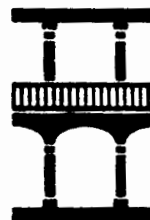
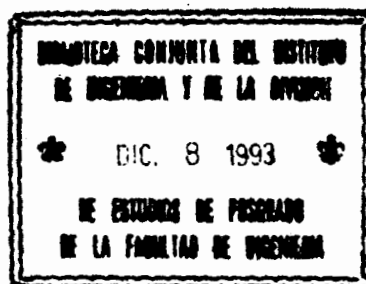




FACULTAD DE INGENIERIA



ECUACIONES EN DIFERENCIAS "EXACTAS"

Arturo Delgado Rodríguez

D 77

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MEXICO
MEXICO CITY
MEXICO



F-DEPF I
D77
1988
P. 5

Reconocimiento:

El autor desea expresar su más sincero agradecimiento a las siguientes personas:

Dr. Gabriel Echávez Aldape, Jefe de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM y Dr. Sergio Fuentes Maya, Coordinador de la Sección de Matemáticas de la DEPMI, UNAM, por su apoyo para la realización de este trabajo.

Mat. Alberto Alonso, Investigador del IIMAS, y mis hijos Martha, Mario y Raúl Delgado Wise, quienes revisaron el manuscrito e hicieron valiosos comentarios y sugerencias.

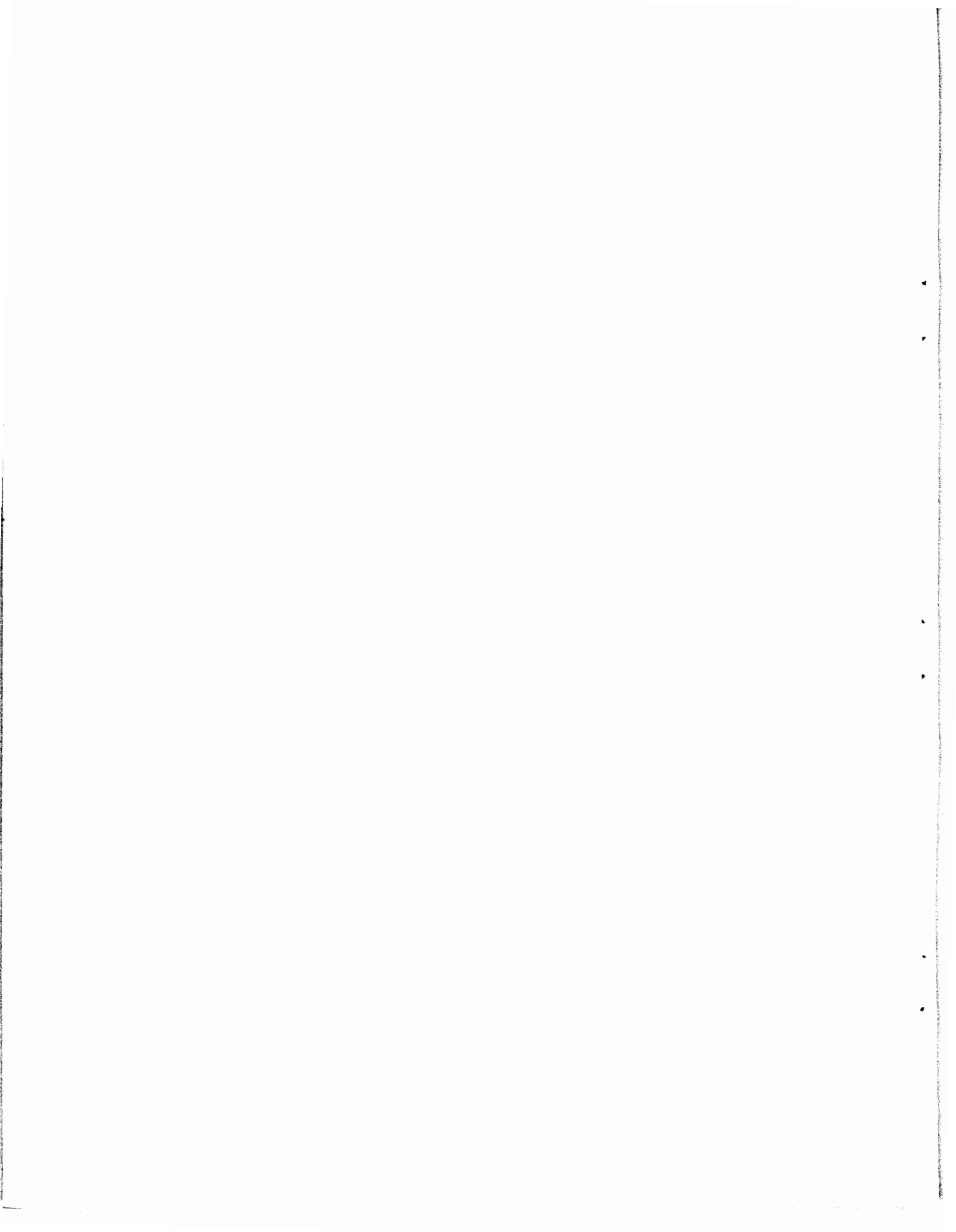
A la Sra. Silvia Espinosa R. quien estuvo a cargo de la mecanografía.

I N D I C E

	Pág.
Introducción	v
Definiciones Preliminares	2
Ejemplo 1 , Ejemplo 2)	3
Ecuación en diferencias lineal, de primer orden, exacta. Teorema 1)	4
Ejemplo 3)	5
Factor de suma para la ecuación en diferencias de primer orden. Teorema 2)	6
Ejemplo 4)	8
Ejemplo 5)	9
Ejemplo 6)	10
Ejemplo 7)	11
Combinaciones sumables	14
Ejemplo 8 , Ejemplo 9)	17
Ejemplo 10)	18
Ejemplo 11)	20
Ejemplo 12 , Ejemplo 13)	21
Ejemplo 14)	22
Ejemplo 15)	23

	Pág.
Ecuación en diferencias lineal, de segundo orden, exacta. Teorema 3)	26
Ejemplo 16)	28
Ejemplo 17)	29
Ejemplo 18)	31
Ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden no-exactas. Teorema 4)	32
Ejemplo 19)	35
Ejemplo 20)	36
Ejemplo 21)	37
Generalización: Ecuación en diferencias lineal, de orden r , exacta. Teorema 5)	41
Teorema 6)	47
Ejemplo 22)	51
Ejemplo 23)	52
Ejemplo 24)	57
Ejemplo 25)	62
Algunas ecuaciones en diferencias NO-LINEALES que pueden resolverse como ecuaciones exactas.	
Ejemplo 26)	63
Ejemplo 27)	64
Ejemplo 28)	65
Ejemplo 29)	66

	Pág.
Factores de suma mediante inspección	
Ejemplo 30 , Ejemplo 31)	68
Ejemplo 32 , Ejemplo 33)	69
Ejemplo 34 , Ejemplo 35)	70
Ejemplo 36)	71
Referencias.	73



P R O L O G O

Para muchos de los que hemos transitado por las aulas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM no nos es desconocida la vasta trayectoria académica del autor. Un reconocimiento a ello ha sido la distinción que le confirió el H Consejo Técnico de esta Facultad recientemente, al otorgarle la Cátedra Especial "Antonio Dovalí Jaime".

Maestro de muchas generaciones, con más de 38 años de práctica docente, el profesor Delgado se ha sabido ganar un merecido prestigio en la enseñanza de la matemática moderna.

Aunque la mayor parte de su labor docente la ha realizado en la UNAM, ha sido también catedrático del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, así como profesor visitante, durante periodos sabáticos, en diversas Universidades del país y del extranjero. Fue además Director Fundador de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Sonora, habiéndosele reconocido sus méritos al conferírsele una de las más altas distinciones: el nombramiento de Profesor Emérito de esa Universidad.

Posee grados académicos de Universidades de la talla de Yale, Harvard y Princeton; con estudios postprofesionales, entre otros, en el Instituto Tecnológico de Massachusetts y la Universidad de California. El Profesor Delgado se ha caracterizado siempre como un asiduo y apasionado estudioso de la matemática.

Además de sus conocidos apuntes introductorios de matemáticas (editados durante muchos años por esta División de Posgrado), ha contribuido al desarrollo de esta ciencia, mediante la publicación de numerosos artículos y trabajos de investigación original; la presente publicación figura entre estos últimos.

Por los indiscutibles méritos académicos del autor, y por tratarse de una temática donde hay aún mucho por explorar; que ofrece un potencial enorme de aplicación en áreas como la computación, es que estoy plenamente convencido de que el trabajo que ahora nos ofrece el Profesor Delgado constituye una contribución trascendente al acervo de conocimientos de la matemática moderna. Como Jefe de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, me es muy grato presentar a la consideración de la comunidad universitaria el trabajo "ECUACIONES EN DIFERENCIAS EXACTAS" de un destacado miembro de nuestro cuerpo docente.

DR. GABRIEL ECHAVEZ ALDAPE.

Diciembre de 1987.



INTRODUCCION

Las ecuaciones en diferencias cuentan con un largo historial que data, según Lagrange, de hace aproximadamente 270 años, cuyo primer antecedente son los trabajos de Brook Taylor. A lo largo de estos casi tres siglos de existencia, no ha habido prácticamente ningún matemático destacado que no se haya ocupado, de una u otra manera, de ellas. Con todo, es evidente que se trata de un campo de conocimientos en desarrollo cuyos principales avances se han dado hasta ahora a la zaga de aquellos producidos en el campo de las ecuaciones diferenciales. Entre éstas y las ecuaciones en diferencias se ha tendido a establecer una analogía unilateral y poco fértil que ha operado como parapeto para que afloren las ventajas y el potencial de desarrollo propio de las últimas.

No cabe duda de que en la actualidad, con la amplia difusión que ha tenido la computadora digital, se han creado condiciones propicias para un desarrollo más fecundo de las ecuaciones en diferencias. La demanda de conocimientos básicos en la materia ha crecido sensiblemente, toda vez que el universo de aplicaciones de los métodos discretos ha ganado en amplitud y diversidad. Son numerosas las disciplinas hacia las que se ha extendido la aplicación de este tipo de métodos, que comprenden desde la ingeniería, física y química, hasta la biología, economía y psicología pasando por la ciencia actuarial y la probabilidad y estadística.

De hecho, la posibilidad de representar fielmente un vasto espectro de fenómenos del mundo real a partir de ecuaciones o sistemas de ecuaciones en diferencias es más asequible y resulta exento de error, lo que no sucede cuando se adoptan aproximaciones mediante modelos continuos. En última instancia, los eventos que conforman la realidad concreta están constituidos por unidades discretas y lo lógico para su simulación es proceder mediante modelos que proyecten tal configuración. Tan es así, que los desarrollos modernos de la ciencia que reclaman de una gran exactitud y precisión, como es el caso de la física cuántica, de los modelos probabilísticos y estadísticos, por ejemplo, parten precisamente de este tipo de representación.

Pero el potencial que ofrecen las ecuaciones en diferencias no se reduce a sus bondades para representar fenómenos concretos; también en el ámbito de las soluciones han demostrado cierta superioridad, al menos en lo que se refiere a algunos resultados obtenibles por métodos continuos. Al respecto, los resultados que aquí se presentan constituyen un claro ejemplo de dicha posibilidad.

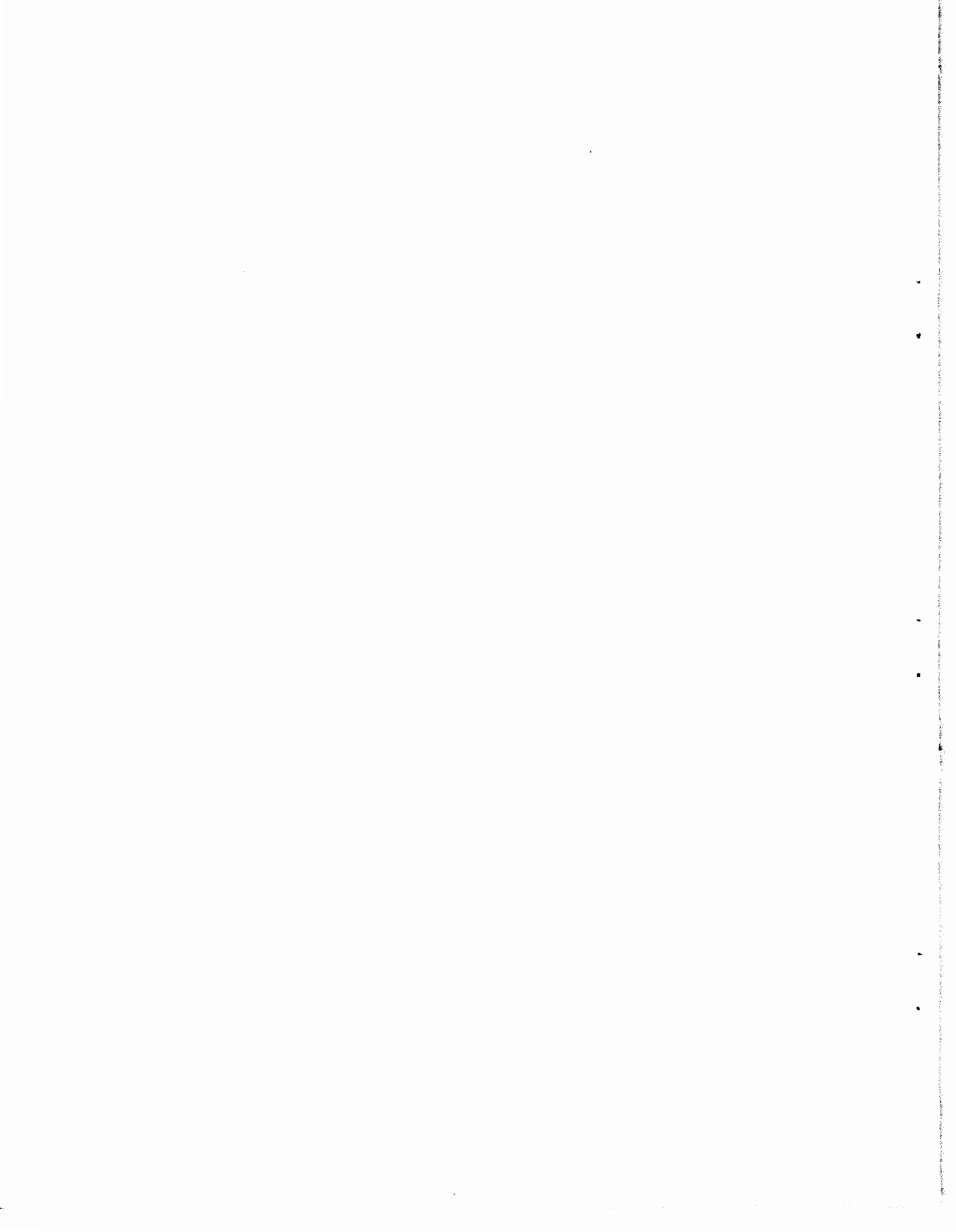
En efecto, incursionando en un terreno que a la fecha había sido escasamente trabajado, *i.e.* el de las ecuaciones en di-

ferencias denominadas "exactas", el presente trabajo explora algoritmos para resolver, en forma cerrada, ecuaciones en las que intervienen coeficientes variables (lineales y no lineales). Los métodos de solución a los que se llega resultan verdaderamente sorprendentes en el sentido de que se apartan de técnicas semejantes a las empleadas para resolver ecuaciones diferenciales.

El trabajo consiste en el enunciado y demostración de varios teoremas, complementados con observaciones pertinentes, al igual que con un buen número de ejemplos ilustrativos resueltos en detalle. En el mismo se introduce el concepto de ecuación en diferencias "adjunta", cuya solución permite hallar uno o varios "factores de suma" que convierten en exactas ecuaciones que originalmente no lo eran, haciendo de este modo factible encontrar su solución. Por consiguiente, allí donde por métodos continuos era necesario depender de la inventiva personal y heurística, es posible encontrar, por la vía de estas ecuaciones, caminos de solución más directos y expeditos que pueden eliminar parcial o completamente el uso de las computadoras.

Por último, debe advertirse que para entender cabalmente este trabajo sólo se requieren conocimientos básicos de ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes, así como nociones elementales de álgebra lineal.

DEFINICIONES PRELIMINARES



DEFINICIONES PRELIMINARES

Ecuación en diferencias EXACTA:

Sea la ecuación en diferencias lineal, de orden p :

$$\begin{aligned} n_k Y_{k+p} + m_k Y_{k+p-1} + l_k Y_{k+p-2} + \dots + \\ + c_k Y_{k+2} + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k = R_k \quad \dots \quad (1) \end{aligned}$$

donde: $n_k, m_k, l_k, \dots, c_k, b_k, a_k, Y_k, R_k$ son sucesiones de números reales (podrían ser complejos).

La ecuación en diferencias (1) se denomina "exacta", si el primer miembro puede ser expresado en forma de diferencia (progre-siva o hacia adelante); esto es:

$$\begin{aligned} n_k Y_{k+p} + m_k Y_{k+p-1} + \dots + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k = \\ = \Delta (\omega_k Y_{k+p-1} + \psi_k Y_{k+p-2} + \dots + \beta_k Y_{k+1} + \alpha_k Y_k) \quad (2) \end{aligned}$$

siendo: $\omega_k, \psi_k, \beta_k, \alpha_k$ sucesiones que se pueden expresar como funciones de los coeficientes: $n_k, m_k, l_k, \dots, c_k, b_k, a_k$.

Factor de suma: Si la ecuación en diferencias (1) no es exac-ta, pero al multiplicarla por una sucesión F_k , la ecuación en diferencias se convierte en exacta, a la sucesión F_k correspon-diente se le designa como "factor de suma", esto es:

$$\begin{aligned} F_k (n_k Y_{k+p} + m_k Y_{k+p-1} + \dots + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k) = \\ = \Delta (\omega'_k Y_{k+p-1} + \psi'_k Y_{k+p-2} + \dots + \beta'_k Y_{k+1} + \alpha'_k Y_k) = \\ = F_k R_k \quad \dots \quad (3) \end{aligned}$$

donde ahora: $\omega'_k, \psi'_k, \dots, \beta'_k, \alpha'_k$ son sucesiones que deben ser funciones de los nuevos coeficientes: $F_k n_k, F_k m_k, \dots, F_k b_k, F_k a_k$.

Ejemplo 1) La ecuación en diferencias de segundo orden:

$$Y_{k+2} - 2Y_{k+1} + Y_k = R_k$$

es exacta, ya que

$$Y_{k+2} - 2Y_{k+1} + Y_k = \Delta(Y_{k+1} - Y_k)$$

observando que la expresión

$$Y_{k+1} - Y_k$$

también es exacta puesto que:

$$Y_{k+1} - Y_k = \Delta Y_k$$

Ejemplo 2) La ecuación en diferencias

$$e^{-2k} Y_{k+1} - Y_k = R_k$$

no es exacta; pero sí es exacta la ecuación:

$$e^{-k(k+1)} Y_{k+1} - e^{k-k^2} Y_k = \Delta(e^{k-k^2} Y_k)$$

Si se observa que:

$$e^{k-k^2} (e^{-2k} Y_{k+1} - Y_k) = e^{-k(k+1)} Y_{k+1} - e^{k-k^2} Y_k =$$

$$= \Delta(e^{k-k^2} Y_k) = e^{k-k^2} R_k$$

Se concluye que $F_k = e^{k-k^2}$ es un "factor de suma" para la ecuación en diferencias en este ejemplo 2).

Observación: Como se podrá comprobar más adelante, en general el factor de suma no es único, esto es, puede existir más de uno.

Ecuación en diferencias lineal de primer orden exacta.

Teorema 1) La ecuación en diferencias

$$\boxed{b_k Y_{k+1} + a_k Y_k = R_k \quad \dots (4)} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

en la que: b_k, a_k, Y_k son sucesiones de números reales, es exacta si, y sólo si, se satisface la condición:

$$\boxed{b_k + a_{k+1} = 0 \quad \dots (5)} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Si se cumple la ecuación (5), la ecuación (4) es equivalente a

$$\boxed{b_k Y_{k+1} + a_k Y_k = \Delta [-a_k Y_k] = R_k \quad \dots (6)}$$

Demostración:

Supongamos que:

$$b_k Y_{k+1} + a_k Y_k = \Delta (\alpha_k Y_k) \quad \dots (6')$$

desarrollando el segundo miembro de (6')

$$\Delta (\alpha_k Y_k) = \alpha_{k+1} Y_{k+1} - \alpha_k Y_k$$

al substituir en (6)

$$b_k Y_{k+1} + a_k Y_k = \alpha_{k+1} Y_{k+1} - \alpha_k Y_k$$

Si se igualan coeficientes, se obtiene el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} b_k = \alpha_{k+1} \\ a_k = -\alpha_k \end{array} \right\} \quad \dots (7)$$

del sistema (7) resulta:

$$b_k = \alpha_{k+1}$$

$$a_{k+1} = -\alpha_{k+1}$$

sumando miembro a miembro:

$b_k + a_{k+1} = 0$, que corresponde a la ecuación (5) y que establece una condición necesaria para que (1) sea exacta.

Recíprocamente:

Dado que:

$$\Delta(-a_k Y_k) = -a_{k+1} Y_{k+1} + a_k Y_k \quad \dots (8)$$

si se verifica (5) $\rightarrow -a_{k+1} = b_k$

lo que, al sustituir en (8), nos dice que:

$$\Delta(-a_k Y_k) = b_k Y_{k+1} + a_k Y_k$$

de (4):

$$b_k Y_{k+1} + a_k Y_k = R_k$$

Por lo que resulta que la condición (5) es además condición suficiente con lo que se completa la demostración del teorema 1).

Ejemplo 3) Determinar x_k de modo que resulte exacta la ecuación:

$$e^k Y_{k+1} + k^2 x_k Y_k = R_k \quad \dots (9); \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Solución:

De la ecuación (5):

$$b_k + a_{k+1} = e^k + (k+1)^2 x_{k+1} = 0$$

$$\rightarrow x_{k+1} = - \frac{e^k}{(k+1)^2}$$

$$\therefore x_k = - \frac{e^{k-1}}{k^2}$$

Comprobación: si se substituye en (9):

$$e^k y_{k+1} - \frac{k^2 e^{k-1}}{k^2} y_k = R_k$$

si $k \neq 0$

$$e^k y_{k+1} - e^{k-1} y_k = \Delta (e^{k-1} y_k) = R_k$$

Si $k = 0 \rightarrow$ de (9)

$$y_1 = R_0$$

Factor de suma para la ecuación en diferencias (4)

Si no se satisface la condición dada por la ecuación (5), el siguiente teorema establece la posibilidad de hallar un factor de suma F_k .

Teorema 2) Si (4) no es exacta; pero:

$F_k b_k y_{k+1} + F_k a_k y_k = F_k R_k = \Delta (\alpha'_k y_k) \dots \quad (10)$

El factor de suma F_k satisface la ecuación en diferencias:

$$a_{k+1} F_{k+1} + b_k F_k = 0 \quad \dots (11)$$

En caso de cumplirse (11), resulta que (10) es equivalente a:

$$F_k b_k Y_{k+1} + F_k a_k Y_k = \Delta(-F_k a_k Y_k) = F_k R_k \quad \dots (12)$$

Nota: a la ecuación (11) se le denomina "ADJUNTA" de (4).

Demostración: De la ecuación (10):

$$F_k b_k Y_{k+1} + F_k a_k Y_k = \alpha'_{k+1} Y_{k+1} - \alpha'_k Y_k$$

Al igualar coeficientes, se obtiene el sistema.

$$\left. \begin{aligned} F_k b_k &= \alpha'_{k+1} \\ F_k a_k &= -\alpha'_k \end{aligned} \right\} \quad \dots (13)$$

que es equivalente a:

$$F_k b_k = \alpha'_{k+1}$$

$$F_{k+1} a_{k+1} = -\alpha'_{k+1}$$

sumando miembro a miembro:

$a_{k+1} F_{k+1} + b_k F_k = 0$; que es precisamente la ecuación ad
junta (11).

Del sistema (13) y la ecuación (10):

$$F_k b_k Y_{k+1} + F_k a_k Y_k = \Delta(-F_k a_k Y_k) = F_k R_k$$

que, por ser la ecuación (12), completa la demostración del teorema 2).

Obsérvese que el segundo miembro de (12) puede escribirse de dos formas diferentes. De la ecuación (11).

$$- a_{k+1} F_{k+1} = b_k F_k$$

$$\rightarrow - a_k F_k = b_{k-1} F_{k-1}$$

$$\therefore \Delta(-F_k a_k Y_k) = \Delta(F_{k-1} b_{k-1} Y_k) \quad \dots (13)$$

La ecuación adjunta (11) es una ecuación en diferencias lineal de primer orden, pero siempre es homogénea.

Ejemplo 4) Obtener un factor de suma para:

$$Y_{k+1} - aY_k = R_k \quad ; \quad a = \text{constante} \neq 1$$

$$\text{Solución: } b_k + a_{k+1} = 1 - a \neq 0$$

De la ecuación (11) resulta la ecuación adjunta siguiente:

$$- a F_{k+1} + F_k = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$- ar + 1 = 0 \rightarrow r = a^{-1}$$

por lo que:

$$F_k = (a^{-1})^k = a^{-k}$$

comprobación:

$$a^{-k} Y_{k+1} - a^{-(k-1)} Y_k = a^{-k} R_k \quad ; (\text{exacta})$$

$$\therefore \Delta (a^{-(k-1)} Y_k) = a^{-k} R_k$$

Ejemplo 5) Convertir en exacta la ecuación:

$$k(k+1) Y_{k+1} - k^2 Y_k = R_k ; \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

Solución:

$$b_k + a_{k+1} = k(k+1) - (k+1)^2 = -k-1 \neq 0, \quad \forall k \neq -1 \rightarrow$$

la ecuación no es exacta.

La ecuación (11) da la siguiente ecuación adjunta:

$$-(k+1)^2 F_{k+1} + k(k+1) F_k = 0$$

puesto que $k \neq -1 \rightarrow$ puede dividirse entre $-(k+1) \neq 0 \rightarrow$

$$(k+1) F_{k+1} - k F_k = \Delta(k F_k) = 0$$

$$\rightarrow \Delta^{-1} (\Delta k F_k) = \Delta^{-1} 0 = C$$

$$\therefore k F_k = C ; \quad (C = \text{constante arbitraria})$$

$$F_k = \frac{C}{k}$$

Si se multiplica la ecuación dada por F_k :

$$C(k+1) Y_{k+1} - C k Y_k = \frac{C R_k}{k} = Q_k ; (\text{exacta})$$

$$\rightarrow C \Delta(k Y_k) = Q_k$$

Obsérvese que F_k es factor de suma para cualquier constante real C (existe un número infinito de factores de suma).

Si se hace, por facilidad $C = 1$, resulta un factor de suma:

$$F_k = k^{-1}$$

Ejemplo 6) Resolver la ecuación:

$$(k+1) Y_{k+1} - (k-1) Y_k = 3 ; \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Solución:

$$b_k + a_{k+1} = k+1 - k = 1 \neq 0 \rightarrow \text{no es exacta.}$$

De la ecuación (11) se obtiene la ecuación adjunta:

$$-k F_{k+1} + (k+1) F_k = 0$$

Si se divide entre: $-k(k+1)$; $k \neq 0$, $k \neq -1 \rightarrow$

$$\frac{F_{k+1}}{k+1} - \frac{F_k}{k} = \Delta \left(\frac{F_k}{k} \right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{F_k}{k} = C$$

$$\text{si } C = 1$$

$$F_k = k \rightarrow$$

$$k(k+1)Y_{k+1} - (k-1)k Y_k = 3k$$

$$\Delta \left[(k-1)k Y_k \right] = 3k$$

$$(k-1)k Y_k = 3 \sum k + C = 3 \frac{k(k-1)}{2} + C$$

$$\therefore Y_k = \frac{3}{2} + C \frac{1}{k(k-1)} ; \quad k \neq 0, k \neq 1$$

De la ecuación dada, si $k = 0 \rightarrow Y_1 + Y_0 = 3$

$$\rightarrow Y_0 = 3 - Y_1$$

$$\text{si } k = 1 \rightarrow 2Y_2 = 3$$

Ejemplo 7) Resolver como exacta, la ecuación general de primer orden, lineal, no-homogénea, de coeficientes variables:

$$Y_{k+1} - p_k Y_k = R_k \quad \dots (14)$$

Solución: $b_k = 1$; $a_k = -p_k$

aplicando la ecuación (5)

$$b_k + a_{k+1} = 1 - p_{k+1} \neq 0, \text{ si } p_{k+1} \neq 1$$

→ (14) no es exacta.

De la ecuación (11) se obtiene la ecuación adjunta:

$$a_{k+1} F_{k+1} + b_k F_k = 0 \quad \dots (11)$$

$$\rightarrow -p_{k+1} F_{k+1} + F_k = 0 \quad \dots (15)$$

si se multiplica (15) por:

to: $-p_1 p_2 p_3 \dots p_k = - \prod_{i=1}^k p_i$, se convierte en exacta; en efec

$$\left(\prod_{i=1}^{k+1} p_i \right) F_{k+1} - \left(\prod_{i=1}^k p_i \right) F_k = 0$$

$$\rightarrow \Delta \left[\left(\prod_{i=1}^k p_i \right) F_k \right] = 0$$

$$\left(\prod_{i=1}^k p_i \right) F_k = C$$

$$\therefore F_k = \frac{C}{\prod_{i=1}^k p_i} \quad \dots (16)$$

Si se multiplica (14) por (16), para $C = 1$:

$$\frac{Y_{k+1}}{\prod_{i=1}^k p_i} - \frac{Y_k}{\prod_{i=1}^{k-1} p_i} = \frac{R_k}{\prod_{i=1}^k p_i}$$

$$\rightarrow \Delta \frac{Y_k}{\prod_{i=1}^{k-1} p_i} = \frac{R_k}{\prod_{i=1}^k p_i}$$

$$\frac{Y_k}{\prod_{i=1}^{k-1} p_i} = \sum \frac{R_k}{\prod_{i=1}^k p_i} + C$$

$$\therefore Y_k = \left[\prod_{i=1}^{k-1} p_i \sum \frac{R_k}{\prod_{i=1}^k p_i} \right] + C \prod_{i=1}^{k-1} p_i \quad \dots (17)$$

Observaciones: Al resolver la ecuación (14) como exacta, se obtuvo la solución general de la ecuación no-homogénea sin necesidad de recurrir al método de variación de parámetros.

Por ser la ecuación (14) lineal, puede comprobarse que la solución de la ecuación homogénea ($R_k = 0$) constituye un espacio vectorial, en tanto que la solución general constituye una variedad lineal (subespacio afín); por lo cual:

$$Y_k = Y_k^C + Y_k^P$$

siendo y_k^C solución general de la ecuación homogénea; y_k^p es una solución particular de la ecuación (14).

De la ecuación (17) se concluye que:

$$y_k^C = C \prod_{i=1}^{k-1} p_i$$

Es asimismo interesante observar que la ecuación (14) admite, como factor de suma F_k el recíproco de y_k^C , si (14) se escribe en la forma equivalente.

$$\frac{y_{k+1}}{p_k} - y_k = Q_k ; \quad (Q_k = \frac{R_k}{p_k})$$

Si se hace $Q_k \equiv 0 \rightarrow$

$$\frac{y_{k+1}^C}{p_k} - y_k^C = 0 \quad \dots (17)$$

de lo cual resulta:

$$y_k^C = C \prod_{i=1}^{k-1} p_i$$

Por lo cual, si se hace $C = 1$, resulta:

$$F_k = \frac{1}{y_k^C} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-1} p_i}$$

que al multiplicar por la ecuación dada, la convierte en exacta; en efecto:

$$\frac{Y_{k+1}}{\prod_{i=1}^k p_i} - \frac{Y_k}{\prod_{i=1}^{k-1} p_i} = \frac{Q_k}{\prod_{i=1}^{k-1} p_i} = S_k$$

$$\rightarrow \Delta \left[\frac{Y_k}{\prod_{i=1}^{k-1} p_i} \right] = S_k$$

Para ilustrar la idea, volvamos al ejemplo 6)

$$\frac{k+1}{k-1} Y_{k+1}^C - Y_k^C = 0$$

cuya solución es:

$$Y_k^C = C \prod_{i=1}^{k-1} \frac{i-1}{i+1} = C \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{k-2}{k} \right]$$

$$= C \frac{1 \cdot 2}{(k-1)k} ; \quad \text{si } C = \frac{1}{2} \rightarrow Y_k^C = \frac{1}{(k-1)k}$$

Por lo cual $F_k = (k-1)k$; en efecto:

$$(k-1)k \frac{k+1}{k-1} Y_{k+1} - (k-1)k Y_k = \Delta \left[(k-1)k Y_k \right]$$

$$\rightarrow \Delta \left[(k-1)k Y_k \right] = (k-1)k \frac{3}{k-1} = 3k$$

Combinaciones sumables.

Motivación.- Supongamos que se pretende resolver la ecuación en diferencias

$$k Y_{k+1} - (k+1)Y_k = k^2(k+1) ; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Veamos si es exacta; de (5), para:

$$b_k = k ; \quad a_k = -(k+1)$$

$$\rightarrow b_k + a_{k+1} = k - (k+2) = -2 \neq 0$$

$\rightarrow$ no es exacta.

Busquemos un factor de suma F_k de (11); la ecuación adjunta resulta:

$$-(k+2)F_{k+1} + k F_k = 0$$

Puesto que la solución de la ecuación adjunta anterior, no se consigue en forma explícita, se suspenderá la búsqueda de la solución por este camino; sin embargo, puede procederse como se indica a continuación:

Al dividir la ecuación original entre $k(k+1) \neq 0 \rightarrow$

$$\frac{Y_{k+1}}{k+1} - \frac{Y_k}{k} = \Delta \left(\frac{Y_k}{k} \right) = k$$

$$\rightarrow \frac{Y_k}{k} = \sum k + C = \frac{k(k-1)}{2} + C$$

por lo que la solución general de la ecuación dada es:

$$Y_k = \frac{k^2(k-1)}{2} + C k$$

Puede decirse que el éxito obtenido siguiendo el segundo procedimiento se debe a haber podido visualizar la posibilidad de convertir el primer miembro de la ecuación en diferencias dada, en una ecuación exacta, o sea, en la diferencia de cierta función que denominaremos "combinación sumable".

Las combinaciones sumables más conspicuas son:

$$f_{k+1} Y_{k+1} - f_k Y_k = \Delta (f_k Y_k)$$

$$\frac{f_k Y_{k+1}}{f_k} - \frac{f_{k+1} Y_k}{f_{k+1}} = \frac{Y_{k+1}}{f_{k+1}} - \frac{Y_k}{f_k} = \Delta\left(\frac{Y_k}{f_k}\right)$$

Sin embargo, a continuación se muestran ejemplos de otras ecuaciones en diferencias que, mediante artificios sencillos, pueden ser resueltas como combinaciones sumables.

Antes de resolver otros ejemplos, veamos nuevamente el ejemplo 5)

$$k(k+1)Y_{k+1} - k^2Y_k = R_k ; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Solución: puesto que $k \neq 0$, al dividir entre k :

$$(k+1)Y_{k+1} - kY_k = \frac{R_k}{k} = Q_k$$

cuyo primer miembro es una combinación integrable de la forma $\Delta(f_k Y_k)$; esto es:

$$(k+1)Y_{k+1} - kY_k = \Delta(kY_k) \rightarrow$$

$$\Delta(kY_k) = Q_k \rightarrow$$

$$kY_k = \Sigma Q_k + C$$

$$\therefore Y_k = \frac{1}{k} \Sigma \frac{R_k}{k} + \frac{C}{k}$$

Obsérvese que $Y_k^C = \frac{1}{k}$ es solución de la ecuación homogénea:

$$k(k+1)Y_{k+1} - k^2Y_k = 0$$

en tanto que una solución particular es:

$$Y_k^p = \frac{1}{k} \Sigma \frac{R_k}{k}$$

Ejemplos: Mediante reagrupación o reacomodo de términos, resolver las siguientes ecuaciones en diferencias, como combinaciones sumables.

Ejemplo 8)

$$Y_{k+3} - 3Y_{k+2} + 3Y_{k+1} - Y_k = 0$$

Solución:

La ecuación dada es equivalente a:

$$Y_{k+3} - Y_{k+2} - 2(Y_{k+2} - Y_{k+1}) + Y_{k+1} - Y_k = 0$$

$$\Delta Y_{k+2} - 2 \Delta Y_{k+1} + \Delta Y_k = 0$$

por ser Δ operador lineal $\rightarrow$

$$\Delta(Y_{k+2} - 2Y_{k+1} + Y_k) = 0$$

$$\Delta(Y_{k+2} - Y_{k+1} - Y_{k+1} + Y_k) =$$

$$\Delta(\Delta Y_{k+1} - \Delta Y_k) = \Delta [\Delta(Y_{k+1} - Y_k)] =$$

$$= \Delta [\Delta(\Delta Y_k)] = \Delta^3 Y_k = 0$$

$$\therefore Y_k = C_1 + C_2 k + C_3 k^2$$

Ejemplo 9)

$$2^k Y_{k+1} - 2^{k+1} Y_k = 6^{2k}$$

Solución:

Al dividir la ecuación entre $2^k 2^{k+1}$

$$\frac{Y_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{Y_k}{2^k} = 2^{2k} 3^{2k} 2^{-k} 2^{-k-1} = 3^{2k} 2^{-1}$$

$$\Delta \left(\frac{Y_k}{2^k} \right) = \frac{9^k}{2}$$

$$\frac{Y_k}{2^k} = \frac{1}{2} \sum 9^k + C$$

puesto que $\Delta a^k = a^{k+1} - a^k = a^k (a-1)$

$$\rightarrow \sum a^k = \frac{a^k}{a-1} + C \rightarrow \sum 9^k = \frac{9^k}{8}$$

$$\therefore Y_k = \frac{18^k}{16} + C 2^k$$

Observación: En todos los problemas lineales que se presentan en este trabajo, la solución general $Y_k = Y_k^C + Y_k^P$ se obtiene sin necesidad de recurrir a la aplicación de métodos especiales, por ejemplo, variación de parámetros. En este ejemplo:

$$Y_k^C = C 2^k$$

$$Y_k^P = \frac{18^k}{16}$$

Ejemplo 10)

$$Y_{k+2} - 2a Y_{k+1} + a^2 Y_k = a^k ; \quad a = \text{constante}$$

Solución:

Si se escribe la ecuación en la forma:

$$(Y_{k+2} - a Y_{k+1}) - a (Y_{k+1} - a Y_k) = a^k$$

En el ejemplo 4) anterior se encontró que $F_k = \bar{a}^k$ para los paréntesis, por lo cual:

$$\Delta(a^{-(k-1)} Y_{k+1}) - a \Delta a^{-(k-1)} Y_k = 1$$

por linealidad:

$$\Delta \left[a^{-(k-1)} Y_{k+1} - a^{-(k-2)} Y_k \right] = 1$$

$$\rightarrow \Delta \left[\Delta a^{-(k-2)} Y_k \right] = 1$$

$$\Delta (a^{-(k-2)} Y_k) = k + C,$$

$$a^{-(k-2)} Y_k = \Sigma k + C_1 k + C_2$$

$$\therefore Y_k = a^{k-2} \frac{k(k-1)}{2} + (C_1 k + C_2) a^{k-2}$$

o bien:

$$Y_k = a^k \frac{k(k-1)}{2a^2} + (C'_1 k + C'_2) a^k$$

donde $C_1' = \frac{C_1}{a^2}$; $C_2' = \frac{C_2}{a^2}$

Ejemplo 11)

$$(k+2) Y_{k+2} - k Y_k = R_k ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Solución:

Al sumar y restar $(k+1)Y_{k+1}$ resulta

$$(k+2)Y_{k+2} - (k+1)Y_{k+1} + (k+1)Y_{k+1} - kY_k = R_k$$

$$\Delta(k+1)Y_{k+1} + \Delta k Y_k =$$

$$\Delta \left[(k+1)Y_{k+1} + kY_k \right] = R_k$$

$$\rightarrow (k+1)Y_{k+1} + kY_k = \Sigma R_k + C$$

por ser esta última ecuación de la forma:

$Y_{k+1} - p_k Y_k = Q_k$, ecuación que por haber sido resuelta en forma general en el problema 7) nos permite llegar a la solución general.

Obsérvese que en este problema se ha podido reducir de orden la ecuación dada; es decir, para resolver la ecuación de segundo orden debe resolverse una ecuación de primer orden, para la cual se tiene, en todos los casos, la solución general.

Ejemplo 12) Generalización del problema 11) anterior:

$$f_{k+n} Y_{k+n} - f_k Y_k = R_k$$

Solución:

La ecuación dada, de orden n puede ser reducida a una ecuación de orden $n-1$; en efecto: al restar y sumar a la ecuación

$$\sum_{i=k+1}^{k+n-1} f_i Y_i \rightarrow$$

$$f_{k+n} Y_{k+n} - f_k Y_k = \sum_{i=k}^{k+n-1} \Delta f_i Y_i = \Delta \sum_{i=k}^{k+n-1} f_i Y_i$$

Se ve pues, que el segundo miembro es una expresión en diferencias de orden $n-1$, o sea, el orden del primer miembro se reduce en una unidad.

Aun cuando el propósito de los ejemplos 11) y 12) es ilustrar un procedimiento, es importante hacer notar que ecuaciones en diferencias de este tipo se pueden transformar en ecuaciones con coeficientes constantes mediante el siguiente cambio de variable:

$$f_k Y_k = u_k \rightarrow$$

$$u_{k+n} - u_k = R_k$$

Ejemplo 13)

$$k Y_{k+2} - (k+2) Y_k = k(k+1)(k+2)$$

Solución:

Al dividir entre $k(k+2)$

$$\frac{Y_{k+2}}{k+2} - \frac{Y_k}{k} = k + 1$$

restando y sumando $\frac{Y_{k+1}}{k+1}$

$$\left(\frac{Y_{k+2}}{k+2} - \frac{Y_{k+1}}{k+1}\right) + \left(\frac{Y_{k+1}}{k+1} - \frac{Y_k}{k}\right) = k + 1$$

$$\Delta\left(\frac{Y_{k+1}}{k+1}\right) + \Delta\left(\frac{Y_k}{k}\right) = \Delta\left(\frac{Y_{k+1}}{k+1} + \frac{Y_k}{k}\right) = k + 1$$

$$\therefore \frac{Y_{k+1}}{k+1} + \frac{Y_k}{k} = \frac{k(k-1)}{2} + k + C$$

que por ser ecuación del tipo

$$Y_{k+1} - p_k Y_k = R_k$$

puede obtenerse la solución general a partir del problema 7) anterior.

Ejemplo 14) Generalización del problema 13) anterior

$$f_k Y_{k+n} - f_{k+n} Y_k = R_k$$

Solución:

Si se divide entre $f_k f_{k+n}$:

$$\frac{Y_{k+n}}{f_{k+n}} - \frac{Y_k}{f_k} = \frac{R_k}{f_k f_{k+n}} = Q_k$$

Observando que esta ecuación es del mismo tipo que la del ejemplo 12) anterior; al sumar y restar

$$\sum_{i=k+1}^{k+n-1} \frac{Y_i}{f_i} \quad \text{resulta:}$$

$$\frac{Y_{k+n}}{f_{k+n}} - \frac{Y_k}{f_k} = \sum_{i=k}^{k+n-1} \Delta \frac{Y_i}{f_i} = \Delta \sum_{i=k}^{k+n-1} \frac{Y_i}{f_i}$$

De modo que, por el segundo miembro, se observa que el primer miembro se ha reducido en una unidad.

Los ejemplos 13) y 14), a semejanza de lo que sucede con los ejemplos 11) y 12), pueden convertirse en ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes, si se hace el siguiente cambio de variable:

$$\frac{Y_k}{f_k} = V_k \rightarrow V_{k+n} - V_k = Q_k$$

Ejemplo 15) Reducir la ecuación de orden tres a una ecuación de orden dos, y resolverla.

$$k^2 Y_{k+3} - (k+3)^2 Y_k = k^2 (k+3)^2$$

Solución:

Si se divide entre $k^2 (k+3)^2$

$$\frac{Y_{k+3}}{(k+3)^2} - \frac{Y_k}{k^2} = 1$$

que es equivalente a:

$$\frac{Y_{k+3}}{(k+3)^2} - \frac{Y_{k+2}}{(k+2)^2} + \frac{Y_{k+2}}{(k+2)^2} - \frac{Y_{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{Y_{k+1}}{(k+1)^2} - \frac{Y_k}{k^2} =$$

$$\Delta \left[\frac{Y_{k+2}}{(k+2)^2} + \frac{Y_{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{Y_k}{k^2} \right] = 1$$

si se hace: $\frac{Y_k}{k^2} = u_k \rightarrow$

$$\Delta [u_{k+2} + u_{k+1} + u_k] = 1 \rightarrow$$

$$u_{k+2} + u_{k+1} + u_k = k + C$$

ecuación característica:

$$r^2 + r + 1 = 0 \rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$u_k^c = C_1 \cos \frac{2\pi}{3} k + C_2 \sin \frac{2\pi}{3} k$$

$$u_k^p = a k + b \rightarrow$$

$$a(k+2) + b + a(k+1) + b + ak + b = k$$

$$3 ak + 3a + 3b = k \rightarrow a = \frac{1}{3}; \quad b = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore u_k^p = \frac{1}{3} k - \frac{1}{3} + \frac{C}{3}$$

$$\rightarrow u_k = C_1 \cos \frac{2\pi}{3} k + C_2 \sin \frac{2\pi}{3} k + \frac{k - 1 + C}{3}$$

restituyendo a u_k su valor, nos da la solución general:

$$Y_k = k^2 \left[C_1 \cos \frac{2\pi}{3} k + C_2 \sin \frac{2\pi}{3} k + C_3 + \frac{k}{3} \right]$$

$$\text{donde } C_3 = \frac{C-1}{3}$$

Obsérvese que la ecuación en diferencias dada puede ser resuelta directamente, esto es, sin necesidad de reducirla de orden.

Si se hace:

$$\frac{Y_k}{k^2} = u_k \rightarrow u_{k+3} - u_k = 1$$

ecuación característica: $r^3 - 1 = 0 \rightarrow$

$$r_{1,2} = \cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3}; \quad r_3 = 1$$

$$\rightarrow u_k^c = C_1 \cos \frac{2\pi}{3} k + C_2 \sin \frac{2\pi}{3} k + C_3$$

$$u_k^p = a k + b \rightarrow a(k+3) + b - ak - b = 1 \rightarrow 3a = 1$$

$$u_k^p = \frac{k}{3}; \quad u_k = u_k^c + u_k^p$$

al restituir a u_k su valor:

$$y_k = k^2 \left[C_1 \cos \frac{2\pi}{3} k + C_2 \sin \frac{2\pi}{3} k + C_3 + \frac{k}{3} \right]$$

Ecuación en diferencias lineal de segundo orden,
exacta

Teorema 3) La ecuación en diferencias:

$$C_k Y_{k+2} + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k = R_k \quad \dots \quad (19) \quad ; k = 0, 1, 2, \dots$$

donde los coeficientes: C_k, b_k, a_k , así como Y_k son sucesiones reales, es "exacta" si, y sólo si, se satisface la condición:

$$C_k + b_{k+1} + a_{k+2} = 0 \quad \dots \quad (20) \quad ; k = 0, 1, 2, \dots$$

En cuyo caso, la ecuación (19) es equivalente a:

$$C_k Y_{k+2} + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k = \Delta \left[C_{k-1} Y_{k+1} - a_k Y_k \right] = R_k \dots (21)$$

Demostración: Si (19) es exacta $\rightarrow$

$$C_k Y_{k+2} + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k = \Delta [\beta_k Y_{k+1} + \alpha_k Y_k] \quad \dots (22)$$

Desarrollando el segundo miembro de (22):

$$\begin{aligned} \Delta [\beta_k Y_{k+1} + \alpha_k Y_k] &= \beta_{k+1} Y_{k+2} + \alpha_{k+1} Y_{k+1} - \beta_k Y_{k+1} - \alpha_k Y_k \\ &= \beta_{k+1} Y_{k+2} + (\alpha_{k+1} - \beta_k) Y_{k+1} - \alpha_k Y_k \quad \dots (23) \end{aligned}$$

al igualar coeficientes entre (22) y (23), se obtiene el sistema:

$$\left. \begin{aligned} C_k &= \beta_{k+1} \\ b_k &= \alpha_{k+1} - \beta_k \\ a_k &= -\alpha_k \end{aligned} \right\} \quad \dots (24)$$

El sistema (24) es equivalente a:

$$\left. \begin{aligned} C_k &= \beta_{k+1} \\ b_{k+1} &= \alpha_{k+2} - \beta_{k+1} \\ a_{k+2} &= -\alpha_{k+2} \end{aligned} \right\} \quad \dots (25)$$

Al sumar ordenadamente miembro a miembro en (25), nos da la condición necesaria:

$$C_k + b_{k+1} + a_{k+2} = 0$$

que corresponde a la ecuación (20).

Recíprocamente, si se verifica (20); la ecuación (23) equivale, según el sistema (24), a:

$$\begin{aligned}\Delta(\beta_k Y_{k+1} + \alpha_k Y_k) &= \beta_{k+1} Y_{k+2} + (\alpha_{k+1} - \beta_k) Y_{k+1} - \alpha_k Y_k = \\ &= C_k Y_{k+2} + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k\end{aligned}$$

lo que establece la suficiencia de la condición (20).

De la ecuación (22) y el sistema (25) resulta:

$$C_k Y_{k+2} + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k = \Delta(C_{k-1} Y_{k+1} - a_k Y_k)$$

que corresponde a la ecuación (21), con lo que queda completa la demostración del teorema 3).

A continuación, se resuelven algunos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 16)

$$Y_{k+2} - 2 Y_{k+1} + Y_k = k$$

Solución: $C_k = 1$; $b_k = -2$; $a_k = 1$

→ de la fórmula (20):

$$C_k + b_{k+1} + a_{k+2} = 1 - 2 + 1 = 0 \rightarrow \text{la ecuación es exacta.}$$

De la fórmula (21).

$$Y_{k+2} - 2 Y_{k+1} + Y_k = \Delta(Y_{k+1} - Y_k) = k$$

$$\rightarrow \Delta(\Delta Y_k) = k$$

$$\Delta Y_k = \Sigma k = \frac{k(k-1)}{2} + C_1$$

$$Y_k = \frac{1}{2} \left[\Sigma (k^2 - k) \right] + \Sigma C_1$$

$$= \frac{1}{2} \left[\Sigma k^{(2)} + k^{(1)} - k^{(1)} \right] + C_1 \Sigma 1$$

$$= \frac{1}{2} \frac{k^{(3)}}{3} + C_2 + C_1 k$$

$$= C_1 k + C_2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

$$= C_1 k + C_2 + \frac{1}{6} (k^3 - 3k^2 + 2k)$$

$$Y_k = C_1' k + C_2 + \frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{2}$$

donde: $C_1' = C_1 + \frac{1}{3}$

Ejemplo 17)

$$Y_{k+2} - (a+1) Y_{k+1} + a Y_k = R_k ; \quad a = \text{constante.}$$

Solución:

$$C_k + b_{k+1} + a_{k+2} = 1 - (a+1) + a = 0 \rightarrow \text{es exacta}$$

$$\Delta(Y_{k+1} - aY_k) = R_k$$

$$Y_{k+1} - aY_k = \Sigma R_k + C$$

Se vio en el ejemplo 4) que $F_k = a^{-k} \rightarrow$

$$a^{-k} Y_{k+1} - a^{-(k-1)} Y_k = a^{-k} \Sigma R_k + C_1 a^{-k}$$

$$\Delta(a^{-(k-1)} Y_k) = a^{-k} \Sigma R_k + C_1 a^{-k}$$

$$a^{-(k-1)} Y_k = \Sigma (a^{-k} \Sigma R_k) + C_1 \Sigma a^{-k} + C_2$$

$$Y_k = a^{k-1} \Sigma (a^{-k} \Sigma R_k) + C_1 a^{k-1} \Sigma a^{-k} + C_2 a^{k-1}$$

dado que $\Delta a^{-k} = a^{-(k+1)} - a^{-k} = a^{-k} (a^{-1} - 1)$

$$\rightarrow \Sigma a^{-k} = \frac{a^{-k}}{a^{-1} - 1}$$

$$Y_k = \frac{C_1}{1-a} + C_2 a^{k-1} + a^{k-1} \Sigma (a^{-k} \Sigma R_k)$$

si se hace $\frac{C_1}{1-a} = C'_1$

$$Y_k = C'_1 + a^{k-1} \left[C_2 + \sum (a^{-k} \sum R_k) \right]$$

Ejemplo 18)

$$Y_{k+2} - (k+2)Y_{k+1} + kY_k = 3$$

Solución:

$$C_k + b_{k+1} + a_{k+2} = 1 - (k+3) + (k+2) = 0 \rightarrow \text{es exacta}$$

$$\therefore \Delta \left[Y_{k+1} - kY_k \right] = 3$$

$$Y_{k+1} - kY_k = 3 \sum 1 + C_1 = 3k + C_1$$

$$Y_{k+1} - kY_k = 3k + C_1 \text{ no es exacta.}$$

Para hallar F_k ; de la ecuación (11)

$-(k+1)F_{k+1} + F_k = 0$; lo que nos indica que es preferible hallar F_k resolviendo la ecuación:

$$\frac{Y^C_{k+1}}{k} - Y^C_k = 0$$

$$\rightarrow Y_k^C = C \prod_{i=1}^{k-1} i = C (k-1)!$$

$$\therefore F_k = \frac{1}{(k-1)!} ; (C = 1)$$

$$\therefore \frac{Y_{k+1}}{k!} - \frac{Y_k}{(k-1)!} = \Delta \left[\frac{Y_k}{(k-1)!} \right] = \frac{3}{(k-1)!} + \frac{C_1}{k!}$$

$$\therefore \frac{Y_k}{(k-1)!} = 3 \sum \frac{1}{(k-1)!} + C_1 \sum \frac{1}{k!} + C_2$$

$$\therefore Y_k = 3 (k-1)! \sum \frac{1}{(k-1)!} + C_1 (k-1)! \sum \frac{1}{k!} + C_2 (k-1)!$$

Ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden no-exactas.

Si no se satisface la condición (20) para la ecuación en diferencias (19), el siguiente teorema establece la forma de obtener Factores de suma F_k .

Teorema 4) La ecuación en diferencias:

$$C_k Y_{k+2} + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k = R_k \quad \dots (19) \quad ; k = 0, 1, 2, \dots$$

no-exacta tiene como ecuación adjunta la ecuación:

$$a_{k+2} F_{k+2} + b_{k+1} F_{k+1} + C_k F_k = 0 \quad \dots (26)$$

alguna de cuyas soluciones particulares F_k convierte la ecuación (19) en exacta; esto es:

$$F_k \left[C_k Y_{k+2} + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k \right] =$$

$$= \Delta \left[F_{k-1} C_{k-1} Y_{k+1} - F_k a_k Y_k \right] = F_k R_k \dots \quad (27)$$

Demostración: Al multiplicar (19) por F_k , resultará exacta, si se verifica:

$$F_k \left[C_k Y_{k+2} + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k \right] = \Delta \left[\beta_k Y_{k+1} + \alpha_k Y_k \right] \dots \quad (28)$$

pero:

$$\Delta \left[\beta_k Y_{k+1} + \alpha_k Y_k \right] = \beta_{k+1} Y_{k+2} + \alpha_{k+1} Y_{k+1} - \beta_k Y_{k+1} - \alpha_k Y_k$$

$$= \beta_{k+1} Y_{k+2} + (\alpha_{k+1} - \beta_k) Y_{k+1} - \alpha_k Y_k \dots \quad (29)$$

Si se igualan coeficientes en (28) y (29) resulta el sistema:

$$\left. \begin{aligned} F_k C_k &= \beta_{k+1} \\ F_k b_k &= \alpha_{k+1} - \beta_k \\ F_k a_k &= -\alpha_k \end{aligned} \right\} \dots \quad (30)$$

que es equivalente al sistema:

$$\left. \begin{aligned} F_k C_k &= \beta_{k+1} \\ F_{k+1} b_{k+1} &= \alpha_{k+2} - \beta_{k+1} \\ F_{k+2} a_{k+2} &= -\alpha_{k+2} \end{aligned} \right\} \dots (31)$$

al sumar miembro a miembro se obtiene la ecuación:

$$a_{k+2} F_{k+2} + b_{k+1} F_{k+1} + C_k F_k = 0$$

que es la ecuación adjunta de (19), y resulta ser la ecuación (26).

Del sistema (30) y las ecuaciones (28) y (29) resulta:

$$\begin{aligned} F_k [C_k Y_{k+2} + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k] &= \\ &= \Delta(F_{k-1} C_{k-1} Y_{k+1} - F_k a_k Y_k) = F_k R_k \end{aligned}$$

que, por corresponder con la ecuación (27), completa la demostración del teorema 4).

Observación.- Dado que la ecuación en diferencias adjunta es lineal y homogénea, resulta que sus soluciones particulares constituyen elementos de un espacio vectorial de dimensión dos; de ahí que cualquier combinación lineal de las soluciones es asimismo solución. Por lo tanto, si G_k y H_k satisfacen la ecuación adjunta (26) (siendo por lo tanto factores de suma), se-

rá también factor de suma la combinación lineal:

$$F_k = C_1 G_k + C_2 H_k$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

A continuación se resuelven algunos ejemplos ilustrativos.

Hallar un factor de suma F_k que convierta en exacta la ecuación en diferencias no-exacta dada.

Ejemplo 19)

$$- 5 Y_{k+2} - 4 Y_{k+1} + Y_k = R_k$$

Solución:

De la ecuación (26) se obtiene la ecuación adjunta

$$F_{k+2} - 4 F_{k+1} - 5 F_k = 0$$

cuya ecuación característica es

$$r^2 - 4r - 5 = 0 \rightarrow r_1 = 5 ; r_2 = -1 \rightarrow$$

$$F_{k_1} = 5^k ; F_{k_2} = (-1)^k$$

comprobación

$$5^k \left[-5 Y_{k+2} - 4 Y_{k+1} + Y_k \right] = 5^k R_k$$

$$C'_k + b'_{k+1} + a'_{k+2} = -5^{k+1} - 4 \cdot 5^{k+1} + 5^{k+2} =$$

$$= 5^k (-5 - 20 + 25) = 0 \rightarrow \text{exacta; por lo que}$$

$$F_{k_1} = 5^k \text{ es un factor de suma.}$$

$$\text{Para } F_{k_2} = (-1)^k \rightarrow$$

$$(-1)^k [-5 Y_{k+2} - 4 Y_{k+1} + Y_k] = (-1)^k R_k$$

$$C''_k + b''_{k+1} + a''_{k+2} = (-1)^k [-5 + 4 + 1] = 0 \rightarrow \text{exacta;}$$

por lo tanto $F_{k_2} = (-1)^k$ es asimismo factor de suma.

También son factores de suma

$$F_k = C_1 5^k + C_2 (-1)^k \text{ para cualquier } C_1 \text{ y } C_2 \text{ constantes.}$$

Ejemplo 20)

$$k^2 Y_{k+2} + (1-2k) Y_{k+1} + Y_k = \frac{1}{(k-1)!};$$

Solución: ecuación adjunta: de (26)

$$F_{k+2} - (2k+1) F_{k+1} + k^2 F_k = 0$$

Puede comprobarse que una solución de la ecuación adjunta es:
 $F_k = (k-1)!$ → es exacta la ecuación:

$$k^2(k-1)! Y_{k+2} + (1-2k)(k-1)! Y_{k+1} + (k-1)! Y_k = 1$$

de la ecuación (27) resulta:

$$\Delta \left[(k-1)^2 (k-2)! Y_{k+1} - (k-1)! Y_k \right] = 1$$

$$(k-1)^2 (k-2)! Y_{k+1} - (k-1)! Y_k = k + C$$

al dividir entre $(k-1)^2 (k-2)!$ →

$$Y_{k+1} - \frac{1}{k-1} Y_k = \frac{k + C}{(k-1)^2 (k-2)!}$$

Que es de la forma de la ecuación (14):

$$Y_{k+1} - p_k Y_k = R_k$$

cuya solución general se obtuvo en el problema 7).

Ejemplo 21)

$$(k+2)Y_{k+2} - 3(k+1)Y_{k+1} - 4kY_k = R_k$$

Solución: de (26) se obtiene la ecuación adjunta:

$$-4(k+2)F_{k+2} - 3(k+2)F_{k+1} + (k+2)F_k = 0$$

si $k \neq -2$, al dividir entre $-(k+2)$, resulta:

$$4 F_{k+2} + 3 F_{k+1} - F_k = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$4r^2 + 3r - 1 = 0 \rightarrow (r - \frac{1}{4})(r+1) = 0$$

$$\therefore F_{k_1} = 4^{-k} ; \quad F_{k_2} (-1)^k$$

Si se toma el primer factor de suma:

$$4^{-k} (k+2) Y_{k+2} - 4^{-k} 3 (k+1) Y_{k+1} - 4^{-k+1} k Y_k = 4^{-k} R_k$$

De la ecuación (27) se obtiene:

$$\Delta \left[4^{1-k} (k+1) Y_{k+1} + 4^{1-k} k Y_k \right] = 4^{-k} R_k$$

si se hace $\Sigma 4^{-k} R_k = Q_k$, resulta

$$(k+1) Y_{k+1} + k Y_k = 4^{k-1} (Q_k + C)$$

Para obtener la solución general, puede aplicarse directamente la fórmula obtenida en el problema 7); o bien, si se hace $k Y_k = u_k$ se convierte en una ecuación en diferencias de coeficientes constantes.

Con el único fin de comparar resultados, tomemos el segundo factor de suma:

$$(-1)^k \left[(k+2)Y_{k+2} - 3(k+1)Y_{k+1} - 4kY_k \right] = (-1)^k R_k$$

Aplicando la ecuación (27):

$$\Delta \left[(-1)^{k-1} (k+1)Y_{k+1} - (-1)^{k-1} 4kY_k \right] = (-1)^k R_k$$

al aplicar el operador inverso $\Delta^{-1} = \Sigma$:

$$(-1)^{k-1} \left[(k+1)Y_{k+1} - 4kY_k \right] = \Sigma (-1)^k R_k + C_1$$

al hacer $(-1)^{1-k} \Sigma (-1)^k R_k = Q_k$; así como

$$kY_k = u_k \rightarrow$$

$$u_{k+1} - 4u_k = Q_k + (-1)^k C_1$$

que, como se vio en el ejemplo 4), admite el factor de suma $F_k = 4^{-k} \rightarrow$

$$4^{-k} u_{k+1} - 4^{1-k} u_k = 4^{-k} Q_k + 4^{-k} C_1 (-1)^k$$

$$4^{1-k} u_k = \Sigma 4^{-k} Q_k + C_1 \Sigma (-4)^{-k} + C_2$$

$$\therefore u_k = 4^{k-1} \sum 4^{-k} Q_k + \frac{C_1}{16} 4^k \left[\frac{(-4)^{-k}}{-5} \right] + \frac{C_2}{4} 4^k$$

$$u_k = kY_k = 4^{k-1} \sum 4^{-k} Q_k + C'_1 (-1)^k + C'_2 4^k$$

$$\therefore Y_k = \frac{4^k}{4k} \sum 4^{-k} Q_k + C'_1 \frac{(-1)^k}{k} + C'_2 \frac{4^k}{k}$$

Es interesante comprobar que las dos soluciones, hasta aquí obtenidas, son equivalentes. Puede obtenerse una tercera solución, asimismo equivalente si, en la ecuación en diferencias dada, se hace el cambio de variable.

$$kY_k = \omega_k \rightarrow$$

$$\omega_{k+2} - 3\omega_{k+1} - 4\omega_k = R_k$$

Que por ser de coeficientes constantes puede obtenerse ω_k^c ; aplicando después el método de coeficientes indeterminados permite determinar ω_k^p siendo la solución general

$$kY_k = \omega_k = \omega_k^c + \omega_k^p$$

o bien

$$Y_k = \frac{1}{k} (\omega_k^c + \omega_k^p)$$

Generalización: Ecuación en diferencias lineal, de orden r, exacta.

Teorema 5) La ecuación en diferencias lineal, de orden r:

$$\begin{aligned} n_k Y_{k+r} + m_k Y_{k+r-1} + l_k Y_{k+r-2} + \dots + c_k Y_{k+2} + \\ + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k = R_k \quad \dots \quad (32) \end{aligned}$$

Donde todos los coeficientes, así como Y_k son sucesiones reales:

a) Es exacta si, y sólo si, se satisface la condición
 $\forall k \geq 0$:

$$n_k + m_{k+1} + l_{k+2} + \dots + c_{k+r-2} + b_{k+r-1} + a_{k+r} = 0 \quad \dots \quad (33)$$

b) En cuyo caso, la ecuación (32) es equivalente a:

$$\begin{aligned} \Delta(\omega_k Y_{k+r-1} + \psi_k Y_{k+r-2} + \chi_k Y_{k+r-3} + \dots \\ \dots + \gamma_k Y_{k+2} + \beta_k Y_{k+1} + \alpha_k Y_k) = R_k \quad \dots \quad (34) \end{aligned}$$

c) En función de los coeficientes de (32), la ecuación (34)

resulta:

$$\Delta \left[n_{k-1} Y_{k+r-1} + (n_{k-2} + m_{k-1}) Y_{k+r-2} + \right. \\ \left. + (n_{k-3} + m_{k-2} + l_{k-1}) Y_{k+r-3} + \dots - \right. \\ \left. \dots - (c_k + b_{k+1} + a_{k+2}) Y_{k+2} - (b_k + a_{k+1}) Y_{k+1} - a_k Y_k \right] = R_k \dots (35)$$

Demostración: Si se desarrolla el primer miembro de (34), teniendo en cuenta la linealidad de Δ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\omega_k Y_{k+r-1}) &= \omega_{k+1} Y_{k+r} - \omega_k Y_{k+r-1} \\ \Delta(\psi_k Y_{k+r-2}) &= \psi_{k+1} Y_{k+r-1} - \psi_k Y_{k+r-2} \\ \Delta(x_k Y_{k+r-3}) &= x_{k+1} Y_{k+r-2} - x_k Y_{k+r-3} \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \Delta(\gamma_k Y_{k+2}) &= \gamma_{k+1} Y_{k+3} - \gamma_k Y_{k+2} \\ \Delta(\beta_k Y_{k+1}) &= \beta_{k+1} Y_{k+2} - \beta_k Y_{k+1} \\ \Delta(\alpha_k Y_k) &= \alpha_{k+1} Y_{k+1} - \alpha_k Y_k \end{aligned} \right\} \dots (36)$$

Sumando ordenadamente miembro a miembro:

$$\begin{aligned} \Delta \left[\omega_k Y_{k+r-1} + \psi_k Y_{k+r-2} + \chi_k Y_{k+r-3} + \dots \right. \\ \left. \dots + \gamma_k Y_{k+2} + \beta_k Y_{k+1} + \alpha_k Y_k \right] = \omega_{k+1} Y_{k+r} + \\ + (\psi_{k+1} - \omega_k) Y_{k+r-1} + (\chi_{k+1} - \psi_k) Y_{k+r-2} + \dots \\ \dots + (\beta_{k+1} - \gamma_k) Y_{k+2} + (\alpha_{k+1} - \beta_k) Y_{k+1} - \alpha_k Y_k \dots \quad (37) \end{aligned}$$

Al comparar coeficientes entre (32) y (37):

$$\left. \begin{aligned} n_k &= \omega_{k+1} \\ m_k &= \psi_{k+1} - \omega_k \\ l_k &= \chi_{k+1} - \psi_k \\ \dots &\quad \dots \quad \dots \\ c_k &= \beta_{k+1} - \gamma_k \\ b_k &= \alpha_{k+1} - \beta_k \\ a_k &= -\alpha_k \end{aligned} \right\} \dots \quad (38)$$

El sistema (37) es equivalente a:

$$\left. \begin{aligned}
 n_k &= \omega_{k+1} \\
 m_{k+1} &= \psi_{k+2} - \omega_{k+1} \\
 l_{k+2} &= x_{k+3} - \psi_{k+2} \\
 \dots &\quad \dots \quad \dots \\
 c_{k+r-2} &= \beta_{k+r-1} - \gamma_{k+r-2} \\
 b_{k+r-1} &= \alpha_{k+r} - \beta_{k+r-1} \\
 a_{k+r} &= -\alpha_{k+r}
 \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

Al sumar ordenadamente las ecuaciones del sistema (39) resulta:

$$n_k + m_{k+1} + l_{k+2} + \dots + c_{k+r-2} + b_{k+r-1} + a_{k+r} = 0$$

que, por ser la ecuación (33) demuestra la parte a) del teorema 5).

Recíprocamente, si se verifica (33), se obtiene al substituir en el sistema (36) los valores correspondientes de (39):

$$\Delta(\omega_k Y_{k+r-1}) = \omega_{k+1} Y_{k+r} - \omega_k Y_{k+r-1} = n_k Y_{k+r} - n_{k-1} Y_{k+r-1}$$

Análogamente:

$$\Delta(\psi_k Y_{k+r-2}) = (m_k + n_{k-1}) Y_{k+r-1} - (m_{k-1} + n_{k-2}) Y_{k+r-2}$$

$$\Delta(x_k y_{k+r-3}) = (l_k + m_{k-1} + n_{k-2}) y_{k+r-2} - (l_{k-1} + m_{k-2} + n_{k-3}) y_{k+r-3}$$

... ..

$$\Delta(\gamma_k y_{k+2}) = -(c_{k+1} + b_{k+2} + a_{k+3}) y_{k+3} + (c_k + b_{k+1} + a_{k+2}) y_{k+2}$$

$$\Delta(\beta_k y_{k+1}) = -(b_{k+1} + a_{k+2}) y_{k+2} + (b_k + a_{k+1}) y_{k+1}$$

$$\Delta(\alpha_k y_k) = -a_{k+1} y_{k+1} + a_k y_k$$

Si se suma ordenadamente, miembro a miembro; teniendo en cuenta la linealidad de Δ :

$$\begin{aligned} \Delta(\omega_k y_{k+r-1} + \psi_k y_{k+r-2} + x_k y_{k+r-3} + \dots + \\ + \gamma_k y_{k+2} + \beta_k y_{k+1} + \alpha_k y_k) = n_k y_{k+r} + m_k y_{k+r-1} + \\ + l_k y_{k+r-2} + \dots + c_k y_{k+2} + b_k y_{k+1} + a_k y_k \end{aligned}$$

con lo que quedan demostradas las igualdades (34) con la (32).

Por verificarse estas igualdades en ambos sentidos, ha quedado demostrada la doble implicación de los incisos a) y b).

La comprobación de la parte c) del teorema se obtiene a partir de la ecuación (35) y el sistema (39); esto es, de la primera ecuación del sistema (39):

$$\omega_k = n_{k-1}$$

de las dos primeras resulta:

$$\psi_{k+2} = n_k + m_{k+1} \rightarrow \psi_k = n_{k-2} + m_{k-1}$$

de las tres primeras:

$$n_k = \omega_{k+1}; m_{k+1} = \psi_{k+2} - \omega_{k+1}; l_{k+2} = \chi_{k+3} - \psi_{k+2}$$

Sumando ordenadamente miembro a miembro:

$$n_k + m_{k+1} + l_{k+2} = \chi_{k+3}$$

$$\rightarrow \chi_k = n_{k-3} + m_{k-2} + l_{k-1}$$

Si ahora se considera el sistema (39) de abajo hacia arriba; de la última ecuación:

$$\alpha_k = -a_k$$

de la última y la penúltima:

$$\beta_{k-1} = -(b_{k-1} + a_k) \rightarrow \beta_k = -(b_k + a_{k+1})$$

Tomando las tres últimas ecuaciones del sistema (39) se obtiene, de la suma de éstas:

$$a_k + b_{k-1} + c_{k-2} = -\gamma_{k-2} \rightarrow \gamma_k = -(c_k + b_{k+1} + a_{k+2})$$

Si se substituyen estos resultados en la ecuación (34) se comprueba la validez de la ecuación (35), y con ello el inciso c); lo que completa la demostración del teorema 5).

Observación: Es factible expresar los coeficientes de la ecuación (35) de modo diferente. Con base en la ecuación (33), resulta, por ejemplo que:

$$a_{k+r} = - (n_k + m_{k+1} + l_{k+2} + \dots + c_{k+r-2} + b_{k+r-1}) +$$

$$a_k = - (n_{k-r} + m_{k-r+1} + l_{k-r+2} + \dots + c_{k-2} + b_{k-1})$$

Por lo que, en vez del coeficiente a_k , puede escribirse el segundo miembro de la última ecuación.^k De manera análoga es posible substituir, mediante la ecuación (33), cualquier otro coeficiente o una combinación de éstos. Más adelante se ilustra la idea con ejemplos de la ecuación de tercer orden.

Teorema 6) a) Si la ecuación (32) no es exacta, resulta factible convertirla en exacta al multiplicarla por un factor de suma F_k , que resulta de resolver la ecuación adjunta de la (32) siguiente:

$$\begin{aligned} & a_{k+r} F_{k+r} + b_{k+r-1} F_{k+r-1} + c_{k+r-2} F_{k+r-2} + \dots \\ & + l_{k+2} F_{k+2} + m_{k+1} F_{k+1} + n_k F_k = 0 \quad \dots (40) \end{aligned}$$

b) La ecuación (34) multiplicada por F_k se reduce a:

$$\begin{aligned} \Delta \left[F_{k-1} n_{k-1} y_{k+r-1} + (F_{k-2} n_{k-2} + F_{k-1} m_{k-1}) y_{k+r-2} + \right. \\ \left. + (F_{k-3} n_{k-3} + F_{k-2} m_{k-2} + F_{k-1} l_{k-1}) y_{k+r-3} + \dots - \right. \\ \left. - (F_k c_k + F_{k+1} b_{k+1} + F_{k+2} a_{k+2}) y_{k+2} - \right. \\ \left. - (F_k b_k + F_{k+1} a_{k+1}) y_{k+1} - F_k a_k y_k \right] = F_k R_k \quad \dots (41) \end{aligned}$$

Observación: Dado que la solución de (40) constituye un espacio vectorial de dimensión r , resultan asimismo factores de suma las combinaciones lineales arbitrarias:

$$\sum_{i=1}^q C_i F_i \text{ donde } 1 \leq q \leq r$$

Demostración del teorema 6)

a) La ecuación (32) debe resultar exacta al multiplicarla por el factor de suma F_k ; de ahí que:

$$\begin{aligned} & F_k n_k Y_{k+r} + F_k m_k Y_{k+r-1} + F_k l_k Y_{k+r-2} + \dots \\ & \dots + F_k c_k Y_{k+2} + F_k b_k Y_{k+1} + F_k a_k Y_k = \\ & = \Delta(\omega_k Y_{k+r-1} + \psi_k Y_{k+r-2} + \chi_k Y_{k+r-3} + \dots \\ & \dots + \gamma_k Y_{k+2} + \beta_k Y_{k+1} + \alpha_k Y_k) = F_k R_k \dots (42) \end{aligned}$$

El desarrollo de (34) que ya se obtuvo anteriormente, permite igualar coeficientes (42); de lo que resulta el sistema:

$$\left. \begin{aligned} F_k n_k &= \omega_{k+1} \\ F_k m_k &= \psi_{k+1} - \omega_k \\ F_k l_k &= \chi_{k+1} - \psi_k \\ \dots & \dots \dots \\ F_k c_k &= \beta_{k+1} - \gamma_k \\ F_k b_k &= \alpha_{k+1} - \beta_k \\ F_k a_k &= -\alpha_k \end{aligned} \right\} \dots (43)$$

Con base en el sistema (43) se deduce el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned}
 F_k n_k &= \omega_{k+1} \\
 F_{k+1} m_{k+1} &= \psi_{k+2} - \omega_{k+1} \\
 F_{k+2} l_{k+2} &= \chi_{k+3} - \psi_{k+2} \\
 \dots &\dots \dots \\
 F_{k+r-2} c_{k+r-2} &= \beta_{k+r-1} - \gamma_{k+r-2} \\
 F_{k+r-1} b_{k+r-1} &= \alpha_{k+r} - \beta_{k+r-1} \\
 F_{k+r} a_{k+r} &= -\alpha_{k+r}
 \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

Al sumar ordenadamente miembro a miembro, resulta del sistema (44):

$$\begin{aligned}
 &a_{k+r} F_{k+r} + b_{k+r-1} F_{k+r-1} + c_{k+r-2} F_{k+r-2} + \dots \\
 &\dots + l_{k+2} F_{k+2} + m_{k+1} F_{k+1} + n_k F_k = 0
 \end{aligned}$$

que es precisamente la ecuación (40), por lo que queda completa la demostración del inciso a).

El resto de la demostración del teorema 6) se consigue mediante razonamientos análogos a los empleados en la demostración del teorema 5), esto es:

Tomando la primera de las ecuaciones del sistema (44) se obtiene:

$$\omega_k = F_{k-1} n_{k-1} \dots (45)$$

Al sumar la primera ecuación con la segunda del sistema (44) resulta:

$$\psi_{k+2} = F_k n_k + F_{k+1} m_{k+1}$$

ecuación que es equivalente a:

$$\psi_k = F_{k-2} n_{k-2} + F_{k-1} m_{k-1} \dots (46)$$

Si se suman ahora las tres primeras de las ecuaciones del sistema (44) se obtiene:

$$x_{k+3} = F_k n_k + F_{k+1} m_{k+1} + F_{k+2} l_{k+2}$$

o bien, la ecuación equivalente:

$$x_k = F_{k-3} n_{k-3} + F_{k-2} m_{k-2} + F_{k-1} l_{k-1} \dots (47)$$

Considerando ahora las ecuaciones del sistema (44) ahora de abajo hacia arriba. De la última se tiene:

$$\alpha_k = - F_k a_k \dots (48)$$

Si se suma la última del sistema (44) con la penúltima:

$$-\beta_{k+r-1} = F_{k+r-1} b_{k+r-1} + F_{k+r} a_{k+r}$$

de la que resulta:

$$\beta_k = - (F_k b_k + F_{k+1} a_{k+1}) \dots (49)$$

Enseguida se suman las tres últimas ecuaciones del sistema (44) para obtener:

$$-\gamma_{k+r-2} = F_{k+r-2} C_{k+r-2} + F_{k+r-1} b_{k+r-1} + F_{k+r} a_{k+r}$$

o su equivalente

$$\gamma_k = - (F_k C_k + F_{k+1} b_{k+1} + F_{k+2} a_{k+2}) \quad \dots \quad (50)$$

Al sustituir las ecuaciones (45), (46), (47), (48), (49), (50) en la ecuación (34), resulta la ecuación (41), con lo cual que da completa la demostración del inciso b) del teorema 6).

Observación: En las ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes, resulta que al tomar la ecuación adjunta de la ecuación adjunta, se obtiene nuevamente la ecuación en diferencias original; lo cual no sucede si la ecuación es de coeficientes variables.

Ejemplo 22) a) Comprobar que la siguiente ecuación en diferencias es exacta:

b) Reducir la ecuación en diferencias dada a una equivalente de segundo orden.

$$k(k+2)Y_{k+3} - (k+10)Y_{k+2} - (k-4)Y_{k+1} - k(k-6)Y_k = k$$

Solución:

a) De la ecuación (33)

$$\alpha_k + C_{k+1} + b_{k+2} + a_{k+3} = k(k+2) - (k+11) - (k-2) - (k+3)(k-3) =$$

$$= k^2 + 2k - k - 11 - k + 2 - k^2 + 9 = 0$$

→ la ecuación dada es exacta.

b) Del sistema (38), empezando con la última:

$$\alpha_k = -a_k = k(k-6)$$

$$\beta_k = \alpha_{k+1} - b_k = (k+1)(k-5) + k - 4$$

$$= k^2 - 3k - 9$$

$$\gamma_k = \beta_{k+1} - C_k = (k+1)^2 - 3(R-1) - 9 + k + 10$$

$$= k^2 + 2$$

al sustituir en la ecuación (34):

$$\Delta \left[(k^2+1)Y_{k+2} + (k^2 - 3k - 9)Y_{k+1} + k(k-6) \right] = k$$

$$\therefore (k^2 + 1)Y_{k+2} + (k^2 - 3k + 9)Y_{k+1} + k(k-6) = \frac{1}{2} k(k-1) + C$$

Ejemplo 23) a) Hallar un factor de suma que convierta en exacta la ecuación en diferencias.

$$(1-k)Y_{k+2} - 5Y_{k+2} - 2Y_{k+1} + kY_k = k^{-1}$$

b) Verificar que la ecuación en diferencias dada se convierte en exacta al multiplicarla por el factor de suma obtenido en a).

c) Reducir el orden de la ecuación en diferencias dada.

Solución:

a) Veamos si la ecuación dada es exacta:

De la ecuación (33)

$$d_k + c_{k+1} + b_{k+2} + a_{k+3} = (1-k) - 5 - 2 + (k+3) = -3 \neq 0$$

→ la ecuación dada no es exacta.

Al sustituir en la ecuación (40) se obtiene la ecuación adjunta:

$$(k+3)F_{k+3} - 2F_{k+2} - 5F_{k+1} + (1-k)F_k = 0$$

Una de cuyas soluciones es $F_k = k$; por lo cual, al multiplicar la ecuación dada por k se convierte en exacta:

$$k(1-k)Y_{k+3} - 5kY_{k+2} - 2kY_{k+1} + k^2Y_k = \frac{k}{k} = 1$$

b) Comprobación que es exacta:

$$\begin{aligned} d'_k + c'_{k+1} + b'_{k+2} + a'_{k+3} &= k - k^2 - 5k - 5 - 2k - 4 + \\ &+ k^2 + 6k + 9 = 0 \end{aligned}$$

c) De las ecuaciones (48), (49) y (50) resulta:

$$\alpha_k = -F_k \quad a_k = -k^2$$

$$\beta_k = - (F_k b_k + F_{k+1} a_{k+1}) = - \left[-2k + (k+1)^2 \right] =$$

$$= 2k - k^2 - 2k - 1 \rightarrow$$

$$\beta_k = - (k^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} \gamma_k &= - (F_k c_k + F_{k+1} b_{k+1} + F_{k+2} a_{k+2}) = \\ &= - \left[-5k - 2(k+1) + (k+2)^2 \right] = \\ &= 5k + 2k + 2 - k^2 - 4k - 4 = 3k - k^2 - 2 \rightarrow \\ \gamma_k &= (k-1)(2-k) \end{aligned}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (41) se obtiene:

$$\Delta \left[(k-1)(2-k)Y_{k+2} - (k^2+1)Y_{k+1} - k^2Y_k \right] = 1$$

$$\therefore (k-1)(2-k)Y_{k+2} - (k^2+1)Y_{k+1} - k^2Y_k = k + C$$

Observación: El coeficiente γ_k pudo haberse obtenido de la primera ecuación de sistema (43) $F_k n_k = \omega_{k+1}$ que en el caso de la ecuación de tercer orden corresponde a:

$$F_k d_k = \gamma_{k+1} = k(1-k) \rightarrow$$

$$\gamma_k = (k-1)(2-k)$$

Para la ecuación de tercer orden exacta, se demostró que, en general, debe satisfacerse la condición (33), que es:

$$d_k + c_{k+1} + b_{k+2} + a_{k+3} = 0 \quad \dots (51)$$

La ecuación (35) nos permite reducir el orden de la ecuación dada de alguno de los dos modos siguientes:

$$\begin{aligned} d_k Y_{k+3} + c_k Y_{k+2} + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k &= \\ = - \Delta \left[(c_k + b_{k+1} + a_{k+2})Y_{k+2} + (b_k + a_{k+1})Y_{k+1} + a_k Y_k \right] \end{aligned}$$

o bien:

$$d_k Y_{k+3} + C_k Y_{k+2} + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k =$$

$$= \Delta \left[d_{k-1} Y_{k+2} + (d_{k-2} + C_{k-1}) Y_{k+1} + (d_{k-3} + C_{k-2} + b_{k-1}) Y_k \right]$$

puesto que los coeficientes en el segundo miembro son los mismos, en virtud de la ecuación (51).

En caso de que la ecuación de tercer orden no sea exacta, siendo F_k un factor de suma, entonces se tiene:

$$F_k (d_k Y_{k+3} + C_k Y_{k+2} + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k) =$$

$$= -\Delta \left[(F_k C_k + F_{k+1} b_{k+1} + F_{k+2} a_{k+2}) Y_{k+2} + \right.$$

$$\left. + (F_k b_k + F_{k+1} a_{k+1}) Y_{k+1} + F_k a_k Y_k \right]$$

o bien:

$$F_k (d_k Y_{k+3} + C_k Y_{k+2} + b_k Y_{k+1} + a_k Y_k) =$$

$$= \Delta \left[F_{k-1} d_{k-1} Y_{k+2} + (F_{k-2} d_{k-2} + F_{k-1} C_{k-1}) Y_{k+1} + \right.$$

$$\left. + (F_{k-3} d_{k-3} + F_{k-2} C_{k-2} + F_{k-1} b_{k-1}) Y_k \right]$$

siendo la razón de las opciones la ecuación:

$$F_k d_k + F_{k+1} C_{k+1} + F_{k+2} b_{k+2} + F_{k+3} a_{k+3} = 0$$

Puesto que los valores de los coeficientes γ_k , β_k , α_k pueden calcularse de dos modos distintos, es obvio que debe escogerse la fórmula más apropiada en cada caso. Resumiendo, para ecuaciones exactas de tercer orden:

$$\begin{aligned}\alpha_k &= -a_k = d_{k-3} + C_{k-2} + b_{k-1} \\ \beta_k &= -(b_k + a_{k+1}) = d_{k-2} + C_{k-1} \\ \gamma_k &= -(C_k + b_{k+1} + a_{k+2}) = d_{k-1}\end{aligned}$$

Para ecuaciones con factor de suma F_k

$$\begin{aligned}\alpha_k &= -F_k a_k = F_{k-3} d_{k-3} + F_{k-2} C_{k-2} + F_{k-1} B_{k-1} \\ \beta_k &= -(F_k b_k + F_{k+1} a_{k+1}) = F_{k-2} d_{k-2} + F_{k-1} C_{k-1} \\ \gamma_k &= -(F_k C_k + F_{k+1} b_{k+1} + F_{k+2} a_{k+2}) = F_{k-1} d_{k-1}\end{aligned}$$

Generalizando las conclusiones anteriores, pueden establecerse las siguientes reglas para la ecuación (32) de coeficientes variables de orden p , y las ecuaciones reducidas (35) y (41):

- El número de sumandos en cada coeficiente crecerá en una unidad al ir de los extremos hacia el centro (véanse las ecuaciones (35) y (41)).
- Si el número de términos en (35) o (41) es par, la mitad izquierda de éstos serán positivos, en tanto que la mitad derecha serán negativos.
- Si los términos en (35) o (41) son en número impar, el término central puede ser obtenido de dos modos diferentes,

dependiendo del signo que desee asignársele en la fórmula. Para el caso de la ecuación de orden tres, se ilustra, en las últimas fórmulas enmarcadas, para β_k que se analizó anteriormente.

- d) Con fines de verificaciones, es posible calcular los coeficientes de cada término de modo que el número de sumandos de coeficientes sucesivos en (35) o (41) crezca en una unidad al ir en orden en un sentido; en tanto que, si se va en sentido opuesto, decrezcan en una unidad; de este modo, los coeficientes de un extremo tendrán un solo sumando; pero p sumando los coeficientes del extremo opuesto.

Ejemplo 24) Hallar la solución general de la ecuación:

$$24Y_{k+3} - 26Y_{k+2} + 9Y_{k+1} - Y_k = \frac{1}{7} 6^{-k}$$

Solución: de la ecuación (33)

$$d_k + c_{k+1} + b_{k+2} + a_{k+3} = 24 - 26 + 9 - 1 = 6 \neq 0$$

→ la ecuación dada no es exacta.

Se buscará un F_k mediante la ecuación (40):

$$-F_{k+3} + 9F_{k+2} - 26F_{k+1} + 24F_k = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$r^3 - 9r^2 + 26r - 24 = 0$$

$$(r-2)(r-3)(r-4) = 0$$

Siendo por lo tanto factores de suma

$$F_{k_1} = 2^k ; F_{k_2} = 3^k ; F_{k_3} = 4^k$$

Al observar que $R_k = \frac{1}{7} 6^{-k}$

escojamos $F_k = 3^k$; que al substituir en la ecuación dada resulta:

$$3^k (24Y_{k+3} - 26Y_{k+2} + 9Y_{k+1} - Y_k) = \frac{1}{7} 2^{-k}$$

que es exacta.

Al substituir en la ecuación (41):

$$\Delta \left[3^k (8Y_{k+2} - 6Y_{k+1} + Y_k) \right] = \frac{1}{7} 2^{-k}$$

$$\rightarrow 3^k (8Y_{k+2} - 6Y_{k+1} + Y_k) = \frac{1}{7} \Sigma 2^{-k} + C_1 =$$

$$= \frac{1}{7} \frac{2^{-k}}{2^{-1}-1} + C_1 = -\frac{2}{7} 2^{-k} + C_1$$

Al aplicar la ecuación (33)

$$C_k + b_{k+1} + a_{k+2} = 3^k (8-18+9) = -3^k \neq 0$$

Por lo que la ecuación reducida de segundo orden no es exacta.

Al aplicar la ecuación (26) se obtiene la ecuación adjunta

$$3^{k+2} F_{k+2} - 3^{k+1} 6F_{k+1} + 3^k 8F_k = 0$$

Al cancelar $3^k \neq 0 \rightarrow$

$$9F_{k+2} - 18F_{k+1} + 8F_k = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$9r^2 - 18r + 8 = (r - \frac{4}{3}) (r - \frac{2}{3}) = 0$$

$$\rightarrow F_{k_1} = (\frac{4}{3})^k ; F_{k_2} = (\frac{2}{3})^k$$

Si se toma $F_{k_2} = 2^k 3^{-k} \rightarrow$

$$2^k (8Y_{k+2} - 6Y_{k+1} + Y_k) = -\frac{2}{7} 3^{-k} + C_1 2^k 3^{-k}$$

que es exacta, por lo que es equivalente a, según la ecuación (27):

$$\Delta (2^{k-1} 2^3 Y_{k+1} - 2^k Y_k) = -\frac{2}{7} 3^{-k} + C_1 2^k 3^{-k}$$

al aplicar el operador inverso $\Delta^{-1} \rightarrow$

$$2^{k+2} Y_{k+1} - 2^k Y_k = -\frac{2}{7} \frac{3^{-k}}{3^{-1}-1} + C_1 \frac{(\frac{2}{3})^k}{\frac{2}{3}-1} + C_2$$

Si se multiplica por 2^{-k} resulta:

$$4Y_{k+1} - Y_k = \frac{3}{7} 6^{-k} + C_1' 3^{-k} + C_2 2^{-k}$$

Por ser ecuación de primer orden, se ha visto que $F_k = (Y_k^C)^{-1}$

$$Y_k^C = C_4 \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{4} = C_4 4^{1-k} \rightarrow$$

$$F_k = 4^{k-1} \rightarrow$$

$$4^k Y_{k+1} - 4^{k-1} Y_k = \frac{3}{28} \left(\frac{2}{3}\right)^k + C_1'' \left(\frac{4}{3}\right)^k + C_2'' 2^k$$

$$\Delta(4^{k-1} Y_k) = \frac{3}{28} \left(\frac{2}{3}\right)^k + C_1'' \left(\frac{4}{3}\right)^k + C_2'' 2^k$$

Aplicando el operador inverso Δ^{-1} se obtiene:

$$4^{k-1} Y_k = \frac{3}{28} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{\frac{2}{3} - 1} + C_1''' \left(\frac{4}{3}\right)^k + C_2''' 2^k + C_3$$

$$\therefore Y_k = -\frac{9}{7} 6^{-k} + A 3^{-k} + B 2^{-k} + C 4^{-k}$$

Donde A, B y C son constantes arbitrarias.

Observación interesante. Al resolver la ecuación en diferencias dada:

$$24Y_{k+3} - 26Y_{k+2} + 9Y_{k+1} - Y_k = \frac{1}{7} 6^{-k}$$

se han obtenido en forma indirecta las raíces de la ecuación cúbica característica:

$$24r^3 - 26r^2 + 9r - 1 = 0$$

Pues la solución general que se obtuvo nos dice que:

$$Y_k^c = A 3^{-k} + B 2^{-k} + C 4^{-k}$$

Por lo que la ecuación característica se factoriza del si

guiente modo:

$$(r - \frac{1}{3}) (r - \frac{1}{2}) (r - \frac{1}{4}) = 0$$

De ahí que las raíces de la ecuación cúbica característica son:

$$r_1 = \frac{1}{3} ; \quad r_2 = \frac{1}{2} ; \quad r_3 = \frac{1}{4}$$

Que resultan ser recíprocas de las raíces de la ecuación adjunta

$$r^3 - 9r^2 + 26r - 24 = 0$$

Por lo que: Si se cambia el orden de los coeficientes, las raíces de la nueva ecuación algebraica, son precisamente recíprocas de la ecuación algebraica original; en efecto:

Si $r \neq 0$ es raíz de:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

resulta que $\frac{1}{r}$ es raíz de:

$$a_0 r^n + a_1 r + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

Demostración: Puesto que $\frac{1}{r}$ es raíz $\rightarrow$

$$a_0 \frac{1}{r^n} + a_1 \frac{1}{r^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{1}{r} + a_n = 0$$

Al multiplicar por $r^n \neq 0 \rightarrow$

$$a_0 + a_1 r + \dots + a_{n-1} r^{n-1} + a_n r^n = 0$$

ecuación, que por hipótesis admite a r como raíz.

Volviendo al ejemplo 24), se observa que la solución particular

$$Y_k^p = -\frac{9}{7} 6^{-k}$$

se obtuvo sin necesidad de aplicar algún método adicional especial.

Es asimismo interesante observar de la ecuación (33) que si la ecuación en diferencias es de coeficientes constantes, ésta será exacta si, y sólo si, la suma algebraica de todos sus coeficientes es nula; en cuyo caso una de las soluciones de la ecuación homogénea es

$$Y_k^{C_1} = C = \text{constante}$$

Ejemplo 25) Hallar la solución general de:

$$Y_{k+3} - 7Y_{k+1} + 6Y_k = 0$$

Solución: de la ecuación (33) o (51)

$$d_k + C_{k+1} + b_{k+2} + a_{k+3} = 1 + 0 + 0 - 7 + 6 = 0$$

→ la ecuación dada es exacta.

Al aplicar la fórmula (35), resulta que la ecuación dada es equivalente a:

$$\Delta(Y_{k+2} + Y_{k+1} - 6Y_k) = 0$$

$$\rightarrow Y_{k+2} + Y_{k+1} - 6Y_k = C$$

ecuación característica:

$$r^2 + r - 6 = 0 = (r - 2)(r + 3)$$

$$\rightarrow Y_k^c = C_1 2^k + C_2 (-3)^k$$

$$Y_k^p = C_3 = -\frac{C}{4}$$

por lo cual, la solución general es:

$$Y_k = C_1 2^k + C_2 (-3)^k + C_3$$

Se comprueba lo afirmado en la última observación.

Algunas ecuaciones en diferencias NO-LINEALES que pueden resolverse como ecuaciones exactas.

Ejemplo 26) $Y_{k+2} Y_k = Y_{k+1}^2$

Solución: La ecuación dada es equivalente a:

$$\frac{Y_{k+2}}{Y_{k+1}} - \frac{Y_{k+1}}{Y_k} = 0 \rightarrow$$

$$\Delta \left[\frac{Y_{k+1}}{Y_k} \right] = 0$$

Al aplicar el operador inverso

$$\frac{Y_{k+1}}{Y_k} = C_1 \rightarrow Y_{k+1} = C_1 Y_k ; \text{ o bien:}$$

$$Y_{k+1} - C_1 Y_k = 0$$

que como ya se vio, admite el factor de suma $F_k = C_1^{-k} \rightarrow$

$$C_1^{-k} Y_{k+1} - C_1^{-(k+1)} Y_k = 0 \rightarrow$$

$$\Delta (C_1^{-(k-1)} Y_k) = 0 \rightarrow C_1^{-(k-1)} Y_k = C_2$$

$$\therefore Y_k = C_2 C_1^{k-1} = C_3 C_1^k$$

Ejemplo 27)

$$Y_{k+2} Y_k^2 = Y_{k+1}^3$$

Solución: tomando logaritmos: .

$$\ln Y_{k+2} + 2 \ln Y_k - 3 \ln Y_{k+1} = 0$$

si se hace: $u_k = \ln Y_k \rightarrow$

$$u_{k+2} - 3 u_{k+1} + 2 u_k = 0$$

Por ser ecuación de coeficientes constantes, siendo la suma de éstos nula, resulta que la ecuación es exacta; además

$$Y_k^{C_1} = C_1$$

La ecuación característica es

$$(r - 1)(r - 2) = 0$$

$$\rightarrow u_k = C_1 + C_2 2^k$$

al restituir a u_k su valor:

$$\ln Y_k = C_1 + C_2 2^k$$

o bien:

$$Y_k = e^{C_1 + C_2 2^k}$$

Ejemplo 28)

$$Y_{k+1} + k Y_k Y_{k+1} - Y_k = 0$$

Solución: si se divide la ecuación entre $Y_k Y_{k+1}$:

$$\frac{1}{Y_k} + k - \frac{1}{Y_{k+1}} = 0$$

o bien:

$$\frac{1}{Y_{k+1}} - \frac{1}{Y_k} = k \rightarrow$$

$$\Delta \left[\frac{1}{Y_k} \right] = k$$

al aplicar el operador inverso resulta:

$$\frac{1}{Y_k} = \frac{k(k-1)}{2} + C_1 = \frac{k(k-1) + C}{2}$$

$$\therefore Y_k = \frac{2}{k(k-1) + C}$$

Ejemplo 29)

$$(Y_{k+1} - Y_k)(Y_{k+1} + Y_k + 2k) + 2(Y_k - k) = 0$$

Solución: la ecuación dada puede escribirse en la siguiente forma:

$$\left[Y_{k+1}^2 + 2kY_{k+1} - k(k+1) \right] - \left[Y_k^2 + 2(k-1)Y_k - k(k-1) \right] = 0$$

que es exacta; esto es:

$$\Delta \left[Y_k^2 + 2(k-1)Y_k - k(k-1) \right] = 0$$

al aplicar el operador inverso:

$$Y_k^2 + 2(k-1)Y_k - k(k-1) - C = 0$$

si se resuelve como ecuación algebraica de segundo grado:

$$Y_k = \frac{-2(k-1) \pm \sqrt{4(k-1)^2 + 4[k(k-1) + C]}}{2}$$

o bien:

$$y_{k_1} = (1-k) + \sqrt{2k^2 - 3k + 1 + C}$$

$$y_{k_2} = (1-k) - \sqrt{2k^2 - 3k + 1 + C}$$

Factores de suma mediante inspección

En ocasiones suelen presentarse casos de ecuaciones en diferencias no exactas en las que es factible descubrir un factor de suma, sin necesidad de efectuar cálculo alguno. En seguida se muestran algunos ejemplos.

Ejemplo 30)

$$Y_{k+1} - kY_k = R_k$$

$Y_{k+1} - kY_k$ no puede expresarse como una diferencia, sin embargo, si la ecuación en diferencias se divide entre $k!$:

$$F_s = \frac{1}{k!} \rightarrow \frac{Y_{k+1}}{k!} - \frac{Y_k}{(k-1)!} = \frac{R_k}{k!}$$

Resulta que la ecuación se convierte en exacta; esto es:

$$\Delta \frac{Y_k}{(k-1)!} = \frac{R_k}{k!}$$

al aplicar el operador inverso.

$$\frac{Y_k}{(k-1)!} = \Sigma \frac{R_k}{k!} + C$$

$$Y_k = (k-1)! \Sigma \frac{R_k}{k!} + (k-1)! C$$

Ejemplo 31)

$$Y_{k+1} - aY_k = R_k ; \quad a = \text{número real (constante)} \\ a \neq 0$$

Solución:

Si la ecuación en diferencias se multiplica por:

$$F_s = a^{-k} \rightarrow a^{-k} Y_{k+1} - a^{-(k-1)} Y_k = a^{-k} R_k$$

$$\Delta a^{-(k-1)} Y_k = a^{-k} R_k$$

$$a^{-(k-1)} Y_k = \sum a^{-k} R_k + C_1$$

$$Y_k = a^{k-1} \sum a^{-k} R_k + a^k C$$

$$\text{donde } C = \frac{C_1}{a}$$

Ejemplo 32)

$$Y_{k+1} - (k-a)Y_k = R_k ; k > a = \text{entero}$$

Solución:

$$F_s = \frac{1}{(k-a)!} \rightarrow \frac{Y_{k+1}}{(k-a)!} - \frac{Y_k}{(k-a-1)!} = \frac{R_k}{(k-a)!}$$

$$\Delta \frac{Y_k}{(k-a-1)!} = \frac{R_k}{(k-a)!}$$

$$\therefore Y_k = (k-a-1)! \sum \frac{R_k}{(k-a)!} + (k-a-1)! C$$

Ejemplo 33)

$$Y_{k+1} - \frac{(k-a)}{b} Y_k = R_k ; k > a = \text{entero}$$

$$b = \text{constante}, b \neq 0$$

solución:

$$F_s = \frac{b^k}{(k-a)!} \rightarrow \frac{b^k}{(k-a)!} Y_{k+1} - \frac{b^{k-1}}{(k-a-1)!} Y_k = \frac{b^k R_k}{(k-a)!}$$

$$\Delta \frac{b^{k-1}}{(k-a-1)!} Y_k = \frac{b^k R_k}{(k-a)!}$$



$$Y_k = \frac{(k-a-1)!}{b^{k-1}} \sum \frac{b^k R_k}{(k-a)!} + \frac{(k-a-1)!}{b^k} C$$

Ejemplo 34)

$$Y_{k+1} - \frac{b}{k-a} Y_k = R_k ; k > a = \text{entero}$$

$b = \text{constante}, b \neq 0$

Solución:

$$F_s = \frac{(k-a)!}{b^k} \rightarrow \frac{(k-a)!}{b^k} Y_{k+1} - \frac{(k-a-1)!}{b^{k-1}} Y_k = \frac{(k-a)!}{b^k} R_k$$

$$\Delta \frac{(k-a-1)!}{b^{k-1}} Y_k = \frac{(k-a)!}{b^k} R_k$$

$$Y_k = \frac{b^{k-1}}{(k-a-1)!} \sum \frac{(k-a)!}{b^k} R_k + \frac{b^k}{(k-a-1)!} C$$

Ejemplo 35)

$$\frac{Y_{k+1}^m}{Y_k^n} = R_k; m, n = \text{números racionales (constante)}$$

Solución:

Si se toman logaritmos naturales (o en cualquier base):

$$m \ln Y_{k+1} - n \ln Y_k = \ln R_k$$

mediante el cambio de variables.

$$M_k = \ln Y_k ; \frac{1}{m} \ln R_k = Q_k$$

$$M_{k+1} - \frac{n}{m} M_k = Q_k$$

Ecuación en diferencias que se resuelve como se sugiere en el ejemplo 31).

Ejemplo 36)

$$Y_{k+1} - \frac{a}{(k-1)} Y_k = \frac{a^k}{(k+3)!} \quad \text{--- (52)}$$

Solución: $F_s = \frac{(k-1)!}{a^k} \rightarrow$

$$\frac{(k-1)!}{a^k} Y_{k+1} - \frac{(k-2)!}{a^{k-1}} Y_k = \frac{a^k (k-1)!}{a^k (k+3)!} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\Delta \frac{(k-2)!}{a^{k-1}} Y_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \quad \text{--- (53)}$$

Dado que:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right]$$

pero:

$$\frac{1}{6} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right] = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right]$$

$$= -\frac{1}{6} \Delta \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right]$$

$$- \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right] = \frac{1}{2} \Delta \frac{1}{k+1}$$

al substituir en (53)

$$\Delta \frac{(k-2)!}{a^{k-1}} Y_k = -\frac{1}{6} \Delta \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right] + \frac{3}{6} \Delta \frac{1}{k+1}$$

$$= - \frac{1}{6} \Delta \left[\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right]$$

$$= \frac{1}{6} \Delta \left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+1} \right]$$

$$= \frac{1}{6} \Delta \left[\Delta \frac{1}{k} - \Delta \frac{1}{k+1} \right]$$

$$\Delta \frac{(k-2)!}{a^{k-1}} Y_k = - \frac{1}{6} \Delta^2 \frac{1}{k}$$

al aplicar el operador inverso:

$$\frac{(k-2)!}{a^{k-1}} Y_k = - \frac{1}{6} \Delta \frac{1}{k} + C_k$$

$$\therefore Y_k = \frac{a^{k-1}}{6(k-2)!} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \hat{C}_k \right]$$

R E F E R E N C I A S

=====

Relativas a ecuaciones en diferencias:

Bender, Carl M. and Steven A. Orszag. Advanced Mathematical
Methods for Scientists and Engineers; Editorial Mc. Graw
Hill International Book Co. 1978.

Esta obra se termino de imprimir el 20 de abril de 1993 en los talleres Germar, tel. 5 97 96 76. La supervisión de la obra estuvo a cargo de la Lic. Guadalupe Castro D. El tiraje fue de 100 ejemplares.

F/DEPFI/D-77/1988/EJ.5



717840