



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Implementación de controladores por
modos deslizantes modernos en un bra-
zo articulado de 4 grados de libertad

T E S I S

Que para obtener el título de

Ingeniero Eléctrico Electrónico

P R E S E N T A

Julio Cesar Soto Rosas

DIRECTOR DE TESIS

M.I. Andrés González Rodríguez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2026



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado IMPLEMENTACION DE CONTROLADORES POR MODOS DESLIZANTES MODERNOS EN UN BRAZO ARTICULADO DE 4 GRADOS DE LIBERTAD que presenté para obtener el título de INGENIERO ELÉCTRICO ELECTRÓNICO es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

JULIO CESAR SOTO ROSAS
Número de cuenta: 421012305

Dedicatoria

A la memoria de mi abuelo Nicandro, quien siempre creyó en mí y brindó su inmenso cariño y sabiduría, te amo siempre.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a la Universidad Nacional Autónoma de México y específicamente a la Facultad de Ingeniería por brindarme una formación académica de excelencia y por ofrecerme el espacio donde pude desarrollarme tanto profesional como personalmente.

A mi director de tesis, el M.I. Andrés González, por su paciencia y confianza. Gracias por compartir conmigo sus conocimientos y por enseñarme gran parte de lo que hoy sé sobre control por modos deslizantes y robótica.

Al Dr. Rafael Iriarte y al Dr. Leonid Fridman, por recibirme en el Laboratorio de Control por Modos Deslizantes y permitirme formar parte de su grupo de investigación. Les agradezco profundamente el apoyo que siempre me brindaron, tanto en el ámbito académico como en el personal, así como la confianza y las oportunidades que hicieron posible mi crecimiento durante estos años.

A mis sinodales, el M.I. Matias Iglesias y el Ing. Luis Silva, por sus observaciones y por el apoyo brindado durante el desarrollo de este trabajo.

A mi mamá, Licet, por ser el pilar más importante de mi vida. Gracias por creer siempre en mí, por acompañarme en cada paso, por cada sacrificio realizado y por apoyarme incondicionalmente en cada una de mis decisiones aun cuando parecían una completa locura, siempre estuviste ahí, te amo mamá.

A mi abuelita, Lilia, quien siempre estuvo para mí. Sin su apoyo y amor incondicional, nada de esto sería posible; a mi hermano, Jesús; y a mis tíos, Ángel y Nely, por motivarme constantemente y por acompañarme en cada etapa de este camino. Su apoyo fue una de las principales razones que me impulsaron a concluir este proyecto.

Resumen

En el presente trabajo se muestra una metodología para la identificación dinámica, implementación y evaluación de esquemas de control al manipulador robótico de cadena cinemática abierta de 4 grados de libertad Quanser QArm. El estudio se centra principalmente en controladores por modos deslizantes continuos y modos deslizantes adaptativos, con el objetivo de mejorar el desempeño en seguimiento de trayectoria ante incertidumbres como también en la reducción del chattering.

Inicialmente, se obtiene el modelo cinemático directo de la planta y posteriormente se desarrolla el modelado dinámico del mismo, donde se describen las propiedades que posee cada uno de los elementos del modelo general de un robot, así como de las posibles incertidumbres dinámicas y perturbaciones exógenas presentes en una implementación física real.

Con base en el modelado dinámico obtenido se implementa la estrategia conocida como dinámica inversa para adaptar los algoritmos de control clásicos para manipuladores robóticos, tales como par calculado, Slotine-Li y PID. Debido a que el desempeño de estos esquemas de control podría verse afectado por las incertidumbres descritas, se propone incorporar técnicas de control robusto por modos deslizantes como el STA.

Dado que este algoritmo asegura solo la convergencia a cero en tiempo finito de la variable deslizante, se presenta además, la implementación del PID-CSMC con el propósito de llevar los estados del sistema a cero en tiempo finito. Para validar la estabilidad del sistema bajo estos esquemas, se realiza un análisis de estabilidad por medio de la función estricta de Lyapunov en el caso del STA.

Aunque el desempeño mostrado por los controladores por modos deslizantes presenta resultados superiores en cuanto al seguimiento de trayectoria, la desventaja de la utilización de este tipo de algoritmos es la presencia de chattering y que se debe conocer la cota superior de las perturbaciones. Como alternativa para mitigar este efecto, se implementan algoritmos por modos deslizantes adaptativos, específicamente el algoritmo basado en BFASMC, así como

el esquema cuadrático BFAQ.

Para finalizar, se realiza una comparativa sobre el desempeño en el seguimiento de trayectoria, así como de las vibraciones inducidas en la planta debido a cada uno de los controladores.

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	II
Resumen	III
Índice de Acrónimos	XI
1. Introducción	1
1.1. Tipos de robot	1
1.2. Robots reales	3
1.2.1. Robots en medicina	3
1.2.2. Robots en la exploración espacial	4
1.2.3. Robots industriales	4
1.3. Modelado matemático:	5
1.4. Estrategias de control en manipuladores:	5
1.5. Control por modos deslizantes	6
1.6. Estado del arte	6
1.7. Motivación	7
1.8. Justificación	8
1.9. Objetivos	8
1.9.1. Objetivos General	8
1.9.2. Objetivos Específicos	8
2. Marco teórico	10
2.1. Cinemática Directa	10
2.1.1. Matrices de transformación homogéneas	10
2.1.2. Parámetros de Denavit Hartenberg	12

2.2.	Cinemática Complementaria	14
2.3.	Dinámica del manipulador	14
2.3.1.	Matriz de inercia	15
2.3.2.	Matriz de Coriolis y centrífuga	16
2.3.3.	Vector de gravedad	17
2.3.4.	Dinámica de los actuadores	18
2.3.5.	Algoritmo recursivo de Newton-Euler	18
2.4.	Controladores Clásicos	21
2.4.1.	Controlador por Par Calculado	21
2.4.2.	Controlador Slotine-Li	23
2.4.3.	Controlador PID	25
2.5.	Controladores por Modos Deslizantes	26
2.5.1.	Controladores por Modos Deslizantes Discontinuos	26
2.5.2.	Super-Twisting	30
2.5.3.	PID-CSMC	34
2.6.	Controladores Adaptativos por Modos Deslizantes	37
2.6.1.	Controlador Barrera	37
2.6.2.	Controlador Barrera Cuadrática	39
2.7.	Control por modos deslizantes en robots manipuladores	40
3.	Resultados teóricos	42
3.1.	Cinemática Directa	42
3.2.	Cinemática complementaria	45
3.2.1.	Velocidades angulares	45
3.2.2.	Aceleraciones	47
3.2.3.	Torques y fuerzas	51
3.3.	Dinámica del manipulador	54
3.3.1.	Matriz de Inercia	54
3.3.2.	Matriz de Coriolis/centrífuga	55
3.3.3.	Vector de Gravedad	58
3.4.	Controladores clásicos	58
3.4.1.	Controlador por par calculado	60
3.4.2.	Controlador Slotine-Li	62
3.4.3.	Control PID	63
3.5.	Controladores por Modos Deslizantes	67
3.5.1.	Control Vectorial Unitario por Modos deslizantes	67

3.5.2. Super-Twisting	69
3.5.3. Controlador PID-CSMC	76
3.6. Controladores Adaptativos por Modos Deslizantes	80
3.6.1. Controlador Barrera	80
3.6.2. Controlador Barrera Cuadrática	84
4. Resultados experimentales	87
4.1. El robot manipulador QARM	87
4.2. Actuadores	89
4.3. Dinámica de los Actuadores	90
4.4. Parámetros y consideraciones	92
4.5. Trayectoria propuesta	94
4.6. Conversión de Par a PWM	95
4.7. Par Calculado	97
4.8. SlotineLi	101
4.9. PID	103
4.10. STANM	106
4.11. PID Like	109
4.12. Barrera	112
4.13. Barrera Cuadrática	114
4.14. Análisis de errores	116
5. Conclusiones	117
Trabajo Futuro	118

Índice de figuras

2.1. Plano de fase	26
2.2. Función barrera semidefinida positiva.	38
3.1. Modelo en Simscape-Simulink utilizado para la evaluación de los controladores.	58
3.2. Modelo del QArm en Simscape-Simulink utilizado para la evaluación de los controladores.	59
3.3. Simulación seguimiento de trayectoria controlador par calculado.	60
3.4. Simulación señales de control esquema par calculado.	61
3.5. Simulación seguimiento de trayectoria controlador Slotine-Li.	62
3.6. Simulación señales de control esquema Slotine-Li.	63
3.7. Simulación seguimiento de trayectoria controlador PID.	65
3.8. Simulación señales de control esquema PID.	66
3.9. Simulación seguimiento de trayectoria controlador por modos deslzantes unitario.	67
3.10. Simulación señales de control esquema por modos deslizantes unitario.	68
3.11. Simulación seguimiento de trayectoria controlador STA.	74
3.12. Simulación señales de control esquema STA.	75
3.13. Simulación seguimiento de trayectoria controlador PID-CSMC.	78
3.14. Simulación señales de control esquema PID-CSMC.	79
3.15. Simulación seguimiento de trayectoria controlador basado en función barrera.	82
3.16. Simulación señales de control esquema barrera.	83
3.17. Simulación seguimiento de trayectoria controlador barrera cuadrática.	85
3.18. Simulación señales de control esquema barrera cuadrática.	86
4.1. Figura del robot	88
4.2. Conversión experimental de par a PWM.	96
4.3. Diagrama de Simulink utilizado para la implementación experimental en la planta real.	97

4.4. Resultados experimentales seguimiento de trayectoria controlador par calculado.	98
4.5. Resultados experimentales señales de control esquema par calculado.	99
4.6. Resultados experimentales seguimiento de trayectoria controlador SlotineLi. .	101
4.7. Resultados experimentales señales de control esquema SlotineLi.	102
4.8. Resultados experimentales seguimiento de trayectoria controlador PID. . . .	103
4.9. Resultados experimentales señales de control esquema PID.	104
4.10. Resultados experimentales seguimiento de trayectoria controlador STA. . . .	106
4.11. Resultados experimentales señales de control esquema STA.	107
4.12. Acercamiento de los resultados experimentales del esquema STA.	107
4.13. Resultados experimentales seguimiento de trayectoria controlador PID-CSMC.	109
4.14. Resultados experimentales señales de control esquema PID-CSMC.	110
4.15. Acercamiento de los resultados experimentales del esquema PID-CSMC. . . .	111
4.16. Resultados experimentales seguimiento de trayectoria controlador basado en función barrera.	112
4.17. Resultados experimentales señales de control para el esquema basado en fun- ción barrera.	113
4.18. Resultados experimentales seguimiento de trayectoria controlador barrera cua- drática.	114
4.19. Resultados experimentales señales de control esquema barrera cuadrática. . .	115

Índice de tablas

2.1. Ganancias PID-CSMC.	37
3.1. Parámetros de Denavit-Hartenberg.	43
4.1. Características generales de la estructura del robot.	87
4.2. Características generales y de construcción del servomotor.	89
4.3. Parámetros electromecánicos de los servomotores.	89
4.4. Parámetros físicos y dinámicos del manipulador robótico.	93
4.5. Parámetros seleccionados para las trayectorias de referencia.	94
4.6. Tabla comparativa del error RMS por articulación en estado estacionario. . .	116

Índice de Acrónimos

BFAQ Función Barrera Adaptativa Cuadrática. iv, 39, 40, 84, 115, 118

BFASMC Control por Modos Deslizantes Adaptativo basado en Función Barrera. iii, 38, 39, 86

D-H Denavit-Hartenberg. 12, 13

EMF Fuerza Electromotriz. 95

FF-ST-CSMC Control por Modos Deslizantes Continuos Feedforward Super-Twisting. 6, 7

GDL Grados de libertad. 2, 4

PD Proporcional-Derivativo. 23

PID Proporcional-Integral-Derivativo. iii, 5, 7, 9, 25, 34, 104

PID-CSMC Control por Modos Deslizantes Continuos con acción PID. iii, 9, 37, 75, 76, 86, 111, 113, 117, 118

PSBF Función Barrera Semidefinida Positiva. 9

PWM Modulación por Ancho de Pulso. viii, 89, 95, 96

RMS Raíz Cuadrática Media. x, 116

SMC Control por modos deslizantes. 7

STA Algoritmo Super-Twisting. iii, 9, 31, 36, 37, 71, 75, 86, 111, 113, 115, 117, 118

Capítulo 1

Introducción

La robótica contemporánea es un campo de estudio multidisciplinario que por su propia naturaleza, se compone de distintas ramas de la ingeniería, como la mecánica, la eléctrica y la teoría de control para consolidarse como una de las ciencias más influyentes de la época moderna.

El concepto de robot se suele sobreentender sin necesidad de grandes explicaciones, gracias a la enorme difusión que ha tenido en los últimos años. Aun así, la definición que ofrece la literatura especializada es la siguiente: máquinas inteligentes capaces de realizar tareas Choset et al. 2005; máquinas autónomas animadas Spong et al. 2004; dispositivo mecánico que puede programarse para distintas actividades Craig 2006 o simplemente como la propia definición de la lengua: máquina o ingenio electrónico programable que es capaz de manipular objetos y realizar diversas operaciones Real Academia Española 2024.

1.1. Tipos de robot

Debido a la infinidad de modelos robóticos que existen, nace con ello la necesidad de tener un orden y clasificarlos, siendo generalmente por las características que lo componen o por su propósito de construcción:

Tipos de articulaciones

El objetivo de un manipulador es ubicar y orientar objetos en el espacio tridimensional Craig 2006 y para lograr su cometido de la manera más eficiente se eligen distintos métodos de construcción, siendo sus dos principales componentes los eslabones y las articulaciones. Los

eslabones se definen en su forma más general como aquellas partes que conectan dos o más articulaciones; mientras que las articulaciones son aquellos puntos en común de los eslabones y es en estos nodos donde se produce el movimiento. Algunas de las articulaciones más utilizadas son:

- **Articulación angular:** Donde los eslabones se desplazan relativamente uno del otro respecto a un eje rígido una cantidad angular θ .
- **Articulación prismática o deslizante:** El desplazamiento relativo entre los eslabones es una traslación, es decir, un desplazamiento lineal l .
- **Esférica:** El movimiento se da alrededor de la superficie de una esfera.

Grados de libertad

Los grados de libertad, GDL, de un manipulador están definidos como: El número de variables de posición independientes que tendrían que especificarse para poder localizar todas las piezas del mecanismo. Generalmente los robots manipuladores son cadenas cinemáticas abiertas y como normalmente la posición en cada articulación se define con una sola variable, el número de articulaciones es igual al número de grados de libertad.

Tipo de actuadores

Los actuadores son los dispositivos encargados de realizar el movimiento angular o lineal en las articulaciones del manipulador, siendo las formas más comunes de producir este desplazamiento:

- **Actuadores hidráulicos:** Actuadores diseñados para mover grandes masas impulsados por bombas hidráulicas que funcionan con aceite o fluidos especiales, destacan por su alta relación potencia-peso.
- **Actuadores neumáticos:** Funcionamiento basado en desplazamientos de aire comprimido, ideales para movimientos rápidos sacrificando la precisión en el seguimiento.
- **Actuadores eléctricos:** El trabajo se produce por motores eléctricos, generalmente motores de corriente continua, a pasos y servomotores.

Por su tipo de desplazamiento:

- **Cartesiano:** Su configuración se basa en tres articulaciones prismáticas que se desplazan a lo largo de ejes ortogonales X, Y, Z, ofreciendo un espacio de trabajo en forma de prisma rectangular.
- **Brazo articulado:** Inspirados en la anatomía humana, consisten en una cadena de eslabones unidos mediante articulaciones angulares, lo que les otorga una gran destreza y flexibilidad para alcanzar posiciones complejas en el espacio.
- **Delta:** Tienen una configuración paralela donde tres brazos mecánicos convergen desde una base fija hacia un efector final móvil. Siendo el estándar para tareas de clasificación rápida, pick-and-place.

Por sus tareas asignadas:

- **Robot de montaje:** Diseñados con alta precisión y repetibilidad para unir, atornillar y ensamblar múltiples componentes en líneas de producción automatizadas, reduciendo los tiempos de manufactura.
- **Robots de carga:** Máquinas de alta capacidad de torque orientadas a la manipulación, levantamiento y traslado de objetos pesados o voluminosos.
- **Robots perforadores:** Sistemas de gran robustez utilizados en la industria minera y de construcción, equipados con efectores finales específicos para excavar o taladrar superficies rocosas con alta potencia y autonomía.

1.2. Robots reales

1.2.1. Robots en medicina

En los últimos años la integración de la robótica a la medicina moderna representa un avance enorme alcanzando nuevos límites de la cirugía mínimamente invasiva permitiendo a los médicos operar con un mayor nivel de precisión que supera las destrezas y limitaciones físicas de las manos y muñecas humanas. Siendo uno de los ejemplos más notorios el modelo Da Vinci, desarrollado por Intuitive Surgical. Su estructura fundamental está compuesta por tres componentes principales.

- **El carro:** Es la estructura física que sostiene los brazos del robot.

- **Consola del cirujano:** Unidad central de control y visualización.
- **Carro de visión:** Encargado de transmitir las imágenes en alta definición a la consola.

Como características destacables del robot, se encuentran sus efectores finales microscópicos accionados por cables de tungsteno proporcionado un total de 7 GDL.

1.2.2. Robots en la exploración espacial

Otro ejemplo de robótica aplicada es el manipulador robótico Canadarm 1. Desplegado en los transbordadores espaciales a partir de la misión STS-2 en 1981, este manipulador es un brazo robot de 15 metros de longitud. Este robot se componía de 6 GDL, con 2 articulaciones en el hombro, una única articulación en el codo y tres articulaciones ortogonales en la muñeca. Debido a las limitaciones tecnológicas de la época, el sistema no tenía sensores hápticos de fuerza o contacto lo que obligaba a los astronautas a vigilar en todo momento la manipulación.

1.2.3. Robots industriales

Las aplicaciones y entornos donde los robots manipuladores no solo se limitan al espacio o a la medicina, también se encuentran dentro de todo tipo de industria, destacando la industria de manufactura de automóviles, un campo que exige rapidez y precisión, además de que el entorno hostil donde están instalados los somete constantemente a oscilaciones o vibraciones durante largos periodos de tiempo. Algunos modelos de robots ensambladores son la familia IRB 6700 de ABB, cuyas características destacables incluyen la manipulación de hasta 300 kg y una precisión de 0.15 milímetros.

Dada la creciente importancia de los manipuladores robóticos y la alta exigencia de las tareas que ejecutan, el diseño del sistema resulta insuficiente por sí solo. Si bien el hardware es el encargado de realizar el trabajo físico, la carencia de una instrumentación adecuada y de estrategias de control eficientes compromete el desempeño de la máquina, resultando en una ejecución deficiente de los objetivos. En aplicaciones críticas, como las cirugías asistidas por el sistema Da Vinci o las maniobras espaciales del Canadarm mencionadas anteriormente, un comportamiento impreciso es inaceptable, ya que cualquier error de manejo derivaría en consecuencias catastróficas. Por ello, el diseño de esquemas de control que garanticen el seguimiento deseado es tan fundamental como el desarrollo mecánico. En este sentido, los algoritmos de control robustos como los controladores por modos deslizantes destacan como una estrategia correcta para darle al mecanismo precisión y robustez.

1.3. Modelado matemático:

La comprensión detallada de las capacidades, el diseño y las limitaciones de los sistemas robóticos requiere de un lenguaje que describa su funcionamiento y relacione las fuerzas aplicadas a cada uno de los eslabones con el comportamiento, esta herramienta o lenguaje es el modelado matemático, tanto de la dinámica del robot como de la cinética.

La cinética encargada de ubicar la posición del efector final en el espacio a partir de las posiciones articulares, el estudio cinemático no se detiene a situaciones estáticas, ya que si se incluye una variable temporal y la posición depende de ella emerge el estudio de las velocidades de las articulaciones, siendo el pilar fundamental de la cinemática diferencial.

La dinámica estudia los fundamentos físicos que causan el movimiento, siendo principalmente la relación que existe entre la aceleración, velocidad y posición de los eslabones con las fuerzas aplicadas. Obtener una relación precisa de la fuerza aplicada con sus efectos es un requisito para la formulación de controladores efectivos.

1.4. Estrategias de control en manipuladores:

El control en manipuladores es la disciplina responsable de calcular y aplicar las señales adecuadas a los actuadores para que el robot ejecute las tareas programadas con precisión. Estos controladores deben ser capaces de hacer que el manipulador pueda continuar con la tarea programada a pesar de perturbaciones externas o incertidumbres en el modelado.

algunas de las estrategias más conocidas son:

- **PID:** El primer control que se utilizó es el clásico PID y se aplica individualmente a cada una de las articulaciones tomando las no linealidades de las inercias y los efectos de la matriz de Coriolis como meras perturbaciones.
- **Linealización por retroalimentación:** Este enfoque es mayormente conocido como control por par calculado y basa su principio de funcionamiento en calcular las fuerzas de las no linealidades por medio del modelado dinámico y retroalimentarlas para simplificarlas.
- **Pasividad:** En escenarios reales cuando los robots están sujetos a incertidumbres paramétricas y a dinámicas no modeladas los controladores por linealización se vuelven poco efectivos y es donde los controladores por pasividad que utilizan las propiedades de conservación de la energía y que a diferencia de los controladores por linealización

estos compensan las no linealidades.

- **Control robusto:** controladores diseñados para mantener la estabilidad del sistema a pesar de estar expuesto a perturbaciones mientras la capacidad de los actuadores lo permita.

1.5. Control por modos deslizantes

Los algoritmos de control evaluados en presencia de incertidumbres son uno de los temas principales en la teoría de control moderna pues, en cualquier aplicación real de control siempre existen diferencias entre la dinámica de la planta real y el modelo matemático que utilizamos para el diseño del controlador. Estas discrepancias o diferencias generalmente vienen de perturbaciones externas, parámetros desconocidos de la planta o dinámicas parásitas Shtessel et al. 2014. Diseñar leyes de control que garanticen el desempeño deseado en lazo cerrado en presencia de estas perturbaciones, es una tarea complicada para los ingenieros de control y esto nos lleva al desarrollo de leyes de control robusto, cuyo objetivo es precisamente la solución de esta problemática y donde los algoritmos de control por modos deslizantes han tenido los mejores resultados. La idea central del control por modos deslizantes radica en la definición de una función conocida como variable de deslizamiento. Forzar esta variable a cero ubica la dinámica del sistema sobre la denominada superficie deslizante, cuyo diseño adecuado es el encargado de garantizar el desempeño deseado en lazo cerrado. El funcionamiento de esta estrategia se divide en dos etapas fundamentales: una primera fase de alcance, donde el controlador guía las trayectorias del sistema hasta la superficie, y una segunda fase de deslizamiento, encargada de mantener al sistema confinado sobre ella. Al asegurar este comportamiento, el sistema hereda las propiedades más destacadas de este esquema de control, tales como la insensibilidad ante perturbaciones, una alta precisión y la convergencia a cero de la variable deslizante en tiempo finito.

1.6. Estado del arte

La validación experimental de algoritmos de control por modos deslizantes es un paso fundamental y constituye la parte final del desarrollo de las ciencias del control. A lo largo de los años, se han realizado múltiples experimentos sobre la implementación de controladores por modos deslizantes continuos, por ejemplo: Recientemente, Saied et al. (2023) propusieron una contribución significativa mediante el desarrollo del controlador por modos deslizantes continuo Super-Twisting mediante Feedforward FF-ST-CSMC. Que presenta una forma al-

ternativa a la clásica implementación por par calculado. Esta propuesta utiliza términos dinámicos basados exclusivamente en la trayectoria deseada, lo que reduce la sensibilidad al ruido de medición.

La efectividad de este enfoque fue validada experimentalmente en dos plataformas distintas:

- **Manipulador Paralelo SPIDER4:** Un robot de 5 grados de libertad con redundancia de actuación, diseñado para tareas de mecanizado de alta precisión.
- **Robot Delta:** Un manipulador de 3 grados de libertad orientado a aplicaciones industriales de *pick-and-place* a altas velocidades.

Los resultados demuestran que el esquema FF-ST-CSMC garantiza estabilidad en tiempo finito y supera el rendimiento de controladores tradicionales como el PID. Específicamente, en pruebas con el robot SPIDER4, se reportó una reducción del error cuadrático medio del 55.4% en el espacio cartesiano y del 44.1% en el espacio articular en comparación con el estándar PID. Además, el controlador demostró una alta robustez ante cambios de velocidad y variaciones de carga, manteniendo señales de control suaves y dentro de los límites de los actuadores.

1.7. Motivación

En los últimos 100 años, la automatización industrial y la robótica de servicios han experimentado un crecimiento sin precedentes, impulsado por la necesidad de ejecutar tareas de alta precisión en entornos dinámicos. Los manipuladores robóticos representan una estructura esencial en aplicaciones que van desde el ensamblaje electrónico hasta la asistencia en procesos quirúrgicos. Aun así, la naturaleza no lineal de su dinámica, sumada al acoplamiento entre sus articulaciones y la presencia de perturbaciones externas, impone desafíos significativos para los sistemas de control convencionales. A pesar de la eficacia de controladores clásicos como el PID, su rendimiento se degrada ante variaciones paramétricas y disturbios no modelados, lo que limita su capacidad para asegurar un seguimiento de trayectoria perfecto en algunas condiciones operativas. Esta situación motiva el presente estudio, ya que existe una demanda creciente por algoritmos que no solo sean robustos, sino que también minimicen el esfuerzo de los actuadores y el desgaste mecánico. La búsqueda de soluciones que combinen la robustez del control por modos deslizantes SMC con la suavidad de las señales continuas y la flexibilidad de la adaptación en tiempo real es el componente principal de esta investigación.

1.8. Justificación

Desde una perspectiva práctica, el desarrollo e implementación de esquemas de control robustos permite que el manipulador robótico opere de manera eficiente ante incertidumbres paramétricas; por ejemplo, frente a variaciones inesperadas en la carga útil o ante discrepancias entre el modelo matemático dinámico y la planta física. En este sentido, se espera que la implementación de este esquema en un manipulador serial logre:

- **Una reducción de los errores de seguimiento:** Minimizando las desviaciones de la trayectoria tanto en el espacio articular como en el cartesiano.
- **Una reducción del esfuerzo de control:** Generando señales continuas que prevengan la saturación, el desgaste térmico y el deterioro prematuro de los actuadores.
- **Un aumento en la vida útil del sistema mecánico:** Eliminando el fenómeno de alta frecuencia y las oscilaciones bruscas características de los controladores discontinuos clásicos.

Por otro lado, la originalidad de este trabajo radica en la síntesis y evaluación de diferentes leyes de control robusto por modos deslizantes, donde cada variante aborda una necesidad específica para el desempeño exigido por la planta. Además, como se describió antes, los estudios experimentales sobre controladores continuos por modos deslizantes como el Super-Twisting se han concentrado históricamente en arquitecturas paralelas o sistemas sobreactuados, como los robots Delta y Spider. En contraste, su aplicación y documentación en cadenas cinemáticas abiertas es escasa. Por lo tanto, esta investigación amplía la literatura mediante un análisis experimental detallado y una evaluación comparativa rigurosa frente a otras estrategias de control.

1.9. Objetivos

1.9.1. Objetivos General

- Aplicar controladores continuos por modos deslizantes a un manipulador serial de 4 grados de libertad.

1.9.2. Objetivos Específicos

- Modelar la cinética del brazo manipulador.

- Modelar la dinámica del brazo manipulador.
- Implementar los controladores clásicos para manipuladores: Par calculado, Slotine-Li y PID.
- Implementar el controlador continuo por modos deslizantes STA en el robot.
- Implementar el controlador continuo por modos deslizantes PID-CSMC.
- Implementación de controlador continuo por modos deslizantes adaptativo por PSBF.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Cinemática Directa

La cinemática es la ciencia que trata el movimiento sin considerar las fuerzas que lo ocasionan. Dentro de la cinemática se estudián posición, velocidad y aceleración y todas las derivadas de mayor orden de las variables de posición respecto al tiempo. Los manipuladores consisten de eslabones casi rígidos, los cuales están conectados por articulaciones que permiten el movimiento relativo de los eslabones adyacentes. Estas articulaciones generalmente se instrumentan con sensores de posición.

La cinemática directa es el problema geométrico estático de calcular la posición y orientación del efector final del manipulador. Específicamente, dado un conjunto de ángulos articulares, el problema de la cinemática directa es calcular la posición y orientación del efector final respecto a la base.

2.1.1. Matrices de transformación homogéneas

Las matrices de transformación homogéneas son objetos matemáticos que combinan matrices de traslación y rotación. Estas matrices son útiles para representar el movimiento de un manipulador, pues nos permiten expresar el plano coordinado del efector final respecto del plano base del manipulador. A manera de resumen, cada articulación produce una rotación que puede ser expresada con una matriz $\mathbf{R}$ y cada eslabón como una traslación que también puede ser representada mediante un vector $\mathbf{d}$

Una matriz de transformación homogénea entre dos planos de una cadena cinemática tiene

la forma siguiente:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} R_i^{i-1} & d_i^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Donde $\mathbf{R}_i^{i-1}$ es una matriz que representa la rotación del plano i respecto al plano $i - 1$ y donde $\mathbf{d}_i^{i-1}$ es un vector de desplazamiento entre o bien un cambio de sistema de referencia del vector respecto a los planos i a $i - 1$.

Las transformaciones homogéneas pueden ser multiplicadas para representar múltiples transformaciones, dicha propiedad se describe a continuación:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} R_1^0 & d_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2^1 & d_2^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^0 R_2^1 & R_1^0 d_2^1 + d_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

En general, dado un sistema, cualquiera de sus transformaciones puede ser descrita como una composición de transformaciones simples a lo largo de los ejes coordenados X, Y y Z. Las transformaciones correspondientes se muestran a continuación:

$$\text{Trans}_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{Rot}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\text{Trans}_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{Rot}_{y,\beta} = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\text{Trans}_{z,d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{Rot}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Estas matrices permiten representar vectores de posición definidos en un sistema de referencia móvil i respecto a un marco de coordenadas de estudio. Trasladando este concepto al estudio de la robótica, dicha formulación matemática permite describir la cinemática de un eslabón en movimiento asociado a una articulación específica actual, cuyo sistema de referencia inicial

se encuentre en el marco de referencia de la articulación actual, ser expresado en el marco de referencia de la base, por ejemplo. Esto resulta fundamental para determinar la posición exacta de cada uno de los eslabones con respecto al marco de coordenadas global, lo cual se logra formalmente mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1 + \mathbf{d}_1^0 \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) establece que, para un vector de posición $\mathbf{p}^1$ expresado originalmente en el sistema coordenado 1, su representación respecto al plano 0 requiere una transformación compuesta. Este proceso consiste en reorientar el punto mediante la multiplicación por la matriz de rotación $\mathbf{R}_1^0$ y la adición del vector de traslación $\mathbf{d}_1^0$.

2.1.2. Parámetros de Denavit Hartenberg

Habiendo definido las transformaciones homogéneas en la sección 2.1.1, es notable ver que pueden ser utilizadas para la descripción de la cinemática del robot utilizando un plano desplazado y rotado por cada una de las articulaciones. Para ser sistemáticos en la construcción, se recurre a la convención D-H, la cual consiste en una transformación homogénea A_i que a su vez es producto de 4 transformaciones homogéneas.

La matriz de transformación homogénea A_i se define como:

$$A_i = \text{Rot}_{z,\theta_i} \text{Trans}_{z,d_i} \text{Trans}_{x,a_i} \text{Rot}_{x,\alpha_i} \quad (2.7)$$

Al expandir estas transformaciones en sus formas matriciales correspondientes, obtenemos:

$$A_i = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Realizando la multiplicación de estas matrices, se obtiene la forma general de la matriz de transformación de Denavit-Hartenberg:

$$A_i = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Donde c_ϕ y s_ϕ representan, respectivamente, $\cos(\phi)$ y $\sin(\phi)$. Los cuatro parámetros D-H asociados al eslabón i son $(\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i)$.

Para encontrar estos parámetros se describe un algoritmo en Spong et al. 2004 de 9 pasos por cada uno de los eslabones:

Paso 1: Localizar y etiquetar los ejes de las articulaciones $z_0, \dots, z_{n-1}$.

Paso 2: Establecer el marco base. Situar el origen en cualquier lugar sobre el eje z_0 . Los ejes x_0 y y_0 se eligen convenientemente para formar un sistema de mano derecha (regla de la mano derecha).

Para $i = 1, \dots, n-1$, realizar los Pasos 3 al 5.

Paso 3: Localizar el origen o_i donde la normal común a z_i y z_{i-1} interseca a z_i . Si z_i interseca a z_{i-1} , ubicar o_i en esta intersección. Si z_i y z_{i-1} son paralelos, ubicar o_i en cualquier posición conveniente a lo largo de z_i .

Paso 4: Establecer x_i a lo largo de la normal común entre z_{i-1} y z_i pasando por o_i , o en la dirección normal al plano formado por z_{i-1} y z_i si estos se intersecan.

Paso 5: Establecer y_i para completar un sistema de mano derecha.

Paso 6: Establecer el marco del efector final en $x_n y_n z_n$. Asumiendo que la n -ésima articulación es de revolución, establecer $z_n = a$ en la dirección de z_{n-1} . Establecer el origen de manera conveniente a lo largo de z_n , preferiblemente en el centro de la pinza (gripper) o en la punta de cualquier herramienta que el manipulador lleve. Establecer $y_n = s$ en la dirección de cierre de la pinza y establecer $x_n = n$ como $s \times a$. Si la herramienta no es una pinza simple, establecer x_n y y_n de manera conveniente para formar un sistema de mano derecha.

Paso 7: Crear una tabla de parámetros de eslabón $a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i$.

- a_i : distancia a lo largo de x_i desde o_i hasta la intersección de los ejes x_i y z_{i-1} .
- d_i : distancia a lo largo de z_{i-1} desde o_{i-1} hasta la intersección de los ejes x_i y z_{i-1} .

El parámetro d_i es variable si la articulación i es prismática.

- α_i : el ángulo entre z_{i-1} y z_i medido alrededor de x_i .
- θ_i : el ángulo entre x_{i-1} y x_i medido alrededor de z_{i-1} . El parámetro θ_i es variable si la articulación i es de revolución.

Paso 8: Formar las matrices de transformación homogénea A_i sustituyendo los parámetros anteriores en ecuación (2.7).

Paso 9: Formar $T_n^0 = A_1 \dots A_n$. Esto proporciona la posición y orientación del marco de la herramienta expresadas en las coordenadas de la base.

2.2. Cinemática Complementaria

Matemáticamente, la cinemática directa define una transformación entre el espacio de posiciones cartesianas y el espacio de posiciones articulares Spong et al. 2004. Sin embargo, para el cálculo de las diferentes velocidades que experimenta el robot en cada uno de sus eslabones existen distintas técnicas que nos permiten llegar a resultados idénticos

- Jacobiano geométrico: Es la estrategia mayormente utilizada en la literatura, la cual basa su funcionamiento en obtener las derivadas parciales que relacionan las velocidades del espacio articular con las del espacio cartesiano mediante la regla de la cadena.
- Ecuaciones de Newton Euler: Esta otra forma de trabajo utiliza una serie de condiciones iniciales y ecuaciones de movimiento que permiten construir velocidades y aceleraciones de cada uno de los eslabones de forma recursiva.

2.3. Dinámica del manipulador

A diferencia de la cinemática, el estudio de dinámica de un brazo robot incluye a todas las fuerzas que actúan sobre el y sus efectos. Siendo la forma general que describe la dinámica del manipulador:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.10)$$

Donde $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas de Coriolis y centrífugas, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares gravitacionales y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector

de pares aplicados en las articulaciones.

2.3.1. Matriz de inercia

La matriz de inercia de un manipulador, a manera de resumen, es el elemento matemático que cuantifica la resistencia a la aceleración que presenta el robot y posee una serie de características útiles en el análisis dinámico y de control.

Para un valor fijo de la coordenada generalizada $\mathbf{q}$, se denotan los autovalores de la matriz de inercia $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ como $0 < \lambda_1(\mathbf{q}) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathbf{q})$. Dado que $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva, estos autovalores son estrictamente positivos, lo que permite establecer la siguiente relación Spong et al. 2004:

$$\lambda_1(\mathbf{q})\mathbf{I}_{n \times n} \leq \mathbf{M}(\mathbf{q}) \leq \lambda_n(\mathbf{q})\mathbf{I}_{n \times n} \quad (2.11)$$

Donde $\mathbf{I}_{n \times n}$ representa la matriz identidad. Estas desigualdades se interpretan en el sentido estándar de matrices, donde $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ significa que la diferencia $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ es una matriz semidefinida positiva.

En el caso específico de manipuladores donde todas las articulaciones son angulares, la matriz de inercia contiene únicamente funciones acotadas de las variables articulares, es decir, términos de senos y cosenos. Como resultado, es posible hallar constantes λ_m y λ_M que proporcionan límites uniformes e independientes de la configuración $\mathbf{q}$:

$$\lambda_m\mathbf{I}_{n \times n} \leq \mathbf{M}(\mathbf{q}) \leq \lambda_M\mathbf{I}_{n \times n} < \infty \quad (2.12)$$

La propiedad anterior nos permite realizar la siguiente afirmación: la matriz de inercia $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ y su inversa son simétricas, definidas positivas y poseen norma espectral acotada superior e inferiormente por constantes positivas M_m y M_M , lo que significa que cualquier vector $\mathbf{q}$ transformado por la matriz $\mathbf{M}$ jamás será el vector nulo y ninguno de sus valores tenderá a infinito:

$$M_m \leq \|\mathbf{M}(\mathbf{q})\| \leq M_M \quad (2.13)$$

2.3.2. Matriz de Coriolis y centrífuga

En un modelado general de la dinámica del manipulador las fuerzas de Coriolis y centrífugas serán obtenidas por separado, sin embargo en la ecuación (2.37), se muestra una formulación compacta que agrupa ambos efectos en una sola expresión $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Para lograr combinar estos efectos en una única matriz se recurre a los **símbolos de Christoffel de primer orden**, definidos como:

$$c_{ijk}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{M}_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathbf{M}_{ki}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathbf{M}_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right].$$

A partir de ellos, la matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se construye componente a componente mediante

$$\mathbf{C}_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_k c_{ijk}(\mathbf{q}) \dot{q}_k.$$

Si bien existen múltiples formas de elegir $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, el vector $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ es único.

Modelar $\mathbf{C}$ mediante los símbolos de Christoffel nos ofrece las siguientes ventajas:

- **Cota:** En la práctica, la matriz de inercia $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ está formada por combinaciones lineales de funciones trigonométricas como senos y cosenos o términos constantes. Por tanto, todas sus derivadas parciales $\partial \mathbf{M}_{ij} / \partial q_k$ son funciones uniformemente acotadas. Consecuentemente, los símbolos $c_{ijk}(\mathbf{q})$ también están acotados. Si además las velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}(t)$ se mantienen acotadas, y puesto que no existen velocidades infinitas en la práctica, existe una constante C_M tal que $0 \leq C_M < \infty$ y por lo tanto, la norma espectral queda acotada de la siguiente manera:

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq C_M \|\dot{\mathbf{q}}\|, \quad (2.14)$$

y también se satisface $\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\| \leq C_M \|\dot{\mathbf{q}}\|^2$.

- **Propiedad de antisimetría:** De la construcción con los símbolos de Christoffel se deriva la relación

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (2.15)$$

En consecuencia, la matriz $\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}$ es **antisimétrica**, cumpliéndose que $\mathbf{x}^T(\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C})\mathbf{x} = 0$ para todo vector $\mathbf{x}$. Esta propiedad facilita enormemente las demostraciones de estabilidad de los controladores que se presentan en las secciones siguientes.

2.3.3. Vector de gravedad

El vector de gravedad $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ es el elemento dinámico más sencillo de comprender: agrupa las fuerzas debidas a la atracción gravitatoria sobre las masas de los eslabones. Matemáticamente se define como el gradiente de la energía potencial gravitatoria $U(\mathbf{q})$ respecto de las coordenadas articulares:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.16)$$

Este vector es de gran importancia cuando se requiere que el manipulador permanezca estático, ya que al anularse la velocidad y la aceleración, el único término que contribuye a la dinámica es $\mathbf{G}(\mathbf{q})$. De hecho, existen controladores basados exclusivamente en compensación gravitatoria, es decir, que incorporan únicamente este elemento del modelo. En otras palabras, la compensación de gravedad representa el esfuerzo mínimo indispensable que cada motor debe entregar de forma continua sólo para soportar el peso propio de los eslabones y evitar que el brazo caiga.

La energía potencial gravitatoria $U(\mathbf{q})$ se construye a partir de la cinemática directa y, en condiciones normales de operación, está formada por combinaciones lineales de funciones trigonométricas como senos y cosenos multiplicadas por parámetros constantes, masas, longitudes. Por lo tanto, sus derivadas parciales y en consecuencia el propio vector $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ están uniformemente acotadas: Existe una constante G_M con $0 \leq G_M < \infty$ tal que:

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{q})\| \leq G_M \quad \forall \mathbf{q}. \quad (2.17)$$

La derivada temporal de $\mathbf{G}$ se calcula aplicando la regla de la cadena:

$$\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.18)$$

El término $\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{q}$ está compuesto, al igual que $\mathbf{G}(\mathbf{q})$, por funciones trigonométricas y constantes, por lo que también está acotada. Si además las velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}(t)$ se mantienen acotadas, existe otra constante G_d con $0 \leq G_d < \infty$ que satisface

$$\|\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq G_d \|\dot{\mathbf{q}}\|. \quad (2.19)$$

2.3.4. Dinámica de los actuadores

Antes del modelado dinámico de la estructura cinemática se considera la aportación dinámica de los actuadores.

Al tratarse de servomotores de corriente directa, las ecuaciones que describen la dinámica presentadas en Spong et al. 2004 son los siguientes:

$$J_{mk}\ddot{\theta}_{mk} + B_k\dot{\theta}_{mk} = \frac{K_{mk}}{R_k}V_k - \frac{\tau_k}{r_k} \quad (2.20)$$

Sustituyendo la relación de engranajes en cada una de las variables articulares:

$$J_{mk}r_k\ddot{q}_k + B_kr_k\dot{q}_k = \frac{K_{mk}}{R_k}V_k - \frac{\tau_k}{r_k} \quad (2.21)$$

Para acoplar esta dinámica al modelo general del manipulador, es necesario aislar el par τ_k que el motor entrega a la articulación. Multiplicando ecuación (2.21) por la relación de engranes r_k , obtenemos:

$$J_{mk}r_k^2\ddot{q}_k + B_kr_k^2\dot{q}_k = r_k\frac{K_{mk}}{R_k}V_k - \tau_k \quad (2.22)$$

Finalmente, despejando el par τ_k , la expresión resultante de la dinámica del actuador es:

$$\tau_k = r_k\frac{K_{mk}}{R_k}V_k - J_{mk}r_k^2\ddot{q}_k - B_kr_k^2\dot{q}_k \quad (2.23)$$

De la ecuación (2.23), el término $r_k\frac{K_{mk}}{R_k}V_k$ corresponde al voltaje de entrada de los motores escalado por sus respectivas constantes físicas, el cual presenta unidades directas torque. El segundo término, $J_{mk}r_k^2\ddot{q}_k$, contiene la inercia del rotor del motor escalada por el cuadrado de la relación de transmisión. Finalmente, el término $B_kr_k^2\dot{q}_k$ representa el par de oposición generado por la fricción viscosa del motor.

2.3.5. Algoritmo recursivo de Newton-Euler

El algoritmo recursivo de Newton-Euler es una alternativa a la construcción de la dinámica del manipulador, este algoritmo construye de manera secuencial y estructurada velocidades y aceleraciones en cada uno de los eslabones, calculando así, las fuerzas y torques que actúan en cada uno de ellos.

El algoritmo es descrito en Spong et al. 2004 y para construirlo se deben considerar las ecuaciones de movimiento siguientes:

como ya se mencionó. Se debe partir de las condiciones iniciales cinemáticas del brazo en el primer plano. Tales condiciones iniciales son las siguientes:

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\alpha}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_{c,0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_{e,0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_{e,0} = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

- $\mathbf{a}_{c,i}$: Aceleración lineal del centro de masa del eslabón i .
- $\mathbf{a}_{e,i}$: Aceleración lineal del extremo del eslabón i (es decir, la articulación $i + 1$).
- $\boldsymbol{\omega}_i$: Velocidad angular del marco i con respecto al marco base 0.
- $\boldsymbol{\alpha}_i$: Aceleración angular del marco i con respecto al marco base 0.
- $\mathbf{g}_i$: Aceleración debida a la gravedad (expresada en el marco i).
- $\mathbf{f}_i$: Fuerza ejercida por el eslabón $i - 1$ sobre el eslabón i .
- $\boldsymbol{\tau}_i$: Torque ejercido por el eslabón $i - 1$ sobre el eslabón i .
- R_i^{i+1} : Matriz de rotación del marco $i + 1$ al marco i .
- m_i : Masa del eslabón i .
- I_i : Matriz de inercia del eslabón i con respecto a un marco paralelo al marco i cuyo origen está en el centro de masa del eslabón i .
- $\mathbf{r}_{i,ci}$: Vector desde la articulación i al centro de masa del eslabón i .
- $\mathbf{r}_{i+1,ci}$: Vector desde la articulación $i + 1$ al centro de masa del eslabón i .
- $\mathbf{r}_{i,i+1}$: Vector desde la articulación i a la articulación $i + 1$.

Las ecuaciones que describen las velocidades tanto angulares como lineales de los centros de masa son:

$$\mathbf{b}_i = (R_{i-1}^i)^T \mathbf{z}_0 \quad (2.25)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = (R_{i-1}^i)^T \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \mathbf{b}_i \dot{q}_i \quad (2.26)$$

$$\mathbf{v}_{c,i} = (R_{i-1}^i)^T \mathbf{v}_{e,i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,ci} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{v}_{e,i} = (R_{i-1}^i)^T \mathbf{v}_{e,i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,i+1} \quad (2.28)$$

Las aceleraciones debido a la gravedad como a los centros de masa:

$$\mathbf{g}_i = (R_{i-1}^i)^T \mathbf{g}_{i-1} \quad (2.29)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = (R_{i-1}^i)^T \boldsymbol{\alpha}_{i-1} + \mathbf{b}_i \ddot{q}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{b}_i \dot{q}_i) \quad (2.30)$$

$$\mathbf{a}_{c,i} = (R_{i-1}^i)^T \mathbf{a}_{e,i-1} + \boldsymbol{\alpha}_i \times \mathbf{r}_{i,ci} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,ci}) \quad (2.31)$$

$$\mathbf{a}_{e,i} = (R_{i-1}^i)^T \mathbf{a}_{e,i-1} + \boldsymbol{\alpha}_i \times \mathbf{r}_{i,i+1} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,i+1}) \quad (2.32)$$

Las fuerzas y pares que actuan en el manipulador:

$$\mathbf{f}_i = R_i^{i+1} \mathbf{f}_{i+1} + m_i \mathbf{a}_{c,i} - m_i \mathbf{g}_i \quad (2.33)$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = R_i^{i+1} \boldsymbol{\tau}_{i+1} - \mathbf{f}_i \times \mathbf{r}_{i,ci} + (R_i^{i+1} \mathbf{f}_{i+1}) \times \mathbf{r}_{i+1,ci} + I_i \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (I_i \boldsymbol{\omega}_i) \quad (2.34)$$

$$\tau_{motor,i} = \boldsymbol{\tau}_i^T \mathbf{b}_i \quad (2.35)$$

El libro menciona una serie de pasos para realizar adecuadamente la construcción de la dinámica Spong et al. 2004:

1. **Condiciones iniciales:** Comience con las condiciones iniciales base de la ecuación (2.24) y resuelva ecuaciones (2.26) y (2.30) a (2.32) En ese orden para calcular $\boldsymbol{\omega}_i$, $\boldsymbol{\alpha}_i$, $\mathbf{a}_{e,i}$ y $\mathbf{a}_{c,i}$ para i incrementando de 1 a n .

2. **Condiciones terminales:** Comience con las condiciones terminales en el efector final,

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (2.36)$$

y utilice ecuaciones (2.33) y (2.34) para calcular las fuerzas $\mathbf{f}_i$ y los pares $\boldsymbol{\tau}_i$ para i decrementando de n a 1.

La solución correcta del algoritmo nos lleva a una forma similar a la de ecuación (2.10), siendo el resultado:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + \mathbf{C}(\mathbf{q})\dot{q}_k^2 + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (2.37)$$

2.4. Controladores Clásicos

2.4.1. Controlador por Par Calculado

Sea el modelo general de la dinámica del manipulador ecuación (2.10), donde la matriz $\mathbf{M}$ y el vector $\mathbf{G}$ son conocidos y modelados por el método de Newton-Euler, mientras que la matriz $\mathbf{C}$ se requiere que esté modelada por el método de los símbolos de Christoffel.

El análisis del controlador se representa por el sistema en espacio de estados y para obtenerlo, se despeja la derivada de mayor orden del modelo matemático.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ M^{-1}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\tau} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}.$$

Como se puede apreciar, para obtener el segundo estado del sistema es necesario calcular la inversa de la matriz de inercias, esta matriz por su construcción siempre es simétrica y definida positiva por lo tanto siempre es invertible.

El control por par calculado linealiza el sistema cuando se encuentra en lazo cerrado utilizando una estrategia conocida como dinámica inversa Spong et al. 2004 la cual aprovecha la dinámica modelada para simplificar la dinámica no lineal del manipulador:

La ley de control propuesta $\mathbf{u}$ se define como:

$$\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_d\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}} \quad (2.38)$$

donde $\mathbf{K}_p$ y $\mathbf{K}_d$ son matrices diagonales definidas positivas que representan las ganancias proporcional y derivativa, respectivamente.

Se define el error de seguimiento de posición $\tilde{\mathbf{q}}$ como la diferencia entre la trayectoria deseada $\mathbf{q}_d$ y la trayectoria actual $\mathbf{q}$:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \quad (2.39)$$

De igual manera, se define el error de seguimiento de velocidad $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ como la diferencia entre la velocidad deseada $\dot{\mathbf{q}}_d$ y la velocidad actual $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}} \quad (2.40)$$

Posteriormente, se estructura el par calculado $\boldsymbol{\tau}$ como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (2.41)$$

Cerrando el lazo de control tenemos:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (2.42)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u} \quad (2.43)$$

sustituyendo la ley de control:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_d\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{0} = \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_d\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}} \quad (2.45)$$

Para el análisis del controlador se se representa en en el espacio de estados como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_p & -\mathbf{K}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}$$

Como ya se definió, las matrices $\mathbf{K}_p$ y $\mathbf{K}_d$ son diagonales, por lo que cada uno de los n torques

puede escribirse de manera individual. De este modo, la ecuación en el espacio de estados puede expresarse de forma escalar para cada i -ésimo eslabón como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_i \\ \ddot{\tilde{q}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{pi} & -k_{di} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_i \\ \dot{\tilde{q}}_i \end{bmatrix}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.46)$$

Esta dinámica reducida elimina el efecto del acoplamiento no lineal y posibilita el diseño y control individual de cada una de las articulaciones del robot. También es notable que la estructura corresponde a un controlador lineal tipo PD.

También es necesario tener en cuenta que el desempeño del controlador se basa en la suposición de que no existen perturbaciones exógenas y que se tiene un conocimiento total de la dinámica y los parámetros físicos de la planta. Estas condiciones no son viables en aplicaciones reales, llevando a un posible comportamiento deficiente del manipulador.

2.4.2. Controlador Slotine-Li

El controlador propuesto por Slotine y Li basada en pasividad cuya estructura propuesta en Slotine et al. 1987 indica la construcción de dos trayectorias de referencia, primero se define una velocidad de referencia $\dot{\mathbf{q}}_r$, que incorpora el error de posición:

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{q}} \quad (2.47)$$

y su derivada :

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{\Lambda} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (2.48)$$

donde $\mathbf{\Lambda}$ es una matriz diagonal definida positiva.

A continuación, se define la variable de error $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}} = (\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{q}} \quad (2.49)$$

Finalmente Slotine et al. 1987 propone la estructura final y el par de control del algoritmo

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_D \mathbf{s} \quad (2.50)$$

donde $\mathbf{K}_D$ es una matriz de ganancia definida positiva.

Para analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, se propone la siguiente función

candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{s} \quad (2.51)$$

Dado que la matriz de inercia $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ es simétrica y definida positiva, se garantiza que $V > 0$ para todo $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$. Derivando V respecto al tiempo mediante la regla del producto, se obtiene:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \left[\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} \right] \quad (2.52)$$

Se observa que el primer término del lado derecho, $\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{s}$, resulta en una término escalar (1×1). Es sabido que, el transpuesto de un escalar es igual al mismo escalar. Al trasponer este término y aplicar la propiedad de simetría de la matriz de inercia, $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$, se llega a lo siguiente:

$$(\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{s})^T = \mathbf{s}^T \mathbf{M}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} \quad (2.53)$$

Sustituyendo esta equivalencia en la derivada original y sumando los términos semejantes, la expresión se simplifica a:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} \quad (2.54)$$

Por otro lado, la dinámica del error en lazo cerrado está dada por la ecuación:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} + \mathbf{K}_D \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (2.55)$$

Despejando el término inercial $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}}$, se tiene:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} - \mathbf{K}_D \mathbf{s} \quad (2.56)$$

Al sustituir esta dinámica directamente en el segundo término de ecuación (2.54), se obtiene:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \mathbf{s}^T (-\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} - \mathbf{K}_D \mathbf{s}) \quad (2.57)$$

Desarrollando el producto:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} \\ \dot{V} &= \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \left(\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} \end{aligned} \quad (2.58)$$

De las propiedades descritas con anterioridad, se sabe que la matriz $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica, lo que implica que el siguiente componente es nulo:

$$\frac{1}{2}\mathbf{s}^T \left(\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \mathbf{s} = 0, \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \quad (2.59)$$

Finalmente la derivada de la función de Lyapunov está definida como:

$$\dot{V} = -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} \leq 0 \quad (2.60)$$

Esto garantiza la estabilidad del sistema. Debe notarse que para que esta propiedad se cumpla, la matriz de Coriolis se supone modelada a partir de los símbolos de Christoffel.

2.4.3. Controlador PID

El controlador PID incorpora un término integral que, como se explica en Slotine et al. 1987, permite rechazar perturbaciones acotadas tipo escalón sin necesidad de emplear ganancias proporcional y derivativa excesivamente grandes. El término integral introduce una acción acumulativa sobre el error de seguimiento, reduciendo el error en estado estacionario y mejorando el desempeño frente a incertidumbres constantes o lentamente variantes.

La estructura general del controlador PID se define como

$$u = k_p \tilde{q} + k_i \int_0^t \tilde{q}(\tau) d\tau + k_d \frac{d\tilde{q}}{dt} \quad (2.61)$$

2.5. Controladores por Modos Deslizantes

2.5.1. Controladores por Modos Deslizantes Discontinuos

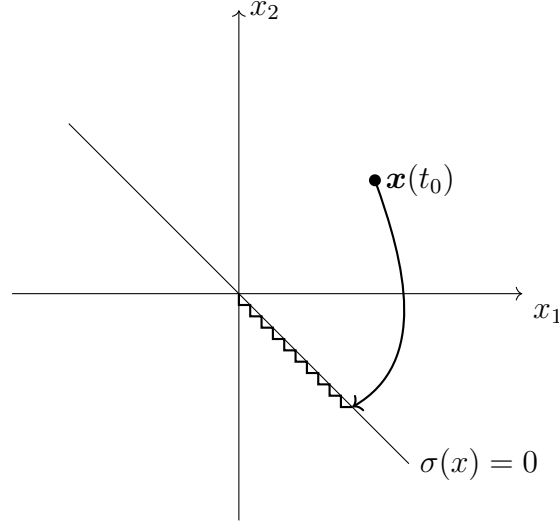


Figura 2.1: Plano de fase

Sea el sistema dinámico general:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g(\mathbf{x}, t)u + f(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\tag{2.62}$$

Donde

- x es el vector de estados $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$
- u es la entrada de control
- $g(\mathbf{x}, t)$ es una perturbación acotada de la forma:

$$0 < g_1 < g(\mathbf{x}, t) < g_2\tag{2.63}$$

De los cuales g_1 y g_2 son constantes positivas y las cotas inferior y superior respectivamente.

- $f(\mathbf{x}, t)$ es una perturbación que cumple con $f(\mathbf{x}, t) = f_1(x_1, t) + f_2(x_2, t)$ y con $|f_1(x_1, t)| < L_1$ y $|f_2(x_2, t)| < L_2$ lo que implica que

$$|f(\mathbf{x}, t)| < L\tag{2.64}$$

donde L_1 , L_2 y L son constantes positivas.

Para garantizar la estabilidad del sistema a pesar de las perturbaciones asociadas, se propone utilizar el controlador por modos deslizantes discontinuo de Shtessel et al. 2014 cuya ley de control se muestra a continuación:

$$u = -cx_2 - \rho \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (2.65)$$

Para la ley de control descrita, c es una ganancia constante positiva heredada de la variable deslizante y ρ es una ganancia positiva de diseño. La variable deslizante para el controlador es propuesta en Shtessel et al. 2014 compuesta por los dos estados del sistema y una ganancia positiva c :

$$\sigma = cx_1 + x_2 \quad (2.66)$$

Para probar la estabilidad del sistema al aplicar el controlador se recurre a una prueba por función de Lyapunov y seleccionamos la función candidata siguiente:

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (2.67)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov y la variable deslizante obtenemos las siguientes expresiones:

$$\dot{V} = \sigma \dot{\sigma} \quad (2.68)$$

$$\dot{\sigma} = c\dot{x}_1 + \dot{x}_2$$

lo que implica

$$\dot{\sigma} = c\dot{x}_2 + g(\mathbf{x}, t)u + f(\mathbf{x}, t) \quad (2.69)$$

Sustituyendo ecuación (2.69) en ecuación (2.68) y distribuyendo los términos:

$$\dot{V} = \sigma (cx_2 + f(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t)u) \quad (2.70)$$

$$\dot{V} = c\sigma x_2 + \sigma f(\mathbf{x}, t) + \sigma g(\mathbf{x}, t)u \quad (2.71)$$

Sustituyendo la ley de control de ecuación (2.65) en ecuación (2.71):

$$\dot{V} = c\sigma x_2 + \sigma f(\mathbf{x}, t) + \sigma g(\mathbf{x}, t) (-cx_2 - \rho \operatorname{sgn}(\sigma)) \quad (2.72)$$

Reorganizando los términos

$$\dot{V} = \sigma f(\mathbf{x}, t) + \sigma c x_2 - \sigma g(\mathbf{x}, t) c x_2 - |\sigma| \rho g(\mathbf{x}, t) \quad (2.73)$$

$$\dot{V} = \sigma f(\mathbf{x}, t) + \sigma c x_2 (1 - g(\mathbf{x}, t)) - |\sigma| \rho g(\mathbf{x}, t) \quad (2.74)$$

Aplicando el valor absoluto a cada uno de los términos construimos la siguiente desigualdad y reorganizamos:

$$\dot{V} \leq |\sigma| |f(\mathbf{x}, t)| + |\sigma| |c x_2 (1 - g(\mathbf{x}, t))| - |\sigma| \rho g(\mathbf{x}, t) \quad (2.75)$$

$$\dot{V} \leq |\sigma| (|f(\mathbf{x}, t)| + |c x_2 (1 - g(\mathbf{x}, t))| - \rho g(\mathbf{x}, t)) \quad (2.76)$$

De la definición de estabilidad de Lyapunov debemos asegurar que $\dot{V} < 0$ y es notable que $|\sigma| > 0$ por lo que debemos asegurar que $(|f(\mathbf{x}, t)| + |c x_2 (1 - g(\mathbf{x}, t))| - \rho g(\mathbf{x}, t)) < 0$ y dado que la única ganancia de diseño es ρ , llegamos la siguiente desigualdad:

$$\rho > \frac{|f(\mathbf{x}, t)| + |c x_2 (1 - g(\mathbf{x}, t))|}{g(\mathbf{x}, t)} \quad (2.77)$$

Considerando el peor de los casos donde $|f(\mathbf{x}, t)|$ es máxima y $g(\mathbf{x}, t)$ es mínima, por lo tanto se sustituyen las cotas de ecuaciones (2.63) y (2.64):

$$\rho > \frac{L + |c x_2 (1 - g_1)|}{g_1} \quad (2.78)$$

Debe notarse que en caso de que la perturbación $g(x_1, t)$ sea conocida puede simplificarse y se llega a la siguiente expresión:

$$\rho > L \quad (2.79)$$

Para verificar la convergencia en tiempo finito mediante se utiliza la función de Lyapunov y

partimos de ecuación (2.76):

$$\dot{V} \leq |\sigma| (|cx_2(1 - g(\mathbf{x}, t))| + |f(\mathbf{x}, t)| - \rho g(\mathbf{x}, t)) \quad (2.80)$$

Dado que la ganancia de diseño ρ cumple con las desigualdades de ecuaciones (2.78) y (2.79), se garantiza la existencia de una constante positiva $K > 0$ definida como:

$$-K = |cx_2(1 - g_1)| - |f(\mathbf{x}, t)| - \rho g_1 \quad (2.81)$$

Sustituyendo esta constante K y la equivalencia geométrica $|\sigma| = \sqrt{2V}$ derivada de la función original, la inecuación diferencial toma la forma canónica de alcanzabilidad:

$$\dot{V} \leq -K\sqrt{2V} \quad (2.82)$$

Para simplificar el desarrollo analítico, se define la constante positiva $\alpha = K\sqrt{2}$. Al separar las variables, se plantea la inecuación a través de integrales indefinidas:

$$\int V^{-1/2} dV \leq \int -\alpha dt \quad (2.83)$$

Resolviendo las integrales indefinidas, se obtiene una constante de integración C :

$$\frac{V^{1/2}}{1/2} \leq -\alpha t + C \quad (2.84)$$

Reescribiendo la expresión anterior, resulta:

$$2V^{1/2}(t) \leq -\alpha t + C \quad (2.85)$$

Para determinar el valor de la constante C , se evalúa el sistema en el instante de tiempo inicial $t = 0$, donde la energía corresponde a $V(0)$:

$$2V^{1/2}(0) = -\alpha(0) + C \quad (2.86)$$

De donde se deduce directamente que el valor de la constante es:

$$C = 2V^{1/2}(0) \quad (2.87)$$

Sustituyendo la constante de integración en la inecuación general, se describe la trayectoria de la energía en el tiempo:

$$2V^{1/2}(t) \leq -\alpha t + 2V^{1/2}(0) \quad (2.88)$$

Dado que el objetivo del control es alcanzar la superficie de deslizamiento, el tiempo de alcance t_r se define como el instante exacto en que la energía se disipa por completo, es decir, $V(t_r) = 0$. Evaluando esta condición se obtiene:

$$0 \leq -\alpha t_r + 2V^{1/2}(0) \quad (2.89)$$

Reordenando los términos de la inecuación:

$$\alpha t_r \leq 2V^{1/2}(0) \quad (2.90)$$

Despejando el tiempo t_r :

$$t_r \leq \frac{2V^{1/2}(0)}{\alpha} \quad (2.91)$$

Finalmente, restituyendo la variable original $\alpha = K\sqrt{2}$ y recordando que por definición $V^{1/2}(0) = \frac{|\sigma(0)|}{\sqrt{2}}$, la cota del tiempo de alcance resulta en:

$$t_r \leq \frac{2 \left(\frac{|\sigma(0)|}{\sqrt{2}} \right)}{K\sqrt{2}} = \frac{2|\sigma(0)|}{2K} = \frac{|\sigma(0)|}{K} \quad (2.92)$$

Puesto que el error inicial $|\sigma(0)|$ es una magnitud medible y finita, y K es una constante real estrictamente mayor a cero, se concluye matemáticamente que $t_r < \infty$. Por lo tanto, el sistema es forzado a alcanzar el modo deslizante en un tiempo finito.

2.5.2. Super-Twisting

El algoritmo Super-Twisting es un controlador por modos deslizantes de segundo orden continuo altamente estudiado y mencionado en la literatura y como se menciona en Shtessel et al. 2014 esta ley de control asegura robustez rechazando perturbaciones Lipschitz; llevar los estados a cero asintóticamente y llevar la variable de deslizamiento a cero en tiempo finito. Su ley de control u está dada por:

$$\begin{aligned} u_{sta} &= -k_1 |\sigma|^{1/2} \text{sgn}(\sigma) + v \\ \dot{v} &= -k_2 \text{sgn}(\sigma) \end{aligned} \quad (2.93)$$

Considerando la variable de deslizamiento definida previamente en ecuación (2.66) y el sistema dinámico general descrito por ecuación (2.62), se analiza el comportamiento en lazo cerrado al aplicar la ley de control estándar del algoritmo STA. La dinámica de la superficie se expresa como:

$$\dot{\sigma} = c x_2 + g(\mathbf{x}, t) u_{sta} + f(\mathbf{x}, t) \quad (2.94)$$

Por lo que el lazo cerrado (2.69)-(2.93) es dado por

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= c x_2 - g(\mathbf{x}, t) k_1 |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma) + g(\mathbf{x}, t) v + f(\mathbf{x}, t) \\ \dot{v} &= -k_2 \text{sign}(\sigma) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Para verificar la estabilidad del sistema en lazo cerrado (2.95) se recurre a los resultados de Moreno et al. 2012 para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 |z_1|^{1/2} \text{sign}(z_1) + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -k_2 \text{sign}(z_1) + \rho(z, t) \end{aligned} \quad (2.96)$$

con $z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix}^T$. El Teorema 2 en Moreno et al. 2012 prueba que si $|\rho(z, t)| < L_\rho$, donde L_ρ es una constante positiva, entonces existen constantes positivas k_1 y k_2 tales que el origen del sistema (2.96) es un punto de equilibrio estable en tiempo finito. Además de esto, existe una matriz P tal que la función $V = \zeta^T P \zeta$, donde P es una matriz definida positiva y $\zeta = \begin{bmatrix} |x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1) & x_2 \end{bmatrix}^T$, es una función de Lyapunov estricta para el sistema (2.96). La ventaja de esta función de Lyapunov es que el tiempo finito en que el sistema (2.96) alcanza el origen puede ser calculada de la forma

$$t_f \leq \frac{2\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}^{1/2}(P)\lambda_{\min}(Q)} V^{1/2}(x_0) \quad (2.97)$$

Para relacionar el sistema en lazo cerrado (2.69)-(2.93) con el sistema (2.96), considere el siguiente cambio de variable:

$$\sigma_1 = \sigma \quad (2.98)$$

$$\sigma_2 = g(\mathbf{x}, t)v + f(\mathbf{x}, t) + cx_2 \quad (2.99)$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\dot{\sigma}_1 = -g(\mathbf{x}, t)k_1|\sigma_1|^{1/2} \text{sign}(\sigma_1) + \sigma_2 \quad (2.100)$$

$$\dot{\sigma}_2 = \frac{d}{dt}(g(\mathbf{x}, t)v) + \frac{d}{dt}(f(\mathbf{x}, t)) + \frac{d}{dt}(cx_2) \quad (2.101)$$

Expandiendo cada una de estas derivadas aplicando la regla de la cadena, se obtiene:

$$\frac{d}{dt}(g(\mathbf{x}, t)v) = \left[\frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right] v - k_2 g(\mathbf{x}, t) \text{sign}(\sigma_1) \quad (2.102)$$

Recordando que:

$$\frac{df(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{d}{dt}f(x_1, t) + \frac{d}{dt}f(x_2, t) \quad (2.103)$$

Tenemos que la derivada:

$$\frac{df(\mathbf{x}, t)}{dt} = \left(\frac{\partial f(x_1, t)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial f(x_2, t)}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial f(x_2, t)}{\partial t} \right) \quad (2.104)$$

Y finalmnete:

$$\frac{df(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial x_1} \dot{x}_2 + \frac{\partial f(x_2, t)}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x_2, t)}{\partial t} \quad (2.105)$$

La derivda del ultimo término es:

$$\frac{d}{dt}(cx_2) = c\dot{x}_2 \quad (2.106)$$

A partir de la definición del estado σ_2 , es posible despejar la variable v :

$$v = \frac{\sigma_2 - f(\mathbf{x}, t) - cx_2}{g(\mathbf{x}, t)} \quad (2.107)$$

Sustituyendo v , recordando que $\dot{x}_1 = x_2$, y agrupando todas las derivadas expandidas, la

dinámica completa de σ_2 toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_2 = & \left[\frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right] \left(\frac{\sigma_2 - f(\mathbf{x}, t) - cx_2}{g(\mathbf{x}, t)} \right) \\ & - k_2 g(\mathbf{x}, t) \text{sign}(\sigma_1) + \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial f(x_2, t)}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x_2, t)}{\partial t} + c\dot{x}_2 \end{aligned} \quad (2.108)$$

Como puede observarse en la ecuación anterior, existe los términos dependientes de la derivada del segundo estado, esto es, $c\dot{x}_2$ y $\dot{x}_2$. Al recordar la definición del sistema dinámico, $\dot{x}_2 = g(\mathbf{x}, t)u_{sta} + f(\mathbf{x}, t)$, es evidente que la señal de control vuelve a aparecer explícitamente en la dinámica de la perturbación del sistema, derivando en un *loop* algebraico. Esta situación matemática es ampliamente descrita y analizada en Haimovich et al. 2022.

Aunque existen estrategias avanzadas para mitigar este fenómeno, dichas soluciones exceden los alcances del presente trabajo. Por lo tanto, se propone como solución modificar la ley de control apoyándose en el conocimiento del sistema. Considerando que el coeficiente de control $g(\mathbf{x}, t)$ es completamente conocida, que $f(\mathbf{x}, t) = f(x_1, t) + f(x_2, t)$ con $f(x_2, t)$ conocidos y dado que c y x_2 son parámetros de diseño medibles, se propone la siguiente ley de control compensada:

$$u = g(\mathbf{x}, t)^{-1} (u_{sta} - cx_2 - f(x_2, t)) \quad (2.109)$$

Sustituyendo esta nueva ley de control en la dinámica de la superficie original:

$$\dot{\sigma} = cx_2 + g(\mathbf{x}, t) [g(\mathbf{x}, t)^{-1} (-k_1 |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma) + v - cx_2 - f(x_2, t))] + f(x_1, t) + f(x_2, t) \quad (2.110)$$

Al realizar el álgebra correspondiente, los términos se simplifican resultando en la siguiente dinámica:

$$\dot{\sigma} = cx_2 - k_1 |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma) + v - cx_2 + f(x_1, t) \quad (2.111)$$

$$\dot{\sigma} = -k_1 |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma) + v + f(x_1, t) \quad (2.112)$$

Para esta nueva estructura en lazo cerrado, se propone de nuevo el cambio de variables

$$\sigma_1 = \sigma \quad (2.113)$$

$$\sigma_2 = v + f(x_1, t) \quad (2.114)$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\dot{\sigma}_1 = -k_1|\sigma_1|^{1/2}\text{sign}(\sigma_1) + \sigma_2 \quad (2.115)$$

$$\dot{\sigma}_2 = -k_2\text{sign}(\sigma_1) + \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial t} \quad (2.116)$$

Podemos definir la perturbación como $\rho(\sigma_1, \sigma_2, t)$:

$$\rho(\sigma_1, \sigma_2, t) = \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial t} \quad (2.117)$$

Por lo que si se cumple que $|\rho(\sigma_1, \sigma_2, t)| \leq L_\rho$ es posible llevar al sistema en lazo cerrado (2.69)-(2.109) en un tiempo menor al establecido en (2.97).

2.5.3. PID-CSMC

Es sabido que el controlador PID es el más usado en la industria debido a la facilidad de implementación y métodos de sintonización como lo es Ziegler-Nichols, sin embargo el controlador PID presenta un desempeño bajo al encontrarse con incertidumbres en la dinámica o paramétricas, es por ello que se plantea la siguiente ley de control de Pérez-Ventura et al. 2021.

$$\begin{aligned} u &= -k_1|x_2|^{1/3}\text{sgn}(x_2) - k_2|x_1|^{1/2}\text{sgn}(x_1) - v \\ \dot{v} &= -k_3\text{sgn}(x_1) \end{aligned} \quad (2.118)$$

Para el desarrollo de estabilidad del sistema a partir del sistema mecánico:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g(\mathbf{x}, t)u + f(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.119)$$

Si sustituimos v con el controlador PID-CSMC:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g(\mathbf{x}, t) \left[-k_1|x_1|^{1/3}\text{sign}(x_1) - k_2|x_2|^{1/2}\text{sign}(x_2) + v \right] + f(\mathbf{x}, t) \\ \dot{v} &= -k_3\text{sign}(x_1) \end{aligned} \quad (2.120)$$

Distribuyendo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 g(\mathbf{x}, t) |x_1|^{1/3} \text{sign}(x_1) - k_2 g(\mathbf{x}, t) |x_2|^{1/2} \text{sign}(x_2) + g(\mathbf{x}, t) v + f(\mathbf{x}, t) \\ \dot{v} &= -k_3 \text{sign}(x_1)\end{aligned}\tag{2.121}$$

Hacemos el cambio de variable $x_3 = g(\mathbf{x}, t) v + f(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 g(\mathbf{x}, t) |x_1|^{1/3} \text{sign}(x_1) - k_2 g(\mathbf{x}, t) |x_2|^{1/2} \text{sign}(x_2) + x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{d}{dt} [g(\mathbf{x}, t) v] + \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\tag{2.122}$$

Las derivadas de los elementos en el tercer estado son las siguientes:

$$\frac{d}{dt} (g(\mathbf{x}, t) v) = \left[\frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right] v - k_3 g(\mathbf{x}, t) \text{sign}(x_1)\tag{2.123}$$

$$\frac{df(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial f(x_2, t)}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x_2, t)}{\partial t}\tag{2.124}$$

Nuevamente se propone como solución modificar la ley de control apoyándose en el conocimiento del sistema. Considerando que el coeficiente de control $g(\mathbf{x}, t)$ es completamente conocida, que $f(\mathbf{x}, t) = f(x_1, t) + f(x_2, t)$ con $f(x_2, t)$ conocidos, se propone la siguiente ley de control compensada:

$$u = g(\mathbf{x}, t)^{-1} (u_{PID-SCMC} - f(x_2, t))\tag{2.125}$$

Sustituyendo la ley de control u en la ecuación:

$$\dot{x}_2 = g(\mathbf{x}, t) [g(\mathbf{x}, t)^{-1} (u_{PID-SCMC} - f(x_2, t))] + f(\mathbf{x}, t)\tag{2.126}$$

Al simplificar el término $g(\mathbf{x}, t)$ con su inversa, la expresión se reduce a:

$$\dot{x}_2 = u_{PID-SCMC} - f(x_2, t) + f(\mathbf{x}, t)\tag{2.127}$$

Aplicando la descomposición del vector de perturbaciones $f(\mathbf{x}, t) = f(x_1, t) + f(x_2, t)$, el componente dependiente de la velocidad $f(x_2, t)$ se anula de la dinámica:

$$\dot{x}_2 = u_{PID-CSMC} - f(x_2, t) + f(x_1, t) + f(x_2, t) \quad (2.128)$$

$$\dot{x}_2 = u_{PID-CSMC} + f(x_1, t) \quad (2.129)$$

Finalmente, al sustituir la estructura explícita del algoritmo $u_{PID-CSMC}$, el sistema completo en lazo cerrado adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1|x_2|^{1/3} \text{sign}(x_2) - k_2|x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1) + x_3 \\ \dot{x}_3 &= k_3 \text{sign}(x_1) + \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.130)$$

Podemos definir la perturbación como $\rho(\sigma_1, \sigma_2, t)$:

$$\delta(x_1, x_2, t) = \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial t} \quad (2.131)$$

Por lo que si se cumple que $|\delta(x_1, x_2, t)| \leq L_\rho$, el sistema será estable.

De este desarrollo es notable que en la nueva entrada de control compensada de ecuación (2.125) no es necesario compensar la parte que corresponde al segundo estado cx_2 ; esto representa una ventaja respecto al STA, ya que hará que el controlador sea más eficiente al consumir menos energía.

Dentro de las características principales de este algoritmo se encuentran:

- No requiere del diseño de una variable deslizante
- Reducción de chattering debido a dinámicas parásitas
- Llevar los estados a cero en tiempo finito
- Compensación de perturbaciones Lipschitz

Para la implementación del controlador, el artículo Pérez-Ventura et al. 2021 muestra tres grupos de ganancias k_1 , k_2 y k_3 . Las primeras aseguran la minimización del chattering debido solo a dinámicas parásitas y las segundas tienen como propósito minimizar la potencia promedio:

Ganancia	Minimización de chattering	Minimización de potencia promedio
k_1	$2.7\Delta^{2/3}$	$2.7\Delta^{2/3}$
k_2	$5.345\Delta^{1/2}$	$4.281\Delta^{1/2}$
k_3	1.1Δ	$1.1\Delta^{1/3}$

Tabla 2.1: Ganancias PID-CSMC.

Para todas las k_n , Δ es un parámetro modificable para ajustar las ganancias.

Es importante mencionar que el punto dos, se debe a la estructura propia del controlador, pues no requiere una superficie deslizante y basa todo su funcionamiento en los estados del sistema. Por lo que a diferencia del STA que solo permite llevar los estados a cero de manera asintótica, el PID-CSMC consigue llevar los estados a cero en tiempo finito.

2.6. Controladores Adaptativos por Modos Deslizantes

2.6.1. Controlador Barrera

Una limitación que en algunos casos es crítica para la implementación práctica de los controladores por modos deslizantes es la necesidad de conocer el límite superior de las perturbaciones para definir la ganancia de control. Una ganancia mal calculada puede derivar en chattering excesivo o en la pérdida de robustez.

Para abordar este problema, se utiliza la estrategia de control adaptativo basada en funciones barrera, propuesta por Obeid et al. 2018. A diferencia de otros algoritmos de adaptación que incrementan la ganancia de forma monótona, el controlador basado en funciones barrera ajusta la ganancia de manera dinámica, esta aumenta conforme el error se aproxima a los límites de una vecindad predefinida y disminuye cuando el sistema se estabiliza cerca del origen. Este enfoque garantiza que la variable de salida converja y permanezca dentro de una región de estabilidad específica, operando de manera efectiva incluso cuando los límites de las perturbaciones son desconocidos, evitando así la sobreestimación de la ganancia y reduciendo el esfuerzo de control.

Definición de barrera. Supongamos que se da un $\epsilon > 0$ fijo, la barrera se puede definir como una función continua par $K_b : x \in]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow K_b(x) \in [b, \infty[$ estrictamente creciente en $[0, \epsilon[$.

- $\lim_{|x| \rightarrow \epsilon} K_b(x) = +\infty$.

- $K_b(x)$ tiene un único mínimo en cero y $K_b(0) = b \geq 0$.

En el artículo Obeid et al. 2018, se consideran las siguientes dos clases diferentes de funciones barrera:

- Funciones barrera definidas positivas (FBPs): $K_{pb}(x) = \frac{\epsilon \bar{F}}{\epsilon - |x|}$, es decir, $K_{pb}(0) = \bar{F} > 0$.
- funciones barrera semidefinidas positivas (FBSPs): $K_{psb}(x) = \frac{|x|}{\epsilon - |x|}$, es decir, $K_{psb}(0) = 0$.

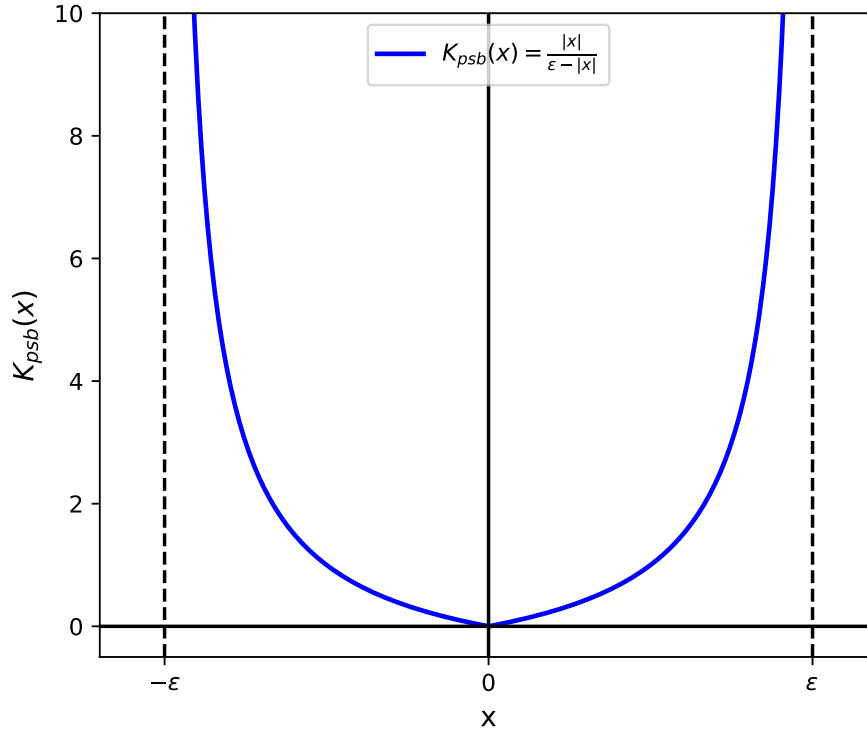


Figura 2.2: Función barrera semidefinida positiva.

La figura 2.2 muestra la función barrera semidefinida positiva.

Para la implementación en la planta se considera únicamente la función barrera semidefinida positiva y trasladando el esquema de control a las variables del sistema obtenemos la siguiente ecuación:

$$u_{BFASMC} = \frac{|\sigma|}{\epsilon - |\sigma|} \text{sgn}(\sigma) \quad (2.132)$$

A manera de resumen, el controlador por modos deslizantes basado en funciones barrera o BFASMC ofrece las siguientes ventajas:

- La ganancia nunca estará sobrestimada.
- La señal de control u es continua, por lo que elimina por completo el fenómeno de *chattering*.
- La cota de la perturbación $\bar{\delta}$ existe, pero es desconocida.
- El parámetro de diseño $\epsilon \in (0, \infty)$ está definido.
- $\sigma(t) \in (-\epsilon, \epsilon)$ para todo $t < t_0$.

Las ventajas del BFASMC son teóricas ya que, como se muestra en Ovalle et al. 2026, en implementaciones digitales el estado σ puede salirse del conjunto $(-\epsilon, \epsilon)$, si no se supone una máxima capacidad de actuador U_m la cual es la saturación de los actuadores y la selección $\epsilon > g_1\tau(1 + U_m)^2$ cumple, donde τ es el tiempo de muestreo de la aplicación.

2.6.2. Controlador Barrera Cuadrática

Es sabido que los controladores por funciones barrera logran definir el comportamiento del sistema sin la necesidad de conocer la cota superior de las perturbaciones; pese a esto, el BFASMC presenta una serie de limitaciones que podrían llegar a restringir la implementación y son mencionadas en Grikenis et al. 2026:

- La ganancia en el origen es distinta de cero y se ve afectada por dinámicas parásitas.
- La selección del tiempo de muestreo τ depende del cuadrado de $1 + U_m$ el cual siempre provocando el uso de tiempo de muestros mayores.

Para resolver estas limitantes, en Grikenis et al. 2026 se propone una adaptación por un término cuadrático BFAQ. La ley de control se define como:

$$U_{qbf}(\sigma) = \begin{cases} U_m, & \sigma \in (-\infty, -\epsilon] \\ \frac{U_m}{\epsilon^2}\sigma^2, & \sigma \in (-\epsilon, \epsilon) \\ -U_m, & \sigma \in [\epsilon, \infty) \end{cases} \quad (2.133)$$

Donde $\epsilon > 0$ representa la precisión dentro de la barrera y $U_m > 0$ es la capacidad máxima o límite de saturación de los actuadores.

También como se demuestra en Grikenis et al. 2026, este controlador aporta ventajas como.

- Modelo saturado por diseño.

- Tiene cero ganancia en el origen para cualquier diseño de epsilon.
- Elimina el chattering y reduce la sensibilidad a dinámicas parásitas.
- Diseñado para actuadores lentos.

Una vez dentro de la vecindad $(-\epsilon, \epsilon)$, las trayectorias convergen hacia un subconjunto estrictamente menor denominado conjunto final o en inglés, *Final Set*. También es notable que si evaluamos la función en el origen donde $\sigma = 0$, se obtiene una ganancia nula. Esto elimina por completo el chattering y reduce la sensibilidad ante dinámicas parásitas o ruidos en los sensores.

Todos estos puntos a favor de la BFAQ se basan en una implementación continua que no es posible realizarla en aplicaciones prácticas reales siendo el mayor desafío para los controladores adaptativos la implementación digital con un periodo de muestreo $\tau > 0$, donde las perturbaciones durante el inter-muestreo pueden comprometer el rendimiento.

Para la BFAQ, se demuestra formalmente que el rendimiento predefinido se recupera en entornos *Sample and Hold* siempre que el tiempo de muestreo satisfaga la relación $\tau < \frac{\epsilon}{2U_m}$. Esta condición establece una relación lineal entre la precisión de la barrera ϵ y la capacidad del actuador U_m .

2.7. Control por modos deslizantes en robots manipuladores

Un primer acercamiento al control por modos deslizantes en manipuladores robóticos se presenta en Utkin 1992. Es conocido como el control unitario por modos deslizantes y es descrito a continuación junto con una prueba de estabilidad:

Sea la variable deslizante $\sigma \in \mathbb{R}^n$:

$$\sigma = \Lambda \tilde{\mathbf{q}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \quad (2.134)$$

donde $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ es el error de posición y $\Lambda > 0$ es una matriz de ganancia diagonal definida positiva. Se propone la ley de control unitario τ :

$$\tau = \tau_0 \frac{\sigma}{\|\sigma\|}, \quad (2.135)$$

donde τ_0 es la ganancia escalar del controlador.

Consideramos la función candidata de Lyapunov de forma vectorial:

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.136)$$

Derivando la variable deslizante, se tiene:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\Lambda} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \boldsymbol{\Lambda} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \ddot{\mathbf{q}}_d - \ddot{\mathbf{q}}. \quad (2.137)$$

Sustituyendo la dinámica del manipulador $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}(\mathbf{q})]$, la dinámica de la superficie resulta:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\Lambda} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau} + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q})). \quad (2.138)$$

La derivada de la función de Lyapunov es $\dot{V} = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}$. Sustituyendo $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ y la ley de control:

$$\dot{V} = \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\Lambda} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}))) - \tau_0 \frac{\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|}. \quad (2.139)$$

Aplicando desigualdades y considerando el peor de los casos:

$$\dot{V} \leq \|\boldsymbol{\sigma}\| \left(\|\boldsymbol{\Lambda} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \|\ddot{\mathbf{q}}_d\| + \frac{C_M \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + G_M}{M_m} \right) - \frac{\tau_0}{M_M} \|\boldsymbol{\sigma}\|, \quad (2.140)$$

donde M_M y M_m son las cotas superior e inferior de la matriz de inercia respectivamente, C_M es la cota superior de la matriz de Coriolis, y G_M es la cota superior del vector de gravedad.

Para garantizar estabilidad en tiempo finito se debe cumplir la siguiente desigualdad:

$$\frac{\tau_0}{M_M} \geq \|\boldsymbol{\Lambda} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \|\ddot{\mathbf{q}}_d\| + \frac{C_M \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + G_M}{M_m} + \eta. \quad (2.141)$$

Finalmente, la condición para la ganancia del controlador es:

$$\tau_0 \geq M_M \left(\|\boldsymbol{\Lambda} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \|\ddot{\mathbf{q}}_d\| + \frac{C_M \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + G_M}{M_m} \right) + \epsilon, \quad (2.142)$$

donde $\epsilon = M_M \eta$ representa un margen de seguridad estrictamente positivo para absorber perturbaciones externas no modeladas.

Capítulo 3

Resultados teóricos

El objetivo principal del control en manipuladores robóticos es determinar las posiciones articulares en el tiempo requeridas para que el efector final ejecute un movimiento deseado, siendo las entradas de las articulaciones fuerzas o torques o bien las entradas de los actuadores, por ejemplo voltajes o corrientes de los motores. El movimiento deseado generalmente está dado por una secuencia requerida de posiciones y velocidades o directamente por una trayectoria continua Spong et al. 2004

3.1. Cinemática Directa

Por medio de los pasos para obtener los parámetros de la convención de Denavit-Hartenberg en la sección apartado 2.1 basandonos en el siguiente diagrama de alambre del manipulador:

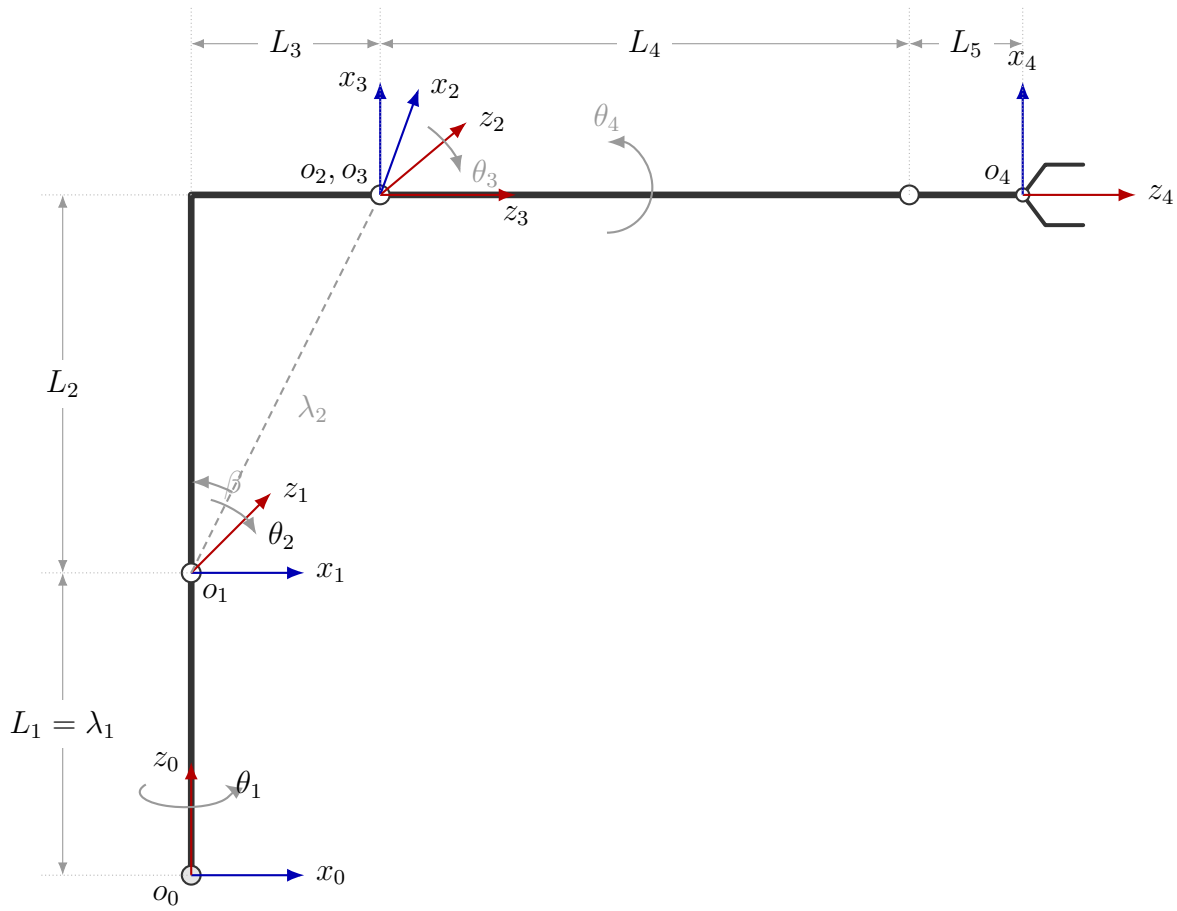


Figura 3.4 Diagrama cinemático del robot manipulador QArm

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\frac{\pi}{2}$	L_1	θ_1
2	λ_2	0	0	θ_2
3	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	θ_3
4	0	0	λ_3	θ_4

Tabla 3.1: Parámetros de Denavit-Hartenberg.

La construcción de la cinemática directa se realiza por medio de ecuación (2.9) para cada uno de los eslabones.

$${}^0H_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$${}^1H_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & \lambda_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & \lambda_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$${}^2H_3 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$${}^3H_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

la construcción:

$${}^0H_2 = {}^0H_1 {}^1H_2 \quad (3.5)$$

$${}^0H_2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & \lambda_2 c_1 c_2 \\ c_2 s_1 & -s_1 s_2 & c_1 & \lambda_2 c_2 s_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$${}^0H_3 = {}^0H_2 {}^2H_3 \quad (3.7)$$

$${}^0H_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 & -c_1 s_{23} & \lambda_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_{23} & -c_1 & -s_1 s_{23} & \lambda_2 s_1 c_2 \\ -s_{23} & 0 & -c_{23} & \lambda_1 - \lambda_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$${}^0H_4 = {}^0H_3 {}^3H_4 \quad (3.9)$$

$${}^0H_4 = \begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 + s_1s_4 & -c_1c_{23}s_4 + s_1c_4 & -c_1s_{23} & \lambda_2c_1c_2 - \lambda_3c_1s_{23} \\ s_1c_{23}c_4 - c_1s_4 & -s_1c_{23}s_4 - c_1c_4 & -s_1s_{23} & \lambda_2s_1c_2 - \lambda_3s_1s_{23} \\ -s_{23}c_4 & s_{23}s_4 & -c_{23} & \lambda_1 - \lambda_2s_2 - \lambda_3c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Nota sobre la notación: Para simplificar la representación de las matrices, se utiliza la siguiente notación abreviada para las funciones trigonométricas:

- $c_i = \cos(\theta_i)$ y $s_i = \sin(\theta_i)$
- $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$ y $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$

3.2. Cinemática complementaria

El modelado dinámico del manipulador será obtenido por medio del algoritmo recursivo de Newton-Euler que es una alternativa al método clásico por leyes de movimiento de newton. El método elegido necesita para su construcción de las ecuaciones descritas en la sección 2.3.5.

3.2.1. Velocidades angulares

Como nos lo describe el algoritmo recursivo, para construirse la dinámica es necesario calcular ω_i , α_i , $a_{e,i}$ y $a_{c,i}$ para i incrementando de 1 a n :

Iniciamos con ω_i para $i = 1$:

$$\mathbf{b}_1 = (R_0^1)^T \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -s_1 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\omega_1 = (R_0^1)^T \omega_0 + \mathbf{b}_1 \dot{q}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -s_1 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \omega_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \quad (3.12)$$

Dádonos como resultado el vector $\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Para el eslabón 2, las ecuaciones cinemáticas son:

$$\mathbf{b}_2 = (R_1^2)^T \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = (R_1^2)^T \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{b}_2 \dot{q}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \quad (3.14)$$

Desarrollando la multiplicación y la suma para obtener el resultado final:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} -s_2 \dot{q}_1 \\ -c_2 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_2 \dot{q}_1 \\ -c_2 \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Para el eslabón 3, extraemos la matriz de rotación y aplicamos las ecuaciones:

$$\mathbf{b}_3 = (R_2^3)^T \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\boldsymbol{\omega}_3 = (R_2^3)^T \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{b}_3 \dot{q}_3 = \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -s_3 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_2 \dot{q}_1 \\ -c_2 \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_3 \quad (3.17)$$

Desarrollando el producto:

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} -s_{23} \dot{q}_1 \\ -\dot{q}_2 \\ -c_{23} \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{q}_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_{23} \dot{q}_1 \\ -(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ -c_{23} \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Finalmente, para el eslabón 4, el desarrollo es el siguiente:

$$\mathbf{b}_4 = (R_3^4)^T \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} c_4 & s_4 & 0 \\ -s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\boldsymbol{\omega}_4 = (R_3^4)^T \boldsymbol{\omega}_3 + \mathbf{b}_4 \dot{q}_4 = \begin{bmatrix} c_4 & s_4 & 0 \\ -s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_{23} \dot{q}_1 \\ -(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ -c_{23} \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_4 \quad (3.20)$$

Realizando las operaciones algebraicas, el vector de velocidad angular final resulta en:

$$\boldsymbol{\omega}_4 = \begin{bmatrix} -c_4 s_{23} \dot{q}_1 - s_4 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ s_4 s_{23} \dot{q}_1 - c_4 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ -c_{23} \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_4 s_{23} \dot{q}_1 - s_4 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ s_4 s_{23} \dot{q}_1 - c_4 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ -c_{23} \dot{q}_1 + \dot{q}_4 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

3.2.2. Aceleraciones

Seguimos con el desarrollo del algoritmo pero ahora para las aceleraciones del manipulador, para el primer eslabón $i = 1$, partimos del reposo en la base $\boldsymbol{\alpha}_0 = \mathbf{0}$ y definimos el vector de gravedad como $\mathbf{a}_{e,0} = \mathbf{0}$.

Para el eslabón 1:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (R_0^1)^T \boldsymbol{\alpha}_0 + \mathbf{b}_1 \ddot{q}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{b}_1 \dot{q}_1) = \mathbf{0} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{q}_1 + \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{a}_{c,1} = (R_0^1)^T \mathbf{a}_{e,0} + \boldsymbol{\alpha}_1 \times \mathbf{r}_{1,c1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{1,c1}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{a}_{e,1} = (R_0^1)^T \mathbf{a}_{e,0} + \boldsymbol{\alpha}_1 \times \mathbf{r}_{1,2} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{1,2}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Para el eslabón 2:

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -s_2\ddot{q}_1 - c_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ -c_2\ddot{q}_1 + s_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{a}_{c,2} = \begin{bmatrix} -(c_2^2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)(la_2 - lac_2) \\ (\ddot{q}_2 + s_2c_2\dot{q}_1^2)(la_2 - lac_2) \\ (c_2\ddot{q}_1 - 2s_2\dot{q}_1\dot{q}_2)(la_2 - lac_2) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{a}_{e,2} = \begin{bmatrix} -(c_2^2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\lambda_2 \\ (\ddot{q}_2 + s_2c_2\dot{q}_1^2)\lambda_2 \\ (c_2\ddot{q}_1 - 2s_2\dot{q}_1\dot{q}_2)\lambda_2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Aceleraciones para el eslabón 3:

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -s_{23}\ddot{q}_1 - c_{23}\dot{q}_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ -(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \\ -c_{23}\ddot{q}_1 + s_{23}\dot{q}_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{a}_{e,3} = \begin{bmatrix} \lambda_2(-c_3c_2^2\dot{q}_1^2 - c_3\dot{q}_2^2 + s_3\ddot{q}_2 + s_3s_2c_2\dot{q}_1^2) \\ -\lambda_2(c_2\ddot{q}_1 - 2s_2\dot{q}_1\dot{q}_2) \\ \lambda_2(s_3c_2^2\dot{q}_1^2 + s_3\dot{q}_2^2 + c_3\ddot{q}_2 + c_3s_2c_2\dot{q}_1^2) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{a}_{c,3} = \begin{bmatrix} \lambda_2(-c_3c_2^2\dot{q}_1^2 - c_3\dot{q}_2^2 + s_3\ddot{q}_2 + s_3s_2c_2\dot{q}_1^2) - lac_3(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) + lac_3s_{23}c_{23}\dot{q}_1^2 \\ -\lambda_2(c_2\ddot{q}_1 - 2s_2\dot{q}_1\dot{q}_2) + lac_3s_{23}\ddot{q}_1 + 2lac_3c_{23}\dot{q}_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ \lambda_2(s_3c_2^2\dot{q}_1^2 + s_3\dot{q}_2^2 + c_3\ddot{q}_2 + c_3s_2c_2\dot{q}_1^2) - lac_3(s_{23}^2\dot{q}_1^2 + (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Aceleraciones para el eslabón 4:

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} \alpha_{4x} \\ \alpha_{4y} \\ \alpha_{4z} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{4x} = & -\dot{q}_4(c_4(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - s_4(\dot{q}_1 c_2 s_3 + \dot{q}_1 c_3 s_2)) - s_4(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \\ & - c_4(\dot{q}_3(\dot{q}_1 c_2 c_3 - \dot{q}_1 s_2 s_3) + c_3(\ddot{q}_1 s_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 c_2) + s_3(\ddot{q}_1 c_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2))\end{aligned}\quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{4y} = & \dot{q}_4(s_4(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + c_4(\dot{q}_1 c_2 s_3 + \dot{q}_1 c_3 s_2)) - c_4(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \\ & + s_4(\dot{q}_3(\dot{q}_1 c_2 c_3 - \dot{q}_1 s_2 s_3) + c_3(\ddot{q}_1 s_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 c_2) + s_3(\ddot{q}_1 c_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2))\end{aligned}\quad (3.33)$$

$$\alpha_{4z} = \ddot{q}_4 + \dot{q}_3(\dot{q}_1 c_2 s_3 + \dot{q}_1 c_3 s_2) - c_3(\ddot{q}_1 c_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2) + s_3(\ddot{q}_1 s_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 c_2)\quad (3.34)$$

$$\mathbf{a}_{c,4} = \begin{bmatrix} a_{c4x} \\ a_{c4y} \\ a_{c4z} \end{bmatrix}\quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}
a_{c4x} = & (la_3 - lac_4) \left[\dot{q}_4 (s_4(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + c_4(\dot{q}_1 c_2 s_3 + \dot{q}_1 c_3 s_2)) - c_4(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \right. \\
& + s_4(\dot{q}_3(\dot{q}_1 c_2 c_3 - \dot{q}_1 s_2 s_3) + c_3(\ddot{q}_1 s_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 c_2) + s_3(\ddot{q}_1 c_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2)) \left. \right] \\
& - c_4 \left[c_3(\dot{q}_2^2(la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) + \dot{q}_1^2 c_2^2(la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2)) \right. \\
& - s_3(c_2 s_2(la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2)\dot{q}_1^2 + \ddot{q}_2(la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2)) \left. \right] \\
& - s_4 \left[(\ddot{q}_1 c_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2)(la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2(la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) \right] \\
& - (s_4(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + c_4(\dot{q}_1 c_2 s_3 + \dot{q}_1 c_3 s_2))(la_3 - lac_4)(\dot{q}_4 - \dot{q}_1 c_2 c_3 + \dot{q}_1 s_2 s_3) \quad (3.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{c4y} = & (la_3 - lac_4) \left[\dot{q}_4 (c_4(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - s_4(\dot{q}_1 c_2 s_3 + \dot{q}_1 c_3 s_2)) + s_4(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \right. \\
& + c_4(\dot{q}_3(\dot{q}_1 c_2 c_3 - \dot{q}_1 s_2 s_3) + c_3(\ddot{q}_1 s_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 c_2) + s_3(\ddot{q}_1 c_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2)) \left. \right] \\
& - c_4 \left[(\ddot{q}_1 c_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2)(la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2(la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) \right] \\
& + s_4 \left[c_3(\dot{q}_2^2(la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) + \dot{q}_1^2 c_2^2(la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2)) \right. \\
& - s_3(c_2 s_2(la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2)\dot{q}_1^2 + \ddot{q}_2(la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2)) \left. \right] \\
& - (c_4(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - s_4(\dot{q}_1 c_2 s_3 + \dot{q}_1 c_3 s_2))(la_3 - lac_4)(\dot{q}_4 - \dot{q}_1 c_2 c_3 + \dot{q}_1 s_2 s_3) \quad (3.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{c4z} = & s_3(\dot{q}_2^2(la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) + \dot{q}_1^2 c_2^2(la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2)) \\
& + c_3(c_2 s_2(la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2)\dot{q}_1^2 + \ddot{q}_2(la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2)) \\
& - (s_4(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + c_4(\dot{q}_1 c_2 s_3 + \dot{q}_1 c_3 s_2))^2(la_3 - lac_4) \\
& - (c_4(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - s_4(\dot{q}_1 c_2 s_3 + \dot{q}_1 c_3 s_2))^2(la_3 - lac_4) \quad (3.38)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{a}_{e,4} = \begin{bmatrix} a_{e4x} \\ a_{e4y} \\ a_{e4z} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
a_{e4x} = & la_3 \left[\dot{q}_4 (s_4 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + c_4 (\dot{q}_1 c_2 s_3 + \dot{q}_1 c_3 s_2)) - c_4 (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \right. \\
& + s_4 (\dot{q}_3 (\dot{q}_1 c_2 c_3 - \dot{q}_1 s_2 s_3) + c_3 (\ddot{q}_1 s_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 c_2) + s_3 (\ddot{q}_1 c_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2)) \left. \right] \\
& - s_4 \left[(\ddot{q}_1 c_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2) (la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2 (la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) \right] \\
& - c_4 \left[c_3 (\dot{q}_2^2 (la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) + \dot{q}_1^2 c_2^2 (la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2)) \right. \\
& - s_3 (c_2 s_2 (la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) \dot{q}_1^2 + \ddot{q}_2 (la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2)) \left. \right] \\
& - la_3 (s_4 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + c_4 (\dot{q}_1 c_2 s_3 + \dot{q}_1 c_3 s_2)) (\dot{q}_4 - \dot{q}_1 c_2 c_3 + \dot{q}_1 s_2 s_3) \quad (3.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{e4y} = & la_3 \left[\dot{q}_4 (c_4 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - s_4 (\dot{q}_1 c_2 s_3 + \dot{q}_1 c_3 s_2)) + s_4 (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \right. \\
& + c_4 (\dot{q}_3 (\dot{q}_1 c_2 c_3 - \dot{q}_1 s_2 s_3) + c_3 (\ddot{q}_1 s_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 c_2) + s_3 (\ddot{q}_1 c_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2)) \left. \right] \\
& - c_4 \left[(\ddot{q}_1 c_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2) (la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_2 (la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) \right] \\
& + s_4 \left[c_3 (\dot{q}_2^2 (la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) + \dot{q}_1^2 c_2^2 (la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2)) \right. \\
& - s_3 (c_2 s_2 (la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) \dot{q}_1^2 + \ddot{q}_2 (la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2)) \left. \right] \\
& - la_3 (c_4 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - s_4 (\dot{q}_1 c_2 s_3 + \dot{q}_1 c_3 s_2)) (\dot{q}_4 - \dot{q}_1 c_2 c_3 + \dot{q}_1 s_2 s_3) \quad (3.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{e4z} = & s_3 (\dot{q}_2^2 (la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) + \dot{q}_1^2 c_2^2 (la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2)) \\
& + c_3 (c_2 s_2 (la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2) \dot{q}_1^2 + \ddot{q}_2 (la_2 c_2^2 + la_2 s_2^2)) \\
& - la_3 (s_4 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + c_4 (\dot{q}_1 c_2 s_3 + \dot{q}_1 c_3 s_2))^2 \\
& - la_3 (c_4 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - s_4 (\dot{q}_1 c_2 s_3 + \dot{q}_1 c_3 s_2))^2 \quad (3.42)
\end{aligned}$$

3.2.3. Torques y fuerzas

El algoritmo nos dicta que para la construcción de los pares, en lugar de seguir una ruta ascendente, es decir desde $n=1\dots 4$, se hará de forma descendente $n=4\dots 1$

Torques para el eslabón 4:

$$\mathbf{f}_4 = R_5^4 \mathbf{f}_5 + m_4 \mathbf{a}_{c,4} - m_4 \mathbf{g}_4 \quad (3.43)$$

$$\boldsymbol{\tau}_4 = R_5^4 \boldsymbol{\tau}_5 - \mathbf{f}_4 \times \mathbf{r}_{4,c4} + (R_5^4 \mathbf{f}_5) \times \mathbf{r}_{5,c4} + I_4 \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\omega}_4 \times (I_4 \boldsymbol{\omega}_4) \quad (3.44)$$

$$\tau_{motor,4} = \tau_4^T \mathbf{b}_4 \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & i_{1a}\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}i_{2a}\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}i_{3a}\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}i_{4a}\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}i_{2l}\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}i_{3l}\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}i_{4l}\ddot{q}_1 \\
& + \frac{1}{2}la_2^2m_2\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}la_2^2m_3\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}la_2^2m_4\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}la_3^2m_4\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}lac_2^2m_2\ddot{q}_1 \\
& + \frac{1}{2}lac_3^2m_3\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}lac_4^2m_4\ddot{q}_1 - \frac{1}{2}i_{2a}\ddot{q}_1 \cos(2q_2) + \frac{1}{2}i_{2l}\ddot{q}_1 \cos(2q_2) \\
& + \frac{1}{2}i_{3a}\ddot{q}_1 \cos(2q_2 + 2q_3) + \frac{1}{2}i_{4a}\ddot{q}_1 \cos(2q_2 + 2q_3) - \frac{1}{2}i_{3l}\ddot{q}_1 \cos(2q_2 + 2q_3) \\
& - \frac{1}{2}i_{4l}\ddot{q}_1 \cos(2q_2 + 2q_3) - i_{4a}\ddot{q}_4 \cos(q_2 + q_3) - la_2lac_2m_2\ddot{q}_1 - la_3lac_4m_4\ddot{q}_1 \\
& - i_{3a}\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_2 + 2q_3) - i_{3a}\dot{q}_1\dot{q}_3 \sin(2q_2 + 2q_3) - i_{4a}\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& - i_{4a}\dot{q}_1\dot{q}_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + i_{3l}\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_2 + 2q_3) + i_{3l}\dot{q}_1\dot{q}_3 \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& + i_{4l}\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_2 + 2q_3) + i_{4l}\dot{q}_1\dot{q}_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + \frac{1}{2}la_2^2m_2\ddot{q}_1 \cos(2q_2) \\
& + \frac{1}{2}la_2^2m_3\ddot{q}_1 \cos(2q_2) + \frac{1}{2}la_2^2m_4\ddot{q}_1 \cos(2q_2) + \frac{1}{2}lac_2^2m_2\ddot{q}_1 \cos(2q_2) \\
& + i_{4a}\dot{q}_2\dot{q}_4 \sin(q_2 + q_3) + i_{4a}\dot{q}_3\dot{q}_4 \sin(q_2 + q_3) - \frac{1}{2}la_3^2m_4\ddot{q}_1 \cos(2q_2 + 2q_3) \\
& - \frac{1}{2}lac_3^2m_3\ddot{q}_1 \cos(2q_2 + 2q_3) - \frac{1}{2}lac_4^2m_4\ddot{q}_1 \cos(2q_2 + 2q_3) + i_{2a}\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_2) \\
& - i_{2l}\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_2) - la_2la_3m_4\ddot{q}_1 \sin(2q_2 + q_3) - la_2lac_3m_3\ddot{q}_1 \sin(2q_2 + q_3) \\
& + la_2lac_4m_4\ddot{q}_1 \sin(2q_2 + q_3) - la_2lac_2m_2\ddot{q}_1 \cos(2q_2) + la_3lac_4m_4\ddot{q}_1 \cos(2q_2 + 2q_3) \\
& - la_2^2m_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_2) - la_2^2m_3\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_2) - la_2^2m_4\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_2) \\
& - lac_2^2m_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_2) + la_3^2m_4\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_2 + 2q_3) + la_3^2m_4\dot{q}_1\dot{q}_3 \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& + lac_3^2m_3\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_2 + 2q_3) + lac_3^2m_3\dot{q}_1\dot{q}_3 \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& + lac_4^2m_4\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_2 + 2q_3) + lac_4^2m_4\dot{q}_1\dot{q}_3 \sin(2q_2 + 2q_3) - la_2la_3m_4\ddot{q}_1 \sin(q_3) \\
& - la_2lac_3m_3\ddot{q}_1 \sin(q_3) + la_2lac_4m_4\ddot{q}_1 \sin(q_3) - la_2la_3m_4\dot{q}_1\dot{q}_3 \cos(q_3) \\
& - la_2lac_3m_3\dot{q}_1\dot{q}_3 \cos(q_3) + la_2lac_4m_4\dot{q}_1\dot{q}_3 \cos(q_3) - 2la_2la_3m_4\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(2q_2 + q_3) \\
& - la_2la_3m_4\dot{q}_1\dot{q}_3 \cos(2q_2 + q_3) - 2la_2lac_3m_3\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(2q_2 + q_3) \\
& - la_2lac_3m_3\dot{q}_1\dot{q}_3 \cos(2q_2 + q_3) + 2la_2lac_4m_4\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(2q_2 + q_3) \\
& + la_2lac_4m_4\dot{q}_1\dot{q}_3 \cos(2q_2 + q_3) + 2la_2lac_2m_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_2) \\
& - 2la_3lac_4m_4\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_2 + 2q_3) - 2la_3lac_4m_4\dot{q}_1\dot{q}_3 \sin(2q_2 + 2q_3)
\end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & i_{2l}\ddot{q}_2 + i_{3l}\ddot{q}_2 + i_{3l}\ddot{q}_3 + i_{4l}\ddot{q}_2 + i_{4l}\ddot{q}_3 + la_2^2m_2\ddot{q}_2 + la_2^2m_3\ddot{q}_2 + la_2^2m_4\ddot{q}_2 \\
& + la_3^2m_4\ddot{q}_2 + la_3^2m_4\ddot{q}_3 + lac_2^2m_2\ddot{q}_2 + lac_3^2m_3\ddot{q}_2 + lac_3^2m_3\ddot{q}_3 + lac_4^2m_4\ddot{q}_2 \\
& + lac_4^2m_4\ddot{q}_3 + \frac{1}{2}i_{3a}\dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) + \frac{1}{2}i_{4a}\dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& - \frac{1}{2}i_{3l}\dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) - \frac{1}{2}i_{4l}\dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) - \frac{1}{2}i_{2a}\dot{q}_1^2 \sin(2q_2) \\
& + \frac{1}{2}i_{2l}\dot{q}_1^2 \sin(2q_2) - 2la_2lac_2m_2\ddot{q}_2 - 2la_3lac_4m_4\ddot{q}_2 - 2la_3lac_4m_4\ddot{q}_3 \\
& + gl a_3m_4 \sin(q_2 + q_3) + gl a_3m_3 \sin(q_2 + q_3) - gl a_4m_4 \sin(q_2 + q_3) \\
& - i_{4a}\dot{q}_1\dot{q}_4 \sin(q_2 + q_3) - gl a_2m_2 \cos(q_2) - gl a_2m_3 \cos(q_2) - gl a_2m_4 \cos(q_2) \\
& + gl a_2m_2 \cos(q_2) + \frac{1}{2}la_2^2m_2\dot{q}_1^2 \sin(2q_2) + \frac{1}{2}la_2^2m_3\dot{q}_1^2 \sin(2q_2) \\
& + \frac{1}{2}la_2^2m_4\dot{q}_1^2 \sin(2q_2) + \frac{1}{2}lac_2^2m_2\dot{q}_1^2 \sin(2q_2) - \frac{1}{2}la_3^2m_4\dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& - \frac{1}{2}lac_3^2m_3\dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) - \frac{1}{2}lac_4^2m_4\dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) - la_2la_3m_4\dot{q}_3^2 \cos(q_3) \\
& - la_2lac_3m_3\dot{q}_3^2 \cos(q_3) + la_2lac_4m_4\dot{q}_3^2 \cos(q_3) + la_2la_3m_4\dot{q}_1^2 \cos(2q_2 + q_3) \\
& + la_2lac_3m_3\dot{q}_1^2 \cos(2q_2 + q_3) - la_2lac_4m_4\dot{q}_1^2 \cos(2q_2 + q_3) - la_2lac_2m_2\dot{q}_1^2 \sin(2q_2) \\
& + la_3lac_4m_4\dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) - 2la_2la_3m_4\ddot{q}_2 \sin(q_3) - la_2la_3m_4\ddot{q}_3 \sin(q_3) \\
& - 2la_2lac_3m_3\ddot{q}_2 \sin(q_3) - la_2lac_3m_3\ddot{q}_3 \sin(q_3) + 2la_2lac_4m_4\ddot{q}_2 \sin(q_3) \\
& + la_2lac_4m_4\ddot{q}_3 \sin(q_3) - 2la_2la_3m_4\dot{q}_2\dot{q}_3 \cos(q_3) - 2la_2lac_3m_3\dot{q}_2\dot{q}_3 \cos(q_3) \\
& + 2la_2lac_4m_4\dot{q}_2\dot{q}_3 \cos(q_3)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & i_{3l}\ddot{q}_2 + i_{3l}\ddot{q}_3 + i_{4l}\ddot{q}_2 + i_{4l}\ddot{q}_3 + la_3^2 m_4 \ddot{q}_2 + la_3^2 m_4 \ddot{q}_3 + lac_3^2 m_3 \ddot{q}_2 + lac_3^2 m_3 \ddot{q}_3 \\
& + lac_4^2 m_4 \ddot{q}_2 + lac_4^2 m_4 \ddot{q}_3 + \frac{1}{2} i_{3a} \dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) + \frac{1}{2} i_{4a} \dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& - \frac{1}{2} i_{3l} \dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) - \frac{1}{2} i_{4l} \dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) - 2la_3 lac_4 m_4 \ddot{q}_2 \\
& - 2la_3 lac_4 m_4 \ddot{q}_3 + gla_3 m_4 \sin(q_2 + q_3) + glac_3 m_3 \sin(q_2 + q_3) \\
& - glac_4 m_4 \sin(q_2 + q_3) - i_{4a} \dot{q}_1 \dot{q}_4 \sin(q_2 + q_3) - \frac{1}{2} la_3^2 m_4 \dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& - \frac{1}{2} lac_3^2 m_3 \dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) - \frac{1}{2} lac_4^2 m_4 \dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& + \frac{1}{2} la_2 la_3 m_4 \dot{q}_1^2 \cos(q_3) + la_2 la_3 m_4 \dot{q}_2^2 \cos(q_3) + \frac{1}{2} la_2 lac_3 m_3 \dot{q}_1^2 \cos(q_3) \\
& + la_2 lac_3 m_3 \dot{q}_2^2 \cos(q_3) - \frac{1}{2} la_2 lac_4 m_4 \dot{q}_1^2 \cos(q_3) - la_2 lac_4 m_4 \dot{q}_2^2 \cos(q_3) \\
& + \frac{1}{2} la_2 la_3 m_4 \dot{q}_1^2 \cos(2q_2 + q_3) + \frac{1}{2} la_2 lac_3 m_3 \dot{q}_1^2 \cos(2q_2 + q_3) \\
& - \frac{1}{2} la_2 lac_4 m_4 \dot{q}_1^2 \cos(2q_2 + q_3) + la_3 lac_4 m_4 \dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& - la_2 la_3 m_4 \ddot{q}_2 \sin(q_3) - la_2 lac_3 m_3 \ddot{q}_2 \sin(q_3) + la_2 lac_4 m_4 \ddot{q}_2 \sin(q_3)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\tau_4 = i_{4a} (\ddot{q}_4 - \ddot{q}_1 \cos(q_2 + q_3) + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2 + q_3) + \dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin(q_2 + q_3)) \tag{3.49}$$

3.3. Dinámica del manipulador

3.3.1. Matriz de Inercia

Para la obtención de la matriz de inercia despejamos los coeficientes de todas las aceleraciones $\ddot{q}$ directamente de ecuaciones (3.46) y (3.49) y obtenemos:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & -i_{4a} \cos(q_2 + q_3) \\ 0 & M_{22} & M_{23} & 0 \\ 0 & M_{32} & M_{33} & 0 \\ -i_{4a} \cos(q_2 + q_3) & 0 & 0 & i_{4a} \end{bmatrix}. \tag{3.50}$$

Componentes de la matriz de inercia

$$\begin{aligned}
M_{11} = & i_{1a} + m_2(\lambda_2 - \lambda_{c2})^2 \cos^2(q_2) + i_{2a} \sin^2(q_2) + i_{2l} \cos^2(q_2) \\
& + m_3 \lambda_2^2 \cos^2(q_2) + m_3 \lambda_{c3}^2 \sin^2(q_2 + q_3) \\
& - 2m_3 \lambda_2 \lambda_{c3} \cos(q_2) \sin(q_2 + q_3) + i_{3l} \sin^2(q_2 + q_3) \\
& + i_{3a} \cos^2(q_2 + q_3) + m_4(\lambda_3 - \lambda_{c4})^2 \sin^2(q_2 + q_3) \\
& + m_4 \lambda_2^2 \cos^2(q_2) - 2m_4(\lambda_3 - \lambda_{c4}) \lambda_2 \cos(q_2) \sin(q_2 + q_3) \\
& + i_{4l} \sin^2(q_2 + q_3) + i_{4a} \cos^2(q_2 + q_3) + m_l \lambda_3^2 \sin^2(q_2 + q_3) \\
& + m_l \lambda_2^2 \cos^2(q_2) - 2m_l \lambda_2 \lambda_3 \cos(q_2) \sin(q_2 + q_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{22} = & m_2(\lambda_2 - \lambda_{c2})^2 + i_{2l} + m_3 \lambda_2^2 + m_3 \lambda_{c3}^2 \\
& - 2m_3 \lambda_2 \lambda_{c3} \sin(q_3) + i_{3l} + m_4(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_{c4})^2 \\
& + i_{4l} + m_l \lambda_2^2 + m_l \lambda_3^2 - 2m_l \lambda_2 \lambda_3 \sin(q_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{23} = & m_3 \lambda_{c3}^2 - m_3 \lambda_{c3} \lambda_2 \sin(q_3) + i_{3l} \\
& + m_4(\lambda_3 - \lambda_{c4} - \lambda_2 \sin(q_3))(\lambda_3 - \lambda_{c4}) \\
& + i_{4l} - m_l(\lambda_3^2 - \lambda_2 \lambda_3 \sin(q_3))
\end{aligned}$$

$$M_{32} = M_{23}$$

$$M_{33} = m_3 \lambda_{c3}^2 + i_{3l} + m_4(\lambda_{c4} - \lambda_3)^2 + i_{4l} + m_l \lambda_3^2$$

3.3.2. Matriz de Coriolis/centrífuga

Debido a la representntación de la dinámica elegida, la matriz de $C(q, \dot{q})$ debe ser obtenida por medio de los símbolos de christoffel a partir de la matriz de inercia

Componentes de la matriz de Coriolis/Centrífuga

$$\begin{aligned}
C_{11} = & \frac{1}{2} \left[i_{2l} \dot{q}_2 \sin(2q_2) - i_{2a} \dot{q}_2 \sin(2q_2) + i_{3a} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(2q_2 + 2q_3) \right. \\
& + i_{4a} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(2q_2 + 2q_3) - i_{3l} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& - i_{4l} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(2q_2 + 2q_3) + m_2 (\lambda_2^2 + \lambda_{c2}^2 - 2\lambda_2 \lambda_{c2}) \dot{q}_2 \sin(2q_2) \\
& + (m_3 \lambda_2^2 + m_4 \lambda_2^2 + m_l \lambda_2^2) \dot{q}_2 \sin(2q_2) \\
& - (m_3 \lambda_{c3}^2 + m_l \lambda_3^2) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& + 2(m_4 \lambda_{c4} - m_4 \lambda_3 - m_l \lambda_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& + \lambda_2 (2m_4 \lambda_3 + 2m_3 \lambda_{c3} - 2m_4 \lambda_{c4} + 2m_l \lambda_3) \dot{q}_2 \cos(2q_2 + q_3) \\
& + \lambda_2 (m_4 \lambda_3 + m_3 \lambda_{c3} - m_4 \lambda_{c4} + m_l \lambda_3) \dot{q}_3 \cos(2q_2 + q_3) \\
& \left. + \lambda_2 (m_4 \lambda_3 + m_3 \lambda_{c3} - m_4 \lambda_{c4} + m_l \lambda_3) \dot{q}_3 \cos(q_3) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{12} &= \frac{1}{2} [i_{2a}\dot{q}_1 \sin(2q_2) - i_{2l}\dot{q}_1 \sin(2q_2) - (i_{3a} + i_{4a} - i_{3l} - i_{4l})\dot{q}_1 \sin(2q_2 + 2q_3) \\
&\quad + i_{4a}\dot{q}_4 \sin(q_2 + q_3) + (m_3\lambda_{c3}^2 + m_l\lambda_3^2 - 2m_4\lambda_3 + 2m_4\lambda_{c4})\dot{q}_1 \sin(2q_2 + 2q_3) \\
&\quad - (m_2(\lambda_2^2 + \lambda_{c2}^2 - 2\lambda_2\lambda_{c2}) + m_3\lambda_2^2 + m_4\lambda_2^2 + m_l\lambda_2^2)\dot{q}_1 \sin(2q_2) \\
&\quad - \lambda_2(2m_4\lambda_3 + 2m_3\lambda_{c3} - 2m_4\lambda_{c4} + 2m_l\lambda_3)\dot{q}_1 \cos(2q_2 + q_3)] \\
C_{13} &= \frac{1}{2} i_{4a}\dot{q}_4 \sin(q_2 + q_3) - \dot{q}_1 \cos(q_2 + q_3) [i_{3a} \sin(q_2 + q_3) + i_{4a} \sin(q_2 + q_3) \\
&\quad - i_{3l} \sin(q_2 + q_3) - i_{4l} \sin(q_2 + q_3) - m_3\lambda_{c3}^2 \sin(q_2 + q_3) - m_l\lambda_3^2 \sin(q_2 + q_3) \\
&\quad - 2m_4\lambda_3 \sin(q_2 + q_3) + 2m_4\lambda_{c4} \sin(q_2 + q_3) + \lambda_2(m_4\lambda_3 + m_3\lambda_{c3} \\
&\quad - m_4\lambda_{c4} + m_l\lambda_3) \cos(q_2)] \\
C_{14} &= -\frac{1}{2} i_{4a} \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
C_{21} &= C_{12} \\
C_{22} &= \lambda_2 \dot{q}_3 \cos(q_3) (\lambda_{c3} m_3 + \lambda_3 m_l) \\
C_{23} &= -\lambda_2 \dot{q}_2 \cos(q_3) (\lambda_{c3} m_3 + \lambda_3 m_l) \\
C_{24} &= \frac{1}{2} i_{4a} \dot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) \\
C_{31} &= C_{13} \\
C_{32} &= C_{23} \\
C_{33} &= -\lambda_2 \dot{q}_2 \cos(q_3) (\lambda_3 m_4 + \lambda_{c3} m_3 - \lambda_{c4} m_4 - \lambda_3 m_l) \\
C_{34} &= \frac{1}{2} i_{4a} \dot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) \\
C_{41} &= C_{14} \\
C_{42} &= C_{24} \\
C_{43} &= C_{34} \\
C_{44} &= 0
\end{aligned}$$

3.3.3. Vector de Gravedad

La obtención del vector de gravedad se obtiene directamente de los torques obtenidos en ecuaciones (3.46) y (3.49), despejando los coeficientes que contengan la gravedad g .

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ -[m_2(\lambda_2 - \lambda_{c2}) \cos(q_2) + m_3(\lambda_2 \cos(q_2) - \lambda_{c3} \sin(q_2 + q_3)) \\ + m_4(\lambda_2 \cos(q_2) - (\lambda_3 - \lambda_{c4}) \sin(q_2 + q_3)) + m_l(\lambda_2 \cos(q_2) - \lambda_3 \sin(q_2 + q_3))] \\ m_3 \lambda_{c3} \sin(q_2 + q_3) + m_4(\lambda_3 - \lambda_{c4}) \sin(q_2 + q_3) + m_l \lambda_3 \sin(q_2 + q_3) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

3.4. Controladores clásicos

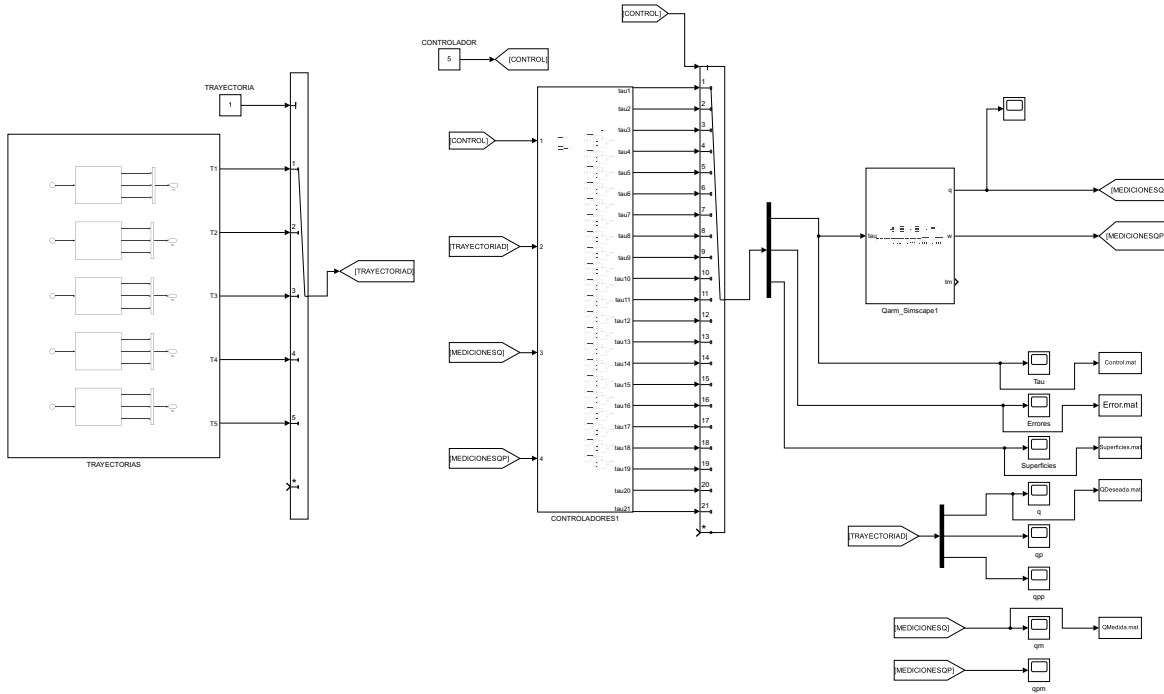


Figura 3.1: Modelo en Simscape-Simulink utilizado para la evaluación de los controladores.



Figura 3.2: Modelo del QArm en Simscape-Simulink utilizado para la evaluación de los controladores.

Para probar la estabilidad y eficacia de los controladores de manera teórica y también como una forma de seguridad para evitar que la planta sufra algún tipo de daño debido a una incorrecta implementación, cada uno de los algoritmos de control es simulado por medio del

modelo real de la planta de Simscape-Simulink. Tanto el diagrama de bloques de Simulink como el modelo de Simscape se muestran a continuación:

3.4.1. Controlador por par calculado

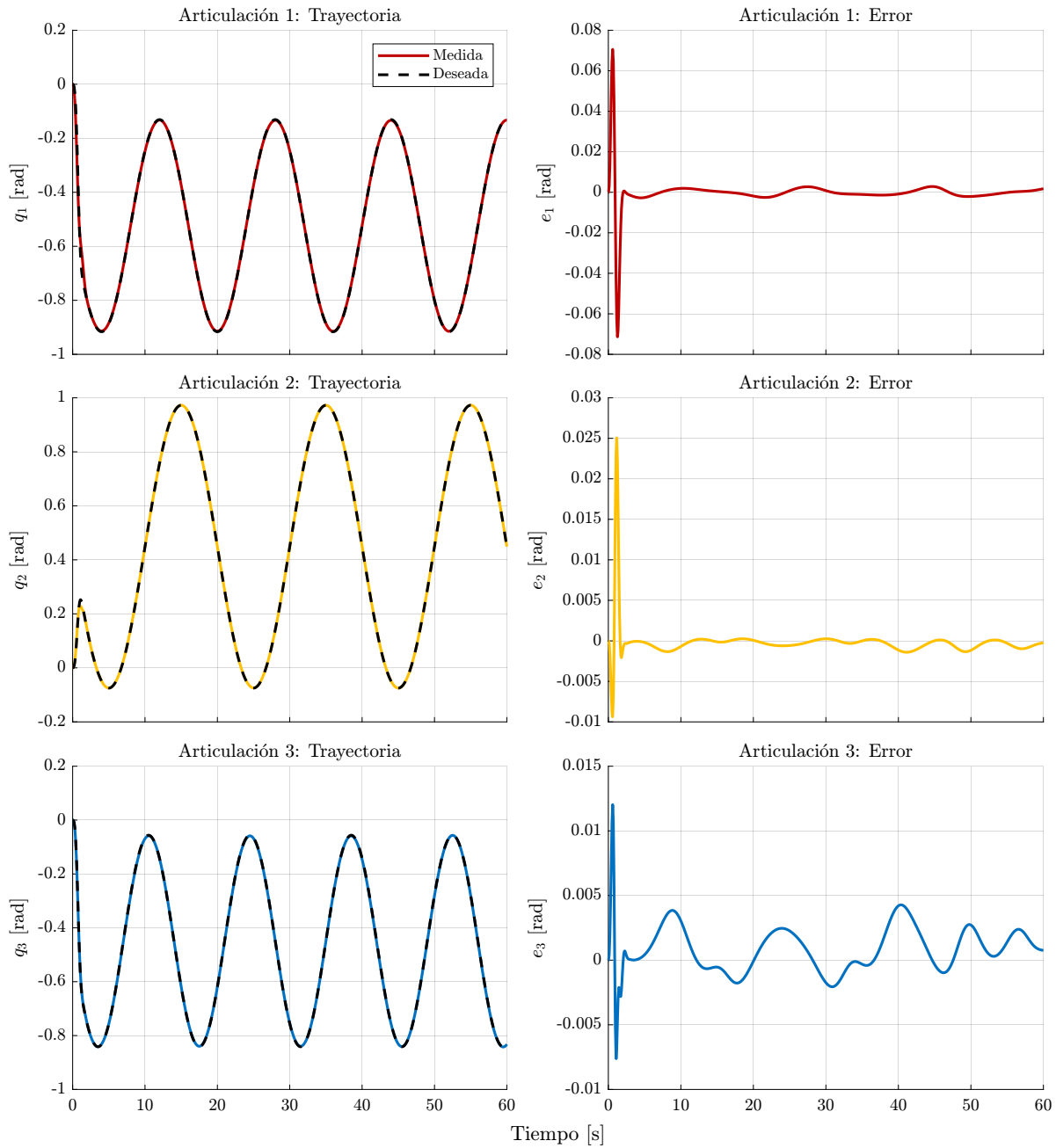


Figura 3.3: Simulación seguimiento de trayectoria controlador par calculado.

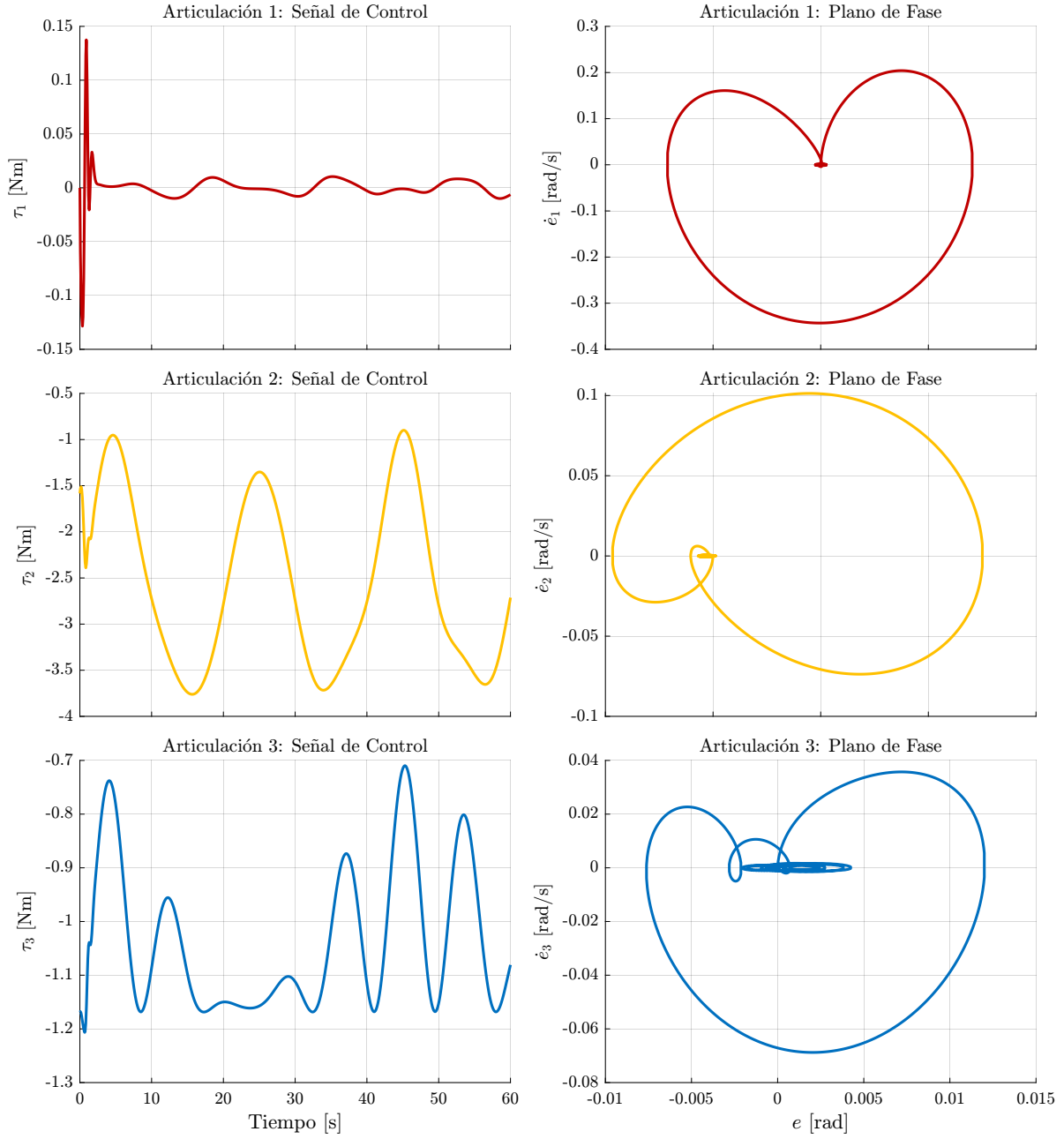


Figura 3.4: Simulación señales de control esquema par calculado.

Las simulaciones del controlador en la figura 3.3 por par calculado muestran un bajo error debido a que el modelado dinámico y el modelo de Simscape contienen los mismos parámetros físicos y distancias a los centros de masa, además no hay limitaciones por parte de los actuadores. Esto lleva a tener una linealización casi ideal lo que permite que el controlador tenga un gran desempeño.

También es importante mencionar que la señal de error en todas las articulaciones es suave y continua, lo que es de esperarse de un controlador continuo.

3.4.2. Controlador Slotine-Li

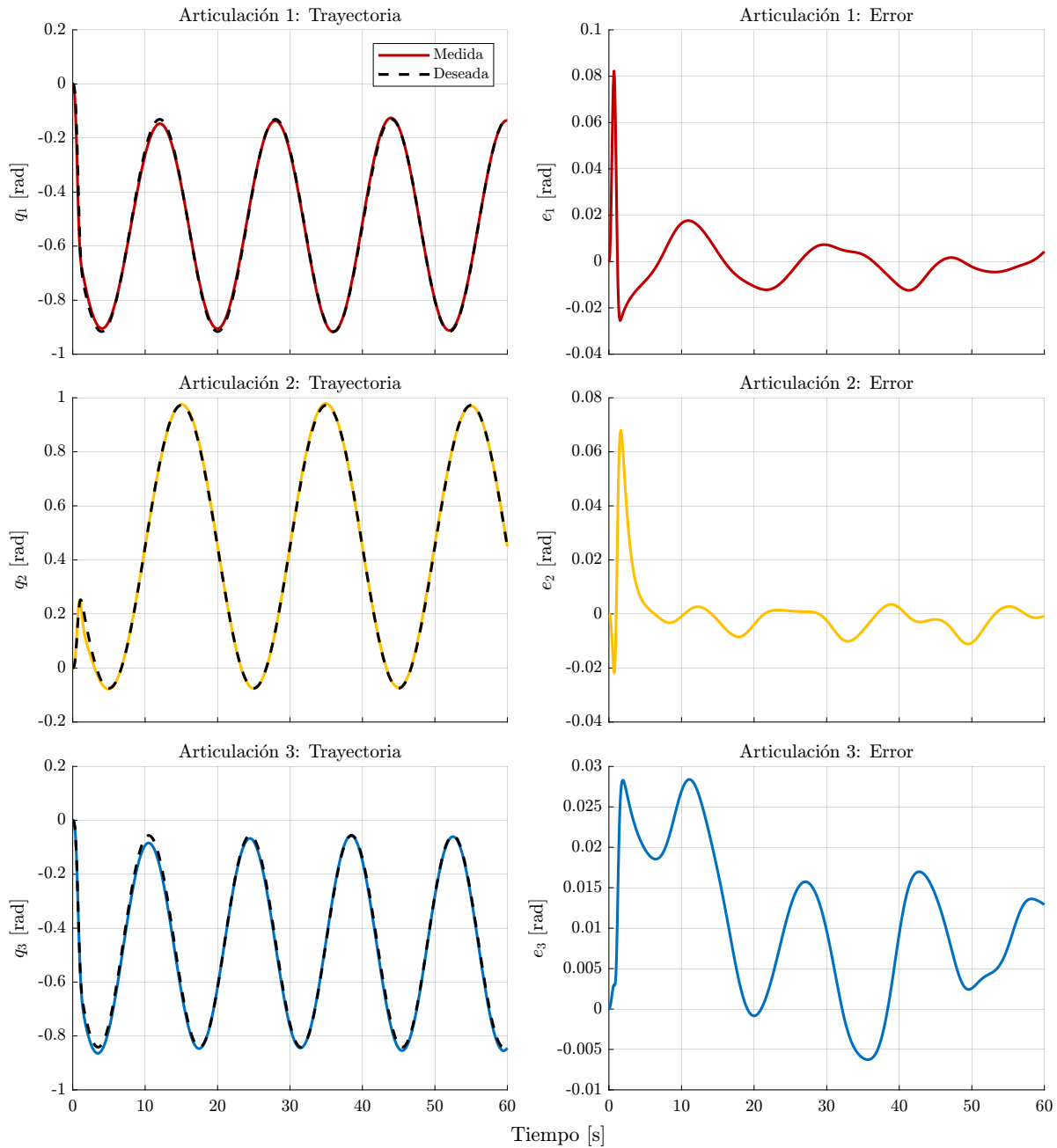


Figura 3.5: Simulación seguimiento de trayectoria controlador Slotine-Li.

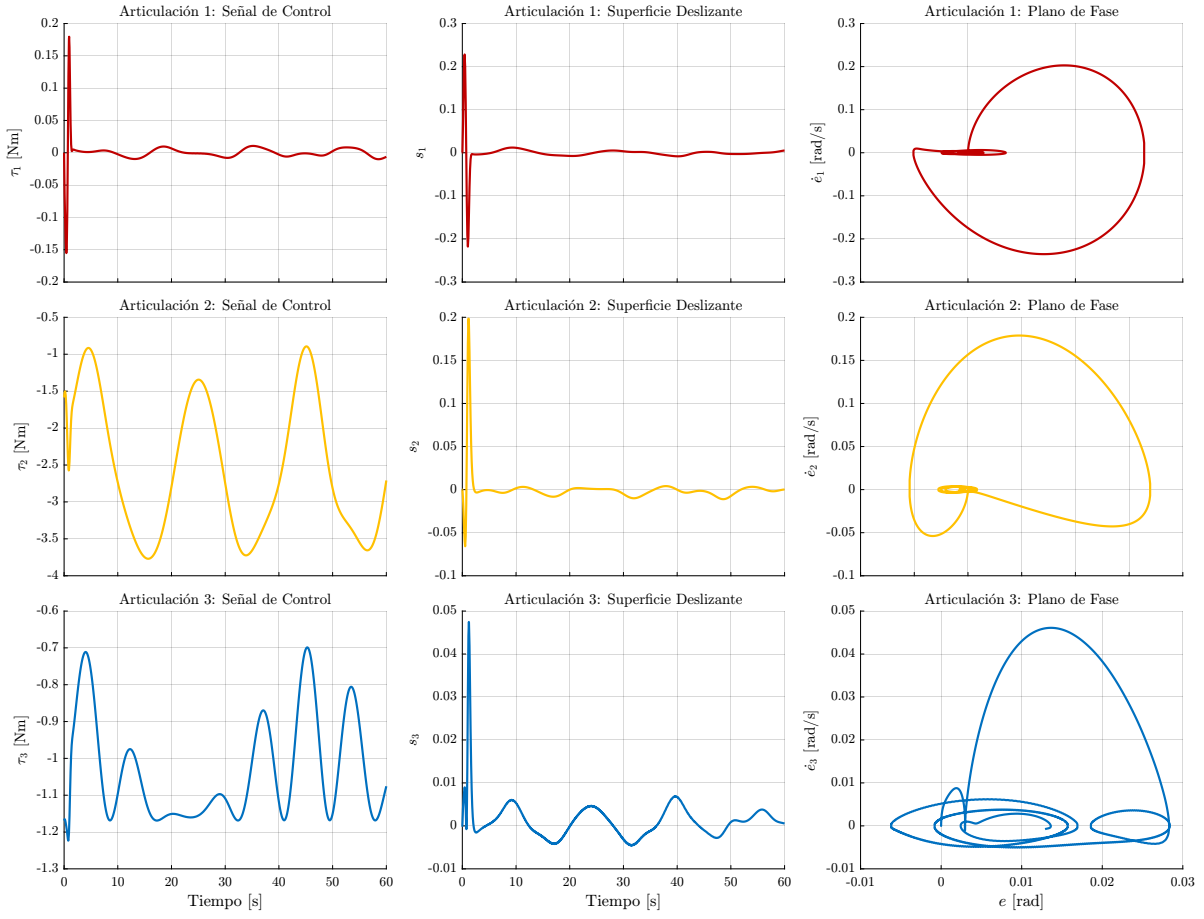


Figura 3.6: Simulación señales de control esquema Slotine-Li.

3.4.3. Control PID

Nuevamente, considérese la dinámica de lazo cerrado del manipulador aplicando la dinámica inversa, la cual está dada por la ecuación:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, t) \quad (3.52)$$

En este caso, se propone modificar la ley de control $\mathbf{u}$ a la siguiente expresión:

$$\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_i \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \quad (3.53)$$

donde $\mathbf{K}_p$, $\mathbf{K}_d$ y $\mathbf{K}_i$ son matrices diagonales definidas positivas.

Sustituyendo esta ley de control en la dinámica de lazo cerrado y definiendo los estados:

$$\mathbf{x}_1 = \tilde{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{x}_2 = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \quad \mathbf{x}_3 = -\mathbf{K}_i \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \quad (3.54)$$

el sistema puede reescribirse en forma de espacio de estados como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -\mathbf{K}_p \mathbf{x}_1 - \mathbf{K}_d \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \\ \dot{\mathbf{x}}_3 &= -\mathbf{K}_i \mathbf{x}_1 \end{aligned} \quad (3.55)$$

La inclusión del estado integral $\mathbf{x}_3$ incrementa el orden dinámico del sistema y permite eliminar errores de seguimiento permanentes ante perturbaciones constantes y de baja frecuencia.

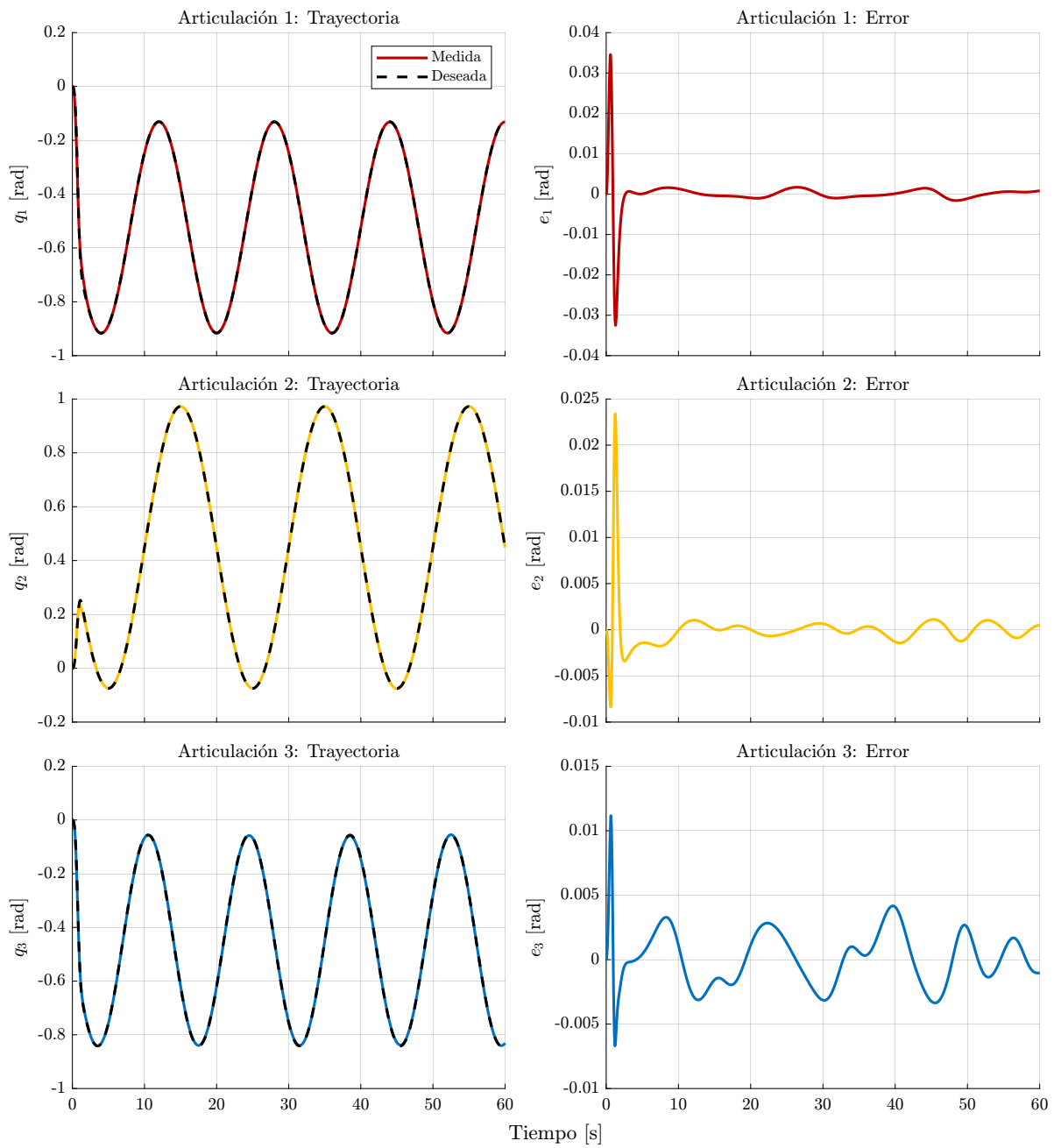


Figura 3.7: Simulación seguimiento de trayectoria controlador PID.

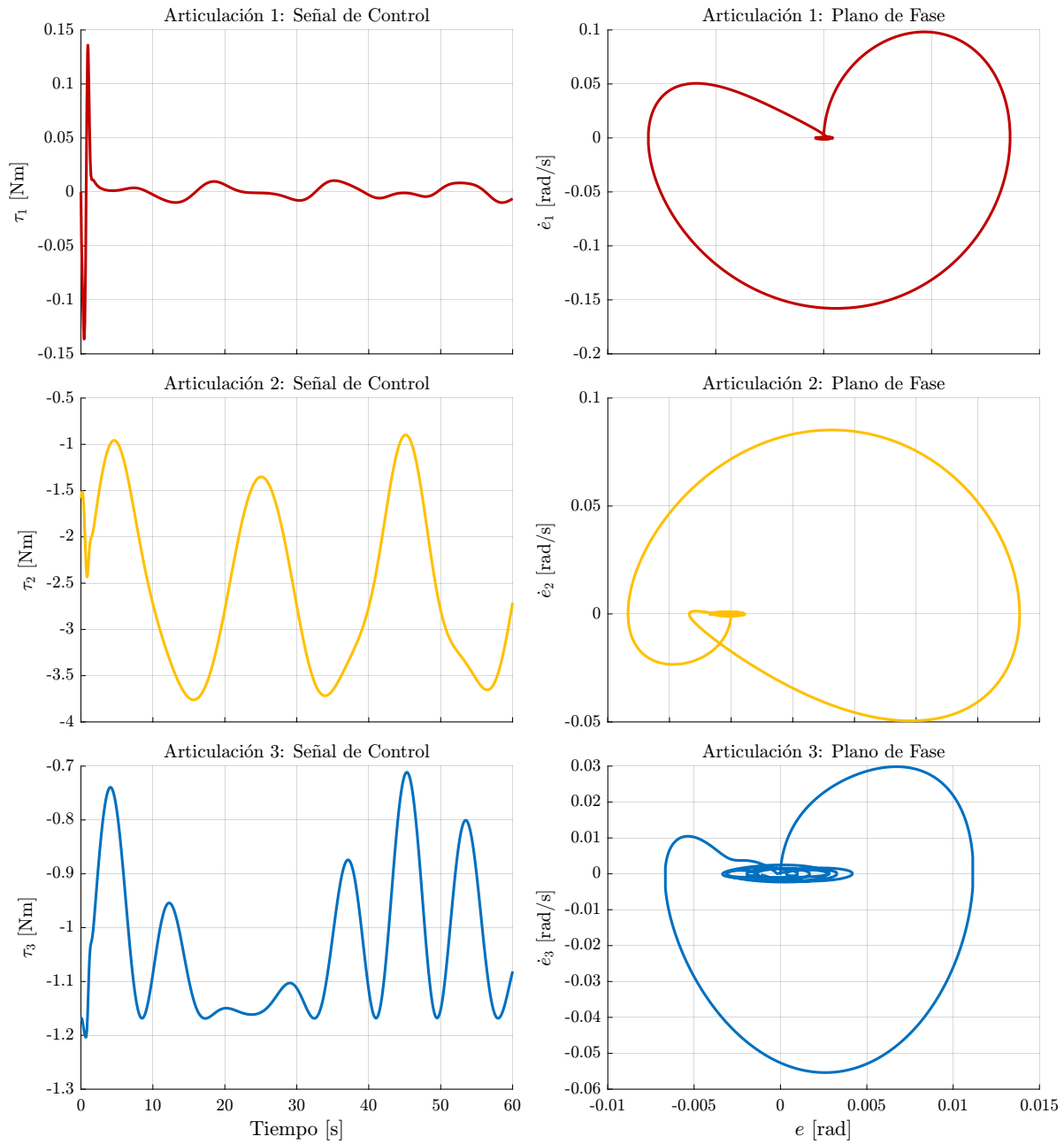


Figura 3.8: Simulación señales de control esquema PID.

3.5. Controladores por Modos Deslizantes

3.5.1. Control Vectorial Unitario por Modos deslizantes

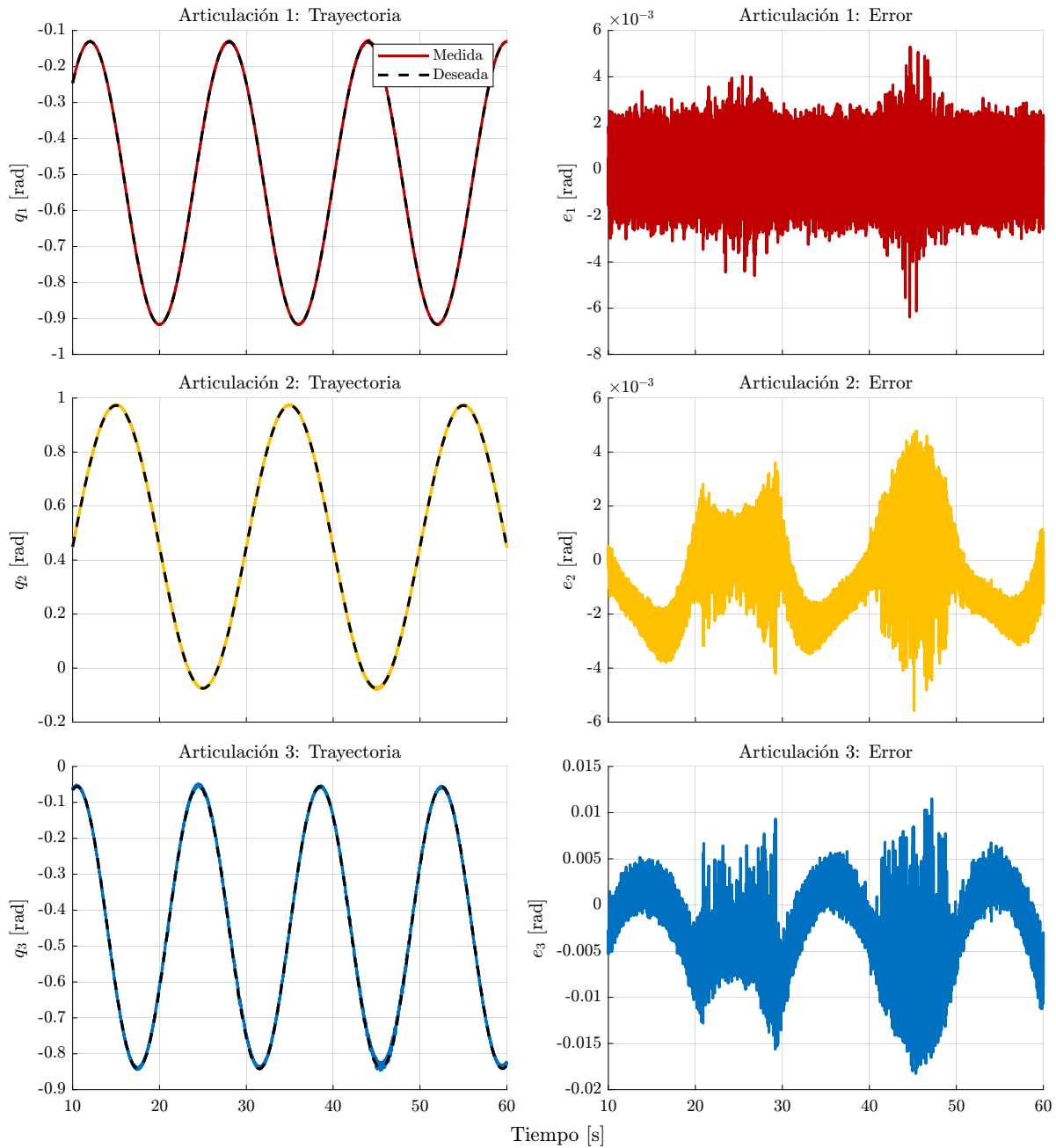


Figura 3.9: Simulación seguimiento de trayectoria controlador por modos deslizantes unitario.

La figura 3.9 muestra los resultados de la implementación de el controlador vectorial por modos deslizantes para un manipulador robótico. De la figura son destacables dos puntos.

- El error observado en las 3 articulaciones es notablemente menor respecto al error del controlador por par calculado.
- La señal que muestra el error en las articulaciones presenta un comportamiento de alta frecuencia.

Los puntos anteriores prueban algunas de las hipótesis teóricas de los controladores por modos deslizantes. Si bien el controlador por par calculado mostraba un bajo error debido a la casi nula diferencia entre la planta y su modelado dinámico, la implementación del control vectorial unitario reduce el error de 0.05 rad a $0.35 \times 10^{-3} \text{ rad}$. Pese a que el error es muy bajo, las vibraciones serían destructivas si se implementara en la planta.

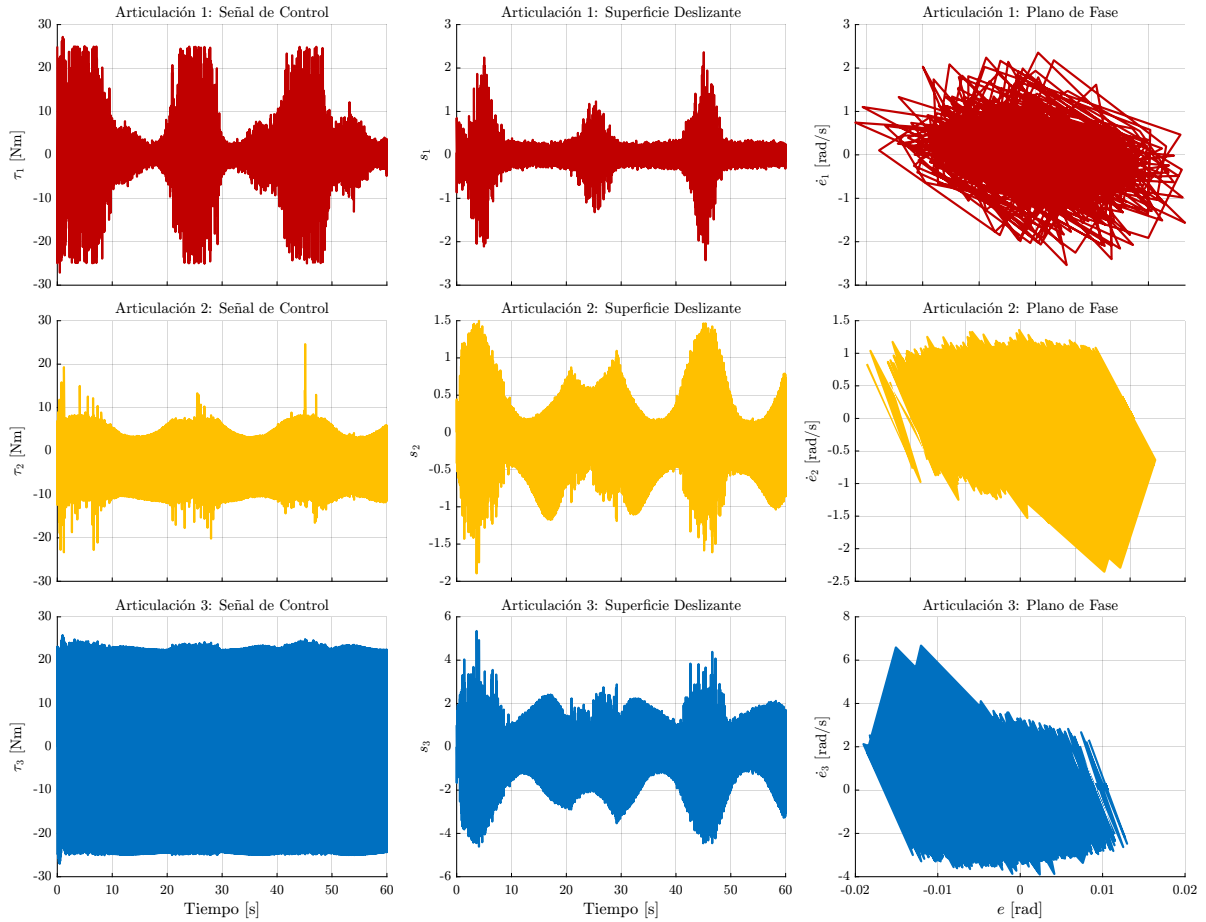


Figura 3.10: Simulación señales de control esquema por modos deslizantes unitario.

3.5.2. Super-Twisting

La implementación de un controlador por modos deslizantes es una estrategia de control robusta y requiere como condición, el diseño de una variable deslizante. Debido a la naturaleza multivariable de la planta, se eligió la variable deslizante para manipuladores robóticos propuesto en Utkin 1992:

$$\sigma = \Lambda \tilde{\mathbf{q}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (3.56)$$

donde:

- Λ es una matriz de ganancias diagonal definida positiva,
- $\tilde{\mathbf{q}}$ es el error de posición,
- $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ es el error de velocidad.

La ley de control u está dada por:

$$\begin{aligned} u &= -k_1 |\sigma|^{1/2} \text{sgn}(\sigma) + v \\ \dot{v} &= -k_2 \text{sgn}(\sigma) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Para aplicar controladores robustos por medio de la dinámica inversa, es necesario analizar el sistema considerando las incertidumbres y perturbaciones que pudieran afectar el desempeño. Para esto, iniciamos el análisis con la dinámica general de un manipulador robótico de n grados de libertad la cual se describe mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (3.58)$$

La implementación de un controlador basado en dinámica inversa considera conocer de manera exacta las matrices del sistema para linealizarlo y alcanzar la forma deseada $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}$. En la práctica, esto no es viable debido a múltiples factores que impiden el conocimiento exacto del modelo, tales como:

- Simplificaciones durante el modelado dinámico.
- Incertidumbres en los parámetros físicos (masas, longitudes, centros de masa).

- Elasticidad en las transmisiones.
- Fricciones secas y viscosas no modeladas.

Considerando que las matrices empleadas para el diseño del control $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ son completamente conocidas y que el vector de gravedad es desconocido o una aproximación ($\hat{\mathbf{g}}$), el par de control por dinámica inversa puede definirse como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \quad (3.59)$$

Al cerrar el lazo de control con estas consideraciones, igualamos la dinámica real con el par de control aplicado:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \quad (3.60)$$

Definimos los errores en el vector de gravedad como:

$$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.61)$$

Sustituyendo estas definiciones y añadiendo una perturbación exógena $\boldsymbol{\delta}(t) < L$ para el análisis de robustez, la expresión de la aceleración resultante es:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u} + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) [\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\delta}(t)] \quad (3.62)$$

Para simplificar el análisis de estabilidad, la ecuación anterior se reescribe de la siguiente forma:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, t) \quad (3.63)$$

Partiendo de la derivada de la variable deslizante y desarrollando los términos:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \Lambda \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (3.64)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \Lambda \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d \quad (3.65)$$

Sustituyendo la dinámica del controlador por par calculado:

$$\dot{\sigma} = \Lambda \dot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, t) \quad (3.66)$$

Al igual que en el desarrollo del sistema mecánico, se incluye en la ley de control la compensación del segundo estado de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{STA} - \Lambda \dot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{q}}_d \quad (3.67)$$

Sustituyendo esta ley de control en la dinámica de la superficie:

$$\dot{\sigma} = \Lambda \dot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d + (\mathbf{u}_{STA} - \Lambda \dot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{q}}_d) + \mathbf{f}(\mathbf{q}, t) \quad (3.68)$$

Agrupando y simplificando los términos conocidos del segundo estado y la aceleración deseada:

$$\dot{\sigma} = (\Lambda \dot{\mathbf{q}} - \Lambda \dot{\mathbf{q}}) + (\ddot{\mathbf{q}}_d - \ddot{\mathbf{q}}_d) + \mathbf{u}_{STA} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, t) \quad (3.69)$$

Finalmente, la expresión de la dinámica en lazo cerrado sobre la variable deslizante se reduce a:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{u}_{STA} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, t) \quad (3.70)$$

Debido a la dinámica inversa como método de implementación, logramos tener un sistema desacoplado que podemos separar y controlar individualmente en cada uno de los n subsistemas. Para cada componente $i \in \{1, \dots, n\}$ sustituyendo la ley de control $\mathbf{u}$ por el controlador STA obtenemos:

$$\dot{\sigma} = -k_1 |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma) + v + f(\mathbf{q}, t) \quad (3.71)$$

$$\dot{v}_2 = -k_2 \text{sign}(\sigma) \quad (3.72)$$

Para facilitar la prueba de estabilidad trasladamos la perturbación a la ecuación de la variable auxiliar, definiendo las variables de estado auxiliares

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = v + f(\mathbf{q}, t).$$

Derivando respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{\sigma}_1 = -k_1 |\sigma_1|^{1/2} \text{sign}(\sigma_1) + \sigma_2, \quad (3.73)$$

$$\dot{\sigma}_2 = -k_2 \text{sign}(\sigma_1) + \dot{f}(\mathbf{q}, t). \quad (3.74)$$

Para realizar la prueba de estabilidad por medio de la función estricta de Lyapunov propuesta por Moreno et al. 2012, la derivada de la perturbación $\mathbf{f}(\mathbf{q}, t)$ debe ser acotada.

Partiendo de que la perturbación se define como $\mathbf{f}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{G}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\delta}(t))$, su derivada temporal es

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, t) = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{G}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\delta}(t)) + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\delta}}(t)\right).$$

Sustituyendo la relación de ecuación (2.15), es decir, $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}^\top(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, se llega a

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, t) = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}^\top(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{G}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\delta}(t)) + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\delta}}(t)\right). \quad (3.75)$$

Nuevamente es necesario remarcar que para utilizar la propiedad de ecuación (2.15) la matriz de Coriolis se supone modelada por los símbolos de Christoffel.

Ahora acotamos todos los términos:

- Por ecuación (2.13), $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})$ existe y está acotada: $\|\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\| \leq 1/\lambda_m$.
- Por ecuación (2.14), $\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq C_m \|\dot{\mathbf{q}}\|$, luego $\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}^\top(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq 2C_m \|\dot{\mathbf{q}}\|$.
- Por ecuación (2.17), $\|\mathbf{G}(\mathbf{q})\| \leq G_M$, y $\|\boldsymbol{\delta}(t)\| \leq \Delta_M$ por hipótesis.
- Por ecuación (2.19), se tiene $\|\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{q})\| = \left\|\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\right\| \leq G_d \|\dot{\mathbf{q}}\|$.
- $\|\dot{\boldsymbol{\delta}}(t)\| \leq \Delta_D$ por hipótesis.

Aplicando normas en ecuación (3.75) obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\|\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, t)\| \leq \frac{2C_m}{\lambda_m^2} \|\dot{\mathbf{q}}\| (G_M + \Delta_M) + \frac{1}{\lambda_m} (G_d \|\dot{\mathbf{q}}\| + \Delta_D). \quad (3.76)$$

Puesto que las velocidades articulares se mantienen acotadas en condiciones normales de operación y que físicamente no existe un motor que entregue velocidades que tiendan al infinito, existe una constante F_d con $0 \leq F_d < \infty$ tal que:

$$\|\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, t)\| \leq F_d. \quad (3.77)$$

Con esta cota, el término de perturbación satisface $\|\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, t)\| \leq F_d$. Si se renombra $\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, t)$ como $\dot{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{q}, t)$ podemos usar el teorema 2 en Moreno et al. 2012 que prueba que si $|\boldsymbol{\rho}(\mathbf{q}, t)| < L_\rho$, donde L_ρ es una constante positiva, entonces existen constantes positivas k_1 y k_2 tales que el origen del sistema (2.96) es un punto de equilibrio estable en tiempo finito. Además de esto, existe una matriz P tal que la función $V = \zeta^T P \zeta$, donde P es una matriz definida positiva y $\zeta = \begin{bmatrix} |x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1) & x_2 \end{bmatrix}^T$, es una función de Lyapunov estricta para el sistema (2.96). Esta función de Lyapunov permite calcular el tiempo en que el sistema (2.96) alcanza el origen.

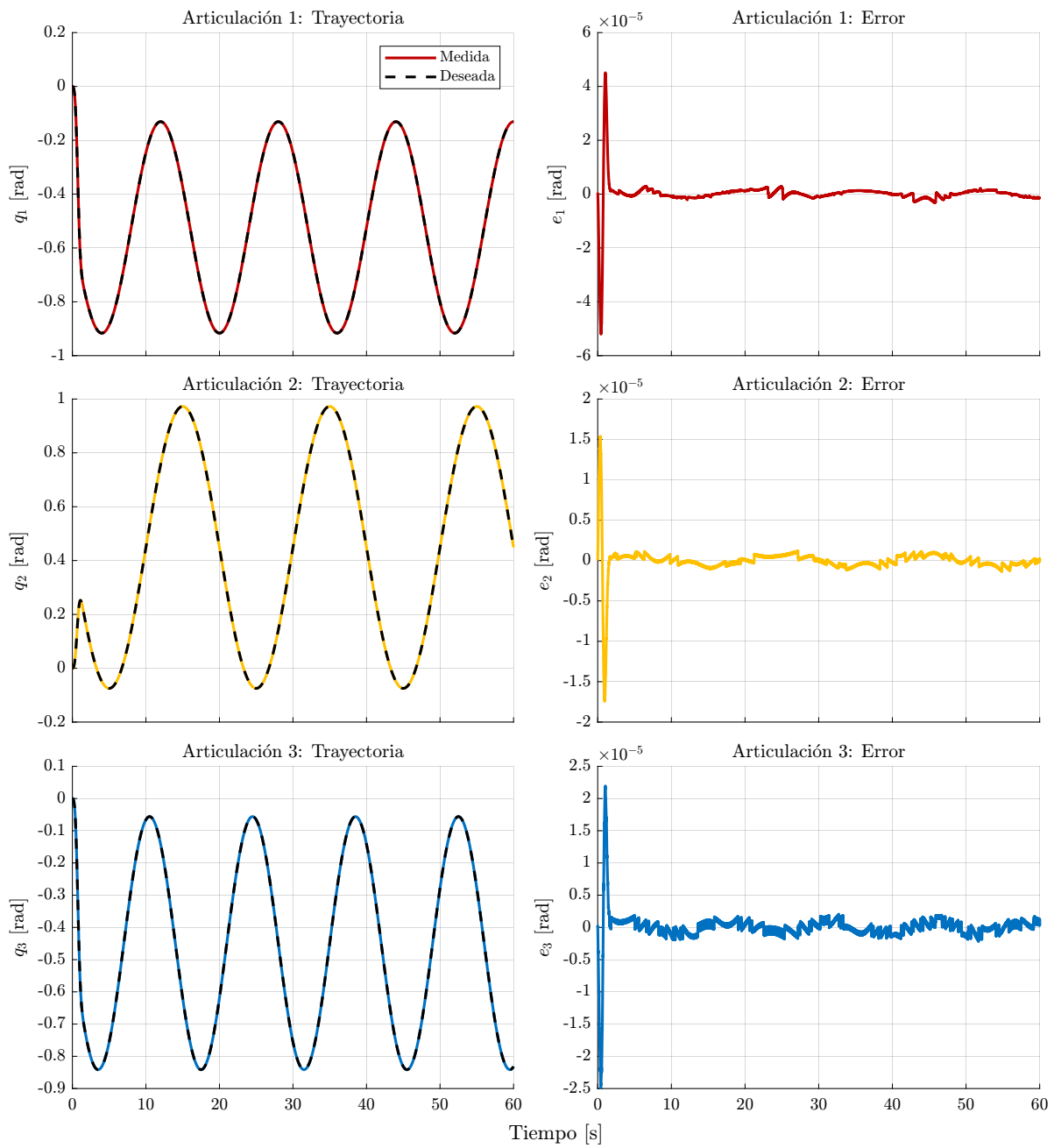


Figura 3.11: Simulación seguimiento de trayectoria controlador STA.

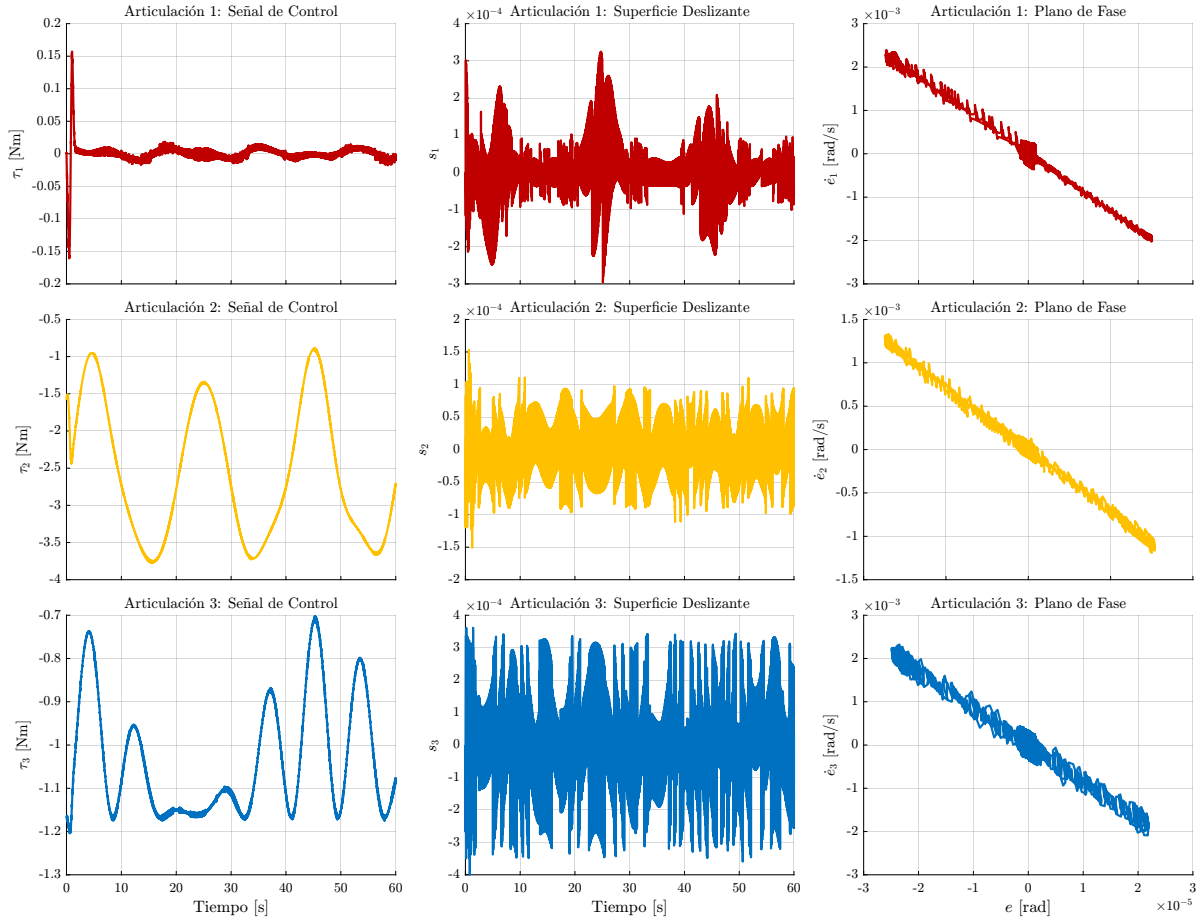


Figura 3.12: Simulación señales de control esquema STA.

Las simulaciones de la figura 3.12 muestran que la variable deslizante alcanza el cero en tiempo finito, sin embargo los estados solo lo logran de manera asintótica. También es necesario remarcar que el STA mantiene errores del orden de 10^{-5} , lo que representa una ventaja significativa respecto al par calculado e incluso superior al control vectorial unitario por modos deslizantes, además de que la señal de control presenta mucho menor comportamiento de alta frecuencia y este controlador puede ser implementado en una planta real física.

Una solución a la condición del STA en que los estados alcanzan el origen solo asintóticamente es la implementación de otro algoritmo por modos deslizantes que, como menciona el artículo Pérez-Ventura et al. 2021, reemplaza el uso de una variable deslizante por los estados mismos del sistema, asegurando su convergencia a cero en tiempo finito además de reducir los efectos del chattering. El algoritmo propuesto es el controlador continuo PID por modos deslizantes PID-CSMC.

3.5.3. Controlador PID-CSMC

Ya que la planta de estudio es un sistema multivariable, es necesario realizar una adaptación del algoritmo de control. El primer paso es sustituir los estados x_1 y x_2 por los estados de la planta siendo estos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \tilde{\mathbf{q}} \\ \mathbf{x}_2 &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Ahora los estados son vectores y corresponden al error de posición y error de velocidad respectivamente.

Debido a que las ganancias propuestas, los estados y en general la forma del controlador es multivariable las ganancias son modificadas de la siguiente manera:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 2.7\Delta_1^{1/3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.7\Delta_2^{1/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.7\Delta_3^{1/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.7\Delta_4^{1/3} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 5.345\Delta_1^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.345\Delta_2^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.345\Delta_3^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.345\Delta_4^{1/2} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 1.1\Delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1\Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1\Delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1\Delta_4 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Ahora considérense ecuación (3.63) como la dinámica de lazo cerrado del manipulador aplicando la estrategia par calculado y la forma del controlador PID-CSMC:

$$\begin{aligned} u_{PID-CSMC} &= -k_1|x_1|^{1/3} \operatorname{sgn}(x_1) - k_2|x_2|^{1/2} \operatorname{sgn}(x_2) + v \\ \dot{v} &= -k_3 \operatorname{sgn}(x_1) \end{aligned} \quad (3.82)$$

Al igual que con el sistema dinámico analizado en ecuación (2.119), con el fin de llegar a esa estructura en la dinámica se propone la siguiente modificación a la entrada de control, igualmente descrita para el sistema mecánico en ecuación (2.125)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{PID-CSMC} + \ddot{\mathbf{q}}_{des} \quad (3.83)$$

Al sustituir esta acción de control en la dinámica de lazo cerrado dada por ecuación (3.63), y considerando que debido a la utilización de la dinámica inversa podemos separar el sistema en n sistemas separados, se obtiene el siguiente desarrollo algebraico:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i &= u_{PID-CSMC} + \ddot{q}_{des,i} + \delta(\mathbf{q}, t) \\ &= -k_1|x_1|^{1/3} \operatorname{sgn}(x_1) - k_2|x_2|^{1/2} \operatorname{sgn}(x_2) + \ddot{q}_{des,i} + v + \delta(\mathbf{q}, t) \end{aligned} \quad (3.84)$$

donde la dinámica del estado extendido v es:

$$\dot{v} = -k_3 \operatorname{sgn}(x_1) \quad (3.85)$$

De la definición de estados tenemos $q - q_{des} = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2$ y que $\ddot{q} - \ddot{q}_{des} = \dot{x}_2$. Si además de eso incluimos un nuevo estado $x_3 = v + \delta(\mathbf{q}, t)$, podemos reemplazar estas definiciones y construir nuevamente el sistema en el espacio de estados siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1|x_1|^{1/3} \operatorname{sgn}(x_1) - k_2|x_2|^{1/2} \operatorname{sgn}(x_2) + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3 \operatorname{sgn}(x_1) + \dot{\delta}(\mathbf{q}, t) \end{aligned} \quad (3.86)$$

La perturbación en el último estado, debido a que la estrategia aplicada por dinámica inversa es la misma, está descrita competamnete por ecuación (3.75), por lo tanto existen una cota $0 \leq F_d < \infty$ que cumple con ecuación (3.77)

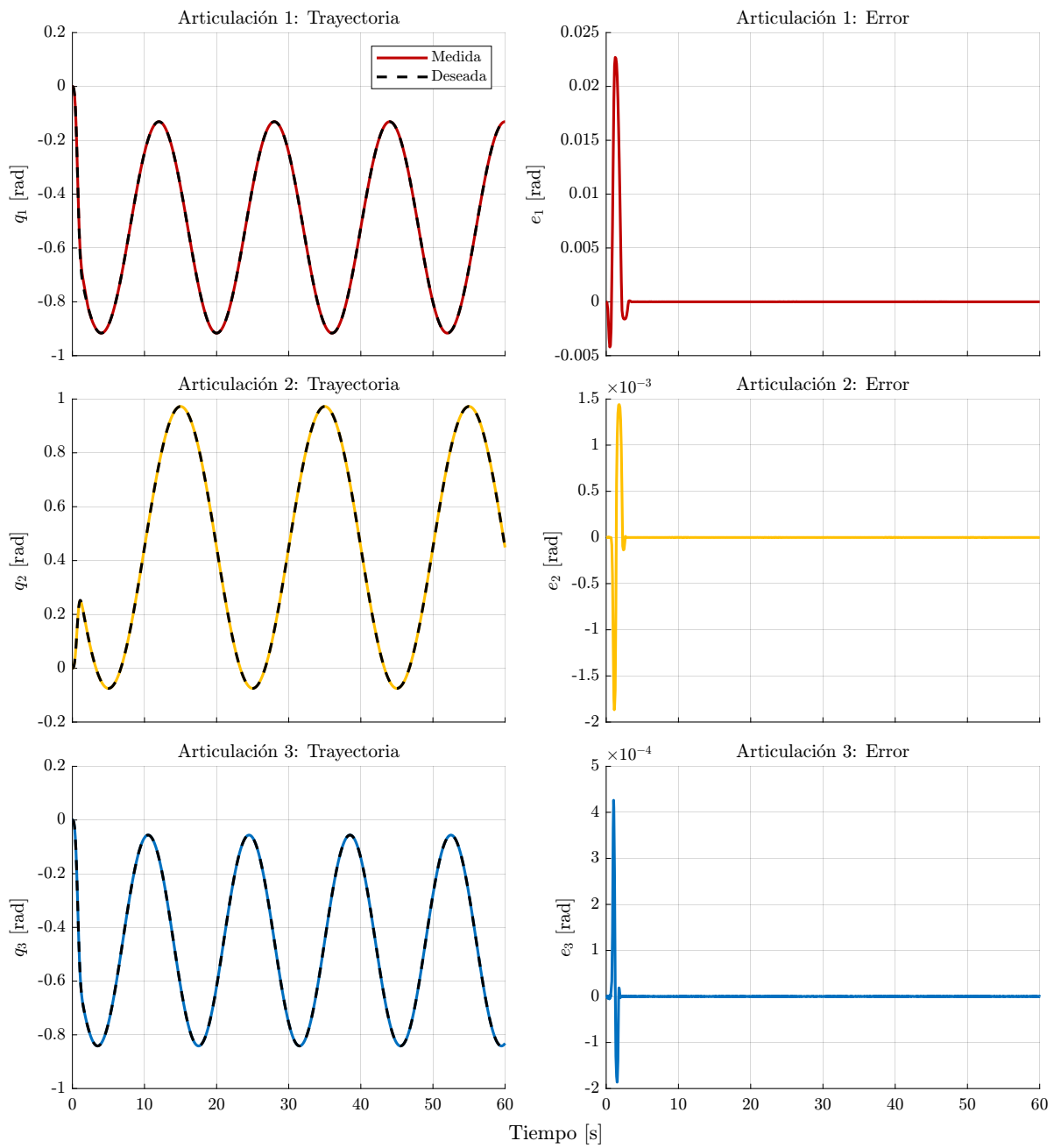


Figura 3.13: Simulación seguimiento de trayectoria controlador PID-CSMC.

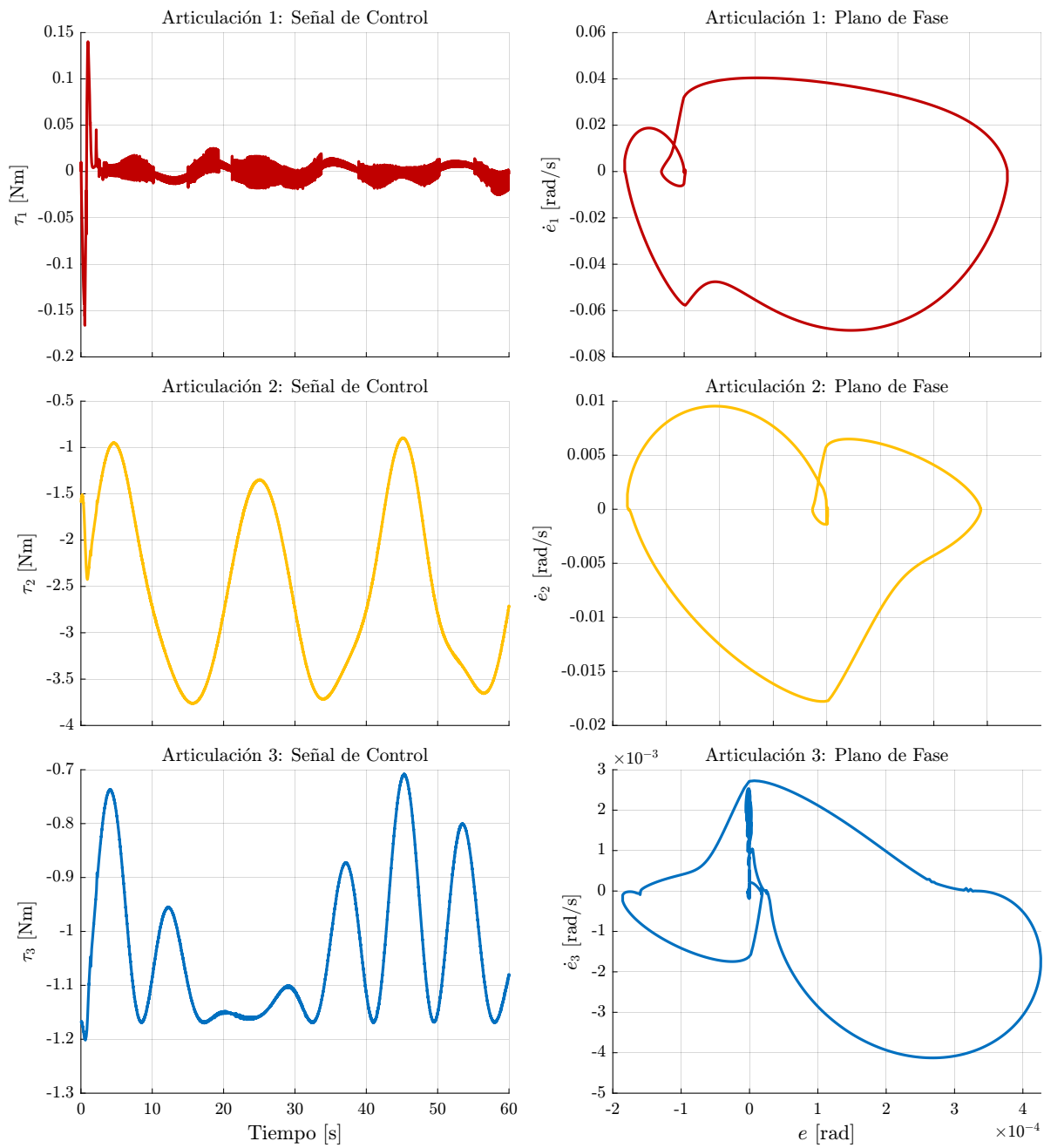


Figura 3.14: Simulación señales de control esquema PID-CSMC.

3.6. Controladores Adaptativos por Modos Deslizantes

3.6.1. Controlador Barrera

La ecuación (2.132) muestra la estructura básica del controlador basado en función barrera, si consideramos ecuación (3.63), la cual describe la dinámica reducida obtenida mediante el esquema de dinámica inversa, se propone una modificación que completa la dinámica y para analizar la estabilidad de este nuevo controlador, retomamos la variable deslizante definida en ecuación (3.56).

Para el controlador basado en funciones barrera, como se menciona anteriormente, se utiliza la dinámica inversa como método de implementación, lo que nos permite tratar al sistema como cuatro sistemas independientes. Esto deriva en cuatro entradas de control, donde la acción para el i -ésimo eslabón está dada por:

$$u_{BFASMC_i} = \frac{|\sigma_i|}{\epsilon_i - |\sigma_i|} \text{sgn}(\sigma_i) \quad (3.87)$$

Para completar la dinámica de la superficie deslizante en lazo cerrado, al término barrera se suman los siguientes parámetros conocidos. Por lo tanto, la ley de control auxiliar modificada se define como:

$$\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{q}}_{des} - \Lambda \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{u}_{BF} \quad (3.88)$$

Con esta entrada auxiliar, el par de control final aplicado a las articulaciones del manipulador es:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (3.89)$$

Finalmente, al sustituir la ley de control en el modelo dinámico y cerrar el lazo, la dinámica de la superficie de deslizamiento en cada uno de los n eslabones resulta en la siguiente expresión:

$$\dot{\sigma}_i = -\frac{|\sigma_i|}{\epsilon_i - |\sigma_i|} \text{sgn}(\sigma_i) + f_i(\mathbf{q}, t) \quad (3.90)$$

donde el término $\mathbf{f}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{G}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\delta}(t))$ representa un grupo de perturbaciones cuyas cotas están definidas en ecuaciones (2.13) y (2.17).

Adicionalmente, tal como se establece en Ovalle et al. 2026, los controladores por modos

deslizantes basados en funciones barrera implementados en plantas reales con tiempos de muestreo del orden de milisegundos, es posible estimar la capacidad máxima requerida de los actuadores (u_m) a partir de dos parámetros de diseño del sistema discreto: el ancho de la barrera (ϵ) y el tiempo de muestreo (τ).

La desigualdad que caracteriza esto es la siguiente:

$$\frac{\epsilon}{\tau} > (1 + u_m)^2 \quad (3.91)$$

Despejando analíticamente la variable u_m , se obtiene la cota que define la capacidad de actuación requerida:

$$1 + u_m < \sqrt{\frac{\epsilon}{\tau}} \quad (3.92)$$

$$u_m < \sqrt{\frac{\epsilon}{\tau}} - 1 \quad (3.93)$$

Dado que la planta es un sistema multivariable, el análisis se enfoca exclusivamente en tres eslabones de los cuatro eslabones. Transformando la desigualdad en una igualdad para calcular el valor mínimo requerido que deben poseer los actuadores, y considerando un tiempo de muestreo extraído de la hoja de datos del fabricante de $\tau = 0.002$ s (2 ms), se evalúa la capacidad requerida para el conjunto de barreras $\epsilon_1 = 0.6$, $\epsilon_2 = 0.8$ y $\epsilon_3 = 1.1$:

$$u_{m1} = \sqrt{\frac{0.6}{0.002}} - 1 = \sqrt{300} - 1 \approx 16.32 \text{ V} \quad (3.94)$$

$$u_{m2} = \sqrt{\frac{0.8}{0.002}} - 1 = \sqrt{400} - 1 = 19.00 \text{ V} \quad (3.95)$$

$$u_{m3} = \sqrt{\frac{1.1}{0.002}} - 1 = \sqrt{550} - 1 \approx 22.45 \text{ V} \quad (3.96)$$

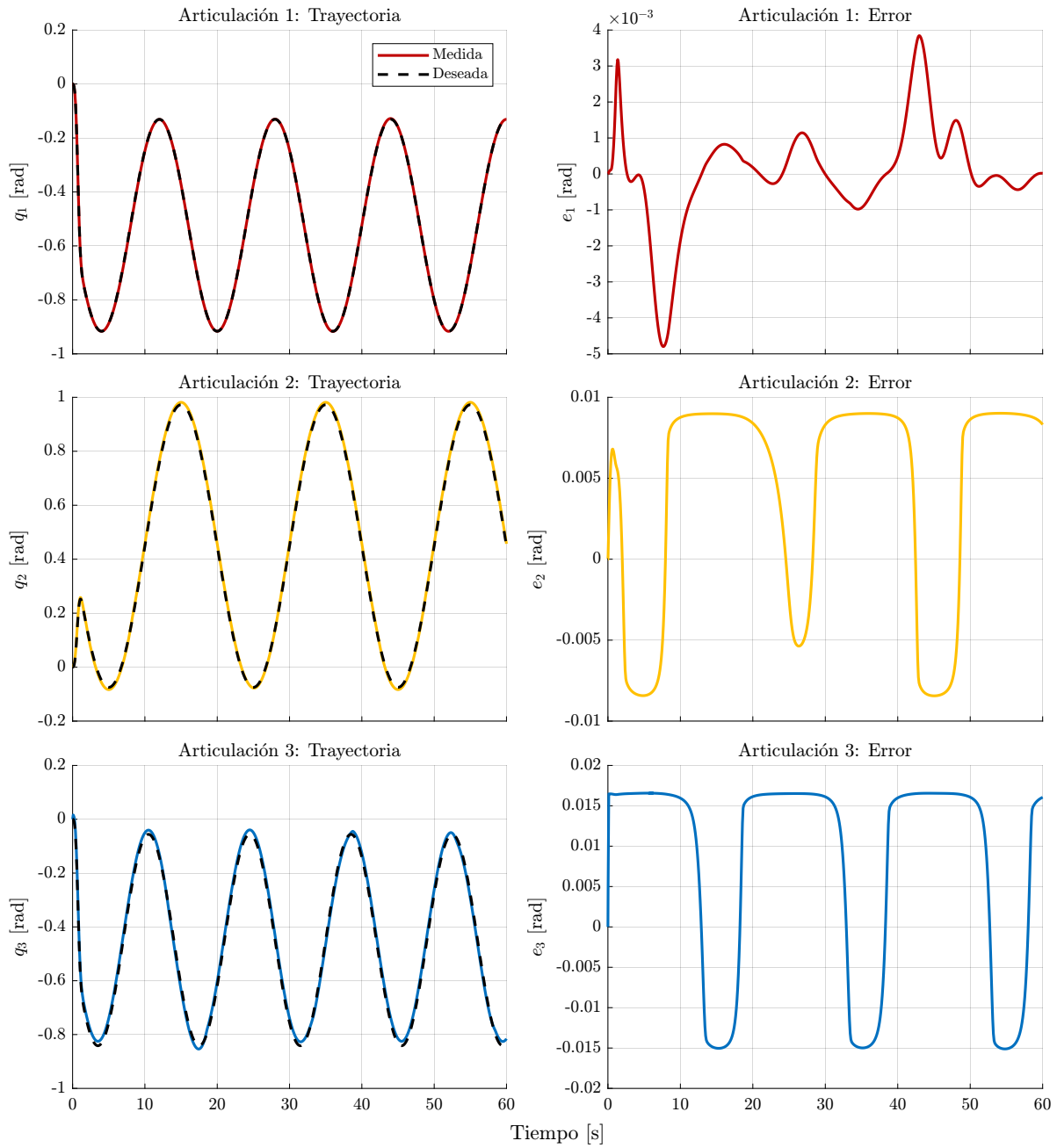


Figura 3.15: Simulación seguimiento de trayectoria controlador basado en función barrera.

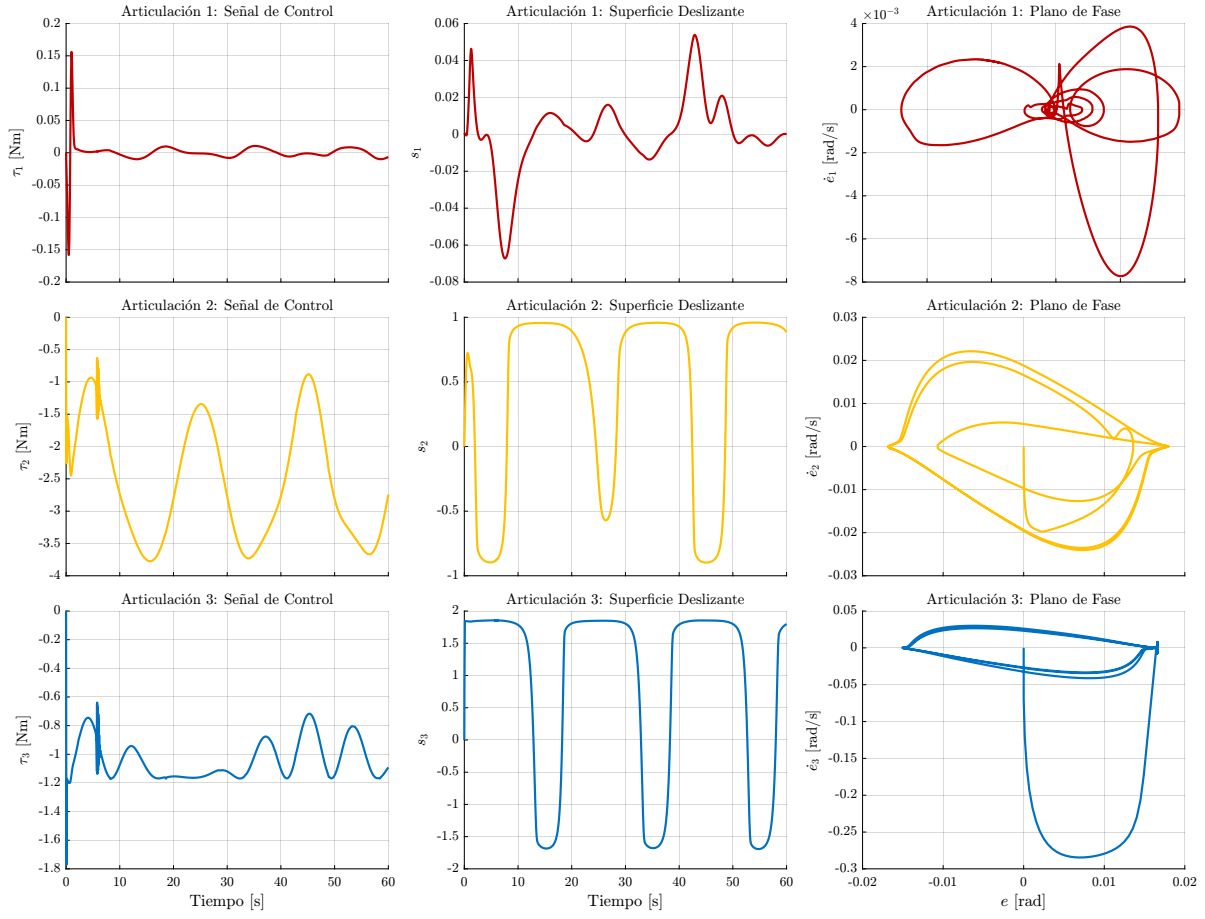


Figura 3.16: Simulación señales de control esquema barrera.

Los resultados de las simulaciones correspondientes al esquema basado en funciones barrera se presentan en la figura 3.15. En esta se observa que los errores de seguimiento permanecen acotados dentro de la vecindad definida por ϵ , lo cual es consecuencia directa de la naturaleza adaptativa del controlador. También, destaca la ausencia de vibraciones tanto en el error como en las señales de control figura 3.16, cumpliendo así con el objetivo de mitigar el fenómeno de chattering.

3.6.2. Controlador Barrera Cuadrática

La ley de control BFAQ completa se muestra en la ecuación (2.133). Sin embargo, para nuestro análisis se asume que las trayectorias del sistema se encuentran dentro de la vecindad $(-\epsilon, \epsilon)$, por lo que utilizamos exclusivamente el término central de la barrera:

$$u_{qbf}(\sigma) = \frac{U_m}{\epsilon^2} \sigma^2 \text{sign}(\sigma) \quad (3.97)$$

Ahora consideremos la ecuación (3.63), la cual describe la dinámica reducida obtenida mediante el esquema de dinámica inversa. Se propone una modificación que completa esta dinámica y, para analizar la estabilidad de este nuevo controlador, retomamos la variable deslizante definida en ecuación (3.56).

Dado que como en los casos anteriores la estrategia para abordar la implementación del controlador fué el de la dinámica inversa, es posible nuevamente tomar los n subsistemas resultantes y trabajar en ellos independientemente por lo tanto en cada uno de los eslabones tendremos la siguiente ley de control para el i -ésimo eslabón está dada por:

$$u_{BFAQ_i} = \frac{U_{m_i}}{\epsilon_i^2} \sigma_i^2 \text{sign}(\sigma_i) \quad (3.98)$$

Para completar la dinámica de la superficie deslizante en lazo cerrado, al término de barrera se le suman los parámetros conocidos. Por lo tanto, la ley de control auxiliar modificada se define como:

$$\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{q}}_{des} - \mathbf{\Lambda} \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{u}_{qbf} \quad (3.99)$$

Con esta entrada auxiliar, el par de control final aplicado a las articulaciones del manipulador es:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (3.100)$$

Finalmente, al sustituir la ley de control en el modelo dinámico y cerrar el lazo, la dinámica de la superficie de deslizamiento resultante es la siguiente:

$$\dot{\sigma} = -\frac{U_m}{\epsilon^2} \sigma^2 \text{sign}(\sigma) + f(\mathbf{q}, t) \quad (3.101)$$

donde el término $\mathbf{f}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{G}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\delta}(t))$ representa un vector de perturbaciones cuyas cotas están definidas en ecuaciones (2.13) y (2.17).

Los resultados obtenidos de las simulaciones se muestran a continuación:

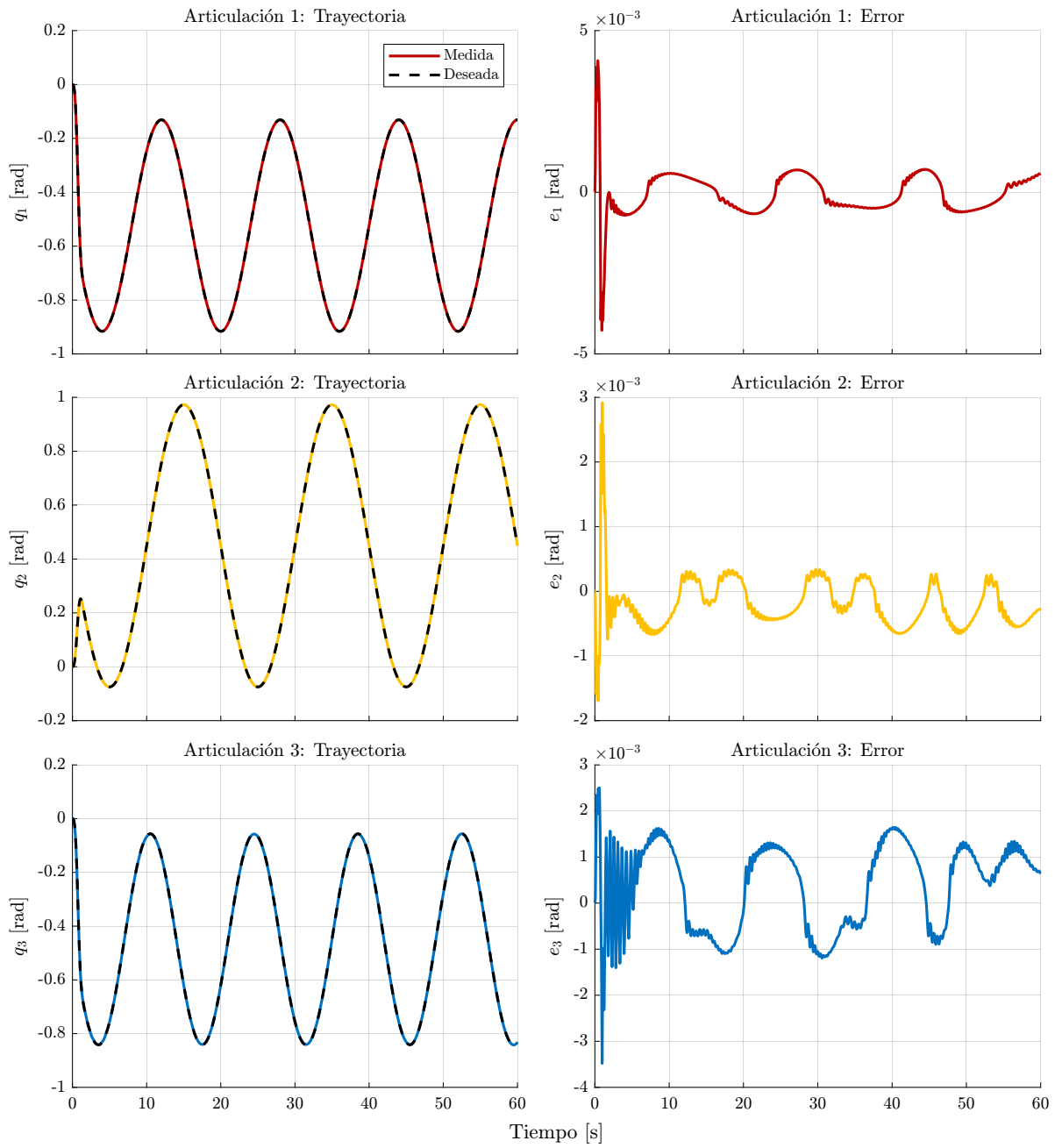


Figura 3.17: Simulación seguimiento de trayectoria controlador barrera cuadrática.

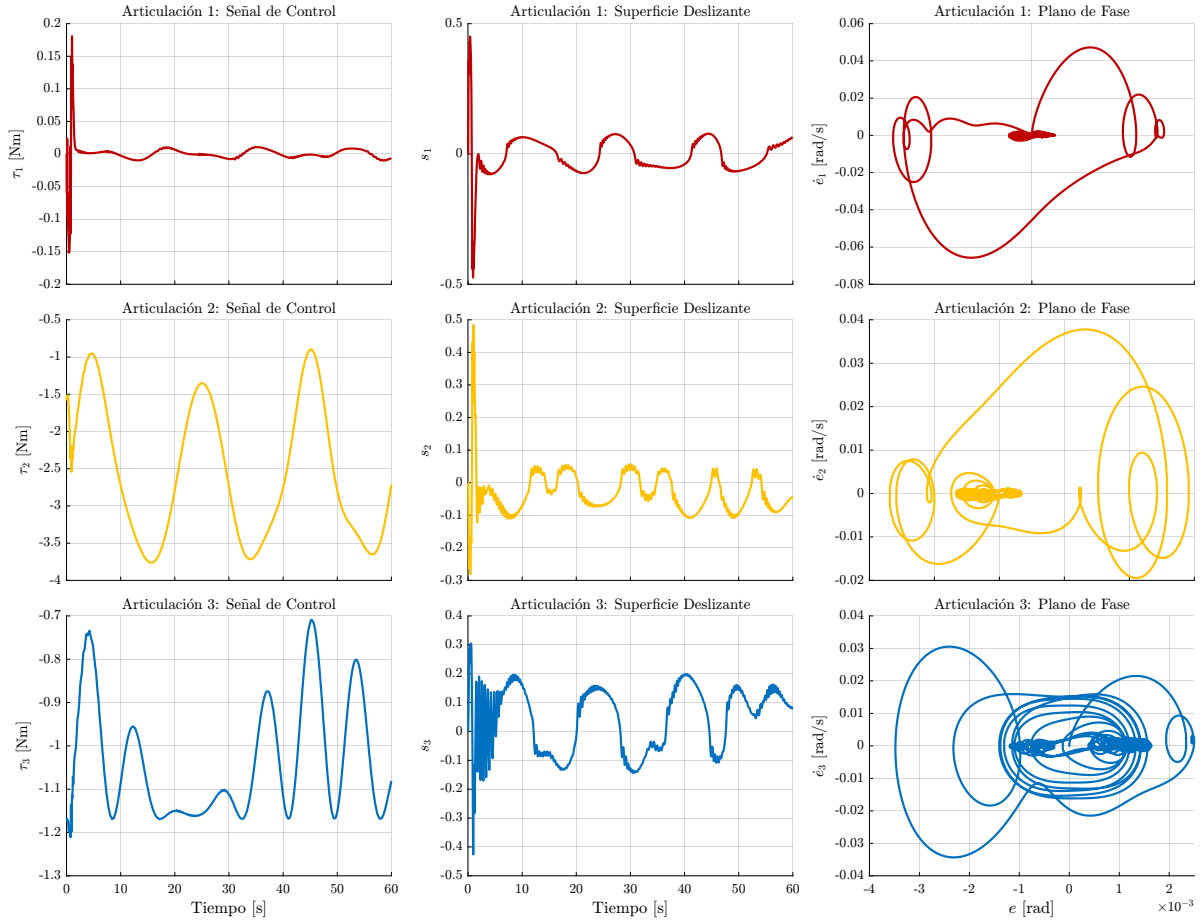


Figura 3.18: Simulación señales de control esquema barrera cuadrática.

En las figuras 3.17 y 3.18 se puede observar la implementación de la BFASMC, cuyos errores se aprecian notablemente acotados inferior y superiormente, estos errores aunque son bajos, del orden de 10^{-3} , son mayores que los errores obtenidos por los algoritmos de control por modos deslizantes continuos STA y PID-CSMC y cuyo comportamiento es el esperado.

Respecto a la señal de control, se ve que es suave y no se aprecian comportamientos de alta frecuencia, a diferencia nuevamente de los controladores por modos deslizantes continuos, donde la señal es suave pero existe, aunque mínimo, las oscilaciones de alta frecuencia.

Capítulo 4

Resultados experimentales

4.1. El robot manipulador QARM

El modelo del manipulador utilizado en este trabajo se trata del Quanser QArm, un robot manipulador serial cuyas características y clasificación de acuerdo a la sección 1.2 se describen a continuación:

Característica	Especificación
Descripción	4
Actuadores	4 Servomotores
Articulaciones	4 Angulares

Tabla 4.1: Características generales de la estructura del robot.

Como se puede apreciar en la tabla y en la figura 4.1, el robot tiene 4 grados de libertad, siendo los eslabones principales:

- **1:** Base.
- **2:** Hombro.
- **2:** Codo.
- **2:** Muñeca.

Si prestamos atención a la figura 4.1, específicamente en el efector final, si este se encuentra operando sin carga o sin manipular cualquier otro objeto, al ser el elemento terminal de



Figura 4.1: Figura del robot

la cadena cinemática, sus parámetros inerciales son significativamente menores que los del resto del mecanismo, Esto lleva a que las fuerzas inerciales de Coriolis o centrífugas que esta articulación induce en el sistema restante y en ella no representan perturbaciones por acoplamiento de gran magnitud, por lo que para el estudio de esta planta se excluirá de la evaluación de control de seguimiento de trayectoria, dicho esto debe mencionarse que para la obtención del modelo dinámico se consideró todo el sistema.

4.2. Actuadores

De acuerdo con el 1.1, el manipulador QArm posee actuadores tipo servomotores de corriente directa de la marca DYNAMIXEL modelo XM540-W270-T/R, cuyas características tomadas de ROBOTIS 2026 se definen a continuación:

Característica	Especificación
Unidad de procesamiento (MCU)	ARM Cortex-M3
Tipo de motor	CD imanes permanente
Sensor de posición	Encoder absoluto sin contacto (12 bits, 360°)
Juego mecánico (<i>Backlash</i>)	15 arcmin
Modos de control	Corriente y PWM
Variables de retroalimentación	Posición angular
Masa	165 g
Dimensiones (Ancho $\times$ Largo $\times$ Alto)	33.5 $\times$ 58.5 $\times$ 44 mm

Tabla 4.2: Características generales y de construcción del servomotor.

Símbolo	Descripción	Valor	Unidad
V_{max}	Voltaje máximo (nominal)	15	V
ω_0	Velocidad sin carga (en vacío)	30	rpm
τ_{rb}	Torque de rotor bloqueado (stall torque)	10.6	N·m
I_{rb}	Corriente de rotor bloqueado	4.4	A
r	Relación de reducción de la caja de engranes	272.5 : 1	Adimensional
I_0	Corriente sin carga (en vacío)	0.07	A

Tabla 4.3: Parámetros electromecánicos de los servomotores.

4.3. Dinámica de los Actuadores

Con el fin de retroalimentar toda la dinámica posible de la planta y reducir así la compensación por parte de los controladores y por lo tanto las ganancias utilizadas, agregamos al modelo dinámico del sistema el comportamiento de los actuadores. Al ser motores de corriente directa recurrimos a la ecuación (2.23).

El par en rotor bloqueado despues de la transmisión reportado por el fabricante, $\tau_{stall_ext} = 10.6 \text{ N} \cdot \text{m}$, es el resultado de la amplificación mecánica del tren de engranajes. Para obtener el par generado internamente por el rotor, τ_{stall_int} , se divide este valor entre la relación de reducción:

$$\tau_{stall_int} = \frac{\tau_{stall_ext}}{r_k} = \frac{10.6}{272.5} \approx 0.038899 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (4.1)$$

Por definición de las máquinas de corriente directa, la constante electromagnética del motor relaciona directamente el par mecánico producido con la corriente consumida siendo::

$$K_{mk} = \frac{\tau_{stall_int} \cdot R}{V_{nom}} \quad (4.2)$$

Sustituyendo los valores numéricos del actuador utilizado:

$$K_{mk} = \frac{0.038899 \cdot 2.72}{12} \approx 0.008817 \text{ N} \cdot \text{m/A} \quad (4.3)$$

Una vez determinada la constante K_{mk} , es posible calcular la fricción viscosa analizando el motor sin carga. En este estado la aceleración es nula y la totalidad del par electromagnético generado se invierte en vencer la fricción viscosa del propio rotor. El equilibrio de pares se expresa como:

$$\tau_{electromagnetico} = \tau_{friccion_interna} \quad (4.4)$$

Desarrollando ambos términos en función de sus parámetros físicos correspondientes:

$$K_{mk} \cdot I_{noload} = B_{mk} \cdot \omega_{interno} \quad (4.5)$$

La velocidad interna del rotor, $\omega_{interno}$, se calcula multiplicando la velocidad en vacío a la salida despues de la transmisión, $\omega_{noload} \approx 3.141592 \text{ rad/s}$, por la relación de transmisión r_k :

$$\omega_{interno} = \omega_{noload} \cdot r_k = 3.141592 \cdot 272.5 \approx 856.0838 \text{ rad/s} \quad (4.6)$$

Despejando el coeficiente de fricción viscosa del rotor interno de la ecuación de equilibrio y evaluando con la corriente en vacío del fabricante, $I_{noload} = 0.07$ A:

$$B_{mk} = \frac{K_{mk} \cdot I_{noload}}{\omega_{noload} \cdot r_k} \quad (4.7)$$

$$B_{mk} = \frac{0.008817 \cdot 0.07}{856.0838} \approx 7.209 \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad} \quad (4.8)$$

Para llevar esto a la forma indicada por la ecuación (2.23), se multiplica el coeficiente de fricción viscosa por el cuadrado de la reducción:

$$B_A = (7.209 \times 10^{-7}) \cdot (272.5)^2 \approx 0.05353 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad} \quad (4.9)$$

De la misma manera, como se indica en la ecuación (2.23) donde se describe el modelo dinámico completo del motor, el componente inercial del actuador se calcula como el producto de la inercia interna por el cuadrado de la relación de transmisión, $J_{mk} r_k^2$.

A partir de las especificaciones proporcionadas por el fabricante, se sabe que la inercia del actuador, medida antes de la transmisión mecánica, es de $J_{mk} = 4.82 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Resultando en:

$$M_A = (4.82 \times 10^{-7}) \cdot (272.5)^2 \quad (4.10)$$

$$M_A \approx 0.03579 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (4.11)$$

Para implementar la dinámica de los actuadores dentro del modelo general del manipulador robótico, se considera que todos los motores utilizados en la planta física son gemelos. también es sabido, por medio de las especificaciones técnicas del brazo que para la segunda articulación se utiliza un arreglo de doble motor, por lo que los valores de inercia y fricción calculados previamente deben duplicarse exclusivamente para este eslabón.

A partir de los valores calculados, se construye una matriz diagonal constante $\mathbf{M}_A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ que concentra las inercias de todos los motores. Esta matriz es la siguiente:

$$\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} 0.03579 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.07158 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03579 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.03579 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Esta matriz de inercia de los actuadores se suma directamente a la matriz de inercia del manipulador $\mathbf{M}(\mathbf{q})$.

De la misma forma, se define una matriz diagonal $\mathbf{B}_m \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ para representar la fricción viscosa de los actuadores. Nuevamente, el elemento correspondiente a la segunda articulación contiene el doble de la fricción:

$$\mathbf{B}_A = \begin{bmatrix} 0.05353 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10706 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05353 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05353 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Finalmente, integrando estos parámetros electromecánicos, el modelo dinámico completo y agrupado del manipulador toma la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{M}(\mathbf{q}) + \mathbf{M}_A) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_A \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (4.14)$$

4.4. Parámetros y consideraciones

Para la implementación en la planta real todos los controladores descritos necesario conocer los parámetros físicos para el modelo dinámico del brazo, los cuales son proporcionados por el fabricante y se muestran a continuación:

Símbolo	Descripción	Valor	Unidad
m_1	Masa del eslabón 1	0.7909	kg
m_2	Masa del eslabón 2	0.4593	kg
m_3	Masa del eslabón 3	0.2689	kg
m_4	Masa del eslabón 4	0.2573	kg
I_{1a}	Momento de inercia axial del eslabón 1	0.0015	kg·m ²
I_{2a}	Momento de inercia axial del eslabón 2	0.0003	kg·m ²
I_{3a}	Momento de inercia axial del eslabón 3	0.0004	kg·m ²
I_{4a}	Momento de inercia axial del eslabón 4	0.0007	kg·m ²
λ_{c1}	Distancia al centro de masa del eslabón 1	0.0397	m
λ_{c2}	Distancia al centro de masa del eslabón 2	0.1068	m
λ_{c3}	Distancia al centro de masa del eslabón 3	0.1562	m
λ_{c4}	Distancia al centro de masa del eslabón 4	0.0996	m
I_{2l}	Momento de inercia longitudinal del eslabón 2	0.0097	kg·m ²
I_{3l}	Momento de inercia longitudinal del eslabón 3	0.0019	kg·m ²
I_{4l}	Momento de inercia longitudinal del eslabón 4	0.0013	kg·m ²
l_1	Longitud física del segmento 1	0.1401	m
l_2	Longitud física del segmento 2	0.3498	m
l_3	Longitud física del segmento 3	0.0501	m
l_4	Longitud física del segmento 4	0.2499	m
l_5	Longitud física del segmento 5	0.1503	m
λ_1	Longitud articular efectiva del eslabón 1	0.1402	m
λ_2	Longitud articular efectiva del eslabón 2	0.3537	m
λ_3	Longitud articular efectiva del eslabón 3	0.4	m
m_L	Masa de la carga útil	0	kg

Tabla 4.4: Parámetros físicos y dinámicos del manipulador robótico.

4.5. Trayectoria propuesta

Dado que el objetivo principal de la tesis es evaluar algoritmos de control en manipuladores robóticos en seguimiento de trayectoria, se eligió la siguiente propuesta en Kelly et al. 2003

$$q = b \left(1 - e^{-2t^3}\right) + c \left(1 - e^{-2t^3}\right) \sin(\omega t) \quad (4.15)$$

Y cuyas derivadas obtenidas analíticamente para velocidad y aceleración respectivamente son:

$$\dot{q} = 6bt^2 e^{-2t^3} + 6ct^2 e^{-2t^3} \sin(\omega t) + c \left(1 - e^{-2t^3}\right) \omega \cos(\omega t) \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q} = & 12bte^{-2t^3} - 36bt^4 e^{-2t^3} + 12cte^{-2t^3} \sin(\omega t) \\ & - 36ct^4 e^{-2t^3} \sin(\omega t) + 12ct^2 e^{-2t^3} \omega \cos(\omega t) \\ & - c \left(1 - e^{-2t^3}\right) \omega^2 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Donde b , c y ω definen la amplitud y frecuencia de la trayectoria. Como se puede observar, esta trayectoria posee características relevantes para evaluar el desempeño del robot, tales como:

- Continuidad y comportamiento sinusoidal periódico.
- Exigencia de una selección precisa tanto de amplitudes como de frecuencias para evitar la saturación de los motores y posibles colisiones dentro del espacio de trabajo.

Los parámetros elegidos para cada uno de las articulaciones son los siguientes:

Articulación	b [rad]	c [rad]	ω [rad/s]
q_1	$-\pi/6$	$-\pi/8$	$\pi/8$
q_2	$\pi/7$	$-\pi/6$	$\pi/10$
q_3	$-\pi/7$	$-\pi/8$	$\pi/7$
q_4	0	0	0

Tabla 4.5: Parámetros seleccionados para las trayectorias de referencia.

Como ya se ha mencionado, la última articulación no será evaluada en el seguimiento de trayectoria, por lo tanto eliminamos el movimiento en esta última.

4.6. Conversión de Par a PWM

Para la implementación física de las leyes de control, las cuales están definidas teóricamente en términos de par τ en N-M, es indispensable realizar una conversión a la señal de control que admiten los actuadores del robot, en este caso, modulación por ancho de pulso, PWM. Esta señal de alta frecuencia controla directamente el voltaje aplicado a los motores.

Siguiendo el desarrollo de León 2024, se asume que la dinámica eléctrica es mucho más rápida que la mecánica, se pueden despreciar los efectos de la inductancia y la fuerza electromotriz EMF, aproximando el voltaje en función de la resistencia del motor y la corriente $V \approx Ri$. Sin embargo, la conversión directa de par a corriente a través de una constante lineal, K_t resulta inexacta debido al comportamiento no lineal de los motores en gran parte de su rango de operación, como puede ser apreciado en la figura 4.2.

Para garantizar una conversión precisa, se utilizará el modelo de la relación par-corriente mediante una función a trozos que combina una relación lineal en las proximidades del cruce por cero y un ajuste polinomial de segundo orden para el resto de los valores, definida por la siguiente expresión igualmente propuesta en León 2024:

$$i = \begin{cases} 0.4351\tau & \text{si } -0.17 \leq \tau \leq 0.17, \\ 0.017226\tau^2 + 0.301767\tau + 0.179118 & \text{si } \tau > 0.17, \\ -0.017226\tau^2 - 0.301767\tau - 0.179118 & \text{si } \tau < -0.17. \end{cases} \quad (4.18)$$

Finalmente, una vez obtenida la corriente requerida i , se calcula el voltaje proporcional y se normaliza sobre el voltaje máximo de operación, 12 V, para obtener el ciclo de trabajo del PWM.

$$\text{PWM} = \frac{Ri}{12} = \frac{V}{12}. \quad (4.19)$$

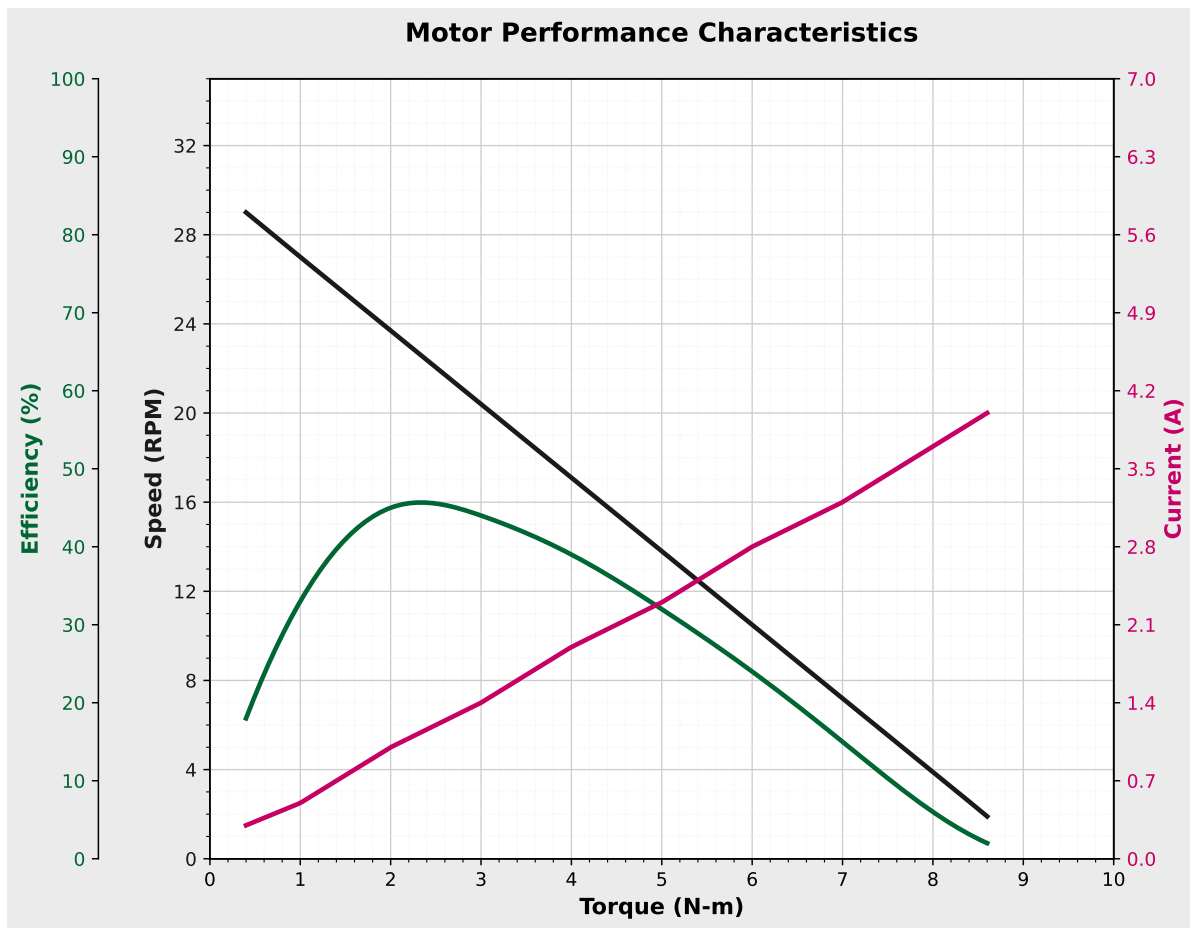


Figura 4.2: Conversión experimental de par a PWM.

4.7. Par Calculado

Para la implementación de los controladores en la planta real se utilizó la herramienta de Matlab-Simulink cuyo diagrama se presenta a continuación:

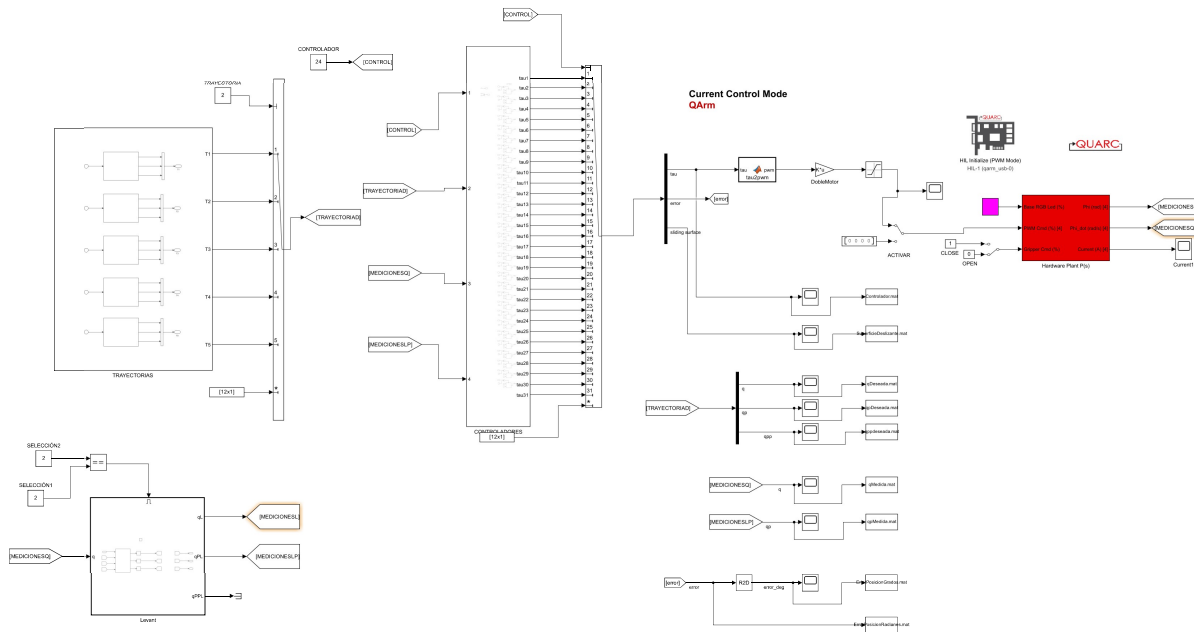


Figura 4.3: Diagrama de Simulink utilizado para la implementación experimental en la planta real.

Trayectoria y errores

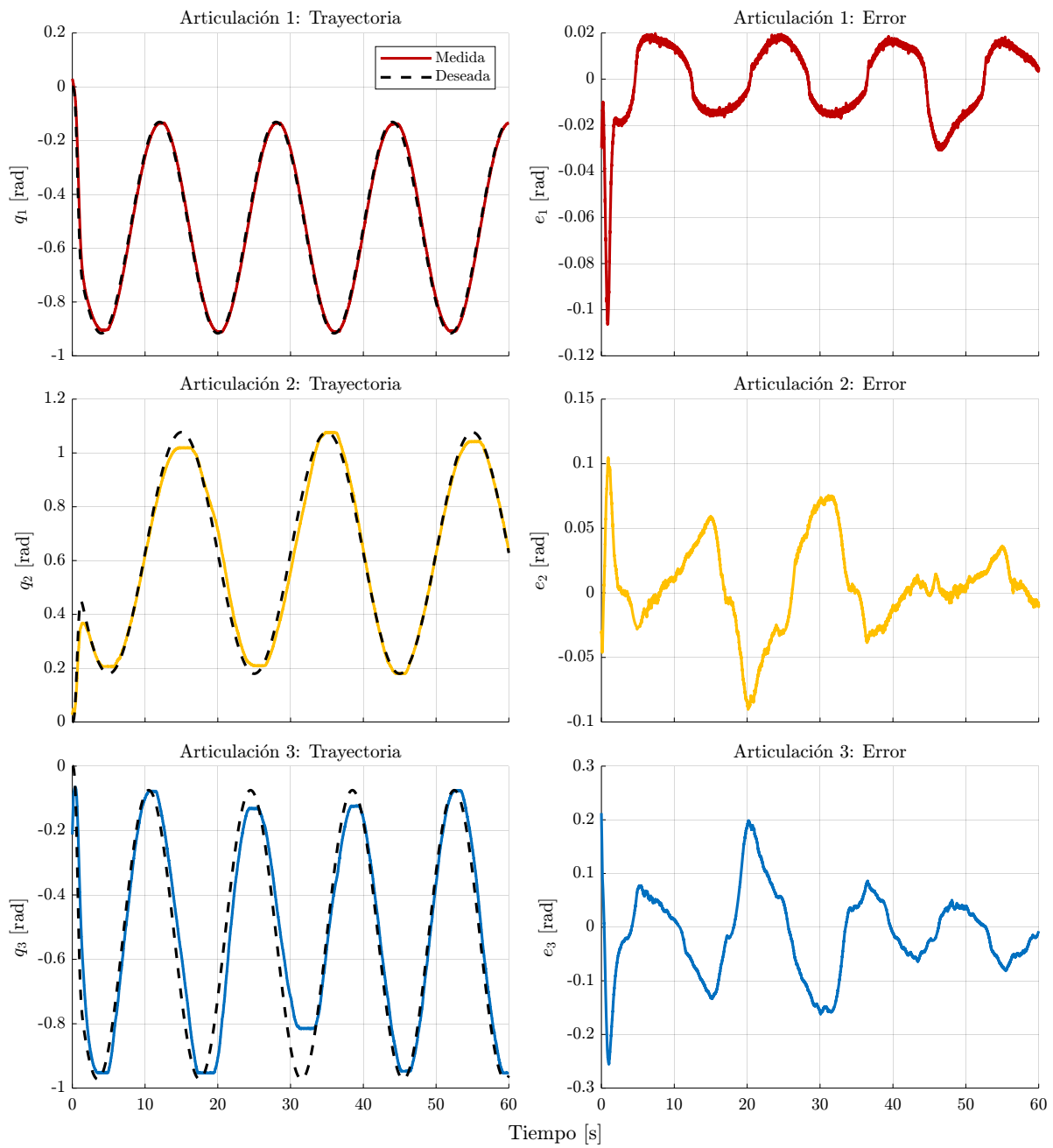


Figura 4.4: Resultados experimentales seguimiento de trayectoria controlador par calculado.

Señal de control y plano de fase

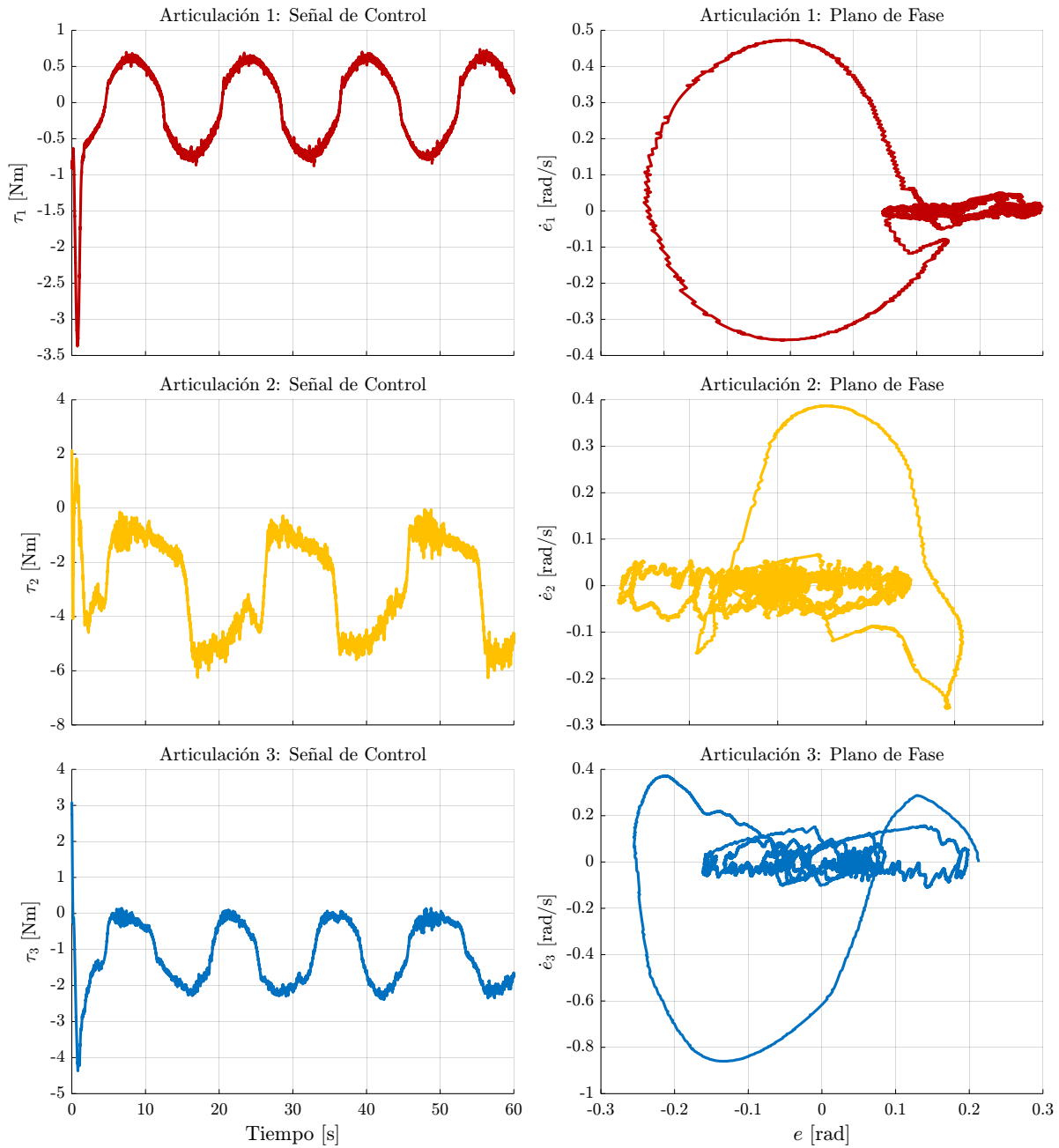


Figura 4.5: Resultados experimentales señales de control esquema par calculado.

Los resultados experimentales obtenidos en la planta física real mediante el esquema de par calculado se presentan en la figura 4.5. A diferencia de los escenarios de simulación mostrados en la figura 3.3, la implementación física muestra un incremento notable en el error de seguimiento de trayectoria, siendo la tercera articulación el peor de los casos con

un error de 0.2 rad. También es importante mencionar que la señal de control mantiene un comportamiento continuo y no se aprecian comportamientos de alta frecuencia, lo cual es esperado en esta estrategia de control no lineal.

4.8. SlotineLi

Trayectoria y errores

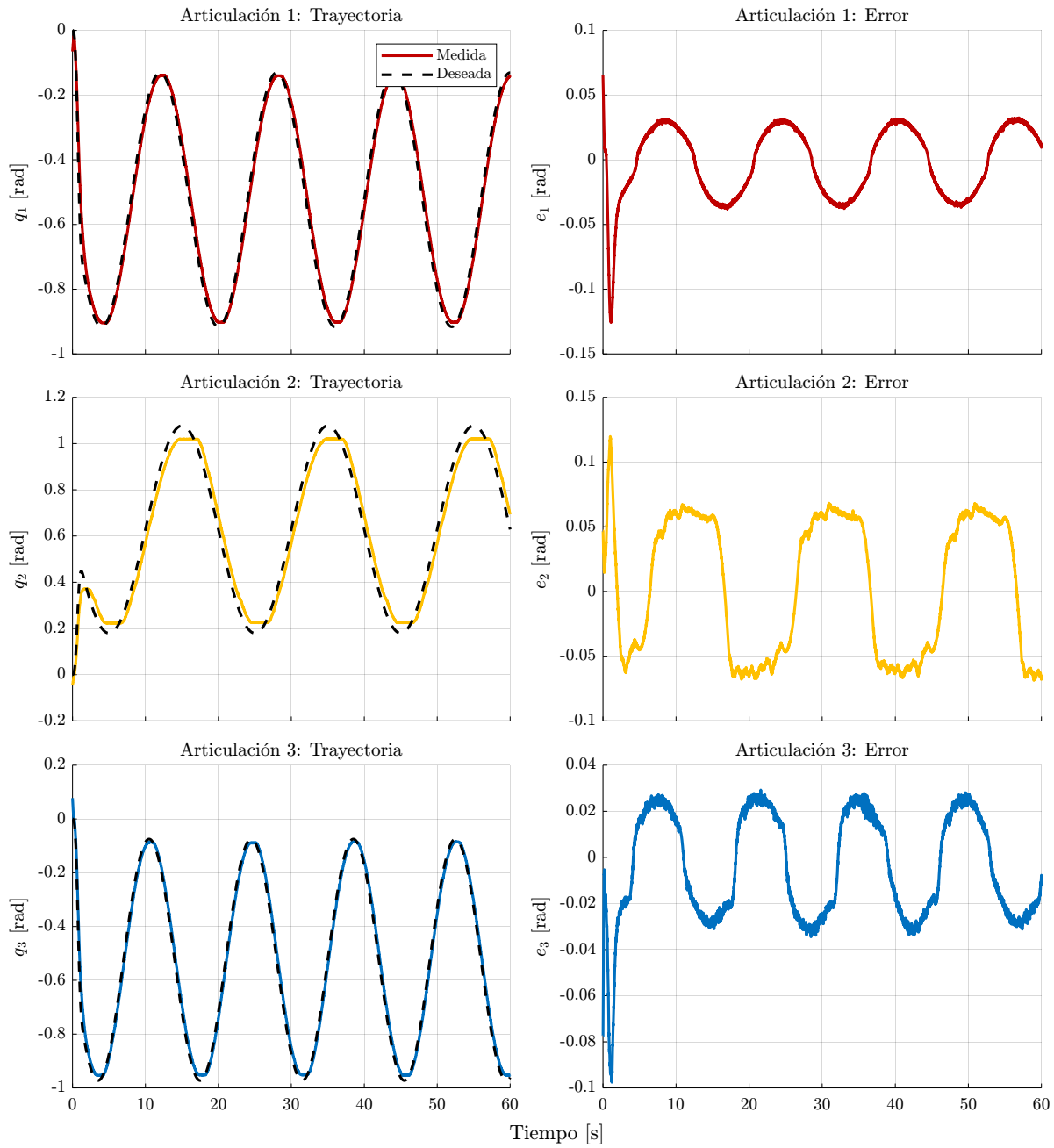


Figura 4.6: Resultados experimentales seguimiento de trayectoria controlador SlotineLi.

Señal de control y plano de fase

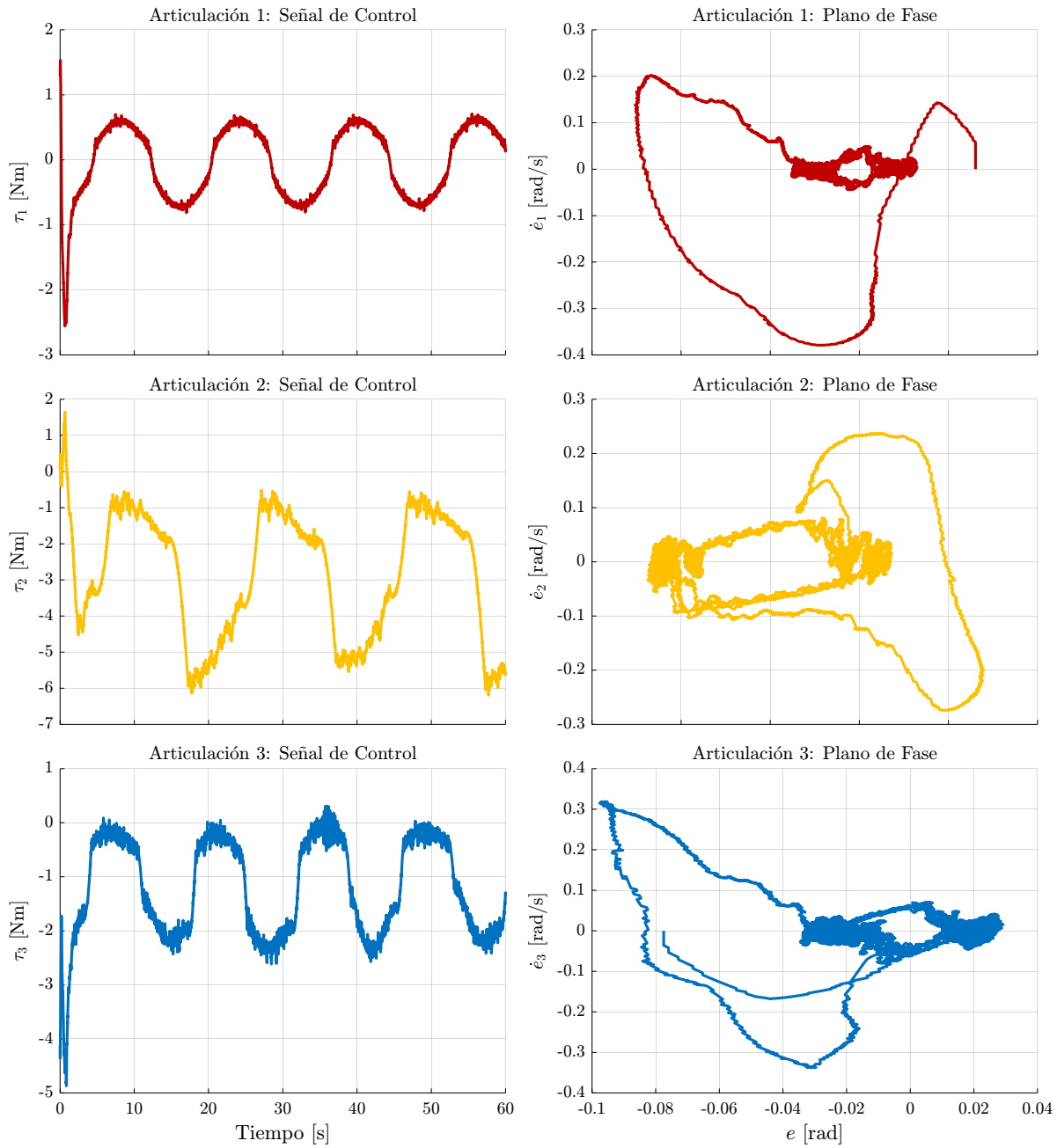


Figura 4.7: Resultados experimentales señales de control esquema SlotineLi.

La implementación en la planta real del controlador clásico de Slotine-Li se aprecia en la figura 4.7. Los resultados revelan un desempeño adecuado en el seguimiento de trayectoria, siendo notablemente superior en la tercera articulación respecto al controlador por par calculado. Asimismo, la acción de control se caracteriza por ser suave y carente de oscilaciones.

4.9. PID

Trayectoria y errores

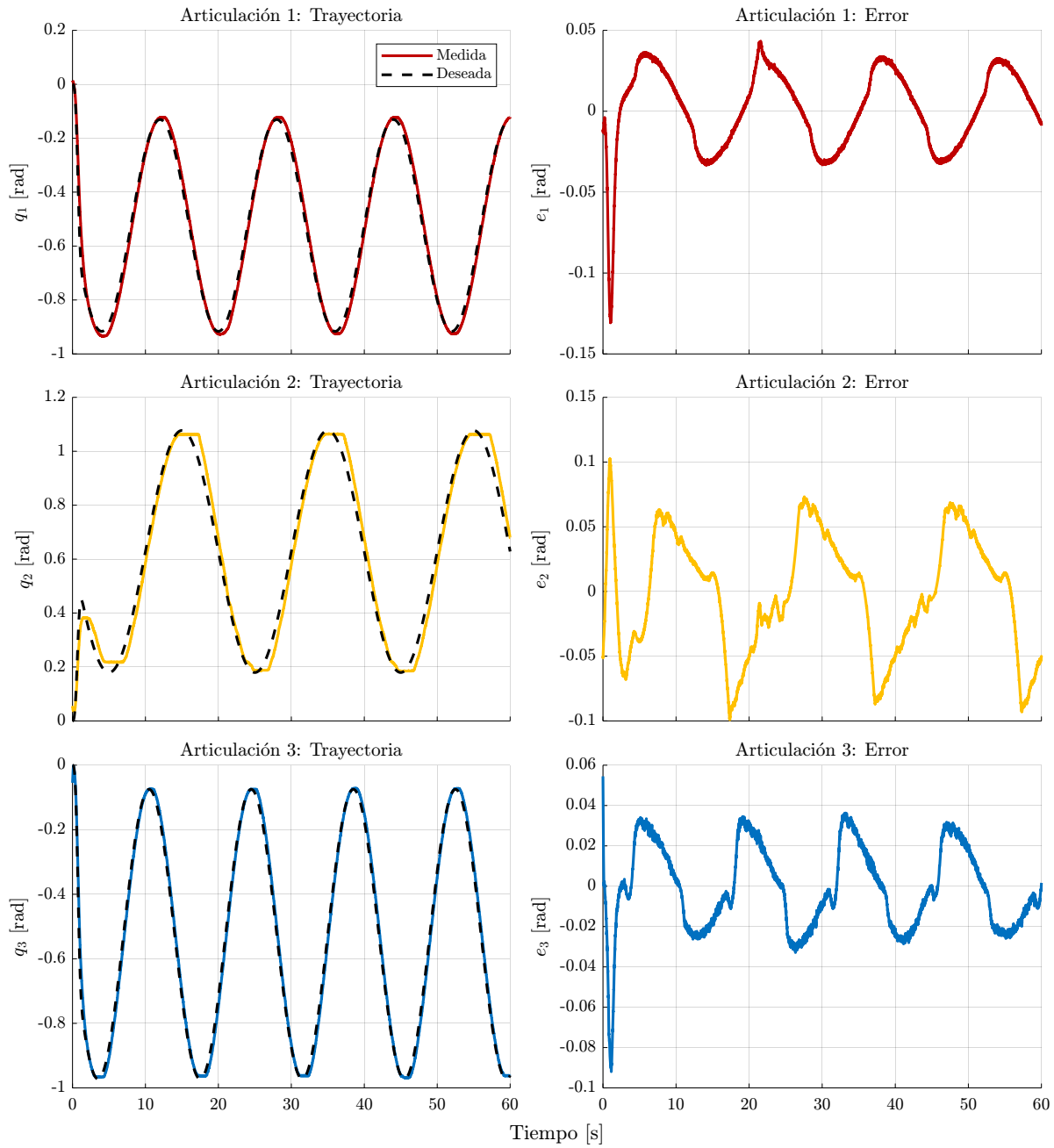


Figura 4.8: Resultados experimentales seguimiento de trayectoria controlador PID.

Señal de control y plano de fase

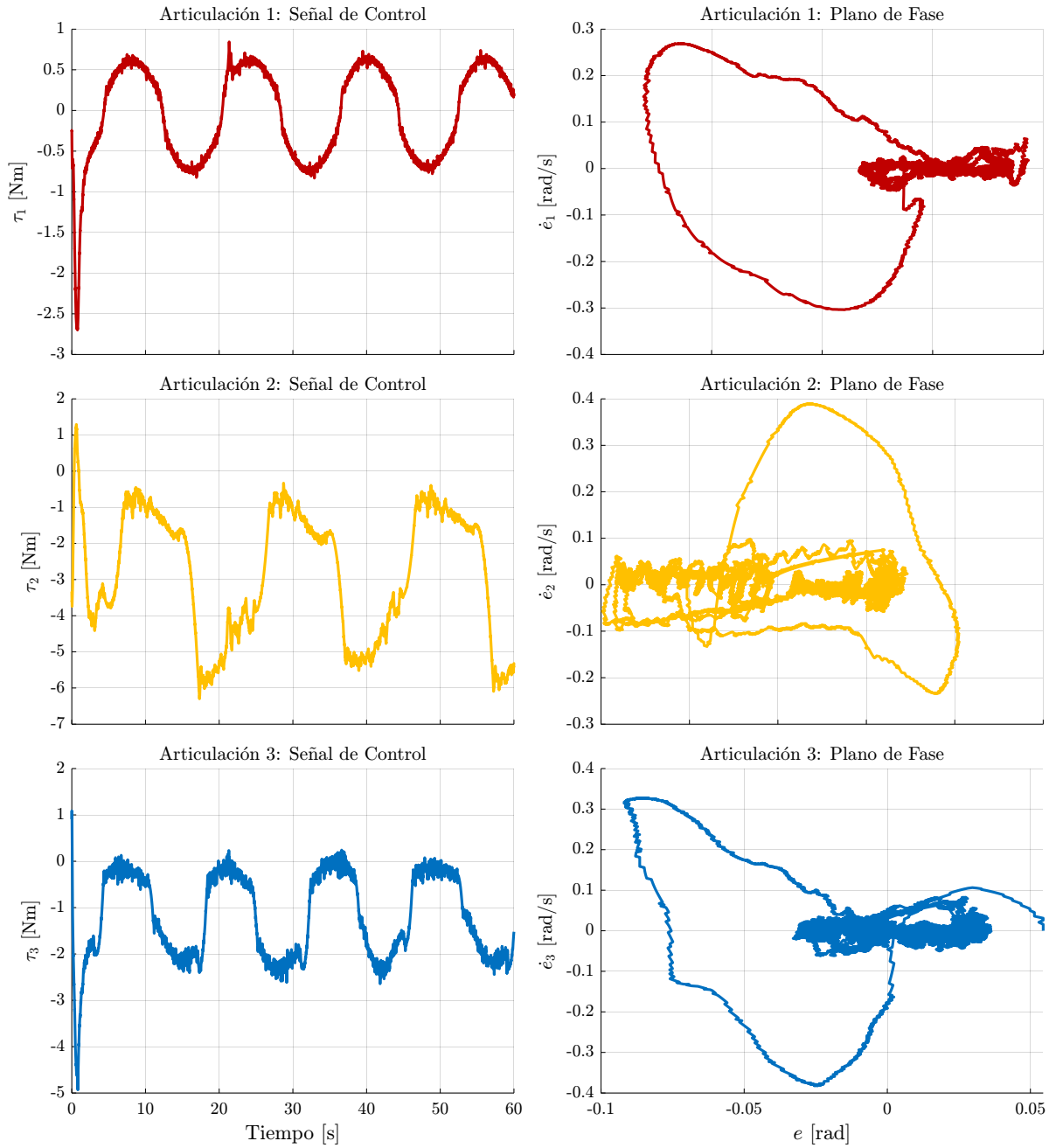


Figura 4.9: Resultados experimentales señales de control esquema PID.

El comportamiento dinámico del sistema bajo la acción del controlador PID en la figura 4.8, denota un desempeño en el seguimiento de trayectoria similar al esquema Slotine-Li. Con respecto a esta implementación, es importante resaltar la presencia de ligeros sobrepasos en la segunda articulación, un fenómeno que no se manifestó en las estrategias previas y que

se atribuye al efecto acumulativo de la acción integral. Por otra parte, las señales de control correspondientes, figura 4.9 no presentan oscilaciones.

4.10. STANM

Los resultados experimentales de la implementación del algoritmo Super-Twisting se muestran a continuación:

Trayectoria y errores

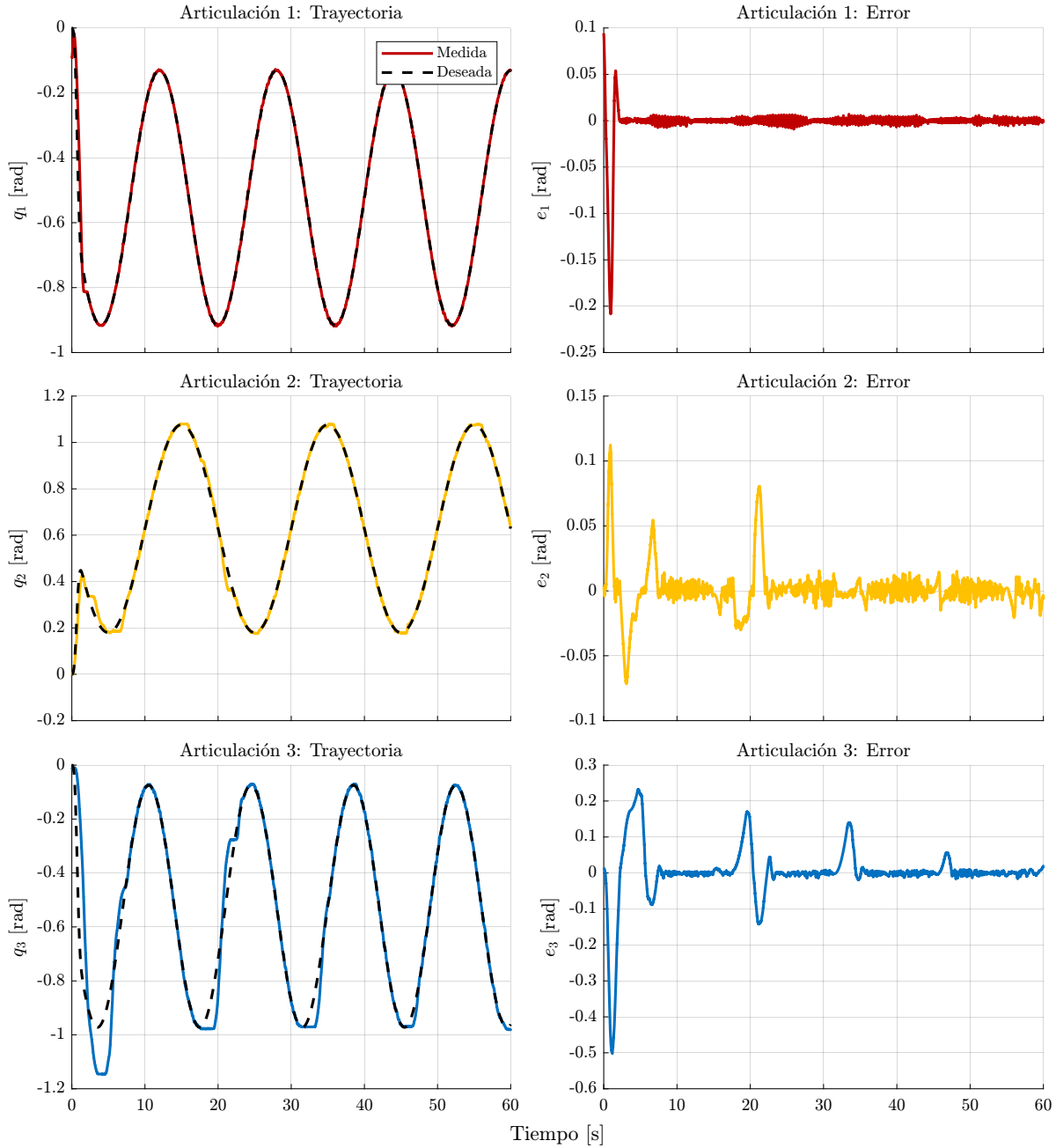


Figura 4.10: Resultados experimentales seguimiento de trayectoria controlador STA.

Señal de control, superficie deslizante y plano de fase

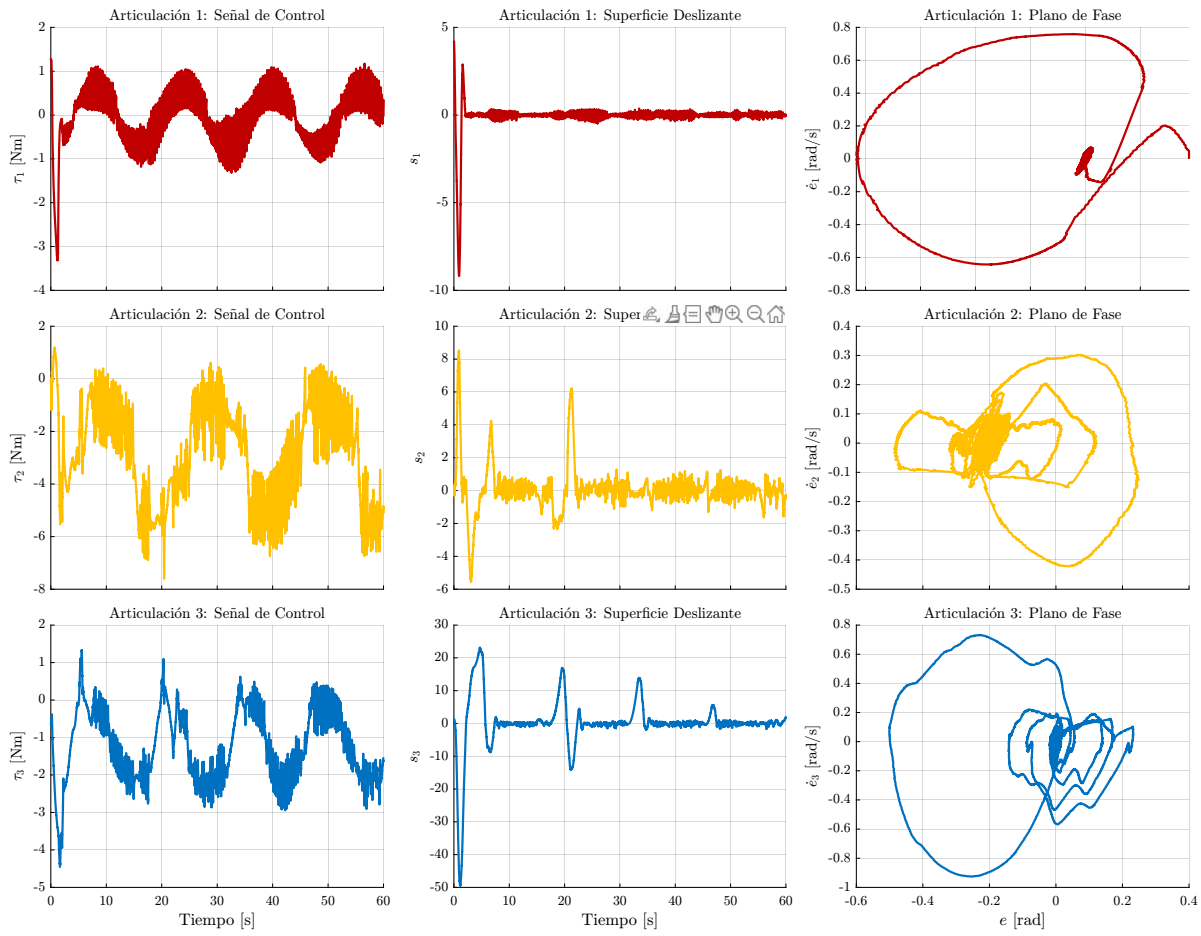


Figura 4.11: Resultados experimentales señales de control esquema STA.

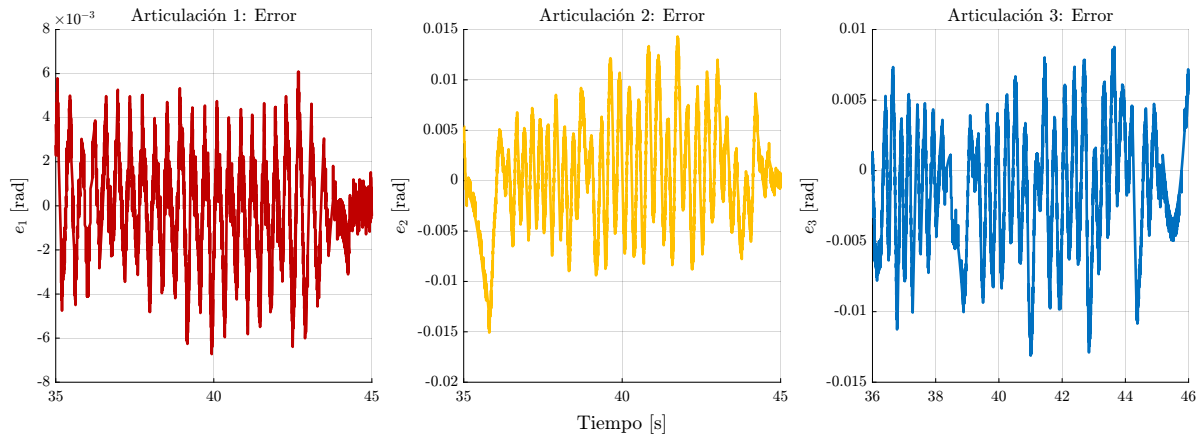


Figura 4.12: Acercamiento de los resultados experimentales del esquema STA.

Como primera aproximación dentro del marco de modos deslizantes de segundo orden, se evaluó el algoritmo Super-Twisting, cuyos resultados se reportan en la figura 4.10. Los errores medidos muestran una atenuación significativa en el seguimiento de trayectoria una vez alcanzada la superficie de deslizamiento, contrastando con el error inicial durante la fase de alcance. Sin embargo, el controlador exhibe degradación en el desempeño durante los cruces por cero de la velocidad debido al efecto de fricción seca no modelada, específicamente en la articulación 3.

Es necesario mencionar que este esquema constituye el primer escenario experimental en tener un comportamiento oscilatorio en la señal de control. Aunque este efecto es perceptible, no compromete la integridad física de los actuadores.

La diferencia respecto a la simulación, donde la señal de control es mayormente suave, está en que la implementación física incorpora perturbaciones externas e incertidumbres dinámicas y paramétricas, forzando al controlador a incrementar la ganancia, lo cual deriva en vibraciones y chattering. Finalmente, a través del plano de fase figura 4.11 se verifica la convergencia a cero de la superficie deslizante.

4.11. PID Like

Trayectoria y errores

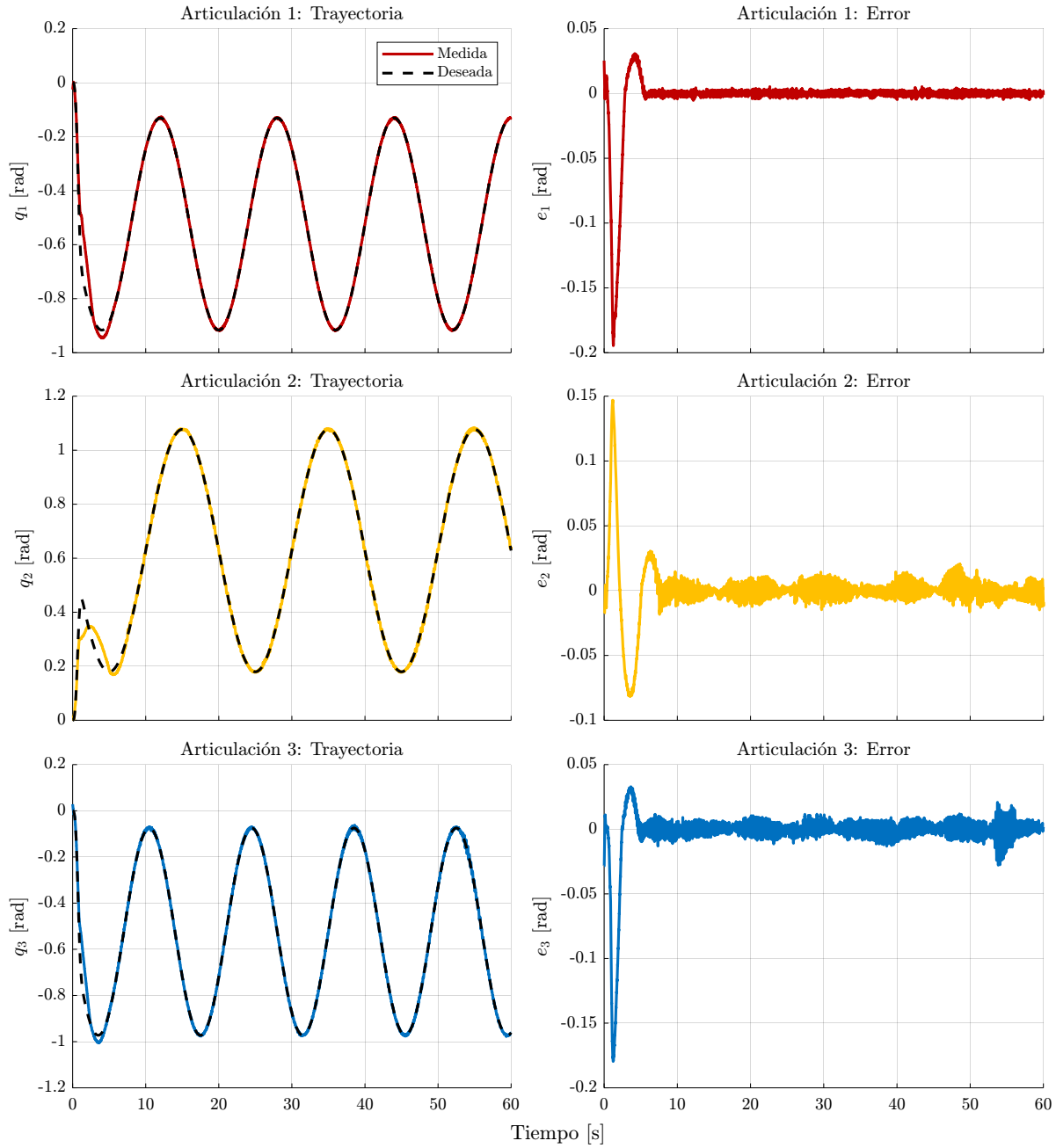


Figura 4.13: Resultados experimentales seguimiento de trayectoria controlador PID-CSMC.

Señal de control y plano de fase

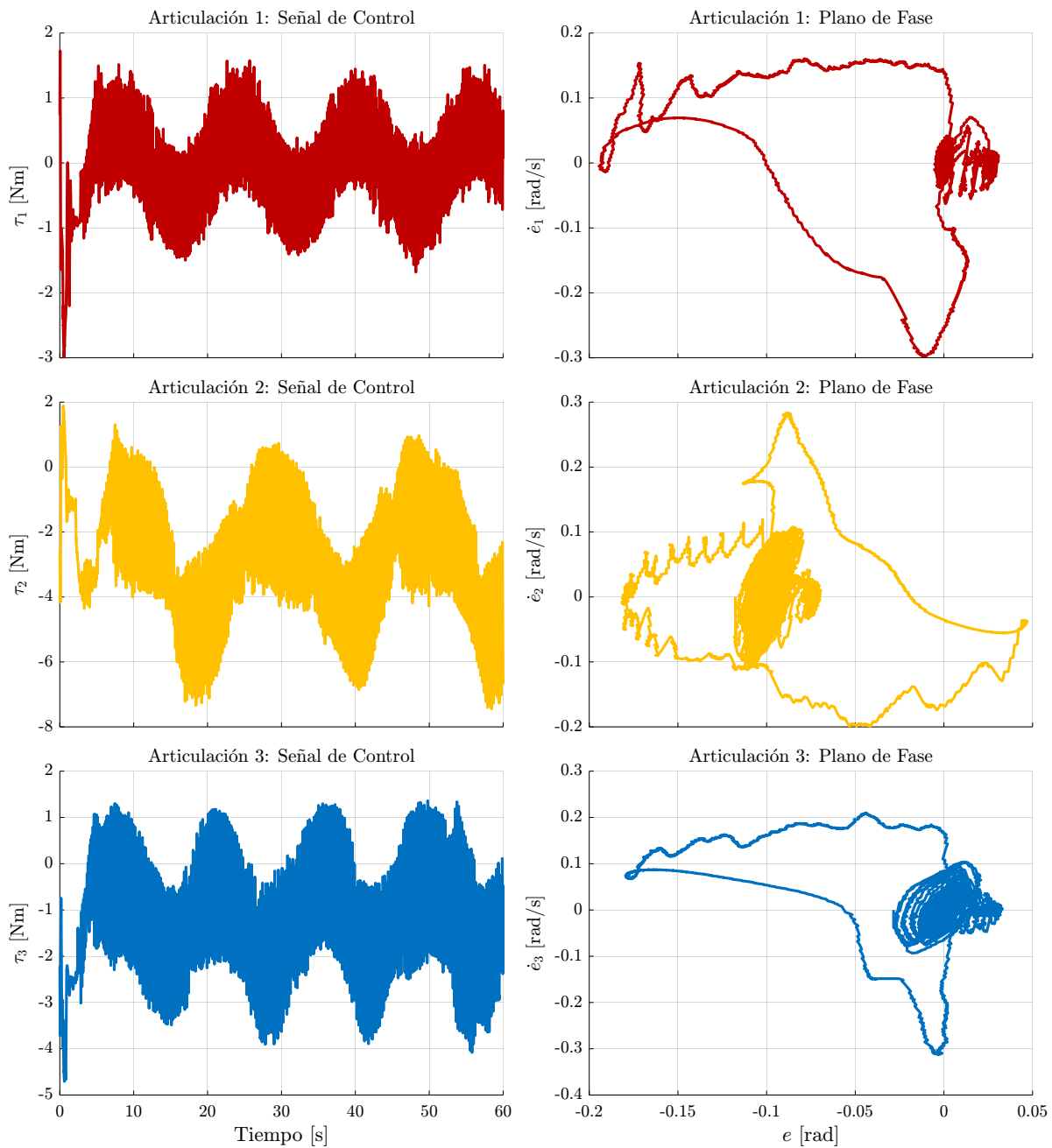


Figura 4.14: Resultados experimentales señales de control esquema PID-CSMC.

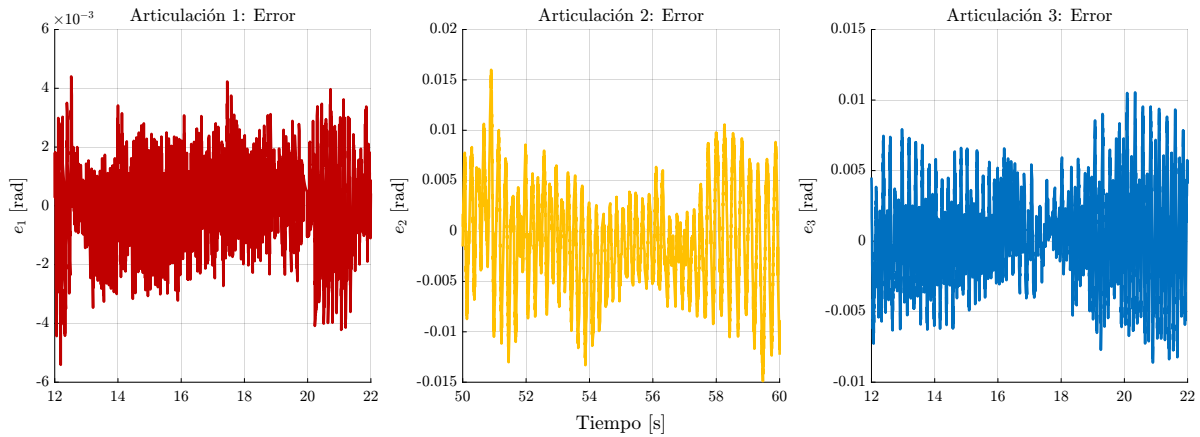


Figura 4.15: Acercamiento de los resultados experimentales del esquema PID-CSMC.

El controlador PID-CSMC se implementó de manera exitosa en el manipulador físico, cuyos resultados se concentran en figura 4.13. Es de gran importancia señalar que las desviaciones más pronunciadas en la trayectoria ocurren exclusivamente durante la fase de alcance. Una vez alcanzada la fase de deslizamiento, los errores mínimos se reducen considerablemente, incluso superando los resultados del STA. Este nivel de error se mantiene constante a lo largo de la trayectoria elegida y muestra robustez ante las incertidumbres y perturbaciones. Si bien esta ley de control demostró ser la más precisa en el seguimiento de trayectoria para todas las articulaciones, la desventaja que conlleva la alta precisión se evidencia en la figura 4.14, donde este esquema demanda la señal de control con más oscilaciones de todas las implementaciones.

También es importante mencionar que a diferencia del STA, este controlador presentó un mejor desempeño enfrentando la fricción seca. Esto se nota especialmente en la tercera articulación donde no aparece el pico de error máximo asociado a la presencia de fricción seca en los cruces por cero. Este comportamiento no ha sido descrito en la literatura y da pie a trabajos futuros.

4.12. Barrera

Trayectoria y errores

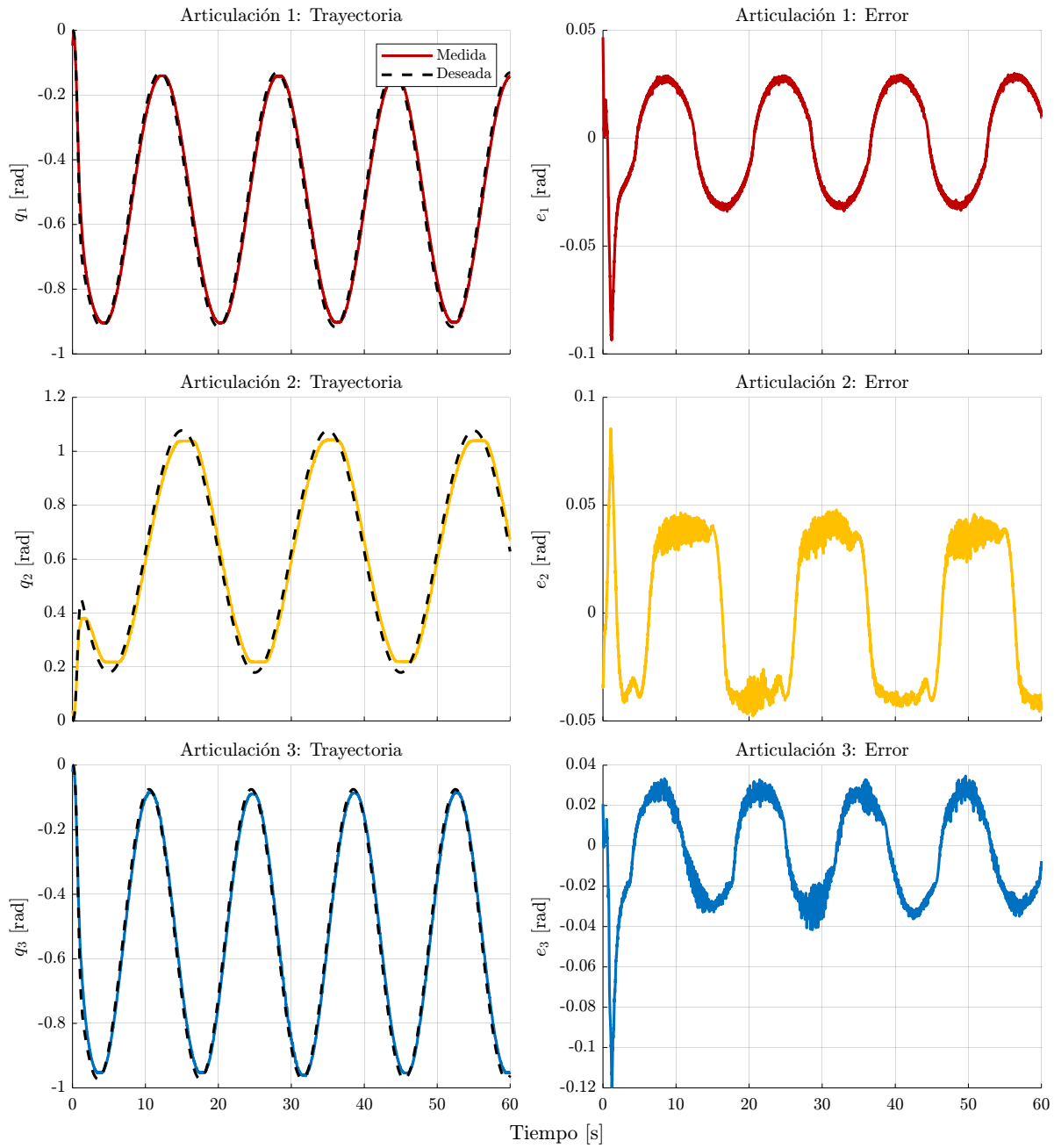


Figura 4.16: Resultados experimentales seguimiento de trayectoria controlador basado en función barrera.

Señal de control, superficie deslizante y plano de fase

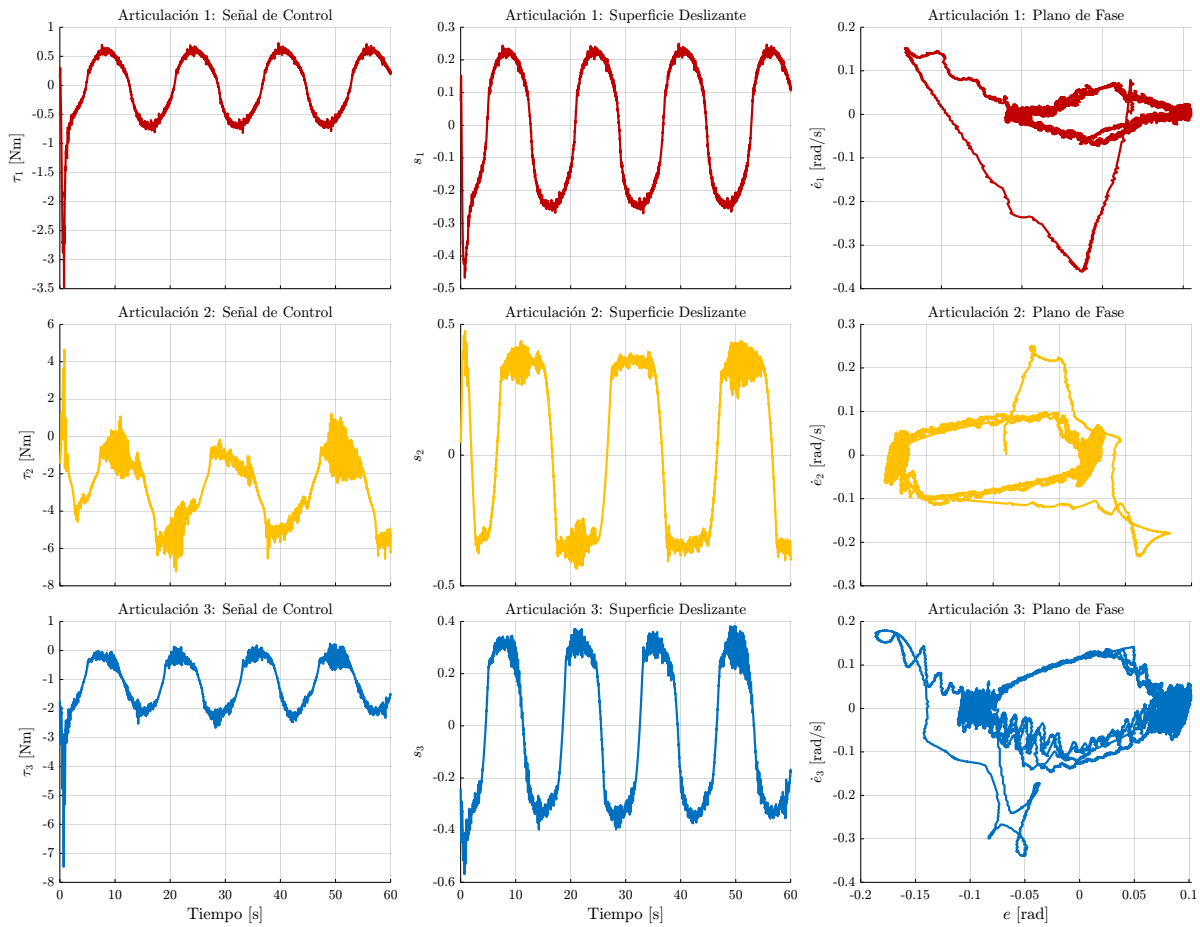


Figura 4.17: Resultados experimentales señales de control para el esquema basado en función barrera.

En la figura 4.16 se aprecian los índices de error resultantes del esquema adaptativo basado en funciones barrera. El error observado es un valor superior al de PID-CSMC pero menor al registrado para el STA. Es necesario mencionar la propiedad fundamental de esta ley de control la cual confina al error de seguimiento a permanecer estrictamente acotado por el parámetro de diseño ϵ en todo momento, comportamiento que se verifica en la figura 4.17. La señal de control se mantiene suave y exenta de oscilaciones, confirmando una eliminación absoluta de los efectos del *chattering*.

4.13. Barrera Cuadrática

Trayectoria y errores

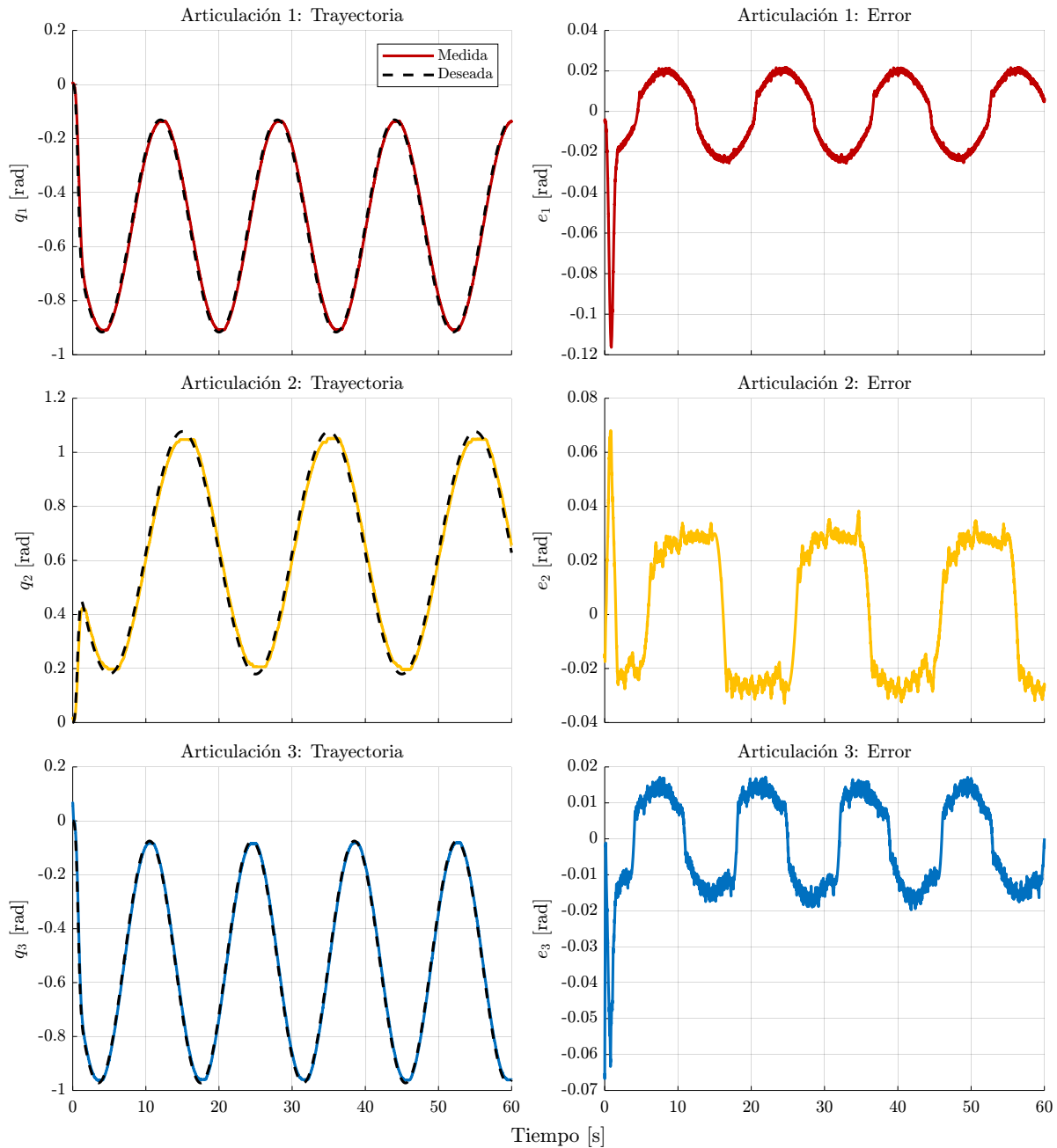


Figura 4.18: Resultados experimentales seguimiento de trayectoria controlador barrera cuadrática.

Señal de control, superficie deslizante y plano de fase

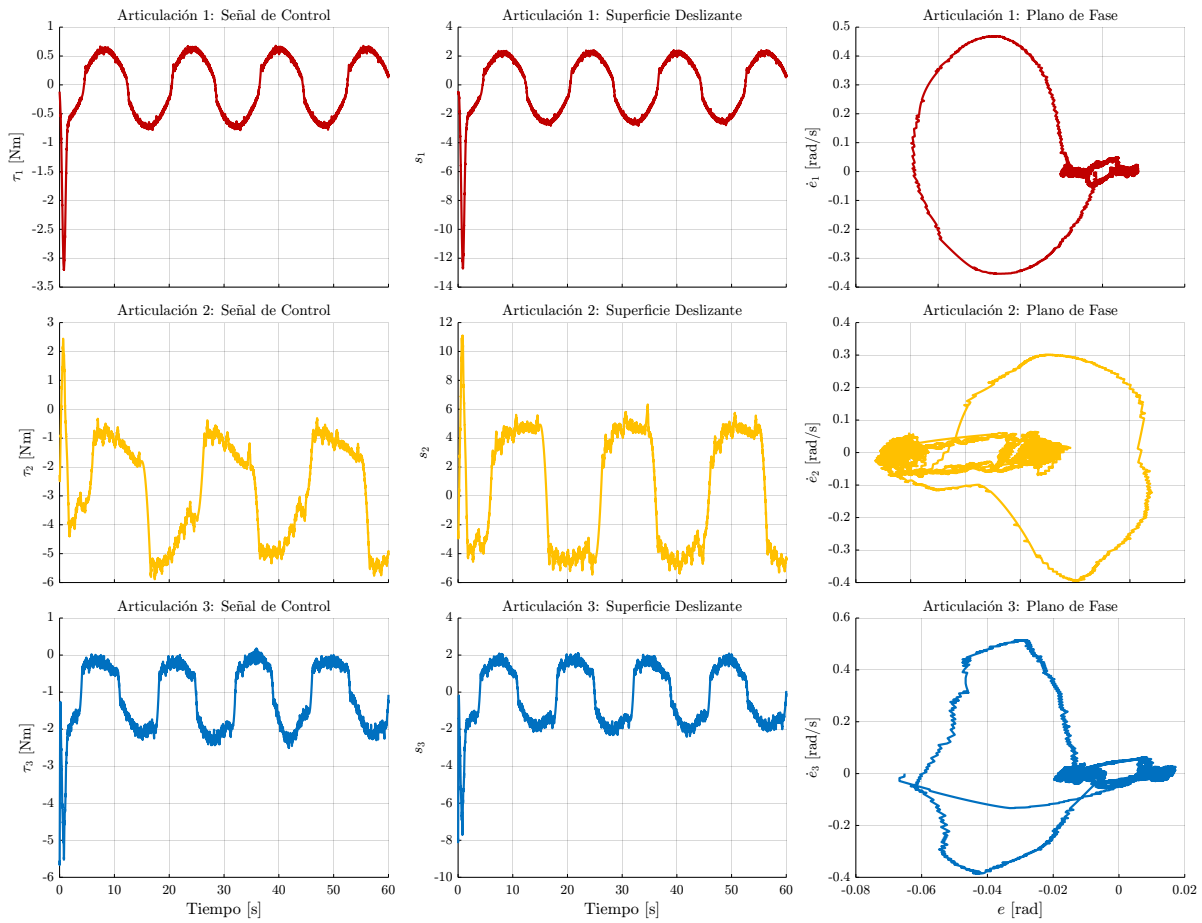


Figura 4.19: Resultados experimentales señales de control esquema barrera cuadrática.

Los resultados experimentales para la BFAQ exponen un comportamiento similar en cuanto a los errores en el seguimiento de trayectoria respecto a la implementación del STA y reducen significativamente el error de seguimiento en estado estable respecto al controlador basado en función barrera. Al igual que en este, la señal de control es suave y no existe comportamiento de alta frecuencia. También es notable en la figura 4.19 que el error se mantiene acotado inferior y superiormente en todo momento, lo que es de esperarse de las implementaciones de los controladores basados en funciones barrera.

4.14. Análisis de errores

A manera de resumen, se presenta la siguiente tabla comparativa con el valor RMS de los errores en cada una de las 3 articulaciones evaluadas por cada uno de los esquemas de control.

Controlador	q_1 [rad]	q_2 [rad]	q_3 [rad]	Promedio [rad]
Par Calculado	0.0138	0.0343	0.0773	0.0418
Slotine-Li	0.0249	0.0539	0.0218	0.0335
PID	0.0216	0.0452	0.0192	0.0286
STA	0.0021	0.0120	0.0369	0.0170
PID-CSMC	0.0014	0.0053	0.0048	0.0038
Barrera	0.0232	0.0353	0.0226	0.0270
Barrera Cuadrática	0.0167	0.0220	0.0122	0.0169

Tabla 4.6: Tabla comparativa del error RMS por articulación en estado estacionario.

Capítulo 5

Conclusiones

En el presente trabajo se demostró que es viable la implementación de algoritmos de control por modos deslizantes continuos a un manipulador serial de cadena cinemática abierta. Los resultados experimentales obtenidos en el QArm muestran que la integración de controladores robustos, como el PID-CSMC, mejora de manera significativa la precisión en el seguimiento de trayectorias en comparación con controladores clásicos como el par calculado, reduciendo en 90.9 por ciento el error en estado estable y un 88.6 por ciento respecto a Slotine-Li.

Los resultados de los experimentos muestran que a diferencia de lo que se muestra en las simulaciones respecto a la atenuación de las vibraciones en esquemas de control continuos, las señales de control registradas para el PID-CSMC y el STA en figura 4.10 y figura 4.13 muestran persistencia de dichas oscilaciones, aunque estas sean menores. Este resultado indica que en un entorno físico real, la robustez ante incertidumbres dinámicas, paramétricas y perturbaciones se obtiene a costa de la aparición de chattering.

De manera general, el análisis comparativo de los controladores implementados nos permite establecer que el esquema de par calculado presenta el desempeño más limitado en términos de error con un promedio de 0.0418 rad, exhibiendo desviaciones a lo largo de la trayectoria. Por el contrario, el controlador con menor promedio de error en el seguimiento de trayectoria fue el PID-CSMC con 0.0038 rad, sin embargo, la principal desventaja de este esquema es la aparición de chattering que es notable en la gráfica figura 4.14. La versión cuadrática del controlador basado en función barrera obtuvo un desempeño similar en el seguimiento de trayectoria al STA con un promedio de error de 0.0169, superando a la forma escalar con 0.0270, la implementación de este controlador no presenta oscilaciones en la señal de control.

Los controladores adaptativos basados en funciones barrera y particularmente la versión

cuadrática BFAQ han demostrado ser la alternativa más equilibrada para la plataforma de estudio. La evidencia experimental muestra que logran mantener los errores de seguimiento dentro de márgenes aceptables y además reducen por completo el chattering en comparación con el PID-CSMC y STA.

Finalmente, la integración de técnicas de control basadas en modelo con esquemas adaptativos, particularmente las funciones barrera, constituye una estrategia efectiva y robusta para mejorar el desempeño de manipuladores robóticos en aplicaciones reales, ofreciendo una excelente relación entre precisión, robustez y suavidad en la señal de control.

Trabajo Futuro

A partir de los resultados analíticos y experimentales obtenidos en esta tesis, se identifican diversas áreas de trabajo para investigaciones posteriores. En particular, se proponen las siguientes líneas de investigación para profundizar y robustecer aún más los esquemas de control desarrollados:

- **Análisis ante fricción seca:** Durante el desarrollo experimental, se evidenció que algoritmos algoritmos continuos por modos deslizantes como el *acrshortsta*, presentan deficiencias en el seguimiento de trayectoria cuando la velocidad de alguno de los eslabones cruza por cero. Esto se debe a que la función de la fricción es discontinua y viola la condición exigida para la perturbación. A diferencia de esto el PID-CSMC presentó un mejor desempeño ante este tipo de perturbaciones y como trabajo futuro, se propone investigar el comportamiento ante este tipo de dinámicas discontinuas y verificar si analíticamente existe un rechazo superior a la fricción seca.
- **Solución del ciclo algebraico en STA:** El presente trabajo asumió una estructura donde las perturbaciones dependían exclusivamente del primer estado y que la matriz de entrada era completamente conocida, sin embargo en un análisis completo y como se mostró en el desarrollo teórico, si esto no se cumple aparecerá la derivada del segundo estado y por lo tanto la entrada de control en la dinámica de lazo cerrado en un ciclo recursivo. El trabajo futuro propuesto es utilizar técnicas como el Super Twisting generalizado que atacan ese tipo de dinámicas.

Referencias

- Choset, Howie et al. (2005). *Principles of Robot Motion: Theory, Algorithms, and Implementations*. MIT Press.
- Craig, John J. (2006). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. 3rd. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Prentice Hall.
- Grikenis, Tomas et al. (2026). «Sliding-mode controllers implementation for direct yaw moment control in four-wheel steered ground vehicles». En: *Control Engineering Practice* 175, pág. 107069.
- Haimovich, Hernan, Leonid Fridman y Jaime A. Moreno (2022). «Generalized Super-Twisting for Control Under Time- and State-Dependent Perturbations: Breaking the Algebraic Loop». En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 67.10, págs. 5646-5652.
- Kelly, Rafael, Víctor Santibáñez y Ricardo Campa (2003). *Robot Manipulators: Motion Control*. Originally published in Spanish as 'Control de movimiento de robots manipuladores'. Madrid: Pearson Educación.
- León, Alejandro (2024). «Implementación de algoritmos por modos deslizantes continuos (CSMC) en un manipulador serial de tres grados de libertad y análisis comparativo con controles clásicos». Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
- Moreno, Jaime A. y Manuel Osorio (2012). «Strict Lyapunov Functions for the Super-Twisting Algorithm». En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 57.4, págs. 1035-1040.
- Obeid, Hussein et al. (2018). «Barrier function-based adaptive sliding mode control». En: *Automatica* 93, págs. 540-544. DOI: 10.1016/j.automatica.2018.03.078.
- Ovalle, Luis et al. (2026). «Discrete implementations of sliding-mode controllers with barrier-function adaptations require a revised framework». En: *Automatica* 185, pág. 112797.
- Pérez-Ventura, Ulises, Jesús Mendoza-Avila y Leonid Fridman (2021). «Design of a proportional integral derivative-like continuous sliding mode controller». En: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 31, págs. 3439-3454. DOI: 10.1002/rnc.5412.

- Real Academia Española (2024). *Diccionario de la lengua española*. Consultado el 29 de marzo de 2026. URL: <https://dle.rae.es/>.
- ROBOTIS (2026). *Dynamixel XM540-W270 E-Manual*. Accessed: March 2026. URL: <https://emanual.robotis.com/docs/en/dxl/x/xm540-w270/>.
- Saied, Hussein et al. (2023). «Feedforward Super-Twisting Sliding Mode Control for Robotic Manipulators: Application to PKMs». En: *IEEE Transactions on Robotics* 39.4, págs. 3167-3178. DOI: 10.1109/TR0.2023.3255586.
- Shtessel, Yuri et al. (2014). *Sliding Mode Control and Observation*. Springer New York.
- Slotine, Jean-Jacques E. y Weiping Li (1987). «On the adaptive control of robot manipulators». En: *The International Journal of Robotics Research* 6.3, págs. 49-59.
- Spong, Mark W., Seth Hutchinson y M. Vidyasagar (2004). *Robot Modeling and Control*. Spanish edition published by Pearson. John Wiley & Sons.
- Utkin, Vadim I. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Berlin: Springer-Verlag.