



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

DISEÑO DE UN OBSERVADOR DE FUERZA  
PARA UN SISTEMA MAESTRO-ESCLAVO  
DE ROBOTS RÍGIDOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

ÁREA: ELÉCTRICA, CAMPO: CONTROL

P R E S E N T A:

JOSÉ RAFAEL GARCÍA SÁNCHEZ

TUTOR:

DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ

MÉXICO, D.F. 2013



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Héctor Benítez Pérez  
Secretario: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez  
Vocal: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez  
1er. Suplente: Dr. Paul Rolando Maya Ortiz  
2do. Suplente: Dr. Alejandro Rodríguez Angeles

La tesis se realizó en el laboratorio de Robótica de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

**TUTOR DE TESIS:**

---

Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez



# Resumen

En los sistemas de teleoperación bilateral maestro-esclavo de robots rígidos, existen diferentes problemas que han llamado la atención de la comunidad de control. Uno de los principales, es lograr que el operador humano reciba la información adecuada para que pueda desempeñar tareas remotas de manipulación que pueden requerir un cierto grado de precisión. La información puede ser de distintas índoles, por ejemplo fuerzas, posiciones, gráficos, etc. y generalmente es obtenida mediante transductores. Es por ello que en este trabajo se implementan en el robot esclavo dos observadores de estado, uno para reconstruir la velocidad del efector final y el otro para estimar la fuerza de contacto y así prescindir del uso de sensores.

Inicialmente se presenta una breve introducción a los sistema de teleoperación. Se describe la motivación principal que originó el desarrollo de este trabajo y la formulación del problema a resolver. De igual forma, un acercamiento al estado del arte en la problemática de control de posición/fuerza en robots manipuladores, así como algunas otras problemáticas que se han planteado para sistemas teleoperados. Se abordan los modelos matemáticos referidos a los dos robots, a saber, maestro y esclavo. Se presentan también las leyes de control correspondientes y las simulaciones pertinentes. Por último las conclusiones y perspectivas a futuro de este trabajo para finalizar con el Apéndice, en el que se llevó a cabo el análisis de estabilidad del sistema.



## Dedicatoria

A DIOS, por permitirme ser y estar. Por brindarme lo necesario para conocer, valorar y aprender más de mi mismo y de la inmensidad que me rodea. Gracias por darme la oportunidad de seguir adelante y guiarme a través del camino para ser un hombre de bien.

A mi Padre, que con su ejemplo y amor, logró hacer de mí un hombre de principios, actitudes positivas y sobre todo, a nunca darme por vencido. Gracias por ser el aliciente que me ha permitido seguir adelante. Gracias por confiar en mí, te amo padre.

A mi Madre, por todo el amor y apoyo en las decisiones que he tomado a lo largo de mi vida. Gracias por estar siempre conmigo, por escucharme en los momentos en los que no sabía hacia donde dirigirme. Gracias por tus consejos y la sabiduría en tus palabras, te amo madre.

A mi hermana Isabel, que con su amor, apoyo y carácter, me enseñó a nunca detenerme y a entender que los logros, sólo se alcanzan con perseverancia. Gracias por todo, te amo hermana.

A mi futura esposa Marlene, a quien doy GRACIAS absolutas por ser parte de mi vida, por ser mi compañera, mi cómplice y estar siempre a mi lado en toda circunstancia. Gracias mi vida, porque en los momentos mas complicados de mi camino, has estado allí, brindándome tu amor y tu paciencia. TE AMO HERMOSA MUJER.





# Agradecimientos

A mi asesor de tesis, el Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez, por confiar en mis capacidades y permitirme trabajar con él. Le agradezco la oportunidad que me brindó de crecer profesionalmente a través de sus valiosas enseñanzas, sugerencias y del compromiso tan importante que asumió para conmigo.

Agradezco a mis revisores, el Dr. Héctor Benítez Pérez, el Dr. Gerardo René Espinosa Pérez, el Dr. Paul Rolando Maya Ortiz y el Dr. Alejandro Rodríguez Angeles. A todos ellos por tomarse el tiempo de seguir este proceso y los comentarios, sugerencias y apoyo que me proporcionaron para mejorar la calidad de este documento.

A los investigadores del Posgrado en Ingeniería de la UNAM, la máxima casa de estudios, por permitirme adquirir los conocimientos necesarios que permitieron concluir de manera satisfactoria mis estudios de maestría.

A mis amigos y compañeros de generación, por su amistad, motivación y ayuda incondicional.

A mi amigo Javier, por la ayuda que me brindó para entender algunos temas durante la realización de mi trabajo de tesis.

Al CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología) por los medios económicos otorgados mediante la beca para estudios de Posgrado para realizar mis estudios de maestría.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	3
1.2. Formulación del problema . . . . .	4
1.3. Estado del arte . . . . .	4
1.3.1. Control de posición/fuerza . . . . .	4
1.3.2. Teleoperación . . . . .	5
1.4. Contribución . . . . .	7
1.5. Estructura del trabajo . . . . .	7
<b>2. Preliminares matemáticos</b>	<b>9</b>
2.1. Cinemática de robots manipuladores . . . . .	9
2.1.1. Cinemática directa . . . . .	10
2.1.2. Cinemática inversa . . . . .	13
2.1.3. Cinemática diferencial . . . . .	15
2.2. Dinámica de robots manipuladores . . . . .	17
2.2.1. Dinámica de un robot manipulador en movimiento libre . . . . .	18
2.2.1.1. Propiedades del modelo dinámico . . . . .	19
2.2.1.2. Dinámica considerando los actuadores . . . . .	20
2.2.2. Dinámica de un robot manipulador en movimiento restringido . . . . .	24
2.3. Sistema de Teleoperación . . . . .	25
2.3.1. Robot Maestro . . . . .	25
2.3.2. Robot Esclavo . . . . .	26
2.4. Principio de Ortogonalización . . . . .	26

2.5. Conclusiones . . . . .	29
<b>3. Leyes de control</b>	<b>31</b>
3.1. Robot Maestro . . . . .	31
3.2. Operador . . . . .	33
3.3. Robot Esclavo . . . . .	34
3.3.1. Modelo dinámico en coordenadas cartesianas . . . . .	34
3.3.2. Observador de velocidad . . . . .	36
3.3.3. Observador de fuerza . . . . .	41
3.4. Conclusiones . . . . .	43
<b>4. Resultados de simulación</b>	<b>45</b>
4.1. Comentarios . . . . .	47
4.2. Conclusiones . . . . .	53
<b>5. Conclusiones y Trabajo futuro</b>	<b>55</b>
<b>Referencias</b>	<b>57</b>
<b>A. Demostración del Teorema 3.1</b>	<b>63</b>

# Índice de figuras

1.1. Sistema de teleoperación . . . . .	2
1.2. Modelo de un sistema de teleoperación unilateral . . . . .	3
1.3. Modelo de un sistema de teleoperación bilateral . . . . .	3
2.1. Asignación de marcos de referencia . . . . .	11
2.2. Cinemática directa . . . . .	12
2.3. Cinemática inversa . . . . .	15
2.4. Mapeos . . . . .	16
2.5. Diagrama de un motor de CD . . . . .	20
2.6. Reductor . . . . .	22
2.7. Esquema robot-actuadores . . . . .	23
2.8. Sistema de Teleoperación . . . . .	25
2.9. Principio de ortogonalización . . . . .	28
3.1. Relación entre el robot maestro y el robot esclavo . . . . .	32
3.2. Planos tangentes a la superficie en el punto de contacto . . . . .	37
4.1. Restricción . . . . .	47
4.2. Robot maestro . . . . .	49
4.3. Robot esclavo . . . . .	50
4.4. Trayectorias cartesianas y errores del esclavo . . . . .	51
4.5. Errores de observación de posición y fuerza . . . . .	52
4.6. Fuerzas . . . . .	53



# Índice de tablas

2.1. Parámetros obtenidos mediante Denavit-Hartenberg . . . . .	13
4.1. Parámetros de los controladores . . . . .	46





# Capítulo 1

## Introducción

Durante las últimas décadas, el desarrollo de la robótica ha impactado dentro de los más variados aspectos de la vida cotidiana. Su importancia ha trascendido notoriamente en la percepción actual del mundo que nos rodea, permitiéndonos desde explorar territorios que por su naturaleza son imposibles de ser sujetos a investigación, experimentar en ambientes que ponen en riesgo la integridad física de los seres humanos, facilitar el manejo de materiales de alto riesgo, realizar tareas repetitivas que en una persona pueden resultar en lesiones a largo plazo, entretenimiento, comunicaciones, etc.

No obstante, hablar de robótica, es hablar de un proceso complejo que se ha ido compaginando con la evolución humana, entendiéndose esta última como la investigación y el desarrollo de nuevas teorías y tecnologías que permitan aseQUIblemente fusionar el área multidisciplinaria de la que depende la robótica.

Desde sus inicios, los robots han estado confinados para realizar tareas dentro de las fábricas, principalmente en la industria automotriz, en donde han sido de gran utilidad debido a su capacidad para llevar a cabo trabajos simples pero repetitivos con un desempeño, rapidez y uniformidad superior al operador humano. Inicialmente los robots ejecutaban las tareas que le eran programadas con un escaso margen de adaptación al entorno (prácticamente nulo), pero esto ha ido cambiando a medida que ha evolucionado la tecnología en los sensores, en las técnicas de control, en las capacidades computacionales, etc. Es por esto que hoy en día estos sistemas admiten cierto grado de adaptación a las tareas que ejecutan. Ejemplo de ello son los sistemas de visión que permiten captar la orientación de piezas dentro de un sistema de producción.

A pesar de que los avances tecnológicos han ayudado a expandir el campo de aplicación de los robots más allá de la industria (por ejemplo en la medicina, la construcción, el mantenimiento, el hogar, la milicia, la educación, la agricultura, la exploración espacial, el entretenimiento, etc.), el grado de adaptabilidad al entorno resulta un tanto complicado debido a que es necesario conocer de antemano la estructura de éste y la tarea a realizar. Por lo tanto, si la tarea que el sistema va a desempeñar no es repetitiva, no está bien estructurada y el entorno es variable, el uso de tal sistema no es aplicable, por lo que es necesario recurrir a las capacidades de adaptación del operador humano. Es en este punto en el que se concibe la *Teleoperación*, que se centra en gobernar u operar un dispositivo (por ejemplo un robot manipulador<sup>1</sup>) de forma remota por parte de un operador humano para realizar tareas complejas ó peligrosas en ambientes poco estructurados [1]-[2], proporcionando al operador la percepción de estar directamente en contacto con el entorno.

Dentro de la teleoperación convencional, se distinguen cinco elementos esenciales: *operador*, *robot maestro*, *controladores y canales de comunicación*, *robot esclavo* y *entorno* [3]-[4], como se observa en la Figura 1.1 y el operador puede recibir retroalimentación visual, acústica ó táctil.

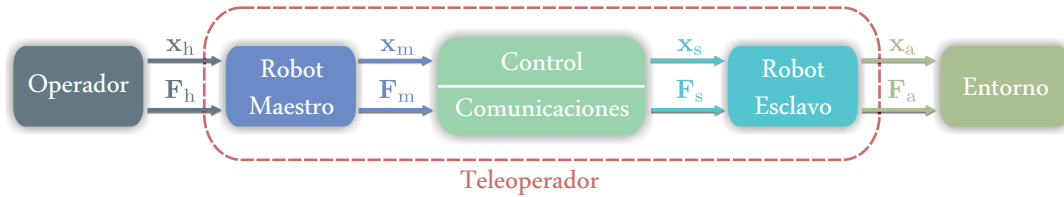


**Figura 1.1** – Sistema de teleoperación

El operador humano emplea al robot maestro para manipular al entorno a través del robot esclavo. Esta operación es coordinada a través de los algoritmos de control y de los canales de comunicación.

La teleoperación puede ser unilateral o bilateral de acuerdo al flujo de información. En la teleoperación unilateral, el canal de comunicación envía señales de posición ó fuerza del robot maestro al robot esclavo y sólo existe retroalimentación visual del robot esclavo al robot maestro, como se observa en la Figura 1.2.

<sup>1</sup>Sistema electromecánico con grados de libertad, con capacidad de ser programado y que incorpora una estrategia de control para la manipulación de objetos según trayectorias variables [5].



**Figura 1.2** – Modelo de un sistema de teleoperación unilateral

Sin embargo, en la teleoperación bilateral también existe retroalimentación de señales de posición y/o fuerza del robot esclavo al robot maestro además de la información visual (Figura 1.3).



**Figura 1.3** – Modelo de un sistema de teleoperación bilateral

Si la señal de retroalimentación es fuerza (es decir, la fuerza de contacto entre el robot esclavo y el entorno) resulta común utilizar sensores para la adquisición de ésta.

## 1.1. Motivación

Los sistemas de teleoperación bilateral maestro-esclavo han tenido un auge importante en los últimos años y gracias a su versatilidad, su campo de aplicación se ha extendido de manera considerable (principalmente en educación, medicina, manejo de materiales peligrosos, exploración espacial y marina). En estos sistemas es común el uso de sensores de velocidad y fuerza en el robot esclavo, lo que se traduce no solo en una inversión económica considerable sino también en las claras desventajas que son inherentes a estos dispositivos tales como sensibilidad al ruido, dimensiones físicas que pueden alterar el diseño mecánico del robot, dificultad para su montaje y para el desarrollo del software que permita tratar las señales, etc. Debido a ello, surge el interés de utilizar un observador de estados que reconstruya la velocidad del efector final y un observador que estime la fuerza de contacto con el entorno, ambos para el robot esclavo y así prescindir del uso de sensores en este último.

## 1.2. Formulación del problema

El problema se fundamenta en controlar un sistema de teleoperación bilateral maestro-esclavo no similar<sup>2</sup>, implementando en el robot esclavo un esquema de control basado en dos observadores, uno para reconstruir la velocidad del efector final y otro para estimar la fuerza de contacto con el entorno de tal forma que el sistema sea estable y transparente<sup>3</sup>. Se asume, por un lado, que la posición de cada eslabón del robot esclavo es medible usando sensores de posición (encoders), pero no se cuenta ni con las señales de velocidad de cada articulación ni con la señal de la fuerza de contacto que ejerce el efector final del robot esclavo sobre alguna superficie y, por otro lado, que es bien conocida la dinámica de los robots CRS A465 y Phantom del Laboratorio de Robótica del edificio de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, los cuales fungirán como robots maestro y esclavo del sistema de teleoperación.

## 1.3. Estado del arte

Debido a la naturaleza del problema a resolver, es importante mencionar algunas contribuciones relevantes que se han llevado a cabo tanto en el control de posición/fuerza de robots manipuladores así como sobre los sistemas de teleoperación.

### 1.3.1. Control de posición/fuerza

El control de posición/fuerza tiene sus antecedentes a nivel industrial en donde la necesidad de contar con algoritmos de control que permitieran una sutil interacción entre un entorno de trabajo y un robot manipulador, *i.e.* que el robot entre en contacto con una superficie, era cada vez más evidente. Esto impulsó a la comunidad científica a resolver tal problemática. No obstante, debido a la gran cantidad de esquemas de control que se han propuesto para resolver este problema [6], una clasificación estándar sería algo complicado.

---

<sup>2</sup>En el contexto de robótica, *similaridad* se refiere a la similitud en cuanto a propiedades geométricas, cinemáticas ó dinámicas que pueden tener dos ó mas robots. Esto en teleoperación significa que el robot maestro y el robot esclavo pueden tener similaridad geométrica, similaridad cinemática ó similaridad dinámica. En caso contrario se dice que son *no similares*.

<sup>3</sup>Un sistema de teleoperación es *transparente* si se logra que las propiedades mecánicas del entorno sean reflejadas al operador, es decir, que el operador experimente la sensación de interactuar directamente con el entorno [15].

Sin embargo, de acuerdo a [7]-[8] existen algunas equivalencias entre ciertos esquemas. Es por ello que se ha aceptado que su clasificación derive en dos vertientes [9], control por impedancia y control híbrido de posición y fuerza. En el control por impedancia [10], la idea principal es especificar el comportamiento deseado de la dinámica del manipulador (impedancia deseada) cuando el robot se encuentra en contacto con una superficie y la ley de control se diseña de tal manera que regule la interacción entre los errores de posición y la fuerza de contacto. Por otro lado, en el control híbrido [11] se considera que la superficie es completamente rígida, por lo que se puede descomponer el espacio de trabajo en 2 subespacios ortogonales entre sí, uno que corresponde a posición y otro a fuerza, lo que permite analizarlos de manera independiente. Existen por lo tanto, grados de libertad asociados al subespacio de posición y grados de libertad asociados al subespacio de fuerza y que se diferencian entre sí de acuerdo a una matriz binaria de selección. De esta manera, pueden usarse esquemas de control independiente para cada uno. Cabe resaltar que en [12] se demostró que este esquema de control híbrido es inestable cuando se implementa en algunos robots con articulaciones de revolución y que se debe principalmente a la geometría del robot, mientras que en [13] se concluye que tal inestabilidad no es inherente al esquema de control híbrido, sino a un resultado de una formulación incompleta que se debe principalmente a la inversa de la matriz Jacobiana del manipulador. Proponen una reformulación del esquema híbrido que garantiza estabilidad. Una extensión del esquema híbrido se propone en [14], en donde no se requiere el empleo de una matriz de selección (como en el concepto original de este controlador), sino que las matrices de proyección se calculan a partir de la descomposición ortogonal en el punto de contacto entre el efector final del robot y la superficie, separando completamente las posiciones de las fuerzas de una manera más sencilla.

### 1.3.2. Teleoperación

Dentro del esquema de teleoperación y de acuerdo a la información que se transmite entre el robot maestro y el robot esclavo, se diferencian cuatro tipos. El primero es posición-posición [15], el segundo es posición-fuerza [16]-[17], el tercero es fuerza-fuerza [18] y el cuarto es posición/fuerza-posición/fuerza [19]-[20]. Como se verá mas adelante, para este trabajo de tesis el sistema de teleoperación que se está considerando corresponde al tipo posición/fuerza-posición/fuerza. Basados en esta arquitectura, las señales de posición-velocidad (y posiblemente

aceleración) y fuerza del robot maestro, son enviadas al robot esclavo para que éste lleve a cabo el seguimiento de tales trayectorias, mientras que la posición y la fuerza que ejerce el robot esclavo sobre el entorno, es enviada hacia el robot maestro. En otras palabras, esta arquitectura se traduce en un problema de seguimiento por parte del robot esclavo.

Los objetivos de control mas importantes dentro de la teleoperación bilateral son la estabilidad y la transparencia, por este motivo en el diseño de un sistema de esta naturaleza, siempre deben de considerarse ambos [21]. No obstante, cuando la distancia entre el operador y el entorno es considerable, es común que se presenten retardos en los canales de comunicación, los cuales pueden ocasionar que el sistema se vuelva inestable [22] incluso cuando éstos son pequeños [23]. Se han propuesto diversas soluciones a este problema, por ejemplo en [24]-[25] proponen un esquema de control basado en pasividad con el que es posible garantizar que la energía total del sistema se conserva, asegurando la estabilidad. En [26] proponen un control jerarquizado, en donde el más alto nivel permite controlar al sistema con un grado de transparencia deseada, mientras que el más bajo nivel es un control pasivo que permite asegurar que no se genera energía extra en el sistema debido a retardos. Por otro lado, en [27] proponen un método basado en técnicas de control clásico en el dominio de la frecuencia para un sistema de teleoperación bilateral que brinda un buen desempeño (alto nivel de transparencia) y estabilidad ante retardos en la comunicación.

Los esquemas de control para sistemas de teleoperación bilateral, requieren de la señal de fuerza de contacto que ejerce el robot esclavo sobre el entorno. En su mayoría la adquisición de ésta señal es a través de sensores. No obstante, se han desarrollado algunas estrategias de control que basan su diseño en observadores de fuerza para prescindir de estos sensores. Por ejemplo, en [28] proponen dos observadores de fuerza, uno para el robot maestro y otro para el robot esclavo, basados en redes neuronales que no requieren del modelo dinámico del sistema. En [29] diseñan un esquema de control en donde emplean observadores basados en modos deslizantes con entradas desconocidas para estimar tanto la velocidad como la fuerza de contacto del robot esclavo empleando únicamente mediciones de posición. Por otro lado, en [30] se establece un esquema de sincronización empleando observadores de estado para estimar la posición y la velocidad de ambos robots, además de un observador de fuerza para estimar la fuerza de contacto del robot esclavo.

## 1.4. Contribución

La principal contribución de este trabajo de tesis, es el análisis de estabilidad de un sistema de teleoperación bilateral maestro-esclavo en donde se emplean observadores de estado que permitan reconstruir las señales de velocidad y fuerza del esclavo (cuando éste entra en contacto con su entorno), y dado que en un sistema de esta naturaleza se tiene un problema de sincronización externa [31], se llevarán a cabo las simulaciones pertinentes para verificar que se logra resolver el problema planteado.

## 1.5. Estructura del trabajo

En el Capítulo 1 se ha expuesto una breve reseña acerca de los sistemas de teleoperación. De igual forma se presentaron la motivación, que permitió definir el planteamiento del problema a resolver, así como algunas de las investigaciones más importantes que se tomaron en cuenta para desarrollar esta tesis y se concluyó con la contribución del presente trabajo. A continuación se presenta el resto de la organización de esta Tesis.

En el Capítulo 2 se presentan grosso modo el modelo cinemático y dinámico de un robot manipulador junto con algunas propiedades importantes, así como el modelo matemático del sistema de teleoperación y las herramientas matemáticas que servirán como base esencial para el análisis de estabilidad.

En el Capítulo 3 se expone lo concerniente a las estrategias de control, en donde se proporciona una explicación general de lo que debe realizar el sistema de teleoperación, así como también el diseño de los observadores de velocidad-fuerza implementados.

En el Capítulo 4 se muestran los resultados en simulación del esquema de control abordado en el capítulo 3 y una breve discusión de los resultados.

En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y las perspectivas a futuro sobre este trabajo.

Por último se presenta el Apéndice, en el que se lleva a cabo el análisis de estabilidad de todo el sistema y que representa la contribución mas importante de esta tesis.





## Capítulo 2

# Preliminares matemáticos

Para desarrollar un algoritmo de control es necesario un modelo matemático del sistema que se pretende estudiar. Este modelo representa el comportamiento aproximado del sistema real, lo que permite analizar y proponer esquemas de control lo suficientemente eficaces y poder evaluar su desempeño mediante simulaciones numéricas. En este tema de tesis se trata de un sistema de teleoperación bilateral maestro-esclavo de robots rígidos, por lo que en este capítulo se explica brevemente la obtención del modelo matemático de un robot manipulador y algunas de sus propiedades más importantes. De igual manera se abordan el modelo matemático del robot maestro y el modelo matemático del robot esclavo, así como también algunas herramientas matemáticas que son esenciales para tratar de manera conveniente las leyes de control y para el análisis de estabilidad.

### 2.1. Cinemática de robots manipuladores

La cinemática es una rama de la física que estudia el movimiento de los cuerpos sin tomar en cuenta las fuerzas que los originan. En el caso de los robots manipuladores, la cinemática estudia el movimiento del robot con respecto a un sistema de referencia, es decir, se enfoca en la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo y en particular por las relaciones entre la posición y la orientación del efector final con los valores que toman sus coordenadas articulares. Se tienen en general tres problemas asociados a la cinemática de un robot manipulador, la *cinemática directa*, la *cinemática inversa* y la *cinemática diferencial*.

### 2.1.1. Cinemática directa

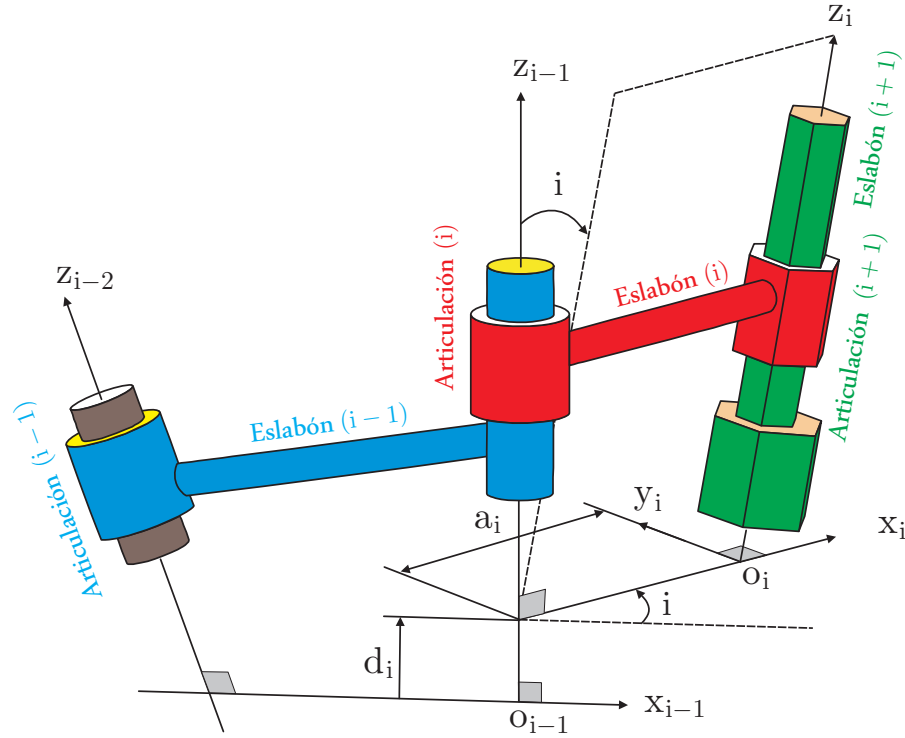
La cinemática directa describe el movimiento de un robot manipulador mediante la relación que existe entre las coordenadas articulares o generalizadas y las coordenadas cartesianas del efector final, es decir, permite expresar la posición y orientación del efector final en función de las variables articulares con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia. La estructura matemática de la cinemática directa es generalmente no lineal en las variables de posición, compuesta por funciones trigonométricas y parámetros del robot como son longitudes, masas, momentos de inercia, etc.

Existen diferentes métodos para calcular la cinemática directa. Uno de ellos es mediante *matrices de transformación homogénea*, que permiten relacionar la posición y orientación relativa entre dos eslabones consecutivos. Es importante señalar que existirán tantas matrices de transformación homogénea de acuerdo a la cantidad de articulaciones del robot. Cada matriz de transformación  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i(\mathbf{q})$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  se encuentra a partir del producto de cuatro transformaciones básicas, dos de rotación ( $\mathbf{R}_{z,\theta_i}, \mathbf{R}_{x,\alpha_i}$ ) y dos de traslación ( $\mathbf{T}_{z,d_i}, \mathbf{T}_{x,a_i}$ )

$$\begin{aligned} {}^{i-1}\mathbf{A}_i(\mathbf{q}) &= \mathbf{R}_{z,\theta_i} \mathbf{T}_{z,d_i} \mathbf{T}_{x,a_i} \mathbf{R}_{x,\alpha_i} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Para determinar los parámetros  $(\theta_i, \alpha_i, d_i, a_i)$ , es común emplear la representación Denavit-Hartenberg [32], que dentro del área de la robótica es el estándar de facto para llevar a cabo la parametrización del robot (visto como una cadena cinemática). Esta representación permite asignar sistemas coordenados (con posición y orientación definidas) a cada uno de los eslabones de manera conveniente empleando algunas reglas. De acuerdo a la Figura 2.1, se tiene entonces

- $\theta_i$  representa el ángulo entre los ejes  $x_{i-1}$  y  $x_i$  alrededor del eje  $z_{i-1}$ ,
- $\alpha_i$  representa el ángulo entre los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$  alrededor del eje  $x_i$ ,
- $a_i$  representa la distancia entre los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$  medida a lo largo del eje  $x_i$ ,
- $d_i$  representa la distancia medida desde el origen del sistema coordenado  $o_{i-1}$  hasta el eje  $x_i$  a lo largo del eje  $z_{i-1}$ .



**Figura 2.1** – Asignación de marcos de referencia

Finalmente, a partir del cálculo de las  $n$  matrices definidas por (2.1) se conforma la matriz de transformación homogénea  ${}^0\mathbf{T}_n$

$${}^0\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_n & {}^0\mathbf{o}_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{A}_1(\mathbf{q}) {}^1\mathbf{A}_2(\mathbf{q}) \cdots {}^{n-1}\mathbf{A}_n(\mathbf{q}), \quad (2.2)$$

en donde  ${}^0\mathbf{R}_n$  y  ${}^0\mathbf{o}_n$  son la orientación y la posición del efector final con respecto a la base del manipulador.

En general, se observa en (2.2) que el problema de cinemática directa es un mapeo del espacio articular al espacio cartesiano [33]

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

en donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  (con  $n$  el número de grados de libertad) es el vector de posiciones articulares y  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m$  (para el caso general  $m = 6$ , pero si  $n > m$  entonces el robot es redundante) es una función continua y diferenciable en la variable  $\mathbf{q}$  y en general es no lineal.

Cabe mencionar que si para la orientación se adopta una representación mínima (*e.g.*

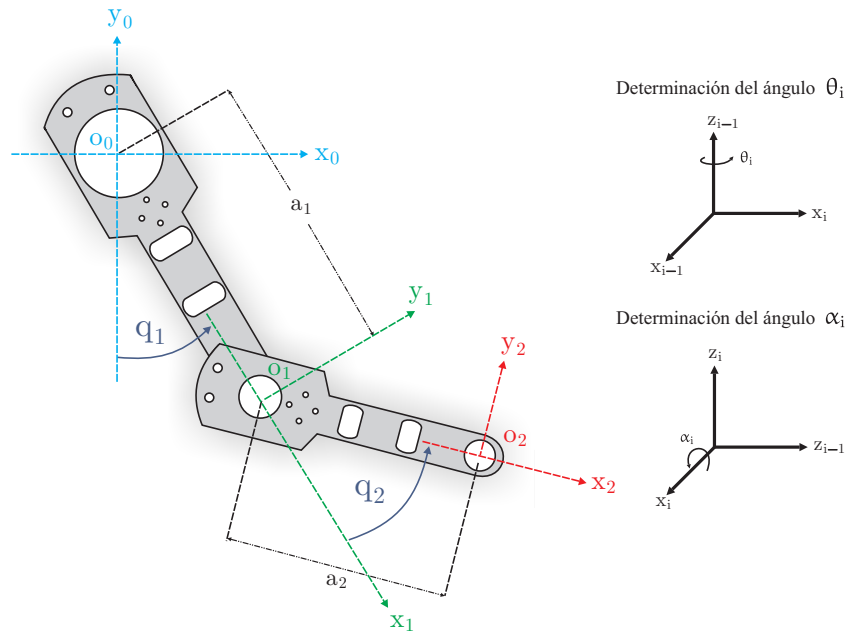
ángulos de Euler) para describir la rotación del efector final, entonces

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{p}_n \\ {}^0\boldsymbol{\phi}_n \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

con  ${}^0\mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^3$  la posición del efector final y  ${}^0\boldsymbol{\phi}_n \in \mathbb{R}^3$  su orientación.

Se presenta el siguiente ejemplo con un robot de 2 grados de libertad.

**Ejemplo 2.1.** De acuerdo a la Figura 2.2, el robot posee 2 grados de libertad, es decir, existen 2 eslabones y 2 articulaciones. El primer paso para poder determinar la cinemática directa es identificar el sistema de coordenadas  ${}_{00}x_0y_0z_0$  y por medio del algoritmo de Denavit-Hartenberg, se procede a obtener la orientación de los ejes coordenados asociados a cada uno de los elementos (eslabones) que conforman al brazo manipulador, es decir,  ${}_{01}x_1y_1z_1$  y  ${}_{02}x_2y_2z_2$ .



**Figura 2.2** – Cinemática directa

Una vez que se hallan los ejes de referencia asociados a cada uno de los eslabones, el siguiente paso fue encontrar las distancias entre los orígenes ( $d_i$  y  $a_i$ ) así como también los ángulos  $\theta_i$  y  $\alpha_i$  (si es que existen). Se encontraron los resultados presentados en la Tabla 2.1.

Finalmente, se tiene que para la cinemática directa las matrices de transformación asocia-

Articulación	a	d	$\theta$	$\alpha$
1	0.45 m	0	$\theta_1(t) - 90^\circ$	0
2	0.45 m	0	$\theta_1(t)$	0

**Tabla 2.1** – Parámetros obtenidos mediante Denavit-Hartenberg

das a los orígenes  $o_{i-1}$  respecto al origen  $o_i$  se encuentran mediante (2.1)

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & a_1 \sin(\theta_1) \\ -\cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & 0 & -a_1 \cos(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & a_2 \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & a_2 \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz que denota la cinemática directa es

$${}^0\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \sin(\theta_1) \\ -\cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & -a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - a_1 \cos(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

△

### 2.1.2. Cinemática inversa

La cinemática inversa de un robot manipulador permite obtener las posiciones articulares  $\mathbf{q}$  en términos de la posición y la orientación del efector final con respecto a un marco de referencia fijo especificado en la base del robot. Este problema representa la solución inversa de la ecuación (2.3), en otras palabras, dada la posición cartesiana y la orientación del efector final, obtener los ángulos de las articulaciones

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

en donde  $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})$  es la función inversa de (2.3).

En vista de (2.5), la determinación del vector de variables articulares se reduce a resolver un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales. Pese a que no existe una metodología estándar

que permita resolver el problema de la cinemática inversa, existen algunos métodos tanto analíticos como numéricos que son de gran ayuda para conseguirlo. No obstante, la principal dificultad son las múltiples soluciones que se pueden presentar, ya que éstas dependen de la configuración geométrica del manipulador.

Entonces, el problema de la cinemática inversa de robots manipuladores puede resolverse por desacoplo cinemático, transformaciones inversas, métodos iterativos, álgebra de tornillos, matrices duales, cuaterniones duales y métodos geométricos. Este último es uno de los más empleados debido a su relativa sencillez cuando la configuración del manipulador no es muy compleja como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.2.** *La cinemática inversa correspondiente al Ejemplo 2.1 se determina a partir de la Figura 2.3. Como se observa, las ecuaciones que permiten conocer los ángulos  $q_1$  y  $q_2$  son las siguientes:*

$$\begin{aligned} c^2 &= a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(\pi - q_2) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(q_2), \end{aligned} \quad (2.6)$$

en donde se ha usado  $\cos(\pi - q_2) = -\cos(q_2)$  y la ley de cosenos. Entonces de la ecuación anterior

$$\cos(q_2) = \frac{c^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} \triangleq D \quad (2.7)$$

y recordando la identidad trigonométrica  $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$  y de (2.7)

$$\sin(q_2) = \pm \sqrt{1 - D^2}. \quad (2.8)$$

De esta manera

$$q_2 = \text{Atan}\left(D \pm \sqrt{1 - D^2}\right), \quad (2.9)$$

lo que permite recuperar las dos soluciones posibles para  $q_2$  y que en la literatura se les conoce como configuraciones codo arriba y codo abajo [34] como se aprecia en la Figura 2.3. Para encontrar  $q_1$  se tienen los ángulos auxiliares

$$\alpha = \text{Atan}\left(\frac{s}{r}\right) \quad (2.10)$$

$$\beta = \text{Atan}\left(\frac{a_2\sin(q_2)}{a_1 + a_2\cos(q_2)}\right), \quad (2.11)$$

de donde se obtiene

$$q_1 = \alpha - \beta = \text{Atan} \left( \frac{s}{r} \right) - \text{Atan} \left( \frac{a_2 \sin(q_2)}{a_1 + a_2 \cos(q_2)} \right), \quad (2.12)$$

con  $a_1 = 0.45 \text{ m}$ ,  $a_2 = 0.45 \text{ m}$ ,  $s$  es la coordenada del extremo del eslabón 2 respecto al eje  $z_0$  y  $r$  es la coordenada del extremo del eslabón 2 respecto al eje  $y_0$ .

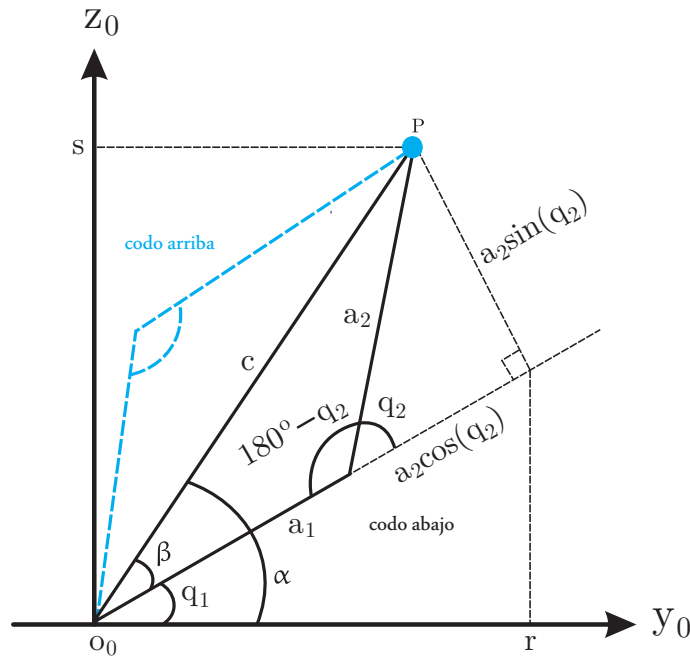


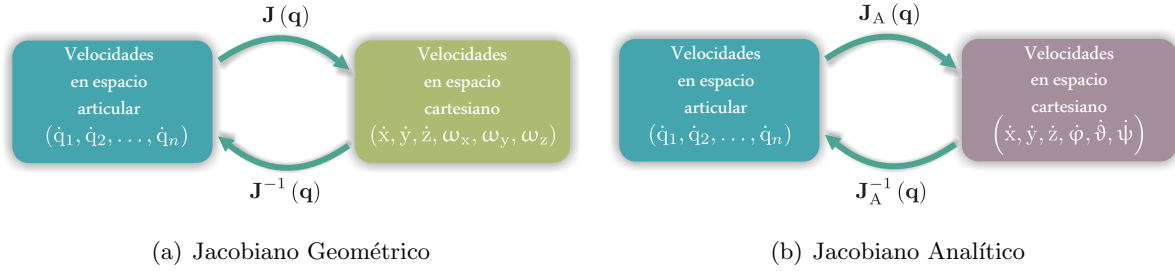
Figura 2.3 – Cinemática inversa

△

### 2.1.3. Cinemática diferencial

Como ya se mencionó, la cinemática directa permite conocer la relación que existe entre la posición y la orientación del efector final del robot manipulador en el espacio cartesiano respecto a sus posiciones en el espacio articular a través de un mapeo que matemáticamente se expresa por (2.3). Por otro lado, la cinemática diferencial relaciona la velocidad del efector final en el espacio cartesiano con la velocidad articular del robot mediante un mapeo descrito por una matriz Jacobiana. Esta matriz Jacobiana es de gran importancia en el desarrollo de controladores para robots manipuladores, porque ayuda a determinar si existen puntos de

singularidad, a analizar redundancia, a determinar algoritmos para resolver el problema de cinemática inversa, etc. Es importante mencionar que existen dos maneras para encontrar el Jacobiano y que depende enteramente de la parametrización de la orientación, es decir, si se considera una representación no mínima o bien una representación mínima. Para el primer caso se calcula el llamado Jacobiano Geométrico y para el segundo caso el Jacobiano Analítico como se observa en la Figura 2.4.



**Figura 2.4** – Mapeos

Para calcular el Jacobiano Geométrico se emplea un método propiamente geométrico. Este mapeo permite expresar las velocidades lineal  $\dot{\mathbf{p}}_n$  y angular  $\boldsymbol{\omega}_n$  del efector final en función de la velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}}$ , es decir, relaciona la contribución de las velocidades articulares respecto a las velocidades lineal y angular del efector final. Entonces matemáticamente la cinemática diferencial empleando este mapeo se expresa como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}}_n \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.13)$$

con  ${}^0\dot{\mathbf{p}}_n \in \mathbb{R}^3$  la velocidad lineal y  ${}^0\boldsymbol{\omega}_n \in \mathbb{R}^3$  la velocidad angular del efector final,  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  el Jacobiano geométrico el cual puede separarse en dos matrices de la siguiente manera

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p \\ \mathbf{J}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{d_1} \cdots j_{d_n} \\ j_{o_1} \cdots j_{o_n} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

y vista de (2.13) se tiene que

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_n = \mathbf{J}_p \dot{\mathbf{q}} \quad (2.15)$$

$${}^0\boldsymbol{\omega}_n = \mathbf{J}_o \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.16)$$

De ésta manera se observa que el término  $\mathbf{J}_{d_i} \dot{\mathbf{q}}_i$  representa la contribución de la velocidad de una articulación a la velocidad lineal del efector final, mientras que  $\mathbf{J}_{o_i} \dot{\mathbf{q}}_i$  representa la



contribución de la velocidad de una articulación a la velocidad angular del efector final y en ambos casos  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Si se aplica el algoritmo Denavit-Hartenberg para la parametrización de un robot con articulaciones de revolución, el Jacobiano geométrico es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{p_i} \\ \mathbf{J}_{o_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{d} - \mathbf{d}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

en donde  $\mathbf{z}$  son los vectores unitarios que representan el eje de giro de las articulaciones y  $\mathbf{d}$  los vectores de posición de cada articulación.

Por otro lado, para el Jacobiano Analítico se considera la cinemática directa (2.3) y se calcula su derivada con respecto al tiempo

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.18)$$

o bien si se toma en cuenta (2.4) y de igual forma se calcula su derivada con respecto al tiempo

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}}_n \\ {}^0\dot{\boldsymbol{\phi}}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.19)$$

con  ${}^0\dot{\mathbf{p}}_n \in \mathbb{R}^3$  la velocidad lineal y  ${}^0\dot{\boldsymbol{\phi}}_n \in \mathbb{R}^3$  la velocidad rotacional de los ángulos de Euler del efector final,  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$  son el el Jacobiano analítico y la velocidad articular respectivamente en (2.18) y (2.19). Para entender las diferencias que existen entre ambos mapeos se invita al lector a consultar [33].

## 2.2. Dinámica de robots manipuladores

La dinámica es una rama de la física que estudia la relación que existe entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que en él se origina. En el caso de un robot manipulador, al ser un sistema mecánico muy complejo, su descripción analítica requiere de ecuaciones diferenciales no lineales que permitan formular su *modelo dinámico*. La utilidad de éste último es fundamental para propósitos de simulación, diseño y construcción del sistema mecánico, así como análisis y diseño de algoritmos de control. Además la naturaleza no lineal, multivariable y acoplada del comportamiento dinámico del robot, ofrece un amplio espectro de formulación de problemas de control teóricos y prácticos.

En este contexto, el modelo dinámico puede adoptar dos formas distintas, a saber, cuando el efector final del manipulador se encuentra en movimiento libre y cuando el efector final del manipulador se encuentra en movimiento restringido. En los párrafos siguientes se dará una breve descripción de ambos.

### 2.2.1. Dinámica de un robot manipulador en movimiento libre

El modelo matemático que describe la dinámica asociada a un robot manipulador, generalmente es obtenido mediante el método de *Euler-Lagrange* [35] que de manera elegante permite describir la dinámica aproximada de un sistema físico real. Para el caso de un robot manipulador con  $n$  grados de libertad, el Lagrangiano  $\mathcal{L}$  está dado por la diferencia entre la Energía Cinética  $\mathcal{K}$  y la Energía Potencial  $\mathcal{U}$  del robot

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (2.20)$$

Se asume que la energía potencial  $\mathcal{U}$  se debe solamente a fuerzas conservativas, tales como la energía gravitacional y la energía almacenada en resortes comprimidos. De esta manera, las ecuaciones de movimiento de Lagrange para el robot manipulador son

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.21)$$

o de manera equivalente

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.22)$$

que de manera compacta se pueden escribir como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.23)$$

en donde

$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \rightarrow$  vector de coordenadas generalizadas,

$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow$  matriz de inercia simétrica y definida positiva,

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \rightarrow$  vector de fuerzas de Coriolis y de fuerzas centrífugas,

$\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow$  matriz diagonal positiva semidefinida de fricción viscosa,

$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n \rightarrow$  vector de fuerzas gravitacionales,

$\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n \rightarrow$  vector de torques de entrada.

La ecuación (2.23) representa la dinámica asociada a cualquier robot manipulador en movimiento libre con  $\mathbf{n}$  grados de libertad, es una ecuación diferencial no lineal vectorial del estado  $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ . Es importante señalar que cada elemento de  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  es en general, una expresión bastante compleja de las posiciones  $\mathbf{q}$  y velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$  de todas las uniones de los eslabones y además cada uno de ellos depende de la geometría del robot.

### 2.2.1.1. Propiedades del modelo dinámico

Como se ha comentado, el modelo dinámico obtenido mediante el formalismo de Euler-Lagrange permite establecer algunas propiedades que son de gran importancia para el desarrollo de algoritmos de control y que facilitan en cierta medida el análisis de estabilidad [36]. Las más importantes son las siguientes.

**Propiedad 2.1.** *La matriz  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  satisface*

$$\lambda_h \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{x} \leq \lambda_H \|\mathbf{x}\|^2, \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.24)$$

además  $0 < \lambda_h \leq \lambda_H < \infty$ , con  $\lambda_h \triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$  y  $\lambda_H \triangleq \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$ , en donde  $\lambda_{\min}$  y  $\lambda_{\max}$  denotan el mínimo y el máximo valor característico respectivamente de una matriz.

△

**Propiedad 2.2.** *Con una definición conveniente de la matriz de fuerzas de Coriolis y fuerzas centrífugas  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , la matriz  $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es anti-simétrica, es decir*

$$\mathbf{w}^T \left( \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.25)$$

△

**Propiedad 2.3.** *Con una definición apropiada de los parámetros del robot, se tiene*

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\theta}, \quad (2.26)$$

en donde  $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es el regresor y  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^1$  es el vector que contiene los parámetros constantes del robot.

△

### 2.2.1.2. Dinámica considerando los actuadores

Para este trabajo y en vista de que en un robot manipulador se emplean comúnmente motores de CD acoplados a cajas de engranes como principales elementos de transmisión de movimiento, es importante considerar la dinámica de estos últimos dentro del modelo dinámico del robot, ya que de esta manera se tendrá una respuesta en simulaciones numéricas lo suficientemente aproximada al comportamiento del sistema real una vez que se implementen los algoritmos de control.

Para determinar el modelo matemático que rige el comportamiento del actuador que mueve una carga a través de un reductor, se hace uso del diagrama mostrado en la Figura 2.5.

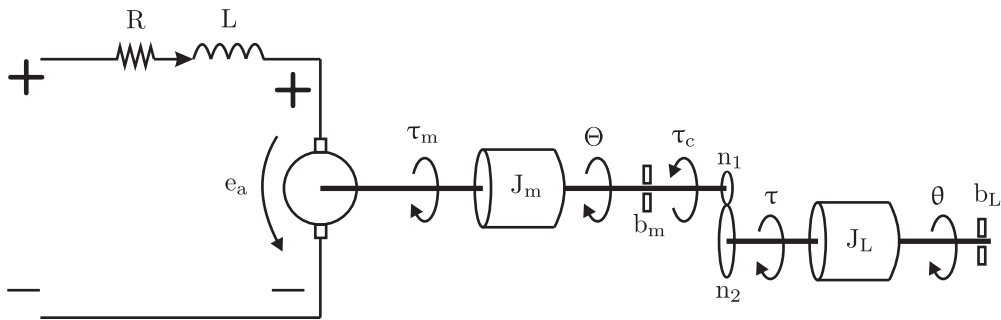


Figura 2.5 – Diagrama de un motor de CD

La nomenclatura es la siguiente.

- $u$  es el voltaje aplicado en las terminales de armadura del motor,
- $i$  es la corriente eléctrica de armadura,
- $\Theta$  es la posición angular del rotor del motor,
- $\theta$  es la posición angular de la carga (rueda),
- $e_a = k_e \dot{\Theta}$  es la fuerza contra-electromotriz, donde  $k_e$  es la constante de fuerza contra-electromotriz,
- $\tau_m = k_m i$  es el par electromagnético generado, donde  $k_m$  es la constante de par del motor,
- $\tau_c$  es el par equivalente de la carga reflejado sobre la flecha del motor. Este par se opone al movimiento del motor (sentido contrario a  $\Theta$ ),

- $\tau$  es el par aplicado (por el motor) sobre la carga,
- $L$  es la inductancia de armadura,
- $R$  es la resistencia de armadura,
- $J_m$  es la inercia del rotor del motor,
- $b_m$  es la constante de fricción viscosa del motor,
- $J_L$  es la inercia de la carga. En este trabajo la carga está constituida por la rueda que se desea hacer girar,
- $b_L$  es la constante de fricción viscosa de la carga,
- $n_1$  y  $n_2$  representan el número de dientes del engrane del eje del motor y del eje de la carga, respectivamente.

Nótese que un motor de CD es un sistema electromecánico compuesto por un subsistema eléctrico y un subsistema mecánico, razón por la que ambos tienen asociado un modelo matemático. Para el subsistema eléctrico del motor, se aplica la Ley de Kirchhoff de voltajes (véase la Figura 2.5) y se obtiene

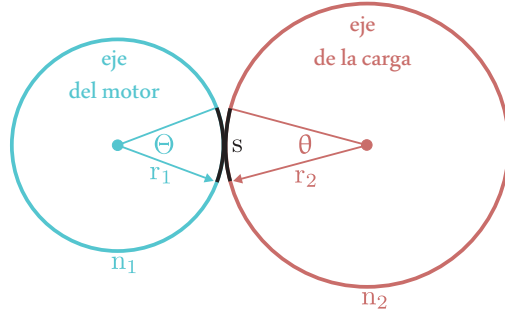
$$u = L \frac{di}{dt} + Ri + e_a, \quad (2.27)$$

con  $e_a = k_e \dot{\Theta}$ .

Para el subsistema mecánico se aplica la Segunda ley de Newton. No obstante, es importante entender la relación que existe entre la posición angular del rotor del motor  $\Theta$  y la posición angular del eje de la carga  $\theta$ , por lo que es necesario determinar algunas relaciones importantes.

En la Figura 2.6 se muestran los engranes (ruedas dentadas) del eje del motor y los engranes del eje de la carga. Se define  $s$  como el arco de círculo generado por un ángulo  $\Theta$  descrito en el eje del motor y, simultáneamente, por un ángulo  $\theta$  en el eje de la carga. Esto es cierto porque la presencia de engranes en cada uno de estos ejes evita que dichos ejes patinen. Existe una relación geométrica que relaciona al radio de un círculo, el ángulo descrito por el mismo y el arco de círculo generado. Aplicando esta relación en ambos ejes

$$s = \Theta r_1 \quad s = \theta r_2, \quad (2.28)$$



**Figura 2.6** – Reductor

donde  $\Theta$  y  $\theta$  deben estar dados en radianes. De lo anterior se obtiene

$$\Theta r_1 = \theta r_2. \quad (2.29)$$

Por otro lado, sabemos que cada diente de un engrane tiene un ancho (paso) que es igual en ambos ejes, pues esto es necesario para que dichos dientes se acoplen correctamente al girar, lo que implica que

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha n_1, & p_2 &= \alpha n_2 \\ p_1 &= 2\pi r_1, & p_2 &= 2\pi r_2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde  $p_1$  y  $p_2$  representan, respectivamente, el perímetro de la rueda dentada en el eje del motor y en el eje de la carga, mientras que  $\alpha$  es una constante de proporcionalidad que representa el ancho de cada diente (paso del engrane) que al ser multiplicado por el número de dientes permite obtener el perímetro de la rueda dentada.

Combinando estas expresiones

$$r_1 = \frac{\alpha}{2\pi} n_1, \quad r_2 = \frac{\alpha}{2\pi} n_2, \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (2.31)$$

Por lo tanto, de (2.29) y (2.31) se encuentra

$$\Theta = n\theta, \quad n = \frac{n_2}{n_1}. \quad (2.32)$$

que es la relación entre la posición angular del rotor del motor y la posición angular del eje de la carga.

Con base en lo anterior y aplicando la Segunda Ley de Newton al subsistema mecánico (ver Figura 2.5), se tiene el modelo asociado

$$k_m i - b_m \dot{\Theta} - \frac{1}{n} \tau = J_m \ddot{\Theta}. \quad (2.33)$$

Si ahora en (2.27) se considera la inductancia igual a cero ( $L = 0$ ) y se despeja la corriente (i) y se sustituye en (2.33), se llega a

$$k_m \left[ \frac{u - nk_e \dot{\theta}}{R} \right] - nb_m \dot{\theta} - \frac{1}{n} \tau = nJ_m \ddot{\theta}, \quad (2.34)$$

en donde se han usado la primera y la segunda derivadas con respecto al tiempo de  $\Theta$  en (2.32).

Finalmente, manipulando matemáticamente (2.34) se encuentra el modelo matemático del motor

$$J_m \ddot{\theta} + b_m \dot{\theta} + \frac{k_m k_e}{R} \dot{\theta} + \frac{\tau}{n^2} = \frac{k_m}{nR} u, \quad (2.35)$$

que relaciona el voltaje aplicado ( $u$ ) a la armadura del motor con el par ( $\tau$ ) aplicado a la carga en términos de su posición, velocidad y aceleración angular.

Por otro lado, si se considera que cada uno de los actuadores que proporcionan movimiento a las  $n$  articulaciones del robot manipulador es un motor de CD, entonces de (2.35) se obtiene

$$\mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}\mathbf{u}, \quad (2.36)$$

con

$$\mathbf{J} = \text{diag} \{J_{mi}\} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{B} = \text{diag} \left\{ b_{mi} + \left( \frac{k_m k_e}{R} \right)_i \right\} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{R} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{r_i^2} \right\} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{K} = \text{diag} \left\{ \left( \frac{k_m}{r} \right)_i \frac{1}{r_i} \right\}, \quad (2.40)$$

donde  $i = 1, \dots, n$ .

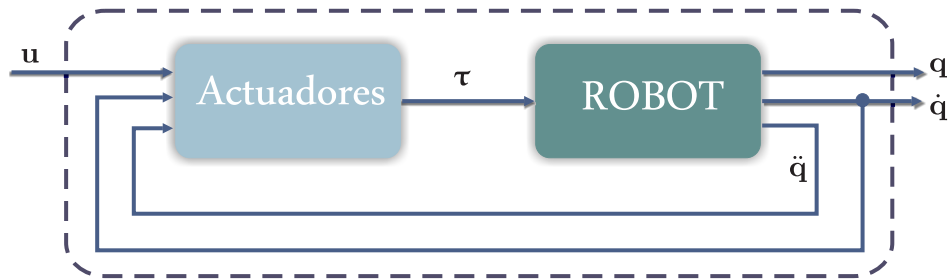


Figura 2.7 – Esquema robot-actuadores

El modelo dinámico completo del manipulador considerando fricción en las articulaciones y cuyos actuadores se localizan en cada una de éstas, se obtiene sustituyendo  $\boldsymbol{\tau}$  de (2.36) en (2.23)

$$[\mathbf{R} + \mathbf{H}(\mathbf{q})] \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{RC}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{RD} + \mathbf{B}] \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Rg}(\mathbf{q}) = \mathbf{Ku}, \quad (2.41)$$

que representa un sistema dinámico con entrada  $\mathbf{u}$  y salida dada por el vector  $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ , como se observa en la Figura 2.7.

### 2.2.2. Dinámica de un robot manipulador en movimiento restringido

Un robot manipulador en movimiento restringido, es cuando el efector final se encuentra en contacto con una superficie en un punto determinado. Bajo tal circunstancia, es necesario considerar la fuerza que ejerce el robot sobre la superficie. Esta superficie esta descrita por la siguiente ecuación (restricción holónoma)

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (2.42)$$

con  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m$  y en donde su primer derivada con respecto al tiempo es

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (2.43)$$

la cual sugiere que físicamente el vector velocidad  $\dot{\mathbf{q}}$  se encuentra en un subespacio tangente al punto de contacto de la superficie y la matriz Jacobiana  $\mathbf{J}_\varphi$  que se encuentra mediante

$$\mathbf{J}_\varphi = \nabla \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (2.44)$$

denota el gradiente de la superficie de contacto, que mapea un vector sobre el plano normal al plano tangente a dicha superficie.

Considerando lo anterior, el modelo dinámico de un robot manipulador en movimiento restringido es

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_\varphi^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.45)$$

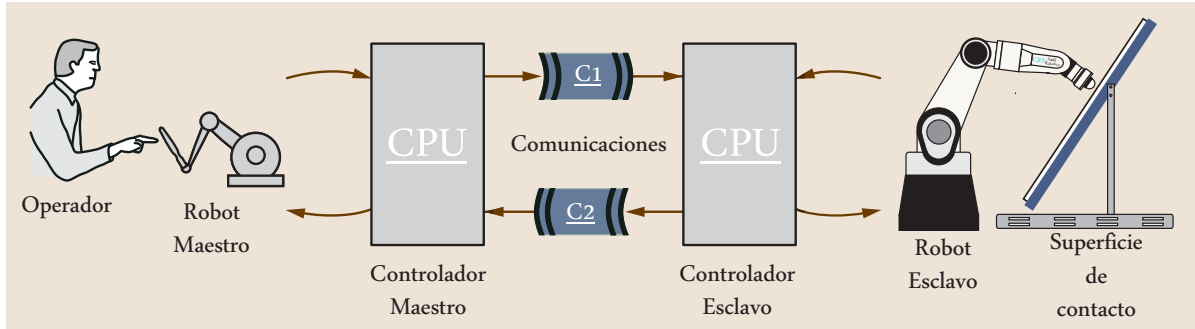
y en donde  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  es la fuerza que el robot aplica sobre la superficie de contacto.



## 2.3. Sistema de Teleoperación

Dado que en este trabajo de Tesis se considera un sistema de teleoperación bilateral maestro-esclavo como el mostrado en la Figura 2.8, por simplicidad se considerará que puede dividirse en tres subsistemas

- subsistema operador,
- subsistema maestro,
- subsistema esclavo.



**Figura 2.8** – Sistema de Teleoperación

Es evidente que al tratarse de un sistema físico, se requiere de un modelo matemático que lo describa. Es importante mencionar que la interacción que el ser humano tiene dentro de este sistema se detalla en el Capítulo 3, razón por la que en los párrafos siguientes se presentarán solamente los dos subsistemas restantes *i.e.* el robot maestro y el robot esclavo [46].

### 2.3.1. Robot Maestro

El robot maestro es un robot de  $n_m$  grados de libertad en movimiento libre y su modelo matemático está dado por

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{q}_m) \ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{C}_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m) \dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{D}_m \dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{g}_m(\mathbf{q}_m) = \boldsymbol{\tau}_m - \boldsymbol{\tau}_h, \quad (2.46)$$

en donde el subíndice “m” se refiere al robot maestro y

$$\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{R}^{n_m} \rightarrow \text{torque aplicado por el humano.}$$

### 2.3.2. Robot Esclavo

El robot esclavo posee  $n_s$  grados de libertad y en base al esquema de teleoperación de la Figura 2.8, se observa que la dinámica de éste robot es con movimiento restringido, por lo que

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s) \ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) = \boldsymbol{\tau}_s + \mathbf{J}_{\varphi_s}^T \boldsymbol{\lambda}_s. \quad (2.47)$$

El subíndice “s” hace referencia al robot esclavo.

## 2.4. Principio de Ortogonalización

El principio de ortogonalización es un esquema que, aplicado al control de robots manipuladores, permite tratar por separado los problemas de control asociados a posición y a fuerza cuando existe movimiento restringido, es decir, cuando el manipulador entra en contacto con una superficie. Este esquema fue propuesto por Arimoto *et al.* [14] y consiste en hacer uso de dos matrices de proyección que en la literatura se han designado por  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{P}$ , en donde la primera permite proyectar errores de posición sobre un subespacio vectorial que se genera en el punto de contacto con la superficie de restricción y es tangente a ésta, mientras que la segunda permite proyectar errores de fuerza sobre un subespacio vectorial que es ortogonal a la misma superficie de restricción y en el mismo punto de contacto. En otras palabras, los subespacios generados por las matrices de proyección  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{P}$  son ortogonales entre sí.

Considérese que la superficie que restringe el movimiento del manipulador en espacio de trabajo esta representada por

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.48)$$

y su primer derivada con respecto al tiempo es

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_{\varphi_x} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad (2.49)$$

en donde  $\mathbf{J}_{\varphi_x} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  representa a la matriz Jacobiana de la misma superficie de restricción. Es importante resaltar que en esta tesis se considera  $m = 1$  y la matriz Jacobiana es  $\mathbf{J}_{\varphi_x} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , es decir, es el vector gradiente  $\nabla \varphi_x$  que se sabe de cálculo es ortogonal a cualquier superficie

$$\mathbf{J}_{\varphi_x} \triangleq \nabla \varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.50)$$

De (2.49) se puede concluir por un lado que el vector velocidad  $\dot{\mathbf{x}}$  pertenece al espacio nulo de  $\mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}$  y por otro lado que ambos son ortogonales entre sí. Esto implica que no existen componentes de velocidad en el subespacio  $\mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}$ , razón por la cual se le conoce dentro de la literatura como *velocidad restringida* y matemáticamente se representa por

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}}, \quad (2.51)$$

e integrando se encuentra la *posición restringida*

$$\mathbf{p} = \int_0^t \dot{\mathbf{p}} dt. \quad (2.52)$$

Entonces, necesariamente existe otro subespacio que contiene al vector  $\dot{\mathbf{x}}$  y que corresponde al complemento ortogonal del subespacio  $\mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}$ . Este subespacio se denota por  $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}}$  y es tangente a la superficie de restricción en el punto de contacto. Ahora bien, si se sabe que la fuerza de contacto es perpendicular a la superficie de restricción, la dirección de ésta es por lo tanto generada por  $\mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}^T$ .

De lo anterior y con base en la Figura 2.9, la matriz asociada al subespacio de fuerza es

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}^+ \mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}, \quad (2.53)$$

en donde  $\mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}^+$  es la matriz pseudo-inversa de Moore-Penrose y es igual a

$$\mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}^+ \triangleq \mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}^T (\mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}} \mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad (2.54)$$

mientras que la matriz asociada al complemento ortogonal de  $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  y que corresponde al subespacio de posición es

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}), \quad (2.55)$$

con  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz identidad y además  $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

En resumen, las propiedades más importantes que cumplen las matrices  $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  y el Jacobiano  $\mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{x}}}$  son las siguientes.

- $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  mapea vectores en el subespacio ortogonal a la superficie de restricción en el punto de contacto, además

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}) \rightarrow \text{es simétrica}, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{es idempotente}. \quad (2.57)$$

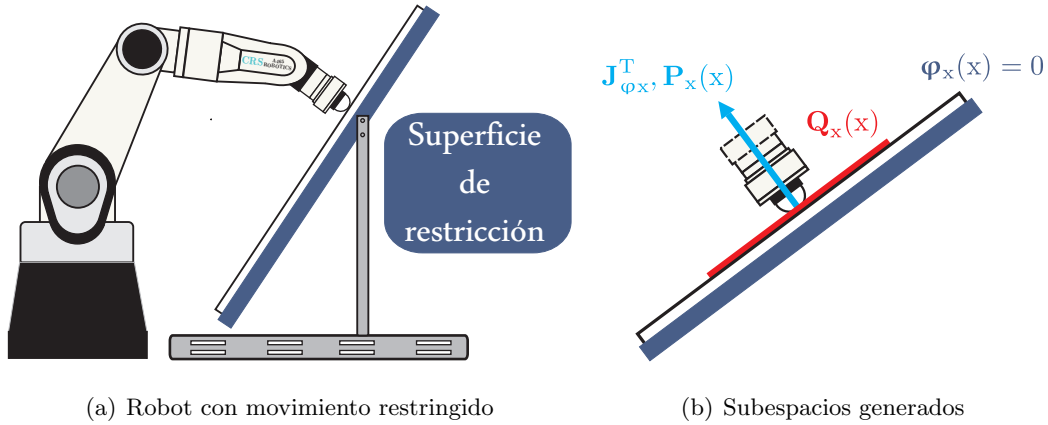


Figura 2.9 – Principio de ortogonalización

- $\mathbf{Q}_x(\mathbf{x})$  mapea vectores en el subespacio tangente a la superficie de restricción en el punto de contacto y también

$$\mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}_x^T(\mathbf{x}) \rightarrow \text{es simétrica,} \quad (2.58)$$

$$\mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) \rightarrow \text{es idempotente.} \quad (2.59)$$

- $\mathbf{P}_x(\mathbf{x}) \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) = \mathbf{O}$ , pues ambos subespacios son ortogonales entre sí.
- $\mathbf{J}_{\varphi_x}^T$  al ser perpendicular a la superficie de restricción, genera la dirección de la fuerza de contacto y a su vez está contenido en  $\mathbf{P}_x(\mathbf{x})$ , es decir

$$\mathbf{J}_{\varphi_x} \mathbf{P}_x(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_{\varphi_x} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{P}_x(\mathbf{x}) \mathbf{J}_{\varphi_x}^T = \mathbf{J}_{\varphi_x}^T. \quad (2.61)$$

- Del punto anterior, se tiene que el vector  $\mathbf{J}_{\varphi_x}^T$  es ortogonal a  $\mathbf{Q}_x(\mathbf{x})$ , por lo que

$$\mathbf{J}_{\varphi_x} \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) = \mathbf{O} \quad (2.62)$$

$$\mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) \mathbf{J}_{\varphi_x}^T = \mathbf{O}. \quad (2.63)$$

Aquí es importante mencionar que el principio de ortogonalización puede ser empleado de igual forma en coordenadas articulares, es decir, la restricción (2.48) se tomaría en función del vector de coordenadas articulares  $\mathbf{q}$  como en (2.42) y el procedimiento para encontrar las matrices de proyección  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$  y el Jacobiano  $\mathbf{J}_{\varphi}$  es exactamente el mismo que el presentado en los párrafos anteriores.

En el Capítulo 3 se proponen las leyes de control correspondientes al sistema de teleoperación y en donde el empleo del principio de ortogonalización, permitirá enunciar algunas propiedades que serán de gran utilidad tanto para el desarrollo de los controladores mismos, así como también para la prueba de estabilidad que se detalla en el Apéndice A.

## 2.5. Conclusiones

Para lograr resolver el problema planteado en el capítulo 1, es necesario conocer el comportamiento del sistema. Por esta razón, se presentaron en este capítulo el modelo cinemático y el modelo dinámico de un robot manipulador (este último tanto en movimiento libre como en movimiento restringido), junto con algunas propiedades que facilitan en gran medida el análisis de estabilidad. Se mencionó también que para propósitos de simulación numérica, la dinámica de los actuadores debe ser considerada, pues su inclusión en el modelo del robot proporciona un comportamiento más aproximado al del sistema real. De igual forma se describió el modelo del robot maestro y del robot esclavo que será utilizado a lo largo de este trabajo. Se concluyó el capítulo con el principio de ortogonalización, una herramienta matemática que facilita el diseño de controladores que permiten resolver de manera simultánea el problema de posición y el problema de fuerza de forma independiente.



## Capítulo 3

# Leyes de control

En el capítulo anterior se presentó el modelo matemático de los robots manipuladores y se describió de manera breve el esquema de teleoperación. El siguiente paso es implementar las leyes de control que permitan resolver el problema planteado. Se emplea el método de ortogonalización, el cual facilita tratar el problema de posición y fuerza de forma independiente y que ayuda a establecer algunas propiedades que hacen más sencillo el análisis de estabilidad. Se considera además que no existen retardos en los canales de comunicación. Cabe mencionar que gran parte de este trabajo está basado en el sistema de teleoperación presentado en [46].

### 3.1. Robot Maestro

La ley de control considerada es

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{Y}_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m, \ddot{\mathbf{q}}_m) \boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{J}_{\varphi_v}^T (k_{pv} \Delta \boldsymbol{\lambda}_{vs} + k_{Fiv} \Delta \mathbf{F}_{vs}), \quad (3.1)$$

con  $k_{pv}$  y  $k_{Fiv}$  constantes positivas,  $\mathbf{Y}_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m, \ddot{\mathbf{q}}_m)$  y  $\boldsymbol{\theta}_m$  son el regresor y el vector de parámetros del robot respectivamente (ver (2.26)) y

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}_{vs} = \boldsymbol{\lambda}_v - \hat{\boldsymbol{\lambda}}_s \quad (3.2)$$

$$\Delta \mathbf{F}_{vs} = \int_0^t \Delta \boldsymbol{\lambda}_{vs} d\vartheta, \quad (3.3)$$

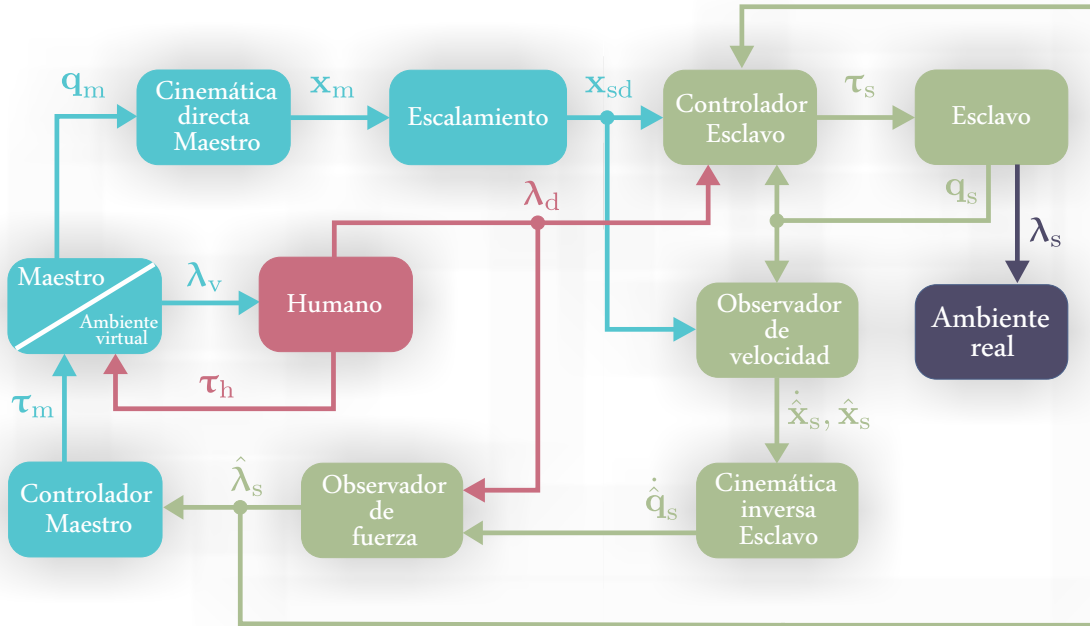
con  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_s$  la fuerza estimada del robot esclavo. El subíndice “v” hace referencia a una superficie virtual que satisface

$$\varphi_v(\mathbf{q}_m) = \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

por lo que  $\mathbf{J}_{\varphi_v}^T$  corresponde a su gradiente, es decir

$$\mathbf{J}_{\varphi_v} = \frac{\partial \varphi_v(\mathbf{q}_m)}{\partial \mathbf{q}_m}. \quad (3.5)$$

La restricción (3.4) representa la misma superficie definida en (2.42) para coordenadas articulares ó bien (2.48) para coordenadas cartesianas y genera una *superficie virtual de contacto* para el robot maestro, que es equivalente a la *superficie real de contacto* del robot esclavo. Para entender mejor la relación que existe entre ambos manipuladores, se presenta la Figura 3.1, en donde es posible apreciar que la posición deseada  $\mathbf{x}_{sd}$  del esclavo se obtiene a partir de la posición actual  $\mathbf{q}_m$  del maestro. Puesto que se asume que los robots no tienen la misma estructura (*i.e.* no similares), se emplea la cinemática directa para obtener la posición actual del maestro en coordenadas cartesianas, lo que permite generar la posición deseada para el esclavo.



**Figura 3.1** – Relación entre el robot maestro y el robot esclavo

Se observa también que el humano es quien proporciona la fuerza deseada ( $\lambda_d$ ) que se aplica a la superficie de contacto, mientras que la fuerza estimada ( $\hat{\lambda}_s$ ) se retroalimenta hacia el maestro. El operador debe experimentar la sensación de estar en contacto con la superficie



de restricción virtual (a través de  $\lambda_v$ ) con la misma fuerza que el esclavo ejerce sobre la superficie real en la medida que se cumpla  $\lambda_v \rightarrow \hat{\lambda}_s$ . Por lo tanto, el objetivo de control en los subespacios de fuerza es que cuando  $t \rightarrow \infty$  se cumplan

$$\hat{\lambda}_s \rightarrow \lambda_s \quad (3.6)$$

$$\lambda_s \rightarrow \lambda_d \quad (3.7)$$

$$\lambda_v \rightarrow \lambda_s, \quad (3.8)$$

con  $\lambda_s$  el multiplicador de Lagrange del robot esclavo que equivale a la fuerza real que éste último ejerce sobre la superficie de contacto.

La fuerza de reacción de la superficie de restricción virtual  $\lambda_v$  en (3.2) se obtiene de resolver

$$\frac{d}{dt}\lambda_v = \ddot{\varphi}_v(\mathbf{q}_m) + 2\xi\omega_n\dot{\varphi}_v(\mathbf{q}_m) + \omega_n^2\varphi_v(\mathbf{q}_m), \quad (3.9)$$

en donde  $\xi$  y  $\omega_n$  se escogen de tal manera que (3.9) sea estable [37], con  $\varphi_v(\mathbf{q}_m)$  definida en (3.4).

## 3.2. Operador

Como se observó en la Figura 3.1, el operador es quien controla el movimiento del robot esclavo a través del robot maestro y, por simplicidad, se asume que éste siempre mantiene el efector final del maestro en contacto con una superficie virtual (ésta simula a la superficie real). No obstante, en la práctica existen factores que pueden ocasionar que lo anterior no se cumpla. Por otro lado, para fines de simulación numérica, es necesario contar con un modelo matemático que describa la acción del ser humano con el sistema de teleoperación. Se hace entonces la siguiente suposición:

**Suposición 3.1.** *El operador humano puede modelarse como un controlador PID en un subespacio de posición y como un controlador PI en un subespacio de fuerza (puesto que el objetivo de control del sistema es seguimiento de fuerza). Por lo tanto, la ecuación dinámica propuesta para representar la acción del ser humano es*

$$\tau_h = \mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_m) \left\{ k_{vh}\Delta\dot{\mathbf{q}}_m + k_{ph}\Delta\mathbf{q}_m + k_{ih} \int_0^t \Delta\mathbf{q}_m d\vartheta \right\} + \mathbf{J}_{\varphi_v}^T (k_{fh}\Delta\lambda_{vd} + k_{Fih}\Delta\mathbf{F}_{vd}), \quad (3.10)$$

en donde  $k_{vh}, k_{ph}, k_{ih}, k_{fh}$  y  $k_{Fih}$  son constantes positivas, además  $\mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_m)$  definida como en (2.55) y

$$\Delta \mathbf{q}_m = \mathbf{q}_m - \mathbf{q}_{md} \quad (3.11)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}_m = \dot{\mathbf{q}}_m - \dot{\mathbf{q}}_{md} \quad (3.12)$$

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}_{vd} = \boldsymbol{\lambda}_v - \boldsymbol{\lambda}_d \quad (3.13)$$

$$\Delta \mathbf{F}_{vd} = \int_0^t \Delta \boldsymbol{\lambda}_{vd} d\vartheta. \quad (3.14)$$

△

Es importante mencionar que la Suposición 3.1 se justifica porque el ser humano alcanza siempre un error de posición  $\Delta \mathbf{q}_m \approx \mathbf{0}$  con tan sólo desplazar el efector final del robot maestro a cualquier posición deseada ( $\mathbf{q}_{md}$ ) y de esta manera va a experimentar la fuerza que esta aplicando el robot esclavo en la superficie de contacto a través de la fuerza virtual ( $\boldsymbol{\lambda}_v$ ) que es generada por el controlador del robot maestro. El humano la compara con la fuerza deseada ( $\boldsymbol{\lambda}_d$ ) y de aquí se genera el error de fuerza ( $\Delta \boldsymbol{\lambda}_{vd}$ ). Es claro que al final  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_{vd} \rightarrow \mathbf{0}$  cuando  $t \rightarrow \infty$  puesto que existe un equilibrio de fuerzas. Finalmente, por simplicidad se asume que el robot maestro se encuentra siempre en contacto con la superficie virtual.

### 3.3. Robot Esclavo

Para el control del robot esclavo se propone una estrategia basada en dos observadores, uno de velocidad y otro para estimar la fuerza de contacto [38]. Para llevar a cabo la implementación de estos observadores, inicialmente se obtiene el modelo dinámico del manipulador en coordenadas cartesianas (debido a que tanto el observador de velocidad como el de fuerza se propusieron en espacio de trabajo) partiendo del modelo dinámico en coordenadas articulares.

#### 3.3.1. Modelo dinámico en coordenadas cartesianas

En virtud de (2.3), la relación entre coordenadas articulares y cartesianas para el robot esclavo es

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{f}(\mathbf{q}_{si}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.15)$$

y en donde su primera y segunda derivadas con respecto al tiempo son

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{J}(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{q}}_s \quad (3.16)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{J}(\mathbf{q}_s) \ddot{\mathbf{q}}_s + \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s \quad (3.17)$$

y  $\mathbf{J}(\mathbf{q}_s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  representa el Jacobiano Geométrico del robot esclavo. A partir de (3.16)-(3.17) se pueden conocer la velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}}_s$  y la aceleración articular  $\ddot{\mathbf{q}}_s$  en términos de la velocidad cartesiana  $\dot{\mathbf{x}}_s$ , de la aceleración cartesiana  $\ddot{\mathbf{x}}_s$ , del mapeo dado por el Jacobiano inverso  $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s)$  y por la derivada con respecto al tiempo de este último (es decir  $\dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s)$ ) de la siguiente manera

$$\dot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{x}}_s \quad (3.18)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) \ddot{\mathbf{x}}_s + \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{x}}_s, \quad (3.19)$$

con  $\dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \triangleq \frac{d}{dt} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) = -\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s)$ . Para que se cumpla lo anterior, es esencial que el Jacobiano sea invertible, en otras palabras que no pierda rango. Se enuncia la siguiente suposición:

**Suposición 3.2.** *El robot no pasa por ninguna configuración singular, por lo tanto  $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s)$  siempre existe.*  $\triangle$

Si se considera la ecuación de la restricción en términos del vector de coordenadas articulares  $\mathbf{q}_s$  como en (2.42), su gradiente es

$$\mathbf{J}_{\varphi s} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{q}_s)}{\partial \mathbf{q}_s}. \quad (3.20)$$

No obstante, con base en (2.3), (2.50) y usando la regla de la cadena con respecto al vector  $\mathbf{q}_s$ , también es posible encontrar  $\mathbf{J}_{\varphi s}$  como se muestra

$$\mathbf{J}_{\varphi s} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_s)}{\partial \mathbf{x}_s} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \mathbf{q}_s} = \mathbf{J}_{\varphi x} \mathbf{J}(\mathbf{q}_s), \quad (3.21)$$

siendo  $\mathbf{J}_{\varphi x}$  el gradiente de la restricción en términos del vector  $\mathbf{x}_s$  y  $\mathbf{J}(\mathbf{q}_s)$  el Jacobiano analítico del robot esclavo.

Sustituyendo (3.18)-(3.19) en (2.47)

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s) \left[ \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) \ddot{\mathbf{x}}_s + \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{x}}_s \right] + \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \left[ \mathbf{J}(\mathbf{q}_s)^{-1} \dot{\mathbf{x}}_s \right] \\ & + \mathbf{D}_s \left[ \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{x}}_s \right] + \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) = \boldsymbol{\tau}_s + \mathbf{J}_{\varphi s}^T \boldsymbol{\lambda}_s. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ordenando términos, premultiplicando por  $\mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}_s)$  en (3.22) y tomando en cuenta (3.21)

$$\begin{aligned} & \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}_s) \mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) \ddot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}_s) \left[ \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) + \mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \right] \dot{\mathbf{x}}_s \\ & + \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}_s) \mathbf{D}_s \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}_s) \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}_s) \boldsymbol{\tau}_s + \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi s}^T \boldsymbol{\lambda}_s, \end{aligned} \quad (3.23)$$

en donde finalmente se tiene que el modelo en coordenadas cartesianas es

$$\mathbf{H}_{cs} \ddot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{C}_{cs} \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{D}_{cs} \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{g}_{cs} = \mathbf{f}_{cs} + \mathbf{J}_{\varphi x}^T \boldsymbol{\lambda}_s, \quad (3.24)$$

con

$$\mathbf{H}_{cs} = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}_s) \mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) \quad (3.25)$$

$$\mathbf{C}_{cs} = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}_s) \left[ \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) + \mathbf{H}_s(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \right] \quad (3.26)$$

$$\mathbf{D}_{cs} = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}_s) \mathbf{D}_s \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) \quad (3.27)$$

$$\mathbf{g}_{cs} = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}_s) \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) \quad (3.28)$$

$$\mathbf{f}_{cs} = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}_s) \boldsymbol{\tau}_s. \quad (3.29)$$

### 3.3.2. Observador de velocidad

Como se comentó al inicio de la sección, para el diseño del controlador se usa un observador de velocidad en coordenadas cartesianas. Cabe resaltar que el empleo del principio de ortogonalización es parte esencial y permite establecer la siguiente propiedad que será de gran utilidad para desarrollos posteriores:

**Propiedad 3.1.** *El vector  $\dot{\mathbf{x}}$  se puede escribir de la siguiente manera*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{P}_x(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}}. \quad (3.30)$$

△

Las matrices  $\mathbf{P}_x(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{Q}_x(\mathbf{x})$  están definidas en (2.53) y (2.55), respectivamente. Es importante resaltar que de acuerdo con (2.49), en (3.30) el término  $\mathbf{P}_x(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ .

De igual manera y empleando nuevamente el principio de ortogonalización, se enuncia el siguiente hecho:

**Hecho 3.1.** *Supóngase que  $\mathbf{x}_d$  es una trayectoria deseada y acotada para un robot manipulador que satisface la restricción (2.48). Entonces, el error de seguimiento es*

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_d \\ &= \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{P}_x(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_d) \mathbf{x}_d - \mathbf{P}_x(\mathbf{x}_d) \mathbf{x}_d.\end{aligned}\quad (3.31)$$

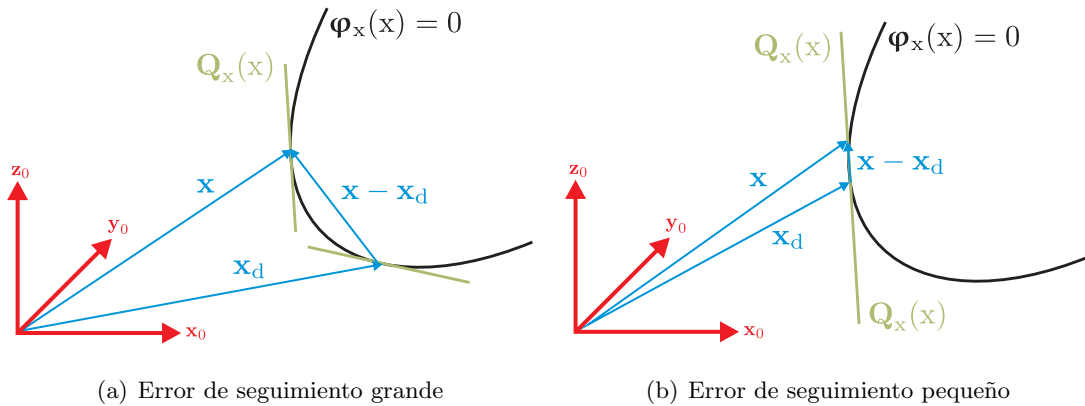
En la Figura 3.2 se muestran dos casos para el error de seguimiento. El primero es considerablemente grande y el segundo es relativamente pequeño. Para éste último, se puede observar que se cumple

$$\Delta \mathbf{x} \approx \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}, \quad (3.32)$$

lo cual es válido debido a que  $\Delta \mathbf{x}$  se vuelve tangente a la superficie cuando el error es suficientemente pequeño, lo que depende de la suavidad de la superficie de contacto. Si ahora se toma en consideración la Propiedad 3.1

$$\dot{\mathbf{x}}_d \approx \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}}_d \Rightarrow \Delta \dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_d) = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) \Delta \dot{\mathbf{x}}. \quad (3.33)$$

△



**Figura 3.2** – Planos tangentes a la superficie en el punto de contacto

Cabe mencionar que tanto la Propiedad 3.1 como el Hecho 3.1 pueden aplicarse para el caso articular, quedando expresadas las ecuaciones (3.30), (3.32) y (3.33) en términos de los vectores  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{q}_d$  respectivamente.

Con lo definido anteriormente, se propone el siguiente observador de posición y velocidad

cartesiana para el robot esclavo

$$\hat{\mathbf{x}}_s = \int_0^t \dot{\hat{\mathbf{x}}}_s(\vartheta) d\vartheta \quad (3.34)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_s = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) (\dot{\mathbf{x}}_{sd} - \mathbf{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s) + \mathbf{K}_d \mathbf{\Lambda}_z \int_0^t \mathbf{z}_s(\vartheta) d\vartheta + \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z}_s + \mathbf{K}_d \mathbf{z}_s, \quad (3.35)$$

en donde  $\mathbf{\Lambda}_z, \mathbf{K}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales positivas definidas. El correspondiente error de observación es

$$\mathbf{z}_s \triangleq \mathbf{x}_s - \hat{\mathbf{x}}_s \quad (3.36)$$

y se define la siguiente variable auxiliar de error

$$\bar{\mathbf{x}}_s \triangleq \hat{\mathbf{x}}_s - \mathbf{x}_{sd}. \quad (3.37)$$

**Comentario 3.1.** *Las condiciones iniciales para el observador propuesto en (3.34)-(3.35) deben ser tales que satisfagan el Hecho 3.1, en donde pueden reemplazarse las trayectorias deseadas por las variables estimadas, por lo que se tendría*

$$\mathbf{z}_s \approx \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \mathbf{z}_s \quad (3.38)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_s \approx \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \dot{\mathbf{z}}_s \quad (3.39)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_s \approx \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \dot{\hat{\mathbf{x}}}_s. \quad (3.40)$$

*Es importante resaltar que siempre es posible hacer  $\hat{\mathbf{x}}_s(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_s(\mathbf{0})$ , mientras que se puede suponer que la velocidad  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}_s(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , de tal manera que se cumplan (3.38)-(3.40). Entonces, si la condición inicial de  $\Delta \mathbf{x}$  en (3.31) es suficientemente pequeña, se tiene también que*

$$\bar{\mathbf{x}}_s \approx \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \bar{\mathbf{x}}_s \quad (3.41)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}_s \approx \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}_s. \quad (3.42)$$

△

En términos de la fuerza, se define el error

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}_s \triangleq \boldsymbol{\lambda}_s - \boldsymbol{\lambda}_d, \quad (3.43)$$

con  $\boldsymbol{\lambda}_d \in \mathbb{R}^m$  la fuerza deseada, que se encuentra acotada al igual que su primera derivada con respecto al tiempo  $\frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda}_d$  y  $\boldsymbol{\lambda}_s$  la fuerza real. Debido a que no se considera medición de fuerza

y por lo tanto se propone el empleo de un observador, se puede definir el error de observación de fuerza

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_s \triangleq \boldsymbol{\lambda}_s - \hat{\boldsymbol{\lambda}}_s \quad (3.44)$$

y las siguientes variables auxiliares

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s \triangleq \hat{\boldsymbol{\lambda}}_s - \boldsymbol{\lambda}_d \quad (3.45)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{F}}_s = \int_0^t \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s d\vartheta. \quad (3.46)$$

Considérese la variable deslizante<sup>1</sup>

$$\mathbf{s} \triangleq \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \left( \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}_s + \boldsymbol{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s \right) - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s \triangleq \mathbf{s}_p + \mathbf{s}_f, \quad (3.47)$$

en donde  $\boldsymbol{\Lambda}_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\boldsymbol{\xi}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son matrices diagonales positivas definidas. Se define la siguiente velocidad de referencia (que ayudará a obtener el error de seguimiento)

$$\dot{\mathbf{x}}_r \triangleq \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) (\dot{\mathbf{x}}_{sd} - \boldsymbol{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s) + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.48)$$

en donde  $\mathbf{K}_\gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal positiva definida y  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^n$ , con

$$\mathbf{s}_d = \mathbf{s}(0) e^{-k_1 t} \quad (3.49)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^t \{ \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1(\vartheta) + \text{sign}(\mathbf{s}_1(\vartheta)) \} d\vartheta, \quad \boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{0} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s} - \mathbf{s}_d, \quad (3.51)$$

$\mathbf{K}_\beta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal positiva definida,  $k_1$  es una constante positiva y además  $\text{sign}(\mathbf{s}_1) = [\text{sign}(s_{11}) \ \cdots \ \text{sign}(s_{1n})]^T$ , con  $s_{1i}$  elemento de  $\mathbf{s}_1$ ,  $i = 1, \dots, n$  y  $\mathbf{s}_d \in \mathbb{R}^n$ .

Para la dinámica en lazo cerrado, se considera la siguiente variable de error de seguimiento

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_x \triangleq \dot{\mathbf{x}}_s - \dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \dot{\mathbf{x}}_s - \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) (\dot{\mathbf{x}}_{sd} - \boldsymbol{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s) - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \\ &= \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) (\dot{\mathbf{x}}_s - \dot{\mathbf{x}}_{sd} + \boldsymbol{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s) - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \\ &= \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) (\Delta \dot{\mathbf{x}}_s + \boldsymbol{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s) - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

---

<sup>1</sup>Permite eliminar los errores de velocidad y de posición de la variable  $\bar{\mathbf{x}}_s$  ( $\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}_s$  y  $\bar{\mathbf{x}}_s$  respectivamente) en el subespacio  $\mathbf{Q}_x(\mathbf{x})$  en estado estacionario [39]. Sin embargo, esta variable deslizante se diseña de tal forma que cuando tienda a cero garantice que los errores de seguimiento y observación ( $\Delta \mathbf{x}_s, \Delta \mathbf{z}_s, \Delta \dot{\mathbf{x}}_s, \Delta \dot{\mathbf{z}}_s$ ) también tiendan a cero. Por otro lado, si  $\mathbf{s}$  tiende a cero (esto se demuestra en el Apéndice A) entonces el error de fuerza  $\Delta \bar{\mathbf{F}}_s$  también tenderá a cero dadas las definiciones de  $\mathbf{J}_{\varphi_x}^+$  y de  $\boldsymbol{\xi}_1$ .

lo que permite expresar la dinámica del robot esclavo (3.24) como

$$\mathbf{H}_{cs}\dot{\mathbf{s}}_x + \mathbf{C}_{cs}\mathbf{s}_x + \mathbf{D}_{cs}\mathbf{s}_x = \mathbf{f}_{cs} + \mathbf{J}_{\varphi x}^T \boldsymbol{\lambda}_s - \mathbf{y}_a, \quad (3.53)$$

en donde

$$\mathbf{y}_a \triangleq \mathbf{H}_{cs}\ddot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{C}_{cs}\dot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{D}_{cs}\dot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{g}_{cs}. \quad (3.54)$$

Para el diseño del observador considérense las variables auxiliares

$$\dot{\mathbf{x}}_o \triangleq \dot{\mathbf{x}}_s - \boldsymbol{\Lambda}_z \mathbf{z}_s \quad (3.55)$$

$$\mathbf{r} \triangleq \dot{\mathbf{x}}_s - \dot{\mathbf{x}}_o = \dot{\mathbf{z}}_s + \boldsymbol{\Lambda}_z \mathbf{z}_s \quad (3.56)$$

$$\mathbf{s}_o \triangleq \dot{\mathbf{x}}_o - \dot{\mathbf{x}}_r. \quad (3.57)$$

De acuerdo con las definiciones previas, se propone la siguiente ley de control para el robot esclavo

$$\mathbf{f}_{cs} = -\mathbf{K}_p \mathbf{s}_o - \mathbf{J}_{\varphi x}^T (\boldsymbol{\lambda}_d - \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s - \boldsymbol{\xi}_3 \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s), \quad (3.58)$$

con  $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son matrices diagonales que satisfacen  $\boldsymbol{\xi}_2 > \mathbf{O}$  y  $\boldsymbol{\xi}_3 \geq \mathbf{O}$ .

Sustituyendo (3.58) en (3.53)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{cs}\dot{\mathbf{s}}_x + \mathbf{C}_{cs}\mathbf{s}_x + \mathbf{D}_{cs}\mathbf{s}_x &= -\mathbf{K}_p \mathbf{s}_o - \mathbf{J}_{\varphi x}^T (\boldsymbol{\lambda}_d - \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s - \boldsymbol{\xi}_3 \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s) + \mathbf{J}_{\varphi x}^T \boldsymbol{\lambda}_s - \mathbf{y}_a \\ &= -\mathbf{K}_p \mathbf{s}_o + \mathbf{J}_{\varphi x}^T (\boldsymbol{\lambda}_s - \boldsymbol{\lambda}_d + \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s + \boldsymbol{\xi}_3 \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s) - \mathbf{y}_a \\ &= -\mathbf{K}_p \mathbf{s}_o + \mathbf{J}_{\varphi x}^T (\Delta \boldsymbol{\lambda}_s + \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s + \boldsymbol{\xi}_3 \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s) - \mathbf{y}_a. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Ahora bien, de (3.56) y (3.57) se obtiene

$$\mathbf{s}_o = \mathbf{s}_x - \mathbf{r}, \quad (3.60)$$

y sustituyendo (3.60) en (3.59)

$$\mathbf{H}_{cs}\dot{\mathbf{s}}_x + \mathbf{C}_{cs}\mathbf{s}_x + \mathbf{K}_{DP}\mathbf{s}_x = \mathbf{K}_p \mathbf{r} + \mathbf{J}_{\varphi x}^T (\Delta \boldsymbol{\lambda}_s + \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s + \boldsymbol{\xi}_3 \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s) - \mathbf{y}_a, \quad (3.61)$$

en donde  $\mathbf{K}_{DP} \triangleq \mathbf{D}_{cs} + \mathbf{K}_p$ . La ecuación (3.61) describe la dinámica de los errores de seguimiento. Para la dinámica del error de observación, considérense (3.35) y (3.36)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_s &= \dot{\mathbf{x}}_s - \dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \dot{\mathbf{x}}_s - \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) (\dot{\mathbf{x}}_{sd} - \boldsymbol{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s) - \mathbf{K}_d \boldsymbol{\Lambda}_z \int_0^t \mathbf{z}_s(\vartheta) d\vartheta - \boldsymbol{\Lambda}_z \mathbf{z}_s - \mathbf{K}_d \mathbf{z}_s \\ &= \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) (\dot{\mathbf{x}}_s - \dot{\mathbf{x}}_{sd} + \boldsymbol{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s) - \mathbf{K}_d \boldsymbol{\Lambda}_z \int_0^t \mathbf{z}_s(\vartheta) d\vartheta - \boldsymbol{\Lambda}_z \mathbf{z}_s - \mathbf{K}_d \mathbf{z}_s \\ &= \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) (\Delta \dot{\mathbf{x}}_s + \boldsymbol{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s) - \mathbf{K}_d \boldsymbol{\Lambda}_z \int_0^t \mathbf{z}_s(\vartheta) d\vartheta - \boldsymbol{\Lambda}_z \mathbf{z}_s - \mathbf{K}_d \mathbf{z}_s, \end{aligned} \quad (3.62)$$



en donde su derivada con respecto al tiempo es

$$\ddot{\mathbf{z}}_s = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \left( \Delta \ddot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{\Lambda}_x \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}_s \right) + \dot{\mathbf{Q}}_x(\mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}_s) (\Delta \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s) - \mathbf{K}_d \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z}_s - \mathbf{\Lambda}_z \dot{\mathbf{z}}_s - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{z}}_s. \quad (3.63)$$

Si ahora se toma en cuenta la derivada con respecto al tiempo de (3.56)

$$\dot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{z}}_s + \mathbf{\Lambda}_z \dot{\mathbf{z}}_s \quad (3.64)$$

y se sustituye (3.63) en la ecuación anterior, se tiene la dinámica del error del observador de velocidad como

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \left( \Delta \ddot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{\Lambda}_x \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}_s \right) + \dot{\mathbf{Q}}_x(\mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}_s) (\Delta \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s) - \mathbf{K}_d (\dot{\mathbf{z}}_s + \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z}_s), \quad (3.65)$$

o bien

$$\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_d \mathbf{r} = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \left( \Delta \ddot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{\Lambda}_x \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}_s \right) + \dot{\mathbf{Q}}_x(\mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}_s) (\Delta \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s), \quad (3.66)$$

tomando en cuenta (3.56).

### 3.3.3. Observador de fuerza

Para el diseño del observador de fuerza, la primera y segunda derivadas con respecto al tiempo de la ecuación de la restricción (2.42) en términos del vector  $\mathbf{q}_s$  son

$$\dot{\varphi}(\mathbf{q}_s) = \mathbf{J}_{\varphi s} \dot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{0} \quad (3.67)$$

$$\ddot{\varphi}(\mathbf{q}_s) = \mathbf{J}_{\varphi s} \ddot{\mathbf{q}}_s + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi s}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{0}. \quad (3.68)$$

$\ddot{\mathbf{q}}_s$  se obtiene de la ecuación (2.47)

$$\ddot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) (\boldsymbol{\tau}_s + \mathbf{J}_{\varphi s}^T \boldsymbol{\lambda}_s - \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s - \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s - \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s)), \quad (3.69)$$

al sustituirla en (3.68)

$$\mathbf{J}_{\varphi s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) (\boldsymbol{\tau}_s + \mathbf{J}_{\varphi s}^T \boldsymbol{\lambda}_s - \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s - \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s - \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s)) + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi s}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{0}, \quad (3.70)$$

de donde se encuentra que la fuerza  $\boldsymbol{\lambda}_s$  es

$$\boldsymbol{\lambda}_s = - (\mathbf{J}_{\varphi s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi s}^T)^{-1} [\mathbf{J}_{\varphi s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) (\boldsymbol{\tau}_s - \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s - \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s - \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s)) + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi s}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s]. \quad (3.71)$$

Considerando (3.16) y (3.35) se propone la velocidad articular estimada como

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_s = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) \dot{\hat{\mathbf{x}}}_s, \quad (3.72)$$

$$= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) \left[ \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) (\dot{\mathbf{x}}_{sd} - \mathbf{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s) + \mathbf{K}_d \mathbf{\Lambda}_z \int_0^t \mathbf{z}_s(\vartheta) d\vartheta + \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z}_s + \mathbf{K}_d \mathbf{z}_s \right]. \quad (3.73)$$

Entonces con base en (3.71) se propone el siguiente observador de fuerza

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_s = - \left( \mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi_s}^T \right)^{-1} \left[ \mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \left( \boldsymbol{\tau}_s - \widehat{\mathbf{C}}_s \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s - \mathbf{D}_s \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s - \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) \right) + \dot{\hat{\mathbf{J}}}_{\varphi_s} \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s \right], \quad (3.74)$$

donde  $\widehat{\mathbf{C}}_s = \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s)$  y  $\dot{\hat{\mathbf{J}}}_{\varphi_s} = \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s)$ .

Ahora bien, de (3.29) se tiene

$$\boldsymbol{\tau}_s = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}_s) \mathbf{f}_{cs}, \quad (3.75)$$

con  $\mathbf{f}_{cs}$  definida en (3.58). Así, la ley de control en espacio articular es

$$\boldsymbol{\tau}_s = -\mathbf{J}^T(\mathbf{q}_s) \mathbf{K}_p \mathbf{s}_o - \mathbf{J}_{\varphi_s}^T (\boldsymbol{\lambda}_d - \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s - \boldsymbol{\xi}_3 \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s), \quad (3.76)$$

dado que de (3.21)

$$\mathbf{J}_{\varphi_s}^T = (\mathbf{J}_{\varphi_x} \mathbf{J}(\mathbf{q}_s))^T = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi_x}^T. \quad (3.77)$$

Sustituyendo la ley de control (3.76) en el observador de fuerza (3.74) se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_s = & - \left( \mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi_s}^T \right)^{-1} \left\{ \mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \left[ -\mathbf{J}^T(\mathbf{q}_s) \mathbf{K}_p \mathbf{s}_o - \mathbf{J}_{\varphi_s}^T (\boldsymbol{\lambda}_d - \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s - \boldsymbol{\xi}_3 \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s) \right. \right. \\ & \left. \left. - \widehat{\mathbf{C}}_s \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s - \mathbf{D}_s \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s - \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) \right] + \dot{\hat{\mathbf{J}}}_{\varphi_s} \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s \right\}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

y finalmente considerando (3.45)

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_s = \boldsymbol{\lambda}_d - (\mathbf{I} + \boldsymbol{\xi}_3)^{-1} \left[ \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s - \left( \mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi_s}^T \right)^{-1} \mathbf{f}_q \right], \quad (3.79)$$

con

$$\mathbf{f}_q = \mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \left( \mathbf{J}^T(\mathbf{q}_s) \mathbf{K}_p \mathbf{s}_o + \widehat{\mathbf{C}}_s \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s + \mathbf{D}_s \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s + \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) \right) - \dot{\hat{\mathbf{J}}}_{\varphi_s} \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s. \quad (3.80)$$

Con base en lo anterior se enuncia el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.** *Para el sistema formado por el robot maestro (2.46), el robot esclavo (2.47) y sus respectivas leyes de control (3.1) y (3.76), el modelo del operador (3.10), el observador de*

posición-velocidad (3.34)-(3.35) y el observador de fuerza (3.79), siempre es posible encontrar una combinación adecuada de ganancias  $k_{pv}, k_{Fiv}, \xi, \omega_n, k_1, \mathbf{K}_d, \mathbf{\Lambda}_x, \mathbf{\Lambda}_z, \mathbf{K}_\beta, \mathbf{K}_\gamma, \mathbf{K}_p, \xi_1, \xi_2, \xi_3, k_{vh}, k_{ph}, k_{ih}, k_{fh}, k_{Fih}$  en la medida que: **a)** exista una trayectoria  $\mathbf{x}_{sd}$  continua y acotada que satisfaga la restricción (2.48) y que no genere alguna singularidad, además que  $\dot{\mathbf{x}}_{sd}, \ddot{\mathbf{x}}_{sd}$  estén también acotadas, **b)** que la fuerza deseada esté acotada  $\lambda_d$  y  $\dot{\lambda}_d$  esté también acotada, **c)** que los errores de seguimiento iniciales para ambos robots sean lo suficientemente pequeños para que se cumpla el Hecho 3.1. Entonces los errores de seguimiento, los errores de observación y los errores de fuerza ( $\Delta \mathbf{q}_m, \Delta \dot{\mathbf{q}}_m, \Delta \mathbf{x}_s, \Delta \dot{\mathbf{x}}_s, \mathbf{z}_s, \dot{\mathbf{z}}_s, \Delta \lambda_s, \Delta \tilde{\lambda}_s, \Delta \lambda_{vs}, \Delta \mathbf{F}_{vs}, \Delta \lambda_{vd}, \Delta \mathbf{F}_{vd}$ ) tenderán a  $\mathbf{0}$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

△

El desarrollo de la demostración del Teorema 3.1 se lleva a cabo en el Apéndice A.

### 3.4. Conclusiones

Se presentaron los esquemas de control para un sistema de teleoperación bilateral maestro-esclavo (basado en superficies virtuales para el robot maestro [46]) y en donde además el controlador del robot esclavo esta basado en observadores de estado para reconstruir las señales de velocidad y fuerza del efector final [38]. Estos observadores se diseñaron en el espacio de trabajo para un robot manipulador de  $n$  grados de libertad, razón por la que fue necesario obtener el modelo dinámico en coordenadas cartesianas. El principio de ortogonalización fue una herramienta esencial para el diseño de las leyes de control y para la Suposición 3.1. Finalmente se propuso el Teorema 3.1, el cual permite garantizar que se consigue estabilidad y transparencia en el sistema con una adecuada selección de ganancias.



## Capítulo 4

# Resultados de simulación

En este capítulo se presentan las simulaciones correspondientes al sistema de teleoperación, las cuales permiten mostrar la eficacia del esquema de control/observadores; éstas fueron realizadas con el software MATLAB<sup>®</sup>-Simulink<sup>®</sup>.

Se eligió como restricción la esfera dada por la ecuación

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{(x-h)^2}{2r} + \frac{(y-k)^2}{2r} + \frac{(z-l)^2}{2r} - \frac{r}{2} = 0, \quad (4.1)$$

con los siguientes parámetros  $h = 0.5$  [m],  $k = 0$  [m],  $l = 0.1$  [m],  $r = 0.1$  [m], por lo que el movimiento del efector final del robot esclavo se lleva a cabo en el plano  $x - z$ . La trayectoria deseada se calcula a partir de un polinomio de quinto orden que debe de satisfacer la ecuación de la restricción. La fuerza deseada es

$$\lambda_d = 20 + 10 * \sin(t). \quad (4.2)$$

Para el robot maestro se consideró un manipulador tipo Phantom de tres grados de libertad, cuyo modelo dinámico y cinemático puede consultarse en [40]. Por otro lado, para el robot esclavo se tomó como referencia el manipulador A465 de la compañía *CRS-Robotics*, que posee seis grados de libertad y de los cuales por simplicidad únicamente se emplearon los primeros tres (para mayores detalles véase [41]). El período de muestreo fue de  $T = 1$  ms y la simulación tuvo una duración de 10 segundos.

Para las ganancias correspondientes al esquema de control-observador del robot esclavo, se siguió una metodología como la presentada en [42] de la siguiente manera. De acuerdo a (A.46) en el Apéndice A, se tiene que  $\mathbf{K}_d$  al ser la ganancia del observador de velocidad, puede tomar

valores grandes. Para el resto de las ganancias y de acuerdo al Teorema 3.1, se garantiza que para un tiempo lo suficientemente grande, se cumple que los errores de observación  $\mathbf{z}_s = \mathbf{0}$  y  $\dot{\mathbf{z}}_s = \mathbf{0}$ , lo que implica que  $\hat{\mathbf{x}}_s = \mathbf{x}_s$  y  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}_s = \dot{\mathbf{x}}_s$ . Con lo anterior se tiene también que  $\bar{\mathbf{x}}_s = \Delta \mathbf{x}_s$  y en consecuencia  $\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}_s = \Delta \dot{\mathbf{x}}_s$ . Por lo tanto, la ecuación (3.57) se puede escribir como  $\mathbf{s}_o = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) (\Delta \dot{\mathbf{x}}_s + \Lambda_x \Delta \mathbf{x}_s) - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \xi_1 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s + \mathbf{K}_\gamma \sigma$  y en donde el término  $\mathbf{s}_d = \mathbf{0}$ . Entonces, la ley de control en espacio articular (3.76) se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \underbrace{-\mathbf{J}^T(\mathbf{q}_s) \mathbf{K}_p \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \Lambda_x \Delta \mathbf{x}_s}_{\mathbf{P}} - \underbrace{\mathbf{J}^T(\mathbf{q}_s) \mathbf{K}_p \mathbf{K}_\gamma \sigma}_{\mathbf{I}} - \underbrace{\mathbf{J}^T(\mathbf{q}_s) \mathbf{K}_p \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \Lambda_x \Delta \dot{\mathbf{x}}_s}_{\mathbf{D}} \\ & - \mathbf{J}_{\varphi_s}^T [\lambda_s - (\xi_1 + \xi_2) \Delta \bar{\mathbf{F}}_s - \xi_3 \Delta \bar{\lambda}_s]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

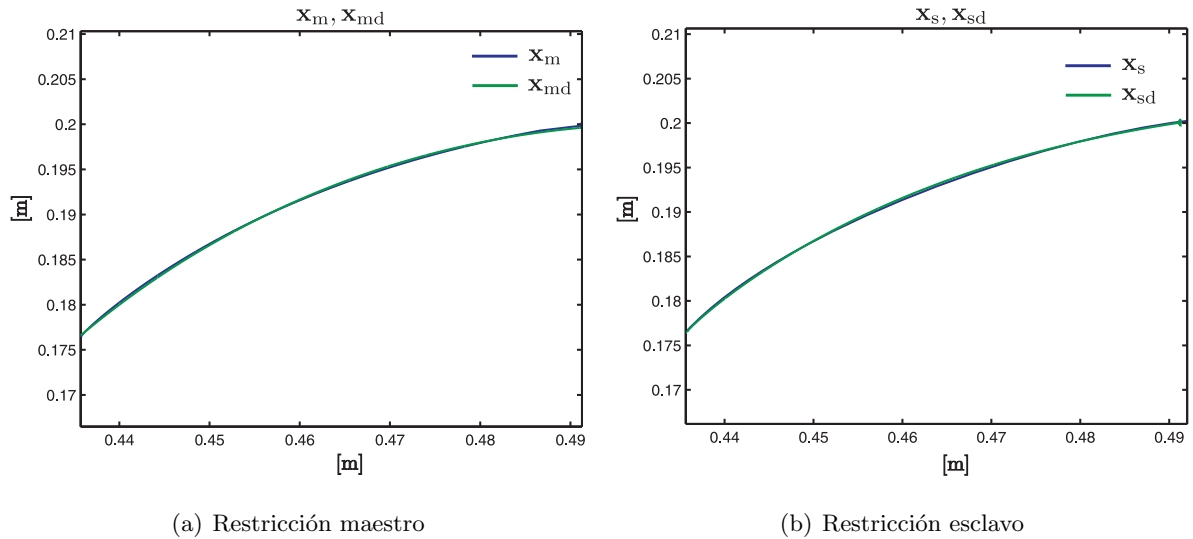
La ecuación (4.3) representa un controlador tipo PID no lineal (en vista del término  $\sigma$ ), lo que permite concluir que las ganancias  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_\gamma$  pueden ser pequeñas, mientras que  $\Lambda_x$  puede ser mas grande. Debido a la no linealidad de  $\gamma$ , la ganancia  $\xi_2$  no debe ser muy grande para evitar problemas de chattering. El resto de los parámetros de este esquema de control se sintonizan a prueba y error, así como también los correspondientes al control del robot maestro y al modelo del operador humano.

Parámetros del modelo del operador humano		
$k_{ph} = 4.5$	$k_{vh} = 0.1$	$k_{ih} = 0.05$
$k_{fh} = 0.006$	$k_{Fih} = 0.0002$	
Parámetros del controlador del robot maestro		
$k_{pv} = 0.0015$	$k_{Fiv} = 0.0005$	
Parámetros del controlador-observador del robot esclavo		
$\mathbf{K}_d = \text{diag} \{100 \ 100 \ 100\}$	$\mathbf{K}_\gamma = \text{diag} \{9.5 \ 9.5 \ 9.5\}$	$\mathbf{K}_\beta = \text{diag} \{1.85 \ 1.85 \ 1.85\}$
$\mathbf{K}_p = 0.75 * \text{diag} \{5.75 \ 0.75 \ 6.25\}$	$\Lambda_x = 20 * \text{diag} \{4.15 \ 4.15 \ 4.15\}$	$\Lambda_z = \text{diag} \{100 \ 100 \ 100\}$
$\xi_1 = 10$	$\xi_2 = 10$	$\xi_3 = 10$
$k_1 = 0.001$		

**Tabla 4.1** – Parámetros de los controladores

## 4.1. Comentarios

Con base en los resultados obtenidos en las simulaciones, el esquema de control funciona adecuadamente para la restricción dada por (4.1). Se observa en la Figura 4.1 que la superficie de restricción virtual (en la Figura 4.1(a)) es idéntica a la superficie de restricción real (véase la Figura 4.1(b)), además que el seguimiento por parte de ambos robots es muy bueno. Esto permite concluir que el operario experimenta la sensación de estar en contacto con la superficie de restricción a través de la superficie virtual.



**Figura 4.1** – Restricción

Se observa en la Figura 4.2(a) que el seguimiento de las trayectorias articulares reales del robot maestro ( $\mathbf{q}_m$ ) respecto a las deseadas ( $\mathbf{q}_{md}$ ) es bastante similar. Esto se debe a la Suposición 3.1 que, como se comentó, permite que el operador humano alcance siempre un error  $\Delta\mathbf{q}_m \approx 0$ . Lo anterior puede ser apreciado en la Figura 4.2(b), en donde existe un transitorio de  $0.15^\circ$  para el error en la articulación  $q_{m2}$  y de  $0.075^\circ$  para el error en la articulación  $q_{m3}$  (se observa que en estado estacionario ambos tienden a cero), mientras que para la articulación  $q_{m1}$  es siempre igual a cero.

Por otro lado, para las trayectorias articulares estimadas del robot esclavo ( $\hat{\mathbf{q}}_s$ ), se observa en la Figura 4.3(a) que existe una pequeña diferencia entre éstas y las deseadas ( $\mathbf{q}_{sd}$ ). De acuerdo a la Figura 4.3(b), el error para la articulación  $q_{s1}$  se mantiene en cero en todo instante, mientras que para las articulaciones  $q_{s2}$  y  $q_{s3}$  existen transitorios al principio de la simulación,

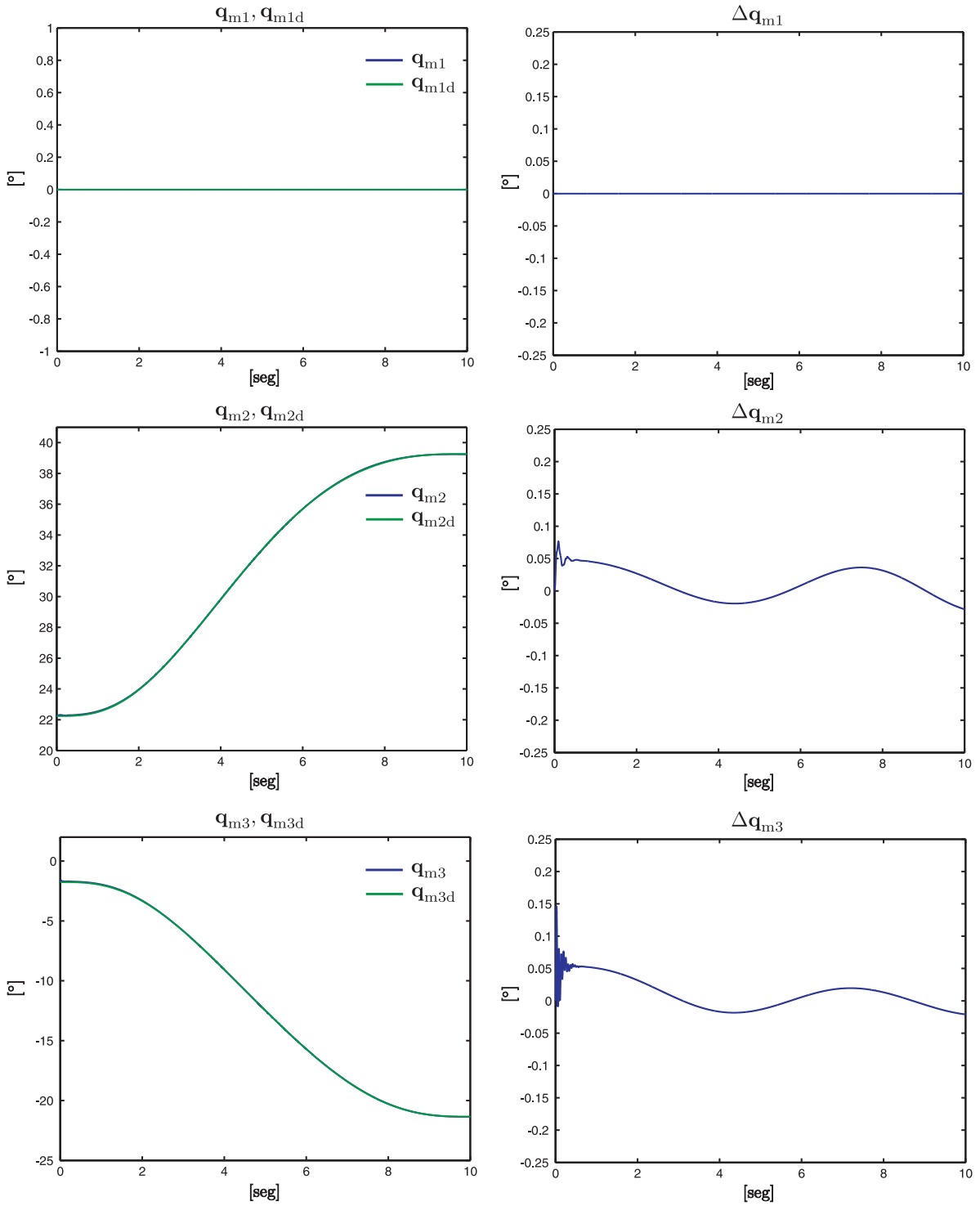
con magnitudes de  $-0.2^\circ$  y  $0.18^\circ$  respectivamente. Sin embargo, en estado estacionario los errores se mantienen en una vecindad del origen. Para mejorar estos resultados, se puede llevar a cabo una mejor sintonización de las ganancias  $\mathbf{\Lambda}_x$ ,  $\mathbf{K}_d$  y  $\mathbf{\Lambda}_z$  del observador de velocidad (3.35). No obstante, el resultado concuerda con lo abordado en el Capítulo 3.

Respecto a las trayectorias cartesianas del robot maestro ( $\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, \mathbf{z}_m$ ) y las trayectorias cartesianas tanto estimadas como reales del robot esclavo ( $\hat{\mathbf{x}}_s, \hat{\mathbf{y}}_s, \hat{\mathbf{z}}_s$  y  $\mathbf{x}_{sd}, \mathbf{y}_{sd}, \mathbf{z}_{sd}$  respectivamente) de la Figura 4.4(a), la diferencia es mínima como puede apreciarse en la Figura 4.4(b), pues a pesar de que se presentan transitorios en  $\Delta x_s$  y  $\Delta z_s$  estos son bastante pequeños (inferior a 1 mm para el primero y -0.6 mm para el segundo) y en estado estacionario los errores se mantienen cercanos a cero. La conclusión es que se debe nuevamente a problemas de sintonización para las ganancias del observador de velocidad, como en el caso anterior. De igual manera el resultado es bastante aceptable, lo que indica que el seguimiento de la trayectoria (impuesta por el operador mediante el robot maestro) es llevado a cabo sobre la superficie de contacto por parte del robot esclavo.

Los errores de observación del robot esclavo ( $\mathbf{z}_{sx}, \mathbf{z}_{sy}, \mathbf{z}_{sz}$ ) reflejan de manera congruente los resultados mostrados anteriormente, en donde es claro que la posición estimada tiende a la posición real, pues como se observa en la Figura 4.5(a) estos errores son suficientemente pequeños, pues para  $z_{sx}$  y  $z_{sz}$  se encuentran acotados entre -0.01 mm y 0.01 mm, mientras que para  $z_{sy}$  es prácticamente 0 mm, tal y como se esperaba con base en el Comentario 3.1 y en el Hecho 3.1. Nuevamente se observa que conforme transcurre el tiempo, el error en estado estacionario es cero. Por otro lado, en la Figura 4.5(b) los errores de fuerza y el error de observación de fuerza ( $\Delta \lambda_s$ ,  $\Delta \lambda_{vd}$  y  $\Delta \tilde{\lambda}_s$  respectivamente), se mantienen acotados en un intervalo de  $\pm 5$  N y en general tienden a cero. El hecho de que estos errores se encuentren en una vecindad del origen, es lo que permite que el operador experimente la fuerza que ejerce el robot esclavo sobre el entorno.

En la Figura 4.6, se aprecia que la fuerza virtual, la fuerza real y la fuerza estimada ( $\lambda_v, \lambda_s, \hat{\lambda}_s$  respectivamente) son idénticas a la fuerza deseada ( $\lambda_d$ ) excepto al principio, en donde se observa que las fuerzas virtual y real experimentan un transitorio antes de seguir a la fuerza deseada. Este transitorio no es más que resultado de la sintonización de las ganancias  $\xi$  y  $\omega_n$  en la ecuación (3.9). Por otro lado, respecto a la fuerza real se observa que se presenta ruido que puede ser resultado de errores numéricos ó bien por parámetros del modelo.

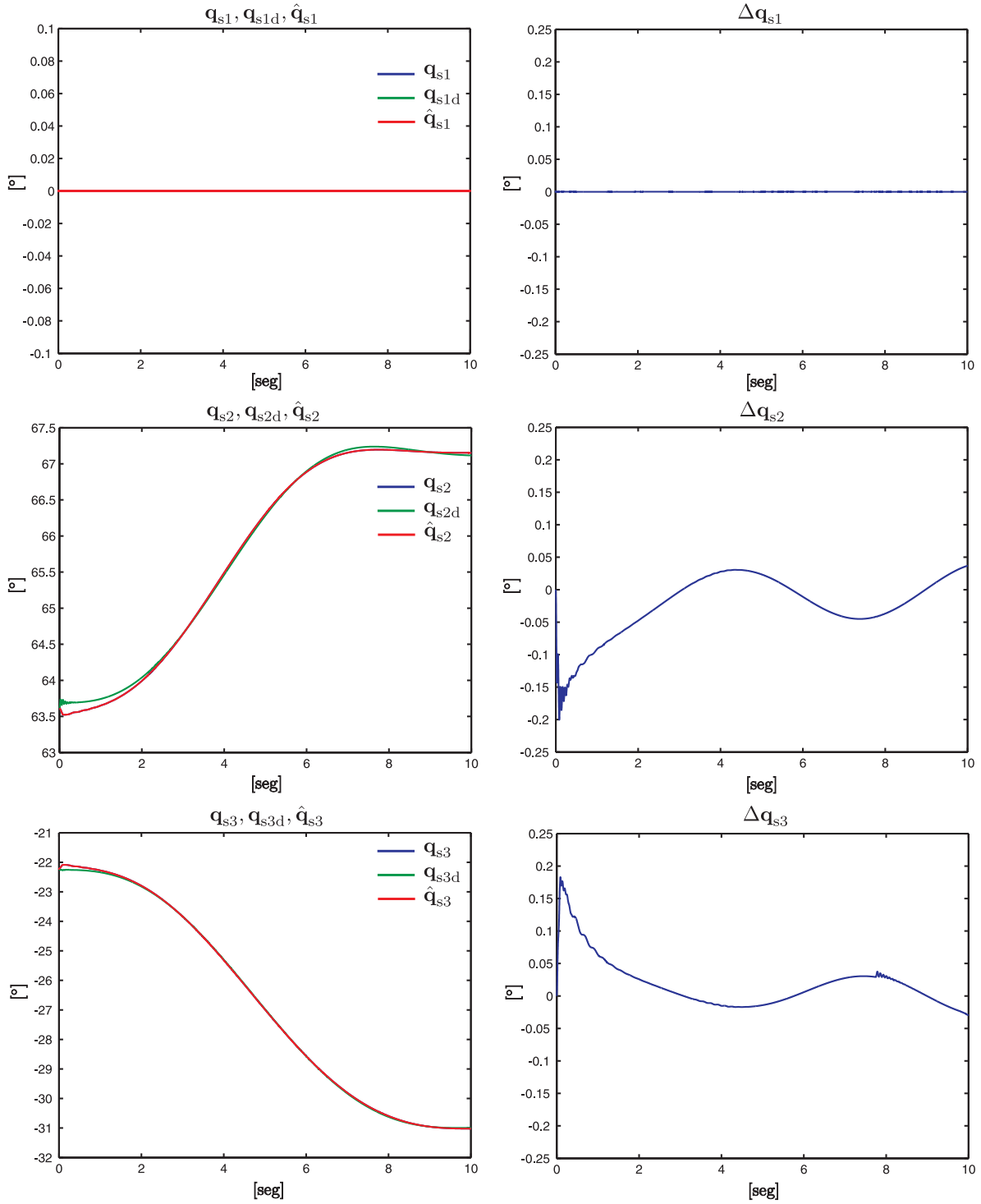




(a) Trayectorias articulares maestro

(b) Errores articulares maestro

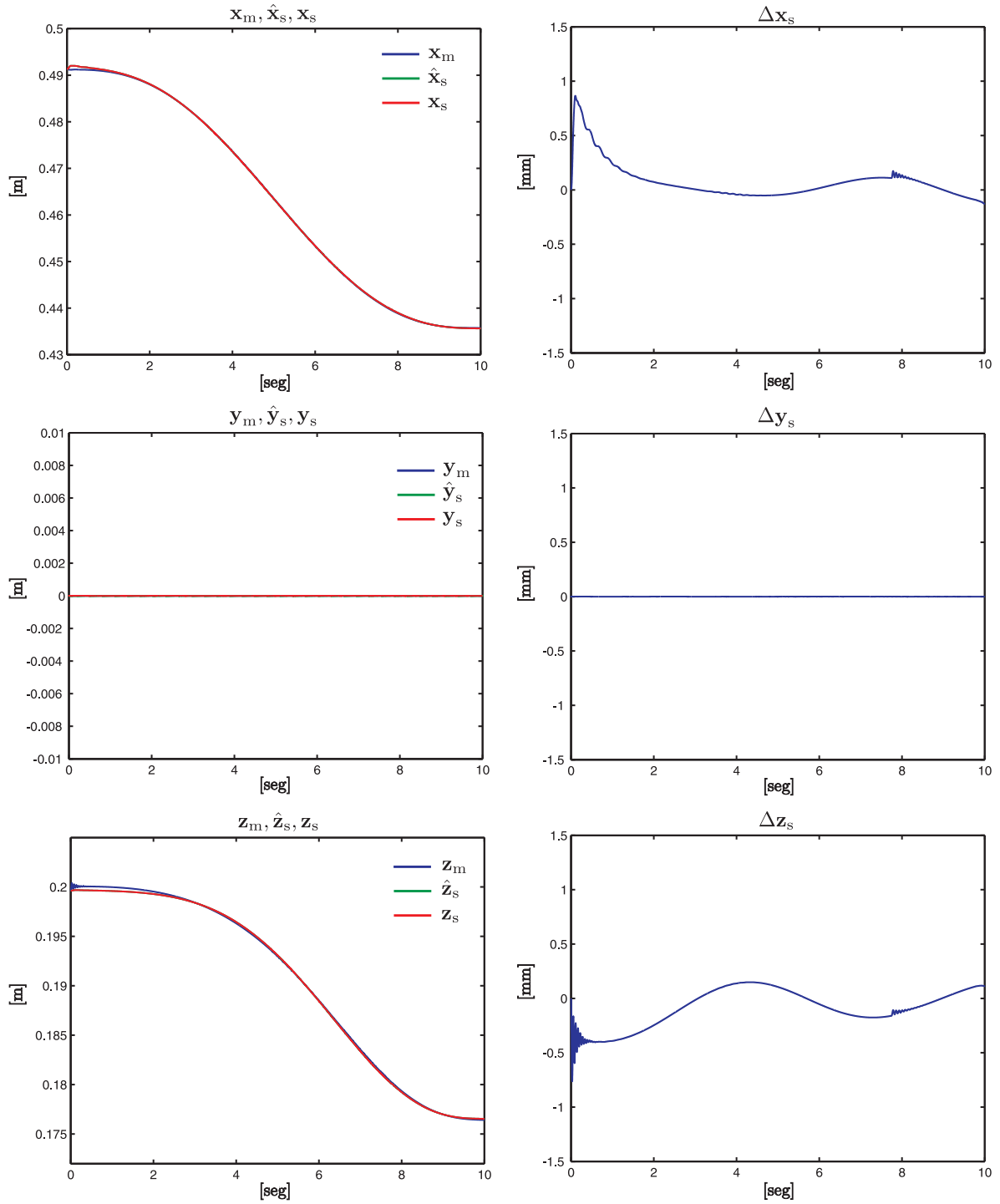
Figura 4.2 – Robot maestro



(a) Trayectorias articulares esclavo

(b) Errores articulares esclavo

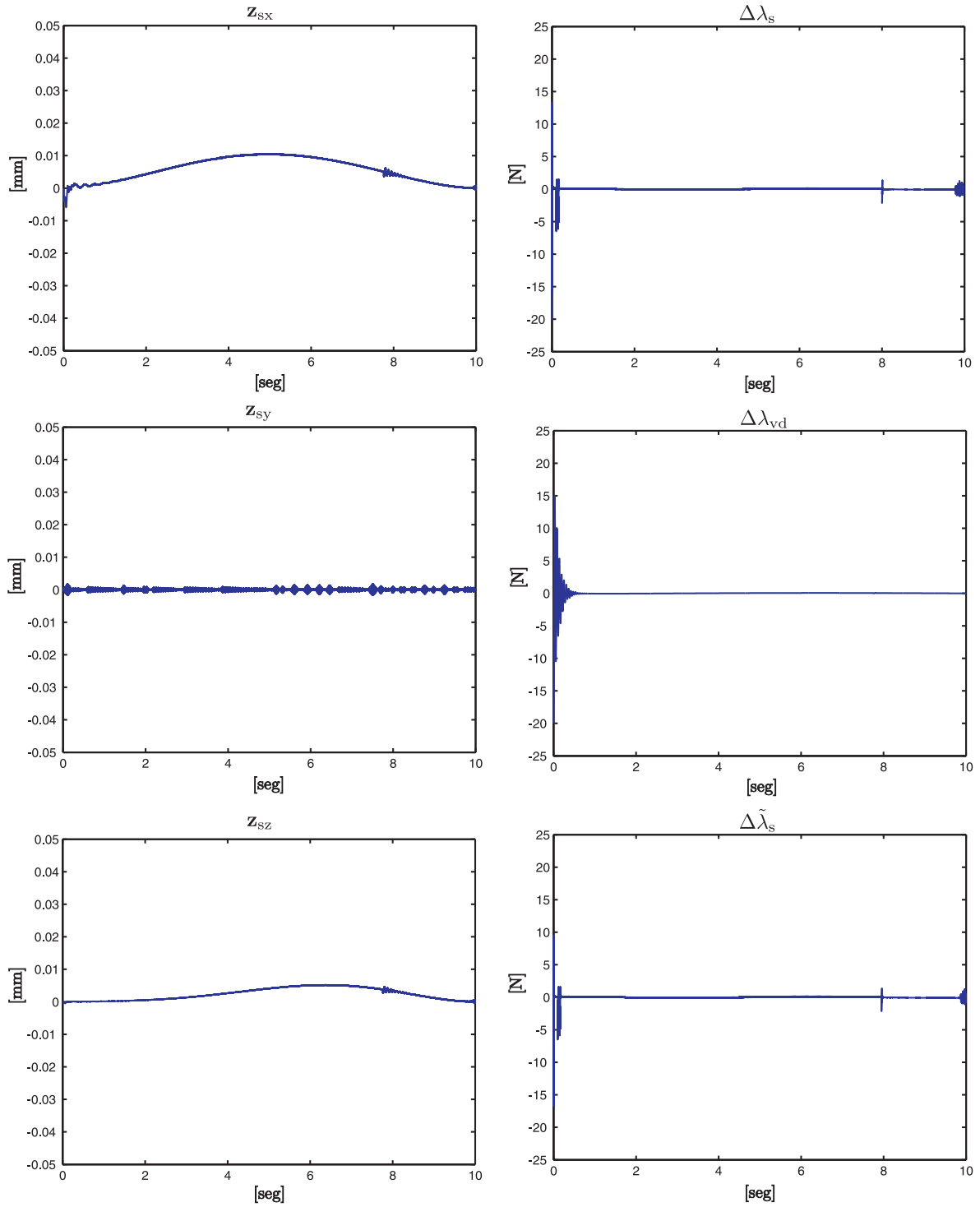
Figura 4.3 – Robot esclavo



(a) Trayectorias cartesianas maestro vs. esclavo (estimadas y reales)

(b) Errores cartesianos esclavo

Figura 4.4 – Trayectorias cartesianas y errores del esclavo



(a) Errores de observación de posición

(b) Errores de observación de fuerza

Figura 4.5 – Errores de observación de posición y fuerza

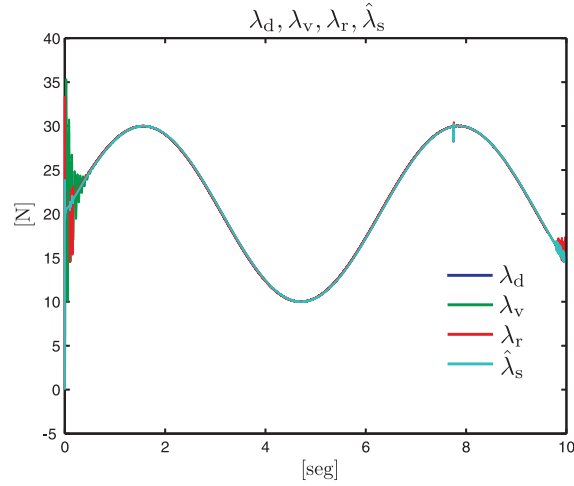


Figura 4.6 – Fuerzas

## 4.2. Conclusiones

Los resultados de simulación presentados en este capítulo, sugieren que los errores de seguimiento, los errores de observación y los errores de fuerza (a saber,  $\Delta \mathbf{q}_m, \Delta \dot{\mathbf{q}}_m, \Delta \mathbf{x}_s, \Delta \dot{\mathbf{x}}_s, \mathbf{z}_s, \dot{\mathbf{z}}_s, \Delta \boldsymbol{\lambda}_s, \Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_s, \Delta \boldsymbol{\lambda}_{vs}, \Delta \mathbf{F}_{vs}, \Delta \boldsymbol{\lambda}_{vd}, \Delta \mathbf{F}_{vd}$  respectivamente) se encuentran en una vecindad del origen, lo cual permite constatar que es posible (bajo determinadas condiciones) sustituir los sensores tanto de velocidad y fuerza del robot esclavo por los observadores de velocidad y fuerza presentados en [38]. Se concluye también que el sistema es estable y transparente de acuerdo a las gráficas aquí expuestas. Para respaldar estos resultados, en el Apéndice A se presenta el análisis de estabilidad de todo el sistema.



## Capítulo 5

# Conclusiones y Trabajo futuro

Para lograr el objetivo de este tema de tesis, fue esencial investigar acerca de los sistemas de teleoperación para comprender la manera en la que se abordaría el problema a resolver. Indudablemente el estado del arte permitió no solo entender sino también explorar las posibilidades que existen dentro de esta área de la robótica.

Por otro lado, dentro del esquema de teleoperación bilateral maestro-esclavo presentado en [46] y debido al desacoplamiento de los robots manipuladores que lo conforman, se implementó un esquema de control basado en observadores de velocidad y fuerza para el robot esclavo. La finalidad principal fue para evitar el uso de sensores, pues tanto los de velocidad como los de fuerza generalmente son sensibles al ruido, aunado al elevado costo que implica su inversión. Para lograrlo, se usó el principio de ortogonalización que permitió abordar el problema de posición de manera independiente al problema de fuerza.

Se demostró analíticamente que el sistema es estable en una región de  $\mathbb{R}^n$  alrededor del origen de los errores, lo que permitió garantizar dos puntos importantes: *estabilidad* y *transparencia* en el sistema de teleoperación.

Las simulaciones permitieron constatar que el controlador y los observadores propuestos en [38] funcionan de manera satisfactoria para el sistema presentado en [46], por lo que la viabilidad de llevar a cabo la implementación en un prototipo real con éxito es muy buena.

Para finalizar, dentro de las perspectivas a futuro para este trabajo de tesis se pueden mencionar las siguientes:

- Construir un prototipo de teleoperación bilateral maestro-esclavo para implementar los

controladores presentados.

- Utilizar diferentes tipos de superficies de contacto para verificar el desempeño.
- Estudiar el efecto de los retardos en los canales de comunicación y analizar la estabilidad del sistema.
- Diseñar un observador de fuerza que no dependa del modelo dinámico.



# Referencias

- [1] D. E. Schinstock, “Approximate Solutions to Unreachable Commands in Teleoperation of a Robot”, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Vol. 14, pp. 219-227, 1998.
- [2] N. M. Sgouros, S. Geroninannakis, “Robot Teleoperation Environments Featuring WAP-Based Wireless Devices”, *Journal of Network and Computer Application*, Vol. 20, pp. 1-13, 2003.
- [3] C. Melchiorri, A. Eusebi, *Telemanipulation: Systems aspects and Control issues*, chapter of International Summer School on Modelling and Control of Mechanisms and Robots, World Scientific, 1996.
- [4] S. Salcudean, *Control for teleoperation and haptic interfaces, control Problems in Robotics and Automation*, Springer Verlag, pp. 51-66, 1998.
- [5] A. Barrientos, L.F. Peñín, C. Balaguer, R. Aracil, *Fundamentos de Robótica*, McGraw-Hill, pp. 9-11, 1997.
- [6] M. Vukobratovic, D. Surdilovic, Y. Ekal, D. Katic, *Dynamics and robust control of robot-environment interaction*, New Frontiers in Robotics Vol. 2, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., pp. 1-10, 2007.
- [7] R. Volpe, P. Khosla, “The Equivalence of Second-Order Control and Proportional Gain Explicit Force Control”, *The International Journal of Robotic Research*, Vol. 14, pp. 574-589, 1995.
- [8] G. Zeng, A. Hemami, “An overview of Robot Force Control”, *Robotica*, Vol. 15, No. 5, pp. 473-482, 1997.

- [9] T. Yoshikawa, "Force Control of Robot Manipulators", *IEEE International Conference in Robotics and Automation*, San Francisco, CA, April 2000.
- [10] N. Hogan, "Impedance Control: An Approach to Manipulation: Part I - Theory", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 107, pp. 1-7, March 1985.
- [11] J. Craig, M. Raibert, "A Systematic Method of Hybrid Position/Force Control of a Manipulator", *Proceedings of the IEEE Computer Software and Applications Conference*, Vol. 1, pp. 446-451, 1979.
- [12] C. H. An, J. M. Hollerbach, "Kinematic Stability Issues in Force Control of Manipulators", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 4, pp. 897-903, March 1987.
- [13] W. Fisher, M. S. Mujtaba, "Hybrid Position/Force Control: A Correct Formulation", *Measurement and Manufacturing Systems Laboratory*, HPL-91-140, HEWLETT PACKARD, October 1991.
- [14] Arimoto S., Liu Y.H., Naniwa T., "Principle of Orthogonalization for Hybrid Control of Robot Arms", *IFAC 12th World Congress*, Vol. 1, 1994, pp. 507-512.
- [15] G. J. Raju, G. V. Verghese, T. B. Sheridan, "Design Issues in 2-port Network Models Bilateral Remote Manipulation", *Proceedings of the 1989 International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 3, pp. 1316-1321, May 1989.
- [16] B. Hannaford, "A Design Framework for Teleoperators with Kinesthetic Feedback", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 5, No. 4, August 1989.
- [17] G. M. H. Leung, B. A. Francis, J. Apkarian, "Bilateral Controller for Teleoperators with Time Delay via  $\mu$ -Synthesis", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 11, No. 1, February 1995.
- [18] H. Kazerooni, T.I. Tsay, K. Hollerbach, "A Controller Design Framework for Telerobotic Systems", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 1, No. 1, March 1993.

- [19] Y. Yokokohji, T. Yoshikawa, “Bilateral Control of Master-Slave Manipulators for Ideal Kinesthetic Coupling”, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, May 1192.
- [20] K. Hashtrudi, S. Salcudean, “Analysis and control Architectures for Teleoperation Systems with Impedance/Admittance and Slave Manipulators”, *International Journal of Robotics Research*, Vol. 20, No. 6, pp. 419-445, 2001.
- [21] D. A. Lawrence, “Stability and Transparency in Bilateral Teleoperation”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 5, 1993.
- [22] G. Niemeyer, J. J. E. Slotine, “Telemanipulation with Delays”, *International Journal of Robotics Research*, Vol. 23, No. 9, pp. 873-890, 2004.
- [23] R. J. Anderson, M. W. Spong, “Bilateral control of Teleoperators with Time Delay”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 5, pp. 494-501 May 1989.
- [24] G. Niemeyer, J. J. E. Slotine, “Stable Adaptive Teleoperation”, *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, Vol. 16, No. 1, pp. 152-162, January 1991.
- [25] E. Nuño, L. Basañez, “Nonlinear Bilateral Teleoperation: Stability Analysis”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3718-3723, May 2009.
- [26] M. Franken, S. Stramigioli, S. Misra, S. Secchi, A. Macchelli, “Bilateral Telemanipulation with Time Delays: A Two-Layer Approach Combining Passivity and Transparency”, *IEEE Transactions on Robotics*, Vol 27, No. 4, August 2011.
- [27] K. B. Fite, J. E. Speich, M. Goldfarb, “Transparency and Stability Robustness in Two-Channel Bilateral Telemanipulation”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol 123, September 2001.
- [28] A. C. Smith, F. Mobasser, K. H. Zaad, “Neural-Network-Based Contact Force Observers for Haptic Applications”, *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, Vol. 22, pp. 1163-1175, December 2006.

- [29] J. M. Daly, D. W. L. Wang, “Bilateral Teleoperation Using Unknown Input Observers for Force Estimation”, *American Control Conference*, Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA, June 2009.
- [30] H. S. Ahn, “Synchronization of Bilateral Teleoperation Systems using State Force Observer”, *International Conference on Control, Automation and Systems*, KINTEX, Gyeonggi-do, Korea October 2010.
- [31] A. R. Angeles, H. Nijmeijer, “Mutual Synchronization of Robots via Estimated state Feedback: A Cooperative Approach”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 12, No. 4, 2004.
- [32] Jazar N.R., *Theory of Applied Robotics: Kinematics, Dynamics and Control*, Second Edition, Springer-Verlag London, 2010, pp. 233-242.
- [33] Siciliano B., Sciavicco L., Villani L., Oriolo G., *Robotics: Modelling, Planning and Control*, Advanced Textbooks in Control and Signal Processing series, Springer-Verlag London, 2009, pp. 83-85, 111-113.
- [34] Spong M. W., Hutchinson S., Vidyasagar M., *Robot Modelling and Control*, First Edition, John Wiley and Sons, Inc., 2005, pp. 19-20.
- [35] R. Kelly, V. Santibáñez and A. Loria, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*, Berlín Heidelberg: Springer-Verlag 2005, pp. 62-77.
- [36] R. Kelly, V. Santibáñez, *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*, Pearson Prentice Hall, 2003, pp. 95-113.
- [37] E. Bayo, A. Avello, “Singularity-Free Augmented Lagrangian Algorithms for Constrained Multibody Dynamics”, *Nonlinear Dynamics* Vol. 5, pp. 209-231, 1994.
- [38] Arteaga-Pérez M. A., Rivera-Dueñas J. C., “Velocity and Force Observers for the Control of Robot Manipulators”, *Submitted to IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*.
- [39] J. J. E. Slotine, W. Li, “On the Adaptive Control of Robot Manipulators”, *International Journal of Robotics Research*, Vol. 6, No. 3, pp. 49-59, 1987.

- [40] R. C. Martínez, “Diseño y construcción de un sistema de teleoperación maestro-esclavo no similar”, Tesis de Maestría, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección Mecatrónica, CINVESTAV, México, Diciembre 2007.
- [41] J. Gudiño-Lau, M. A. Arteaga, “Dynamic Model and Simulation of Cooperative Robots: A Case of Study”, *Robotica*, Vol. 23, pp. 615-624, 2005.
- [42] Arteaga-Pérez M.A., Castillo-Sánchez A. M., Parra-Vega V. “Cartesian Control of Robots without Dynamic Model and Observer Design” *Automatica*, Vol. 42, 2006, pp. 473-480.
- [43] Khalil H.K., *Nonlinear Systems*, 3th Edition, Prentice Hall, 2002, pp. 172, 647-648.
- [44] Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P., *Nonlinear and Adaptive Control Design*, Adaptive and Learning Systems for Signal Processing, Communications and Control, John Wiley and Sons, Inc., 1995, pp. 491.
- [45] Arteaga-Pérez M.A., Castillo-Sánchez A. M., Parra-Vega V., “Cartesian Control of Robots without Dynamic Model and Observer Design”, *Automatica*, Vol. 42, 2006, pp. 473-480.
- [46] Rodriguez-Angeles A., Arteaga-Pérez M.A., Portillo-Velez R.J., Cruz-Villar C.A., “Control for Transparent Bilateral Master-Slave Systems Based on Virtual Surfaces and Orthogonal Decomposition”, *Submitted to ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*.



# Apéndice A

## Demostración del Teorema 3.1

En este apéndice se proporciona la demostración del Teorema 3.1. Considérese inicialmente el siguiente teorema y lemas.

**Teorema A.1.** [43]. Sea  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene al origen y sea  $V : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{y}\|) \leq V(t, \mathbf{y}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{y}\|), \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \leq -W_3(\mathbf{y}), \forall \|\mathbf{y}\| \geq \mu > 0, \quad (\text{A.2})$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}$ , en donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones de clase  $\mathcal{K}$ ,  $W_3(\mathbf{y})$  es una función continua positiva definida y  $\mathbf{f} : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua a tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $\mathbf{y}$  en  $[0, \infty) \times \mathcal{D}$ . Defínase  $r > 0$  tal que  $\mathcal{B}_r = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y}\| \leq r\} \subset \mathcal{D}$  y supóngase

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)). \quad (\text{A.3})$$

Entonces, existe una función  $\beta$  clase  $\mathcal{KL}$  y para todo estado inicial  $\mathbf{y}(t_0)$  que satisfaga la siguiente desigualdad

$$\|\mathbf{y}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad (\text{A.4})$$

existe un tiempo  $T \geq 0$  (que depende de  $\mathbf{y}(t_0)$  y de  $\mu$ ) de tal manera que la solución de  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  debe satisfacer

$$\|\mathbf{y}\| \leq \beta(\|\mathbf{y}(t_0)\|, t - t_0), \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (\text{A.5})$$

$$\|\mathbf{y}\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \forall t \geq t_0 + T. \quad (\text{A.6})$$

Más aún, si  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$  y además  $\alpha_1$  pertenece a la clase de funciones  $\mathcal{K}_\infty$ , entonces (A.5) y (A.6) se cumplen para cualquier estado inicial  $\mathbf{y}(t_0)$ , sin importar que tan grande sea  $\mu$ .

△

**Lemma A.1.** [44]. Si una función diferenciable  $f(t)$  tiene límite finito cuando  $t \rightarrow \infty$  y si  $\dot{f}(t)$  es uniformemente continua, entonces  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

△

**Lemma A.2.** [45]. Tomando en cuenta (3.50) y considérese la siguiente relación

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.7})$$

Si  $\|\mathbf{s}_i\| \leq \bar{s}_i < \infty \forall t$ , entonces  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\mathbf{s}_1$  están acotadas  $\forall t$ .

Adicionalmente la cota para  $\boldsymbol{\sigma}$  satisface

$$\|\boldsymbol{\sigma}\| \geq \mu \triangleq \frac{2(\lambda_{\max}(\mathbf{K}_\beta) \bar{s}_i + \sqrt{n})}{\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma)}. \quad (\text{A.8})$$

△

Es importante resaltar que ambos robots manipuladores se encuentran desacoplados debido a que el robot maestro solamente genera la posición y fuerza deseada para el robot esclavo (que a su vez son proporcionadas por el operador) y por lo tanto es posible considerarlos de manera independiente para llevar a cabo el análisis de estabilidad del sistema de teleoperación.

Se propone inicialmente el siguiente vector de errores dinámicos

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_x^T & \mathbf{r}^T & \Delta \bar{\mathbf{F}}^T \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.9})$$

en donde se usan las definiciones dadas en (3.46), (3.52) y (3.56).

En virtud del Hecho 3.1 y el Comentario 3.1 (páginas 37 y 38 respectivamente), el análisis solamente es válido en una región de  $\mathbb{R}^n$  alrededor del origen dada por

$$\mathcal{D} \triangleq \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+m)} \mid \|\mathbf{y}\| \leq y_{\max} \right\}. \quad (\text{A.10})$$

Se considerará en primer lugar el análisis del robot maestro y posteriormente el análisis del robot esclavo. La demostración del Teorema 3.1 se lleva a cabo en cuatro pasos.



a) El primer paso consiste en sustituir (3.1) y (3.10) en (2.46) de tal manera que se obtiene

$$\underbrace{\mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_m) \left( k_{vh} \Delta \dot{\mathbf{q}}_m + k_{ph} \Delta \mathbf{q}_m + k_{ih} \int_0^t \Delta \mathbf{q}_m d\vartheta \right)}_{\mathbf{s}_{pm}} + \underbrace{\mathbf{J}_{\varphi v}^T \{ k_{pv} \Delta \boldsymbol{\lambda}_{vs} + k_{Fiv} \Delta \mathbf{F}_{vs} + k_{fh} \Delta \boldsymbol{\lambda}_{vd} + k_{Fih} \Delta \mathbf{F}_{vd} \}}_{\mathbf{s}_{Fm}} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.11})$$

De la ecuación anterior, se observa que  $\mathbf{s}_{pm}$  (subespacio de posición) y  $\mathbf{s}_{Fm}$  (subespacio de fuerza) son ortogonales, por lo que es posible analizarlos de manera separada. Para la parte de posición se tiene entonces

$$\mathbf{s}_{pm} = \mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_m) \left( k_{vh} \Delta \dot{\mathbf{q}}_m + k_{ph} \Delta \mathbf{q}_m + k_{ih} \int_0^t \Delta \mathbf{q}_m d\vartheta \right) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.12})$$

La igualdad anterior es válida porque en la región  $\mathcal{D}$  se satisface el Hecho 3.1.

Por simplicidad se define

$$\mathbf{e}_m \triangleq \int_0^t \Delta \mathbf{q}_m d\vartheta, \quad (\text{A.13})$$

de tal forma que (A.12) se expresa como

$$k_{vh} \ddot{\mathbf{e}}_m + k_{ph} \dot{\mathbf{e}}_m + k_{ih} \mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_m) \mathbf{e}_m = \mathbf{0}. \quad (\text{A.14})$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_m = \frac{1}{2} k_{ih} \mathbf{e}_m^T \mathbf{e}_m + \frac{1}{2} k_{vh} \dot{\mathbf{e}}_m^T \dot{\mathbf{e}}_m, \quad (\text{A.15})$$

en donde su derivada con respecto al tiempo es

$$\begin{aligned} \dot{V}_m &= \frac{1}{2} k_{ih} [\mathbf{e}_m^T \dot{\mathbf{e}}_m + \dot{\mathbf{e}}_m^T \mathbf{e}_m] + \frac{1}{2} k_{vh} [\dot{\mathbf{e}}_m^T \dot{\mathbf{e}}_m + \dot{\mathbf{e}}_m^T \dot{\mathbf{e}}_m], \\ &= k_{ih} \mathbf{e}_m^T \dot{\mathbf{e}}_m + k_{vh} \dot{\mathbf{e}}_m^T \dot{\mathbf{e}}_m. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

De (A.14)

$$k_{vh} \ddot{\mathbf{e}}_m = -k_{ih} \mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_m) \mathbf{e}_m - k_{ph} \dot{\mathbf{e}}_m. \quad (\text{A.17})$$

Al sustituir en (A.16)

$$\begin{aligned} \dot{V}_m &= k_{ih} \mathbf{e}_m^T \dot{\mathbf{e}}_m - \dot{\mathbf{e}}_m^T [k_{ih} \mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_m) \mathbf{e}_m + k_{ph} \dot{\mathbf{e}}_m] \\ &= k_{ih} \mathbf{e}_m^T \dot{\mathbf{e}}_m - k_{ih} \dot{\mathbf{e}}_m^T \mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_m) \mathbf{e}_m - k_{ph} \dot{\mathbf{e}}_m^T \dot{\mathbf{e}}_m \\ &= k_{ih} \mathbf{e}_m^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_m)) \dot{\mathbf{e}}_m - k_{ph} \dot{\mathbf{e}}_m^T \dot{\mathbf{e}}_m \\ &= k_{ih} \mathbf{e}_m^T \mathbf{P}_v(\mathbf{q}_m) \dot{\mathbf{e}}_m - k_{ph} \dot{\mathbf{e}}_m^T \dot{\mathbf{e}}_m, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

en donde se han empleado (2.55) y (2.58). En virtud del Hecho 3.1, se cumple  $\mathbf{P}_v(\mathbf{q}_m)\dot{\mathbf{e}}_m \equiv \mathbf{0}$ , de tal forma que

$$\dot{V}_m = -k_{ph}\dot{\mathbf{e}}_m^T\dot{\mathbf{e}}_m. \quad (\text{A.19})$$

Se observa que  $\mathbf{e}_m$  esta acotado puesto que  $\dot{V}_m$  es negativa semidefinida. Usando el Teorema de LaSalle, se encuentra que el máximo conjunto invariante para el cual  $\dot{V}_m = 0$ , es  $(\mathbf{e}_m, \dot{\mathbf{e}}_m) = (\mathbf{e}_m, 0)$  y en consecuencia  $\ddot{\mathbf{e}}_m = 0$ . Por lo tanto de (A.14) se obtiene

$$\mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_m)\mathbf{e}_m = 0. \quad (\text{A.20})$$

Finalmente se concluye que

$$\Delta\mathbf{q}_m, \Delta\dot{\mathbf{q}}_m, \mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_m) \int_0^t \Delta\mathbf{q}_m d\vartheta \rightarrow 0.$$

**b)** Antes de llevar a cabo análisis del subespacio de fuerza, es necesario analizar las propiedades de estabilidad del robot esclavo. Los puntos de equilibrio considerados son los errores de seguimiento, de observación y de fuerza. El propósito es demostrar que bajo el esquema de control basado en observadores de velocidad y fuerza, se estabiliza el robot esclavo alrededor de los puntos de equilibrio garantizando que si el vector  $\mathbf{y}$  tiende a cero, los errores de seguimiento, observación y fuerza también tenderán a cero.

Para emplear el Teorema A.1 considérese la siguiente función candidata de Lyapunov para el vector de estados  $\mathbf{y}$  en (A.9)

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{M}\mathbf{y} = \frac{1}{2}\mathbf{s}_x^T\mathbf{H}_{cs}\mathbf{s}_x + \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{r} + \frac{1}{2}\Delta\bar{\mathbf{F}}_s^T\xi_1\xi_3\Delta\bar{\mathbf{F}}_s, \quad (\text{A.21})$$

en donde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{cs} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1\xi_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

con  $\mathbf{H}_{cs}$  la matriz de inercia del robot esclavo en coordenadas cartesianas,  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz identidad y  $\xi_1, \xi_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  matrices diagonales que satisfacen  $\xi_1 > \mathbf{0}$  y  $\xi_3 \geq \mathbf{0}$ . Adicionalmente,  $V(\mathbf{y})$  en (A.21) cumple

$$\lambda_1\|\mathbf{y}\|^2 \leq V(\mathbf{y}) \leq \lambda_2\|\mathbf{y}\|^2, \quad (\text{A.23})$$

con

$$\lambda_1 \triangleq \frac{1}{2} \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(\mathbf{M}) \quad (\text{A.24})$$

$$\lambda_2 \triangleq \frac{1}{2} \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max}(\mathbf{M}). \quad (\text{A.25})$$

Es necesario mostrar que si  $\|\mathbf{y}\|$  está acotada por  $0 < y_{max} < \infty$ , entonces cualquier otra señal está acotada. Tomando en cuenta (3.48) se tiene

$$\dot{\mathbf{x}}_s - \dot{\mathbf{x}}_r = \dot{\mathbf{x}}_s - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_s + \dot{\hat{\mathbf{x}}}_s - \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s)(\dot{\mathbf{x}}_{sd} - \mathbf{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s) - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.26})$$

De (3.36) se sabe que  $\dot{\mathbf{z}}_s = \dot{\mathbf{x}}_s - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_s$  y de (3.37)  $\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}_s = \dot{\hat{\mathbf{x}}}_s - \dot{\mathbf{x}}_{sd}$ . Entonces, considerando (3.47) se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}_s - \dot{\mathbf{x}}_r = \dot{\mathbf{z}}_s + \mathbf{s} - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.27})$$

Cabe recordar que se asume que la región  $\mathcal{D}$  en (A.10) es suficientemente pequeña para que se satisfaga el Hecho 3.1.

Usando (3.51) y (3.52) se reduce (A.27) a

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.28})$$

con

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_x - \dot{\mathbf{z}}_s, \quad (\text{A.29})$$

que es idéntica a (A.7). Por otro lado, se observa que de (3.56) se tiene  $\dot{\mathbf{z}}_s = -\mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z}_s + \mathbf{r}$ , lo que representa un filtro lineal estable de primer orden en  $\mathbf{z}_s$  y  $\dot{\mathbf{z}}_s$  y además tiende a  $\mathbf{0}$  si  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$  por lo que  $\mathbf{s}_i$  en (A.29) está acotada. Empleando el Lemma A.2, es evidente entonces que  $\mathbf{s}_1$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  están acotados. Si  $\mathbf{s}_1$  está acotado, en vista de (3.51) también lo está  $\mathbf{s}$  y por (3.47) se observa que también  $\mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \left( \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}_s + \bar{\mathbf{x}}_s \right)$  está acotado.

Si el Hecho 3.1 se cumple, entonces  $\mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) (\Delta \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{\Lambda}_x \Delta \mathbf{x}_s) \approx \Delta \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{\Lambda}_x \Delta \mathbf{x}_s$ , que es el caso de la región  $\mathcal{D}$  en (A.10). Por tanto  $\Delta \dot{\mathbf{x}}_s$  y  $\Delta \mathbf{x}_s$  están acotados. Sustituyendo (3.36) en (3.37) se tiene  $\bar{\mathbf{x}}_s = (\mathbf{x}_s - \mathbf{z}_s) - \mathbf{x}_{sd} = \Delta \mathbf{x}_s - \mathbf{z}_s$ , lo que permite reescribir (3.52) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_x &= \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) [\Delta \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{\Lambda}_x (\Delta \mathbf{x}_s - \mathbf{z}_s)] - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \\ &= \Delta \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{\Lambda}_x \Delta \mathbf{x}_s - \mathbf{\Lambda}_x \mathbf{z}_s - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

ó bien

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{\Lambda}_x \Delta \mathbf{x}_s = \mathbf{s}_x + \mathbf{\Lambda}_x \mathbf{z}_s + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.31})$$

que representa un filtro lineal estable de primer orden en  $\Delta \mathbf{x}_s$  y  $\Delta \dot{\mathbf{x}}_s$  con entrada acotada. Lo anterior implica que  $\mathbf{x}_s$  y  $\dot{\mathbf{x}}_s$  están acotadas porque  $\mathbf{x}_{sd}$  y  $\dot{\mathbf{x}}_{sd}$  lo están. De esta manera y con base en (3.36) se deduce que  $\hat{\mathbf{x}}_s$  y  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}_s$  están acotadas. Recordando la relación  $\dot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{x}}_s$  y su valor estimado  $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_s = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) \dot{\hat{\mathbf{x}}}_s$ , se concluye que  $\dot{\mathbf{q}}_s$  y  $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_s$  están acotadas.

La fuerza estimada  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_s$  se encuentra acotada (ver (3.79)), pues depende solamente de señales acotadas (se observa además que  $\mathbf{s}_o$  en (3.60) está también acotada) y por definición  $\boldsymbol{\lambda}_d$  está acotada. Con base en esto y en (3.45)  $\Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s$  está acotada. De este modo la ley de control  $\mathbf{f}_{cs}$  en (3.58) y en consecuencia  $\boldsymbol{\tau}_s$  en (3.75) están acotadas. Así, es posible garantizar que están acotadas  $\boldsymbol{\lambda}_s$  en (3.71),  $\ddot{\mathbf{q}}_s$  en (3.69) y  $\ddot{\mathbf{x}}_s$  en (3.17). Lo anterior implica que  $\Delta \ddot{\mathbf{x}}_s$  está acotada porque  $\ddot{\mathbf{x}}_{sd}$  es una señal acotada. Ahora bien, se tiene que (3.66) es un filtro lineal estable de primer orden en  $\dot{\mathbf{r}}$  y  $\mathbf{r}$  con entradas acotadas dado que  $\mathbf{K}_d > \mathbf{O}$ . Esto implica que

$$\dot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{z}}_s + \mathbf{\Lambda}_z \dot{\mathbf{z}}_s \quad (\text{A.32})$$

está acotada, lo que a su vez significa que  $\ddot{\mathbf{z}}_s$ ,  $\ddot{\mathbf{x}}_s$  y  $\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_s$  están acotadas. Por otro lado, puesto que  $\dot{\mathbf{x}}_r$  está acotada al depender solo de señales acotadas (ver (3.48)), se debe solo comprobar que

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_r = & \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \left( \ddot{\mathbf{x}}_{sd} - \mathbf{\Lambda}_x \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}_s \right) + \dot{\mathbf{Q}}_x(\mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}_s) (\dot{\mathbf{x}}_{sd} - \mathbf{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s) + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s \\ & + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s - k_1 \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

está acotada. De (3.50) se observa que  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  está acotada (porque  $\mathbf{s}_1$  está acotada), lo que implica que  $\ddot{\mathbf{x}}_r$  está acotada. Adicionalmente se concluye que  $\mathbf{y}_a$  en (3.54) está acotada. De esta manera  $\dot{\mathbf{s}}_x$  en (3.61) está acotada y así  $\dot{\mathbf{s}}_i$  también lo está (ver (A.29)).

c) Se ha demostrado hasta este punto que todas las señales de las que depende el robot esclavo están acotadas siempre y cuando el estado permanezca en la región  $\mathcal{D}$ . El siguiente paso es demostrar que bajo una selección adecuada de ganancias es de hecho posible garantizar que el estado  $\mathbf{y}$  permanecerá en  $\mathcal{D}$  siempre que la condición inicial sea suficientemente pequeña.

Tomando la derivada con respecto al tiempo de la función  $V(\mathbf{y})$  en (A.21) se obtiene

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \mathbf{s}_x^T \dot{\mathbf{H}}_{cs} \mathbf{s}_x + \mathbf{s}_x^T \mathbf{H}_{cs} \dot{\mathbf{s}}_x + \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{r}} + \Delta \bar{\mathbf{F}}_s^T \boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_3 \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s. \quad (\text{A.34})$$

De (3.61) se tiene

$$\mathbf{H}_{cs}\dot{\mathbf{s}}_x = \mathbf{K}_p\mathbf{r} + \mathbf{J}_{\varphi_x}^T (\Delta\boldsymbol{\lambda}_s + \boldsymbol{\xi}_2\Delta\bar{\mathbf{F}}_s + \boldsymbol{\xi}_3\Delta\bar{\boldsymbol{\lambda}}_s) - \mathbf{y}_a - \mathbf{C}_{cs}\mathbf{s}_x - \mathbf{K}_{DPS_x}. \quad (\text{A.35})$$

Entonces (A.34) resulta en

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2}\mathbf{s}_x^T\dot{\mathbf{H}}_{cs}\mathbf{s}_x + \mathbf{s}_x^T [\mathbf{K}_p\mathbf{r} + \mathbf{J}_{\varphi_x}^T (\Delta\boldsymbol{\lambda}_s + \boldsymbol{\xi}_2\Delta\bar{\mathbf{F}}_s + \boldsymbol{\xi}_3\Delta\bar{\boldsymbol{\lambda}}_s) - \mathbf{y}_a - \mathbf{C}_{cs}\mathbf{s}_x - \mathbf{K}_{DPS_x}] + \mathbf{r}^T\dot{\mathbf{r}} \\ &\quad + \Delta\bar{\mathbf{F}}_s^T\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\xi}_3\Delta\bar{\boldsymbol{\lambda}}_s \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{s}_x^T (\dot{\mathbf{H}}_{cs} - 2\mathbf{C}_{cs}) \mathbf{s}_x + \mathbf{s}_x^T\mathbf{K}_p\mathbf{r} + \mathbf{s}_x^T\mathbf{J}_{\varphi_x}^T (\Delta\boldsymbol{\lambda}_s + \boldsymbol{\xi}_2\Delta\bar{\mathbf{F}}_s + \boldsymbol{\xi}_3\Delta\bar{\boldsymbol{\lambda}}_s) - \mathbf{s}_x^T\mathbf{y}_a - \mathbf{s}_x^T\mathbf{K}_{DPS_x} \\ &\quad + \mathbf{r}^T\dot{\mathbf{r}} + \Delta\bar{\mathbf{F}}_s^T\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\xi}_3\Delta\bar{\boldsymbol{\lambda}}_s. \end{aligned}$$

Usando la Propiedad 2.2 la ecuación anterior se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}_x^T\mathbf{K}_p\mathbf{r} + \mathbf{s}_x^T\mathbf{J}_{\varphi_x}^T (\Delta\boldsymbol{\lambda}_s + \boldsymbol{\xi}_2\Delta\bar{\mathbf{F}}_s + \boldsymbol{\xi}_3\Delta\bar{\boldsymbol{\lambda}}_s) - \mathbf{s}_x^T\mathbf{y}_a - \mathbf{s}_x^T\mathbf{K}_{DPS_x} + \mathbf{r}^T\dot{\mathbf{r}} \\ &\quad + \Delta\bar{\mathbf{F}}_s^T\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\xi}_3\Delta\bar{\boldsymbol{\lambda}}_s. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Premultiplicando (3.52) por  $\mathbf{J}_{\varphi_x}$

$$\mathbf{J}_{\varphi_x}\mathbf{s}_x = \mathbf{J}_{\varphi_x}\mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) (\Delta\dot{\mathbf{x}}_s + \boldsymbol{\Lambda}_x\bar{\mathbf{x}}_s) - \mathbf{J}_{\varphi_x}\mathbf{J}_{\varphi_x}^+\boldsymbol{\xi}_1\Delta\bar{\mathbf{F}}_s + \mathbf{J}_{\varphi_x}(\mathbf{K}_\gamma\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s}_d), \quad (\text{A.37})$$

y transponiendo se obtiene

$$\mathbf{s}_x^T\mathbf{J}_{\varphi_x}^T = -\Delta\bar{\mathbf{F}}_s^T\boldsymbol{\xi}_1 + (\mathbf{K}_\gamma\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s}_d)^T\mathbf{J}_{\varphi_x}^T, \quad (\text{A.38})$$

en donde se ha empleado (2.62) y el hecho que  $\mathbf{J}_{\varphi_x}\mathbf{J}_{\varphi_x}^+ = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

Sustituyendo (3.66) y (A.38) en (A.36)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{s}_x^T\mathbf{K}_{DPS_x} + \mathbf{s}_x^T\mathbf{K}_p\mathbf{r} - \mathbf{s}_x^T\mathbf{y}_a + \left[ -\Delta\bar{\mathbf{F}}_s^T\boldsymbol{\xi}_1 + (\mathbf{K}_\gamma\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s}_d)^T\mathbf{J}_{\varphi_x}^T \right] \boldsymbol{\xi}_2\Delta\bar{\mathbf{F}}_s + \Delta\bar{\mathbf{F}}_s^T\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\xi}_3\Delta\bar{\boldsymbol{\lambda}}_s \\ &\quad + \left[ -\Delta\bar{\mathbf{F}}_s^T\boldsymbol{\xi}_1 + (\mathbf{K}_\gamma\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s}_d)^T\mathbf{J}_{\varphi_x}^T \right] \Delta\boldsymbol{\lambda}_s + \left[ -\Delta\bar{\mathbf{F}}_s^T\boldsymbol{\xi}_1 + (\mathbf{K}_\gamma\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s}_d)^T\mathbf{J}_{\varphi_x}^T \right] \boldsymbol{\xi}_3\Delta\bar{\boldsymbol{\lambda}}_s \\ &\quad + \mathbf{r}^T \left[ \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \left( \Delta\ddot{\mathbf{x}}_s + \boldsymbol{\Lambda}_x\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{x}}_s \right) + \dot{\mathbf{Q}}_x(\mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}_s) (\Delta\dot{\mathbf{x}}_s + \boldsymbol{\Lambda}_x\bar{\mathbf{x}}_s) - \mathbf{K}_d\mathbf{r} \right] \end{aligned}$$

y reduciendo términos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{s}_x^T\mathbf{K}_{DPS_x} + \mathbf{s}_x^T\mathbf{K}_p\mathbf{r} - \mathbf{s}_x^T\mathbf{y}_a - \Delta\bar{\mathbf{F}}_s^T\boldsymbol{\xi}_1\Delta\boldsymbol{\lambda}_s + (\mathbf{K}_\gamma\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s}_d)^T\mathbf{J}_{\varphi_x}^T\Delta\boldsymbol{\lambda}_s - \Delta\bar{\mathbf{F}}_s^T\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\xi}_2\Delta\bar{\mathbf{F}}_s \\ &\quad + (\mathbf{K}_\gamma\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s}_d)^T\mathbf{J}_{\varphi_x}^T\boldsymbol{\xi}_2\Delta\bar{\mathbf{F}}_s + (\mathbf{K}_\gamma\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s}_d)^T\mathbf{J}_{\varphi_x}^T\boldsymbol{\xi}_3\Delta\bar{\boldsymbol{\lambda}}_s + \mathbf{r}^T\mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \left( \Delta\ddot{\mathbf{x}}_s + \boldsymbol{\Lambda}_x\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{x}}_s \right) \\ &\quad + \mathbf{r}^T\dot{\mathbf{Q}}_x(\mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}_s) (\Delta\dot{\mathbf{x}}_s + \boldsymbol{\Lambda}_x\bar{\mathbf{x}}_s) - \mathbf{r}^T\mathbf{K}_d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Como ya se demostró en el inciso **b**), todas las señales que se encuentran en la región (A.10) están acotadas. Entonces, es posible proponer las siguientes cotas

$$\bar{\alpha}_1 \triangleq \max_{\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+m)}} \|\mathbf{y}_a\| \quad (\text{A.40})$$

$$\bar{\alpha}_2 \triangleq \max_{\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+m)}} \left\| \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \left( \Delta \ddot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{\Lambda}_x \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}_s \right) + \dot{\mathbf{Q}}_x(\mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}_s) (\Delta \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s) \right\| \quad (\text{A.41})$$

$$\bar{\alpha}_3 \triangleq \max_{\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+m)}} \left\| (\mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s}_d)^T \mathbf{J}_{\varphi_x}^T \boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \boldsymbol{\lambda}_s \right\| \quad (\text{A.42})$$

$$\bar{\alpha}_4 \triangleq \max_{\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+m)}} \left\| (\mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s}_d)^T \mathbf{J}_{\varphi_x}^T (\Delta \boldsymbol{\lambda}_s + \boldsymbol{\xi}_3 \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s) \right\|. \quad (\text{A.43})$$

Sustituyendo las definiciones (A.40)-(A.43) en (A.39)

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_p) \|\mathbf{s}_x\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_d) \|\mathbf{r}\|^2 - \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2) \|\Delta \bar{\mathbf{F}}_s\|^2 + \bar{\alpha}_1 \|\mathbf{s}_x\| \\ &\quad + \bar{\alpha}_2 \|\mathbf{r}\| + \bar{\alpha}_3 \|\Delta \bar{\mathbf{F}}_s\| + \bar{\alpha}_4 + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_p) \|\mathbf{s}_x\| \|\mathbf{r}\| \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_p) \|\mathbf{s}_x\|^2 - \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2) \|\Delta \bar{\mathbf{F}}_s\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_d) \|\mathbf{r}\|^2 + \alpha \|\mathbf{y}\| + \bar{\alpha}_4 \\ &\quad + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_p) \|\mathbf{s}_x\| \|\mathbf{r}\|, \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

en donde  $\alpha \triangleq \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3$ .

Para cumplir con (A.2), las ganancias deben de satisfacer

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_p) \geq 1 + \delta \quad (\text{A.45})$$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_d) \geq \delta + \frac{1}{4} \lambda_{\max}^2(\mathbf{K}_p) \quad (\text{A.46})$$

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2) = \delta, \quad (\text{A.47})$$

con  $\delta > 0$ . Al sustituir (A.45)-(A.47) en (A.44) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(1 + \delta) \|\mathbf{s}_x\|^2 + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_p) \|\mathbf{s}_x\| \cdot \|\mathbf{r}\| + \alpha \|\mathbf{y}\| + \bar{\alpha}_4 - \delta \|\Delta \bar{\mathbf{F}}_s\|^2 \\ &\quad - \left[ \delta + \frac{1}{4} \lambda_{\max}^2(\mathbf{K}_p) \right] \|\mathbf{r}\|^2 \\ &= -\|\mathbf{s}_x\|^2 - \delta \|\mathbf{s}_x\|^2 - \delta \|\mathbf{r}\|^2 - \delta \|\Delta \bar{\mathbf{F}}_s\|^2 + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_p) \|\mathbf{s}_x\| \cdot \|\mathbf{r}\| + \alpha \|\mathbf{y}\| \\ &\quad + \bar{\alpha}_4 - \frac{1}{4} \lambda_{\max}^2(\mathbf{K}_p) \|\mathbf{r}\|^2 \\ &= -\delta \|\mathbf{y}\|^2 + \alpha \|\mathbf{y}\| + \bar{\alpha}_4 - \underbrace{\left[ \|\mathbf{s}_x\| - \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\mathbf{K}_p) \|\mathbf{r}\| \right]^2}_{>0} \\ &\Rightarrow \dot{V} \leq -\delta \|\mathbf{y}\|^2 + \bar{\alpha} \|\mathbf{y}\| + \bar{\alpha}_4. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Si se reescribe (A.48) de la siguiente manera

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\delta\|\mathbf{y}\|^2 - \underbrace{\left[ \frac{1}{2}\delta\|\mathbf{y}\|^2 - \alpha\|\mathbf{y}\| - \bar{\alpha}_4 \right]}_{\text{ec. algebraica de 2do. grado}} \quad (\text{A.49})$$

y se escoge la raíz positiva de la ecuación algebraica de segundo grado, de tal forma que si el valor  $\mu$  del Teorema A.1 se designa por

$$\mu \triangleq \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\delta\bar{\alpha}_4}}{\delta}, \quad (\text{A.50})$$

entonces para  $\|\mathbf{y}\| \geq \mu$

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\delta\|\mathbf{y}\|^2 = -W_3(\mathbf{y}), \quad (\text{A.51})$$

que es lo que se buscaba. Entonces, si la condición inicial del estado satisface (A.4), se puede garantizar que  $\|\mathbf{y}\| \leq y_{\max} \forall t$ .

**d)** Después de garantizar que se cumple  $\|\mathbf{y}\| \leq y_{\max}$ , falta demostrar que los errores de seguimiento, observación y fuerza tienden a cero. Considérese primero la derivada con respecto al tiempo de (A.7),  $\dot{\mathbf{s}}_1 = \dot{\mathbf{s}}_1 + \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}$ . Con base en (3.50) se tiene

$$\dot{\mathbf{s}}_1 = -\mathbf{K}_\gamma \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1 - \mathbf{K}_\gamma \text{sign}(\mathbf{s}_1) + \dot{\mathbf{s}}_1. \quad (\text{A.52})$$

Tomando en cuenta que  $\ddot{\mathbf{z}}_s = -\boldsymbol{\Lambda}_z \dot{\mathbf{z}}_s + \dot{\mathbf{r}}$  está acotada y sustituyendo en la primer derivada de (A.29) dada por  $\dot{\mathbf{s}}_1 = \dot{\mathbf{s}}_x - \ddot{\mathbf{z}}_s$ , resulta en

$$\dot{\mathbf{s}}_1 = \dot{\mathbf{s}}_x - \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Lambda}_z \dot{\mathbf{z}}_s. \quad (\text{A.53})$$

Con base en lo desarrollado en el inciso **b)**,  $\dot{\mathbf{s}}_1$  está acotada y por lo tanto (A.52) permanece acotada. De esta manera, se propone la siguiente función de energía

$$V_1 = \frac{1}{2} \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 = \frac{1}{2} \|\mathbf{s}_1\|^2, \quad (\text{A.54})$$

cuya derivada está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1^T \dot{\mathbf{s}}_1 &= \|\mathbf{s}_1\| \frac{d}{dt} \|\mathbf{s}_1\| = -\mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_\gamma \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_\gamma \text{sign}(\mathbf{s}_1) + \mathbf{s}_1^T \dot{\mathbf{s}}_1 \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma \mathbf{K}_\beta) \|\mathbf{s}_1\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma) \|\mathbf{s}_1\| + \mathbf{s}_1^T \dot{\mathbf{s}}_1, \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

en donde  $|\mathbf{s}_1| = |s_{11}| + |s_{12}| + \dots + |s_{1n}|$ , con  $s_{1j}$  elemento de  $\mathbf{s}_1$  y  $j = 1, 2, \dots, n$ . Debido a que  $\dot{s}_i$  está acotada, se satisface  $\|\dot{\mathbf{s}}_1\| \leq s_{ipmax}$  y puesto que  $\|\mathbf{s}_1\| \leq |\mathbf{s}_1|$ , se debe tener

$$\|\mathbf{s}_1\| \frac{d}{dt} \|\mathbf{s}_1\| \leq -(\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma) - s_{ipmax}) \|\mathbf{s}_1\|. \quad (\text{A.56})$$

Definiendo  $\phi \triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma) - s_{ipmax} > 0$  con una apropiada selección de  $\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma)$ , se obtiene

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{s}_1\| \leq -\phi. \quad (\text{A.57})$$

De acuerdo a la teoría de modos deslizantes, para demostrar que  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{0}$  en un tiempo finito  $t_r$ , *i.e.*  $\mathbf{s}_1(t) = \mathbf{0} \forall t \geq t_r$ , es necesario llevar a cabo la integración de (A.57)

$$\int_0^{t_r} d\|\mathbf{s}_1\| \leq -\phi \int_0^{t_r} dt \Rightarrow \|\mathbf{s}_1\| \Big|_0^{t_r} \leq -\phi t \Big|_0^{t_r}$$

$\therefore$

$$\|\mathbf{s}_1(t_r)\| - \|\mathbf{s}_1(0)\| = -\|\mathbf{s}_1(0)\| \leq -\phi t_r \quad (\text{A.58})$$

ó bien

$$t_r \leq \|\mathbf{s}_1(0)\| / \phi. \quad (\text{A.59})$$

En virtud de (3.51) se concluye que  $\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}_d$ , en donde  $\mathbf{s}_d$  es una señal suave definida en (3.49). Se observa que tiende a cero.

Por tanto, de (3.47)

$$\mathbf{s} = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \left( \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}_s + \mathbf{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s \right) - \mathbf{J}_{\varphi x}^+ \xi_1 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s, \quad (\text{A.60})$$

y debido a la ortogonalidad de los subespacios de posición y fuerza, el análisis de ambos términos del segundo miembro de (A.60) puede hacerse por separado. Por simplicidad se considerará  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ .

Para el subespacio de posición, de la ecuación anterior se tiene que

$$\mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \left( \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}_s + \mathbf{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s \right) \approx \left( \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}_s + \mathbf{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}_s \right) = \mathbf{0} \quad (\text{A.61})$$

en virtud del Comentario 3.1, por lo que  $\bar{\mathbf{x}}_s$  y  $\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{x}}_s$  tienden a cero. De acuerdo con (3.37) se concluye que  $\hat{\mathbf{x}}_s \rightarrow \mathbf{x}_{sd}$ ,  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}_s \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_{sd}$  y en consecuencia

$$\Delta \mathbf{x}_s = \mathbf{z}_s \quad (\text{A.62})$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_s = \dot{\mathbf{z}}_s. \quad (\text{A.63})$$



Falta demostrar que los errores de observación y de seguimiento ( $\mathbf{z}_s$ ,  $\dot{\mathbf{z}}_s$ ,  $\Delta\mathbf{x}_s$  y  $\Delta\dot{\mathbf{x}}_s$ ) tienden a  $\mathbf{0}$ . De (3.52) se puede obtener

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{s}_x + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \xi_1 \Delta\bar{\mathbf{F}}_s + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.64})$$

considerando que  $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0}$  y el Hecho 3.1. Sustituyendo en (3.62)

$$\dot{\mathbf{z}}_s = \mathbf{s}_x + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \xi_1 \Delta\bar{\mathbf{F}}_s + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{K}_d \boldsymbol{\Lambda}_z \int_0^t \mathbf{z}_s(\vartheta) d\vartheta - \boldsymbol{\Lambda}_z \mathbf{z}_s - \mathbf{K}_d \mathbf{z}_s. \quad (\text{A.65})$$

Con base en (A.65) se puede reescribir (3.56) como

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_x + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \xi_1 \Delta\bar{\mathbf{F}}_s + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{K}_d \boldsymbol{\Lambda}_z \int_0^t \mathbf{z}_s(\vartheta) d\vartheta - \mathbf{K}_d \mathbf{z}_s. \quad (\text{A.66})$$

Derivando

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{s}}_x + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \xi_1 \Delta\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_s + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_x}^+(\mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}_s) \xi_1 \Delta\bar{\mathbf{F}}_s - k_1 \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{A.67})$$

ó bien

$$\dot{\mathbf{s}}_x - \dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \xi_1 \Delta\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_s - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_x}^+(\mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}_s) \xi_1 \Delta\bar{\mathbf{F}}_s + k_1 \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{r}}, \quad (\text{A.68})$$

en donde se han empleado (3.46), (3.49) y (3.56).

Por otro lado, si de (A.61) se sabe que  $\bar{\mathbf{x}}_s \rightarrow \mathbf{0}$  y  $\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{x}}_s \rightarrow \mathbf{0}$  entonces (3.52) resulta en

$$\mathbf{s}_x = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x}_s) \Delta\dot{\mathbf{x}}_s - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \xi_1 \Delta\bar{\mathbf{F}}_s - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.69})$$

Considerando (A.63) y recordando que  $\mathbf{y}$  está en la región (A.10), la ecuación anterior se expresa como

$$\mathbf{s}_x = \dot{\mathbf{z}}_s - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \xi_1 \Delta\bar{\mathbf{F}}_s - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.70})$$

por lo que

$$\dot{\mathbf{s}}_x = \dot{\mathbf{z}}_s - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \xi_1 \Delta\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_s - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_x}^+(\mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}_s) \xi_1 \Delta\bar{\mathbf{F}}_s + k_1 \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{A.71})$$

y en donde nuevamente se han empleado (3.46) y (3.49). Si de (3.64) se tiene  $\ddot{\mathbf{z}}_s = \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\Lambda}_z \dot{\mathbf{z}}_s$  y sustituyendo en (A.71)

$$\dot{\mathbf{s}}_x = \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\Lambda}_z \dot{\mathbf{z}}_s - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \xi_1 \Delta\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_s - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_x}^+(\mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}_s) \xi_1 \Delta\bar{\mathbf{F}}_s + k_1 \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{A.72})$$

ó bien

$$\dot{\mathbf{s}}_x - \dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{\Lambda}_z \dot{\mathbf{z}}_s - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ (\mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}_s) \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s + k_1 \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (\text{A.73})$$

Con base en (A.68) y (A.73) se tiene

$$\begin{aligned} -\cancel{\mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s} - \cancel{\mathbf{J}_{\varphi_x}^+ (\mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}_s) \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s} + \cancel{k_1 \mathbf{s}_d} + \cancel{\mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}} + \mathbf{K}_d \mathbf{r} &= -\mathbf{\Lambda}_z \dot{\mathbf{z}}_s - \cancel{\mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s} \\ &\quad - \cancel{\mathbf{J}_{\varphi_x}^+ (\mathbf{x}_s, \dot{\mathbf{x}}_s) \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s} + \cancel{k_1 \mathbf{s}_d} + \cancel{\mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}} \\ \Rightarrow \mathbf{K}_d \mathbf{r} &= -\mathbf{\Lambda}_z \dot{\mathbf{z}}_s. \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

De (3.56) se puede expresar (A.74) como

$$(\mathbf{K}_d + \mathbf{\Lambda}_z) \dot{\mathbf{z}}_s + \mathbf{K}_d \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z}_s = \mathbf{0}, \quad (\text{A.75})$$

la cual representa un filtro estable de primer orden con entrada cero. Esto significa que

$$\mathbf{z}_s \rightarrow \mathbf{0} \quad (\text{A.76})$$

$$\dot{\mathbf{z}}_s \rightarrow \mathbf{0}, \quad (\text{A.77})$$

lo que en vista de (A.62) y (A.63) garantiza que

$$\Delta \mathbf{x}_s \rightarrow \mathbf{0} \quad (\text{A.78})$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_s \rightarrow \mathbf{0}. \quad (\text{A.79})$$

Por otro lado, para el subespacio de fuerza se tiene de (A.60)

$$\mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \bar{\mathbf{F}}_s = \mathbf{0}, \quad (\text{A.80})$$

en donde  $\mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es de rango completo y  $\boldsymbol{\xi}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es positiva definida. De lo anterior se tiene  $\Delta \bar{\mathbf{F}}_s \rightarrow \mathbf{0}$ , pero no garantiza que  $\Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s \rightarrow \mathbf{0}$ .

Para mostrar esto se emplea el Lema A.1. De hecho, basta con mostrar que  $\Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s$  es uniformemente continua (es decir, que  $\frac{d}{dt} \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s$  está acotada). Se sabe que  $\boldsymbol{\lambda}_d$  y  $\frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda}_d$  están acotadas, así que sólo se debe comprobar que  $\frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_s$  está acotada. Para ello considérese la derivada con respecto al tiempo de (3.79)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_s &= \frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda}_d - (\mathbf{I} + \boldsymbol{\xi}_3)^{-1} \left[ \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s - \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1} (\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi_s}^T)^{-1} \mathbf{f}_q \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1} (\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi_s}^T)^{-1} \frac{d}{dt} \mathbf{f}_q \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

El término  $\frac{d}{dt} (\mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi_s}^T)^{-1}$  al depender solamente de señales acotadas, está acotado. Por otro lado, tomando en cuenta la derivada con respecto al tiempo de  $\mathbf{f}_q$  en (3.80)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{f}_q &= \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s)) \left( \mathbf{J}^T(\mathbf{q}_s) \mathbf{K}_p \mathbf{s}_o + \widehat{\mathbf{C}}_s \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) \right) \\ &\quad + (\mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s)) \left[ \frac{d}{dt} \left( \mathbf{J}^T(\mathbf{q}_s) \mathbf{K}_p \mathbf{s}_o + \widehat{\mathbf{C}}_s \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) \right) \right] \\ &\quad - \ddot{\mathbf{J}}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, \ddot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \ddot{\mathbf{q}}_s. \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

Si la derivada de  $\mathbf{s}_o$  es  $\dot{\mathbf{s}}_o = \dot{\mathbf{s}}_x - \dot{\mathbf{r}}$ , entonces (A.82) resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{f}_q &= \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s)) \left( \mathbf{J}^T(\mathbf{q}_s) \mathbf{K}_p \mathbf{s}_o + \widehat{\mathbf{C}}_s \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) \right) \\ &\quad + (\mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s)) \left[ \dot{\mathbf{J}}^T(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \mathbf{K}_p \mathbf{s}_o + \mathbf{J}^T(\mathbf{q}_s) \mathbf{K}_p (\dot{\mathbf{s}}_x - \dot{\mathbf{r}}) + \dot{\widehat{\mathbf{C}}}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, \ddot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s \right. \\ &\quad \left. + \dot{\widehat{\mathbf{C}}}_s \ddot{\mathbf{q}}_s + \dot{\mathbf{D}}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s + \dot{\mathbf{g}}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \right] - \ddot{\mathbf{J}}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, \ddot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_s} \ddot{\mathbf{q}}_s. \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

Se observa en la ecuación previa que  $\frac{d}{dt} \mathbf{f}_q$  depende solo de señales acotadas y por lo tanto está acotada. De lo anterior  $\frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_s$  está acotada e implica que también  $\frac{d}{dt} \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s$  está acotada y tomando en cuenta el Lema A.1 se concluye que

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s \rightarrow 0. \quad (\text{A.84})$$

Para demostrar que los errores de seguimiento y observación de fuerza ( $\Delta \boldsymbol{\lambda}_s$  y  $\Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_s$  respectivamente) tienden a cero, considérense inicialmente (3.44), (3.71) y (3.74)

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_s &= -(\mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi_s}^T)^{-1} \left[ \mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) (\boldsymbol{\tau}_s - \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s - \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s - \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s)) \right. \\ &\quad \left. + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s \right] + (\mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi_s}^T)^{-1} \left[ \mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) (\boldsymbol{\tau}_s - \widehat{\mathbf{C}}_s \dot{\mathbf{q}}_s - \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s - \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s)) \right. \\ &\quad \left. + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_s} \dot{\mathbf{q}}_s \right] \\ &= (\mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi_s}^T)^{-1} (\mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s)) \left( \boldsymbol{\tau}_s \xrightarrow{0} \boldsymbol{\tau}_s + \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) - \mathbf{g}_s(\mathbf{q}_s) \right) \\ &\quad + (\mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi_s}^T)^{-1} \left[ \mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \left( -\widehat{\mathbf{C}}_s \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s - \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s \right) \right. \\ &\quad \left. + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_s} \dot{\mathbf{q}}_s - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s \right] \\ &= (\mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \mathbf{J}_{\varphi_s}^T)^{-1} \left[ \mathbf{J}_{\varphi_s} \mathbf{H}_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \left( \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s - \widehat{\mathbf{C}}_s \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s - \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s \right) \right. \\ &\quad \left. + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_s} \dot{\mathbf{q}}_s - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

Si ahora se define la dinámica del error de observación de velocidad en espacio articular como

$$\dot{\mathbf{z}}_{\text{sq}} = \dot{\mathbf{q}}_s - \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s \quad (\text{A.86})$$

ó bien de (3.18) y (3.72)

$$\dot{\mathbf{z}}_{\text{sq}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{x}}_s - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) \dot{\hat{\mathbf{x}}}_s = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) (\dot{\mathbf{x}}_s - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_s) = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{z}}_s. \quad (\text{A.87})$$

Considerando ahora el resultado obtenido en (A.77) se llega a que  $\dot{\mathbf{z}}_{\text{sq}} \rightarrow \mathbf{0}$ , es decir  $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_s \rightarrow \dot{\mathbf{q}}_s$ . Luego entonces  $\hat{\mathbf{C}}_s = \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s)$  y  $\hat{\mathbf{J}}_{\varphi_s} = \mathbf{J}_{\varphi_s}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s)$ . De ésta manera y de acuerdo con (A.85)

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_s \rightarrow \mathbf{0}. \quad (\text{A.88})$$

Finalmente, de (3.44) se tiene  $\boldsymbol{\lambda}_s = \Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_s + \hat{\boldsymbol{\lambda}}_s$  y de (3.45)  $\boldsymbol{\lambda}_d = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_s - \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s$  y al sustituir en (3.43)

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\lambda}_s &= \boldsymbol{\lambda}_s - \boldsymbol{\lambda}_d \\ &= \Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_s + \hat{\boldsymbol{\lambda}}_s - \hat{\boldsymbol{\lambda}}_s + \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s \\ &= \Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_s + \Delta \bar{\boldsymbol{\lambda}}_s, \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

que en virtud de (A.84) y (A.88) implican que

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}_s \rightarrow \mathbf{0}. \quad (\text{A.90})$$

Para concluir la demostración de estabilidad del sistema de teleoperación, considérese el resultado obtenido en (A.84) que garantiza  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_s \rightarrow \boldsymbol{\lambda}_d$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Entonces (3.2) se puede escribir como  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{vs}} = \boldsymbol{\lambda}_v - \boldsymbol{\lambda}_d$  y de (3.13) se tiene

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{vd}} = \Delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{vs}}. \quad (\text{A.91})$$

Además, retomando  $\mathbf{s}_{\text{Fm}}$  de (A.11) y la ecuación (A.91)

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\varphi_v}^T \{k_{\text{pv}} \Delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{vs}} + k_{\text{Fiv}} \Delta \mathbf{F}_{\text{vs}} + k_{\text{fh}} \Delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{vs}} + k_{\text{Fih}} \Delta \mathbf{F}_{\text{vs}}\} = \\ \mathbf{J}_{\varphi_v}^T \{(k_{\text{pv}} + k_{\text{fh}}) \Delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{vs}} + (k_{\text{Fiv}} + k_{\text{Fih}}) \Delta \mathbf{F}_{\text{vs}}\} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

Puesto que  $\mathbf{J}_{\varphi_v}^T$  es de rango completo, se tiene que (A.92) representa un filtro estable de primer orden en  $\Delta \mathbf{F}_{\text{vs}}$  y  $\Delta \dot{\mathbf{F}}_{\text{vs}} = \Delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{vs}}$ , en otras palabras

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}_{\text{vs}} \rightarrow \mathbf{0} \quad (\text{A.93})$$

y

$$\Delta \mathbf{F}_{vs} \rightarrow \mathbf{0} \quad (\text{A.94})$$

cuando  $t \rightarrow \infty$ . En vista de (A.84), (A.88), (A.90) y (A.93) se cumple el objetivo de control, es decir

$$\hat{\lambda}_s \rightarrow \lambda_s, \quad \lambda_s \rightarrow \lambda_d, \quad \lambda_v \rightarrow \lambda_s \quad (\text{A.95})$$

y de esta forma el operador tendrá la percepción de estar en contacto con la superficie de restricción virtual y con la fuerza que el robot esclavo está aplicando sobre la superficie de restricción real.

△