



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL – GEOTECNIA

ANÁLISIS GEOESTADÍSTICO MULTIVARIABLE DE LAS PROPIEDADES  
GEOTÉCNICAS DEL SUBSUELO LACUSTRE DEL VALLE DE MÉXICO

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
MARCOS EDGARDO DELGADO MUÑOZ

TUTOR PRINCIPAL:  
DR. MOISÉS JUÁREZ CAMARENA  
INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., JUNIO 2017



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Efraín Ovando Shelley  
Secretario: Dr. Rigoberto Rivera Constantino  
Vocal: Dr. Moisés Juárez Camarena  
1er. Suplente: Dr. Gabriel Auvinet Guichard  
2do. Suplente: Dr. Osvaldo Flores Castrellón

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Moisés Juárez Camarena

-----  
**FIRMA**





---

# DEDICATORIA

*A mi madre María de Lourdes*

*A mis abuelos María de Jesús y Casildo*

*A mi hermana María de Montserrat*

*Por apoyarme y motivarme a realizar cada uno de mis sueños*



---

# AGRADECIMIENTOS

A Dios

A la Universidad Nacional Autónoma de México

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Al Instituto de Ingeniería de la UNAM

Al Dr. Moisés Juárez Camarena y al Dr. Gabriel Auvinet Guichard, por la confianza, y el apoyo brindado durante la realización de este trabajo.

A los miembros del jurado, Dr. Efraín Ovando Shelley, Dr. Rigoberto Rivera Constantino y Dr. Osvaldo Flores Castrellón, por el tiempo invertido en las revisiones y los acertados comentarios que contribuyeron a mejorar este trabajo.

A mis compañeros de generación de la Maestría, especialmente a Elena Acevedo y Carlos Martínez, por su amistad y los buenos momentos compartidos.

Al grupo de trabajo del Laboratorio de Geoinformática del II de la UNAM, en especial al M. en C. Francisco Hernández por sus consejos y sugerencias en el tratamiento e interpretación de la información y a Darío Armendáriz, por su colaboración en la etapa de visualización.

Al M. en I. Jesús Ramírez, por el apoyo brindado en la Ciudad de México.



---

# CONTENIDO

|   | Página |
|---|--------|
| <b>RESUMEN</b> .....  | xi     |
| <b>ABSTRACT</b> .....   | xiii   |
| <b>1. INTRODUCCIÓN</b> .....  | 1      |
| <b>1.1 ANTECEDENTES</b> .....   | 1      |
| <b>1.2 OBJETIVO</b> .....   | 4      |
| <b>1.3 ALCANCES</b> .....   | 5      |
| <b>2. DESCRIPCIÓN DEL SUBSUELO PARA FINES GEOTÉCNICOS</b> .....           | 7      |
| <b>2.1 INCERTIDUMBRE EN LAS PROPIEDADES GEOTÉCNICAS</b> .....             | 8      |
| <b>2.2 PROPIEDADES GEOTÉCNICAS RELEVANTES</b> .....                       | 9      |
| 2.2.1 <i>Propiedades índice</i> .....                                     | 10     |
| 2.2.2 <i>Propiedades mecánicas</i> .....                                  | 11     |
| 2.2.3 <i>Propiedades hidráulicas</i> .....                                | 13     |
| 2.2.4 <i>Propiedades dinámicas</i> .....                                  | 14     |
| <b>2.3 REPRESENTACIÓN TRADICIONAL</b> .....                               | 17     |
| 2.3.1 <i>Tablas</i> .....   | 17     |
| 2.3.2 <i>Perfiles geotécnicos</i> .....                                   | 18     |
| 2.3.3 <i>Cortes estratigráficos</i> .....                                 | 19     |
| <b>2.4 DESCRIPCIÓN ESTADÍSTICA</b> .....                                  | 20     |
| 2.4.1 <i>Media</i> .....  | 20     |
| 2.4.2 <i>Mediana</i> .....  | 21     |
| 2.4.3 <i>Varianza</i> .....   | 21     |
| 2.4.4 <i>Desviación estándar</i> .....                                    | 21     |
| 2.4.5 <i>Coficiente de variación</i> .....                                | 21     |
| 2.4.6 <i>Histograma</i> .....   | 22     |
| <b>2.5 TÉCNICAS DE INTERPOLACIÓN ESPACIAL</b> .....                       | 23     |
| 2.5.1 <i>Clasificación de los métodos de interpolación espacial</i> ..... | 23     |
| 2.5.2 <i>Métodos globales con enfoque determinístico</i> .....            | 24     |
| 2.5.3 <i>Métodos locales con enfoque determinístico</i> .....             | 25     |
| 2.5.3 <i>Redes neuronales artificiales (RNA)</i> .....                    | 34     |

|   |            |
|---|------------|
| <b>3. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LA GEOESTADÍSTICA.....</b>  | <b>41</b>  |
| <b>3.1 DEFINICIÓN.....</b>  | <b>41</b>  |
| <b>3.2 CAMPOS ALEATORIOS.....</b>   | <b>42</b>  |
| <b>3.3 ESTACIONARIDAD.....</b>  | <b>45</b>  |
| <b>3.4 TENDENCIA O DERIVA.....</b>  | <b>46</b>  |
| <b>3.5 EFECTO DE ESCALA.....</b>  | <b>46</b>  |
| <b>3.6 ANÁLISIS EXPLORATORIO.....</b>   | <b>48</b>  |
| <b>3.7 ANÁLISIS ESTRUCTURAL.....</b>  | <b>48</b>  |
| <b>3.8 ESTIMACIÓN UNIVARIABLE.....</b>  | <b>54</b>  |
| <b>3.9 ESTIMACIÓN MULTIVARIABLE.....</b>  | <b>61</b>  |
| <b>3.10 METODOLOGÍA DE APLICACIÓN.....</b>  | <b>69</b>  |
| 3.10.1 <i>Recopilación de la información geotécnica.....</i>  | 70         |
| 3.10.2 <i>Construcción de las bases de datos.....</i>   | 70         |
| 3.10.3 <i>Análisis exploratorio.....</i>  | 71         |
| 3.10.4 <i>Análisis estructural o de correlación.....</i>  | 72         |
| 3.10.5 <i>Predicción.....</i>   | 73         |
| 3.10.6 <i>Visualización.....</i>  | 75         |
| <b>3.11 ALGORITMO COMPUTACIONAL.....</b>  | <b>76</b>  |
| 3.11.1 <i>Análisis exploratorio.....</i>  | 77         |
| 3.11.2 <i>Análisis estructural.....</i>   | 78         |
| 3.11.3 <i>Predicción.....</i>   | 79         |
| <br>  |            |
| <b>4. APLICACIONES DE LA GEOESTADÍSTICA.....</b>  | <b>81</b>  |
| <b>4.1 DESCRIPCIÓN DE LA ZONA DE ESTUDIO.....</b>   | <b>81</b>  |
| 4.1.1 <i>Marco geográfico.....</i>  | 82         |
| 4.1.2 <i>Marco físico.....</i>  | 84         |
| <b>4.2 APLICACIONES DE LA GEOESTADÍSTICA UNIVARIABLE.....</b>   | <b>95</b>  |
| 4.2.1 <i>Análisis de la distribución espacial de las capas típicas del subsuelo (2D).....</i>                             | 95         |
| 4.2.2 <i>Análisis de las propiedades geotécnicas del subsuelo en 3D.....</i>  | 109        |
| <b>4.3 APLICACIONES DE LA GEOESTADÍSTICA MULTIVARIABLE.....</b>   | <b>147</b> |
| 4.3.1 <i>Análisis de la distribución espacial de las propiedades geotécnicas a lo largo de la profundidad, en 1D.....</i> | 147        |
| 4.3.2 <i>Análisis de la distribución espacial de las propiedades geotécnicas en un volumen de estudio (3D).....</i>       | 166        |
| <br>  |            |
| <b>5. CONCLUSIONES.....</b>   | <b>187</b> |
| <b>REFERENCIAS.....</b>   | <b>191</b> |

---

# LISTA DE FIGURAS

|  | Página |
|--|--------|
| Figura 2.1 Tipos de incertidumbre en las propiedades geotécnicas (Whitman, 1996).....                          | 8      |
| Figura 2.2 Ilustración de la variación de las propiedades de los suelos (Phoon y Kulhawy, 1999).....           | 8      |
| Figura 2.3 Métodos para la determinación del coeficiente de permeabilidad.....                                 | 13     |
| Figura 2.4 Pruebas de campo y de laboratorio para obtener propiedades dinámicas del suelo.....                 | 15     |
| Figura 2.5 Esquema de la prueba sonda suspendida (Flores <i>et al.</i> , 2014).....                            | 16     |
| Figura 2.6 Ejemplo de un perfil geotécnico.....  | 18     |
| Figura 2.7 Ejemplo de un corte estratigráfico.....   | 19     |
| Figura 2.8 Histograma de contenidos de agua.....   | 22     |
| Figura 2.9 Construcción de los polígonos de Thiessen.....  | 26     |
| Figura 2.10 Representación de un TIN.....  | 29     |
| Figura 2.11 Representación gráfica de las superficies de tendencia.....  | 33     |
| Figura 2.12 Estructura de una RNA (adaptada de García, 2009).....  | 35     |
| Figura 2.13 Estructura de una unidad de cálculo (Haykin, 1999).....  | 36     |
| Figura 2.14 Taxonomía del proceso de aprendizaje (modificado de Haykin, 1999).....                             | 38     |
| Figura 2.15 Gráfica de las funciones de activación (Fausett, 1994).....  | 39     |
| Figura 3.1 Representación esquemática de un campo aleatorio (Medina, 2001).....                                | 42     |
| Figura 3.2 Grados de estacionaridad de una variable aleatoria (Díaz, 2002).....                                | 45     |
| Figura 3.3 Correlograma experimental vertical de contenido de agua.....  | 50     |
| Figura 3.4 Correlograma experimental vertical cruzado de $V_s$ y $q_c$ .....                                   | 51     |
| Figura 3.5 Puntos de muestreo y puntos de estimación en la región $R^2$ (Wackernagel, 2003).....               | 55     |
| Figura 3.6 Comparación entre modelos de estimación y simulación (Rossi y Deutsch, 2014).....                   | 60     |
| Figura 3.7 Condiciones de isotopía y heterotopía (Wackernagel, 2003).....                                      | 62     |
| Figura 3.8 Etapas del análisis geoestadístico (modificado de Juárez, 2015).....                                | 69     |
| Figura 3.9 Definición de tolerancias (Deutsch y Journel, 1992).....  | 72     |
| Figura 3.10 Malla de estimación caso de estudio 2D.....  | 73     |
| Figura 3.11 Volumen de estimación para el caso 3D (Juárez, 2015).....  | 74     |
| Figura 3.12 Gráfica de regresión para el análisis multivariable ( $Cc-w$ ).....                                | 77     |
| Figura 3.13 Resultados del análisis de tendencia del algoritmo <i>RESIDUOS.m</i> .....                         | 78     |
| Figura 3.14 Resultados del análisis de correlación espacial cruzado vertical con <i>CORRELOGRAMA2P.m</i> ..... | 79     |
| Figura 3.15 Resultados de la estimación multivariable del programa <i>COKRIG_O.m</i> .....                     | 80     |
| Figura 4.1 Localización de la zona de estudio (INEGI, 2015).....   | 82     |
| Figura 4.2 Modelo de relieve sombreado de la zona de estudio (INEGI, 2011).....                                | 83     |
| Figura 4.3 Geología de la zona de estudio (Mooser, 1996).....  | 85     |
| Figura 4.4 Modelo estratigráfico de Zeevaert (1952).....   | 87     |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 4.5 Cortes estratigráficos de la Ciudad de México (Marsal y Mazari, 1959).....                            | 89  |
| Figura 4.6 Zonificación geotécnica de la Ciudad de México, (Juárez <i>et al.</i> , 2016).....                    | 90  |
| Figura 4.7 Distribución espacial de los sondeos geotécnicos.....   | 92  |
| Figura 4.8 Número de sondeos por exploración geotécnica.....   | 93  |
| Figura 4.9 Número de mediciones de las propiedades geotécnicas.....  | 93  |
| Figura 4.10 Distribución de los sondeos utilizados en el análisis 2D.....  | 95  |
| Figura 4.11 Superficies de tendencia de las formaciones estratigráficas.....                                     | 98  |
| Figura 4.12 Correlogramas direccionales de la formación arcillosa superior 1.....                                | 99  |
| Figura 4.13 Correlogramas direccionales de la formación arcillosa superior 2.....                                | 99  |
| Figura 4.14 Correlogramas direccionales de la formación arcillosa superior 3.....                                | 100 |
| Figura 4.15 Correlogramas direccionales de la formación arcillosa superior 4.....                                | 100 |
| Figura 4.16 Correlogramas direccionales de la capa dura.....   | 101 |
| Figura 4.17 Correlogramas direccionales de la formación arcillosa inferior.....                                  | 101 |
| Figura 4.18 Correlogramas direccionales de los depósitos estratificados profundos.....                           | 102 |
| Figura 4.19 Distribución espacial de la profundidad de la frontera superior de la FAS 1.....                     | 103 |
| Figura 4.20 Distribución espacial de la profundidad de la frontera superior de la FAS 2.....                     | 104 |
| Figura 4.21 Distribución espacial de la profundidad de la frontera superior de la FAS 3.....                     | 104 |
| Figura 4.22 Distribución espacial de la profundidad de la frontera superior de la FAS 4.....                     | 105 |
| Figura 4.23 Distribución espacial de la profundidad de la frontera superior de la CD.....                        | 105 |
| Figura 4.24 Distribución espacial de la profundidad de la frontera superior de la FAI.....                       | 106 |
| Figura 4.25 Distribución espacial de la profundidad de la frontera superior de la DEP.....                       | 106 |
| Figura 4.26. Modelo 3D de la estratigrafía del sitio.....  | 107 |
| Figura 4.27 Ubicación de los sondeos SPT con datos de contenido de agua.....                                     | 109 |
| Figura 4.28 Histograma de la información de contenido de agua.....   | 110 |
| Figura 4.29 Gráfica de dispersión de datos del campo experimental y residual del contenido de agua.....          | 111 |
| Figura 4.30 Modelos de correlación espacial del contenido de agua.....   | 112 |
| Figura 4.31 Ejes preferenciales de estimación.....   | 112 |
| Figura 4.32 Resultados de la validación cruzada del contenido de agua.....                                       | 113 |
| Figura 4.33 Distribución espacial del contenido del agua estimado a lo largo del Eje 1.....                      | 115 |
| Figura 4.34 Distribución espacial del contenido de agua estimado a lo largo del Eje 2.....                       | 116 |
| Figura 4.35 Modelo 3D de la distribución espacial del contenido de agua estimado.....                            | 117 |
| Figura 4.36 Distribución de los sondeos CPT en la zona de estudio.....   | 119 |
| Figura 4.37 Histograma de valores de resistencia de punta.....   | 120 |
| Figura 4.38 Gráfica de dispersión de datos del campo experimental y residual de resistencia de punta $q_c$ ..... | 121 |
| Figura 4.39 Modelos de correlación espacial de resistencia $q_c$ en CPT.....                                     | 122 |
| Figura 4.40 Ejes preferenciales de estimación.....   | 122 |
| Figura 4.41 Resultados de la validación cruzada de $q_c$ en CPT.....   | 123 |



|   |     |
|---|-----|
| Figura 4.42 Distribución espacial de la resistencia $q_c$ en CPT estimada a lo largo del Eje 1.....     | 125 |
| Figura 4.43 Distribución espacial de la resistencia $q_c$ en CPT estimada a lo largo del Eje 2.....     | 126 |
| Figura 4.44 Modelo 3D de la distribución espacial de resistencia $q_c$ en CPT.....                      | 127 |
| Figura 4.45 Distribución de los sondeos con información de $C_c$ .....                                  | 129 |
| Figura 4.46 Histograma de valores de índice de compresión.....  | 130 |
| Figura 4.47 Gráfica de dispersión de datos del campo experimental y residual de $C_c$ .....             | 131 |
| Figura 4.48 Modelos de correlación del índice de compresión.....  | 132 |
| Figura 4.49 Ejes preferenciales de estimación.....  | 132 |
| Figura 4.50 Resultados de la validación cruzada de $C_c$ .....  | 133 |
| Figura 4.51 Distribución espacial del índice de compresión estimado a lo largo del Eje 1.....           | 134 |
| Figura 4.52 Distribución espacial del índice de compresión estimado a lo largo del Eje 2.....           | 135 |
| Figura 4.53 Modelo 3D de la distribución espacial de índice de compresión.....                          | 136 |
| Figura 4.54 Distribución de las sondas suspendidas en la zona de estudio.....                           | 138 |
| Figura 4.55 Histograma de los valores de $V_s$ .....  | 139 |
| Figura 4.56 Gráfica de dispersión de datos del campo experimental y residual de resistencia $V_s$ ..... | 140 |
| Figura 4.57 Modelos de correlación espacial de velocidad de onda de corte.....                          | 141 |
| Figura 4.58 Ejes preferenciales para la estimación de $V_s$ .....                                       | 141 |
| Figura 4.59 Resultados de la validación cruzada de $V_s$ .....  | 142 |
| Figura 4.60 Distribución espacial de la velocidad de onda de corte estimada a lo largo del Eje 1.....   | 143 |
| Figura 4.61 Distribución espacial de la velocidad de onda de corte estimada a lo largo del Eje 2.....   | 144 |
| Figura 4.62 Modelo 3D de la distribución espacial velocidad de onda de corte.....                       | 145 |
| Figura 4.63 Ubicación de los sondeos mixtos y de penetración estándar.....                              | 147 |
| Figura 4.64 Correlación lineal entre $C_c$ y $w$ , en el sondeo <i>SS-01</i> .....                      | 148 |
| Figura 4.65 Correlación lineal entre $C_c$ y $w$ , en el sondeo <i>SC-04</i> .....                      | 148 |
| Figura 4.66 Campos experimentales y residuales de $C_c$ y $w$ ( <i>SS-01</i> ).....                     | 150 |
| Figura 4.67 Campos experimentales y residuales de $C_c$ y $w$ ( <i>SC-04</i> ).....                     | 150 |
| Figura 4.68 Modelos de correlación espacial para el sondeo <i>SS-01</i> .....                           | 151 |
| Figura 4.69 Modelos de correlación espacial para el sondeo <i>SC-04</i> .....                           | 152 |
| Figura 4.70 Modelos de la distribución espacial de $C_c$ en el sondeo <i>SS-01</i> .....                | 153 |
| Figura 4.71 Modelos de la distribución espacial de $C_c$ en el sondeo <i>SC-04</i> .....                | 154 |
| Figura 4.72. Ubicación de los sondeos de cono eléctrico y sonda suspendida.....                         | 155 |
| Figura 4.73 Correlación lineal entre $V_s$ y $q_c$ en el sondeo <i>Sds_BHMA-16</i> .....                | 156 |
| Figura 4.74 Correlación lineal entre $V_s$ y $q_c$ , en el sondeo <i>Sds_BHMA-09</i> .....              | 156 |
| Figura 4.75 Campos experimentales y residuales de $V_s$ y $q_c$ ( <i>Sds_BHMA-16</i> ).....             | 158 |
| Figura 4.76 Campos experimentales y residuales de $V_s$ y $q_c$ ( <i>Sds_BHMA-09</i> ).....             | 158 |
| Figura 4.77 Modelos de correlación espacial para el sondeo <i>Sds_BHMA-16</i> .....                     | 159 |
| Figura 4.78 Modelos de correlación espacial para el sondeo <i>Sds_BHMA-09</i> .....                     | 160 |

---

|   |     |
|---|-----|
| Figura 4.79 Modelos de la distribución espacial de $V_S$ en la sonda $Sds\_BHMA-16$ .....                                   | 161 |
| Figura 4.80 Modelos de la distribución espacial de $V_S$ en la sonda $Sds\_BHMA-09$ .....                                   | 162 |
| Figura 4.81 Perfiles estimados de $V_S$ en sitio de la prueba $Sds\_BHMA-16$ .....  | 164 |
| Figura 4.82 Perfiles estimados de $V_S$ en el sitio de prueba $Sds\_BHMA-09$ .....  | 164 |
| Figura 4.83 Distribución de los sondeos utilizados en el análisis multivariable de $C_c$ y $w$ .....                        | 166 |
| Figura 4.84 Gráfica de correlación lineal entre $C_c$ y $w$ .....   | 167 |
| Figura 4.85 Modelos de correlación cruzados para $C_c$ y $w$ .....  | 168 |
| Figura 4.86 Ejes preferenciales para la estimación de $C_c$ .....   | 169 |
| Figura 4.87 Resultados de la validación cruzada de $C_c$ en el sitio del sondeo $SM-04$ .....                               | 169 |
| Figura 4.88 Distribución espacial del índice de compresión estimado a lo largo del Eje 1.....                               | 170 |
| Figura 4.89 Distribución espacial del índice de compresión estimado a lo largo del Eje 2.....                               | 171 |
| Figura 4.90 Modelo 3D de la distribución espacial de índice de compresión.....  | 172 |
| Figura 4.91 Distribución de los sondeos del análisis multivariable.....   | 174 |
| Figura 4.92 Grafica de correlación lineal entre $V_S$ y $qc$ .....  | 175 |
| Figura 4.93 Modelos de correlación espacial entre $V_S$ y $qc$ .....  | 176 |
| Figura 4.94 Ejes de preferenciales de estimación de $V_S$ .....   | 176 |
| Figura 4.95 Resultados de la validación cruzada de $V_S$ en el sitio $Sds\_BHMA-18$ .....                                   | 177 |
| Figura 4.96 Distribución espacial de la velocidad de onda de corte estimada a lo largo del Eje 1.....                       | 178 |
| Figura 4.97 Distribución espacial de la velocidad de onda de corte estimada a lo largo del Eje 2.....                       | 179 |
| Figura 4.98 Modelo 3D de la distribución espacial de $V_S$ .....  | 180 |
| Figura 4.99 Distribución espacial de la velocidad de onda de corte estimada a lo largo del Eje 1 ( <i>Kriging</i> ).....    | 181 |
| Figura 4.100 Distribución espacial de la velocidad de onda de corte estimada a lo largo del Eje 2 ( <i>Kriging</i> ).....   | 182 |
| Figura 4.101 Distribución espacial de la velocidad de onda de corte estimada a lo largo del Eje 1 ( <i>Cokriging</i> )..... | 183 |
| Figura 4.102 Distribución espacial de la velocidad de onda de corte estimada a lo largo del Eje 2 ( <i>Cokriging</i> )..... | 184 |
| Figura 4.103 Modelo 3D de la distribución espacial de $V_S$ .....   | 185 |

---

# LISTA DE TABLAS

|  | Página |
|--|--------|
| Tabla 2.1 Funciones de activación.....   | 39     |
| Tabla 3.1. Funciones teóricas de autocorrelación (VanMarcke, 1983; Jaksa <i>et al.</i> , 1999).....                | 52     |
| Tabla 3.2 Técnicas de predicción (Juárez, 2015).....   | 60     |
| Tabla 3.3 Subrutinas del análisis geoestadístico.....  | 76     |
| Tabla 3.4 Formato del archivo de entrada.....  | 76     |
| Tabla 3.5 Formato del archivo de salida con los valores estimados.....   | 80     |
| Tabla 4.1 Estructura de la base de datos.....  | 91     |
| Tabla 4.2 Parámetros estadísticos de la profundidad de la frontera superior de las capas típicas.....              | 96     |
| Tabla 4.3 Coeficientes de la regresión lineal de las formaciones estratigráficas.....                              | 96     |
| Tabla 4.4 Distancias de correlación de las formaciones estratigráficas.....  | 98     |
| Tabla 4.5 Parámetros de la malla estimación utilizados en la predicción.....                                       | 102    |
| Tabla 4.6 Descripción estadística de la información de contenido de agua.....                                      | 110    |
| Tabla 4.7 Coeficientes de la regresión lineal de la información del contenido de agua.....                         | 111    |
| Tabla 4.8 Descripción estadística de los valores de resistencia $q_c$ en CPT.....                                  | 120    |
| Tabla 4.9 Coeficientes de la regresión lineal de $q_c$ .....   | 121    |
| Tabla 4.10 Descripción estadística del índice de compresión.....   | 130    |
| Tabla 4.11 Coeficientes de regresión de los valores de $C_c$ .....   | 131    |
| Tabla 4.12 Descripción estadística de la velocidad de onda corte ( $V_S$ ).....                                    | 139    |
| Tabla 4.13 Coeficientes de la regresión lineal de $V_S$ .....  | 140    |
| Tabla 4.14 Parámetros estadísticos de $C_c$ y $w$ .....  | 149    |
| Tabla 4.15 Coeficientes de regresión lineal de índice de compresión y contenido de agua.....                       | 149    |
| Tabla 4.16 Distancias de correlación del análisis multivariable de $C_c$ .....                                     | 151    |
| Tabla 4.17 Parámetros de la malla de estimación para el análisis univariable y multivariable.....                  | 153    |
| Tabla 4.18 Parámetros estadísticos de $V_S$ y $q_c$ .....  | 157    |
| Tabla 4.19 Coeficientes de regresión lineal de la velocidad de onda S y de resistencia de punta.....               | 157    |
| Tabla 4.20 Distancias de correlación del análisis multivariable de $V_S$ .....                                     | 159    |
| Tabla 4.21 Parámetros de la malla de estimación para la estimación geoestadística univariable y multivariable..... | 161    |
| Tabla 4.22 Valores sugeridos de $N_{kh}$ (Ovando y Romo, 1991).....  | 163    |
| Tabla 4.23 Valores de las constantes utilizados en la fórmula (4.1) (Ovando y Romo, 1991).....                     | 163    |



# SÍMBOLOS Y NOTACIÓN

|                               |  |
|-------------------------------|--|
| $\gamma, \gamma_s$            | peso volumétrico, t/m <sup>3</sup>   |
| $\gamma_r$                    | deformación de referencia, %   |
| $w$                           | contenido de agua, %   |
| $q_c$                         | resistencia de punta en cono eléctrico, kPa, t/m <sup>2</sup>                              |
| $C_c$                         | índice de compresión   |
| $C_{uu}$                      | resistencia no-drenada al esfuerzo cortante, kg/cm <sup>2</sup>                            |
| $V_s$                         | velocidad de onda de corte, m/s <sup>2</sup>   |
| $L$                           | longitud de un sondeo, m   |
| $n$                           | número total de datos en una muestra   |
| $\eta$                        | constante que depende del tipo de suelo  |
| $N_{kh}$                      | factor de correlación que depende del tipo de suelo  |
| $\Sigma$                      | sumatoria algebraica para funciones discretas  |
| $\bar{X}$                     | media de una muestra de datos  |
| $S^2$                         | varianza de una muestra de datos   |
| $S$                           | desviación estándar de una muestra de datos  |
| $C_V$                         | coeficiente de variación de una muestra de datos   |
| $V(X), S(X)$                  | campo aleatorio  |
| $R$                           | región de estudio  |
| $P$                           | dimensión de la región de estudio  |
| $x, y, z$                     | coordenadas de un punto dentro de una región $R^p$ , representadas simplemente por $X$ , m |
| $\sigma_V(X)$                 | desviación estándar de un campo aleatorio  |
| $E\{V(X)\}$                   | esperanza de un campo aleatorio  |
| $C_V(X)$                      | coeficiente de variación de un campo aleatorio   |
| $h$                           | separación vectorial entre dos puntos $X_1$ y $X_2$ , m                                    |
| $R_V(h), R_V(X_1, X_2)$       | función de autocorrelación   |
| $C_V(h), C_V(X_1, X_2)$       | función de autocovarianza  |
| $\rho_V(h), \rho_V(X_1, X_2)$ | coeficiente de autocorrelación   |
| $r$                           | coeficiente de correlación   |
| $C_{VS}(h), C_{SV}(h)$        | covarianza cruzada   |
| $\rho_{VS}(h), \rho_{SV}(h)$  | coeficiente de correlación cruzado   |
| $\mathbf{u}$                  | vector unitario en la dirección en la que se evalúa la autocovarianza                      |
| $C_V(\lambda\mathbf{u})$      | función de autocovarianza a lo largo de una dirección $\mathbf{u}$                         |

---

|                              |  |
|------------------------------|--|
| $2\gamma(\lambda\mathbf{u})$ | momento de segundo orden de un proceso incremental a lo largo de una dirección $\mathbf{u}$      |
| $\rho_V(\lambda\mathbf{u})$  | coeficiente de correlación a lo largo de una dirección $\mathbf{u}$                              |
| $\alpha$                     | dirección (Azimut) en que se estiman las funciones de variabilidad espacial, grados ( $^\circ$ ) |
| $\delta$                     | distancia de influencia o correlación, m   |
| $\lambda$                    | coeficiente o peso de influencia en estimaciones por la técnica <i>Kriging</i>                   |
| $\beta$                      | peso de influencia de la propiedad secundaria en estimaciones por la técnica <i>Cokriging</i>    |
| $\mu$                        | multiplicador de Lagrange  |
| $\sigma_K^2(X)$              | varianza de estimación univariable ( <i>Kriging</i> )  |
| $\sigma_{CK}^2(X)$           | varianza de estimación multivariable ( <i>Cokriging</i> )  |
| $E$                          | experimento  |
| $S$                          | espacio de resultados del experimento  |
| $X(t, \xi), X(t)$            | proceso estocástico  |
| $\xi$                        | resultado de un experimento  |
| $t$                          | parámetro indicador  |
| $\Omega$                     | dominio de un campo aleatorio (longitud, área, volumen), m, m <sup>2</sup> , m <sup>3</sup>      |

---

# RESUMEN

Actualmente, se cuenta con nuevas herramientas estadísticas con gran potencial que recientemente se han aplicado de manera satisfactoria en la ingeniería geotécnica. Una de estas herramientas es la geoestadística, nombre bajo el cual se entiende la aplicación de la teoría de las funciones aleatorias (espaciales) y del tratamiento de las señales a la descripción de las condiciones estratigráficas y a la distribución espacial de las propiedades de los materiales geológicos. Con la geoestadística, es posible resolver en forma racional problemas tales como la estimación de espesores de estratos, o de valores de las propiedades en un sitio dado o en una zona determinada, a partir de la información de los sondeos existentes con base en técnicas de estimación optimizadas como el “*Kriging*” y el “*Cokriging*”.

En este trabajo se presenta la caracterización geotécnica del subsuelo de una zona ubicada en el antiguo lago de Texcoco. El análisis consistió en un estudio detallado de la distribución espacial de las formaciones estratigráficas típicas y de algunas propiedades geotécnicas: contenido de agua ( $w$ ), resistencia ( $q_c$ ) en CPT, índice de compresión ( $C_c$ ) y velocidad de onda de corte ( $V_s$ ) del sitio de interés, empleando la metodología geoestadística univariable (*Kriging*) y multivariable (*Cokriging*). En las aplicaciones geoestadísticas multivariable, se aprovecha la correlación lineal positiva entre dos propiedades geotécnicas para estimar puntualmente un valor del parámetro con menor cantidad de datos ( $C_c$  y  $V_s$ ), considerando la contribución de las propiedades altamente muestreadas ( $w$  y  $q_c$ ), empleando estimadores conjuntos de mínima varianza (*Cokriging*).

Para aplicar el procedimiento del análisis geoestadístico en la caracterización geotécnica del sitio, se desarrollaron, calibraron y validaron una serie de algoritmos computacionales, que permiten realizar cada una de las etapas de la metodología geoestadística (univariable y multivariable), en dominios de una, dos y tres dimensiones.

Como resultado de los análisis geoestadísticos multivariables, se presenta un conjunto de modelos (perfiles, secciones transversales y volúmenes) del índice de compresión y de la velocidad de onda de corte que describen la distribución espacial de esta propiedad dentro del medio estudiado.

Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo, así como recomendaciones para la aplicación de la estimación conjunta entre dos propiedades con una correlación lineal positiva, en futuros estudios.





---

# ABSTRACT

Nowadays, new mathematical tools with great potential are being applied successfully to geotechnical engineering. One of these tools is *geostatistics*, a technique based on the application of random functions theory and signal analysis to the description of the stratigraphic conditions and spatial distribution of geological material properties. Using geostatistics, it is possible to solve rationally problems such as estimating the thickness of a soil layer, or a property value at any given site or within a given area, from the available boreholes data, using optimized estimation techniques such as “*Kriging*” and “*Cokriging*”.

This thesis presents the geotechnical characterization of the subsoil of an area located within the former Texcoco Lake. The analysis consists of a detailed study of the spatial distribution of the subsoil typical layers thickness and of some geotechnical properties such as water content ( $w$ ), resistance ( $q_c$ ) in CPT, compression index ( $C_c$ ) and shear wave velocity ( $V_s$ ) applying the univariate (*Kriging*) and multivariate (*Cokriging*) geostatistical methodologies. When using multivariate geostatistics, the positive linear correlation between some geotechnical properties with widely available data ( $w$  and  $q_c$ ) and parameters with a smaller amount of data ( $C_c$  and  $V_s$ ) is taken advantage of to estimate punctually the values of these parameters using minimum variance estimators (*Cokriging*).

To apply the geostatistical methodology to the subsoil characterization of the study area, it was necessary to develop computational algorithms. These computational codes were calibrated and validated comparing the results with those obtained with another software. With these computational algorithms it became possible to perform geostatistical analyses (univariate and multivariate), in one, two and three dimensions.

As results of geotechnical multivariable analyses, a set of models (profiles, cross-sections and volumes) of the compression index and the shear wave velocity are presented. These models describe the spatial distribution of these properties within the studied area.

Finally, the conclusions of this thesis are presented, as well as some recommendations for future applications of multivariate geostatistics.



# 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 ANTECEDENTES

Desde los inicios de la Mecánica de Suelos, se reconoció que las propiedades geotécnicas de los suelos varían de un punto a otro, como lo señaló Terzaghi en la Primera Conferencia Internacional de Mecánica de Suelos y Cimentaciones en 1936, “...*la tierra en su estado natural nunca será uniforme*”. Sin embargo, este aspecto fue considerado con énfasis a partir de 1966, cuando en el campo de la geotecnia se comenzaron a implementar estudios rigurosos de la variación espacial de las propiedades geotécnicas de los suelos (Jacksa, 1995).

Las propiedades mecánicas y dinámicas del subsuelo empleadas en los diseños geotécnicos contienen incertidumbre, por tanto, es un aspecto fundamental que el ingeniero geotécnico debe tener presente (Nadim, 2007). Algunas de las fuentes de incertidumbre se deben a la escasa o incompleta información con la que se cuenta, o bien, a los errores de carácter humano en la obtención de dicha información (Sarma, 2009). Este último factor generalmente se asocia a diversas causas como: *i*) la elección inadecuada de la prueba y una mala ejecución, *ii*) una incorrecta interpretación de los resultados y *iii*) una mala distribución en los sondeos y *iv*) un número poco representativo del sitio.

Considerando lo anterior y debido a la complejidad de los procesos geológicos de formación del suelo y a la variación no lineal de la magnitud de sus parámetros geotécnicos, se recurre al uso de la geoestadística.

El objetivo de la geoestadística es proporcionar descripciones cuantitativas de las variables naturales distribuidas en el espacio, en el tiempo o en ambos (Auvinet, 2002). Adicionalmente, esta herramienta, proporciona información respecto a la incertidumbre asociada a dichas descripciones.

Los orígenes de la geoestadística, se remontan a la década de los 50, a los trabajos de Gandin, Sichel, Krige y Matern en los cuales, se establecieron las bases de la geoestadística. Sin embargo, fue en la década de los 60, cuando George Matheron retomó y mejoró el trabajo de los cuatro autores mencionados, dando un sustento matemático e incluyendo los conceptos de variables aleatorias, para realizar estimaciones de oro en las reservas mineras de Sudáfrica (Hohn, 1988; Sarma, 2009).

Desde su aplicación en las minas de Sudáfrica a la fecha, la geoestadística ha mostrado ser una herramienta con buen desempeño en la estimación de los recursos mineros, por lo que su empleo, se ha extendido a diversos campos y disciplinas donde la variación espacial de propiedades (o parámetros) y el factor tiempo juegan un papel importante tales como, a) Geología, b) Hidrología, c) Ciencias ambientales, d) Agronomía, e) Ecología, f) Ingeniería Civil (Geotecnia) e g) Ingeniería Petrolera (Li y Heap, 2011; Liu *et al.*, 2011).

En Ingeniería Geotécnica, la teoría de los campos aleatorios ha sido aplicada con éxito al modelado de las propiedades del suelo. Esta teoría permite describir la variación espacial del subsuelo con un semi-variograma o correlograma y mediante una técnica predictiva como el método de *Kriging* (con alguna de sus variantes), permite estimar valores en los puntos donde no se realizó exploración (Krige, 1962; Matheron, 1965; Auvinet, 2002).

Dentro de las aplicaciones geotécnicas se tiene un número considerable de trabajos de variación espacial de propiedades mecánicas del suelo entre los que destacan:

- Lumb (1966), Hooper y Butler (1966), Lumb y Hult (1968) presentaron una descripción estadística de las propiedades de las arcillas marinas de Londres, Hong Kong y de Japón.
- VanMarcke (1977a, 1977b, 1978, 1983, 1984) realizó una gran contribución al análisis de la variación espacial al mostrar el interés del concepto de campos aleatorios, con lo que dio inicio el análisis de datos bajo un enfoque estocástico.
- Baecher (1982) propuso un método útil para la construcción de un descriptor de propiedades donde además de la variación en los materiales, se proporciona la incertidumbre asociada con los errores en la medición de dichas propiedades.
- Kulatilake y Varatharejah (1986) incluyeron un análisis de regresión lineal en el modelo para calcular la tendencia en una dimensión en las propiedades geotécnicas y de esta forma verificaron si se cumplía con la condición de estacionaridad.

- Kulatilake y Southworth (1987), extendieron el trabajo realizado en el 1986, recurriendo a la teoría de los campos aleatorios para la estimación de propiedades geotécnicas. Además, explicaron el uso del semivariograma para el revisar la estacionaridad de la información.
- Kulitalike y Miller (1987) incorporaron el análisis de tendencia, estacionaridad y estimación por medio de la técnica de *Kriging* en tres dimensiones.

Las contribuciones anteriores muestran el desarrollo y la inclusión de la teoría de los campos aleatorios en el estudio de las propiedades geotécnicas. Sin embargo, algunos autores, consideran que Soulie *et al.* (1983) fueron quizá los primeros en aplicar las técnicas geoestadísticas en el estudio de la variación espacial de las propiedades geotécnicas. Dicho estudio fue realizado la construcción de una presa de tierra en la en la bahía James, situada en el Golfo de Canadá, con información de 371 pruebas de compactación.

En México comenzó a implementarse la geoestadística como herramienta para la caracterización de las propiedades del subsuelo en distintas partes de México, principalmente en la cuenca del Valle de México. A continuación, se describen los trabajos que más destacan.

Auvinet (1986) implementó la geoestadística en el estudio de la estructura de los medios granulares. Posteriormente, Auvinet y Abaziou (1993) aplicaron la metodología del análisis geoestadístico en el control de compactación de obras térreas. En 2001, se presentaron los trabajos “*Geostatistical interpretation of soil exploration*” (Auvinet *et al.*, 2001) e “*Interpretación geoestadística de campañas de reconocimiento del subsuelo*” (Medina, 2001).

Las bases de la Geoestadística aplicada a la Geotecnia, el problema del muestreo, el mapeo de propiedades geométricas del suelo (espesor y profundidad) y mecánicas se examinan en Auvinet (2002). Con base en los planteamientos de esta publicación, surgen varios trabajos entre ellos el titulado “*Análisis geoestadístico del subsuelo en el norte de la zona lacustre del Valle de México*” (Pantoja, 2002) donde se realiza un análisis geoestadístico del subsuelo determinando la configuración espacial de algunas propiedades del suelo (contenido de agua, resistencia de cono eléctrico y número de golpes en prueba de penetración estándar); en ese mismo año se presenta el trabajo “*Análisis geoestadístico de la estratigrafía del subsuelo marino de un área de la Sonda de Campeche*” (Valdéz, 2002), donde se realiza la caracterización estratigráfica del subsuelo marino en dicha zona. Este último trabajo fue retomado y ampliado posteriormente bajo el título “*Evaluación geoestadística y geotécnica del estrato del fondo marino de la Sonda de Campeche afectado por emanaciones de hidrocarburos*” (Galván 2009).

En el último decenio, se han publicado varios trabajos sobre el Valle de México, entre los que destacan “*Aplicación de la Geoestadística a la descripción estratigráfica del subsuelo de la zona sur de la Cuenca de México*” (Morales, 2004), “*Caracterización geoestadística del subsuelo de la zona poniente del Valle de México*” (Jiménez, 2007), “*Contribución a la zonificación geotécnica de la zona norte del Valle de México*” (Valencia, 2007), “*Caracterización geotécnica del subsuelo del centro histórico de la ciudad de México*” (Tenorio, 2008), “*Modelado del hundimiento de la zona lacustre del valle de México, Aspectos estratigráficos y piezométricos*” (Pérez, 2009), “*Estudio geotécnicos del subsuelo del lago de Texcoco y sus áreas de influencia*” (Rodríguez, 2010), “*Comportamiento del suelo en la zona próxima al cerro del Marqués y sus efectos en obras de infraestructura*” (Hinojosa, 2010), en ellos se presentan un conjunto de cortes estratigráficos del contenido de agua y mapas de contornos que describen la configuración espacial de algunos estratos típicos del subsuelo (capa dura, formación arcillosa superior y depósitos profundos).

Adicionalmente, esta herramienta ha sido empleada en varios proyectos de ingeniería importantes entre los que pueden mencionarse el Nuevo Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México (Romo *et al.*, 2001) y la reconfiguración de la Refinería Lázaro Cárdenas en Minatitlán, Veracruz (Vázquez, 2007), el túnel Emisor Oriente (Auvinet *et al.*, 2012; Juárez, 2012), y la línea 12 del Metro (Auvinet, 2012).

En los trabajos anteriormente descritos se ha empleado la metodología geoestadística univariable y los resultados muestran que esta técnica puede ser empleada para estimar de manera racional los espesores y profundidades de las formaciones típicas del subsuelo, así como las propiedades índice o mecánicas del subsuelo a partir de una base de datos de sondeos disponibles (Auvinet, 2002; Juárez *et al.*, 2011). Buscando un mejor aprovechamiento de la información disponible, en el presente trabajo se emplea la metodología geoestadística multivariable aplicada al análisis de la distribución espacial de las propiedades geotécnicas del subsuelo de la zona lacustre del Valle de México, considerando la existencia de una regresión lineal positiva entre dos propiedades geotécnicas diferentes.

## **1.2 OBJETIVO**

El objetivo de este trabajo es realizar análisis geoestadístico univariable y multivariable de las propiedades geotécnicas del subsuelo del Valle de México con base en la información existente. Para este propósito, se determina un modelo de correlación espacial para cada propiedad analizada y un modelo de correlación cruzada entre dos parámetros diferentes. Asimismo, empleando estos modelos de correlación, se realizan estimaciones espaciales aplicando la técnica de *Cokriging*. Como resultado de este análisis, se elaborarán modelos (perfiles, cortes y volúmenes) que describen la distribución espacial de las propiedades geotécnicas analizadas.

### 1.3 ALCANCES

Los alcances planteados en este trabajo son los siguientes:

1. Revisión de literatura respecto a estudios geoestadísticos aplicados a la Geotecnia.
2. Planteamiento teórico de la geoestadística (univariable y multivariable) enfatizando su aplicación para dar solución a los problemas prácticos de la ingeniera geotécnica.
3. Adaptación el fundamento teórico de la geoestadística multivariada a la Geotecnia al análisis de la variación espacial de las propiedades geotécnicas del subsuelo.
4. Recopilación y análisis de información sobre la zona de estudio (Topografía, Geología y Morfología), que contribuya a entender de manera preliminar la distribución de los materiales y sus propiedades en el subsuelo.
5. Recopilación y análisis de información geotécnica (pruebas de campo y laboratorio) que sirva de base para los análisis geoestadísticos. Asimismo, construir bases de datos numéricas de las propiedades geotécnicas a emplear en los análisis.
6. Desarrollo de algoritmos computacionales que faciliten el análisis geoestadístico multivariado para dos y tres dimensiones, así como, su validación.
7. Aplicación del análisis geoestadístico univariable y multivariable para estimar las propiedades geotécnicas del subsuelo.
8. Elaboración de modelos que representen la distribución espacial de las propiedades del subsuelo analizadas (perfiles, cortes y modelos 3D).
9. Elaboración de conclusiones y recomendaciones.





# 2

## DESCRIPCIÓN DEL SUBSUELO PARA FINES GEOTÉCNICOS

La variación de las propiedades de los suelos es una de las mayores fuentes de incertidumbre en la ingeniería geotécnica; esto se debe a la complejidad en los procesos físicos asociados con la formación de los materiales, por tanto, la caracterización de las propiedades del subsuelo no es una tarea sencilla. Sin embargo, desde hace algunos años, se busca reducir esta incertidumbre, por medio del uso de la teoría de los campos aleatorios, en el estudio de la distribución de las propiedades en el suelo (Phoon y Kulhawy, 1999).

Usualmente, cuando se busca caracterizar el subsuelo de alguna zona específica, se extraen muestras, que se analizan mediante ensayos de laboratorio y se determinan sus propiedades. Asimismo, también se obtienen las propiedades de forma directa al efectuar pruebas de campo. En ambos casos, la caracterización se basa en el conocimiento *a priori* del entorno topográfico, geológico e hidrológico, debido a que estos factores están estrechamente asociados con la estratigrafía (Juárez, 2015).

Durante los estudios de variación espacial, la correcta asignación de los parámetros del suelo a cada región considerada del medio, es un aspecto que reviste gran importancia ya que, de ello dependerá que la predicción del comportamiento o de las propiedades del subsuelo, corresponda con la realidad o que las diferencias sean mínimas (Sedano, 1982).

Como resultado de dicha caracterización se presenta una descripción de la masa de suelo estudiada, enfatizando sus características más importantes, por medio de esquemas descriptivos detallados como los cortes estratigráficos y modelos 3D, con base en la información obtenida de las estimaciones en puntos donde no se cuenta con información.

## 2.1 INCERTIDUMBRE EN LAS PROPIEDADES GEOTÉCNICAS

La incertidumbre referente a los problemas geotécnicos, específicamente cuando se busca realizar una caracterización espacial de las propiedades del subsuelo puede ser clasificada según Whitman (1996) en dos grupos, *i*) aleatoria (o estocástica) y *ii*) epistémica (o subjetiva), como se observa en la Figura 2.1.

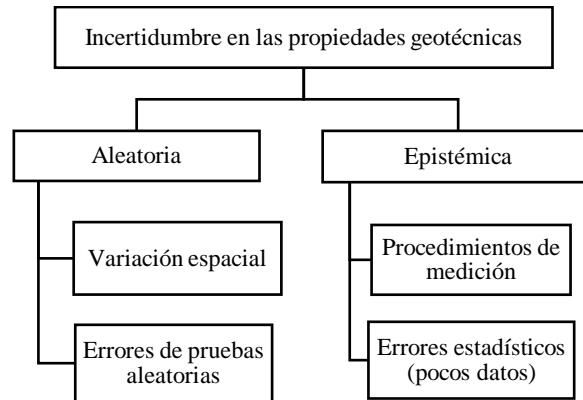


Figura 2.1 Tipos de incertidumbre en las propiedades geotécnicas (Whitman, 1996).

La incertidumbre aleatoria o inherente es una propiedad del sistema y representa la aleatoriedad natural de algún parámetro (o propiedad), por tanto, está depende de la variación natural de la propiedad en el volumen de suelo en estudio, la cual puede comportarse de distintas formas, como se observa en la Figura 2.2. Debe señalarse, que esta incertidumbre no puede ser reducida ni eliminada (Nadim, 2007).

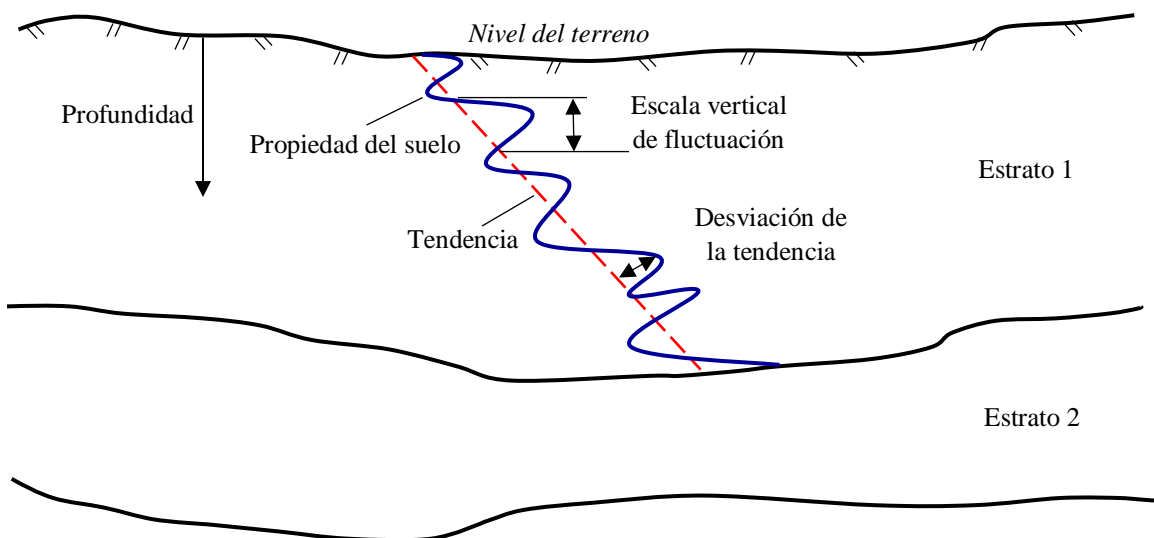


Figura 2.2 Ilustración de la variación de las propiedades de los suelos (Phoon y Kulhawy, 1999).

Respecto a la incertidumbre inherente de los suelos, Auvinet (2002) menciona que su principal explicación se debe a la naturaleza compleja de los geomateriales, ya que se trata de materiales polifásicos y extremadamente heterogéneos cuyas propiedades como la permeabilidad, pueden variar de un punto a otro en varios órdenes de magnitud.

Por otra parte, se tiene la incertidumbre epistémica, generalmente asociada con la falta de conocimiento sobre la variable en estudio. Este tipo de incertidumbre engloba la incertidumbre en las mediciones realizadas, incertidumbre estadística e incertidumbre del modelo. La incertidumbre en las mediciones, se debe a errores realizados durante la ejecución de la prueba o a imperfecciones del instrumento que se utiliza en dicha medición, mientras que la incertidumbre del modelo se debe a hipótesis o simplificaciones realizadas en la formulación e idealización del problema (Nadim, 2007). A diferencia de la incertidumbre inherente, la epistémica se puede reducir.

Sedano (1982) señala que en ocasiones los resultados de las pruebas empleadas para la obtención de las propiedades geotécnicas, se ven afectados por una incertidumbre global, que es la resultante de las siguientes incertidumbres: *i*) incertidumbre que existe en relación con la correcta esquematización del medio, *ii*) de la incertidumbre debida a la dispersión de las propiedades geotécnicas del subsuelo (dispersión natural, dispersión indicada por el muestreo, por el equipo utilizado y por los procedimientos de ensaye), *iii*) incertidumbre asociada por errores cometidos en la asignación de los parámetros (promedio espacial no adecuado para el problema). Además de los dos tipos de incertidumbres anteriores, hay otra fuente de incertidumbre asociada con el uso de algoritmos de cálculo (computacionales), la cual va implícita en el algoritmo de cálculo (incluyendo la aplicación del mismo al caso particular y la propia confiabilidad del algoritmo).

## **2.2 PROPIEDADES GEOTÉCNICAS RELEVANTES**

Para definir la variación espacial de las propiedades geotécnicas de un sitio, generalmente se recurre a ciertos procedimientos establecidos de campo y laboratorio (Alanís, 2003; Juárez, 2015). Con base en la información obtenida y aplicando dichos procedimientos, se pueden definir los siguientes aspectos del subsuelo:

- Propiedades geotécnicas
- Secuencia estratigráfica de la zona
- Condiciones de agua subterránea
- Asentamientos regionales

La obtención de los parámetros representativos, se logra por procedimientos de campo y ensayando en el laboratorio una serie de especímenes de cada región de estudio con el fin de obtener un promedio significativo de los valores de los parámetros del suelo. Así, un parámetro representativo de una región del subsuelo, es un promedio espacial de varios parámetros de este tipo, obtenidos en la región, con la que debe alimentarse el algoritmo de cálculo para que las predicciones del comportamiento o de la variación de las propiedades del subsuelo correspondan con la realidad (Marsal, 1986; Juárez, 2015).

Las propiedades geotécnicas se pueden clasificar en índice, mecánicas, hidráulicas y dinámicas (Alanís, 2003). Sin embargo, aunque son muchos los parámetros que pueden ser obtenidos, para el estudio de la variación espacial de propiedades del subsuelo, se requiere una selección cuidadosa de las propiedades o las variables que conviene analizar. Por tanto, generalmente se recomienda seleccionar el conjunto de propiedades de las que se tenga un mayor número de mediciones y que presenten una mayor cantidad de correlaciones con otras propiedades (Juárez, 2015).

### ***2.2.1 Propiedades índice***

Las propiedades índice, permiten obtener la clasificación del suelo y proporcionan una idea aproximada de sus propiedades mecánicas (Alanís, 2003). Las determinaciones, se realizan con los suelos obtenidos mediante sondeos de exploración o pozos a cielo abierto, ya que son indispensables para programar en etapas subsecuentes el muestreo de especímenes inalterados y la ejecución de ensayos de laboratorio de acuerdo con las modalidades del problema a resolver (Marsal, 1986). Las propiedades que se mencionan a continuación son las más usuales en el caso de la Ciudad de México.

- Contenido de agua ( $w$ )
- Límites de consistencia ( $w_p$   $w_L$ )
- Densidad de sólidos ( $G_s$ )
- Relación de vacíos ( $e$ )
- Porosidad ( $n$ )

#### *Contenido de agua*

Esta propiedad, tiene principalmente dos propósitos: por una parte, se emplea como índice cualitativo que permite, a través de las correlaciones existentes, estimar en forma preliminar las propiedades mecánicas del suelo y detectar cambios de estas dentro del mismo material o cambios de tipo de materiales constituyentes del subsuelo. Generalmente, los contenidos de agua determinados a lo largo de un sondeo son valores individuales que distan de ser iguales entre sí o de presentar una transición gradual (Sedano, 1982).

Las variaciones del contenido de agua dentro de una misma zona del subsuelo, son un indicador de cambios en sus propiedades tales como: la resistencia al corte y la compresibilidad. Por otra parte, el contenido de agua interviene en los cálculos de ciertos parámetros del suelo a través de correlaciones (Sedano, 1982). Asimismo, es la propiedad que se determina en mayor número y a un menor costo en un estudio geotécnico (Juárez, 2015), a diferencia de los límites  $w_p$  y  $w_L$ , que, aunque dan indicios sobre la consistencia del suelo, son parámetros obtenidos en menor número, por lo que, generalmente la información es escasa (Alanís, 2003).

#### *Relación de vacíos y porosidad*

Estas dos propiedades índice pueden usarse como un indicador cualitativo de ciertas propiedades mecánicas e hidráulicas como: la resistencia al corte y la permeabilidad o bien a la susceptibilidad al colapso por saturación de los suelos (Sedano, 1982).

En la práctica es común que ambas propiedades se determinen, por tanto, se puede realizar un estudio de su variación en el espacio. Sin embargo, la relación de vacíos presenta ciertas desventajas en los efectos de escala. Por tanto, para la representación de la proporción de los vacíos en el subsuelo, se recurre a la porosidad, aunque en ocasiones, esta última propiedad presenta la desventaja es el reducido número de ensayos para su determinación (Auvinet, 2002)

#### **2.2.2 Propiedades mecánicas**

Este tipo de propiedades, se obtienen de los ensayos de laboratorio y de pruebas de campo. La ejecución de pruebas de laboratorio requiere el rescate de muestras alteradas e inalterado; para obtener estas últimas se han desarrollado muchas técnicas, pero todavía es un reto sin solución rescatar muestras en verdadero estado inalterado de suelos difíciles (Santoyo, 2000). Las propiedades mecánicas más relevantes son: *i*) la compresibilidad y *ii*) la resistencia al corte.

#### *Compresibilidad*

Es una de las propiedades más significativas de las arcillas lacustres del Valle de México, que depende de la estructura sólida propia de tales suelos y de la historia de cargas a que han estado sometidos (secado, hundimiento por explotación de acuíferos, construcciones y rellenos), es necesario realizar en el laboratorio pruebas sobre especímenes inalterados de las muestras que se han recabado en sondeos o pozos a cielo abierto (Marsal, 1986).

Esta propiedad, es de gran relevancia, sin embargo, en estudios geotécnicos el número de pruebas efectuadas es reducido, por tanto, no se cuenta con la cantidad de información suficiente, lo que dificulta realizar un análisis de variación espacial de esta propiedad. Además, en muchos de los casos, la información de esta propiedad tiene gran incertidumbre, ya que algunas veces la muestra no puede considerarse como representativa del estrato de procedencia o del volumen de suelo estudiado (Juárez, 2015).

#### *Resistencia al corte*

La resistencia al esfuerzo cortante, es otro de los parámetros más representativos de las propiedades mecánicas, los principales factores que influyen en esta propiedad para un suelo cohesivo son: la historia previa de consolidación del suelo, las condiciones de drenaje, la velocidad de aplicación de las cargas a las que se sujete y la sensibilidad de la estructura.

En el caso de las arcillas lacustres, que en condición natural están saturadas, se estima la resistencia al corte o cohesión como la mitad del valor a la falla registrado en el ensaye de compresión no confinada. Sin embargo, esta prueba presenta resultados muy bajos cuando el espécimen de suelo se encuentra fisurado, lo cual es frecuente en las arcillas blandas del Valle. Más representativo es el valor que se obtiene en la prueba triaxial no consolidada no drenada (UU), sometiendo el espécimen a un esfuerzo de confinamiento igual a la presión total calculada a partir del peso volumétrico y la profundidad del material en el subsuelo (Marsal, 1986).

Es también frecuente que esta propiedad, se determine en el laboratorio con el torcómetro, aplicándolo directamente en los extremos de la muestra; tal práctica es poco recomendable, ya que se realiza la prueba en las partes del espécimen generalmente más alteradas por el proceso de perforación (Marsal, 1986).

En campo, generalmente se recurre al uso de la veleta, este tipo de pruebas permiten definir la resistencia en condición no drenada de suelos blandos saturados o parcialmente saturados, sin embargo, no es recomendable utilizar la prueba en estratos arcillosos (Marsal, 1986; Santoyo, 2000). Este tipo de pruebas aporta una mayor cantidad de datos, ya que puede ser aplicada en diferentes profundidades, a diferencia de una prueba de triaxial en el laboratorio que únicamente se aplica en especímenes de suelo en alguna profundidad de interés (Juárez, 2015).

Otro de las pruebas en campo con la que se asocia la resistencia al suelo son la de penetración estándar (SPT) y la de cono eléctrico (CPT). Ambas propiedades, aportan una gran cantidad de datos, lo que permite realizar un análisis de variación ya sea con valores promedio por intervalo de longitud (60 cm) del número

de golpes ( $N$ ) o bien, con una serie de datos continuos con información de la resistencia de punta ( $q_c$ ) (Marsal, 1986; Juárez, 2015).

### 2.2.3 Propiedades hidráulicas

La propiedad hidráulica más representativa de los suelos es el coeficiente de permeabilidad  $k$ , además es una de las propiedades con mayor dispersión natural. Esencialmente, dicho coeficiente se emplea para calcular el gasto de agua, que, bajo determinado gradiente de carga hidráulica, se presenta a través de una determinada masa de suelo. La magnitud de  $k$ , depende de las propiedades del fluido que circula por los poros (viscosidad, temperatura y densidad) y también de las propiedades del suelo como: el contenido de agua, grado de saturación, relación de vacíos, distribución del tamaño de las partículas, forma y orientación de las partículas, distribución del tamaño y conectividad de los poros (Harr, 1962; Marsal y Reséndiz, 1983).

El intervalo de valores de  $k$  es muy amplio, por lo que la selección del método y del equipo para su determinación depende de las siguientes condiciones: *i*) tipo de suelo, *ii*) magnitud y *iii*) tipo de proyecto. Los métodos para determinar el valor de  $k$  se pueden clasificar en tres: ensayos de laboratorio, métodos de campo y métodos indirectos, los cuales se presentan en el diagrama de la Figura 2.3.

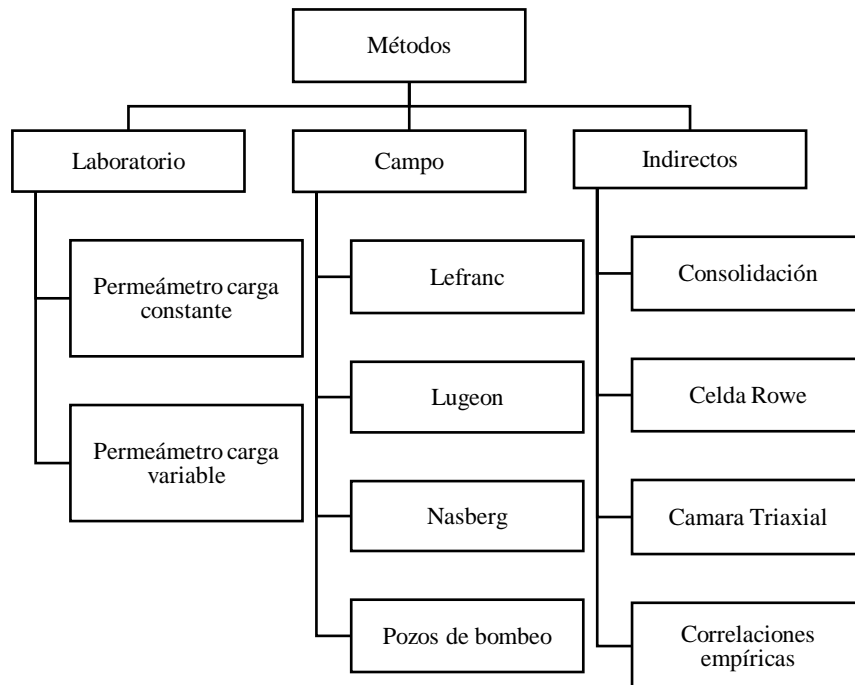


Figura 2.3 Métodos para la determinación del coeficiente de permeabilidad.

Respecto a esta propiedad, algunos autores indican que las pruebas de campo son las que más aportan datos y son las más confiables. Sin embargo, solo se efectúan para obras especiales y de infraestructura.

Por otra parte, para reducir la incertidumbre en la permeabilidad de un estrato, convendría realizar un número suficiente de pruebas para definir una zonificación más fina del mismo. Por tanto, la selección de un parámetro representativo debe hacerse tomando en cuenta los fines perseguidos (Sedano, 1982).

#### **2.2.4 Propiedades dinámicas**

La medición de las propiedades dinámicas de los suelos es una tarea de gran relevancia para dar solución a los problemas relacionados con la geosísmica. Para realizar esta tarea, existe una gran variedad de pruebas y técnicas de campo y laboratorio, cada una de ellas presenta ventajas y limitaciones dependiendo del problema en estudio. Generalmente, las pruebas de campo se enfocan en la determinación de las propiedades dinámicas a bajos niveles de deformación, mientras que, en laboratorio, se realizan ensayos a grandes niveles de deformación (Kramer, 1996).

Los parámetros dinámicos se obtienen de ensayos de laboratorio en muestras inalteradas y de ensayos de campo. En los ensayos de laboratorio se determina el módulo de rigidez al cortante ( $G$ ) y el amortiguamiento ( $\lambda$ ), y en los métodos de campo se obtiene la velocidad de onda de corte ( $V_S$ ), con base en la cual se calcula indirectamente el módulo de rigidez (Ovando, 1992).

Prakash (1981), menciona que las principales propiedades necesarias para un estudio dinámico, son las siguientes:

- Velocidad de propagación de las ondas de compresión y de cortante ( $V_P$  y  $V_S$ ).
- Módulo de elasticidad dinámico ( $E$ )
- Módulo de rigidez dinámico ( $G$ )
- Relación de Poisson ( $\nu$ )
- Amortiguamiento ( $\zeta$ )
- Parámetros de licuación

El objetivo de la determinación de las propiedades dinámicas del suelo, es tener un conocimiento detallado del comportamiento ante acciones sísmicas, para generar formulaciones de marcos de referencia conceptuales con los que es posible hacer descripciones cualitativas del comportamiento de los suelos. Un marco de referencia (o modelo conceptual) es extremadamente útil, como paso previo a la formulación de



modelo matemático (Ovando, 1992). De las propiedades mencionadas anteriormente, la que se determina con mayor frecuencia en el Valle de México, es la velocidad de onda de corte  $V_S$  (Juárez, 2015).

Por otra parte, los métodos para determinar las propiedades dinámicas del suelo, se pueden clasificar en métodos de campo y de laboratorio, como se muestra en la Figura 2.4.

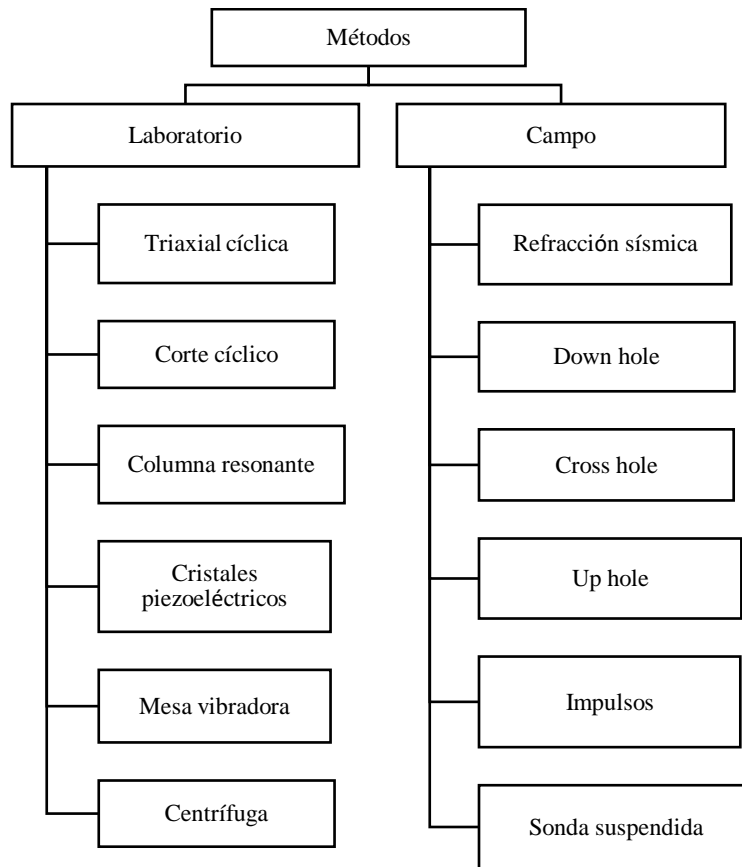


Figura 2.4 Pruebas de campo y de laboratorio para obtener propiedades dinámicas del suelo.

Los métodos de campo involucran dos aspectos, *i*) generar una onda o tren de ondas en el subsuelo y *ii*) registrar e interpretar dicha excitación. En este tipo de métodos, la interpretación involucra la identificación en los registros del tipo de onda deseada, así como la obtención de parámetros del suelo (generalmente velocidades de ondas) a partir de ellos. Empleando las expresiones de la ecuación (2.1) se calculan los módulos dinámicos. Las deformaciones que se inducen en el suelo por efectos del agente excitador son muy pequeñas, típicamente del orden del 10% o menores (Ovando, 1992).

$$E = \rho V_P^2 \quad y \quad G = \rho V_S^2 \quad (2.1)$$

donde:  $V_S$  y  $V_P$  son las velocidades de propagación de onda de corte y compresión respectivamente y  $\rho$  es la densidad de las muestras de suelo.

Los cuatro elementos necesarios para realizar pruebas de campo son: *i*) Perforación de uno o más pozos, *ii*) Fuente generadora de ondas, *iii*) Equipo de captación (geófonos) y *iv*) equipo de registro (Ovando, 1992).

De las pruebas de campo mencionadas anteriormente, quizá la que aporta una mayor cantidad de datos, y que permite realizar estudios de la variación espacial de la velocidad de onda de corte, es la sonda suspendida (Figura 2.5).

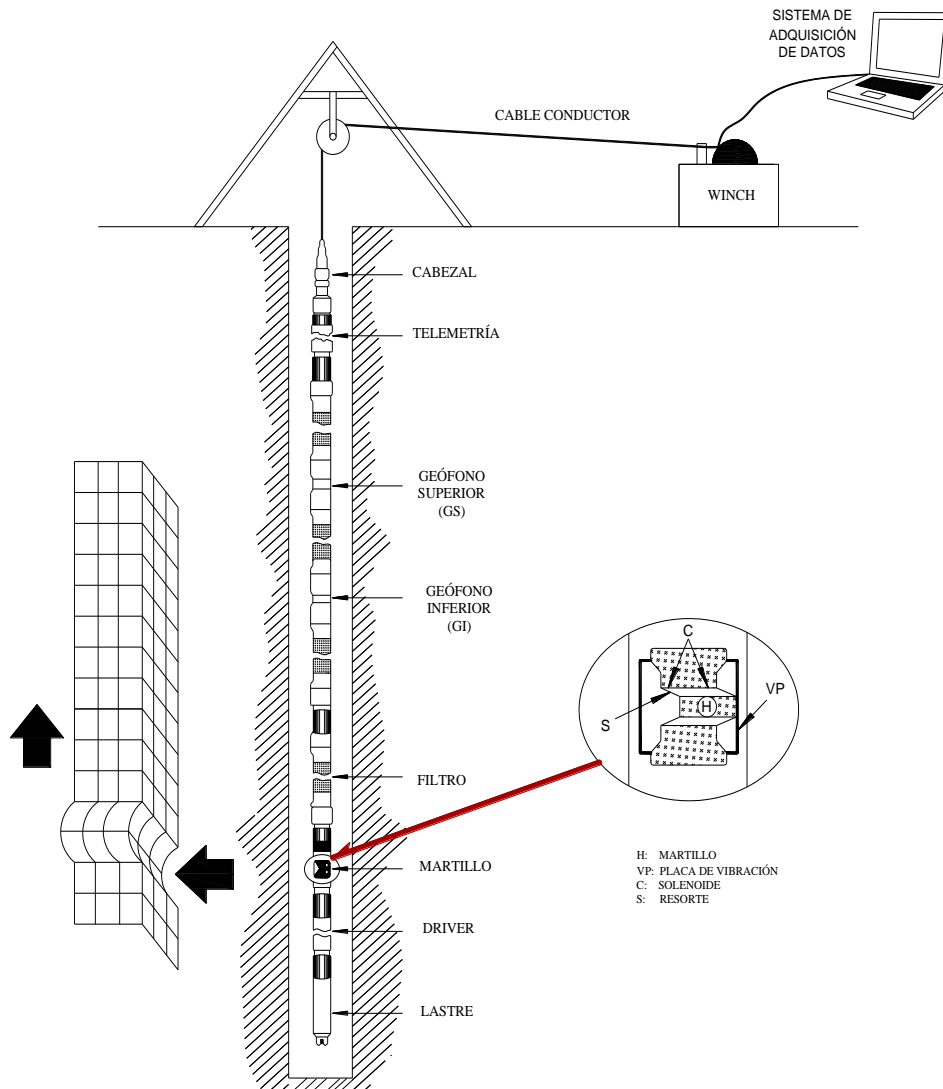


Figura 2.5 Esquema de la prueba de sonda suspendida (Flores *et al.*, 2014).

En esta prueba, el sistema genera ondas que viajan a través del suelo y son registradas por los geófonos. La sonda se mueve por la perforación en sentido ascendente o descendente, produciendo una señal con amplitud aproximadamente constante en toda la perforación. El sistema excitador consiste dos solenoides con polarización reversible para generar ondas horizontales de cortante (SH) y de compresión (SP). En otro punto se encuentran los receptores (R1 y R2) separados 1 m, los que registran las vibraciones emitidas con el martillo. Estas señales se registran y amplifican para luego enviarlas al sistema de adquisición de datos (Flores *et al.*, 2014)

La sonda completa es soportada por el cable, de tal forma que el cuerpo del equipo queda suspendido en la perforación, por lo que no hace contacto directo con la perforación. Al activar el martillo de la sonda suspendida, las ondas  $P$  y  $S$  viajan a través de la periferia de la perforación y éstas son registrados por los geófonos inferior y superior para su posterior análisis (Flores *et al.*, 2014).

Con base en los registros de los tiempos de arribo es posible determinar las velocidades de onda, utilizando la siguiente expresión:

$$V_{P,S} = \frac{1}{t_{p,s2} - t_{p,s1}} \quad (2.2)$$

donde:  $t_{p,s1}$  son tiempos de arribo de las ondas  $P$  y  $S$  en el geófono 1, en s,  $t_{p,s2}$  los tiempos de arribo de las ondas  $P$  y  $S$  en el geófono 2, en s, y  $V_{p,s}$  las Velocidades de la onda  $P$  o  $S$ , en m/s.

## 2.3 REPRESENTACIÓN TRADICIONAL

Los resultados obtenidos de las etapas de exploración en campo y ensayos de laboratorio, deben ser organizados y presentados de tal forma que se pueda ilustrar en forma clara y entendible las características naturales del subsuelo. Para ello, en geotecnia, se recurre a técnicas convencionales como tablas, perfiles geotécnicos y cortes estratigráficos. Con base en estos se pueden realizar ciertas interpolaciones para inferir propiedades en un sitio de interés.

### 2.3.1 Tablas

El uso de tablas es quizá la forma más sencilla de organizar los datos experimentales. Consisten en la organización de la información de las propiedades en columnas y renglones. En forma convencional, en la primera columna registran las profundidades en las que se hicieron las mediciones y de la segunda en adelante se registran los valores de las propiedades obtenidos de las mediciones.

### 2.3.2 Perfiles geotécnicos

Los perfiles geotécnicos son una forma típica de organizar y presentar los resultados en forma gráfica. Constituyen una herramienta útil, debido a que proporcionan al geotecnista una idea más clara acerca de la distribución de los materiales y la variación que presentan estos a lo largo de la profundidad. Por lo general, la elaboración de dichos perfiles se lleva a cabo mediante patrones convencionales, en los cuales se registran los datos obtenidos en campo y laboratorio. Los elementos que constituyen un perfil (Figura 2.6) son:

1. Una columna estratigráfica en dirección vertical, donde se muestren las distintas fronteras de los materiales y cambios a lo largo de la profundidad, con base en una secuencia de unidades estratigráficas.
2. Un registro secuencial donde se indique el número de muestra y su correspondiente porcentaje de recuperación.
3. Trazos donde se muestre la variación de los diferentes valores de las propiedades con respecto a la profundidad.
4. La localización de la profundidad del nivel freático.
5. Acotaciones que describan la simbología utilizada en el perfil.

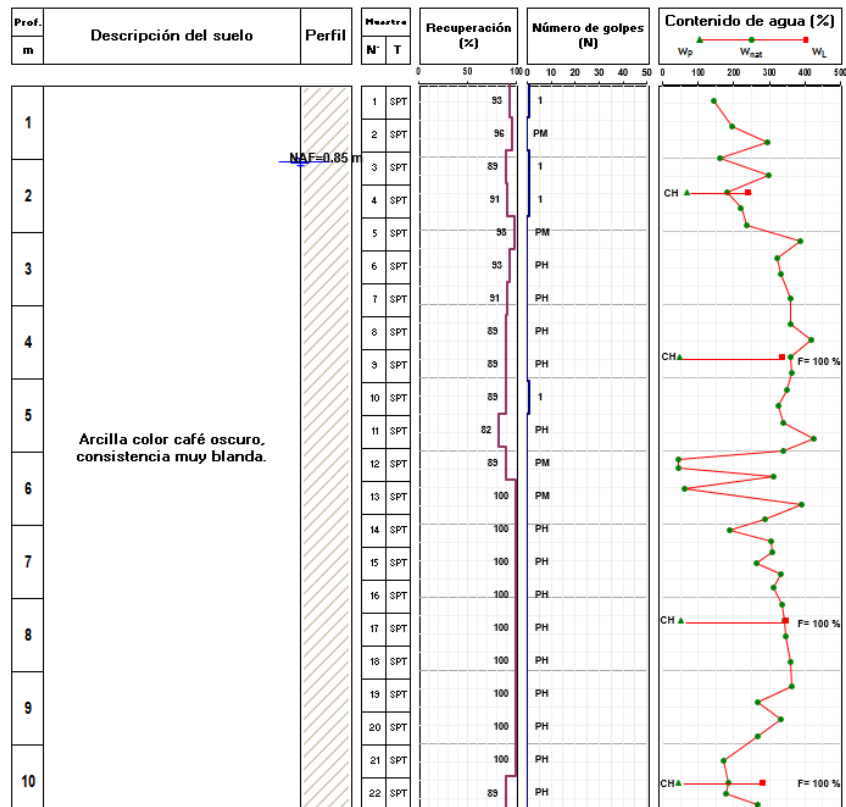


Figura 2.6 Ejemplo de un perfil geotécnico.

### 2.3.3 Cortes estratigráficos

Los cortes estratigráficos son otra forma de representar gráficamente los datos geotécnicos. Este tipo de representación, está constituida por la integración de un conjunto de perfiles geotécnicos individuales ubicados a lo largo de una línea o un eje de estudio. Para la elaboración de un corte estratigráfico, se requiere un mapa de localización donde se indique la ubicación de los sondeos y la línea o eje por donde pasa el corte.

Con la información de los perfiles se construye el corte, donde la interpolación entre los estratos, tradicionalmente es un bosquejo que depende de la experiencia del especialista quien lo construye. Por tanto, entre menor sea la distancia de separación entre los sondeos, aumenta la precisión y es posible identificar la variación de las propiedades geotécnicas en el corte estratigráfico. En la Figura 2.7, se muestra la representación de un corte estratigráfico.

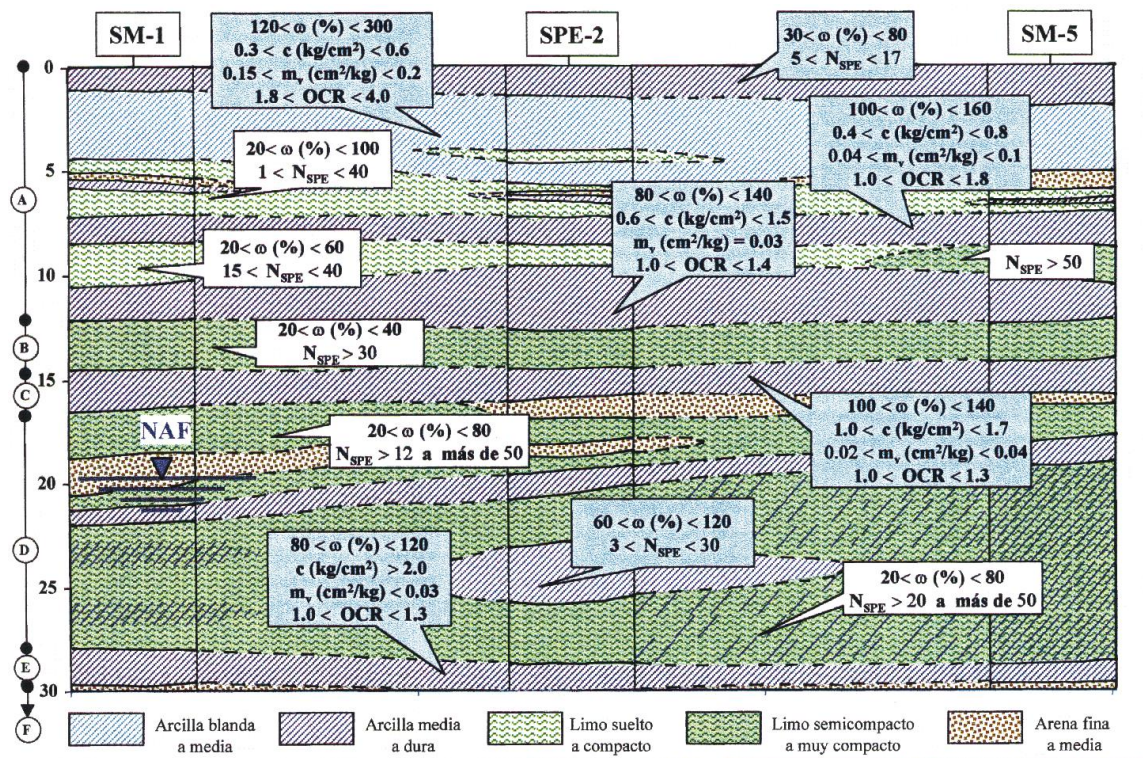


Figura 2.7 Ejemplo de un corte estratigráfico.

Con base en lo anterior, queda claro que la representación de la distribución de los materiales y sus propiedades, es una tarea sencilla cuando el subsuelo presenta cierta homogeneidad local en los materiales. Sin embargo, en suelos heterogéneos, la complejidad es mayor, debido a las variaciones de los materiales en las direcciones vertical y horizontal (Juárez, 2015).

## 2.4 DESCRIPCIÓN ESTADÍSTICA

En la ingeniería geotécnica, existe una marcada preocupación por describir y cuantificar la variabilidad espacial de los suelos, con el fin de obtener un modelo representativo adecuado del subsuelo para realizar los diferentes análisis geotécnicos. Tradicionalmente, y solo en casos especiales se ha recurrido al uso de los conceptos básicos de la estadística descriptiva para organizar, presentar y describir los datos de las propiedades de los suelos. También se han utilizado técnicas cuantitativas o gráficas para analizar la variabilidad del conjunto de datos (Auvinet, 2002).

En la estadística clásica, a partir de un conjunto de datos se estiman algunos parámetros estadísticos, siendo utilizados como medidas numéricas para describir el conjunto de datos (Juárez, 2015). Para realizar dicha descripción, se tiene un conjunto de datos numéricos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que representan la medición de alguna variable de interés (por ejemplo, contenido de agua o resistencia de punta). Para conocer algunas características globales de esta variable se pueden calcular ciertas medidas de tendencia central como la media, mediana y moda, y también otras medidas llamadas de dispersión como la varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación.

### 2.4.1 Media

Es el promedio del conjunto de datos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  denotada de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.3)$$

donde  $n$  es el número de datos o mediciones de la muestra.

### 2.4.2 Mediana

El cálculo de esta medida de tendencia, se obtiene ordenando de menor a mayor (incluyendo los valores repetidos)  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ , donde  $x_{(1)}$  y  $x_{(n)}$  son el valor menor y mayor del campo respectivamente, por tanto, la mediana de este campo queda definida como sigue:

$$\tilde{x} = \begin{cases} \frac{1}{2} [x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}], & \text{si } n \text{ es par} \\ x_{(n+1/2)}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (2.4)$$

De esta forma cuando se tiene un número impar de datos, la media es el dato ordenado que se encuentra justo en la mitad, mientras que cuando se tiene un número par de datos, la mediana se obtiene promediando los dos datos de la parte de en medio.

### 2.4.3 Varianza

La varianza es una medida de dispersión de los datos alrededor del valor medio del conjunto de mediciones, definida como el promedio de los cuadrados de la distancia entre dichas mediciones individuales con respecto a su media, se define por la siguiente expresión:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.5)$$

donde  $\bar{x}$  es la media del conjunto.

La dispersión o variación de los datos intenta dar una idea del espaciamiento entre los datos. El valor mínimo que puede tomar  $S^2$  es cero, y eso sólo se presenta si toda la población toma un valor único. El valor de la varianza se hace más grande en la medida conforme aumenta el esparcimiento de los valores numéricos de los puntos de datos (Pantoja, 2002).

### 2.4.4 Desviación estándar

La desviación estándar es simplemente la raíz cuadrada positiva de la varianza, es decir:

$$S = \sqrt{S^2} \quad (2.6)$$

### 2.4.5 Coeficiente de variación

La relación entre la desviación estándar, como medida de dispersión, y la media como medida de tendencia central, proporciona una idea acerca del grado de dispersión que existe en la muestra. Esta relación se conoce con el nombre de coeficiente de variación y se define por la siguiente ecuación:

$$C_v = \frac{S}{\bar{x}} \quad (2.7)$$

Dado que la desviación estándar y la media tienen las mismas unidades, el coeficiente de variación es una medida de dispersión adimensional.

### 2.4.6 Histograma

Dentro de las herramientas gráficas de la estadística, el más usual es el histograma. Para la construcción de un histograma, es necesario dividir el rango de los datos en intervalos de igual tamaño, llamados *clases*. Para ello, se tienen que ordenar los valores de los datos, en el caso del suelo, el valor de la propiedad, en

orden ascendente o descendente. Posteriormente, se obtiene el *rango*, calculando la diferencia entre el valor máximo y el mínimo

El histograma expone la variación aleatoria de una propiedad particular del medio sin considerar la dependencia espacial de los datos muestreados. Si se toman todos los datos de los sondeos de alguna propiedad en específico y se construye el histograma, se puede conocer la distribución aleatoria de la propiedad en interés para la zona de estudio (Medina, 2001), como se muestra en la Figura 2.8.

No obstante, es necesario señalar que, aunque el histograma es una herramienta simple y útil para interpretar la composición de una población, carece de toda formalidad matemática. Por tanto, su uso está restringido por las hipótesis que se consideran para su construcción, que distinguen entre la propiedad de análisis, el número de datos de la población y el tamaño de cada clase (Medina, 2001).

El número de clases que se emplea para clasificar los datos en un conjunto depende del total de observaciones de la muestra. Si el número de observaciones es relativamente pequeño, se recomienda, que el número de clases será cercano a cinco y nunca menor que este. Por otra parte, si se tiene gran cantidad de datos, el número de clases recomendable está entre 6 y 12, sin pasar de 15 clases (Pantoja, 2002).

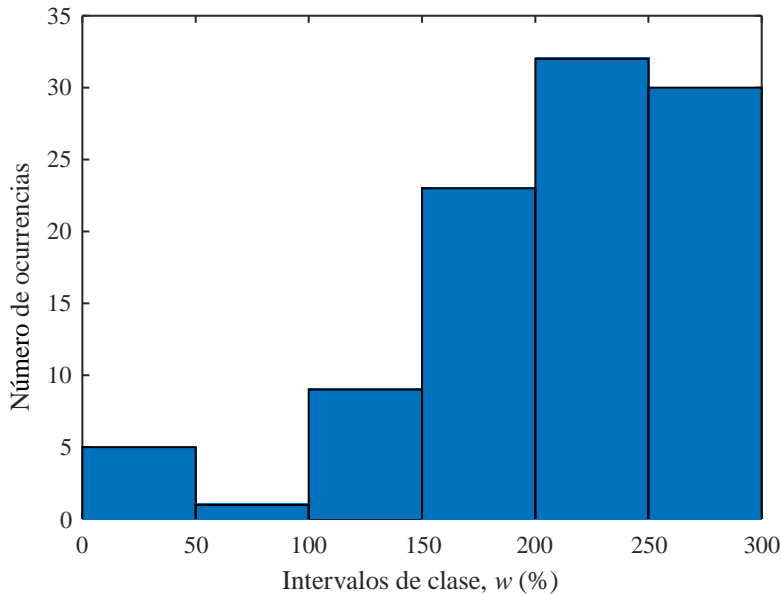


Figura 2.8 Histograma de contenidos de agua.



## 2.5 TÉCNICAS DE INTERPOLACIÓN ESPACIAL

En geotecnia, las mediciones de una variable o parámetro del suelo, generalmente se realizan en muestras de suelo separadas una de otra por distancias relativamente grandes. Esto implica, no solo en las dimensiones de la superficie de estudio, sino también en las distancias de separación entre los puntos de muestreo.

La interpolación es el procedimiento que consiste en estimar los valores de una variable o una propiedad dentro de un dominio (1D, 2D, 3D), en puntos donde no hay medición, a partir de las mediciones existentes (puntos de muestreo). Por el contrario, a la estimación de valores en puntos ubicados fuera de este dominio, se le denomina extrapolación (Juárez, 2015) dependiendo de la dimensión puede ser una línea, un polígono o un volumen.

La mayoría de las técnicas de estimación espacial, son de tipo matemático, basadas en la geometría y alguna aplicación de la naturaleza física de los fenómenos. Estas técnicas, toman en cuenta la variación sistemática o determinista, pero no dan información acerca de la incertidumbre asociada a la estimación. En este aspecto, están limitadas y no satisfacen los requerimientos que se demandan en la práctica (Juárez, 2015).

### 2.5.1 Clasificación de los métodos de interpolación espacial

Existen diversos criterios para clasificar los métodos de interpolación, sin embargo, en este trabajo se presenta la clasificación que presentan Liu *et al.* (2011), la cual agrupa las técnicas de interpolación de la siguiente forma:

- *Métodos globales y locales*

Los métodos globales utilizan toda la información disponible en la región de interés para obtener la estimación y capturar la tendencia general. Mientras que los métodos locales operan dentro de una pequeña área circundante al punto que se está estimando, con la finalidad de obtener las variaciones locales o de corto alcance (Burrough y McDonnell, 1998).

- *Métodos exactos y aproximados*

Con base en la exactitud, un método que genera una estimación de igual valor al observado de un punto muestreado se denomina método exacto, por lo que, todos los demás métodos se consideran aproximados, lo que significa que en los métodos de predicción el valor generado y el valor medido (o conocido) difieren (Burrough y McDonnell, 1998).

- *Métodos puntuales y por bloque*

En los métodos puntuales como su nombre lo indica, la interpolación se realiza punto a punto, empleando un conjunto de datos conocidos (de alguna propiedad del suelo) para interpolar en los nodos de una malla de puntos, cuya posición esta referenciada a un sistema coordinado. En la interpolación por bloque, en un conjunto de datos ubicados en un dominio se estima el valor del parámetro a interpolar para diferentes subdominios, un ejemplo de estimación por bloque seria la estimación de las propiedades para un estrato en particular (Burrough y McDonnell, 1998; Juárez, 2015).

- *Métodos determinísticos y geoestadísticos*

Respecto al mecanismo matemático, los métodos estocásticos incorporan el concepto de aleatoriedad y proveen estimaciones (la parte determinística) y asociando errores (la parte estocástica, incertidumbres representadas como varianzas estimadas). Todos los demás métodos son determinísticos porque ellos no incorporan error y únicamente generan estimaciones. En otras palabras, los métodos determinísticos no tienen la evaluación del error con los valores pronosticados, mientras que los estocásticos proporcionan una evaluación de los errores asociados con los valores generados (Burrough y McDonnell, 1998).

### **2.5.2 Métodos globales con enfoque determinístico**

La mayoría de los métodos de interpolación pueden dividirse en dos clases, globales y locales. Los interpoladores globales utilizan toda la información disponible (datos) para estimar valores en puntos donde no existe medición. Los interpoladores locales, utilizan únicamente la información (datos) ubicados en la vecindad de los puntos cuyo valor será estimado. Los interpoladores globales son utilizados para eliminar los efectos de las tendencias más importantes antes de utilizar los interpoladores locales para analizar los residuos (Burrough y McDonnell, 1998).

Para la interpolación global existen dos enfoques:

1. El uso de las técnicas de clasificación para inferir los valores de una variable (parámetro) basándose en el conocimiento de los valores de otro atributo.
2. El uso de las técnicas de regresión para inferir valores de una propiedad de interés por medio de los valores de variables que son fáciles de medir.

Respecto a los dos enfoques anteriores, el uso de las técnicas de clasificación se aplica cuando los datos espaciales son muy escasos, en cambio cuando se cuenta con suficientes datos, generalmente se recurre a las técnicas de regresión. En general, las técnicas de interpolación se clasifican en globales, inexactas y

deterministas, la hipótesis básica de estas técnicas radica en que el valor del parámetro de interés está fuertemente relacionado con otra variable, la cual puede ser utilizada para dividir el área de estudio en zonas o subdominios. Por otra parte, las técnicas de regresión como se mencionó anteriormente utilizan únicamente los datos experimentales de la variable de interés y la ubicación de los puntos de muestreo, a diferencia de los métodos de clasificación que utilizan únicamente información externa. Las técnicas de regresión son globales, inexactas y estocásticas.

Existen técnicas de interpolación global con mayor complejidad matemática, como el análisis espectral o el análisis de Fourier, los cuales pueden ser usados para modelar la superficie de manera análoga al análisis de tendencia. Estas técnicas generalmente requieren una gran cantidad de información con diferentes escalas de resolución (Burrough y McDonnell, 1998).

### ***2.5.3 Métodos locales con enfoque determinístico***

Cuando se utilizan interpoladores globales las variaciones locales tienden a descartarse como ruido aleatorio. Sin embargo, intuitivamente esto no tiene sentido ya que los valores para cada punto por lo general tienden a ser muy similares a los de sus puntos vecinos (Burrough y McDonnell, 1998). El procedimiento general para identificar un conjunto de puntos para los cuales los valores serán estimados, se basa en el siguiente procedimiento, el cual suele ser aplicado para cada uno de los puntos:

1. Definir una zona (vecindad) alrededor del punto a estimar.
2. Identificar dentro de la vecindad los puntos de muestreo.
3. Seleccionar una función matemática para modelar la variación local entre puntos.
4. Estimar los valores de la variable para cada punto por medio de la función.

La mayoría de los intentos de predicción espacial ha sido de forma matemática, basándose en la geometría y en la apreciación de la naturaleza del fenómeno. En general los métodos de predicción, pueden ser vistos como promedios pesados de la información (Webster y Oliver, 2007)

A continuación, se presenta la forma en la que se asignan los pesos en algunos métodos vecinales más comunes, entre ellos: los polígonos de Thiessen, el método de los vecinos cercanos, el método de la triangulación e inverso de la distancia.

**Método de los polígonos de Thiessen**

Los polígonos de Thiessen (también conocidos como diagramas de Dirichlet o Voronoi) se construyen alrededor de cada punto de muestreo. En este método se asume que todos los puntos dentro del polígono tienen valores de muestreo. Esto es equivalente a decir que cada punto tiene el mismo valor que su punto de muestreo más cercano. Este tipo de técnicas está clasificado dentro de los métodos locales, exactos y determinísticos (Burrough y McDonnell, 1998).

La construcción de los polígonos de Thiessen se realiza dibujando líneas entre los puntos vecinos, en este caso puntos de muestreo. Estas líneas parten de las caras de los triángulos de Delaunay (Figura 2.9a). Un triángulo de Delaunay tiene la propiedad de que al dibujar un círculo a través de sus tres vértices, este no contendrá ningún otro punto de muestreo, si este círculo contiene algún punto será necesario redibujar los triángulos. Posteriormente se dibujan un segundo conjunto de líneas que bisecciona las aristas de los triángulos de Delaunay, este segundo conjunto de líneas conformara las fronteras de los polígonos de Thiessen (Burrough y McDonnell, 1998), como de observa en la Figura 2.9b.

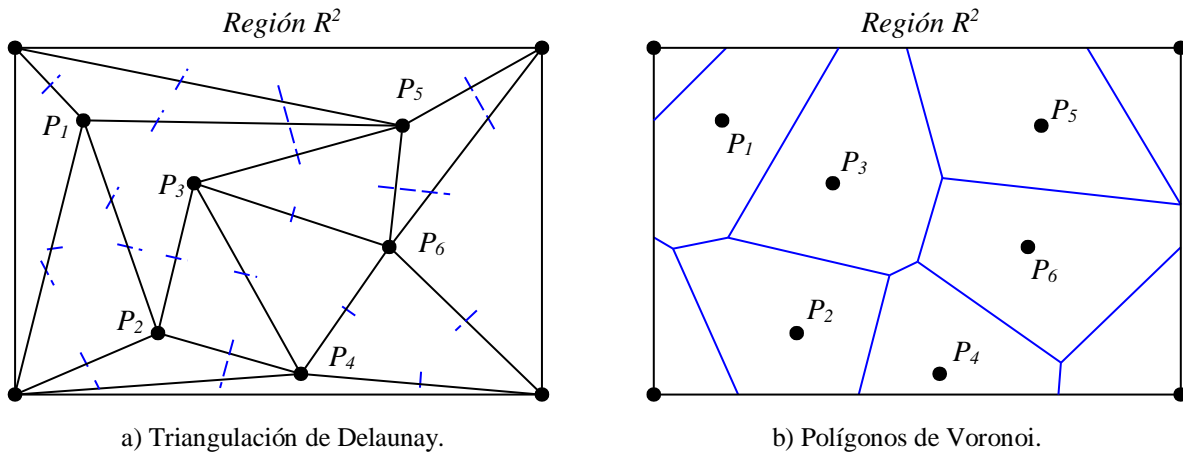


Figura 2.9 Construcción de los polígonos de Thiessen.

La región muestreada  $R$ , es dividida por bisectores perpendiculares entre los  $N$  puntos de muestreo en polígonos.  $V_i, i=1,2,\dots,N$ , de tal forma que en cada polígono todos los puntos cercanos encerraran al punto de muestreo  $x_i$ . La predicción en cada punto in  $V_i$  será el valor medido en  $x_i$ . Los pesos asignados serán:

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in V_i \\ 0 & \text{para los demás} \end{cases} \quad (2.8)$$

Algunas de las deficiencias que presenta este método, son debido a que en la estimación de valores en puntos no muestreados se basa únicamente en la información de un punto, además en los polígonos no puede haber una estimación del error, y la información de los puntos vecinos es ignorada. Cuando este método se utiliza con fines de mapeo los resultados son crudos, para obtener la superficie de interpolación, se tiene que realizar una secuencia adicional (Webster y Oliver, 2007).

### ***Método de triangulación***

En este método, los puntos de muestreo son ligados con sus puntos vecinos por medio de líneas rectas para crear triángulos que no contengan ninguno de los puntos de muestreo. Los valores medidos son considerados como verticales sobre el plano base a una altura proporcional a los valores, con esto, se busca que todo el conjunto de datos forme un poliedro que conste de planos triangulares más o menos inclinados. El objetivo es determinar la altura del plano en  $x_0$  desde los vértices del triángulo por medio de interpolación lineal (Webster y Oliver, 2007).

Lo anterior, puede ser representado como un promedio pesado con los pesos determinados, para ello se denotan las coordenadas de los tres vértices por  $\{x_{11}, x_{12}\}$ ,  $\{x_{21}, x_{22}\}$  y  $\{x_{31}, x_{32}\}$ , mientras que las coordenadas del punto objetivo serán  $\{x_{01}, x_{02}\}$ . La estimación de los pesos se realizará con base en la expresión (2.9):

$$\lambda_1 = \frac{(x_{01} - x_{31})(x_{22} - x_{32}) - (x_{02} - x_{32})(x_{21} - x_{31})}{(x_{11} - x_{31})(x_{22} - x_{32}) - (x_{12} - x_{32})(x_{21} - x_{31})} \quad (2.9)$$

Los valores de los pesos  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ , se obtienen por medio de dos ecuaciones análogas a la ecuación anterior.

Esta técnica se ubica en el grupo de los interpoladores locales, aunque es muy simple, presenta mejores resultados que los polígonos de Thiessen. Por otra parte, este método contiene una serie de desventajas, ya que cada valor a estimar (predicción) depende únicamente de tres datos, además la superficie resultante es continua, pero tiene cambios bruscos de pendiente en los triángulos. Cuando principal finalidad es predecir en lugar de hacer un mapa de isolíneas suaves, entonces las discontinuidades en la derivada son irrelevantes. Otra dificultad es que la malla de triángulos no es única, por tanto, no es obvio que la triangulación definida sea la mejor que cualquier otra; incluso para una malla rectangular hay dos opciones (Webster y Oliver, 2007).

**Método de los vecinos cercanos (NaN)**

Los vecinos cercanos (NaN) es un método que predice el valor de un atributo en un punto no muestreado basado en el valor de la muestra más cercano mediante el dibujo de bisectrices entre los puntos muestreados ( $n$ ), formando polígonos ( $V_i, i=1,2,\dots, n$ ) similares los de Thiessen (o Dirichlet/Voronoi). Esto genera un polígono por muestra y la muestra se localiza en el centro del polígono, de tal forma que en cada polígono todos los puntos están más cerca a su punto de muestreo. La estimación del atributo en un punto no muestreado dentro de un polígono  $V_i$  son el valor medido en el único punto de datos muestreado más cercano  $X$  que es  $V(X)=V(X_i)$ . Los pesos serán:

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in V_i \\ 0 & \text{para los demás} \end{cases} \quad (2.10)$$

A todos los puntos (o lugares) dentro de cada polígono se les asignara el mismo valor. No obstante, la generación de los polígonos en este método se puede realizar por varios algoritmos.

**Método de los vecinos naturales (NN)**

Sibson (1981) combinó las mejores características de los dos métodos anteriores (TIN y NaN) para proponer el método de interpolación de los vecinos naturales. El primer paso es realizar una triangulación de la información por medio del método de Delaunay en el cual los vértices de los triángulos son los puntos de muestreo en las franjas adyacentes de Dirichlet. Esta triangulación es única excepto cuando la información no es una malla rectangular regular. Para determinar el valor de cualquier otro punto,  $x_0$ , se inserta ese punto en el mosaico, y sus vecinos, el conjunto  $T$ , son utilizados para la interpolación. Sibson llamó a ese conjunto como vecinos naturales (Webster y Oliver, 2007).

Para cada vecino la superficie  $A$ , la porción de esta franja de Dirichlet que llego a ser incorporada en la franja del nuevo punto se calcula. Esas áreas, cuando son estandarizadas (suman 1) y se convierten en los pesos (Webster y Oliver, 2007). Lo anterior se puede representar por medio de la siguiente ecuación:

$$\lambda_i = \frac{A_i}{\sum_{k=1}^N A_k} \quad \forall i = 1,2, \dots, N. \quad (2.11)$$

Esto significa que, si un punto  $x_i$  es un vecino natural, por ejemplo,  $x_i$  pertenece a  $T$ , cuando  $A_i$  tiene un valor y el punto tiene un peso positivo. Por otra parte, si  $x_i$  no es un vecino natural, entonces no tiene área en común con el polígono y por tanto su peso  $A_i$  es cero.

Este polígono es continuo y suave, excepto en los puntos de datos donde su derivada es discontinua. Sibson lo llamó interpolador de vecino natural. A él no le gusto el cambio abrupto de la superficie en los puntos de información, por lo que realizó el método mediante el cálculo de los gradientes estadísticos en la superficie a partir de los vecinos naturales. Estos gradientes se combinaron con las mediciones ponderadas para proporcionar la altura del nuevo punto. El resultado es una superficie lisa, la cual puede ser diferenciable una vez. Al igual que la interpolación poliédrica simple, en esta se devuelven los valores reales en los puntos medidos, es decir, entra en la clasificación de los interpoladores exactos (Webster y Oliver, 2007).

***Método de la red de triángulos irregulares (TIN)***

La red de triángulos irregulares (TIN) es un método que fue desarrollado por Peucker y colaboradores en el año de 1978 para la modelación digital de elevación que evita las redundancias de la matriz de altitud en las mallas. En el método TIN, la triangulación resultante cumple el criterio de triángulo de Delaunay, que afirma que la circunferencia circunscrita de cada triángulo de la red no debe contener ningún vértice de otro triángulo. Si se cumple el criterio de Delaunay en todo el TIN, se maximizará el ángulo interior mínimo de todos los triángulos. El resultado es que los triángulos finos y largos se evitan en lo posible. (Webster y Oliver, 2007; Burrough y McDonnell, 1998).

Las aristas de los TIN forman facetas triangulares contiguas, que se pueden utilizar para capturar la posición de entidades lineales que juegan un papel importante en una superficie, como cadenas montañosas o arroyos. A continuación, se presentan unos gráficos en los que se pueden ver los nodos y aristas de un TIN (izquierda) y los nodos, bordes y caras de un TIN (derecha) en la Figura 2.10.

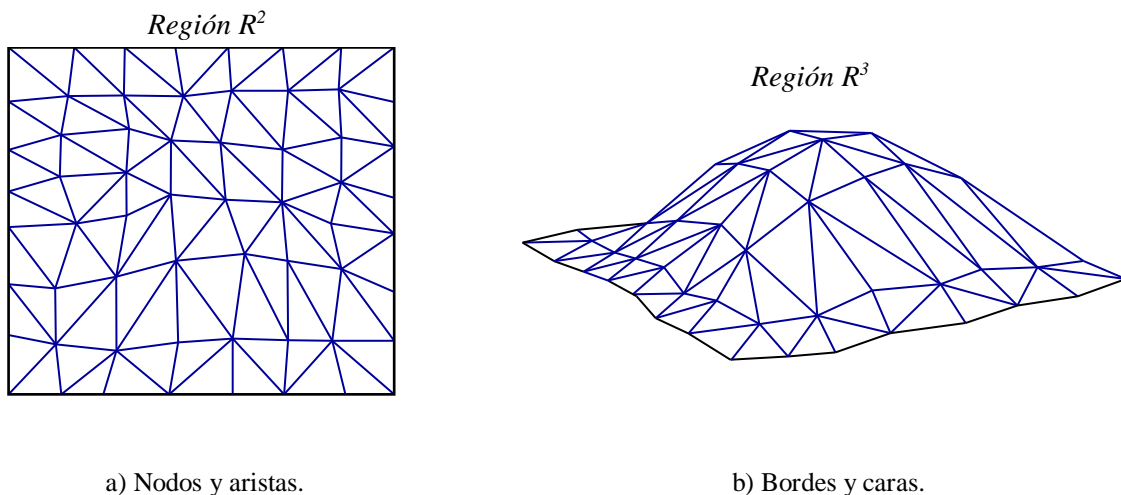


Figura 2.10 Representación de un TIN.

***Método inverso de la distancia (IDW)***

El método del inverso de la distancia o inverso de la distancia pesado (IDW) estima los valores de algún atributo en puntos no muestreados por medio una combinación lineal de los valores de puntos de muestreo ponderados a través de la función inversa de la distancia del punto de interés a dichos puntos de muestreados, como se muestra en la ecuación (2.12). La ecuación exacta de este método interpolador según Burrough y McDonnell (1998) es:

$$\lambda_i = \frac{1/d_i^p}{\sum_{i=1}^n 1/d_i^p} \quad (2.12)$$

donde:  $d_i$  es la distancia entre  $x_0$  y  $x_i$ ,  $p$  es un parámetro de potencia, y  $n$  representa en número de puntos muestreados utilizados para la estimación. El factor que tiene mayor impacto en el método IDW es el valor del parámetro de potencia (Isaaks y Srivastava, 1989).

La elección del parámetro de potencia y el tamaño de la vecindad es arbitrario, por lo general, el valor que se asigna al parámetro  $p$  es 2, del cual resulta otro método denominado método inverso de la distancia al cuadrado. Sin embargo, se recomienda seleccionar el valor de  $p$  con base en los errores de medición. El método IDW, se denomina de “promedio móvil” cuando  $p$  es cero, “de interpolación lineal” cuando  $p$  es 1 y “promedio pesado móvil” cuando  $p$  no es igual a 1 (Burrough y McDonnell, 1998).

Las hipótesis en las que se basa este método son las siguientes: *i*) el valor del atributo en un lugar no muestreado o sin información es un promedio pesado de los valores de puntos de muestreo dentro de una vecindad local que envuelve la zona no muestreada (Robinson y Metternich, 2006) y *ii*) El método IDW asume que los puntos de muestreo más cercanos al punto no muestreado tienen mayor similitud en los valores que los puntos que están más alejados (Li y Heap, 2008).

De igual forma a los anteriores, aunque el IDW es un método sencillo presenta varias desventajas. De acuerdo con Myers (1994), las dos principales restricciones de esto método son: *i*) los pesos dependen únicamente de las distancias entre los puntos de muestreo y en particular del punto que será estimado, esto es, hay un dominio de los pesos por completo de los sitios cercanos cuando el punto a estimar está muy cerca y *ii*) El método IDW no es exacto.



### ***Funciones Spline***

Las funciones spline se componen de polinomios, cada uno de ellos es local y de grado  $p$ . Los polinomios describen tramos de una línea o superficie suavemente unidas, y su  $p-1$  derivadas son continuas. Los lugares donde las secciones se unen son conocidos como nodos, y la selección de estos nodos confiere arbitrariedad en la técnica. Las funciones spline obligadamente pasan por los puntos de datos. Alternativamente, por medio de la elección de nodos alejados de los puntos de datos que pueden ajustarse por mínimos cuadrados o algún otro método para producir splines suavizados. Típicamente las funciones spline son de grado 3, es decir, polinomios cúbicos (Webster y Oliver, 2007).

### ***Superficies de tendencia***

Un método que comenzó a ser popular por los científicos enfocados en la geociencias, especialmente los geólogos petroleros, cuando por primera vez tuvieron acceso a las computadoras fueron las superficies de tendencia. Esto es una forma simple de regresión múltiple en la cual los predictores son las coordenadas espaciales de posición (Webster y Oliver, 2007). Por ejemplo:

$$V^*(x, y) = f(x, y) + \varepsilon \quad (2.13)$$

donde  $V^*(x,y)$  es el valor estimado para  $(x, y)$  y  $f$  denota una función de las coordenadas espaciales. El modelo contiene un término error,  $\varepsilon$ , y en la regresión esto se considera como independiente y con una distribución simétrica con media igual a cero y varianza  $\sigma^2_\varepsilon$ .

Usualmente algunas funciones como los polinomios lineales, cuadrados o cúbicos, son ajustadas por mínimos cuadrados a las coordenadas espaciales, y la ecuación de la regresión resultante se emplea para la predicción. De esta forma, para un plano la ecuación de regresión sería la siguiente:

$$V^*(x, y) = ax + by + c \quad (2.14)$$

Mientras que, para una superficie cuadrática, la expresión es:

$$V^*(x, y) = ax + by + cx^2 + dy^2 + exy + f \quad (2.15)$$

El estimador puede ser expresado como un promedio pesado de la información para obtener la superficie de tendencia como se presenta a continuación. Las coordenadas espaciales y sus potencias se pueden

representar por una matriz  $W$  con  $N$  filas para  $N$  puntos de muestreo, de tantas columnas como coeficientes  $(a, b, c, d, e, f)$  se vayan a estimar. Para una superficie de primer orden podemos escribir las coordenadas espaciales como la siguiente matriz:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_{12} \\ 1 & x_1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

En la matriz  $W$ , la primera columna es una variable de relleno con valor de 1 y los valores medidos de  $V$  en esas posiciones como el vector:

$$V = \begin{bmatrix} V(x_1, y_1) \\ V(x_2, y_1) \\ \vdots \\ V(x_N, y_N) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Los coeficientes  $K (a, b, c, d, e, f)$  se obtiene por medio del siguiente producto matricial:

$$K = (W^T W)^{-1} W^T V \quad (2.18)$$

Las estimaciones están dadas por:

$$V_0^* = x_0 K \quad (2.19)$$

donde  $x_0$  es el vector columna  $[1 \ x_{01} \ x_{02}]$ . Los pesos están dados por la ecuación (2.17). Para una superficie de mayor complejidad la matriz  $W$  simplemente se extiende agregando columnas para las potencias adicionales de  $x, y$ .

Inicialmente las superficies de tendencia eran un método atractivo, pero el entusiasmo se convirtió en decepción. En la mayoría de los casos la variación espacial es tan compleja que es necesario un polinomio de orden muy elevado para describirlo, como se observa en la Figura 2.11, mientras que las ecuaciones matriciales resultantes son generalmente inestables. Los residuos de la tendencia son autocorrelacionados y por tanto se rompe una de las hipótesis de la regresión.

Finalmente, debido a la componente aleatoriedad es grande y se oculta la tendencia determinista, el ajuste de una parte del dominio afecta a las predicciones en cualquier posición. Así, en una región que contiene montañas (valores altos) y planicies (valores bajos), la topografía o variación será determinada por las fluctuaciones mucho mayores de los valores altos. Las superficies de tendencia no son lo suficientemente locales y no devuelven los valores en los puntos con valores extremos (Webster y Oliver, 2007).

Además, Myers (1994) indica que la aplicación de este método en la interpolación para una dimensión es muy simple y por lo general da buenos resultados. Sin embargo, cuando se aplica en la interpolación espacial (3D), la superficie de tendencia provee únicamente información global y no local, esto en parte se debe a que es un interpolador inexacto y suavizado.

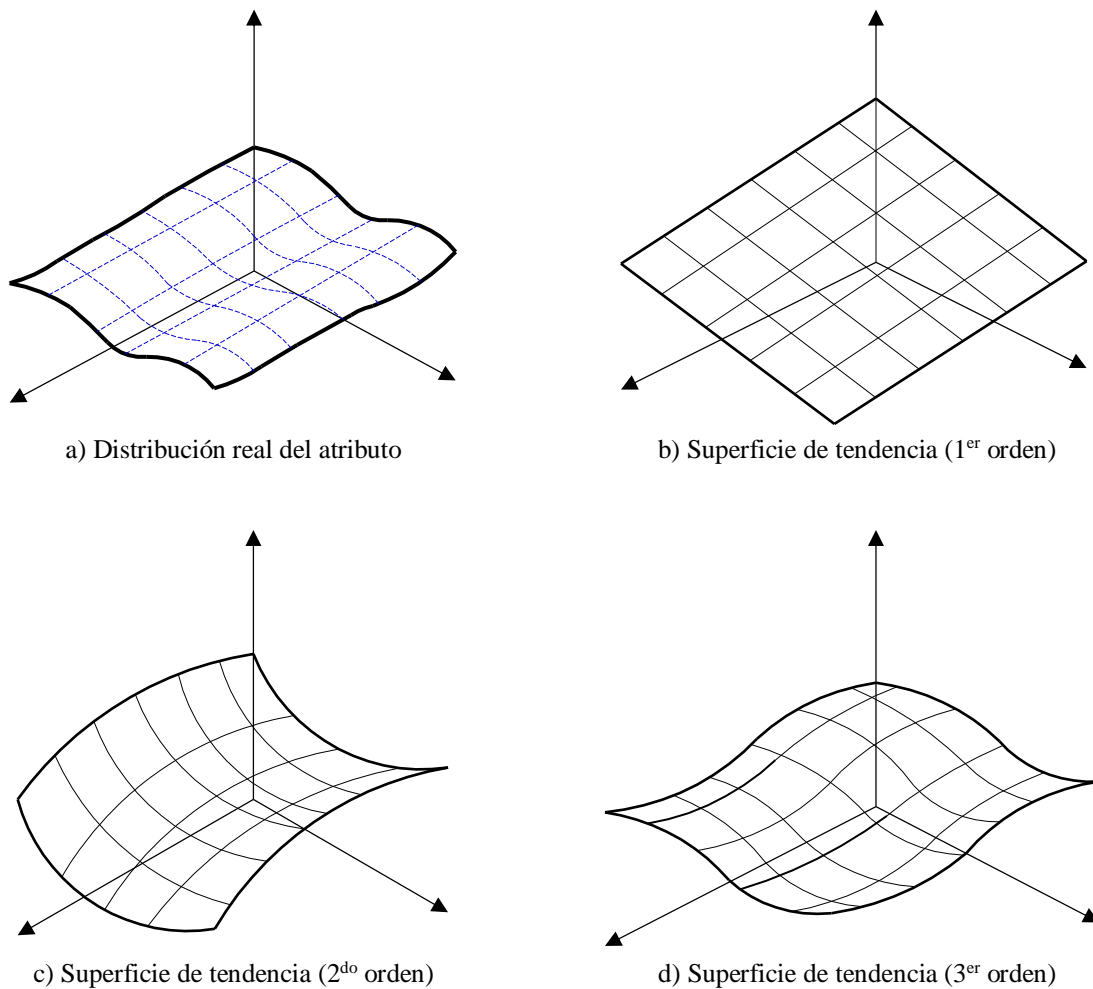


Figura 2.11 Representación gráfica de las superficies de tendencia.

En ocasiones las estimaciones generadas por los métodos de interpolación poligonales, se utilizan en etapas previas al análisis del problema, debido a que presentan un bajo nivel de precisión y confianza, sin embargo, pueden proporcionar el orden de magnitud en la estimación. También pueden utilizarse para comprobar los resultados de un método de estimación más sofisticado como los geostatísticos (Rossi y Deutsch, 2014).

Los métodos anteriores se enfocan únicamente en la geometría o las distancias en el momento de realizar la interpolación, Sin embargo, ignoran el aspecto de mayor relevancia de la interpolación, la continuidad espacial de la variable en estudio (Emery, 2013). Esta deficiencia en la interpolación, conlleva a que estas técnicas sean consideradas como deficientes o poco satisfactorias en el análisis de la variación espacial de las propiedades geotécnicas del subsuelo. Aun y cuando tiene un fundamento matemático bien establecido, omiten, se consideran de carácter simplista, al no considerar la estructura de correlación espacial de las propiedades y la anisotropía (Juárez, 2015).

### **2.5.3 Redes neuronales artificiales (RNA)**

Además de los métodos interpoladores tradicionales, existen herramientas alternativas como las Redes Neuronales Artificiales (RNA) que han sido aplicadas en problemas geotécnicos, las cuales consideran la no linealidad en la variación de las propiedades de los suelos y las relaciones entre los puntos cercanos y distantes (Shahin *et al.*, 2011; Park, 2010).

Algunas de las aplicaciones de las RNA en los problemas de ámbito geotécnico, se orientan hacia: a) modelación constitutiva del suelo, b) variación espacial de propiedades geotécnicas, c) capacidad de carga en pilas, d) estabilidad de taludes, e) licuación de arenas, f) cimentaciones g) geo-sísmica y h) túneles y operaciones subterráneas. A continuación, se presenta los fundamentos básicos de las redes neuronales artificiales.

Las redes neuronales artificiales, son uno de los tres elementos que conforman la inteligencia artificial, surgieron de distintos estudios como un intento por construir modelos matemáticos de unidades de procesamientos elementales anidadas en una estructura cerebral que permitiera el flujo a través de ellas, con una gran similitud al cerebro humano (Haykin, 1999), tomando en cuenta los siguientes elementos:

1. El conocimiento adquirido por la red desde un entorno se da por medio del proceso de aprendizaje.
2. La fuerza de las conexiones interneuronales, se conocen como pesos sinápticos y se utilizan para almacenar el conocimiento adquirido.

Haykin (1999) define a las RNA como un procesador distribuido masivamente en paralelo, constituido de unidades simples de procesamiento, con propensión natural para almacenar el conocimiento adquirido con base en la experiencia, que puede ser utilizado según se disponga.

La RNA, están conformadas por una serie de niveles (capas) o unidades de procesamiento, cada una de ellas a su vez están constituidas por un cierto número de neuronas o nodos, como se observa en la Figura 2.12.

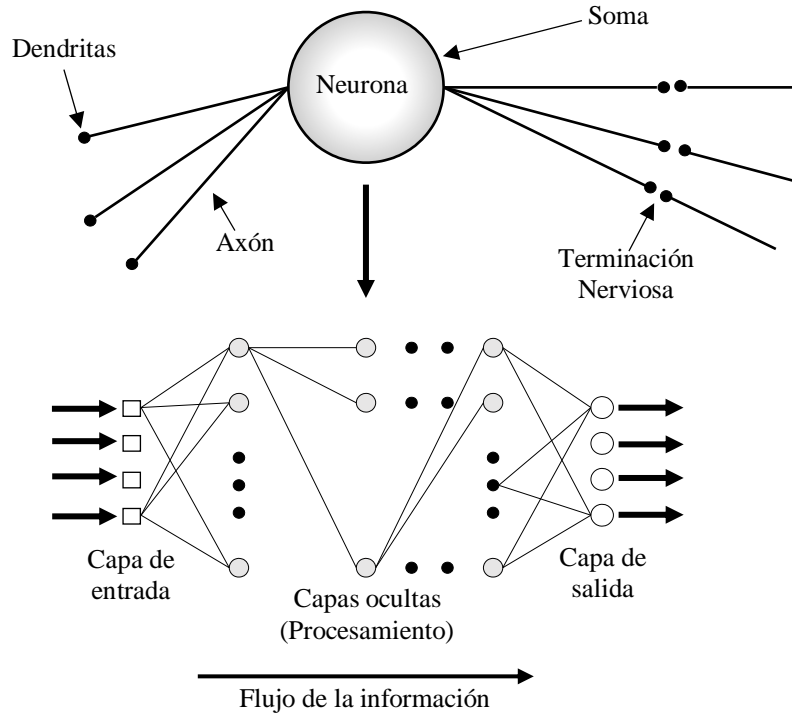


Figura 2.12 Estructura de una RNA (adaptada de García, 2009).

El procesamiento de la información dentro de una RNA es la siguiente, los nodos en la capa de entrada proporcionan los elementos respectivos para el patrón de activación, el cual lo constituyen las señales de entrada a los nodos de la segunda capa (oculta). Posteriormente, las señales de salida de la segunda capa son utilizadas como entradas en la tercera capa y así sucesivamente para el resto de la red. Típicamente, las neuronas que integran cada una de las capas de la red tienen como entradas solo a las señales de salida de la capa anterior. Los conjuntos de señales de salida en la capa final de la red constituyen la respuesta global de la RNA (Shahin *et al.*, 2011).

En resumen, se puede señalar que los tres aspectos básicos de un modelo neuronal artificial son los siguientes:

1. Un conjunto de sinapsis o enlaces de conexión, cada uno caracterizado por un peso.
2. Un sumador que permita realizar la adición de las señales de entrada, ponderando las respectivas sinapsis de las neuronas (combinador lineal).
3. Una función de activación que limite la amplitud de la salida de una neurona. Típicamente, el rango normalizado de la salida de una neurona se puede escribir como el intervalo cerrado  $[0,1]$  o alternativamente como  $[-1,1]$ .

**Descripción matemática**

Una RNA, puede ser descrita matemáticamente mediante la siguiente función:

$$y(k) = f[\varphi(k), w] \tag{2.20}$$

donde:  $y(k)$  es la salida de la red neuronal,  $\varphi(k)$  es el vector de entrada y  $w$  es el vector que contiene los pesos (parámetros)  $w_{ij}$  que optimizan la asignación de entradas-salidas.

Un conjunto de unidades como la que se muestra en la Figura 2.13, integran la unidad de cálculo de la RNA donde las entradas simples  $I_p$  son ponderadas y sumadas, por medio de la función  $net$ , cuya expresión es

$$net_j = \sum_{i=0}^{N_j} I_i w_{ij} \tag{2.21}$$

El resultado obtenido con la ecuación (2.21), se utiliza para calcular la activación de cada unidad, la cual, posteriormente, se transforma en la salida de la unidad por medio de función.

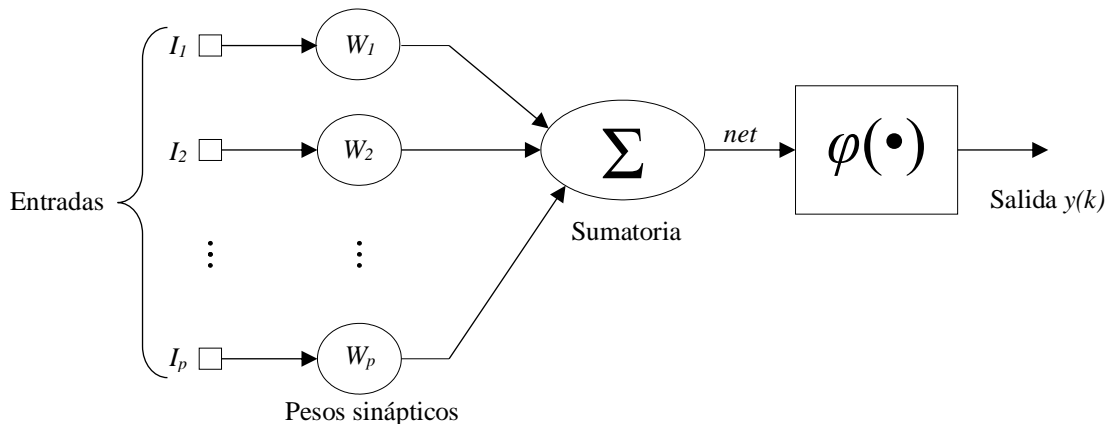


Figura 2.13. Estructura de una unidad de cálculo (Haykin, 1999).

### ***Arquitectura de la RNA***

La arquitectura de una RNA, es la forma en la que se encuentran organizados los nodos (o neuronas) y capas de la estructura neuronal (Haykin, 1999), en términos más estrictos la arquitectura de una RNA se define por medio de los siguientes elementos: *i*) Número de capas, *ii*) Tipo de conexiones y *iii*) Grado de conexión. Las clases o tipos de arquitecturas, son las siguientes:

1. Redes monocapa
2. Redes multicapa
3. Redes recurrentes

El primer tipo de arquitectura (monocapa), es la más simple, únicamente está conformada por la capa de entrada con sus respectivas neuronas que presentan una interconexión directa sobre los nodos contenidos en la capa de salida.

La segunda clase (multicapa), se distingue por la presencia de una o más capas ocultas, dentro de las cuales se encuentran los nodos de cálculo también conocidos como nodos ocultos. El término oculto hace referencia al hecho de que en esta parte de la RNA no se puede ver directamente la entrada o la salida de la red. La principal función de estos nodos es dar un procesamiento a las entradas externas y a las salidas de la red de forma útil. Al incrementar el número de capas ocultas en la red, se habilita a la red neuronal para extraer estadísticas de orden superior a partir de las entradas

En el tercer tipo (recurrente), a diferencia de las de alimentación hacia al frente, presentan un ciclo de retroalimentación. En la capa oculta se emiten señales a la capa de salida y estas a su vez regresan nuevamente a los nodos de la capa de entrada, es decir, se genera un retroalimentación para RNA (Haykin, 1999).

Con base en la anterior, es muy claro que el desempeño computacional de las RNA se basa principalmente en la arquitectura de la RNA, la cual depende generalmente de la determinación de los parámetros de entradas, del número de capas ocultas y de neuronas o nodos en cada una de ellas y de las salidas. Sin embargo, no existe un marco claro para la selección de una arquitectura neuronal óptima, en general, los parámetros de la arquitectura son determinados por medio de prueba y error, de tal forma que el número de neurona en la capa de entrada, el número de capas ocultas y de nodos, en ocasiones o por lo general, se determinan realizando varias corridas del modelo (Park, 2011; Shanin *et al.*, 2011).

### ***Aprendizaje***

El aprendizaje de una red neuronal, es un proceso iterativo de ajuste de pesos sinápticos. Idealmente, una red adquiere mayor conocimiento respecto a su entorno después de cada iteración en el proceso de aprendizaje (Haykin, 1999). La definición del proceso de aprendizaje implica la siguiente secuencia de eventos:

1. La red neuronal es estimulada por un entorno.
2. La red neuronal sufre cambios como resultado de esta estimulación.
3. La red neuronal responde en un nuevo camino al entorno, por los cambios que han ocurrido en su estructura interna.

Sin embargo, es importante entender la diferencia entre algoritmo de aprendizaje y paradigma de aprendizaje. Al conjunto prescrito de reglas bien definidas para la solución de un problema de aprendizaje se les llama algoritmo de aprendizaje. Como es de esperarse, no hay un algoritmo único para el diseño de una RNA. Asimismo, se tiene un “conjunto de herramientas”, representadas por una variedad de algoritmos de aprendizaje, cada uno con sus respectivas ventajas y desventajas. Esta diferencia entre los algoritmos radica en el camino y la formulación del ajuste del peso sináptico (Haykin, 1999). Por otra parte, cuando se toma en cuenta la relación entre la RNA y su entorno durante el aprendizaje, entonces se habla de un paradigma.

En la Figura 2.14, se representa esquemáticamente la taxonomía del proceso de aprendizaje.

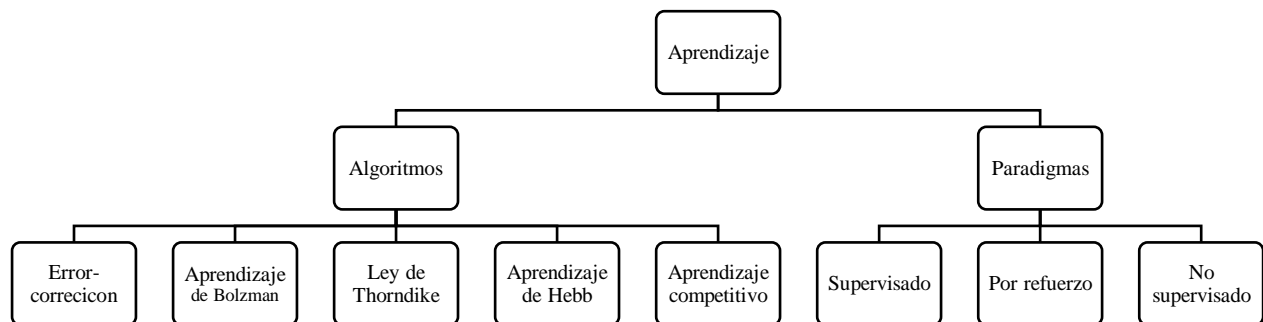


Figura 2.14 Taxonomía del proceso de aprendizaje (modificado de Haykin, 1999).



**Función de activación**

Como se mencionó anteriormente, la función de activación es la que define la salida de la neurona. Las funciones más utilizadas habitualmente, se presentan de forma resumida en la Tabla 2.1. Sin embargo, del conjunto de funciones presentadas, la que se utiliza con mayor frecuencia para la construcción de los modelos neuronales es la función sigmoide, definida como una función estrictamente creciente, que exhibe un balance entre el comportamiento lineal y no lineal (Haykin, 1999).

Tabla 2.1 Funciones de activación.

| Función           | Ecuación  | Rango                   |
|-------------------|---|-------------------------|
| Lineal            | $f(x)=x$  | $[-\infty, +\infty]$    |
| Umbral            | $f(x)=\text{sing}(x)$<br>$f(x)=H(x)$  | $[-1, +1]$<br>$[0, +1]$ |
| Lineal por tramos | $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x, & \text{si } -1 \leq x \leq +1 \\ +1, & \text{si } x > +1 \end{cases}$ | $[-1, +1]$              |
| Sigmoide          | $f(x)=1/(1+e^{-ax})$<br>$f(x)=\text{tanh}(x)$   | $[0, +1]$<br>$[-1, +1]$ |
| Gaussiana         | $f(x)=Ae^{-Bx^2}$   | $[0, +1]$               |
| Senoidal          | $f(x)=A\text{sen}(wx+\phi)$   | $[-1, +1]$              |

En la Figura 2.15, se presentan las gráficas cada una de las funciones de activación.

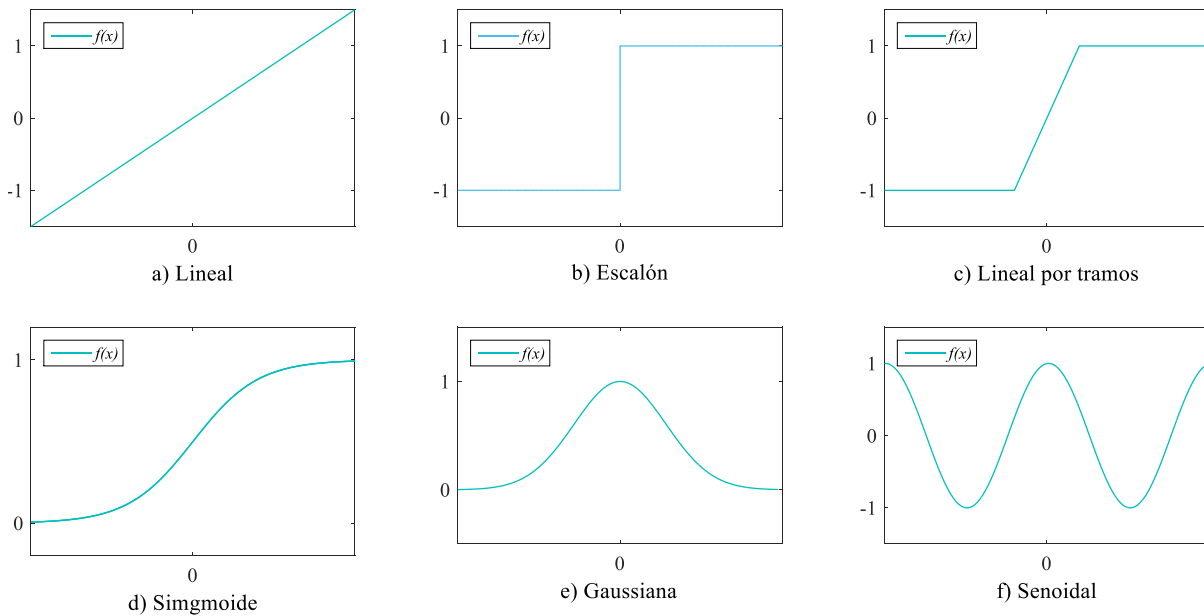


Figura 2.15 Gráfica de las funciones de activación (Fausett, 1994).

### ***Criterio de convergencia de una RNA***

La convergencia de una RNA, depende de varios factores, los principales son tipo de red seleccionada y del tipo de problema a resolver. Por tanto, no existe un criterio único para detener la etapa de entrenamiento de una red, sin embargo, algunos autores como Haykin (1999), Shahin *et al.*, 2008 y Park (2011), recomiendan utilizar los siguientes:

1. Se ha alcanzado una cota de error que se considere suficientemente pequeña.
2. Se establece un número fijo de iteraciones y una vez que se supera este número se detiene el proceso.
3. Se ha llegado a un punto de saturación, en el cual por más que se entrene, ya no es posible reducir el error.

Los resultados de las RNA obtenidos en aplicaciones geotécnicas, indican que este tipo de técnica proporciona resultados aceptables, debido a que consideran la no linealidad en la variación espacial de las propiedades de los suelos. Sin embargo, en ocasiones, el uso de las RNA, presenta los siguientes inconvenientes: *i)* Sobrestimación, esto ocurre, cuando los modelos neuronales son sobrentrenados, es decir, cuando se excede el número de iteraciones en la etapa de entrenamiento, esto genera variaciones muy pronunciadas o erráticas en las zonas de transición y en las fronteras del modelo, *ii)* Subestimación, cuando la RNA es subentrenada, las estimaciones por lo general son demasiado suavizadas y *iii)* No proporcionan información de la incertidumbre asociada a la estimación, por tanto, no se puede cuantificar el error obtenido en la predicción (Shahin *et al.*, 2008; Park, 2011).

Por otra parte, existen otros métodos para determinar la variación de las propiedades del subsuelo, como es el caso de la geoestadística, la cual toma en cuenta la continuidad o dependencia espacial entre las propiedades geotécnicas en puntos cercanos, por medio del concepto de función de autocorrelación y recurriendo al formalismo matemático avanzado de los campos aleatorios (Auvinet, 2002).

Con el uso de la geoestadística, se pretende contribuir a eliminar una parte de la subjetividad que existe actualmente en la interpretación de los resultados de las campañas de reconocimiento. Se trata de una herramienta que complementa, pero no sustituye, los criterios tradicionales de interpolación basados en evidencias geológicas y en particular en la geomorfología y la sedimentología (Auvinet, 2002). Adicionalmente, esta técnica, proporciona información de la incertidumbre asociada a la estimación, la cual es de gran utilidad cuando se busca detectar alguna anomalía en algún punto o zona dentro del sitio de estudio.

# 3

## FUNDAMENTO TEÓRICO DE LA GEOESTADÍSTICA

### 3.1 DEFINICIÓN

Matheron (1969), define la geoestadística como la aplicación del formalismo de las funciones aleatorias al reconocimiento y estimación de fenómenos naturales. Auvinet (2002) la define, en un sentido amplio, como la aplicación de los principios de la teoría de la probabilidad y la estadística a las ciencias de la tierra, para describir en forma más realista las variaciones espaciales de las propiedades del subsuelo en un sitio de interés o dentro de una estructura térrea.

En términos generales, la geoestadística se enfoca en los siguientes dos aspectos: *i*) aspecto aleatorio que representa las variaciones locales del medio, y *ii*) aspecto estructurado que refleja las tendencias a gran escala (Sarma, 2002). En general, la metodología geoestadística está compuesta por tres etapas:

1. El análisis exploratorio de los datos.
2. El análisis estructural (correlación espacial).
3. Las predicciones (estimación o simulación).

Sin embargo, antes de realizar la descripción a detalle de cada una de estas tres etapas, es necesario definir el formalismo de los campos aleatorios (Auvinet, 2002; Díaz, 2002).

### 3.2 CAMPOS ALEATORIOS

En geoestadística se considera que los valores de las variables de interés en diferentes puntos de un medio geológico constituyen una familia de variables aleatorias  $V(X)$  o campo aleatorio, como se observa en la Figura 3.1. Estas variables, son valores numéricos asociados a los resultados de un experimento; en términos formales, una variable aleatoria es una función, de valor generalmente real, cuyo dominio es un espacio muestral (Auvinet, 2002), estas variables se pueden dividir en las siguientes dos categorías:

1. Variables aleatorias discretas, las cuales pueden asociarse con los enteros.
2. Variables continuas o mixtas o también conocidas como continuas o mixtas.

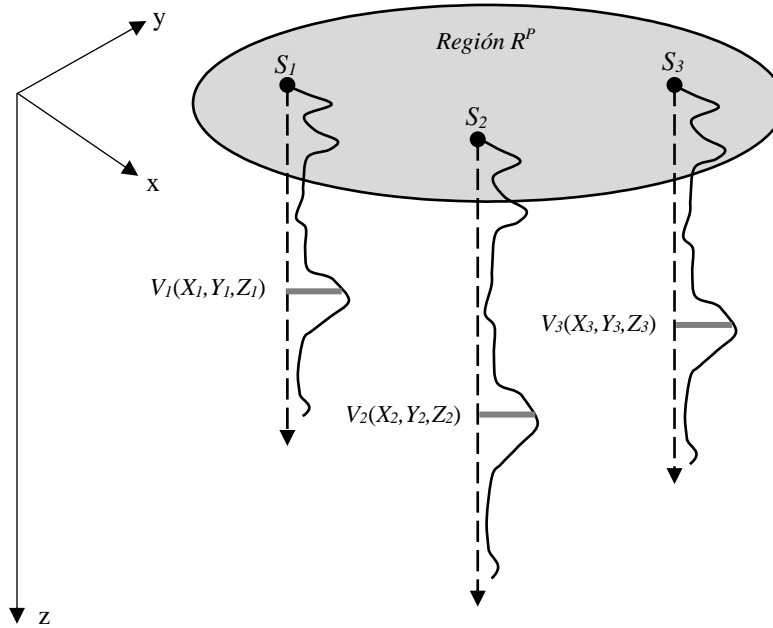


Figura 3.1 Representación esquemática de un campo aleatorio (Medina, 2001).

Un campo aleatorio que sólo es compatible con sus parámetros descriptivos se denomina campo aleatorio no condicional, pero si el campo aleatorio se hace además específico a un conjunto de mediciones que dependen de la posición, este se denomina campo aleatorio condicional. Los campos aleatorios condicionales por tanto permiten simular configuraciones espaciales que pretendan imitar la realidad (Deutsch y Journel, 1992). Para describir un campo aleatorio, se emplean los siguientes parámetros:

- *Valor esperado o esperanza del campo*

$$\mu_v(X) = E\{V(X)\} \tag{3.1}$$

- *Varianza*

$$\sigma_V^2(X) = Var[(X)] \quad (3.2)$$

- *Desviación estándar*

$$\sigma_v(X) = \sqrt{Var[(X)]} \quad (3.3)$$

- *Coefficiente de variación*

$$C_V(X) = \frac{\sigma_V(X)}{E\{V(X)\}} \quad (3.4)$$

- *Función de autocorrelación* (definida en el espacio  $R^P X R^P$ )

Esta función es un momento de segundo orden mixto que puede centrarse induciendo el concepto de función de autocovarianza, y su expresión es la siguiente:

$$R_v(X_1 X_2) = E\{V(X_1)V(X_2)\} \quad (3.5)$$

- *Función de autocovarianza*

La autocovarianza representa el grado de dependencia lineal (parecido) que existe entre los valores de la propiedad de interés en dos puntos diferentes del medio. Se puede escribir bajo la forma de un coeficiente de autocorrelación adimensional, cuyo valor queda siempre comprendido entre -1 y 1.

$$C_V(X_1, X_2) = Cov[V(X_1), V(X_2)] = E\{[V(X_1) - \mu_V(X_1)][V(X_2) - \mu_V(X_2)]\} \quad (3.6)$$

Cuando es posible aceptar la hipótesis de que el valor esperado de la variable de interés es constante en todo el dominio (eventualmente después de haber removido la tendencia) y que la autocovarianza espacial dependa solamente de la distancia entre los puntos  $X_1$  y  $X_2$ , se dice que el campo es estacionario en sentido amplio y se cumple:

$$C_V = (X_2, X_1) = C_V(X_2 - X_1) = C_V(h) \quad (3.7)$$

donde  $h$  es un escalar igual a la distancia entre los puntos  $X_1$  y  $X_2$ .

- Coeficiente de autocorrelación

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{C_V(X_1, X_2)}{\sigma_V(X_1)\sigma_V(X_2)} \quad (3.8)$$

Respecto a la autocovarianza y al coeficiente de autocorrelación, conviene subrayar que sus funciones no son propiedades intrínsecas de los puntos  $X_1$  y  $X_2$ , ya que dependen también de la población, es decir de dominio en el que el campo se encuentra definido.

En el caso multivariable, el coeficiente de correlación entre las variables aleatorias primaria  $V(X)$  y secundaria  $S(X)$ , queda definido como la covarianza de ambas variables  $(V, S)$  dividida entre sus respectivas desviaciones estándar, como se muestra a continuación:

$$\rho(V, S) = \frac{C_V(V, S)}{\sigma_V \sigma_S} \quad (3.9)$$

En los dos casos anteriores, el valor del coeficiente de autocorrelación tiene valor adimensional que varía entre -1 y 1. El valor de  $\rho$  es un indicador del grado de dependencia o de correlación entre ambas variables (Rossi y Deutch, 2014).

- Función de distribución de probabilidad.

$$F_{V_1, \dots, V_n} = (v_1, \dots, v_n; X_1, \dots, X_n) = P[V(X_1) \leq v_1] \quad (3.10)$$

Entre esta función destaca la distribución de primer orden y sus derivadas, las densidades de probabilidad conjuntas. Si estas funciones (y los momentos asociados) son invariantes por traslación en el espacio para cualquier valor de  $n$  y cualquier conjunto de puntos  $X_1, \dots, X_n$ , se dice que es el campo aleatorio es estrictamente estacionario. Asimismo, si en el medio considerado, la esperanza, la varianza y los demás parámetros son constantes, se dice que es estadísticamente homogéneo. En cambio, si la varianza y la esperanza del campo no son constantes se dice que presentan cierta tendencia o deriva (Auvinet, 2002).

### 3.3 ESTACIONARIDAD

La aplicación de la teoría de los campos aleatorios es drásticamente simplificada si la información es estacionaria, esto es, cuando las leyes de probabilidad que gobiernan las series de tiempo o de espacio, son independientes de la ubicación de los puntos de muestreo. La información se dice que es estacionaria en sentido estricto cuando se cumplen los siguientes puntos:

- La media, es constante con la distancia, esto es, que no hay tendencia ni deriva en los datos.
- La varianza es constante con la distancia.
- No hay variaciones estacionales.
- No hay fluctuaciones irregulares.

En la Figura 3.2 se muestran los distintos grados de estacionaridad de una variable aleatoria, en función de las variaciones de dos de sus parámetros, la media (línea discontinua) y la varianza (línea continua). El caso estrictamente estacionario se observa en la Figura 3.2a, donde la media y la desviación estándar permanecen constantes. En la 3.2b, se observa con estacionaridad fuerte, al tener únicamente la media constante, en la Figura 3.2c, se muestra una variable con estacionaridad débil, debido a que la media varía, pero la varianza permanece constante, finalmente, en el la Figura 3.2d, se puede ver, una variable aleatoria no estacionaria, ya que sus dos parámetros varían (Díaz, 2002).

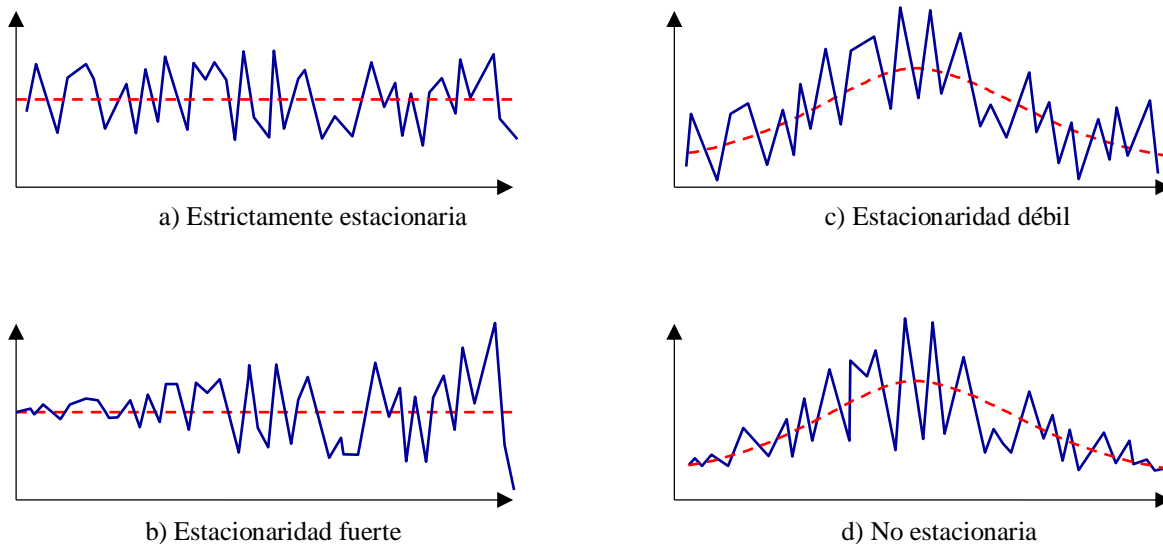


Figura 3.2 Grados de estacionaridad de una variable aleatoria (Díaz, 2002).

### 3.4 TENDENCIA O DERIVA

Cuando la esperanza matemática  $E\{V(X)\}$  no es constante en las coordenadas de posición  $(x, y)$  y en la profundidad  $(z)$ , se dice que el campo aleatorio presenta una tendencia o deriva. En este caso, las varianzas y otros momentos, incluyendo a las funciones de probabilidad pueden presentar variaciones espaciales.

Si la deriva no es apreciable, es posible aceptar las hipótesis de que el campo es estacionario, por lo menos en sentido amplio, donde se dice que el medio es estadísticamente homogéneo. Si la deriva es significativa, conviene separar la parte determinista (variación del funcional de la propiedad) de la parte aleatoria y trabajar con el residuo, es decir, retirar la tendencia del campo experimental (Juárez, 2015).

El cálculo de la tendencia, se realiza mediante el ajuste de un modelo lineal (hiperplano en los casos 1D, 2D y 3D), de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V^*(x) &= ax + b \\ V^*(x, y) &= ax + by + c \\ V^*(x, y, z) &= ax + by + cz + d \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde,  $a, b, c$  y  $d$  son los coeficientes de regresión.

### 3.5 EFECTO DE ESCALA

La estructura de los medios geotécnicos varía en forma considerable dependiendo de la escala a la que se observa. Lo anterior dificulta la definición de las propiedades físicas, mecánicas e hidráulicas requeridas para caracterizar estos materiales. A determinada escala, estas propiedades pueden llegar a presentar un valor relativamente estable cuando el volumen del material es suficientemente grande para que pueda ser considerado como representativo. Sin embargo, la estabilización alcanzada a una escala determinada resulta precaria. Este efecto de escala es un fenómeno, que origina muchas dificultades en mecánica de suelos. Por tanto, escoger una escala adecuada para un modelo geotécnico y alimentarlo con parámetros mecánicos realmente representativos es de hecho una de las partes más delicadas del trabajo del ingeniero especialista en suelos (Auvinet, 2002).

Para apreciar la variabilidad espacial de las masas de suelos, el geotecnista cuenta con una información escasa obtenida en campañas de reconocimiento en la cuales el tiempo disponible y el costo siempre imponen limitaciones drásticas. Surge entonces el riesgo de no detectar ciertos rasgos importantes del dominio en estudio, incluyendo detalles geológicos menores que, frecuentemente, como lo subraya Terzaghi (1955), condicionan el comportamiento de la masa térrea. Además, una exploración limitada



implica el riesgo de un error estadístico, es decir la posibilidad de subestimar o sobrestimar el valor medio y la dispersión de las propiedades del medio debido al insuficiente número de muestras (Auvinet, 2002).

El conocimiento de los parámetros principales del campo aleatorio representativo de las variaciones de las propiedades permite evaluar la esperanza y dispersión de los valores medio de dichas propiedades en áreas o volúmenes contenidos dentro del medio. Así, en un campo estacionario, la esperanza del valor medio  $V_{\Omega}$  de la propiedad de interés en un volumen  $\Omega$  es (Papoulis, 1985):

$$E\{V_{\Omega}\} = E\left\{\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} V(X) dX\right\} = E\{V(X)\} \quad (3.12)$$

por tanto, su varianza será:

$$Var\{V_{\Omega}\} = E\{V_{\Omega}^2\} - E^2\{V_{\Omega}\} \quad (3.13)$$

es decir:

$$Var\{V_{\Omega}\} = \frac{1}{\Omega^2} \left[ E \left\{ \int_{\Omega} V(X) dX \int_{\Omega} V(X) dX \right\} - E \int_{\Omega} \{V(X) dX\}^2 \right] \quad (3.14)$$

Lo cual puede escribirse como:

$$Var\{V_{\Omega}\} = \frac{1}{\Omega^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} E\{V(X_1)V(X_2)\} dX_1 dX_2 - \int_{\Omega} \int_{\Omega} E\{V(X_1)\}E\{V(X_2)\} dX_1 dX_2 \quad (3.15)$$

es decir:

$$Var\{V_{\Omega}\} = \frac{1}{\Omega^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} C_V(X_1, X_2) dX_1 dX_2 \quad (3.16)$$

En la misma forma, se muestra que la covarianza entre valores medios de la propiedad en dos dominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  con o sin traslape es:

$$Cov[V_{\Omega_1}, V_{\Omega_2}] = \frac{1}{\Omega_1 \Omega_2} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} C_V(X_1, X_2) dX_1 dX_2 \quad (3.17)$$

La ecuación 3.15, también puede escribirse como sigue:

$$Var\{V_{\Omega}\} = \frac{Var [V(X)]}{\Omega^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \rho_V(X_1, X_2) dX_1 dX_2 \quad (3.18)$$

Dado que el coeficiente de correlación es inferior o igual en valor absoluto a la unidad, se observa que la varianza del valor medido a una propiedad aleatoria estacionaria en un dominio dado tiende a disminuir cuando las dimensiones de dicho dominio crecen (excepto en el caso trivial cuando la correlación es perfecta). Esta formulación fue utilizada por Auvinet (1986) para estudiar el efecto de escala geométrica en los medios granulares. En la literatura, este fenómeno se conoce también como reducción de varianza (Juárez, 2015).

### 3.6 ANÁLISIS EXPLORATORIO

El análisis exploratorio es la primera etapa del análisis geoestadístico, en la cual se recurre al uso de técnicas estadísticas convencionales que permiten obtener un conjunto de información desconocida *a priori* sobre la muestra bajo estudio, que es imprescindible para realizar correctamente un análisis geoestadístico (Díaz, 2002), además de detectar valores extremos atípicos (*outliers*) (Rossi y Deutsch, 2014).

La presencia de estos valores, puede afectar seriamente los momentos de segundo orden como la varianza y la covarianza. Asimismo, cuando un conjunto de datos (registro de propiedades) contiene *outliers*, pueden reducir una buena correlación existente entre dos variables o bien mejorar una correlación pobre.

### 3.7 ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Este análisis, es uno de los tópicos más importantes de la geoestadística, debido a que se encarga de la caracterización de la estructura espacial de una propiedad o fenómeno regionalizado (campo aleatorio). Se puede decir que el análisis estructural consiste en estimar y modelar una función que refleje la correlación espacial de la o las variables aleatorias a partir de la adopción razonada de la hipótesis más adecuada acerca de la variabilidad. Esto quiere decir que, en la dependencia de las características de estacionariedad del fenómeno se modelará por medio la función de covarianzas o del coeficiente de autocorrelación (Díaz, 2002).

Auvinet (2002) define al análisis estructural como la estimación de los parámetros del campo a partir de los datos disponibles. Los parámetros descriptivos de un campo aleatorio, que se definieron anteriormente, pueden ser estimados a partir de los resultados discretos (muestras aisladas) o continuos (sondeos) de las campañas de reconocimiento. En el caso de sondeos continuos, aceptando que el campo es estadísticamente homogéneo y ergódico (es decir, que sus parámetros pueden ser estimados a partir de una sola realización del mismo) el valor esperado o esperanza matemática puede ser evaluado utilizando la aproximación:

$$\mu_V = \mu^*(X) \cong \frac{1}{L} \int_0^L V(x) dx \quad (3.19)$$

donde  $L$  es la longitud del sondeo.

En la misma forma, es posible estimar la autocovarianza a lo largo de la dirección como:

$$C_V(h\mathbf{u}) \cong \frac{1}{L} \int_0^L V(X)V(x + h\mathbf{u})dx - \mu^{*2} \quad (3.20)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector unitario en la dirección en la que se evalúa la covarianza y  $h$  es un escalar. La estimación de la autocovarianza mediante esta expresión presenta un ligero sesgo, como puede verificarse evaluando la esperanza del segundo miembro.

El estimador estadístico para todo medio es:

$$\begin{aligned} C_V(X_1X_2) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [V(X_1) - \mu_V(X_1)][V(X_2) - \mu_V(X_2)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V(X_1)V(X_2) - \mu_V(X_1)\mu_V(X_2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde  $N$  es el número de pares

Por otra parte, si se introduce la variable indicadora:

$$I_V(v, X) = \begin{cases} 1 & \text{si } V(X) \leq v \\ 0 & \text{si } V(X) > v \end{cases} \quad (3.22)$$

La función de probabilidad de primer orden del campo puede ser estimada a partir de registros continuos con base en la relación:

$$F_V(v, X) = P[V(X) \leq v] \cong \frac{1}{L} \int_0^L I_V(v, X) dx \quad (3.23)$$

En el caso de las muestras aisladas, las estimaciones se realizan usando expresiones discretas análogas a las expresiones anteriores.

Definidos los parámetros del campo aleatorio, es posible estimar la propiedad de interés en puntos donde ésta no ha sido medida, recurriendo a estimadores insesgados de mínima varianza.

**Correlograma experimental**

La estructura espacial de un campo aleatorio, como se mencionó anteriormente, se puede describir por medio de funciones de autocovarianza. Una función de autocorrelación llamada correlograma también se puede utilizar para los mismos propósitos. El correlograma describe la dependencia por medio de un coeficiente de correlación lineal, formalmente denominado como *coeficiente de correlación lineal de Pearson*. En aplicaciones mineras, por lo general se utiliza con frecuencia el concepto de variograma, es decir, la varianza del campo incremental (Auvinet, 2002; Juárez, 2015).

Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones ingenieriles, el uso del concepto de variograma no presenta realmente ventajas por lo que se usa comúnmente la función de covarianza (Auvinet, 2002). De hecho, algunos de los programas más comunes de geoestadística transforman sistemáticamente los variogramas en funciones de autocovarianza para dar mayor estabilidad a los algoritmos numéricos empleados (Deutch y Journel, 1992).

El correlograma experimental, se obtiene al normalizar la función de autocovarianza (ec. 3.7) y expresarla por medio del coeficiente de correlación (ec. 3.8). Para ello, se estima el valor de  $\rho(h)$  para cada valor de  $C(h)$ , con los valores obtenidos se construye una gráfica de una curva donde se relacionan los valores de  $\rho(h)$  y  $h$  (Juárez, 2015), la cual se puede observar en la Figura 3.3.

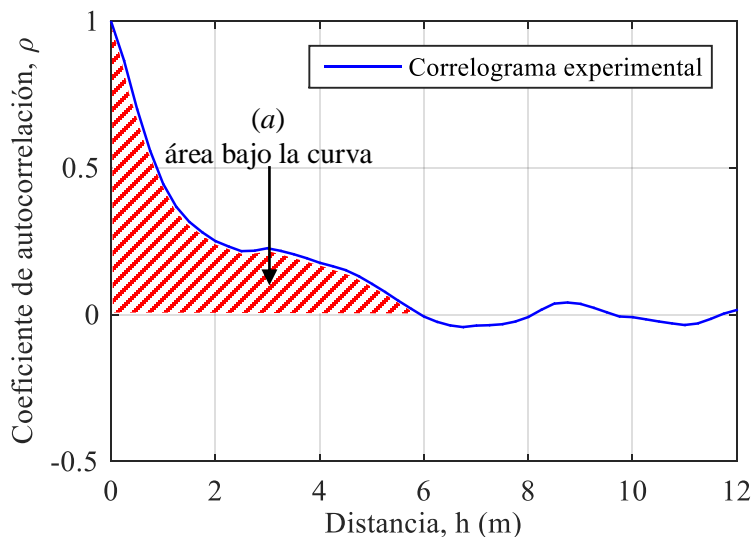


Figura 3.3 Correlograma experimental vertical de contenido de agua

Para cada sondeo vertical se puede obtener su función de autocorrelación estandarizada (correlación vertical), es decir, para los  $n$  sondeos ubicados en un sitio se puede obtener las  $n$  funciones que describan

la dependencia vertical existente, entre los datos de un sondeo. La dependencia espacial vertical, respecto a la profundidad, entre los valores de un sondeo medida en términos del coeficiente de correlación  $\rho_V$  cuando  $\Delta h_{ver}=0$  es  $\rho_V(0)=1$ , ya que la correlación de los valores del sondeo al compararse consigo mismo es perfecta (el perfil de un parámetro es igual a sí mismo). Asimismo, el valor de  $\rho_V$ , tiende a disminuir conforme aumenta la magnitud de  $\Delta h$ , de un mismo perfil (Medina, 2001).

**Correlograma experimental cruzado**

En el análisis geoestadístico multivariable, es necesario incluir modelos de correlación que permitan evaluar la relación que guardan dos propiedades (primaria y secundaria) distintas entre sí, por medio del coeficiente de autocorrelación, a lo cual se le denomina correlación cruzada (Wackernagel, 2003; Díaz, 2002).

Para la estimación de los modelos de correlación cruzada verticales, se comparan entre si los dos perfiles con información de las dos propiedades que coexisten en el mismo punto, aumentando la magnitud de  $\Delta h$ . Mientras que, para la estimación del modelo de correlación horizontal cruzado, se comparan los perfiles de las propiedades primarias con todo el conjunto de sondeos de la variable secundaria, conservando  $\delta_{ver}=0$

A diferencia de los correlogramas experimentales obtenidos en el análisis geoestadístico univariable, en el caso multivariable, se espera que los modelos de correlación cruzados, tanto en la dirección vertical como en la horizontal, el valor del coeficiente de autocorrelación sea menor que uno, cuando  $h=0$ , debido a que no existe una correlación perfecta en dos propiedades geotécnicas diferentes, como se observa en la Figura 3.4.

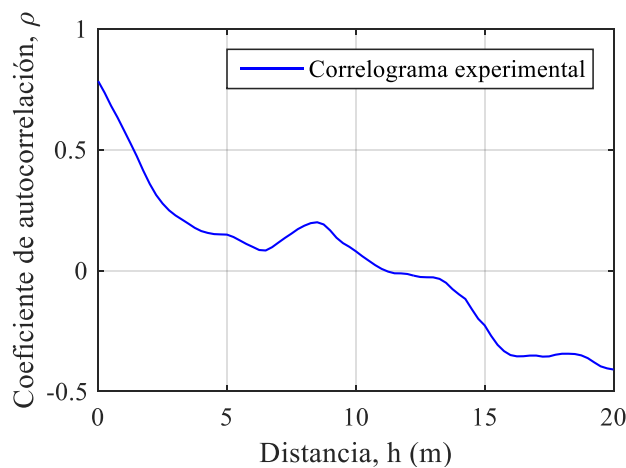


Figura 3.4 Correlograma experimental vertical cruzado de  $V_s$  y  $q_c$ .

**Correlograma exponencial**

Después de obtener los correlogramas experimentales, se busca ajustar la información de la propiedad a una función matemática que incluya las correspondientes distancias de correlación, a dicha función de ajuste se le denomina correlograma teórico o exponencial, dependiendo del tipo de modelo que se utilice.

Para estimar la correlación espacial de forma cuantitativa se introduce el término de distancia de correlación (también conocida como alcance, influencia o rango), que es la distancia a partir de la cual las variables aleatorias regionalizadas  $V(X_1)$  y  $V(X_2)$  son independientes para cualquier  $X \in \Omega \in R^p$ , de aquí que se interprete como zona de influencia (Juárez, 2015). Esta distancia ( $\delta=2a$ ), se determina a partir del correlograma experimental, definiéndose como dos veces el área bajo la curva hasta la intersección con el eje horizontal. El valor de esta área, se puede obtener por medio de la siguiente expresión:

$$a = \int_0^{\lambda_c} \rho(\lambda u) d\lambda \tag{3.24}$$

donde  $\lambda_c$  es el valor crítico de  $\lambda$  y donde  $\rho$  se anula por primera vez.

Existen distintos modelos de autocorrelación, las cuales se muestran en la Tabla 3.1. Sin embargo, en el estudio de la variación espacial de propiedades, las funciones más utilizadas son: la exponencial simple, exponencial cuadrada y la esférica (Dasaka, 2005; Jaksa *et al.*, 1999). En este trabajo, se utilizó la función exponencial del tipo simple, ya que como lo indican Auvinet (2002) y Juárez (2015), es la función que mejor se ajusta a los correlogramas experimentales de las propiedades geotécnicas del subsuelo.

Tabla 3.1. Funciones teóricas de autocorrelación (VanMarcke, 1983; Jaksa *et al.*, 1999).

| Nombre del modelo      | Función de autocorrelación  | Distancia de autocorrelación, $\rho$ | Rango de fluctuación, $\delta$ |
|------------------------|---|--------------------------------------|--------------------------------|
| Triangular             | $\rho_x = \begin{cases} 1 - \frac{ \Delta x }{a} & \text{para }  \Delta x  \leq a \\ 0 & \text{para }  \Delta x  > a \end{cases}$ | $a$                                  | $a$                            |
| Exponencial simple     | $\rho_x = \exp\left(-\frac{ \Delta x }{b}\right)$   | $b$                                  | $2b$                           |
| Exponencial doble      | $\rho_x = \exp\left(-\left(\frac{ \Delta x }{c}\right)^2\right)$  | $c$                                  | $\sqrt{\pi}c$                  |
| Markov de 2° orden     | $\rho_x = \exp\left(-\frac{ \Delta x }{d}\right)\left(1 + \frac{ \Delta x }{d}\right)$  | $d$                                  | $4d$                           |
| Exponencial cosenoidal | $\rho_x = \exp\left(-\frac{ \Delta x }{e}\right)\cos\left(\frac{\Delta x}{e}\right)$  | $e$                                  | $e$                            |

A partir de los modelos de variación aleatoria en la dirección vertical y horizontal, se puede obtener el grado de dependencia lineal entre dos puntos, es decir, la integración de ambos modelos en uno solo, para lograr la descripción de la variable en el espacio. Esto es posible para dos puntos cualesquiera en el dominio de análisis, ya que se puede obtener la correlación entre ambos en función de las distancias Euclidianas, es decir:

$$\rho(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \rho\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\right) \quad (3.25)$$

La expresión anterior implica que la función de autocorrelación es invariante a la transformación ortonormal de las coordenadas del campo. Sin embargo, en ocasiones la estructura de autocorrelación puede ser parcialmente isotrópica, por ejemplo, respecto a las direcciones horizontales del campo, por tanto, la ecuación (3.25), quedaría de la siguiente forma:

$$\rho(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \rho\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \Delta z\right) \quad (3.26)$$

Un modelo de variación espacial tridimensional, considerando la anisotropía en las tres direcciones en el espacio, se obtiene al utilizar la ecuación (3.25) y el modelo exponencial simple, representado por medio de la siguiente expresión:

$$\rho(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \exp\left(-\frac{|\Delta x|}{\delta_x} - \frac{|\Delta y|}{\delta_y} - \frac{|\Delta z|}{\delta_z}\right) \quad (3.27)$$

donde  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  y  $\delta_z$ , son las distancias de autocorrelación teóricas obtenidas en el análisis estructural.

Asimismo, cuando solo se toma en cuenta la anisotropía parcial en las direcciones horizontales ( $x, y$ ) del campo, el modelo de autocorrelación tridimensional queda representado por la siguiente ecuación:

$$\rho(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \exp\left(-\sqrt{\left(\frac{\Delta h}{\delta_h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\delta_z}\right)^2}\right) \quad (3.28)$$

donde  $\delta_h$  y  $\delta_z$ , son las distancias de correlación horizontal y vertical:  $\Delta h = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$  y  $\Delta z = |z_i - z_j|$  son las componentes horizontales y verticales de la distancia entre dos puntos  $i$  y  $j$ .

### 3.8 ESTIMACIÓN UNIVARIABLE

A partir de un conjunto de datos (puntos de medición) es posible realizar predicciones, utilizando alguna de las siguientes técnicas (Juárez, 2015):

- **Estimación:** consiste en obtener el valor esperado de una variable en un punto sin medición.
- **Simulación:** consiste en obtener el valor posible de una variable en un punto sin medición.

#### **Estimación**

La estimación, constituye uno de los objetivos más importantes de la geoestadística, y consiste en obtener, de la manera más precisa posible, un valor que no ha sido medido, a partir de los datos disponibles. Uno de los aspectos más importantes de la estimación, es la cuantificación de la incertidumbre en los valores de un campo aleatorio y la probabilidad de que estos valores superen o queden debajo de ciertos límites (Auvinet, 2002; Emery, 2013).

Una técnica que permite alcanzar el objetivo de la estimación condicional lineal sin sesgo, conocida también como filtro de Wiener o *Kriging*. (Deutch y Journel, 1992). El *Kriging* es un término que ha sido acuñado para designar al mejor estimador lineal insesgado, (BLUE, por sus siglas en inglés) de un punto y por bloque (Burrough y McDonnell, 1998). El término “mejor”, se debe que los factores de ponderación se determinan de tal forma que la varianza de estimación sea mínima, “lineal”, porque es una combinación ponderada de los datos y “sin sesgo”, porque el error de estimación tendrá una esperanza con valor igual o cercano a cero (Juárez, 2015).

Este método, pertenece a la categoría de los métodos estocásticos, ya que supone que las mediciones experimentales, constituyen una sola realización de un proceso aleatorio (o estocástico). En efecto, algunas de las ventajas del empleo de los métodos geoestadísticos, no reside únicamente en las estimaciones puntuales o de bloque, sino a que proporcionan información de la incertidumbre asociada a dichas estimaciones (Rota, 2007). Enseguida, se presenta una descripción general de algunas variantes del método de *Kriging*.

#### ***Kriging Simple (KS)***

La técnica del *Kriging Simple*, asume la hipótesis de los valores de la media y la varianza son conocidos en el campo aleatorio. Es decir, supone que se hacen mediciones de una variable de interés  $V(X)$  en los puntos  $X_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, N$ ), esto es, que se tienen realizaciones de las variables  $V(X_1), \dots, V(X_n)$  y se quiere predecir o estimar  $V^*(X)$ , en el punto  $X$  donde no se realizó medición o no se tiene información (Wackernagel, 2003).



Considerando lo anterior, el problema gira en torno a la construcción de un promedio pesado para realizar la estimación de algún valor en un punto de interés  $X$  por medio de la información de los puntos de muestreo  $X_i=1, \dots, N$ , como se observa en la Figura 3.5.

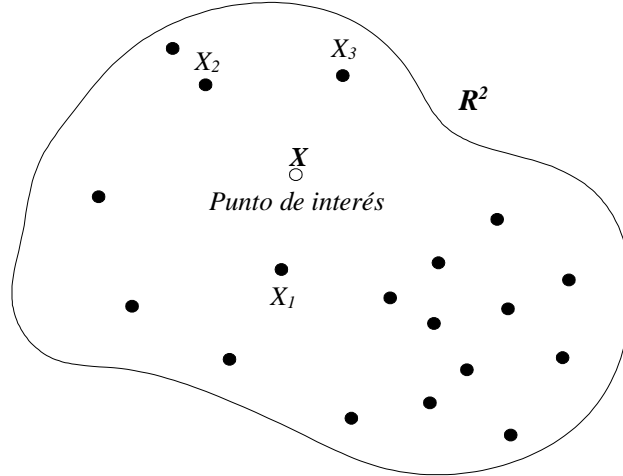


Figura 3.5 Puntos de muestreo y puntos de estimación en la región  $R^2$  (Wackernagel, 2003).

En esta situación, este método propone que el valor de la variable en estudio pueda predecirse como una combinación lineal de  $n$  variables aleatorias por medio de la siguiente expresión:

$$V^*(X) = a + \sum_{i=1}^n \lambda_i V(X_i) \quad (3.29)$$

Para la estimación del coeficiente  $a$  y de los pesos  $\lambda_i$  se examinan las condiciones de ausencia de sesgo y de mínima varianza, como se describe a continuación:

**Condición de ausencia de sesgo.**

El valor esperado del error de estimación es:

$$E\{V^*(X) - V(X)\} = a + \sum_{i=1}^n \lambda_i E\{V(X_i)\} - E\{V(X)\} = a + \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_v - \mu_v \quad (3.30)$$

Para garantizar que el valor esperado sea nulo se debe plantear lo siguiente:

$$a = \left[ 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \right] \mu_v \quad (3.31)$$

Este sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  ponderaciones desconocidas, es el sistema del *Kriging Simple*, que en notación matricial se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} C(X_1 - X_1) & \cdots & C(X_1 - X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(X_n - X_1) & \cdots & C(X_n - X_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C(X_1 - X) \\ \vdots \\ C(X_n - X) \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

O bien, puede escribirse también en términos del coeficiente de autocorrelación:

$$\begin{bmatrix} \rho(X_1 - X_1) & \cdots & \rho(X_1 - X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(X_n - X_1) & \cdots & \rho(X_n - X_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho(X_1 - X) \\ \vdots \\ \rho(X_n - X) \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Por tanto, el estimador queda expresado por medio de la siguiente ecuación:

$$V^*(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i V(X_i) + \left[ 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \right] \mu_v \quad (3.34)$$

La media aparece con un ponderador que representa el complemento de la ponderación acumulada de los datos. Lo anterior significa que, entre más lejos se encuentre de los datos a estimar  $X$ , más bajos serán sus ponderadores y mayor será la ponderación en la media, en cierta forma la media compensa la falta de datos.

El *Kriging Simple* es rigurosamente equivalente a la técnica de estimación condicional en un campo Gaussiano (Auvinet, 2002). Por otra parte, el KS asume estacionaridad de segundo orden, esto es una media, varianza y covarianza constante a lo largo de todo su dominio o región de interés (Webster y Oliver, 2001). Sin embargo, dado que dicha hipótesis es con frecuencia demasiado restrictiva, se recurre al uso del *Kriging Ordinario* (Burrough y McDonnell, 1998).

### ***Kriging Ordinario (KO)***

Este método es una variante del *Kriging Simple*, aunque se puede aplicar a casos más generales. Uno de los requerimientos para aplicar este método es la estacionaridad de segundo orden en la información (es decir, se considera la expectativa de que los valores de la media y la desviación estándar sean aproximadamente constantes en todo el dominio). En el *Kriging Ordinario* se considera que el valor de la media  $\mu_v$  del campo aleatoria es desconocida, por tanto, bajo esta consideración, el insesgo en el KO debe ser garantizado, para lo cual, la suma de los pesos  $\lambda_i$  necesariamente tiene que ser igual a 1.

Lo anterior permite generalizar al KO en situaciones donde esta medida no es constante en el espacio: la media puede variar de una región a otra, siempre que sea aproximadamente constante en cada vecindad. Por tanto, únicamente se conoce la función de covarianza  $C(h)$  o el variograma  $\gamma(h)$  y que la media sea desconocida. (Krige, 1962; Matheron, 1965; Vanmarcke, 1983; Deutsch, 1992; Auvinet, 2002).

Tomando en cuenta lo anterior y partiendo la ecuación (3.34) es posible encontrar un estimador lineal sin sesgo y de mínima varianza que no requiera el conocimiento de la media, imponiendo la siguiente condición:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (3.35)$$

Dado que  $\mu$ , es desconocida, para que el valor esperado sea nulo se debe considerar  $a=0$ . Por tanto, el estimador del *Kriging Ordinario*, es el siguiente:

$$V^*(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i V(X_i) \quad (3.36)$$

Expresando la varianza del error de estimación en función de la covarianza:

$$Var[V^*(X) - V(X)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C(X - X_i) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C(X - X_i) + C(0) \quad (3.37)$$

El sistema de ecuaciones del KO es el siguiente:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i C(X - X_i) + v = C(X - X_i), i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{cases} \quad (3.38)$$

En notación matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} C(X_1 - X_1) & \cdots & C(X_1 - X_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C(X_n - X_1) & \cdots & C(X_n - X_n) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(X_1 - X) \\ \vdots \\ C(X_n - X) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Normalizando las covarianzas, el sistema se puede representar de la siguiente forma en términos del coeficiente de autocorrelación:

$$\begin{bmatrix} \rho(X_1 - X_1) & \cdots & \rho(X_1 - X_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho(X_n - X_1) & \cdots & \rho(X_n - X_n) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(X_1 - X) \\ \vdots \\ \rho(X_n - X) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

El estimador proporcionado por el *Kriging Ordinario* se considera más robusto que el del simple. Al no requerir conocimiento de la esperanza del campo, puede adaptarse mejor a variaciones locales. Sin embargo, el hecho de que el método no requiera el conocimiento de la esperanza solamente constituye una ventaja mínima ya que este parámetro se conoce mejor que la función de autocovarianza (Auvinet, 2002).

El valor de la varianza del error minimizado asociado a la estimación ( $\sigma_{EK}^2(X)$ ), también conocida como varianza de estimación, se obtiene por medio de la siguiente expresión:

$$\sigma_{EK}^2(X) = Var[V(X)] + \mu - \sum_{i=1}^n \lambda_i C(X_n - X_i) \quad (3.41)$$

donde  $Var[V(X)]$  es la varianza de campo,  $\mu$  es el multiplicador de Lagrange.

Auvinet (2002) y Juárez (2015), indican que se puede demostrar que el valor de esta varianza siempre será menor o igual a  $Var[V(X)]$ .

### ***Kriging Universal***

El *Kriging* con tendencia, normalmente conocido como *Kriging Universal* (KU), el cual fue propuesto por Matheron (1969). Es una extensión del *Kriging Ordinario*, sin embargo, la diferencia radica en que el KU incorpora una tendencia local dentro de la vecindad de búsqueda como una función que varía suavemente en el dominio de estudio. El KU estima los componentes de tendencia dentro de cada vecindad de búsqueda y después aplica el *Kriging Simple* sobre los correspondientes residuos (Burrough y McDonnell, 1998).

### ***Kriging Residual***

Esta variante de la técnica de *Kriging* parte de las siguientes circunstancias: i) La variable aleatoria  $V(X)$  es estacionaria o al menos cumple con la hipótesis intrínseca, pero en ocasiones  $V(X)$  no cumple con esta condición, y se caracteriza por exhibir tendencia. A diferencia del *Kriging Universal*, en este caso se conoce

el orden de la tendencia, o bien se puede estimar mediante el método de mínimos cuadrados o por medio de una regresión lineal, a partir de esta, se obtienen los residuos y posteriormente se aplica el *Kriging Ordinario* (Wackernagel, 2003).

Los métodos de estimación descritos anteriormente como el *Kriging Simple, Ordinario, Universal* y *Residual*, en términos geoestadístico estrictos, no son modelos multivariados. A pesar de que utilizan un modelo de función aleatoria que comprende un número infinito de variables aleatorias, las cuales son utilizadas únicamente para la modelación de un solo atributo (Olea, 1999), en términos geotécnicos una sola propiedad. Sin embargo, hay casos donde se requiere modelar más de un atributo dentro de un campo de estudio, y en esos escenarios cuando se recurre al uso de la geoestadística multivariada.

### **Simulación**

La simulación es el proceso por medio del cual se genera una posible configuración de un campo aleatorio compatible con sus parámetros descriptivos (simulación incondicional) o con estos parámetros y, además, con los datos disponibles (simulación condicional). Se puede generar así una serie de realizaciones o imágenes que permiten apreciar, en particular, valores externos potencialmente problemáticos (Juárez, 2015).

La forma más sencilla de simular un campo aleatorio consiste en considerar que el mismo punto está representado por  $n$  puntos de abscisas  $X_1, X_2, \dots, X_n$  donde, para cada punto, se deben obtener realizaciones del grupo de variables aleatorias abscisas  $V(X_1), V(X_2), \dots, V(X_n)$ , con la estructura correcta del campo en cuanto a esperanza y matriz de covarianza. La simulación se realiza generalmente sobre una malla de puntos en dominio de interés y se reduce, por tanto, al generar cierto número de variables aleatorias conjuntamente distribuidas. Los dos tipos de simulación que se realizan son los siguientes:

- a) Simulación incondicional. Este tipo de simulación requiere inicialmente la generación de una secuencia de valores de variables aleatorias estándares independientes distribuidos normalmente (con media cero y varianza unitaria), obtenidas a partir de dos variables aleatorias distribuidas uniformemente entre 0 y 1.
- b) Simulación condicional. Se considera la hipótesis en la cual el campo aleatorio  $V(X)$  ha sido medido en los puntos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  y que esta simulado en los puntos  $X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_{p+n}$ . Por tanto, se desea generar realizaciones de  $V(X)$  que igualen de manera exacta los datos en  $p$  puntos y que sean aleatorios en los  $n-p$  restantes.

En la simulación condicional de un campo aleatorio se usan las esperanzas, varianzas y covarianzas condicionales sobre los datos disponibles. Se pueden generar varios puntos al mismo tiempo o generar uno a la vez e incorporar el punto generado a los datos. Según Shinozuka (1996) esta última forma es la más eficiente. De esta forma, los valores simulados se incorporan entre los datos disponibles y a partir de estos es posible generar nuevos puntos.

Por otra parte, existen algunas diferencias entre las técnicas de predicción. Según Rossi y Deutsch (2014), la principal diferencia radica, en que la simulación intenta reproducir las propiedades estadísticas y espaciales de la función aleatoria  $V(X)$ , mientras que, en la estimación, busca que el valor estimado  $V^*(X)$  en el punto  $X$  sea lo más parecido posible al valor real desconocido  $V(X)$ , como se muestra En la Figura 3.6.



Figura 3.6. Comparación entre modelos de estimación y simulación (Rossi y Deutsch, 2014).

En la Tabla 3.2, se muestran las técnicas de estimación y simulación, que se utilizan con mayor frecuencia en la etapa de predicción del análisis geoestadístico (Juárez, 2015).

Tabla 3.2 Técnicas de predicción (Juárez, 2015).

| <b>Estimación</b>        | <b>Simulación</b>    |
|--------------------------|----------------------|
| Probabilidad condicional | Matricial (LU)       |
| <i>Kriging Simple</i>    | Espectral            |
| <i>Kriging Ordinario</i> | Bandas Rotantes      |
| <i>Kriging Universal</i> | Secuencial Gaussiano |
| <i>Kriging Indicador</i> | Secuencial Indicador |
| <i>Cokriging*</i>        | Gaussiano Truncado   |
| Validación Cruzada       | Recocido simulado    |

De las técnicas de predicción incluidas en la tabla anterior, el *Cokriging*, pertenece a los modelos de estimación multivariable, que se presentan en el siguiente apartado.

### 3.9 ESTIMACIÓN MULTIVARIABLE

Los métodos de estimación multivariados permiten analizar dos o más atributos dentro de un mismo campo. En geoestadística dos o más variables aleatorias definidas en un dominio de estudio se denominan variables corregeonalizadas (Olea, 1999), es decir, las variables coexisten en el mismo espacio físico y delimitado (Wackernagel, 2003).

La estimación conjunta de variables aleatorias, comúnmente se conoce como *Cokriging* (*Kriging* en conjunto), y es análogo al *Kriging*. Sin embargo, a diferencia de los métodos univariados, donde sólo se utiliza la correlación espacial de una sola variable para determinar los coeficientes en el estimador lineal, en el *Cokriging* se recurre al uso la correlación espacial de cada una de las variables (primaria y secundaria) y a la correlación espacial cruzada al mismo tiempo. El término *Cokriging* está reservado para una regresión lineal que además utiliza datos definidos por diferentes propiedades (Auvinet, 2002; Juárez, 2015).

En algunos casos y bajo ciertas condiciones, el análisis geoestadístico multivariado presenta algunas ventajas respecto al análisis geoestadístico univariable (Wackernagel, 2003), entre ellas, se pueden mencionar las siguientes:

1. La variable de interés es una combinación lineal de variables aleatorias. La estimación directa de la combinación lineal no es usualmente la óptima.
2. Cuando hay pocos puntos de muestreo de una variable (primaria), pero está presenta una buena correlación con otra variable (secundaria) que ha sido mayormente muestreada. Esto da como ventaja, que dicha correlación mejore la estimación de la variable primaria.
3. Cuando una variable exhibe baja continuidad espacial, pero que está altamente correlacionada con otra variable, la cual exhibe una continuidad relativamente alta. Nuevamente los valores observados de la segunda variable pueden ayudar para la estimación de la variable primaria, particularmente si esta última ha sido poco muestreada.

#### *Isotopía y heterotopía*

En el análisis geoestadístico multivariado, se emplean dos conceptos, la isotopía y la heterotopía, que son relevantes para aplicar la estimación conjunta. Estos conceptos hacen referencia a la distribución de las mediciones disponibles de las dos variables aleatorias  $V(X)$  y  $S(X)$  dentro del dominio de estudio. Debido a que en ocasiones las variables pueden coexistir dentro del mismo punto, o bien, estar en puntos con una ubicación distinta dentro del dominio (Wackernagel, 2003).

Lo anterior, se resume a los siguientes tres casos y se ilustra en la Figura 3.7.

1. *Isotópico.*
2. *Parcialmente heterotópico.*
3. *Enteramente o totalmente heterotópico.*

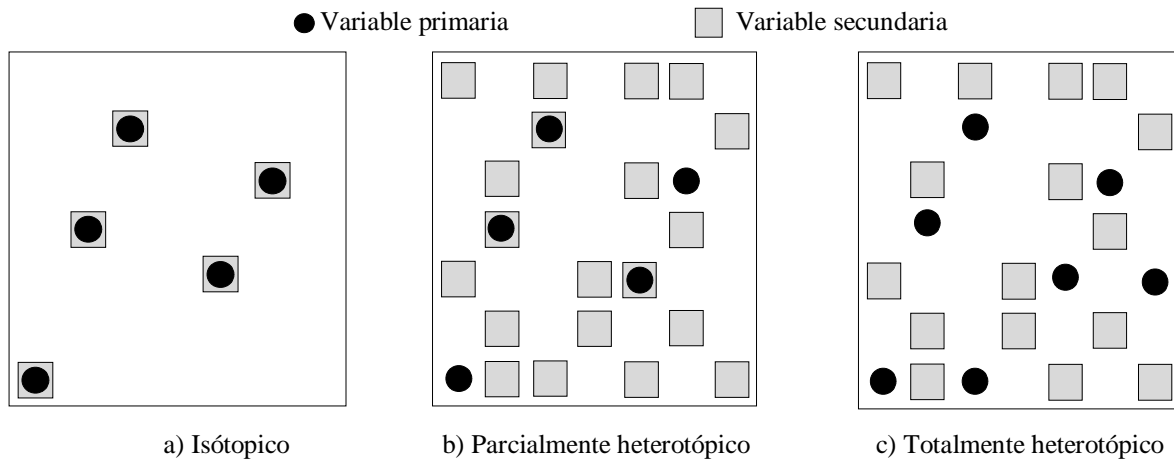


Figura 3.7 Condiciones de isotopía y heterotopía (Wackernagel, 2003).

En el caso isotópico (Figura 3.7a), se tienen datos de las variable primaria y secundaria en los mismos puntos de muestreo, asimismo, ambas variables presentan una buena correlación lineal positiva. Bajo esta condición, la técnica *Cokriging*, es equivalente a aplicar el método de *Kriging* por separado a cada una de las variables. Por tanto, en este caso el análisis geoestadístico multivariable no presenta ninguna ventaja ante el univariable (Wackernagel, 2003).

En el caso parcialmente heterotópico (Figura 3.7b), se observa que, dentro del dominio de estudio, hay puntos con información de las variables primaria y secundaria que coinciden en posición, y adicionalmente, se puede ver que hay una mayor cantidad de puntos con información de la variable secundaria. Esta condición permite, que, del subconjunto isotópico, se puedan estimar los modelos de correlación cruzados, mientras que los datos restantes de la variable secundaria, participaran como auxiliares en las estimaciones de la variable primaria. Por tanto, en este caso, la técnica del *Cokringing* se impone a los métodos geoestadísticos univariados (Wackernagel, 2003).

Finalmente, en el caso enteramente o totalmente heterotópico (Figura 3.7c), se aprecia que hay una ausencia de coincidencias las ubicaciones de los datos de las variables (primaria y secundaria). Esto impide que se



pueda determinar el grado de correlación entre las variables y estimar los modelos de correlación cruzados. Esta condición, imposibilita la aplicación del análisis geoestadístico multivariable (Wackernagel, 2003).

Como se mencionó anteriormente, el método de *Cokriging* es una extensión natural del *Kriging*, donde una variable de interés (primaria) es estimada en ubicaciones donde no se tiene medición, con base en la información de una variable auxiliar, localizada dentro del mismo dominio de estudio (Warckerengel, 2003). En la estimación multivariable, el *Cokriging*, por lo general, reduce la varianza de la estimación, ya que considera implícitamente la correlación espacial existente entre las dos variables (Chiles y Delfiner, 2012).

A diferencia de las técnicas de estimación univariable (*Kriging Simple* y *Ordinario*), el *Cokriging* propone el uso de pocos datos de alguna propiedad en particular, siempre y cuando, la cantidad de datos permita determinar los modelos de correlación cruzados (Goovaerts, 1997). En el correlograma cruzado  $\rho_{vs}(h)$ , a diferencia del correlograma univariable, donde los valores siempre son positivos, en el caso multivariable,  $\rho_{vs}(h)$  los valores pueden ser negativos. Esto se asocia con la correlación negativa entre las dos variables, es decir, el incremento de una de alguna de las dos variables implica el decremento de la otra (Hohn, 1988).

El problema de estimar varias variables corregeonizadas simultáneamente utilizando el *Cokriging* es el enfoque más riguroso, basándose en una menor cantidad de hipótesis. Sin embargo, requiere que se disponga de un alto número de puntos de muestreo, donde estén medidas todas las variables, para una adecuada estimación de los modelos de correlación cruzados. Cuando no se cumple con este requisito el *Cokriging* puede perder su superioridad sobre otros métodos alternativos (Díaz, 2002, Rota, 2007).

El planteamiento básico para la estimación por medio del *Cokriging* es considerar la estimación de  $V^*(X)$  como una combinación lineal de las observaciones disponibles de la variable primaria  $V(X)$  más las combinaciones lineales de las observaciones de las covariables relacionadas  $S(X)$ . En los siguientes párrafos, se describen dos variantes del *Cokriging*, el *Simple* y el *Ordinario*.

### ***Cokriging Simple***

Es el caso más sencillo del *Cokriging*, su hipótesis básica al igual que en el caso univariable es la estacionaridad de sus variables (primaria y secundaria), además, se asume que la media de cada una de las variables sea conocida:

$$\begin{aligned} E\{V(X)\} &= \mu_{v1} \\ E\{S(X)\} &= \mu_{v2} \end{aligned} \tag{3.42}$$

Considerando lo anterior, la expresión de estimación del *Cokriging Simple* es:

$$V^*(X) = \mu_{v1} + \sum_{i=1}^n \lambda_i [V(X_i) - \mu_{v1}] + \sum_{j=1}^m \beta_j [S(X_j) - \mu_{v2}] \quad (3.43)$$

La parte izquierda de la ecuación (3.43) simboliza la estimación conjunta de la variable en el punto  $V^*(X)$ ,  $V(X_i)$ ,  $i=1,2,\dots,n$  y  $S(X_j)$ ,  $j=1,2,\dots,n$ , representan los puntos muestreados de la variable primaria y de la covariable respectivamente,  $\lambda_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  y  $\beta_j$ ,  $j=1,2,3,\dots,n$  son los pesos de la variable primaria y secundaria (Díaz, 2002)

La asignación de los pesos en este método, se realiza de igual forma el *Kriging* (caso univariable), ya que en este caso los pesos son los que minimizan la varianza del error de estimación sujeta a la restricción de que el predictor sea insesgado (Díaz, 2002).

Otro de los aspectos importantes de este método, es que a diferencia de la estimación univariable donde únicamente se requiere un modelo para las covarianzas ( $C_V$ ) de la variable primaria  $V(X)$ , en el análisis multivariable (*Cokriging*) se requiere un modelo conjunto para la matriz de covarianza donde se incluyan las covarianzas de la variable secundaria ( $C_S$ ) y las covarianzas cruzadas ( $C_{VS}$  y  $C_{SV}$ ) (Deutsch y Journel, 1992), o bien, en términos del coeficiente de correlación.

Las condiciones de optimización de la ecuación (3.43) son las siguientes:

- Estimador sin sesgo:

$$E\{V^*(X)\} = E\{V(X)\} \quad (3.44)$$

- Varianza mínima

$$Var[V(X) - V^*(X)] \quad (3.45)$$

Para la primera condición, se obtiene:

$$E\{V^*(X)\} - \mu_{v1} = 0 \quad (3.46)$$

Para cumplir con la segunda condición de mínima varianza, se plantea la derivada parcial para ambos parámetros ( $\lambda$  y  $\beta$ ) y se iguala a cero de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \text{Var}[V(X) - V^*(X)]}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.47)$$

y

$$\frac{\partial \text{Var}[V(X) - V^*(X)]}{\partial \beta_j} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \quad (3.48)$$

La expresión de la varianza se tiene:

$$\text{Var}[V(X) - V^*(X)] = \text{Var}[V(X)] + \text{Var}[V^*(X)] - 2\text{Cov}[V(X), V^*(X)] \quad (3.49)$$

o bien:

$$\begin{aligned} \text{Var}[V^*(X)] &= \text{Var}\left\{\sum \lambda_i [V(X_i) - \mu_v]\right\} + \text{Var}\left\{\sum \beta_j [S(U_j) - \mu_s]\right\} \\ &+ 2\text{Cov}\left\{\sum \lambda_i [V(X_i) - \mu_v], \sum \beta_j [S(U_j) - \mu_s]\right\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

de la cual resulta:

$$\text{Var}[V^*(X)] = \sum \sum \lambda_i \lambda_j C_V(X_i - X_j) + \sum \sum \beta_i \beta_j C_S(U_i - U_j) + 2 \sum \sum \lambda_i \beta_j C_{VS}(X_i - X_j) \quad (3.51)$$

donde  $C_V$  es la función de covarianza de la variable principal,  $C_S$  es la función de covarianza de la variable secundaria, mientras que  $C_{VS}$  es la función covarianza cruzada de las dos variables.

Las ecuaciones (3.50) y (3.51) se pueden representar en forma matricial cuyas expresiones se muestran a continuación:

$$\begin{bmatrix} C_V & C_{VS} \\ C_{SV} & C_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{VX} \\ C_{SX} \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

donde  $C_V$ , es la submatriz de covarianza de la variable primaria,  $C_S$ , la submatriz de covarianza de la variable secundaria,  $C_{SV}$  es la submatriz de covarianza cruzada (variable primaria y la secundaria), mientras que  $\lambda$  y  $\beta$  constituyen el vector de los pesos asociados de la variable primaria y secundaria respectivamente.

En términos del coeficiente de autocorrelación,  $\rho_v$  el sistema matricial (3.52), queda representado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \rho_V & \rho_{VS} \\ \rho_{SV} & \rho_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho_{VX} \\ \rho_{SX} \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

Las ecuaciones anteriores como se mencionó anteriormente, corresponden con el caso en el que las esperanzas son conocidas.

### ***Cokriging Ordinario***

En esta variante de *Cokriging*, el conocimiento de la media no es necesario, sin embargo, cuando se utilizan dos o más variables se imponen las siguientes condiciones para los pesos de la variable primaria y las covariables auxiliares:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ y } \sum_{j=1}^m \beta_j = 0 \quad (3.54)$$

Retomando la condición anterior y la ecuación (3.43), la expresión de la estimación del *Cokriging Ordinario* queda de la siguiente forma:

$$V^*(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i V(X_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j S(X_j) \quad (3.55)$$

Cuando se tiene sólo una variable secundaria, el sistema de ecuaciones para el *Cokriging Ordinario* es:

$$\begin{bmatrix} C_V & C_{VS} & 1 & 0 \\ C_{SV} & C_S & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \beta \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{VX} \\ C_{SX} \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

donde  $C_V$  es la submatriz de covarianzas de la variable primaria,  $C_S$  es la submatriz de covarianzas de la variable secundaria,  $C_{VS}$  y  $C_{SV}$  es la submatriz de covarianzas cruzadas entre la variable primaria y la secundaria,  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , son los multiplicadores de Lagrange de las variables primaria y secundaria.

En términos del coeficiente de autocorrelación  $\rho_V$ , el sistema matricial (3.56), queda representado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \rho_V & \rho_{VS} & 1 & 0 \\ \rho_{VS} & \rho_S & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{VX} \\ \rho_{SX} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

donde  $\rho_V$  es la submatriz de autocorrelación de la variable primaria,  $\rho_S$  es la submatriz de autocorrelación de la variable secundaria,  $\rho_{VS}$  y  $\rho_{SV}$  es la submatriz de correlación cruzadas entre la variable primaria y la secundaria,  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , son los multiplicadores de Lagrange primario y secundario respectivamente.

El valor de la varianza del error minimizado asociado a la estimación multivariable, también conocida como varianza de estimación, se obtiene por medio de la siguiente expresión:

$$\sigma_{ECK}^2(X) = Var[V(X)] + \mu_1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_V(X_n - X_i) - \sum_{j=1}^n \beta_j C_{VS}(X_n - X_j) \quad (3.58)$$

donde  $Var[V(X)]$  es la varianza de la variable primaria,  $C_V$  y  $C_{VS}$  son las covarianzas primarias y cruzadas,  $\lambda$  y  $\beta$  son los pesos primarios y secundarios,  $\mu_1$  es el multiplicador de Lagrange de la variable primaria,

Otra forma del cálculo de la varianza de la estimación conjunta según Chiles y Delfiner (2012), es por medio de la varianza de estimación del *Kriging Ordinario*, pero considerando adicionalmente el grado de correlación existente ( $r$ ) entre las dos propiedades en estudio. Con base en los anterior, la varianza de estimación del *Cokriging Ordinario*, se puede obtener de la siguiente forma:

$$\sigma_{ECK}^2(X) = \sigma_{EK}^2(X)(1 - r^2) \quad (3.59)$$

donde  $\sigma_{EK}^2(X)$ , es la varianza de estimación del *Kriging Ordinario* y  $r$ , es el coeficiente de correlación entre las propiedades primaria y secundaria.

Finalmente, algunos especialistas indican dos razones que justifican que siempre es preferible estimar por *Cokriging* en lugar de hacer *Kriging* para cada una de ellas son las siguientes (Emery, 2013):

- Se aprovecha para estimar una variable, la información aportada por las demás. Por lo general, la varianza de estimación obtenida del *Cokriging* es igual o menor a la del *Kriging*.
- Se mejora la coherencia de los resultados de estimación, puesto que se toma en cuenta las relaciones lineales entre variables. Por ejemplo, cuando las variables representan proporciones, la suma de las estimaciones es igual a 100%, situación que no se cumple al realizar el *Kriging* por separado a cada variable.

Asimismo, existen dos situaciones donde el *Cokriging* coincide con el *Kriging* de cada variable (Emery, 2013):

- Las variables son independientes entre (sus variogramas o correlogramas son nulos).
- Los variogramas o correlogramas simples y cruzados son proporcionales entre sí (modelo conocido como correlación intrínseca) y el muestreo es isotópico, es decir, las variables han sido medidas en todos puntos de muestreo. En este caso, las variables poseen la misma continuidad espacial y se vuelven redundantes entre sí.

El *Cokriging* mejora notablemente los resultados del caso univariable, bajo la condición de heterotopía parcial y cuando las variables poseen una buena correlación espacial. Este método es particularmente ventajoso cuando una variable adicional es más accesible que la variable de interés. Sin embargo, esta ventaja desaparece si la correlación entre las variables es pequeña.

### 3.10 METODOLOGÍA DE APLICACIÓN

El fundamento teórico de la metodología del análisis geoestadístico, se puede adaptar para analizar la distribución espacial de las propiedades geotécnicas del subsuelo. Para este análisis, es necesario realizar una serie de etapas de forma ordenada y secuencial, como se indica en el diagrama de flujo de la Figura 3.8.

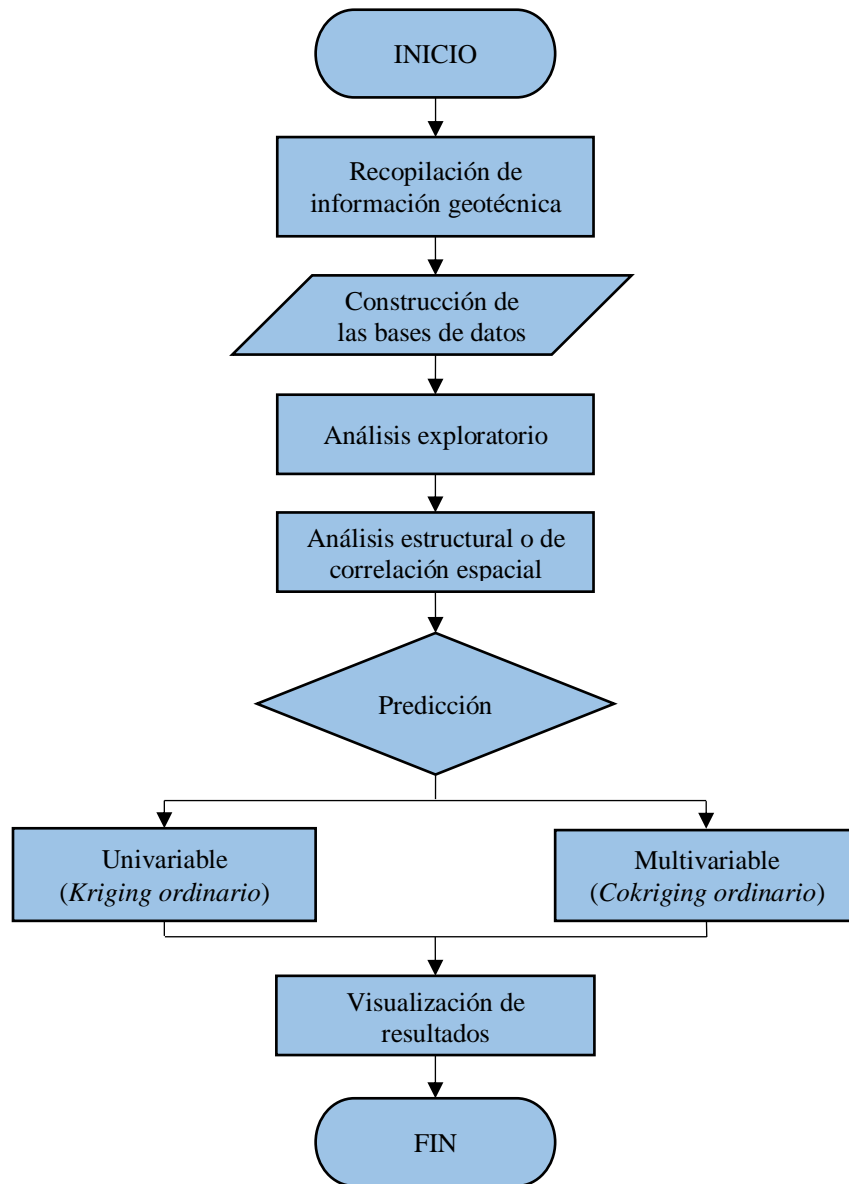


Figura 3.8 Etapas de un análisis geoestadístico (modificado de Juárez, 2015).

La descripción general de las actividades correspondientes a cada una de las etapas del diagrama anterior, es como sigue:

### **3.10.1 Recopilación de la información geotécnica**

Como punto de partida del análisis geoestadístico, se reúnen los datos disponibles de cada uno de los parámetros por analizar, provenientes de los sondeos geotécnicos realizados dentro del área de estudio. Adicionalmente, se recopiló información de los elementos topográficos y geológicos del área estudiada, con el propósito de contar con elementos que contribuyan a una adecuada caracterización de las condiciones del subsuelo. Los datos experimentales, son capturados en formato numérico y almacenados en archivos electrónicos con la finalidad de facilitar su manejo en los programas computacionales.

La información recopilada (sondeos, geología y topografía), fue georeferenciada e integrada en un Sistema de Información Geográfica (SIG). Para la georeferenciación, en este trabajo, se utilizó la proyección Universal Transversal Mercator (UTM), con Datum WGS84.

### **3.10.2 Construcción de las bases de datos**

Para los análisis, se diseñaron y construyeron un conjunto de bases de datos, unas de tipo numérico donde se integra los datos de las propiedades geotécnicas analizadas y otras con información de profundidad y espesor de las capas típicas del subsuelo. Debe señalarse, que la información disponible fue previamente analizada y revisada, con la finalidad de descartar los perfiles con datos incompletos o con valores atípicos.

- Propiedades geotécnicas, esta información la constituyen un conjunto de archivos que almacenan los valores numéricos de las propiedades geotécnicas (contenido de agua, resistencia  $q_c$  en CPT, índice de compresión y velocidad de onda de corte), obtenidos a partir de los perfiles geotécnicos. Los datos numéricos de las propiedades, se almacenaron bajo un formato tabular con los siguientes campos, identificador del sondeo ( $Id$ ), coordenadas de posición ( $X, Y, Z$ ) y el valor del parámetro.
- Estratigrafía, conformado por un conjunto de archivos, donde se registra la profundidad y el espesor de las capas típicas del subsuelo de la zona de estudio (FAS, CD, FAI, DEP).

### **3.10.3 Análisis exploratorio**

#### ***Descripción estadística***

En esta etapa se analizan los datos con el propósito de tener un conocimiento general de los datos de cada una de las propiedades, haciendo énfasis en identificar: *i*) la distribución espacial de los valores de la propiedad dentro del campo analizado, *ii*) determinar el rango de variación de la magnitud de los parámetros e *iii*) identificar los valores máximos y mínimos de las propiedades del subsuelo. Adicionalmente, cuando se aplica el análisis geoestadístico multivariable, en esta etapa se incluye la estimación de la correlación



entre dos propiedades geotécnicas, mediante graficas de regresión. La descripción estadística, permite identificar la presencia de valores atípicos dentro del medio analizado, conocidos como *outliers*. Estos valores, no deben pasar desapercibidos, ya que pueden afectar considerablemente los resultados de la estimación.

Por otra parte, con base en las evidencias geológicas es posible definir si el medio puede representarse mediante un modelo único o si es necesario dividirlo en subdominios.

### ***Análisis de tendencia***

En esta etapa, se evalúa la tendencia del campo aleatorio, para tal propósito se realiza un análisis de regresión lineal. El principal objetivo de este análisis es definir si el campo es estacionario o no estacionario.

Dependiendo de la dimensión del dominio estudiado, se busca representar gráficamente la tendencia gráficamente, para el caso 1D, se construyen perfiles del campo original, en el caso 2D la tendencia se representa por medio de un plano, en el caso 3D, la tendencia se representa mediante un hiperplano. En este trabajo, con la finalidad de facilitar la visualización de la tendencia de los datos de los análisis 3D, se recurrió al uso de perfiles en lugar de un hiperplano.

#### ***3.10.4 Análisis estructural o de correlación***

El análisis estructural consistió en calcular, a partir de los datos disponibles, las funciones de *autocorrelación*, *autocovarianza* y *coeficiente de autocorrelación* que describen un campo aleatorio. En este trabajo, los parámetros y funciones se estimaron a partir de los resultados “discretos” (muestras aisladas) o “continuos” (sondeos) de las campañas de exploración, considerando diferentes incrementos de desplazamiento  $h$ , tomando como valor inicial la distancia típica que existe entre los datos y hasta un incremento máximo  $h_{\text{máx}}$  del 60% de la distancia que existe entre los datos más distantes.

Asimismo, con base en la función del coeficiente autocorrelación se determina la distancia de correlación y el modelo que describe la estructura correlación espacial del campo analizado. En este trabajo se utilizó como modelo una función de tipo exponencial simple para describir la estructura de correlación espacial de las propiedades geotécnicas. Por otra parte, en este trabajo, se descartó el uso del variograma, debido a que su interpretación en ocasiones resulta ser subjetiva (Auvinet, 2002; Juárez, 2015).

### Anisotropía

Cuando se realizan estudios geoestadísticos en dos o tres dimensiones, es importante determinar el grado de anisotropía que presentan las propiedades geotécnicas del subsuelo  $V(X)$  dentro del medio. Para estimar la anisotropía, se determina la función de autocorrelación en varias direcciones preferenciales. Si el valor de la distancia de correlación permanece constante en todas las direcciones estimadas, entonces se dice que el campo es isótropo, por el contrario, si esta distancia es variable para las diferentes direcciones, se dice entonces que el campo es anisótropo. La anisotropía de un campo aleatorio puede frecuentemente representarse en forma geométrica a través de una elipse.

En este trabajo, dependiendo del dominio o región de estudio se calcularon las funciones de autocorrelación de acuerdo con los siguientes puntos:

- *Región 2D* (plano): se determinaron los correlogramas en cuatro direcciones referidas al azimut geográfico,  $Az = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  y  $135^\circ$ .
- *Región 3D* (volumen): en este dominio de estudio, por sencillez se consideraron únicamente las funciones de correlación en las direcciones vertical y horizontal.

Cuando se tiene una distribución de los datos en forma irregular, es necesario proporcionar algunos parámetros que definen cierta tolerancias lineales y angulares (Figura 3.9), para la conformación de pares de datos, que permitan calcular las funciones de autocorrelación lo mejor posible.

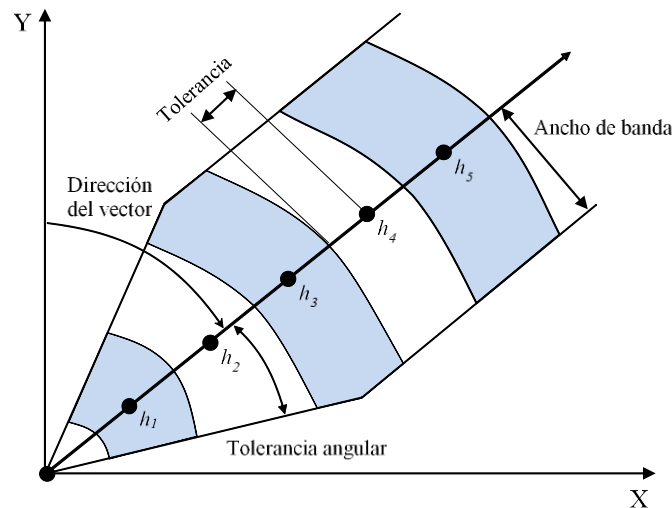


Figura 3.9 Definición de tolerancias (Deutsch y Journel, 1992).

Finalmente, con base en las distancias de correlación y adaptando una función matemática de tipo exponencial simple, se obtiene un modelo de correlación espacial. Este modelo constituye un elemento importante en la etapa de predicción. En el caso del análisis geoestadístico multivriable, se determinarán sus correlogramas cruzados

### 3.10.5 Predicción

En la etapa de predicción (estimación y simulación), se requiere:

1. Definir la malla o eje preferencial de estimación.
2. Definir la vecindad de búsqueda.
3. Los parámetros y modelo de correlación espacial.

#### *Malla de estimación o eje preferencial*

Si bien no hay restricciones para definir la malla de estimación para el análisis en un plano (2D), usualmente se eligen mallas regulares (Figura 3.10), debido a que su geometría facilita la representación gráfica de los resultados en forma de mapas de contornos y superficies. Una recomendación practica respecto al tamaño de la celda de la malla, es que debe ser de un orden aproximadamente igual a la distancia mínima de separación entre los datos, puesto que, esta es la resolución de la información que se dispone.

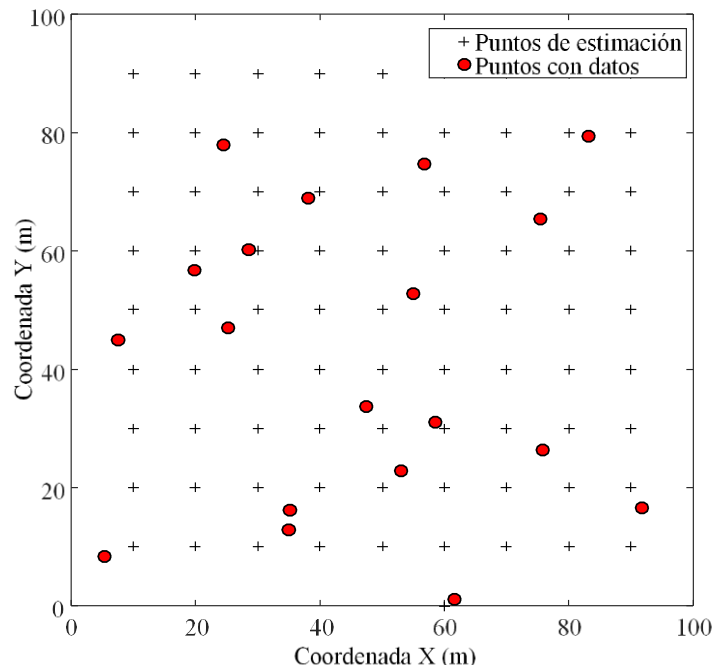


Figura 3.10 Malla de estimación caso de estudio 2D.

Para el caso del análisis espacial (3D), se requiere definir la posición de los puntos a lo largo de un eje preferencial, en los que se estimaran valores a lo largo de la profundidad (Figura 3.11), es decir, la malla de interpolación definirá la generación de perfiles estimados (virtuales) del parámetro que se analiza.

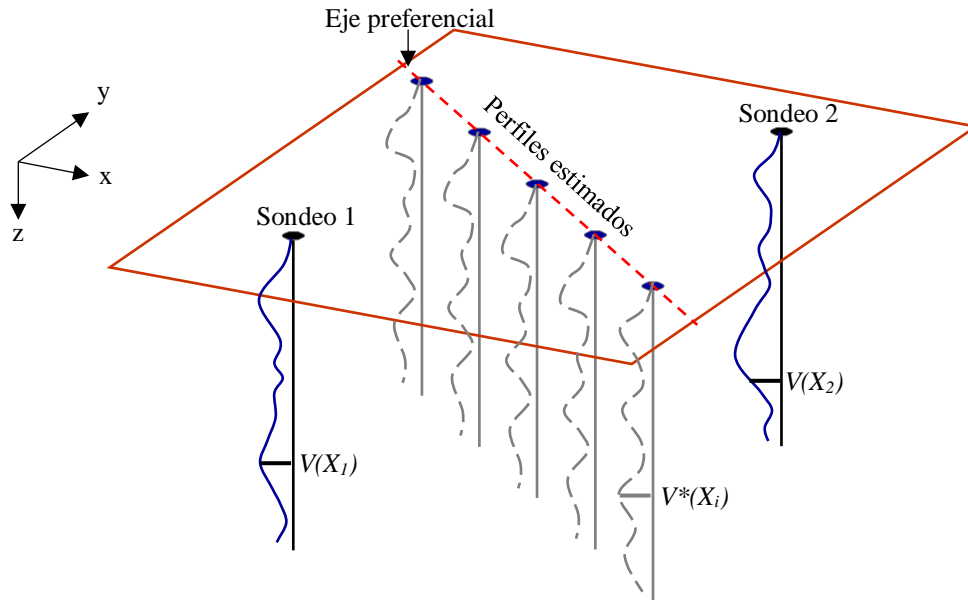


Figura 3.11 Esquema representativo de la estimación para el caso 3D (Juárez, 2015).

En resumen, el volumen de estimación queda definido por:

- Las coordenadas de posición de los puntos inicial  $(x_1, y_1)$  y final  $(x_2, y_2)$  del eje de estimación.
- El número de puntos a estimar a lo largo del eje.
- Distancia o paso de cálculo a lo largo de la profundidad,  $\Delta z$ .

#### ***Definición de la vecindad de búsqueda***

La definición de la vecindad de búsqueda, esta se estableció, con base en el punto a estimar y se determinó considerando el número de puntos vecinos en la estimación. Con base en esta definición, se tiene los siguientes casos:

- Caso *isotrópico*: tomar una circunferencia con centro en el punto a estimar y radio igual o menor a la distancia de correlación.
- Caso *anisotrópico*: tomar una elipse con centro en el punto a estimar y semiejes iguales o menores a las *distancias de correlación* del correlograma anisotrópico.

### ***Parámetros de correlación espacial***

Se definen las distancias de correlación, en cada una de las direcciones preferenciales de cálculo, así como, la función de ajuste del correlograma experimental.

En la estimación de los valores, para la mayoría de las propiedades, se utilizó la información del campo residual, por tanto, para obtener los valores finales de la predicción fue necesario reincorporar la tendencia a los valores calculados.

### ***10.3.6 Visualización***

La interpretación de los resultados numéricos de la estimación (interpolación) o simulación ordenados en forma tabular, no es sencilla; por lo que, en este trabajo se recurre a técnicas de graficación avanzadas (programas comerciales) para construir perfiles, secciones transversales (cortes), mapas de contornos o modelos de superficies, a partir de los valores puntualmente estimados. Las representaciones gráficas permiten apreciar visualmente la distribución espacial de las propiedades estudiadas. Asimismo, se tiene la ventaja de identificar zonas de concentraciones de valores máximos y mínimos.

### 3.11 ALGORITMO COMPUTACIONAL

Con la finalidad de facilitar la aplicación del análisis geoestadístico para obtener la variación espacial de las propiedades geotécnicas del subsuelo, se construyeron, optimizaron y validaron un conjunto de algoritmos computacionales, en la plataforma de MatLab (Laboratorio de Matrices, por sus siglas en inglés).

Se eligió MatLab como plataforma de trabajo, debido a que es un entorno de programación científico avanzado apropiado para el desarrollo de aplicaciones y proyectos que involucran el manejo de grandes cantidades de datos, procedimientos complejos de cálculos y herramientas de visualización gráfica. Algunas de las ventajas del uso de este software para el análisis geoestadístico, son: *i*) contiene librerías estadísticas y probabilistas, *ii*) permite manipular fácilmente matrices de grandes dimensiones, *iii*) permite realizar distintos tipos de gráficos y *iv*) los tipos de cálculo son menores en comparación con otras plataformas de programación (por ejemplo, C# y Visual Basic).

Tomando como base la metodología anteriormente descrita, la estructura del algoritmo se dividió en distintas subrutinas que integran cada una de las etapas del análisis geoestadístico, como se muestra en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3 Subrutinas del análisis geoestadístico.

| <b>ALGORITMO</b>        | <b>ETAPA</b>          |
|-------------------------|-----------------------|
| <i>A_DESCRIPTIVO.m</i>  | Análisis exploratorio |
| <i>RESIDUOS.m</i>       | Análisis exploratorio |
| <i>CORRELOGRAMA.m</i>   | Análisis estructural  |
| <i>CORRELOGRAMA2P.m</i> | Análisis estructural  |
| <i>KRIG_O.m</i>         | Predicción            |
| <i>COKRIG_O.m</i>       | Predicción            |

Cada una de las subrutinas requiere un archivo de entrada, el cual puede ser elaborado o seleccionado de la base de datos de las propiedades geotécnicas. Los algoritmos desarrollados permiten realizar el análisis a nivel 1D, 2D o 3D para una o dos propiedades. El formato tabular requerido por los algoritmos se presenta en la Tabla 3.4. El archivo puede ser importado desde la plataforma de trabajo en formato *.xlsx* o *.txt*.

Tabla 3.4 Formato del archivo de entrada.

| <b>CAMPO</b> | <b>DESCRIPCIÓN</b>  |
|--------------|---|
| <i>ID</i>    | Identificador del sondeo  |
| <i>X</i>     | Coordenadas de posición del sondeo referenciadas al sistema UTM |
| <i>Y</i>     |   |
| <i>Z</i>     | Elevación o profundidad de la propiedad                         |
| <i>V(X)</i>  | Medición de la propiedad geotécnica                             |

Considerando lo anterior, se presenta la descripción general por etapas de análisis de las distintas subrutinas que integran el algoritmo.

### 3.11.1 Análisis exploratorio

#### *A\_DESCRIPTIVO.m*

Este algoritmo, permite realizar el análisis estadístico descriptivo de la información a nivel sondeo y por propiedad geotécnica (conjunto de sondeos). Como resultado de la ejecución de este programa, se despliega una hoja de cálculo con los siguientes parámetros estadísticos: media, mediana y desviación estándar, obtenidos con las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.6) asimismo, muestra un histograma con la distribución de la propiedad.

Adicionalmente, cuando se está trabajando en el análisis geoestadístico multivariable, el algoritmo permite realizar las gráficas de regresión entre las propiedades primaria y secundaria, para evaluar el grado de correlación entre las dos propiedades geotécnicas de estudio, como se muestra en la Figura 3.12.

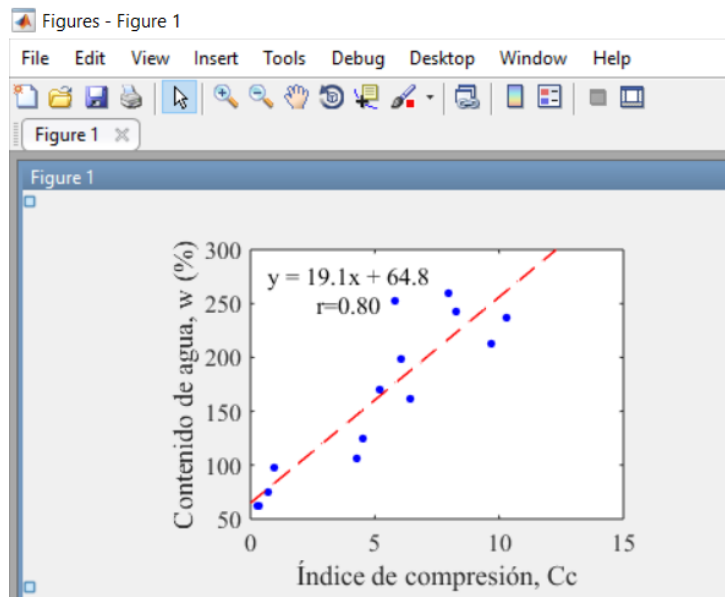


Figura 3.12 Gráfica de regresión para el análisis multivariable ( $C_c$ - $w$ ).

#### *RESIDUOS.m*

Esta subrutina, permite analizar la tendencia de los datos de las propiedades geotécnicas, al igual que el algoritmo anterior, es posible analizar la información a nivel sondeo o por propiedad geotécnica. Asimismo, es posible evaluar la deriva en una, dos y tres dimensiones, utilizando la ecuación (3.11). Como resultado, el programa muestra en pantalla los valores de los coeficientes de la regresión  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  y la distribución

de los campos residual y experimental en forma de perfiles. Adicionalmente, se genera un archivo de salida que contiene los datos experimentales y residuales.

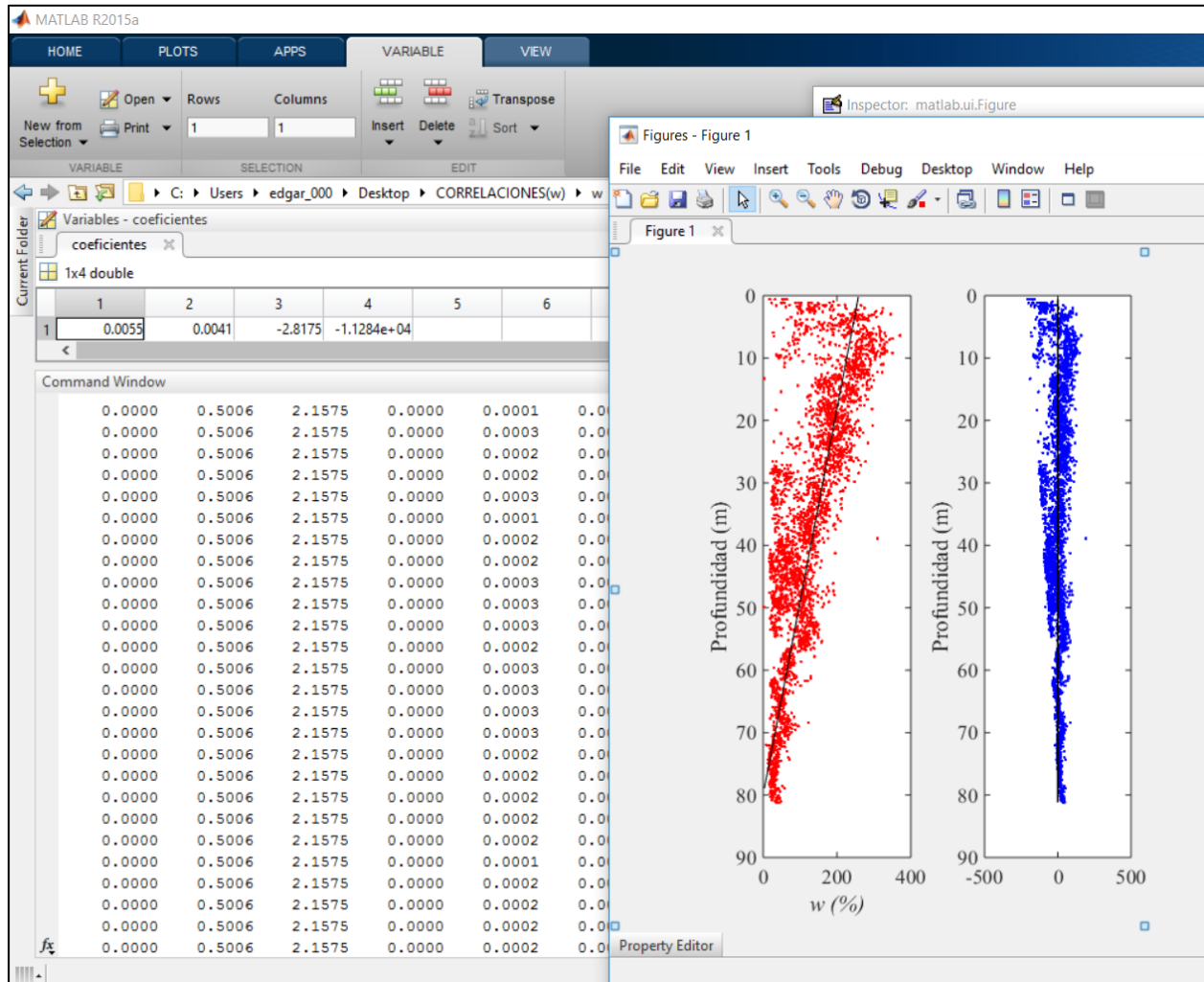


Figura 3.13 Resultados del análisis de tendencia del algoritmo *RESIDUOS.m*.

### **Análisis estructural**

#### *CORRELOGRAMA.m* y *CORRELOGRAMA2P.m*

Estas dos subrutinas, permiten evaluar la dependencia espacial de los datos de las propiedades por medio los modelos de correlación (correlogramas), a partir de las cuales se define la distancia de correlación. El programa *CORRELOGRAMA.m*, permite obtener las distancias de influencia, necesaria para el análisis geoestadístico univariable, por medio de la ecuación (3.8). Por otra parte, *CORRELOGRAMA2P.m*, genera los modelos de correlación, con base en la ecuación (3.9), para obtener las distancias de correlación cruzadas de las propiedades primaria y secundaria, requeridas en el análisis geoestadístico multivariable.



En la Figura 3.14, se presenta la interfaz gráfica de la subrutina *CORRELOGRAMA2P.m*, donde se muestran los resultados del modelo de correlación vertical cruzado entre la velocidad de onda de corte y la resistencia  $q_c$  en CPT.

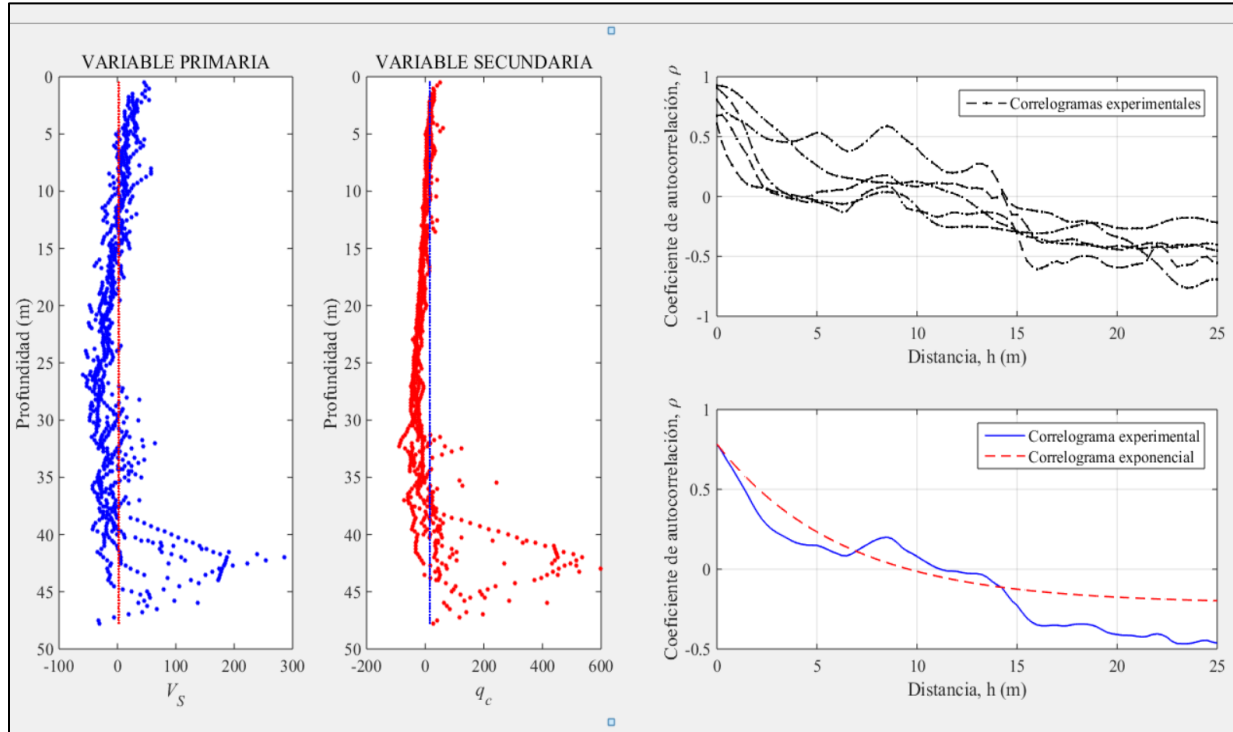


Figura 3.14 Resultados del análisis de correlación espacial cruzado vertical con *CORRELOGRAMA2P.m*.

### Predicción

#### *KRIG\_O.m* y *COKRIG.m*

Para realizar la etapa de predicción, se desarrollaron dos algoritmos el *KRIG\_O.m* para la estimación univariable utilizando la ecuación (3.36) y *COKRIG.m* para la estimación multivariable, por medio de la ecuación (3.55), en una dos y tres dimensiones.

Los elementos necesarios para ejecutar estas subrutinas son: *i*) los datos experimentales o residuales de la propiedad (o propiedades para la estimación multivariable), *ii*) las distancias de correlación y *iii*) un archivo con las coordenadas de posición de los puntos de estimación. La estimación se realiza en dos etapas de cálculo, en la primera, el algoritmo toma lectura de los datos de las propiedades en los diferentes puntos, y se despliega una gráfica con la distribución en planta. En la segunda etapa, al concluir la estimación, se incluye en la ubicación, los puntos de estimación. Por otra parte, se muestra en forma de perfil la distribución con la profundidad de los valores estimados.

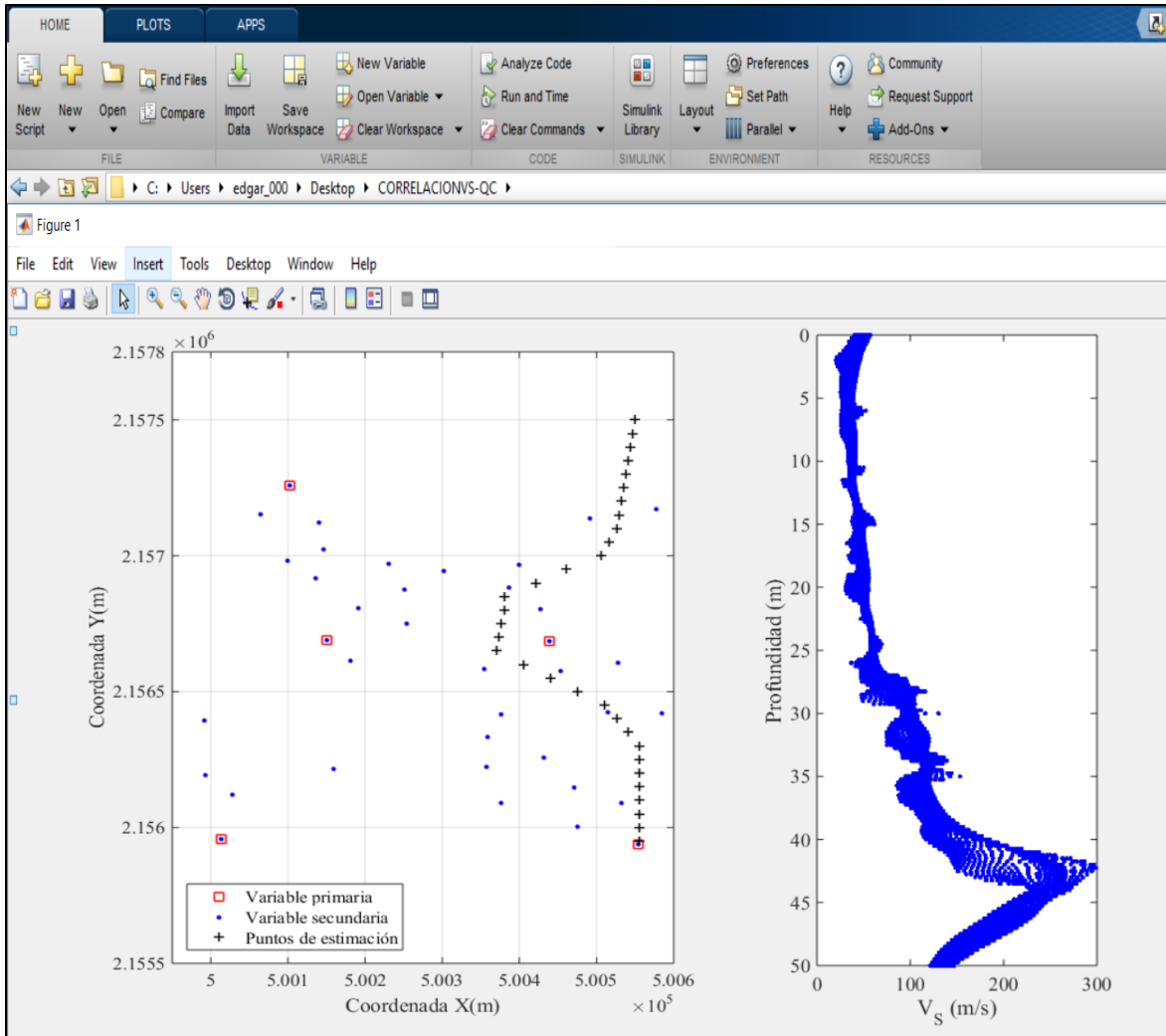


Figura 3.15 Resultados de la estimación multivariable del programa *COKRIG\_O.m*.

Como resultado de la estimación, se genera un archivo de salida (*.xlsx*) con los valores numéricos de la estimación, con el formato tabular de la Tabla 3.5. Debe señalarse, que el programa no regresa la tendencia cuando se utiliza información del campo residual en la estimación, por tanto, se tiene que regresar de forma manual en el archivo de salida, para obtener la estimación final.

Tabla 3.5 Formato del archivo de salida con los valores estimados.

| <b>Campo</b> | <b>Descripción</b>                       |
|--------------|--|
| <i>X</i>     | Coordenadas de posición de la estimación |
| <i>Y</i>     |  |
| <i>Z</i>     |  |
| $V^*(X)$     | Valor estimado de la propiedad           |
| $VAR(X)$     | Varianza de la estimación                |
| $STD(X)$     | Desviación estándar de la estimación     |

# 4

## APLICACIONES DE LA GEOESTADÍSTICA

En este capítulo se presentan varios ejemplos que ilustran la aplicación de la geoestadística univariable y multivariable. Las aplicaciones están enfocados al análisis de la distribución espacial de las propiedades geotécnicas del subsuelo lacustre del Valle de México

La distribución espacial de las propiedades geotécnicas (geométricas, índice, mecánicas y dinámicas) del subsuelo, se realizó con base en la información almacenada en el Sistema de Información Geográfica para Sondeos Geotécnicos (SIG-SG), desarrollado en el Laboratorio de Geoinformática del Instituto de Ingeniería de la UNAM. Esta información, fue organizada e integrada en una base de datos. Como resultado de estas aplicaciones, se elaboraron perfiles, mapas de contornos, cortes y modelos 3D, que muestran la variación de las propiedades con la profundidad.

### 4.1 DESCRIPCIÓN DE LA ZONA DE ESTUDIO

En este apartado se describe el área de estudio, tomando como referencia los elementos establecidos por Méndez (2005), clasificados en dos grupos: *i*) el marco geográfico y el *ii*) el marco físico, esta información proporciona una idea preliminar sobre la distribución de los materiales del subsuelo.

El marco geográfico, permite comprender la naturaleza de los elementos tanto naturales, como artificiales construidos por el hombre y que se encuentran distribuidos a lo largo de la superficie del terreno de la Cuenca de México. El marco físico, proporciona información acerca de la naturaleza de los depósitos del suelo, rellenos y formaciones geológicas que se asientan en el territorio de la Cuenca de México.

### 4.1.1 Marco geográfico

#### Ubicación

El sitio de estudio se localiza en la zona centro sur de la cuenca de México, en la parte este del Estado de México, dentro del municipio de Texcoco (Figura 4.1). De acuerdo con el sistema coordinado Universal Transversal Mercator (UTM), la zona de estudio, se encuentra delimitada por las siguientes coordenadas:  $X_1=499800$  m,  $Y_1=2155800$  m y  $X_2=500800$  m,  $Y_2=2157600$  m, y abarca una superficie aproximada de 1.8 km<sup>2</sup>.

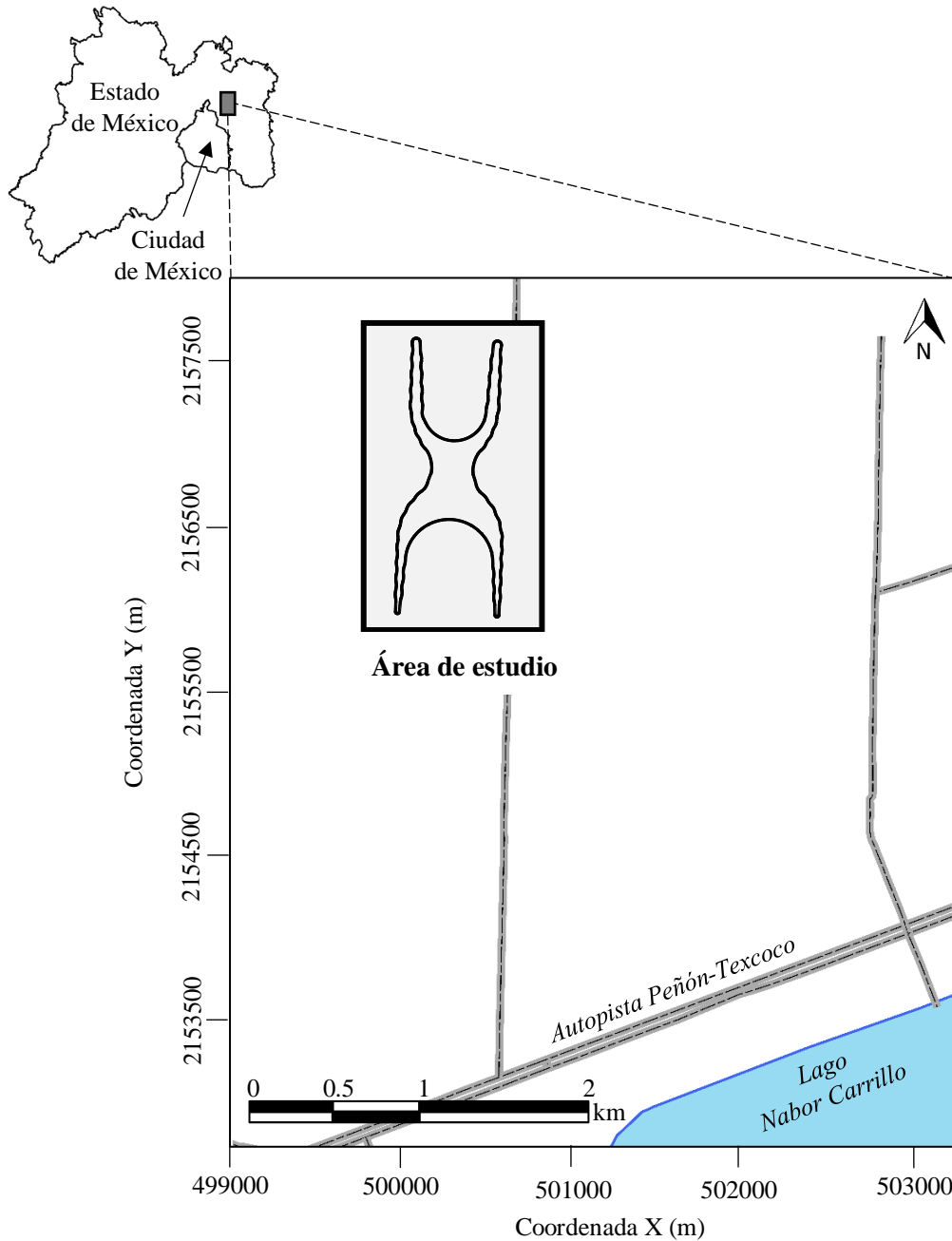


Figura 4.1 Localización de la zona de estudio (INEGI, 2015).

**Topografía**

La información topográfica es básica para la interpretación de los rasgos generales de la superficie del relieve (abrupto, medio, suave y plano), este elemento contribuye a la definición de la extensión de los depósitos de suelo, rellenos y formaciones geológicas.

La representación típica de la topografía, generalmente se realiza con mapas de curvas de nivel (contornos) indicando su cota, referida al nivel del mar. Sin embargo, actualmente, se cuenta con una serie de herramientas sofisticadas para construir modelos que representan la configuración del terreno y que permiten una fácil interpretación del relieve, entre estos modelos se encuentran los siguientes: *i*) Modelo Digital de Elevación (MDE), *ii*) Modelo de Relieve Sombreado (MRS). En la Figura 4.2 se presenta la topografía de la zona de estudio mediante un Modelo de Relieve Sombreado, con una malla de resolución de 5 por 5 m, elaborado a partir de la información vectorial de un levantamiento realizado con la técnica LiDAR (INEGI, 2011).

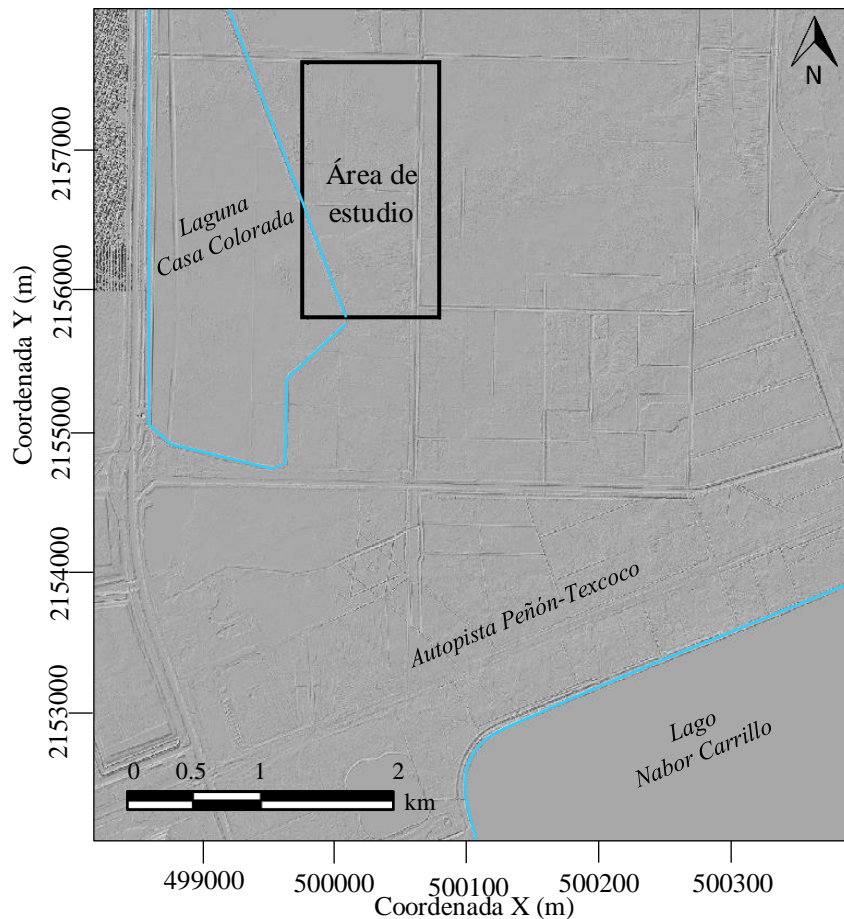


Figura 4.2 Modelo de relieve sombreado de la zona de estudio (INEGI, 2011).

El área de estudio, se ubica en la planicie de la zona lacustre del Valle de México, donde se observan bajas variaciones topográficas. En términos generales, la zona es prácticamente plana, con una ligera pendiente ascendente de aproximadamente 0.3 % hacia el norte. La elevación media de la zona es 2228 metros sobre el nivel del mar (msnm), dentro del área las partes altas tienen una elevación aproximada de 2230 msnm, asimismo, las partes bajas tienen una elevación aproximada de 2226 msnm.

#### **4.1.2 Marco físico**

##### **Geología**

La información geológica constituye la base fundamental para la descripción de las características del subsuelo lacustre del Valle de México, donde se proyecta la construcción de nuevas obras de infraestructura.

El subsuelo de la Ciudad de México es de origen volcánico y lacustre, producto de un largo proceso geológico que dio origen a la cuenca de México. Desde el punto de vista de la geotecnia y en las zonas bajas del valle, donde se ubica la zona de estudio, la estratigrafía de interés puede variar de una decena de metros hasta 100 m y es notablemente compleja por las siguientes razones: *i)* los depósitos son de origen distintos, unos aluviales y otros lacustres, *ii)* por influencia del clima varias capas de arcilla fueron sometidas a la acción del secado, *iii)* la vida orgánica en los lagos fue muy activa en diferentes periodos, a los que corresponden sedimentos fosilíferos significativos; la concentración salina en los lagos era variable y por tanto afecto a la sedimentación de la cenizas volcánicas y a su posterior alteración mineralógica, y *iv)* la distribución de la precipitación dentro del Valle, con tendencia a la aridez hacia el centro y el norte de esta región (Marsal, 1986).

Las formaciones geológicas que predominan en el Valle de México son las siguientes: *i)* formación de depósito lacustre (*Ql*) perteneciente al periodo cuaternario es la que predomina en la zona de estudio, su configuración es resultado del característico relieve acumulativo, representativo de la planicie, y aunque en la actualidad es ocupada por parte importante de la Ciudad de México. Esta unidad está constituida principalmente por arcillas y limos con algunas intercalaciones de gravas y arenas, y con escasos horizontes de tobas mal definidas, *ii)* la formación Aluvial (*Qal*), que pertenece al periodo cuaternario con menor extensión que la de depósito lacustre. Se encuentra en las laderas de reciente formación de la Sierra de Santa Catarina y del Cerro de la Estrella, así como en las laderas del noroeste y suroeste del Pedregal al pie de la Sierra Chichinautzin.

Asimismo, en la zona de estudio, Para el proyecto Texcoco se perforó el pozo profundo PP-1, encontrándose que el perfil estratigráfico está constituido por capas de arcilla, limos y arenas de 0 a 80 m;

a continuación, hasta los 500 m de profundidad, por arcillas de consistencia media a dura, arenas, areniscas y calizas lacustres; de 500 a 1980 m, por tobas, rocas ígneas, brechas y conglomerados; entre 1980 y 2045 m, por anhidritas arcillosas y margas; de 2045 a 2065 m, por lutitas, margas y conglomerados calcáreos. Así también, la presencia de 13 derrames de roca ígnea de espesor variable entre 3.5 y 108 m a profundidades de 600 a 2000 m, dan indicios de una gran actividad volcánica durante el terciario.

En la Figura 4.3, se observa conformación geológica de la parte centro sur de la cuenca del Valle de México, donde se indica la localización de la zona de estudio.

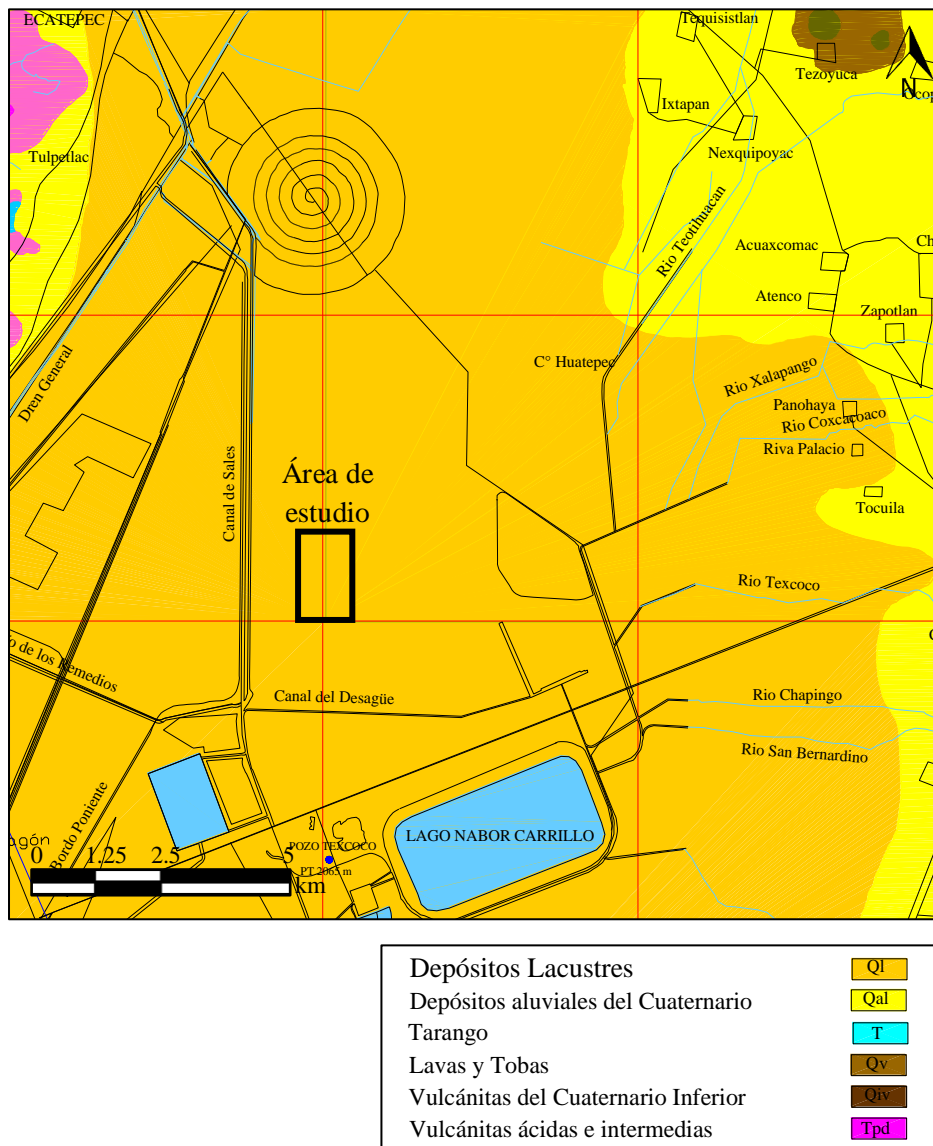


Figura 4.3 Geología de la zona de estudio (Mooser, 1996).

### ***Estratigrafía***

En el estudio y definición de la secuencia estratigráfica del subsuelo del Valle de México, destacan dos modelos, el propuesto por Leonardo Zeevaert (1952) y el de Marsal y Mazari (1959), que se describen a continuación:

Zeevaert (1952), en su trabajo “*Estratigrafía y problemas de ingeniería en los depósitos de arcilla lacustre de la ciudad de México*”, basándose en estudios geológicos y en sondeos geotécnicos, clasificó las formaciones de su modelo estratigráfico de la siguiente forma:

a) *Costra Superficial*. Esta formación incluye a los depósitos más recientes en la zona de lago y que se conocen como depósitos arqueológicos donde se encuentran los restos de las culturas antiguas, está constituida generalmente por toda clase de materiales desde rellenos artificiales hasta limos y arcillas de depósitos aluviales y lacustres. En general este depósito contiene huellas de raíces de plantas acuáticas que son sumamente abundantes en los márgenes de la región lacustre y hacen que el material tenga una permeabilidad grande en dirección vertical.

b) *Formación Toltoncingo*. Localizada sobre el caliche Barrilaco, y corresponde a arenas y limos arcillosos negros y cafés con alto contenido de materia orgánica. Generalmente tiene contenidos de agua que varían de 50 a 100%, respecto a la consistencia, presentan variaciones de la muy suave a la rígida, mientras que la compresibilidad va de mediana a muy baja.

c) *Formación Becerra*. En la base de esta formación, el material arcilloso, es generalmente de color café grisáceo y contiene una cantidad variable de arena, su contenido de agua varía generalmente entre 60 y 120%, su consistencia es de suave a rígida, mientras que su compresibilidad es de mediana a alta. Mientras que en la parte fuertemente encalichada, clasificada como caliche Barrilaco, conformado por una arcilla gris plástica con contenido de agua que puede alcanzar valores de 100%, con una consistencia de suave a rígida, y de compresibilidad media.

d) *Formación Tacubaya*. Constituida por un depósito de arcilla de origen lacustre que descansa sobre la arena I Tarango y que tiene un espesor aproximado de 25 m, donde es común encontrar cuatro periodos semiáridos intermedios, los cuales quedan registrados en esta formación por capas de arcillas gris plástica encalichada. El depósito de arcilla volcánica Tacubaya puede dividirse aproximadamente en cinco depósitos homogéneos de arcilla montmorilonítica. El contenido de agua de esta formación varía de 300 a



500%, con una compresibilidad alta, debido a que este estrato está integrado aproximadamente de una parte de materia sólida por diez partes de agua.

e) *Formación Tarango*. Constituida por una serie de depósitos lacustres y aluviales de arenas y limos arcillosos que comienzan aproximadamente a una profundidad de 33 m en el centro de la ciudad. El depósito clasificado como arena I Tarango, consiste en material aluvio-lacustre, cementado con carbonatos de cal y arcilla, con un espesor en el centro de la Ciudad de México de aproximadamente 4 m. Posteriormente se encuentra el depósito arcilla I Tarango, conformado por arcillas (montmoriloníticas) limosas de consistencia rígida a muy rígida, con contenidos de agua de aproximadamente 200%, con alta compresibilidad. Asimismo, a profundidades comprendidas entre los 45 y 62 m, se encuentra la arena II Tarango formada por una serie de depósitos aluviales de arenas limosas y grava fina, cuyo contenido de agua varía de 20 a 50 %, con valores bajos de compresibilidad. Finalmente, en la parte baja de este depósito, se encuentra la formación arcilla II Tarango, constituida por arcillas limosas de consistencia rígida.

En la Figura 4.4, se muestra el modelo estratigráfico de Zeevaert, donde se muestran las formaciones anteriormente descritas.

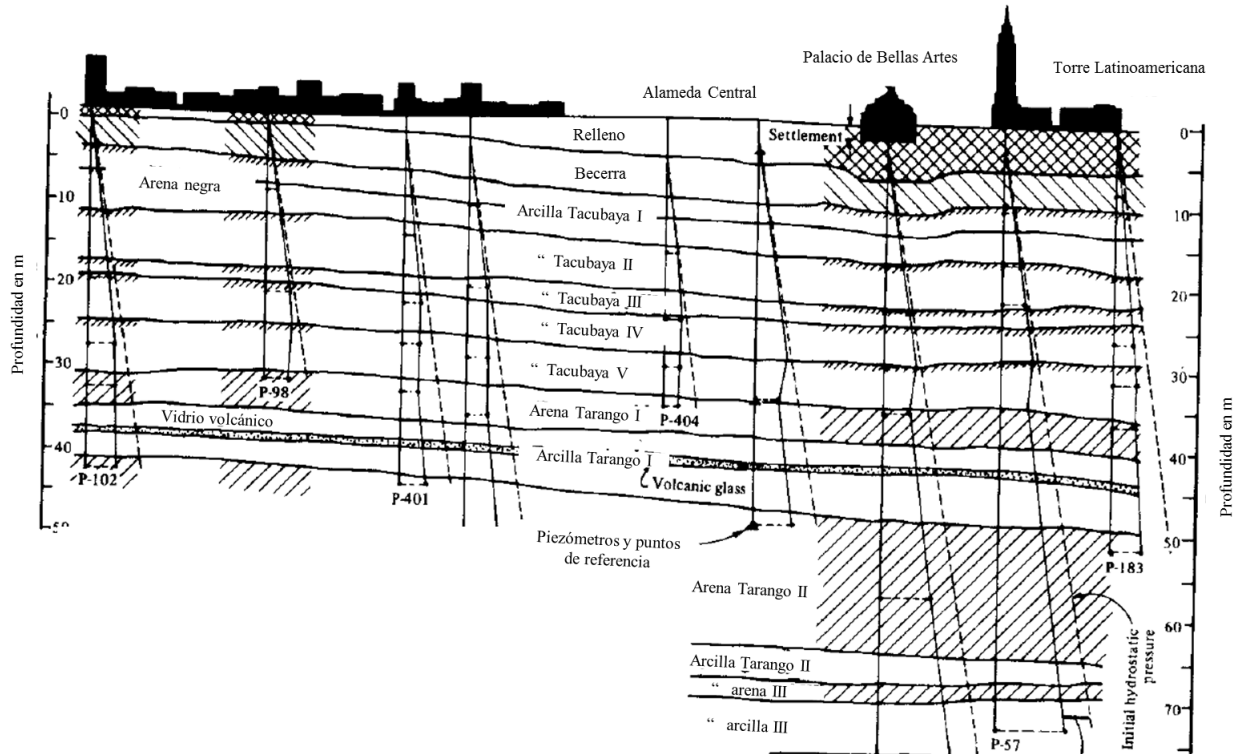


Figura 4.4 Modelo estratigráfico de Zeevaert (1952).

Por su parte, Marsal y Mazari (1959) en su libro “*El subsuelo de la Ciudad de México*” dividen al subsuelo en las siguientes formaciones:

a) *Costra superficial (CS)*. Integrada por restos de construcciones, rellenos arqueológicos y depósitos aluviales, con lentes de material eólico intercalados. El espesor de esta formación es variable, como ejemplo, en el templo mayor, la costra superficial tiene espesores de 10 m, mientras que en otras zonas de la ciudad varía entre 2 y 5 m y en el centro del antiguo lago de Texcoco desaparece.

b) *Formación Arcillosa Superior (FAS)*: Constituida por acillas de origen lacustre que, de acuerdo con la profundidad y con los efectos de la consolidación inducida por sobrecargas superficiales y por el bombeo profundo, se presentan como materiales preconsolidados o normalmente consolidados. Dentro de esta formación arcillosa superior se encuentran intercalaciones de horizontes de materiales endurecidos por secado solar, lentes de arena y vidrio volcánico.

c) *Capa Dura (CD)*. Este depósito está constituido por limos arenosos cementados con poca arcilla, y en algunos sitios con gravas. Su composición y espesor son heterogéneos. En las orillas del lago presenta espesores de varios metros. En las zonas centrales disminuye considerablemente el espesor, siendo en algunos sitios es menor a un metro y en algunos desaparece.

d) *Formación Arcillosa Inferior (FAI)*: Constituida por una secuencia de arcillas lacustres intercaladas por lentes duros; su espesor es menor que el de la primera formación arcillosa, típicamente del orden de ocho a cuatro metros; aunque hacia el centro del lago puede ser 15 m. Esta formación suelo desaparecer en la cercanía de los cerros.

e) *Depósitos profundos (DP)*: Formados por arenas y gravas limosas de origen aluvial contenidas dentro de una matriz arcillosa; se han encontrado carbonatos de calcio en estos depósitos y suelen presentar diversos grados de cementación.

En algunos sitios, se ha encontrado una tercera formación arcillosa integrada por arcillas volcánicas muy firmes, a 65 m de profundidad.

En este trabajo, la caracterización estratigráfica del área de estudio se realiza considerando las formaciones propuestas por Marsal y Mazari (1959).

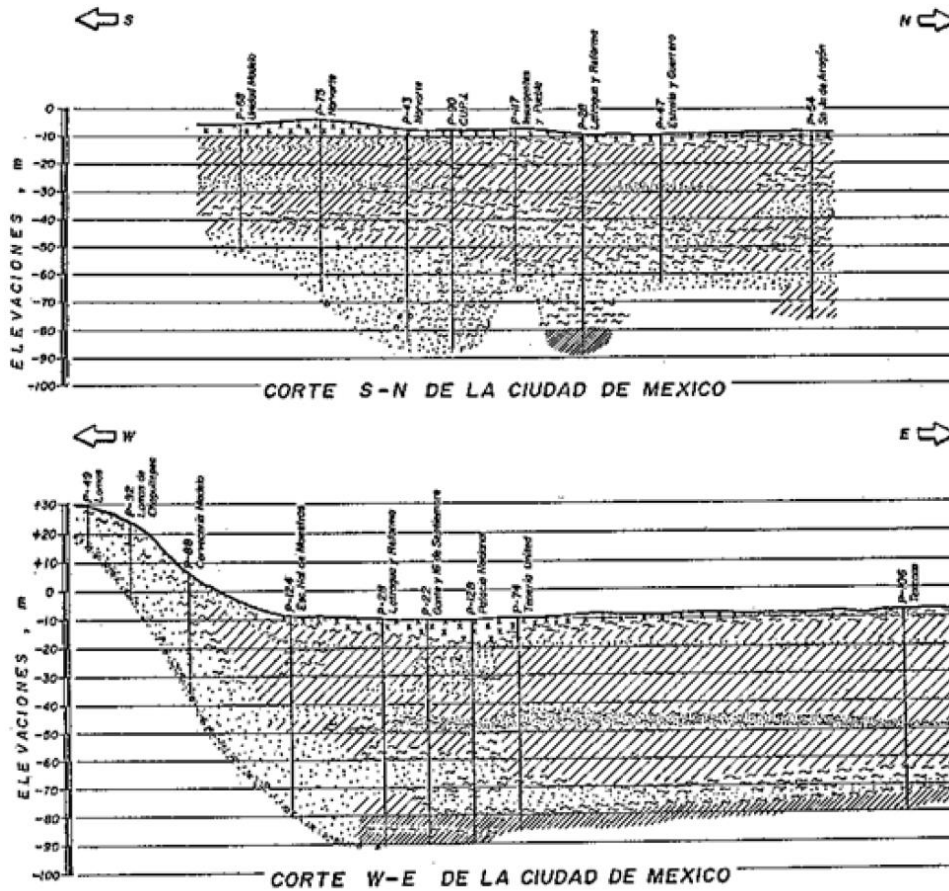


Figura 4.5 Cortes estratigráficos de la Ciudad de México (Marsal y Mazari, 1959).

**Zonificación geotécnica**

Con base en la información estratigráfica y de las propiedades índice, desde hace algunas décadas se propuso la zonificación del Valle de México, con el objetivo de servir como referencia a las normas sobre seguridad estructural de las edificaciones (Marsal, 1986). La zonificación actual se divide en tres: *i*) Zona de lomas, *ii*) Zona de transición y *iii*) Zona de lago, cada una de estas, se describe a continuación.

Zona I. Lomas, formadas por rocas o suelos generalmente firmes que fueron depositados fuera del ambiente lacustre, pero en los que pueden existir, superficialmente o intercalados, depósitos arenosos en estado suelto o cohesivos relativamente blandos. En esta zona, es frecuente la presencia de oquedades en rocas, de cavernas y túneles excavados en suelos para explotar minas de arena y de rellenos no controlados.

Zona II. Transición, en la que los depósitos profundos se encuentran a 20 m de profundidad, o menos, y que está constituida predominantemente por estratos arenosos y limo arenosos intercalados con capas de arcilla lacustre; el espesor de estas es variable entre decenas de centímetros y pocos metros.

Zona III. Lacustre, integrada por potentes depósitos de arcilla altamente compresibles, separados por capas arenosas con contenido diverso de limo o arcilla. Estas capas arenosas son generalmente medianamente compactas a muy compactas y de espesor variable de centímetros a varios metros. Los depósitos lacustres suelen estar cubiertos superficialmente por suelos aluviales, materiales desecados y rellenos artificiales; el espesor de este conjunto puede ser superior a 50 m.

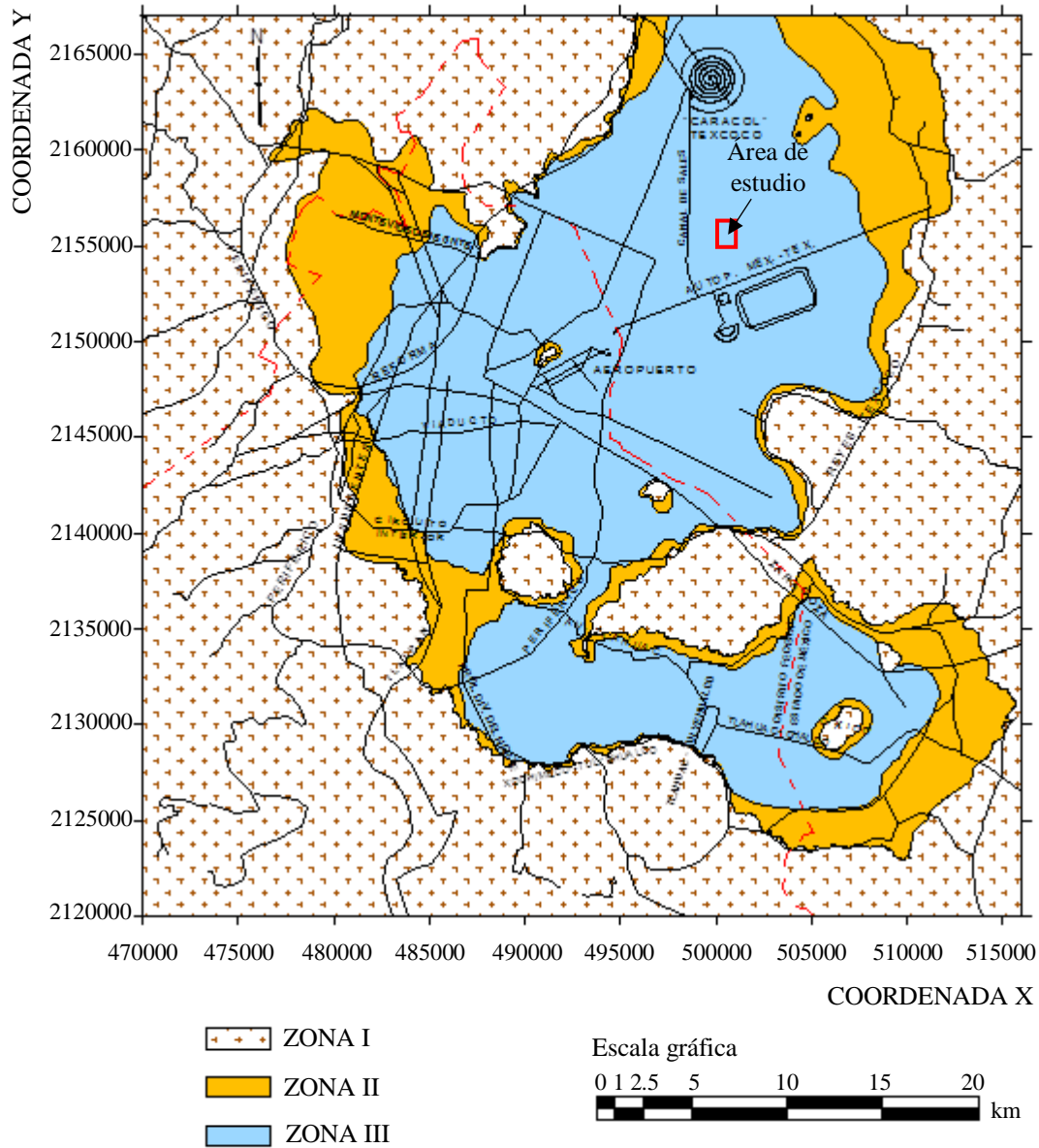


Figura 4.6 Zonificación geotécnica de la Ciudad de México, (Juárez *et al.*, 2016).

En la Figura 4.6, se presenta la ubicación del sitio de estudio en el contexto del mapa de zonificación geotécnica vigente (GDF, 2004), donde se observa que el sitio queda situado dentro de la Zona III, de lago.

***Sondeos geotécnicos***

Para la realización de este trabajo, se utilizó información proveniente de exploraciones geotécnicas directas (sondeos y pruebas de laboratorio). Los datos obtenidos de los sondeos proporcionan puntualmente la variación de la estratigrafía y de las propiedades (índice, mecánicas y dinámicas) del subsuelo con la profundidad. Por tanto, esta información constituye la base principal para realizar el análisis de la distribución espacial de las propiedades en el subsuelo.

La información geotécnica disponible para este estudio presenta en algunos casos ciertas limitaciones que deben considerarse, entre ellas se encuentra:

- Sondeos con información de baja calidad o incompletos.
- Sondeos realizados a baja profundidad.
- Sondeos con una posición errónea.

Las distintas propiedades geotécnicas analizadas en este trabajo fueron integradas en una base de datos para facilitar su manejo. La estructura de esta base de datos se muestra en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1 Estructura de la base de datos.

| <b>Campo</b>  | <b>Descripción</b>  |
|---------------|---|
| id            | Identificador (local) de la base de datos de la zona de estudio                       |
| X             | Coordenadas de posición del sondeo con referencia al sistema UTM con proyección WGS84 |
| Y             |   |
| Z             |   |
| Profundidad   | Profundidad de exploración máxima del sondeo  |
| Clave         | Identificador del sondeo en la base de datos de laboratorio de Geoinformática         |
| Observaciones | Comentarios relevantes acerca del sondeo o de alguna medición de la propiedad         |

En la Figura 4.7, se muestra la distribución espacial de los sondeos geotécnicos dentro de la zona de estudio, que fueron utilizados para realizar el análisis de variación espacial de las propiedades geotécnicas. En la misma figura, se aprecia que existe una mayor concentración de sondeos en la parte central y hacia el sur

el número de sondeos se reduce, lo anterior anticipadamente indica que, en esta parte de la zona de estudio, se tendrá mayor incertidumbre sobre las estimaciones realizadas.

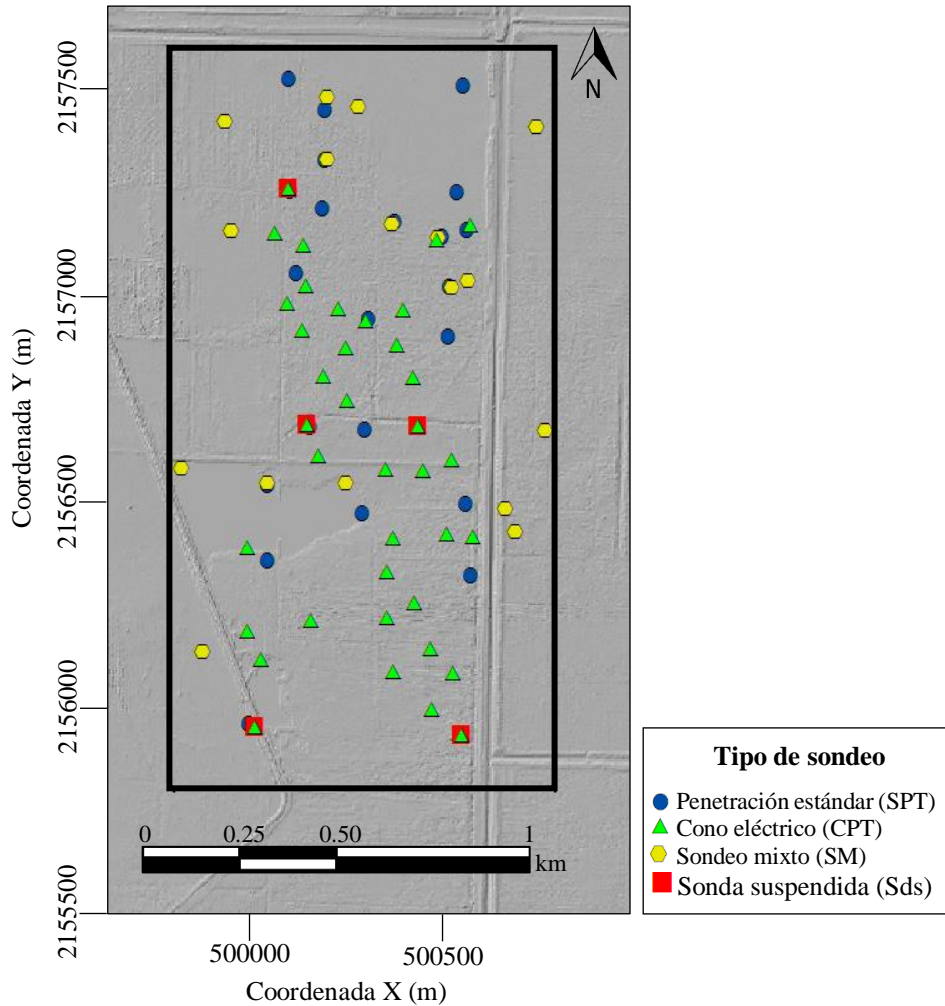


Figura 4.7 Distribución espacial de los sondeos geotécnicos.

En la Figura 4.7, también se observa que en varios puntos existen sondeos de distinto tipo, lo cual constituye un aspecto importante, puesto que, esto permite contar con datos de distintos parámetros del suelo prácticamente en un mismo punto, lo cual permite realizar análisis geoestadísticos multivariados.

En la Figura 4.8, se indica el número de sondeos por tipo exploración empleados como fuente de datos para este trabajo, donde se observa que el número de sondeos de cono eléctrico (CPT) corresponde aproximadamente al 50% de las exploraciones disponibles.

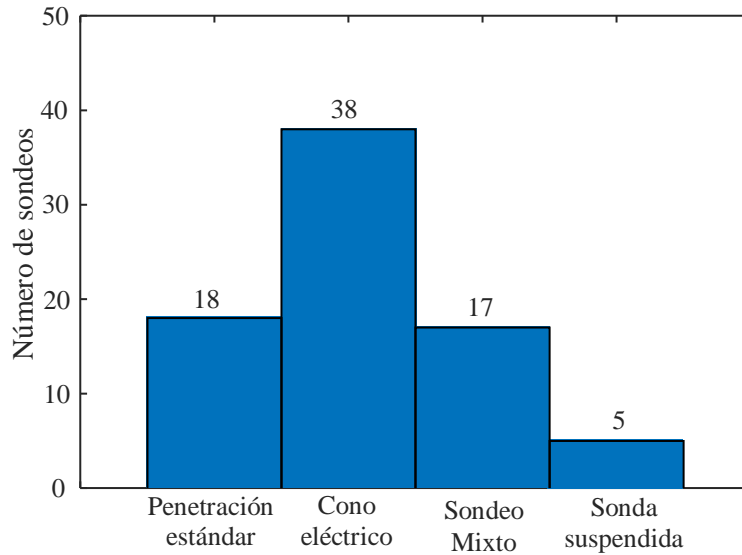


Figura 4.8 Número de sondeos por exploración geotécnica.

Por otra parte, en la Figura 4.9 se presenta el histograma del número de datos disponibles por cada una de las cuatro propiedades analizadas. En el histograma, se observa claramente que el mayor número de mediciones corresponde los datos de resistencia  $q_c$  en CPT. La cantidad de datos de este parámetro se debe al número de sondeos y a los intervalos a los de medición (2 cm), en algunos casos las lecturas de  $q_c$  son tomadas a cada 1 cm. Otra propiedad altamente medida es el contenido de agua. Los parámetros escasamente medidos son, la  $V_S$  con 306 datos y al índice de compresión con 81 datos, esta última en relación con los ensayos de consolidación realizados en laboratorio.

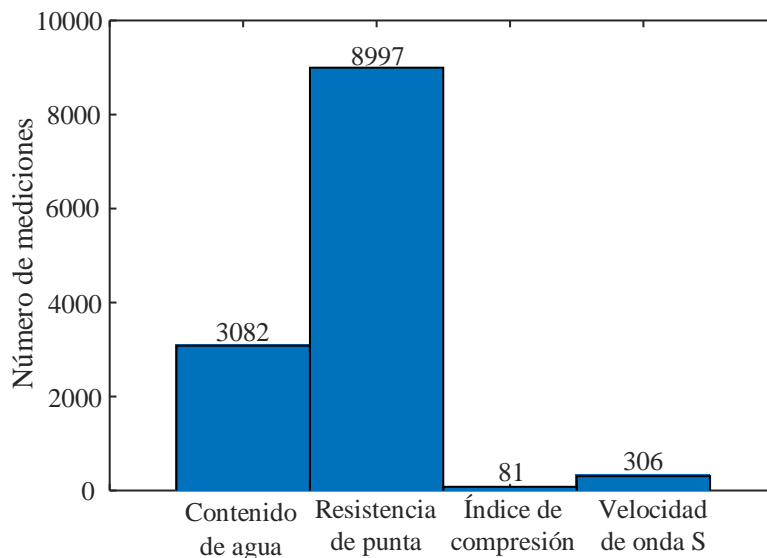


Figura 4.9 Número de mediciones de las propiedades geotécnicas.

Tanto la distribución de los sondeos, como el número de datos por propiedad (Figuras 5.8 y 5.9) fueron la base para el análisis geoestadístico, principalmente para el de tipo multivariable. La distribución permitió identificar la coexistencia de las dos propiedades en un mismo punto, y de esta manera determinar el grado de correlación entre ambas propiedades, similarmente con base en el número sondeos y de mediciones, se definieron las variables (propiedades) primarias y auxiliares, para realizar la estimación conjunta (*Cokriging*). De acuerdo con los fundamentos teóricos de la Geoestadística, se definieron como propiedades primarias el índice de compresión y la velocidad de onda de corte, asimismo, como propiedades secundarias (auxiliares) el contenido de agua y la resistencia  $q_c$  en CPT.



## 4.2 APLICACIONES DE LA GEOESTADÍSTICA UNIVARIABLE

### 4.2.1 Análisis de la distribución espacial de las capas típicas del subsuelo (2D)

La distribución espacial de las propiedades geométricas (profundidad y espesor) de las capas típicas del subsuelo se analizan empleando la metodología geoestadística univariable.

#### *Definición del dominio*

La profundidad de la frontera superior de las capas típicas que integran la estratigrafía del subsuelo, se pueden representar por medio de campos aleatorios  $V(X)$ , distribuidos dentro de un espacio  $R^p$ , con  $P=2$  (caso 2D). Donde el conjunto de valores medidos dentro del dominio  $R^2$ , constituyen una muestra del campo aleatorio. La aplicación se realizó en una superficie aproximada de 1.8 km<sup>2</sup>.

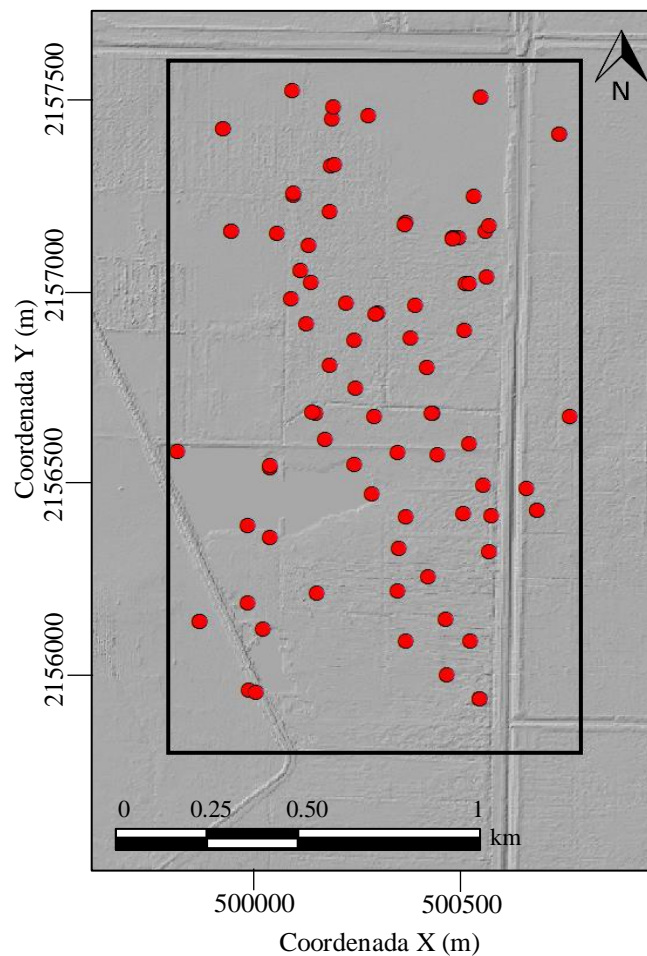


Figura 4.10 Distribución de los sondeos utilizados en el análisis 2D.

A partir de la superficie, se analiza la distribución espacial de la frontera superior de las siguientes siete capas o formaciones típicas del subsuelo:

- Formación arcillosa superior 1 (*FAS 1*)
- Formación arcillosa superior 2 (*FAS 2*)
- Formación arcillosa superior 3 (*FAS 3*)
- Formación arcillosa superior 4 (*FAS 4*)
- Capa dura (*CD*)
- Fase arcillosa inferior (*FAI*)
- Depósitos estratificados profundos (*DEP*)

Además de la *FAS* y la *FAI*, se tiene conocimiento de tercera capa de arcilla, convencionalmente llamada formación arcillosa profunda. Sin embargo, por la escasez en la información no se consideró en este trabajo.

**Descripción estadística**

A partir de los datos experimentales y aceptando la hipótesis de ergodicidad de los campos aleatorios considerados, se estiman sus principales parámetros estadísticos. Los resultados se presentan en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2 Parámetros estadísticos de la profundidad de la frontera superior de las capas típicas.

| Parámetro (m)       | FAS 1 | FAS 2 | FAS 3 | FAS 4 | CD    | FAI   | DEP   |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Media               | 0.88  | 7.42  | 15.46 | 24.44 | 28.96 | 30.27 | 41.25 |
| Mediana             | 0.83  | 6.30  | 14.20 | 23.80 | 28.50 | 29.70 | 40.50 |
| Moda                | 0.54  | 4.60  | 10.50 | 23.60 | 26.40 | 28.00 | 39.40 |
| Desviación estándar | 0.35  | 2.12  | 2.77  | 1.64  | 2.02  | 2.03  | 2.80  |
| Valor máximo        | 2.10  | 12.00 | 21.00 | 28.00 | 33.40 | 34.20 | 46.00 |
| Valor Mínimo        | 0.40  | 4.90  | 11.30 | 21.70 | 25.65 | 27.20 | 36.00 |

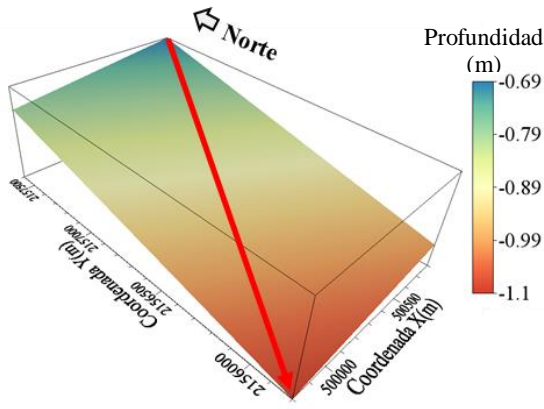
**Análisis de tendencia**

Un análisis de regresión buscando ajustar a los datos una recta de ecuación  $V=ax+by+c$ , se obtienen los coeficientes de regresión lineal mostrados en la Tabla 4.3.

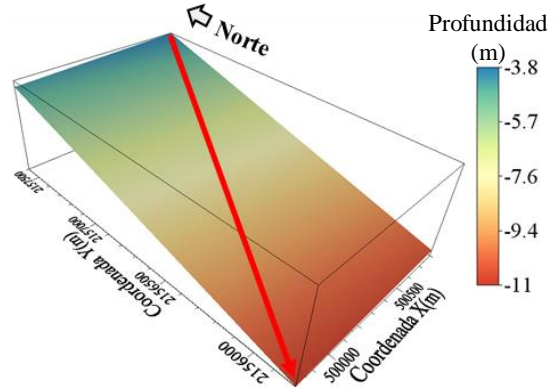
Tabla 4.3 Coeficientes de la regresión lineal de las formaciones estratigráficas.

| Coefficiente | FAS 1    | FAS 2    | FAS 3    | FAS 4    | CD       | FAI      | DEP      |
|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>a</i>     | -0.00009 | -0.00049 | -0.00229 | -0.00055 | -0.00214 | -0.00219 | -0.00225 |
| <i>b</i>     | -0.00016 | -0.00388 | -0.00528 | -0.00321 | -0.00401 | -0.00396 | -0.00556 |
| <i>c</i>     | 401.03   | 8613.53  | 12550.20 | 7225.50  | 9751.52  | 9664.48  | 13156.81 |

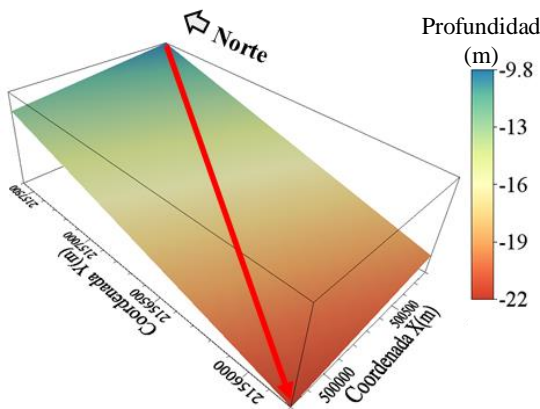
Los coeficientes de la tabla anterior, permitieron representar la tendencia del campo aleatorio de cada una de las fronteras superiores de las formaciones estratigráficas como se muestra en la Figura 4.11



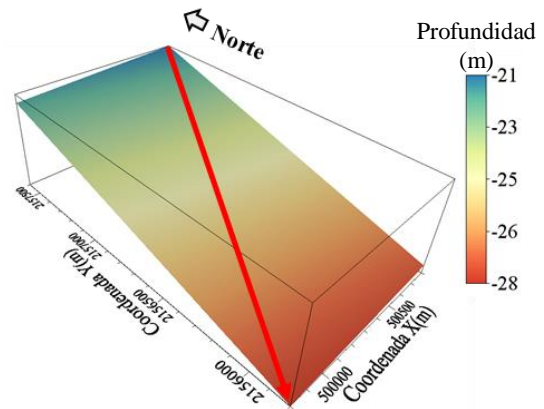
a) FAS 1



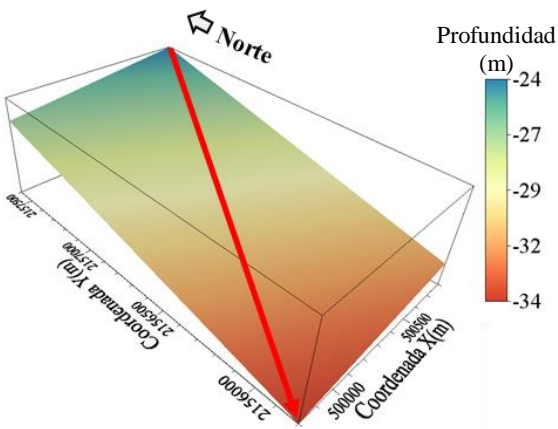
b) FAS 2



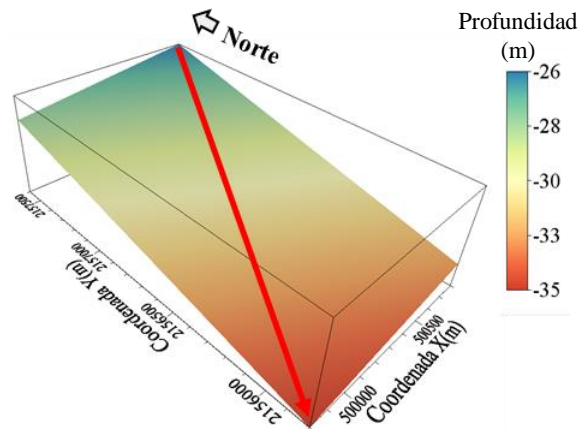
c) FAS 3



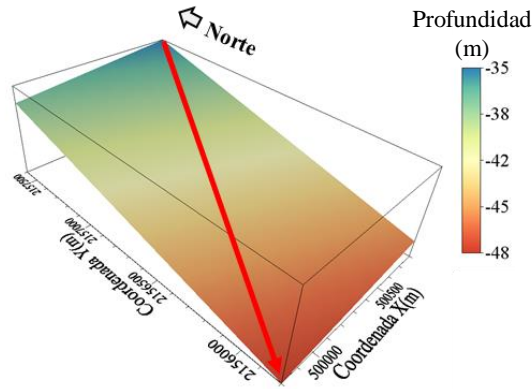
d) FAS 4



e) CD



f) FAI



g) DEP

Figura 4.11 Superficies de tendencia de la frontera superior de las formaciones estratigráficas.

En los planos de tendencia de la figura anterior, se aprecia que las distintas formaciones estratigráficas, presentan una tendencia hacia la misma dirección (suroeste) de la zona de estudio.

**Análisis estructural**

El análisis estructural se realizó considerando los campos residuales, los correlogramas horizontales se calcularon en las siguientes direcciones:  $\alpha_1$ = Azimut  $0^\circ$  (N-S);  $\alpha_2$ = Azimut  $45^\circ$  (NE-SW,);  $\alpha_3$ = Azimut  $90^\circ$  (E-W,);  $\alpha_4$ = Azimut  $135^\circ$  (SE-NW), estas direcciones se definieron con base en la distribución de los sondeos en la zona de estudio. Las distancias de correlación resultantes de cada una de las capas típicas se muestran en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4 Distancias de correlación de las formaciones estratigráficas.

| Az ( $^\circ$ ) | Distancia de correlación, $\delta$ (m) |       |       |       |     |     |     |
|-----------------|--|-------|-------|-------|-----|-----|-----|
|                 | FAS 1                                  | FAS 2 | FAS 3 | FAS 4 | CD  | FAI | DEP |
| 0               | 100                                    | 270   | 350   | 220   | 250 | 260 | 260 |
| 45              | 190                                    | 380   | 450   | 360   | 210 | 270 | 240 |
| 90              | 120                                    | 270   | 250   | 330   | 180 | 150 | 120 |
| 135             | 100                                    | 400   | 280   | 220   | 380 | 260 | 190 |

Es importante señalar, que los campos residuales facilitan la definición de la distancia de correlación, debido a que los correlogramas se abaten a menor distancia a diferencia de los campos originales. Para estimación, conservadoramente se consideran las distancias de correlación más cortas.

Con los valores de la Tabla 4.4 y adaptando un modelo de correlación exponencial simple, se determinaron los modelos de correlación que se muestran en las Figuras 4.12 a 4.18.

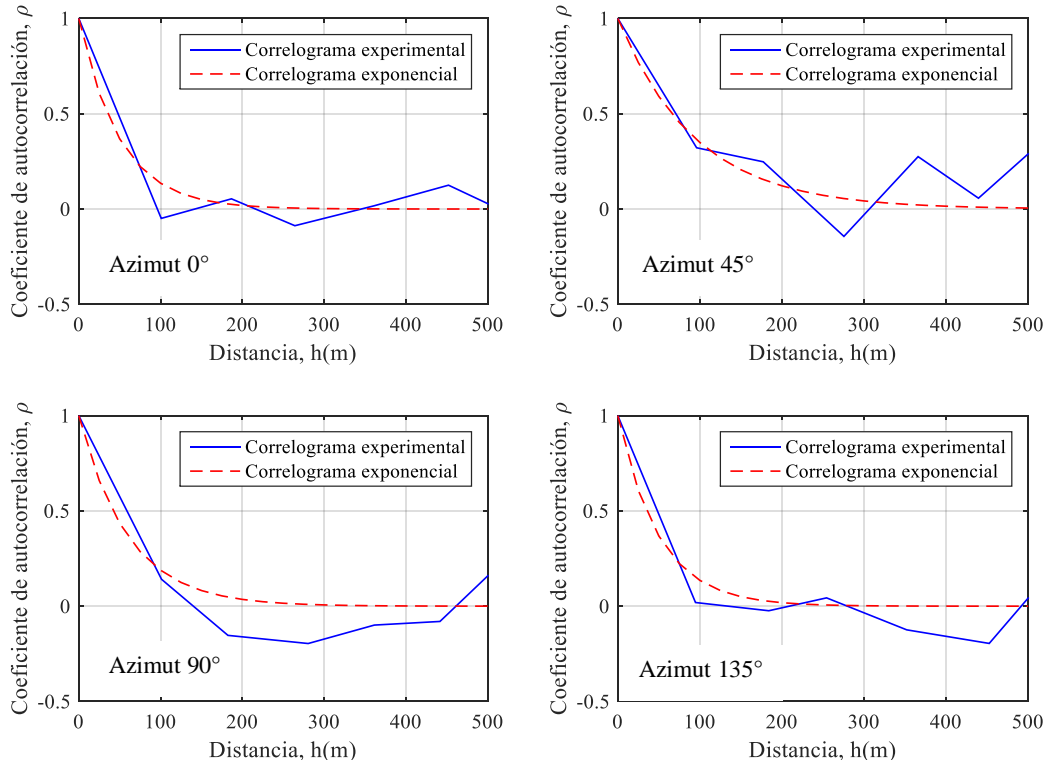


Figura 4.12 Correlogramas direccionales de la formación arcillosa superior 1.

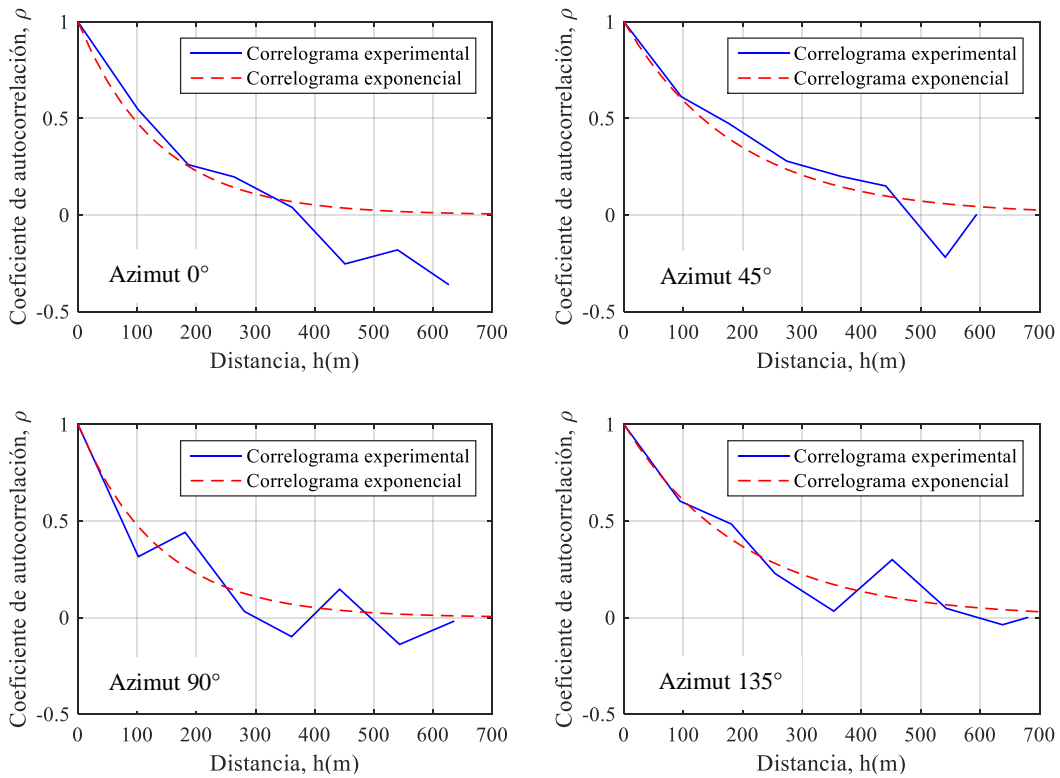


Figura 4.13 Correlogramas direccionales de la formación arcillosa superior 2.

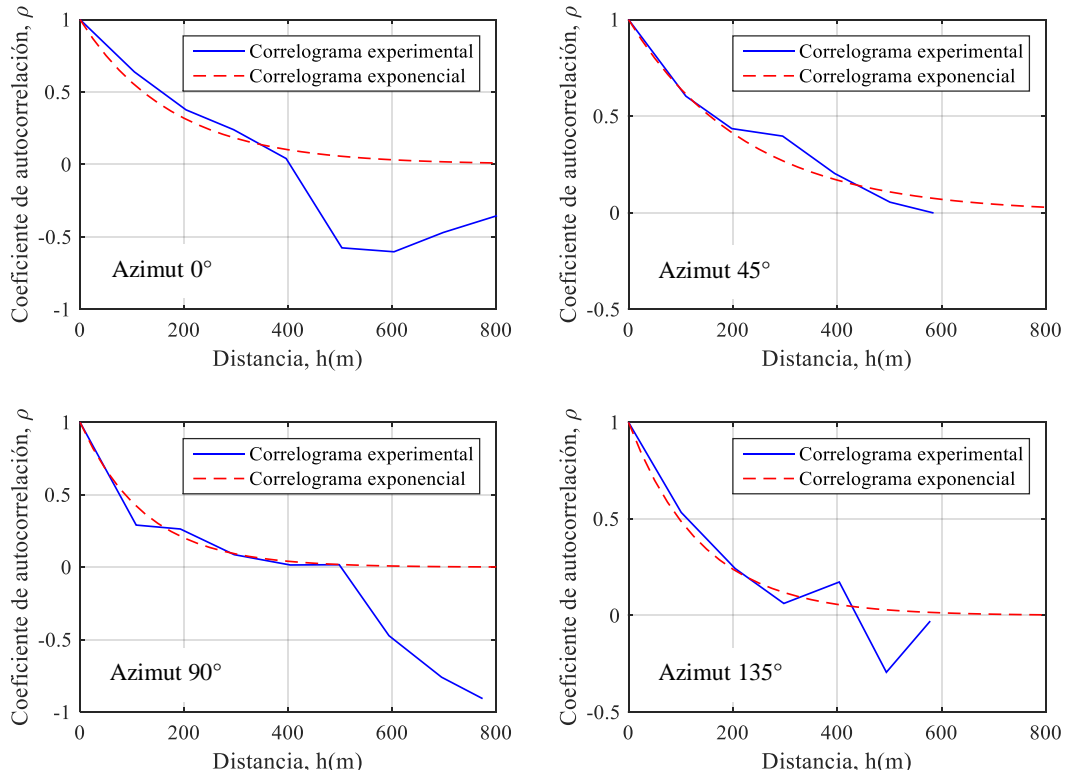


Figura 4.14 Correlogramas direccionales de la formación arcillosa superior 3.

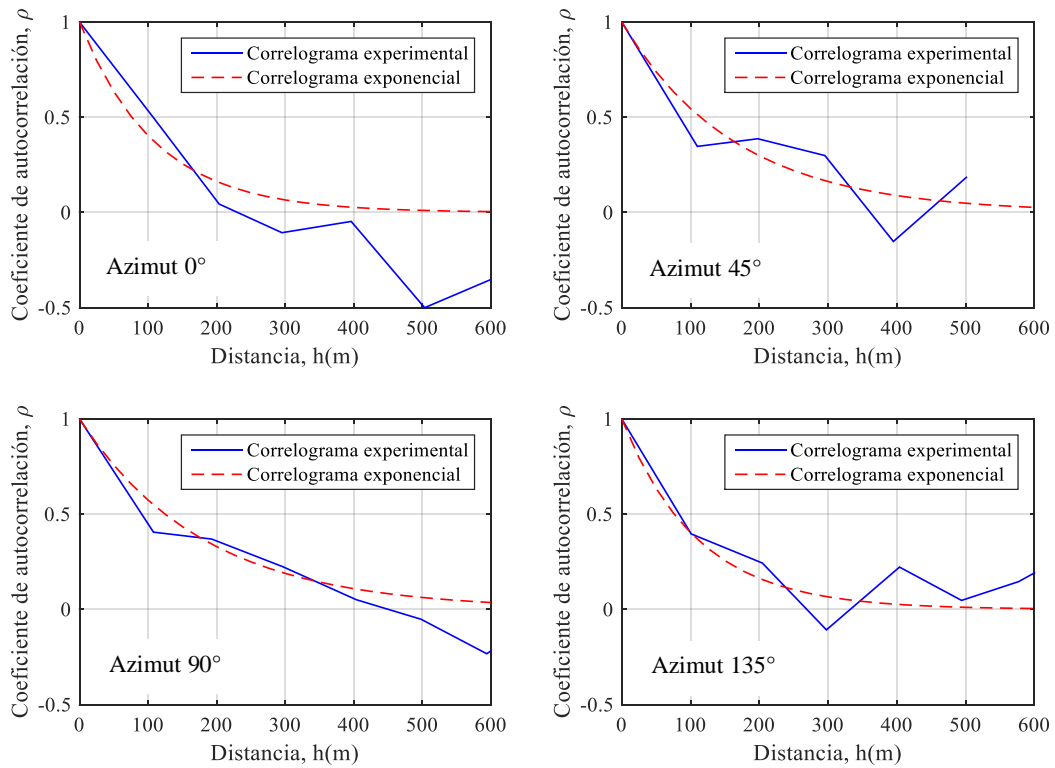


Figura 4.15 Correlogramas direccionales de la formación arcillosa superior 4.

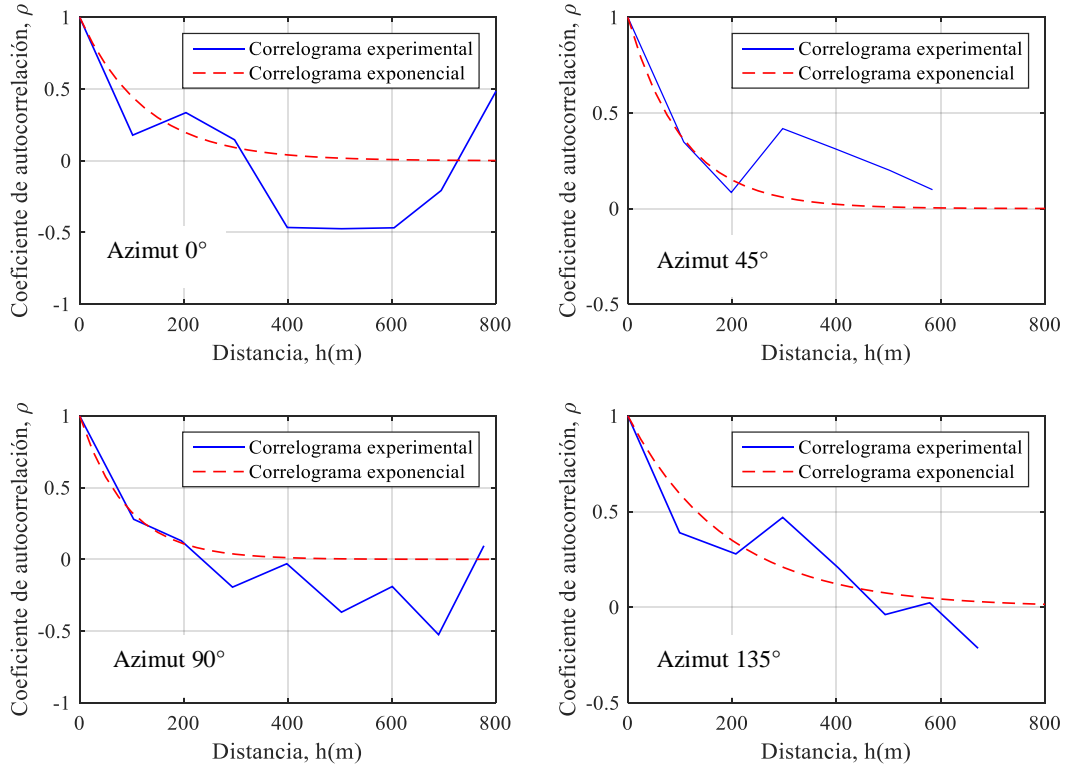


Figura 4.16 Correlogramas direccionales de la capa dura.

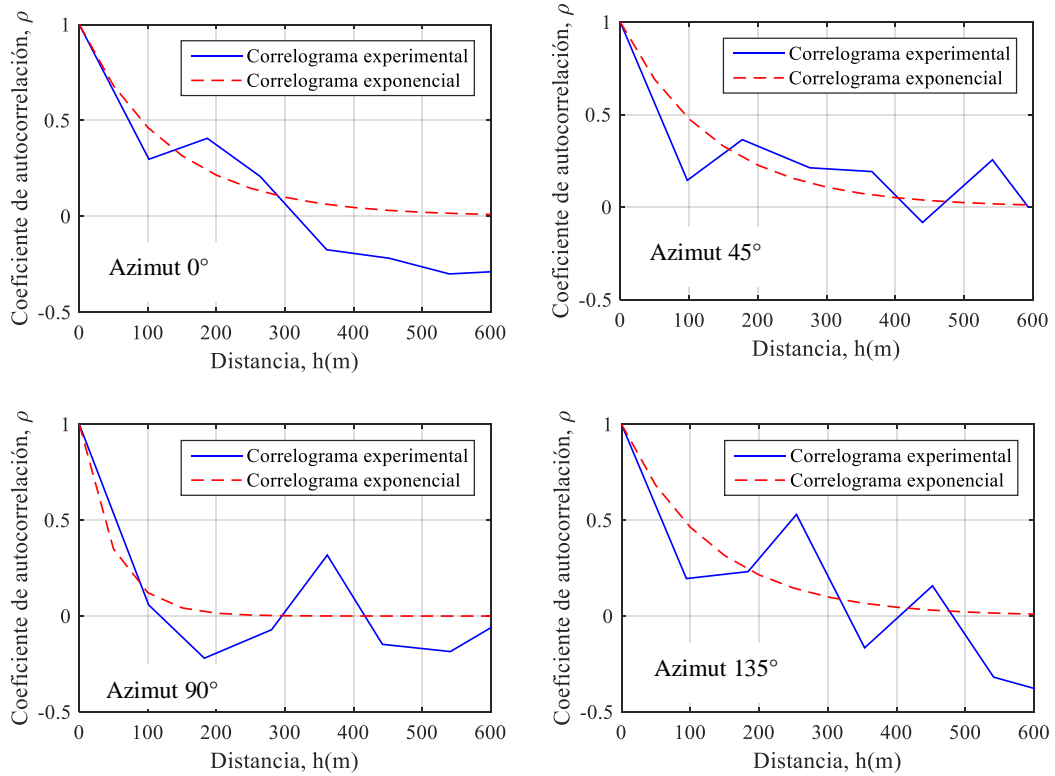


Figura 4.17 Correlogramas direccionales de la formación arcillosa inferior.

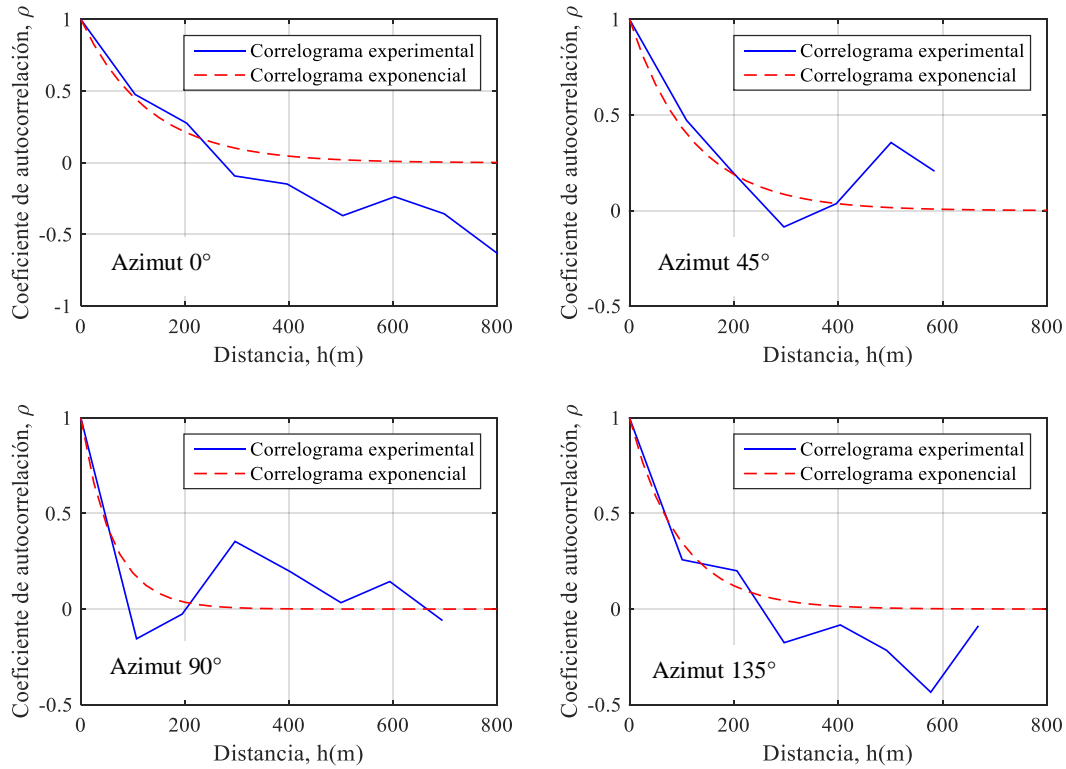


Figura 4.18 Correlogramas direccionales de los depósitos estratificados profundos.

**Predicción**

La estimación de la profundidad de la frontera superior de cada una de las capas típicas (campo aleatorio  $R^2$ ), se realizó empleando la técnica de *Kriging Ordinario*, considerando los datos del campo residual y las correspondientes distancias de correlación anteriormente calculadas. Por tanto, para obtener la estimación final, se le reincorporo la tendencia a la estimación obtenida, empleando los correspondientes coeficientes de regresión lineal. La malla de estimación utilizada, cubre totalmente la superficie de estudio. La malla de estimación queda definida por los parámetros dela Tabla 4.5

Tabla 4.5 Parámetros de la malla estimación utilizados en la predicción.

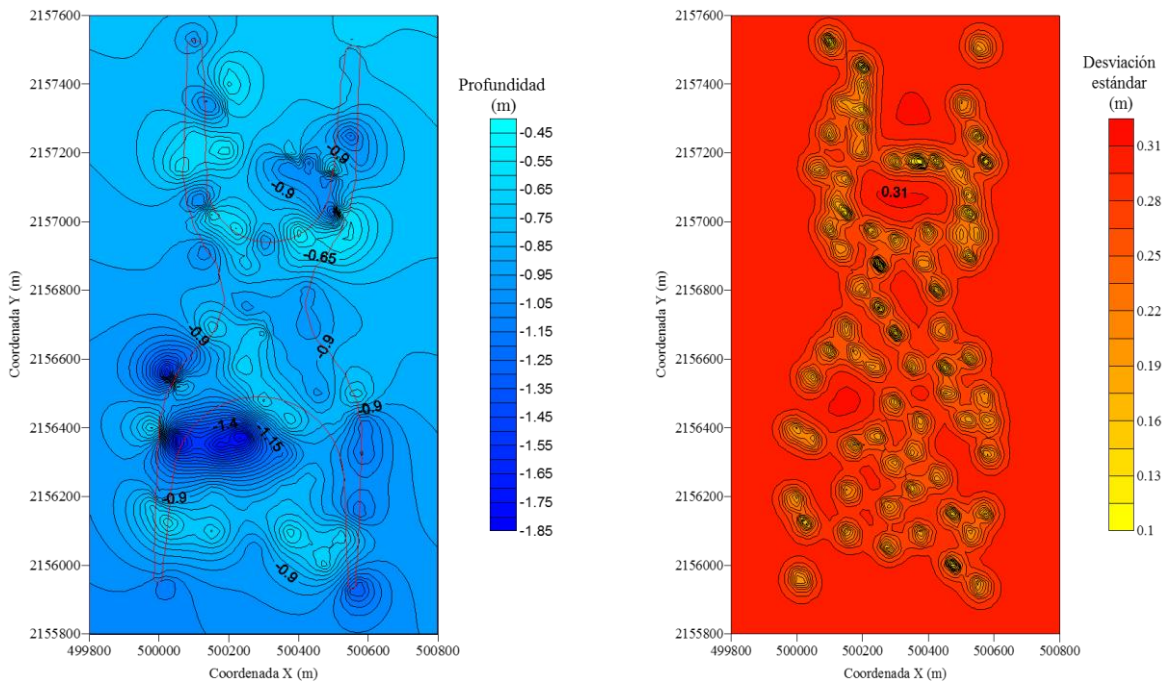
| Parámetro                   | Valor   |
|-----------------------------|---------|
| Coordenada inicial X (m)    | 499800  |
| Coordenada final X (m)      | 500800  |
| Coordenada inicial Y (m)    | 2155800 |
| Coordenada final Y (m)      | 2157600 |
| Separación entre puntos (m) | 25      |
| Número de puntos a estimar  | 2880    |



**Visualización**

Debido a que la interpretación de los resultados numéricos ordenados en forma tabular obtenidos en la estimación no es una tarea sencilla, se recurre al uso de herramientas de graficación avanzada, para elaborar mapas de contornos y de superficies 3D, que permitan visualizar de manera sencilla la distribución espacial de cada una de las capas típicas analizadas. En las Figura 4.19 a 4.25, se presenta el mapa de contornos de cada una de las capas típicas, asimismo, en la Figura 4.26, se muestra un modelo 3D que integra las capas típicas

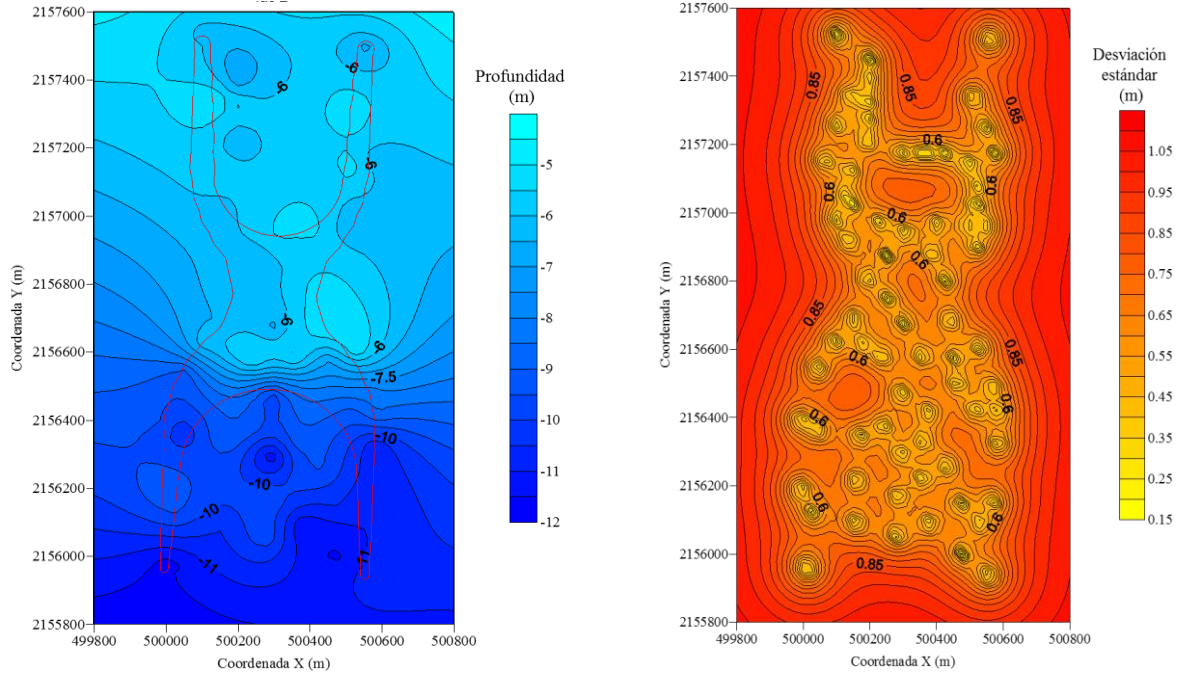
Cada figura está conformada por dos mapas de contornos, el de la parte izquierda corresponde a los contornos de la distribución espacial de la profundidad de la frontera superior estimada. El lado derecho, representa los contornos de la desviación estándar de la estimación, donde se definen zonas de baja incertidumbre, en las zonas con datos.



a) Mapa de contornos de la estimación.

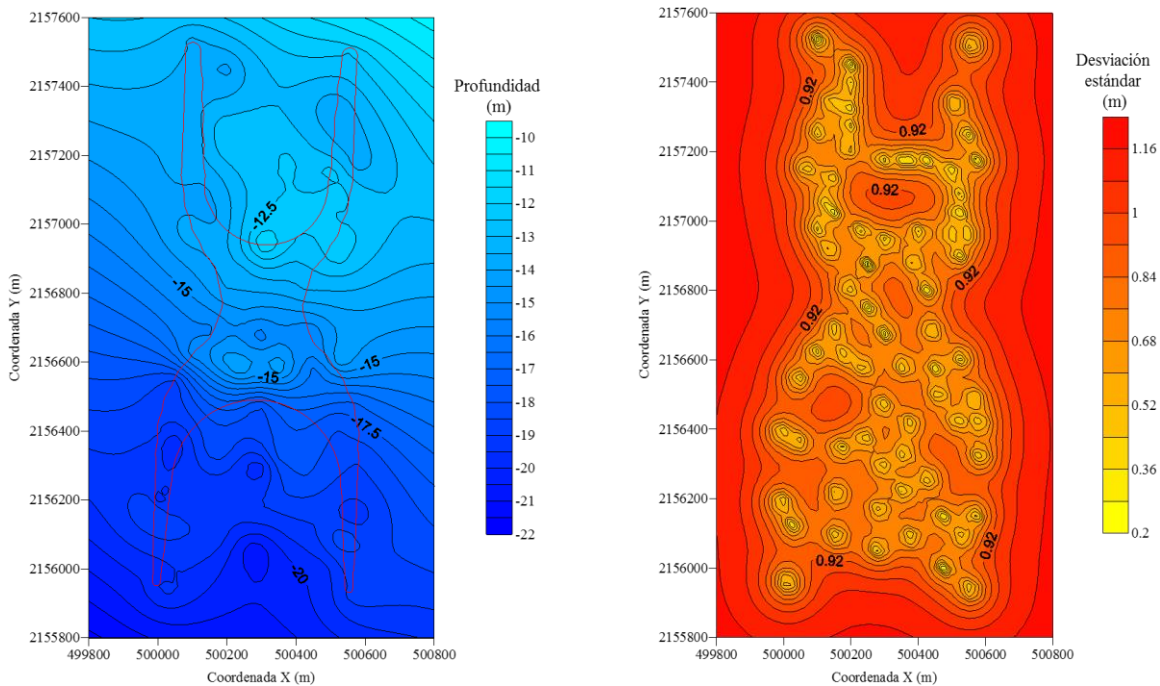
b) Mapa de contornos de la desviación estándar de estimación.

Figura 4.19 Distribución espacial de la profundidad de la frontera superior de la FAS 1.



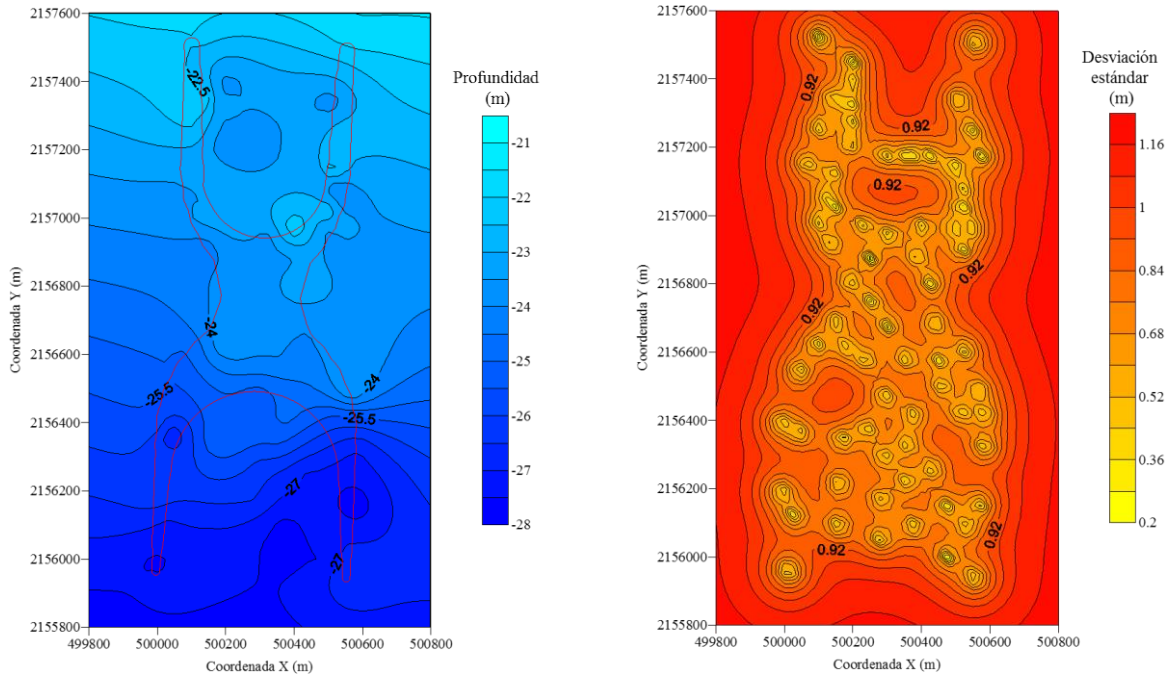
a) Mapa de contornos de la estimación. b) Mapa de contornos de la desviación estándar de estimación.

Figura 4.20 Distribución espacial de la profundidad de la frontera superior de la FAS 2.



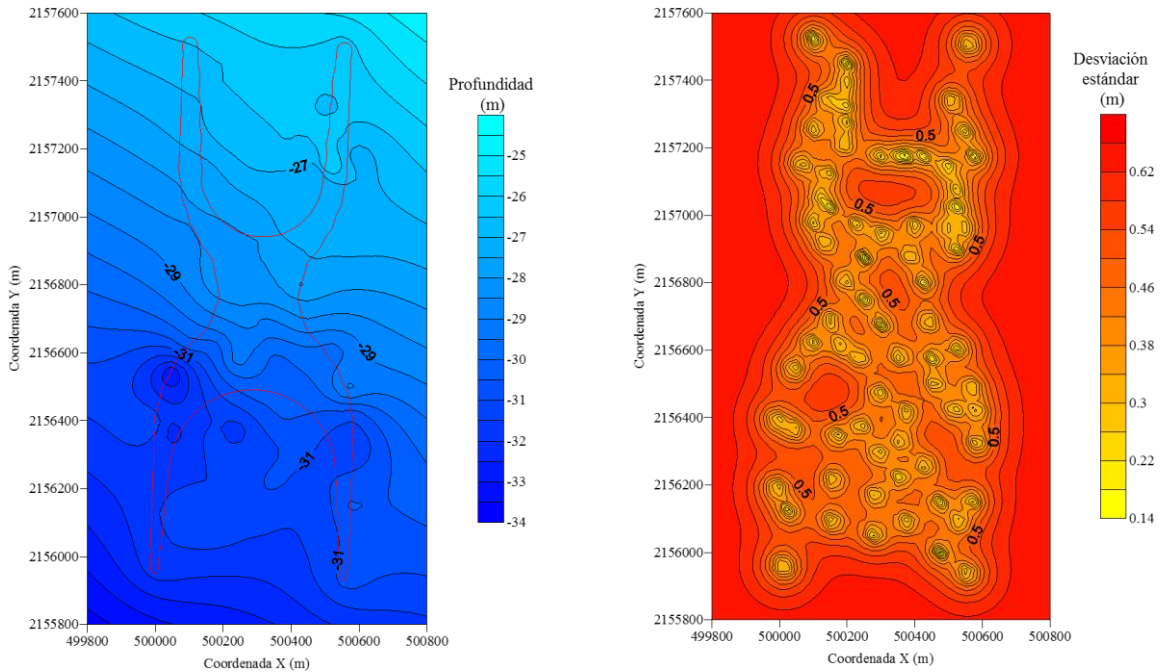
a) Mapa de contornos de la estimación. b) Mapa de contornos de la desviación estándar de estimación.

Figura 4.21 Distribución espacial de la profundidad de la frontera superior de la FAS 3.



a) Mapa de contornos de la estimación. b) Mapa de contornos de la desviación estándar de estimación.

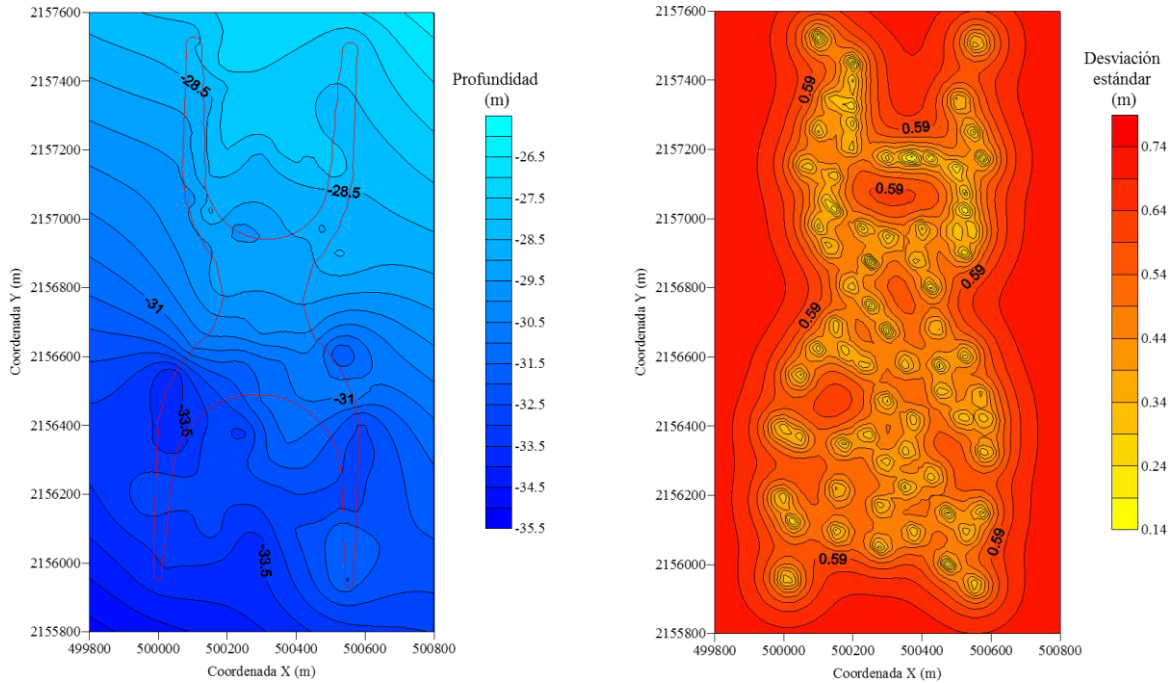
Figura 4.22 Distribución espacial de la profundidad de la frontera superior de la FAS 4.



a) Mapa de contornos de la estimación. b) Mapa de contornos de la desviación estándar de estimación.

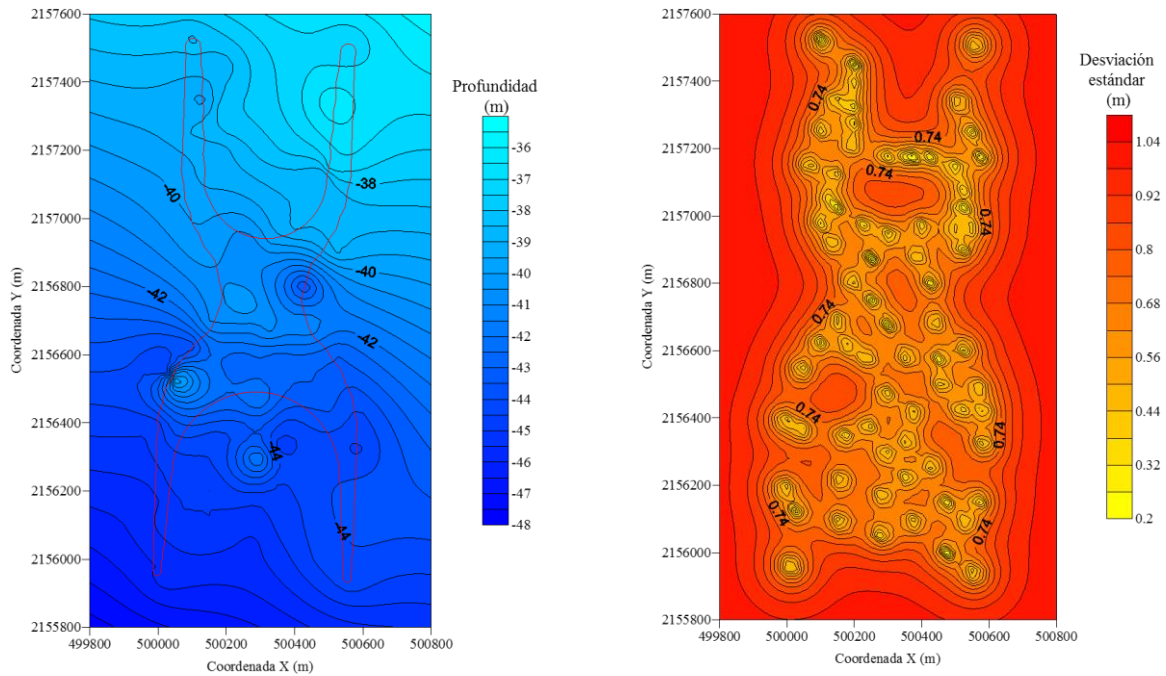
Figura 4.23 Distribución espacial de la profundidad de la frontera superior de la CD.





a) Mapa de contornos de la estimación. b) Mapa de contornos de la desviación estándar de estimación.

Figura 4.24 Distribución espacial de la profundidad de la frontera superior de la FAI.



a) Mapa de contornos de la estimación. b) Mapa de contornos de la desviación estándar de estimación.

Figura 4.25 Distribución espacial de la profundidad de la frontera superior de la DEP.

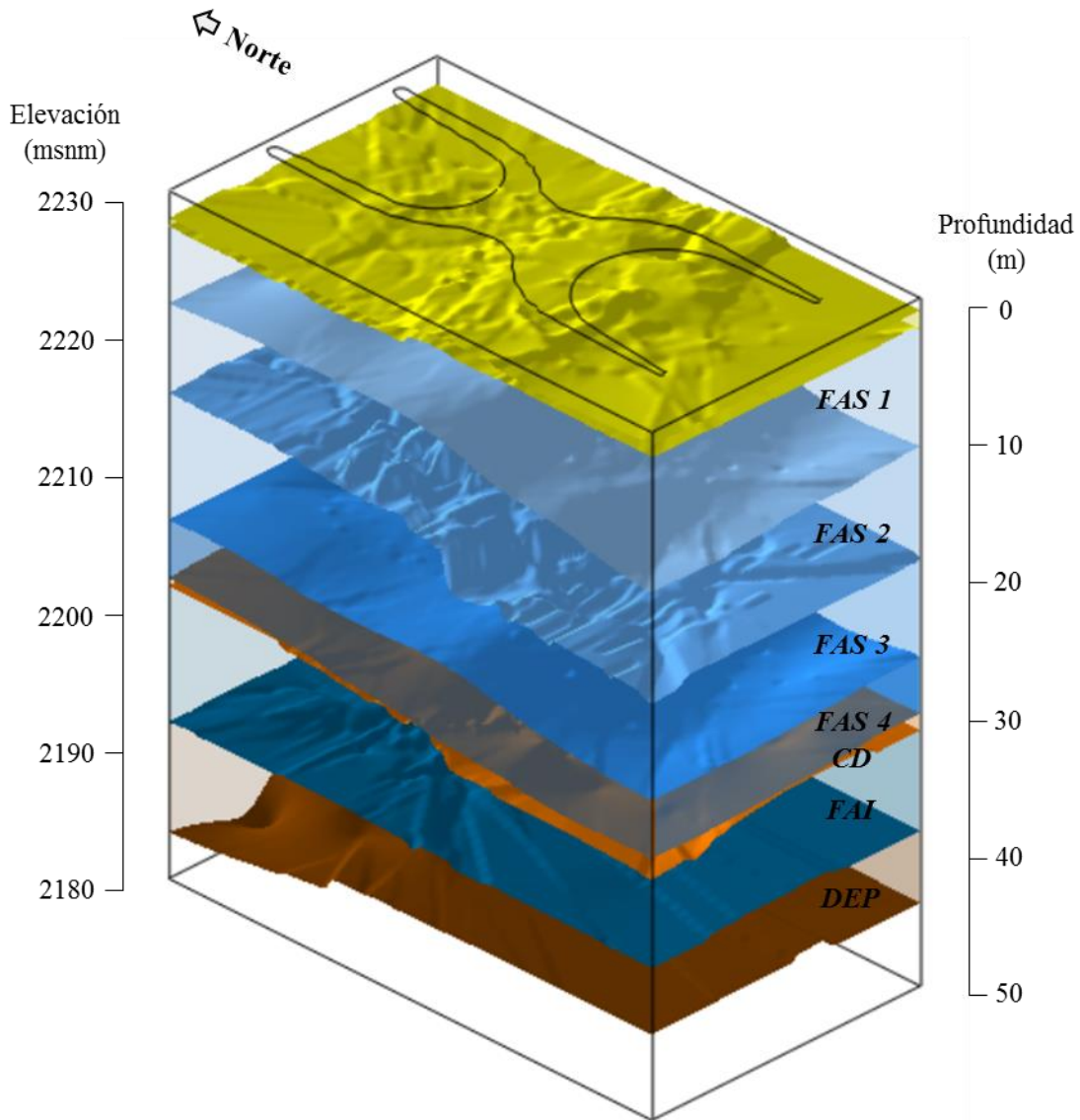


Figura 4.26 Modelo 3D de la estratigrafía del sitio.

**Análisis de resultados**

De acuerdo con los modelos de las Figuras 4.21 a 40.26, se observa que la frontera superior de la FAS 1 presenta una superficie altamente irregular, con una tendencia de ser más profunda hacia el suroeste y menos profunda en al noreste. La irregularidad exhibida se asocia principalmente a la existencia de: caminos, canales, zonas bajas y áreas de depósitos de rellenos. La desviación estándar de la FAS 1, indica que es la formación con mayor cantidad de datos. Asimismo, las variaciones de la incertidumbre están asociadas a la ubicación y magnitud de los datos.

Debajo de las FAS 1, se encuentra la segunda formación arcillosa (FAS 2), la cual presenta una variación más regular. La distribución espacial de esta capa, presenta una tendencia de profundizarse hacia el sur, donde los valores de la profundidad son del orden de 10 m. Por otra parte, se observa que en el mapa de la desviación estándar de estimación se definen zonas más amplias de menor incertidumbre.

Las dos formaciones subyacentes, FAS 3 y FAS 4, presentan una distribución similar en sus fronteras superiores, donde se aprecia que la presencia de las zonas bajas y de los depósitos de relleno, tiene menor influencia en la variación de estas capas, asimismo, se observa que ambas formaciones tienden a aumentar en profundidad hacia la dirección sur, con valores del orden de 20 m para la FAS 3 y de 27 m para la FAS 4. En los mapas de desviación estándar de la estimación de las dos capas, se puede ver una definición de las mismas zonas de incertidumbre.

Después de la formación arcillosa superior, se encuentra la capa dura, de acuerdo con el mapa de contornos, la CD, presenta una distribución con transiciones más suavizadas en comparación con la FAS, con una tendencia a aumentar en profundidad hacia la dirección sur, donde los valores son del orden de 30 m. La desviación estándar de la estimación, define las mismas zonas de incertidumbre que las dos formaciones anteriores. Sin embargo, se observa que la incertidumbre de la estimación es menor, lo cual se asocia con las magnitudes de las mediciones.

Debajo de la capa dura, se encuentra otro estrato arcilloso, la FAI, el cual presenta el intervalo de variación de profundidades de aproximadamente 5 m, la distribución de la frontera superior de esta formación, es prácticamente igual a la de la capa dura, asimismo, se observa una tendencia hacia la parte sur, donde aprecian valores de profundidad de hasta 35 m. En el mapa de la desviación estándar de la estimación, se observa un ligero aumento en las zonas de mayor incertidumbre en comparación a la CD.

En la parte final del dominio de estudio, se encuentran los depósitos estratificados profundos, los cuales presentan una distribución con irregularidades en tres puntos de la parte centro sur de la zona de estudio. Con base en los mapas de la desviación estándar de la estimación, se asocian con la falta de datos en esas zonas.

### 4.2.2 Análisis de las propiedades geotécnicas del subsuelo en 3D

#### 4.2.2.1 Contenido de agua ( $w$ )

Particularmente para el subsuelo del Valle de México, el contenido de agua, es la propiedad índice que más destaca, especialmente para los materiales cohesivos, debido a las correlaciones que presenta con el tipo de material y con las propiedades mecánicas (Auvinet *et al.*, 2017).

#### Definición del dominio del campo aleatorio

El conjunto de valores de contenido de agua ( $w$ ), obtenidos a partir de información de sondeos de penetración estándar (SPT), se consideran como un campo aleatorio  $V(X)$ , distribuido dentro de un espacio  $R^P$  con  $P=3$  (volumen de estudio). Estos datos determinados dentro del dominio  $R^3$ , constituyen una muestra de ese campo aleatorio. Para realizar el análisis de la distribución espacial de esta propiedad, se utilizó la información de 24 SPT, distribuidos en el área de estudio como se muestra en la Figura 4.27.

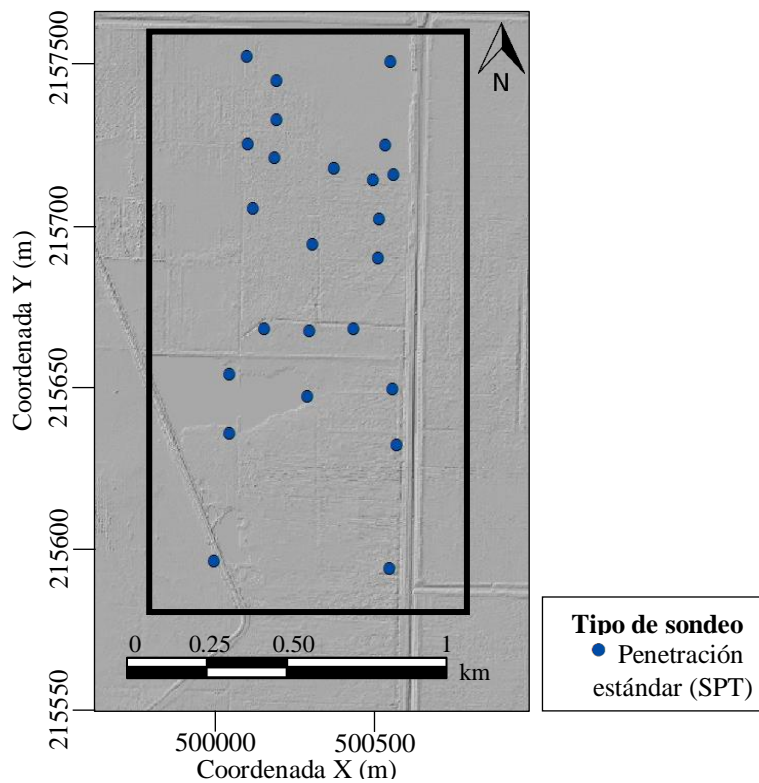


Figura 4.27 Ubicación de los sondeos SPT con datos de contenido de agua.

#### Análisis estadístico

A partir de los datos experimentales y aceptando la hipótesis de ergodicidad del campo aleatorio considerado, se estiman sus principales parámetros estadísticos. Los resultados se presentan en la Tabla 4.6.

Tabla 4.6 Descripción estadística de la información de contenido de agua.

| Parámetro           | $w$ (%) |
|---------------------|---------|
| Media               | 126.7   |
| Mediana             | 115.8   |
| Moda                | 60      |
| Desviación estándar | 79.26   |
| Valor máximo        | 370.1   |
| Valor mínimo        | 1.94    |

Los valores de Tabla 4.6, indican que los datos de contenido de agua con magnitud superior a 300% corresponden a las formaciones arcillosas, las magnitudes bajas se asocian a suelos rígidos constituidos por arena y limo. Adicionalmente, se construyó el histograma que representa la variación de la propiedad en el área de estudio (Figura 4.28).

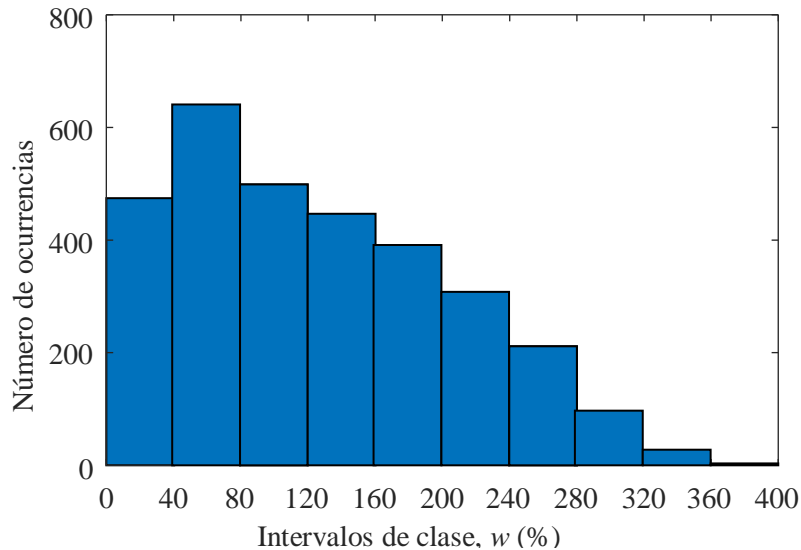


Figura 4.28 Histograma de la información de contenido de agua.

En el histograma de contenido de agua, se aprecia que el mayor número de las mediciones disponibles, se concentran en los intervalos de 1 a 160%, asimismo, el menor número de datos se encuentran en los intervalos de 160 a 400%.

**Análisis de tendencia**

La tendencia del campo  $s$  representa por un hiperplano con la ecuación lineal  $V(X)=ax+by+cz+d$ , donde “ $z$ ” es la profundidad, “ $a, b, c, d$ ” son los coeficientes de regresión lineal, los valores resultantes de los datos de contenido de agua, se indican en la Tabla 4.7.



Tabla 4.7 Coeficientes de la regresión lineal de la información del contenido de agua.

| Coeficientes de la regresión lineal |          |          |           |
|-------------------------------------|----------|----------|-----------|
| <i>a</i>                            | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i>  |
| 0.0055                              | 0.0041   | -2.8175  | -11284.44 |

Los coeficientes de la tabla anterior, permiten retirar la tendencia a los datos de contenido de agua, es decir, permiten transformar el campo original (con tendencia) a un campo residual (sin tendencia). En la Figura 4.29 se muestra la representación de estos campos respecto a la profundidad.

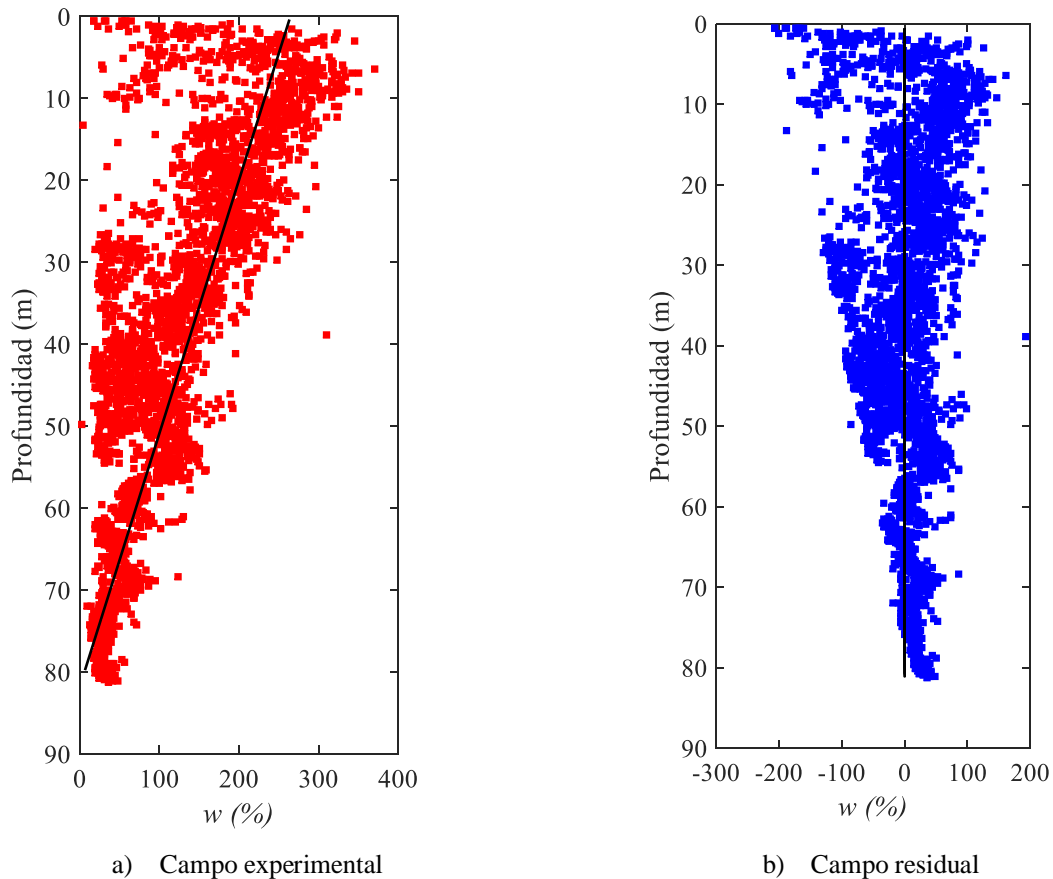


Figura 4.29 Grafica de dispersión de datos del campo experimental y residual del contenido de agua.

**Análisis estructural**

Considerando los datos del campo residual, se calcularon los correlogramas experimentales en las direcciones horizontal y vertical (Figura 4.30), con base en estos correlogramas se calcularon las distancias de correlación, resultando estas:  $\delta_{ver}=3.5$  m y  $\delta_{hor}=700$  m. Con estos valores, y adaptando un modelo de correlación exponencial simple, se determinaron los correlogramas direccionales mostrados en Figura 4.30.

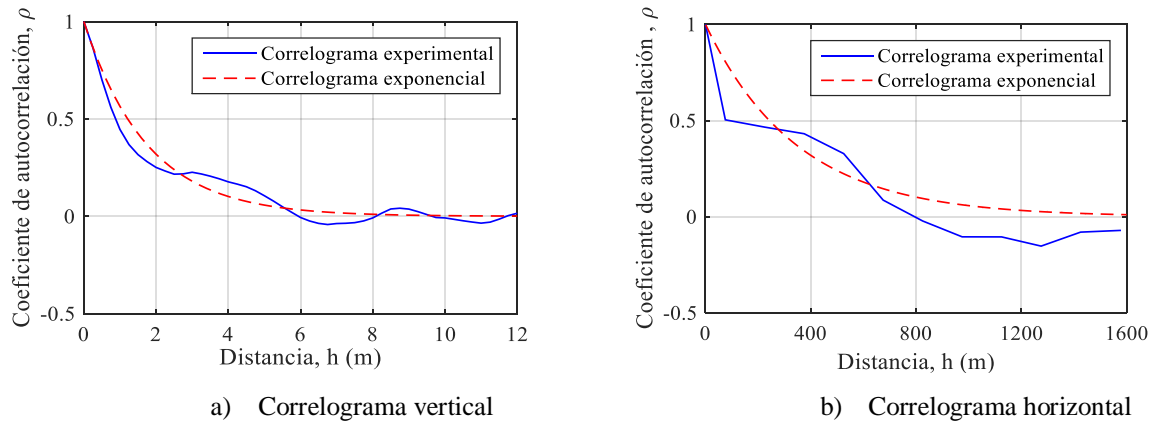


Figura 4.30 Modelos de correlación espacial del contenido de agua.

**Predicción**

Empleando la técnica de *Kriging Ordinario*, se estimaron los perfiles de contenido de agua,  $w$  (%), a cada 50 m a lo largo de dos ejes preferenciales “1” y “2”, definidos en la Figura 4.31. La propiedad se estimó puntualmente a lo largo de la profundidad con un paso de cálculo de 0.25 m. Las estimaciones finales, se obtiene regresando la tendencia a las estimaciones residuales.

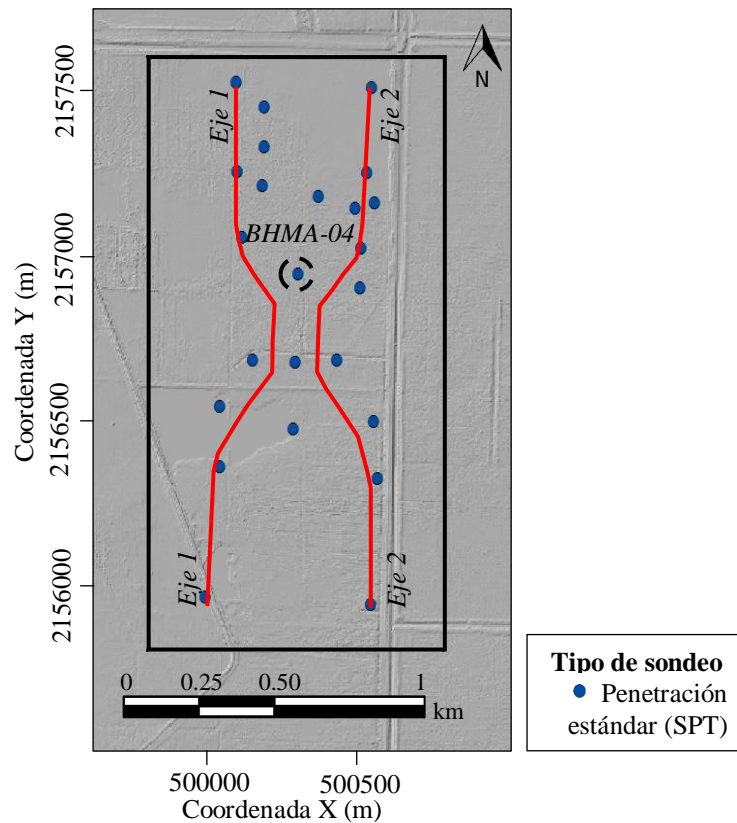
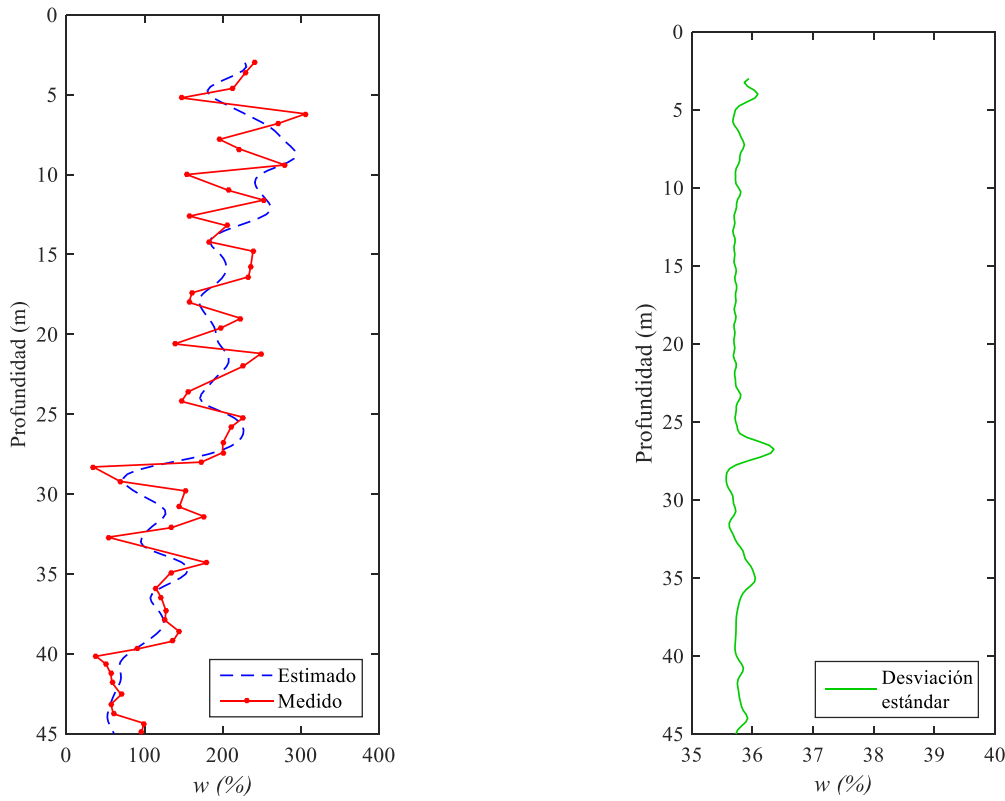


Figura 4.31 Ejes preferenciales de estimación.

**Validación cruzada**

Como se ha mencionado, en la geoestadística, la forma más objetiva de evaluar la consistencia de las estimaciones, es mediante la técnica de validación cruzada que consisten en retirar un dato y estimarlo a partir del resto, aplicando la técnica de Kriging Ordinario y comparando los dos valores, entre menor sea la diferencia, la estimación tendrá mayor aproximación, es decir, la estimación será consistente. En este trabajo, se realizó la validación retirando los datos de  $w$  del sondeo *BHMA-04*, su ubicación se indica en la Figura 4.31.

En la Figura 4.32, se muestran los resultados de la validación cruzada, donde se observa que las estimaciones definen la tendencia general del perfil experimental de contenido de agua. Con base en los resultados, puede decirse que el estimador empleado proporciona resultados consistentes y coherentes con las condiciones del subsuelo. Por tanto, se pueden dar como aceptables los resultados de las estimaciones, así como, el correcto funcionamiento del algoritmo desarrollado.



c) Perfil de contenido de agua estimado

d) Desviación estándar de estimación

Figura 4.32 Resultados de la validación cruzada del contenido de agua.

### ***Visualización***

Para facilitar la interpretación de los valores tabulares del contenido de agua, se recurre a técnicas de graficación avanzada para elaborar secciones transversales y modelos 3D, que facilitan la interpretación de la distribución espacial del contenido de agua. En las Figuras 4.33 y 4.34 se muestran las secciones estimadas y su incertidumbre asociada. En la Figura 4.35 se presenta un modelo 3D de la distribución espacial del contenido de agua dentro del área estudiada.

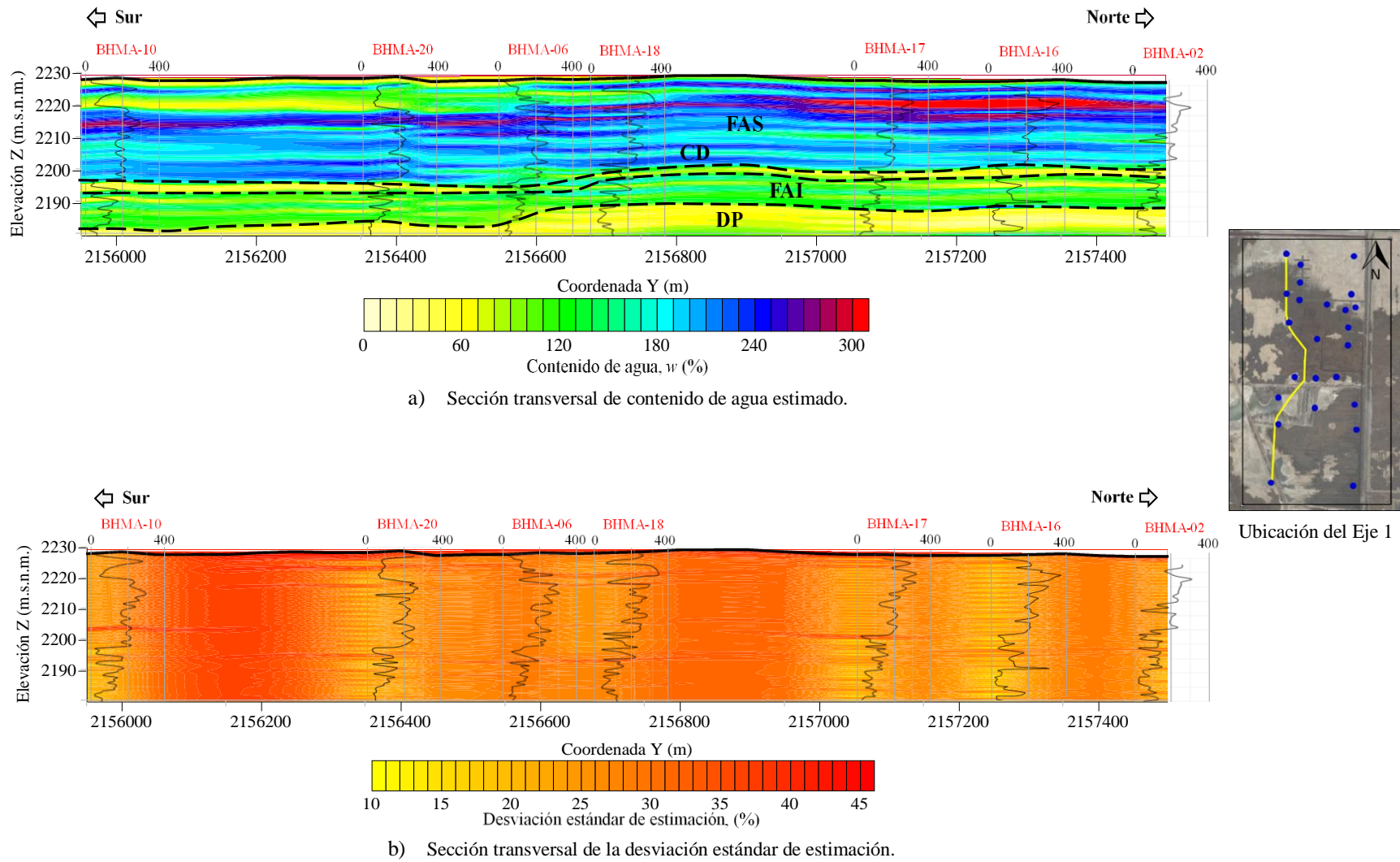


Figura 4.33 Distribución espacial del contenido del agua estimado a lo largo del Eje 1.

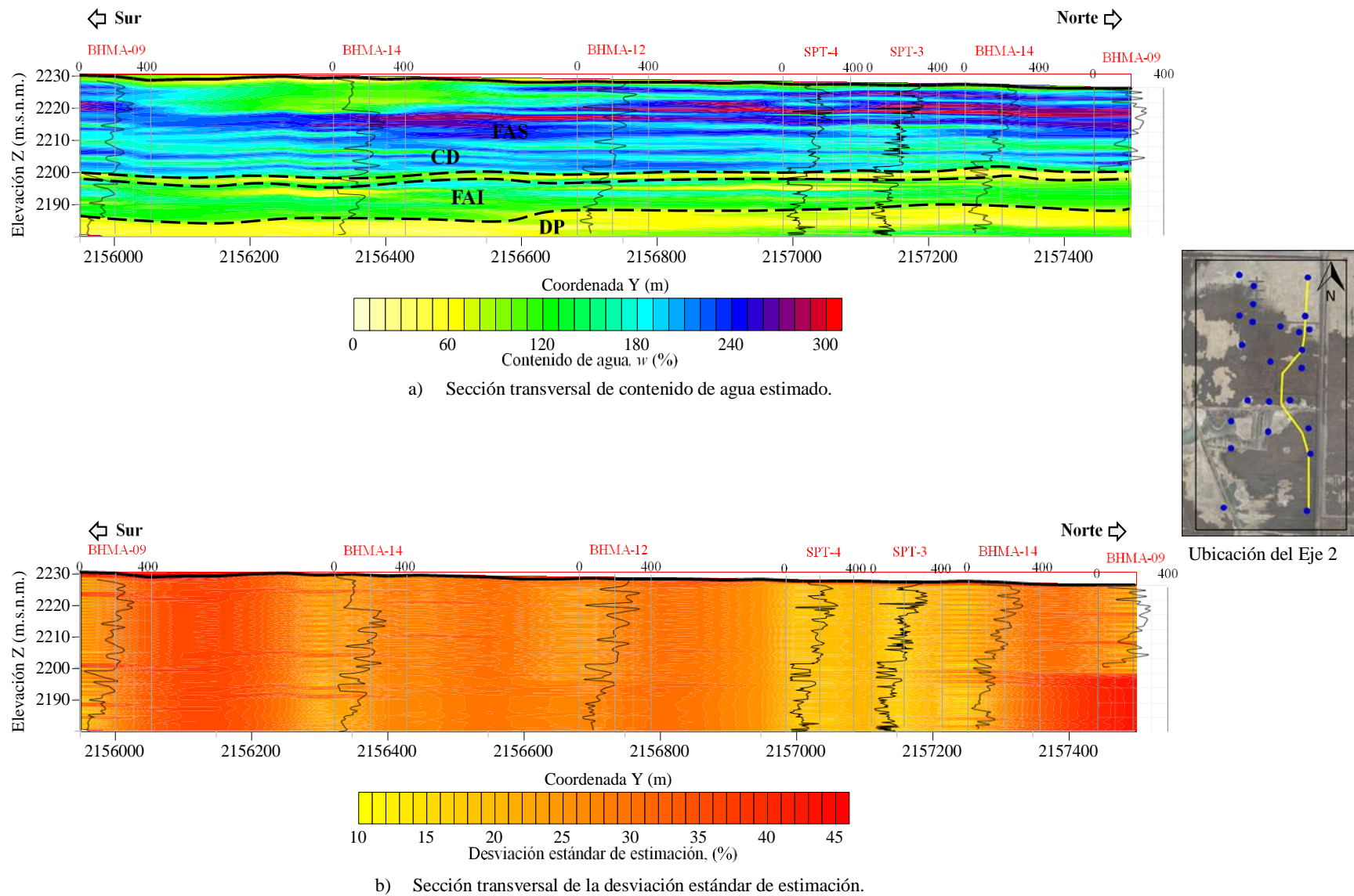


Figura 4.34 Distribución espacial del contenido de agua estimado a lo largo del Eje 2.

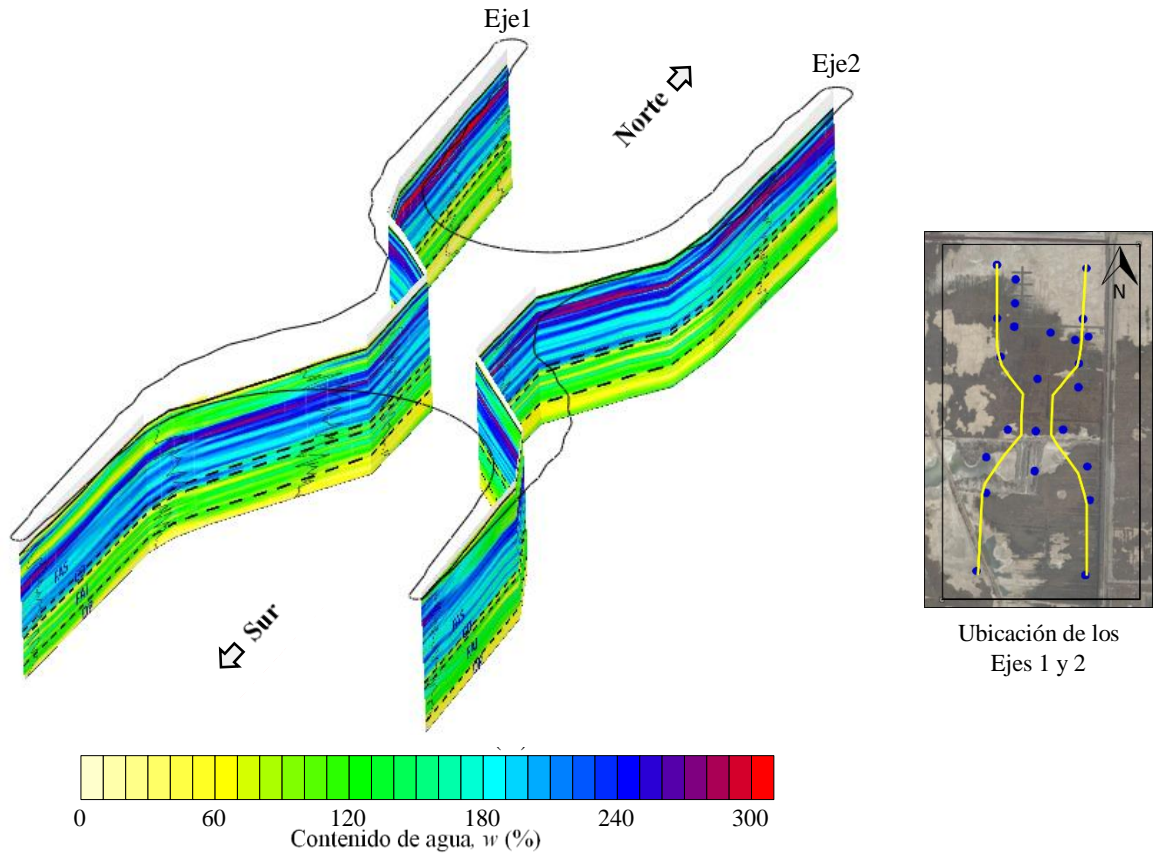


Figura 4.35 Modelo 3D de la distribución espacial del contenido de agua estimado.

**Interpretación de resultados**

Con base en las secciones transversales estimadas, y de acuerdo con la escala de colores, se observa que la distribución espacial del contenido de agua  $w$  es similar en los dos ejes preferenciales. Asimismo, también se observa que los valores de contenido de agua, aumentan hacia el norte.

En la parte superior de cada eje, se aprecia una capa delgada con espesor variable, con valores bajos de contenido de agua que corresponden a la costra superficial. Bajo de esta capa, se distingue un aumento de la magnitud del  $w$ , al norte se supera el 300% y al sur el 240%. Los valores de  $w$  en esta capa son característicos de la arcilla del Valle de México y corresponden a la formación arcillosa superior (FAS). Asimismo, dentro de esta formación, se distinguen delgadas capas con magnitudes bajas de contenidos de agua, los cuales se asocian a lentes de arena. Estas capas o lentes delgados, presentan mayor espesor en la parte norte del área estudiada.

Un aspecto notorio dentro de la FAS en ambas secciones, es la existencia de una franja de aproximadamente 10 m de espesor que inicia aproximadamente a la mitad de la sección hacia la parte sur, donde se aprecian

valores de contenido de agua del orden de 120%, que son relativamente bajos en comparación con los contenidos típicos de esta formación. Esta reducción en los valores de  $w$ , se asocia con la sobrecarga que ejercen los rellenos depositados en las zonas de encharcamientos, por donde los dos ejes preferenciales.

Bajo la FAS, se observa una capa con espesor del orden de 2 m, con valores de contenido de agua que varían de 60% a 90%, los cuales pertenecen a la capa dura.

Debajo de la CD, se encuentra un estrato con distribución del contenido de agua prácticamente homogéneo, que presenta una variación entre 60 y 120%, estos valores corresponden a la FAI. Por último, debajo de la CD se distinguen valores menores a 70% que corresponden a los DP.

Las secciones de la desviación estándar de estimación representan la incertidumbre asociada a las estimaciones del contenido de agua, estos modelos permiten identificar las zonas donde existe ausencia de datos. En general, en las secciones se aprecia baja incertidumbre, lo cual se debe a que existe un número considerable de datos distribuidos en el área de estudios y particularmente a que varios sondeos se encuentran a corta distancia de los ejes preferenciales de análisis. Asimismo, se aprecia que la desviación estándar de estimación es más baja en el eje 2, esto se debe a que existen más sondeos ubicados a corta distancia respecto al eje preferencial 2.



#### 4.2.2.2 Resistencia de punta ( $q_c$ ) en CPT

La resistencia de punta, es también un parámetro que permite caracterizar el tipo de materiales de acuerdo con su rigidez. El cono eléctrico, es una de las pruebas más utilizadas en los suelos blandos y también es una de las que más información aporta (Auvinet *et al.*, 2017).

#### Definición del dominio del campo aleatorio

El conjunto de valores de resistencia de punta ( $q_c$ ), obtenidos a partir de información de sondeos de cono eléctrico, se consideran como un campo aleatorio  $V(X)$ , distribuido dentro de un espacio  $R^P$  con  $P=3$  (volumen de estudio). Estos datos determinados dentro del dominio  $R^3$ , constituyen una muestra de ese campo aleatorio. Para realizar el análisis de la distribución espacial de esta propiedad, se utilizó la información de 39 conos eléctricos, distribuidos en el área de estudio como se muestra en la Figura 4.36.

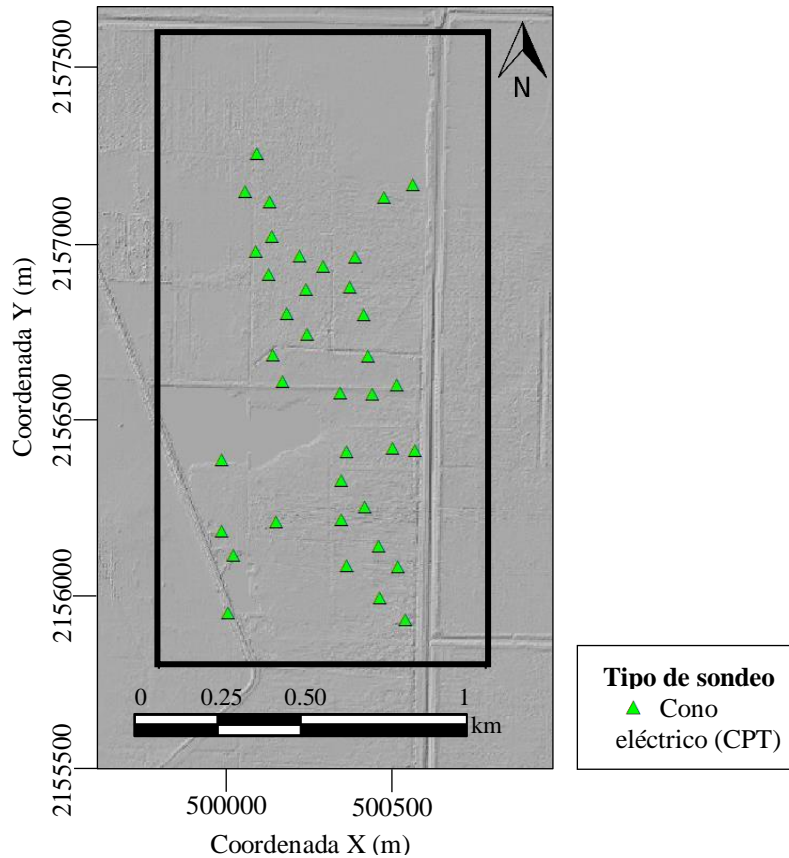


Figura 4.36 Distribución de los sondeos CPT en la zona de estudio.

#### Análisis estadístico

A partir de los datos experimentales y aceptando la hipótesis de ergodicidad del campo aleatorio considerado, se estiman sus principales parámetros estadísticos. Los resultados se presentan en la Tabla 4.8.

Tabla 4.8 Descripción estadística de los valores de resistencia  $q_c$  en CPT.

| Parámetro           | $q_c$ (kPa) |
|---------------------|-------------|
| Media               | 873.4       |
| Mediana             | 508.2       |
| Moda                | 250         |
| Desviación estándar | 1097.92     |
| Valor máximo        | 5000        |
| Valor mínimo        | 14          |

Los valores de Tabla 4.8, indican que los datos de  $q_c$  con magnitud inferior a 1000 kPa, corresponden a las formaciones arcillosas, las magnitudes más altas de resistencia, se asocian a suelos rígidos constituidos por arena y limo. Adicionalmente, se construyó el histograma que representa la variación de la propiedad en el área de estudio (Figura 4.37).

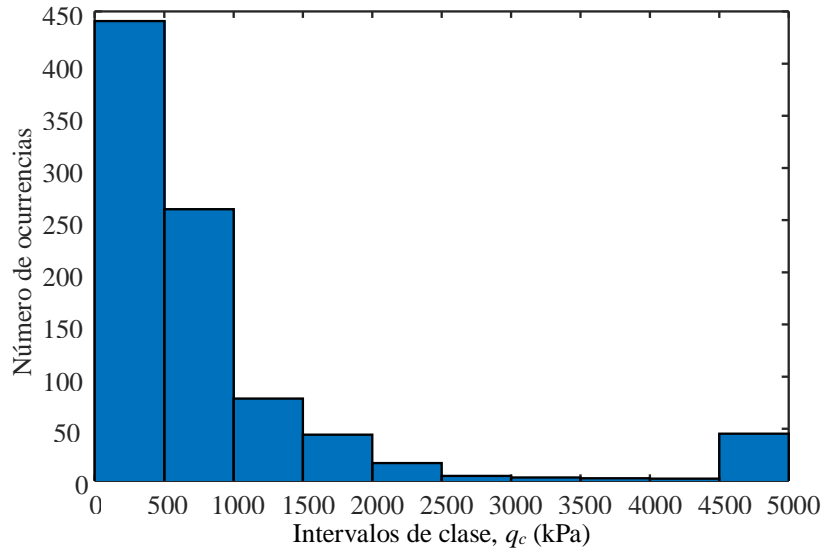


Figura 4.37 Histograma de valores de resistencia de punta.

En el histograma de resistencia  $q_c$ , se aprecia que el mayor número de las mediciones disponibles, se concentran en los intervalos de 14 a 1000 kPa, asimismo, el menor número de datos se encuentran en los intervalos de 2500 a 4500 kPa. Debe señalarse, que para analizar la distribución de la resistencia  $q_c$ , los valores fueron acotados a 5000 kPa, con el propósito de observar las variaciones locales en los estratos

**Análisis de tendencia**

La tendencia del campo s representa por un hiperplano con la ecuación lineal  $V(X)=ax+by+cz+d$ , donde “a, b, c, d” son los coeficientes de regresión lineal, cuyos valores resultantes, se indican en la Tabla 4.9.

Tabla 4.9 Coeficientes de la regresión lineal de  $q_c$ .

| Coeficientes de la regresión lineal |        |         |               |
|-------------------------------------|--------|---------|---------------|
| $a$                                 | $b$    | $c$     | $d$           |
| 0.3626                              | 0.3969 | 68.4160 | -1037923.2000 |

Los coeficientes de la tabla anterior, permiten retirar la tendencia a los datos de contenido de agua, es decir, permiten transformar el campo original (con tendencia) a un campo residual (sin tendencia). En la Figura 4.38 se muestra la representación de estos campos respecto a la profundidad.

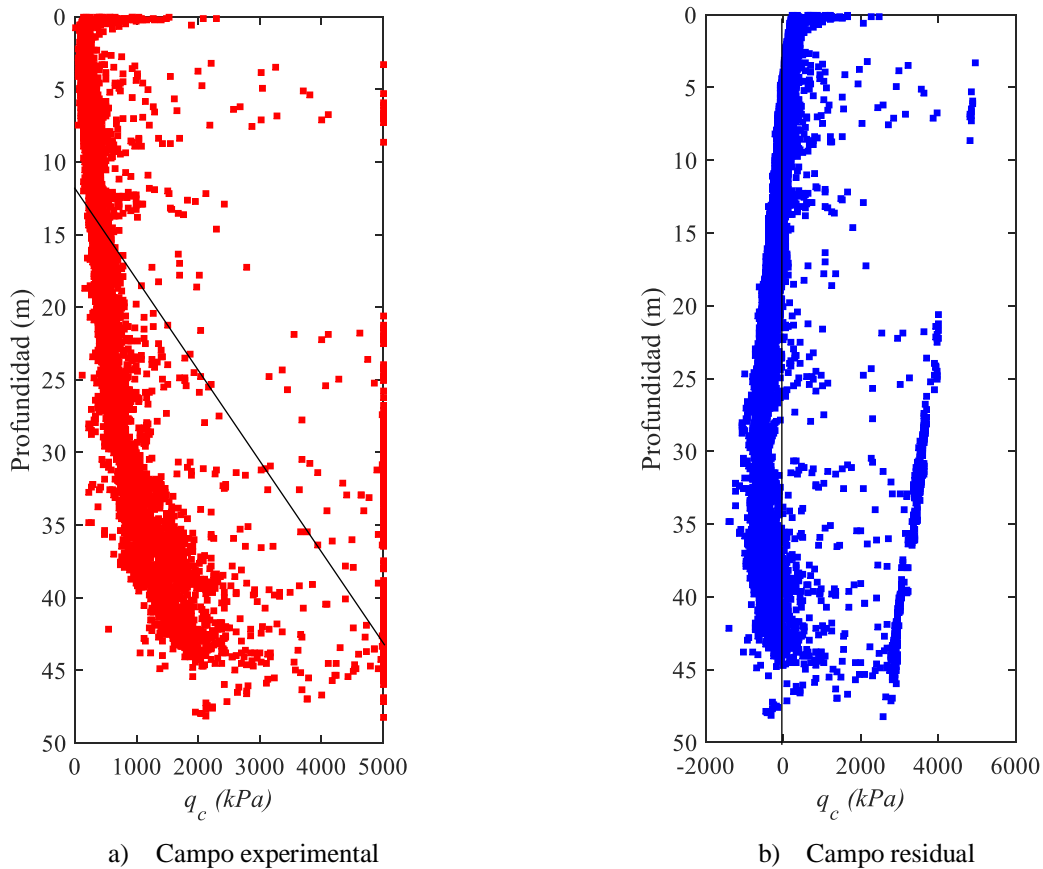


Figura 4.38 Gráfica de dispersión de datos del campo experimental y residual de resistencia  $q_c$  en CPT.

**Análisis estructural**

Considerando los datos del campo residual, se calcularon los correlogramas experimentales en las direcciones horizontal y vertical (Figura 4.39), asimismo, con base en estos correlogramas se calcularon las distancias de correlación, resultando estas:  $\delta_{ver}=3.5$  m y  $\delta_{hor}=500$  m. Con estos valores, y adaptando un modelo de correlación exponencial simple, se determinaron los correlogramas direccionales mostrados en la misma Figura 4.39.

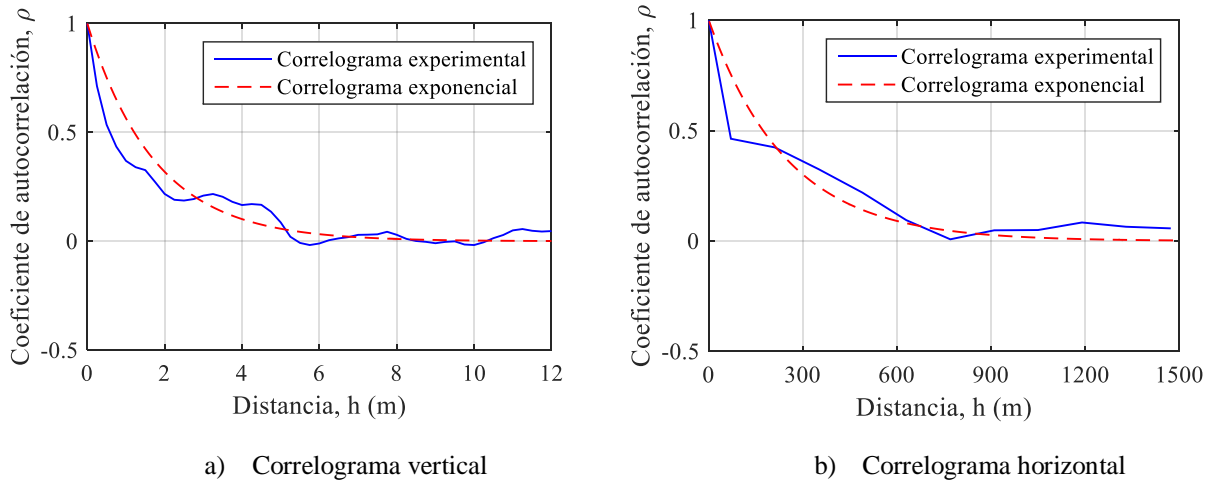


Figura 4.39 Modelos de correlación espacial de resistencia  $q_c$  en CPT.

**Predicción**

Con las distancias de correlación espacial,  $\delta_{ver}$  y  $\delta_{hor}$ , los modelos teóricos, los datos experimentales de los perfiles geotécnicos disponibles, y empleando la técnica de *Kriging Ordinario*, se estimaron los perfiles de resistencia  $q_c$  en CPT, a cada 50 m a lo largo de dos ejes preferenciales “1” y “2” (Figura 4.40).

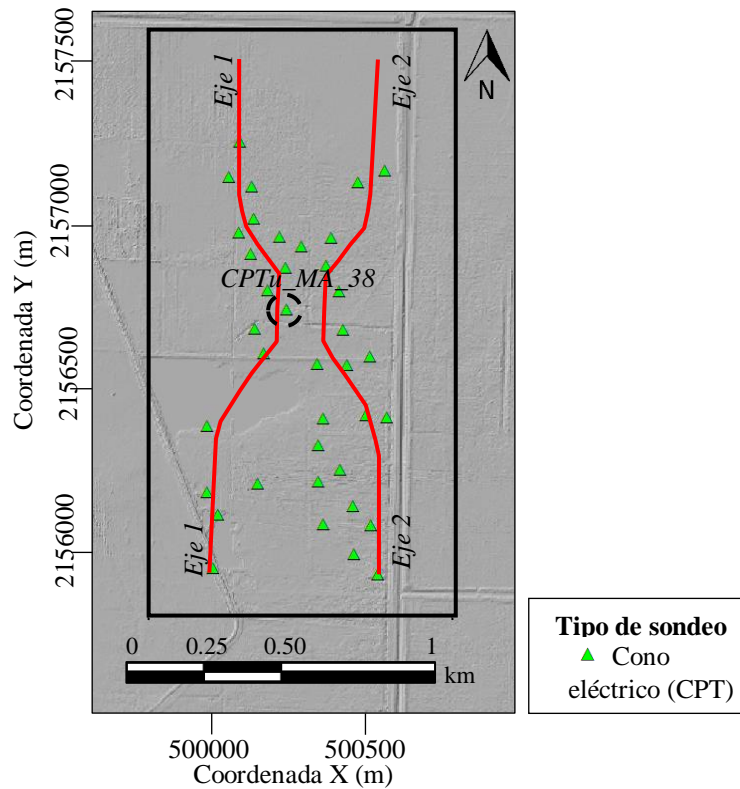


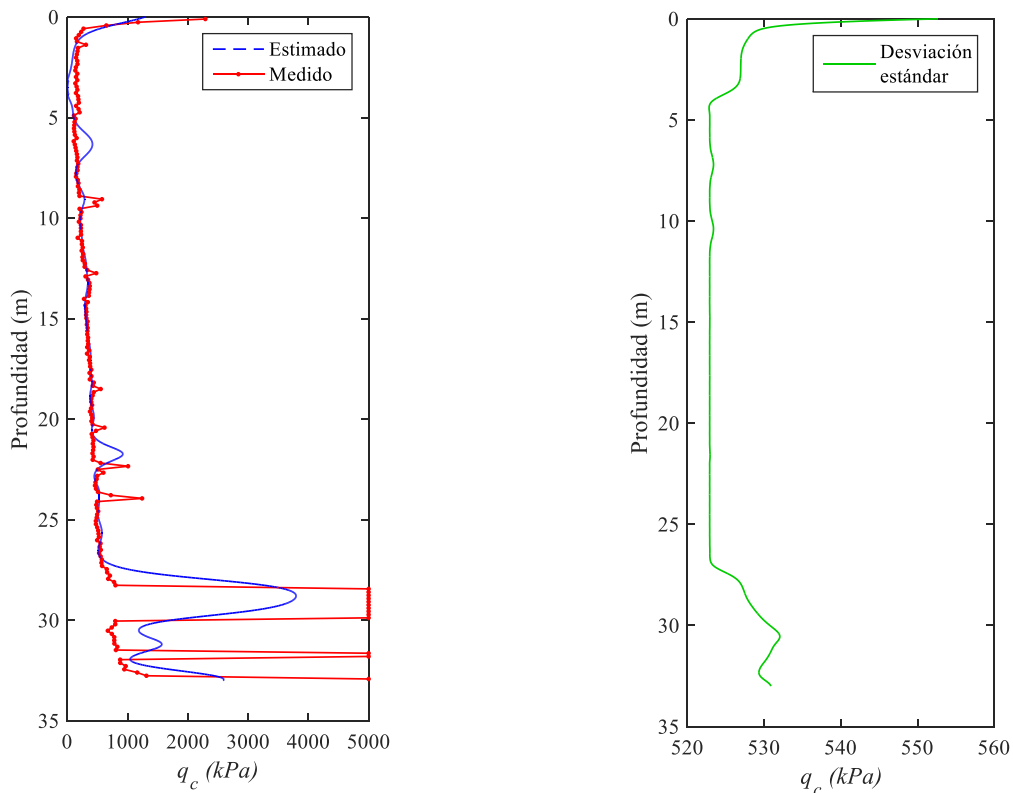
Figura 4.40 Ejes preferenciales de estimación.

La propiedad se estimó puntualmente a lo largo de la profundidad con un paso de cálculo de 0.02 m. Las estimaciones finales, se obtiene regresando la tendencia a las estimaciones residuales.

**Validación cruzada**

En este trabajo, se realizó la validación retirando los datos de  $w$  del sondeo  $CPTu\_MA-38$ , su ubicación se indica en la Figura 4.40.

En la Figura 4.41, se muestran los resultados de la validación cruzada, donde se observa que las estimaciones definen la tendencia general del perfil experimental de resistencia de punta. Con base en los resultados, puede decirse que el estimador empleado proporciona resultados consistentes y coherentes con las condiciones del subsuelo. Por tanto, se pueden dar como aceptables los resultados de las estimaciones, así como, el correcto funcionamiento del algoritmo desarrollado.



c) Perfil de resistencia  $q_c$  en CPT estimado

d) Desviación estándar de estimación

Figura 4.41 Resultados de la validación cruzada de  $q_c$  en CPT.

***Visualización***

Para facilitar la interpretación de los valores tabulares de resistencia de punta, se recurre a técnicas de graficación avanzada para elaborar secciones transversales y modelos 3D, que facilitan la interpretación de la distribución espacial del contenido de agua. En las Figuras 4.42 y 4.43 se muestran las secciones estimadas y su incertidumbre asociada. En la Figura 4.44 se presenta un modelo 3D de la distribución espacial de la resistencia  $q_c$  en CPT dentro del área estudiada.

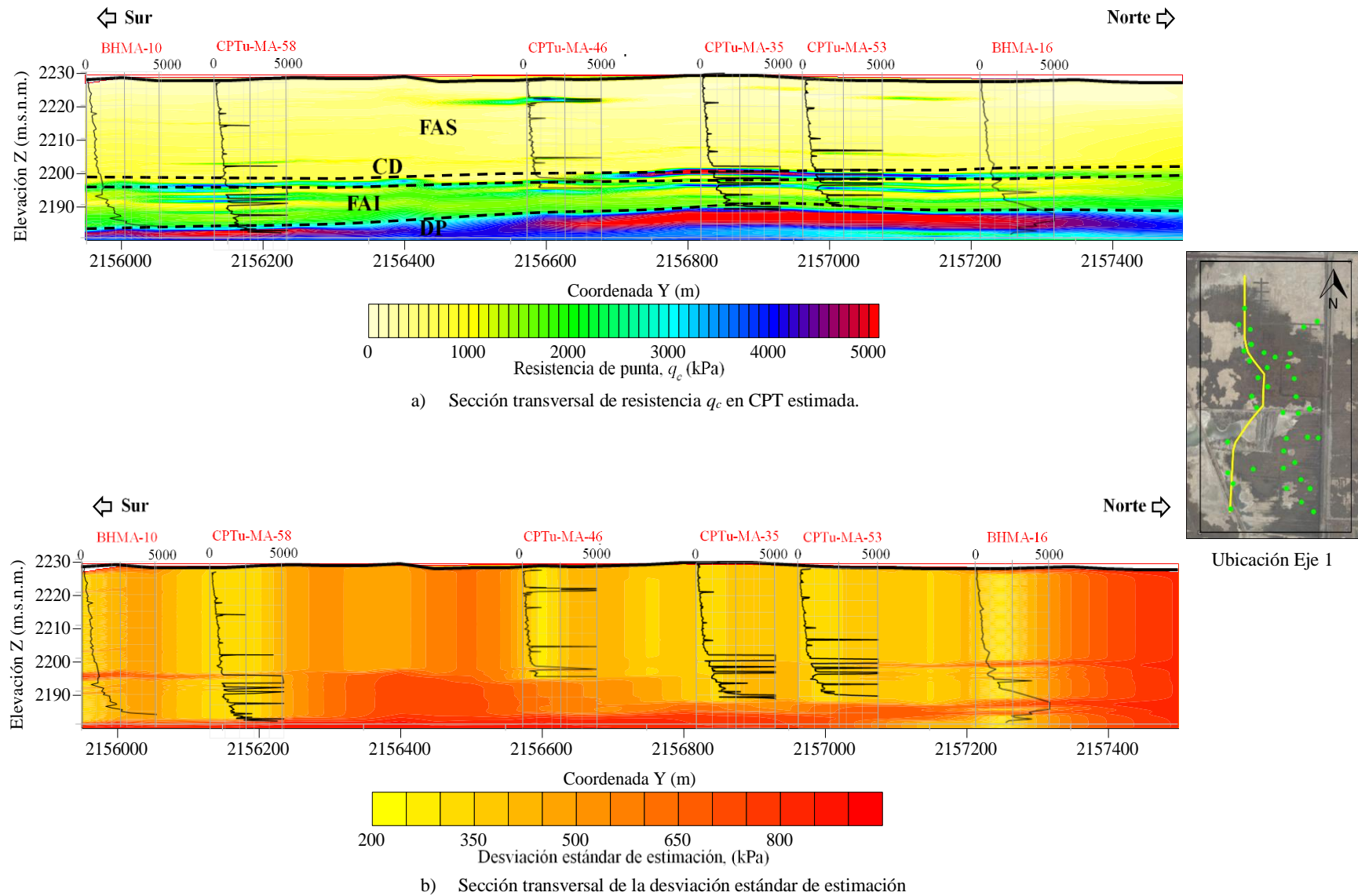


Figura 4.42 Distribución espacial de la resistencia  $q_c$  en CPT estimada a lo largo del Eje 1.

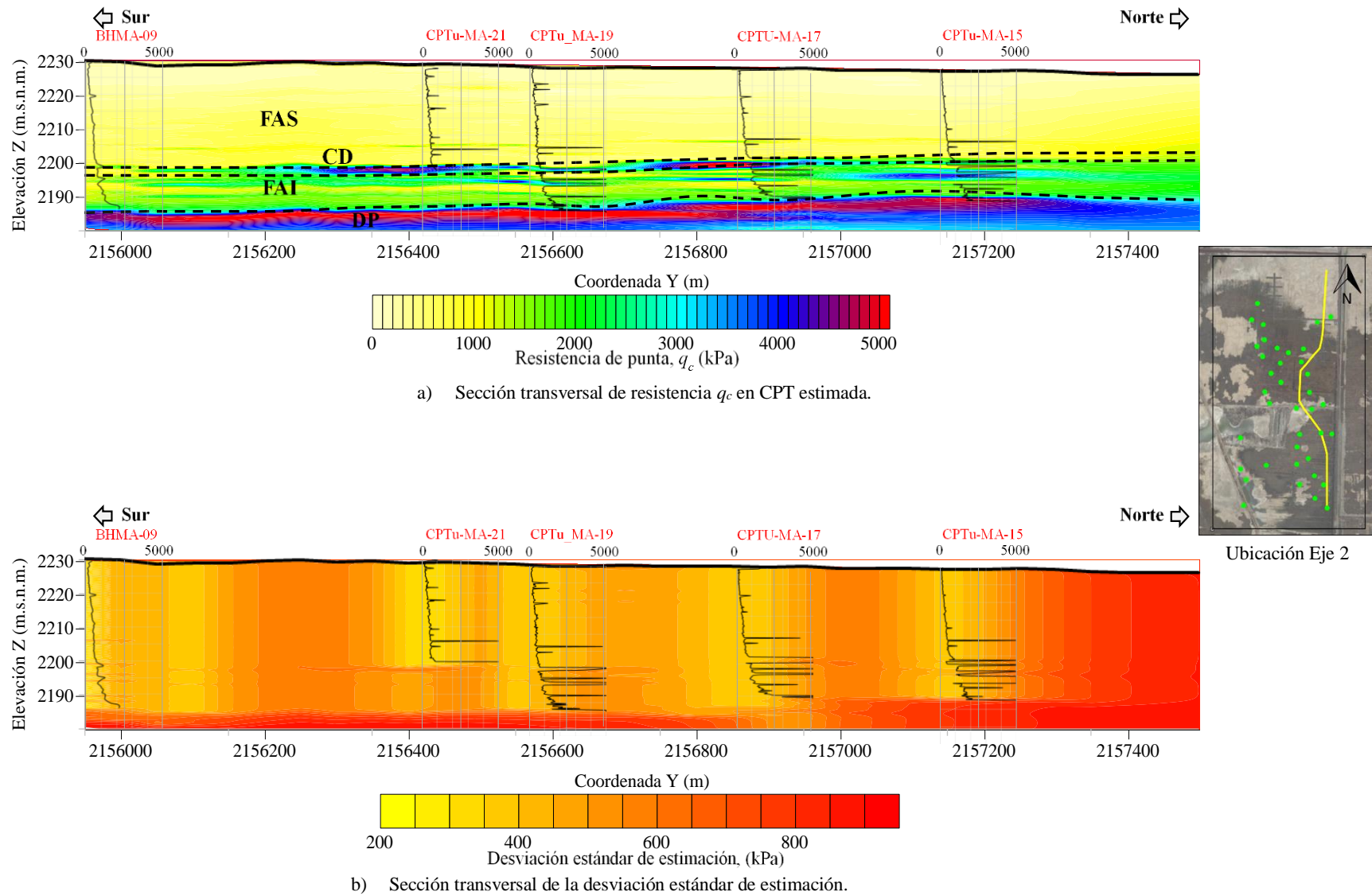


Figura 4.43 Distribución espacial de la resistencia  $q_c$  en CPT estimada a lo largo del Eje 2.



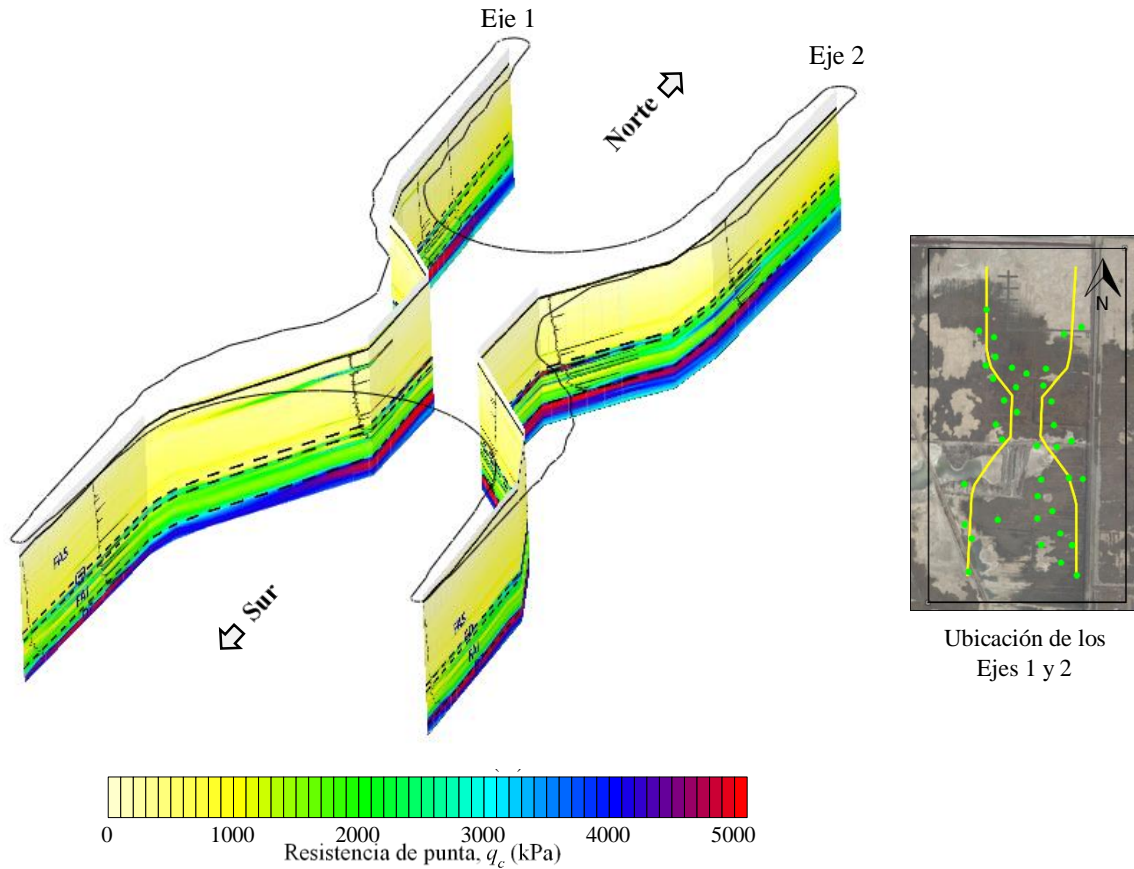


Figura 4.44 Modelo 3D de la distribución espacial de resistencia  $q_c$  en CPT.

**Análisis de resultados.**

Con base en las secciones transversales de las Figuras (4.42 y 4.43) y de acuerdo con la escala de colores, se aprecia una distribución similar de  $q_c$  en los dos ejes preferenciales, en ambas secciones se distingue una tendencia de aumentar la magnitud de esta propiedad con la profundidad. En términos generales, se distingue una capa de valores bajos de resistencia desde la superficie y hasta aproximadamente 25 m de profundidad y posteriormente, se aprecian capas con valores más altos que corresponden a formaciones de suelos más rígidos. Considerando las variaciones locales de  $q_c$  de los dos ejes preferenciales, se puede comentar lo siguiente.

En la parte superior de las secciones, se observa una capa de corto espesor con valores de resistencia de aproximadamente 2000 kPa que corresponden a la CS. Por debajo de la CS, se aprecia la FAS, con una distribución aproximadamente homogénea de valores de  $q_c$  que no superan los 1000 kPa. Asimismo, se distingue la presencia de unas franjas delgadas con valores más altos de resistencia (2000 kPa), las cuales se asocian a lentes de arena intercalados con arcilla.

Posteriormente, se encuentra la CD, que presenta un espesor aproximadamente constante, se caracteriza por tener valores altos de  $q_c$  (superiores a 2000 kPa). Bajo la CD, se aprecia la formación arcillosa inferior (FAI), conformada en su mayoría por valores de resistencia inferiores a los 2000 kPa. Asimismo, dentro de la FAI, se aprecian capas con resistencia superior a los 3000 kPa, asociadas a lentes de arena intercalados con arcilla.

Finalmente, en la parte más profunda de la sección, se encuentran los DP, integrados por materiales de valores de altos de  $q_c$ , superiores a 3000 kPa.

Respecto a la información de la incertidumbre asociada a la estimación, en términos generales puede decirse que los valores de la desviación estándar de estimación son bajos, excepto en los últimos 200 m de la parte norte, donde existe ausencia de sondes, por tanto, la desviación estándar aumenta. Asimismo, en los sitios donde los sondeos alcanzan corta profundidad, la desviación estándar aumenta a partir de la profundidad alcanzada por el sondeo.

### 4.2.2.3 Índice de compresión ( $C_c$ )

#### *Definición del dominio del campo aleatorio*

El conjunto de valores de índice de compresión ( $C_c$ ), obtenidos a partir de información de sondeos mixtos y de penetración estándar, se consideran como un campo aleatorio  $V(X)$ , distribuido dentro de un espacio  $R^P$  con  $P=3$  (volumen de estudio). Estos datos determinados dentro del dominio  $R^3$ , constituyen una muestra de ese campo aleatorio. Para realizar el análisis de la distribución espacial de esta propiedad, se utilizó la información de 41 sondeos, distribuidos en el área de estudio como se muestra en la Figura 4.45. Debe señalarse que, de los 41 sondeos, 24 son penetración estándar, y aportaron solo un dato de  $C_c$ .

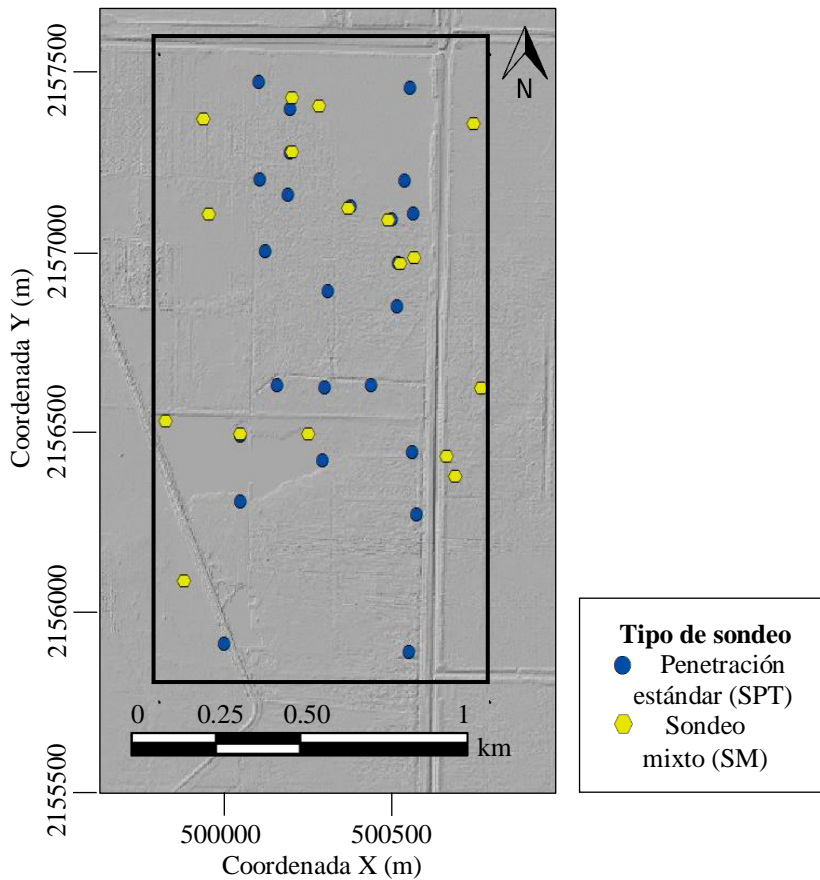


Figura 4.45 Distribución de los sondeos con información de  $C_c$

#### *Análisis estadístico*

A partir de los datos experimentales y aceptando la hipótesis de ergodicidad del campo aleatorio considerado, se estiman sus principales parámetros estadísticos. Los resultados se presentan en la Tabla 4.10. Adicionalmente, se construyó el histograma que representa la variación de la propiedad en el área de estudio (Figura 4.46).

Tabla 4.10 Descripción estadística del índice de compresión.

| Parámetro           | Cc    |
|---------------------|-------|
| Media               | 3.86  |
| Mediana             | 3.62  |
| Moda                | 5     |
| Desviación estándar | 2.43  |
| Valor máximo        | 10.31 |
| Valor mínimo        | 0.29  |

Los valores de Tabla 4.10, indican que los datos de índice de compresión con magnitud superior a 3 corresponden a las formaciones arcillosas, al igual que en el contenido de agua, las magnitudes bajas se asocian a suelos rígidos constituidos por arena y limo.

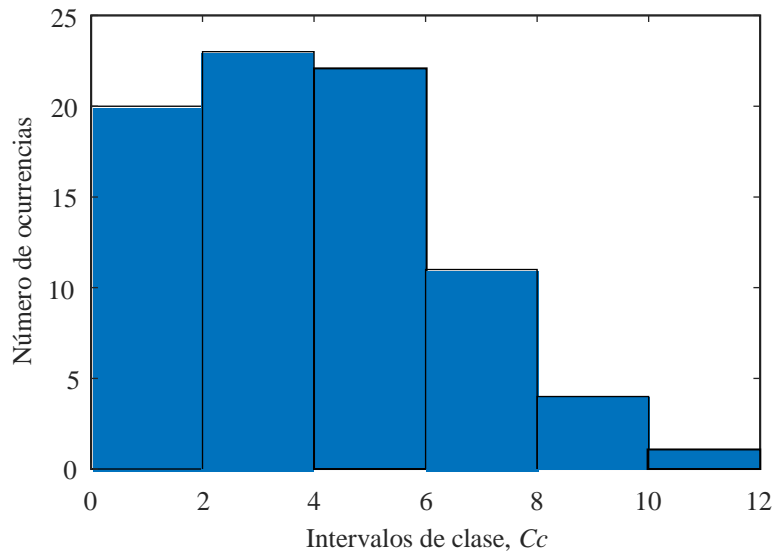


Figura 4.46 Histograma de valores de índice de compresión.

En el histograma de índice de compresión, se aprecia que el mayor número de las mediciones disponibles, se concentran en los intervalos de 0.3 a 6, asimismo, el menor número de datos se encuentran en los intervalos de 8 a 12.

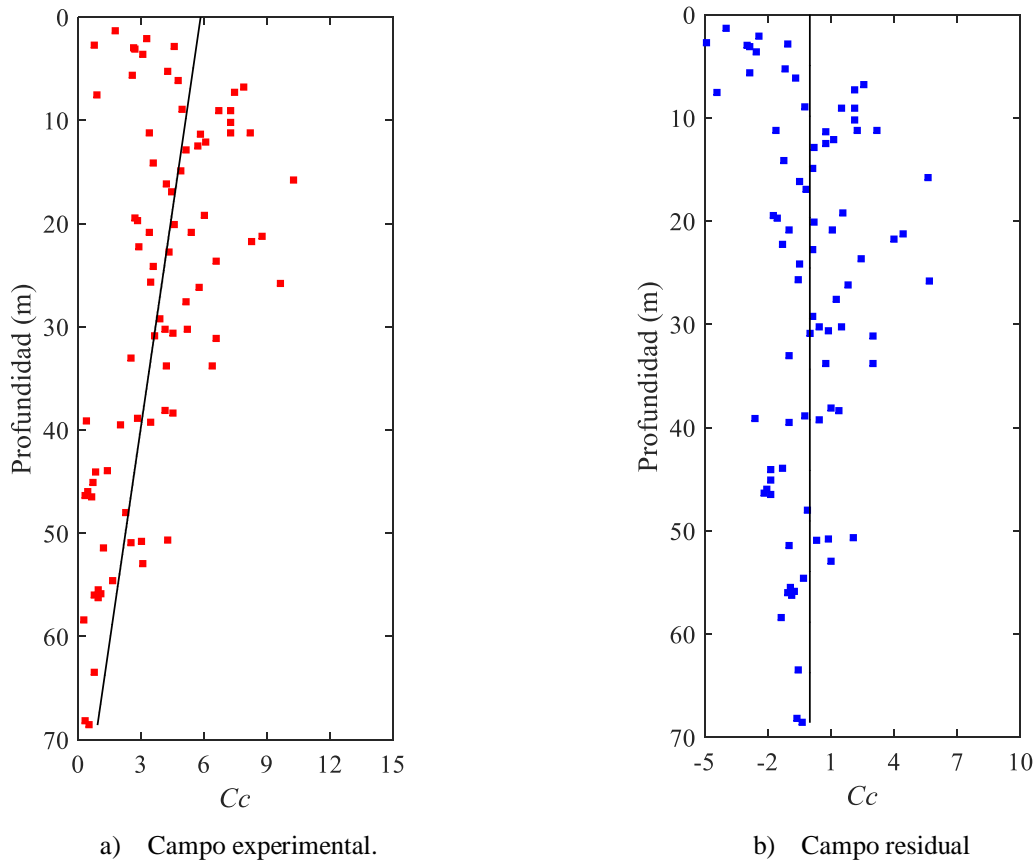
**Análisis de tendencia**

La tendencia del campo s representa por un hiperplano con la ecuación lineal  $V(X)=ax+by+cz+d$ , donde “z” es la profundidad, “a, b, c, d” son los coeficientes de regresión lineal, cuyos valores resultantes, se indican en la Tabla 4.11.

Tabla 4.11 Coeficientes de regresión de los valores de  $C_c$ .

| Coeficientes de la regresión lineal |        |         |             |
|-------------------------------------|--------|---------|-------------|
| $a$                                 | $b$    | $c$     | $d$         |
| -0.0029                             | 0.0035 | -0.0801 | -61116.4520 |

Los coeficientes de la tabla anterior, permiten retirar la tendencia a los datos de contenido de agua, es decir, permiten transformar el campo original (con tendencia) a un campo residual (sin tendencia). En la Figura 4.47 se muestra la representación de estos campos respecto a la profundidad



a) Campo experimental. b) Campo residual  
 Figura 4.47 Gráfica de dispersión de datos del campo experimental y residual de  $C_c$ .

**Análisis estructural**

Considerando los datos del campo residual, se calcularon los correlogramas experimentales en las direcciones horizontal y vertical (Figura 4.48), asimismo, con base en estos correlogramas se calcularon las distancias de correlación, resultando estas:  $\delta_{ver}=8.5$  m y  $\delta_{hor}=350$  m. Con estos valores, y adaptando un modelo de correlación exponencial simple, se determinaron los correlogramas direccionales mostrados en la misma Figura 4.48.

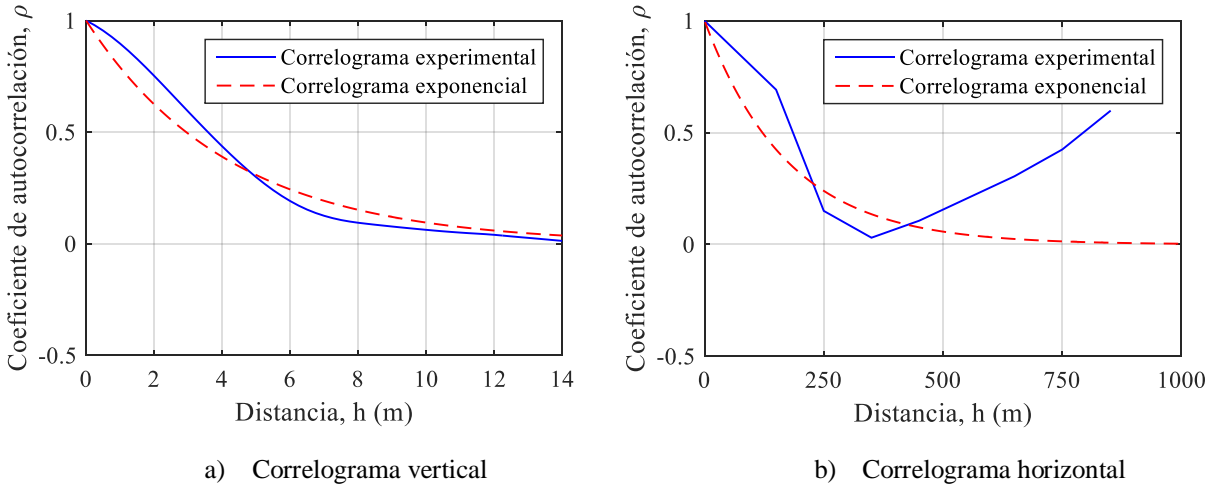


Figura 4.48 Modelos de correlación del índice de compresión.

**Predicción**

Empleando la técnica de *Kriging Ordinario*, se estimaron los perfiles de índice de compresión,  $C_c$ , a cada 50 m a lo largo de dos ejes preferenciales “1” y “2”, definidos en la Figura 4.49. La propiedad se estimó puntualmente a lo largo de la profundidad con un paso de cálculo de 0.25 m.

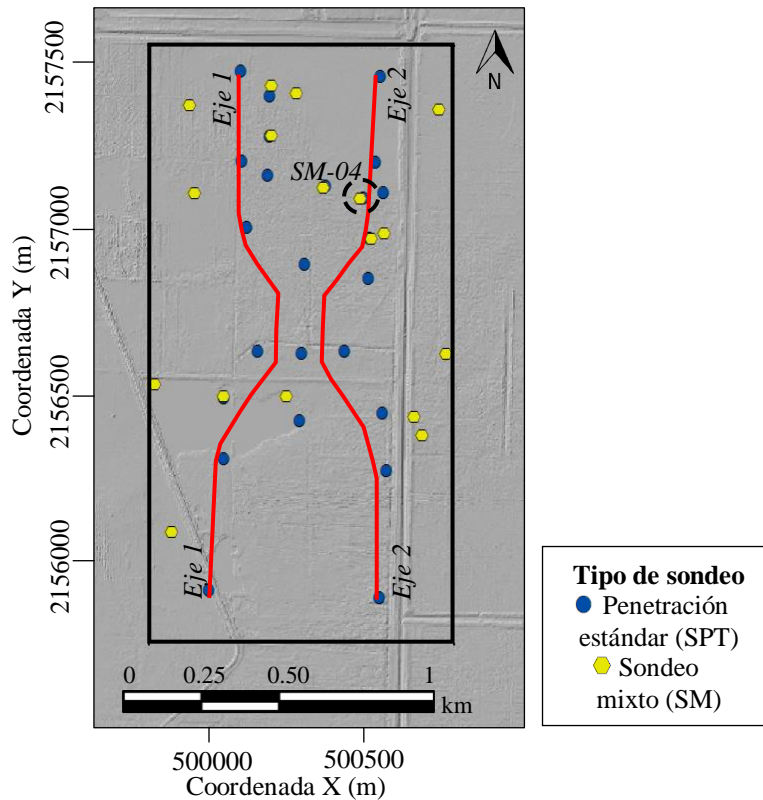
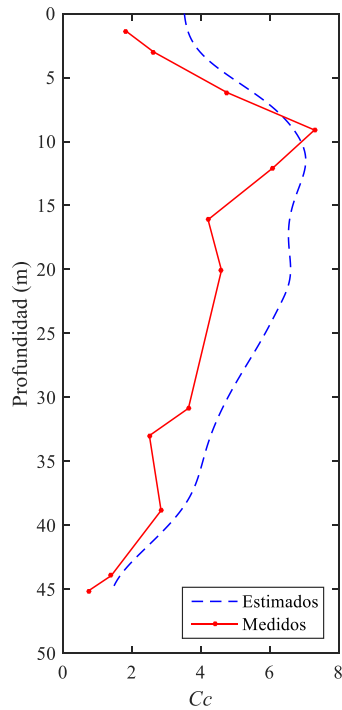


Figura 4.49 Ejes preferenciales de estimación.

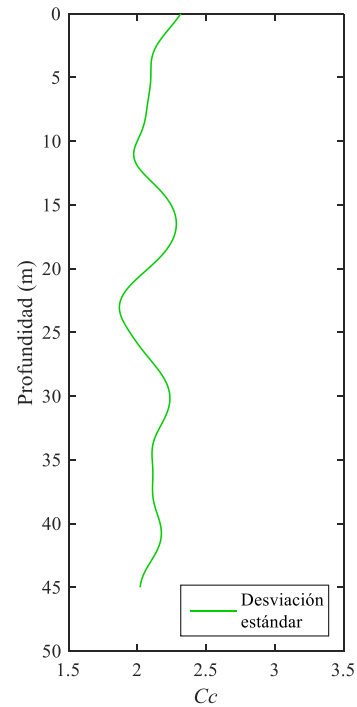
**Validación cruzada**

En este trabajo, se realizó la validación retirando los datos de  $C_c$  del sondeo *SM-04*, su ubicación se indica en la Figura 4.49.

En la Figura 4.50, se muestran los resultados de la validación cruzada, donde se observa que las estimaciones siguen la tendencia general del perfil experimental índice de compresión, pero quedan ligeramente desplazadas a la derecha, lo cual se asocia a la escasa información del parámetro en la zona de estudio. Con base en los resultados, puede decirse que el estimador empleado proporciona resultados consistentes con las condiciones del subsuelo. Por tanto, se pueden dar como aceptables los resultados de las estimaciones, así como, el correcto funcionamiento del algoritmo desarrollado.



c) Perfil estimado de índice de compresión.



d) Desviación estándar de estimación.

Figura 4.50 Resultados de la validación cruzada de  $C_c$ .

**Visualización**

Para facilitar la interpretación de los valores tabulados de  $V_s$  estimados y de la desviación estándar de estimación, se recurrió a técnicas de graficación avanzada para la elaboración de secciones transversales (Figuras 4.51 y 4.52) y un modelo 3D (Figura 4.53). Estos modelos describen la distribución espacial de esta propiedad a lo largo de los dos ejes preferenciales.

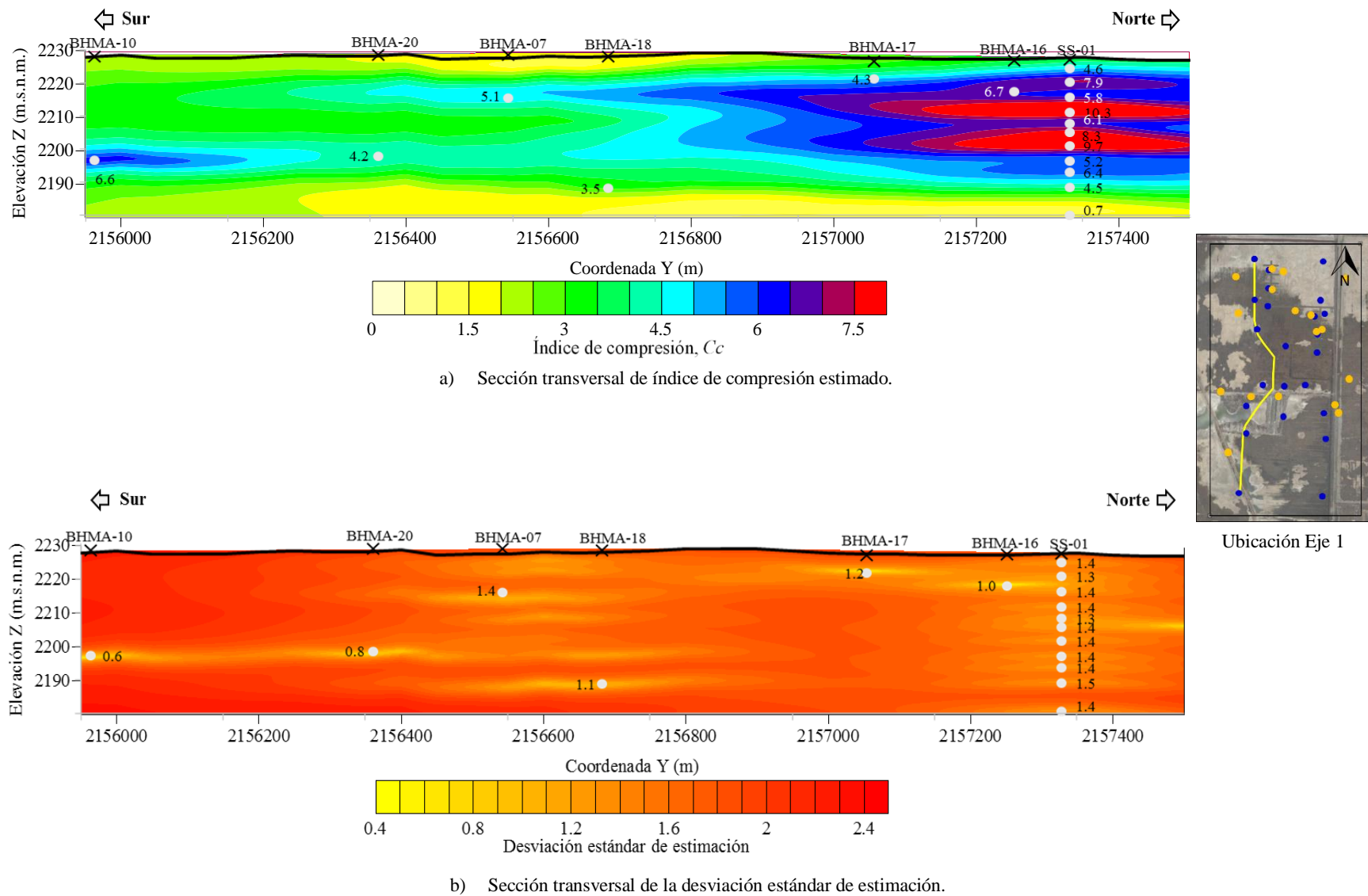


Figura 4.51 Distribución espacial del índice de compresión estimado a lo largo del Eje 1.



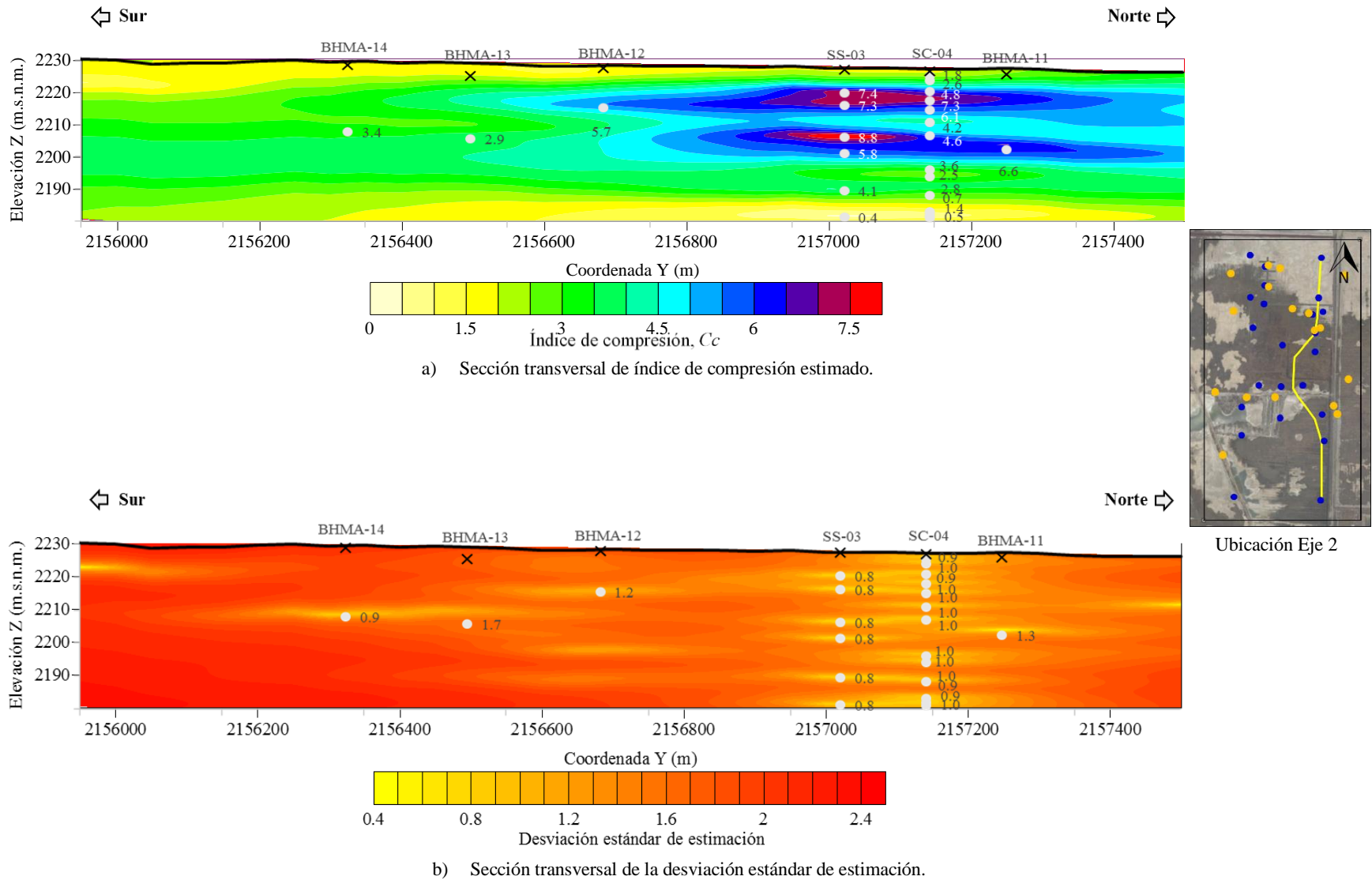


Figura 4.52 Distribución espacial del índice de compresión estimado a lo largo del Eje 2.

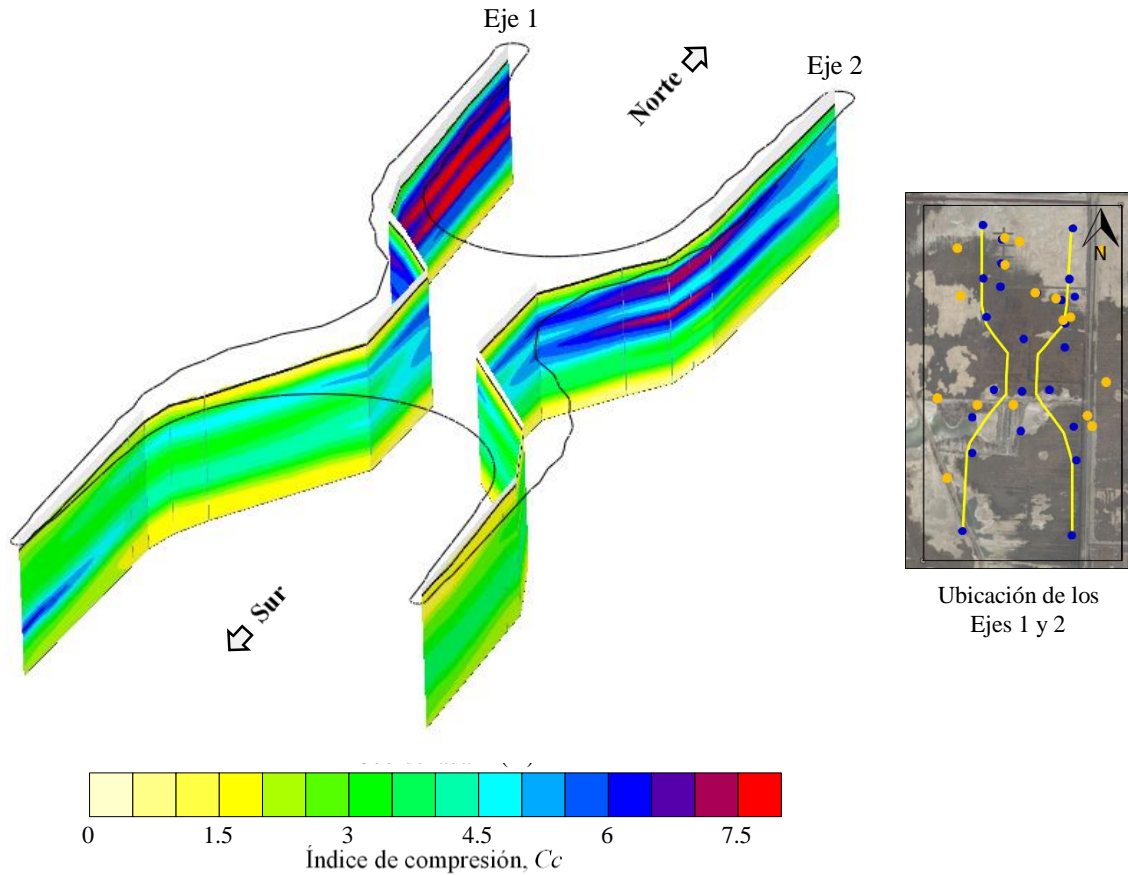


Figura 4.53 Modelo 3D de la distribución espacial de índice de compresión.

### *Análisis de resultados*

A diferencia de las secciones obtenidas en las dos propiedades anteriores ( $w$  y  $q_c$ ), en las estimaciones del índice de compresión, se observa que no fue posible definir adecuadamente la distribución espacial del  $C_c$  a lo largo de todas las secciones transversales, debido al bajo número de datos disponibles. Por tanto, solo se realizará la interpretación de la distribución espacial de  $C_c$  de la parte norte de las secciones transversales.

De acuerdo con las secciones transversales y con base en la escala de colores de índice de compresión, se observa que la distribución de esta propiedad tiene una tendencia similar a la del contenido de agua. En general, superficialmente se distingue una capa de valores altos de  $C_c$ , asociados a un material altamente compresible, seguido de un material con valores bajos de  $C_c$ . Respecto a las variaciones locales de esta propiedad, se tiene:

En la parte superior de los ejes, se aprecia una capa delgada de espesor variable, cuyos valores de  $C_c$  indican que se trata de un material poco compresible, asociado con la CS.

Posteriormente, se puede apreciar una capa donde se encuentran los valores más altos de  $C_c$ , que varían en el intervalo de 4 a 8, característicos de la arcilla blanda del valle de México. Este material altamente compresible corresponde a la FAS. Asimismo, se observa que sobre el eje 1 se encuentran las mayores magnitudes  $C_c$ .

Debajo de la FAS, se distingue una capa de menor compresibilidad, presentando con una distribución aproximadamente homogénea, donde los valores de  $C_c$  varían de 3 a 4.5 que corresponden a la FAI, se observa que la compresibilidad de la FAI es menor que en la FAS.

En la parte más profunda de la sección transversal, se encuentra un material con valores de  $C_c$  de hasta 1.5, que es un material competente poco compresible, esta capa corresponde a la DEP.

Respecto a la varianza de estimación de  $C_c$ , en las secciones se observan zonas prácticamente uniformes de valores altos de la desviación estándar de estimación. Estas zonas indican la alta incertidumbre y reflejan los escasos de datos empleados para la definición de los modelos de distribución espacial de esta propiedad, el mayor número de datos de  $C_c$ , se ubican en la parte sur. Asimismo, debe resaltarse que en los sondeos de penetración estándar solamente se contó con un dato de  $C_c$ .

**4.2.2.4 Velocidad de onda de corte ( $V_s$ )**

**Definición del dominio del campo aleatorio**

El conjunto de valores de velocidad de onda de corte ( $V_s$ ), obtenidos a partir de información de sonda suspendida, se consideran como un campo aleatorio  $V(X)$ , distribuido dentro de un espacio  $R^P$  con  $P=3$  (volumen de estudio). Estos datos determinados dentro del dominio  $R^3$ , constituyen una muestra de ese campo aleatorio. Para realizar el análisis de la distribución espacial de esta propiedad, se utilizó la información de cinco sondas suspendidas, distribuidas en el área de estudio como se muestra en la Figura 4.54.

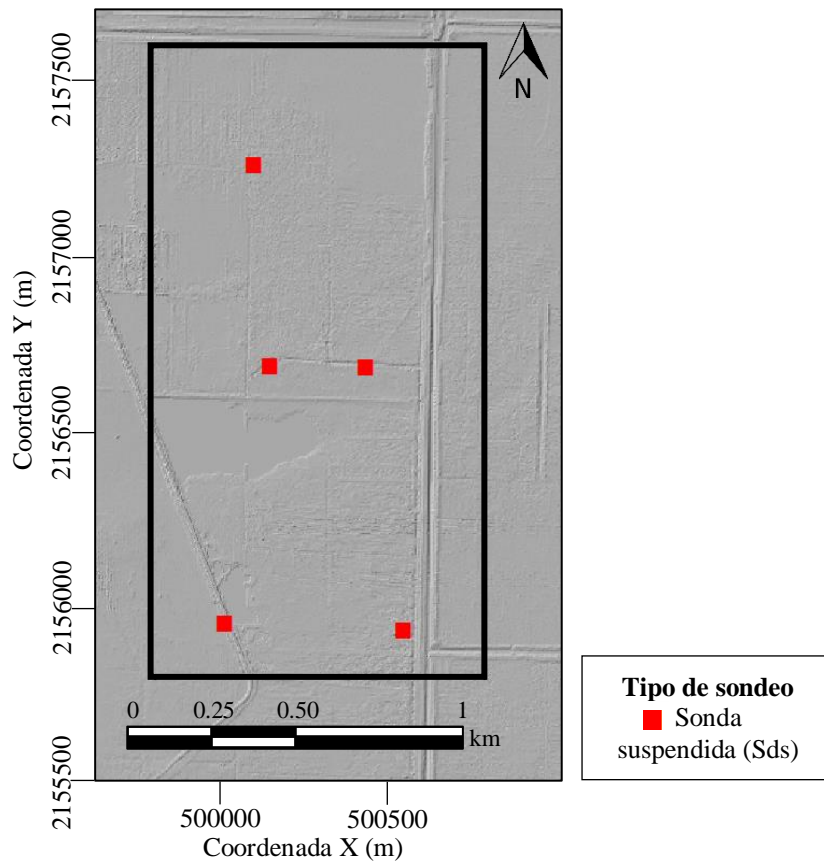


Figura 4.54 Distribución de las sondas suspendidas en la zona de estudio.

**Análisis estadístico**

A partir de los datos experimentales y aceptando la hipótesis de ergodicidad del campo aleatorio considerado, se estiman sus principales parámetros estadísticos. Los resultados se presentan en la Tabla 4.12. Adicionalmente, se construyó el histograma que representa la variación de la propiedad en el área de estudio (Figura 4.55).

Tabla 4.12 Descripción estadística de la velocidad de onda corte ( $V_s$ ).

| Parámetro           | $V_s$ (m/s) |
|---------------------|-------------|
| Media               | 74.68       |
| Mediana             | 53.14       |
| Moda                | 25          |
| Desviación estándar | 60.13       |
| Valor máximo        | 436.1       |
| Valor mínimo        | 15.5        |

Los valores de Tabla 4.12, indican que los datos de velocidad de onda de corte con magnitud inferior a 100 m/s corresponden a las formaciones arcillosas. Al igual en la descripción de la resistencia  $q_c$  en CPT, las magnitudes más bajas, se asocian a suelos rígidos constituidos por arena y limo.

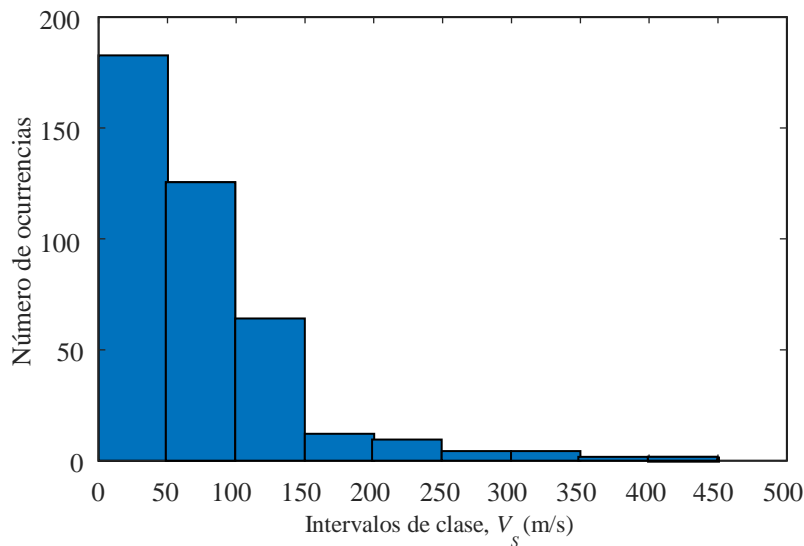


Figura 4.55 Histograma de los valores de  $V_s$ .

En el histograma de velocidad de onda de corte, se aprecia que el mayor número de las mediciones disponibles, se concentran en los intervalos de 15 a 100 m/s, asimismo, el menor número de datos se encuentran en los intervalos de 150 a 450 m/s.

**Análisis de tendencia**

La tendencia del campo  $s$  representa por un hiperplano con la ecuación lineal  $V(X)=ax+by+cz+d$ , donde “ $z$ ” es la profundidad, “ $a, b, c, d$ ” son los coeficientes de regresión lineal, cuyos valores resultantes, se indican en la Tabla 4.13.

Tabla 4.13 Coeficientes de la regresión lineal de  $V_S$

| Coeficientes de la regresión lineal |          |          |            |
|-------------------------------------|----------|----------|------------|
| <i>a</i>                            | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i>   |
| -0.0029                             | 0.0093   | 3.6869   | -18660.820 |

Los coeficientes de la tabla anterior, permiten retirar la tendencia a los datos de contenido de agua, es decir, permiten transformar el campo original (con tendencia) a un campo residual (sin tendencia). En la Figura 4.56 se muestra la representación de estos campos respecto a la profundidad

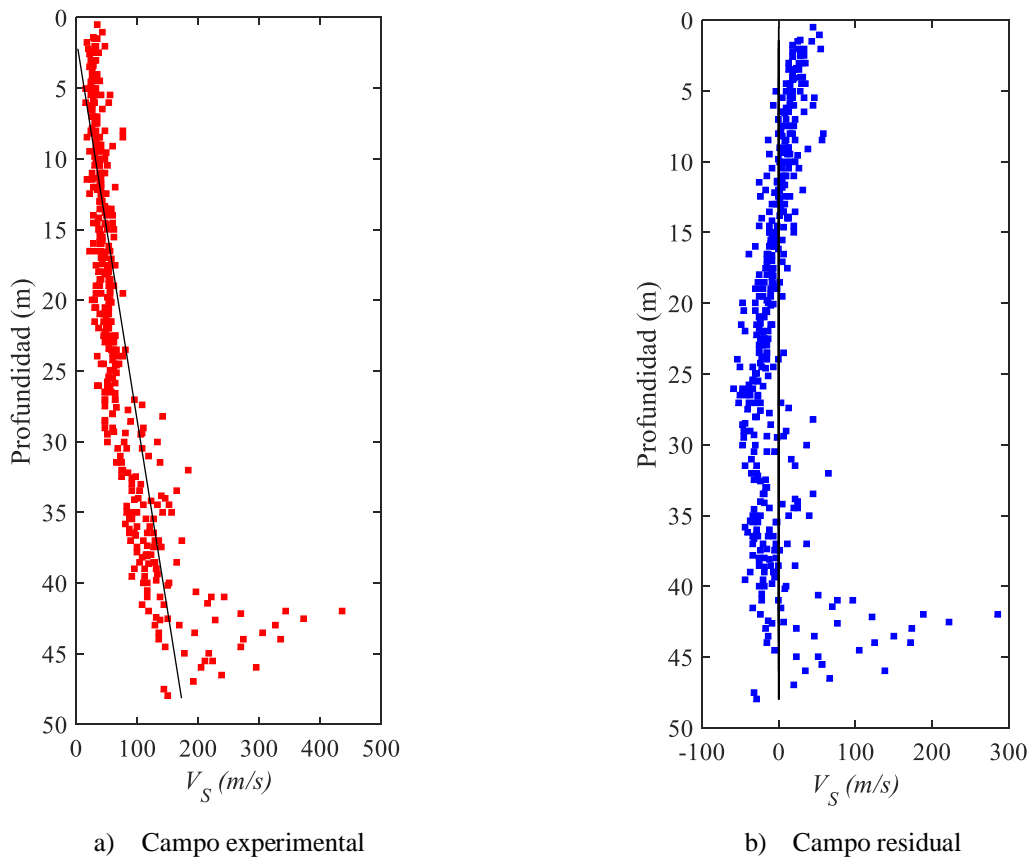


Figura 4.56 Gráfica de dispersión de datos del campo experimental y residual de resistencia  $V_S$ .

**Análisis estructural**

Considerando los datos del campo residual, se calcularon los correlogramas experimentales en las direcciones horizontal y vertical (Figura 4.57), asimismo, con base en estos correlogramas se calcularon las distancias de correlación, resultando estas:  $\delta_{ver}=6$  m y  $\delta_{hor}=1600$  m. Con estos valores, y adaptando un modelo de correlación exponencial simple, se determinaron los correlogramas direccionales mostrados en la misma Figura 4.57.

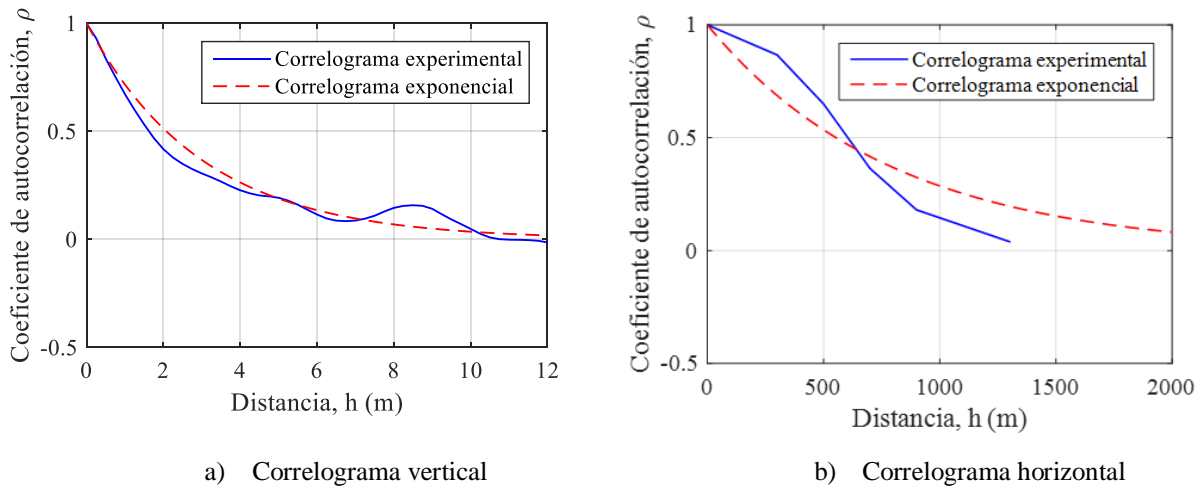


Figura 4.57 Modelos de correlación espacial de velocidad de onda de corte.

**Predicción**

Empleando la técnica de *Kriging Ordinario*, se estimaron los perfiles de velocidad de onda de corte, a cada 50 m a lo largo de dos ejes preferenciales “1” y “2”, definidos en la Figura 4.58. La propiedad se estimó puntualmente a lo largo de la profundidad con un paso de cálculo de 0.25 m. Las estimaciones finales, se obtiene regresando la tendencia a las estimaciones residuales.

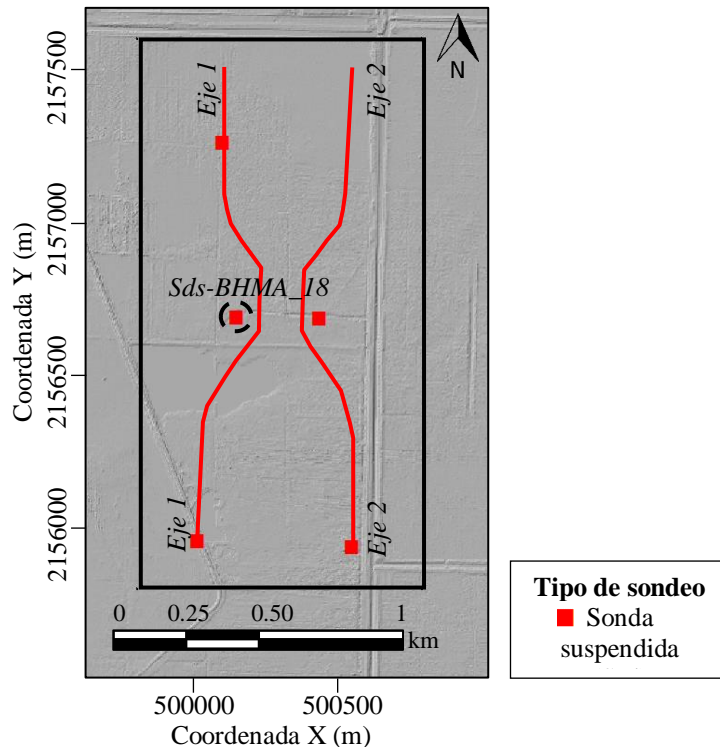
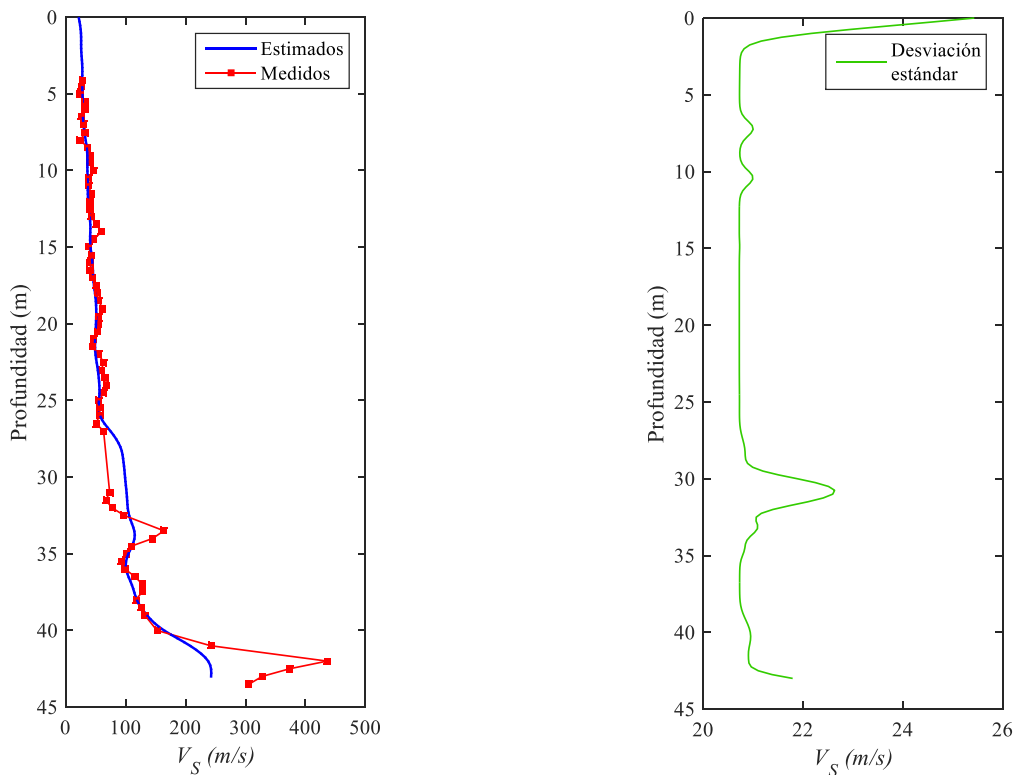


Figura 4.58 Ejes preferenciales para la estimación de  $V_s$ .

**Validación cruzada**

En este trabajo, se realizó la validación retirando los datos de velocidad de onda de corte del sondeo *Sds\_BHMA\_18*, su ubicación se indica en la Figura 4.58.

En la Figura 4.59, se muestran los resultados de la validación cruzada, donde se observa que las estimaciones definen la tendencia general del perfil experimental de contenido de agua. Con base en los resultados, puede decirse que el estimador empleado proporciona resultados consistentes y coherentes con las condiciones del subsuelo. Por tanto, se pueden dar como aceptables los resultados de las estimaciones, así como, el correcto funcionamiento del algoritmo desarrollado.



c) Perfil estimado de velocidad de onda de S

d) Desviación estándar de estimación

Figura 4.59 Resultados de la validación cruzada de  $V_S$

**Visualización**

Para facilitar la interpretación de los valores tabulares de velocidad de onda  $S$ , obtenidos en la estimación para los dos ejes, se recurre a técnicas de graficación avanzada para la construcción de secciones transversales y volúmenes 3D, que muestran de forma más sencilla las variaciones espaciales estimadas de la velocidad de onda de corte. En las Figuras 4.60 y 4.61 se muestran las secciones con la distribución de  $V_S$  y con la incertidumbre asociada a la estimación.



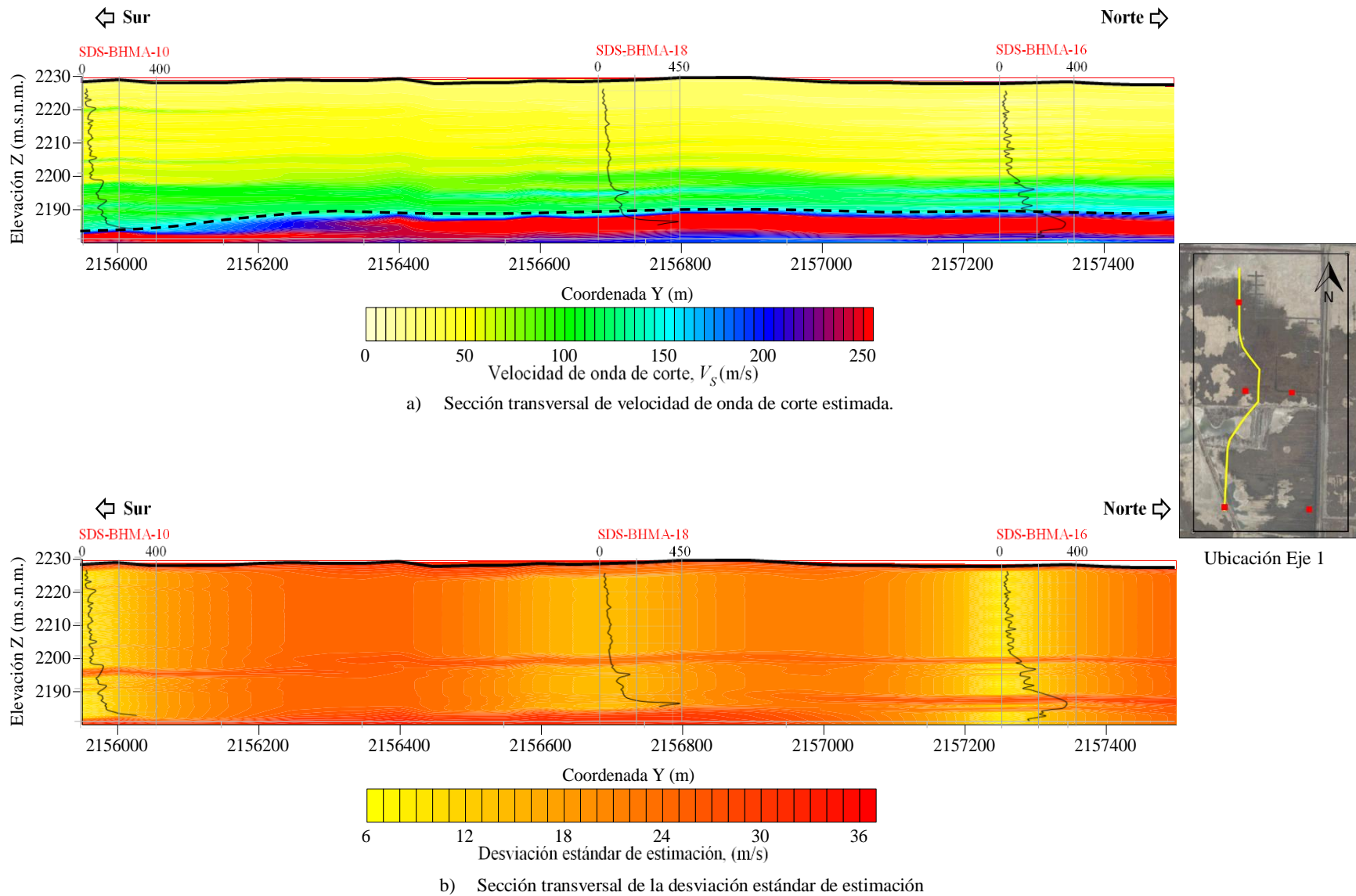


Figura 4.60 Distribución espacial de la velocidad de onda de corte estimada a lo largo del Eje 1.

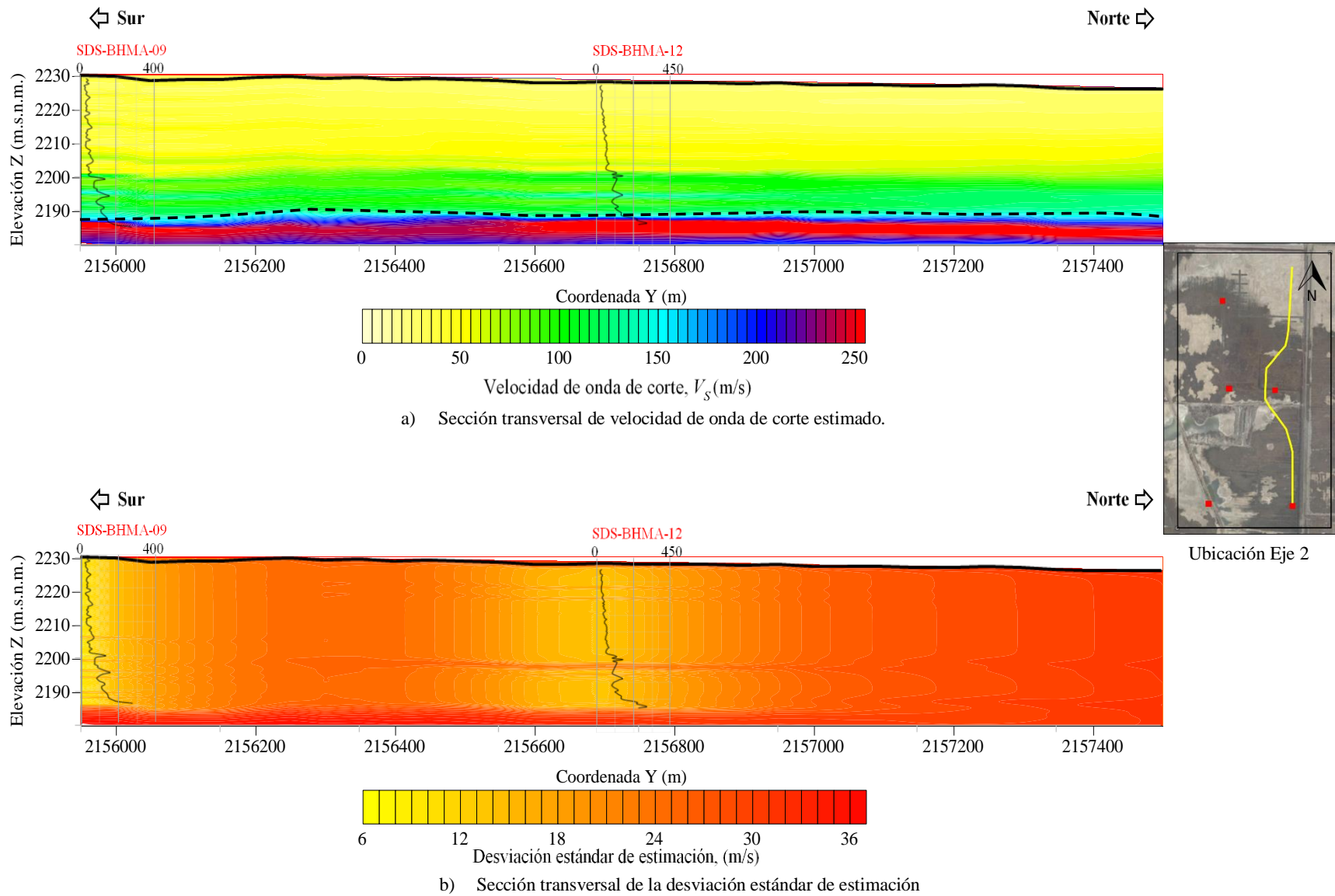


Figura 4.61 Distribución espacial de la velocidad de onda de corte estimada a lo largo del Eje 2.

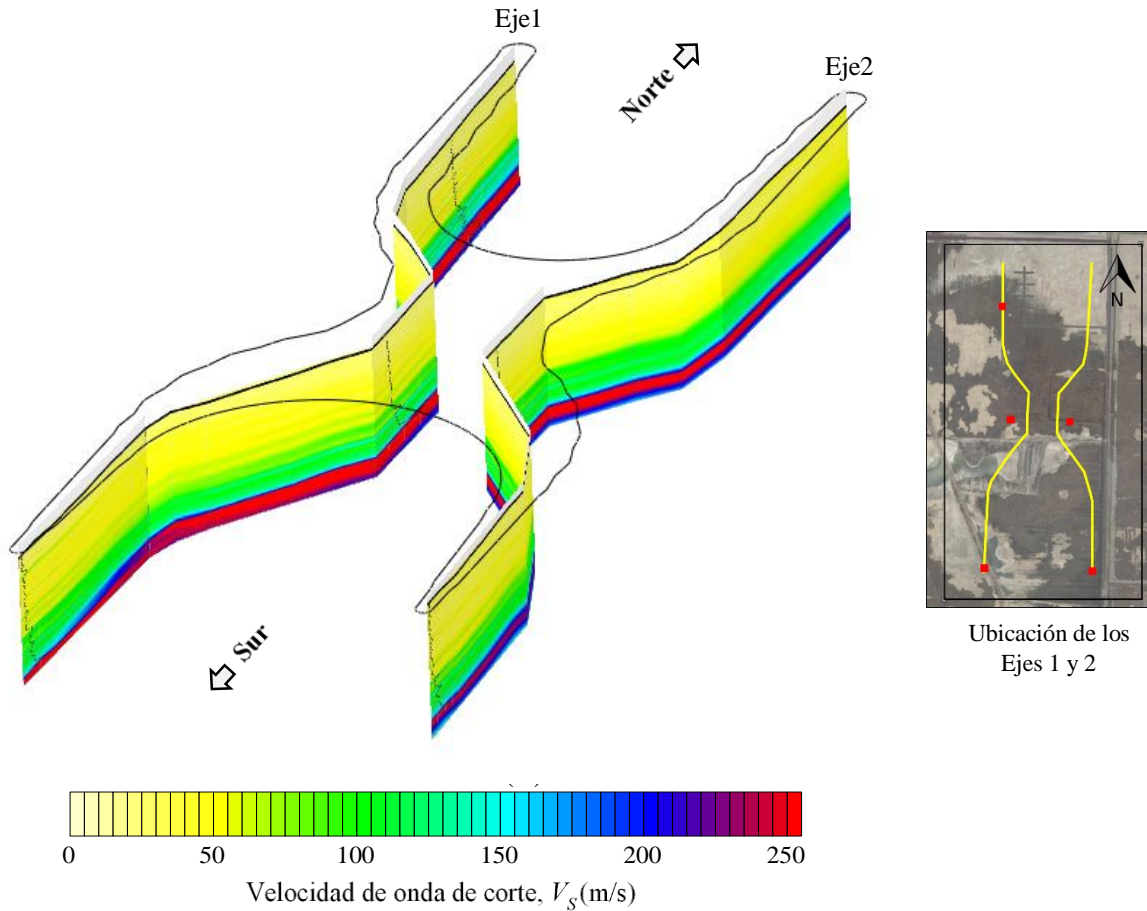


Figura 4.62 Modelo 3D de la distribución espacial velocidad de onda de corte.

### **Análisis de resultados**

De acuerdo con los modelos de distribución espacial de  $V_s$  estimado (Figuras 4.60 a 4.62), y con base en la escala de colores, se observa una similitud de la distribución espacial de  $V_s$ , en ambos ejes preferenciales. Asimismo, se observa que la velocidad de onda  $S$  tiende a aumentar con la profundidad y presenta una variación similar a la resistencia  $q_c$  en CPT.

Por otra parte, a diferencia de los modelos de distribución espacial de  $w$  y  $q_c$ , en los modelos de distribución espacial de  $V_s$ , no se distingue en forma clara las diferentes formaciones típicas del subsuelo en el sitio estudiado. Los modelos permiten distinguir las capas con diferente magnitud de  $V_s$ , logrando identificar las capas de suelo blando y suelo rígido.

En los primeros 25 m de profundidad, se aprecia una zona con distribución homogénea de  $V_S$ , con velocidades que alcanzan de 15 a 100 m/s, este intervalo de velocidad es característico de suelos blandos, por lo que, corresponde a la FAS.

Debajo de esta formación, se observa una zona, donde se encuentran valores de  $V_S$  por arriba de 100 m/s. Asimismo, se aprecian algunas capas delgadas con valores de  $V_S$  del orden de 180 m/s, las cuales se distinguen con mayor claridad en el Eje 1. Para identificar o asociar estas capas de  $V_S$ , con alguna formación, se tomó como apoyo las secciones de resistencia  $q_c$  en CPT, lo que permitió identificar que esta capa de  $V_S$  corresponde a la CD.

Finalmente, se observa una tercera capa, donde se distinguen los valores más altos de  $V_S$  (superiores a 250 m/s), estos altos valores son característicos de formaciones resistentes, en este caso corresponden a la FEP, en las secciones transversales, es el estrato que presenta una clara definición.

Respecto a la desviación estándar de estimación, se distinguen valores altos donde existe ausencia de datos, en cambio, en los sitios donde incertidumbre se ubican los perfiles de datos, la incertidumbre es baja.

### 4.3 APLICACIONES DE LA GEOESTADÍSTICA MULTIVARIABLE

#### 4.3.1 Análisis de la distribución espacial de las propiedades geotécnicas a lo largo de la profundidad, en 1D

##### 4.3.1.1 Análisis de la distribución espacial del índice de compresión considerando su correlación con el contenido de agua

El análisis geoestadístico multivariable, se aplica en medios donde existen puntos con mediciones de dos (o más) propiedades geotécnicas. Por tanto, en este análisis se considera como propiedad primaria el índice de compresión (sondeos mixtos) y como propiedad secundaria el contenido de agua (sondeos SPT), siendo esta última propiedad altamente medida.

##### Definición del dominio del campo aleatorio (1D)

Los valores de índice de compresión ( $C_c$ ) y de contenido de agua ( $w$ ), se consideran un campo aleatorio  $V(X)$  y  $S(X)$ , respectivamente, distribuido dentro de un espacio  $R^P$  con  $P=1$  (perfil 1D). El conjunto de valores de  $C_c$  y de  $w$ , medidos dentro del dominio  $R^l$ , constituyen una muestra de esos campos aleatorios. El análisis geoestadístico multivariable de la distribución espacial de  $C_c$ , se realizó en dos sitios dentro de la zona de estudio, indicados en la Figura 4.63.

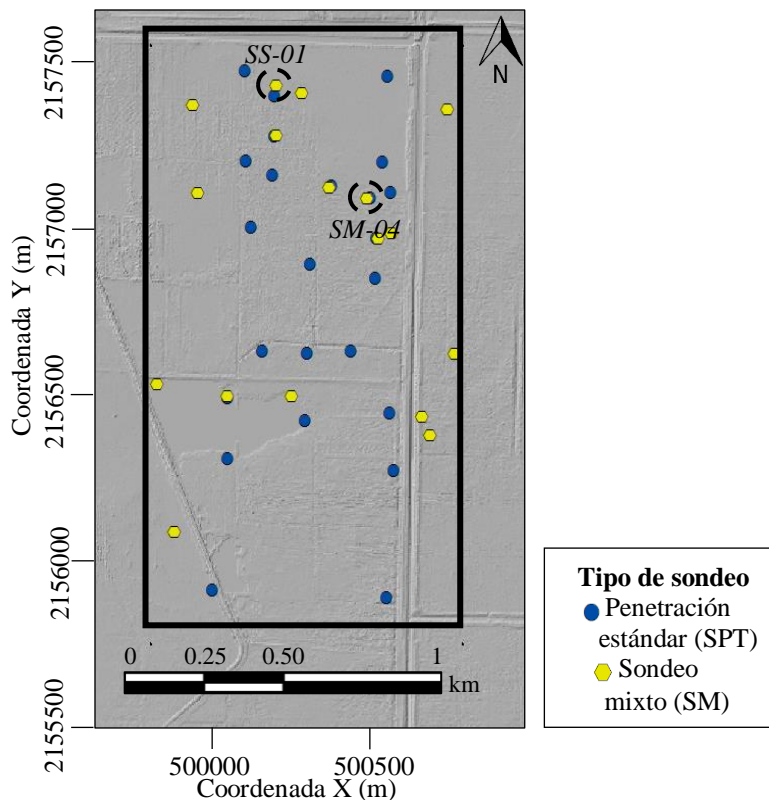


Figura 4.63 Ubicación de los sondeos mixtos y de penetración estándar.

**Análisis de correlación lineal**

De acuerdo con la metodología del análisis geoestadístico, primeramente, se verificó la existencia de la correlación entre las dos propiedades geotécnicas consideradas. Para este propósito, se construyó una gráfica de regresión lineal entre los dos parámetros (Figuras 4.64 y 4.65) por sitio, donde las abscisas corresponden a la propiedad primaria ( $C_c$ ) y las ordenadas a la propiedad secundaria ( $w$ ). en la misma gráfica, se indica el valor del coeficiente de correlación y la ecuación de la línea de tendencia.

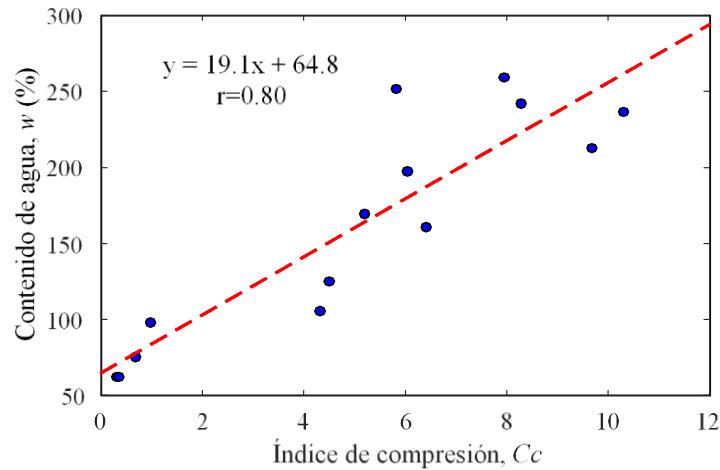


Figura 4.64 Correlación lineal entre  $C_c$  y  $w$ , en el sondeo *SS-01*.

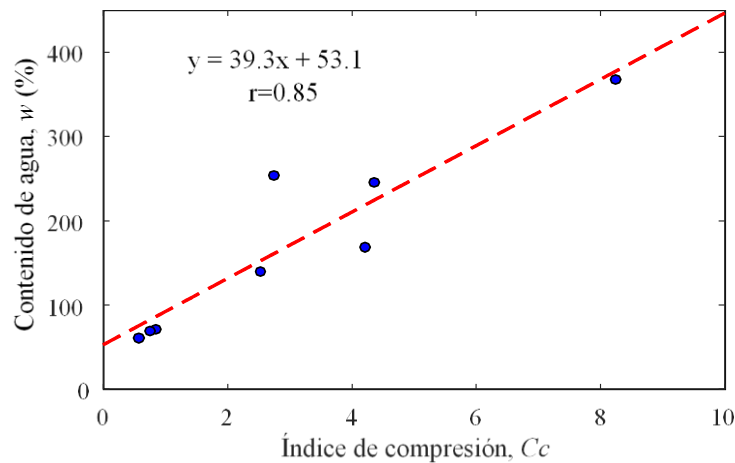


Figura 4.65 Correlación lineal entre  $C_c$  y  $w$ , en el sondeo *SC-04*

En las gráficas de regresión lineal, se observa que existe una correlación alta (0.8 y 0.85) entre el índice de compresión y el contenido de agua, por tanto, es posible aplicar la técnica de estimación conjunta.

**Análisis estadístico**

Aceptando la hipótesis de homogeneidad y ergodicidad en las mediciones, se calculan los parámetros estadísticos de las propiedades geotécnicas ( $Cc$  y  $w$ ). Los resultados se presentan en la Tabla 4.14.

Tabla 4.14 Parámetros estadísticos de  $Cc$  y  $w$ .

| Parámetro           | SS-01 |         | SC-04 |         |
|---------------------|-------|---------|-------|---------|
|                     | $Cc$  | $w$ (%) | $Cc$  | $w$ (%) |
| Media               | 5.03  | 123.44  | 2.99  | 138.73  |
| Mediana             | 5.20  | 105.18  | 2.73  | 133.42  |
| Moda                | 0.5   | 25      | 3     | 75      |
| Desviación estándar | 3.30  | 87.02   | 1.86  | 79.86   |
| Valor máximo        | 10.3  | 335.12  | 0.73  | 333.87  |
| Valor mínimo        | 0.29  | 17.11   | 0.49  | 11.11   |

**Análisis de tendencia**

Para evaluar la tendencia del conjunto de mediciones, estimación geoestadística multivariable se ajustó una ecuación de tipo  $V(X)=ax+b$ , obteniéndose los coeficientes de la regresión lineal presentados en la Tabla 4.15.

Tabla 4.15 Coeficientes de regresión lineal de índice de compresión y contenido de agua.

| Sondeo | Propiedad | Coeficiente |          |
|--------|-----------|-------------|----------|
|        |           | $a$         | $b$      |
| SS-01  | $Cc$      | -0.1251     | 9.0687   |
|        | $w$       | -3.0442     | 239.1734 |
| SC-04  | $Cc$      | -0.0581     | 4.8287   |
|        | $w$       | -2.9146     | 237.5296 |

Empelando los coeficientes de la Tabla 4.15 se retiró la tendencia a los datos experimentales, es decir, se convirtieron los campos originales (con tendencia) a campos residuales (sin tendencia).

Los perfiles resultantes se muestran en las Figuras 4.66 y 4.67, donde se observa que tanto el índice de compresión como el contenido de agua tienen la misma variación con la profundidad y presentan una tendencia aumentar con la profundidad. Por otra parte, también se observa que los datos de contenido de agua son más numerosos en relación con del índice de compresión.

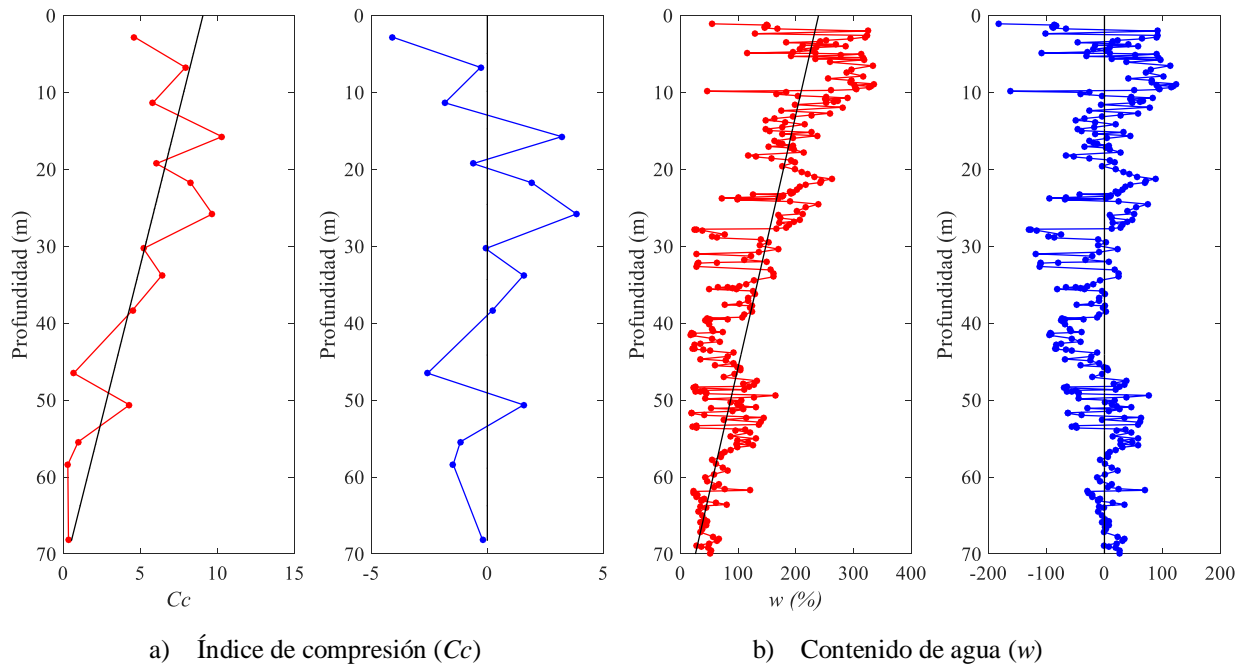


Figura 4.66 Campos experimentales y residuales de  $C_c$  y  $w$  (SS-01).

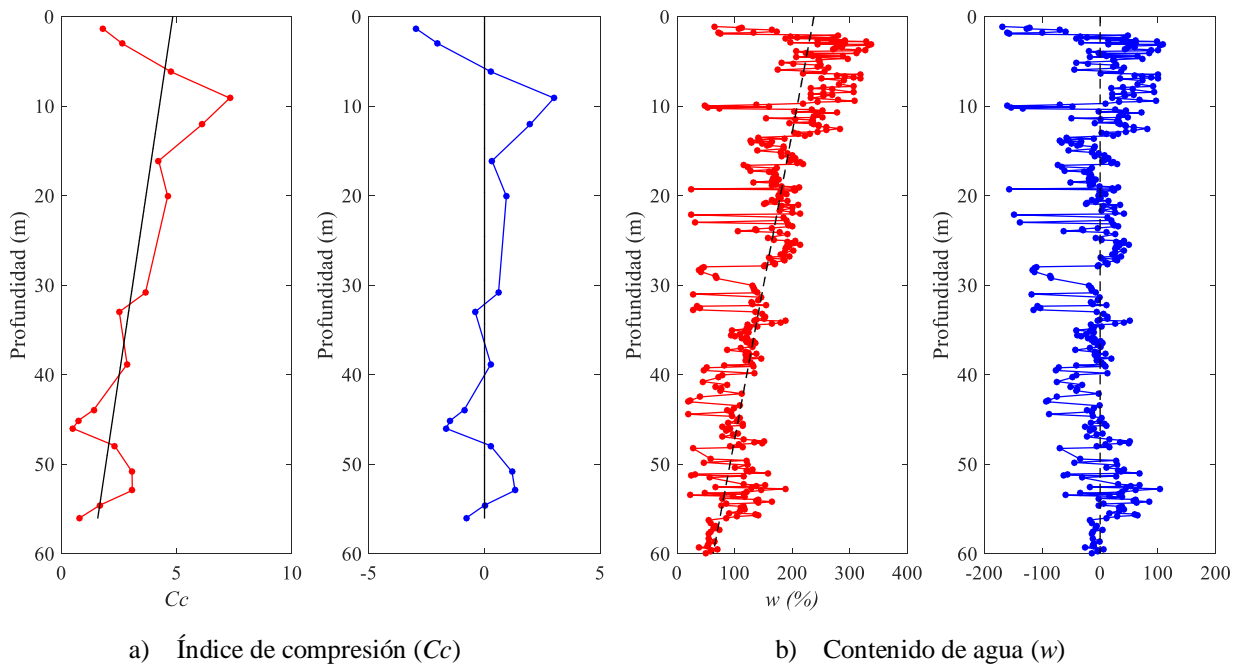


Figura 4.67 Campos experimentales y residuales de  $C_c$  y  $w$  (SC-04).



**Análisis estructural**

Utilizando los datos de los campos residuales, se calcularon los autocorrelogramas verticales para cada una de las propiedades y el correlograma cruzado considerando las dos propiedades. Asimismo, se obtuvieron los modelos de correlación espacial para cada caso, las distancias de correlación resultantes de este análisis, se muestran en la Tabla 4.16.

Tabla 4.16 Distancias de correlación del análisis multivariable de  $C_c$ .

| Propiedad   | Distancia de correlación, $\delta(m)$ |              |
|-------------|---------------------------------------|--------------|
|             | <i>SS-01</i>                          | <i>SC-04</i> |
| $C_c$       | 15                                    | 13           |
| $w$         | 26                                    | 25           |
| $C_c$ y $w$ | 28                                    | 31           |

Considerando las distancias de correlación verticales de la tabla 4.16, y adoptando un modelo de correlación exponencial simple, se determinaron los correlogramas exponenciales presentados en la Figura 4.68 y 4.69.

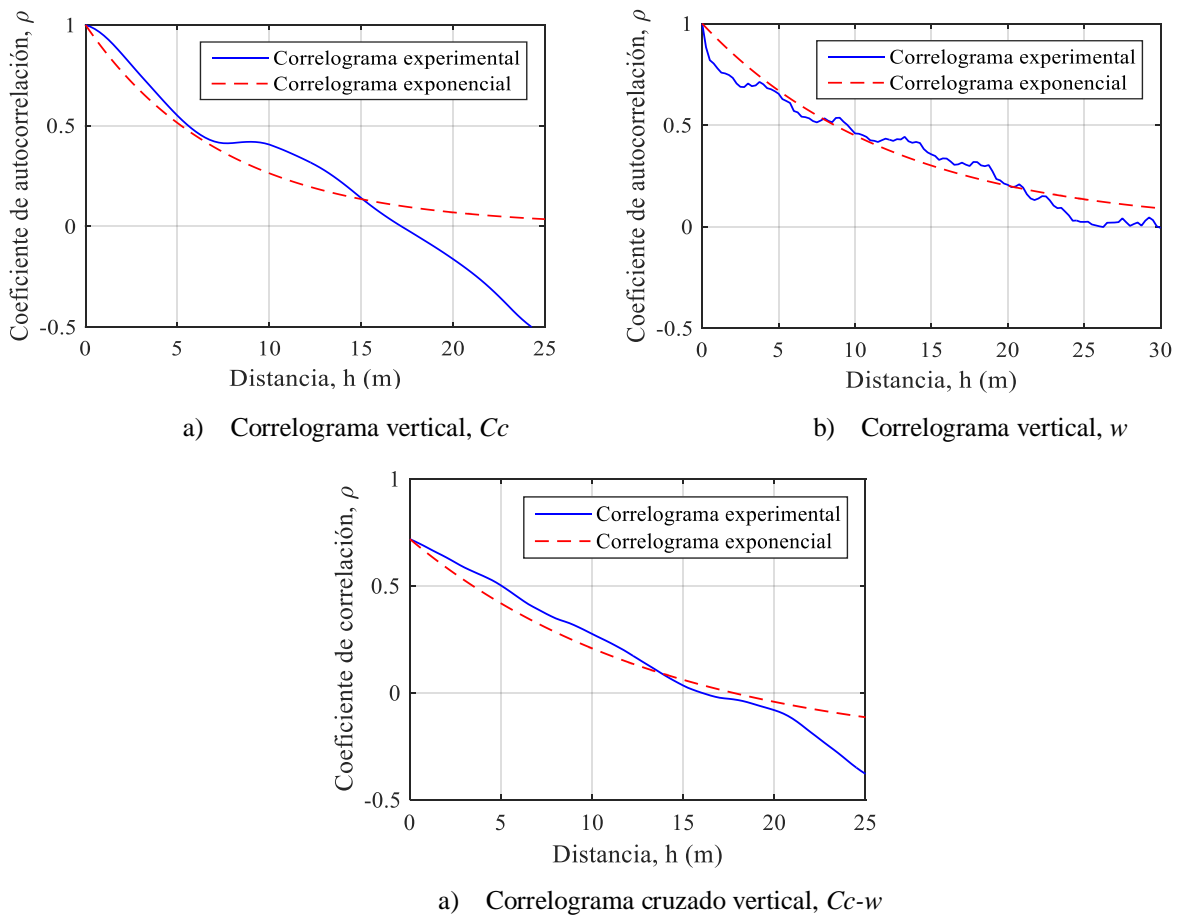


Figura 4.68 Modelos de correlación espacial para el sondeo *SS-01*.

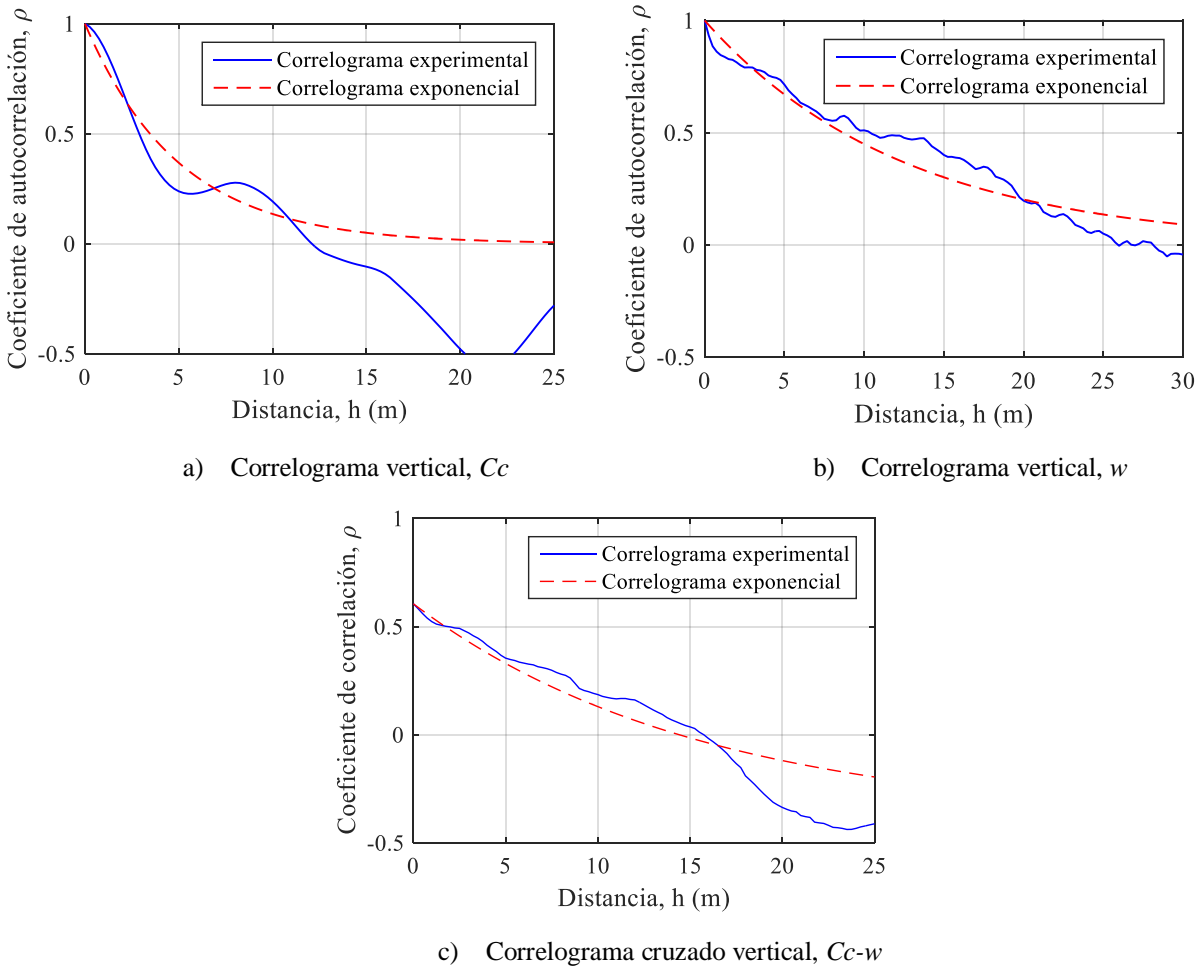


Figura 4.69 Modelos de correlación espacial para el sondeo SC-04.

En los correlogramas anteriores, se puede ver que la estructura de correlación cruzada no parte de uno, esto se debe a no existe una correlación o dependencia vertical perfecta entre el índice de compresión y el contenido de agua. Por tanto, el coeficiente de autocorrelación  $\rho$  es menor que uno para  $h=0$ .

**Predicción**

La estimación del índice de compresión, se realizó utilizando la técnica *Kriging Ordinario* para el caso de la estimación univariable y el *Cokriging Ordinario* para el caso de estimación multivariable.

Las estimaciones realizaron a partir de los datos del campo residual y las correspondientes distancias de correlación. La malla de estimación quedó definida por los parámetros mostrados en la Tabla 4.17

Tabla 4.17 Parámetros de la malla de estimación para el análisis univariable y multivariable.

| Parámetro                          | Valor |
|------------------------------------|-------|
| Coordenada Z del punto inicial (m) | 0     |
| Coordenada Z del punto final (m)   | 60    |
| Número de puntos                   | 240   |
| Paso de cálculo                    | 0.25  |

**Visualización**

Con base en los resultados numéricos de las estimaciones univariadas y multivariadas, se construyeron los perfiles del índice de compresión estimado, que permiten visualizar la distribución espacial de esta propiedad con a lo largo de la profundidad. En las Figuras 4.70 y 4.71, se presentan los perfiles de datos experimentales y de los resultados de las estimaciones.

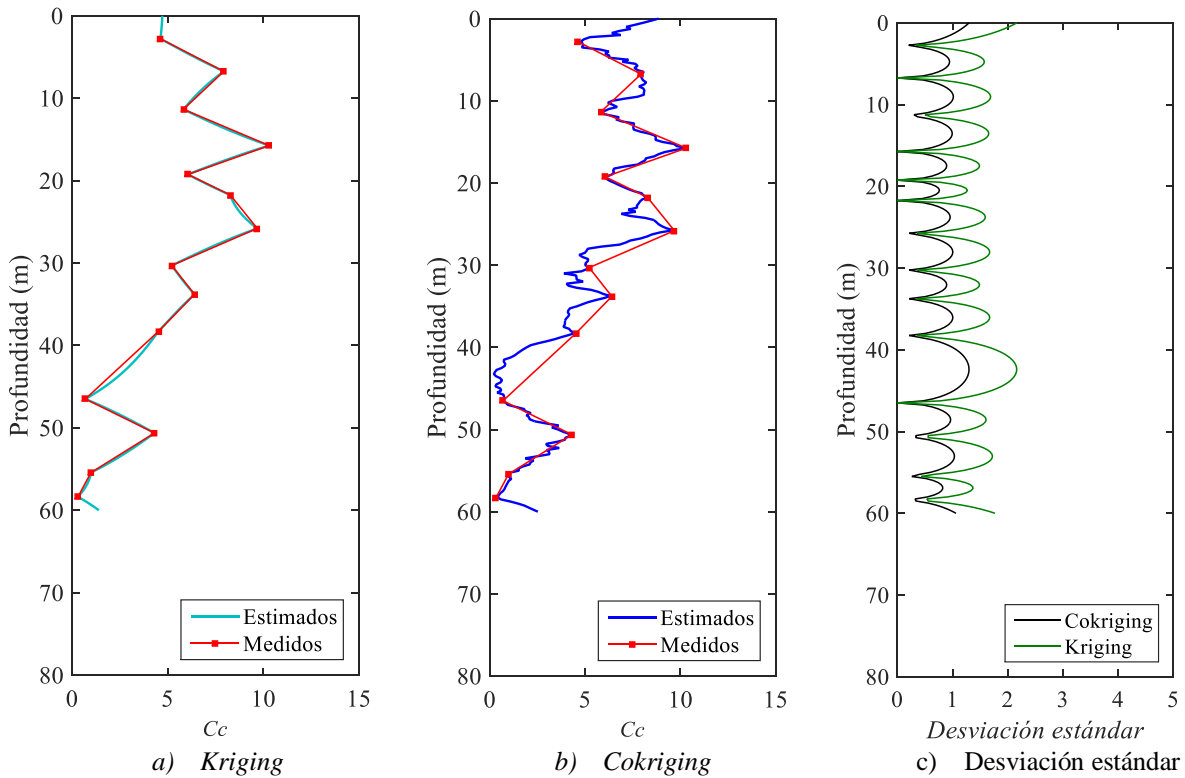


Figura 4.70 Modelos de la distribución espacial de  $C_c$ , en el sondeo SS-01.

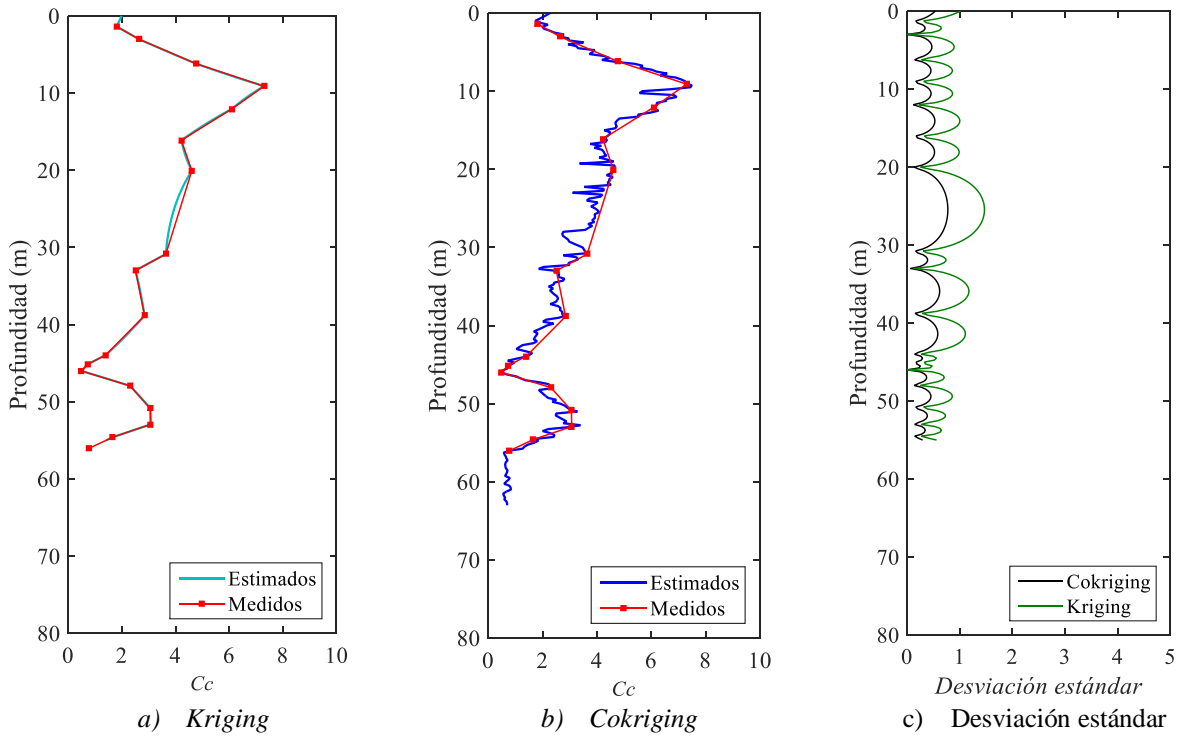


Figura 4.71 Modelos de la distribución espacial n de  $C_c$  en el sondeo SC-04.

**Interpretación de resultados**

En los resultados de la estimación univariable (*Kriging Ordinario*), se observa que los valores estimados de  $C_c$  se ajustan aceptablemente a los datos bajo un efecto de suavizado.

En el caso de la estimación geoestadística multivariable (*Cokriging*), se observa estimación geoestadística multivariable una mayor variación de los valores estimados de  $C_c$ , el perfil estimado se aproxima a la tendencia general del perfil experimental del contenido de agua, particularmente en los tramos donde no existen datos de  $C_c$ . Por tanto, puede decirse que la incorporación de los datos de una propiedad adicional, en este caso el contenido de agua, mejora la calidad de las estimaciones. Lo anterior puede afirmarse al observar que existe una reducción de la varianza de estimación en los perfiles estimados con *Cokriging*.

Asimismo, en el perfil de estimación univariable, se observa que los resultados se aproximan a una interpolación lineal, en cambio, en el perfil de estimación geoestadística multivariable se describe de mejor las variaciones locales de  $C_c$ .

Considerando como aceptables los resultados de la estimación geoestadística multivariable en una dimensión, a continuación, se presenta un análisis geoestadístico multivariable de  $C_c$  en tres dimensiones (volumen).

**4.3.1.2 Análisis de la distribución espacial de la velocidad de onda de corte considerando su correlación con la resistencia  $q_c$  en CPT**

El análisis geoestadístico multivariable, se aplica en medios donde existen puntos con mediciones de dos (o más) propiedades geotécnicas. Por tanto, en este análisis se considera como propiedad primaria la velocidad de onda de corte (sonda suspendida) y como propiedad secundaria la resistencia de punta  $q_c$  contenido de agua (sondeos CPT), siendo esta última propiedad altamente medida.

**Definición del dominio del campo aleatorio (1D)**

Los valores de velocidad de onda  $S$  ( $V_s$ ) y de resistencia de punta ( $q_c$ ), se consideran un campo aleatorio  $V(X)$  y  $S(X)$ , respectivamente, distribuido dentro de un espacio  $R^P$  con  $P=1$  (perfil 1D). El conjunto de valores de  $V_s$  y de  $q_c$ , medidos dentro del dominio  $R^1$ , constituyen una muestra de esos campos aleatorios. El análisis geoestadístico multivariable de la distribución espacial de  $V_s$ , se realizó en dos sitios dentro de la zona de estudio, indicados en la Figura 4.72.

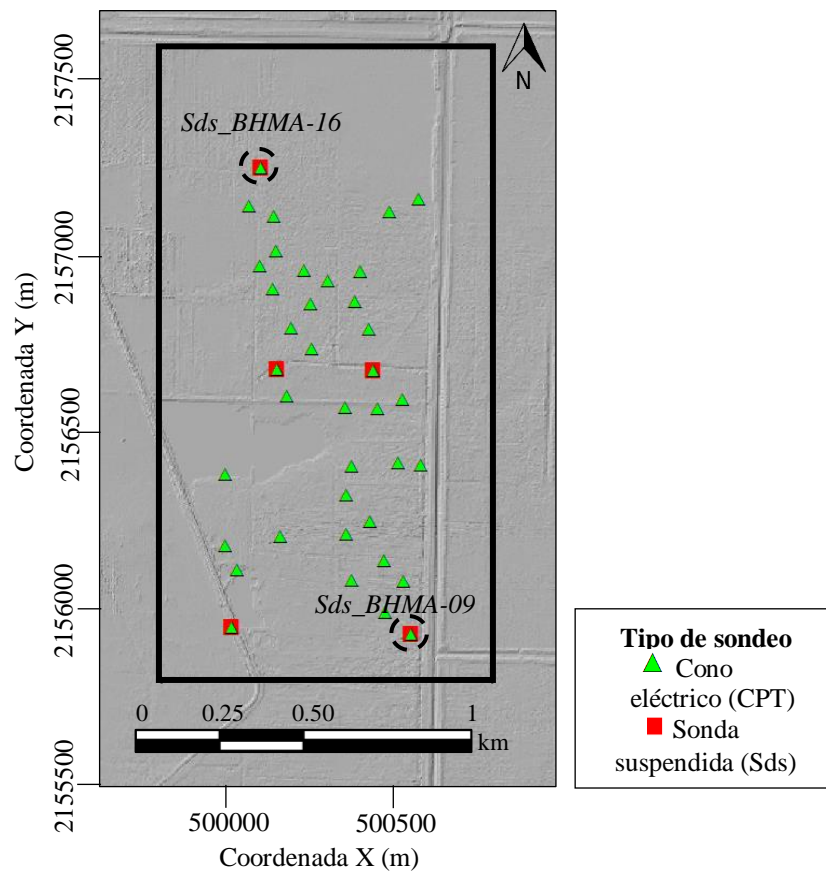


Figura 4.72. Ubicación de los sondeos de cono eléctrico y sonda suspendida.

**Análisis de correlación lineal**

De acuerdo con la metodología del análisis geoestadístico, primeramente, se verificó la existencia de la correlación entre las dos propiedades geotécnicas consideradas. Para este propósito, se construyó una gráfica de regresión lineal entre los dos parámetros (Figuras 4.73 y 4.74) por sitio, donde las abscisas corresponden a la propiedad primaria ( $V_S$ ) y las ordenadas a la propiedad secundaria ( $q_c$ ). en la misma gráfica, se indica el valor del coeficiente de correlación y la ecuación de la línea de tendencia.

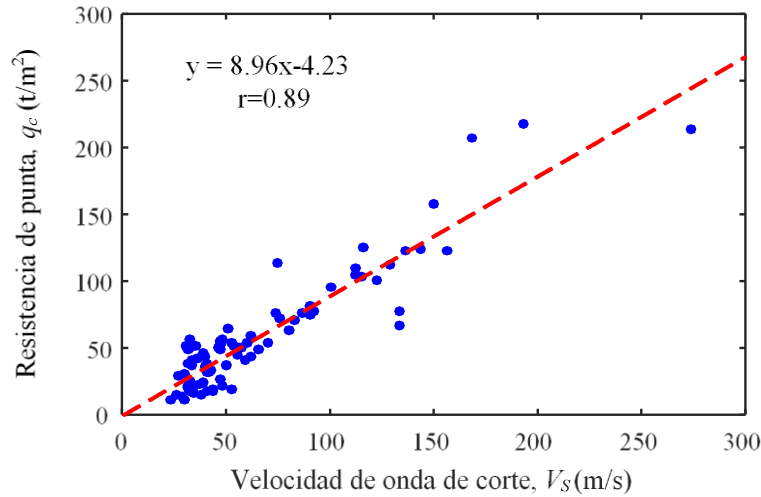


Figura 4.73 Correlación lineal entre  $V_S$  y  $q_c$  en el sondeo  $Sds\_BHMA-16$ .

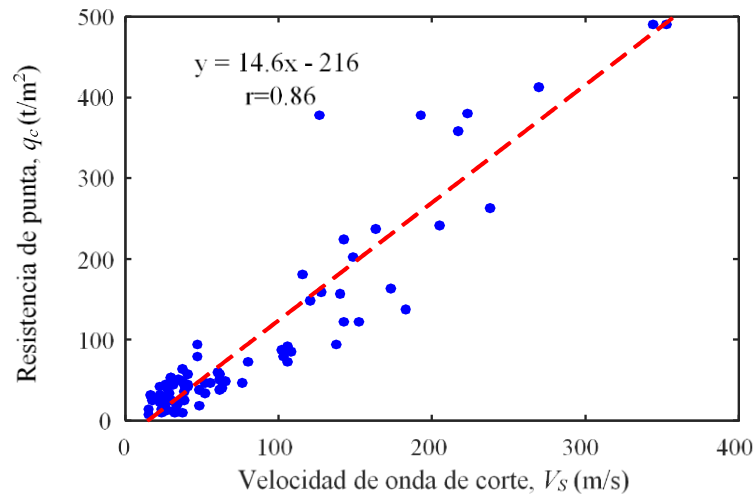


Figura 4.74 Correlación lineal entre  $V_S$  y  $q_c$ , en el sondeo  $Sds\_BHMA-09$ .

En las gráficas de regresión lineal, se observa que existe una correlación alta (0.86 y 0.89) entre la velocidad de onda de corte y la resistencia  $q_c$  en CPT, con valores de  $r$  mayores que la correlación entre  $C_c$  y  $w$ . Por tanto, es posible aplicar la técnica de estimación conjunta.

Debe señalarse, que, para la elaboración de las regresiones, se modificaron las unidades de la resistencia de punta a  $t/m^2$ , para tener el mismo orden de magnitud que la velocidad de onda de corte, según lo indicado por Ovando y Romo (1991).

**Análisis estadístico**

Aceptando la hipótesis de homogeneidad y ergodicidad en las mediciones, se calculan los parámetros estadísticos de las propiedades geotécnicas ( $V_S$  y  $q_c$ ). Los resultados se presentan en la Tabla 4.18.

Tabla 4.18 Parámetros estadísticos de  $V_S$  y  $q_c$ .

| Parámetro           | <i>Sds_BHMA-16</i> |                           | <i>Sds_BHMA-09</i> |                           |
|---------------------|--------------------|---------------------------|--------------------|---------------------------|
|                     | $V_S$ (m/s)        | $q_c$ (t/m <sup>2</sup> ) | $V_S$ (m/s)        | $q_c$ (t/m <sup>2</sup> ) |
| Media               | 81.74              | 102.32                    | 66.33              | 62.80                     |
| Mediana             | 47.5               | 47.9                      | 47.97              | 49.9                      |
| Moda                | 25                 | 25                        | 50                 | 45                        |
| Desviación estándar | 74.33              | 127.74                    | 44.86              | 54.89                     |
| Valor máximo        | 343.2              | 500                       | 274.17             | 500                       |
| Valor mínimo        | 15.5               | 9.5                       | 23.8               | 11.3                      |

**Análisis de tendencia**

Para evaluar la tendencia del conjunto de mediciones, estimación geoestadística multivariable se ajustó una ecuación de tipo  $V(X)=ax+b$ , obteniéndose los coeficientes de la regresión lineal presentados en la Tabla 4.19

Tabla 4.19 Coeficientes de regresión lineal de la velocidad de onda S y de resistencia de punta.

| Sondeo             | Propiedad | Coeficiente |          |
|--------------------|-----------|-------------|----------|
|                    |           | <i>a</i>    | <i>b</i> |
| <i>Sds_BHMA-16</i> | $V_S$     | 4.6111      | -22.39   |
|                    | $q_c$     | 7.0867      | -55.1666 |
| <i>Sds_BHMA-09</i> | $V_S$     | 2.8047      | -26.1879 |
|                    | $q_c$     | 3.0678      | -38.8034 |

Empelando los coeficientes de la tabla 4.19 se retiró la tendencia a los datos experimentales, es decir, se convirtieron los campos originales (con tendencia) a campos residuales (sin tendencia). Los perfiles resultantes se muestran en las Figuras 4.75 y 4.76, donde se observa que tanto el índice de compresión como el contenido de agua tienen la misma variación con la profundidad y presentan una tendencia aumentar con la profundidad. Por otra parte, también se observa que los datos de contenido de agua son más numerosos en relación con del índice de compresión.

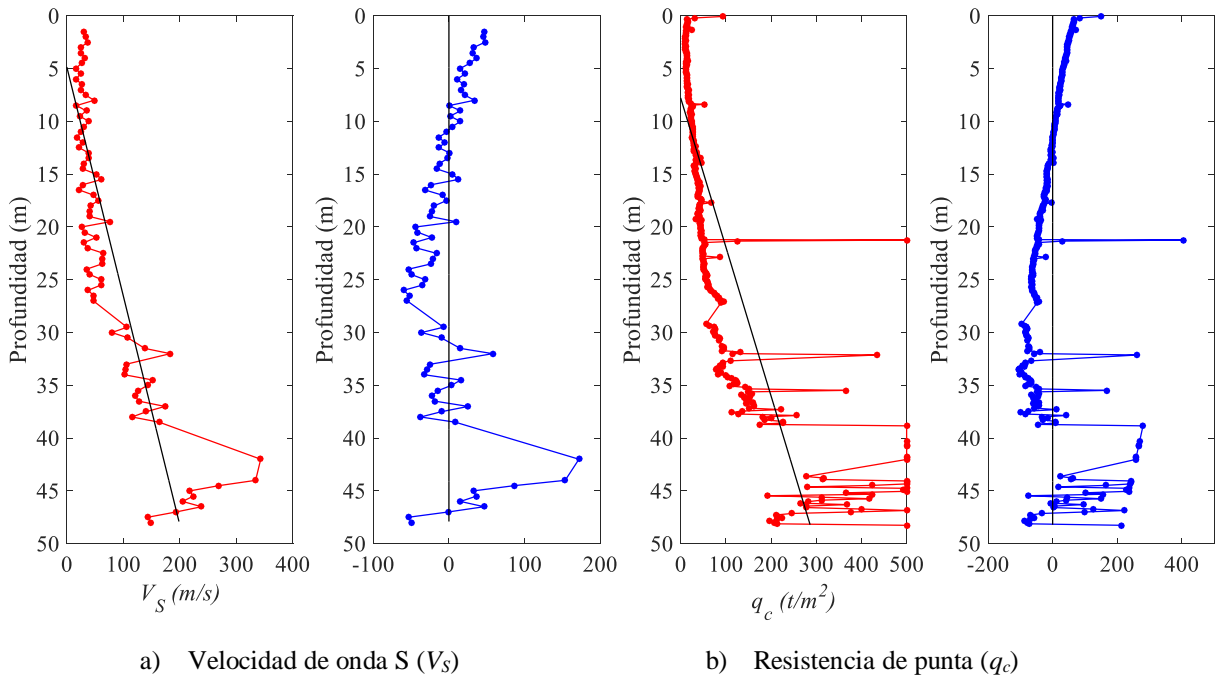


Figura 4.75 Campos experimentales y residuales de  $V_S$  y  $q_c$ . (*Sds\_BHMA-16*).

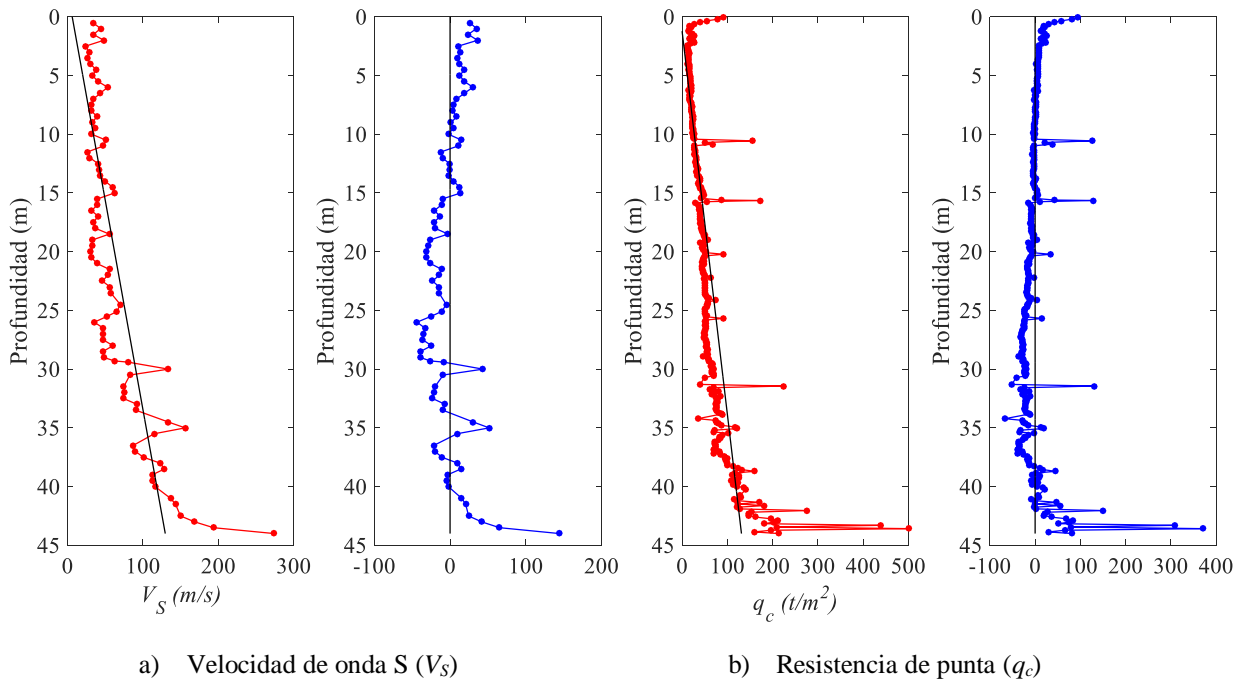


Figura 4.76 Campos experimentales y residuales de  $V_S$  y  $q_c$ . (*Sds\_BHMA-09*).



**Análisis estructural**

Utilizando los datos de los campos residuales, se calcularon los autocorrelogramas verticales para cada una de las propiedades y el correlograma cruzado considerando las dos propiedades. Asimismo, se obtuvieron los modelos de correlación espacial para cada caso, las distancias de correlación resultantes de este análisis, se muestran en la Tabla 4.20.

Tabla 4.20 Distancias de correlación del análisis multivariable de  $V_S$ .

| Parámetros | Distancia de correlación, $\delta(m)$ |                |
|------------|---------------------------------------|----------------|
|            | $Sds\_BHMA-16$                        | $Sds\_BHMA-09$ |
| $V_S$      | 14                                    | 13             |
| $q_c$      | 12                                    | 9.5            |
| $V_S-q_c$  | 21                                    | 20             |

Considerando las distancias de correlación verticales de la tabla 4.16, y adoptando un modelo de correlación exponencial simple, se determinaron los correlogramas exponenciales presentados en la Figura 4.77 y 4.78

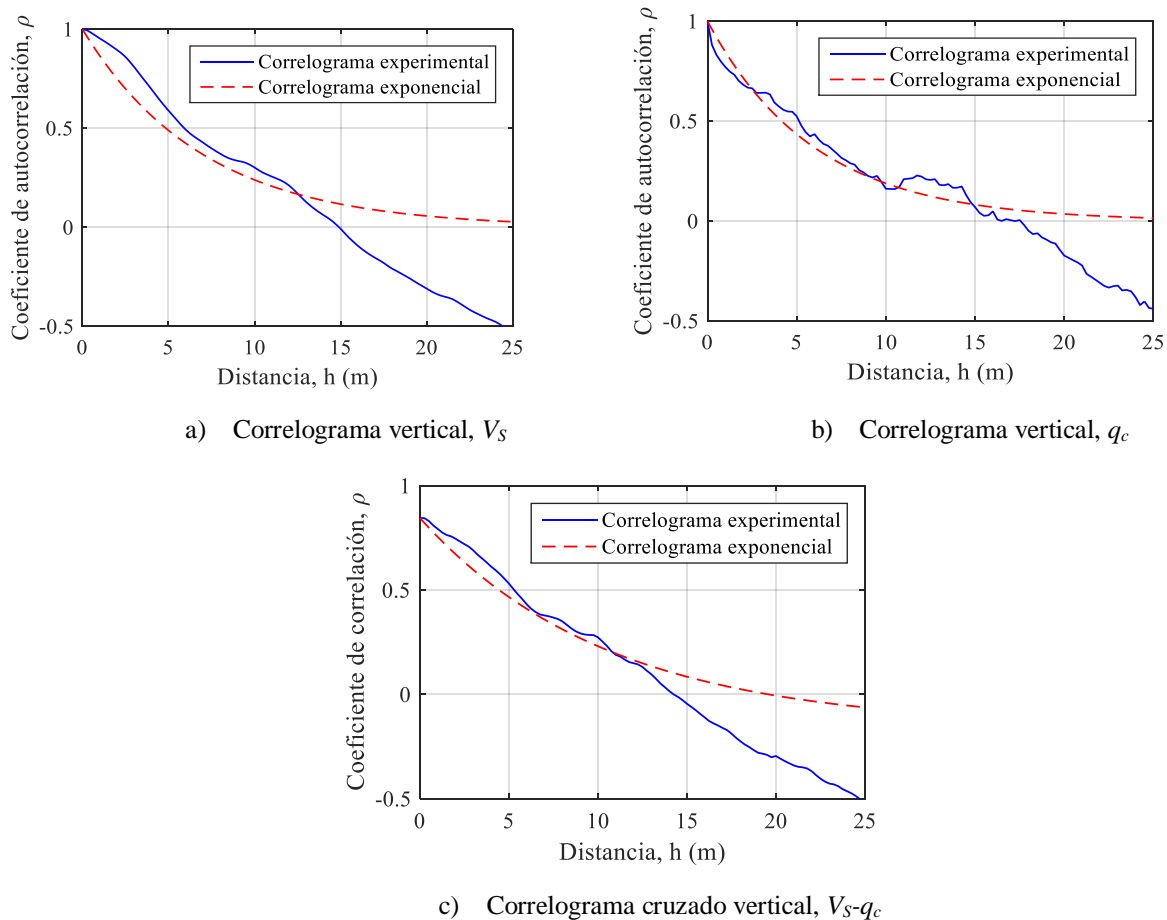


Figura 4.77 Modelos de correlación espacial para el sondeo  $Sds\_BHMA-16$ .

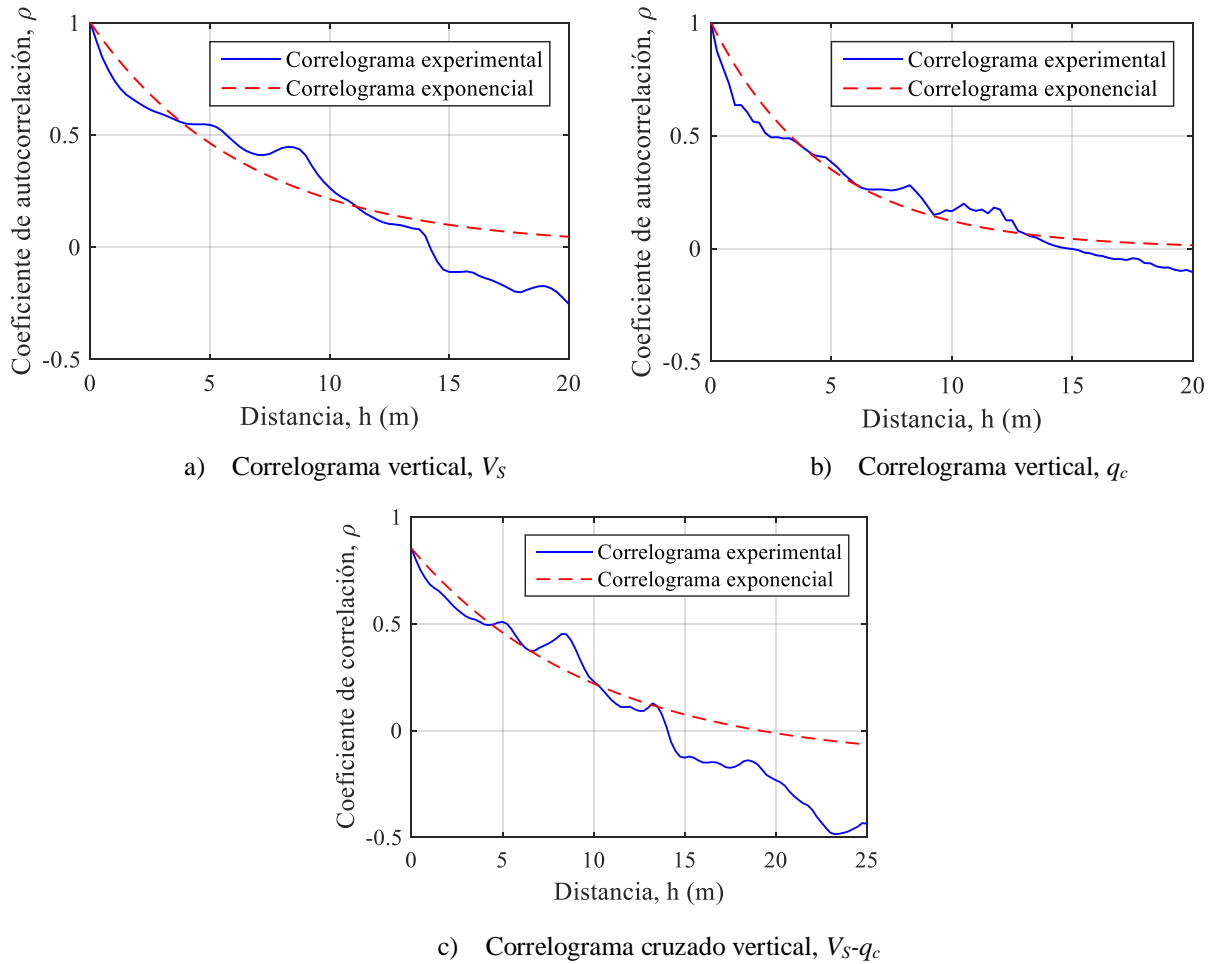


Figura 4.78 Modelos de correlación espacial para el sondeo  $Sds\_BHMA-09$ .

En los correlogramas anteriores, se observa que para  $h=0$ , el coeficiente de correlación cruzado,  $\rho(h)$ , no es 1, esto se debe a que son propiedades diferentes las que se comparan en un mismo punto.

**Predicción**

La estimación del índice de compresión, se realizó utilizando la técnica *Kriging Ordinario* para el caso de la estimación geoestadística univariable y el *Cokriging Ordinario* para el caso de estimación geoestadística multivariable.

Las estimaciones realizaron a partir de los datos del campo residual y las correspondientes distancias de correlación. La malla de estimación quedó definida por los parámetros mostrados en la Tabla 4.21

La malla de estimación utilizada en las dos técnicas de estimación, queda definida por los parámetros que se muestran en la Tabla 4.21.

Tabla 4.21 Parámetros de la malla de estimación para la estimación geoestadística univariable y multivariable.

| Parámetro                          | Valor |
|------------------------------------|-------|
| Coordenada Z del punto inicial (m) | 0     |
| Coordenada Z del punto final (m)   | 45    |
| Número de puntos                   | 2250  |
| Paso de cálculo (m)                | 0.02  |

**Visualización**

Con base en los resultados numéricos de las estimaciones univariables y multivariables, se construyeron los perfiles de velocidad de onda de corte estimada, que permiten visualizar la distribución espacial de esta propiedad con a lo largo de la profundidad. En las Figuras 4.79 y 4.80, se presentan los perfiles de datos experimentales y de los resultados de las estimaciones.

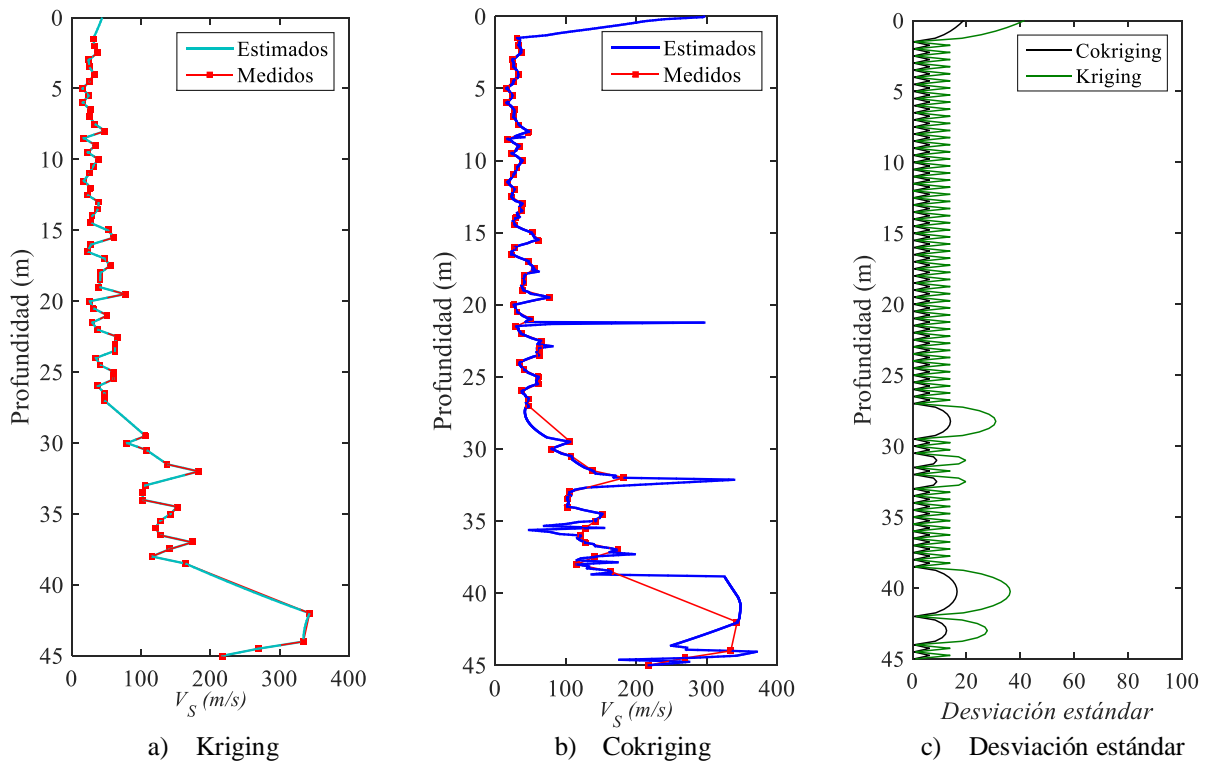


Figura 4.79 Modelos de la distribución espacial de  $V_s$  en la sonda  $Sds\_BHMA-16$ .

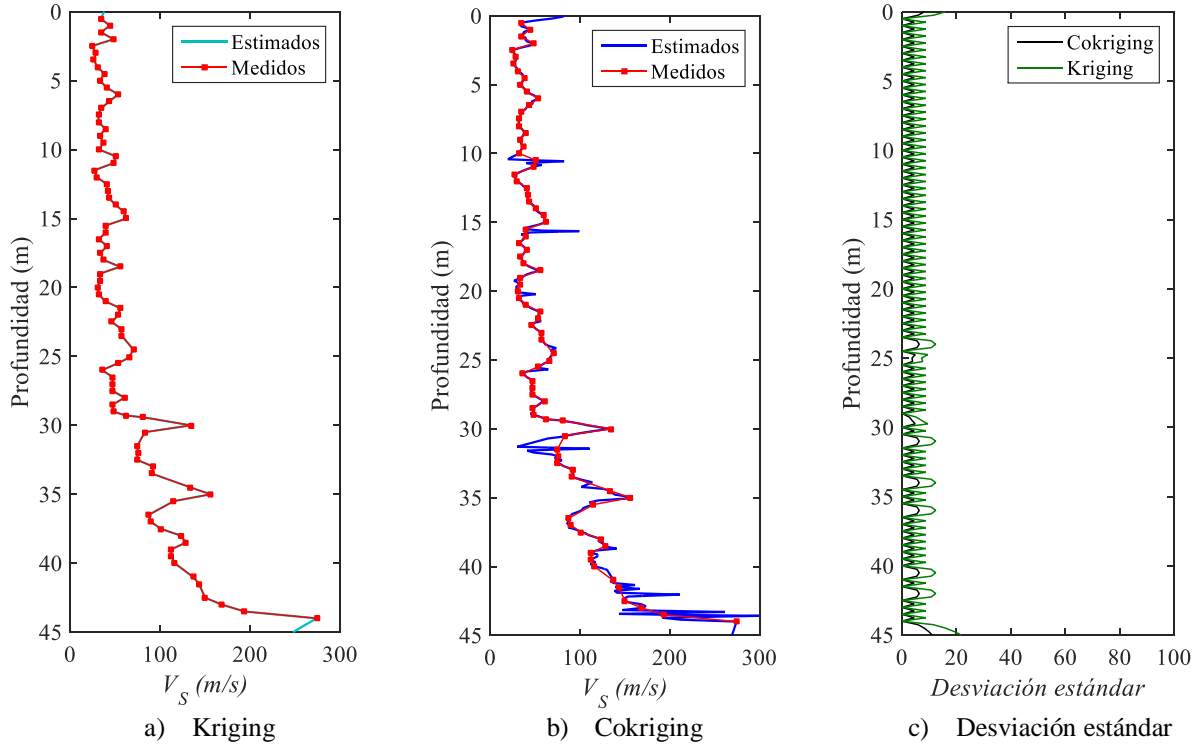


Figura 4.80 Modelos de la distribución espacial de  $V_S$  en la sonda  $Sds\_BHMA-09$ .

**Relación de Ovando y Romo (1991)**

Otra metodología para estimar la velocidad de onda de corte, en función de  $q_c$ , es el uso de las expresiones obtenidas de correlaciones empíricas. Con la finalidad de comparar los resultados del análisis multivariable, se realizaron estimaciones de  $V_S$ , en los puntos de estudio, empleando la fórmula propuesta por Ovando y Romo (1991) para los suelos del Valle de México.

La expresión utilizada para la estimación de la velocidad de onda de corte, es la siguiente:

$$V_S = \eta \sqrt{\frac{q_c}{N_{kh} \gamma_s}} \tag{4.1}$$

donde  $V_S$  es la velocidad de onda  $S$ , en m/s,

$q_c$  es la resistencia de punta en CPT, en  $t/m^2$ ,

$\gamma_s$  es el peso volumétrico, en  $t/m^3$

$N_{kh}$  es un factor de correlación, su valor depende del tipo de suelo.

$\eta$  es una constante del tipo de suelo y depende de  $g$ , y  $\gamma_r$ , se obtiene con la ecuación (4.2):

$$\eta = \sqrt{\frac{g}{\gamma_r}} \tag{4.2}$$

En la Tabla 4.22, se indican algunos valores de  $N_{kh}$  sugeridos por los autores.

Tabla 4.22 Valores sugeridos de  $N_{kh}$  (Ovando y Romo, 1991).

| Tipo de suelo  | Valores de $N_{kh}$ |       |        |
|--|---------------------|-------|--------|
|  | Máximo              | Medio | Mínimo |
| Arcillas del lago de Texcoco preconsolidado y virgen     | 14                  | 9.5   | 6.7    |
| Arcillas del lago de Xochimilco-Chalco                   | 14                  | 9.9   | 7      |
| Suelos areno-limosos de las capas duras en todo el valle | 16                  | 11.1  | 8      |

En la Tabla 4.23 se proporcionan algunos valores de la constante  $\eta$  que depende de los valores promedio de pesos volumétricos típicos ( $\gamma_s$ ) y de las deformaciones de referencia ( $\gamma_r$ ), propuestas por los mismos autores.

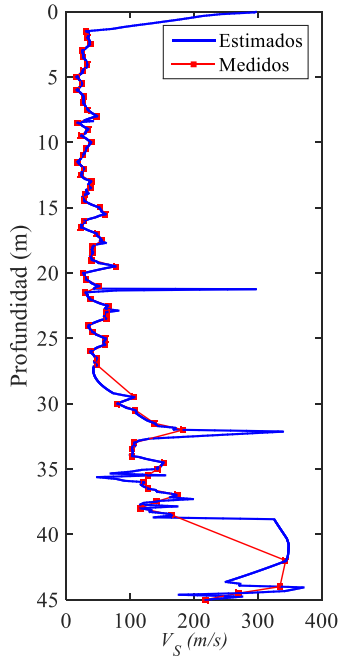
Tabla 4.23 Valores de las constantes utilizados en la fórmula (4.1) (Ovando y Romo, 1991).

| Tipo de suelo  | $\gamma_r$<br>% | $\gamma_s$<br>t/m <sup>3</sup> | $\eta$ |
|--|-----------------|--------------------------------|--------|
| Arcillas del lago de Texcoco preconsolidado y virgen     | 1.5             | 1.2                            | 23.33  |
| Arcillas del lago de Xochimilco-Chalco                   | 1.117           | 1.2                            | 26.4   |
| Suelos areno-limosos de las capas duras en todo el valle | 0.37            | 1.65                           | 40     |

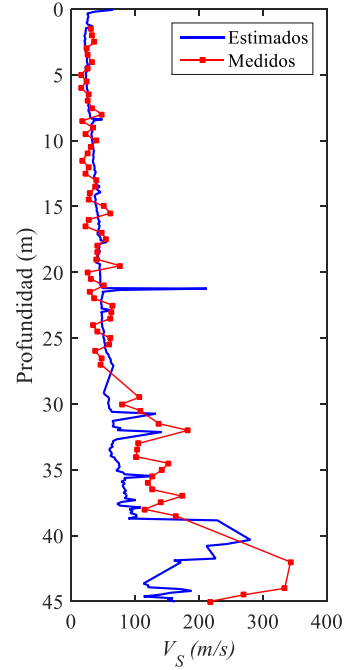
Con base en la ubicación y las condiciones del subsuelo de la zona de estudio, se definieron los valores de las constantes correspondientes para utilizar la ecuación (4.1). El valor inicial considerado de  $N_K$  fue de 9.5, debido a que el sitio de estudio se localiza en la zona del ex-Lago de Texcoco, por lo que, el tipo de suelo corresponde a arcillas de origen lacustre. De acuerdo con el tipo de suelo, se asignó al coeficiente  $\eta$  el valor de 23.33.

Tomando en cuenta las recomendaciones de los autores, se realizaron varios ajustes modificando los valores de  $N_{kh}$ , y se compararon las mediciones de  $V_s$  con las estimaciones de la correlación. Asimismo, se calculó el valor del periodo con los datos estimados y los datos experimentales, se observó que, en ambos sitios de estudio, el mejor ajuste se obtuvo al utilizar un valor de  $N_{kh}=8$ .

Al igual que en las estimaciones 1D, se recurrió a las técnicas de graficación para mostrar los resultados de las estimaciones de  $V_s$  por medio de perfiles, donde se comparan los datos con los resultados obtenidos con la expresión propuesta por Ovando y Romo, (1991). Adicionalmente, se muestran los perfiles de velocidad de onda de corte, obtenidos mediante la técnica de estimación geoestadística multivariable (*Cokriging*).

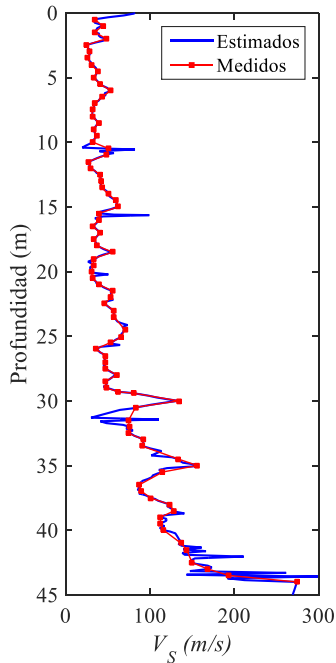


a) Perfil de  $V_S$  estimado con *Cokriging*.

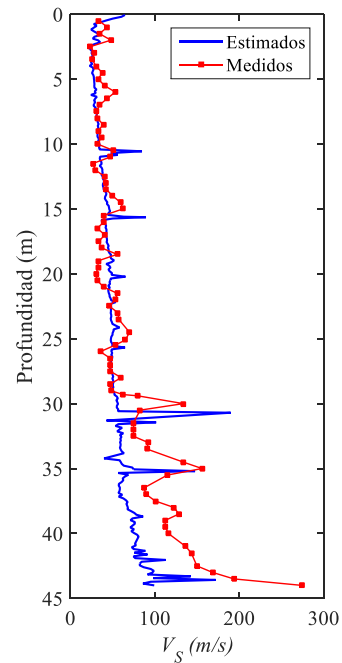


b) Perfil de  $V_S$  estimado con la expresión de Ovando y Romo, (1991).

Figura 4.81 Perfiles estimados de  $V_S$  en el sitio de la prueba *Sds\_BHMA-16*.



a) Perfil de  $V_S$  estimado con *Cokriging*.



b) Perfil de  $V_S$  estimado con expresión de Ovando y Romo, (1991).

Figura 4.82 Perfiles estimados de  $V_S$  en el sitio de prueba *Sds\_BHMA-09*.

### ***Análisis de resultados***

Los resultados de la estimación geoestadística univariable en los dos puntos de estudio, representan de forma adecuada la tendencia general de  $V_S$  a lo largo de la profundidad. En los dos sitios, se observa que los perfiles de  $V_S$  estimada reproducen aceptablemente la distribución de los perfiles experimentales de  $V_S$ . En los perfiles de la desviación estándar de la estimación, se identifican puntos con magnitudes baja en las profundidades donde existen datos. Por otra parte, se aprecia una mejor estimación y magnitudes más bajas de desviación estándar de estimación en el sitio de la sonda *Sds\_BHMA-09*. Lo anterior se debe principalmente a que en ese sitio se cuenta con mayor número de mediciones y los datos de  $V_S$  presentan variaciones menos importantes que en el sitio de la sonda *Sds\_BHMA-16*.

Como resultado de la estimación geoestadística análisis multivariable, se tienen estimaciones que representan correctamente la distribución de los valores medidos de velocidad de onda  $S$ . Adicionalmente, se observa una contribución de la resistencia de punta en algunas partes donde no se tienen mediciones de  $V_S$ , principalmente en las zonas de mayor rigidez, donde se espera que haya incrementos en la velocidad de onda de corte, por tanto, la estimación conjunta de la velocidad de onda de corte tiene mayor coherencia con las condiciones del subsuelo. Por otra parte, se puede ver que los valores de la desviación estándar disminuyen en los dos puntos donde se realizó la estimación geoestadística multivariable de  $V_S$ .

Al comparar los resultados obtenidos con la estimación geoestadística multivariable y con la correlación empírica, en general se observa que ambas técnicas tienen buena aproximación para estimar  $V_S$ . Debe señalarse que la correlación empírica aporta buenos resultados en los primeros 20 m de profundidad, donde se encuentran valores de  $V_S$  que varían de 50 a 90 m/s, asociados a la FAS. Por otra parte, en las capas de con mayor rigidez, los valores estimados con la correlación empírica subestiman a los valores experimentales, en cambio los valores estimados con Cokriging, definen un perfil con mejor aproximación a los datos experimentales. Con base en lo anterior, puede señalarse que la correlación empírica proporciona buenos resultados únicamente en los estratos blandos superiores, en el caso de la estimación geoestadística multivariable proporcionan mejores resultados en toda la longitud analizada.

Finalmente, es importante precisar que la metodología geoestadística multivariable unidimensional los datos de  $q_c$  complementan a los datos de  $V_S$  con, en cambio expresión obtenida de la correlación empírica transforma directamente los datos de  $q_c$  a valores de  $V_S$ .

Considerando como aceptables en los resultados obtenidos en el análisis geoestadístico unidimensional, agua continuación se presenta un análisis geoestadístico multivariable en tres dimensiones de  $C_c$  y  $V_S$ .

**4.3.2 Análisis de la distribución espacial de las propiedades geotécnicas en un volumen de estudio (3D)**

**4.3.2.1 Análisis de la distribución espacial del  $C_c$  considerando su correlación con el contenido de agua**

**Definición del dominio del campo aleatorio (3D)**

Los valores de índice de compresión ( $C_c$ ) y de contenido de agua ( $w$ ), se consideran un campo aleatorio  $V(X)$  y  $S(X)$  respectivamente, distribuidos dentro de un espacio  $R^P$  con  $P=3$  (volumen de estudio). El conjunto de valores de  $C_c$  y de  $w$ , medidos dentro del dominio  $R^3$ , constituyen una muestra de esos campos aleatorios. Para el análisis geoestadístico multivariable de  $C_c$ , se utilizó la información de 41 sondeos, distribuidos en el área de estudio como se muestra en la Figura 4.83.

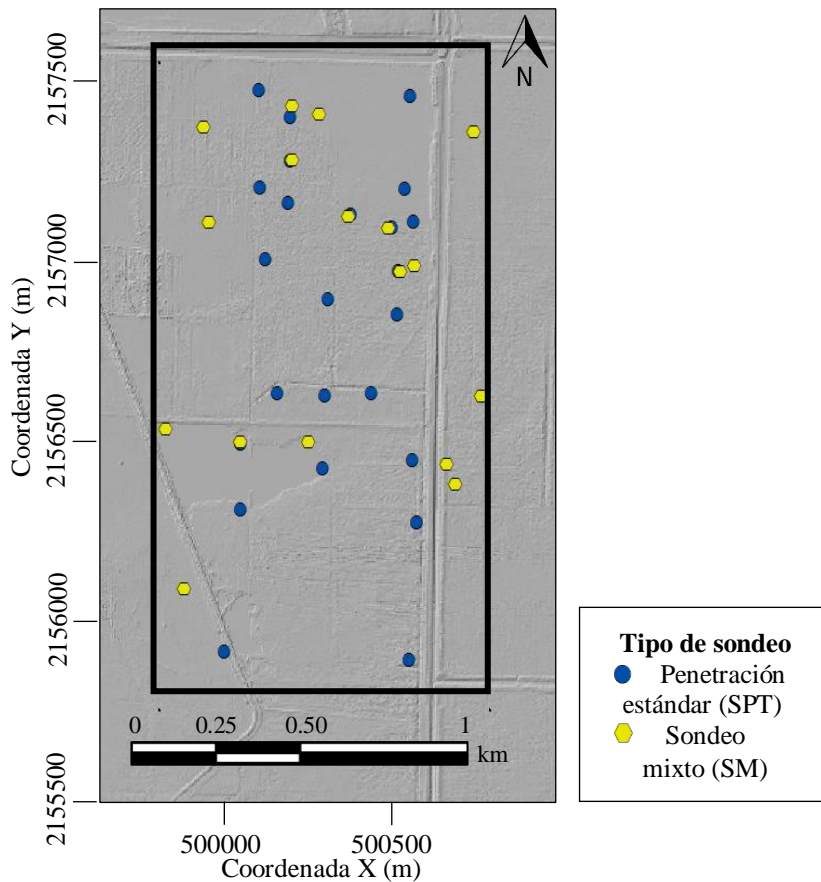


Figura 4.83 Distribución de los sondeos utilizados en el análisis multivariable de  $C_c$  y  $w$ .

Como se puede ver en la distribución de los sondeos, existen varios puntos donde coinciden las mediciones de  $SPT$  y  $SM$ , las cuales permitieron verificar la correlación entre ambas propiedades ( $C_c$  y  $w$ ) y construir los correlogramas cruzados, requeridos en el análisis multivariable. Con base en la localización de los sondeos, es claro que se está en una condición parcialmente heterotópica, la cual resulta ideal para aplicar la estimación conjunta de  $C_c$ .



**Análisis de correlación**

En este análisis se incluyen las mediciones de los demás sitios donde existen mediciones de  $C_c$  y  $w$ . En la Figura 4.84, se presenta la gráfica de correlación entre los dos parámetros, en la gráfica se indica la línea de tendencia y la ecuación de la recta. Como se observa, la correlación entre ambas propiedades es positiva, con un coeficiente de correlación de 0.72, siendo más bajo que los obtenidos en el análisis unidimensional. Esta disminución, puede asociarse a la presencia de datos con valores altos de contenido de agua, produciendo mayor dispersión.

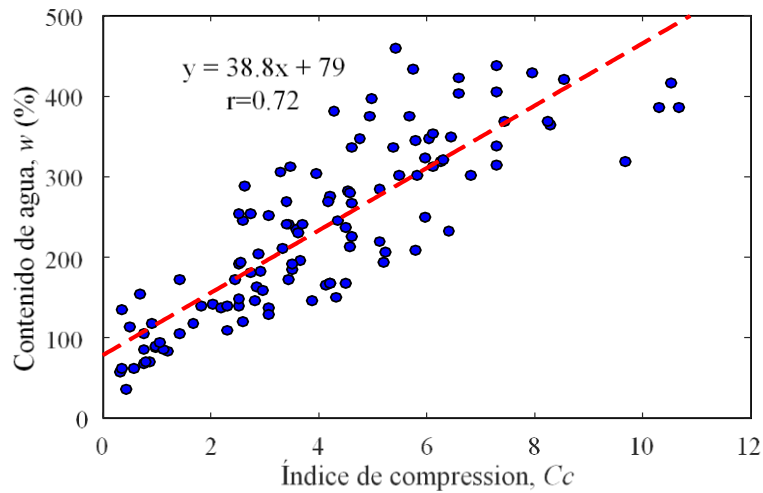


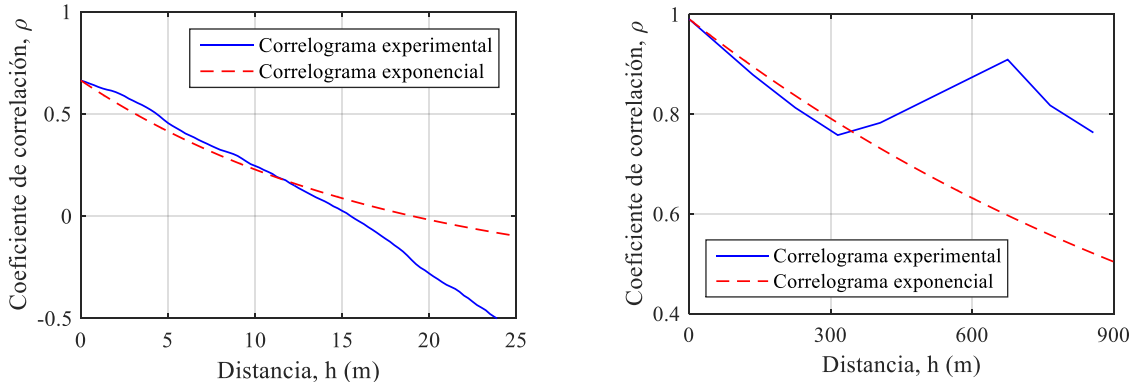
Figura 4.84 Grafica de correlación lineal entre  $C_c$  y  $w$ .

**Análisis estructural**

Considerando los datos del campo experimental, se calcularon los correlogramas cruzados ( $C_c$  y  $w$ ) en las direcciones horizontal y vertical (Figura 4.85). Adicionalmente, se retomaron las distancias de correlación del índice de compresión y del contenido de agua, obtenidas en análisis univariable.

Las distancias de correlación cruzadas resultantes son  $\delta_{ver}=20$  m y  $\delta_{hor}=2700$  m. Con estos valores, y adaptando un modelo de correlación exponencial simple, se determinaron los correlogramas cruzados en dirección horizontal y vertical que se muestran en la Figura 4.85.

De igual forma que en el análisis multivariable unidimensional, se observa en la Figura 4.85, que los modelos de correlación cruzada no parten de 1, debido a que la correlación entre el índice de compresión y el contenido de agua no es perfecta.



a) Correlograma cruzado vertical. b) Correlograma cruzado horizontal.

Figura 4.85 Modelos de correlación cruzados para  $C_c$  y  $w$ .

**Predicción**

Con base en los datos de los campos experimentales de  $C_c$  y de  $w$ , con las seis distancias de correlación, obtenidas, se utilizó la técnica multivariable Cokriging Ordinario, para estimar los valores en dos ejes preferenciales, que se observa en la Figura 4.86.

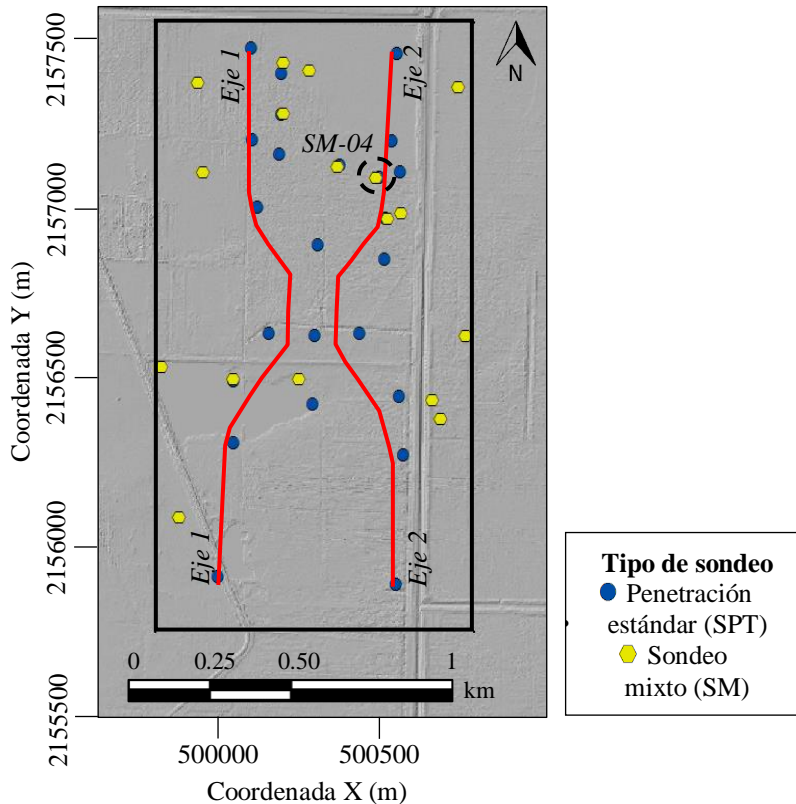
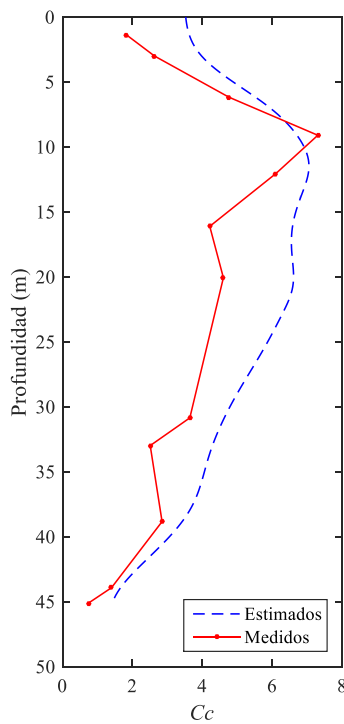


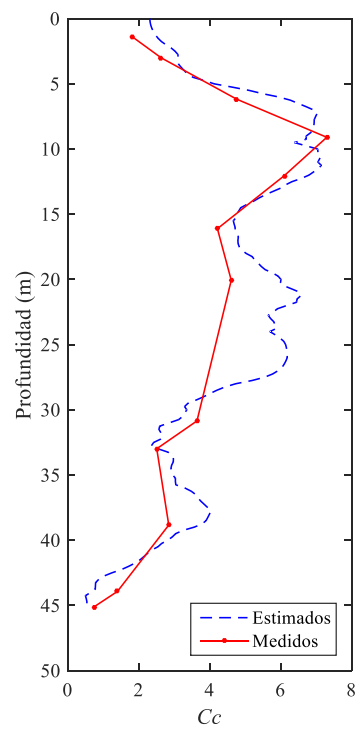
Figura 4.86 Ejes preferenciales para la estimación de  $C_c$ .

**Validación cruzada**

Para validar los resultados de la metodología, se realizó la validación cruzada  $C_c$ , retirando los datos del índice de compresión y de contenido de agua en el sitio del sondeo  $SM-04$ . Las estimaciones se realizaron de manera univariable y multivariable, los resultados se muestran en la Figura 4.87. considerando las estimaciones. En los resultados, se observa que el perfil obtenido en la estimación geoestadística multivariable, representa de forma más aproximada la tendencia general de las mediciones de  $C_c$ , a diferencia de la técnica univariable donde se sobrestiman los valores de  $C_c$ . Asimismo, en el perfil de la estimación geoestadística multivariable, es evidente la contribución de los datos de  $w$ , los cuales contribuyen a mejorar la calidad estimaciones.



a) Perfil de estimación univariable (*Kriging*)



b) Perfil de estimación multivariable (*Cokriging*)

Figura 4.87 Resultados de la validacion cruzada de  $C_c$  en el sitio del sondeo  $SM-04$ .

**Visualización**

Para facilitar la interpretación de los valores tabulares de  $C_c$ , obtenidos en la estimación conjunta (Cokriging) para los dos ejes, se recurre a técnicas de graficación avanzada, que permiten la elaboración de secciones transversales y volúmenes 3D, que facilitan la interpretación de la variación espacial del índice de compresión, en los dos ejes preferenciales donde es estimado dicha propiedad. En las Figuras 4.88 y 4.89 se muestran las secciones con la distribución de  $C_c$  y con la incertidumbre asociada a cada estimación.

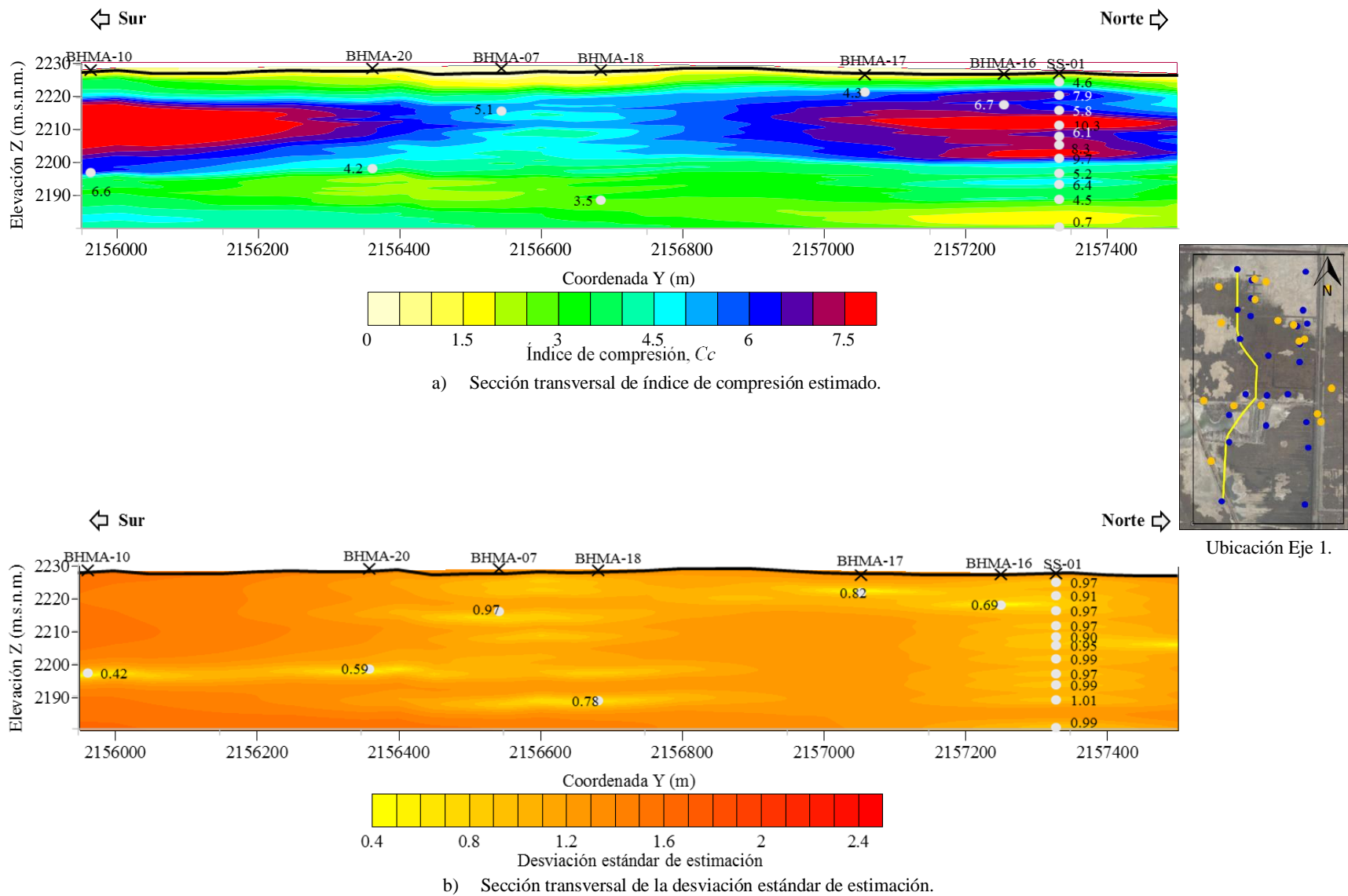


Figura 4.88 Distribución espacial del índice de compresión estimado a lo largo del Eje 1.

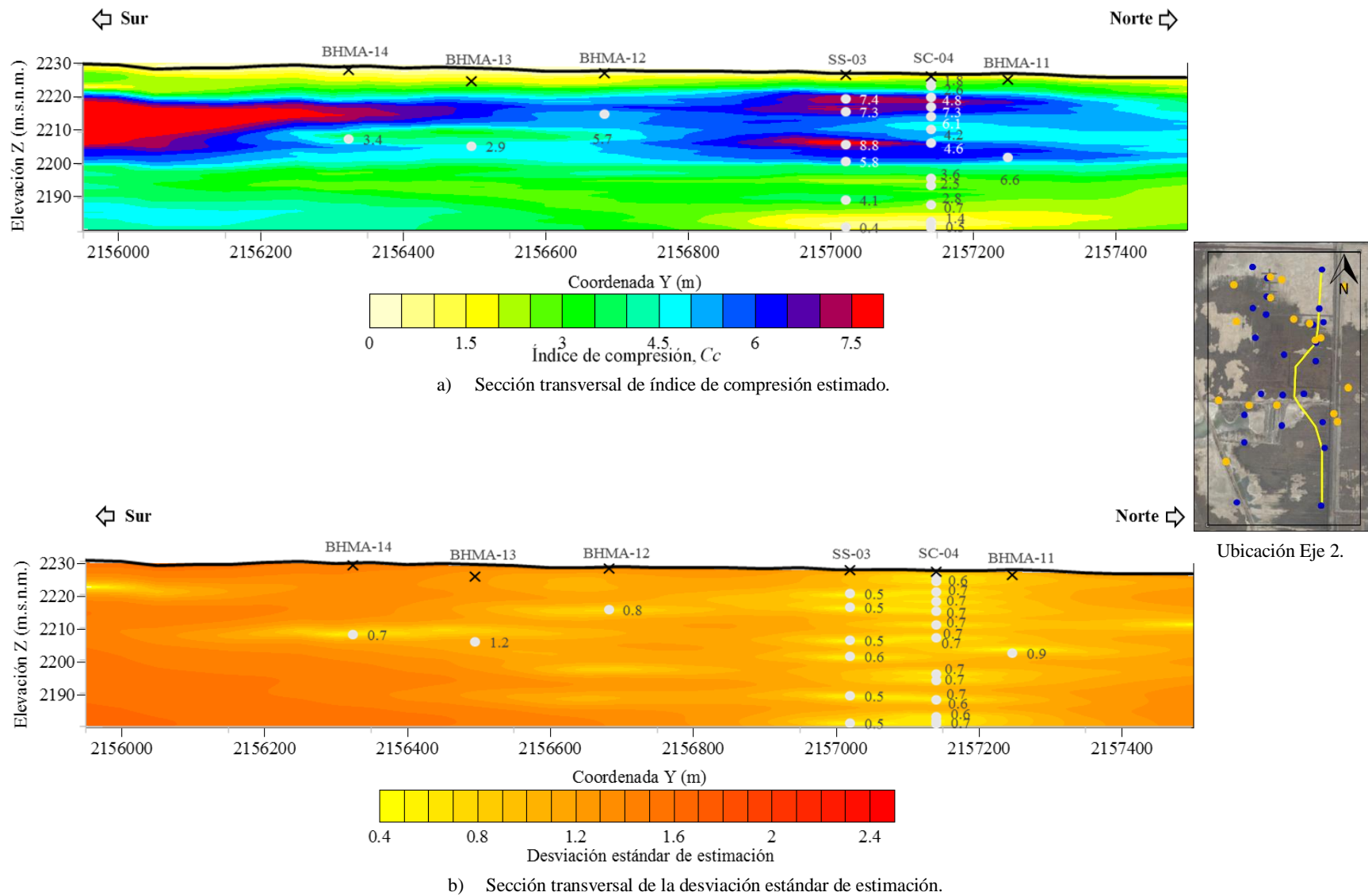


Figura 4.89 Distribución espacial del índice de compresión estimado a lo largo del Eje 2.

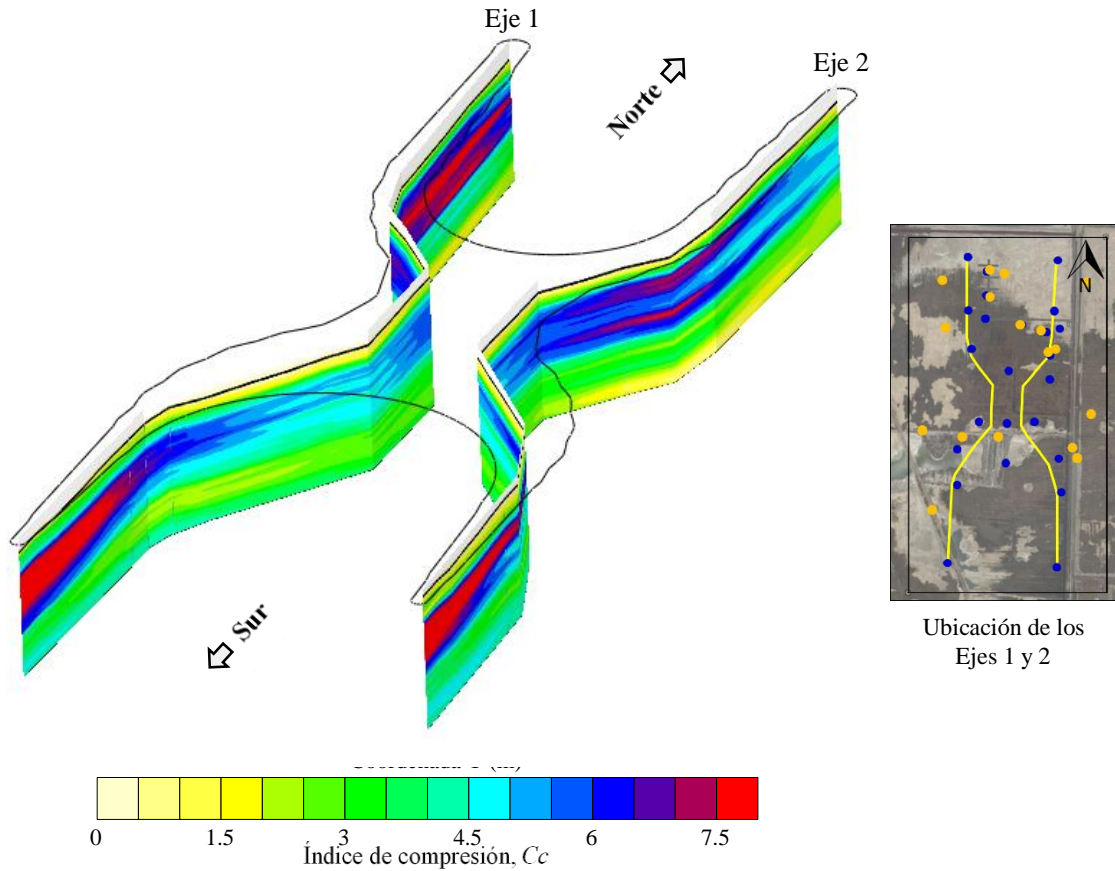


Figura 4.90 Modelo 3D de la distribución espacial de índice de compresión.

### ***Análisis de resultados***

De acuerdo con las secciones transversales y con base en la escala de colores del índice de compresión, en cada eje se aprecia una mejor definición en la distribución de  $C_c$  en la parte sur, a diferencia de los resultados del análisis geoestadístico univariable. Por tanto, se es evidente la contribución de los datos de  $w$  para estimar  $C_c$ .

En la parte superior de las secciones, se identifica la presencia de una capa delgada de espesor variable con bajos valores de compresibilidad, que corresponden a la CS. A diferencia de las secciones construidas con los resultados de la estimación geoestadística univariable, se observa, que en la estimación geoestadística multivariable (conjunta), la CS se define claramente a en cada uno de los dos ejes preferenciales, por tanto, se representa de mejor manera las condiciones del subsuelo.

Debajo de la capa dura, se aprecia un aumento de la magnitud del índice de compresión, alcanzando valores superiores a 4.5, hasta una profundidad aproximada de 20 m. Estos altos valores de compresibilidad son típicos de suelos blandos, por lo que, esta capa corresponde a la FAS

Por otra parte, en los ejes de  $C_c$  estimado se observa que las capas de suelos rígidas como la CD y la FEP no se definen claramente, esto se debe a que no se cuenta con datos suficientes de  $C_c$ , por lo que, la variable secundaria (auxiliar) no contribuye suficientemente a mejorar las estimaciones de  $C_c$ , para definir estos estratos. Por tanto, resulta conveniente emplear la técnica de estimación geoestadística multivariable (*Cokriging*) únicamente en los estratos compresibles.

Otro aspecto importante que se observan en los resultados del *Cokriging*, es la reducción considerable de la incertidumbre de las estimaciones.

**4.3.2.2 Análisis de la distribución espacial de la velocidad de onda de corte considerando su correlación con la resistencia  $q_c$  en CPT.**

**Definición del dominio del campo aleatorio (3D)**

Los valores de índice de velocidad de onda de corte ( $V_S$ ) y de resistencia de punta ( $q_c$ ), se consideran un campo aleatorio  $V(X)$  y  $S(X)$ , respectivamente, distribuido dentro de un espacio  $R^P$  con  $P=3$  (volumen de estudio). El conjunto de valores de  $V_S$  y de  $q_c$ , medidos dentro del dominio  $R^3$ , constituyen una muestra de esos campos aleatorios. El análisis geoestadístico multivariable de la distribución espacial de  $V_S$ , se realizó en dos sitios dentro de la zona de estudio, indicados en la Figura 4.91.

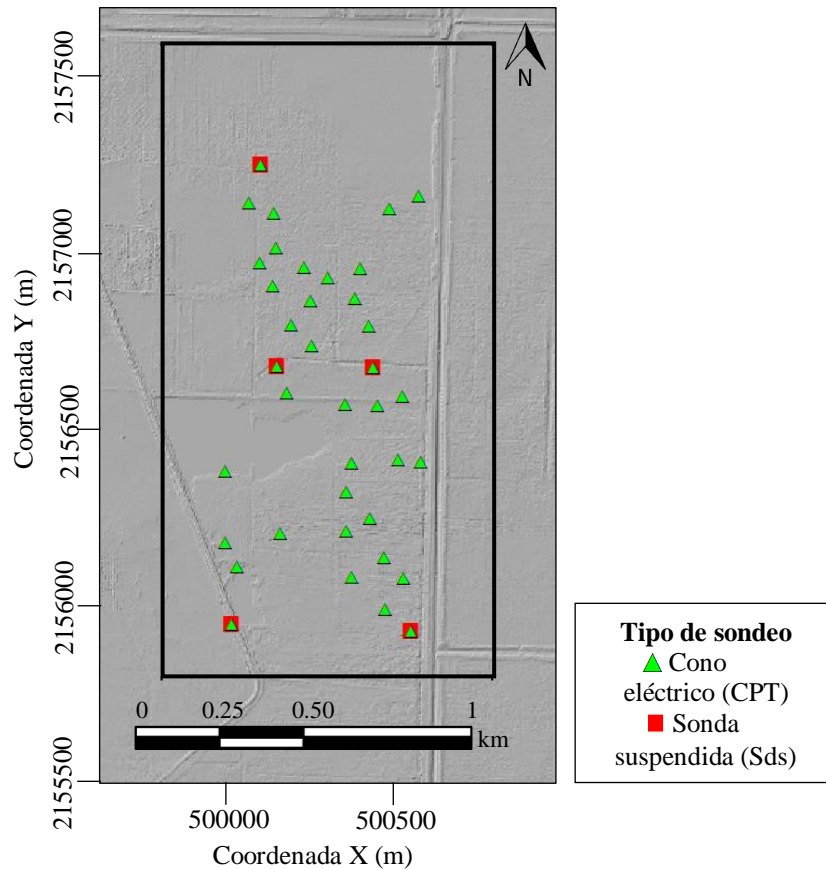


Figura 4.91 Distribución de los sondeos del análisis multivariable.

Como se puede ver en la distribución de los sondeos, existen varios puntos donde coinciden las mediciones de *Sds* y *CPT*, las cuales permitieron verificar la correlación entre ambas propiedades ( $V_S$  y  $q_c$ ) y construir los correlogramas cruzados, requeridos en el análisis multivariable. Con base en la localización de los sondeos, es claro que se está en una condición parcialmente heterotópica, la cual resulta ideal para aplicar la estimación conjunta de  $V_S$ .



**Análisis de correlación lineal**

En este análisis se incluyen las mediciones de los demás sitios donde existen mediciones de  $V_S$  y  $q_c$ . En la Figura 4.92, se presenta la gráfica de correlación entre los dos parámetros, en la gráfica se indica la línea de tendencia y la ecuación de la recta. Como se observa, la correlación entre ambas propiedades es positiva, con un coeficiente de correlación de 0.82, siendo más bajo que los obtenidos en el análisis unidimensional. Esta disminución, puede asociarse a la presencia de datos con valores altos de resistencia  $q_c$  en CPT, produciendo mayor dispersión.

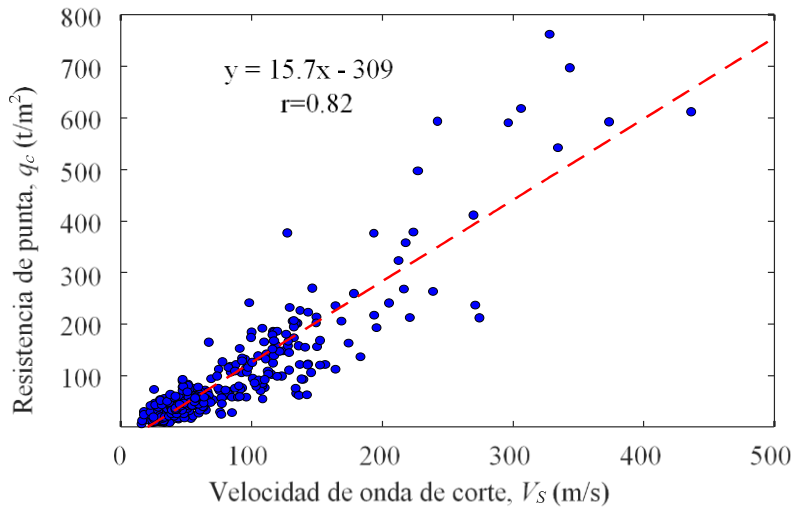


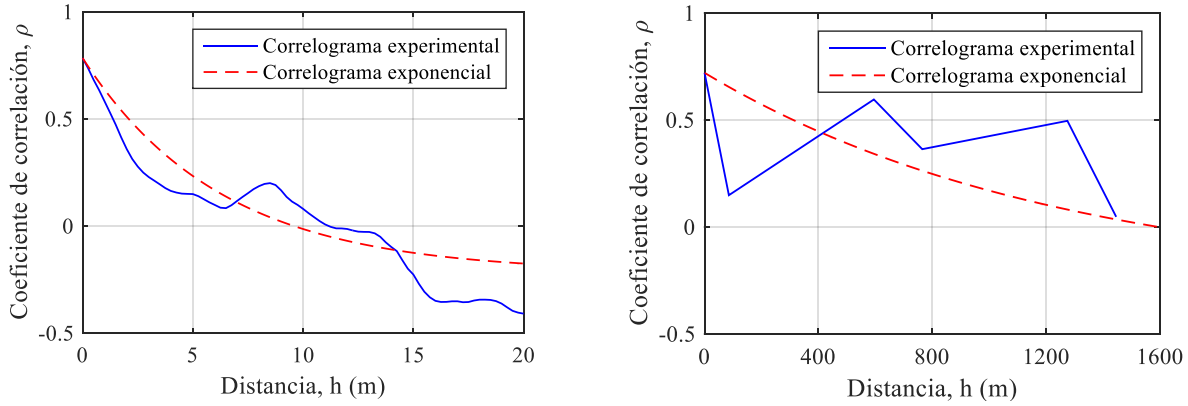
Figura 4.92 Grafica de correlación lineal entre  $V_S$  y  $q_c$

**Análisis estructural**

Considerando los datos del campo experimental, se calcularon los correlogramas cruzados ( $V_S$  y  $q_c$ ) en las direcciones horizontal y vertical (Figura 4.93). Adicionalmente, se retomaron las distancias de correlación de la velocidad de onda de corte y de la resistencia  $q_c$  en CPT, obtenidas en análisis univariable.

Las distancias de correlación cruzadas resultantes son  $\delta_{ver}=12.5$  m y  $\delta_{hor}=2500$  m. Con estos valores, y adaptando un modelo de correlación exponencial simple, se determinaron los correlogramas cruzados en dirección horizontal y vertical que se muestran en la Figura 4.93.

De igual forma que en el análisis multivariable unidimensional, se observa en la Figura 4.93, que los modelos de correlación cruzada no parten de 1, debido a que la correlación entre  $V_S$  y  $q_c$  no es perfecta.



a) Correlograma cruzado vertical. b) Correlograma cruzado horizontal.

Figura 4.93 Modelos de correlación espacial entre  $V_s$  y  $q_c$

**Predicción**

Con base en los datos de los campos experimentales de  $V_s$  y  $q_c$ , con las seis distancias de correlación, obtenidas, se utilizó la técnica multivariable *Cokriging Ordinario*, para estimar los valores en dos ejes preferenciales, que se observa en la Figura 4.94.

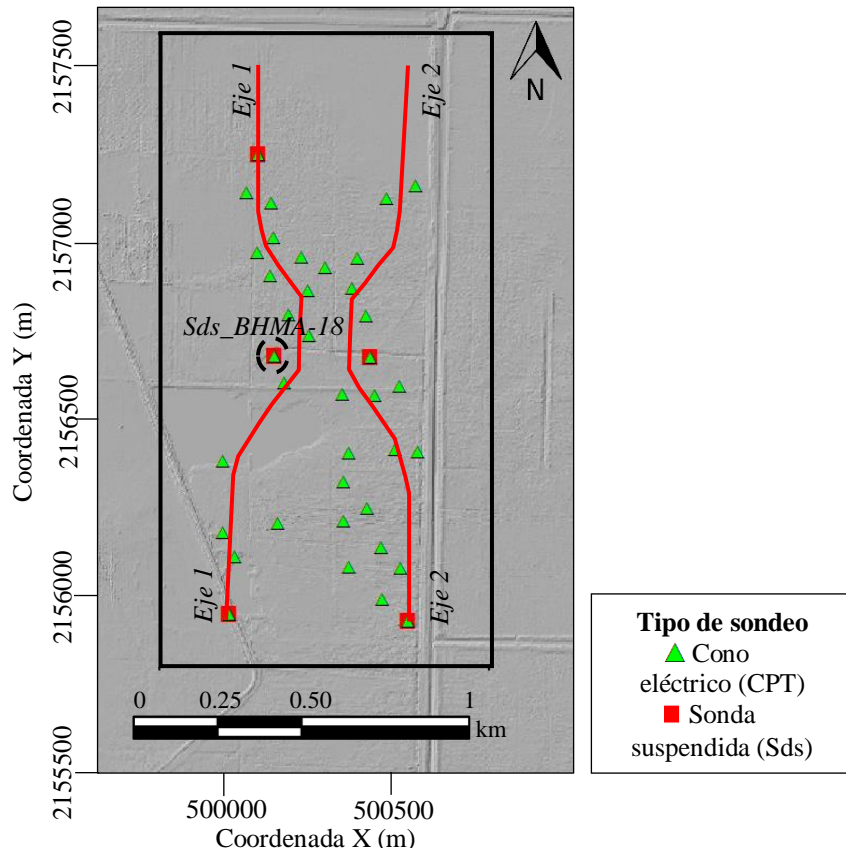
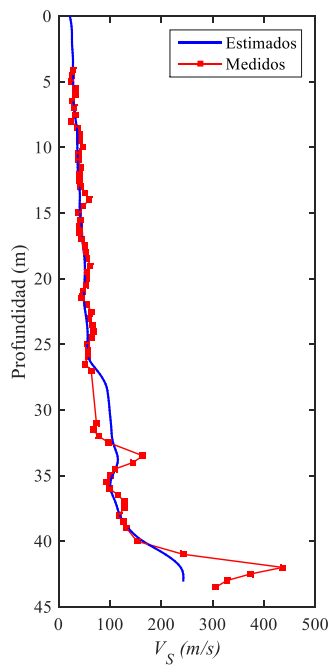


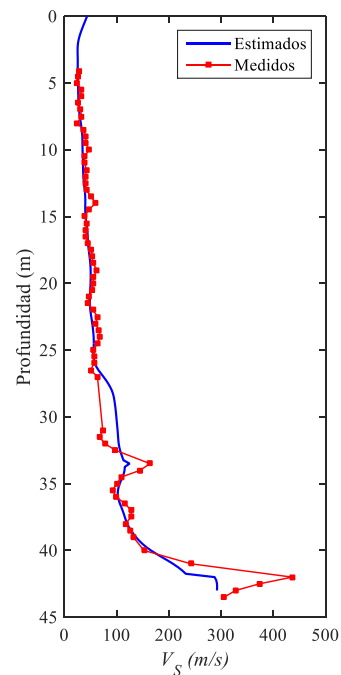
Figura 4.94 Ejes de preferenciales de estimación de  $V_s$ .

**Validación cruzada**

Para validar los resultados de la metodología, se realizó la validación cruzada, retirando los datos de la velocidad de onda S y de resistencia  $q_c$  en CPT en el sitio del sondeo  $Sds\_BHMA-18$ . Las estimaciones se realizaron de manera univariable y multivariable, los resultados se muestran en la Figura 4.95. considerando las estimaciones. En los resultados, se observa que el perfil obtenido en la estimación geoestadística multivariable, representa de forma más aproximada la tendencia general de las mediciones de  $V_S$ , a diferencia de la técnica univariable donde se subestiman los valores de velocidad de onda S, en las zonas de mayor rigidez. Asimismo, en el perfil de la estimación geoestadística multivariable, es evidente la contribución de los datos de  $q_c$ , los cuales contribuyen a mejorar la calidad estimaciones.



c) Perfil de estimación univariable (*Kriging*)



d) Perfil de estimación multivariable (*Cokriging*)

Figura 4.95 Resultados de la validación cruzada de  $V_S$  ( $Sds\_BHMA-18$ ).

**Visualización**

Para facilitar la interpretación de los valores tabulares de  $V_S$ , obtenidos en la estimación conjunta (Cokriging) para los dos ejes, se recurre a técnicas de graficación avanzada, que permiten la elaboración de secciones transversales y volúmenes 3D, que facilitan la interpretación de la variación espacial de la velocidad de onda de corte, en los dos ejes preferenciales donde es estimado dicha propiedad. En las Figuras 4.96 y 4.97 se muestran las secciones con la distribución de  $V_S$  y con la incertidumbre asociada a cada estimación.

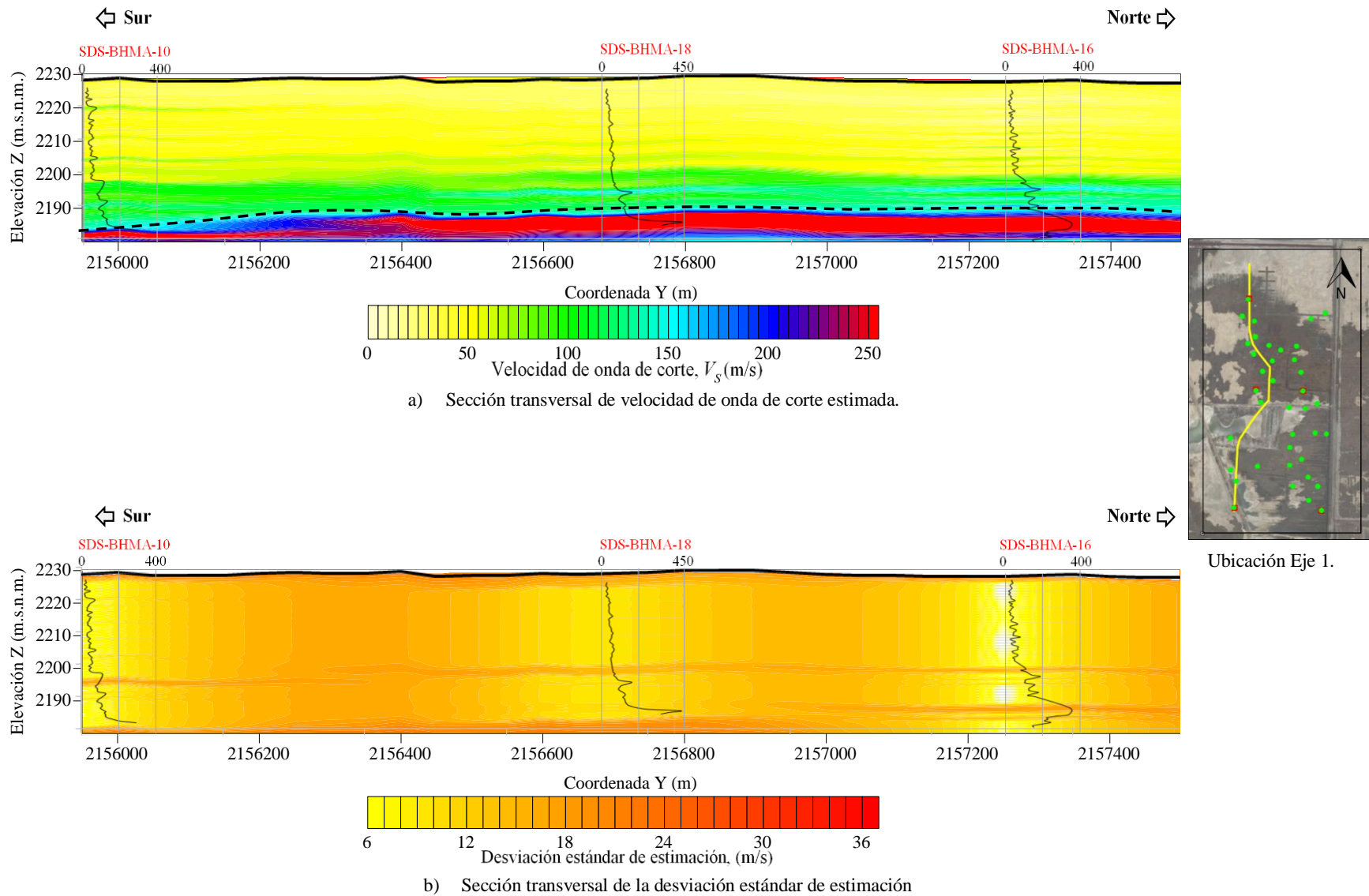


Figura 4.96 Distribución espacial de la velocidad de onda de corte estimada a lo largo del Eje 1.

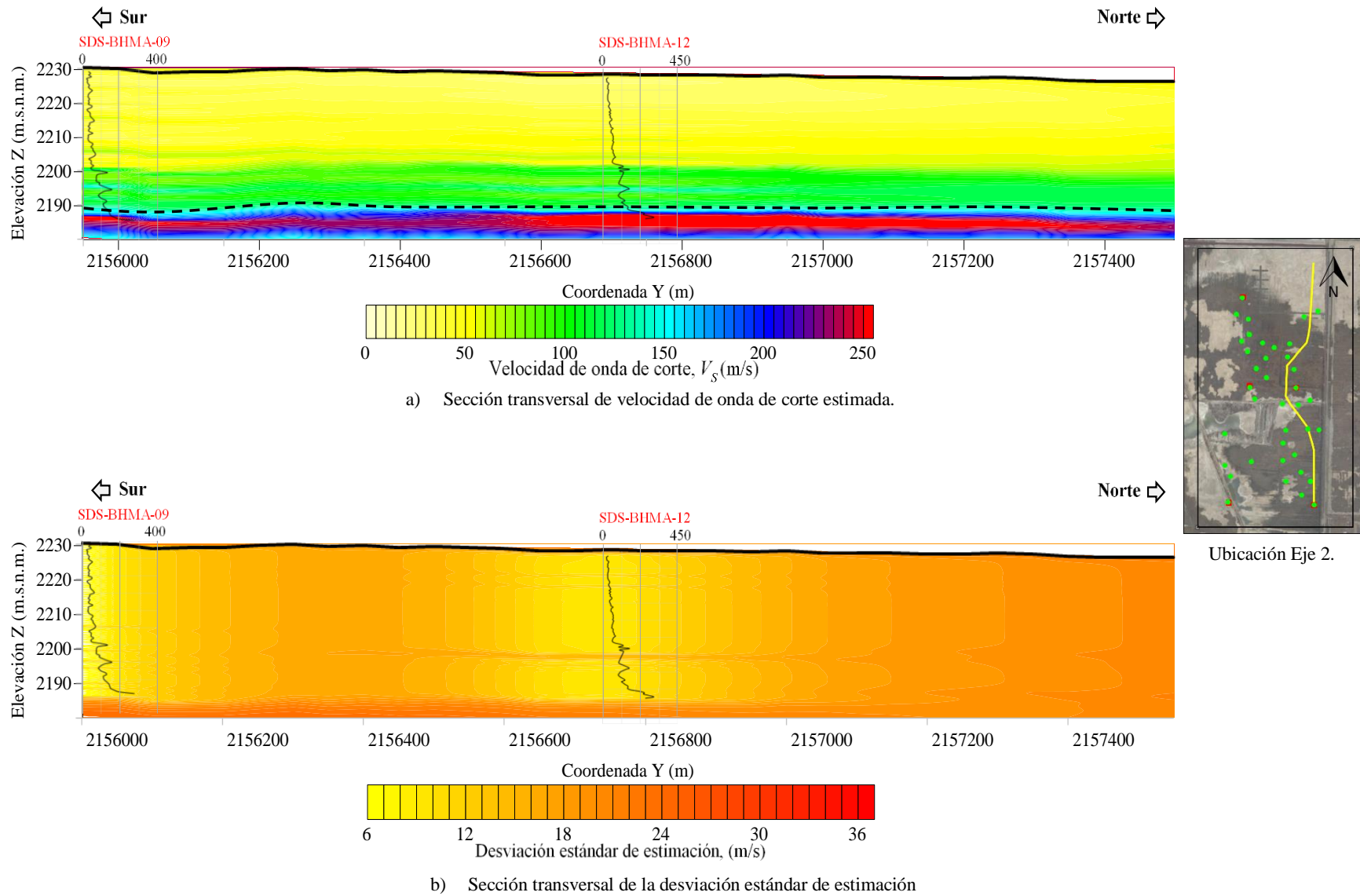


Figura 4.97 Distribución espacial de la velocidad de onda de corte estimada a lo largo del Eje 2.

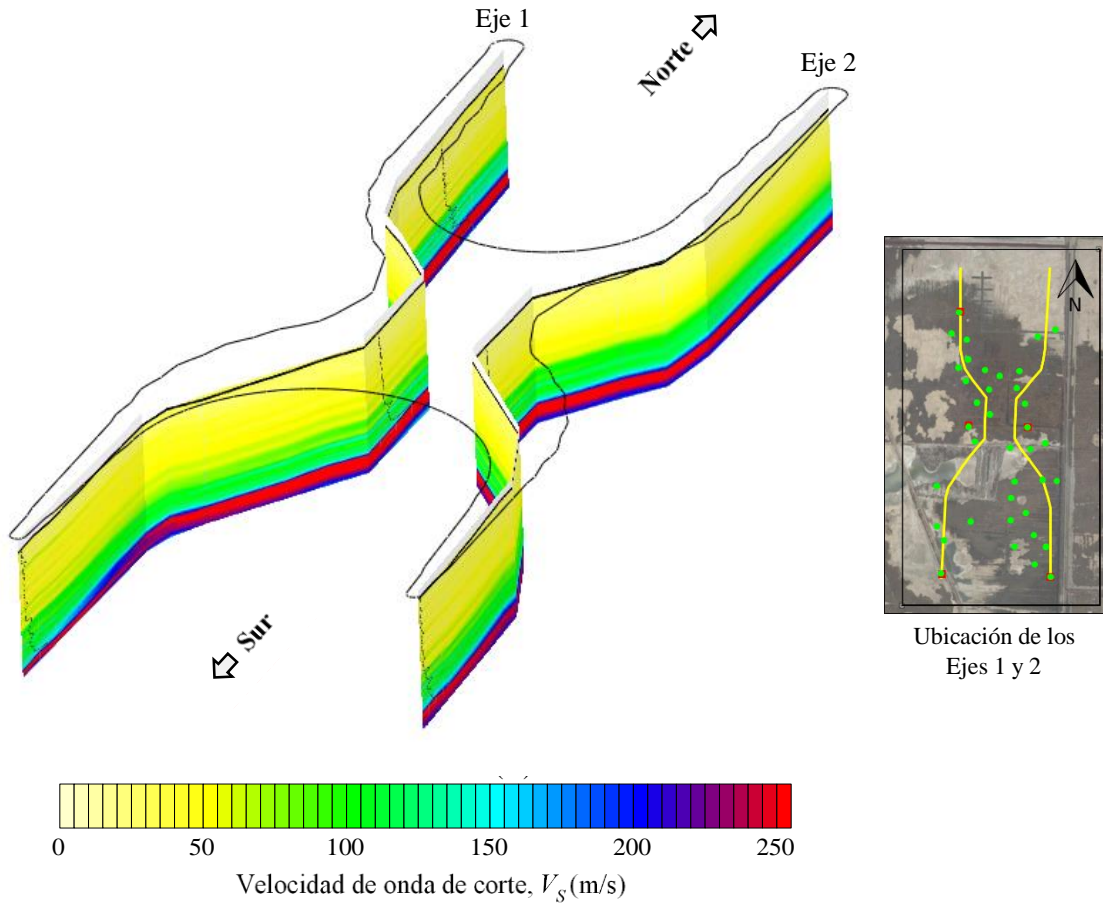


Figura 4.98 Modelo 3D de la distribución espacial de  $V_s$ .

Tomando en cuenta las secciones estimadas y con base en la barra de colores de  $V_s$ , se aprecia que las distribuciones obtenidas en la estimación conjunta de  $V_s$ , son muy similares a las obtenidas en la estimación del análisis geoestadístico univariable. La única diferencia tangible, es la reducción en los valores de la desviación estándar de estimación. Por tanto, se puede ver que la única contribución de la propiedad secundaria en el análisis multivariable de  $V_s$ , es la reducción de los valores de la incertidumbre.

Considerando lo anterior, se compararon los perfiles estimados en el análisis univariable y multivariable. Como resultado de este contraste, observaron diferencias en los valores dentro de los estratos superiores, que corresponden a la formación arcillosa superior. Por tanto, se optó por reducir el dominio de estudio a 25 m de profundidad, integrada por suelos con baja resistencia  $q_c$  en CPT y altos valores de contenido de agua.

Las secciones que se muestran en las Figuras 4.100 a 4.102, muestran la distribución de  $V_s$ , en la FAS, con las estimaciones generadas por el *Kriging* y *Cokriging* respectivamente.

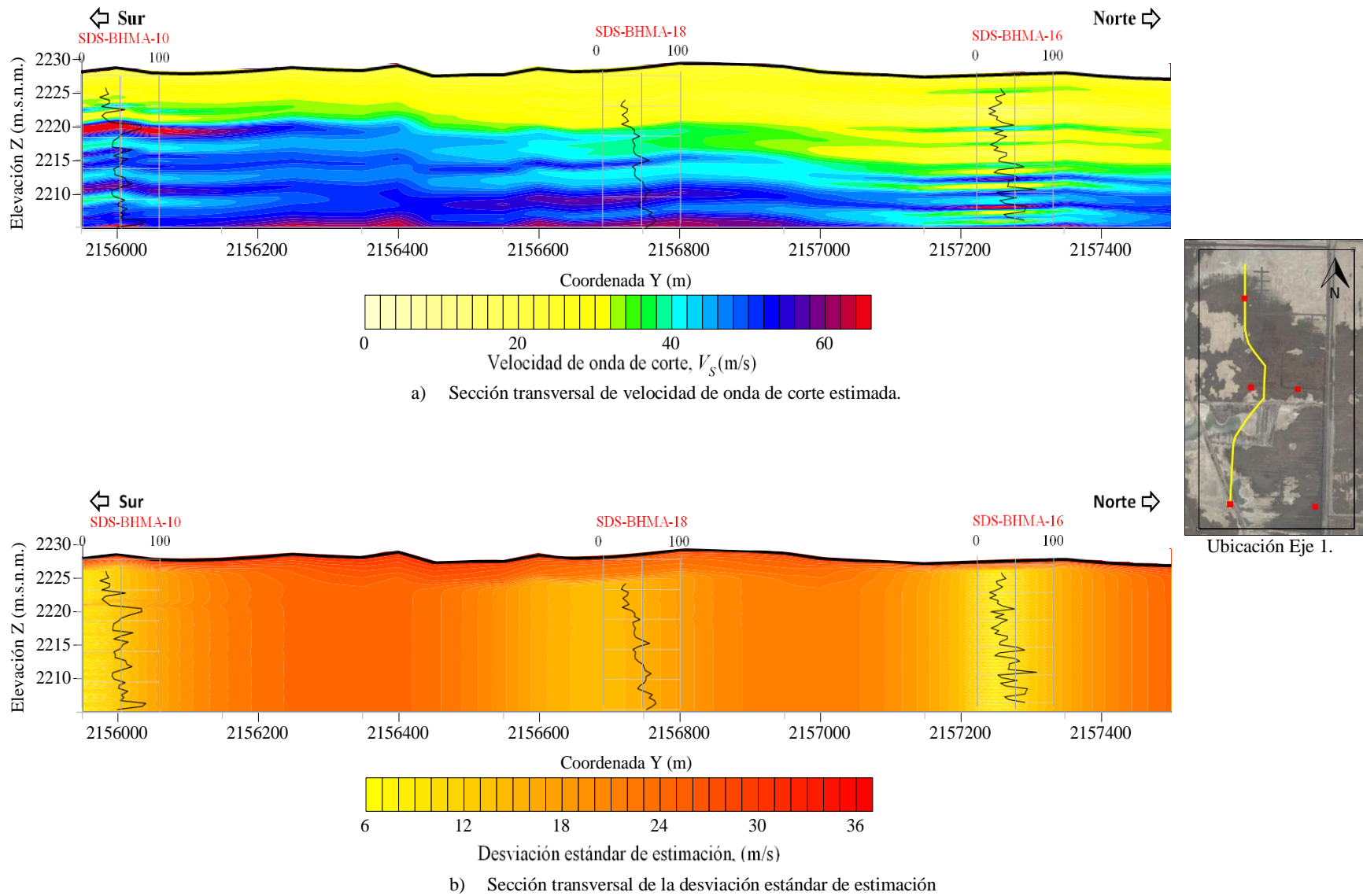


Figura 4.99 Distribución espacial de la velocidad de onda de corte estimada a lo largo del Eje 1 (*Kriging*).



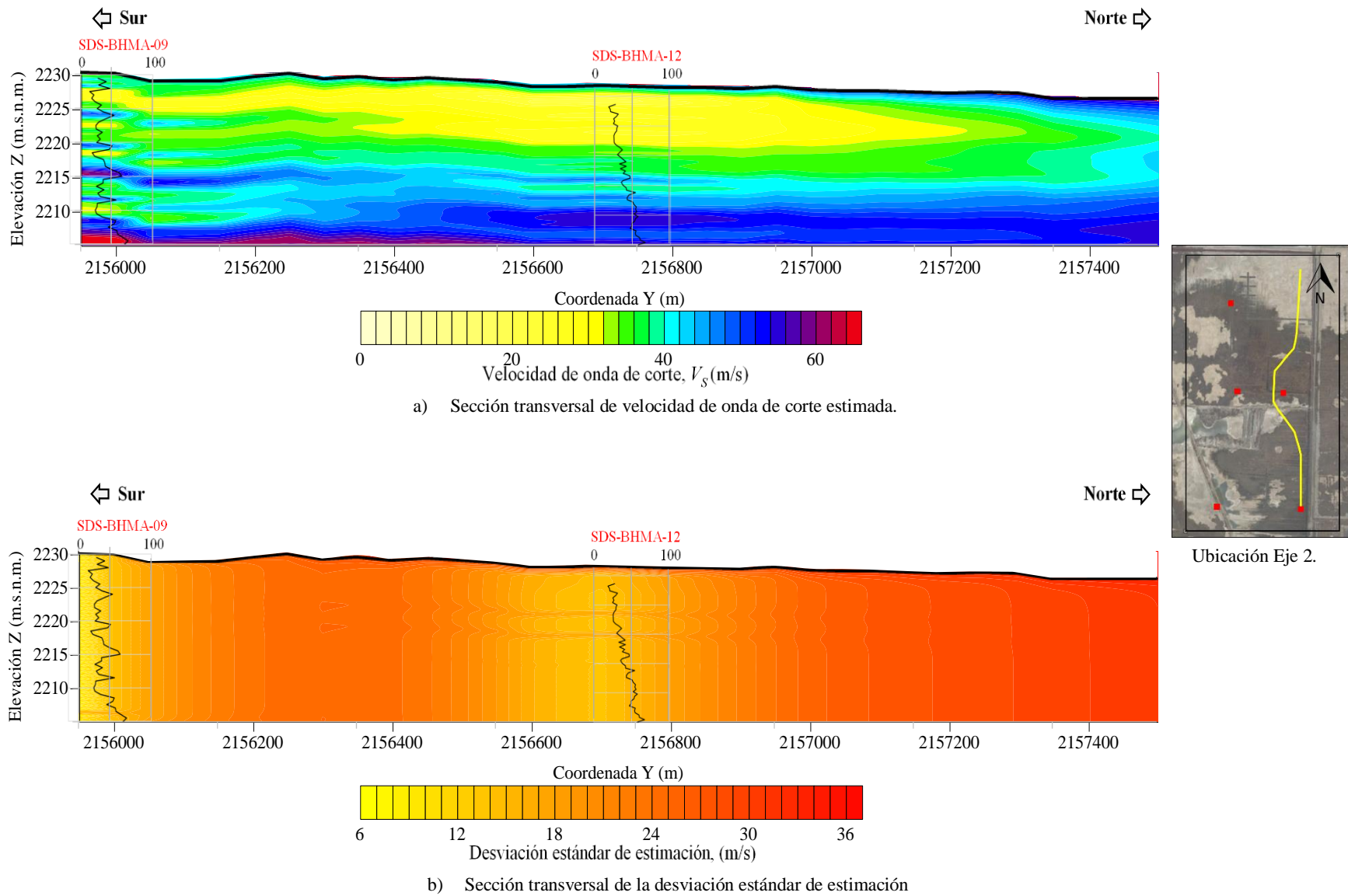


Figura 4.100 Distribución espacial de la velocidad de onda de corte estimada a lo largo del Eje 2 (*Kriging*).



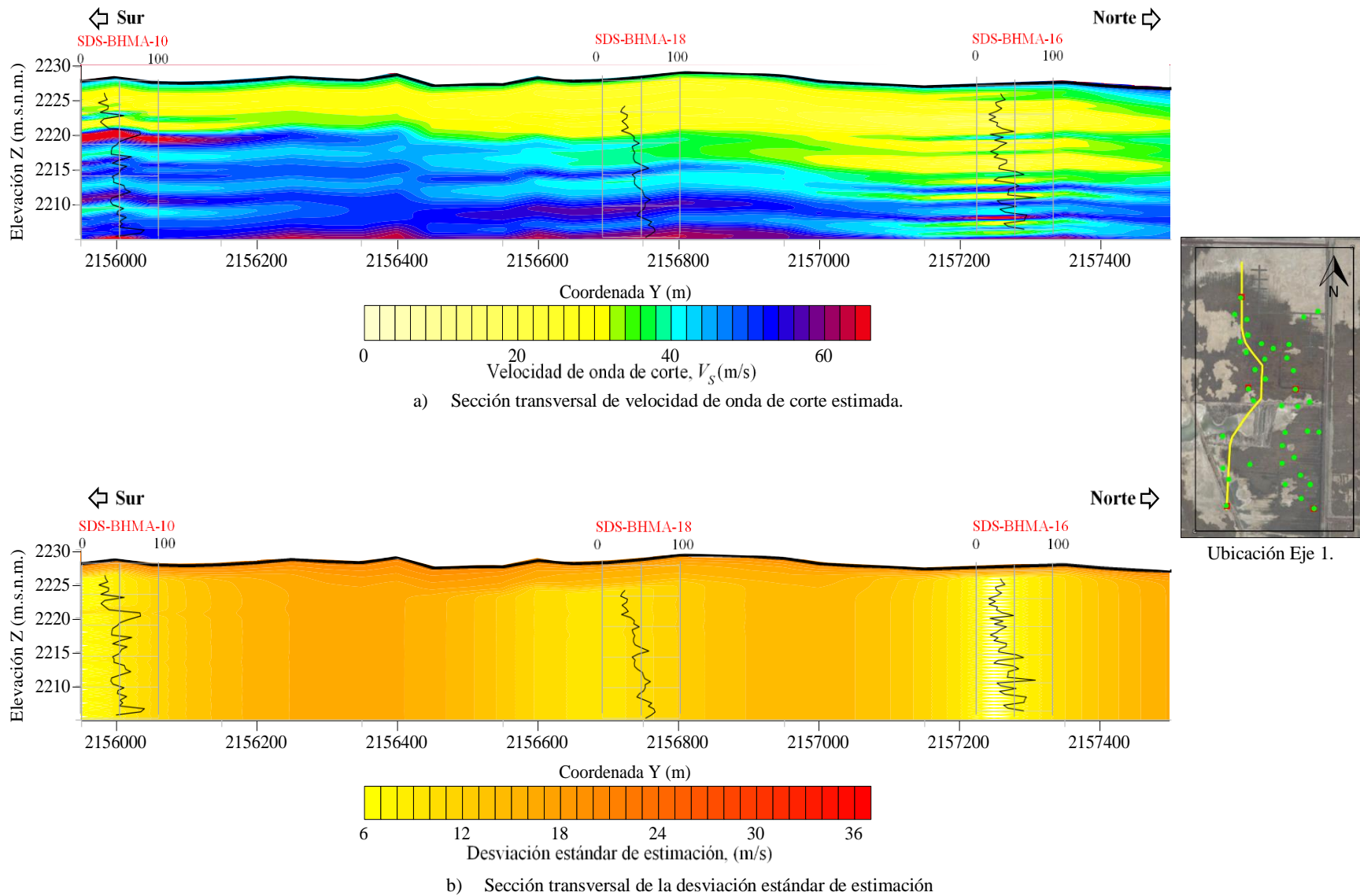


Figura 4.101 Distribución espacial de la velocidad de onda de corte estimada a lo largo del Eje 1 (Cokriging).

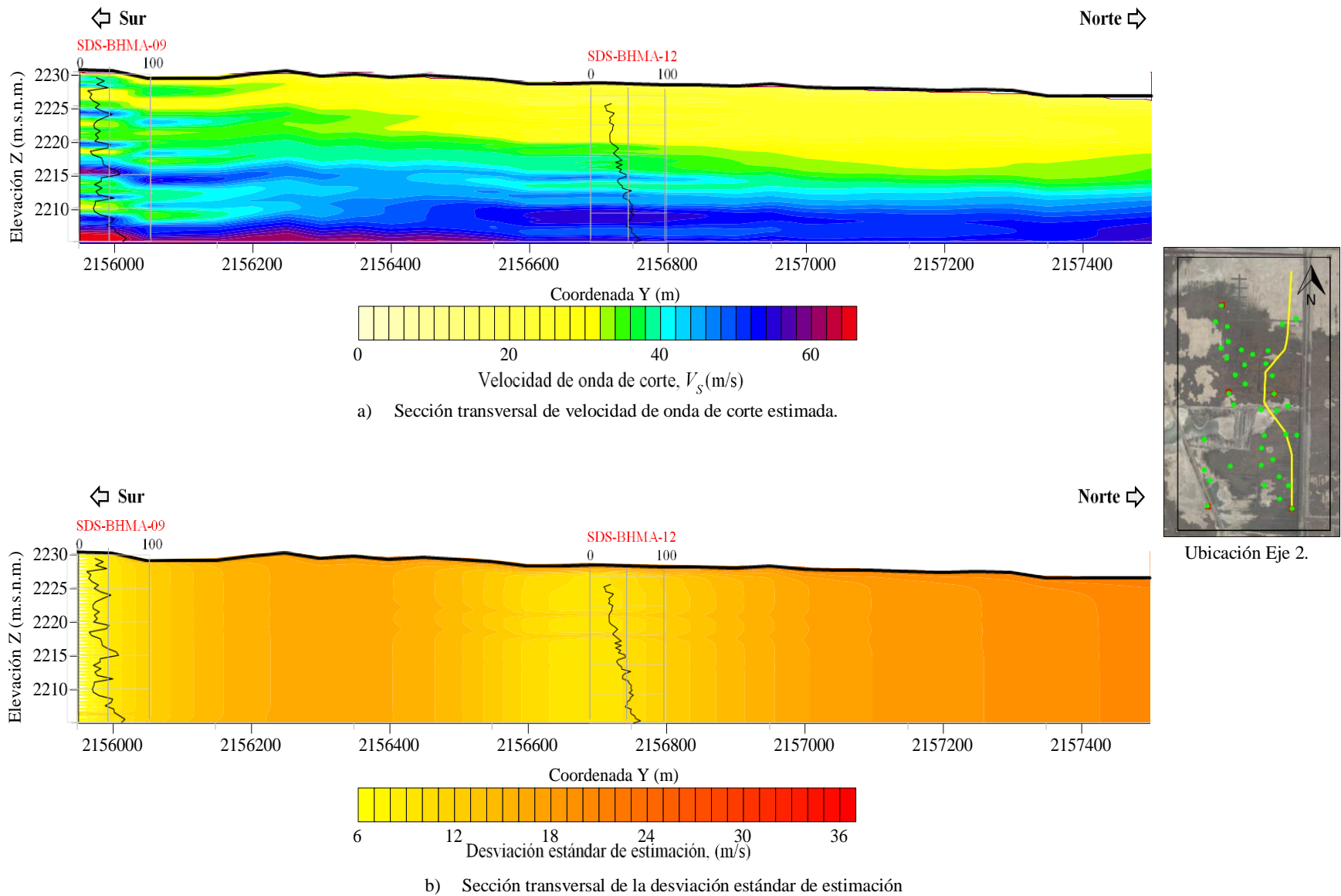


Figura 4.102 Distribución espacial de la velocidad de onda de corte estimada a lo largo del Eje 2 (Cokriging).

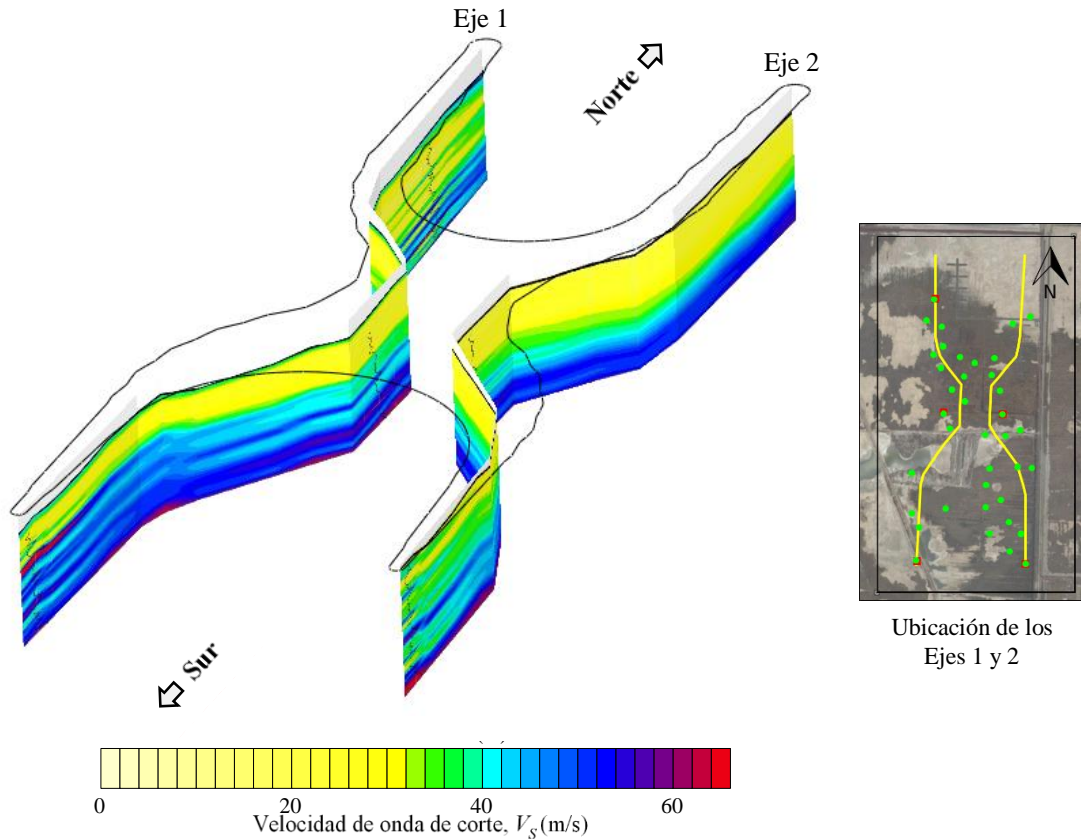


Figura 4.103 Modelo 3D de la distribución espacial de  $V_S$ .

### ***Análisis de resultados***

Considerando las secciones de las estimaciones univariadas y multivariadas, así como la barra de escala de la velocidad de onda de corte. Se puede comentar lo siguiente.

En la sección estimada del eje 1, mediante *Cokriging* permite identificar en la parte superior una capa delgada de espesor variable, con mayores valores de velocidad, la cual se puede asociar con la costra superficial, a diferencia de la obtenida con la estimación geoestadística univariada, donde se observa un estrato homogéneo hasta una profundidad aproximada de 15 m con velocidades del orden 30 m/s. Posteriormente, se observa un aumento en los valores de  $V_S$ , con variaciones que van de los 30 a los 50 m/s, sin embargo, la técnica multivariada define con mayor claridad las variaciones locales de velocidad dentro de este estrato, a diferencia de la estimación geoestadística univariada, que proporciona estimaciones más suavizadas. Por otra parte, las secciones de la desviación estándar obtenidas con *Cokriging*, indican que la contribución de los datos de la variable auxiliar reduce la incertidumbre asociada a las estimaciones, a diferencia de las estimaciones obtenidas con la técnica del *Kriging*.

En las secciones del eje preferencial 2, los resultados obtenidos con la estimación geoestadística multivariable indican una distribución más irregular, en la parte norte del eje, esto principalmente se debe que en esa parte de la sección no se cuenta con información, lo cual se ve reflejado en los valores altos de la desviación estándar de estimación. Por otra parte, los resultados generados por el estimador multivariable, proporcionan una distribución más realista del medio analizado, específicamente en la parte norte del eje. Esta mejor definición en la distribución espacial de  $V_s$ , se debe a la contribución de la propiedad auxiliar ( $q_c$ ), asimismo, se aprecia una reducción considerable de la incertidumbre asociada a la estimación.

Con base en lo anterior, puede decirse que la técnica de estimación multivariable (*Cokriging*) contribuye a obtener distribuciones espaciales más realistas de las propiedades geotécnicas, por lo que, describen mejor las condiciones del subsuelo.

# 5

## CONCLUSIONES

Los resultados de este trabajo conducen a las siguientes conclusiones:

Para realizar una mejor caracterización geotécnica de un sitio, es necesario considerar los elementos, geográficos, topográficos, y geológicos, puesto que, esta información está directamente relacionada con el proceso de formación de los suelos. De esta manera se podrá contar con una importante fuente de información que permita realizar una interpretación preliminar de las características del subsuelo en un sitio o área de estudio.

La metodología desarrollada con base en el fundamento teórico de la geoestadística multivariable, es apropiada para su aplicación práctica en la Geotecnia.

Los algoritmos computacionales basados en la metodología implementada para un análisis geoestadístico de la distribución espacial de propiedades geotécnicas del subsuelo facilitan la aplicación práctica de la geoestadística univariable y multivariable. Los algoritmos generados fueron calibrados y validados, con base en los resultados del programa Modelado, Estimación y Simulación de Campos Aleatorios (MESCAL; Laboratorio de Geoinformática-IIUNAM, 2012), tomando como válidos los resultados obtenidos en análisis geoestadísticos univariados.

Los resultados del análisis geoestadístico univariable, indican que el estudio de la distribución espacial de las propiedades geotécnicas aporta resultados aceptables siempre y cuando se disponga de un número suficiente de datos, como es el caso del contenido de agua y la resistencia  $q_c$  en CPT. Los perfiles, secciones y modelos 3D permiten describir la distribución espacial de las propiedades analizadas. Asimismo, estos modelos permiten identificar la configuración de las distintas capas típicas del subsuelo en el área de estudio.

Con base en los resultados obtenidos en el análisis geoestadístico multivariable de las propiedades geotécnicas, es posible concluir que, aprovechando la correlación lineal existente entre el índice de compresión y el contenido de agua, y empleando la técnica de *Cokriging* pueden realizarse estimaciones del  $C_c$ . Los resultados muestran que, aun cuando se cuenta con un bajo número de datos del  $C_c$ , los datos de contenido de agua contribuyen a mejorar la estimación del  $C_c$ . Lo anterior se pone en evidencia al observar una reducción de la desviación estándar de estimación en el análisis multivariable. Los modelos permiten identificar la configuración de las distintas capas típicas del subsuelo en el área de estudio.

Los resultados del análisis geoestadístico multivariable, muestran que, aprovechando la correlación lineal existente entre los datos de  $V_S$  y la resistencia  $q_c$  en CPT, con un bajo número de datos del  $V_S$ , los datos de la resistencia  $q_c$  en CPT contribuyen a mejorar la estimación de  $V_S$ . Lo anterior, se confirma al observar una reducción de desviación estándar de estimación en el análisis multivariable. Puede decirse que aun cuando existe una buena correlación entre  $V_S$  y la resistencia  $q_c$  en CPT prácticamente en todo el dominio estudiado, conviene aplicar la metodología geoestadística multivariable únicamente en los estratos de arcilla.

La calidad de las estimaciones empleando la metodología geoestadística univariable y multivariable, depende de varios factores, entre ellos, los principales son: *i*) la cantidad y calidad de las mediciones de la propiedad disponible, *ii*) la distribución de los datos dentro del dominio estudiado, y *iii*) la adecuada definición de las distancias de influencia y del modelo de correlación espacial.

Contar con modelos (perfiles, secciones transversales y modelos 3D) que describen la distribución espacial de las diferentes propiedades geotécnicas, permite realizar una mejor caracterización geotécnica del subsuelo, eliminando parte de la subjetividad introducida en las interpretaciones tradicionales. Asimismo, permiten identificar posibles anomalías existentes.

En general, con base en los resultados obtenidos, puede decirse que la geoestadística multivariable es una herramienta de gran utilidad para la interpretación de la información proveniente de las exploraciones geotécnicas de un sitio o área de estudio. La mayor ventaja se encuentra al emplearse para la caracterización del subsuelo en grandes extensiones considerando dos propiedades correlacionadas, una con alto número de mediciones y la otra con un bajo número de mediciones.

El análisis geoestadístico multivariable toma ventaja cuando se busca conocer el valor de una propiedad en puntos donde no existe medición de alguna propiedad escasamente medida aprovechando los datos de otra propiedad con alto número de datos. Cuando las dos propiedades tienen un alto número de datos, se

recomienda aplicar la metodología del análisis geoestadístico univariable a cada una de ellas. En caso de contar con un número bajo de datos de las dos propiedades no es recomendable realizar el análisis geoestadístico (univariable o multivariable), debido a que se obtendrán estimaciones con alta incertidumbre y los modelos de distribución espacial distarán de las condiciones del subsuelo.

Finalmente, es importante señalar que los modelos de distribución espacial de las propiedades geotécnicas analizadas en este trabajo son de carácter descriptivo y no sustituyen las campañas de exploración geotécnica para una obra en particular.





---

# REFERENCIAS

- Alanís, R. 2003. Caracterización geotécnica del Ex lago de Texcoco. Tesis de Maestría. Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.
- Auvinet, G. 1976. Probabilidad y estadística. Notas del curso de Probabilidad y Estadística, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Auvinet, G. 2002. Incertidumbre en Geotecnia, Decimosexta Conferencia Nabor Carrillo, Sociedad Mexicana de Ingeniería Geotécnica. Pp 139.
- Auvinet, G. y Abaziou, L. 1993, Application of random field theory to control of compaction of earth embankments. 3rd CODATA Conference on Geomathematics and Geostatistics, Enschede, Holland, June 9 11, 1993, published in Sciences de la Terre, No 32. Pp. 449-460.
- Auvinet, G., Juárez, M. y Medina, Z. 2001. Geostatistical interpretation of soil exploration Proceedings, International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Istanbul, Turkey, Vol.1.Pp 373-376.
- Auvinet, G., Méndez, E. y Juárez, M. El subsuelo de la Ciudad de México, Vol III. Instituto de Ingeniería UNAM, Ciudad de México.
- Burrough, P. y McDonnell, R. 1998. Principles of Geographical Information Systems. Oxford University Press, New York, Pp. 333–335.
- Chiles, J. y Delfiner, P. 2012. Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty. Ed Wiley, 2<sup>nd</sup> Edition, New York, Pp 695.
- Dasaka, S. 2005. Probabilistic site characterization and reliability analysis of shallow foundations and slopes. Doctoral thesis, Indian Institute of Science, Bangalore.
- Deutsch, C. y Journel, A. 1992, GSLIB Geostatistical software library and user's guide: Oxford University Press, New York, Pp 340.
- Díaz, M. 2002. Geoestadística Aplicada. Instituto de Geofísica Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, Pp 131.
- Emery, X. 2013. Notas de Geoestadística. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile. Pp 144.

- Fahlman, S. 1988. An empirical study of learning speed in backpropagation networks. School of Computer Science. Carnegie Mellon University
- Fausett, L. 1994. Fundamentals of Neuronal Networks, Architectures, Algorithms and Applications. Ed. Prentice Hall.
- Fenton, G. 1997. Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering. ASCE GeoLogan'97 Conference, Logan, Utah. Pp 1-95.
- Flores, O., Flores, M. y Juárez, O. 2012. Técnica experimental de campo para determinar las velocidades de compresión al corte. XXVII Reunión Nacional de Ingeniería Geotécnica, Puerto Vallarta, Jalisco. Pp 1-10.
- Galván, E. y Auvinet, G. 2011. Modelo Geoestadístico y Geotécnico de la generación de emanaciones de hidrocarburos en el fondo marino de la Sonda de Campeche, México Ingeniería Investigación y Tecnología. (12) 2, Pp. 223-234.
- García, S. 2009. Cómputo aproximado en la solución de problemas geosísmicos. Tesis Doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.
- Goovaerts, P. 1997. Geostatistics for Natural Resources Evaluation. New York: Oxford. Pp 483.
- Harr, M. 1962. Groundwater and Seepage. New York:McGraw-Hill.
- Haykin, S. 1999. Neural networks a Comprehensive Foundation. Ed. Prentice Hall. Pp 823.
- Hinojosa, J. 2010. Comportamiento del suelo en la zona próxima al cerro del marqués y sus efectos en obras de infraestructura, Tesis de Maestría SEPI, ESIA-IPN, México, D.F.
- Hohn, M. 1999. Geostatistics and Petroleum Geology. Springer, 2<sup>nd</sup> Edition, Torquay. Pp 235.
- Huber, M. 2013. Soil variability and its consequences in geotechnical engineering. PhD. Thesis. University of Stuttgart, Germany. Pp, 272.
- Isaaks, E. y Srivastava, R. 1989. Applied Geostatistics. Oxford University Press, New York, Pp 561.
- Jaksa, M. 1995. The Influence of Spatial Variability on the Geotechnical Design Properties of a Stiff, Overconsolidated Clay. Phd Thesis. University of Adelaide, Australia.
- Jaksa, M., Kaggwa, S., y Brooker, P. 1999. Experimental Evaluation of the Scale of Fluctuation of a Stiff Clay. In Proceedings of 8th International Conference on the Application of Statistics and Probability, R. E. Melchers and M. G. Stewart (eds.), Sydney, A. Balkema, Rotterdam. Pp. 415-422.
- Jiménez, O. 2007. Caracterización geoestadística del subsuelo de la zona poniente del Valle de México, Tesis de Maestría, ESIA-UZ-IPN, México, D.F.
- Juárez, M. 2001. Aplicaciones de la geoestadística a la descripción del subsuelo del Valle de México. Tesis de Maestría. Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

- Juárez, M. 2015. Análisis Geoestadístico del subsuelo de la zona lacustre del Valle de México. Tesis Doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.
- Juárez, M., Auvinet, G., Hernández, F. y Méndez E. 2011. Contribución a la Caracterización Geotécnica de la zona norte de la Cuenca de México. Congreso Geotécnico Panamericano. Pp 1-8.
- Juárez, M., Auvinet, G. y Méndez E. 2016. Geotechnical Zoning of Mexico Valley Subsoil. Ingeniería Investigación y Tecnología. Universidad Nacional Autónoma de México. Pp. 297-308.
- Juárez, M., Auvinet, G. y Méndez, E. 2014. Nuevos elementos para la zonificación geotécnica del subsuelo del Valle de México. XXVII Reunión Nacional de Ingeniería Geotécnica, Puerto Vallarta, Jalisco. Pp 1-6.
- Kramer, S. 1996. Geotechnical Earthquake Engineering. Ed Prentice Hall. United States of America, Pp. 653.
- Krige, D. 1962. Statistical Application in mine valuating. Institute Mine Survey, South Africa.
- Li, J. and Heap, A. 2008. A Review of Spatial Interpolation Methods for Environmental Scientists. Geoscience Australia, Pp 137.
- Liu, X., Hu, J. and Ma, J. 2011. Quantitative Evaluation of Spatial Interpolation Models Based on a Data-Independent Method, Advances in Data, Methods, Models and Their Applications in Geoscience, Ed DongMei Chen Pp 336.
- Marcotte, D. 1991. Cokriging whit MATLAB. Computers and Geosciences. Ed. Elsevier, Great Britain. Pp 1265-1280.
- Marsal, R. 1986. Notas sobre el diseño y construcción de cimentaciones en el Distrito Federal. Comisión Federal de Electricidad. México, D.F. Pp 83.
- Marsal, R. y Mazari, M. 1969. El Subsuelo de la Ciudad de México. Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- Marsal, R. y Reséndiz, D. 1979. Presas de tierra y enrocamiento. Ed. Limusa, Ciudad de México, México. Pp. 546.
- Matheron, G. 1965. Les variables généralisées et leur estimation, Masson et Cie, France.
- Matheron, G. 1969. Curso de Geoestadística. Centro de Morfología Matemática de Fontainebleau. Volumen 2. Pp 77.
- Mcculloch, W. y Pitts, W. 1943. A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity. Bulletin of Mathematical Biophysics. (5)1, 115-133
- Medina, Z. 2001. Interpretación geoestadística de los resultados de exploraciones geotécnicas. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.
- Méndez, E. 2005. Aplicación de la informática a la zonificación del subsuelo de la cuenca de México, Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México

- Mooser, F. 1996. Nuevo mapa geológico de las cuencas de México, Toluca y Puebla: estratigrafía, tectónica regional y aspectos geotérmicos, Comisión Federal de Electricidad, D. F., México
- Morales, A. 2004. Aplicación de la geoestadística a la descripción estratigráfica del subsuelo de la zona de los ex-lagos de Xochimilco y Chalco”, Tesis de Maestría ESIA-UZ, IPN, D.F., México.
- Myers, D. 1994. Spatial interpolation: An overview. Elsevier Science B.V., Amsterdam, Geoderma, Pp. 17-28.
- Nadim, F. 2007. Tools and Strategies for Dealing with Uncertainty in Geotechnics. Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering. Pp. 71-95.
- Olea, R. 1999. Geostatistics for Engineers and Earth Scientists. Kansas Geological Survey, Springer 1<sup>st</sup> Edition, New York, Pp 347.
- Ovando, E. 1992. Propiedades y comportamiento dinámico de los suelos. XVII Curso Internacional de Ingeniería Sísmica, Facultad de Ingeniería UNAM. Pp. 31.
- Ovando, E. y Romo, M. 1991. Estimación de la velocidad de onda S en la arcilla de la Ciudad de México con ensayos de cono. Sismodinámica (2). Pp 107-123.
- Ovando, E. y Romo, M. 1991. Correlación entre velocidades de ondas sísmicas y resistencia a la penetración con cono. Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos. Pp 287-296.
- Pantoja, A. 2002. Análisis Geoestadístico del subsuelo en el norte de la zona lacustre del Valle de México. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.
- Papoulis, A. 1985. Probability, Random variables and Stochastic Processes, McGrawHill, USA.
- Park, H. 2011. Study for application of artificial neural networks in geotechnical problems. Artificial neural networks-application. InTech, Croatia, Pp 303–336.
- Pérez, D. 2009. Modelado del hundimiento de la zona lacustre del valle de México. Aspectos estratigráficos y piezométricos. Tesis de Maestría SEPI, ESIA-IPN, México, D.F.
- Phoon, K. y Kulhawy, F. 1999. Characterization of Geotechnical Variability. Canadian Geotechnical Journal. Pp 612-624.
- Prakash, S. 1981. Soil Dynamics. Ed McGraw-Hill, New York. Pp 419.
- Romo, M., Auvinet, G., Ovando, E., Mendoza, M., Taboada, V., Lermo, J. y Mooser, F. 2001. Ingeniería geotécnica para el Nuevo Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México. Soluciones en el ex lago de Texcoco y en Zapotlán de Juárez, Instituto de Ingeniería UNAM, México, D.F.
- Santoyo, E. 2000. XX Conferencia Nabor Carrillo, Sociedad Mexicana de Ingeniería Geotécnica, Pp 237.
- Sarma, D. 2009. Geostatistics whit application in Earth Sciences. Springer 1<sup>st</sup> Edition, New York. Pp
- Sedano, S. 1982. Aproximación requerida y dispersión de resultados en ensayos comunes de laboratorio de mecánica de suelos. Tesis de Maestría. Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.

- Shahin, M., Jaksa, M. y Maier, H. 2001. Artificial Neural Network Applications in Geotechnical Engineering, Australian Geomechanics. Pp 49-62.
- Shahin, M., Jaksa, M. y Maier, H. 2008. State of the Art of Artificial Neural Networks in Geotechnical Engineering. Electron J Geotech Eng Bouquet. Pp 1–26.
- Shinozuka, M. 1996. Equivalence between Kriging and CPDF Methods for conditional simulation. Journal of Engineering Mechanics. Pp 530-538.
- Sibson, R. 1981. A brief description of natural neighbor interpolation. In: Barnett, V. (Ed.), Interpreting Multivariate Data. John Wiley & Sons, New York, USA Pp. 21–36.
- Tenorio, A. 2013. Aplicación de la Geoestadística a la Caracterización Geotécnica del Subsuelo de la Zona Central de la Ciudad de México. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.
- Rivoirard, J. 2005. Concepts and Methods of Geostatistics. Centre de Géostatique, Ecole des Mines de Paris. Pp 1-37
- Robbinson, T. y Metternicht, G. 2006. Testing the performance of spatial interpolation techniques for mapping soil properties. Computers and Electronics in Agriculture. Pp. 97-108.
- Rossi, E. y Deutsch, V. 2014. Mineral Resource Estimation. Springer, 1<sup>st</sup> Edition. Pp 372.
- Rota, M. 2007. Estimating Uncertainty in 3D Models using Geostatistics. Ph Doctoral Thesis. Pavia University, Rome, Italy.
- Rumelhart, D., Hinton G. y Williams, R. 1986. Learning internal representations by error propagation, Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition. MIT Press, Cambridge, Pp 318-362.
- Valdéz, M. 2002. Análisis geoestadístico de la estratigrafía del subsuelo marino en un área de la sonda de Campeche. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.
- Valencia, D. 2007. Contribución a la zonificación geotécnica de la zona norte del Valle de México. Tesis de Maestría, ESIA-UZ, IPN, México, D.F.
- Vanmarcke, E. 2010. Random Fields Analysis and Synthesis. World Scientific, Princeton University.
- Vázquez, G. 2007. Caracterización geoestadística de materiales potencialmente licuables del subsuelo en un predio ubicado en Minatitlán, Veracruz. Tesis de Maestría SEPI, ESIA-IPN, México, D.F.
- Wackernagel, H. 2003. Multivariate Geostatistics. An Introduction with Applications. Springer, 3<sup>rd</sup> Edition, Berlin, Germany. Pp 387.
- Webster, R y Oliver, M. 2007. Geostatistics for Environmental Scientist. John Wiley & Sons, 2nd Edition England. Pp 316.

- Whitman, R. 1996. Organization and Evaluating Uncertainty in Geotechnical Engineering. Proceedings of Uncertainty, ASCE New York. Pp 1-28.
- Yang, Y. y Rosenbaum, M. 2002. The artificial neural network as a tool for assessing Geotechnical properties. Geotech Eng. Pp: 149–168.
- Zeevaert, L. 1952. Estratigrafía y problemas de la Ingeniería en los depósitos de arcilla lacustre de la Ciudad de México. Congreso Científico del IV Centenario de la Universidad Nacional Autónoma de México. Pp 155-157
- Zeevaert, L. 1972. Foundations Engineering for Difficult Subsoil Conditions. Ed Van Nostrand Reinhold Company, New.York. Pp 656.