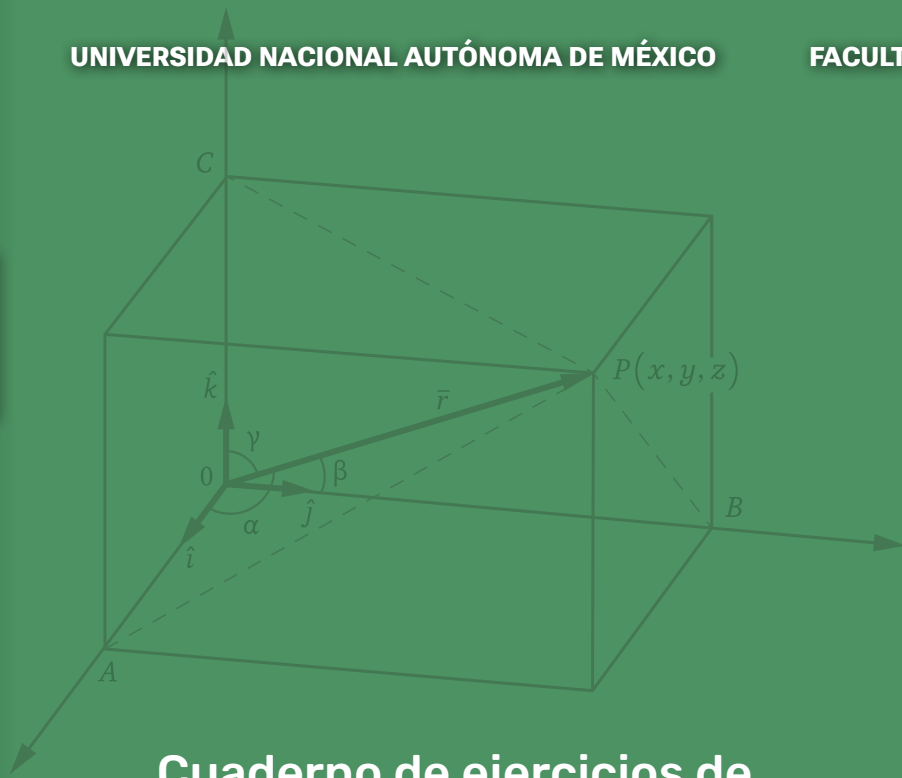
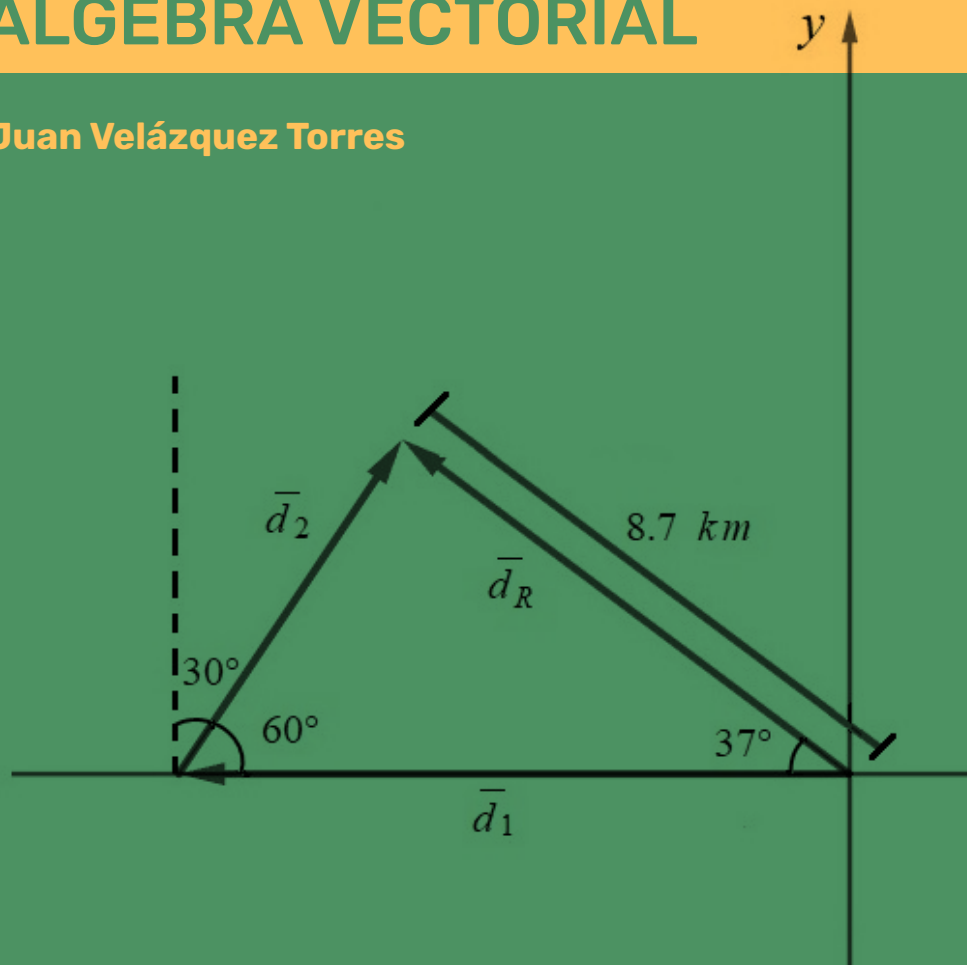




Cuaderno de ejercicios de

ÁLGEBRA VECTORIAL

Juan Velázquez Torres





Cuaderno de ejercicios de

ÁLGEBRA VECTORIAL

Juan Velázquez Torres

VELÁZQUEZ TORRES, Juan
Cuaderno de ejercicios de Álgebra Vectorial
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ingeniería, 2026, 138 p.

Cuaderno de ejercicios de Álgebra Vectorial

Primera edición electrónica
de un ejemplar (4 MB) Formato PDF
Publicado en línea en febrero de 2026

D.R. © 2026, Universidad Nacional Autónoma de México,
Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, CDMX.

FACULTAD DE INGENIERÍA
<http://www.ingenieria.unam.mx/>

Esta edición y sus características son propiedad de la Universidad Nacional
Autónoma de México. Prohibida la reproducción o transmisión total
o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita
del titular de los derechos patrimoniales.

Hecho en México.

UNIDAD DE APOYO EDITORIAL
Cuidado de la edición: María Cuairán Ruidíaz
Diseño y formación editorial: Nismet Díaz Ferro
Captura de la obra: María Guadalupe Martínez Dávalos

El presente cuaderno de ejercicios de **Álgebra Vectorial** ha sido elaborado con el objetivo de brindar a los estudiantes una herramienta práctica para reforzar y consolidar los conceptos fundamentales de esta rama de las matemáticas. A través de una variedad de ejercicios resueltos, se busca desarrollar habilidades analíticas, mejorar la comprensión teórica y fomentar el razonamiento en torno al álgebra de vectores.

El estudio del álgebra vectorial es esencial en diversas disciplinas, tales como la ingeniería, la física, la informática y las matemáticas puras. Dominar los conceptos de vectores en un ambiente tridimensional permite al estudiante enfrentarse con solvencia a problemas reales y abstractos.

Se incluye una amplia gama de ejercicios resueltos detalladamente para guiar el aprendizaje y motivar la práctica constante, elemento primordial en la adquisición del conocimiento matemático.

Este cuaderno no pretende sustituir a los libros de texto, sino complementarlos, ofreciendo un espacio enfocado exclusivamente en la ejercitación, la exploración de métodos y el afianzamiento de conceptos.

Espero que los 101 ejercicios que contiene esta obra contribuyan al desarrollo académico de los estudiantes y se convierta en una herramienta útil tanto dentro como fuera del aula. Además, pretendo que este cuaderno de ejercicios sea un auxiliar importante en el proceso de enseñanza de los docentes.

Los 101 ejercicios que se presentan abordan temas relevantes del álgebra vectorial como son:

- ➔ Las operaciones con vectores
- ➔ El producto punto, el producto cruz y el producto mixto
- ➔ Las condiciones de perpendicularidad y paralelismo entre vectores
- ➔ El ángulo entre vectores y los cosenos directores

Agradezco el apoyo brindado por personal que labora en la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería de la UNAM para que este cuaderno de ejercicios sea una obra digna de su acervo bibliográfico.

Asimismo, agradeceré todas las observaciones, sugerencias y comentarios que tengan a bien hacerme sobre el contenido de este material, con el objeto de actualizar y mejorar futuras ediciones.

Juan Velázquez Torres

1. Escribir en el paréntesis de la derecha la letra E si se trata de una magnitud escalar, V si se trata de una magnitud vectorial.

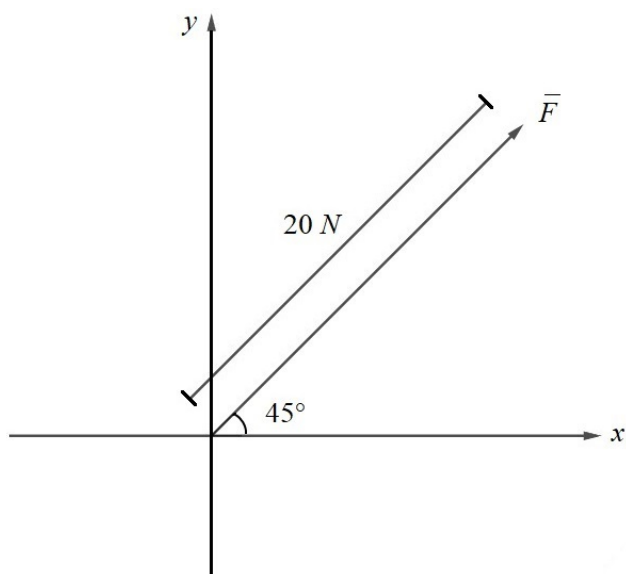
- a) Distancia (E)
- b) Desplazamiento (V)
- c) Velocidad (V)
- d) Aceleración (V)
- e) Fuerza (V)
- f) Rapidez (E)
- g) Presión..... (E)
- h) Trabajo..... (E)
- i) Densidad (E)
- j) Campo eléctrico..... (V)

2. Representar gráficamente:

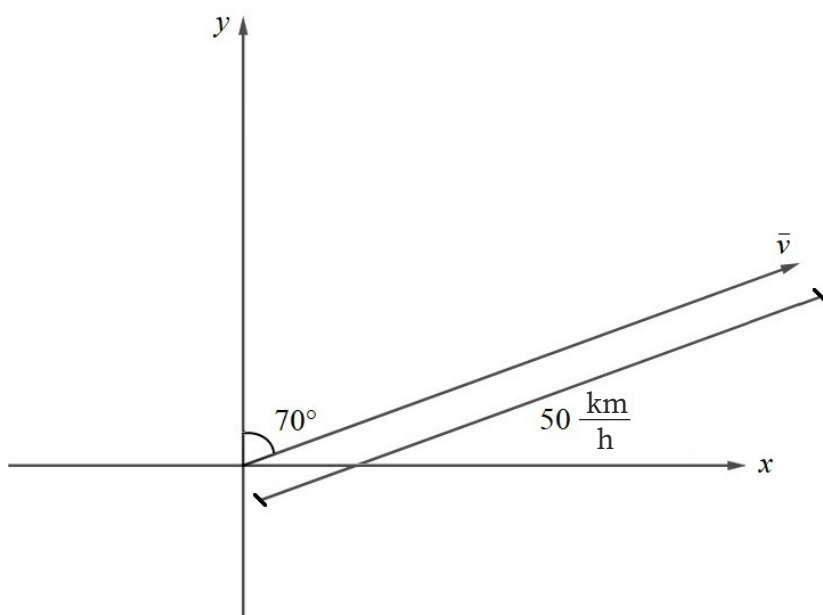
- a) Una fuerza de 20 N en la dirección Este 45° Norte.
- b) Una velocidad de 50 km/h en la dirección Norte 70° Este.
- c) Un desplazamiento de 10 km en la dirección Oeste

Solución:

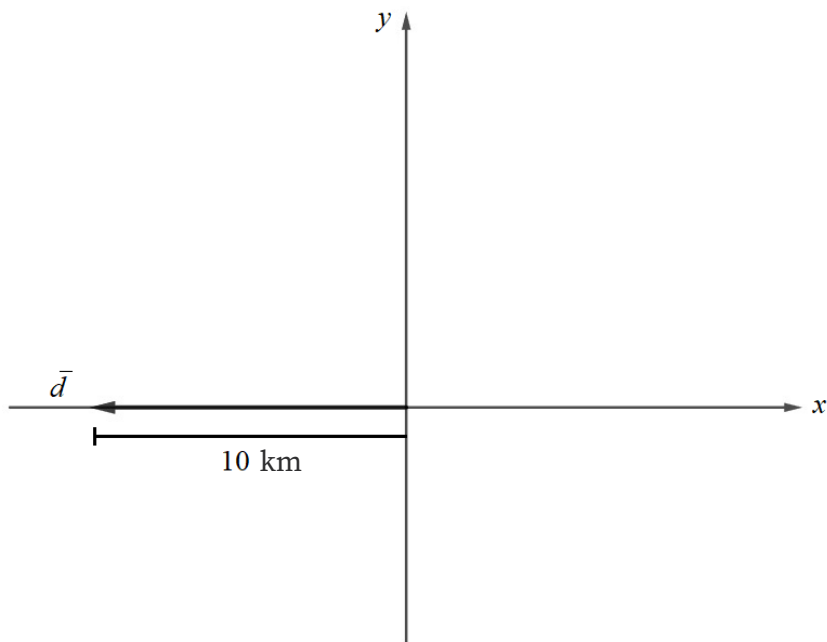
- a) Escala 1 cm: 5 N



b) Escala 1 cm: 10 km/h



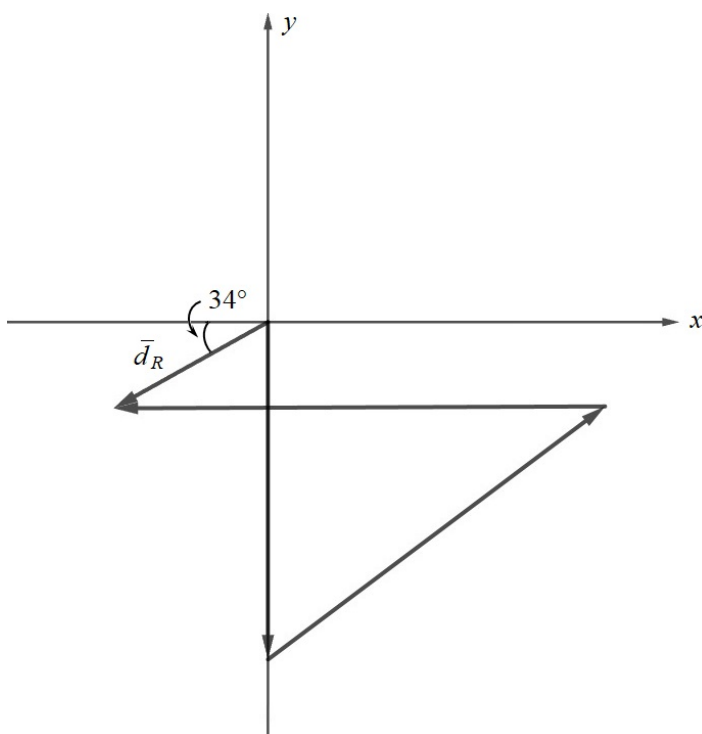
c) Escala 1 cm : 2 km



3. Un vehículo recorre 6 km hacia el sur, posteriormente 8 km en la dirección Este 30° Norte y por último 10 km hacia el Este. Determinar gráficamente el desplazamiento resultante.

Solución:

Escala 1 cm: 2 km



$\vec{d}_R$: vector desplazamiento resultante

$\vec{d}_R$ tiene un módulo de 3.8 km (1.9 cm) y una dirección Oeste 34° Sur

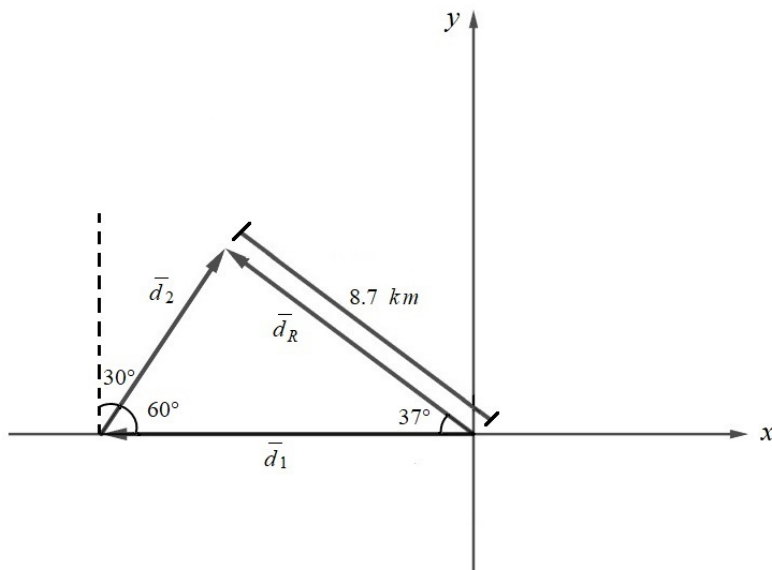
4. Un automóvil recorre 10 km hacia el Oeste y luego 6 km en la dirección Norte 30° Este. Determinar gráficamente el desplazamiento resultante:

- a) gráficamente
- b) analíticamente

Solución:

Escala 1 cm: 2 km

a)



$\vec{d}_R$: vector desplazamiento resultante

$$m = 8.7 \text{ km}$$

$D = \text{Oeste } 37^\circ \text{ Norte}$

b) $|\vec{d}_R| = \sqrt{(\sum d_x)^2 + (\sum d_y)^2}$

$$d_{1x} = 10 \cos 180^\circ = 10(-1) = -10$$

$$d_{1y} = 10 \sin 180^\circ = 10(0) = 0$$

$$d_{2x} = 6 \cos 60^\circ = 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$d_{2y} = 6 \sin 60^\circ = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$$

$$\sum d_x = -10 + 3 = -7$$

$$\sum d_y = 0 + 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$|\bar{d}_r| = \sqrt{(-7)^2 + (3\sqrt{3})^2}$$

$$|\bar{d}_r| = \sqrt{49 + 27}$$

$$|\bar{d}_r| = \sqrt{76}$$

$$|\bar{d}_r| = 8.7$$

$$\theta = \text{ang tan } \frac{\sum d_y}{\sum d_x} = \text{ang tan } \frac{2\sqrt{3}}{-7}$$

$$\theta = -36.6^\circ \text{ (representa una dirección Oeste } 36.6^\circ \text{ Norte)}$$

Por lo tanto, $\bar{d}_r$ es un vector de módulo 8.7 km con una dirección Oeste 36.6° Norte.

- 5.** Determinar un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que el vector que resulta de sumar los vectores:

$$\bar{u} = -5\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k} \quad \text{y} \quad \bar{v} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$$

Solución:

$$\bar{R} = \bar{u} + \bar{v}$$

$$\bar{R} = (-5\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}) + (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k})$$

$$\bar{R} = -3\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$|\bar{R}| = \sqrt{(-3)^2 + (5)^2 + (5)^2}$$

$$|\bar{R}| = \sqrt{59}$$

Por lo tanto, un vector unitario con la dirección y sentido de $\overline{R}$ es:

$$\hat{R} = \frac{1}{|\overline{R}|} \overline{R}$$

$$\hat{R} = \frac{1}{\sqrt{59}} (-3\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k})$$

$$\hat{R} = \frac{3}{\sqrt{59}} \hat{i} + \frac{5}{\sqrt{59}} \hat{j} + \frac{5}{\sqrt{59}} \hat{k}$$

Comprobación

$$|\hat{R}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{\sqrt{59}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{59}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{59}}\right)^2}$$

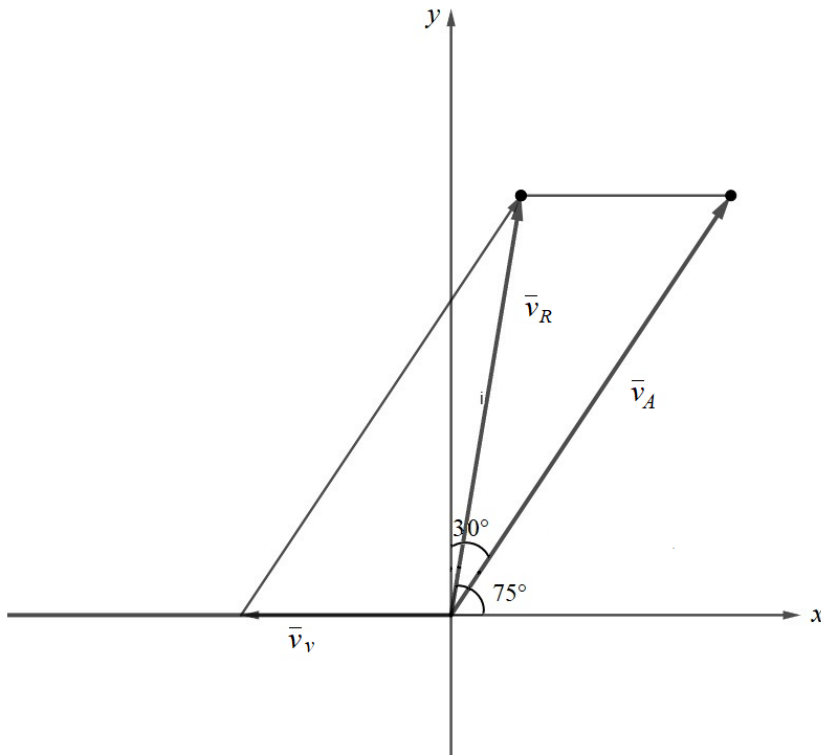
$$|\hat{R}| = \sqrt{\frac{9}{59} + \frac{25}{59} + \frac{25}{59}}$$

$$|\hat{R}| = \sqrt{\frac{59}{59}}$$

$$|\hat{R}| = 1$$

6. Un avión vuela en dirección Norte 30° Este con una rapidez de $210 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ en una región donde existe una corriente de viento hacia el Oeste con una rapidez de $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ¿Cuál es la velocidad del avión por efecto del viento?

Solución:



Escala. 1 cm : $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$\bar{v}_A$: Velocidad del avión

$\bar{v}_v$: Velocidad del viento

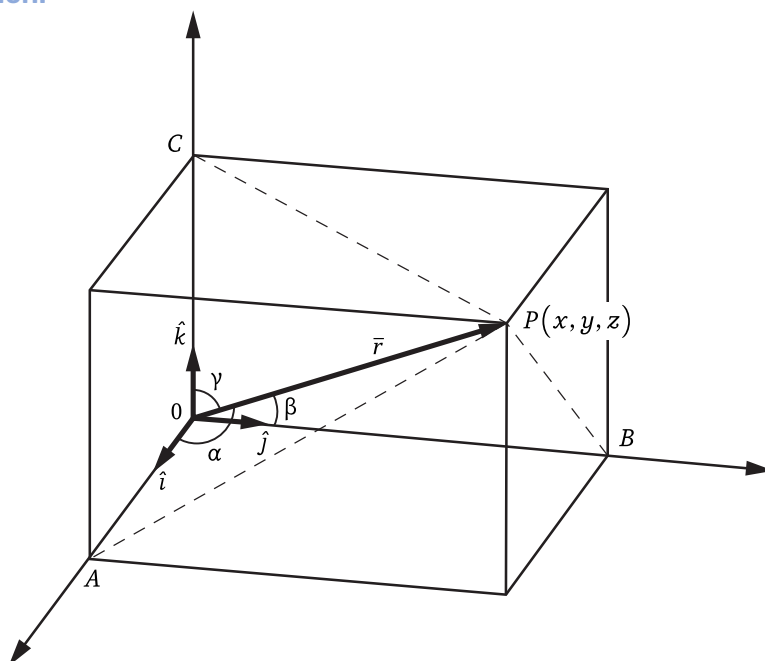
$\bar{v}_R$: Velocidad real del avión

El vector $\bar{v}_R$ tiene un módulo de $186 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (6.2 cm) y una dirección de Este 75° Norte.

7. Determinar los ángulos α , β y γ que forma el vector $\bar{u} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$ con los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$. Demostrar, además que:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Solución:



Dado que el triángulo OAP es rectángulo en A , entonces

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{r}|}$$

Análogamente el triángulo OBP es rectángulo en B , luego

$$\cos \beta = \frac{y}{|\vec{r}|}$$

Por último, el triángulo OCP es rectángulo en C , por lo que

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\vec{r}|}$$

Por lo tanto:

$$\cos^2 \alpha = \frac{x^2}{|\vec{r}|^2}, \quad \cos^2 \beta = \frac{y^2}{|\vec{r}|^2}, \quad \cos^2 \gamma = \frac{z^2}{|\vec{r}|^2}$$

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \frac{x^2}{|\vec{r}|^2} + \frac{y^2}{|\vec{r}|^2} + \frac{z^2}{|\vec{r}|^2} \\ &= \frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^2}\end{aligned}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

8. Demostrar que:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \quad \forall \vec{u} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n); \quad x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Solución:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(x_1)(x_1) + (x_2)(x_2) + (x_3)(x_3) + \dots + (x_n)(x_n)}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

9. Demostrar que si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ y $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$ entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

Solución:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

$$\text{si } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\cos \theta = \frac{0}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

Además $|\vec{u}| \neq 0$ y $|\vec{v}| \neq 0$, entonces $|\vec{u}| |\vec{v}| \neq 0$ y

$$\cos \theta = 0$$

$$\theta = 90^\circ$$

10. Demostrar que $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Solución:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

11. Determinar el trabajo mecánico realizado por la fuerza $\vec{F} = \hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ al desplazar un cuerpo en la dirección del vector $\vec{r} = -2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$

Solución:

El trabajo efectuado está dado por $T = \vec{F} \cdot \vec{r}$

$$T = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

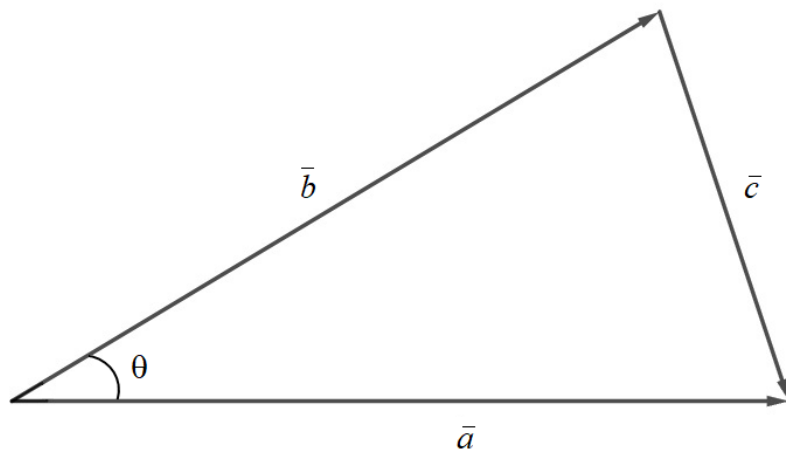
$$T = (1, 3, 6) \cdot (-2, 1, -3)$$

$$T = -2 + 3 - 18$$

$$T = -27 \text{ (Unidades de trabajo)}$$

12. Demostrar la ley de los cosenos $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$ para cualquier triángulo.

Solución:



De la figura se observa que $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ luego $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Realizando el producto punto $\vec{c} \cdot \vec{c}$.

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} \quad (\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a})$$

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \theta + |\vec{b}|^2$$

Si $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$ y $|\vec{c}| = c$, se tiene $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$

13. Sean los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y sea el producto $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. Demostrar que:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

c) $\vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b}) ; \alpha \in R$

d) $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$ si $\vec{a} \neq \vec{0}$

Solución:

a) $\vec{a} \cdot \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3)$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$= b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3$$

$$= \vec{b} \cdot \vec{a}$$

b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (a_1, a_2, a_3) \cdot ((b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, c_3))$

$$= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3)$$

$$= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)$$

$$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (\alpha (b_1, b_2, b_3)) \\
 &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (\alpha b_1, \alpha b_2, \alpha b_3) \\
 &= a_1(\alpha b_1) + a_2(\alpha b_2) + a_3(\alpha b_3) \\
 &= \alpha (a_1 b_1) + \alpha (a_2 b_2) + \alpha (a_3 b_3) \\
 &= \alpha (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\
 &= \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1, a_2, a_3) \\
 &= a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 \\
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2
 \end{aligned}$$

Si $\vec{a} \neq \vec{0}$ entonces al menos una de las componentes del vector $\vec{a}$ es diferente de cero, entonces $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$ y $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$

- 14.** El trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ al desplazar un cuerpo en la dirección del vector $\vec{r}$ es de $25\sqrt{3}$ J. Si $|\vec{F}| = 25$ N y $|\vec{r}| = 2$ m, determinar el ángulo entre los vectores $\vec{F}$ y $\vec{r}$.

Solución:

Para calcular el ángulo usamos la fórmula

$$\cos \theta = \frac{\vec{F} \cdot \vec{r}}{|\vec{F}| |\vec{r}|}$$

El trabajo mecánico viene dado por $T = \vec{F} \cdot \vec{r}$

$$\cos \theta = \frac{T}{|\vec{F}| |\vec{r}|}$$

$$\cos \theta = \frac{25 \sqrt{3}}{(25)(2)}$$

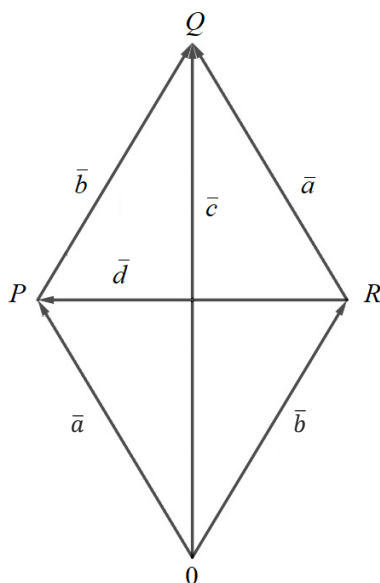
$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\theta = 30^\circ$$

15. Demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

Solución:



Note que:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{d} + \vec{b} = \vec{a} \Rightarrow \vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
 \vec{c} \cdot \vec{d} &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\
 &= \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} \quad (\text{ya que } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}) \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} \\
 \vec{c} \cdot \vec{d} &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})
 \end{aligned}$$

Como $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ (la figura es un rombo) entonces $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0$

Por lo tanto, las verticales $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son perpendiculares, es decir, las diagonales de un rombo son perpendiculares.

- 16.** Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$; $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos.

Solución:

Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ entonces $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$$0 = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$$0 = \sin \theta$$

$$0 = 0^\circ \text{ y } 180^\circ$$

Por tanto, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos

17. Demostrar que:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = (|\vec{a}| |\vec{b}|)^2$$

Solución:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = ||\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta|^2 \Rightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta + |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta$$

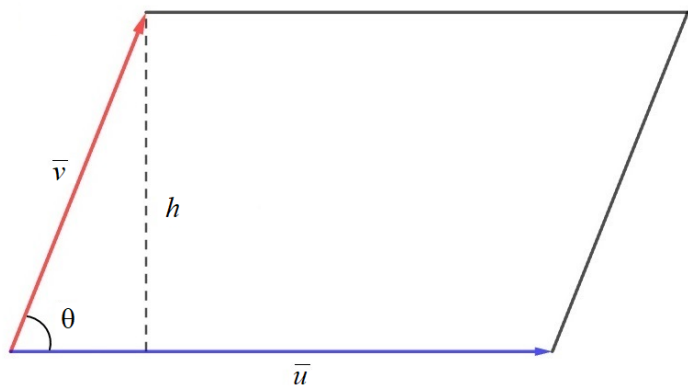
$$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = (|\vec{a}| |\vec{b}|)^2$$

18. Demostrar que el área de un paralelogramo generado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (ver figura) es $A = |\vec{u} \times \vec{v}|$

Solución:



$$A = (\text{base}) (\text{altura})$$

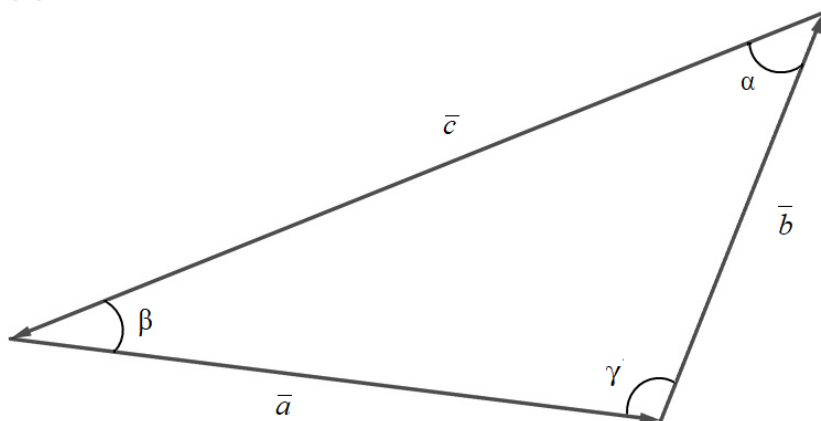
$$A = |\vec{u}| h$$

$$A = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta \left(\sin \theta = \frac{h}{|\vec{v}|} \right)$$

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

19. Deducir la ley de los senos para un triángulo cualquiera.

Solución:



De la figura

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

De modo que:

$$\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \quad \dots (1)$$

$$\vec{b} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{b} \times \vec{0} = \vec{0} \quad \dots (2)$$

$$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{c} \times \vec{0} = \vec{0} \quad \dots (3)$$

De (1)

$$\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$$

De (2)

$$\vec{b} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$$

De (3)

$$\bar{c} \times (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = \bar{0}$$

$$\bar{c} \times \bar{a} + \bar{c} \times \bar{b} + \bar{c} \times \bar{c} = \bar{0}$$

Ya que $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$, $\bar{b} \times \bar{b} = \bar{0}$, $\bar{c} \times \bar{c} = \bar{0}$, se obtiene:

$$\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} = \bar{0} \Rightarrow \bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{a} \times \bar{c})$$

$$\bar{b} \times \bar{a} + \bar{b} \times \bar{c} = \bar{0} \Rightarrow \bar{b} \times \bar{a} = -(\bar{b} \times \bar{c})$$

$$\bar{c} \times \bar{a} + \bar{c} \times \bar{b} = \bar{0} \Rightarrow \bar{c} \times \bar{a} = -(\bar{c} \times \bar{b})$$

Entonces:

$$\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{a} \times \bar{c}) = \bar{c} \times \bar{a} = -(\bar{c} \times \bar{b}) = \bar{b} \times \bar{c}$$

$$\bar{c} \times \bar{a} = -(\bar{c} \times \bar{b}) = \bar{b} \times \bar{c}$$

Por lo tanto,

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{c} = \bar{c} \times \bar{a} \Rightarrow |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{b} \times \bar{c}| = |\bar{c} \times \bar{a}|$$

$$|\bar{a}| |\bar{b}| \sin \gamma = |\bar{b}| |\bar{c}| \sin \alpha = |\bar{c}| |\bar{a}| \sin \beta$$

$$\frac{|\bar{a}| |\bar{b}| \sin \gamma}{|\bar{a}| |\bar{b}| |\bar{c}|} = \frac{|\bar{b}| |\bar{c}| \sin \alpha}{|\bar{a}| |\bar{b}| |\bar{c}|} = \frac{|\bar{c}| |\bar{a}| \sin \beta}{|\bar{a}| |\bar{b}| |\bar{c}|} \Rightarrow \frac{\sin \gamma}{|\bar{c}|} = \frac{\sin \alpha}{|\bar{a}|} = \frac{\sin \beta}{|\bar{b}|}$$

O simplemente

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad \text{si} \quad |\bar{a}| = a, \quad |\bar{b}| = b, \quad |\bar{c}| = c$$

20. Demostrar que

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{para } \bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \text{ y } \bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Solución:

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$$

$$\bar{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}) \times (b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k})$$

$$= a_1 b_1 \hat{i} \times \hat{i} + a_1 b_2 \hat{i} \times \hat{j} + a_1 b_3 \hat{i} \times \hat{k} +$$

$$a_2 b_1 \hat{j} \times \hat{i} + a_2 b_2 \hat{j} \times \hat{j} + a_2 b_3 \hat{j} \times \hat{k} +$$

$$a_3 b_1 \hat{k} \times \hat{i} + a_3 b_2 \hat{k} \times \hat{j} + a_3 b_3 \hat{k} \times \hat{k}$$

$$= a_1 b_2 \hat{k} - a_1 b_3 \hat{j} - a_2 b_1 \hat{k} + a_2 b_3 \hat{i} + a_3 b_1 \hat{j} - a_3 b_2 \hat{i}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{k}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

21. Obtener todos los vectores que son perpendiculares al vector

$$\vec{v} = (1, -2, -1)$$

Dar tres vectores perpendiculares a $\vec{v}$.

Solución:

Un vector $\vec{u} = (x, y, z)$ es perpendicular a $\vec{v}$ si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x, y, z) \cdot (1, -2, -1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x - 2y - z$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 0 \quad x - 2y - z = 0 \Rightarrow x = 2y$$

El conjunto de vectores que son perpendiculares al vector

$$\vec{v} = (1, -2, -1) \text{ es } \left\{ (x, y, x - 2y) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Tres vectores perpendiculares a $\vec{v}$, son

$$\vec{a} : (1, 4, -7) \text{ aquí } x = 1, y = 4, \Rightarrow x - 2y = 1 - 2(4) = 1 - 8 = -7$$

$$\vec{b} : (0, 1, -2) \text{ aquí } x = 0, y = 1 \Rightarrow x - 2y = 0 - 2(1) = -2$$

$$\vec{c} : (1, 0, 1) \text{ aquí } x = 1, y = 0 \Rightarrow x - 2y = 1 - 2(0) = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = (1, 4, -7) \cdot (1, -2, -1) = 1 - 8 + 7 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{v} = (0, 1, -2) \cdot (1, -2, -1) = -2 + 2 = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{v} = (1, 0, 1) \cdot (1, -2, -1) = 1 - 1 = 0$$

- 22.** Determinar el conjunto de vectores que son perpendiculares, simultáneamente, a los vectores

$$\bar{u} = (2, 1, 1) \quad \text{y} \quad \bar{v} = (-3, 2, -2).$$

Dar dos vectores que son perpendiculares a los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

Solución:

Un vector $\bar{w} = (x, y, z)$ es perpendicular tanto a $\bar{u}$ como a $\bar{v}$ si $\bar{w} \cdot \bar{u} = 0$, $\bar{w} \cdot \bar{v} = 0$

$$\bar{w} \cdot \bar{u} = (x, y, z) \cdot (2, 1, 1)$$

$$\bar{w} \cdot \bar{u} = 2x + y + z$$

$$\bar{w} \cdot \bar{u} = 0 \Rightarrow 2x + y + z = 0$$

$$\bar{w} \cdot \bar{v} = (x, y, z) \cdot (-3, 2, -2)$$

$$\bar{w} \cdot \bar{v} = -3x + 2y - 2z$$

$$\bar{w} \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow -3x + 2y - 2z = 0$$

El conjunto de vectores que son perpendiculares al vector $\bar{u}$ y al vector $\bar{v}$, es:

$$\left\{ (x, y, z) \mid 2x + y + z = 0, -3x + 2y - 2z = 0; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Para obtener de manera explícita este conjunto, se tiene que resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 & \dots (1) \\ -3x + 2y - 2z = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación (1) por dos, se obtiene

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 0 & \dots (3) \\ -3x + 2y - 2z = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

Adicionando (3) + (2)

$$x + 4y = 0$$

$$x = -4k$$

Haciendo $y = k$, $k \in \mathbb{R}$

$$x = -4k$$

Sustituyendo $x = -4k$, $y = k$ en (1)

$$2(-4k) + k + z = 0$$

$$-8k + k + z = 0$$

$$-7k + z = 0$$

$$z = 7k$$

De manera explícita, el conjunto de vectores perpendiculares tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$ es, $\left\{ (-4k, k, 7k) \mid k \in \mathbb{R} \right\}$

Notar que:

$$(-4k, k, 7k) \cdot \vec{u} = (-4k, k, 7k) \cdot (1, 1, 1) = -8k + k + 7k = 0$$

$$(-4k, k, 7k) \cdot \vec{v} = (-4k, k, 7k) \cdot (-3, 2, -2) = 12k + 2k - 14k = 0$$

Dos vectores perpendiculares $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son

$$k = -5 \Rightarrow \vec{a} = (20, -5, -35)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = (20, -5, -35) \cdot (2, 1, 1) = 40 - 5 - 35 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = (20, -5, -35) \cdot (-3, 2, -2) = -60 - 10 + 70 = 0$$

$$k = 2 \Rightarrow \vec{b} = (-8, 2, 14)$$

$$\vec{b} \cdot \vec{u} = (-8, 2, 14) \cdot (2, 1, 1) = -16 + 2 + 14 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{v} = (-8, 2, 14) \cdot (-3, 2, -2) = 24 + 4 - 28 = 0$$

- 23.** Determinar el conjunto de vectores que son perpendiculares a los vectores $\vec{a} = (-1, 4, 1)$, $\vec{b} = (2, -3, 5)$, y $\vec{c} = (6, -1, -1)$ de manera simultánea.

Solución:

Un vector $\vec{m} = (x, y, z)$ es perpendicular a los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, simultáneamente, si

$$\vec{m} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{m} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{m} \cdot \vec{c} = 0$$

Por lo que

$$\vec{m} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow (x, y, z) \cdot (-1, 4, 1) = 0 \Rightarrow -x + 4y + z = 0$$

$$\vec{m} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow (x, y, z) \cdot (2, -3, 5) = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 5z = 0$$

$$\vec{m} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow (x, y, z) \cdot (6, 1, -1) = 0 \Rightarrow 6x - y - z = 0$$

De forma implícita el conjunto de vectores que son perpendiculares a los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, simultáneamente, es

$$\left\{ (x, y, z) \mid -x + 4y + z = 0, \quad 2x - 3y + 5z = 0, \quad 6x - y - z = 0, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Para obtenerlo de forma explícita, hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -x + 4y + z = 0 & \dots (1) \\ 2x - 3y + 5z = 0 & \dots (2) \\ 6x - y - z = 0 & \dots (3) \end{cases}$$

Despejando z de la ecuación (1)

$$z = x - 4y$$

Sustituyendo $z = x - 4y$ en (2) y (3):

$$2x - 3y + 5(x - 4y) = 0 \Rightarrow 7x - 23y = 0$$

$$6x - y - (x - 4y) = 0 \Rightarrow 5x + 3y = 0$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 7x - 23y = 0 \\ 5x + 3y = 0 \end{cases}$ por suma o resta

$$\begin{cases} 7x - 23y = 0 \\ 5x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(7x - 23y) = 5(0) \\ -7(5x + 3y) = -7(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 35x - 115y = 0 \\ -35x - 21y = 0 \end{cases}$$

Sumando estas dos últimas ecuaciones

$$-136y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = 0$$

Por tanto, el único vector que es perpendicular, de manera simultánea, a los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es el vector $\vec{0} = (0, 0, 0)$ es claro que

$$\vec{0} \cdot \vec{a} = (0, 0, 0) \cdot (-1, 4, 1) = 0(-1) + 0(4) + 0(1) = 0$$

$$\vec{0} \cdot \vec{a} = (0, 0, 0) \cdot (2, -3, 5) = 0(2) + 0(-3) + 0(5) = 0$$

$$\vec{0} \cdot \vec{a} = (0, 0, 0) \cdot (6, 1, -1) = 0(6) + 0(1) + 0(-1) = 0$$

- 24.** Demostrar que $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ si y solo si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.

Solución:

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

- 25.** Mostrar que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos, entonces $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Solución:

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos a $\vec{a} = k\vec{b}$.

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{a} = k(b_1, b_2, b_3) = (kb_1, kb_2, kb_3)$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ k b_1 & k b_2 & k b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \hat{i} \begin{vmatrix} k b_2 & k b_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} k b_1 & k b_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} k b_1 & k b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \hat{i} (k b_2 b_3 - k b_2 b_3) - \hat{j} (k b_1 b_3 - k b_1 b_3) + \hat{k} (k b_1 b_2 - k b_1 b_2)$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \hat{i} (0) - \hat{j} (0) + \hat{k} (0) = 0(1, 0, 0) - 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = (0, 0, 0)$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$$

26. Para los vectores:

$$\bar{a} = (2, -1, 4), \quad \bar{b} = (-3, 4, 5),$$

$$\bar{c} = (-6, 3, -12) \quad \text{y} \quad \bar{d} = (-6, 8, 10)$$

determinar:

$$\bar{a} \times \bar{b}, \quad \bar{b} \times \bar{a}, \quad \bar{b} \times \bar{c}, \quad \bar{c} \times \bar{b}, \quad \bar{a} \times \bar{c}, \quad \text{y} \quad \bar{b} \times \bar{d}$$

¿Qué conclusiones se obtienen?

Solución:

$$\begin{aligned}\bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}(-5 - 16) - \hat{j}(0 + 12) + \\ &\quad \hat{k}(8 - 3) = -21\hat{i} - 22\hat{j} + 5\hat{k} = (-21, -22, 5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b} \times \bar{a} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}(16 + 5) - \hat{j}(-12 - 10) + \\ &\quad \hat{k}(3 - 8) = 21\hat{i} + 22\hat{j} - 5\hat{k} = (21, 22, -5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b} \times \bar{c} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 4 & 5 \\ -6 & 3 & -12 \end{vmatrix} = \hat{i}(-48 - 15) - \hat{j}(36 + 30) + \\ &\quad \hat{k}(-9 + 24) = -63\hat{i} - 66\hat{j} + 15\hat{k} = (-63, -66, 15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -6 & 3 & -12 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}(15 + 48) - \hat{j}(-30 - 36) + \\ &\quad \hat{k}(-24 + 9) = 63\hat{i} + 66\hat{j} - 15\hat{k} = (63, 66, -15)\end{aligned}$$

$$\bar{a} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ -6 & 3 & -12 \end{vmatrix} = \hat{i}(12 - 12) - \hat{j}(-24 + 24) + \hat{k}(6 - 6) = \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0) = (0, 0, 0) = \bar{0}$$

$$\bar{b} \times \bar{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 4 & 5 \\ -6 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \hat{i}(40 - 40) - \hat{j}(-30 + 30) + \hat{k}(-24 + 24) = \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0) = (0, 0, 0) = \bar{0}$$

Conclusiones:

$$\bar{a} \times \bar{b} = (-21, -22, 5) = -(21, 22, -5) = -(\bar{b} \times \bar{a})$$

$$\bar{b} \times \bar{c} = (-63, -66, 15) = -(63, 66, -15) = -(\bar{c} \times \bar{b})$$

$$\bar{a} \times \bar{c} = \bar{0} \Rightarrow \bar{a} \text{ y } \bar{c} \text{ paralelos}$$

$$\bar{b} \times \bar{d} = \bar{0} \Rightarrow \bar{b} \text{ y } \bar{d} \text{ paralelos}$$

27. Para los vectores:

$$\bar{a} = (2, 1, 4), \bar{b} = (-1, -6, -7) \quad \bar{c} = (3, 8, -4) \text{ y } \alpha = 9,$$

mostrar que:

a) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$

b) $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$

c) $\bar{a} \cdot (\alpha \bar{b}) = \alpha (\bar{a} \cdot \bar{b})$

d) $\bar{a} \cdot \bar{a} > 0$

Solución:

a) $\bar{a} \cdot \bar{b} = (2, 1, 4) \cdot (-1, -6, -7) = -2 - 6 - 28 = -36$

$$\bar{b} \cdot \bar{a} = (-1, -6, -7) \cdot (2, 1, 4) = -2 - 6 - 28 = -36$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$$

b) $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = (2, 1, 4) \cdot [(-1, -6, -7) + (3, 8, -4)]$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = (2, 1, 4) \cdot (2, 2, -11)$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = 4 + 2 - 44$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = -38$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c} = (2, 1, 4) \cdot (-1, -6, -7) + (2, 1, 4) \cdot (3, 8, -4)$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c} = -2 - 6 - 28 + 6 + 8 - 16$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c} = 14 - 52$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c} = -38$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$$

$$c) \quad \bar{a} \cdot (\alpha \bar{b}) = (2, 1, 4) \cdot (9(-1, -6, -7))$$

$$\bar{a} \cdot (\alpha \bar{b}) = (2, 1, 4) \cdot (-9, -54, -63)$$

$$\bar{a} \cdot (\alpha \bar{b}) = -18 - 54 - 252 <<$$

$$\bar{a} \cdot (\alpha \bar{b}) = -324$$

$$\alpha \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 9 \left((2, 1, 4) \cdot (-1, -6, -7) \right)$$

$$\alpha \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 9(-2 - 6 - 28)$$

$$\alpha \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 9(-36)$$

$$\alpha \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = -324$$

$$d) \quad \bar{a} \cdot \bar{a} = (2, 1, 4) \cdot (2, 1, 4)$$

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = 4 + 1 + 16$$

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = 21$$

$$\bar{a} \cdot \bar{a} > 0 \quad (\bar{a} = (2, 1, 4) \neq (0, 0, 0))$$

28. Sean los vectores $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$, $\hat{k} = (0, 0, 1)$. Mostrar que:

$$a) \quad \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$b) \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$$

Solución:

$$\text{a) } \hat{i} \cdot \hat{i} = (1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) = (1)(1) + (0)(0) + (0)(0) = 1$$

$$\hat{j} \cdot \hat{j} = (0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0) = (0)(0) + (1)(1) + (0)(0) = 1$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = (0)(0) + (0)(0) + (1)(1) = 1$$

Nota:

$$|\hat{i}| = \sqrt{\hat{i} \cdot \hat{i}} = \sqrt{1} = 1$$

$$|\hat{j}| = \sqrt{\hat{j} \cdot \hat{j}} = \sqrt{1} = 1$$

$$|\hat{k}| = \sqrt{\hat{k} \cdot \hat{k}} = \sqrt{1} = 1$$

b)

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = (1)(0) + (0)(1) + (0)(0) = 0$$

$$\hat{j} \cdot \hat{k} = (0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = (0)(0) + (1)(0) + (0)(1) = 0$$

$$\hat{k} \cdot \hat{i} = (0, 0, 1) \cdot (1, 0, 0) = (0)(1) + (0)(0) + (1)(0) = 0$$

Nota:

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0 \Rightarrow \hat{i} \text{ y } \hat{j} \text{ perpendiculares}$$

$$\hat{j} \cdot \hat{k} = 0 \Rightarrow \hat{j} \text{ y } \hat{k} \text{ perpendiculares}$$

$$\hat{k} \cdot \hat{i} = 0 \Rightarrow \hat{i} \text{ y } \hat{k} \text{ perpendiculares}$$

29. Sean los vectores $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$, $\hat{k} = (0, 0, 1)$. Mostrar que:

a) $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$

b) $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$, $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

Solución:

a)

$$\hat{i} \times \hat{i} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(0-0) = 0\hat{i} - 0\hat{j} + 0\hat{k} = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

$$\hat{j} \times \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(0-0) = 0\hat{i} - 0\hat{j} + 0\hat{k} = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

$$\hat{k} \times \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(0-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(0-0) = 0\hat{i} - 0\hat{j} + 0\hat{k} = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

b)

$$\hat{i} \times \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(1-0) = 0\hat{i} - 0\hat{j} + 1\hat{k} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(1-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(0-0) = 1\hat{i} - 0\hat{j} + 0\hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}}(0-0) - \hat{\mathbf{j}}(0-1) + \hat{\mathbf{k}}(0-0) = 0\hat{\mathbf{i}} + 1\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}$$

30. Para los vectores:

$$\bar{\mathbf{a}} = (-3, 8, 5), \quad \bar{\mathbf{b}} = (2, -1, 5), \quad \bar{\mathbf{c}} = (6, -2, -3), \quad \lambda = 4,$$

Mostrar que:

a) $\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} = -(\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{a}})$

b) $\bar{\mathbf{a}} \times (\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) = \bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{c}}$

c) $\lambda (\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}) = (\lambda \bar{\mathbf{a}}) \times \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} \times (\lambda \bar{\mathbf{b}})$

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -3 & 8 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}}(40+5) - \hat{\mathbf{j}}(-15-10) + \\ &\quad \hat{\mathbf{k}}(3-16) = 45\hat{\mathbf{i}} + 25\hat{\mathbf{j}} - 13\hat{\mathbf{k}} = (45, 25, -13) \end{aligned}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ -3 & 8 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}(-5-40) - \hat{j}(10+15) +$$

$$\hat{k}(16-3) = 45\hat{i} - 25\hat{j} + 13\hat{k} = (-45, -25, 13)$$

$$-(\bar{b} \times \bar{a}) = -(-45, -25, 13) = (45, 25, -13) = \bar{a} \times \bar{b}$$

Por tanto,

$$\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$$

$$\text{b) } \bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = (-3, 8, 5) \times ((2, -1, 5) + (6, -2, -3))$$

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = (-3, 8, 5) \times (8, -3, 2)$$

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 8 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \hat{i}(16+15) - \hat{j}(-6-40) + \hat{k}(9-64)$$

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = 31\hat{i} + 46\hat{j} - 55\hat{k}$$

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = (31, 46, -55)$$

$$\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 8 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 8 & 5 \\ 6 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} = \hat{i}(40 + 5) - \hat{j}(-15 - 10) + \hat{k}(3 - 16) + \hat{i}(-24 + 10) - \hat{j}(9 - 30) + \hat{k}(6 - 48)$$

$$\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} = 45\hat{i} + 25\hat{j} - 13\hat{k} - 14\hat{i} + 21\hat{j} - 42\hat{k}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} = 31\hat{i} + 46\hat{j} - 55\hat{k}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} = (31, 46, -55)$$

Por tanto,

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$$

c)

$$4(\bar{a} \times \bar{b}) = 4 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 8 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 4(45, 25, -13)(180, 100, -52)$$

$$(4\bar{a}) \times \bar{b} = (4(-3, 8, 5)) \times (2, -1, 5)$$

$$(4\bar{a}) \times \bar{b} = (4(-12, 32, 20)) \times (2, -1, 5)$$

$$(4\bar{a}) \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -12 & 32 & 20 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(4\bar{a}) \times \bar{b} = \hat{i}(160 + 20) - \hat{j}(-60 - 40) + \hat{k}(12 - 64) = 180\hat{i} + 100\hat{j} - 52\hat{k}$$

$$(4\bar{a}) \times \bar{b} = (180, 100, -52)$$

$$\bar{a} \times (4\bar{b}) = (-3, 8, 5) \times (4(2, -1, 5))$$

$$\bar{a} \times (4\bar{b}) = (-3, 8, 5) \times (8, -4, 20)$$

$$\vec{a} \times (4\vec{b}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 8 & 5 \\ 8 & -4 & 20 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times (4\vec{b}) = \hat{i}(160 + 20) - \hat{j}(-60 - 40) + \hat{k}(12 - 64) = 180\hat{i} + 100\hat{j} - 52\hat{k}$$

$$\vec{a} \times (4\vec{b}) = (180, 100, -52)$$

Por lo tanto,

$$4(\vec{a} \times \vec{b}) = (4\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (4\vec{b})$$

31. Calcular el área del paralelogramo generado por los vectores:

$$\vec{a} = (1, 4, -2) \text{ y } \vec{b} = (5, -4, 6)$$

Solución:

El área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está dada por la fórmula $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = \hat{i}(24 - 8) - \hat{j}(6 + 10) + \hat{k}(-4 - 20)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 16\hat{i} - 16\hat{j} - 24\hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (16, -16, -24)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(16)^2 + (-16)^2 + (-24)^2}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1088}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 8\sqrt{17}$$

32. Demostrar que $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$

Solución:

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ entonces $\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\lambda \vec{a}| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2 + (\lambda a_3)^2}$$

$$|\lambda \vec{a}| = \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2 + \lambda^2 a_3^2}$$

$$|\lambda \vec{a}| = \sqrt{\lambda^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$$

$$|\lambda \vec{a}| = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$$

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$$

Otra demostración es la siguiente:

$$|\lambda \vec{a}| = \sqrt{(\lambda \vec{a}) \cdot (\lambda \vec{a})}$$

$$|\lambda \vec{a}| = \sqrt{\lambda^2 \vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$|\lambda \vec{a}| = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$$

33. Para los vectores $\vec{a} = (1, 1, -1)$ y $\vec{b} = (2, 0, -1)$ calcular área del paralelogramo generado por los vectores:

a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$

b) $3\vec{a}$ y $\vec{b}$

c) $\vec{a}$ y $-2\vec{b}$

d) $-2\vec{a}$ y $4\vec{b}$

e) $\frac{1}{5}\vec{a}$ y $-\frac{1}{3}\vec{b}$

Solución:

a) El área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}(-1) - \hat{j}(-1+2) + \hat{k}(-2) = (-1, -1, -2)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$A = \sqrt{6} \text{ (unidades cuadradas)}$$

b) Considerando que $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, el área del paralelogramo generado por $3\vec{a}$ y $\vec{b}$ es:

$$|(3\vec{a}) \times \vec{b}| = |3(\vec{a} \times \vec{b})| = 3|\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{6}$$

$$A = 3\sqrt{6} \text{ (unidades cuadradas)}$$

- c) Considerando que $\bar{a} \times (\lambda \bar{b}) = \lambda (\bar{a} \times \bar{b})$, el área del paralelogramo generado por $\bar{a}$ y $-2\bar{b}$, es:

$$\left| \bar{a} \times (-2\bar{b}) \right| = \left| (-2)(\bar{a} \times \bar{b}) \right| = |(-2)| |\bar{a} \times \bar{b}| = 2 |\bar{a} \times \bar{b}| = 2\sqrt{6}$$

$$A = 2\sqrt{6} \text{ (unidades cuadradas)}$$

- d) Considerando que $(\lambda \bar{a}) \times (\beta \bar{b}) = (\lambda \beta) (\bar{a} \times \bar{b})$, el área del paralelogramo generado por $-2\bar{a}$ y $4\bar{b}$ es:

$$\left| (-2\bar{a}) \times (4\bar{b}) \right| = \left| (-2)(4)(\bar{a} \times \bar{b}) \right| = |-8| |\bar{a} \times \bar{b}| = 8 |\bar{a} \times \bar{b}| = 8\sqrt{6}$$

$$A = 8\sqrt{16} \text{ (unidades cuadradas)}$$

- e) El área del paralelogramo generado por

$$\frac{1}{5}\bar{a} \text{ y } -\frac{1}{3}\bar{b}$$

es:

$$A = \left| \left(\frac{1}{5}\bar{a} \right) \times \left(-\frac{1}{3}\bar{b} \right) \right|$$

$$A = \left| \left(\frac{1}{5} \right) \left(-\frac{1}{3} \right) (\bar{a} \times \bar{b}) \right|$$

$$A = \left| \left(-\frac{1}{15} \right) \right| |\bar{a} \times \bar{b}|$$

$$A = \frac{1}{15} \sqrt{6} \text{ (unidades cuadradas)}$$

34. Sean los vectores:

$$\bar{u} = (3, 1, 4), \quad \bar{v} = (2, -3, 0) \quad \text{y} \quad \bar{w} = (-2, 1, 2)$$

Determinar los escalares

$$x, y, z \in \mathbb{R} \quad \text{tales que} \quad \bar{m} = (11, -9, 2) = x\bar{u} + y\bar{v} + z\bar{w}$$

Solución:

$$(11, -9, 2) = x(3, 1, 4) + y(2, -3, 0) + z(-2, 1, 2)$$

$$(11, -9, 2) = (3x + 2y - 2z, x - 3y + z, 4x + 2z)$$

$$3x + 2y - 2z = 11 \quad \dots (1)$$

$$x - 3y + z = -9 \quad \dots (2)$$

$$4x + 2z = 2 \quad \dots (3)$$

De la ecuación (3)

$$4x + 2z = 2 \Rightarrow 2x + z = 1 \Rightarrow z = 1 - 2x$$

sustituyendo $z = 1 - 2x$ en (1) y (2)

$$3x + 2y - 2(1 - 2x) = 11$$

$$x - 3y + (1 - 2x) = -9$$

simplificando, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$7x + 2y = 13 \quad \dots (4)$$

$$-x - 3y = -10 \quad \dots (5)$$

despejando x de (5) y sustituyendo en (4)

$$x = 10 - 3y$$

$$7(10 - 3y) + 2y = 13$$

$$70 - 21y + 2y = 13$$

$$-19y = -57$$

$$y = 3$$

$$x = 10 - 3y = 10 - 3(3) = 10 - 9 = 1$$

$$z = 11 - 2x = 11 - 2(1) = 11 - 2 = 9$$

Por tanto:

$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = 9$$

$$\vec{m} = 1\vec{u} + 3\vec{v} + 9\vec{w}$$

Nota: En álgebra lineal se dice que $\vec{m}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

35. Determinar un vector unitario paralelo al vector

$$\vec{r} = 2\vec{r}_1 - 4\vec{r}_2 + \frac{1}{3}\vec{r}_3$$

donde

$$\vec{r}_1 = (2, -3, 5), \quad \vec{r}_2 = (0, 4, -1), \quad \vec{r}_3 = (6, 9, -3)$$

Solución:

$$\vec{r} = 2(2, -3, 5) - 4(0, 4, -1) + \frac{1}{3}(6, 9, -3)$$

$$\vec{r} = (4, -6, 10) + (0, -16, 4) + (2, 3, -1)$$

$$\vec{r} = (6, -19, 13)$$

$$\bar{r} = \sqrt{(16)^2 + (-19)^2 + (13)^2}$$

$$\bar{r} = \sqrt{36 + 361 + 169}$$

$$\bar{r} = \sqrt{566}$$

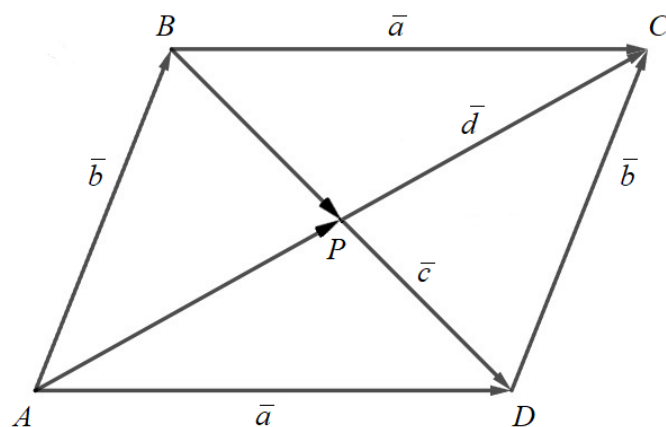
Un vector unitario paralelo al vector $\bar{r}$, es:

$$\bar{r} = \frac{1}{\sqrt{566}} (6, -19, 13)$$

$$\bar{r} = \left(\frac{6}{\sqrt{566}}, -\frac{19}{\sqrt{566}}, \frac{13}{\sqrt{566}} \right)$$

36. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Solución:



$$\bar{a} = \bar{b} + \bar{c} \Rightarrow \bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$$

$$\overline{BP} = x \bar{c} = x (\bar{a} - \bar{b})$$

$$\bar{d} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{AP} = y \bar{d} = y (\bar{a} + \bar{b})$$

$$\bar{b} + \overline{BP} = \overline{AP} \Rightarrow \bar{b} = \overline{AP} - \overline{BP}$$

$$\bar{b} = y (\bar{a} + \bar{b}) - x (\bar{a} - \bar{b}) = y \bar{a} + y \bar{b} - x \bar{a} + x \bar{b} = (-x + y) \bar{a} + (x + y) \bar{b}$$

$$\bar{b} = (-x + y) \bar{a} + (x + y) \bar{b}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$\overline{BP} = \frac{1}{2} \bar{c} \quad y \quad \overline{AP} = \frac{1}{2} \bar{d}$$

Es decir, las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

37. Sean los vectores

$$\bar{a} = (x - 3y) \hat{i} + (2x - y - 1) \hat{j} \quad y \quad \bar{b} = (x + y - z) \hat{i} + (-x - 3y + 1) \hat{j}$$

Determinar $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $4\bar{a} = -3\bar{b}$

Solución:

$$4\bar{a} = (4x - 12y) \hat{i} + (8x - 4y - 4) \hat{j}$$

$$-3\bar{b} = (-3x - 3y + 6) \hat{i} + (3x + 9y - 3) \hat{j}$$

$$4\bar{a} = -3\bar{b}$$

$$(4x - 12y) \hat{i} + (8x - 4y - 4) \hat{j} = (-3x - 3y + 6) \hat{i} + (3x + 9y - 3) \hat{j}$$

Por igualdad de vectores

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x - 12y = -3x - 3y + 6 \\ 8x - 4y - 4 = 3x + 9y - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7x - 9y = 6 \quad \dots (1) \\ 5x - 13y = 1 \quad \dots (2) \end{array} \right.$$

Resolviendo por igualación este sistema de ecuaciones, de (1) y de (2):

$$x = \frac{6 + 9y}{7}, \quad x = \frac{1 + 13y}{5}$$

$$\frac{6 + 9y}{7} = \frac{1 + 13y}{5} \Rightarrow 30 + 45y = 7 + 91y$$

$$23 = 46y$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{6 + 9y}{7} = \frac{6 + 9\left(\frac{1}{2}\right)}{7} = \frac{21}{7}$$

$$x = \frac{21}{14}$$

Por tanto, si

$$x = \frac{21}{14}, \quad y = \frac{1}{2}$$

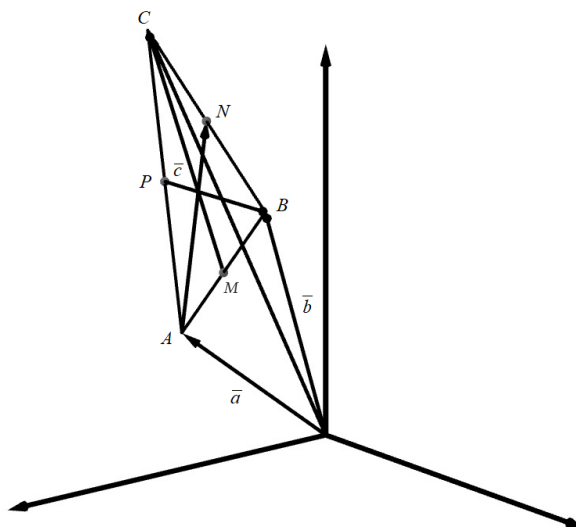
entonces $4\vec{a} = -3\vec{b}$.

38. Sea el triángulo cuyos vértices son:

$$A(1, -1, 1), \quad B(4, 4, 4), \quad \text{y} \quad C(-1, -4, 3)$$

Mediante álgebra vectorial, obtener la longitud de las medianas de dicho triángulo

Solución:



Sean M, N y P los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo ABC .

De la figura

$$\vec{a} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{PB} = \vec{b} - \vec{a} - \overrightarrow{AP}$$

como

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

entonces:

$$\overrightarrow{PB} = \vec{b} - \vec{a} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \vec{b} - \vec{a} - \frac{1}{2} (\vec{c} - \vec{a}) - \frac{1}{2} \vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c}$$

$$\overrightarrow{PB} = -\frac{1}{2} (1, -1, 1) + (4, 4, 4) - \frac{1}{2} (-1, -4, 3)$$

$$\overrightarrow{PB} = \left(4, \frac{13}{2}, 2 \right)$$

$$|PB| = \sqrt{(4)^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2 + (2)^2} = \sqrt{16 + \frac{169}{4} + 4}$$

$$|PB| = \sqrt{\frac{249}{4}} = 7.9$$

La mediana que va del punto P al punto B mide:

$$\sqrt{\frac{249}{4}} = 7.9$$

Análogamente, de la figura

$$\vec{a} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} = \vec{b}$$

$$\overline{MC} = \overline{b} - \overline{a} - \overline{AM} - \overline{CB}$$

$$\overline{MC} = \overline{b} - \overline{a} - \left(\frac{1}{2} \overline{AB} \right) - (\overline{b} - \overline{c})$$

$$\overline{MC} = \overline{b} - \overline{a} - \frac{1}{2} (\overline{b} - \overline{a}) - \overline{b} + \overline{c}$$

$$\overline{MC} = \overline{b} - \overline{a} - \frac{1}{2} \overline{b} + \frac{1}{2} \overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$$

$$\overline{MC} = -\frac{1}{2} \overline{a} - \frac{1}{2} \overline{b} + \overline{c}$$

$$\overline{MC} = -\frac{1}{2} (1, -1, 1) - \frac{1}{2} (4, 4, 4) + (-1, -4, 3)$$

$$\overline{MC} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) + (-2, -2, -2) + (-1, -4, 3)$$

$$\overline{MC} = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$|\overline{MC}| = \sqrt{\left(-\frac{7}{2} \right)^2 + \left(-\frac{11}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{121}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$|\overline{MC}| = \sqrt{\frac{171}{4}} = 6.5$$

La mediana que va del punto M al punto C mide:

$$\sqrt{\frac{171}{4}} = 6.5$$

Por último, de la figura

$$\overline{a} + \overline{AN} + \overline{NB} = \overline{b}$$

$$\overline{AN} = \overline{b} - \overline{a} - \overline{NB}$$

$$\overline{AN} = \overline{b} - \overline{a} - \frac{1}{2} \overline{CB}$$

$$\overline{AN} = \overline{b} - \overline{a} - \frac{1}{2} (\overline{b} - \overline{c})$$

$$\overline{AN} = \overline{b} - \overline{a} - \frac{1}{2} \overline{b} + \frac{1}{2} \overline{c}$$

$$\overline{AN} = -\overline{a} + \frac{1}{2} \overline{b} + \frac{1}{2} \overline{c}$$

$$\overline{AN} = -(1, -1, 1) + \frac{1}{2} (4, 4, 4) + \frac{1}{2} (-1, -4, 3)$$

$$\overline{AN} = (-1, 1, -1) + (2, 2, 2) + \left(-\frac{1}{2}, -2, \frac{3}{2}\right)$$

$$\overline{AN} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\right)$$

$$|\overline{AN}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{25}{4}}$$

$$|\overline{AN}| = \sqrt{\frac{15}{2}} = 2.7$$

La mediana que va del punto N al punto A mide:

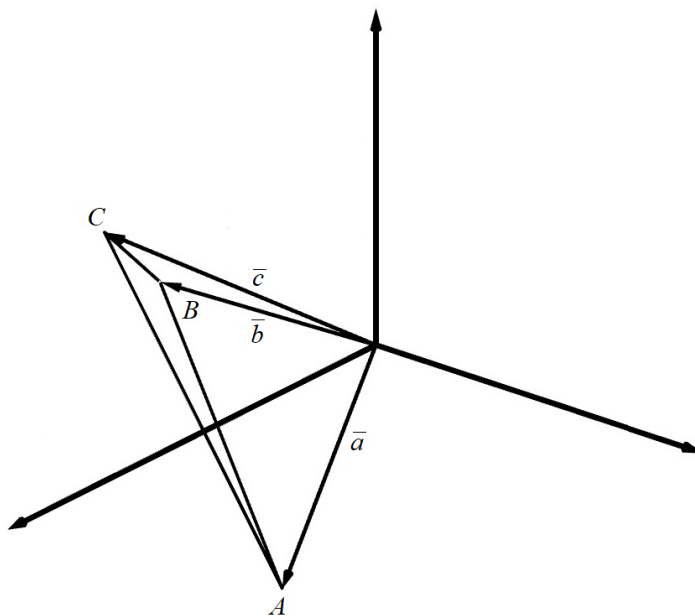
$$\sqrt{\frac{15}{2}} = 2.7$$

39. Demostrar, mediante álgebra vectorial, que el triángulo de vértices:

$$A(0, -2, -5), B(2, -3, 1), \text{ y } C(-1, -5, 1)$$

es un triángulo rectángulo.

Solución:



$$\overline{AB} = \overline{b} - \overline{a} = (2, -3, 1) - (0, -2, -5) = (2, -1, 6)$$

$$\overline{AC} = \overline{c} - \overline{a} = (1, -5, 1) - (0, -2, -5) = (1, -3, 6)$$

$$\overline{BC} = \overline{c} - \overline{b} = (1, -5, 1) - (2, -3, 1) = (-1, -2, 0)$$

Considerando los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AB}| |\overline{BC}|}$$

$$\cos \theta = \frac{(2, -1, 6) \cdot (-1, -2, 0)}{\sqrt{41} \sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \frac{-2 + 2 + 0}{\sqrt{41} \sqrt{5}} = \frac{0}{\sqrt{125}}$$

$$\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

Por tanto, los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son perpendiculares y el triángulo ABC es rectángulo.

40. Determinar un vector unitario que sea perpendicular a los vectores:

$$\vec{a} = (2, 4, -2) \text{ y } \vec{b} = (4, -1, 0)$$

Solución:

Un vector $\vec{v}$ es perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ si $\vec{v}$ es paralelo al vector $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(-2) - \hat{j}(8) + \hat{k}(-2 - 16)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-2, -8, -18)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + (-18)^2} = \sqrt{4 + 64 + 324} = \sqrt{392} = 14\sqrt{2}$$

Un vector $\vec{v}$ unitario perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es:

$$\hat{v} = \frac{1}{14\sqrt{2}} (-2, -8, -18)$$

$$\hat{v} = \left(-\frac{1}{7\sqrt{2}}, -\frac{4}{7\sqrt{2}}, -\frac{9}{7\sqrt{2}} \right)$$

Comprobación:

$$|\hat{v}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{7\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{4}{7\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{9}{7\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{98} + \frac{16}{98} + \frac{81}{98}} = \sqrt{\frac{98}{98}} = 1$$

$$\hat{v} \cdot \vec{a} = \left(-\frac{1}{7\sqrt{2}}, -\frac{4}{7\sqrt{2}}, -\frac{9}{7\sqrt{2}}\right) \cdot (2, 4, -2) = -\frac{2}{7\sqrt{2}} - \frac{16}{7\sqrt{2}} + \frac{18}{7\sqrt{2}} = 0$$

$$\hat{v} \cdot \bar{b} = \left(-\frac{1}{7\sqrt{2}}, -\frac{4}{7\sqrt{2}}, -\frac{9}{7\sqrt{2}} \right) \cdot (4, -1, 0) = -\frac{4}{7\sqrt{2}} + \frac{4}{7\sqrt{2}} = 0$$

41. Obtener el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas a los vectores:

$$\bar{a} = (1, 1, 0) \quad \bar{b} = (2, -3, 0) \quad \text{y} \quad \bar{c} = (7, -6, 10)$$

Solución:

El volumen del paralelepípedo es:

$$V = | \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} |$$

$$\text{Así} \quad V = | (1, 1, 0) \cdot (2, -3, 0) \times (7, -6, 10) |$$

$$(2, -3, 0) \times (7, -6, 10) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 7 & -6 & 10 \end{vmatrix} = \hat{i}(-30) - \hat{j}(20) + \hat{k}(-12 + 21)$$

$$(2, -3, 0) \times (7, -6, 10) = (-30, -20, 9)$$

$$V = | (1, 1, 0) \cdot (-30, -20, 9) |$$

$$V = | -30 - 20 |$$

$$V = | -50 |$$

$$V = 50 \quad (\text{unidades cúbicas})$$

42. Demostrar que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

donde:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad \text{y} \quad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

Solución:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) \times (c_1, c_2, c_3)$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2 c_3 - b_3 c_2, b_3 c_1 - b_1 c_3, b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_2 c_3 - b_3 c_2, b_3 c_1 - b_1 c_3, b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

43. Calcular el volumen del paralelepípedo generado por los vectores:

$$\vec{a} = (-2, 4, 1) \quad \vec{b} = (2, -5, 7) \quad \text{y} \quad \vec{c} = (5, -6, 3)$$

Solución:

$$V = | \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} |$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 7 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = -2(-15 + 42) - 4(6 - 35) + 1(-12 + 25)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = -2(27) - 4(-29) + 1(13) = -54 + 116 + 13$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 75$$

$$V = |75| = 75 \text{ (unidades cúbicas)}$$

44. Demostrar que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a}$$

Solución:

Para realizar esta demostración se utiliza la siguiente propiedad de los determinantes: “Cuando se intercambian dos líneas paralelas en un determinante, entonces el valor del determinante cambia de signo”

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Se intercambian los renglones 1 y 3

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Se intercambian los renglones 2 y 3

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Se intercambian los renglones 1 y 3

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Se intercambian los renglones 1 y 3

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Se intercambian los renglones 2 y 3

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} \times \vec{a}$$

Por lo tanto, $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a}$

45. Sean los vectores

$$\overline{m} = (m_1, m_2, m_3) \quad \text{y} \quad \overline{n} = (n_1, n_2, n_3).$$

Demostrar que:

$$\overline{m} \cdot (\overline{m} \times \overline{n}) = \overline{n} \cdot (\overline{m} \times \overline{m}) = \overline{m} \cdot (\overline{n} \times \overline{m}) = 0$$

Solución:

$$\overline{m} \cdot (\overline{m} \times \overline{n}) = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}$$

$$\overline{m} \cdot (\overline{m} \times \overline{n}) = m_1 \begin{vmatrix} m_2 & m_3 \\ n_2 & n_3 \end{vmatrix} - m_2 \begin{vmatrix} m_1 & m_3 \\ n_1 & n_3 \end{vmatrix} + m_3 \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix}$$

$$\overline{m} \cdot (\overline{m} \times \overline{n}) = m_1 (m_2 n_3 - m_3 n_2) - m_2 (m_1 n_3 - m_3 n_1) + m_3 (m_1 n_2 - m_2 n_1)$$

$$\overline{m} \cdot (\overline{m} \times \overline{n}) = m_1 m_2 n_3 - m_1 m_3 n_2 - m_2 m_1 n_3 + m_2 m_3 n_1 + m_3 m_1 n_2 - m_3 m_2 n_1$$

$$\overline{m} \cdot (\overline{m} \times \overline{n}) = m_1 m_2 n_3 - m_1 m_3 n_2 - m_1 m_2 n_3 + m_2 m_3 n_1 + m_1 m_3 n_2 - m_2 m_3 n_1$$

$$\overline{m} \cdot (\overline{m} \times \overline{n}) = (m_1 m_2 n_3 + m_2 m_3 n_1 + m_1 m_3 n_2) - (m_1 m_3 n_2 + m_1 m_2 n_3 + m_2 m_3 n_1)$$

$$\overline{m} \cdot (\overline{m} \times \overline{n}) = (m_1 m_2 n_3 + m_2 m_3 n_1 + m_1 m_3 n_2) - (m_1 m_2 n_3 + m_2 m_3 n_1 + m_1 m_3 n_2)$$

$$\overline{m} \cdot (\overline{m} \times \overline{n}) = 0$$

Otro método.

Se utiliza la siguiente propiedad de los determinantes

“Si dos líneas paralelas de un determinante son proporcionales, entonces el determinante es cero”.

$$\overline{m} \cdot (\overline{m} \times \overline{n}) = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (Los renglones 1 y 2 son proporcionales)}$$

Finalmente, utilizando la propiedad $\overline{a} \cdot \overline{b} \times \overline{c} = \overline{c} \cdot \overline{a} \times \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{c} \times \overline{a}$ se tiene que:

$$0 = \overline{m} \cdot (\overline{m} \times \overline{n}) = \overline{n} \cdot (\overline{m} \times \overline{m}) = \overline{m} \cdot \overline{n} \times \overline{m}$$

46. Sea el triángulo de vértices

$$A(2, 2, -4) \quad B(0, -3, 5) \quad \text{y} \quad C(1, -3, 1)$$

Determinar un vector de módulo 7 que sea perpendicular al triángulo ABC .

Solución:

Un vector $\overline{v}$ que sea perpendicular al triángulo ABC es un vector que es perpendicular al vector $\overline{AB}$ y al vector $\overline{AC}$. Es decir:

$$\overline{v} = \overline{AB} \times \overline{AC}$$

$$\overline{v} = (-2, -5, 9) \times (-1, -5, 5)$$

$$\overline{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -5 & 9 \\ -1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}(-25 + 45) - \hat{j}(-10 + 9) + \hat{k}(10 - 5) = 20\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\overline{v} = (20, 1, 5)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{20^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{400 + 1 + 25}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{426}$$

Un vector unitario perpendicular al triángulo ABC es:

$$\vec{v} = \left(\frac{140}{\sqrt{426}}, \frac{7}{\sqrt{426}}, \frac{35}{\sqrt{426}} \right)$$

Un vector de módulo 7 perpendicular al triángulo ABC es:

$$\vec{w} = 7\vec{v}$$

$$\vec{w} = \left(\frac{140}{\sqrt{426}}, \frac{7}{\sqrt{426}}, \frac{35}{\sqrt{426}} \right)$$

47. Sean los vectores:

$$\vec{a} = (2, 0, -3), \quad \vec{b} = (-5, 0, 4) \quad \text{y} \quad \vec{c} = (8, 0, -1)$$

Obtener el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$

Explicar el resultado.

Solución:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(0) - 0(5 - 32) - 3(0) = 0$$

$$v \cdot |\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}| = |0| = 0$$

Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ están en el plano xz , por tanto, son coplanares, es por lo que el volumen es cero.

48. Sean los vectores:

$$\vec{u} = \alpha (\vec{b} \times \vec{c}) \quad \vec{v} = \alpha (\vec{a} \times \vec{c}) \quad \text{y} \quad \vec{w} = \alpha (\vec{c} \times \vec{b})$$

no coplanares. Demostrar que:

- a) El vector $\vec{u}$ es perpendicular al vector $\vec{b}$ y al vector $\vec{c}$
- b) El vector $\vec{v}$ es perpendicular al vector $\vec{a}$ y al vector $\vec{c}$
- c) El vector $\vec{w}$ es perpendicular al vector $\vec{a}$ y al vector $\vec{b}$

Solución:

a) $\vec{u} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{b} = \alpha \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{ya que} \quad \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{u} \perp \vec{c} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{c} = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{c} = \alpha \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{c} = 0 \quad \text{ya que} \quad \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

b) $\vec{v} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{a} = 0$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \alpha \vec{a} \times \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{ya que} \quad \vec{a} \times \vec{c} \cdot \vec{a} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{v} \perp \vec{c} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{c} = 0$

$$\bar{v} \cdot \bar{c} = \alpha \bar{a} \times \bar{c} \cdot \bar{c} = 0 \quad \text{ya que} \quad \bar{a} \times \bar{c} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{c) } \bar{w} \perp \bar{a} \Leftrightarrow \bar{w} \cdot \bar{a} = 0$$

$$\bar{w} \cdot \bar{a} = \alpha \bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{a} = 0 \quad \text{ya que} \quad \bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{a} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\bar{v} \perp \bar{c} \Leftrightarrow \bar{v} \cdot \bar{c} = 0$$

$$\bar{w} \cdot \bar{b} = \alpha \bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{b} = 0 \quad \text{ya que} \quad \bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

49. Sean los vectores:

$$\bar{u} = \frac{1}{\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c}} \bar{b} \times \bar{c}, \quad \bar{v} = -\frac{1}{\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c}} \bar{a} \times \bar{c} \quad \text{y} \quad \bar{w} = \frac{1}{\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c}} \bar{a} \times \bar{b}$$

no coplanares. Demostrar que:

$$\text{a) } \bar{u} \cdot \bar{a} = 1$$

$$\text{b) } \bar{v} \cdot \bar{b} = 1$$

$$\text{c) } \bar{w} \cdot \bar{c} = 1$$

Solución:**a)**

$$\vec{u} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} = 1$$

b)

$$\vec{v} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} \vec{a} \times \vec{c} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} \vec{b} \cdot \vec{a} \times \vec{c} = -\frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} = \vec{c} \cdot \vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} \vec{a} \cdot \vec{c} \times \vec{b} = -\frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} \vec{a} \cdot (-\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\vec{v} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} (-\vec{a} \cdot \vec{c} \times \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} = 1$$

c)

$$\vec{w} \cdot \vec{c} = \frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} = 1$$

50. Sean los vectores:

$$\vec{a} = (2, -1, 3), \quad \vec{b} = (-1, 4, x) \quad \text{y} \quad \vec{c} = (1, 2, 3)$$

Determinar el valor de x tal que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ sean coplanares.**Solución:**Si $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 0$ entonces $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son coplanares

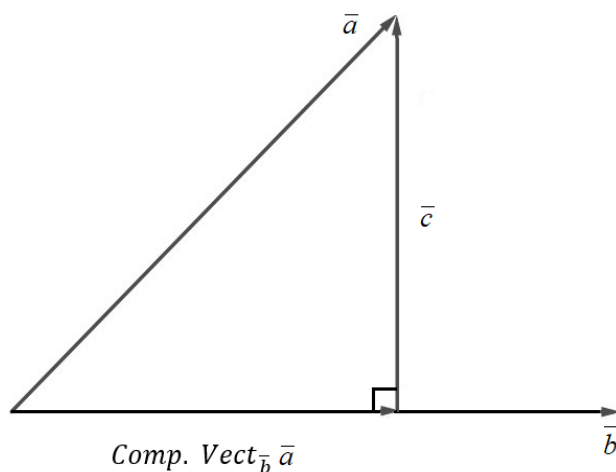
$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & x \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(12 - 2x) + (-3 - x) + 3(-2 - 4) = 0$$

$$24 - 4x - 3 - x - 18 = 0$$

$$-5x = -3$$

$$x = \frac{3}{5}$$

51. De acuerdo con la siguiente figura, demostrar analíticamente que los vectores $\vec{c}$ y $\text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{a}$ son perpendiculares.



Solución:

De la figura se observa que:

$$\vec{c} = \vec{a} - \text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{a}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

Si $\vec{c}$ y $\text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{a}$ son perpendiculares entonces $\vec{c} \cdot \text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{a} = 0$

$$\vec{c} \cdot \text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{a} = \left(\vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right) \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{a} \cdot \left(\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \right) \bar{b} - \left(\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \right) \bar{b} \cdot \left(\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \right) \bar{b} \\
&= \left(\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \right) \bar{a} \cdot \bar{b} - \left(\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \right)^2 \bar{b} \cdot \bar{b} \\
&= \frac{(\bar{a} \cdot \bar{b})^2}{|\bar{b}|^2} - \frac{(\bar{a} \cdot \bar{b})^2}{|\bar{b}|^2} |\bar{b}|^2 \\
&= \frac{(\bar{a} \cdot \bar{b})^2}{|\bar{b}|^2} - \frac{(\bar{a} \cdot \bar{b})^2}{|\bar{b}|^2}
\end{aligned}$$

$$\bar{c} \cdot \text{Comp.Vect}_{\bar{b}} \bar{a} = 0$$

Como $\bar{c} \cdot \text{Comp.Vect}_{\bar{b}} \bar{a} = 0$ entonces los vectores $\bar{c}$ y $\text{Comp.Vect}_{\bar{b}} \bar{a}$ son perpendiculares.

52. Determinar tres vectores que sean perpendiculares al vector:

$$\bar{a} = (-1, 2, -4)$$

Solución:

Para obtener un vector que sea perpendicular al vector $\bar{a}$ basta con proponer un vector $\bar{b}$ cuyas dos de tres componentes sean conocidos y se determina la tercera con la condición de perpendicularidad. Es decir:

$$\bar{b} = (4, 3, z), \text{ ó } \bar{c} = (-5, y, 2) \text{ ó } \bar{d} = (x, 52, 14)$$

❖ Para el primer caso:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$$

$$(-1, 2, -4) \cdot (4, 3, z) = 0$$

$$-4 + 6 - 4z = 0$$

$$2 = 4z$$

$$\frac{1}{2} = z$$

Comprobación:

$$(-1, 2, -4) \cdot \left(4, 3, \frac{1}{2}\right) = -4 + 6 - 2 = 0$$

Para el segundo caso:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$(-1, 2, -4) \cdot (-5, y, 2) = 0$$

$$5 + 2y - 8 = 0$$

$$2y = 3$$

$$y = \frac{3}{2}$$

Comprobación:

$$(-1, 2, -4) \cdot \left(-5, \frac{3}{2}, 2\right) = 5 + 3 - 8 = 0$$

Para el tercer caso:

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$$

$$(-1, 2, -4) \cdot (x, 52, 14) = 0$$

$$-x + 104 - 56 = 0$$

$$48 = x$$

Comprobación:

$$(-1, 2, -4) \cdot (48, 52, 14) = -48 + 104 - 56 = 0$$

Por lo tanto, tres vectores perpendiculares al vector

$$\vec{a} = (-1, 2, -4)$$

son:

$$\vec{b} = \left(4, 3, \frac{1}{2}\right), \vec{c} = \left(-5, \frac{3}{2}, 2\right) \text{ y } \vec{d} = (48, 58, 14)$$

- 53.** Determinar el conjunto de vectores que son perpendiculares al vector $(1, 2, 1)$ que tengan módulo π unidades.

Solución:

Todos los vectores que son perpendiculares a $\vec{m} = (1, 2, 1)$ satisfacen que $\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$, donde $\vec{n} = (x, y, z)$.

Luego

$$\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$$

$$(x, y, z) \cdot (1, 2, 1) = 0$$

$$x + 2y + z = 0$$

$$z = -x - 2y$$

$$\vec{n} = (x, y, -x - 2y)$$

El conjunto de vectores perpendiculares a $\vec{m}$, es:

$$\left\{ \vec{n} \mid \vec{n} = (x, y, -x - 2y) \text{ } x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Comprobación:

$$\vec{n} \cdot \vec{m} = (x, y, -x - 2y) \cdot (1, 2, 1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{m} = x + 2y - x - 2y$$

$$\bar{n} \cdot \bar{m} = 0$$

Por otro lado,

$$|\bar{n}| = \sqrt{x^2 + y^2 + (-x - 2y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + x^2 + 4xy + 4y^2}$$

$$|\bar{n}| = \sqrt{2x^2 + 5y^2 + 4xy}$$

Los vectores unitarios que son perpendiculares a $\bar{m}$, son:

$$\hat{n} = \frac{1}{|\bar{n}|} \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 5y^2 + 4xy}} (x, y, -x - 2y)$$

$$\hat{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{2x^2 + 5y^2 + 4xy}}, \frac{y}{\sqrt{2x^2 + 5y^2 + 4xy}}, \frac{-x - 2y}{\sqrt{2x^2 + 5y^2 + 4xy}} \right) \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$$

El conjunto de vectores perpendiculares a $\bar{m}$, y de módulo π es

$$\left\{ \left(\frac{\pi x}{\sqrt{2x^2 + 5y^2 + 4xy}}, \frac{\pi y}{\sqrt{2x^2 + 5y^2 + 4xy}}, \frac{-\pi x - 2\sqrt{1}y}{\sqrt{2x^2 + 5y^2 + 4xy}} \right) \mid x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0 \right\}$$

- 54.** Determinar todos los vectores que sean perpendiculares, de manera simultánea a los vectores $\bar{a} = (-2, 1, 2)$, y $\bar{b} = (3, -1, 2)$, y posteriormente dar dos vectores que forman un ángulo de 180° entre ellos y que sean perpendiculares simultáneamente a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$

Solución:

Los vectores que son perpendiculares a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son los vectores paralelos al vector $\bar{a} \times \bar{b}$; recuerde que el vector $\bar{a} \times \bar{b}$ es perpendicular tanto al vector $\bar{a}$ como al vector $\bar{b}$.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \hat{i}(2 + 2) - \hat{j}(-4 - 6) + \hat{k}(2 - 3)$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = 4\hat{i} + 10\hat{j} - \hat{k}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = (4, 10, -1)$$

Note que:

$$(4, 10, -1) \cdot (-2, 1, 2) = 0 \quad \text{y} \quad (4, 10, -1) \cdot (3, -1, 2) = 0$$

Los vectores que son paralelos al vector $\bar{a} \times \bar{b}$ son los que tienen la forma $\lambda(4, 10, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Así, el conjunto de vectores perpendiculares tanto a $\bar{a}$ como a $\bar{b}$ es:

$$\left\{ \bar{c} \mid \bar{c} = \lambda(4, 10, -1); \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

En particular

$$\lambda = 2 \Rightarrow \bar{c}_1 = 2(4, 10, -1) = (8, 20, -2)$$

$$\lambda = -3 \Rightarrow \bar{c}_2 = -3(4, 10, -1) = (-12, -30, 3)$$

$\bar{c}_1$ y $\bar{c}_2$ son vectores perpendiculares, de manera simultánea a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

$$\bar{c}_1 \cdot \bar{b} = (8, 20, -2) \cdot (-2, 1, 2) = -16 + 20 - 4 = 0$$

$$\bar{c}_1 \cdot \bar{a} = (8, 20, -2) \cdot (3, -1, 2) = 24 - 20 - 4 = 0$$

$$\bar{c}_2 \cdot \bar{b} = (-12, -30, 3) \cdot (-2, 1, 2) = 24 - 30 + 6 = 0$$

$$\bar{c}_2 \cdot \bar{b} = (-12, -30, 3) \cdot (3, -1, 2) = -36 + 30 + 6 = 0$$

Hay que notar que se asignó un vector positivo al escalar λ ($\lambda = 2$) y otro valor negativo a λ ($\lambda = -3$), de esta manera $\bar{c}_1$ y $\bar{c}_2$ son antiparalelos (vectores de sentido opuesto) y por tanto el ángulo entre ellos es de 180° . Se puede verificar calculando el ángulo entre $\bar{c}_1$ y $\bar{c}_2$ utilizando la fórmula

$$\cos \theta = \frac{\bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2}{|\bar{c}_1| |\bar{c}_2|}$$

$$\cos \theta = \frac{(8, 20, -2) \cdot (-12, -30, 3)}{\sqrt{8^2 + 20^2 + (-2)^2} \sqrt{(-12)^2 + (-30)^2 + 3^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{-96 - 600 - 6}{\sqrt{64 + 400 + 4} \sqrt{144 + 900 + 9}}$$

$$\cos \theta = \frac{-702}{\sqrt{468} \sqrt{1053}}$$

$$\cos \theta = \frac{-702}{\sqrt{992804}}$$

$$\cos \theta = \frac{-702}{702}$$

$$\cos \theta = -1$$

$$\theta = \arccos(-1)$$

$$\theta = 180^\circ$$

55. Determinar el conjunto de vectores que son perpendiculares, de manera simultánea, en los vectores:

$$\bar{a} = (4, 1, 2), \bar{b} = (-1, 1, 1) \text{ y } \bar{c} = (0, 1, 1)$$

Solución:

Sea el vector $\bar{f} = (x, y, z)$

$$\bar{f} \text{ perpendicular a } \bar{a} \text{ implica } \bar{f} \cdot \bar{a} = 0$$

$$\bar{f} \text{ perpendicular a } \bar{b} \text{ implica } \bar{f} \cdot \bar{b} = 0$$

$$\bar{f} \text{ perpendicular a } \bar{c} \text{ implica } \bar{f} \cdot \bar{c} = 0$$

$$\bar{f} \cdot \bar{a} = 0 \Rightarrow (x, y, z) \cdot (4, 1, 2) = 0 \Rightarrow 4x + y + 2z = 0 \dots (1)$$

$$\bar{f} \cdot \bar{b} = 0 \Rightarrow (x, y, z) \cdot (-1, 1, 1) = 0 \Rightarrow -x + y + z = 0 \dots (2)$$

$$\bar{f} \cdot \bar{c} = 0 \Rightarrow (x, y, z) \cdot (0, 1, 1) = 0 \Rightarrow y + z = 0 \dots (3)$$

La solución al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

da el conjunto buscado.

Resolviendo por método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sistema equivalente

$$-x + y + z = 0$$

$$y + z = 0$$

$$z = 0$$

$$z = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$y = 0, z = 0 \Rightarrow x = 0$$

Única solución del sistema de ecuaciones: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Esto quiere decir que el único vector que puede ser perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es el vector $\vec{f} = (0, 0, 0)$.

El conjunto solicitado en este problema es $\{(0, 0, 0)\}$

56. Calcular un vector $\vec{v}$ que sea paralelo al vector $\vec{u} = (5, 7, -2)$ y que tenga un módulo de cuatro unidades.

Solución:

Para obtener un vector $\vec{v}$ paralelo a $\vec{u}$ y de módulo 4, se obtiene el vector unitario $\hat{u}$ y se multiplica por 4.

$$\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u}$$

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{5^2 + 7^2 + (-2)^2}} (5, 7, -2)$$

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{78}} (5, 7, -2)$$

$$\hat{u} = \left(\frac{5}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{-2}{\sqrt{78}} \right)$$

$$\vec{v} = 4\hat{u} = \left(\frac{20}{\sqrt{78}}, \frac{28}{\sqrt{78}}, \frac{-8}{\sqrt{78}} \right)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{20}{\sqrt{78}} \right)^2 + \left(\frac{28}{\sqrt{78}} \right)^2 + \left(\frac{-8}{\sqrt{78}} \right)^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{440}{78} + \frac{784}{78} + \frac{64}{78}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{1248}{78}}$$

$$|\vec{v}| = 4$$

El vector $\vec{v}$ es paralelo al vector $\vec{u}$ y tiene módulo 4.

57. ¿Es posible que existan dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que:

$$\text{Comp. Esc}_{\vec{b}} \vec{a} = 0 \quad \text{y} \quad \text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{a} = \vec{0} ?$$

Solución:

Dado que:

$$\text{Comp. Esc}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

entonces basta con pedir que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ para que:

$$\text{Comp. Esc}_{\vec{b}} \vec{a} = 0 \quad \text{y} \quad \text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{a} = \vec{0}$$

Un ejemplo sencillo es considerar a los vectores

$$\vec{a} = \hat{i} = (1, 0, 0) \quad \text{y} \quad \vec{b} = \hat{j} = (0, 1, 0)$$

$$\text{Comp. Esc}_{\vec{j}} \hat{i} = \frac{\hat{i} \cdot \hat{j}}{|\hat{i}|} = \frac{0}{1} = 0$$

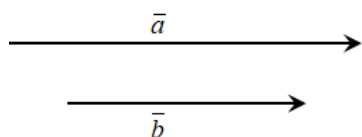
$$\text{Comp. Vect}_{\vec{j}} \hat{i} = \frac{\hat{i} \cdot \hat{j}}{|\hat{i}|^2} \hat{i} = \frac{0}{1} \hat{i} = \vec{0}$$

58. ¿Es posible que existan dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que:

$$\text{Comp. Esc}_{\vec{b}} \vec{a} = \vec{a} \quad \text{y} \quad \text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| ?$$

Solución:

Considere la siguiente situación geométrica



$$\vec{a} = \lambda \vec{b} ; \lambda > 0$$

En este caso:

$$\text{Comp.Vect}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{\lambda \vec{b} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{\lambda |\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \lambda \vec{b} = \vec{a}$$

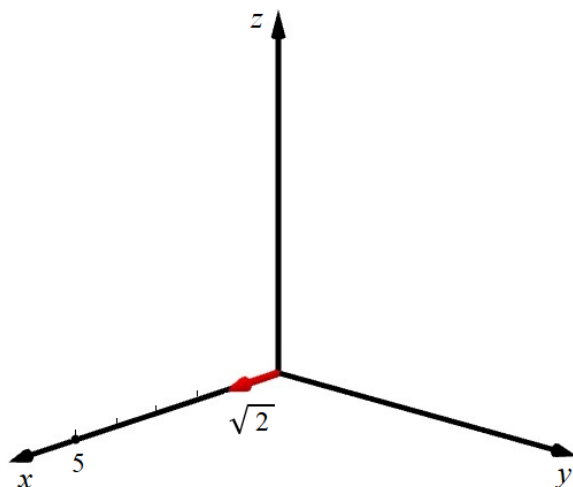
$$\text{Comp.Esc}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\lambda \vec{b} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\lambda |\vec{b}|^2}{|\vec{b}|} = \lambda |\vec{b}| = |\lambda \vec{b}| = |\vec{a}|$$

Por tanto, si $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ entonces:

$$\text{Comp.Vect}_{\vec{b}} \vec{a} = \vec{a} \quad \text{y} \quad \text{Comp.Esc}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}|$$

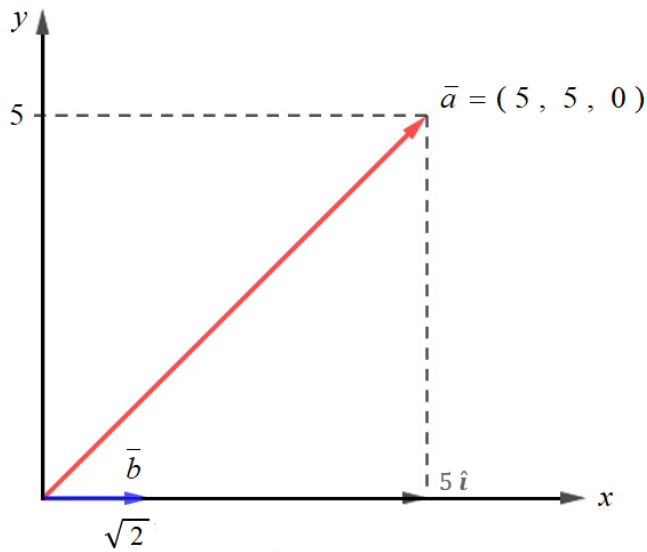
59. Obtener un vector $\vec{a}$ tal que:

$$\text{Comp.Vect}_{\vec{b}} \vec{a} = 5 \hat{i} \quad \text{donde} \quad \vec{b} = (\sqrt{2}, 0, 0) \quad \text{e} \quad \hat{i} = (1, 0, 0)$$



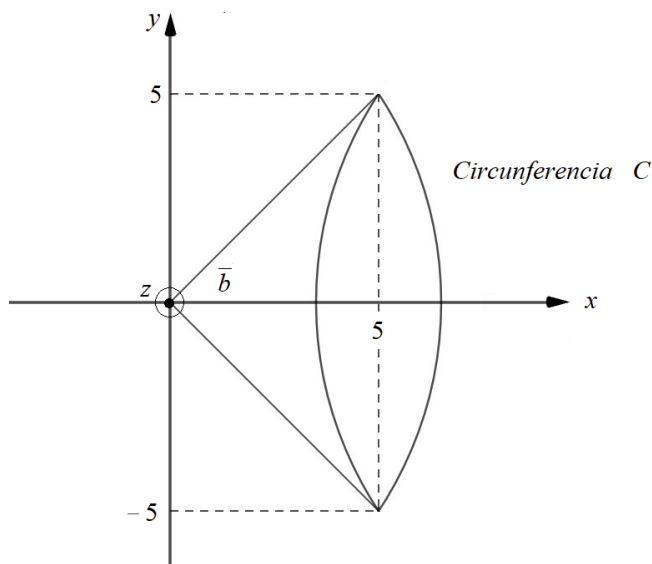
Solución:

Considere la perspectiva del plano $x y$ para este problema



$$\begin{aligned}
 \text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{a} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \\
 &= \frac{(5, 5, 0) \cdot (\sqrt{2}, 0, 0)}{(\sqrt{2})^2} (\sqrt{2}, 0, 0) \\
 &= \frac{5\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2}, 0, 0) \\
 &= \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2}), 0, 0 \right) \\
 &= (5, 0, 0) \\
 &= 5 (1, 0, 0) \\
 &= 5 \hat{i}
 \end{aligned}$$

En realidad, hay muchos vectores que cumplen con la condición
 $\text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{a} = 5 \hat{i}$



Todos los vectores que tienen como punto inicial a $(0, 0, 0)$ y como punto final un punto a la circunferencia c tienen la característica de que su componente vectorial sobre el vector $\vec{b}$ es $5\hat{i}$.

60. Sean los vectores,

$$\vec{a} = (2, 0, -1) \text{ y } \vec{b} = (-3, 2, 0)$$

Determinar:

- a) *Comp. Esc* $\vec{a} \times \vec{b}$
- b) *Comp. Vect* $\vec{a} \times \vec{b}$
- c) *Comp. Esc* $\vec{b} \times \vec{a}$
- d) *Comp. Vect* $\vec{b} \times \vec{a}$

Solución:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(2) - \hat{j}(-3) + \hat{k}(4) = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2, 3, 4) \Rightarrow \vec{b} \times \vec{a} = (-2, -3, -4)$$

a)

$$\begin{aligned}\text{Comp. Esc } \bar{a} \times \bar{b} &= \frac{(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|} \\&= \frac{(2, 3, 4) \cdot (2, 0, -1)}{\sqrt{5}} \\&= \frac{0}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

$$\text{Comp. Esc } \bar{a} \times \bar{b} = 0$$

b)

$$\begin{aligned}\text{Comp. Vect } \bar{a} \times \bar{b} &= \frac{(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|^2} \bar{a} \\&= \frac{0}{5} \bar{a}\end{aligned}$$

$$\text{Comp. Vect } \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$$

c)

$$\begin{aligned}\text{Comp. Esc } \bar{b} \times \bar{a} &= \frac{(\bar{b} \times \bar{a}) \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} \\&= \frac{(-2, -3, -4) \cdot (-3, 2, 0)}{\sqrt{13}} \\&= \frac{0}{\sqrt{13}}\end{aligned}$$

$$\text{Comp. Esc } \bar{b} \times \bar{a} = 0$$

d)

$$\begin{aligned}\text{Comp. Vect } \bar{b} \times \bar{a} &= \frac{(\bar{b} \times \bar{a}) \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \bar{b} \\&= \frac{0}{13} \bar{b}\end{aligned}$$

$$\text{Comp. Vect } \bar{b} \times \bar{a} = 0$$

La razón de estos resultados es que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular al vector $\vec{a}$, de modo que la componente escalar del vector $\vec{a} \times \vec{b}$ sobre el vector $\vec{a}$ es cero y, por tanto, la componente vectorial de $\vec{a} \times \vec{b}$ sobre $\vec{a}$ es el vector cero.

Análogamente el vector $\vec{b} \times \vec{a}$ es perpendicular al vector $\vec{b}$, de modo que la componente escalar del vector $\vec{b} \times \vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$ es cero y la componente vectorial de $\vec{b} \times \vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es el vector nulo.

61. Demostrar que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a los vectores:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \text{ y } \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Solución:

Se tiene que demostrar que:

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

Este problema se resuelve de manera sencilla si se hace uso del triple producto escalar y la propiedad de los determinantes que indica que, si dos líneas paralelas del determinante son proporcionales, entonces el determinante es igual a cero.

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

62. Obtener un vector unitario que sea perpendicular al vector

$$\bar{u} = (-1, 3, 4)$$

y al vector

$$\bar{v} = (2, -3, -3)$$

Solución:

$\bar{u} \times \bar{v}$ es un vector perpendicular a los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \hat{i}(-9+2) - \hat{j}(3-8) + \hat{k}(3-6)$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = (3, 5, -3)$$

El módulo de $\bar{u} \times \bar{v}$ es:

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = \sqrt{9 + 25 + 9} = \sqrt{43}$$

Por lo tanto, un vector que es perpendicular a $\bar{u}$ y a $\bar{v}$ es:

$$\frac{1}{|\bar{u} \times \bar{v}|} \bar{u} \times \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{43}} (3, 5, -3)$$

$$\frac{1}{|\bar{u} \times \bar{v}|} \bar{u} \times \bar{v} = \left(\frac{3}{\sqrt{43}}, \frac{5}{\sqrt{43}}, \frac{-3}{\sqrt{43}} \right)$$

63. Obtener el ángulo entre los vectores

$$\bar{a} = (3, 3, 3) \text{ y } \bar{b} = (-5, -5, -5)$$

Solución:

El ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se calcula mediante la fórmula

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\cos \theta = \frac{(3, 3, 3) \cdot (5, 5, 5)}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + (-5)^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{15 + 15 + 15}{\sqrt{27} \sqrt{75}}$$

$$\cos \theta = \frac{45}{45}$$

$$\cos \theta = 1$$

$$\cos \theta = \arccos(1)$$

$$\cos \theta = 0^\circ$$

El ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\theta = 0^\circ$. La razón es que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos, es decir:

$$(3, 3, 3) = -\frac{3}{5} (-5, -5, -5)$$

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} \text{ con } \lambda = -\frac{3}{5}$$

- 64.** Determinar los vectores unitarios que forman un ángulo a 45° con el vector $\hat{i} = (1, 0, 0)$ y son paralelos al plano xy .

Solución:

Como los vectores a determinar son paralelos al plano xy su cota es nula, por lo que los vectores son de la forma $\vec{a} = (a_1, a_2, 0)$.

Además, se pide que sean unitarios, entonces:

$$|\bar{a}| = 1 \Rightarrow \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1 \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 = 1 \Rightarrow a_2^2 = 1 - a_1^2 \dots (1)$$

Por último, forman un ángulo de 45° con el vector $\hat{i}$, esto es:

$$\cos 45^\circ = \frac{(1, 0, 0) \cdot (a_1, a_2, 0)}{(1)(1)} = \frac{a_1}{1} = a_1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = a_1$$

De (1)

$$a_2^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Los vectores que satisfacen las condiciones del problema son:

$$\bar{a} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \text{ y } \bar{b} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

65. Para los vectores,

$$\bar{a} = (1, 1, 1), \quad \bar{b} = (1, -2, 2) \text{ y } \bar{c} = (-3, 1, 1)$$

mostrar que:

$$[\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c}] = [\bar{c} \ \bar{a} \ \bar{b}] = [\bar{b} \ \bar{c} \ \bar{a}]$$

Solución:

$$[\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-2 - 2) - 1(1 + 6) + 1(1 - 6)$$

$$= -4 - 7 - 5$$

$$[\bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{c}] = -16$$

$$[\bar{c} \quad \bar{a} \quad \bar{b}] = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3(2 + 2) - 1(2 - 1) + 1(-2 - 1)$$

$$= -12 - 1 - 3$$

$$[\bar{c} \quad \bar{a} \quad \bar{b}] = -16$$

$$[\bar{b} \quad \bar{c} \quad \bar{a}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1 - 1) - (-2)(-3 - 1) + 2(-3 - 1)$$

$$= -8 - 8$$

$$[\bar{b} \quad \bar{c} \quad \bar{a}] = -16$$

Por lo tanto,

$$[\bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{c}] = [\bar{c} \quad \bar{a} \quad \bar{b}] = [\bar{b} \quad \bar{c} \quad \bar{a}]$$

Este ejercicio también se puede resolver utilizando la siguiente propiedad de los determinantes.

“Si en un determinante se intercambian dos líneas paralelas, entonces cambia de signo el valor del determinante”.

Así:

$$[\bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -16 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

Pero

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = [\bar{c} \quad \bar{a} \quad \bar{b}]$$

Análogamente:

$$[\bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -16 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16$$

Pero

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [\bar{b} \quad \bar{c} \quad \bar{a}]$$

Por lo tanto,

$$[\bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{c}] = [\bar{c} \quad \bar{a} \quad \bar{b}] = [\bar{b} \quad \bar{c} \quad \bar{a}]$$

66. Determinar el área del paralelogramo cuyas diagonales son los vectores:

$$\vec{u} = (3, 1, -2) \text{ y } \vec{v} = (1, -3, 4)$$

Solución:

El área del paralelogramo es:

$$A = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(-2) - \hat{j}(14) + \hat{k}(-10) = -2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-2, -14, -10)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-14)^2 + (-10)^2}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{4 + 196 + 100} = \sqrt{300}$$

$$A = \frac{\sqrt{300}}{2} = \frac{2\sqrt{75}}{2}$$

$$A = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

67. Dar un vector que tenga sus tres ángulos directores iguales y de módulo 10.

Solución:

Sean α , β , γ los ángulos directores del vector $\vec{a} = (x, y, z)$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Como se piden que los ángulos directores sean iguales, entonces

$$\alpha = \beta = \gamma \text{ y } \cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma$$

Luego:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$3 \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Además

$$\cos \alpha = \frac{(x, y, z) \cdot (1, 0, 0)}{|\vec{a}| |\hat{i}|} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 10 \cos \alpha = 10 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\cos \beta = \frac{(x, y, z) \cdot (0, 1, 0)}{|\vec{a}| |\hat{j}|} = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 10 \cos \beta = 10 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\cos \gamma = \frac{(x, y, z) \cdot (0, 0, 1)}{|\vec{a}| |\hat{k}|} = \frac{z}{10} \Rightarrow z = 10 \cos \gamma = 10 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Un vector que tiene sus tres ángulos directores y tiene módulo 10, es:

$$\vec{a} = \left(\frac{10}{\sqrt{3}}, \frac{10}{\sqrt{3}}, \frac{10}{\sqrt{3}} \right)$$

- 68.** La velocidad angular de un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo está dada por el vector $\vec{\omega} = (3, 1, -2)$. Determinar la velocidad lineal de un punto A del cuerpo si su vector de posición respecto de un punto del eje es $\vec{r} = (1, -3, 1)$.

Solución:

La velocidad lineal viene dada por

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Por lo que:

$$\vec{v} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(-5) - \hat{j}(5) + \hat{k}(-10)$$

Velocidad lineal

$$\vec{v} = (-5, -5, -10)$$

69. Si el momento de una fuerza viene dado por $\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F}$, ¿a qué es igual $\vec{m} \cdot \vec{r}$?

Solución:

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{m} \cdot \vec{r} = \vec{r} \times \vec{F} \cdot \vec{r} = 0$$

Por tanto,

$$\vec{m} \cdot \vec{r} = 0$$

70. Determinar el momento de la fuerza $\vec{F} = (3, 2, -4)$ que se aplica en el punto $A(1, -1, 2)$, respecto del punto $B(2, -1, 3)$

Solución:

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F}$$

En este caso $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b}$, donde:

$$\vec{a} = (1, -1, 2) \text{ y } \vec{b} = (2, -1, 3)$$

$$\vec{r} = (-1, 0, -1)$$

Luego

$$\overline{m} = \overline{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overline{m} = \hat{i}(2) - \hat{j}(7) + \hat{k}(-2)$$

$$\overline{m} = 2\hat{i} - 7\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\overline{m} = (2, -7, -2)$$

71. Sean los vectores:

$$\overline{a} = (1, 2, 1), \quad \overline{b} = (-1, 4, 1) \quad \text{y} \quad \overline{c} = (x, 1, 2)$$

Determinar los valores de x tales que el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$ sea 40

Solución:

$$V = | \overline{a} \quad \overline{b} \quad \overline{c} |$$

$$[\overline{a} \quad \overline{b} \quad \overline{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$[\overline{a} \quad \overline{b} \quad \overline{c}] = 1(8 - 1) - 2(-2 - x) + 1(-1 - 4x)$$

$$[\overline{a} \quad \overline{b} \quad \overline{c}] = 7 + 4 + 2x - 1 - 4x$$

$$[\overline{a} \quad \overline{b} \quad \overline{c}] = -2x + 6$$

$$V = |-2x + 6| = 40$$

$$-2x + 6 = 40 \quad \text{ó} \quad -2x + 6 = -40$$

$$6 - 40 = 2x \qquad \qquad \qquad 6 + 40 = 2x$$

$$-34 = 2x \qquad \qquad \qquad 46 = 2x$$

$$-17 = x \qquad \qquad \qquad 23 = x$$

Los valores de x para que el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son

$$x = -17$$

$$x = 23$$

72. Obtener los ángulos directores de los valores $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$

Solución:

Para el vector $\hat{i}$

$$\alpha = 0^\circ, \quad \beta = 90^\circ, \quad \gamma = 90^\circ$$

Comprobación:

$$\cos \alpha = \frac{\hat{i} \cdot \hat{i}}{|\hat{i}| |\hat{i}|} = \frac{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)}{(1)(1)} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = 0^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{\hat{i} \cdot \hat{j}}{|\hat{i}| |\hat{j}|} = \frac{(1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0)}{(1)(1)} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \beta = 90^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{\hat{i} \cdot \hat{k}}{|\hat{i}| |\hat{k}|} = \frac{(1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1)}{(1)(1)} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \gamma = 90^\circ$$

Para el vector $\hat{j}$

$$\alpha = 90^\circ, \quad \beta = 0^\circ, \quad \gamma = 90^\circ$$

Comprobación:

$$\cos \alpha = \frac{\hat{j} \cdot \hat{i}}{|\hat{j}| |\hat{i}|} = \frac{(0, 1, 0) \cdot (1, 0, 0)}{(1)(1)} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{\hat{j} \cdot \hat{j}}{|\hat{j}| |\hat{j}|} = \frac{(0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0)}{(1)(1)} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \beta = 0^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{\hat{j} \cdot \hat{k}}{|\hat{j}| |\hat{k}|} = \frac{(0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1)}{(1)(1)} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \gamma = 90^\circ$$

Para el vector $\hat{k}$

$$\alpha = 90^\circ, \quad \beta = 90^\circ, \quad \gamma = 0^\circ$$

Comprobación:

$$\cos \alpha = \frac{\hat{k} \cdot \hat{i}}{|\hat{k}| |\hat{i}|} = \frac{(0, 0, 1) \cdot (1, 0, 0)}{(1)(1)} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{\hat{k} \cdot \hat{j}}{|\hat{k}| |\hat{j}|} = \frac{(0, 0, 1) \cdot (0, 1, 0)}{(1)(1)} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \beta = 90^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{\hat{k} \cdot \hat{k}}{|\hat{k}| |\hat{k}|} = \frac{(0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1)}{(1)(1)} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \gamma = 0^\circ$$

73. Obtener los ángulos directores del vector $\vec{a} = (\pi, 0, \pi)$

Solución:

$$\alpha = ?, \quad \beta = ?, \quad \gamma = ?$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \hat{i}}{|\vec{a}| |\hat{i}|} = \frac{(\pi, 0, -\pi) \cdot (1, 0, 0)}{\left(\sqrt{\pi^2 + (-\pi)^2} \right) (1)} = \frac{\pi}{\sqrt{2} \pi} = \frac{\pi}{\sqrt{2} \pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \hat{j}}{|\vec{a}| |\hat{j}|} = \frac{(\pi, 0, -\pi) \cdot (0, 1, 0)}{\sqrt{2} \pi} = \frac{0}{\sqrt{2} \pi} = 0$$

$$\beta = \arccos(0)$$

$$\beta = 90^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \hat{k}}{|\vec{a}| |\hat{k}|} = \frac{(\pi, 0, -\pi) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{2} \pi} = \frac{\pi}{\sqrt{2} \pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\gamma = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\gamma = 45^\circ$$

Por tanto,

$$\alpha = 45^\circ, \quad \beta = 90^\circ, \quad \gamma = 45^\circ$$

- 74.** Obtener un vector de módulo 5 que sea perpendicular al vector $(0, 0, -\sqrt{5})$, que forme un ángulo de 60° con el vector $\hat{i}$ y uno de 30° con el vector $\hat{j}$.

Solución:

Sea $\vec{m} = (a, b, c)$ el vector por determinar.

$$(a, b, c) \cdot (0, 0, -\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow -\sqrt{5} c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\overline{m} = (a, b, 0)$$

$$\cos 60^\circ = \frac{(a, b, 0) \cdot (1, 0, 0)}{|\overline{m}| |i|}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{(5)(1)} = \frac{a}{5}$$

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)(5) = \frac{5}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{(a, b, 0) \cdot (0, 1, 0)}{|\overline{m}| |j|}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{b}{(5)(1)} = \frac{b}{5}$$

$$b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(5) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto,

$$\overline{m} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

75. ¿Es posible que un vector tenga dos de sus tres ángulos directores iguales a cero?

Solución:

Si por ejemplo $\alpha = 0$, y $\beta = 0$, de la fórmula:

$$\cos^2 0 + \cos^2 0 + \cos^2 \gamma = 1$$

Se tendría:

$$\cos^2 0^\circ + \cos^2 0^\circ + \cos^2 \gamma = 1$$

$$1 + 1 + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos^2 \gamma = 1 - 2$$

$$\cos^2 \gamma = -1$$

$$\cos \gamma = \sqrt{-1}$$

Pero $\sqrt{-1}$ no existe en el conjunto de los números reales. Por lo tanto, no es posible que un vector tenga dos de sus tres ángulos directores iguales a cero.

76. Sean los vectores:

$$\vec{a} = (-3, 6, 15), \text{ y } \vec{b} = (4 - x, 2, y - 2)$$

Determinar el vector de x y el de y para que los vectores sean paralelos.

Solución:

$\vec{a}$ es paralela a $\vec{b}$ si $\vec{a} = \lambda \vec{b}$

Sustituyendo los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$(-3, 6, 15) = \lambda (4 - x, 2, y - 2)$$

$$(-3, 6, 15) = (\lambda(4 - x), 2\lambda, \lambda(y - 2))$$

Por igualdad de vectores:

$$-3 = \lambda (4 - x) \quad \dots (1)$$

$$6 = 2\lambda \quad \dots (2)$$

$$15 = \lambda (y - 2) \quad \dots (3)$$

De (2)

$$\lambda = 3$$

De (1)

$$-3 = (3)(4 - x)$$

$$-3 = 12 - 3x$$

$$3x = 12 + 3$$

$$3x = 15$$

$$x = 5$$

De (3)

$$15 = (3)(y - 2)$$

$$15 = 3y - 6$$

$$21 = 3y$$

$$y = 7$$

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos si $x = 5$, $y = 7$

77. Dar un vector $\vec{a}$ que forme un ángulo de 180° con el vector

$$\vec{b} = (2, 4, -3)$$

y que tenga un módulo de 8 unidades.

Solución:

Se obtiene el vector unitario $\vec{b}$

$$\hat{b} = \frac{1}{|\vec{b}|} (2, 4, -3)$$

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{9+16+4}} (2, 4, -3) = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}} \right)$$

Ahora se multiplica $\hat{b}$ por -8 , ya que se quiere que $\vec{a}$ tenga un módulo de 8 unidades y que forme un ángulo de 180° con $\vec{b}$

$$\vec{a} = 8 \hat{b}$$

$$\vec{a} = -8 \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}} \right)$$

$$\vec{a} = \left(\frac{-16}{\sqrt{29}}, \frac{-32}{\sqrt{29}}, \frac{24}{\sqrt{29}} \right)$$

Comprobación:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{-16}{\sqrt{29}} \right)^2 + \left(\frac{-32}{\sqrt{29}} \right)^2 + \left(\frac{24}{\sqrt{29}} \right)^2} = \sqrt{\frac{256}{29} + \frac{1024}{29} + \frac{576}{29}}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\frac{1856}{29}} = \sqrt{64}$$

$$|\vec{a}| = 8$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\cos \theta = \frac{\frac{1}{\sqrt{29}} (-16, -32, 24) \cdot (2, 4, -3)}{(8) \sqrt{29}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{29}} (-32 - 128 - 72)}{8 \sqrt{29}}$$

$$\cos \theta = \frac{-232}{(8)(29)}$$

$$\cos \theta = -\frac{232}{232} = -1$$

$$\theta = \text{ang} \cos (-1) = 180^\circ$$

78. Sean los vectores perpendiculares

$$\vec{a} = (1, x, y) \text{ y } \vec{b} = (-1, 0, 1)$$

Determinar los valores de x y el valor de y para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean dos de los lados de un paralelogramo de área $\sqrt{6}$ unidades cuadradas.

Solución:

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ perpendiculares implica $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$(1, x, y) \cdot (-1, 0, 1) = 0$$

$$-1 + y = 0 \Rightarrow y = 1$$

El área del paralelogramo generado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{6}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & x & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(x) - \hat{j}(2) + \hat{k}(x)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = x\hat{i} - 2\hat{j} + x\hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{x^2 + 4 + x^2} = \sqrt{2x^2 + 4}$$

$$A = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{2x^2 + 4} = \sqrt{6}$$

$$2x^2 + 4 = 6$$

$$2x^2 = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Por tanto,

$$x = \pm 1, \quad y = 1$$

79. Sean los puntos

$$A(2, -2, -8), \quad B \quad \text{y} \quad C(1, 1, 1)$$

el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Si $\vec{a}$, $\vec{b}$, y $\vec{c}$ son los vectores de posición asociados a los puntos A , B y C respectivamente, determinar:

- a) La componente vectorial del vector $\vec{c}$ sobre el vector $\vec{b}$, y
- b) La componente escalar el vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$.

Solución:

- a) Primero se obtienen las coordenadas del punto $B(b_1, b_2, b_3)$ mediante las fórmulas de punto medio y considerando que C es el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

$$1 = \frac{2 + b_1}{2} \Rightarrow 2 = 2 + b_1 \Rightarrow b_1 = 0$$

$$1 = \frac{-2 + b_2}{2} \Rightarrow 2 = -2 + b_2 \Rightarrow b_2 = 4$$

$$1 = \frac{-8 + b_3}{2} \Rightarrow 2 = -8 + b_3 \Rightarrow b_3 = 10$$

Luego:

$$B(0, 4, 10)$$

Los vectores de posición $\vec{a}$, $\vec{b}$, y $\vec{c}$ son:

$$\vec{a} = (2, -2, 8), \quad \vec{b} = (0, 4, 10), \quad \text{y} \quad \vec{c} = (1, 1, 1)$$

a)

$$\begin{aligned} \text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{c} &= \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \\ &= \frac{(1, 1, 1) \cdot (0, 4, 10)}{(\sqrt{16 + 100})} (0, 4, 10) \\ &= \frac{14}{116} (0, 4, 10) \end{aligned}$$

$$\text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{c} = \left(\frac{7}{58}, \frac{14}{29}, \frac{35}{29} \right)$$

b)

$$\begin{aligned} \text{Comp. Esc}_{\vec{b}} \vec{a} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \\ &= \frac{(2, -2, -8) \cdot (0, 4, 10)}{\sqrt{116}} \\ &= \frac{-8 - 80}{2\sqrt{29}} = \frac{-88}{2\sqrt{29}} \end{aligned}$$

$$\text{Comp. Esc}_{\vec{b}} \vec{a} = -\frac{44}{\sqrt{29}}$$

80. ¿Qué significa, geoméricamente, que la componente escalar de un vector $\vec{a}$ sobre un vector $\vec{b}$ sea:

- a) Negativa
- b) Cero
- c) Positiva

- a) Si $\text{Comp. Esc}_{\vec{b}} \vec{a} < 0$ entonces los vectores $\text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen sentido opuesto, es decir forman un ángulo de 180° .
- b) Si $\text{Comp. Esc}_{\vec{b}} \vec{a} = 0$ entonces los vectores $\text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, es decir forman un ángulo de 90° .
- c) Si $\text{Comp. Esc}_{\vec{b}} \vec{a} > 0$ entonces los vectores $\text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen el mismo sentido, es decir forman un ángulo de 0° .

81. Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ unitarios y perpendiculares y $\vec{c}$ es un vector tal que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Determinar, analíticamente:

- a) La componente vectorial y la componente escalar de $\vec{c}$ sobre $\vec{a}$.
- b) La componente vectorial y la componente escalar de $\vec{c}$ sobre $\vec{b}$.
- c) El ángulo entre los vectores $\text{Comp. Vect}_{\vec{a}} \vec{c}$ y $\vec{a}$ y $\text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{c}$ y $\vec{b}$.

Solución:

- a) Como $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ entonces $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$

$$\begin{aligned} \text{Comp. Vect}_{\vec{a}} \vec{c} &= \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \\ &= \frac{(-\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}}{1^2} \vec{a} \\ &= \frac{-(\vec{a} \cdot \vec{a}) - (\vec{b} \cdot \vec{a})}{1} \vec{a} \\ &= \frac{-|\vec{a}|^2 - 0}{1} \vec{a} \\ &= \frac{-1}{1} \vec{a} \end{aligned}$$

$$\text{Comp. Vect}_{\vec{a}} \vec{c} = -\vec{a}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Comp. Esc}_{\vec{a}} \vec{c} &= \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \\
 &= \frac{(-\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \\
 &= \frac{-(\vec{a} \cdot \vec{a}) - (\vec{b} \cdot \vec{a})}{|\vec{a}|} \\
 &= \frac{-1 - 0}{1}
 \end{aligned}$$

$$\text{Comp. Esc}_{\vec{a}} \vec{c} = -1$$

b)

$$\begin{aligned}
 \text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{c} &= \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \\
 &= \frac{(-\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \\
 &= \frac{-(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{b} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \\
 &= \frac{-(\vec{a} \cdot \vec{b}) - |\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \\
 &= \frac{-0 - 1}{1^2} \vec{b}
 \end{aligned}$$

$$\text{Comp. Vect}_{\vec{a}} \vec{c} = -\vec{b}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Comp. Esc } \vec{a} \vec{c} &= \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \\
 &= \frac{(-\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \\
 &= \frac{-(\vec{a} \cdot \vec{a}) - (\vec{b} \cdot \vec{a})}{|\vec{a}|} \\
 &= \frac{-1 - 0}{1}
 \end{aligned}$$

$$\text{Comp. Esc } \vec{a} \vec{c} = -1$$

- c) Como $\text{Comp. Vect } \vec{a} \vec{c} = -\vec{a}$ entonces el ángulo entre los vectores $\text{Comp. Vect } \vec{a} \vec{c}$ y $\vec{b}$ es 180° .

Como $\text{Comp. Vect } \vec{b} \vec{c} = -\vec{b}$ entonces el ángulo entre los vectores $\text{Comp. Vect } \vec{b} \vec{c}$ y $\vec{b}$ es 180° .

Analíticamente.

Ángulo entre $\text{Comp. Vect } \vec{a} \vec{c}$ y $\vec{a}$

$$\cos \theta = \frac{(-\vec{a}) \cdot \vec{a}}{|-\vec{a}| |\vec{a}|} = \frac{-(\vec{a} \cdot \vec{a})}{(1)(1)} = \frac{-|\vec{a}|^2}{(1)} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$\cos \theta = -1 \Rightarrow \theta = \arccos(-1) = 180^\circ$$

Ángulo entre $\text{Comp. Vect } \vec{b} \vec{c}$ y $\vec{b}$

$$\cos \theta = \frac{(-\vec{b}) \cdot \vec{b}}{|-\vec{b}| |\vec{b}|} = \frac{-(\vec{b} \cdot \vec{b})}{(1)(1)} = \frac{-|\vec{b}|^2}{1} = -\frac{1}{1} = -1$$

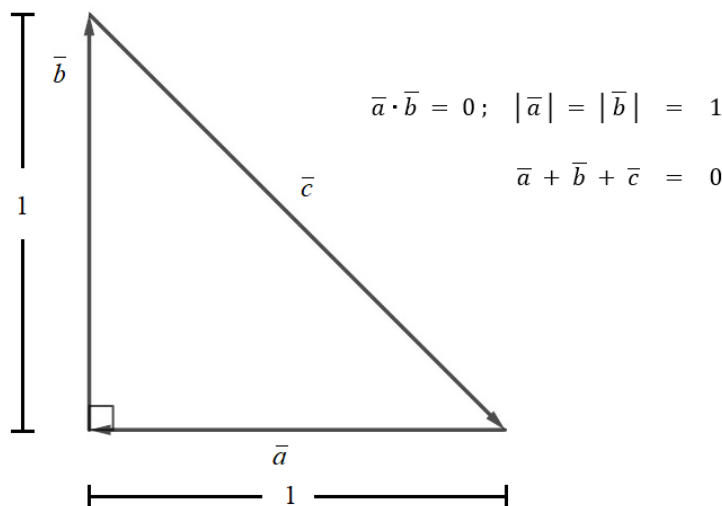
$$\cos \theta = -1 \Rightarrow \theta = \arccos(-1) = 180^\circ$$

82. Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ unitarios y perpendiculares y $\vec{c}$ es un vector tal que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Determinar, geoméricamente:

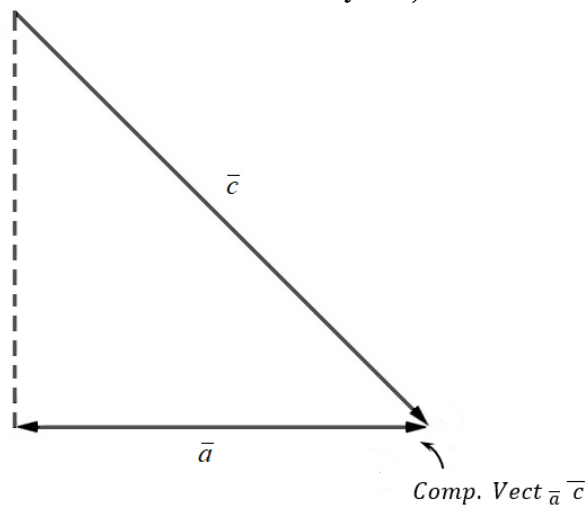
- La componente vectorial y la componente escalar de $\vec{c}$ sobre $\vec{a}$.
- La componente vectorial y la componente escalar de $\vec{c}$ sobre $\vec{b}$.
- El ángulo entre los vectores $\text{Comp. Vect}_{\vec{a}} \vec{c}$ y $\vec{b}$ y $\text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{c}$ y $\vec{a}$.

Solución:

- Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares y $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, la situación geométrica se puede describir como sigue:



Considerando solo a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$,



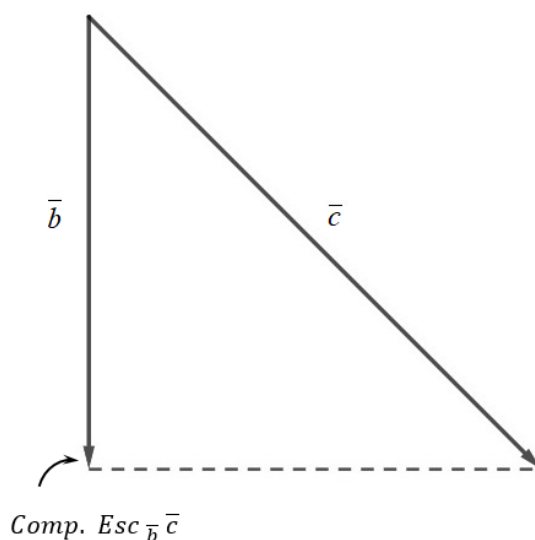
Al proyectar el vector $\vec{c}$ sobre $\vec{a}$, es claro de la figura que:

$$\text{Comp. Vect}_{\vec{a}} \vec{c} = -\vec{a}$$

Además, como los vectores $\text{Comp. Vect}_{\vec{a}} \vec{c}$ y $\vec{a}$ son del mismo módulo y sentido contrario, entonces

$$\text{Comp. Esc}_{\vec{a}} \vec{c} = -1$$

- b)** Si ahora, se considera solo a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$,



De la figura se deduce que:

$$\text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{c} = -\vec{b}$$

También como los vectores $\text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{c}$ y $\vec{b}$ tienen el mismo módulo y sentido opuestos, entonces:

$$\text{Comp. Esc}_{\vec{b}} \vec{c} = -1$$

- c)** Como los vectores $\text{Comp. Vect}_{\vec{c}} \vec{a}$ y $\vec{a}$ son paralelos y de sentido contrario, entonces el ángulo entre ambos vectores es $\theta = 180^\circ$.

Análogamente como los vectores $\text{Comp. Vect}_{\vec{b}} \vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos y de sentido contrario, entonces el ángulo entre ambos vectores es $\theta = 180^\circ$.

- 83.** Sean $\vec{u}$ un vector unitario, $\vec{v}$ un vector de módulo $\sqrt{3}$ y perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{w}$ un vector tal que $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$.

Determinar, analítica y geoméricamente, el ángulo entre el vector $\vec{w}$ y el vector $\vec{u}$; así como el ángulo entre el vector $\vec{w}$ y el vector $\vec{v}$.

Solución:

Analíticamente

$$|\vec{u}| = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3}$$

$$\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$|\vec{w}|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w}$$

$$= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$= |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

$$= 1^2 + (\sqrt{3})^2$$

$$|\vec{w}|^2 = 1 + 3 = 4$$

$$|\vec{w}| = 2$$

Cálculo del ángulo entre los vectores $\vec{w}$ y $\vec{u}$

$$\cos \theta = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{|\vec{w}| |\vec{v}|} = \frac{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u}}{(2)(1)} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{u}}{2} = \frac{|\vec{u}|^2 + 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = 60^\circ$$

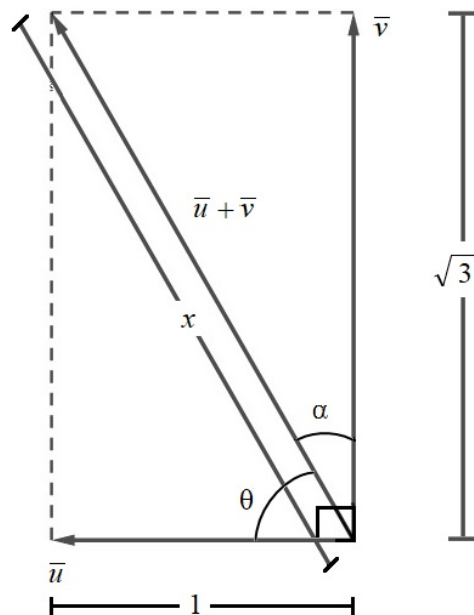
Cálculo del ángulo entre los vectores $\vec{w}$ y $\vec{v}$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{|\vec{w}| |\vec{v}|} = \frac{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v}}{(2)(\sqrt{3})} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}}{2\sqrt{3}} = \frac{0 + |\vec{v}|^2}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Geoméricamente



$$x^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4$$

$$x = 2$$

$$|\vec{w}| = |\vec{u} + \vec{v}| = 2$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ$$

84. Dados los vectores:

$$\vec{a} = (m+n, 2, -1) \quad \text{y} \quad \vec{b} = (-5, p-6, 2m-n)$$

Determinar los valores de m , n y p de modo que $\vec{a} = \vec{b}$.

Solución:

Dos vectores

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{y} \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

son iguales si

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2, \quad u_3 = v_3$$

Por lo que $\vec{a} = \vec{b}$ si:

$$m+n = -5 \quad \dots (1)$$

$$2 = p-6 \quad \dots (2)$$

$$-1 = 2m-n \quad \dots (3)$$

De (2)

$$2 = p-6 \Rightarrow p = 8$$

Para obtener m y n se resuelve el sistema de ecuaciones lineales dado por las ecuaciones (1) y (3)

$$m + n = -5$$

$$2m - n = 3$$

Resolviendo por suma o resta:

$$m + n = -5$$

$$\begin{array}{r} 2m - n = -1 \\ \hline 3m = -6 \end{array}$$

$$m = -2$$

Sustituyendo $m = -2$ en (1)

$$-2 + n = -5$$

$$n = -3$$

Por lo tanto,

$$\vec{a} = \vec{b} \text{ si } m = -2, n = -3, p = 8$$

85. Sean los vectores

$$\vec{a} = (0, -3, 4) \text{ y } \vec{b} = (k, 2, 1)$$

Determinar los valores de k para que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}| = |\vec{b} \times \vec{a}|$$

Solución:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = |\vec{b} \times \vec{a}|$$

$$(0, -3, 4) \cdot (k, 2, 1) + \sqrt{(0)^2 + (-3)^2 + (4)^2} = \left| (k, 2, 1) \times (0, -3, 4) \right| \dots (1)$$

$$(0, -3, 4) \cdot (k, 2, 1) = -6 + 4 = -2 \dots (2)$$

$$\left(\sqrt{(0)^2 + (-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25}\right)^2 = 5^2 = 25 \quad \dots (3)$$

$$(k, 2, 1) \times (0, -3, 4) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ k & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}(8+3) - \hat{j}(4k) + \hat{k}(-3k)$$

$$(k, 2, 1) \times (0, -3, 4) = 11\hat{i} - 4k\hat{j} - 3k\hat{k}$$

$$\left| (k, 2, 1) \times (0, -3, 4) \right| = \sqrt{(11)^2 + (-4k)^2 + (-3k)^2}$$

$$\left| (k, 2, 1) \times (0, -3, 4) \right| = \sqrt{121 + 16k^2 + 9k^2} = \sqrt{125 + 25k^2} \quad \dots (4)$$

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1)

$$-2 + 25 = \sqrt{121 + 25k^2}$$

$$23 = \sqrt{121 + 25k^2}$$

$$(23)^2 = 121 + 25k^2$$

$$529 = 121 + 25k^2$$

$$529 - 121 = 25k^2$$

$$408 = 25k^2$$

$$\frac{408}{25} = k^2$$

$$\pm \sqrt{\frac{408}{25}} = k$$

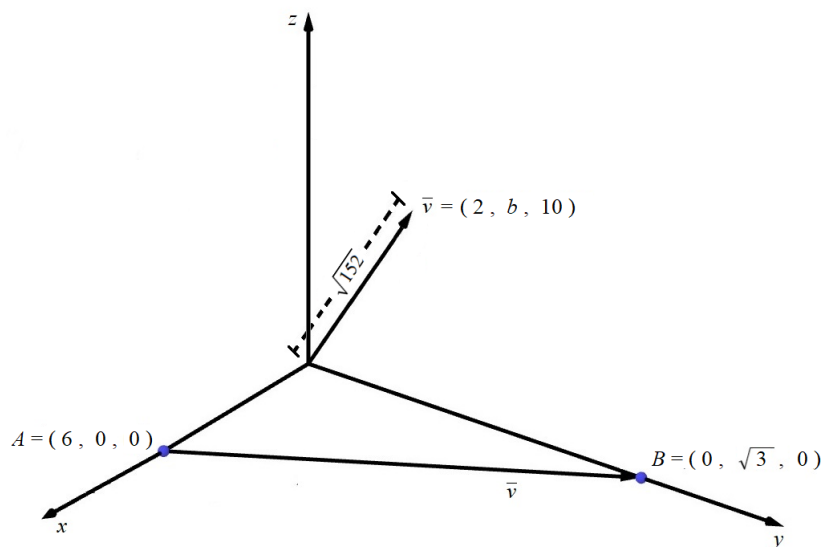
$$\pm \frac{2\sqrt{102}}{25} = k$$

Por tanto,

$$k = \frac{2\sqrt{102}}{5}$$

$$k = -\frac{2\sqrt{102}}{5}$$

86. Sean los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que se muestran la figura



Determinar:

- El ángulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\hat{j}$.
- La componente b del vector $\vec{u}$.
- La componente escalar del vector $\vec{v}$ en la dirección del vector $\hat{j}$.
- La componente del vectorial del vector $\vec{u}$ en la dirección del vector $\hat{k}$.
- El coseno del ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución:

a) De acuerdo con la figura

$$\vec{v} = (-6, 6\sqrt{3}, 0)$$

Si α es el ángulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\hat{j}$, entonces

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \hat{j}}{|\vec{v}| |\hat{j}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{(-6, 6\sqrt{3}, 0) \cdot (0, 1, 0)}{\sqrt{(-6)^2 + (6\sqrt{3})^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{144}} (1) = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\alpha = 30^\circ$$

b)

$$|\vec{u}| = \sqrt{152}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + b^2 + 10^2} = \sqrt{4 + b^2 + 100} = \sqrt{b^2 + 104}$$

$$\sqrt{b^2 + 104} = \sqrt{152}$$

$$b^2 + 104 = 152$$

$$b^2 = 48$$

$$b = \sqrt{48}$$

$$b = 4\sqrt{3}$$

c)

$$\text{Comp. Esc}_j \bar{v} = \frac{\bar{v} \cdot \hat{j}}{|\hat{j}|}$$

$$\text{Comp. Esc}_j \bar{v} = \frac{(-6, 6\sqrt{3}, 0) \cdot (0, 1, 0)}{(1)} = 6\sqrt{3}$$

d)

$$\text{Comp Vect}_{\hat{k}} \bar{u} = \frac{\hat{u} \cdot \hat{k}}{|\hat{k}|^2} \hat{k}$$

$$\text{Comp Vect}_{\hat{k}} \bar{u} = \frac{(2, 4\sqrt{3}, 10) \cdot (0, 0, 1)}{(1)^2} (0, 0, 1) = 10 (0, 0, 1) = 10 \hat{k}$$

e) Coseno del ángulo entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$

$$\cos \alpha = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| |\bar{v}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{(2, 4\sqrt{3}, 10) \cdot (-6, 6\sqrt{3}, 0)}{\sqrt{152} (12)}$$

$$\cos \alpha = \frac{-12 + 72}{24\sqrt{38}}$$

$$\cos \alpha = \frac{60}{24\sqrt{38}}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{2\sqrt{38}}$$

87. Sean los vectores:

$$\hat{i} = (1, 0, 0), \quad \bar{u} = (u_1, 1, 0) \quad \text{y} \quad \bar{v} = (v_1, 0, v_3)$$

a) Determinar el conjunto de valores de u_1 de v_1 y v_3 para que el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\hat{i}$, $\bar{u}$, y $\bar{v}$ y sea igual a uno.

- b) Obtener el conjunto de valores de u_1 , tal que el paralelogramo generado por los vectores $\hat{i}$ y $\bar{u}$ son iguales a uno.

Solución:

- a) El volumen del paralelepípedo generado por los vectores

$$\hat{i}, \quad \bar{u} \quad \text{y} \quad \bar{v}$$

es:

$$V = \left| [\hat{i} \quad \bar{u} \quad \bar{v}] \right|$$

$$[\hat{i} \quad \bar{u} \quad \bar{v}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & 0 \\ v_1 & 0 & v_3 \end{vmatrix} = v_3$$

$$V = |v_3| = 1$$

$$v_3 = 1 \quad \text{ó} \quad v_3 = -1$$

Mientras que u_1 y v_1 pueden tener cualquier valor de los reales:

Conjunto de valores de $u_1 : \mathbb{R}$

Conjunto de valores de $v_1 : \mathbb{R}$

Conjunto de valores de $v_3 : \{-1, 1\}$

Por tanto, cualquiera de las siguientes ternas genera un paralelepípedo de volumen uno.

i) $\hat{i} = (1, 0, 0), \quad \bar{u} = (1, 1, 0), \quad \bar{v} = (1, 0, 1)$

ii) $\hat{i} = (1, 0, 0), \quad \bar{u} = (10, 1, 0), \quad \bar{v} = (20, 0, 1)$

iii) $\hat{i} = (1, 0, 0), \quad \bar{u} = (1000, 1, 0), \quad \bar{v} = (5000, 0, -1)$

$$\text{iv)} \quad \hat{\mathbf{i}} = (1, 0, 0), \quad \bar{\mathbf{u}} = (1000000, 1, 0), \quad \bar{\mathbf{v}} = (30000000, 0, 1)$$

$$\text{v)} \quad \hat{\mathbf{i}} = (1, 0, 0), \quad \bar{\mathbf{u}} = (5 \times 10^{10}, 1, 0), \quad \bar{\mathbf{v}} = (7 \times 10^{20}, 0, -1)$$

$$\text{vi)} \quad \hat{\mathbf{i}} = (1, 0, 0), \quad \bar{\mathbf{u}} = (8 \times 10^{95}, 1, 0), \quad \bar{\mathbf{v}} = (6 \times 10^{96}, 0, -1)$$

b) El área del paralelogramo generado por los vectores $\hat{\mathbf{i}}$ y $\bar{\mathbf{u}}$ es:

$$A = |\hat{\mathbf{i}} \times \bar{\mathbf{u}}|$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \bar{\mathbf{u}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}}(1) - \hat{\mathbf{j}}(0) + \hat{\mathbf{k}}(1)$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \bar{\mathbf{u}} = (0, 0, 1) = \hat{\mathbf{k}}$$

$$A = |\hat{\mathbf{k}}| = 1$$

Esto quiere decir, que el vector $\hat{\mathbf{i}}$ con cualquier vector

$$\bar{\mathbf{u}} = (u_1, 1, 0) \quad \text{con } u_1 \in \mathbb{R},$$

generan un paralelogramo de área 1.

Conjunto de valores de $u_1 : \mathbb{R}$

Por tanto, cualquiera de los siguientes pares de vectores, generan un paralelogramo de área uno:

$$\text{i)} \quad \hat{\mathbf{i}} = (1, 0, 0), \quad \bar{\mathbf{u}} = (1, 1, 0)$$

$$\text{ii)} \quad \hat{\mathbf{i}} = (1, 0, 0), \quad \bar{\mathbf{u}} = (10, 1, 0)$$

$$\text{iii)} \quad \hat{\mathbf{i}} = (1, 0, 0), \quad \bar{\mathbf{u}} = (100, 1, 0)$$

$$\text{iv)} \quad \hat{i} = (1, 0, 0), \quad \bar{u} = (1000, 1, 0)$$

$$\text{v)} \quad \hat{i} = (1, 0, 0), \quad \bar{u} = (4 \times 10^{50}, 1, 0)$$

88. Sean los vectores

$$\bar{a} = (1, 1, 1), \quad \bar{b} = (1, 2, 2) \quad \text{y} \quad \bar{c} = (2, 1, z)$$

Determinar el conjunto de valores de z que haga que el volumen del paralelepípedo generado por $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ sea:

- a) menor o igual a uno.
- b) mayor o igual a uno.

Solución:

- a) Volumen generado por $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$

$$V = \left| [\bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{c}] \right|$$

$$[\bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 1(2z - 2) - 1(z - 4) + 1(1 - 4)$$

$$[\bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{c}] = 2z - 2 - z + 4 - 3 = z - 1$$

$$|z - 1| \leq 1$$

$$-1 \leq z - 1 \leq 1$$

$$0 \leq z \leq 2$$

z debe pertenecer al conjunto

$$\{z \mid 0 \leq z \leq 2\}$$

b) $|z - 1| \geq 1$

$$z - 1 \geq 1 \quad \text{ó} \quad z - 1 \leq -1$$

$$z \geq 2 \quad \text{ó} \quad z \leq 0$$

z debe pertenecer al conjunto

$$\left\{ z \mid z \leq 0 \right\} \cup \left\{ z \mid z \geq 2 \right\}$$

89. Sean los vectores

$$\vec{a} = (1, -1, 1), \quad \vec{b} = (1, 1, 1) \quad \text{y} \quad \vec{c} = (x, -1, -1)$$

Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales el volumen del paralelepípedo generado por $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ entre dos veces al valor absoluto del primer componente del vector $\vec{c}$, sea:

a) menor o igual a dos.

b) mayor o igual a dos.

Solución:

a) Volumen del paralelepípedo generado por $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$

$$V = \left| [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}] \right|$$

Donde:

$$[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}] = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(-2) - \hat{j}(0) + \hat{k}(2)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-2, 0, 2)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = (-2, 0, 2) \cdot (x, -1, -1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = -2x - 2$$

$$V = |-2x - 2| = |(-1)(2x + 2)| = |-1||2x + 2| = |2x + 2| = 2|x + 1|$$

Para obtener el volumen del paralelepípedo generado por $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ también se puede proceder como sigue:

$$V = \left| [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] \right|$$

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1(0) - 1(-1)(-1-x) + 1(-1-x)$$

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = 1 - x - 1 - x$$

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = -2x - 2$$

$$V = |-2x - 2| = |2x + 2| = 2|x + 1|$$

Resultado que es igual al obtenido anteriormente.

Se pide que:

$$\frac{V}{2|x|} \leq 1$$

Luego

$$\frac{2|x + 1|}{2|x|} \leq 2$$

$$\frac{|x+1|}{|x|} \leq 2$$

$$\left| \frac{x+1}{x} \right| \leq 2$$

Utilizando el siguiente Teorema de Álgebra:

$$|y| \leq \alpha; \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha \leq y \leq \alpha$$

Se tiene que

$$\left| \frac{x+1}{x} \right| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq \frac{x+1}{x} \leq 2$$

El conjunto solución de la desigualdad

$$\left| \frac{x+1}{x} \right| \leq 2$$

es la intersección del conjunto solución de la desigualdad

$$-2 \leq \frac{x+1}{x}$$

con el conjunto solución de la desigualdad

$$\frac{x+1}{x} \leq 2$$

Primera desigualdad:

$$-2 \leq \frac{x+1}{x}$$

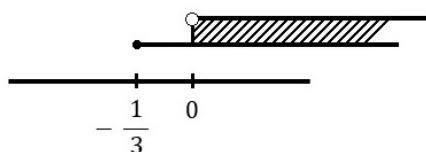
Caso 1: $x > 0$

$$-2x \leq x + 1$$

$$-1 \leq x + 2x$$

$$-1 \leq 3x$$

$$-\frac{1}{3} \leq x$$



Solución:

$$\left\{ x \mid x > 0 \right\}$$

Solución de la primera desigualdad:

$$\left\{ x \mid x \leq -\frac{1}{3} \right\} \cup \left\{ x \mid x > 0 \right\}$$

Segunda desigualdad:

$$\frac{x + 1}{x} \leq 2$$

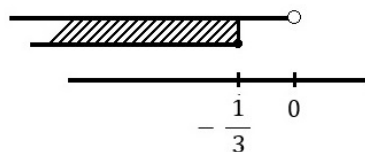
Caso 2: $x < 0$

$$-2x \geq x + 1$$

$$-1 \geq x + 1$$

$$-1 \geq 3x$$

$$-\frac{1}{3} \geq x$$



Solución:

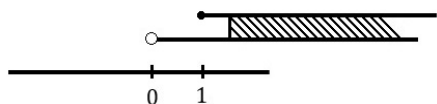
$$\left\{ x \mid x \leq -\frac{1}{3} \right\}$$

Caso 1: $x > 0$

$$x + 1 \leq 2x$$

$$1 \leq 2x - x$$

$$1 \leq x$$



Solución:

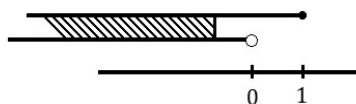
$$\{x \mid x \geq 1\}$$

Caso 2: $x < 0$

$$x + 1 \geq 2x$$

$$1 \geq 2x - x$$

$$1 \geq x$$



Solución:

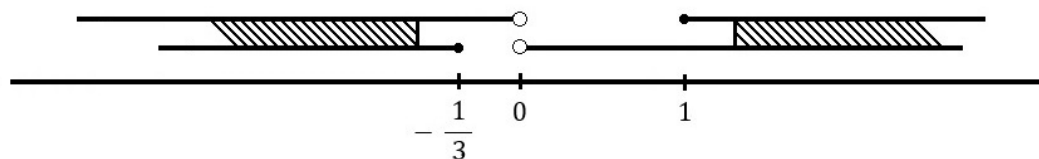
$$\{x \mid x < 0\}$$

Solución de la segunda desigualdad:

$$\{x \mid x < 0\} \cup \{x \mid x \geq 1\}$$

Solución general:

$$\{x \mid x \leq -\frac{1}{3}\} \cup \{x \mid x > 0\} \cap \{x \mid x < 0\} \cup \{x \mid x \geq 1\}$$



$$\{x \mid x \leq -\frac{1}{3}\} \cup \{x \mid x \geq 1\}$$

b) Ahora habrá que obtener $x \in \mathbb{R}$ para que

$$\frac{V}{2|x|} \geq 2$$

$$\frac{2|x+1|}{2|x|} \geq 2$$

$$\left| \frac{x+1}{x} \right| \geq 2$$

Haciendo uso del siguiente Teorema de Álgebra

$$|y| \geq \alpha; \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow y \leq -\alpha \quad \text{ó} \quad y \geq \alpha$$

se llega a que:

$$\left| \frac{x+1}{x} \right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} \leq -2 \quad \text{ó} \quad \frac{x+1}{x} \geq 2$$

Primera desigualdad:

$$\frac{x+1}{x} \geq 2$$

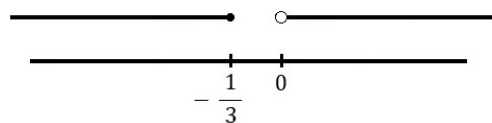
Caso 1: $x > 0$

$$x+1 \leq -2x$$

$$x+2x \leq -1$$

$$3x \leq -1$$

$$x \leq -\frac{1}{3}$$



Solución:

$$\emptyset$$

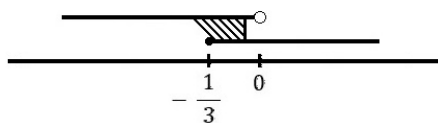
Caso 2: $x < 0$

$$x+1 \geq -2x$$

$$x+2x \geq -1$$

$$3x \geq -1$$

$$x \geq -\frac{1}{3}$$



Solución:

$$\left\{ x \mid -\frac{1}{3} \leq x < 0 \right\}$$

Solución de la primera desigualdad:

$$\left\{ x \mid -\frac{1}{3} \leq x < 0 \right\}$$

Segunda desigualdad:

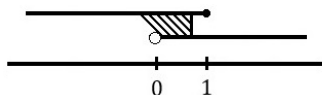
$$\frac{x+1}{x} \geq 2$$

Caso 1: $x > 0$

$$x+1 \geq 2x$$

$$1 \geq x - 2x$$

$$1 \leq x$$



Solución:

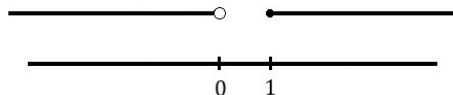
$$\left\{ x \mid 0 < x \leq 1 \right\}$$

Caso 2: $x < 0$

$$x+1 \leq 2x$$

$$1 \leq x - 2x$$

$$1 \leq x$$



Solución:

ϕ

Solución de la segunda desigualdad:

$$\left\{ x \mid 0 < x \leq 1 \right\}$$

En este caso, la solución general es la unión del conjunto solución de la primera desigualdad con el conjunto solución de la segunda desigualdad.

Solución general:

$$\left\{ x \mid -\frac{1}{3} \leq x < 0 \right\} \cup \left\{ x \mid 0 < x \leq 1 \right\}$$

Que también se puede escribir como

$$\left\{ x \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \right\} - \{0\}$$

90. Sean los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Determinar

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] + [\vec{c} \ \vec{a} \ \vec{b}] - 2 [\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}]$$

Solución:

Por una de las propiedades del triple producto escalar

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = [\vec{c} \ \vec{a} \ \vec{b}] = [\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}]$$

Por lo tanto,

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] + [\vec{c} \ \vec{a} \ \vec{b}] - 2[\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}] = [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] + [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] - 2[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$$

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] + [\vec{c} \ \vec{a} \ \vec{b}] - 2[\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}] = 2[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] - 2[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$$

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] + [\vec{c} \ \vec{a} \ \vec{b}] - 2[\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}] = 0$$

91. Sean los vectores:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$$

Determinar $\vec{a} \times \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

Solución:

Como el producto punto es distributivo:

$$\begin{aligned}
\bar{a} \times \bar{a} \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) &= \bar{a} \times \bar{a} \cdot \bar{a} + \bar{a} \times \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \times \bar{a} \cdot \bar{c} \\
&= [\bar{a} \quad \bar{a} \quad \bar{a}] + [\bar{a} \quad \bar{a} \quad \bar{b}] + 2[\bar{a} \quad \bar{a} \quad \bar{c}] \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \\
&\quad + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Los determinantes son cero porque los tres tienen dos líneas iguales, y una de las propiedades de los determinantes indica que si dos líneas paralelas de un determinante son proporcionales su valor es cero.

De esta manera desde el inicio se pudo haber concluido que

$$\bar{a} \times \bar{a} \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = 0,$$

ya que:

$$\bar{a} \times \bar{a} \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 + b_1 + c_1 & a_2 + b_2 + c_2 & a_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} = 0$$

92. Para los vectores $\vec{a} = (-2, 4, 10)$, $\vec{b} = (6, -5, 4)$, verificar que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular tanto el vector $\vec{a}$ como el vector $\vec{b}$

Solución:

Se tiene que verificar que $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{a} = 0$, y que $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 4 & 10 \\ 6 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}(16 + 50) - \hat{j}(-8 - 60) + \hat{k}(10 - 24)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 66\hat{i} + 68\hat{j} - 14\hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (66, 68, -14)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{a} = (66, 68, -14) \cdot (-2, 4, 10)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{a} = -132 + 272 - 140$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{a} = 272 - 272$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{b} = (66, 68, -14) \cdot (6, -5, 4)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{b} = 396 - 340 - 56$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{b} = 396 - 396$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

93. Para los vectores

$$\vec{a} = (3, 5, -8), \text{ y } \vec{b} = (-1, 4, 2),$$

obtener un vector unitario que tenga sentido contrario al vector $\vec{a} \times \vec{b}$.

Solución:

Ya que los vectores $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{b} \times \vec{a}$ tienen sentido contrario, basta con obtener $\vec{b} \times \vec{a}$ y hacer unitario a dicho vector.

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 5 & -8 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(10 + 32) - \hat{j}(6 - 8) + \hat{k}(12 + 5)$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = 32\hat{i} + 2\hat{j} + 17\hat{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = (32, 2, 17)$$

$$|\vec{b} \times \vec{a}| = \sqrt{32^2 + 2^2 + 17^2}$$

$$|\vec{b} \times \vec{a}| = \sqrt{1317}$$

El vector solicitado es:

$$\frac{1}{\sqrt{1317}} (\vec{b} \times \vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{1317}} (32, 2, 17)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1317}} (\vec{b} \times \vec{a}) = \left(\frac{32}{\sqrt{1317}}, \frac{2}{\sqrt{1317}}, \frac{17}{\sqrt{1317}} \right)$$

94. Sea el vector $\vec{u}$ de módulo 20 y mismo sentido que el vector

$$\vec{c} = (-6, 8, 0)$$

y sea el vector $\vec{v}$ de módulo 30 y mismo sentido que el vector

$$\vec{b} = (4, 0, 3)$$

Determinar:

- a) El ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- b) Las componentes del vector $\vec{u} + \vec{v}$
- c) El módulo del vector $\vec{u} + \vec{v}$

Solución:

- a) Como el vector $\vec{u}$ tiene el mismo sentido que el vector $\vec{a}$ y el vector $\vec{v}$ tiene el mismo sentido que el vector $\vec{b}$, entonces el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual al ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{(-6, 8, 0) \cdot (4, 0, 3)}{\sqrt{(-6)^2 + 8^2} \sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{-24}{(10)(5)} = -\frac{24}{50} = -\frac{12}{25}$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{12}{25}\right)$$

$$\theta = 118.68^\circ$$

Ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$: $\theta = 118.68^\circ$

- b) $\vec{u} + \vec{v} = ?$

A partir de $\vec{a} = (-6, 8, 0)$ se obtiene el vector unitario $\vec{a}$

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{10} (-6, 8, 0) = \left(-\frac{6}{10}, \frac{8}{10}, 0\right)$$

$$\hat{a} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$$

Entonces el vector $\vec{u}$ es:

$$\vec{u} = 20 \hat{a} = 20 \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$$

$$\vec{u} = (-12, 16, 0)$$

Análogamente, a partir de $\vec{b} = (4, 0, 3)$ se obtiene el vector unitario $\hat{b}$

$$\hat{b} = \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b} = \frac{1}{5} (4, 0, 3)$$

$$\hat{b} = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$$

Entonces el vector $\vec{v}$ es:

$$\vec{v} = 30 \hat{b} = 30 \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$$

$$\vec{v} = (24, 0, 18)$$

Por tanto,

$$\vec{u} + \vec{v} = (-12, 16, 0) + (24, 0, 18) = (12, 16, 18)$$

$$\text{c) } |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{12^2 + 16^2 + 18^2} = \sqrt{144 + 256 + 324} = \sqrt{724}$$

- 95.** Determinar un vector $\vec{a}$ de módulo $2\sqrt{15}$ que sea perpendicular al vector $\vec{b} = (0, 2, 1)$ y forme un ángulo de 60° con el vector $\hat{k}$.

Solución:

Sea el vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; \quad |\vec{a}| = 4\sqrt{15} \Rightarrow \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 2\sqrt{15}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 60 \quad \dots (1)$$

Se quiere además que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (0, 2, 1) = 0$$

$$2a_2 + a_3 = 0 \quad \dots (2)$$

Ángulo entre $\vec{a}$ y $\hat{k}$ igual a 60°

$$\cos 60^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \hat{k}}{|\vec{a}| |\hat{k}|} = \frac{(a_1, a_2, a_3) \cdot (0, 0, 1)}{(2\sqrt{15})(1)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a_3}{2\sqrt{15}} \Rightarrow a_3 = \sqrt{15}$$

De (2)

$$2a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2}a_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{15} = -\frac{\sqrt{15}}{2}$$

De (1)

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 60$$

$$a_1^2 + \left(-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 + (\sqrt{15})^2 = 60$$

$$a_1^2 + \frac{15}{4} + 15 = 60$$

$$a_1^2 = 60 - 15 - \frac{15}{4} = 45 - \frac{15}{4} = \frac{165}{4}$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{165}}{2}$$

El vector $\bar{a}$ es:

$$\bar{a} = \left(\frac{\sqrt{165}}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}, \sqrt{15} \right)$$

- 96.** Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que el vector $\bar{m} = (a^2, 2a, 1)$ sea perpendicular al vector $\bar{n} = (1, 1, -3)$.

Solución:

Como $\bar{m}$ y $\bar{n}$ tienen que ser perpendiculares, entonces $\bar{m} \cdot \bar{n} = 0$.

$$(a^2, 2a, 1) \cdot (1, 1, -3) = 0$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a+3)(a-1) = 0$$

$$a = -3, a = 1$$

Para $a = -3$, $\bar{m} = (9, -6, 1)$

$$(9, -6, 1) \cdot (1, 1, -3) = 9 - 6 - 3 = 0$$

Para $a = 1$, $\bar{m} = (1, 2, 1)$

$$(1, 2, 1) \cdot (1, 1, -3) = 1 + 2 - 3 = 0$$

Los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que $\bar{m} \cdot \bar{n} = 0$ son:

$$a = -3, a = 1$$

97. Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que el vector

$$\vec{c} = (3x, -2, -2x)$$

sea paralelo al vector

$$\vec{d} = (-9, 2, 6)$$

Solución:

Si $\vec{c}$ es paralelo a $\vec{d}$, entonces $\vec{c} = \lambda \vec{d}$

$$(3x, -2, -2x) = \lambda(-9, 2, 6)$$

$$(3x, -2, -2x) = (-9\lambda, 2\lambda, 6\lambda)$$

$$3x = -9\lambda \Rightarrow x = -3\lambda$$

$$-2 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = -1$$

$$-2x = 6\lambda \Rightarrow x = -3\lambda$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow x = -3(-1) = 3$$

Por tanto, para $x = 3$, el vector $\vec{c} = (9, -2, -6)$

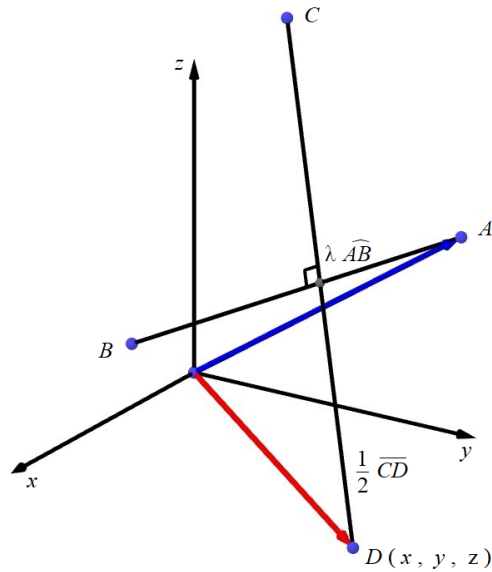
$$\vec{c} = (-1) \vec{d}$$

98. Sean los puntos:

$$A(1, 12, 8), B(1, -2, 1) \text{ y } C(-3, 2, 13)$$

Determinar el punto D simétrico del punto C respecto al segmento de recta $\overline{AB}$, usando Álgebra Vectorial.

Solución:



De la figura

$$\bar{a} + \lambda \widehat{AB} + \frac{1}{2} \overline{CD} + (-\bar{d}) = \bar{0} \quad \dots (1)$$

Los vectores que aparecen en (1) son:

$$\bar{a} = (1, 12, 8)$$

$$\overline{AB} = (0, -14, -7) \Rightarrow |\overline{AB}| = \sqrt{(-14)^2 + (-7)^2} = \sqrt{196 + 49} = \sqrt{245}$$

$$\widehat{AB} = \frac{1}{\sqrt{245}} (0, -14, -7) = \left(0, -\frac{14}{\sqrt{245}}, -\frac{7}{\sqrt{245}} \right)$$

$$\overline{CD} = (x+3, y-2, z-13)$$

Sustituyendo en (1)

$$\begin{aligned} (1, 12, 8) + \lambda \left(0, -\frac{14}{\sqrt{245}}, -\frac{7}{\sqrt{245}} \right) + \frac{1}{2} (x+3, y-2, z-13) \\ + (-x, -y, -z) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} - x, \quad 12 - \frac{14\lambda}{\sqrt{245}} + \frac{1}{2}y - 1 - y, \quad 8 + \frac{7\lambda}{\sqrt{245}} + \frac{1}{2}z - \frac{13}{2} - z \right) = (0, 0, 0)$$

Por igualdad de vectores:

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} - x = 0 \Rightarrow \frac{5}{2} - \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 5$$

$$12 - \frac{14\lambda}{\sqrt{245}} + \frac{1}{2}y - 1 - y = 0 \Rightarrow 11 - \frac{14\lambda}{\sqrt{245}} - \frac{1}{2}y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{14\lambda}{\sqrt{245}} = 11 - \frac{1}{2}y \Rightarrow \lambda = \frac{11\sqrt{245}}{14} - \frac{\sqrt{245}}{28}y$$

$$8 - \frac{7\lambda}{\sqrt{245}} + \frac{1}{2}z - \frac{13}{2} - z = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{7\lambda}{\sqrt{245}} - \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3\sqrt{245}}{14} - \frac{\sqrt{245}}{14}z$$

$$\lambda = \lambda$$

$$\frac{11\sqrt{245}}{14} - \frac{\sqrt{245}}{14}y = \frac{3\sqrt{245}}{14} - \frac{\sqrt{245}}{14}z \Rightarrow 22 - y = 6 - 2z$$

$$y = 2z + 16 \quad \dots (2)$$

Además $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$ ya que el segmento que va de A a B es perpendicular al segmento que va de C a D . Luego:

$$(0, -14, -7) \cdot (x+3, y-2, z-13) = 0$$

$$-14y + 28 - 7z + 91 = 0$$

$$-14y + 7z + 119 = 0$$

$$14y = -7z + 119$$

$$y = -\frac{7}{14}z + \frac{119}{14}$$

$$y = -\frac{1}{2}z + \frac{17}{2} \quad \dots (1)$$

Igualando (2) y (3)

$$y = y$$

$$22 + 16 = -\frac{1}{2}z + \frac{17}{2}$$

$$2 + \frac{1}{2}z = \frac{17}{2} - 16$$

$$\frac{5}{2}z = \frac{17 - 32}{2}$$

$$\frac{5}{2}z = -\frac{15}{2}$$

$$z = -3$$

De (2)

$$y = 2(-3) + 16$$

$$y = -6 + 16$$

$$y = 10$$

Por tanto, el punto D simétrico del punto C respecto al segmento de recta AB , es:

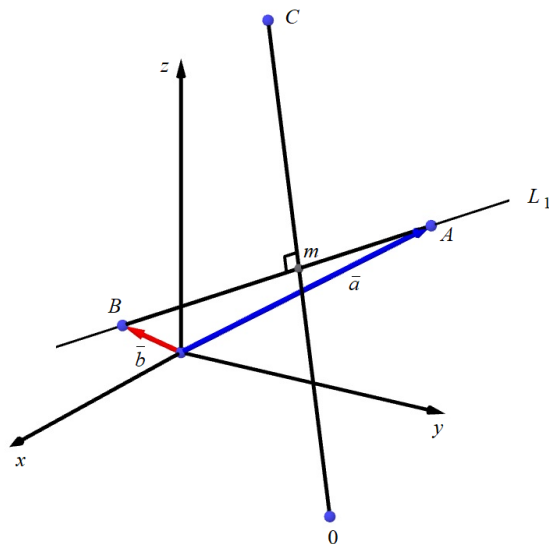
$$D(5, 10, -3)$$

99. Sean los puntos:

$$A(1, 12, 8), B(1, -2, 1) \text{ y } C(-3, 2, 13)$$

Determinar el punto D simétrico del punto C respecto al segmento de recta $\overline{AB}$, usando una ecuación de la recta que contiene a los puntos A y B .

Solución:



Se determina, primero, la ecuación de la recta L_1 que contiene a los puntos A y B .
Un vector de L_1 es:

$$\vec{u} = \vec{b} - \vec{a} = (1, -2, 1) - (1, 12, 8) = (0, -14, -7)$$

Una ecuación vectorial de la recta L_1 es:

$$\vec{p} = (1, -2, 1) + \lambda(0, -14, -7), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

El punto medio del segmento $\overline{CD}$ que es M , tiene por coordenadas $x = 1$, $y = -2 - 14\lambda$, $z = 1 - 7\lambda$, ya que pertenece a L_1 . Es decir, $M = (1, -2 - 14\lambda, 1 - 7\lambda)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$

El vector $\overline{MC}$ es:

$$\overline{MC} = (1 + 3, -2 - 14\lambda - 2, 1 - 7\lambda - 13) = (4, -4 - 14\lambda, -12 - 7\lambda)$$

Como $\overline{MC} \cdot \vec{u} = 0$

$$(4, -4 - 14\lambda, -12 - 7\lambda) \cdot (0, -14, -7) = 0$$

$$56 + 196\lambda + 84 + 49\lambda = 0$$

$$140 + 245\lambda = 0$$

$$\lambda = -\frac{140}{245}$$

$$\lambda = -\frac{4}{7}$$

Luego M es:

$$\left(-1, -2 - 14\left(-\frac{4}{7}\right), 1 - 7\left(-\frac{4}{7}\right)\right) = (1, -2 + 8, 1 + 4) = (1, 6, 5)$$

ya que M es el punto medio del segmento $\overline{CD}$ entonces:

$$1 = \frac{x - 3}{2} \Rightarrow x = 2 + 3 = 5$$

$$6 = \frac{y - 2}{2} \Rightarrow y = 12 - 2 = 10$$

$$5 = \frac{z - 13}{2} \Rightarrow z = 10 - 13 = -3$$

Así el punto D es

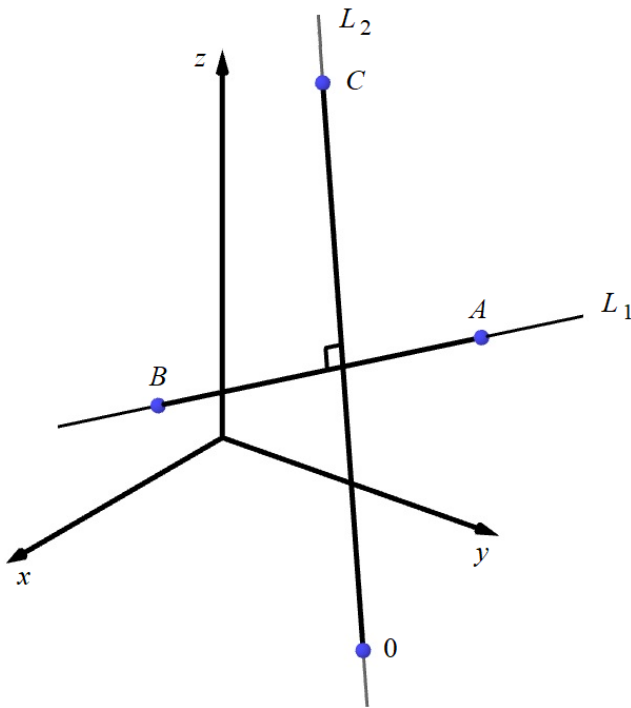
$$D(5, 10, -3)$$

100. Sean los puntos:

$$A(1, 12, 8), B(1, -2, 1) \text{ y } C(-3, 2, 13)$$

Determinar el punto D simétrico del punto C respecto al segmento de recta $\overline{AB}$, usando Cálculo Diferencial.

Solución:



Del problema 98, el punto M es:

$$M(1, -2 - 14\lambda, 1 - 7\lambda)$$

Haciendo uso de la fórmula de distancia entre los puntos:

$$A(x_1, y_1, z_1) \text{ y } B(x_2, y_2, z_2)$$

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Se obtiene la distancia entre

$$M(1, -2 - 14\lambda, 1 - 7\lambda) \text{ y } C(-3, 2, 13)$$

$$S = \sqrt{(1 + 3)^2 + (-4 - 14\lambda)^2 + (-12 - 7\lambda)^2}$$

$$S = \sqrt{16 + 16 + 112\lambda + 196\lambda^2 + 144 + 168\lambda + 99\lambda^2}$$

$$S = \sqrt{245\lambda^2 + 280\lambda + 176}$$

Dado que de todos los puntos de la recta L_1 , M es el más cercano a C , se puede realizar la derivada de S respecto a λ e igualar a cero para obtener el valor λ que minimiza la distancia S .

$$\frac{ds}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{245\lambda^2 + 280\lambda + 176}} (490\lambda + 280)$$

$$\frac{ds}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{245\lambda^2 + 280\lambda + 176}} (490\lambda + 280) = 0$$

$$490\lambda + 280 = 0$$

$$\lambda = -\frac{280}{490}$$

$$\lambda = -\frac{4}{7}$$

Se puede verificar, por medio del criterio de la primera derivada, que

$$\lambda = \frac{4}{7}$$

es un mínimo.

Para

$$\lambda = -1 < -\frac{4}{7}$$

$$\left. \frac{ds}{dx} \right|_{\lambda=-1} = \frac{1}{\sqrt{245(-1)^2 + 280(-1) + 176}} (490(-1) + 280) = -\frac{210}{\sqrt{141}} < 0$$

Para

$$\lambda = 0 > -\frac{4}{7}$$

$\frac{ds}{d\lambda}$ cambia de negativo a positivo, luego $\lambda - \frac{4}{7}$ es un mínimo.

$$\left. \frac{ds}{dx} \right|_{\lambda=0} = \frac{280}{\sqrt{126}} > 0$$

Para

$$\lambda = -\frac{4}{7}$$

se tiene $M(1, 6, 5)$ y la distancia entre M y C es:

$$S = \sqrt{245\left(-\frac{4}{7}\right)^2 + 280\left(-\frac{4}{7}\right) + 176} = \sqrt{80 - 160 + 176} = \sqrt{96}$$

Ahora para obtener el punto D simétrico de C respecto al segmento $\overline{AB}$ se deduce una ecuación vectorial de la recta L_2 y se obtiene el punto de esta recta que está a una distancia $S = \sqrt{96}$.

Un vector director de L_2 es:

$$\vec{v} = \overline{MC} = (-3, 2, 13) - (1, 6, 5) = (-4, -4, 9)$$

Una ecuación vectorial de L_2 es:

$$\vec{p} = (1, 6, 5) + \beta(-4, -4, 8); \beta \in \mathbb{R}$$

$$\vec{p} = (1 - 4\beta, 6 - 4\beta, 5 - 8\beta); \beta \in \mathbb{R}$$

Se determinarán los puntos de L_2 que están a una distancia $\sqrt{96}$ de M .

$$S = \sqrt{96} = \sqrt{(1 - 4\beta - 1)^2 + (6 - 4\beta - 6)^2 + (5 - 8\beta - 5)^2}$$

$$\sqrt{96} = \sqrt{16\beta^2 + 16\beta^2 + 64\beta^2}$$

$$96 = 96\beta^2$$

$$\beta = \pm 1$$

Con $\beta = 1$

$$\bar{p} = (1, 6, 5) + (-4, -4, 8) = (-3, 2, 13)$$

que es el vector de posición asociado al punto C

Con $\beta = -1$

$$\bar{p} = (1, 6, 5) + (-1)(-4, -4, 8) = (5, 10, -3)$$

que es el vector de posición asociado al punto D .

Por tanto, el punto D es:

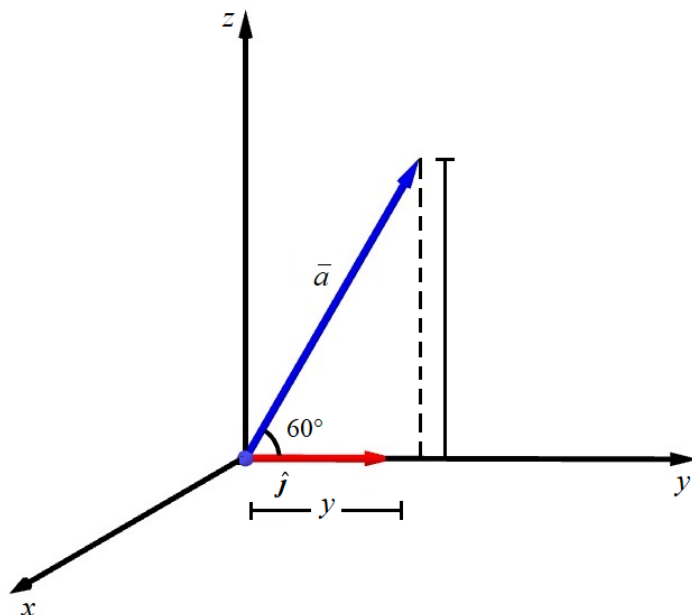
$$D(5, 10, -3)$$

101. Sea el punto A contenido en el plano YZ , tal que su vector de posición $\bar{a}$ tiene módulo igual a $\sqrt{12}$ y forma un ángulo de 60° con el vector $\hat{j}$.

- Obtener las coordenadas del punto A
- Calcular los cosenos directores del vector $\bar{a}$
- Verificar que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Solución:

a)



$$\cos 60^\circ = \frac{y}{\sqrt{12}} \Rightarrow y = \sqrt{12} \cos 60^\circ = \sqrt{12} \left(\frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{z}{\sqrt{12}} \Rightarrow z = \sqrt{12} \sin 60^\circ = \sqrt{12} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{36}}{2} = 3$$

Como $\bar{a}$ está contenido en el plano YZ entonces $x = 0$.

Por tanto,

$$A(0, \sqrt{3}, 3)$$

- b)** Dado que $\bar{a}$ está contenido en el plano YZ el ángulo entre el vector $\bar{a}$ y el vector $\hat{i}$ es 90° . El ángulo de $\bar{a}$ con $\hat{j}$ es 60° y el ángulo entre $\bar{a}$ y $\hat{k}$ es 30° , por lo que:

$$\alpha = 90^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \gamma = 30^\circ$$

Cosenos directores del vector $\bar{a}$.

$$\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0, \quad \cos \beta = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos \gamma = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c)

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = (0)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



UNIDAD DE APOYO EDITORIAL

Cuaderno de ejercicios de álgebra vectorial

Se publicó la primera edición electrónica de un ejemplar
(4 MB) en formato PDF en febrero de 2026,
en el repositorio de la Facultad de Ingeniería, UNAM,
Ciudad Universitaria, Ciudad de México. C.P. 04510

El diseño estuvo a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial
de la Facultad de Ingeniería. Las familias tipográficas
utilizadas fueron Source Serif Pro para texto
y Rubik para titulares.