



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO
EN INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD Y
POST-ÓPTIMO EN PROGRAMACIÓN
ENTERA BINARIA 0-1

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN INGENIERÍA
INGENIERÍA DE SISTEMAS – INVESTIGACIÓN

D E O P E R A C I O N E S

P R E S E N T A:

IRMA DEL CARMEN GLINZ FÉREZ

TUTORA: DRA. IDALIA FLORES DE LA MOTA



2008

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	Dr. Ricardo Aceves García
Secretario:	Dr. Carlos Escobar Toledo
Vocal:	Dra. Idalia Flores de la Mota
1er. Suplente:	Dr. Fernando Samaniego Verduzco
2do. Suplente:	Dra. María Auxilio Osorio Lama

Lugar donde se realizó la tesis:

CIUDAD UNIVERSITARIA

TUTORA DE TESIS

DRA. IDALIA FLORES DE LA MOTA

AGRADECIMIENTOS

A Jesús por acompañarme en este largo recorrido por la vida.

A mis hijos por el amor que siempre me han brindado.

A mi nieta porque es el postre de mi vida.

A mi madre porque ha sido un gran ejemplo a seguir.

A mis tutores porque sin su dirección y asesoría no hubiera sido posible concluir este trabajo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme formado profesionalmente y aún en la madurez permitirme transitar con paso firme en el terreno académico.

Goya.....

MOTIVACIÓN

Después de trabajar exitosamente desarrollando aplicaciones de programación entera binaria, principalmente para la industria petrolera, evalué mis alcances laborales y noté que muchos años había padecido de una gran ausencia: Un análisis de sensibilidad que me proporcionara la certeza de estar trabajando en el camino correcto.

Nunca conté con una herramienta que me permitiera consolidar los resultados que obtenía a través de las aplicaciones que desarrollaba. Con frecuencia me preguntaba ¿Hasta qué punto mi solución óptima soporta los cambios del entorno económico de la empresa?, ¿Cuál será la variación máxima permitida en el nivel de los recursos escasos que se asignan?, desafortunadamente no pude utilizar un método que respondiera ¿Qué tan sensibles eran mis soluciones ante los cambios?

Sin embargo, la vida me presentó la maravillosa oportunidad de perfeccionar mi formación profesional y realizar estudios de posgrado.

La maestría me proporcionó las técnicas necesarias para mejorar mis habilidades en modelación matemática y el doctorado me brindó el espacio necesario para desarrollar la tecnología que requerí durante mi desempeño laboral: Un método para realizar el análisis de sensibilidad de las soluciones obtenidas a partir de un modelo binario.

El doctorado también me dio la oportunidad de contribuir a la formación de muchos jóvenes estudiantes y de sentir la gran satisfacción de cumplir con el cometido de mi estancia universitaria.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. Programación entera

1.1 Problema de programación entera.....	1
1.2 Método de ramificación y acotamiento.....	2
1.2.1 Introducción.....	3
1.2.2 Presentación del algoritmo en forma de árbol.....	4
1.3 Algoritmo de Lang y Doig.....	5
1.4 Variación al enfoque básico (Dakin).....	6
1.5 Problemas tipo 0-1.....	8
1.6 Selección de nodos.....	10
1.7 Ejemplo.....	12
1.8 Importancia de la programación entera.....	19
1.9 Conclusión.....	21
1.10 Referencias.....	22

CAPÍTULO 2. Estado del arte del análisis de sensibilidad

2.1 Antecedentes.....	23
2.2 Estructuras para el análisis de sensibilidad.....	26
2.3 Algunas aplicaciones.....	29
2.4 Complejidad.....	30
2.5 Condiciones de optimalidad.....	31
2.5.1 Condiciones Triviales.....	32
2.5.2 Condiciones basadas en las K mejores soluciones.....	32
2.5.3 Condiciones utilizando métodos específicos.....	33
2.5.4 Condiciones basadas en la programación lineal.....	33
2.5.5 Condiciones basadas en la dualidad.....	33

2.6 Conclusión.....	34
2.7 Referencias.....	35

CAPÍTULO 3. Métodos de solución

3.1 Algoritmos y enfoques para el análisis de sensibilidad.....	39
3.2 Determinación de un intervalo de sensibilidad.....	39
3.2.1 Condiciones triviales.....	39
3.2.2 Explotación de las K mejores soluciones.....	40
3.2.3 Condiciones y métodos específicos de eliminación.....	41
3.2.4 Condiciones basadas en la programación lineal.....	43
3.2.5 Condiciones basadas en la dualidad.....	45
3.3 Reoptimización.....	46
3.3.1 Secuencia de dos instancias de un mismo problema.....	46
3.3.2 Secuencia de varias instancias de un mismo problema.....	47
3.4 Determinación del radio de estabilidad.....	48
3.5 Conclusión.....	51
3.6 Referencias.....	51

CAPÍTULO 4. Método propuesto

4.1 Antecedentes.....	54
4.2 Descripción del método.....	57
4.2.1 Ejemplo.....	61
4.3 Casos.....	65
4.3.1 Caso 1. Espacio de soluciones no acotado.....	65
4.3.2 Caso 2. Óptimos alternativos.....	71
4.3.3 Caso 3. Degeneración.....	76
4.4 Una comparación. Método D. - Hooker versus Método propuesto.	80
4.5 Conclusión.....	85
4.6 Referencias.....	86

CAPÍTULO 5. Aplicación

5.1 Presentación.....	87
5.2 Modelo para la presupuestación de capital de PEP.....	87
5.2.1 Descripción del Modelo.....	87
5.3 Resultados.....	101
5.4 Conclusión.....	102
5.5 Referencias.....	102

CONCLUSIONES.....	103
--------------------------	------------

NOTACIÓN.....	105
----------------------	------------

ANEXOS

Anexo 1. Portafolio de Proyectos de Inversión de PEP.....	106
Anexo 2. Modelo Binario.....	121
Anexo 3. Solución Binaria.....	141
Anexo 4. Modelo lineal continuo.....	168
Anexo 5. Solución Lineal continua.....	205
Anexo 6. Análisis de Sensibilidad.....	257
Anexo 7. Modelo Binario Modificado.....	309
Anexo 8. Solución del Modelo Binario Modificado.....	331
Anexo 9. Comparación de las tres soluciones.....	358
Anexo 10. Portafolio Óptimo de Proyectos de Inversión de PEP.....	382

INTRODUCCIÓN

El análisis de sensibilidad para los problemas de optimización combinatoria apareció poco tiempo después de los métodos de resolución exacta. Para los problemas lineales en 0-1, el primer algoritmo fue propuesto a principios de los años 70 y se fundamentó en las técnicas de enumeración implícita.

Posteriormente, otros autores realizaron contribuciones más originales sobre el análisis de sensibilidad, proponiendo trabajos para obtener un intervalo de estabilidad para las soluciones derivadas de un modelo binario.

En la década de los años 90, investigadores rusos publicaron un estado del arte de los trabajos sobre el radio de estabilidad para numerosos problemas de optimización combinatoria.

A diferencia del análisis de sensibilidad de las soluciones de los problemas lineales con variables continuas, que ha sido utilizado exitosamente durante varias décadas, el correspondiente a los problemas lineales con variables enteras o binarias se vuelve más difícil y la mayoría de los algoritmos existentes para tal fin, están dirigidos al análisis de las variaciones de la función objetivo más que a las que pudieran presentar las restricciones o el lado derecho.

El avance tecnológico tan acelerado, que ha presentado el desarrollo de los sistemas computacionales, ha propiciado que se incremente sustancialmente la utilización de las técnicas exactas de programación entera binaria, numerosos problemas industriales han sido resueltos con ellas. La presupuestación de capital, los problemas de transporte y la selección de tecnologías son algunos que por su importancia merecen su mención.

El objetivo de esta investigación es presentar un método novedoso para resolver la problemática que presenta el análisis de sensibilidad de las soluciones binarias, que permita obtener las variaciones máximas permisibles tanto de los coeficientes de la función objetivo como las correspondientes al lado derecho.

La estructuración del contenido de este trabajo es el siguiente: El primer capítulo muestra de una manera muy general en qué consiste la programación entera, sus principales algoritmos de solución y su importancia actual.

A continuación, en el capítulo dos, se documenta el estado del arte del análisis de sensibilidad en problemas lineales 0-1, que muestra la diversidad de trabajos destinados a esta temática y del que se desprenden las principales líneas de investigación que existen en la actualidad.

Los métodos de solución se presentan en el tercer capítulo. Entre ellos destacan los que determinan el intervalo de sensibilidad para una solución, aquellos que simplifican la expresión analítica del radio de estabilidad y los que resuelven la problemática a través del empleo de las técnicas de reoptimización.

El capítulo cuarto describe el método propuesto y presenta una comparación con una de las propuestas más recientes: el método de Dawande y Hooker.

En el quinto capítulo se muestra una aplicación, de este nuevo método, en el modelo para la presupuestación de capital de Pemex Exploración y Producción, que es un modelo binario de gran escala, y finalmente se presentan las conclusiones de la investigación.

RESUMEN

Esta investigación presenta el desarrollo de una tecnología que resuelve el problema del análisis de sensibilidad de las soluciones obtenidas, a partir de un modelo de programación entera binaria pura.

El estado del arte constituye un trabajo desarrollado y actualizado de manera permanente, cuyo principal resultado es determinar las líneas actuales de investigación sobre el análisis de sensibilidad o posóptimo de las soluciones binarias.

La línea de investigación que sustenta esta propuesta doctoral es la reoptimización y su principal innovación corresponde a la utilización de una transformación lineal, que aprovecha las propiedades de la convexidad y migra de una estructura discreta binaria a una continua.

La principal ventaja de este procedimiento sobre los métodos existentes, es que permite obtener, para una solución óptima binaria, la variación máxima permisible tanto de los coeficientes de la función objetivo como del lado derecho.

La bondad de la propuesta metodológica se puso de manifiesto al realizar su aplicación en uno de los modelos binarios, de mayor escala, empleados en México: el modelo de presupuestación de capital de Pemex Exploración y Producción. Los resultados obtenidos tuvieron una excelente aceptación entre los usuarios de este modelo.

Un resultado adicional es, sin lugar a dudas, que variando el dominio de la transformación lineal, la metodología es prácticamente válida para analizar tanto la estabilidad de una solución binaria, como la correspondiente a una solución entera.

SUMMARY

This investigation presents the development of a technology which solves the sensibility analysis problem of the obtained solutions from a binary integer programming model.

The state-of-the-art constitutes a work permanently developed and updated which main result is to determine the current investigation lines on the sensitivity or post-optimums analysis of the binary solutions.

The investigation line this proposal sustains is the re-optimization and its principal innovation corresponds to the use of a linear transformation taking advantage of the properties of the convexity migrating from a binary discrete structure to a continuous structure.

The most important advantage of this procedure over the existing methods is that it enables the maximum permissible variation, for an optimum binary solution, both in the objective function coefficient and the right side.

Kindness of the methodological proposal was evident upon its application in one of the binary models used in Mexico, at larger scale: the capital budgeting model for “Pemex Exploración y Producción”. Results obtained were extraordinarily well accepted among the users of this model.

An additional result is, undoubtedly, that by varying the dominium of the linear transformation, the methodology is practically valid to analyze both the stability of the binary solution and the stability corresponding to an integer solution.

CAPÍTULO 1. PROGRAMACIÓN ENTERA

1.1 Problema de programación entera

La Programación Entera resuelve problemas de asignación de recursos, mediante la aplicación de algoritmos, en aquellas situaciones cuyas variables de decisión no pueden tomar valores fraccionarios.

El modelo matemático para programación entera es sencillamente el modelo de programación lineal con la restricción adicional de que las variables deben tener valores enteros [4]. La representación matricial de un Problema de Programación Entera (PPE), es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar } z = cx & \text{(función objetivo)} \\ \text{sujeto a } Ax \leq b & \text{(restricciones)} \\ \text{donde } x \in Z & \end{array}$$

Los componentes del modelo están dados por:

$$\begin{array}{ll} c = [c_1, c_2, c_3, \dots, c_n]_{1 \times n} & \text{vector de costos} \\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} & \text{variables de decisión} \\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} & \text{matriz de coeficientes tecnológicos} \\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1} & \text{vector de disponibilidades} \end{array}$$

Existen diferentes métodos para resolver un Problema de Programación Entera, entre los que se encuentran:

1. Planos de corte.
2. Enumeración Implícita.
3. Ramificación y Acotamiento
4. Teoría de grupos.

El desarrollo y programación de estos algoritmos no es tarea sencilla y requiere de un alto grado de conocimientos teóricos y computación. Existen numerosos paquetes en el mercado, unos mejores que otros y también unos más caros que otros.

Es importante destacar, que el modelo matemático para la programación entera binaria, es sencillamente el modelo de programación entera con la restricción adicional de que las variables deben ser binarias y su representación es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar } z = cx & \text{(función objetivo)} \\ \text{sujeto a } Ax \leq b & \text{(restricciones)} \\ \text{donde } x = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \end{array}$$

Se trata de un Problema de Programación Entera Binaria (PPEB) porque las variables de decisión x_i sólo pueden tomar uno de dos valores, 0 ó 1, los cuales son valores enteros.

1.2 Método de Ramificación y Acotamiento

En este apartado se muestra el método que presenta la mayor tasa de utilización para resolver problemas enteros.

1.2.1 Introducción

Como cualquier problema acotado de programación entera pura tiene sólo un número finito de soluciones factibles, resulta natural considerar el uso de algún tipo de *procedimiento de enumeración* para encontrar una solución óptima. Desafortunadamente, este número finito puede ser, y casi siempre lo es, muy grande, por lo que es imperativo que cualquier procedimiento de enumeración sólo examine una pequeña fracción de estas soluciones factibles. Un enfoque de este tipo lo proporciona el *método de ramificación y acotamiento*.

Dentro de los métodos de Ramificación y Acotamiento, algunos de los algoritmos disponibles son:

1. Algoritmo de Land y Doig.
2. Algoritmo de Driebeek
3. Algoritmo de costos penales
4. Algoritmo de Kolesar

La idea básica en la que se apoya la técnica de ramificación y acotamiento es *dividir y vencer*. Como es demasiado complicado resolver directamente el problema original “grande”, se divide en subproblemas cada vez más pequeños hasta que estos se puedan vencer. La división (*ramificación*) se hace mediante una partición del conjunto completo de soluciones factibles en subconjuntos más pequeños. La conquista (*sondeo*) se hace en parte *acotando* la mejor solución en el subconjunto y después descartando los subconjuntos cuya cota indique que no es posible que contenga una solución óptima para el problema original.

1.2.2 Presentación del Algoritmo en Forma de Árbol

Generalmente los algoritmos enumerativos son fáciles de entender si se presentan gráficamente en un árbol, compuesto de *nodos* y *ramas*. Un nodo corresponde a un punto n_j y una rama une al nodo n_j con el nodo n_{j+1} . Debido a que x_k puede tomar uno de entre varios valores, es posible tener varias ramas surgiendo de un nodo n_j . La figura 1.1 muestra un ejemplo de nodos y ramas, en ella, los nodos numerados 8, 9 y 10 fueron creados fijando x_1 , una variable libre del nodo 5 en los valores 3, 4 y 2 respectivamente. Nodos como estos tres, que no tienen por el momento otros nodos que dependan de ellos, o equivalentemente, que no producen ramas, son llamados *suspendidos*.

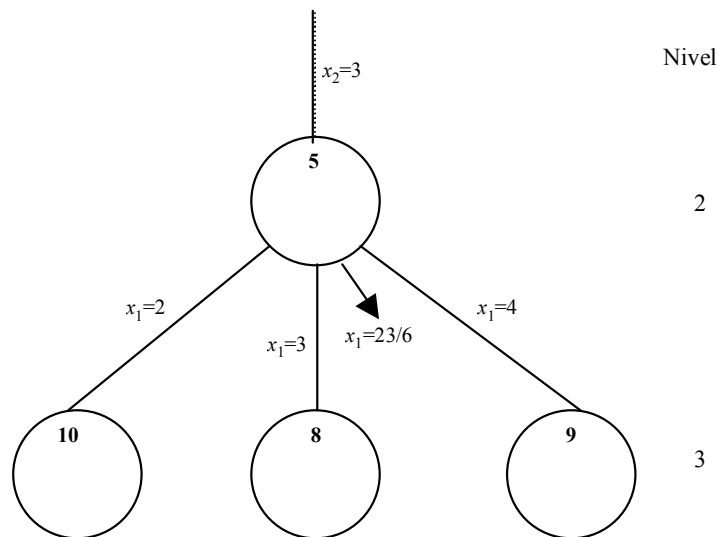


FIGURA 1.1

Suponiendo que en la solución óptima del subproblema del nodo 5, el valor de x_1 es $23/6$; al fijar x_1 al siguiente entero más pequeño y más grande, se obtienen los nodos 8 y 9, y de esta manera se continúa con el procedimiento.

Cuando un Problema de Programación Entera (PPE) en cualquier nodo es infactible, todos los subproblemas ya sea a la izquierda o a la derecha de éste son también no factibles.

1.3 Algoritmo de Land y Doig [5]

El primer algoritmo de ramificación y acotamiento fue desarrollado por A. Land y G. Doig, en 1960, para el problema de programación lineal entera mixta y pura. Este algoritmo corresponde a la técnica más utilizada, en la cual la ramificación se refiere a la parte enumerativa de la solución y el acotamiento refleja la comparación de las posibles soluciones con una cota superior o inferior, según sea el caso.

Enfoque Básico

Paso 1. Inicialización.

Definir z^* como la mejor solución actual al PPE, asignándole un valor predeterminado o arbitrario que sea pequeño. El nodo inicial, con todas sus variables libres, es $n_0 = (x_1, \dots, x_n)$. Se resuelve el problema LP_0 . Si éste es infactible, también lo será el PPE, por lo tanto termina. Si la solución óptima es entera, parar, se ha encontrado la solución óptima al PPE. De otra manera, establecer $n_1 = n_0$.

Paso 2. Ramificación.

De la solución óptima (x_1, \dots, x_n) en n_j seleccionar una variable x_k cuyo valor no sea aún entero. Fijando a x_k en $[x_k]$ y $[x_k]+1$, definir dos nodos que partan de n_j . Resolver cada uno de los subproblemas de esos nodos. Etiquetar como suspendidos a aquellos nodos (de los recién creados) cuya solución óptima exceda al valor de z^* . Verificar cada nodo en busca de una solución mejor. Si se encuentra alguno, se

registra y todos los nodos suspendidos que no lo excedan en su solución, son eliminados de la lista.

Paso 3. Prueba de terminación.

Si la lista actual de nodos suspendidos está vacía, se ha encontrado la solución óptima al PPE (z^*) o no existe solución, en ambos casos, terminar. En otro caso, continuar.

Paso 4. Acotación.

Elegir el nodo suspendido n_j cuya solución óptima sea la mayor. En caso de empates, romperlos arbitrariamente. Suponer que el punto n_{j-1} define a n_j , (nodo seleccionado) mediante la asignación de $x_k=t$, esto significa que la solución óptima para LP_j es $z(j-1,k,t)$. Posteriormente se iguala z_{j-1} (límite superior de cualquier solución al PPE, a partir de n_{j-1}) a la solución óptima del problema en n_j , es decir $z(j-1,k,t)$. Crear un nodo inmediatamente a la izquierda o derecha de n_j de manera tal que si algún otro nodo suspendido creado a partir de n_{j-1} es seleccionado eventualmente, pueda encontrarse un nuevo valor (no mayor) para z_{j-1} . Eliminar n_j de la lista de nodos suspendidos y regresar al paso 2.

1.4 Variación al Enfoque Básico (Dakin [1])

En el algoritmo de Land y Doig, cada vez que se crea un nodo y se etiqueta como suspendido, su solución óptima y otros parámetros deben ser guardados. El hecho de que existan muchos nodos suspendidos, significa que al ser implementada en computadora esta técnica involucra una gran cantidad de espacio para almacenamiento. Para eliminar esta dificultad, Dakin sugirió que sólo *dos* nodos fueran creados a partir de cada nodo suspendido. Si una solución óptima al PPE es $x_k = t$, donde t es no entero, entonces el primer nodo se crea introduciendo la desigualdad $x_k \leq [t]$ y el segundo es definido por la restricción $x_k \geq [t]+1$. Esto

contrasta con la creación de nodos a través de las igualdades $x_k = [t]$ y $x_k = [t]+1$ además de la definición de otros nodos a la izquierda o derecha de éstos. Cuando el procedimiento de Dakin es adoptado, el árbol obtenido se parece al de la Figura 1.2.

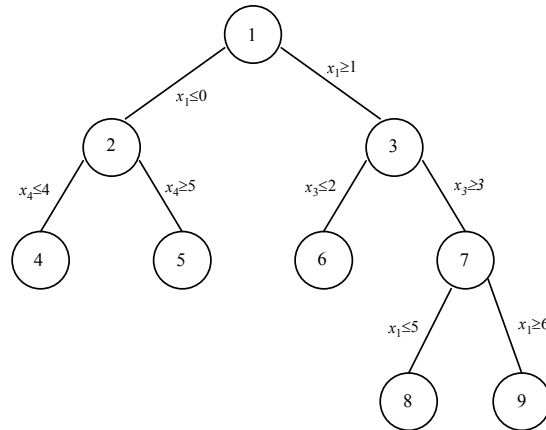


FIGURA 1.2

Debe notarse que puede darse el caso de que más de una restricción opere sobre una variable al mismo tiempo. Por ejemplo, en el nodo 8 se tiene que $x_1 \geq 1$, $x_3 \geq 3$, y $x_1 \leq 5$, y en el nodo 9 $x_1 \geq 1$, $x_3 \geq 3$, y $x_1 \geq 6$. La desigualdad $x_1 \geq 1$ deberá ser omitida en los cálculos del nodo 9 y en otros puntos que se encuentran antes. Además, el restringir una variable a que sea menor o igual que 0, o mayor o igual que el límite superior, significa que dicha variable se fija en 0, o en su máximo valor, respectivamente. En la figura 1.2, $x_1=0$ en el nodo 2.

Al igual que en el algoritmo de Land-Doig, el nodo inicial es denotado por n_0 con todas sus variables libres. El nodo es etiquetado suspendido si su problema de programación es factible y no resuelve aún al PPE. En cualquier punto del algoritmo, el nodo suspendido n_j con la solución factible más grande es seleccionado para definir dos nodos para el siguiente nivel. El subproblema de cada uno de estos nodos, es resuelto. El valor más grande de ambas soluciones se designa como z^j , es decir, el límite superior para cualquier solución encontrada a partir de n_j . Uno de los nodos recién creados es marcado como suspendido si su solución óptima es mayor

que la mejor solución actual (z^*). En caso de encontrarse una mejor solución, se actualiza el valor de z^* , y aquellos nodos que no excedan la solución del subproblema son eliminados de la lista. El proceso termina cuando la lista de nodos suspendidos está vacía.

La variación de Dakin es esencialmente la misma que lo marcado por el algoritmo de Land-Doig, excepto que sólo se crean dos nodos, y no existe un tercer nodo ya sea a la izquierda o derecha del seleccionado.

El algoritmo de Dakin converge puesto que, en el peor de los casos, los nodos serán creados hasta que el rango permitido para las variables enteras sea reducido a cero, en cuyo caso las variables tomarán valores enteros. En particular, si una solución óptima aún no entera tiene como valores $x_1=a_1, x_2=a_2, \dots, x_n=a_n$ etcétera, el procedimiento puede originar un nodo que contenga las siguientes restricciones: $x_1 \geq a_1, x_1 \leq a_1, x_2 \geq a_2, x_2 \leq a_2, \dots, x_n \geq a_n, x_n \leq a_n$ etcétera. Por ejemplo, con relación a la figura 1.4, suponiendo que la solución óptima en el nodo 9 es $x_1=6.3$. Entonces surgen 2 nodos, uno con $x_1 \leq 6$ y el otro con $x_1 \geq 7$. Como $x_1 \geq 6$ y $x_1 \leq 6$, es evidente que el valor de x_1 será 6.

1.5 Problemas Tipo 0 - 1

En caso de que las variables enteras a considerar deban ser iguales a cero o uno, el límite superior u_i se fija en 1 para toda variable x_i . Dado que las restricciones $x_i \leq 0$ y $x_i \geq 1$ equivalen a $x_i=0$ o $x_i=1$, respectivamente, la variación hecha por Dakin es exactamente igual al algoritmo de Land-Doig. Al definir las variables enteras a los valores 0 y 1, surgen sólo dos nodos del nodo seleccionado. El límite superior para cualquier solución encontrada a partir del nodo seleccionado es aquella con valor de las dos soluciones óptimas encontradas (como x_i no puede exceder a 1 en cualquier solución al PPE, las restricciones $x_i \leq 1$ son añadidas a todos los subproblemas).

La figura 1.3 muestra un ejemplo de árbol. Los nodos 2 y 3 han sido definidos por medio del nodo 1 y cada subproblema se resuelve. Ambos nodos se etiquetan como suspendidos, y la solución óptima del nodo 2 es mayor a la obtenida con el nodo 3. De ahí que al crear los nodos 4 y 5, el nodo 2 ya no sea nodo suspendido.

El subproblema de cada nodo (4 y 5) es infactible, y entonces el único nodo que continúa suspendido es el nodo 3, a quien se borra de la lista de nodos suspendidos y se crean los nodos 6 y 7, y así sucesivamente.

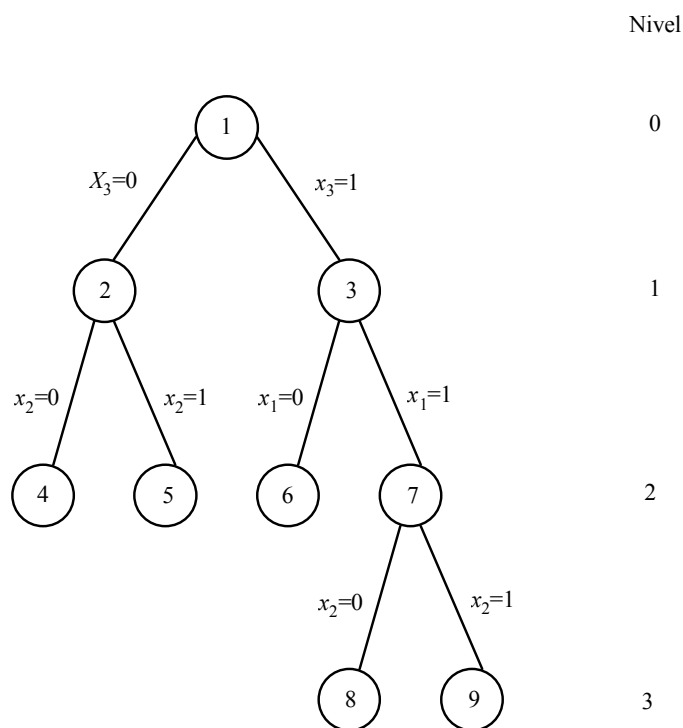


FIGURA 1.3

1.6 Selección de Nodos [6]

En el algoritmo de Land y Doig el nodo suspendido con mejor solución era seleccionado para crear nuevos nodos. Esto con el objeto de encontrar rápidamente una “buena” solución entera. Sin embargo, este procedimiento de selección requiere demasiado espacio de almacenamiento en computadoras. Una segunda regla para la selección es escoger al nodo suspendido que mejor solución tenga, pero que se trate del más recientemente creado.

Considerando la figura 1.4, la solución óptima del nodo 2 es mejor que la del nodo 3, así surgen los nodos 4 y 5. La solución óptima del nodo 5 es mayor que la del 4 (aunque puede ser menor que la solución óptima del nodo 3), se crean entonces los nodos 6 y 7 y así sucesivamente.

Cuando este proceso se detiene, por ejemplo, en el nivel 3, la enumeración retrocede a un nivel j , en el caso del ejemplo $j=2$, y el nodo R es creado y se resuelve su problema lineal. La solución óptima de R es comparada con la de los otros nodos suspendidos que están en el mismo nivel (nodo 4). Se selecciona el punto con mejor solución y el proceso reinicia desde dicho nodo.

Debido a que encontrar “buenas” soluciones para el PPE no siempre es rápido, el proceso tiende a examinar más nodos que en los otros algoritmos. A pesar de ello, cuando el proceso es implantado en computadora, es más fácil recuperar y etiquetar nodos suspendidos. Por ello, se requiere de un esquema que lleve la cuenta de la enumeración (y así, pueda utilizarse menor espacio de almacenamiento en computadora).

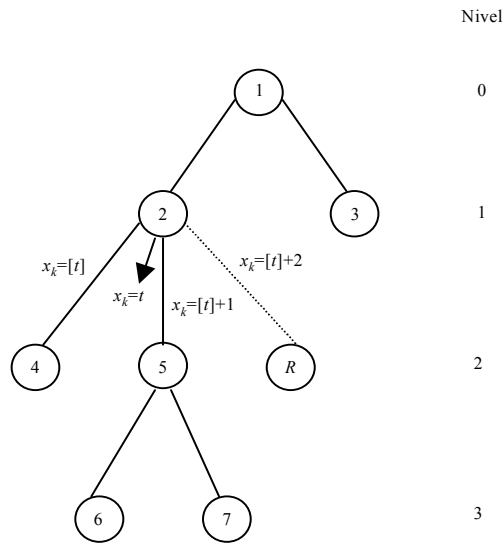


FIGURA 1.4

Para los problemas 0-1, la regla antes mencionada produce árboles como el de la figura 1.5(a). Además, como es posible intercambiar de posición los nodos, el árbol también puede tener la apariencia de la figura 1.5(b). A éstos diagramas se les llama “diagramas de bifurcación y acotación de una sola rama”, mientras que los que utilizan el procedimiento de Land-Doig son “diagramas de bifurcación y acotación de múltiples ramas”.

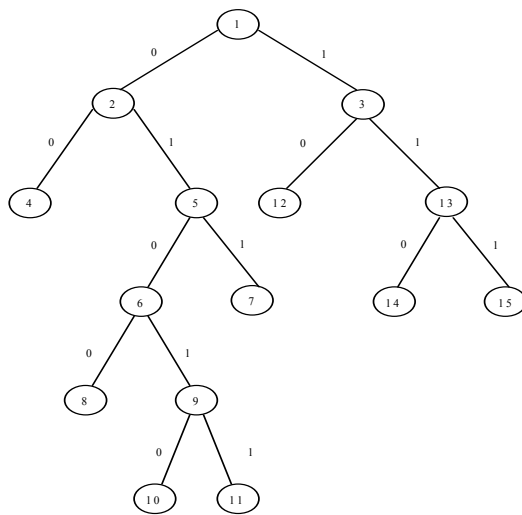


FIGURA 1.5(a)

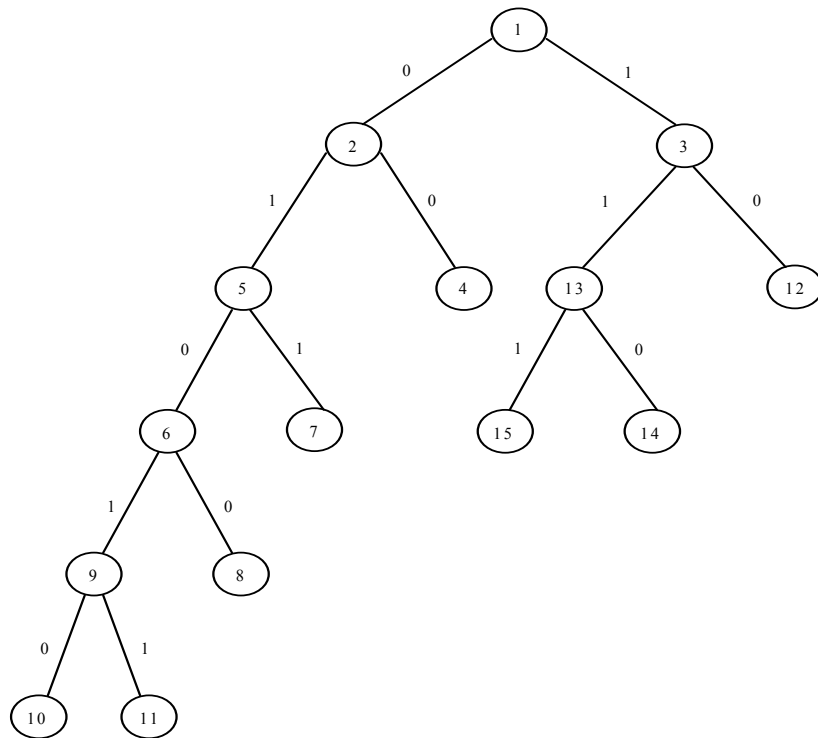


FIGURA 1.5(b)

1.7 Ejemplo [2]

Para ilustrar este procedimiento, se presenta a continuación un ejemplo clásico de su aplicación.

“Una empresa petrolera tiene 5 proyectos de inversión. Cada proyecto i , $i = 1, 2, \dots, 5$ necesita de un determinado número de equipos para la perforación de pozos e_i , y se pronostica que cada proyecto rendirá v_i millones de pesos anuales de utilidad cuando el proyecto esté funcionando.

La empresa cuenta con un total de 91 equipos de perforación de pozos petroleros.

Proyecto i	Requerimiento de equipos (Cantidad) e_i	Retorno anual de la inversión (Millones de pesos) v_i
1	36	54
2	24	18
3	30	60
4	32	32
5	26	13

Los directivos de la empresa deben tomar la decisión de aceptar o rechazar cada proyecto. ¿Cuáles proyectos se deben incluir y cuáles rechazar con el objeto de maximizar el retorno anual?”

El planteamiento matemático de este problema se presenta a continuación:

$$\text{Max } Z = 54X_1 + 18X_2 + 60X_3 + 34X_4 + 13X_5$$

$$\text{sujeto a } 36X_1 + 24X_2 + 30X_3 + 32X_4 + 26X_5 \leq 91$$

$$X_i = 0 \text{ ó } 1 \quad \text{con } i = 1, \dots, 5$$

Para obtener la solución óptima encontraremos en primer lugar una cota para el nodo inicial.

$$X_1 = 91/36 = 2.527 \quad \rightarrow \quad Z_{X1} = 54X_1 = 136.50$$

$$X_2 = 91/24 = 3.791 \quad \rightarrow \quad Z_{X2} = 18X_2 = 68.25$$

$$X_3 = 91/30 = 3.033 \quad \rightarrow \quad Z_{X_3} = 60X_3 = 182$$

$$X_4 = 91/32 = 2.843 \quad \rightarrow \quad Z_{X_4} = 32X_4 = 91$$

$$X_5 = 91/26 = 3.500 \quad \rightarrow \quad Z_{X_5} = 13X_5 = 45.5$$

$$Z = \text{Max} \{ Z_{X_1}, Z_{X_2}, Z_{X_3}, Z_{X_4}, Z_{X_5} \} = 182$$

De esta manera 182 será la cota para el nodo inicial y empezaremos la ramificación con X_3 debido a que tiene el máximo valor.

Nodo 1. Si $X_3 = 1$

$$36X_1 + 24X_2 + 30 + 32X_4 + 26X_5 \leq 91$$

$$36X_1 + 24X_2 + 32X_4 + 26X_5 \leq 91 - 30 = 61$$

$$X_1 = 61/36 = 1.694 \quad \rightarrow \quad Z_{X_1} = 54X_1 = 91.5$$

$$X_2 = 61/24 = 2.541 \quad \rightarrow \quad Z_{X_2} = 18X_2 = 45.75$$

$$X_4 = 61/32 = 1.906 \quad \rightarrow \quad Z_{X_4} = 32X_4 = 61$$

$$X_5 = 61/26 = 2.346 \quad \rightarrow \quad Z_{X_5} = 13X_5 = 30.5$$

$$Z = \text{Max} \{ Z_{X_1}, Z_{X_2}, Z_{X_4}, Z_{X_5} \} = 91.5 + 60 = 151.5$$

Nodo 2. Si $X_3 = 0$

$$36X_1 + 24X_2 + 32X_4 + 26X_5 \leq 91$$

$$X_1 = 91/36 = 2.527 \quad \rightarrow \quad Z_{X_1} = 54X_1 = 136.5$$

$$X_2 = 91/24 = 3.791 \quad \rightarrow \quad Z_{X_2} = 18X_2 = 68.25$$

$$X_4 = 91/32 = 2.843 \quad \rightarrow \quad Z_{X_4} = 32X_4 = 91$$

$$X_5 = 91/26 = 3.500 \quad \rightarrow \quad Z_{X_5} = 13X_5 = 45.5$$

$$Z = \text{Max} \{ Z_{X_1}, Z_{X_2}, Z_{X_4}, Z_{X_5} \} = 136.5$$

Como el nodo 1 tiene el máximo valor se elige para continuar la ramificación.

Nodo 3. Si $X_1 = 1$

$$36 + 24X_2 + 32X_4 + 26X_5 \leq 61$$

$$24X_2 + 32X_4 + 26X_5 \leq 61 - 36 = 25$$

$$X_2 = 25/24 = 1.041 \quad \rightarrow \quad Z_{X_2} = 18X_2 = 18.75$$

$$X_4 = 25/32 = 0.781 \quad \rightarrow \quad Z_{X_4} = 32X_4 = 25$$

$$X_5 = 25/26 = 0.961 \quad \rightarrow \quad Z_{X_5} = 13X_5 = 12.5$$

$$Z = \text{Max} \{ Z_{X_2}, Z_{X_4}, Z_{X_5} \} = 25 + 60 + 54 = 139$$

Nodo 4. Si $X_1 = 0$

$$24X_2 + 32X_4 + 26X_5 \leq 61$$

$$X_2 = 61/24 = 2.541 \quad \rightarrow \quad Z_{X_2} = 18X_2 = 45.75$$

$$X_4 = 61/32 = 1.906 \quad \rightarrow \quad Z_{X_4} = 32X_4 = 61$$

$$X_5 = 61/26 = 2.346 \quad \rightarrow \quad Z_{X_5} = 13X_5 = 30.5$$

$$Z = \text{Max} \{ Z_{X_2}, Z_{X_4}, Z_{X_5} \} = 61 + 60 = 121$$

Como el nodo 3 tiene el máximo valor se ramifica sobre él.

Nodo 5. Si $X_4 = 1$

$$24X_2 + 32 + 26X_5 \leq 25$$

$$24X_2 + 26X_5 \leq 25 - 32$$

$$24X_2 + 26X_5 \leq -7$$

Nodo Infactible.

Nodo 6. Si $X_4 = 0$

$$24X_2 + 26X_5 \leq 25 \quad \rightarrow$$

$$X_2 = 25/24 = 1.041 \quad \rightarrow \quad Z_{X_2} = 18X_2 = 18.75$$

$$X_5 = 25/26 = 0.961 \quad \rightarrow \quad Z_{X_5} = 13X_5 = 12.5$$

$$Z = \text{Max} \{ Z_{X_2}, Z_{X_5} \} = 18.75 + 60 + 54 = 132.75$$

Como el nodo 2 alcanzó el valor máximo se selecciona para continuar la ramificación.

Nodo 7. Si $X_1 = 1$

$$36 + 24X_2 + 32X_4 + 26X_5 \leq 91$$

$$24X_2 + 32X_4 + 26X_5 \leq 91 - 36 = 55$$

$$X_2 = 55/24 = 2.291 \quad \rightarrow \quad Z_{X_2} = 18X_2 = 41.25$$

$$X_4 = 55/32 = 1.718 \quad \rightarrow \quad Z_{X_4} = 32X_4 = 55$$

$$X_5 = 55/26 = 2.115 \quad \rightarrow \quad Z_{X_5} = 13X_5 = 27.5$$

$$Z = \text{Max} \{ Z_{X_2}, Z_{X_4}, Z_{X_5} \} = 55 + 54 = 109$$

Nodo 8. Si $X_1 = 0$

$$24X_2 + 32X_4 + 26X_5 \leq 91$$

$$X_2 = 91/24 = 3.791 \quad \rightarrow \quad Z_{X_2} = 18X_2 = 68.25$$

$$X_4 = 91/32 = 2.843 \quad \rightarrow$$

$$X_5 = 91/26 = 3.5 \quad \rightarrow \quad Z_{X_5} = 13X_5 = 45.5$$

$$Z = \text{Max} \{ Z_{X_2}, Z_{X_4}, Z_{X_5} \} = 91$$

Como el nodo 6 tiene el valor máximo se ramifica a partir de él.

Nodo 9. Si $X_2 = 1$

$$24X_2 + 26X_5 \leq 25$$

$$24 + 26X_5 \leq 25$$

$$26X_5 \leq 25 - 24 = 1$$

$$X_5 = 1/26 = 0.038 \quad \rightarrow \quad Z_{X_5} = 13X_5 = 0.5$$

$$Z = \text{Max} \{ Z_{X_5} \} = 0.5 + 18 + 54 + 60 = 132.5$$

Nodo 10. Si $X_2 = 0$

$$26X_5 \leq 25$$

$$X_5 = 25/26 = 0.961 \quad \rightarrow \quad Z_{X_5} = 13X_5 = 12.5$$

$$Z = \text{Max} \{ Z_{X_5} \} = 12.5 + 54 + 60 = 126.5$$

El nodo 9 alcanzó el máximo valor por lo que la ramificación prosigue a partir de él.

Nodo 11. Si $X_5 = 1$

$$26X_5 \leq 1$$

$$26 \leq 1$$

Nodo Infactible.

Nodo 12. Si $X_5 = 0$

$$26X_5 \leq 1$$

$$0 \leq 1$$

$$Z_{X_5} = 13X_5 = 0$$

$$Z = \text{Max } \{Z_{X_5}\} = 0 + 18 + 54 + 60 = 132$$

Y por lo tanto la solución entera óptima es la siguiente:

$$X_3 = 1, X_1 = 1, X_4 = 0, X_2 = 1 \text{ y } X_5 = 0$$

Esta solución significa que la empresa decidió realizar los proyectos 1,2 y 3 que se presentan a continuación.

Proyecto i	Requerimiento de equipos (Cantidad) e_i	Retorno anual de la inversión (Millones de pesos) v_i
1	36	54
2	24	18
3	30	60
	<hr/> 90	<hr/> 132

El valor óptimo de nuestra función objetivo en el nodo 12 fue $Z = 132$ y los tres proyectos demandan un requerimiento de 90 equipos de perforación, el cual cumple con la restricción de que la empresa cuenta únicamente con 91 equipos.

Comparemos ahora el problema original y su solución óptima:

Problema original

$$\text{Max } Z = 54X_1 + 18X_2 + 60X_3 + 34X_4 + 13X_5$$

$$\text{s.a. } 36X_1 + 24X_2 + 30X_3 + 32X_4 + 26X_5 \leq 91$$

$$X_i = 0 \text{ ó } 1 \quad i = 1, \dots, 5$$

Solución entera óptima (Nodo 12):

$$Z = 54X_1 + 18X_2 + 60X_3 = 132$$

$$\text{s.a. } 36X_1 + 24X_2 + 30X_3 = 90 \leq 91$$

$$X_i = 1 \quad i = 1, 2, 3$$

En la figura 1.6 se presenta en forma esquemática el problema ejemplo que se acaba de resolver.

1.8 Importancia de la Programación Entera

A pesar de décadas de extensas investigaciones, la experiencia en cómputo con programas enteros lineales no había sido satisfactoria. No fue sino hasta la década de los 90s que la explosión tecnológica de la informática hizo realidad el sueño de

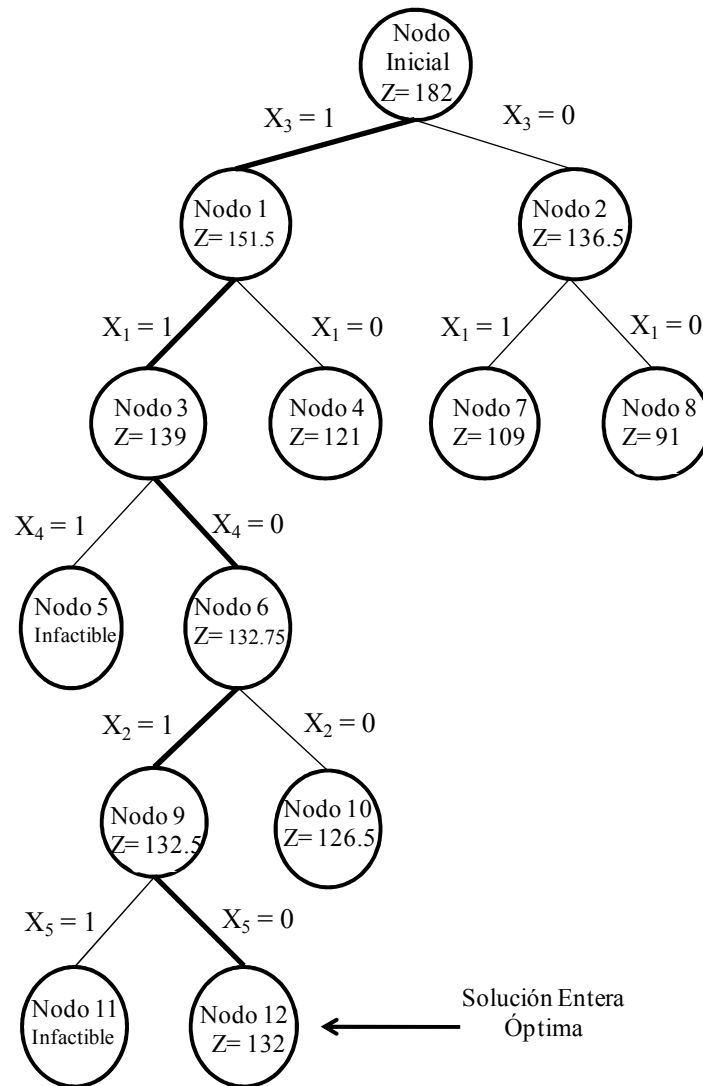
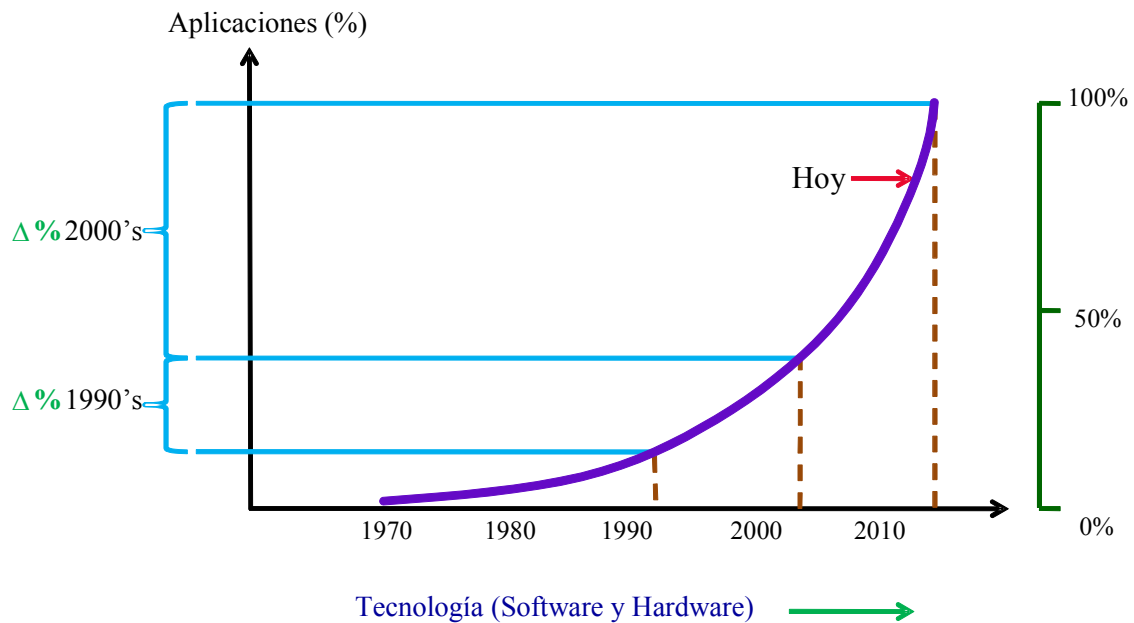


FIGURA 1.6

muchos investigadores, brindando sistemas avanzados para resolver los problemas enteros, en tiempos de cómputo aceptables.

El incremento en el número de aplicaciones ha sido notable [3]. En la actualidad las principales industrias del mundo emplean las técnicas de optimización en su proceso administrativo. Los procedimientos para la asignación de recursos se apoyan, cada día con mayor frecuencia, en modelos de programación matemática.

La tendencia creciente de la utilización de la programación entera se puede observar en la gráfica 1.1.



GRÁFICA 1.1 Uso de la Programación Entera

1.9 Conclusión

Se han presentado de manera muy breve, los principales algoritmos de la programación entera, que actualmente constituye una de las herramientas de resolución de modelos matemáticos, cuya tasa de utilización muestra una tendencia con un crecimiento significativo.

Este crecimiento se ha debido, sin lugar a dudas, a la acelerada evolución de los sistemas computacionales.

1.10 Referencias

1. Dakin, R. *A tree search algorithm for mixed integer programming problems*. Computer Journal, 1965.
2. Glinz, I. *Optimización petrolera*. México, UNAM, Facultad de Ingeniería. 2005.
3. Greenberg H. *Tutorials on Emerging Methodologies and Applications in Operations Research*, Springer 2007
4. Hillier, F. y Lieberman, J. *Investigación de Operaciones*. Séptima Edición, McGraw-Hill Interamericana. 2004
5. Land A. y Doig A.; *An automatic method for solving discrete programming problems*, Econométrica, 1960
6. Salkin, H. *Integer programming*. Addison-Wesley. 1975

CAPÍTULO 2. ESTADO DEL ARTE DEL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

2.1 Antecedentes

El análisis de sensibilidad para los problemas lineales en 0-1 tiene más de treinta años, y fue Roodman el primero en presentar en 1972 un primer enfoque para abordar el problema del análisis de sensibilidad en un contexto específico, apoyándose en el algoritmo de enumeración implícita de Balas [1].

Posteriormente, otros autores propusieron primero mejoras al algoritmo de Roodman y después contribuciones más originales sobre el análisis de sensibilidad. Todos esos trabajos se enfocaron esencialmente al “intervalo de estabilidad” y a la “reoptimización”.

Paralelamente y a mediados de los años 70, apareció otro concepto del análisis de sensibilidad llamado “radio de estabilidad”. Este concepto teórico fue introducido por primera vez por Leontev [21]. Numerosos trabajos se orientaron al estudio del “radio de estabilidad” y del “análisis de estabilidad” que son en realidad propios de la literatura rusa. Hay que resaltar que el conjunto de trabajos de esta literatura fue de difícil acceso a la comunidad occidental por mucho tiempo. En un artículo publicado a mediados de los años 90, Sotskov, Leontev y Gordeev [32] presentan un estado del arte de los trabajos sobre el radio de estabilidad para numerosos problemas de optimización combinatoria y una centena de referencias bibliográficas esencialmente en ruso.

Dado un problema de optimización combinatoria (P), el análisis post-óptimo, el análisis de sensibilidad, ó el análisis de estabilidad de una solución de (P), son términos para designar el estudio de la estabilidad de una solución en función de la evolución de los datos del problema, o bien el estudio de las posibilidades de resolución eficaz de un problema (P') obtenido a partir de (P) modificando una parte de los datos (reoptimización).

Esta problemática tratada desde hace tiempo para los problemas lineales con variables continuas se vuelve más difícil cuando las variables son enteras.

Diversas síntesis sobre el análisis de sensibilidad en optimización combinatoria fueron efectuadas por Geoffrion, Nauss, Gusfiel, Holm y Klein [8, 13, 16]. Geoffrion y Nauss [8] presentan el estado del análisis de sensibilidad en sus inicios en los años 70. La principal contribución de estos autores se enfocó hacia la parametrización [3, 5, 6, 8, 12, 17, 18, 25, 26]. Para el caso de problemas lineales con números enteros una síntesis más rica fue hecha por Holm y Klein [16].

En la tabla 2 se puede observar cómo han evolucionado las líneas de investigación, en la década de los 70's la mayoría de los autores se enfocaron al estudio de las condiciones de optimalidad. Posteriormente en los 80's y los 90's, las investigaciones giraron alrededor de las variaciones permisibles tanto en la función objetivo como en las restricciones, y también se iniciaban algunos esfuerzos por incursionar en la reoptimización repetitiva.

Fue hasta el inicio del nuevo siglo, cuando el asombroso avance de la tecnología informática hizo posible la generación de sistemas más eficientes para la solución de algunos problemas de programación matemática y como consecuencia la reoptimización repetitiva cobró relevancia.

Es conveniente señalar que durante este periodo, se iniciaron las investigaciones que incluían el manejo de cláusulas lógicas para la obtención del análisis de sensibilidad en los problemas lineales enteros y particularmente los binarios.

TABLA 2.1 Estado del Arte (Principales autores)

	Autores	Condiciones de Optimalidad	Variación en las Restricciones	Variación en la Función Objetivo	Reoptimización Repetitiva	Cláusulas Lógicas
70's	Shapiro	X				
	Roodman	X				
	Garfinkel	X				
	Nemhauser	X				
	Fisher	X				
	Piper	X				
	Zoltners	X				
	Northup	X				
	Libura	X				
	Bell	X				
	Klein	X		X		
	Holm	X		X		
	Leontev				X	
	80's	Farjan			X	
Schrage			X			
Wolsey			X			
Cook			X			
Gerards			X			
Schriver			X			
Winter				X		
Desrochers					X	
Soumis				X		
Gordeev				X		
90's		Kovaliev				X
	Sotskov				X	
	Gal		X			
	Greenberg		X			
	Wagelmans				X	
	Libura			X		
	Van Der Poort			X		
	Sierksma			X		
	Blair		X			
	Chakravarty			X		
00's	Plateau				X	
	Nagih				X	
	Thiongane				X	
	Klabjam			X		
	Hall				X	
	Guzeloy				X	
	Ralphs				X	
	Nielsen				X	
	Frangioni				X	
	Dawande					X
	Osorio					X
	Hooker					X

El interés central de este capítulo gira alrededor de los diferentes aspectos relativos al análisis de sensibilidad para los problemas lineales con variables 0-1, agregando algo sobre la reoptimización. Esta síntesis se apoya en numerosos trabajos mencionados por Greenberg [11] y pone mayor énfasis sobre las

modificaciones de los datos correspondientes a la función objetivo. La parte de los trabajos publicados sobre el análisis de sensibilidad referente a la función objetivo es más importante que aquella enfocada a las restricciones.

En esta sección, se abordan las diferentes estructuras de análisis de sensibilidad para los problemas lineales 0-1, posteriormente se presentan algunos ejemplos de aplicaciones.

A continuación se muestra la complejidad del análisis de sensibilidad de los problemas de optimización combinatoria, lo cual conduce al estudio de las condiciones de optimalidad, que constituyen los fundamentos de la mayor parte de los algoritmos existentes sobre el análisis de sensibilidad. Finalmente se mencionan algunas perspectivas de investigación actual en el campo del análisis de sensibilidad.

2.2 Estructuras para el análisis de sensibilidad

Sea $c \in R^n$. Se considera el problema lineal definido por:

$$(P) \max cx \\ s.a. \quad x \in X \subset \{0,1\}^n$$

Sea $x^* \in \Omega(P)$ donde $\Omega(P)$ designa el conjunto de las soluciones óptimas de (P).

Se define entonces la región de estabilidad R de la solución x^* por

$$\mathfrak{R} = \left\{ (c', X') \mid c' \in R^n, X' \subset \{0,1\}^n, x^* \in \Omega(P') \right\}$$

donde (P') es el problema siguiente

$$(P') \max c'x \\ s.a. \quad x \in X' \subset \{0,1\}^n$$

De hecho \mathfrak{R} representa el conjunto de todas las combinaciones de los datos que hace la solución x^* óptima. En general es muy difícil definir el conjunto \mathfrak{R} . Con frecuencia solamente se busca describir un subconjunto como el intervalo de sensibilidad de $c_k, k \in \{1, K, n\}$, o bien el radio y el centro de estabilidad. Cuando $(c', X') \notin \mathfrak{R}$, en vez de resolver (P') de manera directa, puede ser interesante intentar resolverlo explotando la solución de (P) a fin de disminuir el tiempo de ejecución; se habla entonces de reoptimización.

2.2.1 El intervalo de sensibilidad

Sean $k \in \{1, K, n\}, [\underline{c}_k, \bar{c}_k]$ un intervalo de \mathbb{R} que contiene c_k , y $c' \in \mathbb{R}^n$ tal que $c'_j = c_j$ para todo $j \in \{1, K, n\} \setminus \{k\}$ y $c'_k \in [\underline{c}_k, \bar{c}_k]$ con $c'_k \neq c_k$.

Sea

$$(P') \max c'x \\ \text{s.a. } x \in X \subset \{0,1\}^n$$

Se dice que $[\underline{c}_k, \bar{c}_k]$ es un intervalo de sensibilidad, o intervalo de tolerancia, para el coeficiente c_k , si para todo c'_k en $[\underline{c}_k, \bar{c}_k]$, $x^* \in \Omega(P')$. Dada una solución óptima, el intervalo de sensibilidad de un coeficiente es por tanto un intervalo de valores en los cuales esta solución se mantiene óptima. Si para todo valor $c'_k \notin [\underline{c}_k, \bar{c}_k], x^*$ deja de ser óptimo, entonces $[\underline{c}_k, \bar{c}_k]$ es un intervalo de sensibilidad exacto para el coeficiente c_k .

Es igualmente posible intentar determinar un intervalo de sensibilidad para varios coeficientes a la vez. Por otro lado, como el conjunto X se expresa por un sistema de restricciones, el intervalo de sensibilidad puede involucrar un coeficiente de las restricciones o del segundo miembro de las restricciones.

2.2.2 La reoptimización

Supóngase que el problema (P) fue resuelto. Sea (P') el problema definido a partir de (P) después de modificar una parte de los datos, se supone en particular que (P') está definido a partir de (c', X) o de (c, X') , con $c' \in \mathbb{R}^n$ y $X' \subset \{0,1\}^n$. La reoptimización consiste en el estudio teórico y algorítmico de las posibilidades de resolver (P') explotando la resolución de (P). La reoptimización será más eficaz en tanto que la resolución de (P) se haya efectuado desde la perspectiva de resolver (P') y que información pertinente haya sido salvaguardada para ser reexplotada.

Es importante destacar que el trabajo que se presenta corresponde a esta línea de investigación.

2.2.3 El radio y el centro de estabilidad

La definición del radio y del centro de estabilidad está exclusivamente reservada a la función objetivo c y por tanto no involucra al conjunto X . Se considera una distancia sobre \mathbb{R}^n , en particular la distancia de Chebyshev d definida por;

$$d(c, c') = \max \{ |c_j - c'_j|, j \in \{0, K, n\} \}$$

donde c y c' son vectores de \mathbb{R}^n .

Se dice que $O_\rho(c) = \{c' \in \mathbb{R}^n \mid d\{c, c'\} \leq \rho\}$ es un centro de estabilidad de centro $c \in \mathbb{R}^n$ y de radio $\rho \geq 0$ si para todo $c' \in O_\rho(c)$, $\Omega(P') \subseteq \Omega(P)$ donde (P') es el problema definido por (c', X) .

El radio de estabilidad $\rho(c)$ está por tanto definido como la más grande $\rho \geq 0$ tal que $O_\rho(c)$ es un centro de estabilidad.

2.3 Algunas aplicaciones

El interés del análisis de sensibilidad se pone en evidencia cuando en la modelación de problemas reales ciertos datos de la función objetivo a optimizar son todavía imprecisos al momento del estudio y se tienen que considerar estimaciones. En un problema de inversiones es raro que se pueda conocer precisamente el monto del retorno sobre la inversión de un proyecto. Con frecuencia se tiene que consultar un experto para evaluar ese monto con un intervalo de incertidumbre. Entonces puede ser interesante hacer la relación entre este intervalo de incertidumbre y el intervalo de sensibilidad.

Otra aplicación se presenta cuando existe un ambiente dinámico que influye sobre los valores de los datos del problema, como es el caso del problema de dimensionamiento de lotes en horizonte infinito, que fue analizado por Hoesel y Wagelmans [15]. En este problema se consideran T períodos consecutivos $1, \dots, T$ y un conjunto de pedidos de fabricación de un producto sobre esos periodos. El costo total de cada periodo es calculado en función del costo de producción y del costo de almacenamiento durante este periodo. El primero está compuesto de un costo fijo si ha habido producción durante el periodo y de un costo unitario de producción.

Suponiendo que todos los datos son conocidos, el problema de dimensionamiento de lotes consiste en satisfacer la demanda al menor costo. Considérese el contexto en donde este problema ha sido resuelto y supóngase que el plan de producción resultante de la resolución está en proceso de ejecución; es decir que se sitúa entonces en el periodo $t < T$. Supóngase ahora que la información sobre los datos del periodo $T + 1$ están disponibles. Entonces se querría saber si el plan de producción inicial debe ser revisado o si puede quedar sin cambios. En otras palabras se trataría de estudiar el análisis de sensibilidad de la planeación original de producción.

En un contexto más teórico el análisis de sensibilidad puede servir para acelerar un esquema de resolución en el cual el conocimiento del intervalo de sensibilidad de una solución evita resoluciones inútiles, o en el cual una resolución de un problema puede ser acelerado por reoptimización, como es el caso en la resolución de un problema de parametrización por un enfoque de encuadramiento analizado por Jenkins y Naus [18, 26].

2.4 Complejidad

Para la mayoría de los problemas de optimización combinatoria a la inversa de los problemas lineales con variables continuas, los problemas ligados al análisis de sensibilidad son NP-duros.

Gordeev [9] mostró que aunque el problema del camino más corto sea polinomial, la determinación del radio de estabilidad es NP-duro.

Cuando el problema (P) es un problema de maximización de una forma lineal binaria

$$(P) \max cx \\ s.a. \quad x \in X \subset \{0,1\}^n$$

donde $c \in \mathfrak{R}_+^n$, Van Hoesel y Wagelmans [14] mostraron que la existencia de un algoritmo polinomial para determinar los intervalos de sensibilidad de los coeficientes c_k implica la existencia de un algoritmo polinomial para resolver (P).

Para esto es necesario basarse en las siguientes hipótesis:

(H₁) para todo $c' \in \mathfrak{R}_+^n$ se puede determinar en tiempo polinomial una solución $x' \in X$ tal que $x'_j \geq x_j, j = 1, K, n$, para todo $x \in X$

(H₂) para todo $c' \in \mathfrak{R}_+^n$, se puede determinar en tiempo polinomial el intervalo de sensibilidad asociado a c'_k para todo $k = 1, K, n$.

Para mostrar el resultado se procede en dos grandes fases. Sea x' que cumple con la propiedad definida en la hipótesis (H_1). Se construye una instancia (P'') definida a partir de (c'', X) y tal que $x' \in \Omega(P'')$. Para hacer esto se toma c'' tal que $c''_j = c_j$ si $x'_j = 1$ y $c''_j = M$ si $x'_j = 0$ con $M = \min\{c_j - 1, j = 1, K, n\}$.

La segunda fase consiste en construir una sucesión de instancias a partir de (P''), hasta obtener la instancia (P). Cada instancia no se diferencia de la precedente más que por un coeficiente de índice j . El objetivo es hacer pasar un coeficiente igual a M al valor c_j . El número de instancias generadas será a lo más igual a n . La hipótesis (H_2) permite entonces determinar en tiempo polinomial una solución óptima de la instancia actual. Por consecuencia, una solución óptima de (P) será obtenida en tiempo polinomial. Así, a menos que $P = NP$, la determinación del intervalo de sensibilidad de los coeficientes de un problema lineal en 0-1 es NP-duro.

2.5 Condiciones de optimalidad

La mayoría de los algoritmos y enfoques existentes para el análisis de sensibilidad se basan en condiciones de optimalidad como las planteadas por Libura [23]. En programación lineal existe una condición necesaria y suficiente de optimalidad que está basada en el signo de los costos reducidos de las variables que están fuera de la base. En ese caso, el análisis de sensibilidad parte del intervalo obtenido a partir de esta condición de optimalidad. Para un buen número de problemas de optimización combinatoria, no existen condiciones necesarias y suficientes de optimalidad.

A menudo es expresando cuidadosamente, para problemas específicos, las condiciones suficientes de optimalidad para construir un algoritmo relativo al análisis de sensibilidad. Cinco tipos de condiciones se encuentran con frecuencia en la literatura:

2.5.1 Condiciones Triviales

Las condiciones triviales de optimalidad pueden formularse como sigue:

$$x^* \in \Omega(P) \Leftrightarrow x^* \in X \text{ y } cx^* \geq cx \forall x \in X$$

De manera general todos los algoritmos para el análisis de sensibilidad se apoyan, entre otras, en estas condiciones.

2.5.2 Condiciones basadas en las K mejores soluciones

Se suponen determinadas las K mejores soluciones x^1, \dots, x^K del problema

$$(P) \max cx \\ \text{s.a. } x \in X \subset \{0,1\}^n$$

más precisamente, $cx^1 \geq \dots \geq cx^K$ y $x^1 \in \Omega(P)$. Sean $c' \in \mathbb{R}^n, c' \neq c$ y (P') el problema obtenido al remplazar c por c' en (P) .

Piper y Zoltners [27] explotaron la siguiente propiedad. Sea $i \in \{1, \dots, K\}$:

$$\text{Si } c'x^i \geq c'x \forall x \in \{x^1, \dots, x^K\} / \{x^i\}, \text{ y } c'x^i \geq z(c'),$$

donde

$$z(c') = \max \{c'x \mid cx \leq cx^K, x \in X\}$$

entonces

$$x^1 \in \Omega(P').$$

En la práctica, para verificar si $\{x^1, \dots, x^K\}$ contienen una solución óptima para el problema (P') , los autores consideran generalmente un gradiente de $z(c')$ resolviendo una relajación de $\max \{c'x \mid cx \leq cx^K, x \in X\}$.

2.5.3 Condiciones utilizando métodos específicos

En los métodos de optimización, ya sean clásicos o específicos, existen condiciones particulares que cuando son verificadas garantizan la optimalidad de la solución obtenida.

Ramificación y Acotamiento por ejemplo es un método de resolución que consiste en explorar el espacio de soluciones del problema y generar soluciones parciales dirigiendo la exploración hacia subespacios prometedores.

Pruebas de poda, optimalidad y factibilidad, permiten detectar las soluciones parciales no prometedoras. Estas pruebas constituyen condiciones de no optimalidad. Se mostrará más adelante cómo hacer análisis de sensibilidad explotando las condiciones de no optimalidad con un método de Ramificación y Acotamiento.

2.5.4 Condiciones basadas en la programación lineal

Se trata aquí de intentar describir el área convexa de los puntos enteros para poder aplicar los resultados de la programación lineal sobre el análisis de sensibilidad. La descripción de este poliedro es un problema NP-duro, pero sólo una descripción en la vecindad de la solución óptima es necesaria.

2.5.5 Condiciones basadas en la dualidad

En general la dualidad lagrangiana permite obtener solamente un gradiente del valor óptimo del problema (P). Con la teoría de la dualidad convergente es posible construir un problema dual sin salto de dualidad. Cuando el salto de dualidad es nulo se obtiene una solución óptima de (P). En análisis de sensibilidad basado en esta condición de optimalidad consiste en determinar el intervalo de sensibilidad a través de la función dual.

Algunos otros problemas de optimización combinatoria fueron objeto de estudios específicos del radio de estabilidad, principalmente por:

- El problema de Steiner (numerosos algoritmos para determinar el radio de estabilidad para este problema están basados en los algoritmos para los árboles conectores de pesos mínimos, en particular los de Gordeev, Tarjan y Winter [10, 33, 34])
- El problema de ordenamiento analizado por Sotskov y Wagelmans [29, 32]
- El problema de minimización de una forma booleana lineal presentado por Kovalyev y Sotskov [28, 30],
- El problema del agente viajero estudiado por Libura, Van Der Port, Sierksma y Van Der Veen [24].

2.6 Conclusión

Esta síntesis sobre el análisis de sensibilidad dedicado a los problemas lineales 0-1, muestra la diversidad de trabajos destinados a esta temática. Tratando de unificar las diferentes formas de análisis de sensibilidad, un énfasis particular se hizo sobre el análisis de sensibilidad de la función objetivo. Trabajos más específicos sobre el análisis de sensibilidad relativa a las restricciones son detalladas por Cook, Gal, Greenberg, Klein, Holm, Blair, Schrage, Wolsey [4, 7, 19, 28].

Las investigaciones recientes sobre el análisis de sensibilidad se enfocan esencialmente en:

- La explotación de las condiciones de optimalidad en el marco de métodos distintos al de Ramificación y Acotamiento
- La determinación del radio de estabilidad para problemas específicos. La consideración de restricciones estructuradas se traducen en una simplificación del análisis (como se ilustró a través del problema del árbol conector)

- El desarrollo de técnicas para determinar la región de estabilidad de las soluciones ϵ -aproximadas a la solución óptima x . El interés se centra en el conjunto de las variaciones de los datos. Se cita como ejemplo a Kovalyev, Sotskov y Wagelmans [20, 30, 32].
- El estudio de la reoptimización repetitiva que saca provecho de la conexidad de los problemas subyacentes a ciertos algoritmos iterativos. Es posible entonces explotar los resultados sobre la reoptimización de un problema a otro, como se vio cuando un problema es resuelto por ramificación y acotamiento. Pero a menudo es necesario tener una visión global del comportamiento del algoritmo iterativo para construir técnicas de reoptimización eficaces, como la que proporcionan Naus, Thiongane, Nagih y Plateau [26, 35, 36]. La reoptimización repetitiva fue la línea de investigación seleccionada para el desarrollo del método que se propone a través de este trabajo.

2.7 Referencias

1. Balas, E. *An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables*. *Operatios Research*, 13: 517-546, 1965.
2. Blair, C. *Sensitivity analysis for knapsack problems: a negative result*. *Discrete Applied mathematics*, 81: 133-139, 1998.
3. Carstensen, P.J. *Complexity of some parametric integer and network programming problems*. *Mathematical Programming*, 26: 64-75, 1983.
4. Cook, W., Gerards, A.M.H., Schriver, A. y Tardos, E. *Sensitivity theorems in integer linear programming*. *Mathematical Programming*, 34: 251-264, 1986.
5. Crema, A. *An algorithm for the multiparametric 0-1 integer linear programming problem relative to the objective function*. *European Journal of Operational Research*, 125: 18-24, 2000.

6. Crema, A. *The multiparametric 0-1 integer linear programming problem: A unified approach*. European Journal of Operational Research, 139: 511-520, 2002.
7. Gal, T. y Greenberg, H.J. *Advances in sensitivity analysis and parametric programming*. Kluwer Academic Publishers, Boston/ Dordrecht/London, 1997.
8. Geoffrion, A.M. y Nauss, K. *Parametric and postoptimality analysis in integer linear programming*. Management Science, 23: 453-466, 1977.
9. Gordeev, E.N. *Solution stability in a shortest path problem*. Discrete Mathematics 1 (en Russe), 3: 45-56, 1989.
10. Gordeev, E.N. *The complexity of stability study in discrete optimization problems, in: Cybernetics questions 133* (Computer Center of the USSR Academy of Sciences, Moscow, 1989). (En Russe), Pages 41-77, 1989.
11. Greenberg, H.J. *An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer programming and combinatorial optimization*. In D.L. Woodruff (Ed) *Advances in Computational and Stochastic Optimization, Logic Programming and Heuristic Search*, <http://carbon.cudenver.edu/hgreenbe/aboutme/pubrec.html>. Kluwer Academic Publishers, Boston, M.A. 1998.
12. Gusfield, D. *Parametric combinatorial computing and a problem of program module distribution*. Journal of the Association for Computing Machinery, 30(3): 551-563, 1983.
13. Gusfield, G. *Sensitivity analysis for combinatorial optimization*. Memo. No. UCB/ERL M80/22, Electronics Research Laboratory, Univ. of California, Berkeley, Calif., 1980.
14. Hoesel, S.V. y Wagelmans, A. *On the complexity of postoptimality analysis of 0/1 programs*. Discrete Applied Mathematics, 91: 251-263, 1999.
15. Hoesel, S.V. y Wagelmans, A. *Sensitivity analysis of the economic lot-sizing problem*. Discrete Applied Mathematics, 45: 291-312, 1993.
16. Holm, S. y Klein, D. *Three methods for postoptimal analysis in integer linear programming*. Mathematical Programming Study, 21: 97-109, 1984.

17. Jenkins, L. *Parametric methods in integer linear programming*. Annals of Operations Research, 27: 77-96, 1990.
18. Jenkins, L. *Parametric-objective integer programming using knapsack facets and Gomory cutting planes*. European Journal of Operational Research, 31: 102-109, 1987.
19. Klein, D. y Holm, S. *Discrete right hand-side parametrization for linear integer programs*. European Journal of Operational Research, 2: 50-53, 1978.
20. Kovalyev, M.Y. y Sotskov, Y.N. *ε -approximate solution stability of Boolean linear form minimization*. Vesti Akad. Navuk BSSR, Ser. Fiz.-Mat. Navuk 2 (en Russe), 2: 111-116, 1990.
21. Leontev, V.K. *Stability in combinatorial choice problems*. Dokl. Akad. Nauk SSSR (en Russe), 1: 23-25, 1976.
22. Leontev, V.K. *Stability in traveling salesman problem*. At. i. Mat. Fiz. (en Russe), 15: 1298-1309, 1975.
23. Libura, M. *Optimality conditions and sensitivity analysis for combinatorial optimization problems*. Control and Cybernetics, 25(6): 1165-1180, 1996.
24. Libura, M., Van Der Poort, E.S., Sierksma, G. y Van Der Veen, J.A.A. *Stability aspects of the traveling salesman problem based on k -best solutions*. Discrete Applied Mathematics, 87: 159-185, 1998.
25. Loukakis, E. y Muhlemann, A.P. *Parametrisation algorithms for the integer linear programs in binary variables*. European Journal of Operations Research, 17: 104-115, 1984.
26. Nauss, K. *Parametric integer programming*. Western Management Science Institute, UCLA, 1975.
27. Piper, C.J. y Zoltners, A. *Some easy postoptimality analysis for zero-one programming*. Management Science, 22: 759-765, 1976.
28. Schrage, L. y Wolsey, L. *Sensitivity analysis for branch and bound integer programming*. Operations Research, 33: 1008-1023, 1985.
29. Sotskov, Y.N. *Stability of an optimal schedule*. European Journal of Operational Research, 55: 91-102, 1991.

30. Sotskov, Y.N. *The stability of the approximate Boolean minimization of a linear form*. USSR Comput. Math. Phys., 33: 699-707, 1993.
31. Sotskov, Y.N., Leontev, V.K. y Gordeev, E.N. *Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization*. Discrete Applied Mathematics, 58: 169-190, 1995.
32. Sotskov, Y.N., Wagelmans, A.P.M. y Werner, F. *On the calculation of the stability radius of an optimal or an approximate schedule*. Annals of Operatios Research, 83: 213-252, 1998.
33. Tarjan, R.E. *Sensitivity analysis of minimum spanning trees and shortest path trees*. Information Processing Letters, 14: 30-33, 1982.
34. Winter, P. *Steiner problem in networks: A survey*. Networks, 17: 129-167, 1987.
35. Thiongane, B. *Réoptimisation dans le dual lagrangien du biknapsack en variables 0-1*. Thèse de Doctorat en Informatique, Université de Paris 13, 2003.
36. Thiongane, B., Nagih, A. y Plateau, G. *Lagrangean heuristics combined with reoptimization for the 0-1 biknapsack problem*. En revision pour Discrete Applied Mathematics, 2002.

CAPÍTULO 3. MÉTODOS DE SOLUCIÓN

3.1 Algoritmos y enfoques para el análisis de sensibilidad

A continuación se mostrará cómo es posible, apoyándose en las condiciones de optimalidad, construir algoritmos para determinar un intervalo de sensibilidad o para resolver un problema utilizando técnicas de reoptimización.

En el caso del radio de estabilidad, la existencia de una expresión analítica hace que en general no se busque un algoritmo sino más bien un enfoque matemático para simplificar esta expresión compleja.

3.2 Determinación de un intervalo de sensibilidad

En este apartado se resumen los cinco tipos de condiciones descritas en el capítulo anterior.

3.2.1 Condiciones triviales

A continuación se presentan las condiciones de optimalidad para el problema de la mochila unidimensional con variables 0-1, es decir para el caso particular donde

$$X = \{x \in \{0,1\}^n \mid ax \leq b\}$$

con $b, c_j, a_j \in \mathfrak{R}_+$ para todo $j \in \{1, K, n\}$, Libura [11] demostró que los intervalos de sensibilidad de los coeficientes del primer y del segundo miembro de las restricciones se deducen de la construcción del siguiente conjunto:

$$\left\{ (a_1, K, a_n, b) \in \mathfrak{R}_+^{n+1} \mid ax^* \leq b, \sum_{i \in J} a_i > b \forall J \in Q \right\}$$

donde $x^* \in \Omega(P)$ y Q es una familia máxima de subconjuntos $b, c_j, a_j \in \mathfrak{R}_+$ tales que $\sum_{i \in J} c_i > cx^*$. Este resultado se obtiene a partir de la definición de la optimalidad para este contexto específico. Libura no da algoritmo de cálculo de este intervalo de sensibilidad

pero muestra cómo la definición de la optimalidad permite obtener una descripción más formal del intervalo.

3.2.2 Explotación de las K mejores soluciones

Piper y Zoltners [14] proponen un método para determinar un intervalo de sensibilidad relativo a c para los coeficientes de un problema (P) de maximización definido por (c, X) . Suponen que (P) es un problema lineal 0-1 y que $c_k \in [0, +\infty, k \in \{1, K, n\}]$. Entonces el algoritmo de Ramificación y Acotamiento puede ser modificado para generar las K mejores soluciones $\{x^1, \dots, x^K\}$ de (P) . Para hacer esto Piper y Zoltners consideran un parámetro dinámico $\delta > 0$. Ellos proponen efectuar la prueba de poda, pero no en función del valor cx^1 de la mejor solución conocida sino en función del valor $cx^1 - \delta$.

Cuando una K-ésima mejor solución x^K ha sido encontrada por primera vez a lo largo del algoritmo, entonces $cx^1 - \delta$ se reactualiza a cx^K . Así se recuperan las K mejores soluciones que están a una distancia δ del óptimo (se supone una δ inicial suficientemente grande para poder encontrar las K mejores soluciones).

Sea (P') el problema definido a partir de (c', X) donde c' se diferencia de c solamente en el índice K . El análisis de sensibilidad considerado por Piper y Zoltners consiste en determinar el intervalo de sensibilidad de c_k que garantice la propiedad de que una solución óptima (P') se encuentre en el conjunto de soluciones $\{x^1, \dots, x^K\}$. Piper y Zoltners muestran entonces que si una variable está fija en 1 en una solución de este conjunto y en 0 en otra solución de este mismo intervalo, entonces el intervalo de sensibilidad del coeficiente de esta variable es $[0, +\infty]$.

Si por el contrario esta variable se fija en 1 en toda solución del conjunto $\{x^1, \dots, x^K\}$, entonces el intervalo de sensibilidad correspondiente es $[c_k - \delta, +\infty]$ con $\delta = cx^1 - cx^K$.

3.2.3 Condiciones y métodos específicos de eliminación

Los primeros trabajos sobre el análisis de sensibilidad se basaron en condiciones inducidas por los métodos de exploración de ramificaciones, como lo demuestran los estudios de Piper, Zoltners y Roodman, [13, 14, 15, 16].

Al finalizar un método de enumeración implícita o de ramificación y acotamiento, se obtiene un conjunto de soluciones completas (factibles) que contienen la solución óptima y un conjunto de soluciones parciales que fueron podadas por la optimalidad.

Supongamos siempre que en el problema (P) definido por (c, X) los datos $c_j, j \in \{1, K, n\}$ son positivos únicamente para simplificar las explicaciones. Después de la resolución de (P) , se obtiene entonces una ramificación asociada a dos grandes conjuntos: Ec que contiene las soluciones completas y Ep que reagrupa las soluciones parciales.

El principio de análisis de sensibilidad consiste aquí en explotar la información ligada a esta ramificación para determinar el intervalo de sensibilidad de un dato de (P) . Para un coeficiente c_k dado, se busca un intervalo de valores $[\underline{c}_k, \bar{c}_k)$ tal que la solución óptima x^* de (P) no modificando más que el valor de c_k en $[\underline{c}_k, \bar{c}_k)$.

$$(P') \max c'x \\ \text{s.a. } x \in X \subset \{0,1\}^n$$

donde

$$c'_j = c_j, j \in \{1, K, n\} \setminus \{k\}$$

Para determinar este intervalo de sensibilidad se distinguen dos casos: $x_k^* = 0$ (caso 1) y $x_k^* = 1$ (caso 2). En cada caso se obtiene una limitada evidencia del intervalo de sensibilidad. En efecto los datos se están suponiendo positivos, en el primer caso $\underline{c}_k = 0$, en el segundo $\bar{c}_k = +\infty$.

El cálculo del segundo límite del intervalo de sensibilidad reposa de hecho sobre una idea simple. Supongamos que $x_k^* = \varepsilon, \varepsilon \in \{0,1\}$. Entonces la solución x^* se mantiene óptima para (P') mientras sea mejor que la solución obtenida fijando el valor x_k en el valor $1 - \varepsilon$,

lo que se traduce en $\nu(P' | x_k = 1 - x_k^*) \leq \nu(P' | x_k = x_k^*)$ donde $\nu(P' | x_k = 1 - x_k^*)$ (resp. $\nu(P' | x_k = x_k^*)$) designa el valor óptimo de (P') cuando $x_k = 1 - x_k^*$ (resp. $x_k = x_k^*$)

Caso 1 $x_k^* = 0$

La desigualdad se traduce por:

$$\nu(P' | x_k = 1) - c_k + c'_k \leq \nu(P) \quad (*)$$

y \bar{c}_k es por tanto el valor más grande de c'_k tal que $(*)$ es verdadera, es decir que $\bar{c}_k = c_k + \nu(P) - \nu(P' | x_k = 1)$. El cálculo de \bar{c}_k necesita por tanto la resolución de $(P' | x_k = 1)$.

Caso 2 $x_k^* = 1$

La desigualdad se convierte en :

$$\nu(P' | x_k = 0) \leq \nu(P) - c_k + c'_k \quad (**)$$

y \underline{c}_k es el valor más pequeño de c'_k tal que $(**)$ es verdadera, sea $\underline{c}_k = c_k + \nu(P' | x_k = 0) - \nu(P)$. Lo cual requiere la resolución de $(P' | x_k = 0)$.

Es suficiente por tanto explotar la ramificación obtenida al resolver (P) para resolver ya sea $(P' | x_k = 1)$ o $(P' | x_k = 0)$ según sea el caso. En donde el algoritmo de determinación del intervalo de sensibilidad I_k asociado a c_k siguiendo:

1. Resolver (P) por ramificación y acotamiento guardando las soluciones parciales Ep y las completas Ec obtenidas.
2. Sea ε el valor de x_k^* . Efectuar una segunda fase de enumeración a partir de las soluciones parciales de Ep tales que $x_k = 1 - \varepsilon$ y aquellas en las cuales x_k está libre (en este último caso fijar x_k en $1 - \varepsilon$).

Notación:

x^p : la mejor solución así obtenida a partir de Ep .

x^c : la mejor solución de Ec tal que $x_k = 1 - \varepsilon$

x^m : la mejor solución de x^p y x^c , se deduce que:

$$(i) \text{ si } \varepsilon = 0 \text{ entonces } \bar{c}_k = c_k + v(P) - cx^m \text{ y } I_k = [0, \bar{c}_k]$$

$$(ii) \text{ si } \varepsilon = 1 \text{ entonces } \underline{c}_k = c_k + cx^m - v(P) \text{ y } I_k = [\underline{c}_k, +\infty]$$

3.2.4 Condiciones basadas en la programación lineal

Klein y Holm [9] estudiaron el análisis de sensibilidad a partir de las condiciones basadas en la programación lineal. Considérese de nuevo el problema (P) en el cual

$$X = \{x \in \{0,1\}^n \mid Ax \leq b\}$$

con $A \in \mathbb{N}^{m \times n}$ y $b, c \in \mathbb{N}^m$. Se considera una resolución de (P) por un método de cortes, éste consiste en resolver inicialmente el problema (\bar{P}) obtenido liberando las restricciones de integralidad de (P). Como la solución de (\bar{P}) no es binaria, un corte adecuado de Gomory está insertado en el conjunto de las restricciones de (\bar{P}) y se resuelve el nuevo problema (\bar{P}) obtenido. Nótese que (\bar{P}) es el último problema obtenido por el método de cortes.

$$(\bar{P}) \max cx \\ s.a. \quad x \in \bar{X}$$

donde $\bar{X} = \{x \in \{0,1\}^n \mid \bar{A}x \leq \bar{b}\}$. El análisis de sensibilidad parte entonces de la no positividad de los costos reducidos óptimos de las variables fuera de la base. Sea $c - c_B B^{-1} \bar{A} \leq 0$ donde c_B es el vector de costos reducidos de las variables de base y B^{-1} es el inverso de la matriz de base óptima.

Sin embargo este enfoque no ofrece tan buenos resultados teóricos sobre el análisis de sensibilidad como el que permite el caso continuo, debido a que el intervalo de sensibilidad obtenido no es exacto.

Esto se ilustra sobre el ejemplo, con números enteros, presentado por Garfinkel y Nemhauser [7]:

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \max 2x_1 + x_2 \\
 \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 0 \\
 & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Después de la resolución por el método cortes se obtiene el siguiente problema, donde (1), (2) y (3) representan los cortes de Gomory generados por el proceso.

$$\begin{aligned}
 (P') \quad & \max 2x_1 + x_2 \\
 \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 0 \\
 & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 7 \quad (1) \\
 & \quad \quad \quad x_2 \leq 2 \quad (2) \\
 & \quad \quad \quad x_1 + x_2 \leq 4 \quad (3) \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

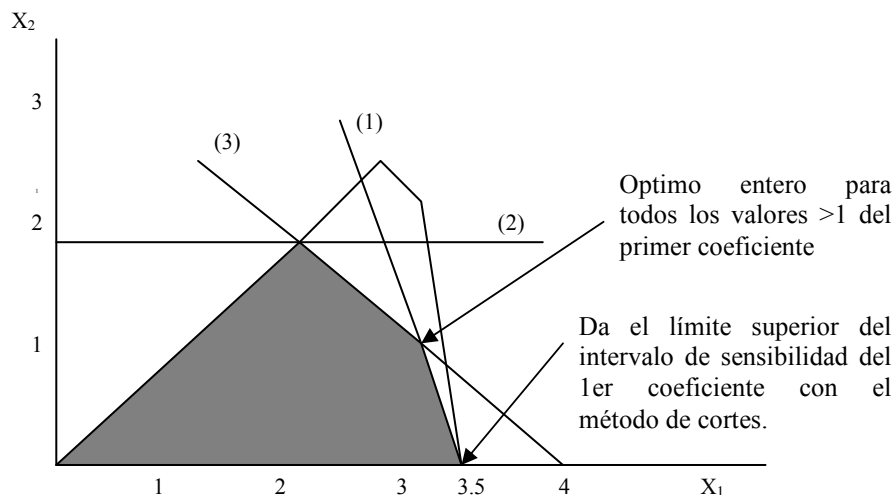


FIGURA 3.1

El problema inicial es resuelto cuando la solución óptima por (3,1) tiene componentes enteros (ver figura 3.1). Cuando el cálculo del intervalo de sensibilidad que se desprende del método de cortes es aplicado, se encuentra que el límite superior del intervalo de sensibilidad asociado a $c_1 = 2$ está limitado por el valor de c_1 asociado al punto extremo adyacente (3.5, 0). Este límite superior no es el límite exacto del intervalo de sensibilidad asociado a c_1 . En efecto para todo valor $c_1 > 1$ la solución $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$ se mantiene óptima.

3.2.5 Condiciones basadas en la dualidad

Este enfoque, debido a Bell y Shapiro [1], consiste en hacer el análisis de sensibilidad de la función objetivo del problema (P) , basándose en las condiciones de optimalidad de la teoría de la dualidad convergente. Los autores consideran el problema de la mochila multidimensional, el problema (P) en el cual $X = \{x \in \{0,1\}^n \mid A_1 x \leq b_1, \mathbf{K}, A_m x \leq b_m\}$, con $c, A_1, \mathbf{K}, A_m \in \mathbb{N}^n$ y $b_1, \mathbf{K}, b_m \in \mathbb{N}$. Dado $u \in \mathfrak{R}_+^s$, donde $s \in \{1, \mathbf{K}, m-1\}$, se presenta la relajación Lagrangeana de (P) asociada al dual de las s primeras restricciones:

$$(RL(u)) \max_{s.a. \ x \in X_{RL}} \sum_{i \leq s} u_i b_i + \left(c - \sum_{i \leq s} u_i A_i \right) x$$

donde $X_{RL} = \{x \in \{0,1\}^n \mid A_{s+1} x \leq b_{s+1}, \mathbf{K}, A_m x \leq b_m\}$ y el dual Lagrangeano se define por

$$(D) \min_{s.a. \ u \in \mathfrak{R}_+^s} \nu(RL(u))$$

con $\nu(D) \geq \nu(P)$.

Fisher, Northup y Shapiro [5, 6, 17] afirman que la teoría de la dualidad convergente es un método constructivo que consiste en generar una secuencia de problemas que converjan hacia un problema dual (D) tal que $\nu(D) = \nu(P)$.

El cálculo del intervalo de sensibilidad propuesto por Bell y Shapiro [28] consiste en un coeficiente c_k tal que $x_k^* = 0$, donde x^* designa la solución óptima (P) , entonces se tiene que el intervalo de sensibilidad está dado por $I_k = [0, \bar{c}_k]$. El cálculo de \bar{c}_k se desprende de la desigualdad $\nu(RL'(u^*) \mid x_k = 1) \leq \nu(RL'(u^*) \mid x_k = 0)$ donde u^* y (RL') designan respectivamente al multiplicador óptimo solución de (D) , el problema (RL) en el cual el coeficiente c_k es reemplazado por $c_k' \geq 0$.

Se tiene entonces por un lado, $\nu(RL'(u^*) \mid x_k = 0) = \nu(D)$, y por el otro lo siguiente:

$$\nu(RL'(u^*) \mid x_k = 1) = \sum_{1 \leq i \leq s} u_i^* b_i + \left(c_k' - \sum_{1 \leq i \leq s} u_i^* A_{ik} \right) + \nu(H) \quad \text{donde } (H) \text{ está definido por}$$

$$\begin{aligned}
(H) \quad & \max \sum_{j \in \{1, K, n\} / \{k\}} \left(c_j - \sum_{1 \leq i \leq s} u_i^* A_{ik} \right) x_j \\
& s.a. \quad \sum_{j \in \{1, K, n\} / \{k\}} A_{ij} x_j \leq b_i - A_{ik} \quad i = s + 1, K, m \\
& \quad \quad x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \{1, K, n\} / \{k\}
\end{aligned}$$

Así \bar{c}_k se obtiene a partir del valor más grande de c_k' tal que (*) es verdadero, es decir

$$I_k = \left[0, v(D) - v(H) - \sum_{1 \leq i \leq s} u_i^* (b_i - A_{ik}) \right]. \text{ Esto requiere de la resolución del problema } (H).$$

Posteriormente, Dawande y Hooker [3] proponen una metodología para el análisis de la sensibilidad para programación mixta 0-1 basada en el uso de las proposiciones clásicas de la lógica.

3.3 Reoptimización

En esta sección se presenta una idea de los enfoques existentes, distinguiendo el caso de la reoptimización como una secuencia de dos instancias de un mismo problema y el caso donde la secuencia contiene más de dos instancias.

3.3.1 Secuencia de dos instancias de un mismo problema

La reoptimización en una secuencia de dos instancias de un mismo problema lineal 0-1 (P), significa que después de la resolución de una instancia de (P), se quiere resolver eficazmente una segunda instancia de (P).

Es posible explotar la ramificación obtenida resolviendo por exploración ramificada el problema inicial (P), con el objeto de estimar el intervalo de sensibilidad. En realidad se desea explotar la resolución de (P) para determinar la solución óptima de un problema (P') obtenido modificando los datos del objetivo del problema (P):

$$\begin{aligned}
(P') \quad & \max c'x \\
& s.a. \quad x \in X
\end{aligned}$$

La modificación del objetivo no se limita a un dato único. Todos los coeficientes de c' pueden ser diferentes de aquellos de c .

Los métodos propuestos en la literatura por Roodman, Piper y Zoltners [13, 14, 15, 16] consisten en obtener un intervalo de sensibilidad. Se describen los conjuntos E_p y E_c que están asociados a la ramificación de la solución de (P) , teniendo en cuenta el hecho de que (P) y (P') tienen el mismo dominio realizable. Se trata de volver a evaluar las soluciones completas, es decir, las soluciones de E_c y de continuar la enumeración a partir de las soluciones parciales, es decir, las soluciones de E_p , debido a que la prueba de poda, que era válida para el objetivo de (P) , ya no es válida en general para el objetivo de (P') .

El algoritmo consiste entonces en:

1. Resolver (P) por Ramificación y Acotamiento guardando las soluciones parciales E_p y las completas E_c .
2. Reevaluar el conjunto de los nodos pendientes de la ramificación construida en la fase 1 con el objetivo actual c' de (P') . Continuar la Ramificación y Acotamiento a partir de las soluciones parciales de E_p que no violen más la prueba de poda respecto a c' , $v(P')$ será igual al valor de la mejor solución encontrada por este proceso.

Nótese que esta técnica de reoptimización es aplicable a los problemas no lineales.

3.3.2 Secuencia de varias instancias de un mismo problema

Supóngase ahora que se quisiera resolver por reoptimización una secuencia finita de instancias de un mismo problema lineal con variables 0-1. Es un cuadro de estudio que ha sido poco abordado en la literatura, sin embargo Nauss, Desrochers, Soumis, Thiongane, Nagih y Plateau lo han analizado [4, 12, 22].

Robert Nauss es el primero en considerar una sucesión finita de instancias de mochila unidimensional conocida a priori, que no difieren más que en el segundo miembro de las restricciones. Para resolver cada mochila, Nauss propone entonces la utilización de la

técnica de reoptimización que consiste en explotar la ramificación de una mochila resuelta para resolver la siguiente. Sus experimentos numéricos muestran que es costoso reevaluar las soluciones parciales y desarrollar una ramificación para una instancia a partir de la ramificación obtenida después de la resolución precedente.

Al contrario del trabajo efectuado por Robert Nauss , que enfrenta un encadenamiento de instancias sin ninguna relación a priori, Thiongane, Nagih y Plateau [20, 21] diseñaron una secuencia de instancias de mochila unidimensionales obtenida por un método de subgradiente, para resolver el Lagrangeano dual de problema de la mochila. Para la resolución de cada instancia, emplearon técnicas de reoptimización al interior de las fases de pre tratamiento y de exploración. Estas técnicas se relacionan con el cálculo de límites superior e inferior, así como la resolución por un método de ramificación y acotamiento.

También demostraron cómo es posible explotar la información pertinente obtenida de la iteración precedente, para calcular en tiempo razonable límites de buena calidad y explotar la ramificación obtenida precedentemente a fin de acelerar la resolución. Estas técnicas de reoptimización permitieron obtener ganancias del orden del 70%.

En el marco de la resolución de una secuencia de instancias del camino más corto, Desrochers y Soumis propusieron en [4] un algoritmo de reoptimización para su solución, una ganancia en tiempo de dos a diez veces pudo ponerse en evidencia en este trabajo.

3.4 Determinación del radio de estabilidad

La primera expresión analítica del radio de estabilidad, debida a Leontev [10], es la siguiente:

$$\rho(c) = \min_{x' \in \Omega(P)} \max_{x \in \Omega(P)} \frac{|cx' - cx|}{C + C' - 2CC'} \quad \text{donde para } x \text{ y } x' \text{ en } X \text{ dadas, se tiene que}$$

$$C = |\{i = 1, K, n \mid x_i = 1\}|$$

$$C' = |\{i = 1, K, n \mid x'_i = 1\}|$$

$$CC' = |\{i = 1, K, n \mid x'_i = x_i\}|$$

Se precisa que la notación $|\cdot|$ tiene aquí dos sentidos: $|cx'-cx|$ es un valor absoluto mientras que $|\{\dots\}|$ es la cardinalidad de un conjunto.

Chakravarti y Wagelmans [2] mencionan que para una utilización práctica, es necesario intentar conseguir una formulación simplificada explotando la estructura específica del problema por estudiar.

Considérese como ilustración el problema específico del árbol conector de peso mínimo de una gráfica simple $G = (V, E)$. Dado el vector de los pesos $c \in \mathfrak{R}^n$, siendo n el número de aristas, entonces el problema del árbol conector de pesos mínimos

$$(P) \quad \min cx \\ \text{s.a. } x \in X$$

donde $X = \{\text{Árboles conectores } G\}$, fue estudiado por muchos autores, entre ellos Tarjan y Winter [19, 23].

Gordeev [8] mostró que si $|\Omega(P)|=1$, es decir que (P) no admite más que una solución óptima x^* y que la complejidad de cálculo del radio de estabilidad de x^* es igual a aquella correspondiente al cálculo del intervalo de sensibilidad de c_k tal que $x_k^*=1$. En efecto la formulación analítica del radio de estabilidad

$$\rho(c) = \min_{x' \in \Omega(P)} \frac{|cx - cx^*|}{C + C^* - 2CC^*}$$

donde

$$\begin{aligned} C &= |\{i = 1, \dots, n \mid x_i = 1\}| \\ C^* &= |\{i = 1, \dots, n \mid x_i^* = 1\}| \\ CC^* &= |\{i = 1, \dots, n \mid x_i^* = x_i\}| \end{aligned}$$

puede ser simplificada. Sea \hat{X} el conjunto de los árboles conectores que poseen $|V|-2$ aristas comunes con el árbol conexo óptimo.

El denominador $\rho(c)$ toma el valor de 2. Gordeev [8] muestra así que

$$\rho(c) = \min \{ cx - cx^* \mid x \in \hat{X} \} / 2$$

Esta expresión se puede reformular considerando que para todo elemento $i \in \{1, K, n\}$ tal que $x_i^* = 1$ se tiene un costo marginal d_i definido por $d_i = \min \{ c_j - c_i \}$ donde el mínimo está tomado sobre el conjunto de los $j \in \{1, K, n\} \setminus \{i\}$ tal que $x_j^* = 0$ y tal que la solución \bar{x} definida por:

$$\bar{x}_k = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k = i \\ x_k^* & k \neq i, j \end{cases}$$

El costo marginal de una arista del árbol conector óptimo es, por lo tanto, el sobre costo obtenido cuando en vez de tomar esta arista se elige otra que no pertenece al árbol conector óptimo. Entonces se desprende de [18] que $\rho(c) = \min \{ d_i, i \in \{1, K, n\} \mid x_i^* = 1 \} / 2$.

A partir de la expresión anterior es posible aplicar el algoritmo simple descrito en [8] para determinar el radio de estabilidad. Sin embargo Gordeev propuso utilizar el algoritmo de Tarjan [19] para determinar los intervalos de sensibilidad individuales $[c_i, \bar{c}_i]$, de los pesos c_i cuando $x_i^* = 1$. A partir de la expresión del costo marginal, se obtiene $\rho(c) = \min \{ c_i - c_i, \bar{c}_i - c_i, x_i^* = 1 \} / 2$.

Como se trata de un problema de minimización, x^* se mantiene óptima si en el gráfico G el valor de los c_j se disminuye en una cantidad cualquiera, y se tiene $c_i = -\infty$, que es el límite del intervalo de sensibilidad. De donde $\rho(c) = \min \{ \bar{c}_i - c_i, x_i^* = 1 \} / 2$.

Si para cada c_i tal que $x_i^* = 1$, \bar{c}_i es conocido, entonces $\rho(c)$ puede ser determinado en $O(|E|)$. Tarjan [19] mostró que el conjunto de las \bar{c}_i puede ser calculado en $O(|E|a(|E|, |V|))$ con $a(|E|, |V|) = \min \{ i \cdot \log^{(i)} |V| \} \leq |E|/|V|$ donde $\log^{(i)}$ designa i composiciones de \log .

De esta manera se infiere que $\rho(c)$ tiene una complejidad en $O(|E|a(|E|, |V|))$ para el problema del árbol conector de pesos mínimos.

3.5 Conclusión

Se ha mostrado la construcción de los algoritmos existentes para determinar un intervalo de sensibilidad y de aquellos que permiten obtener la solución de un problema utilizando técnicas de reoptimización.

También se presentó un enfoque matemático que permite simplificar la expresión analítica del radio de estabilidad.

Cómo se puede observar, los métodos de solución existentes no contemplan la obtención del análisis de sensibilidad integral de los problemas enteros binarios, que incluyan la manera de obtener las variaciones máximas permisibles tanto de los coeficientes de la función objetivo, como las correspondientes a las restricciones y al lado derecho.

3.6 Referencias

1. Bell, D.E. y Shapiro, J.F. *A convergent duality theory for integer programming*. Operations Research, 1: 467-477, 1977.
2. Chakravarty, N. y Wagelmans, A.P.M. *Calculation of stability radius for combinatorial optimization problems*. Operations Research Letters, 23: 1-7, 1999.
3. Dawande, M.W. y Hooker, J.N. *Inference-based sensitivity analysis for mixed integer/linear programming*. Operations Research, Vol.48, No. 4, pp. 623-634. 2000.
4. Desrochers, M. y Soumis, F. *A reoptimization algorithm for the shortest path problem with time windows*. European Journal of Operational Research, 35: 242-254, 1988.
5. Fisher, M.I. y Shapiro, J.F. *Constructive duality in integer programming*. SIAM Journal on Applied Mathematics, 27: 31-52, 1974.
6. Fisher, M.I., Northup, W.D. y Shapiro, J.F. *Using duality to solve discrete optimization problems: Theory and computational experience*. Mathematical programming study, 3: 56-94, 1975.
7. Garfinkel, R.S. y Nemhauser, G.L. *Integer programming*. Wiley, New York, 1972.

8. Gordeev, E.N. *The complexity of stability study in discrete optimization problems*, in: *Cybernetics questions 133* (Computer Center of the USSR Academy of Sciences, Moscow, 1989). (En Russe), Pages 41-77, 1989.
9. Klein, D. y Holm, S. *Integer programming postoptimal analysis with cutting planes*. *Management Science*, 25: 64-72, 1979.
10. Leontev, V.K. *Stability in linear discrete problems*. *Cybernet. Probl.* (en Russe), 35: 169-184, 1979.
11. Libura, M. *Sensitivity analysis for integer knapsack problem*. *Archiwum Automatyki i Telemekhaniki* (en Polonais), 22: 313-322, 1977.
12. Naus, K. *Parametric integer programming*. Western Management Science Institute, UCLA, 1975.
13. Piper, C.J. y Zoltners, A. *Implicit enumeration based algorithms for post-optimizing zero-one programs*. *Naval Research Logistics Quaterly*, 22: 791-809, 1975.
14. Piper, C.J. y Zoltners, A. *Some easy postoptimality analysis for zero-one programming*. *Management Science*, 22: 759-765, 1976.
15. Roodman, G.M. *Postoptimality analysis in zero-one programming by implicit enumeration*. *Naval Research Logistics Quaterly*, 19: 435-447, 1972.
16. Roodman, G.M. *Postoptimality analysis in zero-one programming by implicit enumeration: The mixed integer case*. *Naval Research Logistics Quaterly*, 21: 595-607, 1974.
17. Shapiro, J.F. *Generalized lagrange multipliers in integer programming*. *Operatios Research*, 19: 68-76, 1971.
18. Sotskov, Y.N. *Stability of an optimal schedule*. *European Journal of Operational Research*, 55: 91-102, 1991.
19. Tarjan, R.E. *Sensitivity analysis of minimum spanning trees and shortest path trees*. *Information Processing Letters*, 14: 30-33, 1982.
20. Thiongane, B. *Réoptimisation dans le dual lagrangien du biknapsack en variables 0-1*. Thèse de Doctorat en Informatique, Université de Paris 13, 2003.
21. Thiongane, B., Nagih, A. y Plateau, G. *Adapted step size in a 0-1 biknapsack lagrangean dual solving algorithm*. *Annals of Operations Research*, 2002.

22. Thiongane, B., Nagih, A. y Plateau, G. *Lagrangean heuristics combined with reoptimization for the 0-1 knapsack problem*. En revision pour *Discrete Applied Mathematics*, 2002.
23. Winter, P. *Steiner problem in networks: A survey*. *Networks*, 17: 129-167, 1987.

CAPÍTULO 4. MÉTODO PROPUESTO

4.1 Antecedentes

La línea de investigación seleccionada para el desarrollo de esta tesis es la reoptimización. Una definición comúnmente usada es la siguiente: Reoptimización es una secuencia de dos instancias del mismo problema. Esto significa que después de la solución de una instancia es necesario resolver eficientemente la segunda instancia. Es decir, que se quiere usar la solución de la primera instancia para determinar la solución óptima de la segunda instancia, obtenida a partir de la modificación de los datos de la primera.

La idea del método, que constituye el fundamento de esta tesis doctoral, surgió del análisis gráfico de un problema entero al cuestionarse lo siguiente:

¿Cuál es la distancia entre una solución lineal y una entera? ¿Por qué la solución lineal cuenta con toda la infraestructura teórica para obtener su sensibilidad y la entera no? (ver figura 4.1).

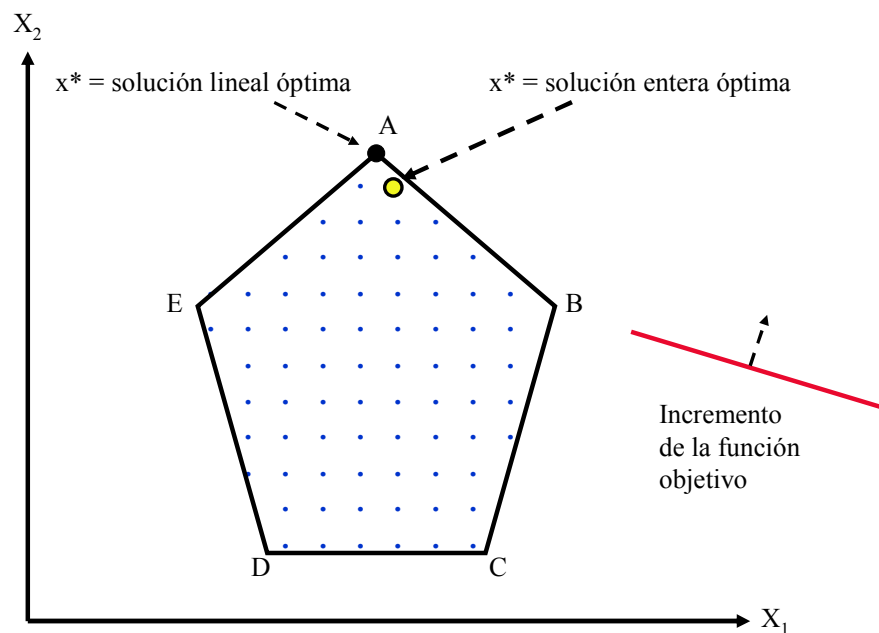


FIGURA 4.1 Gráfica de un problema entero

¿Cómo se comporta la solución óptima con respecto a la función objetivo y las restricciones? ¿Cuál será su región de estabilidad? ¿Qué variaciones soportan los coeficientes de la función objetivo y del lado derecho sin afectar la solución? ¿Cómo se puede resolver esta problemática? (ver figura 4.2).

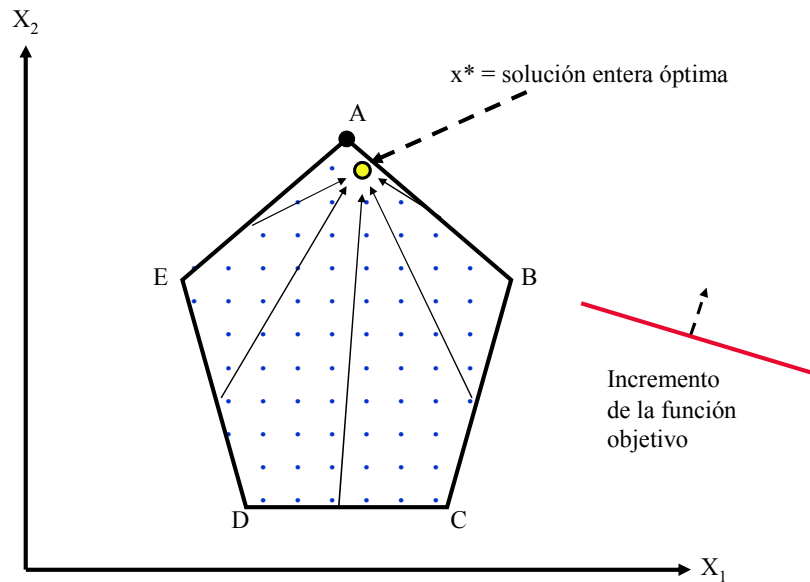


FIGURA 4.2 Solución entera óptima

¿Qué pasa si se utiliza una cubierta convexa? ¿Cómo se pone automáticamente una cubierta convexa en el poliedro? Eso es fácil de hacer, relajando el modelo binario hacia la estructura lineal (ver figura 4.3).

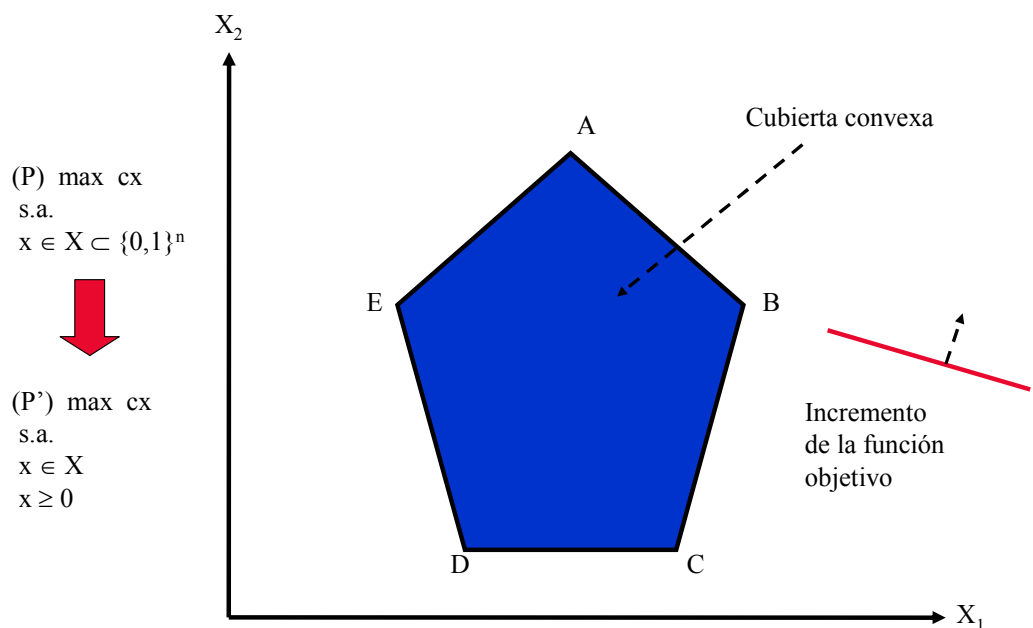


FIGURA 4.3 Cubierta convexa

¿Qué pasa si se incluye la solución óptima como una restricción adicional? La región de factibilidad se reduce a un punto, obteniendo un problema degenerado pero lineal (ver figura 4.4).

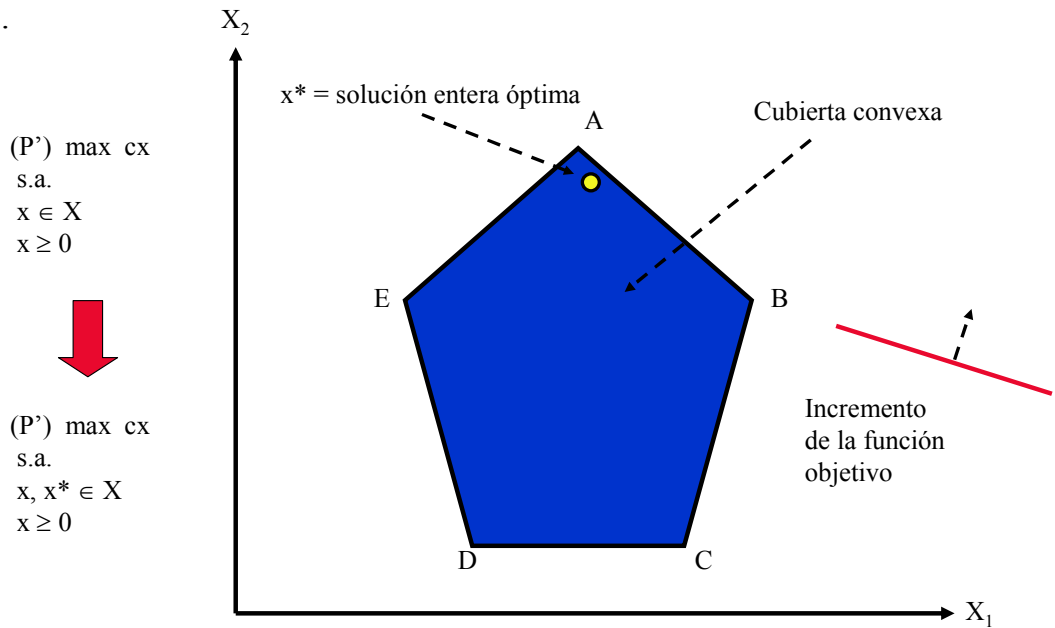


FIGURA 4.4 Solución entera óptima y punto factible

De esta manera se puede tomar ventaja de las bellezas de la continuidad, y debido a que la región de factibilidad se reduce al punto correspondiente a la solución entera óptima, resulta que la solución óptima lineal es igual a la solución óptima entera (ver figura 4.5).

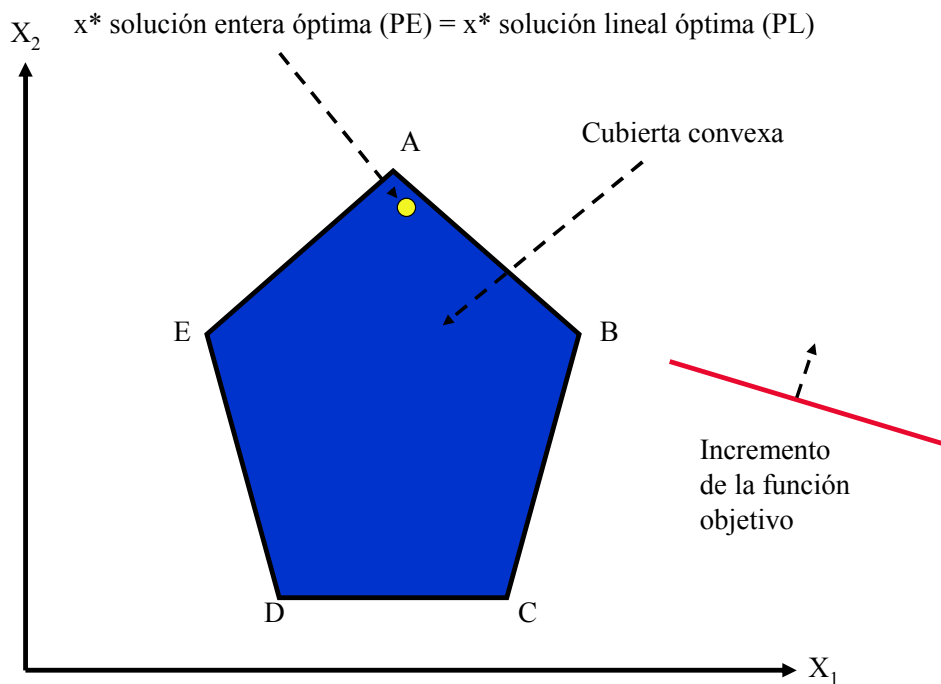


FIGURA 4.5 Solución única

Además, si se realiza el análisis de sensibilidad de la solución lineal, se puede evaluar el comportamiento de la solución entera con respecto a la función objetivo y a las restricciones, para obtener las variaciones que son posibles sin cambiar de base (ver figura 4.6).

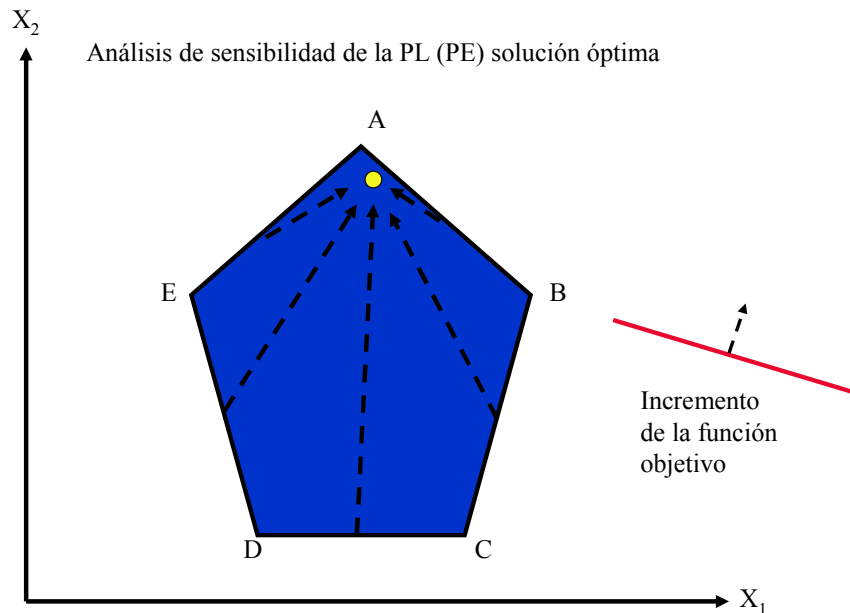


FIGURA 4.6 Análisis de sensibilidad

4.2 Descripción del Método [2]

El método que se propone se fundamenta en la reoptimización de un problema binario sobre estructuras lineales. En primer lugar se considera el problema general binario y su solución óptima. Posteriormente se relaja el modelo a una estructura lineal y se incluye la solución óptima binaria en el conjunto de restricciones.

De manera formal el método se describe de la siguiente manera:

Sea $c \in \mathfrak{R}^n$. Se considera el problema definido por:

$$\begin{aligned}
 & \text{(P) max } cx \\
 & \text{s.a.} \\
 & x \in X \subset \{0,1\}^n
 \end{aligned}$$

Sea x^* la solución óptima de (P).

Transfórmese (P) para obtener (P') de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & (P') \max cx \\ & \text{s.a.} \\ & x, x^* \in X \subset \mathfrak{R}^n \end{aligned}$$

entonces

i) *La solución óptima de (P) = la solución óptima de (P')*

ii) *El análisis de sensibilidad de (P') es aplicable a (P)*

Demostración

P.D. i) “**La solución óptima de (P) = La solución óptima de (P)**”

Sea P problema definido por:

$$\begin{aligned} & (P) \max cx \\ & \text{s.a.} \\ & x \in X \subset \{0,1\}^n \end{aligned}$$

Sea $x^* \in \Omega(P)$ la solución óptima de (P)

$$\begin{aligned} \text{Sea } T: \{0,1\}^n & \rightarrow \mathfrak{R}^n \\ P & \rightarrow P' \end{aligned}$$

Es decir que

$$\begin{aligned} & (P) \max cx & \rightarrow & (P') \max cx \\ & \text{s.a.} & & \text{s.a.} \\ & x \in X \subset \{0,1\}^n & & x \in X \subset \mathfrak{R}^n \end{aligned}$$

donde $[X \subset \{0,1\}^n] \subset [X \subset \mathfrak{R}^n]$

Sea $S = [X \subset \{0,1\}^n]$ y sea H(S) la cubierta convexa de S.

Por el *Lema 1^l* se tiene que H(S) es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S.

En particular considérese la cubierta $H(S) = [X \subset \mathfrak{R}^n]$

^l *Lema 1.*- Sea S un conjunto arbitrario en E_n entonces H(S) es el conjunto convexo más pequeño que contiene a S, es decir, H(S) es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S.

Como $x^* \in \Omega(P)$ es la solución óptima de (P) se tiene que $x^* \in S = [X \subset \{0,1\}^n]$ y como consecuencia $x^* \in H(S)$.

Inclúyase x^* como un conjunto de restricciones adicionales de (P'), entonces

(P') $\max cx$ sujeto a $x, x^* \in [X \subset \mathbb{R}^n]$

Considérese el siguiente conjunto convexo:

$H(S) \cap \{x^*\}$ donde x^* es la solución óptima de (P)

Entonces $\forall x \in X$, x es una restricción redundante de (P')

Se tiene que $\{[X \subset \mathbb{R}^n] \cap \{x^*\}\} = \{x^*\}$ y que x^* es única

y como $x^* \in X'$ entonces x^* es una solución factible de (P')

y aplicando el *teorema fundamental de la PL*² se tiene que

x^* es una solución factible básica de (P')

y por el *teorema de la condición de optimalidad*³ como x^* es una solución factible

básica con $c_j - z_j \geq 0$ para cualquier j entonces x^* es óptima.

por lo tanto $x^* \in \Omega(P')$ es la solución óptima de P'

y por consiguiente “La solución óptima de (P) = la solución óptima de (P)’”

P.D. ii) “El análisis de sensibilidad de (P') es aplicable a (P)”

Como (P') es un problema lineal degenerado tenemos:

Caso 1: El rango máximo permisible de variación para x^* es directo.

Entonces α_0^* es la tolerancia máxima permisible sobre las variaciones en los coeficientes de los objetivos con respecto a c' , donde $\alpha_0^* \geq 0$ y $-\alpha_0^* \geq \alpha \geq \alpha_0^*$

Similarmente β_0^* es la tolerancia máxima permisible sobre las variaciones en los valores del lado derecho con respecto a b' , donde $\beta_0^* \geq 0$ y $-\beta_0^* \geq \beta \geq \beta_0^*$

² Teorema Fundamental de la Programación Lineal.- Dado un programa lineal en la forma estándar Minimizar $c^T x$ sujeto a $Ax = b$ con $x \geq 0$, donde A es una matriz de $m \times n$ de rango m , i) Si hay una solución factible, hay una solución factible básica; ii) Si hay una solución factible óptima, hay una solución factible básica óptima.

³ Teorema de la condición de optimalidad.- Si existe una solución factible básica $c_j - z_j \geq 0$ para cualquier j , entonces esa solución es óptima.

Caso2. El rango máximo permisible de variación para x^* presenta parámetros no acotados.

Sea x^* la solución óptima única degenerada de (P') .

Al aplicar las *condiciones KKT*⁴ a x^* , se encuentra que hay sólo una solución dual óptima w^* y por el *lema de la dualidad fuerte*⁵ se tiene que $w^* = x^*$

Por consiguiente, se obtiene que existe un punto x estrictamente factible para (P') y (D) .

Reemplácese b por $b + t\Delta b$, donde $t \in \mathcal{R}$ y $\Delta b \in \mathcal{R}^m$. Entonces aplicando el *teorema de Yildirim – Todd*⁶ se tiene que la cota del punto interior evaluada en x produce el mismo valor que la solución óptima x^* asintóticamente en μ .

Reemplácese c por $c + t\Delta c$, donde $t \in \mathcal{R}$ y $\Delta c \in \mathcal{R}^n$. Entonces aplicando el *corolario de Yildirim – Todd*⁷ se tiene que la cota del punto interior evaluada en x produce el mismo valor que la solución óptima x^* asintóticamente en μ .

Las cotas del punto interior tienen la misma relación asintótica con las cotas de la partición óptima, como en el caso no degenerado.

Por lo tanto se puede afirmar que el análisis de sensibilidad de (P') es aplicable a (P) .

⁴ *Condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker*.- Una condición necesaria y suficiente para que x^* sea un punto óptimo del programa lineal: Minimizar cx sujeta a $Ax \geq b, x \geq 0$ es que exista un vector w^* tal que: a) $Ax^* \geq b, x^* \geq 0$, b) $w^*A \leq c, w^* \geq 0$ y c) $w^*(Ax^* - b) = 0$ ($c - w^*A)x^* = 0$. La condición a) simplemente requiere que el punto óptimo x^* debe ser factible para el primal. La condición b) indica que el valor w^* debe ser un punto factible para el problema dual. La condición c) de holgura complementaria indica que w^* debe ser una solución óptima del problema dual.

⁵ *Lema de la dualidad fuerte*.- Si uno de los problemas tiene una solución óptima, entonces ambos problemas tienen soluciones óptimas y los dos valores objetivos óptimos son iguales.

⁶ *Teorema (Yildirim - Todd)*.- Sea x un punto estrictamente factible para (P') y (D) . Supóngase que (P') tiene una solución óptima única x^* pero degenerada, y que b es reemplazada por $b + t\Delta b$, donde $t \in \mathcal{R}$ y $\Delta b \in \mathcal{R}^m$. Entonces la cota del punto interior evaluada en x produce el mismo valor que la solución óptima x^* asintóticamente en μ .

⁷ *Corolario (Yildirim - Todd)*.- Sea x un punto estrictamente factible para (P') y (D) . Supóngase que (D) tiene una solución óptima única x^* pero degenerada, y que c es reemplazada por $c + t\Delta c$, donde $t \in \mathcal{R}$ y $\Delta c \in \mathcal{R}^n$. Entonces la cita del punto interior evaluada en x produce el mismo valor que la solución óptima x^* asintóticamente en μ .

4.2.1 Ejemplo

A continuación se presenta un ejemplo muy sencillo, binario y su solución óptima obtenida mediante B&B.

(P) Maximizar $Z = 10 X_1 + 20 X_2$

Sujeto a

$$30 X_1 + 20 X_2 \leq 30$$

$$35 X_1 + 50 X_2 \leq 50$$

$$X_i = 0,1 \text{ con } i = 1, 2$$

Resolviendo el problema con branch and bound obtenemos la siguiente solución:

$Z^* = 20$, con $X_1 = 0$ y $X_2 = 1$ (ver figura 4.7)

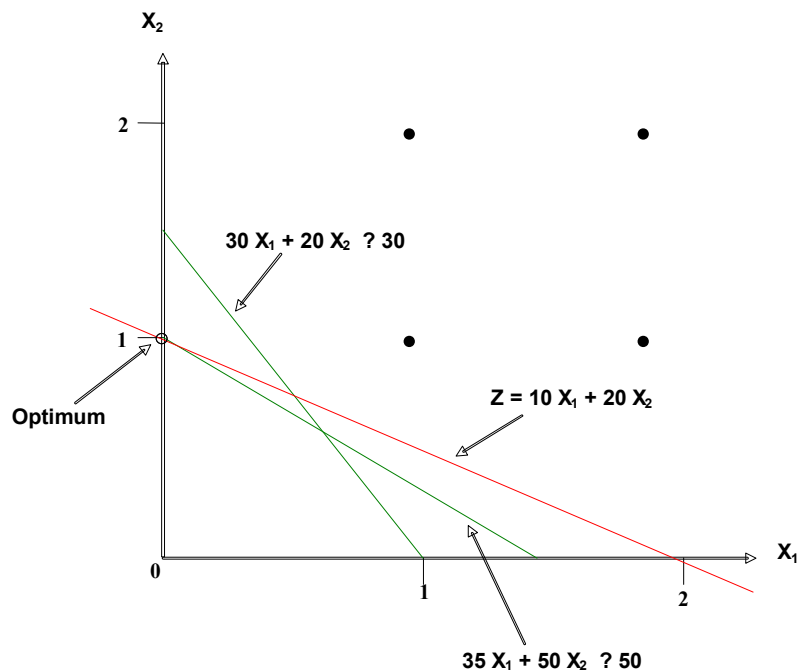


FIGURA 4.7 Solución binaria óptima

El modelo entero binario es relajado a una estructura lineal y la solución óptima binaria es incluida en el conjunto de restricciones.

$$(P') \quad \text{Maximizar } Z = 10 X_1 + 20 X_2$$

Sujeto a

$$30 X_1 + 20 X_2 \leq 30$$

$$35 X_1 + 50 X_2 \leq 50$$

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = 1$$

$$X_i \geq 0 \text{ con } i=1, 2$$

Resolviendo el modelo con el método simplex se obtiene la siguiente solución óptima:
 $Z^* = 20$, with $X_1 = 0$ and $X_2 = 1$ (ver figura 4.8).

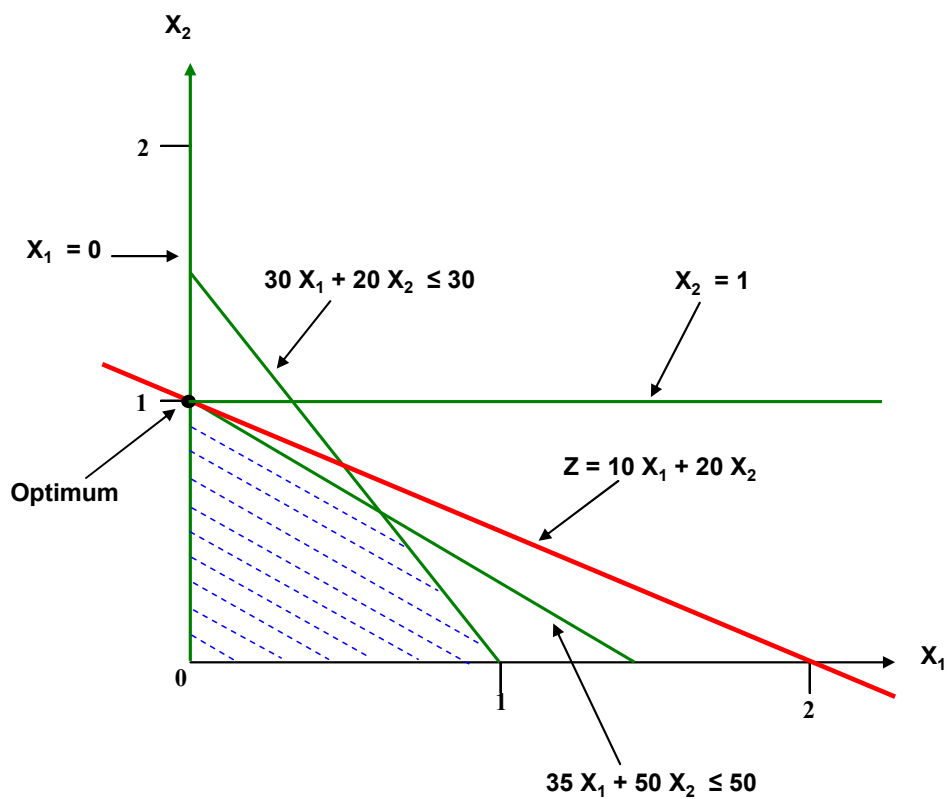


FIGURA 4.8 Solución lineal óptima

Finalmente realizando el análisis de sensibilidad para el problema lineal se obtienen los siguientes resultados:

Rangos en los cuales la base no cambia:

Coefficientes de las variables en la función objetivo

Variable	Coefficiente actual	Incremento permitido	Decremento permitido
X ₁	10	4	Infinity
X ₂	20	Infinity	5.714286

Lado derecho

Renglón	Lado derecho actual	Incremento permitido	Decremento permitido
2	30	Infinity	10
3	50	0	0
4	0	0	0
5	1	0	0

Sustituyendo en el modelo los valores correspondientes a la variación máxima permisible, se obtiene el siguiente modelo

$$(P'') \text{ Maximizar } Z = 14 X_1 + 14.285714X_2$$

Sujeto a

$$30 X_1 + 20 X_2 \leq 20$$

$$35 X_1 + 50 X_2 \leq 50$$

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = 1$$

$$X_i \geq 0 \text{ con } i = 1, 2$$

Resolviendo con el método simplex se obtiene la siguiente solución óptima:

$$Z^* = 14.285714, \text{ con } X_1 = 0 \text{ y } X_2 = 1.$$

También se pueden graficar las variaciones máximas permisibles tanto de las restricciones (ver figura 4.9) como de los coeficientes de la función objetivo (ver figura 4.10).

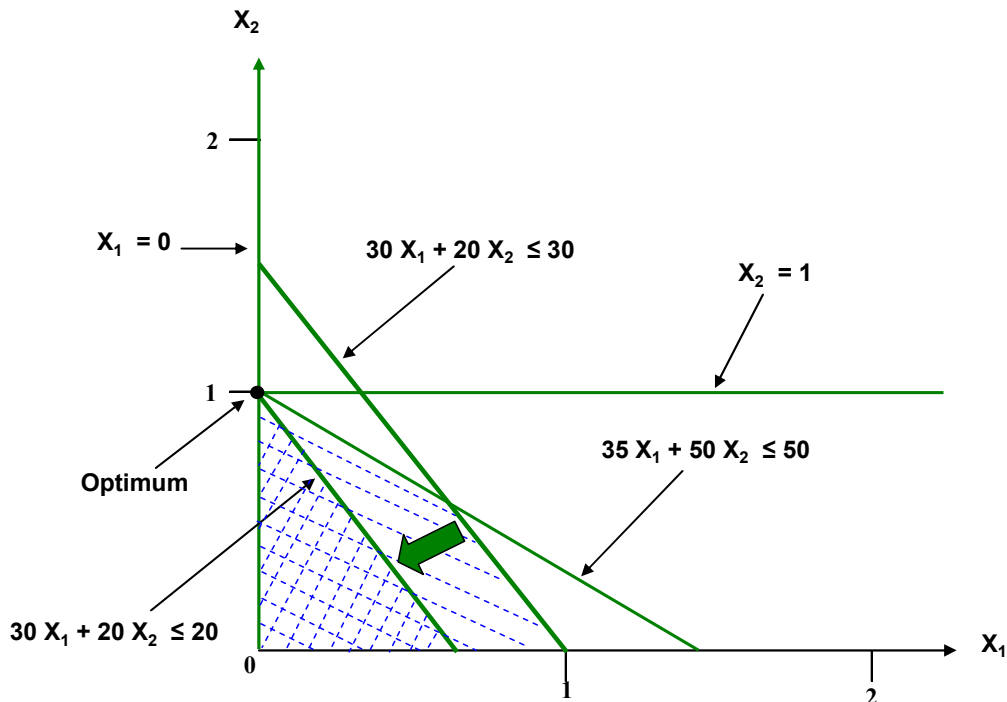


FIGURA 4.9 Variación máxima permisible de las restricciones

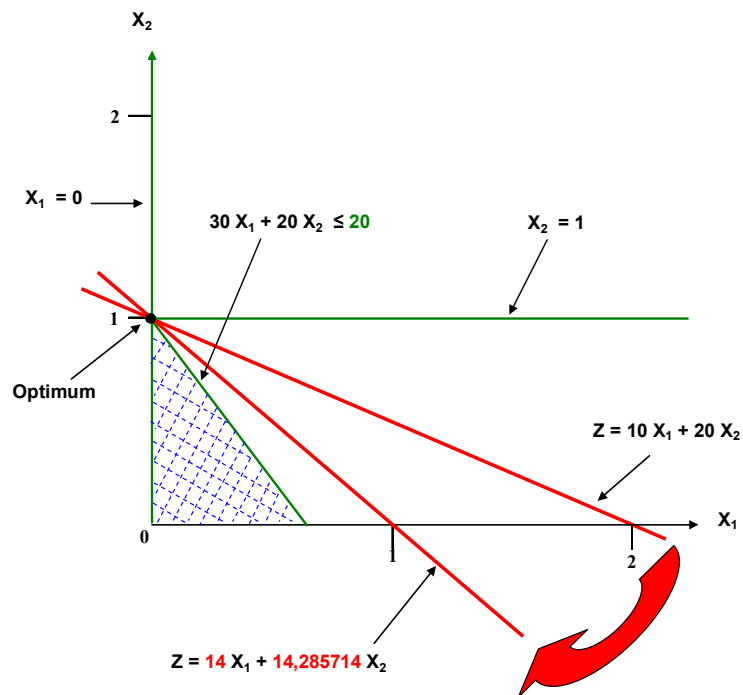


FIGURA 4.10 Variación máxima permisible de la función objetivo

No se debe olvidar que P' es un problema lineal degenerado y que en el caso de que los resultados obtenidos mediante el análisis de sensibilidad fueran parámetros no acotados, el problema debe ser resuelto a través de la aplicación de algoritmos que consideren el enfoque del punto interior.

4.3 Casos

En este apartado se aplicará el método propuesto a tres de los cuatro casos especiales que se presentan al aplicar el método simplex.

1. Espacio de soluciones no acotado
2. Óptimos alternativos
3. Degeneración

El caso de soluciones inexistentes o no factibles no se considera debido a que el método que se analiza da inicio a partir de una solución óptima.

4.3.1 Caso 1. Espacio de soluciones no acotado

Para iniciar el análisis de este caso, se considera pertinente recordar su estudio en el marco de la programación lineal, para recordar algunos conceptos básicos que pueden ser de utilidad.

En algunos modelos lineales los valores de las variables pueden aumentar en forma indefinida sin violar alguna de las restricciones, eso significa que el espacio de soluciones es no acotado en al menos una dirección.

El resultado es que el valor de la función objetivo puede aumentar (cuando se maximiza) o disminuir (si se minimiza) en forma indefinida. En ese caso, tanto el espacio de soluciones como el valor óptimo no están acotados.

La mayoría de las veces la no acotación corresponde a las siguientes causas:

- Mala construcción del modelo
- Se omiten restricciones no redundantes
- Errores en la estimación de los coeficientes

A continuación se presenta un ejemplo que muestra cómo se puede reconocer la no acotación, tanto del espacio de soluciones como del valor objetivo, en la tabla simplex.

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$2x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

TABLA 4.1. Iteración de inicio

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	-2	-1	0	0	0
x_3	1	-1	1	0	1
x_4	2	0	0	1	4

En la tabla 4.1 se puede observar que tanto x_1 como x_2 son candidatos para entrar en la solución. Como x_1 tiene el coeficiente más negativo, se selecciona, normalmente, como la variable de entrada.

Sin embargo, todos los coeficientes de restricción bajo x_2 son negativos o cero, y eso indica que x_2 puede aumentar en forma indefinida sin violar cualquiera de las restricciones.

Cabe mencionar que la regla para reconocer la no acotación es que si en cualquier iteración todos los coeficientes de restricción de toda variable no básica son cero o

negativos, entonces el espacio de soluciones no está acotado en esa dirección. Si además el coeficiente de la función objetivo de esa variable es negativo en caso de maximización, o positivo en caso de minimización, entonces también el valor de la función objetivo es no acotado.

Como cada aumento en una unidad en x_2 aumentará 1 a z , un aumento infinito de x_2 también dará como resultado un aumento infinito en z . Así, el problema no tiene solución acotada.

Este resultado se puede ver en la figura 4.11. El espacio de soluciones no está acotado en la dirección de x_2 y el valor de z puede aumentar en forma indefinida.

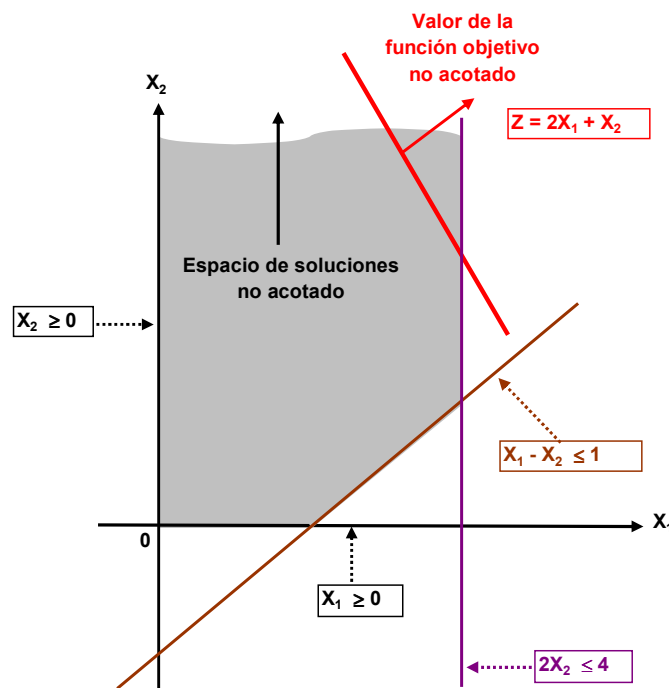


FIGURA 4.11. Solución no acotada

Con el objeto de analizar el comportamiento del método en un espacio de soluciones no acotado, se utilizará el modelo del ejemplo anterior, restringiéndolo a variables binarias.

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$2x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \in \{0,1\}$$

En la figura 4.12 se puede observar que resolviendo el modelo mediante el algoritmo de ramificación y acotamiento se obtiene la siguiente solución:

$$z^* = 3, x_1 = 1 \text{ y } x_2 = 1.$$

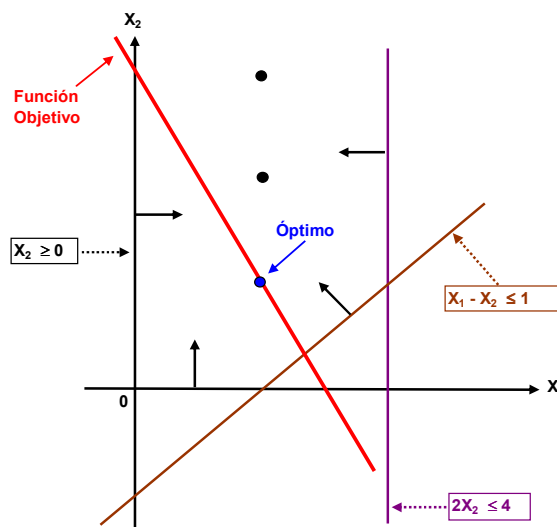


FIGURA 4.12 Solución del modelo binario

Después de resolver el modelo binario en un espacio de soluciones no acotado, se deberá incluir la solución en el conjunto de restricciones, relajando el modelo a una estructura lineal.

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$2x_1 \leq 4$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

A continuación se resuelve este modelo utilizando el método simplex.

TABLA 4.2 Tableau inicial

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	-2	-1	0	0	0
x_3	1	-1	1	0	1
x_4	2	0	0	1	4
a_1	1	0	0	0	1
a_2	0	1	0	0	1

TABLA 4.3 Primera iteración

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	0	-3	2	0	2
x_1	1	-1	1	0	1
x_4	0	2	-2	1	2
a_1	0	1	-1	0	0
a_2	0	1	0	0	1

TABLA 4.4 Segunda iteración

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	0	0	-1	0	2
x_1	1	0	0	0	1
x_4	0	0	0	1	2
x_2	0	1	-1	0	0
a_2	0	0	1	0	1

TABLA 4.5 Tercera iteración

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	0	0	0	0	3
x_1	1	0	0	0	1
x_4	0	0	0	1	2
x_2	0	1	0	0	1
x_3	0	0	1	0	1

Solución óptima: $Z^* = 3, X_1 = 1, X_2 = 1$

En la figura 4.13 se puede observar la inclusión de la solución óptima binaria en el conjunto de restricciones.

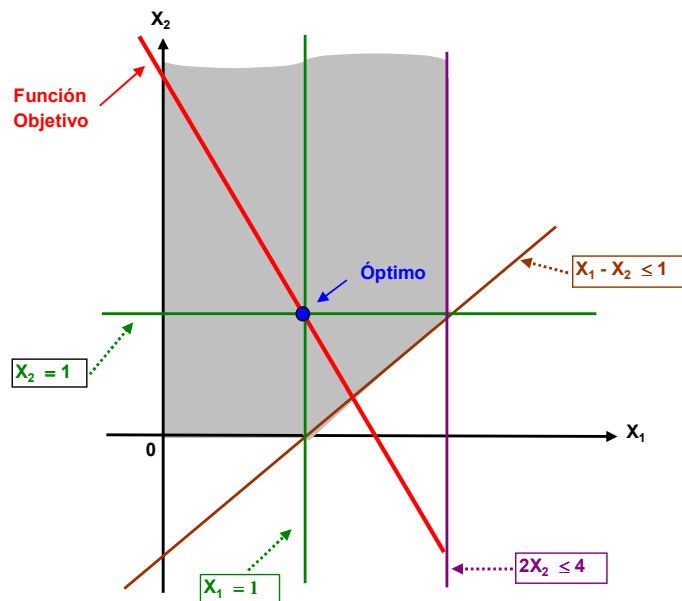


FIGURA 4.13 Solución del modelo reoptimizado (continuo)

También se puede ver que es precisamente la degeneración del modelo, la característica que no permite que la función objetivo se desplace, debido a la existencia de una solución única factible, que es finalmente la solución óptima del modelo lineal y que coincide con la solución binaria óptima.

Finalmente, la figura 4.14 muestra el máximo rango permisible de variación en el modelo o análisis de sensibilidad para la solución óptima binaria.

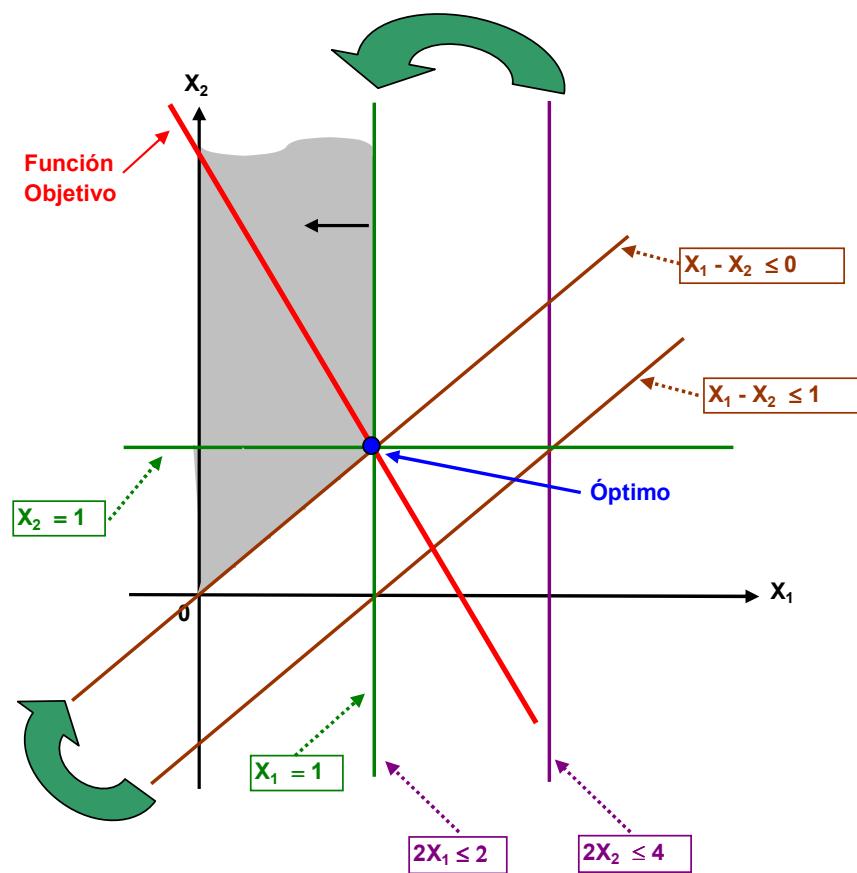


FIGURA 4.14. Sensibilidad

Se puede concluir que el método propuesto se puede utilizar aun en el caso de que el espacio de soluciones sea no acotado.

4.3.2 Caso 2. Óptimos alternativos

Cuando la función objetivo es paralela a una restricción obligatoria (es decir, una restricción que se satisface como ecuación en la solución óptima), la función objetivo asumirá el mismo valor óptimo en más de un punto de solución, denominándose “óptimos alternativos”.

A continuación se presenta un ejemplo que muestra que hay una cantidad infinita de esas soluciones.

sujeta a

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z &= 2x_1 + 4x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

En la figura 4.15 se presenta este modelo de manera gráfica.

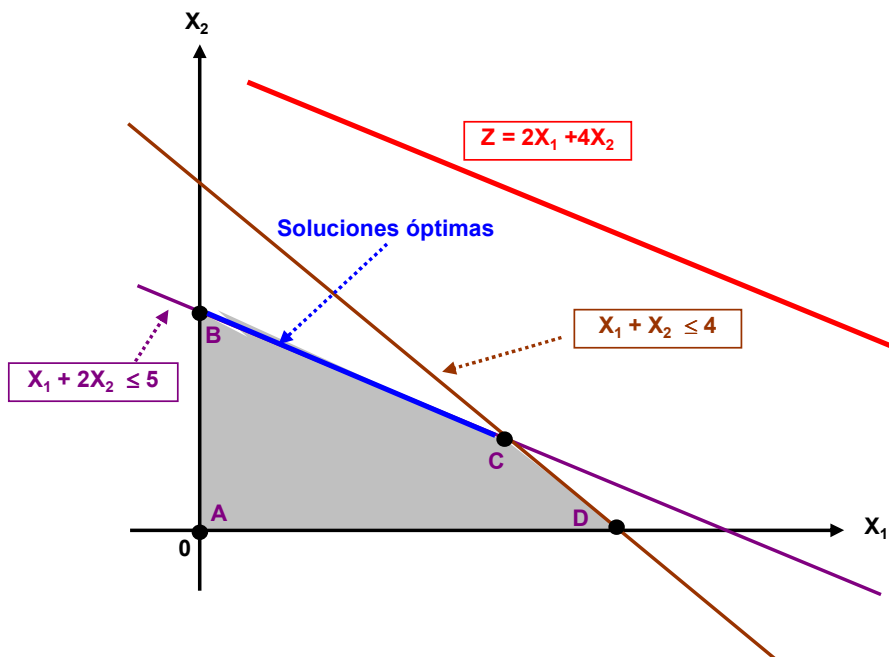


FIGURA 4.15 Óptimos alternativos de la programación lineal

En el modelo de programación lineal pueden presentarse óptimos alternativos cuando la función objetivo es paralela a una restricción obligatoria.

La figura 4.15 muestra que todo punto del segmento de Recta BC representa un óptimo alternativo con el mismo valor objetivo $z = 10$.

En la tabla 4.6 se pueden observar las iteraciones del modelo. La iteración 1 llega al siguiente óptimo:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2.5$$

$$z^* = 10$$

El cuál coincide con el punto B de la figura 4.15.

TABLA 4.6 Iteraciones

Iteración	Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución	
0	z	-2	-4	0	0	0	
	x_3	1	2	1	0	5	
	x_4	1	1	0	1	4	
		Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
1	z	0	0	0	0	10	
	Óptima	x_2	0,5	1	0,5	0	2,5
	x_4	0,5	0	-0,5	1	1,5	
		Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
2	z	0	0	0	0	10	
	Óptima	x_2	0	1	1	-1	1
	alternativa	x_1	1	0	-1	2	3

El procedimiento, para saber si en la iteración 1 existen óptimos alternativos, consiste en examinar los coeficientes de las variables no básicas, en la ecuación z de la iteración 1. De esta manera se puede observar que el coeficiente de x_1 no básica es cero, lo que

indica que x_1 puede entrar a la solución básica sin cambiar el valor de z , pero causando un cambio en los valores de las variables. Eso es justo lo que hace la iteración 2, dejar que x_1 entre a la solución básica, con lo que se obliga a que salga x_4 . Esto da como resultado un nuevo punto de solución en C , $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ y $z^* = 10$.

El método simplex sólo determina los puntos esquina, B y C . Sin embargo se pueden determinar matemáticamente todos los puntos (x_1, x_2) en el segmento de recta BC como promedio ponderado no negativo de los puntos B y C . Así dado $0 \leq \alpha \leq 1$, B : $x_1 = 0$, $x_2 = 2.5$ y C : $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, todos los puntos del segmento de recta BC se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\hat{x}_1 = \alpha(0) + (1+\alpha)(3) = 3 - 3\alpha \quad \text{y} \quad \hat{x}_2 = \alpha(2.5) + (1+\alpha)(1) = 1 - 1.5\alpha$$

Cuando $\alpha = 0$, $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (3, 1)$, que es el punto C . Cuando $\alpha = 1$, $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0, 2.5)$, que es el punto B . Con valores de α entre 0 y 1, (\hat{x}_1, \hat{x}_2) está entre B y C .

En la práctica, los óptimos alternativos son útiles porque permiten escoger entre muchas soluciones sin que se deteriore el valor de la función objetivo.

Por ejemplo, en este caso, la solución en B indica que sólo la actividad 2 está en un nivel positivo, mientras que en C ambas actividades son positivas.

A continuación se procederá a restringir este modelo lineal a una estructura binaria.

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeta a} & \quad x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & \quad x_1 + x_2 \leq 4 \\ & \quad x_1, x_2 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Utilizando el algoritmo de ramificación y acotamiento se resuelve el modelo y se obtiene la siguiente solución: $z^* = 6$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$. En la figura 4.16 se muestra la gráfica de este modelo.

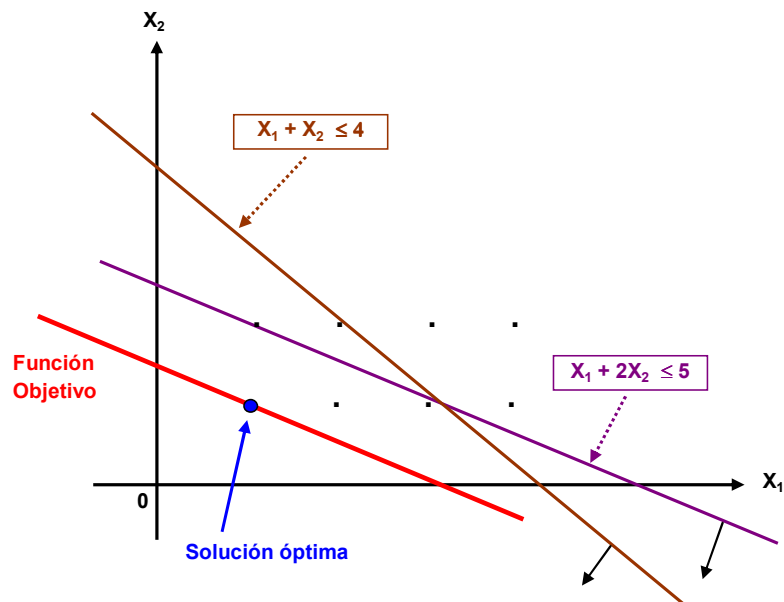


FIGURA 4.16 Modelo binario

A continuación, se procede a relajar el modelo sobre las estructuras lineales y se incluye la solución binaria en el conjunto de restricciones.

Maximizar $z = 2x_1 + 4x_2$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Resolviendo este modelo con el método simplex se obtiene la solución $z^* = 6$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$, que coincide con la solución del modelo binario.

En la figura 4.17 se puede ver la gráfica resultante de este procedimiento.

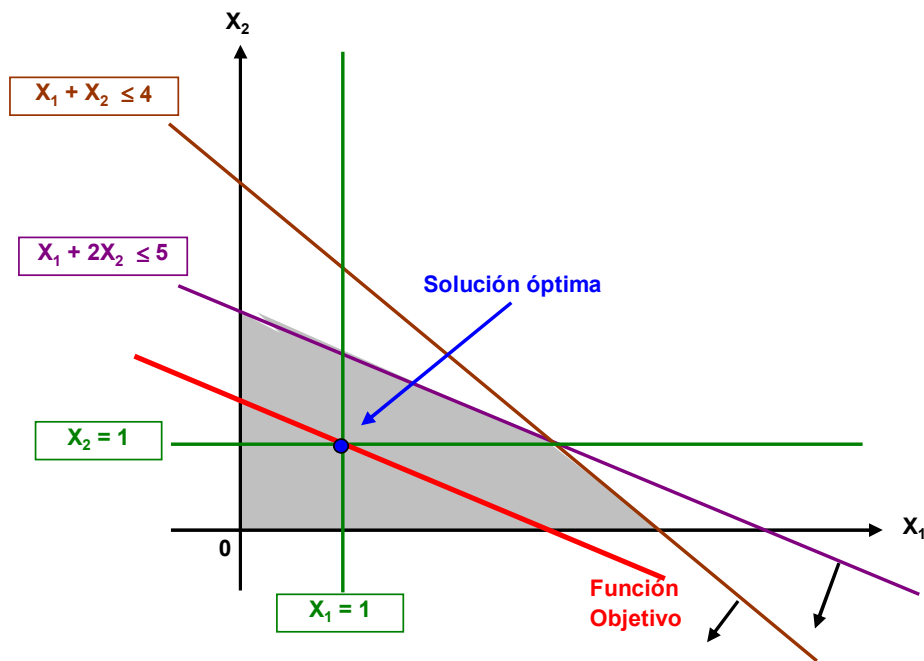


FIGURA 4.17 Reoptimización sobre estructura lineal

Finalmente, se procede a realizar el análisis de sensibilidad obteniéndose el máximo rango permisible de variación del modelo que presentaba originalmente óptimos alternativos (ver figura 4.18).

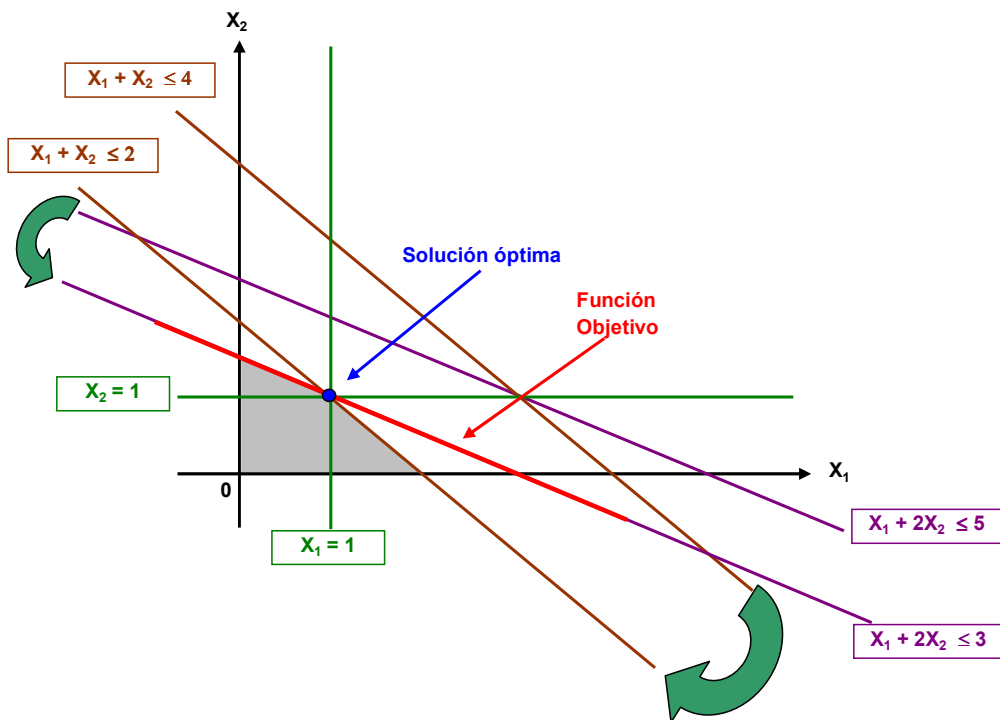


FIGURA 4.18 Análisis de sensibilidad

4.3.3 Caso 3. Degeneración

Al aplicar la condición de factibilidad del método simplex, se puede romper un empate en la razón mínima en forma arbitraria. Cuando se presenta un empate, al menos la variable básica será cero en la siguiente iteración, y se dice que la nueva solución es degenerada. Esta condición indica que el modelo tiene al menos una restricción redundante.

Considérese el siguiente modelo que tiene una solución lineal óptima degenerada.

sujeta a

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z &= 3x_1 + 9x_2 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

En la figura 4.19 se presenta este modelo de manera gráfica.

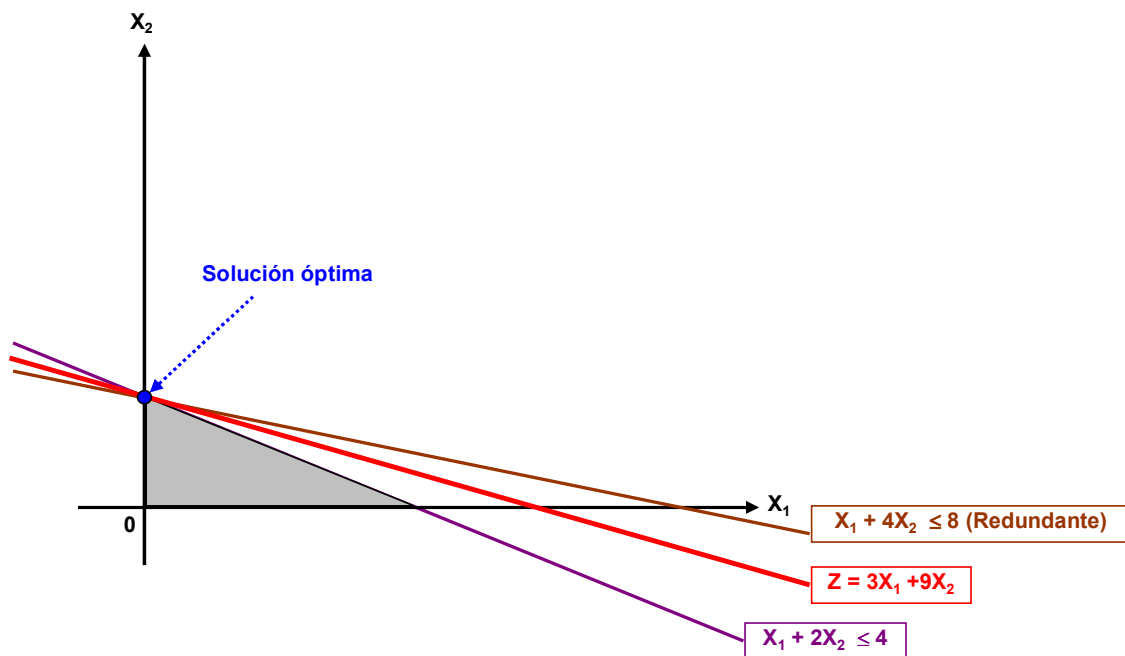


FIGURA 4.19 Solución óptima degenerada

En la tabla 4.7 se muestran las iteraciones obtenidas a través del método simplex.

TABLA 4.7 Iteraciones

Iteración	Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
0	z	-3	-9	0	0	0
entra x_2	x_3	1	4	1	0	8
sale x_3	x_4	1	2	0	1	4
<hr/>						
	Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
1	z	-0,8	0	2,3	0	18
entra x_1	x_2	0,3	1	0,3	0	2
sale x_4	x_4	0,5	0	-0,5	1	0
<hr/>						
	Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
2	z	0	0	1,5	1,5	18
Óptima	x_2	0	1	0,5	-0,5	2
	x_1	1	0	-1	2	0

En la iteración de inicio empatan x_3 y x_4 como variable de salida. Es la razón por la que la variable básica x_4 es cero en la iteración 1, y se obtiene así una solución básica degenerada. Se alcanza un óptimo después de una iteración más.

Véase la figura 4.19, que muestra la solución gráfica del modelo. Pasan tres líneas por el punto óptimo ($x_1 = 0$, $x_2 = 2$). Como este es un problema bidimensional, el punto está sobredeterminado y una de las restricciones es redundante.

Con la finalidad de analizar el comportamiento del método propuesto en un modelo que presenta solución óptima degenerada, se utilizará el modelo del ejemplo anterior, restringiéndolo a variables binarias.

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 9x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \in \{0,1\}$$

En la figura 4.20 se puede observar que resolviendo el modelo mediante el algoritmo de ramificación y acotamiento se obtiene la siguiente solución:

$$z^* = 12, \quad x_1 = 1 \text{ y } x_2 = 1.$$

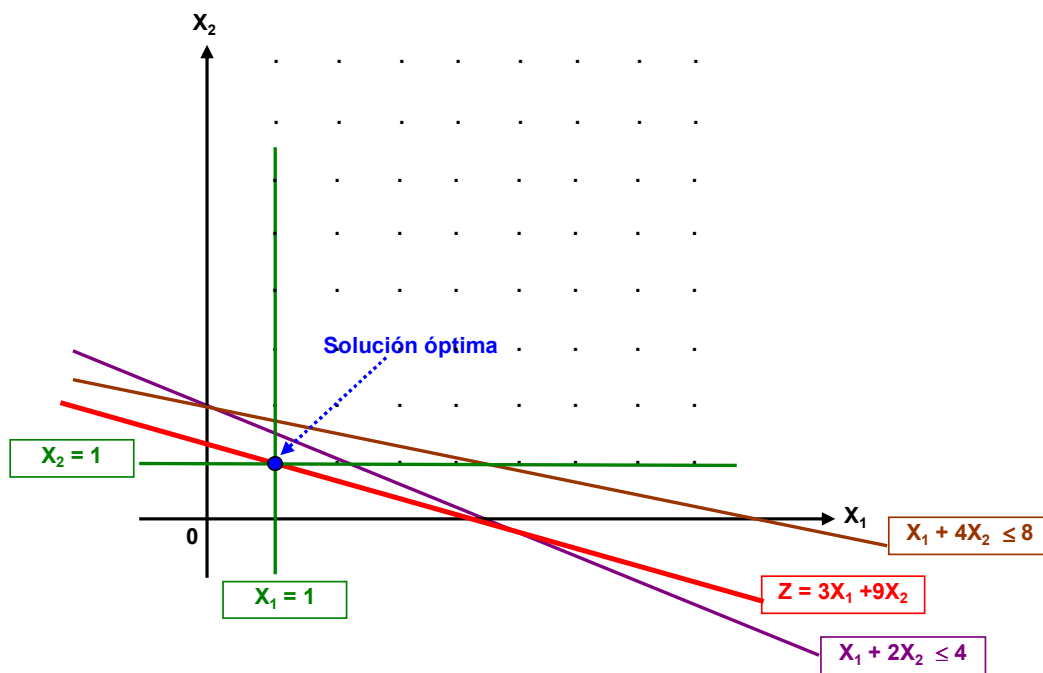


FIGURA 4.20 Modelo binario

Enseguida, se procede a relajar el modelo sobre las estructuras lineales y se incluye la solución binaria en el conjunto de restricciones.

sujeta a

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z &= 3x_1 + 9x_2 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este modelo con el método simplex se obtiene la solución $z^* = 12$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$, que coincide con la solución del modelo binario.

En la figura 4.21 se puede ver la gráfica resultante de este procedimiento.

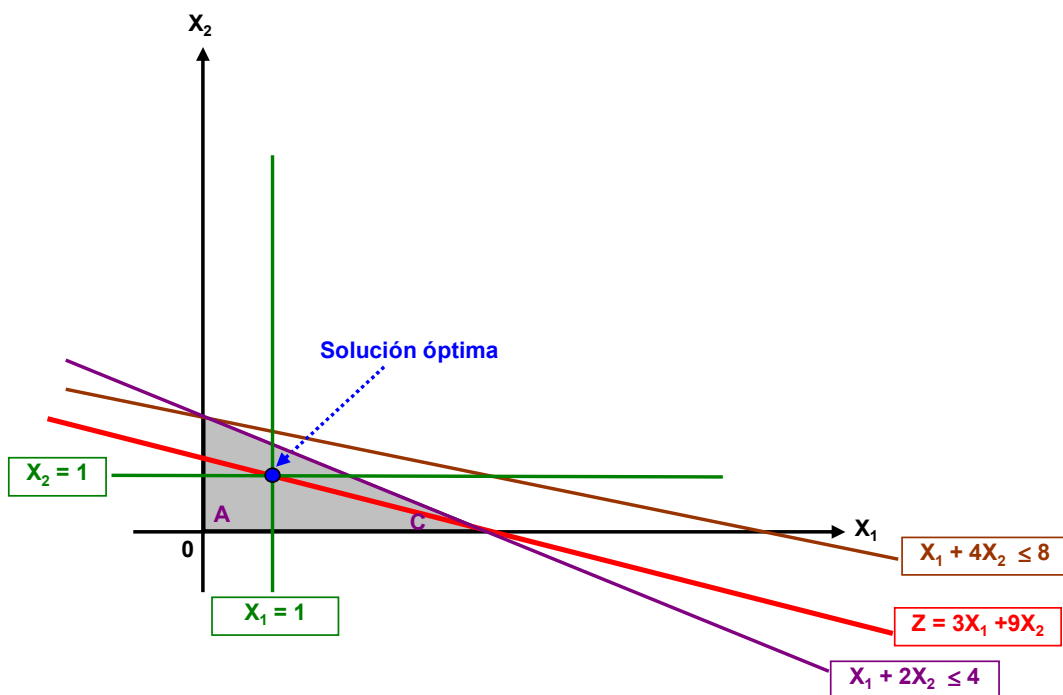


FIGURA 4.21 Reoptimización sobre estructura lineal

Finalmente, se procede a realizar el análisis de sensibilidad obteniéndose el máximo rango permisible de variación del modelo que presentaba originalmente degeneración (ver figura 4.22).

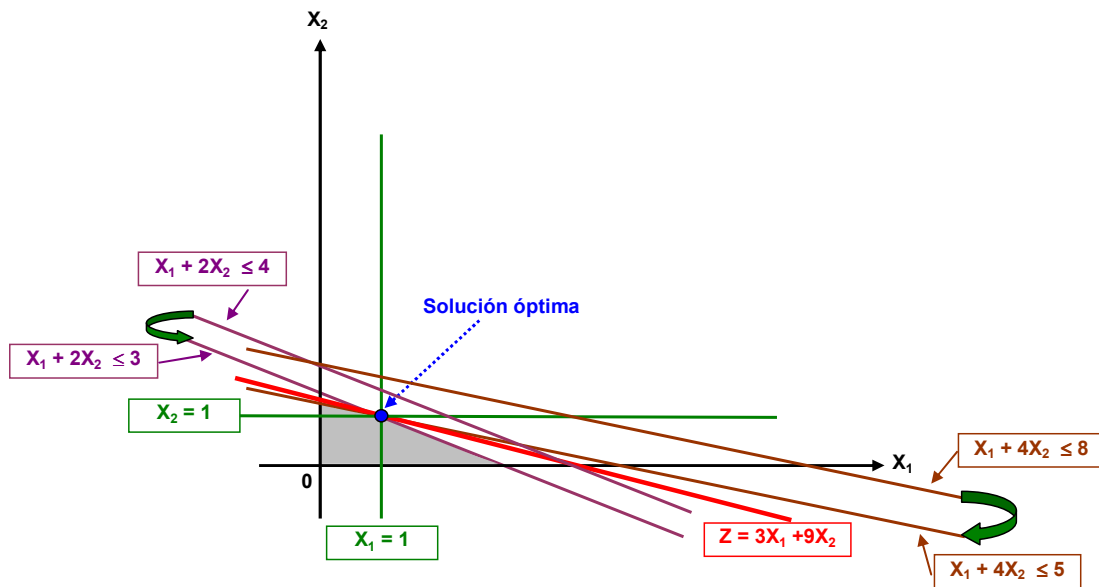


FIGURA 4.22 Análisis de sensibilidad

4.4 Una Comparación. Método Dawande - Hooker versus Método Propuesto

Dawande y Hooker [1] proponen una metodología para el análisis de la sensibilidad para programación mixta 0-1 basada en el uso de las clásicas proposiciones lógicas.

La mejor manera de explicar ésta metodología es a través de un ejemplo simple de programación 0 – 1.

Un análisis dual es realizado primero para determinar cuanto puede cambiar el problema sin disminuir el valor óptimo más que un monto específico. Entonces un análisis primal

proporcionará un límite superior sobre el incremento en el valor óptimo que resulte de un cambio dado en el problema.

La estrategia básica del análisis dual es:

- (a) Resolver la inferencia dual encontrando una prueba de el valor óptimo z^* .
- (b) Sostener el esquema fijado para la prueba.
- (c) Investigar bajo que perturbaciones la solución dual proporciona una prueba válida de que el valor óptimo es al menos $z^* - \Delta z$.

En programación lineal, el esquema de prueba es el vector u de multiplicadores duales. En programación 0–1, tiene dos partes: la inferencia de cláusulas lógicas de algunas de las restricciones y/o la función objetivo, seguida por una prueba de resolución de que esas cláusulas son inconsistentes.

En general, un problema de programación lineal binaria del siguiente tipo:

$$\{0,1\}^n$$

$\max \{z = cx: Ax \geq a, x \in \{0,1\}\}$ tiene la inferencia dual $\min \{z: Ax \geq a \rightarrow cx \geq z.\}$

Un lema de separación para este dual es propuesto por Hooker y consiste de un completo método de inferencia para desigualdades lineales binarias.

Considérese por ejemplo,

$$\text{Min } 3x_1 + 5x_2 + 7x_3$$

Sujeto a

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 3 \quad (\text{a})$$

$$-x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 4 \quad (\text{b})$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \quad (\text{c})$$

Con $x_1, x_2, x_3 = 0,1$

El árbol de la figura 4.23 resuelve el problema. El valor de la solución óptima es 12.

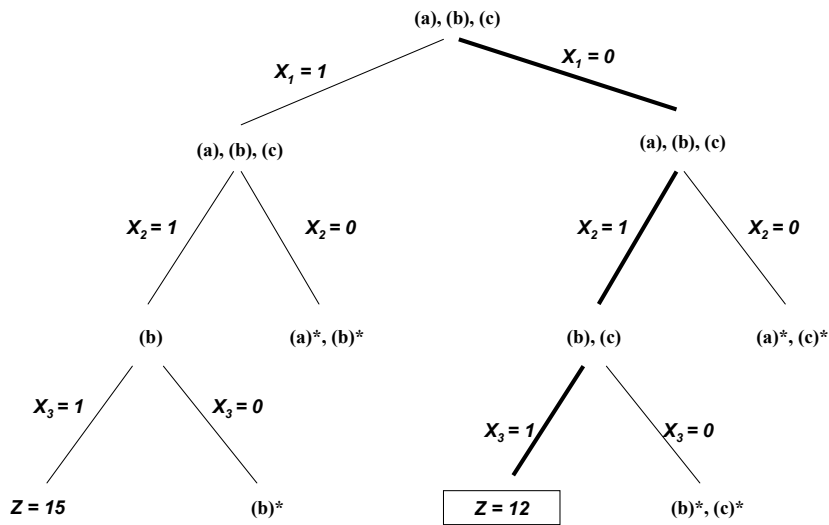


FIGURA 4.23

En la figura se observa que se obtiene la solución de un problema binario por ramificación. Las restricciones restantes (no satisfechas) están indicadas en cada nodo. Las restricciones violadas en cada nodo, si las hay, son señadas a través de un asterisco. Si ninguna restricción es violada, se muestra el valor de la función objetivo.

Una prueba de que $z \geq 12 - \Delta z$ (para una $\Delta z \geq 0$ dada) puede ser construida asociando a cada nodo una desigualdad que es violada en ese nodo.

En cada nodo infactible se asocia una desigualdad de la restricción violada (en la figura 1 existe la oportunidad de escoger dos desigualdades violadas en tres de los nodos).

^ ^

En cada nodo factible se asocia la desigualdad $cx \geq z - \Delta z - \epsilon$, donde z es el valor de la función objetivo en ese nodo. Esta desigualdad es obviamente violada. Las desigualdades violadas en los nodos son mostradas en la figura 4.24.

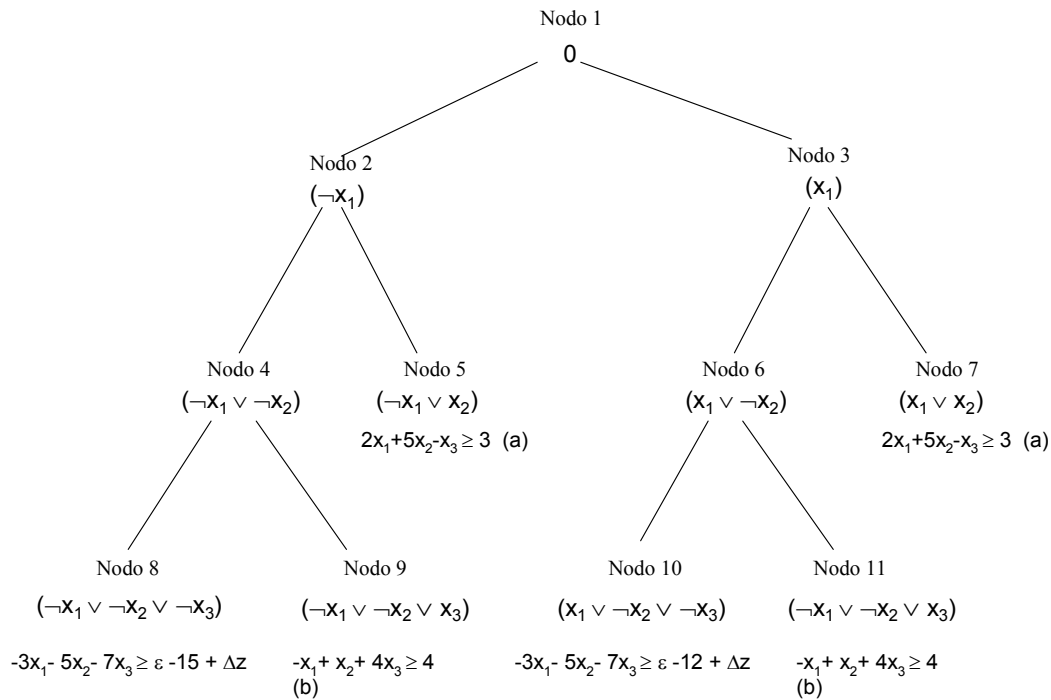


FIGURA 4.24

En la figura se puede observar la construcción de una prueba de $z \geq 12 - \Delta z$ (para $\Delta z \geq 0$). La restricción violada en cada nodo es mostrada, junto con una cláusula falsa. Los resolventes son mostrados en cada nodo Terminal.

Nótese que las desigualdades de la forma $cx \geq z - \Delta z - \epsilon$ son escritas como $-cx \geq \epsilon - z + \Delta z$.

Por ejemplo, la restricción (c) no está asociada a ningún nodo terminal en la figura 4.24. La prueba dual conserva sus premisas incluso si (c) es eliminada del problema, por lo tanto se considera redundante y puede ser suprimida del problema sin cambiar la solución óptima.

A continuación se considera la restricción (b), que es asociada con los nodos terminales 9 y 11. La cláusula falsa es $(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$ en el nodo 9 y $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$ en el nodo 11. De este modo se infiere que (b) puede ser alterada de cualquier manera ya que continúa implicando estas dos cláusulas sin invalidar el límite $z \geq 12$.

Supóngase que (b) es perturbada de la siguiente manera:

$$-x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 4 \quad (b)$$

$$(-1+\Delta b_1)x_1 + (1+\Delta b_2)x_2 + (4+\Delta b_3)x_3 \geq 4 + \Delta\beta \quad (b \text{ modificada})$$

Es fácil ver que la desigualdad perturbada implica $\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$ si y solo si

$$(-1+\Delta b_1)x_1 + (1+\Delta b_2)x_2 < 4 + \Delta\beta$$

Similarmente implica $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$ si y solo si $(1+\Delta b_2)x_2 < 4 + \Delta\beta$

Así que la perturbación $\Delta b_2, \Delta\beta$ es permitida si satisface el sistema lineal

$$\Delta b_1 + \Delta b_2 < 4 + \Delta\beta$$

$$\Delta b_2 < 3 + \Delta\beta$$

Entonces si b_1 (ahora -1) es perturbado y los otros datos son tomados fijos, el rango permisible para Δb_1 puede ser obtenido a través de maximizar o minimizar Δb_1 sujeto a:

$$\Delta b_1 + \Delta b_2 < 4 + \Delta\beta$$

$$\Delta b_2 < 3 + \Delta\beta$$

$$\text{Con } \Delta b_2 = \Delta\beta = 0$$

Los rangos para Δb_j y $\Delta\beta$ son: $-\infty < \Delta b_1 < 4, -\infty < \Delta b_2 < 3, -\infty < \Delta b_3 < \infty$ y $-3 < \Delta\beta < \infty$.

Se puede cuestionar el rango para Δb_3 por la observación de que el problema llega a ser infactible si b_3 es reducido por más de una unidad. Pero este cambio no reduce el valor óptimo del problema; por el contrario, lo incrementa a ∞ .

El modelo se utilizó para obtener el análisis de sensibilidad con el método propuesto y se obtuvieron los siguientes resultados:

Dawande y Hooker	Rango Máximo Permisible	Método Propuesto
$-\infty < \Delta b_1 < 4$	$-\infty < \Delta b_1 < 4$	$-\infty < \Delta b_1 < 4$
$-\infty < \Delta b_2 < 3$	$-\infty < \Delta b_2 < 5$	$-\infty < \Delta b_2 < 5$
$-\infty < \Delta b_3 < \infty$	$-\infty < \Delta b_3 < 2$	$-\infty < \Delta b_3 < 2$

El rango de sensibilidad calculado por Dawande y Hooker para un coeficiente puede ser un subconjunto propio del rango máximo permisible, mientras que el método propuesto proporciona los rangos correspondientes al máximo permisible.

4.5 Conclusión

La mayoría de los métodos de solución presentados en el capítulo anterior no resuelven el problema integral de la sensibilidad; o bien obtienen la variación de los coeficientes de la función objetivo o la correspondiente a las restricciones, pero no ambas.

El único procedimiento que proporciona de manera integral una variación permisible es el propuesto por Dawande y Hooker, sin embargo no garantiza alcanzar el máximo rango permisible de variación.

Como se ha podido observar en este capítulo, el método propuesto responde a las necesidades de las diferentes modalidades de modelos binarios. Aún en los casos extremos presentados.

También es importante señalar que, al obtener el máximo rango permisible de variación, el método propuesto mejora sustancialmente los resultados obtenidos a través de la propuesta de Dawande y Hooker, que es una de las más recientemente publicadas.

Una limitación del método propuesto es que al modificar y relajar el problema binario se obtiene un problema degenerado, y en problemas de gran escala se hace necesario emplear sistemas que utilicen algoritmos de punto interior.

4.6 Referencias

1. Glinz, I. *Sensitivity analysis in binary integer programming*. “INFORMS International Conference”, Puerto Rico, 2007.
2. Dawande, M.W. y Hooker, J.N. *Inference-based sensitivity analysis for mixed integer/linear programming*. *Operations Research*, Vol.48, No. 4, pp. 623-634. 2000.

CAPÍTULO 5. APLICACIÓN

5.1 Presentación

Este capítulo tiene el objetivo de mostrar una aplicación de la metodología propuesta para la elaboración del análisis de sensibilidad de una solución óptima obtenida a partir de un modelo de programación entera binaria pura.

Para realizar la aplicación se utilizó el “Modelo para la Presupuestación de Capital de PEMEX Exploración y Producción” que tiene una estructura binaria, que es considerado uno de los modelos de gran escala más estables y que está operando desde 1990 en la industria petrolera [2].

El modelo constituye el principal soporte para las negociaciones presupuestales que se llevan a cabo anualmente entre Petróleos Mexicanos y la Secretaría de Hacienda y Crédito Público.

5.2 Modelo para la presupuestación de capital de PEP

El modelo para la presupuestación de capital de PEMEX Exploración y Producción permite obtener los pronósticos multianuales de producción, atendiendo a una demanda de hidrocarburos que permite satisfacer los requerimientos del consumo nacional y los correspondientes a la plataforma de exportación, bajo condiciones de presupuesto limitado.

5.2.1 Descripción del modelo

A continuación se presenta la estructura básica de este modelo de programación entera binaria, que se soluciona utilizando CPLEX [1] en un servidor Alpha de Digital que cuenta con cuatro procesadores matemáticos.

Escenario General: Maximizar el valor económico y satisfacer los requerimientos multianuales de aceite y gas bajo condiciones de presupuesto limitado.

Función Objetivo:

$$\text{Maximizar } VPN = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m v p n_{i,j} x_{i,j}$$

Sujeto a:

Restricciones de Presupuesto de Inversión:

Límite Inferior:

$$I_{11}: \sum_{i=1}^k i_{i,1} x_{i,1} \geq l i p i_1 \quad \text{para el año 1}$$

$$I_{12}: \sum_{i=1}^k i_{i,1} x_{i,2} + \sum_{i=1}^k i_{i,2} x_{i,1} \geq l i p i_2 \quad \text{para el año 2}$$

:

$$I_{1m}: \sum_{i=1}^k i_{i,1} x_{i,m} + \dots + \sum_{i=1}^k i_{i,m} x_{i,1} \geq l i p i_m \quad \text{para el año m}$$

Límite Superior:

$$I_{S1}: \sum_{i=1}^k i_{i,1} x_{i,1} \leq l s p i_1 \quad \text{para el año 1}$$

$$I_{S2}: \sum_{i=1}^k i_{i,1} x_{i,2} + \sum_{i=1}^k i_{i,2} x_{i,1} \leq l s p i_2 \quad \text{para el año 2}$$

:

$$I_{Sm}: \sum_{i=1}^k i_{i,1}x_{i,m} + \dots + \sum_{i=1}^k i_{i,m}x_{i,1} \leq lspi_m \quad \text{para el año } m$$

Restricciones de Producción de Aceite:

Límite Inferior:

$$A_{I1}: \sum_{i=1}^k a_{i,1}x_{i,1} \geq lia_1 - basea_1 \quad \text{para el año } 1$$

$$A_{I2}: \sum_{i=1}^k a_{i,1}x_{i,2} + \sum_{i=1}^k a_{i,2}x_{i,1} \geq lia_2 - basea_2 \quad \text{para el año } 2$$

⋮

$$A_{Im}: \sum_{i=1}^k a_{i,1}x_{i,m} + \dots + \sum_{i=1}^k a_{i,m}x_{i,1} \geq lia_m - basea_m \quad \text{para el año } m$$

Límite Superior:

$$A_{S1}: \sum_{i=1}^k a_{i,1}x_{i,1} \leq lsa_1 - basea_1 \quad \text{para el año } 1$$

$$A_{S2}: \sum_{i=1}^k a_{i,1}x_{i,2} + \sum_{i=1}^k a_{i,2}x_{i,1} \leq lsa_2 - basea_2 \quad \text{para el año } 2$$

⋮

$$A_{Sm}: \sum_{i=1}^k a_{i,1}x_{i,m} + \dots + \sum_{i=1}^k a_{i,m}x_{i,1} \leq lsa_m - basea_m \quad \text{para el año } m$$

Restricciones de Producción de Gas:

Límite Inferior:

$$G_{I1}: \sum_{i=1}^k g_{i,1}x_{i,1} \geq lig_1 - baseg_1 \quad \text{para el año 1}$$

$$G_{I2}: \sum_{i=1}^k g_{i,1}x_{i,2} + \sum_{i=1}^k g_{i,2}x_{i,1} \geq lig_2 - baseg_2 \quad \text{para el año 2}$$

⋮

$$G_{Im}: \sum_{i=1}^k g_{i,1}x_{i,m} + \dots + \sum_{i=1}^k g_{i,m}x_{i,1} \geq lig_m - baseg_m \quad \text{para el año } m$$

Límite Superior:

$$G_{S1}: \sum_{i=1}^k g_{i,1}x_{i,1} \leq lsg_1 - baseg_1 \quad \text{para el año 1}$$

$$G_{S2}: \sum_{i=1}^k g_{i,1}x_{i,2} + \sum_{i=1}^k g_{i,2}x_{i,1} \leq lsg_2 - baseg_2 \quad \text{para el año 2}$$

⋮

$$G_{Sm}: \sum_{i=1}^k g_{i,1}x_{i,m} + \dots + \sum_{i=1}^k g_{i,m}x_{i,1} \leq lsg_m - baseg_m \quad \text{para el año } m$$

Restricciones de Elección Múltiple:

$$REM_1: \sum_{j=1}^m x_{1,j} \leq 1$$

$$\begin{aligned}
 & \quad \quad \quad m \\
 REM_2: & \quad \Sigma_{J=1} x_{2,j} \leq I \\
 & \quad \quad \quad \vdots \\
 & \quad \quad \quad m \\
 REM_k: & \quad \Sigma_{J=1} x_{k,j} \leq I
 \end{aligned}$$

donde:

$vpn_{i,j}$ = valor presente del proyecto i en el año j

$xi_{j,j}$ = variable binaria de decisión

k = número de proyectos

m = periodo de optimización

$i_{i,j}$ = inversión requerida por el proyecto i en el año j

lip_j = límite inferior o presupuesto mínimo de inversión para el año j

$lspi_j$ = límite superior o presupuesto máximo de inversión para el año j

$a_{i,j}$ = producción de aceite del proyecto i en el año j

lia_j = límite inferior o demanda mínima de aceite en el año j

lsa_j = límite superior o demanda máxima de aceite en el año j

$g_{i,j}$ = producción de gas del proyecto i en el año j

lig_j = límite inferior o demanda mínima de gas en el año j

lsg_j = límite superior o demanda máxima de gas en el año j

El sistema que administra la generación de restricciones del modelo tiene la opción de manejar diversos escenarios, para la presente aplicación fue seleccionado el siguiente:

“Maximizar el valor económico y satisfacer los requerimientos de aceite bajo condiciones de presupuesto limitado”

Función Objetivo:

$$\text{Maximizar } VPN = \sum_{i=1}^k vpn_i x_i$$

Sujeto a:

Restricción de Presupuesto de Inversión:

$$I: \sum_{i=1}^k i_i x_i \leq lsp$$

Restricción de Producción de Aceite:

$$A: \sum_{i=1}^k a_i x_i \geq lia$$

donde:

vpn_i = valor presente del proyecto i

x_i = variable binaria de decisión

k = número de proyectos

i_i = inversión requerida por el proyecto i

lsp = límite superior o presupuesto máximo de inversión

a_i = producción de aceite del proyecto i

lia = límite inferior o demanda mínima de aceite

El escenario específico utilizado fue: Satisfacer una demanda de 1,200,000 barriles adicionales de aceite con un presupuesto máximo de 70,000 millones de pesos.

La información que se utilizó corresponde a la base de datos del portafolio de proyectos de inversión de Pemex Exploración y Producción (ver anexo1).

Esta base de datos [3] se integra con los requerimientos de los proyectos que necesitan autorización oficial para iniciarse a partir de 2008 y aquellos que ya se encuentran en ejecución, en la tabla 5.1 se puede observar una estructura reducida de este portafolio.

TABLA 5.1 Proyectos de Inversión de Pemex Exploración y Producción

NÚMERO	CATEGORÍA	REGIÓN	PROYECTO	VPN	INVERSIÓN (MMS)			ACEITE (MBD)		
					2008	2009	2010	2008	2009	2010
1	EXPLOTACION	NORTE	UNIDAD EXPLOTACION 1	403.91	129.02	302.59	0.00	0.00	0.70	2.22
2	EXPLOTACION	NORTE	UNIDAD EXPLOTACION 2	415.12	133.42	0.00	0.00	0.90	1.27	1.16
3	EXPLOTACION	NORTE	UNIDAD EXPLOTACION 3	83.65	681.91	1,134.52	650.61	0.00	1.99	5.44
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
1073	EXPLOTACION	SUR	UNIDAD EXPLOTACION 1073	5.52	0.00	10.00	0.00	0.00	0.04	0.09
1074	EXPLOTACION	SUR	UNIDAD EXPLOTACION 1074	190.51	0.20	0.20	0.20	0.84	0.29	0.12
1075	EXPLOTACION	SUR	UNIDAD EXPLOTACION 1075	23.65	7.00	7.00	8.00	0.00	0.00	0.00

A continuación se describen las actividades que se realizaron para llevar a cabo esta aplicación.

Actividad 1. Se generó el modelo binario correspondiente al escenario seleccionado (ver anexo 2). A continuación se presenta la versión condensada de la estructura de este modelo.

MODELO_BINARIO_CPLEX

* FUNCIÓN OBJETIVO

MAXIMIZE

VPN: +403.907LOC0001 + 415.116 LOC0002 + ... + 190.511 LOC1074 +23.65
LOC1075

SUBJECT TO

* PRESUPUESTO DE INVERSIÓN 2008 (LÍMITE SUPERIOR)

LSPI_2008: +129.02LOC0001 +133.42LOC0002+...+0.20LOC1074
+7.00LOC1075 ≤ 70000

* DEMANDA DE ACEITE PARA 2008 (LÍMITE INFERIOR)

LIA_2008:+0.901LOC0002+1.352LOC0005+...+0.05LOC1071 + 0.842LOC1074
≥ 1200

* PROYECTOS COMPROMETIDOS O EN EJECUCIÓN

COMPROMETIDOS: + LOC0012 + LOC0013 + LOC0035 + LOC0036 + LOC0037 +
LOC0038 + LOC0039 + LOC0068 + LOC0069 + LOC0092 + LOC0093 = 11

* DECLARACIÓN DE VARIABLES BINARIAS

INTEGER

LOC0001 LOC0002 ... LOC1074 LOC1075

END

Actividad 2. Una vez generado el modelo, se procedió a resolverlo en un servidor Alpha de Digital, que cuenta con cuatro procesadores matemáticos y como solver se empleo CPLEX (ver anexo 3). En seguida se muestran parcialmente los resultados.

SOLUCIÓN ENTERA ÓPTIMA: FUNCIÓN OBJETIVO = 789915.06

ITERACIONES =15678945552 NODOS = 5226315184

TIEMPO DE SOLUCIÓN = 215.46 SEGUNDOS.

SECCIÓN 1 - RENGLONES

NÚMERO	ACTIVIDAD	HOLGURA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR	ACTIVIDAD DUAL	
1	VPN	789915.06	-789915.06	NO	NO	1
2	LSPI_2008	69998.01	1.99	NO	70000	0
3	LIA_2008	1200.48	-0.48	1200	NO	0
4	COMPROMETIDOS 11	0	11	11		0

SECCIÓN 2 - COLUMNAS

NÚMERO	ACTIVIDAD	HOLGURA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR	ACTIVIDAD DUAL	
5	LOC0001	1	0	NO	1	0
6	LOC0002	1	0	NO	1	0
:	:	:	:	:	:	:
1078	LOC1074	1	0	NO	1	0
1079	LOC1075	0	1	NO	1	0

Actividad 3. Se generó el modelo lineal para la reoptimización, incluyendo las restricciones correspondientes a la solución binaria y relajando el modelo binario hacia una estructura lineal (ver anexo 4). A continuación se puede observar la estructura reducida de este modelo.

MODELO_LINEAL_CPLEX

* FUNCIÓN OBJETIVO

MAXIMIZE

VPN :+403.907LOC0001+ 415.116LOC0002 +...+ 190.511LOC1074 +23.65LOC1075

SUBJECT TO

*PRESUPUESTO DE INVERSIÓN 2008 (LÍMITE SUPERIOR)

LSPI_2008 : +129.02 LOC0001+133.42LOC0002+...+0.20LOC1074+7.00LOC1075
<=70000

* DEMANDA DE ACEITE PARA 2008 (LÍMITE INFERIOR)

LIA_2008 :+ 0.901LOC0002 + 1.352LOC0005 +...+ 0.05LOC1071 + 0.842LOC1074
>= 1200

* PROYECTOS COMPROMETIDOS O EN EJECUCIÓN

COMPROMETIDOS : + LOC0012 + LOC0013 + LOC0035 + LOC0036 + LOC0037 +
LOC0038 + LOC0039 + LOC0068 + LOC0069 + LOC0092 + LOC0093 = 11

* RESTRICCIONES DE LA SOLUCIÓN BINARIA

SOL1: + LOC0001=1

SOL2: + LOC0002=1

:

SOL1074: + LOC1074=1

SOL1075: + LOC1075=0

END

Actividad 4. Una vez generado el modelo lineal, se procedió a resolverlo en la misma plataforma (Hardware y software) que el modelo binario (ver anexo 5). En seguida se muestran parcialmente los resultados.

SOLUCIÓN LINEAL: FUNCIÓN OBJETIVO = 789915.06

SECCIÓN 1 - RENGLONES

NÚMERO	ACTIVIDAD	HOLGURA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR	ACTIVIDAD DUAL
1	VPN	789915.06	-789915.06	NO	NO 1
2	LSPI_2008	69998.01	1.99	NO	70000 0
3	LIA_2008	1200.48	-0.48	1200	NO 0
4	COMPROMETIDOS	11	0	11	11 0
5	SOL1	1	0	NO	1 -403.91
6	SOL2	1	0	NO	1 -415.12
:	:	:	:	:	:
1078	SOL1074	1	0	NO	1 -190.51
1079	SOL1075	0	1	NO	1 -23.65

SECCIÓN 2 - COLUMNAS

NÚMERO	ACTIVIDAD	HOLGURA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR	ACTIVIDAD DUAL
1080	LOC0001	1	403.91	NO	1 0
1081	LOC0002	1	415.12	NO	1 0
:	:	:	:	:	:
2153	LOC1074	1	19.51	NO	1 0
2154	LOC1075	0	23.65	NO	1 0

Actividad 5. Una vez que se obtuvo la solución lineal, se accedió el modulo de sensibilidad del sistema para obtener el rango máximo permisible de variación tanto para los coeficientes de la función objetivo como para el lado derecho del modelo (ver anexo 6). A continuación se presentan los resultados de manera parcial.

FUNCIÓN OBJETIVO

NOMBRE DE LA VARIABLE	VALOR DE LA SOLUCIÓN	VARIACIÓN		
		MÍNIMA	VPN	MÁXIMA
LOC0001	1	311.01	403.91	+ INFINITO
LOC0002	1	319.64	415.12	+ INFINITO
:	:	:	:	:
LOC1074	1	146.69	190.51	+ INFINITO
LOC1075	0	- INFINITO	23.65	30.98

RESTRICCIONES

NOMBRE DE LA RESTRICCIÓN	VALOR DE LA SOLUCIÓN	VARIACIÓN		
		MÍNIMA	LADO DERECHO	MÁXIMA
VPN	780545.51	NO	NO	NO
LSPI_2008	69998.01	69998.01	70000	70000
LIA_2008	1200.28	1200	1200	1200.28
COMPROMETIDOS	11	11	11	11
SOL1	1	NO	1	1
SOL2	1	NO	1	1
:	:	:	:	:
SOL1074	1	NO	1	1
SOL1075	0	NO	0	0

Actividad 6. Con el objeto de validar los resultados se procedió a modificar el modelo binario original sustituyendo los valores originales por aquellos que se obtuvieron a través del análisis de sensibilidad (ver anexo 7). A continuación se muestra la estructura reducida del modelo generado con las modificaciones.

MODELO_BINARIO_CPLEX_MODIFICADO

* FUNCIÓN OBJETIVO

MAXIMIZE

VPN :+311.01LOC0001+319.64LOC0002+...+146.69LOC1074+30.98LOC1075

SUBJECT TO

* PRESUPUESTO DE INVERSIÓN 2008 (LÍMITE SUPERIOR)

LSPI_2008 : +129.02 LOC0001+133.42LOC0002+...+0.20LOC1074+7.00LOC1075

<= 70000

* DEMANDA DE ACEITE PARA 2008 (LÍMITE INFERIOR)

LIA_2008 :+ 0.901LOC0002 + 1.352LOC0005 +...+0.05LOC1071 + 0.842LOC1074

>= 1200

* PROYECTOS COMPROMETIDOS O EN EJECUCIÓN

COMPROMETIDOS : + LOC0012 + LOC0013 + LOC0035 + LOC0036 + LOC0037 +

LOC0038 + LOC0039 + LOC0068 + LOC0069 + LOC0092 + LOC0093 = 11

* DECLARACIÓN DE VARIABLES BINARIAS

INTEGER

LOC0001 LOC0002 ... LOC1074 LOC1075

END

Actividad 7. Se procedió a resolver el modelo binario modificado (ver anexo 8) obteniéndose la solución que de manera condensada se presenta a continuación.

SOLUCIÓN ENTERA ÓPTIMA: FUNCIÓN OBJETIVO = 608234.58

ITERACIONES =18045674435 NODOS = 6037443189

TIEMPO DE SOLUCIÓN = 299.56 SEGUNDOS.

SECCIÓN 1 - RENGLONES

NÚMERO	ACTIVIDAD	HOLGURA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR	ACTIVIDAD DUAL	
1	VPN	608234.58	-608234.58	NO	NO	1
2	LSPI_2008	69998.01	1.99	NO	70000	0
3	LIA_2008	1200.48	-0.48	1200	NO	0
4	COMPROMETIDOS	11	0	11	11	0

SECCIÓN 2 - COLUMNAS

NÚMERO	ACTIVIDAD	HOLGURA	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR	ACTIVIDAD DUAL	
5	LOC0001	1	0	NO	1	0
6	LOC0002	1	0	NO	1	0
:	:	:	:	:	:	:
1078	LOC1074	1	0	NO	1	0
1079	LOC1075	0	1	NO	1	0

Actividad 8. Una vez obtenidas las tres soluciones (Binaria, lineal y binaria modificada) se realizó una comparación entre ellas (ver anexo 9). En seguida se exhiben parcialmente los resultados de esta comparación.

SOLUCIONES

VARIABLE	MODELO BINARIO (ORIGINAL)	MODELO RELAJADO (LINEAL)	MODELO BINARIO (MODIFICADO)
LOC0001	1	1	1
LOC0002	1	1	1
LOC0003	0	0	0
:	:	:	:
LOC1073	0	0	0
LOC1074	1	1	1
LOC1075	0	0	0

5.3 Resultados

Finalmente se presenta el portafolio óptimo resultante de proyectos de inversión de Pemex Exploración y Producción para el año 2008, el cual se muestra de manera reducida en la tabla 5.2.

TABLA 5.2 Portafolio óptimo de Proyectos de Inversión

NÚMERO	CATEGORÍA	REGIÓN	PROYECTO	VPN	INVERSIÓN (MMS)		ACEITE (MBD)	
					2008	2008	2008	2008
1	EXPLOTACION	NORTE	UNIDAD EXPLOTACION 1	403.91	129.02		0.00	
2	EXPLOTACION	NORTE	UNIDAD EXPLOTACION 2	415.12	133.42		0.90	
8	EXPLOTACION	NORTE	UNIDAD EXPLOTACION 8	573.30	125.00		0.00	
:	:	:	:	:	:		:	
1070	EXPLOTACION	SUR	UNIDAD EXPLOTACION 1070	16.91	10.00		0.06	
1071	EXPLOTACION	SUR	UNIDAD EXPLOTACION 1071	16.37	10.00		0.05	
1074	EXPLOTACION	SUR	UNIDAD EXPLOTACION 1074	190.51	0.20		0.84	
TOTALES				789,915.06	69,998.01		1,200.48	
RESTRICCIONES					70,000.00		1,200.00	
DIFERENCIAS					-1.99		0.48	

Este portafolio nos permite garantizar que bajo las restricciones de inversión y producción de aceite crudo se maximiza el valor económico de la empresa.

Los resultados globales de la optimización se presentan a continuación:

TABLA 5.3

Portafolio	Número de proyectos	VPN (MMS)	Inversión (MMS)	Aceite (MBD)	Eficiencia (VPN/Inv)
Original	1075	1,017,687.12	124,675.99	1391.48	8.16
Optimizado	410	789,915.06	69,998.01	1200.48	11.28
Restricciones			≤ 70,000	≥ 1200	

Como se puede observar en la tabla 5.3 la eficiencia en la inversión se incrementa en la medida en la que se restringe el presupuesto.

Sin embargo en las negociaciones presupuestales, siempre quedaba una interrogación sobre ¿Qué tan sólida y estable era la solución? ¿Qué impacto tendrían las variaciones en el costo del capital, en los precios de los hidrocarburos, en la paridad del dólar, etc?

Afortunadamente con esta nueva metodología ya se puede obtener la variación máxima permisible en la utilidad (VPNs) de los proyectos, lo que permite inferir hasta que punto un proyecto puede presentar desviaciones económico-financieras sin afectar la solución óptima, es decir sin requerir de un cambio de base (ver tabla 5.4)

TABLA 5.4 Variación máxima permisible en el VPN.

NÚMERO	CATEGORÍA	REGIÓN	PROYECTO	VPN (MMP)	
				ORIGINAL	VARIACIÓN MÁXIMA
1	EXPLOTACION	NORTE	UNIDAD EXPLOTACION 1	403.91	311.01
2	EXPLOTACION	NORTE	UNIDAD EXPLOTACION 2	415.12	319.64
8	EXPLOTACION	NORTE	UNIDAD EXPLOTACION 8	573.30	441.44
:	:	:	:	:	:
1070	EXPLOTACION	SUR	UNIDAD EXPLOTACION 1070	16.91	13.02
1071	EXPLOTACION	SUR	UNIDAD EXPLOTACION 1071	16.37	12.60
1074	EXPLOTACION	SUR	UNIDAD EXPLOTACION 1074	190.51	146.69

5.4 Conclusión

El principal resultado de esta aplicación es sin lugar a dudas el análisis de sensibilidad obtenido a través del método propuesto, debido a que se obtuvieron las variaciones máximas permisibles en la utilidad que se espera obtener en cada proyecto, conservando la misma solución óptima.

5.5 Referencias

1. *CPLEX® Callable Library*. CPLEX Optimization, Inc. 2007.
2. Glinz, Irma y Flores, Idalia. *Capital Budgeting Model for Pemex Exploración y Producción*. Oil and Gas Business, 2006.
3. Petróleos Mexicanos. <http://www.pemex.com/index.cfm>

CONCLUSIONES

Actualmente, la programación entera constituye una de las herramientas de resolución de modelos matemáticos más populares, cuya tasa de utilización muestra una tendencia con un crecimiento acelerado y significativo. Esto se ha debido, sin lugar a dudas, al avance tecnológico de los sistemas computacionales.

Este incremento en la utilización de las técnicas de programación entera, ha provocado que la necesidad de contar con procedimientos para obtener el análisis de sensibilidad de las soluciones derivadas de modelos enteros, cobre gran importancia.

La síntesis sobre el análisis de sensibilidad dedicado a los problemas lineales 0-1, muestra la diversidad de trabajos destinados a esta temática. En ella, se procuró unificar los diferentes criterios, se hizo un énfasis particular sobre el análisis de sensibilidad de la función objetivo y trabajos más específicos sobre el correspondiente a las restricciones.

Las investigaciones recientes sobre el análisis de sensibilidad se enfocan esencialmente hacia: La explotación de las condiciones de optimalidad; la determinación del radio de estabilidad; el desarrollo de técnicas para determinar la región de estabilidad de las soluciones ϵ -aproximadas a la solución óptima x y el estudio de la reoptimización repetitiva.

Los métodos de solución existentes no contemplan la obtención del análisis de sensibilidad integral de los problemas enteros binarios, que incluyan la manera de obtener las variaciones máximas permisibles tanto de los coeficientes de la función objetivo, como las correspondientes a las restricciones y al lado derecho. El método que presenta la propuesta doctoral si permite obtener ese análisis integral.

La metodología propuesta responde a las necesidades de las diferentes modalidades de modelos binarios. Aún en los casos extremos correspondientes a modelos con el espacio

de soluciones no acotado, modelos con óptimos alternativos y finalmente en aquellos que presentan degeneración.

El método obtenido mejoró sustancialmente los resultados obtenidos a través del método de Dawande y Hooker, que es uno de los publicados más recientemente.

Se realizó la aplicación en uno de los modelos binarios, de mayor escala, empleados en México: el modelo de presupuestación de capital de Pemex Exploración y Producción. Los resultados obtenidos tuvieron una excelente aceptación entre los usuarios de este modelo.

Un resultado adicional experimental que se puede plantear como una nueva línea de investigación, es sin lugar a dudas, que ante una ligera variación en el dominio de la transformación lineal empleada en la metodología propuesta, se puede analizar la estabilidad de una solución derivada de un modelo entero. Esto quiere decir que el resultado se puede generalizar a las soluciones enteras.

Notación

α_0^*	Tolerancia máxima permisible sobre las variaciones en los coeficientes de los objetivos con respecto a c'
β_0^*	Tolerancia máxima permisible sobre las variaciones en los valores del lado derecho con respecto a b'
B^{-1}	Inverso de la matriz de base óptima
$d(c, c')$	Distancia de Chebyshev
Ec	Conjunto de soluciones completas
Ep	Conjunto de soluciones parciales
$H(S)$	Cubierta convexa de S
I_k	Intervalo de sensibilidad
$O\rho(c)$	Centro de estabilidad de centro c
$\rho(c)$	Radio de estabilidad
Q	Familia máxima de subconjuntos tales que $\sum ci > cx^*$
\mathfrak{R}	Región de estabilidad
RL	Relajación lagrangeana
T	Transformación lineal
$v(P')$	Valor óptimo de P'
x^*	Solución óptima
x^c	La mejor solución de Ec
x^p	La mejor solución de Ep
x^m	La mejor solución de x^p y x^c
$\{x^1, \dots, x^k\}$	K mejores soluciones
$\Omega(p)$	Conjunto de soluciones óptimas de P
$ \cdot $	Valor absoluto
$ \{\cdot\} $	Cardinalidad de un conjunto