



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA EN EXPLORACIÓN Y EXPLOTACIÓN DE RECURSOS NATURALES  
YACIMIENTOS

**ANÁLISIS DE PRUEBAS EN POZOS QUE PRODUCEN A  
PRESIÓN CONSTANTE, CONSIDERANDO LOS EFECTOS DE  
DAÑO Y ALMACENAMIENTO**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER GRADO DE:**

**MAESTRA EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**

**LIDIA LUCELY MENESES PÁEZ**

**TUTOR PRINCIPAL:**

**DR. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO.  
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM.**

MÉXICO, D. F., CIUDAD UNIVERSITARIA, DICIEMBRE 2016

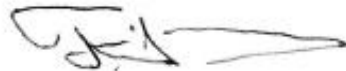
**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Cinco Ley Heber  
Secretario: Dr. Martínez Romero Néstor  
1er. Vocal: Dr. Samaniego Verduzco Fernando  
2do. Vocal: Dr. Ascencio Cendejas Fernando  
3er. Vocal: Dr. Rodríguez De La Garza Fernando

México, D. F., Ciudad Universitaria, 2016

**TUTOR DE TESIS:**

**Dr. Fernando Samaniego Verduzco**



---

**FIRMA**

---

# Índice

	<i>Págs.</i>
<b>Lista de Figuras.</b> .....	iv
<b>Resumen.</b> .....	ix
<b>Introducción.</b> .....	1
<b>Capítulo 1 Revisión Bibliográfica.</b> .....	5
<b>Capítulo 2 Modelo de Uraiet.</b> .....	10
2.1 Variables adimensionales. ....	11
2.2 Condiciones de frontera e inicial.	
2.2.1 Definición de la región e daño alrededor del pozo (Efecto de daño). ....	13
2.2.2 Condición de frontera interna. ....	14
2.2.3 Condición inicial. ....	15
2.2.4 Condición de frontera externa. ....	16
2.3 Validación del Modelo de Uraiet con otras soluciones. ....	17
<b>Capítulo 3. Modelos Matemáticos.</b>	
3.1 Modelo I. <b>Solución en el Espacio Real</b> del comportamiento del incremento de presión en un yacimiento infinito que produce a presión constante considerando los efectos de daño y almacenamiento. ....	20
3.2 Modelo II. <b>Solución en el Espacio de Laplace</b> del comportamiento del incremento de presión en un yacimiento infinito que produce a presión constante considerando los efectos de daño y almacenamiento. ....	31

<b>Capítulo 4. Validación y Análisis de los Resultados de los Modelos.</b>	36
4.1 Validación de la solución analítica del Modelo I. Solución en el Espacio Real.	40
4.2 Comparación del Modelo I - Solución en el Espacio de Real y el Modelo II - Solución en el espacio de Laplace para diferentes valores de almacenamiento.	
4.2.1 Daño igual a cero.	44
4.2.2 Daño Diferente de cero, $S_d = 5$ .	47
4.3 Comparación del Modelo de Uraiet y el Modelo II. Solución en el espacio de Laplace para diferentes valores de almacenamiento.	
4.3.1 Daño igual a cero.	50
4.4 Análisis y validación de los resultados del Modelo I-Solución en el Espacio de Real.	
4.4.1 Comportamiento de la presión adimensional estática sin los efectos del almacenamiento $C_D = 0$ y $S_d \geq 0$ .	52
4.4.2 Comportamiento de la presión adimensional estática con los efectos del almacenamiento $C_D \neq 0$ y $S_d \geq 0$ .	55
4.4.3 Validación del Modelo I con el Modelo de Uraiet	
4.4.3.1 Efecto del almacenamiento en el pozo.	60
4.4.3.2 Efecto del almacenamiento y daño en el pozo.	63
4.5 Método de Horner para el análisis del incremento de presión.	65
4.6 Función Derivada.	68
4.6.1 Función Derivada cuando $C_D = 0$ .	70
4.6.2 Función Derivada cuando $C_D \neq 0$ .	74
4.6.3 Analisis del incremento de presion en función de la derivada de presion. Metodo de Horner.	78
4.6.4 Comparación de la Función Derivada de la Presión del Modelo I con el Modelo de Uraiet.	81
<b>Conclusiones.</b>	84
<b>Apéndices.</b>	88
Apéndice A. Cambio de variables de la ecuación de difusividad para el Modelo de Uraiet.	89

Apéndice B. Ecuación diferencial parcial que describe el comportamiento del flujo en la región de daño. . . . .	92
Apéndice C. Modelo de diferencias finitas. . . . .	94
Apéndice D. Producción a gasto variable: Radio del pozo finito. . . . .	103
Apéndice E. Solución de la ecuación de difusión para un pozo que produce a gasto constante en un yacimiento infinito con geometría radial (se incluye el efecto de daño y almacenamiento). . . . .	106
Apéndice F. Gasto adimensional a presión constante. . . . .	110
Apéndice G. Transformada inversa de Laplace de la ecuación (2.9), presión de un pozo que produce a un gasto adimensional unitario cuando $C_D = 0$ . . . . .	112
Apéndice H. Transformada inversa de Laplace de la ecuación (2.9), presión de un pozo que produce a un gasto adimensional unitario, cuando $C_D \neq 0$ . . . . .	119
Apéndice I. Transformada inversa de Laplace del gasto adimensional en función de la presión adimensional de un pozo fluyendo. . . . .	126
Apéndice J. Solución de la ecuación de difusividad para un pozo que produce a presión constante . . . . .	131
Apéndice K. Solución particular de la ecuación no homogénea de la ecuación (3.64) del Modelo II. . . . .	133
<b>Nomenclatura.</b> . . . . .	<b>144</b>
<b>Referencias Bibliográficas.</b> . . . . .	<b>147</b>

---

## Lista de Figuras

- Figura 1. Transformada inversa de Laplace de la Ec. (3.9), aplicando el algoritmo de Stehfest (curvas continuas), y la Ec. (3.20) (conjunto de puntos) para diferentes valores del almacenamiento,  $C_D \neq 0$  y daño igual a cero,  $S_d = 0$ . 41
- Figura 2. Transformada inversa de Laplace de la Ec. (3.9), aplicando el algoritmo de Stehfest (curvas continuas), y la Ec. (3.20) (conjunto de puntos) para diferentes valores del daño,  $S_d \neq 0$ , con almacenamiento igual a cero,  $C_D = 0$ . 42
- Figura 3. Transformada inversa de Laplace de la Ec. (3.9), aplicando el algoritmo de Stehfest (curvas continuas), y la Ec. (3.20) (conjunto de puntos) para diferentes valores del daño  $S_d \neq 0$  y almacenamiento  $C_D \neq 0$ . 42
- Figura 4. Transformada inversa de Laplace de la Ec. (3.12), aplicando el algoritmo de Stehfest (curvas continuas) y la Ec. (3.23) (conjunto de puntos), para diferentes valores del daño,  $S_d \neq 0$ . 43
- Figura 5. Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 0$  y  $C_D = 0$ . 45
- Figura 6. Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 0$  y  $C_D = 10$ . 45
- Figura 7. Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 0$  y  $C_D = 10^3$ . 46
- Figura 8. Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 0$  y  $C_D = 10^5$ . 46
- Figura 9. Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 5$  y  $C_D = 0$ . 48
- Figura 10. Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 5$  y  $C_D = 10$ . 48
- Figura 11. Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 5$  y  $C_D = 10^3$ . 49

Figura 12.	Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con $S_d = 5$ y $C_D = 10^5$ .	49
Figura 13.	Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con $S_d = 0$ y $C_D = 0$ .	50
Figura 14.	Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con $S_d = 0$ y $C_D = 10^3$ .	51
Figura 15.	Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con $S_d = 0$ y $C_D = 10^5$ .	51
Figura 16.	Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción, $t_{sD} = 1$ .	53
Figura 17	Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción, $t_{sD} = 10^2$ .	53
Figura 18	Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción, $t_{sD} = 10^4$ .	54
Figura 19	Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción, $t_{sD} = 10^6$ .	54
Figura 20	Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción, $t_{sD} = 10^8$ , (Grafica log-log).	56
Figura 21	Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción, $t_{sD} = 10^8$ , (Grafica semilogarítmica).	56
Figura 22	Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción, $t_{sD} = 10^7$ , (Grafica log-log).	57

Figura 23	Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción, $t_{sD} = 10^7$ , (Grafica semilogarítmica).	57
Figura 24	Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción, $t_{sD} = 10^6$ , (Grafica log-log).	58
Figura 25	Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción, $t_{sD} = 10^6$ , (Grafica semilogarítmica).	58
Figura 26	Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción, $t_{sD} = 10^5$ , (Grafica log-log).	59
Figura 27	Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción, $t_{sD} = 10^5$ , (Grafica semilogarítmica).	59
Figura 28	Efecto del almacenamiento del pozo en el comportamiento del incremento de presión del Modelo I (puntos) y del Modelo de Uraiet (línea continua) con $S_d = 0$ , $t_{sD} = 10^3$ y $t_{sD} = 10^8$ . Yacimiento infinito.	61
Figura 29	Efecto del almacenamiento del pozo en el comportamiento del incremento de presión del Modelo I (puntos) y del Modelo de Uraiet (línea continua) con $S_d = 0$ , $t_{sD} = 10^4$ y $t_{sD} = 10^6$ . Yacimiento cerrado.	62
Figura 30	Comparación del comportamiento del incremento de presión del Modelo I (puntos) y del Modelo de Uraiet (línea continua) con $S_d \neq 0$ , $C_D \neq 0$ , y $t_{sD} = 10^8$ .	64
Figura 31	Comparación del comportamiento del incremento de presión en un yacimiento Infinito del modelo de Uraiet y el Modelo I con $S_d = 0$ .	65
Figura 32	Comportamiento de la presión de Horner para un pozo que produjo a presión constante. Modelo Uraiet (líneas continuas) y Modelo I (líneas de puntos).	67
Figura 33	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ y un $t_{sD} = 10$ .	71



Figura 34	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ y un $t_{sD} = 10^2$ .	71
Figura 35	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ y un $t_{sD} = 10^3$ .	72
Figura 36	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ y un $t_{sD} = 10^4$ .	72
Figura 37	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ y un $t_{sD} = 10^5$ .	73
Figura 38	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ y un $t_{sD} = 10^6$ .	73
Figura 39	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ , y $C_D \geq 0$ un $t_{sD} = 10^8$ , (Grafica log-log).	75
Figura 40	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ , y $C_D \geq 0$ un $t_{sD} = 10^7$ , (Grafica log-log).	75
Figura 41	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ , y $C_D \geq 0$ un $t_{sD} = 10^6$ , (Grafica log-log).	76
Figura 42	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ , y $C_D \geq 0$ un $t_{sD} = 10^5$ , (Grafica log-log).	76
Figura 43	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ , y $C_D \geq 0$ un $t_{sD} = 10^8$ , (Gráficas semilogarítmicas).	77
Figura 44	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ , y $C_D \geq 0$ un $t_{sD} = 10^7$ , (Gráficas semilogarítmicas).	77
Figura 45	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante c con $S_d \geq 0$ , y $C_D \geq 0$ un $t_{sD} = 10^8$ .	78

Figura 46	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ , y $C_D \geq 0$ un $t_{sD} = 10^7$ , (Factor de Horner).	79
Figura 47	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ , y $C_D \geq 0$ un $t_{sD} = 10^6$ , (Factor de Horner).	79
Figura 48	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ , y $C_D \geq 0$ un $t_{sD} = 10^5$ , (Factor de Horner).	80
Figura 49	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ , y $C_D \geq 0$ un $t_{sD} = 10^8$ , (Factor de Horner).	80
Figura 50	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \geq 0$ , y $C_D \geq 0$ un $t_{sD} = 10^7$ , (Factor de Horner).	81
Figura 51	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d = 0$ , y $C_D \geq 0$ .	82
Figura 52	Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con $S_d \neq 0$ , y $C_D \geq 0$ .	83
Figura C1	Descripción del espacio de la malla.	95
Figura G.1	Contorno de integración.	113

---

## Resumen

Para el análisis del comportamiento de la presión transitoria de pozos, se desarrollaron soluciones para producción a gasto constante, y solo se dispone de un número reducido de soluciones para pozos que producen a presión constante. En el análisis de incremento de presión, la mayoría considera que el pozo produce a gasto constante. Solo unos cuantos autores han presentado soluciones para analizar el comportamiento del flujo de pozos que han producido a presión constante, particularmente el comportamiento de incremento de presión posterior al cierre del pozo. La falta de información sobre este tema se debe principalmente a la dificultad de obtener una expresión analítica fácil de evaluar, y se complica la solución si se considera los efectos de daño y almacenamiento. Uraiet en su tesis doctoral en 1979 presenta una solución numérica que describe el comportamiento del incremento de presión para pozos con daño y almacenamiento.

En esta tesis se presenta dos modelos matemáticos analíticos, que describen el comportamiento del incremento de presión en pozos con daño y almacenamiento. El primer modelo es una solución en el espacio real. La cual está formada por una doble integral y evalúa por medio de un software aplicando integración gaussiana. El segundo modelo es una solución en el espacio de Laplace, la cual se llevó al espacio real empleando un método de inversión numérica, Stehfest. Los dos consideran un yacimiento infinito.

Uraiet desarrolló su solución para un yacimiento cerrado y con frontera externa a presión constante pero si se evalúa la solución con una frontera externa lo suficientemente grande se simula un yacimiento infinito.

Los tres modelos se evalúan y se comparan mostrando una buena coincidencia para las diferentes condiciones simuladas. También se presenta el comportamiento de la Función Derivada de la Presión para pozos que produjeron a presión constante antes del cierre.

# *Introducción*

Se han desarrollado múltiples soluciones de la ecuación de difusividad para pozos con producción a gasto constante, sin embargo solo se dispone de un número reducido para pozos que producen a presión constante. En el análisis de incremento de presión, generalmente se considera que el pozo produce a gasto constante, o en una serie de gastos constantes discretos antes del cierre. La falta de esfuerzos de investigación en esta área del análisis de presión no es debido a la importancia al problema o a la falta de aplicación a la ingeniería petrolera, sino a la dificultad de obtener una expresión analítica simple para describir el comportamiento del incremento de presión en el pozo, posterior a la producción a presión constante. El problema matemático es, principalmente, la dificultad del manejo en el cambio de la condición de la frontera interna cuando el flujo del pozo se cierra, cambiando de la condición Dirichlet a la condición Newman. Este problema no ocurre en el caso de flujo a gasto constante, en el cual las ecuaciones para el incremento de presión se obtienen directamente al emplear el principio de superposición. De hecho, la suposición de que un pozo produzca a un gasto constante antes del cierre se realiza por consideraciones teóricas.

Considerando las soluciones disponibles para flujo a gasto constante, se propuso un método para convertir estas soluciones a soluciones para flujo a presión constante, esta conversión es a través del método de superposición de incrementos de gastos en la producción en función de la presión, pero este método requiere un esfuerzo computacional extenso y cuidado considerable en la formulación del algoritmo, además, un número pequeño de incrementos a tiempos cortos puede resultar en un porcentaje alto de error en la precisión de los resultados mientras que a tiempos largos se requiere un número mayor de cálculos por cada incremento, lo que aumenta y limita el rango de efectividad de este método.

La producción a presión constante da como resultado un gasto transitorio. El análisis del incremento de presión después de un flujo transitorio es complicado por el gasto transitorio antes del cierre. Por tal motivo, los métodos designados para el análisis del incremento o decremento para producción a gasto constante no son válidos para una producción a presión constante. La mayoría de los métodos existentes para el análisis

de incremento de presión de pozos con una historia de producción a presión constante son empíricos. Por lo tanto, siempre ha habido una necesidad de un procedimiento detallado que describa el comportamiento del incremento de presión de un pozo que produce a presión constante.

El uso de la transformada de Laplace en la solución de problemas de flujo proporciona una solución en el espacio de Laplace la cual, generalmente, no es posible invertir analíticamente de manera sencilla. Por lo tanto, las soluciones son expresadas en términos de integrales complejas, series infinitas o a través de alguna aproximación numérica de estas, ya sea para tiempos cortos o bien, para tiempos largos. Para el caso de producción a presión constante, las soluciones aproximadas disponibles son válidas solo para tiempos largos.

El análisis del incremento de presión, frecuentemente proporciona útil información acerca del yacimiento y del pozo. Existen técnicas para determinar los efectos de daño y almacenamiento del pozo, permeabilidad y porosidad del yacimiento y también para determinar la presión inicial o presión promedio del yacimiento al tiempo que el pozo es cerrado. Los efectos de fracturas presentes por o cerca de agujero del pozo, también pueden ser detectadas, así como fallas próximas o fronteras de drene del yacimiento.

Se desarrollaron dos modelos analíticos para el análisis del incremento de presión para un pozo que produce a presión constante. El primer modelo generó una solución en el espacio real, y el segundo modelo generó una solución en el espacio de Laplace. Para poder llevar a cabo la validación de los modelos se implementó un modelo numérico desarrollado por Uraiet, empleando diferencias finitas. Los programas fueron programados en el software de Mathematica

Para el modelo en el espacio de Laplace se resolvió la ecuación de difusión que describe el periodo de producción utilizando el método de la transformada de Laplace. Para el periodo de cierre se resolvió la ecuación de difusividad tomando como condición inicial la solución del periodo de producción, al tiempo de cierre, todo este

procedimiento se llevó a cabo en el plano de Laplace. Dando como resultado una ecuación no homogénea. Se obtuvo la solución empleando el método de variación de parámetros, la cual se llevó al espacio real empleando un método de inversión numérica, Stehfest.

Para el modelo de solución en el espacio real, primero se obtiene el gasto correspondiente a una pozo que produce a presión constante, para ello se emplea el teorema de convolución y la presión del pozo que produce a un gasto unitario. Se multiplica dicho gasto a la función escalón con salto al tiempo de cierre para describir el comportamiento de un pozo que produce a presión constante durante un tiempo dado y se cierra al finalizar este. Posteriormente, se emplea el teorema de convolución, con este gasto para obtener la presión correspondiente a este gasto.

La solución obtenida en el espacio real tiene una expresión que involucra dos integrales impropias. La evaluación de estas se llevó a cabo empleando el método de cuadratura gaussiana. Alguna de estas desventajas que tiene esta solución es que tiene problemas de convergencia, para algunas valores de daño y almacenamiento, adicionalmente el programa es lento, por ejemplo una curva de las curvas típicas presentadas en este trabajo se generó en un promedio de dos horas. Para solucionar este problema la solución se implementó empleando un método de programación en paralelo, lo cual en una computadora de cuatro núcleos el tiempo se redujo a un poco más de la tercera parte del tiempo total.

# *Capítulo 1*

## *Revisión Bibliográfica*



El problema de la producción a presión constante de un pozo situado en el centro de un yacimiento cilíndrico homogéneo e isótropo, lo estudió por primera vez **Moore, Schilthuis y Hurst en 1933**, en el que sugieren que el análisis del incremento de presión del pozo después del cierre podría utilizarse para determinar la permeabilidad del yacimiento, y posteriormente por **Hurst en 1934**. Los resultados para ambos casos se presentaron en forma gráfica en términos de la disminución del gasto adimensional con el tiempo para un yacimiento infinito y cerrado.

**Muskat en 1934** presentó soluciones analíticas representando la caída de presión promedio del yacimiento en forma de una serie de funciones escalonadas a presión constante, tanto para los casos de frontera exterior cerrada como a presión constante. La solución general en función de series infinitas de funciones de Bessel, se obtuvo combinando soluciones particulares que cumplieron las condiciones en la frontera. No se presentaron resultados numéricos en su trabajo.

**Van Everdingen y Hurst (1949)** presentaron una serie de soluciones para la declinación del gasto de flujo con respecto al tiempo, y la evaluación numérica de la solución aplicando la técnica de transformada Laplace, para yacimientos infinito y cerrado. Sin embargo, la solución se evaluó solo para valores pequeños del radio exterior del acuífero. En consecuencia, los datos presentados son apropiados para la solución de problemas con entrada de agua, pero no para el análisis de datos de pruebas en pozo individual. Ellos no presentaron soluciones para la distribución de la presión en el yacimiento, debido a la dificultad para obtener la función inversa de Laplace.

La primera publicación de la aplicación del análisis del incremento de presión para pozos que producen a presión constante antes del cierre la realizaron por **Jacob y Lohman (1952)**. La solución a gasto transitorio, asignó valores muy altos para el flujo de gasto durante el periodo de flujo temprano. Sus gráficas de decremento contra el tiempo total  $(t_p + \Delta t)$  dividido por el tiempo de cierre resultan en una línea recta semilogarítmica. La permeabilidad de la formación se calculó con la pendiente de la

porción recta semilogarítmica correspondiente al flujo radial usando el gasto promedio durante el periodo anterior inmediato de flujo. El valor calculado de esta forma, coincidió con valores de transmisibilidad determinados por gráficas de curvas tipo de datos del gasto transitorio del periodo flujo, para varios pozos en los que se realizaron pruebas

**van Poolen (1967)**, presentó un ejemplo de campo de un pozo a producción a presión constante. En su análisis, utilizó la aproximación a tiempos largos de Jacob-Lohman para calcular el producto de movilidad por el espesor.

**Clegg (1967)**, utilizó la aproximación de Schapery's para obtener la función inversa de Laplace. Presentó soluciones aproximadas para el gasto de flujo y el incremento de presión en el pozo, así como una solución aproximada para la distribución de la presión en el yacimiento. Extendió sus resultados para incluir el efecto de una discontinuidad permeabilidad radial (una región de daño). Sus soluciones son correctas dentro del 2% para tiempos adimensional largos. Sin embargo, para tiempos más pequeños, las soluciones aproximadas dan resultados pobres. Los métodos aplicados por Clegg solo se aplican a yacimientos infinitos.

**Fetkovich en 1974** utiliza los valores tabulados presentados por **Ferris (1962)** para el caso de un yacimiento infinito, y **Tsarevich y Kuranov (1966)** en el caso de un yacimiento cerrado para desarrollar curvas tipo log-log y representar el decremento del gasto de flujo en función del tiempo. Se demostró el uso de estas curvas tipo para evaluar el producto de la permeabilidad-espesor y predecir el rendimiento del gasto futuro.

**Locke y Sawyer (1975)** extendieron el método de la curva tipo para cubrir la producción de una presión constante de un pozo fracturado verticalmente. Las curvas tipo se generaron mediante técnicas numéricas y semi-analíticas. Estas curvas tipo se pueden utilizar para determinar la permeabilidad del yacimiento y la longitud efectiva de la fractura.

**Juan (1977)**, desarrolló un algoritmo para derivar soluciones a presión constante a partir de soluciones a gasto constante, usando el método de superposición. Esta derivación no requirió el uso de la Transformada de Laplace.

**Cox (1979)**, sugirió un procedimiento para analizar el comportamiento del incremento de presión de un pozo que produce a presión constante, similar al que se usó para el caso de flujo a gasto constante. El problema se resolvió tratando los cambios continuos como una secuencia discreta en los gastos, y después, aplicó el principio de superposición. La información que requiere este procedimiento frecuentemente no está disponible para este tipo de análisis.

**Uraiet y Raghavan (1980)** estudiaron el comportamiento de la presión durante el periodo de incremento, incluyendo los efectos del tiempo de producción antes del incremento, la naturaleza de la condición de frontera externa (cerrada y presión constante), daño alrededor del pozo y efecto de almacenamiento. Todos los resultados en este estudio se obtuvieron por medio de un modelo numérico, desarrollado empleando el método de diferencias finitas.

**Ehlig-Economides y Ramey (1981)** proporcionaron una solución para el incremento de presión después de un periodo de producción a presión constante, derivada del teorema de superposición en el tiempo, considerando gastos continuamente variables antes del cierre. Los resultados indican que una modificación para el método de Horner proporciona una determinación teórica correcta de la permeabilidad del yacimiento y de la presión estática.

**Kutasov (1984)** determinó una ecuación aproximada para la caída de presión en el yacimiento al tiempo  $t = t_p$  (tiempo de producción), la cual se empleó como una distribución de presión en el área de drene del pozo antes de su cierre. Para determinar el incremento de presión después del periodo de producción usó, la solución para la ecuación de difusividad. **Kutasov (1989)** presentó una solución analítica aplicando el método de Horner en una solución desarrollada por Carslaw y Jaeger que describe el

incremento de presión para pozos que producen a presión constante, en un yacimiento de comportamiento infinito. La ecuación que describe el incremento de presión se derivó una vez más considerando como condición inicial de presión en el pozo y en el yacimiento al tiempo de cierre.

Como se describe anteriormente, pocos son los autores que presentan soluciones para obtener el incremento de presión de pozos que producen a presión constante, antes del cierre, en un yacimiento infinito. Cada solución se obtiene empleando métodos de solución diferentes, la mayoría de estas soluciones no contemplan el efecto del daño y almacenamiento de un pozo al incremento de presión para su análisis. Solo Uraiet en 1979, considera el efecto de daño y almacenamiento en el pozo para un yacimiento con condición de frontera externa cerrada y a presión constante, presentando una solución numérica.

## *Capítulo 2*

### *Modelo de Uraiet*

A continuación se presenta el modelo desarrollado por Uraiet. Se analizan las principales suposiciones consideradas, se definen las variables adimensionales y las condiciones de frontera externa utilizadas y se describe el método de solución empleado.

Se considera flujo transitorio de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso homogéneo e isotrópico. La ecuación que describe este comportamiento es la ecuación de difusividad, derivada de la ecuación de continuidad y la Ley de Darcy. Se consideran la permeabilidad, la porosidad y la viscosidad del fluido constantes. El flujo es radial. La ecuación adimensional que describe el flujo laminar isotérmico en medio poroso se expresa como:

$$r_D^2 \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = r_D^2 \frac{\partial p_D}{\partial t_D}. \quad (2.1)$$

Uraiet utilizó un modelo numérico de diferencias finitas para su evaluación. A continuación se definen las consideraciones para la aplicación del método.

## **2.1 Variables adimensionales.**

Las variables adimensionales utilizadas se definen como sigue:

Presión adimensional,  $p_D$ :

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{p_i - p(r, t)}{p_i - p_{wf}}, \quad (2.2)$$

donde  $p_i$  es la presión inicial del yacimiento y  $p_{wf}$ , la presión del pozo fluyendo, las cuales se consideran constantes. Por lo tanto,  $p_D = p_{wD} = 1$  durante el periodo de

producción.

Tiempo adimensional de producción en función del radio del pozo:

$$t_D = \frac{k t}{\phi c_i \mu r_w^2}.$$

Radio adimensional:

$$r_D = \frac{r}{r_w}.$$

Radio adimensional externo:

$$r_{De} = \frac{r_e}{r_w}.$$

Gasto adimensional:

$$q_D = \frac{q B \mu}{2 \pi k h (p_i - p_{wf})}.$$

Uraiet emplea la transformación de coordenadas de la dimensión radial a la transformación siguiente:

$$x_D = \frac{\ln r_D}{\ln r_{De}}. \tag{2.3}$$

Por lo tanto, el rango de variación de la variable radial,  $r_w \leq r \leq r_e$  se transforma en  $0 \leq x_D \leq 1$  y la Ec. (2.1) se escribe como (**Apéndice A**):

$$\frac{(r_{De})^{-2x_D}}{(\ln r_{De})^2} \frac{\partial^2 p_D}{\partial x_D^2} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D}. \quad (2.4)$$

## 2.2 Condiciones de frontera e inicial.

### 2.2.1 Definición de la región con daño alrededor del pozo (Efecto de daño).

Considera una región anular concéntrica alrededor del pozo, con permeabilidades diferentes en cada región. La región dañada o estimulada tiene permeabilidad  $k_s$  y se extiende a partir del radio del pozo,  $r = r_w$  hasta el radio de daño  $r_s$ . En términos de la variable lineal se tiene:

$$x_{Ds} = \frac{\ln r_s / r_w}{\ln r_e / r_w} = \frac{\ln r_{Ds}}{\ln r_{De}}. \quad (2.5)$$

Para un gasto constante de producción, dentro de la región de daño, se considera que  $k_s$  y  $r_s$  se expresan en términos del concepto de estado estacionario con introducido por Hawkins, de la manera siguiente,

$$S = \left( \frac{k}{k_s} - 1 \right) \ln \frac{r_s}{r_w}, \quad (2.6)$$

donde  $S$  es el factor de daño.

La ecuación diferencial parcial que describe el comportamiento del flujo en la región de daño se expresa como (**Apéndice B**):



$$\frac{(r_{De})^{-2x_D}}{(\ln r_{De})^2} \frac{\partial^2 p_{Dsk}}{\partial x_D^2} = \frac{k}{k_s} \frac{\partial p_{Dsk}}{\partial t_D}, \quad (2.7)$$

donde  $p_{Dsk}$  representa la caída de presión adimensional en la región de daño.

En la interface de la región de daño y yacimiento ( $x_D = x_{Ds}$ ), se especifican dos condiciones adicionales, *la condición de continuidad en la caída de presión* y *la condición de continuidad en el flujo*. Estas condiciones se expresan por medio de las ecuaciones siguientes:

$$p_{Dsk} = p_D$$

y

$$k_s \frac{\partial p_{Dsk}}{\partial x_D} = k \frac{\partial p_D}{\partial x_D}. \quad (2.8)$$

### **2.2.2 Condición de frontera interna.**

Se define  $t_{Ds}$  como el tiempo de producción adimensional antes del cierre, se tiene la condición siguiente:

$$p_{Dsk} = 1 \quad \text{a} \quad x_D = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq t_D \leq t_{Ds}. \quad (2.9)$$

Los efectos de almacenamiento del pozo no se consideran en esa formulación para el problema de flujo durante el periodo de producción, ya que la presión del pozo se mantiene constante.

Para el período de incremento, se consideran dos condiciones diferentes de frontera interna. En la primera, no se consideran nuevamente los efectos del almacenamiento del pozo, y se representa por la condición de flujo siguiente,

$$\left( \frac{\partial p_{Dsk}}{\partial x_D} \right)_{x_D=0} = 0, \quad \text{para } t_D \geq t_{Ds}. \quad (2.10)$$

Si se considera el efecto de almacenamiento en el pozo, se emplea la expresión sugerida por Agarwal, la cual se define como,

$$C_D \frac{\partial p_{Dsk}}{\partial \Delta t_D} = \frac{k_s}{k \ln r_{De}} \left[ (r_{De})^{-x_D} \frac{\partial p_{Dsk}}{\partial x_D} \right]_{x_D=0}, \quad \text{para } t_D \geq t_{Ds}, \quad (2.11)$$

donde  $\Delta t_D$  es el tiempo adimensional de cierre, y  $C_D$  es el coeficiente de almacenamiento adimensional del pozo definido por van Everdingen y Hurst como:

$$C_D = \frac{C}{2\pi h \phi c_l r_w^2}, \quad (2.12)$$

donde  $C$  es la capacidad de almacenamiento en  $m^3/Pa$  (o *Barriles / (lb / pg<sup>2</sup>)*). La condición representada por la Ec. (11), especifica que el gasto de entrada en el pozo a cualquier tiempo después del cierre es igual al cambio en el volumen del fluido almacenado dentro del pozo.

### **2.2.3 Condición inicial.**

Al tiempo inicial, la presión del yacimiento es constante en todo el yacimiento, por lo tanto, la presión adimensional es cero, es decir,

$$p_D(r_D, t_D) = 0, \quad \text{a} \quad t_D = 0. \quad (2.13)$$

#### **2.2.4 Condición de frontera externa.**

Se consideran dos condiciones de frontera externa. La primera, modela un yacimiento cerrado, la cual se expresa como:

$$\frac{\partial p_D}{\partial x_D} = 0, \quad \text{a} \quad t_D = 0. \quad (2.14)$$

La segunda, modela un yacimiento con frontera externa a presión constante, es decir,

$$p_D = 0, \quad \text{a} \quad x_D = 0. \quad (2.15)$$

Si el yacimiento tiene una frontera externa localizada a una distancia radial suficientemente grande, se puede considerar un yacimiento infinito.

El método empleado para la solución del modelo matemático es el método de diferencias finitas. En el **Apéndice C**, se desarrolla el concepto básico y las técnicas necesarias.

En el método de diferencias finitas, el problema de dominio continuo se "discretiza" de tal manera que las variables dependientes existen sólo en puntos discretos. Las derivadas se aproximan mediante diferencias, lo que da origen a una representación algebraica de las ecuaciones diferenciales parciales, Ec. (2.1). De esta manera, un problema de cálculo se transforma en uno de álgebra matricial.

Para el caso de producción a gasto constante, la definición de caída de presión adimensional involucra el término del gasto. La definición es:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{(2\pi \times 10^{-6})kh}{qB\mu} [p_i - p(r, t)]. \quad (2.16)$$

En el desarrollo de Uraiet, la definición de presión adimensional no involucra el término de gasto, por lo tanto para preservar la continuidad entre los resultados de gasto constante y la presión constante se grafica los datos en términos de  $p_D/q_D$ . Por lo tanto para el caso de producción a gasto constante la presión adimensional es,

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{p_D}{q_D} = \frac{(2\pi \times 10^{-6})kh}{qB\mu} [p_i - p(r, t)]. \quad (2.17)$$

### 2.3 Validación del Modelo de Uraiet con otras soluciones.

Uraiet para validar su solución numérica la comparó con otras soluciones ya desarrolladas en la literatura.

Presentó el comportamiento del gasto de flujo para un yacimiento infinito el cual comparo con los resultados numéricos de Van Pollen en 1967. Simulo el caso de un yacimiento cerrado con un radio adimensional exterior de  $r_{De} = 100,000$ , con este radio se modela un yacimiento infinito para un tiempo de producción,  $t_D \leq 10^9$ . Muestran una buena concordancia.

Muskat (1934) presentó una ecuación que describe el gasto en el pozo en un yacimiento cerrado y en un yacimiento a presión constante. Ambas ecuaciones, están en términos de la función Bessel de primer y segundo tipo, así como de orden cero y primero. Las soluciones fueron evaluadas para  $r_{eD} = 500$  y para tiempos de producción incluidos aquellos en los que los efectos de frontera son importantes. Los resultados se presentan una buena concordancia.

Para evaluar los efectos del daño en el gasto en un pozo que produce a presión constante utilizo la solución analítica propuesta por Clegg en 1967, el cual utilizó la Transformada de Laplace y el método de inversión de Schapery para derivar una aproximación que determina el comportamiento del gasto del flujo en un medio poroso infinito con permeabilidad discontinua, Esta aproximación solo es válida para  $t_D > 200$ . Los resultados del modelo y la solución de Uraiet muestran una muy buena concordancia.

*La distribución de la presión para un yacimiento Infinito* la comparó con los resultados obtenidos por Jaeger en 1956. El modelo de Uraiet se realizó con  $r_{De} = 5,000$  para simular un sistema infinito para  $t_D \leq 10^3$ . La presión adimensional,  $p_D$ , fue calculada para  $r_D = 10$ . Los dos modelos presentaron una buena concordancia en los resultados.

Clegg (1967), uso la transformada de Laplace y el método de inversión de Schapery para un yacimiento infinito. Esta aproximación es inadecuada para tiempos cortos  $t_D < 200$ . Sin embargo, para tiempos largos el error decrece rápidamente y la aproximación puede ser usada.

Muskat presentó una solución para la caída de presión adimensional en un yacimiento cerrado, presión constante y tiempo largos. El radio exterior se especificó en  $r_{De} = 500$ . La presión adimensional,  $p_D$ , se evaluó en  $r_D = 10$  para el caso de yacimiento cerrado, y en  $r_D = 20$  para caso de frontera a presión constante.

# *Capítulo 3*

## *Modelos Matemáticos*

El procedimiento típico para la inclusión de los efectos de almacenamiento y daño del pozo en el análisis del incremento de presión de un pozo que produce a gasto constante no son aplicables a pozos que han producido a presión constante antes de cierre. Por lo tanto aquí se presentan dos modelos de solución aplicando dos metodologías diferentes para incluir el daño y almacenamiento.

### **3.1 Modelo I. Solución en el Espacio Real del comportamiento del incremento de presión en un yacimiento infinito que produce a presión constante considerando los efectos de daño y almacenamiento.**

Para un pozo con daño y almacenamiento que produce a presión constante en un yacimiento infinito, la ecuación de difusividad describe el comportamiento de presión en un yacimiento, la cual considera que el flujo es laminar, monofásico, fluido ligeramente compresible, con efectos capilares despreciables, medio isotrópico, permeabilidad, viscosidad, compresibilidad de la formación constante y efectos gravitacionales despreciables.

Para el primer **periodo de flujo**, cuando el pozo produce a presión constante la ecuación de difusividad se expresa como:

$$r_D^2 \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = r_D^2 \frac{\partial p_D}{\partial t_D} . \quad (3.1)$$

La condición inicial para un tiempo igual a cero, se define por medio de ecuación siguiente:

$$p_D(r_D, 0) = 0 . \quad (3.2)$$

Considerando un pozo con daño en la formación, la condición de frontera interna que describe el comportamiento de la presión fluyendo adimensional está dada por la Ec. (3.3):

$$p_{wD}(t_D) = p_D(1, t_D) - S_d \left( r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1}. \quad (3.3)$$

Al establecerse que el pozo produce a presión constante se tiene una segunda condición de frontera interior, definida como,

$$p_{wD}(t_D) = 1; \quad (3.4)$$

por lo tanto, se sustituye la Ec. (3.4) en la Ec. (3.3) y se define la condición siguiente, en la que se incluye el efecto del daño del pozo:

$$p_D(1, t_D) - S_d \left( r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 1. \quad (3.5)$$

La condición de frontera externa para un yacimiento infinito se define como:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0. \quad (3.6)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones comprendido por las Ecs. (3.1) a la (3.6) se transforman al plano de Laplace; la transformada de Laplace (TL) es una aplicación entre espacios de funciones. Su ventaja más significativa radica en que la integración y derivación se convierten en multiplicación y división, que da como resultado que las ecuaciones diferenciales e integrales se presentan por medio de ecuaciones polinómicas, mucho más fáciles de resolver. Su aplicación principal es que reduce las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes en ecuaciones algebraicas lineales, y las ecuaciones diferenciales de coeficientes no constantes en



derivadas parciales y ecuaciones integrales. Es decir, la TL es un método rápido y eficaz, para resolver ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes y no constantes.

La aplicación de la TL para problemas de flujo de fluidos ha proporcionado un gran número de soluciones analíticas simples. Algunos problemas que involucran ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes, suelen tener como parte no homogénea, una función  $f(t)$  que no es continua. El análisis de estos problemas es más sencillo cuando se utiliza el método de la TL.

Se consideran los efectos de almacenamiento y daño en el pozo y se usa el teorema de Duhamel, el cual indica lo siguiente (**Apéndice D**):

$$p_{wfD}(t_D) = \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) p'_{qwD}(t_D - \tau) d\tau, \quad (3.7)$$

para obtener la respuesta de la presión del pozo a las condiciones de presión constante  $p_{wfD}(t_D)$ , mediante la selección de un gasto  $q_{wD}(t_D)$ , y usando la presión del pozo adimensional,  $p_{qwD}(t_D)$  para producción a un gasto unitario. Las condiciones del incremento de presión de un pozo que produjo a presión constante antes del cierre son,  $p_{wfD}(t_D) = 1$  antes que el pozo comience a cerrarse en  $t_D = t_{sD}$  y  $q_{wD}(t_D) = 0$  para  $t_D > t_{sD}$ . En el espacio de Laplace la Ec. (3.7) se expresa:

$$\bar{p}_{wfD}(s) = \bar{q}_{wD}(s) s \bar{p}_{qwD}(s). \quad (3.8)$$

El desarrollo de una expresión para la presión de un pozo que produce a un gasto adimensional unitario con daño y almacenamiento en un yacimiento infinito en el espacio de Laplace, se deduce en el **Apéndice E**, (E.22),

$$\bar{p}_{qwD}(s) = \frac{K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} S_d K_1(\sqrt{s})}{s \{s C_D K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} (1 + s C_d S_d) K_1(\sqrt{s})\}}. \quad (3.9)$$

La expresión para el gasto adimensional en función de la presión adimensional de un pozo fluyendo,  $\bar{p}_{wFD}(s)$ , se obtiene directamente de la Ec. (3.8):

$$\bar{q}_{wD}(s) = \frac{\bar{p}_{wFD}(s)}{s \bar{p}_{qwD}(s)}. \quad (3.10)$$

Para un pozo que produce a presión constante  $\bar{p}_{wFD}(s) = 1/s$ , la Ec. (3.10) puede expresarse,

$$\bar{q}_{wD}(s) = \frac{1}{s^2 \bar{p}_{qwD}(s)}, \quad (3.11)$$

Usando la Ec. (3.11) que define la presión para un gasto unitario se obtiene (**Apéndice F, Ec. (F.2)**),

$$\bar{q}_{wD}(s) = C_D + \frac{\sqrt{s} K_1(\sqrt{s})}{s K_0(\sqrt{s}) + s \sqrt{s} S_d K_1(\sqrt{s})}. \quad (3.12)$$

La transformada inversa de Laplace de la Ec. (3.9) se deriva al considerar dos casos dependiendo de si el valor del almacenamiento es igual a cero,  $C_D = 0$ , o diferente de cero,  $C_D \neq 0$ .

**Primer caso cuando  $C_D = 0$ .** Cuando el almacenamiento es igual a cero, la Ec. (3.9) se transforma en,

$$\bar{p}_{qwD}(s) = \frac{K_0(\sqrt{s}) + S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})}{s \left\{ \sqrt{s} K_1(\sqrt{s}) \right\}}, \quad (3.13)$$

se simplifica la Ec. (3.13),

$$\bar{p}_{qwD}(s) = \frac{K_0(\sqrt{s})}{s \left\{ \sqrt{s} K_1(\sqrt{s}) \right\}} + S_d \frac{1}{s}. \quad (3.14)$$

Se aplica la transformada inversa de Laplace a ambos miembros de la Ec. (3.14),

$$L^{-1} \left\{ \bar{p}_{qwD}(s) \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{K_0(\sqrt{s})}{s \left\{ \sqrt{s} K_1(\sqrt{s}) \right\}} \right\} + S_d L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\}, \quad (3.15)$$

se simplifica la Ec. (3.15),

$$p_{qwD}(t_D) = L^{-1} \left\{ \frac{K_0(\sqrt{s})}{s \left\{ \sqrt{s} K_1(\sqrt{s}) \right\}} \right\} + S_d. \quad (3.16)$$

La transformada inversa de Laplace que se encuentra en el segundo miembro de la Ec. (3.16) se obtiene en el **Apéndice G**, Ec. (G.34). Por lo tanto, la Ec. (3.14) se rescribe como:

$$p_{qwD}(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{w^3} \right) \frac{(1 - e^{-w^2 t_D})}{J_1^2(w) + Y_1^2(w)} dw + S_d. \quad (3.17)$$

**Segundo caso cuando  $C_D \neq 0$ .** Cuando el almacenamiento es distinto de cero, independientemente del valor del daño, la transformada inversa de Laplace de la Ec.

(3.9), se define por la Ec. (H.34) del **Apéndice H** para  $a = S_d$ ,  $b = C_D$ ,  $c = 1$  y  $d = C_D S_d$ , al sustituir estos valores en la Ec. (H.34) se obtiene la ecuación siguiente,

$$p_{qwD}(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-w^2 t_D})}{w^3 f_1(C_D, S_d, w)} dw \quad (3.18)$$

donde

$$f_1(C_D, S_d, w) = (C_D w Y_0(w) - (1 - C_D S_d w^2) Y_1(w))^2 + (C_D w J_0(w) - (1 - C_D S_d w^2) J_1(w))^2 \quad (3.19)$$

Al comparar la Ec. (3.17) con las Ecs. (3.18) y (3.19), se obtiene:

$$p_{qwD}(t_D) = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{w^3} \frac{(1 - e^{-w^2 t_D})}{f_1(0, S_d, w)} dw + S_d & \text{Si } C_D = 0 \\ \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{w^3} \frac{(1 - e^{-w^2 t_D})}{f_1(C_D, S_d, w)} dw & \text{Si } C_D \neq 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

donde  $f_1(C_D, S_d, w)$  se define por medio de la Ec. (3.19).

La transformada inversa de Laplace de la Ec. (3.9) también la presenta Raghavan (1993, pág. 69, Ec. 4.106) la cual coincide con la Ec. (3.20), para el caso en el cual el coeficiente de almacenamiento es distinto de cero  $C_D \neq 0$ .

La transformada inversa de Laplace de la Ec. (3.12) se obtiene en la manera siguiente:

$$L^{-1}\{\bar{q}_{wD}(s)\} = L^{-1}\left\{C_D + \frac{\sqrt{s} K_1(\sqrt{s})}{s(K_0(\sqrt{s}) + S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s}))}\right\} \quad (3.21)$$

donde  $L^{-1}$  representa la transformada inversa de Laplace. La Ec. (3.21) se reescribe al considerar que la transformada inversa de una suma, es la suma de la transformada inversa de los sumandos y que la transformada inversa de Laplace de una constante es la función delta de Dirac centrada en cero.

$$q_{wD}(t_D) = C_D \delta(t_D) + L^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{s} K_1(\sqrt{s})}{s \left( K_0(\sqrt{s}) + S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s}) \right)} \right\}. \quad (3.22)$$

El desarrollo de la transformada inversa de Laplace que se encuentra en el miembro derecho de la Ec. (3.22) se presenta en el **Apéndice I** (Ec. (I.25)) y para  $a = S_d$  se obtiene:

$$q_{wD}(t_D) = C_D \delta(t_D) + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-v^2 t_D}}{v f_2(S_d, v)} dv \quad (3.23)$$

donde

$$f_2(S_d, v) = \left( Y_0(v) + S_d v Y_1(v) \right)^2 + \left( J_0(v) + S_d v J_1(v) \right)^2 \quad (3.24)$$

Como el pozo se cierra a partir de  $t_D > t_{sD}$ , la expresión que describe el gasto es:

$$q_{wD}(t_D) = U(t_{sD} - t_D) \left\{ C_D \delta(t_D) - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-v^2 t_D})}{v f_2(S_d, v)} dv \right\} \quad (3.25)$$

donde  $U(t_D)$  representa la función escalón unitaria. Se aplica la transformada de Laplace a la Ec. (3.20),

$$\bar{p}_{q_{wD}}(s) = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{w^3} \frac{1}{f_1(0, S_d, w)} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+w^2} \right) dw + S_d \frac{1}{s} & \text{Si } C_D = 0 \\ \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{w^3} \frac{1}{f_1(C_D, S_d, w)} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+w^2} \right) dw & \text{Si } C_D \neq 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Se simplifica la Ec. (3.26),

$$\bar{p}_{q_{wD}}(s) = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{w} \frac{1}{f_1(0, S_d, w)} \frac{1}{s(s+w^2)} dw + S_d \frac{1}{s} & \text{Si } C_D = 0 \\ \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{w} \frac{1}{f_1(C_D, S_d, w)} \frac{1}{s(s+w^2)} dw & \text{Si } C_D \neq 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Se aplica la transformada de Laplace a la Ec. (3.25),

$$\bar{q}_{wD}(s) = C_D L\{U(t_{sD} - t_D)\delta(t_D)\} + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{v f_2(S_d, v)} L\{U(t_{sD} - t_D)e^{-v^2 t_D}\} dv. \quad (3.28)$$

Para obtener la transformada de Laplace de las expresiones que se encuentran en el miembro derecho de la Ec. (3.28) se considera que,

$$L\{U(t_{sD} - t_D)\delta(t_D)\} = 1 \quad (3.29)$$

y

$$L\{U(t_{sD} - t_D)(e^{-v^2 t_D})\} = \frac{1}{s+v^2} \left( 1 - e^{-t_{sD}(s+v^2)} \right). \quad (3.30)$$

Se sustituyen las Ecs. (3.29) y (3.30) en la Ec. (3.28),

$$\bar{q}_{wD}(s) = C_D + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{v f_2(S_d, v)} \frac{\left( 1 - e^{-t_{sD}(s+v^2)} \right)}{s+v^2} dv. \quad (3.31)$$

Las Ecs. (3.27) y (3.31) se sustituyen en la Ec. (3.8). Primero se considera el caso para  $C_D = 0$ ,

$$\bar{P}_{wsD}(s) = s \left\{ \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{w f_1(0, S_d, w)} \frac{dw}{s(s+w^2)} + \frac{S_d}{s} \right\} \left\{ \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{v f_2(S_d, v)} \frac{1 - e^{-t_{sD}(s+v^2)}}{s+v^2} dv \right\}. \quad (3.32)$$

Se desarrolla el producto en la Ec. (3.32),

$$\bar{P}_{wsD}(s) = \frac{4S_d}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{g_1(s; v, t_{sD})}{v f_2(S_d, v)} dv + \frac{16}{\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{vw} \frac{g_2(s; v, w, t_{sD})}{f_1(0, S_d, w) f_2(S_d, v)} dv dw. \quad (3.33)$$

Se aplica la transformada inversa de Laplace a cada miembro de la Ec. (3.33),

$$L^{-1}\{\bar{P}_{wsD}(s)\} = \frac{4S_d}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{L^{-1}\{g_1(s; v, t_{sD})\}}{v f_2(S_d, v)} dv + \frac{16}{\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{vw} \frac{L^{-1}\{g_2(s; v, w, t_{sD})\}}{f_1(0, S_d, w) f_2(S_d, v)} dv dw. \quad (3.34)$$

Las transformadas inversas de Laplace de las expresiones que se encuentran en el segundo miembro de la Ec. (3.34) son:

$$L^{-1}\{g_1(s; v, t_{sD})\} = \begin{cases} e^{-v^2 t_D} & \Delta t_D \leq 0 \\ 0 & \Delta t_D > 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

y

$$L^{-1}\{g_2(s; v, w, t_{sD})\} = \begin{cases} \frac{e^{-w^2 t_D} - e^{-v^2 t_D}}{v^2 - w^2} & \Delta t_D \leq 0 \\ \frac{e^{-w^2 t_D} (1 - e^{-(v^2 - w^2) t_{sD}})}{v^2 - w^2} & \Delta t_D > 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

donde  $\Delta t_D = t_D - t_{sD}$ .

Se sustituyen las Ecs. (3.35) y (3.36) en la Ec. (3.34),

$$p_{wsD}(t_D) = \frac{4S_d}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\delta_1(t_D; v)}{v f_2(S_d, v)} dv + \frac{16}{\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{vw} \frac{\delta_2(t_D, t_{sD}; v, w)}{f_1(0, S_d, w) f_2(S_d, v)} dv dw \quad (3.37)$$

donde

$$\delta_1(t_D; v) = \begin{cases} e^{-v^2 t_D} & \Delta t_D \leq 0 \\ 0 & \Delta t_D > 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

y

$$\delta_2(t_D, t_{sD}; v, w) = \begin{cases} \frac{e^{-w^2 t_D} - e^{-v^2 t_D}}{v^2 - w^2} & \Delta t_D \leq 0 \\ \frac{e^{-w^2 t_D} (1 - e^{-(v^2 - w^2) t_{sD}})}{v^2 - w^2} & \Delta t_D > 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

Para el caso en el cual  $C_D \neq 0$ ,

$$\bar{p}_{wsD}(s) = s \left\{ \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{w f_1(C_D, S_d, w)} \frac{dw}{s(s+w^2)} \right\} \left\{ C_D + \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{v f_2(S_d, v)} \frac{1 - e^{-t_{sD}(s+v^2)}}{s+v^2} dv \right\} \quad (3.40)$$

Se desarrolla el producto de la Ec. (3.40),

$$\bar{p}_{wsD}(s) = \frac{4C_D}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{g_3(s; w)}{w f_1(C_D, S_d, w)} dw + \frac{16}{\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{vw} \frac{g_2(s; v, w, t_{sD})}{f_1(C_D, S_d, w) f_2(S_d, v)} dv dw \quad (3.41)$$



donde

$$g_3(s; w) = \frac{1}{(s + w^2)}. \quad (3.42)$$

Se aplica la transformada inversa de Laplace a cada miembro de la Ec. (3.41),

$$L^{-1}\{\bar{p}_{wsD}(s)\} = \frac{4C_D}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{L^{-1}\{g_3(s; w)\}}{w f_1(C_D, S_d, w)} dw + \frac{16}{\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{vw} \frac{L^{-1}\{g_2(s; v, w, t_{sD})\}}{f_1(C_D, S_d, w) f_2(S_d, v)} dv dw \quad (3.43)$$

Las transformadas inversas de Laplace de las expresiones que se encuentran en el segundo miembro de la Ec. (3.43) son:

$$L^{-1}\{g_3(s; w)\} = e^{-w^2 t_D}. \quad (3.44)$$

Se sustituyen las Ecs. (3.36) y (3.44) en la Ec. (3.43),

$$p_{wsD}(t_D) = \frac{4C_D}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{w} \frac{\delta_3(t_D; w)}{f_1(C_D, S_d, w)} dw + \frac{16}{\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{vw} \frac{\delta_2(t_D, t_{sD}; v, w)}{f_1(C_D, S_d, w) f_2(S_d, v)} dv dw \quad (3.45)$$

donde

$$\delta_3(t_D; w) = e^{-w^2 t_D}. \quad (3.46)$$

### 3.2 Modelo II. Solución en el Espacio de Laplace del comportamiento del incremento de presión en un yacimiento infinito que produce a presión constante considerando los efectos de daño y almacenamiento.

En la primera etapa se desarrolla la distribución de presión en el yacimiento antes del cierre, incluyendo el efecto de daño. Se observa que no puede haber almacenamiento antes de su cierre, ya que la presión del pozo es constante durante este período. En la segunda etapa, se desarrolla la expresión para la distribución de la presión del yacimiento al momento de cierre, con condición de inicial igual a la distribución de presión obtenida durante el periodo de producción con almacenamiento en el pozo, y el efecto del daño dentro del yacimiento.

Para el **periodo de producción**, el modelo matemático es descrito por la ecuación de difusividad,

$$r_D^2 \frac{\partial^2 p_{qD}}{\partial r_D^2} + r_D \frac{\partial p_{qD}}{\partial r_D} = r_D^2 \frac{\partial p_{qD}}{\partial t_D}. \quad (3.47)$$

La condición inicial,

$$p_{qD}(r_D, 0) = 0. \quad (3.48)$$

La condición de frontera interna para cuando un pozo produce a presión contante es,

$$p_{qwD}(t_D) = 1. \quad (3.49)$$

La condición de frontera interna que describe el comportamiento de un pozo con daño esta expresada por:

$$p_{qwD}(t_D) = p_{qD}(1, t_D) - S_d \left( r_D \frac{\partial p_{qD}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} . \quad (3.50)$$

La condición de frontera externa para un yacimiento infinito:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{qD}(r_D, t_D) = 0 . \quad (3.51)$$

Se aplica el método de la Transformada de Laplace a las Ecs. (3.47) a la (3.51),

$$\frac{d^2 \bar{p}_{qD}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{p}_{qD}}{dr_D} = s \bar{p}_{qD} , \quad (3.52)$$

$$\bar{p}_{qwD}(t_D) = \frac{1}{s} , \quad (3.53)$$

$$\bar{p}_{qwD} = \bar{p}_{qD}(1, s) - S_d \left( r_D \frac{d\bar{p}_{qD}}{dr_D} \right)_{r_D=1} \quad (3.54)$$

y

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{qD}(r_D, s) = 0 . \quad (3.55)$$

Al aplicar las condiciones de frontera interna y externa de las Ecs. (3.53) a la (3.55) (**Apéndice J**) y la solución es la Ec. (J.8),

$$\bar{p}_{qD}(r_D, s) = \frac{1}{s} \frac{K_0(\sqrt{s} r_D)}{K_0(\sqrt{s}) + S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})} . \quad (3.56)$$

El valor del gasto adimensional se obtiene a partir de la ley de Darcy en términos de las variables adimensionales, la cual se expresa por:

$$\bar{q}_D(s) = - \left( r_D \frac{d\bar{p}_{qD}}{dr_D} \right)_{r_D=1}. \quad (3.57)$$

Con base en la Ec. (3.56), se deriva la presión adimensional, y al evaluarla para  $r_D = 1$  se sustituye en la Ec. (3.57),

$$\bar{q}_D(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{K_1(\sqrt{s}r_D)}{K_0(\sqrt{s}) + S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})}. \quad (3.58)$$

Para el **periodo de cierre**, el modelo matemático es descrito por la ecuación de difusividad,

$$r_D^2 \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = r_D^2 \frac{\partial p_D}{\partial t_D}. \quad (3.59)$$

La condición inicial es determinada por la presión adimensional del periodo de producción, Ec. (3.56), evaluada en el tiempo de producción  $t_D = t_{pD}$ ,

$$p_D(r_D, 0) = g(r_D), \quad (3.60)$$

donde

$$g(r_D) = p_{qD}(r_D, t_{pD}) = L^{-1} \left\{ \bar{p}_{qD}(r_D, s) = \frac{1}{s} \frac{K_0(\sqrt{s}r_D)}{K_0(\sqrt{s}) + S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})} \right\} \Bigg|_{t_D=t_{pD}}. \quad (3.61)$$

La condición de frontera interna, se expresa por las ecuaciones:

$$C_D \frac{dp_{wsD}}{dt_D} - \left( r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 0 \quad (3.62)$$

y

$$p_{wsD}(t_D) = p_D(1, t_D) - S_d \left( r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} . \quad (3.63)$$

donde  $p_{wsD}(t_D)$  es la presión del pozo al momento del cierre.

La solución del sistema de Ecs. (3.59) y (3.60) se obtiene por medio del método de la transformada de Laplace. El sistema de ecuaciones en el espacio de Laplace es:

$$\frac{d^2 \bar{p}_D}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} = v\bar{p}_D - g(r_D) , \quad (3.64)$$

La condición de frontera interna en el espacio de Laplace, se expresa por las ecuaciones:

$$C_D (v\bar{p}_{wsD} - 1) - \left( r_D \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = 0 \quad (3.65)$$

y

$$\bar{p}_{wsD} = \bar{p}_D(1, v) - S_d \left( r_D \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} . \quad (3.66)$$

La ecuación diferencial ordinaria determinada por la Ec. (3.64) es una ecuación diferencial parcial no homogénea. Para este tipo de ecuaciones, la solución general se expresa como la suma de la solución general de la ecuación homogénea más una

solución particular de la ecuación no homogénea desarrollada en el **Apéndice K**. La solución general para la distribución de presión en el yacimiento después del cierre, en el radio del pozo, incluyendo los efectos de daño y almacenamiento está dada por la Ec. (K.51),

$$\bar{P}_{wsD}(r_D, s, \nu; C_D, S_d) = C_D \frac{K_0(\sqrt{\nu}) + S_d \sqrt{\nu} K_1(\sqrt{\nu})}{W(\nu; C_D, S_d)} + \frac{\sqrt{s} K_0(\sqrt{\nu}) K_1(\sqrt{s}) - \sqrt{\nu} K_0(\sqrt{s}) K_1(\sqrt{\nu})}{X(s, \nu; C_D, S_d) W(\nu; C_D, S_d)}. \quad (3.67)$$

donde

$$W(\nu; C_D, S_d) = C_D \nu K_0(\sqrt{\nu}) + (1 + S_d C_D \nu) \sqrt{\nu} K_1(\sqrt{\nu}) \quad (3.68)$$

y

$$X(s, \nu; C_D, S_d) = s(s - \nu) \left( K_0(\sqrt{s}) + S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s}) \right). \quad (3.69)$$

# *Capítulo 4*

## *Validación y Análisis de los Resultados de los Modelos*

En este capítulo, se presentan evaluaciones y comparaciones de los modelos propuestos con las obtenidas con el modelo de Uraiet para validar las soluciones nuevas: Modelo I (solución en el espacio real) y Modelo II (solución en el espacio de Laplace), para pruebas de incremento de presión de pozos que produjeron a presión constante antes del cierre, con daño y almacenamiento. Se presentan graficas de los resultados empleando el método de Horner, el cual se ha utilizado extensamente para analizar las pruebas de incremento de presión en pozos que producen a gasto constante, pero ahora aplicado a pozos que producen a presión constante antes al cierre. También se discute el comportamiento de la función derivada, donde es importante mencionar que solo se presentan resultados ya que no se había desarrollado en la literatura una solución como tal que describiera el comportamiento de función la derivada en pozos que producen a presión constante antes del cierre, y sobre todo incluyendo los efectos del daño y almacenamiento.

Para el caso de gasto constante, la definición de la caída de presión adimensional implica el término gasto, para el caso de presión constante no está en función del gasto. Para preservar la continuidad entre la constante del gasto y la constante de presión, los resultados se grafican en términos de  $p_D/q_D$ . No se debe considerar la  $p_D/q_D$  como una caída de presión adimensional, ya que en general la presión y el gasto son funciones del tiempo.

Una de las características principales es que la presión adimensional del pozo, Ec. 3.4, es igual a uno cuando el pozo está fluyendo a presión constante, por lo que al momento de cerrarse este efecto se manifiesta en la presión adimensional,  $p_{wD}$ .

El software que se utilizó para la evaluación de la solución numérica de Uraiet, y los Modelo I y II es "Mathematica ©". En el modelo de Uraiet se programó el método numérico de diferencias finitas ya descrito en el capítulo de Modelo de Uraiet.

La expresión de la solución del Modelo I, Ec. 3.45, tiene una integral doble con límites superiores igual al infinito, en función de exponenciales que limitan su evaluación, ya



que dependen del tiempo de producción y para valores grandes, las exponenciales causan que la ecuación no converja. Adicionalmente depende de los parámetros como daño y almacenamiento.

Para evaluar el Modelo I en el software de "Mathematica ©", tiene programados diversos métodos de integración, se utilizó el método de cuadratura Gaussiana. La cuadratura Gaussiana selecciona de manera óptima los puntos para determinar el tamaño de los intervalos para la evaluación de la suma de la integral y no en forma espaciada uniforme, de un polinomio de grado  $2n-1$  o menor, que se ajustará a una función  $f(x)$  en los puntos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , comprendidos en el intervalo  $[a, b]$  y los coeficientes  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ , para reducir en lo posible el error esperado que se obtiene al efectuar la aproximación siguiente:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i).$$

Esta cuadratura proporciona resultados precisos solo si  $f(x)$  se aproxima por medio de un polinomio dentro del rango  $[-1, 1]$ . La función puede escribirse como  $f(x) = W(x)g(x)$ , donde  $W(x)$  se conoce y  $g(x)$  es un polinomio el cual aproxima por medio de un polinomio de grado  $n$  a un conjunto de  $m+1$  pares de datos  $(x_i, y_i)$ , de modo que  $n \leq m$ ; por lo tanto se tiene:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 W(x)g(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i g(x_i).$$

Un método para definir el polinomio es el de Legendre, el cual considera que si  $[a, b] \neq [-1, 1]$ , el cambio de variable se expresa por medio de la ecuación siguiente:

$$x = \frac{b-a}{2} y + \frac{b+a}{2},$$

$$dx = \frac{b-a}{2} dy,$$

y la fórmula de cuadratura se expresa de la forma siguiente:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n c_i * f\left(\frac{b-a}{2} x_i + \frac{a+b}{2}\right).$$

La Ec. 3.45 tiene una integral indefinida doble; para poder evaluarla se definieron los límites de las integrales para mantener un comportamiento continuo de la ecuación y no tener problemas de convergencia. Hay puntos donde la ecuación no converge y en ellos se utilizaron aproximaciones para mantener la convergencia.

La expresión de **la solución del Modelo II**, Ec. 3.67, al estar en el espacio de Laplace es necesario aplicar dos veces un método de inversión de la transformada de Laplace para obtenerla.

Hay soluciones en el espacio de Laplace que no se pueden invertir fácilmente en forma analítica al espacio real, como la solución del Modelo II, Ec. 3.67, por lo que se requiere aplicar un algoritmo numérico como el de Stehfest, para obtener la inversa de la transformada de Laplace. Este algoritmo proporciona soluciones para una variedad amplia de problemas de interés en el análisis de pruebas de pozos. El algoritmo está basado en la expresión siguiente presentada por Stehfest:

$$F(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^N V_i f\left(\frac{\ln 2}{t} i\right)$$

donde  $f(z)$  es la transformada de Laplace de  $F(t)$ , y  $V_i$  está definida como:

$$V_i = (-1)^{\lfloor (N/2)+i \rfloor} \sum_{k=\frac{i+1}{2}}^{\min(i, N/2)} \frac{k^{N/2} 2k!}{\lfloor (N/2) - k \rfloor! k! (1-k)! (2k-1)!},$$

donde  $N$  es el número de términos en la suma. Stehfest observó que entre mayor sea  $N$  es mayor la precisión.

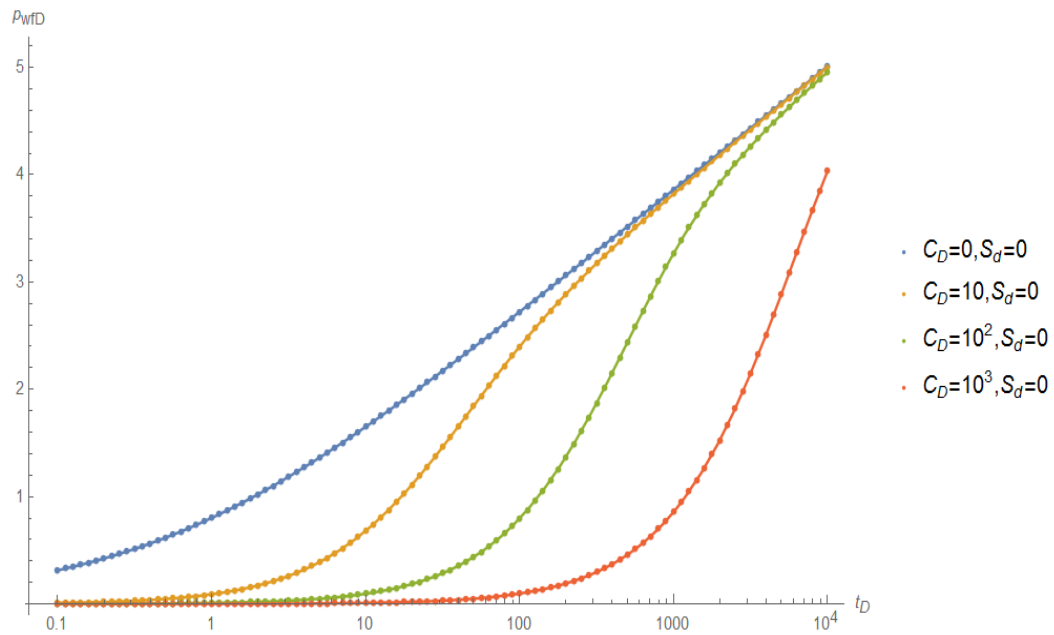
Solo se presentan las gráficas más representativa, es decir, si se valida el modelo de la solución en el espacio real con el modelo de Uraiet, y después se valida el modelo de la solución en el espacio real con el modelo en el espacio de Laplace, entonces queda validado el modelo de la solución en el espacio de Laplace con el modelo de Uraiet. El modelo de Uraiet es simulado para un yacimiento infinito.

#### **4.1 Validación de la solución analítica del Modelo I. Solución en el Espacio Real.**

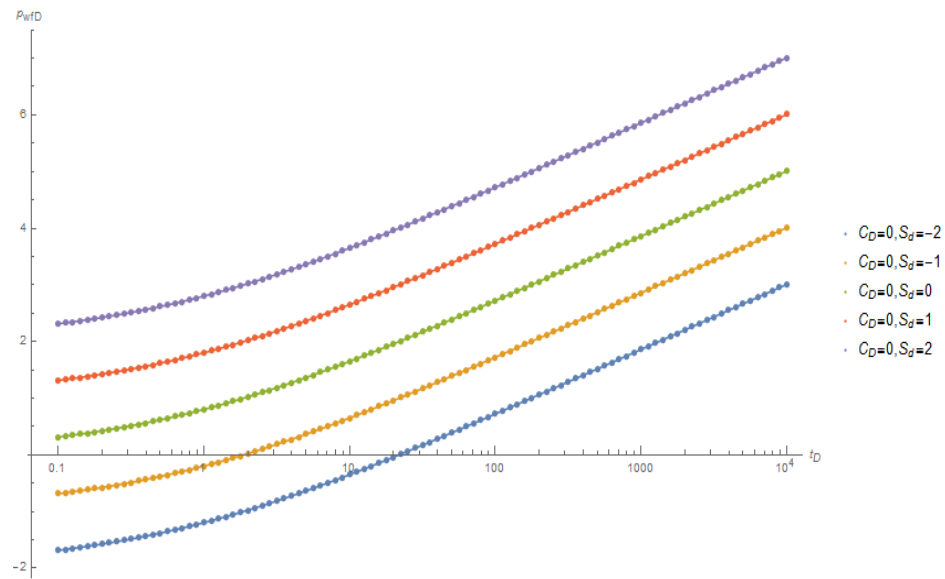
Se desarrolló una expresión que describe la presión de un pozo que produce a un gasto adimensional unitario con daño y almacenamiento en un yacimiento infinito en el Modelo I el cual se encuentra en el Espacio Real, para verificar la validez de la expresión, se comparó la solución analítica obtenida en la Ec. (3.20), con la solución en el espacio de Laplace al aplicar el algoritmo de Stehfest a la Ec. (3.9). Se plantearon tres casos diferentes, en el primero se considera el daño igual a cero y el almacenamiento distinto de cero, **Fig. 1**. En el segundo caso se considera el coeficiente de almacenamiento igual a cero y diferentes valores del daño, **Fig. 2**. En el tercer caso se presenta una comparación de las curvas al considerar diferentes valores distintos de cero, de almacenamiento y daño, **Fig. 3**. En los tres casos la comparación muestra que las curvas coinciden. De las tres comparaciones anteriores se concluye que la Ec. (3.20) es la transformada inversa de Laplace de la Ec. (3.9).

Todas la curvas estas evaluadas para un tiempo de producción de  $10^4$ , en gráficas semilogarítmicas. Se observa en la **Fig. 1**, que el incremento de presión inicia cuando terminan los efectos de almacenamiento en el pozo y entre mayor sea el

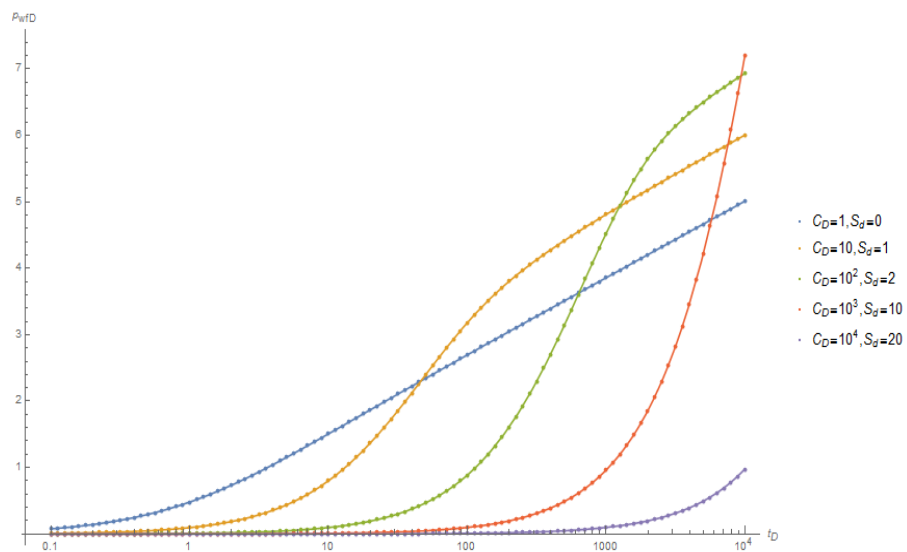
almacenamiento mayor tiempo de producción requerirá para que se forme la línea recta, con pendiente igual a uno. En la **Fig. 2**, al ser una gráfica semilogarítmica nos permite visualizar líneas rectas paralelas con la misma pendiente cuando se tiene daño, sin almacenamiento.



**Fig. 1.** Transformada inversa de Laplace de la Ec. (3.9), aplicando el algoritmo de Stehfest (curvas continuas), y la Ec. (3.20) (conjunto de puntos) para diferentes valores del almacenamiento  $C_D \neq 0$  y daño igual a cero  $S_d = 0$ .

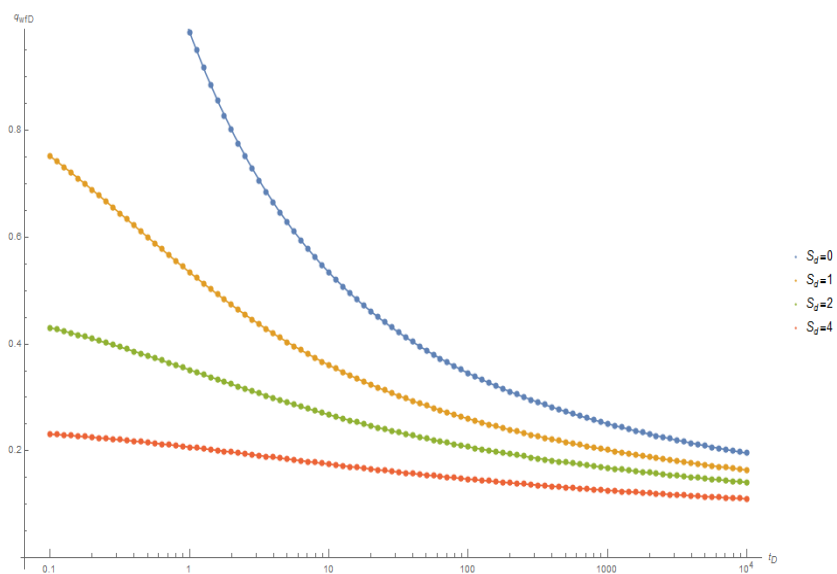


**Fig. 2.** Transformada inversa de Laplace de la Ec. (3.9), aplicando el algoritmo de Stehfest (curvas continuas), y la Ec. (3.20) (conjunto de puntos) para diferentes valores del daño  $S_d \neq 0$ , con almacenamiento igual a cero  $C_D = 0$ .



**Fig. 3.** Transformada inversa de Laplace de la Ec. (3.9), aplicando el algoritmo de Stehfest (curvas continuas), y la Ec. (3.20) (conjunto de puntos) para diferentes valores del daño  $S_d \neq 0$  y almacenamiento  $C_D \neq 0$ .

En el Modelo I, la expresión que describe el comportamiento del gasto adimensional a presión constante en el Espacio Real es la Ec. (3.23), para verificar la validez se comparó la función obtenida al aplicar el algoritmo de Stehfest a la Ec. (3.12). La **Fig. 4** es una gráfica semilogarítmica donde se muestra el resultado obtenido para diferentes valores del daño,  $S_d \neq 0$ . Se observa que ambas funciones son idénticas por lo cual se concluye que la Ec. (3.23) es la transformada inversa de Laplace de la Ec. (3.12). donde se observa que a mayor daño menor gasto.



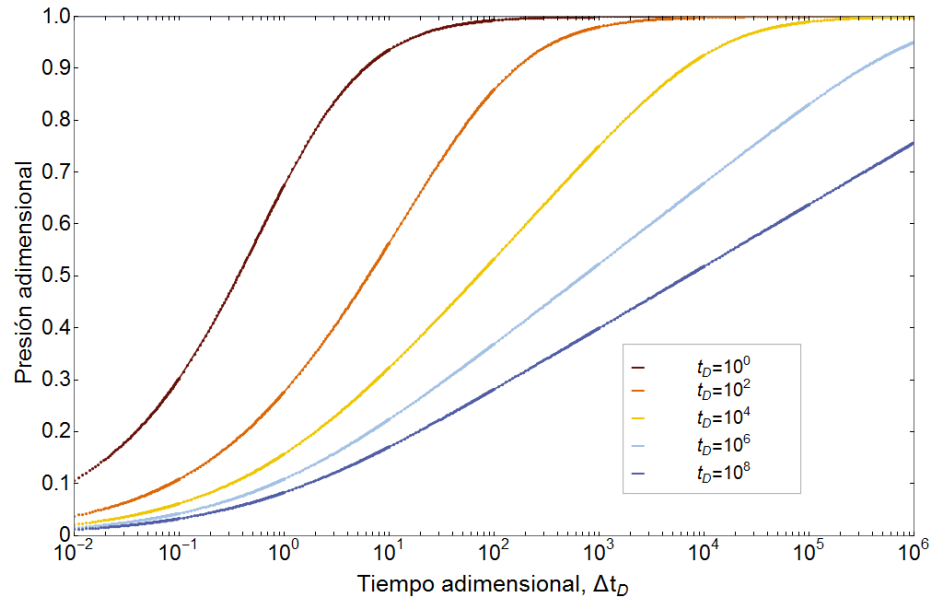
**Fig. 4.** Transformada inversa de Laplace de la Ec. (3.12), aplicando el algoritmo de Stehfest (curvas continuas) y la Ec. (3.23) (conjunto de puntos), para diferentes valores del daño,  $S_d \neq 0$ .

## 4.2 Comparación del Modelo I- Solución en el Espacio de Real y el Modelo II-Solución en el espacio de Laplace para diferentes valores de almacenamiento.

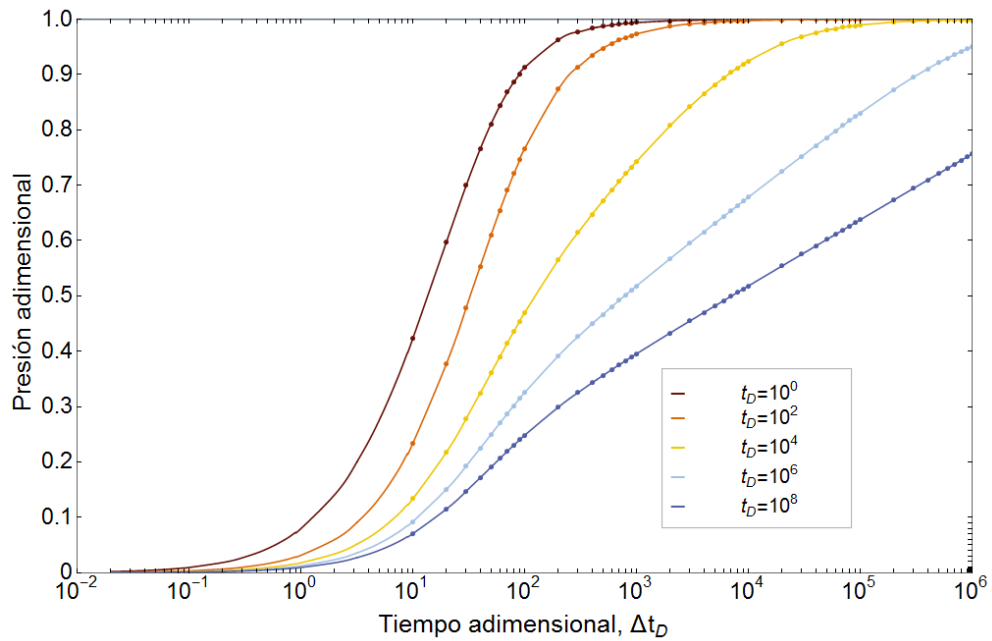
### 4.2.1 Daño igual a cero.

Para verificar la validez de las dos soluciones desarrolladas, Ec. (3.45) y Ec. (3.67) tomando en cuenta que las soluciones están en espacios diferentes, se programan métodos diferentes para su evaluación, métodos ya mencionados anteriormente. En las **Figs. 5 a la 8** se presenta el comportamiento de la presión adimensional en el pozo del Modelo I y el Modelo II, para un  $\Delta t_{sD} = 10^6$ , para distintos tipos de producción y almacenamiento, se observa que los dos modelos coinciden, teniendo el mismo comportamiento para los distintos valores de almacenamiento presentados. La línea continua representa el Modelo I y la línea con puntos representa el Modelo II.

La **Fig. 5** presenta el caso cuando el  $C_D = 0$  y se observa que la presión incrementa rápidamente al no presentarse los efectos de almacenamiento y daño en el pozo, y a tiempos cortos de producción alcanza la presión del yacimiento en cortos tiempos de cierre y conforme incrementa el tiempo de producción la pendiente de la línea recta es menor o sea, el incremento de presión se vuelve constante y menor. Sin embargo cuando se presentan los efectos de almacenamiento en el pozo, **Figs. 6 a la 8**, el comportamiento del incremento de presión tarda en manifestarse conforme aumenta el almacenamiento ya que dependerá de la duración del efecto el almacenamiento en el pozo y entre mayor sea el almacenamiento tardará más en reflejarse el incremento y el mayor incremento se observa en los dos siguientes ciclos logarítmicos después de terminar el efecto de almacenamiento.

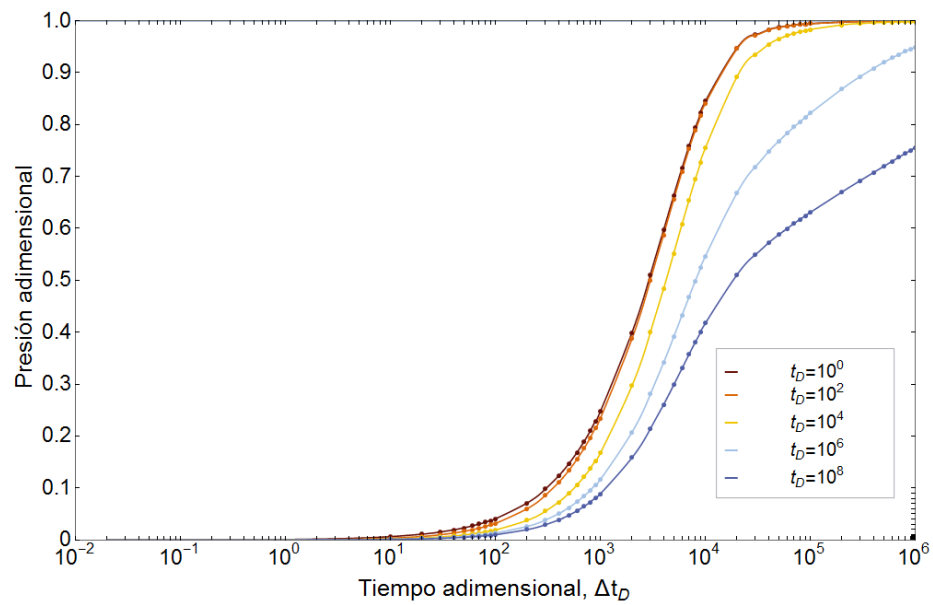


**Fig. 5.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 0$  y  $C_D = 0$ .

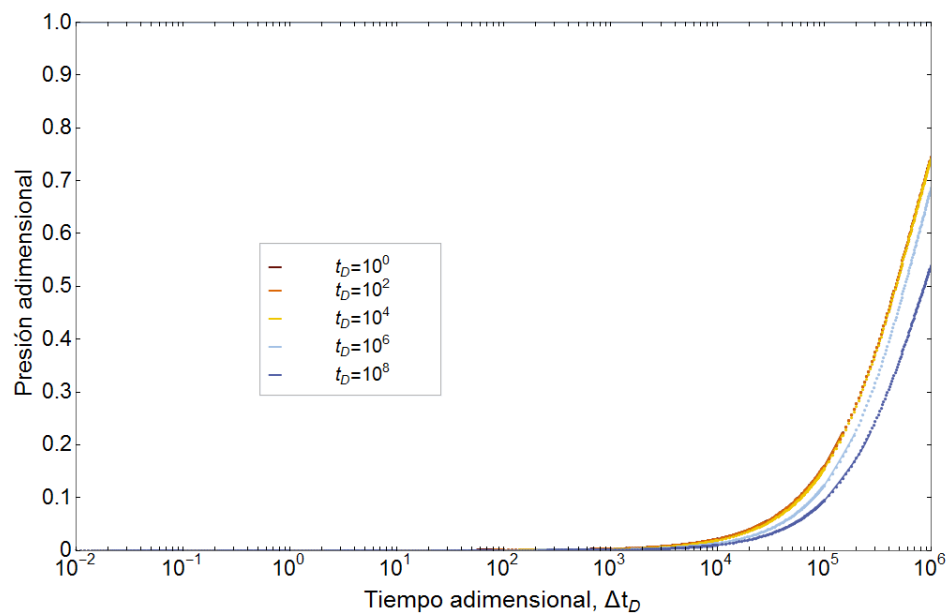


**Fig. 6.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 0$  y  $C_D = 10$ .





**Fig. 7.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 0$  y  $C_D = 10^3$ .

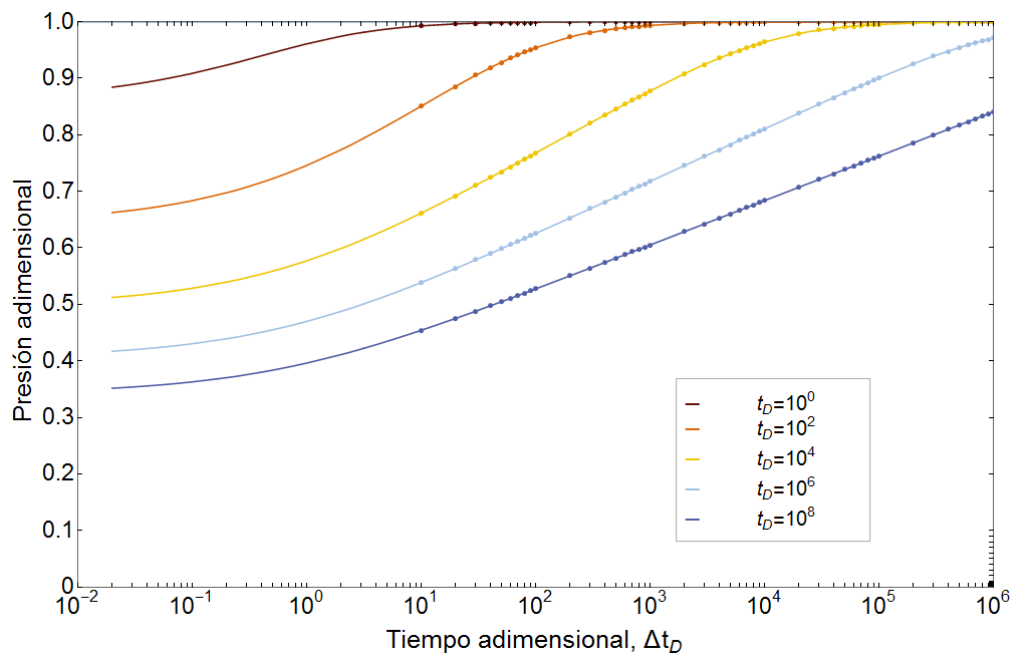


**Fig. 8.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 0$  y  $C_D = 10^5$ .

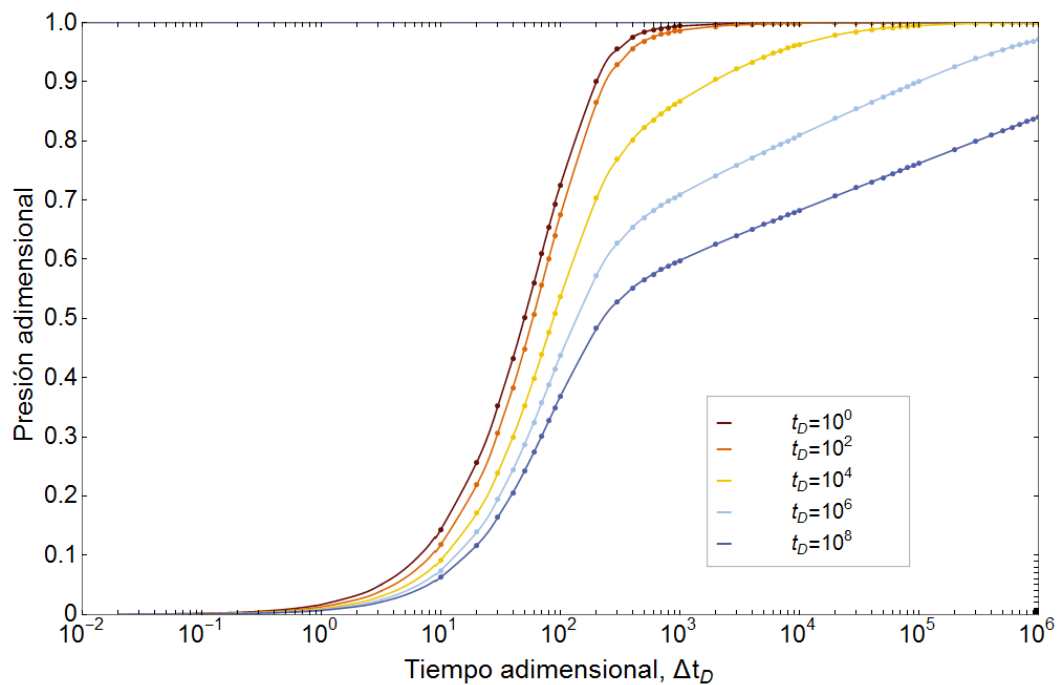
#### 4.2.2 Daño Diferente de cero, $S_d = 5$

Para verificar la validez de las dos soluciones, Ec. (3.45) y Ec. (3.67) cuando se tiene daño en el pozo se presenta en las **Figs. 10 a la 12** el comportamiento de la presión adimensional para pozos con daño diferente de cero,  $S_d = 5$ , y distintos valores de almacenamiento. Se observa que para los distintos parámetros se tiene una buena concordancia entre los dos modelos para las distintas condiciones. La línea continua representa el Modelo I y la línea con puntos representa el Modelo II, para diferentes tiempos de producción y un  $\Delta t_D = 10^6$ .

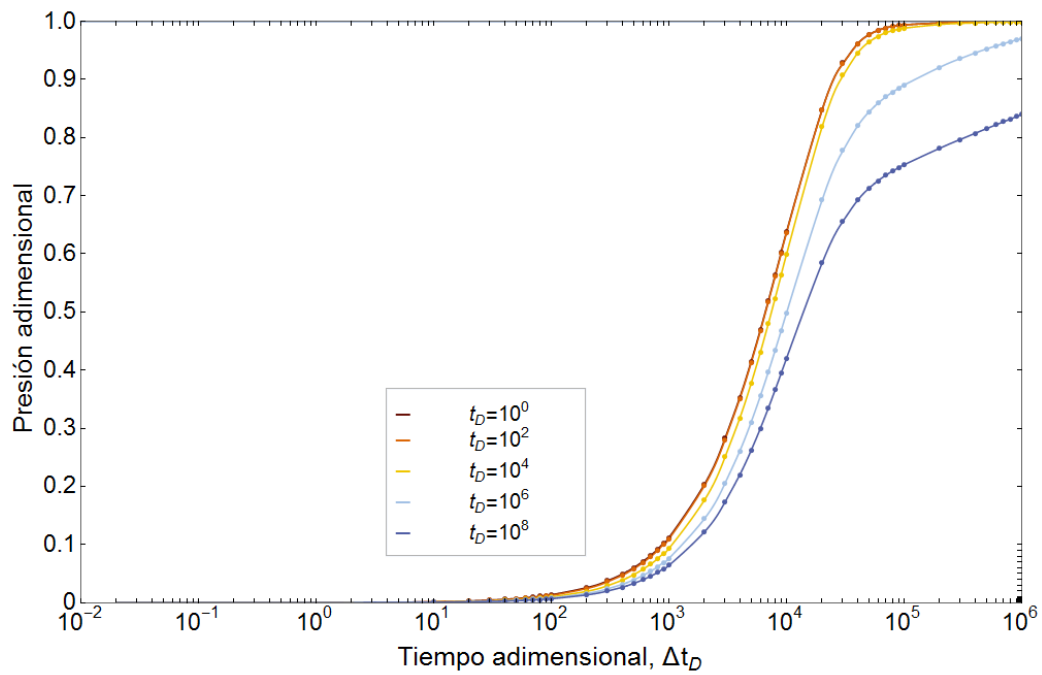
En la **Fig. 9** se observa el efecto del daño en el pozo en el periodo de producción al momento del cierre y entre mayor sea el tiempo de producción es menor la presión inicial al momento del cierre. Si el  $C_D = 0$ , el incremento es constante y pequeño para la mayor parte del tiempo de cierre. Cuando se presentan los efectos de almacenamiento, **Figs. 10 a la 12**, y de daño, el mayor incremento de presión se lleva en aproximadamente un ciclo logarítmico después de terminar el efecto de almacenamiento para después disminuir y mantenerse constante y en pequeños incrementos entre mayor sea el tiempo de producción. Cuando la línea recta se forma cuando se cumple que  $\Delta t_D \ll t_p$  la pendiente es menor que cuando no se tiene daño.



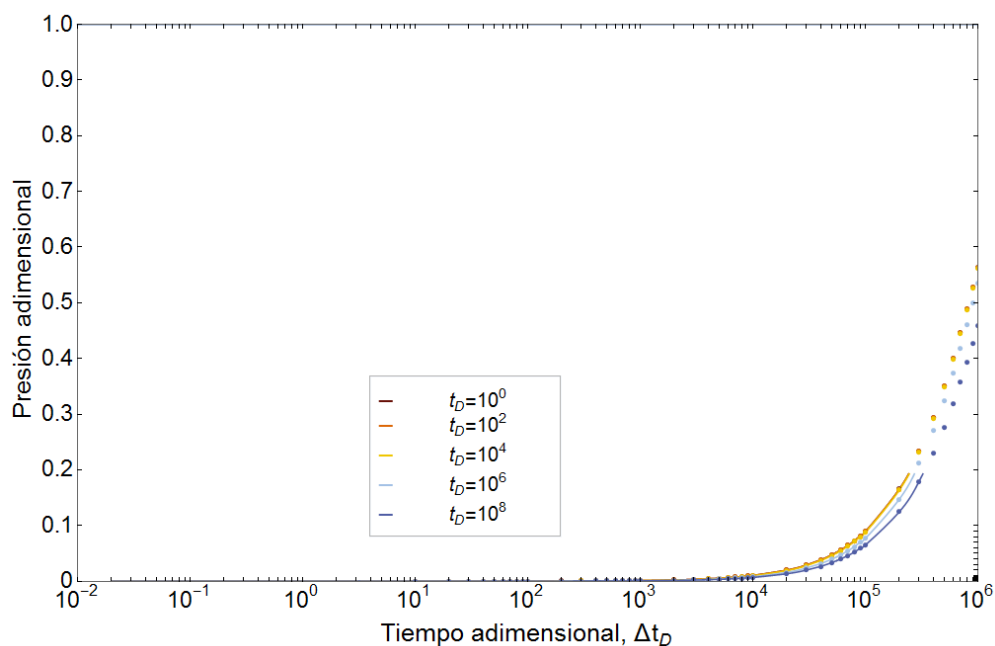
**Fig. 9.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 5$  y  $C_D = 0$ .



**Fig. 10.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 5$  y  $C_D = 10$ .



**Fig. 11.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 5$  y  $C_D = 10^3$ .

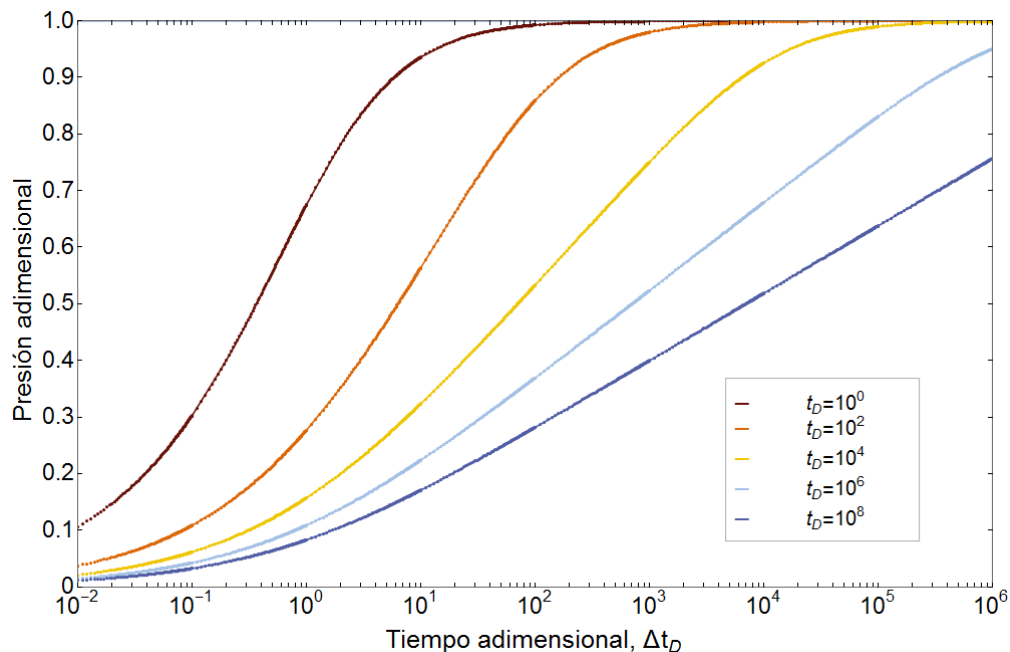


**Fig. 12.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 5$  y  $C_D = 10^5$ .

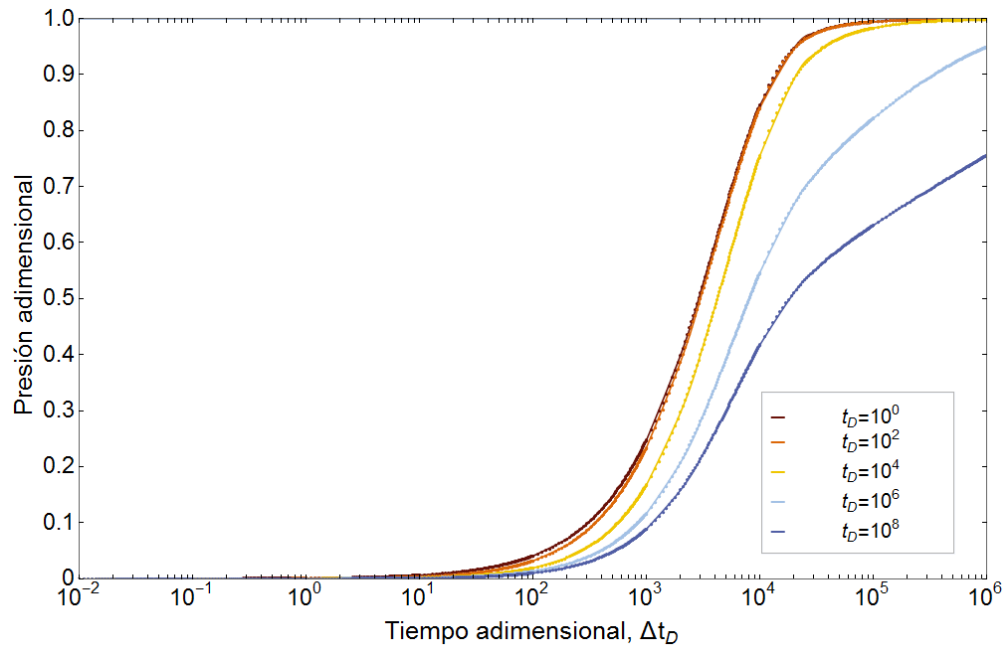
### 4.3 Comparación del Modelo de Uraiet y el Modelo II - Solución en el espacio de Laplace, para diferentes valores de Almacenamiento.

#### 4.3.1 Daño igual a cero.

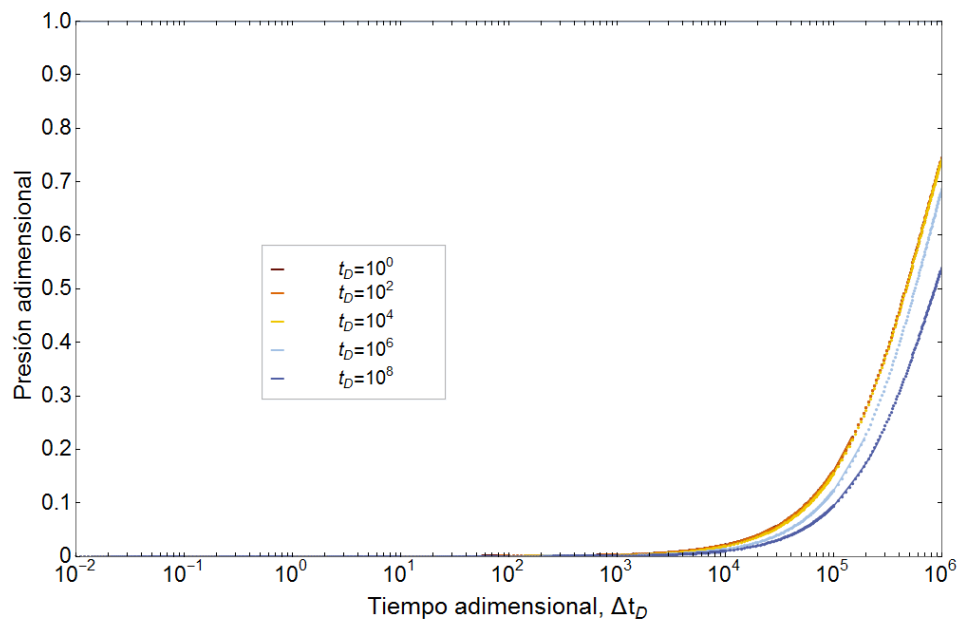
Para verificar la validez de las soluciones de los modelos desarrollados, se evalúa el Modelo II y se compara con el Modelo de Uraiet para distintos valores de tiempos de producción y almacenamiento ( $C_D = 0, 10^3$  y  $10^5$ ), y un  $\Delta t_D = 10^6$ , y los resultados se muestran en las **Figs. 13, 14 y 15**. Estos dos modelos muestran una excelente concordancia de datos para las distintas condiciones. Ahora comparando estos comportamientos con el Modelo I y Modelo II de las **Figs. 5, 7 y 8** se observa que tienen una buena concordancia por lo tanto se puede decir que los tres modelos tienen el mismo comportamiento para diferentes condiciones.



**Fig. 13.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 0$  y  $C_D = 0$ .



**Fig. 14.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 0$  y  $C_D = 10^3$ .



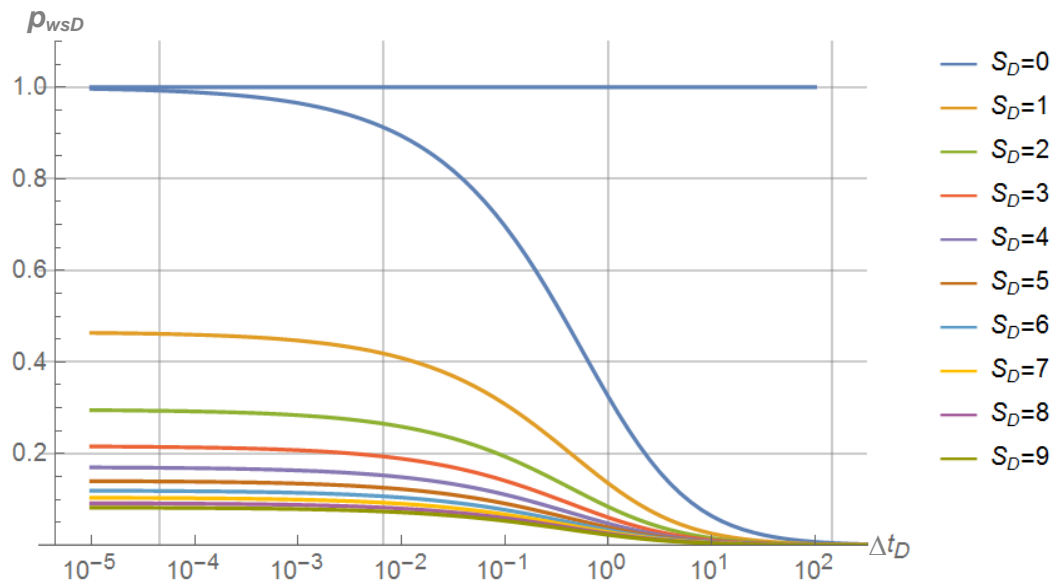
**Fig. 15.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con  $S_d = 0$  y  $C_D = 10^5$ .

Es importante mencionar que se evaluaron para otros valores de daño que no se incluyeron en esta tesis por cuestiones de optimización, que nos muestran una excelente concordancia entre los Modelos para diferentes combinaciones de daño y almacenamiento.

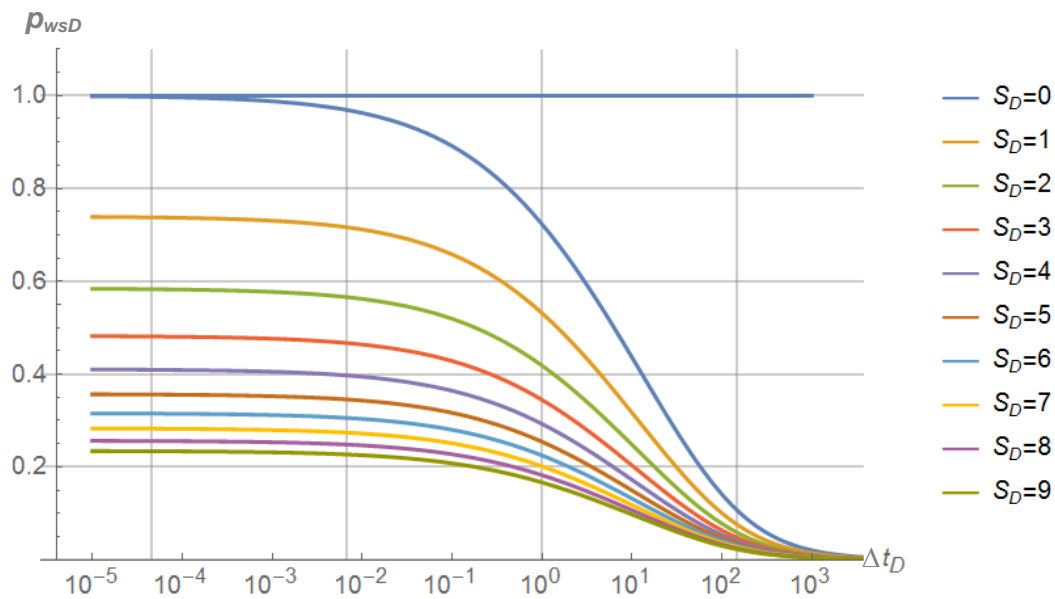
#### **4.4 Análisis y validación de los resultados del Modelo I- Solución en el Espacio de Real**

##### **4.4.1 Comportamiento de la presión adimensional estática sin los efectos del almacenamiento $C_D = 0$ y $S_d \geq 0$ .**

Las gráficas de las **Figs. 16 a la 19** corresponden a la caída de presión después del cierre para diferentes valores de tiempo de producción, y tiempo de cierre daño para la Ec. (2.45) del Modelo I. Son gráficas semilogarítmicas que muestran que si el  $S_d = 0$ , al momento de cierre, la presión inicial es igual a uno, cumpliendo la condición de un pozo que en su periodo de producción produjo a presión constante. Al presentarse daño alrededor del pozo esta condición no se cumple y entre menor sea el tiempo de producción y mayor el daño, la presión inicial al momento del cierre es menor.

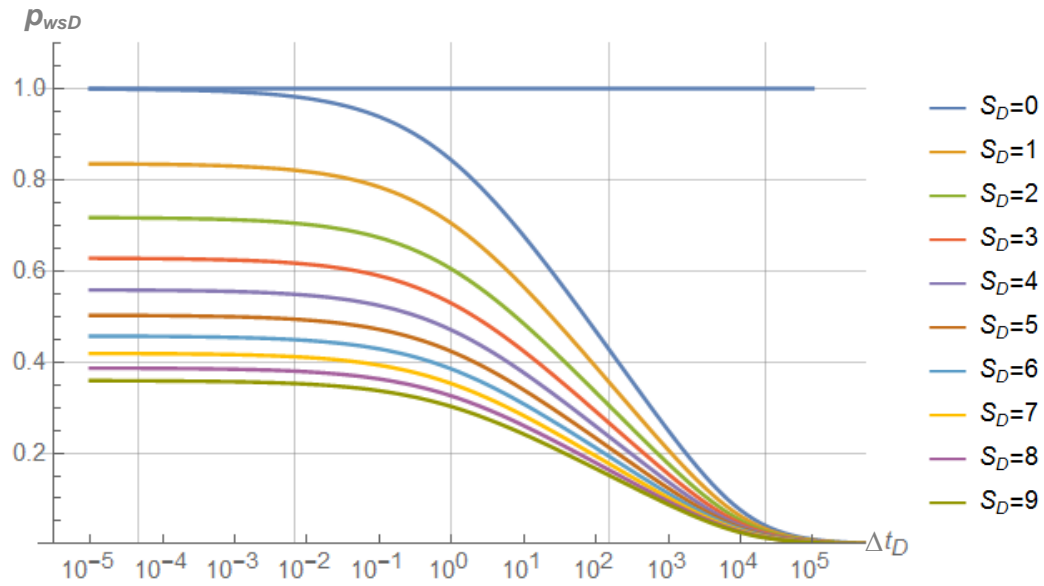


**Fig. 16.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción,  $t_{sD} = 1$ .

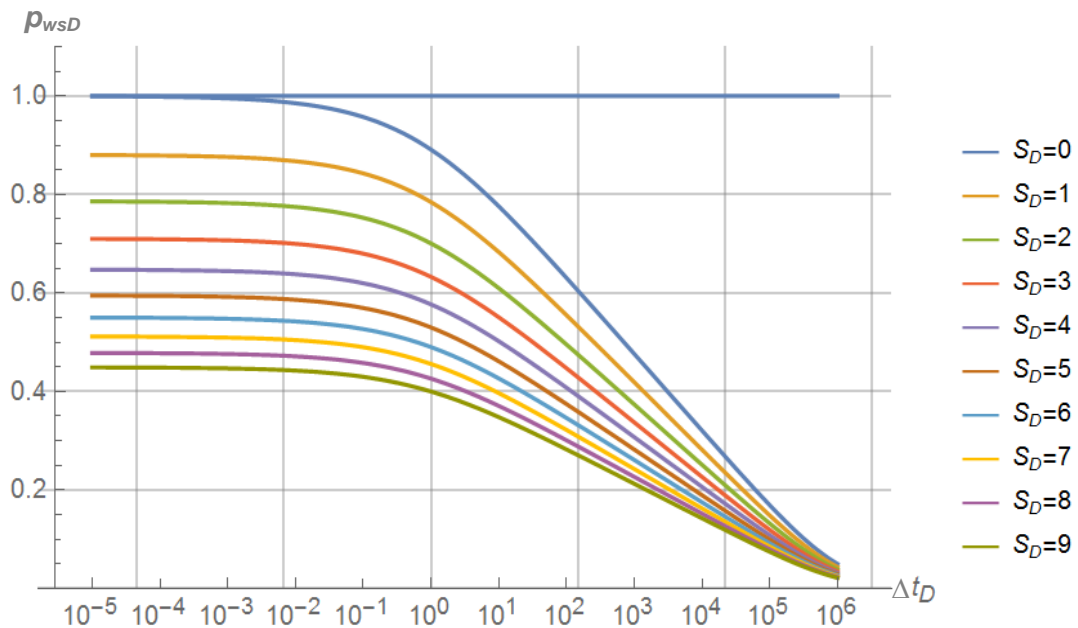


**Fig. 17.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción,  $t_{sD} = 10^2$ .





**Fig. 18.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción,  $t_{sD} = 10^4$ .



**Fig. 19.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción,  $t_{sD} = 10^6$ .

Independientemente del daño y del tiempo de producción las curvas convergen a una presión igual a cero al mismo tiempo de cierre, y para tiempo de producción  $t_{sD} > 10^4$  la caída de presión se refleja a  $\Delta t_D = 10^{-3}$  para cualquier daño, la pendiente de la caída de presión dependerá del daño, entre mayor sea el daño menor la pendiente.

#### **4.4.2 Comportamiento de la presión adimensional estática con los efectos del almacenamiento $C_D \neq 0$ y $S_d \geq 0$ .**

A continuación se presenta el comportamiento del incremento de presión de un pozo que produjo a presión constante, con los efectos del almacenamiento y daño, se utiliza la Ec. (3.45). Por cuestiones de validación y análisis se presentan dos gráficas para cada caso, una en escala log-log y la segunda semilogarítmica para las mismas condiciones,  $\Delta t_D = 10^9$ ,  $S_d = 0$ ,  $S_d = 5$ ,  $C_D = 0$  y  $C_D = 10^2$ , y para diferentes tiempos de producción. Las gráficas de las **Figs. 20, 22, 24 y 26** son log-log y corresponden para un tiempo de producción,  $t_{sD} = 10^8$ ,  $t_{sD} = 10^7$ ,  $t_{sD} = 10^6$  y  $t_{sD} = 10^5$ , respectivamente. Como se observa en todos los casos cuando el  $\Delta t_D = t_{sD}$  aproximadamente, se forma una línea recta de pendiente,  $m = -1$ , y entre menor sea el tiempo de producción será menor el área bajo la curva, donde los efectos de daño ya no están presentes. Las gráficas semilogarítmicas de las **Figs. 21, 23, 25 y 27** al limitar la escala, se puede observar que las curvas con el mismo valor de daño convergen al mismo valor de presión conforme aumenta el tiempo de cierre independientemente de valor de almacenamiento hasta llegar al valor de cero aproximadamente cuando  $\Delta t_D > t_{sD}$  para los diferentes tiempos de producción.

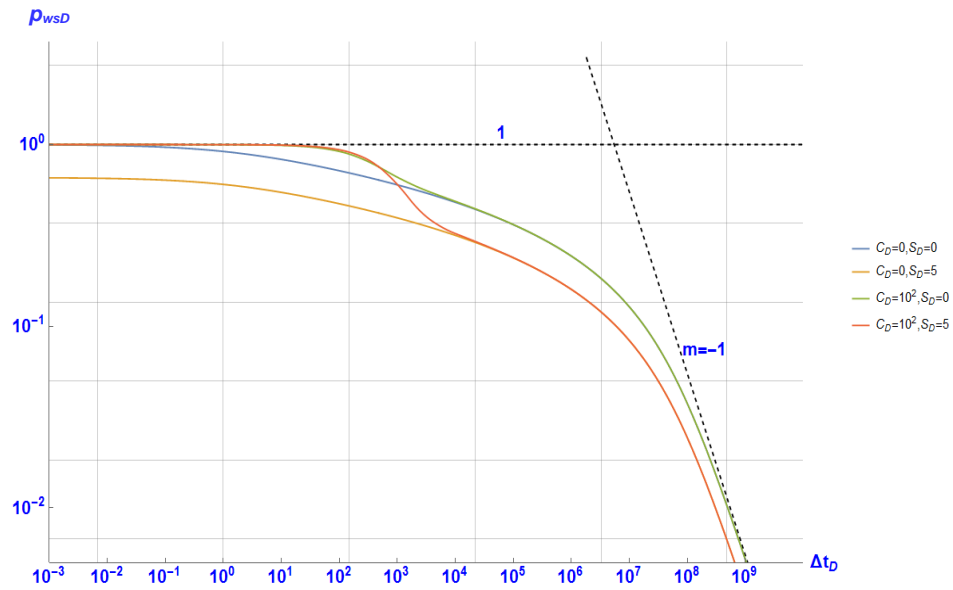


Fig. 20. Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción,  $t_{sD} = 10^8$ .

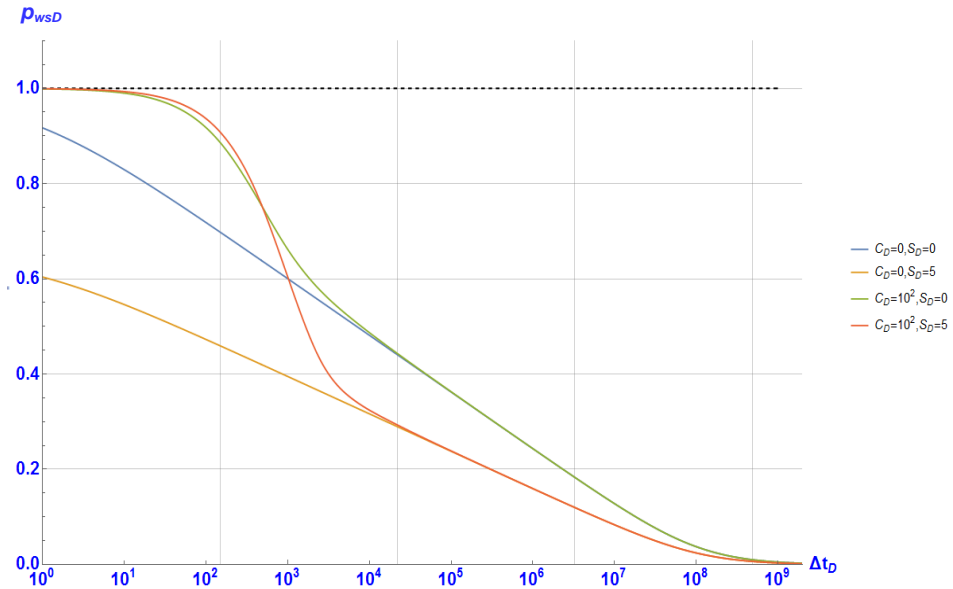


Fig. 21. Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción,  $t_{sD} = 10^8$ .

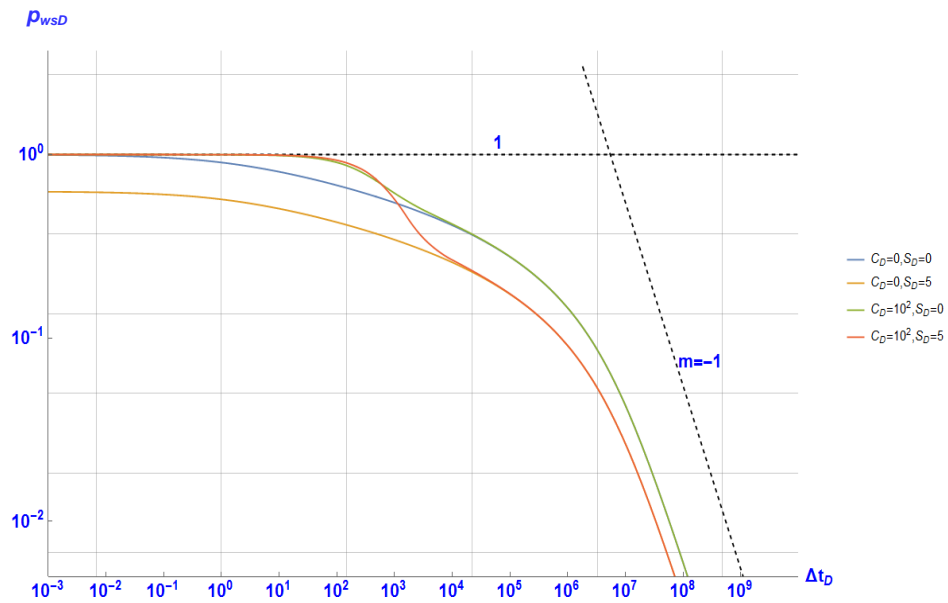


Fig. 22. Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción,  $t_{sD} = 10^7$ .

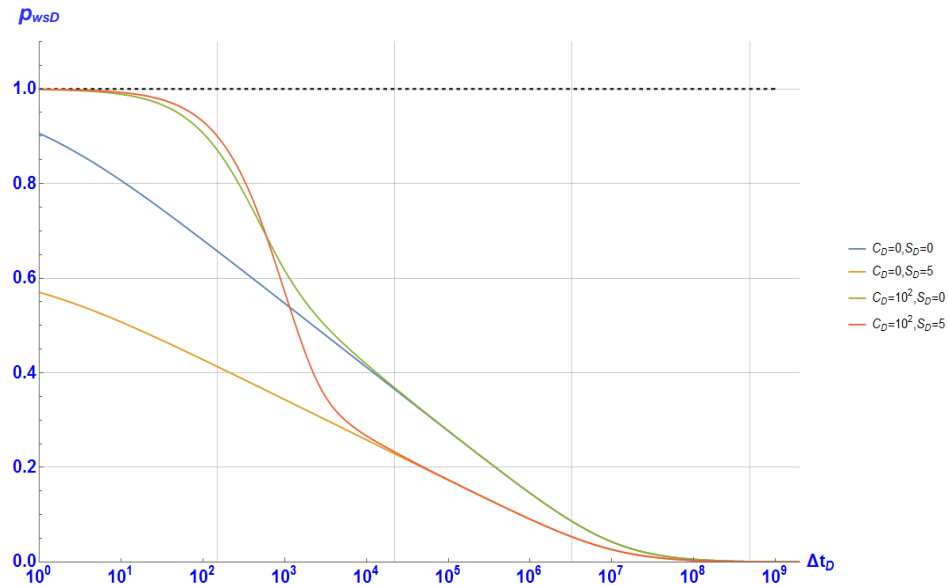


Fig. 23. Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción,  $t_{sD} = 10^7$ .

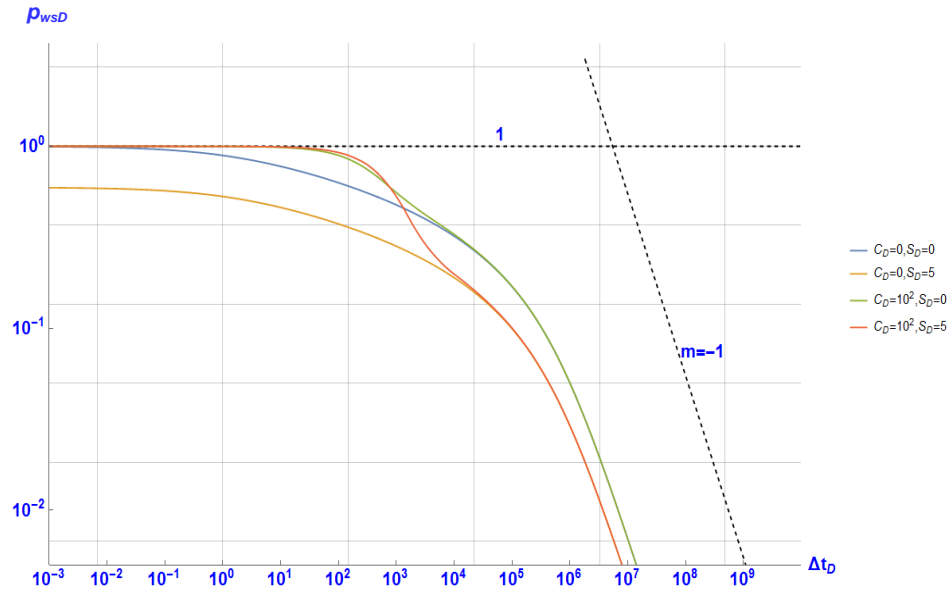


Fig. 24. Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción,  $t_{sD} = 10^6$ .

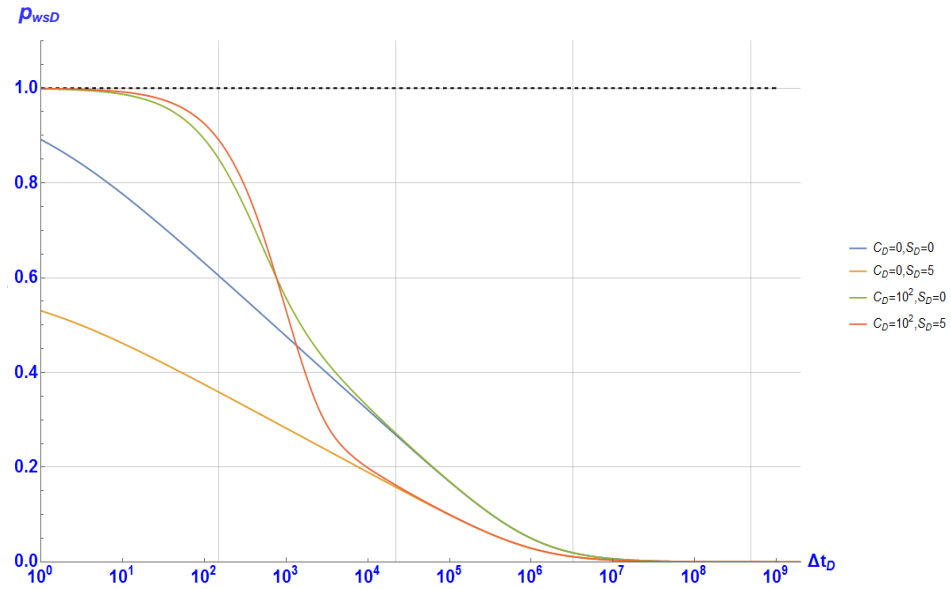
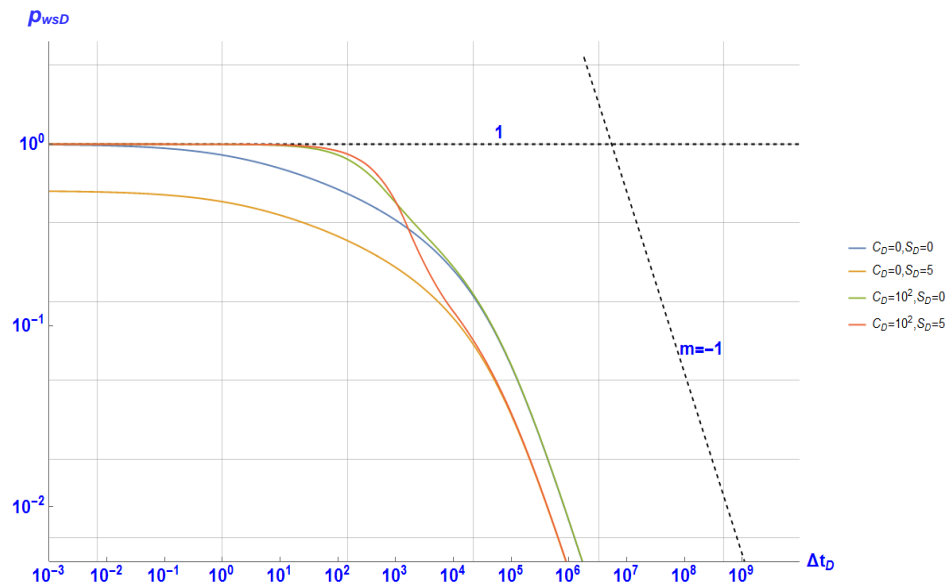
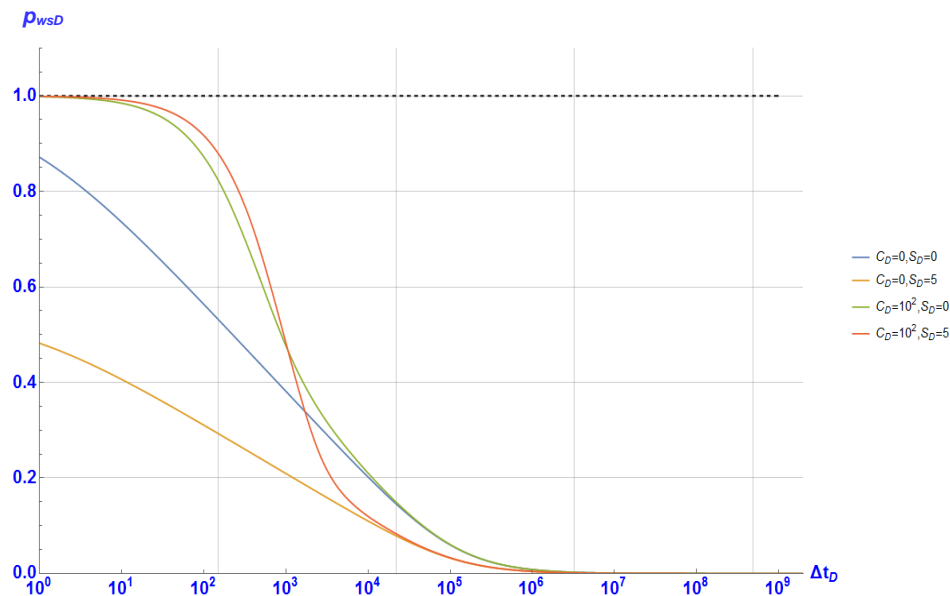


Fig. 25. Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción,  $t_{sD} = 10^6$ .



**Fig. 26.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción,  $t_{sD} = 10^5$ .



**Fig. 27.** Comportamiento del incremento de presión adimensional para un pozo que produce a presión constante con un tiempo de producción,  $t_{sD} = 10^5$ .

### 4.4.3 Validación del Modelo I con el Modelo de Uraiet.

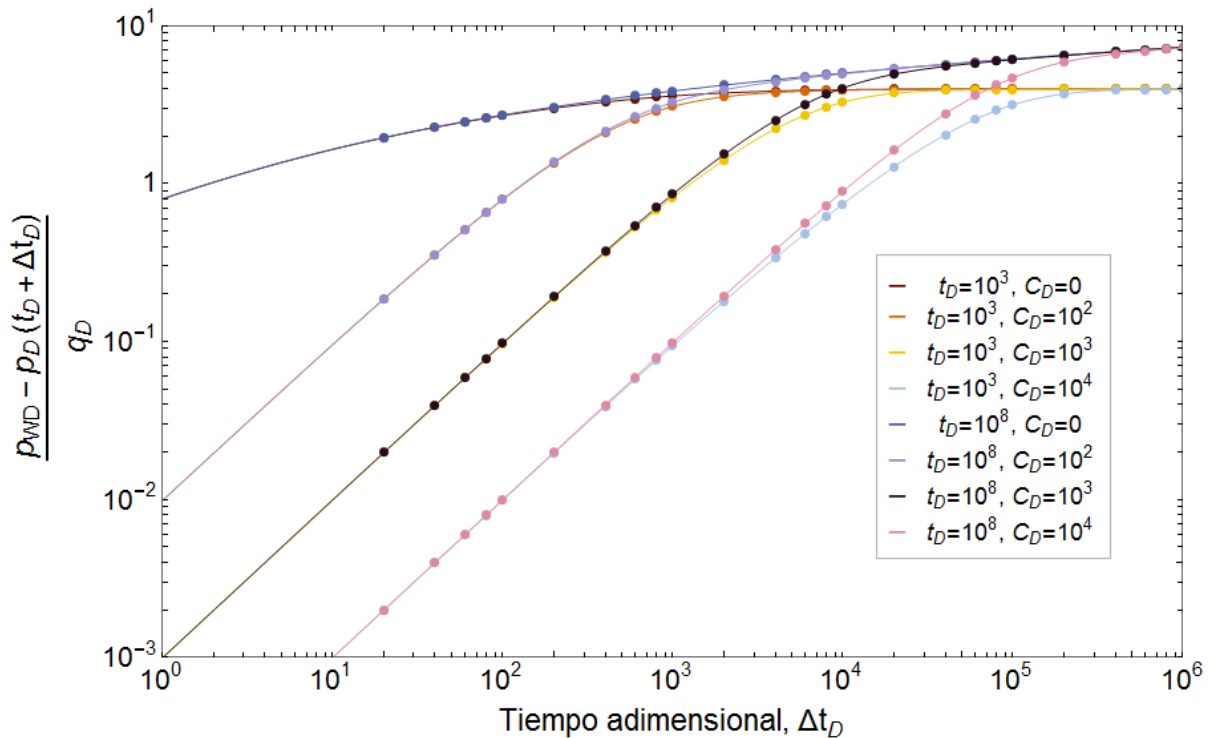
#### 4.4.3.1 Efecto del Almacenamiento en el Pozo.

Las **Figs. 28 y 29** son graficas log-log que presentan el cociente entre la caída de presión adimensional y el gasto de flujo adimensional como función del tiempo de cierre adimensional, para un pozo que ha sido producido a presión constante. Para que el Modelo I cumpla la correspondencia de uno a uno con la solución a gasto constante se define la caída de presión con la Ec. 2.17. Se utiliza el gasto instantáneo al momento del cierre en la Ec. 2.17. Las curvas muestran una buena concordancia para las diferentes condiciones evaluadas en las curvas, entre el Modelo de Uraiet y el Modelo I, solución en el espacio Real.

La gráfica de la **Fig. 28** representan el comportamiento del yacimiento infinito para ambos casos y muestra el comportamiento característico de la pendiente igual a la unidad del efecto de almacenamiento a tiempos cortos de cierres para diferentes valores de almacenamientos. Conforme el tiempo de cierre aumenta, las curvas con  $C_D \neq 0$  convergen a la curva  $C_D = 0$  y para  $\Delta t_D \ll t_{sD}$  se obtiene la pendiente. Esto implica que la prueba se debe ejecutar el tiempo suficiente, para que se obtenga la línea recta semilogarítmica

El almacenamiento del pozo afecta el comportamiento de la presión transitoria a tiempos cortos, y el tiempo requerido para que el efecto de almacenamiento del pozo desaparezca por completo se puede calcular, para  $S = 0$ , por la ecuación  $t_D = 60 C_D$ , donde  $t_D$  es el tiempo adimensional de producción para el caso de gasto constante, o el tiempo de cierre adimensional para el caso de incremento, y  $C_D$  es la constante de almacenamiento adimensional del pozo.

Se observa que en la **Fig. 28** que a tiempos de cierre cortos, el comportamiento del incremento para el caso de presión constante en el pozo es idéntico a los resultados de decremento a gasto constante



**Fig.28.** Efecto del almacenamiento del pozo en el comportamiento del incremento de presión del Modelo I (puntos) y del Modelo de Uraiet (línea continua) con  $S_d = 0$ ,  $t_{sD} = 10^3$  y  $t_{sD} = 10^8$ . Yacimiento infinito.

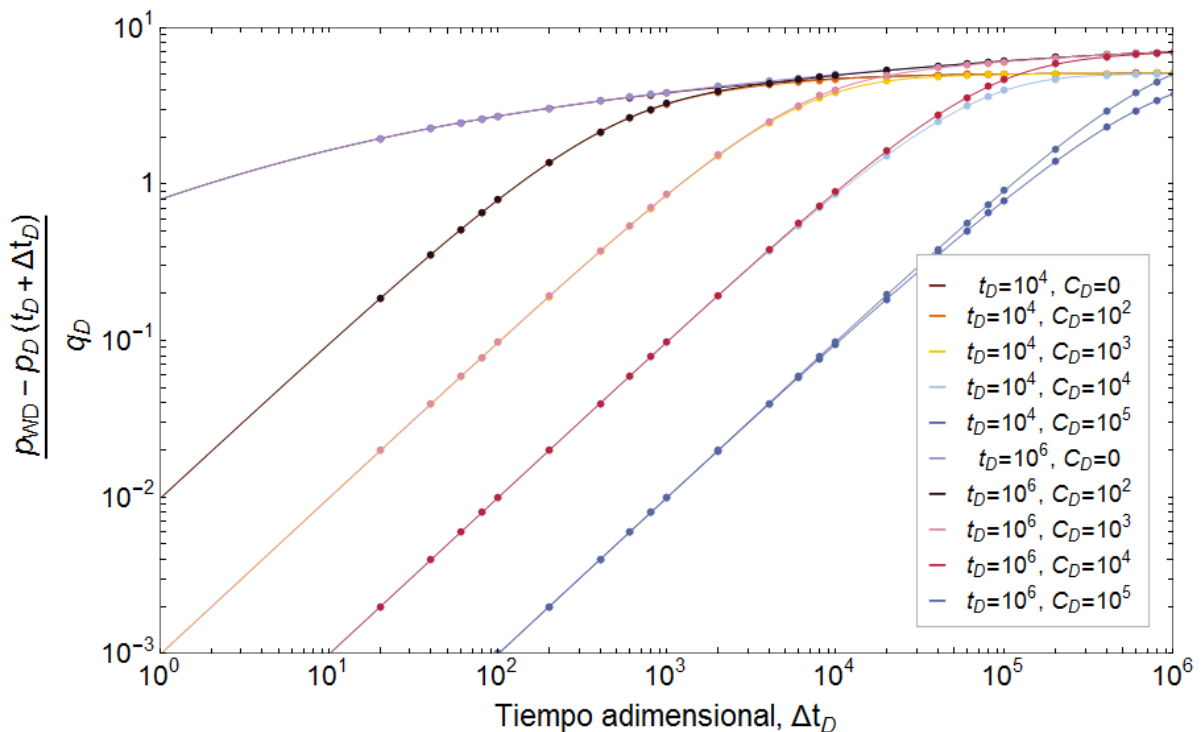
Ha sido señalado por otros autores que la aplicación de las curvas tipo de decremento a gasto constante para datos de incremento se basa en la premisa de que  $\Delta t_D \ll t_D$ .

El hecho de que las dos curvas que se muestran en la **Fig. 28** son diferentes para tiempos largos,  $t_D$ , es debido a que el requisito anterior ( $\Delta t_D \ll t_D$ ) no se cumple para el caso de  $t_D = 10^3$ .



Este efecto de almacenamiento del pozo debe ser gobernado principalmente por el volumen del pozo y el mecanismo de almacenamiento en lugar de las condiciones antes del cierre. También esto se debe al hecho del gasto instantáneo en el momento del cierre el cual se utilizó para obtener el resultado en la **Fig. 41**.

Las observaciones anteriores aplican igualmente para el caso de yacimiento cerrado mostradas en la **Fig. 29**, donde se muestra una muy buena concordancia para los ambos modelos, esto nos lleva a confirmar que los efectos de frontera no controlan los datos de presión.

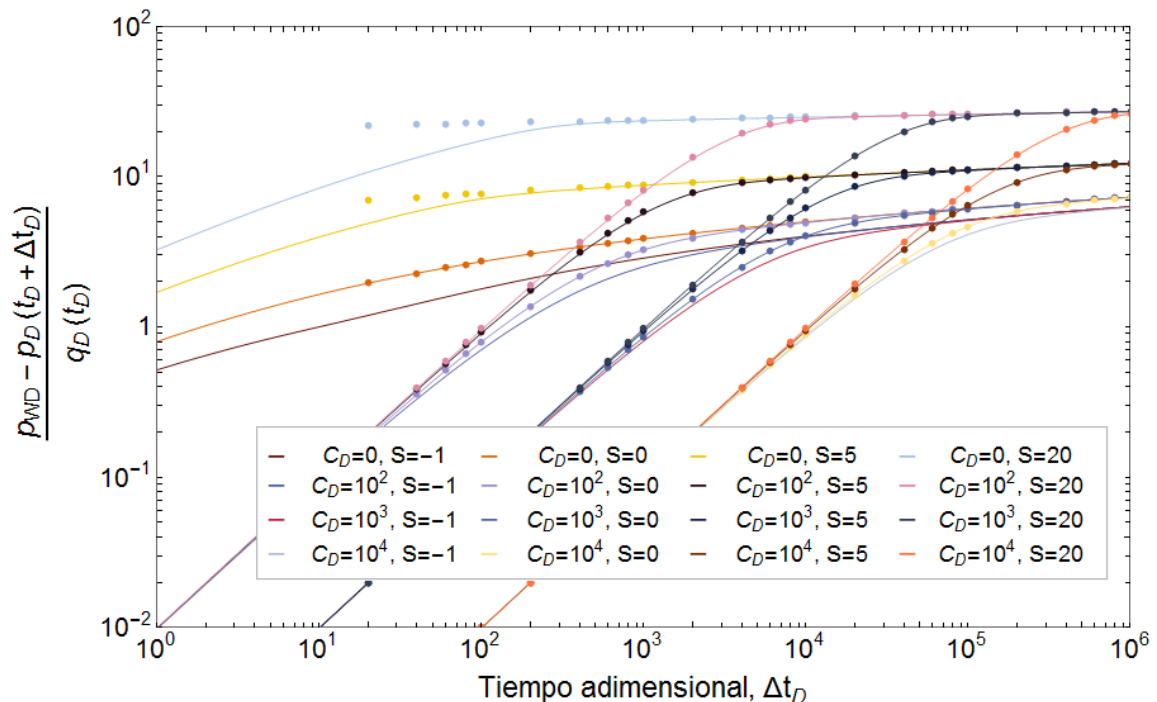


**Fig.29.** Efecto del almacenamiento del pozo en el comportamiento del incremento de presión del Modelo I (puntos) y del Modelo de Uraiet (línea continua) con  $S_d = 0$ ,  $t_{sD} = 10^4$  y  $t_{sD} = 10^6$ . Yacimiento cerrado.

#### 4.4.3.2 Efecto del Almacenamiento y Daño en el pozo.

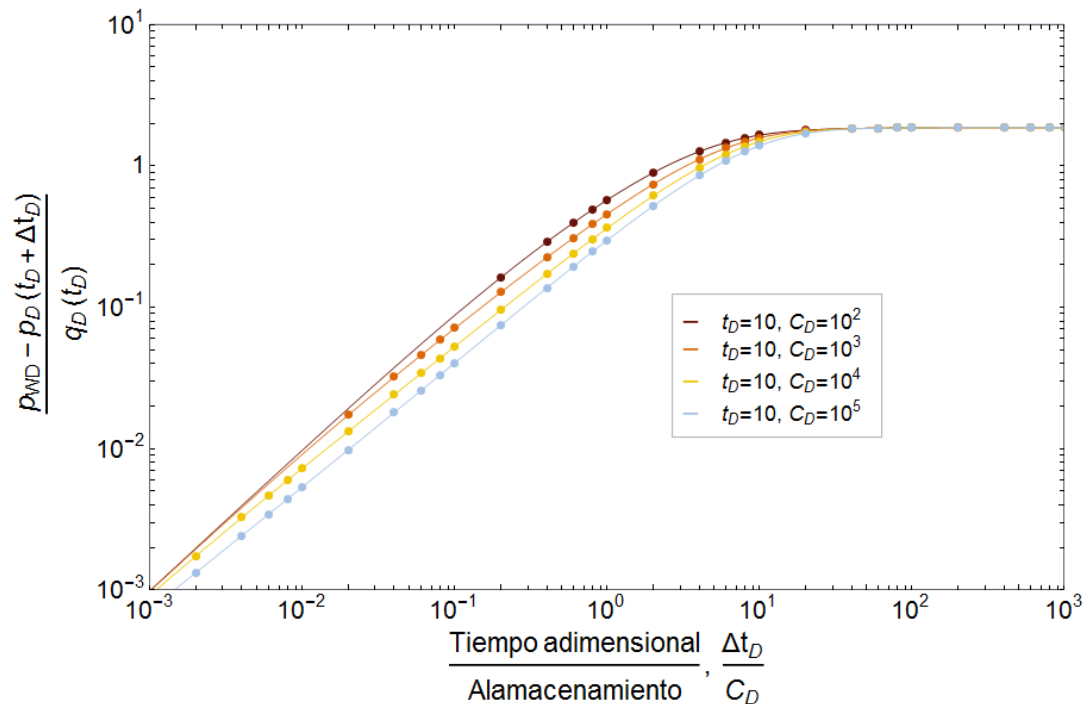
La **Fig. 30** es una gráfica log-log donde se muestra los efectos del daño y almacenamiento del pozo en el comportamiento del incremento de presión. Para que el Modelo I cumpla la correspondencia de uno a uno con la solución a gasto constante se define la caída de presión con la Ec. 2.17. Se utiliza el gasto instantáneo al momento del cierre. Las curvas muestran una buena concordancia para las diferentes condiciones evaluadas en las curvas para  $\Delta t_D > 500$  entre el Modelo de Uraiet y el Modelo I. Se observa que para valores de  $S_d > 5$ , a tiempos cortos de cierre no coinciden las curvas ya que se tiene problemas de convergencia al utilizar la correspondencia de uno a una de la Ec. 1.22 en el Modelo I.

Se utilizaron valores de daño de  $S_d = -1, 5, 20$  y valores de almacenamiento de  $C_D = 10^2, 10^3, 10^4$ . La grafica muestra el comportamiento para un yacimiento infinito. Igual que en los casos anteriores para valores  $C_D \geq 0$  y  $S_d \geq 0$ , las curvas convergen a la curva  $C_D = 0$  para tiempos largos de cierre. Se definen líneas características del fenómeno de almacenamiento del pozo para valores finitos de  $C_D$  y  $S$  a tiempos cortos



**Fig.30.** Comparación del comportamiento del incremento de presión del Modelo I (puntos) y del Modelo de Uraiet (línea continua) con  $S_d \neq 0$ ,  $C_D \neq 0$ , y  $t_{sD} = 10^8$ .

Para el análisis de pruebas de incremento de presión en pozos con daño y almacenamiento, se ha aplicado la técnica de graficar la caída de presión adimensional  $\log(\Delta p_D)$  en función de los parámetros  $\log(\Delta t_D/C_D)$  para el caso de gasto constante. La **Fig. 44** nos muestra el cambio de la presión adimensional durante el incremento,  $\log(\Delta p_D/q_D)$  contra  $\log(\Delta t_D/C_D)$ , para el caso de producción a presión constante para el Modelo de Uraiet y el Modelo I, demostrando que  $\Delta t_D/C_D$  es una función  $\Delta p_D/q_D$ . Se observa que hay una muy buena concordancia entre las curvas de los Modelos. La aplicabilidad de la correlación a datos de incremento requiere que  $\Delta t_D \ll t_{sD}$ .



**Fig. 31.** Comparación del comportamiento del incremento de presión en un yacimiento Infinito del modelo de Uraiet y el Modelo I con  $S_d = 0$ .

#### 4.5 Método de Horner para el Análisis del Incremento de Presión.

El método de Horner se ha utilizado extensamente para analizar las pruebas de incremento de presión en pozos que producen a gasto constante. En el análisis del incremento de presión los pozos que presentan un comportamiento variable decreciente del gasto de tipo exponencial previamente al cierre, el método de Horner considera al último gasto de producción como el valor del gasto constante equivalente, es exacto para pruebas cortas en pozos. El método de Horner proporciona un valor correcto de la permeabilidad de la formación, así como la estimación del factor de daño y la presión inicial del yacimiento.

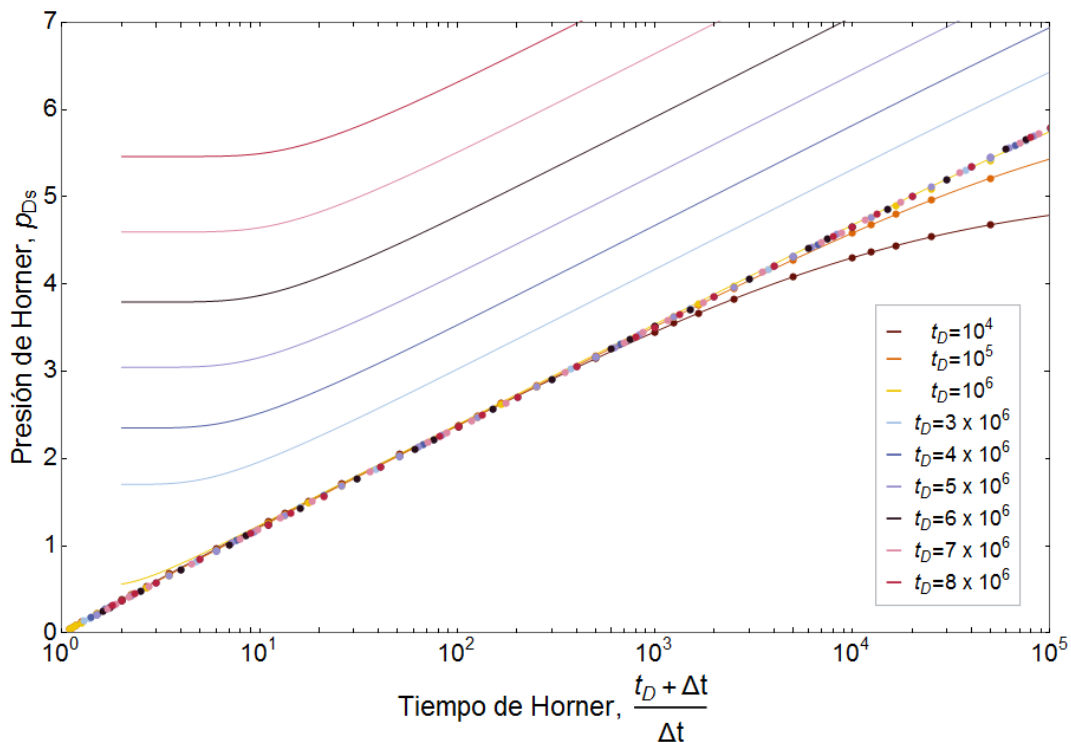
La presión del pozo durante el periodo de cierre,  $p_{wsD}$ , se grafica contra la relación de tiempo  $(t_p + \Delta t_{ws})/\Delta t_{ws}$  en una gráfica semilogarítmica. Uraiet propone que para mantener una correspondencia directa con respecto al caso de producción del pozo a gasto constante, se debe considerar una correspondencia uno a uno entre los resultados a gasto constante y a presión constante para facilitar la comprensión de los nuevos resultados, por lo tanto la presión adimensional de Horner para producción a presión constante de un pozo, se define por la Ec. (2.17).

Para determinar el valor del tiempo de producción  $t_p$ , que interviene en la relación  $(t_p + \Delta t_{ws})/\Delta t_{ws}$ , Horner recomendó que el tiempo de producción se sustituya por un pseudo tiempo de producción anterior al cierre si el gasto varía durante el periodo de flujo. En su análisis, Uraiet no siguió esta aproximación, debido a que la base para definir  $p_{wsD}$  es empírica, por lo tanto utilizó el tiempo real de producción en el cálculo de la relación del tiempo de Horner.

En la **Fig. 32** se compara la presión adimensional contra el tiempo de Horner del Modelo de Uraiet (yacimientos cerrados) y el Modelo I (yacimientos infinitos). Se observa en el Modelo de Uraiet, los efectos de la frontera externa en la presión para los diferentes tiempos de producción. Durante tiempos cortos de cierre las curvas serán cóncavas hacia arriba sin embargo, si la prueba se ejecuta el tiempo suficiente, se forma una línea recta. Las líneas rectas no son paralelas; las pendientes dependen principalmente de los tiempos de producción antes del cierre, las pendientes continúan incrementándose conforme aumenta el tiempo de cierre y para tiempos mayores de  $t_D = 10^2$  comienza a ser constante. En el Modelo I al ser un yacimiento infinito y no sentir los efectos de frontera externa, para  $t_D = 10^6$  todas las líneas coinciden en una línea recta, para tiempos cortos de producción y tiempos cortos de cierre se presenta una curva cóncava hacia abajo y tarda en presentarse entre más largo sea el tiempo de producción.

Sin embargo para tiempos  $t_D < 10^6$  donde el Modelo de Uraiet no ha sentido los efectos de la frontera externa y se comporta como un yacimiento infinito las curvas coincide con el Modelo I. Cabe mencionar que no están considerados los efectos de daño y almacenamiento.

Para el *Modelo I* también se cumple que para tiempos de producción  $t_{sD} \geq 10^4$  se forman líneas rectas con pendiente dentro del 4% del valor convencional de 1.151. El Modelo I tiene una pendiente de 1.17 que se encuentra dentro el 4%.



**Fig.32.** Comportamiento de la presión de Horner para un pozo que produjo a presión constante. Modelo Uraiet (líneas continuas) y Modelo I (líneas de puntos).

Las pendientes de la curvas continúa aumentando conforme el tiempo de cierre aumenta definiéndose la línea recta para  $\Delta t_D \leq t_{sD}$  y para  $\Delta t_D > t_{sD}$  las pendientes decrecerán y eventualmente alcanzaran el valor de cero cuando la presión del pozo sea igual a la presión estática del yacimiento.

Desde un punto de vista práctico, Uraiet simplifica el procedimiento para realizar una prueba de incremento de presión y analizar los datos registrados a presión constante. Si la presión del pozo antes del cierre se mantiene constante, solo valores instantáneos de gasto y tiempo son necesarios.

## **4.6 Función Derivada**

Es importante mencionar que en la literatura no se encuentra algún estudio sobre el análisis de la función derivada en pozos que producen a presión constante antes el cierre. El análisis de las pruebas de presión, en su mayoría efectuadas a gasto constante, siempre es posible trazar una línea recta a través de ciertos puntos en una gráfica específica de interpretación, y bajo ciertas consideraciones esta línea recta puede no ser correcta para definir el modelo de flujo. Ante tal situación, es necesario determinar el tipo de flujo que domina a la prueba antes de utilizar una gráfica específica para el análisis. Es esencial tener un proceso de identificación del régimen de flujo para la identificación correcta de la prueba de presión. La combinación de la función derivada de la presión y de la presión convencional en una gráfica, representa una herramienta muy útil de diagnóstico de flujo.

La calidad de los datos de presión tiene una influencia mayor en los cálculos de la función derivada. Sin embargo, para el caso de pruebas de incremento de presión precedida por producción a presión constante, como ya se mencionó, la literatura es limitada y nula para la función derivada con los efectos de daño y almacenamiento.

El análisis de pruebas en función de la derivada se ha enfocado hacia pozos que han producido a gasto constante, por lo que al evaluar para el caso de producción a presión constante se requiere, como en el caso de la gráfica de Horner propuesta por Uraiet, normalizar la función derivada para obtener una correspondencia entre los dos casos. Para normalizar la función derivada se utilizó el último gasto de producción antes del cierre.

Con la aproximación de la derivada con respecto al tiempo, el cambio de presión durante los periodos de prueba es considerada para el análisis. Con el objetivo de enfatizar el régimen de flujo radial, la derivada es tomada con respecto al logaritmo del tiempo. Usando el logaritmo natural, la derivada puede ser expresada como derivada del tiempo, multiplicada por el tiempo de cierre.

$$\Delta p' = \frac{dp_D}{d \ln \Delta t_D} = \Delta t_D \frac{dp_D}{dt_D}, \quad (4.1)$$

Para calcular la función derivada del Modelo I propuesto, se deriva con respecto al tiempo adimensional la Ec. (3.45) y el resultado se multiplica por el tiempo adimensional.

Para el caso en el cual  $C_D = 0$ , la función derivada está definida con la ecuación siguiente:

$$t_D \frac{dp_{wsD}}{dt_D} = -\frac{16}{\pi^4} t_D \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{f_1(0, S_d, w) f_2(S_d, v)} \left( \frac{w e^{-w^2 t_D} \left( 1 - e^{-(v^2 - w^2) t_{sD}} \right)}{v(v^2 - w^2)} \right) dv dw \quad (4.2)$$

y para el caso en el cual  $C_D \neq 0$ , se tiene,

$$t_D \frac{dp_{wsD}}{dt_D} = -\frac{4C_D t_D}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{w e^{-w^2 t_D}}{f_1(C_D, S_d, w)} dw - \frac{16t_D}{\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{w e^{-w^2 t_D} \left( 1 - e^{-(v^2 - w^2) t_{sD}} \right)}{f_1(C_D, S_d, w) f_2(S_d, v)} \frac{1}{v(v^2 - w^2)} dv dw \quad (4.3)$$

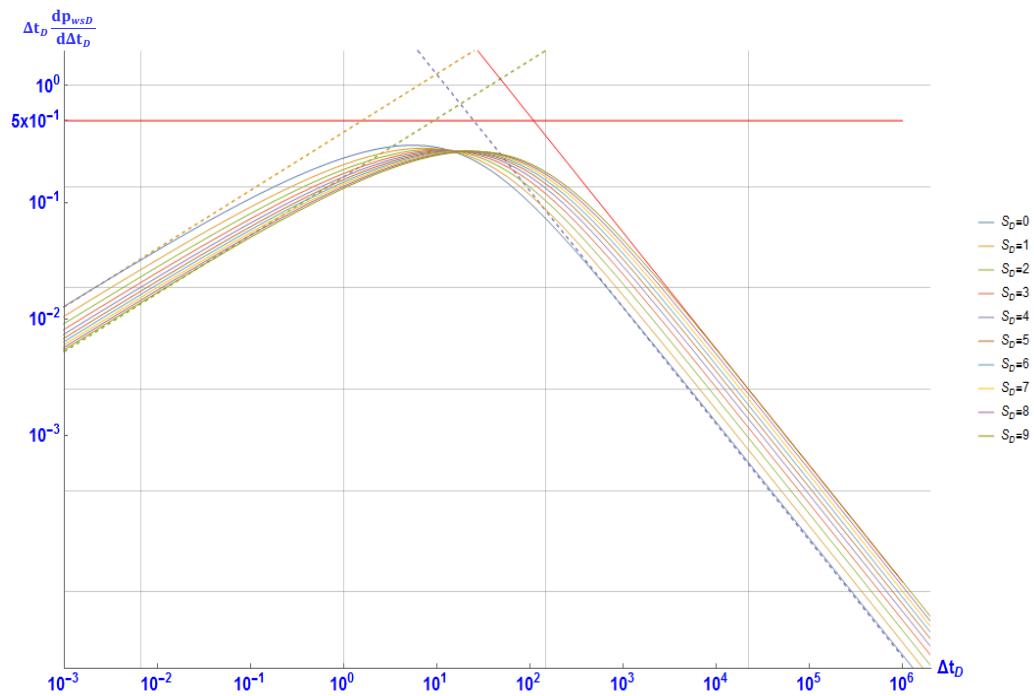


#### 4.6.1 Función Derivada cuando $C_D = 0$ .

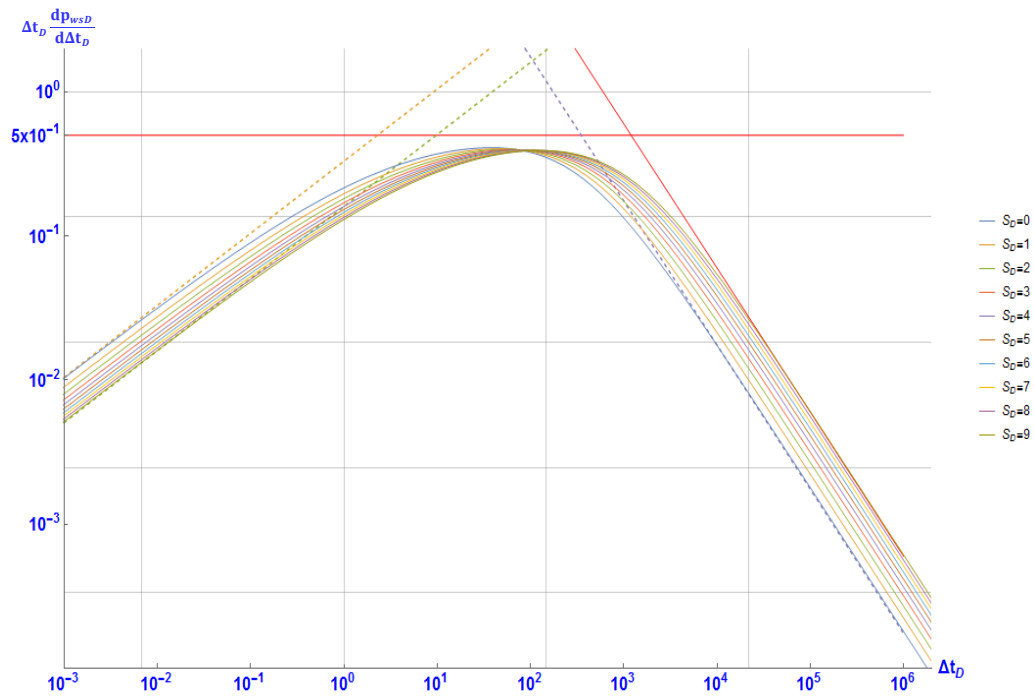
Las gráficas log-log de las **Figs. 33 a la 38** presentan el comportamiento de la función derivada vs.  $\Delta t_D$  para pruebas de incremento de presión en pozos precedidos por una producción a presión constante sin los efectos almacenamiento en el pozo,  $C_D = 0$ , para diferentes tiempos de producción,  $S_d \geq 0$  y un tiempo de cierre  $\Delta t_D = 10^6$ . Para tiempos cortos de producción las pendientes son paralelas para los distintos valores de daño.

Se observa que conforme aumenta el tiempo de producción la pendiente va aumentando para tiempos cortos. El incremento de la función derivada de la presión (FDP) es constante para tiempos muy cortos, posteriormente va disminuyendo lentamente este incremento hasta ser cero. Llega a un valor máximo la FDP y después de este punto comienza a disminuir la FDP, estos decrementos son pequeños hasta ver constantes y formar una línea recta con pendiente negativa. Se observa que para tiempos de producción  $t_{sD} < 10^5$ , el punto máximo de la FDP es menor a 0.5 con un  $\Delta t_D = 10^6$  y para  $t_{sD} \geq 10^5$  alcanza el valor de 0.5, en términos dimensionales, la derivada se estabiliza a este valor cuando el régimen de flujo es alcanzado. La duración de FDP=0.5 dependerá del tiempo de producción, entre mayor sea  $t_{sD}$  mayor será la duración de FDP=0.5.

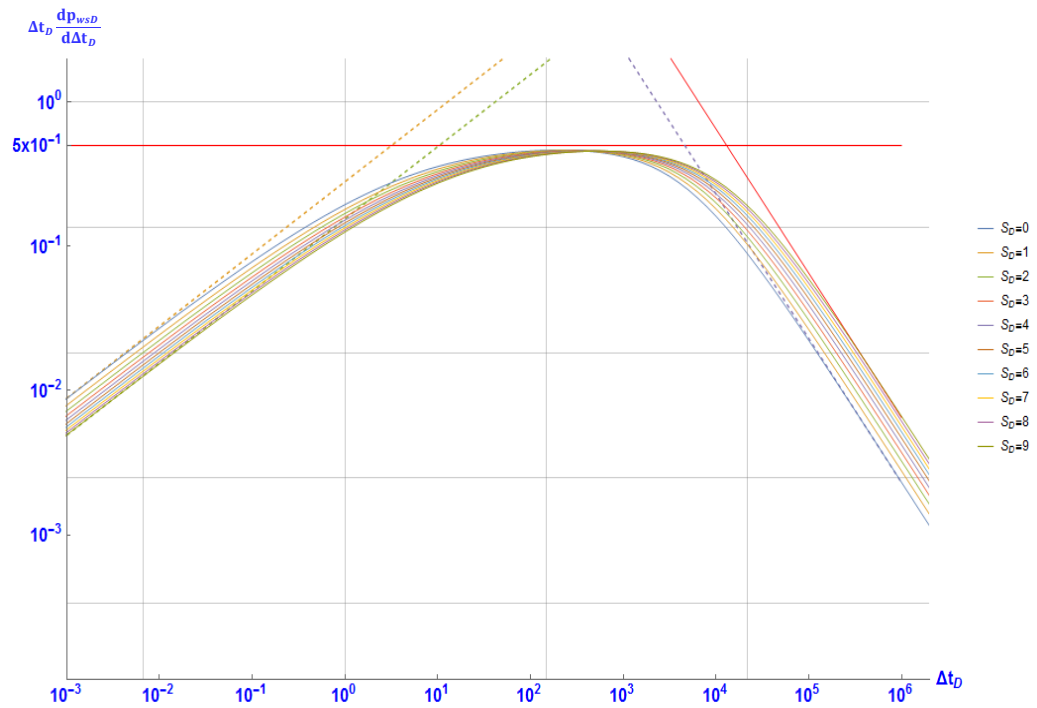
En esta etapa podemos concluir que cuando  $t_{sD} = 0.1 \times \Delta t_D$  siempre y cuando  $t_{sD} < \Delta t_D$ , el valor de la FDP será de 0.5, y el valor máximo de FDP se dará cuando  $FDP_{MAX} = 10^{-3} \times \Delta t_D$ .



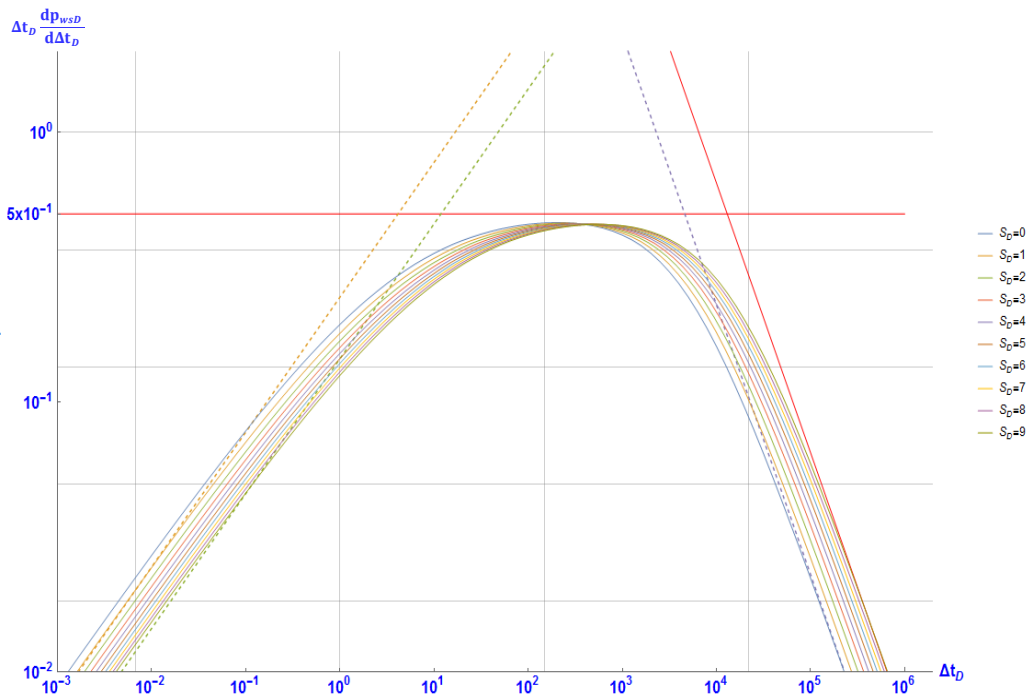
**Fig.33.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$  y un  $t_{sD} = 10$ .



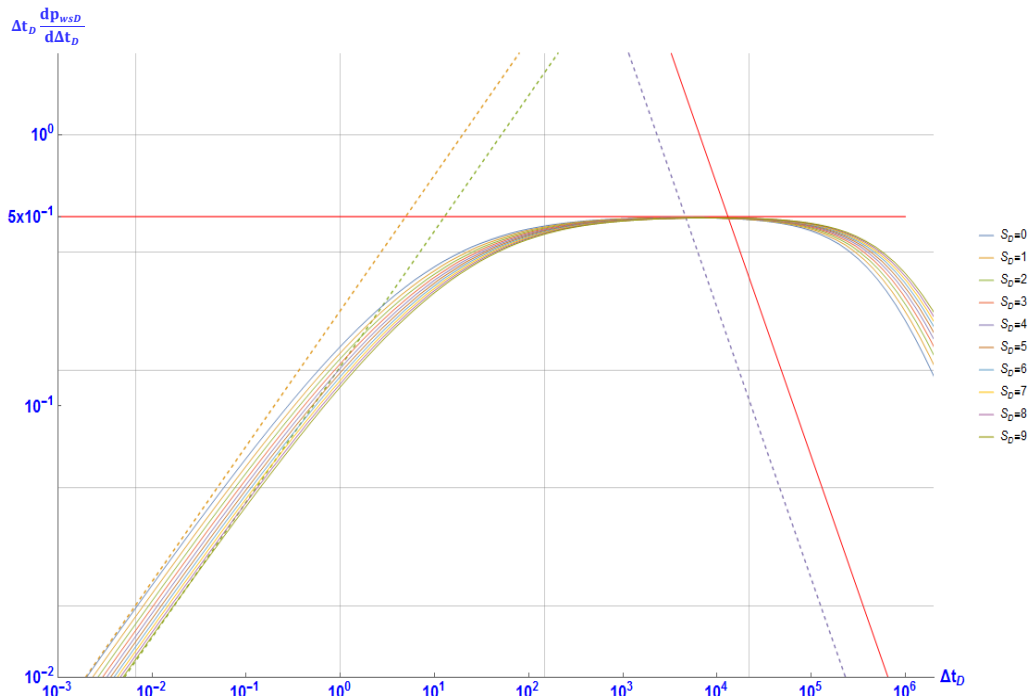
**Fig.34.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$  y un  $t_{sD} = 10^2$ .



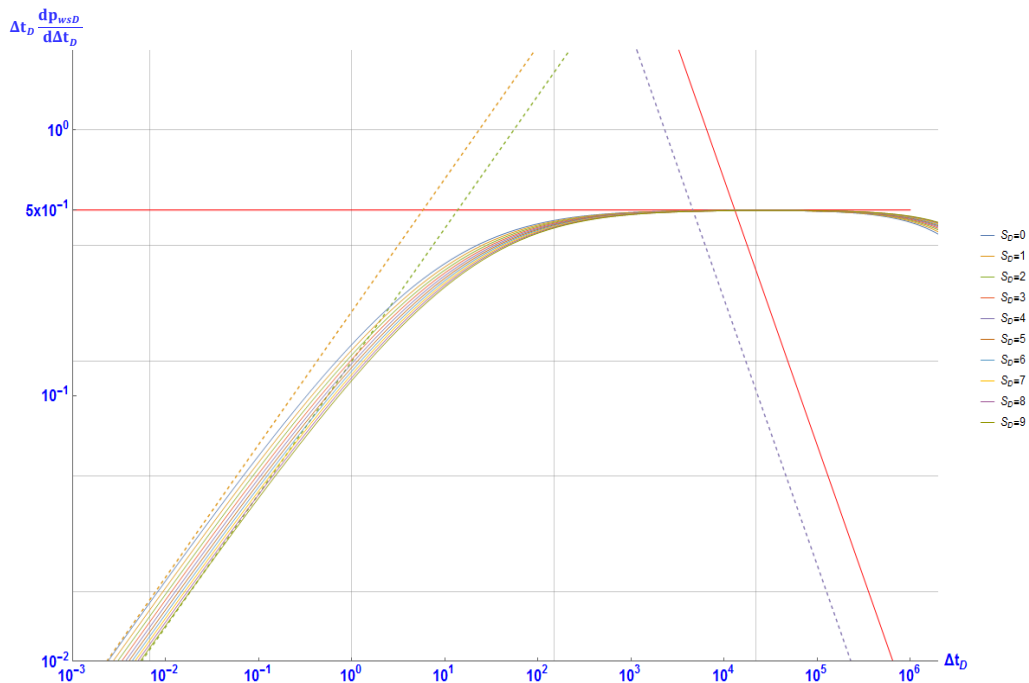
**Fig.35.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$  y un  $t_{sD} = 10^3$ .



**Fig.36.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$  y un  $t_{sD} = 10^4$ .



**Fig.37.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$  y un  $t_{sD} = 10^5$ .



**Fig.38.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$  y un  $t_{sD} = 10^6$ .

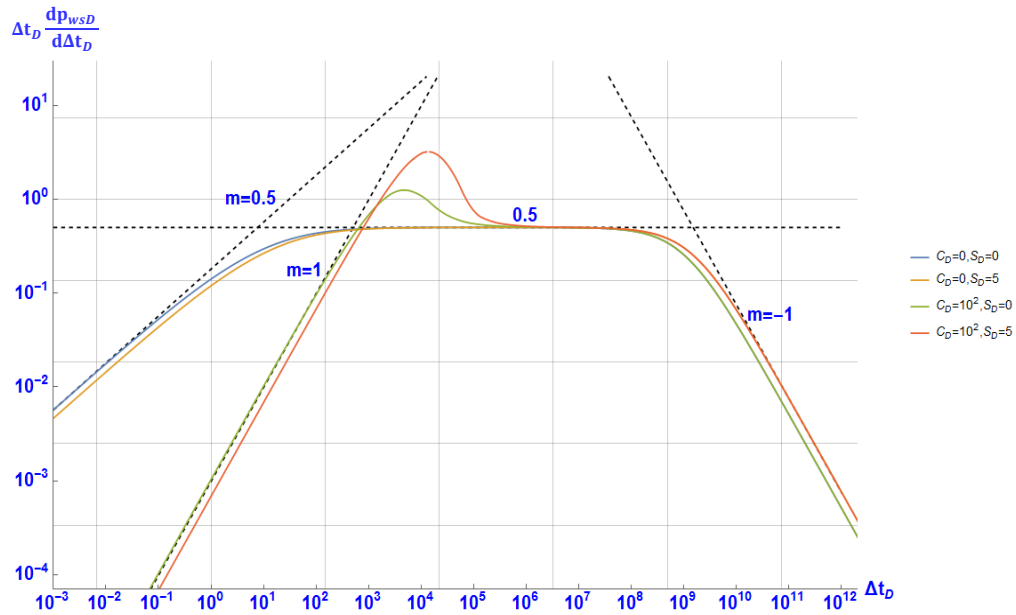
#### 4.6.2 Función Derivada cuando $C_D \neq 0$ .

Durante el periodo donde domina el almacenamiento, el cambio de presión y la derivada de presión son idénticos. En escala log-log, las curvas de la derivada siguen una línea recta de pendiente igual a la unidad. Las **Figs. 39 a la 42** son graficas log-log, que muestran el comportamiento de la FDP para diferentes tiempos de producción, un  $\Delta t_D = 10^{12}$ ,  $C_D = 0$ ,  $C_D = 10^2$ , y  $S_d = 0$ ,  $S_d = 5$ .

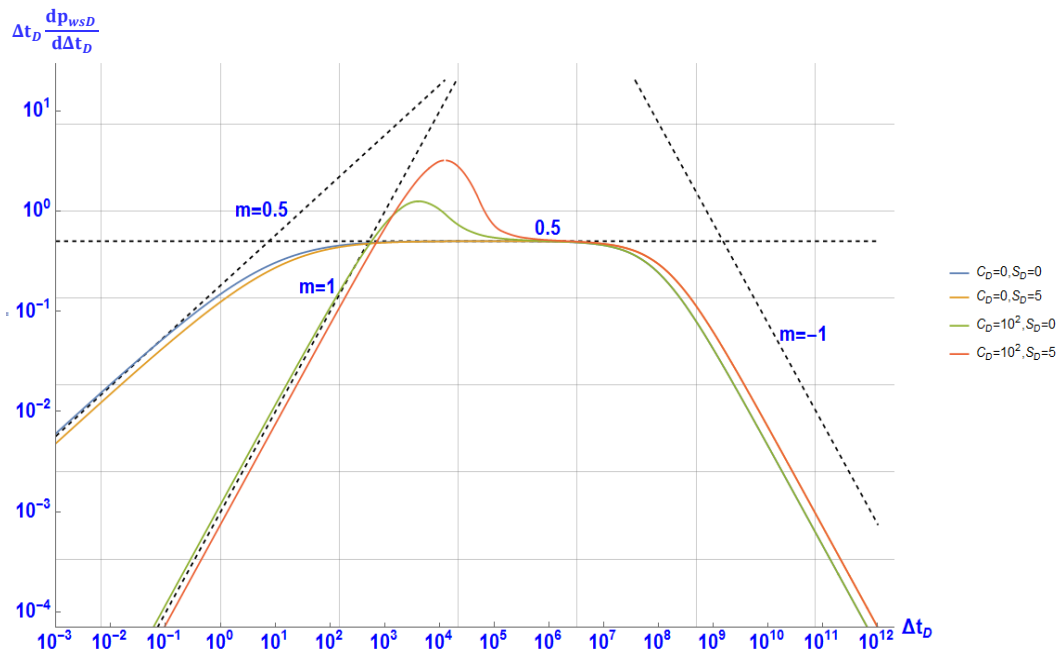
A tiempos cortos la FDP forma una línea recta de pendiente unitaria durante los efectos de almacenamiento, y cuando los efectos del almacenamiento son nulos se forma una línea recta con pendiente aproximadamente de 0.5. Posteriormente se llega a una estabilización cuando la FDP es igual a 0.5 cuando se alcanza el régimen de flujo radial. Entre estos dos regímenes de flujo, el gasto del pozo está cambiando mientras el efecto de almacenamiento del pozo está presente y la respuesta a este efecto se describe como una joroba, y el tamaño de la joroba defenderá del valor del daño.

Se observa que el periodo de estabilización depende del tiempo de producción y entre más grande el tiempo de producción más tiempo durará la estabilización, por lo tanto a menor tiempo de producción es menor el área bajo la curva. Para las curvas con daño, se observa que tienen el mismo comportamiento con pendientes paralelas para diferentes daños, se observa el periodo de estabilización de 0.5. A tiempos largos las curvas convergen al mismo valor de daño independientemente del valor de almacenamiento. El decremento de la FDP comienza aproximadamente cuando  $\Delta t_D = t_{sD}$ .

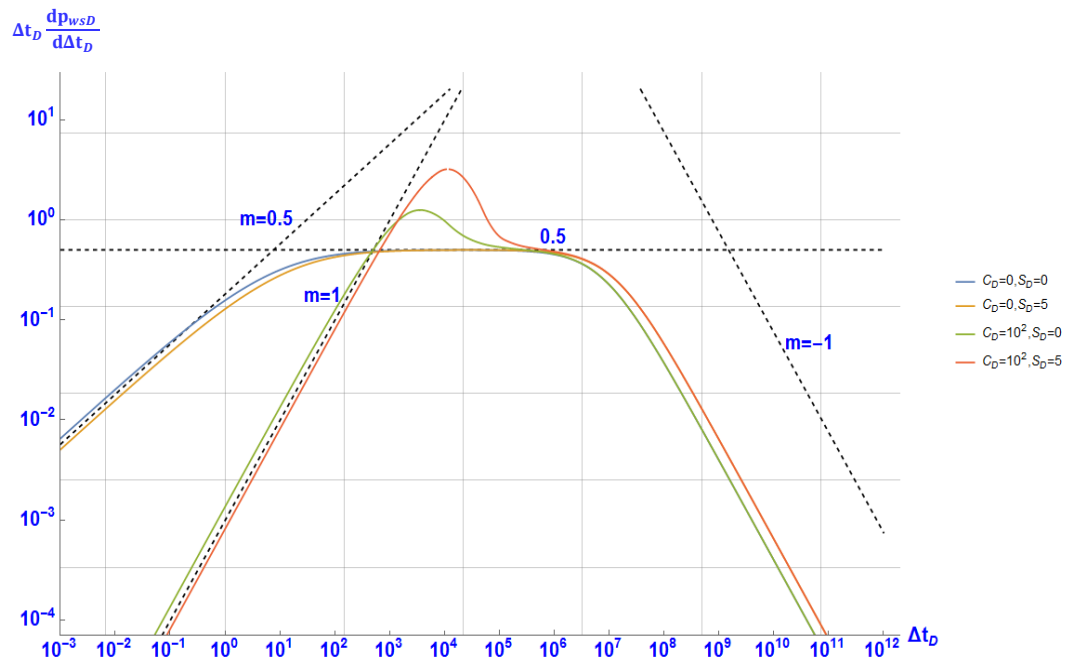
Las **Figs. 43 y 44** son graficas semilogarítmicas, donde se observa que para tiempos largos de producción convergen a cero y la joroba son más grandes. A tiempos cortos los incrementos son pequeños hasta ser constantes, llegan a su periodo de estabilización de 0.5 y para posteriormente comenzar a decrecer.



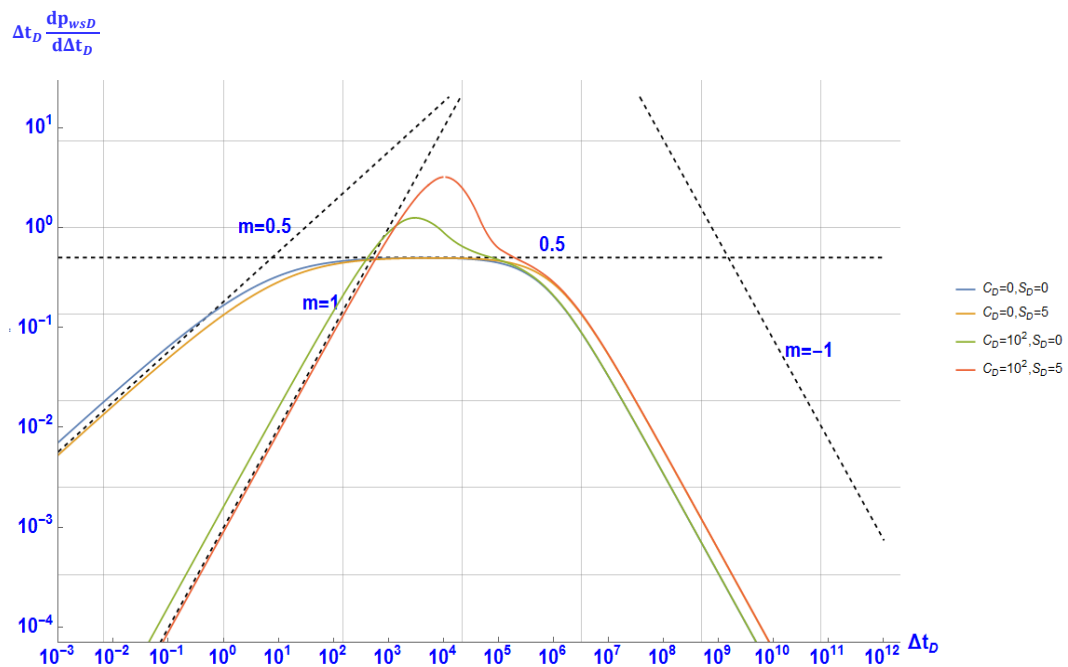
**Fig.39.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$ , y  $C_D \geq 0$  un  $t_{sD} = 10^8$ .



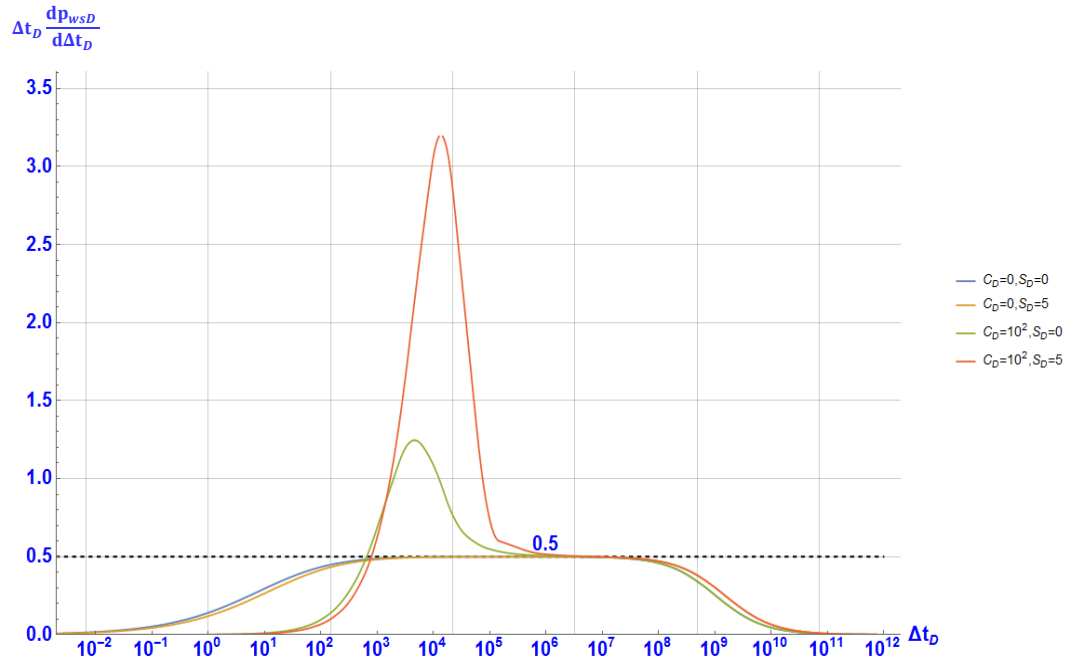
**Fig.40.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$ , y  $C_D \geq 0$  un  $t_{sD} = 10^7$ .



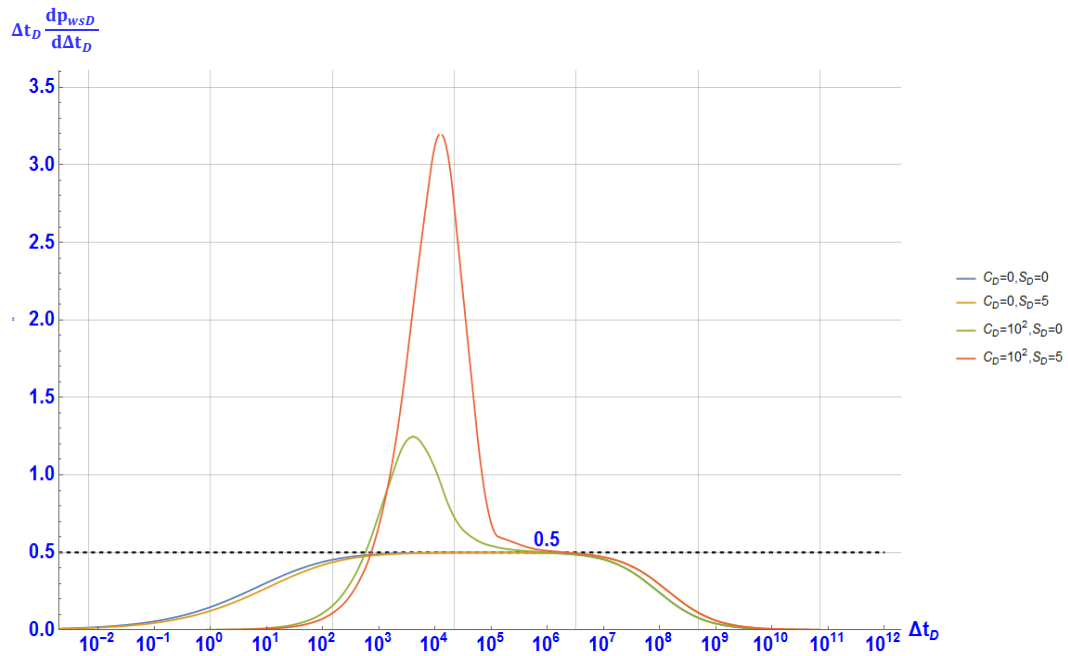
**Fig.41** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$ , y  $C_D \geq 0$  un  $t_{sD} = 10^6$ .



**Fig.42.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$ , y  $C_D \geq 0$  un  $t_{sD} = 10^5$ .



**Fig.43.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$ , y  $C_D \geq 0$  un  $t_{sD} = 10^8$ .



**Fig.44.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$ , y  $C_D \geq 0$  un  $t_{sD} = 10^7$ .

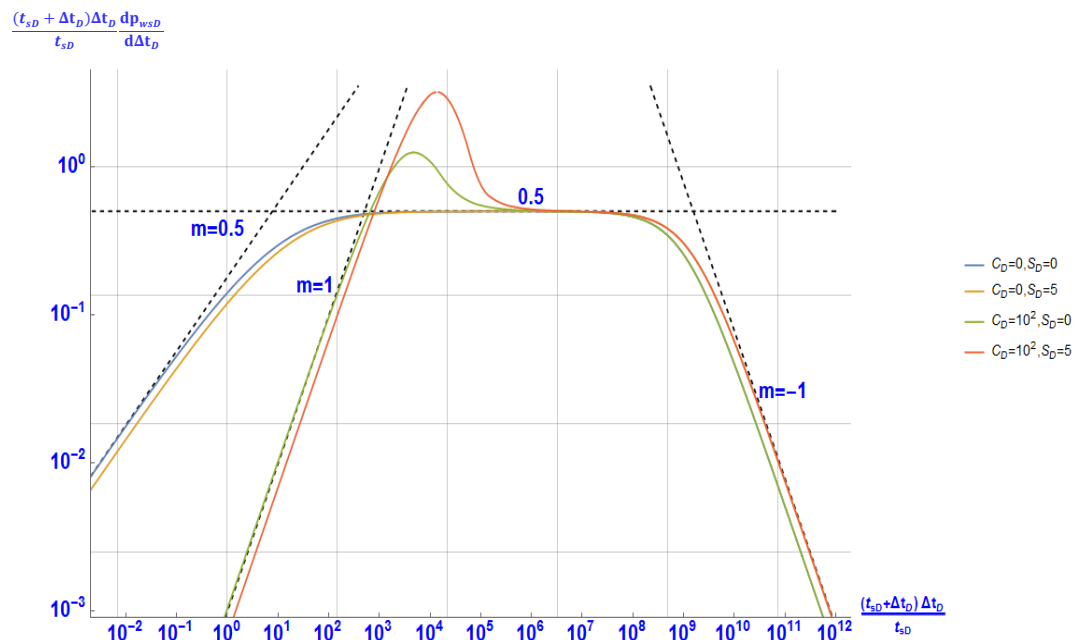


### 4.6.3 Analisis del Incremento de Presion en Funcion de la Derivada de Presion. Metodo de Horner.

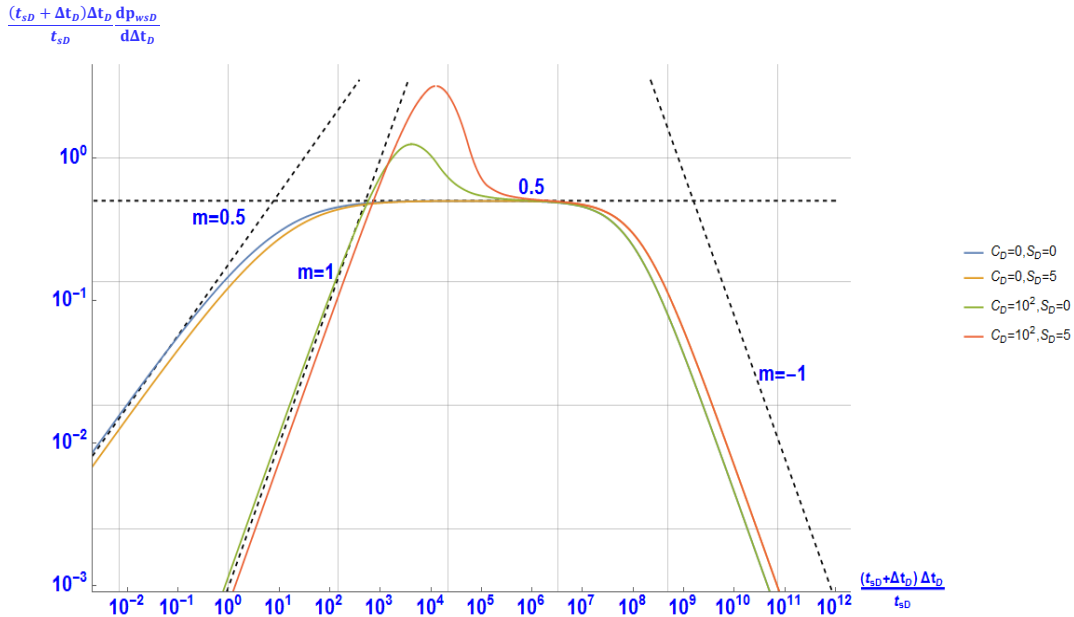
Para un cierre despues de un periodo simple de decremetno, la derivada es generada con respecto al tiempo efectivo de Agarwal dado por la ecuacion de superposicion.

$$\Delta p' = \frac{dp_D}{d \ln \frac{t_p \Delta t_D}{t_p + \Delta t_D}} = \frac{t_p + \Delta t_D}{t_p} \Delta t_D \frac{dp_D}{dt_D}, \quad (4.5)$$

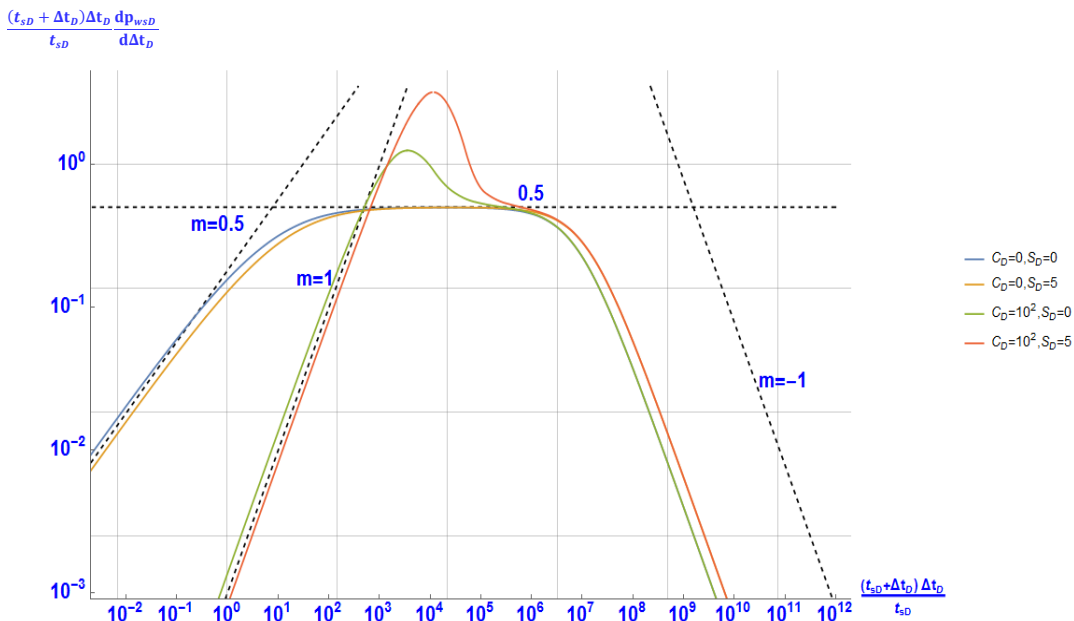
Al aplicar este procedimeinto para determinar la Funcion Derivada de la Presion, los resultados se encuentran en las **Figs. 45 a la 50** donse se puede observar que para las mismas condiciones y parametros de las **Figs. 39 al 44** los resultados son los mismos, teniendo el mismo comportamiento.



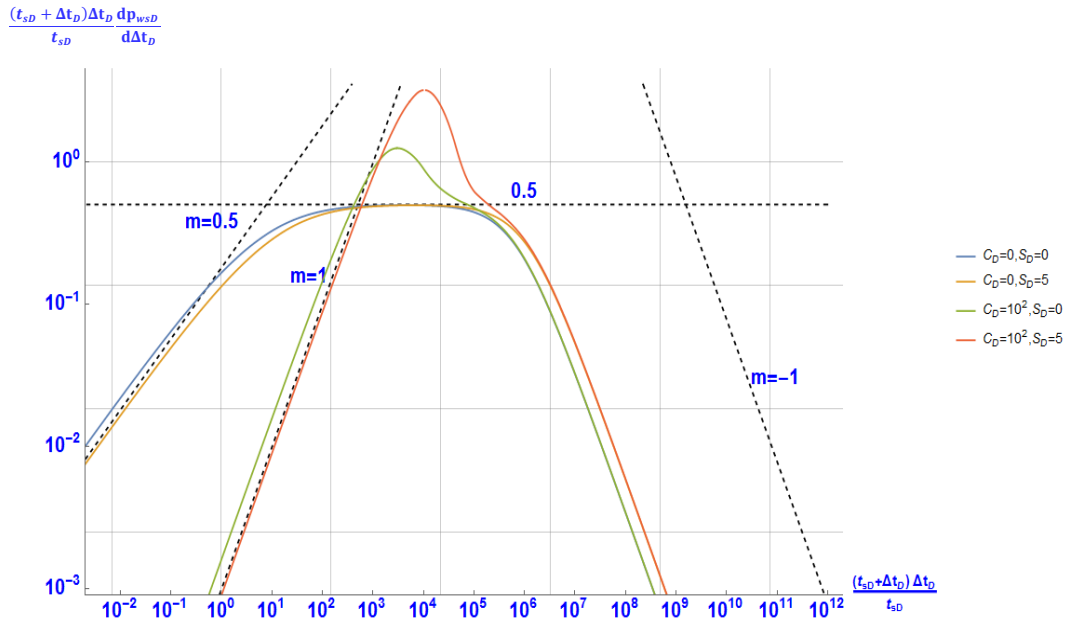
**Fig.45.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante  $c$  con  $S_d \geq 0$ , y  $C_D \geq 0$  un  $t_{sD} = 10^8$ , (Factor de Horner).



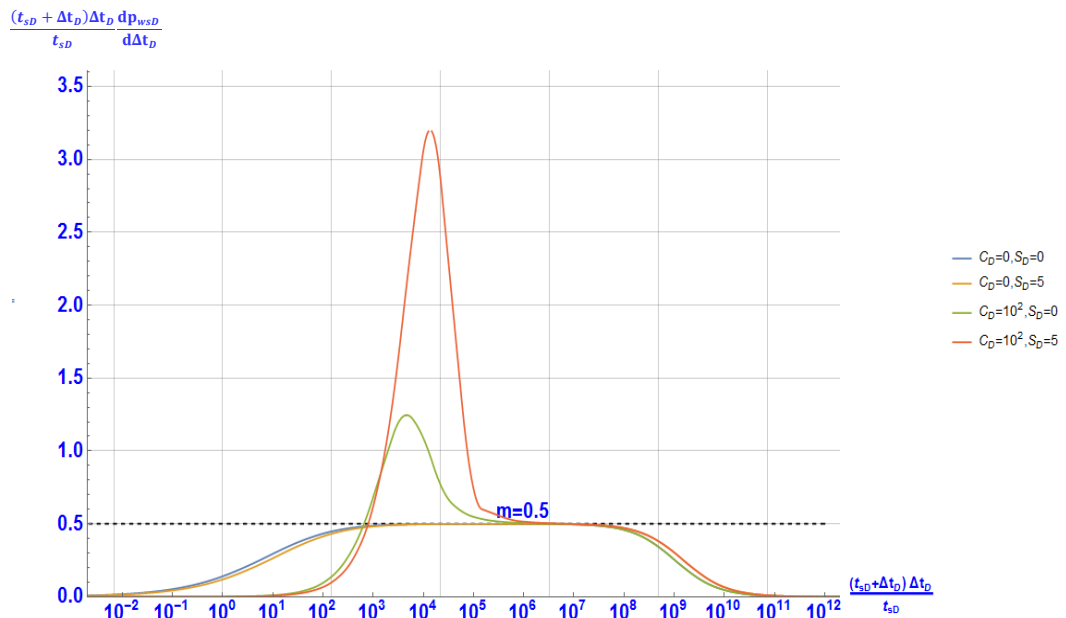
**Fig.46.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$ , y  $C_D \geq 0$  un  $t_{sD} = 10^7$ , (Factor de Horner).



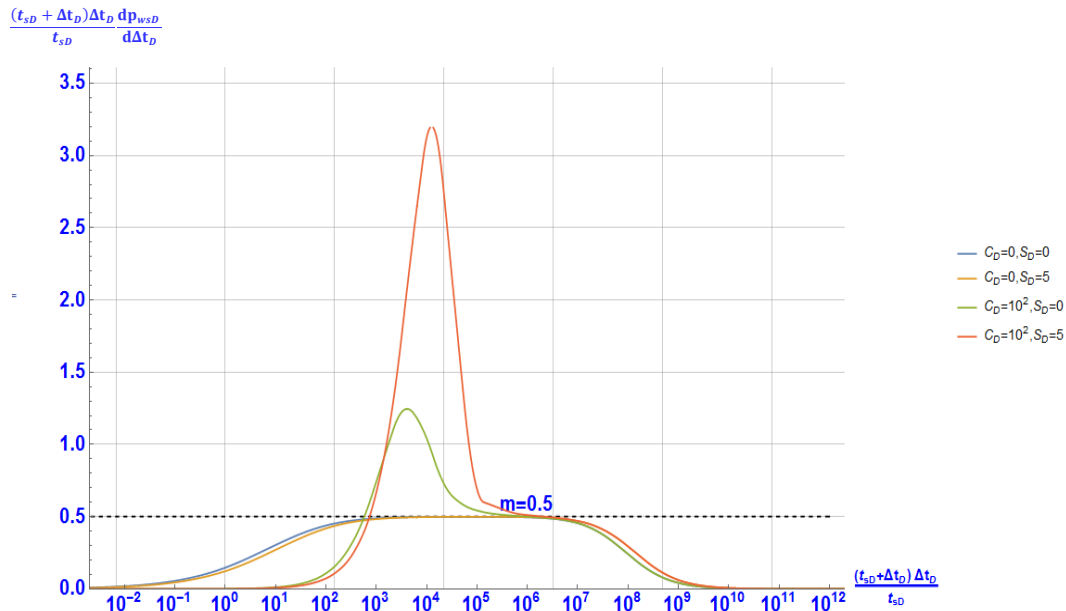
**Fig.47.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$ , y  $C_D \geq 0$  un  $t_{sD} = 10^6$ , (Factor de Horner).



**Fig.48.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$ , y  $C_D \geq 0$  un  $t_{sD} = 10^5$ , (Factor de Horner).



**Fig.49.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$ , y  $C_D \geq 0$  un  $t_{sD} = 10^8$ , (Factor de Horner).



**Fig.50.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \geq 0$ , y  $C_D \geq 0$  un  $t_{sD} = 10^7$ , (Factor de Horner).

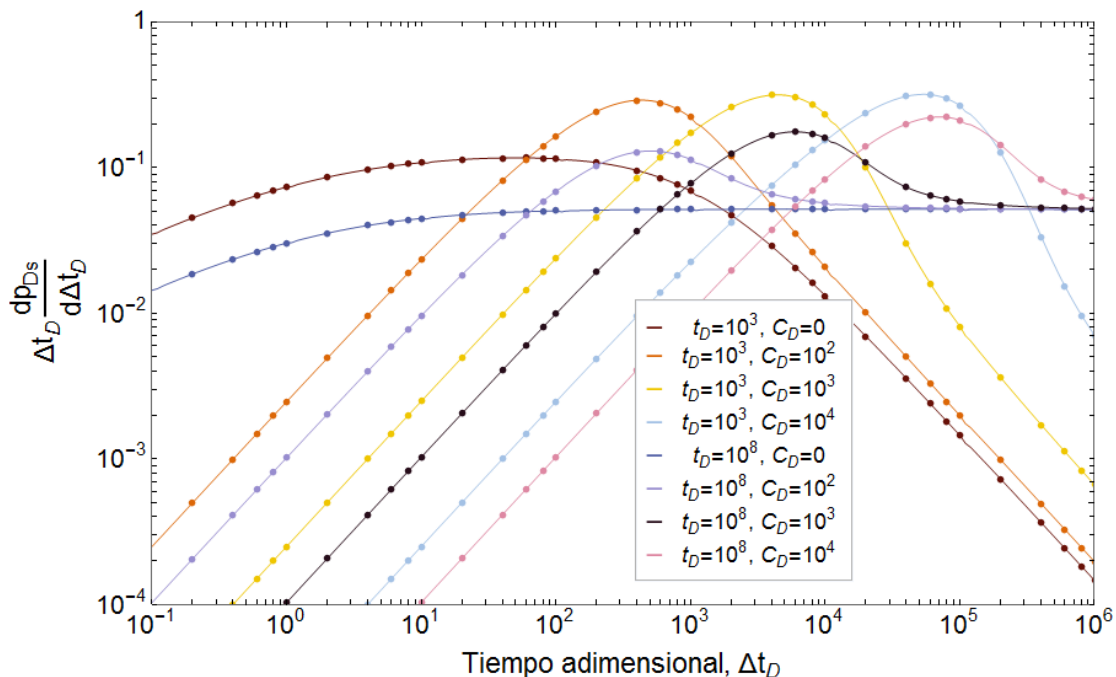
#### 4.6.4 Comparación de la Función Derivada de la Presión del Modelo I con el Modelo de Uraiet.

A continuación en las **Fig. 51 y 52** se comparan el comportamiento de la FDP del Modelo I con el Modelo de Uraiet para diferentes tiempos de producción, tiempo de cierre adimensional  $\Delta t_D = 10^6$  y distintos valores de almacenamiento. **La Fig. 51** muestra el comportamiento de la FDP cuando el  $S_d = 0$  y la **Fig. 52** cuando  $S_d \neq 0$ . La FDP del Modelo de Uraiet se evalúa numéricamente con el método de diferencia finitas antes ya mencionado y el Modelo I su FDP se evalúa analíticamente con la Ec. (4.3), se observa una buena concordancia entre los dos modelos

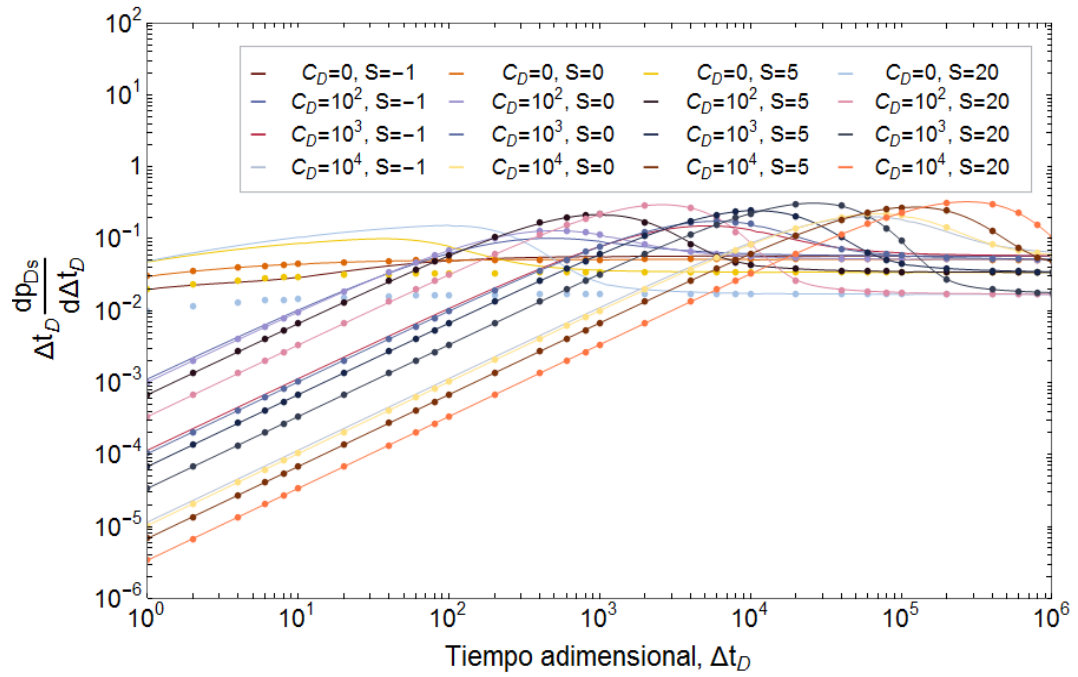
En la **Fig. 51**, se evaluaron dos diferentes tiempos de producción,  $t_{sD} < \Delta t_D$  y  $t_{sD} > \Delta t_D$ . A tiempos cortos cuando el  $C_D \neq 0$  se observa la línea recta con pendiente igual a uno para los diferentes valores de tiempo de producción y almacenamiento. Para el primer

caso cuando  $t_{sD} < \Delta t_D$ , la FDP máxima es diferente de 0.5 pues el tiempo de producción debe ser  $t_{sD} > 10^5$ , lo cual no se cumple, por lo tanto no ha alcanzado su periodo de estabilización. Para el caso de  $t_{sD} > \Delta t_D$ , tiene su etapa de estabilización donde la  $FDP \neq 0.5$ .

En la **Fig. 52**, se presenta el comportamiento de la FDP para distintas combinaciones de daño y almacenamiento donde se muestra, en general, una muy buena concordancia en las curvas entre el Modelo I y el Modelo de Uraiet. Sin embargo, para las curvas donde  $S_d > 5$  y  $C_D = 0$  no coinciden los datos para  $\Delta t_D < 3000$ , Este problema también se presentó para el caso del incremento de presión cuando  $S_d > 5$  y  $C_D = 0$  se tiene problemas de convergencia y por lo tanto solo para  $\Delta t_D > 500$  se tuvo una buena concordancia.



**Fig. 51.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d = 0$ , y  $C_D \geq 0$ .



**Fig. 52.** Comportamiento de la Función Derivada para un Pozo que Produce a Presión Constante con  $S_d \neq 0$ , y  $C_D \geq 0$ .

*Conclusiones.*

Con base en procedimientos analíticos se desarrollaron dos modelos para determinar el incremento de presión en pozos con daño y almacenamiento que producen a presión constante antes del cierre, para un yacimiento infinito. El único Modelo numérico para pruebas de incremento de presión a presión constante con daño y almacenamiento pero para un yacimiento cerrado y a presión constante, el cual si lo evaluamos para un  $r_{De}$  lo suficientemente grande se comporta como un yacimiento infinito, en la literatura fue propuesto por Uraiet en 1979. El modelo de Uraiet se utilizó para validar y comparar los resultados de los modelo analíticos.

Esta validación y comparación dio la oportunidad de ir un poco más y poder desarrollar evaluar la función derivada del incremento de presión para pozos que produjeron a presión constante antes el cierre. De lo anterior se pueden establecer las conclusiones siguientes:

1. La solución del primer modelo generó una solución en el espacio real, y el segundo modelo generó una solución en el espacio de Laplace, la cual se llevó al espacio real aplicando dos veces el método de inversión numérica de Stehfest.
2. Para poder llevar acabo la validación de los modelos se programó el modelo numérico desarrollado por Uraiet, el cual emplea diferencias finitas. Los tres modelos se programaron para su evaluaron en el software de Mathematica ©.
3. En el primer modelo se obtuvo una solución en el espacio real, la cual involucra una integral impropia doble, con limites superiores al infinito lo cual complica la evaluación y programación de la solución, ya que no tiene un comportamiento continuo, por lo que se utilizaron aproximaciones numéricas que pudiesen minimizar los puntos no continuos, este modelo se implementó en Mathematica © empleando un método de programación en paralelo.
4. Del segundo modelo se obtuvo una solución en el espacio de Laplace que involucra una doble transformada inversa de Laplace, una correspondiente para el tiempo de producción y una para el tiempo de cierre. el método de



inversión numérico que se empleo fue de Stehfest para cada variable de Laplace. La solución se programó en Mathematica ©

5. El trabajo desarrollado por Uraiet, considera un yacimiento homogéneo, con geometría radial. Se incluyen los efectos de daño y almacenamiento del pozo. El efecto del daño se representa por una región concéntrica, con un determinado valor de permeabilidad. Se consideran dos condiciones de frontera externa, cerrada y a presión constante. Se emplea el método numérico de diferencias finitas para resolver numéricamente el modelo.
6. El modelo de Uraiet realizado se validó reproduciendo las gráficas que reportan en su trabajo para posteriormente comparar sus resultados con los modelos analíticos desarrollados en esta tesis, No se encontró ninguna discrepancia entre los resultados de la graficas dadas por Uraiet en su tesis.
7. Se compararon el Modelos I, solución en el espacio de real y el Modelo II, solución en el espacio de Laplace con el modelo de Uraiet, para diferentes valores de daño y almacenamiento así como diferentes valores de tiempo de cierre y tiempos de producción. En cada una de las gráficas generadas se muestra que hay una muy buena concordancia entre los dos modelos analíticos desarrollados y el Modelo de Uraiet. Las gráficas y resultados muestras una buena concordancia.
8. Se consideró el concepto de Uraiet de que para preservar la continuidad entre el caso de gasto constante y el caso de presión constante y analizar el comportamiento de las pruebas de incremento, los resultados se grafican en términos de  $p_D/q_D$ , lo que permitió comparar los resultados y ver similitudes con gráficas y comportamientos que presentan las pruebas de incremento pero a gasto constante, ya validadas y manejadas desde hace tiempo.
9. En el trabajo original de Uraiet, no consideró la función derivada de la presión, por lo cual se modificó el modelo de Uraiet para calcularla. Esta evaluación también es numérica. La derivada del Modelo I se realizó analíticamente y el resultado se muestra en la Ec. 71. Con lo cual se comparó la función derivada de la presión entre el modelo de Uraiet y el Modelo I, sin encontrarse diferencias, para las distintas combinaciones de parámetros evaluados.

10. Se puede observar que para la función derivada de la presión de pruebas de incremento a presión constante antes del cierre, al graficar en la escala log-log, el comportamiento de las curvas con el efecto de almacenamiento y daño siguen el mismo comportamiento obtenido para en el caso de producción a gasto constante.
11. A tiempos cortos, no es posible describir el efecto del daño de manera adecuada por medio del factor de daño, ya que el estado transitorio introducido por el efecto de daño se rige tanto por la permeabilidad de la región con daño y su extensión radial. Sin embargo a tiempos largos, es posible hacer eso, cuando el gasto en la región con daño es esencialmente estacionario (Nunca puede llegar a ser constante ya que el gasto de flujo es una función del tiempo, y el tiempo de reestabilización no puede ser cero).

# *Apéndices*

## **Apéndice A.**

### **Cambio de Variables de la Ecuación de Difusividad para el Modelo de Uraiet.**

A partir de la Ec. (2.3) se obtiene:

$$\ln r_D = x_D \ln r_{De} = \ln r_{De}^{x_D}.$$

A cada miembro de la ecuación anterior se le aplica la función exponencial, es decir,

$$\exp(\ln r_D) = \exp(\ln r_{De}^{x_D}).$$

Como la función exponencial y la función logaritmo son funciones inversas, se obtiene:

$$r_D = r_{De}^{x_D} \quad (A.1)$$

Se deriva la Ec. (2.3) en función del radio adimensional,

$$\frac{\partial x_D}{\partial r_D} = \frac{\partial}{\partial r_D} \frac{\ln r_D}{\ln r_{De}} = \frac{1}{\ln r_{De}} \frac{\partial}{\partial r_D} \ln r_D = \frac{1}{r_D \ln r_{De}}. \quad (A.2)$$

Se reescribe la primera derivada parcial de la Ec. (2.1),

$$\frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \frac{\partial x_D}{\partial r_D} \quad (A.3)$$

y la segunda derivada parcial,

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} = \frac{\partial}{\partial r_D} \left( \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right). \quad (\text{A.4})$$

Se sustituye la Ec. (A.2) en la Ec. (A.3),

$$\frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{1}{r_D \ln r_{De}} \frac{\partial p_D}{\partial x_D}. \quad (\text{A.5})$$

Se sustituye la Ec. (A.5) en la Ec. (A.4) y se obtiene la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} = \frac{\partial}{\partial r_D} \left( \frac{1}{r_D \ln r_{De}} \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right),$$

reescribiendo la ecuación anterior,

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} = \frac{1}{\ln r_{De}} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right). \quad (\text{A.6})$$

Se desarrolla el producto de la derivada de la Ec. (A.6),

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} = \frac{1}{\ln r_{De}} \left( -\frac{1}{r_D^2} \frac{\partial p_D}{\partial x_D} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right) \right). \quad (\text{A.7})$$

Se reescribe la Ec. (A.7) en la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} = \frac{1}{\ln r_{De}} \left( -\frac{1}{r_D^2} \frac{\partial p_D}{\partial x_D} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial x_D} \left( \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right) \frac{\partial x_D}{\partial r_D} \right) \quad (\text{A.8})$$

Se sustituye la Ec. (A.2) en la Ec. (A.8) y se obtiene:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} = \frac{1}{\ln r_{De}} \left( -\frac{1}{r_D^2} \frac{\partial p_D}{\partial x_D} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial x_D} \left( \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right) \left( \frac{1}{r_D \ln r_{De}} \right) \right),$$

reescribiéndose se obtiene,

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} = -\frac{1}{r_D^2} \frac{1}{\ln r_{De}} \frac{\partial p_D}{\partial x_D} + \frac{1}{r_D^2} \frac{1}{(\ln r_{De})^2} \frac{\partial^2 p_D}{\partial x_D^2}. \quad (\text{A.9})$$

Se sustituyen las Ecs. (A.1), (A.5) y (A.9) en la Ec. (2.1),

$$r_{De}^{2x_D} \left( -\frac{1}{r_{De}^{2x_D}} \frac{1}{\ln r_{De}} \frac{\partial p_D}{\partial x_D} + \frac{1}{r_{De}^{2x_D}} \frac{1}{(\ln r_{De})^2} \frac{\partial^2 p_D}{\partial x_D^2} \right) + r_{De}^{x_D} \left( \frac{1}{r_{De}^{x_D} \ln r_{De}} \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right) = r_{De}^{2x_D} \frac{\partial p_D}{\partial t_D},$$

se factoriza,

$$\cancel{r_{De}^{2x_D}} \left( -\frac{1}{\cancel{r_{De}^{2x_D}}} \frac{1}{\cancel{\ln r_{De}}} \frac{\cancel{\partial p_D}}{\partial x_D} + \frac{1}{\cancel{r_{De}^{2x_D}}} \frac{1}{(\cancel{\ln r_{De}})^2} \frac{\partial^2 p_D}{\partial x_D^2} \right) + \cancel{r_{De}^{x_D}} \left( \frac{1}{\cancel{r_{De}^{x_D} \ln r_{De}}} \frac{\cancel{\partial p_D}}{\partial x_D} \right) = r_{De}^{2x_D} \frac{\partial p_D}{\partial t_D},$$

se obtiene:

$$\frac{r_{De}^{-2x_D}}{\ln r_{De}^2} \frac{\partial^2 p_D}{\partial x_D^2} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad (\text{A.10})$$

## **Apéndice B.**

### **Ecuación Diferencial Parcial que Describe el Comportamiento del Flujo en la Región de Daño.**

Para la región de daño, en el sistema de coordenadas definido por la Ec. (2.3), la ecuación de difusividad que describe el comportamiento de la presión es:

$$\frac{(r_{De})^{-2x_D}}{(\ln r_{De})^2} \frac{\partial^2 p_{Dsk}}{\partial x_{Ds}^2} = \frac{\partial p_{Dsk}}{\partial t_{Ds}}. \quad (B.1)$$

La ecuación que define el tiempo adimensional es:

$$t_D = \frac{k t}{\phi c_t \mu r_w^2}. \quad (B.2)$$

En la región de daño, el tiempo de producción adimensional se define como:

$$t_{Ds} = \frac{k_s t}{\phi c_t \mu r_w^2}. \quad (B.3)$$

Se multiplican el numerador y denominador de la Ec. (B.3) por el valor de la permeabilidad en la zona no dañada,

$$t_{Ds} = \frac{k}{k} \frac{k_s t}{\phi c_t \mu r_w^2} = \frac{k_s}{k} \frac{k t}{\phi c_t \mu r_w^2} = \frac{k_s}{k} t_D. \quad (B.4)$$

Se determina la derivada del tiempo adimensional a partir de la Ec. (B.4),

$$\frac{\partial t_D}{\partial t_{Ds}} = \frac{k}{k_s}. \quad (\text{B.5})$$

Se reescribe la derivada parcial del miembro derecho de la Ec. (B.1) en la forma siguiente:

$$\frac{\partial p_{Dsk}}{\partial t_{Ds}} = \frac{\partial p_{Dsk}}{\partial t_D} \frac{\partial t_D}{\partial t_{Ds}}.$$

Se sustituye la Ec. (B.5) en la ecuación anterior,

$$\frac{\partial p_{Dsk}}{\partial t_{Ds}} = \frac{k}{k_s} \frac{\partial p_{Dsk}}{\partial t_D}. \quad (\text{B.6})$$

Se sustituye la Ec. (B.6) en la Ec. (B.1),

$$\frac{(r_{De})^{-2x_D}}{(\ln r_{De})^2} \frac{\partial^2 p_{Dsk}}{\partial x_D^2} = \frac{k}{k_s} \frac{\partial p_{Dsk}}{\partial t_D}. \quad (\text{B.7})$$



## Apéndice C.

### Modelo de Diferencias Finitas.

#### Ecuación de difusividad.

Generalmente, se emplean dos sistemas de malla en los modelos de diferencias finitas, llamados sistema de malla de "bloque centrado", y "nodo distribuido". En esta tesis se utiliza el sistema de malla de nodo distribuido ya que el valor de la presión se define en la frontera interior y en un caso de frontera exterior.

Se empleó una distribución uniforme para la discretización de la variable  $x_D$ .

Con el fin de simplificar la formulación de diferencias finitas, se combinan las Ecs. (2.4) y (2.7), en la manera siguiente,

$$\frac{(r_{De})^{-2x_D}}{(\ln r_{De})^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_D^2} = a \frac{\partial U}{\partial t_D}, \quad (\text{C.1})$$

donde  $U = p_D$ ,  $a = 1$ , para la región sin daño y  $a = k/k_s$  para la región con daño.

Para la solución de la Ec. (C.1), la malla de nodos distribuidos como se muestra en la **Fig. C.1**. El miembro izquierdo de la Ec. (C.1) se discretiza en la forma siguiente,

$$\frac{(r_{De})^{-2x_D}}{(\ln r_{De})^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_D^2} = \frac{(r_{De})^{-2x_{Di}}}{(\ln r_{De})^2} \frac{2}{\Delta x_D^+ + \Delta x_D^-} \left[ \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x_D^+} - \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x_D^-} \right], \quad (\text{C.2})$$

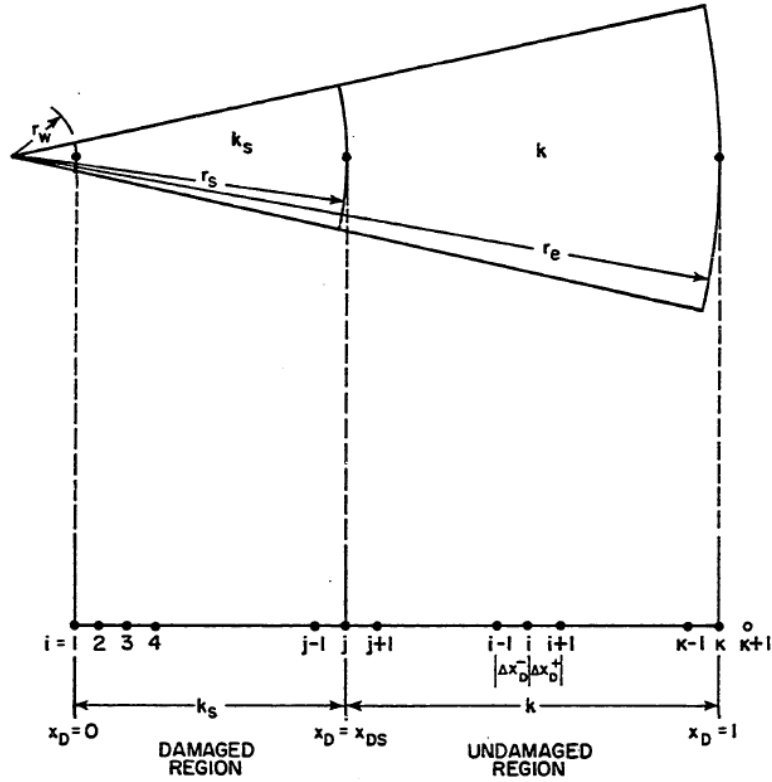


Fig. C.1. Descripción del espacio de la malla.

donde  $i$  es el índice del nodo de la malla en la dirección de  $x_D$ . Puesto que se empleó una discretización uniforme de malla ( $\Delta x_D = \Delta x_D^+ = \Delta x_D^-$ ), se tiene:

$$x_{Di} = (i-1)\Delta x_D \tag{C.3}$$

y la Ec. (C.2) se reescribe como,

$$\frac{(r_{De})^{-2x_D}}{(\ln r_{De})^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_D^2} = \frac{(r_{De})^{-2\Delta x_D(i-1)}}{(\ln r_{De})^2 (\Delta x_D)^2} [U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}]. \tag{C.4}$$

Para discretizar la derivada temporal de la Ec. (C.1),  $\frac{\partial U}{\partial t_D}$ , se emplea el método de Crank-Nicholson. Por lo tanto, la Ec. (C.1) se reescribe como,

$$\frac{(r_{De})^{-2\Delta x_D(i-1)}}{(\ln r_{De})^2 (\Delta x_D)^2} \theta [U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}] + (1-\theta) [U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n] = a \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t_D^n}, \quad (C.5)$$

donde el índice  $n$  en la Ec. (C.5) representa el nivel del tiempo, y  $\theta$  es un parámetro de ponderación. Uraiet empleó diferentes valores de  $\theta$  en el modelo y determinó que para  $\theta = 0.6$  se obtiene el menor error acumulado, y una discretización uniforme en la variable temporal en cada ciclo logarítmico genera una solución precisa. Para cada una de las gráficas generadas, el número de nodos en la malla se fijó en 500.

La Ec. (C.5) se escribe en la forma siguiente,

$$-\gamma_i^n U_{i+1}^{n+1} + (2\gamma_i^n + 1)U_i^{n+1} - \gamma_i^n U_{i-1}^{n+1} = \alpha_i^n U_{i+1}^n - (2\alpha_i^n - 1)U_i^n + \alpha_i^n U_{i-1}^n, \quad (C.6)$$

donde

$$\gamma_i^n = \theta \frac{(r_{De})^{-2\Delta x_D(i-1)}}{a(\ln r_{De})^2} \frac{\Delta t_D^n}{(\Delta x_D)^2} \quad (C.7)$$

y

$$\alpha_i^n = \frac{1-\theta}{\theta} \gamma_i^n. \quad (C.8)$$

El sistema representado por la Ec. (C.6) es estable para todos los valores de  $\gamma_i^n$  y  $\alpha_i^n > 0$ , con  $\theta > 0.5$ .

El gasto adimensional,  $q_D$ , en el pozo se calcula a partir de la ecuación siguiente,

$$q_D = \frac{k_s}{2\Delta x_D k (\ln r_{De})} \left[ \theta (U_3^{n+1} - 4U_2^{n+1} + 3U_1^{n+1}) \right] + (1-\theta)(U_3^n - 4U_2^n + 3U_1^n). \quad (C.9)$$

Esta aproximación es correcta para  $(\Delta x_D^2)$ , e involucra los primeros tres nodos de la malla.

### Condiciones de frontera y condición inicial

El sistema de Ecs. (2.9) a (2.15) se discretiza de la forma siguiente,

a) *Condición inicial:*

$$U_i^o = 0, \quad 1 \leq i \leq K, \quad (C.10)$$

Donde .

b) *Condiciones de frontera interna en el pozo para el período de producción:*

$$U_1^n = 0. \quad (C.11)$$

c) *Condiciones de frontera interna en el pozo durante el período de cierre:*

Cuando no se considera el efecto de almacenamiento de fluidos en el pozo, la aproximación de diferencias finitas correspondiente al caso en que el flujo es cero, se obtiene al sustituir la Ec. (C.9) en la Ec. (2.10):

$$U_3^{n+1} - 4U_2^{n+1} + 3U_1^{n+1} = \frac{1-\theta}{\theta} [-3U_1^n + 4U_2^n - U_3^n]. \quad (C.12)$$

Para el caso donde se consideran los efectos de almacenamiento del pozo, la Ec. (2.11) se discretiza como:

$$C_D \frac{U_1^{n+1} - U_1^n}{\Delta t^n} = \frac{k_s}{2\Delta x_D k (\ln r_{De})} \left[ -\theta (U_3^{n+1} - 4U_2^{n+1} + 3U_1^{n+1}) \right] - (1-\theta)(U_3^n - 4U_2^n + 3U_1^n). \quad (C.13)$$

Se define:

$$\beta^n = \frac{\theta \Delta t_D^n k_s}{2kC_D (\Delta x_D) (\ln r_{De})}, \quad (C.14)$$

por lo tanto la Ec.(C.13) se simplifica en la manera siguiente:

$$\begin{aligned} (1+3\beta^n)U_1^{n+1} - (4\beta^n)U_2^{n+1} + (\beta^n)U_3^{n+1} &= \left(1 - \frac{3(1-\theta)}{\theta} \beta^n\right) U_1^n \\ &+ \left(4 \frac{(1-\theta)}{\theta} \beta^n\right) U_2^n - \left(\frac{(1-\theta)}{\theta} \beta^n\right) U_3^n. \end{aligned} \quad (C.15)$$

Las condiciones de frontera externa de los sistemas representados por las Ecs. (2.14) y (2.15) son definidos como:

$$U_{K+1}^n = U_{K-1}^n, \quad \text{para un yacimiento cerrado} \quad (C.16)$$

y

$$U_K^n = 0, \quad \text{para el caso de presión constante.} \quad (C.17)$$

En la interfaz entre la región con daño y la región sin daño definida por la Ec. (2.8), se tiene la condición siguiente:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{j^-} = \frac{k}{k_s} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{j^+} \quad \text{y} \quad (U)_{j^-} = (U)_{j^+}, \quad (C.18)$$

donde  $(\partial U/\partial x)_{j^-}$  representa la caída de presión justo a la izquierda de la interfaz y  $(\partial U/\partial x)_{j^+}$ , la caída de presión a la derecha de la interfaz. Si  $(U)_{j-1}$  y  $(U)_{j+1}$ , se expanden en serie de Taylor en términos de  $U_j$ , la Ec. (C.6) y la Ec. (C.18) se combinan para dar la siguiente ecuación que representa la interfaz,

$$\begin{aligned}
 U_{j-1}^{n+1} \left( -\gamma_j^n \frac{k_s}{k} \right) + \left( 1 + \gamma_j^n + \gamma_j^n \frac{k_s}{k} \right) U_j^{n+1} + (-\gamma_j^n) U_{j+1}^{n+1} = \\
 \left( \alpha_j^n \frac{k_s}{k} \right) U_{i-1}^n + \left( 1 - \alpha_j^n \frac{k_s}{k} - \alpha_j^n \right) U_j^n + \alpha_j^n U_{i+1}^n.
 \end{aligned}
 \tag{C.19}$$

El sistema previo de ecuaciones se simplifica en una matriz tridiagonal de la forma siguiente:

$$[A] \bar{U} = [D],
 \tag{C.20}$$

donde  $A$  es una matriz tridiagonal y  $[D]$  es un vector columna. Esta matriz representa las diferentes combinaciones de condiciones en la frontera interior y exterior.

A continuación, se representan las matrices desarrolladas para cada caso:

**Fig. C.2. Representación de la matriz del periodo de flujo para un yacimiento cerrado.**

$$\begin{matrix} & A & & U^{n+1} & & D \\ i=2 & \left[ \begin{array}{cccc} 2+e_2^n & -1 & & \\ -1 & 2+e_i^n & & -1 \\ & -k_s/k & (k_s/k+1)+e_j^n & -1 \\ & & -1 & 2+e_i^n & -1 \\ & & & -2 & 2+e_K^n \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} U_2 \\ U_i \\ U_j \\ U_i \\ U_K \end{array} \right] & = & \left[ \begin{array}{c} (d+1)-(2d-e_2^n)U_2^n + d U_3^n \\ d U_{i-1}^n - (2d-e_i^n)U_i^n + d U_{i+1}^n \\ d(k_s/k)U_{j-1}^n - (d(k_s/k+1)-e_j^n)U_j^n + d U_{j+1}^n \\ d U_{i-1}^n - (2d-e_i^n)U_i^n + d U_{i+1}^n \\ 2d U_{K-1}^n - (2d-e_K^n)U_K^n \end{array} \right] \\ i=j & & & & & & \\ i=K & & & & & & \end{matrix}$$

$$e_i^n = \frac{(\ln r_{De})^2 (\Delta x_D)^2 a}{\theta (r_{De})^{-2(i-1)\Delta x_D} \Delta t_D^n \gamma_i^n} = \frac{1}{\gamma_i^n},$$

$$a = \frac{k}{k_s}$$

para la región con daño ( $i < j$ )

$$a = 1$$

para una región sin daño ( $i \geq j$ )

$$d = \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{\alpha_i^n}{\gamma_i^n}$$

**Fig. C.3. Representación de la matriz del periodo de flujo para un yacimiento con frontera externa a presión constante**

$$\begin{matrix} & A & & U^{n+1} & & D \\ i=2 & \left[ \begin{array}{cccc} 2+e_2^n & -1 & & \\ -1 & 2+e_i^n & & -1 \\ & -k_s/k & (k_s/k+1)+e_j^n & -1 \\ & & -1 & 2+e_i^n & -1 \\ & & & -2 & 2+e_{K-1}^n \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} U_2 \\ U_i \\ U_j \\ U_i \\ U_{K-1} \end{array} \right] & = & \left[ \begin{array}{c} (d+1)-(2d-e_2^n)U_2^n + d U_3^n \\ d U_{i-1}^n - (2d-e_i^n)U_i^n + d U_{i+1}^n \\ d(k_s/k)U_{j-1}^n - (d(k_s/k+1)-e_j^n)U_j^n + d U_{j+1}^n \\ d U_{i-1}^n - (2d-e_i^n)U_i^n + d U_{i+1}^n \\ d U_{K-2}^n - (2d-e_{K-1}^n)U_{K-1}^n \end{array} \right] \\ i=j & & & & & & \\ i=K-1 & & & & & & \end{matrix}$$

$$e_i^n = \frac{(\ln r_{De})^2 (\Delta x_D)^2 a}{\theta (r_{De})^{-2(i-1)\Delta x_D} \Delta t_D^n \gamma_i^n} = \frac{1}{\gamma_i^n}, \quad a = \frac{k}{k_s} \quad \text{para la región con daño } (i < j),$$

$$a = 1 \quad \text{para una región sin daño } (i \geq j),$$

$$d = \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{\alpha_i^n}{\gamma_i^n}$$

Fig. C.4. Representación de la matriz del periodo de cierre para un yacimiento cerrado.

$$\begin{matrix}
 & A & & U^{n+1} & & D \\
 i=1 & \left[ \begin{array}{cccc} 2+e_2^* & -1 & & \\ -1 & 2+e_i^n & -1 & \\ & -k_s/k & (k_s/k+1)+e_j^n & -1 \\ & & -1 & 2+e_i^n \end{array} \right. & & \left[ \begin{array}{c} U_1 \\ U_i \\ U_j \\ U_i \\ U_K \end{array} \right] & = & \left[ \begin{array}{l} (e^* - 2d)U_1^n + (e_2^n + 2d)U_2^n \\ d U_{i-1}^n - (2d - e_i^n)U_i^n + d U_{i+1}^n \\ d(k_s/k)U_{j-1}^n - (d(k_s/k+1) - e_j^n)U_j^n - d U_{j+1}^n \\ d U_{i-1}^n - (2d - e_i^n)U_i^n + d U_{i+1}^n \\ 2d U_{K-1}^n - (2d - e_K^n)U_K^n \end{array} \right] \\
 i=j & & & & & & \\
 i=K & & & & & & 
 \end{matrix}$$

$$e_i^n = \frac{(\ln r_{De})^2 (\Delta x_D)^2 a}{\theta (r_{De})^{-2(i-1)\Delta x_D} \Delta t_D^n \gamma_i^n} = \frac{1}{\gamma_i^n}, \quad a = \frac{k}{k_s} \quad \text{para la región con daño } (i < j),$$

$$a = 1 \quad \text{para una región sin daño } (i \geq j)$$

$$d = \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{\alpha_i^n}{\gamma_i^n}$$

$$e^* = \frac{1}{\beta^n} = \frac{2k c_D (\Delta x_D) (\ln r_{De})}{\theta k_s \Delta t_D^n}$$



Fig. C.5. Representación de la matriz del periodo de cierre para un yacimiento con frontera externa a presión constante.

$$\begin{matrix}
 & A & & U^{n+1} & & D \\
 i=1 & \left[ \begin{array}{cccc} 2+e^* & -1 & & \\ -1 & 2+e_i^n & & -1 \\ & -k_s/k & (k_s/k+1)+e_j^n & -1 \\ & & -1 & 2+e_i^n \\ & & & -1 & 2+e_{K-1}^n \end{array} \right] & \begin{bmatrix} U_1 \\ U_i \\ U_j \\ U_i \\ U_{K-1} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} (e^*-2d)U_1^n + (e_2^n + 2d)U_2^n \\ d U_{i-1}^n - (2d - e_i^n)U_i^n + d U_{i+1}^n \\ d(k_s/k)U_{j-1}^n - (d(k_s/k+1) - e_j^n)U_j^n + d U_{j+1}^n \\ d U_{i-1}^n - (2d - e_i^n)U_i^n + d U_{i+1}^n \\ d U_{K-2}^n - (2d - e_{K-1}^n)U_{K-1}^n \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

$$e_i^n = \frac{(\ln r_{De})^2 (\Delta x_D)^2 a}{\theta (r_{De})^{-2(i-1)\Delta x_D} \Delta t_D^n \gamma_i^n} = \frac{1}{\gamma_i^n},$$

$$a = \frac{k}{k_s} \quad \text{para la región con daño } (i < j),$$

$$a = 1 \quad \text{para una región sin daño } (i \geq j).$$

$$d = \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{\alpha_i^n}{\gamma_i^n},$$

$$e^* = \frac{1}{\beta^n} = \frac{2k c_D (\Delta x_D) (\ln r_{De})}{\theta k_s \Delta t_D^n}.$$

**Apéndice D.**

**Producción a Gasto Variable: Radio del Pozo Finito.**

Sea  $p_D(r_D, t_D)$  la distribución de la presión adimensional para el caso de gasto variable.

Sea  $p_{qD}(r_D, t_D)$  la distribución de la presión como resultado de una producción a gasto constante, con una frontera externa cerrada o a presión constante. Para el caso de gasto variable, se considera que el pozo está en un yacimiento infinito, la distribución de presión satisface las Ecs. (D.1), (D.2), (D.3) y (D.4).

Ecuación diferencial de flujo:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D}, \tag{D.1}$$

Condiciones de frontera:

Interna (en el pozo),

$$\left( r_D \frac{dp_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = -q_D(t_D). \tag{D.2}$$

Externa,

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0. \quad t_D > 0 \tag{D.3}$$

Condición inicial,

$$p_D(r_D, 0) = 0, \tag{D.4}$$

La solución para este problema es sencilla si se considera que la solución para el problema a gasto constante,  $p_{qD}(r_D, t_D)$ , es conocida, la cual satisface las Ecs. (D.2), (D.3), (D.4) y la ecuación para el gasto constante:

$$\left( r_D \frac{d\bar{p}_{qD}}{dr_D} \right)_{r_D=1} = -\frac{1}{s}. \quad (D.5)$$

Si  $\bar{q}_D(s)$  es la transformada de Laplace de  $q_D(t_D)$ , se deduce que  $s\bar{q}_D\bar{p}_{qD}$  satisface las Ecs. (D.6), (D.7) y (D.8), las cuales son las transformadas de Laplace de las Ecs. (D.1), (D.2) y (D.3),

Ecuación diferencial de flujo:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial r_D} = s\bar{p}_D, \quad (D.6)$$

Condiciones de frontera:

Interna (en el pozo),

$$\left( r_D \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = -\bar{q}_D, \quad (D.7)$$

Externa,

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{p}_D(r_D, s) = 0, \quad (D.8)$$

Por lo tanto,

$$\bar{p}_D = s \bar{q}_D \bar{p}_{qD}, \quad (D.9)$$

La propiedad de convolución establece que:

$$L^{-1} \{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du, \quad (D.10)$$

aplicando la Ec. (D.10) a la Ec. (D.9):

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_D(t_D - u) p_{qD}(r_D, u) du, \quad (D.11)$$

la Ec. (D.11) se reescribe como:

$$p_D(r_D, t_D) = \int_0^{t_D} q_D(t_D - u) p'_{qD}(r_D, u) du, \quad (D.12)$$

alternativamente, la Ec. (D.12) puede expresarse:

$$p_D(r_D, t_D) = \int_0^{t_D} q_D(u) p'_{qD}(r_D, t_D - u) du, \quad (D.13)$$

donde

$$p'_{qD} = \frac{dp_{qD}}{dt_D}, \quad (D.14)$$

**Apéndice E.**

**Solución de la Ecuación de Difusión Para un Pozo que Produce a Gasto Constante en un Yacimiento Infinito con Geometría Radial (se Incluye el Efecto de Daño y Almacenamiento).**

Se considera el flujo de un fluido ligeramente compresible que fluye en un medio poroso homogéneo, con geometría radial de dimensión infinita. El yacimiento tiene un pozo que produce a gasto adimensional constante,  $q_D$ , situado a un radio adimensional  $r_D = 0$ . Se consideran los efectos de daño y almacenamiento. El modelo matemático que describe tal fenómeno se representa por la ecuación diferencial siguiente;

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D}, \quad (\text{E.1})$$

la condición de frontera interna se expresa por las Ecs. (E.2) y (E.3):

$$C_D \frac{dp_{qwD}}{dt_D} - \left( r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 1 \quad (\text{E.2})$$

y

$$p_{qwD}(t_D) = p_D(1, t_D) - S_d \left( r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1}. \quad (\text{E.3})$$

La condición de frontera externa,

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0 \quad (\text{E.4})$$

y la condición inicial

$$p_D(r_D, 0) = 0. \quad (\text{E.5})$$

La solución del problema de valores inicial y de frontera, de las Ecs. (E.1) a la (E.5), se obtiene empleando el método de la transformada de Laplace en la manera siguiente:

Se aplica la transformada de Laplace al sistema de ecuaciones de (E.1) a la (E.5),

$$\frac{d^2 \bar{p}_D}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} = s\bar{p}_D, \quad (E.6)$$

$$C_D s \bar{p}_{qwD} - \left( r_D \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = \frac{1}{s}, \quad (E.7)$$

$$\bar{p}_{qwD} = \bar{p}_D(1, s) - S_d \left( r_D \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} \quad (E.8)$$

y

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{p}_D(r_D, s) = 0. \quad (E.9)$$

La solución general de la Ec. (E.5) es:

$$\bar{p}_D(r_D, s) = AK_0(\sqrt{s}r_D) + BI_0(\sqrt{s}r_D). \quad (E.10)$$

Aplicando la condición de frontera de la Ec. (E.9) a la solución expresada por la Ec. (E.10):

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{p}_D(r_D, s) = \lim_{r_D \rightarrow \infty} \left( AK_0(\sqrt{s}r_D) + BI_0(\sqrt{s}r_D) \right) = 0. \quad (E.11)$$

La Ec. (E.11) se simplifica al considerar que el límite de una suma de funciones es igual a la suma de los límites de las funciones, es decir,

$$A \lim_{r_D \rightarrow \infty} \left( K_0 \left( \sqrt{s} r_D \right) \right) + B \lim_{r_D \rightarrow \infty} \left( I_0 \left( \sqrt{s} r_D \right) \right) = 0. \quad (\text{E.12})$$

Las funciones modificadas de Bessel de modificadas de orden cero cumplen las identidades siguientes:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \left( K_0 \left( \sqrt{s} r_D \right) \right) = 0 \quad (\text{E.13})$$

y

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \left( I_0 \left( \sqrt{s} r_D \right) \right) = \infty. \quad (\text{E.14})$$

Se substituyen las Ecs. (E.13) y (E.14) en la Ec. (E.12) y para que la suma de los límites sea finita, es necesario que:

$$B = 0. \quad (\text{E.15})$$

Por lo tanto, la Ec. (E.10) se expresa,

$$\bar{p}_D(r_D, s) = AK_0 \left( \sqrt{s} r_D \right). \quad (\text{E.16})$$

Se substituye la Ec. (E.8) en la Ec. (E.7) y se obtiene:

$$C_D s \left( \bar{p}_D(1, s) - S_d \left( r_D \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} \right) - \left( r_D \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = \frac{1}{s}. \quad (\text{E.17})$$

La Ec. (E.16) se substituye en la Ec. (E.17) y se obtiene la ecuación siguiente,

$$AC_D s K_0(\sqrt{s}) + A\sqrt{s}(1 + C_D S_d s) K_1(\sqrt{s}) = \frac{1}{s}, \quad (\text{E.18})$$

a partir de la cual se despeja la constante  $A$ ,

$$A = \frac{1}{s} \frac{1}{C_D s K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s}(1 + C_D S_d s) K_1(\sqrt{s})}. \quad (\text{E.19})$$

La constante de integración  $A$ , expresada por la Ec. (E.19), se sustituye en la Ec. (E.16),

$$\bar{p}_D(r_D, s) = \frac{1}{s} \frac{K_0(\sqrt{s} r_D)}{C_D s K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s}(1 + C_D S_d s) K_1(\sqrt{s})} \quad (\text{E.20})$$

Se sustituye la Ec. (E.20) en la Ec. (E.8),

$$\bar{p}_{qWD} = \frac{1}{s} \frac{K_0(\sqrt{s}) + S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})}{C_D s K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s}(1 + C_D S_d s) K_1(\sqrt{s})}. \quad (\text{E.21})$$

El miembro derecho de la Ec. (E.20) se describe en la forma siguiente:

$$\bar{p}_{qWD} = \frac{1}{s} \frac{K_0(\sqrt{s}) + S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s} K_1(\sqrt{s}) + C_D s (K_0(\sqrt{s}) + S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s}))}. \quad (\text{E.22})$$



## Apéndice F.

### Gasto Adimensional a Presión Constante.

La presión en un pozo que produce a presión constante definida por la Ec. (3.4), en el plano de Laplace, puede expresarse:

$$\bar{P}_{wFD}(s) = \frac{1}{s}.$$

Por lo tanto,

$$\bar{q}_{wD}(s) = \frac{1}{s^2 \bar{P}_{qWD}(s)}. \quad (F.1)$$

Se sustituye la Ec. (3.9) en la Ec. (F.1) obteniéndose:

$$\bar{q}_{wD}(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{s C_D K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} (1 + s C_d S_d) K_1(\sqrt{s})}{K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} S_d K_1(\sqrt{s})} \right].$$

La ecuación anterior se factoriza en la manera siguiente:

$$\bar{q}_{wD}(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{s C_D K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} K_1(\sqrt{s}) + s C_d S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})}{K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} S_d K_1(\sqrt{s})} \right],$$

$$\bar{q}_{wD}(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{s C_D [K_0(\sqrt{s}) + S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})] + \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})}{K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} S_d K_1(\sqrt{s})} \right]$$

por lo tanto,

$$\bar{q}_{wD}(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{s C_D \left[ \cancel{K_0(\sqrt{s}) + S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})} \right] + \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})}{\cancel{K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} S_d K_1(\sqrt{s})}} + \frac{\sqrt{s} K_1(\sqrt{s})}{K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} S_d K_1(\sqrt{s})} \right].$$

Finalmente, se tiene la ecuación siguiente:

$$\bar{q}_{wD}(s) = C_D + \frac{\sqrt{s} K_1(\sqrt{s})}{s K_0(\sqrt{s}) + s \sqrt{s} S_d K_1(\sqrt{s})}. \quad (\text{F.2})$$

## Apéndice G.

### Transformada Inversa de Laplace de la Ecuación (3.9), Presión de un Pozo que Produce a un Gasto Adimensional Unitario Cuando $C_D = 0$

De la Ec. (3.16), se considera la expresión siguiente:

$$h^*(s) = \frac{K_0(\sqrt{s})}{\sqrt{s}K_1(\sqrt{s})}. \quad (\text{G.1})$$

Se aplica Teorema de Inversión del plano de Laplace al plano real el cual establece que,

$$h(t_D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t_D} h^*(\lambda) d\lambda, \quad (\text{G.2})$$

donde  $\lambda$  se utiliza para representar una variable en el espacio complejo,  $h^*(\lambda)$  representa una función en el espacio complejo y  $\gamma$  la mayor de las singularidades de  $h^*(\lambda)$  que se localizan a la izquierda de la línea  $(\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$ .

Se sustituye la Ec. (G.1) en la Ec. (G.2) para obtener su expresión correspondiente en el espacio real,

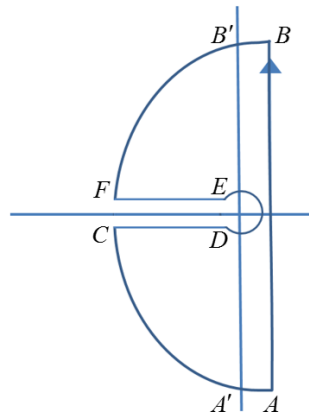
$$h(t_D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t_D} \frac{K_0(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}K_1(\sqrt{\lambda})} d\lambda. \quad (\text{G.3})$$

Se emplea el cambio de variables determinado por la expresión  $\mu = \sqrt{\lambda}$  en la Ec. (G.3) y se obtiene la ecuación siguiente:

$$h(t_D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t_D} \frac{K_0(\mu)}{\mu K_1(\mu)} d\lambda. \quad (\text{G.4})$$

El integrando tiene un corte de rama en  $\lambda = 0$  por lo cual se emplea el contorno de la **Figura G.1** (Carslaw and Jaeger, 1959, pág. 303). Para calcular la integral de línea en el segmento  $EF$ , el lado superior del corte de rama, se emplea la relación  $\lambda = u^2 e^{i\pi} = -u^2$ , de tal manera que  $\mu = u e^{i\pi/2} = iu$ , y por lo tanto la Ec. (G.4) se rescribe como:

$$h_{EF}(t_D) = -\frac{1}{\pi i} \int_0^\infty (e^{-u^2 t_D}) \frac{K_0(iu)}{iK_1(iu)} du. \quad (\text{G.5})$$



**Figura G.1.** Contorno de integración.

Las funciones de Bessel modificadas de primer orden con argumento imaginario puro, cumplen las identidades siguientes:

$$K_0(ix) = -\frac{\pi}{2} (Y_0(x) + iJ_0(x)) \quad (\text{G.6})$$

y

$$K_1(ix) = \frac{\pi}{2} (-J_1(x) + iY_1(x)). \quad (\text{G.7})$$

Se sustituyen las Ecs. (G.6) y (G.7) en la Ec. (G.5) y se simplifica la expresión resultante para obtener la expresión siguiente:

$$h_{EF}(t_D) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (e^{-u^2 t_D}) \frac{\frac{\pi}{2} (Y_0(u) + i J_0(u))}{\frac{\pi}{2} (-J_1(u) + i Y_1(u))} du. \quad (G.8)$$

Se eliminan los factores comunes en el numerador y denominador de la Ec. (G.8),

$$h_{EF}(t_D) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (e^{-u^2 t_D}) \frac{(Y_0(u) + i J_0(u))}{(J_1(u) - i Y_1(u))} du. \quad (G.9)$$

Se definen las expresiones siguientes:

$$Num = Y_0(u) + i J_0(u) \quad (G.10)$$

y

$$Den = J_1(u) - i Y_1(u). \quad (G.11)$$

El complejo conjugado de la Ec. (G.11) es:

$$\overline{Den} = J_1(u) + i Y_1(u). \quad (G.12)$$

Se multiplican miembro a miembro las Ecs. (G.11) y (G.12),

$$Den \overline{Den} = Y_1^2(u) + J_1^2(u). \quad (G.13)$$

Se multiplican miembro a miembro las Ecs. (G.10) y (G.12), y se simplifica la ecuación resultante:

$$\overline{num Den} = \frac{2}{\pi u} + iA_1 \quad (G.14)$$

donde

$$A_1 = Y_0(u)Y_1(u) + J_0(u)J_1(u). \quad (G.15)$$

Se multiplican el numerador y denominador del integrando de la Ec. (G.9) por el conjugado del denominador, Ec. (G.12), y se sustituyen las Ecs. (G.13) y (G.14) en la expresión resultante para obtener la ecuación siguiente:

$$h_{EF}(t_D) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left( e^{-u^2 t_D} \right) \left( \frac{2}{\pi u} + iA_1 \right)}{Y_1^2(u) + J_1^2(u)} du. \quad (G.16)$$

Se repite el proceso desarrollado para la evaluación de la integral de línea en el segmento  $CD$ , el lado inferior del corte de rama. Se emplea la relación  $\lambda = u^2 e^{-i\pi} = -u^2$ , de tal manera que  $\mu = u e^{-i\pi/2} = -iu$  y por lo tanto la Ec. (G.4) se reescribe como:

$$h_{CD}(t_D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^0 e^{-u^2 t_D} \frac{K_0(-iu)}{-iuK_1(-iu)} (-2u) du. \quad (G.17)$$

Se simplifica la Ec. (G.17),

$$h_{CD}(t_D) = -\frac{1}{\pi} \int_{\infty}^0 e^{-u^2 t_D} \frac{K_0(-iu)}{K_1(-iu)} du. \quad (G.18)$$

Las funciones de Bessel modificadas de orden cero con argumento imaginario cumplen las relaciones siguientes:

$$K_0(-ix) = \frac{\pi}{2}(-Y_0(x) + iJ_0(x)) \quad (\text{G.19})$$

y

$$K_1(-ix) = \frac{\pi}{2}(-J_1(x) - iY_1(x)). \quad (\text{G.20})$$

Se sustituyen las Ecs. (G.19) y (G.20) en la Ec. (G.18),

$$h_{CD}(t_D) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 (e^{-u^2 t_D}) \frac{\frac{\pi}{2}(-Y_0(u) + iJ_0(u))}{\frac{\pi}{2}(-J_1(u) - iY_1(u))} du. \quad (\text{G.21})$$

Se eliminan los factores comunes en el numerador y denominador del integrando de la Ec. (G.21), y se invierten los límites de integración de la integral resultante,

$$h_{CD}(t_D) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (e^{-u^2 t_D}) \frac{(Y_0(u) - iJ_0(u))}{(J_1(u) + iY_1(u))} du. \quad (\text{G.22})$$

Se definen las expresiones siguientes,

$$Num = Y_0(u) - iJ_0(u) \quad (\text{G.23})$$

y

$$Den = J_1(u) + iY_1(u). \quad (\text{G.24})$$

El complejo conjugado de la Ec. (G.24) es:

$$\overline{Den} = J_1(u) - iY_1(u). \quad (\text{G.25})$$

Se multiplican miembro a miembro las Ecs. (G.24) y (G.25),

$$\overline{DenDen} = J_1^2(u) + Y_1^2(u). \quad (G.26)$$

Se multiplican miembro a miembro las Ecs. (G.23) y (G.25) y se agrupa la parte real y la parte imaginaria de la expresión resultante,

$$\overline{NumDen} = \frac{2}{\pi u} - i A_1. \quad (G.27)$$

Se multiplican el numerador y denominador de la Ec. (G.22) por el conjugado complejo del denominador, Ec.(G.25) y se sustituyen las Ecs. (G.26) y (G.27) para simplificar la expresión resultante,

$$h_{CD}(t_D) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(e^{-u^2 t_D}) \left( \frac{2}{\pi u} - i A_1 \right)}{J_1^2(u) + Y_1^2(u)} du. \quad (G.28)$$

La transformada inversa de Laplace de la expresión  $h(t_D)$  es:

$$h(t_D) = h_{EF}(t_D) + h_{CD}(t_D). \quad (G.29)$$

Se sustituyen las Ecs. (G.16) y (G.28) en la Ec. (G.29) y se obtiene,

$$h(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{u} \right) \frac{e^{-u^2 t_D}}{J_1^2(u) + Y_1^2(u)} du. \quad (G.30)$$

La expresión,

$$f^*(s) = \frac{K_0(\sqrt{s})}{s \left\{ \sqrt{s} K_1(\sqrt{s}) \right\}} \quad (G.31)$$



se relaciona con la expresión  $h^*(s)$ , Ec. (G.1) en la manera siguiente:

$$f^*(s) = \frac{1}{s} h^*(s). \quad (\text{G.32})$$

La transformada inversa de Laplace de  $f^*(s)$  se expresa como:

$$f(t_D) = \int_0^{t_D} h(\tau) d\tau. \quad (\text{G.33})$$

Se sustituye la Ec. (G.30) en la Ec. (G.33) y se simplifica,

$$f(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \left( \frac{1}{u^3} \right) \frac{(1 - e^{-u^2 t_D})}{J_1^2(u) + Y_1^2(u)} du. \quad (\text{G.34})$$

## Apéndice H.

**Transformada Inversa de Laplace de la Ecuación (3.9), para la Presión de un Pozo que Produce a un Gasto Adimensional Unitario, Cuando  $C_D \neq 0$ .**

De la Ec. (3.9), se considera la expresión siguiente:

$$h^*(s; a, b, c, d) = \frac{K_0(\sqrt{s}) + a\sqrt{s}K_1(\sqrt{s})}{bsK_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s}(c + ds)K_1(\sqrt{s})}, \quad (\text{H.1})$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son constantes mayores que cero y la cual se encuentra en el espacio de Laplace. Se aplica el Teorema de Inversión a la Ec. (H.1), definido en la Ec. (G.2) para obtener su expresión correspondiente en el espacio real,

$$h(t_D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t_D} \frac{K_0(\sqrt{\lambda}) + a\sqrt{\lambda}K_1(\sqrt{\lambda})}{b\lambda K_0(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}(c + d\lambda)K_1(\sqrt{\lambda})} d\lambda. \quad (\text{H.2})$$

Se realiza el cambio de variables determinado por la expresión  $\mu = \sqrt{\lambda}$  en la Ec. (H.2) y se obtiene la ecuación siguiente:

$$h(t_D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t_D} \frac{K_0(\mu) + a\mu K_1(\mu)}{b\lambda K_0(\mu) + \mu(c + d\lambda)K_1(\mu)} d\lambda. \quad (\text{H.3})$$

El integrando tiene un corte de rama en  $\lambda = 0$ , por lo cual se emplea el contorno de la **Figura G.1**. Para calcular la integral de línea en el segmento  $EF$  se emplea la relación  $\lambda = u^2 e^{i\pi} = -u^2$  la cual implica que  $\mu = u e^{i\pi/2} = iu$ , y por consiguiente, la Ec. (H.3) se describe de la manera siguiente:

$$h_{EF}(t_D) = -\frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \left( e^{-u^2 t_D} \right) \frac{K_0(iu) + iauK_1(iu)}{-buK_0(iu) + i(c-du^2)K_1(iu)} du. \quad (H.4)$$

Se sustituyen las Ecs. (G.6) y (G.7) en la Ec. (H.4) y se simplifica la expresión resultante para obtener la expresión siguiente:

$$h_{EF}(t_D) = -\frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \left( e^{-u^2 t_D} \right) \frac{-(Y_0(u) + iJ_0(u)) + iau(-J_1(u) + iY_1(u))}{bu(Y_0(u) + iJ_0(u)) + i(c-du^2)(-J_1(u) + iY_1(u))} du. \quad (H.5)$$

Se agrupan la parte real y la parte imaginaria del numerador y del denominador del integrando de la Ec. (H.5), y en la expresión resultante se multiplica el numerador y el denominador por la unidad imaginaria  $i$ ,

$$h_{EF}(t_D) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left( e^{-u^2 t_D} \right) \left( -(J_0(u) + auJ_1(u)) + i(Y_0(u) + auY_1(u)) \right)}{\left( buY_0(u) - (c-du^2)Y_1(u) \right) + i \left( buJ_0(u) - (c-du^2)J_1(u) \right)} du. \quad (H.6)$$

Se definen las expresiones siguientes:

$$Num = \left( -(J_0(u) + auJ_1(u)) + i(Y_0(u) + auY_1(u)) \right) \quad (H.7)$$

y

$$Den = \left( buY_0(u) - (c-du^2)Y_1(u) \right) + i \left( buJ_0(u) - (c-du^2)J_1(u) \right). \quad (H.8)$$

El complejo conjugado de la Ec. (H.8) es:

$$\overline{Den} = \left( buY_0(u) - (c-du^2)Y_1(u) \right) - i \left( buJ_0(u) - (c-du^2)J_1(u) \right). \quad (H.9)$$

Se multiplican miembro a miembro las Ecs. (H.8) y (H.9),

$$Den \overline{Den} = \left( buY_0(u) - (c - du^2)Y_1(u) \right)^2 + \left( buJ_0(u) - (c - du^2)J_1(u) \right)^2. \quad (H.10)$$

Se multiplican miembro a miembro las Ecs. (H.7) y (H.9), y se simplifican para obtener la expresión siguiente:

$$num \overline{Den} = \left( -\frac{2}{\pi u} \right) \left( c + (ab - d)u^2 \right) + i(A_1 + A_2) \quad (H.11)$$

donde

$$A_1 = buJ_0^2(u) + ((ab + d)u^2 - c)J_1(u)J_0(u) - au(c - du^2)J_1^2(u) \quad (H.12)$$

y

$$A_2 = buY_0^2(u) + ((ab + d)u^2 - c)Y_1(u)Y_0(u) - au(c - du^2)Y_1^2(u). \quad (H.13)$$

Se multiplica el denominador y numerador del integrando de la Ec. (H.6) por el conjugado complejo del denominador y se emplean las Ecs. (H.10) y (H.11) para simplificar la expresión resultante,

$$h_{EF}(t_D) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left( e^{-u^2 t_D} \right) \left( \left( -\frac{2}{\pi u} \right) \left( c + (ab - d)u^2 \right) + i(A_1 + A_2) \right)}{\left( buY_0(u) - (c - du^2)Y_1(u) \right)^2 + \left( buJ_0(u) - (c - du^2)J_1(u) \right)^2} du. \quad (H.14)$$

Se repite el proceso desarrollado para la evaluación de la integral de línea en el segmento  $CD$ , el lado inferior del corte de rama. Se emplea la relación  $\lambda = u^2 e^{-i\pi} = -u^2$ , de tal manera que  $\mu = u e^{-i\pi/2} = -iu$ , en la Ec. (H.4) para obtener la expresión siguiente:

$$h_{CD}(t_D) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 \left( e^{-u^2 t_D} \right) \frac{K_0(-iu) - iauK_1(-iu)}{ubK_0(-iu) + i(c - du^2)K_1(-iu)} du. \quad (\text{H.15})$$

Las funciones de Bessel modificadas de orden cero con argumento imaginario cumplen las relaciones siguientes:

$$K_0(-ix) = \frac{\pi}{2} (-Y_0(x) + iJ_0(x)) \quad (\text{H.16})$$

y

$$K_1(-ix) = \frac{\pi}{2} (-J_1(x) - iY_1(x)). \quad (\text{H.17})$$

Se sustituyen las Ecs. (H.16) y (H.17) en la Ec. (H.15),

$$h_{CD}(t_D) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 \left( e^{-u^2 t_D} \right) \frac{\frac{\pi}{2} (-Y_0(u) + iJ_0(u)) - iau \frac{\pi}{2} (-J_1(u) - iY_1(u))}{ub \frac{\pi}{2} (-Y_0(u) + iJ_0(u)) + i(c - du^2) \frac{\pi}{2} (-J_1(u) - iY_1(u))} du. \quad (\text{H.18})$$

Se simplifica la Ec. (H.18),

$$h_{CD}(t_D) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 \left( e^{-u^2 t_D} \right) \frac{(-Y_0(u) + iJ_0(u)) - iau(-J_1(u) - iY_1(u))}{ub(-Y_0(u) + iJ_0(u)) + i(c - du^2)(-J_1(u) - iY_1(u))} du. \quad (\text{H.19})$$

Se agrupa la parte real y la parte imaginaria del numerador y del denominador del integrando de la Ec. (H.19),

$$h_{CD}(t_D) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\left( e^{-u^2 t_D} \right) \left( -(J_0(u) + auJ_1(u)) - i(Y_0(u) + auY_1(u)) \right)}{\left( -ubY_0(u) + (c - du^2)Y_1(u) \right) + i \left( -(c - du^2)J_1(u) + ubJ_0(u) \right)} du. \quad (\text{H.20})$$

Se invierten los límites de integración de la Ec. (H.20),

$$h_{CD}(t_D) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left( e^{-u^2 t_D} \right) \left( (J_0(u) + auJ_1(u)) + i(Y_0(u) + auY_1(u)) \right)}{\left( -ubY_0(u) + (c - du^2)Y_1(u) \right) + i\left( -(c - du^2)J_1(u) + ubJ_0(u) \right)} du. \quad (\text{H.21})$$

Se definen las expresiones siguientes:

$$Num = \left( (J_0(u) + auJ_1(u)) + i(Y_0(u) + auY_1(u)) \right) \quad (\text{H.22})$$

y

$$Den = \left( -ubY_0(u) + (c - du^2)Y_1(u) \right) + i\left( -(c - du^2)J_1(u) + ubJ_0(u) \right). \quad (\text{H.23})$$

El conjugado complejo de la Ec. (H.23) es:

$$\overline{Den} = \left( -ubY_0(u) + (c - du^2)Y_1(u) \right) - i\left( -(c - du^2)J_1(u) + ubJ_0(u) \right). \quad (\text{H.24})$$

Se multiplican miembro a miembro las Ecs. (H.23) y (H.24),

$$Den\overline{Den} = \left( -ubY_0(u) + (c - du^2)Y_1(u) \right)^2 + \left( -(c - du^2)J_1(u) + ubJ_0(u) \right)^2. \quad (\text{H.25})$$

Se describen la Ec. (H.25) en la manera siguiente:

$$Den\overline{Den} = \left( buY_0(u) - (c - du^2)Y_1(u) \right)^2 + \left( buJ_0(u) - (c - du^2)J_1(u) \right)^2. \quad (\text{H.26})$$

Se multiplican miembro a miembro las Ecs. (H.22) y (H.24) y se agrupa la parte real y la parte imaginaria de la expresión resultante,

$$Num\overline{Den} = \left( -\frac{2}{\pi u} \right) \left( c + (ab - d)u^2 \right) - i(A_1 + A_2). \quad (\text{H.27})$$

Se multiplican el denominador y numerador del integrando de la Ec. (H.21) por el conjugado complejo del denominador y se sustituyen las Ecs. (H.26) y (H.27) para simplificar la expresión resultante,

$$h_{CD}(t_D) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left( e^{-u^2 t_D} \right) \left( \left( -\frac{2}{\pi u} \right) (c + (ab - d)u^2) - i(A_1 + A_2) \right)}{\left( buY_0(u) - (c - du^2)Y_1(u) \right)^2 + \left( buJ_0(u) - (c - du^2)J_1(u) \right)^2} du. \quad (H.28)$$

La transformada inversa de Laplace de la expresión  $h(t_D)$  es:

$$h(t_D) = h_{EF}(t_D) + h_{CD}(t_D). \quad (H.29)$$

Se sustituyen las Ecs. (H.14) y (H.28) en la Ec. (H.29),

$$h(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{u} \right) \frac{e^{-u^2 t_D} \left( (c + (ab - d)u^2) \right)}{\left( buY_0(u) - (c - du^2)Y_1(u) \right)^2 + \left( buJ_0(u) - (c - du^2)J_1(u) \right)^2} du. \quad (H.30)$$

La expresión

$$f^*(s; a, b, c, d) = \frac{K_0(\sqrt{s}) + a\sqrt{s}K_1(\sqrt{s})}{s \left( bsK_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s}(c + ds)K_1(\sqrt{s}) \right)} \quad (H.31)$$

se relaciona a la expresión  $h^*(s; a, b, c, d)$  en la manera siguiente:

$$f^*(s; a, b, c, d) = \frac{1}{s} h^*(s; a, b, c, d). \quad (H.32)$$

A partir de la Ec. (H.32), la transformada inversa de Laplace de  $f^*(s; a, b, c, d)$  se expresa como:

$$f(t_D; a, b, c, d) = \int_0^{t_D} h(\tau; a, b, c, d) d\tau. \quad (\text{H.33})$$

Se sustituye la Ec. (H.30) en la Ec. (H.33), se intercambian las integrales y se simplifica la expresión resultante para obtener la ecuación siguiente:

$$f(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \left( \frac{1}{u^3} \right) \frac{(1 - e^{-u^2 t_D}) (c + (ab - d)u^2)}{(buY_0(u) - (c - du^2)Y_1(u))^2 + (buJ_0(u) - (c - du^2)J_1(u))^2} du. \quad (\text{H.34})$$



**Apéndice I.**

**Transformada Inversa de Laplace del Gasto Adimensional en Función de la Presión Adimensional de un Pozo Fluyendo.**

De la Ec. (3.22) se considera la expresión siguiente:

$$h^*(s;a) = \frac{\sqrt{s}K_1(\sqrt{s})}{s(K_0(\sqrt{s}) + a\sqrt{s}K_1(\sqrt{s}))}, \quad (1.1)$$

donde  $a$  es una constante positiva. Se aplica el Teorema de Inversión, Ec. (G.2), a la Ec. (1.1) para obtener su correspondiente expresión en el espacio real

$$h(t_D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t_D} \frac{K_1(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}(K_0(\sqrt{\lambda}) + a\sqrt{\lambda}K_1(\sqrt{\lambda}))} d\lambda. \quad (1.2)$$

Se emplea el cambio de variable determinado por la expresión  $\mu = \sqrt{\lambda}$  en la Ec. (1.2) y se obtiene la ecuación siguiente:

$$h_{EF}(t_D) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{\lambda t_D} \frac{K_1(\mu)}{\mu(K_0(\mu) + a\mu K_1(\mu))} d\lambda. \quad (1.3)$$

El integrando tiene un corte de rama en  $\lambda = 0$ , por lo cual se emplea el contorno de la **Fig. G.1**. Para calcular la integral de línea en el segmento  $EF$ , el lado superior del corte de rama, se emplea la relación  $\lambda = u^2 e^{i\pi} = -u^2$ , de tal manera que  $\mu = u e^{i\pi/2} = iu$ , y por lo tanto la Ec. (1.3) se reescribe como:

$$h_{EF}(t_D) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u^2 t_D} \frac{K_1(iu)}{(K_0(iu) + ai u K_1(iu))} du. \quad (1.4)$$

Se sustituyen las Ecs. (G.6) y (G.7) en la Ec. (I.4) y se simplifica la expresión resultante,

$$h_{EF}(t_D) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2 t_D} (-J_1(u) + iY_1(u))}{(-Y_0(u) + iJ_0(u)) + ai u (-J_1(u) + iY_1(u))} du. \quad (I.5)$$

Se agrupan la parte real y la parte imaginaria en el numerador y en el denominador del integrando de la Ec. (I.5),

$$h_{EF}(t_D) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2 t_D} (-J_1(u) + iY_1(u))}{(Y_0(u) + auY_1(u)) + i(J_0(u) + auJ_1(u))} du. \quad (I.6)$$

Se definen las expresiones siguientes:

$$Num = (-J_1(u) + iY_1(u)) \quad (I.7)$$

y

$$Den = (Y_0(u) + auY_1(u)) + i(J_0(u) + auJ_1(u)). \quad (I.8)$$

El conjugado complejo de la expresión (I.8) es:

$$\overline{Den} = (Y_0(u) + auY_1(u)) - i(J_0(u) + auJ_1(u)). \quad (I.9)$$

Se multiplican miembro a miembro las Ecs. (I.8) y (I.9)

$$Den \overline{Den} = (Y_0(u) + auY_1(u))^2 + (J_0(u) + auJ_1(u))^2. \quad (I.10)$$

Se multiplican miembro a miembro las Ecs. (I.7) y (I.9), y se simplifica la expresión resultante,

$$\text{num } \overline{\text{Den}} = -\frac{2}{\pi u} + i A_1 \quad (I.11)$$

donde

$$A_1 = J_0(u)J_1(u) + Y_0(u)Y_1(u) + au(J_1^2(u) + Y_1^2(u)). \quad (I.12)$$

Se multiplican el numerador y denominador del integrando de la Ec. (I.6) por el conjugado del denominador, y se sustituyen las Ecs. (I.10) y (I.11) en la expresión resultante para obtener la ecuación siguiente:

$$h_{EF}(t_D) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2 t_D} \left( -\frac{2}{\pi u} + i A_1 \right)}{\left( Y_0(u) + au Y_1(u) \right)^2 + \left( au J_1(u) + J_0(u) \right)^2} du. \quad (I.13)$$

Se repite el proceso desarrollado para la evaluación de la integral de línea en el segmento  $CD$ , el lado inferior del corte de rama. Se emplea la relación  $\lambda = u^2 e^{-i\pi} = -u^2$ , de tal manera que  $\mu = u e^{-i\pi/2} = -iu$  y por lo tanto la Ec. (I.2) se reescribe como:

$$h_{CD}(t_D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^0 e^{-u^2 t_D} \frac{K_1(-iu)}{-iu(K_0(-iu) - ai u K_1(-iu))} (-2u) du. \quad (I.14)$$

Se sustituyen las Ecs. (G.19) y (G.20) en la Ec. (I.14),

$$h_{CD}(t_D) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u^2 t_D} \frac{\frac{\pi}{2}(-J_1(u) - i Y_1(u))}{\left( \frac{\pi}{2}(-Y_0(u) + i J_0(u)) - ai u \frac{\pi}{2}(-J_1(u) - i Y_1(u)) \right)} du. \quad (I.15)$$

Se eliminan los factores comunes en el numerador y denominador del integrando de la Ec. (I.15),

$$h_{CD}(t_D) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u^2 t_D} \frac{(J_1(u) + iY_1(u))}{((Y_0(u) - iJ_0(u)) - ai u (J_1(u) + iY_1(u)))} du. \quad (I.16)$$

Se agrupa la parte real y la parte imaginaria del numerador y del denominador del integrado de la Ec. (I.16),

$$h_{CD}(t_D) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2 t_D} (J_1(u) + iY_1(u))}{(Y_0(u) + au Y_1(u)) - i(J_0(u) + au J_1(u))} du. \quad (I.17)$$

Se definen las expresiones siguientes:

$$Num = (J_1(u) + iY_1(u)) \quad (I.18)$$

y

$$Den = (Y_0(u) + au Y_1(u)) - i(J_0(u) + au J_1(u)). \quad (I.19)$$

El conjugado complejo de la Ec. (I.19) es:

$$\overline{Den} = (Y_0(u) + au Y_1(u)) + i(J_0(u) + au J_1(u)). \quad (I.20)$$

Se multiplican miembro a miembro las Ecs. (I.19) y (I.20),

$$Den \overline{Den} = (Y_0(u) + au Y_1(u))^2 + (J_0(u) + au J_1(u))^2. \quad (I.21)$$

Se multiplican miembro a miembro las Ecs. (I.18) y (I.20) y se agrupan la parte real y la parte imaginaria de la expresión resultante,

$$Num \overline{Den} = \frac{2}{\pi u} + i A_1. \quad (I.22)$$

Se multiplican el numerador y denominador del integrando de la Ec. (I.17) por el conjugado del denominador, y se sustituyen las Ecs. (I.21) y (I.22) en la expresión resultante para obtener la ecuación siguiente:

$$h_{CD}(t_D) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2 t_D} \left( \frac{2}{\pi u} + i A_1 \right)}{\left( Y_0(u) + auY_1(u) \right)^2 + \left( J_0(u) + auJ_1(u) \right)^2} du. \quad (I.23)$$

La transformada inversa de Laplace de la expresión  $h(t_D)$  es

$$h(t_D) = h_{EF}(t_D) + h_{CD}(t_D). \quad (I.24)$$

Se sustituyen las Ecs. (I.13) y (I.23) en la Ec. (I.24),

$$h(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{u} \right) \frac{e^{-u^2 t_D}}{\left( Y_0(u) + auY_1(u) \right)^2 + \left( auJ_1(u) + J_0(u) \right)^2} du. \quad (I.25)$$

## Apéndice J.

### Solución de la Ecuación de Difusividad para un Pozo que Produce a Presión Constante.

La solución general de la Ec. (3.56) para un pozo que produce a presión constante durante el periodo de flujo es:

$$\bar{p}_{qD}(r_D, s) = AK_0(\sqrt{s}r_D) + BI_0(\sqrt{s}r_D) \quad (J.1)$$

Se aplica la condición de frontera externa, Ec. (3.55), a la Ec. (J.1),

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{qD}(r_D, s) = \lim_{r_D \rightarrow \infty} (AK_0(\sqrt{s}r_D) + BI_0(\sqrt{s}r_D)) = 0. \quad (J.2)$$

Se simplifica la Ec. (J.2),

$$A \lim_{r_D \rightarrow \infty} (K_0(\sqrt{s}r_D)) + B \lim_{r_D \rightarrow \infty} (I_0(\sqrt{s}r_D)) = 0. \quad (J.3)$$

Para que se cumpla la condición de la Ec. (J.3) se requiere que la constante  $B$  de integración sea igual a cero. Por lo tanto, la Ec. (J.1) se reduce a la expresión siguiente:

$$\bar{p}_{qD}(r_D, s) = AK_0(\sqrt{s}r_D). \quad (J.4)$$

La Ec. (3.53) se sustituye en la Ec. (3.54),

$$\bar{p}_{qwD} = \bar{p}_{qD}(1, s) - S_d \left( r_D \frac{d\bar{p}_{qD}}{dr_D} \right)_{r_D=1} = \frac{1}{s}. \quad (J.5)$$

Se sustituye la Ec. (J.4) en la Ec. (J.5) para obtener la ecuación siguiente:

$$AK_0(\sqrt{s}) + AS_d\sqrt{s}K_1(\sqrt{s}) = \frac{1}{s}. \quad (\text{J.6})$$

A partir de la Ec. (J.6) se obtiene el valor de la constante  $A$  , determinado por:

$$A = \frac{1}{s} \frac{1}{K_0(\sqrt{s}) + S_d\sqrt{s}K_1(\sqrt{s})}. \quad (\text{J.7})$$

Se sustituye la Ec. (J.7) en la Ec. (J.4),

$$\bar{p}_{qD}(r_D, s) = \frac{1}{s} \frac{K_0(\sqrt{sr_D})}{K_0(\sqrt{s}) + S_d\sqrt{s}K_1(\sqrt{s})}. \quad (\text{J.8})$$

## Apéndice K.

### Solución Particular de la Ecuación No Homogénea de la Ecuación (3.64) Del Modelo II.

La ecuación diferencial ordinaria determinada por la Ec. (2.64) es una ecuación diferencial parcial no homogénea. Para este tipo de ecuaciones, la solución general se expresa como la suma de la solución general de la ecuación homogénea más una solución particular de la ecuación no homogénea. La solución general a la ecuación homogénea es:

$$\bar{p}_D(r_D, s) = AK_0(\sqrt{s}r_D) + BI_0(\sqrt{s}r_D). \quad (\text{K.1})$$

Para obtener la solución particular, se aplica el Teorema del libro de Boyce-Di Prima, 1993, el cual dice que:

Si las funciones  $p(x)$ ,  $q(x)$  y  $g(x)$  son continuas en  $\alpha < x < \beta$ , y las funciones  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$  son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea, asociada a la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad (\text{K.2})$$

entonces una solución particular de la ecuación diferencial (K.2) es dada por:

$$y_p(x) = -y_1(x) \int_0^x \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(x) \int_0^x \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt, \quad (\text{K.3})$$

donde

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 \quad (\text{K.4})$$



Para aplicar el teorema anterior se identifican las funciones que intervienen en él,

$$p(r_D) = \frac{1}{r_D}, \quad (\text{K.5})$$

$$q(r_D) = -v, \quad (\text{K.6})$$

$$g(r_D) = -g(r_D), \quad (\text{K.7})$$

$$y_1(r_D) = K_0(\sqrt{v}r_D), \quad (\text{K.8})$$

$$y_2(r_D) = I_0(\sqrt{v}r_D), \quad (\text{K.9})$$

y

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \sqrt{v} K_0(\sqrt{v}r_D) I_1(\sqrt{v}r_D) + \sqrt{v} K_1(\sqrt{v}r_D) I_0(\sqrt{v}r_D) \quad (\text{K.10})$$

Las funciones de Bessel cumplen la ecuación siguiente:

$$K_0(x) I_1(x) + K_1(x) I_0(x) = \frac{1}{x}. \quad (\text{K.11})$$

La Ec. (K.11) se aplica a la Ec. (K.10),

$$W(y_1, y_2) = \sqrt{v} \left( K_0(\sqrt{v}r_D) I_1(\sqrt{v}r_D) + K_1(\sqrt{v}r_D) I_0(\sqrt{v}r_D) \right) = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{v}r_D} = r_D. \quad (\text{K.12})$$

Se sustituyen las Ecs. (K.5) a la (K.12) en la Ec. (K.3),

$$\bar{p}_D(r_D) = K_0(\sqrt{\nu}r_D) \int_a^{r_D} I_0(\sqrt{\nu}t) g(t) t dt - I_0(\sqrt{\nu}r_D) \int_b^{r_D} K_0(\sqrt{\nu}t) g(t) t dt. \quad (\text{K.13})$$

La Ec. (K.13) representa la solución particular de la ecuación no homogénea (3.64). Para que la solución obtenida sea finita para todo valor del radio adimensional, se requiere que  $a=0$  y  $b=\infty$ , sustituyendo estos valores de las constantes en la Ec. (K.13),

$$\bar{p}_D(r_D) = K_0(\sqrt{\nu}r_D) \int_1^{r_D} I_0(\sqrt{\nu}t) g(t) t dt + I_0(\sqrt{\nu}r_D) \int_{r_D}^{\infty} K_0(\sqrt{\nu}t) g(t) t dt. \quad (\text{K.14})$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación no homogénea (3.64) es:

$$\begin{aligned} \bar{p}_D(r_D) = & K_0(\sqrt{\nu}r_D) \int_1^{r_D} I_0(u\sqrt{\nu}) g(u) u du + \\ & I_0(\sqrt{\nu}r_D) \int_{r_D}^{\infty} K_0(u\sqrt{\nu}) g(u) u dt + AI_0(\sqrt{\nu}r_D) + BK_0(\sqrt{\nu}r_D). \end{aligned} \quad (\text{K.15})$$

Para que la Ec. (K.15) sea finita para todo valor del radio adimensional se requiere que el valor de la constante  $A$  sea cero. La Ec. (K.15) se reescribe como:

$$\begin{aligned} \bar{p}_D(r_D) = & K_0(\sqrt{\nu}r_D) \int_1^{r_D} I_0(u\sqrt{\nu}) g(u) u du + I_0(\sqrt{\nu}r_D) \int_{r_D}^{\infty} K_0(u\sqrt{\nu}) g(u) u dt + \\ & BK_0(\sqrt{\nu}r_D). \end{aligned} \quad (\text{K.16})$$

La derivada de la presión adimensional de la Ec. (K.16), con respecto al radio adimensional es:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} = & -\sqrt{\nu}K_1(\sqrt{\nu}r_D) \int_1^{r_D} I_0(u\sqrt{\nu}) g(u) u du + \\ & \sqrt{\nu}I_1(\sqrt{\nu}r_D) \int_{r_D}^{\infty} K_0(u\sqrt{\nu}) g(u) u dt - B\sqrt{\nu}K_1(\sqrt{\nu}r_D). \end{aligned} \quad (\text{K.17})$$

Se simplifican las dos integrales definidas del miembro derecho de la Ec. (K.17). La primera integral se simplifica en la manera siguiente:

$$\int_1^{r_D} I_0(u\sqrt{v}) g(u) u du = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s K_0(\sqrt{s}) + S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})} \int_1^{r_D} K_0(\sqrt{su}) I_0(u\sqrt{v}) u du \right\}. \quad (K.18)$$

Se tiene la siguiente identidad:

$$\begin{aligned} \int_1^{r_D} K_0(\sqrt{su}) I_0(u\sqrt{v}) u du &= \frac{1}{s-v} \sqrt{v} \left( I_1(\sqrt{v}) K_0(\sqrt{s}) - r_D I_1(r_D \sqrt{v}) K_0(r_D \sqrt{s}) \right) + \\ &\quad \frac{1}{s-v} \sqrt{s} \left( I_0(\sqrt{v}) K_1(\sqrt{s}) - r_D I_0(r_D \sqrt{v}) K_1(r_D \sqrt{s}) \right). \end{aligned} \quad (K.19)$$

Se sustituye la Ec. (K.19) en la Ec. (K.18) y se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_1^{r_D} I_0(u\sqrt{v}) g(u) u du &= L^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{v}}{s(s-v)} \frac{I_1(\sqrt{v}) K_0(\sqrt{s}) - r_D I_1(r_D \sqrt{v}) K_0(r_D \sqrt{s})}{K_0(\sqrt{s}) + S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})} \right\} + \\ &\quad L^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{s}}{s(s-v)} \frac{I_0(\sqrt{v}) K_1(\sqrt{s}) - r_D I_0(r_D \sqrt{v}) K_1(r_D \sqrt{s})}{K_0(\sqrt{s}) + S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})} \right\}. \end{aligned} \quad (K.20)$$

La segunda integral se simplifica en la manera siguiente:

$$\int_{r_D}^{\infty} K_0(u\sqrt{v}) g(u) u dt = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s K_0(\sqrt{s}) + S_d \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})} \int_{r_D}^{\infty} K_0(u\sqrt{v}) K_0(\sqrt{su}) u dt \right\}. \quad (K.21)$$

Se tiene la siguiente identidad:

$$\int_{r_D}^{\infty} K_0(u\sqrt{v}) K_0(\sqrt{su}) u dt = \frac{r_D}{s-v} \left( \sqrt{s} K_0(r_D \sqrt{v}) K_1(r_D \sqrt{s}) - \sqrt{v} K_0(r_D \sqrt{s}) K_1(r_D \sqrt{v}) \right). \quad (K.22)$$

Se sustituye la Ec. (K.22) en la Ec. (K.21) y se obtiene:

$$\int_{r_D}^{\infty} K_0(u\sqrt{v})g(u)udt = L^{-1} \left\{ \frac{r_D}{s(s-v)} \frac{\sqrt{s}K_0(r_D\sqrt{v})K_1(r_D\sqrt{s}) - \sqrt{v}K_0(r_D\sqrt{s})K_1(r_D\sqrt{v})}{K_0(\sqrt{s}) + S_d\sqrt{s}K_1(\sqrt{s})} \right\}. \quad (K.23)$$

Se sustituyen las Ecs. (K.20) y (K.23) en la Ec. (K.16),

$$\begin{aligned} \bar{p}_D(r_D) = & L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s-v)} \frac{\sqrt{v}K_0(\sqrt{v}r_D)(I_1(\sqrt{v})K_0(\sqrt{s}) - r_D I_1(r_D\sqrt{v})K_0(r_D\sqrt{s}))}{K_0(\sqrt{s}) + S_d\sqrt{s}K_1(\sqrt{s})} \right\} + \\ & L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s-v)} \frac{\sqrt{s}K_0(\sqrt{v}r_D)(I_0(\sqrt{v})K_1(\sqrt{s}) - r_D I_0(r_D\sqrt{v})K_1(r_D\sqrt{s}))}{K_0(\sqrt{s}) + S_d\sqrt{s}K_1(\sqrt{s})} \right\} + \\ & L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s-v)} \frac{r_D I_0(\sqrt{v}r_D)(\sqrt{s}K_0(r_D\sqrt{v})K_1(r_D\sqrt{s}) - \sqrt{v}K_0(r_D\sqrt{s})K_1(r_D\sqrt{v}))}{K_0(\sqrt{s}) + S_d\sqrt{s}K_1(\sqrt{s})} \right\} + \\ & BK_0(\sqrt{v}r_D). \end{aligned} \quad (K.24)$$

Se simplifica la Ec. (K.24),

$$\begin{aligned} \bar{p}_D(r_D) = & L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s-v)} \frac{\sqrt{v}K_0(\sqrt{v}r_D)(I_1(\sqrt{v})K_0(\sqrt{s}) - r_D I_1(r_D\sqrt{v})K_0(r_D\sqrt{s}))}{K_0(\sqrt{s}) + S_d\sqrt{s}K_1(\sqrt{s})} \right\} + \\ & L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s-v)} \frac{\sqrt{s}K_0(\sqrt{v}r_D)I_0(\sqrt{v})K_1(\sqrt{s}) - \sqrt{v}r_D I_0(\sqrt{v}r_D)K_0(r_D\sqrt{s})K_1(r_D\sqrt{v})}{K_0(\sqrt{s}) + S_d\sqrt{s}K_1(\sqrt{s})} \right\} + \\ & BK_0(\sqrt{v}r_D). \end{aligned} \quad (K.25)$$

La Ec. (K.25) se rescribe en la manera siguiente:

$$\bar{p}_D(r_D) = L^{-1} \left\{ \frac{F_1(r_D, s, \nu)}{X(s, \nu; C_D, S_d)} \right\} + BK_0(\sqrt{\nu}r_D), \quad (\text{K.26})$$

donde

$$F_1(r_D, s, \nu) = \sqrt{s}I_0(\sqrt{\nu})K_0(r_D\sqrt{\nu})K_1(\sqrt{s}) - r_D\sqrt{\nu}I_0(r_D\sqrt{\nu})K_0(r_D\sqrt{s})K_1(r_D\sqrt{\nu}) + \sqrt{\nu}K_0(r_D\sqrt{\nu})(I_1(\sqrt{\nu})K_0(\sqrt{s}) - r_DI_1(r_D\sqrt{\nu})K_0(r_D\sqrt{s})) \quad (\text{K.27})$$

y

$$X(s, \nu; C_D, S_d) = s(s - \nu)(K_0(\sqrt{s}) + S_d\sqrt{s}K_1(\sqrt{s})). \quad (\text{K.28})$$

Para el cálculo de la constante de integración  $B$ , se sustituye la Ec. (3.66) en la Ec. (3.65)

$$C_D\nu\bar{p}_D(1, \nu) - S_dC_D\nu \left( r_D \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} - \left( r_D \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = C_D. \quad (\text{K.29})$$

Se simplifica la Ec. (K.29),

$$C_D\nu\bar{p}_D(1, \nu) - (1 + S_dC_D\nu) \left( r_D \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = C_D. \quad (\text{K.30})$$

Se evalúa la Ec. (K.26) en un radio adimensional igual a uno,

$$\bar{p}_D(1) = L^{-1} \left\{ \frac{F_1(1, s, \nu)}{X(s, \nu; C_D, S_d)} \right\} + BK_0(\sqrt{\nu}). \quad (\text{K.31})$$

A partir de la Ec. (K.26), se obtiene:

$$\left( r_D \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = L^{-1} \left\{ \frac{F_1'(1, s, v)}{X(s, v; C_D, S_d)} \right\} - B\sqrt{v}K_1(\sqrt{v}). \quad (\text{K.32})$$

Se sustituyen las Ecs. (K.31) y (K.32) en la Ec. (K.30),

$$\begin{aligned} C_D v \left( L^{-1} \left\{ \frac{F_1(1, s, v)}{X(s, v; C_D, S_d)} \right\} + BK_0(\sqrt{v}) \right) - \\ (1 + S_d C_D v) \left( L^{-1} \left\{ \frac{F_1'(1, s, v)}{X(s, v; C_D, S_d)} \right\} - B\sqrt{v}K_1(\sqrt{v}) \right) = C_D. \end{aligned} \quad (\text{K.33})$$

Se simplifica la Ec. (K.33),

$$\begin{aligned} (C_D v K_0(\sqrt{v}) + (1 + S_d C_D v) \sqrt{v} K_1(\sqrt{v})) B + \\ L^{-1} \left\{ \frac{C_D v F_1(1, s, v) - (1 + S_d C_D v) F_1'(1, s, v)}{X(s, v; C_D, S_d)} \right\} = C_D \end{aligned} \quad (\text{K.34})$$

La Ec. (K.34) se rescribe como:

$$W(v; C_D, S_d) B = C_D + L^{-1} \left\{ \frac{F_2(s, v; C_D, S_d)}{X(s, v; C_D, S_d)} \right\}, \quad (\text{K.35})$$

donde,

$$W(v; C_D, S_d) = C_D v K_0(\sqrt{v}) + (1 + S_d C_D v) \sqrt{v} K_1(\sqrt{v}) \quad (\text{K.36})$$

y

$$F_2(s, \nu; C_D, S_d) = -C_D \nu F_1(1, s, \nu) + (1 + S_d C_D \nu) F_1'(1, s, \nu). \quad (\text{K.37})$$

Se despeja la constante  $B$  de la Ec. (K.35),

$$B = \frac{1}{W(\nu; C_D, S_d)} \left( C_D + L^{-1} \left\{ \frac{F_2(s, \nu; C_D, S_d)}{X(s, \nu; C_D, S_d)} \right\} \right). \quad (\text{K.38})$$

La presión adimensional del pozo se determina por medio de la Ec. (3.66). Se sustituyen las Ecs. (K.31) y (K.32) en la Ec. (2.66):

$$\bar{p}_{wsD} = L^{-1} \left\{ \frac{F_1(1, s, \nu)}{X(s, \nu; C_D, S_d)} \right\} + BK_0(\sqrt{\nu}) - S_d \left( L^{-1} \left\{ \frac{F_1'(1, s, \nu)}{X(s, \nu; C_D, S_d)} \right\} - B\sqrt{\nu}K_1(\sqrt{\nu}) \right). \quad (\text{K.39})$$

Se agrupan términos en la Ec. (K.39),

$$\bar{p}_{wsD} = L^{-1} \left\{ \frac{F_1(1, s, \nu) - S_d F_1'(1, s, \nu)}{X(s, \nu; C_D, S_d)} \right\} + B \left( K_0(\sqrt{\nu}) + S_d \sqrt{\nu} K_1(\sqrt{\nu}) \right). \quad (\text{K.40})$$

Se sustituye el valor de la constante de integración  $B$ , Ec. (K.38), en la Ec. (K.40):

$$\bar{p}_{wsD} = C_D \frac{K_0(\sqrt{\nu}) + S_d \sqrt{\nu} K_1(\sqrt{\nu})}{W(\nu; C_D, S_d)} + L^{-1} \left\{ \frac{F_1(1, s, \nu) - S_d F_1'(1, s, \nu)}{X(s, \nu; C_D, S_d)} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{\left( K_0(\sqrt{\nu}) + S_d \sqrt{\nu} K_1(\sqrt{\nu}) \right) \left( C_D \nu F_1(1, s, \nu) - (1 + S_d C_D \nu) F_1'(1, s, \nu) \right)}{W(\nu; C_D, S_d) X(s, \nu; C_D, S_d)} \right\}. \quad (\text{K.41})$$

Para simplificar la Ec. (K.41) se define la expresión siguiente:

$$G_1(s, \nu; C_D, S_d) = \frac{F_1(1, s, \nu) - S_d F_1'(1, s, \nu)}{X(s, \nu; C_D, S_d)} - \frac{\left( K_0(\sqrt{\nu}) + S_d \sqrt{\nu} K_1(\sqrt{\nu}) \right) \left( C_D \nu F_1(1, s, \nu) - (1 + S_d C_D \nu) F_1'(1, s, \nu) \right)}{W(\nu; C_D, S_d) X(s, \nu; C_D, S_d)}. \quad (\text{K.42})$$

La Ec. (K.42) se reescribe en la manera siguiente:

$$G_1(s, \nu; C_D, S_d) = \frac{F_1(1, s, \nu) - S_d F_1'(1, s, \nu)}{X(s, \nu; C_D, S_d)} - \frac{K_0(\sqrt{\nu}) + S_d \sqrt{\nu} K_1(\sqrt{\nu})}{W(\nu; C_D, S_d)} \frac{\left( C_D \nu F_1(1, s, \nu) - F_1'(1, s, \nu) - S_d C_D \nu F_1'(1, s, \nu) \right)}{X(s, \nu; C_D, S_d)}. \quad (\text{K.43})$$

Se modifica el primer sumando de la Ec. (K.43):

$$G_1(s, \nu; C_D, S_d) = \frac{\left( F_1(1, s, \nu) - S_d F_1'(1, s, \nu) \right) W(\nu; C_D, S_d)}{X(s, \nu; C_D, S_d) W(\nu; C_D, S_d)} - \frac{K_0(\sqrt{\nu}) + S_d \sqrt{\nu} K_1(\sqrt{\nu})}{W(\nu; C_D, S_d)} \frac{\left( C_D \nu F_1(1, s, \nu) - F_1'(1, s, \nu) - S_d C_D \nu F_1'(1, s, \nu) \right)}{X(s, \nu; C_D, S_d)}. \quad (\text{K.44})$$

Se agrupan los términos del segundo sumando de la Ec. (K.44):

$$G_1(s, \nu; C_D, S_d) = \frac{\left( F_1(1, s, \nu) - S_d F_1'(1, s, \nu) \right) W(\nu; C_D, S_d)}{X(s, \nu; C_D, S_d) W(\nu; C_D, S_d)} - \frac{\left( K_0(\sqrt{\nu}) + S_d \sqrt{\nu} K_1(\sqrt{\nu}) \right) \left( C_D \nu \left( F_1(1, s, \nu) - S_d F_1'(1, s, \nu) \right) - F_1'(1, s, \nu) \right)}{W(\nu; C_D, S_d) X(s, \nu; C_D, S_d)}. \quad (\text{K.45})$$

Se reagrupan los términos de la Ec. (K.45) de la manera siguiente:



$$G_1(s, v; C_D, S_d) = \frac{(K_0(\sqrt{v}) + S_d \sqrt{v} K_1(\sqrt{v})) F_1'(1, s, v)}{X(s, v; C_D, S_d) W(v; C_D, S_d)} + \frac{(W(v; C_D, S_d) - C_D v (K_0(\sqrt{v}) + S_d \sqrt{v} K_1(\sqrt{v}))) (F_1(1, s, v) - S_d F_1'(1, s, v))}{X(s, v; C_D, S_d) W(v; C_D, S_d)}. \quad (K.46)$$

Se tiene la identidad siguiente:

$$W(v; C_D, S_d) - C_D v (K_0(\sqrt{v}) + S_d \sqrt{v} K_1(\sqrt{v})) = \sqrt{v} K_1(\sqrt{v}). \quad (K.47)$$

Se sustituye la Ec. (K.47) en la Ec. (K.46):

$$G_1(s, v; C_D, S_d) = \frac{\sqrt{v} K_1(\sqrt{v}) (F_1(1, s, v) - S_d F_1'(1, s, v))}{X(s, v; C_D, S_d) W(v; C_D, S_d)} + \frac{(K_0(\sqrt{v}) + S_d \sqrt{v} K_1(\sqrt{v})) F_1'(1, s, v)}{X(s, v; C_D, S_d) W(v; C_D, S_d)}. \quad (K.48)$$

Se simplifica la Ec. (K.48),

$$G_1(s, v; C_D, S_d) = \frac{\sqrt{v} K_1(\sqrt{v}) F_1(1, s, v) + K_0(\sqrt{v}) F_1'(1, s, v)}{X(s, v; C_D, S_d) W(v; C_D, S_d)}. \quad (K.49)$$

Se sustituye el valor de la función  $F_1(1, s, v)$  y el de  $F_1'(1, s, v)$  en la Ec. (K.49), y la ecuación resultante se simplifica,

$$G_1(s, v; C_D, S_d) = \frac{\sqrt{s} K_0(\sqrt{v}) K_1(\sqrt{s}) - \sqrt{v} K_0(\sqrt{s}) K_1(\sqrt{v})}{X(s, v; C_D, S_d) W(v; C_D, S_d)}. \quad (K.50)$$

Se sustituye la Ec. (K.50) en la Ec. (K.41)

$$\bar{P}_{wsD} = C_D \frac{K_0(\sqrt{v}) + S_d \sqrt{v} K_1(\sqrt{v})}{W(v; C_D, S_d)} + \frac{\sqrt{s} K_0(\sqrt{v}) K_1(\sqrt{s}) - \sqrt{v} K_0(\sqrt{s}) K_1(\sqrt{v})}{X(s, v; C_D, S_d) W(v; C_D, S_d)}. \quad (\text{K.51})$$

# Nomenclatura

<b>Símbolo</b>	<b>Definición</b>	<b>Dimensión</b>
$C$	Capacidad de almacenamiento del pozo.	
$c$	Compresibilidad de la formación.	$[m/L^2]^{-1}$
$C_D$	Coefficiente adimensional de almacenamiento.	Adimensional
$h$	Espesor de la formación.	$[L]$
$I_0(x)$	Función modificada Bessel de primera clase y orden cero.	Adimensional
$i$	Índice de punto del nodo de la malla en la dirección de $x_D$ .	Adimensional
$J_0(v)$	Función Bessel de primera clase y orden cero.	Adimensional
$J_1(w)$	Función Bessel de primera clase y primer orden.	Adimensional
$K$	Número de celdas para $x_D = 1$ .	Adimensional
$K_0(x)$	Funciones Modificadas de Bessel de segunda clase de orden cero.	Adimensional
$K_1(x)$	Funciones Modificadas de Bessel de segunda clase y primer orden.	Adimensional
$k$	Permeabilidad del yacimiento.	$[L^2]$
$k_s$	Permeabilidad de la región con daño del yacimiento.	$[L^2]$
$n$	Subíndice que representa el nivel del tiempo.	Adimensional
$p'_{qvD}$	Derivada de la presión adimensional con respecto al tiempo para una producción a presión constante.	Adimensional
$p_{wsD}$	Presión de fondo adimensional después del cierre.	Adimensional
$p_{qD}(r_D, t_D)$	Presión adimensional para el caso de gasto variable, Modelo II.	Adimensional
$p_i$	Presión inicial.	$[m/L^2]$

$p_w$	Presión del pozo.	$[m/L^2]$
$p_{wFD}(t_D)$	Presión del pozo fluyendo adimensional a las condiciones de presión constante.	Adimensional
$\bar{p}_{qwD}(s)$	Presión adimensional del pozo para producción a gasto unitarios.	Adimensional
$p_{wD}(t_D)$	Presión del pozo fluyendo adimensional.	Adimensional
$p_D(r_D, t_D)$	Presión adimensional para el caso de gasto variable, Modelo I.	Adimensional
$p_i$	Presión inicial del yacimiento.	Adimensional
$p_{wFD}$	Presión de fondo fluyendo del pozo.	Adimensional
$p_{Dsk}$	Caída de presión adimensional en la región de daño.	Adimensional
$\Delta p_D$	Caída de presión adimensional.	$[m/L^2]$
$q_D$	Gasto de flujo adimensional.	Adimensional
$q_{wD}(t_D)$	Gasto del pozo fluyendo a las condiciones de presión contante.	Adimensional
$r_s$	Radio con daño.	$[L]$
$r_{Ds}$	Radio con daño adimensional.	Adimensional
$r_D$	Distancia radial adimensional.	Adimensional
$r_w$	Radio interno del pozo.	$[L]$
$r_e$	Radio externo del yacimiento.	$[L]$
$r_{De}$	Radio externo adimensional del yacimiento.	Adimensional
$S_d$	Factor de Daño.	Adimensional
$s$	Variable de la Transformada de Laplace del tiempo.	Adimensional
$t_D$	Tiempo adimensional.	Adimensional
$t_{Ds}$	Tiempo de producción adimensional antes del cierre.	Adimensional

---

$\Delta t_D$	Tiempo de cierre adimensional.	Adimensional
$t_D$	Tiempo de producción adimensional.	Adimensional
$v$	Variable de integración.	Adimensional
$w$	Variable de integración.	Adimensional
$x_D$	Distancia de la malla.	Adimensional
$x_{Ds}$	Radio con daño linealizado.	Adimensional
$Y_0(v)$	Función Bessel de segunda clase y orden cero.	Adimensional
$Y_1(w)$	Función Bessel de segunda clase y primer orden.	Adimensional
$\theta$	Parámetro de ponderación.	Adimensional
$\mu$	Viscosidad del fluido.	$[m/Lt]$
TL	Transformada de Laplace.	
$\delta(t_D)$	Función delta de Dirac.	Adimensional

---

## Referencias Bibliográficas

1. Abramowitz, M. y Stegurt, I. A., eds. 1964. *Handbook of Mathematical Functions*. Washington, D. C.: U. S. Government Printing Office.
2. Bourdet, D., Whittle, T. M., Douglas, A. A. et al. 1983. A New Set of Type Curves Simplifies Well Test Analysis. *World Oil* (May): 95-106. [http://www.pe.tamu.edu/blasingame/data/z\\_zCourse\\_Archive/P324\\_03A/Lecture\\_Refs\\_\(pdf\)/P324\\_Mod4\\_02\\_Bourdet\\_et\\_al\\_\(World\\_Oil\)\\_\(Add\).pdf](http://www.pe.tamu.edu/blasingame/data/z_zCourse_Archive/P324_03A/Lecture_Refs_(pdf)/P324_Mod4_02_Bourdet_et_al_(World_Oil)_(Add).pdf) (Acceso el 15 de marzo de 2016).
3. Boyce, W. E. y Diprima, R. C. 2010. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, quinta edición. México, D. F.: Limusa-Wiley.
4. Carslaw, H. C. y Jaeger, J. C. 1959. *Conduction of Heat in Solids*, second edition. Oxford: Clarendon Press.
5. Clegg, M. W. 1967. Some Approximate Solutions of Radial Flow Problems Associated with Production at Constant Well Pressure. *SPE J.* **7** (1): 31-42. SPE 1536-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/1536-PA>.
6. Earlougher Jr., R. C. 1977. *Advances in Well Test Analysis*, Vol. 5, 45-72. Richardson, Texas: SPE, Monograph Series.
7. Ferris, J., Knowles, D. B., Brown, R. H. et al. 1962. *Theory of Aquifer Tests*. Denver, Colorado: U. S. Geol. Surv., Water Supply Paper 1536-E.
8. Fetkovich, M. J. 1980. Decline Curve Analysis Using Type Curves. *J Pet Technol* **32** (6): 1065-1077. SPE-4629-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/4629-PA>.
9. Fetkovich, M. J. y Vienot, M. E. 1984. Rate Normalization of Buildup Pressure by Using Afterflow Data. *J Pet Tech* **36** (12): 2211-2224. SPE-12179-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/12179-PA>.

10. Hildebrand, F. B. 1976. *Advanced Calculus for Applications*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
11. Horner, D. R. 1951. Pressure Buildup in Well. Proc., Third World Petroleum Congress, The Hague, Sec. 11, 503-23.
12. Horner, D. R. 1967. *Pressure Analysis Method*, Vol. 9, 25-43. Richardson, Texas: SPE, Reprint Series.
13. Hurst, W. 1934. Unsteady Flow of Fluids in Oil Reservoirs. *J. Appl. Phys.* **5**: 20-30. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1745206>.
14. Hurst, W. 1953. Establishment of the Skin Effect and its Impediment to Fluid Flow into a Wellbore. *Pet. Eng.* (October): B-6-B-16.
15. Jacob, C. E. y Lohman, S. W. 1952. Nonsteady Flow to a Well of Constant Drawdown in an Extensive Aquifer. *Trans.*, American Geophysical Union **33** (4): 559-569.
16. Jaeger, J. C. 1956. Numerical Values for the Temperature in Radial Heat Flow. *Journal of Mathematics and Physics* **34** (1-4): 316-321.
17. Jaeger, J. C. y Clarke, M. 1942. A Short Table of Values of  $I(0, 1; x)$ . *Proc. Royal Society Edinburgh A* **61**: 229-230.
18. Kreyszing, E. 2006. *Advanced Engineering Mathematics*, ninth edition. New York: Wiley.
19. Kutasov, I. M. 1989. Application of the Horner Method for a Well Produced at a Constant Bottomhole Pressure. *SPE Form Eval* **4** (1): 90-92. SPE-15143-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/15143-PA>
20. Locke, C. D. y Sawyer, W. K. 1975. Constant Pressure Injection Test in a Fractured Reservoir-History Match Using Numerical Simulation and Type Curve Analysis. Artículo presentado en la SPE-AIME 50th Annual Fall Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas, septiembre 28 - octubre 1. SPE-5594-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/5594-MS>.

21. Matthews, C. S. y Russell, D. G. 1967. *Pressure Buildup and Flow Tests in Wells*. Vol. 1, 18-21. Richardson, Texas: Monograph Series, SPE.
22. Miller, C. C., Dyes, A. B. y Hutchinson Jr., C. A. 1950. The Estimation of Permeability and Reservoir Pressure from Bottom-Hole Pressure Build-Up Characteristics. *J Pet Technol* **2** (4): 91-104. <http://dx.doi.org/10.2118/950091-G>.
23. Moore, T. V., Schilthuis, R. J. y Hurst, W. 1933. The Determination of Permeability from Field Data. *Prod. Bull. API* (211): 4-13.
24. Muskat, M. 1937. Use of Data on the Build-Up of Bottom-Hole Pressures, *Trans.*, AIME **123** (1): 44-48. <http://dx.doi.org/10.2118/937044-G>.
25. O'Neil, P. V. 2008. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, sexta edición. México, D.F.: Cengage Learning Editores.
26. Prats, M. 2006. *Constant Pressure Buildup in an Infinite Circular Reservoir*. (documento inédito).
27. Raghavan, R. 1993. *Well Test Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: PTR Prentice Hall.
28. Ramey Jr., H. J. y Cobb, W. M. 1971. A General Pressure Buildup Theory for a Well in a Closed Drainage Area. *J Pet Technol* **23** (12): 1493-1505. <http://dx.doi.org/10.2118/3012-PA>.
29. Ramey Jr., H. J., Kumar, A. y Gulati, M. S. 1973. *Gas Well Test Analysis Under Water-Drive Conditions*. Arlington, Virginia: American Gas Association.
30. Spiegel, M. R. 1965. *Schaum's Outline Theory and Problems of Laplace Transforms*. New York: McGraw-Hill Book Co.
31. Uraiet, A. A. 1979. *Transient Pressure Behavior in a Cylindrical Reservoir Produced by a Well at Constant Bottom-Hole Pressure*. PhD dissertation, The University of Tulsa, Tulsa, Oklahoma.



32. Uraiet, A. A. y Raghavan, R. 1980. Pressure Buildup Analysis for a Well Produced at Constant Bottomhole Pressure. *J Pet Technol* **32** (10): 1813-1824. SPE-7984-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/7984-PA>.
33. Van Everdingen, A. F. 1949. The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs. *J Pet Technol* **1** (12): 305-324. SPE-949305-G. <http://dx.doi.org/10.2118/949305-G>.
34. Van Everdingen, A. F. 1953. The Skin Effect and its Influence on the Production Capacity of a Well. *J Pet Technol* **5** (6): 171-176. <http://dx.doi.org/10.2118/203-G>.
35. Van Poolen, H. K. 1967. How to Analyze Flowing Well-Test Data... with Constant Pressure at the Wellbore. *The Oil and Gas Journal* (January 16): 98-101.