



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Estudio De Fiabilidad Del Posicionamiento Satelital Diferencial Triple

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Geomático

P R E S E N T A

Jonathan Vladimir Conde Nava

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Roberto René Manzano Islas



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2026



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado ESTUDIO DE FIABILIDAD DEL POSICIONAMIENTO SATELITAL DIFERENCIAL TRIPLE que presenté para obtener el título de INGENIERO GEOMÁTICO es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

JONATHAN VLADIMIR CONDE NAVA
Número de cuenta: 314027601

Dedicatoria . . . “Para Sony y Miguel, que me apoyaron de manera desinteresada y me mostraron que el esfuerzo toma tiempo y que todo se hace con paciencia e inteligencia.”

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres, a quienes les dedico mi tesis. Gracias por ser excelentes padres y por tomarse el tiempo de criarme con amor y esfuerzo. Algún día me dijeron que todo lo que he hecho valdría la pena y, bueno, aquí estoy escribiéndoles esto para que lo lean y se sientan orgullosos. Con ustedes a mi lado siento que puedo con todo; ojalá fueran eternos, pero estas palabras quedarán marcadas en mi corazón y en este texto para la posteridad.

Quiero agradecer a mi hermana Andy por estar a mi lado. Es difícil ser el hermano mayor y poner el ejemplo. Diría que no todo lo que hago es bueno, pero sí trato de ser mejor cada día para que veas que, a pesar de que la vida es dura, se obtienen recompensas, aunque haya días en los que se pierda el ímpetu.

Quiero agradecer a mi pareja, quien me ha apoyado en todo momento y, al estudiar la misma carrera, me ayuda a ver las cosas desde distintos puntos de vista. Astrid, eres una persona muy especial para mí; me has apoyado de tal manera que esta es una forma de decirte que eres importante. No sé qué nos depare el futuro, pero sé que elegí a la persona indicada para mí. Hay cosas por mejorar, pero permaneciendo juntos lograremos todo.

También quiero agradecer al Dr. René Manzano, quien me asesoró durante todo el proceso de realización de esta tesis y me compartió sus conocimientos. Dr. René, quiero hacerle saber que le estoy agradecido de todo corazón, que siempre me dio el impulso para seguir y que, a pesar de los problemas personales que uno no puede controlar, me tuvo más paciencia que nadie. En todo lo que estuvo a su alcance, usted me ayudó a realizar un sueño: salir por primera vez a otro país para seguir ampliando mis conocimientos sobre mi tema de tesis. En un futuro no tan lejano

espero compensarlo, no como un favor, sino con todo el ímpetu de ayudarlo en lo que sea necesario.

Quiero agradecer de manera simbólica a mis sinodales por tomarse la molestia de leer este trabajo. Algunos me dieron clase y otros me enseñaron durante mi servicio social y mis prácticas profesionales; quiero externar mi respeto y mi admiración a cada uno de ustedes. En especial, quiero agradecerle a la maestra María Elena Osorio Tai. Desde que tomé las clases de Modelación Matemática y Geodesia 3 quedé impresionado por lo inteligente que es. También me ayudó en gran medida a realizar una estadía en otro país, asesorándome y guiándome en el proceso. Muchas gracias por todo.

Por último, pero no menos importante, quiero agradecer a los demás profesores de la Facultad, a mis compañeros y a mis amigos, ya que sin ellos no hubiera sido posible sobrellevar el estrés de los trabajos y de los exámenes. Esta investigación fue realizada gracias al Programa **UNAM-PAPIIT IA103526 Aprendizaje de máquina aplicado al monitoreo de la integridad de la Estación de Referencia de Operación Continua (CORS) de la Facultad de Ingeniería**. De igual manera obtuve la beca *Actividades internacionales con fines de titulación* de DGECEI de la UNAM, la cuál usé para realizar una estancia de investigación durante el verano del 2026, en la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), bajo la supervisión del Dr. Cristhian Timote.

Resumen

En este trabajo de tesis se analizan los resultados obtenidos al calcular las mediciones de fase y pseudorange triplemente diferenciadas. Estos valores se forman al restar sucesivamente entre sí las mediciones doblemente diferenciadas; es decir, representan las tasas de cambio de las dobles diferencias con respecto al tiempo. La aplicación de las triples diferencias se realiza para dos casos específicos: el primero considera una línea base corta entre las estaciones base y rover, y el segundo, una línea base larga cuya distancia es de aproximadamente 48 kilómetros. Se muestra el comportamiento de las mediciones triplemente diferenciadas para los casos en los que las ambigüedades están fijas y cuando no se han resuelto, y se compara con las combinaciones libres de geometría realizadas para cada estación utilizada en las diferencias.

Por último, se escribe una serie de conclusiones relacionadas con el análisis de los resultados obtenidos y recomendaciones a futuro para los alumnos, profesores y personas interesadas en continuar analizando los usos de las mediciones diferenciadas y las distintas combinaciones entre las mediciones de los receptores. Este análisis se realiza en el contexto del proyecto PAPIIT denominado **Aprendizaje de máquina aplicado al monitoreo de la integridad de la Estación de Referencia de Operación Continua (CORS) de la Facultad de Ingeniería**, con número de expediente **IA103526**, el cual se desarrolla a cargo del Dr. René Manzano, profesor de carrera del Departamento de Geodesia.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	IV
estructura	1
1. Introducción	1
1.1. Objetivo general	1
1.1.1. Objetivos específicos	2
1.2. Hipótesis	2
1.3. Los sistemas de posicionamiento satelital	2
1.4. Los componentes del GNSS: segmento espacial, segmento de control y segmento de usuario	4
1.5. Estado del arte en técnicas de posicionamiento diferencial satelital . .	7
2. Ecuaciones de Observación	11
2.1. Pseudorange	12
2.1.1. Distancia Geométrica	13
2.2. Fase Portadora	14
2.3. Doppler	16
2.4. Resolución de la ambigüedad	17
2.4.1. Mínimos Cuadrados Enteros	18
2.4.2. Método LAMBDA	20
2.5. Filtro de Kalman	22

2.5.1. Seguimiento de las estimaciones totales en un filtro de Kalman extendido	23
3. Técnicas de Posicionamiento Satelital	26
3.1. Posicionamiento Puntual Simple	26
3.1.1. Posicionamiento puntual simple usando pseudorangos	27
3.2. Posicionamiento Puntual Preciso	28
3.3. Diferenciación Simple	29
3.4. Mediciones Doblemente Diferenciadas	30
3.5. Mediciones Triplemente Diferenciadas	32
3.5.1. Receptor rover estático	33
3.5.2. Receptor rover en movimiento	34
3.6. Combinación libre de geometría	34
3.6.1. Diferencia a través del tiempo de la combinación libre de geometría	35
4. Metodología y análisis de resultados	37
4.1. Equipo GNSS usado y datos analizados	37
4.1.1. Estación TOL2 del INEGI	39
4.1.2. Estación CORS-FI de la Facultad de Ingeniería	39
4.1.3. Receptor Emlid Reach rs2	40
4.1.4. Datos usados	41
4.1.5. Detección de Saltos de Ciclo en Series de Triple Diferencia	43
4.2. Línea base corta	46
4.3. Línea base larga	66
4.4. Comparativa entre triples diferencias	75
5. Conclusiones y trabajo a futuro	79
5.1. Conclusiones	79
5.2. Trabajo a futuro y recomendaciones	81
5.3. Reconocimiento	81

Índice de figuras

1.1. Esquema de la constelación NAVSTAR.	4
1.2. Mapa de los Centros de Operaciones y Control.	5
1.3. Esquema de Diferencias del GNSS.	9
2.1. Representación del proceso de trilateración (GISGeography, 2022). . .	13
2.2. Regiones de atracción bidimensionales asociadas al método de mínimos cuadrados enteros (ILS).	19
2.3. Región de búsqueda en 2D con ambigüedades correlacionadas	21
2.4. Región de búsqueda en 2D con transformación LAMBDA	22
2.5. Trayectorias de referencia y trayectorias reales para un filtro de Kalman extendido.	23
4.1. Mapa que muestra la ubicación del receptor TOL2 y la estación CORS- FICU de la Facultad de Ingeniería	38
4.2. Antena del receptor Trimble Alloy GNSS TOL2 perteneciente a la Red Geodésica Nacional Activa del INEGI.	39
4.3. Antena del receptor CORS de la Facultad de Ingeniería.	40
4.4. Antena del receptor Emlid Reach usado en este trabajo de tesis. . . .	41
4.5. Línea de comandos para ejecutar RTKLIB.	43
4.6. Línea base corta entre FICU y <i>Emlid Reach</i>	47
4.7. Serie de tiempo de dobles diferencias de medición de fase, frecuencia L1, de línea base corta.	49

4.8. Serie de tiempo de residuales de las dobles diferencias de medición de fase, frecuencia L2, de línea base corta.	50
4.9. Serie de tiempo de los residuales de los pseudorangos doblemente diferenciados de las frecuencias L1 y L2 de la línea base corta.	51
4.10. Serie de tiempo de los residuales de las fases triplemente diferenciadas de las frecuencias L1 y L2 de la línea base corta.	53
4.11. Serie de tiempo de los residuales de los pseudorangos triplemente diferenciados de las frecuencias L1 y L2 de la línea base corta.	55
4.12. Errores en las posiciones Este, Norte y Arriba.	56
4.13. Serie de tiempo de los residuales de fases doblemente diferenciadas de las frecuencias L1 y L2 de la línea base corta con las ambigüedades resueltas.	57
4.14. Serie de tiempo de los residuales de los pseudorangos triplemente diferenciados de las frecuencias L1 y L2 de la línea base corta.	58
4.15. Serie de tiempo de los residuales de las fases triplemente diferenciadas de las frecuencias L1 y L2 de la línea base corta con las ambigüedades resueltas el 98 % de las épocas.	60
4.16. Serie de tiempo de los residuales de los pseudorangos triplemente diferenciados de las frecuencias L1 y L2 de la línea base corta con las ambigüedades resueltas.	61
4.17. Mediciones de fase combinadas libre de geometría de la estación FICU.	62
4.18. Mediciones de fase combinadas libre de geometría de la estación FICU diferenciadas a través del tiempo.	63
4.19. Mediciones de pseudorango combinadas libre de geometría de la estación FICU.	64
4.20. Mediciones de pseudorango combinadas libre de geometría de la estación FICU diferenciadas a través del tiempo.	64
4.21. Mediciones de fase combinadas libre de geometría del receptor <i>Emlid Reach</i>	65

4.22. Mediciones de fase combinadas libre de geometría del receptor <i>Emlid Reach</i> diferenciadas a través del tiempo.	65
4.23. Mediciones de pseudorango combinados libre de geometría del receptor <i>Emlid Reach</i>	66
4.24. Mediciones de pseudorango combinados libre de geometría del receptor <i>Emlid Reach</i> diferenciados a través del tiempo.	66
4.25. Errores en Este Norte Arriba de la serie de datos correspondiente a la línea base larga	67
4.26. Residuales de las mediciones de fase L1 doblemente diferenciadas de la línea base larga.	68
4.27. Residuales de las mediciones de pseudorango L1 doblemente diferenciadas de la línea base larga.	69
4.28. Residuales de las mediciones de fase L1 triplemente diferenciadas de la línea base larga.	70
4.29. Residuales de las mediciones de pseudorango L1 triplemente diferenciadas de la línea base larga.	70
4.30. Combinación libre de geometría de las fases para la estación FICU. .	71
4.31. Valores absolutos de la combinación libre de geometría de las fases para la estación FICU diferenciada a través del tiempo.	72
4.32. Combinación libre de geometría de los pseudorangos para la estación FICU.	73
4.33. Combinación libre de geometría de los pseudorangos para la estación FICU diferenciados a través del tiempo.	74
4.34. Combinación libre de geometría de las fases para la estación TOL2. .	74
4.35. Combinación libre de geometría de las fases para la estación TOL2 diferenciadas a través del tiempo.	75
4.36. Errores en la fase triplemente diferenciada para L1, de la línea base corta con las ambigüedades resueltas.	77
4.37. Errores en la fase triplemente diferenciada para L1, de la línea base larga	78

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se exponen los fundamentos teóricos de los sistemas de posicionamiento global, tomando como referencia principal el GPS, así como sus características más relevantes. De igual manera, se describen los componentes que integran los GNSS, a saber: el segmento espacial, el segmento de control y el segmento de usuario. La comprensión de estos elementos resulta fundamental para analizar el flujo de información, desde su generación en los satélites hasta su recepción y procesamiento en los equipos receptores, lo cual permite la determinación de coordenadas dentro de un sistema de referencia global. Finalmente, se presenta el estado del arte del posicionamiento diferencial satelital, abordando las técnicas de diferencias simples, dobles y triples. Dichas metodologías constituyen herramientas esenciales para incrementar la precisión y la integridad en la determinación de la posición del receptor.

1.1. Objetivo general

El objetivo de esta tesis es el estudio de la fiabilidad de la triple diferencia como método para mitigar los principales errores que se involucran en un posicionamiento diferencial y para resolver las ambigüedades de las señales de los satélites.

1.1.1. Objetivos específicos

- Obtener datos de la antena CORS de la Facultad de Ingeniería y de una antena de calidad geodésica para trabajos topográficos.
- Procesar los datos de ambas antenas para intervalos de tiempo en común.
- Desarrollar el algoritmo para realizar la triple diferencia con los datos de ambas antenas.
- Realizar un posicionamiento diferencial doble y comparar los resultados con los de la triple diferencia.

1.2. Hipótesis

El posicionamiento diferencial triple mitiga los principales errores involucrados en la señal GPS y, considerando que la ambigüedad es constante a través del tiempo, no es necesario calcularla. Para una línea base menor a 40 km entre los receptores involucrados, los errores mitigados son los atmosféricos y los errores de los relojes, tanto de los receptores como de los satélites. Este procedimiento es efectivo cuando la señal es estable, como ocurre cuando el receptor se encuentra en un lugar con condiciones óptimas para su recepción. El método tradicional para resolver la ambigüedad es el de mínimos cuadrados enteros. Este método, a pesar de ser ampliamente utilizado, tiene como principal limitante el tiempo de búsqueda de los valores enteros correctos. El resultado esperado es un menor tiempo para la resolución de la ambigüedad cuando pueda realizarse la triple diferencia.

1.3. Los sistemas de posicionamiento satelital

Por miles de años, el ser humano ha buscado diferentes formas para conocer su posición sobre la superficie terrestre y con ello poder navegar con seguridad a todos los confines del planeta. Fundamentalmente, las técnicas que se han desarrollado se basaron en la medición de direcciones a diferentes cuerpos celestes, para que a partir

de la posición del astro observado y las mediciones angulares al mismo, se puedan determinar las coordenadas de la posición del observador. Con el desarrollo de la radio, las ayudas de navegación evolucionaron, volviéndose en gran medida independientes de las condiciones atmosféricas, requiriéndose solamente poder recibir la señal emitida por las balizas. A partir de 1957, con la puesta en órbita del Sputnik 1 por la extinta Unión Soviética y del Vanguard I por Estados Unidos, se vio beneficiado el uso del espacio exterior para navegación satelital a escala global. La carrera por la conquista del espacio exterior en los años sesenta abrió una nueva era para la tecnología de navegación y sus posibilidades; concretándose con la puesta en operación del Sistema Satelital de Navegación de la Marina de los Estados Unidos, conocido popularmente como Sistema Doppler o TRANSIT, sentándose con ello las bases para lo que hoy conocemos como el Sistema de Posicionamiento Global, o simplemente GPS (Navarro, 2001).

El Sistema de Posicionamiento Global (GPS, por sus siglas en inglés, Global Positioning System) es un sistema de navegación y posicionamiento desarrollado originalmente por el Departamento de Defensa de los Estados Unidos con fines militares, diseñado para proporcionar estimaciones precisas de posición, velocidad y tiempo en cualquier punto de la superficie terrestre (Herring, 1996), (Fernández Rubio y Seco Granados, 1997). El sistema se basa en la constelación de satélites NAVSTAR (Navigation Satellite Timing and Ranging) y en una red de estaciones terrestres encargadas de su monitoreo y control. Su desarrollo comenzó en 1978 con el lanzamiento de los primeros satélites y posteriormente alcanzó una configuración nominal de 24 satélites distribuidos en seis planos orbitales con una inclinación aproximada de 55° respecto al Ecuador, situados a cerca de 20,000 km sobre la superficie terrestre y describiendo órbitas elípticas casi circulares con un período aproximado de doce horas (Claret et al., 2006). Declarado plenamente operativo en 1995, el GPS proporciona cobertura continua a escala mundial y permite a los usuarios determinar su posición tridimensional —latitud, longitud y altitud— mediante mediciones realizadas a las señales transmitidas por los satélites. Aunque tuvo su origen en aplicaciones militares, con el tiempo su utilización se extendió al ámbito civil y actualmente constituye

una tecnología de acceso global ampliamente integrada en numerosas actividades de la vida cotidiana (Rey, 2006).

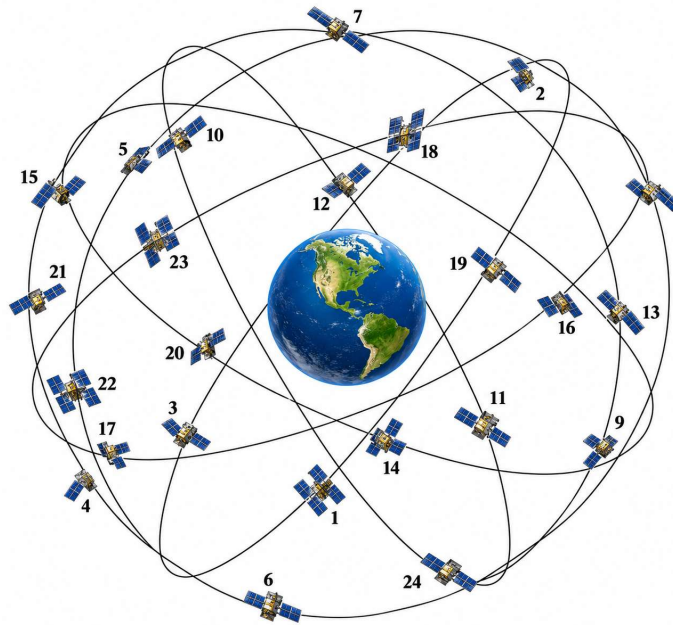


Figura 1.1: Esquema de la constelación NAVSTAR.

En la Figura 1.1 se muestra la composición de la constelación NAVSTAR, cuya configuración permite disponer de al menos cuatro satélites sobre el horizonte y, con ello, determinar la posición mediante un receptor GPS (Claret et al., 2006).

1.4. Los componentes del GNSS: segmento espacial, segmento de control y segmento de usuario

El segmento espacial de un GNSS debe contar con un número suficiente de satélites de navegación para garantizar una cobertura global en todo momento. Además, para que el servicio sea lo suficientemente robusto, debe disponer de un número de satélites que permita transmitir información de manera redundante en caso de que alguno deje de prestar servicio, o bien aumentar la disponibilidad de satélites en una zona para favorecer el posicionamiento satelital de precisión (Álvarez, 2008).

Los satélites, por otro lado, han de estar colocados en distintos planos orbitales de

tal forma que se cubra toda la Tierra de manera global en todo momento (actualmente, el GPS garantiza un mínimo de cinco satélites visibles en cualquier parte del mundo bajo una configuración con máscara de elevación estándar de 15 grados). Sin embargo, dependiendo del número de satélites, la distribución dentro de estos planos orbitales no tiene por qué ser uniforme (Álvarez, 2008).

El segmento de control es responsable de operar el sistema de posicionamiento global. El centro de operaciones de satélites está ahora localizado en la estación aérea de Falcon en Colorado Springs. Desde el punto de vista del usuario, la visión primaria del control del segmento es la de poner al día los mensajes de navegación de los satélites. Para realizar esto, el segmento de control consta de estaciones distribuidas por todo el mundo que continuamente rastrean todos los satélites que están en vista. Esta información es transmitida a la estación de control principal en Colorado Springs, donde se realizan extensos cálculos para determinar efemérides y órbitas de los satélites, con el objetivo de crear mensajes de navegación al día para soporte de los mismos. Eventualmente es posible que se hagan diversas transmisiones por día y vehículo espacial (Guiu, 1992).

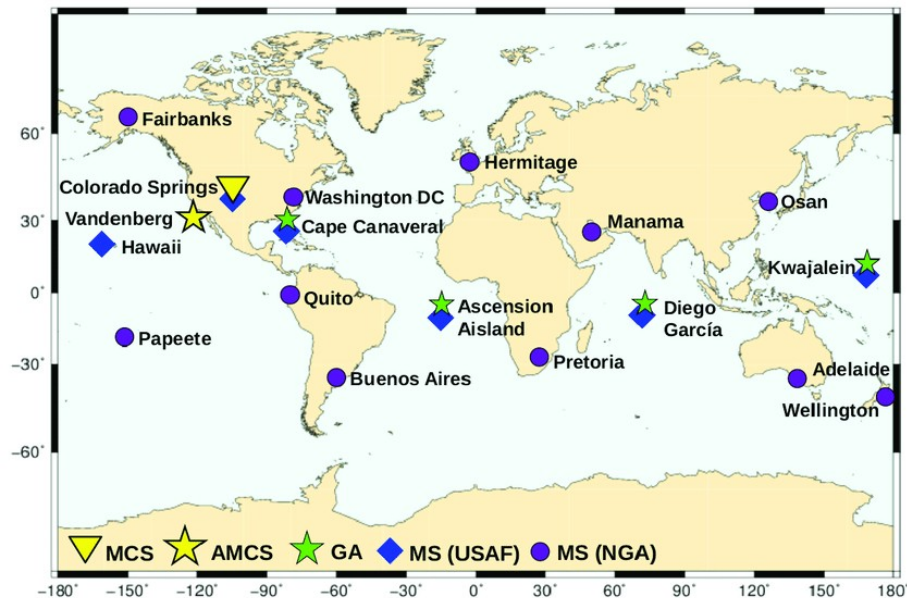


Figura 1.2: Mapa de los Centros de Operaciones y Control.

En la Figura 1.2 se muestran los diferentes centros de operaciones, entre los que

se incluyen un centro de control principal M.C.S. (Master Control Station), un centro de control suplente A.M.C.S. (Alternate Master Control Station), doce antenas de mando y control G.A. (Ground Antenna) y dieciséis sitios de monitoreo M.S. (Monitor Station) (Vazquez-Ontiveros et al., 2019). En el artículo “FINE TUNING GPS CLOCK ESTIMATION IN THE MCS” Hutsell (1994) se hace referencia a que, en los centros de control maestros o MCS, se utilizan métodos seguros y eficientes para mejorar la sincronización precisa del GPS y la estabilidad del rendimiento de dos tipos de relojes atómicos, como los de cesio (Cs) y rubidio (Rb), mediante un filtro de Kalman que ajusta adecuadamente los ruidos en el proceso de actualización continua del tiempo.

Por lo tanto, este segmento es requerido para la localización de los satélites y la transmisión de los mensajes de navegación necesarios para el cálculo de la posición. Las precisiones alcanzables son del orden de 16 m en posicionamiento tridimensional y aproximadamente 100 m en posicionamiento bidimensional, debido a la degradación de la señal provocada por la disponibilidad selectiva, la cual restringe el nivel de precisión accesible a los usuarios civiles del sistema.

El segmento de usuario está constituido por todos los receptores GPS, desde los receptores más complejos en geodesia hasta los chips instalados en un reloj o smartpho-
ne, cuya función principal es recibir las señales emitidas por los satélites y procesarlas para calcular su posición tridimensional y la hora exacta. El receptor obtiene las coordenadas en un sistema ECEF referido al sistema geodésico mundial WGS 84. El receptor procesa automáticamente las conversiones entre ECEF (X, Y, Z) y las coordenadas de latitud, longitud y altitud, o entre diversos sistemas de referencia (Valero et al., 2014).

En la antena se transforma en señal eléctrica la señal radioeléctrica que se capta de cada satélite, y viceversa. La posición calculada está referida al centro de fase de la antena, que normalmente no coincide con el centro físico del receptor; por ello, es importante aplicar la corrección al centro de fase de la antena. En la antena se generan tantas señales como satélites se estén recibiendo; por ello, los receptores topográfico-geodésicos tienen generalmente entre 90 y 120 canales, aunque existen receptores

capaces de rastrear satélites con más de 400 canales, ya que, además de los GNSS, se complementan con sistemas de aumentación (Valero et al., 2014).

Desde sus inicios, cuando un receptor era capaz de captar la señal de cuatro o cinco satélites, hasta la actualidad, en la que cuentan con hasta doce o veinte canales, se ha logrado un mejor posicionamiento. Además del número de canales (o señales de satélite que es capaz de captar), los receptores también se caracterizan por sus sistemas internos de corrección (como DGPS) y por los protocolos de comunicación que utilizan, que pueden ir desde USB y Bluetooth hasta la comunicación por radio o el Transporte de Red de RTCMN por medio del Protocolo de Internet (Álvarez, 2008) (Network Transport of RTCMN via Internet Protocol, NTRIP en inglés).

1.5. Estado del arte en técnicas de posicionamiento diferencial satelital

El GPS diferencial (DGPS) es una técnica que incrementa drásticamente la precisión e integridad de la posición en un receptor (Consentino & Diggle, 2006). El principio de funcionamiento consiste en utilizar un receptor de referencia con coordenadas conocidas y un receptor de usuario (rover), de manera que, mediante la diferenciación de sus mediciones, se eliminen errores correlacionados en el espacio y el tiempo (Sanz Subirana et al., 2013), con excepción de los errores de Multipath, por ser locales y exclusivos de cada receptor. Se consideran errores correlacionados entre receptores si la distancia entre ellos alcanza cientos o miles de kilómetros; así, los errores provocados por la ionósfera, la tropósfera y el reloj del satélite son mitigados mediante la diferenciación simple (Diferenciación simple (SD)). De la misma manera, la diferenciación doble (Diferenciación doble (DD)) reduce los errores producidos por el reloj del receptor (Sanz Subirana et al., 2013).

La triple diferencia no es más que una doble diferencia en el tiempo. Posee todas las ventajas de la doble diferencia y además elimina el término de la ambigüedad, que es constante con el tiempo en ausencia de pérdida de ciclos. Esto es, los receptores deben

seguir la señal de los satélites sin interrupción para que se mantenga la ambigüedad inicial (Prieto Morin, 2015).

Las triples diferencias se usan para calcular una primera posición aproximada del receptor con una precisión de algunas decenas de centímetros y para detectar saltos de ciclo en la medición (Leick, 2004).

En Codol y Monin (2011) se desarrolla una nueva técnica de posicionamiento GPS basada en diferencias triples usando solo una frecuencia. Este enfoque, presentado inicialmente por Remondi y Brown (2000), propone el uso de mediciones de diferencia temporal de la Fase portadora portadora como observaciones dentro del filtro de posicionamiento. El método emplea exclusivamente mediciones de fase portadora, lo que permite reducir la influencia de los efectos de multitrayectoria asociados a las pseudodistancias, particularmente relevantes en entornos urbanos. La técnica planteada constituye una alternativa al posicionamiento DGPS con ambigüedades flotantes descrito por Ford y Neumann (1994) y Tiberius y De Jonge (1995). A diferencia de estos enfoques, el filtrado por diferencias triples no requiere la estimación explícita de los términos de ambigüedad de la fase portadora y se implementa mediante un filtro de Kalman clásico con ruido correlacionado. Un método similar fue utilizado por Remondi y Brown (2000); sin embargo, existen diferencias fundamentales entre dicho filtro y el propuesto en el artículo, por lo que se aborda un modelo distinto, ya que el ruido de la fase portadora en diferencias triples no se considera de tipo browniano. Por otro lado, el filtro que desarrollan maneja ruidos correlacionados de forma clásica, sin recurrir a un modelo de observaciones con estados de retardo, para obtener finalmente un posicionamiento subdecimétrico mediante su técnica.

Por otro lado, el artículo Dynamic Triple-Difference Method for Single-Frequency GNSS Structural Monitoring (Zhi-ping et al., 2010) aborda la DTD (Dynamic Triple Difference) (Dynamic Triple Difference), o “triple diferencia dinámica” en español, que se utiliza para estimar directamente la deformación dinámica tridimensional sin RA mediante la observación de fase de triple diferencia de frecuencia única GNSS. La matriz del modelo establecido coincide con la matriz de coeficientes de los parámetros de referencia del modelo DD o Doble diferencia. Por lo tanto, el modelo propuesto se

denomina DTD para diferenciarse del método tradicional de triple diferencia estática.

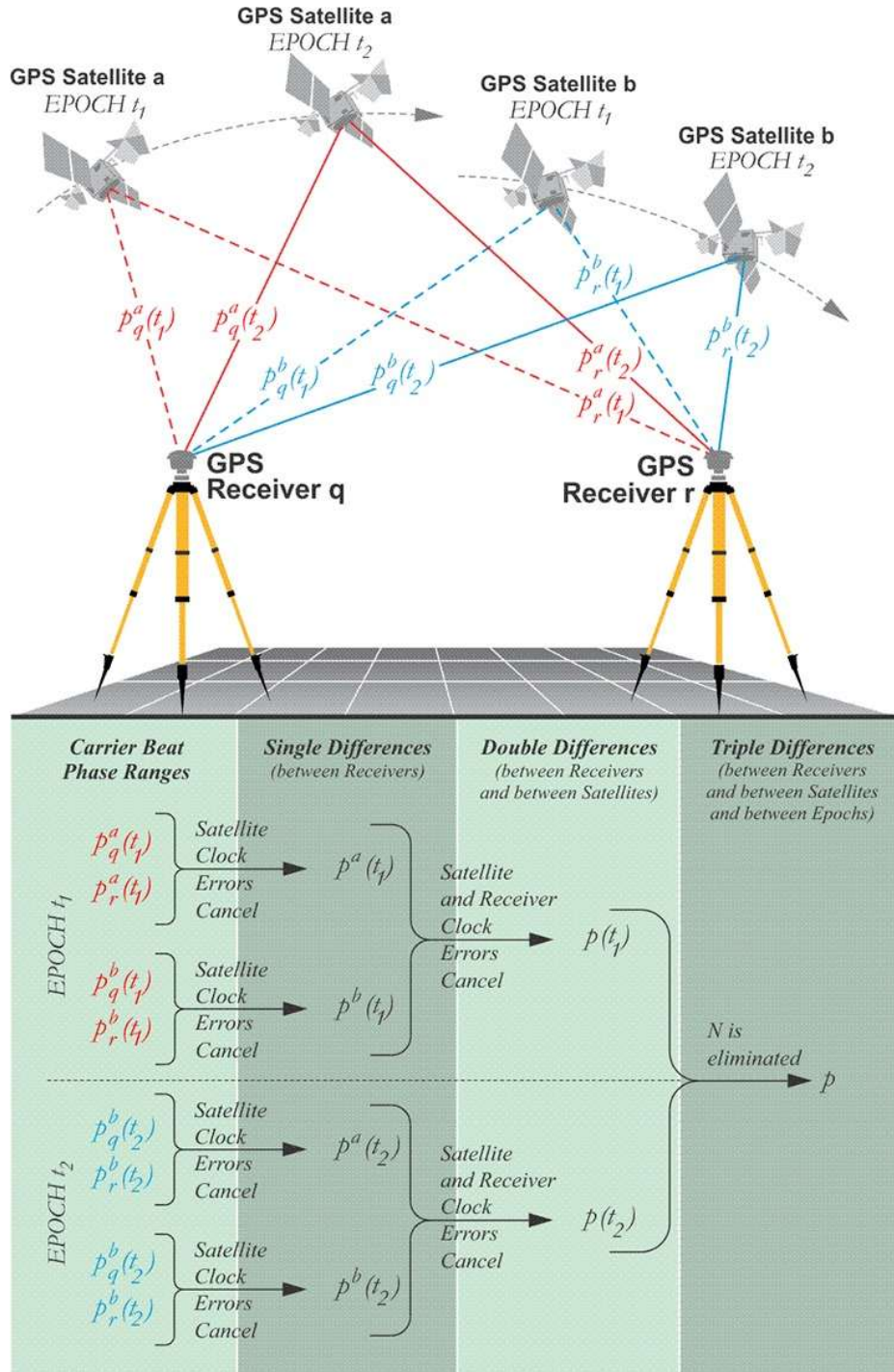


Figura 1.3: Esquema de Diferencias del GNSS.

En la Figura 1.3 se muestra el esquema de las diferencias del GNSS, en el que existen al menos dos satélites (a, b) y dos receptores (q, r) observados en diferentes

épocas (t). En primera instancia se muestran las observaciones iniciales de la fase portadora, donde cada observación contiene su distancia geométrica, el error de reloj del satélite ($\rho_r^{a,b}(t_n)$), el error de reloj del receptor ($\rho_r^{q,r}(t_n)$), la ambigüedad (N) y el ruido. En la diferencia simple se elimina el error de reloj del satélite, pero aún permanecen el error de los receptores, la ambigüedad y el ruido. En la doble diferencia se eliminan los errores de reloj de los receptores, por lo que permanecen la ambigüedad combinada y el ruido. Por último, en la triple diferencia se elimina la ambigüedad N , por lo que queda el cambio de geometría más el ruido (Pennsylvania State University, 2023).

Capítulo 2

Ecuaciones de Observación

Como se expuso en el capítulo 1, los GNSS están conformados por los segmentos espacial, de control y del usuario, cuya interacción permite la generación, transmisión y procesamiento de señales necesarias para la determinación de la posición. Asimismo, se abordaron las características fundamentales del GPS y los principios del posicionamiento diferencial, destacando el uso de las diferencias simples, dobles y triples para mejorar la precisión e integridad de las soluciones. En el presente capítulo se desarrollan las ecuaciones de observación empleadas en el posicionamiento satelital, las cuales constituyen la base matemática para la estimación de la posición a partir de mediciones GNSS. En particular, se presentan las formulaciones correspondientes al pseudorango, la fase portadora y la observación Doppler, analizando sus fundamentos teóricos y su contribución en la determinación de coordenadas. Asimismo, se estudia el problema de la resolución de la ambigüedad asociado a las mediciones de fase portadora, abordando el método LAMBDA y el enfoque de mínimos cuadrados enteros, los cuales permiten estimar de manera eficiente las ambigüedades enteras y mejorar significativamente la precisión de la solución. Finalmente, se introduce el filtro de Kalman extendido como una herramienta de estimación recursiva para sistemas no lineales, ampliamente utilizada en el procesamiento de observaciones GNSS. Este método favorece la integración de información en el tiempo y permite modelar adecuadamente las fuentes de error, contribuyendo a la obtención de soluciones de posicionamiento más robustas y precisas.

2.1. Pseudorange

Para calcular la posición mediante un receptor es necesario medir las distancias que lo separan de diferentes satélites. A partir de las señales que estos emiten se lleva a cabo un proceso de trilateración. El mensaje se transmite sobre dichas señales junto con la información temporal proporcionada por el reloj atómico. La medición de estas distancias se denomina pseudorange y se obtiene determinando el tiempo de recepción de las señales emitidas por los satélites mediante un proceso de correlación con una copia local del código pseudoaleatorio utilizado para modular los bits del mensaje y que identifica de forma unívoca a cada satélite. Si el reloj del receptor estuviera perfectamente sincronizado con el de los satélites (Álvarez Franco, 2019), la ecuación quedaría de la siguiente forma:

$$d = c(t_{RX} - t_{TX}) \quad (2.1)$$

Donde c es la velocidad de propagación de las señales electromagnéticas, d es la distancia que separa al receptor del satélite, t_{RX} es el tiempo medido en el receptor y t_{TX} es el tiempo medido en el emisor.

Concretamente, hay tres escalas de tiempo involucradas en el cálculo del Pseudorange. Dos de ellas están determinadas por el reloj del receptor y el del satélite. La tercera es una escala de tiempo de referencia, denominada Tiempo GPS (GPST), que se genera en el segmento de control como un promedio de los relojes de todos los satélites y de las estaciones terrenas López-Salcedo et al. (2012). Por lo tanto, se obtiene la ecuación fundamental para el posicionamiento con pseudorrangeos:

$$\rho = d + c(\delta t_u - \delta t^s) + \iota_\rho + \tau_\rho + \epsilon_\rho \quad (2.2)$$

Donde δt_u y δt^s son los sesgos de los relojes del receptor y del satélite, respectivamente; ι_ρ es el tiempo que tarda la señal en atravesar la ionósfera y τ_ρ representa el retardo por la propagación de la señal a través de la Troposfera. Cabe mencionar que los retardos tanto en la Ionosfera como en la tropósfera se deben a que el tiempo

de traslado de la señal se multiplica por la velocidad de la luz en el vacío y, por la presencia de la atmósfera, esta no es precisamente la velocidad a la que se propagan las señales. ϵ_p es el ruido producido por otros factores, tales como ruido térmico o de medición, errores de efemérides o del modelo e, inclusive, efectos no modelados como el multitrayecto, efectos ionosféricos, mareas y residuos relativistas (Xu, 2016).

Los receptores GPS calculan los pseudorrangos de todos los satélites visibles de manera simultánea y, típicamente, a una frecuencia de alrededor de 1 Hz; es decir, miden un conjunto de pseudorrangos una vez por segundo (Lopez et al., 2012).

2.1.1. Distancia Geométrica

Los errores de reloj satelital se modelan mediante polinomios de tiempo. Los coeficientes se transmiten a los usuarios con el mensaje de navegación. Por lo que se representa de la siguiente forma:

$$\rho_r^s(t_r, t_e) = \sqrt{(x_s - x_r)^2 + (y_s - y_r)^2 + (z_s - z_r)^2} \quad (2.3)$$

Donde el vector de coordenadas del satélite (x_s, y_s, z_s) es una función vectorial del tiempo t_e , y la coordenada receptora (x_r, y_r, z_r) es la función de tiempo t_r .

En la Figura 2.1 se representa el proceso de trilateración, donde la posición del receptor se encuentra en el punto en el que se intersectan las tres esferas. El centro de cada una corresponde a un satélite y el radio de cada esfera es medido por el receptor.

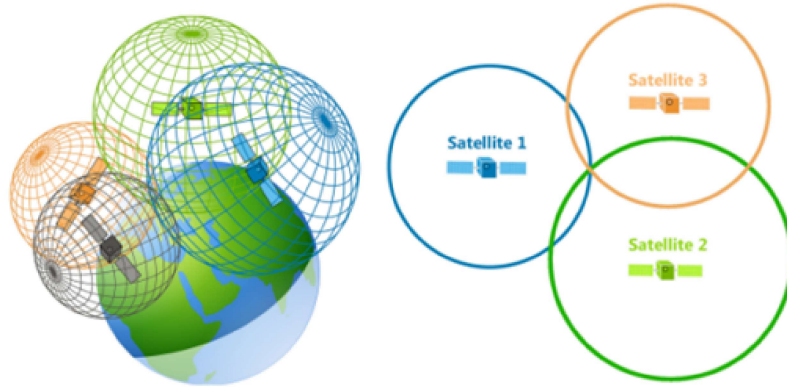


Figura 2.1: Representación del proceso de trilateración (GISGeography, 2022).

2.2. Fase Portadora

La fase portadora es la medida de fase de la señal del satélite recibida en relación con la fase portadora generada por el receptor. Esta medición se realiza cuando se desplaza la fase generada por el receptor para que pueda rastrearse la fase recibida. El número de ondas portadoras entre el receptor y el satélite no se cuenta de manera completa durante la adquisición inicial de la señal, por lo que la fase se mide de manera fraccionaria para realizar el seguimiento de los cambios en los ciclos.

La fase portadora observable es, de hecho, una observación acumulada de la fase portadora. La fase fraccionaria de la portadora puede medirse electrónicamente con una precisión superior al 1 % de la longitud de onda, lo que corresponde a una precisión milimétrica. Esta es también la razón por la que la medición de la fase es más precisa que la del código. Una onda portadora completa se denomina ciclo. El número entero ambiguo de ciclos en la medición de la fase de la portadora se denomina ambigüedad. La medición inicial tiene una fase fraccionaria correcta y un ajuste arbitrario del contador entero en la época de inicio. Esta configuración inicial arbitraria se ajustará a la correcta mediante el modelado con parámetros de ambigüedad (Xu y Xu, 2016).

Si existiera un medio vacío y sin errores la fase medida sería de la siguiente manera:

$$\Phi_r^s(t_r) = \Phi_r(t_r) - \Phi^s(t_r) + N_r^s \quad (2.4)$$

Donde el subíndice r representa al receptor y el superíndice s al satélite; t_r es el tiempo de recepción de la señal GPS, ϕ_r se refiere a la fase en la que oscila el receptor, ϕ_s es la fase de la señal recibida del satélite y N_r^s es la ambigüedad relacionada con el receptor r y el satélite s .

Una propiedad fundamental de la observación de fase portadora es que la fase de la señal recibida corresponde a la señal transmitida por el satélite, considerando la propagación de la señal en el vacío (Leick, 1995):

$$\Phi^s(t_r) = \Phi_e^s(t_r - \Delta t) \quad (2.5)$$

Donde Φ_e^s es la fase emitida por el satélite y Δt es el tiempo de propagación de la señal GPS. Esto puede representarse como:

$$\Delta t = \frac{\rho_r^s(t_r, t_e)}{c} \quad (2.6)$$

Donde $\rho_r^s(t_r, t_e)$ es la distancia geométrica entre el satélite, en el tiempo de emisión t_e , y la antena, en el tiempo de recepción t_r ; c es la velocidad de la luz. Por lo tanto, si se reescribe la ecuación (2.5) y se sustituye Δt , queda como sigue:

$$\Phi_r^s(t_r) = \Phi_r(t_r) - \Phi^s(t_r - \Delta t) + N_r^s \quad (2.7)$$

Como suposición, se considera que el tiempo inicial es cero y que la señal portadora recibida del satélite tiene una frecuencia aparente; entonces, se sustituye Φ por ft_r . Ahora, si se toman en cuenta los errores de reloj tanto del receptor (δt_r) como del satélite (δt_s), estos se restan. Como f y λ tienen una relación dada por $c = f\lambda$, donde λ es la longitud de onda de la señal, al sustituir en la ecuación (2.7) se obtiene la siguiente forma:

$$\lambda \Phi_r^s(t_r) = \rho_r^s(t_r, t_e) - (\delta t_r - \delta t_s)c + \lambda N_r^s - \delta_{ion} + \delta_{tro} + \delta_{tide} + \delta_{mul} + \delta_{rel} + \epsilon \quad (2.8)$$

Donde λ , que se localiza del lado izquierdo, es igual a la distancia geométrica entre el satélite que emite y la antena de recepción; δ_{ion} , δ_{tro} , δ_{tide} , δ_{mul} , δ_{rel} y ϵ son errores de la ionósfera, la tropósfera, las mareas terrestres, los efectos de multitrayecto y los efectos relativistas, respectivamente.

Durante el seguimiento de la señal GPS, la fase y la cuenta entera se modelan continuamente y se miden con frecuencia. De esta manera, se tiene en cuenta la frecuencia cambiante del oscilador. Cada vez que se mide la fase, se actualizan los coeficientes del modelo del bucle de seguimiento Remondi (1984).

2.3. Doppler

El efecto Doppler describe la variación en la frecuencia de una señal electromagnética que ocurre como consecuencia del movimiento relativo entre la fuente emisora y el sistema receptor. El conteo Doppler, también denominado Doppler integrado y representado por D , constituye el observable clásico del sistema satelital TRANSIT. Este parámetro se obtiene mediante la integración del corrimiento de frecuencia durante un intervalo temporal, típicamente del orden de un minuto. Cuando dicho intervalo es suficientemente reducido, el conteo Doppler puede considerarse equivalente al desplazamiento instantáneo de la frecuencia, o bien

$$D = \frac{\partial \rho}{\lambda \partial t} \quad (2.9)$$

El desplazamiento aproximado predicho de la frecuencia Doppler es necesario para lograr la adquisición de la señal satelital. La predicción de D forma parte del proceso de seguimiento de la señal GPS. El valor predicho de D se utiliza primero para estimar el cambio de fase y, posteriormente, dicho cambio de fase se compara con el valor medido para obtener el valor preciso del desplazamiento de la frecuencia Doppler. El conteo entero acumulado de ciclos se obtiene mediante un ajuste polinomial de una serie de cambios de fase predichos y valores medidos (Remondi, 1984).

Otra forma de visualizar la ecuación donde se tome en cuenta un entorno libre de errores es la siguiente:

$$D = \frac{d\rho_r^s(t_r, t_e)}{\lambda dt} - f\left(\frac{d\beta}{dt}\right) + \delta_f + \epsilon \quad (2.10)$$

Donde β es el término del error del reloj ($\delta f_r - \delta f_s$), δ_s es la corrección de frecuencia de los efectos relativos y ϵ es error. Las propiedades de los efectos de baja frecuencia como la ionósfera, tropósfera, mareas y efecto de trayectorias múltiples se cancelan.

2.4. Resolución de la ambigüedad

Uno de los problemas vigentes dentro del posicionamiento y la navegación satelital de precisión ha sido la resolución de las ambigüedades de las señales de los satélites. Actualmente, existen diversos algoritmos para solucionar las ambigüedades, cada uno con sus propias ventajas y limitantes. El primer paso para fijar la solución es la estimación de las ambigüedades enteras. Cualquier modelo de observación GNSS puede parametrizarse con números enteros y no enteros. Esto da como resultado el siguiente sistema de ecuaciones de observación linealizadas.

$$\underset{(m \times 1)}{\mathbf{y}} = \underset{(m \times n)(n \times 1)}{\mathbf{A} \mathbf{a}} + \underset{(m \times p)(p \times 1)}{\mathbf{B} \mathbf{b}} + \underset{(m \times 1)}{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.11)$$

Donde y es el vector de observación del GPS de orden m ; a y b son los parámetros desconocidos de dimensiones n y p , respectivamente, y ϵ es el ruido del sistema.

El vector de datos y está conformado, por lo general, por observaciones de fase o código en doble diferencia (DD), expresadas como la diferencia entre los valores observados y los calculados. Estas mediciones pueden obtenerse en una o dos frecuencias y se consideran a lo largo de todas las épocas de observación. El vector de parámetros se divide en dos subconjuntos. Por un lado, el vector a incluye las ambigüedades enteras desconocidas de la fase portadora, las cuales se representan en ciclos en lugar de unidades de distancia. Se reconoce que estos parámetros tienen naturaleza estrictamente entera. Por otro lado, el vector b agrupa los restantes parámetros desconocidos, entre los que pueden encontrarse los incrementos de la línea base y los retardos atmosféricos, tales como los efectos ionosféricos y troposféricos. A diferencia de las ambigüedades, estos parámetros toman valores reales. En conjunto se les denomina parámetros de línea base, aunque este vector puede incluir también otros términos adicionales de carácter real.

La teoría clásica de estimación lineal puede aplicarse a modelos que contienen parámetros de valor real. Sin embargo, si se toma en cuenta la naturaleza entera de los parámetros de Resolución de ambigüedades, debe seguirse un enfoque diferente que incluya una etapa separada para la resolución de ambigüedades. El proceso completo

de estimación consistirá en tres etapas (Teunissen, 1993). En una primera fase del procedimiento, no se impone la restricción de que el vector a esté compuesto por valores enteros, permitiendo así la obtención de la denominada solución flotante a través de un ajuste convencional por mínimos cuadrados. Este proceso genera estimaciones reales tanto para a como para b , junto con su correspondiente matriz de varianzas y covarianzas

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} Q_{\hat{a}} & Q_{\hat{a}\hat{b}} \\ Q_{\hat{b}\hat{a}} & Q_{\hat{b}} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

En el segundo paso, la estimación de las ambigüedades enteras se calcula a partir de la estimación flotante de las ambigüedades de $\hat{a}$:

$$\check{a} = S(\hat{a}) \quad (2.13)$$

Donde $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ representa la función de mapeo del espacio n-dimensional de números reales al correspondiente espacio n-dimensional de números enteros. Finalmente, las estimaciones enteras de las ambigüedades se emplean para ajustar o corregir la estimación flotante del vector b mediante

$$\check{b} = \hat{b}(\check{a}) = \hat{b} - Q_{\hat{b}\hat{a}} Q_{\hat{a}}^{-1} (\hat{a} - \check{a}) \quad (2.14)$$

Esta solución es conocida como solución de línea base fija. Las ecuaciones (2.13) y (2.14) están condicionadas por el tipo de estimador entero seleccionado, ya que diferentes definiciones de la función de mapeo $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ conducen a distintos estimadores enteros. En consecuencia, la distribución probabilística asociada a dichos estimadores también se ve influenciada por la elección de esta función.

2.4.1. Mínimos Cuadrados Enteros

La optimización considerando la naturaleza entera de los parámetros de la ambigüedad (Teunissen, 1999), implica la resolución de un problema no estándar de mínimos cuadrados, denominado mínimos cuadrados enteros (integer least-squares, ILS en inglés) (Teunissen, 1993). Por lo que se define de la siguiente manera:

$$\hat{a}_{LS} = \arg \min_{z \in \mathbb{Z}^n} \|\hat{a} - z\|_{Q_{\hat{a}}}^2 \quad (2.15)$$

Donde $\hat{a}_{LS} \in \mathbb{Z}^n$ representa la solución fija de las ambigüedades obtenida mediante el método ILS. A diferencia de otras técnicas esta solución no se determina de manera directa; por el contrario, es necesario llevar a cabo un procedimiento de búsqueda en el dominio de los números enteros para identificar la solución óptima.

En la Figura 2.2 se muestran las regiones en dos dimensiones, las cuales están asociadas al método ILS.

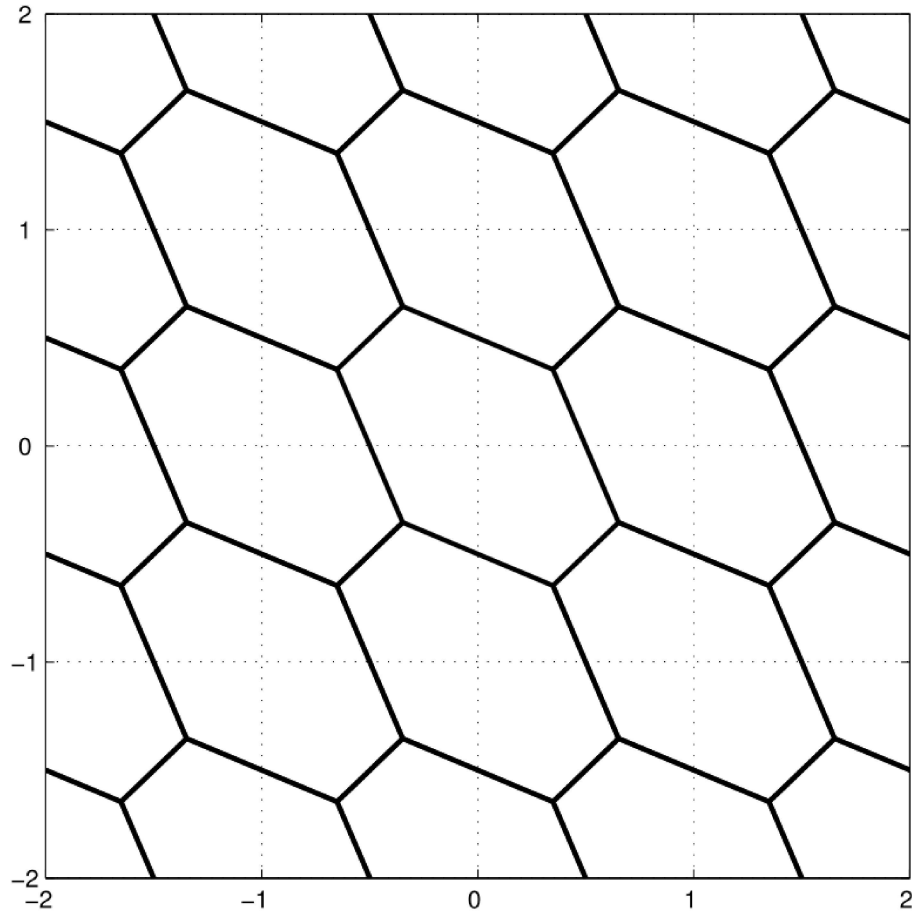


Figura 2.2: Regiones de atracción bidimensionales asociadas al método de mínimos cuadrados enteros (ILS).

2.4.2. Método LAMBDA

Al aplicar el procedimiento ILS (Integer Least Squares), se implementa el método Método LAMBDA (Least-Squares AMBiguity Decorrelation Adjustment) (Teunissen, 1993; Teunissen et al., 1995; De Jonge et al., 1996). La determinación de la solución de ambigüedades enteras requiere la realización de una búsqueda en el conjunto de los números enteros. En consecuencia, se establece una búsqueda definida estadísticamente por la distribución χ^2 de la siguiente manera:

$$\Omega_a = \{a \in \mathbb{Z}^n \mid (\hat{a} - a)^T Q_{\hat{a}}^{-1} (\hat{a} - a) < \chi^2\} \quad (2.16)$$

En la Figura 2.3 se muestra la representación geométrica del problema de la resolución de las ambigüedades enteras del método LAMBDA. En el espacio original de parámetros, la solución flotante de ambigüedades se encuentra altamente correlacionada, lo que se refleja en una región de incertidumbre fuertemente alargada. Esta correlación incrementa significativamente el número de candidatos enteros dentro del espacio de búsqueda, aumentando la complejidad del proceso de fijación de ambigüedades. Para reducir este problema, el método LAMBDA aplica una transformación lineal entera que decorrelaciona los parámetros de la ambigüedad. Como se muestra en la figura 2.4, esta transformación produce un nuevo sistema de parámetros en el cual la matriz de covarianza presenta menores términos de correlación, generando un elipsoide de incertidumbre más compacto. Esta reducción de la correlación disminuye significativamente el espacio de búsqueda de soluciones enteras, mejorando la eficiencia y robustez del proceso de resolución de ambigüedades.

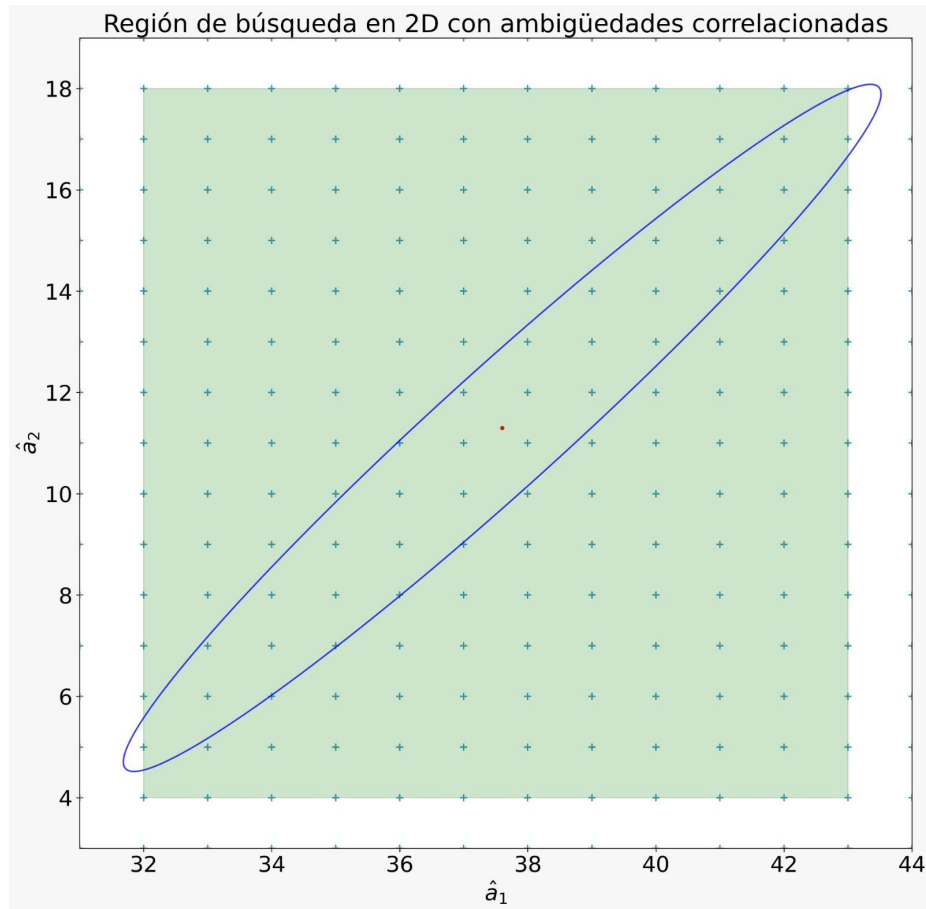


Figura 2.3: Región de búsqueda en 2D con ambigüedades correlacionadas

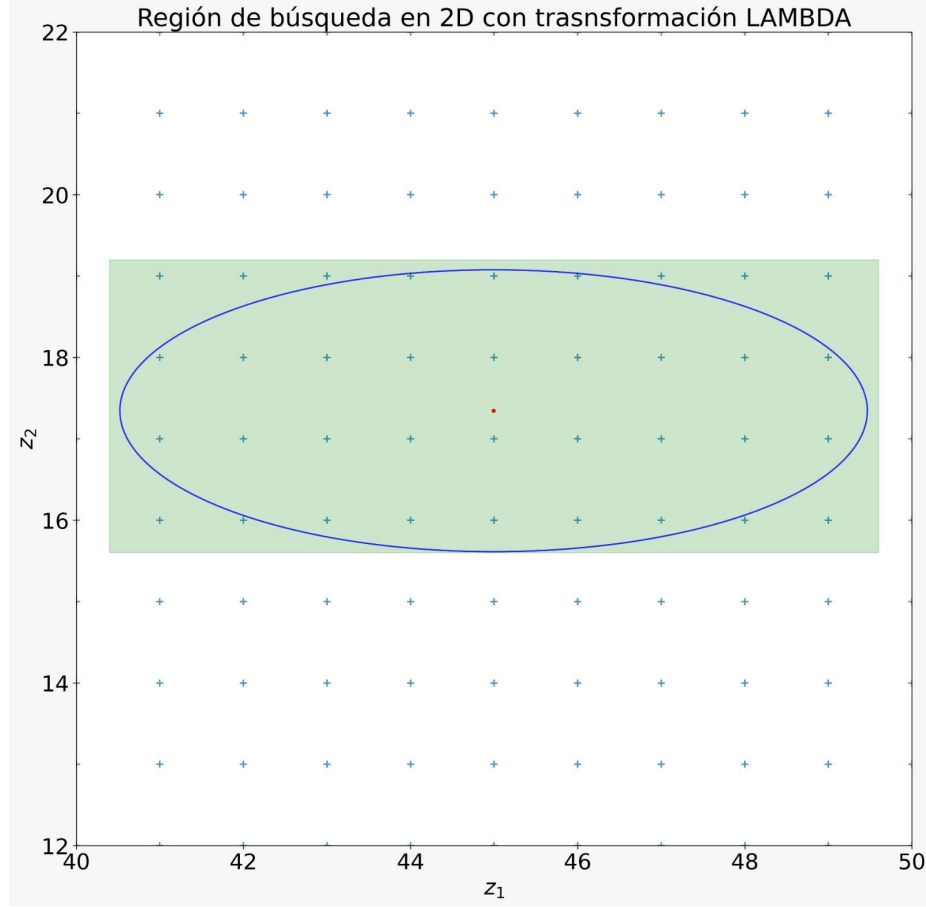


Figura 2.4: Región de búsqueda en 2D con transformación LAMBDA

2.5. Filtro de Kalman

El Filtro de Kalman Extendido (EKF) es la versión linealizada del filtro de Kalman estándar. En este estimador, el modelo de medición se linealiza a través de la matriz de Jacobianos dentro del propio filtro, considerando el vector de innovación (residuales en mínimos cuadrados) calculado de manera recursiva.

En este sentido, se evalúan las derivadas parciales de la matriz de Jacobianos del modelo. Como consecuencia, la secuencia de ganancias del filtro no está predeterminada únicamente por el modelo del proceso, sino que también depende de la secuencia de mediciones obtenidas en cada ejecución.

Desde el punto de vista analítico, se actualiza el vector de estado calculado por el filtro, ya que este dispone de información sobre la relación entre las mediciones y

el modelo del sistema. Sin embargo, los errores de estimación pueden incrementarse progresivamente, afectando la trayectoria estimada y generando un efecto acumulativo que puede llevar a la divergencia del filtro en términos estadísticos. Por ello, puede considerarse más sensible en escenarios con alta incertidumbre inicial o errores significativos en las mediciones; aunque puede ofrecer un mejor desempeño, también presenta un mayor riesgo de inestabilidad bajo condiciones adversas.

En la Figura 2.5 (Brown y Hwang, 2012) se ilustra la comparación entre la trayectoria real y la estimada mediante el EKF. La estimación se actualiza en puntos discretos a partir de mediciones y la linealización del modelo se realiza en torno a la trayectoria estimada, lo que permite mejorar progresivamente la estimación, aunque con riesgo de divergencia en presencia de errores significativos.

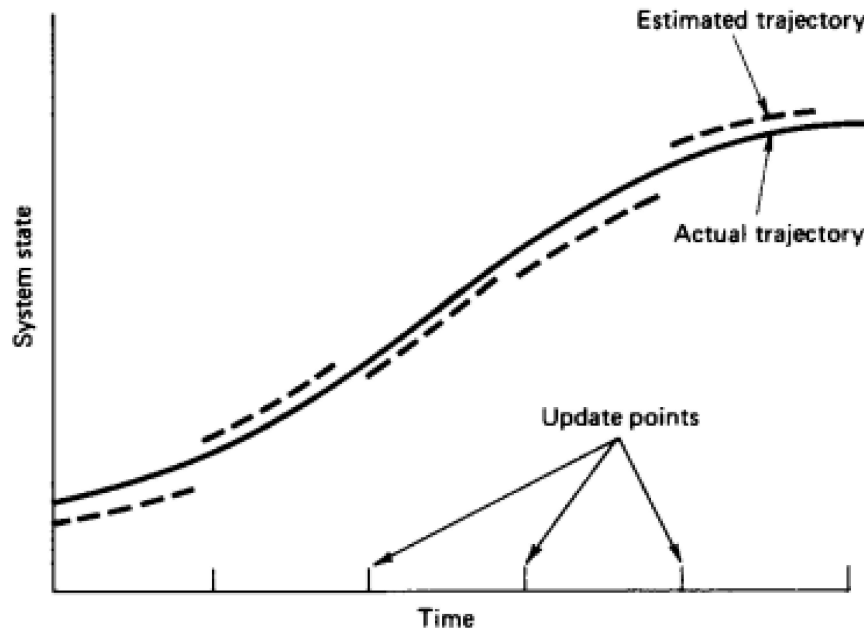


Figura 2.5: Trayectorias de referencia y trayectorias reales para un filtro de Kalman extendido.

2.5.1. Seguimiento de las estimaciones totales en un filtro de Kalman extendido

En el filtro de Kalman linealizado, las variables de estado se formulan en términos de incrementos, en lugar de representar directamente magnitudes absolutas como la

posición o la velocidad. No obstante, en el caso del filtro de Kalman extendido resulta más práctico trabajar con estimaciones totales del estado. Por ello, a continuación se describe el procedimiento para implementar este enfoque, así como la justificación de su validez. Para ello, se parte de la ecuación de medición linealizada, dada por la siguiente expresión:

$$z - h(x^*) = H\Delta x + v \quad (2.17)$$

donde z es el vector de observaciones en una época determinada, h es el modelo de observación no lineal, H es el modelo linealizado, x es el vector de estado a estimar con su respectivo error v . Es importante destacar que, cuando se emplean variables de estado de tipo incremental, la entrada de medición al filtro de Kalman no corresponde directamente a la observación total z , sino a la diferencia entre esta y el modelo evaluado en el estado estimado, es decir, $[z - h(x^*)]$. Posteriormente, se analiza la ecuación de actualización de la estimación incremental en el instante t_k .

$$\Delta \hat{X}_k = \Delta \hat{X}_{\bar{k}} + K_k [z_k - h(x_k^*) - H_k \Delta \hat{X}_{\bar{k}}] \quad (2.18)$$

Al construir el residuo de la medición, se puede considerar que el término $h(x_k^*)$ se relaciona con $H_k \Delta \hat{X}_{\bar{k}}$ en lugar de vincularse directamente con la observación z_k . Bajo esta formulación, el residuo de medición puede expresarse de la siguiente manera:

$$Residual = (z_k - \hat{z}_{\bar{k}}) \quad (2.19)$$

Esto se debe a que la estimación predictiva de la medición se obtiene como la suma del modelo evaluado en el estado actual $h(x_k^*)$ y su término linealizado $H_k \Delta \hat{X}_{\bar{k}}$. De esta forma, el residuo de la medición, tal como se define en la Ec.2.19, se construye de manera consistente con el enfoque del filtro de Kalman extendido, es decir, como la diferencia entre la observación afectada por ruido y la medición estimada a partir de la trayectoria corregida, en lugar de una trayectoria nominal predefinida.

Retomando la Ec. 2.18, se suma a ambos lados de la expresión x_k .

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{\bar{k}} + H_k(z_k - \hat{z}_{\bar{k}}) \quad (2.20)$$

La ecuación 2.20 corresponde a la forma clásica de actualización del estimador lineal, expresada en función de estados totales en lugar de incrementales. En este caso, la estimación a priori se ajusta mediante la incorporación del residuo de la medición, el cual es ponderado por la ganancia de Kalman K_k . Una vez realizada la actualización en el filtro de Kalman extendido, el incremento estimado $\Delta\hat{x}_k$ se anula, por lo que propagación al siguiente instante resulta trivial. En consecuencia, la única propagación relevante es la del estado estimado $\hat{x}_k$, que pasa a ser la nueva referencia en el instante t_k y se proyecta hacia el estado predicho $\hat{x}_{k+1}$.

Capítulo 3

Técnicas de Posicionamiento Satelital

En el capítulo 2, se describieron las mediciones incluidas en el archivo de observación RINEX guardado por la estación, el método principal de resolución de la ambigüedad y el filtro de Kalman que es implementado en la mayoría de los algoritmos de posicionamiento satelital. Las ecuaciones correspondientes a las observaciones fueron explicadas en el capítulo anterior con el fin de entender la diferenciación de las mismas para resolver las ambigüedades y mitigar ciertos errores, lo cual se describirá en este capítulo. El presente capítulo está organizado de la siguiente manera: en las dos primeras secciones se describen los métodos de posicionamiento absoluto, el simple y el puntual preciso (PPP), en las secciones posteriores se describen las técnicas de diferenciación de las mediciones de pseudorange y fase portadora haciendo énfasis en la triple diferenciación. Seguido de los métodos de diferenciación, se describe el método de análisis espectral mediante mínimos cuadrados y finalmente se explica la combinación libre de geometría.

3.1. Posicionamiento Puntual Simple

Para ciertas aplicaciones donde la precisión del nivel del centímetro no es necesaria, el posicionamiento satelital simple ofrece una opción viable. El posicionamiento simple es posible realizarse usando la medición de código o fase en una sola o ambas frecuencias (L1 y L2), y combinando los datos de observación de fase y pseudoran-

go (Hofmann-Wellenhof et al., 2008). Sin embargo, comúnmente se usa la medición del pseudorango para realizar el posicionamiento puntual simple, el cual ofrece una precisión en la posición calculada menor a la del posicionamiento relativo.

3.1.1. Posicionamiento puntual simple usando pseudorangos

En la ecuación del pseudorango (2.2), se consideran los efectos de la atmósfera que repercuten en la medición y los errores en los relojes tanto del satélite como del receptor. En esta ecuación del pseudorango no se describe el error de multicamino, y ϵ es el error sobrante descartando todas las fuentes de errores. La posición se calcula formando un sistema de ecuaciones y resolviéndolo por mínimos cuadrados. El sistema se forma con las ecuaciones del pseudorango (2.2), teniendo como variables la posición del receptor y el error en el reloj del receptor, considerando que el error en el reloj de los satélites es posible calcularlo con los parámetros incluidos en el mensaje de navegación. El sistema de ecuaciones para el posicionamiento simple, se describe de la siguiente manera (Xu y Xu, 2016):

$$L = AX + V, P \quad (3.1)$$

Donde L es el vector que contiene las observaciones, X es el vector que contiene las variables que se calculan, A es la matriz de diseño, V es el vector de residuales, y P es la matriz de pesos de las observaciones la cual describe la confiabilidad de estas. La ecuación (3.1) tiene como solución:

$$X = (A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (3.2)$$

La matriz de diseño A es el Jacobiano que linealiza el sistema de ecuaciones para que pueda ser resuelto. Esta matriz contiene las diferenciales de la ecuación con respecto de cada una de las variables. La forma lineal de la ecuación de observación es como

sigue:

$$l_s = \frac{-1}{\rho_r^s(t_r, t_e)} \begin{pmatrix} x_s - x_{r0} & y_s - y_{r0} & z_s - z_{r0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} - \Delta t + v_s \quad (3.3)$$

Las dimensiones $m \times n$ de la matriz A se definen con el número de ecuaciones disponibles en la época que se calcula la posición (renglones m) y las 4 variables por calcular (columnas n). Debido a que esta técnica de posicionamiento no requiere una estación base para poder realizarse, el posicionamiento es absoluto. A pesar de proveer un posicionamiento con precisión al nivel de un par de metros, al no requerir estación base ni estar sujeto a mediciones de fase, es una técnica bastante estable y puede ser usada en navegación marítima y aérea.

3.2. Posicionamiento Puntual Preciso

El método de posicionamiento puntual preciso (PPP), requiere de los productos de órbitas satelitales precisas, relojes de los satélites del Servicio Internacional GNSS (IGS por sus siglas en inglés), para eliminar de manera efectiva los errores que son mitigados en el posicionamiento diferencial que requiere de una Estación base para llevarse a cabo. Este algoritmo de posicionamiento, también es absoluto al no requerir base y ofrece un posicionamiento con el mismo nivel de precisión que el posicionamiento diferencial, es decir, al nivel del centímetro. Aunque la estación base no es requerida, la posición precisa de los satélites y el estado de sus relojes debe ser conocida. Generalmente, se utiliza la combinación libre de ionósfera para fase y pseudorange, usando las dos frecuencias L1 y L2 simplificando el cálculo del efecto ionosférico en las ecuaciones de observación. Para calcular el efecto troposférico se hace uso de modelos que lo modelan, e.g. Saastamoinen o Helen Hopfield (Hopfield, 1971). Al proceso de resolver las ambigüedades usando este método se le denomina resolución de ambigüedades PPP (Makineci et al., 2024). El desempeño del PPP ha sido evaluado por distintos autores (Kouba y Heroux, 2001), y actualmente se siguen desarrollando algoritmos para mejorar la precisión y el tiempo de convergencia de

la solución. De igual manera, las tareas principales en el desarrollo de este método consisten en generar de manera eficiente las correcciones para habilitar el posicionamiento en tiempo real. Un ejemplo del desarrollo de investigación relacionado con el método PPP es el trabajo realizado por el grupo gAGE (gLAB - Analysis of GNSS Environment) de la Universitat Politècnica de Catalunya, el cual desarrolla modelos ionosféricos en colaboración con la agencia espacial europea (ESA) para el servicio HAS de la Constelación Galileo (Timoté et al., 2024). El servicio HAS provee correcciones en tiempo real para PPP a nivel del decímetro de manera gratuita. El enfoque de este trabajo de tesis no es el posicionamiento puntual preciso aunque es necesario mencionarlo para comprender las ventajas y limitantes de un posicionamiento absoluto y uno diferencial como el que se realiza en esta tesis.

3.3. Diferenciación Simple

Los métodos de diferenciación de las observaciones GNSS consisten en la combinación de los datos GNSS del mismo tipo con el objeto de mitigar los errores que son comunes entre receptores GPS y satélites (Teunissen y Montenbruck, 2017). Las diferencias simples entre estaciones GNSS se forman sustrayendo los datos observados por cada estación del mismo satélite. La expresión que describe las mediciones con diferencia simple, ya sea de pseudorango o fase portadora, es como sigue (Xu y Xu, 2016):

$$DS_{r1,r2}^s(Obs) = Obs_{r2}^s - Obs_{r1}^s \quad (3.4)$$

Donde Obs es el observable (fase o pseudorango), y $r1$ y $r2$ son las estaciones que observan al mismo satélite s . Considerando que la varianza de los observables Obs_{r2}^s y Obs_{r1}^s es la misma σ^2 , entonces $DS_{r1,r2}^s(Obs)$ tiene $2\sigma^2$ de varianza. La propiedad más importante de las diferencias simples es que el error del reloj del satélite s en la ecuación de observación se elimina. Los errores ionosféricos y troposféricos se mitigan especialmente para estaciones cuya línea base es corta. Para facilitar la lectura de la descripción de la diferenciación de las mediciones, se reescriben las ecuaciones de

pseudorango y fase, y se muestra el desarrollo de la diferencia simple entre estaciones:

$$R_r^s(j) = \rho_r^s - c\delta t_r + c\delta t_s + \delta_{\text{ion}}(j) + \delta_{\text{trop}} + \varepsilon_c, \quad (3.5)$$

$$\lambda_j \Phi_r^s(j) = \rho_r^s - c\delta t_r + c\delta t_s + \lambda_j N_r^s(j) - \delta_{\text{ion}}(j) + \delta_{\text{trop}} + \varepsilon_p. \quad (3.6)$$

Realizando la diferencia simple para las mediciones de pseudorango y fase, respectivamente:

$$\text{DS}_{r1,r2}^s(R_j) = R_{r2}^s(j) - R_{r1}^s(j) = \Delta\rho_{r1,r2}^s - c\Delta\delta t_{r1,r2} + \cancel{c\delta t_s} + \cancel{\delta_{\text{ion}}(j)} + \cancel{\delta_{\text{trop}}} + \Delta\varepsilon_c, \quad (3.7)$$

$$\text{DS}_{r1,r2}^s(R_j) = R(j)_{r2}^s - R(j)_{r1}^s = \Delta\rho_{r1,r2}^s - c\Delta\delta t_{r1,r2} + \Delta\varepsilon_c, \quad (3.8)$$

$$\text{DS}_{r1,r2}^s(\Phi_j) = \Phi_{r2}^s(j) - \Phi_{r1}^s(j) = \Delta\rho_{r1,r2}^s - c\Delta\delta t_{r1,r2} + \lambda_j \Delta N_{r1,r2}^s(j) + \cancel{c\delta t_s} - \cancel{\delta_{\text{ion}}(j)} + \cancel{\delta_{\text{trop}}} + \Delta\varepsilon_p, \quad (3.9)$$

$$\text{DS}_{r1,r2}^s(\Phi_j) = \Phi(j)_{r2}^s - \Phi(j)_{r1}^s = \Delta\rho_{r1,r2}^s - c\Delta\delta t_{r1,r2} + \lambda_j \Delta N_{r1,r2}^s(j) + \Delta\varepsilon_\Phi, \quad (3.10)$$

Donde:

$\Delta\rho_{r1,r2}^s = \rho_{r2}^s - \rho_{r1}^s$	Diferencia de distancias geométricas
$\Delta\delta t_{r1,r2} = \delta t_{r2} - \delta t_{r1}$	Diferencia de errores de reloj de los receptores
$\Delta N_{r1,r2}^s(j) = N_{r2}^s(j) - N_{r1}^s(j)$	Diferencia de ambigüedades
$\Delta\varepsilon_R = \varepsilon_{R,r2}^s - \varepsilon_{R,r1}^s$	Diferencia de ruidos de pseudorango
$\Delta\varepsilon_\Phi = \varepsilon_{\Phi,r2}^s - \varepsilon_{\Phi,r1}^s$	Diferencia de ruidos de fase

3.4. Mediciones Doblemente Diferenciadas

Las mediciones doblemente diferenciadas se forman entre dos diferencias simples formadas con dos satélites distintos s y k . Las dobles diferencias se desarrollan de la siguiente manera, para las mediciones de pseudorango, se hace la diferencia entre dos

diferencias simples a dos satélites distintos:

$$DD_{r1,r2}^{s,k}(R_j) = DS_{r1,r2}^k(R_j) - DS_{r1,r2}^s(R_j) \quad (3.11)$$

Al desarrollar las diferencias

$$DD_{r1,r2}^{s,k}(R_j) = \Delta\rho_{r1,r2}^k - \Delta\rho_{r1,r2}^s + \cancel{c\Delta\delta t_{r1,r2}} - \cancel{c\Delta\delta t_{r1,r2}} + \Delta\varepsilon_R^k - \Delta\varepsilon_R^s \quad (3.12)$$

$$DD_{r1,r2}^{s,k}(R_j) = \Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k} + \Delta\nabla\varepsilon_R^{s,k}, \quad (3.13)$$

y para las mediciones de fase se tiene:

$$DD_{r1,r2}^{s,k}(\Phi_j) = DS_{r1,r2}^k(\Phi_j) - DS_{r1,r2}^s(\Phi_j) \quad (3.14)$$

$$DD_{r1,r2}^{s,k}(\Phi_j) = \Delta\rho_{r1,r2}^k - \Delta\rho_{r1,r2}^s + \lambda_j[\Delta N_{r1,r2}^k(j) - \Delta N_{r1,r2}^s(j)] + \cancel{c\Delta\delta t_{r1,r2}} - \cancel{c\Delta\delta t_{r1,r2}} + \Delta\varepsilon_\Phi^k - \Delta\varepsilon_\Phi^s \quad (3.15)$$

$$DD_{r1,r2}^{s,k}(\Phi_j) = \Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k} + \lambda_j\Delta\nabla N_{r1,r2}^{s,k}(j) + \Delta\nabla\varepsilon_\Phi^{s,k}, \quad (3.16)$$

Las mediciones de pseudorango y fase doblemente diferenciadas, descritas por las ecuaciones 3.13 y 3.16, eliminan el error en el reloj del receptor, dejando de esta manera, solamente la posición del receptor y la ambigüedad doblemente diferenciada como variable. Esta combinación es muy útil y popular para resolver las ambigüedades de la estación, ya que al mitigar todos los errores en común entre satélites y receptores, no se *enmascara* a la ambigüedad en la estimación dentro del filtro de Kalman (o mínimos cuadrados).

3.5. Mediciones Triplemente Diferenciadas

Las mediciones de pseudorango y fase triplemente diferenciadas se forman haciendo la diferencia entre dos dobles diferencias entre dos épocas sucesivas. Teniendo en cuenta la expresión de dos diferencias dobles correspondientes a dos épocas sucesivas, se tiene para el tiempo t_1 :

$$DD_{r1,r2}^{s,k}(\Phi_j, t_1) = \Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_1) + \lambda_j\Delta\nabla N_{r1,r2}^{s,k}(j) + \Delta\nabla\varepsilon_{\Phi}^{s,k}(t_1) \quad (3.17)$$

y para el tiempo t_2 :

$$DD_{r1,r2}^{s,k}(\Phi_j, t_2) = \Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_2) + \lambda_j\Delta\nabla N_{r1,r2}^{s,k}(j) + \Delta\nabla\varepsilon_{\Phi}^{s,k}(t_2) \quad (3.18)$$

Realizando la diferencia entre las ecuaciones (3.17) y (3.18), se tiene lo siguiente:

$$TD_{r1,r2}^{s,k}(\Phi_j, t_1, t_2) = DD_{r1,r2}^{s,k}(\Phi_j, t_2) - DD_{r1,r2}^{s,k}(\Phi_j, t_1) \quad (3.19)$$

Desarrollando la triple diferencia y cancelando términos en común:

$$\begin{aligned} TD_{r1,r2}^{s,k}(\Phi_j, t_1, t_2) = & [\Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_2) + \cancel{\lambda_j\Delta\nabla N_{r1,r2}^{s,k}(j)} + \Delta\nabla\varepsilon_{\Phi}^{s,k}(t_2)] \\ & - [\Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_1) + \cancel{\lambda_j\Delta\nabla N_{r1,r2}^{s,k}(j)} + \Delta\nabla\varepsilon_{\Phi}^{s,k}(t_1)] \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$TD_{r1,r2}^{s,k}(\Phi_j, t_1, t_2) = \Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_2) - \Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_1) + \Delta\nabla\varepsilon_{\Phi}^{s,k}(t_1, t_2) \quad (3.21)$$

donde $TD_{r1,r2}^{s,k}(\Phi_j, t_1, t_2)$ es la fase triplemente diferencia utilizando dos dobles diferencias correspondientes a las épocas t_1 y t_2 .

Desarrollando de igual manera la expresión del pseudorango triplemente diferenciado, tenemos la doble diferencia del pseudorango en el tiempo t_1 :

$$DD_{r1,r2}^{s,k}(R_j, t_1) = \Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_1) + \Delta\nabla\varepsilon_R^{s,k}(t_1) \quad (3.22)$$

y para el tiempo t_2 :

$$DD_{r1,r2}^{s,k}(R_j, t_2) = \Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_2) + \Delta\nabla\varepsilon_R^{s,k}(t_2) \quad (3.23)$$

Realizando la diferencia entre (3.22) y (3.23) y simplificando, se obtiene:

$$\begin{aligned} TD_{r1,r2}^{s,k}(R_j, t_1, t_2) &= [\Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_2) + \Delta\nabla\varepsilon_R^{s,k}(t_2)] - [\Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_1) + \Delta\nabla\varepsilon_R^{s,k}(t_1)] \\ & \quad (3.24) \end{aligned}$$

$$= \Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_2) - \Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_1) + \Delta\nabla\varepsilon_R^{s,k}(t_2) - \Delta\nabla\varepsilon_R^{s,k}(t_1) \quad (3.25)$$

$$= \Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_2) - \Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_1) + \Delta\nabla\varepsilon_R^{s,k}(t_1, t_2) \quad (3.26)$$

Las ecuaciones (3.21) y (3.26) describen las mediciones de fase y pseudorango triplemente diferenciadas. Se muestra que las triples diferencias de fase y pseudorango dependen únicamente de la distancia geométrica entre satélites y receptores triplemente diferenciada.

3.5.1. Receptor rover estático

En el caso de que ambos receptores, tanto base como rover, sean estáticos, la distancia geométrica entre los satélites y el receptor no cambia significativamente entre épocas y las ecuaciones (3.21) y (3.26) se simplifican de la siguiente manera:

$$\Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_1) \approx \Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_2) \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} TD_{r1,r2}^{s,k}(\Phi_j, t_1, t_2) &\approx \cancel{\Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_2)} - \cancel{\Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_1)} + \Delta\nabla\varepsilon_\Phi^{s,k}(t_1, t_2) \approx \Delta\nabla\varepsilon_\Phi^{s,k}(t_1, t_2) \\ & \quad (3.28) \end{aligned}$$

y para el pseudorango:

$$\begin{aligned} TD_{r1,r2}^{s,k}(R_j, t_1, t_2) &\approx \cancel{\Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_2)} - \cancel{\Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_1)} + \Delta\nabla\varepsilon_R^{s,k}(t_1, t_2) \approx \Delta\nabla\varepsilon_R^{s,k}(t_1, t_2) \\ & \quad (3.29) \end{aligned}$$

Las ecuaciones (3.28) y (3.29) muestran que las triples diferencias, en el caso donde la estación rover está estática, equivalen al ruido de las mismas mediciones. Por lo tanto, estas sirven para detectar anomalías en las señales de los satélites, tales como errores de multicamino y saltos de ciclo.

3.5.2. Receptor rover en movimiento

En el caso en que el receptor rover esté en movimiento, tal es el caso de un automóvil con un receptor montado en el techo, las mediciones triplemente diferenciadas se relacionan de manera directa con la velocidad:

$$\text{TD}_{r1,r2}^{s,k}(\Phi_j, t_1, t_2) = [\Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_2) - \Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_1)] + \Delta\nabla\varepsilon_{\Phi}^{s,k}(t_1, t_2) \quad (3.30)$$

sustituyendo $[\Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_2) - \Delta\nabla\rho_{r1,r2}^{s,k}(t_1)]$ por la velocidad, se tiene:

$$\text{TD}_{r1,r2}^{s,k}(\Phi_j, t_1, t_2) = \Delta\nabla\dot{\rho}_{r1,r2}^{s,k} \cdot \Delta t + \Delta\nabla\varepsilon_{\Phi}^{s,k}(t_1, t_2) \quad (3.31)$$

donde $\Delta\nabla\dot{\rho}_{r1,r2}^{s,k}$ es la tasa de cambio de la doble diferencia de distancia, relacionada con la velocidad del rover. Es poco común el uso de la triple diferencia para el cálculo de la velocidad de un receptor en movimiento, el principal motivo es la correlación existente entre satélites, receptores y épocas, por lo que usar la triple diferencia para un proceso secuencial es demasiado complicado. Es por esto que el principal uso de las triples diferencias es para detección de anomalías en la señal en receptores rover estáticos.

3.6. Combinación libre de geometría

La combinación libre de geometría se forma restando las observaciones en dos frecuencias diferentes j y l para eliminar todos los elementos dependientes de las frecuencias, específicamente los errores en los relojes y la distancia geométrica (Xu y Xu, 2016). Para las mediciones de fase y pseudorange, las combinaciones libres de

geometría son las siguientes:

$$\Phi_{GL} = \lambda_j \Phi_j - \lambda_l \Phi_l \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{GL} &= [\rho - (\delta_{tr} - \delta_{tk})c + \lambda_j N_j - \delta_{ion}(j) + \delta_{trop} + \delta_{tide} + \delta_{rel} + \varepsilon_p] \\ &\quad - [\rho - (\delta_{tr} - \delta_{tk})c + \lambda_l N_l - \delta_{ion}(l) + \delta_{trop} + \delta_{tide} + \delta_{rel} + \varepsilon'_p] \\ &= \lambda_j N_j - \lambda_l N_l - [\delta_{ion}(j) - \delta_{ion}(l)] + (\varepsilon_p - \varepsilon'_p) \end{aligned} \quad (3.33)$$

y para las mediciones de pseudorango:

$$R_{GL} = R_j - R_l \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} R_{GF} &= [\rho - (\delta_{tr} - \delta_{tk})c + \delta_{ion}(j) + \delta_{trop} + \delta_{tide} + \delta_{rel} + \varepsilon_c] \\ &\quad - [\rho - (\delta_{tr} - \delta_{tk})c + \delta_{ion}(l) + \delta_{trop} + \delta_{tide} + \delta_{rel} + \varepsilon'_c] \\ &= \delta_{ion}(j) - \delta_{ion}(l) + (\varepsilon_c - \varepsilon'_c) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Se muestra en las ecuaciones (3.33) y (3.35) que la combinación libre de geometría de las mediciones de fase y pseudorango, al eliminar todos los errores a excepción del efecto ionosférico y las ambigüedades, puede utilizarse, al igual que las mediciones triplemente diferenciadas, para detección de saltos de ciclo. El cambio de combinación libre de geometría para las mediciones de fase debe ser suave debido al efecto de la ionósfera que prevalece.

3.6.1. Diferencia a través del tiempo de la combinación libre de geometría

Si consideramos que las ambigüedades son estáticas una vez que hayan sido resueltas, entonces al diferenciar la ecuación (3.33) a través del tiempo se cancela el término $\lambda_j N_j - \lambda_l N_l$ de la misma manera que el término de las ambigüedades se

cancela en las mediciones de fase triplemente diferenciadas. Teniendo la combinación libre de geometría para mediciones de fase en la época t_1 y t_2 :

$$\Delta_t \Phi_{\text{GL}} = \Phi_{\text{GL}}(t_2) - \Phi_{\text{GL}}(t_1) \quad (3.36)$$

Sustituyendo (3.33) en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \Delta_t \Phi_{\text{GL}} = & \cancel{[\lambda_j N_j - \lambda_l N_l]} - \cancel{[\lambda_j N_j - \lambda_l N_l]} \\ & - [\Delta \delta_{\text{ion}}(j, l)(t_2) - \Delta \delta_{\text{ion}}(j, l)(t_1)] \\ & + [\Delta \varepsilon_{\Phi}(t_2) - \Delta \varepsilon_{\Phi}(t_1)] \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\Delta_t \Phi_{\text{GF}} = -\Delta_t [\Delta \delta_{\text{ion}}(j, l)] + \Delta_t (\Delta \varepsilon_{\Phi}) \quad (3.38)$$

De manera que esta combinación libre de geometría diferenciada a través del tiempo describe la tasa de cambio de la diferencia del efecto ionosférico entre dos frecuencias j y l . Cualquier cambio abrupto en la señal como consecuencia de un salto de ciclo se reflejará mediante picos en la serie de tiempo de esta métrica.

En este trabajo de tesis, se comparan las mediciones de fase triplemente diferenciadas y las combinaciones de fase libre de geometría como detectores de saltos de ciclo. En el siguiente capítulo se describen los datos usados para el análisis, la metodología y los resultados obtenidos al analizar las mediciones triplemente diferenciadas y las mediciones de fase libre de geometría.

Capítulo 4

Metodología y análisis de resultados

En el capítulo 3 se describieron los principales métodos para diferenciar las mediciones de fase y pseudorango de los satélites y las características de la combinación libre de geometría. Es importante mencionar que el uso principal de esta combinación es el de monitorear los efectos de la ionósfera y el valor del Total Electron Content (TEC) ya que es proporcional a este; sin embargo, en este trabajo de tesis se compara con las mediciones triplemente diferenciadas con el objeto de establecer métricas que posibiliten el monitoreo de anomalías. En este capítulo se describirá a detalle la metodología que se siguió para calcular las mediciones triplemente diferenciadas y se analizan los resultados obtenidos. La estructura del presente capítulo es la siguiente: se comienza por describir los datos y el equipo utilizados para obtener las mediciones satelitales, seguido de la explicación del procesamiento para obtener las mediciones triplemente diferenciadas. Finalmente, se muestra un análisis y una comparativa de los resultados obtenidos.

4.1. Equipo GNSS usado y datos analizados

En este trabajo se realiza el posicionamiento diferencial, es decir, se utilizan los datos de dos estaciones, un Receptor móvil (rover) y una base. La comparativa entre receptores es como sigue:

- Se utiliza la estación de Toluca *TOL2* como base y la estación de referencia de

operación continua (CORS) de la Facultad de Ingeniería como rover.

- El receptor Emlid Reach rs2+ se usa como rover y la estación CORS de la Facultad de Ingeniería como base.

La finalidad de la comparativa es analizar el rendimiento de las mediciones triplemente diferenciadas con una línea base larga de aproximadamente 49 kilómetros (distancia entre la estación *TOL2* y la estación CORS de la Facultad de Ingeniería) y una línea base corta de aproximadamente un metro de distancia (Emlid Reach rs2+ y estación CORS). En la Figura 4.1 se muestra un mapa donde se encuentran las dos estaciones de operación continua utilizadas para el análisis de esta tesis. Para distinguir entre los límites de la Ciudad de México y el Estado de México, se dibujó un sombreado verde y rojo para ambos estados, respectivamente.

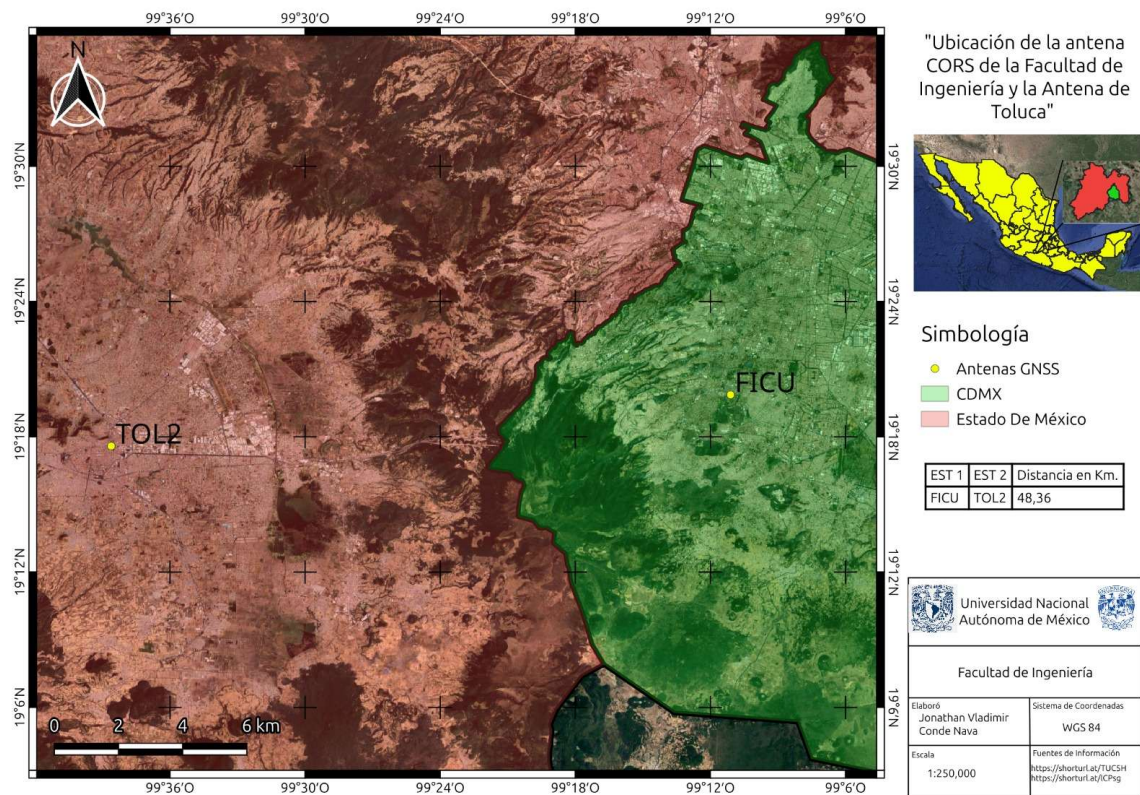


Figura 4.1: Mapa que muestra la ubicación del receptor TOL2 y la estación CORS-FICU de la Facultad de Ingeniería

4.1.1. Estación TOL2 del INEGI

La estación GNSS de Toluca, perteneciente a la Red Geodésica Nacional Activa (RGNA) del INEGI, a la fecha en que se escribe este documento de tesis cuenta con un receptor Trimble Alloy y una antena modelo TRM115000.00. Los datos se guardan cada 15 segundos y se encuentran disponibles en el sitio web de la RGNA del INEGI en los formatos RINEX 2.11 y 3.04. En la Figura 4.2 se muestra una foto de la antena Trimble de la estación TOL2 (Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), 2024).



Figura 4.2: Antena del receptor Trimble Alloy GNSS TOL2 perteneciente a la Red Geodésica Nacional Activa del INEGI.

4.1.2. Estación CORS-FI de la Facultad de Ingeniería

El término CORS proviene de las siglas del nombre completo Continuously Operating Reference Station. La instalación de la estación fue gestionada por el Departamento de Geodesia en 2024, a cargo del entonces jefe del departamento, Dr. Juan Daniel Castillo, y fue puesta en operación a mediados de 2025. La estación cumple con las normativas de INEGI para su incorporación a la RGNA. A la fecha que se

escribe esta tesis la incorporación a la red sigue en proceso. El modelo de la antena es CR3 G3 de tipo *Choke Ring* que tiene por objetivo mitigar la mayoría de señales satelitales impactadas por el efecto multicamino. El receptor es un *SOUTH NET S9* con características de un receptor de grado geodésico con compatibilidad con las constelaciones: GPS, GALILEO, GLONASS, BeiDou y SBAS. Los datos de la estación CORS fueron usados para analizar los distintos métodos de resolución de las ambigüedades de las señales recibidas en Delgado Ortiz (2025). En la Figura 4.3 se muestra la antena CR3 G3 ubicada en el edificio B del conjunto norte de la Facultad de Ingeniería en Ciudad Universitaria. La estación CORS es capaz de enviar correcciones para posicionamiento RTK por medio del protocolo NTRIP.

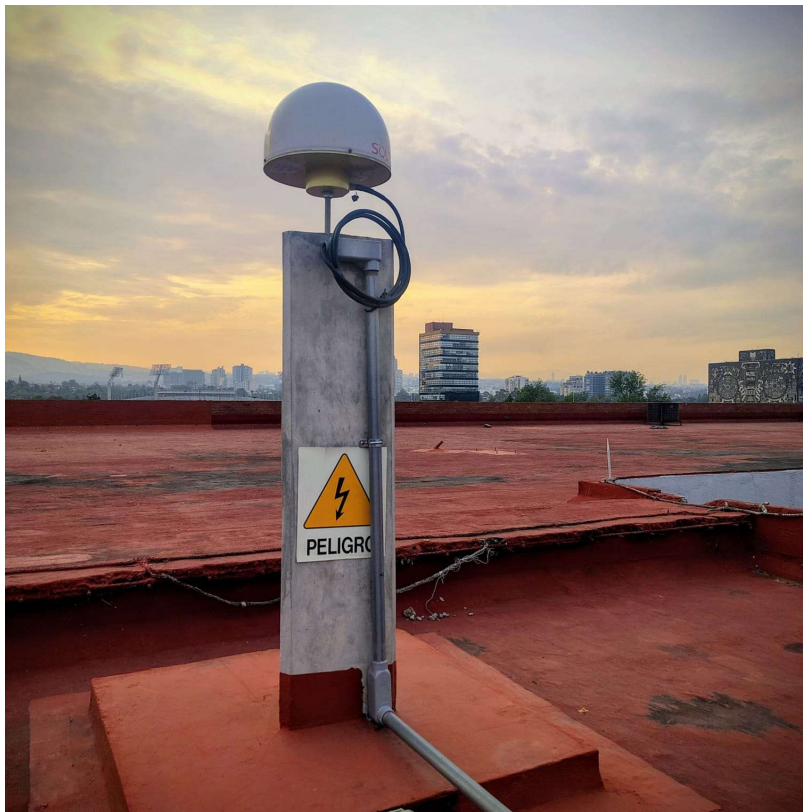


Figura 4.3: Antena del receptor CORS de la Facultad de Ingeniería.

4.1.3. Receptor Emlid Reach rs2

La estación *Emlid Reach rs2* fue utilizada en esta tesis con el objeto de calcular las mediciones triplemente diferenciadas para una línea base muy corta. La estación

fue colocada a una distancia de aproximadamente 1 metro.

Las características del receptor *Emlid Reach S2* son típicas de un equipo GNSS para realizar levantamientos topográficos. Tiene una antena *EML_REACH_RS2* con compatibilidad con las constelaciones GPS, GALILEO, GLONASS y BDS y 184 canales con tasa de actualización de 10 Hz. Es compatible con correcciones transmitidas por NTRIP y radio (LoRa). El receptor puede soportar condiciones de intemperie extremas como humedad y temperaturas cálidas y heladas. En la Figura 4.4 se muestra la antena del receptor *Emlid Reach* instalada a un costado de la División de Ingenierías Civil y Geomática.



Figura 4.4: Antena del receptor Emlid Reach usado en este trabajo de tesis.

4.1.4. Datos usados

Como se mencionó al principio del presente capítulo, se analizaron dos conjuntos de datos correspondientes a las líneas base formadas entre las estaciones *TOL2*, *CORS-FI* y el *Emlid Reach*.

- El primer bloque de datos (línea base corta) corresponde al día 13 de marzo de 2026, de las 17:25 a las 18:25 horas (tiempo GPS), usando la estación *CORS-*

FI como base y la estación *Emlid Reach* como rover. La distancia entre ambas estaciones es de 1 metro aproximadamente.

- El segundo bloque de datos corresponde al día 2 de enero del 2026, de las 8 a las 18 horas (tiempo GPS), usando la estación *TOL2* como base y la estación *CORS-FI* como rover estático. Se eligió inicialmente este intervalo de tiempo con el objeto de analizar el sismo cuyo epicentro fue a 4.5 km suroeste de San Marcos, Guerrero y magnitud 6.5. La distancia entre ambas estaciones es de aproximadamente 48 km.

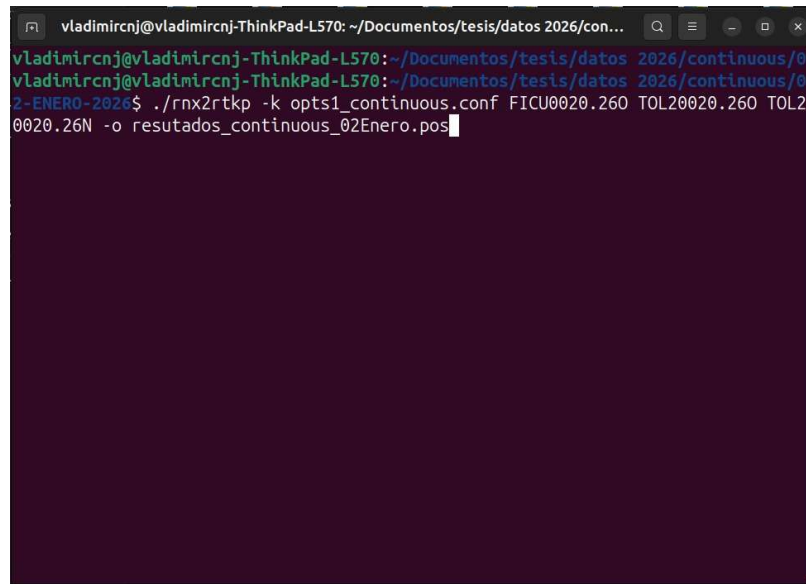
Software RTKLIB

Para el procesamiento de datos se utilizó RTKLIB, software que fue desarrollado por un grupo de investigación de la Universidad de Tokio liderado por el Dr. Takasu Tomoji. El software fue diseñado para procesar datos GNSS aplicando diferentes metodologías para posicionamiento, incluyendo PPP, diferencial y estático. El programa completo consiste en scripts desarrollados en lenguaje C, que fungen como módulos que son llamados para realizar los posicionamientos. Además de la posibilidad de usar los módulos por separado, se pueden modificar para cambiar los resultados obtenidos en cada posicionamiento.

Para analizar los datos GNSS y obtener las mediciones triplemente diferenciadas, se estableció un algoritmo que consiste en usar la interfaz de comandos de RTKLIB, cuyos pasos principales son los siguientes:

- Se modifica el módulo encargado de hacer las diferencias dobles para cada medición de fase y pseudorange para cada frecuencia de los satélites, guardando las mediciones y clasificándolas según su procedencia
- Con las mediciones doblemente diferenciadas clasificadas y guardadas, se calculan las diferencias triples y se guardan.
- Se utiliza la librería Matplotlib para generar las gráficas correspondientes a las series de tiempo.

En la Figura 4.5 se muestra la línea de comandos del sistema operativo *Linux* con el comando correspondiente para ejecutar *RTKLIB*.



```
vladimircnj@vladimircnj-ThinkPad-L570: ~/Documentos/tesis/datos 2026/con...
vladimircnj@vladimircnj-ThinkPad-L570: ~/Documentos/tesis/datos 2026/continuous/0
2-ENERO-2026$ ./rnx2rtkp -k opts1_continuous.conf FICU0020.260 TOL20020.260 TOL2
0020.26N -o resultados_continuous_02Enero.pos
```

Figura 4.5: Línea de comandos para ejecutar RTKLIB.

4.1.5. Detección de Saltos de Ciclo en Series de Triple Diferencia

Para la detección automática de saltos de ciclo en series temporales de triple diferencia, se implementa un algoritmo basado en estadística robusta (Ogundare, 2018). La triple diferencia, como se mencionó en el capítulo anterior, cancela las ambigüedades y los errores de reloj, quedando únicamente la variación temporal de la geometría y el ruido. En condiciones estáticas, esta serie debe fluctuar alrededor de cero ya que la variación de la geometría es nula, y con una amplitud determinada por el ruido de fase. Un salto de ciclo se manifiesta como un valor anómalo de magnitud significativa.

Principio de Detección

La triple diferencia en mediciones de fase, con ambos receptores estáticos se expresa como:

$$\text{TD}_{r1,r2}^{s,k}(\Phi_j, t_1, t_2) = \Delta \nabla \varepsilon_{\Phi}^{s,k}(t_1, t_2) \quad (4.1)$$

En ausencia de saltos de ciclo, este observable fluctúa alrededor de cero con una amplitud determinada por el ruido de fase. Un salto de ciclo introduce un salto discreto de m Ambigüedad de ciclo en la medición de fase, lo que se traduce en un valor anómalo en la triple diferencia:

$$\text{TD}_{\text{con salto}} = \text{TD}_{\text{nominal}} + \lambda_j \cdot m \quad (4.2)$$

El objetivo del algoritmo es identificar estos saltos mediante el análisis estadístico de la serie temporal.

Estructura del Algoritmo

El método de detección se organiza en los siguientes pasos:

Eliminación de tendencia Las variaciones lentas debidas al movimiento de los satélites pueden enmascarar los saltos bruscos. Para aislar estos últimos, se elimina la tendencia lineal de la serie temporal:

$$x_{\text{sinTendencia}}(t) = x(t) - x_{\text{tendencia}}(t) \quad (4.3)$$

donde $x_{\text{tendencia}}(t)$ es la componente calculada mediante regresión lineal. Este paso permite que los saltos de ciclo se destaquen sobre un fondo estacionario.

Estimación Robusta de Dispersión La presencia de saltos de ciclo introduce valores atípicos que sesgan significativamente la media y la desviación estándar tradicionales. Por esta razón, se emplean estadísticos robustos:

$$\mu_{\text{robusto}} = \text{mediana}(x_{\text{sinTendencia}}) \quad (4.4)$$

$$\sigma_{\text{robusto}} = 1.4826 \cdot \text{MAD} \quad (4.5)$$

donde MAD (Median Absolute Deviation) (Median Absolute Deviation) se define como:

$$\text{MAD} = \text{mediana}(|x_{\text{sinTendencia}} - \text{mediana}(x_{\text{sinTendencia}})|) \quad (4.6)$$

El factor 1.4826 escala la MAD para que sea equivalente a la desviación estándar en una distribución normal. Este enfoque robusto tiene un punto de ruptura del 50 %, lo que significa que puede resistir hasta la mitad de los datos corruptos sin verse afectado.

Cálculo de estadística M Se calcula la estadística M normalizada para cada observación:

$$M_i = \frac{|x_i - \mu_{\text{robusto}}|}{\sigma_{\text{robusto}}} \quad (4.7)$$

Esta estadística mide cuántas desviaciones estándar separa una observación del valor central. Las observaciones con puntaje elevado son candidatas a ser saltos de ciclo.

Umbral de Detección Se establece un umbral τ (típicamente entre 3 y 6) y se identifican como candidatos aquellos puntos que cumplen:

$$M_i > \tau \quad (4.8)$$

La elección del umbral define el equilibrio entre sensibilidad (detectar todos los saltos de ciclo) y especificidad (evitar falsos positivos).

Filtrado por Proximidad Temporal Un mismo salto de ciclo afecta a múltiples épocas consecutivas, generando múltiples detecciones. Para evitar que un único evento sea contabilizado varias veces, se aplica un filtro que exige una separación mínima $\Delta t_{\min}$ entre detecciones:

$$t_{i+1} - t_i \geq \Delta t_{\min} \quad (4.9)$$

Validación por Consistencia Temporal Para reducir aún más los falsos positivos, se verifica que la anomalía no sea un *outlier* aislado sino un salto persistente. Se examina una ventana local de $2k + 1$ épocas alrededor del punto candidato:

$$|\text{mediana}(\{x_{i-k}, \dots, x_{i+k}\})| > \tau \cdot \sigma_{\text{robusto}} \quad (4.10)$$

Esta condición asegura que el salto sea consistente en el tiempo y no producto de una fluctuación aleatoria momentánea.

La elección de la métrica robusta M frente a los tradicionales se fundamenta en la naturaleza de los datos GNSS:

- La media muestral $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$ es sensible a *outliers*; un solo salto de ciclo de gran magnitud puede desplazarla significativamente.
- La desviación estándar $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}$ se infla en presencia de valores atípicos, elevando el umbral de detección y reduciendo la sensibilidad.
- La mediana y la MAD son estimadores de localización y escala con punto de ruptura del 50 %, lo que garantiza que la presencia de saltos de ciclo no degrade la capacidad de detección.

4.2. Línea base corta

Se calcularon las mediciones triplemente diferenciadas para una línea base corta con la estación *CORS-FI* como base y el receptor *Emlid Reach* a una distancia aproximada de 4 metros. En la Figura 4.6 se muestra la línea base corta analizada en este trabajo de tesis. La ubicación se encuentra en el techo del edificio B del conjunto norte de la Facultad de Ingeniería. Las condiciones para la recepción de las mediciones son óptimas y la línea base es lo suficientemente corta para que los efectos atmosféricos

sean mitigados en su totalidad mediante las diferencias entre las mediciones de los receptores. Este es el caso ideal de las fases y pseudorangos diferenciados.



Figura 4.6: Línea base corta entre FICU y *Emlid Reach*.

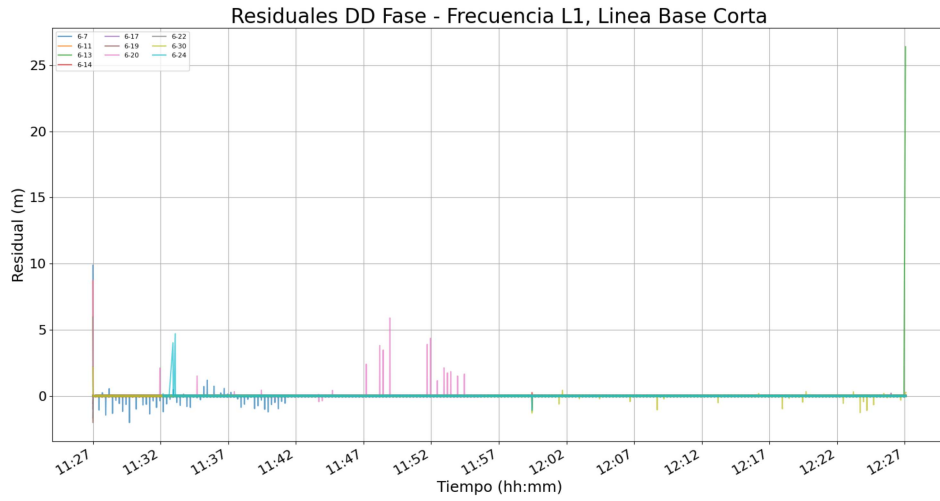
El software RTKLIB es capaz de procesar diferentes modos de resolución de la Resolución de ambigüedades según sea el caso (Delgado Ortiz, 2025). Cuando la recepción de la señal se da en condiciones óptimas, es decir, en la azotea de un edificio alto, el modo de resolución de la ambigüedad más conveniente es *fixar y mantener*. Este modo de resolución mantiene constante la ambigüedad entera calculada una vez que se encontró, y no vuelve a buscar nuevos valores enteros hasta que exista una interrupción de señal, un salto de ciclo o algún error abrupto que impacte las mediciones recibidas.

Para automatizar el procesamiento y la generación de los resultados mostrados a continuación, se desarrolló en Python un *pipeline* que integra las distintas etapas del análisis. Este procedimiento lee los archivos RINEX de observación y navegación correspondientes a las estaciones, organiza los datos requeridos para cada procesamiento, ejecuta RTKLIB con la configuración establecida para obtener las soluciones y las mediciones diferenciadas y, finalmente, procesa los archivos de salida y genera las gráficas de las series de tiempo mediante Matplotlib. De esta manera, se mantie-

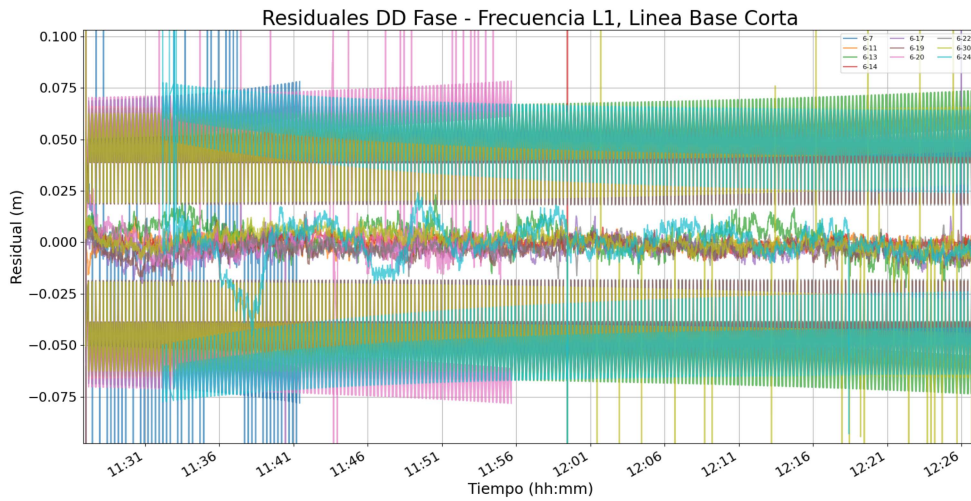
ne un procedimiento reproducible y consistente para los distintos conjuntos de datos analizados.

Dobles diferencias con ambigüedades flotantes

Con el fin de mostrar el efecto de las mediciones triplemente diferenciadas cuando las ambigüedades son resueltas, se calcularon las mediciones diferenciadas con las ambigüedades reales en el vector de estado, y posteriormente con el modo *fixar y mantener* encendido (Delgado Ortiz, 2025). Como antecedente, se muestra primero el comportamiento de las fases reales doblemente diferenciadas. En la Figura 4.7 se muestran las diferencias dobles para la fase en la frecuencia L1 y las ambigüedades flotantes. Se hizo un acercamiento para mostrar el ruido causado por la geometría y las ambigüedades. Cada par de satélites se grafica con su respectivo valor de 2σ y -2σ para mostrar una referencia del sesgo de las mediciones. Para esta hora de datos, el satélite base fue el *GPS 6*.



(a) Serie de mediciones DD de fase.

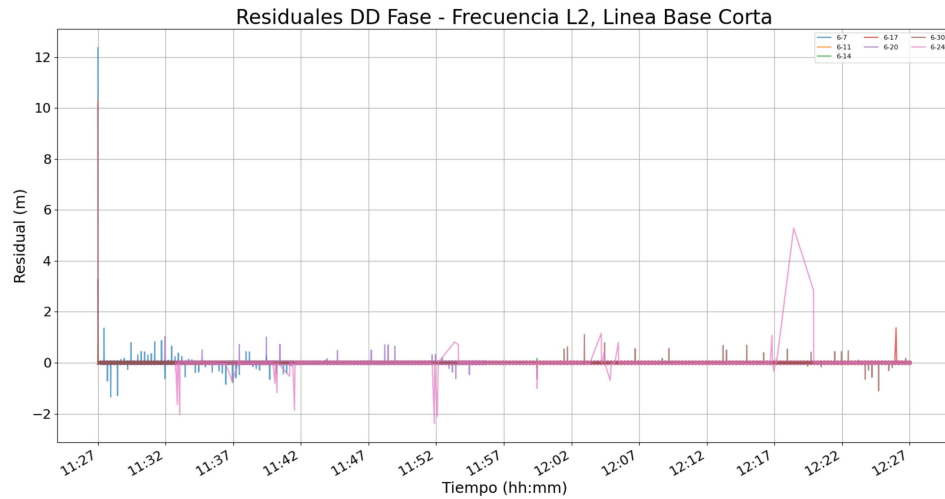


(b) Acercamiento a las mediciones DD de fase.

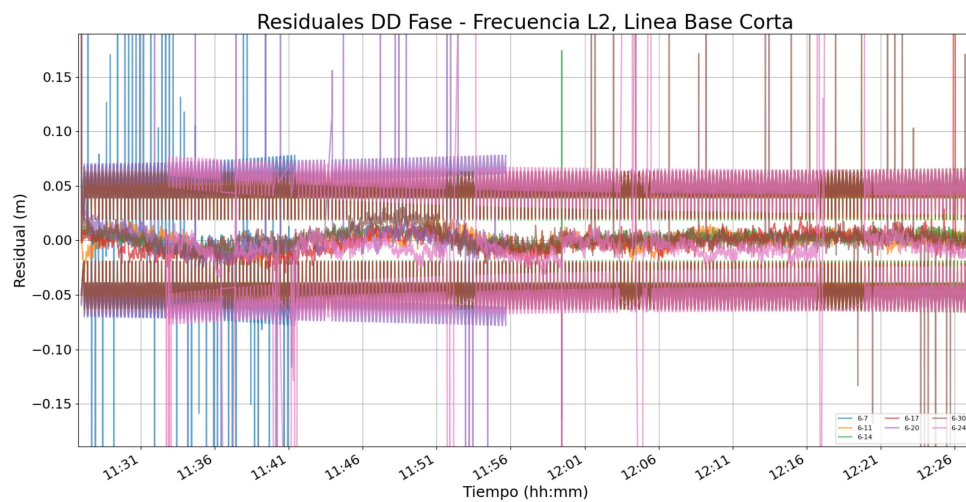
Figura 4.7: Serie de tiempo de dobles diferencias de medición de fase, frecuencia L1, de línea base corta.

En la Figura 4.8 se muestran los residuales de las mediciones de fase doblemente diferenciadas de la frecuencia L2. Se puede notar de igual manera ruido debido a la geometría y las ambigüedades flotantes. Es importante mencionar que debido a que los efectos atmosféricos han sido mitigados casi en su totalidad, al eliminar el efecto

ionosférico, la comparación de las dobles diferencias de fase entre frecuencias no tiene relevancia, ya que no hay correlación.



(a) Serie de residuales DD de fase.

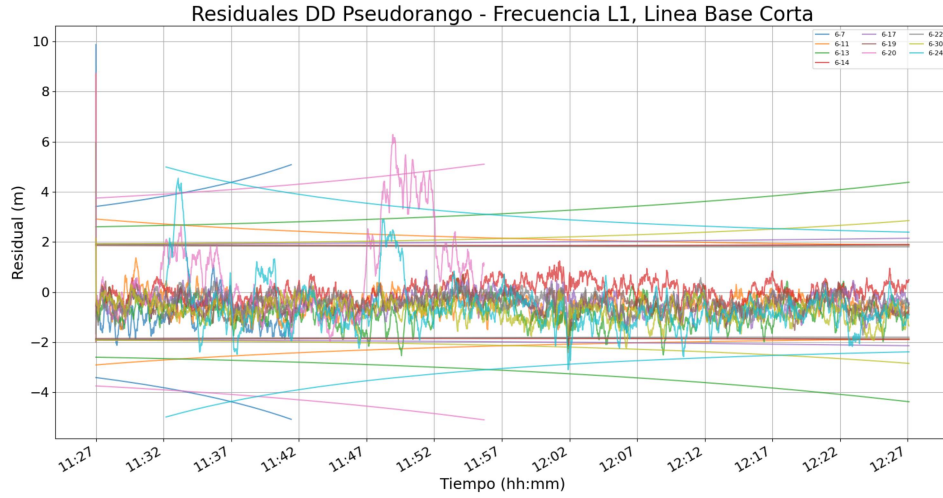


(b) Acercamiento a los residuales DD de fase.

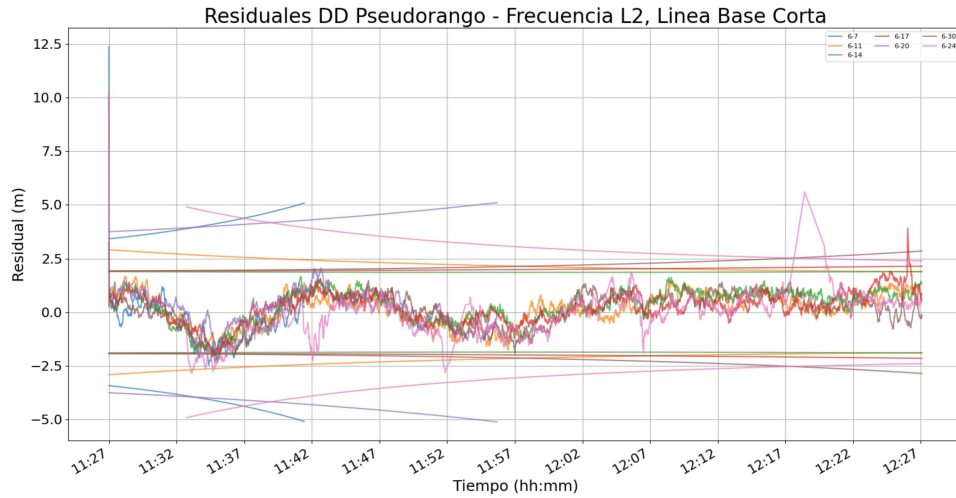
Figura 4.8: Serie de tiempo de residuales de las dobles diferencias de medición de fase, frecuencia L2, de línea base corta.

En la Figura 4.9 se muestran las mediciones doblemente diferenciadas de los pseudorangos en las frecuencias L1 y L2. Los valores de los residuales muestran mayor

ruido que las fases, fluctuando en un rango de 5 metros aproximadamente. Este ruido es contemplado por el filtro de Kalman y se aprecia que los valores de los residuales se encuentran dentro de las envolturas de 2σ correspondientes.



(a) Residuales DD de pseudorange en L1.

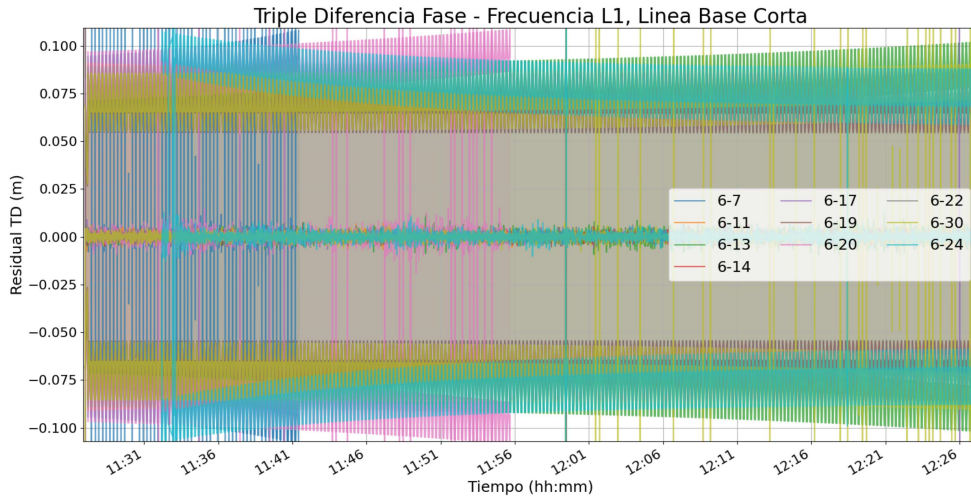


(b) Residuales DD de pseudorange en L2.

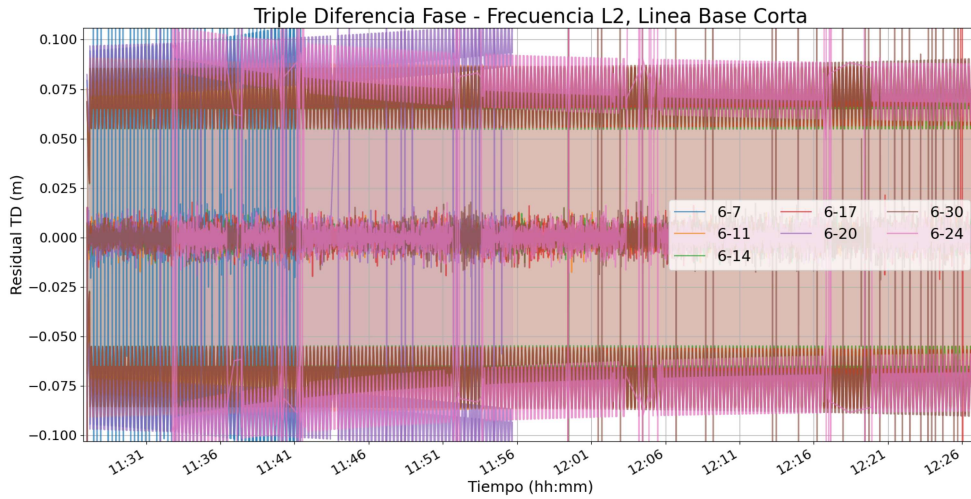
Figura 4.9: Serie de tiempo de los residuales de los pseudoranges doblemente diferenciados de las frecuencias L1 y L2 de la línea base corta.

Triples diferencias con ambigüedades flotantes

En la Figura 4.10 se muestran los residuales de las mediciones de fase triplemente diferenciados para ambas frecuencias. El ruido de estos valores se debe solamente a las ambigüedades flotantes, ya que el efecto geométrico se elimina al realizar la diferencia a través del tiempo para el caso donde ambos receptores son estáticos. Aunque hay diversas épocas en las que los valores de los residuales salen de la envoltura de 2σ , esto solamente se debe a que no se ha resuelto la ambigüedad.



(a) Residuales TD de fase en L1.



(b) Residuales TD de fase en L2.

Figura 4.10: Serie de tiempo de los residuales de las fases triplemente diferenciadas de las frecuencias L1 y L2 de la línea base corta.

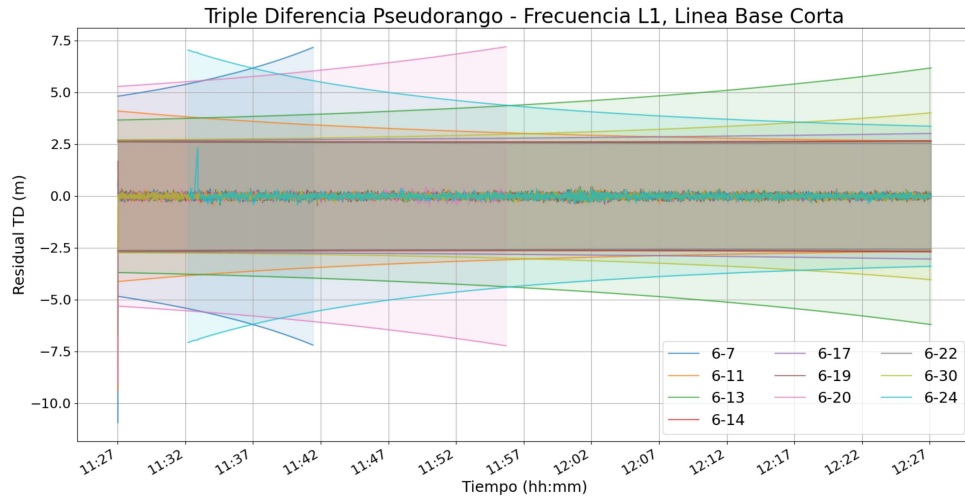
En la Figura 4.11 se muestran los residuales de las mediciones de pseudorangos triplemente diferenciados para las frecuencias L1 y L2, con las ambigüedades flotantes. Es importante mencionar lo siguiente:

- Para las mediciones de pseudorango triplemente diferenciadas en el caso estático,

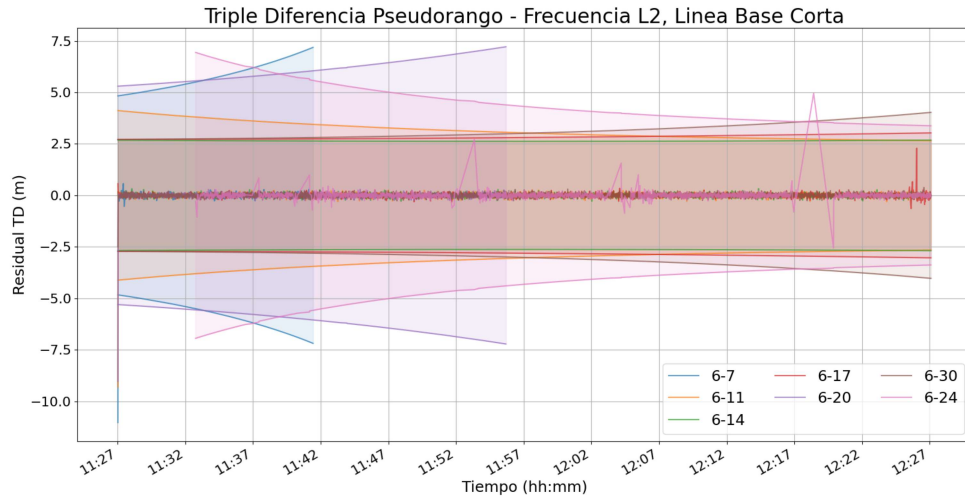
solamente se tiene el ruido de las mediciones. No hay efecto de las ambigüedades flotantes.

- En todo momento las mediciones de pseudorango triplemente diferenciadas se encuentran dentro de su envoltura 2σ , confirmando que todos los saltos que se muestran en la Figura 4.10 son debido al efecto de las ambigüedades flotantes

Esto quiere decir que aún cuando la ambigüedad no haya sido resuelta, el pseudorango es confiable para un posicionamiento simple absoluto.



(a) Residuales TD de pseudorange en L1.



(b) Residuales TD de pseudorange en L2.

Figura 4.11: Serie de tiempo de los residuales de los pseudoranges triplemente diferenciados de las frecuencias L1 y L2 de la línea base corta.

Dobles diferencias con ambigüedades resueltas

Utilizando el modo de resolución de la ambigüedad *fijar y mantener*, el cual encuentra el valor entero correcto por medio de Mínimos Cuadrados Enteros (Teunissen, 1999), y fija la solución hasta que se encuentra un salto de ciclo. Este modo de reso-

lución de la ambigüedad es conveniente cuando el rover se encuentra en condiciones óptimas para la recepción de señal. Es importante mencionar que con el método *fixar y mantener*, el 98 % de las soluciones fueron fijadas; es decir, con las ambigüedades resueltas. En la Figura 4.12, se muestran los errores en el dominio de las posiciones Este, Norte y Arriba (ENU por sus siglas en inglés). Las soluciones graficadas con puntos rojos corresponden a las ambigüedades flotantes y los puntos azules son las soluciones fijas.

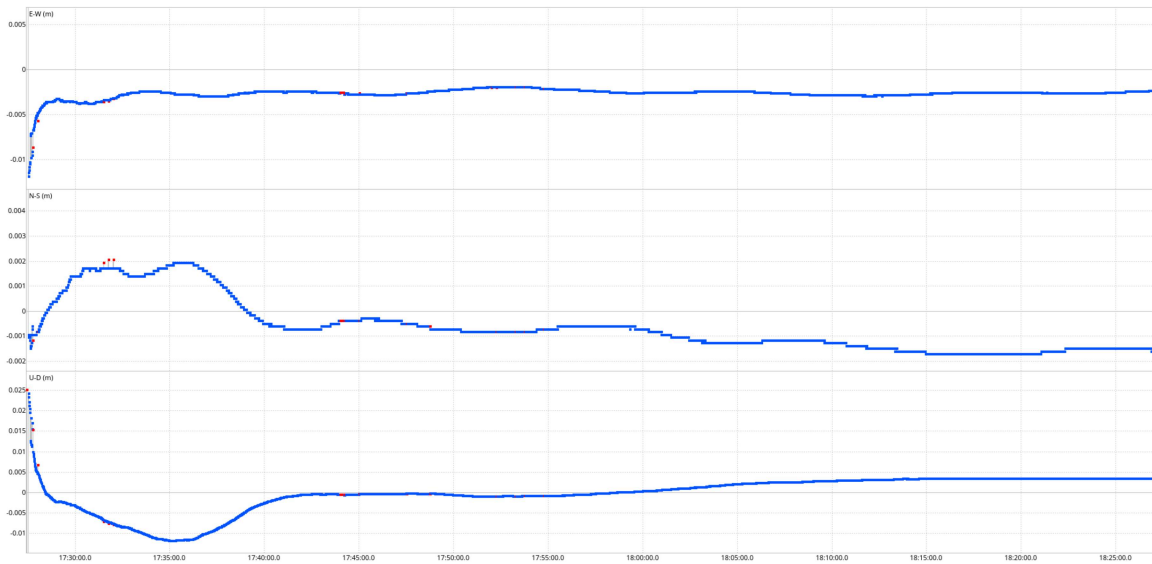
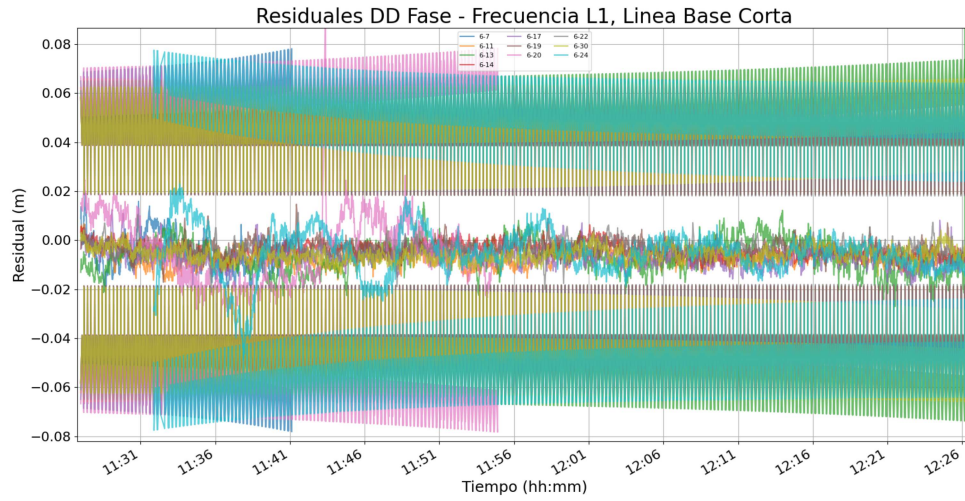
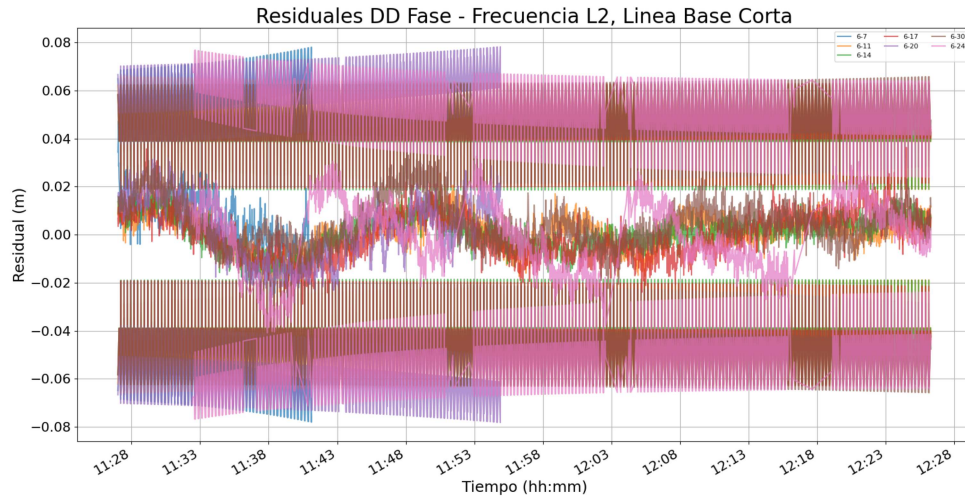


Figura 4.12: Errores en las posiciones Este, Norte y Arriba.

Es por eso que este conjunto de datos es un ejemplo del correcto funcionamiento de las mediciones triplemente diferenciadas cuando las ambigüedades están resueltas. En la Figura 4.13 se encuentran los residuales doblemente diferenciados de las fases con las ambigüedades resueltas para las frecuencias L1 y L2. Aunque los términos de las ambigüedades no son eliminados en las dobles diferencias, el valor de N es constante la mayoría del tiempo por lo que solamente hay influencia de la geometría y el propio ruido de las fases. Esta solución es mejor que la mostrada en la Figura 4.8, donde las ambigüedades son flotantes.



(a) Residuales DD de fase en L1 con las ambigüedades resueltas.

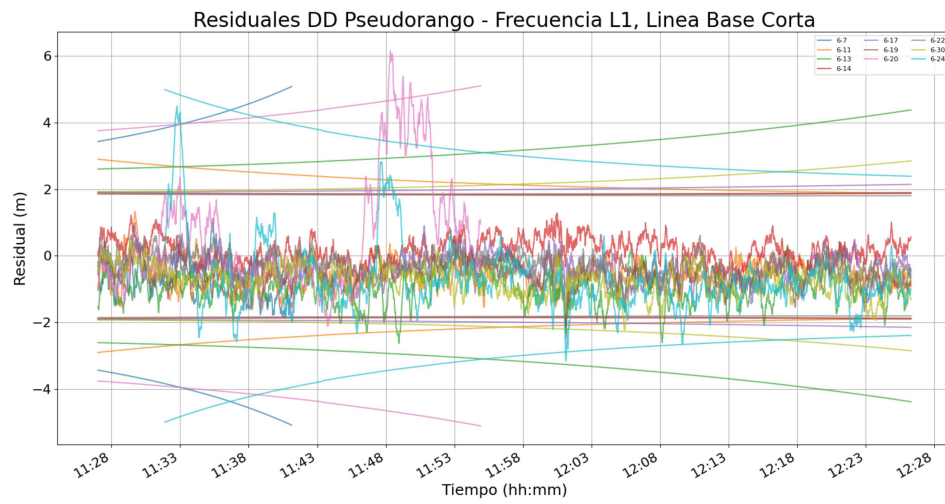


(b) Residuales DD de fase en L2 con las ambigüedades resueltas.

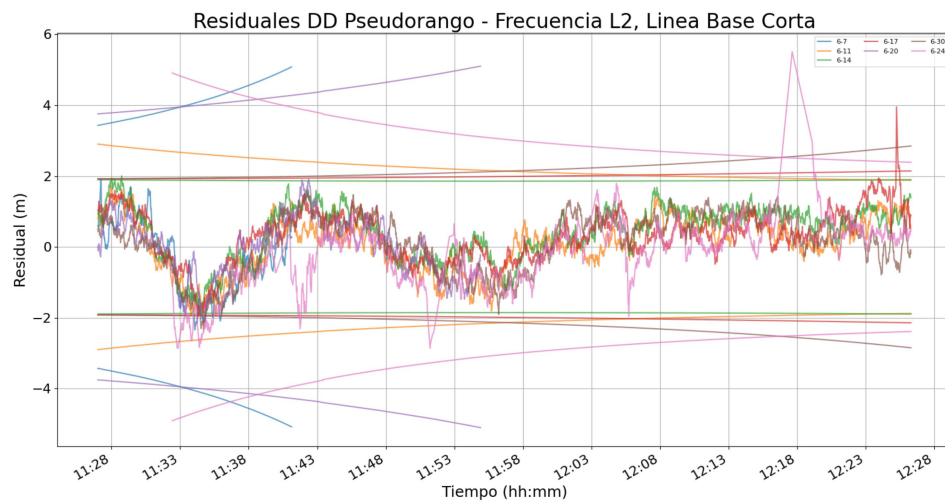
Figura 4.13: Serie de tiempo de los residuales de fases doblemente diferenciadas de las frecuencias L1 y L2 de la línea base corta con las ambigüedades resueltas.

En la Figura 4.14 se muestran los residuales de los pseudorangos doblemente diferenciados con las ambigüedades resueltas. Por lo que se puede apreciar, son los mismos residuales que cuando las ambigüedades son flotantes; esto se debe a que los valores de N no están involucrados en las ecuaciones de los pseudorangos doblemente

diferenciados.



(a) Residuales TD de pseudorango en L1 con la ambigüedad fija.



(b) Residuales TD de pseudorango en L2 con la ambigüedad fija.

Figura 4.14: Serie de tiempo de los residuales de los pseudorangos triplemente diferenciados de las frecuencias L1 y L2 de la línea base corta.

Triples diferencias con ambigüedades resueltas

De acuerdo con la ecuación,

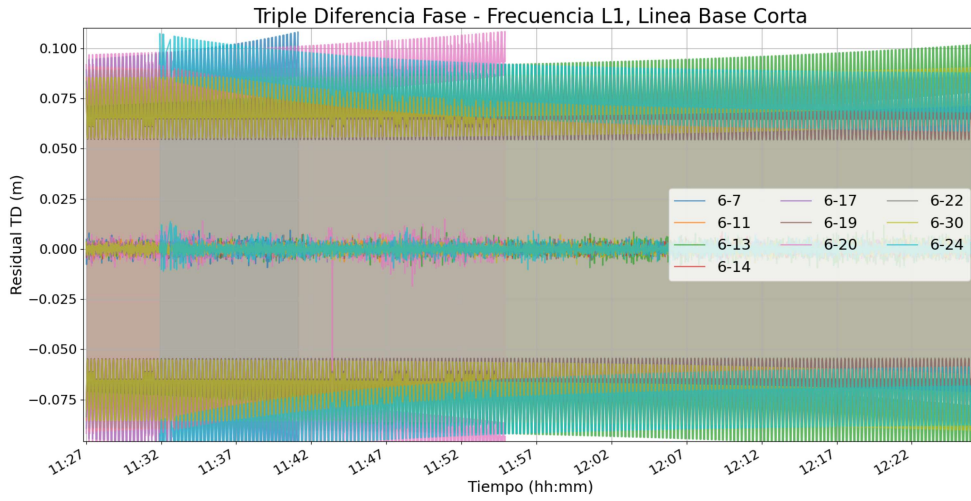
$$\Delta \nabla \rho_{r1,r2}^{s,k}(t_1) \approx \Delta \nabla \rho_{r1,r2}^{s,k}(t_2) \quad (4.11)$$

$$\text{TD}_{r1,r2}^{s,k}(\Phi_j, t_1, t_2) \approx \underbrace{\Delta \nabla \rho_{r1,r2}^{s,k}(t_2)}_{\text{cancelado}} - \underbrace{\Delta \nabla \rho_{r1,r2}^{s,k}(t_1)}_{\text{cancelado}} + \Delta \nabla \varepsilon_{\Phi}^{s,k}(t_1, t_2) \approx \Delta \nabla \varepsilon_{\Phi}^{s,k}(t_1, t_2) \quad (4.12)$$

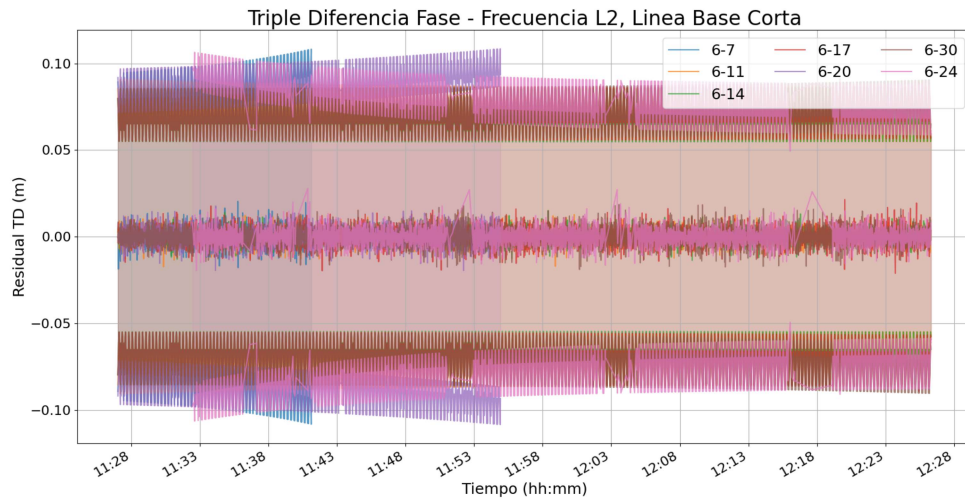
se muestra que cuando las ambigüedades están resueltas, al realizar las triples diferencias se elimina el término de las ambigüedades N , y en el caso estático también el término geométrico. Esto quiere decir que solamente se muestra en el residual el ruido de las mediciones triplemente diferenciadas.

En la Figura 4.15 se muestran los residuales de fase para L1 y L2, triplemente diferenciados y con las ambigüedades resueltas. De esta figura se muestra lo siguiente:

- Debido a que las ambigüedades fueron resueltas, el ruido que se muestra es solamente de las mediciones de fase triplemente diferenciadas.
- Cualquier fluctuación o incremento en la magnitud de estos valores indica un salto de ciclo o algún error que impacta fuertemente la señal, por ejemplo, efecto multicamino.
- Este es el caso específico para el cual, las triples diferencias de fase son útiles.



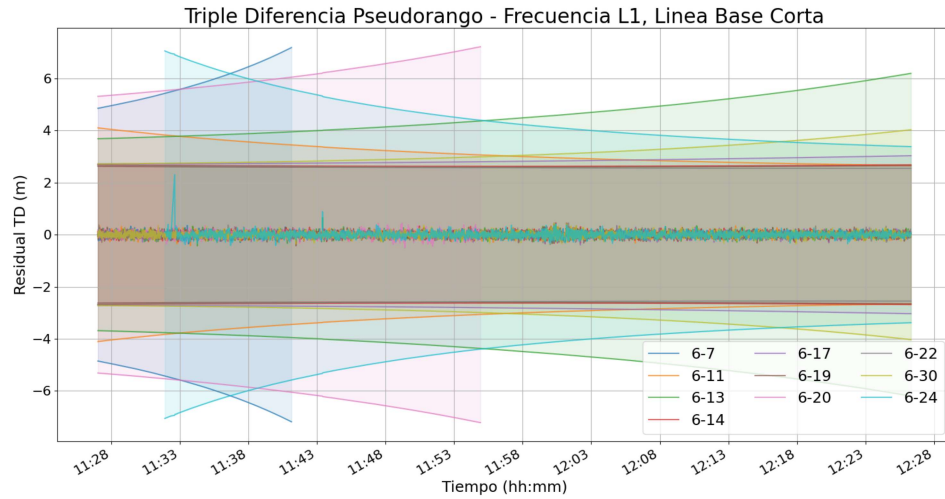
(a) Residuales TD de fase en L1 con la ambigüedad fija.



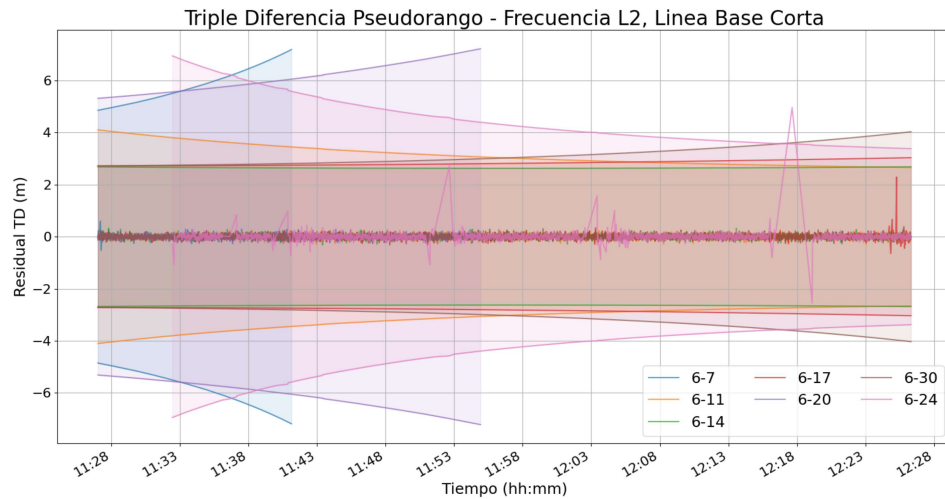
(b) Residuales TD de fase en L2 con la ambigüedad fija.

Figura 4.15: Serie de tiempo de los residuales de las fases triplemente diferenciadas de las frecuencias L1 y L2 de la línea base corta con las ambigüedades resueltas el 98 % de las épocas.

De igual manera que con las mediciones de Pseudorange doblemente diferenciadas, los residuales de las triples diferencias de los pseudoranges mostradas en la Figura 4.16 con las ambigüedades fijas, son iguales a los residuales con las ambigüedades flotantes.



(a) Residuales TD de pseudorange en L1 con la ambigüedad fija.



(b) Residuales TD de pseudorange en L2 con la ambigüedad fija.

Figura 4.16: Serie de tiempo de los residuales de los pseudorangs triplemente diferenciados de las frecuencias L1 y L2 de la línea base corta con las ambigüedades resueltas.

A pesar de que los pseudorangs, son poco sensibles a los saltos de ciclo, estos presentan mayor ruido por lo que no son suficientes para alcanzar la precisión del nivel del centímetro. Sin embargo, estas mediciones presentan mayor estabilidad y menor sesgo que las mediciones de fase, mostrando mayor confiabilidad debido a su

independencia de los valores de las ambigüedades.

Combinación Libre de Geometría

Se realiza la combinación libre de geometría para el conjunto de datos observados en ambas estaciones. El método realizado está descrito en el capítulo anterior y se aplica los archivos RINEX de observación correspondientes a las estaciones involucradas en el posicionamiento. Esta combinación elimina los términos de geometría, el efecto troposférico, los errores en los relojes, dejando solamente el efecto ionosférico y el término de las ambigüedades. Al realizar la diferencia de las mediciones combinadas libres de geometría a través del tiempo, se elimina el término de las ambigüedades N asumiendo que es constante a través del tiempo, dejando solamente los términos de la ionósfera y del ruido de las mediciones. Para que sea válida esta asunción, se necesita que no haya interrupciones en las señales obtenidas por los receptores ni ninguna fuente de error que impacte las mediciones. En la Figura 4.17 se muestra la combinación libre de geometría de las mediciones de fase correspondientes a la estación FICU. El cambio a través del tiempo de esta medición debe ser suave, guiado principalmente por el efecto de la ionósfera.

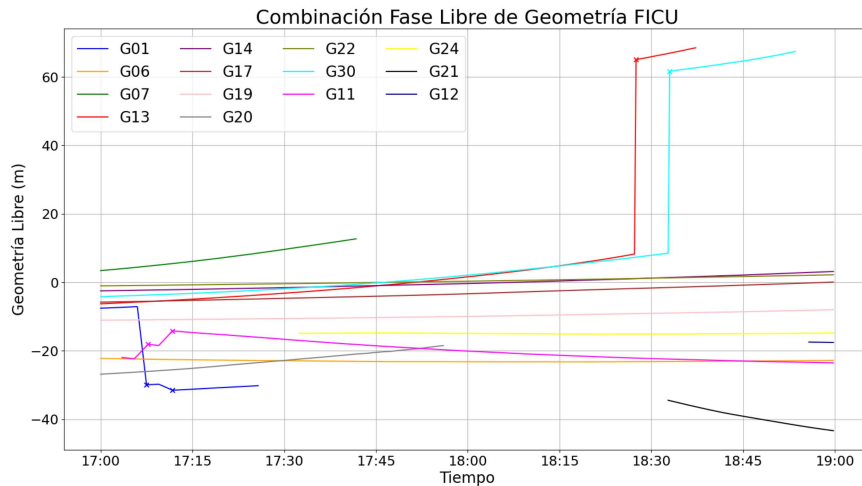


Figura 4.17: Mediciones de fase combinadas libre de geometría de la estación FICU.

En la Figura 4.18 se muestran las combinaciones de fase libre de geometría de

la estación FICU diferenciadas a través del tiempo. El color de las líneas verticales corresponde al satélite donde se detecta un pico en la combinación. Se puede apreciar que los satélites pegados al Cenit tienen valores cercanos al cero, demostrando menor efecto ionosférico que los satélites, *G 07*, *G 13* y *G 30*. Este efecto es notorio cuando el satélite entra en observación y cuando sale de las mediciones, correspondiente a las épocas donde tienen altitudes bajas.

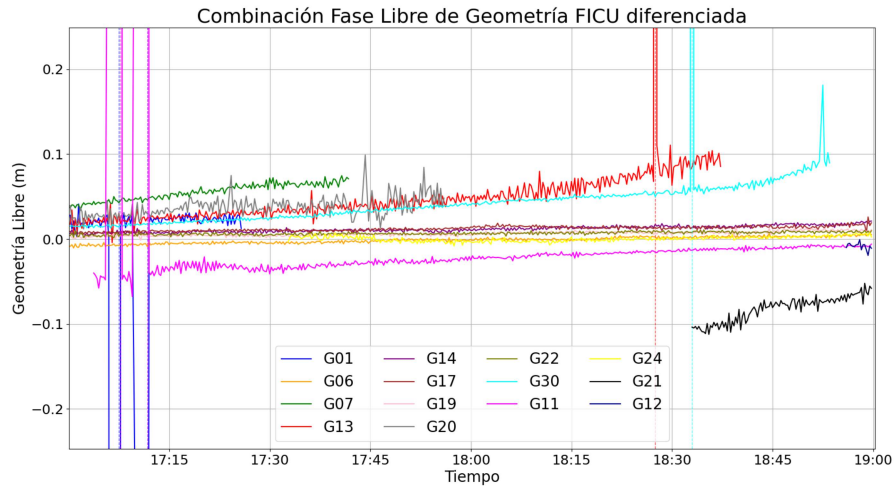


Figura 4.18: Mediciones de fase combinadas libre de geometría de la estación FICU diferenciadas a través del tiempo.

En la Figura 4.19 se muestran los valores de la combinación libre de geometría usando los pseudorangos de la estación FICU. Se puede apreciar mayor ruido que las combinaciones de las fases. Sin embargo, debido a que las ambigüedades no influyen en estos valores, la tendencia de las líneas mostradas es efecto del retraso ionosférico en las mediciones.

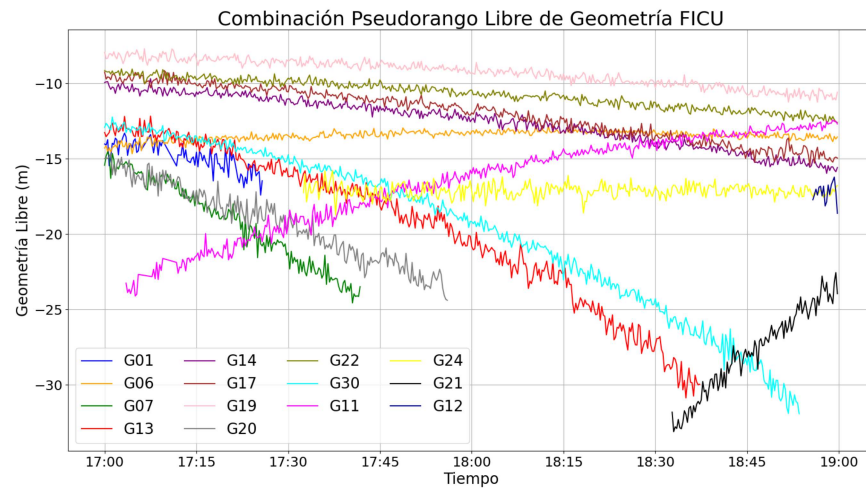


Figura 4.19: Mediciones de pseudorango combinadas libre de geometría de la estación FICU.

Las combinaciones de pseudorangos libre de geometría y diferenciadas a través del tiempo están graficadas en la Figura 4.20. Debido a que el cambio ionosférico es suave en la gráfica 4.19, el resultado de diferenciar a través del tiempo es solamente ruido de las mediciones de pseudorango.

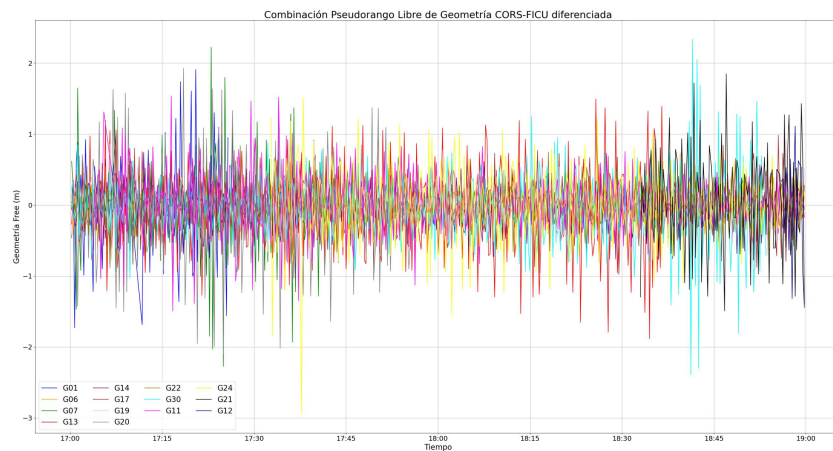


Figura 4.20: Mediciones de pseudorango combinadas libre de geometría de la estación FICU diferenciadas a través del tiempo.

Las combinaciones de pseudorango y fase libres de geometría se realizan por estación. Las siguientes gráficas corresponden a las observaciones del receptor *Emlid*

Reach rs2. Las fases combinadas libre de geometría se graficaron en la Figura 4.21 y sus diferencias a través del tiempo en la 4.22. El cambio en el efecto ionosférico es parecido al visto en la estación FICU, con la diferencia que este conjunto de datos tiene una tasa de 1 Hertz.

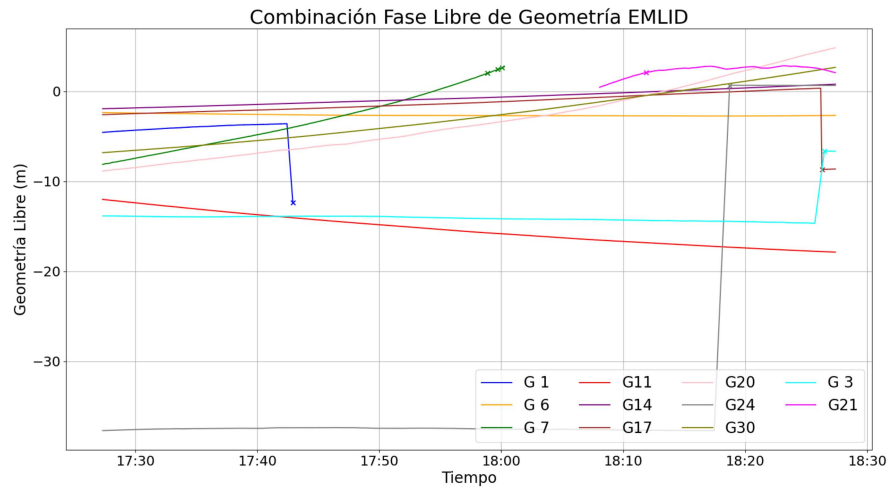


Figura 4.21: Mediciones de fase combinadas libre de geometría del receptor *Emlid Reach*.

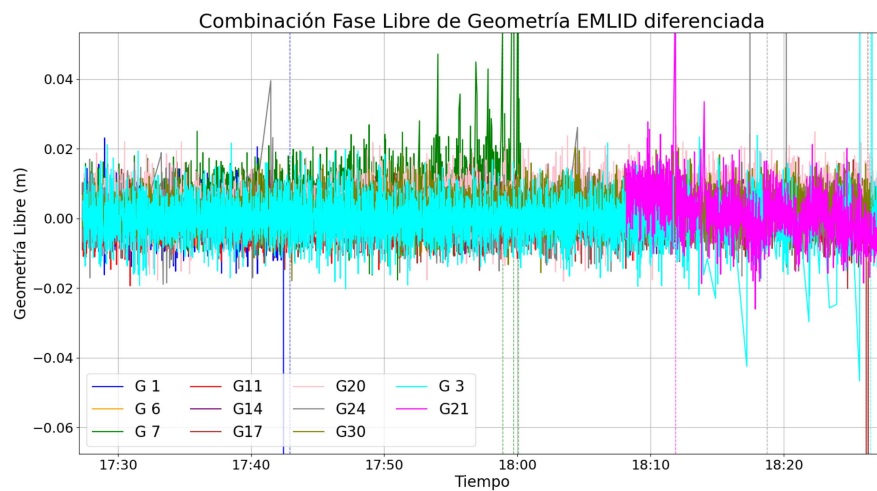


Figura 4.22: Mediciones de fase combinadas libre de geometría del receptor *Emlid Reach* diferenciadas a través del tiempo.

Las combinaciones de los pseudorangs y sus diferencias con respecto al tiempo,

se muestran en las figuras 4.23 y 4.24 respectivamente.

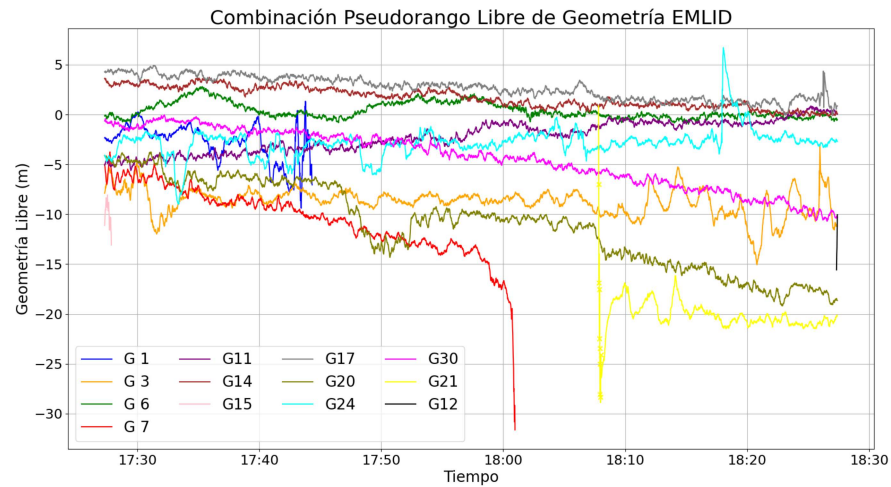


Figura 4.23: Mediciones de pseudorango combinados libre de geometría del receptor *Emlid Reach*.

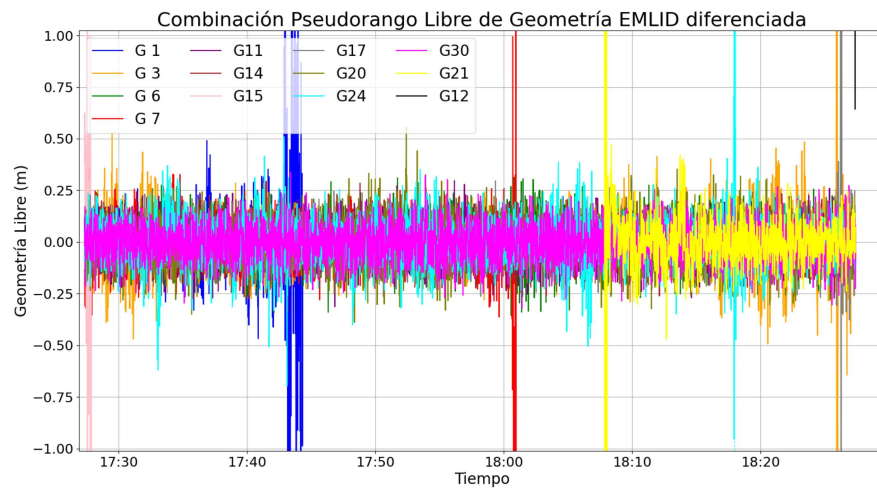


Figura 4.24: Mediciones de pseudorango combinados libre de geometría del receptor *Emlid Reach* diferenciados a través del tiempo.

4.3. Línea base larga

Se mostraron los resultados obtenidos al procesar los datos GPS para posicionamiento diferencial correspondiente a una línea base corta formada entre la estación

FICU y un receptor *EMLID REACH*. Al tener una base corta, se asegura que la gran mayoría de las épocas tengan una solución fija con ambigüedades resueltas. Con este tipo de solución, las ambigüedades enteras son constantes, por lo que al diferenciarlas en el tiempo, se anulan. El resultado es el ruido de las mediciones de fase diferenciadas. En esta sección se procesarán los datos correspondientes a una línea base larga de 48.5 km de longitud y se comentarán las principales diferencias entre ambas líneas base.

Dobles Diferencias

El porcentaje de ambigüedades resueltas al procesar la línea base larga es del 7.2%, el resto son épocas con soluciones con ambigüedades reales. Por esta razón solamente se mostrarán los resultados con el modo *fijar y mantener* para resolver las ambigüedades de *RTKLIB*. En la Figura 4.25 se muestran los errores en las direcciones Este, Norte y Arriba, durante las 10 horas procesadas del día 2 de enero del 2026. Las soluciones en rojo son las flotantes y las azules son soluciones con las ambigüedades resueltas. El bajo porcentaje de resolución de las ambigüedades se atribuye a la distancia entre ambas bases.

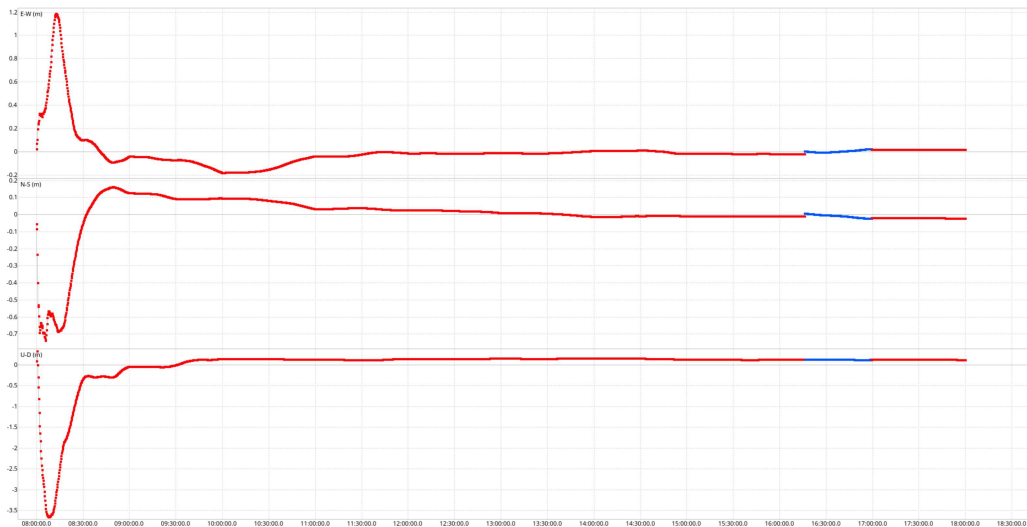
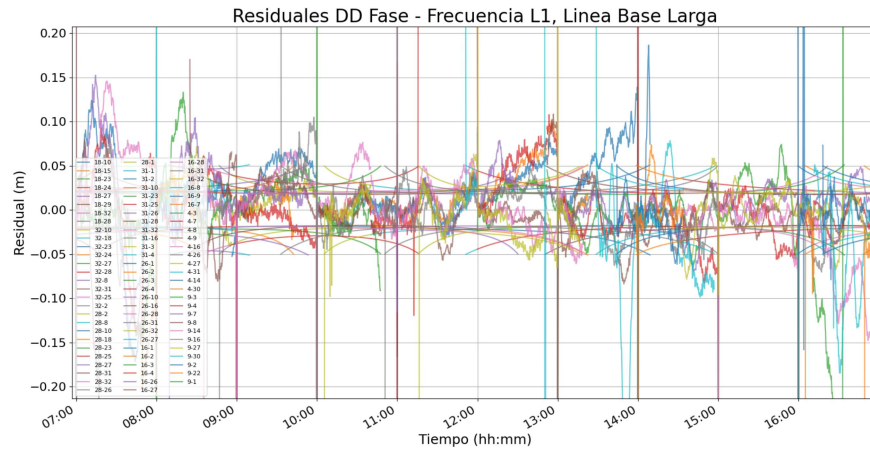


Figura 4.25: Errores en Este Norte Arriba de la serie de datos correspondiente a la línea base larga

Algo apreciable en la solución es que a pesar de que el filtro haya convergido y presente un comportamiento estable, la *confianza* en las soluciones enteras encontradas es baja, por lo que la posición no se fija. En la Figura 4.26 se muestran los residuales de las mediciones de fase de la frecuencia L1 para esta línea base. El ruido constante a lo largo de la serie de tiempo se debe a que las soluciones son flotantes en su mayoría.



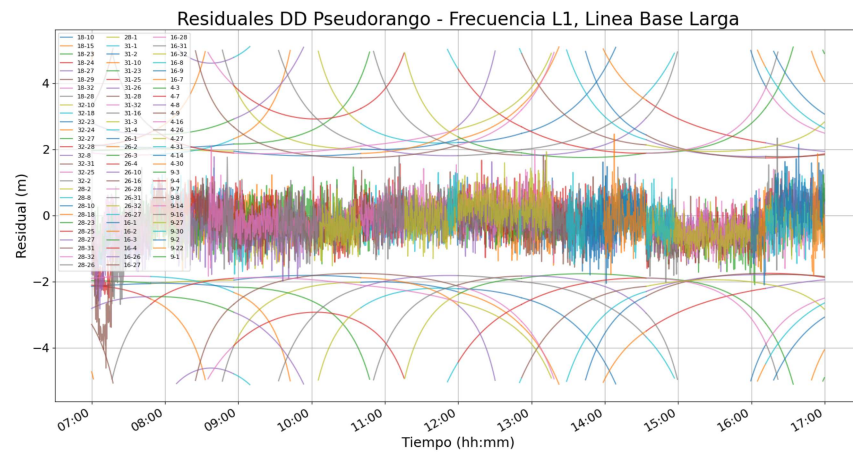


Figura 4.27: Residuales de las mediciones de pseudorange L1 doblemente diferenciadas de la línea base larga.

Triples diferencias

En la Figura 4.28 se encuentran los residuales de fase triplemente diferenciadas para esta línea base larga. En estos resultados se anulan parcialmente los efectos de las ambigüedades, si bien no son enteras, los valores flotantes presentan un cambio lento. Este efecto se aprecia en valores cercanos al cero y mostrando solamente el ruido respectivo a las triples diferencias.

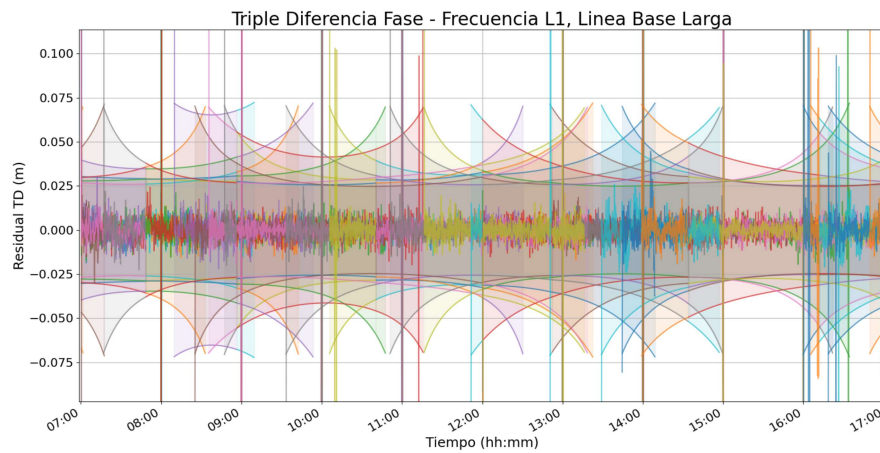


Figura 4.28: Residuales de las mediciones de fase L1 triplemente diferenciadas de la línea base larga.

En la siguiente figura se muestran los residuales de las mediciones de pseudorango triplemente diferenciadas. Básicamente se aprecia el mismo comportamiento que el de las fases, sin embargo se tiene mayor ruido debido a las mediciones de pseudorango.

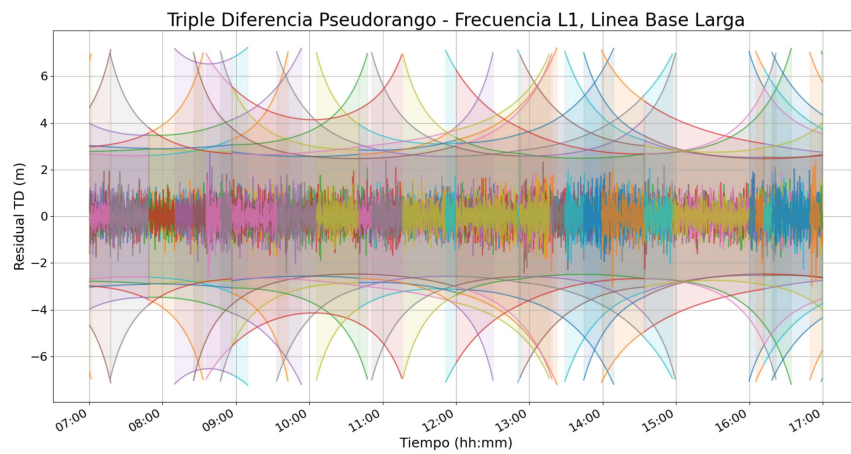


Figura 4.29: Residuales de las mediciones de pseudorango L1 triplemente diferenciadas de la línea base larga.

Combinación libre de geometría

La combinación libre de geometría para este conjunto de datos, correspondiente a 10 horas, permite ver el comportamiento de la ionósfera a una escala mayor, evidenciando el efecto solar en la señal del GPS. En la Figura 4.30 se muestra la serie de tiempo de la combinación libre de geometría de las fases observadas en la estación *FICU*. Las líneas tienen un cambio suave debido a la diferencia de ambigüedades y al efecto ionosférico.

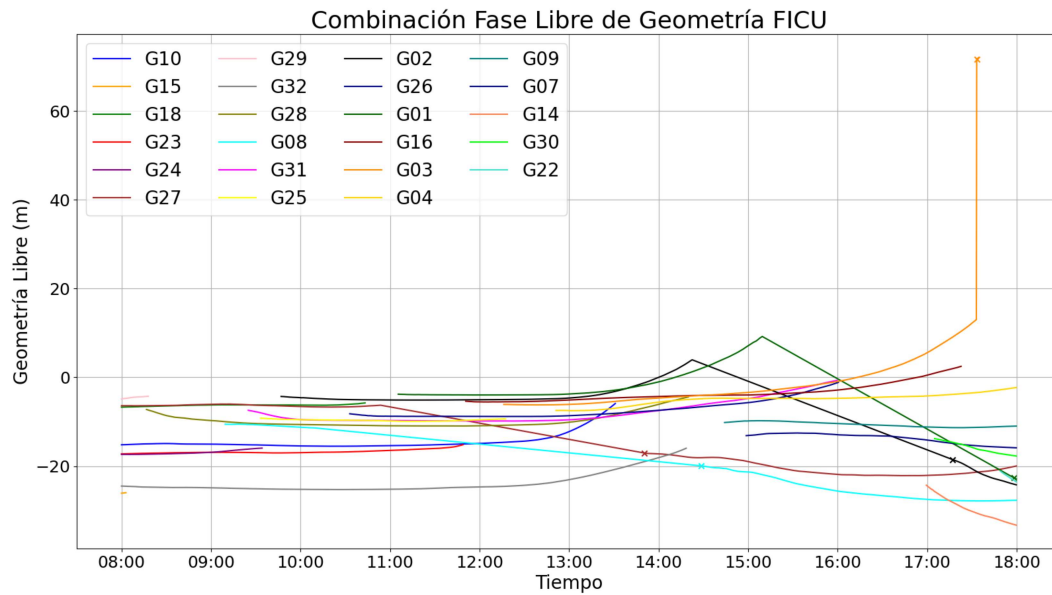


Figura 4.30: Combinación libre de geometría de las fases para la estación FICU.

En la Figura 4.31 se muestran los valores absolutos de las fases con la combinación libre de geometría diferenciados a través del tiempo. Se aprecia de manera clara el efecto de la ionósfera que se agudiza en las últimas dos horas de la serie de tiempo, correspondientes al mediodía de la Ciudad de México (el tiempo de la gráfica es tiempo GPS).

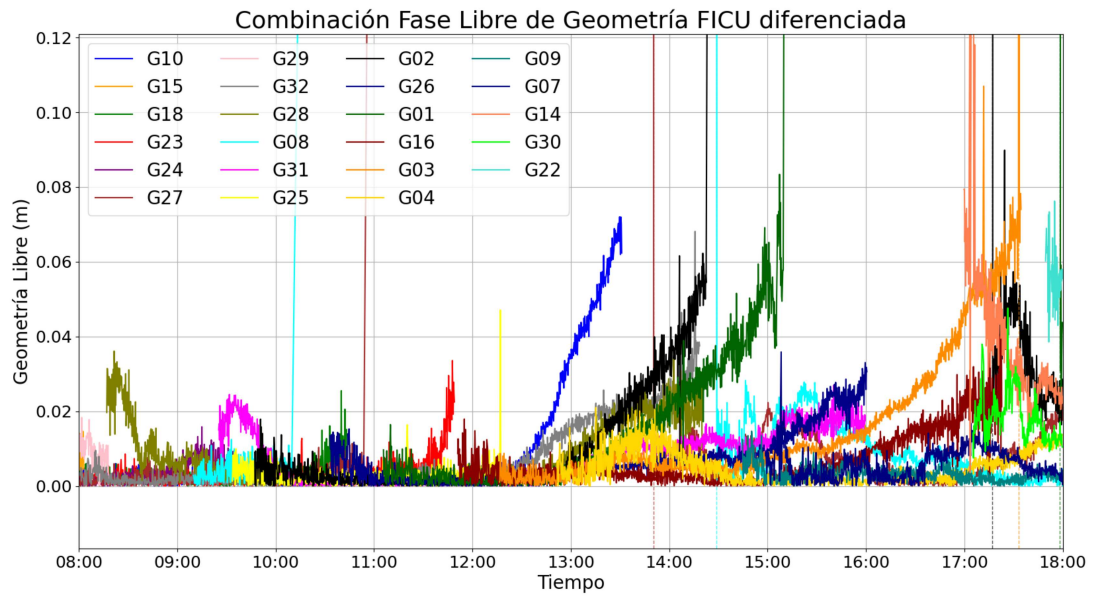


Figura 4.31: Valores absolutos de la combinación libre de geometría de las fases para la estación FICU diferenciada a través del tiempo.

En la Figura 4.32 se muestran los pseudorangos en combinación libre de geometría. Sin presencia del efecto de las ambigüedades de la señal, esta gráfica muestra el efecto de la ionósfera, sin necesidad de diferenciar los valores a través del tiempo.

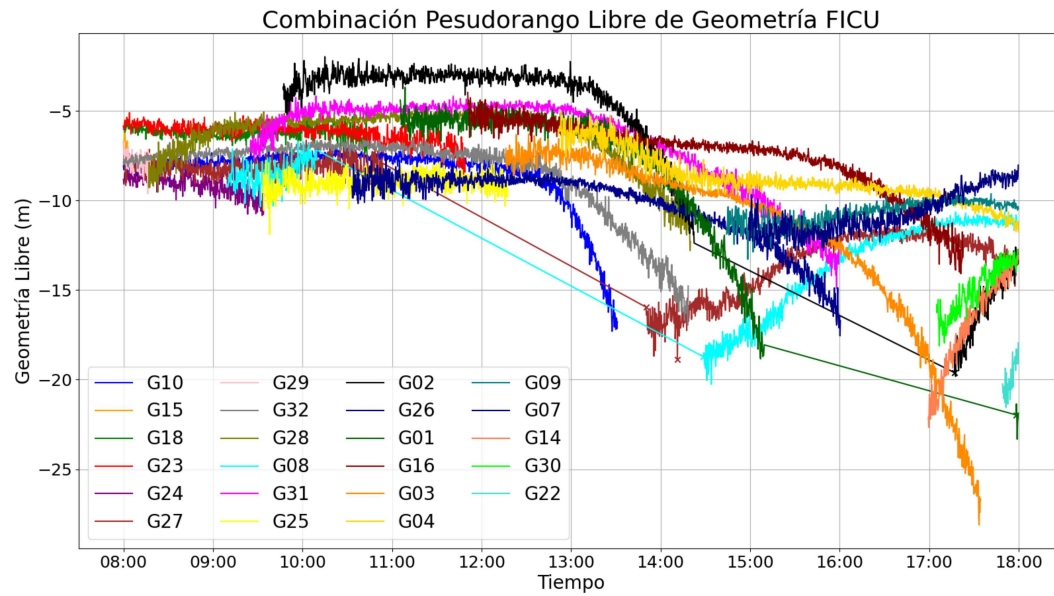


Figura 4.32: Combinación libre de geometría de los pseudorangelos para la estación FICU.

Al diferenciar a través del tiempo los pseudorangelos en combinación libre de geometría, solamente se aprecia el ruido de la misma combinación. En la Figura 4.33 se muestran los valores de las combinaciones libres de geometría de los pseudorangelos diferenciados a través del tiempo.

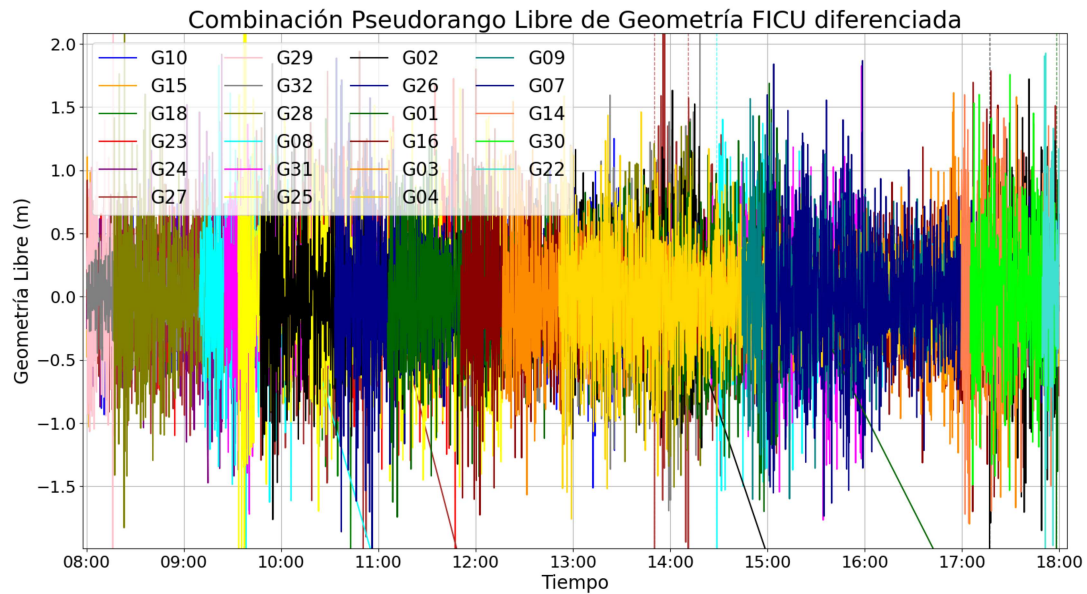


Figura 4.33: Combinación libre de geometría de los pseudorangos para la estación FICU diferenciados a través del tiempo.

De igual manera, se tienen los valores de la combinación libre de geometría de las fases para la estación *TOL2*. En la Figura 4.34 se muestran los valores de las fases combinadas, mostrando mayor cambio en las últimas dos horas de la serie de tiempo debido al efecto solar sobre la ionósfera.

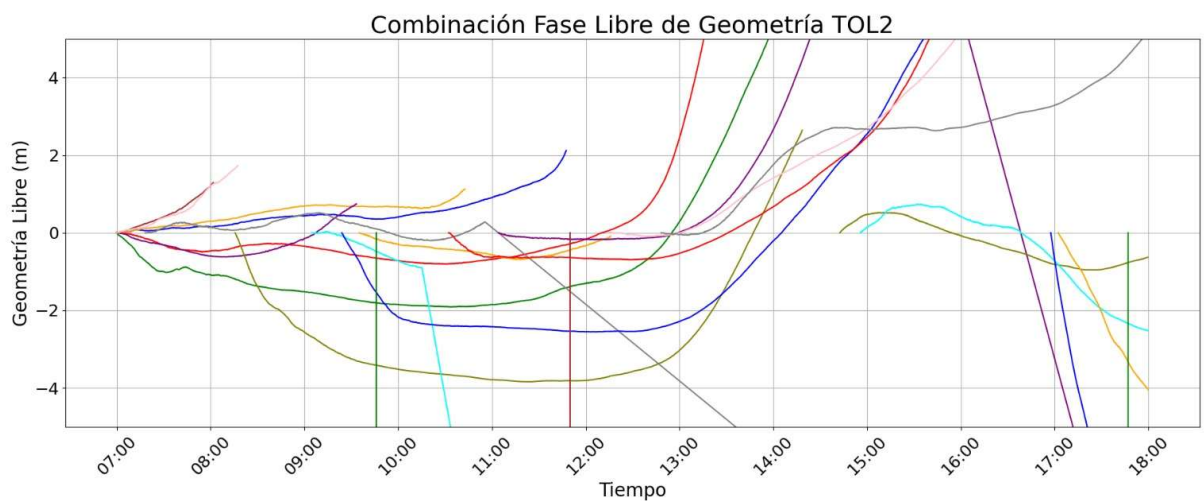


Figura 4.34: Combinación libre de geometría de las fases para la estación *TOL2*.

En la Figura 4.35 se muestran los valores de las combinaciones de la figura anterior diferenciadas a través del tiempo. Se hace más evidente el efecto de la ionósfera en esta serie de tiempo.

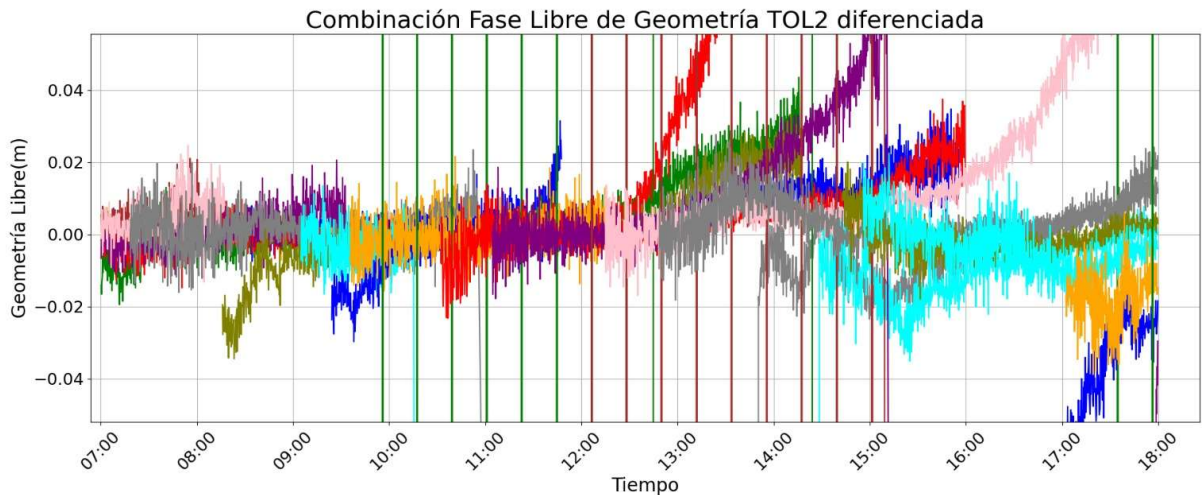


Figura 4.35: Combinación libre de geometría de las fases para la estación TOL2 diferenciadas a través del tiempo.

4.4. Comparativa entre triples diferencias

Se han mostrado los valores de las mediciones triplemente diferenciadas de las mediciones usando la doble frecuencia para cada estación. Es necesario mencionar que estas dos métricas se complementan entre ellas cuando son usadas para determinar si la señal tiene impacto negativo por alguna razón. Cuando se encuentra algún valor sesgado en las dobles o triples diferencias, es demasiado difícil poder quitar la correlación del error entre los receptores, lo cual hace prácticamente imposible determinar la estación responsable del error.

En la siguiente tabla se muestra una comparación de las líneas base procesadas: los tiempos en minutos que duran las series de datos, los porcentajes de ambigüedades resueltas y los errores encontrados en cada proceso utilizando el algoritmo estadístico robusto para la detección de errores. Los errores detectados mostrados en la tabla

son **TD L1 Fase** y **TD L2 Fase** correspondientes a las series de tiempo de las fases triplemente diferenciadas en ambas frecuencias. También se muestran los errores de los pseudorangos triplemente diferenciados en ambas frecuencias, **TD L1 Pseudorango** y **TD L2 Pseudorango**.

Tabla 4.1: Errores detectados en las triples diferencias

	Tiempo Línea(min)	Ambigüedades resueltas (%)	TD L1 fase (errores)	TD L2 fase (errores)	TD L1 pseudorango (errores)	TD L2 pseudorango (errores)
ba- se						
Línea 60.1 ba- se cor- ta fi- ja	60.1	98	11	3	3	15
Línea 60.1 ba- se cor- ta flo- tan- te	60.1	0	74	65	11	18
Línea 600 ba- se lar- ga	600	7	132	121	0	0

Se aprecia que la línea base corta fija tiene muchos menos *outliers* que la línea base corta flotante; esto se debe a la estabilidad y precisión que brindan los valores enteros de las ambigüedades. Aunque el porcentaje de ambigüedades resueltas en la línea base larga es bajo, la solución flotante es muy estable, de tal manera que no hay sesgo en los pseudorangos, y muy pocas fases sesgadas para 10 horas de observaciones. En la Figura 4.36 se muestran las mediciones de fase detectadas como error para la línea base corta con las ambigüedades resueltas y se aprecia la estabilidad de los resultados.

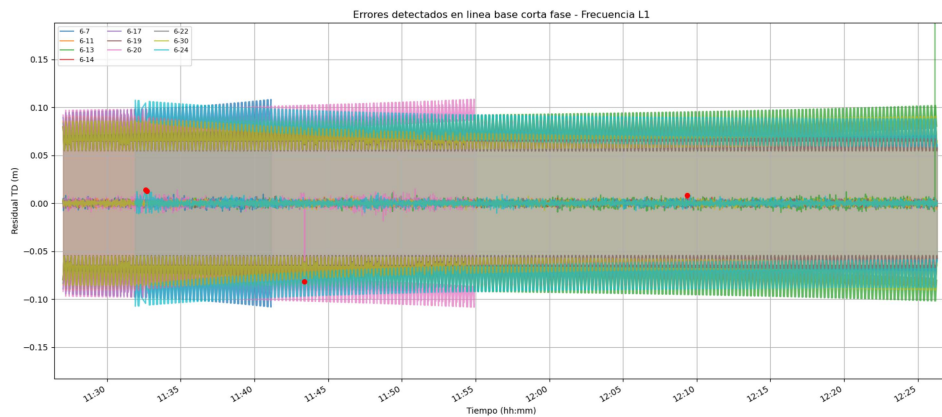


Figura 4.36: Errores en la fase triplemente diferenciada para L1, de la línea base corta con las ambigüedades resueltas.

En la Figura 4.37 se muestran las mediciones de fase detectadas como error para la línea base larga. La solución flotante muestra cierta estabilidad y pocos errores en las diez horas de observaciones.

En este capítulo se han mostrado los resultados obtenidos al analizar las mediciones triplemente diferenciadas para una línea base corta y larga, formada con las estaciones *FICU-EMLID* y *TOL2-FICU*. También se mostraron los valores obtenidos de las combinaciones libres de geometría de las estaciones de las dos líneas base, con el fin de comparar el comportamiento nominal entre ambas métricas, las triples diferencias y las combinaciones. En el siguiente capítulo se discuten las conclusiones obtenidas al realizar este trabajo de investigación y se mencionan recomendaciones para futuros trabajos relacionados con este tema.

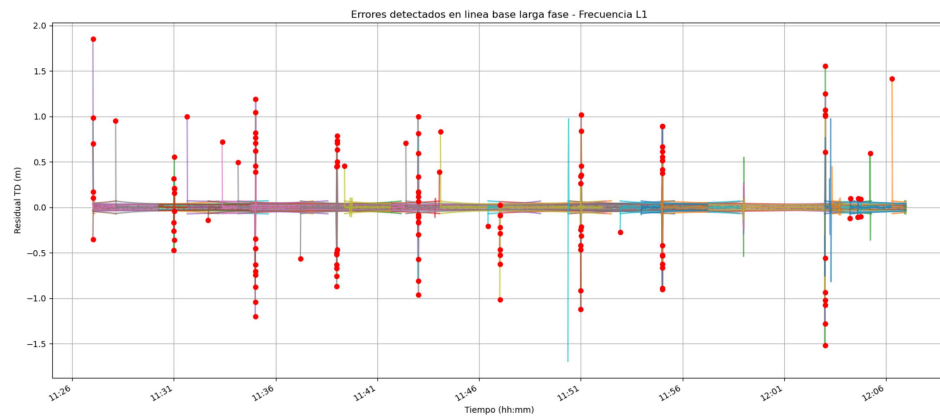


Figura 4.37: Errores en la fase triplemente diferenciada para L1, de la línea base larga

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo a futuro

En el capítulo 4 se realizó un análisis de los resultados al desarrollar las triples diferencias en mediciones de fase y de pseudorango en dos casos específicos, para líneas base cortas y largas entre estaciones. También se exploró el comportamiento de las mediciones triplemente diferenciadas cuando las ambigüedades son reales y en el caso en que no se han resuelto. En este capítulo final se discuten las conclusiones surgidas del análisis de los resultados obtenidos seguido de recomendaciones para continuar explorando diferentes combinaciones lineales entre mediciones y frecuencias del GPS.

5.1. Conclusiones

De este trabajo de tesis, se concluyen los siguientes puntos:

- Las mediciones triplemente diferenciadas de pseudorango al no depender de las ambigüedades de fase, proveen información confiable en términos de estabilidad y disponibilidad. De igual manera, estas diferencias no muestran un comportamiento diferente cuando las ambigüedades son resueltas o flotantes.
- Cuando las ambigüedades son números reales, las triples diferencias de fase involucran el ruido de las ambigüedades flotantes al no ser constantes a través del tiempo. Esta métrica es útil para monitorear cambios fuertes en la señal que no sean enmascarados por el efecto de las ambigüedades reales. Dicho de

otra manera, cuando se cuenta con señales estables de los satélites, la triple diferencia puede ser usada como métrica de calidad de la señal, ya que existirán fluctuaciones o saltos cuando la señal se vea interrumpida o impactada por algún error no modelado.

- Al ser resueltas las ambigüedades, las diferencias triples de fase proveen información para monitorear saltos de ciclo y algún error que impacte la señal del GPS. Este valor se puede usar para el monitoreo de la integridad de las señales del GPS, con la limitante de que se requieren dos estaciones operando de manera simultánea.
- La distancia entre las estaciones diferenciadas es crucial para la calidad de las mediciones triplemente diferenciadas. Esto se debe a que el porcentaje de ambigüedades resueltas disminuye cuando aumenta la longitud de la línea base, incrementando el ruido en la señal debido a los valores reales de las ambigüedades.
- La combinación libre de geometría entre mediciones de fase, a pesar de incluir el efecto de la ionósfera, es una métrica adecuada para el monitoreo de la señal de los satélites. Esto se debe al cambio suave del efecto ionosférico a lo largo del día. Una buena opción para mitigar el efecto del término de las ambigüedades en esta combinación es realizar la diferencia de estos valores a través del tiempo.
- La combinación libre de geometría entre mediciones de pseudorangos, al no tener dependencia con las ambigüedades solamente incluye el efecto ionosférico y es apta para su monitoreo sin necesidad de diferenciar estas combinaciones a través del tiempo.
- Las combinaciones libres de geometría (fase y pseudorango) son útiles para el monitoreo de los efectos ionosféricos independientemente del vector de velocidad del receptor rover, estático o en movimiento.
- Las diferencias de las combinaciones de fase libre de geometría a través del tiempo 4.18, son equivalentes a las combinaciones de pseudorango libres de

geometría 4.19, mostrando solamente el efecto ionosférico en ambos casos. La diferencia radica en el ruido de las mediciones combinadas, el cual es mayor usando los pseudorangos.

- El uso de las fases triplemente diferenciadas para analizar cualquier desplazamiento a través de sus residuales es factible, sin embargo, se necesita formar una línea base corta entre ambas estaciones involucradas para que las soluciones sean fijas en su mayoría del conjunto de datos.

5.2. Trabajo a futuro y recomendaciones

Las triples diferencias de las mediciones tienen diferentes comportamientos y usos de acuerdo con las condiciones del receptor y con las ambigüedades de las señales recibidas, como se observa entre la línea base corta y la línea base larga. En este trabajo solamente se exploró el caso donde las estaciones están estáticas, por lo que la diferencia triple elimina el término geométrico de la ecuación de observación siendo útil para monitorear discontinuidades en la señal del GPS y saltos de ciclo. Sin embargo, cuando el receptor rover se encuentra en movimiento, las triples diferencias proveen información de la velocidad del receptor. Para el trabajo futuro relacionado con este tema, se recomienda explorar esta medición y compararla con las mediciones Doppler recibidas en la estación rover.

De igual manera, esta tesis solamente compara las triples diferencias con la combinación libre de geometría, sin embargo, existen más combinaciones lineales con las cuales se podría comparar, tales como las combinaciones libres de ionósfera y Melbourne-Wübbena.

5.3. Reconocimiento

Este trabajo fue realizado bajo la supervisión del Dr. René Manzano Islas, profesor de carrera del Departamento de Geodesia, con apoyo brindado por parte de la UNAM bajo el proyecto PAPIIT denominado **Aprendizaje de máquina aplicado**

al monitoreo de la integridad de la Estación de Referencia de Operación Continua (CORS) de la Facultad de Ingeniería con número de expediente **IA103526**. Quiero expresar mi más sincera gratitud al Dr. René Manzano y a la Universidad por el apoyo al desarrollo de este trabajo de tesis.

Glosario de términos

A.M.C.S. (Alternate Master Control Station) Estación maestra de control alternativa del sistema GNSS, encargada de asumir las funciones de control en caso de falla de la estación principal. 6

Ambigüedad de ciclo Número entero desconocido de ciclos completos de la señal portadora entre el satélite y el receptor. 44

BeiDou Sistema global de navegación por satélite desarrollado por China. 40

Cenit Dirección definida por la vertical local que apunta hacia arriba desde un punto sobre la superficie terrestre, opuesta al nadir, utilizada como referencia en geodesia y astronomía para definir ángulos de elevación y coordenadas. 61

Constelación Conjunto de satélites que conforman un sistema GNSS. 29

CORS Estaciones de Referencia de Operación Continua que registran datos GNSS de manera permanente y proporcionan correcciones y observaciones para aplicaciones de posicionamiento preciso. III

Diferenciación doble (DD) Técnica de procesamiento GNSS que consiste en restar dos diferenciaciones simples entre pares de satélites y receptores, con el objetivo de eliminar errores de reloj tanto del satélite como del receptor, mejorando la precisión en la estimación de la posición. 7

Diferenciación simple (SD) Técnica de procesamiento GNSS que consiste en restar observaciones de un mismo satélite registradas por dos receptores diferentes,

con el objetivo de eliminar o reducir errores comunes como el del reloj del satélite. 7

Doppler Cambio en la frecuencia de la señal debido al movimiento relativo entre el satélite y el receptor. 16

DTD (Dynamic Triple Difference) Técnica avanzada de procesamiento GNSS basada en la triple diferenciación aplicada en el tiempo, que permite eliminar ambigüedades de fase y detectar cambios dinámicos en las observaciones, siendo útil en aplicaciones cinemáticas y en la detección de saltos de ciclo. 8

ECEF Sistema de coordenadas cartesianas geocéntricas (Earth-Centered, Earth-Fixed) cuyo origen se encuentra en el centro de masa de la Tierra y cuyos ejes rotan solidariamente con ella, utilizado ampliamente en posicionamiento GNSS. 6

Error de reloj Diferencia entre el tiempo del satélite o receptor y el tiempo de referencia del sistema GNSS. 13

Estación base Receptor GNSS ubicado en una posición conocida que transmite correcciones a otros receptores. 28

Fase portadora Medición de la fase de la señal portadora utilizada para obtener posiciones de alta precisión. 8

FICU Estación CORS ubicada en el edificio B de la facultad de Ingeniería, UNAM en Ciudad de México. VI, 38

Filtro de Kalman Extendido (EKF) Algoritmo de estimación recursiva utilizado para sistemas no lineales que linealiza las ecuaciones mediante aproximaciones de primer orden, permitiendo estimar estados como posición y velocidad en aplicaciones GNSS. 22

G.A. (Ground Antenna) Antenas terrestres utilizadas para la transmisión de comandos y datos de control hacia los satélites del sistema GNSS. 6

gAGE (gLAB - Analysis of GNSS Environment) Grupo de investigación de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) enfocado en el análisis y procesamiento de señales GNSS, desarrollo de algoritmos y herramientas como gLAB para el estudio del posicionamiento satelital. 29

Galileo Sistema global de navegación por satélite desarrollado por la Unión Europea. 29

GLONASS Sistema global de navegación por satélite desarrollado por Rusia. 40

GNSS Sistema Global de Navegación por Satélite. 4

GPS Sistema de Posicionamiento Global. 3

IGS Servicio Internacional GNSS (International GNSS Service), una organización que proporciona productos geodésicos de alta precisión, como órbitas satelitales, relojes, parámetros de orientación terrestre y datos de estaciones de referencia, con el fin de apoyar aplicaciones científicas y de posicionamiento preciso a nivel global. 28

ILS (Integer Least Squares) Procedimiento de mínimos cuadrados enteros empleado para estimar ambigüedades de fase como valores enteros, fundamental en técnicas de posicionamiento GNSS de alta precisión. 20

Ionosfera Capa de la atmósfera que afecta la propagación de las señales GNSS causando retrasos dependientes de la frecuencia. 13

M.S. (Monitor Station) Estaciones de monitoreo encargadas de rastrear los satélites GNSS, recolectar datos y enviar información al segmento de control para el cálculo de órbitas y correcciones. 6

MAD (Median Absolute Deviation) Medida robusta de dispersión estadística que se calcula como la mediana de las desviaciones absolutas respecto a la mediana de un conjunto de datos, utilizada para detectar valores atípicos y reducir la influencia de errores en observaciones GNSS. 45

Multipath Error en las observaciones GNSS causado por la recepción de señales reflejadas además de la señal directa proveniente del satélite. Estas reflexiones, originadas en superficies cercanas como edificios, cuerpos de agua o el suelo, generan múltiples trayectorias de propagación que interfieren entre sí, afectando la precisión de las mediciones de pseudodistancia y fase portadora. 7

Método LAMBDA (Least-Squares AMBiguity Decorrelation Adjustment)

Método utilizado en procesamiento GNSS para la resolución de ambigüedades enteras basado en mínimos cuadrados, que aplica una transformación de decorrelación para mejorar la eficiencia y confiabilidad en la estimación de ambigüedades de fase. 20

NAVSTAR Sistema de navegación por satélite desarrollado por el Departamento de Defensa de Estados Unidos, conocido comúnmente como GPS, que proporciona servicios de posicionamiento, navegación y sincronización a nivel global. 4

PPP Posicionamiento Puntual Preciso que utiliza productos precisos de órbita y reloj sin necesidad de estación base cercana. 26

Pseudorango Medición de distancia aparente entre un satélite y un receptor GNSS basada en el tiempo de viaje de la señal, la cual incluye diversos errores como los de reloj, ionosfera y troposfera. 12, 58

Receptor móvil (rover) Receptor GNSS cuya posición se desea determinar, generalmente en movimiento. 37

Resolución de ambigüedades Proceso de determinar los valores enteros de las ambigüedades de fase para mejorar la precisión. 17, 47

RINEX Formato estándar para el intercambio de datos de observación GNSS entre diferentes receptores y software. 26

RTK Técnica de posicionamiento cinemático en tiempo real que utiliza correcciones diferenciales para lograr precisión centimétrica. 40

RTKLIB Conjunto de programas de código abierto para el procesamiento de datos GNSS que permite realizar posicionamiento en tiempo real y postproceso mediante técnicas como RTK, PPP y análisis de observaciones. 42

SBAS Sistema de Aumentación Basado en Satélites (Satellite-Based Augmentation System), que mejora la precisión, integridad y disponibilidad de los sistemas GNSS mediante el uso de satélites geoestacionarios y una red de estaciones terrestres que generan correcciones diferenciales y mensajes de integridad. 40

Sputnik 1 Primer satélite artificial de la Tierra, lanzado el 4 de octubre de 1957 por la Unión Soviética, cuyo éxito marcó el inicio de la era espacial y contribuyó al desarrollo posterior de los sistemas de navegación por satélite. 3

TOL2 Estación de la Red Nacional Geodésica Activa del INEGI en México, que forma parte de la red de estaciones GNSS de operación continua (CORS) y proporciona datos para posicionamiento preciso y estudios geodésicos. VI, 38

Troposfera Capa inferior de la atmósfera que introduce retrasos en la señal GNSS debido a condiciones meteorológicas. 12

USB Bus Universal en Serie (Universal Serial Bus), estándar de comunicación utilizado para la conexión, transferencia de datos y suministro de energía entre dispositivos electrónicos, comúnmente empleado en receptores GNSS para la descarga de datos. 7

Vanguard I Segundo satélite artificial de Estados Unidos, lanzado en 1958, utilizado para estudios geodésicos y de forma terrestre, cuyos datos contribuyeron al desarrollo temprano de técnicas de posicionamiento satelital. 3

WGS 84 El World Geodetic System 1984 (WGS 84) es un sistema de referencia geodésico global que define un marco de coordenadas tridimensional centrado en el centro de masa de la Tierra. Es utilizado por sistemas de posicionamiento como el GPS y proporciona parámetros para la forma de la Tierra (elipsoide),

su campo gravitacional y su rotación, permitiendo la determinación precisa de posiciones en cualquier parte del mundo. 6

Bibliografía

- Brown, R. G. y Hwang, P. Y. C. (2012). *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. Wiley, 4 edition.
- Claret, M., Best, S., y León, L. (2006). 2.1. sistema de posicionamiento global (gps). In *Agricultura de Precisión: Integrando conocimientos para una agricultura moderna y sustentable*, page 25.
- Codol, J. y Monin, A. (2011). Improved triple difference gps carrier phase for rtk-gps positioning. In *2011 IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP)*, pages 61–64. IEEE.
- De Jonge, P., Tiberius, C., et al. (1996). The lambda method for integer ambiguity estimation: implementation aspects. *Publications of the Delft Computing Centre, LGR-Series*, 12(12):1–47.
- Delgado Ortiz, P. A. (2025). Resolución de la ambigüedad de la señal gps de la estación de referencia de operación continua (cors) de la facultad de ingeniería.
- Fernández Rubio, J. A. y Seco Granados, G. (1997). Sistemas de posicionamiento: de gps a gnss. *Mundo Electrónico*, (280):46–52.
- Ford, T. J. y Neumann, J. (1994). Novatel’s rt20–“a real time floating ambiguity positioning system”. *Proceedings of ION GPS ‘94, Salt Lake City, Utah*, page 1067.
- Guiu, J. L. P. (1992). El sistema de posicionamiento global (gps). *Boletín de Información*, (224):82–92.

- Herring, T. A. (1996). The global positioning system. *Scientific American*, pages 32–38.
- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., y Wasle, E. (2008). *GNSS – Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo, and more*. Springer Vienna, Vienna.
- Hopfield, H. S. (1971). Tropospheric Range Error at the Zenith. Technical Memorandum TM-1071, Johns Hopkins University, Silver Spring, MD. También publicado como: Hopfield, H. S. (1971). Tropospheric range error at the zenith. Johns Hopkins University, Applied Physics Laboratory, Technical Memorandum TG-1071.
- Hutsell, S. T. (1994). Fine tuning gps clock estimation in the mcs. In *Proceedings of the 26th Annual Precise Time and Time Interval Systems and Applications Meeting*, pages 63–74.
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) (2024). Coordenadas geodésicas de las estaciones de la red geodésica nacional activa (rgna). <https://www.inegi.org.mx/app/geo2/coordenadasGeoRGNA/>. Accedido: 19-mar-2026.
- Kouba, J. y Heroux, P. (2001). Precise point positioning using IGS orbit and clock products. *GPS Solutions*, 5(2):12–28.
- Leick, A. (1995). *GPS Satellite Surveying*. John Wiley & Sons, New York.
- Leick, A. (2004). *GPS: Satellite Surveying*. John Wiley & Sons, New York.
- López-Salcedo, J. A., Vicario, J. L., y Granados, G. S. (2012). *Sistemas de radionavegación*. UOC.
- Makineci, H. B., Bilgen, B., y Bulbul, S. (2024). A New Precise Point Positioning with Ambiguity Resolution (PPP-AR) Approach for Ground Control Point Positioning for Photogrammetric Generation with Unmanned Aerial Vehicles. *Drones*, 8(9):456. Number: 9 Publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute.

- Navarro, A. H. (2001). El sistema de posicionamiento global: Tecnología con historia. *Revista Cartográfica*, (72):29–38.
- Ogundare, J. O. (2018). *Understanding Least Squares Estimation and Geomatics Data Analysis*. Wiley, Hoboken, NJ.
- Pennsylvania State University (2023). Differencing: Classification of gps positioning. <https://www.e-education.psu.edu/geog862/node/1727>. GEOG 862: GPS and GNSS for Geospatial Professionals.
- Prieto Morin, J. F. (2015). *Métodos diferenciales e interferométricos para la evaluación de deformaciones de la corteza terrestre mediante técnicas GNSS e InSAR*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid.
- Remondi, B. W. (1984). Using the global positioning system (gps) phase observable for relative geodesy: Modelling, processing, and results. Technical report, University of Texas at Austin, Center for Space Research.
- Remondi, B. W. y Brown, G. (2000). Triple differencing with kalman filtering: making it work. *GPS Solutions*, 3(3):58–64.
- Rey, J. R. (2006). El sistema de posicionamiento global-gps: Eny-728s/in657, 4/2006. *EDIS*, (14).
- Sanz Subirana, J., Juan Zornoza, J. M., y Hernández-Pajares, M. (2013). *GNSS Data Processing. Volume 1: Fundamentals and Algorithms*. ESA TM-23/1. ESA Communications.
- Teunissen, P., De Jonge, P., y Tiberius, C. (1995). The lambda method for fast gps surveying. In *International symposium “GPS technology applications” Bucharest, Romania*.
- Teunissen, P. J. (1993). Least-squares estimation of the integer gps ambiguities. pages 1–16.

- Teunissen, P. J. G. (1999). An optimality property of the integer least-squares estimator. *Journal of Geodesy*, 73(11):587–593.
- Teunissen, P. J. G. y Montenbruck, O., editors (2017). *Springer Handbook of Global Navigation Satellite Systems*. Springer Handbooks. Springer International Publishing, Cham, 1 edition.
- Tiberius, C. y De Jonge, P. (1995). Fast positioning using the lambda method. *Proceedings DSNS-95, paper*, 30(8).
- Timoté, C. C., Juan, J. M., Sanz, J., Rovira-Garcia, A., González-Casado, G., Orús-Pérez, R., Fernández-Hernández, I., y Blonski, D. (2024). Ionospheric corrections tailored to Galileo HAS: validation with single-epoch navigation. *GPS Solutions*, 28(2):A93:1–12.
- Valero, J. L. B., Julián, A. B. A., y Villén, N. G. (2014). *GNSS. GPS: fundamentos y aplicaciones en Geomática*. Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia.
- Vazquez-Ontiveros, J., Vazquez Becerra, G., y Gaxiola-Camacho, J. R. (2019). Implementación de la técnica ppp-gnss para el monitoreo de la salud estructural en puentes. 10.13140/RG.2.2.33003.49446.
- Xu, G. y Xu, Y. (2016). *GPS: Theory, Algorithms and Applications*. Springer, 3 edition.
- Zhi-ping, L., Xiu-feng, H., Shi-bi, Z., y Qiu-zhao, Z. (2010). Dynamic triple-difference method for single frequency gnss structural monitoring. In *2010 The 2nd International Conference on Industrial Mechatronics and Automation*, volume 2, pages 143–149. IEEE.
- Álvarez, D. A. G. (2008). *Sistema GNSS (Global Navigation Satellite System)*. Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.