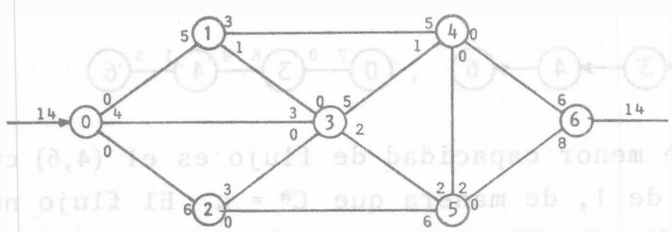
Una cadena de 0 a 6 es

 ó 

el arco de menor capacidad es el (5,6) con capacidad 2, de manera que C* = 2. El flujo neto es ahora 12 + 2 = 14. Restando C* de C_i y sumando a C_j, la cadena queda como:



y la nueva red es



Aquí ya no es posible encontrar una cadena de 0 a 6, ya que no hay flujo posible de 4 a 6 o de 5 a 6, que es la única forma en la que se puede llegar al nodo final. De manera que el flujo neto asignado es el flujo máximo. Es decir, se pueden enviar como máximo, catorce millones de metros cúbicos al día de gas, de Cactus, Chiapas a Reynosa, Tamaulipas. Comparando la red original con la red final, se puede determinar la forma en que se efectúa este envío. Se mandan 5 unidades (millones de metros cúbicos al día) del nodo 0 al nodo 1, 5 unidades del nodo 3 al 4, 6 unidades del nodo 4 al 6, 6 unidades del nodo 0 al 2, 6 unidades del nodo 2 al 5, 2 unidades del nodo 3 al 5 y 8 unidades del nodo 4 al 6. Si se definen las variables x_{ij} = flujo del nodo i al nodo j, el resultado queda como:

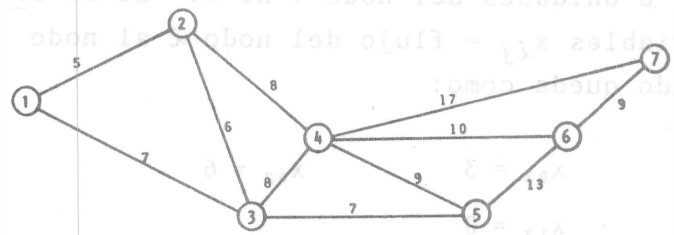
$x_{01} = 5$	$x_{03} = 3$	$x_{02} = 6$
$x_{14} = 5$	$x_{13} = 0$	
$x_{23} = 0$	$x_{25} = 6$	
$x_{34} = 1$	$x_{35} = 2$	
$x_{46} = 6$		
$x_{54} = 0$	$x_{56} = 8$	

V.4. Arbol de mínima expansión

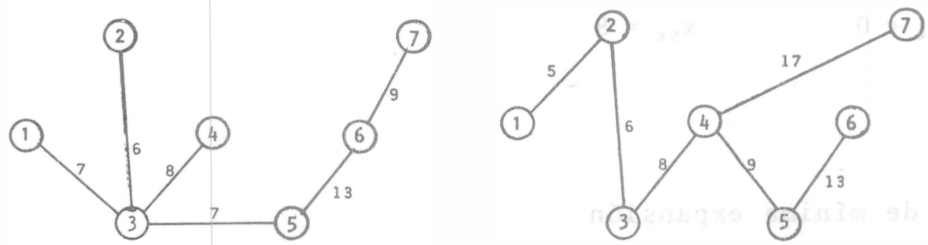
Características del árbol de mínima expansión

Un árbol es una red conexa que no tiene ciclos. Es decir, es un conjunto de arcos unidos, que dan una cadena desde cualquier nodo de la red a cualquier otro nodo de ella misma, sin caer en un ciclo. El *ARBOL DE MINIMA EXPANSION* es el árbol con el menor costo, distancia o tiempo, según lo que indique la cantidad sobre los arcos.

Considérese el siguiente ejemplo: La Secretaría de Comunicaciones está planeando unir cierta parte del territorio nacional con el Sistema de Microondas. Desea establecer comunicación entre todos los nodos mostrados en la red, de manera que se minimice la distancia total que tiene que viajar la señal. La distancia, en decenas de kilómetros, se muestra en cada arco. ¿Por qué arcos debe viajar la señal para unir a todos los nodos? ¿Cuál será la distancia que viajará una señal de Microondas para cubrir todos los nodos? Ejemplo



Se puede observar que en esta red hay varios árboles, dos de ellos son:



Se desea encontrar el árbol con la longitud mínima.

Para esto se puede aplicar cualquiera de los dos algoritmos que se discuten, que son básicamente uno solo, el primero trabaja directamente sobre la red y el segundo sobre una matriz booleana en la cual se sustituyen los unos (1) por las distancias.

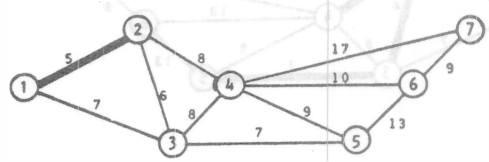
Algoritmo para obtener el árbol de mínima expansión en la red:

Algoritmo en la red

1. Seleccionar en la red original el arco con el menor valor (el cual queda en el árbol de mínima expansión).
2. Encontrar un arco, que tenga el menor valor, que una un nodo del arco original con cualquier otro nodo que no se encuentre en el arco original.
3. Estos dos arcos se encuentran ahora en el árbol de mínima expansión.
4. Continuar con este proceso, añadiendo al árbol el arco con el menor valor que lo conecte con algún nodo que no esté dentro del árbol.

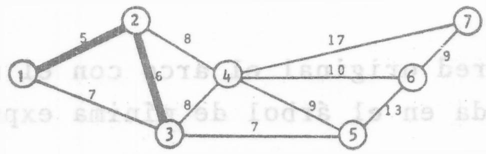
Por ejemplo, en la red:

Ejemplo

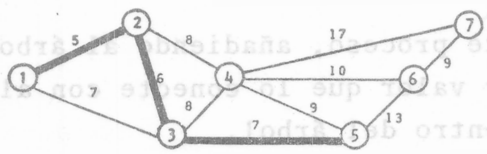


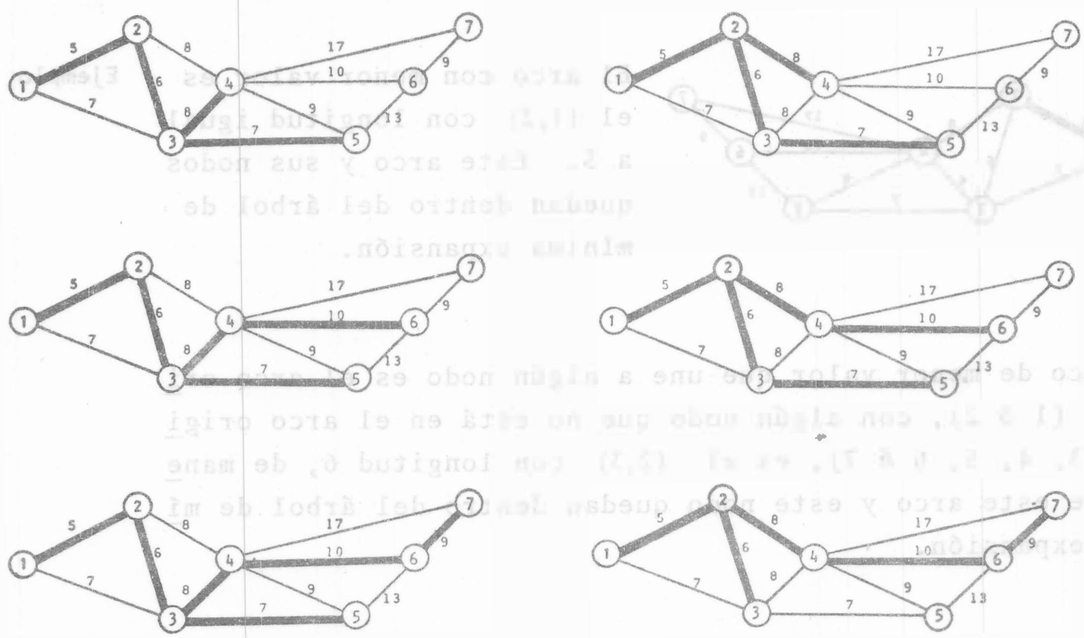
El arco con menor valor es el (1,2) con longitud igual a 5. Este arco y sus nodos quedan dentro del árbol de mínima expansión.

El arco de menor valor que une a algún nodo es el arco original (1 ó 2), con algún nodo que no está en el arco original (3, 4, 5, 6 ó 7), es el (2,3) con longitud 6, de manera que este arco y este nodo quedan dentro del árbol de mínima expansión.

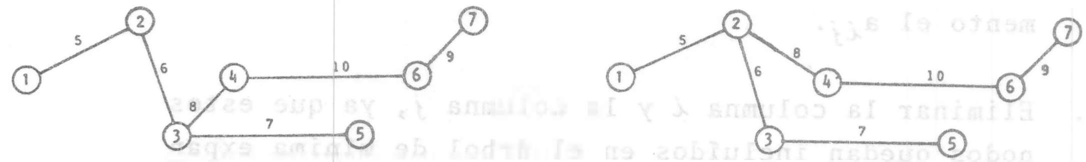


El arco de menor valor que une a nodos en el árbol con los que no están en él es el (3,5) con longitud 7, y así sucesivamente.





De manera que este problema tiene dos árboles que dan el mismo valor de mínima longitud.



Los arcos de cada árbol indican sobre qué nodos se debe establecer comunicación.

Algoritmo para obtener el árbol de mínima expansión en la matriz boolena de distancias:

Algoritmo en la Matriz Booleana de distancias

Constrúyase la matriz booleana de la red, y substitúyanse los unos por la distancia existente entre nodo y nodo. Esta matriz tiene en los renglones y en las columnas los nodos que forman la red. El elemento a_{ij} de la matriz indica la distancia entre el nodo i y el nodo j. Si no están unidos se pone un guión en lugar de un cero.

La matriz booleana modificada para el ejemplo anterior es:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccc}
- & 5 & 7 & - & - & - & - \\
5 & - & 6 & 8 & - & - & - \\
7 & 6 & - & 8 & 7 & - & - \\
- & 8 & 8 & - & 9 & 10 & 17 \\
- & - & 7 & 9 & - & 13 & - \\
- & - & - & 10 & 13 & - & 9 \\
- & - & - & 17 & - & 9 & -
\end{array}\right]
\end{array}
$$

El algoritmo es el siguiente:

1. Seleccionar el menor elemento de la matriz. Si hay empate se escoge en forma arbitraria. Sea este elemento el a_{ij}.

2. Eliminar la columna i y la columna j, ya que estos nodos quedan incluídos en el árbol de mínima expansión.

3. Marcar los renglones i y j con una X.

4. Buscar en los renglones marcados con X el menor elemento. Sea este el a_{XK}. Eliminar la columna K y marcar con X el renglón K.

5. Repetir el paso 4 hasta que se hayan eliminado todas las columnas.

Ejemplo

Aplicando el algoritmo en el ejemplo anterior:

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\hline
1 & - & 5 & 7 & - & - & - & - \\
2 & 5 & - & 6 & 8 & - & - & - \\
3 & 7 & 6 & - & 8 & 7 & - & - \\
4 & - & 8 & 8 & - & 9 & 10 & 17 \\
5 & - & - & 7 & 9 & - & 13 & - \\
6 & - & - & - & 10 & 13 & - & 9 \\
7 & - & - & - & 17 & - & 9 & -
\end{array}$$

El menor elemento de la matriz es el a_{12} o el a_{21} que vale 5. Se toma cualquiera, en este ejemplo se tomó el a_{12}.

$$\begin{array}{c|ccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ X1 & - & 5 & 7 & - & - & - & - \\ X2 & 5 & - & 6 & 8 & - & - & - \\ 3 & 7 & 6 & - & 8 & 7 & - & - \\ 4 & - & 8 & 8 & - & 9 & 10 & 17 \\ 5 & - & - & 7 & 9 & - & 13 & - \\ 6 & - & - & - & 10 & 13 & - & 9 \\ 7 & - & - & - & 17 & - & 9 & - \end{array}$$

Se eliminan las columna 1 y 2, (esto quiere decir que los nodos 1 y 2 ya están en el árbol de mínima expansión). Se marcan con una X los renglones 1 y 2.

$$\begin{array}{c|ccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ X1 & - & 5 & 7 & - & - & - & - \\ X2 & 5 & - & 6 & 8 & - & - & - \\ 3 & 7 & 6 & - & 8 & 7 & - & - \\ 4 & - & 8 & 8 & - & 9 & 10 & 17 \\ 5 & - & - & 7 & 9 & - & 13 & - \\ 6 & - & - & - & 10 & 13 & - & 9 \\ 7 & - & - & - & 17 & - & 9 & - \end{array}$$

El elemento menor en los renglones marcados con X es el $a_{23} = 6$.

$$\begin{array}{c|ccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ X1 & - & 5 & 7 & - & - & - & - \\ X2 & 5 & - & 6 & 8 & - & - & - \\ X3 & 7 & 6 & - & 8 & 7 & - & - \\ 4 & - & 8 & 8 & - & 9 & 10 & 17 \\ 5 & - & - & 7 & 9 & - & 13 & - \\ 6 & - & - & - & 10 & 13 & - & 9 \\ 7 & - & - & - & 17 & - & 9 & - \end{array}$$

Se elimina la columna 3, y se marca con una X el renglón 3. El menor elemento en los renglones marcados con una X es el $a_{35} = 7$.

$$\begin{array}{c|ccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ X1 & - & 5 & 7 & - & - & - & - \\ X2 & 5 & - & 6 & 8 & - & - & - \\ X3 & 7 & 6 & - & 8 & 7 & - & - \\ 4 & - & 8 & 8 & - & 9 & 10 & 17 \\ X5 & - & - & 7 & 9 & - & 13 & - \\ 6 & - & - & - & 10 & 13 & - & 9 \\ 7 & - & - & - & 17 & - & 9 & - \end{array}$$

Se elimina la columna 5 y se marca con una X el renglón 5. El menor elemento en los renglones marcados con una X es el a_{24} y el a_{34}. Se escoge cualquiera, por ejemplo, el a_{24}.

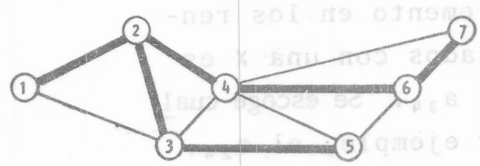
$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\hline
X\,1 & - & 5 & 7 & - & - & - & - \\
X\,2 & 5 & - & 6 & 8 & - & - & - \\
X\,3 & 7 & 6 & - & 8 & 7 & - & - \\
X\,4 & - & 8 & 8 & - & 9 & 10 & 17 \\
X\,5 & - & - & 7 & 9 & - & 13 & - \\
6 & - & - & - & 10 & 13 & - & 9 \\
7 & - & - & - & 17 & - & 9 & -
\end{array}
$$

Se elimina la columna 4 y se marca con una X el renglón 4. El menor elemento en los renglones marcados con una X es el $a_{46} = 10$.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\hline
X\,1 & - & 5 & 7 & - & - & - & - \\
X\,2 & 5 & - & 6 & 8 & - & - & - \\
X\,3 & 7 & 6 & - & 8 & 7 & - & - \\
X\,4 & - & 8 & 8 & - & 9 & 10 & 17 \\
X\,5 & - & - & 7 & 9 & - & 13 & - \\
X\,6 & - & - & - & 10 & 13 & - & 9 \\
7 & - & - & - & 17 & - & 9 & -
\end{array}
$$

Se elimina la columna 6 y se marca con una X el renglón 6. El menor elemento en los renglones marcados con una X es el a = 9.
Al eliminarse la columna 7, ya no quedan más columnas en la matriz, lo que significa que ya se obtuvo el árbol de mínima expansión.

La forma de determinar el árbol es la siguiente: Marcados con un círculo están los elementos a_{12}, a_{23}, a_{24}, a_{35}, a_{46} y a_{67}. De manera que el árbol está formado por los arcos (1,2), (2,3), (2,4), (3,5), (4,6) y (6,7). Sobre estos nodos se establece la comunicación.



El valor del árbol se obtiene sumando los elementos en los círculos de la matriz final:

$$5 + 6 + 8 + 7 + 10 + 9 = 45$$

V.5. Ruta más corta

Ruta más corta

Consiste en encontrar cuál es la cadena que da el menor valor de distancia, tiempo o costo (según lo que indiquen los valores de los arcos), entre dos nodos cualesquiera de una red con arcos dirigidos. Algunos ejemplos en los cuales se puede aplicar este algoritmo son:

1. Dos ciudades están cumunicadas por varias carreteras, se quiere determinar por cuál se ocupa el mínimo tiempo para ir de una ciudad a otra.

2. Algunos problemas de reemplazo de equipo se pueden modelar como una red. Por el algoritmo de la ruta más corta se determina cuál es el plan de reemplazo más económico.

3. En una ciudad se quiere determinar cuál es la forma de ir de un punto A a un punto B por el camino más corto.

El algoritmo requiere que todos los valores sobre los arcos sean positivos (para algoritmos más generales se recomienda ver el libro de Bazaraa), y consiste básicamente en ir etiquetando todos los nodos de la red. Estas etiquetas informan cuál es la ruta más corta desde el nodo inicial hasta ese nodo, y desde qué nodo se llegó a este último. El algoritmo termina cuando se ha etiquetado el nodo final. La última información se lleva definiendo tres conjuntos:

1. El de los nodos totales de la red, N.
2. El de los nodos etiquetados, X.
3. El de los nodos no etiquetados, $\overline{X}$.

Algoritmo para calcular la ruta más corta con todos los costos positivos:

Algoritmo

1. Etiquetar el nodo inicial con $w'_1 = 0$, definir el conjunto de nodos etiquetados, X.

2. Definir el conjunto de nodos no etiquetados $\overline{X}$, como el complemento de los que ya están etiquetados $\overline{X} = N - X$.

3. Considerar todos los arcos que tienen su origen en un nodo de X y su final en un nodo de $\overline{X}$, es decir todos los arcos

$$(X,\overline{X}) = \{(i,j) / \; i \in X \;\; y \;\; j \in \overline{X}\}$$

y calcular

$$w'_i + C_{ij}$$

4. Calcular $\quad w'_p + C_{pq} = \min_{(i,j)\in(X,\overline{X})} \{w'_i + C_{ij}\}$

que será la etiqueta del nodo q, o sea

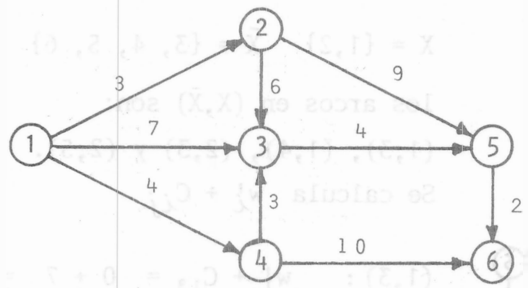
$$w'_q = w'_p + C_{pq}$$

5. Colocar a q en X.

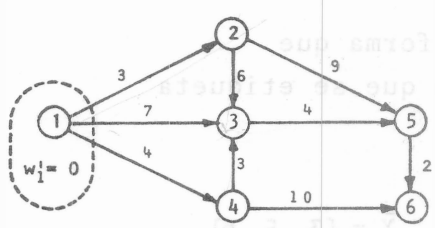
6. Si ya está el nodo final en X, alto. Si no, ir al paso dos.

Por ejemplo, en la siguiente red se quiere determinar la ruta más corta para ir del nodo 1 al nodo 6, donde los elementos sobre los arcos (C_{ij}) denotan distancias expresadas en metros.

Ejemplo



Aplicando el algoritmo, se etiqueta el nodo 1 con $w_1' = 0$ y se incluye a este nodo el conjunto X.



$X = \{1\} \quad \bar{X} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

El conjunto $(X,\bar{X})$ es el de todos los arcos con origen en X y terminación en $\bar{X}$:

$(1,2), (1,3), (1,4)$

Se calcula para estos arcos (i,j) el valor $w_i' + C_{ij}$

$$(1,2): \quad w_1' + C_{12} = 0 + 3 = 3$$

$$(1,3): \quad w_1' + C_{13} = 0 + 7 = 7$$

$$(1,4): \quad w_1' + C_{14} = 0 + 4 = 4$$

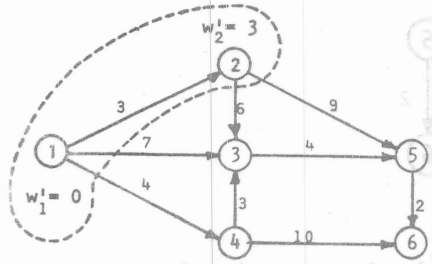
el valor mínimo corresponde a $w_1' + C_{12} = w_p' + C_{pq} = w_q'$ $w_q' = 3 = w_2'$, de manera que el nodo 2 se incluye en el conjunto X.

$X = \{1,2\}$ $\bar{X} = \{3, 4, 5, 6\}$

los arcos en $(X,\bar{X})$ son:

(1,3), (1,4), (2,3) y (2,5).

Se calcula $w_i' + C_{ij}$



$(1,3): \quad w_1' + C_{13} = 0 + 7 = 7$

$(1,4): \quad w_1' + C_{14} = 0 + 4 = 4$

$(2,3): \quad w_2' + C_{23} = 3 + 7 = 10$

$(2,5): \quad w_2' + C_{25} = 3 + 9 = 12$

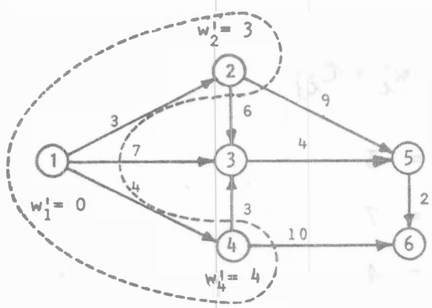
el valor mínimo es para $w_1' + C_{14} = 4$ de forma que $w_q' = w_p + C_{pq} = w_1' + C_{14} = 4$ y el nuevo nodo que se etiqueta es el $q = 4$.

$X = \{1, 2, 4\}$ $\bar{X} = \{3, 5, 6\}$

los arcos en $(X,\bar{X})$ son:

(1,3), (2,3), (2,5) (4,3) y (4,6)

Para ellos se calcula $w_i' + C_{ij}$



$(1,3): \quad w_1' + C_{13} = 0 + 7 = 7$

$(2,3): \quad w_2' + C_{23} = 3 + 7 = 10$

$(2,5): \quad w_2' + C_{25} = 3 + 9 = 12$

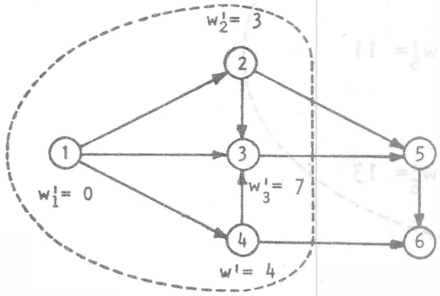
$(4,3): \quad w_4' + C_{43} = 4 + 3 = 7$

$(4,6): \quad w_4' + C_{46} = 4 + 10 = 14$

Hay un empate en el valor mínimo:

$$w_1' + C_{13} = 7 \qquad y \qquad w_4' + C_{43} = 7$$

ambos llevan al nodo 3, de manera que éste se debe etiquetar con $w_3' = 7$. Este empate indica que hay dos formas, igualmente cortas, de llegar al nodo 3 desde el nodo 1.



$X = \{1, 2, 3, 4\}$ $\bar{X} = \{5, 6\}$

los arcos en $(X,\bar{X})$ son:
(2,5), (3,5) y (4,6).

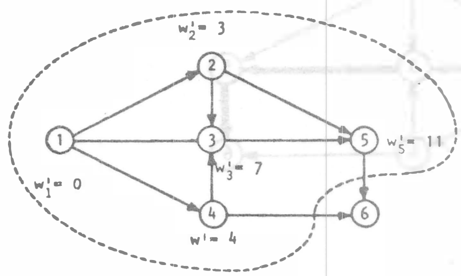
Para ellos se calcula $w_i' + C_{ij}$

(2,5) : $w_2' + C_{25} = 3 + 9 = 12$

(3,5) : $w_3' + C_{35} = 7 + 4 = 11$

(4,6) : $w_4' + C_{46} = 4 + 10 = 14$

el valor mínimo es para $w_3' + C_{35} = 11 = w_p' + C_{pq} = w_q'$ o sea que se etiqueta el nodo $q = 5$ con $w_5' = 11$.



$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\bar{X} = \{6\}$

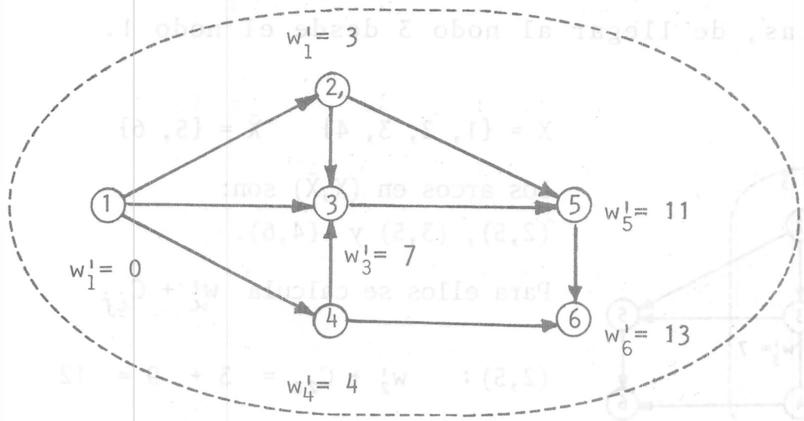
los arcos en $(X,\bar{X})$ son:
(5,6) y (4,6).

Para ellos se calcula $w_i' + C_{ij}$

(5,6) : $w_5' + C_{56} = 11 + 2 = 13$

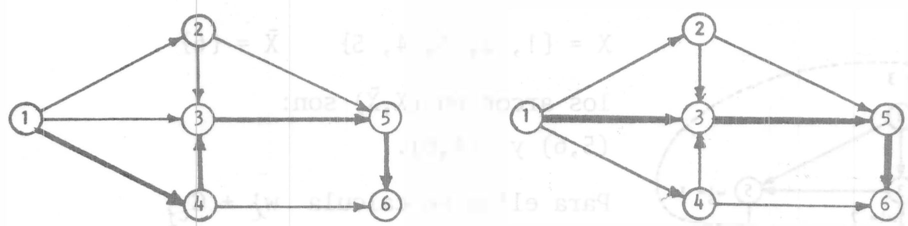
(4,6) : $w_4' + C_{46} = 4 + 10 = 14$

el valor mínimo es $w_5' + C_{56} = 13 = w_p' + C_{pq} = w_q'$, de manera que se etiqueta el nodo $q = 6$ con $w_6' = 13$.



$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $X = \{ \emptyset \}$. Como ya se etiquetó el nodo 6, se tiene la ruta más corta del 6, que vale 13.

Hay dos posibles rutas, las cuales son:



El nodo predecesor para ir a uno cualquiera q, es el nodo p, esto se observa al etiquetar $w'_q = w'_p + C_{pq}$. Por ejemplo en la última red $w'_6 = w'_5 + C_{56}$, es decir, se llega a 6 a través del nodo $p = 5$. En la penúltima red se tiene que $w'_5 = w'_3 + C_{35}$, o sea que se llega a $q = 5$ desde $p = 3$ y así sucesivamente.

V.6. Ruta crítica

Ruta crítica

Prácticamente cualquier empresa en la que puede laborar un ingeniero se enfrenta con el problema de planear, organizar y controlar proyectos a gran escala y que, generalmente, se realizan una sola vez. El éxito del proyecto depende de muchos factores, uno de los cuales es la información que se puede obtener de las actividades que lo componen. Esta información permite responder a algunas preguntas como son:

Información que proporciona la ruta crítica

a. ¿Cuándo se terminará el proyecto?

b. ¿Cuáles son las actividades que más influyen en la terminación del proyecto?

c. ¿Cuándo se pueden comenzar lo más temprano posible, y terminar, también lo más temprano posible, las actividades del proyecto?

d. ¿Cuál es el último tiempo en el que se pueden comenzar y terminar las actividades, sin que se retrase el proyecto?

e. ¿Cuánto tiempo se puede retrazar una actividad sin retrazar todo el proyecto?

Estas preguntas se pueden responder utilizando el método de la ruta crítica.

Actividad crítica

El método permite determinar si una actividad del proyecto es *CRITICA*, es decir, si una demora en su comienzo causará una demora en la fecha de terminación del proyecto. Si la actividad no es crítica, tendrá un tiempo de holgura, es decir, se puede demorar.

La *RUTA CRITICA* es una cadena de actividades críticas que conecta al nodo inicial con el nodo final, en la red que representa al proyecto.

El *METODO PARA CALCULAR LA RUTA CRITICA DE UN PROYECTO* consta de los siguientes pasos:

Método para calcular la ruta crítica

1. Conocer el proyecto al cual se aplicará el método de la ruta crítica.

2. Listar las actividades de este proyecto.

3. Construir la matriz de secuencias.

4. Construir la red de actividades.

5. Numerar los nodos de la red.

6. Determinar la duración de las actividades.

7. Calcular el tiempo de comienzo más próximo.

8. Calcular el tiempo de terminación más lejano.

9. Calcular la holgura total.

10. Calcular la ruta crítica.

Se mostrará el método con el siguiente ejemplo:

Ejemplo

1. Conocer el proyecto al cual se aplicará el método de la ruta crítica:

   La construcción de una casa

Lista de actividades

2. Listar las actividades de éste proyecto:

   a. Excavación para los cimientos
   b. Cimentación
   c. Levantar paredes
   d. Albañilería exterior
   e. Albañilería interior y plomería
   f. Enyesado de paredes
   g. Acabado de pisos
   h. Pintura interior
   i. Acabado interior
   j. Tendido de techos
   k. Herrería
   l. Pintura exterior
   m. Acabados exteriores
   n. Instalación eléctrica

3. Construir la matriz de secuencias. En esta matriz se indican:

Matriz de secuencias

   a. Qué actividades deben seguir inmediatamente a una actividad.
   b. Qué actividades deben terminarse antes de que esta actividad pueda comenzar.
   c. Qué actividades deben efectuarse simultáneamente con esta actividad.

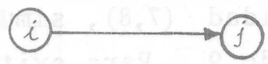
Actividad	Secuencia
inicio	a
a	b
b	c
c	j, n, d
d	e, k
e	f
f	g, h
g	i
h	i
i	final
j	e, k
k	l
l	m
m	final
n	f

Con esta matriz se puede construir la red de actividades.

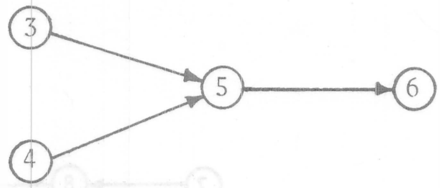
Red de actividades

4. Construir la red de actividades. Todo proyecto se puede representar como una red, en donde los arcos dirigidos serán las actividades, y los nodos indican el principio y el fin de cada actividad. De manera que se puede hacer referencia a una actividad mencionando su nodo inicial y su nodo final.

La representación típica de una actividad (i,j) es:



que indica que se inicia en el nodo i y termina en el nodo j. La red también muestra la secuencia de las las actividades, es decir, el orden en que se deben realizar. Por ejemplo, la figura:



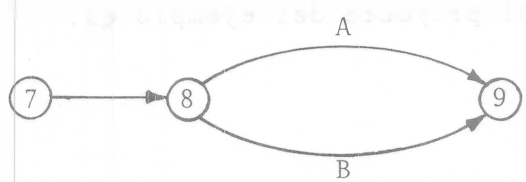
indica que las actividades (3,5) y (4,5) se deben terminar antes de que se pueda iniciar la actividad (5,6).

Las reglas para construir la red que representa el proyecto son:

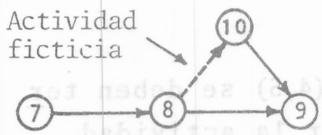
Reglas para la construcción de la red de actividades

a. Cada actividad está representada por un y solamente un arco en la red. No se puede representar una misma actividad dos veces en la red.

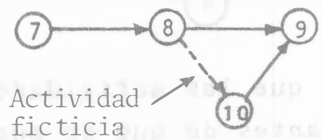
b. Dos actividades diferentes no pueden identificarse por el mismo nodo inicial y el mismo nodo final. Esta situación puede surgir cuando dos actividades deben realizarse simultáneamente

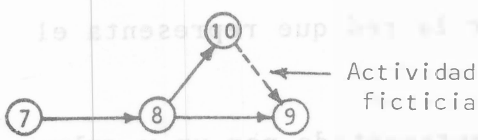


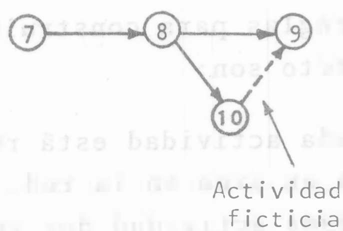
Por ejemplo, las actividades A y B pueden realizarse al terminar la actividad (7,8), simultáneamente. Ambas terminan en el nodo 9. Para evitar confusiones, se introduce una actividad ficticia al principio o al final de alguna de las actividades. Esta actividad ficticia se introduce para la construcción de la red y no tiene ningún significado, no consume ningún recurso del proyecto. La representación sería:



ó

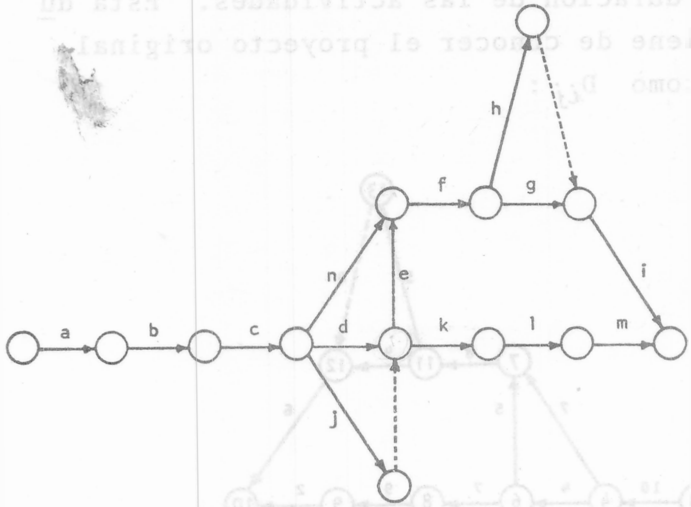






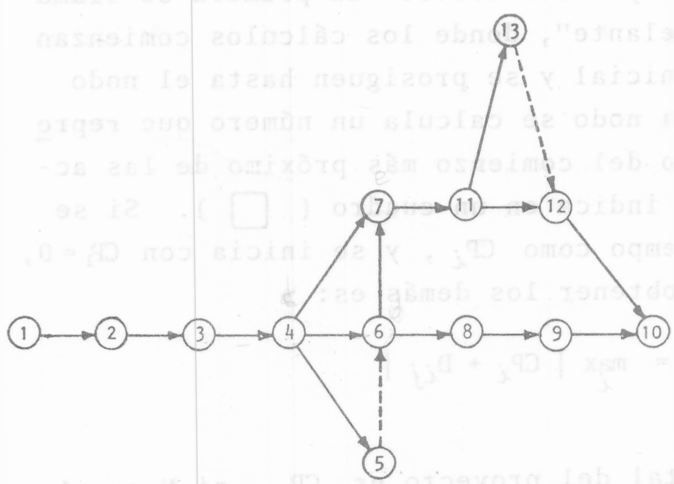
Se puede observar que en todos los casos se conserva la secuencia lógica de las actividades.

La red para el proyecto del ejemplo es:

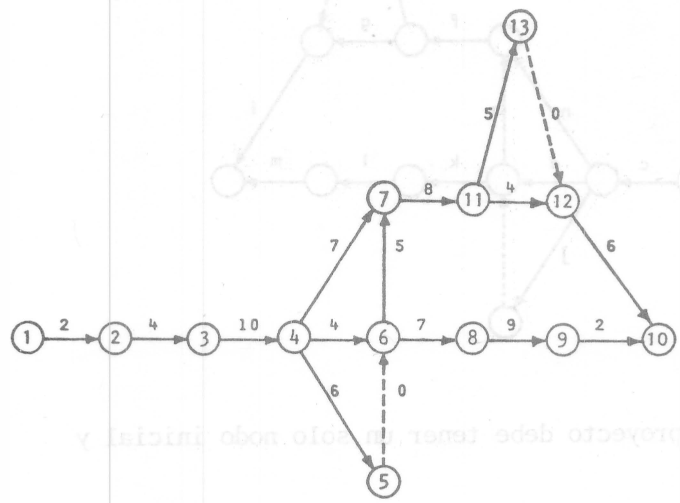


Nota: Toda la red de un proyecto debe tener un solo nodo inicial y un solo nodo final

5. Numerar los nodos de la red. Esto permite identi car a las actividades como actividad (i,j):



6. Determinar la duración de las actividades. Esta duración se obtiene de conocer el proyecto original, y se denotan como D_{ij} :

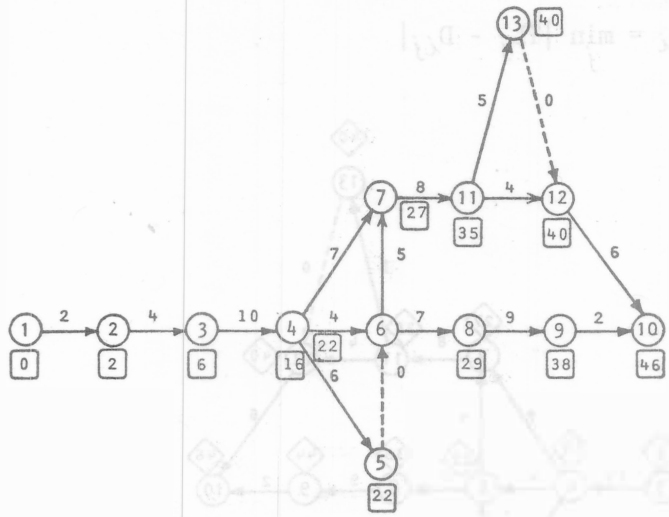


Tiempo de comienzo más próximo

7. Calcular el tiempo de comienzo más próximo. De aquí en adelante comienzan los cálculos de la ruta crítica, los cuales incluyen dos fases. La primera se llama "Paso hacia adelante", donde los cálculos comienzan dede el nodo inicial y se prosiguen hasta el nodo final. En cada nodo se calcula un número que representa el tiempo del comienzo más próximo de las actividades. Se indica en un cuadro ($\square$). Si se denota este tiempo como CP_i , y se inicia con $CP_1 = 0$, la forma para obtener los demás es:

$$CP_j = \max_i \mid CP_i + D_{ij} \mid$$

La duración total del proyecto es CP_N , si N es el nodo final de la red:



Por ejemplo:

$$CP_2 = \max_i |CP_1 + D_{12}| = \max_i |0 + 2| = \max_i | 2 | = 2$$

$$CP_6 = \max_i |CP_4 + D_{46} \; ; \; CP_5 + D_{56}| = \max_i |16 + 4 \; ; \; 22 + 0|$$

$$= \max_i |20 \; ; \; 22| = 22$$

$$CP_7 = \max_i |CP_6 + D_{67} \; ; \; CP_4 + D_{47}| = \max_i |22 + 5 \; ; \; 16 + 7|$$

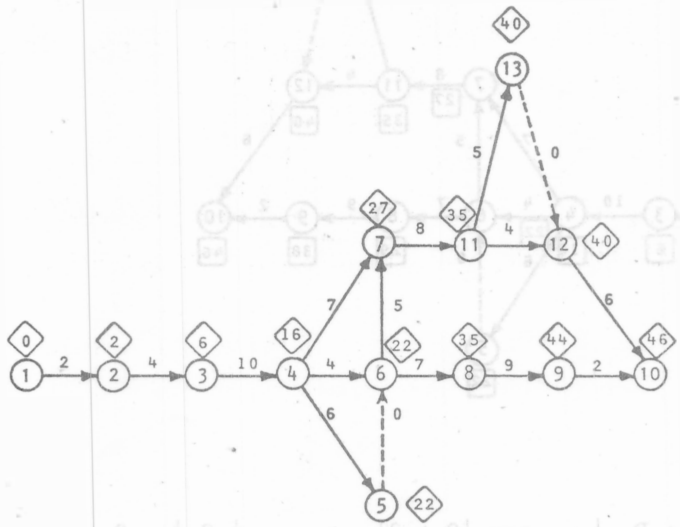
$$= \max_i |27 \; ; \; 23| = 27$$

Tiempo de terminación más lejano

8. Calcular el tiempo de terminación más lejano. En la segunda fase, llamada "Paso hacia atrás", los cálculos se comienzan desde el nodo final y se mueven hacia el inicial. En cada nodo se calcula un número que es el tiempo de terminación más lejano de una actividad, y se indica en un rombo (◇). Si el nodo final de la red es el nodo N, y el tiempo de terminación más lejano se denota como TL_j. Los cálculos comienzan con $TL_N = CP_N$

La fórmula para calcular los demás valores es:

$$TL_i = \min_j |TL_j - D_{ij}|$$



Por ejemplo, los cálculos se iniciaron con:

$$TL_{10} = CP_{10} = 46$$

$$TL_{12} = \min_j |TL_{10} - D_{12,10}| = \min_j |46 - 6| = \min_j |40| = 40$$

$$TL_{13} = \min_j |TL_{12} - D_{13,12}| = \min_j |40 - 0| = \min_j |40| = 40$$

$$TL_{11} = \min_j |TL_{13} - D_{11,13} ; TL_{12} - D_{11,12}|$$

$$= \min_j |40 - 5 ; 40 - 4| = \min_j |35 ; 36| = 35$$

$$TL_4 = \min_j |TL_7 - D_{4,7} ; TL_6 - D_{4,6} ; TL_5 - D_{4,5}|$$

$$= \min_j |27 - 7 ; 22 - 4 ; 22 - 6|$$

$$= \min_j |20 ; 18 ; 16| = 16$$

9. Calcular la holgura total. Antes de calcular la holgura total, se deben definir dos nuevos tiempos, el tiempo de inicio más lejano CL_{ij} y el tiempo de terminación más temprano TP_{ij}, los cuales se calculan, para una actividad (i,j) con las siguientes fórmulas: Holgura total

$$CL_{ij} = TL_j - D_{ij} \qquad\qquad TP_{ij} = CP_i - D_{ij}$$

Existen dos tipos de holgura: la holgura total (HT_{ij}) y la holgura libre, (HL_{ij}). La holgura total HT_{ij} para la actividad (i,j), es la diferencia entre el máximo tiempo disponible para realizar la actividad $(TL_j - CP_i)$ y su duración, es decir:

$$HT_{ij} = TL_j - CP_i - D_{ij}$$

Toda aquella actividad que tenga holgura total igual a cero se dice que es una actividad crítica y queda por lo tanto dentro de la ruta crítica.

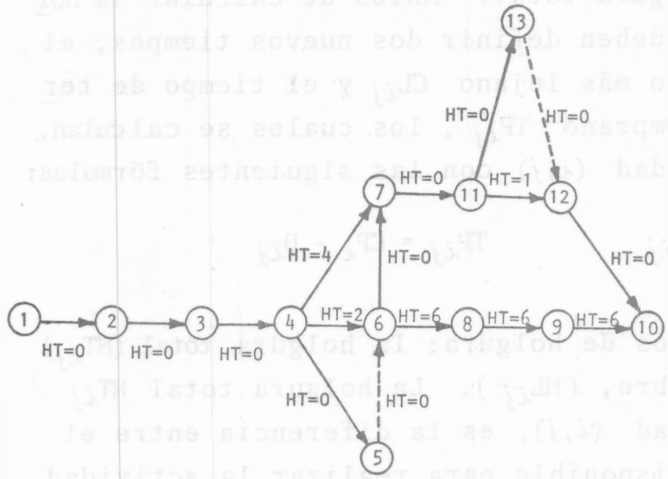
La holgura libre HL_{ij} se define como

$$HL_{ij} = CP_j - CP_i - D_{ij}$$

es decir es el exceso de tiempo disponible menos la duración de la actividad.

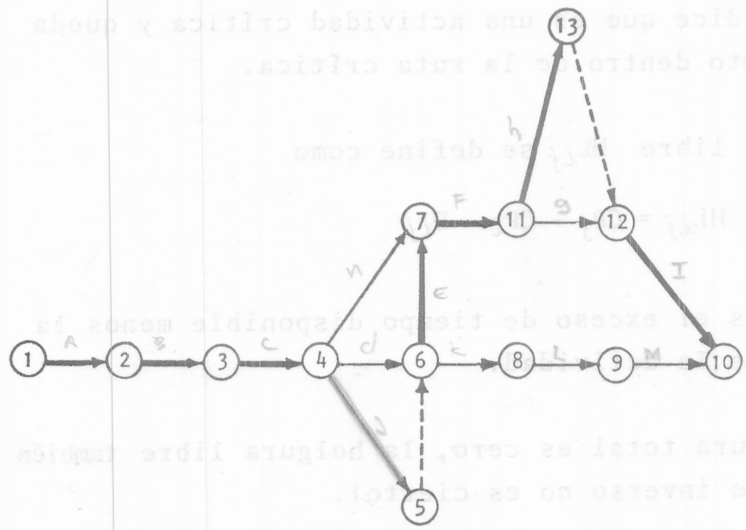
Si la holgura total es cero, la holgura libre también es cero (lo inverso no es cierto).

Para el ejemplo que se está desarrollando se tiene que:



10. Calcular la ruta crítica. Todas las actividades con holgura total igual a cero se encuentran dentro de la ruta crítica.

Cálculo de la ruta crítica



La siguiente tabla resume todos los cálculos necesarios para determinar la ruta crítica.

COMPUTACIONES DE LA RUTA CRITICA

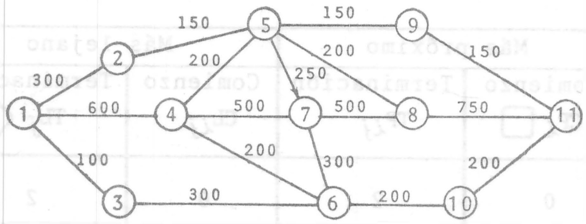
Actividad (i,j)	Duración D_{ij}	Más próximo Comienzo CP_i □	Más próximo Terminación TP_{ij}	Más lejano Comienzo CL_{ij}	Más lejano Terminación TL_j ◇	Holgura Total HT_{ij}	Holgura Libre HL_{ij}
1,2	2	0	2	0	2	0*	
2,3	4	2	6	2	6	0*	
3,4	10	6	16	6	16	0*	
4,5	6	16	22	16	22	0*	
4,6	4	16	20	18	22	2	
4,7	7	16	23	20	27	4	
5,6	0	22	22	22	22	0*	
6,7	5	22	27	22	27	0*	
7,11	8	27	35	27	35	0*	
6,8	7	22	29	28	35	6	
8,9	9	29	38	35	44	6	
9,10	2	38	40	44	46	6	
11,12	4	35	39	36	40	1	
11,13	5	35	40	35	40	0*	
12,10	6	40	46	40	46	0*	
13,12	0	40	40	40	40	0*	

*Actividad crítica

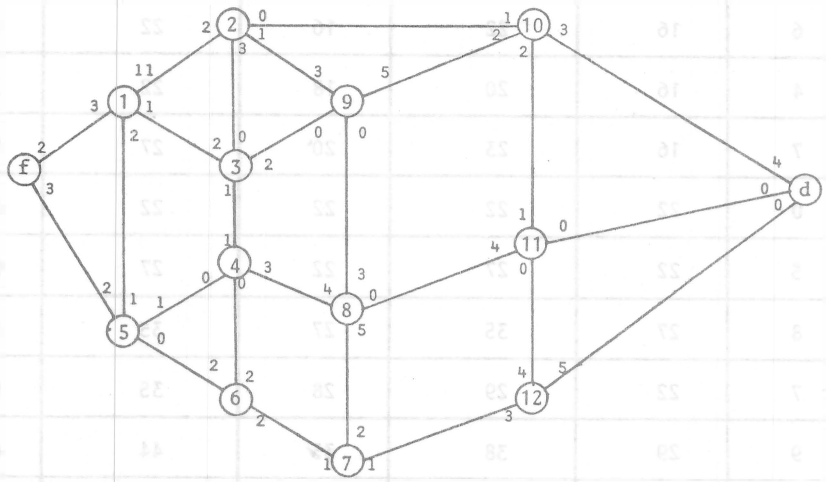
CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I. Resolver los siguientes problemas.

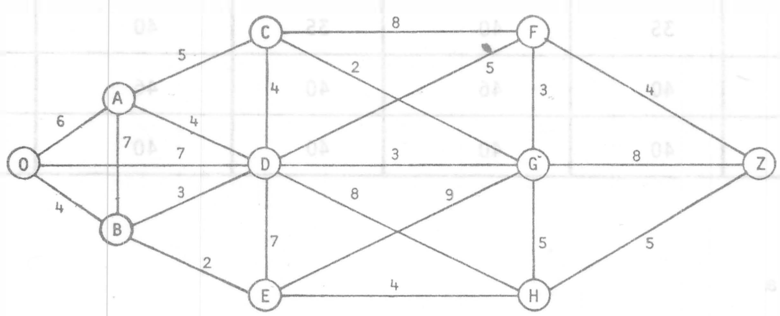
1. Encuentre el flujo máximo del nodo 1 al nodo 11



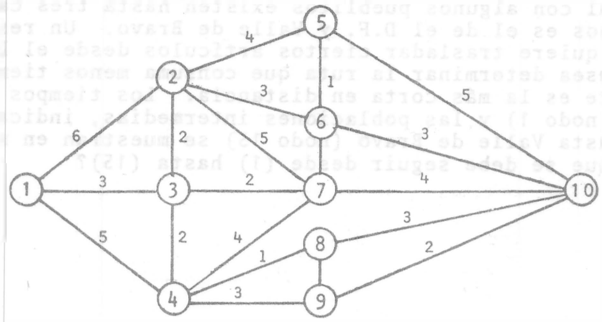
2. Encuentre el flujo máximo de la siguiente red entre el nodo f y el nodo d.



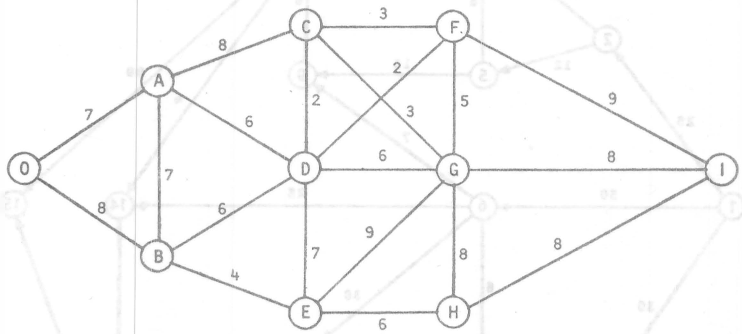
3. Encuentre al árbol de mínima expansión para la red mostrada a continuación:



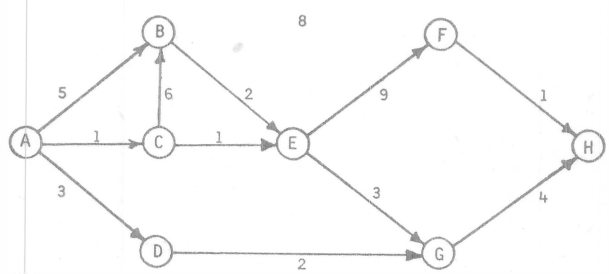
4. Determine el árbol de mínima expansión de la red mostrada en la figura.



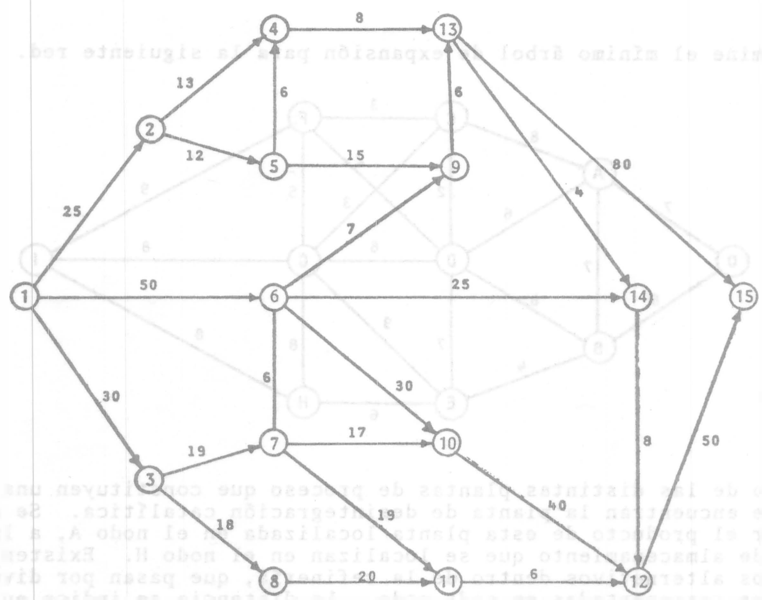
5. Determine el mínimo árbol de expansión para la siguiente red.



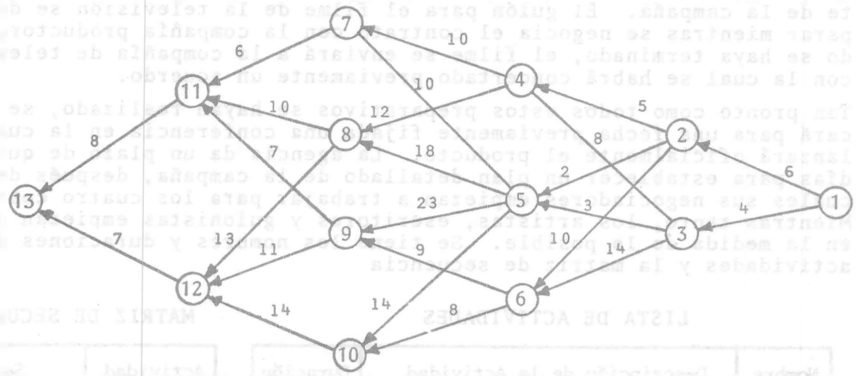
6. Dentro de las distintas plantas de proceso que constituyen una refinería se encuentran la planta de desintegración catalítica. Se quiere enviar el producto de esta planta localizada en el nodo A, a los tanques de almacenamiento que se localizan en el nodo H. Existen varios caminos alternativos dentro de la refinería, que pasan por diversas plantas representadas en cada nodo. La distancia se indica en kilómetros y se desea saber cuál es el camino más corto entre la planta de desintegración catalítica y el área de almacenamiento.



7 En México se da el caso de que para unir dos ciudades importantes, no existe más que una carretera en regular estado, sin embargo, para unir la capital con algunos pueblitos existen hasta tres carreteras. Uno de estos casos es el de el D.F. y Valle de Bravo. Un residente de Valle de Bravo quiere trasladar ciertos artículos desde el D.F. a Valle de Bravo, desea determinar la ruta que consuma menos tiempo, que no necesariamente es la más corta en distancia. Los tiempos promedios entre el D.F. (nodo 1) y las poblaciones intermedias, indicadas en los demás nodos, hasta Valle de Bravo (nodo 15) se muestran en minutos. ¿Cuál es la ruta que se debe seguir desde (1) hasta (15)?



8 Durante el siglo pasado el viajar en diligencia a cualquier punto de la República era una verdadera hazaña. Y un verdadero milagro que alguna llegara a su destino sin haber sido asaltada, de manera que los pasajeros o se dejaban asaltar, o tomaban las medidas adecuadas para defenderse. Cuando se trataba de gente adinerada tenían la posibilidad de contratar una escolta o bien de pagar protección a los bandidos, los cuales estaban tan bien organizados que tenían sus tarifas de acuerdo al trayecto. Un viajero que se trasladara de Veracruz a México tenía varios caminos alternativos cada uno con sus diferentes cuotas según se muestra en la figura



¿Que camino se debería seguir para ir de Veracruz (nodo 1) a México (nodo 13) al menor costo?

9. Obtenga la red de actividades y la ruta crítica del siguiente proyecto:

Una agencia está planeando una campaña de publicidad para el lanzamiento de un producto nuevo, en la que utilizará murales, televisión y periódicos. Las ilustraciones para los anuncios en los periódicos deberán dibujarse mientras se escribe el texto que las acompañará, y cuando ambos estén listos se preparará media tonelada de clichés tipográficos. Los clichés se enviarán a los periódicos, pero solamente después de haber negociado el contrato. Finalizará entonces esta parte del trabajo.

El anuncio mural debe diseñarse e imprimirse, después de lo cual se distribuirá, mediante un contrato satisfactorio, completando así esta parte de la campaña. El guión para el filme de la televisión se debe preparar mientras se negocia el contrato con la compañía productora. Cuando se haya terminado, el filme se enviará a la compañía de televisión, con la cual se habrá concertado previamente un acuerdo.

Tan pronto como todos estos preparativos se hayan realizado, se convocará para una fecha previamente fijada una conferencia en la cual se lanzará oficialmente el producto. La agencia da un plazo de quince días para establecer un plan detallado de la campaña, después de los cuales sus negociadores empiezan a trabajar para los cuatro contratos. Mientras tanto, los artistas, escritores y guionistas empiezan su tarea en la medida de lo posible. Se tiene los nombres y duraciones de las actividades y la matriz de secuencia

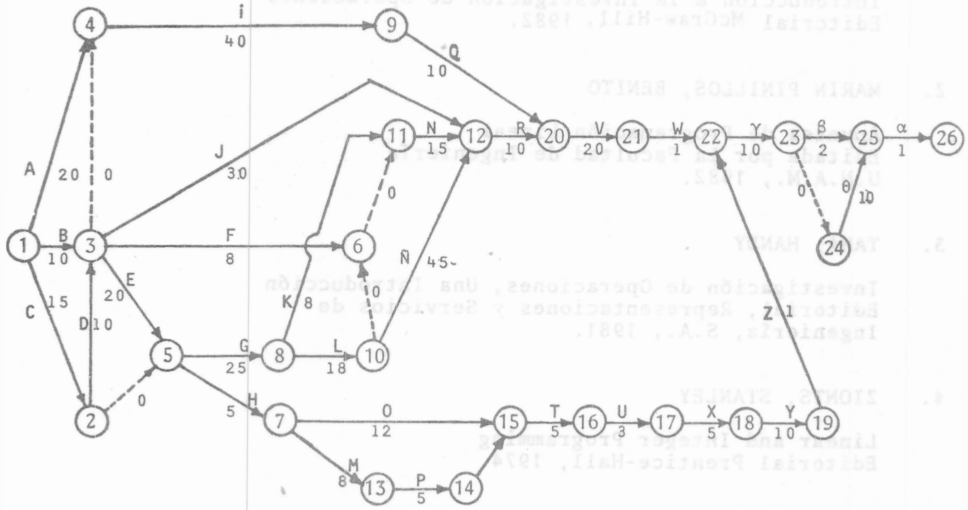
LISTA DE ACTIVIDADES

Nombre	Descripción de la Actividad	Duración
A	plan de la campaña	2
B	fecha de lanzamiento	17
C	prensa: redacción del texto	4
D	prensa: ilustración	4
E	prensa: contrato	3
F	carteles: diseño	8
G	carteles: contrato	3
H	T.V. : redacción del guión	3
I	T.V. : contrato para la producción de la película	4
J	T.V. : contrato para la exhibición de la película	3
K	prensa: confección de las planchas tipográficas	2
L	prensa: envío de la planchas a los diarios	1
M	carteles: impresión	1
N	carteles: distribución	1
O	T.V. : realización de la película	6
P	T.V. : envío de la película a la emisora	1
Q	preparación de la conferencia	4

MATRIZ DE SECUENCIA

Actividad	Secuencia
Inicio	A
A	E,D,C,J,H,I,F,G,B
B	final
C	K
D	K
E	L
F	M
G	N
H	O
I	O
J	P
K	L
L	Q
M	N
N	Q
O	P
P	Q
Q	final

10. Obtenga la ruta crítica del siguiente proyecto, las duraciones se muestran sobre cada actividad.



BIBLIOGRAFIA

1. HILLIER, FREDERIC Y LIEBERMAN, GERALD

   Introducción a la Investigación de Operaciones
   Editorial McGraw-Hill, 1982.

2. MARIN PINILLOS, BENITO

   Apuntes de Programación Lineal
   Editada por la Facultad de Ingeniería
   U.N.A.M., 1982.

3. TAHA, ANDY

   Investigación de Operaciones, Una Introducción
   Editorial, Representaciones y Servicios de
   Ingeniería, S.A., 1981.

4. ZIONTS, STANLEY

   Linear and Integer Programming
   Editorial Prentice-Hall, 1974

EXAMEN DE AUTOEVALUACION

1. Definir el concepto de sistema y explicar brevemente por qué es importante adoptar el enfoque sistemático en el estudio de las organizaciones.

2. Formular el modelo matemático del siguiente problema: Una compañía usa dos ingredientes para obtener un producto final. Estos ingredientes son el A y el B. El A contiene 7% de fosfato y 3% de cloro y cuesta $ 25.00 cada onza. El B contiene 9% de fosfato y 2% de cloro y cuesta $ 20.00 por onza. La compañía desea que el producto final contenga no más de 8% de fosfato y 3% de cloro. El objetivo es minimizar el costo total.

3. Encontrar por medio del método gráfico la solución óptima del siguiente modelo matemático.

$$\begin{array}{lrl} \text{Max} & z = & 5x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeto a} & & 12x_1 + 8x_2 \leq 96 \\ & & 6x_1 + 12x_2 \leq 72 \\ & & x_1 \geq 2 \\ & & x_1 \geq 0 \\ & & x_2 \geq 2 \end{array}$$

4. Resolver por el método Simplex el siguiente problema:

$$\begin{array}{lrl} \text{Maximizar} & z = & 0.45x_1 + 0.30x_2 \\ \text{sujeto a} & & 2x_1 + x_2 \leq 1{,}000 \\ & & x_1 + x_2 \leq 800 \\ & & x_1 \leq 400 \\ & & x_2 \leq 700 \\ & & x_1 \geq 0 \\ & & x_2 \geq 0 \end{array}$$

5. Resolver el siguiente problema usando el método de la gran M y luego dé la solución dual del tableau óptimo

$$\begin{array}{lrl} \text{Maximizar} & z = & 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a} & & x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30 \\ & & x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

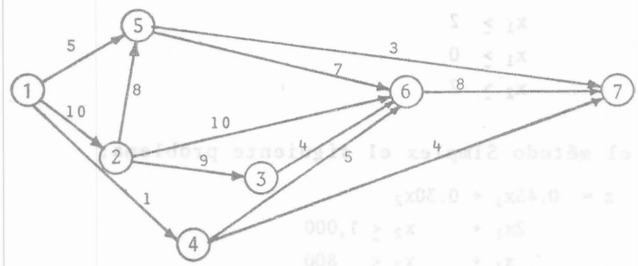
6. Formular el dual del siguiente problema primal:

$$\begin{array}{lrl} \text{Minimizar} & z = & 10x_1 + 15x_2 \\ \text{sujeto a} & & 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ & & x_1 + x_2 = 8 \\ & & 0.5x_1 - 3x_2 \leq 0 \\ & & x_1 \geq 0 \ , \quad x_2 \text{ no restringida} \end{array}$$

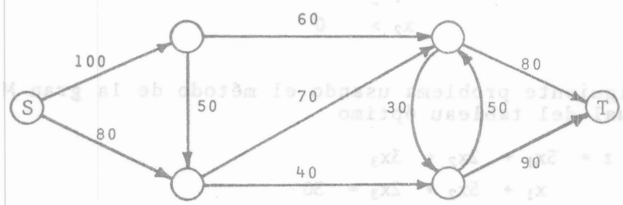
7. Encontrar la solución óptima del siguiente problema de transporte:

		Destino 1	2	3	4	Oferta
Origen	1	10	20	5	7	10
	2	13	9	12	8	20
	3	4	15	7	9	30
	4	14	7	1	0	40
	5	3	12	5	19	50
Demanda		60	60	20	10	

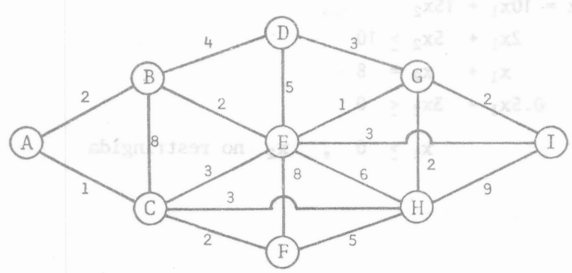
8. Determinar la ruta crítica para:



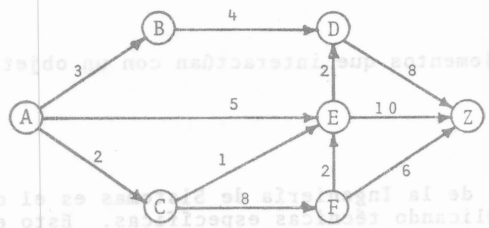
9. Encontrar el flujo máximo del punto S al punto T.



10. Encontrar el mínimo árbol de expansión



11. Encontrar la ruta más corta entre A y Z.



MODULO I:

1. Es el conjunto de elementos que interactúan con un objetivo común.

2. Uno de los objetivos de la Ingeniería de Sistemas es el de resolver problemas concretos aplicando técnicas específicas. Esto es: Proporcionar a la dirección toda la información que sea posible y necesaria para una guía y control del programa general.

3.

Sistema	Entidades	Atributos	Actividades	Medio Ambiente
Supermercado	Clientes	Nivel económico tiempo de compra, importe gastado, etcétera.	Compras	Sistema comercial.
	Cajera	Eficiencia, antigüedad.	Controlar, cobrar.	Sistema económico.
	Carritos	Capacidad, estado físico	Circulación carga de productos.	
	Anaqueles	Disposición, capacidad, etcétera.		
	Mercancía	Precios, marcas, cantidades.		
	Local	Ubicación, capacidad, etcétera.		

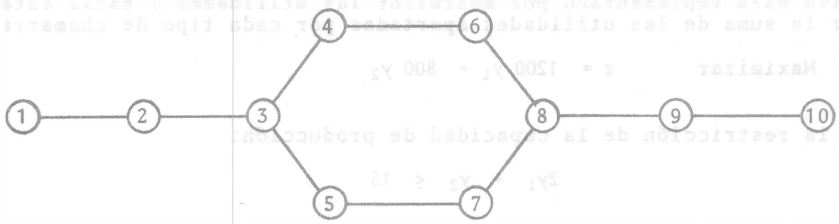
continuo - abierto - estocástico o probabilístico.

Otros sistemas estructuralmente semejantes a este sistema pueden ser: un banco, una oficina de gobierno, una gasolinería, etcétera.

4. a. Presentación del problema.
   b. Construcción de un modelo matemático.
   c. Deducción de una solución usando el modelo,
   d. Comprobación del modelo y de la solución.
   e. Establecimiento de controles sobre la solución.
   f. Aplicación de la solución: proporcionar los medios.

MODULO II.

Sugerencias al problema 3. Existen ocho configuraciones o distribuciones de las entidades del sistema (viejo, perro, gallina y maíz) en cada orilla del río. en los cuales el perro no se comió a la gallina, ni la gallina al maíz por estar con el viejo o por que no se quedan solos estos elementos. Estas configuraciones se representan por puntos y se unen por líneas que representan los viajes:



El punto (1) sería cuando todos están en la orilla izquierda, el punto (2) indica que el perro y el maíz están en la orilla izquierda y el viejo y la gallina en la orilla derecha, de manera que la línea que los une representa el viaje del viejo y la gallina. Así se puede llegar hasta el punto (10) que significa que todos están en la orilla derecha y el problema está resuelto. Con la red se puede determinar el número de viajes necesarios y otras características del problema.

*Recurra a la asesoría.

MODULO III.

1. El problema se resolverá usando el método gráfico definiendo las variables:

   y_1 - Número de chamarras con forro
   y_2 - Número de chamarras sin forro

   El objetivo está representado por maximizar las utilidades y éstas están dadas por la suma de las utilidades aportadas por cada tipo de chamarra:

   Maximizar $z = 1200\, y_1 + 800\, y_2$

   Se tiene la restricción de la capacidad de producción:

   $$2y_1 + y_2 \leq 15$$

   También la restricción de entrega de materia prima:

   $$y_1 + y_2 \leq 9$$

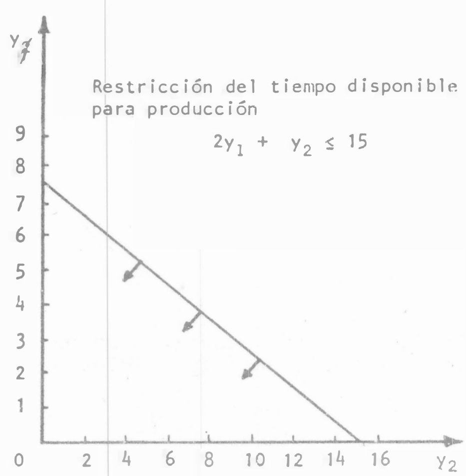
   otras restricciones son las impuestas por la Camara de Industria y Comercio, en relación al número máximo de ventas.

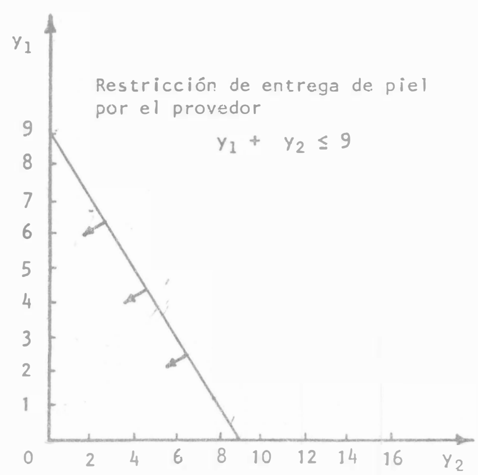
   $$y_1 \leq 6$$
   $$y_2 \leq 13$$

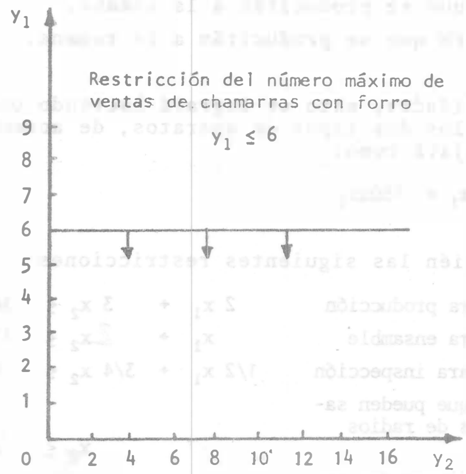
   Por razones físicas se tiene que existen las restricciones de que estas cantidades sean positivas, pues no tendría sentido hablar de números negativos y por lo tanto:

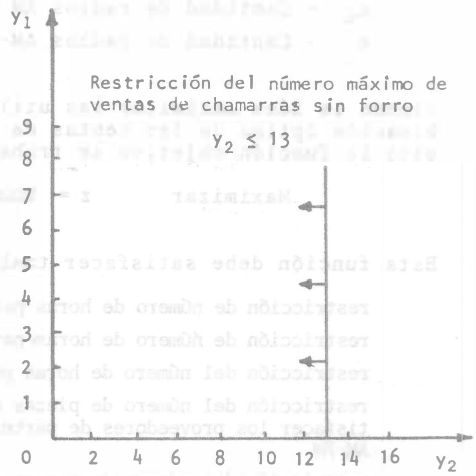
   $$y_1 \geq 0 \ , \ y_2 \geq 0$$

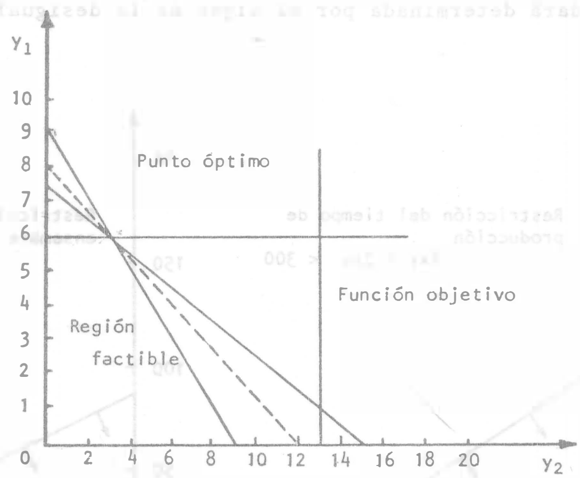
   realizando cada una de las gráficas se tiene:











Como se puede observar la solución óptima será producir 6 chamarras con forro y 3 sin forro y esto maximiza las utilidades las cuales nos dan:

$$1{,}200(6) + 800(3) = 9{,}600.00$$

2. INFORME DE LOS EXPERTOS:

Se definen las siguientes variables:

x_1 - Cantidad de radios AM que se producirán a la semana.

x_2 - Cantidad de radios AM-FM que se producirán a la semana.

Siendo la idea maximizar las utilidades, esto se logrará haciendo una combinación óptima de las ventas de los dos tipos de aparatos, de acuerdo con esto la función objetivo se trabajará como:

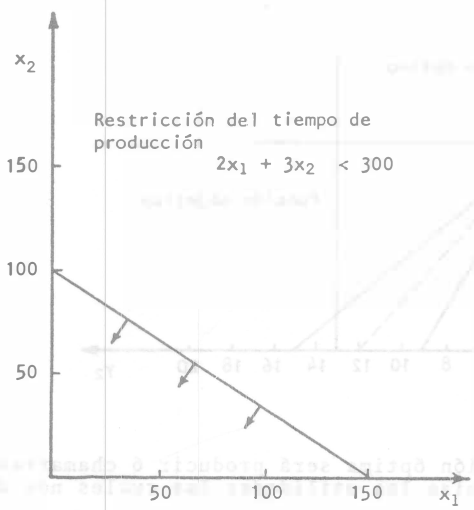
$$\text{Maximizar} \qquad z = 900x_1 + 1500x_2$$

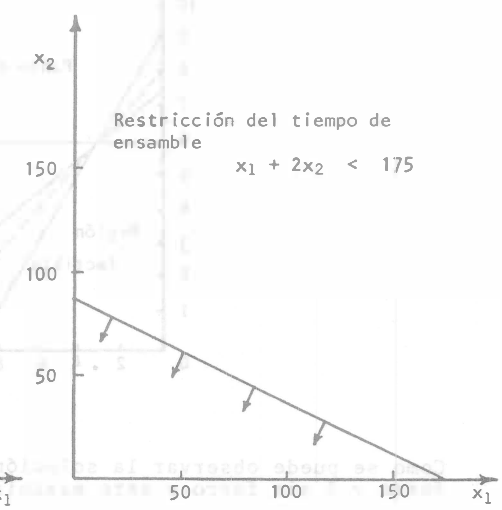
Esta función debe satisfacer también las siguientes restricciones:

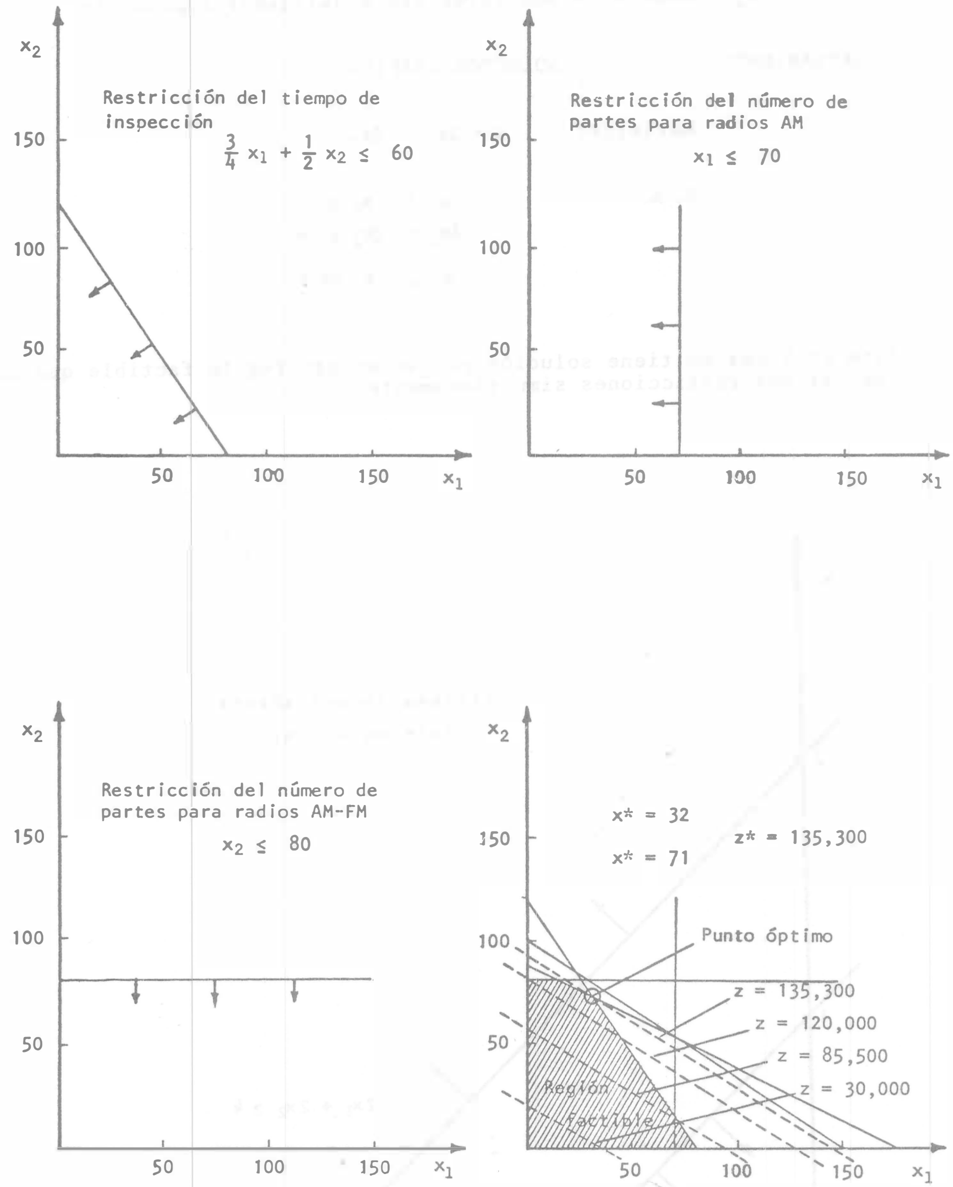
restricción de número de horas para producción	$2x_1 + 3x_2 \leq 300$
restricción de número de horas para ensamble	$x_1 + 2x_2 \leq 175$
restricción del número de horas para inspección	$1/2\, x_1 + 3/4\, x_2 \leq 60$
restricción del número de piezas que pueden satisfacer los proveedores de partes de radios AM-FM	$x_2 \leq 80$
restricción del número de piezas que pueden satisfacer los proveedores de partes de radios AM	$x_1 \leq 70$

Existe otra restricción implícita que es la de que $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ ya que de ser negativas se tendría una incongruencia física, esto es, una antiproducción.

Siendo las ecuaciones desigualdades se tiene que la gráfica se construye para la igualdad, y la región factible quedará determinada por la sección del plano a un lado y otro de la recta que lo corta. Esta región factible quedará determinada por el signo de la desigualdad ya sea $\leq$ ó $\geq$.







La solución óptima es producir 32 radios AM y 71 radios AM-FM a la semana obteniéndose como beneficio máximo $ 135,300

Se puede comprobar que la restricción del tiempo de producción es redundante, es decir, si se elimina del problema no se altera la solución.

3. Se definen:

x_1 - Número de modulares con ecualizador integrado a producir
x_2 - Número de modulares sin ecualizador a producir

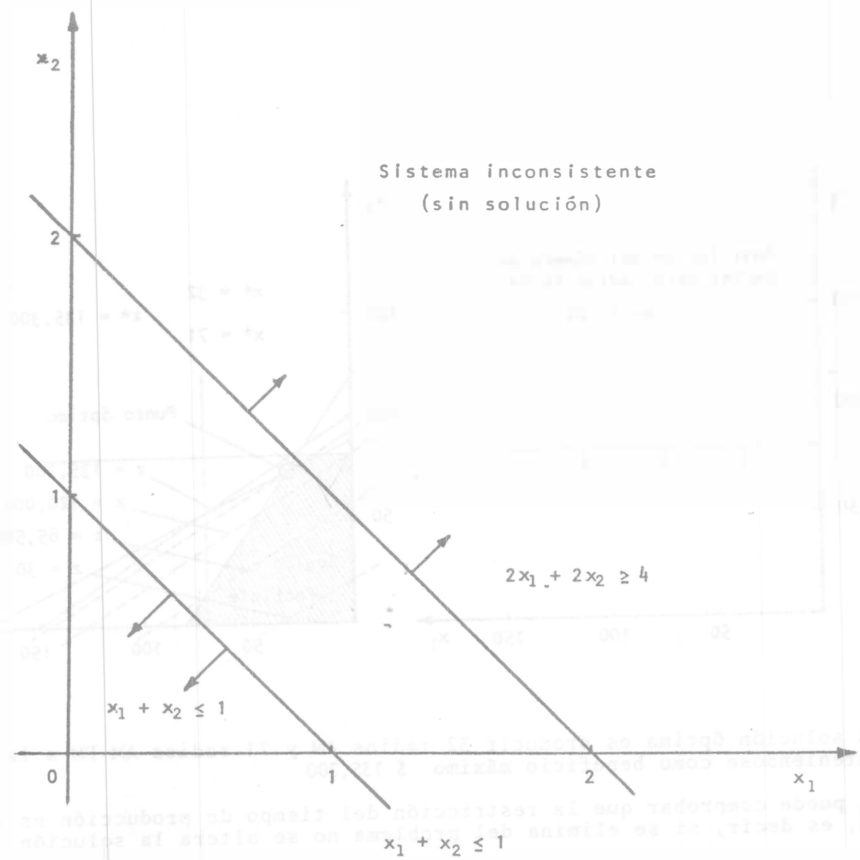
PLANTEAMIENTO SOLUCION GRAFICA

Maximizar $z = 3x_1 - 2x_2$

S. A.

$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$2x_1 + 2x_2 \geq 4$$
$$x_1 , x_2 >> 0$$

Este problema no tiene solución ya que no hay región factible que cumpla con las dos resticciones simultáneamente.



4. Dadas las características del problema se definen las variables de decisión como:

x_1 - Número de períodos de 10 segundos de anuncios en radio

x_2 - Número de períodos de 10 segundos de un comercial en T.V.

El objetivo del taller es maximizar la audiencia total, esta audiencia total está en función de los coeficientes: 12,000 personas por cada comercial de radio y 20,000 personas por comercial en T.V., esto es:

$$\text{Maximizar} \quad z = 12{,}000x_1 + 20{,}000x_2$$

Las restricciones son cuatro;

la primera es la del presupuesto y es:

$$2{,}500x_1 + 5{,}000x_2 \leq 62{,}500$$

la segunda es la del mínimo de mujeres entre 21 y 35 años

$$2{,}000x_1 + 4{,}000x_2 \geq 10{,}000$$

la tercera es en relación a los hombres de más de 40 años

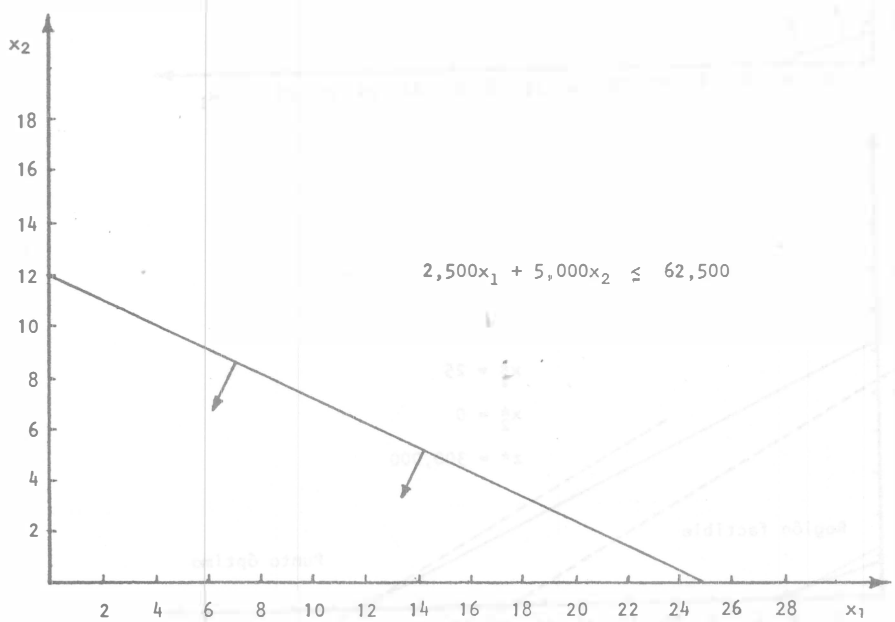
$$1{,}500x_1 + 5{,}000x_2 \geq 8{,}000$$

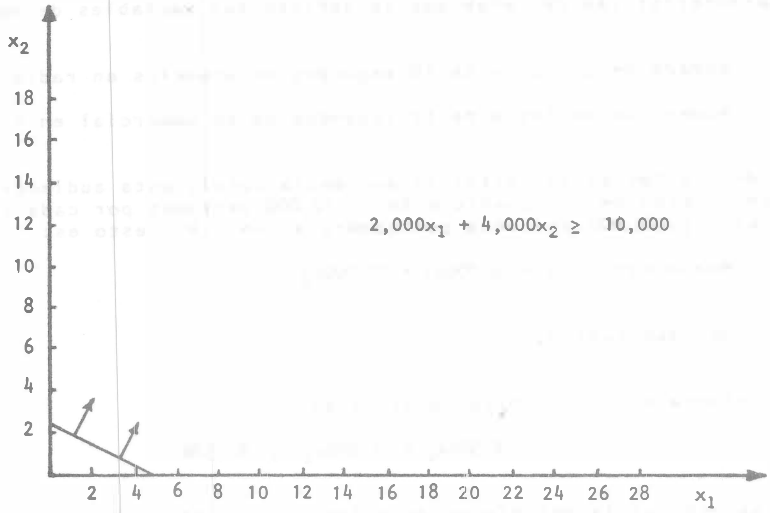
La última restricción es la de no negatividad ya que no tendría mucho sentido que las variables fueran negativas.

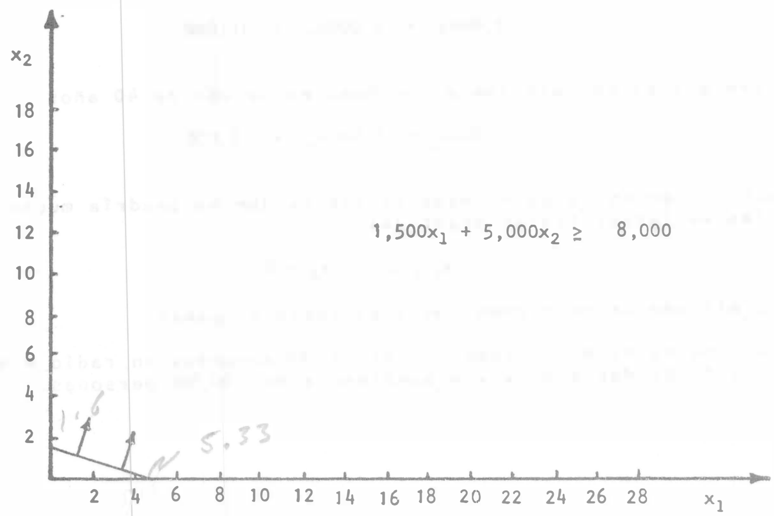
$$x_1 \geq 0 \quad ; \quad x_2 \geq 0$$

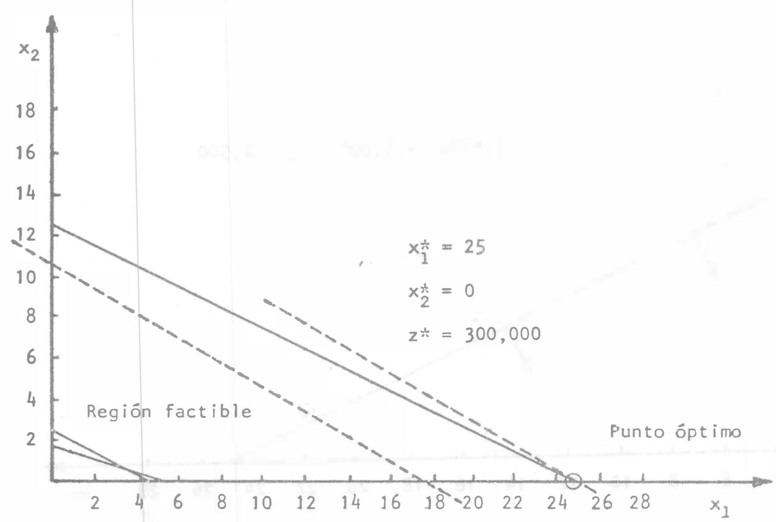
Resolviendo gráficamente se tienen los siguientes esquemas.

La solución óptima es hacer 25 comerciales de 10 segundos en radio y ninguno en televisión produciéndose una aundiencia de 300,000 personas.




x2
18
16
14
12
10
8
6
4
2
2,000x1 + 4,000x2 ≥ 10,000
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28
x1


x2
18
16
14
12
10
8
6
4
2
1,500x1 + 5,000x2 ≥ 8,000
1.6
5.33
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28
x1


x2
18
16
14
12
10
8
6
4
2
x1* = 25
x2* = 0
z* = 300,000
Región factible
Punto óptimo
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28
x1

1. $z^* = 1.86 \times 10^6$

$x_a^* = 6 \times 10^6$

$x_b^* = 4 \quad 10^6$

$x_c^* = 0$

$x_d^* = 0$

$x_e^* = 4 \quad 10^6$

2. $z^* = 16$

$x_1^* = 4$

$x_2^* = 3$

$x_3^* = 8$

$x_4^* = 0$

$x_5^* = 0$

$x_6^* = 9$

3.

		x_1	x_2	x_3	x_4
	16	0	0	1	0
x_2	4	1/2	1	1/2	0
x_4	3	5/2	0	1/2	1

$\min j \quad A_{0j} = +0$

$z^* = 16$

$x_1^* = 0, \; x_2^* = 4, \; x_3^* = 0, \; x_4^* = 8$

En esta tabla uno de los elementos A_{0i} correspondiente a la variable no básica x_1 es cero, esto significa que si x_1 entra a la base, la función objetivo no se altera, es decir, dos soluciones básicas dan el mismo resultado óptimo; hay dos puntos que dan la misma solución óptima y cualquier punto que se encuentre en la recta que los une da la misma solución óptima.

	x_1	x_2	x_3	x_4
16	0	0	2	0
12/5	0	1	2/5	-5/4
16/5	1	0	1/5	5/2

$z^* = 16$

$x^* = 16/5 \qquad x^* = 0$

$x^* = 12/5 \qquad x^* = 0$

4.

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	1	0	-2	1	0
x_3	1	1	-1	1	0
x_4	1	-1	1	0	1

$\downarrow$

z	1	0	-2	1	0
x_1	1	1	-1	1	0
x_4	2	0	0	1	1

Aún hay elementos negativos pero en su columna sólo hay ceros y negativos, de manera que la solución no es acotada.

5. $z^* = \frac{204}{7}$ $\quad y_1^* = 0 , \quad y_2^* = \frac{9}{7} , \quad y_3^* = 0$

$y_4^* = 0 , \quad y_5^* = 0$

6. $z^* = 165$ $\quad y_1^* = \frac{1}{2} . \quad y_2^* = \frac{5}{2} , \quad y_3^* = 0$

$y_4^* = 0 , \quad y_5^* = 0 , \quad y_6^* = \frac{13}{2}$

7. $z^* = 16$ $\quad y_1^* = 2 , \quad y_2^* = 0 , \quad y_3^* = 0$

$y_4^* = 0$

solución óptima degenerada

8. Dual: Minimizar $z = 20y_1 + 6y_2 + 8y_3$

sujeto a:

$$\begin{aligned} 25y_1 + y_2 \quad &\geq 500 \\ 2y_1 \quad + y_3 &\geq 400 \\ y_1 , y_2 , y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

9. Dual: Maximizar $z = -25y_1 + y_2 + y_3$

sujeto a:

$$\begin{aligned} -2y_1 + y_2 + y_3 &\leq 20 \\ -3y_1 + y_2 - y_3 &\leq 10 \\ y \ , y_1 , y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

y_3 no restringida

10. Minimizar $z = 25y_1 - y_2 + y_3$

sujeto a:

$$\begin{aligned} 2y_1 - y_2 + y_3 &\geq 1 \\ 3y_1 - y_2 - 2y_3 &\geq 2 \\ y_1 , y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

y_3 no restringida

MODULO IV

1. a.

Modelo Primal. Para plantear el modelo primal correctamente, es necesario que la oferta y la demanda tengan las mismas unidades, es decir, hablar en ambos casos de toneladas de carbón o Mega-watts. Aquí se tratará como toneladas de carbón. De manera que la demanda en las termoeléctricas será de:

$$(125 \text{ Mwatt}) \left(\frac{1 \text{ Ton de carbón}}{0.5 \text{ Mwatt}}\right) = 250 \text{ Ton de carbón}$$

$$(175 \text{ Mwatt}) \left(\frac{1 \text{ Ton de carbón}}{0.5 \text{ Mwatt}}\right) = 350 \text{ Ton de carbón}$$

$$(300 \text{ Mwatt}) \left(\frac{1 \text{ Ton de carbón}}{1/3 \text{ Mwatt}}\right) = 900 \text{ Ton de carbón}$$

$$(200 \text{ Mwatt}) \left(\frac{1 \text{ Ton de carbón}}{0.25 \text{ Mwatt}}\right) = 800 \text{ Ton de carbón}$$

Se puede observar que la demanda de carbón es de 2,300 Ton, mientras que la oferta es de 1,450 Ton. Como el problema requiere que la oferta sea igual a la demanda, se debe crear un centro de oferta ficticio con costos de transporte y producción iguales a cero que satisfaga el déficit en la oferta. La tabla a partir de la cual se construye el modelo y a la que se le aplica el algoritmo de transporte queda como:

TERMOELECTRICA

MINA	1	2	3	4	Oferta (Ton)
1	15	14	13	12	750
2	19	21	22	18	300
3	27	25	24	24	400
Ficticia	0	0	0	0	850
Demanda (Ton)	250	350	900	800	

Minimizar $z = 15x_{11} + 14x_{12} + 13x_{13} + 12x_{14} + 19x_{21} + 21x_{22} + 22x_{23} + 18x_{24} + 27x_{31} + 25x_{32} + 24x_{33} + 24x_{34}$

sujeto a:

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 750 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 300 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 400 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 850 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 250 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 350 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 900 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 800
\end{aligned}$$

b.

El dual asociado es:

$$\text{Maximizar} \quad z = 750u_1 + 300u_2 + 400u_3 + 850u_4 + 250v_1 + 350v_2 + 900v_3 + 800v_4$$

$$\begin{array}{lll}
\text{sujeto a:} & u_1 + v_1 & \leq 15 \\
& u_1 + v_2 & \leq 14 \\
& u_1 + v_3 & \leq 13 \\
& u_1 + v_4 & \leq 12 \\
& u_2 + v_1 & \leq 19 \\
& u_2 + v_2 & \leq 21 \\
& u_2 + v_3 & \leq 22 \\
& u_2 + v_4 & \leq 18 \\
& u_3 + v_1 & \leq 27 \\
& u_3 + v_2 & \leq 25 \\
& u_3 + v_3 & \leq 24 \\
& u_3 + v_4 & \leq 24 \\
& u_4 + v_1 & \leq 0 \\
& u_4 + v_2 & \leq 0 \\
& u_4 + v_3 & \leq 0 \\
& u_4 + v_4 & \leq 0
\end{array}$$

$u_i \,,\ i = \overline{1,4}$ no restringidas

$v_j \,,\ j = \overline{1,4}$ no restringidas

c.

Solución inicial usando el método de la esquina noroeste

TERMOELECTRICA

MINA	1	2	3	4
1	$\boxed{15}$ 250	$\boxed{14}$ 350	$\boxed{13}$ 150	$\boxed{12}$
2	$\boxed{19}$	$\boxed{21}$	$\boxed{22}$ 300	$\boxed{18}$
3	$\boxed{27}$	$\boxed{25}$	$\boxed{24}$ 400	$\boxed{24}$
Ficticia	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 50	$\boxed{0}$ 800

d.

Solución inicial usando el método de Vogel

TERMOELECTRICA

MINA	1	2	3	4
1	15	14	13 650	12 100
2	19	21	22	18 300
3	27	25	24	24 400
Ficticia	0 250	0 350	0 250	0

e.

Solución óptima

TERMOELECTRICA

MINA	1	2	3	4
1	15	14	13 250	12 500
2	19	21	22	18 300
3	27	25	24 400	24
Ficticia	0 250	0 350	0 250	0

$x_{13} = 250$, $x_{14} = 500$

$x_{24} = 300$

$x_{33} = 400$

$x_{41} = 250$, $x_{42} = 350$, $x_{43} = 250$

$x_{43} = 250$

$$z^* = (250 \times 13) + (500 \times 12) + (300 \times 18) + (400 \times 24) = 24{,}250$$

Los valores asignados en el renglón de la mina ficticia, indican que las termoeléctricas 1 y 2 no van a tener carbón para generar electricidad (al menos de estas 3 minas). La termoeléctrica 3 tendrá un déficit de 250 Ton., pero se le abastecerán 650 Ton., suficientes para que genere 650/3 Megawatt. La termoeléctrica 4 trabajará a toda su capacidad (200 Megawatt) ya que se le abastecerá todo el carbón que necesita.

2. a.

Se define x_{ij} = # de automóviles del garage i al punto j

El modelo Primal queda como:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & z = 5x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 2x_{14} + 10x_{21} + 8x_{22} + 4x_{23} + 7x_{24} + 9x_{31} + 9x_{32} + 8x_{33} + 4x_{34} \\
\text{sujeto a:} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 5 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 5 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 5 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} = 6
\end{aligned}
$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = \overline{1,3} \qquad j = \overline{1,4}$$

b.

El modelo dual queda como:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & z = 5u_1 + 5u_2 + 5u_3 + v_1 + 6v_2 + 2v_3 + 6v_4 \\
\text{sujeto a:} \quad & u_1 + v_1 \leq 5 \\
& u_1 + v_2 \leq 4 \\
& u_1 + v_3 \leq 3 \\
& u_1 + v_4 \leq 2 \\
& u_1 + v_1 \leq 10 \\
& u_1 + v_2 \leq 8 \\
& u_1 + v_3 \leq 4 \\
& u_1 + v_4 \leq 7 \\
& u_1 + v_1 \leq 9 \\
& u_1 + v_2 \leq 9 \\
& u_1 + v_3 \leq 8 \\
& u_1 + v_4 \leq 4
\end{aligned}
$$

u_i , $i = \overline{1,4}$ no restringidas

v_j , $j = \overline{1,4}$ no restringidas c.

Solución inicial con el método de la esquina noroeste

Puntos

	P_1	P_2	P_3	P_4
Garage 1	[5] 1	[4] 4	[3]	[2]
Garage 2	[10]	[8] 2	[4] 2	[7] 1
Garage 3	[9]	[9]	[8]	[4] 5

$x_{11} = 1$, $x_{12} = 4$

$x_{22} = 2$, $x_{23} = 2$, $x_{24} = 1$

$x_{34} = 5$

$z = 5 + 16 + 16 + 8 + 7 + 20 = 72$

d.

Solución inicial con el método de Vogel (una de varias)

Puntos

	P_1	P_2	P_3	P_4
Garage 1	[5]	[4] 5	[3]	[2]
Garage 2	[10] 1	[8] 1	[4] 2	[7] 1
Garage 3	[9]	[9]	[8]	[4] 5

$x_{12} = 5$

$x_{21} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{23} = 2$, $x_{24} = 1$

$x_{34} = 5$

$z = 20 + 10 + 8 + 8 + 7 + 20 = 73$

e.

Solución óptima

Puntos

	P_1	P_2	P_3	P_4
Garage 1	[5] 1	[4] 3	[3]	[2] 1
Garage 2	[10]	[8] 3	[4] 2	[7]
Garage 3	[9]	[9]	[8]	[4] 5

$x_{11} = 1$, $x_{12} = 3$, $x_{14} = 1$

$x_{22} = 3$, $x_{23} = 2$

$x_{34} = 5$

$z^* = 5 + 12 + 2 + 24 + 6 + 20 = 69$

Se envian del Garage 1: un autobús al punto 1
tres autobuses al punto 2
un autobús al punto 4

Se envian del Garage 2: tres autobuses al punto 2
dos autobuses al punto 3

Se envian del Garage 3: cinco autobuses al punto 4

El tiempo total es de 69 minutos.

3. a.

Se define x_{ij} = # de toneladas del fertilizante i a la zona j.

El modelo Primal queda como:

$$\text{Minimizar} \quad z = 2x_{11} + 3x_{12} + x_{12} + 2x_{14} + 3x_{21} + 2x_{22} + 2x_{23} + 4x_{24} + 2x_{31} + x_{32} + x_{33} + 3x_{34}$$

$$\begin{array}{lllllllllllllll}
\text{sujeto a:} & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} & & & & & & & & & & & & = & 3{,}000 \\
 & & x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & & & & & & & & & & & = & 2{,}000 \\
 & & & x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} & & & & & & & & & & = & 3{,}000 \\
 & x_{11} & +x_{21} & +x_{31} & & & & & & & & & & = & 2{,}000 \\
 & x_{12} & +x_{22} & +x_{32} & & & & & & & & & & = & 3{,}000 \\
 & x_{13} & +x_{23} & +x_{33} & & & & & & & & & & = & 1{,}000 \\
 & x_{14} & +x_{24} & +x_{34} & & & & & & & & & & = & 2{,}000
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = \overline{1,3} \qquad j = \overline{1,4}$$

b.

El modelo Dual queda como:

$$\text{Maximizar} \quad z = 3{,}000u_1 + 2{,}000u_2 + 3{,}000u_3 + 2{,}000v_1 + 3{,}000v_2 + 1{,}000v_3 + 2{,}000v_4$$

$$\begin{array}{llll}
\text{sujeto a:} & u_1 + v_1 & \leq & 2 \\
 & u_1 + v_2 & \leq & 3 \\
 & u_1 + v_3 & \leq & 1 \\
 & u_1 + v_4 & \leq & 2 \\
 & u_2 + v_1 & \leq & 3 \\
 & u_2 + v_2 & \leq & 2 \\
 & u_2 + v_3 & \leq & 2 \\
 & u_2 + v_4 & \leq & 4 \\
 & u_3 + v_1 & \leq & 2 \\
 & u_3 + v_2 & \leq & 1 \\
 & u_3 + v_3 & \leq & 1 \\
 & u_3 + v_4 & \leq & 3
\end{array}$$

u_i , $i = \overline{1,3}$ no restringidas

v_j , $j = \overline{1,4}$ no restringidas c.

Solución inicial con el método de la esquina noroeste

		ZONAS			
		X	Y	Z	W
FERTILIZANTES	A	$\boxed{2}$ 2,000	$\boxed{3}$ 1,000	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$
	B	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 2,000	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$
	C	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$ ε	$\boxed{1}$ 1,000	$\boxed{3}$ 2,000

d.

Existen varias soluciones iniciales con el método de Vogel, ya que al calcular la diferencia hay varios empates. Se puede tomar cualquiera. Una de ellas es:

		ZONAS			
		X	Y	Z	W
FERTILIZANTES	A	$\boxed{2}$ ε	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$ 1,000	$\boxed{2}$ 2,000
	B	$\boxed{3}$ 2,000	$\boxed{2}$ ε	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$
	C	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$ 3,000	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$

e.

En la tabla de la solución óptima, hay varios valores de $d_{ij} = 0$, lo que significa que hay soluciones óptimas alternativas. Una de ellas es:

		ZONAS				
		X	Y	Z	W	
FERTILIZANTES	A	$\boxed{2}$ 1,000	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$ 2,000	x_{11}= 1,000, x_{14}= 2,000
	B	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 2,000	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	x_{22}= 2,000
	C	$\boxed{2}$ 1,000	$\boxed{1}$ 1,000	$\boxed{1}$ 1,000	$\boxed{3}$	x_{31}= 1,000, x_{32}= 1,000, x_{33}= 1,000

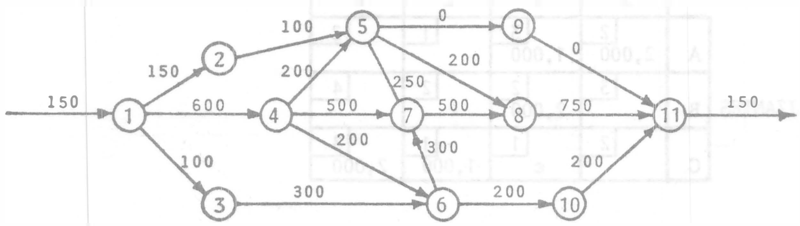
Que implica enviar: 1,000 Ton del fertilizante A a la zona X, y
2,000 Ton a la W.

2,000 Ton del fertilizante B a la zona Y

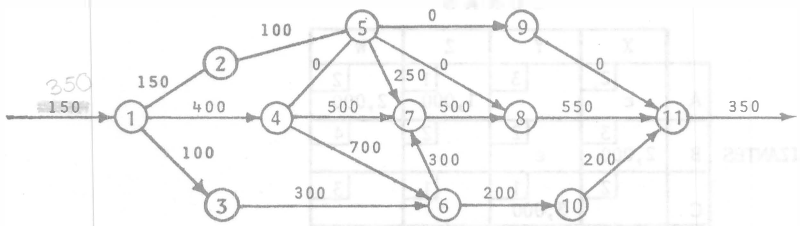
1,000 Ton del fertilizante C a la zona X ,
1,000 Ton a la Y, y
1,000 Ton a la Z

1 Nota: en este ejemplo solo se indican las cantidades C_i sobre los arcos

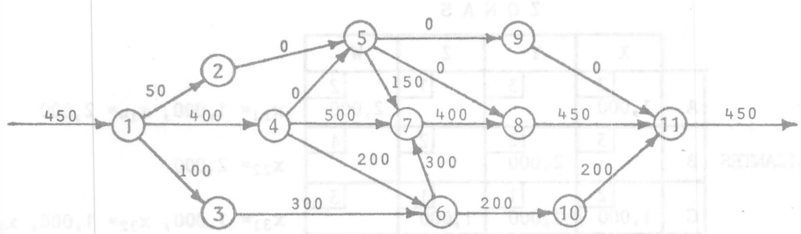
TRAYECTORIA A. 1 - 5 - 9 - 11 C* = 150



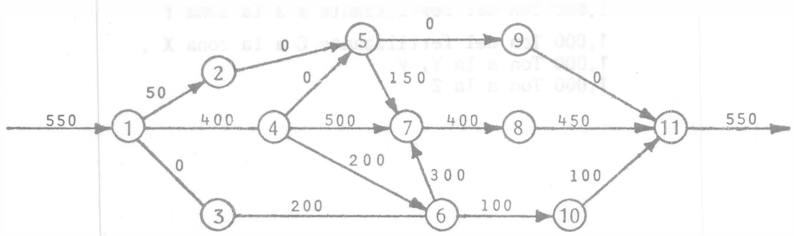
TRAYECTORIA B. 1 - 4 - 5 - 8 - 11 C* = 200



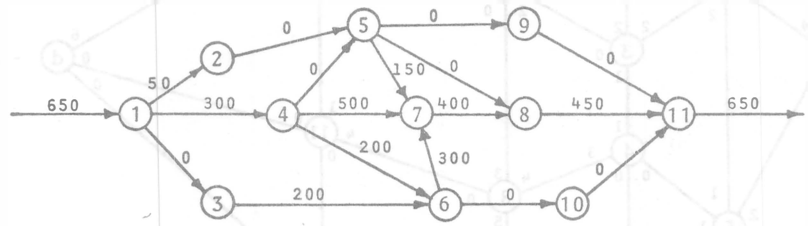
TRAYECTORIA C. 1 - 2 - 5 - 7 - 8 - 11 C* = 100



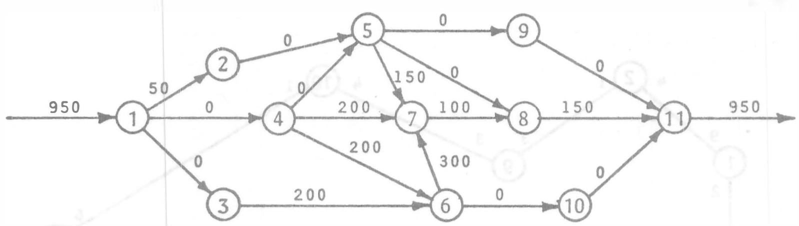
TRAYECTORIA D. 1 - 3 - 6 - 10 - 11 C* = 100



TRAYECTORIA E. 1 - 4 - 6 - 10 - 11 C* = 100



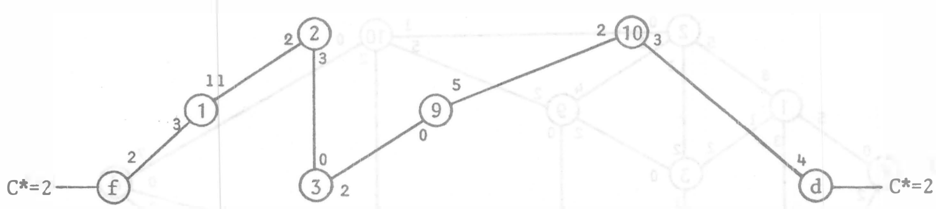
TRAYECTORIA F. 1 - 4 - 7 - 8 - 10 C* = 300



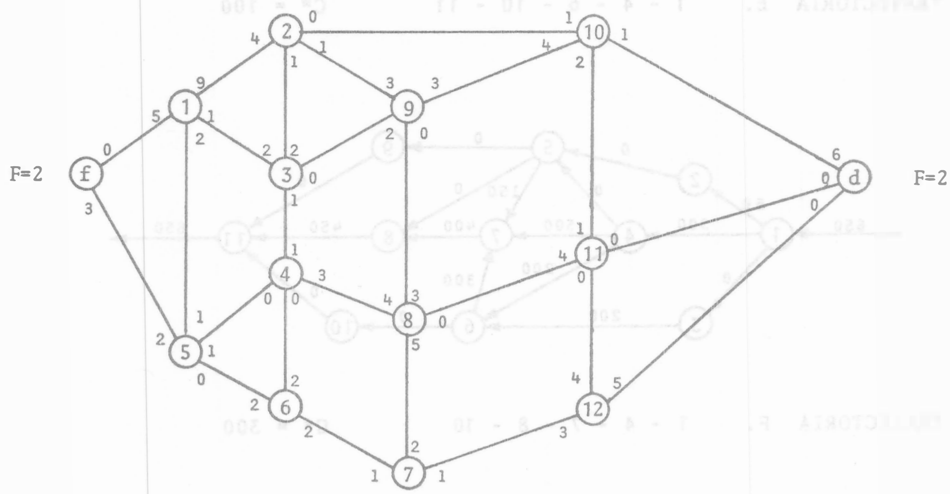
El flujo máximo es 950 unidades.

2. Paso 1 El primer camino con flujo > 0 El flujo es 2

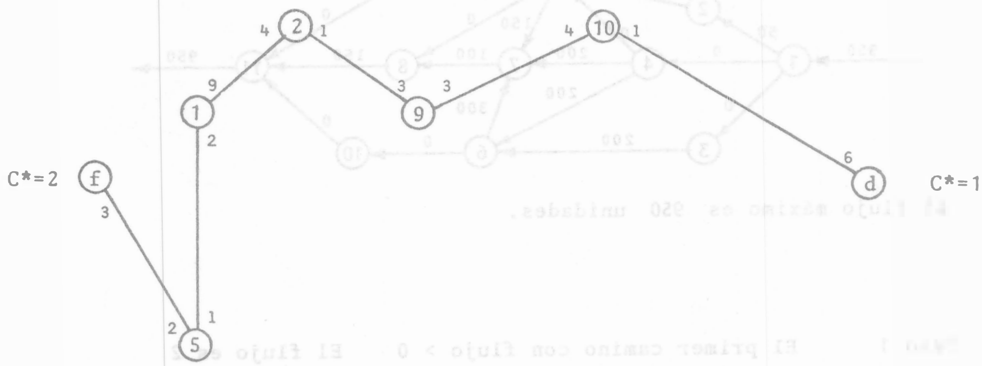
Paso 2



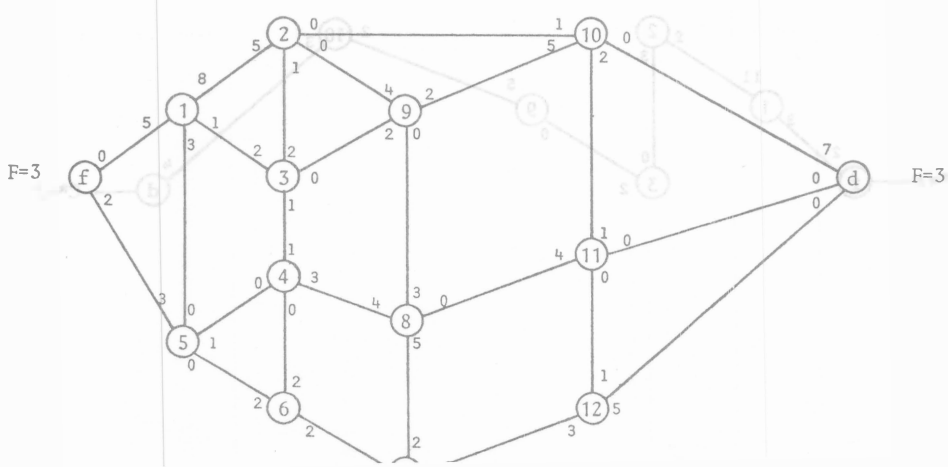
Paso 3



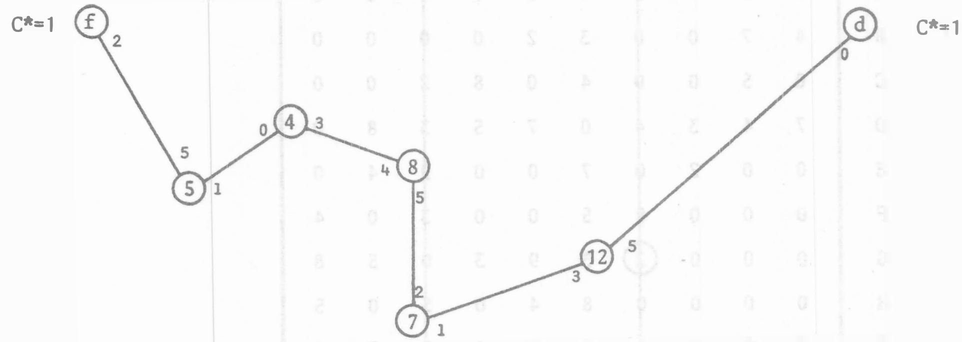
Pasos 1 y 2



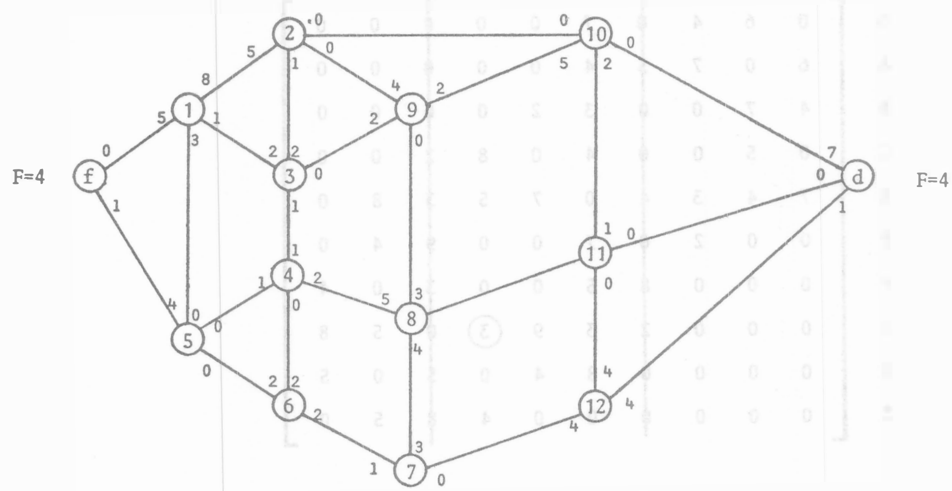
Paso 5



Pasos 1 y 2



Paso 3



Como ya no existe ninguna ruta ε > 0 para llegar a el destino el proceso termina y el flujo encontrado Máximo es $F_{máx} = 4$.

3.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} O & A & B & C & D & E & F & G & H & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} O \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ Z \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 4 & 0 & 7 & 5 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 9 & 3 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} O & A & B & C & D & E & F & G & H & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} O \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ Z \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 4 & 0 & 7 & 5 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 9 & 3 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} O & A & B & C & D & E & F & G & H & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} O \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ Z \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 4 & 0 & 7 & 5 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 9 & 3 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} O & A & B & C & D & E & F & G & H & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} O\\A\\B\\C\\D\\E\\F\\G\\H\\Z \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 4 & 0 & 7 & 5 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 9 & 3 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} O & A & B & C & D & E & F & G & H & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} O\\A\\B\\C\\D\\E\\F\\G\\H\\Z \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 4 & 0 & 7 & 5 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 9 & 3 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

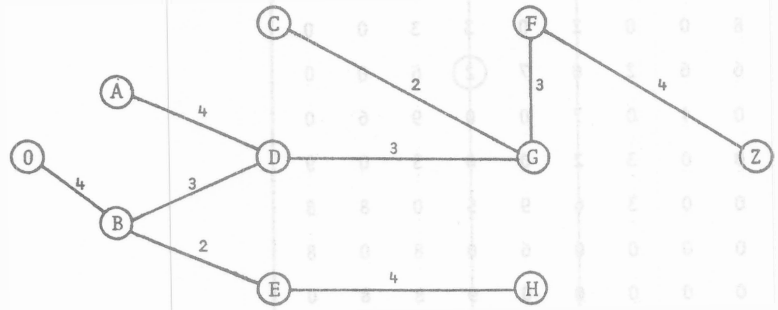
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} O & A & B & C & D & E & F & G & H & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} O\\A\\B\\C\\D\\E\\F\\G\\H\\Z \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 4 & 0 & 7 & 5 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 9 & 3 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & O & A & B & C & D & E & F & G & H & Z \\
\hline
O & 0 & 6 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A & 6 & 0 & 7 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B & 4 & 7 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \\
D & 7 & 4 & 3 & 4 & 0 & 7 & 5 & 3 & 8 & 0 \\
E & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 4 & 0 \\
F & 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\
G & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 9 & 3 & 0 & 5 & 8 \\
H & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 5 & 0 & 5 \\
Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 5 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & O & A & B & C & D & E & F & G & H & Z \\
\hline
O & 0 & 6 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A & 6 & 0 & 7 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B & 4 & 7 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \\
D & 7 & 4 & 3 & 4 & 0 & 7 & 5 & 3 & 8 & 0 \\
E & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 4 & 0 \\
F & 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\
G & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 9 & 3 & 0 & 5 & 8 \\
H & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 5 & 0 & 5 \\
Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 5 & 0
\end{array}
$$

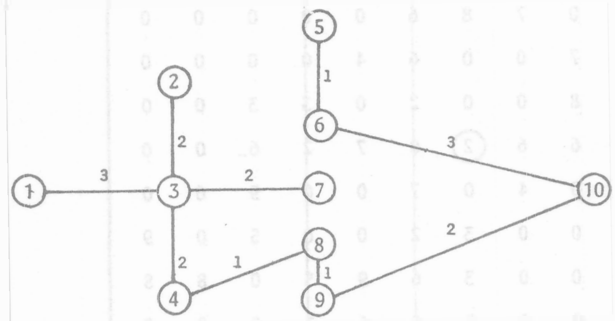
$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & O & A & B & C & D & E & F & G & H & Z \\
\hline
O & 0 & 6 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A & 6 & 0 & 7 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B & 4 & 7 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \\
D & 7 & 4 & 3 & 4 & 0 & 7 & 5 & 3 & 8 & 0 \\
E & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 4 & 0 \\
F & 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\
G & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 9 & 3 & 0 & 5 & 8 \\
H & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 5 & 0 & 5 \\
Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 5 & 0
\end{array}
$$

El árbol de mínima expansión es de: 29 unidades



4 + 2 + 4 + 3 + 4 + 3 + 2 + 3 + 4 = 29

4.



El mínimo árbol de expansión es 17, es decir

3 = 2 = 2 = 2 = 1 = 1 = 2 = 3 = 1 = 17

5.

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & O & A & B & C & D & E & F & G & H & I \\
\hline
O & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A & 7 & 0 & 7 & 8 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B & 8 & 7 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\
D & 0 & 6 & 6 & 2 & 0 & 7 & 2 & 6 & 0 & 0 \\
E & 0 & 0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 6 & 0 \\
F & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 9 \\
G & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 & 0 & 8 & 8 \\
H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 8 & 0 & 8 \\
I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 8 & 8 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & O & A & B & C & D & E & F & G & H & I \\
\hline
O & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A & 7 & 0 & 7 & 8 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B & 8 & 7 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\
D & 0 & 6 & 6 & 2 & 0 & 7 & 2 & 6 & 0 & 0 \\
E & 0 & 0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 6 & 0 \\
F & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 9 \\
G & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 & 0 & 8 & 8 \\
H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 8 & 0 & 8 \\
I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 8 & 8 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & O & A & B & C & D & E & F & G & H & I \\
\hline
O & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A & 7 & 0 & 7 & 8 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B & 8 & 7 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\
D & 0 & 6 & 6 & 2 & 0 & 7 & 2 & 6 & 0 & 0 \\
E & 0 & 0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 6 & 0 \\
F & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 9 \\
G & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 & 0 & 8 & 8 \\
H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 8 & 0 & 8 \\
I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 8 & 8 & 0
\end{array}$$

	O	A	B	C	D	E	F	G	H	I
O	0	7	8	0	0	0	0	0	0	0
A	7	0	7	8	6	0	0	0	0	0
B	8	7	0	0	6	4	0	0	0	0
C	0	8	0	0	2	0	3	3	0	0
D	0	6	6	2	0	7	2	6	0	0
E	0	0	4	0	7	0	0	9	6	0
F	0	0	0	3	2	0	0	5	0	9
G	0	0	0	3	6	9	5	0	8	8
H	0	0	0	0	0	6	0	8	0	8
I	0	0	0	0	0	0	9	8	8	0

	O	A	B	C	D	E	F	G	H	I
O	0	7	8	0	0	0	0	0	0	0
A	7	0	7	8	6	0	0	0	0	0
B	8	7	0	0	6	4	0	0	0	0
C	0	8	0	0	2	0	3	3	0	0
D	0	6	6	2	0	7	2	6	0	0
E	0	0	4	0	7	0	0	9	6	0
F	0	0	0	3	2	0	0	5	0	9
G	0	0	0	3	6	9	5	0	8	8
H	0	0	0	0	0	6	0	8	0	8
I	0	0	0	0	0	0	9	8	8	0

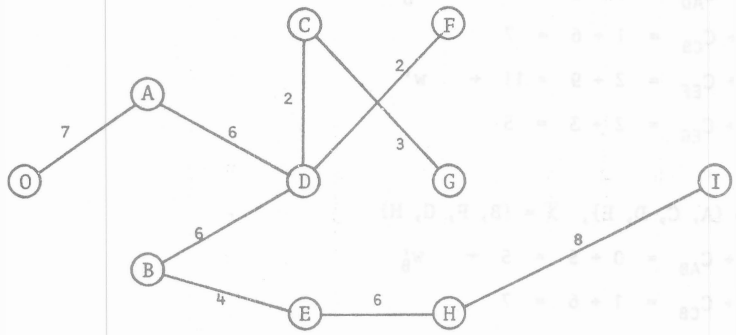
	O	A	B	C	D	E	F	G	H	I
O	0	7	8	0	0	0	0	0	0	0
A	7	0	7	8	6	0	0	0	0	0
B	8	7	0	0	6	4	0	0	0	0
C	0	8	0	0	2	0	3	3	0	0
D	0	6	6	2	0	7	2	6	0	0
E	0	0	4	0	7	0	0	9	6	0
F	0	0	0	3	2	0	0	5	0	9
G	0	0	0	3	6	9	5	0	8	8
H	0	0	0	0	0	6	0	8	0	8
I	0	0	0	0	0	0	9	8	8	0

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & O & A & B & C & D & E & F & G & H & I \\
\hline
O & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A & 7 & 0 & 7 & 8 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B & 8 & 7 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\
D & 0 & 6 & 6 & 2 & 0 & 7 & 2 & 6 & 0 & 0 \\
E & 0 & 0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 6 & 0 \\
F & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 9 \\
G & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 & 0 & 8 & 8 \\
H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 8 & 0 & 8 \\
I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 8 & 8 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & O & A & B & C & D & E & F & G & H & I \\
\hline
O & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A & 7 & 0 & 7 & 8 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B & 8 & 7 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\
D & 0 & 6 & 6 & 2 & 0 & 7 & 2 & 6 & 0 & 0 \\
E & 0 & 0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 6 & 0 \\
F & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 9 \\
G & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 & 0 & 8 & 8 \\
H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 8 & 0 & 8 \\
I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 8 & 8 & 0
\end{array}
$$

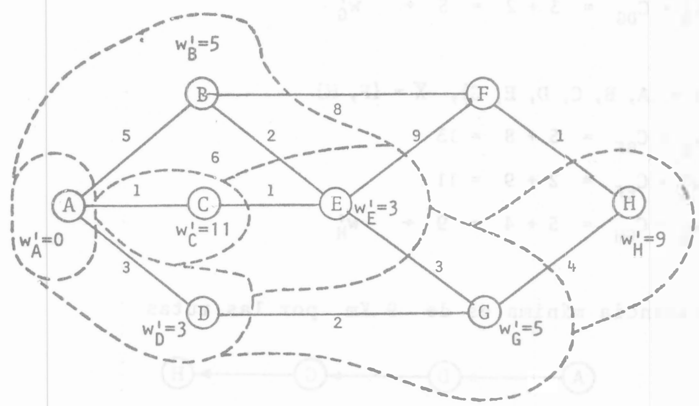
$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & O & A & B & C & D & E & F & G & H & I \\
\hline
O & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A & 7 & 0 & 7 & 8 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B & 8 & 7 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\
D & 0 & 6 & 6 & 2 & 0 & 7 & 2 & 6 & 0 & 0 \\
E & 0 & 0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 & 6 & 0 \\
F & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 9 \\
G & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 & 0 & 8 & 8 \\
H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 8 & 0 & 8 \\
I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 8 & 8 & 0
\end{array}
$$

El árbol de mínima expansión es de 44 unidades, es decir



7 + 6 + 6 + 2 + 4 + 2 + 3 + 6 + 8 = 44

6.



Ruta más corta:

1. A, D, G, H
2. A, C, E, G, H

1. $X = \{A\}$, $\overline{X} = \{B, C, D, E, F, G, H\}$

$w'_A + C_{AB} = 0 + 5 = 5$

$w'_A + C_{AC} = 0 + 1 = 1 \leftarrow w'_C$

$w'_A + C_{AD} = 0 + 3 = 3$

2. $X = \{A, C\}$, $\overline{X} = \{B, D, E, F, G, H\}$

$w'_A + C_{AB} = 0 + 5 = 5$

$w'_A + C_{AD} = 0 + 3 = 3$

$w'_C + C_{CB} = 1 + 6 = 7$

3. $X = \{A, C, E\}$, $\overline{X} = \{B, D, F, G, H\}$

$w'_A + C_{AB} = 0 + 5 = 5$

$w'_A + C_{AD} = 0 + 3 = 3 \leftarrow w'_D$

$w'_C + C_{CB} = 1 + 6 = 7$

$w'_E + C_{EF} = 2 + 9 = 11 \leftarrow w'$

$w'_E + C_{EG} = 2 + 3 = 5$

4. $X = \{A, C, D, E\}$, $\overline{X} = \{B, F, G, H\}$

$w'_A + C_{AB} = 0 + 5 = 5 \leftarrow w'_B$

$w'_C + C_{CB} = 1 + 6 = 7$

$w'_E + C_{EF} = 2 + 9 = 11$

$w'_E + C_{EG} = 2 + 3 = 5 \leftarrow w'_G$

$w'_D + C_{DG} = 3 + 2 = 5 \leftarrow w'_G$

5. $X = \{A, B, C, D, E, G\}$, $\overline{X} = \{F, H\}$

$w'_B + C_{BF} = 5 + 8 = 13$

$w'_E + C_{EF} = 2 + 9 = 11$

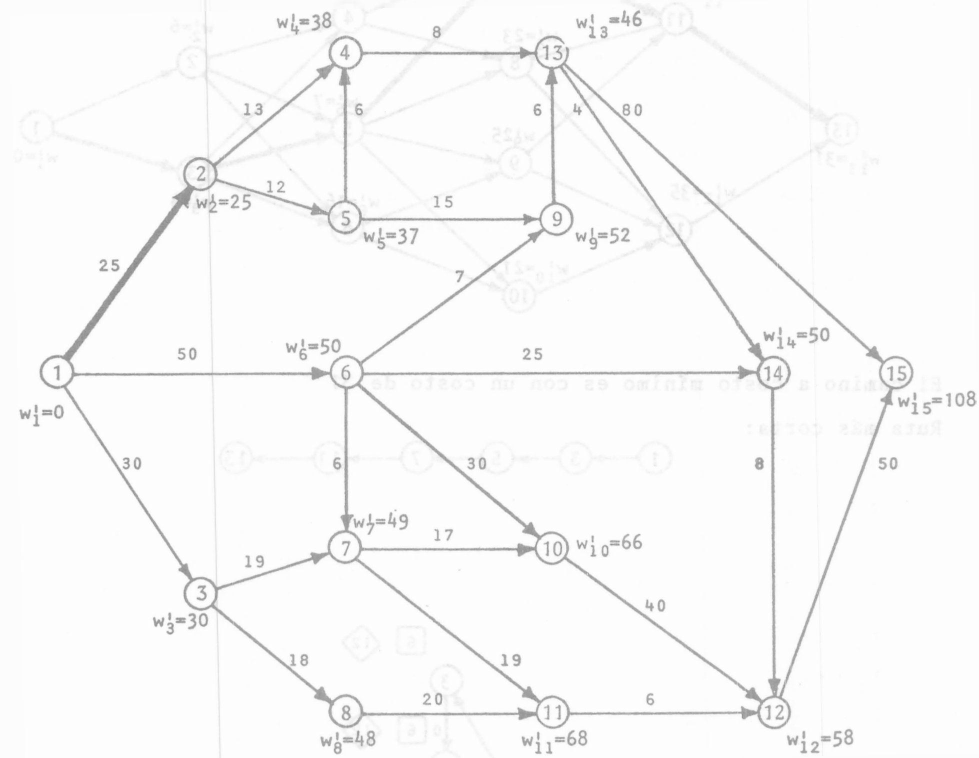
$w'_G + C_{GH} = 5 + 4 = 9 \leftarrow w'_H$

La distancia mínima es de 9 Km por las rutas

$$A \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow H$$

$$A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow H$$

7.

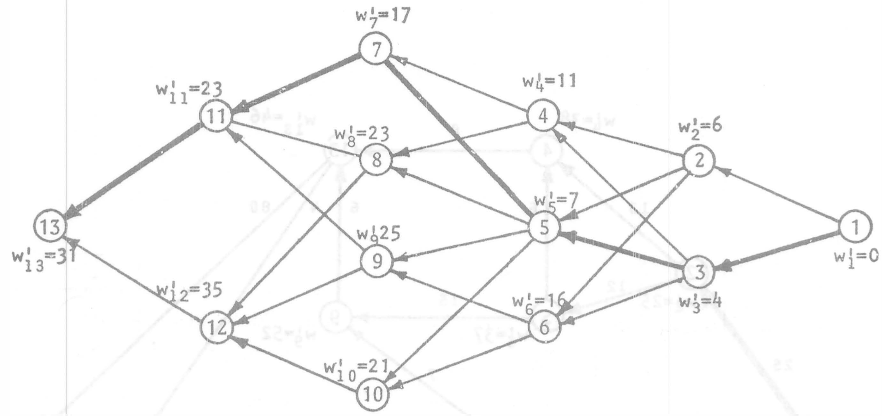


El tiempo mínimo es de 108 minutos por la ruta

Ruta más corta:

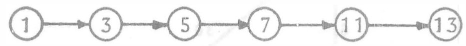
1 → 2 → 4 → 13 → 14 → 12 → 15

8.

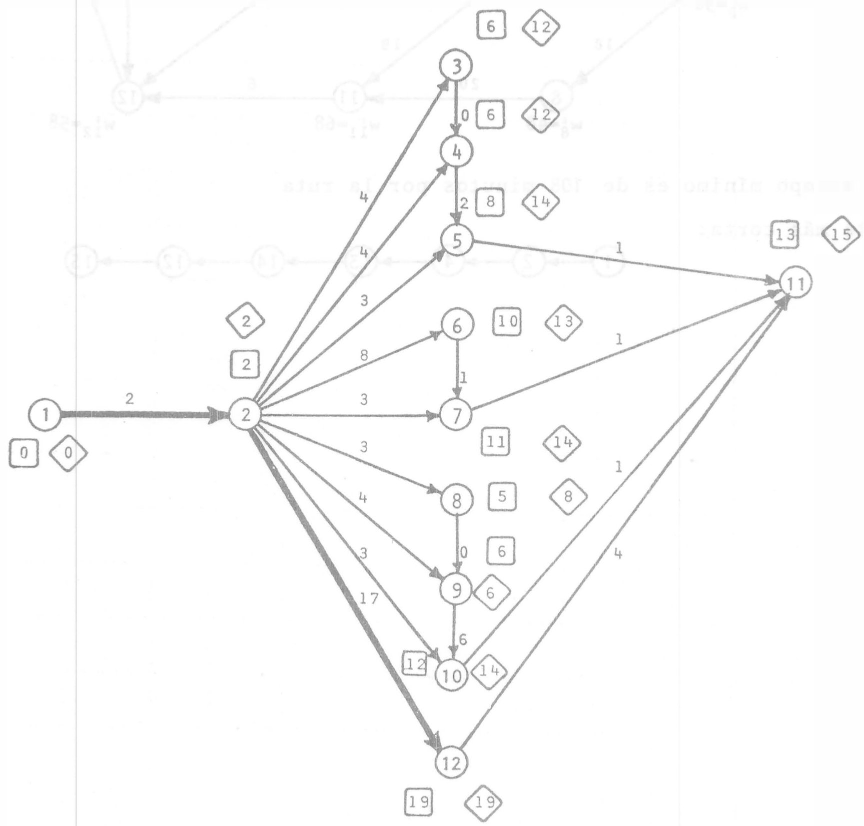


El camino a costo mínimo es con un costo de 31

Ruta más corta:



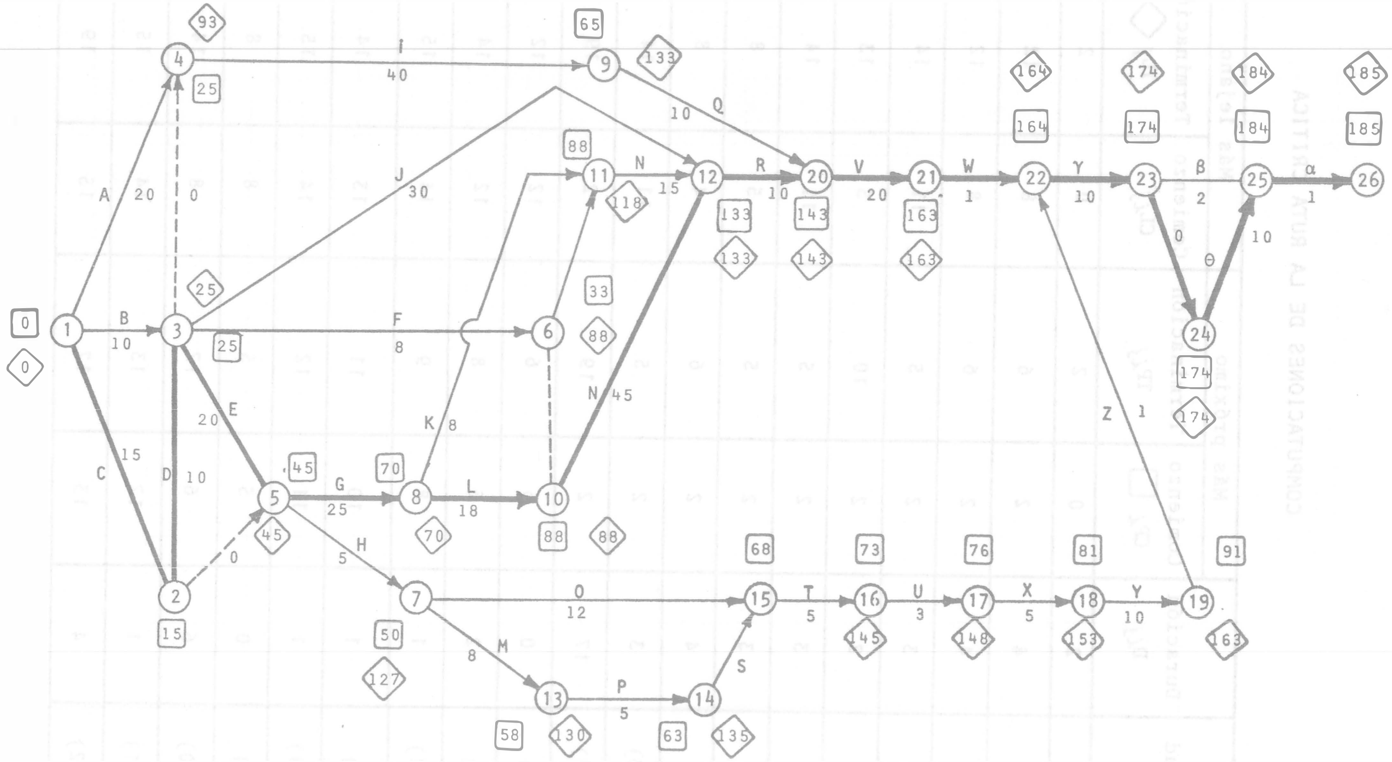
9.



COMPUTACIONES DE LA RUTA CRITICA

Actividad (i,j)	Duración D_{ij}	Más próximo Comienzo CP_i □	Más próximo Terminación TP_{ij}	Más lejano Comienzo CL_{ij}	Más lejano Terminación TL_j ◇	Holgura Total HT_{ij}	Holgura Libre HL_{ij}
(1,2)	2	0	2	0	2	0	0
(2,3)	4	2	6	8	12	6	0
(2,4)	4	2	6	8	12	6	0
(2,5)	3	2	5	11	14	9	3
(2,6)	8	2	10	5	13	3	0
(2,7)	3	2	5	11	14	9	6
(2,8)	3	2	5	5	8	3	0
(2,9)	4	2	6	4	8	2	0
(2,10)	3	2	5	11	14	9	7
(2,12)	17	2	19	2	19	0	0
(3,4)	0	6	6	12	12	6	0
(4,5)	2	6	8	12	14	6	0
(5,11)	1	8	9	14	15	6	4
(6,7)	1	10	11	13	14	3	0
(7,11)	1	11	12	14	15	3	1
(8,9)	0	5	5	8	8	3	1
(9,10)	6	6	12	8	14	2	0
(10,11)	1	12	13	14	15	2	0
(11,12)	4	13	17	15	19	2	2

10



A 20
B 10
C 15
D 10
E 20
0
0
I 40
J 30
F 8
K 8
G 25
L 18
H 5
N 15
N 45
Q 10
R 10
V 20
W 1
γ 10
β 2
θ 10
0
α 1
O 12
M 8
P 5
S
T 5
U 3
X 5
Y 10
Z 1
0
0
15
25
25
93
25
45
45
70
70
88
88
88
88
33
88
118
65
133
133
133
143
143
163
163
164
164
174
174
184
184
185
185
174
174
50
127
58
130
63
135
68
73
145
76
148
81
153
91
163

COMPUTACIONES DE LA RUTA CRITICA

Actividad (i,j)	Duración D_{ij}	Más próximo		Más lejano		Holgura	
		Comienzo CP_i $\square$	Terminación TP_{ij}	Comienzo CP_{ij}	Terminación TL_j $\diamond$	Total HT_{ij}	Libre HL_{ij}
(1,2)	15	0	15	0	15	0	0
(1,3)	10	0	10	15	25	15	15
(1,4)	20	0	20	73	93	73	5
(2,3)	10	15	25	15	25	0*	0
(2,5)	0	15	15	45	45	30	30
(3,4)	0	25	25	93	93	68	0
(3,5)	20	25	45	25	45	0*	0
(3,6)	8	25	33	80	88	55	0
(3,12)	30	25	55	103	133	78	78
(4,9)	40	25	65	93	133	68	0
(5,7)	5	45	50	117	122	72	0
(5,8)	25	45	70	45	70	0*	0
(6,10)	0	33	33	88	88	55	55
(6,11)	0	33	33	118	118	85	45
(7,13)	8	50	58	122	130	72	0
(7,15)	12	50	62	128	140	78	6
(8,10)	18	70	88	70	88	0*	0
(8,11)	8	70	78	110	118	40	0
(9,20)	10	65	75	133	143	68	68
(9,20)	10	65	75	133	143	68	68
(10,12)	45	88	133	88	133	0*	0
(11,12)	15	78	93	118	133	40	40
(12,20)	10	133	143	133	143	0*	0

COMPUTACIONES DE LA RUTA CRITICA

Actividad (i,j)	Duración D_{ij}	Más próximo Comienzo CP_i □	Terminación TP_{ij}	Más lejano Comienzo CL_{ij}	Terminación TL_j ◇	Holgura Total HT_{ij}	Libre HL_{ij}
(13,14)	5	58	63	130	135	72	0
(14,15)	5	63	68	135	140	72	0
(15,16)	5	68	73	140	145	72	0
(16,17)	3	73	76	145	148	72	0
(17,18)	5	76	81	148	153	72	0
(18,19)	10	81	91	153	163	72	0
(19,22)	1	91	92	163	164	72	72
(20,21)	20	143	163	143	163	0	0
(21,22)	1	163	164	163	164	0*	0
(22,23)	10	164	174	164	174	0*	0
(23,24)	0	174	174	174	174	0*	0
(23,25)	2	174	176	182	184	8	0
(24,25)	10	174	184	174	184	0*	0
(25,26)	1	184	185	184	185	0*	0

SOLUCION AL EXAMEN DE AUTOEVALUACION

1. Un Sistema, es un conjunto de elementos que interactuán entre sí, con un propósito común.

   En las organizaciones es importante adoptar este estudio porque permite detectar la forma en que interactuán todos los departamentos de ella y en que forma afectan los cambios que se efectuán en algunos de ellos a toda la empresa.

   Lo cuál permite analizar distintas políticas en cuanto a precios, publicidad, ventas, producción, inventarios, etcétera.

2. Ingredientes: A y B

	Fosfato	Cloro	Costo
A	0.07	0.03	$ 25.00
B	0.09	0.02	$ 20.00

Minimizar $z = 25A + 20B$

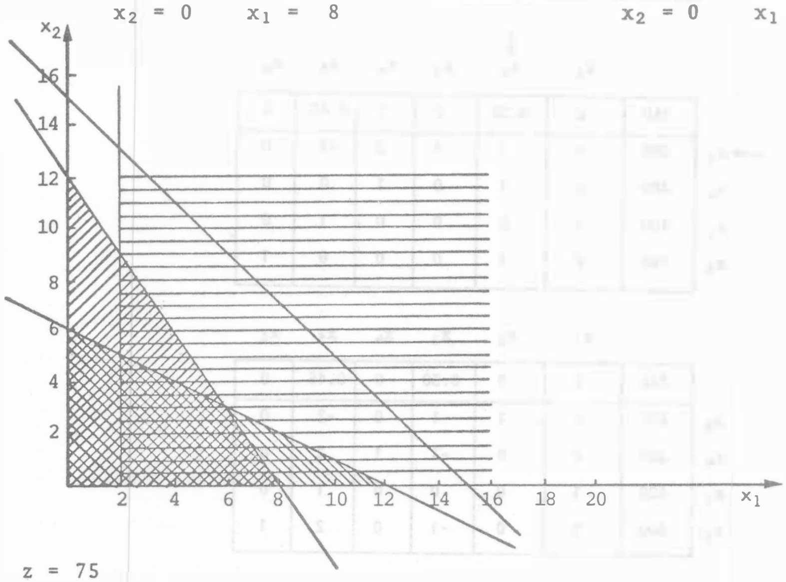
sujeto a $0.07A + 0.09B \leq 0.08\ (A+B)$

$0.03A + 0.02B \leq 0.03\ (A+B)$

$A\ ,\ B \geq 0$

3. De (1) si $x_1 = 0$ $x_2 = 12$ De (2) si $x_1 = 0$ $x_2 = 6$

   $x_2 = 0$ $x_1 = 8$ $x_2 = 0$ $x_1 = 12$



z = 75

$x_1 = 0$ $x_2 = 20$ $x_1^* = 6$ $z^* = 45$

$x_2 = 0$ $x_1 = 20$ $x_2^* = 3$

4. Maximizar $\quad z = 0.45x_1 + 0.30x_2 \quad 1{,}000$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\le 1{,}000 \\
x_1 + x_2 &\le 800 \\
x_1 &\le 400 \\
x_2 &\le 700
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 1{,}000 \\
x_1 + x_2 + x_4 &= 800 \\
x_1 + x_5 &= 400 \\
x_2 + x_6 &= 700
\end{aligned}
$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
		-0.45	-0.30	0	0	0	0
x_3	1,000	2	1	1	0	0	0
x_4	800	1	1	0	1	0	0
x_5	400	1	0	0	0	1	0
x_6	700	0	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	180	0	-0.30	0	0	0.45	0
x_3	200	0	1	1	0	-2	0
x_4	400	0	1	0	1	0	0
x_1	400	1	0	0	0	1	0
x_6	700	0	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	240	0	0	0.30	0	-0.45	0
x_2	200	0	1	1	0	-2	0
x_4	200	0	0	-1	1	2	0
x_1	400	1	0	0	0	1	0
x_6	500	0	0	-1	0	2	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	255	0	0	0.255	0.075	0	0
x_2	400	0	1	0	1	0	0
x_5	100	0	0	-1/2	1/2	1	0
x_1	300	1	0	1/2	-1/2	0	0
x_6	300	0	0	0	-1	0	1

$x_1^* = 300 \qquad x_3^* = 0 \qquad x_5^* = 100 \qquad z^* = 255$

5. Maximizar $z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$

sujeto a

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30$$
$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40$$

Maximizar $z = 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 - Mx_a$

sujeto a

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_a = 30$$
$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 + x_4 = 40$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_a
		-5	-2	-3	0	M
x_a	30	1	5	2	0	1
x_4	40	1	-5	-6	1	0

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_a
	-30M	-5-M	-5M-2	-2M-3	0	0
→ x_a	30	1	5	2	0	1
x_4	40	1	-5	-6	1	0
		↑				

		x_1	x_2	x_3	x_4
	150	0	23	7	0
x_1	30	1	5	2	0
x_4	10	0	-10	-8	1

$x_1^* = 30$ $x_3^* = 0$ $z^* = 150$

$x_2^* = 0$ $x_4^* = 10$

6. Primal

Minimizar $z = 10x_1 + 15x_2$

sujeto a

$$2x_1 + 5x_2 \geq 10$$
$$x_1 + x_2 = 8$$
$$0.5x_1 - 3x_2 \leq 0$$

Minimizar $z = 10x_1 + 15x_2$

sujeto a

$$2x_1 + 5x_2 \geq 10$$
$$x_1 + x_2 = 8$$
$$-5x_1 + 3x_2 \geq 0$$

x_2 no restringida

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \\ 0.5 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Maximizar $z = 10y_1 + 8y_2$

sujeto a

$$2y_1 + y_2 - 0.5y_3 \leq 10$$
$$5y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 15$$

y_2 no restringida

7

10 [10]	[20]	[5]	[7]
[13]	20 [9]	[12]	[8]
30 [4]	[15]	[7]	[9]
[14]	10 [7]	20 [1]	10 [0]
20 [3]	30 [12]	[5]	[19]

			d_{ij}	d_{ij}	
100			2	5	10
200			1	3	4
300			3	3	11
40	30	100	1	6	7
50	30		2	2	9

Solución inicial por el método de Vogel

1	2	4	7
7	2		

Iteración 1

				u_i
(-) 10 [10]	d=1 [20]	(+) d=-8 [5]	d=-5 [7]	10
d=13 [13]	20 [9]	d=9 [12]	d=6 [8]	0
30 [4]	d=2 [15]	d=0 [7]	d=3 [9]	4
d=16 [14]	0 [7]	(-) 20 [1]	10 [0]	-2
(+) 20 [3]	(-) 30 [12]	d=-1 [5]	d=14 [19]	3
v_j: 0	9	3	2	

Iteración 2

				u_i
d=8 [10]	d=9 [20]	10 [5]	d=3 [7]	11
d=13 [13]	20 [9]	d=9 [12]	d=6 [8]	9
30 [4]	d=2 [15]	d=0 [7]	d=3 [9]	13
d=16 [14]	20 [7]	10 [1]	10 [0]	+7
30 [3]	20 [12]	d=-1 [5]	d=14 [19]	12
v_j: -9	0	-6	-7	

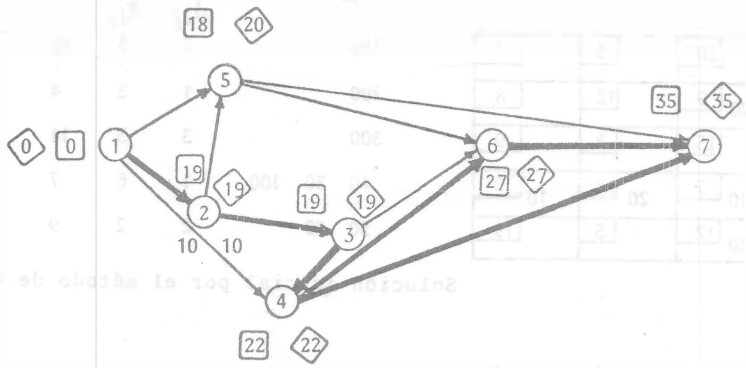
Iteración 3

				u_i
d=7 [10]	d=8 [20]	10 [5]	d=2 [7]	12
d=13 [13]	20 [9]	d=10 [12]	d=6 [8]	9
30 [4]	d=2 [15]	d=1 [7]	d=3 [9]	13
d=16 [14]	30 [7]	d=1 [1]	10 [0]	-7
20 [3]	10 [12]	10 [5]	d=0 [19]	12
v_j: -9	0	-7	-7	

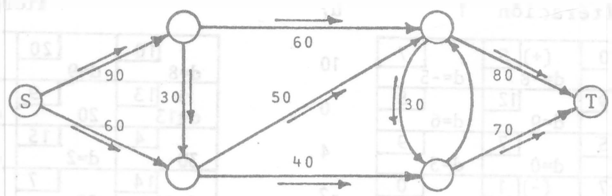
Solución final óptima

Origen	1	2	3	4
1	[10]	[20]	10 [5]	[7]
2	[13]	[4]	[12]	[8]
3	30 [4]	[15]	[7]	[9]
4	[14]	30 [7]	[1]	10 [0]
5	30 [3]	10 [12]	10 [5]	[19]

8.

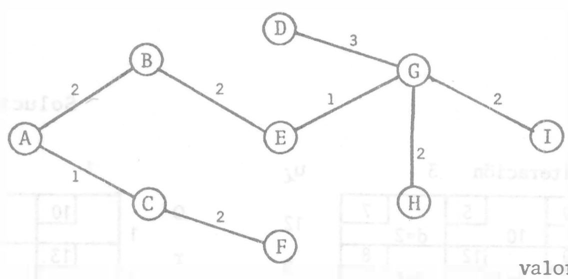


9. Las flechas indican la cantidad y dirección del flujo en cada arco.



flujo máximo = 150

10.



valor del árbol = 15

11. La ruta más corta vale 13 y se muestra en la figura.