UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

APUNTES

PROGRAMACION LINEAL

ING.BENITO MARIN PINILLOS.

NOVIEMBRE DE 1980.

G-

APUNTES DE PROGRAMACION LINEAL
(INGENIERIA DE SISTEMAS)

DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

M. EN C. BENITO MARIN PINILLOS

NOV/1980.

PROLOGO.-

Los apuntes que aquí se presentan tienen el objeto de proporcionar al alumno del Curso Ingeniería de Sistemas, material de referencia y consulta.

Incluyen casi la totalidad de los temas de la materia pero es necesario que el alumno realice trabajos de investigación para complementarlos, además de resolver ejercicios variados sobre cada tema y consultar la bibliografía seleccionada.

No se pretende que este sea un trabajo concluído, pues se espera realizar nuevas correciones, para ésto las sugerencias de alumnos y profesores son de gran importancia.

M. EN C. BENITO MARIN PINILLOS.

Noviembre de 1980.

CONTENIDO

CAP. I	
Antecedentes	1
CAP. II	
Matrices	10
Ecuaciones Lineales Simultáneas	34
CAP. III	
Programación Lineal	47
Características que debe tener un problema para poder ser resuelto por Programación Lineal	58
Terminología en Programación Lineal	68
Rutina del Método Simplex	78
Método del Pivote	92
Complicaciones	97
Método de las dos Fases	121
CAP. IV	
Problema de Transporte	150
Degeneración en el problema de transporte	174
Problema de Asignoción	176
Procedimiento Sistemático	180
CAP. V	
Teoría Dual	191
Metodología del Método Simplex Dual	201
Uso de matrices en Programación Lineal	211
Programación de enteros	218
Análisis Post-Optimo	220
CAP. VI	
Implementación en Computadoras	Apéndice
CAP. VII	
Teoría de Redes	229
Ruta más corta	246
Mínimo árbol de expansión	257
Pert	262
Sistema de redes con actividades en el nodo	281

INVESTIGACION DE OPERACIONES I

ANTECEDENTES

Es por todos conocido el rápido desarrollo que han experimentado durante el presente siglo, el tamaño y la complejidad de las - organizaciones humanas. Por ejemplo el tamaño de las empresas modernas implica que las decisiones administrativas pueden tener un - efecto sobre grandes cantidades de capital y gran número de personas. Los errores pueden ser tremendamente costosos y una sola decisión equivocada puede requerir años para rectificarse.

El cambio revolucionario sufrido por las organizaciones humanas ha traído consigo la división del trabajo y la segmentación de las responsabilidades administrativas en estas organizaciones. Este crecimiento ha traído consigo la tendencia por parte de los muchos componentes de una organización a crecer dentro de un plan relativamente autónomo teniendo cada uno de ellos sus propias metas, - perdiendo por lo tanto la visión de como sus actividades y objetivos se comparan con los de la organización. Lo que es bueno para - un componente frecuentemente es perjudicial para el otro. Es así - que en una empresa por ejemplo, existen las siguientes tendencias:

Producción.- Pocas líneas de productos y grandes corridas - de producción (grandes inventarios).

Ventas.- Abundantes y variados inventarios.

Finanzas.- Minimizar inventarios.

Personal.- Producir inventarios solamente durante los períodos flojos (mantener producción constante).

¿Cuál es en realidad la mejor política para la organización? Es aquí donde entra en acción la investigación de operaciones.

La investigación de operaciones siempre toma el punto de vista general de la organización e intenta llegar a soluciones óptimas, esto es la mejor solución para la organización. Esta solución no siempre es la óptima para sus componentes por separado.

La investigación de operaciones envuelve estudios de grupo i.e. agrupa a toda clase de expertos en sus estudios. Esto es debido al aspecto tan general que toma la misma y al hecho de que sería imposible que un especialista en investigación de operaciones supiese todo lo relativo a cada aspecto y es por esto que el especialista requiere de los demás expertos a quienes él coordina.

Otro de los aspectos que favoreció el desarrollo de la investigación de operaciones es el hecho de que el ritmo de la empresa moderna es tal que las decisiones se requieren más rápidamente que nunca; el posponer la acción puede poner en una decidida ventaja a un competidor.

No es sorprendente que el aumento en la dificultad de tomar las decisiones haya requerido de esfuerzos para dar a esta actividad una base más objetiva y rutinaria. La investigación de operaciones forma parte de este esfuerzo.

Desde el punto de vista de la investigación de operaciones una decisión es una recomendación de que se lleve a cabo un curso de acción particular que afecta al sistema. Quien toma la decisión intenta que el sistema sea más "efectivo" para alcanzar las metas de la organización.

La medida de efectividad generalmente tiene unidades características asociadas con ella (pesos, etc.) pero a veces son adimensionales (probabilidad de destruir un blanco durante un ataque aéreo).

Los orígenes de la investigación de operaciones datan de hace muchos años cuando se empezó el intento de usar un acercamiento científico en la administración de las organizaciones. Estos orígenes sin embargo fueron aislados y faltos de coordinación, no fue sino hasta la segunda guerra mundial cuando la complejidad de las operaciones militares hizo surgir lo que hoy se conoce por investigación de operaciones. A causa de la guerra hubo la necesidad de distribuir de manera eficiente materiales escasos a las distintas operaciones militares y dentro de éstas a las actividades que las componían. Para el efecto se reunió un gran número de científicos para que realizaran una investigación de las operaciones militares.

Debido al éxito logrado en el aspecto militar, la industria se fue interesando en este campo. Los investigadores descubrieron que la industria sufría de los mismos problemas básicos que los militares.

Una vez iniciadas las técnicas de la investigación de operaciones atrajeron la atención de numerosos investigadores los cuales lograron desarrollar las mismas a grandes pasos. Las técnicas desarrolladas contribuyeron a empujar la rápida carrera que lleva la investigación de operaciones, de aquí que para 1950 muchas de las técnicas hubieren alcanzado un grado de desarrollo extraordinario.

En la misma época en que se perfeccionaban las técnicas de la investigación de operaciones también se lograron grandes avances en el diseño de computadoras, lo que facilitó la utilización de las mismas debido a la gran cantidad de computación requerida por la investigación de operaciones.

Aunque no existe una definición correcta para la investigación de operaciones podemos decir que ~~la investigación de operaciones~~ se aplica a problemas que conciernen a la conducción y coordinación de operaciones o actividades dentro de una organización.

La investigación de operaciones se aplica extensamente en el campo de los negocios, el militar, la industria, el gobierno, hospitales, comunicaciones, transporte etc.

El método de análisis empleado es el del método científico, esto es, la investigación de operaciones introduce el razonamiento científico creativo dentro de las propiedades fundamentales de las operaciones.

La programación lineal ha sido usada con éxito en problemas de asignación de personal, mezclado de materiales, distribución y transportación, así como políticas de inversión.

La programación dinámica ha tenido éxito en la planeación de gastos de propaganda, distribución del esfuerzo de ventas y planeación de la producción.

Los fenómenos de espera se han aplicado a problemas de congestionamiento de tráfico, reparación de maquinaria, planeación de tráfico aéreo y diseño de presas.

Otras de las áreas de la investigación de operaciones son:

Teoría de juegos.

Simulación.

Teoría de inventarios.

En la actualidad existen dos organizaciones en Estados Unidos que agrupan gente interesada en la investigación de operaciones.

The Operations Research Society of America que edita la revista Operations Research.

The Institute of Management Science que edita la revista Management Science.

Metodología.-

Aunque no existe una secuencia fija de pasos a seguir en un estudio de investigación de operaciones, podemos analizar los pasos dentro de un problema típico.

a) Formulación del problema. En la práctica los problemas surgen de una manera vaga, razón por la cual es necesario estudiar el sistema bajo consideración y definir exactamente el problema, indicando claramente cuales son los objetivos, las restricciones y qué es lo que se puede hacer; interrelaciones existentes, alternativas posibles, limitación del tiempo, etc. Se ve que la formulación es crucial, pues es imposible obtener buenos resultados partiendo de un mal planteamiento. De aquí que en cuanto surjan nuevos aspectos durante el desarrollo del estudio, la formulación debe ser revisada para ver si no ha cambiado.

Aquí se debe tener cuidado ya que aunque dijimos que el objetivo principal era la solución óptima para toda la organización, existen casos en que el problema afecta a una sola sección y al incluir todas las demás complica terriblemente el problema.

b) Construcción del modelo matemático (muchas veces es éste el paso más sencillo). ~~Este paso~~ consiste en la reformulación del problema de manera tal, que sea conveniente para analizarlo. En este paso representamos matemáticamente el sistema bajo estudio.

Un modelo matemático es una representación idealizada expresada en términos de símbolos matemáticos.

Por ejemplo en programación lineal podemos representar las n variables de decisión, cuyo valor se va a determinar, como $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La medida compuesta de efectividad (llamada función objetiva) (ganancia) se expresa entonces como una función matemática como:

$P = 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + \ldots. + 2x_n$.

Las restricciones a las variables de decisión tambien se expresan matemáticamente $3x_1 + 8x_2 + \ldots. - 3x_n \leq 100$.

El modelo matemático quedaría en este caso como escoger los valores de las variables de decisión tales que maximicen la función objetiva, siempre y cuando se cumplan las restricciones.

El modelo matemático ayuda a revelar relaciones importantes de causa y efecto, señalando de esta forma cualquier dato adicional que pudiera ser de importancia para el estudio.

Debe tenerse en cuenta que el modelo matemático es una abstracción de la realidad y como tal no puede incluir hasta el más mínimo detalle, lo cual complicaría innecesariamente el problema. Por otro lado el excluir efectos colaterales que están fuertemente correlacionados con la decisión por efectuarse afecta grandemente el resultado.

Un buen modelo es aquel que predice los efectos de las diferentes alternativas con suficiente exactitud como para poder realizar una buena decisión.

Cuando existe más de una función objetiva, estas deberán transformarse y combinarse en una sola función objetiva compuesta. El costo del estudio y el retraso deben también ser considerados.

c) Obtener una Solución del Modelo.- Aquí debemos aclarar que aunque existen modelos matemáticos que conducen a una solución óptima dicha solución es sólo óptima con respecto al modelo empleado y es posible que esta solución no sea la mejor posible para el problema real. De aquí que si el modelo está bien formulado la solución obtenida deberá ser una buena aproximación a la solución del problema real.

Muchas veces la solución obtenida se emplea como datos para formular nuevamente el problema y así mediante una serie de ciclos se obtiene una mejor solución.

d) Probar el Modelo y su Solución.- No importa cuan bueno parezca nuestro,modelo siempre se debe probar. El primer paso es checar errores obvios o detalles pasados por alto.

Prueba Retrospectiva.- Cuando es aplicable, consiste en mirar la historia de la compañía y encontrar qué hubiese pasado de haberse aplicado este modelo. Este método puede mostrar fallas en el modelo y así modificarlo. Una gran desventaja de éste método consiste en que utiliza los mismos datos con ayuda de los cuales se desarrolló el modelo. Otra falla es que las condiciones pueden haber cambiado y que los datos pasados ya no representen las condiciones futuras.

Otra prueba es decir que no se aplique el modelo hasta dentro de seis meses y observar qué hubiese pasado en este lapso de haberse aplicado el modelo.

e) Establecer control Sobre la Solución.- Este paso se usa sólo cuando el modelo desarrollado se va a usar repetidamente debido a que las condiciones (datos) pueden estar variando constantemente.

Este paso puede envolver el descubrir los parámetros críticos (aquellos cuyo cambio puede afectar significativamente la solución). Esto se efectúa mediante el análisis de sensibilidad.

Una vez descubiertos los parámetros críticos se puede establecer un método estadístico para detectar cambios significativos en los mismos.

Cuando se descubre un cambio en un parámetro crítico, es necesario ajustar la solución al nuevo valor.

f) Implementación.- El grupo de investigadores debe participar activamente en esta fase, con objeto de supervisar que la solución obtenida sea convertida con exactitud en un procedimiento operativo.

Los pasos a seguir son:

1) Se comunica a la administración la solución obtenida.

2) Tanto la administración como los investigadores comparten la responsabilidad de poner esta solución en operación.

3) Adiestramiento del personal involucrado en la solución.

4) Retroalimentación.

II.- MATRICES

Definición II-1.-

Una matriz es un arreglo rectangular de números escalares.

Denominaremos por m el número de renglones y por n el número de columnas de una matriz.

Una matriz con m renglones y n columnas, se conoce como -- una matriz mxn.

Una matriz n x n se dice que es de orden n.

Tenemos entonces que:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 14 \\ 1 & 5 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

es una matriz 3 x 4 y

$$B=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

es una matriz 3 x 2 .

A los números que integran el arreglo rectangular, se les denomina "elementos de la matriz". Es así que los números 4, 3, 1,- 7, 2, 5, 8, 6, 12, 1, 14, 3, son los elementos de la matriz A, - mientras que 4, 8, 7, 5, 3, 9, son los elementos de la matriz B.

Las matrices las denominaremos con letras mayúsculas.

Los elementos correspondientes de la matriz los denominaremos con la misma letra pero minúscula, seguida de dos sufijos, el- primero de los cuales representa el renglón al que el elemento corresponde, mientras que el segundo indica la columna.

Es así que los elementos de la matriz A serán a_{ij} por ejemplo:

$a_{13} = 8$; $a_{24} = 14$; $a_{33} = 12$

En términos generales podemos representar una matriz como - sigue:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Algunos autores utilizan $A=[a_{ij}]=\|a_{ij}\|=\|a_{ij}\|_{m\times n}$

Debe notarse que la letra particular que aparece como sub-índice - es indiferente, es la posición lo que es importante.

Con las anteriores convenciones a_{ij} es un escalar y - $\|a_{ij}\|$ es una matriz. Nótese que mientras los elementos a_{ij} y - a_{kl} pueden no ser iguales, se considera que las matrices $\|a_{ij}\|$ y $\|a_{kl}\|$ son idénticas.

Una matriz no posee ningún valor numérico (a diferencia de su de-- terminante).

Sin embargo es conveniente realizar ciertas manipulaciones con los arreglos de números; es así que se han desarrollado reglas que permiten realizar operaciones con matrices, las cuales son análogas a las operaciones aritméticas.

Definición II-2

Sean:

$$A = \left\| a_{ij} \right\| \quad y \quad B = \left\| b_{ij} \right\|$$

dos matrices. Se dice que A y B son "iguales", esto es A = B sí - y sólo si todos y cada uno de los elementos correspondientes son - iguales. Es decir A y B tienen exactamente los mismos componentes ($a_{ij} = b_{ij}$ para todos los valores de i y de j).

De lo anterior es claro que para que A = B es necesario que ambas matrices tengan el mismo número de renglones, así como el -- mismo número de columnas entre sí.

Definición. II-3

La diagonal principal de una matriz $\| a_{ij} \|$ es el conjunto de elementos $\left\{ a_{11} \ \ldots . \ a_{tt} \right\}$ donde $t = \min \left\{ m, \ n \right\}$. $\longrightarrow$?

Definición. II-4

Una matriz diagonal es una matriz cuadrada de orden n, en - la cual los elementos que no pertenecen a la diagonal principal -- son cero.

Definición. II-5

La operación de multiplicar una matriz por un número k se - efectúa multiplicando cada uno de los elementos de la matriz por k.

Así pues:

$$kA = \left\| ka_{ij} \right\| = \begin{bmatrix} a_{11} k & a_{12} k & \ldots . & a_{1n} k \\ a_{21} k & a_{22} k & \ldots . & a_{2n} k \\ \ldots . & \ldots . & \ldots . & \ldots . \\ a_{m1} k & a_{m2} k & \ldots . & a_{mn} k \end{bmatrix}$$

donde A puede tener cualquier disposición de sus elementos.

Ejemplo. II-1

$$5 \begin{bmatrix} 8 & 4 & 63 & 7 \\ 1 & 0 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 315 & 35 \\ 5 & 0 & 45 & 10 \end{bmatrix}$$

Definición. II-6

Para "sumar" dos matrices A y B (que deben tener el mismo número de hileras y de columnas entre sí), solamente es necesario sumar los elementos correspondientes de ambas, lo cual puede quedar- representado en la siguiente forma:

$$A + B = \left\| a_{ij} + b_{ij} \right\|$$

Ejemplo. II-2

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -7 & 1 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -1 & 10 \\ 3 & 7 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & 4 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Definición. II-7

La resta de dos matrices A y B podemos interpretarla como - la suma de la matriz A con la matriz C donde C = kB = (-1) B. - Así pues tenemos:

$$A - B = A + C = A + (-1) B = \left\| a_{ij} - b_{ij} \right\|$$

nuevamente A y B deben de tener el mismo número de renglones y columnas entre sí.

Ejemplo. II-3

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -7 & 1 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -1 & 10 \\ 3 & 7 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -13 \\ -10 & -6 & 12 \\ 7 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Definición. II-8 (Multiplicación)

Para encontrar el elemento c_{ij} en el renglón i y la columna j de la matriz resultante de multiplicar A por B, es necesario - - multiplicar cada elemento del rengón i de A por el elemento co- - rrespondiente de la columna j de B y sumar estos productos; observamos que la multiplicación de dos matrices está definida sí y sólo si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, (nótese que el número de renglones de A y de columnas de B puede ser cualquiera.)

En general si:

$$\left\| a_{ij} \right\|_{mxn} \quad y \quad \left\| b_{ij} \right\|_{nxr}$$

su producto será:

$$C = AB = \left\| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \; b_{kj} \right\|_{mxr} = \left\| c_{ij} \right\|_{mxr}$$

Ejemplo. II-4

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

La operación de multiplicación de matrices no es conmutativa, es decir:

$$AB \neq BA$$

Ejemplo. II-5

a.-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 14 & 8 \end{bmatrix}$$

En la mayoría de los casos en que A B está definida, B A no lo está.

b.- La multiplicación BA de las matrices del ejemplo II-4 no está definida.

Nota. II-1

La división entre matrices no está definida.

Definición. II-9

Se llama matriz cero o nula a aquella matriz de cualquier orden cuyos elementos son todos "cero"; Se representa por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Ejercicio II-1

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

1.- A=D porque $a_{11} = d_{11} = 3$; $a_{12} = d_{12} = 4$; $a_{13} = d_{13} = 4$ etc.

2.- B ≠ C porque $b_{ij} \neq c_{ij}$

3.- La diagonal principal de A es $\{3, 6, 3\}$

La diagonal principal de B es $\{5, 2, 2\}$

4.- A es una matriz de orden 3.

5.- B es una matriz 3 x 4.

C es una matriz 4 x 3 .

6.- E es una matriz diagonal.

7.- $k\,B = 3\,B = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 9 & 18 \\ 21 & 6 & 15 & 3 \\ 3 & 9 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

8.- $A + D = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 2 & 12 & 14 \\ 14 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

A + B no está definida.

9.- $A - E = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

A - Cn está definida.

10.- $BC = \begin{bmatrix} 104 & 43 & 43 \\ 79 & 24 & 40 \\ 29 & 4 & 19 \end{bmatrix}$

BF no está definida.

11.- $CB = \begin{bmatrix} 47 & 37 & 34 & 38 \\ 29 & 32 & 23 & 30 \\ 29 & 24 & 21 & 25 \\ 71 & 41 & 48 & 47 \end{bmatrix}$

Vemos que $B\,C \neq C\,B$

Las matrices satisfacen las siguientes leyes:

1.- $CA = \emptyset$

2.- $1\,A = A$

3.- $A + \emptyset = A$

4.- $A - A = \emptyset$

5.- $A + B = B + A$

6.- $A\,(B + C) = AB + AC$

7.- $(A + B)\,C = A\,C + B\,C$

8.- $(A + B) + C = A + (B + C)$

9.- $A\,(BC) = (AB)\,C$

leyes que se satisfacen siempre y cuando las operaciones propuestas están bien definidas.

Definición II-10

Dada la matriz A, la matriz A^T, obtenida de A intercambiando las hileras por las columnas en A, se llama la matriz transpuesta de A. Si $A^T = \|a'_{ij}\|$ el elemento a'_{ij} que aparece en el renglón i y la columna j de A^T es el elemento a_{ji} que aparece en el renglón j columna i de A.

Ejemplo II-6

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Para obtener la transpuesta de una matriz, no es necesario que ésta sea cuadrada.

Propiedades de la matriz transpuesta:

$(A\,B)^T = B^T\,A^T$

$(A + B)^T = A^T + B^T$

Definición II-11

La matriz adjunta es aquella matriz cuadrada formada por los menores de la transpuesta de la matriz cuadrada dada.

Se escribe A^{Γ}

Ejemplo II-7

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{\Gamma} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\Gamma} = \begin{bmatrix} -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \qquad A^{\Gamma} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -8 & 4 & -2 \\ 12 & -10 & -3 \end{bmatrix}$$

Definición II-12

La matriz identidad (I) es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal principal son todos unos.

$$I = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 \end{matrix}$$

La matriz identidad tiene las siguientes propiedades:

$$I\,A = A = A\,I$$

donde I tiene el número apropiado de renglones y columnas en cada caso, de forma tal que la operación de multiplicación quede definida.

Definición II-13

Cuando una matriz la subdividimos en varias matrices más pequeñas a éstas, se les conoce con el nombre de submatrices.

Ejemplo II-8

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

donde:

1) $a_{11} = a_{11}$

2) $A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$

3) $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$

4) $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$

Es posible el realizar las operaciones usando las submatrices en lugar de hacerlo elemento por elemento. Debe estar claro que esto es solamente posible en el caso en que la subdivisión sea tal que las operaciones estén definidas, en caso contrario no se logrará nada con subdividir la matriz.

Ejemplo II-9

Sea:

$$B = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & + & A_{12} & B_2 \\ A_{21} & b_1 & + & A_{22} & B_2 \end{bmatrix}$$

Una clase de matrices que tiene un papel muy importante es aquella que cuenta con un solo renglón o con una sola columna. Tales matrices se conocen con el nombre de vectores.

$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_n \end{bmatrix}$ (es un vector renglón)

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ es un vector columna y lo denominaremos $\{ b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_n \}$

Los vectores son importantes en la teoría de matrices debido a que cualquier matriz m x n puede ser subdividida ya sea en m-vectores renglón o en n vectores columna, con lo cual se pueden analizar importantes propiedades de las matrices.

Si tenemos que :

$$\beta = C_1 \; x_1 + C_2 \; x_2 + \ldots\ldots + C_m \; x_m = \sum_{i=1}^{m} C_i \; x_i$$

donde las C_i son constantes, se dice que β es una combinación lineal de las x_i. También decimos que β es linealmente dependiente de las x_i si β puede ser expresada como una combinación lineal de las x_i.

Una expresión de la forma $\sum_i C_i \; x_i = 0$ se llama una relación lineal entre las x_i. Una relación donde todas las $C_i = 0$ se conoce como una relación lineal trivial; una relación en la cual cuando menos uno de los coeficientes es diferente de cero, se conoce como una relación lineal no trivial.

Definición II-14

Un conjunto de vectores se dice que son linealmente dependientes si existe una relación lineal no trivial entre ellos. En caso contrario el conjunto es linealmente independiente . Debe notarse que cualquier conjunto de vectores que incluya el vector-cero es linealmente independiente.

Si un conjunto $\left\{ x_i \right\}$ de vectores es linealmente dependiente, entonces existe una relación lineal no trivial de la forma $\sum_i C_i \; x_i = 0$ (no necesariamente única). En la relación anterior, existe cuando menos un coeficiente diferente de cero, sea éste C_k, entonces:

$$X_k = \sum_{i \neq k} (-a_k^{-1} \; a_i \;) \; x_i$$

que es uno de los vectores del conjunto $\left\{ x_i \right\}$, es una combinación lineal de los otros.

Si un conjunto $\left\{ x_i \right\}$ de vectores se sabe que es linealmente independiente y se obtiene una relación lineal $\sum_i c_i \; x_i = 0$, podemos entonces concluir que todas las $c_i = 0$.

Es claro que el concepto de independencia lineal de un conjunto no tendría sentido si un vector del conjunto pudiera incluirse un número arbitrario de veces en una posible relación.

Si un conjunto de vectores es dado sin embargo, diferenciando los vectores en el conjunto, es una inconveniencia el insistir en que todos los vectores listados sean distintos. La carga de contar el número de veces que un vector puede aparecer en una relación es transferida al conjunto de sub-índices. Por cada sub-índice en el conjunto de subíndices requerimos que uno y solo uno de los vectores sea listado por cada subíndice del conjunto de subíndices. Permitimos pues la posibilidad de que varios subíndices sean utilizados para identificar el mismo vector. Así pues el conjunto:

$$\left\{ x_1 \quad x_2 \right\} \quad \text{en donde} \quad x_1 = x_2$$

es linealmente dependiente. Tenemos entonces que el concepto de independencia lineal de un conjunto es más bien una propiedad de la forma de poner los subíndices en el conjunto que del conjunto mismo. Deberíamos referirnos a la dependencia lineal de un conjunto numerado en lugar de la dependencia lineal de un conjunto.

Ejemplo. II-10

Sea: $x = \left\{ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \right\}$

donde:

$x_1 = (1, 1, 0)$

$x_2 = (1, 0, 1)$

$x_3 = (0, 1, 1)$

$x_4 = (1, 1, 1)$

entonces el conjunto X es linealmente dependiente ya que:

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$

por lo tanto:

$$x_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}$$

Sin embargo cualquier subconjunto de tres de los cuatro vectores es linealmente independiente.

Ejemplo. II-11

sea:

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$$

donde:

$y_1 = (1, 1, 0, 1)$

$y_2 = (1, -1, 1, 1,)$

$y_3 = (2, 2, 1, 2)$

$y_4 = (0, 1, 0, 0)$

Para encontrar la dependencia o independencia lineal del conjunto, formamos la relación:

$$a\,(1, 1, 0, 1) + b(1, -1, 1, 1) + c\,(2, 2, 1, 2) + d\,(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

Se busca si la relación es trivial o no (si a, b, c, ó d es $\neq 0$ los vectores son dependientes).

$a + b + 2c = 0 \;\ldots\; (1)$

$a - b + 2c + d = 0 \;\ldots\; (2)$

$b + c = 0 \;\ldots\; (3)$

$a + b + 2c = 0 \;\ldots\; (4)$

de (3) $b = -c$

en (1) $a + b - 2b = 0$ de donde $a = b$

en (2) $a - a - 2a + d = 0$ de donde $d = 2a$

Si hacemos $a = 1$ (valor arbitrario) obtenemos:

$$(1, 1, 0, 1) + (1, -1, 1, 1) - (2, 2, I, 2) + 2\,(0, I, 0, 0) = (0,0,0,0,)$$

de donde el conjunto Y es linealmente dependiente.

Ejemplo. II-12

$w_1 = (1, 0, 0, 1)$

$w_2 = (0, 1, 0, 1)$

$w_3 = (0, 0, 1, 1)$

$w_4 = (1, 1, 1, 1)$

$$a\,(1, 0, 0, 1) + b(0, 1, 0, 1) + c\,(0, 0, 1, 1) + d(1, 1, 1, 1) = (0,0,0,0,)$$

$a + d = 0 \;\ldots\ldots\; (1)$

$b + d = 0 \;\ldots\ldots\; (2)$

$c + d = 0 \;\ldots\ldots\; (3)$

$a + b + c + d = 0 \;\ldots\ldots\; (4)$

de (1) $a = -d$

de (2) $b = -d$

de (3) $c = -d$

de (4) $-d -d -d +d = 0 \qquad -2d = 0$ de donde $d = 0$

de donde el conjunto de vectores es linealmente independiente.

Definición II.15

El mayor número de vectores linealmente independientes que puede ser encontrado dentro de un conjunto de vectores se conoce como el rango del conjunto.

Ejemplo. II-13

En el ejemplo II=10 el rango del conjunto de vectores $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ es (3), pues $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_3 \ x_4\}$, $\{x_2, x_3, x_4\}$ y $\{x_1, x_2, x_4\}$ son linealmente independientes.

En el ejemplo II-11 el rango del conjunto de vectores $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ es tres pues $\{y_1, y_2, y_4\}$ es linealmente independiente.

En el ejemplo II-12 el rango del conjunto $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ es cuatro.

Para encontrar el rango de un conjunto de vectores, se hace la prueba de dependencia lineal y si el conjunto resulta linealmente independiente entonces el rango es igual al número de vectores considerados. Si resulta linealmente dependiente, eliminamos cualquiera de los vectores que en el paso anterior hubiera resultado con un coeficiente diferente de 0 y se vuelve a repetir la prueba de dependencia lineal, volviendo a iniciar el ciclo anterior.

Denominaremos por ρ al rango de una matriz.

Teorema. II-1

Cualesquiera n + 1 vectores en un espacio vectorial de n dimensiones son linealmente dependientes.

Ejemplo. II-14

El caso visto en el ejemplo II-10 anterior.

Definición. II-16

Se dice que un subconjunto de vectores linealmente independientes es la base del conjunto de vectores a que el mismo pertenece, cuando todos y cada uno de los vectores del conjunto original son una combinación lineal de los vectores en este subconjunto. Una base no necesariamente es única.

Ejemplo. II-15

En el primer ejemplo el subconjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$ es una base del conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ya que:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} = \frac{(1,1,0) + (1,0,1) + (0,\ 1,\ 1)}{2} = (1,\ 1,\ 1)$$

y además el subconjunto es linealmente independiente.

Así mismo $\{x_1, x_2, x_4\}$ es otra base de dicho conjunto ya que:

$$x_3 = 2x_4 - x_2 - x_1 = (2,2,2) - (1,\ 0,\ 1) - (1,1,0) = (0,1,1,)$$

Ejemplo. II-16

En el segundo ejemplo $\{y_1, y_2, y_4\}$ es una base del conjunto: $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ya que:

$$y_3 = y_1 + y_2 + 2y_4 = (1,1,0,1) + (1\ ,-1,\ 1,1) + (0,2,0,0) = (2,2,1,\ 2)$$

Teorema II.2

Un subconjunto de r vectores linealmente independientes, tomados de un conjunto de vectores, es una base del mismo si y sólo sí el conjunto tiene rango r .

Demostración intuitiva:

$\Longrightarrow$ Si el conjunto tiene rango r, por definición un subconjunto de r vectores linealmente independientes tiene que ser una base, ya que r es el máximo número de vectores linealmente indepen dientes y todos los demás serán combinaciones lineales de estos.

Supongamos que el conjunto tiene rango r + 1, esto implica que existen r + 1 vectores linealmente independientes en el conjunto; de donde r vectores no bastan para formar el r + 1-avo vector mediante combinaciones lineales; y por lo tanto tenemos una contradicción.

Teorema. II-3

Si un conjunto de r vectores tiene una base con un número finito de elementos, entonces todas las demás bases, en caso de existir, son finitas y cuentan con el mismo número de elementos.

Teorema. II-4

Un conjunto de n vectores en un espacio vectorial de n dimensiones es una base sí y sólo si es linealmente independiente.

Definición. II-17

El rango de las hileras de una matriz, es el rango del conjunto de sus vectores renglón. El rango de las columnas de una matriz es el rango del conjunto de sus vectores columna.

Ejemplo. II-17

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho_r = 3$ (ver ejemplo II-11)

$\rho_c = 3$ (a simple vista se ve la dependencia entre las columnas 1 y 4)

Teorema. II.5

El rango de las hileras y el rango de las columnas de una matriz son iguales. Es por esto que solamente se habla del rango ρ de una matriz.

Dada una matriz A diferente de la matriz cero, ¿cuándo existe una matriz A^{-1} llamada el inverso de A, tal que:

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I \quad ?$$

Si A no es una matriz cuadrada entonces nunca existe tal matriz A^{-1} de donde sólo una matriz cuadrada puede tener inverso. Esto es debido a que A^{-1} debería tener diferente número de renglones en cada caso para que los productos $A\,A^{-1}$ y $A^{-1}A$ estuviesen definidos.

Si A es una matriz cuadrada entonces existen ocasiones en que esta matriz tiene inverso.

Definición II-18

Una matriz se llama no singular si su rango iguala tanto el número de sus renglones como el número de sus columnas, en caso contrario se llama singular. De aquí que solo las matrices cuadradas puedan ser no singulares.

Definición II-19

Una matriz m x m se llama no singular si sus vectores columna son linealmente independientes.

Una matriz es no singular si y sólo sí su determinante es diferente de cero.

Teorema. II-6

a) Si A es no singular, existe una matriz no singular A^{-1}, llamada inverso de A, tal que $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$

b) Si A es no singular y B es una matriz para la cual ya sea $A\,B = I$ ó $B\,A = I$, entonces $B = A^{-1}$

c) Sólo las matrices no singulares tienen inversos.

Teorema. II-7

Si A y B son no singulares entonces:

a) A B es no singular.

b) $(A\ B)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$

c) A^{-1} es no singular.

d) $(A^{-1})^{-1} = A$

e) Para $a \neq 0$, (aA) es no singular y $(aA)^{-1} =$
$= a^{-1}\ A^{-1}$

Teorema II-8

El rango de una matriz (no necesariamente cuadrada) no se altera si ésta se multiplica por una matriz no singular.

Ejemplo II-18

Si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobación:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Existen varios métodos para invertir una matriz:

Método 1.-

a) Obtener el valor del determinante de la matriz.

b) Obténganse los valores de los cotadores de la matriz.

c) Divídanse los valores de los cotadores entre el valor del determinante.

d) Colóquese el valor obtenido en (c) en la posición transpuesta del cotador correspondiente.

Ejemplo II-19

En el ejemplo anterior:

$A = 18 + 24 + 24 - 27 - 16 - 24 = -1$

dado que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{-1} & \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{-1} & \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-1} \\ \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{-1} & \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{-1} & \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{-1} \\ \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-1} & \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-1} & \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-1} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{18 - 16}{-1} & -\dfrac{12 - 12}{-1} & \dfrac{8 - 9}{-1} \\ -\dfrac{12 - 12}{-1} & \dfrac{6 - 9}{-1} & -\dfrac{4 - 6}{-1} \\ \dfrac{8 - 9}{-1} & -\dfrac{4 - 6}{-1} & \dfrac{3 - 4}{-1} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo II-20

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad |A| = -5 + 4 = -1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{-1} & -\frac{-4}{-1} \\ -\frac{+1}{-1} & \frac{5}{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Método 2.

Este método es básicamente el mismo que el anterior, solamente difiere en la secuencia de pasos y en la forma de ataque y dice así:

La inversa de una matriz puede escribirse:

$$A^{-1} = \frac{A^{\ulcorner}}{|A|}$$

Ejemplo II-21

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{\ulcorner} = \begin{bmatrix} -12 & -6 & 12 \\ -10 & 3 & -22 \\ 6 & -21 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0 -24 -6 -0 -60 -6 = -96$$

Nótese que:

$$|A| \, I = A \quad A^{\ulcorner}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-96} \begin{bmatrix} -12 & -6 & 12 \\ -10 & 3 & -22 \\ 6 & -21 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/16 & -1/8 \\ 5/48 & -1/32 & 11/48 \\ -1/16 & 7/32 & 1/16 \end{bmatrix}$$

Los dos métodos anteriores resultan demasiado complicados para hacerlos a mano cuando el número de elementos de la matriz se incrementa.

Método 3.

Este método proporciona el inverso de una matriz cuando ésta es no singular, en caso de que la matriz sea singular este método proporciona lo que se conoce como matriz en forma Hermite Normal. Describiremos el método con la ayuda de un ejemplo:

a) Se pone una matriz I despues de A.

$$[A \; I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Se busca dejar el primer vector columna como un vector $\{1, 0, 0\}$, mediante operaciones elementales de las matrices, esto es:

1.- Multiplicar un renglón de A por un escalar $\neq 0$

2.- Sumar el múltiplo de una hilera a otra.

3.- Intercambiar dos hileras.

así pues obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Se busca dejar el segundo vector columna como $\{0,1,0\}$ mediante operaciones elementales.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Hacer lo mismo para el tercer vector columna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Se elimina la matriz I que ocupa el lado izquierdo quedando así la matriz inversa.

Así pues:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobación:

$$A\,A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema. II-9

El inverso de una matriz es único.

Sin entrar en detalles ni forma de obtenerla, describiremos a continuación lo que se conoce como la Forma Hermite de una matriz.

Sea ρ el rango de una matriz A (singular) donde el conjunto de vectores que la componen es mayor que ρ .

Denominaremos por k_1, k_2, ..., k_ρ los subíndices de los vectores que forman la base.

Se dice que la matriz A está en forma Hermite $A' = K^{-1} A$, (donde K^{-1} no es el inverso de A) cuando tiene la forma:

$$A = \left[\begin{array}{cccccccc} & & \text{col}_{k1} & & & \text{col}_{k2} & & \\ 0\ldots\ldots & 0 & 1 & a'_{1,k_1+1} & \ldots\ldots & 0 & a'_{1,k_2+1} & \ldots\ldots \\ 0\ldots\ldots & 0 & 0 & 0\ldots\ldots & \ldots\ldots & 1 & a'_{2,k_2+1} & \ldots\ldots \\ 0\ldots\ldots & 0 & 0 & 0\ldots\ldots & \ldots\ldots & 0 & 0\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots\ldots & \ldots\ldots & 0 & 0\ldots\ldots & \ldots 0 \end{array}\right]$$

La cual satisface las siguientes condiciones:

a) Existe cuando menos un elemento diferente de 0 en cada uno de los primeros ρ renglones de A' y los elementos en los restantes $(m - \rho)$ renglones son cero.

b) El primer elemento diferente de cero que aparece en el renglón i ($i \leq \rho$) es un uno que aparece en la columna k_i donde $k_I < k_2 < \ldots k_\rho$

c) En la columna k_i el único elemento $\neq 0$ es un uno en el renglón i.

ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS.

Sean las siguientes ecuaciones con tres variables:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2 \ \ldots\ (\alpha)$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \ \ldots\ (\beta)$$

El conjunto ordenado de valores $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ -- se dice que es una solución de α (ó de β) debido a que si sustituyen estos valores en lugar de x_1, x_2, x_3 en la primera ecuación (ó en la segunda) se produce la identidad 2 = 2 (ó 7 = 7). La solución (3, 2, 1) se dice que satisface la ecuación α (ρ).

Supongamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

$$\begin{array}{l}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\
a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{3n} x_n = b_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn} x_n += b_n
\end{array}$$

Este sistema de ecuaciones tambien puede ser representado en forma compacta así:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \text{ para (i = 1 , ..., m)}$$

ó en forma matricial:

$$A\ X = B$$

en donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

de donde cualquier observación que hagamos respecto a las matrices corresponderá también al sistema de ecuaciones lineales, ya que -- aquellas son únicamente su representación.

Definición II-20

Una solución para la i-ava ecuación, es un conjunto ordenado de números (x_1' , x_2', ... , x_n') tal que:

$$a_{i1} x_1' + a_{i2} x_2' + \ldots + a_{in} x_n' = b_i$$

Definición II-21

Un conjunto ordenado de números se dice que es una solución de un sistema de ecuaciones si y solo si es una solución para todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

Definición II-22

Dadas las matrices A y B, la matriz aumentada A, B de un -- sistema de ecuaciones lineales se define como:

$$A, B = \left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mn} & \textcircled{a_m} \end{array}\right] b_m$$

Hemos hablado de una solución al sistema de ecuaciones debido a que éste puede no poseer una solución única, así como no te ner ninguna en absoluto.

Definición II-23

Un sistema de ecuaciones que tenga solución (única o no) se llama consistente. En caso contrario es inconsistente.

Definición II-24

Si en un sistema de ecuaciones una ecuación es una combinación lineal de las otras, se dice que esta última es dependiente de las otras. La ecuación dependiente se llama redundante.

Definición II-25

Un sistema que no contiene redundancias se llama independiente.

Un sistema lineal es claramente inconsistente si es posible el encontrar una combinación lineal de las ecuaciones del sistema que tenga la siguiente forma:

$$0\ x_1 + 0\ x_2 + \ldots\ldots. + 0\ x_n = d \quad \text{donde } d \neq 0$$

Definición II=26

Un sistema canónico con un subconjunto ordenado de variables llamadas básicas, es un sistema tal que para cada i, la i-ava variable básica tiene un coeficiente unitario en la i-ava ecuación, y un coeficiente cero en todas las demás.

Definición II-27

Dos sistemas se llaman equivalentes si un sistema puede ser derivado del otro insertando o eliminando ecuaciones redundantes.

Teorema II-10

Sistemas equivalentes tienen el mismo conjunto de soluciones.

Teorema II-11

El sistema de ecuaciones lineales simultáneas A X = B tiene solución (una o varias) si y solo sí el rango de A es igual al rango de la matriz aumentada A, B. Siempre que una solución exista, todas las soluciones pueden ser expresadas en términos de $\nu = n - \rho$ parámetros independientes donde ρ es el rango de A.

Justificación (no demostración).

Dado que: $\rho_{[A,\ B]} < \rho_{[A]}$ es imposible,

entonces: $\rho_{[A,\ B]} = \rho_{[A]} + 1$

es la única otra posibilidad ya que solo aumentamos un nuevo vector. En caso de ser cierta esta igualdad, esto significa que el vector B es linealmente independiente de los vectores columna de A; pero esta independencia lineal es imposible debido a que B es una combinación lineal A X de los mismos. Es por esto que debemos de tener: $\rho_{[A,\ B]} = \rho_{[A]}$

Dado que $\rho_{[A,\ B]} = \rho_{[A]}$, existen dos posibilidades:

1.- $\rho_{[A]} = n$, ó sea su valor máximo (aquí $m > n$ forzosamente).

En este caso el sistema de ecuaciones tendrá exactamente una solución. Recordemos que AX = B y que $\rho_{[A]} = n$, por lo que vemos que nuestro conjunto de vectores es una base (T. II-2) del sistema y A es no singular, por lo tanto $A^{-1}\ AX = A^{-1}B$ y $X = B'$ con la cual x_i aparece solo en la i-ésima ecuación igualada al valor de su -

solución que en este caso es única.

2.- $\rho_{[A]} < n$ Aquí existirán $\rho_{[A]}$ vectores independientes y $\nu = n - \rho$ vectores dependientes (o parámetros independientes) a los cuales puede ser asignado cualquier valor arbitrario sin que el valor escogido impida que exista una solución para los vectores en la base, de aquí que en esta situación existan una infinidad de soluciones para el sistema de ecuaciones.

Esto es debido a que $A'X = B'$ es tal que A' está en forma hermite y recordamos que x_{ki} aparecen sólo en la i-ava ecuación, además coeficientes diferentes de cero aparecen sólo en las primeras ρ ecuaciones. Dado que x_{ki} aparece en una sola ecuación con coeficiente uno, a las restantes $n-\rho$ incógnitas se les puede dar valores arbitrarios para obtener los valores de x_{ki} correspondientes.

Es importante el hacer notar que cuando $\rho_{[A,\ B]} = \rho_{[A]} = r$ donde $r < m$ entonces tenemos que $(m - r)$ de nuestras ecuaciones deberán ser combinaciones lineales de las otras r. De aquí que $(m - r)$ ecuaciones redundantes puedan ser eliminadas sin que esto afecte a la o las soluciones.

Métodos de solución.-

Caso 1.- $m = n$ y A es no singular. (Solución única)

a) $\rho_{A,\ B} = \rho_A$

En este caso empleamos el método de eliminación de Gauss -- Jordan para el cual se procede como sigue para obtener dicha solución:

Elimínese la primera variable de todas las ecuaciones menos de una (que usualmente es la primera), esto se efectúa sumando algebraicamente un múltiplo adecuado en cada caso de esta ecuación a cada una de las demás ecuaciones, eliminando la ecuación original y considerando en su lugar la ecuación que resultó de sumar algebraicamente el múltiplo de la ecuación con la variable en turno a la ecuación eliminada. La ecuación que quedó con la primera variable debe de dividirse entre el coeficiente de ésta con el objeto de que la misma quede con coeficiente uno; a continuación procede en forma análoga con el objeto de eliminar la segunda variable de todas las ecuaciones menos una (usualmente la segunda).

Repítase la operación hasta que las n variables aparezcan en solo una de las ecuaciones; al llegar a este paso, cada una de las n ecuaciones debe contener exactamente una de estas variables ya que:

$A^{-1} AX = A^{-1} B$, de donde $X = B'$. La solución deseada se lee directamente en las ecuaciones resultantes.

b) $\rho_{AB} = \rho_{A+1}$

En este caso el sistema de ecuaciones no tiene ninguna solución debido a que el sistema es inconsistente.

Ejemplo II-22

$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 22$ ...... (1)

$-x_1 + 3x_2 = 9$ ...... (2)

$4x_2 - x_3 = 10$ ...... (3)

Eliminamos x_1 de todas las ecuaciones menos de la primera.

Esto se logra sumando (1/2) veces la ecuación (1) a la ecuación (2) y sustituyendo la ecuación obtenida (2') en lugar de la ecuación original (2). A continuación dividimos la ecuación (1) entre el coeficiente de x_1, para obtener la ecuación (1'). La ecuación (3) queda igual pues no contiene x_1.

Obtenemos pues:

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 11$ ... (1') donde ec. (1') = 1/2 ec. (1)

$2x_2 + 2x_3 = 20$ ... (2') donde ec. (2') = 1/2 ec. (1) + ec. (2)

$4x_2 - x_3 = 10$ ... (3') donde ec. (3') = ec. (3)

El siguiente paso consiste en eliminar x_2 de todas menos de la segunda ecuación. Empezamos por dividir entre dos la segunda ecuación para obtener x_2 con coeficiente unitario.

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 11$ ...... (1')

$x_2 + x_3 = 10$ ...... (2'')

$4x_2 - x_3 = 10$ ...... (3')

Hacemos ahora que x_2 solo aparezca en la segunda ecuación.

$x_1 + 3x_3 = 21$ ... (1'') donde ec. (1'')=ec.(1')+ec.(2'')= ec.(1')+1/2ec-(2'')

$x_2 + x_3 = 10$ ... (2'') donde ec. (2'')=1/2 ec. (2')

$-5x_3 = -30$ ... (3'') donde ec. (3'')=ec.(3')-4ec.(2'') = ec.(3')-4/2ec(2')

Finalmente eliminamos x_3 de todas las ecuaciones menos de la tercera. Para esto hacemos primero que el coeficiente de x_3 en la ecuación (3'') sea unitario dividiendo dicha ecuación entre (-5).

$x_1 + 3x_3 = 21$ ...... (1'')

$x_2 + x_3 = 10$ ...... (2'')

$x_3 = 6$ ...... (3''')

y ahora eliminamos x_3 de (1'') y 2'')

$x_1 = 3$ .. (1''') donde ec(1''')=ec(1'')-3ec(3''')=ec(1'')+3/5ec (3'')

$x_2 = 4$ .. (2''') donde ec(2''')=ec(2'')-ec(3''')=ec(2'')+1/5ec (3'')

$x_3 = 6$ .. (3''') donde ec(3''')=-1/5ec(3'')

de donde vemos que la solución buscada será:

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 4 \qquad x_3 = 6$

o en forma vectorial:

$$(x_1, x_2, x_3) = (3, 4, 6)$$

Otra alternativa es la de resolver el sistema de ecuaciones utilizando las matrices. En este caso tendríamos:

$$A\,X = B$$

$$A^{-1}\,AX = A^{-1}\,B$$

$$X = B'$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -6 - 16 + 2 = -20$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{-20} & \frac{14}{-20} & \frac{-12}{-20} \\ \frac{-1}{-20} & \frac{-2}{-20} & \frac{-4}{-20} \\ \frac{-4}{-20} & \frac{-8}{-20} & \frac{4}{-20} \end{bmatrix}$$

$$B'=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 3/20 & -14/20 & 12/20 \\ 1/20 & 2/20 & 4/20 \\ 4/20 & 8/20 & -4/20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{66}{20} & -\frac{126}{20} & \frac{120}{20} \\ \frac{22}{20} & \frac{18}{20} & \frac{40}{20} \\ \frac{88}{20} & \frac{72}{20} & -\frac{40}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

y X = B' será:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Caso 2.- (Cuando $m \neq n$ y/ó A es singular)

a) $\rho_{[A,B]} = \rho_{[A]} + 1$

Ya vimos que en este caso no hay solución. Cuando se aplica el método de Gauss-Jordan se obtendrá una ecuación en la cual el lado izquierdo se habrá hecho cero mientras que el derecho será diferente de cero, es decir nuestro sistema lineal es inconsistente.

b) $\rho_{[A,B]} = \rho_{[A]} = n$

Aquí: $m \geq n$ (puesto que $\rho = n$)

Si m = n llegamos al caso tratado con anterioridad (caso 1)

Si $m > n$ en este caso tenemos (m-n) ecuaciones redundantes las cuales serán totalmente eliminadas por el método de Gauss-Jordan de forma tal que la solución única será identificada igual que antes (caso 1o.).

c) $\rho_{[A,B]} = \rho_{[A]} = r < n$

En este caso existen un número infinito de soluciones y cuando el método de Gauss-Jordan ha sido completado habremos obtenido una matriz de coeficientes en forma hermite, es decir cada una de las r variables habrá quedado en solo una de las ecuaciones y cada una de las r ecuaciones contendrá exactamente una de estas variables. Sin embargo cada una de las otras (n-r) variables se habrán desvanecido o permanecerán en algunas de las ecuaciones. Es así que cualquier solución obtenida asignando valores arbitrarios a las (n-r) variables y despues identificando los vectores correspondientes a las otras r variables sea una solución al sistema de ecuaciones.

La transferencia de estas (n-r) variables al lado derecho dejará las r variables como una función de los parámetros independientes.

<u>Ejemplo</u> II-23 (caso 2(a)) (ejemplo II-12).-

$x_1 = 1$ .... (1)
$x_2 = 1$ .... (2)
$x_3 = 1$ .... (3)
$x_1+x_2+x_3 = 1$ .... (4)

eliminando x_1 de (2), (3), y (4)

$x_1 = 1$ .... (1')
$x_2 = 1$ .... (2')
$x_3 = 1$ .... (3')
$x_2+x_3 = 0$ .... (4')

eliminando x_2 de (1'), (3'), y (4')

$x_1 = 1$ .... (1")
$x_2 = 1$ .... (2")
$x_3 = 1$ .... (3")
$x_3 = -1$ .... (4")

eliminando x_3 de (4")

Ejemplo II-25 (caso 2 (c)) .-

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \quad &= 0\\
5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4\\
-2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3\\
11x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 &= 11
\end{aligned}
$$

La matriz aumentada será:

$$
\begin{bmatrix}
4 & 4 & 4 & 0 & 0\\
5 & 4 & 3 & -1 & 4\\
-2 & -2 & -1 & 2 & -3\\
11 & 6 & 4 & 1 & 11
\end{bmatrix}
$$

Multiplicando el renglón 1 por (1/4) y sumando múltiplos de este renglón a las demás ecuaciones tendremos:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & -1 & -2 & -1 & 4\\
0 & 0 & 1 & 2 & -3\\
0 & -5 & -7 & 1 & 11
\end{bmatrix}
$$

Multiplicando el renglón 2 por (-1) y sumando múltiplos adecuados de este renglón a los demás llegamos a:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -1 & -1 & 4\\
0 & 1 & 2 & 1 & -4\\
0 & 0 & 1 & 2 & -3\\
0 & 0 & 3 & 6 & -9
\end{bmatrix}
$$

Finalmente obtenemos:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0 & -3 & 2\\
0 & 0 & 1 & 2 & -3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$x_1 = 1$ .... (1''')

$x_2 = 1$ .... (2''')

$x_3 = 1$ .... (3''')

$0 = -2$ .... (4''')

La ecuación (4''') es la ecuación mencionada que hace que nuestro sistema lineal sea inconsistente.

Ejemplo II-24 (Caso 2(b)) (ejemplo II-11)

$x_1 + x_2 = 1$.......... (1)

$x_1 - x_2 + x_3 = 1$.......... (2)

$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$.......... (3)

$x_2 = 0$.......... (4)

eliminando x_1 de (2) y (3)

$x_1 + x_2 = 1$.......... (1')

$-2x_2 + x_3 = 0$.......... (2')

$x_3 = 0$.......... (3')

$x_2 = 0$.......... (4')

eliminando x_2 de (1') y 4')

$x_1 + 1/2x_3 = 1$ ..... (1'')

$x_2 - 1/2x_3 = 0$ ..... (2'')

$x_3 = 0$ ..... (3'')

$1/2x_3 = 0$ ..... (4'')

eliminando x de (1''), (2'') y (4'')

$x_1 = 1$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

$0 = 0$ ecuación redundante mencionada.

III.- PROGRAMACION LINEAL

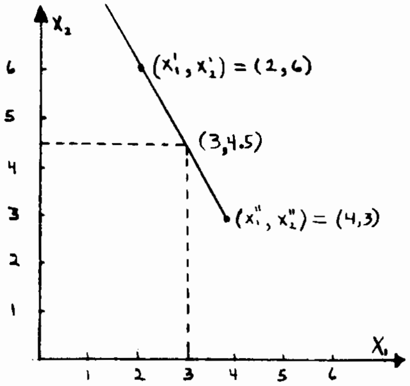
Definición.- III.I.-

Uniendo dos puntos cualesquiera $(x'_1, x'_2, \ldots x'_n)$ y $(x''_1, x''_2, \ldots x''_n)$ existe una colección de puntos, conocidos con el nombre de "segmento lineal", tales que:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(\lambda x'_1+(1-\lambda)x''_1, \lambda x'_2 +(1-\lambda)x''_2,\ldots,\lambda x'_n +(1-\lambda)x''_n)$$

en donde $0 \leq \lambda \leq 1$

Ejemplo III.-1



La última ecuación es redundante.

Como obtuvimos toda una hilera de ceros la ecuación (4) era redundante, de donde el sistema de ecuaciones correspondientes es:

$$\begin{aligned} x_1 \quad & + x_4 = 1 \\ x_2 \quad & -3x_4 = 2 \\ x_3 \quad & +2x_4 =-3 \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1- x_4 \\ x_2 &= 2+ 3x_4 \\ x_3 &=-3- 2x_4 \\ x_4 &= x_4 \end{aligned}$$

donde x_4 es el parámetro independiente.

y

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, -3, 0) + (-1,3,-2,1)\, x_4$$

será la solución expresada en forma vectorial.

sean:

$$(x'_1 , x'_2) = (2, 6)$$

$$(x''_1 , x''_2) - (4, 3)$$

el segmento lineal será la colección de puntos:

$$(x_1, x_2) = (2\lambda + 4 (1-\lambda), 6\lambda+3(1-\lambda))$$

Si $\lambda = 0$ $(x_1, x_2) = (4,3)$

Si $\lambda = 1$ $(x_1, x_2) = (2,6)$

Si $\lambda = 0.5$ $(x_1, x_2) = (3,4.5)$

Definición III.2

Un conjunto convexo es una colección de puntos tales que para cualesquiera dos puntos en la colección, el segmento lineal que los une está por completo también en la colección.

Ejemplo III-2

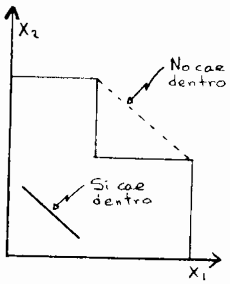


Fig III-1

Este no es un conjunto convexo.

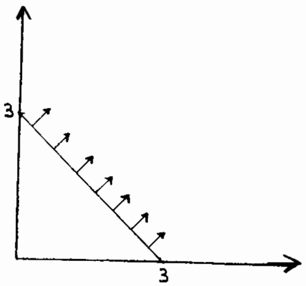


Fig III-2

El conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad $3x_1 + 3x_2 \geq 9$ es un conjunto convexo

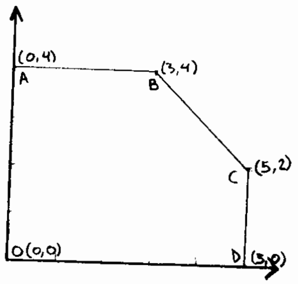


Fig III-3

Este conjunto es convexo ya que es imposible encontrar dos puntos cuyo segmento lineal caiga fuera del conjunto.

Teorema III-1

El conjunto de puntos comunes a dos o más conjuntos convexos es en sí convexo.

Definición III-3

Un punto extremo de un conjunto convexo es un punto en el conjunto, el cual no cae en ningún segmento lineal que una cualesquiera otros dos puntos en el conjunto.

Geométricamente, un punto extremo es una esquina.

En la figura III-3 los puntos extremos son: (0,0), (0,4), (3,4), (5,2), (5,0).

La función de la programación lineal es la de distribuir recursos (ó riquezas de cualquier clase) escasos, entre diferentes actividades en competencia y el realizar ésto de una manera óptima.

La programación lineal se aplica en donde se debe llevar a cabo un cierto número de actividades, pero existen limitaciones en la cantidad de recursos o en el modo de utilizarlos que nos impiden desarrollar cada actividad de la manera que se considera más efectiva. En tales situaciones queremos distribuir los recursos disponibles entre las actividades, de tal forma que se optimice la efectividad total.

Con el objeto de poder llegar a una decisión óptima, todas las combinaciones posibles de distribuir los recursos a las actividades deben de ser analizadas.

Existe la alternativa de enumerar todas las posibilidades que existen de distribuir los recursos a las actividades (en el --

caso finito). Desgraciadamente esta enumeración es excesivamente larga en problemas prácticos (cálculo combinatorio: existen 7! formas de hacer 7 parejas de baile, una muchacha para cada muchacho).

El problema es generalmente más complicado para el caso continuo.

Al resolver problemas de programación lineal se consideran medidas de efectividad total tales como: ganancia, costos, cantidades producidas, etc.

En el caso de programación lineal, las restricciones generalmente se expresan en términos de "no más que", "no menos que", "cuando menos" y "cuando más" y por lo tanto casi siempre son representadas por desigualdades o por un sistema de desigualdades.

Un modelo matemático que describe el problema en cuestión es siempre utilizado en programación lineal.

La palabra lineal significa que todas las relaciones hacen intervenir las variables en el primer grado.

En términos generales, la programación lineal puede ser utilizada para problemas de optimización, en los cuales las siguientes condiciones se satisfacen:

a) Debe de existir un objetivo, tal como ganancia, que debe ser optimizado y el cual puede ser expresado como, o representado por, una función lineal.

b) Deben existir restricciones en la cantidad o forma de lograr el objetivo y estas restricciones deben poder expresarse como un sistema de igualdades o de desigualdades lineales.

Actualmente se está poniendo mucha atención en el desarrollo de la programación no lineal, debido a que los modelos lineales son insuficientes para describir muchas de las situaciones del mundo real.

Modelo Matemático en la Programación Lineal.-

Generalmente un modelo matemático de programación lineal implica la maximización o minimización de una función lineal de un conjunto de variables no negativas, sujeta a un conjunto de desigualdades tambien lineales que relacionan a las variables.

En nuestro curso trataremos con problemas que comprenden la maximización de la función objetiva, siendo hasta más tarde que veamos como se trabaja cuando se trata de minimizarla.

No existe una norma en cuanto a tratar el problema como un caso ya sea de maximización o minimización y es por ésto que ambos casos se encuentran en la literatura.

Es necesario aclarar que no es esta una diferencia básica que implique que el tratamiento dado a un problema en un caso, tenga un tratamiento completamente diferente en otro, sino que por el contrario, el tratamiento es el mismo (salvo las diferencias debidas a Max o Min) y lo que es más, existe una relación uno a uno entre los dos problemas. (Problema Dual).

El punto de vista de la programación lineal es el de considerar un sistema como factible de ser descompuesto en una serie de funciones elementales llamadas "actividades". La cantidad de cada actividad se llama "nivel de la actividad" y lo representaremos por el valor que tomen las variables x_j.

La forma general del modelo matemático de programación lineal la consideraremos en este curso como la siguiente:

Encontrar: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (los niveles de n actividades) tales que maximicen la función lineal:

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$$

función que llamaremos "función objetiva". Satisfaciendo las m restricciones lineales:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n \leq b_m$$

y tales que los niveles de actividad sean positivos o nulos, es decir:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \ldots\ldots, x_n \geq 0$$

donde (a_{ij}), (c_j) y (b_i) son constantes conocidas.

La misma generalización utilizando matrices sería:

Dado $A = \|a_{ij}\|$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b\}$ y $C=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$

el problema general de programación lineal es el de encontrar una o varias $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no negativas que maximicen

$$CX$$

Sujeto a la condición de que:

$$A\ X \leq B$$

CX se conoce como la función objetiva y las desigualdades lineales contenidas en $AX \leq B$ se llaman restricciones lineales.

De aquí en adelante se supondrá que el modelo está en la forma general, a menos que se especifique de otra manera.

Interpretación del Modelo Matemático.

Consideremos n actividades que están compitiendo por la obtención de ciertos recursos escasos.

Ya dijimos que x_j representa la intensidad (o nivel) que tomará la actividad j, como por ejemplo la cantidad de mesas tipo j que debeá producir un carpintero que produce varios modelos de mesas pero que está limitado respecto a la cantidad de madera que puede conseguir.

Z representará la medida total de efectividad (el valor de la función objetiva). La función objetiva deberá ser escogida de tal forma que refleje el dato que nos interesa maximizar (como por ejemplo ganancias).

C_j es el incremento que se obtendrá en el valor de la función objetiva (Z), por cada unidad que x_j se incremente. Por ejemplo C_j puede representar la ganancia obtenida de vender una mesa tipo-j mencionada antes.

Hemos ya mencionado que existen recursos escasos que nos impiden desarrollar cada actividad de la manera que se considera más efectiva. Sean m el número de recursos escasos. La forma que la programación lineal utiliza para indicar en que forma están restringidos cada uno de los recursos es por medio de una desigualdad.

Debe tenerse cuidado de no incurrir en ecuaciones redundantes con el objeto de evitar el realizar más trabajo del necesario.

Cuando se incurre en ecuaciones redundantes, el método de solución las elimina, pero existe el peligro de que en lugar de este tipo de ecuaciones formemos un sistema inconsistente.

b_i es la cantidad del recurso i con que contamos para surtir a las n actividades.

a_{ij} es la cantidad del recurso i que es consumida por cada unidad de actividad j.

Vemos pues que las desigualdades no tienen otro significado que el de indicar matemáticamente que la suma de las cantidades de recurso escaso i utilizado en las n actividades deberá ser menor o igual que la cantidad del mismo de que se dispone.

Ejemplos de Formulación.

Ejemplo III- 3.

Supóngase que se tienen n posibles productos (actividades) los cuales podemos producir. Nos interesa saber cuáles de ellos y en qué cantidades debemos producirlos. Representaremos las cantidades de cada uno de ellos a producir por:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$$

Para producir estos n productos tenemos que hacer uso de m operaciones.

Supóngase que la ganancia que obtendremos de cada producto es conocida por nosotros y que está representada por:

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$$

donde:

c_1= ganancia obtenida al producir una unidad del producto 1
c_2= ganancia obtenida al producir una unidad del producto 2

etc.

Representaremos por Z la ganancia total obtenida de todos los productos producidos.

Es claro ahora que nuestro objetivo será el de maximizar nuestra ganancia total. Sin embargo generalmente existen consideraciones prácticas que limitan las cantidades x_j que pueden ser producidas, limitando a su vez la ganancia que podemos obtener de la producción como por ejemplo el hecho de que nuestra planta tiene capacidades fijas y finitas para nuestras m operaciones, es decir, tenemos capacidades disponibles que son:

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$$

Tambien conocemos la cantidad de cada operación que cada uno de los productos requiere, de aquí que conozcamos que cada unidad del producto j que produzcamos requerirá a_{ij} minutos en la operación i, donde:

$$(j = 1, 2, \ldots., n) \quad (i = 1, 2, \ldots., n)$$

Vemos que el problema es el de escoger cuidadosamente las cantidades de cada producto ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) que debemos producir si deseamos que C X sea tan grande como sea posible.

Construyamos nuestro modelo matemático, el cual en nuestro caso deberá coincidir con nuestro modelo general dado con anterioridad.

Tratamos de encontrar los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para:

$$\text{maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots. + c_nx_n$$

y vemos que estamos sujetos a las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}\, x_1 & + & a_{12}\, x_2 + & \ldots & + a_{1n} & x_n & \leq b_1 \\
a_{21}\, x_1 & + & a_{22}\, x_2 + & \ldots & + a_{2n} & x_n & \leq b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}\, x_1 & + & a_{m2}\, x_2 + & \ldots & + a_{mn} & x_n & \leq b_m
\end{array}$$

y

$$x_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots n$$

Vemos que los elementos en la columna j representan cada uno la capacidad usada de la operación i por el producto j.

El lado izquierdo de las desigualdades representan el uso total del recurso i, mientras que el derecho nos indica la capacidad total disponible para la operación i.

La restricción $x_j \geq 0$ solo nos indica que es imposible el producir cantidades negativas de producto j.

Ejemplo III-4

Supongamos que una máquina puede fabricar 400 artículos del producto 1 y 300 artículos del producto 2 por semana. Si la producción se cambia de 1 a 2 ó viceversa durante la semana, se pueden fabricar un total de 600 artículos. La ganancia de las ventas de 1 es de $2.00 por artículo; la ganancia de las ventas de 2 es de $5.00 por artículo. Queremos determinar la cantidad x_1 que deberá fabricarse del producto 1 y la cantidad x_2 que debe fabricarse del producto 2 para que nuestra ganancia sea máxima.

Solución:

maximizar $Z = 2x_1 + 5x_2$

sujeto a:

$$x_1 \leq 400$$
$$x_2 \leq 300$$
$$x_1 + x_2 \leq 600$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Ejemplo III-5

Un carpintero elabora mesas, sillas, escritorios y libreros y desea saber que cantidad de cada uno de ellos deberá producir con objeto de maximizar sus ganancias, dado que cuenta con un suministro limitado de madera de dos tipos y una mano de obra también limitado. Cuenta con 1500 m^2 de madera número 1, 1000 m^2 de madera número 2 y 800 hrs-hombre. Existen tambien ciertos compromisos que él ha contraído para la fabricación de algunos muebles. Los datos de fabricación son los siguientes:

Las mesas consumen 5 m^2 de madera número 1 y 2 m^2 de madera número 2, así como 3 hrs-hombre. El carpintero se comprometió a fabricar 40 de estas mesas para un cliente. La ganancia obtenida por mesa es de $12.00.- Puede vender las que produzca.

Las sillas consumen: 1 m^2 de madera número 1, 3 m^2 de madera número 2 y requieren de 2 hrs-hombre. Existe el compromiso de entregar 130 de ellas. El carpintero sabe que puede vender todas las sillas que produzca. La ganancia por silla es de $5.00

Los escritorios llevan 9 m^2 de madera número 1, 4 m^2 de madera número 2, necesitándose de 5 hrs-hombre. Existe un compromiso por 30 de ellos. Vende todo lo que pueda producir de este producto. Ganancia $15.00 por escritorio.

Los libreros utilizan 12 m^2 de madera número 1, 1 m^2 de madera número 2, y llevan 10 hrs-hombre. El sabe que solo puede vender como máximo 10 libreros. Ganancia $10.00

Cuando el caso lo amerite conviene siempre poner los datos en forma de tabla con lo cual se nos facilita la formulación del modelo matemático.

Cant. que produciremos	Artículo	m^2 madera #1 consumida	m^2 madera #2 consumida	hr-hm consum	Consideración de venta	Ganancia
x_m	Mesas	5	2	3	$\geq$ 40	12
x_s	Sillas	1	3	2	$\geq$ 130	5
x_e	Escritorios	9	4	5	$\geq$ 30	15
x_1	Libreros	12	1	10	$\leq$ 10	10
Disponibles		1500	1000	800		

Nuestro modelo quedará entonces como:

Maximizar

$$Z = 12\,x_m + 5\,x_s + 15_e x + 10\,x_1$$

sujeto a:

(Mad. # 1) $5x_m + x_s + 9x_e + 12x_1 \leq 1500$

(Mad. # 2) $2x_m + 3x_s + 4x_e + x_1 \leq 1000$

(hr-hm) $3x_m + 2x_s + 5x_e + 10x_1 \leq 800$

(Compromiso mesas $x_m \geq 40$

(Compromiso Sillas $x_s \geq 130$

(Compromiso escritorio $x_e \geq 30$

(Limitación venta libreros) $x_1 \leq 10$

$x_1 \geq 0$

Nótese que las restricciones 4, 5, y 6 automáticamente implican que (x_m, x_s, y x_e) ≥ 0.

Características que Debe Tener un Problema Para Poder Ser Resuelto Por Programación Lineal.-

Todo problema de programación lineal hace una serie de suposiciones con respecto al problema real, las cuales deben ser satisfechas para que nuestra solución sea representativa de la solución real.

Las condiciones que SIEMPRE deben buscarse para poder aplicar programación lineal a un problema real son las siguientes:

1.- Proporcionalidad.
2.- Aditividad.
3.- No negatividad.

Aunque las anteriores condiciones son las básicas para poder establecer un modelo de programación lineal, en este curso estableceremos otras dos que son necesarias para poder aplicar los métodos que veremos, sin que esto signifique que no existan técnicas que puedan resolver problemas de programación lineal que no satisfagan las condiciones adicionales 4 y 5 (estas técnicas solo serán mencionadas en nuestro curso).

Las condiciones adicionales son:

4.- Divisibilidad.
5.- Determinismo.

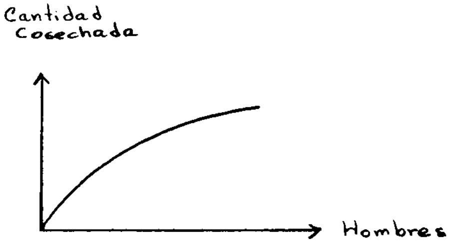
1.- Proporcionalidad.-

En el modelo de programación lineal se exige que tanto la función objetiva como la utilización de los recursos sean proporcionales al nivel de la actividad. Con ésto queremos decir que si lo que deseamos es duplicar el nivel de las actividades bastará con duplicar las cantidades que intervienen para el nivel unitario.

En el ejemplo III-5 vemos que si producimos una mesa consumiremos 3 hrs-hombre mientras que si producimos 5 consumiremos - - 3 x 5 = 15 hrs-hombre (caso de proporcionalidad al nivel de la actividad en la utilización de los recursos). Asimismo, al producir una mesa ganamos $12.00 mientras que al producir 5 ganaremos - 5 x 12 = $60.00 (caso de proporcionalidad al nivel de la actividad en la función objetiva).

Se debe estar prevenido para aquellos casos en que el problema parece tener todas las características de proporcionalidad pero que sin embargo no lo es. Por ejemplo. El caso por todos conocido de un terreno que se desea cultivar. Si se pone un campesino - solo a cultivarlo se obtendría una cosecha de x toneladas, pero si ponemos 100 campesinos, lo más probable es que no obtengamos 100 x toneladas. (rendimiento decreciente).

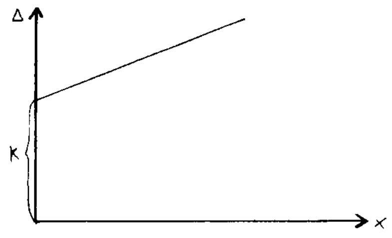
La producción suele tener una curva de la siguiente forma:



sin embargo este problema simula a primera vista ser proporcional- aún cuando no lo es.

Existen ocasiones en que de propósito se asume que existe - - proporcionalidad aunque la suposición no concuerde con la realidad. Estas suposiciones son válidas siempre y cuando se calculen los - efectos que dicha suposición tendrá en el resultado y se sepa que- no lo afectará en forma apreciable sino que la aproximación lograda servirá a los propósitos del programador.

En otras ocasiones existen actividades que solo son lineales- sobre un intervalo determinado P ej. el costo de puesta en marcha hace que el costo de producción no sea lineal en cero para poder considerar estas actividades en programación lineal debemos estar seguros que el nivel de dicha actividad estará siempre en dicho intervalo.



$$\Delta = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ k + cx & si \quad x > 0 \end{cases}$$

2.- Aditividad.

La aditividad presupone que la medida total de efectividad -- y la utilización de recursos resultantes de la operación conjunta- de las actividades debe igualar las sumas respectivas de estas cantidades resultantes de la operación individual de las actividades.

Vemos que solo la presencia conjunta de la proporcionalidad - y la aditividad pueden garantizar la linealidad de que hablamos ya con anterioridad. La presencia de una sola de las dos condiciones sin embargo no la garantiza.

La principal causa de la no-linealidad es la presencia de interacciones entre las diferentes actividades, es decir la operación de una actividad no es independiente de la operación de otra u otras actividades y al variar el (o los) nivel (es) de esta (s) última (s), indirectamente modificamos el nivel de la primera.

Supongamos que una compañía precisa de una instalación generadora de vapor para poder efectuar su proceso productivo. Al mismo tiempo utiliza el vapor de salida para calentar cierto material. - Suponiendo que el costo de producir el vapor exclusivamente para el proceso productivo fuese c_1x_1 y que el costo de calentar el material por un proceso independiente del vapor fuese $c_2 x_2$, el costo total sería $c_1 x_1 + c_2 x_2$ (existiría linealidad) pero dado que el material no es calentado por medio de un proceso independiente sino usando el vapor de salida, el costo total de operar ambas actividades será:

$$c_t x_t \neq c_1 x_1 + c_2 x_2$$

3.- No negatividad.-

Mientras que cualquier múltiplo positivo de una actividad es posible, cantidades negativas para una actividad no son posibles.

Por ejemplo supongamos el caso de una transportación de cierto producto. Aquí es imposible el transportar cantidades negativas de dicho producto.

4.- Divisibilidad.

En infinidad de problemas los cuales satisfacen las tres primeras condiciones y son por lo tanto aptos de ser resueltos por programación lineal nos encontramos con que las variables de decisión tienen sentido únicamente cuando toman valores enteros. Por ejemplo asignar aviones a diferentes rutas que deben ser cubiertas.

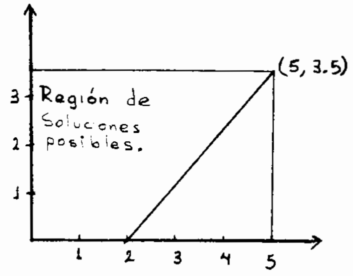
El procedimiento que cubriremos más adelante en el curso no conduce (salvo en raras excepciones) a valores enteros para las variables de decisión, razón por la cual al aplicar este método de solución debemos permitir que la solución está expresada en valores fraccionarios.

Existen ocasiones en las cuales es absolutamente necesario el obtener una respuesta en valores enteros (número de edificios que debemos construir). Cuando este es el caso existen dos procedimientos para resolver el problema:

a) Utilizando programación lineal de enteros. Este método garantiza la obtención del valor óptimo entero buscado, pero cuenta con el inconveniente de que la obtención de valores enteros para nuestra solución es una restricción difícil de manejar matemáticamente.

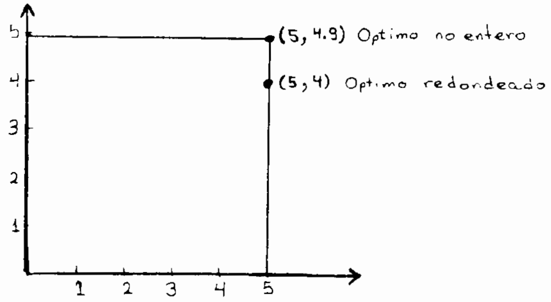
b) Utilizando programación lineal normal y redondeando los valores obtenidos a sus valores enteros más proximos. Las ventajas de este método son obvias. Las desventajas sin embargo llegan a ser en extremo importantes en algunas ocasiones ya que:

i) La solución de enteros obtenida al redondear la solución puede no ser factible. Por ejemplo:



Al redondear (5, 3.5) a (5,3) ó a (5,4) nos damos cuenta de que ninguna de las dos es factible.

ii) Aûn siendo posible la solución de enteros obtenida, no es forzoso que esté cerca del valor óptimo de Z.



5.- Determinismo.

Unos de los problemas más comunes en la aplicación práctica de programación lineal es la dificultad de determinar el valor correcto de los parámetros del modelo (a_{ij}, b_i y c_j) los cuales dijimos con anterioridad que deberían ser constantes conocidas. Sinembargo los valores que estos parámetros toman, a menudo están afectados por eventos aleatorios imposibles de predecir ya que estos coeficientes en general se utilizan en modelos para seleccionar un curso de acción futura, razón por la cual los mismos suelen ser predicción de condiciones futuras.

Es pues necesario para aplicar los métodos que veremos, el poder determinar con razonable confiabilidad los valores de dichas constantes.

Consideraciones.

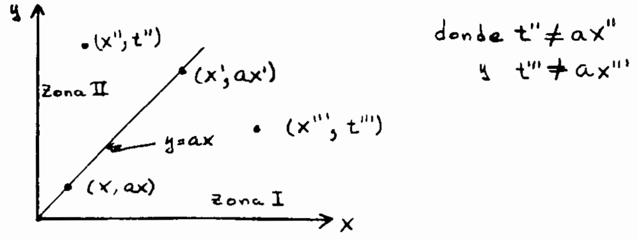
Es de suma importancia el tener presente las suposiciones de aproximaciones que se están utilizando y se debe estar siempre plenamente convencido de que las mismas están justificadas, ya que es difícil encontrar un problema que se ajuste 100% a las condiciones de la programación lineal.

Cuando las suposiciones son adecuadas, el modelo de programación lineal es la más apegada representación existente del problema y conducirá a una recomendación razonable respecto al curso de acción.

Igualdades y desigualdades.-

La ecuación y = ax (la cual es una relación lineal), representa una línea recta de pendiente "a".

Cualquier solución (x, ax) para la ecuación y= ax será un punto que cae exactamente sobre dicha recta y cualquier pareja (x, t) que no sea una solución para esta ecuación será un punto que no cae sobre la recta. Es decir, cualquier solución de la ecuación y= ax será un par de números (x, y) tales que para un valor dado de x (sea x_0) el valor de y (sea y_0) será "a" veces mayor.



donde t'' ≠ ax''
y t''' ≠ ax'''

Una desigualdad puede ser representada por medio de los siguientes 4 símbolos: ($>$), ($<$), ($\geq$), ($\leq$).

El símbolo $>$ ($<$) significa que el valor de la variable localizada a la izquierda es mayor (menor) que el valor de la variable localizada a la derecha.

Así pues $y > ax$ ($y < ax$) significa que y es mayor (menor) que "a" veces el valor de x, es decir esta desigualdad se satisface para los puntos localizados en la zona II (zona I).

El símbolo $\geq$ ($\leq$) significa que el valor de la variable situada a la izquierda es mayor o igual (menor o igual) que el valor de la variable a la derecha. La desigualdad $y \geq ax$ ($y \leq ax$) nos indica que para un valor dado de x, y es mayor o igual (menor o igual) que "a" veces el valor de x. También se dice que y es -- CUANDO MENOS (CUANDO MAS) igual a "a" veces el valor de x. Esta desigualdad se satisface por aquellos puntos en la zona II (zona I) y la línea $y = ax$.

Ejemplo III-6.-

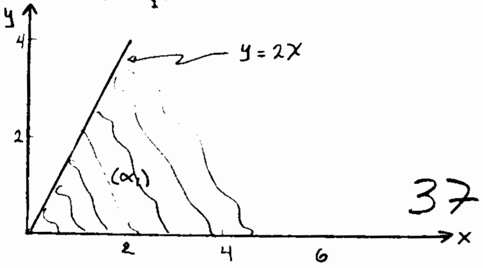
Sea el sistema de desigualdades siguientes:

$y - 2x \leq 0$ ...... (1)

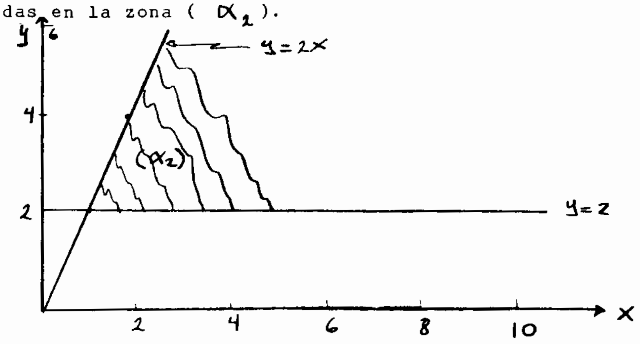
$y \qquad \geq 2$ ...... (2)

$8y + 6x \leq 48$ ...... (3)

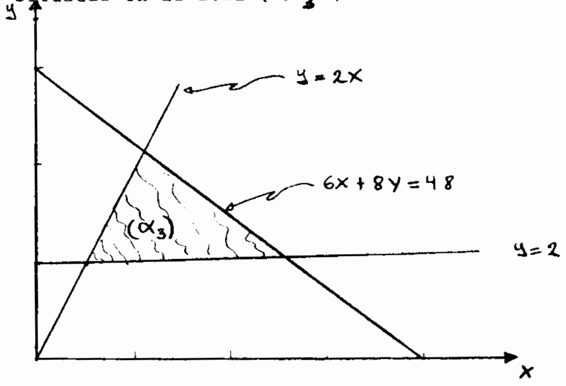
Las soluciones que satisfacen la desigualdad (1) serán las situadas en la zona (α_1).



Las soluciones que satisfacen las desigualdades (1) y (2) -- serán las situadas en la zona (α_2).



Las soluciones que satisfacen las desigualdades (1), (2) -- y (3) serán las situadas en la zona (α_3).



METODO SIMPLEX.

Los problemas de programación lineal a menudo cuentan con -

un gran número de variables y restricciones y la importancia de un método eficiente para obtener una solución es de suma importancia.

El método simplex es el procedimiento utilizado para resolver problemas de programación lineal. Fue desarrollado por Jorge-Dantzig en 1947 y presentado en 1949. Este fué el primer método que permitió atacar ordenadamente y con un procedimiento rutinario los problemas de programación lineal que antes habían sido muy difíciles de resolver.

Este método es un procedimiento algebráico que progresivamente se acerca a la solución óptima mediante un proceso iterativo -- bien definido, hasta que finalmente se alcanza.

Debido a las características de este método, éste es apropiado para su utilización en las computadoras, aunque éstas últimas - utilizan por lo general lo que se conoce como el Método Simplex Revisado, el cual veremos más adelante. El Método Simplex es extremadamente simple y mediante él nos es posible el resolver problemas moderadamente complejos a mano. El fundamento que existe detrás del método es más complicado sin embargo.

Terminología en Programación Lineal.

Definición III-4.-

Una solución es un conjunto de n valores para las n x_j's de las restricciones.

Definición III-5.

Región de soluciones posibles es aquel conjunto de vectores que satisfacen todas las restricciones.

Definición III-6.-

Una solución factible (ó posible) es cualquier solución - - (vector) que satisface todas las restricciones, es decir, cualquier vector de la región de soluciones posibles. Si existe una solución factible para un problema,este se dice que es factible.

Definición III-7.-

Una solución Básica Factible es aquella que corresponde con un punto extremo de las regiones de soluciones posibles.

Una solución Básica no Factible es aquella que corresponde - con la intersección de 2 ó mas restricciones fuera, de la región de soluciones factibles.

Una solución Básica Factible es el conjunto de m cantidades $x_i (x_i \geq 0)$ y de n - m cantidades x_t $(x_t = 0)$ que satisfacen el - sistema de restricciones.

Definición III.-

Una solución óptima es la mejor de todas las soluciones factibles, esto es, aquella que maximiza la función objetiva.

Una solución óptima es aquel vector x_0 tal que $CX_0 \geq CX$ para todas las soluciones (vectores) X factibles.

Propiedades de la Programación Lineal Sobre Las Que se Basa El Método Simplex.

Suponiendo que existan soluciones factibles y que tenemos - un máximo finito, entonces un problema de programación lineal debe tener las siguientes propiedades:

1) El conjunto de soluciones posibles es un conjunto convexo.

2) Si existe cuando menos una solución factible, entonces - también existe cuando menos una solución básica factible.

3) 1 $\leq$ número de soluciones básicas factibles $< \infty$. Esto es, el método de soluciones básicas factibles es finito.

4) Cuando menos una de las soluciones óptimas (en caso de -

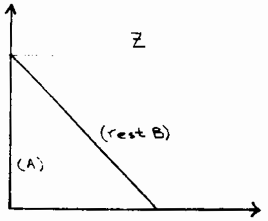
existir varias)es una solución básica factible.

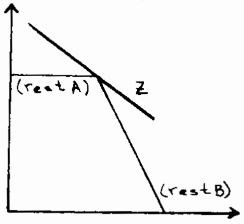
Debe quedar claro que una solución óptima no necesita ser - una solución básica factible (es decir un punto extremo). Esto sucede cuando son varias las soluciones factibles que maximizan la - función objetiva, esto es, existe un segmento lineal de soluciones que la maximizan y en este segmento lineal solo los puntos extre-- mos son soluciones básicas factibles, las demás son soluciones factibles pero no básicas. La propiedad 4 dice que cuando menos una- de las soluciones óptimas será una solución básica factible, pero- no dice nada sobre las demás (en caso de que existan).

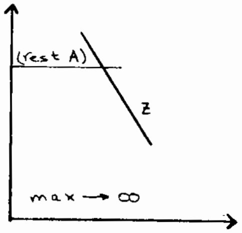
La situación anterior la veremos en el curso, cuando tratemos el punto de Soluciones Múltiples para un problema de programación lineal (punto 8 dentro de la sección de complicaciones).

El significado de la propiedad 1 queda claro con el ejemplo visto cuando se definió un conjunto convexo, (en donde se vió que- una desigualdad es un conjunto convexo) y del teorema visto a continuación.

La propiedad 2 está fundamentada en el hecho de que tenemos un máximo finito, razón por la cual tendremos por lo menos un par- de restricciones (a, b) que nos limiten nuestra región de soluciones posibles, impidiendo que alguna de ellas se vaya al infinito.- El significado de esta propiedad es el de que el número de soluciones básicas factibles es estrictamente positivo.







La propiedad 3 surge del hecho de que también es finito el- número de las restricciones y por lo tanto el Número de sus intersecciones o puntos extremos.

La propiedad 4 provee la base fundamental del Método Simplex ya que nos indica que solo un número finito de soluciones, las básicas factibles (de entre el número infinito de soluciones facti-- bles) necesitan ser investigadas con objeto de llegar a localizar- una solución óptima. De aquí que una solución óptima pueda ser -- siempre encontrada examinando únicamente cada una de las solucio-- nes básicas factibles y eligiendo aquella que de un valor mayor -- a Z.

A pesar de que las soluciones básicas factibles existen en- número finito, en la mayoría de los casos su número es muy grande, razón por la cual resulta poco eficiente buscar entre todas ellas- hasta encontrar la solución óptima.

Es aquí donde entra en acción el Método Simplex, el cual -- además de que se examina los puntos extremos, realiza su búsqueda- de una manera óptima, ya que no examina a todos ellos sino que parte de una solución inicial a partir de la cual busca otra mejor -- y así sucesivamente hasta encontrar el óptimo.

Interpretación Geométrica.-

Utilizaremos un ejemplo para dar esta interpretación geométrica.

Ejemplo III-7.-

Utilizaremos el modelo de programación lineal siguiente:

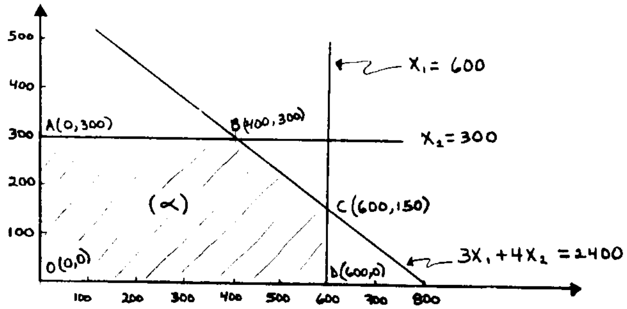
Maximizar $Z= x_1 + 2x_2$

sujeto a:

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 \qquad \leq 600 & \ldots\ldots \ (1) \\ x_2 \leq 300 & \ldots\ldots \ (2) \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 2400 & \ldots\ldots \ (3) \\ x_1 \qquad \geq 0 & \ldots\ldots \ (4) \\ x_2 \geq 0 & \ldots\ldots \ (5) \end{array}\right\} \quad (1)$$

el cual como puede apreciarse representa un problema en el plano - (x_1, x_2), lo cual nos permite representarlo gráficamente.

El primer paso en el método gráfico es el de representar - todos aquellos valores que son permitidos por las restricciones. - El sistema de desigualdades lineales que constituye las restricciones resulta en el conjunto convexo de puntos dado por el polígono- OABCD. Cualquier punto (x, y) dentro de este polígono (región α) satisface el sistema de desigualdades (I). Al polígono OABCD le- llamaremos región de soluciones factibles.



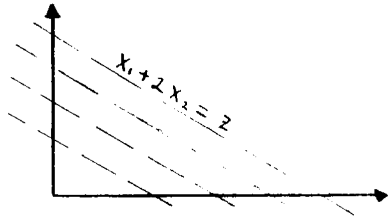
Podemos notar que los puntos extremos (soluciones básicas -- factibles) de nuestra región (α)son:

0= (0,0); A=(0,300); B=(400,300); C=(600,150); y D= (600,0)

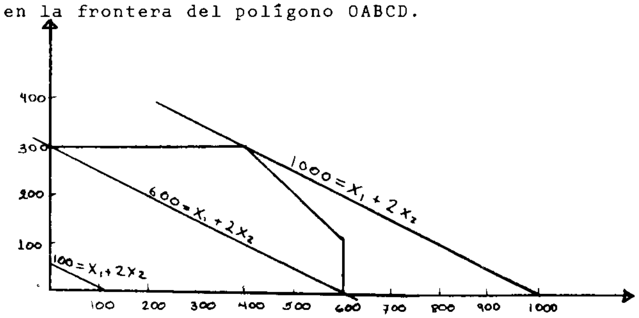
Las soluciones básicas no factibles (intersecciones de nuestras rectas en zona no factible) son: (0, 600), (600,300) y (800,0)

Vemos que la región α cuenta con un número infinito de -- puntos los cuales son soluciones a nuestro problema; el problema - de programación lineal entonces es el de seleccionar de entre este número infinito de puntos, aquel o aquellos puntos (x_1^*, x_2^*) - que maximicen la función objetiva $Z = x_1 + 2x_2$.

La función $Z= x_1 + 2x_2$ es una familia de rectas con un parámetro (Z), esto es, la función representa una familia de rectas- paralelas (dependiente -1/2) tales que el valor de Z aumenta a medida que la recta se aleja del origen.



El problema puede ser pensado como el de determinar aquella línea, de entre la familia de rectas $x_1 + 2x_2 = Z$, que está más -- lejos del origen pero que aún contiene cuando menos un punto den-- tro, o en la frontera del polígono OABCD.



Como primer intento hagamos Z = 100 y veamos si existen valores (x_1, x_2) dentro de la región de soluciones posibles que nosden ese valor de Z. Vemos que cualquier punto sobre la región negra de la recta (1) nos da este valor de Z y que es aún posible alejarnos del orígen sin salirnos de nuestro polígono.

Probamos con Z = 600 nuevamente un segmento de la línea $x_1 + 2x_2 = 600$ cae en la región α por lo que el valor máximo permisible para Z será cuando menos 600. Aún podemos alejarnos más del orígen.

Finalmente la recta $1000 = x_1 + 2x_2$ será la que satisfaga la condición de ser la más alejada del origen y conteniendo un punto en la frontera de α Este punto será la solución óptima buscada.

$$(x_1^*, \; x_2^*) = (400, 300)$$

Supongamos que cambiamos nuestra función objetiva a $Z = 3x_1 + 4x_2$; en este caso las dos soluciones básicas factibles (400, 300) y (600, 150) y todas las soluciones factibles (no básicas) situadas en el segmento lineal que une estos dos puntos hubiesen sido soluciones óptima (caso de soluciones múltiples mencionado antes).

El gran inconveniente del método gráfico es que no puede ser usado con más de tres variables y en ocasiones aún en este caso es muy complicado.

Gráficamente lo que el Método Simplex realiza es lo siguiente:

1) Localiza un vértice como punto de partida.

2) Examina las aristas del vértice para ver si al moverse por una de ellas hasta el siguiente vértice adyacente se aumenta el valor de Z. Si el recorrido sobre las aristas no aumenta el valor de Z, el vértice en el cual estamos situados maximiza Z. Si el recorrer al menos una arista se aumenta el valor de Z, se pasa al paso tres.

3) Se escoge una de las aristas a lo largo de las cuales aumenta el valor de Z y se sigue sobre ella hasta alcanzar el siguiente vértice adyacente.

4) Se repiten los pasos 1, 2, 3 hasta que el valor de Z ya no pueda aumentarse.

La posibilidad de no llegar nunca a una solución óptima queda descartada debido a las características del método de solución, ya que el paso 2 exige que siempre se pase a una solución mejor, con lo cual evitamos el caer en círculos de cálculo, además, debido a la propiedad tres, solo es un número finito de pasos el requerido para llegar hasta una solución óptima.

La propiedad I nos garantiza que al estar en un vértice y no poder pasar a otro adyacente que incremente el valor de Z habremos llegado a la solución óptima.

Interpretación algebráica.

Con objeto de poder ejecutar algebráicamente los pasos vistos en la interpretación geométrica, el Método Simplex se basa en el hecho de que todo problema lineal que contiene desigualdades puede convertirse en un problema que no tenga más que ecuaciones, mediante la introducción de variables sumplementarias llamadas variables de holgura.

Es claro el hecho de que las variables de holgura son las deficiencias que existen cuando las desigualdades originales se mantienen.

La desigualdad:

$$x_1 \leq 600 \quad .... \quad (I)$$

nos indica que x_1 puede tener una deficiencia para llegar a igualar el valor de 600. Si esta deficiencia la llamamos x_3 (variable de holgura), tendremos que $x_3 \geq 0$ si es que x_1 satisface la desigualdad original podemos por lo tanto sustituir la desigualdad (I) por:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_3 = 600 \\ x_3 \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (II)$$

Similarmente:

$$x_2 \leq 300 \quad \text{se reemplaza por} \quad \begin{array}{r} x_2 + x_4 = 300 \\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

y

$$3x_1 + 4x_2 \leq 2400 \quad \text{se reemplaza por} \quad \begin{array}{r} 3x_1 + 4x_2 + x_5 = 2400 \\ x_5 \geq 0 \end{array}$$

Considerando los anteriores reemplazamientos, nuestro modelo de programación lineal del ejemplo puede ahora ser escrito como sigue:

$$\text{Maximizar } Z = x_1 + 2x_2$$

sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad = 600 \\ \qquad x_2 \qquad + x_4 \qquad = 300 \\ 3x_1 + 4x_2 \qquad\qquad + x_5 = 2400 \\ x_1 \geq 0 \;;\; x_2 \geq 0;\; x_3 \geq 0;\; x_4 \geq 0;\; x_5 \geq 0 \end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

sistema que es completamente equivalente al original solo que más apropiado para su manipulación algebráica.

Es importante hacer notar que las variables de holgura son únicamente un artificio para llegar a la solución óptima y que pueden o no tener un significado físico en problemas individuales.

Al transformar un sistema de desigualdades en un sistema de igualdades equivalente, habremos formado un sistema de ecuaciones con n variables y m ecuaciones donde $n > m$ (pues $n = m + k$ en el caso general, donde k = número de variables originales y m = número de variables de holgura agregadas).

Recordamos de lo visto en sistema de ecuaciones lineales, que lo que tenemos en un sistema que cuenta con un número infinito de soluciones, ya que al resolver el sistema de ecuaciones contamos con m variables que habrán quedado en solo una de las m ecuaciones y tendremos además $n - m$ variables que aparecerán en varias de las ecuaciones, variables a las que se les puede asignar valores arbitrarios para obtener una de las soluciones de las restantes m variables.

<u>Definición</u> III=8

La solución obtenida al resolver el sistema de ecuaciones por m variables en términos de las restantes $(n - m)$ variables, asignándoles un valor de cero a éstas últimas, se conoce como una solución básica. Si el valor de cada una de las m variables es ≥ 0 tendremos una solución básica factible. Si el valor de cada una de las m variables es > 0 tendremos una solución básica factible no-degenerada.

Las m variables escogidas se denominan como "básicas" o como las variables en la base. Las (n-m) variables restantes se conocen como variables no básicas.

Ejemplo III-8.-

La solución:

$x_1 = 600 \qquad x_3 = 0$

$x_2 = 300 \qquad x_4 = 0$

$x_5 = -600$

es una solución básica para el modelo de nuestro ejemplo anterior.

La solución:

$x_1 = 600 \qquad x_3 = 0$

$x_2 = 150 \qquad x_5 = 0$

$x_4 = 150$

es una solución básica factible no degenerada para el mismo ejemplo.

El Método Simplex se inicia siempre con un sistema cuyas -- ecuaciones están siempre en forma canónica.

Rutina del Método Simplex.

Paso 1.-

Se convierten las m desigualdades restrictivas a m ecuaciones, insertando variables de holgura no negativas x_{n-m+i} - (i = 1, 2, ..., m), una en cada restricción. Seleccione estas - nuevas variables como las variables básicas iniciales. Vaya al paso 4.

Justificación.

El hacer cero todas las variables originales y considerar- a todas las variables de holgura como las variables básicas tiene- por objeto el proporcionar una solución básica factible inicial -- obvia, ya que esta solución ya está en forma canónica.

La selección de una solución básica factible no es restrictiva a la forma mencionada anteriormente, ya que es posible el seleccionar un subconjunto diferente de variables para que formen la base. El inconveniente de éste método es el de que entonces el -- sistema de ecuaciones ya no está en forma canónica para las variables en la base, razón por la cual debemos de efectuar dicha transformación para poder tener la solución deseada (cosa que no fué -- necesaria en el método anterior), con el gran inconveniente de que existe la posibilidad de que despues de haber ejecutado el trabajo de transformación para tener la solución deseada descubramos que - dicha solución no es factible (alguna $b_1 < 0$) y que sea necesario hacer un nuevo intento.

Las variables de holgura se usan para encontrar una solución básica factible inicial rápidamente y por lo tanto no son indispensables en aquellos casos en que tengamos ecuaciones y exista una - solución básica factible que sea obvia para nuestras ecuaciones.

En general, la solución básica factible inicial para el Método Simplex será siempre:

$$x_j = 0 \qquad \text{para } j = 1,2, \ldots, n \underset{k}{-} m$$

$$x_{n-m+i} = b_i \qquad \text{para } i = 1,2, \ldots, m$$

y la solución básica factible en la n-ésima etapa está relacionada con la solución básica factible en la etapa t + 1 de la siguiente- manera: Una de las variables no básica en la etapa t, toma un valor diferente en la etapa t + 1 y se denomina "variable de entrada". Para compensar, una de las variables básicas en la etapa n -

se hace cero en la etapa t + 1 y se denomina "variable de salida".

Las otras variables no básicas de valor cero se mantienen en cero; las otras variables básicas no nulas, en general, siguen siendo diferentes de cero (aunque su valor puede variar). Lo anterior es equivalente a pasar a un vértice adyacente de nuestro conjunto de soluciones posibles, que incremente el valor de Z.

Paso 2.-

Determine la nueva variable básica entrante (x_c), la cual deberá ser aquella variable no básica en la función objetiva actual que satisfaga la condición:

$$C^1_e = \max C'_j > 0$$

cuando dicha función se encuentra en la forma:

$$Z= C'_1 x_1 + C'_2 x_2 + \dots + C'_n \; x_n \dots \qquad (I)$$

Justificación.

C'_j significa el coeficiente actual de la variable x_j en la función objetiva.

Es importante el recordar siempre que x_e es la variable nula en la solución básica factible actual que va a tomar un valor no nulo en la siguiente iteración.

La regla de selección para x_e tambien puede ser expresada así: x_e será aquella variable no básica en Z que cuente con el mayor coeficiente entre aquellos con signo positivo, estando Z en la forma indicada en (I). Esto es debido a que si $C'_c = \max C'_j > 0$, al incrementar x_e, el valor de Z parece incrementarse más rápidamente que incrementando cualquier otra variable.

El motivo de introducir x_e a la base es debido a que si cuando menos existe un coeficiente C'_j que sea positivo en la ecuación (I), entonces es posible (suponiendo que todas las $b_i > 0$) el construir una nueva solución básica factible con un valor mayor para Z. Esta nueva solución puede ser obtenida incrementando el valor de una de las variables no básicas (x_e) y ajustando los valores de las variables básicas de acuerdo con éste cambio.

Existen tres métodos para seleccionar x_e (selección arbitraria, probando el efecto producido en el valor de Z por cada variable), pero la regla que utiliza el Método Simplex ha demostrado en la práctica que casi siempre requiere de menos iteraciones para llegar a 1ª solución óptima.

Debe notarse que aunque así lo parezca, la variable x_e no necesariamente es la que más incrementa el valor de Z, debido a que las restricciones pueden impedir que su valor aumente tanto como con variables con coeficientes menores, como puede apreciarse en el siguiente ejemplo:

Ejemplo III-9.-

$$Z = 3x_1 + x_2$$
$$x_1 \leq 1$$
$$x_2 \leq 100$$

Aquí se selecciona $x_e = x_1$ y sin embargo no es la variable que más incrementa el valor de Z.

Paso 3.-

Determine la variable básica (x_s) que dejará la base. La selección de la variable de salida se determina, en general, por la selección de la variable de entrada (x_e) junto con las restricciones. Se escogerá como x_s a aquella variable básica cuyo valor-se hará negativo primero cuando el valor de la variable básica entrante (x_e) se incrementa.

Justificación.

Debe quedar claro que x_s es aquella variable no nula (básica) que se va hacer cero (no básica) en la siguiente iteración.

Algebraicamente podemos interpretar el paso 3 como sigue:

Sea:

$$Z'_0 = \text{valor actual de } Z.$$

$$\left.\begin{array}{l} a'_{ie} = \text{coeficiente actual de } x_e \text{ en la ecuación (i)} \\ b_i = \text{término constante actual en la ecuación (i)} \end{array}\right\} i=1,..,n$$

Dado que C'_e ha sido escogida positiva, es claro que el valor de x_e deberá ser hecho tan grande como sea posible, con objeto de hacer el valor de Z tan grande como sea posible. Lo único que evita que x_e tome un valor infinitamente grande es la posibilidad de hacer que el valor de una de las variables básicas actuales se haga negativo.

De nuestro sistema general vemos que si construimos una solución en la cual x_e tome un valor positivo y donde todas las demás variables no básicas sigan siendo cero, las variables básicas se ajustarán en la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{lcl} x_{b_1} & = & b'_1 - a'_{1e} \; x_e \\ x_{b_2} & = & b'_2 - a'_{2e} \; x_e \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ x_{b_m} & = & b'_m - a'_{me} \; x_e \\ Z & = & Z'_0 + C'_e \; x_e \end{array}\right\} \quad (II)$$

Del sistema de ecuaciones (II) vemos que el lîmite superior para el valor que podrá tomar x_e en la ecuación (i) será:

$$x_e \leq \begin{cases} +\infty & \text{si } a'_{ie} \leq 0 \\ \phi_i = \dfrac{b_i}{a'_{ie}} & \text{si } a'_{ie} > 0 \end{cases}$$

sea :

$$\phi = \min \phi_i$$

es decir, si cuando menos una a'_{ie} es positiva, no será posible incrementar el valor de x_e indefinidamente, porque cuando

$$x_e > \frac{b'_i}{a'_{ie}}$$

el valor de la x_{bi} se volverá negativo. Si $a'_{ie} > 0$ para más de un valor de i, entonces el menor de dichos coeficientes (cuyo subîndice correspondiente al renglón, llamaremos p) determinará el mayor valor posible para x_e bajo la suposición de no negatividad. Es decir, determînese aquella ecuación (i=p) cuyo lîmite superior sea el menor y escojase la variable básica actual en dicha ecuación como la variable de salida. Por lo tanto x_s será aquella variable básica en la ecuación (i) para la que ϕ_i, adquiere su valor mînimo no negativo (ϕ). El valor que tomará x_e (x^*_e) al entrar en la base será:

$$x^*_e = \frac{b'_p}{a'_{pe}} = \min_{a'_{ie} > 0} \frac{b'_i}{a'_{ie}} \geq 0$$

Debe notarse que para obtener ϕ_i no es necesario formar el sistema de ecuaciones (II) sino que se puede obtener directamente-del sistema actual.

Paso 4.-

Determínese la nueva solución básica factible. Para lograr esto resuelvanse las variables básicas en términos de las variables no básicas (es decir, forme un sistema canónico para la nueva base), utilizando para el efecto el método de eliminación de Gauss-Jordan y haciendo cero todas las variables no básicas.

Justificación.

Cabe hacer notar que en la transformación mencionada en el paso 4 se debe incluir tambien la función objetivo, con objeto de que Z quede expresada únicamente en función de las nuevas variables no básicas.

El objeto de transformar la función objetivo para que esté solo en función de variables no básicas al pasar del ciclo t al t + 1 es debido a que la función objetivo del ciclo n:

a) No contendrá la variable x_s que en el ciclo t+1 ya no es básica.

b) Contendrá n-m-1 de las variables no básicas del ciclo t+1 pero con diferentes coeficientes de los que tendrá en un último ciclo.

c) Contendrá la variable x_e , que en el ciclo n+1 ya es básica.

Las consecuencias de los incisos anteriores son:

a) Al no contener la función objetivo una de las variables no básicas no podemos juzgar el efecto que la misma tendría sobre el valor de Z al incrementarse su valor.

b) Este hecho nos impide ver si alguna de las variables no básicas pudiera incrementar el valor de Z, pues los valores C_j' cambian del ciclo t al t+1 además de que algunos cambian de ser positivos a negativos y viceversa.

c) Este punto nos hace que no podamos determinar el efecto de introducir una variable no básica a la base en el siguiente ciclo, ya que este hecho puede afectar el valor de x_e (en el ciclo t+1), la cual es ahora básica, con lo cual es imposible predecir el efecto neto sobre Z, ya que en general los valores de las variables básicas son afectados por los cambios en la base.

Paso 5.-

Prueba la optimalidad de la solución obtenida, para lo cual se revisa la función objetivo (estando ésta en función exclusivamente de las variables no básicas) para ver si el valor de Z puede ser aumentado incrementando el valor de alguna de estas variables (no-básicas). Recordemos que el valor de Z podrá ser incrementado siempre y cuando alguna de las variables no básicas tenga signo positivo estando la función objetivo en la forma de la ecuación (I) del paso 2.

Si todos los coeficientes son no positivos, debemos terminar aquí pues nuestra solución es óptima. Si aún existe algún coeficiente positivo, regrésese al paso 2.

Apliquemos los pasos anteriores a nuestro ejemplo.

1a. Iteración.

Paso 1.-

Obtenemos el sistema de ecuaciones ($\propto$), encontrado ante riormente en el ejemplo.

Seleccionamos a x_3, x_4, y x_5 como las variables básicas de nuestra iteración primera y a x_1 y x_2 como las variables no básicas.

Expresando nuestra solución en términos de los parámetros independientes (variables no básicas) según las ecuaciones (II) tenemos:

$$x_3 = 600 - x_1$$
$$x_4 = 300 - x_2$$
$$x_5 = 2400 - 3x_1 - 4x_2$$

dado que a las variables no básicas les hemos asignado un valor cero, obtenemos la siguiente solución básica inicial.

variables básicas	variables no básicas
$x_3 = 600$	$x_1 = 0$
$x_4 = 300$	$x_2 = 0$
$x_5 = 2400$	
$Z = 0$	

o en forma vectorial:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 600, 300, 2400) \qquad Z = 0$$

La anterior es una solución básica factible no degenerada que corresponde al punto extremo $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Automáticamente hemos satisfecho el paso 4 y debido a que existen $C_j > C$,el paso 5 nos indica seguir con el paso 2.

Paso 2.-

Puesto que $Z = x_1 + 2x_2$ vemos que tanto x_1 como x_2 son positivas. Tendremos pues que:

$$C_e = \min(1, 2) = C_2$$

por lo que escogemos a x_2 como nuestra variable básica entrante.- Es decir.

$$x_e = x_2$$

Paso 3.-

Para determinar la variable de salida x_s utilizamos el sistema de ecuaciones (II) y obtenemos:

$$x_3 = 600 - x_1 \;\; \ldots\ldots. \; (1)$$
$$x_4 = 300 - x_2 \;\; \ldots\ldots. \; (2)$$
$$x_5 = 2400 - 3x_1 - 4x_2 \ldots. \; (3)$$

De las anteriores ecuaciones podemos obtener que:

El valor de x_3 no se verá afectado al incrementar x_2, por lo cual por lo que respecta a esta variable podemos incrementar x_2 hasta el infinito y x_3 nunca se volverá negativa (x_1 sigue siendo cero).

De la ecuación (2) vemos que lo máximo que podemos incrementar x_2 es 300 antes de que x_4 se vuelva negativa ($\phi_2 = 300$).

La ecuación (3) nos indica que lo máximo que podemos incrementar x_2 es 600 antes de que x_5 se vuelva negativa ($\phi_3 = 600$).

Debido a que ϕ_2 es el menor de las ϕ_i, x_4 será la que permitirá un menor aumento en el valor de Z y será esta la variable que deberá dejar la base.

Tendremos pues ahora a x_2, x_3 y x_5 como variables básicas.

Paso 4.-

Para obtener una solución canónica para la nueva base parti mos de nuestro sistema canónico pasado y aplicamos el método de Gauss-Jordan.

Partimos pues de nuestras ecuaciones, dispuestas en la siguiente forma:

$Z - x_1 - 2x_2 = 0$ .... (0)

$x_1 + x_3 = 600$........ (1)

$x_2 + x_4 = 300$........ (2)

$3x_1 + 4x_2 + x_5 = 2400$....... (3)

Eliminando x_2 de todas menos de la segunda ecuación tendremos:

(0) + 2(2) = (0') $\quad Z - x_1 + 2x_4 = 600$ ..... (0')

(1) = (1') $\quad x_1 + x_3 = 600$ ..... (1')

(2) = (2') $\quad x_2 + x_4 = 300$ ..... (2')

(3) - 4(2) = (3') $\quad 3x_1 - 4x_4 + x_5 = 1200$ ....- (3')

ordenando nuestros elementos obtendremos:

$Z - x_1 + 2x_4 = 600$

$x_1 + x_3 = 600$

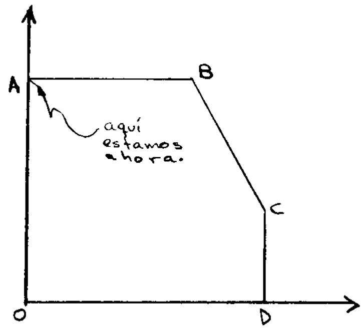
$x_4 + x_2 = 300$

$3x_1 - 4x_4 + x_5 = 1200$

de aquí que la segunda solución básica factible será:

básicas	no básicas
$x_3 = 600$	$x_1 = 0$
$x_2 = 300$	$x_4 = 0$
$x_5 = 1200$	

Geométricamente lo que hemos hecho es movernos a lo largo de la arista OA hasta el vértice A = (0, 300).



Paso 5.-

Vemos de los resultados anteriores que hemos mejorado, pero viene ahora la pregunta ¿Podemos aún seguir mejorando ó hemos llegado al valor máximo que podemos obtener?

Puesto que nuestra función objetiva es ahora:

$$Z = 600 + x_1 - 2x_4$$

de donde vemos que aumentando el valor de x_1 (es decir haciendo a x_1 básica), podemos aumentar el valor de Z, de aquí que nuestra solución no sea óptima y debamos seguir adelante con otra iteración del procedimiento.

Segunda iteración.-

Paso 2.-

Vemos que:

$$Z = 600 + x_1 - 2x_4$$

de donde podemos observar que $C_1 \geq 0$ por lo que incrementando el valor de x_1 aumentaremos el valor de Z. Por lo tanto.

$$x_e = x_1$$

Paso 3.-

Dijimos en la explicación del paso 3 que no era necesario formar el sistema de ecuaciones (II) para obtener ϕ . En la primera iteración si formamos dicho sistema de ecuaciones, pero en esta segunda iteración lo haremos directamente de nuestras ecuaciones-- que es la forma en que normalmente se hace.

De la ecuación (1')

$$\phi_1 = \frac{b_1}{a'_{11}} = \frac{600}{1} = 600 \Rightarrow x_1 \leq 600$$

De la ecuación (2')

$$\phi_2 = \frac{b'_2}{a'_{21}} = \frac{300}{0} \quad y \ \phi_2 \longrightarrow \infty \qquad x_1 \leq \infty$$

De la ecuación (3')

$$\phi_3 = \frac{b'_3}{a'_{31}} = \frac{1200}{3} = 400 \Rightarrow x_1 \leq 400$$

Vemos que el mínimo límite superior (ϕ) está en la ecuación i = 3 (es decir ϕ = 400). Esto implica que p = 3 y como la variable básica en la ecuación (3) es x_5 tendremos:

$$x_s = x_5$$

Generalmente el cálculo de las ϕ, se hace a la derecha de nuestras ecuaciones para ahorrar espacio.

Tendremos, ahora que nuestra solución básica factible actual será:

básicas	no básicas
x_1	x_4
x_2	x_5
x_3	

Paso 4.-

Obtenemos ahora una forma canónica para nuestra nueva base con ayuda del método de Gauss-Jordan.

$$\begin{array}{llllll}
Z & + 2/3x_4 & & +1/3x_5 & = & 1000 \\
 & 4/3x_4 & +x_3 & -1/3x_5 & = & 200 \\
 & x_4 & +x_2 & & = & 300 \\
x_1 & - 4/3x_4 & & +1/3x_5 & = & 400
\end{array}$$

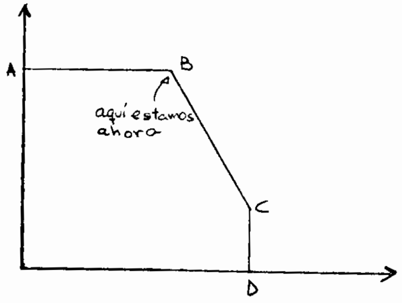
ordenando las variables:

$$\begin{array}{llllllll}
Z & + 2/3x_4 & + 1/3x_5 & & & & =1000 & \ldots\ldots (0'') \\
 & 4/3x_4 & - 1/3x_5 & +x_3 & & & = 200 & \ldots\ldots (1'') \\
 & x_4 & & & +x_2 & & = 300 & \ldots\ldots (2'') \\
 & - 4/3x_4 & + 1/3x_5 & & & +x_1 & = 400 & \ldots\ldots (3'')
\end{array}$$

y la nueva solución básica factible será:

variables básicas	variables no básicas
$x_1 = 400$	$x_4 = 0$
$x_2 = 300$	$x_5 = 0$
$x_3 = 200$	
$Z = 1000$	

Geométricamente lo que hemos hecho es movernos a lo largo de la arista AB hasta el vértice B = (400, 300).



Paso 5.-

Tenemos ahora que nuestra función objetiva es:

$$Z = 1000 - 2/3x_4 - 1/3x_5$$

de donde vemos que ninguno de los coeficientes es positivo, por lo cual no es posible aumentar el valor de Z incrementando el valor - de alguna de estas variables, lo cual nos indica que hemos llegado a la solución óptima la cual es

$Z^* = 1000$

$x_1^* = 400$

$x_2^* = 300$ $\qquad x_4 = 0$

$x_3^* = 300$ $\qquad x_5 = 0$

valores que coinciden con los obtenidos por el método gráfico.

METODO DEL PIVOTE.

Con objeto de ahorrar trabajo se suele emplear el método -- del pivote el cual utiliza la representación matricial de nuestro- problema y básicamente usa la misma secuencia de pasos anteriores- sólo que ahorrando escritura.

1.- Arreglo las ecuaciones de forma que las x_j correspondientes en cada ecuación aparezcan en la misma columna (trátense todas las ausencias de x_j como ceros).

Denomínense por P_j al vector columna correspondiente a la - variable x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ y P_0 al vector columna correspon-- diente a las constantes b_i.

Matricialmente:

$$x_j P_j = x_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

por lo cual podemos representar a nuestro modelo matemático gene-- ral como:

Maximizar $Z = C X$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j P_j = P_0$$

2.- Colóque los vectores columna P_j de una manera sistemática. Esto se efectúa haciendo uso de una tabla como la que sigue:

P_1	P_2	P_3	...	P_j	...	P_n	P_0
a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	a_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	a_2
'	'	'		'		'	'
'	'	'		'		'	'
'	'	'		'		'	'
'	'	'		'		'	'
a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	a_m

Debe notarse que las ecuaciones se pueden obtener simplemente multiplicando cada uno de los coeficientes en las columnas P_j - por la x_j correspondiente y leyendo horizontalmente. Con objeto de facilitar las identificaciones durante el curso del procedimiento,se insertan además las columnas v.b. (variable básica), No. de ecuación, una columna para Z y una para ϕ_i

Para nuestro ejemplo:

v.b.	No. Ec.	Z	X_1 P_1	X_2 P_2	X_3 P_3	X_4 P_4	X_5 P_5	P_0	ϕ_i
Z	0	1	-1	-2	0	0	0	0	
x_3	1	0	1	0	1	0	0	600	∞
x_4	2	0	0	①	0	1	0	300	300
x_5	3	0	3	4	0	0	1	2400	600

Se usan los mismos pasos dados para la rutina simplex.

Paso 1.- Ya está.

Paso 2.- $x_e = x_2$ (pues -2 es el menor coeficiente de la función objetiva).

Paso 3.- Se consideran solo las ecuaciones donde $a_{ie} > 0$ ($a_{i2} > 0$ en el ejemplo), excluyendo i = 0 y se obtienen los cocientes :

$$\phi_i = \frac{b_i}{a_{ie}} = \frac{b_i}{a_{i2}}$$ correspondientes para obtener la i = p que nos indicará el renglón correspondiente a x_s. (ϕ = min ϕ_i) ϕ_i se colocan en la columna a la extrema derecha. Márquese con un círculo el elemento a_{Pe} (a_{22} en nuestro ejemplo ya que $\phi_2 < \phi_3$ de donde P=2 y la variable correspondiente a la segunda ecuación es x_4 por lo que $x_s = x_4$).

Paso 4.- En una nueva tabla, cámbiese x_4 por x_2 en la columa v.b. y póngase la ecuación i=P (ecuación correspondiente a x_s) dividida entre a_{Pe} (es decir entre el coeficiente de nuestro primer pivote) en la nueva tabla. En nuestro caso a_{Pe} = 1 por lo que obtendremos:

v.b.	Ec.No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0
Z	0							
x_3	1							
x_2	2	0	0	1	0	1	0	300
x_5	3							

ahora elimínense la variable x_2 de las ecuaciones en las cuales aparece:

v.b.	Ec.No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ϕ_i	
Z	0	1	-1	0	0	2	0	600		nva(0)=ant(0) +2 ant. (2)
x_3	1	0	1	0	1	0	0	600	600	nva(1)=ant.(1)
x_2	2	0	0	1	0	1	0	300	∞	
x_5	3	0	③	0	0	-4	1	1200	400	nva(3)ant.(3) - ant (2)

y nuestra nueva solución básica será:

variable básica	variable no básica
x_3 = 600	x_1 = 0
x_2 = 300	x_4 = 0
x_5 =1200	
Z = 600	

Paso 5.- Revise la ecuación (0) para ver si existe algún coeficiente negativo. Vemos que C_1 = -1 por lo tanto nuestra solución aún no es óptima y se requiere otra iteración. En nuestra siguiente iteración $x_e = x_1$ y $x_s = x_5$ con la que obtendremos la tabla:

v.b.	No.Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	
Z	0	1	0	0	0	2/3	1/3	1000	nva(0)=ant(0)+1/3 ant(3)
x_3	1	0	0	0	1	4/3	-1/3	200	nva(1)=ant(1)-1/3 ant(3)
x_2	2	0	0	1	0	1	0	300	nva(2) = ant(2)
x_1	3	0	1	0	0	-4/3	1/3	400	nva(3) = 1/3 ant(3)

como nuestra ecuación (0) no tiene ya ningún coeficiente negativo-nuestra solución será óptima:

variable básica	variable no básica
$x_1^* = 400$	$x_4^* = 0$
$x_2^* = 300$	$x_5^* = 0$
$x_3^* = 200$	
$Z^* = 1000$	

Ejercicio III-1.-

Sea el problema de programación lineal siguiente:

$$\text{Maximizar } Z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeto a:

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_2 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Utilice el método del pivote para encontrar la solución óptima.

v.b.	Ec.No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ø	básicas	no básicas
Z	0	1	-2	-5	0	0	0	0		$x_3 = 4$	$x_1 = 0$
x_3	1	0	1	0	1	0	0	4	∞	$x_4 = 3$	$x_2 = 0$
x_4	2	0	0	①	0	1	0	3	3	$x_5 = 8$	
x_5	3	0	1	2	0	0	1	8	4	$Z = 0$	

$x_e = x_2$

$x_s = x_4$

v.b.	Ec.No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ø	básicas	no básicas
Z	0	1	-2	0	0	5	0	15		$x_2 = 3$	$x_1 = 0$
x_3	1	0	1	0	1	0	0	4	4	$x_3 = 4$	$x_4 = 0$
x_2	2	0	0	1	0	1	0	3	∞	$x_5 = 2$	
x_5	3	0	①	0	0	-2	1	2	2	$Z = 15$	

$x_e = x_1$

$x_s = x_5$

v.b.	Ec.No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	básicas	no básicas
Z	0	1	0	0	0	1	2	19	$Z^* = 19$	$x_4^* = 0$
x_3	1	0	0	0	1	2	-1	2	$x_1^* = 2$	$x_5^* = 0$
x_2	2	0	0	1	0	1	0	3	$x_2^* = 3$	
x_1	3	0	1	0	0	-2	1	2	$x_3^* = 2$	

COMPLICACIONES.-

En muchas ocaciones nos encontramos con que al constuir -- nuestro modelo matemático éste aparece con algunas variaciones con respecto al modelo general que hemos analizado hasta el momento.

A continuación veremos cuales son las variaciones más comúnmente encontradas y las trataremos individualmente, sin que ello - implique que no se pueden presentar varias de ellas simultáneamente, en cuyo caso se aplican en forma sucesiva los métodos que se - describirán para solucionar estas variaciones.

Las variaciones más comunes son:

1. Minimización.
2. Desigualdad con sentido invertido.
3. Constantes negativas ($b_i < 0$).
4. Igualdades.
5. Variables no restringidas en signo.
6. Empate para entrar como variable básica.
7. Empate para dejar la base. (degeneración)
8. Soluciones múltiples.
9. Ausencia de soluciones posibles.
10. Solución óptima sin límite.

En todos los casos anteriores aún es posible utilizar el método simplex, solo que será necesario efectuar ligeros ajustes en nuestro modelo. Los ajustes necesarios se tratarán en cada caso particular.

1.- Minimización.-

Esta complicación se puede tratar en dos formas diferentes:

a) En aquellos casos en que deseamos minimizar nuestra función objetiva ya no tiene sentido el incrementar el valor de aquella variable no básica que más aumente el valor de Z, sino que ahora deberemos de buscar la forma de disminuir su valor. Es por esto que el ajuste al método simplex en este caso será:

Se escogerá como variable entrante (x_e) a aquella variable no básica que disminuirá más rápidamente el valor de Z cuando esta variable adquiere un valor -- positivo.

La variable de salida (x_s) se escogerá en la misma forma que antes. La prueba de optimalidad consistirá en revisar si el valor de Z puede aún ser disminuído al incrementar el valor de una variable no básica (estando la función objetiva sólo en función de éstas variables).

b) Supongamos que tenemos:

$$Z = f\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

que nos representa nuestra función objetiva la cual deseamos minimizar. Si recordamos que:

$$f = -(-f)$$

y que si $f \downarrow \Rightarrow (-f) \uparrow$

tendremos que: $\min f = -\{\max(-f)\}$

por lo que al minimizar una función objetiva sujeta a una serie de restricciones - es completamente equivalente a maximizar el negativo de la función sujeta a las -- mismas restricciones, con la salvedad de que el mínimo valor de Z buscado será --- igual al negativo del máximo valor de Z encontrado.

Ejemplo III.-10.-

Supongamos que tenemos el siguiente problema:

$$\min Z = -x_1 - 2x_2$$

sujeto a:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \leq & 600 \\ x_2 & \leq & 300 \\ 3x_1 + 4x_2 & \leq & 2400 \\ (x_1 , x_2) & \geq & 0 \end{array}$$

para resolverlo lo ponemos en la forma siguiente:

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

sujeto a:

$$x_1 \leq 600$$

$$x_2 \leq 300$$

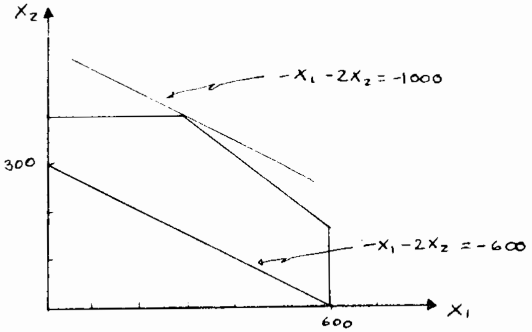
$$3x_1 + 4x_2 \leq 2400$$

$$(x_1, x_2) \geq 0$$

y lo resolvemos aplicando el método general visto con anterioridad. El negativo del resultado obtenido será el resultado deseado para el problema original.

Vemos que el problema modificado coincide con nuestro problema general por lo que ya sabemos resolverlo y conocemos que $Z_{max} = 1000$. De aquí que $Z_{min} = -1000$.

Geométricamente tendremos que si resolvemos el problema original obtendremos.



de donde es claro el porqué maximizando el negativo de la función-objetiva y haciendo min f = -max (-f) obtenemos el resultado deseado.

2.- <u>Desigualdad con sentido invertido</u>.-

Tenemos este caso cuando alguna desigualdad se encuentra en la forma $\geq$ Cuando es este el caso, la solución es muy simple y consiste en multiplicar ambos lados de la desigualdad por (-1), operación por medio de la cual invertimos el sentido de la desigualdad.

<u>Ejemplo</u> III-12.-

En el caso del ejemplo del carpintero (ejemplo III-5) teníamos:

$$x_m \geq 130 \quad \ldots \ (1)$$

multiplicando ambos lados por (-1) tendremos ahora:

$$-x_m \leq -130 \quad \ldots \ (2)$$

en donde las desigualdades (1) y (2) son completamente equivalentes.

<u>Ejemplo</u> III-12-A.

Con objeto de que quede completamente claro el porqué se invierte la desigualdad al multiplicar por (-1) veamos un ejemplo-numérico.

$$7 > 5$$

$$-7 < -5$$

En la mayoría de los casos, éste método soluciona la complicación 2 pero para ello incurre en una nueva complicación, la de constantes no positivas ($-b_i$), complicación que tambien puede ser resuelta según veremos más adelante (complicación 3).

En nuestro ejemplo obtuvimos:

$$b_{i1} = -130$$

$$b_{i2} = -5$$

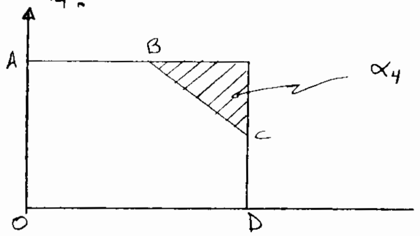
De todo lo anterior, podemos concluir que cuando nos encontramos con desigualdades $\geq$, las invertimos multiplicando ambos lados por (-1) con lo cual ya tendremos nuestro problema en la for ma general, la cual ya sabemos resolver (excepto que tengamos ahora nuevas complicaciones las cuales será necesario corregir también hasta obtener la forma general).

Ejemplo III-13.-

Consideremos nuevamente nuestro ejemplo III-7 solo que modificando una de sus restricciones de forma que tengamos:

$$\begin{array}{r} x_1 \leq 600 \\ x_2 \leq 300 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 2400 \\ (x_1, \; x_2) \geq 0 \end{array}$$

La región de soluciones posibles para nuestro ejemplo modificado será la región α_4.



Utilizando el método descrito con anterioridad, obtendremos:

$$\begin{array}{lll} x_1 & & \leq 600 \\ & x_2 & \leq 300 \\ -3x_1 & - 4x_2 & \leq -2400 \\ (x_2 \; , & x_2) & \geq 0 \end{array}$$

Eliminamos ahora las desigualdades introduciendo para ello variables de holgura:

$$\left.\begin{array}{lllllll} Z & - x_1 & - 2x_2 & & & & = 0 \\ & x_1 & & + x_3 & & & = 600 \\ & & x_2 & & + x_4 & & = 300 \\ & -3x_1 & - 4x_2 & & & + x_5 & = -2400 \end{array}\right\} \text{(I)}$$

$$x_j \geq 0 \;\; (j = 1, 2, \ldots, 5)$$

Del sistema de ecuaciones (I) vemos que ya no tenemos una solución básica factible inicial obvia (pues $x_5 < 0$), razón por la cual deberemos de corregir esta nueva complicación según los métodos que se explicarán más adelante.

Debe notarse que el hecho de que hayamos puesto un ejemplo en el cual al corregir la complicación 2 caemos en la 3 no significa que éste sea el caso siempre, pues es posible el encontrar problemas en donde al corregir la complicación 2 no caemos en la 3. Lo único que nos enseña el ejemplo es que éste es el caso más fácil de encontrar.

3.- Valores negativos para b_i.-

Cuando este es el caso, después de eliminar la desigualdad, tendremos que ya no existe una solución básica factible inicial obvia. Para obtener una, podemos aplicar cualquiera de los siguientes procedimientos:

a) Seleccionar otra base, diferente de la de variables de holgura y obtener un sistema canónico para ellas. El inconveniente de este procedimiento es el mismo que se encontró para esta forma de obtener una solución básica factible inicial en el caso 1 de la rutina del Método Simplex (posibilidad de volver a obtener una solución básica no factible con el consiguiente trabajo extra).

b) Introducir una variable artificial (una variable artificial es diferente a una variable de holgura) la cual entra restándose en aquellas ecuaciones en donde existe una constante negativa y usar esta variable artificial como la variable básica inicial para esta ecuación.

Si tenemos:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq - b_i \quad (b_i > 0)$$

introducimos primero una variable de holgura para eliminar la desigualdad y a continuación la variable artificial mencionada, con lo cual obtenemos:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n + x_h - x_a = -b_i$$

cambiando signos.

$$-a_{i1} x_1 - a_{i2} x_2 - \dots - a_{in} - x_n - x_h + x_a = b_i$$

Para cumplir con las condiciones del Método Simplex deberemos agregar:

$$x_a \geq 0$$

Ejemplo III-14.-

Consideremos el sistema de ecuaciones (I) visto en la complicación 2, en donde la ecuación (3) debe de ser tratada para obtener una variable básica factible inicial.

Tenemos:

$$-3x_1 - 4x_2 + x_5 = -2400$$

haciendo $x_a = x_6$

$$-3x_1 - 4x_2 + x_5 - x_6 = -2400$$

cambiando signos:

$$3x_1 + 4x_2 - x_5 + x_6 = 2400$$

debido a que todas las demás ecuaciones se mantienen sin cambios, la solución básica factible inicial será ahora:

básicas	no básicas
$x_3 = 600$	$x_1 = 0$
$x_4 = 300$	$x_2 = 0$
$x_6 = 2400$	$x_5 = 0$
$Z = 0$	

El problema que surge al aplicar este método es el de haber modificado nuestro problema original al agregar una variable de holgura y una variable artificial con signos contrarios, ya que $x_a - x_h$ puede tomar cualquier valor arbitrario (desde $-\infty$ hasta ∞) con lo cual el resultado neto es la eliminación operativa de la restricción original en donde surgió este cambio. Esto trae consigo un agrandamiento del conjunto de soluciones posibles como es claro en el siguiente ejemplo.

Ejemplo III-15.-

sea:

$$3x_1 + 4x_2 \geq 2400 \dots (1)$$

la cual se transforma a:

$$3x_1 + 4x_2 - x_5 + x_6 = 2400 \dots (2)$$

si hacemos:

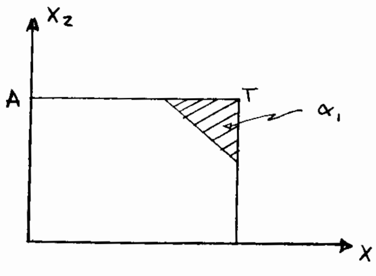
$$3x_1 + 4x_2 = 1000$$

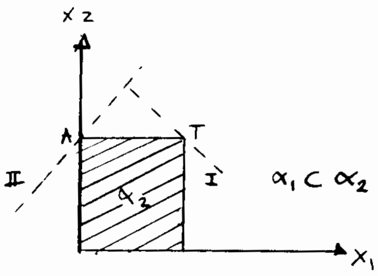
habremos ya roto la restricción (1), sin embargo si hacemos

$$x_6 - x_5 = 1400$$

cumpliremos la ecuación (2).

De lo anterior es claro que es posible cumplir con la ecuación modificada sin satisfacer la restricción original. Gráficamente tendremos:





De la representación gráfica del ejemplo anterior podemos ver que una solución óptima para el problema revisado que sea factible para el problema original, será tambien una solución óptima para éste (ya que $\alpha_1 \subset \alpha_2$). Ejemplo: el punto T cuando la función objetiva es la de nuestro problema general. (recta(I))

Existe la posibilidad de que la solución óptima para el problema rèvisado no sea factible para el original (p.e. el punto A con una función objetiva como la recta (II)), en cuyo caso al solucionar la complicación 3 habremos hecho que la solución óptima obtenida no corresponda a nuestro problema original y es por esto que el Método Simplex introduce un truco que forza el valor de las variables artificiales a cero, con lo cual volvemos nuevamente al problema original y la solución óptima que se obtenga de esta forma, sí será la que corresponda a éste último.

El truco que emplea el Método Simplex es el de asignar una penalidad muy grande a las soluciones factibles del problema revisado que no coincidan con las del problema original (soluciones en la región $\alpha_2 - \alpha_1$). La forma de asignar dicha penalidad es introduciendo $-M x_a$ a la función objetiva (estando ésta en la forma: $Z = c_1 x_1 + \ldots\ldots + c_n x_n$), de tal forma que si $x_a \neq 0$, el valor de Z se disminuye enormemente (M representa un número muy grande.)

El método anterior se conoce como el método de la gran M.

Ejemplo III-16.-

Sea el problema representado por el sistema de ecuaciones (I) visto en la complicación 2.

Solucionando la complicación de localizar una variable básica factible inicial para la ecuación (3) o introduciendo $-M\ x_6$ en la función objetiva, tenemos que nuestro problema luce ahora así:

(0) .... $Z - x_1 - 2x_2 + Mx_6 = 0$

(1) .... $x_1 + x_3 = 600$

(2) .... $x_2 + x_4 = 300$

(3) .... $3x_1 + 4x_2 - x_5 + x_6 = 2400$

Notamos que aún no es posible aplicar la Rutina Simplex debido a que Z aún está expresada en función de una variable básica (x_6) por lo que eliminándola obtenemos:

(0') = (0) - M(3) ... $Z - (3M+1)x_1 - (4M+2)x_2 + Mx_5 = -2400M$

(1') = (1) .... $x_1 + x_3 = 600$

(2') = (2) .... $x_2 + x_4 = 300$

(3') = (3) .... $3x_1 + 4x_2 - x_5 + x_6 = 2400$

Aplicando la Rutina Simplex tenemos

v.b.	Ec.No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0	$\emptyset_i$
Z	0	1	-(3M+1)	-(4M+2)	0	0	M	0	-2400M	
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	600	∞
x_4	2	0	0	①	0	1	0	0	300	300
x_6	3	0	3	4	0	0	-1	1	2400	600

básicas	no básicas
x_3 = 600	x_1 = 0
x_4 = 300	x_2 = 0
x_6 =2400	x_5 = 0
Z =2400M	

$x_e = x_2$ pues $-(4M+2) < -(3M+1)$

$x_s = x_4$

Z	0	1	-(3M+1)	0	0	(4M+2)	M	0	-600(2M-1)	
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	600	600
x_2	2	0	0	1	0	1	0	0	300	∞
x_6	3	0	③	0	0	-4	-1	1	1200	400

Z	0	1	0	0	0	2/3	-1/3	1/3(3M+1)	1000	
x_3	1	0	0	0	1	4/3	1/3	-1/3	200	200/3
x_2	2	0	0	1	0	1	0	0	300	∞
x_1	3	0	1	0	0	-1/3	1/3	1/3	400	∞

básicas	no básicas
x_2 =300	x_1 = 0
x_3 =600	x_4 = 0
x_6 =1200	x_5 = 0
Z=-600(2M-1)	

básicas	no básicas
x_1 = 400	x_4 = 0
x_2 = 300	x_5 = 0
x_3 = 200	x_6 = 0
Z = 1000	

$x_e = x_5$

$x_s = x_3$

Z	0	1	0	0	1	2	0	M	1200
x_5	1	0	0	0	3	4	1	-1	600
x_2	2	0	0	1	0	1	0	0	300
x_1	3	0	1	0	1	0	0	0	600

básicas	no básicas
x_1^* = 600	x_3^* = 0
x_2^* = 300	x_4^* = 0
x_5^* = 600	x_6^* = 0
Z^* =1200	

Cuando un problema que contiene variables artificiales se resuelve en una computadora, el método de la gran M suele crear errores de redondeo (debido al gran valor que se le asigna a M), razón por la cual se utiliza el método de las dos fases, el cual no cubriremos en este curso, pero que también tiene por objeto el hacer cero el valor de las variables artificiales.

4~~X~~. Igualdades en las Restricciones.

En aquellos casos en que existe una igualdad en alguna (S) de las restricciones, es claro que ya no será necesario introducir una variable de holgura en ellas, pues ya no existe desigualdad que eliminar. Cuando este es el caso, nos encontramos nuevamente con el problema de que no existe una variable básica inicial obvia para esta ecuación (según el paso 1 de la Rutina Simplex).

Existen tres formas alternativas de corregir esta complicación:

a) Escoger otra base cualquiera.- Este método ya se dió anteriormente que es poco eficiente y que requiere más trabajo que los demás métodos.

b) En aquellos casos en que existe una igualdad, es siempre posible el reemplazarla por dos desigualdades con los mismos elementos que la ecuación y con signos de desigualdad con sentidos contrarios entre sí. Es decir:

$$a_{i1}\ x_1 + a_{i2}\ x_2 + ... + a_{in}\ x_n = b_i \quad .... (1)$$

puede ser reemplazada por:

$$a_{i1}\ x_1 + a_{i2}\ x_2 + ... + a_{in}\ x_n \leq b_i$$

$$a_{i1}\ x_1 + a_{i2}\ x_2 + ... + a_{in}\ x_n \geq b_i \quad .. (2)$$

siendo (1) y (2) equivalentes.

Una vez que hemos puesto nuestras restricciones en forma de desigualdades ya sabemos como debemos de proceder para poder aplicar la Rutina Simplex.

c) Introduciendo una variable artificial en cada una de las igualdades localizadas en las restricciones.

Podemos observar que aquella ecuación (p. e. ec. (1) del método b) a la que le agregamos una variable artificial ($x_a \geq 0$) quedará transformada por este hecho en una desigualdad ya que:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots\ldots + a_{in} x_n + x_a = b_i \quad (x_a \geq 0)$$

puede escribirse como:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots\ldots + a_{in} x_n \leq b_i$$

con lo cual es claro que utilizando el método (c) tambien (al igual que el método b del caso 3) modificaremos el problema original, razón por la que es necesario volver a él obligando a las variables artificiales a tener un valor cero, para lo cual se emplea el método de la gran M visto en la complicación 3.

Este método de resolver la complicación 4, suele en general, ser más práctica que los dos anteriores.

Cabe hacer la aclaración de que en caso de que no exista ninguna solución básica factible para el problema original, esto se verá reflejado al no ser posible hacer cero el valor de las variables artificiales al final del procedimiento. Cuando éste sea el caso, vemos que no existe una solución óptima para el problema original debido a que no hay solución básica factible para éste.

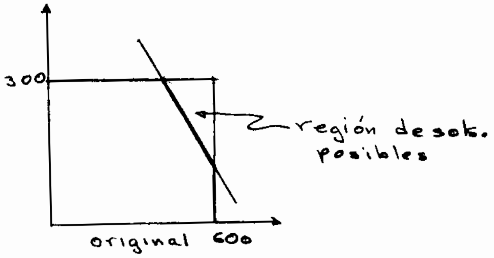
Ejemplo III-17.-

Sea el siguiente problema de programación lineal.

$$\text{Max} \quad Z = X_1 + 2x_2$$

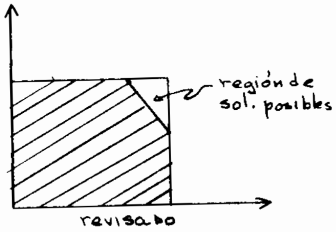
sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 600 \\ x_2 &\leq 300 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 2400 \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$



aplicando el método (c) tendremos:

$$\begin{aligned} Z - x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 600 \\ x_2 + x_4 &= 300 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 &= 2400 \end{aligned}$$



donde x_3 y x_4 son variables de holgura y x_5 es variable artificial.

Usando el Método de la Gran M tendremos:

$$\begin{aligned} Z - x_1 - 2x_2 + Mx_5 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 600 \\ x_2 + x_4 &= 300 \\ 3x_1 + 4x \quad x_5 &= 2400 \end{aligned}$$

eliminando las variables básicas de la función bobjetiva:

	ϕi
$Z-(3M+1)x_1 -(4M+2)x_2 = -2400M$	
$x_1 + x_3 = 600$	∞
$x_2 + x_4 = 300$	300
$3x_1 + 4x_2 + x_5 = 2400$	600

básicas	no básicas
$x_3 = 600$	$x_1 = 0$
$x_4 = 300$	$x_2 = 0$
$x_5 = 2400$	
$Z = -2400M$	

$$\boxed{\begin{array}{l} x_e = x_2 \\ x_s = x_4 \end{array}}$$

$$\begin{array}{llllll}
Z & -(3M+1)x_1 & & +(4M+2)x_4 & & =-600(2M-1) \\
 & x_1 & +x_3 & & & =600 \\
 & & x_2 & +\ x_4 & & =300 \\
 & 3x_1 & & -\ 4x_4 & +x_5 & =1200
\end{array}$$

ϕ_i	básicas	no básicas
600	$x_3=600$	$x_1 = 0$
∞	$x_2=300$	$x_4 = 0$
400	$x_5=1200$	
	$Z=-600(2M-1)$	

$$\boxed{\begin{array}{l} x_e = x_1 \\ x_s = x_5 \end{array}}$$

$$\begin{array}{llllll}
Z & & & +2/3x_4 & +(M+1/3)x_5 & =1000 \\
 & & x_3 & +4/3x_4 & -\ 1/3x_5 & = 200 \\
 & x_2 & & +\ x_4 & & = 300 \\
x_1 & & & -4/3x_4 & +\ 1/3x_5 & = 400
\end{array}$$

básicas	no básicas
$x_3^* = 200$	$x_4^* = 0$
$x_2^* = 300$	$x_5^* = 0$
$x_1^* = 400$	
$Z^* = 1000$	

5.- Variables no restringidas en signos.-

En aquellos casos (no muy frecuentes) en que los niveles de actividad en un problema de programación lineal pueden tomar cualquier valor positivo o negativo, nos encontramos con que la condición de no negatividad establecida por el Método Simplex queda violada, razón por la cual es necesario solucionar esta complicación antes de poder aplicar la Rutina Simplex.

La condición de no negatividad puede ser restablecida en nuestro problema cambiando la variable no restringida en signo por una diferencia de dos variables no negativas.

Así pues sí:

$$-\infty \leq x \leq \infty$$

podemos hacer

$$x = y - Z$$

donde:

$$y \geq 0$$

$$Z \geq 0$$

Y sustituir el nuevo valor de x en todas aquellas partes en donde aparezca dentro de nuestro modelo. Este cambio no modificará en nada nuestro modelo, ya que si $x \leq 0$ hacemos $y = 0$ y $Z \geq 0$, mientras que si $x \geq 0$ hacemos $y \geq 0$ y $Z = 0$.

Ejemplo III-18.-

Supongamos que nuestro ejemplo III-7 lo modificamos nuevamente quitándo la restricción $x_1 \geq 0$.

Si hacemos $x_1 = y_1 - Z_1$, donde $y_1 \geq 0$ y $Z_1 \geq 0$, entonces nuestro ejemplo se puede expresar así:

$$\text{Max } Z = y_1 - z_1 + 2x_2$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{llll}
y_1 - z_1 & & & \leq 600 \\
 & & +\ x_2 & \leq 300 \\
3y_1 - 3z_1 & & +\ 4x_2 & \leq 2400 \\
(y_1, z_1, x_2) & & & \geq 0
\end{array}$$

problema que coincide ahora con nuestro Modelo General por no contar ya con ninguna complicación, por lo cual puede ser resuelto utilizando directamente Rutina Simplex como lo hicimos con el problema original.

6.- Empate Para Entrar Como Variable Básica.-

Al encontrarnos resolviendo un problema de programación lineal empleando para ello la Rutina Simplex, en alguna de las iteraciones del mismo podemos encontrar que dos o más variables ten--

gan el mismo coeficiente positivo máximo en la función objetiva. Cuando este es el caso, surge la duda de cual de ellas será la indicada para entrar en la base, ya que ambas satisfacen las condiciones establecidas en el paso 2 de dicha rutina.

Esta complicación se resuelve seleccionando arbitrariamente, entre las variables en empate, la que deberá ocupar la base:

Ejemplo III-19.-

Si

$$Z = 5x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

entonces x_1 y x_2 estarán empatadas para entrar en la base, pero si tenemos que:

$$Z = 5x_1 + 5x_2 + 7x_3$$

entonces $x_e = x_3$ y no existirá empate.

7.- Degeneración.-

Cuando al aplicar el paso 3 de la Rutina Simplex nos encontramos con que $\phi = \phi_t = \phi_w = \ldots$ esto es, con que varias variables se hacen cero simultáneamente cuando x_e se incrementa, tenemos un empate para dejar la base (degeneración).

Cuando es este el caso, se escoge arbitrariamente cualquiera de las variables en empate para ser la variable de salida.

El efecto de tener el empate en la variable de salida es que todas las variables en el empate que no sean escogidas para dejar la base quedarán con un valor de cero en la siguiente iteración, durante la cual tendremos que $\phi_t = 0$ (para t = aquellas i's correspondientes a las ecuaciones conteniendo las variables en empate); con lo cual las variables en empate continuarán siendo candidatas para dejar la base en esta nueva iteración, haciendo además que la nueva variable entrante no pueda tomar un valor mayor que cero con lo que el valor de Z permanecerá sin cambio respecto a la iteración anterior.

Es claro de lo anterior que si existe degeneración es posible el tener una secuencia de iteraciones que no aumenten en nada el valor de Z y ha sido probado por Hoffman (1951) y por Beale (1955) que la Rutina Simplex, en este caso, puede conducir a una recurrencia del mismo conjunto de variables básicas después de k iteraciones (y despues de 2k iteraciones, etc, indefinidamente). De aquí que sea evidente que ya no es posible el seguir manteniendo que el Método Simplex necesariamente terminará en un número finito de iteraciones. A pesar de los ejemplos construidos por Hoffman y por Beale, el caso de círculos viciosos mencionados no ocurren en la práctica, razón por la cual las reglas que existen para resolver el caso de degeneración son casi siempre ignoradas, pues aún en el caso de volver al mismo conjunto de variables básicas, se puede salir del círculo vicioso cambiando la selección de x_s con respecto al ciclo anterior.

Ejemplo III-20.-

Modificando nuestro ejemplo III-7 y poniendo:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1200$$

en lugar de

$$3x_1 + 4x_2 \leq 2400$$

tendremos:

$$\begin{array}{lllllll}
Z - x_1 & -2x_2 & & & & = 0 & \phi \\
x_1 & & +x_3 & & & = 600 & \infty \\
 & x_2 & & + x_4 & & = 300 & 300 \\
3x_1 & +4x_2 & & & +x_5 & =1200 & 300
\end{array}$$

donde:

$$x_e = x_2$$

pero ahora:

$$\phi = \phi_1 = \phi_2 = 300$$

o sea que x_s puede ser x_4 ó x_5

Escogemos x_4 arbitrariamente

$$\begin{array}{llllll}
Z - x_1 & & & + 2x_4 & & = 600 \\
x_1 & & + x_3 & & & = 600 \\
 & x_2 & & + x_4 & & = 300 \\
3x_1 & & & - 4x_4 & + x_5 & = 0
\end{array}$$

básicas	no básicas
$x_2 = 300$	$x_1 = 0$
$x_3 = 600$	$x_4 = 0$
$x_5 = 0$	
$Z = 600$	

y obtenemos una solución degenerada (pues $x_5 = 0$), con lo que se prueba que la variable en empate que no resultó escogida para dejar la base quedó con un valor de cero.

Como la solución anterior no es aún óptima hacemos:

$$x_e = x_1$$

pero como ya dijimos tenemos que

$$\phi = \phi_3 = 0$$

debido a que x_1 no puede aumentar su valor sin hacer a x_5 negativa y por lo tanto:

$$x_s = x_5$$

y obtenemos:

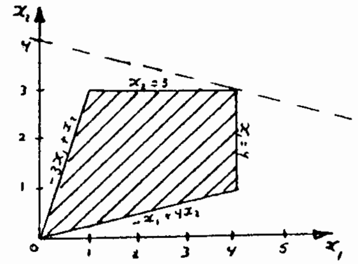
$$\begin{array}{lllllll}
Z & & & & + 2/3x_4 & + 1/3x_5 & = 600 \\
 & & & x_3 & + 4/3x_4 & - 1/3x_5 & = 600 \\
 & & x_2 & & + x_4 & & = 300 \\
 & x_1 & & & - 4/3x_4 & + 1/3x_5 & = 0
\end{array}$$

V.B.	V.N.B.
$x_1^* = 0$	$x_4^* = 0$
$x_2^* = 300$	$x_5^* = 0$
$x_3^* = 600$	
$Z^* = 600$	

y los valores de la solución óptima coinciden con la iteración anterior, debido a que x_1 no pudo tomar un valor mayor que cero, con lo cual el valor de Z tampocc pudo aumentar

EJEMPLO III-20(a).-

$$\begin{array}{rl}
\text{Max. } Z = & x_1 + 4x_2 \\
\text{s.a.} & \\
-x_1 + 4x_2 & \geqq 0 \\
x_1 & \leqq 4 \\
x_2 & \leqq 3 \\
-3x_1 + x_2 & \leqq 0 \\
(x_1, x_2) & \geqq 0
\end{array}$$



v.b.	No.Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_o	ϕ_i
Z	0	1	-1	-4	0	0	0	0	0	
x_3	1	0	1	-4	1	0	0	0	0	∞
x_4	2	0	1	0	0	1	0	0	4	∞
x_5	3	0	0	1	0	0	1	0	3	3
x_6	4	0	-3	①	0	0	0	1	0	0
Z	0	1	-13	0	0	0	0	4	0	
x_3	1	0	-11	0	1	0	0	4	0	∞
x_4	2	0	1	0	0	1	0	0	4	4
x_5	3	0	③	0	0	0	1	-1	3	1
x_2	4	0	-3	1	0	0	0	1	0	∞

v.b.	No.Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_o	ϕ_i
Z	0	1	0	0	0	0	13/3	-1/3	13	
x_3	1	0	0	0	1	0	11/3	1/3	11	33
x_4	2	0	0	0	0	1	-1/3	1/3	3	9
x_1	3	0	1	0	0	0	1/3	-1/3	1	∞
x_2	4	0	0	1	0	0	1	0	3	∞
Z	0	1	0	0	0	1	4	0	16	
x_3	1	0	0	0	1	-1	4	0	8	
x_6	2	0	0	0	0	3	-1	1	9	
x_1	3	0	1	0	0	1	0	0	4	
x_2	4	0	0	1	0	0	1	0	3	

8.- Soluciones Múltiples.-

Este caso aparece cuando la función objetiva en su valor máximo factible, coincide en más de un punto con los linderos de la región de soluciones factibles, teniendose por lo tanto, todo un segmento lineal de soluciones óptimas, compuesto éste por soluciones básicas factibles y por soluciones no básicas factibles, todas ellas maximizando el valor de Z.

Cuando tenemos todo un segmento lineal de soluciones óptimas, pueden existir factores intangibles que favorezcan a alguna de ellas (p. ej. problemas de personal, facilidades de almacenamiento, satisfacción del cliente, etc.), por lo cual nos es de interés el descubrir cuando estamos en ésta situación.

La indicación que el Método Simplex suministra cuando existe un número infinito de soluciones óptimas, es haciendo que alguna de las variables no básicas que aparecen en la función objetivo (en donde ya todos los coeficientes son tales que no se puede aumentar el valor de Z) aparezca con un coeficiente cero en ella, coeficiente que nos indicará que si introducimos esa variable a la base, el valor de Z no se alterará y seguiremos teniendo una solución óptima con la nueva base.

Ejemplo III-21.-

Sea:

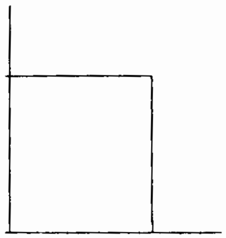
$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

s.a.

$$x_1 \leq 600$$

$$x_2 \leq 300$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 2400$$



De la representación gráfica es claro que cualquier punto sobre el segmento lineal B-C será una solución óptima.

Resolviendo el modelo llegamos finalmente a:

$$
\begin{array}{lllr}
Z & + 0\,x_4 + x_5 & = & 2400 \\
x_3 + 4/3x_4 = 1/3x_5 & & = & 200 \\
x_2 + x_4 & & = & 300 \\
x_1 - 4/3x_4 + 1/3x_5 & & = & 400
\end{array}
$$

básicas	no básicas
$x_1^* = 400$	$x_4^* = 0$
$x_2^* = 300$	$x_5^* = 0$
$x_3^* = 200$	
$Z^* = 2400$	

Como todos los coeficientes de las variables no básicas en Z son positivos, hemos llegado a una solución óptima, la cual cuenta con la particularidad de que $C_4 = 0$, lo cual nos indica que existen más soluciones óptimas. Para encontrarlas hacemos $x_e = x_4$ y obtenemos:

$$
\begin{array}{lllr}
Z & + 0\,x_3 + x_5 & = & 2400 \\
 & 3/4x_3 + x_4 - 4x_5 & = & 150 \\
x_2 - 3/4x_3 + 4x_5 & & = & 150 \\
x_1 + x_3 & & = & 600
\end{array}
$$

básicas	no básicas
$x_1^* = 600$	$x_3^* = 0$
$x_2^* = 150$	$x_5^* = 0$
$x_4^* = 150$	
$Z^* = 2400$	

solución que también es óptima y que cuenta con el mismo valor para Z que la obtenida en la iteración anterior.

Si efectuamos una nueva iteración regresaremos a la primera solución óptima obtenida (pues x_3 ahora es la que tiene coeficiente cero), por lo tanto sólo existen 2 soluciones básicas factibles óptimas (puntos B y C en la representación gráfica), mientras que existirán un número infinito de soluciones no básicas factibles (segmento B C en la representación gráfica) que pueden expresarse como:

$$(x_1, x_2) = \left[400 \lambda + 600 (1 - \lambda), 300 \lambda + 150 (1- \lambda) \right.$$

9.- Ausencia de Soluciones Factibles:

Cuando una solución básica factible inicial no fué obvia y tuvimos que introducir variables artificiales y su valor no es reducido a cero al obtener la solución óptima, ésto es una indicación de que no existen soluciones factibles para el problema original.

Cuando en un problema obtenemos nuestra solución óptima, siempre debemos comprobar que sea factible, sustituyendo los valores obtenidos en las restricciones para ver si se cumplen.

10.- Soluciones Optimas Sin Límite.-

Cuando en el momento de obtener ϕ vemos que $\phi_2 = \infty$ para toda i, ésto nos indica que la variable x_e puede aumentar su valor todo lo que se quiera sin hacer negativa ninguna de las variables básicas. De aquí que no existe ninguna variable x_s y que el valor de Z pueda aumentarse sin límite.

En aquellas ocasiones en que nos encontremos con este caso en un problema real, es bueno el revisar que no hayamos omitido ninguna restricción y que nuestro modelo matemático esté bien formulado.

METODO DE LAS DOS FASES

También conocido como el Método Simplex de las Dos Fases.

Muchos problemas encontrados en la práctica, a menudo tienen una forma canónica fácilmente otenible y uno puede inmediatamente construir una gran variedad de soluciones básicas factibles iniciales (p. ej. cuando el problema está en la forma general, aquella obtenida de usar las variables de holgura). Cuando éste es el caso, la fase I del procedimiento no es necesaria (es decir, la fase I sirve única y exclusivamente para encontrar una solución básica factible inicial para la fase II mediante la utilización del Método Simplex, o bien para descubrir que el sistema no tiene soluciones factibles.

Otros problemas encontrados en la práctica no proveen una forma canónica factible inicial. Esto sucede cuando no tenemos variables de holgura o cuando éstas tienen coeficientes negativos. Utilizando la fase I, podemos encontrar una solución factible inicial (si existe).

Una de las ventajas de éste sistema es el de que no es necesario saber nada (matemáticamente) respecto al problema, ya que éste método descubre redundancias e inconsistencias.

Descripción del Proceso.-

Aquí suponemos que la función objetivo está siendo maximizada.

A) Arreglese el sistema original de ecuaciones de forma tal que todas las constantes b_i sean positivas ó cero, cambiando en caso necesario los signos en ambos lados de la ecuación correspondiente.

B) Auméntese el sistema para que incluya un conjunto básico de variables artificiales o de error: $x_{n+1} \geqq 0$, $x_{n+2} \geqq 0$, ... , $x_{n+m} \geqq 0$, de tal forma que se convierta en:

$$
1)\ldots\left\{\begin{array}{llllllll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & + x_{n+1} & & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & & + x_{n+2} & & & = b_2 \\
\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots & & & \ddots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & & & & + x_{n+m} & = b_m
\end{array}\right\} b_i = 0
$$

$$
2)\ldots \quad -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n \quad + Z = 0
$$

$$
x_j \geq 0 \ (j = 1,2,\ldots,n,n+1,\ldots,n+m)
$$

c) (Fase I). Usese el Método Simplex para encontrar una solución a (1) y (2), la cual minimice la suma de las variables artificiales, denotada como W:

$$
(3) \ldots\ldots\ldots \quad x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots\cdots + x_{n+m} = W
$$

ó lo que es lo mismo, que Max. (-W).

La ecuación (3) se conoce como la ecuación de "no factibilidad".

El sistema canónico factible inicial para la fase I se obtiene seleccionando como variables básicas a : x_{n+1}, x_{n+2}, ... , x_{n+m}, Z y (-W) y eliminando éstas variables (excepto W) de la ecuación (3), para lo que se resta la suma de las primeras m ecuaciones (1) a la ecuación (3), obteniendose:

$$
\begin{array}{|llllll|}
\hline
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & + x_{n+1} & & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & & + x_{n+2} & & & = b_2 \\
\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots & & & \ddots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & & & & + x_{n+m} & = b_m \\
\hline
-C_1x_1 - C_2x_2 - \cdots - C_nx_n & & & & + Z & = 0 \\
d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n & & & & - W & = W_o \\
\hline
\end{array}
$$

donde:

$$
b_i \geq 0
$$

y:

$$
(5) \ldots \left\{\begin{array}{ll}
d_j = -(a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj}) & (j=1,2,\ldots,n) \\
-W_o = -(b_1 + b_2 + \cdots + b_m) &
\end{array}\right.
$$

siendo la solución básica factible inicial:

$$
\left.\begin{array}{l} x_{n+i} = b_i \\ x_i \ \ = 0 \end{array}\right\} (i = 1,2,\ldots,m)
$$

D) Si Max (-W) = Min W > 0, esto implica que no existe una solución factible para el problema y el procedimiento termina. Si por el contrario, Max (-W)= Min W = 0, iniciese la fase II, para lo cual:

a) Se dejan de considerar todas aquellas variables no básicas x_j cuyos coeficientes $d'_j \neq 0$ en la ecuación final modificada de W.

b) Reemplazando la forma lineal de W (modificada por las varias eliminaciones) por la forma lineal de Z como función objetivo; eliminando primero de la ecuación de Z todas las variables básicas (lo cual se suele ir haciendo a la vez que se trabaja con la ecuación de W en la fase I).

E) (Fase II). Aplique el Método Simplex a la forma canónica factible ajustada obtenida de la fase I, para obtener la solución que Max. (Min.) el valor de Z, o una clase de soluciones tales que $Z \to \infty$ ($Z \to -\infty$).

Veamos el porque del paso D(a):

En ocasiones en que el sistema original contiene redundancias y a menudo cuando se presenta la situación de que una ó mas de las variables artificiales resultan variables básicas degeneradas en la solución de la fase I, estas variables artificiales serán acarreadas a lo largo de la fase II. De aquí que sea necesario que sus valores en la fase II nunca excedan de cero. Para ver porqué, nótese que la forma de W al finalizar la fase I satisface:

$$
d'_1 x_1 + d'_2 x_2 + \cdots\cdots + d'_{n+m} x_{n+m} = W - W'_o
$$

donde:

$$
d'_j \geq 0 \quad y \quad W'_o = 0
$$

si es que una solución factible existe. Para factibilidad: W = 0, por (3), lo que significa que cada x_j correspondiente a una $d'_j \geq 0$ debe ser cero; de aquí que tales x_j puedan ser igualadas a cero y dejarse ya de considerar.

EJEMPLO III-22.-

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \\ \text{s.a.} & \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 15 \\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 & = -20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\geqq 0 \end{aligned}$$

Paso A.-

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \\ \text{s.a.} & \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 & = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\geqq 0 \end{aligned}$$

Paso B.-

$$\begin{aligned} Z - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 & &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 & &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \qquad\qquad + x_6 & &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad + x_7 & &= 10 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) & &\geqq 0 \end{aligned}$$

Paso C (Fase I).-

$$\text{Min } W \qquad - x_5 - x_6 - x_7 = 0$$

es decir:

$$\begin{aligned} \text{Max } -W \qquad\qquad\qquad + x_5 + x_6 + x_7 &= 0 \\ Z - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 \qquad\qquad &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \qquad\qquad + x_6 \qquad &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad\qquad + x_7 &= 10 \end{aligned}$$

en forma de tabla:

v.b.	Ec.No.	-W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P_o
W	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
Z	0	0	1	-1	-2	-3	1	0	0	0	0
x_5	1	0	0	1	2	3	0	1	0	0	15
x_6	2	0	0	2	1	5	0	0	1	0	20
x_7	3	0	0	1	2	1	1	0	0	1	10

poniendolo en forma canónica para la ec. (0'):

v.b.	Ec.No.	-W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P_o	$\emptyset_i$
W	0'	1	0	-4	-5	-9	-1	0	0	0	-45	
Z	0	0	1	-1	-2	-3	1	0	0	0	0	
x_5	1	0	0	1	2	3	0	1	0	0	15	5
x_6	2	0	0	2	1	⑤	0	0	1	0	20	4
x_7	3	0	0	1	2	1	1	0	0	1	10	10
W	0	1	0	-2/5	-16/5	0	-1	0	9/5	0	- 9	
Z	0	0	1	1/5	-7/5	0	1	0	3/5	0	12	
x_5	1	0	0	-1/5	$\textcircled{7/5}$	0	0	1	-3/5	0	3	15/7
x_3	2	0	0	2/5	1/5	1	0	0	1/5	0	4	20
x_7	3	0	0	3/5	9/5	0	1	0	-1/5	1	6	30/9
W	0	1	0	-6/7	0	0	-1	16/7	3/7	0	-15/7	
Z	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	15	
x_2	1	0	0	-1/7	1	0	0	5/7	-3/7	0	15/7	∞
x_3	2	0	0	3/7	0	1	0	-1/7	2/7	0	25/7	∞
x_7	3	0	0	6/7	0	0	①	-9/7	4/7	1	15/7	15/7
W	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	
Z	0	0	1	-6/7	0	0	0	16/7	-4/7	-1	90/7	
x_2	1	0	0	-1/7	1	0	0	5/7	-3/7	0	15/7	
x_3	2	0	0	3/7	0	1	0	-1/7	2/7	0	25/7	
x_4	3	0	0	6/7	0	0	1	-9/7	4/7	1	15/7	

Paso D.-

Se vé que Min W = 0, por lo que el problema original tiene solución y podemos iniciar la fase II, para lo cual eliminamos la ec. (0), así como las columnas correspondientes a x_5, x_6, x_7 y -W.

Paso E (Fase II).-

v.b.	No.Ec	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	P_o	$\emptyset_i$
Z	0	1	-6/7	0	0	0	90/7	
x_2	1	0	-1/7	1	0	0	15/7	∞
x_3	2	0	3/7	0	1	0	25/7	25/3
x_4	3	0	6/7	0	0	1	15/7	15/6
Z^*	0	1	0	0	0	1	15	
x_2^*	1	0	0	1	0	1/6	5/2	
x_3^*	2	0	0	0	1	-1/2	35/14	
x_1^*	3	0	1	0	0	7/6	15/6	

EJEMPLO III-23.-

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } Z = x_1 + x_2\\
&\text{s.a.}\\
&\quad x_1 - x_2 - x_3 \qquad = 1\\
&\quad x_1 \qquad\quad - x_4 = 2\\
&\quad (x_1,x_2,x_3,x_4) \geq 0
\end{aligned}
$$

cambiando la función objetivo:

$$\text{Max } -Z = -x_1 - x_2$$

e introduciendo variables artificiales x_5 y x_6 y la ecuación de no factibilidad:

$$\text{Min } W = x_5 + x_6 \quad \text{ó} \quad \text{Max } -W = -x_5 - x_6$$

obtenemos:

$$
\begin{array}{lllllllll}
-W & & & & & + x_5 & + x_6 & = & 0\\
 & -Z & + x_1 & + x_2 & & & & = & 0\\
 & & x_1 & - x_2 & - x_3 & + x_5 & & = & 1\\
 & & x_1 & & - x_4 & & + x_6 & = & 2
\end{array}
$$

en forma de tabla:

v.b.	No.Ec.	-W	-Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_o	$\emptyset_i$
W	0'	1	0	-2	1	1	1	0	0	-3	
Z	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	
x_5	1	0	0	①	-1	-1	0	1	0	1	1
x_6	2	0	0	1	0	0	-1	0	1	2	2
W	0'	1	0	0	-1	-1	1	2	0	-1	
Z	0	0	1	0	2	1	0	-1	0	-1	
x_1	1	0	0	1	-1	-1	0	1	0	1	∞
x_6	2	0	0	0	①	1	-1	-1	1	1	1
W	0'	1	0	0	0	0	0	1	1	0	
Z	0	0	1	0	0	-1	2	1	-2	-3	
x_1	1	0	0	1	0	0	-1	0	1	2	
x_2	2	0	0	0	1	1	-1	-1	1	1	

V.B.	No.Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	P_o	$\emptyset_i$
Z	0	1	0	0	-1	2	-3	
x_1	1	0	1	0	0	-1	2	∞
x_2	2	0	0	1	①	-1	1	1
Z^*	0	1	0	1	0	1	-2	
x_1^*	1	0	1	0	0	-1	2	
x_3^*	2	0	0	1	1	-1	1	

En aquellos casos en que el problema original cuenta con algunas restricciones que están en la forma general, no es necesario agregar tantas variables artificiales como restricciones tenemos, ya que la base inicial puede estar formada, parcialmente, con los vectores unitarios correspondientes a las variables de holgura de éstas ecuaciones, formándose el resto de la misma con la introducción de variables artificiales en aquellas restricciones en donde sea necesario. La Fase I funciona, igual que antes, haciendo que la ecuación de W contenga sólo la suma de las variables artificiales utilizadas y minimizándola; Si Min W $>$ 0, el problema original no tiene soluciones factibles, pero si Min W = 0 se va a la Fase II.

EJEMPLO III-24.- (Ejemplo III-17)

$$\begin{array}{rl} \text{Max } Z = & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 \leq 600 \\ & x_2 \leq 300 \\ & 3x_1 + 4x_2 = 2400 \\ & (x_1, x_2) \geq 0 \end{array}$$

introduciendo variables de holgura x_3 y x_4, así como la variable artificial x_5, obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} Z - x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ x_1 + x_3 & = & 600 \\ x_2 + x_4 & = & 300 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 & = & 2400 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & \geq & 0 \end{array}$$

Fase I.- Introducimos la ecuación de no factibilidad (Max -W):

$$\begin{array}{rcl} -W + x_5 & = & 0 \\ Z - x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ x_1 + x_3 & = & 600 \\ x_2 + x_4 & = & 300 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 & = & 2400 \end{array}$$

v.b.	No.Ec.	-W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_o	$Ø_i$
W	$0'$	1	0	-3	-4	0	0	0	-2400	
Z	0	0	1	-1	-2	0	0	0	0	
x_3	1	0	0	1	0	1	0	0	600	∞
x_4	2	0	0	0	①	0	1	0	300	300
x_5	3	0	0	3	4	0	0	1	2400	600

v.b.	No.Ec.	-W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_o	$Ø_i$
W	$0'$	1	0	-3	0	0	4	0	-1200	
Z	0	0	1	-1	0	0	2	0	600	
x_3	1	0	0	1	0	1	0	0	600	600
x_2	2	0	0	0	1	0	1	0	300	∞
x_5	3	0	0	③	0	0	-4	1	1200	400
W	$0'$	1	0	0	0	0	0	1	0	
Z	0	0	1	0	0	0	2/3	1/3	1000	
x_3	1	0	0	0	0	1	4/3	-1/3	200	
x_2	2	0	0	0	1	0	1	0	300	
x_1	3	0	0	1	0	0	-4/3	1/3	400	

COMO Max (-W) = Min W = 0, entonces el problema original si tiene soluciones factibles y pasamos a la Fase II:

v.b.	No.Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	P_o
Z^*	0	1	0	0	0	2/3	1000
x_3^*	1	0	0	0	1	4/3	200
x_2^*	2	0	0	1	0	1	300
x_1^*	3	0	1	0	0	-4/3	400

Aunque no és inmediatamente obvio, el Método de la Gran M es en si un Método de las Dos Fases y ambos procedimientos, aplicados a un problema, tienen la misma secuencia de soluciones básicas factibles (con la posible excepción de cuando ocurre un empate en x_e en el Método de las Dos Fases). Por lo tanto, ambos procedimientos son esencialmente equivalentes desde un punto de vista de cómputo y existe poca base para escoger entre uno y otro.

Cuando se utiliza una computadora digital, la tendencia ha sido seleccionar el Método de las Dos Fases, únicamente para evitar el error de redondeo ocasionado por la manipulación de los grandes valores asignados a M.

EJEMPLO III-25.-

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$
$$\text{s.a.}$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 20$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 20$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$
$$(x_1, x_2) \geq 0$$

introduciendo v.h. = (x_3, x_4, x_5) , v.a. = (x_6) y la ecuación de no factibilidad, obtenemos:

Fase I.-

v.b.	No.Ec.	-W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_o	$\emptyset_i$
W	$0'$	1	0	0	0	0	0	0	1	0	
Z	0	0	1	-1	-1	0	0	0	0	0	
x_3	1	0	0	3	2	1	0	0	0	20	
x_4	2	0	0	2	3	0	1	0	0	20	
x_6	3	0	0	1	2	0	0	-1	①	2	

poniendolo en forma canónica:

v.b.	No.Ec.	-W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_o	$\emptyset_i$
W	$0'$	1	0	-1	-2	0	0	1	0	-2	
Z	0	0	1	-1	-1	0	0	0	0	0	
x_3	1	0	0	3	2	1	0	0	0	20	10
x_4	2	0	0	2	3	0	1	0	0	20	20/3
x_6	3	0	0	1	②	0	0	-1	1	2	1
W	$0'$	1	0	0	0	0	0	0	1	0	
Z	0	0	1	-1/2	0	0	0	-1/2	1/2	1	
x_3	1	0	0	2	0	1	0	1	-1	18	
x_4	2	0	0	1/2	0	0	1	3/2	-3/2	17	
x_2	3	0	0	1/2	1	0	0	-1/2	1/2	1	

Fase II.- Eliminamos la ecuación de W y la columna de x_6:

v.b.	No.Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_o	$\emptyset_i$
Z	0	1	-1/2	0	0	0	-1/2	1	
x_3	1	0	2	0	1	0	1	18	9
x_4	2	0	1/2	0	0	1	3/2	17	34
x_2	3	0	$\boxed{1/2}$	1	0	0	-1/2	1	2
Z	0	1	0	1	0	0	-1	2	
x_3	1	0	0	-4	1	0	③	14	14/3
x_4	2	0	0	-1	0	1	2	16	8
x_1	3	0	1	2	0	0	-1	2	∞
Z	0	1	0	-1/3	1/3	0	0	20/3	
x_5	1	0	0	-4/3	1/3	0	1	14/3	∞
x_4	2	0	0	$\boxed{5/3}$	-2/3	1	0	20/3	4
x_1	3	0	1	2/3	1/3	0	0	20/3	10
Z^*	0	1	0	0	1/5	1/5	0	8	
x_5^*	1	0	0	0	-1/5	4/5	1	10	
x_2^*	2	0	0	1	-2/5	3/5	0	4	
x_1^*	3	0	1	0	3/5	-2/5	0	4	

a) USANDO EL METODO GRAFICO RESUELVA LOS SIGUIENTES PROBLEMAS

1.- Utilizando el método gráfico, encuentra la región de soluciones para el siguiente sistema, indique el tipo de soluciones obtenidas (Sol. Básica Factible, sol. básica no factible, etc.)

$$3X_1 + X_2 \geq 8$$
$$4X_1 + X_2 \leq 19$$
$$X_1 + 3X_2 \geq 7$$

2.- Por el método gráfico encuentre la región de soluciones y el óptimo para el siguiente sistema. Indique donde hay soluciones básicas factibles y soluciones básicas no factibles.

$$\text{Max} \quad Z = 2X_1 + X_2$$
$$X_1 + X_2 \geq 5$$
$$2X_1 + 3X_2 \leq 20$$
$$4X_1 + 3X_2 \leq 25$$
$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

3.- Un manufacturero desea producir dos artículos en cantidades X_1 y X_2. Cada artículo requiere del uso de materiales, mano de obra y equipo en las cantidades mostradas en la siguiente tabla. También se especifica la disponibilidad.

	X1	X2	Disponibilidad
Material	5	4	100
M. de Obra	3	8	172
Equipo	3	1	53

Si la ganancia está dada por $Z = X_1 + 2X_2$.

Encuentre la región de soluciones básicas factibles, no factibles y el máximo.

4.- Por el método gráfico encuente la región de soluciones y el óptimo de los sistemas siguientes. Indique las soluciones básicas factibles y no factibles.

a) $$\text{Min} \quad z = 3X_1 + 4X_2$$
$$-2X_1 + X_2 \leq 3$$
$$-X_1 + X_2 \geq -3$$
$$2X_1 + 3X_2 \geq 6$$
$$(X_1, X_2) \geq 0$$

b) $$\text{Max} \quad z = X_1 + X_2$$
$$-1/2X_1 + X_2 \geq 1$$
$$2/3X_1 + 2X_2 \geq 0$$
$$X_2 \leq 5$$
$$X_1 \leq 5$$
$$(X_1, X_2) \geq 0$$

5.- Utilice el método gráfico para resolver el siguiente problema.

Maximizar $z = 2X_1 + X_2$

$X_2 \leq 10$

$2X_1 + 5X_2 \leq 60$

$X_1 + X_2 \leq 18$

$3X_1 + X_2 \leq 44$

$(X_1, X_2) \geq 0$

B) USANDO EL METODO SIMPLEX RESUELVA LOS SIGUIENTES EJERCICIOS.

1.- max $z = x_1 + 4x_2 + 6x_3$

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 18$

$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 16$

$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 14$

$xj \geq 0$

2.- max $z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4$

$8x_1 + 2x2 + 5x_3 - x_4 \leq 30$

$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 10$

$2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 8$

$Xj \geq 0$

3.- max $z = 3x_1 + 2x_2$

$x_1 \leq 4$

$x_2 \leq 6$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$xj \geq 0$

4.- Considere el problema

$$\text{maximizar} \quad z = 3X_1 + 2X_2$$

$$2X_1 + 4X_2 \leq 22$$

$$-X_1 + 4X_2 \leq 10$$

$$2X_1 - X_2 \leq 7$$

$$X_1 - 3X_2 \leq 1$$

$$Xj \geq 0$$

a) Resuelva este problema en forma gráfica. Identifique los puntos extremos.

b) Resuelva con tablero simplex.

5.- Resuelva por método simplex el siguiente problema:

$$\text{maximizar} \quad z = 4X_1 + 3X_2 + 6X_3$$

$$3X1 + X_2 + 3X_3 \leq 30$$

$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 40$$

$$Xj \geq 0$$

6.- Resuelva por método simplex:

$$\text{Minimizar} \quad z = 4X_1 + 3X_2$$

$$2X_1 + X_2 \geq 10$$

$$-3X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$X_1 + X_2 \geq 6$$

$$Xj \geq 0$$

7.- Max $z = x_1 + x_2$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-2x_1 + x_2 \geq -5$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$xj \geq 0$$

8.- Max $z = 2x_1 + 5x_2$

$$x_1 - 2x_2 \geq 10$$

$$4x_1 + 5x_2 \geq 20$$

$$x_1 \leq 7$$

$$x_2 \leq 4$$

9.- Max $z = 3x_1 + 4x_2$

$$-2X_1 + X_2 \leq 3$$
$$-X_1 + X_2 \geq -3$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$Xj \geq 0$$

10.- min $z = 3x_1 + 5x_2$

$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 18$$
$$Xj \geq 0$$

11.- min $z = 3x_1 + 2x_2$

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 1$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$2/3x_1 + x_2 \geq 1$$
$$xj \geq 0$$

12.- Maximizar $z = X_1 + 2X_2 - X_3$

Sujeto a:

$$2X_1 + X_2 - 3X_3 \leq 5$$
$$-4X_1 - X_2 + X_3 \leq 4$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 6$$

NOTA: No hay restricción de no negatividad de las variables.

a) Resuelva por el método simplex.

b) Reformule este problema de tal forma que las variables solo puedan tomar valares positivos ($Xi \geq 0$), y resuelva por método simplex.

13.- Considere el problema:

Minimizar $z = 3X_1 - 4X_2 + X_3 - 2X_4$

Sujeto a:

$$2X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 10$$
$$X_3 + 2X_4 \leq 10$$
$$X_1 - X_2 + X_4 \geq -5$$
$$2X_1 + 3X_2 + X_3 + X_4 \leq 20$$

y

$$X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0 \quad X_3 \geq 0$$

NOTA: No hay restricción de no negatividad para X_4.

a) Reformule este problema y dé la formulación en forma estandard.

b) Construya el tablero inicial simplex, identifique la correspondiente solución inicial básica factible.

c) Encuentre una solución básica factible para el problema real, aplicando método simplex, hasta que todas las variables artificiales sean cero.

d) Encuentre una solución básica factible para el problema real al usar directamente el método simplex para minimizar la suma de las variables artificiales del tablero expresado en la parte b). (Fase I del Método de las 2 fases).

C) FORMULE Y RESUELVA LOS SIGUIENTES PROBLEMAS:

1.- Un fabricante de zapatos desea producir 3 nuevos modelos (A, B, C) en cantidades x_1, x_2 y x_3 respectivamente. Cada modelo requiere el uso de material, mano de obra y equipo.

El modelo A requiere 8 unidades de material, 5 minutos de tiempo de mano de obra y 6 minutos de tiempo de equipo; el modelo B requiere 10 unidades de material, 8 minutos de tiempo de mano de obra y 6 minutos de tiempo de equipo; el modelo C requiere 6 unidades de material, 10 minutos de tiempo de mano de obra y 8 minutos de tiempo de equipo.

Si se dispone de 2000 unidades de material, 8 horas de tiempo de mano de obra y 6.25 horas de tiempo de equipo; ¿Qué cantidad debe hacerse de cada modelo para maximizar las ganancias si éstas son de $10 para A, $15 para B y $8 para C?

2.- Un granjero planea criar pollos, pavos y patos. El tiene una instalación para solo 200 aves y desea limitar el número de pavos a un máximo de 25 y el número de pavos y patos no debe exceder de 100.

Las ganancias estimadas son $8, $12 y $16 por cada pollo, pato y pavo respectivamente.

¿Qué cantidad de cada ave debe criar el granjero para maximizar su ganancia?

NOTA: Utilice el método del pivote.

3.- Una empresa cuenta con 1000 toneladas de mineral b1, 2000 toneladas de mineral b2 y 500 toneladas de mineral b3. A partir de dichos minerales pueden extraerse y fundirse los productos x_1, x_2 y x_3. La empresa desea determinar la cantidad de cada producto que debe fabricar, a partir de los minerales aprovechables, para obtener el máximo provecho de la operación.

Las condiciones sobre los minerales son las siguientes:

El producto X_1 precisa 5 ton. de b_1, 10 de b_2 y 10 de b_3 por unidad.
El producto X_2 precisa 5 ton. de b_1, 8 de b_2 y 5 de b_3 por unidad.
El producto X_3 precisa 10 ton de b_1, 5 de b_2 y 0 de b_3 por unidad.

El fabricante obtendrá $100 de beneficio por unidad del producto X_1, ----- $200 por unidad de producto X_2 y $50 por unidad de producto X_3.

(Use el método del pivote para encontrar la solución)

4.- Un panadero tiene en bodega una provisión de harina, leche, huevos y levadura. Desea determinar cuanto debe hacer de cada producto (pan, pasteles y galletas). La información de que dispone se muestra en la siguiente tabla.

Materia Prima	Requerimientos de Materia Prima en cada producto			Disponibilidad de materia prima
	Pan	Pasteles	Galletas	
Harina (Kg)	12	16	8	200
Leche (lts)	2	3	1	40
Huevos	4	6	4	100
Levadura	2	1	2	30
Utilidad ($)	3	5	6	

El panadero desea saber al producir qué cantidad de pan, pasteles y galletas obtiene una ganancia máxima.

5.- Cuatro comidas son compradas en cantidades x_1, x_2, x_3, x_4; su contenido de calorías, vitaminas, carbohidratos y su precio por unidad están dados en la siguiente matriz.

	X_1	X_2	X_3	X_4
Calorías	2	0	1	3
Vitaminas	0	2	1	2
Carbohidratos	1	0	1	2
Precio	4	10	12	15

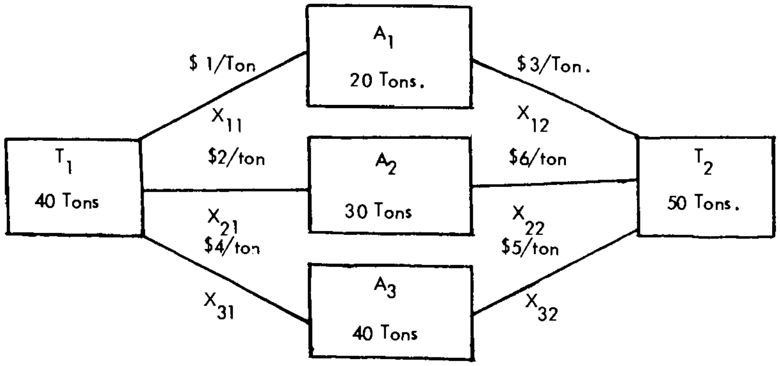
Los requerimentos mínimos de calorías son 15 unidades; los requerimentos mínimos de vitaminas son 8 unidades; como máximo pueden consumirse 13 unidades de carbohidratos. ¿Qué cantidad de cada comida debe ser comprada para satisfacer estos requerimientos y minimizar el costo total?

6.- Un manufacturero desea producir 2 artículos A y B, en cantidades X_1 y X_2 respectivamente. Cada artículo requiere el uso de material, mano de obra y equipo. El artículo A requiere de 5 unidades de material, 3 minutos de tiempo en mano de obra, 3 minutos en tiempo de equipo; el artículo B requiere de 4 unidades de material, 8 minutos de mano de obra y 1 minuto de tiempo de equipo. Si se dispone de 100 unidades de material, 4 horas de tiempo de mano de obra y 3.5 horas de equipo; y las ganancias en el artículo A son el doble que el B, encontrar la máxima ganancia.

D) DE LOS PLANTEAMIENTOS DE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS.

1.- Una compañía tiene tres almacenes A_1, A_2, y A_3, y dos tiendas de ventas al por menor T_1, T_2. Las demandas en las tiendas al por menor y el inventario en los almacenes, se muestran en la siguiente figura. Los costos de envío por tonelada también se muestran en la misma.

La compañía desea determinar la manera de realizar los envíos en forma tal que minimice los costos totales de envío, satisfaga las demandas de las tiendas de menudeo y no se excedan los inventarios en los almacenes.



2.- Supongamos que Inglaterra, Francia y España producen todo el trigo, cebada y avena en el mundo. La demanda mundial para el trigo requiere 125 millones de hectáreas para poder ser satisfecha. Similarmente 60 millones de hectáreas se requieren para el cultivo de la cebada y 75 millones de hectáreas para la avena. El total de tierra disponible para estos propósitos al igual que las horas de trabajo requeridas para trabajar cada hectárea así como su costo por unidad se da en las siguientes tablas:

	Total de tierra disponible (millones de ha.).	Horas de trabajo requeridas para trabajar una hectárea de: TRIGO	CEBADA	AVENA
Inglaterra	70	18	15	12
Francia	110	13	12	10
España	80	16	12	16

	($)Costo por hora de trabajo al sembrar : TRIGO	CEBADA	AVENA
Inglaterra	3	2.7	2.3
Francia	2.4	3.0	2.5
España	3.3	2.8	2.1

El problema radica en querer distribuir el uso de la tierra en cada país de tal manera que se satisfaga la demanda mundial y se minimice el costo total de trabajo.

3.- El despachador de una compañía de cargo aérea, controla 8 aviones del tipo I, 15 aviones del tipo II y 11 aviones del tipo III. Las capacidades en miles de toneladas son las siguientes: 45 los del tipo I; 7 los del tipo II y 5 los del tipo III.

Los aviones deben ser despachados a las ciudades A y B. Para el día de hoy requerimos en la ciudad A 20,000 toneladas y 28,000 toneladas en la ciudad B; la capacidad del avión que no se apraveche no tiene valor.

Un avión puede volar sólo una vez durante el día.

El costo de enviar un avión de la terminal a cada ciudad se da en la siguiente tabla:

	TIPO I	TIPO II	TIPO III
Ciudad A	23	15	1.4
Ciudad B	58	20	3.8

Sea X_1, X_2 y X_3 el número de aviones de cada tipo enviadas a la ciudad A y y_1, y_2, y_3 el número de avianes enviadas a la ciudad B.

4.- Supóngase que el Departamento de Policía ha pronosticado la demanda de carros patrulla en la Cd. de México para el periodo que empieza a las 12 hrs. del día 31 de diciembre y termina a las 12 hrs. del día 1º de enero.

Las 24 horas han sido divididas en períodos de 4 hrs. y la demanda tanto en carros patrulla como en personal motorizado (2 personas por patrulla) están dados a continuación:

Hora del día	Carros Patrulla .	Personal Motorizado .
12 - 16	300	600
16 - 20	400	800
20 - 24	500	1000
24 - 4	600	1200
4 - 8	400	800
8 - 12	200	400

El personal motorizado sólo puede trabajar 8 horas consecutivas y se cuenta con un total de 4,000 individuos. Formule un programa lineal que encuentre el mínimo número requerido para satisfacer la demanda en cada 4 horas.

5.- La compañía SOMEX produce refrigeradores, estufas y lavadoras. Durante el año entrante se espera que las ventas sean las siguientes:

Producto	TRIMESTRE			
	1	2	3	4
Refrigeradores	2000	1500	3000	1000
Estufas	1500	1500	1000	1500
Lavadoras	1000	3000	1500	3000

La compañía desea esquedular su producción para que cada trimestre satisfaga los requerimientos de demanda.

La gerencia ha decidido que el nivel de inventario para cada producto sea de al menos 100 unidades al final de cada trimestre. Al principio del primer trimestre no existe inventario de ningún producto.

Durante un trimestre solo se tienen 8500 horas de producción disponibles. Un refrigerador requiere 0.5 hrs.,una estufa 2 hrs.y una lavadora 1.5 hrs. de tiempo de producción. Los refrigeradores no pueden manufacturarse en el cuarto trimestre ya que se piensa crear una nueva línea de producción.

Suponga que cada artículo dejado en inventario al final de un trimestre incurre en un costo de $5 por llevarlo en inventario. La compañía desea una esquedulación de su producción que no exceda la limitación de tiempo de producción, que satisfaga las demandas de cada trimestre y los requerimientos de inventarios, y que mantenga los costos por llevar el inventario a su mínimo valor.

Sea R_t, E_t, L_t el número de refrigeradores, estufas y lavadoras fabricadas en el período t.

Formule este problema como uno de programación lineal.

CAPITULO IV

PROBLEMA DE TRANSPORTE

Una importante clase de programas lineales, cuyo origen es físico y económico, puede ser formulado en términos de una red compuesta por puntos (nodos) conectados por rutas (arcos) sobre los cuales se efectúa un transporte (flujo).

El clásico problema de transportación surge cuando se debe determinar un plan óptimo de embarque que:

a) Se origina en fuentes de suministro (almacenes) donde existe disponible un determinado inventario fijo de un artículo.

b) Son mandados directamente a su destino final en donde existe la necesidad de una cantidad fija del artículo.

c) Agotan los inventarios y satisfacen las demandas, esto es, la demanda total iguala la oferta.

d) Y finalmente el costo total debe satisfacer una función objetiva lineal, es decir, el costo de cada embarque es proporcional a la cantidad embarcada y el costo total es la suma de los costos individuales.

La técnica de transportación es aplicable a aquella subclase de problemas de programación lineal en lo cuales los requerimientos y recursos se expresan en términos de sólo un tipo de unidad.

La forma estándard de este problema fué formulada por privera vez por Frank L. Hitchcock (1941) en un artículo llamado "The Distribution of a Product From Several Sources to Numerous Localities."

Es importante el hacer notar que muchos problemas que no tienen ninguna relación con la transportación se ajustan al modelo matemático del problema de transportación.

Notación:

Supóngase que m almacenes (orígenes) contienen varias cantidades de un artículo que debe ser distribuído a n ciudades (destinos). Específicamente el orígen (i) debe deshacerse de la cantidad a_i (exactamente), mientras que la ciudad (j) debe recibir exactamente una cantidad b_j.

Debido al punto (c) tenemos:

$$a_i = b_j$$

Además de los números a_i y b_j que deben ser no negativos, se nos dá un conjunto de números c_{ij} (no restringido en signo). El número c_{ij} representa el costo (en caso de ser positivo) o la ganancia (si es negativo), de embarcar una cantidad unitaria desde el orígen (i) hasta el destino (j).

El problema estriba en determinar el número de unidades que deben ser embarcadas desde (i) hasta (j) (x_{ij}), de tal forma que se agoten los inventarios y que las necesidades sean cubiertas, todo ello a un costo mínimo.

La estructura especial de la matriz es evidente cuando las ecuaciones se escriben en forma estándard

$$\begin{array}{lr}
x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} & = a_1 \\
\qquad\qquad x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} & = a_2 \\
\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} & = a_m \\
 & \\
x_{11} \qquad + x_{21} + \cdots\cdots\cdots + x_{m1} & = b_1 \\
\quad x_{12} \qquad + x_{22} + \cdots\cdots\cdots + x_{m2} & = b_2 \\
\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\qquad x_{1n} \qquad + x_{2n} \cdots\cdots\cdots + x_{mn} & = b_n \\
 & \\
C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + \dots + C_{1n}x_{1n} + C_{21}x_{21} + C_{22}x_{22} + \dots + C_{2n}x_{2n} + C_{m1}x_{m1} + C_{m2}x_{m2} + \dots + C_{mn}x_{mn} & = Z
\end{array}$$

DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

En forma concisa tendremos:

Encontrar x_{ij} ($i = 1,2,....,m$; $j = 1,2,...,n$) de forma tal que se minimice:

$$C_{ij}x_{ij} = Z$$

sujeto a las restricciones:

$$x_{ij} = a_i \qquad (i = 1,2,..,m)$$

$$x_{ij} = b_j \qquad (j = 1,2,,,,n)$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{para toda } (i,j)$$

La causa de que este tipo de problemas sea factible a un tratamiento especial es el hecho de que $a_{ij} = 0$ ó 1 para toda (i,j).

Cuando la condición (c) no se satisface, entonces es necesario el introducir un origen o un destino figurado según sea el caso, para que tome el faltante - y se satisfaga dicha condición.

A diferencia del problema de programación lineal común, aquí tenemos que - si todas las a_i y todas las b_j son enteros, debe existir una solución óptima que - consista únicamente de enteros.

Cuando se presenta un problema de este tipo, generalmente sólo se requiere conocer los costos C_{ij} y las cantidades a_i y b_j las cuales se suelen presentar en la siguiente forma:

		Destino			
		1	2	3.......n	Disponible
	1	C_{11}	C_{12}	C_{13}... C_{1n}	a_1
o r	2	C_{21}	C_{22}	C_{23}... C_{2n}	a_2
i g e		. . .	. . .	. . . . . .	. . .
n	m	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}... C_{mn}	a_m
Requerido		b_1	b_2	b_3 ... b_n	

Tabla A.

Una importante característica de este problema es que el modelo puede ser abreviado en la forma de un arreglo rectangular, como se muestra a continuación:

		Destino			disponible
		1	2	.... n	
origen	1	x_{11}	$x_{/2}$	.... x_{1n}	a_1
	2	x_{21}	x_{22}	.... x_{2n}	a_2
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	m	x_{m2}	x_{m2}	.... x_{mn}	a_m
requerido		b_1	b_2	b_n	

Tabla B

Las tablas A y B se pueden combinar de tal forma que el renglón (i), columna (j) muestre los valores de x_{ij} y de C_{ij}. Así pues tendremos:

		Destino				
		1	2		n	disponible
	1	x_{11} C_{11}	x_{12} C_{12}	....	x_{1n} C_{1n}	a_1
o r	2	x_{21} C_{21}	x_{22} C_{22}	....	x_{2n} C_{2n}	a_2
i g e		. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	m	x_{m1} C_{m1}	x_{m2} C_{m2}	....	x_{mn} C_{mn}	a_m
requerido		b_1	b_2	....	b_n	

En cualquier etapa del algoritmo el cuadrado (i, j) contiene C_{ij} y x^o_{ij} (valor numérico actual asignado a x_{ij}) La ausencia de tal número implica que x_{ij} es no-básica y por lo tanto de valor cero. Las variables básicas de valor cero se muestran como ceros, (no como ausencias). Los cuadrados en la extrema derecha y en la parte inferior contienen los totales de los renglones o de las columnas respectivamente.

Cada renglón y columna del arreglo representa una ecuación.

Especificamente:

Las ecuaciones renglón son: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ (i = 1, 2 ,..., m)

Las ecuaciones columna son: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ (j = 1, 2, ..., n)

Con objeto de que estas ecuaciones continuen siendo satisfechas debemos mantener la suma de las entradas en cada renglón y columna igual al total del renglón o columna correspondiente (a_i ó b_j) que aparecen en los cuadrados a la extrema derecha e inferiores.

Ejemplo IV-1.-

Una compañía de motores tiene 5 clientes a los cuales les manda motores desde 3 diferentes almacenes. Los 5 clientes se identifican como J, K, L, M, N mientras que los 3 almacenes son P, Q, R. Los costos de los almacenes son identicos de aquí que los costos pertinentes sean los costos variables de embarque a cada uno de los clientes. La tabla de costos es como sigue:

_ Destino _

Origen		J	K	L	M	N
	P	20	10	15	10	8
	Q	15	30	5	12	14
	R	18	15	20	7	19

Los requerimientos de los clientes son los siguientes:

J.- 100 unidades

K.- 70 unidades Total 580 unidades.

L.- 140 unidades

M.- 180 unidades

N.- 90 unidades

Unidades disponibles de los almacenes:

P.- 200 unidades

Q.- 300 unidades Total 650 unidades

R.- 150 unidades

Utilizando para este problema la forma general del modelo matemático de programación lineal tendremos:

$$\text{Min } Z = 20x_{PJ} + 10x_{PK} + 15x_{PL} + 10x_{PM} + 8x_{PN} + 5x_{QJ} + 30x_{QK} + 5x_{QL} + 12x_{QM} + 14x_{QN} + 18x_{RJ} + 15x_{RK} + 20x_{RL} + 7x_{RM} + 19x_{RN}$$

Sujeto a:

$$x_{JP} + x_{JQ} + x_{JR} = 100$$

$$x_{KP} + x_{KQ} + x_{KR} = 70$$

$$x_{LP} + x_{LQ} + x_{LR} = 140$$

$$x_{MP} + x_{MQ} + x_{MR} = 180$$

$$x_{NP} + x_{NQ} + x_{NR} = 90$$

$$x_{JP} + x_{KP} + x_{LP} + x_{MP} + x_{NP} \quad 200$$

$$x_{JQ} + x_{KQ} + x_{LQ} + x_{MQ} + x_{NQ} \quad 300$$

$$x_{JR} + x_{KR} + x_{LR} + x_{MR} + x_{NR} \quad 150$$

$x_{ij} \geq 0$ para todas i y j

Para formular este problema como uno de transportes hacemos

Origen i = Almacén i (i = 1, 2, 3)

Destino j = Cliente j (j = 1, 2, 3, 4, 5)

x_{ij} = Cantidad embarcada del almacén (i) al cliente (j)

C_{ij} = Costos unitarios asociados con x_{ij}

a_i = Unidades disponibles en el almacén i

b_j = Unidades requeridas por el cliente (j)

Nuestra tabla quedará ahora:

		Destino						
		J	K	L	M	N	cliente ficticio S	Disponible
origen	P	x_{PJ} 20	x_{PK} 10	x_{PL} 15	x_{PM} 10	x_{PN} 8	x_{PS} 0	200
	Q	x_{QJ} 15	x_{QK} 30	x_{QL} 5	x_{QM} 12	x_{QN} 14	x_{QS} 0	300
	R	x_{RJ} 18	x_{RK} 15	x_{RL} 20	x_{RM} 7	x_{RN} 19	x_{RS} 0	150
requerido		100	70	140	180	90	650-580 = 70	650

Nótese que S es un cliente ficticio con objeto de satisfacer la condición (c).

En este ejemplo introdujimos x_{ij} en la parte superior izquierda del cuadrado (i, j). Cuando se resuelve el problema x_{ij} se cambia por su valor y el símbolo x_{ij} no aparece ni siquiera en la primera tabla. Aquí hemos introducido el símbolo como una representación de que en su lugar debemos poner el valor correspondiente.

Ejemplo IV-2.-

La compañía ACE de computadoras ha entrenado 85 hombres para dar servicio a sus computadoras y los tiene localizandos en la siguiente forma:

Monterrey - 20
Guadalajara - 13
Mex. D. F. - 36
Puebla - 16
Total 85

Los 16 técnicos de Puebla no pueden dar servicio a la nueva computadora X-540 debido a falta de entrenamiento.

Cuatro clientes llaman solicitando servicio:

Pérez necesita 12 técnicos

López necesita 23 técnicos

Ramírez necesita 21 técnicos

Suárez necesita 29 técnicos

Total = 85 técnicos

Pérez y López tienen instaladas computadoras X-540 y por lo tanto no se les puede dar servicio desde Puebla. Los costos variables conectados con la asignación de los técnicos de las distintas localidades a los clientes son:

	Pérez	López	Ramírez	Suárez
Monterrey	8	7	4	7
Guadalajara	10	3	6	8
México, D.F.	7	9	4	5
PUebla	-	-	8	6

Plantear el problema como uno de programación lineal y luego como uno de transporte, con objeto de determinar la asignación óptima de técnicos a los clientes que minimice el costo total.

$$\text{Min } Z = 8x_{MP} + 7x_{ML} + 4x_{MR} + 7x_{MS} + 10x_{GP} + 3x_{GL} + 6x_{GR} + 8x_{GS} + 7x_{DP} + 9x_{DL} + 4x_{DR} + 5x_{DS} + 8x_{PR} + 6x_{PS} + Mx_{PP} + mx_{PL}$$

sujeto a:

$$x_{PP} + x_{MP} + x_{GP} + x_{DP} = 12$$

$$x_{PL} + x_{ML} + x_{GL} + x_{DL} = 23$$

$$x_{MR} + x_{GR} + x_{DR} + x_{PR} = 21$$

$$x_{MS} + x_{GS} + x_{DS} + x_{PS} = 29$$

$$x_{MP} + x_{ML} + x_{MR} + x_{MS} \leq 20$$
$$x_{GP} + x_{GL} + x_{GR} + x_{GS} \leq 13$$
$$x_{DP} + x_{DL} + x_{DR} + x_{DS} \leq 36$$
$$x_{PP} + x_{PL} + x_{PR} + x_{PB} \leq 16$$
$$x_{ij} \geq 0 \text{ para todas } i \text{ y } j$$

La tabla apropiada para el planteamiento como problema de transporte será :

Destino

	P	L	R	S	Disponibles
M	x_{MP} 8	x_{ML} 7	x_{MR} 4	x_{MS} 7	20
G	x_{GP} 10	x_{GL} 3	x_{DR} 6	x_{GS} 8	13
D	x_{DP} 7	x_{DL} 9	x_{DR} 4	x_{DS} 5	36
P	x_{PP} M	x_{PL} M	x_{PR} 8	x_{PS} 6	16
requerido	12	23	21	29	85

En este caso conviene notar que como los requerimientos son iguales a las disponibilidades, no hizo falta introducir ninguna variable figurada (o de holgura).

Notamos tambien que dos de los caminos no pueden ser usados debido a que ningún técnico puede ser mandado de (P) a (P) o a (L).

El problema de caminos inusables puede hacerse que ajuste con nuestro problema general consirerándolos como caminos usables, pero asignándoles un alto costo (Método de la Gran M) y reteniéndolos en la matriz. Si la solución se intenta a mano la Gran M puede no usarse, pero es indispensable cuando la solución utiliza otros medios.

En el problema de transporte definimos las variables básicas factibles igual que lo hicimos antes con el problema de programación lineal general, sólo que aquí la solución se efectúa directamente en el arreglo rectangular que hemos planteado.

Vemos que en un problema de transporte tenemos (m+n) ecuaciones (m orígenes y n destinos). Si empleamos el criterio desarrollado con anterioridad al cubrir el problema de programación lineal general, deberíamos tener que nuestras soluciones básicas factibles no degeneradas deben contar con (m+n) variables mayores que cero (m+n entradas diferentes a cero en nuestro arreglo rectangular). Esta consideración resulta de la omisión de una nueva restricción con la cual contamos ahora que es :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

y como :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad \text{para } (i = 1, 2, \ldots, m)$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad \text{para } (j = 1, 2, \ldots, n)$$

tendremos :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n-1} b_j \\ = & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \\ = & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \qquad \text{para } j = n \\ = & \; b_n \end{aligned}$$

de donde vemos que una de las (m+n) ecuaciones puede ser obtenida de las (m+n-1) ecuaciones restantes y nuestro conjunto de ecuaciones es dependiente pues existe una relación lineal entre las ecuaciones.

De lo anterior vemos que una solución básica factible no degenerada de-

de contar con (m+n-1) entradas diferentes a cero en nuestro arreglo rectangular,

Definición IV-1.-

Un conjunto de entradas en un arreglo rectangular se dice que ocupan "posiciones independientes" si es imposible formar círculos cerrados recorriendo dichas entradas.

Las condiciones para que una solución básica factible no degenerada - exista son las siguientes:

1.- Que satisfaga las restricciones.

2.- Exactamente (m+n-1) entradas mayores que cero.

3.- Entradas en posiciones independientes (si no no es básica)

Solución Inicial.-

Habiendo encontrado la tabla inicial, el siguiente paso es el de determinar una solución básica factible inicial. Para ésto se usa el Método de la Esquina Noroeste. (Nombre dado por Charnes y Cooper en 1953), método también desarrollado por Jeorge Dantzig.

Como candidata para la primera variable básica escójase cualquier x_{ij} (generalmente x_{11}) y hágase su valor tan grande como las restricciones (renglón y columna) lo permitan, ésto es, haga:

$$x_{ij} = \min \quad a_i \ , \ b_j$$

Caso 1.-

Si $a_i < b_j$ entonces a todas las demás variables en el renglón (i) se les asigna el valor cero y serán no básicas. Elimínese el renglón (i) y redúzcase el valor de b_j a $(b_j - a_i)$ y procédase en forma similar para valuar una variable en el arreglo rectangular reducido, compuesto de los (m-1) renglones y n columnas restantes.

Caso 2.-

Si $a_i > b_j$ entonces la columna (j) se elimina y a_i se reemplaza por $(a_i - b_j)$. Se procede con el arreglo rectangular reducido en forma similar a la descrita en el caso 1.

Caso 3.-

Si $a_i = b_j$ elimínese ya sea el renglón o la columna pero NO AMBOS. Sin embargo si varias columnas pero solo un renglón quedan en el arreglo reducido, - entonces elimínese la columna (j). En caso contrario, procédase al revés.

Continúe en esta forma, paso a paso, alejándose de la esquina noroeste, hasta que finalmente obtenga un valor para la celda sureste.

Esta regla selecciona tantas variables básicas como haya columnas más renglones menos uno (m*n - 1) debido a que en el paso final quedan un renglón y una columna los cuales son ambos eliminados.

Aplicando al método anterior al ejemplo IV-1

		(2)	(5)	(11)	(14)			
		J	K	L	M	N	S	(3) (6)
(8)	P	100(1) 20	70(4) 10	30(7) 15	10	8	0	~~200~~ 100 30 (12) (15)
(17)	Q	15	30	110(10) 5	180(13) 12	10(16) 14	0	300 190 10 (21)
(20)	R	18	15	20	7	80(19) 19	70(22) 0	~~150~~ 70
		100	70	~~140~~ 110(9)	180	90 80(18)	70	650

Los pasos seguidos para la obtención de la asignación mostrada fueron:

Paso .-

Se traza la matriz 3 x 6 junto con los requisitos de renglones de columnas y los costos apropiados.

Paso 2.-

Escogemos $x_{11} = x_{PJ}$ como primera variable básica

Aquí $\min \left[a_1 , b_1 \right] = \min \left[200, 100 \right] = b_1 = 100$

$\Rightarrow x_{11} = 100$ (1)

Eliminamos la columna 1 (2)

Reemplazamos a_1 por $a_1' = (a_1 - b_1) = (200-100) = 100$ (3) $\left[\text{caso } 1 \right]$

Paso 3.-

Escogemos $x_{12} = x_{PK}$ como la segunda variable básica

$\text{Min} \left[a_1' , b_2 \right] = \min \left[100, 70 \right] b_2 = 70$

$\Rightarrow x_{12} = 70$ (4)

Eliminamos la columna 2 (5)

Reemplazamos a_1' por $a_1'' = (a_1' - b_2) = (100 - 70) = 30$ (6)

Paso 4.-

Escogemos $x_{13} = x_{PL}$ como la tercera variable básica

$\text{Min} \left[a_1'' , b_3 \right] = \min \left[30, 140 \right] = a_1'' = 30$

$\Rightarrow x_{13} = 30$ (7)

Eliminamos el renglón 1 (8)

Reemplazamos b_3 por $b_3' = (b_3 - a_1'') = (140-30) = 110$ (9)

Paso 5.-

Escogemos $x_{23} = x_{QL}$ como la cuarta variable básica

$\text{Min} \left[a_2, b_3' \right] = \min \left[300, 110 \right] = b_3' = 110$

$\Rightarrow x_{23} = 110$ (10)

Eliminamos la columna 3 (11)

Reemplazamos a_2 por $a_2' = (a_2 - b_3') = (300-110) = 190$ (12)

Paso 6.-

Escogemos $x_{24} = x_{QM}$ como la quinta variable básica

$\text{Min} \left[a_2', b_4 \right] = \min \left[190, 180 \right] = b_4 = 180$

$\Rightarrow x_{24} = 180$ (13)

Eliminamos la columna 4 (14)

Reemplazamos a_2' por $a_2'' = (a_2' - b_4) = (190-180) = 10$ (15)

Paso 7.-

Escogemos $x_{25} = x_{QN}$ como la sexta variable básica

$\text{Min} \left[a_2'', b_5 \right] = \min \left[10, 90 \right] = a_2'' = 10$

$\Rightarrow x_{25} = 10$ (16)

Eliminamos el renglón 2 (17)

Reemplazamos b_5 por $b_5' = (b_5 - a_2'') = (90-10) = 80$ (18)

Paso 8.-

Escogemos $x_{35} = x_{RN}$ como la séptima variable básica

$\text{Min} \left[a_3, b_5' \right] = \min \left[150, 80 \right] = b_5' = 80$

$\Rightarrow x_{35} = 80$ (19)

Eliminamos la columna 5 (20)

Reemplazamos a_3 por $a_3' = (a_3 - b_5') = (150-80) = 70$ (21)

Paso 9.

Solo queda $x_{36} = x_{RS}$ para ser la octava variable básica

Como comprobación deberemos tener que $a_3' = b_6$

$\Rightarrow x_{36} = 70$ (22)

Nuestra tabla muestra ahora la solución básica factible inicial.

Para obtener el costo de la solución básica factible encontrada, multiplicamos el valor de cada asignación por su correspondiente costo unitario y sumamos. Así obtenemos:

$$Z = (20 \times 100) + (10 \times 70) + (15 \times 30) + (5 \times 110) + (12 \times 180) + (14 \times 10) + (19 \times 80) + (70 \times 0)$$

$$Z = 7520$$

Podemos notar que nuestra solución:

1) Satisface todas las restricciones (inherente en el método de solución).

2) Tiene 8 entradas mayores que cero (esto es $m + n - 1 = 3+6-1 = 8$) incluyendo la del destino figurado.

3) No existen círculos cerrados (pues el método de solución solo se mueve a la derecha y abajo).

Tenemos pues que nuestra solución intermedia es básica factible no degenerada.

La única complicación que puede surgir usando este método es que hagamos menos de (m+n-1) entradas diferentes de cero (solución degenerada) lo cual sucede cuando la cantidad disponible y la cantidad requerida en un paso dado se agoten simultáneamente. Este problema lo -- trataremos más adelante.

A pesar de que la Regla de la Esquina Noroeste tiene la gran ventaja de ser extremadamente sencilla, generalmente no suministra una solución cercana a la óptima, razón por la cual se han desarrollado otros métodos que proporcionan soluciones iniciales que requieren de un menor número de iteraciones para llegar a la óptima, si bien necesitan de un poco de esfuerzo. Una de ellas es el Método de Aproximación de Voguel.

Este método se basa en el uso de "diferencias" asociadas con cada renglón y columna de la tabla de costos. Una "diferencia", renglón ó columna, se define como la diferencia aritmética entre el elemento más pequeño y el siguiente más pequeño en ese renglón ó columna. Esta cantidad nos indica la penalidad unitaria mínima en la que se incurriría si fallamos en hacer la asignación a la celda con costo mínimo en ese renglón o columna. De aquí que este procedimiento, en forma repetitiva efectúe la asignación factible máxima en la celda de menor costo del renglón o columna sobrante que tenga la mayor diferencia.

Debido a que una asignación ya efectuada no es cambiada, el procedimiento termina tan pronto como la oferta y la demanda total se agotan.

Procedimiento de Solución.-

1) Construya la tabla de costos y requerimientos y vaya al paso 3.

2) Use la tabla de costos y requerimientos para el problema que queda después de que las asignaciones previas (tanto ceros como positivas) han sido efectuadas.

3) Calcule cada diferencia renglón y diferencia columna.

4) Seleccione el renglón ó columna con la mayor diferencia (en los empates se escoge cualquiera en forma arbitraria).

5) Asigne tanto como sea posible a la celda con menor costo en ese renglón ó columna.

6) Asigne ceros a todas las demás celdas de aquel renglón o columna en lo cual la oferta o la demanda se agote.

7) Efectúe la única asignación factible en todos aquellos renglones ó columnas que ya solo tengan una celda sin asignación.

8) Elimine todos aquellos renglones ó columnas totalmente asignados y ya no los tome en cuenta en las iteraciones posteriores. Si ya no existen renglones ó columnas sin asignaciones, pare, pues ha terminado. En caso contrario vaya al paso 2.

Aplicando el Método de Aproximación de Voguel al Ejemplo IV-1 tendríamos:

	J	K	L	M	N	S		
P	20	10	15°	10	8	0	200	8
Q	15	30	5^{140}	12	14	0	300	5
R	18	15	20°	7	19	0	150	7
	100	70	140	180	90	70		
	3	5	⑩	3	6	0		
			↑					

	J	K	M	N	S		
P	20	10	10	8	0°	200	8
Q	15	30	12	14	0^{70}	160	⑫ ←
R	18	15	7	19	0°	150	7
	100	70	180	90	70		
	3	5	3	6	0		

	J	K	M	N		
P	20	10	10	8	200	2
Q	15	30	12	14	90	2
R	18°	15°	7^{150}	19°	150	⑧ ←
	100	70	180	90		
	3	5	3	6		

	J	K	M	N		
P	20	10^{70}	10	8	200	2
Q	15	30°	12	14	90	2
	100	70	30	90		
	5	⑳	2	6		
		↑				

	J	M	N		
P	20	10	8^{90}	130	2
Q	15	12	14°	90	2
	100	30	90		
	5	2	⑥		
			↑		

J	M		
20^{10}	10^{30}	40	⑩ ←
15^{90}	12°	90	3
100	30		
5	2		

Cabe aclarar que con práctica todos los pasos se pueden hacer en la misma tabla.

Los pasos anteriores nos dan la siguiente solución:

	J	K	L	M	N	S	
P	10 20	70 10	15	30 10	90 8	0	200
Q	90 15	30	140 5	12	14	70 0	300
R	18	15	20	150 7	19	0	50
	100	70	140	180	90	70	

C = 5020

Vemos que 5020 < 7520 (Método de la Esquina Noroeste).

La optimalidad al igual que antes se puede investigar examinando la función objetiva para buscar valores negativos de c'_{ij}, estando ésta en función solamente de variables no básicas. Tenemos:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \; c_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i=1,2,3,\ldots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j=1,2,3,\ldots,n)$$

que pueden ser expresadas como:

$$0 = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

$$0 = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

múltiplos de estas ecuaciones, conteniendo la variable básica correspondiente con coeficiente unitario, se pueden sumar o restar a la función objetiva para eliminar las variables básicas de ella. Llamemos u_i $(i = 1,2,\ldots,m)$ al múltiplo de la ecuación renglón (i) y v_j - - - $(j = 1,2,\ldots,n)$ al múltiplo de la ecuación columna (j).

Tenemos pues:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \; x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} u_i \left(a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{n} v_j \left(b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (C_{ij} - u_i - v_j) \, x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} u_i \, a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \, b_j$$

y para obtener coeficientes de cero para las variables básicas en Z deberemos tener:

$$C_{rs} = u_r + v_s$$

para cada variable básica x_{rs}

Como el número u_is' más el número de v_j's = (m + n) y solo tenemos (m+1-1) variables básicas, una de las u_i ó v_j puede tomar un valor arbitrario (p. ej. Cero). Para ahorrar trabajo se escoge el renglón a columna que contenga más variables básicas.

En nuestra ejemplo (marcando las celdas básicas con diagonales punteadas) tendremos:

Tabla (A)

	J	K	L	M	N	S	
P	100 20	70 10	30 15	10	8	0	200 0
Q	15	30	110 5	180 12	10 14	0	300 -10
R	18	15	20	7	80 19	70 0	150 -5
	100 20	70 10	140 15	180 22	90 24	70 5	

u_i

v_j

Escogemos el renglón uno como la ecuación redundante y hacemos $u_1 = 0$ con lo cual inmediatamente obtenemos (recordando que $C_{rs} = u_1 + v_s$) $v_1 = 20$, $v_2 = 10$ y $v_3 = 15$.

Como $C_{23} = C_{QL} = 5$ y $v_3 = 15$ $\quad u_2 = -10$

Como $C_{24} = C_{QM} = 12$ y $u_2 = -10$ $\quad v_4 = 22$

Como $C_{25} = C_{QN} = 14$ y $u_2 = -20$ $\quad v_5 = 24$

Como $C_{35} = C_{RN} = 19$ y $v_5 = 24$ $\quad u_3 = -5$

Como $C_{36} = C_{RS} = 0$ y $u_3 = -5$ $\quad v_6 = 5$

Una vez que todas las u_i y v_j se han calculado, estamos en posibilidad de aplicar el criterio Simplex de optimalidad. Para ésto obtenemos el valor de C'_{ij} para todas aquellas celdas correspondientes a las variables no básicas x_{ij}, anotando el valor obtenido en la parte superior derecha de la casilla correspondiente.

Nuestra solución será óptima si:

$$C'_{ij} \geq 0 \quad \text{para toda } (i, j)$$

es decir si:

$$C_{ij} - u_i - v_j \geq 0 \text{ para toda } (i, j)$$

ó

$$C_{ij} \geq u_i + v_j \quad \text{para toda } (i, j)$$

Por otro lado, si para alguna s y t

$$C'_{st} < 0$$

es decir si:

$$C_{st} < u_s + v_t$$

entonces es posible el obtener una nueva solución básica que disminuya el valor de Z, aumentando el valor de la variable no básica x_{st}. Si existen varias $C'_{ij} < 0$ se escogerá como la variable entrante a aquella que corresponda a la casilla con el menor valor de $C'_{ij} < 0$ (debido a que será esta variable la que parece incrementar el valor de Z más rápidamente). Expresando de otra forma tendremos que:

$$x_e = x_{st}$$

donde x_{st} será aquella variable para la que

$$C'_{st} = C_{st} - u_s - v_t = \min_{(i,j)} \left[(c_{ij} - u_i - v_j) < 0 \right]$$

$$= \min_{(i,j)} c'_{ij} < 0$$

Encerramos c'_{st} en un círculo para indicar que es el cuadro correspondiente a x_e.

Tabla B

	J	K	L	M	N	S	
P				-12 10	-16 8	-5 0	200 0
Q	5 15	30 30				5 0	300 -10
R	3 18	10 15	10 20	-10 7			150 -5
	100 20	70 10	140 15	180 22	90 24	70 5	

$Z = -12x_{PM} - 16x_{PN} - 5x_{PS} + 5x_{QJ} + 30x_{QK} + 5x_{QS} + 3x_{RJ} + 10x_{RK} + 10x_{RL} - 10x_{RM}$

Como $C'_{PN} = C'_{15} = -16 < C_{ij}$ para toda (i,j), esta celda será la correspondiente a la variable básica entrante y $x_e = x_{15}$.

Debe notarse que el trabajo efectuado sobre la tabla (B) puede efectuarse directamente sobre la tabla (A), aquí no se hizo sólo por hacer más claro el -- procedimiento.

La variable saliente se determina en la misma forma que en el problema de Prog. Lin. Gral., es decir, primero cuando el valor de x_e se incrementa. Con - este objeto introducimos el símbolo $+\theta$ en el cuadrado (s, t) para indicar que un valor llamado θ se le asignará a la variable no básica $x_{st} = x_e$ con objeto de convertirla en básica. A continuación suponemos que $x_{st} = \theta$ y se ajustan simbólicamente las entradas básicas con objeto de seguir cumpliendo las restricciones. Para - este objeto pondremos $+\theta$ en algunas variables básicas y $-\theta$ en otras y nada en las restantes.

Conviene hacer notar que cuando hacemos $x_e = \theta$ habremos introducido con ésto una entrada no independiente, ya que ahora existirá un círculo cerrado que parte de x_e y regresa a x_e. Las entradas por las cuales pasa dicho círculo serán las que se verán afectadas por un $+\theta$ ó un $-\theta$ según sea el caso, con objeto de mantener la validez de las restricciones.

Aplicando lo anterior a nuestro ejemplo, obtendremos:

	J	K	L	M	N	S	
P	100 20	70 10	30 - θ (4) 15	10	+ θ (1) 8	0	200
Q	15	30	110 + θ (3) 5	180 12	10 - θ (2) 14	0	300
R	18	15	20	7	80 19	70 0	150
	100	70	140	180	90	70	

Tabla (C)

Paso 1.- Introducimos $+\theta$ en la celda (1, 5) correspondiente a la variable x_e

Paso 2.- Vemos que la restricción n de la columna 5 ya no se satisface por lo tanto ponemos $-\theta$ en (2, 5) [si lo hacemos en (3, 5) entonces ya no podemos formar un círculo de entradas básicas que regrese a la celda (1,5)]

Paso 3.- Como la restricción Q ya no se satisface, ponemos $+\theta$ en (2, 3) [si lo hacemos en (2, 4) no podremos formar un círculo de entradas básicas que regresa a la celda (1, 5)].

Paso 4.- Como la restricción L ya no se satisface ponemos $-\theta$ en (1, 3) con lo cual hemos cerrado el círculo y terminado de poner θ 's.

Tambien aquí debe notarse que el trabajo efectuado sobre la tabla (C) pudo haberse efectuado sobre la tabla (A), Nuevamente se separó para hacer más claro el ejemplo.

Una vez que todas las θ se han puesto, reemplazamos θ por aquel valor que haga cero primero algunas de las variables básicas. Esto es, θ toma el valor x_{qn} correspondiente al valor menor de las variables básicas a las cuales se les adjudicó $-\theta$ de forma tal que $x_{qn} - \theta$ se haga cero. Así pues $x_{qn} = x_s$.

Usando el valor de θ así determinado, todas las variables básicas se recomputan para obtener la nueva solución básica.

Se repite el ciclo cuantas veces sea necesario.

Es importante hacer notar que si estamos minimizando el valor de Z, su valor deberá disminuir en cada iteración (o mantenerse igual en caso de degeneración). Si por algún motivo aumentara de valor, esto es un indicio de que hemos cometido un error.

En nuestro ejemplo tenemos que aquellas entradas básicas a las cuales les asignamos $-\theta$ fueron:

$30 - \theta$	celda (1, 3)
$10 - \theta$	celda (2, 5)

vemos por lo tanto que $x_s = x \quad = x_{25}$ y que $\theta = 10$. Sustituyendo el valor de θ en nuestra tabla obtenemos:

2ª solución

	J	K	L	M	N	S	
P	100 20	70 10	20 15	10	10 8	0	200
Q	15	30	120 5	180 12	14	0	300
R	18	15	20	7	80 19	70 0	150
	100	70	140	180	90	70	

Tabla (D)

$Z = (100 \times 20)+(70 \times 10)+(20 \times 15)+(10 \times 8)+(120 \times 5)+(180 \times 12)+(80 \times 19)+$

$+(70 \times 0) = 7360.$

Empezando nuevamente el ciclo obtendremos:

	J	K	L	M	N	S	
P	100 20	70 10	20- θ 15	-12 10	10+ θ 8	11 0	200 0
Q	5 15	30 30	120+ θ 5	180- θ 12	16 14	21 0	300 -10
R	-13 18	-6 15	-6 20	+θ -26 7	80- θ 19	70 0	150 11
	100 20	70 10	140 15	180 22	90 8	70 -11	

Tabla (E)

Como $C'_{34} = -26 < C'_{ij}$ para toda (i, j) entonces:

$$x_{34} = x_{RM} = x_o$$

Al introducir θ en la celda (3,4) y formar el círculo tendremos que las entradas básicas a las cuales se les asigna $-\theta$ son:

$20 - \theta$	celda (1, 3)
$180 - \theta$	celda (2, 4)
$80 - \theta$	celda (3, 5)

Vemos pues que:

$$x_s = x_{1L} = x_{13}$$

y que:

$$\theta = 20$$

Substituyendo el valor de θ obtenemos la tabla (F).

3a. Solución.

	J	K	L	M	N	S	
P	100- θ 20	70 10	26 15	14 10	30+ θ 8	11 0	200 0
Q	+θ -21 15	4 30	140 5	160- θ 12	-10 14	-5 0	300 16
R	-13 18	-6 15	20 20	20+ θ 7	60- θ 19	70 0	150 11
	100 20	70 10	140 -11	180 -4	90 8	70 -11	

TABLA F

$Z= (100 \times 20)+(70 \times 10)+(30 \times 8)+(140 \times 5)+(160 \times 12)+(20 \times 7)+(60 \times 19)+(70 \times 0)=$

$= 6840$

$$x_e = x_{21}$$

$$\theta = 60$$

$$x_s = x_{35}$$

Prosiguiendo en la misma forma, obtendremos la solución óptima al llegar a la 7a. solución la cual será (tabla G).

Tabla G

	J	K	L	M	N	S	
P	5 20	70 10	10 15	30 10	90 8	10 0	200 0
Q	100 15	20 30	140 5	2 12	6 14	60 0	300 0
R	6 18	8 15	18 20	150 7	14 19	3 0	150 -3
	100 15	70 10	140 5	180 10	90 8	70 0	

Z= (70 x 10) + (30 x 10) + (90 x 8) + (10 x 0) + (100 x 15) + (140 x 5) + (60 x 0) + (150x 7) = 4970.

Vemos que esta solución es óptima debido a que $C'_{ij} > 0$ para toda (i, j).

Degeneración en el Problema de Transporte.-

Una solución degenerada en el problema de transporte se reconoce en que los valores de una o más de las asignaciones en nuestra tabla son cero.

Supongamos el ejemplo anterior sólo que variando la 1°disponibilidad de 200 a 180 y el tercer requerimiento de 140 a 120.

Nuestra solución inicial será:

	J	K	L	M	N	S	
P	100 20	70 10	10 15	10	8	0	180
Q	15	30	110 5	180 12	10 14	0	300
R	18	15	20	7	80 19	70 0	150
	100	70	120	180	90	70	

como no hemos modificado los costos, nuestros C'_{ij} deberán ser los mismos que en el ejemplo anterior y la celda (1,5) corresponderá a la variable de entrada, con lo que obtenemos:

Z = 7220

	J	K	L	M	N	S	
P	100 20	70 10	10- θ 15	10	+ θ 8	0	180
Q	15	30	110+ θ 5	180 12	10- θ 14	0	300
R	18	15	20	7	80 19	70 0	150
	100	70	120	180	90	70	

de donde vemos que x_{13} y x_{25} están empatadas para dejar la base. Seleccionamos arbitrariamente una de ellas (x_{25} en nuestro caso) y a la no seleccionada (x_{13}), para indicar que sige siendo básica, le asignamos un valor (ε) infinitesimal y esta variable se manipula como cualquier otra afijación con la salvedad de que:

$$t + \varepsilon \begin{cases} t \text{ si } t > 0 \\ \varepsilon \text{ si } T = 0 \end{cases}$$

. Así pues obtenemos

	J	K	L	M	N	S	
P	100 20	70 10	ε- θ 15	-12 10	10+ θ 8	11 0	180 0
Q	5 15	30 30	120+ θ 5	180- θ 12	16 14	21 0	300 -10
R	-13 18	-6 15	-6 20	+ θ -26 7	80- θ 19	70 0	150 11
	100 20	70 10	120 15	180 22	90 8	70 -11	

Z = 7060

$x_e = x_{34}$

$x_s = x_{13}$

$\theta = \varepsilon$

	J	K	L	M	N	S	
P	100 20	70 10	15	10	10 8	0	180
Q	15	30	120 5	180 12	14	0	300
R	18	15	20	ε 7	80 19	70 0	150
	100	70	120	180	90	70	

$Z = 7060$

Se procede igual que en el caso no degenerado hasta llegar a la solución óptima.

Si ε no hubiese quedado eliminada durante las iteraciones intermedias y apareciera en la solución óptima, simplemente eliminamos la ε que aparezca en ésta, asignándole a esa variable básica un valor de cero.

PROBLEMA DE LA ASIGNACION.-

Existen casos especiales del problema de transporte los cuales presentan ventajas de computación adicionales sobre éste, razón por la cual se han desarrollado métodos especiales de cálculo para estos casos. Una de las situaciones más comunes es aquella que se conoce como "Problema de la Asignación" el cual es el caso más sencillo de todos los problemas de programación lineal.

El problema de las asignaciones es un caso especial del modelo de transportación en el que existe una matriz cuadrada (m=n), con cada una de las restricciones de disponibilidad y cada uno de los requerimientos iguales a la unidad ($a_i = 1$ y $b_j = 1$ para toda i y j)

Un problema típico es aquel de asignar personas a diferentes trabajos en donde tenemos tantos trabajos como personas y cada persona debe asignarse a solo un trabajo. A una persona i se le asigna el trabajo j con un costo C_{ij}.

En el caso anterior.

(1)......
$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la persona i efectúa el trabajo j} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

El problema consiste en determinar como se debe realizar la asignación con objeto de minimizar la suma de todos los productos $C_{ij}\ x_{ij}$ (costos)

En nuestro modelo matemático de programación lineal, debido a que cada persona se le puede asignar solo un trabajo, tendremos que :

(2)....
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

y debido que a cada trabajo se le asigna solo una persona

(3)....
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

El objetivo del problema de asignación es el de escoger x_{ij} que satisfaga (1) (2) y (3) en tal forma que el costo total

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\ x_{ij}$$

sea minimizado.

La condición (1) hace en ocasiones que el problema pueda ser muy difícil de resolver, debido a que esta condición asigna a x_{ij} un rango desconectado compuesto de valores discretos.

Ejemplo IV-3.-

Una compañía tiene 4 máquinas y 4 trabajos para hacer. A cada máquina le tomaría un día hacer cualquiera de los trabajos ¿ Cuál es la mejor asignación de los trabajos a las máquinas suponiendo que los costos de ejecutar cada uno de los trabajos en cada máquina son los siguientes ? (matriz de efectividad):

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	10	16	12	8
M_2	8	12	15	12
M_3	15	13	13	11
M_4	12	15	10	7

Vemos que si intentamos resolver el problema utilizando nuestro modelo general de programación lineal obtendremos un modelo cuya matriz de coeficientes es enorme.

$$
\begin{array}{llllllllllllllllr}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} & & & & = 1 \\
 & x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & & & = 1 \\
 & & x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} & & = 1 \\
 & & & x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} & = 1 \\
x_{11} & + x_{21} & + x_{31} & + x_{41} & = 1 \\
\quad +x_{12} & \quad +x_{22} & \quad +x_{32} & \quad +x_{42} & = 1 \\
\qquad +x_{13} & \qquad +x_{23} & \qquad +x_{33} & \qquad +x_{43} & = 1 \\
\qquad\quad +x_{14} & \qquad\quad +x_{24} & \qquad\quad +x_{34} & \qquad\quad +x_{44} & = 1
\end{array}
$$

Puede deducirse que la matriz de coeficiente crecerá aún más cuando el problema crece.

Si intentamos resolverlo usando el modelo de transporte obtendremos:

	T_1	T_2	T_3	T_4	
M_1	1 10	0 16	12	8	1
M_2	8	1 12	15	12	1
M_3	15	0 13	1 13	11	1
M_4	12	15	0 10	1 7	1
	1	1	1	1	4

Utilizando este método es probable que se requieran muchas iteraciones para llegar a la solución óptima y no conviene intentarlo debido a que existe otro procedimiento más sencillo.

Teorema IV-1.-

Si en un problema de asignación sumamos o restamos una constante a cada elemento de un renglón(o columna) en la matriz de efectividad, entonces una asignación que hace mínima la efectividad total en una matriz también minimizará la efectividad total de la otra matriz.

Demostración Intuitiva:

Si restamos A unidades de cada elemento del renglón (i) tendremos que como cada solución posible debe tener exactamente una asignación en el renglón (i), el costo total para la nueva matriz será siempre exactamente A unidades menor que el que hubiésemos obtenido con la matriz original. De aquí que la solución que minimice el costo total para una matriz deberá también minimizar el costo total para la otra.

Utilizando el teorema anterior podemos transformar nuestra matriz original de costos en una que consista de elementos positivos o nulos. Una solución óptima consistirá en hacer las asignaciones a los elementos con valor a cero.

El procedimiento de solución estriba precisamente en obtener una matriz modificada como la mencionada.

Definición IV-2.-

Un conjunto de ceros se dice independiente si no existen dos (ó más) ceros del conjunto considerado en la misma columna o en el mismo renglón.

La técnica de solución consiste en reducir la matriz de costos hasta encontrar un conjunto de n ceros independientes uno en cada renglón y en cada columna. Este conjunto (no necesariamente único) proporciona una solución óptima para el problema de asignación considerado.

Procedimiento Sistematico.-

Paso 1.-

A todos los elementos del renglón (i) se les resta el elemento más pequeño de dicho renglón.

En nuestro ejemplo escogemos el número más pequeño del primer renglón y lo restamos de cada uno de los elementos de dicho renglón. El resultado es:

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	2	8	4	0
M_2	8	12	15	12
M_3	15	13	13	11
M_4	12	15	10	7

Supongamos ahora que hemos asignado un trabajo a cada máquina; cualquiera que sea la asignación que hayamos hecho, el costo de la misma con la nueva matriz será $8.00 menor que con la matriz anterior.

Procedemos ahora a restar el elemento mínimo en cada renglón restante de todos los elementos de su renglón para obtener :

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	2	8	4	0
M_2	0	4	7	4
M_3	4	2	2	0
M_4	5	8	3	0

Paso 2.-

Si aún no hemos obtenido una matriz que posea <u>cuando menos</u> un cero en cada renglón y <u>cuando menos</u> un cero en cada columna procedemos a restar el elemento mínimo en cada columna que aún no tenga ceros de cada uno de los elementos de esa columna, obtenemos así:

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	2	6	2	0
M_2	0	2	5	4
M_3	4	0	0	0
M_4	5	6	1	0

-Notemos que en tanto nuestra matriz consiste de elementos positivos o ceros, la efectividad total no puede ser negativa para ninguna asignación. En consecuencia, si podemos escoger una asignación que tenga un total de cero, no puede haber asignación alguna con un total menor.

Dada una matriz con algunos ceros y todos sus elementos no negativos ¿ cómo buscamos la asignación máxima entre los ceros ?

Paso 3.-

A) Examine los renglones sucesivamente hasta que se encuentre uno de ellos que tenga <u>exactamente</u> <u>un</u> cero no marcado. Márquelo con un cuadrito (☐) ya que ahí se efectuará una asignación. Marque con una X todos los otros ceros en la misma columna para indicar que no se pueden usar para hacer otras asignaciones.

B) Examínese a continuación las columnas para encontrar ceros <u>no marcados</u> (uno exactamente) los que se marcarán con un cuadrito (☐) y también se marcarán con una X todos los demás ceros no marcados en el renglón correspondiente.

C) Repítanse (a) y (b) sucesivamente hasta que una de dos situaciones ocurra:

- A) Ya no hay ceros sin marcar
- B) Los ceros que quedan sin marcar son cuando menos dos en cada renglón o columna.

Si lo que resulta es el caso (A) tenemos una asignación máxima (que pue de no ser completa). Si resulta el caso (B) podemos usar el ingenio y/o tanteos para localizar una asignación máxima.

Sea una asignación máxima obtenida de la situación (A) o a partir de la situación (B) podemos decir que si se tiene una asignación en cada renglón esta asignación máxima es una solución completa del problema original (Caso I) y hemos terminado. Si no se tiene una asignación en cada renglón, nos enfrentamos con el problema de modificar la matriz de efectividad mediante sumas o restas, (caso II). Vaya al paso 4

Volviendo a nuestro ejemplo:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \\
\hline
M_1 & 2 & 6 & 2 & \boxed{0}^{(1)} \\
M_2 & \boxed{0}^{(2)} & 2 & 5 & 4 \\
M_3 & 4 & \boxed{0}^{(3)} & \cancel{0}^{(3)} & \cancel{0}^{(1)} \\
M_4 & 5 & 6 & 1 & \cancel{0}^{(1)} \\
\hline
\end{array}$$

(1) por (a)
(2) por (a)
(3) por (b)

Vemos que tenemos la situación (A) que cae dentro del caso II y lo dejamos pendiente hasta que veamos el paso 4.

Ejemplo IV.- 4

Supongamos que tenemos la siguiente matriz de efectividad a la cual ya le han sido aplicados los pasos uno y dos y se le desea aplicar el paso tres

$$\begin{array}{|ccccc|}
\hline
7 & 0 & 5 & 4 & 3 \\
0 & 0 & 3 & 8 & 6 \\
0 & 6 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 7 & 0 \\
4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

1er. paso por (a)

$$\begin{array}{|ccccc|}
\hline
7 & \boxed{0} & 5 & 4 & 3 \\
0 & \cancel{0} & 3 & 8 & 6 \\
0 & 6 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 7 & 0 \\
4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

2o. paso por (a)

$$\begin{array}{|ccccc|}
\hline
7 & \boxed{0} & 5 & 4 & 3 \\
\boxed{0} & \cancel{0} & 3 & 8 & 6 \\
\cancel{0} & 6 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 7 & 0 \\
4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

3er paso por (b)

$$\begin{array}{|ccccc|}
\hline
7 & \boxed{0} & 5 & 4 & 3 \\
\boxed{0} & \cancel{0} & 3 & 8 & 6 \\
\cancel{0} & 6 & 0 & 3 & 0 \\
\cancel{0} & 1 & 0 & 7 & 0 \\
4 & 3 & \cancel{0} & \boxed{0} & \cancel{0} \\
\hline
\end{array}$$

4o. paso(caso B)tanteos.

$$\begin{array}{|ccccc|}
\hline
7 & \boxed{0} & 5 & 4 & 3 \\
\boxed{0} & \cancel{0} & 3 & 8 & 6 \\
\cancel{0} & 6 & \boxed{0} & 3 & \cancel{0} \\
\cancel{0} & 1 & \cancel{0} & 7 & 0 \\
4 & 3 & \cancel{0} & \boxed{0} & \cancel{0} \\
\hline
\end{array}$$

final(asignación máxima y completa)

$$\begin{array}{|ccccc|}
\hline
7 & \boxed{0} & 5 & 4 & 3 \\
\boxed{0} & \cancel{0} & 3 & 8 & 6 \\
\cancel{0} & 6 & \boxed{0} & 3 & \cancel{0} \\
\cancel{0} & 1 & \cancel{0} & 7 & \boxed{0} \\
4 & 3 & \cancel{0} & \boxed{0} & \cancel{0} \\
\hline
\end{array}$$

Nota.-

a) Es posible que exista más de una asignación máxima.

b) No es necesario escribir repetidamente la matriz. Pueden hacerse todos los pasos en la misma.

Paso 4.-

Este paso solo es necesario cuando llegamos al caso II del paso 3 debido a que entonces hemos llegado a una asignación máxima (obtenida de la situación (A) o a partir de la situación (B)) la cual no constituye una solución completa. Para agregar ceros adicionales se usan las siguientes reglas:

Empezando con la asignación máxima obtenida

a) Se marcan todos los renglones en los que no se ha hecho una asignación.

b) se marcan las columnas que no han sido marcadas y que tienen <u>ceros</u> (asignados o no) en los renglones marcados.

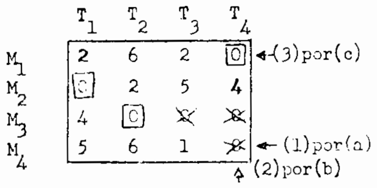
c) Se marcan los renglones que aún no están marcados y que tienen <u>asignaciones</u> en las columnas marcadas.

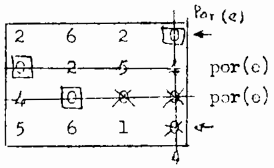
d) Se repiten los pasos (b)y(c) hasta que termina la cadena de marcas.

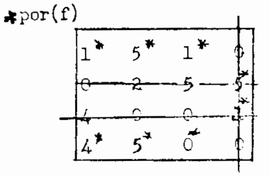
e) Se trazan líneas a través de todos los renglones <u>no</u> marcados y a través de todas las columnas marcadas. (deberemos obtener tantas líneas como asignaciones teníamos.)

f) Se examinan los elementos que no tienen una línea que pase por ellos y se resta el menor de ellos de todos los elementos de la matriz que no tienen una línea que pase por ellos. Se suma además este elemento a cada uno de los localizados en la intersección de dos líneas Se dejan los elementos sobrantes de la matriz sin cambio. Olvide las asignaciones anteriores y vuelva al paso 3.

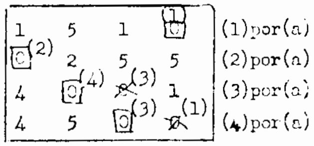
Aplicando lo anterior al ejemplo que dejamos pendiente







volvemos al paso 3 y obtenemos:



Vemos que hemos obtenido una asignación máxima y completa.

$$C^* = 8 + 8 + 13 + 10$$
$$= 39$$

EJEMPLO IV-(a).-

En una fábrica de aparatos eléctricos se tienen 3 máquinas, 2 de las cuales pueden realizar tres trabajos diferentes (uno a la vez) y una cuatro. La máquina 1 puede emplearse para los trabajos: A, B, C y D, la 2 para los trabajos: A, B y D y la 3 para los trabajos: A, B y C. Debido a diferencias en las máquinas y en la habilidad de sus operarios, los costos de realizar éstas tareas varian de acuerdo con la máquina. Estos se presentan en la siguiente tabla:

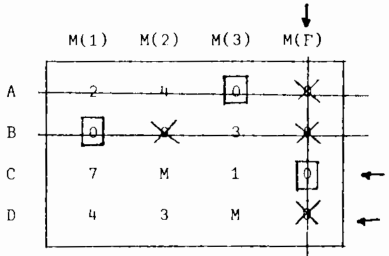
	M(1)	M(2)	M(3)
A	10	16	12
B	8	12	15
C	15	-	13
D	12	15	-

Se requiere asignar los trabajos a las máquinas de tal forma que el costo total sea mínimo.

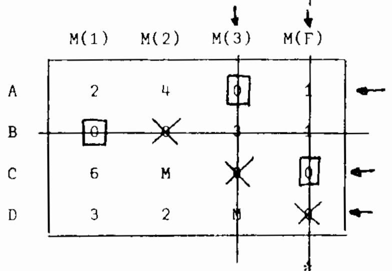
Solución.-

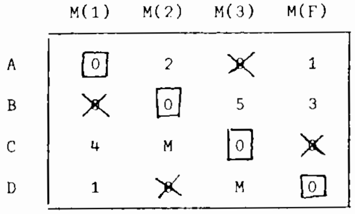
	M(1)	M(2)	M(3)	M(F)
A	10	16	12	0
B	8	12	15	0
C	15	M	13	0
D	12	15	M	0

	M(1)	M(2)	M(3)	M(F)
A	2	4	0	0
B	0	0	3	0
C	7	M	1	0
D	4	3	M	0



	M(1)	M(2)	M(3)	M(F)
A	2	4	0	1
B	0	0	3	1
C	6	M	0	0
D	3	2	M	0





$$C^* = 10 + 12 + 13 + 0 = 35$$

2.- Considere que un problema de transporte tiene la siguiente tabla de requerimientos y costes:

		Destino		Disponibilidad
		1	2	
Clase	1	6	4	2
	2	8	5	4
Demanda		3	3	

a) Resuelva este problema por el método Simplex aplicado al transporte.

b) Reformule este problema como un problema general de programación lineal y resuelva por el método Simplex.

3.- Tres refinerías disponen del gas requerido para abastecer 4 ciudades. Los datos se dan a continuación:

		Ciudad				Gas disponible
		1	2	3	4	( )
Refinería	1	4	7	9	10	8
	2	6	4	3	6	10
	3	9	6	4	8	6
Requerimientos ( )		5	3	8	4	

Determine la política óptima para efectuar el transporte.

4.- Para el siguiente problema de transporte; ¿Los elementos {(1,1), (1,4), (2,2), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)} forman un conjunto básico?

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	a_i
1	9	16	4	11	19	8
2	8	6	8	12	8	10
3	1	12	3	23	6	30
b_j	5	4	9	8	22	

a) En caso afirmativo encuentre la solución correspondiente. Iniciando con esta solución encuentre todas las soluciones alternativas óptimas del problema.

b) Si a_3 cambia a $30 + \delta$ y b_4 cambia a $8 + \delta$, encuentre el rango de valores de δ para los que la solución óptima encontrada sigue siendo óptima.

c) Volviendo al problema original (con $\delta = 0$), encuentre el rango de valores para C_{12} para los que la primera solución básica factible óptima sigue siendo óptima, ¿Cuál será la solución óptima cuando C_{12} cambia a 2?

d) Volviendo al problema original (con $\delta = 0$ y $C_{12} = 16$) encuentre el rango de valores de C_{35} para los que la solución inicial básica factible obtenida sigue siendo óptima. ¿Cuál será una solución óptima cuando C_{35} cambia a 20?

5.- Use los elementos: { (1,4), (2,3), (2,4), (3,2), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3)} como solución inicial básica para $\delta = 0$ y resuelva el problema:

i \ j	1	2	3	4	5	a_i
1	6	11	14	11	4	$3+\delta$
2	7	17	9	10	5	15
3	9	5	7	18	0	14
4	9	13	13	15	7	10
b_j	3	$9+\delta$	14	7	9	

a) ¿Para qué rango de valores de δ la solución básica óptima obtenida continúa siendo óptima?.

6.- Considere el problema de transporte teniendo la siguiente tabla de requerimientos y costos.

		Destino					
		1	2	3	4	5	Disponibilidad
Origen	1	8	6	3	7	5	20
	2	5	M	8	4	7	30
	3	6	3	9	6	8	30
	4	0	0	0	0	0	20
Demanda		25	25	20	10	20	

a) Obtenga la solución inicial básica factible siguiendo el método de la esquina noroeste.

b) Obtenga la solución inicial básica factible siguiendo el método de Aproximaciones de Vogel.

c) Compare los valores de la función objetivo para esas soluciones.-- Escoja la mejor y obtenga la solución óptima.

7.- a) Resuelva el siguiente problema cuando $\lambda = 0$ y obtenga 2 soluciones óptimas:

i \ j	1	2	3	a_i
1	5	$14-2\lambda$	7	15
2	6	7	8	20
3	$14+\lambda$	$24-3\lambda$	9	4
b_j	7	11	21	

b) Resuelva también para cualquier valor $\lambda \geq 0$

8.- El total de requerimientos en el mercado excede la cantidad de material disponible en la planta. Las deficiencias deben ser cubiertas con importación. Todos los mercados tienen las mismas prioridades. Determine qué cantidad de la demanda en cada mercado debe ser cubierta por cada planta con el fin de utilizar los materiales disponibles a un costo mínimo de transporte.

		Mercado					Disponibilidades en la planta (tons)
		1	2	3	4	5	
Planta	1	3	9	5	6	7	10
	2	2	1	8	10	13	25
	3	3	12	6	5	2	13
	4	1	9	14	3	2	33
Requerimientos en el mercado (ton)		30	22	17	19	12	

9. Una firma que produce un solo producto tiene tres plantas y cuatro clientes. Las tres plantas producirán 3000, 5000 y 4000 unidades respectivamente, durante el siguiente período de tiempo. La firma tiene un contrato para vender 4000 unidades al cliente 1, 3000 unidades al cliente 2 y cuando menos 1000 unidades al cliente 3. Los clientes 3 y 4 quieren comprar la mayor cantidad posible de nuestro producto. El beneficio neto asociado al embarque de una unidad de la planta i al cliente j se da en la siguiente tabla.

		cliente			
		1	2	3	4
Planta	1	65	63	62	64
	2	68	67	65	62
	3	63	60	59	60

La directiva desea saber cuantas unidades deben venderse a los clientes 3 y 4 y cuántas unidades deben enviarse de cada planta a cada cliente con el fin de maximizar el beneficio.

a) Formule este problema como uno de transporte al construir de forma apropiada una tabla de requerimientos y costos.

b) Use el método Simplex aplicado al transporte para resolver el problema formulado en (a).

CAPITULO V

TEORIA DUAL

Para cada problema de programación lineal existe otro problema de programación lineal muy estrechamente relacionado con él, al cual se le denomina DUAL. Al problema original le denominaremos de aquí en adelante problema primo.

Sea el siguiente caso:

Problema primo.-

(0) Max $Z_x = C_1x_1 + C_2\ x_2 + \ldots\ldots\ldots + C_nx_n$

OJO:- b_i puede ser negativa y está -- permitida.

Sujeto a:

(1) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n \quad b_1$

(2) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n \quad b_2$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

(m) $a_{m1}\ x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n \quad b_m$

$$x_j \quad 0 \quad (j = 1,2,3,\ldots., n)$$

El problema dual correspondiente se obtiene asociando a cada restricción una variable y a cada variable una restricción, trasponiendo los renglones y las columnas de coeficientes en las restricciones, intercambiando el papel de los coeficientes de la función objetiva y las constantes, invirtiendo las desigualdades y minimizando en lugar de maximizar.

Problema Primo	Problema Dual
Restricción	Variable
Variable	REstricción.

Es decir, existe una variable por cada una de las restricciones primas y una restricción dual por cada una de las variables primas.

La relación primo-dual podemos representarla por medio de la siguiente tabla:

Primo ≤

		x_1	x_2	x_3	.....	x_n	min
Dual	y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	.....	a_{1n}	b_1
	y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	.....	a_{2n}	b_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	.....	a_{mn}	b_m
	Max	C_1	C_2	C_3	.....	C_n	

≥

de donde resulta calso que:

Problema Dual.-

(0) Min $Z_y = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots\ldots + b_my_m$

(2) $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq C_1$

(2) $a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq C_2$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

(n) $a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_{mn} \geq C_n$

$$y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3,\ldots, m)$$

Ejemplo IV-5.-

$$\text{Max } Z_x = x_1 + 2x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 600$$

$$x_2 \leq 300$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 2400$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2,)$$

el problema dual correspondiente será:

$$\text{Min } Z_y = 600y_1 + 300y_2 + 2400y_3$$

S.A.

$$y_1 + 3y_3 \geq 1$$

$$y_2 + 4y_3 \geq 2$$

$$y_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3)$$

El tratamiento de algunas complicaciones encontradas en el problema primo es como sigue;

a) Si el problema primo tiene una restricción que es una igualdad - (sea la ecuación i), entonces obtendremos un problema dual igual que antes sólo que y_i será ahora no restringida en signo.

b) Si x_j no está restringida en signo, el problema dual sólo se modificará haciendo que la restricción (j) sea una igualdad.

En general, las siguientes leyes de correspondencia se aplican entre el problema primo y el dual.

Primo	[illegible]
Función objetiva (max Z_x)	Términos constantes
Términos constantes	Función objetiva (Min Z_y)
Matriz de Coeficientes	Matriz de Coeficientes transpuesta
Relación:	Variable:
Desigualdad (i) : $\leq$	$y_i \geq 0$
Ecuación (i) : =	y_i no restringida en signo
Variable	Relación
$x_j \geq 0$	Desigualdad (j) : $\geq$
x_j no restringida en signo	Ecuación (j) : =

Ejemplo IV-6.-

Problema primo.-

$$\text{Max } Z_x = x_1 + x_2 + x_3$$

Sujeto a:

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 3$$
$$2x_2 - x_3 \geq 4$$
$$(x_1, x_2) \geq 0 \quad ; x_3 \text{ no restringida en signo.}$$

Problema Dual.-

$$\text{Min } Z_y = 5y_1 + 3y_2 - 4y_3$$

Sujeto a:

$$y_1 + y_2 \geq 1$$
$$-3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 1$$
$$4y_1 \geq y_3 = 1$$
$$y_1 \text{ no restringida en signo; } (y_2, y_3) \geq 0$$

Debido a que el problema dual es tambien un problema de programación lineal, deberá contar a su vez con un problema dual.

Teorema IV- 2.-

El dual del dual es el primo. Es decir la relación entre el problema primo y su dual es simétrica.

Del teorema anterior es claro que no tiene importancia a cual de los dos problemas se le llama primo y a cual dual.

A continuación veremos las propiedades y relaciones existentes entre el problema primo y su dual.

COMPLEMENTALIDAD

Lema IV-1.-

Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \ldots\ldots y_n)$ son soluciones factibles del problema primo y dual respectivamente entonces:

$$Z_x \leq Z_y$$

Prueba.-

$$Z_x = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = \qquad \left[\text{pues } C_j \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \text{ en el dual}\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \qquad \left[\text{cambiando solo } x_j \text{ y } y_i\right]$$
$$\leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i = Z_y \qquad \left[\text{pues } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \text{ en elprimo}\right]$$

lo que queda demostrado.

Tenemos entonces que debido a que la rutina simplex automáticamente identifica la solución básica dual complementaria, al resolver un problema (primo o dual) automáticamente estaremos resolviendo el otro.

Veamos como el método Simplex identifica las soluciones básicas complementarias en general.

Notación.-

Supongamos que el conjunto inicial de ecuaciones para resolver el problema primo es :

$$(\alpha)\ldots\begin{cases} Z_x - \sum_{j=1}^{n} C_j x_j = 0 \\ s.a.\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad \text{para } (i= 1,2,3,\ldots,n) \end{cases}$$

Sea $C_j' = (z_j - C_j)$ el coeficiente de x_j en la ecuación (0) actual, obtenida por el método símplex (j= 1, 2, 3,... ,n+m).

Del sistema de ecuaciones (α) vemos que los coeficientes de las variables de holgura en la función objetiva original son cero (C_j = 0 para j =n+1..n+m)

De acuerdo con la anterior notación, nuestra función objetiva, cuando hayamos obtenido la solución óptima, puede representarse como:

$$Z_x + (z_1^* - C_1)x_1 + (z_2^* - C_2)x_2 + \ldots + (z_n^* - C_n)x_n + Z_{n+1}^* x_n + \ldots + Z_{n+n}^* x_{n+n} = Z^*$$

Comparando la función objetiva original con la función objetiva final queda claro que z_j^* es la cantidad neta que hemos modificado al coeficiente $(-C_j)$ de la función original mediante la Rutina Simplex para obtener el nuevo coeficiente de x_j en la función objetiva final.

Vemos entonces que si j > n j = n+i z_j^* nos indica el número de veces que la ecuación (i) ha sido sumada (directa o indirectamente) a la ecuación (0) original durante el proceso de ejecutar el método Simplex. Esto es debido a que en la ecuación (0) original tiene C_{n+i} = 0 y el conjunto de ecuaciones originales tiene x_{n+i} con coeficiente = 1 en la ecuación (i) y cero en todas las demás.

Cabe aclarar que z_j^* para j > n no indica que la ecuación (i) haya sido sumada directamente (en un paso) a la ecuación (0) z_j^* veces; esta cifra sólo no indica que el resultado final de sumarle algún múltiplo de la ecuación (i) en algunos pasos y restarle algún múltiplo de la misma en otros tiene el resultado indicado. Esta suma algebráica pudo haberse efectuado por medio de otra ecuación a la cual se le había sumado antes la ecuación (i).

Lema IV-2.-

a) $Z_x^* = z_{n^*}\, x_i\, b_i$

b) $z_y^* = z_{n^*}\, x_i\, a_{ij}$

para (j= ,2,...,n)

pues z_{nk}^{x} = No. de veces que la ecuación (i) se suma a la ec (0) como Z_x=0 originalmente su valor lo obtiene de las sumas de las ecuaciones (i) que se le hacen hasta llegar a la solución óptima.

z_n = número de veces que la ecuación (i) se sumó a la ecuación (0) por el coef. de X_j en las ecuaciones (i) a (m).

Teorema IV-3.-

Tan pronto hayamos encontrado la solución óptima (usando la Rutina Simplex) para el problema primo, entonces estamos en posición de obtener la solución óptima del dual. El valor de la variable dual (i) es igual al coeficiente de la variable de holgura (i) del problema primo en la ecuación (o).

Así pues:

$$y_i^* = z_{n+i}^* \quad \text{para } (i= 1,2,\ldots,n)$$

Prueba.-

Para probarlo debemos demostrar que la solución $(y_1, y_2, \ldots y_m) = (z_{n+1}^*, z_{n+2}^*, \ldots z_{n+m}^*)$ es factible para el problema dual y que además es óptima.

a) ¿es factible?

i) ¿es no negativa?

$z_{n+i}^* \geq 0$ para (i= 1,2,...,m) debido al criterio para tener optimalidad en el Método Simplex.

ii) ¿Satisface las restricciones?

Sabemos que:

$(z_j^* - C_j) \geq 0$ para (j=1,2,...,n) debido al criterio para tener optimalidad en el Método Simplex).

$$\left(\sum_{i=1}^{m} z^{*}_{n+i}\, a_{ij} - C_j \right) \geq 0 \qquad \left[\text{por el lema 4 b}\right]$$

de aquí que la solución sea factible pues:

$$\sum_{i=1}^{m} z^{*}_{n+i}\, a_{ij} \geq C_j$$

es decir, $z^{*}_{n+i} = y^{*}_{i}$ cumple con las restricciones $\sum_{i=1}^{m} y_i\, a_{ij} \geq C_j$ para toda j.

b) ¿ Es esta una solución óptima ?

Por lema (1):

$$Z_x \leq Z_y = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad \text{para cualquier solución dual factible}$$

pero lema(2 a) dice:

$$Z^{*}_{x} = \sum_{i=1}^{m} z^{*}_{n+i} b_i$$

por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{m} z^{*}_{n+i} b_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

pero por suposición:

$$y^{*}_{i} = z^{*}_{n+i}$$

y como hemos alcanzado el limite inferior nuestra solución es óptima.

L.Q.Q.D.

Introduzcamos ahora variables de holgura para el problema dual con lo cual obtenemos :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{n+j} = C_j \qquad \text{para } (j = 1,2,\ldots,n)$$

Teorema Iv-4.- Teorema Dual.-

Suponiendo que soluciones factibles finitas existen tanto para el problema primo como para el problema dual entonces:

a) existe una solución óptima finita para ambos la cual satisface:

b) $Z^{*}_{x} = Z^{*}_{y}$

Prueba.-

a) El lema IV-1 dice que $Z_x \leq Z_y$ lo cual implica que existe una solución óptima finita para ambos problemas (pues max $Z_x \leq Z_y$ y min $Z_y \geq Z_x$)

b) Por el teorema IV-3 ($y^{*}_{i} = z^{*}_{n+i}$) tenemos que :

$$Z^{*}_{y} = \sum_{i=1}^{m} b_i y^{*}_{i} = \sum_{i=1}^{m} b_i z^{*}_{n+i} \;\ldots\ldots\; (\alpha)$$

del lema (2 a):

$$Z^{*}_{x} = \sum_{i=1}^{m} b_i z^{*}_{n+i} \;\ldots\ldots\ldots\; (\beta)$$

de (α) y (β) :

$$Z^{*}_{x} = Z^{*}_{y}$$

Teorema IV-5.-

Suponiendo que hemos obtenido una solución óptima para el problema primo usando el Simplex, entonces el valor óptimo de la j-ava variable de holgura del problema dual es igual al coeficiente de la j-ava variable original del problema primo en la ecuación (0) final. Es decir:

$$y^{*}_{m+j} = (z^{*}_{j} - C_j) \qquad \text{para } (j= 1,2,\ldots,n)$$

Prueba.-

$$z^{*}_{j} = \sum_{i=1}^{m} z^{*}_{n+i} a_{ij} \qquad (j=1,2,\ldots,n) \left[\text{por el lema 2 b}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y^{*}_{i} a_{ij} \; ; \;\ldots\ldots\ldots\; (\alpha) \qquad \left[\text{por el lema 3}\right]$$

por definición:

$$y^{*}_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^{*}_{i} - C_j \;\ldots\; (\beta) \quad \text{para } (j = 1,2,\ldots,n)$$

Substituyendo (α) en (β)

$$y^{*}_{m+j} = (z^{*}_{j} - C_j) \text{ L.Q.Q.D.}$$

Corolario IV-1.-

a) $y^{*}_{i} = 0$ siempre que $x^{*}_{n+i} > 0$ ($i = 1,2,\ldots,n$)

b) $y^{*}_{n+j} = 0$ siempre que $x^{*}_{j} > 0$ ($i = 1,2,\ldots,n$)

Prueba.-

Si tenemos que $x^{*}_{k} > 0$ ($k = 1,2,\ldots,n$) esto implica que x^{*}_{k} es una variable básica y por lo tanto $(z^{*}_{k} - C_k) = 0$

Si tenemos que $x^{*}_{n+i} > 0$ ($i= 1,2,\ldots,m$) esto implica que x^{*}_{n+i} es una vabasica por lo que

riable $z^*_{n+i} = 0$

Por teorema IV-3 $(y^*_i = z^*_{n+i})$ se prueba (a)

Por teorema IV-5 $(y^*_{n+j} = z^*_j - C_j)$ se prueba (b)

Como el dual es el primo:

$$x^*_j = 0 \qquad \text{siempre que } y^*_{n+j} > 0 \qquad \text{para } (j= 1,2,\ldots,n)$$

$$x^*_{n+i} = 0 \qquad \text{siempre que } y^*_i > 0 \qquad \text{para } (i= 1,2,\ldots,n)$$

La relación existente entre las dos soluciones óptimas se conoce con el nombre de "holgura complementaria".

Teorema IV-6.-

Supóngase que existen soluciones factibles finitas para el primo y el dual. Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+n})$ una solución básica factible no óptima y $(z_j - C_j)$ el coeficiente correspondiente de x_j en la ecuación (0), $(j=1,2,\ldots,n+n)$.

Considere la siguiente solución básica NO FACTIBLE para el dual:

$$y_i = z_{n+i} \qquad \text{para } (i= 1,2,\ldots,n)$$

$$y_{n+j} = z_j - C_j \qquad \text{para } (j= 1,2,\ldots,n)$$

entonces:

$$Z_x = Z_y$$

es decir:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Prueba.-

Usando la demostración del lema IV-2 pero sin hacer alusión a la optimalidad obtenemos que:

$$Z_x = \sum_{i=1}^{m} z_{n+i} b_i$$

$$Z_y = \sum_{i=1}^{m} z_{n+i} b_i$$

de donde:

$$Z_x = Z_y$$

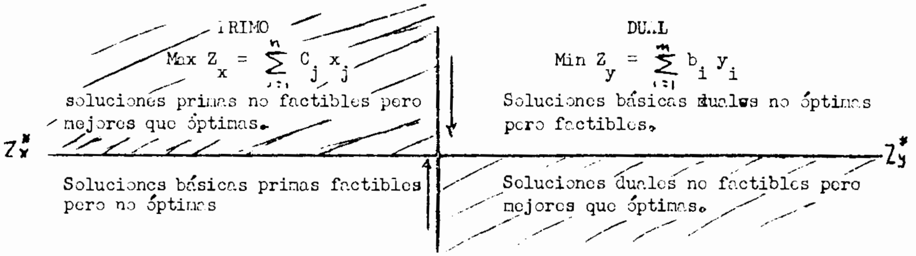
Ejemplo IV-7.-

Consideremos nuevamente nuestro ejemplo clásico:

Iteración	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ Sol. básica factible [Ecuación (0)]	$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ Sol. básica dual complementaria	Z_x	Z_y
1	(0,0,600,300,2400) $[Z_x - x_1 - 2x_2 = 0]$	(0, 0, 0, -1, -2) $[Z_y - 600y_1 - 300y_2 - 2400y_3 = 0]$	0	0
2	(0,300,600,0,1200) $[Z - x_1 + 2x_4 = 600]$	(0, 2, 0, -1, 0)	600	600
3	(400,300,200,0,0 ,) $[Z + 2/3x_4 + 1/3x_5 = 1000]$	(0, 2/3, 1/3, 0, 0)	Z^*_x=1000	Z^*_y=1000

Es conveniente notar que en la iteración 1 tenemos una solución básica factible no óptima para el primo mientras que para el dual tenemos una solución no factible pero si básica que es "mejor que la óptima dual".

Veamos por medio de una representación esquemática la relación que existe entre el problema primo y su dual.



Al trabajar con las soluciones del primer cuadrante estamos al mismo tiempo trabajando con las soluciones del segundo cuadrante.

Al trabajar con las soluciones del tercer cuadrante estamos al mismo tiempo trabajando con las soluciones del cuarto cuadrante.

METODO SIMPLEX DUAL.-

Este método trata directamente con soluciones básicas no factibles "mejores que el óptimo" y trabaja para obtener soluciones básicas factibles. - Las soluciones complementarias en el problema dual son básicas factibles pero no óptimas y se mueven hacia la optimalidad.

Metodología del Método Simplex Dual.-

En el método Simplex Dual trabajamos siempre con $C'_j \geq 0$ para toda j y tratamos de Max Z hasta el momento en que todas las b_i sean $\geq$ 0, momento en - que hemos alcanzado la solución óptima.

Introdúzcanse variables de holgura (donde se requieren) para obtener un sistema de ecuaciones. Se localiza una solución básica tal que los coeficientes en la ecuación (0) sean cero para las variables básicas y no negativas para las variables no básicas. Vaya al paso 4.

Paso I.-

Determine la nueva variable básica salientes seleccione la variable - básica correspondiente al renglón r para el cual b'_r = min $b_i < 0$ (nótese que este es equivalente a determinar la variable básica entrante en el problema dual, ya que la variable con el coeficiente más negativo corresponde al mayor coeficiente negativo en la ecuación (0) del problema dual.)

Paso 2.-

Determine la nueva variable básica entrante (correspondiente a la columna e): seleccione la variable no básica cuyo coeficiente en la ecuación (0) llega primero a cero cuando un múltiple creciente de la ecuación (r) conteniendo la variable básica saliente se suma a la ecuación (0). Esto se hace revisando las variables no básicas con coeficientes negativos en esta ecuación (r) y seleccionando aquella que forme el cociente menor al dividir su coeficiente en la ecuación (0) entre el valor absoluto del coeficiente en esa ecuación. Así pues C'_e/a'_{re} min C'_j/a'_{rj} para $a'_{rj} < 0$. Esto es equivalente a determinar la variable básica saliente en el problema dual. El coeficiente en la ecuación (C) que se hace cero primero corresponde a la variable en el problema dual cuyo valor se hace cero primero al incrementar el valor de la variable entrante.

Paso 3.-

Determine la nueva solución básica (igual que en el Simplex usando el Gauss-Jordan).

Paso 4.-

Determine si esta solución es factible (y por lo tanto óptima); revise si todas las variables básicas no son negativas (todas las $b_i \geq 0$); si lo son pero se ha llegado a la solución óptima en caso contrario vaya al paso 1.

Se ve que el Método Simplex Dual procede de tal forma como si el Método Simplex estuviese siendo aplicado a las soluciones básicas complementarias en el problema dual, sólo que se decide primero qué variable dejará la base y luego se decide qué variable no básica se introducirá en ella.

Ejemplo IV-8.-

$$\text{Max } Z = -600x_1 - 300x_2 - 2400x_3$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 \quad &+ 3x_3 \geq 1 \\ x_2 &+ 4x_3 \geq 2 \\ x_i \geq 0 &\quad (i=1,2,3) \end{aligned}$$

Nótese que el dual de este problema es nuestro ejemplo clásico, con la excepción de que aquí estamos Max. en lugar de Min.

La solución será:

$$\begin{array}{rl} Z + 600x_1 + 300x_2 + 2400x_3 & = 0 \\ - x_1 \quad - 3x_3 + x_4 & = -1 \\ - x_2 - 4x_3 \quad + x_5 & = -2 \end{array}$$

Nótese que la función objetiva parece indicar optimalidad pero nuestra solución no es factible ya que :

$x_1 = 0 \qquad x_4 = -1$

$x_2 = 0 \qquad x_5 = -2$

$x_3 = 0 \qquad Z = 0$

Vemos que :

$x_s = x_5$ pues $b_2 = \min\limits_{b_i < 0} b_i$ es decir ($-2 < -1$)

$x_e = x_2$ pues ($300/1 < 2400/4$)

y obtenemos :

$$\begin{array}{rl} Z + 600x_1 \quad + 1200x_3 + 300x_5 & = -600 \\ - x_1 \quad - 3x_3 + x_4 & = -1 \\ x_2 + 4x_3 \quad - x_5 & = 2 \end{array}$$

y nuestra solución básica será ahora :

$x_1 = 0 \qquad x_4 = -1$

$x_2 = 2 \qquad x_5 = 0$

$x_3 = 0 \qquad Z = -600$

en este paso:

$x_s = x_4$ pues ($b_i = \min\limits_{b_i < 0} b_i$)

$x_e = x_3$ pues ($1200/3 < 600/1$)

con lo que llegamos a :

$$\begin{array}{rl} Z + 200x_1 \quad + 400x_4 + 300x_5 & = -1000 \\ 1/3x_1 \quad + x_3 - 1/3x_4 & = 1/3 \\ - 4/3x_1 + x_2 \quad + 4/3x_4 - x_5 & = 2/3 \end{array}$$

y la solución básica será:

$x_1^* = 0 \qquad x_4^* = 0$

$x_2^* = 2/3 \qquad x_5^* = 0$

$x_3^* = 1/3 \qquad Z_x^* = -1000$

solución que al ser factible es automáticamente óptima.

La solución óptima para el problema dual será:

$y_1^* = 400 \qquad y_4^* = 0$

$y_2^* = 300 \qquad y_5^* = 0$

$y_3^* = 200 \qquad Z_y^* = -1000$

solución que es igual a la obtenida usando el Método Simplex para el dual de este problema.

EJEMPLO IV-9.-

Resolver el siguiente problema usando el Método Simplex Dual:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } Z = -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_4 - 5x_5 & \\ \text{s.a.} & \\ \quad x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 & \leq -3 \\ \quad - x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 & \leq -2 \\ \quad x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 & \leq 4 \\ \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} Z + 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & = -3 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \quad + x_7 & = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 \quad + x_8 & = 4 \end{array}$$

$x_s = x_6$

$x_e = x_2$

$$\begin{array}{l}
Z + 5x_1 + 3x_4 + 7x_5 + 2x_6 = -6\\
-1/2x_1 + x_2 + 1/2x_3 - 1/2x_4 - 1/2x_5 - 1/2x_6 = 3/2\\
-3/2x_1 - 1/2x_3 + 1/2x_4 + 1/2x_5 - 1/2x_6 + x_7 = -1/2\\
3/2x_1 - 5/2x_3 + 5/2x_4 - 5/2x_5 + 1/2x_6 + x_8 = 5/2
\end{array}$$

(*)

$$x_s = x_7$$
$$x_e = x_3$$

$$\begin{array}{ll}
 & \phi_i\\
Z + 5x_1 + 3x_4 + 7x_5 + 2x_6 = -6 & \\
-2x_1 + x_2 - x_6 + x_7 = 1 & 1\\
3x_1 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 - 2x_7 = 1 & \infty\\
9x_1 - 5x_5 + 3x_6 - 5x_7 + x_8 = 5 & \infty
\end{array}$$

como el coeficiente de x7 = 0, entonces existen soluciones múltiples. Se aplica ahora el Simplex:

$$x_e = x_7$$
$$x_s = x_2$$

$$\begin{array}{l}
Z + 5x_1 + 3x_4 + 7x_5 + 2x_6 = -6\\
-2x_1 + x_2 - x_6 + x_7 = 1\\
-x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 3\\
-x_1 + 5x_2 - 5x_5 - 2x_6 + x_8 = 10
\end{array}$$

(*).-NOTA.- Si al no darnos cuenta de que: $0/1/2 < 5/3/2$ al iniciar la 2a. iteración, hubiésemos tomado:

$$x_s = x_7$$
$$x_e = x_1$$

$$\begin{array}{ll}
 & \phi_i\\
Z - 5/3x_3 + 14/3x_4 + 26/3x_5 + 1/3x_6 + 10/3x_7 = -23/3 & \\
x_2 + 2/3x_3 - 2/3x_4 - 2/3x_5 - 1/3x_6 - 1/3x_7 = 5/3 & 5/2\\
x_1 + 1/3x_3 - 1/3x_4 - 1/3x_5 + 1/3x_6 - 2/3x_7 = 1/3 & 1\\
-3x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_7 + x_8 = ? & \cdot\ \infty
\end{array}$$

$$x_e = x_3$$
$$x_s = x_1$$

$$\begin{array}{l}
Z + 5x_1 + 3x_4 + 7x_5 + 2x_6 = -6\\
-2x_1 + x_2 - x_6 + x_7 = 1\\
3x_1 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 - 2x_7 = 1\\
9x_1 - 5x_5 + 3x_6 - 5x_7 + x_8 = 5
\end{array}$$

EJEMPLO IV·10.-

$$\begin{array}{l}
\text{Max } Z_x = x_1 + 4x_2 + 5x_3\\
\text{s.a.}\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 2\\
3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9\\
-2x_1 + x_2 + 8x_3 \leq 16\\
(x_1, x_2, x_3) \geq 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & Z - x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0\\
(y_1) & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2\\
(y_2) & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 9\\
(y_3) & -2x_1 + x_2 + 8x_3 + x_6 = 16
\end{array}$$

$$x_e = x_3$$
$$x_s = x_4$$

$$\begin{array}{ll}
 & Z + 2/3x_1 - 2/3x_2 + 5/3x_4 = 10/3\\
(y_6) & 1/3x_1 + 2/3x_2 + x_3 + 1/3x_4 = 2/3\\
(y_2) & 7/3x_1 - 1/3x_2 - 2/3x_4 + x_5 = 23/3\\
(y_3) & -14/3x_1 - 13/3x_2 - 8/3x_4 + x_6 = 32/3
\end{array}$$

$$x_e = x_2$$
$$x_s = x_3$$

$$\begin{array}{ll}
 & Z + x_1 + x_3 + 2x_4 = 4\\
(y_5) & 1/2x_1 + x_2 + 3/2x_3 + 1/2x_4 = 1\\
(y_2) & 15/6x_1 + 1/2x_3 - 1/2x_4 + x_5 = 8\\
(y_3) & -15/6x_1 + 13/2x_3 - 1/2x_4 + x_6 = 15
\end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{l}
\text{Min } Z_y = 2y_1 + 9y_2 + 16y_3\\
\text{s.a.}\\
y_1 + 3y_2 - 2y_3 \geq 1\\
2y_1 + y_2 + y_3 \geq 4\\
3y_1 + 2y_2 + 8y_3 \geq 5\\
(y_1, y_2, y_3) \geq 0
\end{array}$$

$$\text{Max } Z_y = -2y_1 - 9y_2 - 16y_3$$

$$\begin{array}{ll}
 & Z + 2y_1 + 9y_2 + 16y_3 = 0\\
(x_1) & -y_1 - 3y_2 + 2y_3 + y_4 = -1\\
(x_2) & -2y_1 - y_2 - y_3 + y_5 = -4\\
(x_3) & -3y_1 - 2y_2 - 8y_3 + y_6 = -5
\end{array}$$

$$y_s = y_6$$
$$y_e = y_1$$

$$\begin{array}{ll}
 & Z + 23/3y_2 + 32/3y_3 + 2/3y_6 = -10/3\\
(x_1) & -7/3y_2 + 14/3y_3 + y_4 - 1/3y_6 = 2/3\\
(x_2) & 1/3y_2 + 13/3y_3 + y_5 - 2/3y_6 = -2/3\\
(x_4) & y_1 + 2/3y_2 + 8/3y_3 - 1/3y_6 = 5/3
\end{array}$$

$$y_s = y_5$$
$$y_e = y_6$$

$$\begin{array}{ll}
 & Z + 8y_2 + 15y_3 + y_5 = -4\\
(x_1) & -15/6y_2 + 15/6y_3 + y_4 - 1/2y_5 = 1\\
(x_3) & -1/2y_2 - 3/2y_3 - 3/2y_5 + y_6 = 1\\
(x_4) & y_1 + 1/2y_2 + 1/2y_3 - 1/2y_5 = 2
\end{array}$$

Interpretación Económica.-

La reciente introducción de la programación lineal en la Economía parece ser un anacronismo. Parecerá lógico que hubiese comenzado alrededor de 1758 cuando los economistas comenzaron a describir los sistemas económicos en términos matemáticos. UN crudo ejemplo de un modelo matemático de Programación Lineal puede ser encontrado en el"Tableau Economique" de Quesnay. Sin embargo no fué sino hasta los 1930s en que se comenzó la explotación del modelo de tipo lineal en economía.

La mayor parte de los economistas matemáticos se ocuparon con el análisis de problemas teóricos asociados con la posibilidad de equilibrio económico y eficiencia distributiva bajo condiciones competitivas y monopolísticas. Para tales estudios encontrar-on el uso de funciones convexas clásicas con derivadas contínuas de más conveniencia para las demostraciones de condiciones de estabilidad que utilizando funciones basadas en desigualdades lineales.

Hasta esos días el mundo económico usaba el modelo económico para describir una forma "cualitativa" en lugar de "cuantitativa" las supuestas interrelaciones dentro de un sistema.

La inspiración del modelo general de programación lineal fué completamente independiente a los desarrollos anteriores y tuvo un propósito diferente.- Surgió de las necesidades de programación empíricas de la fuerza aérea y de la posibilidad de generalizar la estructura práctica simple del Modelo de Leontief para este propósito.

La mayor contribución de Leontief fué la construcción de un modelo - - cuantitativo de la economía americana con el propósito de trazar el impacto de la política gubernamental y de las tendencias del consumidor sobre un gran número de industrias embebidas en una compleja serie de interrelaciones.

Cabe hacer notar que el obstáculo para el desarrollo de modelos cuantitativos era la ausencia de computadores, lo cual limitaba el modelo a 20 ecuaciones con 20 incógnitas.

Para 1940 el análisis de regresión ya se empezaba a utilizar para medi fenómenos económicos. Este hecho dió nuevo impulso a los modelos cuantitativos.

El punto focal del análisis de consumo producción es una disposición de coeficientes llamados "la matriz consumo-producción" ó "tabla económica." Una columna de esta matriz representa los requerimientos de consumo de varios artículos para la producción de otro particular artículo con valor de un peso.

Existe exactamente una columna para cada artículo producido en la economía.

Vemos pues que la producción de un artículo corresponde al concepto de -

una actividad en el modelo de programación lineal. Si los factores de consumo que aparecen en un renglón de la matriz se multiplican por el total correspondiente a la producción de la industria que compra, los totales horizontales representan la distribución del valor monetario de las compras entre las industrias proveedoras. De aquí que el modelo haga posible no sólo el determinar la relación de producción para satisfacer la demanda directa, sino que también traza los efectos indirectos sobre cada industria de los gastos gubernamentales.

En 1947 T.C. Hoopmans atrajo la atención de los economistas hacia el potencial de los modelos de programación lineal usando para ello los modelos de transporte.

En 1951, Dorfman expresó en términos de programación lineal la teoría económica de una empresa bajo condiciones competitivas y monopolísticas y comparó la aplicabilidad de esta teoría con el tradicional análisis marginal.

El número de aplicaciones prácticas continúa creciendo y ya se utiliza la programación lineal para estudiar industrias específicas.

Mirando ahora en nuestro modelo dual podemos distinguir los siguientes puntos :

C_j está dada en pesos por unidad de actividad (j), pues dijimos que era el costo (o ganancia) de operar la actividad (j).

a_{ij} está dada en unidades de recurso (i) por una unidad de actividad (j) por lo tanto y_i deberá estar dado en pesos por unidad de recurso (i) puesto que

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq C_j .$$

Debido a las unidades que tiene y_i, se le conoce como "el precio unitario del recurso (i)", ésto es, y_i representa el valor IMPLICITO que el recurso tiene para el que lo utiliza.

Así pues $a_{ij} y_i$ cuyas unidades son unidad de recurso(i)/unidad de actividad (j) por pesos/unidad de recurso (i) = \$/unidad de actividad (j), representa el costo de operar la actividad (j) en la parte correspondiente al recurso (i). Tenemos así que : $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ representará el costo implícito total de operar la actividdd (j).

Dado que y_i es un valor intrínseco y $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ el costo de operar la actividad (j), vemos que dependiendo de la eficiencia con que operamos nuestra actividad, consumiremos más o menos recursos para la misma producción, de aquí que:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq C_j$$

es decir que cuando utilizemos nuestros recursos en la forma más eficiente será cuando como máximo podamos obtener C_j, pues si no utilizamos bien el recurso, su costo implícito será mayor que la ganancia C_j.

El objetivo dual $Z_y = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ establece que el precio de los recursos debe ser fijado de tal forma que se minimice el costo implícito total al usuario, por lo tanto $y_i^{\vee}$ representa el valor implícito real por unidad del recurso respectivo.

El valor implícito del recurso (i) es cero ($y_i^* = 0$) cuando el suministro de ese recurso no se agota debido a las actividades (esto es $x_{n+i} > 0$) (corolario IV-1).

Si consideramos las leyes de la oferta y la demanda en Economía, vemos que cuando un artículo tiene una oferta excesiva, su precio debe ser cero; en este caso tenemos lo que se conoce como artículos libres (por ejemplo el aire).

El corolario IV-1 tambien nos indica que el valor implicito de los recursos necesarios para una unidad de actividad (j) iguala a la ganancia unitaria siempre que la actividad (j) se opere a un nivel positivo ($x_j^* > 0$).

$$y_{n+j}^* = 0 \text{ así qie } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = C_j$$

De aquí que una actividad no será usadq si el valor implicito de los recursos requeridos excede la ganancia derivada de la actividad.

En realidad lo que y_i^* representa es el valor marginal del recurso (i), ya que y_i' es la tasa mediante la cual la ganancia se incrementa (decrece) si la cantidad de recurso (i) fuese incrementada (disminuído) sobre un rango dado - (el rango de b_i sobre el cual la base óptima original no se cambia y por lo tanto $y_i^* = z_{n+i}^*$ no se cambia).

Conclusiones:

De todo lo visto con anterioridad ha quedado claro que al resolver un - problema de programación lineal podemos escoger entre trabajar con el problema original (primo) o con su dual. Debido a que como regla general, el número de iteraciones requerido para resolver un problema de programación lineal es igual a uno o una y media veces el número de restricciones, nosotros podemos, mediante una selección apropiada, facilitar la computación, especialmente en aquellos casos en que existe una marcada diferencia en el número de renglón para cada uno de los 2 problemas.

USO DE MATRICES EN PROGRAMACION LINEAL.-

Recordamos que nuestro modelo matemático de programación lineal puede ser representado como:

$$(1) \qquad \text{Max } Z = CX$$

sujeto a:

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j P_j = P_o$$

$$(3) \qquad x_i \geq 0 \; (i = 1,2,\ldots,n)$$

donde:

$$P_j = \begin{bmatrix} a_{ij} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad P_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\left[a_{ij}, b_i, c_j\right]$ son constantes.

El Método Simplex requere que m de los vectores P_j sean independientes.

Sea:

$$\left[P_{b1}, P_{b2},\ldots\ldots,P_{bm}\right]$$

tal conjunto de vectores independientes, ellos forman una base B del conjunto de vectores $(P_1 , P_2,\ldots.,P_n)$

$$(4 \; \ldots.. \; B = P_{B1}, P_{B2},\ldots,P_{Bm}$$

En general una forma canónica se obtiene multiplicando las ecuaciones (2) por B^{-1}, esto es:

$$(5)\ldots \; (B^{-1}P_1)\, x_1 + (B^{-1}P_2)x_2+\ldots+(B^{-1}P_n)x_n = B^{-1}\, P_0$$

ó

$$(6)\ldots \; \overline{P}_1\, x_1 + \overline{P}_2\, x_2 + \ldots\ldots + \overline{P}_n\, x_n = \overline{P}_0$$

donde:

$$(7) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{array}{l} B^{-1}\, P_j = \overline{P}_j \\ B^{-1}\, P_0 = \overline{P}_0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \end{array}$$

son las "representaciones" de P_j en términos de la base. Nótese que debido a que $B^{-1}\, B = I$ tenemos que:

$$\overline{P}_{Bi} = B^{-1}\, P_{Bi} = \mu_i$$

donde μ_i es un valor unitario con un uno en el elemento (i) y ceros en los demás . Pero ésto por definición significa que la ecuación (6) está en forma canónica con variables básicas.

$$X_B = (x_{B1}, x_{B2},\ldots,x_{Bm})$$

así pues:

$$X_B = B^{-1}\, P_o = \overline{P}_0$$

En nuestro caso al emplear variables de holgura como variables básicas, obtenemos directamente una forma canónica $\left[A\ , I\right]$

Debe notarse que si

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} X \\ X_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+n} \end{bmatrix}$$

entonces X_B se obtiene simplemente eliminando las variables no básicas de $\{X, X_h\}$

y que :

$$B = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots\cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots\cdots & B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots\cdots & B_{mn} \end{vmatrix}$$

se obtiene eliminando las columnas correspondientes a los coeficientes de las variables no básicas en la matriz $[A\ I]$

Así pues en el sistema original

$$[A\ I] \begin{bmatrix} X \\ X_h \end{bmatrix} = P_0$$

se convierte en un sistema de m ecuaciones con n incognitas que puede ser representado por :

$$B\ X_B = P_0$$

Los factores de costo C'_j se obtienen eliminando x_{Bi} de la ecuación Z

Definamos:

$$\gamma = [C_{B1}, C_{B2}, \ldots, C_{Bm}]$$

y multipliquemos la ecuación (6) por γ , obtendremos:

$$(8) \ldots.\ (\gamma\ \bar{P}_1)\ x_1 + (\gamma\ \bar{P}_2)\ x_2 + \ldots + (\gamma\ \bar{P}_n)\ x_n = (\gamma\ \bar{P}_0)$$

donde:

$$(\gamma\ \bar{P}_j) = \text{ctes.}$$

(producto de un vector hilera por un vector columna).

en especial:

$$\gamma\ \bar{P}_{Bj} = \gamma \mu_i = C_{Bi}$$

de forma que la ecuación (8) tiene los mismos coeficientes para las variables básicas que la ecuación (1); de aquí que restando la ecuación (8) de la (1) eliminamos las variables básicas, obteniendo:

$$(C_1 - \gamma\ \bar{P}_1)x_1 + (C_2 - \gamma\ \bar{P}_2)x_2 + \ldots. + (C_n - \gamma\ \bar{P}_n)x_n = Z - (\gamma\ \bar{P}_0)$$

donde:

$$C'_j = C_j - \gamma\ \bar{P}_j = C_j - \gamma\,(B^{-1}\ P_j)$$

$$C'_j = C_j - (\gamma\ B^{-1})\ P_j$$

$$C'_j = C_j - \Pi\ P_j$$

donde :

$$[\Pi = \gamma\ B^{-1}]$$

lo que implica que los coeficientes C'_j son obtenidos restando de C_j una suma controlada de los coeficientes : a_{1j} , a_{2j} , ... , a_{nj}

Los elementos Π_j del vector Π se conocen como los multiplicadores simplex.

De nuevo, la solución básica es óptima si todas las $C'_j \geq 0$. De no ser así entonces una solución mejorada es buscada. Para esto se escoge "e" de tal forma que :

$$C'_e = \min C'_j$$

e incrementando el valor de x_e tanto como sea posible hasta el valor $x_e = x^*_e$ en donde algún componente "p" del vector $(\bar{P}_0 - \bar{P}_e\ x_e)$ cambie de signo mientras que los demás siguen no negativos.

Los componentes $\bar{P}_0$, $\bar{P}_e$, y $\bar{P}$ se definen:

$$P_0 = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix} \qquad P_e = \begin{bmatrix} a'_{1e} \\ a'_{2e} \\ \vdots \\ a'_{ne} \end{bmatrix} \qquad x^*_e = \frac{b'_p}{a'_{pe}} = \min_{a_{ie}\,.\,0} \frac{b'_i}{a'_{ie}}$$

De aquí que P_{Bp} es reemplazado en la base por P_e para formar la base B^* del siguiente ciclo.

<u>Transformación del ciclo K al K + 1.-</u>

El último paso en el proceso Simplex es el de transformar la tabla simplex pivoteando en a'_{pe}. Aquí lo que se utiliza en lugar de ésto es el inverso de la nueva base para ajustar ligeramente las representaciones de P_j y P_0, dadas en término de la "vieja" bade B por:

$$B^{-1} P_j = \bar{P}_j$$
$$B^{-1} P_0 = \bar{P}_0$$

para obtener su nueva representación en términos de la nueva base B.

Dado que :

$$\bar{P}_j = B^{-1} P_j$$
$$\Rightarrow P_j = B \bar{P}_j$$

de donde :

$$(9) \ldots P_e = \left[P_{B1}, P_{B2}, \ldots, P_{Bn}\right] \begin{bmatrix} a'_{1e} \\ a'_{2e} \\ \\ a'_{ne} \end{bmatrix} = P_{B1} a'_{1e} + P_{B2} a'_{2e} + \ldots + P_{Bp} a'_{pe} + \ldots + P_{Bn} a'_{ne}$$

donde:

$$\left\{ a'_{1e}, a'_{2e}, \ldots, a'_{ne} \right\}$$

es la representación de P_e en términos de B.

Despejando P_{Bp} de la ecuación (9) :

$$P_{Bp} = P_{B1} k_1 + \ldots + P_e k_p + \ldots + P_{Bn} k_n = B^* K$$

en donde :

$$K = \{ k_1 \ldots\ldots k_n \}$$
$$B' = \left[P_{B1}, \ldots. P_e, \ldots\tilde{n}, P_{Bn} \right]$$

y

$$k_i = \frac{-a'_{ie}}{a'_{pe}} \qquad (i \neq p)$$

$$k$$
$$k_p = \frac{1}{a'_{pe}}$$

Para las demás P_{Bi} ($i \neq p$) podemos representar P_{Bi} trivialmente en términos de B^*:

$$P_{Bi} = P_{Bi} 0 + \ldots. + P_e 0 + \ldots. + P_{Bi} 1 + \ldots. + P_{Bn} 0 = B^* \mu_i$$

de tal forma que la relación entre la "vieja" y la "nueva" base está dada por:

$$B = \left[P_{B1}, P_{B2}, \ldots, P_{Bn} \right] = B^* \left[U_1, U_2, \ldots, K, \ldots. U_n \right]$$

multiplicando por B^{-1} a la derecha y por $(B^*)^{-1}$ a la izquierda en ambos lados de la ecuación, obtenemos la relación entre el inverso de la nueva base y el inverso de la base previa, es decir:

$$(10) \ldots (B^*)^{-1} = \left[U_1, U_2, \ldots\ldots, K, \ldots. U_n \right] B^{-1}$$

en donde :

$$(11) \ldots \ldots\ldots \left[U_1, U_2, \ldots\ldots, K, \ldots. U_n \right] = \begin{bmatrix} 1 & & & & k_1 & & & \\ & 1 & & & k_2 & & & \\ & & 1 & & \vdots & & & \\ & & & \ddots & k_p & & & \\ & & & & \vdots & \ddots & 1 & \\ & & & & \vdots & & & 1 \\ & & & & k_n & & & \end{bmatrix}$$

y vemos que la nueva inversa es el producto de una matriz elemental por el inverso de la base anterior.

Si ahora multiplicamos ambos miembros de la ec. (10) a la derecha por cualquier P_j, podemos obtener la representación de P_j en términos de la nueva base partiendo de su representación en términos de la vieja base.

Partiendo de :

$$\bar{P}_j = B^{-1} P_j$$

y premultiplicando ambos miembros por el vector elemental obtenido anterirmente

$$\left[U_1, U_2, \ldots\ldots, K, \ldots\ldots\ldots, U_m\right] \bar{P}_j = \left[U_1, U_2, \ldots, K, \ldots ; U_m\right] B^{-1} P_j$$

$$(12)\ldots \quad P_j^{*} = \left[U_1, U_2, \ldots, K, \ldots U_m\right] \bar{P}_j = (B^{*})^{-1} P_j$$

Si escribimos la matriz (11) como la suma de una matriz identidad y una nula excepto por una columna tendremos:

$$\left[U_1, U_2, \ldots, K, \ldots, U_m\right] = \left[U_1, U_2, \ldots, U_p, \ldots, U_m\right] + \left[0, 0, \ldots, K-U_p, \ldots, 0\right]$$

y de la ecuación (7) :

$$(B^{*})^{-1} = \left[U_1, U_2, \ldots, U_p, \ldots, U_m\right] B^{-1} + \left[0, 0, \ldots, K-U_p, \ldots, \theta\right] B^{-1}$$

$$= B^{-1} + \left[0, 0 \ldots, \bar{K}, \ldots, 0\right] B^{-1}$$

donde:

$$\left[\bar{K} = K - U_p\right]$$

Llamando β_i a los renglones B^{-1}, es decir:

$$\bar{B}^{-1} \quad \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

entonces:

$$(B^{\prime})^{-1} = B^{-1} + \left[0, 0, \ldots, K, \ldots, 0\right] \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_p \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}$$

$$(13)\ldots \quad (B^{*})^{-1} = B^{-1} + K \beta_r$$

Sea:

$$B^{-1} = \left[\beta_{ij}\right]$$

El elemento (i,j) de $\bar{K}\beta_p$ es simplemente $\bar{k}_i B_{pj}$. Deaquí que para formar el elemento (i , j) de $(\beta^{*})^{-1}$ sumamos $\bar{k}_i \beta_{pj}$ a β_{ij}, es decir :

$$\left[B^{*}\right]^{-1} = \left[\beta_{ij}\right] + \left[\bar{k}_i \beta_{pj}\right]$$

Finalmente, para formar la nueva representación de los vectores , partiendo de la vieja tenemos (de la ecuación (12) y la (13)) :

$$\bar{P}_j^{*} = (B^{*})^{-1} P_j = (B^{-1} + \bar{K}\beta_p) P_j$$

$$= B^{-1} P_j + (\bar{K}\beta_p) P_j$$

$$= \bar{P}_j + \bar{K} a'_{pj}$$

PROGRAMACION DE ENTEROS.

Surgió de la necesidad de resolver problemas en los cuales se requiere una solución entera (p. ej. asignar hombres a las máquinas).

Lo usual en la mayoría de los casos es el de utilizar el Método Simplex (ignorando las restricciones de enteros) y luego redondeando la solución a valores enteros . Aunque esto resulta adecuado en algunas ocasiones, en muchas otras la solución obtenida después de redondear la solución óptima no entera puede no ser factible.

Ejemplo IV-9.-

Sean las siguientes restricciones:

$$x_1 - x_2 \geq 2\ 1/2$$

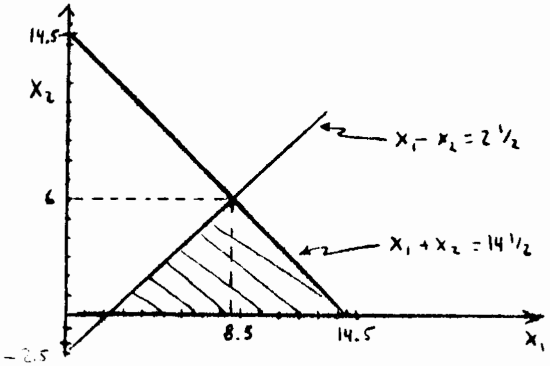
$$x_1 + x_2 \leq 14\ 1/2$$

y por el Método Simplex hemos obtenido la solución óptima como :

$$x_1 = 8\ 1/2$$

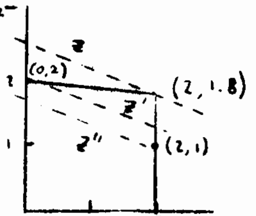
$$x_2 = 6$$

En este problema es imposible redondear x_1 ni a 8, ni a 9 y obtener una solución factible, la cual puede ser obtenida solamente si tambien cambiamos el valor de x_2. Es lógico que las complicaciones aumenten con el número de restricciones.



Otro problema estriba en que la solución redondeada puede estar muy lejos de la solución óptima de enteros.

Ejemplo IV-10.-



(2,1.8)= sol.óptima fraccionaria.
(2,1) = Sol.óptima redondeada.
(0,2) = Sol. óptima de enteros.

El algorítmo que se utiliza para obtener soluciones óptimas de enteros es a grandes rasgos el siguiente:

Se resuelve el problema ignorando las restricciones de enteros en la forma normal y si resulta una solución óptima que satisfaga las restricciones de enteros esta solución resulve el problema original. Si resulta una solución no entera entonces se modifica el problema original agregándole una nueva restricción que elimine algunas soluciones no enteras (incluyendo la solución óptima fraccionaria obtenida) pero ninguna de las enteras. La obtención de esta restricción es el punto clave del algoritmo. Se vuelve a resolver el nuevo problema y si se obtiene una solución óptima de enteros, hemos terminado, en caso contrario volvemos a agregar una nueva restricción con las características de la anterior. Finalmente se deberá llegar a una solución óptima de enteros.

ANALISIS POST-OPTIMO.

Debido a que C_j , a_{ij} y b_i no se conocen en forma deterministica, es de suma importancia el conocer el efecto que cada uno de estos parámetros tiene sobre la solución óptima, para lo cual se efectúa un análisis de sesibilidad con objeto de descubrir cuáles de ellos son los más críticos. Una vez localizados los parámetros criticos se pueden establecer métodos estadísticos para determinar el momento en que varían estos parámetros y poder hacer los ajustes necesarios a nuestro modelo.

La importancia de este tipo de análisis se desprende del hecho de que nos permite ajustar una solución óptima obtenida con anterioridad, cuando por omisión, cambio o error, vemos que alguno de los parámetros del modelo se modifica

En nuestro curso solo mencionaremos los punros principales del análisis post- óptimo sin entrar en su descripción.

Los principales cambios que investiga el análisis post-óptimo son:

1) Cambio en C_j cuando x_j^* es no básica.
2) Cambio en C_j cuando x_j^* es básica.

3) Cambio en b_i

4) Cambio en a_{ij} cuando x_j^* es no básica.

5) Cambio en a_{ij} cuando x_j^* es básica.

6) Adición de una nueva restricción

7) Adición de una nueva variable.

Problema 1.-

Los resonadores de cristal de cuarzo son altamente estables usados en la industria electrónica para circuitos controlados de baja frecuencia y filtros de ondas. La -- Compañía de Cristal del D.F. es una pequeña firma que procesa barras de cuarzo naturales y sintéticas para producir elementos de cristales de cuarzo. Estos son pequeñas tiras de ciertas dimensiones, bañadas en oro-plata y herméticamente selladas en sobres metálicos o de vidrio. El tipo de cristal se conoce con el nombre de la abcisa específica del plano atómico del cual es cortado, por ejemplo AT, BT y CT. Las operaciones de los manufactureros son cortar, bañar (en oro ó plata) y envasar. La producción específica y la información del costo se pueden ver en la siguiente tabla:

UNIDAD DE TIEMPO DE MANUFACTURA (HORAS)

Tipo Cristal	cortar	bañar	envasar	ganancia por unidad
AT	.10	.05	.07	\$ 0.21
BT	.24	.12	.09	\$ 0.48
CT	.25	.21	.12	\$ 0.60

Las capacidades de las operaciones de manufactura son de 80 Hrs. para cortar, 60 Hrs. para bañar y 50 Hrs. para envasar.

Formule el problema en términos de programación lineal. Formule el dual e interprete. De el primo y el dual en un solo tablero.

Problema 2.-

La compañía Manufacturera M.E.M. planea agregar un nuevo producto o su producción presente. Habrá dos diferentes modelos de este producto, el modificado y el -- standard. El modelo standard se puede producir en cualquiera de sus tres plantas: A, B y C. Sin embargo el modificado se puede producir sólo en B y C. El modelo standard requerirá 6 horas hombre de trabajo en A, 3 en B y 4 en C. El modelo modificado requerirá 4 horas hombre en B y 5 en C. El total de horas hombre disponibles para el producto son 2000 en A, 6000 en B y 4000 en C. El salario por hora en estas - plantas es de \$ 15,00 en A, \$30.00 en B y \$ 20.00 en C. El material y otros costos directamente relacionados con la producción de estos modelos son de \$100.00 para el standard y \$ 150.00, para el modificado. La compañía planea vender el modelo standard en 300.00 y el modificado en \$ 400.00. El departamento de Investigación de -- Mercados de la compañía reporta que no se debe esperar vender más de 2000 unidades del standard y 1500 unidades del modificado.

Formule este problema como de Programación Lineal. Formule el dual y dé una interpretación, dé la formulación del primo y el dual en un solo tablero.

Problema 3.-

Una compañía manufactura un artículo cuya demanda varía de mes a mes. La materia prima y la disponibilidad de mano de obra presentan variaciones estacionales. La información necesaria se presenta a continuación.

MES	COSTO DE MANO DE OBRA ($/ton de Art.) Tiempo normal	Tiempo extra	DISPONIBILIDAD DE MAT. PRIMA (ton) (ton)	DEMANDA DEL ARTICULO (ton)	PRECIO DE MATERIA PRIMA ($/ton)
1	40	60	600	400	180
2	40	60	450	700	180
3	40	60	425	600	180
4	60	90	1200	900	250
5	60	90	1300	900	250
6	60	90	1600	900	250
7	60	90	1600	800	250
8	60	90	1500	600	250
9	60	90	1300	800	250
10	40	60	500	1200	300
11	40	60	500	1100	300
12	40	60	500	1400	300

Para producir una unidad de producto se requiere media unidad de materia prima. Durante los meses 10, 11, 12, 1, 2, 3, la compañía puede contratar a lo más una cantidad de mano de obra suficiente para producir 1200 y 600 tons. por mes durante tiempo normal y tiempo extra respectivamente. En los meses 4,5,6,7,8,9 estas capacidades de trabajo son 800 y 500 tons. respectivamente. La producción de un mes puede ser vendida en cualquier tiempo del siguiente mes o más tarde. Los costos de almacenaje son de $ 10 por tonelada de producto almacenado de un mes al próximo. La materia prima no puede ser almacenada, por lo que ésta debe utilizarse en el mismo mes en el que se adquiere. Las operaciones empiezan en el mes 1 con úna existencia de 50 ton. del producto. Al final del mes 12, la compañía debe tener una existencia de al menos 50 toneladas del producto. Determine una esquedulación (programación o planeación) óptima de la producción, a través de la formulación de un modelo de programación lineal, Represéntelo en la forma:

c	z
A	b

En esta misma forma formule el dual. De una interpretación del problema dual.

Problema 4.-

Una compañía manufacturero produce una pequeña componente para un producto industrial y la distribuye a 5 fabricantes o un proyecto de "entrega" fijo de 25 pesos por unidad. Los pronósticos de venta indican que las entregas del mes serán de 2700 unidades para el fabricante 1; 2700 unidades para el fabricante 2; 9000 unidades para el fabricante 3, 4500 unidades para el fabricante 4; 3600 unidades para el fabricante 5.

Las capacidades de producción mensual son de 4500 en la planta 1; 9000 en la planta 2 y 11250 en la planta 3. Los costos directos de producir cada unidad son de $ 20.00 en la planta 1; $ 10.00 en la planta 2 y $ 18.00 en la planta 3.

Los costos de transportar una unidad de la planta al fabricante son los siguientes:

	Fabricante 1	Fabricante 2	Fabricante 3	Fabricante 4	Fabricante 5
Planta 1	$0.5	$0.7	$1.1	$1.5	$1.6
Planta 2	0.8	0.6	1.0	1.2	1.5
Planta 3	1.0	0.9	0.9	1.0	1.6

Formula un modelo de programación lineal para encontrar la producción óptima en cada planta y para ver cuantas componentes manda cada planta a cada fabricante. Exprese su dual.

Problema 5.-

La contadora Lucía B. de una Cía. publicitaria ha anunciado que puede distribuir inversiones publicitarias de sus clientes por medio de la programación lineal. Su manera de actuar es identificar varios auditorios con los cuales su cliente se quiere comunicar, tal como adolescentes, matrimonios jóvenes, el grupo geriátrico, etc. Sea i el i-ésimo auditorio. El cliente debe especificar un nivel deseado de exposición E_i para cada auditorio i. Entonces cada medio de publicidad (como selecciones, un spot comercial de televisión en la noche, un aviso a colores en el periódico dominical, etc.) se evalúa por su efectividad en cada una de las categorías de auditorio identificadas. Sea j el j-ésimo medio publicitario y a_{ij} la efectividad evaluada para el i-ésimo auditorio de distribuir un peso a j-ésimo medio.

Cada variable de decisión se denota por X_j la cual representa el total de pesos destinados al j-ésimo medio de publicidad durante la campaña de programación. Los objetivos de su cliente es minimizar el total de gasto publicitario pero cumpliéndose los niveles deseados de exposición del producto.

i) Supongamos hay cuatro auditorios y cinco medios de publicidad.
Escriba un modelo de programación lineal requerido para la descripción anterior.

i) Formule e interprete el problema dual.

Problema 6.-

El departamento de policía de Xochimilco tiene el siguiente requerimiento mínimo diario de policías hombres y mujeres.

Hora del día (reloj de 24 horas)	Periodo	Número mínimo de policías requerido durante el periodo.
2-6	1	22
6-10	2	55
10-14	3	88
14-18	4	110
18-22	5	44
22-2	6	33

Nota: Se considera que el periodo 1 sigue inmediatamente después del periodo 6.

Cada persona trabaja 8 horas consecutivas. Sea x_t el número de personas que empiezan a trabajar en el periodo t todos los días. El departamento de policía desea obtener una asignación diaria que se emplee el menor número posible de policías, tomando en cuenta que se cumplan todos los requerimientos.

Formular un modelo de programación lineal de tal manera que se obtenga una asignación óptima. Exprese su dual y trate de darle una interpretación.

Problema 7.-

Proporcione el dual del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \min Z &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{s.a.}\quad & 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 10 \\ & 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 \leq 12 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -6 \\ & 6x_1 + x_4 \leq 15 \\ & x_i \geq 0 \\ & i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Problema 8.-

Para el siguiente sistema:

a) Construya el dual correspondiente.

b) Obtenga las soluciones correspondientes no factibles para el dual (para cada iteración) tal que: $Z_x - Z_y$

$$\begin{aligned} \max Z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.}\quad & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \end{aligned}$$

Para el siguiente sistema:

c) Obtenga el dual.

b) Proporcione la solución utilizando el método dual simplex.

c) Compare con la solución gráfica.

$$\begin{aligned} \max Z &= 6x_1 + 8x_2 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Problema 9.-

Considere el problema:

$$\max Z = 6x_1 + 8x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

a) Construya el problema dual.

b) Resuelva gráficamente el problema primo y el problema dual. Identifique las esquinas que den soluciones factibles y no factibles para ambos problemas.

c) Use la información obtenida en el inciso (b) y construya una tabla en la que se listen las soluciones básicas para estos problemas (primo y dual).

d) Resuelva el problema primo por el método Simplex. Después de cada iteración identifique la solución básica factible para este problema y la solución básica complementaria para el problema dual.

Problema 10.-

Considere el siguiente sistema:

$$\max Z = -x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ & -2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

a) Obtenga el óptimo usando el método Simplex.

b) ¿Cuál es el modelo dual correspondiente?.

c) ¿Cuál es la solución óptima para el problema dual?.

Problema 11.-

Usando notación matricial (capítulo I), si el problema primo es maximizar cx sujeto a $Ax \leq b$ y $x \geq 0$, entonces el problema dual será minimizar $b^T y$ sujeto a $A^T y \geq C^T$ y $y \geq 0$.

Use solo esta información de la teoría dual para probar cada uno de los siguientes enunciados:

a) El dual del dual es el problema primo.

b) Si el problema primo es maximizar cx sujeto a $Ax = b$, y $x \geq 0$, entonces el problema dual será minimizar b^T sujeto a $A^T y \geq C^T$ (con "y" no restringida en signo).

c) Si el problema primo (como se da en el enunciado del problema) tiene solución óptima no acotada, el problema dual no tiene solución factible.

CAPITULO VII

TEORIA DE REDES.

Introduccion.-

Hace apenas unos años que la Investigación de Operaciones comenzó a utilizar, como una de sus herramientas, el Análisis de Redes, el cual sólo había sido utilizado hasta entonces en Ingeniería Eléctrica. El análisis de Redes se ha empleado con éxito en el estudio de sistemas de transporte y comunicación, en la Teoría de la Información así como en la planeación y control de proyectos.

Aunque la Teoría de Redes puede abarcar muchísimos problemas, en nuestro curso nos limitaremos al estudio de 4 de ellos:

a) Flujo Máximo.- Consiste en encontrar la distribución de flujos, en una red que conecte una fuente con un destino, de tal manera que se maximice el flujo total através de la red.

b) Localización de la Ruta más Corta.- Se debe localizar el camino mas corto desde un origen hasta un destino, utilizando una red que los conecta.

c) Mínima Longitud de una Red de Comunicación.- Se seleccionan aquellas ramas de la red que tienen la longitud total menor a la vez que suministran una vía de comunicación entre cada pareja de nodos.

d) Planeación y Control de Proyectos.- Se utiliza para medir y controlar el progreso de un proyecto.

Redes.-

Definición VII-1.-

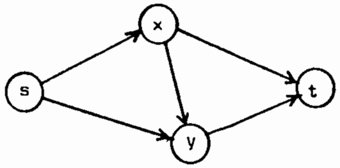
Una red dirigida o gráfica lineal dirigida G = (N ; A), consiste de una colección N de elementos x, y, w, ... , junto con un subconjunto A de los pares ordenados (x,y), (x,w), ... , tomados de N. Los elementos en N se llaman indistintamente: nodos, vértices, puntos de unión o simplemente puntos; los miembros de A se conocen como: arcos, uniones, ramas ó aristas.

Nosotros usaremos la terminología nodo-arco.

Una red puede ser representada seleccionando un punto correspondiente a cada nodo x de N y dirigiendo una flecha de x hasta y si es que el par ordenado (x,y) está en A $[(x,y) \in A]$.

Ejemplo VII-1.-

Sea una red que consta de 4 nodos:(s,x,y,t) y 5 arcos: (s,x), (s,y), (x,y), (x,t) y (y,t). Dibujarla.



esta red se dice dirigida debido a que cada arco involucra una orientación específica.

Vemos que en la anterior red dirigida el arco $(s,x) \in A$, mientras que el $(x,s) \notin A$.

Es posible también la existencia de redes no dirigidas en las cuales el conjunto A consiste de pares no ordenados de nodos. Así mismo, se pueden encontrar redes mixtas en las cuales algunos arcos están dirigidos y otros no.

En nuestro curso eliminaremos las siguientes posibilidades:

a) Arcos (x,x) que conduzcan desde un nodo x hasta si mismo, razón por la cual todos los arcos que consideraremos se supondrán de la forma (x,y) con $x \neq y$.

b) La existencia de arcos múltiples que unen x con y, por lo que todas nuestras redes contendrán un arco como máximo que vaya desde un nodo hasta otro.

En forma simplista podemos tener:

Definición VII - 2.-

Una gráfica lineal consiste de un conjunto de puntos de unión llamados nodos, cada uno de los cuales está unido a algunos o todos los demás por medio de arcos.

Definición VII - 3.-

Se considera como una red a una gráfica lineal en la cual existe algún tipo de flujo en sus arcos.

A continuación se listan algunos ejemplos de sistemas que satisfacen la definición de red, mismos que podemos encontrar a nuestro alrededor:

Nodos	Arcos	Flujo
Intersecciones	Carreteras	Vehículos
Centros de Trabajo	Rutas de Manejo de Materiales	Trabajos
Oficinas de Correos	Rutas de transporte	Correspondencia
Estaciones Telefónicas	Líneas telefónicas	Mensajes
Estaciones del Metro	Túneles	Personas

Definición VII - 4.-

Sean x_1, x_2, ... , x_n ($n \geq 2$), una secuencia de diferentes nodos de una red, tal que (x_i , x_{i+1}) es un arco para cada i = 1,2,...,n-1, entonces la secuencia de nodos y arcos:

$$x_1,\ (x_1,x_2),\ x_2,\ (x_2,x_3),\ x_3,\ \dots\dots ,\ (x_{n-1},x_n),\ x_n$$

se llama "cadena". Si se estipula además que $x_1 = x_n$, entonces la cadena se llama ciclo (dirigido o no según sea el caso de la red).

Ejemplo VII - 2.-

En la figura del ejemplo VII-1, la cadena s, (s,x), x, (x,t), t conduce desde "s" hasta "t". Esta red no contiene ni un solo ciclo dirijido. Si la red fuese no dirigida, entonces tendríamos varios ciclos, entre ellos: s, (s,x), x, (x,y), y, (y,s), s.

Definición VII - 5.-

Sean x_1, x_2, ... , x_n una secuencia de nodos diferentes, los cuales tienen la propiedad de que ya sea (x_i,x_{i+1}) ó (x_{i+1},x_i) es un arco (i = 1,2,....,n-1). Restringiendo para cada i solo una de las 2 posibilidades, llamamos a la secuencia de nodos y arcos resultante, un "camino" desde x_1 hasta x_n. Nuevamente si $x_1 = x_n$ tenemos un ciclo.

Vemos entonces que un camino difiere de una cadena, en que el primero permite la posibilidad de recorrer un arco en un sentido opuesto a su orientación, al ir desde x_1 hasta x_n.

Definición VII - 6.-

Dada una red (N ; A), se puede formar la matriz de incidencia nodo-arco de la siguiente forma: Ennumere los nodos de la red verticalmente y los arcos en forma horizontal y anote, en la columna correspondiente al arco (x,y), un 1 en el renglón del nodo "x" y un -1 en el renglón correspondiente a "y" poniendo ceros en el resto de la columna.

Ejemplo VII - 3.-

La red del ejemplo VII-1, tiene la siguiente matriz de incidencia:

$$\begin{array}{c|ccccc|} & (s,x) & (s,y) & (x,y) & (x,t) & (y,t) \\ s & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ y & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}$$

de donde puede apreciarse que toda la información respecto a la estructura de una red dirigida está represntada en esta matriz.

Definición VII - 7.-

Una red se llama "conectada" si existe una cadena que conecta cada par de nodos.

Ejemplo VII - 4.-

La red del ejemplo VII-1 es una red conectada, pero dejaría de serlo si quitásemos los arcos (s,x) y (s,y).

Definición VII - 8.-

Un "árbol" es una red conectada G = (N ; A) la cual no contiene ningún ciclo.

Es claro que un árbol tiene la propiedad de que existe un camino o una cadena única que una cada par de nodos.

Definición VII - 9.-

Una red, conectada o no, la cual no contiene ciclos, se llama un "bosque". Cada pieza conectada del bosque es un árbol si se considera como una red independiente.

Teorema VII - 1.-

Una red G = (N ; A) con "n" nodos es un árbol si tiene (n-1) arcos y ningún ciclo (es decir, es una red conectada).

Efectuando la demostración por inducción, tenemos:

El teorema es evidentemente cierto para 2 nodos. Supongamoslo cierto para 2,3, ... ,n-2,n-1, debemos demostrar que es cierto para "n" nodos.

Lema VII - 1.-

Bajo la hipótesis del Teorema VII-1, existe cuando menos un nodo que es un final, es decir, un punto "p" con solo un arco (p,q) que lo conecta al resto de la red.

Demostración del Lema VII-1.-

Para encontrar un nodo que sea un final, comience seleccionando cualquier nodo, sea p_1; éste nodo está unido cuando menos a otro nodo, sea p_2, mediante un solo arco (de no ser éste el caso, eliminando cualquier arco (p_i,p_j) que una un par de los restántes n-1 nodos obtendríamos n-2 arcos sin ciclos. Por nuestra suposición inductiva esto formaría un árbol, por lo que existiría una cadena de arcos uniendo p_i con p_j. Adjuntando el arco (p_i,p_j) a esta cadena formaríamos un ciclo, lo cual sería contrario a nuestra suposición). Debido a que existe un arco entre p_1 y p_2, muévase a p_2 a lo largo del arco (p_1,p_2). Pase a p_3 a lo largo de otro arco (en caso de ser posible). Dado que el número de nodos es finito y no existen ciclos, procediendo de ésta manera llegaremos a un punto "p" que sea un final con solo un arco (q,p) uniendolo al resto de la red.

Prueba del Teorema VII-1.-

Si el nodo final y su único arco se elimiman, la red resultante tendrá (n-1) nodos y (n-2) arcos y debido a que no contiene ciclos, está conectada por la suposición inductiva. Si el punto "p" eliminado y su arco (q,p) se reinsertan, será posible el conectar "p" a cualquier otro nodo vía el nodo "q", con lo cual probamos que una red con "n" nodos, (n-1) arcos y sin ciclos está conectada y por lo tanto es un árbol.

De hecho cualquier pareja de las 3 condiciones:

a) G está conectada.
b) G no tiene ciclos.
c) /A/ = /N/ - 1

implica la tercera y caracteriza a G como un árbol.

Definición VII - 10.-

Dada una red $G = (N\ ;\ A)$, supóngase que cada arco $(x,y) \in A$ tiene asociado con él un número real no negativo $c(x,y)$. LLamamos a $c(x,y)$ la "capacidad" del arco (x,y); intuitivamente $c(x,y)$ puede pensarse como la representación de la máxima cantidad de algún artículo que puede llegar a "y" procedente de "x" por unidad de tiempo.

La capacidad de un arco no orientado es igual en ambas direcciones $\left[c(x,y)\right]$, mientras que en un arco orientado es $c(x,y)$ en la dirección de orientación y cero en la contraria.

Ignoraremos en nuestro curso la posibilidad de nodos con capacidad de flujo restrinjida.

Definición VII - 11.-

Un nodo se llama "fuente" si cada uno de sus arcos está orientado de tal forma que el flujo sale de él. Un nodo se llama "destino" si cada uno de sus arcos está orientado de tal forma que el flujo entra a él. Así, las fuentes pueden considerarse como las generadoras del flujo, mientras que los destinos serán los absorbente del mismo.

Definición VII - 12.-

Si:

$$x \in N$$

sea $A(x)$, (antes de x), el conjunto de todas las $y \in N$ tales que $(y,x) \in A$:

$$A(x) = \left\{ y \in N \ /\ (y,x) \in A \right\}$$

similarmente, sea $D(x)$, (después de x), el conjunto de todas las $y \in N$ tales que $(x,y) \in A$.

$$D(x) = \left\{ y \in N \ /\ (x,y) \in A \right\}$$

FLUJO MAXIMO.-

Considere una red que conecta 2 nodos (una fuente y un destino), por medio de varios nodos intermedios. Suponga que el flujo que llega a un nodo es igual al flujo que sale de él (conservación de flujo) para todos aquellos nodos que no sean la fuente y el destino. Supongamos que un flujo $f(x,y)$ por unidad de tiempo va del nodo "x" al nodo "y"; éste flujo necesariamente tendrá que ser menor ó igual a la capacidad $c(x,y)$ del arco. Esdecir:

$$f(x,y) \leq c(x,y) \text{ para todos las } (x,y) \in A \ ....(1)$$

Sea la fuente (f) y el destino (d). Un flujo estático de valor F de "f" a "d", satisface las desigualdades y ecuaciones lineales:

$$\sum_{y \in D(x)} f(x,y) - \sum_{y \in A(x)} f(y,x) = \begin{cases} F & \text{si } x = f \\ 0 & \text{si } x \neq f,d \ ....(2) \\ -F & \text{si } x = d \end{cases}$$

por lo que si el flujo neto que sale de "x" se define como:

$$\sum_{y \in D(x)} f(x,y) - \sum_{y \in A(x)} f(y,x)$$

entonces las ecuaciones (2) pueden ser expresadas diciendo que el flujo netoque sale de la fuente es F y que el flujo neto que "sale" del destino es $-F$ (o el flujo neto que entra al destino es F), mientras que el flujo neto que sale de un nodo intermedio es cero. Una ecuación de éste último tipo se llama ecuación de conservación de flujo.

Dado un flujo F, llamamos $f(x,y)$ al flujo en el arco (x,y). Cada flujo en el arco (x,y) ocurre precisamente en 2 ecuaciones de (2) y tiene un coeficiente de 1 en la ecuación correspondiente al nodo "x" y un coeficiente -1 en la ecuación correspondiente al nodo "y". En otras palabras, la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones (2), independientemente de la columna de F, es la matriz de incidencia nodo-arco de la red.

Sabemos que:

$$F = \sum_{y \in D(f)} f(f,y) = \sum_{x \in A(d)} f(x,d)$$

y que deseamos maximizar F (en cualquiera de sus 2 formas). Esclaro que el problema de flujo máximo en una red puede ser formulado como un problema de Programación Lineal. Es decir:

$$\text{Max } F = \sum_{y \in D(f)} f(f,y)$$

s.a.

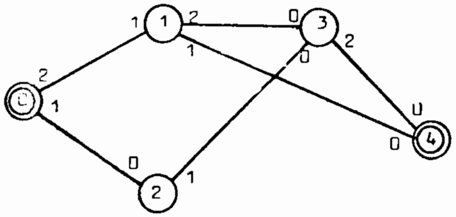
$$\sum_{y \in D(x)} f(x,y) - \sum_{y \in A(x)} f(y,x) = 0 \qquad \text{para } x \neq (f,d)$$

$$0 \leq f(x,y) \leq c(x,y) \qquad \text{para cada arco } (x,y)$$

sin embargo, es posible desarrollar un procedimiento de solución más eficiente como veremos más adelante.

Ejemplo VII - 4.-

Sea la siguiente red:



en donde las capacidades de flujo c(x,v) en cada dirección se muestran mediante los números en los arcos correspondientes que están situados cerca del nodo en el cual el flujo puede originarse. Por ejemplo:

$c(0,1) = 2$
$c(1,0) = 1$
$c(2,3) = 1$

Deseamos determinar el flujo factible en cada arco que maximice el flujo total F que sale de "0" (ó que entra en 6).

Un primer intento nos conduce a descubrir que un flujo factible sería uno de 2 por 0 → 1 → 3 → 4. La asignación del flujo anterior parece ser la máxima posible, por lo que a simple vista parece ser que $F_{max.} = 2$. Más adelante veremos si esta solución es o no correcta, ya que pueden existir otros flujos factibles que conduzcan a un mayor valor de F.

Definición VII - 13.-

Un "corte" C en (N ; A) que separe (f) y (d), es cualquier conjunto de arcos dirigidos que contenga cuando menos un arco da cada cadena con capacidad mayor que cero que una la fuente y el destino.

Definición VII - 14.-

El "valor del corte" ó "capacidad del corte" C, es la suma de las capacidades de los arcos del corte.

Definición VII - 15.-

Si (N ; A) es una red y si F es un flujo entre (f) y (d) en (N ; A), entonces c(x,y) - f(x,y) es la "capacidad residual" del arco (x,y) con respecto a F.

Teorema VII - 2.-

Este teorema se conoce con el nombre de Teorema del Flujo Máximo-Mínimo Corte y dice así:

Para cualquier red, el valor del flujo máximo de (f) a (d) es igual a la mínima capacidad de corte de todos aquellos cortes que separan (f) y (d).

METODO DE SOLUCION.

PASO 1.- Encuentre un camino entre la fuente y el destino que tenga capacidad de flujo > 0. Si no existe ninguno, los flujos netos asignados hasta ese momento constituyen un flujo máximo (óptimo).

PASO 2.- Inspeccione el camino encontrado en el paso 1 para encontrar el arco que tenga la menor capacidad de flujo; denomine esta capacidad c*. Incremente el flujo en éste camino en c*.

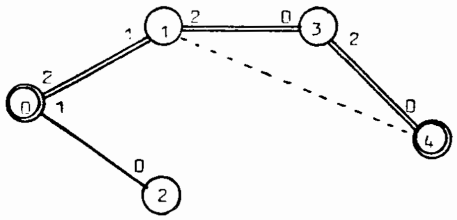
PASO 3.- Disminuya en c* la capacidad de flujo de cada arco en el camino. Incremente en c* la capacidad de flujo de cada arco del camino en sentido contrario al flujo asignado. Regrese al Paso 1.

El Paso 1 puede llegar a ser muy engorroso, razón por la cual se ha desarrollado un procedimiento sistemático que nos permite encontrar dicho camino en una forma sencilla y que consiste en formar un árbol de todos los nodos que pueden ser alcanzados desde la fuente mediante caminos de capacidad de flujo mayor que cero. Es decir:

Comience determinando todos aquellos nodos que pueden ser alcanzados desde la fuente siguiendo un solo arco con capacidad de flujo > 0 que sale de (f). Para cada uno de éstos nodos que fueron alcanzados, determine todos los nuevos nodos (aquellos aun no alcanzados con anterioridad), que pueden ser alcanzados desde ese nodo a lo largo de un arco con capacidad de flujo > 0. Repita éste procedimiento sucesivamente con los nuevos nodos que vayan siendo alcanzados. El resultado será la formación de un árbol de todos los nodos que pueden ser alcanzados desde la fuente a lo largo de caminos con capacidad de flujo > 0. Por lo tanto éste procedimiento siempre identificará un camino con capacidad de flujo > 0 entre la fuente y el destino, si es que existe cuando menos uno.

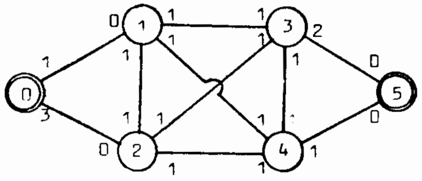
Ejemplo VII - 5.-

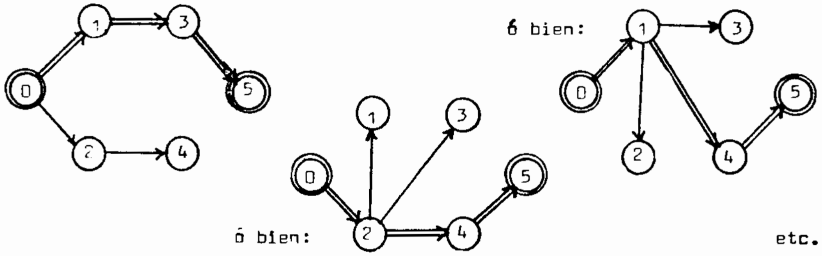
Encontrar un camino con capacidad de flujo > 0 entre la fuente y el destino para la red del ejemplo VII - 4.



Ejemplo VII - 6.-

Encontrar un camino con capacidad de flujo > 0 entre la fuente y el destino para la siguiente red:





La búsqueda de nuevos caminos con capacidad de flujo > 0 que unan (f) y (d) no es ya necesaria cuando llegamos a un valor de F que corresponda a la mínima capacidad de corte de todos aquellos cortes que separan (f) de (d), de acuerdo al Teorema VII-2, ya que éste nos garantiza haber llegado a un flujo máximo.

El paso 2 es evidente, ya que no es posible hacer circular por el camino encontrado un flujo mayor que c* , ya que de hacer lo así violaríamos las capacidades de flujo de cuando menos un arco (el correspondiente a la capacidad c*), siendo entonces el flujo asignado no factible.

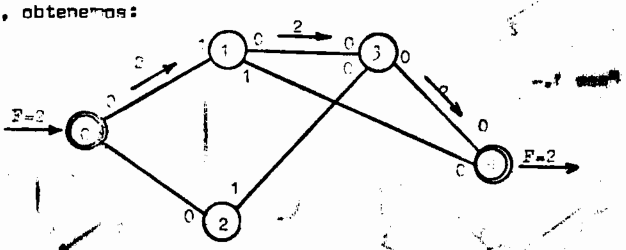
La 1a. parte del paso 3 tiene por objeto el actualizar la capacidad residual de los arcos considerados, con objeto de poder buscar nuevos caminos con capacidad de flujo > 0, si aun existen. La 2a. parte tiene por objeto poder cancelar, total o parcialmente, algún flujo ya asignado a algún otro arco, por podersele asignar otra ruta que nos permita incrementar más el flujo total. Es decir, puede suceder que un flujo asignado originalmente através de un arco pudiera haber circulado por algún otro arco y que al hacerlo por éste particular impida que otro flujo pueda hacerlo, sin embargo, de poderlo cambiar al otro, abrimos nuevos caminos para incrementar nuestro flujo total.

Ejemplo VII - 7.-

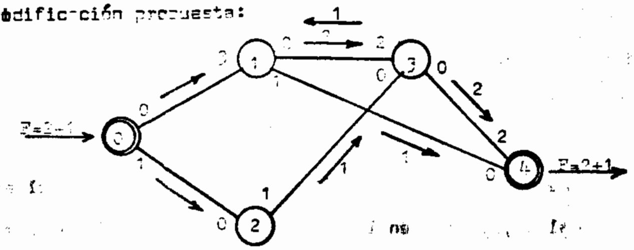
Aquí se vé la necesidad de modificar las capacidades de flujo en sentido opuesto a éste para poder tener el flujo máximo.

Sea la red del Ejemplo VII-4; al cual le hemos asignado un flujo de 2 por 0→1→3→4.

Sin efectuar la modificación propuesta en la 2a. parte del paso 3, obtenemos:



de donde podemos observar que ya no quedan caminos con capacidad de flujo > 0, lo que nos conduciría a concluir que $F_{max.} = 2$, lo cual es totalmente falso según podemos observar a continuación si efectuamos la modificación propuesta:



obteniendo así un $F_{max} = 3$ que es el correcto.

Ejemplo VII - 8.-

Apliquemos el método de solución recién descrito a la red del Ejemplo VII-6, en donde deseamos encontrar el flujo máximo que dicha red puede transportar entre "0" y "5". Supóngase un flujo inicial f(x,y) = 0.

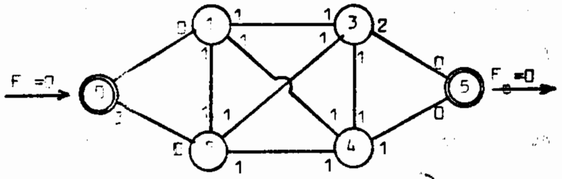


FIG A

Paso 1.-

Encontramos un camino entre la fuente y el destino que tenga capacidad de flujo > 0. La Fig. B nos representa un posible árbol con capacidades de arco > 0 que conecta todos los nodos desde el nodo "0".

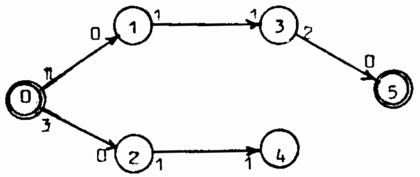


FIG. B

Paso 2.-

En el camino encontrado en el paso 1, vemos que el arco (0,1), junto con el (1,3), tienen la mínima capacidad de flujo, por lo que $c_1^* = 1$. El flujo puede ser incrementado a través del camino (0,1,3,5) a $f_1=1$, flujo con el cual los arco (0,1) y (1,3) se saturan (Fig. C)

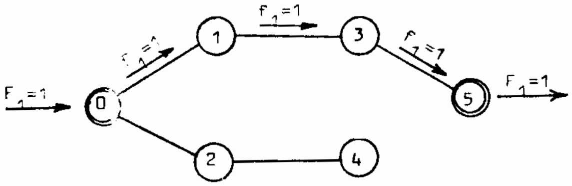


FIG. C

Paso 3.-

Ajustamos las capacidades de flujo de acuerdo con el flujo asignado, disminuyendo en 1 las capacidades a lo largo del camino (0,1,3,5) y aumentando en 1 la capacidad en sentido inverso (Fig. D)

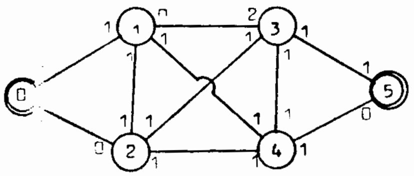
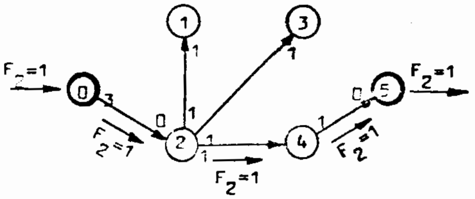


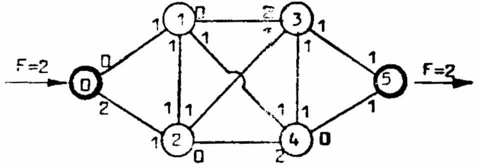
FIG. D

es decir, $c'(i,j) = c(i,j) - f_1$ y $c'(j,i) = c(j,i) + f_1$ para todos los arcos (i,j) en el camino escogido.

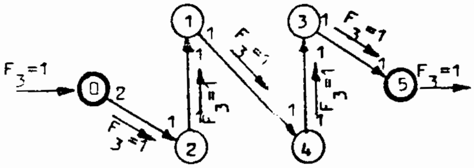
Pasos 1 y 2.- (c_2^* =1).



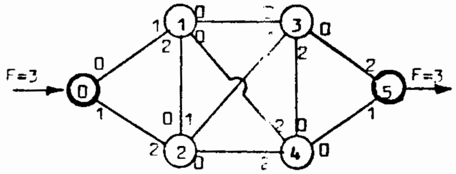
Paso 3.- ($F=F_1 + F_2$).



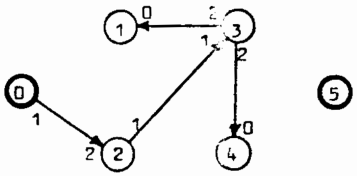
Pasos 1 y 2.- (c_3^* =1).



Paso 3.- ($F=F_1+F_2+F_3$).

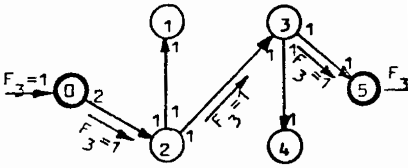


Paso 1.-

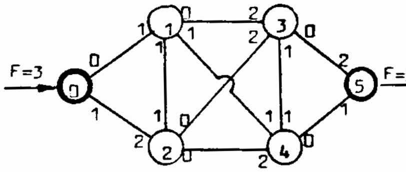


O BIEN:

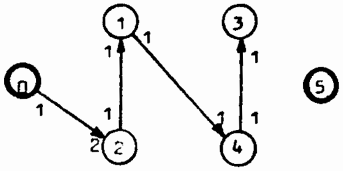
Pasos 1 y 2.- (c_3^* =1).



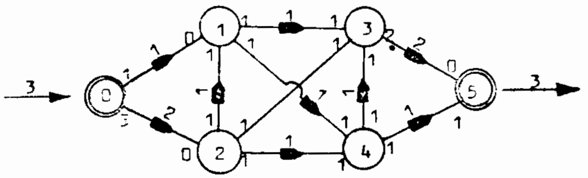
Paso 3.- ($F=F_1+F_2+F_3$).



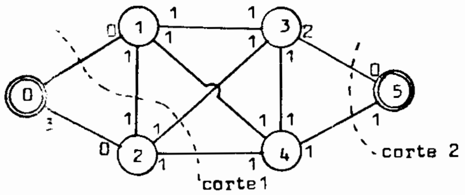
Paso 1.-



dado que no es posible llegar al destino, el proceso termina y hemos encontrado un flujo máximo $F_{max.}=3$, que circula en la siguiente forma a través de la red:



Recordando el Teorema VII-2 que nos dice que el flujo máximo es igual a la mínima capacidad de corte de todos aquellos cortes que separan "f" y "d" y que la capacidad de cualquier corte nos dá un límite superior para el flujo en la red, vemos que es lo que sucede en nuestro ejemplo:



efectuando el corte 1 mostrado, vemos que su capacidad de corte es 4, mientras que efectuando el corte 2, vemos que su capacidad de corte es 3. Dado que no podemos encontrar ningún corte con capacidad menor a 3, el flujo máximo deberá ser 3, tal y como se obtuvo anteriormente. De haber efectuado este paso con anterioridad, nos hubiéramos evitado el último paso 1.

Es evidente que la optimalidad se ha alcanzado cuando existe un corte en la red actual cuya capacidad es cero respecto a las capacidades de flujo residuales actuales. Por ejemplo , si efectuamos el corte 2 en la red resultante de la aplicación del paso 3 último, vemos que la capacidad es cero.

RUTA MAS CORTA.-

Los problemas de ruta involucran la localización de un camino através de una red, desde una fuente hasta un destino, que minimice (ó maximice) alguna función de una propiedad de los arcos del camino seleccionado (generalmente distáncia).

Los problemas de ruta son ampliamente utilizados en sistemas de transporte y de comunicaciones, pero también se presentan en una gran variedad de otros campos, tales como:

a) En la determinación del orden en el cual debemos producir una variedad de productos en una instalación común de producción, de tal forma que se minimice la suma de los costos de puesta en marcha.

b) En la determinación de un subconjunto de tareas, dentro de un conjunto interrelacionado de las mismas, cuyo tiempo de terminación fija el tiempo mínimo total para la terminación del conjunto.

METODO DE SOLUCION.-

Existen varios procedimientos bastante similares para la obtención de soluciones óptimas al problema de la ruta mas corta. Nosotros trataremos aquí los 3 más cortos y simples.

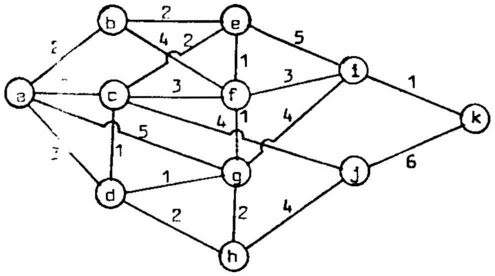
Método 1.-

Este método fué propuesto por G.J. Minty en 1957 y es aplicable para el caso de redes no dirigidas. Simplemente construya un modelo de hilo de la red, en el cual las longitudes de los pedazos de hilo sean proporcionales a las longitudes de los arcos. Tome la fuente con una mano y el destino con la otra y jale, los hilos que queden tensos indicarán los arcos correspondientes a la ruta más corta.

Método 2.-

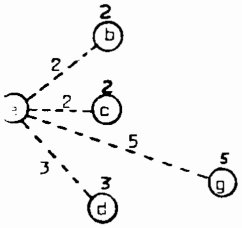
Este método consiste en un procedimiento gráfico. Para describirlo haremos uso del siguiente ejemplo:

Ejemplo VII - 9.-



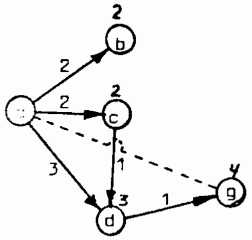
Paso 1.-

Empezando en el origen "a", dibuje en forma punteada todos los arcos por medio de los cuales se puede ir desde "a" a cualquier otro nodo, e inserte las distancias directas desde "a" en cada uno de los nodos:



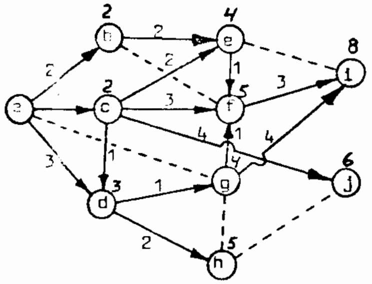
Paso 2.-

Si existen arcos que conecten cualesquiera de los nodos obtenidos en el paso 1, determine para cada arco si la ruta indirecta desde "a" es o no más corta que la directa. Dibuje la ruta mas corta con línea sólida y deje la línea punteada para la más larga. Indique la distáncia más corta encima de cada nodo. Por ejemplo, en la siguiente figura se puede apreciar que es factible ir de "a" a "g" através de "d" a un menor "costo" que directamente. Además se puede ir a "d" directamente ó através de "c". En caso de empate, marque ambas rutas con líneas sólidas.



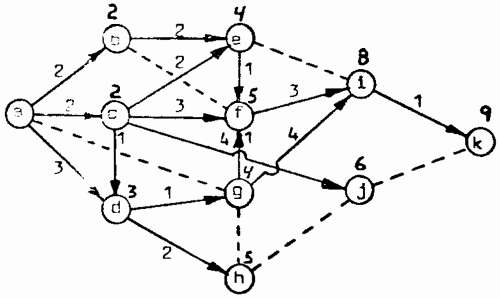
Paso 3.-

Agregue todos los nodos que pueden ser alcanzados partiendo de los nodos considerados en el paso 2 y repita ese paso con respecto a ellos. Inserte las distáncias:



Paso 4.-

Continue en la misma forma hasta completar la red. Las líneas sólidas en la siguiente figura muestran las rutas más cortas que pueden ser tomadas desde "a" hasta cualquier otro punto. Nótese que existen alternativas:



Método 3.-

Este método es la forma algebráica del método gráfico descrito con anterioridad y la esencia del procedimiento estriba en que partiendo del origen, se vá elejando del mismo, identificando en forma sucesiva la ruta más corta a cada uno de los nodos de la red, en orden ascendente de dichas distáncias más cortas desde el origen, razón por la cual el problema queda resuelto cuando se alcanza el destino.

Se supone aquí que;

a) Se puede escribir sin ningún problema, para cada nodo, los arcos que conducen a otros nodos, esto en orden creciente de su longitud.

b) No representa esfuerzo alguno el ignorar un arco de la lista si es que éste conduce a un nodo cuya distáncia ha sido asignada con anterioridad.

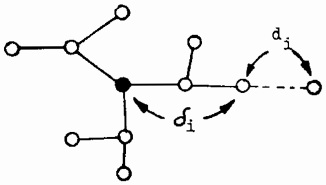
c) En la etapa "k" (k=1,2,....) del proceso de cómputo, se conocen los (k-1) nodos que están mas cercanos al origen (excluyendo éste), através de cadenas de conexión de mínima longitud, así como las rutas y distáncias más cortas correspondientes. LLámese a éste conjunto de k puntos "S" ó "nodos originales". Todos los demás nodos que no están en el conjunto S los llamaremos "nodos nuevos".

Dada la información anterior, ¿de que manera identificamos el nodo que tiene la k-ava menor distáncia al origen, através de su ruta más corta?, es decir, ¿cual de los nodos nuevos está más cercano al origen?. Para calificar como candidato, un nodo nuevo debe de estar conectado mediante un solo arco a alguno de los nodos en S (nodos originales), ya que de estar conectado através de algún otro nodo nuevo, éste último estaría más cerca del origen que el primero. Además, el nodo nuevo considerado, deberá ser el que se encuentre a menor distáncia del nodo original de entre todos los nodos (en caso de ser varios), que se encuentren unidos a él medianta un sólo arco.

Debido a que el conjunto S contiene k nodos originales y solo consideramos el nodo nuevo más cercano a cada uno de ellos, existen cuando más k candidatos para ser el nodo nuevo más cercano al origen.

Para seleccionar el candidato ganador, procédase así:

1) Sea "i" un nodo en S.
2) Sea δ_i su mínima distáncia al origen.
3) Sea j_i el nodo más cercano a "i" y que no está en S (si es que existe).
4) Sea d_i su distáncia desde "i".



Selecciónese j_s (por estar cercano a s S) como el nodo (k+1), donde:

$$(\alpha)\ldots\ldots\ \delta_s + d_s = \min(\delta_i + d_i) \qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

en donde $(\delta_i + d_i)$ es la distáncia, a lo largo de la ruta correspondiente, del origen a cada nodo candidato.

En caso de empates, escójanse todos los nuevos nodos en empate a un mismo tiempo.

La anterior selección implica que el camino más corto hasta j_s desde el origen (con una distáncia δ_s+d_s), pasa por el nodo "s". Para ver más claro esto, considerese cualquier otro camino entre j_s y el origen. Eventualmente dicho camino deberá llegar a algún nodo "i" en S desde algún nodo "j" que no está en S (donde j puede ser j_s). Suponemos que las distáncias a lo largo del camino desde j_s hasta j son no negativas, de tal forma que la distáncia total hasta el origen, a lo largo del camino, no es menor que $\delta_i + d_i$, sin embargo por (α):

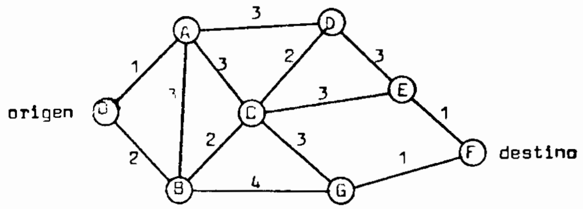
$$\delta_i + d_i \geq \delta_s + d_s$$

Puede notarse que para obtener el nodo candidato a entrar a S se requiere un máximo de k comparaciones; por lo tanto en una red con "n" nodos, no se requieren más de 1 + 2 + ... + (n-1) = n(n-1)/2 comparaciones. En la práctica, el número de comparaciones puede ser considerablemente menor debido a que despues de varias etapas, uno ó varios de los nodos en S solo tengan arcos que conduzcan a nodos en S.

Por lo tanto, para encontrar la ruta más corta desde el origen hasta el destino, se debe repetir el procedimiento anterior para encontrar el k-evo nodo más cercano al origen en forma sucesiva para k=1,2,3,...., hasta que el nodo destino sea alcanzado.

Ejemplo VII - 10.-

Encuentre la distáncia más corta entre el origen y el destino para la siguiente red:



Elabóre, para cada nodo, una lista de los arcos que salen de ese nodo, en orden ascendente de sus longitudes. No es necesario incluir los arcos que entren al origen o que salen del destino si sólo se desea calcular la ruta mas corta entre estos dos. pero sí deben incluirse si lo que se desea es calcular la ruta más corta entre el origen y el resto de los nodos.

Ⓞ	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ	Ⓕ	Ⓖ
OA-1	AB-3	BC-2	CB-2	DC-2	EF-1		GF-1
OB-2	AC-3	BA-3	CD-2	DA-3	EC-3		GC-3
	AD-3	BG-4	CA-3	DE-3	ED-3		GB-4
			CE-3				
			CG-3				

k=0

El conjunto S consiste inicialmente sólo del nodo O

$\left[S_0=\{O\}\right]$

k=1

Debido al paso anterior, sólo el nodo O es nodo original, por lo que sólo la columna Ⓞ debe tomarse en cuenta (ya que indica las distáncias de todos los nodos que están directamente conectados a él). Rápidamente se descubre que el nodo A es el más cercano y por lo tanto es el candidato seleccionado para entrar a formar parte de S $[S_1=\{O,A\}]$

Para indicar que hemos encontrado la ruta mas corta al nodo A, anote la distáncia encontrada encima de la columna Ⓐ , encierre en un círculo la entrada OA-1 de la columna Ⓒ y tache todos los arcos que entren a A de todas aquellas columnas en las que aparezca (BA-3,CA-3,DA-3).

	1 └1						
Ⓞ	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ	Ⓕ	Ⓖ
OA-1 └1	AB-3	BC-2	CB-2	DC-2	EF-1		GF-1
OB-2	AC-3	~~BA-3~~ └1	CD=2	~~DA-3~~ └1	EC=2		GC-3
	AD-3	BG-4	~~CA-3~~ └1	DE-3	ED-3		GB-4
			CE-3				
			CG-3				

k=2

Los candidatos para el 2º nodo más cercano el origen son aquellos nuevos nodos que estén mas cercanos a los nodos originales $\{O,A\}$ El nodo más cercano a O es B (por ser el único), mientras que el más cercano a A es también B (por ser el 1º no marcado de la columna Ⓐ). Comparando sus distáncias, tenemos:

Nodo B vía O - (O + 2) = 2
nodo B vía A - (1 + 3) = 4
nodo C vía A - (1 + 3) = 4
nodo D vía A - (1 + 3) = 4

por lo que seleccionamos el nodo B vía O y ahora $S_2 = \{O,A,B\}$

Encerramos en un círculo la entrada OB-2 de la columna Ⓞ , anotámos la distáncia encontrada de 2 encima de la columna Ⓑ y tachámos todas las entradas que contengan arcos que entren a B (AB-3, CB-2,GB-4).

Como la columna Ⓞ ha agotado todas sus entradas, ponemos una X debajo para indicar que ésta columna ya no deberá ser considerada en lo sucesivo.

	1 └1	2 └2					
Ⓞ	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ	Ⓕ	Ⓖ
X └2							
OA-1 └1	~~AB-3~~ └2	BC-2	~~CB-2~~ └2	DC-2	EF-1		GF-1
OB-2 └2	AC-3	~~BA-3~~ └1	CD-2	~~DA-3~~ └1	EC-3		GC-3
	AD-3	BG-4	~~CA-3~~ └1	DE-3	ED-3		~~GB-4~~ └2
			CE-3				
			CG-3				

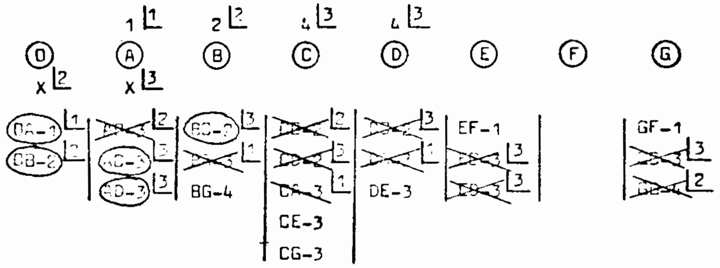
k=3

Buscamos ahora los nodos nuevos más cercanos a los nodos originales A y B (O ya no se considera por tener una X su columna). Estos los encontramos mirándo los arcos no marcados que se encuentren en primer lugar en las columnas correspondientes (es decir, en las columnas que ya tienen distáncias), Sus distáncias son:

nodo C vía A - (1 + 3) = 4
nodo D vía A - (1 + 3) = 4
nodo C vía B - (2 + 2) = 4

y debido al empate seleccionamos los nodos D y C (vía A ó B) como nuevos miembros de S. Ahora $S_3 = \{O,A,B,C,D,\}$.

Debido al empate, encerramos en un círculo las entradas AC-3 y AD-3 y la BC-2 de las columnas Ⓐ y Ⓑ respectivamente, anotamos la distáncia de 4 encima de las columnas Ⓒ y Ⓓ , tachémos todos los demás arcos que entran a C y a D (CD-2, DC-2,EC-3,ED-3,GC-3) y ponemos una X debajo de Ⓐ para indicar que ya no la consideraremos más.



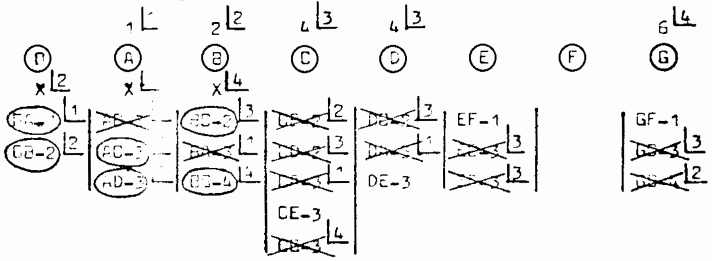
k=4

Investigamos ahora cual es el nodo más cercano a los nodos originales en S_3 (Los nodos O y A ya no se consideran por tener una X.).

Tenemos:

nodo G vía B - (2 + 4) = 6
nodo G vía C - (4 + 3) = 7
nodo E vía C - (4 + 3) = 7
nodo E vía D - (4 + 3) = 7

por lo que seleccionamos al nodo G (vía B) como nuevo nodo original. Ahora $S_4 = \{O,A,B,C,D,G\}$. Escribimos su distáncia de 6 encima de la columna de Ⓖ y encerramos en círculo el arco BG-4, tachando además todos los demás arcos no tachados que entran a G (CG-3); ponemos también una X en la columna Ⓑ .

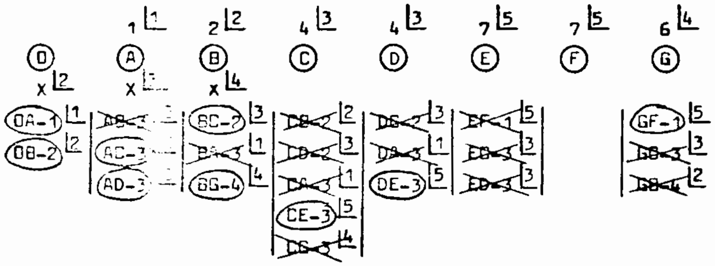


k=5

Comparamos:

nodo E vía C - (4 + 3) = 7
nodo E vía D - (4 + 3) = 7
nodo F vía G - (6 + 1) = 7

debido al empate seleccionamos los nodos F y E (vía CE ó DE) y escribimos su distáncia de 7 encima de la columna respectiva. Encerramos en un círculo los arcos CE-3, DE-3 y GF-1 y tachamos la entrada EF-1. Ahora $S_5 = \{O,A,B,C,D,G,F,E\}$



La ruta más corta entre el orígen "O" y el destino "F", puede ser encontrada partiendo del nodo F hacia atrás siguiendo los arcos encerrados en círculo. Así encontramos:

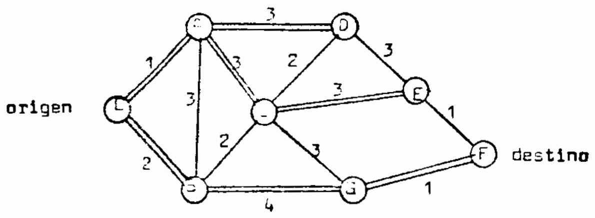
F - G - B - O

por lo que la ruta más corta entre "O" y "F" es:

OB → BG → GF

con una distáncia total de 7.

La ruta más corta entre el origen y todos los demás nodos ha sido también identificada a lo largo de los caminos OA,OB,AC,AD,BG,CE,GF (ver líneas gruesas en la siguiente figura), con alternativas BC por AC y DE por CE.



MINIMO ARBOL DE EXPANSION.-

Este tipo de problema es una variación del Problema de la Ruta mas Corta.

Dada una red conectada G con "n" nodos, se pueden ir eliminando arcos de G hasta que se obtiene un árbol; tal árbol se conoce como un árbol de expansión de G. A nosotros nos interesará encontrar, de entre todos los árboles de expansión, aquel que tenga una longitud total mínima.

Como antes, el conjunto de nodos en G y las distáncias entre los pares de nodos se conocen, pero ahora no se especifican los arcos que conectan dichos nodos. En este caso, en lugar de encontrar la ruta más corta através de una red completamente definida, el problema consiste en encontrar aquellos arcos para la red que tengan la longitud total menor, al mismo tiempo que suministran una ruta entre cada pareja de nodos. Lo anterior se logra escogiendo los arcos de forma tal que la red resultánte forme un árbol que conecte todos los nodos dados.

Si una red G y un árbol de expansión T de G se especifícan, nos referimos a los arcos en T como "arcos del árbol" y todos los demás como"arcos fuera del árbol".

Supóngase que cada arco (x,y) de una red conectada G tiene asociado con él un número real a(x,y), que podemos pensar como la "longitud" de dicho arco. Supóngase que T es un mínimo árbol de expansión de G y sea: $x_1,x_2,\ldots,x_k$ la cadena de arcos del árbol T que une x_1 y x_k. Aquí (x_1,x_k) es un arco fuera del árbol T. Es claro entonces que:

$$a(x_1,x_k) \geqq \max\left[a(x_1,x_2),\ a(x_2,x_3),\ \ldots,\ a(x_{k-1},x_k)\right] \ldots(\alpha)$$

ya que de ser menor que alguno de ellos, el árbol sería más corto incluyendo (x_1,x_k) en lugar del otro.

Teorema VII - 3.-

Una condición necesaria y suficiente para que un árbol de expansión sea mínimo, es que la relación (α) se cumpla para cada arco fuera del árbol.

Este tipo de problema tiene infinidad de aplicaciones prácticas; por ejemplo, es usado en la planeación de redes de transporte en donde los nodos serían terminales y los arcos los canales de transporte (carreteras, vías de FF.CC., etc.).

METODO DE SOLUCION.-

1) Seleccione un nodo arbitráriamente y conectelo al nodo más cercano.

2) Identifique aquel nodo no conectado que se encuentre más cercano a un nodo conectado; conecte estos dos nodos. Repita ésta paso hasta que todos los nodos hayan sido conectados.

Ejemplo VII - 11.-

Supóngase el problema del ejemplo VII-10, pero en el cual, aunque se conocen los nodos y las distáncia entre ellos, aun no se han especificado los arcos. Supónga también que las distáncias no especificadas son mayores que las que sí se dán.

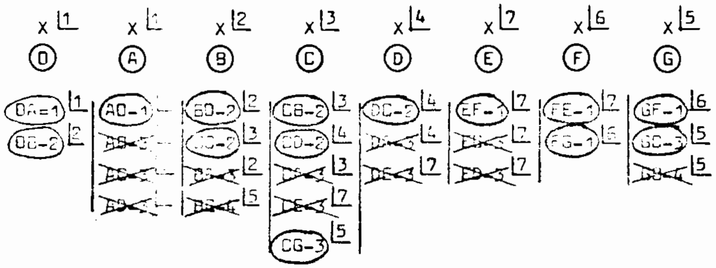
Conviene nuevamente elaborar una lista, para cada nodo, de los arcos potenciales que pudieran salir del nodo, en orden creciente de sus distancias. Como se muestra a continuación, dicha lista es igual a la elaborada para el Problema de la Ruta más Corta, excepto que aquí ya no existen ni origen ni destino, por lo que los arcos potenciales que entran a "O ó salen de "F" también se incluyen.

Ⓞ	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ	Ⓕ	Ⓖ
OA-1	AO-1	BO-2	CB-2	DC-2	EF-1	FE-1	GF-1
OB-2	AB-3	BC-2	CD-2	DA-3	EC-3	FG-1	GC-3
	AC-3	BA-3	CA-3	DE-3	ED-3		GB-4
	AD-3	BG-4	CE-3				
			CG-3				

k=1

El primer paso se inicia seleccionando arbitrariamente cualquier nodo. Para facilitar la comparación con el problema de la Ruta más Corta, escogeremos al nodo O.

El nodo A se identifica inmediátamente como el nodo más cercano con sólo mirar la parte superior de la columna Ⓞ , por lo que el arco OA se agrega a la red. Para indicarlo, encierre las entradas OA-1 y AO-1 en un círculo y ponga una X encima de los nodos "O" y "A" para indicar que son nodos conectados.



k=2

Para identificar el nodo no conectado más cercano a alguno de los ya conectados (O y A), sólamente compare las entradas superiores no marcadas para cada nodo conectado (OB-2 y AB-3). Dado que 2 < 3, OB es el siguiente arco que se agrega a la red. Para indicarlo, encierre OB-2 y BO-2 en un círculo y pónga una X encima del nodo B. Debido a que nunca debemos agregar a la red un arco que conecte 2 nodos ya conectados con anterioridad, cualquier arco potencial desde el nodo más recientemente conectado que pudiera unirlo con los otros debe ser eliminado de futuras consideraciones. Por lo tanto tache AB-3 y BA-3.

k=3

El siguiente arco se obtiene comparando AC-3 y BC-2 que nos indican que BC debe ser agregado a la red. Encierre BC-2 y CB-2 en un círculo y pónga una X encima del nodo C para indicar que ya está conectado. Tache AC-3 y CA-3.

k=4

Compare ahora AD-3, BG-4 y CD-2. Se escoge CD como el nuevo arco de la red. Encerramos en círculo CD-2 y DC-2, ponemos una X sobre D y tachamos AD-3 y DA-3.

k=5

Compare BG-4, CG-3 y DE-3. Arbitrariemente, entre el empate, escogemos CG como el nuevo arco. Encierre CG-3 y GC-3 en un círculo y ponga una cruz sobre G. Tache BG-4 y GB-4. Nótese que aquí sólo se escogió uno de los arcos en empate, el otro no recibe ninguna marca.

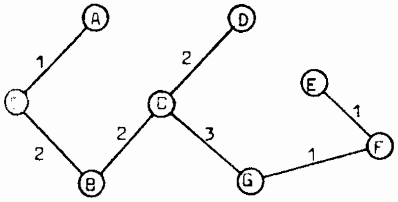
k=6

Compare CE-3, DE-3 y GF-1. Seleccionamos GF como nuevo nodo de la red. Encerramos GF-1 y FG-1 en un círculo y ponemos una X sobre F.

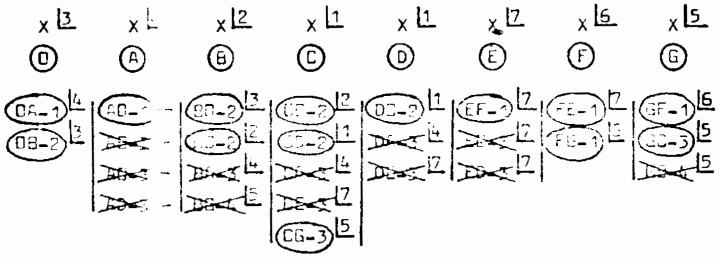
k=7

Compare CE-3, DE-3 y FE-1. Seleccione FE como nuevo nodo de la red. Encerramos FE-1 y EF-1 en un círculo y ponemos una X encima de E. Tachar CE-3, EC-3, DE-3 y ED-3.

Debido a que todos los nodos han sido ya conectados, hemos terminado. La red resultante tiene una longitud total de sus arcos igual a 12.



El mismo árbol se hubiese obtenido seleccionando otro nodo inicial. Supóngase que se selcciona el nodo D:



con una longitud total = 12.

El mismo resultado se hubiese obtenido cualesquiera que hubiese sido el nodo inicial.

PERT.-

La Técnica de Evaluación u Revisión de Programas, PERT (Program Evaluation and Review Technique), uno de los varios métodos de ruta crítica que existen en la actualidad, tuvo sus principios en la Gráfica de Gant. PERT se desarrolló para el Proyecto Polaris en 1958, por la Oficina de Proyectos Especiales de la Marina de EEUU, junto con la LOckheed Aircraft Corporation y en colaboración con la Booz, Alden and Hamilton (empresa consultora en administración) y a él se le atribuye el haber adelantado la terminación del proyecto en más de 2 años.

Posteriormente , la industria adoptó el PERT para ayudar en la administración de proyectos que incluyen muchas actividades interrelacionads. Actualmente se utiliza para medir y controlar el progreso de proyectos tales como: programas de construcción, programación de computadoras, preparación de cotizaciones, planeación de mantenimiento, instalación de sistemas de computadora, modificación e instalación de equipos, programas de promoción de ventas y construcción de presas.

Uno de los principales objetivos de PERT es el determinar la probabilidad de cumplir con fechas límite especificadas. PERT además identifica aquellas actividades que pueden ser cuellos de botella y en las que, por lo tanto, se debe vigilar más estrictamente el estar dentro del itinerario. Un tercer objetivo es la evaluación del efecto de un cambio de recursos de aquellas actividades menos críticas, hacia los probables cuellos de botella. Puede también evaluar el efecto de una desviación del requerimiento real de tiempo para una actividad de aquel que fué predecido.

PASOS SEGUIDOS PARA LA APLICACION DE METODOS DE RUTA CRITICA.-

Paso 1.- Planeación del Proyecto.- Aquí se definen las actividades que forman el proyecto y la dependencia entre ellas se muestra en forma explícita como una red.

Paso 2.- Estimación de los Tiempos.- Se efectúan estimaciones de los tiempos requeridos para llevar a cabo cada una de las actividades de la red. Estas estimaciones se basan en la disponibilidad de mano de obra y equipo, así como en ciertas suposiciones que pudieran haber sido hechas en la planeación del proyecto (Paso 1).

Paso 3.- Programación.- Los cómputos de programación proporcionan los tiempos más próximos y más tardíos permisibles para el inicio y terminación de cada actividad y como un "sub-producto", identifican la ruta crítica através de la red, así como la "holgura de tiempo" asociada con cada camino no crítico. En nuestro curso sólo veremos estos 3 pasos.

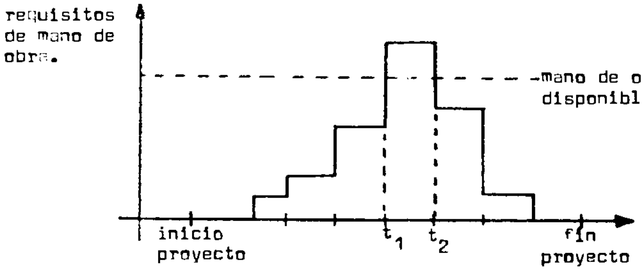
Paso 4.- Ajustes Tiempo-Costo.- Si el tiempo programado para completar el proyecto, tal y como se determinó en el paso 3, es satisfactorio, la planeación y programación del proyecto pueden estar terminados. Sin embargo, si se está interesado en determinar el costo de reducir el tiempo de terminación del proyecto, entonces se deben considerar ajustes tiempo-costo en los tiempos de ejecución para aquellas actividades en la ruta crítica ó en la(s) ruta(s) casi crítica(s). En éste paso se desarrollan procedimientos para reducir el tiempo de duración del proyecto, con un mínimo incremento en los costos directos del mismo, mediante la reducción de tiempo a lo largo del camino crítico, haciéndolo en aquellos lugares en los cuales puede ser obtenido a un mínimo costo. Los objetivos de éste paso pueden ser:

a) Encontrar el costo extra debido a la reducción del tiempo total de duración de un proyecto.

b) El programar el proyecto de tal forma que se minimice la suma de los costos directos e indirectos, es decir, el tiempo de duración del proyecto para costo mínimo.

c) Costo de programar para cumplircon un tiempo específico de duración del proyecto.

Paso 5.- Distribución de Recursos.- La factibilidad de cada programación debe ser revisada con respecto a sus requerimientos de mano de obra y equipo. El establecimiento de una factibilidad completa para una programación específica puede requerir de nueva planeación y programación (Pasos 1 y 3) ó ajustes tiempo-costo (Paso 4). De aquí que una solución final puede requerir la ejecución de varios ciclos de pasos 3,4 y 5.



De la figura podemos apreciar los requerimientos de mano de obra a lo largo del desarrollo de un proyecto. Si la demanda pico para éste recurso particular (que ocurre en el intervalo t_1 a t_2) se juzga excesiva, los métodos de ruta crítica suministran un medio conveniente para reprogramar y replanear el proyecto para eliminar éste pico. Primero, cómputos de rutina indican si la programación de ciertas actividades puede adelantarse ó atrasarse sin afectar el tiempo de ter minación del proyecto. Posteriormente, los métodos de ruta crítica hacen posible el simular, en una forma muy simple, los efectos de varios cambios, para determinar así una forma aceptable de eliminar la indeseada demanda pico del recurso básico.

Paso 6.- Control del Proyecto.- Cuando la planeación y programación de la red han sido desarrollados en forma satisfactoria, se preparan en forma definitiva para su uso en el campo. El proyecto se controla comparando el progreso logrado contra el programa, asignando y programando mano de obra y equipo y analizando los efectos de los retrasos. Cuando un cambio mayor ocurre en la programación, la red se revisa también y una nueva programación es elaborada.

Según se indicó ya, el primer paso en la utilización de métodos de ruta crítica es la identificación de todas las actividades involucradas en el proyecto, así como su representación gráfica en un diagrama de flujo ó red. Este paso se conoce como la "fase de planeación". Existen 2 formas diferentes de trazar éste tipo de redes:

a) Sistema de actividades en las flechas.
b) Sistema de actividades en el nodo.

Nosotros utilizaremos el primero por ser el más usado entre los industriales y constructores, lo que de ninguna manera significa que sea el mejor. Al final nos referirémos al 2º.

Definición VII - 16.-

Una actividad se define como uno de los trabajos requeridos por el proyecto que cumple con la siguiente regla: no puede iniciarse hasta que otras actividades específicas que la preceden hayan sido completadas. Una actividad se representa mediante un arco ó flecha de la red. La cola de la flecha representa el principio de la actividad y la punta su terminación. La longitud, forma ó posición de la flecha no tienen importancia alguna; lo importante es la forma en que las actividades representadas con flechas se eslabonan, conjuntamente, en una secuencia de tiempo para formar una red operacional.

Definición VII - 17.-

Una flecha que representa una mera dependencia de una actividad con respecto a otra, se llama "actividad artificial" ó "actividad ficticia". Generalmente se representan mediante flechas punteadas y tienen asociadas a ellas una estimación de tiempo de cero.

Al construir un diagrama de flechas, el planeador debe tener en cuenta las actividades requeridas y sus respectivas relaciones de tiempo, lo que puede hacerse escribiendo una lista de las actividades del proyecto. En un proyecto muy complicado parece imposible anotar inicialmente todas sus actividades; sin embargo, las actividades adicionales aparecen a medida que se desarrolla el diagrama de flechas. En seguida, el planeador debe determinar el orden lógico de las actividades, osea la forma en que cada una de ellas se ajusta a las demás: ¿hay alguna actividad que precede ó que sigue ó que se desarrolle simultáneamente con otra actividad?. Finalmente, es necesario dibujar el diagrama de flechas para mostrar como se interrelacionan las actividades en el tiempo. El planeador debe vigilar las actividades que sean demasiado grandes ó demasiado pequeñas. Es posible que una actividad de gran tamaño pueda tratarse como más de una, ó que muchas pequeñas puedan combinarse en una sola.

Definición VII - 18.-

Los puntos iniciales y finales de las actividades (y que generalmente se muestran con círculos), se llaman eventos.

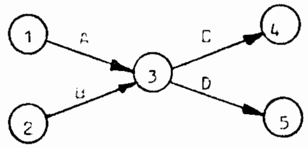
Los eventos son puntos instantáneos en el tiempo, en contraste con las actividades que tienen una longitud de tiempo ó duración.

Las cabezas de flecha indican la secuencia en la que los eventos deben desarrollarse; por lo tanto, un evento es la terminación de todas las actividades que conducen (terminan) hacia ese nodo, y ese evento debe preceder la iniciación de todas las actividades que salen (se inician) de ese nodo. El nodo hacia el que todas las actividades se dirígen y ninguna sale, es el evento correspondiente a la terminación del proyecto.

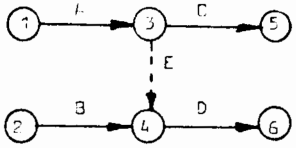
Los eventos se numeran en serie, desde el principio hasta el fin de un programa. La regla general para numerarlos es que ningún evento puede numerarse hasta que hayan numerado todos los eventos precedentes, es decir, no podemos numerar ningún evento hasta que hayamos numerado primeramente la cola de cada flecha cuya punta señale el evento. El número de la cabeza de una flecha siempre es mayor que el de su cola.

Ejemplo VII - 12.-

a) Las actividades A y B preceden a las C y D.

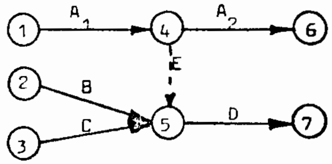


b) La actividad C depende de la actividad A, mientras que la D depende de que se terminen A y B.



E = actividad ficticia

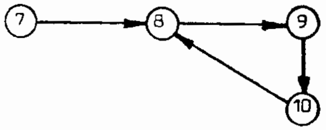
c) La actividad D depende de la terminación de B y C, así como de la terminación de la 1a. mitad de A, la 2a. mitad de A es independiente de B.C y D.



E = actividad ficticia

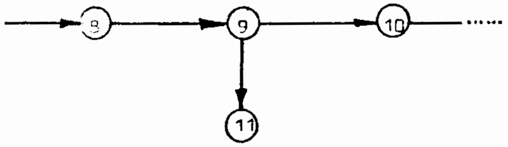
ERRORES COMUNES.-

.- No deben existir circuitos (loops).



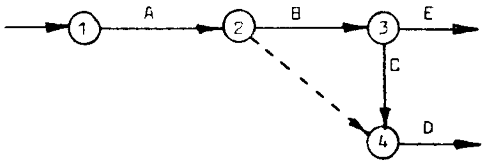
debido a que esto representa una situación imposible: "el evento 10 depende del evento 9,que depende del evento 8, que depende del evento 10, que depende del evento 9, ...". Si un circuito así aparece en nuestra red, la lógica del diagrama es incorrecta, por lo que la construcción del mismo debe volverse a examinar.

2.- Rutas cerradas tampoco deben existir.



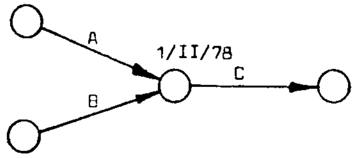
esto también es incorrecto, ya que la actividad 9-11 se desarrolla sin ningún resultado.

3.- Es preferible el evitar actividades ficticias innecesarias.

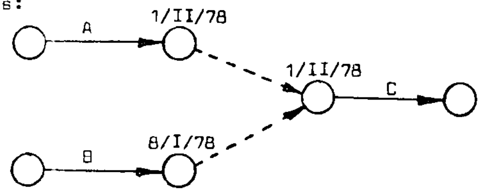


evidentemente, la actividad D depende de C,B y A. La dependencia sobre A es clara aún sin la actividad ficticia 2-4, la cual es redundante.

En algunas ocasiones puede ser conveniente el introducir actividades artificiales para efectos de claridad. Supóngase que una importante fecha programada se indica en un nodo al cual convergen 2 actividades:



debido a la ambiguedad de los puntos de unión, no está claro qué es lo que esta fecha significa. ¿representa la fecha programada para completar A ó B?, ¿la terminación de A y B? ó ¿el comienzo de C?. En éstos casos, unas actividades ficticias pueden ser introducidas aclarando todas las dudas:



ESTIMACION DE TIEMPOS.-

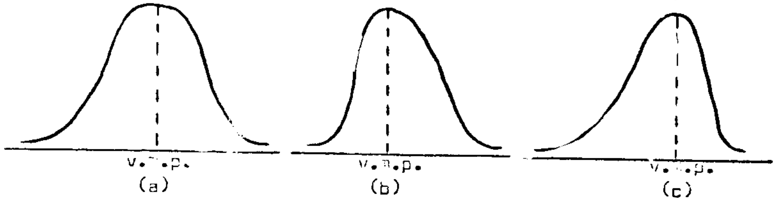
La asignación de tiempos de duración a las actividades es indispensable para completar la red PERT. ¿Debe hacerse ésto basándose en el costo más bajo posible, independientemente de la longitud de tiempo requerida, ó en el tiempo más corto posible, independientemente de los costos, ó en algún compromiso entre los dos casos anteriores, ó sobre cualquier otra base?

La versión original de PERT hacia la suposición realista de que el tiempo requerido para llevar a cabo cada actividad en el proyecto, es realmente una variable aleatória que cumple con alguna distribución probabilística. Sin embargo, debido a que ésta suposición complica bastante el procedimiento, una versión simplificada,que considera éstos tiempos como constantes predecibles, se utiliza a menudo en la práctica.

La estimación del tiempo requerido para una actividad puede entonces estar basada en un sólo valor, que es el procedimiento empleado por el CPM, ó puede estar basado en un sistema de 3 estimaciones de tiempo, que es el caso del PERT, tal y como veremos más adelante

La estadística nos muestra que la mayor parte de los grupos de datos tienden a tomar una forma de campana cuando se trazan (Distribución Normal), mientras que otras lo hacen en forma asimétrica (Distribución Beta).

v.m.p. = valor más probable



Con lo anterior en mente, es ahora evidente que con objeto de obtener los resultados deseados, cuando se usa PERT, es necesario ella. Una vez que la actividad ha sido ejecutada, el tiempo real consumido por ella, sea t', puede ser considerado como una muestra tomada de ésta distribución hipotética. Sin embargo, todos los cómputos se efectúan con anterioridad a la ejecución de la actividad, por lo que como ya se dijo, la base de los cómputos PERT no envuelve un muestreo estadístico, sino que depende del juicio de la persona encargada de la actividad de referencia, ya que se le pide que de acuerdo a su experiencia, estime los 3 tiempos mostrados en la figura anterior (a,m y b), los que a su vez serán usados para estimar el valor esperado y la variancia de la distribución hipotética del tiempo de ejecución de la actividad.

Con objeto de obtener valores confiables para los estimadores de la duración de la actividad, conviene tener presente lo siguiente:

a) Una de las suposiciones importantes en el Teorema del Límite Central, es la independencia de las variables aleatorias consideradas. Debido a que éste Teorema es la base de los cómputos de probabilidad en PERT, los estimadores de "a","m" y "b" deben obtenerse satisfaciendo ésta condición de independencia, es decir, deben hacerse independientemente de lo que pueda ocurrir en otras actividades del proyecto que pueden a su vez afectar la disponibilidad de mano de obra y equipo planeada para la actividad de referencia.

b) Las estimaciones de "a","m" y "b" no deben ser influenciadas por el tiempo disponible para completar el proyecto, es decir, es ilógico el revisar todas nuestras estimaciones, reduciéndolas después de saber que la ruta crítica del proyecto es demasiado larga.

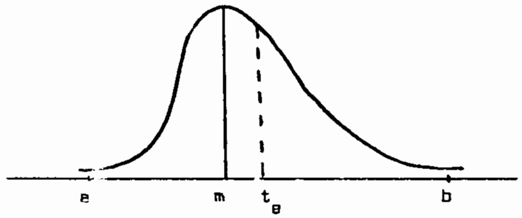
c) Con objeto de obtener una atmósfera que conduzca a estimar el valor esperado (t_e) y la variancia (σ^2) de los tiempos requeridos para cada actividad.

Debido a que los conceptos de valor esperado y variancia pueden resultar demasiado complejos para aquellos individuos calificados para estimar los requerimientos de tiempo para las actividades, PERT usa un procedimiento estimativo simplificado, por medio del cual cantidades intuitívamente significativas son obtenidas, mismas que luego se convierten en estimadores del valor esperado y de la variancia. Este procedimiento consiste en la obtención de 3 estimaciones del tiempo requerido para cada actividad:

a) El tiempo "más probable", llamado "m" y que trata de representar la estimación más realista del tiempo que la actividad puede consumir.

b) El tiempo "optimista", llamado "a" y que representa el tiempo en el cual la actividad puede ser completada si todo sale excepcionalmente bien.

c) El tiempo "pesimista", llamado "b" y que representa el mayor tiempo que pudiese necesitar la actividad bajo las más adversas circunstancias.



Como puede apreciarse al efectuar cómputos en PERT, la distribución del tiempo de duración de una actividad es meramente hipotética, debido a que no es posible efectuar un muestreo estadístico en la obtención de estimaciones no desviadas para "a","m" y "b", debe dejarse bien claro que los mismos son estimaciones y no compromisos de programa.

d) En general, las estimaciones de "a","m" y "b" no deben incluir tolerancias para eventos que, por ocurrir tan poco frecuentemente, no se puede pensar en ellos como variables aleatorias (p.ej. actos de la naturaleza: fuegos, huracanes, inundaciones, etc.).

e) En general, las estimaciones de "a","m" y "b" deben incluir tolerancias para eventos normalmente considerados como variables aleatorias (p.ej. los efectos del clima).

ESTIMACION DE LA MEDIA Y LA VARIANCIA DE LOS TIEMPOS DE EJECUCION.-

La Estadística nos dice que para distribuciones unimodales, la desviación estandar ($\sqrt{\text{variancia}}$), puede ser estimada, a groso modo, como 1/6 del rango de la distribución; esto es debido a que cuando menos el 89% de cualquier distribución se encuentra dentro de una distancia de 3 desviaciones estandar de la media (para la Distribución Normal este % es de 99.7+). De aquí que es factible el utilizar las estimaciones de tiempo "a" y "b" para estimar la desviación estandar:

$$\sigma = 1/6(b - a)$$

Con objeto de obtener la estimación del valor esperado, tiene que ser evidente que el tiempo más probable (m) debe tener una mayor ponderación que el más optimista (a) y el más pesimista (b). Ciertamente hay más probabilidad de que un programa se complete más cerca del tiempo "m" que de los otros 2 tiempos extremos. La fórmula desarrollada para el tiempo esperado de una actividad (t_e) es:

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6}$$

TIEMPO MAS PROXIMO Y MAS TARDIO PARA UN EVENTO.-

Definición VII - 19.-

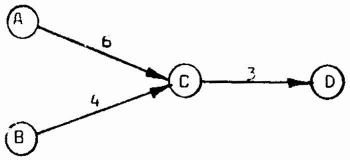
Para un evento particular, su tiempo más próximo (T_E), puede ser definido como el tiempo en el cual el evento ocurrirá si las actividades precedentes son comenzadas tan pronto como sea posible.

Definición VII - 20.-

El tiempo más tardío para un evento (T_L), puede ser definido como la fecha más lejana en la cual el evento puede ocurrir sin retrasar la terminación del proyecto más allá de su tiempo más próximo.

Ejemplo VII - 13.-

Considere el siguiente plan de flujo, en donde los números indican el tiempo (en meses) requerido para llevar a cabo las actividades respectivas:



Suponiendo que los estimadores de tiempo son correctos, es evidente que los eventos C y D no pueden ocurrir antes de 6 y 9 meses respectivamente, pero que la actividad BC puede ser retrasada 2 meses sin retrasar los eventos C y D. De aquí que los tiempos más próximos para los eventos C y D son 6 y 9 respectivamente. Los tiempos más tardíos para los eventos A,B,C y D son: 0,2,6 y 9 respectivamente.

Definición VII - 21.-

La "holgura" (O tiempo de sobra) de un evento, es la diferencia entre su tiempo más tardío y su tiempo más próximo. La holgura indica que tanto retraso puede ser tolerado en alcanzar el evento sin retrasar la terminación del proyecto.

Definición VII - 22.-

La "ruta crítica" para un proyecto puede definirse como un camino através de la red, tal que los eventos en éste camino tienen una holgura de cero.

Ejemplo VII - 14.-

La holgura para los eventos del ejemplo VII-13 es de: 0,2,0 y 0 para los eventos A,B,C y D respectivamente. La ruta crítica para esta red sería A → C → D.

Al efectuar los cálculos de T_E y T_L, se siguen éstas reglas:

a) Si sólamente existe un camino que conduzca a un evento particular, su tiempo más próximo es la suma de los tiempos tomados por las actividades que conducen a él.

b) Si sólamente existe un camino que conduzca desde un evento particular hasta el evento final, el tiempo más tardío para ese evento es el tiempo más próximo para el evento terminal menos la suma de los tiempos tomados por las actividades en el camino indicado.

c) El tiempo más próximo de un evento al que llegan varias actividades, es el mayor de los tiempos más próximos de terminación de las actividades que convergen al evento en cuestión.

d) El tiempo más tardío para un evento del que salen varias actividades, es el menor de los tiempos más tardíos de iniciación de las actividades que salen del evento en cuestión.

e) $T_L = T_E$ para el nodo terminal.

Al efectuar los cálculos de σ^2 se siguen éstas reglas:

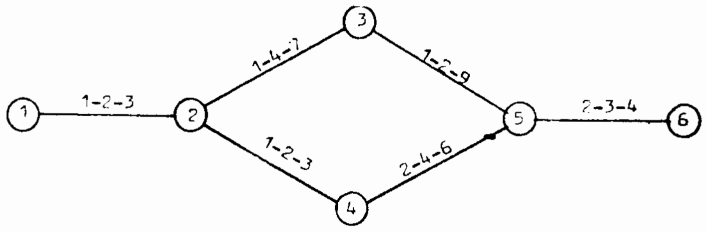
a) σ^2 para el nodo inicial de la red se supone cero.

b) σ^2 para el evento que sigue a la actividad en cuestión, se obtiene sumando la variancia de la actividad a la variancia del evento que le precede. Lo anterior para aquellos casos en que sólo una actividad conduce al evento.

c) Para eventos a los que llegan varias actividades, σ^2 se calcula a lo largo del mismo camino usado para calcular t_e, es decir, el camino más largo. En caso de empate, escoger el camino que dá la mayor variancia.

Ejemplo VII - 15.-

Sea la siguiente red:



$$t_{1-2} = \frac{1 + 8 + 3}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$t_{2-3} = \frac{1 + 15 + 7}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$t_{2-4} = \frac{1 + 8 + 3}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$t_{3-5} = \frac{1 + 8 + 9}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$t_{4-5} = \frac{2 + 16 + 6}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$t_{5-6} = \frac{2 + 12 + 4}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\sigma^2_{1-2} = \left[\frac{(3-1)}{6}\right]^2 = \frac{1}{9}$$

$$\sigma^2_{2-3} = \left[\frac{(7-1)}{6}\right]^2 = 1$$

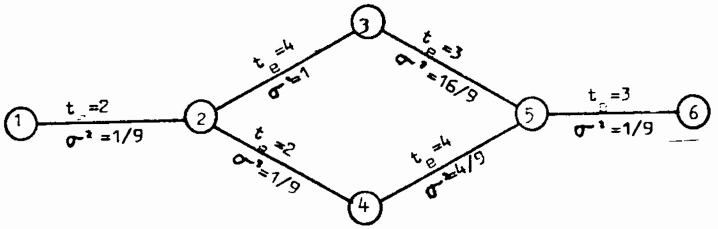
$$\sigma^2_{2-4} = \left[\frac{(3-1)}{6}\right]^2 = \frac{1}{9}$$

$$\sigma^2_{3-5} = \left[\frac{(9-1)}{6}\right]^2 = \frac{15}{9}$$

$$\sigma^2_{4-5} = \left[\frac{(6-2)}{6}\right]^2 = \frac{4}{9}$$

$$\sigma^2_{5-5} = \left[\frac{(4-2)}{6}\right]^2 = \frac{1}{9}$$

ACTIVIDAD	t_e	σ^2
1-2	2	1/9
2-3	4	1
2-4	2	1/9
3-5	3	16/9
4-5	4	4/9
5-6	3	1/9



	T_E		T_L		
EVENTO	valor esperado	σ^2	valor esperado	σ^2	$T_L - T_E$
1	0	0	0	27/9	0
2	2	1/9	2	26/9	0
3	6	10/9	6	17/9	0
4	4	2/9	5	5/9	1
5	9	26/9	9	1/9	0
6	12	27/9	12	0	0

De los cálculos anteriores vemos que la ruta crítica es: 1 → 2 → 3 → 5 → 6 y que el camino 2 → 4 → 5 tiene una holgura de 1. Esta ruta crítica se obtuvo uniendo entre sí los eventos con holgura cero.

PROBABILIDAD DE CUMPLIR CON UNA FECHA PROGRAMADA (T_S).

PERT supone que la distribución de probabilidades de los tiempos más próximos es una Distribución Normal. El fundamento para ésta suposición es que el tiempo más próximo es la suma de varias variables aleatorias y la versión general del Teorema del Límite Central implica que tal suma es aproximadamente normal bajo un gran número de condiciones.

Dada la media y la variancia, es ya un procedimiento sencillo encontrar la probabilidad de que una variable aleatoria normal (tiempo más próximo) sea menor que una cantidad especificada (tiempo programado para que ocurra el evento) (T_S). Se entra a las tablas con el valor $(T_S - T_E)/\sigma$ y se lee diréctamente la probabilidad.

Ejemplo VII - 16.-

Para la red del problema VII-15 encontramos que la ruta crítica era 1-2-3-5-6. Sea T^* la suma de las variables aleatorias t_e a lo largo de este camino. Tenemos:

$$T^* = t^*_{1-2} + t^*_{2-3} + t^*_{3-5} + t^*_{5-6}$$

Media de $T^* = T_E$

$$T_E = (t_e)_{1-2} + (t_e)_{2-3} + (t_e)_{3-5} + (t_e)_{5-6}$$

$$T_E = 2 + 4 + 3 + 3 = 12$$

Variancia de $T^* = \sigma^2_{T^*} = \sigma^2_{t^*_{1-2}} + \sigma^2_{t^*_{2-3}} + \sigma^2_{t^*_{3-5}} + \sigma^2_{t^*_{5-6}}$

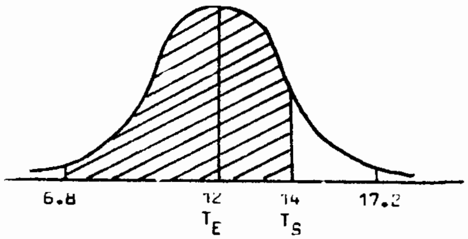
$$\sigma^2_{T^*} = 1/9 + 9/9 + 16/9 + 1/9 = 27/9 = 3$$

información con la cual podemos trazar la siguiente figura (Distribución Normal):

$\sigma = \sqrt{3} = 1.73$

$T_E - 3\sigma = 12 - 5.2 = 6.8$

$T_E + 3\sigma = 12 + 5.2 = 17.2$



El problema de calcular la probabilidad de cumplir con una determinada fecha especificada (p.ej. 14), es simple. La probabilidad será el área bajo la curva que está asciurada (probabilidad de que T^* sea ≤ 14). Esta probabilidad puede ser leida de las áreas de la curva normal. Con objeto de que las tablas puedan aplicarse a cualquier curva normal, éstas están basadas en la desviación T_S de la fecha programada con respecto a T_E, en unidades de desviación estandar σ. Llamando "Z" a éste valor:

$$Z = \frac{(T_S - T_E)}{\sigma} = \frac{(14 - 12)}{1.73} = 1.16$$

Un valor de $Z = 1.16$ indica que la fecha programada de T_S es 1.16 desviaciones estandar mayor que el valor esperado $T_E = 12$. Refiriendo éste valor a la tabla, obtenemos una probabilidad de 0.877.

Entonces, suponiendo que ahora es el tiempo cero, se puede esperar que éste proyecto termine al tiempo 12 y la probabilidad de que termine en ó antes de la fecha programada de 14 "sin expeditar el proyecto", es aproximadamente 88%.

CONSIDERACIONES.-

Siempre existe una ruta crítica para el sistema y siempre puede ser identificada trazándola a través de los eventos con holgura cero. La ruta crítica es obviamente significativa, debido a que si algún evento a lo largo de éste camino requiriera de más tiempo que su fecha esperada de terminación, el evento terminal puede esperarse que se retrase en un lapso igual; por lo tanto, a las actividades a lo largo de la mencionada ruta, debe asignárseles máxima prioridad. Si el tiempo más próximo esperado para el evento terminal no es satisfactorio, entonces mejoras deben preveerse para éstas actividades. Por otro lado, los eventos que no se encuentran en la ruta crítica tienen holguras positivas, por lo que pequeñas desviaciones de su fecha esperada de terminación, probablemente no afectarán la fecha de terminación del proyecto.

El planeador tiene a su disposición varios métodos de ajuste, uno de los cuales es el intercambio de hombres, máquinas y materiales (si es que son comparables), de la ruta no crítica a la crítica. Otro método de ajuste de la red consiste en reducir las especificaciones técnicas del proyecto (p. ej. reducir la cantidad de pruebas que requiera éste). Si las actividades pueden ordenarse de otro modo, puede ser posible acelerar la terminación del proyecto. El planeador puede aprovechar la superposición de las actividades. Además, el empleo del tiempo extra proporciona flexibilidad adicional para el ajuste y la nueva planeación de la red.

Es interesante hacer notar que el análisis de ruta crítica está basado sólamente en valores esperados, por lo tanto existe cuando menos una pequeña probabilidad de que otra ruta diferente de la considerada crítica, pueda volverse la más larga.

Programas muy complicados de computadora han sido desarrollados para complementar PERT; por medio de ellos uno puede determinar rápidamente el efecto de un cambio propuesto ó el efecto de un retraso en la programación. Esta habilidad para medir y evaluar el estado actual del proyecto, mejorando así el control administrativo, ha sido citada como uno de los mejores valores de PERT.

Numerosas técnicas similares a PERT han sido propuestas en años recientes, bajo numerosos nombres diferentes. Algunos de estos enfatizan el costo y/ó el nivel de desarrollo técnica de las actividades, además de sus tiempos transcurridos. El más notable de éstos, prin cipalmente por que no se derivó de PERT sino que se desarrollo en forma paralela con él, es CPM, el cuál se ocupa de la planeación, programación y control de costos de los trabajos del proyecto.

SISTEMA DE REDES CON ACTIVIDADES EN EL NODO.-

En éste sistema, las actividades se representan gráficamente por los nodos, en lugar de por las flechas. Aquí, las flechas se utilizan sólamente para representar la relación de dependencia entre los nodos.

Ocasionalmente, en éste tipo de red, se agrega un nodo fictício, que tiene un tiempo de ejecución de cero, con objeto de concentrar varias actividades en alguna relación lógica (p. ej. Inicio del proyecto ó Terminación del proyecto).

Las principales ventajas de éste sistema son:

a) Con el sistema de actividades en el nodo, las relaciones de precedencia se muestran por medio de líneas que conectan los nodos de actividades, en lugar de tener que traer las cabezas de las flechas de todas las actividades que anteceden, a un punto común (evento), así como las colas de todas las actividades sucesores. Por ésta razón, el sistema de actividades en el nodo es más simple de construir y modificar.

b) Este tipo de red no requiere el uso de actividades fictícias, lo cual elimina problemas al trazar la red, especialmente para los principiantes.

c) Permite el uso de redes de nodos preimpresas, a las cuales sólo se les agregan las flechas de precedencia.

d) La información se presentada en una forma más compacta, haciendo que las descripciones y tiempos computados sean más fáciles de leer.

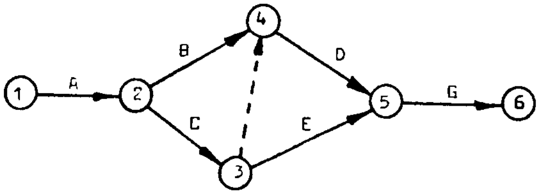
e) La numeración de las actividades es más simple, ya que sólo se usa un número, con lo que la codificación de las actividades, por proyectos, habilidades de mano de obra, etc., se simplifica grándemente. Cuando se usan las actividades en las flechas, una actividad se identifica por el par de números de los eventos en los extremos de la flecha; esto crea un problema de codificación en los nodos de unión cuando las actividades que allí se reunen requieren diferente codificación. Esto sólo puede resolverse agregándo actividades fictícias, tal y como se puede ver en el ejemplo VII-17b.

La principal desventaja de utilizar actividades en el nodo, como sistema de construir una red, es principalmente que no es un método estandar. P. ej. existen muy pocos programas de computadora para éste sistéma, mientras que existen muchísimos para el sistema de actividades en las flechas.

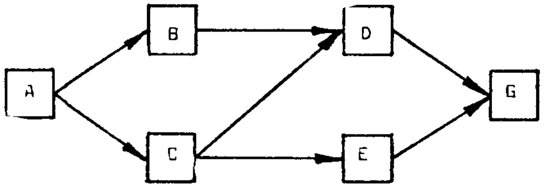
Ejemplo VII - 17.-

a) Considere un proyecto para planear y llevar a cabo una encuesta de mercado. El proyecto se iniciará con un estudio del propósito de la encuesta (actividad A). Despues del estudio, el personal que recogerá los datos podrá ser contratado (actividad B) y el cuestionario para la encuesta podrá ser diseñado (actividad C). Una vez que el personal haya sido contratado y el cuestionario diseñado, el personal puede ser entrenado en el uso del cuestionario (actividad D). Cuando ya haya sido diseñado el cuestionario, el grupo de diseño puede seleccionar las familias que serán entrevistadas (actividad E). Luego de haber seleccionado las familias y que el personal haya sido entrenado, la encuesta puede llevarse a cabo y los resultados analizados (actividad G).

i) actividades en las flechas:



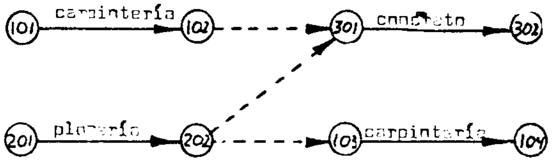
ii) actividades en los nodos:



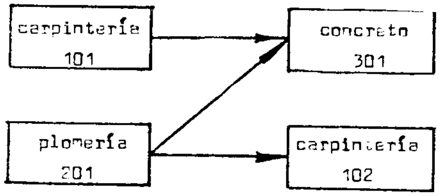
b)

La carpintería se codificará con eventos de la serie 100
La plomería se codificará con eventos de la serie 200
El concreto se codificará con eventos de la serie 300

i) Actividades en las flechas:



ii) actividades en el nodo:



APENDICE

Se presentan los instructivos para utilizar los programas

GRAN M (del CECAFI)
II SIMPLEX (del IIMASS)

para resolver problemas de programación lineal. Además se encuentran disponibles para resolver este tipo de problemas los programas

ALPS I (IIMASS)
ALPS III(IIMASS)
LPMOS (CECAFI)
TEMPO (IIMASS)

los cuales se sugiere utilizar durante el curso.

Para resolver problemas típicos de transporte se presenta el instructivo de manejo del programa TRANS (CECAFI)

TARJETAS PARA USAR EL PROGRAMA GRAN M

```
           Columna 1
           ↓
Tarjeta 1  // JØB T
Tarjeta 2  // XEQ  GRAN M  1
Tarjeta 3  *LØCALINIT, PIVØT, TABNU, RMØVE, CLEAN, TABPR
           -
           -
           -   Tarjetas de datos (Ver página 3)
           -
           -
Tarjeta    /*
final
```

NOTAS:

- Este programa está listo para usarse en la computadora IBM 1130 de CECAFI
- La tarjeta 1 es la tarjeta anaranjada obtenida del CECAFI
- El número 1 que aparece en la 2a. tarjeta se perfora en la columna 17.
- El programa en la IBM, tiene una capacidad de 10 restricciones y 15 variables incluyendo de holgura y artificiales.
- Este programa también se encuentra disponible en la Burroughs del CIMASS, bajo el nombre de II/SIMPLEX. Las instrucciones para correrlo en el CIMASS aparecen en la siguiente hoja. Este admite una capacidad mayor sobre el número de restricciones y variables como se indica en la segundo hoja.
- Este método utiliza el método de la gran M.

TARJETAS PARA USAR EL PROGRAMA II/SIMPLEX

```
           Columna 1
           ↓
Tarjeta 1  # USER      clave  / ________
Tarjeta 2  # RUN       (JR82)    II/SIMPLEX
Tarjeta 3  # DATA      FILE 5
           -
           -
           -    Tarjetos de datos (Ver página 3)
           -
           -
Tarjeta    # END
final
```

NOTAS:

- Este programo está listo pora usarse en la computadora B 6700 de CIMAS/CSC.
- La tarjeto 1 es la tarjeta roja obtenida del CIMASS.
- El símbolo "#" significa un caracter inválido. Este se obtiene presionando las teclas MULTIPUNCH Y NUMERIC simultáneamente y perforando los números 1, 2, 3, 4.
- Este programa tiene una capacidad de 30 restricciones y 40 variables incluyendo de holgura y artificiales.

TARJETAS DE DATOS PARA EL PROGRAMA GRAN M O II/SIMPLEX

La siguiente información deberá proporcionarse en lo que se indica como tarjetas de datos en las hojas anteriores.

TARJETA DE IDENTIFICACION DEL PROBLEMA.

En esta tarjeta puede usar desde la columna 1 a la 70 para poder dar cualquier identificación que desee dar a su problema.

TARJETA DE DIMENSION Y ETIQUETACION DEL PROBLEMA Y CONTROL PARA CORRER MAS DE UN PROBLEMA.

El usuario debe dar cuatro números enteros con formato (4110) en la siguiente forma:

Columnas 1 - 10 :	Número de renglones del problema.
Columnas 11-20:	Número de columnas del problema
Columna 30	Escriba el número 1 si desea poner etiquetas a los renglones y a las columnas. Escriba el número 0 en caso contrario.
Columna 40	Escriba un 1 si desea correr un problema adicional. Escriba un 0 en caso contrario.

NOTAS:

El número de renglones no incluye la función objetivo.

Si escribe un 1 en la columna 30, el usuario, después de la tarjeta deberá dar al grupo de tarjetas para etiquetas de renglones y el grupo de tarjetas para etiquetas de columnas. Si en lugar de un 1 escribe cero deberá omitir este grupo de tarjetas y pasar a las tarjetas de coeficientes de las variables artificiales en la función objetivo.

Si escribe un 1 en la tarjeta 40 vea las notas generales.

TARJETAS PARA ETIQUETAS DE RENGLONES.

Las etiquetas para identificar a los renglones de las restricciones, pueden tener como máximo 6 caracteres de cualquier tipo.

En una tarjeta puede escribir hasta 7 etiquetas. Estas etiquetas deben ir en las columnas 1-6, 11-16, 21-26, 31-36, 41-46, 51-56, 61-66.

TARJETAS PARA ETIQUETAS DE COLUMNAS (VARIABLES)

Las tarjetas para identificar a las columnas o sea a las variables involucradas en el problema (incluyendo de holgura y artificiales) deberán escribirse de acuerdo a las reglas anteriores para etiquetar renglones.

TARJETAS DE COEFICIENTES DE LAS VARIABLES ARTIFICIALES EN LA FUNCION OBJETIVO.

A cada variable artificial asignele un 1 y a las variables no artificiales asignele un 0. Estos números escríbalos en las columnas 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, de acuerdo al orden en que etiquetó a sus variables (columnas).
IMPORTANTE. Esta tarjeta es requerida aún si el problema no tiene variables artificiales.

TARJETAS DE COEFICIENTES DE LAS VARIABLES NO ARTIFICIALES EN LA FUNCION OBJETIVO.

Escriba los coeficientes de la función objetivo con el formato (7 F 10.0). Estos coeficientes debe escribirlos de acuerdo al orden en que etiquetó sus variables (columnas). Los coeficientes de las variables de holgura y artificiales deberá ser cero.

IMPORTANTE: Los coeficientes de la función objetivo deben corresponder al problema de minimizar. Por lo tanto, si su problema es de maximizar multiplique por -1 y considere los coeficientes que resultan como los datos de entrado en este programa.

TARJETAS DE LOS COEFICIENTES DE LA MATRIZ DE RESTRICCIONES.

Cada renglón de restricciones va en una o varias tarjetas, escribiendo los elementos sucesivamente en una tarjeta con un formato (7F10.0). Cada vez que proporcione un nuevo renglón debe empezarlo en otra tarjeta.

TARJETAS DE LOS LADOS DERECHOS DE LAS RESTRICCIONES.

Los coeficientes del lado derecho de restricciones se proporcionan sucesivamente en una tarjeta o en caso de ser insuficiente use otra tarjeta. El formato es (7 F 10.0)

TARJETAS PARA INDICAR EL CONJUNTO INICIAL DE VARIABLES BASICAS.

En una tarjeta programe sucesivamente los números de las columnas que van a ser usadas como columnas (variables) básicas iniciales. Use formato (7 1 10).

NOTAS GENERALES:

1. El orden de las tarjetas debe ser como el indicado.
2. Si en la TARJETA DE DIMENSION Y ETIQUETACION escribió un 1 en la columna 40 entonces su nuevo problema debe ir después de la TARJETA PARA INDICAR EL CONJUNTO INICIAL DE VARIABLES ARTIFICIALES. Es importante que en el nuevo problema empiece con la TARJETA DE IDENTIFICACION DEL PROBLEMA.

EJEMPLO 1. Considere el problema lineal.

$$\max z = x_4 - x_5$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{s.a.} & 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 0 \\
 & -2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 \geq 0 \\
 & x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 \geq 0 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
 & x_i \geq 0
\end{array}
$$

Deberemos multiplicar la función objetivo por - 1 para que el problema sea de minimización y también agregar variables de holgura a las primeras tres restricciones para que lleguen a ser igualdades. Con estas observaciones el programa lineal estará en forma estandard, lo cual es una condición para aplicar el programa GRAN M. Si definimos $z' = -z$, nuestro problema en forma estandard es

$$\min z' = - x_4 + (- x_5)$$

$$
\begin{array}{ll}
-2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + s_1 & = 0 \\
2x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 + s_2 & = 0 \\
-x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5 + s_3 & = 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\
x_i \geq 0; & i = 1, 2, \ldots, 5 \\
s_i \geq 0; & i = 1,2,3
\end{array}
$$

Obsérvese que aunque el programa lineal ya está en forma estandard, todavía no está listo para empezar el algoritmo de la Gran M porque en la última restricción no existe una variable que aparezca en esta restricción pero no se encuentre en las otras restricciones. (ie., no se tiene una solución básico factible inmediata). Por lo tanto, deberemos agregar una variable artificial que llamaremos t_1, a la cuarta restricción para así completar nuestra solución básica factible en la cual se inicia el algoritmo. Sin embargo, al introducir esta variable artificial en la restricción deberemos agregarla en la función objetivo multiplicada por una cantidad positiva M muy grande. Así nuestro problema resulta ser:

$$\min z' = - x_4 + x_5 + Mt_1$$

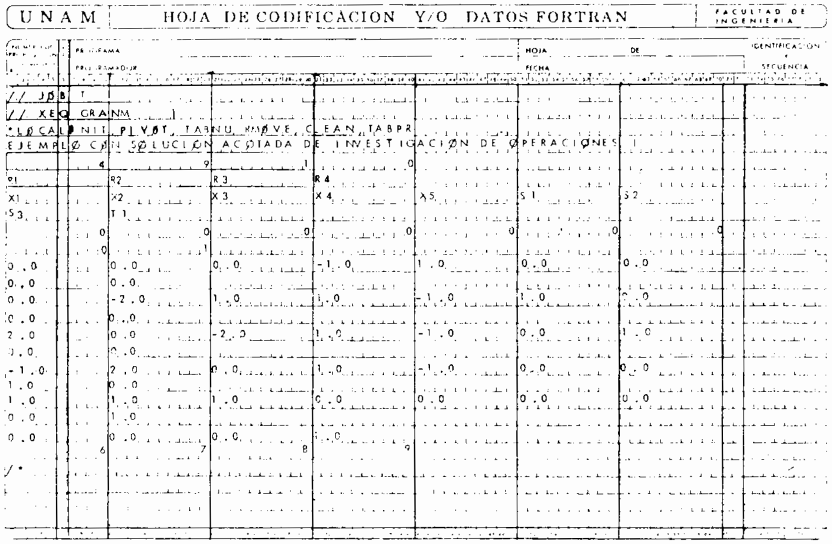
$$
\begin{array}{ll}
-2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + s_1 & = 0 \\
2x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 + s_2 & = 0 \\
-x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5 + s_3 & = 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 + t_1 & = 1 \\
x_i \geq 0; & i = 1,2, \ldots, 5 \\
s_j \geq 0; & j = 1,2,3 \\
t_1 \geq 0 &
\end{array}
$$

Es conveniente representar el programa lineal en un tablero (a tableau), para poder entender más fácilmente la información que deberemos proporcionar al programa de computadora GRAN M o II/SIMPLEX. Esta representación aparece abajo.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	t_1	
Función Obj. (F.O.)	0	0	0	-1	1	0	0	0	M	z'
Renglón 1 (R.1)	0	-2	1	1	-1	1	0	0	0	0
Renglón 2 (R.2)	2	0	-2	1	-1	0	1	0	0	0
Renglón 3 (R.3)	-1	2	0	1	-1	0	0	1	0	0
Renglón 4 (R.4)	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
						*	*	*	*	
						v. holgura			v. artificial	

Solución inicial
básica factible

Este tablero contiene toda la información necesario y la notación apropiada para correr el programa GRAN M ó el II/SIMPLEX. A continuación se presenta su codificación para el GRAN M. Para correr el II/SIMPLEX la codificación es idéntica excepto por las tarjetas de control como se mencionó en la explicación de estos programas.



UNAM — HOJA DE CODIFICACION Y/O DATOS FORTRAN — FACULTAD DE INGENIERIA

PROGRAMA — HOJA — DE — IDENTIFICACION Y SECUENCIA

PROGRAMADOR — FECHA

```
// JØB T
// XEQ GRANM         1
*LØCAL INIT, PIVØT, TABNU, RMØVE, CLEAN, TABPR
EJEMPLØ CØN SØLUCIØN ACØTADA DE INVESTIGACIØN DE ØPERACIØNES 1
         4         9         1         0
R1        R2        R3        R4
X1        X2        X3        X4        X5        S1        S2
S3        T1
         0         0         0         0         0         0         0
         0         1
0.0       0.0       0.0       -1.0      1.0       0.0       0.0
0.0       0.0
0.0       -2.0      1.0       1.0       -1.0      1.0       0.0
0.0       0.0
2.0       0.0       -2.0      1.0       -1.0      0.0       1.0
0.0       0.0
-1.0      2.0       0.0       1.0       -1.0      0.0       0.0
1.0       0.0
1.0       1.0       1.0       0.0       0.0       0.0       0.0
0.0       1.0
0.0       0.0       0.0       0.0
         6         7         8         9
/*
```

EJEMPLO 2

$$\max z = x_1 + x_2$$

s.a.

$$x_1 + x_2 \geqslant 1$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 1$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_i \geqslant 0$$

Expresando la función objetivo en términos de minimización e introduciendo variables de holgura, artificiales; el problema es equivalente a:

$$\min(-z) = -x_1 - x_2 + Mt_1$$

$$\begin{array}{llllll} x_1 + x_2 - s_1 & & & + t_1 & = 1 \\ x_1 - x_2 & + s_2 & & & = 1 \\ -x_1 + x_2 & & + s_3 & & = 1 \end{array}$$

En forma de tableau:

	x_1	x_2	s_1	t_1	s_2	s_3	
Func. Obj. (F.O.)	-1	-1	0	M	0	0	-z
Renglón 1 (R.1)	1	1	-1	1	0	0	1
Renglón 2 (R.2)	1	-1	0	0	1	0	1
Renglón 3 (R'3)	-1	+1	0	0	0	1	1
				*	*	*	

Solución básica factible inicial.

UNAM | HOJA DE CODIFICACION Y/O DATOS FORTRAN | FACULTAD DE INGENIERIA

NUMERO DE PROPOSICION | PROGRAMA | HOJA DE | IDENTIFICACION Y SECUENCIA

PROGRAMADOR | FECHA

```
// JØB T
// XEQ GRANM         1
*LØCALINIT,PIVØT,TABNU,RMØVE,CLEAN,TABPR
PRØBLEMA NØ ACØTADØ DE INVESTIGACIØN DE ØPERACIONES I
         3         6         1         0
R1        R2        R3
X1        X2        S1        T1        S2        S3
         0         0         0         1         0         0
-1.0      -1.0      0.0       0.0       0.0       0.0
1.0       1.0       -1.0      1.0       0.0       0.0
1.0       -1.0      0.0       0.0       1.0       0.0
-1.0      1.0       0.0       0.0       0.0       1.0
1.0       1.0       1.0
         4         5         6
/*
```

EJEMPLO 3 Resolver el dual del siguiente par de problemas primal - dual.

Primal

$$\min z = 2x_1 - 3x_2$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 \geq 3$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 2$$
$$x_i \geqslant 0$$

Dual

$$\max w = 3\lambda_1 + 2\lambda_2$$
$$2\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 2$$
$$-\lambda_1 - \lambda_2 \leqslant -3 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 3$$
$$-\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 0$$
$$\lambda_i \geqslant 0$$

Este dual es equivalente a

$$\min(-w) = -3\lambda_1 - 2\lambda_2 + Mt_1$$

$$\begin{array}{llllll} 2\lambda_1 + \lambda_2 + s_1 & & & & = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & -s_2 & + t_1 & & = 3 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 & & & + s_3 & = 0 \end{array}$$

En forma de tableau; el dual está dado por

	1	2	s_2	s_1	t_1	s_3	
F.O.	-3	-2	0	0	M	0	-w
R1	2	1	0	1	0	0	2
R2	1	1	-1	0	1	0	3
R3	-1	1	0	0	0	1	0
				*	*	*	

UNAM | HOJA DE CODIFICACION Y/O DATOS FORTRAN | FACULTAD DE INGENIERIA

NUMERO DE PROPOSICION | PROGRAMA | HOJA DE | IDENTIFICACION Y SECUENCIA

PROGRAMADOR | FECHA

```
// JØB T
// XEQ GRANM         1
*LØCALINIT,PIVOT,TABNU,RMØVE,CLEAN,TABPR
PRØBLEMA SIN SØLUCIØN DE INVESTIGACION DE ØPERACIONES I
         3         6         1         0.
R1        R2        R3
L1        L2        S2        S1        T1        S3
         0         0         0         0         1         0
-3.0      -2.0      0.0       0.0       0.0       0.0
2.0       1.0       0.0       1.0       0.0       0.0
1.0       1.0       -1.0      0.0       1.0       0.0
-1.0      1.0       0.0       0.0       0.0       1.0
2.0       3.0       0.0
         4         5         6
/*
```

EJEMPLO 4

$$\max z = x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7$$

s.a.

$$\begin{array}{llll}
 & 3x_3 & + x_5 + x_6 & = 6 \\
 & x_2 + 2x_3 - x_4 & & = 10 \\
-x_1 & & + x_6 & = 0 \\
 & x_3 & + x_6 + x_7 & = 6 \\
 & & x_i \geq 0 &
\end{array}$$

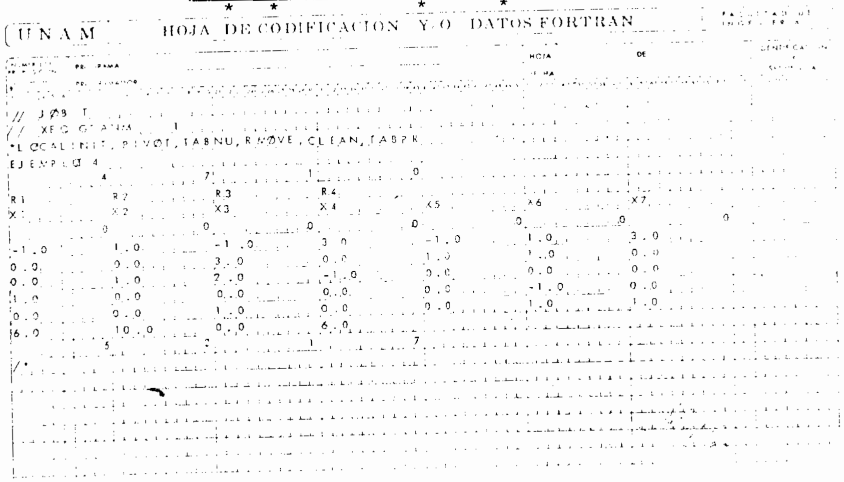
$$\min (-z) = - x_1 + x_2 _ x_3 + 3x_4 \quad x_5 + x_6 + 3x_7$$

s.a.

$$\begin{array}{llll}
 & 3x_3 & + x_5 + x_6 & = 6 \\
 & x_2 + 2x_3 - x_4 & & = 10 \\
x_1 & & - x_6 & = 0 \\
 & x_3 & + x_6 + x_7 & = 6
\end{array}$$

En forma de Tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
F.O.	-1	1	-1	3	-1	1	3	-z
R1	0	0	3	0	1	1	0	6
R2	0	1	2	-1	0	0	0	10
R3	1	0	0	0	0	-1	0	0
R4	0	0	1	0	0	1	1	6
	*	*			*		*	



UNAM   HOJA DE CODIFICACION Y/O DATOS FORTRAN

PROGRAMA   HOJA   DE

PROGRAMADOR   FECHA

```
// JØB T
// XEQ G[illegible]     1
*LØCALINIT, PIVØT, TABNU, RMØVE, CLEAN, TABPR
EJEMPLØ 4
          4         7         1         0
R1        R2        R3        R4
X1        X2        X3        X4        X5        X6        X7
          0         0         0         0         0         0         0
-1.0      1.0       -1.0      3.0       -1.0      1.0       3.0
0.0       0.0       3.0       0.0       1.0       1.0       0.0
0.0       1.0       2.0       -1.0      0.0       0.0       0.0
1.0       0.0       0.0       0.0       0.0       -1.0      0.0
0.0       0.0       1.0       0.0       0.0       1.0       1.0
6.0       10.0      0.0       6.0
          5         2         1         7
/*
```

TARJETAS DE CONTROL PARA EL PROGRAMA TRANS

```
            Columna 1
            ↓
Tarjeta 1   // JOB T
Tarjeta 2   // XEQ TRANS     1
Tarjeta 3   *LOCALINIC, RUSSL, ROWS, COLS, UNIVJ, PATH, ADI, CLEAN,MATPR
            -
            -
            -  Tarjetas de datos
            -
            -
Tarjeta     /*
 final
```

NOTAS:

- El programa TRANS utiliza el método de aproximación de Russell paro encontrar una solución inicial y el método simplex adoptado al problema de transporte para encontrar la solución óptima.
- Este programa está listo para usarse en la computadora IBM 1130 de CECAFI.
- La tarjeta 1 es la tarjeta anaranjado obtenida del CECAFI
- El número 1 que aparece en la 2a. tarjeta se perfora en la columna 17.
- Este programa admite problemas hasta con 10 orígenes y 10 destinos.

TARJETAS DE DATOS

La siguiente información deberá proporcionarse en lo que se indica como tarjeta de datos.

TARJETA DE IDENTIFICACION DE VARIABLES NO BASICAS, BASICAS Y DE PARES PROHIBIDOS

La primera tarjeta de datos debe contener un espacio en blanco, asterisco y un signo + en las columnas uno, dos y tres respectivamente.

TARJETA DE DIMENSION Y ETIQUETACION DEL PROBLEMA.

Una tarjeta con tres enteros usando formato (3I10), en la siguiente forma:

Columnas	1-10 :	el número de orígenes (m)
Columnas	11-20 :	el número de destinos (n)
Columna	30 :	perfore el número 1 si desea poner etiquetas a los orígenes y destinos. Perfore el cero en caso contrario.

CAJA 193
611069

611069

NOTA.

Si escribe un 1 en la columna 30, el usuario, después de la tarjeta deberá dar el grupo de tarjetas para etiquetas de renglones y el grupo de tarjetas para etiquetas de columnas.

Si en lugar de un 1 escribe cero deberá omitir este grupo de tarjetas y pasar a las tarjetas de disponibilidad.

TARJETAS PARA ETIQUETAS DE ORIGENES.

Cada origen admite una etiqueta de 6 caracteres alfanuméricos. En una tarjeta puede perforar hasta 7 etiquetas que deben ir en las columnas 1-6, 11-16, 21-26, 31-36, 41-46, 51-56, 61-66.

TARJETAS PARA ETIQUETAS DE DESTINOS.

Las tarjetas para etiquetar los destinos deberán perforarse de acuerdo a las reglas anteriores para etiquetas de orígenes.

TARJETAS DE DISPONIBILIDADES

Se da el # de unidades disponibles en cada origen. El formato para perforar es 7 F10.0.

TARJETAS DE DEMANDAS

Dar el número de unidades necesarias para cada destino. El formato es 7 F10.0

TARJETAS DE COSTOS

Para cada origen i, dé los costos C_{i1}, C_{i2} ... C_{in} en una tarjeta con formato 7F10.0. Si una tarjeta no es suficiente dé los costos restantes en otra tarjeta.

Para dar los costos de otro origen a todos los destinos empiece en otra tarjeta usando el mismo formato.

Cuando no haya ruta, es decir cuando el costo sea infinito, escriba el costo como cero. (Ver tarjetas de pares prohibidos).

NOTA.

Los coeficientes de costos deben corresponder al problema de minimizar.

TARJETAS DE PARES PROHIBIDOS

Dé una tarjeta por cada ruta prohibida, la cual se identificará por un par de números, cuyo primer elemento es el origen y el segundo es el destino de la ruta prohibida. Estos dos números que definen una ruta prohibida perfórelos con un formato (2I10).

TARJETA EN BLANCO

Esta tarjeta en blanco le indica el programa que ya no hay pares prohibidos. Esta tarjeta es necesaria aún cuando no haya pares prohibidos.

NOTA.

Las tarjetas deben de ir en el orden indicado anteriormente.