



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA - CAMPO CONTROL**

**Diseño de Superficies por Modos Deslizantes de Alto Orden:  
Enfoque LQ Singular**

**TESIS Y SU RÉPLICA EN EXAMEN ORAL  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**

**ALBERTO ISMAEL CASTILLO LÓPEZ**

**TUTOR PRINCIPAL**

**DR. LEONID FRIDMAN**

**MÉXICO, D.F. JUNIO 2013**

## **JURADO ASIGNADO**

Presidente: Dr. Espinosa Pérez Gerardo René

Secretario: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto

Vocal: Dr. Fridman Leonid

1er. Suplente: Dr. Benítez Pérez Héctor

2o. Suplente: Dr. Castaños Luna Fernando

Lugar donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE INGENIERÍA

**TUTOR DE TESIS:**

LEONID FRIDMAN

**FIRMA**

*A mi padre, quien siempre creyó que ésto era buena idea...*

## **Agradecimientos.**

Este trabajo es el resultado de un conjunto de circunstancias que no necesariamente están relacionadas con la maestría. Así pues, debo agradecer a muchas personas, no sólo por haberme apoyado directamente en el logro de éste trabajo y ésta etapa de mi vida, sino por haber influido en las condiciones necesarias para estar aquí.

Gracias Papá por estar siempre conmigo y al mismo tiempo dejar que recorra mi propio camino. Eres como aquella pequeña conciencia que aparece de vez en cuando cerca de mi oído y me aconseja que hacer.

Gracias Geo, Ale y Mauri, por hacer mi vida un poco menos monótona y hacerme saber que la familia no se lleva en la sangre, se lleva en el corazón.

Gracias Ma porque transmitiste en mí, de formas insospechadas, un espíritu de lucha y sagacidad. El verdadero motor de mi corazón y de mis entrañas proviene de tí.

Gracias Pollito, por encontrar y llegar a lugares de mi corazón que no sabía que existían y que me han hecho una persona diferente. Por ser un apoyo incondicional y soportar todos los malos episodios de mi persona.

Gracias Dr. Leonid, con considerarme más que un tutorado, un amigo.

Finalmente, y no por ello menos importantes, agradezco infinitamente a Omar y a Fernando por ser mis hermanos. El gran descubrimiento de mi vida es saber que los hermanos no se tienen, sino que se encuentran y se cultivan. Siempre han sido mi gran fuente de inspiración, y espero algún día poder serlo para ustedes.



# Contenido

Dedicatoria . . . . .	III
Contenido . . . . .	V
1. Introducción . . . . .	1
1.1. Motivación . . . . .	2
1.1.1. Diseño convencional . . . . .	2
1.1.2. Controladores por modos deslizantes convencionales . . . . .	4
1.1.3. Modos deslizantes de orden superior . . . . .	4
1.2. Objetivos de la Tesis . . . . .	5
1.3. Organización de la Tesis . . . . .	6
2. Marco Teórico . . . . .	9
2.1. Transformaciones de Similaridad . . . . .	9
2.1.1. Forma canónica de controlador en sistemas SISO . . . . .	11
2.1.2. Forma canónica de controlador en sistemas MIMO . . . . .	13
2.2. Control Óptimo . . . . .	18
2.2.1. Problema del regulador óptimo invariante en el tiempo . . . . .	18
2.2.2. Solución del regulador óptimo invariante en el tiempo . . . . .	18
2.3. Modos deslizantes convencionales . . . . .	19
2.3.1. Modos deslizantes . . . . .	19
2.3.2. Soluciones de Filippov . . . . .	19
2.3.3. Control equivalente . . . . .	20
2.4. Controladores por modos deslizantes de orden superior . . . . .	21
2.4.1. Control equivalente para orden superior . . . . .	22
2.4.2. Control equivalente . . . . .	22
2.4.3. Algoritmos de modos deslizantes de orden superior . . . . .	23
2.5. Reducción de chattering . . . . .	24
2.5.1. Incremento del orden del sistema . . . . .	25
3. Planteamiento del problema y desarrollo para sistemas SISO . . . . .	27
3.1. Planteamiento del problema . . . . .	27
3.2. Transformaciones . . . . .	28
3.2.1. Transformación del sistema . . . . .	28
3.2.2. Transformación del índice de desempeño . . . . .	29

---

3.3.	Orden de singularidad de SOSP . . . . .	29
3.4.	Diseño de Superficie . . . . .	31
3.4.1.	Partición del sistema transformado . . . . .	31
3.4.2.	Cambio de variable . . . . .	32
3.4.3.	Ecuación algebraica de Riccati . . . . .	33
3.4.4.	Control virtual y superficie deslizante . . . . .	34
3.5.	Diseño de controlador . . . . .	36
3.6.	Resumen del capítulo . . . . .	37
4.	Sistemas MIMO . . . . .	39
4.1.	Transformaciones . . . . .	40
4.1.1.	Transformación del sistema . . . . .	40
4.1.2.	Transformación del índice de desempeño . . . . .	40
4.2.	Desacoplamiento de subsistemas . . . . .	41
4.2.1.	Selección de subsistemas . . . . .	41
4.2.2.	Control desacoplante . . . . .	43
4.3.	Reduccion a caso SISO . . . . .	44
4.3.1.	Particiones en el índice de desempeño . . . . .	44
4.4.	Resumen del capítulo . . . . .	45
5.	Simulaciones . . . . .	47
5.1.	Descripción del sistema . . . . .	47
5.2.	Aplicación del método . . . . .	48
5.2.1.	Sistema MIMO: Transformaciones . . . . .	48
5.2.2.	Subsistemas SISO . . . . .	53
5.2.3.	Calculo de ganancias . . . . .	57
5.3.	Simulaciones . . . . .	58
5.3.1.	Sistema de 4 <sup>to</sup> orden . . . . .	58
5.3.2.	Reducción de chattering . . . . .	58
6.	Conclusiones . . . . .	65
	Referencias . . . . .	67

# Capítulo 1

## Introducción

Uno de los principales problemas de la ingeniería de control es el control de sistemas en presencia de perturbaciones. Siempre existen factores que resultan en discrepancias entre la planta y el modelo matemático utilizado para el diseño del controlador. Éstas discrepancias pueden ser debido a incertidumbres paramétricas, a dinámicas no modeladas, a perturbaciones externas, etc.

Esta problemática ha conducido al uso del llamado control robusto. El control *por Modos Deslizantes* es ampliamente conocido por ser una técnica de control robusto muy eficiente para la compensación de éste tipo de perturbaciones, es decir, perturbaciones acopladas al canal de control. En el diseño de controladores por modos deslizantes, las discrepancias del modelo, es decir, incertidumbre paramétrica, dinámicas no modeladas, perturbaciones externas, etc., son consideradas y generalizadas como perturbaciones acopladas.

A pesar del extenso y exitoso desarrollo de técnicas de control robusto como control adaptable, control  $H_\infty$ , técnicas de *backstepping*, etc., *Modos Deslizantes* es, probablemente, la herramienta más efectiva contra las incertidumbres, perturbaciones y dinámicas no modeladas acotadas y acopladas, ya que ésta, no sólo minimiza los efectos de perturbaciones no desvanecientes en el origen, sino que las compensa totalmente.

## 1.1. Motivación

### 1.1.1. Diseño convencional

En el diseño por modos deslizantes convencional (o de primer orden), se basa en dos pasos fundamentales:

1. El diseño de una superficie deslizante de grado relativo uno.
2. El diseño de un controlador por modos deslizantes convencional para llevar a las trayectorias del sistema a la superficie en tiempo finito.

Una vez en la superficie, el sistema se comportará con la dinámica diseñada en la superficie y de orden reducido ( $n - 1$ ).

Uno de los métodos más populares para el diseño de superficies deslizantes es basado en la solución del problema de estabilización óptimo singular  $LQ$  con índice de singularidad 1. Éste permite el diseño de superficies convencionales, además de que el mínimo del índice de desempeño  $LQ$  se alcanza cuando las trayectorias convergen a la superficie.

Así, en el diseño convencional [Luk'yanov82] [Edwards98], se plantea un sistema perturbado lineal invariante en el tiempo de una sola entrada

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B(u(t) + f(t, x)), & \|f\| < F \in \mathbb{R}^+ \\ & & \|x_0\| < L \in \mathbb{R}^+\end{aligned}$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz constante llamada *matriz del sistema*,  $B \in \mathbb{R}^n$  es una matriz constante, la *matriz de control*.  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el *vector de estados*,  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la entrada de control escalar,  $f(t, x)$  son las perturbaciones acopladas al canal del control con una cota conocida  $|f(t, x)| < F \in \mathbb{R}^+$  y que puede representar perturbaciones externas desconocidas y dinámicas no modeladas acotadas, etc. Se supone el par  $(A, B)$  *controlable* y  $\text{rango}(B) = 1$ .

Para el diseño de la superficie se considera el sistema nominal

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ \|x_0\| &< L \in \mathbb{R}^+\end{aligned}$$



y un índice de desempeño singular con respecto al control conocido como “control sin costo”

1

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (x(t)^T Q x(t)) dt, \quad Q = Q^T \geq 0$$

Primero se realiza una transformación del sistema a forma *Regular*

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u; \quad \bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}, \quad \bar{A}_{22} \in \mathbb{R}$$

y mediante la misma transformación de similaridad, se realiza una transformación al criterio de desempeño singular de la forma

$$\bar{Q} := (T^{-1})^T Q T^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} \end{pmatrix},$$

y al que se le realizan particiones de dimensiones  $\bar{Q}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ , y donde *necesariamente* se requiere que la partición  $\bar{Q}_{22} > 0$ .

Se diseña un control virtual estabilizante para el subsistema  $z_1$  mediante la solución a la ecuación algebraica de Riccati utilizando las particiones  $\bar{Q}_{11}$  y  $\bar{Q}_{22}$  como matrices de ponderación para los estados del subsistema  $z_1$  y el control virtual  $z_2$  respectivamente.

$$z_2 = -Kz_1, \quad K = R^{-1}B^T P$$

donde  $P$  solución de la ecuación algebraica de Riccati (ARE, por sus siglas en inglés) de orden  $(n - 1)$ .

Finalmente se diseña una superficie deslizante de grado relativo 1

$$\sigma = z_2 + Kz_1$$

---

<sup>1</sup>Se le conoce como “control sin costo debido a que es un índice de desempeño singular con respecto al control, es decir, no existe matriz de ponderación de las entradas de control y por lo tanto no está sujeta a ningún costo.

### 1.1.2. Controladores por modos deslizantes convencionales

El controlador por modos deslizantes convencional, es una función discontinua de la forma

$$u = -\rho \operatorname{sign}(s), \quad \rho > 0$$

con el que las trayectorias del sistema se verán obligadas a llegar a la superficie  $\sigma = 0$  en tiempo finito y donde la dinámica cero de orden reducido estará definida por

$$\dot{z}_1 = (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}K) z_1$$

con insensibilidad a las perturbaciones acopladas e independiente del control.

Los controladores por modos deslizantes proveen insensibilidad frente a perturbaciones acopladas, es decir, las propiedades del control discontinuo o *switch* hacen que la dinámica cero se comporte de forma nominal.

La principal desventaja de un controlador por modos deslizantes convencional es el fenómeno llamado *chattering*<sup>2</sup>, el cual se debe a la acción de control *switch* [Levant10].

Una desventaja del método de diseño convencional es que el grado relativo de la superficie con respecto al control queda restringido a uno.

### 1.1.3. Modos deslizantes de orden superior

Por otro lado, los controladores por modos deslizantes de orden superior recientemente propuestos aseguran la estabilización de los estados de sistemas SISO en tiempo finito a pesar de la existencia de perturbaciones o incertidumbres acopladas. Más aun, si el grado relativo del sistema y el orden del controlador por modos deslizantes coinciden, no es necesario el diseño de una superficie deslizante. Los modos deslizantes de orden superior tienen como una de sus principales características la disminución del *chattering* ya que los controladores por modos deslizantes de orden superior son, en general, continuos.

---

<sup>2</sup>Chattering: Efecto de “zig-zag” de amplitud y frecuencia finitos, que se presenta debido a la implementación de una función signo o controlador *switch*.

A pesar de ésto, no siempre es adecuado utilizar el máximo orden del algoritmo de control, ya que la precisión del modelo está restringido por la velocidad de los sensores y actuadores y por otro lado la complejidad computacional del algoritmo incrementa con el orden del algoritmo. Ésto significa que es posible seleccionar un controlador por modos deslizantes de orden mayor a uno (para evitar el chattering) pero menor al orden del sistema (para disminuir la complejidad del controlador) y consecuentemente la superficie deslizante del orden correspondiente.

De la teoría de control óptimo singular [Luk'yanov82], [Gabasov01], , es conocido que cuando la matriz de ponderación de los estados es semi-definida positiva, la dimensión del conjunto óptimo estabilizante es menor que  $(n - 1)$ . Entonces, ¿qué pasa si en el diseño convencional, la partición  $\bar{Q}_{22} = 0$  ? El grado relativo de la superficie deslizante con respecto al control es mayor a 1. Entonces, con base en esto es posible definir el orden del algoritmo por modos deslizantes de orden superior basado en el orden de la singularidad del índice de desempeño dado, y utilizar el conjunto óptimo estabilizante como superficie de deslizamiento.

¿Cómo diseñar la superficie deslizante? ¿Cómo elegir el orden del controlador por modos deslizantes? Son las preguntas que el presente trabajo tratará de contestar.

## 1.2. **Objetivos de la Tesis**

A partir del método de diseño de superficies deslizantes con criterios de desempeño LQ y de la teoría de control óptimo singular, se desea establecer un procedimiento estándar para el diseño de superficies deslizantes de orden arbitrario para sistemas lineales invariantes en el tiempo.

El procedimiento estándar de diseño de superficies debe estar basado en un índice de desempeño singular LQ con orden de singularidad arbitrario.

Establecer la relación entre el orden de la singularidad del índice de desempeño, el orden (grado relativo) de la superficie deslizante y el orden del algoritmo del controlador por modos deslizantes. Así, definir un criterio de selección del orden de la superficie deslizante y por lo tanto el orden del algoritmo por modos deslizantes a implementar en un sistema

dato.

### 1.3. Organización de la Tesis

En el Capítulo 1, se hizo una breve introducción a la técnica de control por Modos Deslizantes convencional, y sus características principales. También se presentaron los principales problemas del diseño convencional y los nuevos avances en algoritmos de orden superior.

En el Capítulo 2, se mencionan brevemente las herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo teórico del presente trabajo. Conceptos básicos sobre transformaciones de similaridad que lleven al sistema original a las formas canónicas de controlador para sistemas SISO y MIMO. Conceptos básicos de control óptimo para sistemas lineales invariantes en el tiempo, así como de control óptimo singular y sus implicaciones en el diseño de superficies deslizantes. Asimismo, se introducen los algoritmos de control por modos deslizantes de orden superior y sus principales ventajas con respecto a los convencionales.

En el Capítulo 3, se generaliza la problemática a resolver mediante el diseño de superficies deslizantes basadas en índices de desempeño singular  $LQ$ , es decir, los tipos de sistemas perturbados en los cuales la metodología desarrollada es aplicable. Se presenta el desarrollo del procedimiento de diseño de superficies deslizantes para sistemas SISO con base en un índice de desempeño singular  $LQ$ . Se plantean 4 principales pasos a seguir: 1. transformación del sistema a la forma canónica de controlador y transformación del índice de desempeño, 2. análisis de la matriz de ponderación del índice de desempeño para obtener el orden de singularidad, 3. mediante el orden de singularidad se diseña la superficie deslizante de orden igual al orden de singularidad, y 4. finalmente el diseño del controlador del orden respectivo.

En el Capítulo 4, se presenta el desarrollo del procedimiento para abordar sistemas MIMO y cómo se puede llegar a la reducción de múltiples casos SISO e implementar el procedimiento presentado en el Capítulo 3.

En el Capítulo 5, se presenta un ejemplo sobre un sistema MIMO de un helicóptero de 3 grados de libertad, el procedimiento para su reducción a subsistemas SISO (Capítulo

4), la implementación del procedimiento para sistemas SISO (Capítulo 3) y finalmente simulaciones.



## Capítulo 2

# Marco Teórico

En este capítulo se introducen diversos conceptos matemáticos y de teoría clásica de control lineal que serán utilizadas en el resto del documento.

### 2.1. Transformaciones de Similaridad

Sea una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  asociada a una base  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ , entonces la  $i$ -ésima columna de  $A$  es la representación de  $Ai_i$  con respecto a la base ortonormal. Si se selecciona una base diferente  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ , entonces la matriz  $A$  tiene una representación diferente  $\bar{A}$ . Entonces, la  $i$ -ésima columna de  $\bar{A}$  es la representación de  $Aq_i$  con respecto a la base  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  [Chen98].

Por otro lado, si se considera la ecuación

$$Ax = y \tag{2.1}$$

La matriz cuadrada  $A$  mapea  $x \in \mathbb{R}^n$  en  $y \in \mathbb{R}^n$ . Ahora, con respecto a la base  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  es

$$\bar{A}\bar{x} = \bar{y} \tag{2.2}$$

donde  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  son las representaciones de  $x$  y  $y$  con respecto a la base  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ . Es decir,

$$x = Q\bar{x}; \quad y = Q\bar{y} \quad (2.3)$$

con  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  una matriz no singular de  $n \times n$ .

Si se sustituye (2.3) en (2.1), se obtiene

$$AQ\bar{x} = Q\bar{y} \quad \text{ó} \quad Q^{-1}AQ\bar{x} = \bar{y} \quad (2.4)$$

y comparando con (2.2) se obtiene

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ \quad \text{ó} \quad A = Q\bar{A}Q^{-1} \quad (2.5)$$

que es llamada *Transformación de Similaridad* y en donde  $A$  y  $\bar{A}$  son llamadas *matrices similares*

En sistemas dinámicos lineales invariantes en el tiempo de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(u) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz del sistema y  $B \in \mathbb{R}^n$  la matriz de entrada de control.

A través de un cambio de base, se tiene la siguiente representación

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \bar{A}\hat{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}\hat{x} + \bar{D}u(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde

$$\bar{A} = TAT^{-1} \quad \bar{B} = TB \quad \bar{C} = CT^{-1} \quad \bar{D} = D \quad (2.8)$$

donde  $T$  es una matriz real, no singular de  $n \times n$ .

El sistema (2.6) es equivalente a (2.7) y

$$\bar{x} = Tx \quad (2.9)$$



es llamada la transformación de equivalencia o *transformación de similaridad*.

Éstas ecuaciones de estado equivalentes tienen el mismo polinomio característico, con el mismo conjunto de valores propios y la misma función de transferencia. Todas las propiedades de (2.6) permanecen invariantes ante cualquier transformación de similaridad [Chen98].

### 2.1.1. Forma canónica de controlador en sistemas SISO

Si en el sistema (2.6) el par  $(A, B)$  es controlable, entonces existe una transformación de similaridad que lleva al sistema original a la forma canónica de controlador [Hendricks08]. Esta transformación, aunque no es única, puede construirse mediante el cálculo de la matriz de controlabilidad

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n \cdot 1)}$$

donde, debido a la controlabilidad del sistema, sus  $n$  columnas son linealmente independientes, es decir, es de rango  $n$ .

Por otro lado, el polinomio característico del sistema es

$$P_c(A) = \det(\lambda \mathcal{I} - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Ahora, se define un conjunto de  $n$  vectores columna definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p_1 &= B, \\ p_2 &= Ap_1 + a_{n-1}p_1 = AB + a_{n-1}B, \\ p_3 &= Ap_2 + a_{n-2}p_1 = A^2B + a_{n-1}AB + a_{n-2}B, \\ &\vdots \\ p_n &= Ap_{n-1} + a_1p_1 = A^{n-1}B + a_{n-1}A^{n-2}B + \dots + a_2AB + a_1B. \end{aligned}$$

Es posible mostrar que los  $p$ -vectores son linealmente independientes debido a que las columnas de  $\mathcal{C}$  son linealmente independientes.

Se define la matriz no singular  $P = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & p_1 \end{pmatrix}$ , cuya matriz  $P^{-1}$  existe, y aplicando el teorema de Cayley Hamilton

$$\begin{aligned} Ap_n &= (A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_2A^2 + a_1A + a_0I)B - a_0B \\ &= -a_0B = -a_0p_1 = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \end{bmatrix}^T, \\ Ap_{n-1} &= p_n - a_1p_1 = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \end{bmatrix}^T, \\ Ap_{n-2} &= p_{n-1} - a_2p_1 = P \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \end{bmatrix}^T, \\ &\vdots \\ Ap_1 &= p_2 - a_{n-1}p_1 = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

y pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} &A \begin{bmatrix} p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & p_1 \end{bmatrix} \\ &= P \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} = P\bar{A} \end{aligned}$$

que implica

$$AP = P\bar{A} \quad \text{ó} \quad \bar{A} = P^{-1}AP$$

de donde se puede observar que la transformación de similaridad es  $z = P^{-1}x$  ó si  $T = P^{-1}$  entonces

$$z = Tx \tag{2.10}$$

dando como resultado la matriz transformada del sistema

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

y que resulta también en

$$B = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \Rightarrow P^{-1}B = TB = \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = CP = CT^{-1} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \bar{D} = D$$

### 2.1.2. Forma canónica de controlador en sistemas MIMO

Si se supone el sistema (2.6) pero de múltiples entradas, es decir,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  y además de  $\text{rango}(B) = r$ , con el par  $(A, B)$  es controlable, entonces existe una transformación de similaridad que lleva al sistema original a la forma canónica de controlador [Luenberger72].

Esta transformación puede construirse mediante el cálculo de la matriz de controlabilidad

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times (n \cdot r)} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_r & Ab_1 & Ab_2 & \dots & Ab_r & A^2b_1 & \dots & A^2b_r & \dots & A^{n-1}b_1 & \dots & A^{n-1}b_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde, debido a la controlabilidad del sistema, (2.11) tiene al menos  $n$  columnas linealmente independientes, es decir, es de rango  $n$ .

Se seleccionan las  $n$  columnas linealmente independientes mediante el siguiente criterio de selección:

1. La selección de los  $n$  vectores *linealmente independientes* de los  $(n \cdot r)$  columnas de la matriz de controlabilidad (2.11) con el orden específico de análisis

$$b_1, b_2, \dots, b_r, Ab_1, Ab_2, \dots, A^{n-1}b_r, \quad (2.12)$$

es decir, la selección de éstos vectores columna está realizada de acuerdo al siguiente procedimiento:

- (a) Seleccione la primera columna de  $B$  (es decir  $b_1$ ).
  - (b) Analice la siguiente columna de  $B$  (es decir  $b_2$ ), si el vector es linealmente independiente de  $b_1$ , quedará dentro de la selección, de lo contrario, omítalo de la selección. Continúe con el siguiente vector.
  - (c) En cualquier momento del proceso, la selección del siguiente vector debe ser de la forma  $A^i b_k$  donde todas las potencias menores de  $A$  por  $b_k$  (es decir,  $A^{i-1}b_k, A^{i-2}b_k, \dots$ ) han sido evaluadas (seleccionadas u omitidas). Si el nuevo vector es linealmente independiente, se retiene, de lo contrario se omite de la selección.
  - (d) El proceso de selección termina cuando se han encontrado  $n$  vectores linealmente independientes.
2. La selección de los  $n$  vectores linealmente independientes conforman las columnas de la matriz  $P$ , pero en el siguiente orden

$$P = \left[ \begin{array}{cccccccc} b_1 & Ab_1 & \dots & A^{p_1-1}b_1 & b_2 & Ab_2 & \dots & A^{p_2-1}b_2 & b_3 & \dots & A^{p_r-1}b_r \end{array} \right] \quad (2.13)$$

3. Escriba  $P^{-1}$  en términos de sus vectores renglón.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ \vdots \\ e_{1p_1} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{rp_r} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Elija los renglones  $e_{ip_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , es decir, el último renglón de cada grupo de  $p_r$  renglones. Para simplificar la notación, los vectores renglón cambian a  $e_i := e_{ip_i}$

4. Los vectores  $e_1, e_2, \dots, e_r$ , son usados para construir la matriz de transformación  $T$

$$T = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 A \\ e_1 A^2 \\ \vdots \\ e_1 A^{p_1-1} \\ e_2 \\ e_2 A \\ \vdots \\ e_r A^{p_r-1} \end{bmatrix}$$

Después de la transformación, la matriz  $\bar{A}$  tiene la forma

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ & & & & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & \vdots & & & \ddots & 1 \\ * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ & & & & & & & & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & \vdots & & \ddots & 1 \\ * & * & & \dots & & & & & * & * & * & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

y  $\bar{B}$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde los elementos \* son diferentes de cero.

Posteriormente se hace una factorización de la matriz  $\bar{B}$

$$\bar{B} = \hat{B}C$$

donde

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y  $C$  es una matriz triangular superior de  $(r \times r)$  con 1's en la diagonal principal.

Debido a que  $C$  es invertible, un nuevo conjunto de entradas del sistema pueden ser definidos como

$$\bar{u} = Cu$$

Con respecto a estas entradas, las ecuaciones del sistema toman la forma particular

$$\dot{z} = \bar{A}z + \hat{B}\bar{u} \tag{2.15}$$

## 2.2. Control Óptimo

### 2.2.1. Problema del regulador óptimo invariante en el tiempo

Sea el sistema Lineal Invariante en el Tiempo (LIT)

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.16)$$

donde  $F$  y  $G$  son constantes y el par  $(F, G)$  es controlable. Sean las matrices constantes  $Q$  y  $R$  simétrica positiva semidefinida y simétrica positiva definida, respectivamente. Se define el índice de desempeño

$$J(x(t_0), u(\cdot), t_0) = \int_{t_0}^{\infty} (u^T(t)Ru(t) + x^T(t)Qx(t)) dt \quad (2.17)$$

y el problema de minimización es la tarea de encontrar un control óptimo  $u^*(\cdot)$  que minimice el índice de desempeño óptimo asociado (2.17).

### 2.2.2. Solución del regulador óptimo invariante en el tiempo

Sea  $P(t, T)$  la solución de la ecuación

$$-\dot{P} = PF + F^T P - PGR^{-1}G^T P + Q \quad (2.18)$$

con la condición  $P(T, T) = 0$ . Entonces  $\lim_{T \rightarrow \infty} P(t, T) = \bar{P}$  existe y es constante, además,  $\bar{P} = \lim_{t \rightarrow -\infty} P(t, T)$ . Aún,  $\bar{P}$  satisface (2.18), es decir,

$$\bar{P}F + F^T \bar{P} - \bar{P}GR^{-1}G^T \bar{P} + Q = 0 \quad (2.19)$$

Ecuación Algebraica de Riccati y  $x^T \bar{P}x$  es el índice de desempeño óptimo cuando el tiempo inicial es  $t_0$  y la condición inicial del estado es  $x(t_0)$ . El control óptimo al tiempo  $t$  cuando el tiempo inicial es arbitrario es unívocamente dado por una ley de control constante [Moore71]

$$u^*(t) = -R^{-1}G^T \bar{P}x(t) \quad (2.20)$$



## 2.3. Modos deslizantes convencionales

### 2.3.1. Modos deslizantes

Los modos deslizantes convencionales o de primer orden son descritos de la siguiente manera. Considérese el sistema

$$\dot{x} = f(x, u, d) \quad (2.21)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control y  $f$  una función diferenciable con respecto a  $x$  y absolutamente continua con respecto al tiempo.  $d$  representa perturbaciones externas o incertidumbres acotadas del sistema.

Considérese la superficie en el espacio de estados dada por

$$S = \{x : \sigma(x) = 0\} \quad (2.22)$$

**Definición 1** *Un modo deslizante ideal toma lugar en la superficie (2.22) si el estado  $x(t)$ , evoluciona con el tiempo tal que  $\sigma(x(t_r)) = 0$  para algún  $t_r \in \mathbb{R}^+$  finito y  $\sigma(x(t)) = 0$  para todo  $t > t_r$ .*

Durante la dinámica de modo deslizante, el sistema (2.21) está confinada a la superficie (2.22) y es de orden reducido.

### 2.3.2. Soluciones de Filippov

Si el control aplicado a (2.21) es de naturaleza discontinua con respecto al vector de estado, la teoría clásica de ecuaciones diferenciales no es aplicable, debido a la suposición sobre el sistema de ser Lipschitz para garantizar la existencia de una solución única. Por lo tanto es utilizada la definición de soluciones de Filippov [Filippov88] para sistemas con lado derecho discontinuo.

Para el caso SISO, suponga que  $x_0$  es un punto de discontinuidad en  $S$  y defina  $f_-^c(t, x_0)$  y  $f_+^c(t, x_0)$  como los límites de  $f^c(t, x)$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  por ambos lados tangencialmente a  $S$ . La solución propuesta por Filippov es

$$\dot{x}(t) = (1 - \alpha)f_-^c(t, x) + \alpha f_+^c(t, x) \quad (2.23)$$

donde  $0 < \alpha < 1$  y es seleccionado tal que  $f_{avg}^c := (1 - \alpha)f_-^c + \alpha f_+^c$  es tangente a  $S$ .

**Comentario 1** *Es claro que la solución de Filippov es un promedio de la solución de dos vectores “ velocidad ” en el punto  $x_0$*

La ecuación (2.23) puede ser vista como una ecuación diferencial cuyo lado derecho está definido por el conjunto convexo

$$F(x) = \{(1 - \alpha)Sf_-^c + \alpha Sf_+^c : \forall \alpha \in [0, 1]\}$$

Entonces  $\dot{x} = F(x)$ .

Los valores de  $\alpha$  que aseguran  $\dot{\sigma} = 0$ , pueden ser calculados explícitamente de (2.23). Por ejemplo,  $\sigma = SX$ , donde  $S^T \in \mathbb{R}^n$ . Entonces explícitamente

$$\dot{\sigma} = S\dot{x} = (1 - \alpha)Sf_-^c + \alpha Sf_+^c$$

y que para mantener a  $\sigma = 0$ , el escalar  $\alpha$  debe satisfacer

$$(1 - \alpha)Sf_-^c + \alpha Sf_+^c = 0$$

y consecuentemente (y unívocamente)

$$\alpha = \frac{Sf_-^c}{Sf_-^c - Sf_+^c}$$

tal que

$$\dot{x}(t) = \frac{Sf_-^c f_+^c - Sf_+^c f_-^c}{Sf_-^c - Sf_+^c}$$

### 2.3.3. Control equivalente

El control equivalente se define como la acción de control necesaria para mantener un modo deslizante ideal sobre la superficie  $S$  [Utkin92].

En modos deslizantes convencionales, la dinámica de modos deslizantes toma lugar cuando  $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ , entonces, considerando (2.21) la derivada temporal de  $\sigma$

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, u, d) = 0$$

El control equivalente  $u_{eq}(t)$  es la función *continua* de control requerida para mantener el modo deslizante, es decir, es la solución a

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, u_{eq}, d) = 0 \quad (2.24)$$

Por ejemplo para el sistema afín

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + d$$

Implica que para una  $x$  dada, la entrada de control aparece linealmente, por lo tanto (2.24), se simplifica a

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x)u + \frac{\partial \sigma}{\partial x} d = 0,$$

y suponiendo que  $\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x)$  es no singular, entonces

$$u_{eq} = - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x) - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} d$$

El sistema en lazo cerrado tiene la dinámica

$$\dot{x} = \left( \mathcal{I} - g(x) \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) f(x) + \left( \mathcal{I} - g(x) \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) d$$

## 2.4. Controladores por modos deslizantes de orden superior

La idea principal de modos deslizantes elegir una variable de deslizamiento adecuada y mantenerla en cero, es decir, en modo deslizante. En el diseño convencional, la superficie de deslizamiento es de grado relativo uno, y los controladores convencionales son controladores switcheados de alta frecuencia que llevan esta superficie a cero. Sin embargo, si se supone el diseño de una superficie de deslizamiento  $\sigma$  en cuya  $r$ -ésima derivada

temporal aparece por primera vez el control, se dice entonces, que el grado relativo de la superficie es  $r$ . Para poder llevar a la variable de deslizamiento a cero es necesario que  $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ , y para lo cual es necesario un controlador por modos deslizantes de  $r$ -ésimo orden.

### 2.4.1. Control equivalente para orden superior

### 2.4.2. Control equivalente

Al igual que en modos deslizantes convencionales, el control equivalente se define como la acción de control necesaria para mantener un modo deslizante ideal sobre la superficie  $S$ .

La diferencia radical de modos deslizantes de orden superior, es que su dinámica toma lugar cuando  $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ , entonces, considerando (2.21) la  $r$ -ésima derivada temporal de  $\sigma$

$$\sigma^{(r)} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \dots \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) \right) \dots \right)}_{r-1} = \frac{d}{dt} \left( \dots \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, u, d) \right) \right) \dots \right) = 0$$

El control equivalente  $u_{eq}(t)$  es la función *continua* de control requerida para mantener el modo deslizante, es decir, es la solución a

$$\frac{d}{dt} \left( \dots \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, u_{eq}, d) \right) \right) \dots \right) = 0 \quad (2.25)$$

Por ejemplo, para una cadena de integradores perturbada de orden  $n$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= u + d \end{aligned} \quad (2.26)$$

y una superficie de deslizamiento  $\sigma = x_2 + x_1$ . Es hasta la  $(n-1)$  derivada temporal que el control aparece,

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma} &= x_3 + x_2 \\
\sigma^{(2)} &= x_3 + x_2 \\
&\vdots \\
\sigma^{(n-2)} &= x_n + x_{n-1} \\
\sigma^{(n-1)} &= u + \underbrace{d + x_n}_{-u_{eq}} \Rightarrow u_{eq} = -x_n - d
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Es claro que en términos de implementación es imposible conocer las perturbaciones  $d$ , sin embargo, se define el *control equivalente nominal* de la forma

$$u_{eqn} = -x_n \tag{2.28}$$

para compensar la dinámica conocida del sistema y permitir que el controlador por modos deslizantes se encargue del término de perturbaciones acopladas  $d$ .

### 2.4.3. Algoritmos de modos deslizantes de orden superior

Los algoritmos de Modos Deslizantes de Orden Superior resuelven el problema general de regulación de la salida (o de una variable deslizante  $\sigma$ ) para orden (o grado relativo) arbitrario en sistemas inciertos.

#### Anidado

El controlador Anidado está basado en un estructura pseudo anidada de controladores convencionales.

$$\begin{aligned}
N_{i,r} &= (|\sigma|^{q/r} + |\dot{\sigma}|^{q/(r-1)} + \dots + |\sigma^{(i-1)}|^{q/(r-i+1)}) \\
\Psi_{0,r} &= \text{sign}(\sigma), \Psi_{i,r} = \text{sign}(\sigma^{(i)} + \beta_i N_{i,r} \Psi_{i-1,r})
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Por ejemplo, para los primeros 3 órdenes,

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\alpha \text{sign}(\sigma) \\
u_2 &= -\alpha \text{sign}(\dot{\sigma} + |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma)) \\
u_3 &= -\alpha \text{sign}\left(\ddot{\sigma} + 2(|\dot{\sigma}|^3 + |\sigma|^2)^{1/6} \times \text{sign}(\dot{\sigma} + |\sigma|^{2/3} \text{sign}(\sigma))\right)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

### Cuasi-Continuo

El controlador de orden superior Cuasi-Continuo es un controlador convergente en tiempo finito capaz de controlar la variable de salida (o variable deslizante)  $\sigma$  de cualquier sistema SISO de grado relativo permanente. Cuasi-continuo es un controlador dependiente de  $\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \sigma^{r-1}$ , que es continuo siempre, excepto en la variedad

$$\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{r-1} = 0 \quad (2.31)$$

Está definido por

$$\begin{aligned} \varphi_{0,i} &= \sigma, \quad N_{0,i} = |\sigma|, \quad \Psi_{0,i} = \varphi_{0,i}/N_{0,i} = \text{sign}(\sigma) \\ \varphi_{j,i} &= \sigma^{(j)} + \phi_j N_{j-1,i}^{-1/(i-j+1)} \varphi_{j-1,i}, \\ N_{j,i} &= |\sigma^{(j)}| + \phi_j N_{j-1,i}^{-1/(i-j+1)} |\varphi_{j-1,i}|, \\ \Psi_{j,i} &= \varphi_{j,i}/N_{j,i} \\ v_i &= -\alpha_i \Psi_{i-1,i}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde  $\phi_1, \dots, \phi_{i-1}, \alpha_i$  son números positivos, y  $j = 1, \dots, i-1$ .

Por ejemplo, para los primeros 3 órdenes,

$$\begin{aligned} u_1 &= -\alpha_1 \text{sign}(\sigma) \\ u_2 &= -\alpha_2 \left( |\dot{\sigma}| + |\sigma|^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \left( \dot{\sigma} + |\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma) \right) \\ u_3 &= -\alpha_3 \left[ |\ddot{\sigma}| + 2 \left( |\dot{\sigma}| + |\sigma|^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} |\dot{\sigma} + |\sigma|^{\frac{2}{3}} \text{sign} \sigma| \right]^{-1} \\ &\quad \left[ \ddot{\sigma} + 2 \left( |\dot{\sigma}| + |\sigma|^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \dot{\sigma} + |\sigma|^{\frac{2}{3}} \text{sign} \sigma \right) \right] \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (2.33)$$

## 2.5. Reducción de chattering

Un problema con los controladores de naturaleza discontinua es el efecto de chattering que en algunos casos podría dañar a la planta, por lo tanto, la atenuación de éste efecto se vuelve prioritario.

A pesar de que los controladores por modos deslizantes de segundo orden (y de orden superior, en general) pueden atenuar de manera significativa el chattering sin alterar, en cierto sentido, las propiedades de los controladores de primer orden, es necesaria la implementación de otro tipo de estrategias.

### 2.5.1. Incremento del orden del sistema

De entre muchas técnicas que existen para la reducción del chattering, el incremento del orden del sistema resulta en controladores con propiedades semejantes a las de modos deslizantes convencionales pero con la ventaja de ser continuos.

Considere la función  $\sigma$  tal que

$$\dot{\sigma} = h(t, x) + g(t, x)u, \quad 0 < K_m \leq g \leq K_M, |h| \leq C \quad (2.34)$$

donde las funciones  $h$  y  $g$  son funciones suaves desconocidas. En éste caso, la ley de control de la forma  $u = -k \text{sign}(\sigma)$  puede resolver el problema de mantener las trayectorias del sistema en la superficie  $\sigma = 0$  con  $kK_m - C > 0$ . Ahora, para poder reducir el chattering, considere  $\dot{u}$  como una nueva entrada de control virtual. Entonces derivando (2.34), se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} &= h_1(t, x, u) + g(t, x)\dot{u} \\ h_1 &= h'_t + h'_x(a + bu) + (g'_t + g'_x(a + bu))u \end{aligned} \quad (2.35)$$

Si la función  $h_1(t, x, u)$  se asume acotada tal que

$$\sup_{|u| \leq k_1} |h_1(t, x, u)| = C_1 \quad (2.36)$$

Entonces, cualquier controlador  $\dot{u} = U(\alpha, \sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)})$  puede ser utilizado para reducir el chattering e incrementar la precisión del modo deslizante convencional.





## Capítulo 3

# Planteamiento del problema y desarrollo para sistemas SISO

Una gran cantidad de sistemas físicos pueden tener una representación aproximada mediante sistemas lineales. Las discrepancias generadas por la linealización de sistemas no lineales, por la incertidumbre paramétrica y dinámicas no modeladas pueden ser representadas como perturbaciones acopladas al control.

Utilizar controladores que son robustos (o insensibles) con respecto a éste tipo de perturbaciones es justificación suficiente para trabajar con modelos lineales aproximados y no con sus representaciones más exactas no lineales.

### 3.1. Planteamiento del problema

Considere el sistema perturbado lineal invariante en el tiempo de una sola entrada de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)B(u(t) + f(t, x)), \\ \|x_0\| &\leq L, L \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz del sistema,  $B \in \mathbb{R}^n$  es la matriz de control,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la entrada de control escalar, y  $f(t, x) \in \mathbb{R}$ , es una perturbación acoplada al canal de control y acotada por una constante real positiva  $|f(t, x)| \leq F \in \mathbb{R}^+$  que

puede representar perturbaciones externas y dinámicas acotadas no modeladas del sistema. Las condiciones iniciales del sistema deben estar en un conjunto compacto definido por  $L$ .

**Suposición 1** *El par  $(A, B)$  es controlable*

El control por Modos Deslizantes es robusto con respecto a perturbaciones acopladas, sin embargo, para del diseño de superficies se toma el sistema nominal

$$\dot{x}(t) = Ax(t)Bu(t), \quad \|x_0\| \leq L, \quad L \in \mathbb{R}^+, \quad (3.2)$$

y una función de costo o índice de desempeño

$$J(x(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (x(t)^T Q x(t)) dt, \quad (3.3)$$

donde  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es simétrica y positiva semidefinida.

El índice de desempeño (3.3) es singular con respecto al la entrada escalar de control  $u(t)$ , y es llamada función de costo de “control sin costo”.

El diseño de las superficies deslizantes se basa en la solución del problema de estabilización óptimo singular  $LQ$  (*SO SP*, por sus siglas en inglés).

Para resolver el problema de estabilización óptimo singular  $LQ$ , y posteriormente el diseño de superficies deslizantes de orden arbitrario, es necesario seguir una serie de pasos definidos en el presente capítulo.

## 3.2. Transformaciones

### 3.2.1. Transformación del sistema

Para poder resolver el problema de estabilización óptima singular, es necesario llevar al sistema a su forma *canónica de controlador*.

Dado que el par de matrices  $(A, B)$  del sistema (3.2) es controlable, entonces existe una transformación de similaridad de la forma (2.10), que lleva al sistema a la forma *canónica de controlador*.

Por lo tanto el sistema transformado es

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \quad (3.4)$$

donde la matriz  $\bar{A}$  tiene la forma de *Brunovsky*

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

y  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  son los coeficientes del polinomio característico.

### 3.2.2. Transformación del índice de desempeño

La matriz de ponderación  $Q$  de los estados del índice de desempeño necesita ser transformada para mantener la ponderación al sistema (3.4).

$$\bar{Q} = (T^{-1})^T Q T^{-1} \quad (3.6)$$

## 3.3. Orden de singularidad de SOSP

Es importante remarcar que en el diseño convencional mencionado en (1.1), se hacen particiones a la matriz  $\bar{Q}$  de la siguiente forma

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{12} \\ \tilde{Q}_{21} & \tilde{Q}_{22} \end{pmatrix} \text{ con } \tilde{Q}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}, \tilde{Q}_{22} > 0. \quad (3.7)$$

Sin embargo, el diseño de superficies de orden superior parte del supuesto que al transformar la matriz  $Q$  con (3.6) y hacer estas particiones (3.7), el escalar  $\tilde{Q}_{22} = 0$ .

**Proposición 1** Si  $\tilde{Q}_{22} = 0$  en (3.7), debido a las propiedades de simetría y positividad semidefinida,  $\bar{Q}$ , todos los elementos de  $\tilde{Q}_{12}$  y  $\tilde{Q}_{21}$  son cero.

**Prueba:** Considere  $\bar{Q}$  simétrica y positiva semidefinida, entonces existe una descomposición de *Cholesky* tal que  $\bar{Q} = CC^T$ , donde

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

entonces,

$$\begin{aligned} \bar{Q} = CC^T &= \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{11}^2 + \cdots + c_{1n}^2 & \cdots & c_{11}c_{n1} + \cdots + c_{1n}c_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}c_{11} + \cdots + c_{nn}c_{1n} & \cdots & c_{n1}^2 + \cdots + c_{nn}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si  $c_{n1}^2 + \cdots + c_{nn}^2 = 0$ , implica que  $c_{n1} = \cdots = c_{nn} = 0$

$\therefore$  si  $q_{nn} = 0$ , entonces,

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1(n-1)} & 0 \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ q_{(n-1)1} & q_{(n-1)2} & \cdots & q_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacktriangle (3.10)$$

Esto significa que en general  $\bar{Q}$  sólo puede tener la forma

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & \dots & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-k \text{ columnas, } k \text{ cero columnas}}$

$\bar{Q}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-k-1) \times (n-k-1)}$  es una matriz *simétrica positiva semidefinida*,  $\bar{Q}_{22} > 0$ ,  $\bar{Q}_{22} \in \mathbb{R}$ .

**Definición 2** *El orden de la singularidad* es el numero  $i = k + 1$ , donde  $k$  es el número de columnas cero de la matriz de ponderación  $\bar{Q}$  de la forma (3.11), tales que  $\bar{Q}_{22} > 0$ ,  $\bar{Q}_{22} \in \mathbb{R}$

## 3.4. Diseño de Superficie

### 3.4.1. Partición del sistema transformado

Después de hacer la partición de la matriz  $\bar{Q}$ , es necesario hacer una partición de las matrices del sistema (3.4) de las mismas dimensiones que en (3.11).

Entonces, el vector de estados de (3.4) se divide en tres subconjuntos de variables de estados  $z = [\bar{z}_1^T \ \bar{z}_2^T \ \bar{z}_3^T]^T$  donde  $\bar{z}_1$  representa las variables de estado que formarán la dinámica reducida de modos deslizantes,  $\bar{z}_2$  un *control virtual* y  $\bar{z}_3$  el resto de las variables de estado.

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= \begin{bmatrix} z_1 & \dots & z_{n-i} \end{bmatrix}^T \\ \bar{z}_2 &= z_{n-i+1} \\ \bar{z}_3 &= \begin{bmatrix} z_{n-i+2} & \dots & z_n \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.12)$$

El sistema se representa de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{z}}_1 \\ \dot{\bar{z}}_2 \\ \dot{\bar{z}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \end{bmatrix} u \quad (3.13)$$

Debido a la forma de *Brunovsky* de la matriz  $\bar{A}$ , el subsistema  $\bar{z}_1$  tiene la forma

$$\dot{\bar{z}} = \bar{A}_{11}\bar{z}_1 + \bar{A}_{12}\bar{z}_2, \quad (3.14)$$

donde  $\bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-i) \times (n-i)}$ , y  $\bar{A}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-i)}$ , y las particiones  $\bar{A}_{11}$  y  $\bar{A}_{12}$  tienen la *Forma Canónica de Controlador*

$$\bar{A}_{11} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{n-i \text{ columnas}}; \bar{A}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}} \right\} n-i \text{ renglones} \quad (3.15)$$

Hay que notar que la matriz  $\bar{Q}_{11}$  tiene la misma dimension que  $\bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-i) \times (n-i)}$ .

### 3.4.2. Cambio de variable

Después de haber obtenido las particiones de la matriz del sistema,  $\bar{A}_{11}$  como matriz del subsistema y  $\bar{A}_{12}$  como matriz de control virtual, las particiones de la matriz de ponderación del índice de desempeño  $\bar{Q}_{11}$  como matriz de ponderación de los estados  $\bar{z}_1$  y  $\bar{Q}_{22}$  como matriz de ponderación del control virtual  $\bar{z}_2$ , el índice de desempeño tiene la forma

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \bar{z}_1^T(t) \bar{Q}_{11} \bar{z}_1(t) + 2\bar{z}_1^T(t) \bar{Q}_{12} \bar{z}_2(t) + \bar{z}_2^T(t) \bar{Q}_{22} \bar{z}_2(t) dt \quad (3.16)$$

Es posible observar que (3.16) contiene términos cruzados entre los estados  $\bar{z}_1$  y el control virtual  $\bar{z}_2$ . Sin embargo, es posible hacer un cambio de variable para eliminar estos términos

$$\nu = \bar{z}_2 + (\bar{Q}_{22})^{-1} \bar{Q}_{12}^T \bar{z}_1 \quad (3.17)$$

Después del cambio de variable, el índice de desempeño es

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \bar{z}_1^T(t) \underbrace{(\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12} (\bar{Q}_{22})^{-1} \bar{Q}_{12}^T)}_{\hat{Q}} \bar{z}_1(t) + \nu^T(t) \underbrace{\bar{Q}_{22}}_{\hat{R}} \nu(t) dt \quad (3.18)$$

y el sistema (3.14)

$$\dot{\bar{z}}_1 = \underbrace{(\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12} (\bar{Q}_{22})^{-1} \bar{Q}_{12}^T)}_{\hat{A}} \bar{z}_1 + \underbrace{\bar{A}_{12}}_{\hat{B}} \nu, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \bar{A}_{11} + \bar{A}_{12} (\bar{Q}_{22})^{-1} \bar{Q}_{12}^T \in \mathbb{R}^{(n-i) \times (n-i)} \\ \hat{B} &= \bar{A}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-i)} \end{aligned}, \quad (3.20)$$

**Comentario 2** Finalmente, después de la transformación (2.9), la selección de particiones según el orden de singularidad, el cambio de variables (3.17), el índice de desempeño (3.3) singular con respecto a  $u(t)$ , se transformó en uno no-singular (3.18) con las matrices de ponderación  $\hat{Q} = \bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12} (\bar{Q}_{22})^{-1} \bar{Q}_{12}^T$  para los estados  $\bar{z}_1$ , y  $\hat{R} = \bar{Q}_{22}$  para el control virtual  $\nu$ , del subsistema (3.19).

### 3.4.3. Ecuación algebraica de Riccati

El sistema (3.2) y el índice de desempeño (3.3) han sido transformados, de un Problema de Estabilización Óptimo Singular (SOSP), a un problema de control óptimo regular para el subsistema (3.19) con un índice de desempeño regular (no singular) (3.18), que para sistemas lineales invariantes en el tiempo es usualmente resuelto mediante la Ecuación Algebraica de Riccati (ARE, por sus siglas en inglés)

$$P \hat{A} + \hat{A}^T P + \hat{Q} - P \hat{B} (\hat{R})^{-1} \hat{B}^T P = 0 \quad (3.21)$$

donde  $P$  es la única solución positiva definida si y sólo si el par  $(\hat{A}, \bar{D})$  es observable, con  $\bar{D}$  una matriz tal que  $\bar{D}^T \bar{D} = \hat{Q}$  [Moore71].

### 3.4.4. Control virtual y superficie deslizando

Con la solución de la Ecuación Algebraica de Riccati  $P$ , es posible construir un control virtual óptimo estabilizante con respecto a (3.18), bajo las suposiciones de controlabilidad de  $(A, B)$  y observabilidad de  $(\hat{A}, \bar{D})$ , y el cambio de variable (3.17),

$$\begin{aligned}\bar{z}_2 &= -K\bar{z}_1 \\ &= -(\hat{R})^{-1}(\hat{B}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1, \\ &= -(\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1\end{aligned}\tag{3.22}$$

que provee estabilidad en lazo cerrado para el subsistema (3.19).

Entonces, la superficie deslizando de grado relativo  $r \geq 1$  puede ser diseñada de la siguiente manera

$$\sigma = \bar{z}_2 + (\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1\tag{3.23}$$

**Proposición 2** *El orden de singularidad del índice de desempeño es igual al grado relativo de la superficie deslizando diseñada.*

**Prueba:** Se puede mostrar que de la superficie (3.23), la partición del sistema (3.12) y la forma original de cadena de integradores de  $\bar{A}$  del sistema (3.14), que la  $k$ -ésima derivada temporal de la superficie deslizando es

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)} &= z_{(n-i+2)} + (\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1^{(1)}, \\ \sigma^{(2)} &= z_{(n-i+3)} + (\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1^{(2)}, \\ &\vdots \\ \sigma^{(k)} &= z_{(n-i+1+k)} + (\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1^{(k)},\end{aligned}\tag{3.24}$$

donde  $\bar{z}_1^{(k)} = [z_{k+1} \ z_{k+2} \ \dots \ z_{(n-i+k)}]^T$  y  $z_{(n+1)} := \dot{z}_n = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n + u$ . Se puede mostrar, en la expresión (3.24), que la señal de control aparecerá inevitablemente sólo hasta la  $i$ -ésima derivada temporal de la superficie de deslizamiento.

$$\sigma^{(i)} = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n + u + (\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1^{(i)}\tag{3.25}$$

▲

Del desarrollo anterior es posible formular una extensión al teorema de Utkin sobre diseño de superficies deslizantes [Utkin92]



**Lema 1** Si  $\bar{Q}_{22} > 0$ , con un orden de singularidad  $i$ , el par  $(A, B)$  es controlable, y el par  $(\hat{A}, \bar{D})$  es observable, donde  $\bar{D}^T \bar{D} = \hat{Q}$ , entonces el vector óptimo actuando como control virtual minimizante en (3.19) es (3.22), donde  $P$  es la única solución positiva definida de la ecuación algebraica de Riccati.

**Comentario 3** La observabilidad del par  $(A, D)$  (con  $D^T D = Q$ ) no garantiza la observabilidad de las particiones  $(\hat{A}, \bar{D})$ , donde  $\bar{D}^T \bar{D} = \hat{Q}$ , por lo cual, las condiciones del lema están hechas sobre las particiones  $\hat{A}$  y  $\bar{D}$ .

**Prueba:** Ésto se puede mostrar con el ejemplo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} x; y \quad (3.26)$$

$$Q = D^T D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso, la matriz de observabilidad

$$\text{rank}(\mathbb{O}) = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_1 \gamma_3 & \gamma_1 + \gamma_2 \gamma_3 & \gamma_3^2 + \gamma_2 \end{bmatrix} = 3 \quad (3.27)$$

entonces, el sistema es observable.

El par de particiones  $A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  y  $Q_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  son claramente no observables. Entonces, la observabilidad del par  $(A, D)$  no garantiza la de  $(\hat{A}, \bar{D})$ . Entonces la condición de observabilidad del lema 1 está hecha sobre las particiones y no sobre las matrices originales del sistema. ▲

### 3.5. Diseño de controlador

La expresión (3.25) de la  $i$ -ésima derivada temporal de  $\sigma$  puede ser expresada genéricamente como

$$\sigma^{(i)} = \underbrace{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_n z_n}_{-u_{eqn}} + u \quad (3.28)$$

donde  $u_{eqn}$  es el *control equivalente nominal*, y se calcula como

$$u_{eqn} = -[\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_n z_n] \quad (3.29)$$

Aplicando la ley de control

$$u = u_{eqn} + v_i \quad (3.30)$$

y expresando el sistema (3.19) en lazo cerrado (3.30) y en nuevas variables de estado  $[\bar{z}_1^T, \sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i-1)}]^T$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_1 &= (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}K)\bar{z}_1 + \bar{A}_{12}\sigma \\ \sigma^{(i-1)} &= v_i + \bar{f}; \quad |\bar{f}(t, \bar{z}_1, \sigma)| \leq \bar{F}, \text{ and } \bar{F} \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde  $K = (\bar{Q}_{22})^{-1}[A_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T]$ .

El control por modos deslizantes está diseñado para restringir las trayectorias del sistema a la superficie (3.23), donde la dinámica está descrita por el modelo de orden reducido

$$\dot{\bar{z}}_1 = (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} \underbrace{(\bar{Q}_{22})^{-1}[A_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T]}_K) \bar{z}_1 \quad (3.32)$$

La selección del controlador por modos deslizantes de orden superior proviene del *orden de la singularidad* del índice de desempeño (el *grado relativo* de la superficie deslizante), dado que para poder llevar todas las trayectorias del sistema a la superficie  $\sigma = 0$ , es necesario el uso de un controlador por modos deslizantes de orden superior del mismo orden que el grado relativo de la superficie.

**Comentario 4** *Para el  $i$ -ésimo orden de singularidad, es posible usar el controlador Cuasi-continuo [Levant05] de  $i$ -ésimo orden.*

El uso del controlador Cuasi-Continuo garantiza que las trayectorias del sistema converjan a la superficie deslizante óptima en tiempo finito, incluso en presencia de perturbaciones acopladas [Levant05].

Después de el diseño del controlador por modos deslizantes de orden superior, es posible implementar técnicas de reducción de chattering como en (2.5), para evitar daños a la planta ocasionados por la naturaleza discontinua del controlador.

### 3.6. Resumen del capítulo

Se propuso un método de diseño de superficies deslizantes de orden superior basado en la solución al problema de estabilización óptima singular. El algoritmo de diseño consta de los siguientes pasos:

1. Transformaciones del sistema (3.2) y del índice de desempeño (3.3) mediante (2.1.1).
2. Definición del *orden de singularidad* del índice de desempeño mediante una análisis de la forma de la matriz de ponderación  $\bar{Q}$  donde se busca el escalar  $\bar{Q}_{22}$ .
3. Definición de particiones sobre la matriz de ponderación  $\bar{Q}$  y sobre el sistema transformado.
4. Diseño de la superficie mediante el diseño de un control estabilizante para el subsistema  $\bar{z}_1$  mediante un índice de desempeño no singular de orden reducido y la ecuación algebraica de Riccati.
5. Selección del orden del controlador por modos deslizantes de alto orden en función del orden de la singularidad del índice de desempeño.

Es importante remarcar que el orden de singularidad de índice de desempeño está ligado directamente al grado relativo de la superficie diseñada y ligado al orden del controlador por modos deslizantes de alto orden a utilizar.

Finalmente es posible aplicar el método (2.5), para la reducción del chattering debido a la acción discontinua en la variedad  $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$  del controlador Cuasi-Continuo.



## Capítulo 4

# Sistemas MIMO

Considere el sistema perturbado lineal invariante en el tiempo de múltiples entradas

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)B(u(t) + f(t, x)), \\ \|x_0\| &\leq L, L \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la *matriz del sistema*,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  es la *matriz de control*.  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el *vector de estado*,  $u(t) \in \mathbb{R}^r$  es el vector de control,  $f \in \mathbb{R}^r$  el vector de perturbaciones acopladas al canal de control con una cota conocida  $|f(t, x)_i| < F_i \in \mathbb{R}_+ \forall i = 1, 2, \dots, r$ . El par  $(A, B)$  es *controlable*, y el  $\text{rango}(B) = r$ .

El objetivo del desarrollo de este capítulo para sistemas MIMO, es lograr hacer la reducción de un sistema MIMO a varios sistemas SISO. Así, será posible aplicar la misma metodología de sistemas SISO a cada subsistema obtenido en éste procedimiento.

De la misma manera que para sistemas SISO, se considera el sistema nominal y un índice de desempeño singular con respecto al control, es decir un criterio de desempeño de *control sin costo*.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.2}$$

$$J(x(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (x(t)^T Q x(t)) dt, \tag{4.3}$$

donde  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es simétrica y positiva semidefinida.

Asimismo, el diseño de las superficies delizantes para sistemas MIMO también se basa en la solución del problema de estabilización óptimo singular  $LQ$  de subsistemas desacoplados provenientes del sistema MIMO, después de haberse aplicado una transformación y un control desacoplante.

El presente capítulo presenta la metodología necesaria para reducir el problema de estabilización de un sistema MIMO a casos de sistemas SISO mutuamente excluyentes.

## 4.1. Transformaciones

Para poder resolver el problema de reducción del sistema MIMO a múltiples subsistemas totalmente desacoplados SISO, es necesaria la transformación del sistema a su forma *Canónica de Controlador*.

### 4.1.1. Transformación del sistema

Para ésto se utiliza una de las transformaciones propuestas por Luenberger en [Luenberger72]. Existen diversas formas canónicas de controlador, de tal forma que es necesario aplicar la metodología mencionada en (2.1.2).

El sistema transformado

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \quad (4.4)$$

está en la *forma canónica de controlador*. Donde  $z = Tx$ ,  $\bar{A} = TAT^{-1}$ ,  $\bar{B} = TB$ , y  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ .

### 4.1.2. Transformación del índice de desempeño

La matriz de ponderación  $Q$  de los estados del índice de desempeño necesita ser transformada para mantener la ponderación al sistema (4.4).

$$\bar{Q} = (T^{-1})^T Q T^{-1} \quad (4.5)$$

## 4.2. Desacoplamiento de subsistemas

### 4.2.1. Selección de subsistemas

El sistema (4.4) puede ser considerado como *parcialmente desacoplado*, es decir, puede ser considerado como una composición de  $r$  matrices fundamentales en la forma canónica de controlador (forma de *Brunovsky*), localizados en bloques a lo largo de la diagonal. Los elementos  $*$  en la matriz representan posibles elementos diferentes de cero.

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & & & & & & \\ * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * & \dots & & * \\ \hline & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & & & \vdots & & & \ddots & & & & 1 \\ * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * & \dots & & * \\ \hline & & & & & & & & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & \vdots & & \ddots & 1 \\ * & * & & & \dots & & & & * & * & \dots & * \end{array} \right] \begin{array}{l} \left. \vphantom{\bar{A}} \right\} \text{subsistema 1} \\ \left. \vphantom{\bar{A}} \right\} \text{subsistema 2, \dots, } r-1 \quad (4.6) \\ \left. \vphantom{\bar{A}} \right\} \text{r-ésimo subsistema} \end{array}$$

$$\hat{B} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ 0 & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & & 0 & & & \\ & & & & \vdots & & & \\ & & & & 0 & & & \\ \hline 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & & & \end{array} \right] \begin{array}{l} \left. \vphantom{\hat{B}} \right\} \text{subsistema 1} \\ \left. \vphantom{\hat{B}} \right\} \text{subsistema 2, \dots, } r-1 \quad (4.7) \\ \left. \vphantom{\hat{B}} \right\} \text{r-ésimo subsistema} \end{array}$$

Entonces el sistema (4.4) puede ser representado en particiones

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \dots & \bar{A}_{1r} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \dots & \bar{A}_{2r} \\ \vdots & & & \\ \bar{A}_{r1} & \bar{A}_{r2} & \dots & \bar{A}_{rr} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \hat{B}_{11} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \hat{B}_{22} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & & & \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \hat{B}_{rr} \end{bmatrix} \bar{u} \quad (4.8)$$

donde  $\bar{A}_{ii} \in \mathbb{R}^{n_{s_i} \times n_{s_i}}$ ,  $\hat{B}_{ii} \in \mathbb{R}^{n_{s_i} \times 1}$  ( $i = 1, \dots, r$ ), y  $n_{s_i}$  denota el orden del  $i$ -ésimo subsistema obtenido por inspección (nótese que  $n = n_{s_1} + n_{s_2} + \dots + n_{s_r}$ ), y el vector de estado

$$z = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_r \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \bar{z}_1 \in \mathbb{R}^{n_{s_1}} \\ \bar{z}_2 \in \mathbb{R}^{n_{s_2}} \\ \vdots \\ \bar{z}_r \in \mathbb{R}^{n_{s_r}} \end{array}; \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}, \quad u_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, r \quad (4.9)$$

$$\bar{z}_i = \begin{bmatrix} z_{\eta_1+1} \\ z_{\eta_1+2} \\ \vdots \\ z_{\eta_2} \end{bmatrix}; \quad \eta_1 = \sum_{k=1}^i n_{s_{(k-1)}}, \quad \eta_2 = \sum_{k=1}^i n_{s_k}, \quad n_{s_0} := 0 \quad (4.10)$$

Las matrices  $A_{ij}$  representan la *dinámica de los subsistemas*.  $A_{ij}, i \neq j$ , ( $j = 1, \dots, r$ ) representa la *dinámica de interconexión* entre subsistemas.  $\hat{B}_{ii}, i = 1, \dots, r$  los *vectores* que dan la  $r$ -ésima entrada de *control escalar* a cada uno de los  $r$ -ésimos subsistemas.

En general, cada subsistema tiene la forma

$$\begin{array}{l} \text{de } \bar{A}: \\ \left[ \begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & 1 \\ * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * & * & \dots & * \end{array} \right] \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} \text{de } \hat{B}: \\ \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad (4.11)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\bar{A}_{i \neq j}}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\bar{A}_{ii}}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\bar{A}_{i \neq j}}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\hat{B}_{ii}}$



y puede ser representado como

$$\dot{z}_{s_i} = \sum_{j=1}^r [A_{ij} \bar{z}_j] + \hat{B}_{ii} \bar{u}_i, \quad i = 1, \dots, r \quad (4.12)$$

#### 4.2.2. Control desacoplante

Para poder obtener subsistemas completamente desacoplados, es necesario compensar para cada subsistema, los efectos de los otros  $(r - 1)$  subsistemas a través de la cancelación de las dinámicas de interconexión  $(\bar{A}_{i \neq j})$ , más aun, es posible compensar la propia dinamica del subsistema  $(\bar{A}_{ii})$ .

$$\bar{u}_i = -\hat{B}_{ii}^{-1} \left[ \sum_{j=1}^r A_{ij} \bar{z}_j \right] + v_i \quad (4.13)$$

donde  $\hat{B}_{ii}^{-1}$  es la matriz *pseudoinversa generalizada izquierda*, y  $v_i$  una entrada escalar de control adicional.

Después de aplicar el *control desacoplante*, las matrices del sistema (4.4) tienen la forma

$$\dot{z} = \bar{A}z + \hat{B}v, \quad v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_r]^T \quad (4.14)$$

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & & \vdots & & \ddots & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & & & & & & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & & & \dots & & & & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} \text{subsistema 1} \\ \\ \} \text{subsistema 2, \dots, } r-1 \\ \\ \} \text{r-ésimo subsistema} \end{array} \right. \quad (4.15)$$

### 4.3. Reduccion a caso SISO

Cada subsistema

$$\dot{z}_{s_i} = A_{s_i} z_{s_i} + B_{ii} \bar{v}; \quad A_{s_i} := A_{ii} \quad (4.16)$$

se convierte en una cadena de integradores pura con una entrada escalar

$$\dot{z}_{s_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} z_{s_i} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} (v_i + \bar{d}_i) \Rightarrow \dot{z}_{s_i} = \begin{bmatrix} z_{\eta_1+2} \\ z_{\eta_1+3} \\ \vdots \\ z_{\eta_2} \\ v_i + \bar{f}_i \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Cabe señalar que al considerar incertidumbre paramétrica, la cancelación no es exacta, por lo que es necesario modelar la dinámica parásita de la cancelación como perturbaciones acopladas como en (4.17).

Los controladores por modos deslizantes son insensibles con respecto a este tipo de perturbaciones, por lo tanto al utilizarlos para estabilizar cada subsistema SISO, puede considerarse que la cancelación fue exacta y por lo tanto el desacoplamiento completo.

**Comentario 5** *Esta nueva perturbación debe ser tomada en cuenta para el cálculo de las ganancias de los controladores.*

#### 4.3.1. Particiones en el índice de desempeño

La matriz de ponderación transformada  $\bar{Q}$  debe ser particionada con las mismas dimensiones que los  $r$  subsistemas de la forma

$$\bar{Q} := \left[ \begin{array}{cccc} \boxed{\bar{Q}_{11}} & \bar{Q}_{12} & \dots & \bar{Q}_{1r} \\ \bar{Q}_{21} & \boxed{\bar{Q}_{22}} & \dots & \bar{Q}_{2r} \\ \vdots & & & \\ \bar{Q}_{r1} & \bar{Q}_{r2} & \dots & \boxed{\bar{Q}_{rr}} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} \text{subsistema 1} \\ \} \text{subsistema 2, \dots, } r-1 \\ \} \text{r-ésimo subsistema} \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

Cada partición  $\bar{Q}_{ii}, i = 1, \dots, r$ , es asignada su correspondiente subsistema  $\dot{z}_{s_i}$  para ponderar los estados.

$$Q_{s_i} := \bar{Q}_{ii} \quad (4.19)$$

**Comentario 6** *Las particiones  $\bar{Q}_{i \neq j}$  están relacionadas con la dinámica de interconexión. Sin embargo, al ser eliminadas por el control desacoplante y por el controlador por modos deslizante al ser consideradas como una perturbación, carecen de sentido.*

**Comentario 7** *Es claro que la optimalidad de la solución se pierde, esto es, la solución óptima LQ sólo se utiliza como una herramienta de diseño, no se pretende ninguna optimización del sistema original.*

## 4.4. Resumen del capítulo

Es posible transformar un sistema MIMO n-dimensional lineal invariante en el tiempo a su forma canónica de controlador si y solo si es completamente controlable. Dadas estas condiciones es posible aplicar el siguiente procedimiento:

1. Transformación del sistema (4.1) y del índice de desempeño (4.3), mediante la transformación (2.1.2) de [Luenberger72].
2. Definición de los subsistemas y de su orden con base en inspección.
3. Aplicar la ley de control desacoplante (4.13) para obtener un sistema MIMO con las matrices del sistema de la forma (4.15)
4. Definición y formulación del problema de estabilización para cada uno de los subsistemas como casos completamente independientes de sistemas SISO.
5. Aplicación de la metodología para el caso SISO a cada uno de los subsistemas.



## Capítulo 5

# Simulaciones

En este capítulo se hará la comprobación del procedimiento propuesto mediante simulaciones con un sistema de helicóptero de tres grados de libertad.

### 5.1. Descripción del sistema

El helicóptero de 3 grados de libertad puede ser representado por un sistema lineal invariante en el tiempo de orden  $n = 6$  y con dos entradas de control  $r = 2$ . Además, las discrepancias entre el modelo matemático y el sistema real pueden estar contenidas en el término de perturbación acoplada  $f$ .

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + f(t, x)), \quad (5.1)$$

donde la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz del sistema,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  es la matriz de control,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^r$  es el vector de entrada de control, y  $f$  el término de perturbaciones acopladas, donde se incluyen incertidumbres como dinámicas no modeladas, incertidumbre paramétrica, errores de linealización, y perturbaciones externas. Las perturbaciones acopladas están acotadas por una constante  $|f|_i \leq F_i \in \mathbb{R}^+$ .

Las matrices del sistema se obtuvieron a partir del análisis de cuerpo libre por la segunda ley de Newton, y de donde se obtuvo un modelo no lineal. Después, el modelo no lineal se linealizó en el subespacio de equilibrio  $x = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & x_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Las matrices del sistema lineal son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_p L_a}{J_t} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_f L_a}{J_e} & \frac{K_f L_a}{J_e} \\ \frac{K_f L_h}{J_p} & -\frac{K_f L_h}{J_p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

donde los parámetros tiene los valores

Parámetro	Valor	Descripción
$J_p$	0.0364	Momento de inercia sobre el eje de inclinación
$J_e$	0.91	Momento de inercia sobre el eje de elevación
$J_t$	0.91	Momento de inercia sobre el eje de desplazamiento
$K_p$	0.686	Fuerza requerida para mantener el helicóptero en vuelo estable
$K_f$	0.1188	Constante de fuerza-empuje del propulsor
$L_a$	0.66	Distancia entre el eje de trayectoria y el cuerpo del helicóptero
$L_h$	0.178	Distancia entre ángulo de inclinación y cada motor
$g$	9.72	Constante gravitacional

Finalmente, las matrices numéricas del sistema son

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.498 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.0862 & 0.0862 \\ 0.581 & -0.581 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

## 5.2. Aplicación del método

### 5.2.1. Sistema MIMO: Transformaciones

Primero es necesario revisar la controlabilidad del sistema, por lo tanto, se obtiene la matriz de controlabilidad del sistema y se revisa si es de rango completo.

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0862 & 0.0862 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.581 & -0.581 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.289 & -0.289 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0862 & 0.0862 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.581 & -0.581 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.289 & -0.289 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\tag{5.4}
\end{aligned}$$

El rango de  $\mathcal{C}$  es

$$\text{rank}(\mathcal{C}) = 6 \tag{5.5}$$

por lo tanto el sistema es *controlable*, además, el rango de la matriz  $B = 2$ .

Para construir la transformación de similaridad que lleve al sistema (5.1) a su forma canónica de controlador, es necesario seguir los pasos citados en (2.1.2), es decir, primero es necesario hacer la selección  $P_s$  de  $n$  columnas linealmente independientes de  $\mathcal{C}$  (2.12).

Los vectores seleccionados fueron

$$\begin{aligned}
P_s &= [P_{s1}, P_{s2}, P_{s3}, P_{s4}, P_{s5}, P_{s6}] = \\
&= [b_1, b_2, Ab_1, Ab_2, A^2b_1, A^3b_1] = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0862 & 0.0862 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.581 & -0.581 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.289 \\ 0.0862 & 0.0862 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.581 & -0.581 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.289 & 0 \end{bmatrix} \\
&\tag{5.6}
\end{aligned}$$

El mayor exponente de los términos  $b_1A^i$  es  $i = 3$ , por lo tanto  $p_1 - 1 = 3 \Rightarrow p_1 = 4$ , y el mayor exponente de los términos  $b_2A^i$  es  $i = 1$ , por lo tanto  $p_2 - 1 = 1 \Rightarrow p_2 = 2$ .

Después se construye la matriz  $P$  ordenando los vectores columna de  $P_s$  como en (2.13)

$$P = [P_{s1}, P_{s3}, P_{s5}P_{s6}P_{s2}P_{s4}] = \begin{bmatrix} 0 & 0.0862 & 0 & 0 & 0 & 0.0862 \\ 0 & 0.581 & 0 & 0 & 0 & -0.581 \\ 0 & 0 & 0 & 0.289 & 0 & 0 \\ 0.0862 & 0 & 0 & 0 & 0.0862 & 0 \\ 0.581 & 0 & 0 & 0 & -0.581 & 0 \\ 0 & 0 & 0.289 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

que es visiblemente de rango completo.

Después se expresa la matriz inversa de  $P$  en términos de sus renglones (2.14)

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5.8 & 0.861 & 0 \\ 5.8 & 0.861 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.46 \\ 0 & 0 & 3.46 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.8 & -0.861 & 0 \\ 5.8 & -0.861 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \\ e_{21} \\ e_{22} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

y se seleccionan los últimos renglones de cada grupo de  $p_r$  renglones, es decir  $e_{14}$  y  $e_{22}$

$$\begin{aligned} e_1 &= e_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3.46 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ e_2 &= e_{22} = \begin{bmatrix} 5.8 & -0.861 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Posteriormente, se construye la transformación  $z = Tx$



$$T = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 A \\ e_1 A^2 \\ e_1 A^3 \\ e_2 \\ e_1 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3.46 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.46 \\ 0 & 1.72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.72 & 0 \\ 5.8 & -0.861 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.8 & -0.861 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Finalmente, se transforman las matrices del sistema

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\bar{B} = TB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0 & -1.0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

y una factorización de la matriz  $\bar{B}$  de la forma

$$\bar{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}}_{\hat{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}}_C; \text{ con } \bar{u} = Cu \quad (5.12)$$

El sistema transformado es

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \bar{u} \quad (5.13)$$

Es posible observar que el sistema (5.14) está constituido por dos subsistemas que *a priori*, están desacoplados, por lo cual no se necesita la aplicación del control desacoplante (4.13). Éstos dos subsistemas, de 4<sup>to</sup> y 2<sup>do</sup> orden, pueden ser tratados de manera independiente con el procedimiento propuesto en el capítulo 3.

$$\dot{z} = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] z + \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{array} \right] \bar{u} \quad (5.14)$$

La matriz de ponderación de estados dada es

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.084 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.34 & 0 & 0.015 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.015 & 0 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

y mediante la transformación se obtiene

$$\bar{Q} = (T^{-1})^T Q T^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

De acuerdo a (4.18)

$$\bar{Q} = (T^{-1})^T Q T^{-1} = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{array} \right] \quad (5.17)$$

### 5.2.2. Subsistemas SISO

#### Subsistema SISO de 4<sup>to</sup> orden

$$\dot{z}_{s1} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z_{s1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \bar{u}_{s1}, \quad (5.18)$$

con un índice de desempeño

$$J(z_{s1}(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (z_{s1}(t)^T \bar{Q}_{s1} z_{s1}(t)) dt; \quad \bar{Q}_{s1} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

El número de columnas/renglones cero del índice de desempeño (5.19) es  $k = 1$ , entonces el índice de singularidad es  $i = k + 1 = 2$ , por lo tanto los subconjuntos de variables de estado son  $\bar{z}_1 = [z_1, z_2]^T$ ,  $\bar{z}_2 = [z_3]$  y  $\bar{z}_3 = [z_4, z_5, z_6]^T$  las particiones del sistema y del índice de singularidad son:

$$\bar{A}_{s2_{11}} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 \end{bmatrix}; \quad \bar{Q}_{11} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}; \quad \bar{Q}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{Q}_{22} = 1.0; \quad (5.20)$$

Cálculo de las particiones con el cambio de variable

$$\begin{aligned} \hat{A} &:= \bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{B} &:= \bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \\ \hat{Q} &:= \bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \\ \hat{R} &:= \bar{Q}_{22} = 1.0; \end{aligned} \quad (5.21)$$

Solución de la ecuación algebraica de Riccati

$$P\hat{A} + \hat{A}^T P + \hat{Q} - P\hat{B}(\hat{R})^{-1}\hat{B}^T P = 0 \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1.73 & 1.0 \\ 1.0 & 1.73 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Cálculo del control virtual según (3.22),

$$\bar{z}_2 = -(\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1 = - \begin{bmatrix} 1.0 & 1.73 \end{bmatrix} \bar{z}_1 \quad (5.23)$$

Por lo tanto la superficie es

$$\begin{aligned} \sigma_{s_1} &= \bar{z}_2 + \begin{bmatrix} 1.0 & 1.73 \end{bmatrix} \bar{z}_1 \\ &= z_3 + z_1 + 1.73z_2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Al derivar la superficie con respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{s_1} &= z_4 + z_2 + 1.73z_3 \\ \ddot{\sigma}_{s_1} &= \bar{u}_{s_1} + \underbrace{z_3 + 1.73z_4}_{-u_{eqn}}\end{aligned}\quad (5.25)$$

de donde se comprueba que el grado relativo es dos. El control equivalente nominal es

$$u_{eqn_{s_1}} = -z_3 - 1.73z_4 \quad (5.26)$$

La ley de control aplicada es  $\bar{u}_{s_1} = u_{eqn_{s_1}} + v_{s_1}$ . Donde  $v_{s_1}$  puede ser cualquier controlador por modos deslizantes de orden 2. Por ejemplo, es posible utilizar el algoritmo Cuasi-continuo de orden 2 (2.32) o el algoritmo Twisting [Emel'Yanov86].

El algoritmo cuasi-continuo de orden 2

$$v_{2_{s_1}} = -\alpha_{s_1} \left( |\dot{\sigma}_{s_1}| + |\sigma_{s_1}|^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \left( \dot{\sigma}_{s_1} + |\sigma_{s_1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_{s_1}) \right) \quad (5.27)$$

### Subsistema SISO de $2^{do}$ orden

$$\dot{z}_{s_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_{s_2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \bar{u}_{s_2}, \quad (5.28)$$

con un índice de desempeño

$$J(z_{s_2}(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (z_{s_2}(t)^T \bar{Q}_{s_2} z_{s_2}(t)) dt; \quad \bar{Q}_{s_2} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

El número de columnas/renglones cero del índice de desempeño (5.29) es  $k = 0$ , por lo tanto el índice de singularidad es  $i = k + 1 = 1$ , por lo tanto los subconjuntos de variables de estado son  $\bar{z}_1 = [z_5]$ ,  $\bar{z}_2 = [z_6]$  y  $\bar{z}_3 = [\emptyset]$  las particiones del sistema y del índice de singularidad son las siguientes:

$$\bar{A}_{s_{211}} = 0; \quad \bar{A}_{s_{212}} = 1.0; \quad \bar{Q}_{s_{211}} = 1.0; \quad \bar{Q}_{s_{212}} = 0; \quad \bar{Q}_{s_{222}} = 1.0 \quad (5.30)$$

Cálculo de las particiones con el cambio de variable

$$\begin{aligned}
\hat{A} &:= \bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T = 0 \\
\hat{B} &:= \bar{A}_{12} = 1.0 \\
\hat{Q} &:= \bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T = 1.0 \\
\hat{R} &:= \bar{Q}_{22} = 1.0;
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Solución de la ecuación algebraica de Riccati

$$P\hat{A} + \hat{A}^T P + \hat{Q} - P\hat{B}(\hat{R})^{-1}\hat{B}^T P = 1 - p^2 = 0 \Rightarrow p = 1 \tag{5.32}$$

Cálculo del control virtual según (3.22),

$$\bar{z}_2 = -(\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1 = -\bar{z}_1 \tag{5.33}$$

Por lo tanto la superficie es

$$\sigma_{s_2} = \bar{z}_2 + \bar{z}_1 = z_6 + z_5 \tag{5.34}$$

Al derivar la superficie con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{\sigma}_{s_2} = \dot{z}_6 + \dot{z}_5 = \bar{u}_{s_2} + \underbrace{z_6}_{-u_{eqn}} \tag{5.35}$$

de donde se comprueba que el grado relativo es uno. El control equivalente nominal es

$$u_{eqn_{s_2}} = -z_6 \tag{5.36}$$

La ley de control aplicada es  $\bar{u}_{s_2} = u_{eqn_{s_2}} + v_{s_2}$ . Donde  $v_{s_2}$  puede ser cualquier controlador por modos deslizantes de orden 1.

El controlador cuasi-continuo de orden uno y el controlador convencional tienen la misma forma

$$v_{s_2} = -\alpha_{s_2} \text{sign}(\sigma_{s_2}) \tag{5.37}$$

### 5.2.3. Cálculo de ganancias

Se supone una perturbación de la forma

$$\begin{aligned} f_1 &= \xi(t) + \gamma_1 \sin(t) + \gamma_2 \cos(5t) \\ f_2 &= \xi(t) + \gamma_1 \sin(2t) + \gamma_2 \cos(3t) \end{aligned} \quad (5.38)$$

donde  $\xi(t)$  es una variable aleatoria de talque  $\xi(t) \in [-1, 1]$ ,  $\gamma_1 = 5$ ,  $\gamma_2 = 4$

Entonces, para ambas perturbaciones su cota es  $|f_1| \leq F_1$ ,  $|f_2| \leq F_2$  y  $F_1 = F_2 = 10$ . Si  $F = [F_1 \ F_2]^T$  se tiene que

$$\bar{F} = CF = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - F_2 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Sin embargo, se tiene que tomar el peor caso posible, dado que no se conocen las perturbaciones y éstas pueden ser tanto positivas como negativas. Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |F_1| + |F_2| \\ |F_2| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Por otro lado se toman en cuenta las condiciones iniciales del sistema o la cota del conjunto compacto  $L$ , donde se supusieron al inicio. En éste caso (como es simulación) se toman las condiciones iniciales del sistema  $x_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.8 & 0.8 & 0.7 & 0.1 \end{bmatrix}$ , entonces

$$z_0 = Tx_0 = \begin{bmatrix} 2.77 \\ 0.346 \\ 0.689 \\ 1.2 \\ 2.56 \\ 4.04 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

después

$$\begin{aligned} L_1 &= \|[z_1(0) \ z_2(0) \ z_3(0) \ z_4(0)]\| = 3.1155 \\ L_2 &= \|[z_5(0) \ z_6(0)]\| = 4.7812 \end{aligned} \quad (5.42)$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\alpha_{s1} &= 25 > \bar{F}_1 + L_1 = 23.2155; \\ \alpha_{s2} &= 15 > \bar{F}_2 + L_2 = 14.7812\end{aligned}\tag{5.43}$$

## 5.3. Simulaciones

### 5.3.1. Sistema de 4<sup>to</sup> orden

En la figura 5.1, se pueden observar los estados  $z_1$  a  $z_4$  del subsistema transformado 5.1(a), la superficie diseñada y su primera derivada temporal 5.1(b), la señal de control, que es continua excepto cuando ocurren los modos deslizantes en  $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = 0$ , y finalmente las perturbaciones del canal uno, 5.1(d). Las condiciones iniciales de la simulación son  $z_{s1}(0) = \begin{bmatrix} 2.77 & 0.346 & 0.689 & 1.2 \end{bmatrix}^T$

Independientemente se realiza la simulación del sistema de 2<sup>do</sup> orden (5.2). También se muestran los estados del subsistema (5.2(a)), la superficie deslizante 5.2(b), la señal de control 5.2(c), y las perturbaciones acopladas en el canal de control dos, 5.2. Las condiciones iniciales son  $z_{s2}(0) = \begin{bmatrix} 2.56 & 4.04 \end{bmatrix}^T$ .

Debido a que se hizo una factorización de la matriz  $\bar{B} = \hat{B}C$ , las señales de control para el sistema original no son las mismas que para los subsistemas independientes, es decir, con una combinación lineal debido a la forma de  $\bar{B}$ . La figura 5.3, muestra los estados (5.3(a)) y las dos señales de control 5.3(b) y 5.3(c)

### 5.3.2. Reducción de chattering

Es posible observar en las figuras 5.3(b) y 5.3(c), que el control aplicado a la planta es discontinuo y con una frecuencia de switcheo muy alta. Éste tipo de señal de control no es aceptable para la planta, por lo tanto, es necesario implementar la técnica mencionada en (2.5) para la reducción de este tipo de control switcheado.

Si se consideran  $\dot{u}_{s1}$  y  $\dot{u}_{s2}$  como nuevas entradas de control para los subsistemas 1 y 2 respectivamente, es decir

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{u}_{s1} \\ \omega_2 &= \dot{u}_{s2}\end{aligned}\tag{5.44}$$



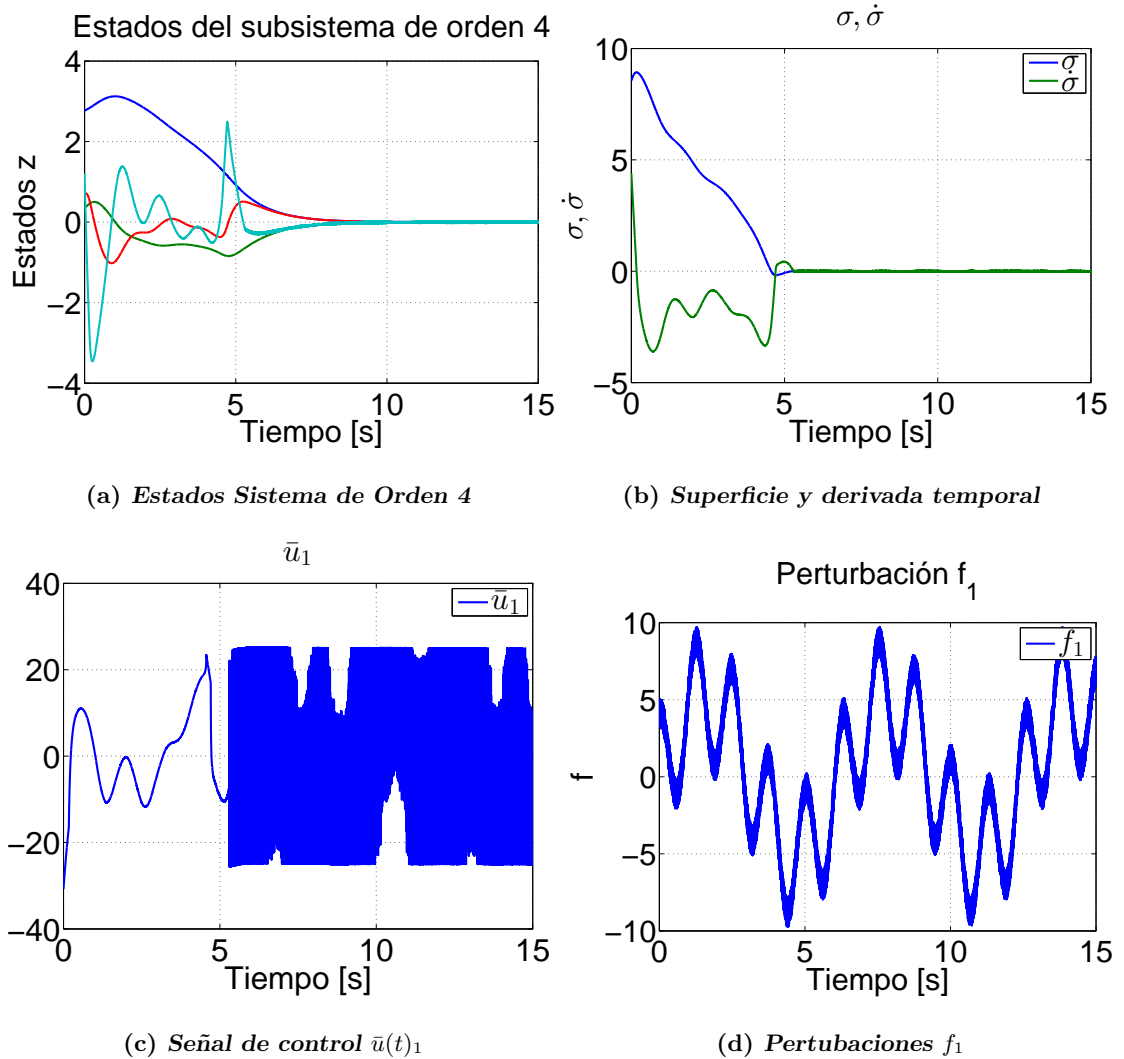


Figura 5.1: Subsistema de orden 4

entonces las expresiones (5.25) y (5.35) no están en función de entradas de control, sino de *estados virtuales*  $\bar{u}_{s1}$  y  $\bar{u}_{s2}$  del sistema.

Es necesario, entonces, derivar con respecto al tiempo una vez más para encontrar las señales de control  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

$$\begin{aligned}
 \ddot{\sigma}_{s1} &= \dot{\bar{u}}_{s1} + z_4 + 1.73(\bar{u}_{s1} + \bar{f}_1) & \text{y} & & \ddot{\sigma}_{s2} &= \dot{\bar{u}}_{s2} + (\bar{u}_{s2} + \bar{f}_2) \\
 \ddot{\omega}_{s1} &= \omega_1 + z_4 + 1.73(\bar{u}_{s1} + \bar{f}_1) & & & \ddot{\omega}_{s2} &= \omega_2 + (\bar{u}_{s2} + \bar{f}_2)
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

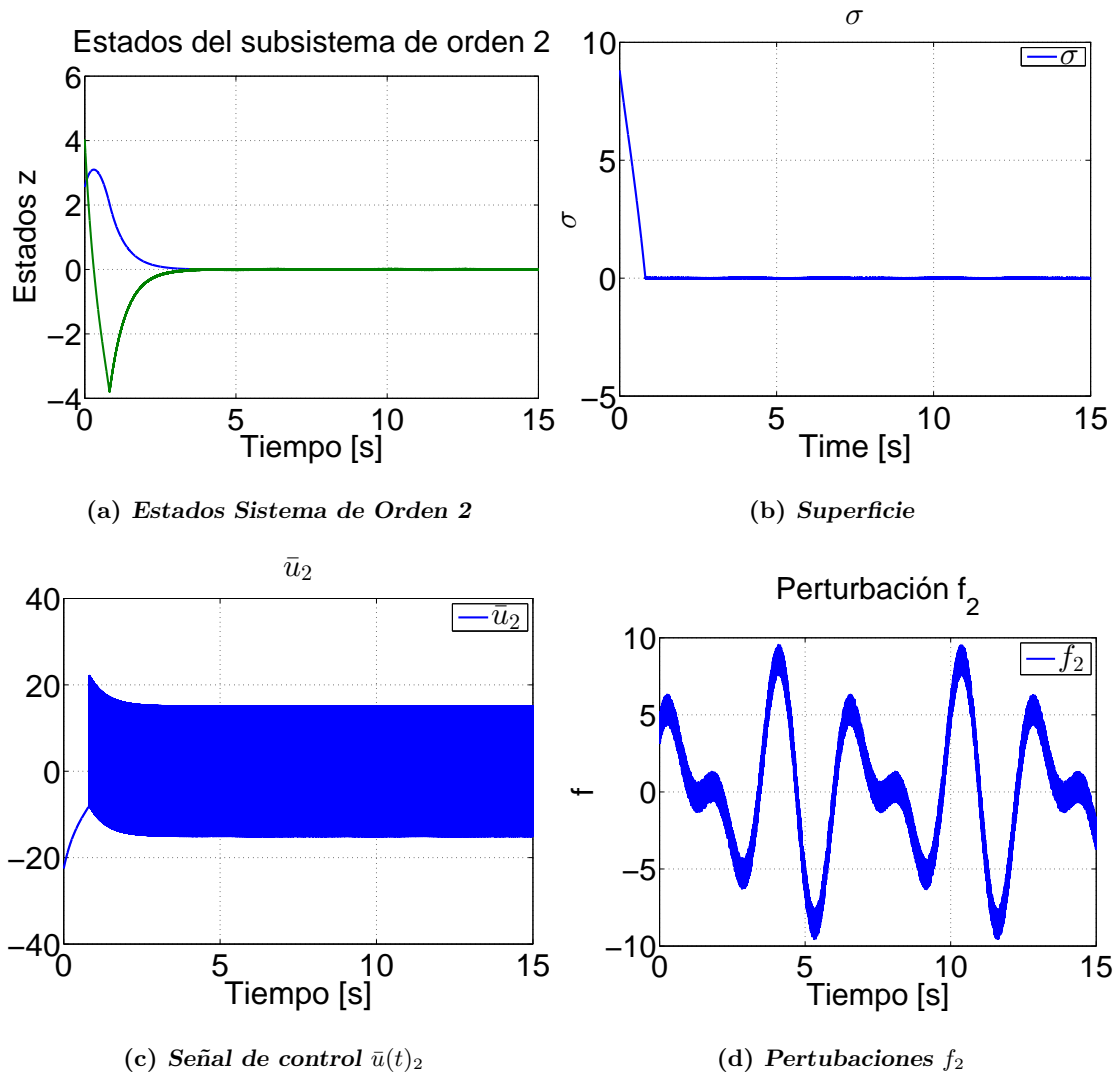


Figura 5.2: Subsistema de orden 2

Varias observaciones tienen relevancia

- El control equivalente nominal cambia de forma, es decir, la dinámica del sistema se compensa hasta haber encontrado las nuevas entradas de control

$$\begin{aligned}\omega_{eqn_1} &= -z_4 - 1.73\bar{u}_{s1} \\ \omega_{eqn_2} &= -\bar{u}_{s2}\end{aligned}\tag{5.46}$$

- Dado que las siguientes derivadas para encontrar la señal de control incluyen las per-

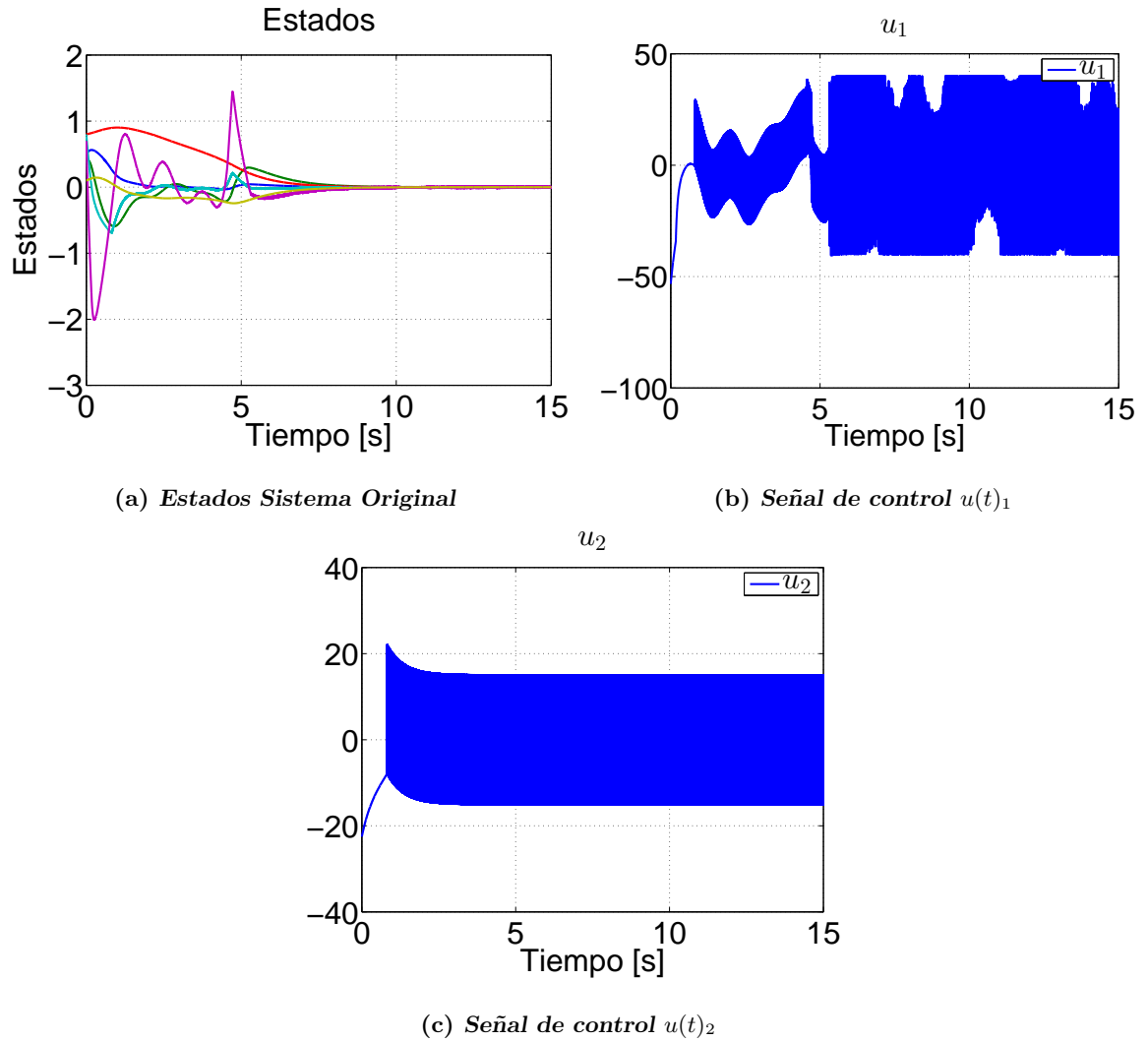


Figura 5.3: Sistema original

turbaciones, no es posible calcularlas analíticamente, entonces es necesario el cálculo de  $\ddot{\sigma}_{s_1}$  y  $\ddot{\sigma}_{s_2}$  en línea mediante un derivador [Levant98],[Levant03].

- Al incrementar el orden del sistema, también se incrementa el grado relativo de la superficie deslizante, por lo tanto es necesario incrementar el orden del controlador Cuasi-Continuo en uno al especificado en (3.5)

Así, el sistema se estabiliza mediante señales de control continuas.

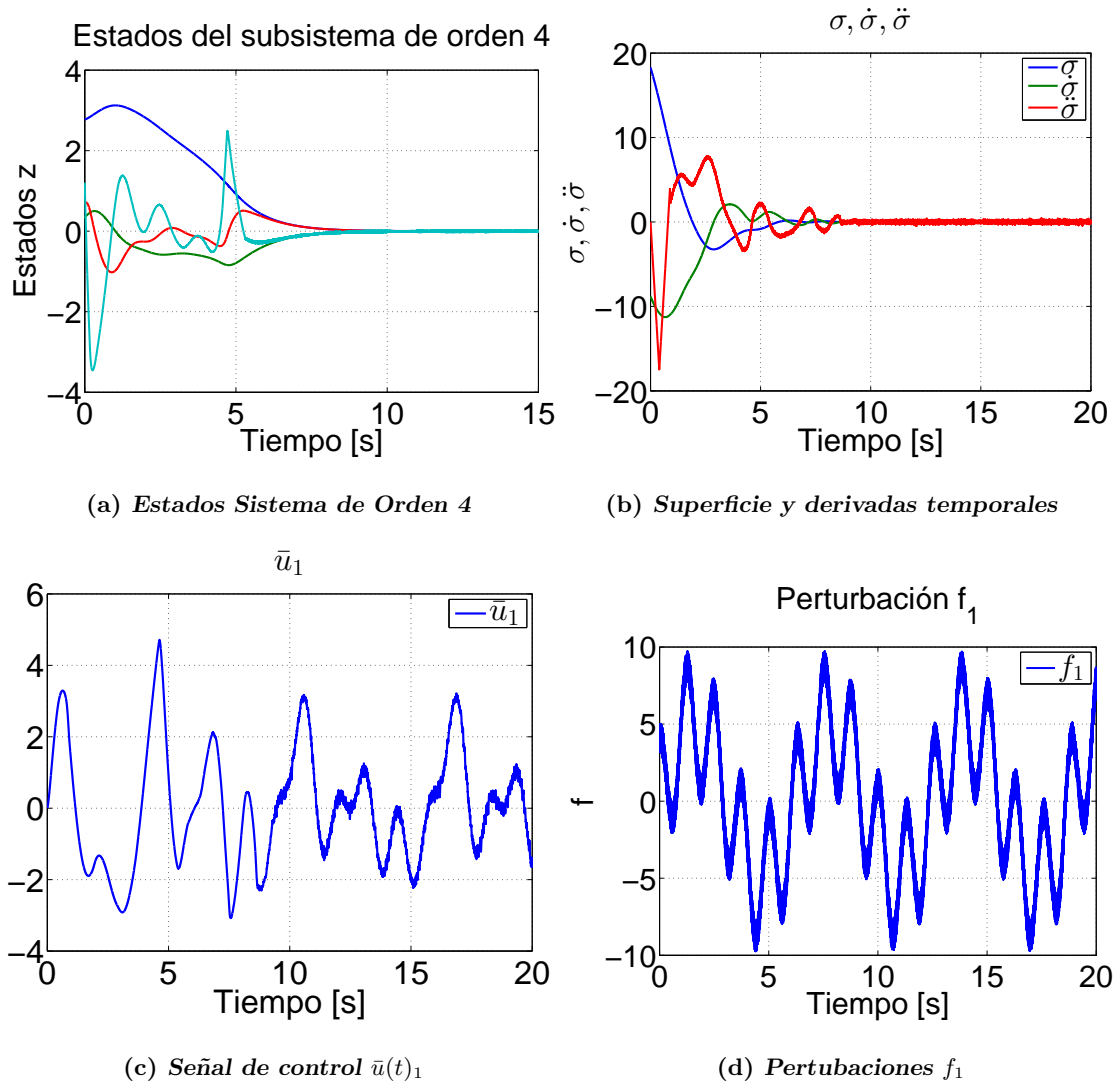


Figura 5.4: Subsistema de orden 4

Se observa, en la figura 5.4(c) y 5.5(c), que la señales de control son continuas, y a pesar de esto se conservan las propiedades de insensibilidad del controlador.

Finalmente para el sistema original,

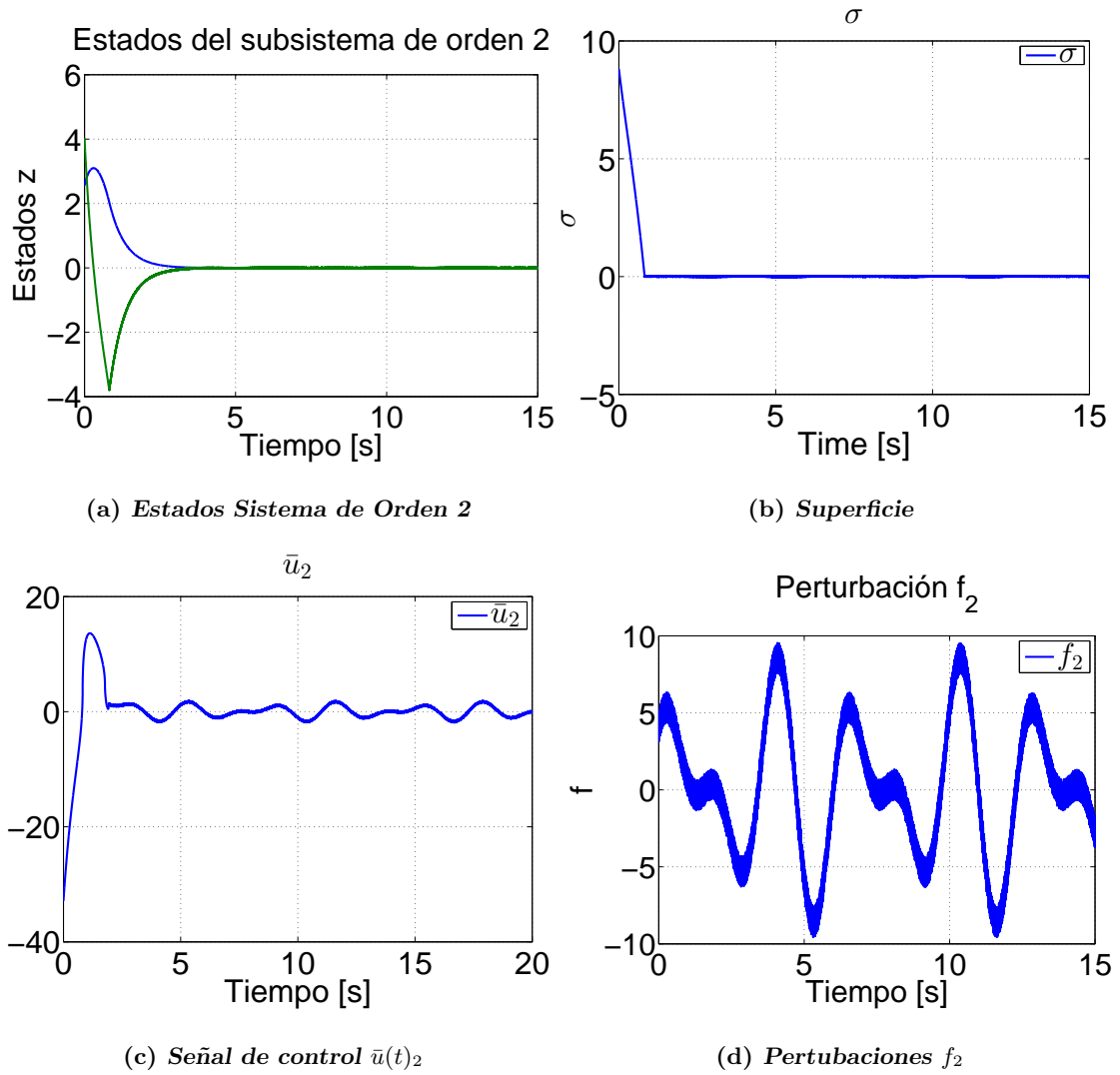


Figura 5.5: Subsistema de orden 2

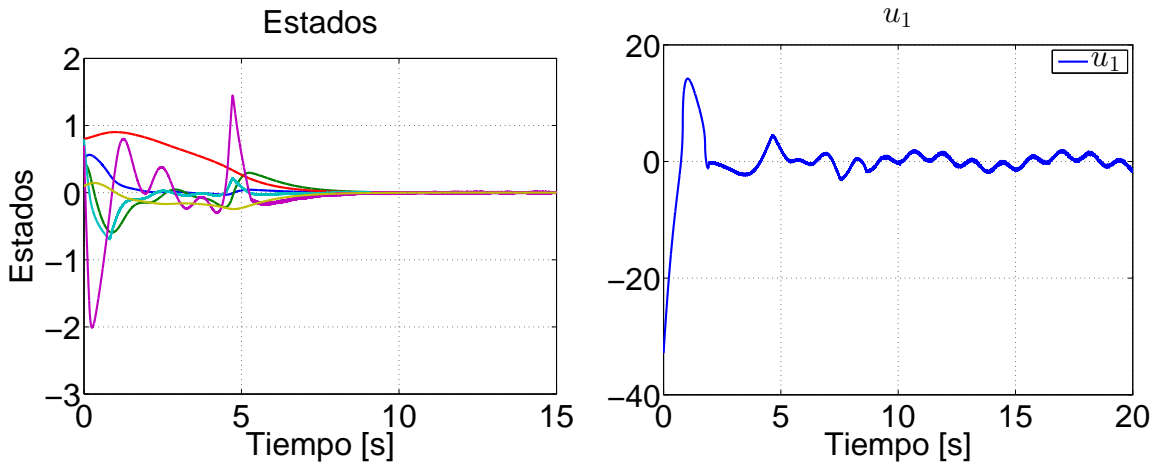
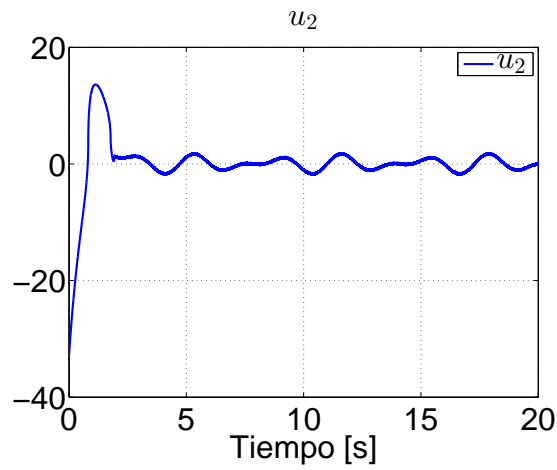
(a) *Estados Sistema Original*(b) *Señal de control  $u(t)_1$* (c) *Señal de control  $u(t)_2$* 

Figura 5.6: Sistema original

## Capítulo 6

# Conclusiones

En el presente trabajo se propuso un procedimiento estándar para el diseño de superficies deslizantes de orden superior basado en la solución del problema de estabilización óptima singular (SOSP).

El SOSP tiene como solución un conjunto óptimo estabilizante de dimensiones menor que  $(n-1)$ , éste conjunto óptimo estabilizante es utilizado como superficie de deslizamiento, así, cuando el controlador por modos deslizante de orden superior logra llevar las trayectorias del sistema a  $\sigma(x) = 0$  en presencia de perturbaciones acopladas, el sistema se comporta de manera óptima con respecto al criterio de desempeño  $J$  y de manera nominal, es decir, con insensibilidad a las perturbaciones acopladas.

Para conectar el diseño de la superficie de deslizamiento de orden arbitrario y el criterio de desempeño del SOSP, éste último es analizado por inspección y en función de su *orden de singularidad*, será el orden (grado relativo) de la superficie deslizante por diseñar.

El procedimiento general (para sistemas MIMO) es el siguiente:

1. Transformación del sistema a la forma *canónica de controlador* mediante la transformación (2.1.2) de [Luenberger72]. La transformación del criterio de desempeño mediante la misma transformación de similaridad.
2. Definición de los subsistemas y del orden respectivo por inspección.
3. Aplicar la ley de control desacoplante (4.13) para obtener un sistema MIMO con las

matrices del sistema de la forma (4.15)

4. Definición y formulación del problema de estabilización para cada uno de los subsistemas como casos completamente independientes de sistemas SISO. Esto incluye el particionamiento de la matriz  $\bar{Q}$  y la asignación de las particiones  $\bar{Q}_{ii}$  al  $i$ -ésimo subsistema.

A partir de éste punto cada subsistema es tratado como un caso totalmente independiente de caso SISO. Es decir, las particiones  $\bar{Q}_{ii}$  se asignan al subsistema  $s_i$  y entonces para cada sistema SISO,  $\bar{Q} = \bar{Q}_{ii}$ .

5. Definición del *orden de singularidad* del índice de desempeño mediante una análisis de la forma de la matriz de ponderación  $\bar{Q}$  (antes  $\bar{Q}_{ii}$ ) donde se busca el escalar  $\bar{Q}_{22} > 0$ .
6. Definición de particiones sobre la matriz de ponderación  $\bar{Q}$  y sobre el sistema transformado. El espacio de estados es dividido en 3 subconjuntos  $z = \begin{bmatrix} \bar{z}_1^T & \bar{z}_2^T & \bar{z}_3^T \end{bmatrix}^T$ .
7. Diseño de la superficie mediante el diseño de un control estabilizante para el subsistema  $\bar{z}_1$  mediante un índice de desempeño no singular de orden reducido y la ecuación algebraica de Riccati, a través del *control virtual*  $\bar{z}_2$ .
8. Selección del orden del controlador por modos deslizantes de alto orden en función del orden de la singularidad del índice de desempeño.

Se mostró la efectividad del método a través de simulaciones de sistema MIMO, un helicóptero de 3 grados de libertad y dos entradas.

Este trabajo logró establecer un método al hacer un compendio de diversas herramientas recientemente propuestas en modos deslizantes.



# Referencias

- [Chen98] Chen, C. *Linear system theory and design*. Oxford University Press, Inc., 1998.
- [Dinuzzo09] Dinuzzo, F. y Ferrara, A. Higher order sliding mode controllers with optimal reaching. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(9):2126–2136, 2009.
- [Edwards98] Edwards, C. y Spurgeon, S. K. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*, tomo 7. CRC PressI Llc, 1998.
- [Emel’Yanov86] Emel’Yanov, S., Korovin, S., y Levantovskii, L. Higher-order sliding modes in binary control systems. *En SOV. PHYS. DOKLADY.*, tomo 31, págs. 291–293. 1986.
- [Filippov88] Filippov, A. F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems*, tomo 18. Springer, 1988.
- [Gabasov01] Gabasov, R. y Choksy, N. *Singular Optimal Controls*. Kluwer Academic Pub, 2001.
- [Hendricks08] Hendricks, E., Jannerup, O. E., y Sørensen, P. H. *Linear Systems Control: deterministic and stochastic methods*. Springer, 2008.
- [Jacobson71] Jacobson, D. H. y Speyer, J. L. Necessary and sufficient conditions for optimality for singular control problems: A limit approach. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 34(2):239–266, 1971.

- [Kelley64] Kelley, H. A transformation approach to singular subarcs in optimal trajectory and control problems. 1964.
- [Laghrouche07] Laghrouche, S., Plestan, F., y Glumineau, A. Higher order sliding mode control based on integral sliding mode. *Automatica*, 43(3):531–537, 2007.
- [Levant98] Levant, A. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3):379–384, 1998.
- [Levant03] Levant, A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International journal of Control*, 76(9-10):924–941, 2003.
- [Levant05] Levant, A. Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(11):1812–1816, 2005.
- [Levant10] Levant, A. Chattering analysis. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 55(6):1380–1389, 2010.
- [Luenberger72] Luenberger, D. G. Canonical forms for linear multivariable systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, AC-12(3):290–293, 1972.
- [Luk’yanov82] Luk’yanov, A. y Utkin, V. Optimal linear systems with degenerate criterion. *Automation and Remote Control*, 43(7):872–879, 1982.
- [Moore71] Moore, B. y Anderson, B. *Linear Optimal Control*. Prentice-Hall Inc., 1971.
- [Poznyak03] Poznyak, A. S., Shtessel, Y. B., y Gallegos, C. J. Min-max sliding-mode control for multimodel linear time varying systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 48(12):2141–2150, 2003.
- [Utkin92] Utkin, V. *Sliding modes in control and optimization*, tomo 116. Springer-Verlag Berlin, 1992.