UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ACADEMIA DE CÁLCULO INTEGRAL

Primer tema: Sucesiones y series

PABLO GARCÍA Y COLOMÉ
PROFESOR DE CARRERA

CÁLCULO INTEGRAL

Prólogo

Pablo García y Colomé

Este trabajo fue concebido por un servidor como un compendio de Cálculo Integral que considero de utilidad para profesores que impartirán esta temática por primera vez y para quienes ya la tratan y que pudiera auxiliar su labor docente. También está dirigido a estudiantes de ingeniería como una valiosa ayuda en sus estudios de las ciencias básicas, fundamentos de sus estudios subsiguientes y de su formación integral, con miras a una práctica profesional de excelencia.

Tengo 48 años de antigüedad docente y este material contiene lo que considero esencial -teoría, ejercicios y problemas de aplicación- de este ramal del Cálculo de funciones reales de una variable independiente.

Es conveniente hacer notar que este material contiene los conocimientos del programa de la asignatura Cálculo Integral de la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería, incluyendo los nombres de los capítulos correspondientes, pero no considera únicamente dichos conocimientos, sino que contempla otros que al ser significativos, estima de importancia y trascendencia para una cabal comprensión y aprendizaje de los conceptos de integral definida e indefinida, así como de algunas de sus aplicaciones.

En el primer tema presento a las sucesiones y a las series infinitas como herramientas primordiales para casos en los que el proceso de integración se puede realizar de manera sencilla al representar a la función del integrando como una serie de potencias. Aquí se incluyen series conocidas como las telescópicas y las geométricas y diferentes métodos para estudiar la naturaleza -convergencia y divergencia- de las series infinitas. Sobresale el teorema de Taylor y su corolario, el teorema de Maclaurin.

En el segundo tema sobresalen los aspectos teóricos que exponen y puntualizan los conceptos de integral definida e indefinida, incluyendo antecedentes, propiedades y concluyendo con el enunciado del teorema fundamental del Cálculo que manifiesta la relación entre la derivada y la integral, que dio a luz con el concurso de grandes pensadores, entre los cuales se mencionan Riemann, Barrow, Newton, Leibniz y Fermat, entre muchos otros. Aquí presento también ejercicios de integrales inmediatas o como tales a través de un cambio de variable, integración de funciones con soluciones logarítmicas, integración de funciones exponenciales, la regla de L'Hopital (Bernoulli) para facilitar el cálculo numérico de límites y las integrales impropias, que solucionan casos en que hay discontinuidades en y entre los límites de una integral definida o cuando uno de estos dos límites o los dos tienden a infinito.

El tercer tema considera básicamente los métodos de integración, así como algunas aplicaciones de la integral definida. Se analizan y acompañan con ejercicios seleccionados para ilustrar los aspectos teóricos, los métodos de integración trigonométrica, diferenciales trigonométricas, sustitución trigonométrica, sustitución trigonométrica del ángulo medio, integración por partes, por descomposición en fracciones racionales, por racionalización, integración de y con funciones hiperbólicas. Y se muestran algunas funciones no integrables con los métodos tratados. En una segunda parte del tema se estudia e ilustra con aplicaciones geométricas y de situaciones reales -incluyendo fundamentos de las coordenadas polares-, cálculo de áreas en coordenadas cartesianas y en polares, longitudes de arco en ambos sistemas coordenados, áreas de superficies de revolución y volúmenes de sólidos de revolución con discos cilíndricos diferenciales.

El cuarto y último tema estudia fundamentalmente el cálculo diferencial con funciones escalares de varias variables, sin tocar lo concerniente a sus extremos. Las defino, expongo su dominio, recorrido y representaciones gráficas -curvas de nivel y superficies en R3-. Trato el álgebra de sus operaciones y presento un breve estudio de las superficies cuádricas con algunos ejercicios que ilustran su dominio, recorrido y gráfica. Y llevo a cabo problemas cuya solución es la formulación del modelo matemático para resolver en otro estudio casos de optimización. Después hago una breve introducción al límite de estas funciones con ejercicios varios utilizando sus propiedades. Finalmente expongo la derivada direccional, las derivadas parciales, las formas explícita (incluyendo la derivada total) e implícita con sus diferentes casos. Y finalizo con la derivada direccional y el gradiente.

CÁLCULO INTEGRAL
CAPÍTULO 1
SUCESIONES Y SERIES

SUCESIONES INFINITAS

En una función, elementos del dominio se asocian con elementos del codominio que constituyen su recorrido, rango o imagen.

Definición. Una sucesión infinita es una función que tiene como dominio al conjunto de los números naturales y cuyo recorrido se escribe en una relación de la siguiente forma:

$$\mathrm{f}(1), \mathrm{f}(2), \mathrm{f}(3), \ldots, \mathrm{f}(\mathrm{n}), \ldots$$

Esto es, con los elementos del recorrido, seguidos uno después del otro y separados por una coma, y señalando el término enésimo y después, con puntos suspensivos el seguimiento indefinido de sus términos. A los términos enésimos o términos generales de una sucesión se les denota indistintamente como:

$$\mathrm{f}(\mathrm{n}),\ \mathrm{a}(\mathrm{n}),\ \{\mathrm{a_n}\},\ \mathrm{a_n},\ \mathrm{b_n},\ \mathrm{c_n} \ldots$$

Considérese el siguiente ejemplo donde se puede ver que el término general, como la regla de correspondencia de una función, pude ser una expresión algebraica, trascendente o una constante.

Ejemplo. Dadas las siguientes sucesiones infinitas, dar sus primeros seis términos, así como su término enésimo.

i) $c_n = \sqrt[3]{n^2-2}$; *ii)* $f(n) = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n^3-1}$; *iii)* $\{a_n\} = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+1}$; *iv)* $\{3\}$

Solución.

i) $c_n = \sqrt[3]{n^2-2}$; $-1,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{7},\ \sqrt[3]{14},\ \sqrt[3]{23},\ \sqrt[3]{34}$; $\sqrt[3]{n^2-2}$

ii) $f(n) = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n^3-1}$; $1,\ -\dfrac{1}{15},\ \dfrac{1}{53},\ -\dfrac{1}{127},\ \dfrac{1}{249},\ -\dfrac{1}{431}$; $(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n^3-1}$

iii) $\{a_n\} = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+1}$; $\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ -\dfrac{4}{5},\ \dfrac{5}{6},\ -\dfrac{6}{7}$; $(-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+1}$

iv) $\{3\}$; $3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3$; $\{3\}$

El "menos uno" entre paréntesis indica el signo de cada término de la sucesión. La última sucesión se conoce como sucesión constante.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Las sucesiones también se pueden grafican como las funciones, con los números naturales como abscisas y los valores funcionales como ordenadas, constituyendo puntos en al plano coordenado.

Ejemplo. Graficar las siguientes sucesiones:

$$i)\quad a_n=\frac{2n^3+1}{10n-2}\quad ;\quad ii)\quad b_n=4+(-1)^n\frac{1}{2^n}\quad ;\quad iii)\quad \{3\}$$

Solución.

Se dan valores a la variable, se obtienen los de la función, y se tienen las parejas que grafican la sucesión en el plano cartesiano. Así,

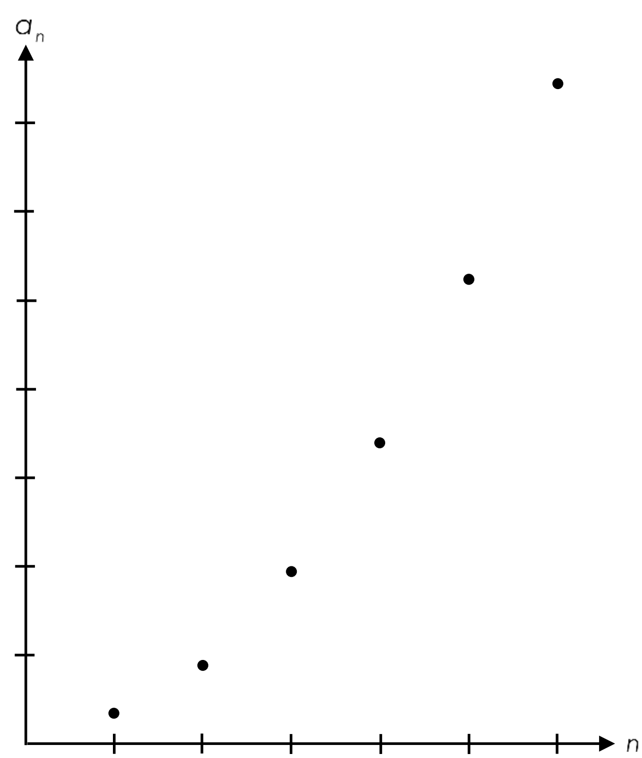
$$i)\quad a_n=\frac{2n^3+1}{10n-2}$$

$$n=1\ \Rightarrow\ a_1=\frac{3}{8}\approx 0.38 \qquad n=4\ \Rightarrow\ a_4=\frac{129}{38}\approx 3.4$$

$$n=2\ \Rightarrow\ a_2=\frac{17}{18}\approx 0.94 \qquad n=5\ \Rightarrow\ a_5=\frac{251}{48}\approx 5.22$$

$$n=3\ \Rightarrow\ a_3=\frac{55}{28}\approx 1.96 \qquad n=6\ \Rightarrow\ a_6=\frac{433}{58}\approx 7.47$$

$$(1,38),\ (2,0.94),\ (3,1.96),\ (4,3.4),\ (5,5.22),\ (6,7.47)$$



En esta sucesión se observa que su valor funcional crece indefinidamente, luego no se ve se vaya a aproximar a ningún valor, lo que hace ver que no tiene límite.

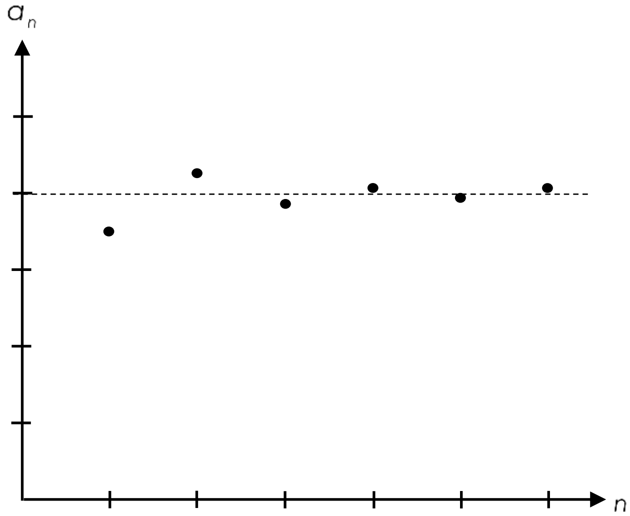
$$ii)\quad b_n=4+(-1)^n\frac{1}{2^n}$$

$$n=1 \Rightarrow b_n = 4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}=3.5 \qquad n=4 \Rightarrow b_n = 4+\frac{1}{16}=\frac{65}{16}\approx 4.06$$

$$n=2 \Rightarrow b_n = 4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}=4.25 \qquad n=5 \Rightarrow b_n = 4-\frac{1}{32}=\frac{127}{32}\approx 3.97$$

$$n=3 \Rightarrow b_n = 4-\frac{1}{8}=\frac{31}{8}\approx 3.88 \qquad n=6 \Rightarrow b_n = 4+\frac{1}{64}=\frac{257}{64}\approx 4.04$$

$(1,3.5),\quad (2,4.25),\quad (3,3.88),\quad (4,4.06),\quad (5,3.97),\quad (6,4.04)$



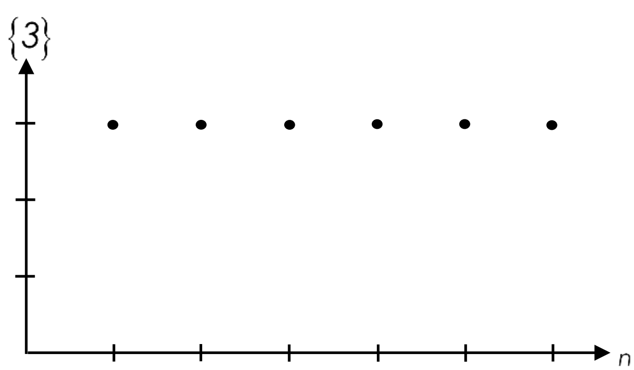
Se observa que el término enésimo se aproxima cada vez más al valor “4”, luego es lógico pensar que tiene límite y es este valor. En este caso se dice que la sucesión es convergente y en el ejemplo anterior, es divergente.

iii) $\{3\}$

$$n=1 \Rightarrow \{3\}=3 \qquad n=4 \Rightarrow \{3\}=3$$

$$n=2 \Rightarrow \{3\}=3 \qquad n=5 \Rightarrow \{3\}=3$$

$$n=3 \Rightarrow \{3\}=3 \qquad n=6 \Rightarrow \{3\}=3$$



El límite de esta función es el valor constante que la define.

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Considérese el siguiente teorema:

Teorema. Una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite L, expresado como

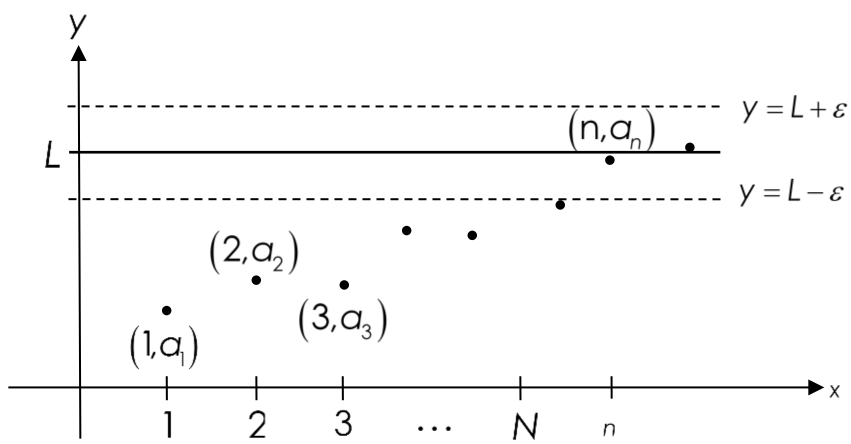
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

si para toda $\varepsilon > 0$ y tan pequeña como se desee, existe un entero N tal que:

$$|a_n - L| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad n > N$$

Si el límite existe, la sucesión es convergente y si no existe, es divergente.

Representación geométrica. Se observa que cuando $n > N$, los términos de la sucesión se aproximan, cada vez más, a un valor que es el límite L de la sucesión.



Se omite la demostración del este teorema. Es importante expresar que los límites de las sucesiones infinitas cumplen con las mismas propiedades de los límites de las funciones.

Para contar con una herramienta poderosa en la resolución de límites de sucesiones, se enunciará la regla de L'Hopital, que representa un valioso apoyo para resolver indeterminaciones cuando el límite existe. En otro capítulo se demostrará el teorema.

Teorema. Regla de L'Hopital. Sean las funciones f y g diferenciables en cada punto de un intervalo abierto (a,b) que contiene al valor "c" excepto posiblemente en este valor; y sea $g'(x) \neq 0$ para toda $x \neq c$ en el intervalo. Sea también L que denota tanto un valor real o bien $+\infty$ o $-\infty$, y supóngase que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una forma indeterminada en "c". Luego, si

$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$ entonces $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$.

Por este teorema es factible que, al presentarse las indeterminaciones $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$ se derivan numerador y denominador y se resuelve el límite. De repetirse una de las indeterminaciones, se hará lo mismo, hasta que se logre un resultado determinado o la no existencia del límite.

De acuerdo con este teorema, el límite del cociente de dos funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas. Y si al derivar numerador y denominador de la expresión original se vuelve a presentar una indeterminación de las formas $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, se repite nuevamente la regla hasta que el resultado está determinado o no existe el límite.

Ejemplo. Calcular los límites de las siguientes sucesiones y determinar su naturaleza. Utilizar la Regla de L'Hopital cuando se considere necesario o para verificar el resultado.

$$i)\left\{\frac{4n^4-2n^3+6n^2-n+7}{1-n+5n^2-8n^3+3n^4}\right\}\quad;\quad ii)\left\{3ne^{\frac{2}{n}}-2n\right\}\quad;\quad iii)\left\{n^3\,sen\frac{5}{n^3}\right\}$$

$$iv)\left\{\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n}\right\}\quad;\quad v)\left\{(-1)^n\,\frac{2n^3-8n^2+1}{7+3n^2}\right\}\quad;\quad vi)\left\{(-1)^{n+1}\,\frac{senn}{n}\right\}$$

Solución.

$$i)\left\{\frac{4n^4-2n^3+6n^2-n+7}{1-n+5n^2-8n^3+3n^4}\right\}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4n^4-2n^3+6n^2-n+7}{1-n+5n^2-8n^3+3n^4}=\frac{4}{3}\,(\text{convergente})$$

Si se utiliza la Regla de L'Hopital, se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4n^4-2n^3+6n^2-n+7}{1-n+5n^2-8n^3+3n^4}=\frac{\infty}{\infty}\,(\text{indeterminado})$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{16n^3-6n^2+12n-1}{-1+10n-24n^2+12n^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{48n^2-12n+12}{10-48n+36n^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{96n-12}{-48+72n}=\lim_{x\to\infty}\frac{96}{72}=\frac{4}{3}$$

ii) $\left\{3ne^{\frac{2}{n}}-3n\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(3ne^{\frac{2}{n}}-3n\right)=\infty\cdot e^{\frac{2}{\infty}}-\infty=\infty-\infty \quad (\text{indeterminado})$$

Para poder aplicar la Regla de L'Hopital, se hace lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3ne^{\frac{2}{n}}}{n}-\frac{3n}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3e^{\frac{2}{n}}-3}{\frac{1}{n}}=\frac{3-3}{0}=\frac{0}{0} \quad (\text{indeterminado})$$

Se aplica L'Hopital y,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3e^{\frac{2}{n}}-3}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{2}{n}}\left(-\frac{2}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(2e^{\frac{2}{n}}\right)=2 \quad (\text{convergente})$$

iii) $\left\{n^3\, sen\frac{5}{n^3}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^3\, sen\frac{5}{n^3}\right)=\infty\cdot 0 \quad (indeterminado)$$

Para poder aplicar la Regla de L'Hopital, se hace lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{sen\frac{5}{n^3}}{\frac{1}{n^3}}=\frac{0}{0} \quad (\text{indeterminado})$$

Se aplica L'Hopital y,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{sen\frac{5}{n^3}}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{15n^2}{n^6}\cos\frac{5}{n^3}}{-\frac{3n^2}{n^6}}=\lim_{n\to\infty}\left(5\cos\frac{5}{n^3}\right)=5(1)=5 \quad (\text{convergente})$$

iv) $\left\{\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n}=1^{\infty} \quad (\text{indeterminado})$$

Para poder aplicar la Regla de L'Hopital, se hace lo siguiente:

$$a=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n} \;\; ; \;\; \ln a=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n} \;\; \Rightarrow \;\; \ln a=\lim_{n\to\infty}2n\ln\left(1+\frac{5}{n}\right)$$

$$\ln a=\infty\cdot 0 \quad ; \quad \ln a=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\frac{1}{2n}}=\frac{0}{0} \quad (\text{indeterminado})$$

Se aplica L'Hopital y,

$$\ln a=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-\frac{5}{n^2}}{1+\frac{5}{n}}}{-\frac{2}{4n^2}} \;\Rightarrow\; \ln a=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{1+\frac{5}{n}} \;\Rightarrow\; \ln a=10 \;\therefore\; \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n}=e^{10}$$

v) $\left\{(-1)^n\dfrac{2n^3-8n^2+1}{7+3n^2}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-8n^2+1}{7+3n^2}\to\infty \quad (\text{divergente})$$

Por lo que para esta sucesión no existe el límite.

vi) $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{senn}{n}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{sen\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\frac{0}{0} \quad (\text{indetermiado})$$

Se aplica L'Hopital y,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{sen\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}=1 \quad (\text{convergente})$$

Teorema. Considérense las sucesiones infinitas $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$, para las que se cumple que $a_n\le b_n\le c_n \quad \forall n$. Además, se sabe que $\lim_{n\to\infty}a_n=L=\lim_{n\to\infty}c_n$. Entonces $\lim_{n\to\infty}b_n=L$.

A este teorema se le conoce como el teorema de compresión o del "emparedado" y se utiliza en casos en que es difícil calcular el límite de una sucesión. Véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Calcular el límite de la sucesión $a_n=\left\{\dfrac{\cos 3n}{3n}\right\}$.

Solución.

La función coseno puede estar limitada entre cero y uno. Luego es factible escribir

$$0 \le \cos 3n \le 1 \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad 0 \le \frac{\cos 3n}{3n} \le \frac{1}{3n} \ .$$

Además,

$$\lim_{n \to \infty} (0) = 0 \quad y \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3n} = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\cos n}{n} = 0 \quad (\text{sucesión convergente})$$ y la sucesión es convergente.

Hay sucesiones en las que se dan algunos de sus primeros términos, pero no el enésimo, el que es necesario determinar para poder obtener su límite y así saber si es convergente o divergente. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Investigar la naturaleza de la siguiente sucesión, dados sus primeros elementos:

$$\left\{ -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{4}{11}, \frac{5}{18}, -\frac{2}{9}, \ldots \right\}$$

Solución. Se lleva a cabo un análisis algebraico de estos elementos y se concluye que los numeradores de la sucesión responden a $n+1$ y los denominadores a n^2+2. Por lo que el término enésimo y la naturaleza de la sucesión son:

$$c_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^2+2} \quad ; \quad \lim_{n \to \infty} |c_n| = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n^2+2} = 0$$

Por lo que la sucesión es convergente y el valor al que converge es "0".

El teorema que enseguida se presenta es de gran utilidad para determinar el carácter de determinadas sucesiones, cuando se conoce el límite de su enésimo término. La prueba se omite por ser evidente que una fracción menor que la unidad, al crecer indefinidamente, su valor tiende a anularse y, en caso contrario, crece sin límite.

Teorema. Considérese una sucesión cuyo enésimo término es r^n. Entonces se cumple que:

$$i) \quad \lim_{n \to \infty} r^n = 0 \qquad si \quad |r| < 1$$

$$ii) \quad \lim_{n \to \infty} |r^n| \to \infty \qquad si \quad |r| > 1$$

Ejemplo. Determinar la naturaleza y el límite de las sucesiones dadas por:

$$i) \quad \left\{ \left(\frac{2}{5} \right)^n \right\} \qquad y \qquad ii) \quad \left\{ (-2.1)^n \right\}$$

Solución.

i) $\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$. Se aplica el teorema $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, ya que $\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$ y la sucesión es convergente.

ii) $\left\{(-2.1)^n\right\}$. En este caso, $\lim_{n\to\infty}(-2.1)^n \to \infty$ ya que $|-2.1| = 2.1 > 1$ y la sucesión es divergente.

Se enunciará un teorema sobre el límite del valor absoluto del enésimo término.

Teorema. Considérese la sucesión infinita $\{b_n\}$. Si $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y la sucesión es convergente.

Ejemplo. Determinar la naturaleza de las sucesiones:

$$i)\ \left\{(-1)^n \frac{n^2+5n}{n^3+2}\right\} \quad ; \quad ii)\ \left\{(-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+3}\right\}$$

Solución. Por el teorema anterior:

i) $\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n \frac{n^2+5n}{n^3+2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n}{n^3+2} = 0$, luego la sucesión es convergente.

$$ii)\ \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+3}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+3} = \frac{\infty}{\infty}(indeterminado)$$

Se aplica la regla de L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$, luego la serie es convergente.

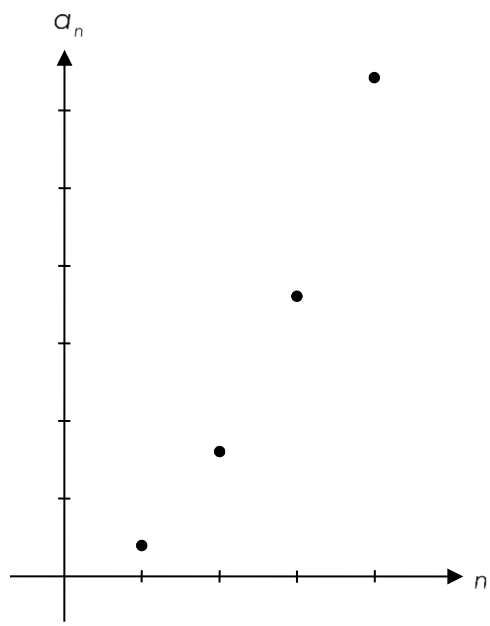
Definición. Una sucesión es monótona creciente si sus términos consecutivos no decrecen y monótona decreciente si sus términos consecutivos no crecen.

Ejemplo. Considérense las siguientes sucesiones y decir si son monótonas crecientes o decrecientes, da maneras gráfica y analítica.

$$i)\ \left\{\frac{2n^2}{5}\right\} \quad ; \quad ii)\ \left\{-\frac{n^3}{12}\right\}$$

Solución.

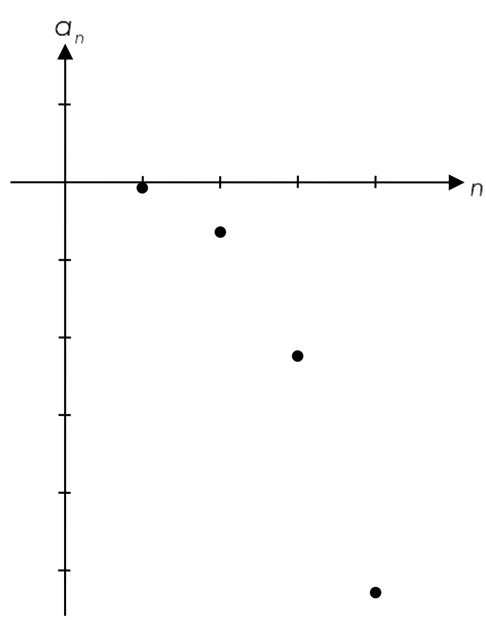
i) $\left\{\frac{2n^2}{5}\right\}$. Se grafican algunos de sus términos.



Y se observa que es una sucesión monótona creciente. Analíticamente, basta con desarrollar la siguiente desigualdad.

$$\frac{2(n+1)^2}{5} > \frac{2n^2}{5} \quad \Rightarrow \quad n^2+2n+1 > n^2 \quad \Rightarrow \quad 2n+1>0 \quad \forall \quad n \geq 1 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

ii) $\left\{-\frac{n^3}{12}\right\}$. Se grafican algunos términos:



Se ve que es una sucesión monótona decreciente. Y analíticamente, se verifica con la derivada negativa para todo entero mayor o igual a uno.

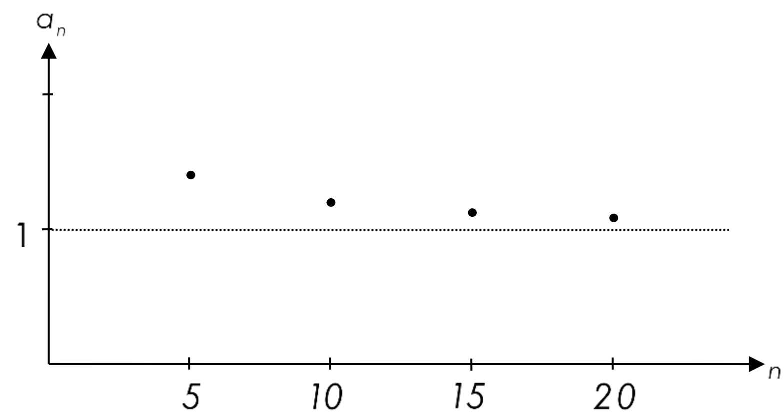
$$f(n)=-\frac{n^3}{12} \quad \Rightarrow \quad f'(n)=-\frac{n^2}{4}<0 \quad \forall \quad n\geq 1 \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

Definición. Una sucesión es acotada si existe un valor real $c>0$ para el cual se cumple que:

$$|a_n|\leq c \quad \forall \quad n\in\mathbb{N}$$

Teorema. Considérese una sucesión monótona creciente o decreciente, acotada; entonces tiene límite, luego es convergente.

Ejemplo. Sea la sucesión $\left\{\frac{n+2}{n}\right\}$. Se grafican los primeros y se obtiene:



Si se calcula el límite de la sucesión cuando "n" tiene a infinito se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n}=1$$

Luego es una sucesión monótona decreciente y acotada, convergente.

SERIES INFINITAS. TELESCÓPICAS Y GEOMÉTRICAS

Definición. Si en una sucesión infinita a_n se suman sus términos, se obtiene una expresión como $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ y se le llama "serie infinita" o simplemente "serie" y se denota como

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

Es un número infinito de sumandos, por lo que es necesario definir lo que se entiende por "suma finita" de la serie infinita. Primero se puede construir una sucesión con las sumas parciales de los sumandos de la serie. Así,

$$S_1,S_2,S_3,\ldots,S_n,\ldots$$

en donde cada término de la sucesión equivale a:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = a_1\\
&S_2 = a_1 + a_2\\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3\\
&\vdots\\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Entonces es posible definir como la suma finita de la serie infinita al límite, si existe, de la suma parcial enésima S_n.

Definición. La serie infinita $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, para la cual la sucesión de sus sumas parciales es $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$, es convergente si el límite de su suma parcial enésima $\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad ; \quad S \in \mathbb{R}$ existe y, en este caso, el valor numérico del límite, S, es la suma finita de la serie infinita. Si el límite no existe, entonces la serie infinita es divergente.

No siempre es posible obtener la suma parcial enésima, y por lo tanto su límite, exista o no. En la mayoría de los casos resulta muy complicado determinar la suma parcial enésima. Es por ello que se estudian diversos criterios para saber al menos la naturaleza de la serie infinita.

Se verán ahora series infinitas para las que es posible determinar la suma parcial enésima y su límite.

SERIE TELESCÓPICA

Considérese la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Algunos de sus sumandos y sus sumas parciales:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \cdots$$

$$S_1 = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 0.75$$

$$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \doteq 0.8333$$

$$S_7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} = 0.875$$

$$S_9=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}=0.9$$
$$S_{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}=0.916665757$$

El término enésimo se puede descomponer en dos fracciones racionales:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A_1}{n}+\frac{A_2}{n+1} \quad\Rightarrow\quad 1=A_1n+A_1+A_2n \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}0=A_1+A_2\\ 1=A_1\end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}A_1=1\\ A_2=-1\end{matrix}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

De acuerdo con este resultado, los términos de la serie se pueden escribir como:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots$$

Todos los términos, menos dos, se cancelan, el segundo de cada paréntesis con el primero del siguiente, por lo que la suma parcial enésima queda de la siguiente forma:

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}$$

y su límite está dado por:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

A esta serie se le llama “telescópica”, es convergente y su límite es “uno”.

Ejemplo. Sea la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$$

Mediante una factorización, el término enésimo se puede escribir como:

$$\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}$$
$$\Rightarrow\quad 1=An+2A+Bn+B$$
$$\Rightarrow \begin{matrix}0=A+B\\ 1=2A+B\end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}0=-A-B\\ 1=2A+B\end{matrix} \quad\Rightarrow\quad 1=A \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}A=1\\ B=-1\end{matrix}$$

Luego el término enésimo y la suma parcial enésima son, respectivamente:

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

La suma parcial enésima y su límite quedan como:

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, esta serie es telescópica y converge a $\frac{1}{2}$.

SERIE GEOMÉTRICA

Considérese la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

En esta serie, cada término se obtiene al multiplicar el término inmediatamente anterior, por un número conocido la razón “r” de la serie, luego se cumple que:

$$\frac{ar^{n-1}}{ar^{n-2}}=r \quad ; \quad \frac{ar^3}{ar^2}=\frac{ar^2}{ar}=\frac{ar}{a}=r$$

Ejemplo. Sean los siguientes términos de una serie infinita. ¿Es geométrica? ¿Cuál es su término general?

$$3,\frac{9}{4},\frac{27}{16},\frac{81}{64},\frac{243}{256},\ldots$$

Solución.
Si se realiza la división de cada término entre el inmediato anterior, se tiene que:

$$\frac{\frac{9}{4}}{3}=\frac{3}{4} \quad ; \quad \frac{\frac{27}{16}}{\frac{9}{4}}=\frac{3}{4} \quad ; \quad \frac{\frac{81}{64}}{\frac{27}{16}}=\frac{3}{4} \quad ; \quad \frac{\frac{243}{256}}{\frac{81}{64}}=\frac{3}{4}$$

Por lo que se tiene una serie geométrica con $r=\frac{3}{4}$ y $a=3$, luego su término general es: $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$

¿Cómo saber si es convergente, es decir, si tiene suma finita, lo que significaría que el límite de su suma parcial enésima existe?

Teorema. La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$

i) Es convergente si $|r| < 1$ y su suma es $S = \dfrac{a}{1-r}$

ii) Es divergente si $|r| \geq 1$

Prueba. Si en la suma parcial enésima $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ se multiplican los dos miembros por la razón $"r"$, se obtiene:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

Se resta esta expresión de la suma parcial enésima y se llega a:

$$S_n - rS_n = \left(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}\right) - \left(ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n\right)$$

de donde

$$\left(1-r\right)S_n = a - ar^n \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}r^n$$

Se calcula el límite de la suma parcial enésima y se obtiene:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}r^n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r}r^n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n$$

Por un teorema tratado en las Sucesiones, si $|r| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ por lo que $S = \dfrac{a}{1-r}$ y la serie es convergente. Si $|r| \geq 1$ el límite no existe y la serie es divergente.

Ejemplo. Para las siguientes series, determinar si son geométricas y si son convergentes y, en el caso de convergencia, calcular su suma:

$$i) \quad 6 + \frac{18}{7} + \frac{54}{49} + \frac{162}{343} + \cdots \quad ; \quad ii) \quad \frac{3}{4} - \frac{3}{16} + \frac{3}{64} - \frac{3}{256} + \cdots$$

$$iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1} \quad ; \quad iv) \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n \quad ; \quad v) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n} \quad ; \quad vi) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{5^n} \quad ; \quad vii) \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{3^n}$$

Solución.

$$i) \quad 6 + \frac{18}{7} + \frac{54}{49} + \frac{162}{343} + \cdots \quad ; \quad \frac{\frac{18}{7}}{6} = \frac{\frac{54}{49}}{\frac{18}{7}} = \frac{\frac{162}{343}}{\frac{54}{49}} = \frac{3}{7}$$

Es una serie geométrica con $a = 6 \quad y \quad r = \frac{3}{7}$, y $r = \frac{3}{7} < 1$, luego es convergente y su suma equivale a $S=\dfrac{a}{1-r} \quad \Rightarrow \quad S=\dfrac{6}{1-\frac{3}{7}}=\dfrac{42}{4}=\dfrac{21}{2}$

ii) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{16}+\dfrac{3}{64}-\dfrac{3}{256}+\cdots \quad ; \quad \dfrac{-\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{\frac{3}{64}}{-\frac{3}{16}}=\dfrac{-\frac{3}{256}}{\frac{3}{64}}=-\dfrac{1}{4}$

Es una serie geométrica con $a=\dfrac{3}{4}$ *y* $r=-\dfrac{1}{4}$, y $|r|=\left|-\dfrac{1}{4}\right|=\dfrac{1}{4}<1$, luego es convergente y su suma equivale a: $S=\dfrac{a}{1-r} \quad \Rightarrow \quad S=\dfrac{\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\dfrac{\frac{12}{4}}{5}=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}$. Es una serie geométrica con $a=3$ *y* $r=\dfrac{4}{7}<1$, luego es convergente y su suma equivale a: $S=\dfrac{a}{1-r} \quad \Rightarrow \quad S=\dfrac{3}{1-\frac{4}{7}}=\dfrac{21}{3}=1$

iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{n}$. Es una serie geométrica con $a=1$ *y* $r=\dfrac{1}{9}<1$, luego es convergente y su suma equivale a: $S=\dfrac{a}{1-r} \quad \Rightarrow \quad S=\dfrac{1}{1-\frac{1}{9}}=\dfrac{9}{8}$

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$. El término enésimo también se puede expresar como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ Para ser geométrica, como el primer término corresponde a $n=1$, entonces, de acuerdo con la definición, el exponente de la fracción debe ser $n-1$. Y, para ello, se hace lo siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

de donde $a=\dfrac{2}{3}$ *y* $r=\dfrac{2}{3}<1$, luego es convergente y su suma equivale a:

$$S=\frac{a}{1-r} \quad \Rightarrow \quad S=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{6}{3}=2$$

vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{5^n}$. Se procede de manera semejante a la serie anterior y se tiene que: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{2}{5}\right)^n\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\cdot\frac{5}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$, que es una serie geométrica, con $a=5$ y $r=\frac{2}{5}<1$, luego es convergente y su suma equivale a: $S=\frac{a}{1-r}$ $\Rightarrow$ $S=\frac{5}{1-\frac{2}{5}}=\frac{25}{3}$

vii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{7}{3}\right)$. Es una serie geométrica con $r=\frac{7}{3}>1$, luego es divergente.

Ejemplo. Expresar el decimal periódico $0.212121\ldots$ como la razón de dos números enteros.

Solución.

$$0.212121\ldots=\frac{21}{100}+\frac{21}{100^2}+\frac{21}{100^3}+\cdots=\frac{21}{100}\left(1+\frac{1}{100}+\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots\right)$$

La serie $1+\frac{1}{100}+\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots$ es una serie geométrica con $a=1$ y $r=\frac{1}{100}<1$ luego es convergente y su suma es $S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-0.01}=\frac{1}{0.99}$. Se sustituye este valor y se tiene finalmente que:

$$0.212121\ldots=\frac{21}{100}\left(\frac{1}{0.99}\right)=\frac{21}{99}\quad\therefore\quad 0.212121\ldots=\frac{21}{99}$$

CONDICIÓN NECESARIA PARA LA CONVERGENCIA

Teorema. Si la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es convergente, se cumple que $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

El inverso no necesariamente es cierto, pues puede presentarse una serie en la que el límite del término enésimo sea cero y sea divergente, la Serie Armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergente que se verá después, para la cual el límite del término enésimo es cero, es decir, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. El siguiente corolario del teorema es muy útil:

Corolario. Si $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ para la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, entonces es divergente.

Esto conlleva a que lo primero que hay que hacer al investigar el carácter de una serie es obtener el límite del término enésimo y si es diferente de cero, es divergente.

Ejemplo. Determinar el carácter de cada una de las siguientes series:

$$i)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n!+5} \qquad ii)\quad \sum_{n=0}^{\infty}9^n \qquad iii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{\frac{n^4+3n^3+7n^2+2}{81n^4+4n^3+n^2}}$$

Solución.
Se calcula el límite del enésimo término en cada serie y se obtiene:

$$i)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!+5}=1\neq 0$$

$$ii)\quad \lim_{n\to\infty}9^n \to \infty \neq 0$$

$$iii)\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{\frac{n^4+3n^3+7n^2+2}{81n^4+4n^3+n^2}}=\frac{1}{3}\neq 0$$

Por lo tanto, las tres series son divergentes.

Teorema. El carácter convergente o divergente de una serie infinita no cambia si se suprime o se agrega un número finito de términos al principio de ésta.

ASOCIATIVIDAD. En las series convergentes es posible introducir paréntesis, agrupando de maneras diferentes los sumados, sin alterar el valor de la suma.

IGUALDAD. Dos series infinitas, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ son iguales si sus respectivos términos son iguales, esto es, si se cumple que $a_n=b_n \quad \forall \quad n\in N$.

SUMA DE SERIES. Para sumar dos series infinitas, basta con sumar los términos enésimos, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$$

Teorema.
Si dos series son convergentes, entonces al sumarlas se obtiene una serie convergente y su suma converge a la suma de las dos series.
Si una serie es convergente y la otra divergente, la suma de ambas es una serie divergente.
Si una serie convergente se multiplica por un escalar, entonces este valor puede multiplicarse por el término enésimo y la suma de la serie estará

multiplicada por dicho escalar.

Ejemplo. Investigar la naturaleza de la siguiente serie y si es convergente, calcular su suma:

$$8\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{7^{n-1}}+\frac{5}{n(n+1)}\right]$$

Solución. De acuerdo con lo ya estudiado, la serie se puede escribir como:

$$8\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{7^{n-1}}+\frac{5}{n(n+1)}\right]=8\left[\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}+5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

La serie está multiplicada por "8" y si resulta convergente, su suma se multiplicará por este número. Por otro lado, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}$ es geométrica con $a=3$ y $|r|=\frac{1}{7}<1$, luego es convergente y su suma equivale a:

$$S=\frac{a}{1-r} \quad ; \quad S=\frac{3}{1-\frac{1}{7}} \quad \Rightarrow \quad S=\frac{21}{6} \quad \Rightarrow \quad S=\frac{7}{2}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ es telescópica con suma igual a “uno”. Como está multiplicada por "5", su suma será $S=5\times 1=5$. Finalmente se puede afirmar que la serie dada es convergente y su suma es igual a

$$S=8\left(\frac{7}{2}+5\right) \quad \Rightarrow \quad S=\frac{136}{2}=68$$

SERIE ARMÓNICA DIVERGENTE. La serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

se conoce como “serie armónica divergente” y la prueba de su divergencia se puede hacer de varias formas que no se incluyen en el tratamiento de este tema, aunque es evidente que su suma crece indefinidamente.

SERIES INFINITAS DE TÉRMINOS POSITIVOS

Si en una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ todos sus términos son positivos, sus sumas parciales cumplen que $S_1<S_2<S_3<\cdots S_n<\cdots$. Esta sucesión de sumas parciales es monótona creciente, por lo que, que para que esta serie sea convergente, debe ser además acotada.

SERIE *"p"*

Teorema. La serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \quad ; \quad p\in\mathbb{R}$$

es convergente si $p>1$ y divergente si $p\leq 1$. Y si es convergente y su suma es S, el resto $R_N=S-S_N$ está acotado por $0<R_N<\dfrac{1}{N^{p-1}\left(p-1\right)}$.

Como la prueba es a través del criterio de la integral impropia, que no está en los objetivos del tema, se omitirá.

Ejemplo. Investigar la naturaleza de las siguientes series:

$$i)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5} \qquad ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Solución.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}=1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\cdots+\frac{1}{n^5}+\cdots$; es serie "p" con $p=5>1$, luego es convergente.

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$; es serie "p" con $p=\dfrac{1}{2}<1$, luego es divergente.

Ejemplo. Verificar la convergencia de la serie siguiente y determinar entre qué valores está su suma finita si se consideran cinco términos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

Solución. Es una serie "p" , con $p=3>1$ y por lo tanto convergente. La suma de sus primeros cinco términos equivale a:

$$S_5=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}\approx 1.186$$

De acuerdo con el teorema,

$$R_5<\frac{1}{N^{p-1}\left(p-1\right)}=\frac{1}{5^2\left(2\right)}=\frac{1}{50}=0.02$$

Entonces la serie puede acotarse como:

$$S_5<S<S_5+0.02$$

Finalmente, la suma finita de la serie está entre los valores:

$$1.186<S<1.206$$

Ahora se tratarán dos criterios para analizar la convergencia o divergencia de series de términos positivos, basados en compararlas con series cuya naturaleza se conoce.

CRITERIO DE LA COMPARACIÓN

Teorema. Considérense las series infinitas con términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Entonces:

i) Si $0 \le a_n \le b_n$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es convergente y se dice que es dominada por la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

ii) Si $a_n \ge b_n$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es divergente y se dice que domina a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Las tesis de este teorema son evidentes dado que, al ser series de términos positivos, sus términos enésimos, determinan cual serie domina.

Ejemplo. Analizar la naturaleza de las siguientes series:

$$i)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+5^n} \qquad ; \qquad ii)\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{7}{\sqrt[3]{n}-1}$$

Solución.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+5^n}$. Para toda $n \ge 1$ se cumple que $\frac{1}{1+5^n} < \frac{1}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ es geométrica con $r = \frac{1}{5} < 1$, que es convergente y por la desigualdad, domina a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+5^n}$, luego es también convergente.

ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7}{\sqrt[3]{n}-1}$. Para toda $n \ge 2$ se cumple que $\frac{7}{\sqrt[3]{n}-1} > \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$. La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ es una serie "p" con $p = \frac{1}{3} < 1$, que es divergente y, por la desigualdad, es dominada por la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7}{\sqrt[3]{n}-1}$, luego es también divergente.

Ejemplo. Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3+5^n}$$

Solución. Se separa la serie en dos sumandos y se analizan por separado. Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3+5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+5^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3+5^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+5^n}$. Para toda $n\geq 1$ se cumple que $\frac{1}{3+5^n}<\frac{1}{5^n}=\left(\frac{1}{5}\right)^n$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ es geométrica con $r=\frac{1}{5}<1$, luego es convergente y por la desigualdad, domina a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+5^n}$, por lo que es también convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3+5^n}$. Para toda $n\geq 1$ se cumple que $\frac{2^n}{3+5^n}<\frac{2^n}{5^n}=\left(\frac{2}{5}\right)^n$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ es geométrica con $r=\frac{2}{5}<1$, luego es convergente y por la desigualdad, domina a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3+5^n}$, por lo que es también convergente.

Como los dos sumandos son series son convergentes, entonces su suma, esto es, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3+5^n}$ es convergente.

CRITERIO DEL LÍMITE DEL COCIENTE DE LA COMPARACIÓN

Teorema. Sean $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ dos series de términos positivos y sea $L\in\mathbb{R}$.

Si $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L>0$, las dos son convergentes o las dos son divergentes.

Se omite la prueba del teorema por no ser objetivo del tratamiento del tema.

Ejemplo. Investigar la naturaleza de las siguientes series infinitas:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{6}{5}}+9}\quad;\quad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}\quad;\quad iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n^3+2n^2+n}{3^n\left(11n^4+5n+1\right)}$$

Solución.

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^{\frac{5}{4}}+6}$. La parte de mayor peso en el término enésimo y susceptible de compararse por ser conocida es $\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$. Luego, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ es una serie

"p" , con $p=\frac{5}{4}>1$ por lo que es convergente. El límite del cociente es:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3n^{\frac{5}{4}}+6}}{\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{5}{4}}}{3n^{\frac{5}{4}}+6}=\frac{1}{3}>0$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^{\frac{5}{4}}+6}$ es convergente.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+7}}$. El mayor peso en el cociente dado, que puede ser comparada por ser conocida, es $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ es una serie "p" , con $p=\frac{1}{3}<1$, por lo que es divergente. El límite del cociente es:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n+7}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{n+7}}=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+7}}=1>0$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+7}}$ es divergente.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+8n^3+2n}{2^n\left(11n^4+9\right)}$. En este caso resulta conveniente utilizar el término $\frac{1}{2^n}$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ es una serie geométrica con $r=\frac{1}{2}<1$ y por lo tanto convergente. El límite es:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^4+8n^3+2n}{2^n\left(11n^4+9\right)}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+8n^3+2n}{11n^4+9}=\frac{1}{11}>0$$

Por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+8n^3+2n}{2^n\left(11n^4+9\right)}$ es convergente.

Ejemplo. Investigar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{4}}+5n^3-1}{2n^{\frac{9}{2}}-3n^{\frac{5}{2}}+7n^{\frac{1}{2}}}$$

Solución.
En series como esta, para compararlas conviene dejar lo de mayor peso en numerador y denominador, siempre que el resultado conduzca a una serie conocida cuyo carácter sea fácil de determinar. Así, en el presente caso se tiene:

$$\frac{5n^3}{2n^{\frac{9}{2}}}=\frac{5}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

Se utiliza la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ que es una serie "p" con $p=\frac{3}{2}>1$ por lo que es convergente. El límite del cociente es:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^{\frac{1}{4}}+5n^3-1}{2n^{\frac{9}{2}}-3n^{\frac{5}{2}}+7n^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}\left(n^{\frac{1}{4}}+5n^3-1\right)}{2n^{\frac{9}{2}}-3n^{\frac{5}{2}}+7n^{\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{8}}+5n^{\frac{9}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}{2n^{\frac{9}{2}}-3n^{\frac{5}{2}}+7n^{\frac{1}{2}}}=\frac{5}{2}>0$$

Por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{4}}+5n^3-1}{2n^{\frac{9}{2}}-3n^{\frac{5}{2}}+7n^{\frac{1}{2}}}$ es convergente.

SERIES ALTERNADAS

Se conocen como series alternadas a aquellas cuyos términos cambian de signo de manera alternada, pudiendo ser la alternancia uno a uno o de manera irregular. Se puede escribir como:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots$$

TEOREMA. CRITERIO DE LA SERIE ALTERNADA (DE LEIBNIZ)

Si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ es convergente si cumple las siguientes condiciones:

i) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

ii) $a_{n+1}\le a_n$ para todo valor entero positivo "n"

Nota. Otras formas alternativas equivalentes a la segunda condición son:

- $f'(x) < 0 \quad \forall\, x$, entero positivo $\quad$ (decreciente)
- $a_n - a_{n+1} \geq 0 \quad \forall\, n$, entero positivo
- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \quad \forall\, n$, entero positivo

Ejemplo. Determinar la naturaleza de las siguientes series alternadas:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} \quad ; \quad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+5}{n(n+1)} \quad ; \quad iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{7n^2-4}$$

$$iv)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{1+2^{-n}} \quad ; \quad v)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5n}{10n-6} \quad ; \quad vi)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n!}\right)$$

Solución.

$i)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. Esta serie es la "serie armónica alternada". Para estudiar su naturaleza se ve que cumpla las dos condiciones dadas. Así,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \quad \text{(cumple)}$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \therefore \quad a_{n+1} < a_n \quad \forall\, n, \text{ entero positivo} \quad \text{(cumple)}$$

Por lo tanto, la serie armónica alternada es convergente.

$ii)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+5}{n(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{n^2+n} = 0 \quad \text{(cumple)}$$

$$a_n = \frac{n+5}{n(n+1)} = \frac{n+5}{n^2+n} \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{n+6}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+6}{n^2+3n+2}$$

$$\frac{n+6}{n^2+3n+2} < \frac{n+5}{n^2+n} \quad \therefore \quad a_{n+1} < a_n\ \forall\, n, \text{ entero positivo} \quad \text{(cumple)}$$

Se utilizarán las otras formas alternativas para la segunda condición para ilustrar su utilización.

- $f'(x) < 0 \quad \forall\, x$, entero positivo $\quad$ (decreciente)

$$f(x)=\frac{x+5}{x^2+x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{(x^2+x)(1)-(x+5)(2x+1)}{(x^2+x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{x^2+x-2x^2-x-10x-5}{(x^2+x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{-x^2-10x-5}{(x^2+x)^2}<0 \quad \forall\ x\text{, entero positivo}$$

- $a_n-a_{n+1}\geq 0 \quad \forall\ n$, entero positivo

$$a_n-a_{n+1}=\frac{n+5}{n^2+n}-\frac{n+6}{n^2+3n+2}=\frac{(n+5)(n^2+3n+2)-(n+6)(n^2+n)}{(n^2+n)(n^2+3n+2)}$$

$$=\frac{n^3+3n^2+2n+5n^2+15n+10-n^3-n^2-6n^2-6n}{n^4+3n^3+2n^2+n^3+3n^2+2n}$$

$$=\frac{n^2+11n+10}{n^4+4n^3+5n^2+2n}\geq 0 \quad \forall \quad n\text{, entero positivo}$$

- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leq 1 \quad \forall\ n$, entero positivo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{n+6}{n^2+3n+2}}{\dfrac{n+5}{n^2+n}}=\frac{(n^2+n)(n+6)}{(n+5)(n^2+3n+2)}=\frac{n^3+6n^2+n^2+6n}{n^3+3n^2+2n+5n^2+15n+10}$$

$$=\frac{n^3+7n^2+6n}{n^3+8n^2+17n+10}\leq 1 \quad \forall\ n\text{, entero positivo}$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+5}{n(n+1)}$ es convergente.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{7n^2-4}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{7n^2-4}=0 \quad (\text{cumple})$$

Para analizar si cumple con la segunda condición, se verá si se trata de una función decreciente:

$$f(x)=\frac{x}{7x^2-4} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{(7x^2-4)(1)-x(14x)}{(7x^2-4)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{-7x^2-4}{\left(7x^2-4\right)^2}<0 \quad \forall\, x, \text{ entero positivo} \quad (\text{cumple})$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{7n^2-4}$ es convergente.

iv) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{1+2^{-n}}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2^n}}=1\neq 0$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{1+2^{-n}}$ es divergente.

v) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5n}{10n-6}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{10n-6}=\frac{1}{2}\neq 0$$

Por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5n}{10n-6}$ es divergente.

vi) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n!}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0 \quad (\text{cumple})$$

$$a_n=\frac{1}{n!} \quad ; \quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)n!} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(n+1)n!}\leq\frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(n+1)}<1 \text{ para todo entero positivo } "n" \quad (\text{cumple})$$

Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n!}\right)$ es convergente.

TEOREMA. ERROR ESTIMADO PARA UNA SERIE ALTERNADA CONVERGENTE

La suma parcial S_n de una serie alternada convergente difiere de la suma S de la serie en un error estimado E_n menor al valor absoluto del término a_{n+1}, esto es, $E_n < |a_{n+1}|$.

Ejemplo. Verificar que la siguiente serie alternada es convergente y calcular la suma "S" con una aproximación de cuatro cifras decimales.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}$$

Solución.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)!} = 0 \quad \text{(cumple)}$$

Se utilizará la expresión $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 \quad \forall\, n > 0$, de donde,

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)!} \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{(2n+1)!}}{\dfrac{1}{(2n-1)!}} = \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} = \frac{(2n-1)!}{(2n+1)(2n)(2n-1)!}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n)} \le 1 \quad \forall \text{ entero positivo "}n\text{"}$$

Por lo que se concluye que la serie es convergente.

Si se consideran los primeros cuatro términos se tiene que:

$$S_4 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} \approx 1 - 0.166666 + 0.008333 - 0.000198 \approx 0.841469$$

El quinto término es $a_5 = \frac{1}{9!} = \frac{1}{362880} \approx 0.00000275$

Se sabe que $E_n = |S - S_4| \le a_5 < 0.000002$

Este error es menor que 0.000002, luego no afecta las primeras cuatro cifras decimales, por lo que, cerrado a cuatro, el resultado es:

$$S \approx 0.8415$$

CONVERGENCIA ABSOLUTA

TEOREMA. Sea la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$. Si se toma el valor absoluto de sus términos, se tiene la serie:

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$$

Si esta serie es convergente, entonces también es convergente la serie alternada.

Definición. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si la serie que resulta de tomar el valor absoluto de cada término es convergente.

Definición. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es condicionalmente convergente si, por un lado, la serie es convergente, pero la serie construida con el valor absoluto de sus términos, esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de términos positivos, entonces $|a_n| = a_n$ y en este caso, convergencia absoluta es lo mismo que convergencia.

Ejemplo. Determinar si las siguientes series son absolutamente convergentes:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3} = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \cdots$; *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{4^n} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} - \frac{3}{4^4} + \cdots$

Solución.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3} = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \cdots$

Se toma el valor absoluto de cada término y se tiene la serie:

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

que es una serie "p" con $p = 3 > 1$ y por lo tanto convergente.

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}$ es absolutamente convergente.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{4^n} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} - \frac{3}{4^4} + \cdots$

Se toma el valor absoluto de cada término y se tiene la serie:

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{3}{4^4} + \cdots$$

que es una serie geométrica con $r=\frac{1}{4}<1$ y por lo tanto convergente.

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{4^n}$ es absolutamente convergente.

Ejemplo. Investigar si la serie armónica alternada es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

Solución.
Sea la serie armónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

que es una serie convergente. Al considerar el valor absoluto de cada término se llega a la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

que es divergente. Por lo tanto, la serie armónica alternada es condicionalmente convergente.

CRITERIO DE LA RAÍZ

Teorema. Sea la serie de términos no negativos $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y supóngase que:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$$

Entonces:

i) $L<1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es convergente

ii) $L>1$ *o* $\to\infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es divergente

iii) $L=1 \;\Rightarrow$ el criterio no decide

Nota. Este teorema también se aplica para las series alternadas y sólo se aplica el límite $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ y cuando este límite es menor que uno, se habla de absoluta convergencia.

Ejemplo. Utilizar el criterio de la raíz para determinar la naturaleza de las siguientes series:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad ; \quad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{5n+1}}{n^n} \quad ; \quad iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{6^{n^2}} \quad ; \quad iv)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{\frac{n}{2}+2}}{2^n}$$

Solución

Se calcula en las tres series el valor del límite $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$ y se llega a:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{n}}=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}<1$$

por lo que la serie es convergente.

$$ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{5n+1}}{n^n} \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4^{5n+1}}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{\frac{5n+1}{n}}}{n^{\frac{n}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{5+\frac{1}{n}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^5}{n}=0<1$$

luego la serie es convergente.

$$iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{6^{n^2}} \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{6^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{n}{n}}}{6^{\frac{n^2}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{6^n}=\frac{\infty}{\infty}\quad \text{(indeterminado)}$$

Para quitar la indeterminación, se aplica la Regla de L'Hopital y, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n6^{n-1}}=0<1$

de donde se concluye que la serie es convergente.

$$iv)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{\frac{n}{2}+2}}{2^n}\ .\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^{\frac{n}{2}+2}}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{2}+\frac{2}{n}}}{2}=\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}<1$$

por lo que la serie es absolutamente convergente.

CRITERIO DEL COCIENTE (DE D'ALEMBERT)

Teorema. Sea una serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ de términos positivos y supóngase que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=M$$

Entonces:

$i)\quad M<1 \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es convergente

ii) $\quad M>1\ \ o\ \to\infty \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es divergente

iii) $\quad M=1 \ \Rightarrow$ el criterio no decide

Nota. Este teorema también se aplica para las series alternadas y sólo se aplica el límite $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ y cuando este límite es menor que uno, se habla de absoluta convergencia.

Ejemplo. Investigar la naturaleza de las siguientes series a partir del criterio del cociente:

$$i)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3^n}\quad ;\quad ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\quad ;\quad iii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}\quad ;\quad iv)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

Solución.

$$i)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3^n}\ ;\ |a_n|=\frac{n^2}{3^n}\quad ;\quad |a_{n+1}|=\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(n+1)^2}{n^2 3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{3n^2}=\frac{1}{3}<1$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3^n}$ es absolutamente convergente y por ello convergente.

$$ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\quad ;\quad a_n=\frac{1}{(n-1)!}\quad ;\quad a_{n+1}=\frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}(n)\to\infty$$

Por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$ es divergente.

$$iii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}\quad ;\quad a_n=\frac{n^n}{n!}\quad ;\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\left(n+1\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)!n^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\left(n+1\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)n!n^{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e>1$$

Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ es divergente.

iv) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$; $\left|a_n\right|=\frac{\sqrt{n}}{n+1}$; $\left|a_{n+1}\right|=\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)\sqrt{n+1}}{\left(n+2\right)\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\times\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=1\cdot 1=1$$

Este criterio no da información, por lo que se acude al criterio de la serie alternada,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=0\quad\text{(cumple)}$$

$$f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}\quad\Rightarrow\quad f'\left(x\right)=\frac{\left(x+1\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\left(1\right)}{\left(x+1\right)^2}\quad\Rightarrow\quad f'\left(x\right)=\frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}\left(x+1\right)^2}$$

$$f'\left(x\right)=\frac{-x+1}{2\sqrt{x}\left(x+1\right)^2}<1\quad\forall\ x,\text{entero positivo}$$

Como es decreciente, se cumple la segunda condición y se concluye entonces que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ es convergente.

SERIES DE POTENCIAS

Hay series infinitas cuyos términos contienen una o más variables.

Definición. Sea "x" una variable en los reales. Una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

se conoce como "serie de potencias en x "

Para abreviar el término general se admite que $x^0=1$, incluso cuando $x=0$. En una serie de potencias lo que se persigue es determinar los valores de la variable "x" para los cuales la serie es convergente.

En la definición se ve que la serie es convergente cuando $x=0$. Para conocer los demás valores de $"x"$ donde es convergente, conviene utilizar el Criterio de Leibniz.

Teorema. Sea una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Entonces se cumple uno de los siguientes casos:

i) Convergencia solamente en $x=0$.

ii) Absoluta convergencia para todo $x \in \mathbb{R}$.

iii) Existe $"r>0"$ ("radio de convergencia"), tal que hay absoluta convergencia si $|x|<r \;\Rightarrow\; -r<x<r$ (intervalo de convergencia), y divergencia sí $|x|>r \;\Rightarrow\; x<-r \quad \cup \quad x>r$.

La prueba se omite porque es evidente que, al aplicar el Criterio de Leibniz para estudiar la naturaleza de la serie, ya se demostró este.

Es claro que el centro del intervalo de convergencia es el origen y el radio de convergencia es, en el caso (i), $r=0$; en el caso (ii) $r\to\infty$; y en el caso (iii), es $"r"$.

Cuando el centro del intervalo no está en el origen, se define la serie de potencias siguiente:

Definición. Sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

se conoce como "serie de potencias en $x-c$".

Se admite que $(x-c)^0 = 1$, aun cuando $x=c$.

Teorema. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$. Entonces se cumple uno de los siguientes casos:

i) Convergencia solamente para $x-c=0 \;\Rightarrow\; x=c$.

ii) Absoluta convergencia en $x \in \mathbb{R}$.

iii) Existe $"r"$ ("radio de convergencia), tal que hay absoluta convergencia si $|x-c|<r \;\Rightarrow\; c-r<x<c+r$ (intervalo de convergencia), y divergencia si $|x-c|>r \;\Rightarrow\; x<c-r \quad \cup \quad x>c+r$.

Ejemplo. Analizar la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

Solución. El desarrollo es: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$

Por el criterio de Leibniz: $a_n=\frac{x^n}{n!}$ $\quad y \quad$ $a_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!x^{n+1}}{(n+1)!x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!x^nx}{(n+1)n!x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{(n+1)}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}|x|=0\cdot|x|=0<1$$

Conclusión: la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ es absolutamente convergente en para todo valor real de $x\in\mathbb{R}$, por lo que su intervalo de convergencia es $x\in(-\infty,\infty)$ y $r\to\infty$.

Ejemplo. Analizar la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

Solución. Con el criterio de Leibniz:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{nx^{n+1}}{(n+1)x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x|=|x|$$

Convergencia: $\quad |x|<1 \Rightarrow -1<x<1$

Divergencia: $\quad |x|>1 \Rightarrow x<-1\cup x>1$

El criterio no decide: $\quad |x|=1 \Rightarrow x=\pm1$

$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es una serie armónica con signo negativo que es divergente.

$x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ es la serie armónica alternada convergente.

Conclusión: intervalo de convergencia $x\in(-1,1]$, donde es absolutamente convergente, y diverge en $x\in\mathbb{R}-[-1,1)$ o, lo que es lo mismo, en $x\in(-\infty,-1]\cup(1,\infty)$. Radio de convergencia: 1.

Ejemplo. Analizar la serie de potencias $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}x^n$

Solución. Con el criterio de Leibniz:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)x^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{nx^n}{5^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^n(n+1)x^{n+1}}{n5^{n+1}x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5n}|x|=\frac{1}{5}|x|$$

Absoluta convergencia: $\frac{1}{5}|x|<1 \quad\Rightarrow\quad |x|<5 \quad\Rightarrow\quad -5<x<5$

Divergencia: $\frac{1}{5}|x|>1 \quad\Rightarrow\quad |x|>5 \quad\Rightarrow\quad x<-5\cup x>5$

El criterio no decide: $\frac{1}{3}|x|=1 \quad\Rightarrow\quad |x|=3 \quad\Rightarrow\quad x=-3\;,\;x=3$

$x=-5 \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{5^n}(-5)^n=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n=-1+2-3+\cdots$, divergencia por el límite del término enésimo diferente de cero.

$x=5 \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{5^n}5^n=\sum_{n=1}^{\infty}n=1+2+3+\cdots$, divergencia por el límite del término enésimo diferente de cero.

Conclusión: la serie $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}x^n$ es absolutamente convergente para toda $x\in(-5,5)$, que es el intervalo de convergencia y divergente en los demás valores. El radio de convergencia es 5 .

Ejemplo. Analizar la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n=1+x+2x^2+6x^3+24x^4+\cdots$

Solución. Se aplica el criterio de Leibniz:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)n!x^nx}{n!x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)|x|\to\infty$$

El límite no existe por lo que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$ es convergente solamente en $x=0$. Entonces no hay intervalo de convergencia y el radio de convergencia es igual a cero.

Ejemplo. Estudiar la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+4)^n}{n^2 3^n}$

Solución. Se aplica el criterio del cociente en esta serie de potencias centrada en $x=-4$ y se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x+4)^{n+1}}{(n+1)^2 3^{n+1}}}{\dfrac{(x+4)^n}{n^2 3^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2 3^n (x+4)^{n+1}}{(n+1)^2 3^{n+1}(x+4)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3(n+1)^2}|x+4|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2+6n+3}|x+4| = \frac{1}{3}|x+4|$$

Absolutamente convergencia:

$$\frac{1}{3}|x+4| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x+4| < 3 \quad \Rightarrow \quad -3 < x+4 < 3 \quad \Rightarrow \quad -7 < x < -1$$

Divergencia:

$$\frac{1}{3}|x+4| > 1 \quad \Rightarrow \quad |x+4| > 3 \quad \Rightarrow \quad x+4 < -3 \cup x+4 > 3 \quad \Rightarrow \quad x < -7 \cup x > -1$$

El criterio no decide:

$$\frac{1}{3}|x+4| = 1 \quad \Rightarrow \quad |x+4| = 3 \quad \Rightarrow \quad x+4 = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad x = -4 \pm 3 \quad \Rightarrow \quad x = -7\,,\, x = -1$$

$x = -7 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(-3)^n}{n^2 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ que es una serie "p" con $p = 2 > 1$ por lo que es convergente.

$x = -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(3)^n}{n^2 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n^2}$ (serie alternada)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0 \quad y \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0 \quad \forall\, x \geq 1 \quad \therefore \quad \text{convergente}$$

Conclusión: Serie absolutamente convergente en el intervalo de convergencia $[-7,-1]$ y divergente en $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Radio de convergencia igual a 3.

SERIES DE POTENCIAS COMO REPRESENTACIONES DE FUNCIONES

Una determinada función puede ser representada mediante una serie de potencias y es evidente que el dominio de la función así representada es el intervalo de convergencia de la serie. Si la serie de potencias es $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, entonces,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

luego, cuando se pretende calcular el valor de la función en un valor "c" de su dominio, bastará con sustituirlo en la serie de potencias y se tendrá un valor aproximado de la función.

Ejemplo. Considérese la serie geométrica $1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$ Su razón es $r=-x$ y, como se sabe, si $|x|<1$, la serie es convergente y tiene como suma a: $S=\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{1}{1-(-x)}=\dfrac{1}{1+x}$, por lo que se puede escribir que

$\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$. Entonces se trata de una serie de potencias que representa a la función, esto es,

$$f(x)=\frac{1}{1+x} \quad \text{si} \quad |x|<1$$

También es posible derivar o integrar estas series de potencias, lo que conduce a otras funciones representadas por nuevas series producto de las operaciones de derivación e integración. Cabe recordar que la derivada o la integral de una función es a su vez otra función cuyo dominio es el mismo que el de la función original; es lógico que esto sucede también en el caso de las series que representan a la función y a sus derivadas e integrales. Véase el siguiente teorema.

Teorema. Sea una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con un radio de convergencia no nulo "r" y sea la función "f" definida por:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

para toda "x" en el intervalo de convergencia. si $-r<x<r$, entonces:

$$i) \quad f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

$$ii) \quad \int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}=a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\frac{1}{3}a_2x^3+\cdots+\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}+\cdots$$

Se puede probar que ambas series de potencias tienen el mismo radio de convergencia que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Nota. El radio de convergencia de la serie de potencias resultante de la derivación o de la integración es el mismo, pero el intervalo puede diferir en sus extremos.

Ejemplo. Obtener una serie de potencias para representar a la función:

$$f(x)=\frac{2}{(2-x)^2} \quad \text{si} \quad |x|<2$$

Además, utilizar los primeros doce términos de la serie de potencias obtenida para evaluarla en $x=1$ y comparar el resultado con el valor exacto que resulta de la sustitución directa en la regla de correspondencia de la función.

Solución.
Se sabe que la serie geométrica está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots$$

que es convergente si la razón $|r|<1$ y su suma está dada por $S=\dfrac{a}{1-r}$.

Si se deriva la función $f(x)=\dfrac{2}{2-x}$ se llega a $f'(x)=\dfrac{2}{(2-x)^2}$. Luego, se deriva cada término de la serie:

$$\frac{2}{2-x}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\cdots+\frac{x^n}{2^n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

y se llega a:

$$\frac{2}{(2-x)^2}=\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\cdots+\frac{n\,x^{n-1}}{2^n}+\cdots \quad \text{siempre que} \quad |x|<2 \ .$$

Por lo tanto, se puede escribir finalmente que:

$$\therefore \quad \frac{2}{(2-x)^2}=\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\cdots+\frac{n\,x^{n-1}}{2^n}+\cdots \quad ; \quad |x|<2$$

Los primeros 12 términos son:

$$S_5=\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\frac{x^3}{4}+\frac{5x^4}{32}+\frac{3x^5}{32}+\frac{7x^6}{128}+\frac{6x^7}{256}+\frac{9x^8}{512}+\frac{10x^9}{1024}+\frac{11x^{10}}{2048}+\frac{12x^{11}}{4096}$$

$$\Rightarrow \quad S_5\big|_{x=1}\approx 1.99$$

$$\left.\frac{2}{(2-x)^2}\right|_{x=1}=2$$

Ejemplo. Sea la función siguiente y su serie de potencias:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots$$

Definir las series de potencias que representan a las siguientes funciones y determinar sus respectivos intervalos de convergencia:

$$i)\quad f(x) \qquad ; \qquad ii)\quad f'(x) \qquad ; \qquad iii)\quad \int f(x)dx$$

Solución.

$i)\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots$

Se utiliza el criterio del cociente para determinar el intervalo de convergencia y,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\,x^{n+1}}{(n+1)x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x|=|x|$$

$|x|<1 \quad\Rightarrow\quad -1<x<1$ convergencia absoluta

$|x|>1 \quad\Rightarrow\quad x<-1\cup x>1$ divergencia

$|x|=1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$ no hay información

$x=-1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ serie armónica alternada convergente

$x=1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ serie armónica divergente

Entonces el intervalo de convergencia es $x\in[-1,1)$

$ii)\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{x^{n-1}}\right|=|x|$$

$|x|<1 \quad\Rightarrow\quad -1<x<1$ convergencia absoluta

$|x|>1 \quad\Rightarrow\quad x<-1\cup x>1$ divergencia

$|x|=1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$ no hay información

$x=-1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$ divergente

$x=1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}1^{n-1}=1+1+1+1+\cdots+1^{n-1}+\cdots$ divergente

Luego el intervalo de convergencia de esta serie de potencias es $x\in(-1,1)$

iii) $\int f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \cdots$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(n+1)x^{n+2}}{(n+1)(n+2)x^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2+3n+2}|x| = |x|$$

$|x|<1 \;\Rightarrow\; -1<x<1$ convergencia absoluta

$|x|>1 \;\Rightarrow\; x<-1 \cup x>1$ divergencia

$|x|=1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$ no hay información

$$x=-1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}+\cdots$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 0 \\ f(y)=\frac{1}{y^2+y} \;\Rightarrow\; f'(y) = -\frac{2y+1}{(y^2+y)^2} < 0 \quad \forall\, y \geq 1 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \text{convergente}$$

$$x=1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots$$

que es una serie telescópica y por lo tanto convergente.
Luego el intervalo de convergencia de la serie de potencias es $x \in [-1,1]$.

En este ejercicio queda comprobado que el radio de convergencia es el mismo, pero el intervalo varía en sus extremos.

TEOREMA. SERIE DE TAYLOR

Sea "f" una función tal que $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ para toda "x" en un intervalo abierto que contiene a "c". Entonces es posible construir la serie

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

que se conoce como "Serie de Taylor para $f(x)$ en $'c'$ **".**

Prueba. Supóngase que la serie de potencias $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ tiene un radio de convergencia "r". Entonces, por la diferenciabilidad de las series, se sabe que la enésima derivada de la función "f" existe para $|x-c|<r$ y mediante derivación sucesiva se obtiene lo siguiente:

$$f^{(0)}(x)=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+a_3(x-c)^3+a_4(x-c)^4+\cdots$$
$$f^{(1)}(x)=a_1+2a_2(x-c)+3a_3(x-c)^2+4a_4(x-c)^3+\cdots$$
$$f^{(2)}(x)=2a_2+3!a_3(x-c)+4\cdot 3a_4(x-c)^2+\cdots$$
$$f^{(3)}(x)=3!a_3+4!a_4(x-c)+\cdots$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)!a_{n+1}(x-c)+\cdots$$

Al evaluar cada una de las derivadas en $x-c$ se ve que:

$$f^{(0)}(c)=0!a_0$$
$$f^{(1)}(c)=1!a_1$$
$$f^{(2)}(c)=2!a_2$$
$$f^{(3)}(c)=3!a_3$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(c)=n!a_n$$

En ésta última expresión se despeja a_n y se determina así que los coeficientes de las series de potencias que representan a la función "f" son:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

Finalmente, la serie de Taylor para $f(x)$ en "c" queda como:

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots$$

El caso especial en la Serie de Taylor, cuando $c=0$, es muy importante, por lo que se trata en el siguiente corolario:

COROLARIO. SERIE DE MACLAURIN

Sea "f" una función tal que $f(x)=\sum a_n x^n$ para toda "x" en un intervalo abierto $(-r,r)$, entonces se construye la serie

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

que se conoce como "Serie de Maclaurin para $f(x)$".

Nota. Para analizar la convergencia en ambas series, se puede utilizar el criterio del cociente o de D'Alembert.

Ejemplo. Obtener la serie de Maclaurin para las funciones $f(x) = sen x \quad y \quad f(x) = \cos x$ y probar que representan a las funciones para todo valor real de "x". Mencionar cómo se haría utilizando derivación e integración de series de potencias.

Solución.

$$
\begin{array}{lcl}
f(x) = senx & \Rightarrow & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & \Rightarrow & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -senx & \Rightarrow & f'(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & \Rightarrow & f'''(0) = -1 \\
f^{(iv)}(x) = senx & \Rightarrow & f^{(iv)}(0) = 0 \\
f^{(v)}(x) = \cos x & \Rightarrow & f^{(v)}(0) = 1 \\
f^{(vi)}(x) = -senx & \Rightarrow & f^{(vi)}(0) = 0 \\
f^{(vii)}(x) = -\cos x & \Rightarrow & f^{(vii)}(0) = -1 \\
f^{(viii)}(x) = senx & \Rightarrow & f^{(viii)}(0) = 0 \\
f^{(ix)}(x) = \cos x & \Rightarrow & f^{(ix)}(0) = 1 \\
f^{(x)}(x) = -senx & \Rightarrow & f^{(x)}(0) = 0 \\
\vdots & &
\end{array}
$$

Se sustituyen estos valores en la serie de Maclaurin que es:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

y se obtiene:

$$sen x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Se aplica el criterio de D'Alembert y se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}(2n+1)!}{x^{2n+1}(2n+3)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}\left|x^2\right| = 0 < 1$$

Luego la serie de potencias es convergente en $x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{array}{lcl}
f(x) = \cos x & \Rightarrow & f(0) = 1 \\
f'(x) = -senx & \Rightarrow & f'(0) = 0 \\
f''(x) = -\cos x & \Rightarrow & f'(0) = -1
\end{array}
$$

$$f'''(x) = sen x \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 0$$
$$f^{(iv)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(iv)}(0) = 1$$
$$f^{(v)}(x) = -sen x \quad \Rightarrow \quad f^{(v)}(0) = 0$$
$$f^{(vi)}(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(vi)}(0) = -1$$
$$f^{(vii)}(x) = sen x \quad \Rightarrow \quad f^{(vii)}(0) = 0$$
$$f^{(viii)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(viii)}(0) = 1$$
$$f^{(ix)}(x) = -sen x \quad \Rightarrow \quad f^{(ix)}(0) = 0$$
$$f^{(x)}(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(x)}(0) = -1$$
$$\vdots$$

Se sustituyen estos valores en la serie de Maclaurin y

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Se aplica el criterio del cociente y

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{x^{2n}}{(2n)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}(2n)!}{x^{2n}(2n+2)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}x^2 = 0 < 1$$

Por lo que la serie representa a la función para todo $x \in \mathbb{R}$. Para obtener la serie de potencias que representa a la función coseno se puede derivar la correspondiente a la función seno, de la siguiente forma:

$$sen x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{(11)!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \frac{9x^8}{9!} - \frac{11x^{10}}{(11)!} \cdots + (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n+1-1}}{(2n+1-1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

También se podría obtener primero la serie de potencias para coseno y después integrarla para obtener la serie para representar seno. Así, se obtiene:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$sen x = x - \frac{x^3}{3\cdot 2!} + \frac{x^5}{5\cdot 4!} - \frac{x^7}{7\cdot 6!} + \frac{x^9}{9\cdot 8!} - \frac{x^{11}}{11\cdot 10!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!} + \cdots$$

$$sen x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Obtener el valor de $sen(0.1)$ mediante la serie de Maclaurin y estimar el error que se comete si para ello se utilizan sus dos primeros términos.

Solución.
La serie ya obtenida es:

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

se sustituye "x" por el valor de 0.1 y se llega a:

$$sen(0.1) = 0.1 - \frac{0.001}{6} + \frac{0.00001}{120} - \cdots$$

Como se sabe, el error que se comete al usar los primeros dos términos, y su suma como aproximación, es menor que $\frac{0.00001}{120}$. Por lo que el valor aproximado de $sen(0.1)$, con 6 cifras decimales de exactitud, es de 0.099833

Resulta interesante expresar que es factible utilizar la fórmula polinomial $sen x = x - \frac{x^3}{6}$ donde el error que se comete es menor que $\frac{|x^5|}{5!}$.

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Obtener los primeros cuatro términos no nulos de la serie de potencias de Maclaurin, mediante los correspondientes procesos de derivación, para representar a la función:

$$f(x) = \tan x$$

Solución.

Una forma de hacer esto es obtener las derivadas sucesivas, evaluarlas en $x=0$ y después sustituir en la expresión que define a la serie de Maclaurin. Así,

$$f(x) = \tan x \qquad \Rightarrow \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \sec^2 x \qquad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = 2\sec^2 x \tan x \qquad \Rightarrow \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 2\sec^4 x + 4\sec^2 x \tan^2 x \qquad \Rightarrow \quad f'''(0) = 2$$

$$f^{(iv)}(x) = 16\sec^4 x \tan x + 8\sec^2 x \tan^3 x \qquad \Rightarrow \quad f^{(iv)}(0) = 0$$

$$f^{(v)}(x) = 16\sec^6 x + 88\sec^4 x \tan^2 x + 16\sec^2 x \tan^4 x \qquad \Rightarrow \quad f^{(v)}(0) = 16$$

$f^{(vi)}(x)=272\sec^6 x\tan x+416\sec^4 x\tan^3 x+32\sec^2 x\tan^5 x \quad \Rightarrow \quad f^{(vi)}(0)=0$

$f^{(vii)}(x)=272\sec^8 x+2880\sec^6 x\tan^2 x+1824\sec^4 x\tan^4 x+64\sec^2 x\tan^6 x$

$f^{(vii)}(0)=272$

Y así sucesivamente. Al sustituir queda como:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(iv)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(v)}(0)}{5!}x^5+$$
$$+\frac{f^{(vi)}(0)}{6!}x^6+\frac{f^{(vii)}(0)}{7!}x^7+\cdots$$

$$\tan x=x+\frac{2}{3!}x^3+\frac{16}{5!}x^5+\frac{272}{7!}x^7 \quad \therefore \quad \tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7$$

Ejemplo. Obtener la serie de potencias de Maclaurin para representar a las funciones:

$$i) \quad f(x)=x\cos x \qquad ; \qquad ii) \quad f(x)=sen\sqrt{x}$$

Solución.

i) $f(x)=x\cos x$. En este caso basta con multiplicar por "x" los términos de la serie de potencias que representa a la función $\cos x$ y se obtiene:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$x\cos x=x\cdot 1-\frac{x\cdot x^2}{2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}-\frac{x\cdot x^6}{6!}+\frac{x\cdot x^8}{8!}-\frac{x\cdot x^{10}}{10!}+\cdots+(-1)^n\frac{x\cdot x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$\therefore \quad x\cos x=x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\frac{x^7}{6!}+\frac{x^9}{8!}-\frac{x^{11}}{10!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}+\cdots$$

$$\therefore \quad x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

ii) $f(x)=sen\sqrt{x}$. Para obtener la serie de Maclaurin que representa a esta función, se sustituye en la de $sen\,x$, a la "x" por $\sqrt{x}$ y se llega a:

$$sen\,x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$sen\sqrt{x}=\sqrt{x}-\frac{x\left(\sqrt{x}\right)}{3!}+\frac{x^2\left(\sqrt{x}\right)}{5!}-\frac{x^3\left(\sqrt{x}\right)}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n\left(\sqrt{x}\right)}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\therefore \quad sen\sqrt{x}=\sqrt{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n+1)!}+\cdots$$

Ejemplo. Obtener la serie de Taylor para representar a la función $f(x)=sen x$ en potencias de $x-\frac{\pi}{6}$.

Solución.

Al derivar y sustituir se tiene que:

$$f(x)=sen x \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\cos x \quad \Rightarrow \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x)=-sen x \quad \Rightarrow \quad f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$f'''(x)=-\cos x \quad \Rightarrow \quad f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vdots$$

de donde:

$$sen x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2(2!)}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{2(3!)}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^4+\cdots$$

El término general de esta serie está dado por:

$$u_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{2n!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^n & si \quad n=0,2,4.6,\ldots \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\sqrt{3}}{2n!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^n & si \quad n=1,3,5,7,\ldots\end{cases}$$

Se puede probar que esta serie de potencias de Taylor representa a la función para todo valor real de "x".

Ejemplo. Obtener la serie de Taylor para la función $f(x)=\frac{1}{1+x}$ centrada en $c=1$.

Solución.

Se obtienen las derivadas y se sustituye en ellas el valor de $c=1$.

$$f(x)=\frac{1}{1+x} \quad \Rightarrow \quad f(1)=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(1)=-\frac{1}{4}$$

$$f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3} \quad \Rightarrow \quad f''(1)=\frac{2}{8}$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} \qquad \Rightarrow \qquad f'''(1) = -\frac{6}{16}$$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5} \qquad \Rightarrow \qquad f^{(iv)}(1) = \frac{24}{32}$$

$$f^{(v)}(x) = -\frac{120}{(1+x)^6} \qquad \Rightarrow \qquad f^{(v)}(1) = -\frac{120}{64}$$

Ahora se sustituyen los valores obtenidos en la serie de Taylor y se llega a:

$$\frac{1}{1+x} = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{2}{8\cdot 2!}(x-1)^2 - \frac{6}{16\cdot 3!}(x-1)^3 + \frac{24}{32\cdot 4!}(x-1)^4 -$$

$$\cdots + (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}n!}(x-1)^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(x-1)^3 + \frac{1}{32}(x-1)^4 -$$

$$\cdots + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n + \cdots$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ACADEMIA DE CÁLCULO INTEGRAL

Segundo tema: Las integrales definida e indefinida. Regla de L'Hopital e Integrales Impropias

PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

PROFESOR DE CARRERA

CÁLCULO INTEGRAL

CAPÍTULO 2

LAS INTEGRALES DEFINIDA E INDEFINIDA

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se verá la parte medular del Cálculo Integral, es decir, la parte conceptual que considera, como esencial, el Teorema fundamental del Cálculo, que liga a la derivada con la integral. Se tratarán las integrales a partir de su definición y se realizarán diversos ejercicios. Después se estudiarán la Regla de L'Hopital para resolver límites a través de la derivada y por último se presentarán las integrales impropias.

Definición. Para representar en forma abreviada determinado tipo de sumas, conocidas con el término "sumatoria", se utiliza como símbolo a la letra griega sigma $\sum$. Como ejemplos de estas sumatorias están:

$$\sum_{i=1}^{30} i = 1+2+3+4+\cdots+30 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{30} i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+30^2$$

en las cuales a "i" es el índice de la sumatoria. Otra forma de expresar estas sumas:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = f(1)+f(2)+f(3)+\cdots f(n)$$

Propiedades de la sumatoria. Se presentarán tres que son de gran utilidad en la integración por la definición.

$$i) \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha f(i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

$$ii) \quad \sum_{i=1}^{n} \left[f(i) \pm g(i) \right] = \sum_{i=1}^{n} f(i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(i)$$

$$iii) \quad \sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{j} f(i) + \sum_{i=j+1}^{n} f(i) \qquad : \quad 1 < j < n$$

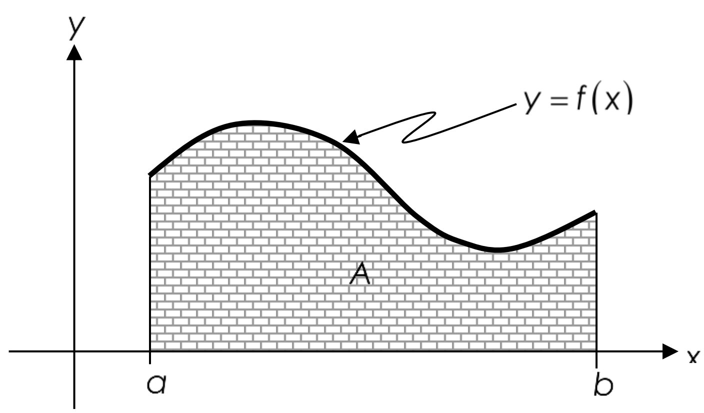
Algunas sumatorias conocidas que tendrán cabida en ejercicios de integración:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$
$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Estos resultados se pueden demostrar con inducción matemática, aunque el primero es evidente. El segundo recuerda el prodigio de Gauss, "príncipe de las matemáticas", del que se cuenta que lo demostró de niño en un salón de clase.

Área bajo la curva.

Se pretende calcular el "área bajo la curva", área limitada, como se ve en la figura, por la gráfica de la función "f", el eje de las abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$. Se fijará como condición que la función sea continua y positiva en el intervalo $[a,b]$.



Suma inferior

Se realiza una división en el intervalo, conocida como partición, con "n" subintervalos iguales cuyos extremos se denotan como:

$$a = x_0 \quad , \quad x_1 \quad , \quad x_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad x_n = b$$

valores que cumplen con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. La longitud de cada subintervalo, que es la misma, está dada por:

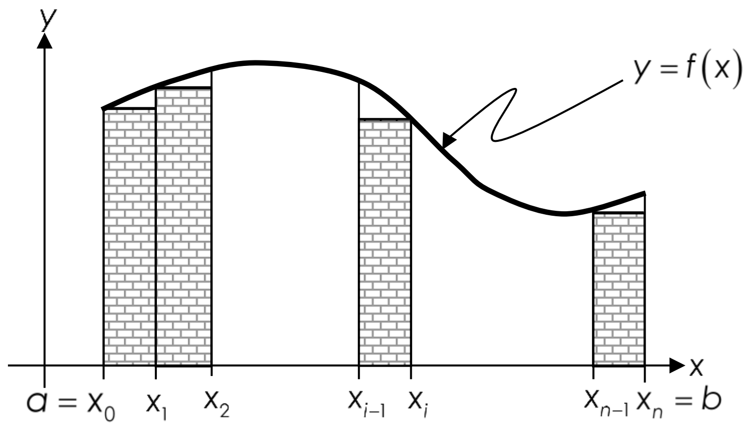
$$\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_i - x_{i-1} = \cdots = x_n - x_{n-1}$$

y que equivale a

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Como la función es continua en el intervalo, es continua en cada subintervalo, por lo que, de acuerdo con el Teorema de Weierstrass, hay un valor del subintervalo para el cual la función toma su mínimo valor.

Considérese la siguiente figura:



Las áreas de los "n" rectángulos con los respectivos valores mínimos de son:

$$f(x_0)(x_1 - x_0) = f(x_0)\Delta x$$
$$f(x_1)(x_2 - x_1) = f(x_1)\Delta x$$
$$\vdots$$
$$f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i)\Delta x$$
$$\vdots$$
$$f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = f(x_{n-1})\Delta x$$

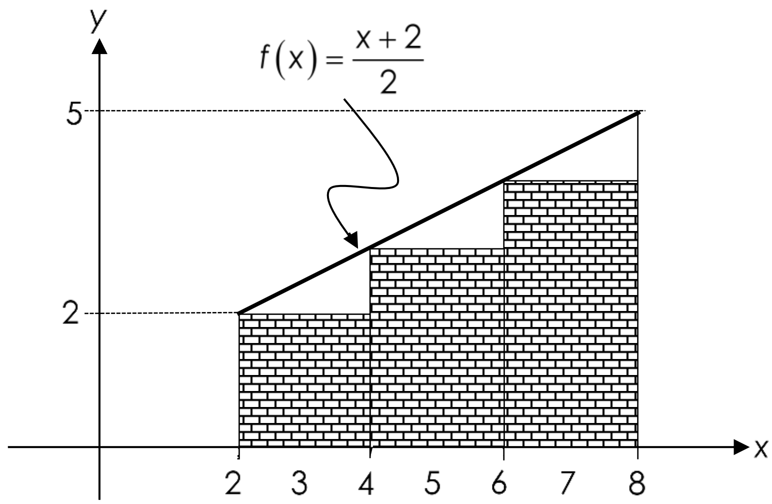
Por lo que la suma inferior de todos los rectángulos considerados es:

$$S_I = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_i)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

Y, por tratarse de la suma inferior, es evidente que este resultado es menor que el valor exacto del área, es decir, que se cumple que $S_I \le A$.

Ejemplo. Calcular con la suma inferior el valor aproximado del área bajo la curva de la función $f(x) = \dfrac{x+2}{2}$ en el intervalo $x \in [2,8]$ para $n = 3$ y $n = 6$

Solución. Para $n = 3$

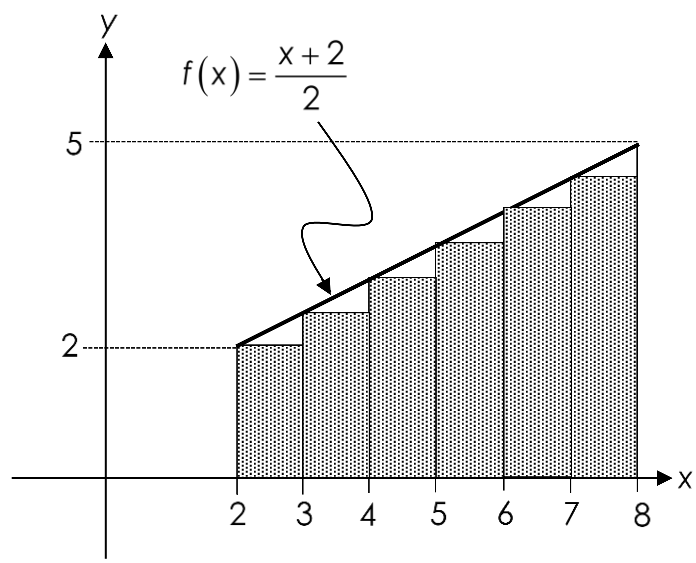


La longitud de cada subintervalo es $\Delta x=\dfrac{8-2}{3} \quad \Rightarrow \quad \Delta x=2$. Por lo que la suma inferior será igual a:

$$S_I=f(2)(2)+f(4)(2)+f(6)(2) \quad \Rightarrow \quad S_I=4+6+8$$

$$S_I=18$$

Para $n=6$



La longitud de cada subintervalo es $\Delta x=\dfrac{8-2}{6} \quad \Rightarrow \quad \Delta x=1$. Por lo que la suma inferior será igual a:

$$S_I=f(2)(1)+f(3)(1)+f(4)(1)+f(5)(1)+f(6)(1)+f(7)(1)$$
$$S_I=2+2.5+3+3.5+4+4.5$$

$$S_I = 19.5$$

El valor real del área requerida es $A = \frac{5+2}{2}(6) \quad \Rightarrow \quad A = 21$, de donde se puede inferir que mientras mayor sea el número de subintervalos de la partición, la suma inferior se aproximará más al valor real del área. De esto se tiene la siguiente definición:

Definición. El área bajo la curva $y = f(x)$ y limitada por las rectas $x = a \quad y \quad x = b$ es el límite, cuando el número de subintervalos de la partición tiende a infinito, de la suma inferior. Esto es,

$$\lim_{n\to\infty} S_I = A$$

Suma superior

Se considera la misma área y la partición que para la suma inferior y, con el Teorema de Wierstrass, se garantiza que hay una "x" en cada subintervalo donde la función toma su máximo valor. Las áreas de los "n" rectángulos que se construyen, con los respectivos valores mínimos de la función son:

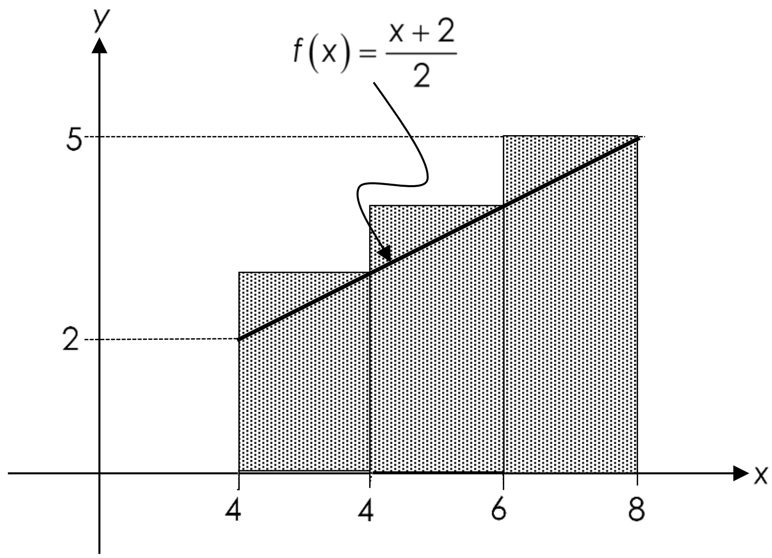
$$\begin{array}{l} f(x_1)(x_1 - x_0) = f(x_1)\Delta x \\ f(x_2)(x_2 - x_1) = f(x_2)\Delta x \\ \vdots \\ f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = f(x_{i-1})\Delta x \\ \vdots \\ f(x_n)(x_n - x_{n-1}) = f(x_n)\Delta x \end{array}$$

Entonces, la suma superior sería igual a:

$$S_I = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{i-1})\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

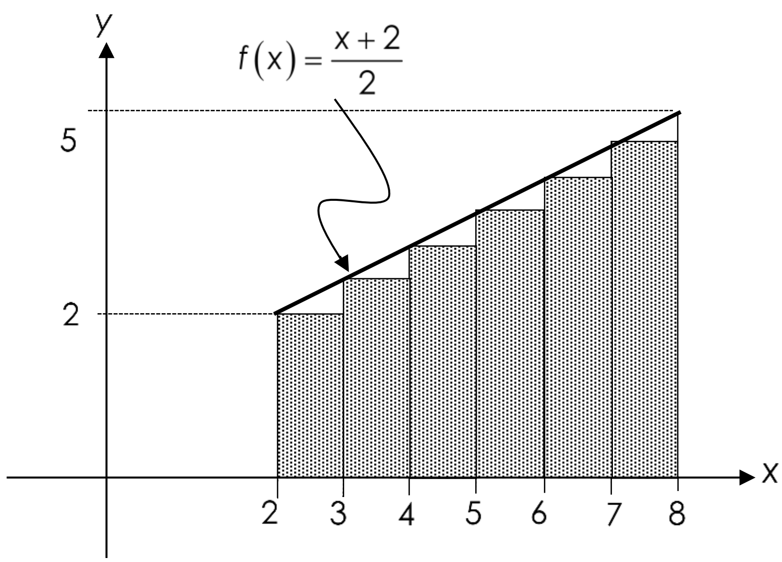
Como se trata de la suma superior, es evidente que este resultado es mayor que el valor exacto del área, es decir, que se cumple que $S_S \geq A$. Ahora se resolverá el mismo ejercicio anterior, con los mismos números de intervalos, pero con la suma superior.

Para $n = 3$



$$S_S = f(4)(2)+f(6)(2)+f(8)(2) \quad \Rightarrow \quad S_S = 6+8+10$$
$$S_S = 24$$

Para $n=6$



$$S_I = f(3)(1)+f(4)(1)+f(5)(1)+f(6)(1)+f(7)(1)+f(8)(1)$$

$$S_I = 2.5+3+3.5+4+4.5+5$$
$$S_I = 22.5$$

Aquí también se puede inferir que mientras mayor sea el número de subintervalos de la partición, la suma superior se aproximará más al valor real del área. De esto se tiene la siguiente definición:

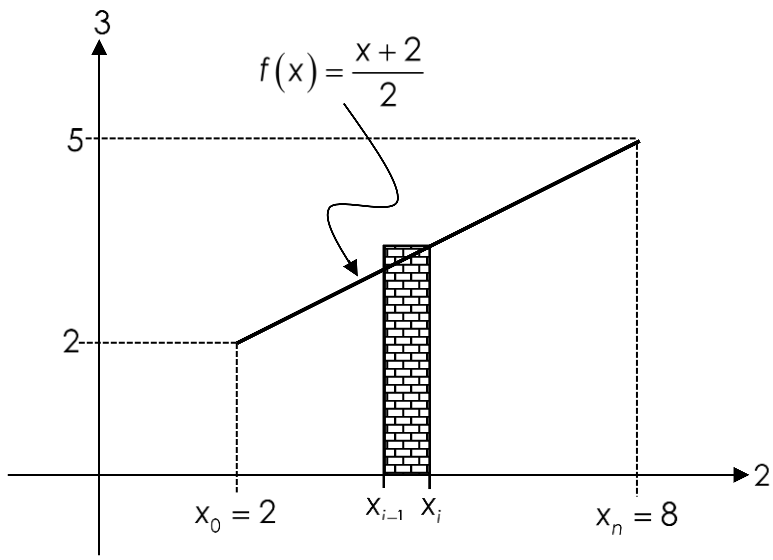
Definición. El área bajo la curva $y=f(x)$ y limitada por las rectas $x=a$ y $x=b$ es el límite, cuando el número de subintervalos de la partición tiende a infinito, de la suma superior. Esto es, $\lim_{n\to\infty} S_S = A$

Finalmente, con respecto a estas dos "sumas" y por medio de la notación de sumatorias se puede escribir que:

$$\lim_{n\to\infty} S_I = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i\,mín}\right)\Delta x = A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i\,máx}\right)\Delta x = \lim_{n\to\infty} S_S$$

Ejemplo. Considérese la misma área requerida en los ejemplos anteriores y obténgase su valor a través del límite de la suma superior. Considérense también subintervalos de la misma longitud.

Solución.
Primero se presenta la gráfica, en la que se verá cómo se toma el valor correspondiente al máximo valor de la función en el subintervalo i-ésimo.



Se consideran "n" subintervalos, luego La longitud de cada uno es igual a:

$$\Delta x=\frac{8-2}{n} \quad\Rightarrow\quad \Delta x=\frac{6}{n}$$

La abscisa del i-ésimo subintervalo, correspondiente al mayor valor de la función, esto es, x_i, en términos del número de subintervalos, se calcula como sigue:

$$x_0=2\,;\quad x_1=2+1\left(\frac{6}{n}\right);\quad x_2=2+2\left(\frac{6}{n}\right);\ldots;x_{i-1}=2+(i-1)\left(\frac{6}{n}\right);$$

$$x_i=2+i\left(\frac{6}{n}\right);\cdots;x_n=2+n\left(\frac{6}{n}\right)=8$$

Ahora se calcula el valor de la función para $x_i = 2 + i\left(\frac{6}{n}\right)$ y se obtiene:

$$f(x_i) = \frac{2 + i\left(\frac{6}{n}\right) + 2}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x_i) = i\left(\frac{3}{n}\right) + 2$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \quad \Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[i\left(\frac{3}{n}\right) + 2 \right]\left(\frac{6}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} i + 2\sum_{i=1}^{n} 1 \right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\left(\frac{3}{n}\frac{n(n+1)}{2} + 2n \right) \quad \Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\left(\frac{3n+3}{2} + 2n \right) \quad \Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\left(\frac{7n+3}{2} \right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{42n+18}{2n} \quad \Rightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty}\left(21 + \frac{9}{n} \right) \quad \therefore \quad A = 21$$

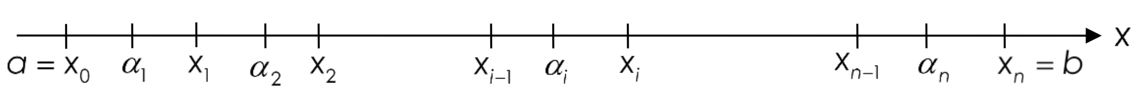
Esto prueba que, con los límites de las suma superior o inferior, cuando el número de subintervalos tiene a infinito, se obtiene el valor exacto del área bajo la curva. Ahora se verá el límite de una sumatoria conocida con el nombre de Suma de Riemann, para calcular el área bajo la curva. Se le llama así en honor al célebre matemático alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) que realizó muy importantes contribuciones al análisis matemático y a la geometría diferencial.

LA INTEGRAL DEFINIDA

Sea la sumatoria conocida como suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i$, en la cual la función no es necesariamente continua en el intervalo $[a,b]$. Además, puede o no ser positiva en dicho intervalo y los subintervalos pueden ser de diferente longitud.

El i-ésimo subintervalo tiene como longitud a $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y a la longitud del mayor subintervalo se le llama "norma de la partición" y se denota con el símbolo $\|\Delta\|$

En cada subintervalo se selecciona un valor α_i tal que $x_{i-1} \le \alpha_i \le x_i$ y entonces se construye la suma de Riemann.



$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i = f(\alpha_1)\Delta x_1 + f(\alpha_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\alpha_i)\Delta x_i + \cdots + f(\alpha_n)\Delta x_n$$

Definición. Se dice que la función f es integrable con respecto a x en un intervalo de definición $\left[a,b\right]$ si existe un número real I tal que para una cierta partición se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\alpha_i\right)\Delta x_i = I$$

si para un $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se desee, existe un $\delta > 0$ (función de ε) tales que:

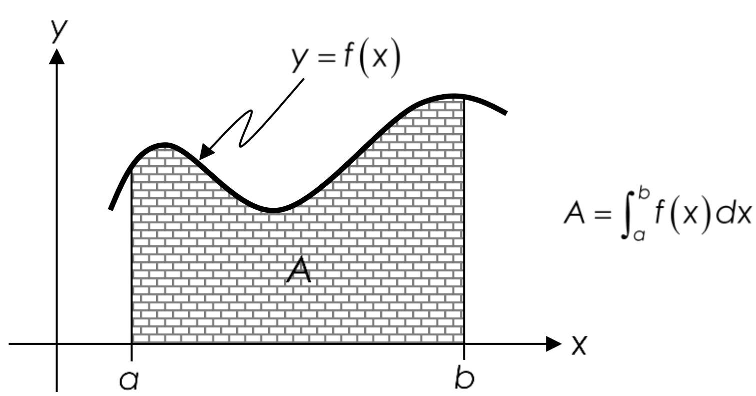
$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(\alpha_i\right)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < \left\|\Delta\right\| < \delta$$

En este caso, al número "I" así determinado y denotado por

$$I = \int_a^b f\left(x\right)dx$$

se le llama la integral definida de la función $f\left(x\right)$ en el intervalo $\left[a,b\right]$. A la función f se le conoce como integrando y a la variable x como integrador.

De acuerdo con esta definición, la integral definida es el área bajo la curva, es decir, el área limitada por la gráfica de la función f, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje de las abscisas.



Se dijo que la función no necesariamente debía ser continua en el intervalo considerando, aunque es evidente, que sólo podrá ser discontinua en puntos finitos del mismo. Véase el siguiente teorema.

Teorema. Sea la función $y = f\left(x\right)$ continua en un intervalo cerrado $\left[a,b\right]$. Entonces la integral definida $\int_a^b f\left(x\right)dx = \lim\limits_{\left\|\Delta\right\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\alpha_i\right)\Delta x_i$ existe.

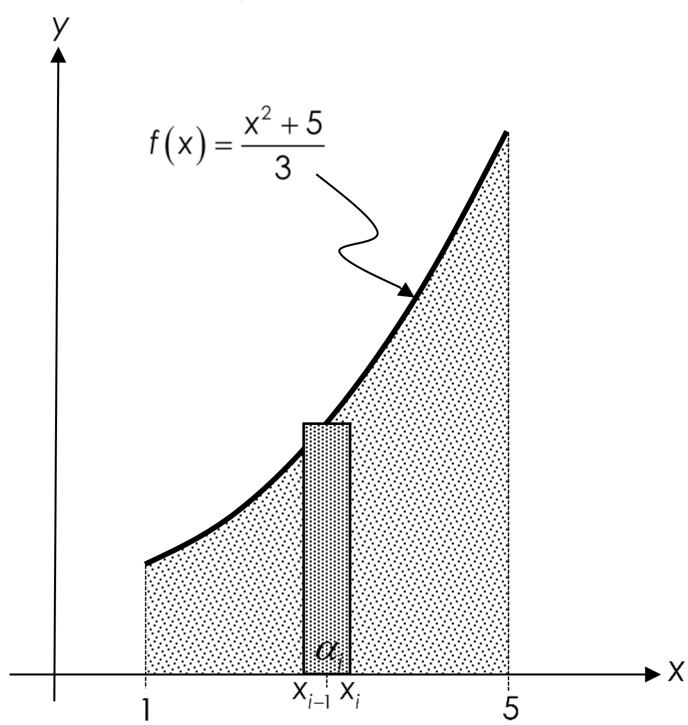
Como ya se dijo, puede haber funciones no continuas en un número finito de puntos en el intervalo y la integral definida existe.

Ejemplo. Evaluar la siguiente integral definida, considerando subintervalos iguales y tomando el valor medio de cada uno para evaluar la función. Graficar el área que se calcularía con la integral.

$$\int_1^5 \frac{x^2+5}{3}dx$$

Solución.

La gráfica de la función es la siguiente:



Como son "n" subintervalos, la longitud de cada uno es $\Delta x=\frac{5-1}{n} \quad \Rightarrow \quad \Delta x=\frac{4}{n}$ y para determinar el valor intermedio "α_i" se denotan los valores de las abscisas "x_i" y "x_{i-1}".

$$x_0=1; \quad x_1=1+1\left(\frac{4}{n}\right); \; x_2=1+2\left(\frac{4}{n}\right); \ldots; x_{i-1}=1+(i-1)\left(\frac{4}{n}\right)$$

$$x_i=1+i\left(\frac{4}{n}\right); \cdots; x_n=1+n\left(\frac{4}{n}\right)=5$$

Entonces:

$$\alpha_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\quad\Rightarrow\quad \alpha_i=\frac{1+(i-1)\left(\frac{4}{n}\right)+1+i\left(\frac{4}{n}\right)}{2}\quad\Rightarrow\quad \alpha_i=1+i\left(\frac{4}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n}\right)$$

El valor de la función en "α_i" está dado por:

$$f(\alpha_i)=\frac{\left[1+i\left(\frac{4}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n}\right)\right]^2+5}{3}$$

$$f(\alpha_i)=\frac{1}{3}\left[1+i^2\left(\frac{4}{n}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{n}\right)^2+2i\left(\frac{4}{n}\right)-i\left(\frac{4}{n}\right)^2-\left(\frac{4}{n}\right)+5\right]$$

$$f(\alpha_i)=\frac{1}{3}\left[6+\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(i^2-i+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{4}{n}\right)(2i-1)\right]$$

Luego, aplicando la expresión

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\alpha_i)\,\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\alpha_i)\,\Delta x$$

Se tiene que:

$$\int_1^5\frac{x^2+5}{3}dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\left[6+\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(i^2-i+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{4}{n}\right)(2i-1)\right]\left(\frac{4}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3n}\left[6\sum_{i=1}^{n}1+\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}i^2-\sum_{i=1}^{n}i+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}1\right)+\left(\frac{4}{n}\right)\left(2\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{i=1}^{n}1\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3n}\left[6n+\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{4}n\right)+\left(\frac{4}{n}\right)\left(2\frac{n(n+1)}{2}-n\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3n}\left[6n+\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{(2n^2+2n)(2n+1)-6n(n+1)+3n}{12}\right)+\left(\frac{4}{n}\right)(n^2+n-n)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3n}\left[\left[6n+\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{4n^3+2n^2+4n^2+2n-6n^2-6n+3n}{12}\right)+\left(\frac{4}{n}\right)(n^2)\right]\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3n}\left[6n+\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{4n^3-n}{12}\right)+4n\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3n}\left(6n+\frac{64n^3-16n}{12n^2}+4n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3n}\left(10n+\frac{16n^2-4}{3n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3n}\left(\frac{46n^2-4}{3n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{184n^2-16}{9n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{184}{9}-\frac{16}{9n^2}\right)$$

$$\therefore \quad \int_{1}^{5} \frac{x^2+5}{3}\,dx = \frac{184}{9}$$

Dada la función, que es positiva y continua en el intervalo dado, este resultado es el "área bajo la curva", esto es, el área limitada, como se ve en la gráfica, por la curva, el eje de las abscisas y las rectas de ecuaciones $x=1 \quad y \quad x=5$.

Ejemplo. Evaluar la integral definida

$$\int_{1}^{11} \frac{3x-18}{5}\,dx$$

Considerar "n" subintervalos iguales y tomar el valor medio de la abscisa de cada subintervalo para evaluar la función.
Solución.
Si se resuelve esta integral definida, mediante la expresión antes dada, se tiene que:

$$\int_{1}^{11} \frac{3x-18}{5}\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x$$

Para calcular Δx, "α_i" y $f(\alpha_i)$, se hace lo siguiente:

$$\Delta x = \frac{11-1}{n} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{10}{n}$$

$$x_0 = 1; \quad x_1 = 1+1\left(\frac{10}{n}\right); \; x_2 = 1+2\left(\frac{10}{n}\right); \ldots ; x_{i-1} = 1+(i-1)\left(\frac{10}{n}\right) \quad ;$$

$$x_i = 1+i\left(\frac{10}{n}\right); \cdots ; x_n = 1+n\left(\frac{10}{n}\right) = 11$$

$$\alpha_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{1+(i-1)\left(\frac{10}{n}\right)+1+i\left(\frac{10}{n}\right)}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 1+i\left(\frac{10}{n}\right)-\frac{5}{n}$$

$$f(\alpha_i) = \frac{3\left(1+i\left(\frac{10}{n}\right)-\frac{5}{n}\right)-18}{5} \;\Rightarrow\; f(\alpha_i) = \frac{3}{5}\left[1+i\left(\frac{10}{n}\right)-\frac{5}{n}-6\right] \;\Rightarrow\; f(\alpha_i) = \frac{3}{5}\left[-5+i\left(\frac{10}{n}\right)-\frac{5}{n}\right]$$

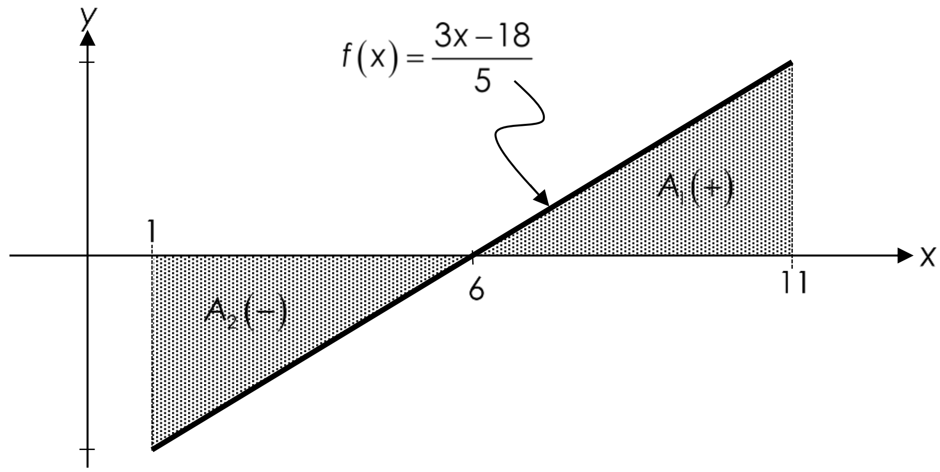
$$\int_{1}^{11} \frac{3x-18}{5}\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{5}\left[-5+i\left(\frac{10}{n}\right)-\frac{5}{n}\right]\cdot\frac{10}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\left[-5\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\left(-5n+\frac{10}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{5}{n}\cdot n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}(-5n+5n+5-5) = 0$$

$$\therefore \quad \int_{1}^{11} \frac{3x-18}{5}\,dx = 0$$

El valor de la integral es cero. Se grafica la función y se obtiene:



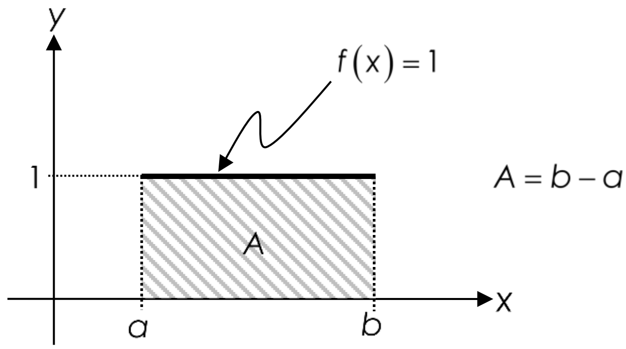
Si se interpreta la integral como el área bajo la curva, es evidente que el valor es cero porque al ser iguales en valor absoluto A_1 *y* A_2, un área es positiva y la otra negativa, por lo cual se cancelan. Si se pidiera entonces el área bajo la curva, se tendría que calcular a través de $A = A_1 - A_2$ o bien, calcular la integral únicamente en el intervalo $\left[1,6\right]$ o en el $\left[6,11\right]$ y multiplicar el resultado por 2.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

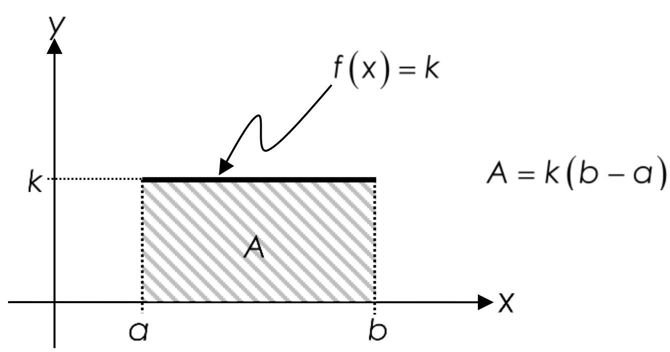
Se presentarán ahora las propiedades de la integral definida, solamente se enunciarán y en algunos casos se verificarán de manera gráfica.

Teorema. Sean $f(x)$ *y* $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo cerrado $\left[a,b\right]$, "c" un valor de x perteneciente a este intervalo y "k" una constante. Entonces:

i) $\int_{a}^{b} dx = b - a$

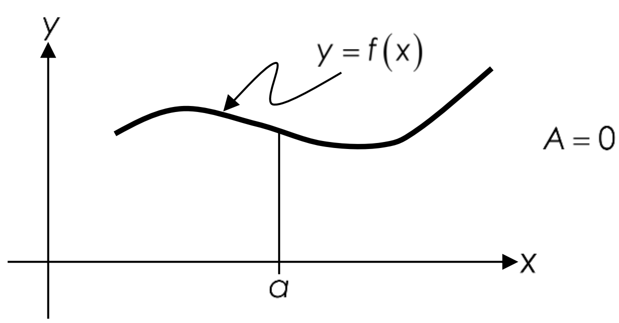


ii) $\int_a^b k\,dx = k\,(b-a)$

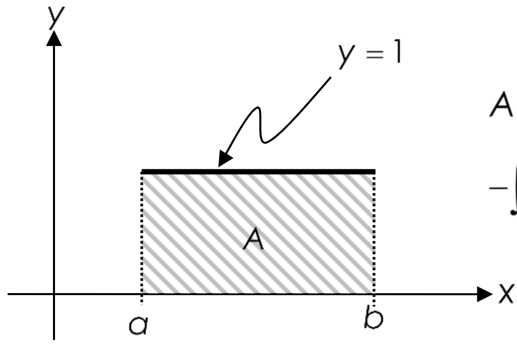


iii) $\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

iv) $\int_a^a f(x)dx = 0$



v) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

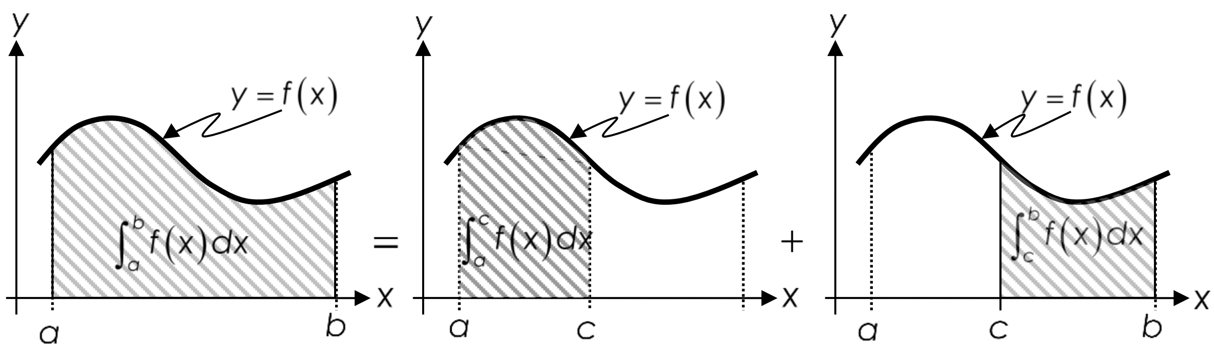


$$A=\int_a^b dx = b-a$$

$$-\int_b^a dx = -(a-b) = b-a$$

vi) $\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

vii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad ; \quad c\in\left[a,b\right]$



viii) $f(x)\geq g(x) \quad ; \quad x\in\left[a,b\right] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL

Teorema. Sea la función f continua en un intervalo cerrado $\left[a,b\right]$. Entonces existe al menos un valor $c\in\left[a,b\right]$ para el cual se cumple que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

donde a $f(c)$ se le conoce como la ordenada media.

Prueba.
Por la última propiedad del teorema anterior:

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Como $b-a\neq 0$ se divide entre este valor y,

$$\frac{m(b-a)}{b-a} \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq \frac{M(b-a)}{b-a} \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$$

que también se puede expresar como:

$$f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq f(x_M)$$

Al aplicar en esta última expresión los teoremas de Wierstrass y Bolzano, se puede escribir:

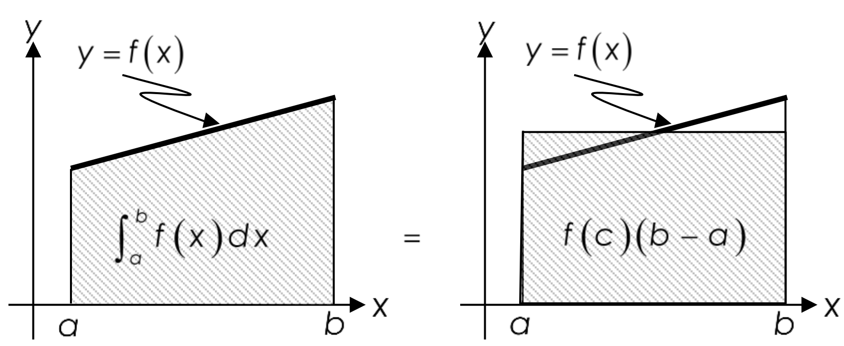
$$f(x_c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \quad ; \quad a \leq x_c \leq b$$

Finalmente se despeja la integral definida y queda demostrado el teorema. Así,

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_c)(b-a) \quad ; \quad a \leq x_c \leq b$$

Lo que expresa este importante teorema es que cuando una función es continua en un determinado intervalo cerrado $[a,b]$, entonces el área limitada por la gráfica de la función, el eje de las abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$ es equivalente al área del rectángulo cuyo ancho y altura son respectivamente $b-a$ y la ordenada media $f(x_c)$

En las siguientes figuras se ilustra este teorema; en ambos casos se observan las áreas equivalentes consideradas en el teorema, una producto de la integral definida y la otra definida por el intervalo de estudio y la ordenada media.

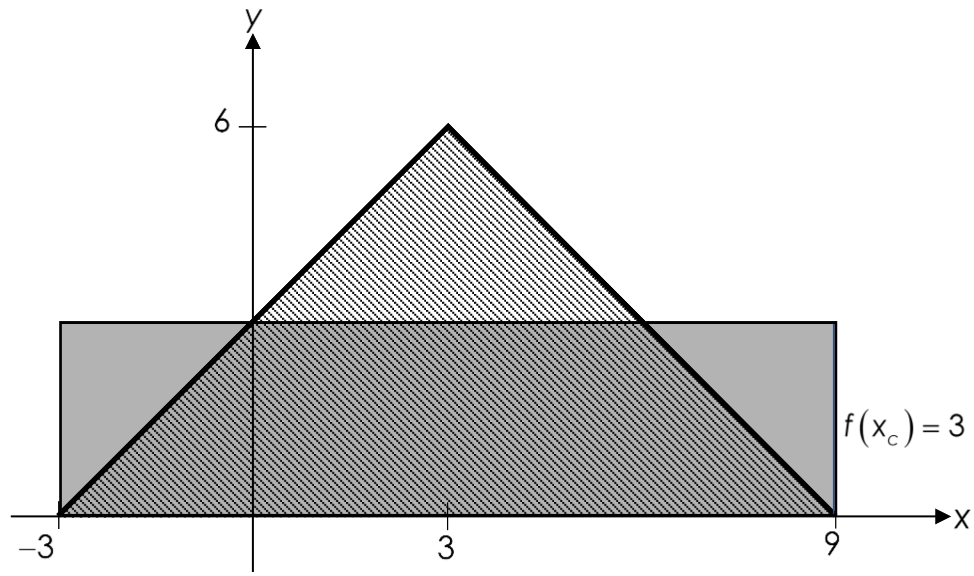


Ejemplo. Obtener la ordenada media de la integral definida

$$\int_{-3}^{9} f(x)dx \quad ; \quad f(x) = \begin{cases} x+3 & si \quad -3 \leq x \leq 3 \\ 9-x & si \quad \ \ 3 < x \leq 9 \end{cases}$$

Decir dónde se presenta la ordenada media y graficar en la misma figura el área equivalente.

Solución. La gráfica de esta función se muestra enseguida:



Todavía no es posible resolver la integral definida, como tal, pero se sabe, por la figura, que equivale al área bajo la curva, limitada por la función dada, el eje de las abscisas y las rectas de ecuaciones $x=-3$ y $x=9$. Y, como se observa, es el área del triángulo; luego

$$\int_{-3}^{9} f(x)dx=\frac{12\times 6}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_{-3}^{9} f(x)dx=36$$

Entonces, al aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral se obtiene que:

$$\int_a^b f(x)dx=f(x_c)(b-a) \quad \Rightarrow \quad 36=f(x_c)\left[9-(-3)\right] \quad \Rightarrow \quad 36=12f(x_c)$$

$$\therefore f(x_c)=3 \quad \text{(ordenada media)}$$

Para saber dónde se presenta la ordenada media se sustituye en las dos reglas de correspondencia de la función y se tiene que:

$$x_c+3=3 \quad \Rightarrow \quad x_c=-3 \quad y \quad 9-x_c=3 \quad \Rightarrow \quad x_c=6$$

INTEGRAL INDEFINIDA

Definición. Sea f una función definida en un intervalo cerrado $\left[a,b\right]$ y supóngase que existe otra función F continua en $\left[a,b\right]$ y derivable en (a,b) de manera que se cumple que:

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x) \quad \forall \quad x\in(a,b)$$

Entonces a F se le llama la integral indefinida o la antidiferencial de f en $\left[a,b\right]$ y se puede escribir que:

$$F(x)=\int f(x)dx$$

Si F existe, entonces se dice que la función f es integrable.

Ejemplo. Algunas antidiferenciales y sus respectivas funciones son:

x^5	es la antidiferencial de	$5x^4dx$
$\sec x$	es la antidiferencial de	$\sec x \tan x\, dx$
$\ln x$	es la antidiferencial de	$\dfrac{dx}{x}$
$\operatorname{sen}hx$	es la antidiferencial de	$\cos hx$

Considérense las parábolas

$$y=x^2-3 \quad ; \quad y=x^2 \quad ; \quad y=x^2+1$$

Las tres, como funciones, tienen como diferencial a $dy=2x\,dx$. Entonces, la antidiferencial de $2x\,dx$ no corresponde a un solo valor, por lo que es necesario introducir una constante conocida como "constante esencial y arbitraria", de tal forma que se puede escribir que: antidiferencial de $2x\,dx=x^2+C$, lo que se puede expresar como $\int 2x\,dx=x^2+C$. Luego, en términos generales,

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

donde C es la constante esencial y arbitraria de integración.

Como la integral indefinida equivale a la antidiferencial, constituye entonces la operación inversa a la derivada. Por lo que de aquí se desprende la siguiente expresión algebraica para integrar a la función identidad elevada a un exponente real, que es una de las expresiones fundamentales para integrar:

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad ; \quad n\neq -1$$

Prueba. Si se deriva este resultado se obtiene la función del integrando. Así,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right)=\frac{(n+1)x^{n+1-1}}{n+1}+0=x^n$$

En temas antecedentes se debió ver que la derivada de la función logaritmo natural está dada por:

$$y=\ln u\,;\ u=f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

luego,

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

De donde:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

Esta expresión da respuesta a la excepción de la fórmula:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{cuando } n = 1$$

Es importante expresar que formalmente, si se analiza el área bajo la curva $y = \frac{1}{x}$ (hipérbola equilátera), en el primer cuadrante, a partir de $x = 1$ y a este resultado se le compara con la tradicional función logarítmica, se ve que tienen las mismas propiedades, pero con la salvedad de que la hipérbola equilátera es continua en $\left[1, \mathbb{R}\right)$ y derivable en $(1, \infty)$. Y por ello es la "natural" función logarítmica.

Dos propiedades importantes que vale destacar y que ya se vieron para el caso de la integral definida son las siguientes:

$$\int k\, f(x) dx = k \int f(x) dx \quad ; \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\int \left[f(x) + g(x) \right] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Ejemplo. Resolver las integrales indefinidas y derivar el resultado:

$$i) \quad \int 9x^3 dx \quad ; \quad ii) \quad \int \frac{dx}{x^3} \quad ; \quad iii) \quad \int \left(2x^2 - 7x\right) dx$$

Solución.

Si se aplica lo tratado, es posible resolver estas integrales indefinidas como sigue:

$$i) \quad \int 9x^3 dx = 9 \int x^3 dx = 9\frac{x^4}{4} + C = \frac{9}{4}x^4 + C \quad ; \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{9}{4}x^4 + C\right) = 9x^3$$

$$ii) \quad \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C \quad ; \quad \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2x^2} + C\right) = \frac{1}{x^3}$$

$$iii) \quad \int \left(2x^2 - 7x\right) dx = 2\int x^2 dx - 7\int x dx = 2\frac{x^3}{3} - 7\frac{x^2}{2} + C = \frac{2x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + C$$

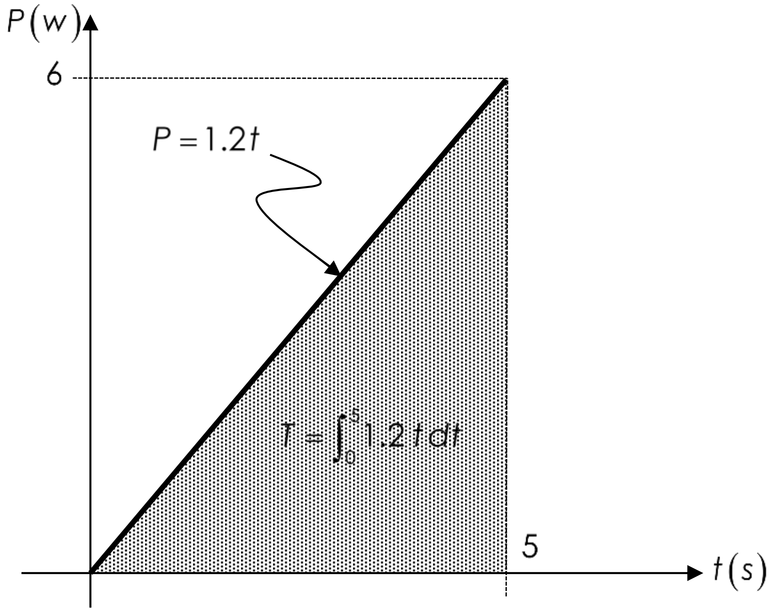
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + C\right) = 2x^2 - 7x$$

Se debe aclarar que cada integral del último ejercicio considera su constante esencial y arbitraria, pero se pueden unir al final en una sola constante.

Considérese el siguiente problema de aplicación, que ilustra lo estudiado:

Ejemplo. La potencia desarrollada por un motor en los primeros $5.0\,s$ de marcha está dada por la expresión $P = 1.2\,t$, en donde t está en segundos y P en watts. Calcular el trabajo desarrollado en ese tiempo, así como la potencia promedio.

Solución. Si se grafica la potencia P en términos del tiempo t se obtiene:



Como se sabe, la potencia se puede interpretar como la razón instantánea de variación del trabajo T con respecto al tiempo, esto es,

$$P = \frac{dT}{dt}$$

de donde

$$dT = P\,dt \quad \Rightarrow \quad \int dT = \int P\,dt \quad \Rightarrow \quad T = \int P\,dt$$

Luego, el trabajo equivale al área bajo la curva, es decir,

$$T = \int_0^5 P\,dt \quad \Rightarrow \quad T = \int_0^5 1.2\,t\,dt$$

Todavía no es posible resolver esta integral por los límites, pero, de acuerdo con la figura, es igual al área del triángulo, de donde,

$$T = \int_0^5 1.2\,t\,dt = \frac{5 \times 6}{2} = 15 \quad \therefore \quad T = 15 \text{ jolules}$$

La potencia promedio se calcula mediante el teorema del valor medio del cálculo integral. Así,

$$15 = P_m(5) \quad \Rightarrow \quad P_m = 3\,watts$$

Y se presenta en un tiempo de:

$$3 = 1.2t_{P_m} \quad \therefore \quad t_{P_m} = 2.5\,s$$

Integral definida con el límite superior variable

Sea la integral definida $\int_a^b f(x)dx$. Si se hace $x=u$ y se cambia el límite superior de la integral por "x", se tiene que $\int_a^x f(u)du$. Como se observa, el resultado de esta integral queda como función de "x".

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Teorema. Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$ y considérese un cierto valor $x\in[a,b]$. Si F es otra función definida a través de $F(x)=\int_a^x f(u)du$, entonces se cumple que

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

Prueba.
Se aplica a la función F la definición de derivada y se debe llegar a que es igual a la función f. Luego,

$$\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(u)du-\int_a^x f(u)du}{\Delta x}$$

Por propiedades de la integral es posible escribir que:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(u)du=\int_a^x f(u)du+\int_x^{x+\Delta x} f(u)du \quad ; \quad x\in[a,x+\Delta x]$$

de donde:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(u)du-\int_a^x f(u)du=\int_x^{x+\Delta x} f(u)du$$

Se sustituye en la derivada y,

$$\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(u)du}{\Delta x}$$

Se aplica el teorema del valor medio del cálculo integral y

$$\int_x^{x+\Delta x} f(u)du=f(x_c)\Delta x \quad ; \quad x_c\in[x,x+\Delta x]$$

luego, la derivada queda como,

$$\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_c)\Delta x}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dF(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0} f(x_c)$$

Si se toma en cuenta el intervalo anterior $x_c\in[x,x+\Delta x]$, entonces,

$$\Delta x\to 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_c\to x$$

Por lo tanto

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Ahora se analizará qué se hace con los límites en una integral definida.

REGLA DE BARROW

Sean las funciones f y F continuas en el intervalo $[a,b]$, tales que $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ Entonces se cumple que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Prueba. De acuerdo con el teorema fundamental del cálculo y la definición de la integral indefinida:

$$\int_a^x f(u)du = F(x) + C$$

$$x = a \quad \Rightarrow \quad \int_a^a f(u)du = 0 = F(a) + C \quad \Rightarrow \quad C = -F(a)$$

$$x = b \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(u)du = F(b) + C$$

$$C = -F(a) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(u)du = F(b) - F(a)$$

Se cambia u por x y finalmente se obtiene que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo. Resolver la integral definida $\int_{-1}^{2} \left(3x^2 - 5x\right)^2 dx$

Solución.

Se resuelve primero la integral indefinida y después se aplica la Regla de Barrow. Entonces,

$$\int \left(3x^2 - 5x\right)^2 dx = \int \left(9x^4 - 30x^3 + 25x^2\right)dx = \frac{9x^5}{5} - \frac{15x^4}{2} + \frac{25x^3}{3} + C$$

$$\int_{-1}^{2} \left(3x^2 - 5x\right)^2 dx = \left[\frac{9x^5}{5} - \frac{15x^4}{2} + \frac{25x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{9(2)^5}{5} - \frac{15(2)^4}{2} + \frac{25(2)^3}{3}\right) - \left(\frac{9(-1)^5}{5} - \frac{15(-1)^4}{2} + \frac{25(-1)^3}{3}\right)$$

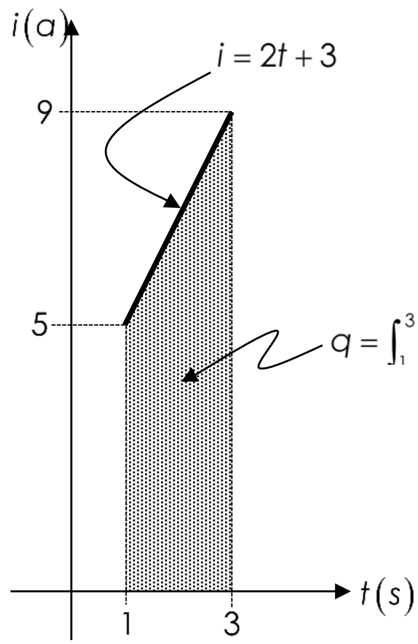
$$= \left(\frac{288}{5} - 120 + \frac{200}{3}\right) - \left(-\frac{9}{5} - \frac{15}{2} - \frac{25}{3}\right) = \frac{297}{5} - \frac{225}{2} + \frac{225}{3}$$

$$\therefore \quad \int_{-1}^{2} \left(3x^2 - 5x\right)^2 dx = 21.9$$

En el siguiente ejercicio ya es posible aplicar la Regla de Barrow.

Ejemplo. La intensidad de corriente que pasa por un cable está dada por $i = 2t + 3$ donde i es la intensidad de la corriente en amperes y t el tiempo en segundos. Calcular la cantidad de carga eléctrica que pasa por este cable en el intervalo de $t = 1s$ a $t = 3s$, así como la intensidad de corriente promedio en dicho intervalo.

Solución. La gráfica de intensidad de corriente – tiempo es la siguiente:



La intensidad de corriente instantánea es la razón de cambio de la carga eléctrica entre el tiempo. Luego se puede escribir que:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad dq = i\,dt \quad \Rightarrow \quad \int dq = \int i\,dt \quad \Rightarrow \quad q = \int i\,dt$$

Entonces la carga se calcula a través de la integral definida:

$$q = \int_1^3 (2t+3)\,dt = \left[t^2 + 3t\right]_1^3 = \left[3^2 + 3(3)\right] - \left[1^2 + 3(1)\right] = 14$$

$$\therefore q = 14 \text{ amperes}$$

y la intensidad de corriente promedio, mediante el teorema del valor medio del cálculo integral es:

$$14 = i_m(2) \quad \therefore \quad i_m = 7 \text{ amperes}$$

Y se presenta en el tiempo:

$$2t_{i_m} + 3 = 7 \quad \Rightarrow \quad t_{i_m} = 2\ s$$

INTEGRALES INMEDIATAS E INTEGRALES QUE SE VUELVEN INMEDIATAS MEDIANTE CAMBIOS DE VARIABLES Y COMPLETANDO LA DIFERENCIAL

Ahora se presentan expresiones que determinan la integral de funciones que, para comprobarse, bastaría con derivar los resultados para llegar a los integrandos. Y después se realizarán ejercicios para ilustrar estas expresiones.

$$\int du = u + C \quad ; \quad \int (u + v - w)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx - \int w\, dx$$

$$\int k\, du = k \int du = ku + C \quad ; \quad k = \text{constante}$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \; ; n \neq -1$$

$$\int sen u\, du = -\cos u + C \quad ; \quad \int \cos u\, du = sen u + C \quad ; \quad \int \sec^2 u\, du = \tan u + C$$

$$\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C \quad ; \quad \int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$$

$$\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C \quad ; \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = angsen \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} ang\tan \frac{u}{a} + C \quad ; \quad \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} ang\sec \frac{u}{a} + C$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int \left(\sqrt{x} - 1\right)^3 dx$$

Solución.

$$\int \left(\sqrt{x} - 1\right)^3 dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 3x + 3x^{\frac{1}{2}} - 1 \right) dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{3x^2}{2} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - x + C$$

$$\therefore \quad \int \left(\sqrt{x} - 1\right)^3 dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{3x^2}{2} + 2x^{\frac{3}{2}} - x + C$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int 6x \left(x^2 - 5\right)^4 dx$$

Solución.

Se realiza el cambio de variable $u = x^2 - 5 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$. Entonces,

$$\int 6x \left(x^2 - 5\right)^4 dx = 6 \int x \left(x^2 - 5\right)^4 dx = \frac{6}{2} \int 2x \left(x^2 - 5\right)^4 dx$$

$$\frac{6}{2} \int u^4 du = 3 \frac{u^5}{5} + C \quad \therefore \quad \int 6x \left(x^2 - 5\right)^4 dx = \frac{3\left(x^2 - 5\right)^5}{5} + C$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int \frac{2x^3 dx}{\sqrt{11 - 3x^4}}$$

Solución.

Si se realiza el cambio de variable $u = 11 - 3x^4 \quad \Rightarrow \quad du = -12x^3 dx$. Luego,

$$\int \frac{2x^3dx}{\sqrt{11-3x^4}} = 2\int \frac{x^3dx}{\sqrt{11-3x^4}} = \frac{2}{-12}\int \frac{-12x^3dx}{\sqrt{11-3x^4}}$$

$$-\frac{1}{6}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{6}\int u^{-\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{6}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{3}u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{2x^3dx}{\sqrt{11-3x^4}} = -\frac{1}{3}\left(11-3x^4\right)^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{11-3x^4} + C$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int \frac{\sqrt{7+2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solución.
Se lleva a cabo el cambio de variable:

$$u = 7+2\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{2dx}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\int \sqrt{u}du = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \quad \therefore \quad \int \frac{\sqrt{7+2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3}\left(7+2\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x+7}}dx$$

Solución. Se realiza la siguiente sustitución que resuelve la integral:

$$u = x+7 \quad \Rightarrow \quad du = dx \quad ; \quad x = u-7$$

Y se tiene que:

$$\int \frac{u-7+2}{\sqrt{u}}du = \int \frac{u-5}{u^{\frac{1}{2}}}\,du = \int \left(u^{\frac{1}{2}} - 5u^{-\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{5u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \quad \therefore \quad \int \frac{x+2}{\sqrt{x+7}}dx = \frac{2}{3}(x+7)^{\frac{3}{2}} - 10(x+7)^{\frac{1}{2}} + C$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int x sen\left(1-3x^2\right)dx$$

Solución. Se realiza un cambio de variable y se aplica la fórmula correspondiente:

$$u = 1 - 3x^2 \quad \Rightarrow \quad du = -6x\,dx$$

$$\int x\,sen\left(1-3x^2\right)dx = -\frac{1}{6}\int\left[-6x\,sen\left(1-3x^2\right)\right]dx$$

$$-\frac{1}{6}\int sen\,u\,du = \frac{1}{6}\cos u + C \quad \therefore \quad \int x\,sen\left(1-3x^2\right)dx = \frac{\cos\left(1-3x^2\right)}{6} + C$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos x}$$

Solución.
Primero se resuelve la integral definida y después se aplica la regla de Barrow al resultado. Se multiplican en primer término, numerador y denominador, por el binomio conjugado del binomio del denominador. Así,

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{dx}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{1+\cos x}{sen^2 x}$$

$$\int \frac{1}{sen^2 x} + \int \frac{\cos x}{sen^2 x}dx = \int \csc^2 x\,dx + \int \csc x \cot x\,dx = -\cot x - \csc x + C$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos x} = \left[-\cot x - \csc x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) - \csc\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[-\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) - \csc\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \left[0-1\right] - \left[-1.732-2\right] \approx 2.732$$

$$\therefore \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos x} \approx 2.732$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int\left(\frac{\sec 3x}{1-\tan 3x}\right)^2 dx$$

Solución.

$$\int\left(\frac{\sec 3x}{1-\tan 3x}\right)^2 dx = \int \frac{\sec^2 3x}{\left(1-\tan 3x\right)^2}dx$$

Se hace el siguiente cambio de variable y se resuelve de manera inmediata como:

$$u = 1-\tan 3x \quad \Rightarrow \quad du = -3\sec^2 3x\,dx$$

$$\int \frac{\sec^2 3x}{\left(1-\tan 3x\right)^2}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\sec^2 3x}{\left(1-\tan 3x\right)^2}dx \quad ; \quad -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{3}\int u^{-2}du$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{u^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{3u}+C$$

$$\therefore \quad \int\left(\frac{\sec 3x}{1-\tan 3x}\right)^2 dx=\frac{1}{3(1-\tan 3x)}+C$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int\frac{dx}{sen^2 x\cos^2 x}$$

Solución. Se utiliza la identidad trigonométrica $sen^2 x+\cos^2 x=1$ y:

$$\int\frac{dx}{sen^2 x\cos^2 x}=\int\frac{sen^2 x+\cos^2 x}{sen^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{sen^2 x}{sen^2 x\cos^2 x}dx+\int\frac{\cos^2 x}{sen^2 x\cos^2 x}dx$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{sen^2 x}=\int\sec^2 x\,dx+\int\csc^2 x\,dx$$

$$\therefore \quad \int\frac{dx}{sen^2 x\cos^2 x}=\tan x-\cot x+C$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int\frac{\csc x^{\frac{3}{4}}\cot x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}dx$$

Solución. Se lleva a cabo un cambio de variable: $u=x^{\frac{3}{4}} \quad \Rightarrow \quad du=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}dx$

$$\int\frac{\csc x^{\frac{3}{4}}\cot x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}dx=\int x^{-\frac{1}{4}}\left(\csc x^{\frac{3}{4}}\cot x^{\frac{3}{4}}\right)dx=\frac{1}{\frac{3}{4}}\int\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}\left(\csc x^{\frac{3}{4}}\cot x^{\frac{3}{4}}\right)dx$$

$$=\frac{4}{3}\int\csc u\cot u\,du=-\frac{4}{3}\csc u+C$$

$$\therefore \quad \int\frac{\csc x^{\frac{3}{4}}\cot x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}dx=-\frac{4}{3}\csc x^{\frac{3}{4}}+C$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int\frac{\sqrt{ang\sec x}}{3x\sqrt{x^2-1}}dx$$

Solución.

Se utiliza el cambio de variable: $u = ang\sec x \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Entonces,

$$\frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{ang\sec x}}{x\sqrt{x^2-1}}dx \quad ; \quad \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{\sqrt{ang\sec x}}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{2}{9}\left(ang\sec x\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int \frac{2+\sqrt{ang\cot 3x}}{1+9x^2}dx$$

Solución.

$$\int \frac{2+\sqrt{ang\cot 3x}}{1+9x^2}dx = 2\int \frac{dx}{1+9x^2} + \int \frac{\sqrt{ang\cot 3x}}{1+9x^2}dx$$

$$2\int \frac{dx}{1+9x^2}\ ; \quad u^2 = 9x^2 \quad \Rightarrow \quad u = 3x \quad \Rightarrow \quad du = 3dx \quad ; \quad a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a}ang\tan\frac{u}{a} + C \quad \therefore \quad 2\int \frac{dx}{1+9x^2} = \frac{2}{3}ang\tan 3x + C_1$$

$$\int \frac{\sqrt{ang\cot 3x}}{1+9x^2}dx\ ; \quad u = ang\cot 3x \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{3dx}{1+9x^2}$$

$$-\frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du = -\frac{1}{3}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + C \quad \therefore \quad \int \frac{\sqrt{ang\cot 3x}}{1+9x^2}dx = -\frac{2}{9}\left(ang\cot 3x\right)^{\frac{3}{2}} + C_2$$

Finalmente:

$$\therefore \quad \int \frac{2+\sqrt{ang\cot 3x}}{1+9x^2}dx = \frac{2}{3}ang\tan 3x - \frac{2}{9}\left(ang\cot 3x\right)^{\frac{3}{2}} + C \quad ; \quad \left(C_1 + C_2 = C\right)$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{7+6x-x^2}}$$

Solución. Se resuelve primero la integral indefinida y después se aplica la Regla de Barrow

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7+6x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-6x-7\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-6x+9-9-7\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16-\left(x-3\right)^2}}$$

$$u^2=(x-3)^2 \quad \Rightarrow \quad u=x-3 \quad \Rightarrow \quad du=dx \quad ; \quad a^2=16 \quad \Rightarrow \quad a=4$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=angsen\frac{u}{a}+C \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{7+6x-x^2}}=angsen\frac{x-3}{4}+C$$

$$\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{7+6x-x^2}}=\left[angsen\frac{x-3}{4}\right]_3^5=angsen\frac{1}{2}-angsen(0)=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \quad \int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{7+6x-x^2}}=\frac{\pi}{6}$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int \frac{dx}{(4x-20)\sqrt{x^2-10x+16}}$$

Solución.

$$\int \frac{dx}{(4x-20)\sqrt{x^2-10x+16}}=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-5)\sqrt{x^2-10x+25-25+16}}=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-5)\sqrt{(x-5)^2-9}}$$

$$u^2=(x-5)^2 \quad \Rightarrow \quad u=x-5 \quad \Rightarrow \quad du=dx \quad ; \quad a^2=9 \quad \Rightarrow \quad a=3$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}\right)ang\sec\frac{u}{a}+C$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{(3x-6)\sqrt{x^2-4x-12}}=\frac{1}{12}ang\sec\frac{x-5}{3}+C$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES CON SOLUCIONES LOGARÍTMICAS

Una expresión que ya se trató es la siguiente:

$$\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C$$

Ahora se presentarán y verificarán otras que involucran a funciones logarítmicas en su solución.

$$\int \tan u\,du \quad ; \quad \int \tan u\,du=\int \frac{sen u}{\cos u}du \quad ; \quad v=\cos u \quad \Rightarrow \quad dv=-sen u\,du$$

$$-\int \frac{dv}{v}=-\ln|v|+C=-\ln|\cos u|+C=\ln|\sec u|+C$$

$$\therefore \quad \int \tan u\,du=-\ln|\cos u|+C=\ln|\sec u|+C$$

$$\int \cot u\,du \quad ; \quad \int \cot u\,du=\int \frac{\cos u}{sen u}du \quad ; \quad v=sen u \quad \Rightarrow \quad dv=\cos u\,du$$

$$\int \frac{dv}{v}=\ln|v|+C=\ln|sen u|+C \quad \therefore \quad \int \cot u=\ln|sen u|+C$$

$$\int \sec u\,du \quad ; \quad \int \sec u\,du = \int \frac{\sec u\left(\sec u + \tan u\right)}{\sec u + \tan u}du = \int \frac{\sec^2 u + \sec u \tan u}{\sec u + \tan u}du$$

$$v = \sec u + \tan u \ \Rightarrow \ dv = \left(\sec u \tan u + \sec^2 u\right)du$$

$$\Rightarrow \ \int \frac{dv}{v} = \ln\left|v\right| + C = \ln\left|\sec u + \tan u\right| + C$$

$$\therefore \quad \int \sec u\,du = \ln\left|\sec u + \tan u\right| + C$$

$$\int \csc u\,du \quad ; \quad \int \csc u\,du = \int \frac{\csc u\left(\csc u - \cot u\right)}{\csc u - \cot u}du = \int \frac{\csc^2 u - \csc u \cot u}{\csc u - \cot u}du$$

$$v = \csc u - \cot u \ \Rightarrow \ dv = \left(-\csc u \cot u + \csc^2 u\right)du$$

$$\int \frac{dv}{v} = \ln\left|v\right| + C = \ln\left|\csc u - \cot u\right| + C$$

$$\therefore \quad \int \csc u\,du = \ln\left|\csc u - \cot u\right| + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} \quad ; \quad a = \text{constante} \quad \therefore \quad \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} \quad ; \quad a = \text{constante} \quad \therefore \quad \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} \quad \therefore \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$$

Al resolver integrales de este tipo, es importante considerar el dominio de la función, lo que las puede hacer muy diferentes en cuanto a resultados.

Ejemplo. Resolver las siguientes integrales:

$$i) \ \int x\cot\left(3 - 5x^2\right)dx \quad ; \quad ii) \int \frac{\tan\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}dx \quad ; \quad iii) \int \frac{\csc\frac{4}{x}}{x^2}dx \quad ; \quad iv) \int \frac{7x}{\cos x^2}dx$$

Solución.

$$i) \ \int x\cot\left(3 - 5x^2\right)dx \quad ; \quad u = 3 - 5x^2 \quad \Rightarrow \quad du = -10x\,dx$$

$$-\frac{1}{10}\int \cot u\,du = -\frac{1}{10}\ln\left|\operatorname{sen} u\right| + C \quad \therefore \quad \int x\cot\left(3 - 5x^2\right)dx = -\frac{1}{10}\ln\left|\operatorname{sen}\left(3 - 5x^2\right)\right| + C$$

$$ii)\quad \int \frac{\tan\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}dx \quad ; \quad u=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{2}{3}\int \tan u du = -\frac{2}{3}\ln\left|\cos u\right| + C = \frac{2}{3}\ln\left|\sec u\right| + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{\tan\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}dx = -\frac{2}{3}\ln\left|\cos\sqrt{x}\right| + C = \frac{2}{3}\ln\left|\sec\sqrt{x}\right|$$

$$iii)\quad \int \frac{\csc\frac{4}{x}}{x^2}dx \quad ; \quad u=\frac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad du=-\frac{4}{x^2}dx$$

$$-\frac{1}{4}\int \csc u du = -\frac{1}{4}\ln\left|\csc u - \cot u\right| + C \quad \therefore \quad \int \frac{\csc\frac{4}{x}}{x^2}dx = -\frac{1}{4}\ln\left|\csc\frac{4}{x} - \cot\frac{4}{x}\right| + C$$

$$iv)\quad \int \frac{7x}{\cos x^2}dx = 7\int x\sec x^2 dx \quad ; \quad u=x^2 \quad \Rightarrow \quad du=2xdx$$

$$\frac{7}{2}\int \sec u du = \frac{7}{2}\ln\left|\sec u + \tan u\right| + C \quad \therefore \quad \int \frac{7x}{\cos x^2}dx = \frac{7}{2}\ln\left|\sec x^2 + \tan x^2\right| + C$$

Ejemplo. Resolver las integrales siguientes:

$$i)\int \frac{dx}{16x^2-5} \quad ; \quad ii)\int \frac{dx}{144-9x^2} \quad ; \quad iii)\int \frac{dx}{\sqrt{36x^2-121}} \quad ; \quad iv)\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-20x+21}}$$

Solución.

$$i)\int \frac{dx}{16x^2-5}; \quad u^2=16x^2 \quad \Rightarrow \quad u=4x \quad \Rightarrow \quad du=4dx \quad ; \quad a^2=5 \quad \Rightarrow \quad a=\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C \quad \therefore \quad \int \frac{dx}{16x^2-5} = \frac{1}{8\sqrt{5}}\ln\left[\frac{4x-\sqrt{5}}{4x+\sqrt{5}}\right] + C$$

$$ii)\int \frac{dx}{144-9x^2}; \quad u^2=9x^2 \quad \Rightarrow \quad u=3x \quad \Rightarrow \quad du=3dx \quad ; \quad a^2=144 \quad \Rightarrow \quad a=12$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C \quad \therefore \quad \int \frac{dx}{144-9x^2} = \frac{1}{72}\ln\left|\frac{12+3x}{12-3x}\right| + C = \frac{1}{72}\ln\left|\frac{4+x}{4-x}\right| + C$$

$$iii)\int \frac{dx}{\sqrt{36x^2-121}} \quad ; \quad u^2=36x^2 \quad \Rightarrow \quad u=6x \quad \Rightarrow \quad du=6dx \quad ; \quad a^2=121 \quad \Rightarrow \quad a=11$$

$$\frac{1}{6}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{6}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C \quad \therefore \quad \int \frac{dx}{\sqrt{36x^2-121}} = \frac{1}{6}\ln\left|6x+\sqrt{36x^2-121}\right| + C$$

$$iv)\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-20x+21}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-20x+25-25+21}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-5)^2-4}}$$

$$u^2=(2x-5)^2 \quad\Rightarrow\quad u=2x-5 \quad\Rightarrow\quad du=2dx \quad;\quad a^2=4 \quad\Rightarrow\quad a=2$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{\sqrt{(2x-5)^2-4}}=\frac{1}{2}\ln\left|2x-5+\sqrt{(2x-5)^2-4}\right|+C$$

Ejemplo. Resolver las integrales:

$$i)\ \int\frac{x+6}{\sqrt{x^2+4x}}dx \quad;\quad ii)\ \int\frac{4x-11}{4x^2+12x-7}dx$$

$$iii)\ \int\frac{6x-1}{\sqrt{9x^2-24x+20}}dx \quad;\quad iv)\ \int\frac{6x-2}{52-8x-x^2}dx$$

Solución.

$$i)\quad \int\frac{x+6}{\sqrt{x^2+4x}}dx \quad;\quad u=x^2+4x \quad\Rightarrow\quad du=2(x+2)dx$$

$$\int\frac{x+6}{\sqrt{x^2+4x}}dx=\int\frac{x+2+4}{\sqrt{x^2+4x}}dx=\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}dx+4\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$$

$$\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}dx \quad;\quad \frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C_1=\sqrt{u}+C_1$$

$$\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}dx=\sqrt{x^2+4x}+C_1$$

$$4\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}} \quad;\quad 4\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+4-4}}=4\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4}}$$

$$u^2=(x+2)^2 \quad\Rightarrow\quad u=x+2 \quad\Rightarrow\quad du=dx \quad;\quad a^2=4 \quad\Rightarrow\quad a=2$$

$$4\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=4\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C_2 \quad;\quad 4\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}=4\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right|+C_2$$

$$\therefore\quad \int\frac{x+6}{\sqrt{x^2+4x}}dx=\sqrt{x^2+4x}+4\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right|+C \quad;\quad (C_1+C_2=C)$$

$$ii)\ \int\frac{4x-11}{4x^2+12x-7}dx \quad;\quad u=4x^2+12x-7 \quad\Rightarrow\quad du=4(2x+3)dx=2(4x+6)dx$$

$$\int\frac{4x-11}{4x^2+12x-7}dx=\int\frac{4x+6-17}{4x^2+12x-7}dx=\int\frac{4x+6}{4x^2+12x-7}dx-17\int\frac{dx}{4x^2+12x-7}$$

$$\int \frac{4x+6}{4x^2+12x-7}dx \quad ; \quad \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C_1$$

$$\int \frac{4x+6}{4x^2+12x-7}dx = \frac{1}{2}\ln\left|4x^2+12x-7\right| + C_1$$

$$17\int \frac{dx}{4x^2+12x-7} = 17\int \frac{dx}{4x^2+12x+9-9-7} = 17\int \frac{dx}{(2x+3)^2-16}$$

$$u^2 = (2x+3)^2 \quad \Rightarrow \quad u = 2x+3 \quad \Rightarrow \quad du = 2dx \quad ; \quad a^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

$$\frac{17}{2}\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{17}{2}\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C_2 \quad ; \quad 17\int \frac{dx}{4x^2+12x-7} = \frac{17}{16}\ln\left|\frac{2x+3-4}{2x+3+4}\right| + C_2$$

$$= \frac{17}{16}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+7}\right| + C_2$$

$$\therefore \quad \int \frac{4x-11}{4x^2+12x-7}dx = \frac{1}{2}\ln\left|4x^2+12x-7\right| - \frac{17}{16}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+7}\right| + C \quad ; \quad (C_1 + C_2 = C)$$

iii) $\int \frac{6x-1}{\sqrt{9x^2-24x+20}}dx \quad ; \quad u = 9x^2-24x+20 \quad \Rightarrow \quad du = 3(6x-8)dx$

$$\int \frac{6x-1}{\sqrt{9x^2-24x+20}}dx = \int \frac{6x-8+7}{\sqrt{9x^2-24x+20}}dx$$

$$= \int \frac{6x-8}{\sqrt{9x^2-24x+20}}dx + 7\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-24x+20}}$$

$$\int \frac{6x-8}{\sqrt{9x^2-24x+20}}dx \quad ; \quad \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1$$

$$\int \frac{6x-8}{\sqrt{9x^2-24x+20}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{9x^2-24x+20} + C_1$$

$$7\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-24x+20}} = 7\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-24x+16-16+20}} = 7\int \frac{dx}{\sqrt{(3x-4)^2+4}}$$

$$u^2 = (3x-4)^2 \quad \Rightarrow \quad u = 3x-4 \quad \Rightarrow \quad du = 3dx \quad ; \quad a^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

$$7\int \frac{dx}{\sqrt{(3x-4)^2+4}} \quad ; \quad \frac{7}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{7}{3}\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + C_2$$

$$7\int \frac{dx}{\sqrt{(3x-4)^2+4}} = \frac{7}{3}\ln\left|3x-4+\sqrt{9x^2-24x+20}\right| + C_2$$

$$\therefore \quad \int \frac{6x-1}{\sqrt{9x^2-24x+20}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{9x^2-24x+20} + \frac{7}{3}\ln\left|3x-4+\sqrt{9x^2-24x+20}\right| + C$$

$$iv)\ \int \frac{6x-2}{52-8x-x^2}dx \quad ; \quad u=52-8x-x^2 \quad \Rightarrow \quad du=-\frac{1}{3}(6x+24)dx$$

$$\int \frac{6x-2}{52-8x-x^2}dx=\int \frac{6x+24-26}{52-8x-x^2}dx=\int \frac{6x+24}{52-8x-x^2}dx-26\int \frac{dx}{52-8x-x^2}$$

$$\int \frac{6x+24}{52-8x-x^2}dx \quad ; \quad -3\int \frac{du}{u}=-3\ln|u|+C_1$$

$$\int \frac{6x+24}{52-8x-x^2}dx=-3\ln\left|52-8x-x^2\right|+C_1$$

$$26\int \frac{dx}{20-8x-x^2}=26\int \frac{dx}{-\left(x^2+8x-20\right)}$$

$$=26\int \frac{dx}{-\left(x^2+8x+16-16-20\right)}=26\int \frac{dx}{36-\left(x+4\right)^2}$$

$$u^2=\left(x+4\right)^2 \quad \Rightarrow \quad u=x+4 \quad \Rightarrow \quad du=dx \quad ; \quad a^2=36 \quad \Rightarrow \quad a=6$$

$$26\int \frac{du}{a^2-u^2}=26\cdot\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+C_2 \ ; \ 26\int \frac{dx}{20-8x-x^2}$$

$$=\frac{13}{6}\ln\left|\frac{6+x+4}{6-x-4}\right|+C_2=\frac{13}{6}\ln\left|\frac{10+x}{2-x}\right|+C_2$$

$$\therefore \quad \int \frac{6x-2}{52-8x-x^2}dx=-3\ln\left|52-8x-x^2\right|-\frac{13}{6}\ln\left|\frac{10+x}{2-x}\right|+C$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES EXPONENCIALES

Teorema. Sean las funciones $f(u)=e^u \quad ; \quad f(u)=b^u$

Entonces, sus respectivas integrales son:

$$\int e^u du=e^u+C \quad ; \quad \int b^u du=\frac{b^u}{\ln b}+C$$

Prueba.

$$d\left(e^u+C\right)=e^u du \quad ; \quad d\left(\frac{b^u}{\ln b}+C\right)=b^u du$$

Ejemplo. Calcular las integrales siguientes:

$$i)\quad f(x)=\int x^4 e^{x^5}dx \quad ; \quad ii)\quad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}}dx \quad ; \quad iii)\quad \int \frac{8^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$$

$$iv)\int_1^3 \frac{e^{\frac{7}{x}}}{x^2}dx \quad ; \quad v)\int e^{-x}\cot\left(e^{-x}\right)dx \quad ; \quad vi)\int (6-2x)10^{(3-x)^2}dx$$

Solución.

$$i)\quad \int x^4 e^{x^5}\,dx \quad ; \quad u = x^5 \quad \Rightarrow \quad du = 5x^4 dx \quad ; \quad \frac{1}{5}\int e^u du = \frac{e^u}{5} + C$$

$$\therefore \quad \int x^4 e^{x^5}\,dx = \frac{e^{x^5}}{5} + C$$

$$ii)\quad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}}\,dx \quad ; \quad u = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad \frac{2}{3}\int e^u du = \frac{2}{3}e^u + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3}e^{\sqrt{x}} + C$$

$$iii)\quad \int \frac{8^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = \int 8^{\tan x}\sec^2 x\,dx \quad ; \quad u = \tan x \quad \Rightarrow \quad du = \sec^2 x\,dx$$

$$\int 8^u du = \frac{8^u}{\ln 8} + C \quad \therefore \quad \int \frac{8^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = \frac{8^{\tan x}}{\ln 8} + C$$

$$iv)\int_1^3 \frac{e^{\frac{7}{x}}}{x^2}\,dx \quad ; \quad \int \frac{e^{\frac{7}{x}}}{x^2}dx \quad ; \quad u = \frac{7}{x} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{7}{x^2}dx \quad ; \quad -\frac{1}{7}\int e^u du = -\frac{e^u}{7} + C$$

$$\int \frac{e^{\frac{7}{x}}}{x^2}dx = -\frac{e^{\frac{7}{x}}}{7} + C \quad ; \quad \int_1^3 \frac{e^{\frac{7}{x}}}{x^2}\,dx = \left[-\frac{e^{\frac{7}{x}}}{7}\right]_1^3 = -\frac{e^{\frac{7}{3}}}{7} + \frac{e^7}{7} \quad \therefore \quad \int_1^3 \frac{e^{\frac{7}{x}}}{x^2}\,dx \approx 155.19$$

$$v)\quad \int e^{-x}\cot\left(e^{-x}\right)dx \quad ; \quad u = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad du = -e^{-x}dx \quad ; \quad -\int \cot u\,du = -\ln\left|sen u\right| + C$$

$$\therefore \quad \int e^{-x}\cot\left(e^{-x}\right)dx = -\ln\left|sen e^{-x}\right| + C$$

$$vi)\int (6-2x)\,10^{(3-x)^2}\,dx \quad ; \quad u = (3-x)^2 \quad \Rightarrow \quad du = -2(3-x)du = -(6-2x)dx$$

$$-\int 10^u du = -\frac{10^u}{\ln 10} + C \quad \therefore \quad \int (6-2x)\,10^{(3-x)^2}\,dx = -\frac{10^{(3-x)^2}}{\ln 10} + C$$

REGLA DE L'HOPITAL

Cuando se estudiaron los límites de una función, se trataron las formas indeterminadas al calcular sus valores, que son las siguientes:

$$\frac{0}{0}\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ 0\cdot\infty\ ,\ \infty-\infty\ ,\ 0^0\ ,\ \infty^0\ ,\ 1^\infty$$

Ahora se verá cómo quitar una indeterminación como estas y lograr encontrar el valor del límite, si existe. Primero se enunciará un teorema del gran matemático francés Agustín Cauchy.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY
Sean f y g continuas en un intervalo $\left[a,b\right]$ y diferenciables en el intervalo $\left(a,b\right)$, y sea $g'\left(x\right)\neq 0 \quad \forall\, x\in\left(a,b\right)$. Entonces existe un número $c\in\left(a,b\right)$ tal que:

$$\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{g\left(b\right)-g\left(a\right)}=\frac{f'\left(c\right)}{g'\left(c\right)}$$

Teorema. Regla de L'Hopital
Sean las funciones f y g diferenciables en cada punto de un intervalo $\left(a,b\right)$ que contiene al valor "c" excepto posiblemente en este valor; y sea $g'\left(x\right)\neq 0$ para toda $x\neq c$ en el intervalo. Sea también L que denota tanto un valor real o bien $+\infty$ o $-\infty$, y supóngase que $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ es una forma indeterminada en "c". Luego,

$$\lim_{x\to c}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to c}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=L$$

De acuerdo con esto, el límite del cociente de dos funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas. Y si en el límite de este cociente se vuelve a presentar una indeterminación de las formas $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, se repite nuevamente la Regla de L'Hopital hasta que el resultado esté determinado o no exista el límite.

Ejemplo. Calcular el valor de los límites siguientes:

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} \quad ; \quad ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{sen^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}\left(1+\cos x\right)} \quad ; \quad iii)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

Solución.

$i)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}=\dfrac{0}{0}\left(\text{indeterminación}\right)$

Se aplica L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=\frac{1}{1}=1 \quad \therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$$

ii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{4}(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}sen^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2}{4}(1+\cos x)}=\dfrac{\dfrac{1}{2}sen^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{4}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos x\right)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}sen^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{4}\cos^2\dfrac{x}{2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}sen^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{sen\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)\times\lim_{x\to 0}\frac{sen\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{sen^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

Aquí se usó solo trigonometría y al final la regla de L'Hopital para el segundo límite.

iii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\dfrac{\infty}{-\infty}$ (indeterminación)

Se aplica L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\lim_{x\to}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Rightarrow-\infty\quad\therefore\quad\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\text{ no existe}$$

Ejemplo. Obtener el valor de los límites:

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{4e^x-4x-x^2}{x^2}\quad;\quad ii)\ \lim_{x\to 1}\frac{ang\cot x-\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-x}\quad;\quad iii)\ \lim_{x\to 0}\frac{5^x-3^x}{x}$$

Solución.

i) $\lim_{x\to 0}\dfrac{4e^x-4x-x^2-4}{x^2}=\dfrac{0}{0}$ (indeterminación)

Se aplica L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4e^x-4x-x^2-4}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^x-4-2x}{2x}=\frac{0}{0}\text{ (indeterminación)}$$

Se aplica nuevamente L'Hopital y:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4e^x-4-2x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^x-2}{2}=\frac{2}{2}=1\quad\therefore\quad\lim_{x\to 0}\frac{4e^x-4x-x^2-4}{x^2}=1$$

ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ang\cot x-\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{1-x}=\dfrac{0}{0}(\text{indeterminación})$

Se aplica L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to 1}\frac{ang\cot x-\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2+1}}{-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}\quad\therefore\quad \lim_{x\to 1}\frac{ang\cot x-\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-x}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo. Calcular el valor de los siguientes límites:

i) $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{18}{x^2-9}-\dfrac{x}{x-3}\right)$; *ii)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7}{sen\,x}-\dfrac{6}{1-\cos x}\right)$; *iii)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\csc x-\dfrac{\cos x}{x}\right)$

Solución.

i) $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{18}{x^2-9}-\dfrac{x}{x-3}\right)=\infty-\infty\ (\text{indeterminación})$

$$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{18}{x^2-9}-\frac{x}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3^+}\frac{18-x(x+3)}{x^2-9}=\lim_{x\to 3^+}\frac{18-x^2-3x}{x^2-9}=\frac{0}{0}(\text{indeterminación})$$

Se aplica L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{18-x^2-3x}{x^2-9}=\lim_{x\to 3^+}=\frac{-2x-3}{2x}=\frac{-9}{6}=-\frac{3}{2}\quad\therefore\quad \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{18}{x^2-9}-\frac{x}{x-3}\right)=-\frac{3}{2}$$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7}{sen\,x}-\dfrac{6}{1-\cos x}\right)=\infty-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7}{sen\,x}-\dfrac{6}{1-\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7(1-\cos x)-6senx}{senx(1-\cos x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{7-7\cos x-6senx}{senx-senx\cos x}=\frac{0}{0}(indeterminación)$$

Se aplica L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7-7\cos x-6senx}{senx-senx\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{7senx-6\cos x}{\cos x+sen^2x-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{7senx-6\cos x}{\cos x-\left(\cos^2 x-sen^2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{7senx-6\cos x}{\cos x-\cos 2x}=\frac{-6}{0}\to\infty\quad\therefore\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{7}{sen\,x}-\frac{6}{1-\cos x}\right)=\text{no existe}$$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\csc x-\dfrac{\cos x}{x}\right)=\infty-\infty\ (\text{indeterminación})$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{senx}-\frac{\cos x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-senx\cos x}{xsenx}=\frac{0}{0}(\text{indeterminación})$$

Se aplica L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-senx\cos x}{xsenx}=\lim_{x\to 0}\frac{1+sen^2x-\cos^2 x}{x\cos x+senx}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(\cos^2 x-sen^2x\right)}{x\cos x+senx}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\cos x+senx}=\frac{0}{0}\left(\text{indeterminación}\right)$$

Se aplica nuevamente L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\cos x+senx}=\lim_{x\to 0}\frac{2sen2x}{-xsenx+\cos x+\cos x}=\frac{0}{2}=0$$
$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\left(\csc x-\frac{\cos x}{x}\right)=0$$

Ejemplo. Determinar el valor de los límites siguientes:
i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\csc x\right)$; *ii*) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\cot x$; *iii*) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$; *iv*) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(2x-\pi\right)\sec x$

Solución.

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\csc x\right)=0\cdot\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{senx}=\dfrac{0}{0}\left(\text{indeterminación}\right)$

Se aplica L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{senx}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1}=1\quad\therefore\quad \lim_{x\to 0}\left(x\csc x\right)=1$$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\cot x=0\cdot\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\cot x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{\tan x}=\dfrac{0}{0}\left(\text{indeterminación}\right)$

Se aplica L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\tan x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\sec^2 x}=\lim_{x\to 0^+}2x\cos^2 x=0\cdot 1=0\quad\therefore\quad \lim_{x\to 0^+}x^2\cot x=0$$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0\cdot\left(-\infty\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\dfrac{-\infty}{\infty}\left(\text{indeterminación}\right)$

Se aplica L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(-x\right)=0\quad\therefore\quad \lim_{x\to 0}x\ln x=0$$

iv) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(2x-\pi\right)\sec x=0\cdot\infty\left(\text{indeterminación}\right)$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{2x-\pi}{\cos x}=\dfrac{0}{0}\left(\text{indeterminación}\right)$

Se aplica L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2}{-senx}=\frac{2}{-1}=-2 \quad \therefore \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)\sec x=-2$$

Ejemplo. Obtener el valor de los siguientes límites:

$$i)\ \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad ii)\ \lim_{x\to0}(\csc x)^{3x} \quad ; \quad iii)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad iv)\ \lim_{x\to0}(x+\cos x)^{\csc 2x}$$

Solución.

$$i)\ \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty} \quad ; \quad a=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad \ln a=\ln\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln a=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+x) \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\infty\cdot 0 \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{0}{0}(\text{indeterminación})$$

Se aplica L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\frac{1}{1}=1 \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=1 \quad \Rightarrow \quad \ln a=1 \quad a=e^{1}=e$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Es importante decir que un límite más utilizado para definir al famoso número "e", equivalente al aquí resuelto es el siguiente:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$ii)\ \lim_{x\to0}(\csc x)^{3x}=\infty^{0} \quad ; \quad b=\lim_{x\to0}(\csc x)^{3x} \quad \Rightarrow \quad \ln b=\ln\lim_{x\to0}(\csc x)^{3x}$$

$$\ln b=\lim_{x\to0}3x\ln(\csc x) \quad ; \quad \lim_{x\to0}3x\ln(\csc x)=0\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3\ln(\csc x)}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}(\text{indeterminación})$$

Se aplica L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to0}\frac{3\ln(\csc x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-3\csc x\cot x}{\csc x}}{-\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{-3\cot x}{-\frac{1}{x^{2}}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3x^{2}\cos x}{senx}=\frac{0}{0}(\text{indeterminación})$$

Se vuelve a aplicar L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^{2}\cos x}{senx}=\lim_{x\to0}\frac{-3x^{2}senx+6x\cos x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0$$

$$\lim_{x\to0}3x\ln(\csc x)=0 \quad \Rightarrow \quad \ln b=0 \quad \Rightarrow \quad b=e^{0}=1 \quad \therefore \quad \lim_{x\to0}(\csc x)^{3x}=1$$

$$iii)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=0^0\quad;\quad c=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\quad\Rightarrow\quad \ln c=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\quad\Rightarrow\quad \ln c=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{6}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{6}{x}\right)=0\cdot(-\infty)\quad;\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{6}{x}\right)}{x}=\frac{-\infty}{\infty}(\text{indeterminación})$$

Se aplica L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{6}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-\frac{6}{x^2}}{\frac{6}{x}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x}=0\quad;\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{6}{x}\right)=0\quad\Rightarrow\quad \ln c=0\quad\Rightarrow\quad c=e^0=1$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=1$$

$$iv)\quad \lim_{x\to0}(x+\cos x)^{\csc 2x}=1^{\infty}\quad;\quad d=\lim_{x\to0}(x+\cos x)^{\csc 2x}$$

$$\Rightarrow\quad \ln d=\ln\lim_{x\to0}(x+\cos x)^{\csc 2x}$$

$$\ln d=\lim_{x\to0}\csc 2x\ln(x+\cos x)\quad;\quad \lim_{x\to0}\csc 2x\ln(x+\cos x)=\infty\cdot0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+\cos x)}{sen2x}=\frac{0}{0}(\text{indeterminación})$$

Se aplica L'Hopital y se obtiene:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+\cos x)}{sen2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-senx}{x+\cos x}}{2\cos 2x}=\lim_{x\to0}\frac{1-senx}{2x\cos 2x+2\cos x\cos 2x}=\frac{1}{2(1)(1)}=\frac{1}{2}$$

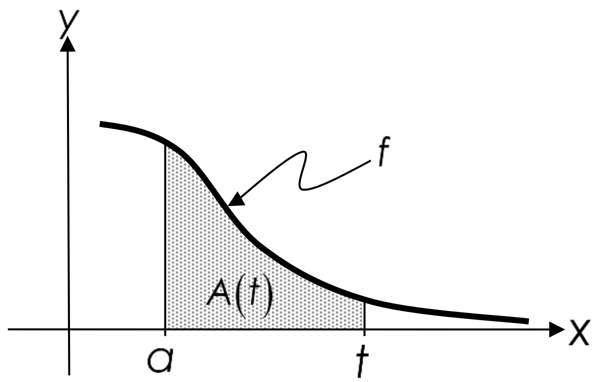
$$\ln\lim_{x\to0}(x+\cos x)^{\csc 2x}=\frac{1}{2}\quad;\quad \ln d=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad d=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to0}(x+\cos x)^{\csc 2x}=\sqrt{e}$$

INTEGRALES IMPROPIAS

Aquí se estudiarán integrales definidas en las que uno o los dos límites de integración tienden a infinito. También aquellas en las que la función del integrando tiene un número finito de discontinuidades en el intervalo de integración. Se les conoce como integrales impropias.

Sea una función "f" continua en el intervalo semiabierto $[a,\infty)$ y siempre positiva. Considérese también que: $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$. Su gráfica es:

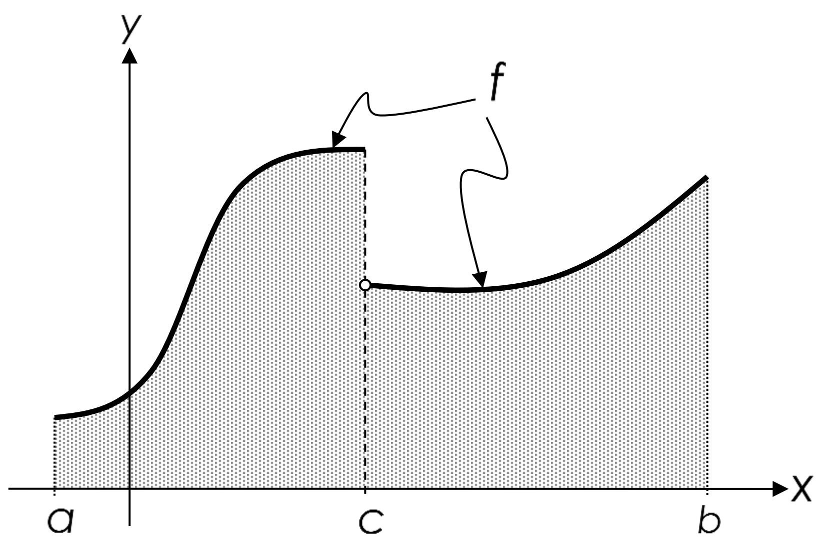


$$t > a \quad \Rightarrow \quad A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

Si $\lim_{t\to\infty} A(t)$ existe, entonces puede interpretarse como el área de la región limitada bajo la curva $f(x)$, sobre el eje "x" y hacia la derecha del valor $x = a$. Entonces es posible calcular esta área como:

$$A(t) = \int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

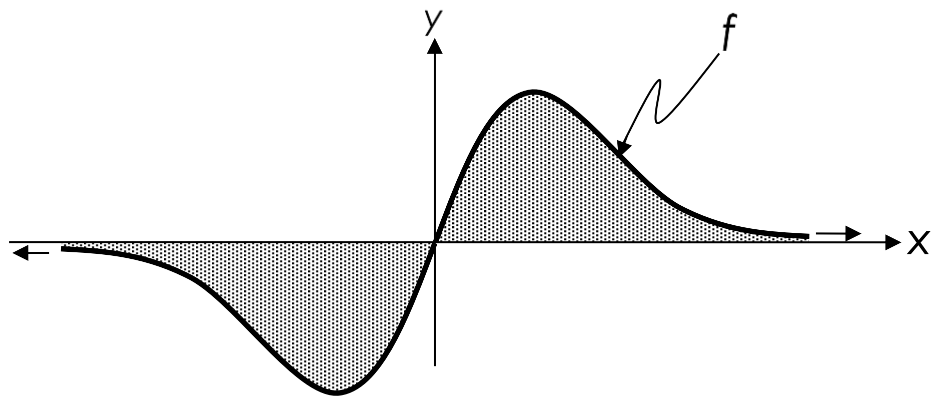
Si la función presenta una discontinuidad en el intervalo en estudio, como la de la figura siguiente, se tiene que:



Como se observa, presenta una discontinuidad en $x = c$ por lo que para calcular la integral entre los valores $x = a$ y $x = b$, es decir, el área bajo la curva, se utilizarían las siguientes integrales:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{p\to c}\int_a^p f(x)\,dx + \lim_{q\to c}\int_q^b f(x)\,dx$$

Otro caso es el de la siguiente figura:



La integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, es decir, el área bajo la curva se podría resolver "partiendo" en dos al área requerida:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{p\to-\infty}\int_{p}^{0} f(x)\,dx + \lim_{q\to\infty}\int_{0}^{q} f(x)dx$$

Definición. Sea f continua en el intervalo $[a,\infty)$. Entonces el área bajo la curva, limitada arriba por la gráfica de la curva y hacia la derecha de $x=a$, se obtiene a partir de la integral impropia:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx$$

si el límite existe.

Definición. Sea f continua en el intervalo $(-\infty, b)$. Entonces, el área bajo la curva, limitada arriba por la gráfica de la curva y hacia la izquierda de $x=b$ se obtiene a partir de la integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_{t}^{b} f(x)dx$$

si el límite existe.

Definición. Sea la función f continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Entonces, el área bajo la curva, limitada arriba por la gráfica de la curva y que se abre indefinidamente hacia la izquierda y derecha en el eje de las abscisas, se obtiene a partir de las siguientes integrales impropias:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{p\to-\infty}\int_{p}^{a} f(x)\,dx + \lim_{q\to\infty}\int_{a}^{q} f(x)dx$$

si los límites existen. El valor $x=a$ pertenece al intervalo.

Definición. Sea f continua en el intervalo $[a,c)\cup(c,b]$. Entonces, el área bajo la curva, considerando el punto de discontinuidad en $x=c$ se obtiene a partir de las integrales impropias:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx = \lim_{p\to c}\int_{a}^{p} f(x)\,dx + \lim_{q\to c}\int_{q}^{b} f(x)\,dx$$

Si los límites existen.

En cada caso, si el límite es finito, se dice que la integral impropia es convergente y que el valor del límite es el valor de la integral impropia. Si el límite no existe, la integral impropia es divergente. Cuando la integral original se divide en dos integrales, ambas deben ser convergentes para que la integral original sea convergente.

Ejemplo. Determinar si las siguientes integrales impropias convergen o divergen. Graficar

$$i)\quad \int_2^{\infty}\frac{1}{(x-1)^2}dx \quad ; \quad ii)\quad \int_2^{\infty}\frac{1}{x-1}dx$$

Solución.

i) $\int_2^{\infty}\frac{1}{(x-1)^2}dx$. Se resuelve la indefinida $\int\frac{dx}{(x-1)^2}$

$$u=x-1 \quad\Rightarrow\quad du=dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{du}{u^2}=\int u^{-2}du=-\frac{1}{u}+C \quad\therefore\quad \int\frac{dx}{(x-1)^2}=-\frac{1}{x-1}+C$$

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{(x-1)^2}dx=\lim_{t\to\infty}\int_2^{t}\frac{1}{(x-1)^2}dx=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_2^t=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{2-1}\right]=1$$

$$\therefore\quad \int_2^{\infty}\frac{1}{(x-1)^2}dx=1 \quad\therefore\quad \text{convergente}$$

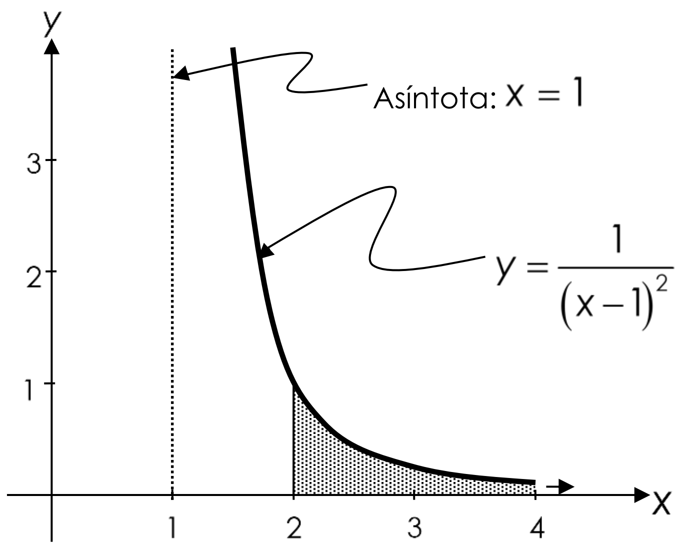
ii) $\int_2^{\infty}\frac{1}{x-1}dx$. Se resuelve la indefinida $\int\frac{dx}{x-1}$

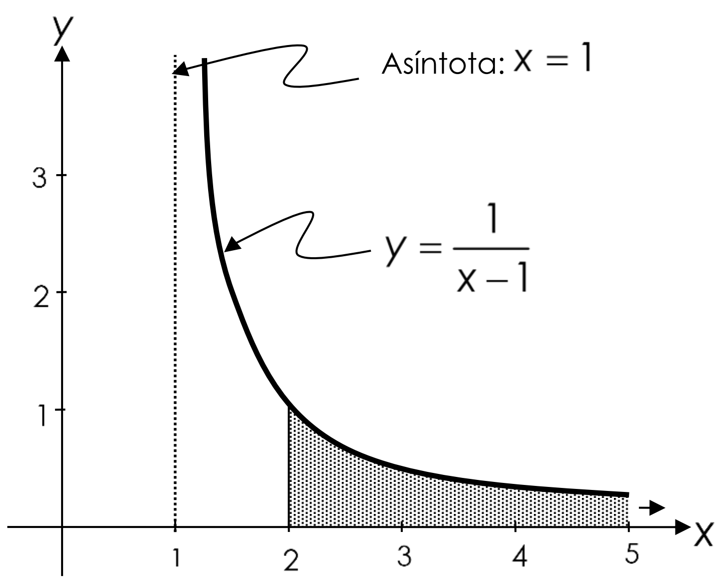
$$u=x-1 \quad\Rightarrow\quad du=dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{du}{u}=\ln u+C \quad\therefore\quad \int\frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|+C$$

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x-1}dx=\lim_{t\to\infty}\int_2^{t}\frac{1}{x-1}dx=\lim_{t\to\infty}\big[\ln|x-1|\big]_2^t=\lim_{t\to\infty}\big[\ln|t-1|-\ln 1\big]\to\infty$$

$$\therefore\quad \int_2^{\infty}\frac{1}{x-1}dx\to\infty \quad\therefore\quad \text{divergente}$$

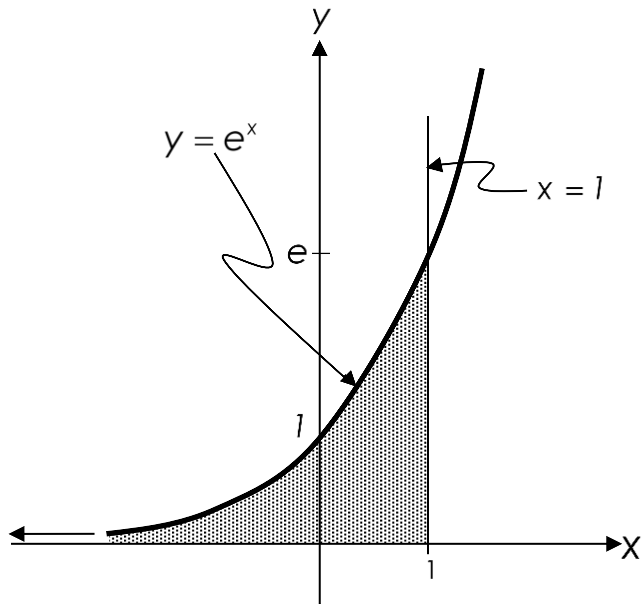
Las gráficas de ambas funciones se muestran a continuación:





Ejemplo. Asignar un área a la región que queda comprendida bajo la curva $y = e^x$, sobre el eje "x" y a la izquierda de $x = 1$.

Solución. Es una región limitada por $y = e^x$, $y = 0$, $x = t$ y $x = 2$. Se gráfica y se obtiene:



El área requerida está dada por la integral impropia siguiente:

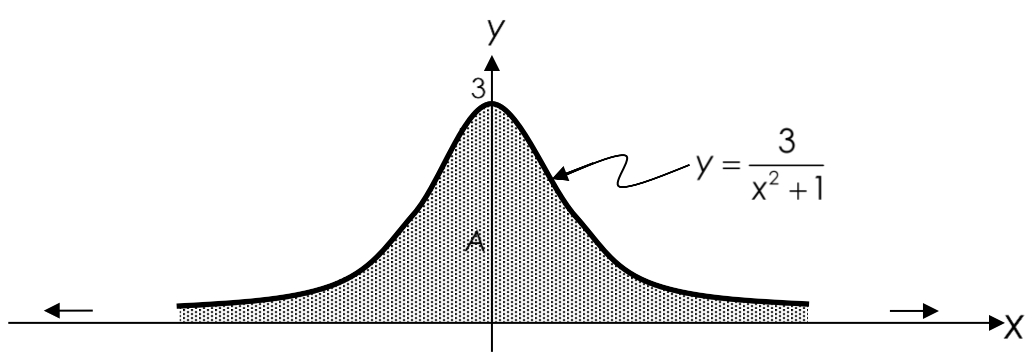
$$\int_{-\infty}^{1} e^x dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^1 e^x dx = \lim_{t\to-\infty}\left[e^x\right]_t^1 = \lim_{t\to-\infty}\left(e^1 - e^t\right) = e - \frac{1}{e^{\infty}} = e - 0 = e$$

Luego la integral impropia es convergente y el área es finita y su valor es:

$$A = e\, u^2$$

Ejemplo. Calcular la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{x^2+1}dx$. Para ello, trazar la gráfica de la función del integrando e interpretar la integral como un área.

Solución. Se grafica la función del integrando y se obtiene:



Se divide en dos partes la región, se utiliza la integral impropia y se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{3}{x^2+1}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{3}{x^2+1}dx = \lim_{p\to-\infty}\int_{p}^{0} \frac{3}{x^2+1}dx + \lim_{q\to\infty}\int_{0}^{q} \frac{3}{x^2+1}dx$$

La solución de la integral indefinida es:

$$\int \frac{3}{x^2+1}dx = 3\int \frac{dx}{x^2+1} = 3\,ang\tan x + C$$

Luego, dada la simetría de la figura, bastará con calcular una de las integrales y si es convergente, el doble de su valor finito será área de la región. Entonces,

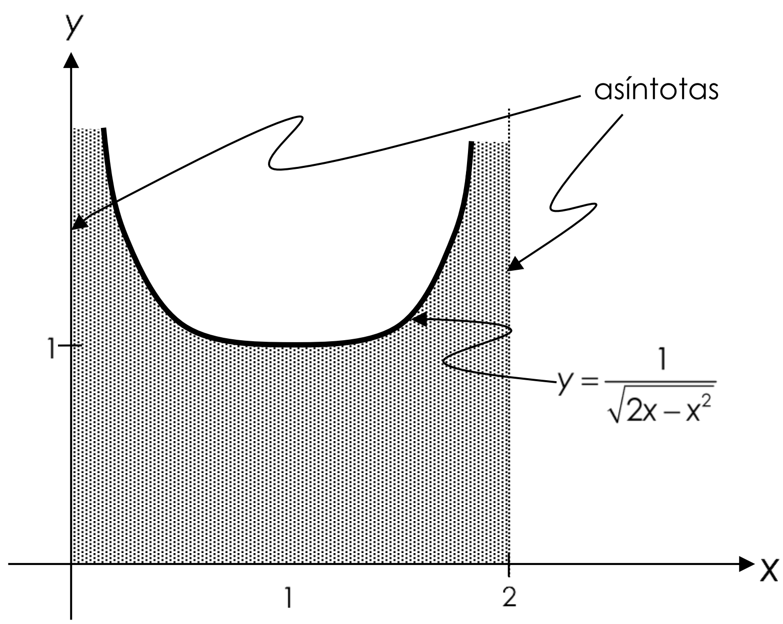
$$\lim_{q\to\infty}\int_0^q \frac{3}{x^2+1}dx = \lim_{q\to\infty}\Big[3ang\tan x\Big]_0^q = \lim_{q\to\infty}\Big[3ang\tan q - 3ang\tan 0\Big] = 3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

Finalmente $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{x^2+1}dx = 3\pi$ y la integral impropia es convergente.

Ejemplo. Analizar la convergencia o divergencia de la siguiente integral impropia y graficar la función del integrando. Considerar, si es convergente, el área bajo la curva.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

Solución. La gráfica de la función del integrando se muestra en la siguiente figura:



Se requiere calcular la integral entre las asíntotas verticales de ecuaciones $x=0$ *y* $x=2$ y como no es continua la función en estos valores, se utiliza una integral impropia. Se parte el intervalo en dos, tomando el valor intermedio de $x=1$. Así,

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{p\to 0}\int_p^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} + \lim_{q\to 2}\int_1^q \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

Se resuelve la integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-2x\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-2x+1-1\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x-1\right)^2}}$$

$$u^2 = \left(x-1\right)^2 \quad \Rightarrow \quad u = x-1 \quad \Rightarrow \quad du = dx \quad ; \quad a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

De donde,

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = angsenu + C \quad \therefore \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = angsen\left(x-1\right) + C$$

Finalmente se tiene que:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{p\to 0}\Big[angsen\left(x-1\right)\Big]_p^1 + \lim_{q\to 2}\Big[angsen\left(x-1\right)\Big]_1^q$$

$$= \lim_{p\to 0}\Big[angsen\left(1-1\right) - angsen\left(p-1\right)\Big] + \lim_{q\to 2}\Big[angsen\left(q-1\right) - angsen\left(1-1\right)\Big]$$

$$= angsen\left(0\right) - angsen\left(-1\right) + angsen\left(1\right) - angsen\left(0\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$

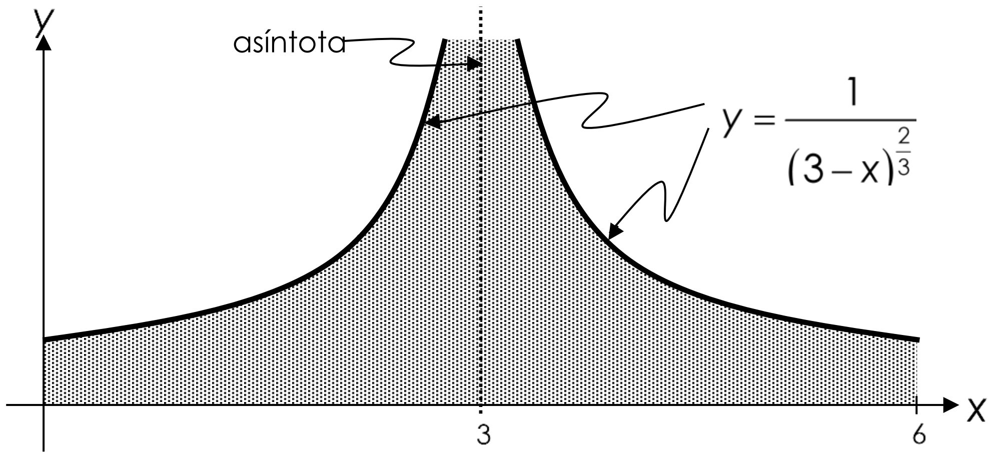
Luego la integral impropia es convergente y su valor es π, que corresponde al área finita de la región.

Ejemplo. Investigar la convergencia o divergencia de la integral impropia dada. Graficar el área que se obtiene con su cálculo de ser convergente.

$$\int_0^6 \frac{dx}{\left(3-x\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Solución.

El integrando está definido en los extremos del intervalo de integración. Cuando $x = 3$ hay una discontinuidad, y ahí se encuentra una asíntota vertical. Entonces, al graficar la función correspondiente del integrando, se obtiene:



La integral impropia se expresa como:

$$\int_0^6 \frac{dx}{(3-x)^{\frac{2}{3}}} = \int_0^3 \frac{dx}{(3-x)^{\frac{2}{3}}} + \int_3^6 \frac{dx}{(3-x)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{p\to 3}\int_0^p \frac{dx}{(3-x)^{\frac{2}{3}}} + \lim_{q\to 3}\int_q^6 \frac{dx}{(3-x)^{\frac{2}{3}}}$$

Por simetría se resolverá sólo la segunda. Primero se calcula la integral definida. Así,

$$\int \frac{dx}{(3-x)^{\frac{2}{3}}} \quad ; \quad u = 3-x \quad \Rightarrow \quad du = -dx$$

$$-\int \frac{du}{u^{\frac{2}{3}}} = -\int u^{-\frac{2}{3}} du = -\frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = -3u^{\frac{1}{3}} + C = -3\sqrt[3]{u} + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{(3-x)^{\frac{2}{3}}} = -3\sqrt[3]{3-x} + C$$

Luego,

$$\int_3^6 \frac{dx}{(3-x)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{q\to 3}\int_q^6 \frac{dx}{(3-x)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{q\to 3}\left[-3\sqrt[3]{3-x}\right]_q^6 = \lim_{q\to 3}\left[-3\sqrt[3]{3-6} + 3\sqrt[3]{3-q}\right] = 3\sqrt[3]{3}$$

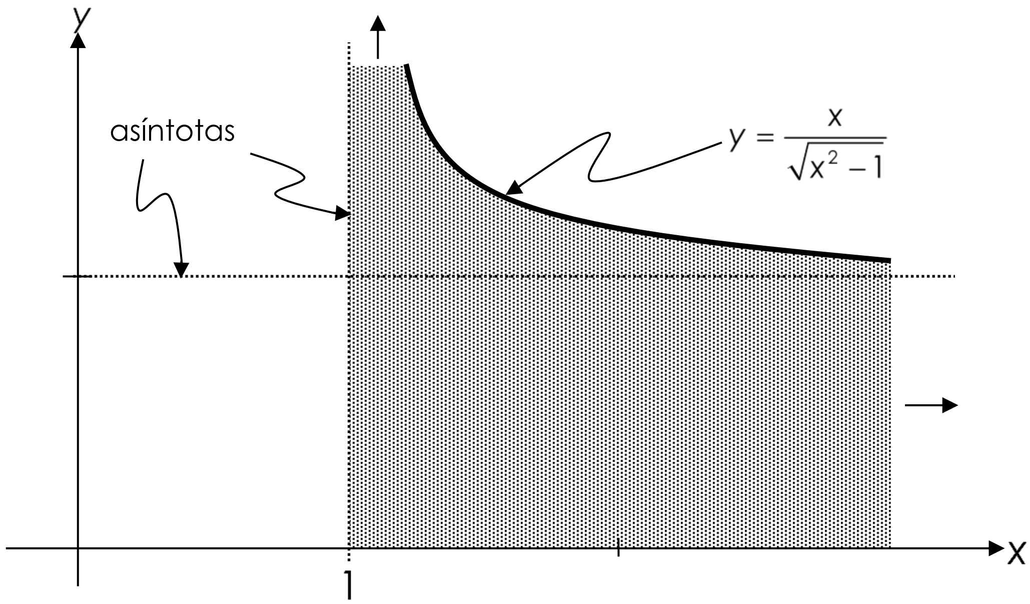
Luego la integral impropia es convergente y el área tiene un valor finito de:

$$\therefore \quad \int_0^6 \frac{dx}{(3-x)^{\frac{2}{3}}} = 2\left(3\sqrt[3]{3}\right) = 6\sqrt[3]{3} \approx 8.65\, u^2$$

Ejemplo. Determinar la naturaleza de la integral impropia siguiente y ver si es factible calcular con ella un valor finito para el área en ella considerada por la función del integrando.

$$\int_1^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

Solución. Se grafica la función del integrando y,



La gráfica de la función en el intervalo dado tiene asíntotas de ecuaciones $x=1$ *y* $y=1$, lo que se confirma con los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\to\infty \qquad y \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=1$$

La integral impropia se debe partir en dos, tomando de manera arbitraria un valor intermedio en $x=2$. Así,

$$\int_1^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int_1^{2}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}+\int_2^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{p\to 1}\int_p^{2}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}+\lim_{q\to\infty}\int_2^{q}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

La integral indefinida es igual a:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} \quad ; \quad u=x^2-1 \quad\Rightarrow\quad du=2x\,dx$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{u}+C \quad\therefore\quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}+C$$

$$\int_1^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4}}=\lim_{p\to 1}\left[\sqrt{x^2-1}\right]_p^2+\lim_{q\to\infty}\left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^q=\lim_{p\to 1}\left[\sqrt{4-1}-\sqrt{p^2-1}\right]+\lim_{q\to\infty}\left[\sqrt{q^2-1}-\sqrt{4-1}\right]$$

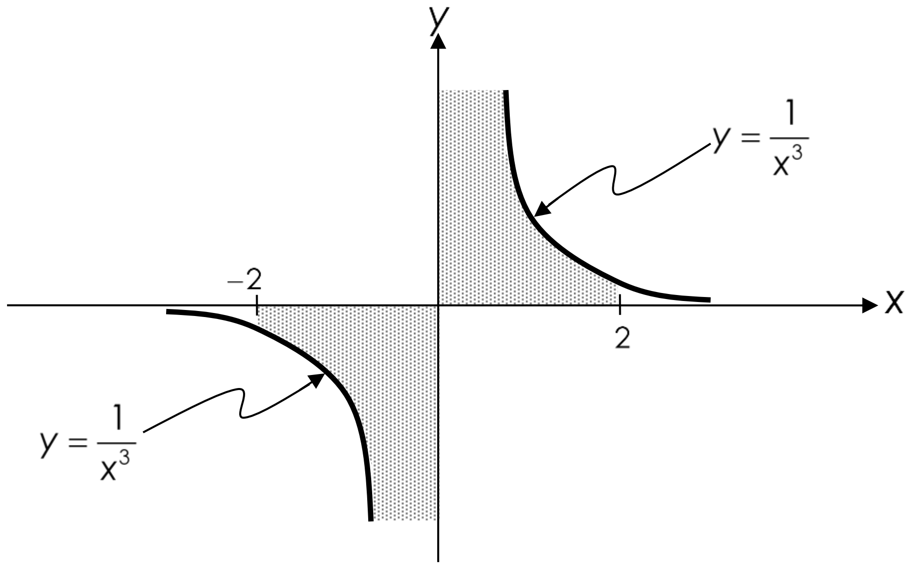
$$\therefore\quad \int_1^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4}}\to\infty$$

Por lo tanto, la integral impropia es divergente y el área es infinita.

Ejemplo. Evaluar la integral definida siguiente, trazar el área que considera y resolverla:

$$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^3}$$

Solución.
La gráfica del problema planteado es:



La integral se resuelve como:

$$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^3}=\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^3}+\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^3}=\lim_{p\to 0}\int_{-2}^{p}\frac{dx}{x^3}+\lim_{q\to 0}\int_{q}^{2}\frac{dx}{x^3}$$

La integral indefinida es igual a:

$$\int\frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}dx=\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C$$

$$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^3}=\lim_{p\to 0}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-2}^{p}+\lim_{q\to 0}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{q}^{2}=\lim_{p\to 0}\left[-\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{2(-2)^2}\right]+\lim_{q\to 0}\left[-\frac{1}{2(2)^2}+\frac{1}{2q^2}\right]\to\infty$$

Las integrales impropias son divergentes y no se asigna área a la región señalada.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ACADEMIA DE CÁLCULO INTEGRAL

Tercer tema: Métodos de integración y aplicaciones

PABLO GARCÍA Y COLOMÉ
PROFESOR DE CARRERA

CÁLCULO INTEGRAL
TERCER TEMA
MÉTODOS DE INTEGRACIÓN Y APLICACIONES

En este tema se tratarán los métodos de integración que consideran funciones algebraicas y trascendentes. Dentro de estas últimas se tomarán en cuenta las relacionadas con funciones circulares, directas e inversas, logarítmicas y exponenciales e hiperbólicas directas e inversas. También, como aplicaciones de la integral, se tratarán áreas bajo la curva, áreas entre curvas, longitudes de arco, volúmenes de revolución y áreas de superficies de revolución. En áreas y longitudes de arco se estudiará de manera concisa lo concerniente a estas aplicaciones en coordenadas polares, no sin antes hacer una breve presentación teórica de estas coordenadas.

INTEGRACIÓN TRIGONOMÉTRICA

INTEGRACIÓN DE DIFERENCIALES TRIGONOMÉTRICAS

Se denotan así porque el integrando es una diferencial formada por funciones trigonométricas y para resolverlas es indispensable recurrir a identidades trigonométricas. Se presentan los siguientes casos, ilustrados con algunos ejemplos:

Primer caso: $\int sen^m u \cos^n u\, du$

con m o n entero positivo impar. Se puede presentar también sólo la función seno o la función coseno. La identidad que se utiliza es:

$$sen^2 u + \cos^2 u = 1$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int \frac{sen^3 2x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$$

Solución.
Se utiliza la identidad en el numerador, la función del denominador se traslada al numerador y se divide en dos integrales cada una con la función $sen 2x$ elevada a la primera potencia y que sería la diferencial de la función en un cambio de variable. Así,

$$\int \frac{sen^3 2x}{\sqrt{\cos 2x}} dx = \int sen^2 2x\, sen 2x \cos^{-\frac{1}{2}} 2x\, dx = \int \left(1 - \cos^2 2x\right) \cos^{-\frac{1}{2}} 2x\, sen 2x\, dx$$

$$= \int \cos^{-\frac{1}{2}} 2x\, sen 2x\, dx - \int \cos^{\frac{3}{2}} 2x\, sen 2x\, dx$$

$$u=\cos 2x \quad \Rightarrow \quad du=-2sen2x\,dx$$

$$\int \frac{sen^3 2x}{\sqrt{\cos 2x}}dx=-\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du+\frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}}du=-\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C$$

$$\therefore \quad \int \frac{sen^3 2x}{\sqrt{\cos 2x}}dx=\cos^{\frac{1}{2}} 2x+\frac{1}{5}\cos^{\frac{5}{2}} 2x+C$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$$

Solución.
Para resolver esta integral definida, primero se resuelve la correspondiente indefinida mediante la misma identidad que la anterior y dejan do en este caso a la función coseno, a la primera potencia, como la diferencial en el cambio de variable. Así,

$$\int \cos^3 x\,dx=\int \cos^2 x\cos x\,dx=\int\left(1-sen^2x\right)\cos x\,dx=\int \cos x\,dx-\int sen^2x\cos x\,dx$$

$$u=senx \quad \Rightarrow \quad du=\cos x\,dx$$

$$\int du-\int u^2du=u-\frac{u^3}{3}+C \quad ; \quad \int \cos^3 x\,dx=senx-\frac{sen^3x}{3}+C$$

Ahora se aplica la regla de Barrow y se obtiene la solución de la integral definida.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx=\left[senx-\frac{sen^3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(sen\frac{\pi}{2}-\frac{sen^3\frac{\pi}{2}}{3}\right)-\left(sen(0)-\frac{sen^3(0)}{3}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx=\left[senx-\frac{sen^3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(1-\frac{1^3}{3}\right)-\left(0-\frac{0}{3}\right) \quad \therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx=\frac{2}{3}$$

Segundo Caso: $\int sen^m u\,du \quad o \quad \int \cos^n u\,du \quad o \quad \int sen^m u\cos^n u\,du$

con m y n enteros positivos pares. Las identidades trigonométricas utilizadas en este caso, que reducen el exponente de la función del radicando, como se ilustrará en los ejemplos, son las siguientes:

$$sen^2u=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2u \quad y \quad \cos^2 u=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2u$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int \cos^4 5x\,dx$$

Se aplican las identidades y se separa en varias integrales hasta que en sus respectivos integrandos se manifiesten integrales inmediatas, se completan las diferenciales con un cambio de variable y se obtiene la solución. Así,

$$\int \cos^4 5x\,dx = \int \left(\cos^2 5x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 10x\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 10x+\frac{1}{4}\cos^2 10x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 10x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 10x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 10x\,dx + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 20x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 10x\,dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 20x\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 10x\,dx + \frac{1}{8}\int \cos 20x\,dx$$

$$u = 10x \quad \Rightarrow \quad du = 10\,dx \quad ; \quad v = 20x \quad \Rightarrow \quad dv = 20\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\int dx + \frac{1}{20}\int \cos u\,du + \frac{1}{160}\int \cos v\,dv = \frac{3x}{4} + \frac{sen u}{20} + \frac{sen v}{160} + C$$

$$\therefore \quad \int \cos^4 5x\,dx = \frac{3x}{4} + \frac{sen 10x}{20} + \frac{sen 20x}{160} + C$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int sen^2 x \cos^4 x\,dx$$

Solución.

Con las mismas identidades y de manera semejante a la anterior integral se obtiene:

$$\int sen^2 x \cos^4 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x\right)dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos^2 2x-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{4}\cos^2 2x-\frac{1}{8}\cos^3 2x\right)dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\right)-\frac{1}{8}\cos^3 2x\right]dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos^3 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{16}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x\,dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx$$

Las tres primeras integrales son inmediatas con dos sencillos cambios de variable que se omitirán, y la cuarta integral se resolverá aparte sin signo ni coeficiente, con el primer acaso ya tratado.

$$\int \cos^3 2x\,dx = \int \cos^2 2x \cos 2x\,dx = \int \left(1 - sen^2 2x\right)\cos 2x\,dx$$

$$= \int \cos 2x\,dx - \int sen^2 2x \cos 2x\,dx$$

$$u = sen 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2\cos 2x\,dx$$

$$\int sen^2 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int u^2 du = \frac{u^3}{6} + C \quad ; \quad \int sen^2 2x \cos 2x\,dx = \frac{sen^3 2x}{6} + C$$

$$\int \cos^3 2x\,dx = \frac{1}{2} sen 2x + \frac{sen^3 2x}{6} + C$$

$$\int sen^2 x \cos^4 x\,dx = \frac{x}{16} + \frac{sen 2x}{16} - \frac{sen 4x}{64} - \frac{sen 2x}{16} - \frac{sen^3 2x}{48} + C$$

$$\therefore \quad \int sen^2 x \cos^4 x\,dx = \frac{x}{16} - \frac{sen 4x}{64} - \frac{sen^3 2x}{48} + C$$

Tercer caso: $\int sen\,mx \cos nx\,dx$

con m y n enteros positivos. Las identidades utilizadas aquí son:

$$sen\,x + sen\,y = 2sen\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$sen\,x - sen\,y = 2\cos\frac{x+y}{2} sen\frac{x-y}{2} \qquad \cos x - \cos y = -2sen\frac{x+y}{2} sen\frac{x-y}{2}$$

Y a partir de estas identidades se pueden presentar los siguientes tipos de integrales:

$$\int sen\,mx \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int sen\frac{1}{2}(m+n)x\,dx + \frac{1}{2}\int sen\frac{1}{2}(m-n)x\,dx$$

$$\int sen\,mx\, sen\,nx\,dx = -\frac{1}{2}\int \cos\frac{1}{2}(m+n)x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos\frac{1}{2}(m-n)x\,dx$$

$$\int \cos mx \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int \cos\frac{1}{2}(m+n)x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos\frac{1}{2}(m-n)x\,dx$$

Ejemplo. Resolver la siguiente integral

$$\int sen\,5x \cos 2x\,dx$$

Solución.

Esta integral se puede expresar como:

$$\int sen\,5x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int sen\frac{1}{2}(5+2)x\,dx + \frac{1}{2}\int sen\frac{1}{2}(5-2)x\,dx$$

$$\int sen\,5x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int sen\frac{1}{2}(7)x\,dx + \frac{1}{2}\int sen\frac{1}{2}(3)x\,dx$$

$$\int sen\,5x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int sen\frac{7}{2}x\,dx+\frac{1}{2}\int sen\frac{3}{2}x\,dx$$

$$u=\frac{7}{2}x\quad\Rightarrow\quad du=\frac{7}{2}dx\quad;\quad v=\frac{3}{2}x\quad\Rightarrow\quad dv=\frac{3}{2}dx$$

$$\int sen\,5x\cos 2x\,dx=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{2}}\int sen\,u\,du+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\int sen\,v\,dv=-\frac{\cos u}{7}-\frac{\cos v}{3}+C$$

$$\therefore\quad\int sen\,5x\cos 2x\,dx=-\frac{\cos\frac{7}{2}x}{7}-\frac{\cos\frac{3}{2}x}{3}+C$$

Cuarto caso: $\int \sec^m u\,du\quad o\quad\int \csc^m u\,du$

con m entero positivo par. Las identidades utilizadas aquí son:

$$\sec^2 u=\tan^2 u+1\qquad y\qquad \csc^2 u=\cot^2 u+1$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int \sec^4 3x\,dx$$

Solución.
Se divide el integrando de tal forma que una secante elevada al cuadrado permanezco como derivada de la tangente y por tanto parte de la diferencial. Se aplica una de las identidades y un cambio de variable. Entonces,

$$\int \sec^4 3x\,dx=\int \sec^2 3x\sec^2 3x\,dx=\int\left(\tan^2 3x+1\right)\sec^2 3x\,dx$$

$$=\int \tan^2 3x\sec^2 3x\,dx+\int \sec^2 3x\,dx$$

$$u=\tan 3x\quad\Rightarrow\quad du=3\sec^2 3x\,dx$$

$$\int \sec^4 3x\,dx=\frac{1}{3}\int u^2du+\frac{1}{3}\int du=\frac{u^3}{9}+\frac{u}{3}+C$$

$$\therefore\quad\int \sec^4 3x\,dx=\frac{\tan^3 3x}{9}+\frac{\tan 3x}{3}+C$$

Ejemplo. Resolver la integral definida

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\csc^6 x\,dx$$

Solución.
Primero se resuelve la integral indefinida. Se conserva una cosecante al cuadrado que es parte de la derivada de la cotangente, se aplica la correspondiente identidad y se divide en varias integrales. Después se realiza un cambio de variable y se tiene entonces que:

$$\int \csc^6 x\,dx = \int \csc^4 x \csc^2 x\,dx = \int \left(\cot^2 x + 1\right)^2 \csc^2 x\,dx$$
$$= \int \left(\cot^4 x + 2\cot^2 x + 1\right)\csc^2 x\,dx$$
$$= \int \cot^4 x \csc^2 x\,dx + 2\int \cot^2 x \csc^2 x\,dx + \int \csc^2 x\,dx$$
$$u = \cot x \quad \Rightarrow \quad du = -\csc^2 x\,dx$$
$$\int \csc^6 x\,dx = -\int u^4 du - 2\int u^2 du - \int du = -\frac{u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} - u + C$$
$$\int \csc^6 x\,dx = -\frac{\cot^5 x}{5} - \frac{2\cot^3 x}{3} - \cot x + C$$

Entonces la integral definida es igual a:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \csc^6 x\;dx = \left[-\frac{\cot^5 x}{5} - \frac{2\cot^3 x}{3} - \cot x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \left(-\frac{\cot^5 \frac{\pi}{4}}{5} - \frac{2\cot^3 \frac{\pi}{4}}{3} - \cot\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\cot^5 \frac{\pi}{6}}{5} - \frac{2\cot^3 \frac{\pi}{6}}{3} - \cot\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1\right) - \left(-\frac{15.59}{5} - \frac{10.4}{3} - 1.73\right)$$
$$\therefore \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \csc^6 x\;dx \approx 6.45$$

Quinto caso: $\int \tan^m u\,du \quad o \quad \int \cot^m u\;du$

con m entero positivo par o impar. Aquí también se utilizan las identidades

$$\tan^2 u = \sec^2 u - 1 \qquad y \qquad \cot^2 u = \csc^2 u - 1$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int \cot^3 x\;dx$$

Solución.
Se divide el integrando, se aplica la identidad que corresponda y se realiza un cambio de variable. Luego,

$$\int \cot^3 x\;dx = \int \cot^2 x \cot x\,dx = \int \left(\csc^2 x - 1\right)\cot x\,dx$$
$$= \int \cot x \csc^2 x\,dx - \int \cot x\,dx$$

En la primera integral se lleva a cabo el cambio de variable y la segunda se resuelve por fórmula ya tratada con anterioridad.

$u = \cot x \quad \Rightarrow \quad du = -\csc^2 x\,dx$

$$\int \cot x \csc^2 x\, dx = -\int u\, du = -\frac{u^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad \int \cot x \csc^2 x\, dx = -\frac{\cot^2 x}{2} + C$$

$$\therefore \quad \int \cot^3 x\, dx = -\frac{\cot^2 x}{2} - \ln\left|senx\right| + C$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int \tan^6 x\, dx$$

Solución.
Se divide el integrando, se aplica la identidad y mediante un cambio de variable se resuelve la integral. Entonces.

$$\int \tan^6 x\, dx = \int \tan^4 x \tan^2 x\, dx = \int \tan^4 x\left(\sec^2 x - 1\right) dx$$

$$= \int \tan^4 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^4 x\, dx = \int \tan^4 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\left(\sec^2 x - 1\right) dx$$

$$= \int \tan^4 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx + \int \tan^2 x$$

$$= \int \tan^4 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx + \int \sec^2 x - \int dx$$

$$u = \tan x \quad \Rightarrow \quad du = \sec^2 x\, dx$$

$$\int \tan^4 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx + \int \sec^2 x = \int u^4 du - \int u^2 du + \int du$$

$$\int \tan^4 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx + \int \sec^2 x = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + u + C$$

$$\therefore \quad \int \tan^6 x\, dx = \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + C$$

Sexto caso: $\int \sec^m u \tan^n u\, du \quad o \quad \int \csc^m u \cot^n u\, du$

con m entero positivo par o con $m \;\; y \;\; n$ enteros positivos impares. En este caso se utilizan las identidades:

$$\sec^2 u - \tan^2 u = 1 \quad o \quad \csc^2 u - \cot^2 u = 1$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int \sec^4 3x \tan^{\frac{1}{2}} 3x\, dx$$

Solución.
En el integrando se conserva una secante elevada al cuadrado y será parte de la diferencial en un cambio de variable. Se procede entonces como sigue, aplicando la identidad trigonométrica:

$$\int \sec^4 3x \tan^{\frac{1}{2}} 3x\, dx = \int \left(\tan^2 3x + 1\right) \tan^{\frac{1}{2}} 3x \sec^2 3x\, dx$$

$$= \int \tan^{\frac{5}{2}} 3x \sec^2 3x\, dx + \int \tan^{\frac{1}{2}} 3x \sec^2 3x\, dx$$

$$u = \tan 3x \quad \Rightarrow \quad du = 3\sec^2 3x\, dx$$

$$\int \sec^4 3x \tan^{\frac{1}{2}} 3x\, dx = \frac{1}{3}\int u^{\frac{5}{2}} du + \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{21}u^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\therefore \quad \int \sec^4 3x \tan^{\frac{1}{2}} 3x\, dx = \frac{2}{21}\tan^{\frac{7}{2}} 3x + \frac{2}{9}\tan^{\frac{3}{2}} 3x + C$$

Ejemplo. Resolver la integral

$$\int \sec x \tan^5 x\, dx$$

Solución.
En integrales como esta se debe utilizar el hecho de que la derivada de la secante es el producto de la secante por la tangente y entonces se deja este producto para constituir la diferencial en un cambio de variable como el siguiente en que lo restante de dicho producto se expresa, mediante la identidad trigonométrica, en términos de la secante. Así,

$$\int \sec x \tan^5 x\, dx = \int \tan^4 x \sec x \tan x\, dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right)^2 \sec x \tan x\, dx$$

$$= \int \sec^4 x \sec x \tan x\, dx - 2\int \sec^2 x \sec x \tan x\, dx + \int \sec x \tan x\, dx$$

$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad du = \sec x \tan x\, dx$$

$$\int \sec x \tan^5 x\, dx = \int u^4 du - 2\int u^2 du + \int du = \frac{u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} + u + C$$

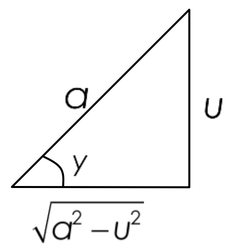
$$\therefore \quad \int \sec x \tan^5 x\, dx = \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{2\sec^3 x}{3} + \sec x + C$$

Nota. El único caso que no se trató fue el de las funciones secante y cosecante cuando están elevadas a un exponente impar mayor que uno.

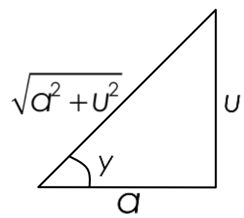
INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

En este método se pretende sustituir los integrandos algebraicos por funciones trigonométricas cuya integración resulte factible. Se aconseja desde un principio hacer cambios en los términos variable y constante. Se consideran tres tipos de integrales con la suma o resta de la variable u^2 y de la constante a^2 junto con los respectivos triángulos rectángulos que se construyen con estos términos como catetos e hipotenusa. Estos tipos son los siguientes:

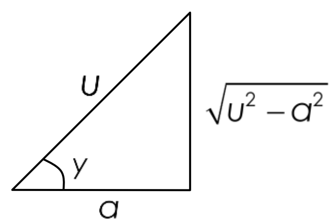
i) Cuando en el integrando el binomio es de la forma a^2-u^2. El triángulo que se construye y utiliza es:



ii) Cuando en el integrando el binomio es de la forma a^2+u^2. El triángulo que se construye y utiliza es:



iii) Cuando en el integrando el binomio es de la forma u^2-a^2. El triángulo que se construye y utiliza es:



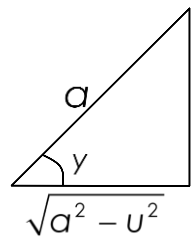
Ejemplo. Resolver las integrales siguientes:

$$i)\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-9x^2}}\ ;\ ii)\ \int\frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-25}}\ ;\ iii)\ \int\frac{dx}{x\sqrt{81x^2+36}}\ ;\ iv)\ \int\frac{dx}{\left(x^2-4x\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Solución.

$$i)\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-9x^2}}.\quad u^2=9x^2\ \Rightarrow\ u=3x\ \Rightarrow\ du=3dx\ ;\ a^2=1\ \Rightarrow\ a=1$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-9x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{u^2}{9}du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\frac{1}{27}\int\frac{u^2du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$



$$u = a\,seny \quad \Rightarrow \quad du = a\cos dy \quad ; \quad u^2 = a^2sen^2y \quad ; \quad \sqrt{a^2-u^2} = a\cos y$$

$$\frac{1}{27}\int\frac{a^2sen^2y\,a\cos y\,dy}{a\cos y} = \frac{a^2}{27}\int sen^2y\,dy = \frac{a^2}{27}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2y\right)dy$$

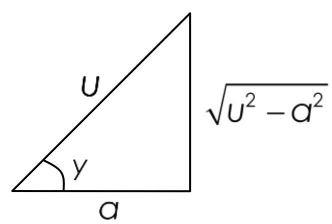
$$= \frac{a^2}{27}\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}sen2y\right)+C = \frac{a^2}{27}\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}2seny\cos y\right)+C$$

$$= \frac{a^2}{27}\left(\frac{1}{2}angsen\frac{u}{a}-\frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{2a^2}\right)+C = \frac{a^2}{54}angsen\frac{u}{a}-\frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{54}+C$$

$$\therefore \quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{54}angsen3x-\frac{x\sqrt{1-9x^2}}{18}+C$$

ii) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-25}}$ $\quad ; \quad u^2 = 4x^2 \quad \Rightarrow \quad u = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2dx \quad ; \quad a^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad a = 5$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-25}} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{\frac{u^2}{4}\sqrt{u^2-a^2}} = 2\int\frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}}$$



$$u = a\sec y \quad \Rightarrow \quad du = a\sec y\tan y\,dy \quad ; \quad u^2 = a^2\sec^2 y \quad ; \quad \sqrt{u^2-a^2} = a\tan y$$

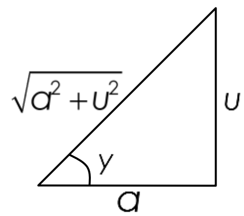
$$2\int\frac{a\sec y\tan y\,dy}{a^2\sec^2 y\,a\tan y} = \frac{2}{a^2}\int\frac{dy}{\sec y} = \frac{2}{a^2}\int\cos y\,dy = \frac{2}{a^2}seny+C$$

$$= \frac{2}{a^2}\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}+C = \frac{2\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u}+C$$

$$\therefore \quad \int\frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-25}} = \frac{2\sqrt{4x^2-25}}{50x}+C$$

iii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{81x^2+36}}$; $u^2 = 81x^2 \Rightarrow u = 9x \Rightarrow du = 9dx$; $a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{81x^2+36}} = \frac{1}{9}\int \frac{du}{\frac{u}{9}\sqrt{u^2+a^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}}$$



$$u = a\tan y \quad \Rightarrow \quad du = a\sec^2 y\,dy \quad ; \quad \sqrt{a^2+u^2} = a\sec y$$

$$\int \frac{a\sec^2 y\,dy}{a\tan y\, a\sec y} = \frac{1}{a}\int \frac{\sec y}{\tan y}dy = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{1}{\cos y}}{\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}}dy = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\operatorname{sen} y}dy = \frac{1}{a}\int \csc y\,dy$$

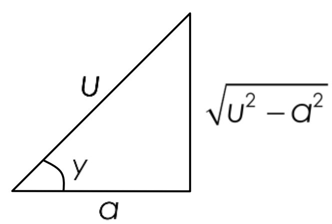
$$= \frac{1}{a}\ln\left|\csc y - \cot y\right| + C = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} - \frac{a}{u}\right| + C = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}-a}{u}\right| + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{81x^2+36}} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{81x^2+36}-6}{9x}\right| + C$$

iv) $\int \frac{dx}{\left(x^2-4x\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{\left(x^2-4x+4-4\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{\left[\left(x-2\right)^2-4\right]^{\frac{3}{2}}}$

$$u^2 = \left(x-2\right)^2 \Rightarrow u = x-2 \Rightarrow du = dx \ ; \ a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\int \frac{dx}{\left[\left(x-2\right)^2-4\right]^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{du}{\left(u^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$



$$u = a\sec y \quad \Rightarrow \quad du = a\sec y\tan y\,dy$$

$$\sqrt{u^2-a^2} = a\tan y \quad \Rightarrow \quad \left(u^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad a^3\tan^3 y$$

$$\int \frac{a\sec y \tan y dy}{a^3 \tan^3 y} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\sec y}{\tan^2 y}dy = \frac{1}{a^2}\int \frac{\frac{1}{\cos y}}{\frac{sen^2 y}{\cos^2 y}}dy = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos y}{sen^2 y}dy$$

$$v = seny \quad \Rightarrow \quad dv = \cos y dy$$

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{\cos y}{sen^2 y}dy = \frac{1}{a^2}\int \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{a^2}\int v^{-2}dv = \frac{1}{a^2}\frac{v^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{a^2 v} + C$$

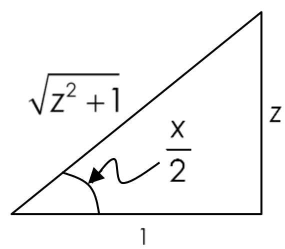
$$= -\frac{1}{a^2 seny} + C = -\frac{1}{a^2 \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}} + C = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2 - a^2}} + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{\left(x^2 - 4x\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x-2}{4\sqrt{\left(x-2\right)^2 - 4}} + C$$

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA DEL ÁNGULO MEDIO

Existen integrales cuyos integrandos tienen binomios con las funciones trigonométricas $senx$ y $\cos x$, que para simplificar la integral se sustituyen por funciones de una nueva variable "z" que se define como la tangente del ángulo medio "$\frac{x}{2}$" como sigue:

$$\boxed{z = \tan\frac{x}{2}}$$



$$senx = sen2\left(\frac{x}{2}\right) = 2sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\frac{1}{\sqrt{z^2+1}} = \frac{2z}{z^2+1}$$

$$\cos x = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - sen^2\frac{x}{2} = \frac{1}{z^2+1} - \frac{z^2}{z^2+1} = \frac{1-z^2}{z^2+1}$$

$$\frac{x}{2} = ang\tan z \quad \Rightarrow \quad x = 2ang\tan z \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2dz}{z^2+1}$$

Ejemplo. Resolver las siguientes integrales:

$$i) \quad \int \frac{dx}{senx + \cos x} \qquad ; \qquad ii) \quad \int \frac{dx}{1+\cos x}$$

Solución.
Se sustituyen seno y coseno por sus valores con respecto a "z" y se resuelve la integral. Así,

$$i)\quad \int \frac{dx}{sen\,x+\cos x}=\int \frac{\frac{2dz}{z^2+1}}{\frac{2z}{z^2+1}+\frac{1-z^2}{z^2+1}}=2\int \frac{dz}{2z+1-z^2}=2\int \frac{dz}{-\left(z^2-2z-1\right)}$$

$$=2\int \frac{dz}{-\left(z^2-2z+1-1-1\right)}=2\int \frac{dz}{2-\left(z-1\right)^2}$$

$$u^2=\left(z-1\right)^2 \quad \Rightarrow \quad u=z-1 \quad \Rightarrow \quad du=dz \quad ; \quad a^2=2 \quad \Rightarrow \quad a=\sqrt{2}$$

$$2\int \frac{dz}{2-\left(z-1\right)^2}=2\int \frac{du}{a^2-u^2}=2\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|\right)+C=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+C$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{sen\,x+\cos x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+z-1}{\sqrt{2}-z+1}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1+\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}+1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$$

$$ii)\quad \int \frac{dx}{1+\cos x}=\int \frac{\frac{2dz}{z^2+1}}{1+\frac{1-z^2}{z^2+1}}=2\int \frac{dz}{z^2+1+1-z^2}=2\int \frac{dz}{2}=\int dz=z+C$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{1+\cos x}=\tan\frac{x}{2}+C$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean dos funciones u y v de la misma variable independiente "x". Entonces, la diferencial de su producto está dada por:

$$d\left(uv\right)=udv+vdu$$

de donde

$$udv=d\left(uv\right)-vdu$$

Si se integran ambos miembros de esta expresión se obtiene:

$$\int udv=uv-\int vdu$$

Ejemplo. Resolver las siguientes integrales:

$i)\ \int x\cos 2x\,dx \quad ; \quad ii)\ \int \sec^3 x\,dx \quad ; \quad iii)\ \int \ln x\,dx \quad ; \quad iv)\ \int ang\cot x\,dx$

$v)\ \int x^2e^{4x}dx \quad ; \quad vi)\ \int e^{-2x}sen3x\,dx \quad ; \quad vii)\ \int x\csc x\cot x\,dx$

$viii)\ \int \sqrt[3]{x^2}\ln x\,dx \quad ; \quad ix)\ \int x^2\,ang\cos x\,dx \quad ; \quad x)\ \int \frac{xe^x}{\left(x+1\right)^2}\,dx$

Solución.

Es importante y trascendente, cuando se presenta este tipo de integrales, el saber escoger adecuadamente "las partes", esto es "u" y "dv". Es evidente que la diferencial "dx" debe ser parte de la diferencial "dv". Por otra parte, se recomienda escoger como integrante de "dv" a la parte más difícil, siempre que sea integrable. Y cuando aparece la variable "x" elevada a potencias de números naturales, se aconseja, siempre que sea posible, seleccionarla como la parte "u", ya que al derivarla para formar la diferencial "du" bajará su exponente. Cuando se integra la "parte" "dv" para obtener "v", no se considera la constante esencial y arbitraria de la integración y el por qué se mostrará en el primer ejercicio. Considérense la resolución de los ejercicios propuestos.

i) $\int x\cos 2x\,dx$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx \quad ; \quad dv = \cos 2x dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{sen2x}{2} + C$$

Se aplica la expresión obtenida al principio del método y se obtiene:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \Rightarrow \quad \int x\cos 2x dx = \frac{xsen2x}{2} + Cx - \int\left(\frac{sen2x}{2} + C\right)dx$$

$$\int x\cos 2x dx = \frac{xsen2x}{2} + Cx - \frac{1}{2}\int sen2x dx - \int C dx$$

$$\int x\cos 2x dx = \frac{xsen2x}{2} + Cx - \frac{1}{2}\int sen2x dx - C\int dx$$

$$\int x\cos 2x dx = \frac{xsen2x}{2} + Cx + \frac{\cos 2x}{4} - Cx$$

$$\therefore \quad \int x\cos 2x dx = \frac{xsen2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

Como se observa la primera constante se anuló, pero al final se debe considerar la constante esencial y arbitraria de la integral propuesta.

ii) $\int \sec^3 x\,dx$

Se separa el integrando y se procede de manera semejante.

$$\int \sec^3 x\,dx = \int \sec x \sec^2 x\,dx$$

$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad du = \sec x \tan x\,dx \quad ; \quad dv = \sec^2 x \quad \Rightarrow \quad v = \tan x$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\,dx$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x\left(\sec^2 x - 1\right)dx$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$

Como se observa, en el segundo miembro hay una integral igual a la del primer miembro, por lo que se pasa al primer miembro y se suma. Así,

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \int \sec x\,dx$$

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C_1$$

$$\therefore \quad \int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

iii) $\int \ln x\, dx$

En esta integral, $\ln x$ es una expresión complicada al comparársele con la unidad por dx, pero como no se puede integrar (es lo que se pretende en este ejercicio), entonces se le asigna a la parte "u" y la otra parte será $dv = dx$. Luego,

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x} \quad ; \quad dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x}$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int dx$$

$$\therefore \quad \int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$$

iv) $\int ang\cot x\, dx$

Esta función circular inversa se tiene que tomar como "u" ya que no es integrable, luego "dx" será "dv". Así,

$$u = ang\cot x \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{dx}{x^2+1} \quad ; \quad dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$\int ang\cot x\, dx = x ang\cot x - \int x\left(-\frac{dx}{x^2+1}\right) = x ang\cot x + \int \frac{xdx}{x^2+1}$$

$$w = x^2+1 \quad \Rightarrow \quad dw = 2xdx \quad ; \quad \int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2}\ln|w| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

$$\therefore \quad \int ang\cot x\, dx = x ang\cot x + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

v) $\int x^2 e^{4x} dx$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx \quad ; \quad dv = e^{4x}dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{e^{4x}}{4}$$

$$\int x^2 e^{4x} dx = \frac{x^2 e^{4x}}{4} - \int \frac{e^{4x}}{4}(2xdx) = \frac{x^2 e^{4x}}{4} - \frac{1}{2}\int x e^{4x} dx$$

Se repite el procedimiento para la integral obtenida y se llega a:

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx \quad ; \quad dv = e^{4x}dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{e^{4x}}{4}$$

$$\int x^2e^{4x}dx=\frac{x^2e^{4x}}{4}-\frac{1}{2}\int xe^{4x}dx=\frac{x^2e^{4x}}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{xe^{4x}}{4}-\frac{1}{4}\int e^{4x}dx\right)$$

$$\therefore\quad \int x^2e^{4x}dx=\frac{x^2e^{4x}}{4}-\frac{x^2e^{4x}}{8}+\frac{e^{4x}}{8}+C$$

vi) $\int e^{-2x}sen3x\,dx$

$$u=sen3x \quad\Rightarrow\quad du=3\cos 3x dx \quad ; \quad dv=e^{-2x}dx \quad\Rightarrow\quad v=-\frac{e^{-2x}}{2}$$

$$\int e^{-2x}sen3x\,dx=-\frac{e^{-2x}}{2}sen3x-\int\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)3\cos 3x dx$$

$$\int e^{-2x}sen3x\,dx=-\frac{e^{-2x}}{2}sen3x+\frac{3}{2}\int e^{-2x}\cos 3x dx$$

La integral obtenida se vuelve a integrar por partes y,

$$u=\cos 3x \quad\Rightarrow\quad du=-3sen3xdx \quad ; \quad dv=e^{-2x}dx \quad\Rightarrow\quad v=-\frac{e^{-2x}}{2}$$

$$\int e^{-2x}sen3x\,dx=-\frac{e^{-2x}}{2}sen3x+\frac{3}{2}\left[\cos 3x\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)-\int\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)(-3sen3xdx)\right]$$

$$\int e^{-2x}sen3x\,dx=-\frac{e^{-2x}}{2}sen3x+-\frac{3e^{-2x}}{4}\cos 3x-\frac{9}{4}\int e^{-2x}sen3xdx$$

La última integral es igual a la pedida salvo por el coeficiente, luego se pasa al primer miembro de la ecuación y se obtiene:

$$\frac{13}{4}\int e^{-2x}sen3x\,dx=-\frac{e^{-2x}}{2}sen3x-\frac{3e^{-2x}}{4}\cos 3x$$

Y, por lo tanto, l solución de la integral es:

$$\therefore\quad \int e^{-2x}sen3x\,dx=-\frac{2e^{-2x}sen3x}{13}-\frac{3e^{-2x}\cos 3x}{13}+C$$

vii) $\int x\csc x\cot x\,dx$

$$u=x \quad\Rightarrow\quad du=dx \quad ; \quad dv=\csc x\cot x dx \quad\Rightarrow\quad v=-\csc x$$

$$\int x\csc x\cot x\,dx=-x\csc x+\int \csc x dx$$

$$\therefore\quad \int x\csc x\cot x\,dx=-x\csc x+\ln\left|\csc x-\cot x\right|+C$$

viii) $\int \sqrt[3]{x^2}\ln x\,dx$

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x} \quad ; \quad dv = \sqrt[3]{x^2}\,dx = x^{\frac{2}{3}}dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$$

$$\int \sqrt[3]{x^2}\ln x\,dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\ln x - \frac{3}{5}\int x^{\frac{5}{3}}\frac{dx}{x} = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\ln x - \frac{3}{5}\int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\ln x - \frac{3}{5}\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C$$

$$\therefore \quad \int \sqrt[3]{x^2}\ln x\,dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\ln x - \frac{9x^{\frac{5}{3}}}{\frac{25}{3}} + C$$

ix) $\int x^2\, ang\cos x\, dx$

$$u = ang\cos x \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad dv = x^2dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2\, ang\cos x\, dx = \frac{x^3}{3}ang\cos x - \int \frac{x^3}{3}\left(-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{x^3}{3}ang\cos x + \frac{1}{3}\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Esta última integral se resuelve por sustitución trigonométrica y se obtiene:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad u^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx \quad ; \quad a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

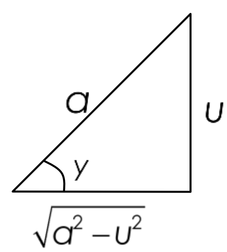
$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{u^3du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

$u = a\,sen\,y$

$du = a\cos y\,dy$

$u^3 = a^3sen^3y$

$\sqrt{a^2-u^2} = a\cos y$



$$\int \frac{a^3sen^3y\,a\cos y\,dy}{a\cos y} = a^3\int sen^3y\,dy = a^3\int\left(1-\cos^2 y\right)sen\,y\,dy$$

$$= a^3\int sen\,y\,dy - a^3\int \cos^2 y\,sen\,y\,dy = -a^3\cos y + \frac{a^3}{3}\cos^3 y + C$$

$$= -a^3\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a} + \frac{a^3}{3}\left(\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a}\right)^3 + C = -a^2\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{3}\left(a^2-u^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Se sustituye este resultado en el desarrollo que se llevaba y,

$$\int x^2\, ang\cos x\, dx = \frac{x^3}{3} ang\cos x + \frac{1}{3}\left(-\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} \right) + C$$

$$\therefore \quad \int x^2\, ang\cos x\, dx = \frac{x^3}{3} ang\cos x - \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

ix) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\, dx$

En integrales como esta no es tan sencillo identificar "u" y "dv". Para resolverla se toman como partes las siguientes:

$$u = xe^x \quad \Rightarrow \quad du = e^x(x+1)dx \quad ; \quad dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\, dx = -\frac{xe^x}{x+1} + \int \frac{e^x(x+1)}{x+1} dx$$

$$\therefore \quad \int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\, dx = -\frac{xe^x}{x+1} + e^x + C$$

INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES RACIONALES

Este método se utiliza cuando en el integrando se presenta un cociente de polinomios y es factible factorizar el polinomio del denominador y este es de menor grado que el polinomio del numerador. Cuando no es así, se realiza la división y se aplica el método al cociente de la división. Es conveniente analizar la naturaleza de los factores del denominador para denotar a sus correspondientes numeradores variables. Para ello se aconseja seguir los siguientes dos casos:

i) Cuando en el polinomio del denominador se tiene un factor de la forma $(ax+b)^n$, donde $n \geq 1$, la descomposición de fracciones racionales contiene la suma de las "n" fracciones:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

$$\text{con } A_i \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,n \in \mathbb{R}$$

ii) Cuando en el polinomio del denominador se tiene un factor de la forma $(ax^2+bx+c)^n$, donde $n \geq 1$ y $b^2 - 4ac < 0$, esto es, donde el polinomio ax^2+bx+c tiene raíces complejas, la descomposición de fracciones racionales contiene la suma de las "n" fracciones:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

$$\text{con}\quad A_i \quad y \quad B_i \quad ; \quad i=1,2,\ldots n\in\mathbb{R}$$

Ejemplo. Resolver las siguientes integrales:

$$i)\ \int\frac{x-1}{x^2-3x-18}dx \quad ; \quad ii)\ \int\frac{3x^4-2x^3+5}{x^4-x^2}dx \quad ; \quad iii)\ \int\frac{x^3-x^2+3x-2}{x^4-16}dx$$

$$iv)\ \int\frac{x^2+6x+2}{2x^3-x^2+x}dx \quad ; \quad v)\ \int\frac{2x^5-x^4+8x^3-3x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}dx$$

Solución.

Para cada integral se verá primero la factorización del denominador y de ahí saldrá cómo descomponer el integrando en fracciones racionales. En la segunda y en la última se realizará primero la división ya que el polinomio del numerador es, respectivamente, de igual y mayor grado que el del denominador.

$$i)\ \int\frac{x-1}{x^2-3x-18}dx$$

$$\frac{x-1}{x^2-3x-18}=\frac{x-1}{(x+3)(x-6)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-6}$$

$$\frac{x-1}{x^2-3x-18}=\frac{A(x-6)+B(x+3)}{(x+3)(x-6)} \quad\Rightarrow\quad x-1=Ax-6A+Bx+3B$$

Por igualdad de polinomios:

$$\begin{cases}1=A+B\\-1=-6A+3B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\-6A+3B=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6A+6B=6\\-6A+3B=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=\dfrac{5}{9}\\[2ex]A=\dfrac{4}{9}\end{cases}$$

$$\int\frac{x-1}{x^2-3x-18}dx=\int\frac{\frac{4}{9}}{x+3}dx+\int\frac{\frac{5}{9}}{x-6}dx=\frac{4}{9}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{5}{9}\int\frac{dx}{x-6}$$

Por dos sencillos cambios de variable se llega finalmente a:

$$\therefore\quad\int\frac{x-1}{x^2-3x-18}dx=\frac{4}{9}\ln|x+3|+\frac{5}{9}\ln|x-6|+C=\frac{1}{9}\ln(x+3)^4|x-6|^5+C$$

$$ii)\ \int\frac{3x^4-2x^3+5}{x^4-x^2}dx$$

Se realiza la división algebraica y se llega a:

$$\frac{3x^4-2x^3+5}{x^4-x^2}=3+\frac{-2x^3+3x^2+5}{x^4-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{3x^4-2x^3+5}{x^4-x^2}dx=3\int dx+\int\frac{-2x^3+3x^2+5}{x^4-x^2}dx$$

Se aplica el método a la integral obtenida y se tiene que:

$$\frac{-2x^3+3x^2+5}{x^4-x^2}=\frac{-2x^3+3x^2+5}{x^2\left(x^2-1\right)}=\frac{-2x^3+3x^2+5}{x^2\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}$$

$$-2x^3+3x^2+5=Ax\left(x^2-1\right)+B\left(x^2-1\right)+Cx^2\left(x+1\right)+Dx^2\left(x-1\right)$$

$$-2x^3+3x^2+5=Ax^3-Ax+Bx^2-B+Cx^3+C+Dx^3-D$$

$$\begin{cases}-2=A+C+D\\ 3=B\\ 0=-A\\ 5=-B+C-D\end{cases} \Rightarrow \quad A=0\ ;\ B=3\ \begin{cases}C+D=-2\\ C-D=8\end{cases} \Rightarrow \quad C=3\ ;\ D=-5$$

$$\int\frac{-2x^3+3x^2+5}{x^4-x^2}dx=\int\frac{0}{x}dx+3\int\frac{dx}{x^2}+3\int\frac{dx}{x-1}-5\int\frac{dx}{x+1}=-\frac{3}{x}+3\ln\left|x-1\right|-5\ln\left|x+1\right|+C$$

Entonces, el resultado final de la integral es:

$$\therefore \quad \int\frac{3x^4-2x^3+5}{x^4-x^2}dx=3x-\frac{3}{x}+\ln\frac{\left|x-1\right|^3}{\left|x+1\right|^5}+C$$

iii) $\displaystyle\int\frac{x^3-x^2+3x-2}{x^4-16}dx$

$$\frac{x^3-x^2+3x-2}{x^4-16}=\frac{x^3-x^2+3x-2}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$x^3-x^2+3x-2=A\left(x+2\right)\left(x^2+4\right)+B\left(x-2\right)\left(x^2+4\right)-\left(Cx+D\right)\left(x^2-4\right)$$

$$\begin{aligned}x^3-x^2+3x-2=&\ Ax^3+4Ax+2Ax^2+8A+Bx^3+4Bx\\ &-2Bx^2-8B-Cx^3+4Cx-Dx^2+4D\end{aligned}$$

$$\begin{cases}1=A+B-C\\ -1=2A-2B-D\\ 3=4A+4B+4C\\ -2=8A-8B+4D\end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l}C=A+B-1\\ D=2A-2B+1\end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l}3=4A+4B+4\left(A+B-1\right)\\ -2=8A-8B+4\left(2A-2B+1\right)\end{array}$$

$$\begin{matrix} 3 = 4A + 4B + 4(A + B - 1) \\ -2 = 8A - 8B + 4(2A - 2B + 1) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 8A + 8B = 7 \\ 8A - 8B = -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{5}{8} \\ C = -\frac{1}{8} \\ D = \frac{1}{4} \end{matrix}$$

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{x^4 - 16} dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{x - 2} dx + \int \frac{\frac{5}{8}}{x + 2} dx + \int \frac{-\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}}{x^2 + 4} dx$$

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{x^4 - 16} dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{x - 2} dx + \int \frac{\frac{5}{8}}{x + 2} dx - \frac{1}{8}\int \frac{x - 2}{x^2 + 4} dx$$

La tercera integral se separa en dos y se resuelve con sencillos cambios de variable y fórmulas de integración ya tratadas. Así,

$$\int \frac{x - 2}{x^2 + 4} dx = \int \frac{xdx}{x^2 + 4} - 2\int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + 4\right| - ang\tan\frac{x}{2} + C$$

Luego, la solución final de la integral es:

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{x^4 - 16} dx = \frac{1}{4}\ln|x - 2| + \frac{5}{8}\ln|x + 2| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + 4\right| - ang\tan\frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{x^4 - 16} dx = \frac{2}{8}\ln|x - 2| + \frac{5}{8}\ln|x + 2| + \frac{4}{8}\ln\left|(x - 2)(x + 2)\right| - ang\tan\frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{x^4 - 16} dx = \frac{1}{8}\ln(x - 2)^2 |x + 2|^5 (x - 2)^4 (x + 2)^4 - ang\tan\frac{x}{2} + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{x^4 - 16} dx = \frac{1}{8}\ln(x - 2)^6 |x + 2|^9 - ang\tan\frac{x}{2} + C$$

iv) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 6x + 2}{2x^3 - x^2 + x} dx$

$$\frac{x^2 + 6x + 2}{2x^3 - x^2 + x} = \frac{x^2 + 6x + 2}{x(2x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{2x^2 - x + 1}$$

$$x^2 + 6x + 2 = 2Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Cx$$

$$\begin{cases} 1 = 2A + B \\ 6 = -A + C \\ 2 = A \end{cases} ; \quad A = 2 \quad \Rightarrow \quad B = -3 \quad \Rightarrow \quad C = 8$$

$$\int \frac{x^2 + 6x + 2}{2x^3 - x^2 + x} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{-3x + 8}{2x^2 - x + 1} dx$$

La primera integral es directa y la segunda se resuelve como sigue:

$$\int \frac{-3x+8}{2x^2-x+1}dx = -\int \frac{3x-8}{2x^2-x+1}dx = -3\int \frac{x-\frac{8}{3}}{2x^2-x+1}dx$$

$$u = 2x^2 - x + 1 \quad \Rightarrow \quad du = (4x-1)dx = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)dx$$

$$-3\int \frac{x-\frac{8}{3}}{2x^2-x+1}dx = 3\int \frac{x-\frac{1}{4}-\frac{29}{12}}{2x^2-x+1}dx = 3\int \frac{x-\frac{1}{4}}{2x^2-x+1}dx - \frac{29}{4}\int \frac{dx}{2x^2-x+1}$$

La primera integral se resuelve con el cambio de variable sugerido, de donde,

$$3\int \frac{x-\frac{1}{4}}{2x^2-x+1}dx = \frac{3}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{4}\ln|u| + C = \frac{3}{4}\ln\left|2x^2-x+1\right| + C$$

La segunda integral se resuelve por fórmula con algunos ajustes como sigue:

$$\int \frac{dx}{2x^2-x+1} = \int \frac{dx}{2x^2-x+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+1} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{7}{8}}$$

$$v^2 = \left(\sqrt{2}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \;\Rightarrow\; v = \sqrt{2}x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; dv = \sqrt{2}dx \;\; ; \;\; a^2 = \frac{7}{8} \;\Rightarrow\; a = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{a}ang\tan\frac{v}{a} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}}ang\tan\frac{\sqrt{2}x-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}} + C$$

$$\int \frac{dx}{2x^2-x+1} = \frac{2}{\sqrt{7}}ang\tan\frac{8x-1}{\sqrt{7}} + C$$

Finalmente se tiene la solución de la integral como:

$$\therefore \quad \int \frac{-3x+8}{2x^2-x+1}dx = \frac{3}{4}\ln\left|2x^2-x+1\right| - \frac{29}{2\sqrt{7}}ang\tan\frac{8x-1}{\sqrt{7}} + C$$

v) $\displaystyle\int \frac{2x^5-x^4+8x^3-3x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}dx$

Como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador, se efectúa primero la división como sigue:

$$\frac{2x^5-x^4+8x^3-3x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4} = x^2 + \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}$$

$$\int \frac{2x^5-x^4+8x^3-3x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}dx = \int x^2dx + \int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}dx$$

La primera integral es directa. Para resolver la segunda se utiliza este método de integración en descomposición en fracciones racionales. Luego,

$$\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}dx$$

$$2x^3-x^2+8x-4=\left(x^2+4\right)\left(2x-1\right)$$

$$\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{2x-1}$$

$$x^2-x-21=\left(Ax+B\right)\left(2x-1\right)+C\left(x^2+4\right)$$

$$x^2-x-21=2Ax^2-Ax+2Bx-B+Cx^2+4C$$

$$\begin{cases} 1=2A+C \\ -1=-A+2B \\ -21=-B+4C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A+C=1 \quad \Rightarrow \quad A=\dfrac{1-C}{2} \\ -A+2B=-1 \\ -B+4C=-21 \quad \Rightarrow \quad B=4C+21 \end{cases}$$

$$-\frac{1-C}{2}+2\left(4C+21\right)=-1 \quad \Rightarrow \quad -1+C+16C+84=-2 \quad \Rightarrow \quad 17C=-85$$

$$C=-5 \quad ; \quad B=1 \quad ; \quad A=3$$

$$\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}dx=\int \frac{3x+1}{x^2+4}dx+\int \frac{-5}{2x-1}dx$$

$$\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}dx=3\int \frac{x\,dx}{x^2+4}+\int \frac{dx}{x^2+4}-5\int \frac{dx}{2x-1}$$

$$u=x^2+4 \quad \Rightarrow \quad du=2x\,dx \qquad ; \qquad v=2x-1 \quad \Rightarrow \quad dv=2\,dx$$

$$w^2=x^2 \quad \Rightarrow \quad w=x \quad \Rightarrow \quad dw=dx \quad ; \quad a^2=4 \quad \Rightarrow \quad a=2$$

$$=\frac{3}{2}\int \frac{du}{u}+\int \frac{dw}{w^2+a^2}-\frac{5}{2}\int \frac{dv}{v}=\frac{3}{2}\ln|u|+\frac{1}{2}ang\tan\frac{w}{a}-\frac{5}{2}\ln|v|+C_1$$

$$\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}dx=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4\right|+\frac{1}{2}ang\tan\frac{x}{2}-\frac{5}{2}\ln|2x-1|+C_1$$

$$\therefore \quad \int \frac{2x^5-x^4+8x^3-3x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(x^2+4\right)^3}{\left(2x-1\right)^5}\right|+\frac{1}{2}ang\tan\frac{x}{2}+C$$

INTEGRACIÓN POR RACIONALIZACIÓN

Ya se han realizado algunas integrales con expresiones irracionales, pero existen muchas otras entre las cuales algunas, mediante una sustitución adecuada, se pueden resolver por alguno de los métodos ya tratados. Se presentarán algunos casos.

Cuando en el integrando sólo hay potencias fraccionarias de la variable o de una función "f" de la misma, formada por un binomio de la forma $ax+b$, se puede convertir éste en racional mediante la sustitución

$$x=u^n \quad o \quad f(x)=u^n$$

en donde "n" es el mínimo común múltiplo de los índices de las raíces. Considérense los siguientes ejemplos, como pueden existir muchos otros:

Ejemplo. Resolver las integrales siguientes:

$$i)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} \quad ; \quad ii)\ \int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}} \quad ; \quad iii)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}+\sqrt{(1-x)^3}}$$

Solución.

$i)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$

$$x=u^4 \quad \Rightarrow \quad dx=4u^3du \quad \Rightarrow \quad \int \frac{4u^3du}{\sqrt{u^4}-\sqrt[4]{u^4}}=4\int \frac{u^3du}{u^2-u}=4\int \frac{u^2du}{u-1}$$

$$4\int \frac{u^2du}{u-1}=4\left(\int u+1+\frac{1}{u-1}\right)du=4\int udu+\int du+\int \frac{du}{u-1}=\frac{4u^2}{2}+u+\ln|u-1|+C$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}=2\sqrt[4]{x}^2+\sqrt[4]{x}+\ln\left|\sqrt[4]{x}-1\right|+C=2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\ln\left|\sqrt[4]{x}-1\right|+C$$

$ii)\ \int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}}$

$$3x+1=u^6 \quad \Rightarrow \quad 3dx=6u^5du \quad \Rightarrow \quad dx=2u^5du$$

$$\int \frac{2u^5du}{\sqrt{u^6}+\sqrt[3]{u^6}}=2\int \frac{u^5du}{u^3+u^2}=2\int \frac{u^3du}{u+1}=2\int\left(u^2-u+1-\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$2\int\left(u^2-u+1-\frac{1}{u+1}\right)du=2\int u^2du-2\int udu+2\int du-2\int \frac{du}{u+1}$$

$$=\frac{2u^3}{3}-\frac{2u^2}{2}-2u+2\ln|u+1|+C=\frac{2u^3}{3}-u^2-2u+2\ln|u+1|+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}}=\frac{2\left(\sqrt[6]{3x+1}\right)^3}{3}-\left(\sqrt[6]{3x+1}\right)^2-2\sqrt[6]{3x+1}+2\ln\left|\sqrt[6]{3x+1}+1\right|+C$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}-2\sqrt[6]{3x+1}+2\ln\left|\sqrt[6]{3x+1}+1\right|+C$$

$iii)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}+\sqrt{(1-x)^3}}$

$$1-x=u^2 \qquad -dx=2udu \quad \Rightarrow \quad dx=-2udu \quad \Rightarrow \quad \int \frac{-2udu}{\sqrt{u^2}+\sqrt{u^6}}=-2\int \frac{udu}{u+u^3}$$

$$=-2\int \frac{udu}{u+u^3}=-2\int \frac{du}{1+u^2}=-2ang\tan u+C$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}+\sqrt{(1-x)^3}}=-2ang\tan\sqrt{1-x}+C$$

Cuando en el integrando se presenta una expresión irracional, ya sea sola o con alguna función de "x" elevada a una potencia impar, se sustituye la expresión irracional por una nueva variable y se procede como antes.

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Resolver las integrales:

$$i) \quad \int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx \quad ; \quad ii) \quad \int \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}dx \quad ; \quad iii) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$$

$$iv) \quad \int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}dx \quad ; \quad v) \quad \int \frac{sen^3x}{\sqrt{\cos x}}dx \quad ; \quad vi) \quad \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^5}dx$$

Solución

$$i) \quad \int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx$$

$$x^2+16=u^2 \quad \Rightarrow \quad 2xdx=2udu \quad xdx=udu$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx=\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^2}xdx=\int \frac{\sqrt{u^2}}{u^2-16}udu=\int \frac{u^2du}{u^2-16}=\int\left(1+\frac{16}{u^2-16}\right)du$$

$$=\int du+16\int \frac{du}{u^2-16}=u+\frac{16}{8}\ln\left|\frac{u-4}{u+4}\right|+C$$

$$\therefore \quad \int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx=\sqrt{x^2+16}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+16}+4}\right|+C$$

$$ii) \quad \int \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}dx$$

$$x=u^2 \quad \Rightarrow \quad dx=2udu \quad \Rightarrow \quad \int \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}dx=\int \frac{(u^2-1)2udu}{1+\sqrt{u^2}}=2\int \frac{u^3-u}{1+u}du$$

$$=2\int\left(u^2+u-2+\frac{2}{u+1}\right)du=\frac{2u^3}{3}+u^2-4u+4\ln|u+1|+C$$

$$\therefore \quad \int \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + x - 4\sqrt{x} + 4\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C$$

iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$

$$e^x + 1 = u^2 \;\Rightarrow\; e^x = u^2 - 1 \;\Rightarrow\; \ln e^x = \ln\left(u^2-1\right) \;\Rightarrow\; x = \ln\left(u^2-1\right) \;\Rightarrow\; dx = \frac{2u\,du}{u^2-1}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{\frac{2u}{u^2-1}}{\sqrt{u^2}}\,du = 2\int \frac{du}{u^2-1} = 2\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right) + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C$$

iv) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx$

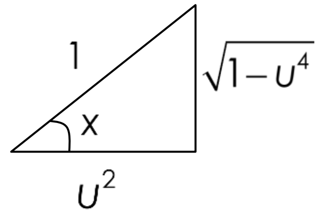
$$x+1 = u^2 \;\Rightarrow\; dx = 2u\,du \;\Rightarrow\; \int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{u^2-1+2}{\sqrt{u^2}}\,2u\,du = 2\int\left(u^2+1\right)du$$

$$= 2\int u^2\,du + 2\int du = \frac{2u^3}{3} + 2u + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{2\left(x+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + 2\sqrt{x+1} + C$$

v) $\displaystyle\int \frac{sen^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

Esta integral se puede resolver por el método de integrales trigonométricas, pero también es posible tratarla con el tipo de sustitución visto ahora. Así,



$$\cos x = u^2 \;\Rightarrow\; -sen x\,dx = 2u\,du \Rightarrow\; dx = -\frac{2u\,du}{sen x} \;\Rightarrow\; dx = -\frac{2u\,du}{\sqrt{1-u^4}}$$

$$\int \frac{sen^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = -\int \frac{\left(1-u^4\right)^{\frac{3}{2}} \dfrac{2u\,du}{\sqrt{1-u^4}}}{u} = -2\int\left(1-u^4\right)du = -2\int du + 2\int u^4 du = -2u + \frac{2u^5}{5} + C$$

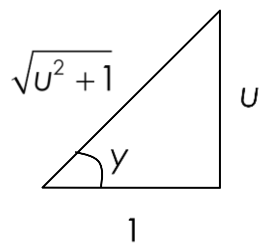
$$\therefore \quad \int \frac{sen^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = -2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + C = \frac{2\sqrt{\cos x}}{5}\left(\cos^2 x - 5\right) + C$$

vi) $\displaystyle \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^5}\,dx$

$$x^2 - 1 = u^2 \quad \Rightarrow \quad 2xdx = 2udu \quad \Rightarrow \quad xdx = udu$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^5}\,dx = \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^6}\,xdx = \int \frac{u}{\left(u^2+1\right)^3}\,udu = \int \frac{u^2 du}{\left(u^2+1\right)^3}$$

Se resuelve por sustitución trigonométrica y,



$$u = \tan y \quad \Rightarrow \quad du = \sec^2 y\,dy \quad ; \quad u^2 = \tan^2 y$$

$$\sqrt{u^2+1} = \sec y \quad \Rightarrow \quad \left(u^2+1\right)^3 = \sec^6 y$$

$$\int \frac{u^2 du}{\left(u^2+1\right)^3} = \int \frac{\tan^2 y \sec^2 y\,dy}{\sec^6 y} = \int \frac{\tan^2 y}{\sec^4 y}\,dy = \int \frac{\dfrac{sen^2 y}{\cos^2 y}}{\dfrac{1}{\cos^4 y}}\,dy = \int sen^2 y \cos^2 y\,dy$$

$$= \int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2y\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2y\right)dy = \int\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2y\right)dy$$

$$= \frac{1}{4}\int dy - \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4y\right)dy = \frac{1}{4}\int dy - \frac{1}{8}\int dy - \frac{1}{8}\int \cos 4y\,dy$$

$$= \frac{1}{8}y - \frac{1}{32}sen 4y + C = \frac{1}{8}y - \frac{1}{16}sen 2y \cos 2y + C$$

$$= \frac{1}{8}y - \frac{1}{16}2 sen y \cos y\left(\cos^2 y - sen^2 y\right) + C$$

$$= \frac{1}{8}y - \frac{1}{8}sen y \cos^3 y + \frac{1}{8}sen^3 y \cos y + C$$

$$= \frac{1}{8}ang\tan u - \frac{1}{8}\frac{u}{\left(u^2+1\right)^2} + \frac{1}{8}\frac{u^3}{\left(u^2+1\right)^2} + C = \frac{1}{8}ang\tan u + \frac{u^3 - u}{8\left(u^2+1\right)^2} + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^5}dx = \frac{1}{8} ang\tan\sqrt{x^2-1} + \frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}} - \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{8x^4} + C$$

INTEGRACIÓN DE Y CON LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Cada una de las expresiones obtenidas para derivar las funciones hiperbólicas directas e inversas, tiene su correspondiente forma diferencial y, de estas diferenciales, al integrarlas, se obtienen las expresiones siguientes:

$$\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C \qquad \int \operatorname{csc} h u\,du = \ln\left|\tanh\frac{u}{2}\right| + C$$

$$\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C \qquad \int \sec h^2 u\,du = \tanh u + C$$

$$\int \tan u\,du = \ln\left(\cosh u\right) + C \qquad \int \csc h^2 u\,du = -\coth u + C$$

$$\int \coth u\,du = \ln\left|\operatorname{senh} u\right| + C \qquad \int \sec hu \tanh u\,du = -\sec hu + C$$

$$\int \sec u\,du = ang\tan\left|\operatorname{senh} u\right| + C \qquad \int \csc hu \coth u\,du = -\csc hu + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a} + C = \ln\left|u+\sqrt{a^2+u^2}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{u}{a} + C = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C \quad ; \quad u > a$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} + C = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+u}{a-u} + C \quad ; \quad |u| < a$$

$$= \frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a} + C = \frac{1}{2a}\ln\frac{u+a}{u-a} + C; \ldots |u| > a$$

y en forma compacta

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C \quad ; \quad u \neq a$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\sec h^{-1}\frac{|u|}{a} + C = -\frac{1}{a}\cosh^{-1}\frac{a}{|u|} + C; \quad 0 < u < a$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\csc h^{-1}\frac{|u|}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{senh}^{-1}\frac{a}{|u|} + C; \quad u \neq 0$$

Ejemplo. Resolver las siguientes integrales:

$$i)\ \int \frac{\operatorname{senh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \quad ; \quad ii)\ \int_0^1 \cosh^2 2x dx \quad ; \quad iii)\ \int_1^2 \tanh^2 x dx$$

$$iv)\ \int \operatorname{sec}h^2 5x dx \quad ; \quad v)\ \int \cosh^3 x dx \quad ; \quad vi)\ \int \cosh x \operatorname{csc}h^2 x dx$$

$$vii)\ \int \frac{\operatorname{csc}h(\ln x)}{x}dx \quad ; \quad viii)\ \int \frac{\operatorname{sec}h\left(\frac{1}{x}\right)\tanh\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$$

Solución.

Para resolver estas integrales se utilizan las identidades hiperbólicas y las relaciones trigonométricas entre estas funciones. No son ejercicios con alto grado de dificultad, sino ejemplos que ilustran, de manera sencilla, cómo integrar este tipo de funciones.

$i)\ \int \frac{\operatorname{senh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

$$u = \sqrt{x} \quad ; \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad 2\int \operatorname{senh} u du = 2\cosh u + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{\operatorname{senh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\cosh\sqrt{x} + C$$

$ii)\ \int_0^1 \cosh^2 2x dx$

$$u = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \cosh^2 u du = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 2u\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\int du + \frac{1}{4}\int \cosh 2u du$$

$$v = 2u \quad \Rightarrow \quad dv = 2du \quad \Rightarrow \quad = \frac{1}{4}\int du + \frac{1}{8}\int \cosh v dv$$

$$= \frac{u}{4} + \frac{\operatorname{senh} v}{8} + C = \frac{2x}{4} + \frac{\operatorname{senh} 4x}{8} + C$$

$$\therefore \quad \int_0^1 \cosh^2 2x dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{senh} 4x}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{senh 4}{8} \approx 3.9112$$

$iii)\ \int_1^2 \tanh^2 x dx$

$$= \int_1^2 \left(1 - \operatorname{sec}h^2 x\right)dx = \left[x - \tanh x\right]_1^2$$

$$= 2 - \tanh 2 - 1 + \tanh 1$$

$$\therefore \quad \int_1^2 \tanh^2 x dx \approx 0.7976$$

iv) $\int \operatorname{sec}h^{2} 5x dx$

$$u = 5x \quad ; \quad du = 5dx \quad \Rightarrow \quad = \frac{1}{5}\int \operatorname{sec}h^{2} du = \frac{1}{5}\tanh u + C$$

$$\therefore \quad \int \operatorname{sec}h^{2} 5x dx = \frac{1}{5}\tanh 5x + C$$

v) $\int \cosh^{3} x dx$

$$= \int \cosh^{2} x \cosh x dx = \int \left(1 + \operatorname{senh}^{2} x\right) \cosh x dx$$

$$= \int \cosh x dx + \int \operatorname{senh}^{2} x \cosh x dx$$

$$u = \operatorname{senh} x \quad \Rightarrow \quad du = \cosh x dx$$

$$\Rightarrow \quad = \int du + \int u^{2} du = u + \frac{u^{3}}{3} + C$$

$$\therefore \quad \int \cosh^{3} x dx = \operatorname{senh} x + \frac{\operatorname{senh}^{3} x}{3} + C$$

vi) $\int \cosh x \operatorname{csc}h^{2} x dx$

$$= \int \cosh x \frac{1}{\operatorname{senh}^{2} x} dx = \int \operatorname{csc}hx \coth x dx$$

$$\therefore \quad \int \cosh x \operatorname{csc}h^{2} x dx = -\operatorname{csc}hx + C$$

vii) $\int \frac{\operatorname{csc}h(\ln x)}{x} dx$

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad = \int \operatorname{csc}hu du = \ln\left|\tanh \frac{u}{2}\right| + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{\operatorname{csc}h(\ln x)}{x} dx = \ln\left|\tanh \frac{\ln x}{2}\right| + C$$

viii) $\int \frac{\operatorname{sec}h\left(\frac{1}{x}\right)\tanh\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{2}} dx$

$$u = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{dx}{x^{2}}$$

$$\Rightarrow \quad -\int \operatorname{sec}hu \tanh u du = \operatorname{sec}hu + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{\operatorname{sec}h\left(\frac{1}{x}\right)\tanh\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{2}} dx = \operatorname{sec}h\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

Ejemplo. Resolver las siguientes integrales, en términos de las funciones hiperbólicas inversas:

$$i)\quad \int_3^4 \frac{x}{\sqrt{x^4+16}}dx \quad ; \quad ii)\quad \int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x-9}}dx \quad ; \quad iii)\quad \int_1^2 \frac{dx}{3+2x-x^2}$$

$$iv)\quad \int_{0.2}^{0.8} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} \quad ; \quad v)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{4+e^{2x}}}$$

Solución.

$$i)\quad \int_3^4 \frac{x}{\sqrt{x^4+16}}dx$$

$$u^2 = x^4 \quad \Rightarrow \quad u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx \quad ; \quad a^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a} + C = \left[\frac{1}{2}\operatorname{senh}^{-1}\frac{x^2}{4}\right]_3^4$$

$$\therefore \quad \int_3^4 \frac{x}{\sqrt{x^4+16}}dx \approx 0.2723$$

También se podría obtener a través de:

$$= \frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{a^2+u^2}\right| + C = \frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+\sqrt{x^4+16}\right|\right]_3^4 \approx 0.2723$$

$$ii)\quad \int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x-9}}dx$$

$$u^2 = \operatorname{sen}^2 x \; ; u = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad du = \cos x dx$$

$$a^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x-9}}dx = \cosh^{-1}\frac{\operatorname{sen} x}{3} + C$$

resultado que también se podría expresar como:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x-9}}dx = \ln\left|senx+\sqrt{sen^2x-9}\right| + C$$

$$iii)\quad \int_1^2 \frac{dx}{3+2x-x^2}$$

$$= \int \frac{dx}{-\left(x^2-2x-3\right)} = \int \frac{dx}{-\left(x^2-2x+1-1-3\right)} = \int \frac{dx}{4-\left(x-1\right)^2}$$

$$u^2=(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad u=x-1 \quad \Rightarrow \quad du=dx \quad ; \quad a^2=4 \quad \Rightarrow \quad a=2$$

$$=\int\frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a}+C=\frac{1}{2}\tanh^{-1}\frac{x-1}{2}+C$$

$$\therefore \quad \int_1^2\frac{dx}{3+2x-x^2}=\left[\frac{1}{2}\tanh^{-1}\frac{x-1}{2}\right]_1^2\approx 0.2747$$

También se podría obtener a través de:

$$\int\frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{a+u}{a-u}+C=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{3-x}+C$$

$$\int_1^2\frac{dx}{3+2x-x^2}=\left[\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{3-x}\right]_1^2\approx 0.2747$$

iv) $\displaystyle\int_{0.2}^{0.8}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$u^2=x \quad \Rightarrow \quad u=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad du=\frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad a^2=1 \quad \Rightarrow \quad a=1$$

$$-2\int\frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}}=-\frac{1}{a}\operatorname{sec}h^{-1}\frac{|u|}{a}+C$$

$$\therefore \quad \int_{0.2}^{0.8}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}=-\left[\operatorname{sec}h^{-1}\sqrt{x}\right]_{0.2}^{0.8}\approx 0.9624$$

que también se puede obtener a partir de:

$$\therefore \quad \int_{0.2}^{0.8}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}=-\frac{1}{a}\cosh^{-1}\frac{a}{|u|}+C=-\left[\cosh^{-1}\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_{0.2}^{0.8}\approx 0.9624$$

v) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4+e^{2x}}}$

$$u^2=e^{2x}\ ;\ u=e^x \quad \Rightarrow \quad du=e^x dx$$

$$a^2=4 \quad \Rightarrow \quad a=2$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{4+e^{2x}}}\cdot\frac{e^x}{e^x}=\int\frac{e^x dx}{e^x\sqrt{4+e^{2x}}}=\int\frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}}=-\frac{1}{a}\operatorname{csc}h^{-1}\frac{|u|}{a}+C$$

$$\therefore \quad \int\frac{dx}{\sqrt{4+e^{2x}}}=-\frac{1}{2}\operatorname{csc}h^{-1}\frac{e^x}{2}+C$$

Este resultado también se podría expresar como:

$$\therefore \quad \int\frac{dx}{\sqrt{4+e^{2x}}}=-\frac{1}{a}\operatorname{senh}^{-1}\frac{a}{|u|}+C=-\frac{1}{2}\operatorname{senh}^{-1}\frac{2}{e^x}+C$$

FUNCIONES NO INTEGRABLES CON LOS MÉTODOS TRATADOS

Existen funciones que no son integrables en términos de las funciones conocidas, llamadas elementales, que se tratan en el Cálculo. La mayoría de las funciones elementales no tienen antiderivadas elementales. Algunas de ellas son las siguientes:

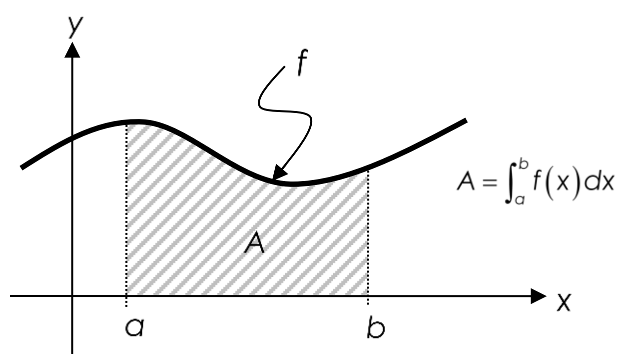
$$\int sen\, x^2\, dx \quad ; \quad \int e^{x^2}\, dx \quad ; \quad \int \sqrt{1+x^3}\, dx$$

$$\int \frac{sen\, x}{x} dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

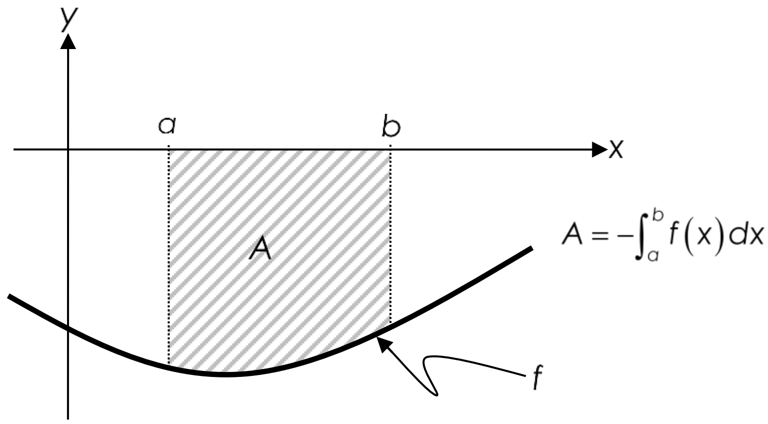
APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

APLICACIONES GEOMÉTRICAS
CÁLCULO DE ÁREAS

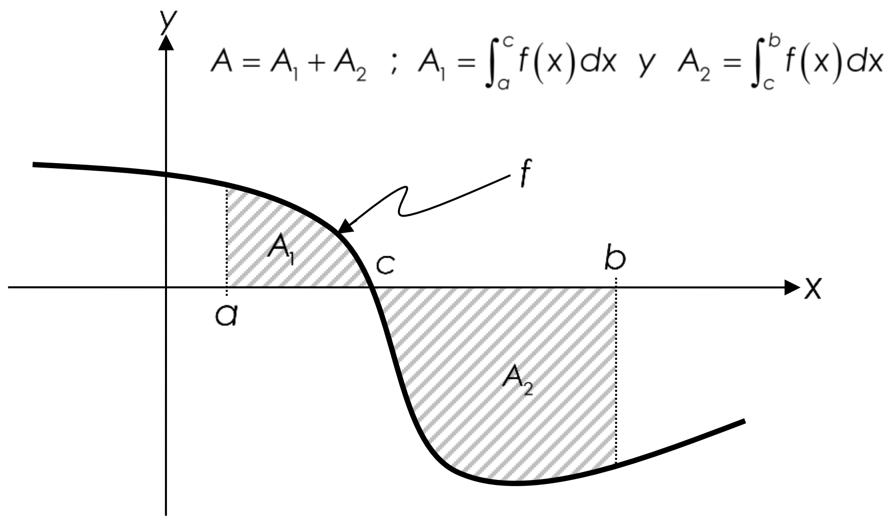
Considérese una función f, que es continua y positiva en un intervalo cerrado $\left[a,b\right]$, como se muestra en la siguiente figura. El cálculo del área limitada por su gráfica, el eje "x" y las rectas $x=a$ y $x=b$, conocida como "área bajo la curva", se obtiene, como ya se estudió, mediante la integral mostrada en la figura:



Si la función es continua y negativa:



Si es continua con una parte positiva y una negativa:

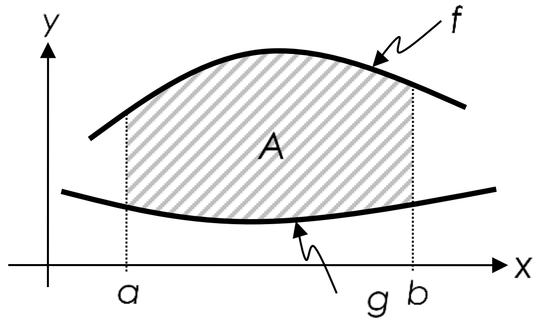


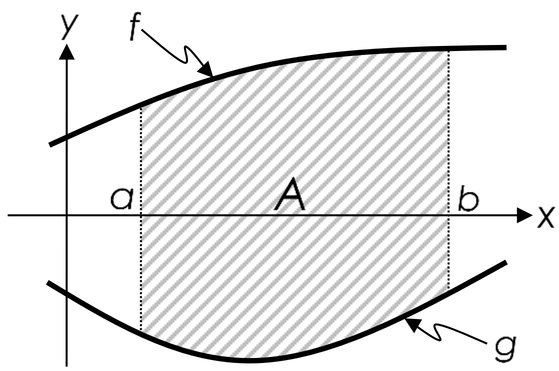
$$A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$

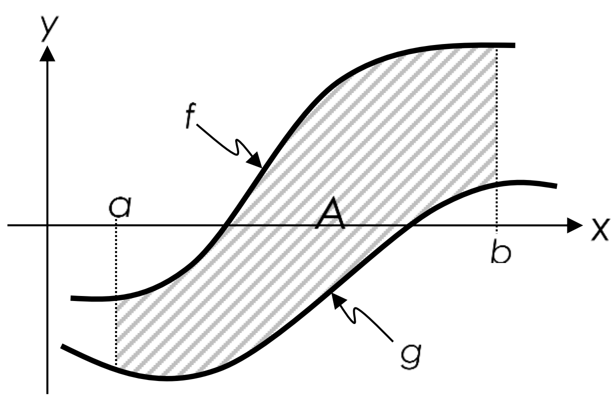
Si lo que se pretende es calcular el área limitada por dos curvas, que son la representación gráfica de las funciones f y g, continuas en el intervalo cerrado $\left[a,b\right]$, el cálculo de esta área, comprendida por las curvas y las rectas $x=a$ y $x=b$, se lleva a cabo mediante la integral:

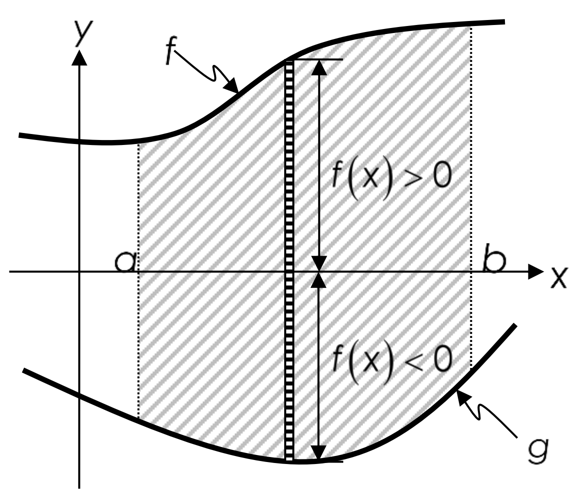
$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$$

no importando cualquiera de las situaciones siguientes con diferentes ubicaciones de las gráficas de ambas curvas en los ejes del sistema coordenado.


y
f
A
x
a
g
b


y
f
a
A
b
x
g


y
f
a
A
x
b
g


y
f
$f(x)>0$
a
b
x
$f(x)<0$
g

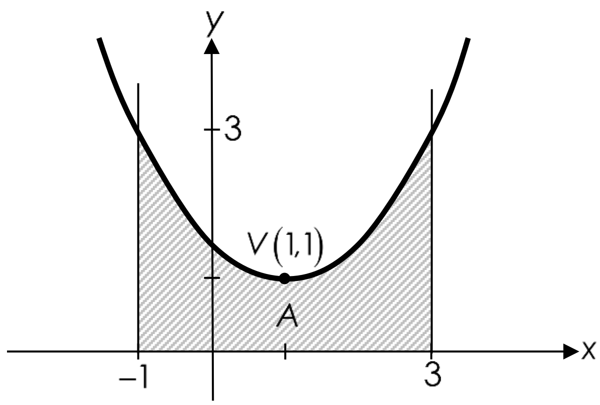
Ejemplo. Calcular el área de la región comprendida por la curva $y=\frac{x^2}{2}-x+\frac{3}{2}$, el eje de las abscisas y las rectas de ecuaciones $x=-1$ y $x=3$.

Solución.
Si se define de qué cónica se trata, se obtiene:

$$y=\frac{x^2}{2}-x+\frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad 2y=x^2-2x+3 \quad\Rightarrow\quad 2y=x^2-2x+1-1+3$$

$$\Rightarrow\quad 2y=(x-1)^2+2 \quad\Rightarrow\quad 2(y-1)=(x-1)^2 \quad\Rightarrow\quad (x-1)^2=2(y-1)$$

Parábola con vértice en $V(1,1)$, abre hacia arriba y su eje de simetría es $x=1$



Para calcular el área bajo la curva se resuelve la siguiente integral definida:

$$A=\int_{-1}^{3}\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{3}{2}\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}\right]_{-1}^{3}$$

$$A=\left(\frac{3^3}{6}-\frac{3^2}{2}+\frac{3(3)}{2}\right)-\left(\frac{(-1)^3}{6}-\frac{(-1)^2}{2}+\frac{3(-1)}{2}\right)=\frac{27}{6}-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$$

$$\therefore\quad A=\frac{20}{3}u^2$$

Ejemplo. Calcular el área limitada por la gráfica de la función

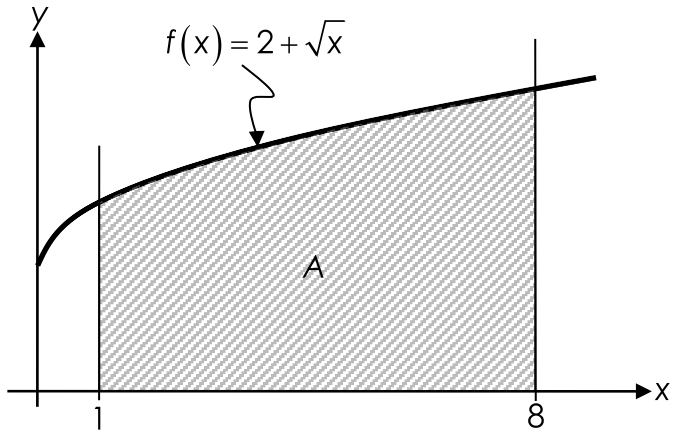
$$f(x)=2+\sqrt{x}$$

el eje de las abscisas y las rectas: $x=1$ y $x=8$.

Solución.
Se facilita si se identifica primero la cónica y se traza para ubicar el área pedida.

$$y=2+\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad y-2=\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad (y-2)^2=x$$

Parábola con vértice $V(0,2)$, abre hacia la derecha y su eje de simetría es $y=2$. Pero sólo se considera la parte superior de la curva. Así,



Se resuelve la integral definida que determina el área y se llega a:

$$A=\int_1^8\left(2+\sqrt{x}\right)dx=\int_1^8\left(2+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\left[2x+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^8=\left[2x+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^8$$

$$A=\left[2(8)+\frac{2}{3}(8)^{\frac{3}{2}}\right]-\left[2(1)+\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right]=16+\frac{32}{3}\sqrt{2}-2-\frac{2}{3}$$

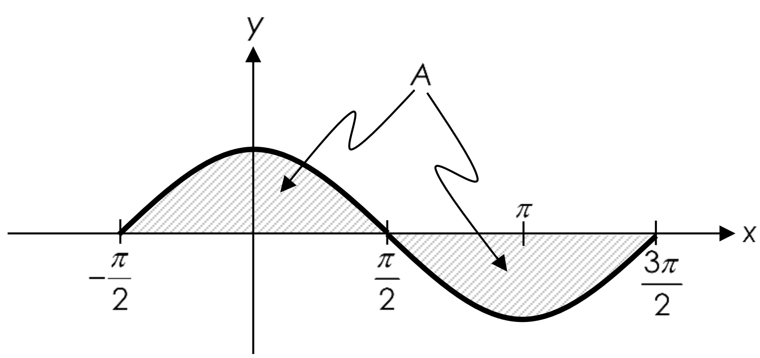
$$\therefore \quad A\approx 28.42\,u^2$$

Ejemplo. Calcular el valor del área limitada por la gráfica de la función

$$f(x)=\cos x$$

el eje de las abscisas y las rectas $x=-\dfrac{\pi}{2}$ y $x=\dfrac{3}{2}\pi$.

Solución.



De acuerdo con lo tratado, esta área se calcula a través de las integrales definidas siguientes:

$$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x dx=\left[sen x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\left[sen x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$A=\left[sen\frac{\pi}{2}-sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left[sen\frac{3\pi}{2}-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$A=sen\frac{\pi}{2}-sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)-sen\frac{3\pi}{2}+sen\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-(-1)-(-1)+1$$

$$\therefore \quad A=4\,u^2$$

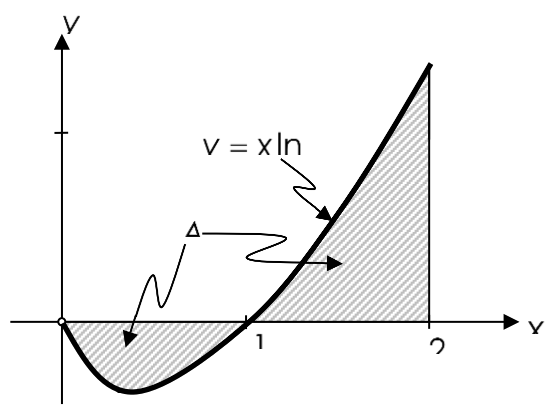
Por simetría, esta área se puede calcular de manera más simple a través de la siguiente integral definida:

$$A=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\left[sen x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=4\left[sen\frac{\pi}{2}-sen(0)\right]=4(1-0)$$

$$\therefore \quad A=4\,u^2$$

Ejemplo. Calcular el área limitada por el eje de las abscisas, la gráfica de la función $f(x)=x\ln x$ y las rectas $x=0 \quad y \quad x=2$.

Solución.
Se grafica la función dada entre las rectas fijadas y se obtiene:



El área pedida se calcula a través de:

$$A=-\lim_{t\to 0}\int_{t}^{1}x\ln x dx+\int_{1}^{2}\cos x dx$$

Se resuelve la integral definida $\int x\ln x dx$ para partes y se obtiene:

$$u=\ln x \quad \Rightarrow \quad du=\frac{dx}{x} \quad ; \quad dv=xdx \quad \Rightarrow \quad v=\frac{x^2}{2}$$

$$\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$$

Luego,

$$A=-\lim_{t\to 0}\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_t^1+\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$A=-\lim_{t\to 0}\left[\frac{1^2}{2}\ln(1)-\frac{1^2}{4}-\frac{t^2}{2}\ln(t)+\frac{t^2}{4}\right]+\left(\frac{2^2}{2}\ln(2)-\frac{2^2}{4}-\frac{1^2}{2}\ln(1)+\frac{1^2}{4}\right)$$

$$A=-\lim_{t\to 0}\left[0-\frac{1}{4}-\frac{t^2}{2}\ln(t)+\frac{t^2}{4}\right]+\left(2\ln 2-1-0+\frac{1}{4}\right)$$

$$A=\frac{1}{4}+\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{2}\ln t+2\ln 2-1+\frac{1}{4}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{2}\ln t+2\ln 2-\frac{1}{2}$$

Para resolver el límite $\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{2}\ln t$ se hace lo siguiente:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{2}\ln t=0\cdot-\infty \quad ; \quad \lim_{t\to 0}\frac{\ln t}{\frac{2}{t^2}}=\frac{-\infty}{\infty}$$

Se aplica L'Hopital y,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln t}{\frac{2}{t^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{4t}{t^4}}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{-4}=0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{2}\ln t=0$$

Por lo que el área requerida es igual a:

$$A=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{2}\ln t+2\ln 2-\frac{1}{2}=0+2\ln 2-\frac{1}{2}=2\ln 2-\frac{1}{2}$$

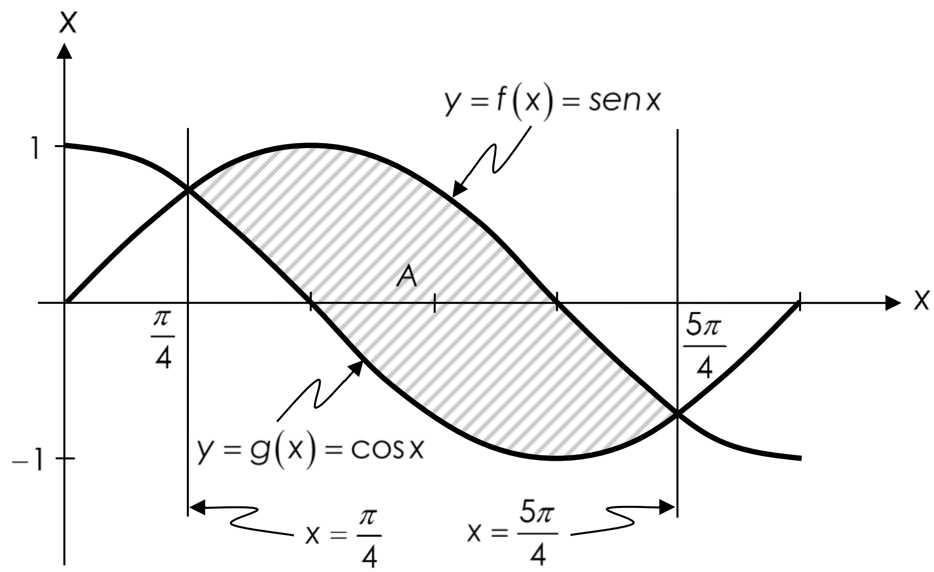
$$\therefore \quad A\approx 0.89\,u^2$$

Ejemplo. Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x)=sen\,x \qquad y \qquad g(x)=\cos x$$

en el intervalo de $x=\frac{\pi}{4}$ a $x=\frac{5\pi}{4}$

Solución.
Se grafican las funciones y en el intervalo considerado se señala la región cuya área se calculará:



Estas dos curvas se cortan en los puntos:

$$\begin{cases} y = sen\,x \\ y = \cos x \end{cases} \quad ; \quad sen\,x = \cos x \quad \Rightarrow \quad \tan x = 1 \quad x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$y = sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071 \quad ; \quad y = sen\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7071$$

$$\therefore \quad A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad y \quad B\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

El área de la región limitada por las gráficas de las dos funciones se obtiene como:

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left[f(x) - g(x)\right] dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left[senx - \cos x\right] dx$$

$$A = \left[-\cos x - senx\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \left(-\cos\frac{5\pi}{4} - sen\frac{5\pi}{4}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{4} - sen\frac{\pi}{4}\right)$$

$$A = -\cos\frac{5\pi}{4} - sen\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + sen\frac{\pi}{4}$$

$$= 0.7071 + 0.7071 + 0.7071 + 0.7071$$

$$\therefore \quad A \approx 2.8284\,u^2$$

Ejemplo. Calcular el valor del área de la región limitada por las curvas:

$$y = x^2 - 4 \qquad y \qquad y = 2x - 1$$

Solución.

Como se observa, se pide el área limitada por la parábola

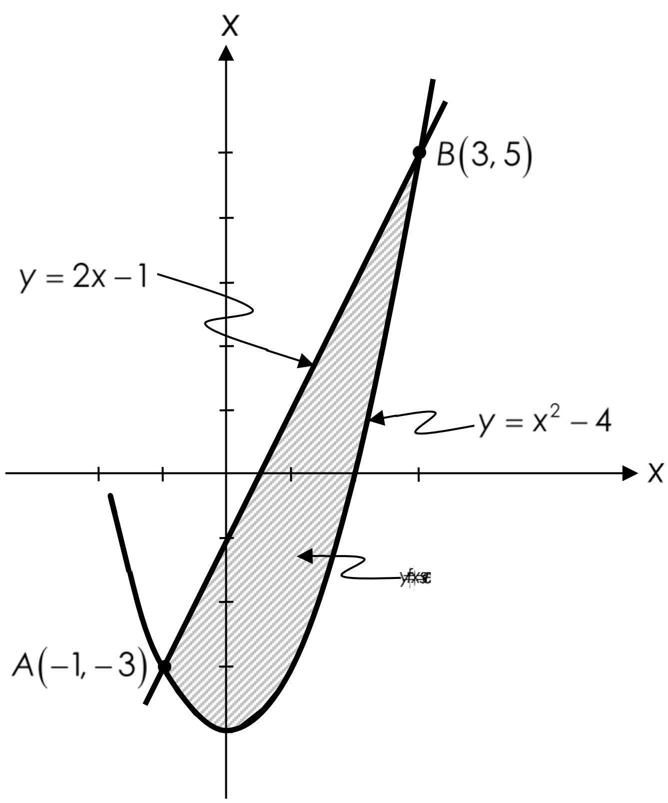
$$y = x^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = y + 4$$

cuyo vértice es $V(0,-4)$, que abre hacia arriba y cuyo eje de simetría es el eje de las ordenadas, y por la recta $y = 2x - 1$. Se calcula en qué puntos se cortan y:

$$x^2 = 2x - 1 + 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -3 \\ x = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 5 \end{cases}$$

Por lo que los puntos de corte son $A(-1,-3) \quad y \quad B(3,5)$. Se trazan las curvas con sus puntos de intersección, lo que define el área pedida. Así,



Se aplica la expresión para calcular el área entre dos curvas y:

$$A = \int_{-1}^{3} \left[2x - 1 - \left(x^2 - 4 \right) \right] dx = \int_{-1}^{3} \left(2x - 1 - x^2 + 4 \right) dx = \int_{-1}^{3} \left(-x^2 + 2x + 3 \right) dx$$

$$A = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^{3} = \left[-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3(3) \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3(-1) \right]$$

$$A = -9 + 9 + 9 - \frac{1}{3} - 1 + 3 \quad \therefore \quad A = \frac{32}{3} u^2$$

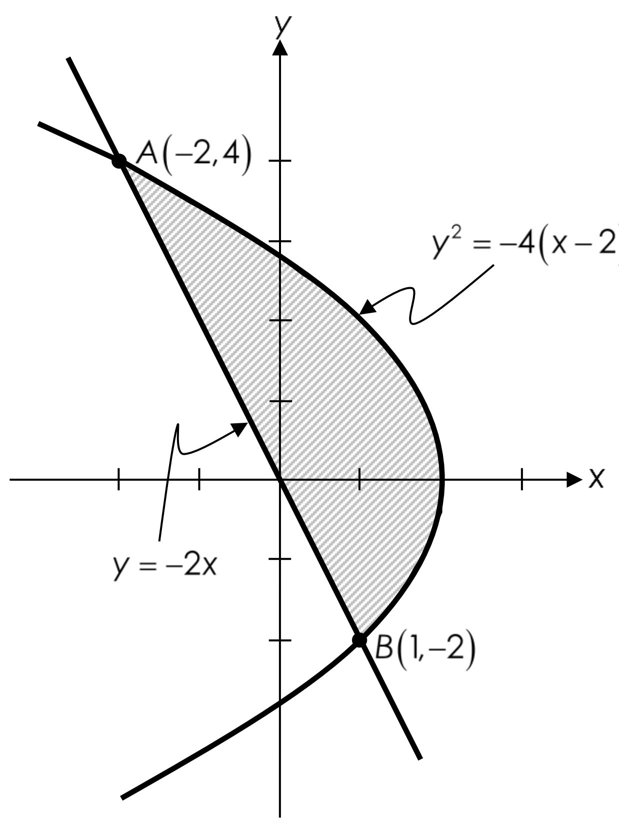
Ejemplo. Calcular el área limitada por las gráficas de la curva $y^2 = -4(x-2)$ y de la recta $y = -2x$.

Solución.
La curva es una parábola con vértice en $V(2,0)$, que abre hacia la izquierda y que tiene como eje de simetría al eje de las abscisas. y la recta dada pasa por el origen de coordenadas. Para conocer los puntos en que se cortan, se resuelve el sistema formado por ellas. Así,

$$(-2x)^2 = -4(x-2) \quad \Rightarrow 4x^2 + 4x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = -2 & \Rightarrow \quad y = 4 \\ x = 1 & \Rightarrow \quad y = -2 \end{cases}$$

Entonces, los puntos en los que se cortan la parábola y la recta son $A(-2,4)$ y $B(1,-2)$. Se traza la gráfica para señalar el área requerida.



El área entre las curvas se puede obtener a través de las siguientes integrales:

$$A = \int_{-2}^{1} \left[\sqrt{-4x+8} - (-2x) \right] dx + \int_{1}^{2} \left[\sqrt{-4x+8} - \left(-\sqrt{-4x+8} \right) \right] dx$$

Pero resulta más sencillo si el área se calcula con respecto al área de las ordenadas, mediante la integral siguiente:

$$A=\int_{-2}^{4}\left[\frac{-y^2+8}{4}-\left(-\frac{y}{2}\right)\right]dy$$

$$\int\left(-\frac{y^2}{4}+2+\frac{y}{2}\right)dx=-\frac{y^3}{12}+\frac{y^2}{4}+2y+C$$

$$A=\left[-\frac{y^3}{12}+\frac{y^2}{4}+2y\right]_{-2}^{4}=\left[-\frac{4^3}{12}+\frac{4^2}{4}+2(4)\right]-\left[-\frac{(-2)^3}{12}+\frac{(-2)^2}{4}+2(-2)\right]$$

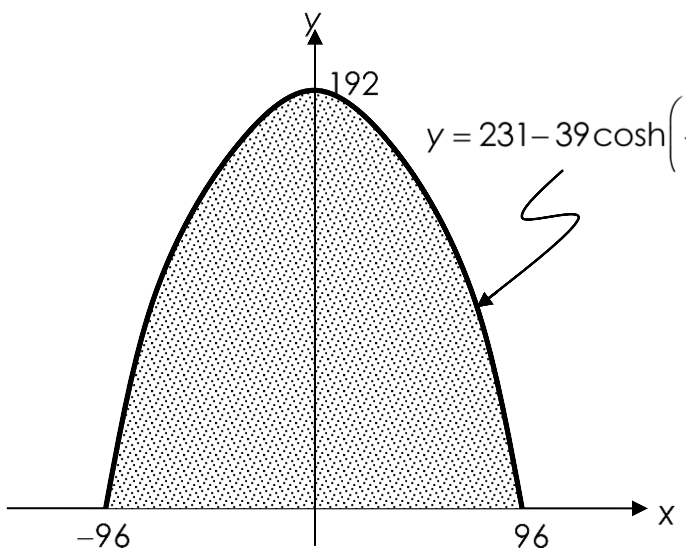
$$A=\left[-\frac{64}{12}+\frac{16}{4}+8\right]-\left[-\frac{-8}{12}+\frac{4}{4}-4\right]=-\frac{16}{3}+4+8-\frac{2}{3}-1+4$$

$$A=9\,u^2$$

Ejemplo. En la ciudad de San Luis Missouri, EUA, se construyó un arco que posee la forma de una catenaria invertida. En el centro tiene 192 m de altura y de extremo a extremo en la base hay una longitud de 192 m. La forma del arco obedece, en forma aproximada, a la curva de ecuación:

$$y=231-39\cosh\left(\frac{x}{39}\right)$$

Determinar el área bajo el arco.
Solución.
Se trata de obtener el área bajo la curva, que es una función hiperbólica. Para ello se ubica el arco en un sistema coordenado como sigue:



Se calcula el área bajo la curva y se llega a:

$$A=2\int_{0}^{96}f(x)dx=2\int_{0}^{96}\left[231-39\cosh\left(\frac{x}{39}\right)\right]dx=2\left[231x-39^2 senh\left(\frac{x}{39}\right)\right]_{0}^{96}$$

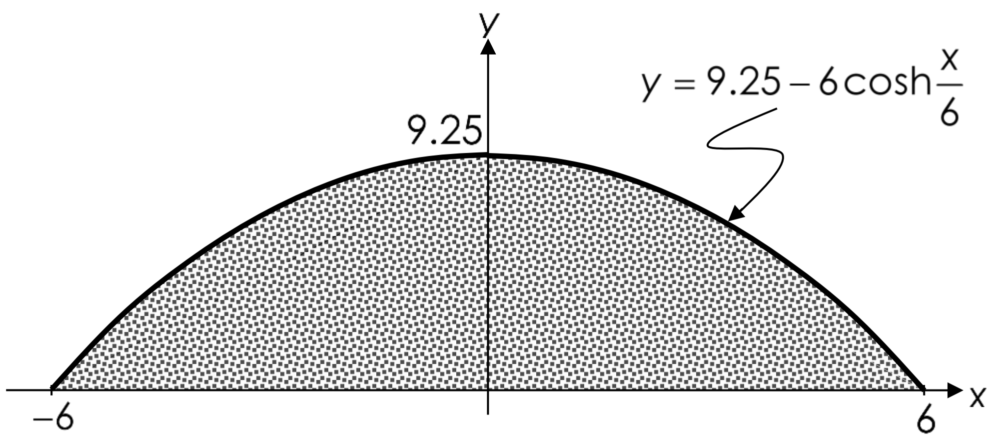
$$A = 2\int_0^{96} f(x)\,dx = 2\left[231(96) - 39^2 senh\left(\frac{96}{39}\right)\right]_0^{96} = 2(22176 - 8850)$$

$$\therefore \quad A \approx 26652\ m^2$$

Ejemplo. Una cooperativa campesina construye un granero con $30\,m$ de largo y $12\,m$ de ancho, como se observa en la figura. La sección transversal del techo es una catenaria invertida cuya ecuación es:

$$y = 9.25 - 6\cosh\frac{x}{6}$$

Determinar su capacidad total



Solución.
Para calcular el área de la sección transversal, se utiliza la integral definida:

$$A = \int_{-6}^{6}\left(9.25 - 6\cosh\frac{x}{6}\right)$$

La integral indefinida se resuelve como:

$$\int\left(9.25 - 6\cosh\frac{x}{6}\right)dx = 9.25\int dx - 6\int \cosh\frac{x}{6}\,dx = 9.25x - 36senh\frac{x}{6} + C$$

Luego el área de la sección es igual a:

$$A = \left[9.25x - 36senh\frac{x}{6}\right]_{-6}^{6} = 55.5 - 42.3072 + 55.5 - 42.3072$$

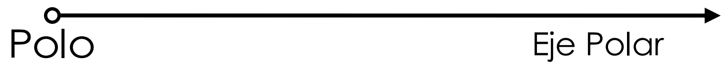
$$A = \int_{-6}^{6}\left(9.25 - 6\cosh\frac{x}{6}\right) = 26.3856\ m^2$$

Entonces el volumen del granero, esto es, su capacidad total es:

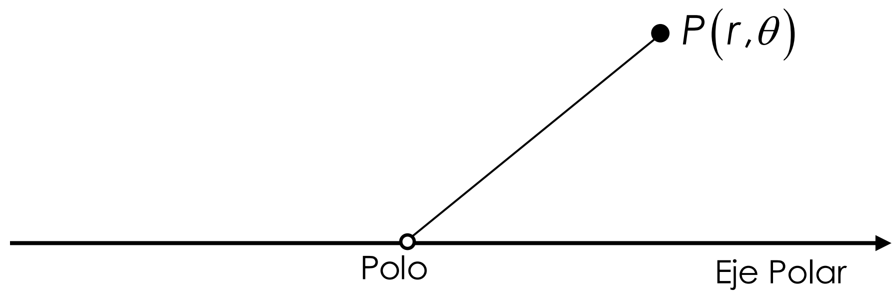
$$\therefore \quad V = 26.3856 \times 30 = 791.568\ m^3$$

COORDENADAS POLARES. FUNDAMENTOS

Un sistema utilizado con frecuencia para ubicar un punto en el plano, además del sistema cartesiano, es el conocido como SISTEMA POLAR, que considera un eje llamado eje polar, que tiene un sentido determinado, y un punto fijo en este eje que se conoce como polo.



Las coordenadas polares de un cierto punto "P" están dadas por $P(r,\theta)$, donde "r" es la longitud del radio vector que es el segmento que va del polo al punto, y "θ" es el argumento, que equivale al ángulo que forma el radio vector con el sentido positivo del eje polar. Véase la siguiente figura:



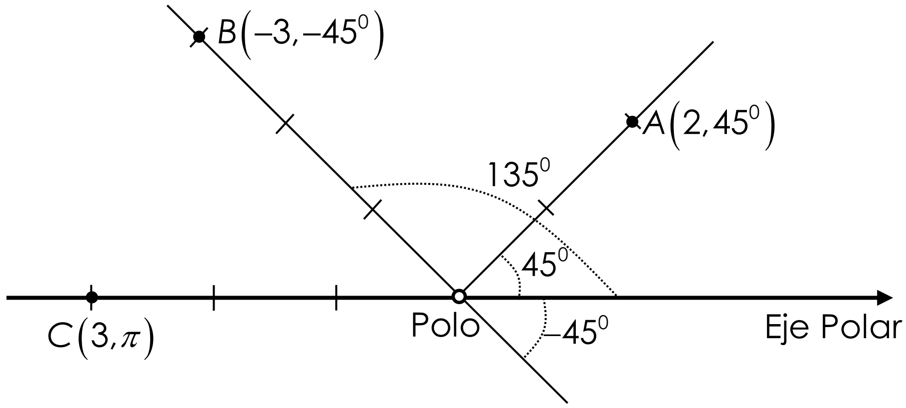
Cabe hacer notar que un ángulo puede medirse positivamente (en el sentido antihorario) a partir del sentido positivo del eje polar, negativamente o con múltiplos de 2π, y que la longitud del radio vector debe ser siempre positiva, pero se pueden definir longitudes negativas para representar el punto de otra forma equivalente. Así, un punto cuyas coordenadas polares son $P(r,\theta)$ también es posible expresarlo como $P(-r,\theta\pm\pi)$.

Unas coordenadas polares representan un solo punto, en tanto que un punto puede representarse por un número indefinido de coordenadas polares.

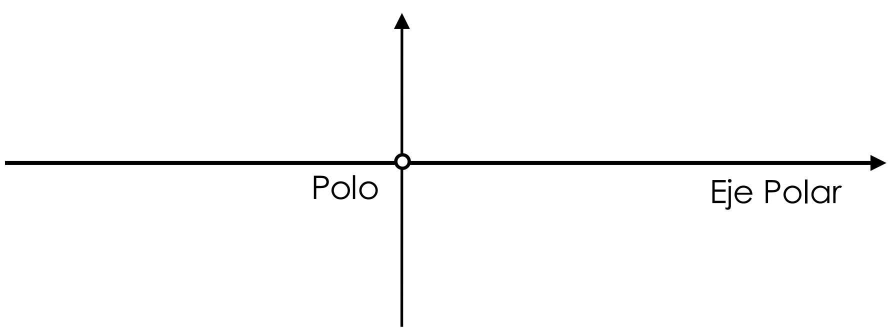
Ejemplo. Representar gráficamente los puntos cuyas coordenadas polares son

$$A\left(2,45^0\right),\ B\left(-3,-45^0\right),\ C(3,\pi)$$

Solución.



Aunque no existe un eje perpendicular al eje polar, en ocasiones (simetrías, intersecciones, ángulos, …) resulta conveniente dibujarlo y se acostumbra llamarlo eje copolar o eje $90^0\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.



Se ha dicho que un punto puede representarse por un número indefinido de coordenadas polares, pero se conocen como coordenadas polares principales a aquellas en las que el radio vector es una magnitud positiva y el argumento, esto es, el ángulo "θ", satisface a $0 \le \theta < 2\pi$. Una curva en coordenadas polares se representa mediante $r = f(\theta)$ y para graficarla bastará con dar valores al argumento y se obtienen puntos (r,θ) de la curva y se procede a graficarla. Considérese, para ilustrar esta breve introducción a las coordenadas polares, el siguiente ejemplo para graficar una curva. Cabe aclarar que por medio de un programa de computadora resulta mucho más sencillo y preciso el representar a la curva de manera gráfica.

Ejemplo. Graficar la curva dada por la siguiente ecuación e identificarla:

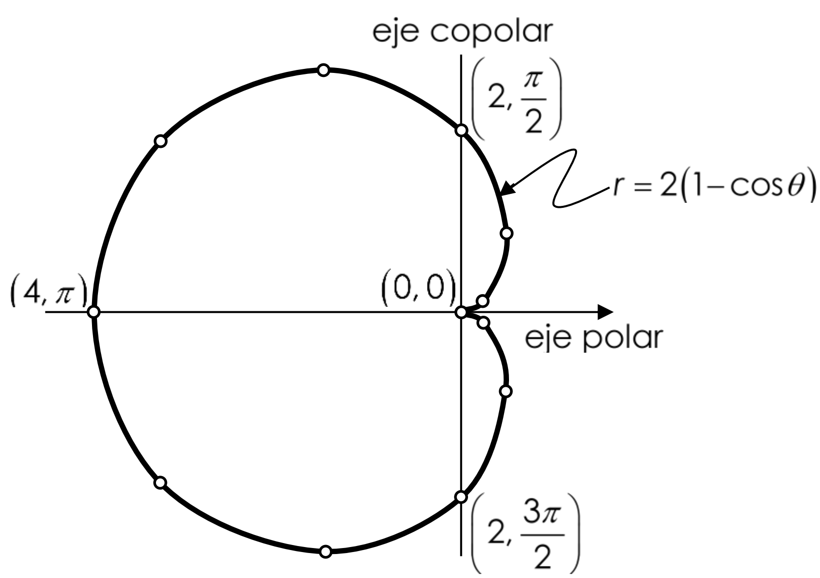
$$r = 2(1-\cos\theta)$$

Solución.

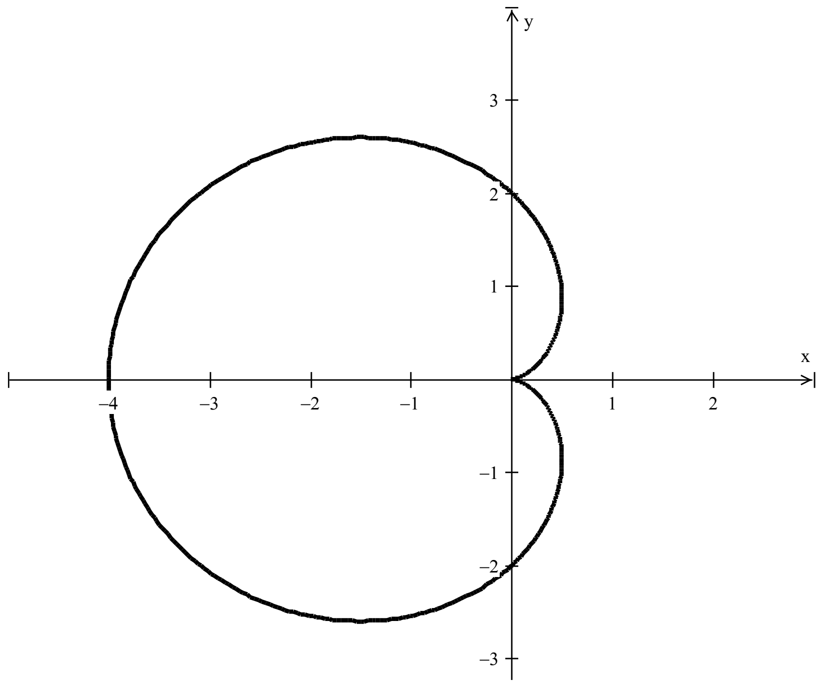
Se dan valores a "θ" y se obtienen los correspondientes valores de "r", y después se ubican y unen los puntos (r,θ) obtenidos.

θ	$\cos\theta$	$1-\cos\theta$	$r=2(1-\cos\theta)$
0 $\quad 0^0$	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$ $\quad 30^0$	$\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866$	0.134	0.268
$\frac{\pi}{3}$ $\quad 60^0$	$\frac{1}{2}=0.5$	0.5	1
$\frac{\pi}{2}$ $\quad 90^0$	0	1	2
$\frac{2\pi}{3}$ $\quad 120^0$	$-\frac{1}{2}=-0.5$	1.5	3
$\frac{5\pi}{6}$ $\quad 150^0$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}=-0.866$	1.866	3.732
π $\quad 180^0$	-1	2	4

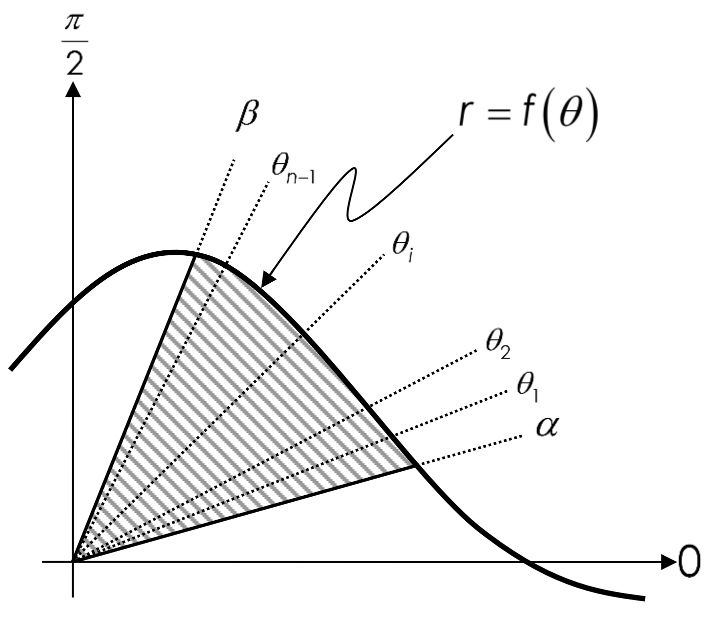
Y entonces la gráfica es, de manera aproximada, la siguiente:



A este tipo de curvas se les conoce como cardioides por motivos obvios. La misma curva (cardioide) se puede graficar con cómputo y queda de la siguiente forma:

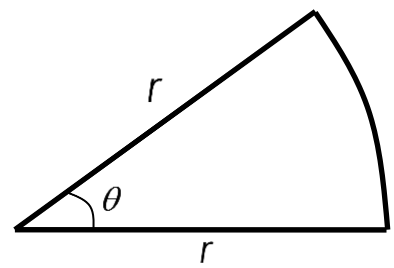


ÁREA DE UNA REGIÓN POLAR



Como se observa, el área requerida se divide en "*n*" subsectores no superpuestos, lo que equivale a una partición del área.

Lo primero que se hará es obtener la expresión para determinar el área de un sector circular y, para ello, considérese la siguiente figura de un sector con su radio y el ángulo correspondiente:



$$\text{Área del sector circular } = \frac{\pi r^2}{2\pi}\theta = \frac{1}{2}\theta r^2$$

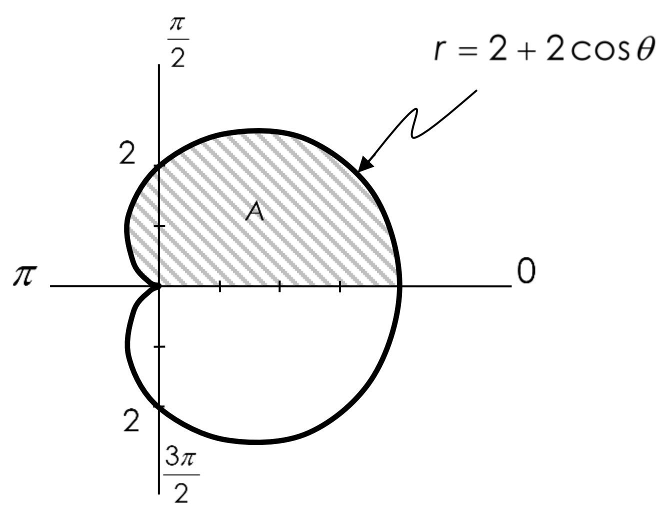
Teorema. Sea f una función continua y no negativa en el intervalo cerrado $\left[\alpha, \beta\right]$. Entonces, el área de la región limitada por la gráfica de la función $r = f(\theta)$ entre las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, está dada por:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(\theta)\right]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta$$

Nota. Esta fórmula es válida si f es continua y negativa. No es necesariamente válida si toma valores positivos y negativos en el intervalo considerado.

Ejemplo. Calcular el área situada en el interior de la cardioide de ecuación $r = 2 + 2\cos\theta$ y arriba del eje polar.

Solución. Se grafica esta curva de manera semejante a la anterior y,



Se aplica la expresión antes obtenida y se llega a:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(2 + 2\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(4 + 8\cos\theta + 4\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(2 + 4\cos\theta + 2\cos^2\theta\right) d\theta = \int_0^{\pi} \left[2 + 4\cos\theta + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta\right) d\theta = \left[3\theta + 4sen\theta + \frac{sen2\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

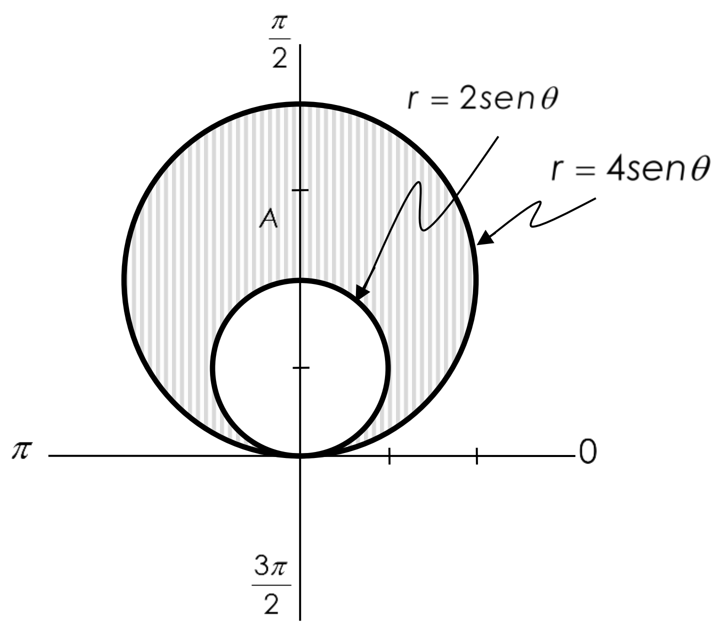
$$= \left(3\pi + 4sen\pi + \frac{sen2\pi}{2}\right) - \left(3(0) + 4sen(0) + \frac{sen2(0)}{2}\right) = 3\pi$$

$$\therefore \quad A = 3\pi \ u^2$$

Ejemplo. Calcular el área limitada por las curvas:

$$r = 4sen\theta \quad y \quad r = 2sen\theta$$

Solución.
Se trazan estas curvas que son dos circunferencias y se obtiene la siguiente figura, donde se puede ver el área requerida:



Para obtener el área señalada, se resuelve la siguiente integral definida:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 16sen^2\theta d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 4sen^2\theta d\theta = 6\int_0^{\pi} sen^2\theta d\theta$$

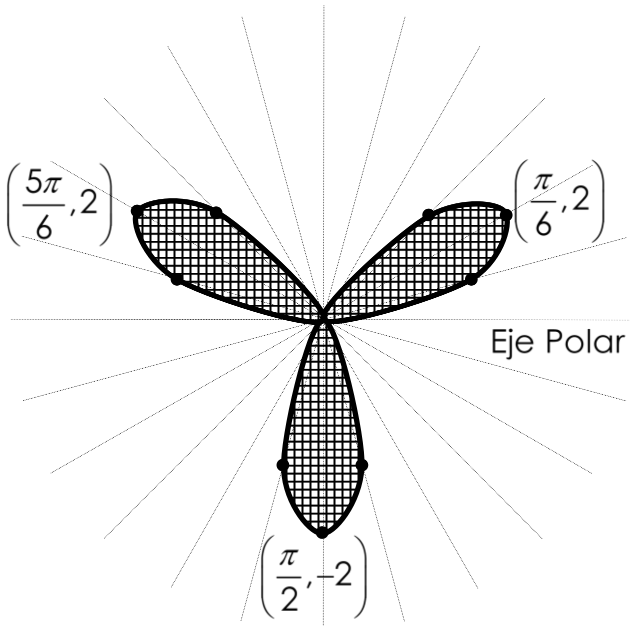
$$A = 6\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = 6\left[\frac{\theta}{2} - \frac{sen2\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 6\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\pi$$

$$\therefore \quad A = 3\pi \ u^2$$

Ejemplo. Calcular el área del interior de la curva conocida como rosa de tres pétalos, de ecuación:

$$r = 2sen3\theta$$

Solución.
La gráfica de esta curva es la siguiente:



Se calcula el área de un pétalo, se multiplica por 3 y se obtiene lo siguiente:

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\, d\theta \quad \Rightarrow \quad A = 3\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\,sen^2 3\theta\, d\theta\right) = 6\int_0^{\frac{\pi}{3}} sen^2 3\theta\, d\theta$$

Se resuelve primero la integral indefinida y después se aplica la regla de Barrow. Así,

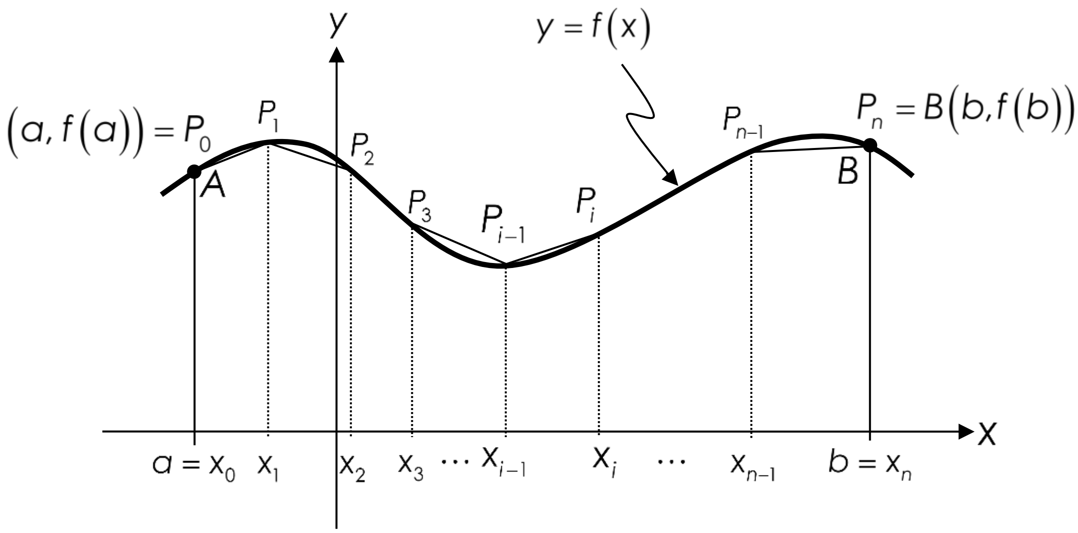
$$\int sen^2 3\theta\, d\theta = \int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6\theta\right)d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{sen6\theta}{12} + C$$

$$A = 6\left[\frac{\theta}{2} - \frac{sen6\theta}{12}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 6\left(\frac{\pi}{6} - \frac{sen2\pi}{12} - 0 + \frac{sen2(0)}{12}\right) = 6\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \quad A = \pi\, u^2$$

LONGITUDES DE ARCO DE CURVAS PLANAS

Considérese una función f continua en un intervalo cerrado $\left[a,b\right]$. Como se observa en la figura, lo que se pretende es determinar la longitud de la curva del punto A al punto B, es decir, la longitud del arco entre los dos puntos. Para ello se construye una partición con "n" subintervalos en el intervalo considerado $\left[a,b\right]$ y la norma, esto es, la longitud del mayor subintervalo se denota con $\|\Delta\|$. La gráfica de la función en estudio se muestra en la siguiente figura:



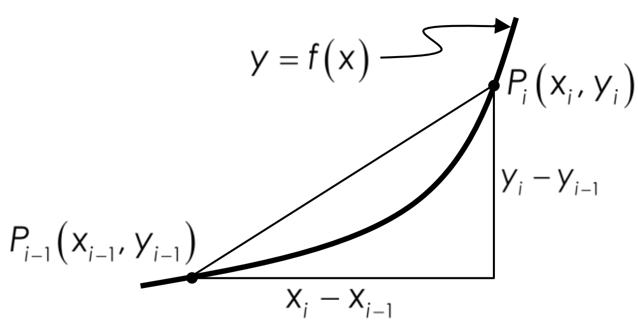
La amplitud de la i-ésima celda, es decir, la longitud del i-ésimo subintervalo, es igual a:

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1} \le \|\Delta\|$$

Entonces, la longitud aproximada que se dese obtener está dada por:

$$L \approx \left|\overline{P_0P_1}\right| + \left|\overline{P_1P_2}\right| + \left|\overline{P_2P_3}\right| + \cdots + \left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| + \cdots + \left|\overline{P_{n-1}P_n}\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right|$$

Considérese la curva correspondiente al i-ésimo subintervalo



La longitud de la cuerda $\overline{P_{i-1}P_i}$ de la curva se calcula a través de:

$$\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(y_i - y_{i-1}\right)^2}$$

Se hace $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta_i y = y_i - y_{i-1}$ y se obtiene:

$$\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sqrt{\left(\Delta_i x\right)^2 + \left(\Delta_i y\right)^2}$$

Se multiplica el radicando por el cociente $\dfrac{\left(\Delta_i x\right)^2}{\left(\Delta_i x\right)^2}$ y,

$$\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sqrt{1 + \frac{\left(\Delta_i y\right)^2}{\left(\Delta_i x\right)^2}}\,\Delta_i x \quad \Rightarrow \quad \left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2}\,\Delta_i x$$

Como la función f es continua en el intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, si es derivable en el intervalo abierto $\left(x_{i-1}, x_i\right)$, entonces se satisface el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial por lo que existe un valor $\alpha_i \in \left(x_{i-1}, x_i\right)$ para el cual se cumple que:

$$f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right) = f'\left(\alpha_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

Como

$$f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right) = \Delta_i y \qquad y \qquad x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$$

entonces es posible escribir

$$\Delta_i y = f'\left(\alpha_i\right)\Delta_i x \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} = f'\left(\alpha_i\right) \quad ; \quad x_{i-1} < \alpha_i < x_i$$

Por lo tanto

$$\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sqrt{1 + \left[f'\left(\alpha_i\right)\right]^2}\,\Delta_i x \quad ; \quad x_{i-1} < \alpha_i < x_i$$

Si se hace la sumatoria de las longitudes de los "n" segmentos, se tiene que la longitud aproximada de la curva en el intervalo $\left[a, b\right]$ es:

$$L \approx \sum_{i=1}^{n}\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 + \left[f'\left(\alpha_i\right)\right]^2}\;\Delta_i x$$

Se toman límites y se obtiene el valor exacto de la longitud de curva:

$$L \approx \lim_{\|\Delta\|\to 0}\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sqrt{1 + \left[f'\left(\alpha_i\right)\right]^2}\;\Delta_i x$$

Como la norma de la partición tiende a cero, entonces este límite equivale a la integral definida, por lo que finalmente se obtiene que la longitud de arco, en el intervalo $\left[a, b\right]$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

De manera semejante se puede calcular esta longitud con respecto al eje "y" mediante la expresión:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left[g'(y)\right]^2}\,dy$$

donde la función está definida por $x = g(y)$, es continua en $\left[c, d\right]$ y derivable en $\left(c, d\right)$.

Cuando la función está definida en forma paramétrica como

$$f:\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases} \quad ; \quad a\le t\le b$$

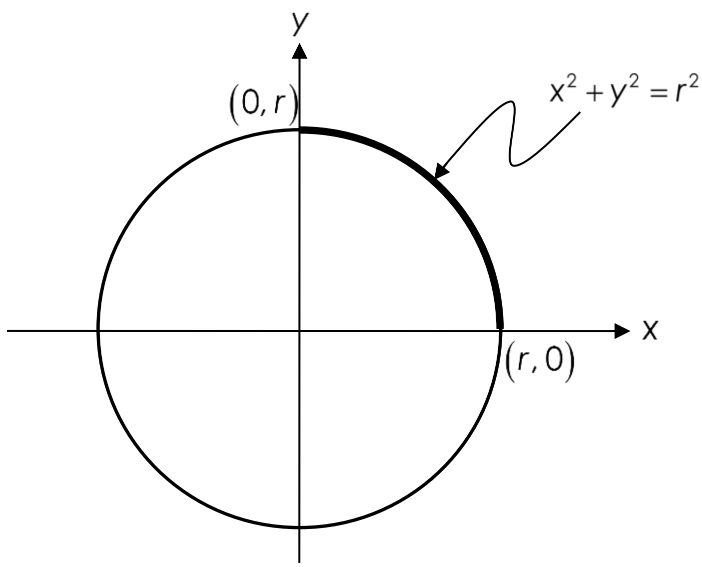
si se sigue un procedimiento semejante al anterior, es posible llegar a la siguiente expresión que resulta de gran utilidad cuando la función está definida de esta forma:

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Ejemplo. Verificar que un círculo de radio igual a "r" tiene una circunferencia de longitud 2π:

a) Mediante la ecuación cartesiana de la circunferencia.
b) A partir de las ecuaciones paramétricas de la curva.

Solución.
Un modelo geométrico para este problema es una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio "r".



a) Se considera un cuarto de la longitud requerida y después la integral que conduce a la longitud de la circunferencia se multiplicará por cuatro. Así,

$$x^2+y^2=r^2 \quad \Rightarrow \quad y=\pm\sqrt{r^2-x^2} \quad ; \quad x\in[0,r]$$

Como se trata de la longitud del cuarto de circunferencia del primer cuadrante, se utiliza la expresión $y=\sqrt{r^2-x^2}$. Además, la derivada de esta expresión es:

$$y=\sqrt{r^2-x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}==-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

Luego se aplica la expresión para la longitud de arco obtenida y se tiene que:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx=4\int_0^1\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

$$L=4\int_0^1\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,dx=4r\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

Por fórmula directa de angsenx se llega a:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=angsen\frac{x}{r}+C$$

De donde,

$$L=4\int_0^1\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=4r\left[angsen\frac{x}{r}\right]_0^r=4r\left(angsen\frac{r}{r}-angsen\frac{0}{r}\right)=4r\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \quad L=2\pi r \text{ u}$$

b) Si se utilizan las ecuaciones paramétricas de la curva se tiene que:

$$f:\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=rsen\theta\end{cases} \quad ; \quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

Sus respectivas derivadas son:

$$x=r\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{d\theta}=-rsen\theta \quad ; \quad y=rsen\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{d\theta}=r\cos\theta$$

Y al hacer uso de la expresión dada para calcular la longitud se llega a:

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2sen^2\theta+r^2\cos^2\theta}\,d\theta=4r\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=4r\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\therefore \quad L=2\pi r \text{ u}$$

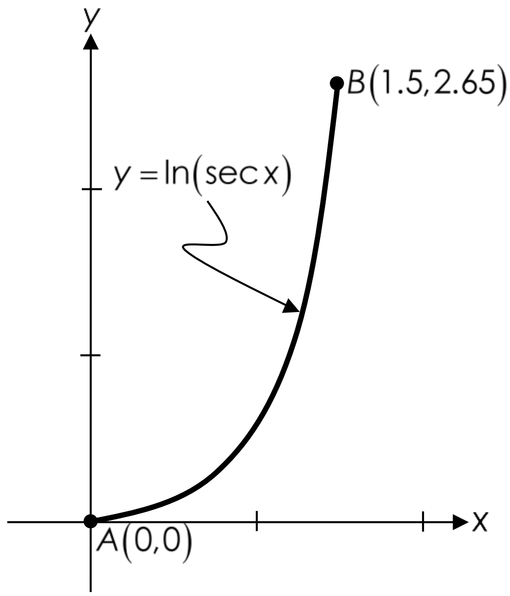
Ejemplo. Calcular la longitud de arco de la curva que representa a la función:

$$y=\ln(\sec x)$$

entre los puntos de coordenadas $A(0,0) \quad y \quad B(1.5,2.65)$. Grafiar.

Solución.

La gráfica aproximada de esta función entre los puntos considerados es la siguiente:



Se calcula derivada de la función dada y,

$$y=\ln(\sec x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sec x \tan x}{\sec x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\tan x$$

Entonces se aplica la expresión para calcular la longitud de arco y se tiene que:

$$L=\int_0^{1.5}\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx \quad \Rightarrow \quad L=\int_0^{1.5}\sqrt{\sec^2 x}\,dx \quad \Rightarrow \quad L=\int_0^{1.5}\sec x\,dx$$

$$L=\Big[\ln\left|\sec x+\tan x\right|\Big]_0^{1.5}=\ln\left|\sec(1.5)+\tan(1.5)\right|-\ln\left|\sec(0)+\tan(0)\right|$$

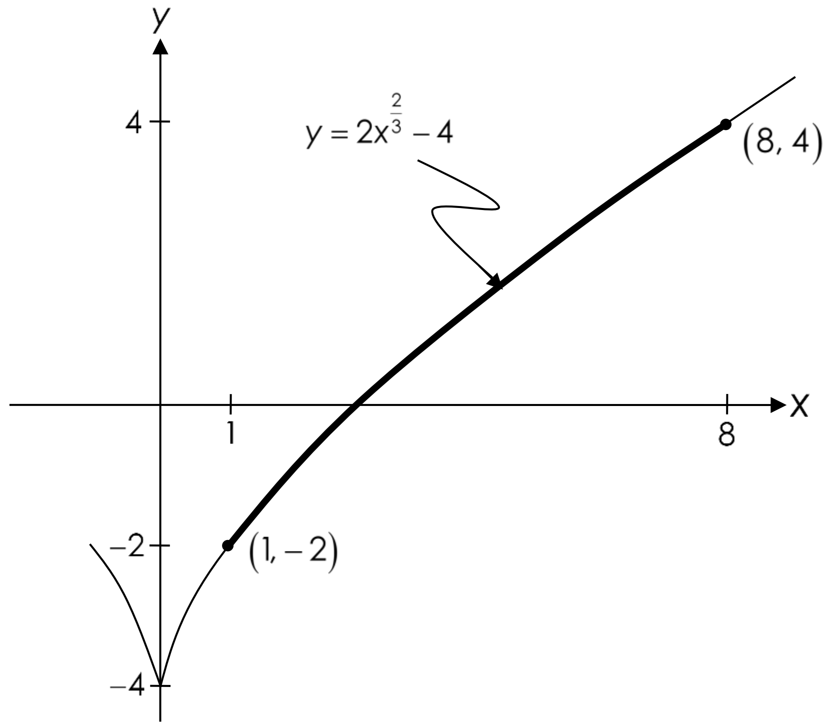
$$L=\ln\left|14.1368+14.1014\right|-\ln\left|1+0\right|=\ln(28.2382)$$

$$\therefore \quad L\approx 3.34\,u$$

Ejemplo. Dada la función $f(x)=2x^{\frac{2}{3}}-4$, determinar la longitud de su gráfica entre los puntos $(1,-2)$ y $(8,4)$.

Solución.
Como se ve en la gráfica, la función es continua en el intervalo formado por los puntos entre los cuales se pretende calcular la longitud de arco. Y también es derivable en dicho intervalo, luego es posible aplicar la expresión para la longitud ya obtenida.

Es notorio que esta función presenta un "pico" en el punto $(0,-4)$, donde hay un mínimo en ese punto crítico en el que la derivada no existe.



Se deriva la ecuación de la curva y se aplica la expresión para determinar la longitud de arco y se llega a:

$$y = 2x^{\frac{2}{3}} - 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx = \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{16}{9x^{\frac{2}{3}}}}\, dx$$

$$= \int_1^8 \sqrt{\frac{9x^{\frac{2}{3}} + 16}{9x^{\frac{2}{3}}}}\, dx = \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 16}}{x^{\frac{1}{3}}}\, dx$$

Se resuelve la integral indefinida con un cambio de variable y,

$$u = 9x^{\frac{2}{3}} + 16 \quad \Rightarrow \quad du = 6x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \frac{6}{x^{\frac{1}{3}}}\, dx$$

$$\frac{1}{18}\int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{18}\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{1}{27}\left(9x^{\frac{2}{3}} + 16\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Luego la longitud de arco pedida es igual a:

$$L = \frac{1}{27}\left[\left(9x^{\frac{2}{3}} + 16\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^8 = \frac{1}{27}\left(52^{\frac{3}{2}} - 25^{\frac{3}{2}}\right) \approx \frac{1}{27}(374.977 - 125)$$

$$\therefore \quad L \approx 9.258\, u$$

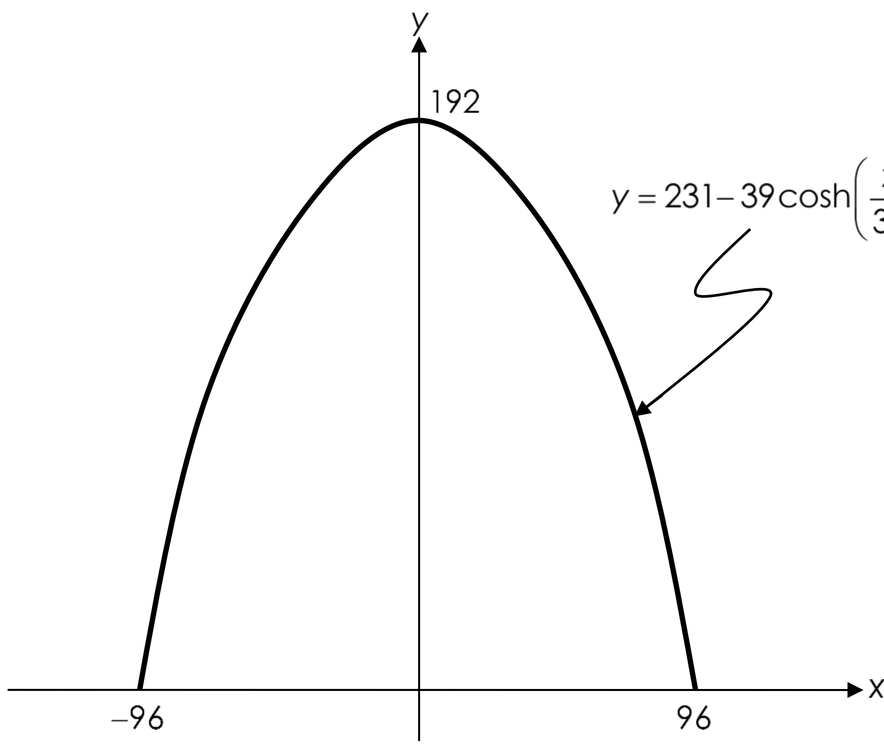
Considérese ahora el siguiente ejemplo de aplicación, concerniente a un ejercicio en el que se obtuvo el área bajo la curva para un arco.

Ejemplo. Como se dijo en otro ejercicio, en la ciudad de San Luis Missouri, EUA, se construyó un arco que posee la forma de una catenaria invertida, con 192 m de altura y 192 m de extremo a extremo en la base. La forma del arco obedece a la curva de ecuación:

$$y = 231 - 39\cosh\left(\frac{x}{39}\right)$$

Determinar la longitud total del arco.

Solución.



La expresión para determinar la longitud total del arco es:

$$L = 2\int_0^{96.14} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Entonces,

$$y = 231 - 39\cosh\left(\frac{x}{39}\right) \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = -senh\left(\frac{x}{39}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = senh^2\left(\frac{x}{39}\right)$$

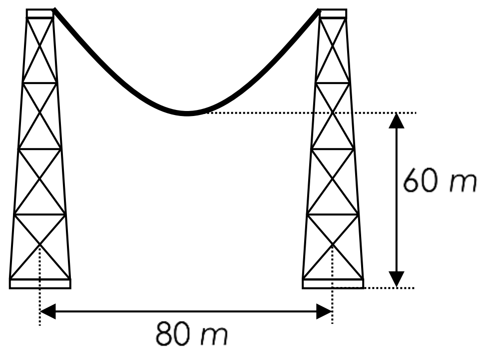
$$L = 2\int_0^{96.14} \sqrt{1 + senh^2\left(\frac{x}{39}\right)} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{96.14} \cosh\left(\frac{x}{39}\right) dx = 2\left[39 senh\left(\frac{x}{39}\right)\right]_0^{96.14}$$

$$\therefore \quad L \approx 455.52\, m$$

Ejemplo. Un cable eléctrico cuelga de dos torres separadas una distancia de $80\,m$ y como se observa en la figura, la forma que adopta el cable es la de la catenaria de ecuación:

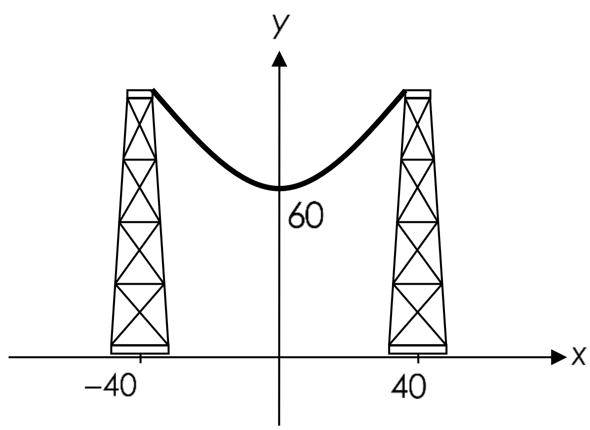
$$y = 60\cosh\frac{x}{60}$$

Calcular la longitud de arco de esta catenaria entre las dos torres en las que se apoya.



Solución

Se coloca la figura en un sistema coordenado y



Como se vio al estudiar las funciones hiperbólicas, la ecuación de esta catenaria también se pude expresar como:

$$y = 60\cosh\frac{x}{60} \quad \Rightarrow \quad y = 60\left(\frac{e^{\frac{x}{60}} + e^{-\frac{x}{60}}}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad y = 30\left(e^{\frac{x}{60}} + e^{-\frac{x}{60}}\right)$$

La derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{60}} - e^{-\frac{x}{60}}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{30}} - 2 + e^{-\frac{x}{30}}\right)$$

Si se toma en consideración la simetría, la longitud del cable se calcula como:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx=2\int_0^{40}\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{30}}-2+e^{-\frac{x}{30}}\right)}\,dx=2\int_0^{40}\sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{30}}+2+e^{-\frac{x}{30}}\right)}\,dx$$

$$L=\int_0^{40}\sqrt{\left(e^{\frac{x}{60}}+e^{-\frac{x}{60}}\right)^2}\,dx=\int_0^{40}\left(e^{\frac{x}{60}}+e^{-\frac{x}{60}}\right)dx=60\left[e^{\frac{x}{60}}-e^{-\frac{x}{60}}\right]_0^{40}=60\left(e^{\frac{2}{3}}-e^{-\frac{2}{3}}\right)$$

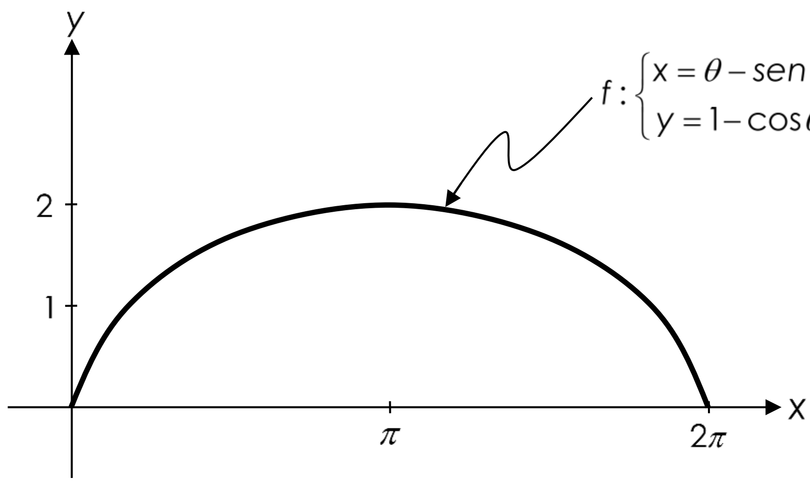
$$L=60\left(e^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}\right)\approx 60(1.9477-0.5134)\approx 86.058\,m$$

$$\therefore\quad L\approx 86.058\,m$$

Ejemplo. Calcular la longitud de un arco de la cicloide cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x=\theta-sen\theta \\ y=1-\cos\theta \end{cases}\quad ;\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

Solución.
Una gráfica aproximada de un arco de esta cicloide para la cual $r=1$, se muestra en la siguiente figura:



Las derivadas de las ecuaciones paramétricas son:

$$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta\qquad ;\qquad \frac{dy}{d\theta}=sen\theta$$

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+sen^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+sen^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta$$

Se resuelve la integral indefinida de la siguiente forma:

$$\int\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta=\int\sqrt{4sen^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2\int sen\frac{\theta}{2}\,d\theta=-4\cos\frac{\theta}{2}+C$$

Por lo que:

$$L=4\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=4(-\cos\pi+\cos 0)=4\left[-(-1)+1\right]=8$$

$$\therefore\quad L=8\,u$$

LONGITUD DE ARCO EN COORDENADAS POLARES

Teorema. Sea f una función con su derivada continua en un intervalo cerrado $\alpha\le\theta\le\beta$. Entonces, la longitud de la curva, gráfica de la función $r=f(\theta)$, desde $\theta=\alpha$ hasta $\theta=\beta$, está dada por:

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left[f(\theta)\right]^2+\left[f'(\theta)\right]^2}\,d\theta=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Prueba.
Sea $r=f(\theta)$ en $\alpha\le\theta\le\beta$. Una parametrización de la curva es:

$$\begin{cases}x=f(\theta)\cos\theta\\ y=f(\theta)sen\theta\end{cases}\quad;\quad\alpha\le\theta\le\beta$$

Se obtienen las correspondientes derivas y se llega a:

$$\frac{dx}{d\theta}=-f(\theta)sen\theta+f'(\theta)\cos\theta\quad;\quad\frac{dy}{d\theta}=f(\theta)\cos\theta+f'(\theta)sen\theta$$

Como se vio, la longitud de arco cuando la curva está representada por ecuaciones paramétricas es:

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Luego, se sustituyen las derivadas obtenidas y,

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\left[f(\theta)\right]^2sen^2\theta-2f(\theta)f'(\theta)sen\theta\cos\theta+\left[f'(\theta)\right]^2\cos^2\theta+$$

$$+\left[f(\theta)\right]^2\cos^2\theta+2f(\theta)f'(\theta)sen\theta\cos\theta+\left[f'(\theta)\right]^2sen^2\theta$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\left[f(\theta)\right]^2+\left[f'(\theta)\right]^2=r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

Como $dL=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$, finalmente se llega a: $dL=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

$$\therefore\quad L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

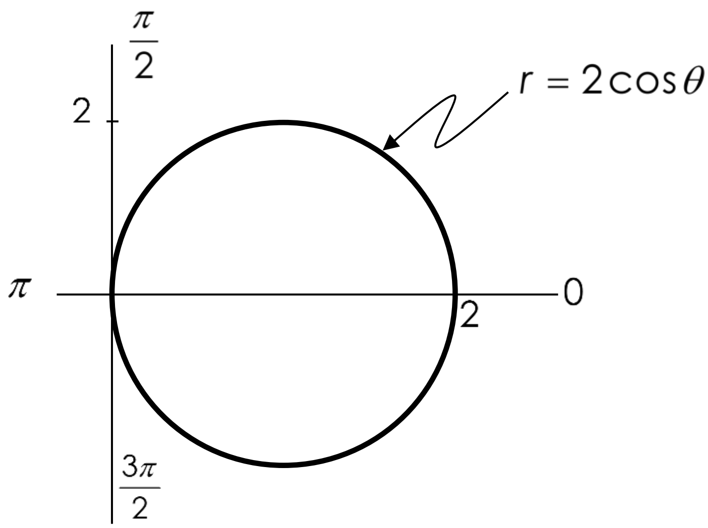
Ejemplo. Calcular la longitud de arco de la gráfica de la función $r = 2\cos\theta$ de $\theta = -\frac{\pi}{2}$ a $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Solución.
Si se cambia a coordenadas cartesianas como sigue, se obtiene:

$$r = 2\cos\theta \quad \Rightarrow \quad r^2 = 2r\cos\theta \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2x$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0 \quad \therefore \quad (x-1)^2 + y^2 = 4$$

Se trata de una circunferencia con radio igual a dos y cuyo centro en polares está en el punto $(1,0)$. La gráfica se muestra a continuación:



Para obtener su longitud, que debe ser igual a 2π, se utiliza la expresión antes obtenida y,

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

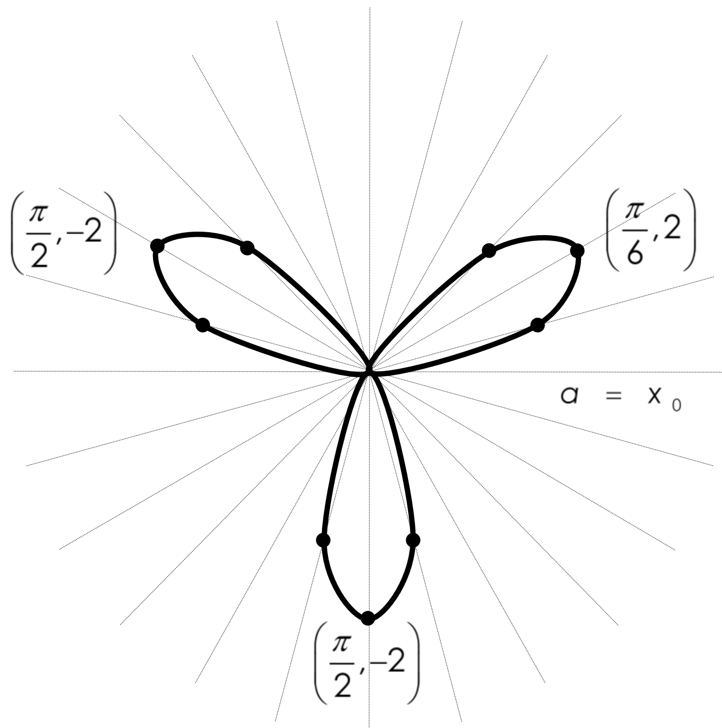
$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\cos^2\theta + 4sen^2\theta}\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\, d\theta = 2\left[\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi$$

$$\therefore \quad L = 2\pi\ u$$

Ejemplo. Calcular la longitud de la rosa de tres pétalos de ecuación

$$r = 2sen3\theta$$

Solución.
Se traza la gráfica y se obtiene:



Para calcular su longitud basta con hacerlo con uno de los pétalos y después el resultado se multiplica por tres. Luego, se utiliza la expresión para la longitud de arco y se tiene que:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$\begin{cases} r = 2\,sen3\theta \\ \dfrac{dr}{d\theta} = 6\cos 3\theta d\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4sen^2 3\theta + 36\cos^2 3\theta}\, d\theta$$

La resolución de esta integral por métodos tradicionales puede resultar sumamente compleja. Por ello se recurre a un método numérico a través de una computadora y la longitud de un pétalo. La solución de la integral definida dada es:

$$L \approx 6.28 \quad \Rightarrow \quad L \approx 2\pi$$

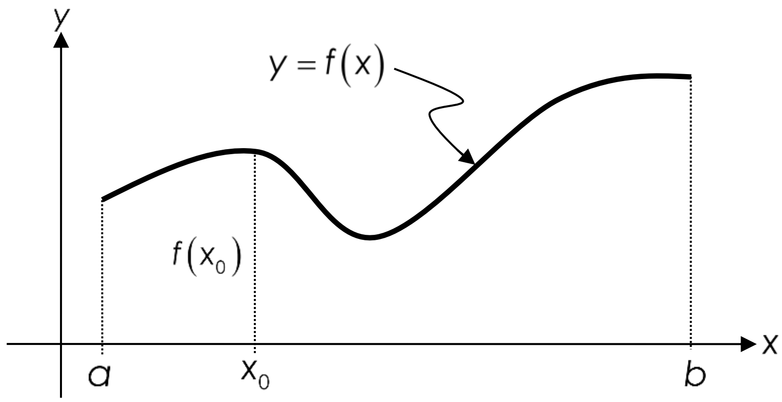
Luego la longitud total de la rosa es:

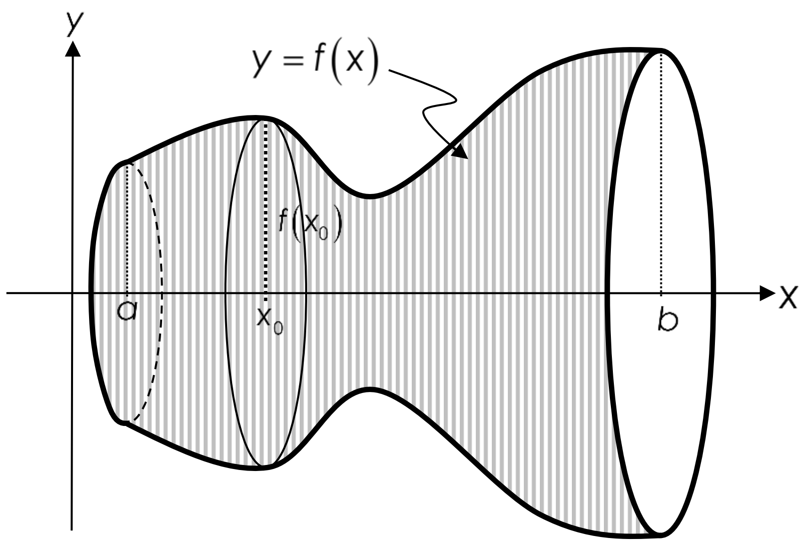
$$\therefore \quad L_R \approx 18.84\, u \quad \Rightarrow \quad L_R \approx 6\pi\, u$$

VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

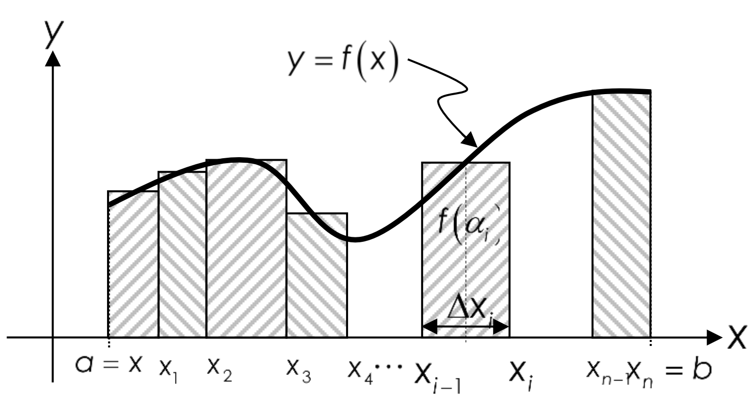
MÉTODO DE DISCOS CILÍNDRICOS

Para calcular el volumen, resultado del giro del área limitada por la función dada, el eje de las abscisas y las rectas, alrededor del eje de las “x”, se hace lo siguiente, para lo cual se grafican el área y el volumen obtenido, considerando la partición y el volumen del i-ésimo intervalo con su respectivo valor funcional.

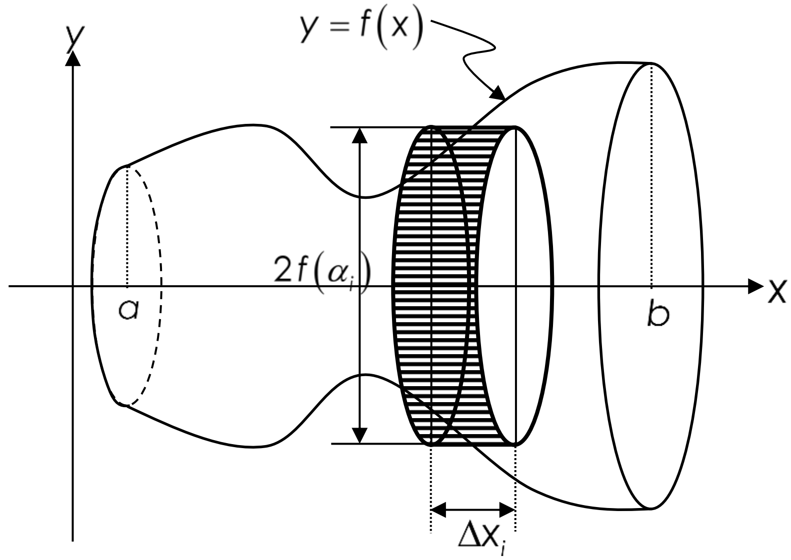




Se muestra la partición de $[a,b]$ en "n" subintervalos no sobrepuestos:



Si se toma el i-ésimo rectángulo, de base Δx_i y de altura $f(\alpha_i)$ y gira alrededor del eje "x", se genera un cilindro, como se observa en la figura, de base $2f(\alpha_i)$ y de altura Δx_i, cuyo volumen es $V_i = \pi\left[f(\alpha_i)\right]^2 \Delta x_i$.



La suma de Riemann que da una aproximación del volumen del sólido de revolución es:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\left[f(\alpha_i)\right]^2 \Delta x_i \quad ; \quad \alpha_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$$

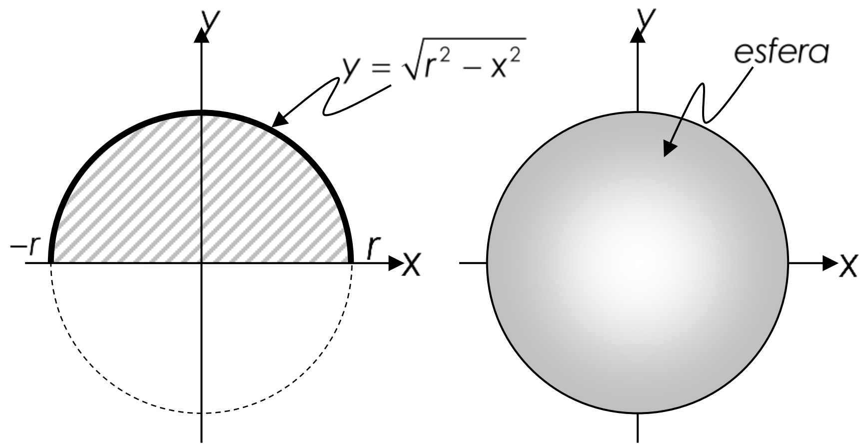
Y al calcular el límite de esta suma, se obtiene el valor exacto del volumen del sólido de revolución. Así,

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\left[f(\alpha_i)\right]^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

Si el eje de revolución es el eje "y", entonces el volumen se expresa a partir de la integral definida:

$$V = \int_c^d \pi\left[f(y)\right]^2 dy = \pi\int_c^d \left[f(y)\right]^2 dy$$

Ejemplo. Verificar que el volumen de la esfera que se genera, al girar la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de uno de sus diámetros, es igual a $\frac{4}{3}\pi r^3$.



$$V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx=\pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=\pi\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx$$

$$V=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=\pi\left[\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-\left(-r^3+\frac{r^3}{3}\right)\right]$$

$$V=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}+r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\pi\left(2r^3-\frac{2r^3}{3}\right)$$

$$\therefore\quad V=\frac{4}{3}\pi r^3\ u^3$$

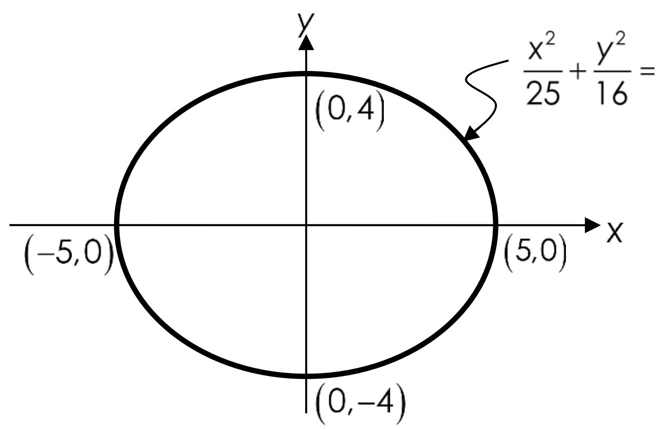
Ejemplo. Determinar el volumen generado por la elipse de ecuación:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

Al girar alrededor del eje de las abscisas y del de las ordenadas.

Solución.

Se observa la elipse completa, aunque al girar alrededor del eje de las abscisas se considerará solamente la parte superior y al girar alrededor del eje de las ordenadas se tomará únicamente la semielipse de la derecha:



Debido a la simetría con respecto a los dos ejes coordenados, el volumen en ambos casos es el doble del que se genera por la porción de elipse del primer cuadrante.

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \quad\Rightarrow\quad 16x^2+25y^2=400 \quad\Rightarrow\quad y^2=\frac{400-16x^2}{25}$$

$$V_{eje\,x}=2\pi\int_0^5\left(\frac{400-16x^2}{25}\right)dx=2\pi\left[16x-\frac{16}{75}x^3\right]_0^5=2\pi\left[80-\frac{16}{75}(125)\right]$$

$$V_{eje\,x}=\frac{320}{3}\pi\,u^3 \quad\therefore\quad V_{eje\,x}\approx 335.1u^3$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \quad\Rightarrow\quad 16x^2+25y^2=400 \quad\Rightarrow\quad x^2=\frac{400-25y^2}{16}$$

$$V_{eje\,y}=2\pi\int_0^4\left(\frac{400-25y^2}{16}\right)dy=2\pi\left[25y-\frac{25}{48}y^3\right]_0^4=2\pi\left[100-\frac{25}{48}(64)\right]$$

$$V_{eje\,y}=\frac{400}{3}\pi\,u^3 \quad\therefore\quad V_{eje\,y}\approx 418.88\,u^3$$

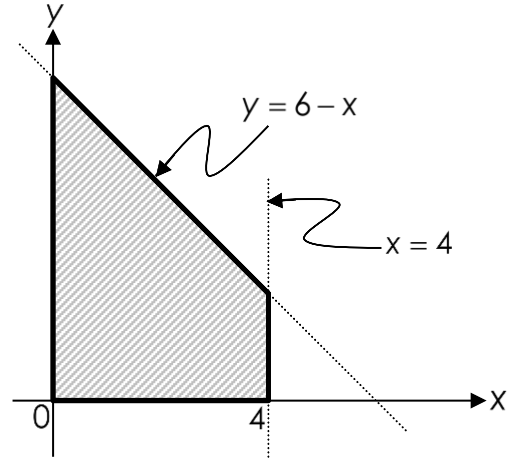
Ejemplo. Calcular el volumen del cono truncado que se genera al hacer girar, alrededor del eje de las abscisas, a la superficie limitada por las rectas:

$y=6-x \quad ; \quad y=0 \quad ; \quad x=0 \quad ; \quad x=4$

Graficar la superficie que gira y el volumen obtenido.

Solución.

Se graficará la superficie que gira, que equivale a la región debajo de la recta $y=6-x$, arriba del eje de las abscisas ($y=0$) y entre las rectas $x=0$ que es el eje de las ordenadas y $x=4$, recta paralela este eje. Entonces la gráfica de la superficie que gira y genera el cono truncado es la siguiente:



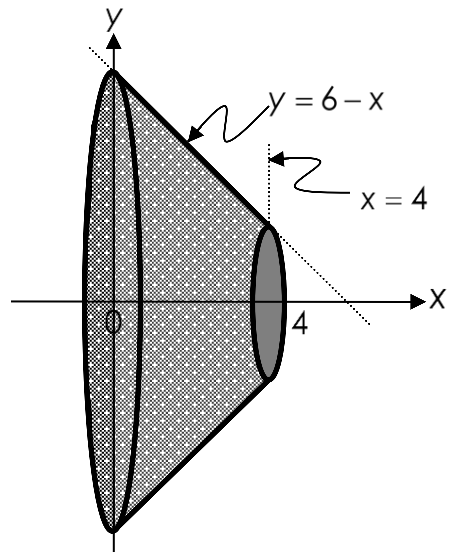
El volumen del cono truncado se determina a través de la integral:

$$V=\pi\int_0^4 (6-x)^2\,dx \quad\Rightarrow\quad V=\pi\int_0^4 \left(36-12x+x^2\right)dx$$

$$V=\pi\left[36x-6x^2+\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\pi\left[36(4)-6(4)^2+\frac{4^3}{3}\right]=\frac{208}{3}\pi$$

$$V\approx 217.82\,u^3$$

Al girar la superficie señalada se obtiene el cono truncado que de manera aproximada se aprecia en la figura siguiente:



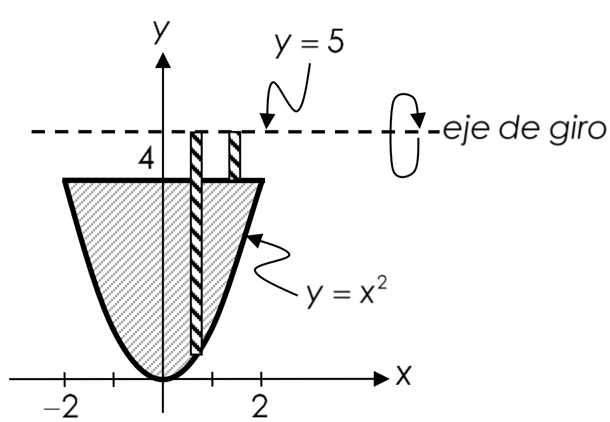
Ejemplo. Calcular el volumen que se genera al hacer girar la superficie limitada por las gráficas de las curvas cuyas ecuaciones son

$$y=x^2 \quad y \quad y=4$$

alrededor de los ejes: $i)\quad y=5 \quad ; \quad ii)\quad x=3$

Solución.

i)

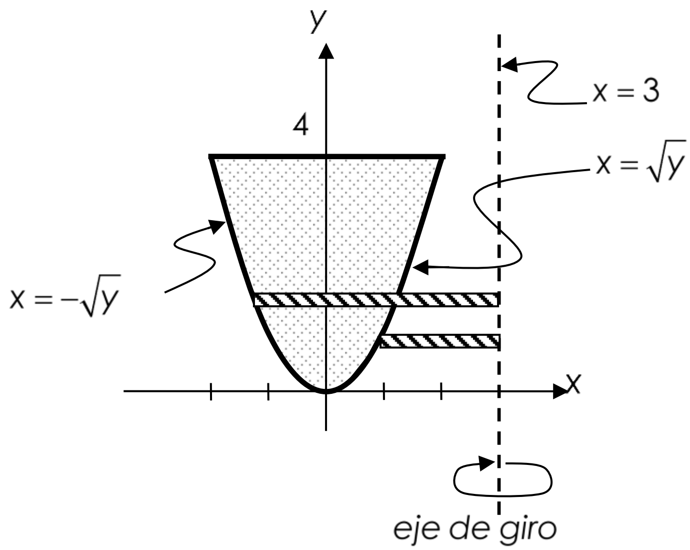


$$V = 2\pi\int_0^2\left[\left(5-x^2\right)-\left(5-4\right)^2\right]dx = 2\pi\int_0^2\left[25-10x^2+x^4-1\right]dx$$

$$= 2\pi\left[24x-\frac{10x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 2\pi\left(48-\frac{80}{3}+\frac{32}{5}\right)=\frac{832}{15}\pi$$

$$\therefore \quad V \approx 174.254\, u^3$$

ii)



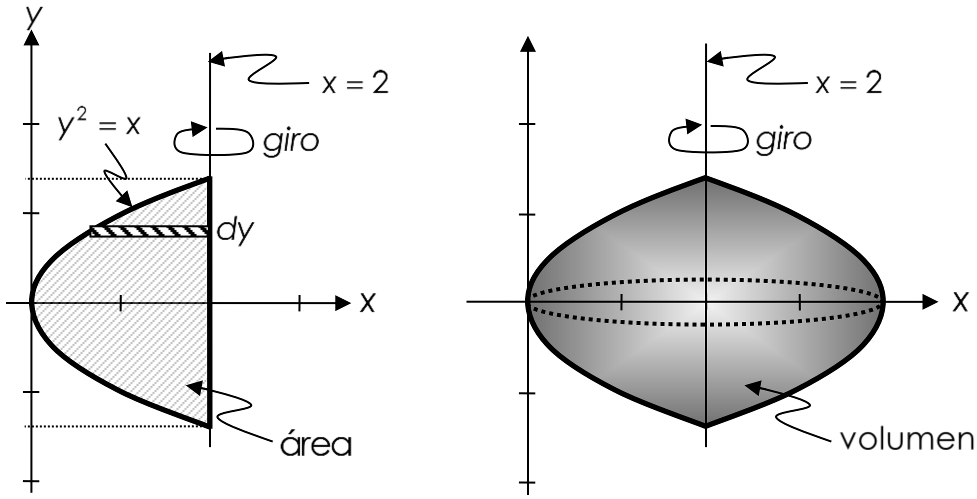
$$V = \pi\int_0^4\left[\left(3+\sqrt{y}\right)^2-\left(3-\sqrt{y}\right)^2\right]dy = \pi\int_0^4\left(9+6\sqrt{y}+y-9+6\sqrt{y}-y\right)dy$$

$$= \pi\int_0^4 12\sqrt{y}\,dy = 12\pi\left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^4 = 12\pi\left(\frac{16}{3}\right)=64\pi$$

$$\therefore \quad V \approx 201.062\, u^3$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Calcular el volumen que se genera al girar, alrededor del eje $x=2$, la superficie formada por las gráficas de la curva $y^2 = x$ y la recta $x = 2$. Graficar la superficie que gira y el volumen que se obtiene.

Solución.
Ambas gráficas se muestran en la siguiente figura:



Para calcular el volumen se hace lo siguiente:

$$V = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(2-y^2\right)^2 dy = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(4-4y^2+y^4\right)dy$$

$$V = 2\pi\left[4y-\frac{4y^3}{3}+\frac{y^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi\left[4\sqrt{2}-\frac{4\left(\sqrt{2}\right)^3}{3}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^5}{5}\right]$$

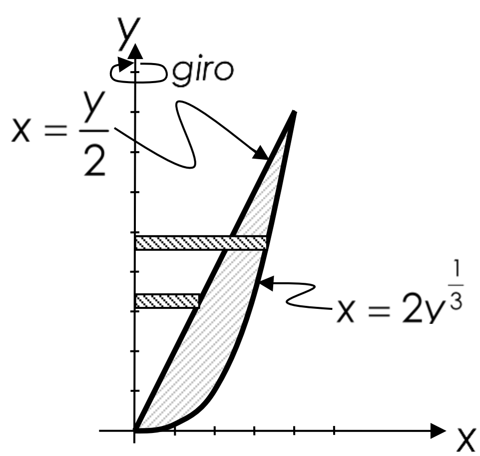
$$\therefore \quad V \approx 18.96\,u^3$$

Ejemplo. Calcular el volumen que se genera al hacer girar, alrededor del eje "y", la región limitada por las gráficas de las funciones

$$y = \frac{1}{8}x^3 \quad y \quad y = 2x\,.$$

Solución.

Se grafica la región limitada por las dos curvas y se señalan los elementos diferenciales de giro para cada una. Así,



El volumen que genera esta región, al girar alrededor del eje $"y"$ está dado por:

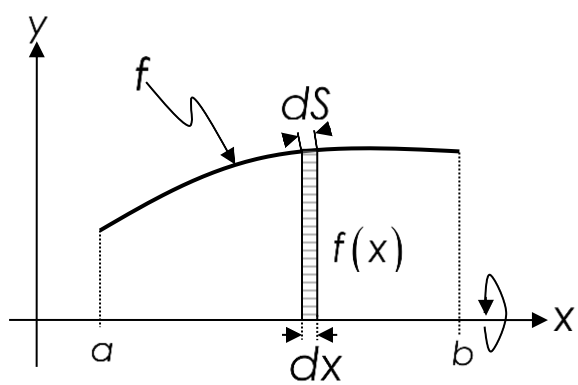
$$V=\pi\int_0^8\left[\left(2y^{\frac{1}{3}}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2\right]dy=\pi\int_0^8\left(4y^{\frac{2}{3}}-\frac{y^2}{4}\right)dy$$

$$V=\pi\left[\frac{4y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-\frac{y^3}{12}\right]_0^8=\pi\left(\frac{384}{5}-\frac{512}{12}\right)$$

$$\therefore \quad V\approx 107.233\,u^3$$

ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Sea f una función continua y derivable en un intervalo $\left[a,b\right]$. Se pretende calcular el área de la superficie que genera la curva, al girar alrededor del eje $"x"$ la región comprendida por ella, el eje $"x"$ y las rectas $x=a \quad y \quad x=b$.



En el elemento diferencial, su ancho dx se considera igual a la longitud de curva dS que se produce al cortarla el elemento diferencial. Al girar este alrededor del eje $"x"$, dS genera una superficie cuya área está dada, de acuerdo con la expresión que define el perímetro de una circunferencia, por:

$$dA=2\pi f\left(x\right)dS$$

Se realiza una partición, después una sumatoria y se obtiene el límite de esta; se obtiene una integral que proporciona el área total de la superficie de revolución:

$$A=2\pi\int_a^b f\left(x\right)dS$$

Y el elemento longitud de curva $"dS"$ se obtiene como ya se estudió, con:

$$dS=\sqrt{1+\left[f'\left(x\right)\right]^2}\,dx$$

luego el área de la superficie de revolución generada al girar alrededor del eje "x" la región limitada por la curva, gráfica de "f", el eje de las abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$, está dada por:

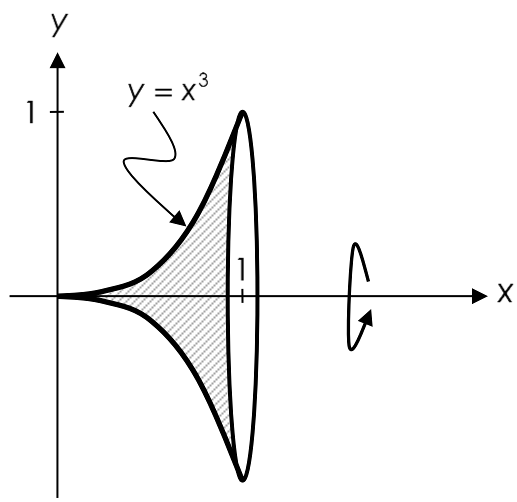
$$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

Se presenta una tabla para calcular el área de una superficie de revolución dependiendo del eje y de la definición de la curva:

Curva	Eje de revolución	Eje de revolución
	"x"	"y"
$y = f(x)$ $a \le x \le b$	$A(S) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$	$A(S) = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$
$x = f(y)$ $c \le y \le d$	$A(S) = 2\pi\int_c^d y\sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,dy$	$A(S) = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,dy$

Ejemplo. Calcular de dos maneras el área de la superficie que se genera al girar la gráfica de $y = f(x) = x^3$, en el intervalo $[0,1]$, alrededor del eje "x". Hacer un trazo aproximado de la gráfica de la curva y de la superficie que se genera.

Solución. En la figura se ve la curva, gráfica de la función, en el intervalo dado y la superficie que genera al girar alrededor del eje "x".



Primera forma: Se utiliza la expresión $A(S) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$ y se tiene:

$$f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad A(S) = 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx$$

$$u = 1+9x^4 \quad \Rightarrow \quad du = 36x^3 dx$$

$$\frac{\pi}{18}\int\sqrt{u}du=\frac{\pi}{18}\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}+C=\frac{\pi}{27}\left(1+9x^4\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$A(S)=\frac{\pi}{27}\left[\left(1+9x^4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \quad\Rightarrow\quad A(S)=\frac{\pi}{27}\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

$$\therefore\quad A(S)\doteq 3.563\,u^2$$

Segunda forma: Se utiliza la expresión $A(S)=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,dy$, de donde:

$$g(y)=y^{\frac{1}{3}}\quad;\quad g'(y)=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\quad\Rightarrow\quad g'(y)=\frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}$$

$$A(S)=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+\frac{1}{9y^{\frac{4}{3}}}}\,dy=2\pi\int_0^1 y\sqrt{\frac{9y^{\frac{4}{3}}+1}{9y^{\frac{4}{3}}}}\,dy$$

$$=2\pi\int_0^1\frac{y}{3y^{\frac{2}{3}}}\sqrt{9y^{\frac{4}{3}}+1}\,dy=\frac{2\pi}{3}\int_0^1 y^{\frac{1}{3}}\sqrt{9y^{\frac{4}{3}}+1}\,dy$$

$$u=9y^{\frac{4}{3}}+1\quad\Rightarrow\quad du=12y^{\frac{1}{3}}dy$$

$$\frac{2\pi}{3\cdot 12}\int\sqrt{u}\,du=\frac{\pi}{18}\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}+C=\frac{\pi}{27}\left(9y^{\frac{4}{3}}+1\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

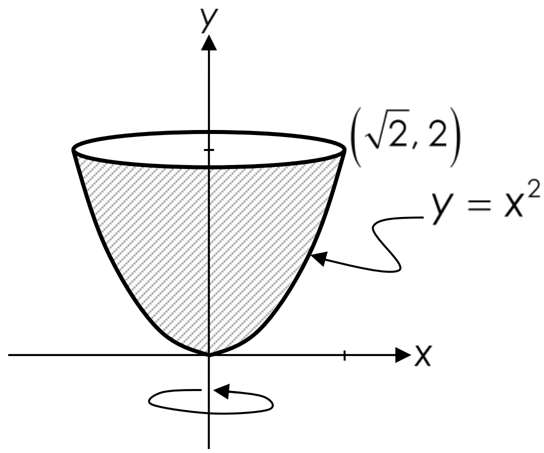
$$A(S)=\frac{\pi}{27}\left[\left(9y^{\frac{4}{3}}+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1\quad\Rightarrow\quad A(S)=\frac{\pi}{27}\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

$$\therefore\quad A(s)\doteq 3.563\,u^2$$

Ejemplo. Calcular, de dos formas, el área de la superficie generada al girar la curva $y=f(x)=x^2$, en el intervalo $x\in\left[0,\sqrt{2}\right]$, alrededor del eje de las ordenadas. Hacer un trazo aproximado de la curva, así como de la superficie que se genera.

Solución

La gráfica de la curva y de la superficie de revolución generada se muestran en la siguiente gráfica:



Primera forma: se utiliza la expresión $A(S)=\int_0^{\sqrt{2}} 2\pi x\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$, por lo que:

$$f(x)=x^2 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=2x \quad ; \quad A(S)=2\pi\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$u=1+4x^2 \quad\Rightarrow\quad du=8x\,dx$$

$$\frac{\pi}{4}\int\sqrt{u}\,du=\frac{\pi}{4}\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}+C=\frac{\pi}{6}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$A(S)=\frac{\pi}{6}\left[\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad A(S)=\frac{\pi}{6}(27-1)$$

$$\Rightarrow\quad A(S)=\frac{13\pi}{3}\ \therefore\quad A(S)\doteq 13.614\,u^2$$

Segunda forma: se utiliza la expresión $A(S)=2\pi\int_0^2 g(y)\sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,dy$

$$g(y)=\sqrt{y} \quad\Rightarrow\quad g'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\ ; \quad A(S)=2\pi\int_0^2\sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\,dy$$

$$A(S)=2\pi\int y^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{4y+1}{4y}}\,dy=\pi\int\sqrt{4y+1}\,dy$$

$$u=4y+1 \quad\Rightarrow\quad du=4\,dy \quad ; \quad \frac{\pi}{4}\int\sqrt{u}\,du=\frac{\pi}{4}\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

$$=\frac{\pi}{6}(4y+1)^{\frac{3}{2}}+C \quad ; \quad A(S)=\frac{\pi}{6}\left[(4y+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$A(S)=\frac{\pi}{6}(27-1) \quad\therefore\quad A(S)\doteq 13.614\,u^2$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ACADEMIA DE CÁLCULO INTEGRAL

Cuarto tema: Derivación y diferenciación de funciones escalares de varias variables

PABLO GARCÍA Y COLOMÉ
PROFESOR DE CARRERA

CÁLCULO INTEGRAL
CUARTO TEMA
DERIVACIÓN Y DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIAS VARIABLES

INTRODUCCIÓN

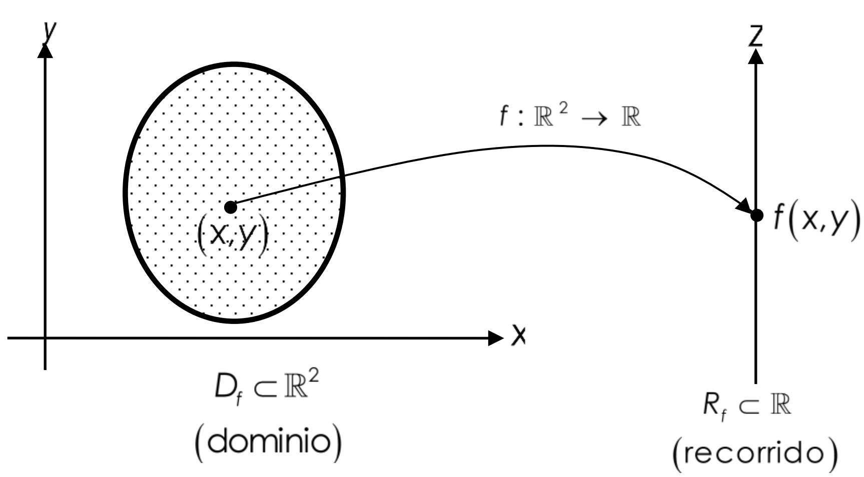
Hay funciones que modelan innumerables fenómenos físicos donde la variable dependiente está en términos de dos o más variables independientes. Son funciones escalares de variable vectorial

Definición. Una función escalar de "n" variables independientes está compuesta por:
i) El conjunto de valores que toman las "n" variables independientes, que constituye el Dominio de la función y que se denota con $D_f \in \mathbb{R}^n$.
ii) El conjunto de valores de la variable dependiente, que constituye el Codominio y que se denota con $C_f \in \mathbb{R}$.
iii) La regla de correspondencia que asocia a cada elemento del dominio con uno y sólo un elemento del codominio. Se le denota con $F = F(\bar{r})$ donde

$$f : D_f \to C_f$$

El Recorrido R_f de una función de este tipo es el conjunto de valores que toma la variable dependiente. A este conjunto también se le llama Conjunto imagen simplemente Imagen.

Cuando la función tiene dos variables independientes se puede expresar como $z = f(x,y)$, donde "x" y "y" son las variables independientes que definen juntas la variable vectorial y "z" es la variable dependiente, es decir, la función $f(x,y)$. Esto se puede representar como:



Un concepto de gran importancia es el de entorno de un punto cualquiera (x,y).

Definición. Se denota entorno de un punto $P(x_0,y_0)$ al conjunto de puntos que se encuentran en el interior de una circunferencia de radio δ y cuyo centro es el punto $P(x_0,y_0)$. Son todos los puntos que satisfacen la desigualdad

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$$

Si no se considera al punto $P(x_0,y_0)$ se habla entonces de un entorno reducido. Si se hace $\bar{r}=(x,y)$ *y* $\overline{r_0}=(x_0,y_0)$, la definición anterior queda como: $|\bar{r}-\bar{r}_0|<\delta$.

Definición. Sean $"P"$ *y* $"Q"$ dos puntos de un conjunto S de números reales. Si pueden ser unidos mediante un segmento de curva cuyos puntos pertenecen a $"S"$ se habla de $"S"$ como de un conjunto conexo. Y si dicho segmento es parte de una recta entonces a $"S"$ se le llama conjunto simplemente conexo o convexo.

Definición. Una región es un conjunto conexo de puntos que puede ser cerrado, abierto o semicerrado.

Ejemplo. Obtener el dominio de definición de las siguientes funciones, representarlo gráficamente e indicar en cada caso si es región y de qué tipo de región se trata:

$$i)\quad f(x,y)=\ln\left[\left(4-x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2-1\right)\right]\quad ;\quad ii)\quad z=f(x,y)=\sqrt{4-(2x+y)}$$

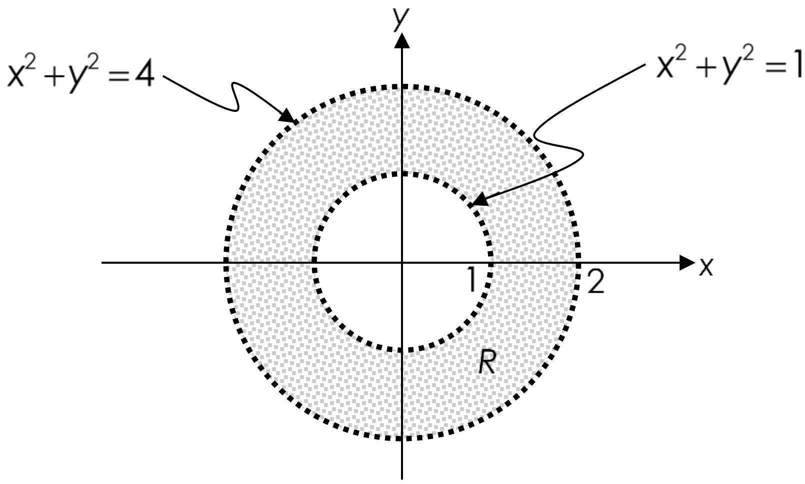
$$iii)\quad z=f(x,y)=\frac{xy-3}{\sqrt{y-x^2}}\quad ;\quad iv)\quad z=f(x,y)=angsen\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{xy}$$

Solución.

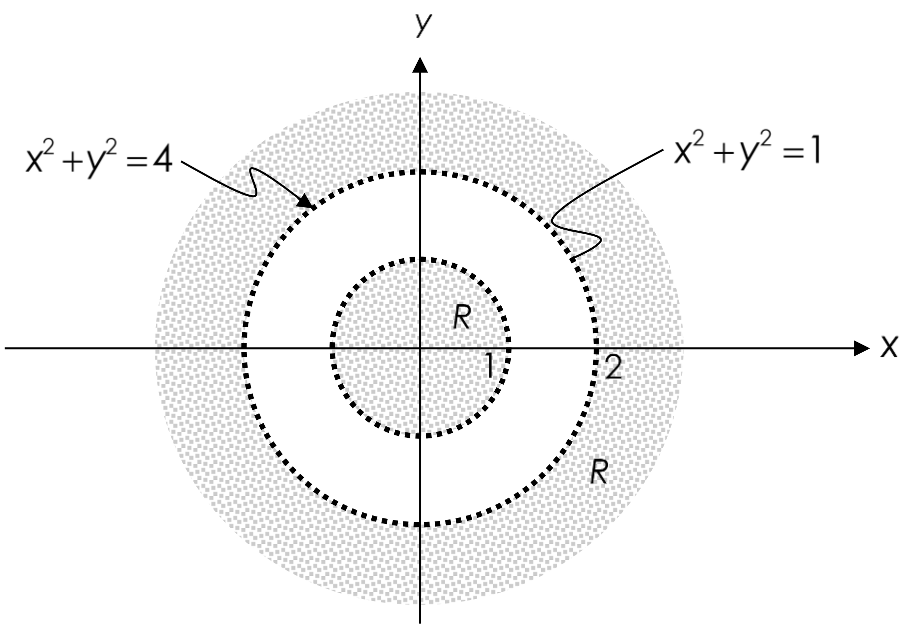
$$i)\quad f(x,y)=\ln\left[\left(4-x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2-1\right)\right]$$

Se trata de una función logaritmo natural, luego para obtener su dominio, se considera la siguiente desigualdad: $\left(4-x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2-1\right)>0$

Primera posibilidad: $\begin{cases}4-x^2-y^2>0 & \Rightarrow\quad x^2+y^2<4\\ x^2+y^2-1>0 & \Rightarrow\quad x^2+y^2>1\end{cases}$



Segunda posibilidad: $\begin{cases} 4-x^2-y^2<0 & \Rightarrow \quad x^2+y^2>4 \\ x^2+y^2-1<0 & \Rightarrow \quad x^2+y^2<1 \end{cases}$



Como se observa, en la primera figura hay una zona donde todos los puntos satisfacen a las desigualdades propuestas y se trata de una región, y en la segunda gráfica se ve que no hay intersección de las regiones solución de las desigualdades. Por lo tanto, el dominio de la función dada es:

$$D_f=\left\{(x,y)\middle|1<x^2+y^2<4 \quad ; \quad x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

y se trata de una región conexa cerrada.

ii) $\quad z=f(x,y)=\sqrt{4-(2x+y)}$

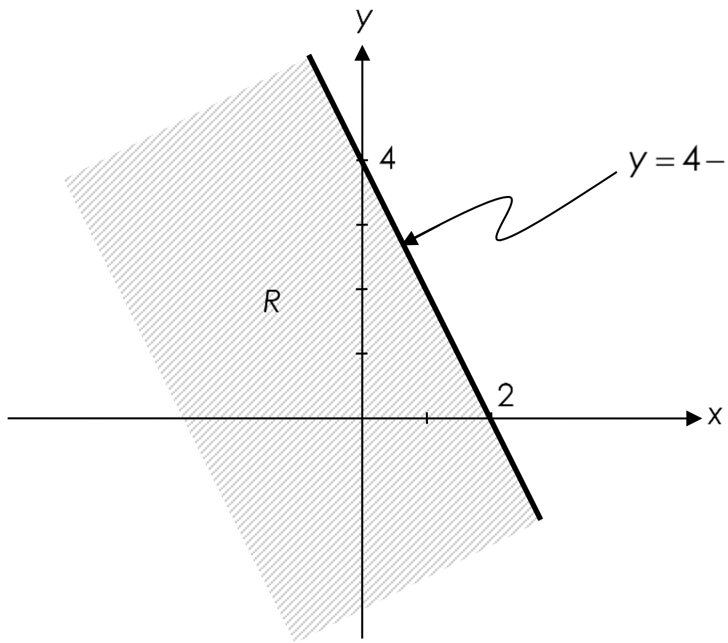
Se tiene una función algebraica en la que, como se sabe, el radicando debe ser mayor o igual a cero. De donde,

$$4-(2x+y)\geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2x+y\leq 4 \quad \Rightarrow \quad y\leq 4-2x$$

Por lo que el dominio de la función dada es:

$$D_f=\{(x,y)\,|\,y\leq 4-2x \quad ; \quad x,y\in\mathbb{R}\}$$

Y para graficar este dominio, se considera primero el signo igual y después el signo de la desigualdad. Por lo que será una región simplemente conexa semiabierta, como se ve en la figura:



iii) $z=f(x,y)=\dfrac{xy-3}{\sqrt{y-x^2}}$

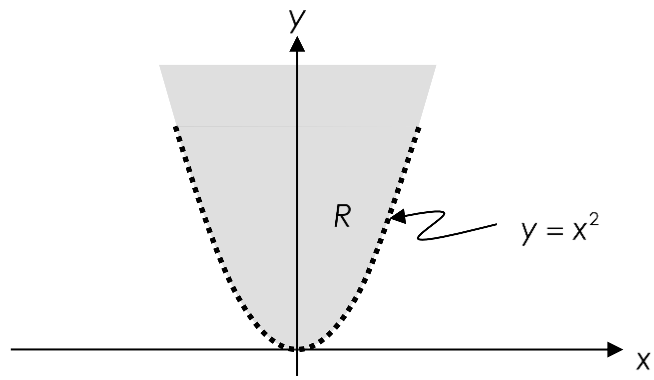
Para esta región algebraica, el denominador no puede ser cero y entonces el radicando debe ser mayor que cero, luego,

$$\sqrt{y-x^2}>0 \quad \Rightarrow \quad y-x^2>0 \quad \Rightarrow \quad y>x^2$$

por lo que el dominio de esta función escalar de variable vectorial es:

$$D_f=\{(x,y)\,|\,y>x^2 \quad ; \quad x,y\in\mathbb{R}\}$$

Y se trata de una región convexa abierta, como se aprecia en la figura:



iv) $z = f(x,y) = angsen\left(\dfrac{x}{2}\right) + \sqrt{xy}$

Para el primer sumando se tiene que:

$$-1 \le \frac{x}{2} \le 1 \quad \Rightarrow \quad -2 \le x \le 2$$

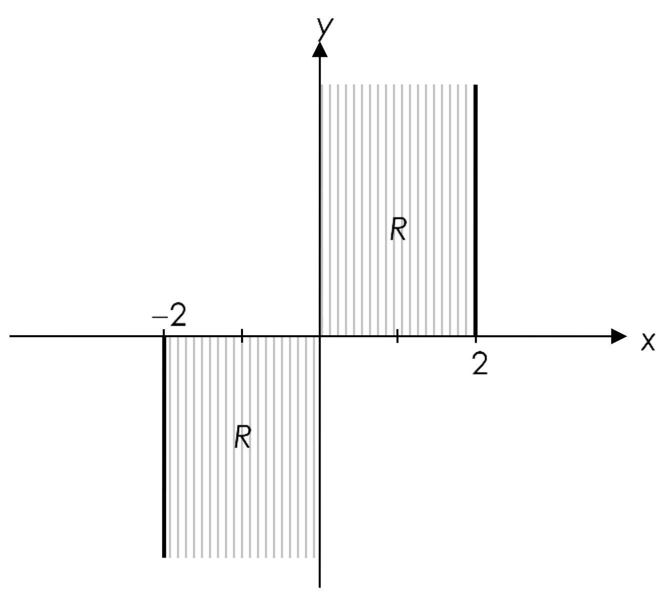
Y para el segundo sumando:

$$xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases} \end{matrix}$$

Y la intersección de estos conjuntos de puntos constituye el dominio de la función, que es:

$$D_f = \left\{ (x,y) \middle| -2 \le x \le 0 \,;\, y \le 0 \cup 0 \le x \le 2 \,;\, y \ge 0 \quad ; \quad x,y \in \mathbb{R} \right\}$$

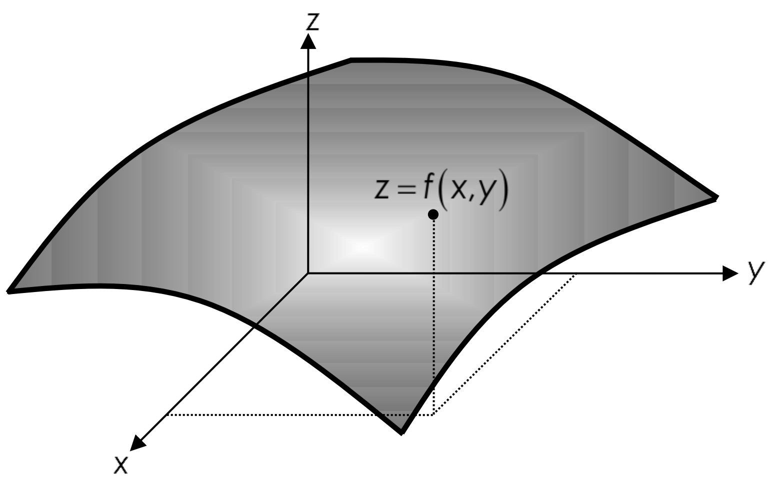
La gráfica de este dominio, que es una región conexa semiabierta, se muestra en la siguiente figura:



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE VECTORIAL

Una función $z=f(x,y)$ puede representarse gráficamente de dos formas:

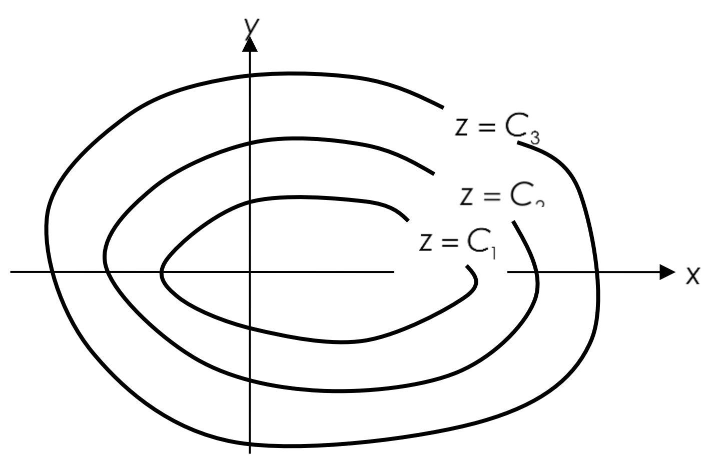
i) Por medio de una superficie en $\mathbb{R}^3$, lo que puede hacerse con un programa de computadora que lo que hace es darle valores a la variable vectorial (x,y) y obtener los correspondientes valores de la función $z=f(x,y)$ para después dibujar su gráfica en un sistema coordenado en $\mathbb{R}^3$. Esto se vería como en la figura:



ii) Por medio de sus curvas de nivel o líneas de contorno. Esta forma de representación gráfica consiste en trazar curvas del tipo

$$f(x,y)=C_1 \quad ; \quad f(x,y)=C_2 \quad ; \quad f(x,y)=C_3 \quad ; \quad \cdots$$

es decir, que en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ se trazan curvas para diferentes valores de la variable "z", esto es, de la función. En la figura se muestran estas curvas que pertenecen, como se deduce de ellas, a una superficie que es la gráfica de una cierta función escalar de variable vectorial:



Ejemplo. Dado el campo escalar

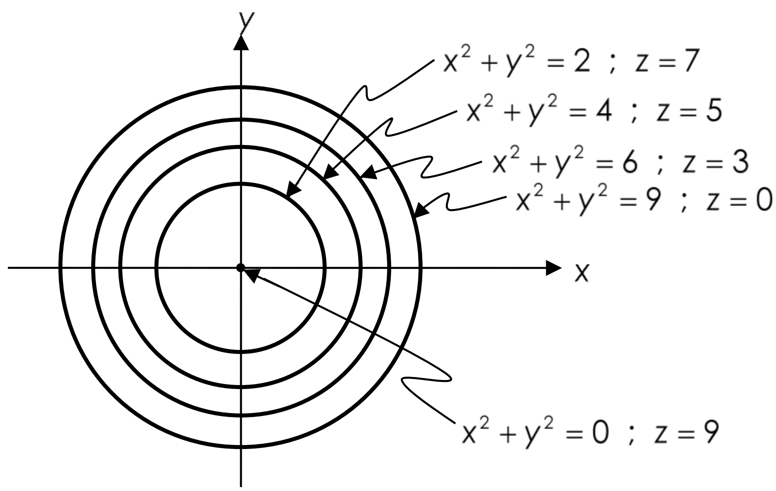
$$z = f(x,y) = 9 - x^2 - y^2 \quad ; \quad x^2 + y^2 \leq 9$$

representarlo gráficamente por medio de curvas de nivel y mediante una superficie en $\mathbb{R}^3$. Dar dominio y recorrido.

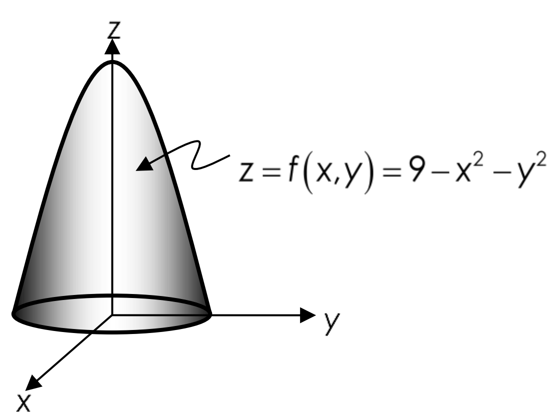
Solución.
Para representar esta función mediante curvas de nivel se dan valores a la función y se tiene:

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 9 \quad ; \quad z = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 6$$
$$z = 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4 \quad ; \quad z = 7 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2$$
$$z = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 0$$

Se observa que las curvas de nivel son circunferencias que se ubican en planos paralelos al plano "xy" con radios que disminuyen hasta anularse. La gráfica de la función a través de sus curvas de nivel es la siguiente:



Se puede representar en una figura a la función escalar correspondiente la que, como se observa, es un punto en $(0,0,9)$ y se conforma por circunferencias que van aumentando en su radio hasta llegar a la que se ubica en el plano "xy" y que tiene por ecuación a $x^2 + y^2 = 9$.



El dominio y el recorrido de la función son, respectivamente,

$$D_f = \left\{ (x,y) \middle| x^2 + y^2 \le 9 \quad ; \quad x,y \in \mathbb{R} \right\} \quad y \quad R_f = \left\{ z \middle| z \in [0,9] \quad ; \quad z \in \mathbb{R} \right\}$$

Como se verá después, esta superficie se conoce como paraboloide circular o paraboloide de revolución.

Ejemplo. Considérese la función escalar de variable vectorial

$$z = -\frac{3}{2}\sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{4}}$$

Dar dominio recorrido y hacer un trazo aproximado de la gráfica, mediante algunas curvas de nivel y en el espacio $\mathbb{R}^3$.

Solución.

Para obtener el dominio se toma en consideración el hecho de que el radicando debe ser mayor o igual a cero y de ahí se obtienen los valores que puede tomar la variable vectorial de tal forma que sus correspondientes valores de la función sean reales. Así,

$$1 - x^2 - \frac{y^2}{4} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1$$

Como se observa, el dominio de esta función son todos los puntos que satisfacen la ecuación de la elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1$ y los que están en su interior, lo que se expresa como:

$$D_f = \left\{ (x,y) \middle| x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1 \quad ; \quad x,y \in \mathbb{R} \right\}$$

Primero se graficará y después se determinará el recorrido. Para representar la función mediante las curvas de nivel se le dan algunos valores a la variable dependiente "z".

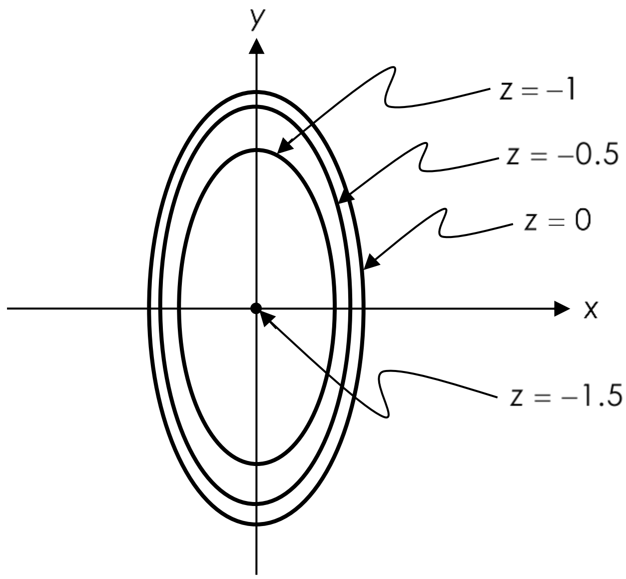
$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{9}{4}\left(1 - x^2 - \frac{y^2}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{(elipse)}$$

$$z = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} = \frac{9}{4}\left(1 - x^2 - \frac{y^2}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{8}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{8}{9}} + \frac{y^2}{\frac{32}{9}} = 1 \quad \text{(elipse)}$$

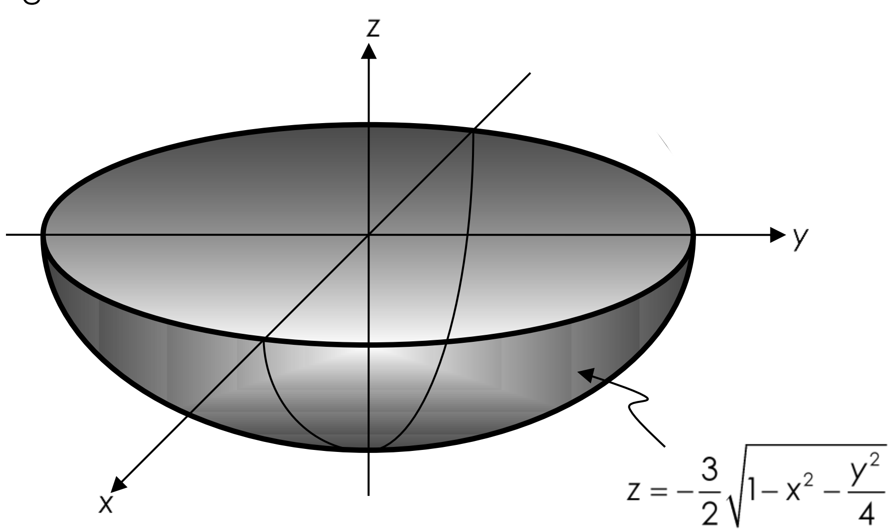
$$z = -1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{9}{4}\left(1 - x^2 - \frac{y^2}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{5}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{5}{9}} + \frac{y^2}{\frac{20}{9}} = 1 \quad \text{(elipse)}$$

$$z = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{4} = \frac{9}{4}\left(1 - x^2 - \frac{y^2}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 0 \quad \text{(origen de coordenadas)}$$

Se grafican estas curvas de nivel del campo escalar en estudio y se tiene:



Ahora se grafica en $\mathbb{R}^3$. Por las curvas de nivel se intuye que todos los cortes horizontales se traducirían en elipses con centro en el eje "z", comenzando en el plano "xy" hasta llegar al punto $(0,0,-1.5)$. Para graficar la función se considera esto y con la ayuda de una computadora o algunos elementos que se verán más adelante, se puede representar como se muestra en la siguiente figura:



OPERACIONES ELEMENTALES ENTRE FUNCIONES

Se verán, de manera somera, operaciones con funciones escalares de variable vectorial incluyendo, no con tanta profundidad dados los alcances de la obra, la composición.

Definición. Sean las funciones escalares de variable vectorial

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con dominios $D_f \subset \mathbb{R}^n$ y $D_g \subset \mathbb{R}^n$ y sea α un escalar real. Entonces se definen las siguientes funciones:

i) Multiplicación por un escalar:

$$(\alpha f)(\bar{r}) = \alpha f(\bar{r}) \quad ; \quad D_{\alpha f} = D_f$$

ii) Adición de funciones escalares:

$$(f+g)(\bar{r}) = f(\bar{r}) + g(\bar{r}) \quad ; \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

iii) Multiplicación de funciones escalares:

$$(f \cdot g)(\bar{r}) = f(\bar{r}) \cdot g(\bar{r}) \quad ; \quad D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

iv) Cociente de funciones escalares:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(\bar{r}) = \frac{f(\bar{r})}{g(\bar{r})} \quad ; \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \quad ; \quad g(\bar{r}) \neq 0$$

v) Sea la función real de variable real $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces la composición de h con f está dada por:

$$(h \circ f)(\bar{r}) = h(f(\bar{r}))$$

y su dominio son los elementos del dominio de f tales que sus imágenes estén en el dominio de h.

Ejemplo. Sean las funciones

$$f_1(x,y) = \frac{xy}{2} \quad ; \quad f_2(x,y) = x\cos(x^2+y^2) \quad ; \quad h(x) = \sqrt{1-x}$$

Obtener las funciones pedidas y dar su respectivo dominio:

$$i)\ \ 6f_1 \quad ; \quad ii)\ \ f_1 - 3f_2 \quad ; \quad iii)\ \ f_1 \cdot f_2 \quad ; \quad iv)\ \ 2f_2 \div f_1 \quad ; \quad v)\ \ h \circ f_1$$

Solución.

Los dominios de las funciones dadas son:

$$D_{f_1} = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}\} ; \ D_{f_2} = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}\} ; \ D_h = \{x | -1 \le x \le 1 \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$$

$$i)\quad 6f_1 = 6\frac{xy}{2} = 3xy \quad ; \quad D_{6f_1} = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$ii)\quad f_1 - 3f_2 = \frac{xy}{2} - 3x\cos(x^2+y^2) \quad ; \quad D_{f_1-3f_2} = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$iii)\quad f_1 \cdot f_2 = \frac{x^2y}{2}\cos(x^2+y^2) \quad ; \quad D_{f_1 \cdot f_2} = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$iv)\quad 2f_2 \div f_1 = \frac{\frac{xy}{2}}{x\cos(x^2+y^2)} = \frac{y}{2\cos(x^2+y^2)}$$

$$D_{2f_2 \div f} = \left\{ (x,y) \middle| x^2 + y^2 \neq n\frac{\pi}{2}; n \geq 0 \quad ; \quad x,y \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$v) \quad h \circ f_1 = \sqrt{1 - \frac{xy}{2}} \quad ; \quad D_{h \circ f_1} = \left\{ (x,y) \middle| xy \leq 2 \quad ; \quad x,y \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejemplo. Sean las funciones:

$$g = \{(0,0,-1),(0,1,0),(1,1,-3),(0,-1,5),(1,2,6)\}$$

y

$$h = \{(-1,0),(0,5),(-3,-1),(4,-2),(6,8)\}$$

Obtener la función composición $h \circ g$ y su dominio.

Solución

Para construir la función composición, se debe considerar a su dominio que está formado por los elementos del dominio de g tales que sus imágenes estén en el dominio de h. Luego,

$$h \circ g = \{(0,0,0),(0,1,5),(1,1,-1),(1,2,8)\}$$

Como se puede intuir, graficar una función escalar de variable vectorial sin el concurso de la computadora resulta difícil y en ocasiones imposible. A continuación, se presentan ejercicios que consideran superficies cuádricas como gráficas de funciones escalares de variable vectorial.

SUPERFICIES CUÁDRICAS

Las cónicas de la Geometría analítica plana, esto es, circunferencia, elipse, parábola e hipérbola, se manifiestan en el espacio $\mathbb{R}^3$ en la esfera, el elipsoide, el paraboloide y el hiperboloide. Estas superficies dan origen a las conocidas como superficies cuádricas y cuya ecuación general es:

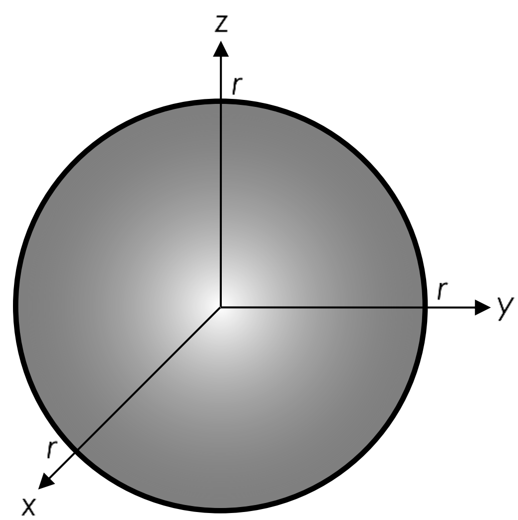
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

No se incluyen los términos mixtos xy, xz, yz que hablan de rotación.

Se presentarán las superficies cuádricas con centro en el origen y a través de sus ecuaciones simétricas, que se obtienen de manipulaciones algebraicas con la ecuación general. El objeto es sólo mostrarlas e identificarlas para tener más herramientas para graficar y dar dominio y recorrido de funciones escalares con dos variables independientes.

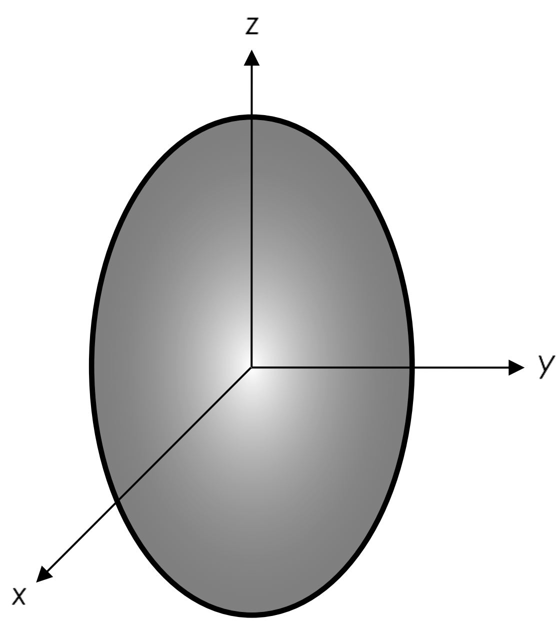
Esfera
Su ecuación y representación gráfica son:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



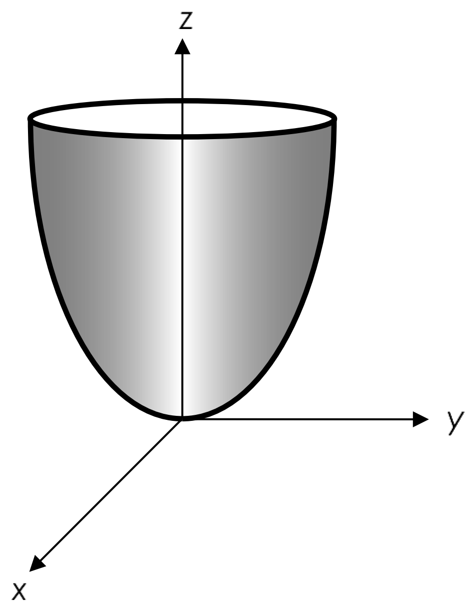
Elipsoide
La ecuación y representación gráfica son:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



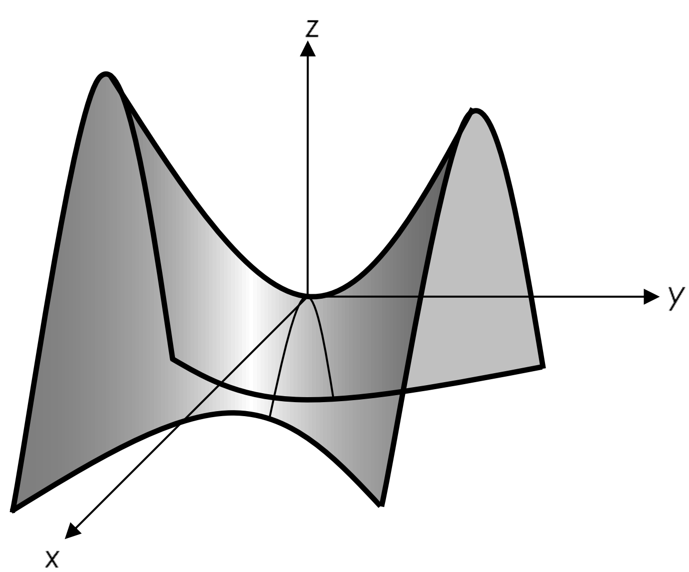
Paraboloide elíptico
Su ecuación y representación gráfica son:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$



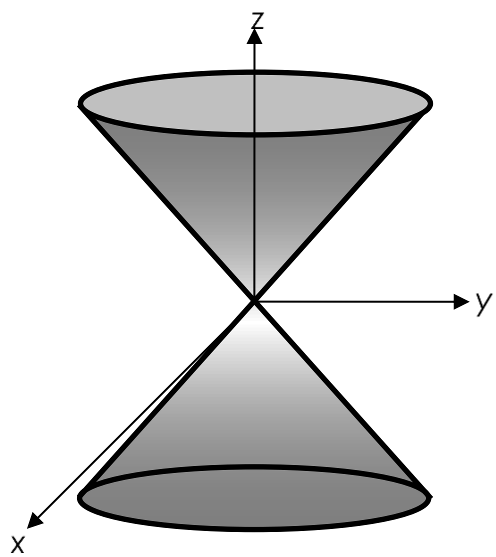
Paraboloide hiperbólico
La ecuación y representación gráfica son:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}$$



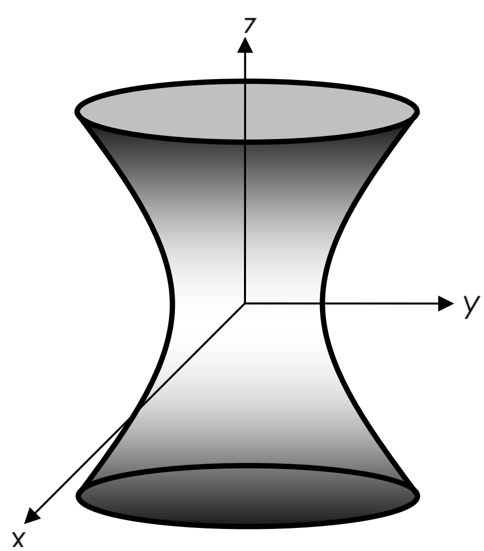
Cono elíptico
Su ecuación y representación gráfica son:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$



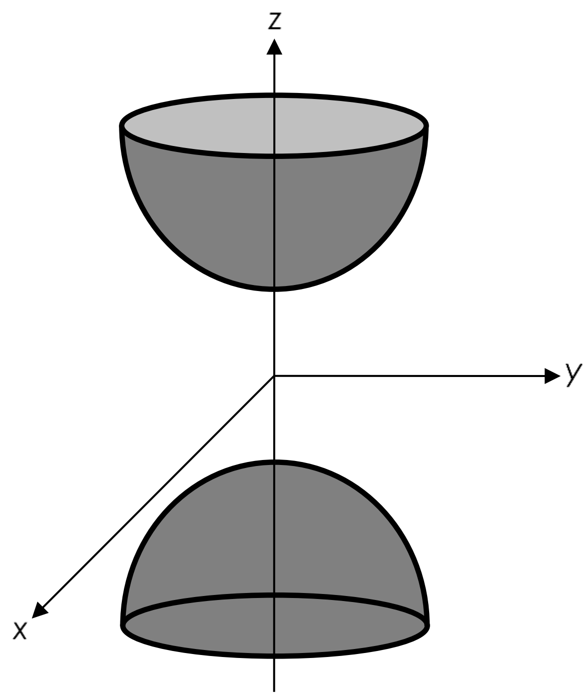
Hiperboloide de una hoja
Su ecuación y representación gráfica son:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



Hiperboloide de dos hojas
Su gráfica es la ecuación:

$$\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}=1$$



Estas ecuaciones pueden experimentar variaciones que afectan a la gráfica. Para que estas superficies sean gráficas de funciones, deben cumplir con la condición de que exista un solo valor de la cota "z" para cada pareja de valores (x,y) de la variable vectorial independiente. Ahora se presentará, en ejemplos, un método para obtener algunas características de ciertas superficies, lo que facilita su identificación si se trata de una cuádrica, así como su representación gráfica.

Ejemplo. Determinar la ecuación general de la esfera con centro en $(1,2,-1)$ y radio igual a 5. Considerar después el hemisferio inferior y dar la regla de correspondencia del campo escalar cuya representación gráfica es dicho hemisferio, así como su dominio y recorrido. Graficar.

Solución.
Para obtener la ecuación general de la esfera se hace lo siguiente:

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-k)^2=r^2 \quad ; \quad (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=5^2$$

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2+2z+1=25$$

$$\therefore \quad x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-19=0$$

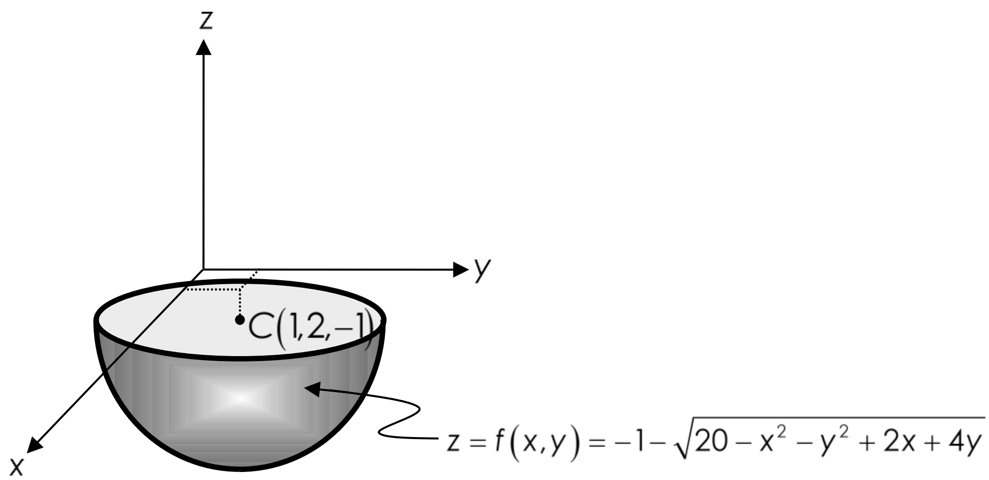
Se toma en cuenta únicamente el hemisferio inferior de la esfera:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=5^2 \quad \Rightarrow \quad (z+1)^2=25-(x-1)^2-(y-2)^2$$

$$z+1=-\sqrt{25-x^2+2x-1-y^2+4y-4}$$

$$\therefore \quad z=f(x,y)=-1-\sqrt{20-x^2-y^2+2x+4y}$$

La gráfica de la semiesfera inferior es la siguiente:



El dominio y el recorrido de esta función escalar de variable vectorial son, respectivamente:

$$D_f=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x-1)^2+(y-2)^2\le 25 \quad ;\, x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

$$R_f=\left\{z\,\middle|\,-6\le z\le -1 \quad ;\, z\in\mathbb{R}\right\}$$

Ejemplo. A partir de la ecuación

$$36x^2+4y^2+9z^2+72x-8y-36z+40=0$$

probar que representa un elipsoide y considerar la mitad inferior como la gráfica de un campo escalar y dar su regla de correspondencia, así como su dominio y recorrido. Graficar

Solución

$$36\left(x^2+2x+1-1\right)+4\left(y^2-2y+1-1\right)+9\left(z^2-4z+4-4\right)+40=0$$

$$36\left(x^2+2x+1\right)-36+4\left(y^2-2y+1\right)-4+9\left(z^2-4z+4\right)-36+40=0$$

$$36(x+1)^2+4(y-1)^2+9(z-2)^2=36$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x+1)^2}{1}+\frac{(y-1)^2}{9}+\frac{(z-2)^2}{4}=1$$

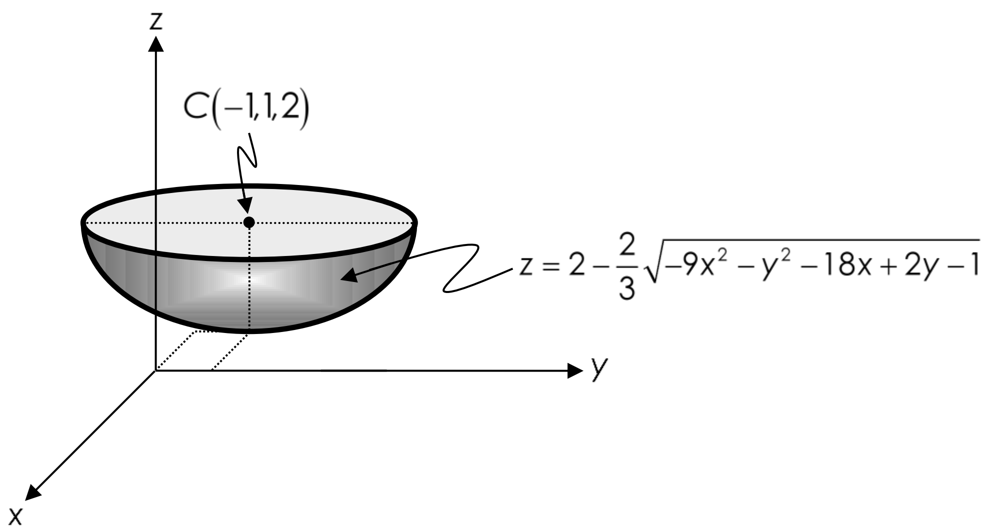
Se trata de un elipsoide y la regla de correspondencia de la función que representa la mitad inferior se obtiene como sigue:

$$\frac{(x+1)^2}{1}+\frac{(y-1)^2}{9}+\frac{(z-2)^2}{4}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(z-2)^2}{4}=1-\frac{(x+1)^2}{1}-\frac{(y-1)^2}{9}$$

$$(z-2)^2=\frac{4\left(9-9x^2-18x-9-y^2+2y-1\right)}{9}$$

$$\therefore \quad z=2-\frac{2}{3}\sqrt{-9x^2-y^2-18x+2y-1}$$

La gráfica de la función escalar es:



El dominio y el recorrido de esa función escalar de variable vectorial son, respectivamente:

$$D_f=\left\{(x,y)\left|\frac{(x+1)^2}{1}+\frac{(y-1)^2}{9}\le 1 \quad ; x,y\in\mathbb{R}\right.\right\} \; ; \; R_f=\{z|0\le z\le 2 \quad ; z\in\mathbb{R}\}$$

Ejemplo. Probar que la siguiente superficie es un cono y considerar la mitad superior como la gráfica de un campo escalar y dar su regla de correspondencia, así como su dominio y su recorrido. Graficar de manera aproximada.

$$4x^2+y^2-4z^2+8x+8z=0$$

Solución.

Se completan trinomios cuadrados perfectos y,

$$4\left(x^2+2x+1-1\right)+y^2-4\left(z^2-2z+1-1\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad 4(x+1)^2-4+y^2-4(z-1)^2+4=0$$

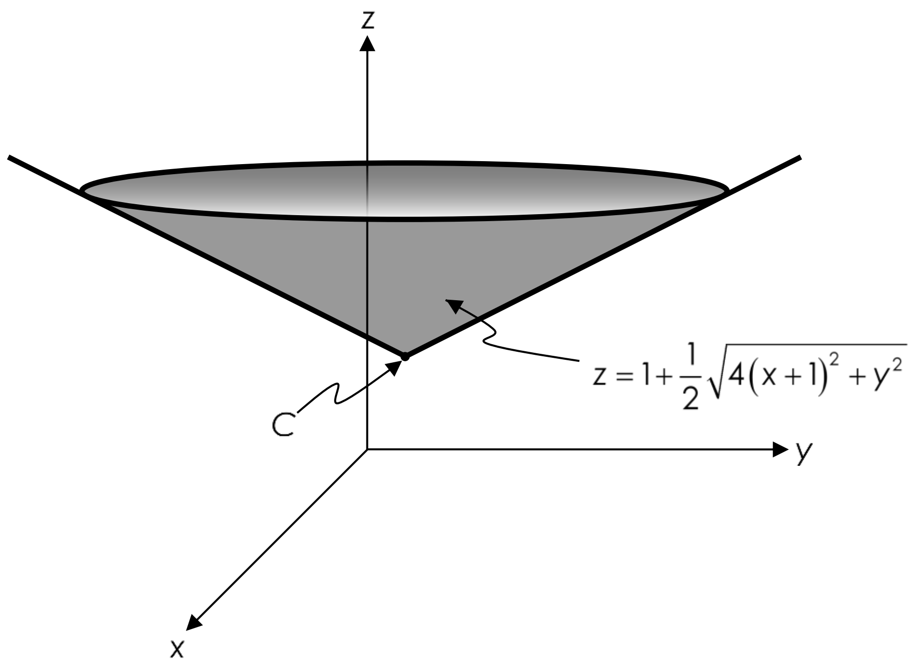
$$\therefore \quad 4(x+1)^2+y^2=4(z-1)^2$$

Se trata de un cono elíptico y para obtener la función escalar de variable vectorial cuya gráfica es su mitad superior, se hace lo siguiente:

$$4(z-1)^2 = 4(x+1)^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad (z-1)^2 = \frac{4(x+1)^2 + y^2}{4}$$

$$\therefore \quad z = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{4(x+1)^2 + y^2}$$

La gráfica aproximada es:



El dominio y el recorrido de esa función escalar de variable vectorial son, respectivamente:

$$D_f = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \quad ; \quad R_f = \{z \mid 1 \le z < \infty \quad ; z \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo. Probar que la superficie de ecuación:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - z + 6 = 0$$

Es un paraboloide circular y como función escalar de variable vectorial, dar su dominio, recorrido y hacer un trazo aproximado de su gráfica:

Solución.
Se completan trinomios cuadrados perfectos y se llega a:

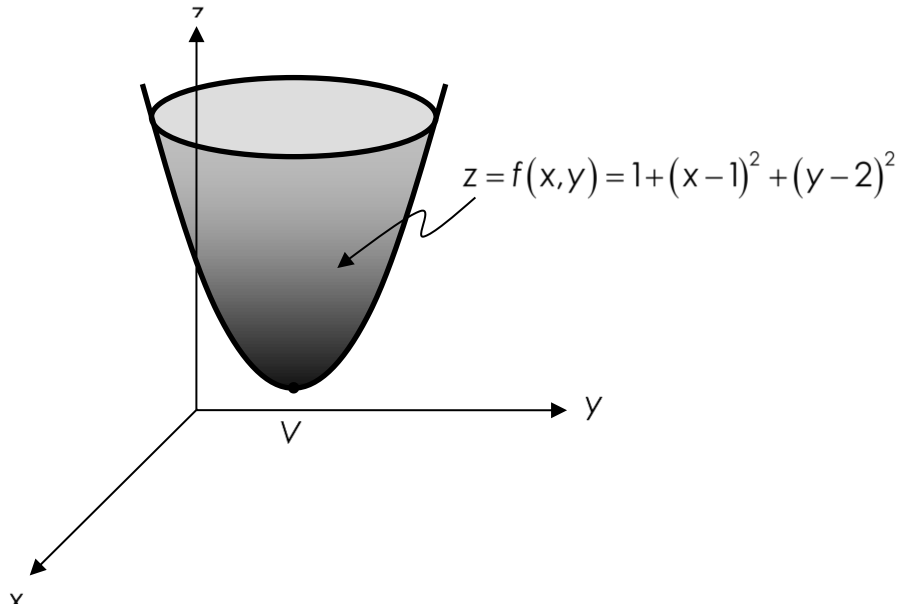
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - z + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 - z + 6 = 0$$

$$\therefore \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = z - 1$$

Se trata de un paraboloide circular. Su regla de correspondencia, su gráfica, dominio y recorrido, son:

$$\therefore \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = z - 1 \quad \Rightarrow \quad z = f(x,y) = 1 + (x-1)^2 + (y-2)^2$$



$$D_f = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}\} \quad ; \quad R_f = \{z | 1 \leq z < \infty \quad ; z \in \mathbb{R}\}$$

FORMULACIÓN DE FUNCIONES

Para formular funciones escalares de variable vectorial, esto es, lograr un modelo matemático que resuelva un problema planteado, se recomienda:

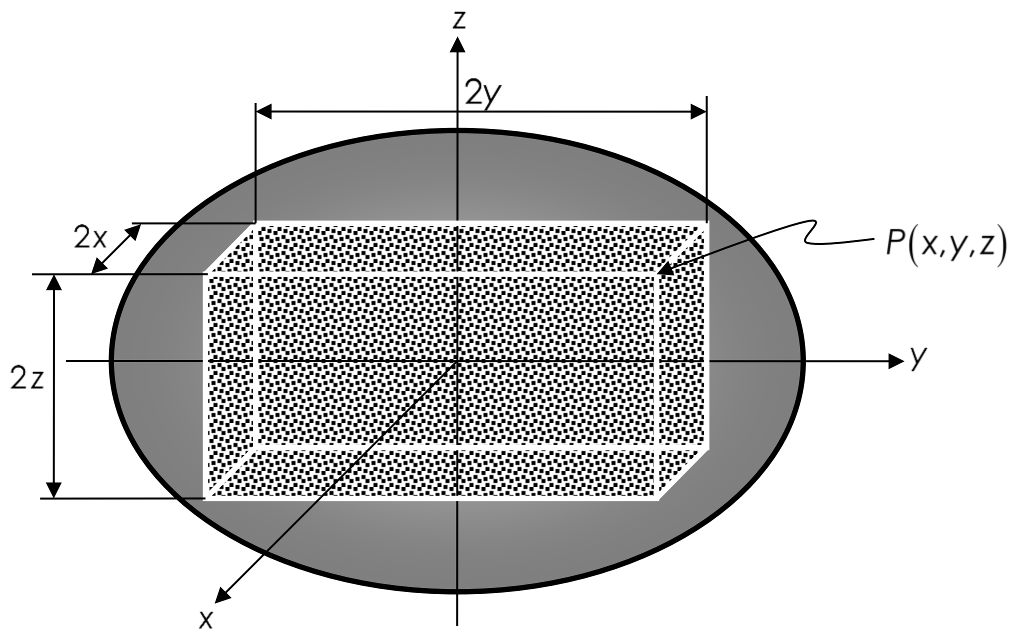
- Leer cuidadosamente el enunciado para identificar las magnitudes constantes y variables y de éstas con cuál se pide el modelo.
- Realizar, cuando esto sea posible, un modelo geométrico en el cual se ubiquen las magnitudes constantes y las variables.
- Construir un modelo matemático preliminar no importando que la función requerida esté en términos de varias variables.
- Establecer ecuaciones auxiliares que relacionen a las variables de las cuales depende la función con objeto de simplificar el modelo preliminar.
- Construir el modelo matemático definitivo.

Ejemplo. Obtener la expresión del volumen de un paralelepípedo rectangular que está inscrito en el elipsoide $36x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 144$, en función únicamente de dos de sus lados.

Solución.

Un modelo geométrico aproximado del problema planteado es:

$$36x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$



El volumen del paralelepípedo está dado por:

$$V=(2x)(2y)(2z) \quad \Rightarrow \quad V=8xyz$$

Pero está en términos de tres variables y, para ponerlo en función únicamente de dos, se utiliza la ecuación del elipsoide. Así,

$$36x^2+9y^2+16z^2=144 \quad \Rightarrow \quad z=\sqrt{\frac{144-36x^2-9y^2}{16}}$$

$$\Rightarrow \quad z=\frac{1}{4}\sqrt{144-36x^2-9y^2}$$

Se sustituye en el modelo matemático preliminar y

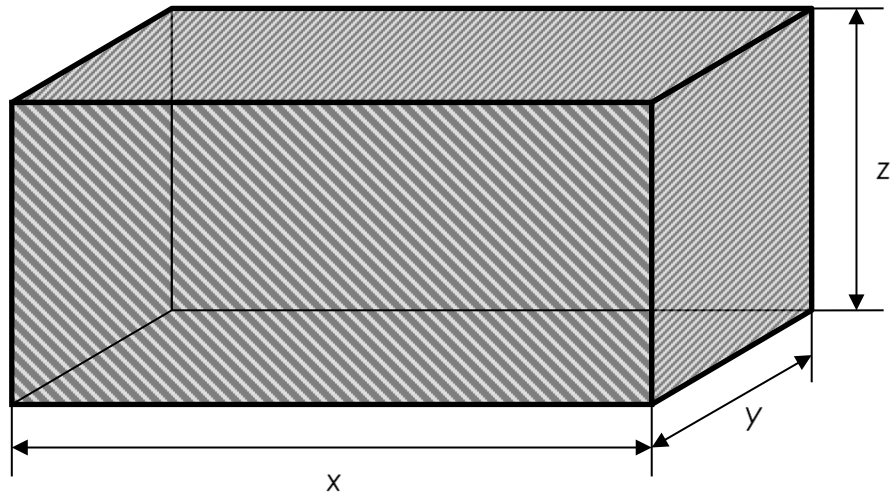
$$V=8xyz \quad \Rightarrow \quad V=8xy\left(\frac{1}{4}\sqrt{144-36x^2-9y^2}\right)$$

$$\therefore \quad V=2xy\sqrt{144-36x^2-9y^2}$$

Ejemplo. El material con que se construye la base y la tapa de un contenedor que tiene la forma de un prisma rectangular (paralelepípedo), tiene un costo de $\$\,300.00\,/\,m^2$ y el de sus lados, de $\$\,275.00\,/\,m^2$. Debe tener un volumen de $72\,m^3$. Expresar el costo total de los materiales con los que se construye el contenedor, en función únicamente de los lados de su base.

Solución.

Se construye un modelo geométrico del contenedor:



Se diseña un modelo matemático preliminar del costo:

$$C = 2(300xy) + 2(275xz) + 2(275yz) \quad \Rightarrow \quad C = 600xy + 550xz + 550yz$$

Como se ve, el costo está en términos de los tres lados y se pide que esté en función de dos. Por ello se utiliza el volumen fijo con objeto de relacionar a las variables. Así,

$$xyz = 72 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{72}{xy}$$

Se sustituye en el modelo preliminar y se llega finalmente al definitivo:

$$C = 600xy + 550xz + 550y\left(\frac{72}{xy}\right) \quad \therefore \quad C = 600xy + 550xz + \frac{39600}{x}$$

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN ESCALAR DE VARIABLE VECTORIAL

Sea $z = f(x,y)$ definida en un dominio D del plano xy. Se desea saber a qué valor, si existe, tiende la función, cuando sus variables x y y se aproximan a dos valores x_0 y y_0 del dominio, o cuando la variable vectorial (x,y) se aproxima al vector (x_0,y_0).

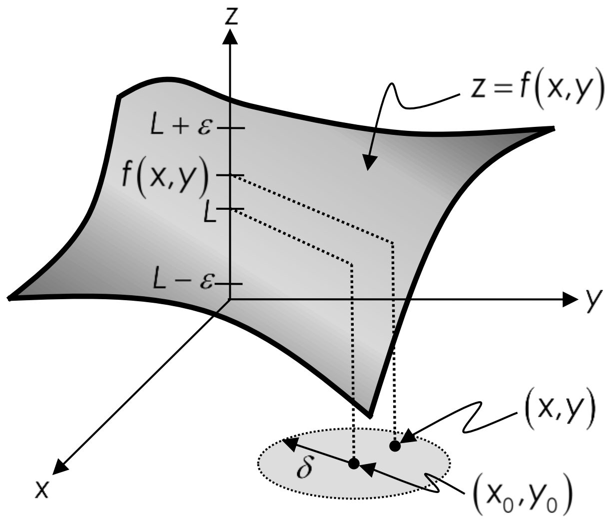
Definición. Sea $z = f(x,y)$ definida en un entorno del punto (x_0,y_0) de su dominio y que no necesariamente contiene al punto (x_0,y_0), por lo que podría ser un entorno reducido. Se dice que el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a (x_0,y_0) es "L" y se denota como:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = L \quad \text{o, bien,} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ y tan pequeño como se desee, existe otro número $\delta > 0$ tal que: $\left|f(x,y) - L\right| < \varepsilon$ para todo $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ en el interior del círculo con centro en (x_0,y_0) y radio δ.

Es decir, para todo (x,y) en un entorno reducido circular de radio δ. Esto se representa de manera analítica y gráfica como:

$$\left|(x,y) - (x_0,y_0)\right| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|f(x,y) - L\right| < \varepsilon$$



Teorema (propiedades). Sean las funciones $f_1(\bar{v}), f_2(\bar{v}), \ldots, f_n(\bar{v})$ y sea un entorno reducido del punto $\bar{v}_0$ contenido en los dominios de dichas funciones. Se cumple que:

i) Si existe el límite $\lim\limits_{\bar{v}\to\bar{v}_0} f_1(\bar{v})$ entonces éste es único.

ii) El límite de toda función constante $f(\bar{v}) = C$ con $C = ctte$, es el propio valor constante, esto es, $\lim\limits_{\bar{v}\to\bar{v}_0} f(\bar{v}) = C$.

iii) Si existen los límites $\lim\limits_{\bar{v}\to\bar{v}_0} f_1(\bar{v}), \ \ldots \ , \lim\limits_{\bar{v}\to\bar{v}_0} f_n(\bar{v})$ entonces se cumple que:

$$\lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0}\left[f_1(\bar{v}) + \cdots + f_n(\bar{v})\right] = \lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0} f_1(\bar{v}) + \cdots + \lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0} f_n(\bar{v})$$

iv) Si existen los límites $\lim\limits_{\bar{v}\to\bar{v}_0} f_1(\bar{v}), \ \ldots \ , \lim\limits_{\bar{v}\to\bar{v}_0} f_n(\bar{v})$ entonces se cumple que:

$$\lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0}\left[f_1(\bar{v}) \cdots f_n(\bar{v})\right] = \lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0} f_1(\bar{v}) \cdots \lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0} f_n(\bar{v})$$

v) Si existen los límites $\lim\limits_{\bar{v}\to\bar{v}_0} f_1(\bar{v})$ *y* $\lim\limits_{\bar{v}\to\bar{v}_0} f_2(\bar{v})$ entonces se cumple que:

$$\lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0}\frac{f_1(\bar{v})}{f_2(\bar{v})}=\frac{\lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0}f_1(\bar{v})}{\lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0}f_2(\bar{v})}$$

siempre que el límite del denominador no sea cero.

vi) Sea $f_1(\bar{v})=f_2(\bar{v})$; si existe el límite $\lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0}f_1(\bar{v})$, entonces también existe el límite $\lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0}f_2(\bar{v})$.

vii) Si $f_1(\bar{v})\geq 0$ y $f_2(\bar{v})\leq 0$ entonces se cumple que:

$$\lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0}f_1(\bar{v})\geq 0 \quad y \quad \lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0}f_2(\bar{v})\leq 0$$

viii) Si $f_1(\bar{v})\geq f_2(\bar{v})$ y existen los límites $\lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0}f_1(\bar{v})$ y $\lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0}f_2(\bar{v})$, entonces se cumple que $\lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0}f_1(\bar{v})\geq \lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0}f_2(\bar{v})$.

ix) Si $f_1(\bar{v})\leq f_2(\bar{v})\leq f_3(\bar{v})$ y los límites de f_1 y f_3 existen y son iguales a un determinado valor "a", es decir, $\lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0}f_1(\bar{v})=a=\lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0}f_3(\bar{v})$, entonces se cumple que $\lim_{\bar{v}\to\bar{v}_0}f_3(\bar{v})=a$.

Para las funciones escalares de variable vectorial se harán consideraciones semejantes a las hechas con funciones $y=f(x)$ tomando en cuenta que el dominio ya no es un conjunto de valores de "x", sino que puede tratarse de una región en el plano "xy" para $z=f(x,y)$ o bien de un volumen para $w=f(x,y,z)$.

Límites reiterados de una función escalar de variable vectorial.

Es un proceso que consiste en evaluar por separado a la función para cada uno de los límites de las variables independientes. Considérese el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Calcular el límite de la función $z=6xy-2y^2$ cuando $(x,y)\to(2,1)$ utilizando los límites reiterados:

Solución.

$$\lim_{y\to 1}\left[\lim_{x\to 2}\left(6xy-2y^2\right)\right]=\lim_{y\to 1}\left(12y-2y^2\right)=12-2=10$$

$$\lim_{x\to 2}\left[\lim_{y\to 1}\left(6xy-2y^2\right)\right]=\lim_{x\to 2}\left(6x-2\right)=12-2=10$$

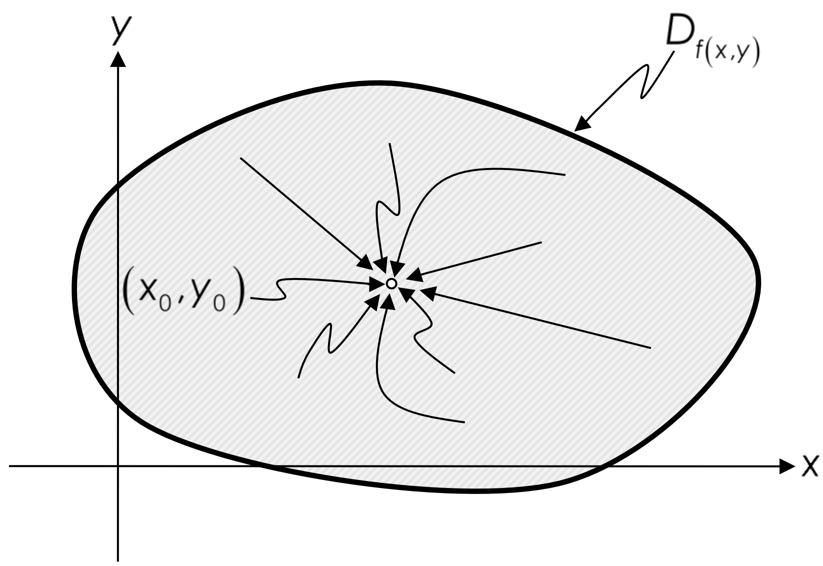
Como se verá después, se puede garantizar que este límite, cuando la variable (x,y) tiende al punto $(2,1)$ es igual a "10".

Teorema. La condición necesaria para la existencia del límite de una función $z=f(x,y)$ en un punto del interior de su dominio está dada por la igualdad de sus límites reiterados; esto es, si se cumple que:

$$\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]$$

En los puntos frontera del dominio de la función esta condición no es necesaria ni suficiente.

Con una variable, la igualdad de los límites laterales prueba la existencia del límite, pero en una función escalar de variable vectorial hay una infinidad de curvas que aproximan a (x,y) al punto (x_0,y_0). Véase la siguiente figura donde se observa claramente la infinidad de caminos para aproximarse al punto (x_0,y_0). Esto hace imposible verificar la existencia del límite mediante la igualdad de su valor en todos los caminos que acceden a (x_0,y_0).



Sólo se puede demostrar la existencia del límite a partir de la definición, proceso que por lo general se complica y que sale de los objetivos de aprendizaje de este tema. Lo que sí resulta evidente es que, al obtener valores diferentes con dos trayectorias, el límite de la función no existe.

Teorema. Si dos curvas diferentes del dominio de la función producen dos diferentes valores del límite, siempre y cuando dichos límites existan, entonces el límite de la función en el punto en estudio no existe.

Ejemplo. Elegir tres trayectorias para verificar que el siguiente límite de la función dada no existe:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{6x^2-2y^2}{x^2+y^2}$$

Solución.
Para aproximarse al origen se escogen tres trayectorias que pasen por él y se evalúa el límite de la función dada que, como se observa, es una función algebraica. Así, para una familia de rectas que pasan por el origen: $y = mx \quad m \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{6x^2-2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^2-2m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6-2m^2}{1+m^2} = \frac{6-2m^2}{1+m^2}$$

Al darle tres valores a "m" se obtendrían diferentes valores del límite, por lo que éste no existe para la función escalar dada. Como ilustración se supondrán otras trayectorias:

Parábola $y = x^2$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{6x^2-2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^2-2x^4}{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{6-2x^2}{1+x^2} = \frac{6}{1} = 6$$

Recta $y = x$ (función identidad)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{6x^2-2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^2-2x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{2}\right) = 2$$

Resulta evidente entonces que el límite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{6x^2-2y^2}{x^2+y^2}$ no existe.

Para facilitar la verificación de la existencia del límite de una función vectorial de variable escalar, se estudiará su continuidad.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN ESCALAR DE VARIABLE VECTORIAL

La continuidad en este caso implica también el cumplimiento de las tres condiciones de continuidad. Se enunciarán algunos teoremas de continuidad, muy útiles al verificar la existencia del límite y entonces poder calcular su valor numérico.

Definición. Una función $f\left(\bar{v}\right)$ es continua en un punto $\bar{v}_0$ de su dominio, si se cumplen las siguientes condiciones:

i) Que la función $f\left(\bar{v}_0\right)$ exista.

ii) Que el límite $\lim\limits_{\bar{v}\to \bar{v}_0} f\left(\bar{v}\right)$ exista.

iii) Que $f\left(\bar{v}_0\right)=\lim\limits_{\bar{v}\to\bar{v}_0} f\left(\bar{v}\right)$

Para el caso de $z=f\left(x,y\right)$, se dice que es continua en $\left(x_0,y_0\right)$ si se cumple que $f\left(x_0,y_0\right)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(x,y\right)$, que es equivalente a la tercera condición de continuidad.

Teoremas de continuidad

Teorema. Si dos funciones $f\left(\bar{v}\right)$ y $g\left(\bar{v}\right)$ son continuas en un punto $\bar{v}_0$ de la intersección de sus dominios, entonces su suma, diferencia, producto y cociente (sin el denominador nulo) son funciones continuas en dicho punto.

Teorema. Las funciones polinomiales son continuas para todo valor real de sus variables independientes.

Teorema. Las funciones algebraicas y trascendentes son continuas en sus respectivos dominios.

Como la continuidad implica necesariamente la existencia del límite, se pueden aprovechar los teoremas anteriores para verificar la existencia de los límites de muchas funciones escalares de variable vectorial. Por lo que, si la función es continua en el punto considerado al que tiende la variable vectorial, entonces bastará con sustituir las variables independientes por los valores a los que tienden y se obtendrá así el valor del límite de la función escalar de variable vectorial. Los siguientes ejercicios ilustran con claridad lo aquí expresado:

Ejemplo. Calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to -2}}\left(2x^2y-8xy+xy^3\right)$$

Solución.
La función dada es polinomial por lo que es continua en todos los reales, por lo que es continua en el punto en estudio, lo que implica que en él existe el límite. Luego,

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to -2}}\left(2x^2y-8xy+xy^3\right)=2\left(3\right)^2\left(-2\right)-8\left(3\right)\left(-2\right)+\left(3\right)\left(-2\right)^3$$

$$\therefore\quad \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -2}}\left(2x^2y-8xy+xy^3\right)=-12$$

Ejemplo. Calcular el valor del límite de la función:

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ y \to 4}} \sqrt{6 - x - y}$$

Solución.

Es una función algebraica y se obtiene su dominio para ver si el punto $(-2,4)$ está contenido en él, lo que evidenciaría la existencia del límite.

$$6 - x - y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -x - y \geq -6 \quad \Rightarrow \quad x + y \leq 6$$

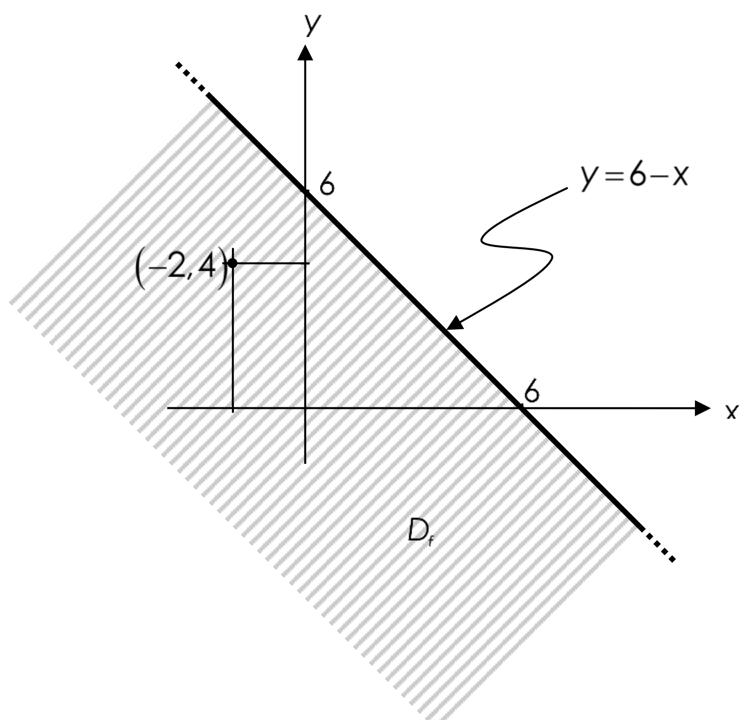
Por lo que el dominio de la función es:

$D_f = \{(x,y) \mid x + y \leq 6\,;\, x,y \in \mathbb{R}\}$

Para $(-2,4)$ se tiene que $-2 + 4 = 2 < 6$, por lo que $(-2,4) \in D_f$, luego el límite existe y es igual a:

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ y \to 4}} \sqrt{6 - x - y} = \sqrt{6 - (-2) - 4} = \sqrt{4} = 2$$

Si se grafica el dominio de la función se puede ver claramente cómo el punto pertenece a él por lo que el límite existe y su valor es 2 .



Ejemplo. Calcular el valor del siguiente límite

$$\lim_{(x,y) \to (3,1)} \sqrt{144 - 9x^2 - 16y^2}$$

Solución.

Se obtiene el dominio de esta función algebraica y

$$144 - 9x^2 - 16y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -9x^2 - 16y^2 \geq -144 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 + 16y^2 \leq 144$$

$$\frac{x^2}{\frac{144}{9}}+\frac{y^2}{\frac{144}{16}}\le 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\le 1$$

Por lo tanto

$$D_f=\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\le 1;\, x,y\in\mathbb{R}\right.\right\}$$

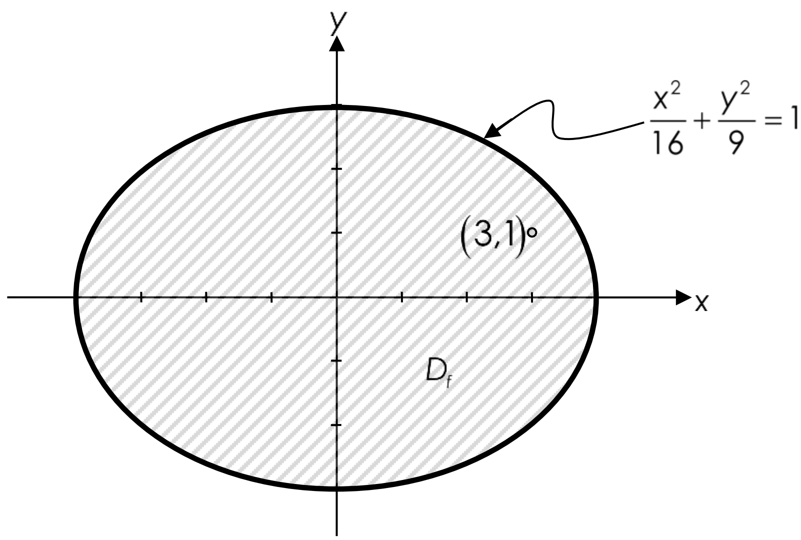
Se trata de una elipse y de los puntos interiores a ella. Si se sustituye en su ecuación el punto considerado, se tiene:

$$\frac{(3)^2}{16}+\frac{(1)^2}{9}=\frac{9}{16}+\frac{1}{9}=\frac{81+16}{144}=\frac{97}{144}\le 1$$

Luego el límite existe y es igual a:

$$\therefore \quad \lim_{(x,y)\to(3,1)}\sqrt{144-9x^2-16y^2}=\sqrt{144-9(3)^2-16(1)^2}=\sqrt{47}$$

Gráficamente también se puede ver cómo el punto dado pertenece al dominio de la función.



Ejemplo. Calcular el valor del siguiente límite

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\frac{x^3-8y^3}{x^3-2x^2y}$$

Solución.
Con una sustitución directa se obtiene:

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\frac{x^3-8y^3}{x^3-2x^2y}=\frac{(2)^3-8(1)^3}{(2)^3-2(2)^2(1)}=\frac{0}{0} \quad (\text{indeterminado})$$

Si se factorizan numerador y denominador se llega a:

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\frac{x^3-8y^3}{x^3-2x^2y}=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\frac{(x-2y)\left(x^2+2xy+4y^2\right)}{x^2(x-2y)}=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\frac{x^2+2xy+4y^2}{x^2}$$

El dominio de la función obtenida es:

$$D_f=\left\{(x,y)\,\middle|\,x\neq 0\,;\,x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

Es evidente que el punto dado pertenece al dominio. Luego el límite es:

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\frac{x^2+2xy+4y^2}{x^2}=\frac{(2)^2+2(2)(1)+4(1)^2}{(2)^2}=\frac{12}{4}=3$$

$$\therefore\quad \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\frac{x^3-8y^3}{x^3-2x^2y}=3$$

Ejemplo. Calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

Solución.
Al obtener el valor de los límites reiterados, se llega a:

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^4}=\lim_{y\to 0}(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=\lim_{x\to 0}(0)=0$$

Hasta aquí podría pensarse que el límite existe. Sin embargo, si se escoge por ejemplo la trayectoria $y^2=x$, se tendrá:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

resultado que hace ver la no existencia del límite, lo que demuestra la no suficiencia del teorema correspondiente. Ahora se presenta el estudio de la continuidad en un punto para ilustrar este concepto

Ejemplo. Investigar si la siguiente función es continua en el punto $(3,2)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}3x^2-4y^2 & \text{si}\quad (x,y)\neq(3,2)\\ 15 & \text{si}\quad (x,y)=(3,2)\end{cases}$$

Solución.
Se analizan las condiciones de continuidad en el punto $(3,2)$ y se tiene:

$$i)\quad f(3,2)=15 \quad ; \quad ii)\quad \lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}} f(x,y)=11 \quad ; \quad f(3,2)\neq \lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}} f(x,y)$$

y por lo tanto la función no es continua en $(3,2)$.

Se estudiará el caso en el que una función escalar no es continua a lo largo de una recta y no sólo en puntos aislados.

Ejemplo. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{y} & si \quad y\neq 0\\ 0 & si \quad y=0\end{cases}$$

Solución.

Para el punto $(a,0)$; $a\in\mathbb{R}$ se tiene que:

$$i)\quad f(a,0)=0 \quad ; \quad ii)\quad \lim_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} f(x,y) \text{ no existe}$$

Por lo tanto, la función no es continua en $(a,0)$.

Para el punto (a,b) ; $b\neq 0$ se tiene que:

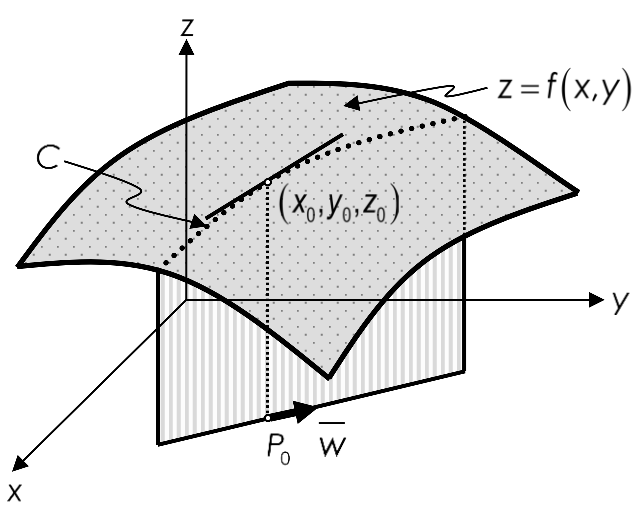
$$i)\quad f(a,b)=\frac{a}{b} \quad ; \quad ii)\quad \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=\frac{a}{b} \quad ; \quad iii)\quad f(a,b)=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$$

$$\therefore \quad f(x,y) \quad \text{es continua en } (a,b) \quad ; \quad b\neq 0$$

Por lo tanto, la función no es continua a lo largo de la recta $y=0$

CONCEPTO DE DERIVADA DIRECCIONAL

Considérese la siguiente figura y sean: $z=f(x,y)$ con dominio "D"; un punto $P_0(x_0,y_0)\in D$; y un vector unitario $\overline{w}$ en el plano xy y cuyo origen es P_0.

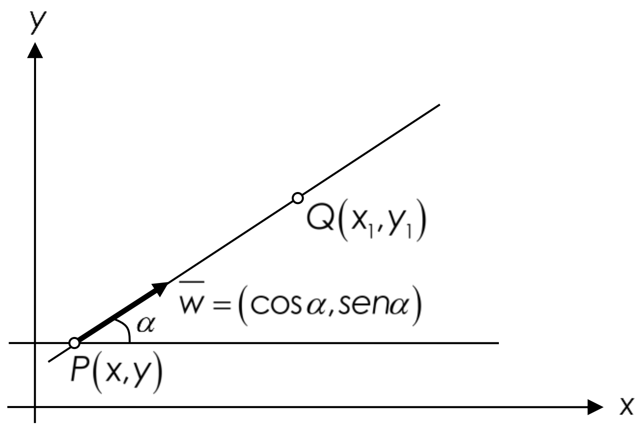


Se quiere determinar la rapidez de variación de "z" en el punto (x_0, y_0, z_0) y en la dirección de $\overline{w}$, es decir, la razón de cambio de la función $z = f(x,y)$ en el punto P_0 y en la dirección $\overline{w}$.

Definición. A la razón de cambio de la función escalar $z = f(x,y)$, en el punto P_0 y en la dirección $\overline{w}$ se le llama derivada direccional de la función $z = f(x,y)$ en P_0 y en la dirección $\overline{w}$.

Se puede afirmar que la derivada direccional es la pendiente de la recta tangente a la curva "C" en el punto (x_0, y_0, z_0) siempre que la dirección positiva a lo largo de "C" es escogida en la dirección del vector $\overline{w}$.

Se definirá a la derivada direccional en términos de límites.



De acuerdo con la geometría analítica, las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a los puntos P y Q son:

$$x_1 = x + s\cos\alpha \qquad y \qquad y_1 = y + s\, sen\alpha$$

por lo que todo punto Q de la recta tiene como coordenadas:

$$Q(x + s\cos\alpha\ ,\ y + s\, sen\alpha)$$

Si en las coordenadas de este punto se sustituyen $\Delta x = s\cos\alpha$ y $\Delta y = s\, sen\alpha$, se tiene que $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ y el incremento de la función $z = f(x,y)$ puede expresarse como:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y) \ \Rightarrow\ \Delta z = f(x + s\cos\alpha, y + s\, sen\alpha) - f(x,y)$$

Por otro lado, la distancia $\overline{PQ}$ está dada por:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} = \sqrt{(x + s\cos\alpha - x)^2 + (y + s\, sen\alpha - y)^2}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{s^2\cos^2\alpha + s^2\, sen^2\alpha} = s$$

Ahora se construye el cociente $\frac{\Delta z}{\overline{\overline{PQ}}}$ y se calcula su límite cuando $\overline{PQ} \to 0$ y se tendrá la variación de la función $z = f(x,y)$ en la dirección del vector $\overline{w}$, lo que equivale a la derivada direccional.

Definición.

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(x+s\cos\alpha, y+s\,sen\alpha)-f(x,y)}{s} = \text{derivada direccional}$$

Notación. Para denotar a la derivada direccional se pueden utilizar los siguientes símbolos:

$$D_w f(x,y) \quad ; \quad D_w z \quad ; \quad \frac{dz}{dw} \quad ; \quad g'(s) \quad ; \quad f'(s)$$

El primero se usará más. Así, es posible escribir que:

$$D_w f(x,y) = \lim_{s\to 0}\frac{f(x+s\cos\alpha, y+s\,sen\alpha)-f(x,y)}{s}$$

La función f está en términos de s, variable con respecto a la cual se deriva; entonces, para calcular la derivada direccional, bastará con sustituir las ecuaciones paramétricas en la regla de correspondencia $z = f(x,y)$ para llegar a una expresión de la forma $z = G(s)$ para la curva C. Se deriva con respecto al argumento s, se hace $s = 0$ y se obtiene la derivada direccional, esto es: $\frac{dz}{ds} = G'(0)$

Con un ejercicio se ilustrará esto, pero más adelante se verá una forma más sencilla para calcular esta derivada direccional.

Ejemplo. Calcular la derivada direccional de la función

$$z = f(x,y) = \frac{4xy}{x^2+y^2}$$

en el punto $P(2,1)$ y en la dirección $\overline{w} = \frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}$.

Solución.

Como se vio antes, las variables "x" y "y" se pueden expresar como:

$$x = 2 + \frac{3}{5}s \qquad y \qquad y = 1 + \frac{4}{5}s$$

Se sustituyen estos valores en la función y se tendrá a ésta en términos únicamente de la variable "s". Así,

$$z = g(s) = \frac{4\left(2+\frac{3}{5}s\right)\left(1+\frac{4}{5}s\right)}{\left(2+\frac{3}{5}s\right)^2+\left(1+\frac{4}{5}s\right)^2} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{8+\frac{32}{5}s+\frac{12}{5}s+\frac{48}{25}s^2}{4+\frac{12}{5}s+\frac{9}{25}s^2+1+\frac{8}{5}s+\frac{16}{25}s^2}$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{8+\frac{44}{5}s+\frac{48}{25}s^2}{5+\frac{20}{5}s+\frac{25}{25}s^2} \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad z = \frac{8+\frac{44}{5}s+\frac{48}{25}s^2}{5+4s+s^2}$$

Ahora se deriva esta expresión con respecto a $"s"$ y se tiene:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\left(5+4s+s^2\right)\left(\frac{44}{5}+\frac{96}{25}s\right)-\left(8+\frac{44}{5}s+\frac{48}{25}s^2\right)\left(4+2s\right)}{\left(5+4s+s^2\right)^2}$$

De acuerdo con la definición, bastará con hacer cero la variable $"s"$ para obtener la derivada direccional. Luego,

$$\left.\frac{dz}{ds}\right|_{s=0} = D_w f(2,1) = \frac{44-32}{25} \quad \Rightarrow \quad D_w f(2,1) = \frac{12}{25} \quad \therefore \quad D_w f(2,1) = 0.48$$

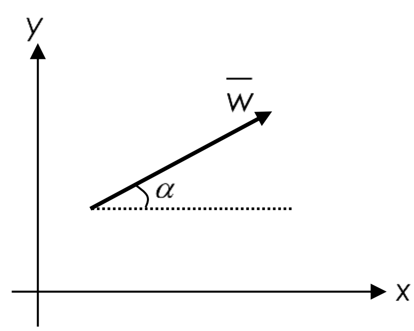
¿Qué quiere decir este resultado? ¿Cómo interpretarlo? “La función (la altura) cambia 0.48 unidades por cada unidad que se recorre en la dirección $\overline{w}$. Si la superficie fuera una loma y un hombre estuviera caminado sobre ella en la dirección $\overline{w}$, subiría $0.48\,m$ por cada metro horizontal que avanzara.

DERIVADAS PARCIALES

La derivada direccional está dada por:

$$D_w f(x,y) = \lim_{s\to 0}\frac{f(x+s\cos\alpha, y+s\,sen\alpha)-f(x,y)}{s}$$

Considérese la dirección de la variación de la función y el ángulo α que forma con el eje $"x"$:



Definición. Si $\alpha = 0$, la dirección es paralela al eje $"x"$ y $"y"$, permanece constante y $"x"$ varía, luego se tiene la derivada parcial de la función con respecto a "x".

$$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad D_w f(x,y) = \lim_{s\to 0} \frac{f(x+s,y) - f(x,y)}{s}$$

$$s = \Delta x \;\Rightarrow\; \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x} = \text{derivada parcial con respecto a "x"}$$

Definición. Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la dirección es paralela al eje "y", "x" permanece constante y "y" varía, luego se tiene la derivada parcial de la función con respecto a "y".

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad D_w f(x,y) = \lim_{s\to 0} \frac{f(x,y+s) - f(x,y)}{s}$$

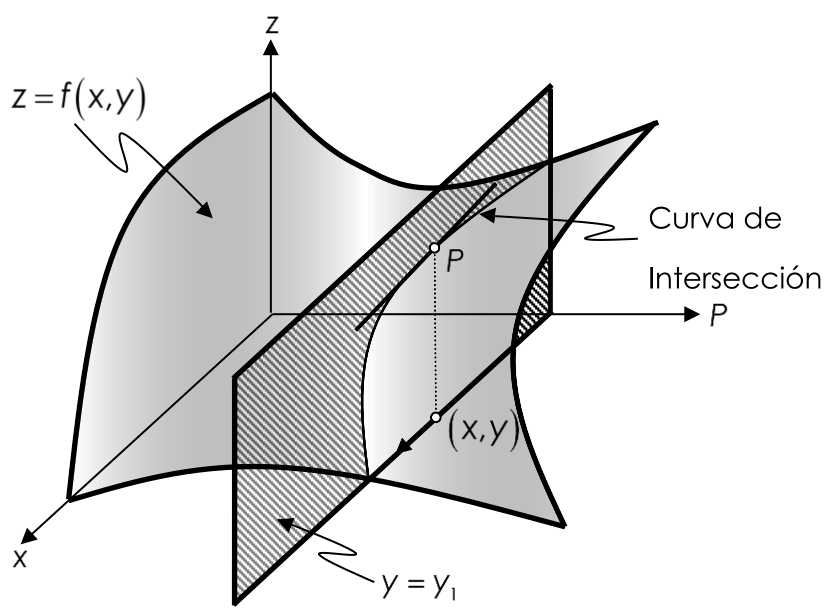
$$s = \Delta y \;\Rightarrow\; \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \text{derivada parcial con respecto a "y"},$$

Notación para las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_x(x,y) = f_x = z_x \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_y(x,y) = f_y = z_y$$

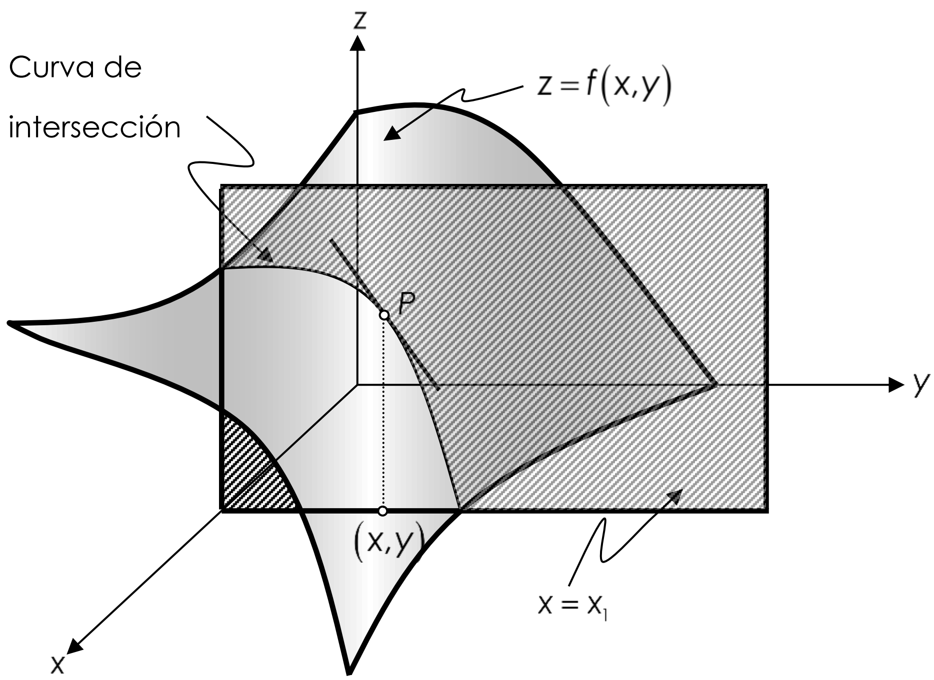
Interpretación geométrica

Derivada parcial de $z = f(x,y)$ con respecto a "x"



La gráfica de $z = f(x,y)$ es cortada por el plano $y = y_1$. Luego la derivada parcial con respecto a "x" es la pendiente de la tangente a la curva de intersección.

Derivada parcial de $z = f(x,y)$ con respecto a "y"



La gráfica de $z = f(x,y)$ es cortada por el plano $x = x_1$. Entonces la derivada parcial con respecto a "y" es la pendiente de la tangente a la curva de intersección.

Para calcular las derivadas parciales se mantiene constante una de las variables independientes y se deriva de manera ordinaria con respecto a la otra.

Ejemplo. Considérese el siguiente campo escalar

$$z = \frac{2x-1}{x+y^3}$$

Obtener sus derivadas parciales en el punto $(2,1)$ e interpretar.

Solución

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+y^3)(2)-(2x-1)(1)}{(x+y^3)^2} \;\Rightarrow\; \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x+2y^3-2x+1}{(x+y^3)^2} \;\Rightarrow\; \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y^3+1}{(x+y^3)^2}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)} = \frac{2(1)^3+1}{\left[(2)+(1)^3\right]^2} = \frac{2+1}{(2+1)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)} \approx 0.33$$

Esto significa que en $(2,1,1)$, en la dirección paralela al eje "x", por cada unidad horizontal, la función crece 0.33 unidades.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\left(x+y^3\right)(0)-(2x-1)\left(3y^2\right)}{\left(x+y^3\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-6xy^2+3y^2}{\left(x+y^3\right)^2}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=\frac{-6(2)(1)^2+3(1)^2}{\left[2+(1)^3\right]}=\frac{-12+3}{(2+1)^2}=\frac{-9}{9}=-1 \quad \therefore \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=-1$$

Esto significa que en $(2,1,1)$, en la dirección paralela al eje "y", por cada unidad horizontal, la función crece una unidad.

Ejemplo. Sea la función escalar de variable vectorial

$$z=x^3+4y^2$$

Calcular el valor de la pendiente de la recta tangente a su curva de intersección con el plano $x=1$ en el punto $P(1,1,5)$.

Solución.
La gráfica de esta función es cortada por el plano $x=1$, entonces esta variable permanece constante, luego lo que se pide calcular es la derivada parcial con respecto a "y". Entonces,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=8y$$

Se evalúa en el punto $(1,1,5)$ y se obtiene:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1,5)}=8(1)=8$$

En $(1,1,5)$ y en dirección paralela al eje "y", la pendiente de la tangente a la curva de intersección con el plano $x=1$ es igual a 8 que equivalen a las unidades que la función crece por cada unidad horizontal de movimiento.

Ejemplo. Sea la función $z=x^3-3x^2y^2+6xy$

Calcular sus derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el punto $(1,3)$.

Solución.

$$z=x^3-3x^2y^2+6xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-6xy^2+6y$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,3)}=3(1)^2-6(1)(3)^2+6(3) \quad \therefore \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,3)}=-33$$

$$z=x^3-3x^2y^2+6xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-6x^2y+6x$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,3)} = -6(1)^2(3)+6(1) \quad \therefore \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,3)} = -12$$

Ejemplo. Dada la siguiente función escalar de variable vectorial:

$$z = \ln\frac{x-y}{x^2+y^2}$$

Calcular sus derivadas parciales.

Solución.

$$z = \ln\frac{x-y}{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\dfrac{\left(x^2+y^2\right)(1)-(x-y)2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}}{\dfrac{x-y}{x^2+y^2}} \;\Rightarrow\; \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2+2xy}{(x-y)\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2-x^2+2xy}{x^3+xy^2-x^2y-y^3}$$

$$z = \ln\frac{x-y}{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\dfrac{\left(x^2+y^2\right)(-1)-(x-y)(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}}{\dfrac{x-y}{x^2+y^2}} \;\Rightarrow\; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2-2xy+2y^2}{(x-y)\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2-x^2-2xy}{x^3+xy^2-x^2y-y^3}$$

Ejemplo. Calcular el valor de $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}$ para la siguiente función escalar de variable vectorial en el punto $P(1,1)$.

$$z = f(x,y) = e^{x^2y}$$

Solución.
Las derivadas parciales, evaluadas en el punto considerado son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xye^{x^2y} \quad \therefore \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P(1,1)} = 2e \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2e^{x^2y} \quad \therefore \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P(1,1)} = e$$

Finalmente se llega a:

$$\left.\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right|_{P(1,1)} = 2e-e \quad \therefore \quad \left.\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right|_{P(1,1)} = e$$

Ejemplo. Calcular las derivadas parciales del campo escalar:

$$f(x,y) = senhxy^2 - \cosh x^2y$$

Solución.
Se obtienen las derivadas parciales utilizando las expresiones conocidas para derivar funciones hiperbólicas. Así,

$$f(x,y) = senhxy^2 - \cosh x^2y \quad \therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y^2\cosh xy^2 - 2xysenhx^2y$$

$$f(x,y) = senhxy^2 - \cosh x^2y \quad \therefore \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\cosh xy^2 - x^2senhx^2y$$

Ejemplo. Obtener las derivadas parciales de la siguiente función escalar:

$$u = f(x,y,z) = 6x^3y^2z^2 - xyz + 5$$

Solución.
Para obtener la derivada con respecto a cada variable, se mantienen constantes las otras dos.

$$u = 6x^3y^2z^2 - xyz + 5 \quad \therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 18x^2y^2z^2 - yz$$

$$u = 6x^3y^2z^2 - xyz + 5 \quad \therefore \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 12x^3yz^2 - xz$$

$$u = 6x^3y^2z^2 - xyz + 5 \quad \therefore \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 12x^3y^2z - xy$$

Ejemplo. Calcular las derivadas de la función $z = f(x,y)$ con respecto a las variables "x" y "y" con derivación implícita:

$$3x^3z^2 - 5y^2z = xyz^3 - 7$$

Solución.

$$3x^3 2z\frac{\partial z}{\partial x} + z^2 9x^2 - 5y^2\frac{\partial z}{\partial x} = xy3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + z^3y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}\left(6x^3z - 5y^2 - 3xyz^2\right) = yz^3 - 9x^2z^2$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz^3 - 9x^2z^2}{6x^3z - 5y^2 - 3xyz^2}$$

$$3x^3 2z\frac{\partial z}{\partial y} - 5y^2\frac{\partial z}{\partial y} - z10y = xy3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + z^3x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y}\left(6x^3z - 5y^2 - 3xyz^2\right) = xz^3 + 10yz$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz^3+10yz}{6x^3z-5y^2-3xyz^2}$$

Ejemplo. La ley de Ohm en electricidad que relaciona voltaje, resistencia e intensidad de corriente es $V=RI$ donde V es el voltaje, R la resistencia e I la intensidad de corriente. Verificar que

$$\frac{\partial V}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial V}-\frac{\partial V}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial V}+I^4\frac{\dfrac{\partial R}{\partial I}}{\dfrac{\partial I}{\partial R}}=V^2$$

Solución.
Se obtienen las derivadas parciales, construyendo las correspondientes funciones escalares con dos variables, y se realizan las sustituciones pedidas:

$$V=RI \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial R}=I\\[2mm] \dfrac{\partial V}{\partial I}=R\end{cases} ;\ R=\frac{V}{I} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial V}=\dfrac{1}{I}\\[2mm] \dfrac{\partial R}{\partial I}=-\dfrac{V}{I^2}\end{cases} ;\ I=\frac{V}{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\dfrac{\partial I}{\partial V}=\dfrac{1}{R}\\[2mm] \dfrac{\partial I}{\partial R}=-\dfrac{V}{R^2}\end{cases}$$

$$I\left(\frac{1}{I}\right)-R\left(\frac{1}{R}\right)+I^4\left(\frac{-\dfrac{V}{I^2}}{-\dfrac{V}{R^2}}\right)=1-1+I^4\left(\frac{R^2}{I^2}\right)=R^2I^2=\left(RI\right)^2=V^2$$

Luego queda verificado.

DERIVADAS PARCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

Se pueden obtener derivadas de órdenes superiores en el mismo dominio de ellas. Sea $z=f\left(x,y\right)$. Entonces,

$$z=f\left(x,y\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}f_x=f_{xx}$$

$$z=f\left(x,y\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}f_y=f_{yy}$$

Si la función es derivada primero con respecto a una variable y después con respecto a la otra, se obtienen las derivadas mixtas que son iguales si se cumplen ciertas condiciones. Estas derivadas mixtas son y se denotan de la manera siguiente:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}f_x=f_{xy} \quad y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}f_y=f_{yx}$$

Algunas derivadas de tercer orden son:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f_{xx} = f_{xxx}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f_{xy} = f_{xyx}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f_{yy} = f_{yyx}$$

Ejemplo. Dada la función $z = f(x,y) = \dfrac{2x^2 - xy + 2y^2}{x - y}$, calcular sus derivadas parciales de primero y segundo orden incluyendo las derivadas mixtas

Solución.
Las primeras derivadas son:

$$z = f(x,y) = \frac{2x^2 - xy + 2y^2}{x - y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x-y)(4x-y) - (2x^2 - xy + 2y^2)(1)}{(x-y)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x^2 - xy - 4xy + y^2 - 2x^2 + xy - 2y^2}{(x-y)^2} \quad \therefore \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x^2 - 4xy - y^2}{x^2 - 2xy + y^2}$$

$$z = f(x,y) = \frac{2x^2 - xy + 2y^2}{x - y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x-y)(-x+4y) - (2x^2 - xy + 2y^2)(-1)}{(x-y)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2 + 4xy + xy - 4y^2 + 2x^2 - xy + 2y^2}{(x-y)^2} \quad \therefore \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2 + 4xy - 2y^2}{x^2 - 2xy + y^2}$$

Las segundas derivadas parciales, y las mixtas son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x^2 - 4xy - y^2}{x^2 - 2xy + y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{(x^2 - 2xy + y^2)(4x - 4y) - (2x^2 - 4xy - y^2)(2x - 2y)}{(x^2 - 2xy + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{4x^3 - 4x^2y - 8x^2y + 4xy^2 + 4xy^2 - 4y^3 - 4x^3 + 4x^2y + 8x^2y - 8xy^2 + 2xy^2 - 2y^3}{(x^2 - 2xy + y^2)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2xy^2 - 6y^3}{(x^2 - 2xy + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2 + 4xy - 2y^2}{x^2 - 2xy + y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(x^2 - 2xy + y^2)(4x - 4y) - (x^2 + 4xy - 2y^2)(-2x + 2y)}{(x^2 - 2xy + y^2)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{6x^3 - 6x^2y}{(x^2 - 2xy + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x^2-4xy-y^2}{x^2-2xy+y^2}\;\Rightarrow\;\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\left(x^2-2xy+y^2\right)\left(-4x-2y\right)-\left(2x^2-4xy-y^2\right)\left(-2x+2y\right)}{\left(x^2-2xy+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{-4x^3-2x^2y+8x^2y+4xy^2-4xy^2-2y^3+4x^3-4x^2y-8x^2y+8xy^2-2xy^2+2y^3}{\left(x^2-2xy+y^2\right)^2}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{-6x^2y+6xy^2}{\left(x^2-2xy+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^2+4xy-2y^2}{x^2-2xy+y^2}\;\Rightarrow\;\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\left(x^2-2xy+y^2\right)\left(2x+4y\right)-\left(x^2+4xy-2y^2\right)\left(2x-2y\right)}{\left(x^2-2xy+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{2x^3+4x^2y-4x^2y-8xy^2+2xy^2+4y^3-2x^3+2x^2y-8x^2y+8xy^2+4xy^2-4y^3}{\left(x^2-2xy+y^2\right)^2}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{-6x^2y+6xy^2}{\left(x^2-2xy+y^2\right)^2}$$

Como se observa, las derivadas mixtas son iguales. Se enunciará el teorema al respecto.

Teorema de Schwarz. Sea $z=f\left(x,y\right);\quad z\neq 0$ un campo escalar con dos variables independientes tal que sus derivadas parciales mixtas existen en una vecindad del punto $\left(x_0,y_0\right)$ y son continuas en él. Entonces se cumple que las derivadas mixtas son iguales, esto es:

$$f_{xy}\left(x_0,y_0\right)=f_{yx}\left(x_0,y_0\right)$$

Ejemplo. Considérese la siguiente función escalar de dos variables independientes

$$z=f\left(x,y\right)=e^{2x}\cos 3y\,.$$

Verificar que se cumple el teorema de Schwarz para $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$.

Solución.
Se obtienen las primeras derivadas parciales y se tiene que:

$$z=e^{2x}\cos 3y\quad\Rightarrow\quad z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x}\cos 3y$$

$$z=e^{2x}\cos 3y\quad\Rightarrow\quad z_y=\frac{\partial z}{\partial y}=-3e^{2x}sen3y$$

Y las derivadas parciales de segundo orden mixtas son:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 3y \quad \Rightarrow \quad z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -6e^{2x} sen3y$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -3e^{2x} sen3y \quad \Rightarrow \quad z_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6e^{2x} sen3y$$

$$\therefore \quad z_{xy} = z_{yx} \quad \forall\, \mathbb{R}$$

Ejemplo. Comprobar que la función dada satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales de Laplace $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \right)$ e investigar si se cumple el teorema de Schwarz.

$$z = f(x,y) = ang\tan\frac{x}{y}$$

Solución.
Se calculan las segundas derivadas parciales y,

$$z = f(x,y) = ang\tan\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{\frac{x^2}{y^2} + 1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} \quad \therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\left(x^2 + y^2\right)(0) - y(2x)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$z = f(x,y) = ang\tan\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{x^2}{y^2} + 1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} \quad \therefore \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\left(x^2 + y^2\right)(0) - x(2y)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

Se sustituyen los resultados obtenidos se ve que se satisface:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \quad \therefore \quad \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0$$

Se calculan las derivadas mixtas y,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{\left(x^2+y^2\right)(1)-y(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\frac{\left(x^2+y^2\right)(1)-x(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Como $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, se cumple el teorema de Schwarz.

VECTOR NORMAL A UNA SUPERFICIE

Sea la superficie $z=x^3-2x^2y+4y^2$ y $P(3,2,7)$ un punto de ella. Dos vectores tangentes a ella se podrían obtener mediante las derivadas parciales, de la siguiente forma:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-4xy \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3,2)}=3(3)^2-4(3)(2) \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3,2)}=3$$

Este valor es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie con el plano $y=2$, por lo que el vector paralelo a esa recta tangente es $\overline{v}=(1,0,3)$.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2x^2+8y \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(3,2)}=-2(3)^2+8(2) \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(3,2)}=-2$$

que es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie con el plano $x=3$, y el vector paralelo a esa recta de intersección está dado por $\overline{w}=(0,1,-2)$. Si se realiza el producto cruz de los dos vectores obtenidos, se tendrá un vector perpendicular a ambos y por lo tanto perpendicular o normal a la superficie. Así,

$$\begin{cases} \overline{v}=(1,0,3) \\ \overline{w}=(0,1,-2) \end{cases} ; \quad \overline{N}=\overline{v}\times\overline{w}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(0-3)\hat{i}-(-2-0)\hat{j}+(1-0)\hat{k}$$

$$\therefore \quad \overline{N} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

Si se toma en cuenta a la función $F = z - f(x,y) = 0$ como una función escalar de tres variables independientes y se calculan sus derivadas parciales con respecto a x, y, z se obtiene:

$$F = z - x^3 + 2x^2y - 4y^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3x^2 + 4xy \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(3,2,7)} = -3(3)^2 + 4(3)(2) \quad \therefore \quad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(3,2,7)} = -3$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2 - 8y \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(3,2,7)} = 2(3)^2 - 8(2) \quad \therefore \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(3,2,7)} = 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 \quad \therefore \quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(3,2,7)} = 1$$

Estos resultados llevan a considerar que para obtener un vector normal a una superficie $z = f(x,y)$ resulta sencillo hacerlo a través de las derivadas parciales de la función definida por $F = z - f(x,y) = 0$. Para obtener el vector normal a una superficie es conveniente utilizar un operador vectorial que se define como sigue:

Definición. Se llama "vector nabla" a un vector operador que actúa sobre un campo escalar con dos variables independientes y que se denota como:

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

Al aplicarlo a $z = f(x,y)$, expresada como $F = z - f(x,y) = 0$, da como resultado un vector normal a la superficie considerada.

¿Qué sucede geométricamente al aplicar el operador nabla a $F = z - f(x,y) = 0$?

Si se tiene la función $w = f(x,y,z)$, es una "hipersuperficie", no tiene representación gráfica, pero si se hace $w = 0$, se tiene una superficie de nivel de la hipersuperficie. Al aplicarle a esta el operador nabla, se obtiene un vector normal a ella que se expresa como:

$$\overline{w} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P \hat{i} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P \hat{j} + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P \hat{k}$$

Y si se aplica nabla como

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j}$$

a una función $z=f(x,y)$, se obtiene un vector normal, es decir, perpendicular, a la curva de nivel de la superficie $z=f(x,y)$ en una determinada cota correspondiente al punto en estudio.

Ejemplo. Obtener un vector normal a la superficie $z=x^2+y^2$ en el punto $P(1,1,2)$. Calcular el vector perpendicular a la curva de nivel correspondiente a $z=2$ en el mismo punto considerado.

Solución.
Es un paraboloide circular y las curvas de nivel para valores de "z" son circunferencias en planos paralelos al xy, con centro en el eje "z" y que aumentan su radio conforme la cota crece. La ecuación dada, expresada como $w=f(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$ es una superficie de nivel de la hipersuperficie $w=f(x,y,z)=x^2+y^2-z$. Si se aplica el operador nabla y se sustituye el punto $P(1,1,2)$ se obtendrá el vector normal a la superficie.

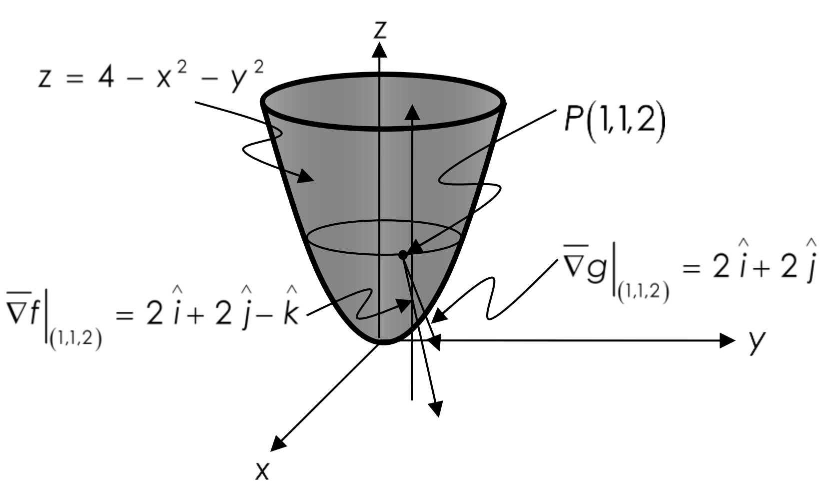
$$\overline{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \overline{\nabla}f=2x\hat{i}+2y\hat{j}-\hat{k} \quad \therefore \quad \overline{\nabla}f\Big|_{P(1,1,2)}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$$

$$\overline{\nabla}f\Big|_{P(1,1,2)}=(2,2,-1)$$

Si se aplica nabla a $z=x^2+y^2$ y se sustituye el punto $P(1,1,2)$ se tendrá un vector normal a la curva de nivel $g(x,y)=x^2+y^2=0$.

$$\overline{\nabla}g=\frac{\partial g}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial g}{\partial y}\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \overline{\nabla}g=2x\hat{i}+2y\hat{j} \quad \therefore \quad \overline{\nabla}g\Big|_{P(1,1,2)}=2\hat{i}+2\hat{j}$$

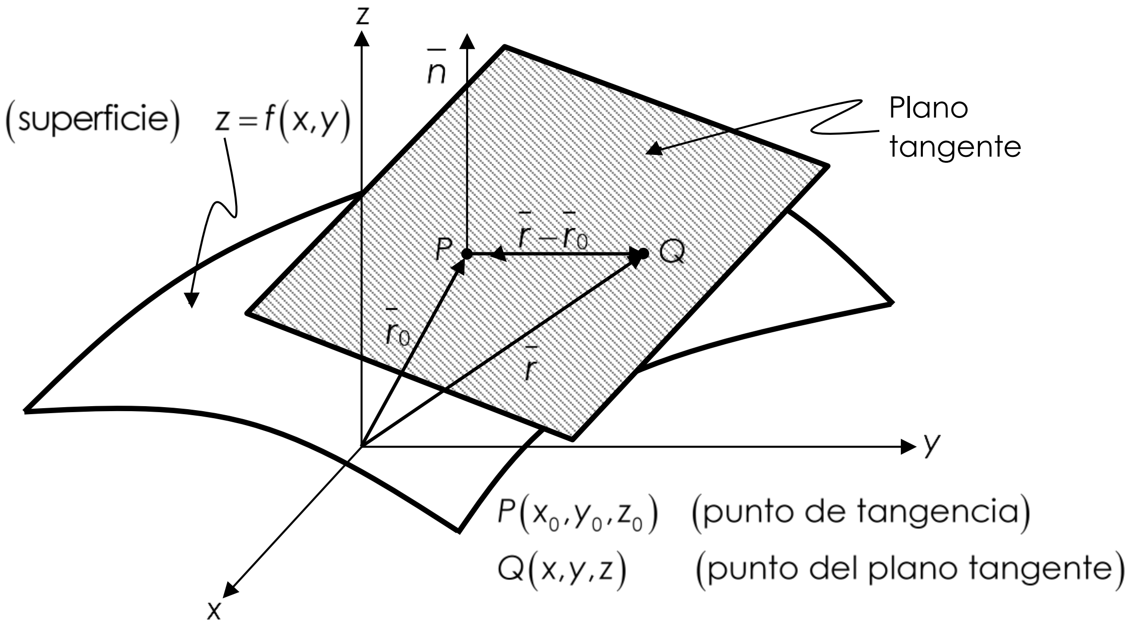
Una gráfica de la superficie con estos dos vectores, uno perpendicular a ella y otro a su curva de nivel en $z=2$, se muestra a continuación:



PLANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE

Sea la superficie de la gráfica siguiente cuya ecuación es $z = f(x,y)$.

Se desea obtener la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$. Se utilizará un punto $Q(x, y, z)$ del plano, los vectores de posición de P y Q y el vector $\overline{n}$ normal a la superficie en el punto P de tangencia del plano y la superficie. Se definen en la gráfica los vectores de posición de los puntos y el vector diferencia entre ellos.



Es evidente que el vector $\overline{n}$, normal a la superficie, también lo es al plano tangente a ella, luego es perpendicular al vector diferencia entre P y Q que también pertenece al plano. De acuerdo con el álgebra vectorial, es posible escribir que:

$$\overline{n} \cdot \left(\overline{r} - \overline{r}_0 \right) = 0$$

Y esta ecuación, condición de perpendicularidad, define la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto P. Si se hacen las sustituciones correspondientes, utilizando lo obtenido anteriormente para el vector normal, así como las componentes del vector diferencia, se llega a:

$$\overline{n} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P \hat{i} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P \hat{j} + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P \hat{k}$$

$$\begin{cases} \overline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ \overline{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k} \end{cases} \Rightarrow \quad \overline{r} - \overline{r}_0 = (x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k}$$

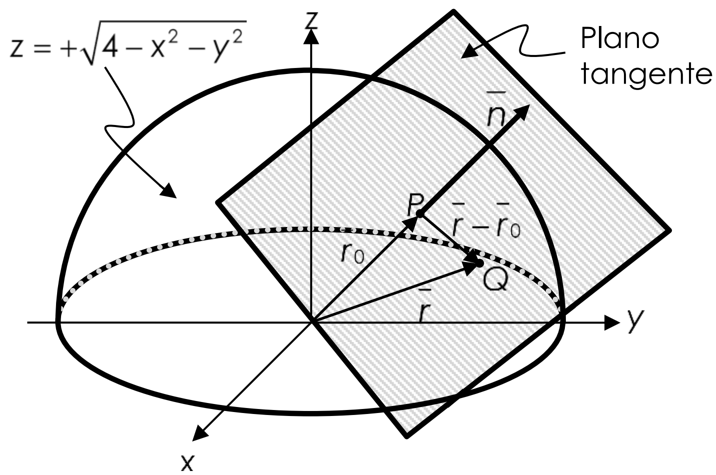
$$\left[\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P \hat{i} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P \hat{j} + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P \hat{k} \right] \cdot \left[(x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k} \right] = 0$$

Y, finalmente, la ecuación del plano tangente es:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P (x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P (y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P (z-z_0)=0$$

Ejemplo. Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie $z=+\sqrt{4-x^2-y^2}$ en el punto $P\left(1,1,\sqrt{2}\right)$. Graficar.

Solución.



$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4=0 \quad ; \quad \bar{n}=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P \hat{i}+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P \hat{j}+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P \hat{k}$$

$$\bar{n}=2x|_P\,\hat{i}+2y|_P\,\hat{j}+2z|_P\,\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \bar{n}=2\hat{i}+2\hat{j}+2\sqrt{2}\,\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \bar{n}=\hat{i}+\hat{j}+\sqrt{2}\,\hat{k}$$

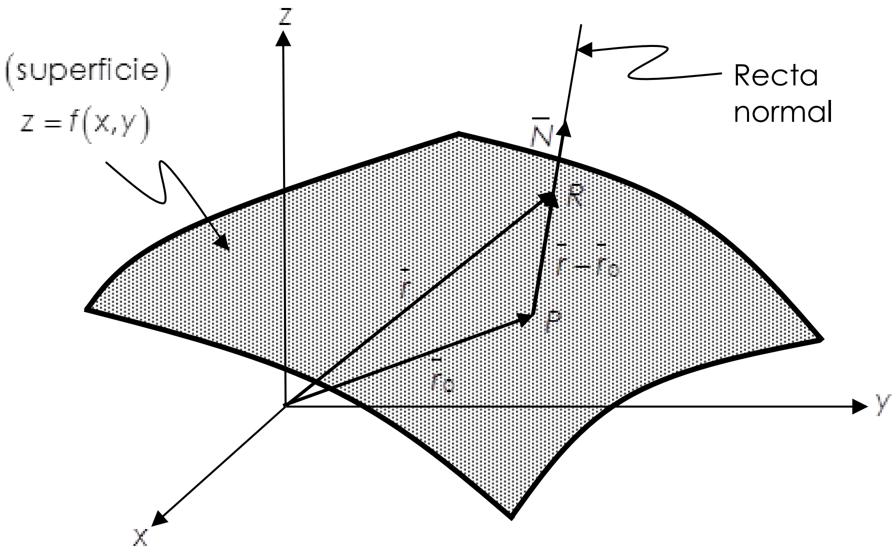
$$\bar{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} \quad ; \quad \bar{r}_0=\hat{i}+\hat{j}+\sqrt{2}\,\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \bar{r}-\bar{r}_0=(x-1)\hat{i}+(y-1)\hat{j}+\sqrt{2}\left(z-\sqrt{2}\right)\hat{k}$$

$$\bar{n}\cdot\left(\bar{r}-\bar{r}_0\right)=0 \quad \Rightarrow \quad 1(x-1)+1(y-1)+\sqrt{2}\left(z-\sqrt{2}\right)=0$$

$$\therefore \quad x+y+\sqrt{2}z-4=0 \quad \text{(ecuación del plano tangente)}$$

RECTA NORMAL A UNA SUPERFICIE

Sea la superficie cuya ecuación es $z=f(x,y)$. Se desea obtener las ecuaciones de la recta normal a ella en el punto $P(x_0,y_0,z_0)$. Se utilizará un punto $R(x,y,z)$ de la recta normal, los vectores de posición de P y R y el vector $\bar{N}$ normal a la superficie en el punto de incidencia de la recta normal con la superficie, es decir, en el punto P.



$P(x_0, y_0, z_0)$ (punto de corte de la recta normal con la superficie)

$R(x, y, z)$ (punto de la recta normal)

El vector $\overline{N}$ se obtiene mediante $\overline{N} = \overline{\nabla} F\big|_P$ y, como se observa, resulta colineal con el vector $\bar{r} - \bar{r}_0$. El hecho de que el producto cruz o vectorial de $\overline{N}$ y $\bar{r} - \bar{r}_0$ sea cero es condición de paralelismo y determina las ecuaciones de la recta normal:

$$\left(\bar{r} - \bar{r}_0\right) \times \overline{N} = \left(\bar{r} - \bar{r}_0\right) \times \overline{\nabla} F\big|_P = \overline{0}$$

Si se sustituyen las componentes de los vectores y se resuelve este producto cruz se obtiene:

$$\left(\bar{r} - \bar{r}_0\right) \times \overline{N} = \overline{0}\ ;\ \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_P & \left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_P & \left.\dfrac{\partial F}{\partial z}\right|_P \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \hat{i}\left[(y - y_0)\left.\dfrac{\partial F}{\partial z}\right|_P - (z - z_0)\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_P \right] \\ -\hat{j}\left[(x - x_0)\left.\dfrac{\partial F}{\partial z}\right|_P - (z - z_0)\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_P \right] \\ +\hat{k}\left[(x - x_0)\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_P - (y - y_0)\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_P \right] = \overline{0} \end{array}$$

Se iguala a cero cada componente, se ordenan se llega a:

$$\frac{x - x_0}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_P} = \frac{y - y_0}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_P} = \frac{z - z_0}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial z}\right|_P}$$

que son las ecuaciones de la recta normal a la superficie.

Ejemplo. Determinar la ecuación del plano tangente y las ecuaciones de la recta normal a la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2 - 2xy + 2y - 2$ en el punto $P(1,2,3)$.

Solución.
Plano tangente:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xy + 2y - z - 2 = 0 \quad ; \quad \bar{n} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P \hat{i} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P \hat{j} + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P \hat{k}$$

$$\bar{n} = \left.(2x - 2y)\right|_P \hat{i} + \left.(2y - 2x + 2)\right|_P \hat{j} + \left.-1\right|_P \hat{k} \quad \Rightarrow \quad \bar{n} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$$

$$\begin{cases} \bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ \bar{r}_0 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \bar{r} - \bar{r}_0 = (x-1)\hat{i} + (y-2)\hat{j} + (z-3)\hat{k}$$

$$\bar{n} \cdot \left(\bar{r} - \bar{r}_0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2(x-1) + 4(y-2) - 1(z-3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -2x + 2 + 4y - 8 - z + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x + 4y - z - 3 = 0$$

$$\therefore \quad 2x - 4yy + z + 3 = 0 \quad \text{(ecuación del plano tangente)}$$

Recta normal:

$$\bar{N} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k} \quad y \quad \bar{r} - \bar{r}_0 = (x-1)\hat{i} + (y-2)\hat{j} + (z-3)\hat{k}$$

y si se sustituyen en la expresión siguiente:

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P}$$

Se llega a:

$$\therefore \quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-1}$$

(ecuaciones de la recta normal a la superficie)

LA CONTINUIDAD Y LAS DERIVADAS PARCIALES

En funciones con una variable independiente, la existencia de la derivada en un punto implica necesariamente la continuidad en él. En funciones escalares de variable vectorial la existencia de las derivadas parciales no implica necesariamente la continuidad.

Ejemplo. Sea la función:

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución.

Se estudia la continuidad en $(0,0)$ y se tiene que:

$$i)\quad f(0,0)=0 \qquad\qquad \therefore \quad \text{cumple}$$

$$ii)\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad \text{no existe} \quad \therefore \quad \text{no cumple}$$

Luego la función no es continua en $(0,0)$

Se calculan las derivadas parciales y se evalúan en el origen:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \frac{d}{dx} f(x,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x,0)-f(x,0)}{\Delta x}$$

$$f(x,0)=0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$$

De manera semejante

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \frac{d}{dy} f(0,y) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0,y+\Delta y)-f(0,y)}{\Delta y}$$

$$f(0,y)=0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0$$

Para evaluar las derivadas parciales se mantuvo constante a la "y" en la derivada con respecto a "x" y a "x" cuando se calculó la derivada con respecto a "y".

Aquí se ve que las derivadas parciales existen a pesar de la discontinuidad de la función en $(0,0)$. Esta función, así definida, es un claro ejemplo de cómo se puede presentar una función escalar de dos variables independientes que, a pesar de no ser continua en un punto, en este caso el origen, sí existen sus derivadas parciales ahí.

LA DIFERENCIAL TOTAL. FUNCIONES DIFERENCIABLES

Con funciones de una sola variable independiente, la diferencial se obtenía y definía como:

$$y=f(x)\ ;\ \Delta y=f'(x)\Delta x+\eta\Delta x\ ;\ dy=f'(x)\Delta x \ \Rightarrow\ dy=f'(x)dx$$

Y se decía que la función era diferenciable si su incremento se podía expresar como el producto de su derivada por el incremento del argumento, más una función en términos del incremento del argumento por el argumento mismo. Y el primer sumando equivalía a la diferencial de la función.

Sea la siguiente función escalar con dos variables independientes; se obtendrá su incremento como sigue:

$$z = x^2y - xy^2$$

$$\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x,y\right)$$

$$\Delta z = \left[\left(x+\Delta x\right)^2\left(y+\Delta y\right) - \left(x+\Delta x\right)\left(y+\Delta y\right)^2\right] - \left(x^2y - xy^2\right)$$

$$\Delta z = x^2y + x^2\Delta y + 2xy\Delta x + 2x\Delta x\Delta y + y\overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta x}^2\Delta y$$
$$- xy^2 - 2xy\Delta y - x\overline{\Delta y}^2 - y^2\Delta x - 2y\Delta x\Delta y - \Delta x\overline{\Delta y}^2 - x^2y + xy^2$$

$$\Delta z = x^2\Delta y + 2xy\Delta x + 2x\Delta x\Delta y + y\overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta x}^2\Delta y$$
$$- 2xy\Delta y - x\overline{\Delta y}^2 - y^2\Delta x - 2y\Delta x\Delta y - \Delta x\overline{\Delta y}^2$$

Se agrupan ahora los términos en torno a los incrementos y se obtiene:

$$\Delta z = \left(2xy - y^2\right)\Delta x + \left(x^2 - 2xy\right)\Delta y +$$
$$+\left(2x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y\right)\Delta x + \left(-x\Delta y - 2y\Delta x - \Delta x\Delta y\right)\Delta y$$

Esta expresión se puede escribir de manera compacta como:

$$\Delta z = \left(2xy - y^2\right)\Delta x + \left(x^2 - 2xy\right)\Delta y + \eta_1\Delta x + \eta_2\Delta y$$

en donde es fácil ver como η_1 y η_2 se aproximan a cero cuando Δx y Δy tienden a cero, esto es,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \eta_1 = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left(2x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y\right) = 0 \;\; y \;\; \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \eta_2 = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left(-x\Delta y - 2y\Delta x - \Delta x\Delta y\right) = 0$$

Los dos primeros coeficientes de Δx y Δy, son respectivamente las derivadas parciales de la función con respecto a "x" y "y". Luego se puede escribir:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \eta_1\Delta x + \eta_2\Delta y$$

Definición. Una función $z = f\left(x,y\right)$ para la cual existen sus derivadas parciales $f_x\left(x_0,y_0\right)$ y $f_y\left(x_0,y_0\right)$ es diferenciable en un punto $\left(x_0,y_0\right)$ si su incremento puede escribirse como:

$$\Delta z = f_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x + f_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y + \eta_1\Delta x + \eta_2\Delta y$$

donde η_1 y η_2 se aproximan a cero cuando Δx y Δy tienden a cero. Este concepto se puede generalizar a más de dos variables independientes mediante la expresión:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} A_i\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \eta_i\Delta x_i$$

Las A_i no dependen de los incrementos de los argumentos, mientras que las η_i dependen de ellos de tal forma que $\eta_i \to 0$ cuando $\Delta x_i \to 0$.

Ejemplo. Verificar que la siguiente función es diferenciable:

$$z = f(x,y) = 2x^2y - xy + 2xy^2$$

Solución.

Se aplica la expresión $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ y se tiene:

$$\Delta z = 2(x+\Delta x)^2(y+\Delta y) - (x+\Delta x)(y+\Delta y) + 2(x+\Delta x)(y+\Delta y)^2 - 2x^2y + xy - 2xy^2$$

$$\Delta z = 2x^2y + 4xy\Delta x + 2y\overline{\Delta x}^2 + 2x^2\Delta y + 4x\Delta x\Delta y + 2\overline{\Delta x}^2\Delta y - xy - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y +$$
$$+2xy^2 + 4xy\Delta y + 2x\overline{\Delta y}^2 + 2y^2\Delta x + 4y\Delta x\Delta y + 2\Delta x\overline{\Delta y}^2 - 2x^2y + xy - 2xy^2$$

$$\Delta z = \left(4xy - y + 2y^2\right)\Delta x + \left(2x^2 - x + 4xy\right)\Delta y + \left(2y\Delta x + 2\Delta x\Delta y + 4y\Delta y\right)\Delta x +$$
$$+\left(4x\Delta x - \Delta x + 2x\Delta y + 2\Delta x\Delta y\right)\Delta y$$

El primer factor de Δx es la derivada parcial con respecto a "x" y el primer factor de Δy es la derivada parcial con respecto a "y". Además, si se denotan con η_1 y η_2 a los segundos factores de los incrementos y se obtienen sus límites, se llega:

$$\eta_1 = 2y\Delta x + 2\Delta x\Delta y + 4y\Delta y \quad y \quad \eta_2 = 4x\Delta x - \Delta x + 2x\Delta y + 2\Delta x\Delta y$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \eta_1 = 0 \quad y \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \eta_2 = 0$$

Luego la función $z = f(x,y)$ es diferenciable, es decir, que su incremento se puede escribir como

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \eta_1\Delta x + \eta_2\Delta y$$

Es posible ver que los dos primeros sumandos son lineales en Δx y Δy por lo que al aproximarse a cero los incrementos, estos términos son mucho más grandes que los otros dos que involucran productos entre los incrementos. Entonces se puede concluir que el incremento Δz de la función es aproximadamente igual a:

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

y a esta expresión se le conoce como la diferencial de la función escalar de variable vectorial $z = f(x,y)$.

Definición. Sea $z = f(x,y)$ una función escalar con dos variables independientes. La suma de los productos de sus derivadas parciales por los incrementos de sus respectivos argumentos constituye su diferencial, que se denota con "dz" y se le conoce como "diferencial total", Esto es,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

Diferenciales parciales. Se puede introducir el concepto de diferenciales parciales de la función escalar de variable vectorial $z = f(x,y)$, que son:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x \qquad y \qquad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

Para cada una se analiza la diferencial parcial de la respectiva función identidad y se tiene que:

$$z = x \quad ; \quad d_x z = \Delta x \quad ; \quad d_x z = dx \quad \therefore \quad \Delta x = dx$$

$$z = y \quad ; \quad d_y z = \Delta y \quad ; \quad d_y z = dy \quad \therefore \quad \Delta y = dy$$

por lo que la diferencial total de la función $z = f(x,y)$ se expresa también como:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Si se generaliza este concepto se tendrá la diferencial total:

$$df = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

Error absoluto y error relativo

Definición. El error absoluto establece la diferencia, en valor absoluto, entre el incremento de la función y el valor que se obtiene a través de la diferencial total. Esto es $E_A = \left|\Delta f - df\right|$

Definición. El error relativo, en porcentaje, se obtiene de relacionar al error absoluto con el incremento de la función; es decir

$$E_R = \frac{E_A}{\Delta f}\times 100$$

que también se acostumbra definir como:

$$E_R = \left|\frac{df}{f}\right|\times 100$$

Ejemplo. Calcular la diferencial total de la siguiente función:

$$z = \frac{sen(x+y)}{x^2+y^2}$$

Solución.
Se calculan las derivadas parciales y se obtiene la diferencial total. Así,

$$z = \frac{sen(x+y)}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\left(x^2+y^2\right)\cos(x+y) - 2x\,sen(x+y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$z=\frac{sen(x+y)}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\cos(x+y)-2ysen(x+y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\therefore \quad dz=\frac{\left(x^2+y^2\right)\cos(x+y)-2xsen(x+y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx$$

$$+\frac{\left(x^2+y^2\right)\cos(x+y)-2ysen(x+y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy$$

Como aplicación de la diferencial total, considérense los siguientes ejemplos, aunque el advenimiento de la computadora los deja en meras ilustraciones de este concepto.

Ejemplo. Calcular el valor aproximado de $4.03^{3.02}$ mediante la diferencial total.

Solución.
La función escalar de variable vectorial que se puede crear para resolver este problema es:

$$z=x^y$$

Se suman diferenciales en ambos miembros y se tiene:

$$z+dz=(x+dx)^{y+dy}$$

Se sustituyen valores y:

$$\left.\begin{array}{l} x=4 \;\; ; \;\; dx=0.03 \\ y=3 \;\; ; \;\; dy=0.02 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad z=4^3 \quad \Rightarrow \quad 4^3+dz=4.03^{3.02}$$

Se calcula la diferencial total y,

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \quad \Rightarrow \quad dz=yx^{y-1}\,dx+x^y \ln x\, dy$$

$$dz=3(4)^{3-1}(0.03)+(4)^3\ln(4)(0.02) \quad \therefore \quad dz\approx 1.44+1.7745 \quad \Rightarrow \quad dz\approx 3.2145$$

Luego el valor aproximado de $4.03^{3.02}$ es:

$$z+dz\approx 4^3+3.2145 \quad \therefore \quad 4.03^{3.02}\approx 67.2145$$

Si se evalúa con una calculadora la potencia pedida se tiene:

$$4.03^{3.02}\approx 67.3009$$

Luego al utilizar la diferencial total en lugar del valor exacto de la calculadora, se produce un error absoluto de 0.0864 o sea, 864 diezmilésimas.

Ejemplo. Calcular el valor aproximado de $sen61^0\cos 28^0$

Solución.
La función escalar de variable vectorial que se utiliza es:

$$z = sen\,x \cos y$$

donde

$$x = 60^0 \quad ; \quad y = 30^0 \quad ; \quad dx = 1^0 \approx 0.01745\, rad \quad ; \quad dy = -2^0 \approx -0.03491$$

$$z = sen 60^0 \cos 30^0 \Rightarrow \quad z = 0.75$$

Se suman diferenciales en ambos miembros y se tiene:

$$z + dz = sen(x + dx)\cos(y + dy)$$

Se sustituyen valores y:

$$0.75 + dz = sen\left(60^0 + 1^0\right)\cos\left(30 - 2^0\right) \quad \Rightarrow \quad sen 31^0 \cos 58^0 = 0.75 + dz$$

Se calcula la diferencial total y:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad \Rightarrow \quad dz = \cos x \cdot \cos y\, dx - sen x \cdot sen y\, dy$$

$$dz = \cos 60^0 \cdot \cos 30^0 \cdot (0.01745) - sen 60^0 \cdot sen 30^0 (-0.03491)$$

$$dz = 0.5(0.866)(0.01745) - 0.866(0.5)(-0.03491) \quad \Rightarrow \quad dz \approx 0.022672$$

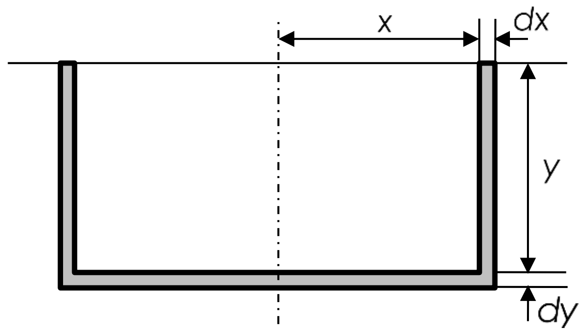
Por lo que:

$$sen 61^0 \cos 28^0 \approx o.75 + 0.022672 \quad \therefore \quad sen 61^0 \cos 28^0 \approx 0.772672$$

El valor que da una calculadora es: $sen 61^0 \cos 28^0 \approx 0.772243$
Luego al utilizar la diferencial total en lugar del valor exacto de la calculadora, se produce un error absoluto de 0.000429 o sea, 429 millonésimas.

Ejemplo. Calcular los valores exacto y aproximado del volumen del material necesario para fabricar un vaso cilíndrico con radio interior de $10\,cm$, altura interior es de $15\,cm$ y con espesor en el fondo y paredes de $0.08\,cm$. Calcular también los errores absoluto y relativo que se producen al utilizar a la diferencial en lugar del incremento exacto.

Solución.
Un modelo geométrico para la sección transversal del vaso es:



De acuerdo con los datos y las variables de la figura, se tiene:

$$x = 10\ cm \quad ; \quad y = 15\ cm \quad ; \quad dx = \Delta x = dy = \Delta y = 0.08\ cm$$

Para calcular la cantidad de material exacto, se utiliza la expresión que define el incremento de volumen. Así,

$$V = \pi x^2 y$$

$$\Delta V = f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right)$$

$$\Delta V = \pi\left(x + \Delta x\right)^2\left(y + \Delta y\right) - \pi x^2 y$$

$$\Delta V = \left(\pi x^2 + 2\pi x\Delta x + \pi\overline{\Delta x}^2\right)\left(y + \Delta y\right) - \pi x^2 y$$

$$\Delta V = \pi x^2 y + 2\pi xy\Delta x + \pi y\overline{\Delta x}^2 + \pi x^2\Delta y + 2\pi x\Delta x\Delta y + \pi\overline{\Delta x}^2\Delta y - \pi x^2 y$$

$$\Delta V = 2\pi xy\Delta x + \pi y\overline{\Delta x}^2 + \pi x^2\Delta y + 2\pi x\Delta x\Delta y + \pi\overline{\Delta x}^2\Delta y$$

Se sustituyen valores y:

$$\Delta V = 2\pi\left(10\right)\left(15\right)\left(0.08\right) + \pi\left(15\right)\left(0.08\right)^2 + \pi\left(10\right)^2\left(0.08\right) +$$

$$+ 2\pi\left(10\right)\left(0.08\right)\left(0.08\right) + \pi\left(0.08\right)^2\left(0.08\right)$$

$$\therefore \quad \Delta V \approx 101.23629\ cm^3$$

Este valor se puede obtener también calculando el volumen del cilindro considerando el material, menos el volumen del cilindro sin considerar el material. Así,

$$V_1 = \pi\left(10.08\right)^2\left(15.08\right) \approx 4813.62527\ cm^3$$

$$V_2 = \pi\left(10\right)^2\left(15\right) \approx 4712.38898\ cm^3$$

$$\therefore \ \Delta V = V_1 - V_2 \approx 101.23629\ cm^3$$

Ahora se calcula el valor aproximado del material por medio de la diferencial total de la función:

$$V = \pi x^2 y$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy$$

$$dV = 2\pi xy\ dx + \pi x^2\ dy$$

$$dV = 2\pi\left(10\right)\left(15\right)\left(0.08\right) + \pi\left(10\right)^2\left(0.08\right) \quad \Rightarrow \quad dV \approx 100.530965\ cm^3$$

El error absoluto se calcula a partir de:

$$E_A = \left|\Delta V - dV\right| \quad \Rightarrow \quad E_A = \left|101.23629 - 100.530965\right|$$

$$\therefore \quad E_A = 0.705325\ cm^3$$

El error relativo se obtiene como:

$$E_R = \frac{E_A}{\Delta V} \times 100 \quad \Rightarrow \quad E_R = \frac{0.705325}{101.23629} \times 100 \quad \Rightarrow \quad E_R \approx 0.7\%$$

Al utilizar la diferencial en lugar del incremento exacto, el error que se comete es menor al uno por ciento. Resulta evidente que mientras mayor sea el espesor, mayor será el error cometido.

Ejemplo. La aceleración de la gravedad "g" se determina, en el movimiento de caída libre, por medio de la fórmula $S=\frac{1}{2}gt^2$. Determinar el error relativo al calcular "g" si al medir "s" y "t" se han cometido pequeños errores.

Solución.
Se despeja "g" y se tiene:

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad g=\frac{2S}{t^2}$$

Se determina la diferencial total y,

$$g=\frac{2S}{t^2} \quad ; \quad dg=\frac{\partial g}{\partial S}dS+\frac{\partial g}{\partial t}dt \quad \Rightarrow \quad dg=\frac{2}{t^2}dS-\frac{4S}{t^3}dt$$

Para determinar el error relativo al calcular "g", se utiliza la expresión

$$E_R=\frac{dg}{g} \quad \Rightarrow \quad E_R=\frac{\frac{2}{t^2}dS-\frac{4S}{t^3}dt}{\frac{2S}{t^2}} \quad \therefore \quad E_R=\frac{1}{S}dS-\frac{2}{t}dt$$

Ejemplo. El calor dado por un calentador eléctrico está determinado por la fórmula: $H=\frac{kV^2}{R}$ donde V es el voltaje, R la resistencia y k una constante. En un cierto instante, $V=110\,volts$ y $R=10\,ohms$. Si el voltaje decrece a $104\,volts$, ¿cuánto decrece aproximadamente la resistencia para que se mantenga el mismo calor?

Solución.
Se calcula la diferencial total de la función dada y,

$$H=\frac{kV^2}{R} \quad \Rightarrow \quad dH=\frac{\partial H}{\partial V}dV+\frac{\partial H}{\partial R}dR \Rightarrow \quad dH=\frac{2kV}{R}dV-\frac{kV^2}{R^2}dR$$

y, además, se tiene que

$$dV=104-110=-6\,V \qquad y \qquad dH=0$$

Éste último valor es porque se mantiene el mismo calor. Se sustituyen valores y se llega a:

$$0=\frac{2k(110)}{10}(-6)-\frac{k(110)^2}{(10)^2}dR \quad \Rightarrow \quad 0=-132k-121kdR$$

Se despeja dR y,

$$0=-132k-121kdR \quad \Rightarrow \quad dR=-\frac{132k}{121k} \quad \therefore \quad dR\approx-1.09\,ohms$$

que es lo que decrece la resistencia.

Diferenciales totales sucesivas de órdenes superiores

La diferencial total de la función $z = f(x,y)$ es:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Si se consideran dx y dy como constantes, se puede entonces determinar la diferencial total de la expresión anterior, que es la diferencial total sucesiva de segundo orden. Así:

$$d(dz) = d^2z = \frac{\partial}{\partial x}(dz)dx + \frac{\partial}{\partial y}(dz)dy$$

$$\Rightarrow \quad d^2z = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy$$

$$\therefore \quad d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$$

Como se puede ver hay una analogía con el binomio de Newton, pero en lugar de potencias son órdenes de derivación. La diferencial sucesiva de tercer orden es:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}(dx)^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3$$

Ejemplo. Calcular las tres primeras diferenciales totales sucesivas para la función escalar de variable vectorial

$$z = x^3y - xy^3$$

Solución.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad \therefore \quad dz = \left(3x^2y - y^3\right)dx + \left(x^3 - 3xy^2\right)dy$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$$

$$d^2z = (6xy)(dx)^2 + 2\left(3x^2 - 3y^2\right)dxdy + (-6xy)(dy)^2$$

$$\therefore \quad d^2z = 6xy(dx)^2 + \left(6x^2 - 6y^2\right)dxdy - 6xy(dy)^2$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}(dx)^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3$$

$$d^3z = (6y)(dx)^3 + 3(6x)(dx)^2 dy + 3(-6y)dx(dy)^2 + (-6x)(dy)^3$$

$$\therefore \quad d^3z = 6y(dx)^3 18x(dx)^2 dy - 18ydx(dy)^2 - 6x(dy)^3$$

DERIVACIÓN EXPLÍCITA. DERIVADA TOTAL

Teorema (Regla de la Cadena). Sea la función $z=f(x,y)$, en la que sus variables independientes dependen de otras dos variables, esto es, $x=g(s,t)$ y $y=h(s,t)$. Si las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ son continuas, entonces se cumple que:

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad y \qquad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Teorema. La forma de la diferencial de una función escalar de variable vectorial compuesta se preserva, es decir, si

$$F=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

en donde

$$x_1=f_1(u_1,u_2,\ldots,u_n)\ ;\quad x_2=f_2(u_1,u_2,\ldots,u_n)\ ;\quad \cdots\ ;\quad x_n=f_n(u_1,u_2,\ldots,u_n)$$

la diferencial de "F" está dada por:

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n$$

no importando que las variables $x_1,x_2,\ldots,x_n$ dejan de ser independientes, al estar en términos, a su vez, de las variables $u_1,u_2,\ldots,u_n$.

Se verán algunos casos de derivación explícita:

Primer caso. Sea la función $y=f(x)$. Su derivada es $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ y su diferencial es $dy=f'(x)dx$.

Ejemplo. Sea la función $y=\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^2$, calcular su derivada $\frac{dy}{dx}$ y su diferencial dy

Solución.
La derivada es:

$$y=2\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=2\frac{\dfrac{(1+\cos x)(sen x)-(1-\cos x)(-sen x)}{(1+\cos x)^2}}{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=2\frac{senx+senx\cos x+senx-senx\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{4senx}{1-\cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4senx}{sen^2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{4}{senx} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=4\csc x$$

Y la diferencial:

$$dy=\frac{dy}{dx}dx \quad \therefore \quad dy=4\csc x\, dx$$

Segundo caso: Sea la función escalar de variable vectorial $z=f(x,y)$. Entonces sus derivadas parciales son $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ y su diferencial total es $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

Ejemplo. Sea la función $z=senh\frac{x}{y}-\cosh\frac{y}{x}$. Obtener sus derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ y su diferencial total dz.

Solución.
Las derivadas son:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cosh\frac{x}{y}+\frac{y}{x^2}senh\frac{y}{x} \qquad ; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cosh\frac{x}{y}-\frac{1}{x}senh\frac{y}{x}$$

y la diferencial total es:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\therefore \quad dz=\left(\frac{1}{y}\cosh\frac{x}{y}+\frac{y}{x^2}senh\frac{y}{x}\right)dx+\left(-\frac{x}{y^2}\cosh\frac{x}{y}-\frac{1}{x}senh\frac{y}{x}\right)dy$$

Tercer caso. Sea la función $z=f(x,y,u)$. Sus derivadas parciales son $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y $\frac{\partial z}{\partial u}$ y su diferencial total es $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy+\frac{\partial z}{\partial u}du$.

Ejemplo. Sea $z=x^3yu+xy^3u+xyu^3$. Calcular sus derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y $\frac{\partial z}{\partial u}$ y su diferencial total dz.

Solución.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2yu+y^3u+yu^3 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^3u+3xy^2u+xu^3 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial u}=x^3y+xy^3+3xyu^2$$

$$dz=\left(3x^2yu+y^3u+yu^3\right)dx+\left(x^3u+3xy^2u+xu^3\right)dy+\left(x^3y+xy^3+3xyu^2\right)du$$

Cuarto caso. Sea $z=f(x,y)$ donde $x=f(t)$ y $y=g(t)$. Se desea calcular la derivada de z con respecto a t. Como se trata de una sola variable independiente, dicha derivada no es parcial, sino ordinaria, se le denomina "derivada total" y está definida por:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

y la diferencial total es $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

Ejemplo. Para la función $z=2x^3-5y^2$ donde $x=t^2-1$ y $y=\sqrt{t}$, obtener la derivada total $\dfrac{dz}{dt}$ y la diferencial total dz.

Solución.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt}=6x^2\frac{dx}{dt}-10y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}=6x^2(2t)-10y\frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt}=6\left(t^2-1\right)^2(2t)-10\sqrt{t}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dt}=12t^5-24t^3+12t-5$$

$$dz=\frac{dz}{dt}dt \quad \therefore \quad dz=\left(12t^5-24t^3+12t-5\right)dt$$

Quinto caso. Sea $z=f(x,y,u)$ donde las variables x,y,u son funciones de otra variable, esto es, $x=f(t)$; $y=g(t)$; $u=h(t)$. La derivada total está dada por:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}$$

y la diferencial total es: $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy+\dfrac{\partial z}{\partial u}du$

Ejemplo. Sea la función

$$z=xy+yu+ux \quad \text{donde} \quad x=e^t \quad ; \quad y=sen\,t \quad ; \quad u=\cos t$$

Calcular la derivada total $\dfrac{dz}{dt}$ y la diferencial total dz.

Solución.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}=\left(y+u\right)\frac{dx}{dt}+\left(x+u\right)\frac{dy}{dt}+\left(y+x\right)\frac{du}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}=\left(y+u\right)e^{t}+\left(x+u\right)\cos t-\left(y+x\right)sent$$

$$\frac{dz}{dt}=\left(sent+\cos t\right)e^{t}+\left(e^{t}+\cos t\right)\cos t-\left(e^{t}+sent\right)sent$$

$$\frac{dz}{dt}=e^{t}sent+e^{t}\cos t+e^{t}\cos t+\cos^{2}t-e^{t}sent-sen^{2}t$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dt}=2e^{t}\cos t+\cos 2t$$

Y la diferencial total es:

$$dz=\frac{dz}{dt}dt \quad \therefore \quad dz=\left(2e^{t}\cos t+\cos 2t\right)dt$$

Sexto caso. Sea $z=f\left(x,y\right)$ donde $x=g\left(u,v\right)$; $y=h\left(u,v\right)$. Entonces, las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ se calculan con $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$. Y la diferencial total está dada por: $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Ejemplo. Sea la función $z=\frac{x}{y}$ donde $x=\frac{u}{v}$; $y=uv$. Calcular sus derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ y su diferencial total.

Solución

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{y}\left(\frac{1}{v}\right)-\frac{x}{y^{2}}\left(v\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{yv}-\frac{xv}{y^{2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{uv\left(v\right)}-\frac{\frac{u}{v}\left(v\right)}{\left(uv\right)^{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{uv^{2}}-\frac{1}{uv^{2}} \quad \therefore \quad \frac{\partial z}{\partial u}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{y}\left(-\frac{u}{v^{2}}\right)-\frac{x}{y^{2}}\left(u\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{u}{yv^{2}}-\frac{xu}{y^{2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{u}{uv\left(v^2\right)}-\frac{\frac{u}{v}(u)}{(uv)^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{1}{v^3}-\frac{1}{v^3}\quad\therefore\quad\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{2}{v^3}$$

Y la diferencial total es:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\;\Rightarrow\;dz=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)$$

$$dz=\frac{1}{y}\left(\frac{1}{v}du-\frac{u}{v^2}dv\right)-\frac{x}{y^2}(vdu+udv)$$

$$dz=\frac{1}{uv}\left(\frac{1}{v}du-\frac{u}{v^2}dv\right)-\frac{\frac{u}{v}}{u^2v^2}(vdu+udv)$$

$$dz=0du-\frac{2}{v^3}dv\quad\therefore\quad dz=-\frac{2}{v^3}dv$$

Séptimo caso. Si $z=f(x,y,u)$ y $x=g(r,s)$; $y=h(r,s)$; $u=k(r,s)$, las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial r}$ y $\frac{\partial z}{\partial s}$ se calculan con:

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}\quad y\quad\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}$$

Y la diferencial total es: $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy+\frac{\partial z}{\partial u}du$

Ejemplo. Sea la función $z=2x+3y+4u$ donde $\begin{cases}x=r-s\\y=r+s\\u=rs\end{cases}$

Calcular las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial r}$ y $\frac{\partial z}{\partial s}$ y la diferencial total dz.

Solución.

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}\;\Rightarrow\;\frac{\partial z}{\partial r}=2(1)+3(1)+4(s)\quad\therefore\quad\frac{\partial z}{\partial r}=4s+5$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}\;\Rightarrow\;\frac{\partial z}{\partial s}=2(-1)+3(1)+4(r)\;\therefore\;\frac{\partial z}{\partial s}=4r+1$$

Y la diferencial total es:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy+\frac{\partial z}{\partial u}du=\frac{\partial z}{\partial r}dr+\frac{\partial z}{\partial s}ds\quad\therefore\quad dz=(4s+5)dr+(4r+1)ds$$

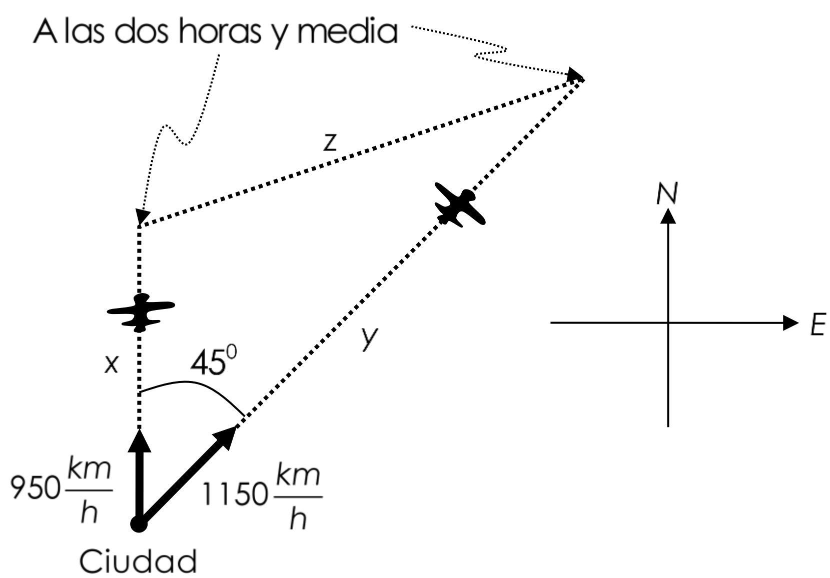
APLICACIONES DE LA DERIVADA TOTAL

Sea la función $z=f(x,y)$ en donde $x=g(r)$ y $y=h(r)$. Su derivada total $\frac{dz}{dr}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dr}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dr}$ se interpreta como la razón en la que varía z con respecto a la variable r y esta razón depende a su vez de la variación de x y y con respecto r.

Las aplicaciones más comunes son las relacionadas con la variable "tiempo" y entonces se habla de "rapidez" de variación.

Ejemplo. Dos aeronaves se cruzan al mismo tiempo sobre una ciudad, a diferentes alturas, una en dirección norte con velocidad constante de $950\,\frac{km}{h}$ y la otra con dirección noreste también a una velocidad constante de $1150\,\frac{km}{h}$. ¿Con qué velocidad aumentará la distancia entre ellas en el instante en que han transcurrido $2.5\,h$ desde su cruce?

Solución.
Se construye de manera aproximada un modelo geométrico con las direcciones de las aeronaves a partir de que se cruzaron por la ciudad, hasta $2.5\,h$ después.



Mediante la ley de los cosenos se pueden relacionar las distancias recorridas por las aeronaves, esto es, "x" y "y" y la distancia "z" entre ellas, después del tiempo considerado. Luego,

$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos 45^0 \quad \Rightarrow \quad z=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos 45^0}$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2-2xy\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \Rightarrow \quad z=\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2}xy}$$

La velocidad o la razón instantánea de variación de la distancia entre las aeronaves con respecto al tiempo está dada por la derivada total, esto es,

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{2x-\sqrt{2}y}{2\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2}xy}}\frac{dx}{dt}+\frac{2y-\sqrt{2}x}{2\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2}xy}}\frac{dy}{dt}$$

Los valores que se sustituyen en esta expresión son, por un lado, las distancias "x" y "y" recorridas, es decir:

$$x=950\times 2.5 \quad \Rightarrow \quad x=2375\,km \quad ; \quad y=1150\times 2.5 \quad \Rightarrow \quad y=2875\,km$$

y, por otro, los valores de $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ que son, respectivamente, las rapideces de variación de "x" y "y", es, decir, las velocidades de las aeronaves, esto es:

$$\frac{dx}{dt}=950\,\frac{km}{h} \quad y \quad \frac{dy}{dt}=1150\,\frac{km}{h}$$

Entonces, al sustituir valores, se llega a:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{2(2375)-\sqrt{2}(2875)}{2\sqrt{2375^2+2875^2-\sqrt{2}(2375)(2875)}}(950)+$$

$$+\frac{2(2875)-\sqrt{2}(2375)}{2\sqrt{2375^2+2875^2-\sqrt{2}(2375)(2875)}}(1150)$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{684.136}{4123}(950)+\frac{2391.243}{4123}(1150)$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dt}\approx 824.608\,\frac{km}{h}$$

Cuando pasan $2.5\,h$ de haber cruzado la ciudad, se están separando a una velocidad aproximada de $824.608\,\frac{km}{h}$.

Ejemplo. La presión P, el volumen V y la temperatura absoluta T de un gas ideal en un sistema cerrado, están relacionados por la ecuación $PV=kT$, donde k es una constante. En un cierto instante P es de $31\frac{kg}{cm^2}$, V de $50\,cm^3$ y T de $300\,^0K$. El gas se comprime de tal forma que la temperatura decrece $10\,\frac{{}^{0}K}{\min}$ y la presión aumenta a razón de $6.2\,\frac{\frac{kg}{cm^2}}{\min}$. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen en ese instante?

Solución.
Se despeja el volumen en la ecuación dada y se tiene una función escalar de variable vectorial con el volumen en términos de la temperatura y la presión.

$$V = \frac{kT}{P}$$

La razón de cambio del volumen se obtiene a partir de su derivada total. Así,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial V}{\partial P}\frac{dP}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{k}{P}\frac{dT}{dt} + \left(-\frac{kT}{P^2}\right)\frac{dP}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{k}{P}\frac{dT}{dt} - \frac{kT}{P^2}\frac{dP}{dt}$$

Se obtiene el valor de "k" con los datos del problema.

$$PV = kT \quad \Rightarrow \quad k = \frac{PV}{T} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{31(50)}{300} \quad \Rightarrow \quad k \approx 5.167\,\frac{kg\,cm}{{}^{0}K}$$

Luego,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{5.167}{31}(-10) - \frac{5.167(300)}{31^2}(6.2)$$

$$\frac{dV}{dt} \approx -1.167 - 10.0 \quad \therefore \quad \frac{dV}{dt} \approx -11.167\,\frac{cm^3}{\min}$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

¿Cómo se deriva implícitamente con una o más ecuaciones en términos de dos o más variables? Supónganse dos ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$F(x,y,u,v) = 0 \quad y \quad G(x,y,u,v) = 0$$

y que se desea calcular

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$$

y sean $x \quad y \quad y$ funciones de $u \quad y \quad v$, esto es,

$$x = f(u,v) \quad ; \quad y = g(u,v)$$

Se sustituye en las ecuaciones dadas y se tiene:

$$F\big(f(u,v), g(u,v), u, v\big) = 0$$

$$G\big(f(u,v), g(u,v), u, v\big) = 0$$

Se toman diferenciales en ambos miembros de las dos ecuaciones originales y se tiene que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv=0$$
$$\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy+\frac{\partial G}{\partial u}du+\frac{\partial G}{\partial v}dv=0$$

Todas las derivadas parciales se evalúan en un cierto punto, por lo que se tratan como constantes y son los coeficientes de dos ecuaciones con las cuatro incógnitas que son dx,dy,du,dv. Como x y y dependen de u y v, el sistema se puede expresar como:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=-\frac{\partial F}{\partial u}du-\frac{\partial F}{\partial v}dv$$
$$\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy=-\frac{\partial G}{\partial u}du-\frac{\partial G}{\partial v}dv$$

Se resuelve este sistema por Cramer y se tiene que:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}\quad ;\quad \Delta\neq 0$$

Para "dx" se tiene:

$$\Delta_{dx}=\begin{vmatrix}-\frac{\partial F}{\partial u}du-\frac{\partial F}{\partial v}dv & \frac{\partial F}{\partial y}\\ -\frac{\partial G}{\partial u}du-\frac{\partial G}{\partial v}dv & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}\Rightarrow\ \Delta_{dx}=-\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}du-\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial v} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}dv$$

$$dx=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}}du-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial v} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}}dv$$

Como $x=f(u,v)$, su diferencial total es $dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv$

Por analogía de esta expresión con la Regla de Cramer:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial y}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y}\\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}} \qquad y \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial v} & \dfrac{\partial F}{\partial y}\\ \dfrac{\partial G}{\partial v} & \dfrac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y}\\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}}$$

Estos determinantes, formados con derivadas parciales de funciones con respecto a variables, se conocen como "*determinantes jacobianos*" y se denotan de la manera siguiente:

$$J\left(\frac{F,G}{x,y}\right)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y}\\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}$$

Se leen: "*Jacobiano de* F,G *con respecto a* x,y". Entonces, para las derivadas antes obtenidas, se puede escribir que:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{J\left(\dfrac{F,G}{u,y}\right)}{J\left(\dfrac{F,G}{x,y}\right)} \qquad y \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{J\left(\dfrac{F,G}{v,y}\right)}{J\left(\dfrac{F,G}{x,y}\right)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{J\left(\dfrac{F,G}{x,u}\right)}{J\left(\dfrac{F,G}{x,y}\right)} \qquad y \qquad \frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{J\left(\dfrac{F,G}{x,v}\right)}{J\left(\dfrac{F,G}{x,y}\right)}$$

Nota. Se forman con un signo negativo delante de un cociente: en el denominador se deriva con respecto a las variables dependientes y en el numerador sólo se cambia la variable dependiente por la independiente con respecto a la cual se pide la derivada.

Se verán algunos casos.

Caso 1. Una ecuación con dos incógnitas:

Sea $F(x,y)=0$ donde $y=f(x)$ y se pide calcular $\frac{dy}{dx}$. Se procede de manera semejante al caso anterior y se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

Ejemplo. Sea $senhx-e^{x}\ln xy=5-xy$. Calcular $\dfrac{dy}{dx}$.

Solución. Se considera que $F=senhx-e^{x}\ln xy-5+xy=0$. Entonces,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{\cosh x-e^{x}\left(\dfrac{y}{xy}\right)-e^{x}\ln xy+y}{-e^{x}\left(\dfrac{x}{xy}\right)+x}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\cosh x-\dfrac{e^{x}}{x}-e^{x}\ln xy+y}{-\dfrac{e^{x}}{y}+x}$$

Esta derivada también se podría calcular como:

$$\cosh x-e^{x}\left(\frac{x\dfrac{dy}{dx}+y}{xy}\right)-e^{x}\ln xy=-x\frac{dy}{dx}-y$$

$$\Rightarrow\quad \cosh x-\frac{e^{x}\dfrac{dy}{dx}}{y}-\frac{e^{x}}{x}-e^{x}\ln xy=-x\frac{dy}{dx}-y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(x-\frac{e^{x}}{y}\right)=-\cosh x+\frac{e^{x}}{x}+e^{x}\ln xy-y$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\cosh x-\dfrac{e^{x}}{x}-e^{x}\ln xy+y}{-\dfrac{e^{x}}{y}+x}$$

Caso 2. Una ecuación con tres incógnitas.
Sea la ecuación $F(x,y,z)=0$ y sea $z=f(x,y)$. Se desea calcular el valor de $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Se procede igual y se obtiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\qquad y\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

y del mismo modo, al cambiar la variable dependiente, se obtienen las siguientes expresiones:

$$x=f\left(y,z\right)\quad\therefore\quad\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}\qquad y\qquad\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}$$

$$y=f\left(x,z\right)\quad\therefore\quad\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\qquad y\qquad\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

Ejemplo. Sea la ecuación $xyz^2+2xy^2z+3x^2yz-4=0$. Calcular

$$\frac{\partial y}{\partial x}\quad y\quad\frac{\partial y}{\partial z}$$

Solución.
Por las derivadas que se piden, se asume que $y=f\left(x,z\right)$ y se considera que $F=xyz^2+2xy^2z+3x^2yz-4=0$. Luego, las derivadas requeridas se calculan como:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{yz^2+2y^2z+6xyz}{xz^2+4xyz+3x^2z}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{yz\left(z+2y+6x\right)}{xz\left(z+4y+3x\right)}\ \therefore\ \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{y\left(z+2y+6x\right)}{x\left(z+4y+3x\right)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{2xyz+2xy^2+3x^2y}{xz^2\,4xyz+3x^2z}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{xy\left(2z+2y+3x\right)}{xz\left(z+4y+3x\right)}\quad\therefore\quad\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{y\left(2z+2y+3x\right)}{z\left(z+4y+3x\right)}$$

Caso 3. Dos ecuaciones con tres incógnitas.
Considérense las ecuaciones $F\left(x,y,z\right)=0\quad y\quad G\left(x,y,z\right)=0$; se pide calcular las derivadas:

$$\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx},\frac{dx}{dz},\frac{dy}{dz},\frac{dx}{dy},\frac{dz}{dy}$$

En este caso, como se ve en las derivadas que se piden, considerándolas de dos en dos, primera y segunda, tercera y cuarta, quinta y sexta, se tiene una sola variable independiente ya que son dos ecuaciones con tres incógnitas, de donde tres menos dos es igual a una variable libre o independiente. Se procede como se ha hecho anteriormente para construir los determinantes jacobianos y se tiene:

$$y=f(x) \quad y \quad z=g(x) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=-\frac{J\left(\frac{F,G}{x,z}\right)}{J\left(\frac{F,G}{y,z}\right)} \quad y \quad \frac{dz}{dx}=-\frac{J\left(\frac{F,G}{y,x}\right)}{J\left(\frac{F,G}{y,z}\right)}$$

$$x=f(z) \quad y \quad y=g(z) \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dz}=-\frac{J\left(\frac{F,G}{z,y}\right)}{J\left(\frac{F,G}{x,y}\right)} \quad y \quad \frac{dy}{dz}=-\frac{J\left(\frac{F,G}{x,z}\right)}{J\left(\frac{F,G}{x,y}\right)}$$

$$x=f(y) \quad y \quad z=g(y) \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dy}=-\frac{J\left(\frac{F,G}{y,z}\right)}{J\left(\frac{F,G}{x,z}\right)} \quad y \quad \frac{dz}{dy}=-\frac{J\left(\frac{F,G}{x,y}\right)}{J\left(\frac{F,G}{x,z}\right)}$$

Ejemplo. Sean las ecuaciones

$$x^3y^2z-4=0 \quad y \quad x^3y+y^3z+xz^3-1=0$$

Calcular $\frac{dx}{dz}$ y $\frac{dy}{dz}$.

Solución.

En primer lugar, se asigna la "F" a la primera ecuación y "G" a la segunda, de tal forma que:

$$F=x^3y^2z-4=0 \qquad y \qquad G=x^3y+y^3z+xz^3-1=0$$

En este ejercicio se piden las derivadas con respecto a "z", luego ésta es la variable independiente y las variables dependientes con las que se construye el determinante jacobiano del denominador son "x" y "y". Entonces las derivadas requeridas se obtienen como:

$$x=f(z) \;\; y \;\; y=g(z) \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dz}=-\frac{J\left(\frac{F,G}{z,y}\right)}{J\left(\frac{F,G}{x,y}\right)} \;\; y \;\; \frac{dy}{dz}=-\frac{J\left(\frac{F,G}{x,z}\right)}{J\left(\frac{F,G}{x,y}\right)}$$

$$\frac{dx}{dz}=-\frac{J\left(\frac{F,G}{z,y}\right)}{J\left(\frac{F,G}{x,y}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}x^3y^2 & 2x^3yz\\ y^3+3xz^2 & x^3+3y^2z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3x^2y^2z & 2x^3yz\\ 3x^2y+z^3 & x^3+3y^2z\end{vmatrix}}$$

$$\frac{dx}{dz}=-\frac{x^6y^2+3x^3y^4z-2x^3y^4z-6x^4yz^3}{3x^5y^2z+9x^2y^4z^2-6x^5y^2z-2x^3yz^4}\;\Rightarrow\;\frac{dx}{dz}=-\frac{x^6y^2+x^3y^4z-6x^4yz^3}{-3x^5y^2z+9x^2y^4z^2-2x^3yz^4}$$

$$\Rightarrow\;\frac{dx}{dz}=-\frac{x^3y\left(x^3y+y^3z-6xz^3\right)}{x^2yz\left(-3x^3y+9y^3z-2xz^3\right)}\;\therefore\;\frac{dx}{dz}=-\frac{x\left(x^3y+y^3z-6xz^3\right)}{z\left(-3x^3y+9y^3z-2xz^3\right)}$$

$$\frac{dy}{dz}=-\frac{J\left(\frac{F,G}{x,z}\right)}{J\left(\frac{F,G}{x,y}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{dG}{\partial x} & \frac{dG}{\partial z}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}3x^2y^2z & x^3y^2\\ 3x^2y+z^3 & y^3+3xz^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3x^2y^2z & 2x^3yz\\ 3x^2y+z^3 & x^3+3y^2z\end{vmatrix}}$$

$$\frac{dy}{dz}=-\frac{3x^2y^5z+9x^3y^2z^3-3x^5y^3-x^3y^2z^3}{3x^5y^2z+9x^2y^4z^2-6x^5y^2z-2x^3yz^4}\;\Rightarrow\;\frac{dy}{dz}=-\frac{3x^2y^5z+8x^3y^2z^3-3x^5y^3}{-3x^5y^2z+9x^2y^4z^2-2x^3yz^4}$$

$$\Rightarrow\;\frac{dy}{dz}=-\frac{x^2y^2\left(3y^3z+8xz^3-3x^3y\right)}{x^2yz\left(-3x^3y+9y^3z-2xz^3\right)}\;\therefore\;\frac{dy}{dz}=-\frac{y\left(3y^3z+8xz^3-3x^3y\right)}{z\left(-3x^3y+9y^3z-2xz^3\right)}$$

Caso 4. Tres ecuaciones con cinco incógnitas:
Sean las ecuaciones

$$F(x,y,z,u,v)=0\quad;\quad G(x,y,z,u,v)=0\quad;\quad H(x,y,z,u,v)=0$$

y se quiere determinar el valor de las siguientes derivadas

$$\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$$

En este caso se tienen tres ecuaciones con cinco incógnitas, de donde hay dos variables libres o independientes que, de acuerdo con lo que se pide, son "u" y "v". Luego, utilizando este hecho y con lo estudiado, es posible construir los correspondientes determinantes jacobianos. Así,

$$x = f(u,v) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{J\left(\dfrac{F,G,H}{u,y,z}\right)}{J\left(\dfrac{F,G,H}{x,y,z}\right)} \quad y \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{J\left(\dfrac{F,G,H}{v,y,z}\right)}{J\left(\dfrac{F,G,H}{x,y,z}\right)}$$

$$y = g(u,v) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{J\left(\dfrac{F,G,H}{x,u,z}\right)}{J\left(\dfrac{F,G,H}{x,y,z}\right)} \quad y \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{J\left(\dfrac{F,G,H}{x,v,z}\right)}{J\left(\dfrac{F,G,H}{x,y,z}\right)}$$

$$z = h(u,v) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{J\left(\dfrac{F,G,H}{x,y,u}\right)}{J\left(\dfrac{F,G,H}{x,y,z}\right)} \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{J\left(\dfrac{F,G,H}{x,y,v}\right)}{J\left(\dfrac{F,G,H}{x,y,z}\right)}$$

DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTE

Ya se definió la derivada direccional mediante el límite

$$\frac{dz}{dw} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x + s\cos\alpha, y + s\,sen\alpha) - f(x,y)}{s}$$

y se vieron dos casos particulares de esta derivada direccional que son las derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Otra forma para calcular la derivada direccional es la siguiente:

Teorema. Sea la función diferenciable $f(x,y)$ y considérese la dirección $\overline{w} = (\cos\theta, sen\theta)$. Entonces la derivada direccional de f en la dirección $\overline{w}$ está dada por:

$$D_w f = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} sen\theta$$

Prueba. Por lo visto cuando se definió la derivada direccional, se puede expresar que:

$$G(s) = f(u,v) \quad ; \quad \begin{cases} u = x + s\cos\theta \\ v = y + s\,sen\theta \end{cases}$$

Entonces

$$G(s) = f(x + s\cos\theta, y + s\,sen\theta)$$

y por la definición a partir del límite,

$$G'(0) = \lim_{s \to 0} \frac{G(s) - G(0)}{s - 0} = D_w f$$

Por la derivada total

$$G'(s)=\frac{dG}{ds}=\frac{\partial G}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{dv}{ds}=\frac{\partial G}{\partial u}\cos\theta+\frac{\partial G}{\partial v}sen\theta$$

donde

$$u=x+s\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{ds}=\cos\theta$$

$$v=y+s\,sen\theta \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{ds}=sen\theta$$

$$s=0 \quad\Rightarrow\quad f(u,v)=f(x,y)$$

por lo tanto

$$G'(0)=D_wf(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}sen\theta$$

Ejemplo. Sea la función $z=f(x,y)=3x^3y^2-4x^2y^2+3x^2y^3$ y $\overline{w}$ un vector unitario con $\theta=\frac{\pi}{6}$. Calcular $D_wf(x,y)$ y decir qué significado tiene el valor $D_w(1,-1)$.

Solución.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=9x^2y^2-8xy^2+6xy^3 \quad ; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,-1)}=9(1)^2(-1)^2-8(1)(-1)^2+6(1)(-1)^3$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,-1)}=-5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=6x^3y-8x^2y+9x^2y^2 \quad ; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,-1)}=6(1)^3(-1)-8(1)^2(-1)+9(1)^2(-1)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,-2)}=11$$

$$\cos\theta=\cos 30^0=0.866 \qquad ; \qquad sen\theta=sen30^0=0.5$$

$$D_wf(1,-2)=(-5)(0.866)+(11)(0.5) \quad \therefore \quad D_wf(1,-2)=1.17$$

Se corta la superficie con un plano vertical en la dirección $(0.866,0.5)$ y se produce una curva en la intersección. El valor obtenido de 1.17 es la pendiente de la tangente a dicha curva en el punto dado. Dicho de otra forma, la cota del punto, en la dirección dada, por cada unidad que se avance, se incrementa 1.17 unidades.

Definición. Sea f una función escalar con dos variables independientes x y y. Entonces su gradiente se define como:

$$\overline{\nabla}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}$$

De acuerdo con esta definición, la derivada direccional se puede interpretar como el producto escalar entre el gradiente de la función y la dirección unitaria en la cual es pedida. Así,

$$D_w f(x,y) = \overline{\nabla} f(x,y) \cdot \overline{w}$$

Generalización de este concepto para una función vectorial de variable escalar con "n" variables independientes:

$$D_w f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{\nabla} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

Ejemplo. Calcular la derivada direccional de la función

$$f(x,y) = x^3 y^2 + 3x^2 y - 2xy^3$$

en el punto $P(2,-1)$ y en la dirección del vector $\overline{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$.

Solución. Se aplica la expresión

$$D_w f(x,y) = \overline{\nabla} f(x,y) \cdot \overline{w}$$

y se obtiene:

$$\overline{\nabla} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}$$

$$\Rightarrow \ \overline{\nabla} f(x,y) = \left(3x^2y^2 + 6xy - 2y^3\right)\hat{i} + \left(2x^3y + 3x^2 - 6xy^2\right)\hat{j}$$

$$\overline{\nabla} f(2,-1) = 2\hat{i} - 16\hat{j} \qquad y \qquad \overline{w} = \frac{4}{5}\hat{i} + \frac{3}{5}\hat{j}$$

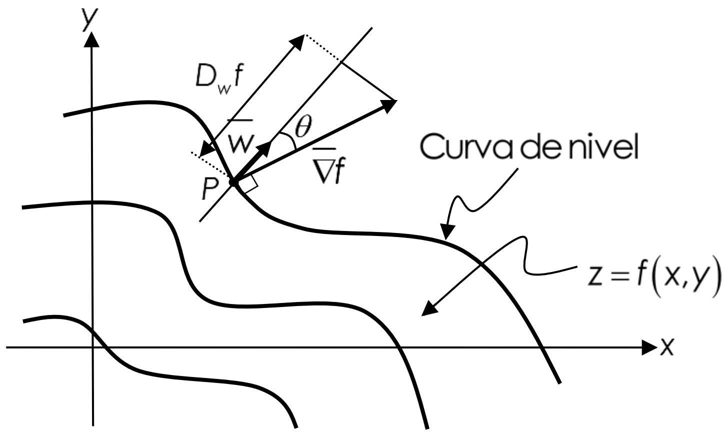
Luego,

$$D_w f(2,-1) = (2,-16) \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad D_w f(2,-1) = \frac{8}{5} - \frac{48}{5}$$

$$\therefore \quad D_w f(2,-1) = -8$$

Interpretación geométrica del gradiente y de la derivada direccional

Considérese la siguiente figura:



Como se ve, sea una función $z = f(x,y)$ y sea su derivada direccional en el punto $P(x_0, y_0)$ y en una dirección dada por el vector unitario $\overline{w}$. Si se considera el vector gradiente $\overline{\nabla} f$, que es perpendicular a la curva de nivel, entonces se forma un triángulo con este vector gradiente y con la dirección de $\overline{w}$.

La derivada direccional es $D_w f = \overline{\nabla} f \cdot \overline{w}$ que, de acuerdo con la definición del producto escalar, equivale a $D_w f = \left|\overline{\nabla} f\right| \left|\overline{w}\right| \cos\theta$. Como $\overline{w}$ es unitario, entonces $D_w f = \left|\overline{\nabla} f\right| \cos\theta$, luego la derivada direccional es la proyección del módulo del gradiente en la dirección del vector unitario, como se ve en la figura.

Cuando $\theta = 0^0$, es decir, cuando la dirección de $\overline{w}$ es la del gradiente, la proyección de $\left|\overline{\nabla} f\right|$ es su máximo valor por lo que en este caso la derivada direccional es máxima. Cuando $\theta = 90^0$, es decir, cuando la dirección de $\overline{w}$ es ortogonal a la del gradiente, no hay proyección de $\left|\overline{\nabla} f\right|$, por lo que, en este caso, la derivada direccional es nula.

Ejemplo. Calcular la derivada direccional de la función $z = 3x^2 + 2y^2$ en el punto $P(1,2)$, en la dirección que forma ángulos iguales con los ejes coordenados. ¿En qué dirección se presenta la máxima derivada direccional y cuál es su valor? ¿En qué dirección es nula?

Solución.
Para calcular la derivada direccional se utiliza la expresión

$$D_w f(x,y) = \overline{\nabla} f(x,y) \cdot \overline{w}$$

$$\overline{\nabla} f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}=6x\hat{i}+4y\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \overline{\nabla} f(1,2)=6\hat{i}+8\hat{j}$$

$$\overline{w}=\cos 45^0\,\hat{i}+sen45^0\,\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \overline{w}=\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$$

Por lo que:

$$D_w f(1,2)=(6,8)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2} \quad \therefore \quad D_w f(1,2)\approx 9.9$$

La máxima derivada direccional se presenta en la dirección del gradiente, esto es,

$$(6,8) \quad \text{o bien} \quad \left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

Y el valor de esta máxima derivada direccional es el módulo del gradiente, es decir,

$$D_{w\text{máxima}} f(1,2)=\sqrt{36+64} \quad \therefore \quad D_{w\text{máxima}} f(1,2)=10$$

Resulta evidente que la derivada direccional es nula, es decir, la dirección en la que la función no varía, en la dirección perpendicular a la del gradiente, esto es, en la dirección que su producto escalar con el gradiente es nulo. Así,

$$(6,8)\cdot(-8,6)=-48+48=0 \quad \text{o bien} \quad (6,8)\cdot(8,-6)=48-48=0$$

Por lo tanto, la derivada direccional es nula en cualquiera de las dos direcciones

$$(-8,6) \quad \text{ó} \quad (8,-6)$$

Ejemplo. La superficie de una montaña se ha simulado, de manera aproximada, con un paraboloide elíptico, de tal forma que su cota en cualquier punto está dada por la función

$$z=3100-0.06x^2-0.04y^2$$

Se asume que el eje "y" apunta al norte y el eje "x" apunta al este. Las distancias están en metros, por lo que la altura máxima de la montaña es de $3100\,m$ y se presenta cuando "x" y "y" valen cero, es decir, en el origen de coordenadas. Supóngase que un alpinista se encuentra en el punto de coordenadas $(71.3,-80.6,2535.12)$. Se requiere saber:

i) ¿Ascendería o descendería si se moviera en dirección sureste y con qué rapidez lo haría?

ii) ¿Con qué rapidez ascendería si se moviera en la dirección $-5\hat{i}+2\hat{j}$?

iii) ¿En qué dirección se debe mover para ascender más rápidamente y cuál es el valor de esa máxima rapidez de ascenso?

iv) ¿En qué dirección se debe mover para descender más rápidamente?
V) ¿En qué dirección se debe mover para no variar su altura?

Solución.
Como se sabe, la derivada direccional da la rapidez de variación (ascenso o descenso) del alpinista, lo que se calcula a partir de la expresión

$$D_w f(x,y) = \overline{\nabla} f(x,y) \cdot \overline{w}$$

El gradiente será igual a:

$$\overline{\nabla} z(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\hat{j} = -0.12x\,\hat{i} - 0.08y\,\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \overline{\nabla} z(71.3,-80.6) = -8.556\,\hat{i} + 6.448\,\hat{j}$$

i) La dirección sureste está dada por el vector

$$\overline{a} = \hat{i} - \hat{j} \quad \Rightarrow \quad \overline{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$$

luego,

$$D_w f(71.3,-80.6) = (-8.556, 6.448) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore \quad D_w f(71.3,-80.6) \approx -10.61$$

Por lo que en la dirección sureste descendería $10.61m$ por cada metro que avanzara.

ii) Si el alpinista se mueve del punto considerado en la dirección $-5\hat{i} + 2\hat{j}$, se tiene que: $\overline{w} = \left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right)$

$$D_w f(71.3,-80.6) = (-8.556, 6.448) \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right)$$

$$\therefore \quad D_w f(71.3,-80.6) \approx 10.34$$

luego en esta dirección ascendería $10.34\,m$ por cada metro que avanzara en la dirección dada.

iii) La dirección de la máxima rapidez de ascenso del alpinista es la dirección del gradiente, esto es:

$$-8.556\,\hat{i} + 6.448\,\hat{j}$$

Y la máxima rapidez de ascenso es el módulo del gradiente, es decir,

$$D_{wmáxima} f(71.3,-80.6) = \sqrt{(-8.556)^2 + (6.448)^2}$$

$$\therefore \quad D_{wmáxima} f(71.3,-80.6) \approx 10.71$$

Esto quiere decir que si el alpinista, a partir del punto donde se encuentra, camina en la dirección del gradiente, su rapidez de ascenso es de $10.71m$ por cada metro que avance (¡muy empinado!)

iv) Para descender más rápidamente debe moverse en la dirección contraria en sentido a la del gradiente, esto es,

$$8.556\,\hat{i} - 6.448\,\hat{j}$$

v) Para no variar su altura, es evidente que el alpinista se debe mover sobre una curva de nivel de la superficie de la montaña, es decir, en una dirección perpendicular a la del gradiente. Esto sería en una de las dos direcciones siguientes en las que el producto escalar con el gradiente es cero:

$$6.448\,\hat{i} + 8.556\,\hat{j} \qquad ; \qquad -6.448\,\hat{i} - 8.556\,\hat{j}$$

Segunda derivada direccional

Para calcular la segunda derivada direccional se parte de la primera:

$$D_w f(x,y) = \overline{\nabla} f(x,y) \cdot \overline{w} \quad \Rightarrow \quad D_w f(x,y) = f_x w_1 + f_y w_2$$

Si se repite la operación se tendrá la segunda derivada direccional:

$$D_w{}^2 f(x,y) = \overline{\nabla}\left[\overline{\nabla} f(x,y) \cdot \overline{w}\right] \cdot \overline{w} \quad \Rightarrow \quad D_w{}^2 f(x,y) = D_w\left(f_x w_1 + f_y w_2\right)$$

$$D_w{}^2 f(x,y) = \left(f_{xx} w_1 + f_{yx} w_2\right) w_1 + \left(f_{xy} w_1 + f_{yy} w_2\right) w_2$$

$$\therefore \quad D_w{}^2 f(x,y) = f_{xx} w_1{}^2 + 2 f_{xy} w_1 w_2 + f_{yy} w_2{}^2$$

expresión que, como se observa, tiene cierta analogía con el binomio de Newton, con potencias y órdenes de derivación.

Ejemplo. Calcular la segunda derivada direccional de la función

$$z = f(x,y) = 3x^2y^3 - 5xy + x^3y^2 - 2$$

en el punto $P(-2,1)$ y en la dirección del vector $\overline{b} = 3\,\hat{i} + -5\,\hat{j}$.

Solución

$$f_x = 6xy^3 - 5y + 3x^2y^2 \quad \Rightarrow \quad f_{xx} = 6y^3 + 6xy^2 \quad \Rightarrow \quad f_{xx}\big|_{(-2,1)} = -6$$

$$f_y = 9x^2y^2 - 5x + 2x^3y \quad \Rightarrow \quad f_{yy} = 18x^2y + 2x^3 \quad \Rightarrow \quad f_{yy}\big|_{(-2,1)} = 56$$

$$f_{xy} = 18xy^2 - 5 + 6x^2y \quad \Rightarrow \quad f_{xy}\big|_{(-2,1)} = -17$$

$$\overline{b} = 3\,\hat{i} - 5\,\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \overline{w} = \frac{3}{\sqrt{34}}\,\hat{i} - \frac{5}{\sqrt{34}}\,\hat{j}$$

$$D_w{}^2 f(-2,1) = -6\left(\frac{9}{34}\right) + 2(-17)\left(-\frac{15}{34}\right) + 56\left(\frac{25}{34}\right) \quad \therefore \quad D_w{}^2 f(3,2) \approx 54.59$$

DIFERENCIAL EXACTA Y SU INTEGRACIÓN

Sea una expresión de la forma $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ donde P y Q son funciones de x y y ¿Existirá una función "f" tal que dicha expresión sea su diferencial total, es decir, si $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ lo que implicaría que $P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$? Considérese el siguiente teorema al respecto:

Teorema. Sean las funciones $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ con primeras derivadas parciales continuas. Entonces se dice que

$$df = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

es la diferencial total de la función f y se le denomina diferencial exacta, sí y sólo si

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Prueba parcial.
Supóngase que $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ es la diferencial total de la función f, es decir, que es igual a $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, por lo que se debe cumplir que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$$

Se obtienen las derivadas mixtas de estas expresiones y se llega a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \qquad y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

y por el teorema de Schwarz, se tiene finalmente que:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Ejemplo. Comprobar que la siguiente expresión es diferencial exacta, es decir, diferencial total de una función y obtener esta función:

$$\left(9x^2y^2 - 5y + 12xy^3 + 3\right)dx + \left(6x^3y - 5x + 18x^2y^2 - 6\right)dy$$

Solución.

Para ser diferencial exacta se debe cumplir que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P=9x^2y^2-5y+12xy^3+3 \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}=Q=6x^3y-5x+18x^2y^2-6$$

Se integra la primera ecuación con respecto a "x" y se obtiene:

$$\int\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx=\int\left(9x^2y^2-5y+12xy^3+3\right)dx$$

$$\Rightarrow\ f=3x^3y^2-5xy+6x^2y^3+3x+C(y)$$

Se deriva f con respecto a "y" y se iguala a

$$\frac{\partial f}{\partial y}=6x^3y-5x+18x^2y^2-6$$

$$f=3x^3y^2-5xy+6x^2y^3+3x+C(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}=6x^3y-5x+18x^2y^2+\frac{dC(y)}{dy}$$

$$6x^3y-5x+18x^2y^2+\frac{dC(y)}{dy}=6x^3y-5x+18x^2y^2-6 \quad \Rightarrow \quad \frac{dC(y)}{dy}=-6$$

Se integra este resultado con respecto a "y", de donde

$$C(y)=-6y+C$$

Por lo que la función es $f=3x^3y^2-5xy+6x^2y^3+3x-6y+C$ y se concluye que la expresión dada es una diferencial exacta.

Nota. Si se hubiera integrado la segunda ecuación con respecto a "y" se llegaría al mismo resultado.

Bibliografía

Amazigo, John. Rubenfeld, Lester. *Cálculo avanzado (Con aplicaciones a la ingeniería y a la física)*. México. Mc Graw Hill. 1983.

Andrade, Arnulfo. García y Colomé, Pablo. Castañeda Érik. Oregel Felipe. *Cálculo diferencial e integral*. México. LIMUSA Noriega Editores. 2004.

Apostol, Tom. *Calculus (I y II)*. Editorial Reverté. Barcelona, España. 1979.

Ayres, Frank. Mendelson, Elliot. *Cálculo diferencial e integral*. Mc Graw Hill / Interamericana Editores. México. 1991.

Ceder, Jack. Outcalt, David. *Cálculo*. Fondo Educativo Interamericano. USA. 1971.

Edwards, C.H. Penney, David. *Cálculo y geometría analítica*. Prentice Hall Hispanoamericana. México. 1987.

García y Colomé, Pablo. *Funciones hiperbólicas*. Facultad de Ingeniería, UNAM. México. 2000.

García y Colomé, Pablo. *Integrales impropias*. Facultad de Ingeniería, UNAM. México. 2000.

Gillman, Leonard. McDowell, Robert. *Calculus*. W.W. Norton & Company. NY, USA. 1978.

Goldstein, Larry. Lay, David. Schneider, David. *Cálculo y sus aplicaciones*. Prentice hall Hispanoamericana. México. 1990.

Grossman, Stanley. *Calculus*. Academic Press. New York, USA. 1981.

Kaplan, Wilfred. *Matemáticas avanzadas para estudiantes de ingeniería*. Fondo Educativo Interamericano. México. 1981.

Lang, Serge. *Calculus of several variables*. Addison-Wesley Publishing Company. USA. 1974.

Larson, Roland. Hostetler, Robert. Edwards, Bruce. *Cálculus with analytic geometry*. D.C. Heath and Company. Lexington USA. 1994.

Larson, Roland. Hostetler, Robert. Edwards, Bruce. *Cálculo I*. Mc Graw Hill / Interamericana Editores. México. 2006.

Larson, Ron. Edwards, Bruce. *Cálculo 2*. Mc Graw Hill / Interamericana Editores. México (China). 2010.

Leithold, Louis. *The calculus with analytic geometry*. Harper & Row, Publishers. New York, USA. 1981.

Maron, I.A. Problemas *sobre Cálculo de una variable (Elementos y teoría).* Paraninfo, Madrid. 1975.

Mizrahi, Abe. Sullivan, Michael. *Calculus and analytic geometry*. Wadsworth Publishing Company. USA. 1982.

O'Neil, Peter. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Volúmenes 1 y 2. Compañía Editorial Continental (CECSA). México. 1994.

Pinzón, Álvaro. *Cálculo I Diferencial y Cálculo II Integral*. Harla. Harper & Row Latinoamericana. México. 1973.

Protter, Murray. Morrey, Charles. *Cálculo con geometría analítica*. Fondo Educativo Interamericano. USA. 1980.

Purcell, Edwin. Varberg Dale. Rigdon, Steven. *Cálculo*. Pearson Educación de México. México, 2007.

Rogawski, Jon. *Cálculo. Una variable*. Editorial Reverté. Barcelona, España. 2012.

Salas, Hille, Etgen. *Calculus (I y II)*. Editorial Reverté. Barcelona, España. 2002.

Simmons, George. *Calculus with analytic geometry*. McGraw Hill Book Company. USA. 1985.

Stewart, James. *Cálculo. Conceptos y contextos*. International Thomson Editores. México. 2009.

Stewart, James. *Cálculo de una variable (Trascendentes tempranas).* International Thomson Editores. México. 1998.

Stewart, James. *Cálculo de varias variables (Trascendentes tempranas).* CENGAGE Learning Editores. México. 2008.

Swokowski, Earl. Olinick, Michael. Pence, Dennis. *Calculus*. PWS Publishing Company. Boston, USA. 1994.

Thomas, George. Finney, Ross. *Cálculo, una variable*. Addison, Wesley, Longman. México. 1998.

Thomas, George. Finney, Ross. *Cálculo, varias variables*. Addison, Wesley, Longman. México. 1999.

Zill, Dennis. Wright, Warren. *Cálculo de varias variables*. Mc Graw Hill / Interamericana Editores. México (China). 2011.