



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

**CONTROL DE UN SISTEMA BILATERAL TELEOPERADO CON DISEÑO
DE OBSERVADOR**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

PRESENTA:
MARISOL MORALES MALDONADO

TUTOR
DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ
FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, CDMX, NOVIEMBRE, 2016

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez
Secretario: Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cózatl
1er. Vocal: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez
2do. Vocal: Dr. Yu Tang Xu
3er. Vocal: Dr. Emmanuel Nuño Ortega

La tesis se realizó en el Laboratorio de Robótica de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

A mi familia.

A Alex Lara.

A mis amistades.

Al Dr: Marco Arteaga.

A mis colegas del Laboratorio y a mis compañeros de la maestría.

Gracias por apoyarme sinceramente.

Reconocimientos

Agradecimiento a CONACYT por el apoyo brindado estos dos años. Agradecimiento al proyecto: "Control de robots coordinados por medio de sistemas maestro-esclavo". Ref. IN116314. DGAPA-UNAM.

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Marisol Morales Maldonado. México, CDMX, NOVIEMBRE, 2016

Resumen

Los sistemas bilaterales local-remoto permiten a las personas llevar a cabo tareas complejas en ambientes remotos o inaccesibles. Los objetivos de control principales son: robustez, telepresencia, desempeño de habilidades y transparencia. Las capacidades de un sistema de robots bilaterales se basan en el intercambio de la medición de datos de posición, velocidad y fuerza. Sin embargo, los manipuladores local y remoto están conectados por un canal de comunicación que puede dar lugar a retrasos sustanciales. Debido a la naturaleza del retardo, no se garantiza seguimiento de posición ni se pueden lograr transparencia en la teleoperación. Por esta razón, la mayoría de los enfoques de control sirven únicamente para garantizar la regulación de posición, para resolver el problema de consenso, con o sin un líder, o para sincronizar un conjunto de robots mediante la inducción de trayectorias de posición periódicas.

La mayoría de los algoritmos se diseñan asumiendo que las velocidades de articulación están disponibles, por tal motivo en este trabajo, un nuevo observador-controlador de teleoperación se introduce con las siguientes propiedades. En movimiento libre y sin un operador humano, los manipuladores local y remoto tienden a una posición particular, logrando así consenso de posición. Cuando el operador humano mueve el robot local la distancia tiende a realizar un seguimiento de la posición ordenada, con el retraso correspondiente. Se proporcionan resultados experimentales para poner a prueba el algoritmo propuesto.

Índice general

Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XIII
1. Introducción	1
1.1. Estado de arte	2
1.1.1. Sistema bilateral teleoperado	2
1.1.2. Retardos en el canal de comunicación	4
1.1.3. Observador de velocidad	5
1.2. Planteamiento del problema	5
1.3. Contribuciones	5
1.4. Estructura de la tesis	6
2. Preliminares matemáticas	7
2.1. Modelo cinemático	7
2.1.1. Cinemática directa	7
2.1.2. Cinemática inversa	8
2.1.3. Cinemática diferencial	9
2.2. Modelo dinámico	10
2.2.1. Modelo dinámico de un sistema teleoperado	11
2.2.2. Propiedades del modelo dinámico	11
2.2.3. Modelo dinámico del <i>Geomagic Touch</i>	13
2.3. Teorema auxiliar	14
3. Diseño del observador y del controlador	17
3.1. Diseño del observador	17
3.2. Diseño del controlador	18
3.3. Demostración de estabilidad para un sistema bilateral con retardo en movimiento libre	20
4. Resultados experimentales	29
4.1. Sin retardo	32
4.2. Retardo asimétrico	37

ÍNDICE GENERAL

4.2.1. Retardo asimétrico menor a un segundo	37
4.2.2. Retardo asimétrico de cinco segundos	42
4.3. Retardo simétrico	47
4.3.1. Retardo simétrico menor a un segundo	47
4.3.2. Retardo simétrico de cinco segundos	52
4.3.3. Tabla de resultados	57
5. Conclusiones	59

Índice de figuras

1.1. Sistema bilateral teleoperado local-remoto.	2
4.1. Sistema teleoperado de dos robots <i>Geomagic Touch</i>	29
4.2. Sin retardo. Posición	33
4.3. Sin retardo. Errores de seguimiento	34
4.4. Sin retardo. Errores de observación	35
4.5. Sin retardo. Velocidades	36
4.6. Retardo asimétrico de $T_l = 0.7[\text{seg}]$ y $T_r = 0.3[\text{seg}]$. Posición	38
4.7. Retardo asimétrico de $T_l = 0.7[\text{seg}]$ y $T_r = 0.3[\text{seg}]$. Errores de seguimiento	39
4.8. Retardo asimétrico de $T_l = 0.7[\text{seg}]$ y $T_r = 0.3[\text{seg}]$. Errores de observación	40
4.9. Retardo asimétrico de $T_l = 0.7[\text{seg}]$ y $T_r = 0.3[\text{seg}]$. Velocidades	41
4.10. Retardo asimétrico de $T_l = 1[\text{seg}]$ y $T_r = 5[\text{seg}]$. Posición	43
4.11. Retardo asimétrico de $T_l = 1[\text{seg}]$ y $T_r = 5[\text{seg}]$. Errores de seguimiento	44
4.12. Retardo asimétrico de $T_l = 1[\text{seg}]$ y $T_r = 5[\text{seg}]$. Errores de observación	45
4.13. Retardo asimétrico de $T_l = 1[\text{seg}]$ y $T_r = 5[\text{seg}]$. Velocidades	46
4.14. Retardo simétrico de $T_l = T_r = 0.5[\text{seg}]$. Posición	48
4.15. Retardo simétrico de $T_l = T_r = 0.5[\text{seg}]$. Errores de seguimiento	49
4.16. Retardo simétrico de $T_l = T_r = 0.5[\text{seg}]$. Errores de observación	50
4.17. Retardo simétrico de $T_l = T_r = 0.5[\text{seg}]$. Velocidades	51
4.18. Retardo simétrico de $T_l = T_r = 5[\text{seg}]$. Posición	53
4.19. Retardo simétrico de $T_l = T_r = 5[\text{seg}]$. Errores de seguimiento	54
4.20. Retardo simétrico de $T_l = T_r = 5[\text{seg}]$. Errores de observación	55
4.21. Retardo simétrico de $T_l = T_r = 5[\text{seg}]$. Velocidades	56

Índice de tablas

2.1. Identificación paramétrica para el modelo dinámico del robot <i>Geomagic Touch</i>	13
4.1. RMSE de los errores de seguimiento y observación	57
4.2. RMSE de los errores de seguimiento de cada articulación	57
4.3. RMSE de los errores de observación de cada articulación	58

Introducción

Los robots ocupan un lugar importante en el desarrollo tecnológico actual, de tal forma que las necesidades humanas dependen cada vez más de los avances en la robótica. Desde la aparición de los primeros robots realizando tareas en entornos completamente controlados, hasta nuestros días donde se requiere que el robot interactúe con un entorno remoto y desconocido ha tendido como finalidad en su mayoría ayudar al humano con sus labores. Las ramas de la robótica se han ampliado a la par con otras disciplinas dando lugar a nuevas áreas de investigación y desarrollo, abriendo a su vez nuevos panoramas y retos en la interacción robot-humano.

El desarrollo de la robótica ha dado lugar al área de la telerobótica dedicada al control de robots a distancia. La teleoperación o bien la operación a distancia es un problema abierto hoy en día. Los sistemas teleoperados consisten en un humano operando uno o varios robots manipuladores y uno o varios robots manipuladores en un lugar remoto. Entre las configuraciones de los sistemas teleoperados se encuentran los sistemas bilaterales, los cuales están conformados por: operador humano, un manipulador local, un manipulador remoto y un canal de comunicación entre ambos manipuladores.

El sistema bilateral teleoperado opera bajo el siguiente protocolo: el operador humano mueve el efector final del manipulador local en una trayectoria deseada, la información del manipulador local es enviada por un canal de comunicación hasta el manipulador remoto, el manipulador remoto trata de seguir la trayectoria deseada, a su vez intercambia información con el manipulador local, ver Figura 1.1.

Los sistemas bilaterales local-remoto permiten a las personas llevar a cabo tareas complejas en un ambiente remoto o inaccesible, como es una planta nuclear, manipulación de materiales peligrosos, entre otros. Los objetivos principales de control son: *robustez*, *telepresencia*, desempeño de habilidades y *transparencia*. Se requiere *robustez* ante las incertidumbres del modelo y parámetros físicos del robot. La *telepresencia* consiste en que el operador tenga la sensación de estar con el entorno u objeto remoto. La *transparencia* se da cuando el operador únicamente siente la dinámica del objeto o entorno que está manipulando.

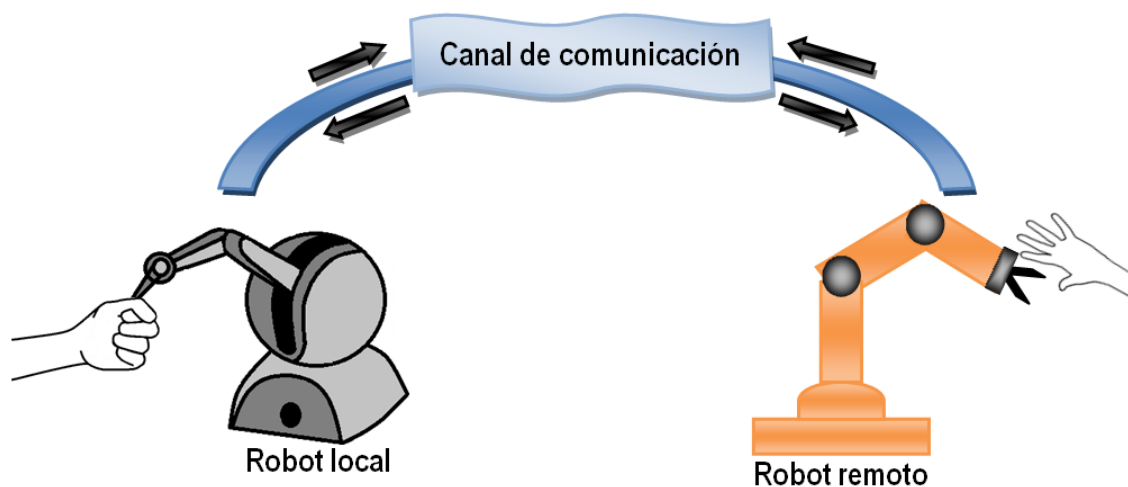


Figura 1.1: Sistema bilateral teleoperado local-remoto.

Las capacidades de un sistema de robots bilaterales se basan en el intercambio de la medición de datos de posición, velocidad y fuerza. Sin embargo, los manipuladores local y remoto están conectados por un canal de comunicación que puede dar lugar a retrasos sustanciales. Debido a la naturaleza del retardo, no se garantiza seguimiento de posición ni se pueden lograr transparencia en la teleoperación. Por esta razón, la mayoría de los enfoques de control sirven únicamente para garantizar la regulación de posición, para resolver el problema de consenso, con o sin un líder, o para sincronizar un conjunto de robots mediante la inducción de trayectorias de posición periódicas.

El intercambio de la medición de la velocidad es otro problema aunado a los ya planteados, puesto que los sensores de velocidad son costosos y de difícil implementación. La mayoría de los algoritmos de control se diseñan asumiendo que las velocidades de las articulaciones están disponibles. Por tal motivo en este trabajo se propone un nuevo observador-controlador de teleoperación que se desempeñe en movimiento libre y sin un operador humano considerando los casos de sincronización y posición de consenso.

1.1. Estado de arte

1.1.1. Sistema bilateral teleoperado

Los sistemas bilaterales local/remoto a distancia (o maestro-esclavo) permiten a las personas realizar tareas complejas en un entorno remoto o inaccesible, mientras que proporciona retroalimentación cinestésica al operador humano (Hannaford, 1989; Yokokohji and Yoshikawa, 1994). Estos esquemas son la combinación de las capacidades humanas tales como el razonamiento y toma de decisiones con las ventajas de manipulación robótica. Los sistemas teleoperados operan en ambientes complejos debido a la falta de información del ambiente re-

moto aunado a las limitaciones cognitivas del operador humano (Liu and Chopra, 2013).

En los últimos años el uso de la teleoperación bilateral se ha extendido a aplicaciones en áreas donde se lleva a cabo operaciones riesgosas en un determinado ambiente (Hokayem and Spong, 2006). Algunas de las aplicaciones de teleoperación entre los robots local y remoto son:

- Aéreo-espaciales.
- Manipulación de materiales peligrosos.
- Plantas/reactores nucleares.
- Aplicaciones militares.
- Operaciones médicas.
- Vigilancia e inspección.
- Misiones de búsqueda y rescate.

Los principales objetivos en el control de sistemas bilaterales son la robustez, la telepresencia, la ejecución de tareas y la transparencia. Idealmente, estos objetivos se optimizan de forma simultánea sin poner en riesgo la estabilidad del sistema en lazo cerrado (Passenberg et al., 2010). La telepresencia y la transparencia son objetivos ideales, de lo contrario, el mecanismo no puede ser utilizado de forma intuitiva y el operador tendría que ser especialmente entrenado. La estabilidad robusta y la transparencia son dos objetivos contrapuestos, incluso sin la presencia de retardos (Lawrence, 1993; Gutiérrez-Giles, 2016), de aquí la importancia de la aplicación para el diseño de la ley de control.

Se han presentado esquemas adaptables y robustos para prescindir del modelo dinámico del manipulador (Slotine and Li, 1987; Spong et al., 2006). Cuando se usa una técnica robusta se introduce en la ley de control un término adicional que asegura el acotamiento final de los errores de trayectoria. Los algoritmos adaptables suelen ser más complejos y se enfocan en la estimación en línea de los parámetros desconocidos para lograr seguimiento. Los sistemas robustos teleoperados han emergido como una herramienta útil para realizar tareas en ambientes remotos o arriesgados. Se presenta un control robusto y se garantiza acotamiento final de todas las señales del sistema en Liu and Chopra (2013), mientras que en Chopra et al. (2008) se tiene un control adaptable que garantiza acotamiento final de todas las señales del sistema.

1.1.2. Retardos en el canal de comunicación

Las capacidades de un sistema bilateral teleoperado de manipuladores se basan en el intercambio de datos de la medición de posición, velocidad y fuerza. La posición mejora la seguridad sin afectar la transparencia, mientras que la fuerza puede aumentar la sensación de presencia, mejorando el realismo de contacto con el medio ambiente (Jarrassé et al., 2005; Houston et al., 2011).

En la teleoperación bilateral los manipuladores local y remoto están conectados por un canal de comunicación que en su mayoría implica largas distancias o bien impone una limitada transferencia de datos entre el sitio local al remoto. Como consecuencia se producen retardos significativos entre el tiempo que el operador envía una orden y el tiempo que tarda en recibir la información el robot remoto, además la información a enviar de vuelta también soporta un retardo de tiempo (Nuño et al., 2008).

Los retardos se clasifican en constantes y variantes en el tiempo. En una comunicación bilateral se tienen dos casos: cuando los retardos son simétricos o bien asimétricos. En Liu and Chopra (2013) se toma en cuenta retardos asimétricos y se suponen medibles la posición y la velocidad. Mientras que en Hashemzadeh et al. (2013) el esquema de control garantiza estabilidad asintótica global de un sistema bilateral teleoperado sujeto a retardos variantes en el tiempo.

La presencia de retardos en lazo cerrado con el sistema afecta completamente la estabilidad del sistema teleoperado (Anderson and Spong, 1989). Debido a la naturaleza del retardo, ni posición de seguimiento exacto ni la transparencia en la teleoperación se pueden lograr. Por esta razón, la mayoría de los enfoques de control sirven solamente para garantizar la regulación de posición.

Un objetivo más difícil es el problema de consenso, donde dos o más manipuladores tienden a alcanzar una posición particular, tanto en la presencia como en la ausencia de un líder. En Aldana et al. (2015) se trabaja con retardos variante en el tiempo para el consenso de una red de robots heterogéneos. Conjuntamente, otro objetivo particular es la sincronización de un conjunto de robots mediante la inducción de trayectorias de posición periódicas. En Chopra et al. (2008) se plantea el reto de garantizar la sincronización de estado de robots maestro/esclavo en movimiento libre, logrando estabilidad robusta con retardos constantes.

1.1.3. Observador de velocidad

En la mayoría de las leyes de control que se proponen para sistemas bilaterales teleoperados se requiere la medición de la velocidad. Algunos algoritmos se diseñan asumiendo que las velocidades de las articulaciones están disponibles. Sin embargo, en muchos sistemas mecánicos la medición de la velocidad articular no está disponible y aumenta el costo del hardware.

La solución factible a la ausencia de medición de velocidad son los observadores, los cuales estiman el estado a partir de las señales medibles del sistema. En Nicosia and Tomei (1990) se trabaja únicamente con la medición de la posición articular y se presenta un observador no lineal. En Arteaga-Pérez and Kelly (2004) un observador lineal bastante simple es propuesto junto con un esquema de control robusto. En Sarras et al. (2016) se plantea un observador de velocidad con presencia de retardo variante en el tiempo. En Berghuis and Nijmeijer, (1993) se propone una estrategia de diseño que utiliza el concepto de pasividad para desarrollar sistemas combinados controlador-observador para el control de movimiento del robot mediante mediciones de posición.

El control de sistemas bilaterales se ha enfocado no sólo a observar la velocidad, sino además lidiar con un modelo exacto del robot. Por lo tanto se han desarrollado algoritmos que se planteen los dos retos. En Arteaga-Pérez and Gutiérrez-Giles (2014) se usa un observador GPI, en conjunto con una la ley de control que evita el uso de la matriz de inercia.

Este trabajo plantea el reto de diseñar un esquema observador-controlador que sea robusto ante las incertidumbres del modelo y parámetros físicos del robot, en presencia de retardos constantes en el tiempo.

1.2. Planteamiento del problema

El problema a resolver es: sean dos robots manipuladores de n grados de libertad y no necesariamente de la misma configuración cinemática, que conforman un sistema bilateral teleoperado sin la medición de la velocidad y con presencia de retardos en el canal de comunicación de ambos robots, seguir una trayectoria de posición en movimiento libre, sólo con la información de la posición articular y el termino gravitacional de ambos robots.

El algoritmo observador-controlador debe ser robusto ante perturbaciones externas e incertidumbres en los parámetros. Se considera que los retardos de los manipuladores son constantes, pero no necesariamente iguales.

1.3. Contribuciones

En este trabajo se expone un nuevo observador para el caso donde no se puede medir la velocidad en sistemas bilaterales con retardo. Del modelo del sistema únicamente se requiere

el termino gravitacional, siendo la solución propuesta robusta ante perturbaciones externas e incertidumbres en los parámetros. La ventaja del observador se centran en su fácil sintonización e implementación.

Se resolvió el problema de regulación de un sistema bilateral teleoperado con retardo en movimiento libre y sin medición de velocidad. Además se presenta una prueba formal que garantiza acotamiento final y uniforme de todas las señales. Asimismo se realizó la validación experimental del algoritmo propuesto.

1.4. Estructura de la tesis

Este trabajo está dividido en cinco capítulos. Partiendo del Capítulo 2 donde se encuentran las preliminares matemáticas que sirve de base para el desarrollo teórico y práctico del trabajo, el cual contiene el modelo cinemático y dinámico del robot. Al final del capítulo se incluye el Teorema 2.1. que se usa de base para demostrar el Teorema 3.1 que es el eje principal de los capítulos subsecuentes.

El diseño del observador-controlador propuestos se desarrollan en el Capítulo 3. Se comienza presentando al observador, posteriormente al control para continuar con la prueba de estabilidad para un sistema bilateral con retardo en movimiento libre. Se presenta el Teorema 3.1 y su demostración, donde se obtiene la dinámica del error del sistema para culminar la prueba del Teorema 3.1. en cuatro pasos.

En el Capítulo 4 se muestran los resultados experimentales que sirven para validar la teoría del Capítulo 3. Se presenta a los robots, el software y las ganancias utilizadas. Se realizaron cinco experimentos, los cuales consisten en modificar el tiempo del retardo de los dos manipuladores en las configuraciones con retardos simétricos, asimétricos y sin retardo. Finalmente en el Capítulo 5 se encuentran las conclusiones y el trabajo futuro.

Preliminares matemáticas

2.1. Modelo cinemático

La cinemática consiste en describir el movimiento del robot sin tomar en cuenta las fuerzas que lo originan. De esta forma se vuelve un problema geométrico. El análisis cinemático se divide en: *Cinemática Directa*, *Cinemática Inversa* y *Cinemática Diferencial*. La cinemática directa es el cálculo de la posición y la orientación del efector final del robot a partir del conocimiento de las coordenadas articulares. Mientras que la cinemática inversa es obtener las coordenadas articulares dadas una posición y una orientación al efector final. La cinemática diferencial define la relación entre velocidades articulares, velocidades lineales y velocidad angular del efector final.

2.1.1. Cinemática directa

El problema de la cinemática directa yace en determinar la posición y orientación del efector final, únicamente conociendo los valores de las variables articulares del robot \mathbf{q} , donde n es el número de articulaciones; es decir

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]^T, \quad (2.1)$$

Un robot manipulador con n articulaciones cuenta con $n + 1$ eslabones, debido a que cada articulación conecta dos eslabones, comenzando con la base (eslabón 0). Las variables articulares son los ángulos entre las articulaciones en el caso de las articulaciones rotacionales y será la extensión del eslabón en el caso de una articulación prismática.

La convención más usada para la selección de marcos de referencia en robots rígidos es el algoritmo de Denavit-Hartenberg (DH) (Spong et al., 2006). En esta convención se usa la

2. PRELIMINARES MATEMÁTICAS

matriz de transformación homogénea A_i que solo depende de (2.1) y se define como

$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

donde θ_i , a_i , d_i y α_i son parámetros asociados con el eslabón i y con la articulación i , tal que: a_i conocida como la longitud del enlace, es un valor constante. α_i se llama enlace de giro, es un valor constante. d_i se conoce como enlace de desplazamiento es constante si la articulación es de revolución y variable si es prismática. Finalmente θ_i es el ángulo de la articulación, el cual será constante si la articulación es prismática y variable si es de revolución.

El algoritmo de DH cuenta con dos propiedades importantes:

- El eje x_1 es perpendicular al eje z_0 .
- El eje x_1 intercepta al eje z_0 .

Bajo estas condiciones se asegura que existen valores únicos de θ_i , a_i , d_i y α_i tal que ${}^{i-1}A_i = Rot_{z,\theta} Trans_{z,d} Trans_{x,a} Rot_{x,\alpha}$. La matriz de transformación ${}^i T_j$ es la matriz de transformación homogénea que expresa la posición y la orientación de $o_j x_j y_j z_j$ con respecto a $o_i x_i y_i z_i$, se define como

$${}^i T_j = {}^i A_{i+1} \cdots {}^{j-1} A_j = \begin{bmatrix} {}^i R_j & {}^i d_j \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

donde la matriz ${}^i R_j$ expresa la orientación de $o_j x_j y_j z_j$ respecto a $o_i x_i y_i z_i$ y está dado por la parte rotacional de las matrices ${}^{i-1} A_i$, mientras que ${}^i d_j$ es el vector coordenado.

2.1.2. Cinemática inversa

El problema de la cinemática inversa recae en encontrar el valor de las variables articulares (2.1) a partir de una posición y orientación real o deseada del robot. En general, al contrario de la cinemática directa, en la cinemática inversa es más complicado hallar una solución debido a:

- Puede ser que no exista solución o bien que el número de soluciones sea infinito.
- Las soluciones están fueran del rango tolerado por la estructura cinemática del manipulador.
- Comúnmente las ecuaciones a resolver son no lineales; como consecuencia hay casos donde es imposible hallar una solución en forma cerrada.

La estructura cinemática de los robots se diseña para ser simples. De tal manera que se use un método analítico o geométrico para resolver la cinemática inversa del manipulador. En el caso de los robots *Geomagic Touch* se usará el método geométrico por ser el más sencillo.

2.1.3. Cinemática diferencial

La cinemática diferencial representa la relación entre las velocidades articulares y las velocidades lineales y angulares del efector final. El objetivo es expresar la velocidad lineal del efector final $\dot{\mathbf{p}}_n$ y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_n$ como una función de las velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}$. Las relaciones lineales están dadas por (Siciliano et al., 2010)

$$\dot{\mathbf{p}}_n = \mathbf{J}_P(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\omega}_n = \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (2.5)$$

donde $\mathbf{J}_P \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ es la matriz que relaciona las velocidades articulares con la velocidad lineal del efector final, mientras que $\mathbf{J}_\omega \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ representa la relación de velocidad articular contra las velocidad angular del efector final. En forma compacta (2.6) es la ecuación de la *cinemática diferencial* y (2.7) es el *Jacobiano geométrico*.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_n \\ \boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}_g(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{J}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

También se utiliza el *Jacobiano analítico* para representar la cinemática diferencial. En este caso se deriva la posición cartesiana $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.8)$$

donde $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ es la velocidad del efector final en coordenadas cartesianas y $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}$ es el *Jacobiano analítico* del manipulador.

Las singularidades son configuraciones en las cuales el Jacobiano pierde rango, es decir que la matriz no es invertible. Las singularidades son importantes de analizar debido a que:

- Indican configuraciones donde las direcciones de movimiento son reducidas, no es posible mover el efector final arbitrariamente.
- La solución a la cinemática inversa presenta dos opciones: no existir o presentar un número infinito de soluciones.

- Una fuerza no acotada en el efector final se comporta como una fuerza acotada en las articulaciones.
- Velocidades acotadas del efector final se reflejan como velocidades no acotadas en las articulaciones.

2.2. Modelo dinámico

Las ecuaciones dinámicas describen explícitamente la relación entre fuerza y movimiento. El modelo dinámico de un manipulador juega un rol importante para: la simulación de movimiento, el análisis de las estructuras del manipulador, el diseño de algoritmos de control. La simulación del movimiento del manipulador permite a las estrategias de control y técnicas de planificación de movimiento ser probadas sin la utilización de un sistema físico.

El método empleado para obtener el modelo dinámico del manipulador es comúnmente el de *Euler-Lagrange*. Las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.10) describen la evolución de un sistema mecánico sujeto a restricciones holonómicas. El primer paso consiste en formar el Lagrangiano del sistema (2.9), que es la diferencia entre la energía cinética \mathcal{K} y la energía potencial \mathcal{P} , por tanto

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P}, \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

donde q_i son las coordenadas generalizadas, \dot{q}_i es la primera derivada con respecto al tiempo de q_i , τ_i es la fuerza generalizada aplicada a la articulación i . A continuación se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener el modelo dinámico siguiente

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.11)$$

donde

- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector generalizado de coordenadas articulares
- $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia definida positiva
- $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de Coriolis y fuerzas centrífugas
- $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida semipositiva que contiene los coeficientes de fricción viscosa
- $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas gravitacionales
- $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas que actúa en las articulaciones

2.2.1. Modelo dinámico de un sistema teleoperado

Considere un sistema compuesto por dos manipuladores con n -articulaciones, sin tener necesariamente la misma configuración cinemática. Se denota al robot local como (l) y al robot remoto como (r). La dinámica del local esta dado por (Nuño et al., 2008)

$$\mathbf{H}_l(\mathbf{q}_l)\ddot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{C}_l(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{D}_l\dot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{g}_l(\mathbf{q}_l) = \boldsymbol{\tau}_l - \boldsymbol{\tau}_h \quad (2.12)$$

Similarmente la dinámica del remoto queda como

$$\mathbf{H}_r(\mathbf{q}_r)\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}_r(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}_r\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}_r(\mathbf{q}_r) = \boldsymbol{\tau}_e - \boldsymbol{\tau}_r \quad (2.13)$$

donde los términos adicionales a (2.11) son los siguientes, considérese que $i = l, r$:

- $\boldsymbol{\tau}_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas que actúa en las articulaciones
- $\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{R}^n$ representa la fuerza aplicada por el humano al robot local
- $\boldsymbol{\tau}_e \in \mathbb{R}^n$ representa la interacción con el ambiente/entorno

Para el modelo dinámico de un sistema teleoperado en movimiento libre implica que $\boldsymbol{\tau}_h = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{\tau}_e = \mathbf{0}$.

2.2.2. Propiedades del modelo dinámico

El modelo dinámico de los manipuladores (2.12) y (2.13) presenta algunas propiedades útiles para el análisis y diseño del controlador (Kelly and Santibáñez, 2003). Las propiedades que se usarán son:

Propiedad 2.1 *La matriz de inercia $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$ satisface la siguiente desigualdad*

$$\lambda_{hi}\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{x} \leq \lambda_{Hi}\|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{q}_i, \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.14)$$

además $0 < \lambda_{hi} \leq \lambda_{Hi} < \infty$, con

$$\lambda_{hi} \triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)), \quad (2.15)$$

$$\lambda_{Hi} \triangleq \lambda_{\max}(\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)), \quad (2.16)$$

donde λ_{\min} y λ_{\max} son el mínimo y el máximo valor propio de la matriz respectivamente.

□

Propiedad 2.2 Con una definición apropiada la matriz $C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ cumple que $\dot{H}_i(\mathbf{q}_i) - 2C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ es antisimétrica, o bien

$$\mathbf{x}^T \left(\dot{H}_i(\mathbf{q}_i) - 2C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \right) \mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.17)$$

□

Propiedad 2.3 Con una definición apropiada de los parámetros del robot, se obtiene

$$H_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + D_i\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = Y_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i)\boldsymbol{\theta}_i. \quad (2.18)$$

donde $Y_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i) \in \mathbb{R}^{n_i \times l}$ se llama **regresor** y $\boldsymbol{\theta}_i \in \mathbb{R}^l$ es un vector constante de parámetros del robot.

□

Propiedad 2.4 Para robots de articulaciones rotacionales existe una constante k tal que

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq k, \quad (2.19)$$

para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

□

2.2.3. Modelo dinámico del *Geomagic Touch*

Para los experimentos se utilizaron dos robots *Geomagic Touch* de 3-grados de libertad. El modelo dinámico se presenta en función de ocho constantes paramétricas obtenidas por la identificación de parámetros fuera de línea basado en el método de mínimos cuadrados realizado por (Gutiérrez-Giles, 2016). El valor de los parámetros se aprecian en la Tabla 2.1.

Parámetro	Representación física	Valor
Θ_1	$m_2 l_{c2}^2 + \frac{1}{12} m_2 a_2^2 + m_3 a_2^2$	12×10^{-6}
Θ_2	$m_3 a_2 l_{c3}$	3×10^{-6}
Θ_3	$m_3 l_{c3}^2 + \frac{1}{12} m_3 a_3^2$	15×10^{-6}
Θ_4	cf_1	5×10^{-6}
Θ_5	cf_2	6×10^{-6}
Θ_6	cf_3	6×10^{-6}
Θ_7	$m_2 l_{c2} + m_3 a_2$	8.5×10^{-3}
Θ_8	$m_3 l_{c3}$	1×10^{-2}

Tabla 2.1: Identificación paramétrica para el modelo dinámico del robot *Geomagic Touch*

Por lo tanto el modelo dinámico del *Geomagic Touch* en la forma de (2.11) queda

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_2^2 \Theta_1 + c_2 c_{23} \Theta_2 + s_{23}^2 \Theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1 + 2c_3 \Theta_2 + \Theta_3 & c_3 \Theta_2 + \Theta_3 \\ 0 & c_3 \Theta_2 + \Theta_3 & \Theta_3 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \Theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_6 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ gc_2 \Theta_7 + gc_{23} \Theta_8 \\ gc_{23} \Theta_8 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Donde $c_1 = \cos(q_1)$, $c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$ y $c_{23} = \cos(q_2 + q_3)$. De (2.21) se tiene

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= -c_2 s_2 \dot{q}_2 \Theta_1 - \frac{1}{2}(c_2 s_{23}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + s_2 c_{23} \dot{q}_2) \Theta_2 + c_{23}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \Theta_3 \\
 C_{12} &= -c_2 s_2 \dot{q}_1 \Theta_1 - \frac{1}{2}(s_2 c_{23} + c_2 s_{23}) \dot{q}_1 \Theta_2 + s_2 c_{23} \dot{q}_1 \Theta_3 \\
 C_{13} &= -\frac{1}{2} c_2 s_{23} \dot{q}_1 \Theta_2 + c_{23} s_{23} \dot{q}_1 \Theta_3 \\
 C_{21} &= c_2 s_2 \dot{q}_1 \Theta_1 + \frac{1}{2}(s_2 c_{23} + c_2 s_{23}) \dot{q}_1 \Theta_2 - s_2 c_{23} \dot{q}_1 \Theta_3 \\
 C_{22} &= -s_3 \dot{q}_3 \Theta_2 \\
 C_{23} &= -s_3(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \Theta_2 \\
 C_{31} &= \frac{1}{2} c_2 s_{23} \dot{q}_1 \Theta_2 - c_2 s_{23} \dot{q}_1 \Theta_3 \\
 C_{32} &= s_3 \dot{q}_2 \Theta_2 \\
 C_{33} &= 0.
 \end{aligned}$$

Donde $s_1 = \sin(q_1)$, $s_{12} = \sin(q_1 + q_2)$ y $s_{23} = \sin(q_2 + q_3)$.

2.3. Teorema auxiliar

Teorema 2.1. (Khalil, 2002) Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen y $V : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable continua tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x}), \quad \forall \|\mathbf{x}\| \geq \mu > 0, \quad (2.25)$$

$\forall t \geq 0$ y $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$, donde α_1 y α_2 son funciones clase \mathcal{K} , $W_3(\mathbf{x})$ es una función continua positiva definida y $\mathbf{f} : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua por intervalos en t y localmente Lipschitz en $\mathbf{x} \in [0, \infty) \times \mathcal{D}$. Sea $r > 0$ tal que $\mathcal{B}_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq r\} \subset \mathcal{D}$ y supóngase que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)). \quad (2.26)$$

Entonces, existe una función β de la clase \mathcal{KL} tal que para cada estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$, se satisface

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad (2.27)$$

y además existe $T \geq 0$ (que depende de $\mathbf{x}(t_0)$ y de μ) tal que la solución de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ satisface

$$\|\mathbf{x}\| \leq \beta(\|\mathbf{x}\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (2.28)$$

$$\|\mathbf{x}\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (2.29)$$

Por otra parte, si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ y α_1 pertenece a la clase \mathcal{K}_∞ , entonces (2.28)-(2.29) se satisface para todo estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$, sin restricción en que tan larga es μ .

□

Diseño del observador y del controlador

3.1. Diseño del observador

Se desea diseñar una ley de control para el seguimiento de posición, cuando no es posible medir la velocidad. Se supone que existen retardos constantes producidos por el canal de comunicación, los cuales son $T_l > 0$ y $T_r > 0$. Se asume por simplicidad que el robot remoto está en movimiento libre, *i.e.* $\tau_e = \mathbf{0}$ en (2.13). Considérese que $i = l, r$, y por definición

$$\bar{\mathbf{q}}_i = \bar{\mathbf{q}}_i(t) \triangleq \mathbf{q}_i(t - T_i). \quad (3.1)$$

Sea $(\hat{\cdot})$ el valor estimado de (\cdot) , entonces el error de observación está dado por

$$\mathbf{z}_i \triangleq \mathbf{q}_i - \hat{\mathbf{q}}_i. \quad (3.2)$$

Se parte del observador propuesto en (Arteaga-Pérez and Kelly, 2004)

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_o + \mathbf{\Lambda} \mathbf{z} + k_d \mathbf{z} \quad (3.3)$$

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_o = \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_r + k_d \mathbf{\Lambda} \mathbf{z}, \quad (3.4)$$

donde k_d es un constante real positiva, $\mathbf{\Lambda} \triangleq \mathbf{I} + 2\mathbf{\Lambda}_1$, $\mathbf{\Lambda}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{z} \triangleq \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}$, $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_r = \dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{\Lambda}(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d)$ y \mathbf{q}_d es la posición deseada. En un sistema bilateral la posición deseada es la posición del otro manipulador. Por tanto se propone el siguiente observador, el cual es una simplificación de (3.3)-(3.4)

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} + (\mathbf{\Lambda}_{zi} + \mathbf{K}_{di}) \mathbf{z}_i \quad (3.5)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} = \mathbf{K}_{di} \mathbf{\Lambda}_{zi} \int_0^t \mathbf{z}_i(\vartheta) d\vartheta, \quad (3.6)$$

donde $\mathbf{\Lambda}_{zi}, \mathbf{K}_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales definidas positivas. Las ventajas de este observador radican en no requerir información del modelo de la planta, es de fácil implementación y sintonización. En la sección 3.3 se presenta el análisis de estabilidad en lazo cerrado con el controlador y la planta.

3.2. Diseño del controlador

Para el diseño del controlador se tomó como base (Arteaga-Pérez et al., 2006)

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_p \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_o, \quad (3.7)$$

donde $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices positivas definidas, $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es el Jacobiano analítico, $\mathbf{s}_o \triangleq \dot{\mathbf{x}}_o - \dot{\mathbf{x}}_r$. Sea $\dot{\mathbf{x}}_o \triangleq \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z}$ donde $\mathbf{\Lambda}_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz positiva definida, $\hat{\mathbf{x}}$ y \mathbf{z} forma parte del observador lineal propuesto en (Arteaga-Pérez et al., 2006; Arteaga-Pérez and Kelly, 2004). Se define

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{\Lambda}_x (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_d) + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.8)$$

donde $\mathbf{K}_\gamma, \mathbf{K}_\beta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices positivas definidas, $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^n$, con $\mathbf{s} = \hat{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{\Lambda}_x (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_d)$, $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s} - \mathbf{s}_d$, $\mathbf{s}_d = \mathbf{s}(0)e^{-kt}$ y

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \int_0^t \{ \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1(\vartheta) + \text{sign}(\mathbf{s}_1(\vartheta)) \} d\vartheta, \quad \boldsymbol{\sigma}_i(0) = \mathbf{0}, \quad (3.9)$$

La estructura del controlador se basa en el rediseño de Lyapunov, para lograr estabilización robusta. Por tanto partiendo de (3.7)-(3.9) se propone el siguiente controlador para seguimiento, usando únicamente los valores estimados de la posición y de la velocidad articular. Se definen

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \mathbf{\Lambda}_{zi} \mathbf{z}_i \quad (3.10)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \int_0^t (\mathbf{K}_{\beta i} \mathbf{s}_i + \text{sign}(\mathbf{s}_i)) d\vartheta, \quad \boldsymbol{\sigma}_i(0) = \mathbf{0}, \quad (3.11)$$

donde $i = \{l, r\}$, $\mathbf{K}_{\beta i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales definidas positivas, mientras que $\text{sign}(\mathbf{s}_i) = [\text{sign}(s_{i1}), \dots, \text{sign}(s_{in})]^T$ con s_{ij} elementos de \mathbf{s}_i para $j = 1, \dots, n$, donde

$$\mathbf{s}_r = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_r - \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_l + \mathbf{\Lambda}_{xr}(\hat{\mathbf{q}}_r - \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_l) \triangleq \Delta \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{\Lambda}_{xr} \Delta \mathbf{q}_r \quad (3.12)$$

$$\mathbf{s}_l = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_l - \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_r + \mathbf{\Lambda}_{xl}(\hat{\mathbf{q}}_l - \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_r) \triangleq \Delta \dot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{\Lambda}_{xl} \Delta \mathbf{q}_l. \quad (3.13)$$

Tómese en cuenta que

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_i = \hat{\mathbf{q}}_i(t - T_i) \quad \text{y} \quad \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i(t - T_i). \quad (3.14)$$

Ahora, se consideran las siguientes variables

$$\dot{\mathbf{q}}_{rr} \triangleq \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_l - \mathbf{\Lambda}_{xr}(\hat{\mathbf{q}}_r - \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_l) - \mathbf{K}_{\gamma r} \boldsymbol{\sigma}_r \quad (3.15)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{rl} \triangleq \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_r - \mathbf{\Lambda}_{xl}(\hat{\mathbf{q}}_l - \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_r) - \mathbf{K}_{\gamma l} \boldsymbol{\sigma}_l, \quad (3.16)$$

tal que

$$\mathbf{s}_{oi} \triangleq \dot{\mathbf{q}}_{oi} - \dot{\mathbf{q}}_{ri}, \quad (3.17)$$

donde $\mathbf{K}_{\gamma i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva. Finalmente basándose en las definiciones previas, la ley de control para el esclavo se propone como

$$\boldsymbol{\tau}_r = \mathbf{K}_{pr} \mathbf{s}_{or} - \mathbf{g}_r(\mathbf{q}_r). \quad (3.18)$$

Mientras que para el robot local se tiene

$$\boldsymbol{\tau}_l = -\mathbf{K}_{al} \dot{\hat{\mathbf{q}}}_l + \mathbf{g}_l(\mathbf{q}_l) - \mathbf{K}_{pl} \mathbf{s}_{ol}, \quad (3.19)$$

donde $\mathbf{K}_{al}, \mathbf{K}_{pr}, \mathbf{K}_{pl} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales definidas positivas.

3.3. Demostración de estabilidad para un sistema bilateral con retardo en movimiento libre

Teorema 3.1. *Sea el sistema bilateral con retardo (2.12)–(2.13) en lazo cerrado con el observador (3.5)–(3.6) y las leyes de control (3.18) y (3.19). En movimiento libre se tiene que $\tau_h = \mathbf{0}$ y $\tau_e = \mathbf{0}$, entonces se asume que*

a) T_1 y T_r son constantes, pero no necesariamente iguales.

Por tanto, las ganancias siempre pueden ser elegidas tal que

- i. Los errores de observación se pueden hacer arbitrariamente pequeños, i. e. $z_l \approx \mathbf{0}$, $\dot{z}_l \approx \mathbf{0}$, $z_r \approx \mathbf{0}$, and $\dot{z}_r \approx \mathbf{0}$
- ii. Todas las trayectorias de seguimiento son acotadas
- iii. Las trayectorias del sistema satisfacen $\mathbf{q}_i(t) \approx \mathbf{q}_i(t - T_r - T_1)$ y $\dot{\mathbf{q}}_i(t) \approx \dot{\mathbf{q}}_i(t - T_r - T_1)$. En particular $\mathbf{q}_r(t) \approx \mathbf{q}_l(t - T_1)$, $\mathbf{q}_l(t) \approx \mathbf{q}_r(t - T_r)$, $\dot{\mathbf{q}}_r(t) \approx \dot{\mathbf{q}}_l(t - T_1)$, y $\dot{\mathbf{q}}_l(t) \approx \dot{\mathbf{q}}_r(t - T_r)$
- iv. Si las posiciones tienden a un valor constante, entonces todos los errores de trayectoria y observación tienden a cero

□

Demostración. Antes de empezar la demostración se debe obtener la dinámica del error del sistema (2.12)–(2.13), en lazo cerrado con el observador (3.5)–(3.6) y las leyes de control (3.18) y (3.19), bajo la suposición de que los retardos T_1 y T_r son constantes, pero no necesariamente iguales. Se define $i = l, r$, entonces

$$\mathbf{s}_{qi} \triangleq \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{r}_i \triangleq \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{oi} = \dot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{\Lambda}_{zi} \mathbf{z}_i. \quad (3.21)$$

El lazo cerrado del sistema (2.12) con la ley de control (3.19) da

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1) = -\mathbf{K}_{al} \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1) - \mathbf{K}_{pl} \mathbf{s}_{ol} - \tau_h. \quad (3.22)$$

Al sustituir (3.17), (3.20) y (3.21) se tiene

$$\mathbf{s}_{oi} = \dot{\mathbf{q}}_{oi} - \dot{\mathbf{q}}_{ri} = \mathbf{s}_{qi} - \mathbf{r}_i. \quad (3.23)$$

Si se sustituye (3.23) en (3.22) se convierte en

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{s}}_{ql} + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \mathbf{s}_{ql} + \mathbf{K}_{vl} \mathbf{s}_{ql} = \mathbf{K}_{al} \dot{\mathbf{z}}_l + \mathbf{K}_{pl} \mathbf{r}_l + \mathbf{y}_{al} - \tau_h, \quad (3.24)$$

donde

$$\mathbf{K}_{vl} \triangleq \mathbf{D}_l + \mathbf{K}_{al} + \mathbf{K}_{pl} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{y}_{al} \triangleq -(\mathbf{H}_l(\mathbf{q}_l)\ddot{\mathbf{q}}_{rl} + \mathbf{C}_l(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\mathbf{q}}_{rl} + \mathbf{D}_l\dot{\mathbf{q}}_{rl} + \mathbf{K}_{al}\dot{\mathbf{q}}_{rl}). \quad (3.26)$$

De forma similar para el robot remoto, se desarrolla (2.13) en lazo cerrado con (3.18)

$$\mathbf{H}_r(\mathbf{q}_r)\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}_r(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}_r\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}_r(\mathbf{q}_r) = \boldsymbol{\tau}_e - \mathbf{K}_{pr}\mathbf{s}_{or} + \mathbf{g}_r(\mathbf{q}_r). \quad (3.27)$$

Posteriormente se sustituyen (3.23) en (3.27), entonces se obtiene

$$\mathbf{H}_r(\mathbf{q}_r)\dot{\mathbf{s}}_{qr} + \mathbf{C}_r(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s}_{qr} + \mathbf{K}_{vr}\mathbf{s}_{qr} = \mathbf{K}_{pr}\mathbf{r}_r + \mathbf{y}_{ar} + \boldsymbol{\tau}_e, \quad (3.28)$$

donde

$$\mathbf{K}_{vr} = \mathbf{D}_r + \mathbf{K}_{pr} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{y}_{ar} = -(\mathbf{H}_r(\mathbf{q}_r)\ddot{\mathbf{q}}_{rr} + \mathbf{C}_r(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_{rr} + \mathbf{D}_r\dot{\mathbf{q}}_{rr}). \quad (3.30)$$

Ahora se sustituye (3.5) en (3.6), por tanto para los observadores se tiene la siguiente ecuación para el manipulador local

$$\ddot{\mathbf{q}}_l - \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_l + \boldsymbol{\Lambda}_{zl}\dot{\mathbf{z}}_l + \mathbf{K}_{dl}\dot{\mathbf{z}}_l + \mathbf{K}_{dl}\boldsymbol{\Lambda}_{zl}\mathbf{z}_l = \ddot{\mathbf{q}}_l, \quad (3.31)$$

Se reemplaza (3.21) en (3.31), entonces se deriva la dinámica del observador en lazo cerrado

$$\dot{\mathbf{r}}_l + \mathbf{K}_{dl}\mathbf{r}_l = \ddot{\mathbf{q}}_l. \quad (3.32)$$

Se aplica el mismo análisis al manipulador remoto, por tanto

$$\dot{\mathbf{r}}_r + \mathbf{K}_{dr}\mathbf{r}_r = \ddot{\mathbf{q}}_r. \quad (3.33)$$

Las ecuaciones (3.24), (3.28), (3.32) y (3.33) describen completamente la dinámica en lazo cerrado del error de seguimiento y de observación, el cual permite definir el estado de error

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{ql} \\ \mathbf{s}_{qr} \\ \mathbf{r}_l \\ \mathbf{r}_r \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

3. DISEÑO DEL OBSERVADOR Y DEL CONTROLADOR

El Teorema 3.1. se prueba en cuatro pasos. Es importante resaltar que el resultado de estabilidad es local.

a) Se define para el estado (3.34) la siguiente región de interés

$$\mathcal{D} \triangleq \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4n} \mid \|\mathbf{x}\| \leq x_{\max} \}. \quad (3.35)$$

Siempre que $\|\mathbf{x}\|$ esté acotada por $0 < x_{\max} < \infty$ (i.e. $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$), cualquier otra señal afín al lazo cerrado del sistema estará acotada también, con la posible excepción de las posiciones articulares \mathbf{q}_1 y \mathbf{q}_r . De acuerdo a la definición dada en (3.21) z_1, \dot{z}_1, z_r y \dot{z}_r deben estar acotadas en \mathcal{D} . Se desarrolla (3.12), (3.15) y (3.20) para obtener

$$\mathbf{s}_{qr} = \dot{\mathbf{q}}_r - \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_1 + \mathbf{\Lambda}_{xr}(\hat{\mathbf{q}}_r - \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_1) + \mathbf{K}_{\gamma r}\boldsymbol{\sigma}_r = \dot{z}_r + \mathbf{s}_r + \mathbf{K}_{\gamma r}\boldsymbol{\sigma}_r, \quad (3.36)$$

o bien

$$\mathbf{s}_r + \mathbf{K}_{\gamma r}\boldsymbol{\sigma}_r = \mathbf{s}_{qr} - \dot{z}_r. \quad (3.37)$$

Como la diferencia $\mathbf{s}_{qr} - \dot{z}_r$ está acotada en \mathcal{D} , se puede mostrar que \mathbf{s}_r y $\boldsymbol{\sigma}_r$ están acotadas (Arteaga-Pérez et al., 2006) y por definición también lo es $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_r$. Nótese que del mismo modo se demuestra que $\mathbf{s}_1, \boldsymbol{\sigma}_1$ y $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1$ están acotadas. Además, $\Delta\mathbf{q}_r, \Delta\dot{\mathbf{q}}_r, \Delta\mathbf{q}_1$ y $\Delta\dot{\mathbf{q}}_1$ deben estar acotadas puesto que T_1 y T_r son constantes, lo que permite representar a \mathbf{s}_i en (3.12)–(3.13) como un filtro lineal estable con entrada acotada $\Delta\mathbf{q}_i$.

A continuación, se reemplaza (3.5) en (3.6) y se obtiene

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_i = \mathbf{K}_{di}\mathbf{\Lambda}_{zi}z_i + \mathbf{\Lambda}_{zi}\dot{z}_i + \mathbf{K}_{di}\dot{z}_i. \quad (3.38)$$

Por lo tanto se deduce que $\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_r$ y $\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_1$ están acotadas y consecuentemente también están acotadas $\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_r$ y $\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_1$. De este modo, de (3.15) y (3.16) tanto como $\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{rr}$ y $\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{r1}$ están acotadas.

Se define para el manipulador local la siguiente función positiva definida

$$V_1 = \frac{1}{2}\dot{\hat{\mathbf{q}}}_1^T \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)\dot{\hat{\mathbf{q}}}_1, \quad (3.39)$$

La derivada de V_m a lo largo de (2.12) y (3.19) está dada por

$$\dot{V}_1 = -\dot{\hat{\mathbf{q}}}_1^T (\mathbf{D}_1 + \mathbf{K}_{al})\dot{\hat{\mathbf{q}}}_1 + \dot{\hat{\mathbf{q}}}_1^T (\mathbf{K}_{al}\dot{z}_1 - \mathbf{K}_{pl}\mathbf{s}_{ol}), \quad (3.40)$$

y satisface

$$\dot{V}_1 \leq -\|\dot{\mathbf{q}}_1\| ((\lambda_{\min}(\mathbf{D}_1) + \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{al}))\|\dot{\mathbf{q}}_1\| - \|\mathbf{K}_{al}\dot{\mathbf{z}}_1 - \mathbf{K}_{pl}\mathbf{s}_{ol}\|). \quad (3.41)$$

Retomando de (3.17), (3.20) y (3.21) se tiene que $\mathbf{K}_{pl}\mathbf{s}_{ol} = \mathbf{K}_{pl}(\mathbf{s}_{ql} - \mathbf{r}_1)$ debe estar acotada en \mathcal{D} , es decir existe una constante positiva v_1 elegida tal que $\|\mathbf{K}_{al}\dot{\mathbf{z}}_1 - \mathbf{K}_{pl}\mathbf{s}_{ol}\| \leq v_1$. Por tanto $\dot{V}_1 \leq 0$ si

$$\|\dot{\mathbf{q}}_1\| \geq \frac{v_1}{(\lambda_{\min}(\mathbf{D}_1) + \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{al}))}. \quad (3.42)$$

De este análisis se puede concluir el acotamiento de $\dot{\mathbf{q}}_1$ y como una consecuencia directa de $\dot{\mathbf{q}}_1$ debido a que $\dot{\mathbf{z}}_1$ está acotada, lo cual implica que $\dot{\mathbf{q}}_{ol}$ en (3.6) también está acotada. Por otro lado, dado que se consideran articulaciones de revolución, entonces de (2.12) $\ddot{\mathbf{q}}_1$ debe estar acotada. Nótese además, puesto que $\Delta\dot{\mathbf{q}}_1$ está acotada, $\ddot{\mathbf{q}}_r$, $\dot{\mathbf{q}}_r$, $\dot{\mathbf{q}}_{or}$ y $\dot{\mathbf{q}}_r$ también están acotadas. Claramente τ_r en (3.18) tiene que estar acotada y de (2.13), $\ddot{\mathbf{q}}_r$ está acotada reiteradamente por la consideración de articulaciones de revolución por simplificación.

Finalmente, de (3.15) y (3.16), $\dot{\mathbf{q}}_{rr}$ y $\dot{\mathbf{q}}_{rl}$ están acotadas, implicando el acotamiento de \mathbf{y}_{al} en (3.26) y de \mathbf{y}_{ar} en (3.30). Por tanto de $\dot{\mathbf{s}}_{ql}$ en (3.24) y de $\dot{\mathbf{s}}_{qr}$ en (3.28). Por otro lado, $\dot{\mathbf{r}}_1$ en (3.32) y $\dot{\mathbf{r}}_r$ en (3.33) deben estar acotadas, tanto como $\ddot{\mathbf{z}}_1$ y $\ddot{\mathbf{z}}_r$, debido a que $\ddot{\mathbf{q}}_1$ y $\ddot{\mathbf{q}}_r$ se ha mostrado que están acotadas.

- b) El siguiente paso consiste en demostrar que un conjunto de ganancias puede ser encontrado para asegurar que el estado \mathbf{x} permanezca acotado para todo tiempo, *i. e.* $\mathbf{x} \in \mathcal{D} \forall t$, siempre que las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0)$ sean lo suficientemente pequeñas. Con el fin de hacer esto, se considera

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}, \quad (3.43)$$

con $\mathbf{M} \triangleq$ matriz diagonal $\{\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1), \mathbf{H}_r(\mathbf{q}_r), \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$. Claramente se satisface debido a la Propiedad 2.1 que

$$\lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}\|^2, \quad (3.44)$$

con $\lambda_1 \triangleq \frac{1}{2}\lambda_{\min}(\mathbf{M})$ y $\lambda_2 \triangleq \frac{1}{2}\lambda_{\max}(\mathbf{M})$.

De la Propiedad 2.2 se tiene que la derivada de $V(\mathbf{x})$ a lo largo de (3.24), (3.28), (3.32)

y (3.33) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) = & -\mathbf{s}_{ql}^T \mathbf{K}_{vl} \mathbf{s}_{ql} + \mathbf{s}_{ql}^T (\mathbf{K}_{al} \dot{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{K}_{pl} \mathbf{r}_1 + \mathbf{y}_{al}) \\ & -\mathbf{s}_{qr}^T \mathbf{K}_{vr} \mathbf{s}_{qr} + \mathbf{s}_{qr}^T (\mathbf{K}_{pr} \mathbf{r}_r + \mathbf{y}_{ar}) \\ & -\mathbf{r}_1^T \mathbf{K}_{dl} \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1^T \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ & -\mathbf{r}_r^T \mathbf{K}_{dr} \mathbf{r}_r + \mathbf{r}_r^T \ddot{\mathbf{q}}_r. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Se satisface que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) \leq & -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{vl}) \|\mathbf{s}_{ql}\|^2 \\ & + \|\mathbf{s}_{ql}\| (\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{al}) \|\dot{\mathbf{z}}_1\| + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{pl}) \|\mathbf{r}_1\| + \|\mathbf{y}_{al}\|) \\ & -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{vr}) \|\mathbf{s}_{qr}\|^2 + \|\mathbf{s}_{qr}\| (\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{pr}) \|\mathbf{r}_r\| + \|\mathbf{y}_{ar}\|) \\ & -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{dl}) \|\mathbf{r}_1\|^2 + \|\mathbf{r}_1\| \|\ddot{\mathbf{q}}_1\| \\ & -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{dr}) \|\mathbf{r}_r\|^2 + \|\mathbf{r}_r\| \|\ddot{\mathbf{q}}_r\|. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Se retoma el interés por el comportamiento de las trayectorias del sistema, únicamente para el caso cuando $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$. De acuerdo con el Inciso a) de la prueba, deben existir constantes positivas de tal manera que

$$\alpha_l \triangleq \max_{\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}} \|\mathbf{y}_{al}\|, \quad (3.47)$$

$$\alpha_r \triangleq \max_{\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}} \|\mathbf{y}_{ar}\|, \quad (3.48)$$

$$a_l \triangleq \max_{\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}} \|\ddot{\mathbf{q}}_1\|, \quad (3.49)$$

$$a_r \triangleq \max_{\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}} \|\ddot{\mathbf{q}}_r\|. \quad (3.50)$$

Nótese que de acuerdo con la definición (3.21) se obtiene

$$\|\mathbf{z}_i\| \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{\Lambda}_{zi})} \|\mathbf{r}_i\|, \quad (3.51)$$

y

$$\|\dot{\mathbf{z}}_i\| \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_{zi})}{\lambda_{\min}(\mathbf{\Lambda}_{zi})} + 1 \right) \|\mathbf{r}_i\|. \quad (3.52)$$

Se usan (3.47)–(3.52) para reescribir $\dot{V}(\mathbf{x})$ en (3.46) como

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}) \leq & -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{vl})\|\mathbf{s}_{ql}\|^2 & (3.53) \\
& +\|\mathbf{s}_{ql}\| \left(\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{al}) \left(\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}_{zl})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}_{zl})} + 1 \right) \|\mathbf{r}_1\| + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{pl})\|\mathbf{r}_1\| + \alpha_1 \right) \\
& -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{vr})\|\mathbf{s}_{qr}\|^2 + \|\mathbf{s}_{qr}\| (\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{pr})\|\mathbf{r}_r\| + \alpha_r) \\
& -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{dl})\|\mathbf{r}_1\|^2 + \|\mathbf{r}_1\|a_l \\
& -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{dr})\|\mathbf{r}_r\|^2 + \|\mathbf{r}_r\|a_r.
\end{aligned}$$

Al definir

$$\beta_1 \triangleq \left(\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{al}) \left(\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}_{zl})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}_{zl})} + 1 \right) + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{pl}) \right), \quad (3.54)$$

$$\beta \triangleq \alpha_1 + \alpha_r + a_l + a_r, \quad (3.55)$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}) \leq & -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{vl})\|\mathbf{s}_{ql}\|^2 + \beta_1\|\mathbf{s}_{ql}\|\|\mathbf{r}_1\| - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{dl})\|\mathbf{r}_1\|^2 & (3.56) \\
& -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{vr})\|\mathbf{s}_{qr}\|^2 + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{pr})\|\mathbf{s}_{qr}\|\|\mathbf{r}_r\| - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{dr})\|\mathbf{r}_r\|^2 \\
& +\beta\|\mathbf{x}\|.
\end{aligned}$$

Si se eligen las ganancias tal que

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{vl}) \geq 1 + 2\delta \quad (3.57)$$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{vr}) \geq 1 + 2\delta \quad (3.58)$$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{dl}) \geq \frac{\beta_1^2}{4} + 2\delta \quad (3.59)$$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{dr}) \geq \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{pr})^2}{4} + 2\delta, \quad (3.60)$$

donde δ es una constante positiva y se les sustituyen en (3.56), se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}) \leq & -\left(\|\mathbf{s}_{ql}\| - \frac{\beta_1}{2}\|\mathbf{r}_1\| \right)^2 & (3.61) \\
& -\left(\|\mathbf{s}_{qr}\| - \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{pr})}{2}\|\mathbf{r}_r\| \right)^2 - 2\delta\|\mathbf{x}\|^2 + \beta\|\mathbf{x}\|,
\end{aligned}$$

lo que satisface

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -2\delta\|\mathbf{x}\|^2 + \beta\|\mathbf{x}\|. \quad (3.62)$$

Definiendo

$$\mu \triangleq \frac{\beta}{\delta}, \quad (3.63)$$

Se obtiene

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\delta\|\mathbf{x}\|^2 - \delta(\|\mathbf{x}\|^2 - \mu\|\mathbf{x}\|). \quad (3.64)$$

Entonces, siempre que $\|\mathbf{x}\| \geq \mu$ se cumple

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\delta\|\mathbf{x}\|^2 \triangleq -W_3(\mathbf{x}). \quad (3.65)$$

Para probar el Teorema 3.1, se considera el Teorema 2.1. Para satisfacer las condiciones (2.24) y (2.25) del Teorema 2.1 se escogen $\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) = \lambda_1\|\mathbf{x}\|^2$ y $\alpha_2(\|\mathbf{x}\|) = \lambda_2\|\mathbf{x}\|^2$ en (3.44), las cuales con la correcta sintonización de ganancias se satisfacen en \mathcal{D} . De acuerdo con (2.27) la condición inicial debe cumplir con

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} x_{\max}, \quad (3.66)$$

De acuerdo con (2.29) el estado está finalmente acotado por

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \mu \triangleq b_f. \quad (3.67)$$

Se puede concluir que la cota final b_f se puede hacer arbitrariamente pequeña si se toma en cuenta (3.57)–(3.60) y (3.63). Nótese que debe cumplirse con $\mu < \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} x_{\max}$.

- c) Una vez que se ha mostrado que el estado \mathbf{x} está acotado y se puede hacer arbitrariamente pequeño, el siguiente paso consiste en demostrar que los errores Δ_{q_r} , $\Delta\dot{q}_r$, Δq_l y $\Delta\dot{q}_l$ tiendan a cero. Primero se sustituye (3.11) en (3.37) con lo que se obtiene

$$\dot{\mathbf{s}}_r = -\mathbf{K}_{\gamma_r} (\mathbf{K}_{\beta_r} \mathbf{s}_r + \text{sign}(\mathbf{s}_r)) + \dot{\mathbf{s}}_{q_r} - \ddot{\mathbf{z}}_r. \quad (3.68)$$

Nótese que la diferencia $\dot{\mathbf{s}}_{q_r} - \ddot{\mathbf{z}}_r$ esta acotada en la región \mathcal{D} , por tanto se puede demos-

3.3 Demostración de estabilidad para un sistema bilateral con retardo en movimiento libre

trar que $s_r \equiv \mathbf{0}$ en un tiempo finito, véase (Arteaga-Pérez et al., 2006). Entonces de la definición (3.12) se tiene que $\Delta q_r, \Delta \dot{q}_r \rightarrow \mathbf{0}$, como consecuencia

$$\hat{q}_r \rightarrow \bar{q}_1 \quad \text{y} \quad \dot{\hat{q}}_r \rightarrow \dot{\bar{q}}_1. \quad (3.69)$$

del mismo modo para el local se tiene

$$\hat{q}_1 \rightarrow \bar{q}_r \quad \text{y} \quad \dot{\hat{q}}_1 \rightarrow \dot{\bar{q}}_r. \quad (3.70)$$

d) Ya que los errores de observación se pueden hacer arbitrariamente pequeños, entonces dentro de un tiempo finito se da

$$\hat{q}_1 \approx q_1 \quad \dot{\hat{q}}_1 \approx \dot{q}_1 \quad \hat{q}_r \approx q_r \quad \text{y} \quad \dot{\hat{q}}_r \approx \dot{q}_r. \quad (3.71)$$

Además se cumple

$$\hat{q}_1(t - T_1) \approx q_1(t - T_1) \quad \text{y} \quad \dot{\hat{q}}_1(t - T_1) \approx \dot{q}_1(t - T_1), \quad (3.72)$$

del mismo modo para el manipulador remoto se tiene

$$\hat{q}_r(t - T_r) \approx q_r(t - T_r) \quad \text{y} \quad \dot{\hat{q}}_r(t - T_r) \approx \dot{q}_r(t - T_r). \quad (3.73)$$

Tomando en cuenta (3.72) y (3.73) en combinación con (3.69)-(3.70) se obtiene

$$q_r(t) \approx q_1(t - T_1) \quad \text{y} \quad \dot{q}_r(t) \approx \dot{q}_1(t - T_1), \quad (3.74)$$

consecuentemente

$$q_1(t) \approx q_r(t - T_r) \quad \text{y} \quad \dot{q}_1(t) \approx \dot{q}_r(t - T_r). \quad (3.75)$$

Por último de (3.74) y (3.75) se obtiene

$$\begin{aligned} q_r(t) &\approx q_1(t - T_1) \approx q_r(t - T_r - T_1), \\ \dot{q}_r(t) &\approx \dot{q}_1(t - T_1) \approx \dot{q}_r(t - T_r - T_1), \end{aligned} \quad (3.76)$$

y

$$\begin{aligned} q_1(t) &\approx q_r(t - T_r) \approx q_1(t - T_r - T_1), \\ \dot{q}_1(t) &\approx \dot{q}_r(t - T_r) \approx \dot{q}_1(t - T_r - T_1), \end{aligned} \quad (3.77)$$

3. DISEÑO DEL OBSERVADOR Y DEL CONTROLADOR

Por lo tanto la prueba queda demostrada. Si las posiciones articulares \mathbf{q}_r y \mathbf{q}_1 tienden a un valor constante, entonces para un tiempo $t_f > 0$ se debe tener $\dot{\mathbf{q}}_1(t) = \ddot{\mathbf{q}}_1(t) = \dot{\mathbf{q}}_r(t) = \ddot{\mathbf{q}}_r(t) = \mathbf{0}$. Entonces, consecuentemente, de (3.32)–(3.33), tanto \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_r tienden a cero. Sucesivamente, de (3.21) esto significa que $\mathbf{z}_i, \dot{\mathbf{z}}_i \rightarrow \mathbf{0}$, para $i = 1, r$. Por lo tanto, el símbolo de aproximación (\approx) se puede reemplazar en (3.71)–(3.77) por el símbolo igual ($=$), lo cual muestra que $\mathbf{q}_r \rightarrow \mathbf{q}_1$.

□

Observación 3.1. La cota máxima del error de observación esta dada por

$$\|\mathbf{z}_i\| \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{\Lambda}_{zi})} b_f \quad \text{y} \quad \|\dot{\mathbf{z}}_i\| \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_{zi})}{\lambda_{\min}(\mathbf{\Lambda}_{zi})} + 1 \right) b_f, \quad (3.78)$$

nótese que el observador dado en este trabajo es más simple que el introducido en (Arteaga-Pérez et al., 2006). Consecuentemente, no se puede garantizar que el error de observación tienda a cero, solamente se puede hacer arbitrariamente pequeño. Desde un punto de vista practico, sin embargo, la simplificación vale la pena.

□

Observación 3.2. Teniendo $\mathbf{q}_i(t) \approx \mathbf{q}_i(t - T_r - T_1)$ el Inciso *iii.* implica que las trayectorias del sistema tienden ya sea a una señal periódica con un periodo de $T_r + T_1$ o a un valor constante, para el cual puede ser garantizado exactamente que $\mathbf{q}_r = \mathbf{q}_1$, *i. e.* el problema de regulación está resuelto. Es probable que sea esto lo que pase debido a los efectos de fricción. Sin embargo, como se reporta en el Capítulo 4 durante las oscilaciones de la respuesta transitoria se presenta un periodo aproximado de $T_r + T_1$. El periodo $T_r + T_1$ no se alcanza debido a los efectos de amortiguación (*i. e.* no se tiene asociada una frecuencia angular no amortiguada).

□

Resultados experimentales

En este capítulo se presentan los resultados experimentales del esquema observador- controlador introducido en el Capítulo 3. El experimento fue desarrollado en dos robots *Geomagic Touch* de configuración antropomorfa. El manipulador tiene 3-grados de libertad, ver Figura 4.1, donde L-R son el robot local y el robot remoto, respectivamente. El experimento se realizó usando Visual Studio en lenguaje C++; se usó el reloj de windows para emplear un tiempo de muestreo de 1 ms. El retardo T_1 y T_r se emuló via software.



Figura 4.1: Sistema teleoperado de dos robots *Geomagic Touch*

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para el observador-controlador del Capítulo 3 se usó compensación de la gravedad y el valor de las ganancias se determinaron heurísticamente, las cuales son

- Observador local:

$$\mathbf{\Lambda}_{zl} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{dl} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}.$$

- Observador remoto:

$$\mathbf{\Lambda}_{zr} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{dr} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}.$$

- Controlador local:

$$\mathbf{\Lambda}_{xl} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{al} = \begin{bmatrix} 0.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{pl} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0.055 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{\gamma l} = \begin{bmatrix} 0.002 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0.002 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{\beta l} = \begin{bmatrix} 0.00000001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00000001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00000001 \end{bmatrix}.$$

- Controlador remoto:

$$\mathbf{\Lambda}_{xr} = \begin{bmatrix} 65 & 0 & 0 \\ 0 & 93 & 0 \\ 0 & 0 & 87 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{\gamma r} = \begin{bmatrix} 0.002 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0.002 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{pr} = \begin{bmatrix} 0.022 & 0 & 0 \\ 0 & 0.025 & 0 \\ 0 & 0 & 0.025 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{\beta r} = \begin{bmatrix} 0.00000001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00000001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00000001 \end{bmatrix}.$$

Las condiciones iniciales se eligieron de la Posición de *Home*

$$\hat{\mathbf{q}}_l(0) = \bar{\mathbf{q}}_l(0) = \begin{bmatrix} 0.0 [^\circ] \\ 90 [^\circ] \\ -90 [^\circ] \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

y

$$\hat{\mathbf{q}}_r(0) = \bar{\mathbf{q}}_r(0) = \begin{bmatrix} 0.0 [^\circ] \\ 90 [^\circ] \\ -90 [^\circ] \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Los experimentos presentados a continuación consisten en mover el efector-final del robot local y soltarlo después de trazar una trayectoria, de esta forma el sistema se vuelve autónomo.

A continuación se presentan tres secciones de resultados experimentales. En la primera sección se contempla el caso ideal cuando no hay presencia del retardo. Para la segunda sección el retardo es asimétrico, se realizaron dos pruebas la primera con un retardo menor a 1[seg] y la segunda prueba con un retardo de 5[seg]. Finalmente se muestra el caso de retardo simétrico para un retardo menor a 1[seg] y para un retardo de 5[seg].

4.1. Sin retardo

Para el primer experimento se considera el caso ideal cuando el tiempo de retardo es nulo, es decir $T_l = T_r = 0[\text{seg}]$. La persona describe una trayectoria arbitraria y suelta al robot al tiempo de 40[seg], los robots se quedan en la misma posición donde se soltaron.

Las Figuras 4.2(a), 4.2(c) y 4.2(e) muestran la posición del robot local vs la posición retardada del robot remoto, mientras que en las Figuras 4.2(b), 4.2(d) y 4.2(f) se muestran la posición del robot remoto vs la posición retardada del robot local. Una vez que el robot local se suelta a los 40[seg] este permanece en el valor final para todo tiempo futuro. Al no existir retardo las gráficas de la posición del robot local son iguales al robot remoto.

En la Figura 4.3 se muestra el error de seguimiento. En la Figura 4.3(a) se muestra a

$$e_l = q_l - \bar{q}_r, \quad (4.3)$$

mientras que para la Figura 4.8(b) se tiene

$$e_r = q_r - \bar{q}_l. \quad (4.4)$$

en estado estacionario $e_l = -e_r$. El error de posición oscila en una vecindad cercana al origen con cota máxima de $3[^\circ]$, este error se puede disminuir al realizar una mejor sintonización de ganancias. La ley de control está diseñada para que los manipuladores tiendan a una posición constante.

En la Figura 4.4 se muestra el error de observación, donde el valor del error de observación en estado estacionario es cero. En la Figura 4.8(a) se aprecian los errores de observación para el robot local

$$z_l = q_l - \hat{q}_l \quad (4.5)$$

y en la Figura 4.8(b) para el robot remoto

$$z_r = q_r - \hat{q}_r. \quad (4.6)$$

Finalmente, en la Figura 4.5 se tienen las velocidades estimadas. En las Figuras 4.5(a), 4.5(c) y 4.5(e) se tiene la velocidad estimada del robot local vs la velocidad estimada retardada del robot remoto y en las Figuras 4.5(b), 4.5(d) y 4.5(f) se tiene la velocidad estimada del robot local vs la velocidad estimada retardada del robot remoto.

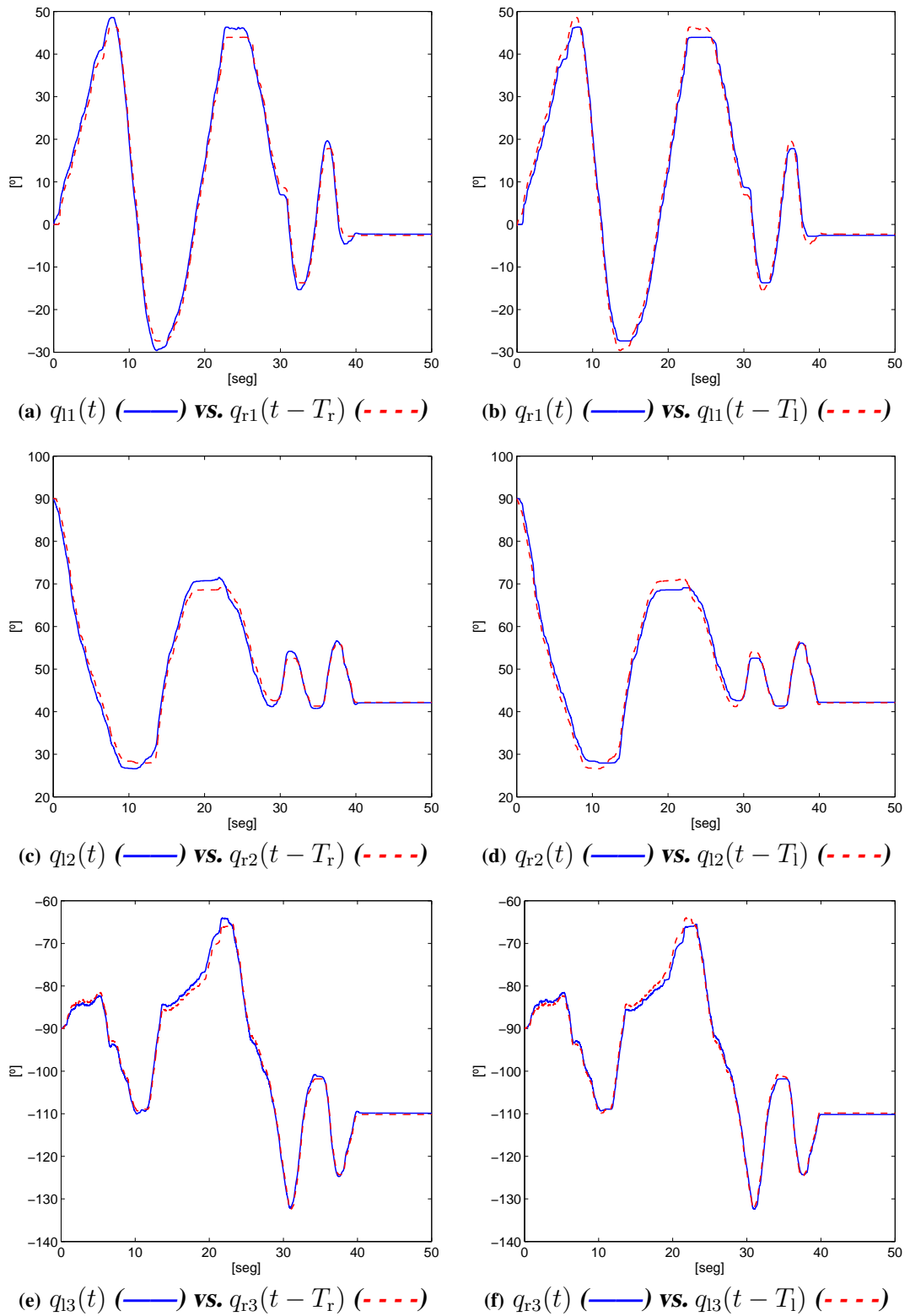
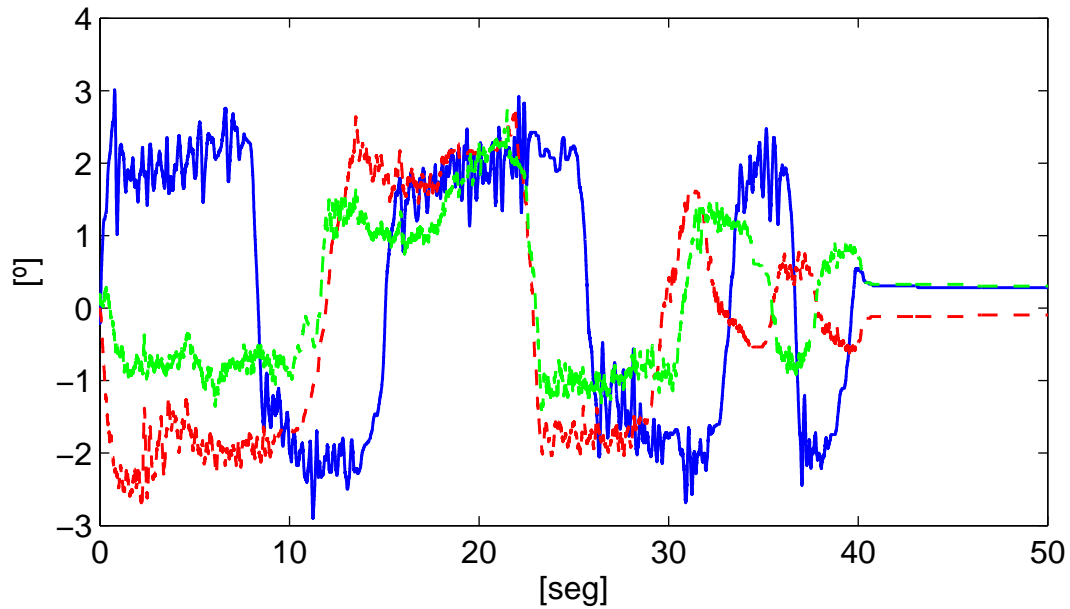
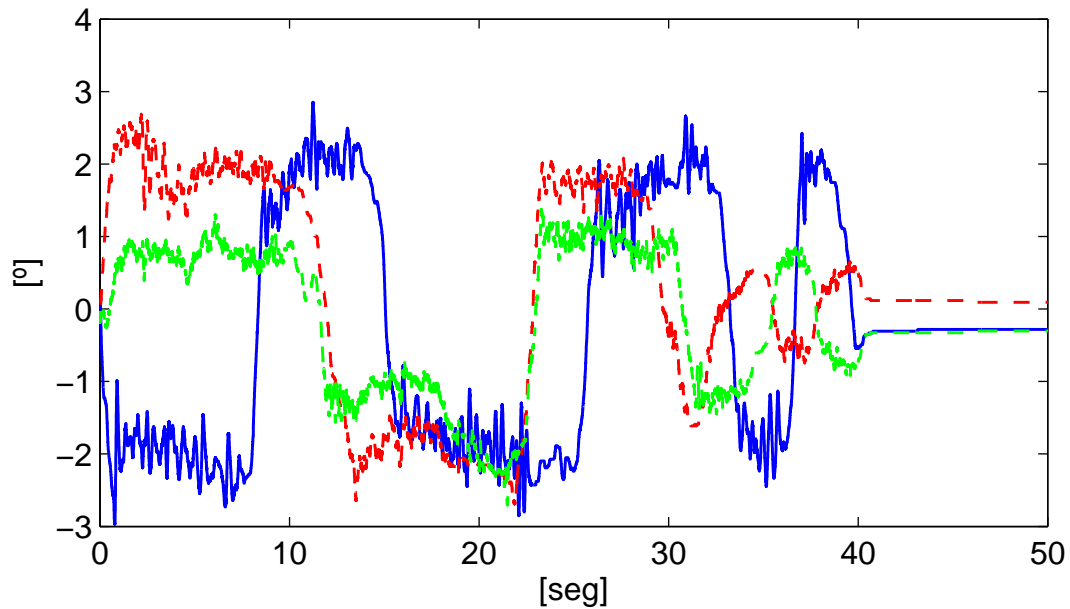


Figura 4.2: Sin retardo. Posición

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

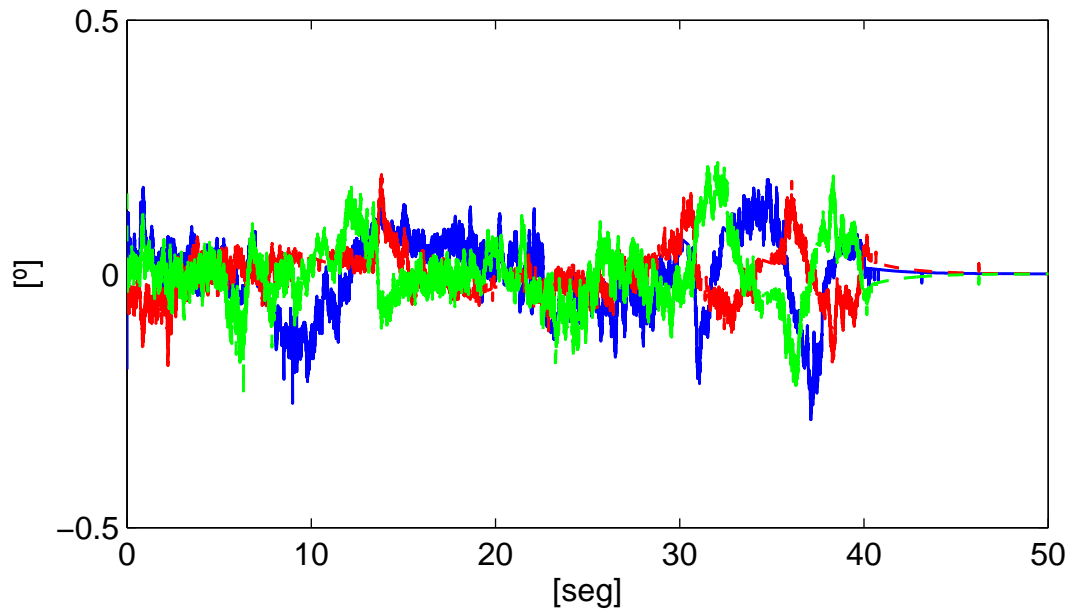


(a) e_{11} (—) vs. e_{12} (- - -) vs. e_{13} (- · - ·)

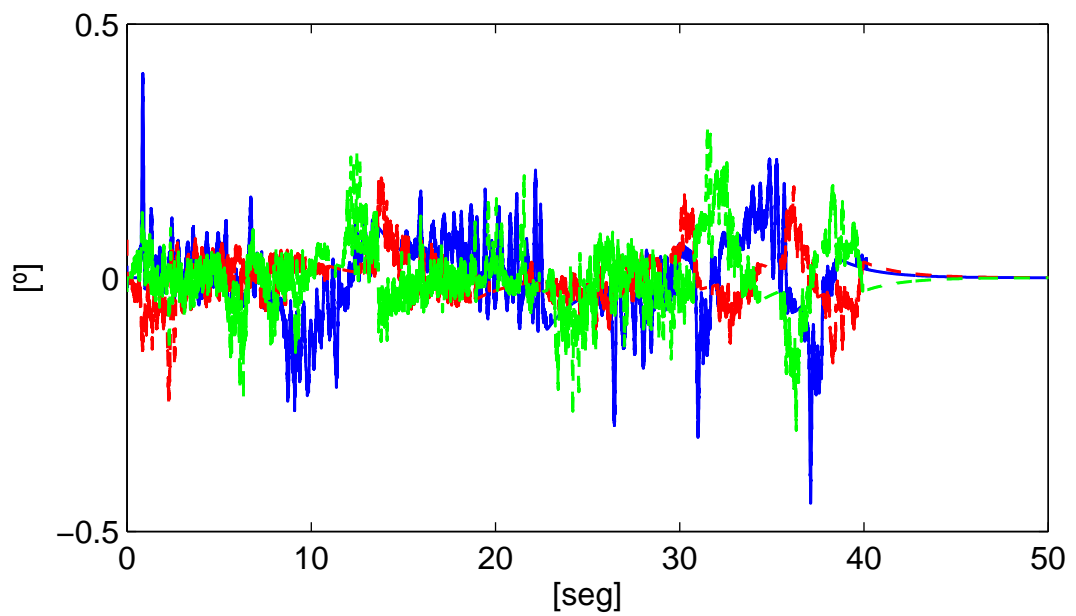


(b) e_{r1} (—) vs. e_{r2} (- - -) vs. e_{r3} (- · - ·)

Figura 4.3: Sin retardo. Errores de seguimiento



(a) z_{11} (—) vs. z_{12} (- - -) vs. z_{13} (- · - ·)



(b) z_{r1} (—) vs. z_{r2} (- - -) vs. z_{r3} (- · - ·)

Figura 4.4: Sin retardo. Errores de observación

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

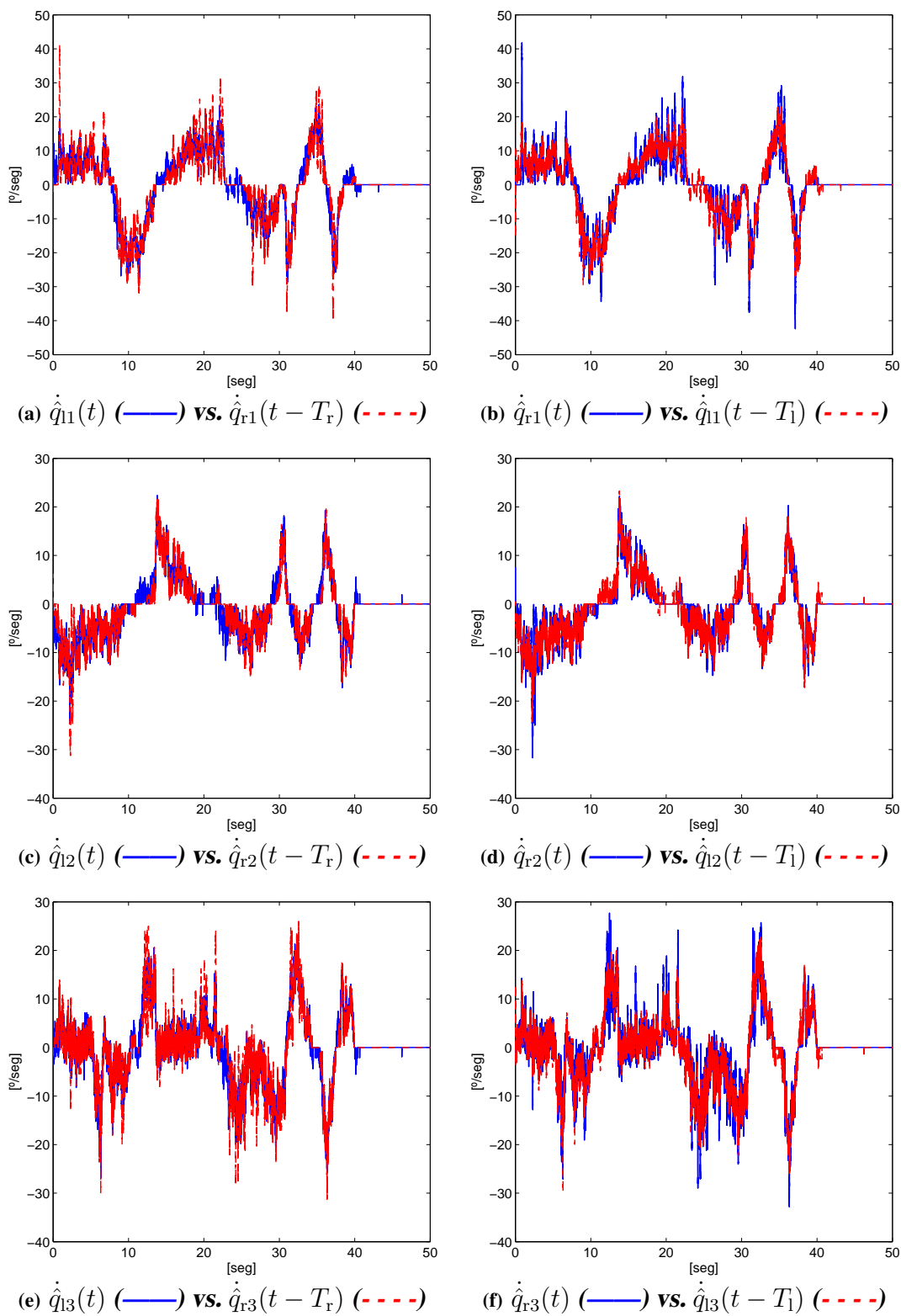


Figura 4.5: Sin retardo. Velocidades

4.2. Retardo asimétrico

4.2.1. Retardo asimétrico menor a un segundo

Para el segundo experimento se programó un retardo asimétrico; la información del robot remoto al robot local tarda $T_l = 0.7[\text{seg}]$, mientras que la información que envía el robot local al robot remoto tarda $T_r = 0.3[\text{seg}]$. La persona mueve el efector final del robot local desde la posición *home* describiendo un círculo por $7.7[\text{seg}]$ y lo suelta, así el sistema se vuelve autónomo.

En las Figuras 4.6(a), 4.6(c) y 4.6(e) se muestra la posición del manipulador local vs la posición retardada del manipulador remoto, después del segundo 7.7 los robots oscilan con la misma frecuencia de aproximadamente $1[\text{Hz}]$, esto se debe a la suma de los retardos como se ve en el Inciso *iii.* del Teorema 3.1, por lo tanto $T_l + T_r = 1[\text{seg}]$. Mientras que las Figuras 4.6(b), 4.6(d) y 4.6(f) muestran la posición del manipulador remoto vs la posición retardada del manipulador local. Se ve claramente como ambos robots tienden a una posición articular constante en estado estacionario, en presencia de un tiempo de retardo asimétrico.

En la Figura 4.7 se aprecian los errores de seguimiento. En la Figura 4.7(a) se muestra a el error de seguimiento del local, mientras que en la Figura 4.7(b) está es error de seguimiento de robot remoto. En estado estacionario el error de seguimiento para la articulación q_{i1} es de $0.023[^\circ]$, para q_{i2} es de $0.023[^\circ]$ y para q_{i3} es de $0.093[^\circ]$. Además del ruido de los encoders, los errores se ven afectados por la fricción. El error de seguimiento se puede hacer más pequeño con una selección mejor de ganancias, pero esto puede deteriorar la respuesta transitoria.

En la Figura 4.8 se ven los errores de observación. Los errores oscilan en una cota máxima de $0.6[^\circ]$ para finalmente valer cero en estado estacionario. Claramente se muestra que el desempeño del observador es bueno.

Finalmente, en la Figura 4.9 se tienen las velocidades estimadas. En las Figuras 4.9(a), 4.9(c) y 4.9(e) se tiene la velocidad estimada del manipulador local vs la velocidad estimada retardada del manipulador remoto y en las Figuras 4.9(b), 4.9(d) y 4.9(f) se tiene la velocidad estimada del manipulador remoto vs la velocidad estimada retardada del manipulador local. En general se aprecia que la amplitud de la velocidad del manipulador remoto supera la amplitud de la velocidad del manipulador local, sin embargo, las ganancias del robot local producen una atenuación en la velocidad del robot remoto hasta que las velocidades valen cero.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

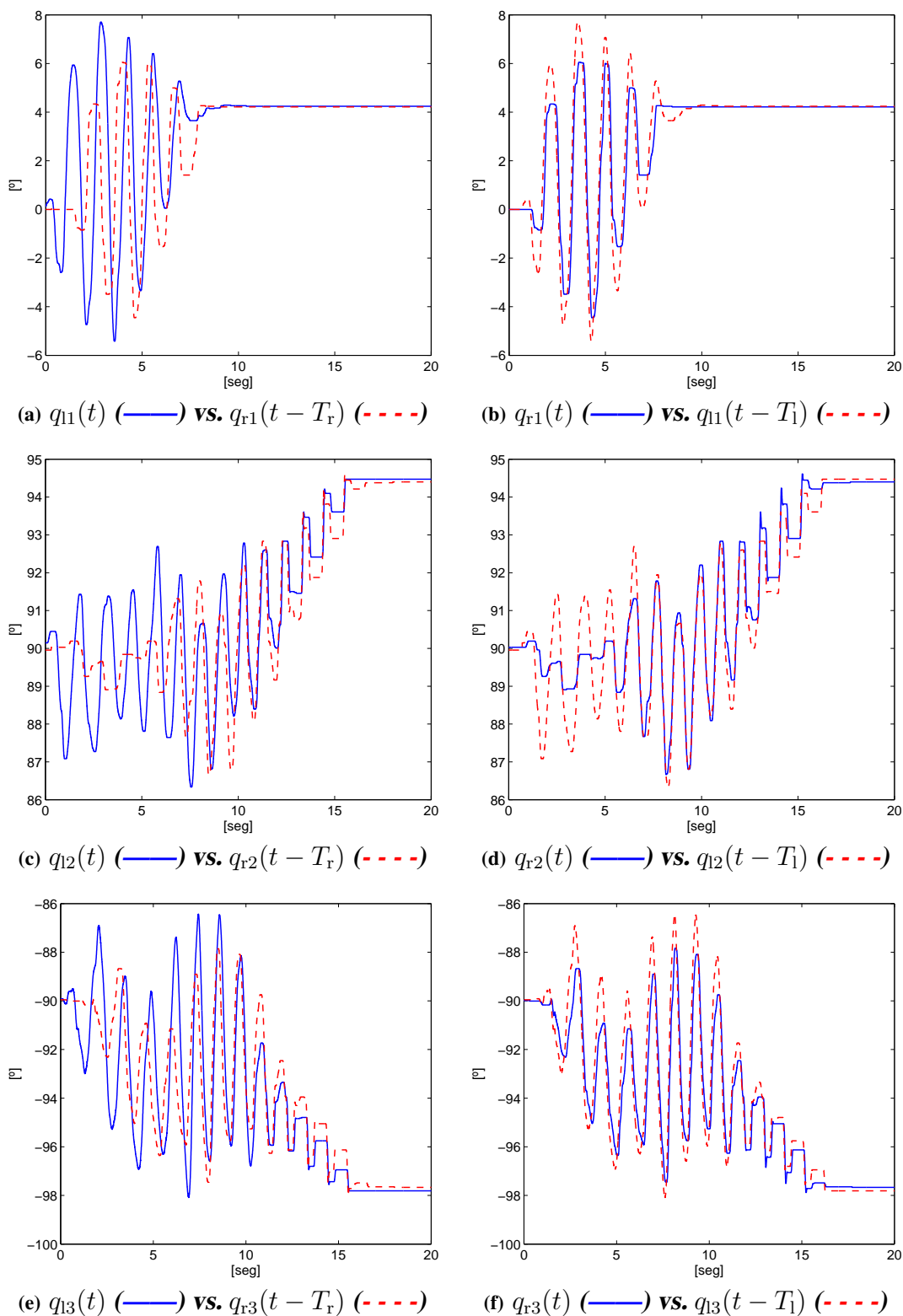
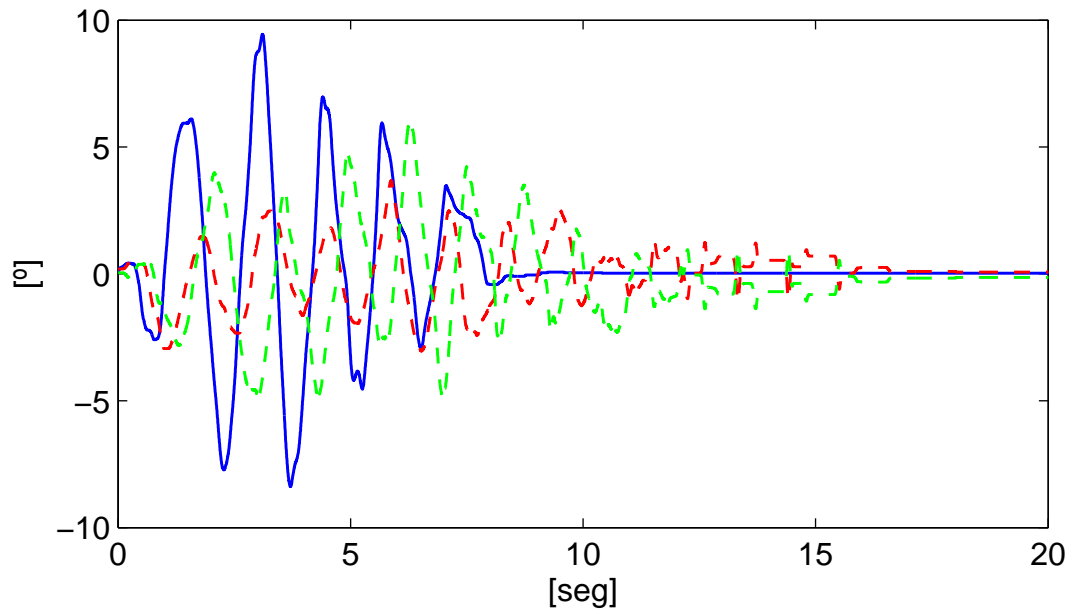
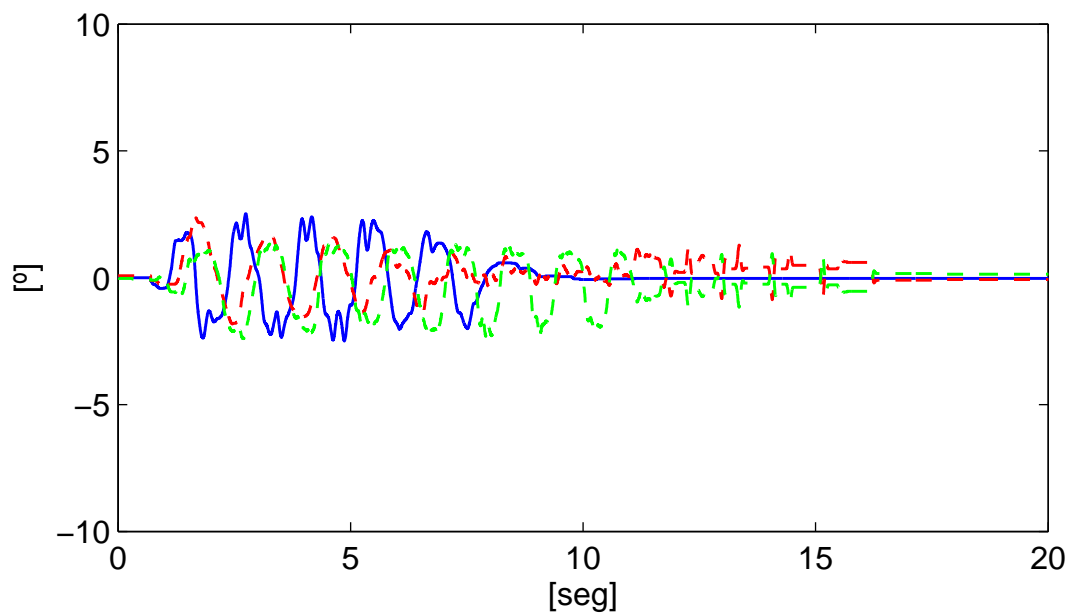
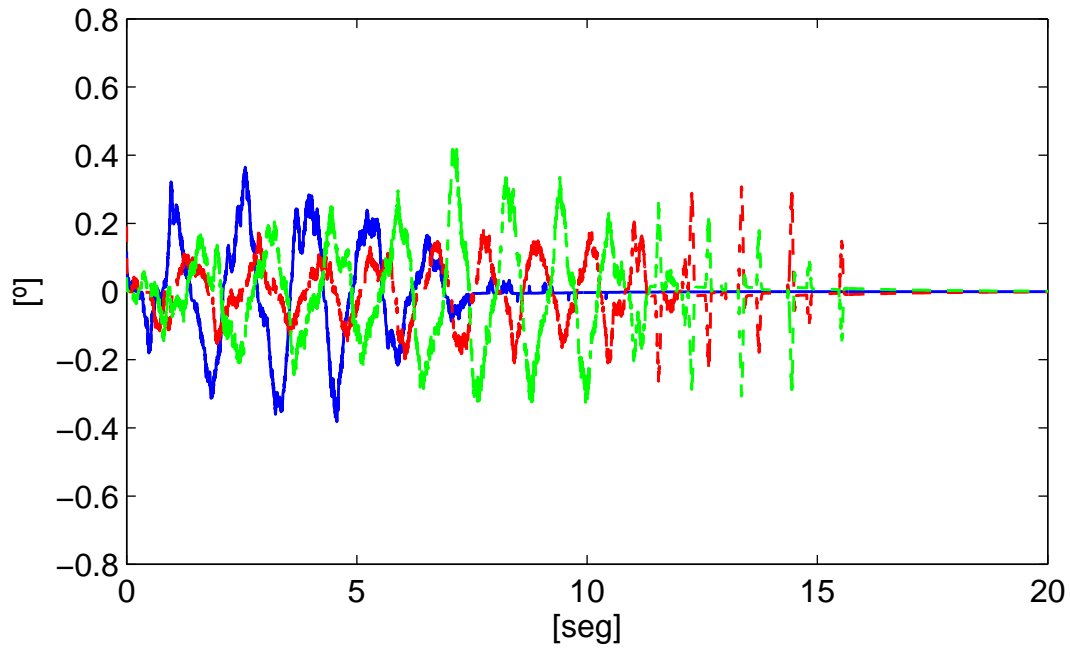


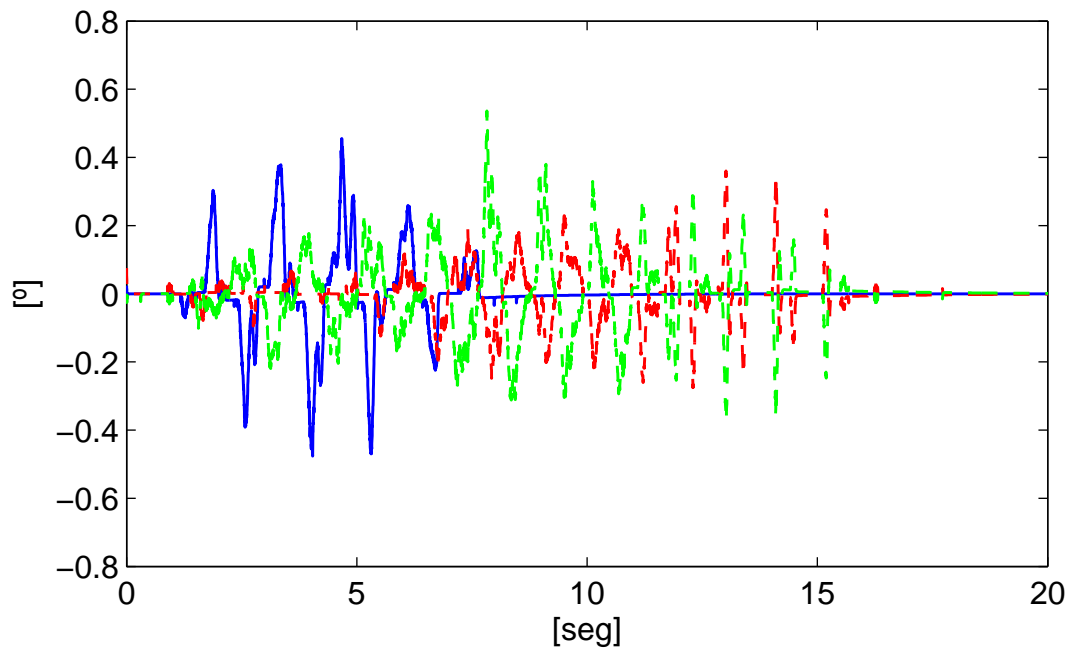
Figura 4.6: Retardo asimétrico de $T_l = 0.7[\text{seg}]$ y $T_r = 0.3[\text{seg}]$. Posición

(a) e_{11} (—) vs. e_{12} (- - -) vs. e_{13} (- · - ·)(b) e_{R1} (—) vs. e_{R2} (- - -) vs. e_{R3} (- · - ·)**Figura 4.7:** Retardo asimétrico de $T_1 = 0.7[\text{seg}]$ y $T_r = 0.3[\text{seg}]$. Errores de seguimiento

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES



(a) z_{11} (—) vs. z_{12} (- - -) vs. z_{13} (- · - ·)



(b) z_{r1} (—) vs. z_{r2} (- - -) vs. z_{r3} (- · - ·)

Figura 4.8: Retardo asimétrico de $T_l = 0.7[\text{seg}]$ y $T_r = 0.3[\text{seg}]$. Errores de observación

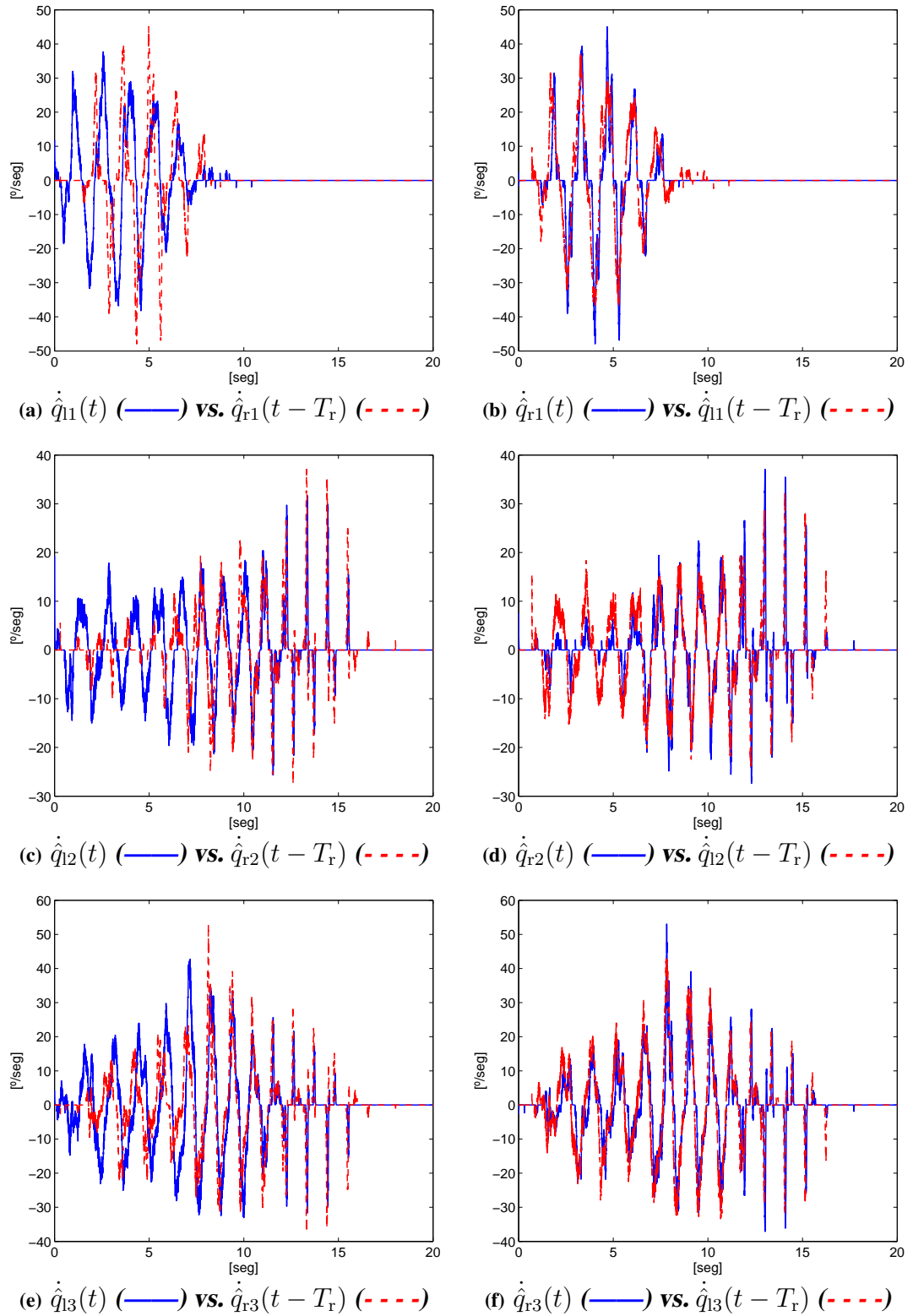


Figura 4.9: Retardo asimétrico de $T_l = 0.7[\text{seg}]$ y $T_r = 0.3[\text{seg}]$. Velocidades

4.2.2. Retardo asimétrico de cinco segundos

Para el tercer experimento se incrementa el tiempo de retardo del robot local en un 142 %, es decir $T_l = 1[\text{seg}]$ y para el robot remoto se incremento en un 1666 %, teniendo un retardo de $T_r = 5[\text{seg}]$. El humano suelta el efector-final del robot local aproximadamente a los 8[seg], de tal forma el sistema se vuelve autónomo.

Las Figuras 4.10(a), 4.10(c) y 4.10(e) muestran la posición del manipulador local vs la posición retardada del manipulador remoto. Se aprecia como después del segundo 8 los robots oscilan con la misma frecuencia. La suma de los retardos es $T_l + T_r = 6[\text{seg}]$ lo cual influye en el tiempo que tardan ambos manipuladores en llegar a una posición de consenso. Se aprecia un offset que desaparece en estado estacionario, este efecto se elimina mejorando las ganancias, aunque esto empeora la respuesta transitoria.

Comparando las Figuras 4.10(a), 4.10(c) y 4.10(e) contra la Figura 4.11(a) que representa el error de seguimiento de cada articulación e_i , se aprecia que el mayor error de seguimiento se da cuando el humana mueve el efector final del robot local, que es en los primeros 8 segundos.

La posición del manipulador remoto vs la posición retardada del manipulador local se aprecia en las Figuras 4.10(b), 4.10(d) y 4.10(f). Se observa como el robot remoto oscila con la misma frecuencia que el local, aunque las oscilaciones en la primera articulación desaparecen más rápidamente. Si se comparan las Figuras 4.10(b), 4.10(d) y 4.10(f) contra la Figura 4.11(b), entonces se aprecia como el error comienza a tener valor después del segundo 1 debido al tiempo de retardo T_l . El error residual de seguimiento en estado estacionario para la articulación q_{i1} es de $0.117[^\circ]$, para q_{i2} es de $0.046[^\circ]$ y para q_{i3} es de $0.093[^\circ]$.

En la Figura 4.12(a) se gráfica el error de observación (4.5) mientras que en la Figura 4.12(b) se representa a (4.6). El error de observación converge a cero en un tiempo de 40[seg]. La diferencia en la amplitud entre z_l y z_r se debe a la diferencia de ganancias dadas por Λ_{zi} y K_{di} .

Finalmente, en la Figura 4.13 se tienen las velocidades estimadas vs las velocidades estimadas retardadas. A diferencia del segundo experimento que duró 20[seg], para un retardo asimétrico de 1 y 5[seg] las oscilaciones se sostienen por más tiempo. Por tanto, se concluye que el tiempo que los robot tardan en llegar a una posición en consenso debe ser función del retardo global. En el segundo 40 todas las velocidades valen cero.

Claramente se muestra que el desempeño del observador-controlador es bueno. Es robusto antes retardos constantes superiores a cinco segundos, que es menos del tiempo que se requiere para enviar información de la tierra a la luna y de regreso.

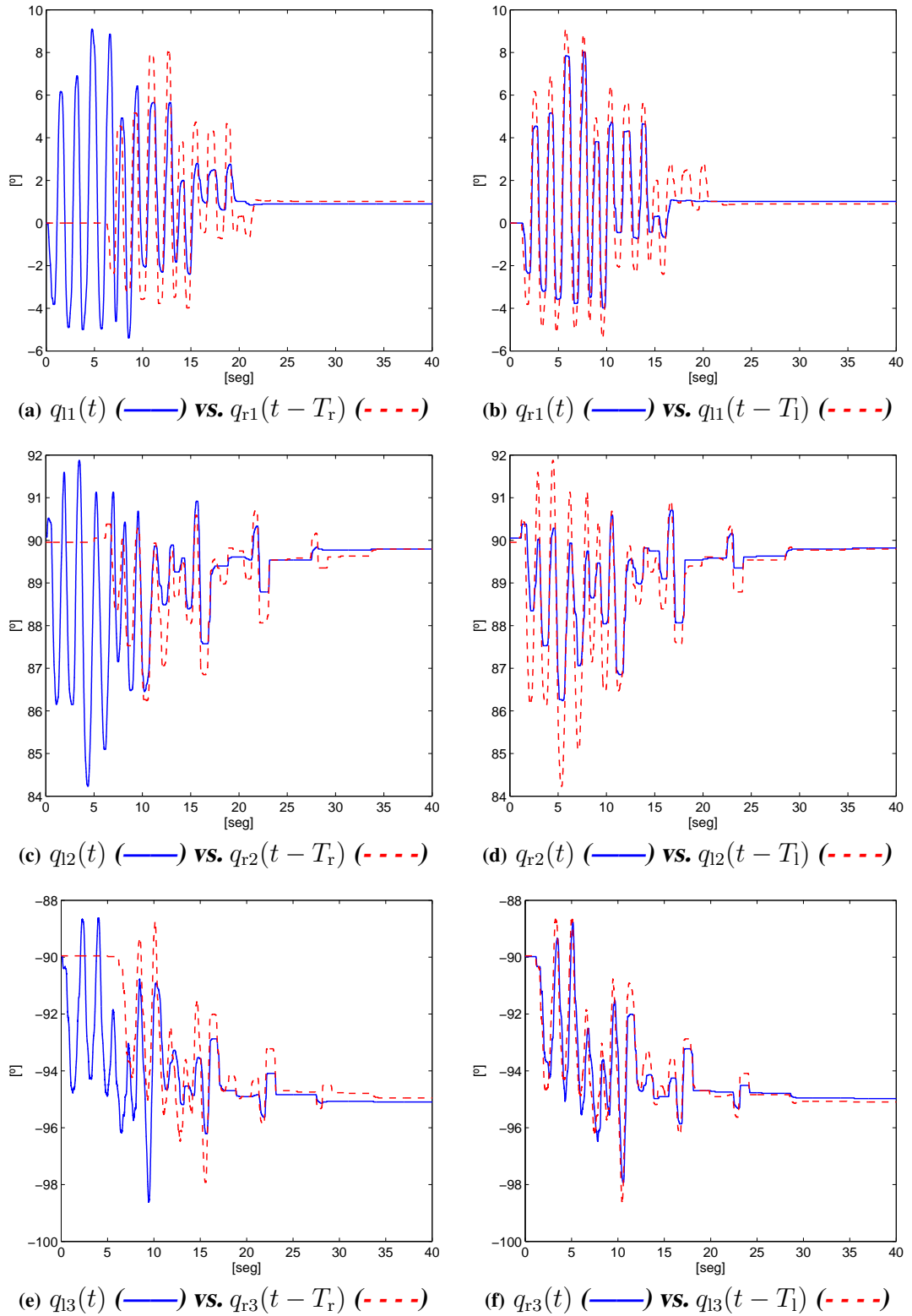
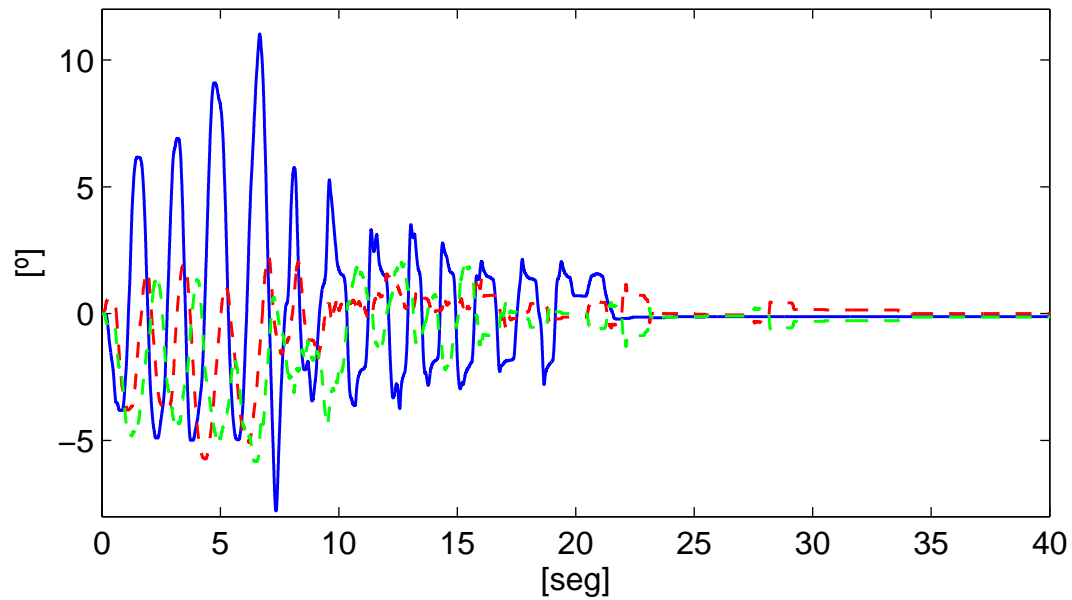
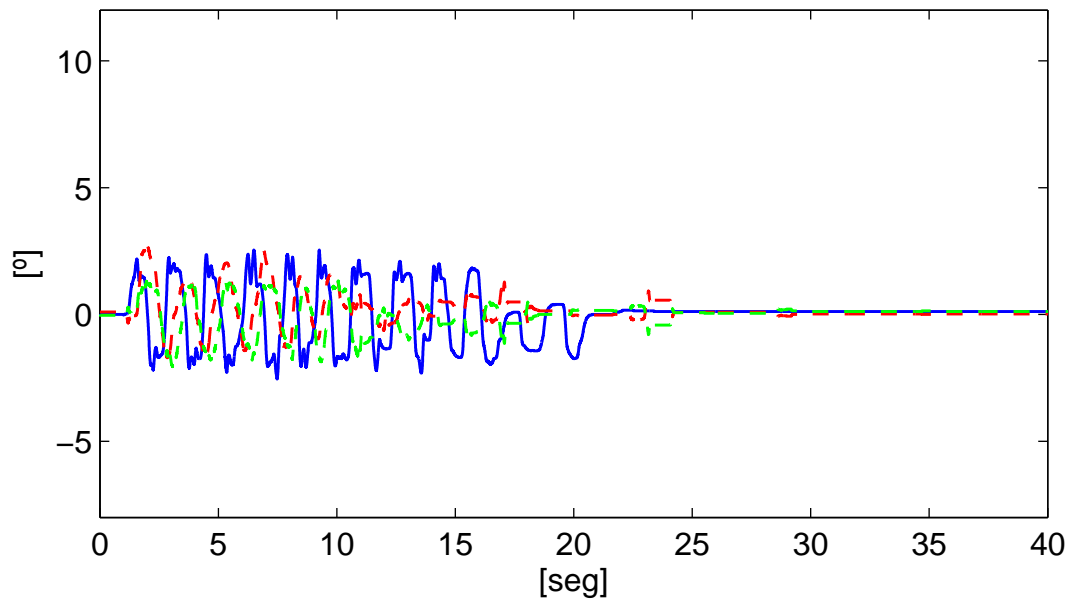


Figura 4.10: Retardo asimétrico de $T_l = 1[\text{seg}]$ y $T_r = 5[\text{seg}]$. Posición

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

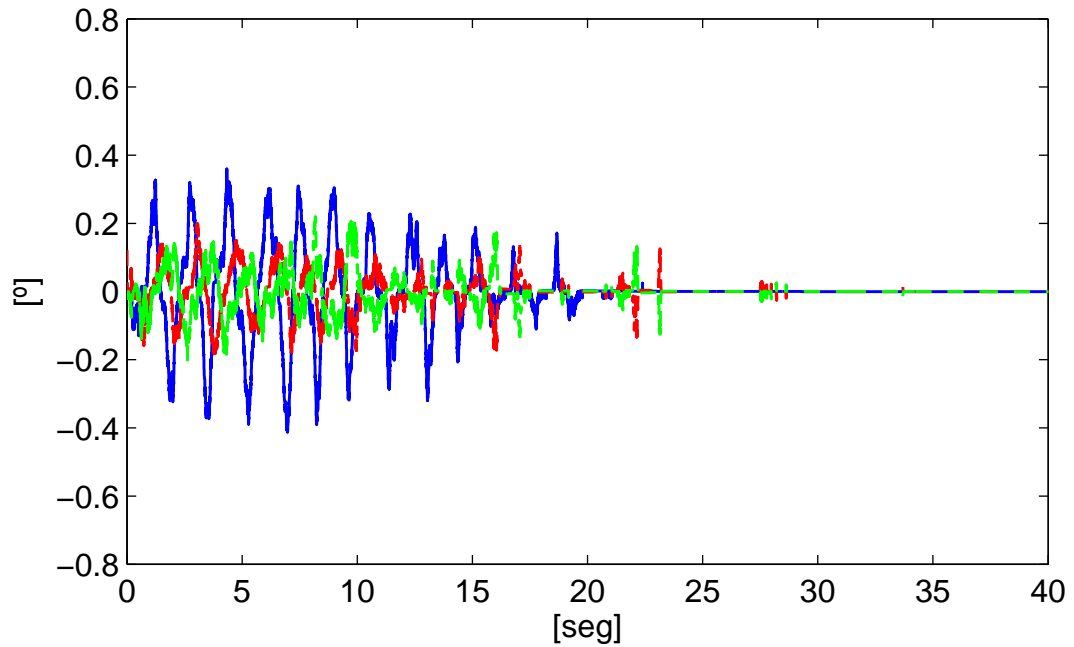


(a) e_{11} (—) vs. e_{12} (- - -) vs. e_{13} (- · - ·)

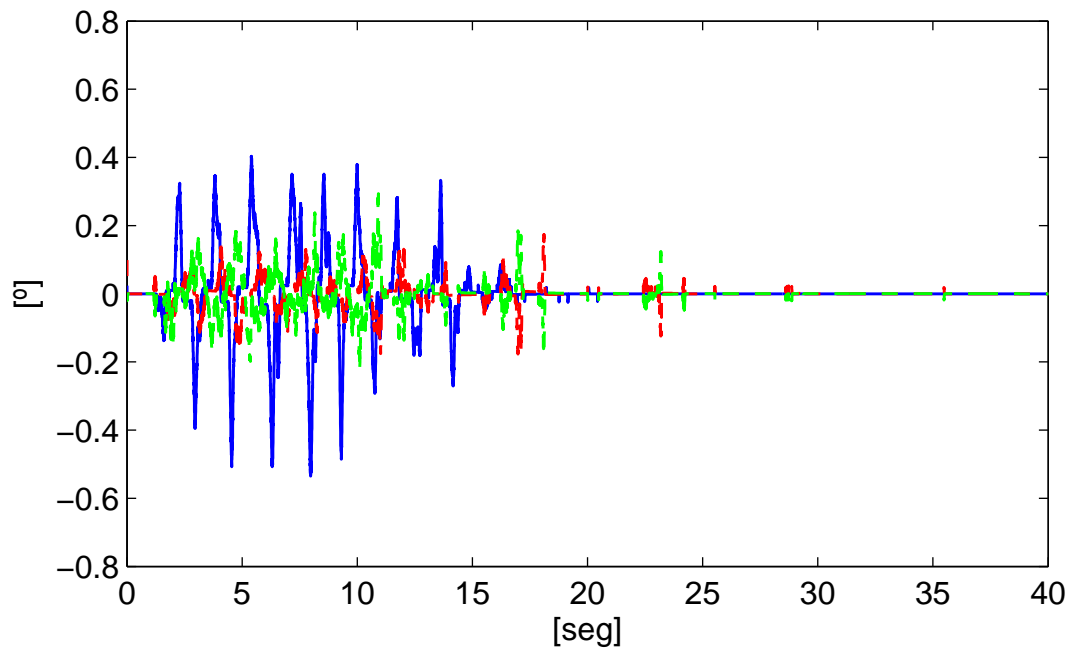


(b) e_{r1} (—) vs. e_{r2} (- - -) vs. e_{r3} (- · - ·)

Figura 4.11: Retardo asimétrico de $T_1 = 1[\text{seg}]$ y $T_r = 5[\text{seg}]$. Errores de seguimiento



(a) z_{11} (—) vs. z_{12} (- - -) vs. z_{13} (- - -)



(b) z_{r1} (—) vs. z_{r2} (- - -) vs. z_{r3} (- - -)

Figura 4.12: Retardo asimétrico de $T_1 = 1[\text{seg}]$ y $T_r = 5[\text{seg}]$. Errores de observación

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

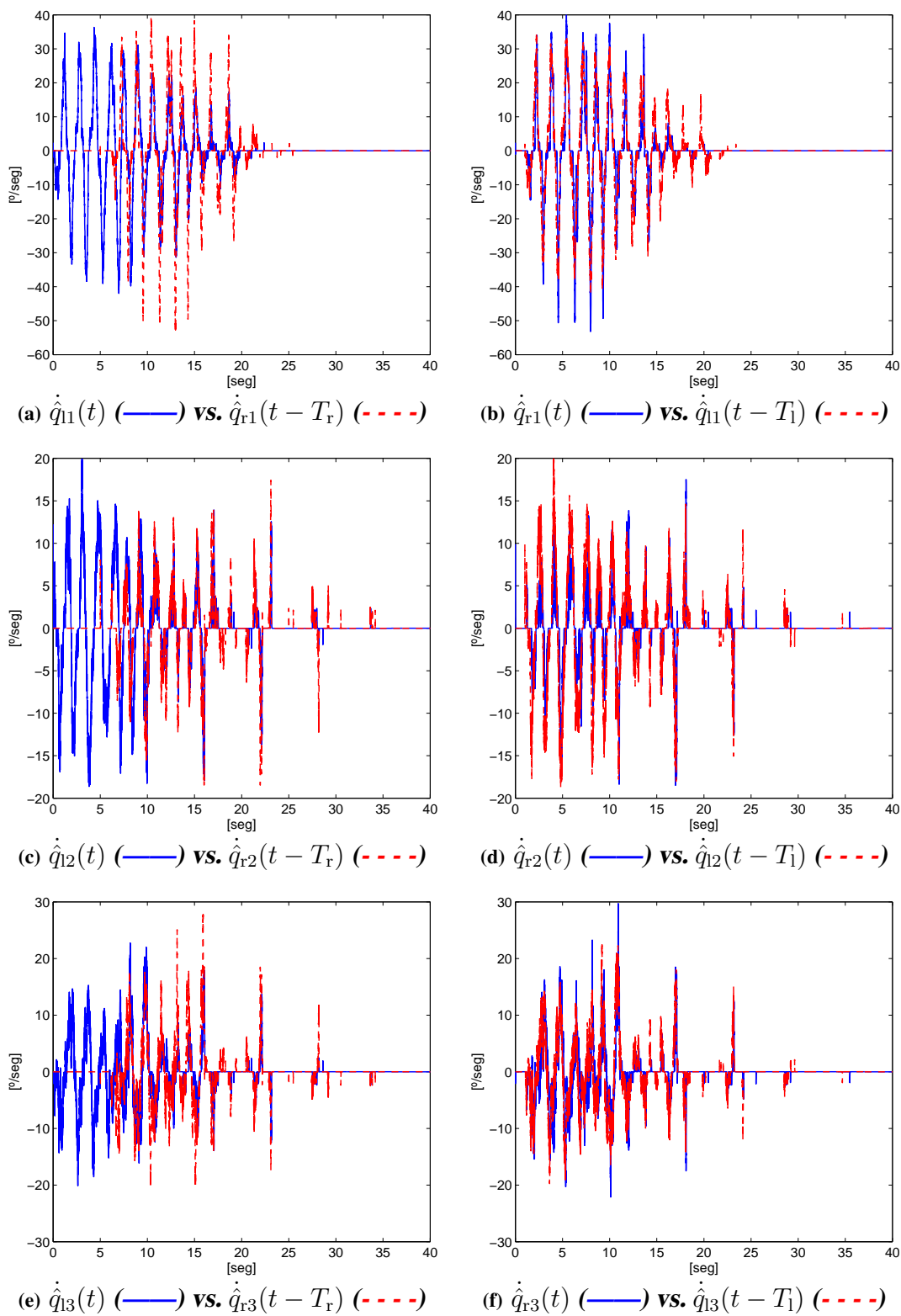


Figura 4.13: Retardo asimétrico de $T_l = 1[\text{seg}]$ y $T_r = 5[\text{seg}]$. Velocidades

4.3. Retardo simétrico

4.3.1. Retardo simétrico menor a un segundo

El cuarto experimento consiste en igualar los retardos al valor $T_l = T_r = 0.5[\text{seg}]$. Se describe una trayectoria circular en las tres articulaciones y a los 23[seg] el humano suelta el efector-final del manipulador local, con lo cual ambos robots entran en oscilación hasta llegar a una posición en común.

Las Figuras 4.14(a), 4.14(c) y 4.14(e) muestran la posición del manipulador local vs la posición retardada del manipulador remoto. Se aprecia como después de los 23[seg] los manipuladores tienden a la misma posición. Comparando el primer experimento de retardo asimétrico el periodo de las oscilaciones de la respuesta transitoria es igual a 1[seg]; sin embargo, el humano traza una trayectoria más suave, por lo tanto las oscilaciones dependen del retardo y de la trayectoria. Para este experimento se prolongó el tiempo en que el humano sujeta el manipulador local para mostrar el desempeño del observador-controlador.

La posición del manipulador remoto vs la posición retardada del manipulador local se aprecia en las Figuras 4.14(b), 4.14(d) y 4.14(f) en este caso el seguimiento del remoto es muy preciso. En la Figura 4.15 se muestran los errores de seguimiento. En la Figura 4.15(a) la amplitud del error se debe al retardo existente entre q_l y $q_r(t - T_r)$ el cual disminuye y convergen a la misma posición. Una vez en estado estacionario para la articulación q_{i1} $e_{r1} = -0.306[^\circ]$, para q_{i2} $e_{r2} = 0[^\circ]$ y para q_{i3} $e_{r3} = -0.046[^\circ]$.

En Figura 4.16(a) está el error de observación z_l mientras que en la Figura 4.16(b) se representa a z_r . El error de observación converge a cero en un tiempo de 37[seg]. En la Figura 4.17 se tienen las velocidades estimadas. En las Figuras 4.17(a), 4.17(c) y 4.17(e) se tiene la velocidad estimada del manipulador local vs la velocidad estimada retardada del manipulador remoto y en las Figuras 4.17(b), 4.17(d) y 4.17(f) se tiene la velocidad estimada del manipulador remoto vs la velocidad estimada retardada del manipulador local. Comparando la Figura 4.16 vs la Figura 4.17 se aprecia como los picos de la amplitud en los errores de observación concuerdan con las amplitudes de los picos de las velocidades.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

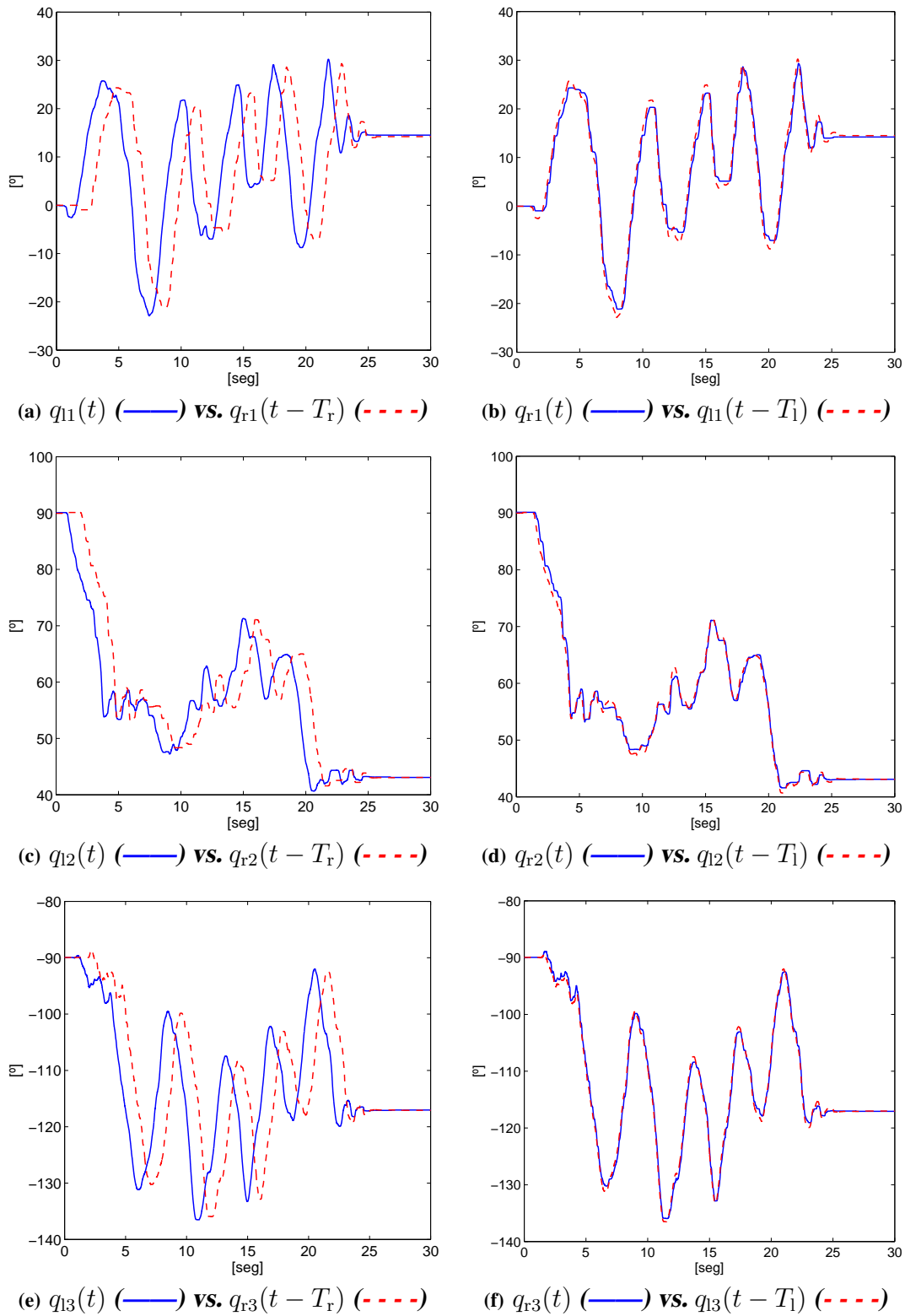
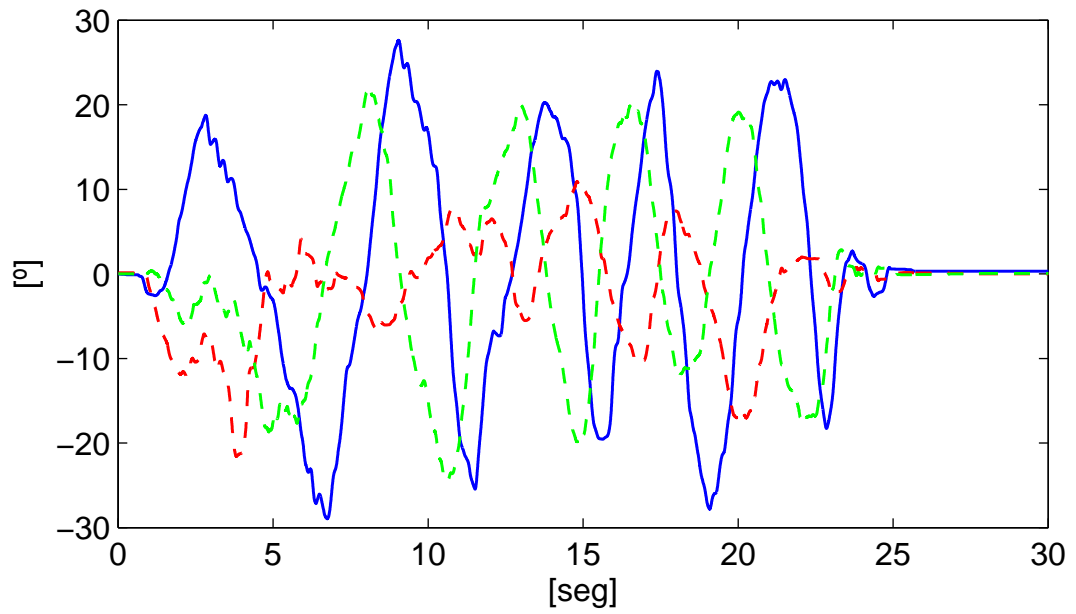
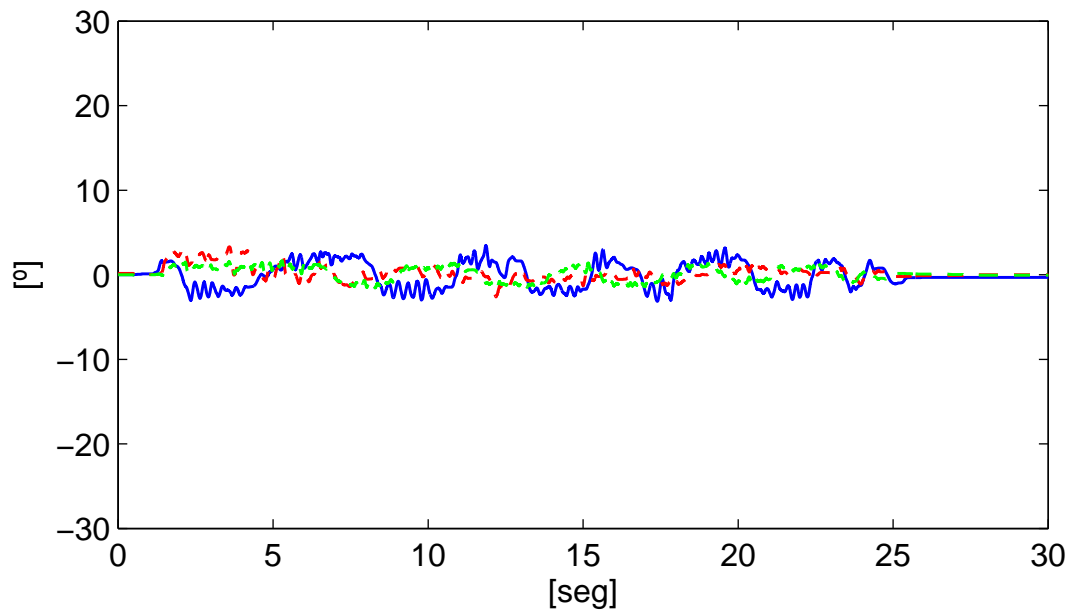
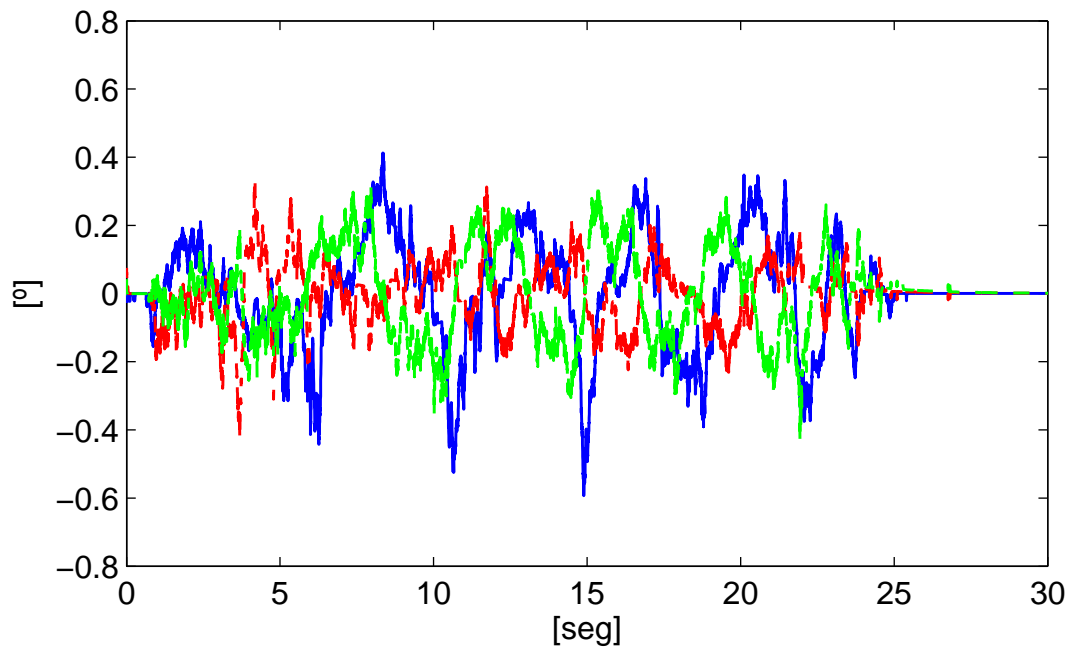


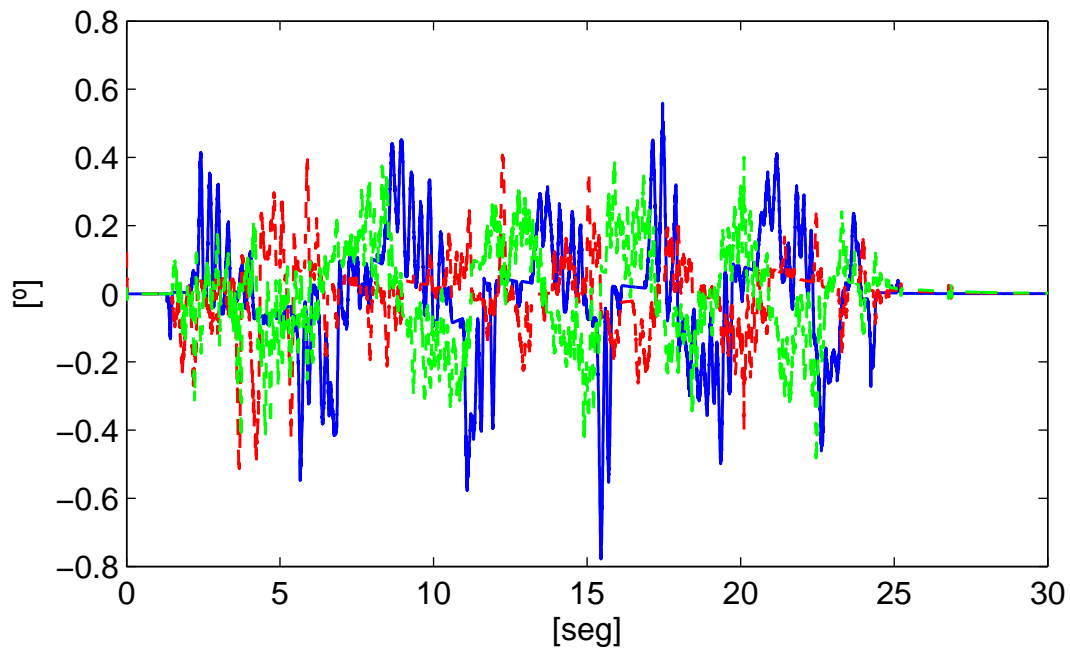
Figura 4.14: Retardo simétrico de $T_1 = T_r = 0.5[\text{seg}]$. Posición

(a) e_{11} (—) vs. e_{12} (- - -) vs. e_{13} (- · - ·)(b) e_{r1} (—) vs. e_{r2} (- - -) vs. e_{r3} (- · - ·)**Figura 4.15:** Retardo simétrico de $T_1 = T_r = 0.5[\text{seg}]$. Errores de seguimiento

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES



(a) z_{11} (—) vs. z_{12} (- - -) vs. z_{13} (- · - ·)



(b) z_{r1} (—) vs. z_{r2} (- - -) vs. z_{r3} (- · - ·)

Figura 4.16: Retardo simétrico de $T_1 = T_r = 0.5[\text{seg}]$. Errores de observación

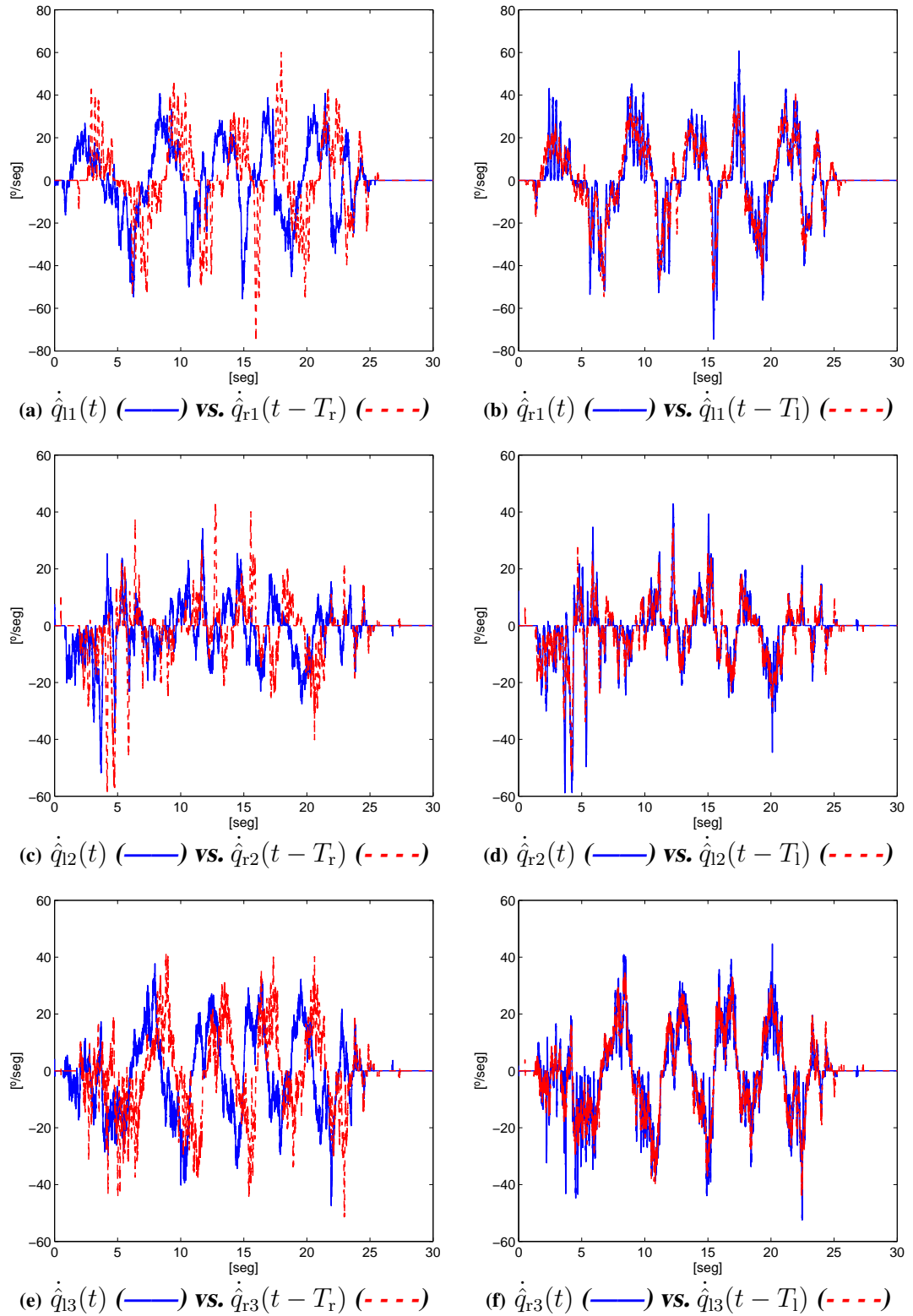


Figura 4.17: Retardo simétrico de $T_1 = T_r = 0.5[\text{seg}]$. Velocidades

4.3.2. Retardo simétrico de cinco segundos

Para el último experimento se incrementa el retardo al 1000 %, entonces $T_l = T_r = 5[\text{seg}]$, el humano mueva el efector-final del robot local por un tiempo de $t = 16[\text{seg}]$ y lo suelta volviendo al sistema autónomo. De (3.76) y (3.77) se tiene que el periodo es aproximadamente de 10[seg], consecuentemente tarda 100[seg] en llegar a una posición en consenso, siendo el más tardado de los experimentos realizados.

Las Figuras 4.18(a), 4.18(c) y 4.18(e) muestran la posición del robot local vs la posición retardada del robot remoto. Entre mayor es el retardo es más evidente la relación vista en (3.76) y (3.77) como se observa en $q_{r1}(t - T_r)$ (- - - -). De igual forma en las Figuras 4.18(b), 4.18(d) y 4.18(f) se observa la posición del robot remoto vs la posición retardada del robot local.

En la Figura 4.19 se muestran los errores de seguimiento e_l y e_r respectivamente. Es más evidente en la Figura 4.19(a) que en la Figura 4.18 el instante de tiempo en que el humano suelta al robot local. El movimiento libre comienza a los 17[seg] cuando la amplitud de e_l se asemeja a la amplitud de e_r . Finalmente los errores en estado estacionaron son $e_{l1} = 0.094[^\circ]$, $e_{l2} = -0.023[^\circ]$ y $e_l = -0.070[^\circ]$.

En la Figura 4.20 se muestran los errores de observación z_l y z_r respectivamente. El error de observación converge a cero en un tiempo de 96[seg]. Como se observa existen picos en la tercera articulación de hasta 1[°] de error, que corresponde con los puntos donde la trayectoria va perdiendo suavidad.

Por último, en las Figuras 4.21(a), 4.21(c) y 4.21(e) se tiene la velocidad estimada del robot local vs la velocidad estimada retardada del robot remoto y en las Figuras 4.21(b), 4.21(d) y 4.21(f) se tiene la velocidad estimada del robot local vs la velocidad estimada retardada del robot remoto.

En este caso ambos robots tiene un retardo de 5[seg], por tanto se demuestra que el algoritmo observador-controlador es robusto ante retardos constantes tanto para el robot local como para el robot remoto.

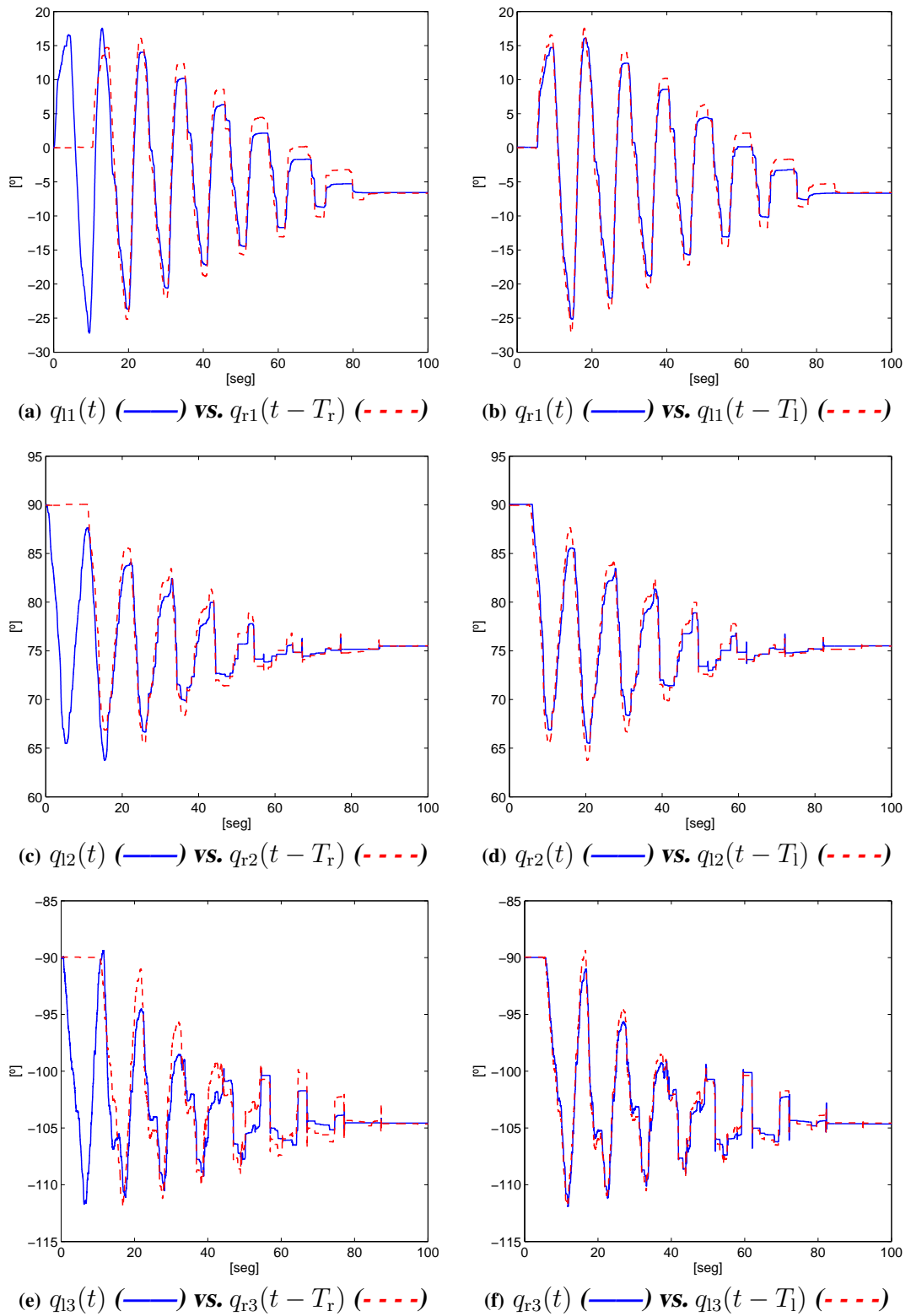


Figura 4.18: Retardo simétrico de $T_1 = T_r = 5$ [seg]. Posición

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

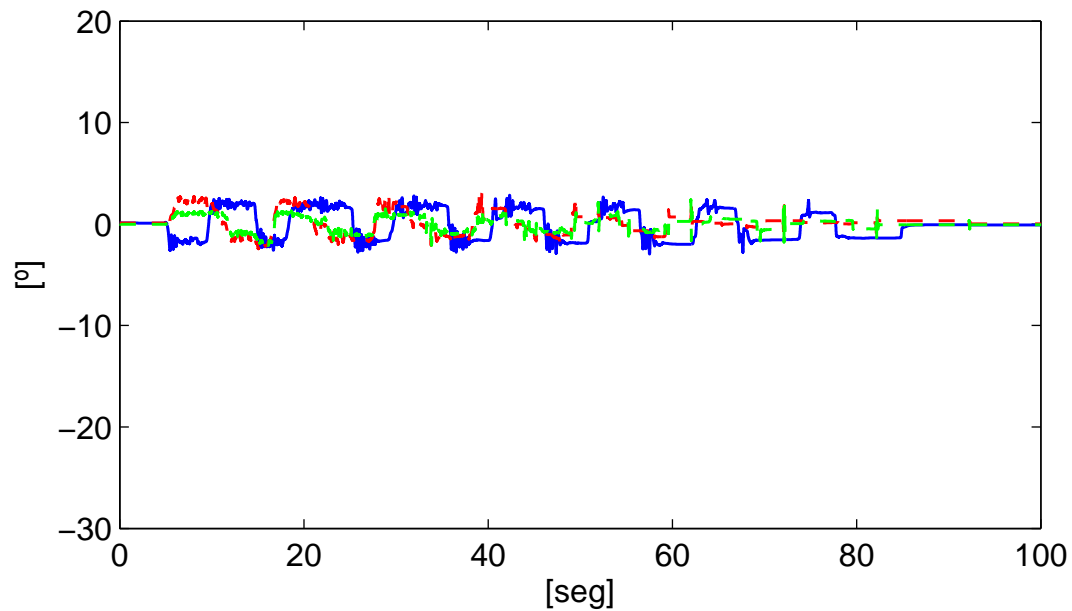
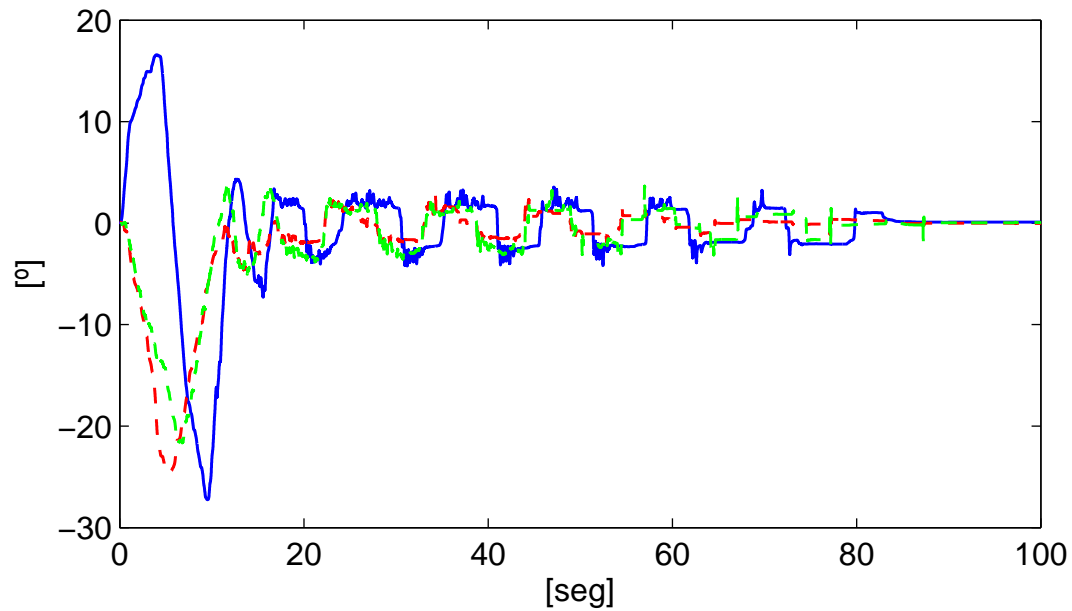
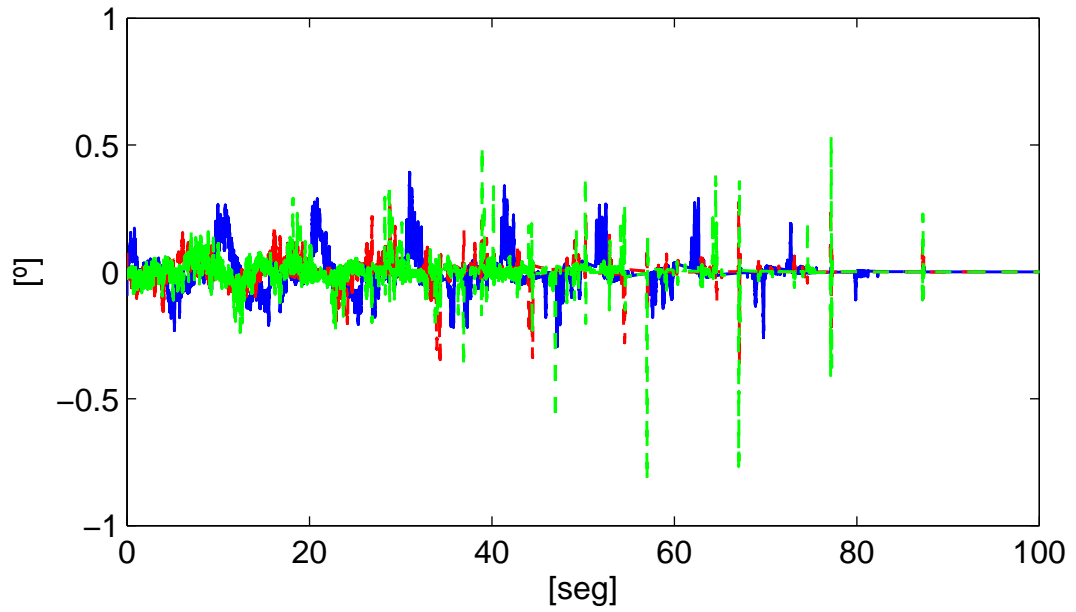
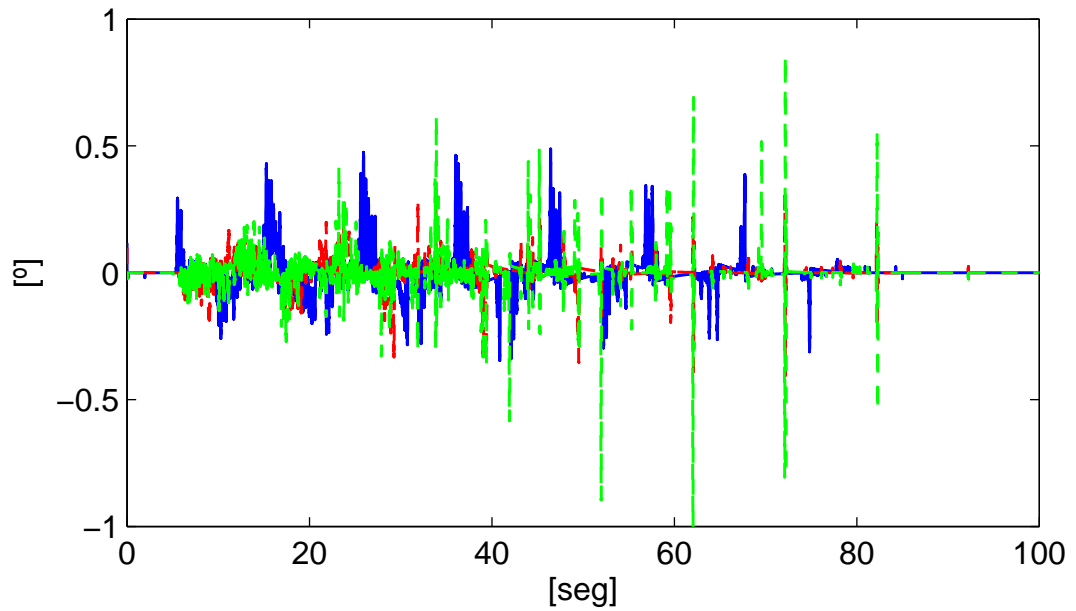


Figura 4.19: Retardo simétrico de $T_1 = T_r = 5$ [seg]. Errores de seguimiento



(a) z_{11} (—) vs. z_{12} (- -) vs. z_{13} (- · -)



(b) z_{r1} (—) vs. z_{r2} (- -) vs. z_{r3} (- · -)

Figura 4.20: Retardo simétrico de $T_l = T_r = 5$ [seg]. Errores de observación

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

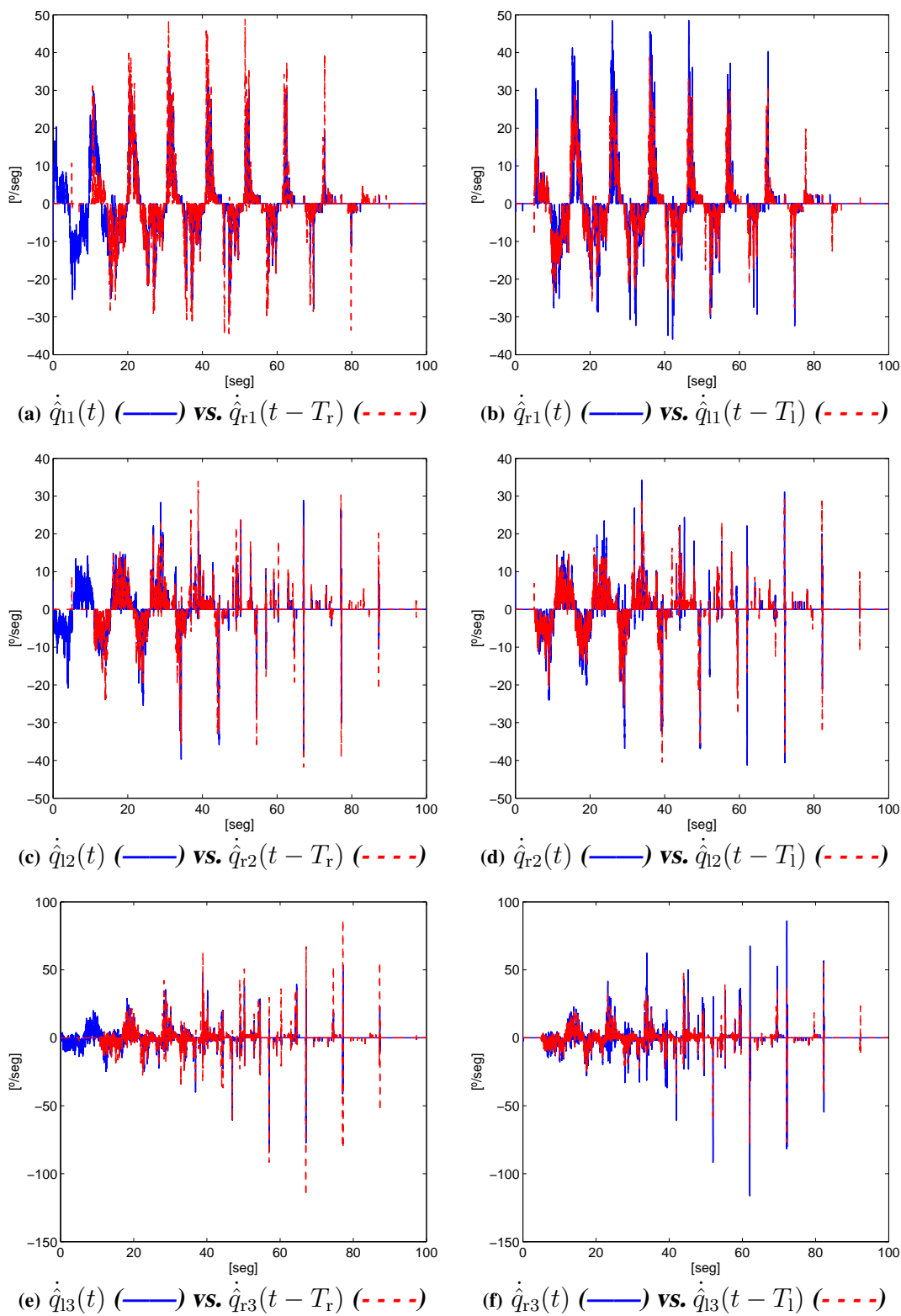


Figura 4.21: Retardo simétrico de $T_l = T_r = 5[\text{seg}]$. Velocidades

4.3.3. Tabla de resultados

En la Tabla 4.1 se aprecia el error medio cuadrático (RMSE por sus siglas en ingles) de los errores de seguimiento y de los errores de observación de los cinco casos expuestos previamente. Mientras que en las Tablas 4.2 y 4.3 se aprecia el error de seguimiento y el error de observación de cada articulación, respectivamente.

Se puede apreciar el excelente desempeño del observador en todos los casos con una desviación estándar en el peor de los casos de 0.195. El menor RMSE del error de observación se da en el caso sin retardo, por lo tanto se confirma que el retardo afecta la estabilidad del sistema teleoperado.

Caso	e_l	e_r	z_l	z_r
$T_l = T_r = 0$	2.042	2.027	0.083	0.089
$T_l = 0.7, T_r = 0.3$	2.626	1.137	0.128	0.113
$T_l = 1, T_r = 5$	2.901	1.169	0.104	0.089
$T_l = T_r = 0.5$	15.866	1.650	0.183	0.195
$T_l = T_r = 5$	8.660	1.886	0.087	0.103

Tabla 4.1: RMSE de los errores de seguimiento y observación

El error de seguimiento del robot local con el mayor RMSE, de 15.866 es el caso simétrico $T_l = T_r = 0.5$, esto se debe a que durante el experimento el operador humano sostiene el efector final un 80 % del tiempo que dura la prueba y el tiempo que tardan los manipuladores en llegar a un consenso es menor a un 20 % del tiempo total, por lo cual los errores máximos persisten.

Así mismo se aprecia como el último caso cuando $T_l = T_r = 5$, se tiene el segundo RMSE más alto. Nótese que el tiempo que el operador humano sostiene el efector final es de un 10 % del tiempo total, adicionalmente se tiene que el tiempo de retardo es el mayor de todos los casos. De lo anterior se concluye que el RMSE de e_l es proporcional al retardo inducido y al tiempo que el operador humano sostiene el efector final.

Caso	e_{l1}	e_{l2}	e_{l3}	e_{r1}	e_{r2}	e_{r3}
$T_l = T_r = 0$	1.4031	1.2264	0.8354	1.3916	1.2201	0.8283
$T_l = 0.7, T_r = 0.3$	2.0121	0.9064	1.4237	0.6908	0.5291	0.7325
$T_l = 1, T_r = 5$	2.2476	1.1462	1.4325	0.8820	0.5681	0.5168
$T_l = T_r = 0.5$	11.5357	5.4321	9.4432	1.3011	0.7676	0.6659
$T_l = T_r = 5$	5.5760	4.9258	4.4330	1.4476	1.0214	0.6494

Tabla 4.2: RMSE de los errores de seguimiento de cada articulación

Hay ganancias que se usaron para el algoritmo observador-controlador las cuales varían en cada articulación y cambian del robot local al robot remoto. Por lo tanto, el desempeño del

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

observador-controlador cambia en cada articulación del manipulador como se puede apreciar en las Tablas 4.2 y 4.3.

Con estos resultados se prueba que el algoritmo observador-controlador está diseñado para que si las posiciones tienden a un valor constante, entonces todos los errores de seguimiento y de observación tienden a cero. Se demuestra que el algoritmo es robusto a retardos constantes grandes, que no se necesita más información del modelo dinámico del robot que el término gravitacional.

Caso	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{r1}	z_{r2}	z_{r3}
$T_1 = T_r = 0$	0.0570	0.0358	0.0488	0.0625	0.0373	0.0518
$T_1 = 0.7, T_r = 0.3$	0.0752	0.0551	0.0882	0.0679	0.0502	0.0762
$T_1 = 1, T_r = 5$	0.0886	0.0396	0.0379	0.0785	0.0255	0.0354
$T_1 = T_r = 0.5$	0.1311	0.0721	0.1054	0.1386	0.0810	0.1108
$T_1 = T_r = 5$	0.0602	0.0387	0.0501	0.0682	0.0399	0.0668

Tabla 4.3: RMSE de los errores de observación de cada articulación

Conclusiones

En este trabajo se introduce un nuevo algoritmo observador-controlador para la teleoperación de un sistema bilateral con retardo. En movimiento libre y sin un operador humano, los manipuladores local y remoto tienden a una trayectoria periódica o a una posición particular, logrando así tanto la sincronización o bien una posición de consenso; por lo tanto el problema de regulación esta resuelto. Cuando un operador humano mueve ya sea el manipulador local o remoto el otro robot tiende a realizar un seguimiento de la posición ordenada con el retraso correspondiente.

Las ventajas del observador-controlador propuestos son:

- Del modelo del robot únicamente se requiere el vector de fuerzas gravitacionales. El esquema propuesto es robusto ante las incertidumbres del modelo y parámetros físicos del robot.
- Únicamente se requiere medir la posición angular del robot.
- El observador de velocidad es de fácil sintonización e implementación.
- Los retardos de los manipuladores son constantes, pero no necesariamente iguales.
- Es robusto a retardos contantes.

Se realizó la prueba formal de estabilidad que garantiza acotamiento final y uniforme de todas las señales. Por tanto el error de observación y el error de seguimiento tienden a una vecindad cercana al origen. Si las posiciones tienden a un valor constante, entonces todos los errores de seguimiento y observación tienden a cero. Se realizaron cinco experimentos para validar el algoritmo propuesto, incluyendo retardos cero, simétricos y asimétricos. Los manipuladores tienden a seguirse unos a otros antes de alcanzar una posición de consenso. La magnitud del retardo que soporta el algoritmo es superior al equivalente de lo que tarda la información de ir a la luna y regresar.

5. CONCLUSIONES

El uso de la teleoperación bilateral con retardos en robots a distancia va en aumento, por tanto el trabajo futuro abarca los retardos variantes en el tiempo. También se desea analizar el caso cuando hay pérdida de información ocasionados por el canal de información. Asimismo realizar teleoperación bilateral de un estado a otro, probando el observador-controlador propuesto en tiempo real.

Posteriormente se plantea eliminar el término gravitacional de la ley de control y de esta forma prescindir totalmente del modelo dinámico del manipulador. A largo plazo esta resolver el problema de sincronización de una red de robots en presencia de retardos mediante el uso de observadores de velocidad y sin tomar en cuenta el modelo dinámico de los robots.

Bibliografía

- Aldana, C. I., Romero, E., Nuño, E., and Basañez, L. (2015). Pose consensus in networks of heterogeneous robots with variable time delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25(14):2279–2298. [4](#)
- Anderson, R. J. and Spong, M. W. (1989). Bilateral control of teleoperators with time delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(5):494–501. [4](#)
- Arteaga-Pérez, M. A., Castillo-Sánchez, A. M., and Parra-Vega, V. (2006). Cartesian control of robots without dynamic model and observer design. *Automatica*, 42:473–480. [18](#), [22](#), [27](#), [28](#)
- Arteaga-Pérez, M. A. and Gutiérrez-Giles, A. (2014). On the GPI approach with unknown inertia matrix in robot manipulators. *International Journal of Control*, 87(4):844–860. [5](#)
- Arteaga-Pérez, M. A. and Kelly, R. (2004). Robot control without velocity measurements: New theory and experimental results. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 20(2):297–308. [5](#), [17](#), [18](#)
- Berghuis, H. and Nijmeijer, H. (1993). A passivity approach to controller–observer design for robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(6):740–754. [5](#)
- Chopra, N., Spong, M. W., and Lozano, R. (2008). Synchronization of bilateral teleoperators with time delay. *Automatica*, 44:2142–2148. [3](#), [4](#)
- Gutiérrez-Giles, I. A. (2016). *Transparent teleoperation with unknown surfaces and force estimation*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México. [3](#), [13](#)
- Hannaford, B. (1989). A design framework for teleoperators with kinesthetic feedback. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 5(4):426–434. [2](#)
- Hashemzadeh, F., Hassanzadeh, I., and Tavakoli, M. (2013). Teleoperation in the presence of varying time delays and sandwich linearity in actuators. *Automatica*, 49:2813–2821. [4](#)
- Hokayem, P. and Spong, M. (2006). Bilateral teleoperation: an historical survey. *Automatica*, 42(12):2035–2057. [3](#)

- Houston, K., Sieber, A., Eder, C., Vittorio, O., Menciassi, A., and Dario, P. (2011). A teleoperation system with novel haptic device for micro-manipulation. *International Journal of Robotics and Automation*, 26(3):247–254. 4
- Jarrassé, N., Paik, J., Pasqui, V., and More, G. (2005). How can human motion prediction increase transparency? In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2134–2139, Pasadena CA, USA. 4
- Kelly, R. and Santibáñez, V. (2003). *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Pearson Prentice–Hall, Madrid, España. 11
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems, 3rd ed.* Prentice–Hall, Upper Saddle River, New Jersey. U .S. A. 14
- Lawrence, D. A. (1993). Stability and transparency in bilateral teleoperation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(5):624–637. 3
- Liu, Y.-C. and Chopra, N. (2013). Control of semi-autonomous teleoperation system with time delays. 49:1553–1565. 3, 4
- Nicosia, S. and Tomei, P. (1990). Robot control by using only joint position measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(9):1058–1061. 5
- Nuño, E., Ortega, R., Barabanov, N., and Basañez, L. (2008). A globally stable PD controller for bilateral teleoperators. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(3):753–758. 4, 11
- Passenberg, C., Peer, A., and Buss, M. (2010). A survey of environment-, operator-, and task-adapted controllers for teleoperation systems. *Mechatronics*, 20:787–801. 3
- Sarras, I., Nuño, E., Basañez, L., and Kinnaert, M. (2016). Position tracking in delayed bilateral teleoperators without velocity measurements. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 26(7):1437–1455. 5
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., and Oriolo, G. (2010). *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer–Verlag, London, Great Britain. 9
- Slotine, J. J. E. and Li, W. (1987). On the adaptive control of robot manipulators. *International Journal of Robotics Research*, 6(3):49–59. 3
- Spong, M. W., Hutchinson, S., and Vidyasagar, M. (2006). *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, U .S. A. 3, 7
- Yokokohji, Y. and Yoshikawa, T. (1994). Bilateral control of master–slave manipulators for ideal kinesthetic coupling: Formulation and experiments. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 10(5):605–620. 2