

ECUACIONES CONSTITUTIVAS DEL CONCRETO

PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO

RAUL ALAMO

1ª EDICION: 1977

4ª REIMPRESION: MARZO 1986



DEPFI

F-DEPFI

D-46

1986

Ej. 2

1.

ECUACIONES CONSTITUTIVAS DEL CONCRETO

Porfirio Ballesteros¹

Raúl Alamo²

RESUMEN.

Se propone una relación constitutiva analítica para el concreto bajo condiciones generales de esfuerzo multiaxial. En el desarrollo de esta relación se supone al concreto como material elástico no lineal y elastoplástico. El objetivo final del estudio es la obtención de las funciones de falla, de carga e inicial discontinua del concreto, así como de las relaciones incrementales esfuerzo-deformación.

INTRODUCCION.

Dada la complejidad de las ecuaciones que representan el comportamiento de un elemento de concreto, fue necesario antiguamente realizar una serie de simplificaciones, ya que con ellas se lograba una visualización simple del problema; pero generalmente poco precisa. Con la evolución de soluciones por métodos numéricos mediante el auxilio de computadoras, es ahora posible resolver el problema general sin necesidad de esas simplificaciones. Sin embargo, el planteamiento de las ecuaciones constitutivas no se ha desarrollado para materiales anisotrópicos, como es el caso del concreto.

En este trabajo se muestran los fundamentos para las ecuaciones constitutivas del concreto en situaciones de carga multiaxial.

1 Sección de Ingeniería Mecánica, DEPTI, UNAM

2 Jefe del Depto. de Investigación Industrial del IMCYC

COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO BAJO CARGA UNIAXIAL

Se han idealizado las relaciones esfuerzo-deformación del concreto bajo carga axial en diferentes modelos (Fig 1); elástico-lineal; elástico no-lineal; elástico-lineal-frágil; elástico-lineal-plástico-perfecto. Todos ellos han sido aplicables para diferentes problemas. En este trabajo se consideran al modelo elástico no-lineal y al plástico-perfecto como una buena representación del comportamiento axial.

Al analizar una curva típica esfuerzo-deformación del concreto bajo carga axial, se pueden localizar varios puntos importantes (Fig 2). El esfuerzo último f'_c , máximo en la curva, se define como el esfuerzo de ruptura de cilindros estándar de concreto a los 28 días de elaborados, probados según la especificación correspondiente del ASTM.

Este punto nos define otros dos importantes; uno, el límite elástico del material, punto A, abajo del cual, al existir una descarga del concreto, éste recupera sus dimensiones originales. El punto A, de la Fig 2, es variable, y los autores de la literatura alusiva lo han ubicado entre $0.3 f'_c$ y $0.6 f'_c$. Y segundo, al rebasar el esfuerzo de compresión del punto A, se entra a la zona plástica del material, misma que está limitada en la parte superior en el punto B. Al descargar el elemento en esta zona, el concreto no recupera sus dimensiones originales sino que bajo esfuerzo nulo tendrá una deformación permanente. En la Fig 2 se puede observar que la deformación del punto B está compuesta por una deformación elástica y por una permanente. Este punto se ha ubicado entre $0.75 f'_c$ y $0.9 f'_c$. Más allá del punto B, el material se deforma casi sin incremento de carga alcanzando el punto de esfuerzo último, C. Posteriormente se presenta la falla y con ello la descarga. Esta parte de la curva depende de características propias de la máquina de prueba. El punto, E, de falla, se encuentra a una deformación unitaria que varía entre 0.003 y 0.004.

En la Fig 3 se escriben una serie de ecuaciones que representan la relación esfuerzo-deformación. Hay una infinidad de ecuaciones de diversos investigadores, y la elección de la más favorable depende del uso que se le piense dar.

COMPORTAMIENTO BAJO CARGA MULTIAXIAL.

Para entrar ahora a sollicitaciones multiaxiales, es indispensable recordar varias propiedades importantes del concreto:

1. La resistencia a tensión del concreto se valúa proporcionalmente a una potencia de la resistencia a compresión.

Esto es:

$$f'_t = k(f'_c)^n \text{ generalmente } n = 1/2$$

2. El concreto es un material frágil
3. La presión hidrostática por sí sola no ocasiona la falla del material.

Así como en el caso axial es importante definir varias fronteras de cambio del comportamiento, sin embargo en el caso biaxial, no serán puntos sino curvas; y en el triaxial, superficies.

Superficies de falla son aquellas definidas en el espacio de esfuerzos, tal que, una vez que el estado de esfuerzos alcanza esta superficie, el material falla y no puede resistir ninguna carga posterior.

Superficie de discontinuidad inicial es aquella que sólo se puede alcanzar por acción multiaxial elástica. Es decir, si se carga y descarga sin rebasar esta superficie, no deberán quedar deformaciones residuales después de la descarga.

Superficie de carga es aquella que se alcanza una vez que se ha rebasado la superficie de discontinuidad inicial y aún no se alcanza la superficie de falla. En otras palabras, son las superficies localizadas dentro de la zona plástica del material. Si se tiene una carga que desarrolle esfuerzos tales que alcancen alguna de estas superficies, al descargar se presentarán deformaciones residual

les permanentes. La Fig 4 nos muestra graficado en el plano de esfuerzos σ_1, σ_2 (caso biaxial) las curvas que los relacionan, las curvas de falla y las de discontinuidad inicial.

La Fig 4a muestra los resultados experimentales obtenidos por Kupfer en 1969, y la Fig 4b, los obtenidos por Ville en 1968. Se ha pensado que la diferencia en resultados depende de la forma del espécimen, hecho que está en proceso de investigación.

En el mismo estado de esfuerzo biaxial σ_1, σ_2 para concreto reforzado, se observa un caso particular en la Fig 5 en el que $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$ y $f_y = 2220 \text{ kg/cm}^2$. Si el acero de refuerzo sigue las direcciones principales es aceptable utilizar como relación la elipse de Von Mises. En la zona de compresiones el concreto también cumple con esta relación como se demostrará más adelante. Pero el problema es en la zona de tensión-compresión, en la que el comportamiento se ha supuesto lineal, sin embargo se realizan otras investigaciones al respecto.

En el caso de carga triaxial para concreto, Fig 6, es importante, dada la isotropía del material, la determinación de la intersección de la superficie de falla con los planos coordenados. Esto se logra determinando el punto en el que la bisectriz de cada uno de los planos coordenados es tangente a la superficie de falla, por ejemplo el punto TB_{12} es la intersección entre la bisectriz al plano $\sigma_1 \sigma_2$ y la superficie de falla $f(\sigma_{ij}) = 0$

Para comprender mejor el problema, y además ampliándolo al caso de concreto reforzado, se considera en la Fig 7 el plano formado por la línea de esfuerzos iguales $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ y uno de los puntos de intersección de la bisectriz de un plano y la superficie de falla, en este caso TB_{23} .

En esta figura se puede observar la intersección de la superficie de falla y la de discontinuidad inicial con el plano π y con los planos coordenados (TB_{2-3}). Es posible observar que existen zonas en que uno o dos esfuerzos son de compresión y el otro de tensión.

Son estas zonas las que necesitan un estudio más a fondo para determinar su trayectoria. En la zona de tensión, suponiendo que el acero sigue las direcciones de los esfuerzos principales, las superficies de falla y de discontinuidad inicial son las rectas generatrices del cilindro de Von Mises. Es importante también en la zona de compresión obtener los esfuerzos σ_a en el punto de tangencia con la bisectriz, así como la superficie asintótica a la superficie de falla limitando de esta manera el crecimiento del esfuerzo triaxial. Estos valores se encuentran en estado de experimentación.

Cada una de las curvas o superficies anteriores deben estar representadas por una ecuación.

A continuación se exponen las deducciones que sobre ellas se han desarrollado.

COMPORTAMIENTO TRIAXIAL ELASTICO

Las funciones que representan estas superficies deben estar basadas en los principios generales de las ecuaciones constitutivas que se pueden enunciar en la siguiente forma.

1. Principio de objetividad o indiferencia del material. La respuesta del material es independiente del sistema coordenado o del observador.
2. Principio de acción local. El esfuerzo en un punto se debe únicamente al movimiento de las partículas en una vecindad o en torno del punto de consideración.
3. Principio de determinismo. El esfuerzo en un medio lo determina su historia de deformación.

Con base en estos principios, y considerando la reducción de las ecuaciones constitutivas para materiales simples, caso de materiaa

les elástico-lineales y no-lineales, el esfuerzo se reduce a una función del gradiente del esfuerzo de deformación. Para deformaciones pequeñas, el esfuerzo es también función del gradiente de desplazamientos o tensor de deformaciones pequeñas. Por analogía con los fluidos Reiner-Rivlin, se demuestra que la ecuación constitutiva se reduce a la forma.

$$\underline{\sigma}(\underline{\epsilon}) = \phi_0 \underline{I} + \phi_1 \underline{\epsilon} + \phi_2 \underline{\epsilon}^2 \dots \quad (1)$$

o en notación tensorial:

$$\sigma_{ij} = \phi_0 \delta_{ij} + \phi_1 \epsilon_{ij} + \phi_2 [\epsilon_{ij}] [\epsilon_{ji}]$$

Puede decirse que la ec (1) es consecuencia del teorema de Carley-Hamilton. En la ec (1), $\underline{I}$ es la matriz identidad, ϕ_0 , ϕ_1 y ϕ_2 son funciones de los invariantes del tensor de deformaciones $\underline{\epsilon}$.

Dado que en el caso lineal las direcciones principales de los esfuerzos $\underline{\sigma}$ coinciden con las de las deformaciones $\underline{\epsilon}$, se puede escribir la ec (1), diagonalizándola:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \phi_0 + \phi_1 \epsilon_1 + \phi_2 \epsilon_1^2 \\ \sigma_2 &= \phi_0 + \phi_1 \epsilon_2 + \phi_2 \epsilon_2^2 \dots\dots\dots (2) \\ \sigma_3 &= \phi_0 + \phi_1 \epsilon_3 + \phi_2 \epsilon_3^2 \end{aligned}$$

y expresándola matricialmente

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon_1 & \epsilon_1^2 \\ 1 & \epsilon_2 & \epsilon_2^2 \\ 1 & \epsilon_3 & \epsilon_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

donde ϕ_0 , ϕ_1 y ϕ_2 se pueden determinar de pruebas triaxiales.

COMPORTAMIENTO ELASTO-PLASTICO

Función de falla y función de discontinuidad inicial

Si se supone que el criterio para la falla del concreto depende sólo de los esfuerzos distorsionantes y no de la presión hidrostática, es posible utilizar dos funciones diferentes pero similares para simular la falla del concreto en la región de compresión y en la región de compresión-tensión.

La falla será una función del primer invariante de esfuerzos I_1 y J_2 , segundo invariante del tensor de esfuerzos distorsionantes S_{ij} . Las ecuaciones propuestas son las siguientes: [16]

Región de compresión

$$f_u(\sigma_{ij}) = \frac{K^2}{3} J_2 - \frac{K^2}{36} I_1^2 + \frac{1}{12} I_1^2 + \frac{1}{3} A_u I_1 = \tau_u^2 \quad (4)$$

y para la región de compresión-tensión

$$f_u(\sigma_{ij}) = \frac{K^2}{3} J_2 - \frac{K^2}{36} I_1^2 - \frac{1}{12} I_1^2 + \frac{1}{3} A_u I_1 = \tau_u^2 \quad (5)$$

Al escoger a la función dependiendo únicamente de I_1 y J_2 , se logra una función simple aunque si fuera incluido el tercer invariante de los esfuerzos distorsionantes, J_3 , mejoraría considerablemente la correlación entre las fórmulas teóricas y los datos experimentales. Como las ecs (4) y (5) son similares se ha creído conveniente utilizar una sola ecuación que es:

$$f_u(\sigma_{ij}) = \frac{K^2}{3} J_2 - \frac{K^2}{36} I_1^2 \pm \frac{1}{12} I_1^2 + \frac{1}{3} A_u I_1 = \tau_u^2 \quad (6)$$

Además, podemos suponer que la ecuación que define el estado inicial discontinuo tiene la misma forma que la superficie de falla, por lo que se puede escribir:

$$f_0(\sigma_{ij}) = \frac{K^2}{3} J_2 - \frac{K^2}{36} I_1^2 \pm \frac{1}{12} I_1^2 + \frac{1}{3} A_0 I_1 = \tau_0^2 \quad (7)$$

Los valores de las constantes constitutivas A_u , A_0 , τ_u y τ_0 pueden ser determinados para las regiones de tensión-compresión y la de compresión mediante pruebas de laboratorio.

Dado que el esfuerzo normal octaedral, σ_{oct} es igual a $I_{1/3}$ y el cortante octaedral es igual a $\sqrt{\frac{2}{3}} J_2$, la ecuación (6) podrá representar una elipse, parábola o hipérbola en el espacio de esfuerzos octaedrales, dependiendo de los valores de K^2 .

$$\text{Esto es, si } \sigma_{oct} = \frac{I_1}{3} \quad \tau_{oct}^2 = \frac{2}{3} J_2$$

Substituyendo en la ec (3) se tiene:

$$\frac{K^2}{2} \tau_{oct}^2 - \frac{K^2}{4} \sigma_{oct}^2 \pm \frac{3}{4} \sigma_{oct}^2 + A_0 \sigma_{oct} = \tau^2 \quad (8)$$

$$\frac{K^2}{2} \tau_{oct}^2 - \left(\frac{K^2}{4} \pm \frac{3}{4} \right) \sigma_{oct}^2 + A_0 \sigma_{oct} = \tau_0^2 \quad (9)$$

ecuación de segundo grado que representará diferentes curvas dependiendo de los valores de los coeficientes de (8) y (9), lo que se puede expresar como:

$$\text{Si, } -4\left(\frac{K^2}{4} + \frac{3}{4}\right) \frac{K^2}{2} \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ \geq 0 \end{cases} \quad \text{es una } \begin{matrix} \text{elipse} \\ \text{parábola} \\ \text{hipérbola} \end{matrix} \quad (10)$$

Esto implica para la zona de compresión, que si

$$K^2 \begin{cases} < 3 \\ = 3 \\ > 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{elipse} \\ \text{parábola} \\ \text{hipérbola} \end{matrix}$$

Y dado que la presión hidrostática por sí sola no puede causar la discontinuidad o la falla del concreto, la ecuación anterior no

puede ser una elipse y por ello, K^2 será mayor o igual a 3. Estudios experimentales (17) nos muestran que la función que mejor describe la falla es la parabólica, por lo que se considera $K^2 = 3$.

En la región tensión-compresión para asegurar que la función de falla intersecte únicamente en un punto a la función de la región de compresiones, es indispensable que K^2 de la ec (5), no se encuentre entre los valores 0 y 3, esto quiere decir que la ec (5) será necesariamente una función parabólica o hiperbólica. Además, debido a que es indispensable asegurar la convexidad de la curva, se deberán cumplir las condiciones

$$K^2 \leq 3 + \frac{A_u^2}{\tau_u^2}$$



Para satisfacer ambas condiciones, K^2 debe ser igual a 3 siendo idéntica a la ecuación en la región de compresión. Estos resultados han mostrado buena correlación con los datos experimentales. Para la ecuación de las curvas de discontinuidad inicial se aplican los mismos argumentos.

Como se mencionó, las constantes constitutivas del material A_0 , τ_0^2 , A_u y τ_u^2 , se pueden obtener en función de f'_c , f'_t , f'_{bc} y f_{bc}^r ; o sea f'_c es la resistencia a compresión axial; f'_t , resistencia a tensión axial; f'_{bc} , resistencia a compresiones iguales en dos direcciones; y f_c , f_t y f_{bc} son los valores de esas pruebas bajo condiciones de discontinuidad inicial. Todos estos valores son obtenidos fácilmente en pruebas simples de laboratorio.

En la zona de compresión, al substituir en las ecuaciones que representan la falla y el estado de discontinuidad inicial (se consideró $K^2 = 3$), por simple álgebra se pueden obtener los siguientes valores de A_0 , τ_0^2 , A_u y τ_u^2 , y llegar a los siguientes

tes resultados,

$$\frac{A_u}{\bar{f}'_c} = \frac{\bar{f}'_{bc} - 1}{2\bar{f}'_{bc} - 1} ; \quad \frac{\tau_u^2}{(f'_c)^2} = \frac{3\bar{f}'_{bc} - 2\bar{f}'_{bc}{}^2}{3\bar{f}'_{bc} - 1} \quad (11)$$

$$\frac{A_0}{\bar{f}'_c} = \frac{\bar{f}'_{bc}{}^2 - \bar{f}'_c{}^2}{2\bar{f}'_{bc} - \bar{f}'_c} ; \quad \frac{\tau_0^2}{(f'_c)^2} = \frac{2\bar{f}'_c{}^3 - 3\bar{f}'_{bc}{}^2 \bar{f}'_c + 2\bar{f}'_c{}^2}{2\bar{f}'_{bc} - \bar{f}'_c}$$

y para la zona de tensión-compresión,

$$\frac{A_u}{\bar{f}'_c} = \frac{1 - \bar{f}'_c}{2} ; \quad \frac{\tau_u^2}{(f'_c)^2} = \frac{\bar{f}'_c}{6}$$

$$\frac{A_0}{\bar{f}'_c} = \frac{\bar{f}'_c - \bar{f}'_t}{2} ; \quad \frac{\tau_0^2}{(f'_c)^2} = \frac{\bar{f}'_c - \bar{f}'_t}{6} \quad (12)$$

en donde $\bar{f}'_c$, $\bar{f}'_t$, $\bar{f}'_{bc}$, $\bar{f}'_c$, $\bar{f}'_t$, $\bar{f}'_{bc}$ son cantidades adimensionales resultantes de dividir f'_c , f'_t , f'_{bc} y f_c , f_t , f_{bc} entre f'_c y f_c respectivamente. La gráfica de estas curvas, así como su correlación con los datos experimentales, se pueden observar en las figuras 3 y 4.

Funciones de carga

Dado que las superficies de carga están limitadas por las funciones de falla y de discontinuidad inicial, es razonable considerar que deben tener unas ecuaciones similares a las de aquellas. Si aceptamos, como varios autores, que las superficies de carga se desplazan a lo largo del eje $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ y se expanden isotrópicamente, teoría muy usada en plasticidad, es fácil considerar como forma de la función de estas superficies la siguiente:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{\frac{K^2}{3} J_2 - \frac{K^2}{36} I_1^2 \pm \frac{1}{12} I_1^2 + \frac{\beta}{3} I_1}{1 - \frac{\alpha}{3} I_1} = \tau^2 \quad (13)$$

El doble signo en uno de los términos de la ecuación, al igual que en las funciones de falla y de discontinuidad inicial, indican la región en que se encuentra el estado de esfuerzos, compresión o tensión-compresión.

Los valores de α y β pueden determinarse observando que cuando τ^2 tiende a τ_0^2 o τ_u^2 los valores de $\alpha\tau^2 + \beta$ se aproximan a A_0 y A_u respectivamente. Esto es, en el límite, las superficies de carga se transforman en las superficies inicial-discontinua o en la de falla. Los resultados obtenidos siguiendo este procedimiento son,

$$\alpha = \frac{A_u - A_0}{\tau_u^2 - \tau_0^2} \quad (14)$$

$$\beta = \frac{A_0\tau_u^2 - A_u\tau_0^2}{\tau_u^2 - \tau_0^2} \quad (15)$$

En las Fig 5 y 6 se muestran las superficies de carga en el caso biaxial.

Relaciones incrementales esfuerzo-deformación.

Con base en la forma general de la relación esfuerzo-deformación en la zona plástica [18], deducida mediante la suposición de pequeños incrementos radiales, se puede escribir que,

$$d\epsilon_{ij}^P = \lambda \frac{df}{d\sigma_{ij}} \quad (16)$$

en donde λ es un escalar que depende del estado de esfuerzos, el incremento de esfuerzo, y de la historia de esfuerzos. Esta ecuación se transforma para un material estable en la siguiente,

$$d\epsilon_{ij}^P = \frac{df}{d\sigma_{ij}} df \quad (17)$$

donde G es un escalar que depende del esfuerzo, deformación e historia de carga del elemento.

El valor de G se puede obtener del producto interno de la ec 15, y despejando G , se tiene,

$$G = \frac{d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ji}^P}{df \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ji}}} \quad (18)$$

la $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ji}}$ es una función del estado actual de esfuerzos y puede ser obtenida al substituir la función de carga actuante en ese instante; y la cantidad $\sqrt{d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ji}^P}$ indica la historia de deformación del material y se obtiene mediante resultados experimentales.

Si llamamos

$$H = \frac{df}{d\epsilon_{vs}^P d\epsilon_{sv}^P} \quad (19)$$

Siendo H la relación incremental del trabajo por endurecimiento del material y utilizando la relación incremental

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn} \quad (20)$$

Al substituir en la ec general (17) de esfuerzos-deformaciones se obtiene,

$$d\epsilon_{ij}^P = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}}{H \frac{\partial f}{\partial \sigma_{vs}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{sv}}} d\sigma_{mn} \quad (21)$$

Si consideramos que el incremento de deformación total $d\epsilon_{ij}$ es igual a la parte elástica más la parte plástica, o sea,

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^P \quad (22)$$

y dado que

$$d\epsilon_{ij}^e = H_{ijkl} d\sigma_{kl} \quad (23)$$

donde H_{ijkl} , es la matriz incremental hiperelástica.

Al substituir (21) y (23) en (22) se obtiene:

$$d\epsilon_{ij} = \left[H_{ijkl} + \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{vs}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{sv}}} \right] d\sigma_{kl} \quad (24)$$

CONCLUSIONES

Se dan las ecuaciones incrementales que resuelven el problema elastoplástico y se ha demostrado mediante comparación con resultados de laboratorio, que tienen suficiente aproximación aunque quedan varias incógnitas que resolver. Lo aquí expresado es cierto para concreto idealizado en la zona de compresión como isotró

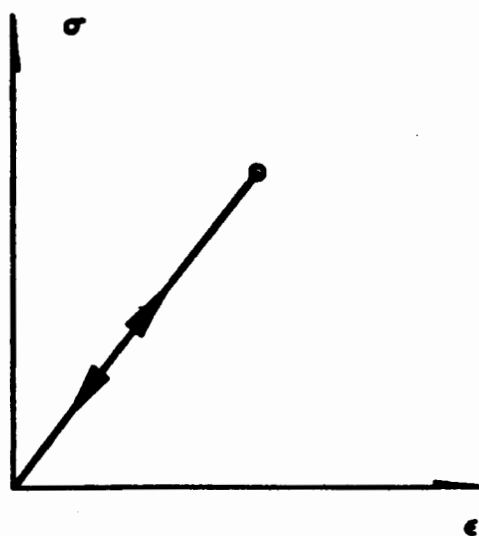
pico, homogéneo y linearizado incrementalmente en una zona de plasticidad hasta la ruptura. Las funciones propuestas esfuerzo-deformación, se proponen con el objeto de utilizarlas directamente en problemas de análisis por medio de elementos finitos.

BIBLIOGRAFIA

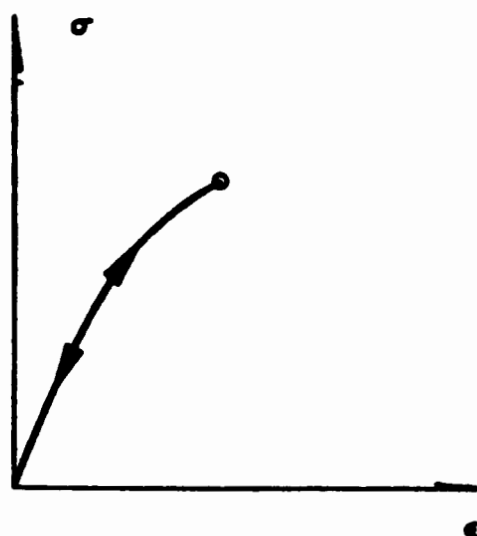
1. Cedolin, L y Dei Poli, S "Finite element nonlinear analysis of reinforced concrete bidimensional structures" Politécnico di Milano. Department of Structural Engineering. Technical Report N. 40 I. S. T. C. Septiembre 1974.
2. Bremer, F "On a triaxial strength criterion for concrete". American Concrete Institute SP 34, Reporte SP 34-14, 1972 pp 283-294.
3. Hannant, D J, Frederick, C O "Failure criteria for concrete in compression". Magazine of Concrete Research, Vol. 20 No. 64 Sept. 1968 pp 137-144
4. Propovics, S. "Review of stress-strain relationships for concrete", American Concrete Institute. Journal, Proceedings, Vol. 67 No. 3 Marzo 1970, pp 243-248.
5. Philleo, R E "Elastic properties and creep". *Significance of test and properties of concrete and concrete making materials*. A S T M, S T P 169 A, pp 160-175.
6. Gilkey, H. J. y Murphy G. "Stress-strain characteristics of mortars and concretes", Proceedings, A S T M V. 38, Part. I, 1938, pp 318-326.

7. Shah, S P y Winter, G "Inelastic behavior and fracture of concrete", ACI Journal, Proceeding V. 63 No. 9, Sept. 1966, pp 925-930.
8. Sáenz, L O, Discusión de "Equation for the stress-strain curve of concrete" por P Desayi y S Krishnan, ACI Journal, Proceeding V. 61.
9. Smith, G M y Young, L E, "Ultimate flexural analysis based on stress-strain curves of cylinders", ACI. Journal, Proceedings V. 53, No. 6 Dic. 1956, pp 597-610.
10. Bresler, B Discusión del reporte de L. H. N., Lee: *Inelastic behavior of reinforced concrete members*. Traducción del ASCE, Vol. 120, pp 203-205, 1955.
11. Hognestad, E; Hanson N W; y McHenry, D, "Concrete stress distribution in ultimate strength design", ACI. Journal, Proceedings, V. 61 No. 2, Feb. 1964, pp 253-256.
12. Walker S, "Modulus of elasticity of concrete" Proceedings, ASTM. V. 19, Part 2, 1919 pp 510-585
13. Neville, A M, en el libro editado por Bresler B, "Reinforced Concrete Engineering", Volumen 1. Materiales, elementos estructurales, seguridad, J. Wiley 1974. pp 65-151.
14. Kupfer, H B, Hilsdorf, H K, y Rusch, H, "Behavior of concrete under biaxial stresses". ACI Journal, Proceedings, Vol. 66, No. 8, Agosto 1969, pp 656-666.
15. Leigh, D C, "Nonlinear continuum mechanics" McGraw-Hill, 1968. pp 155-159, pp 145, pp 67,68.
16. Chen, W F "Constitutive relations for concrete and punch indentatation problem", Ph. D. Thesis., Lehigh University, 1973.

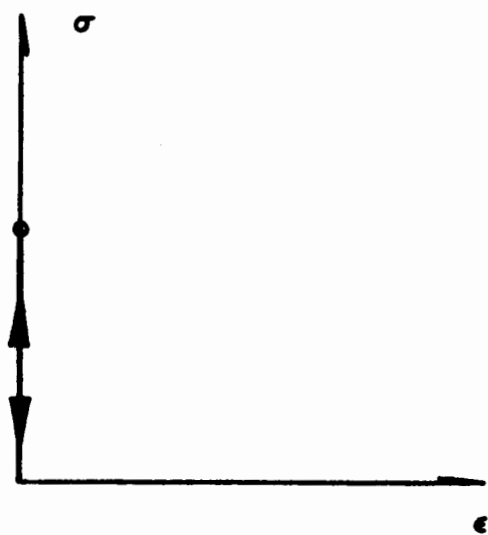
17. Palmer, A C, Maier, G y Drucker, D C, "Normality relations and convexity of yield surfaces for unstable materials or structural elements". Journal of Applied Mechanics, Vol. 34, 1967.
18. Mendelson, A, "Plasticity, theory and applications", MacMillan Series in applied mechanics, Chapter 7.
19. Bazánt, Z P. and Bhat, P. "Endochonic theory of inelasticity and failure of concrete", J. E. M. D., A S C E. Vol. 102, 1976.



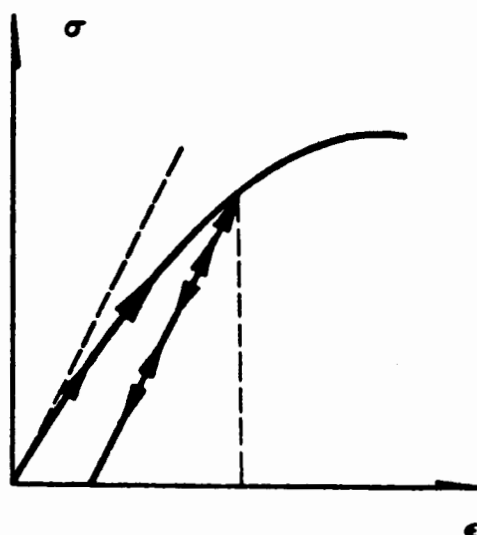
a) Elástico lineal



b) Elástico no-lineal



c) Elástico lineal frágil



d) Plástico perfecto

Fig 1 Modelos uniaxiales idealizados

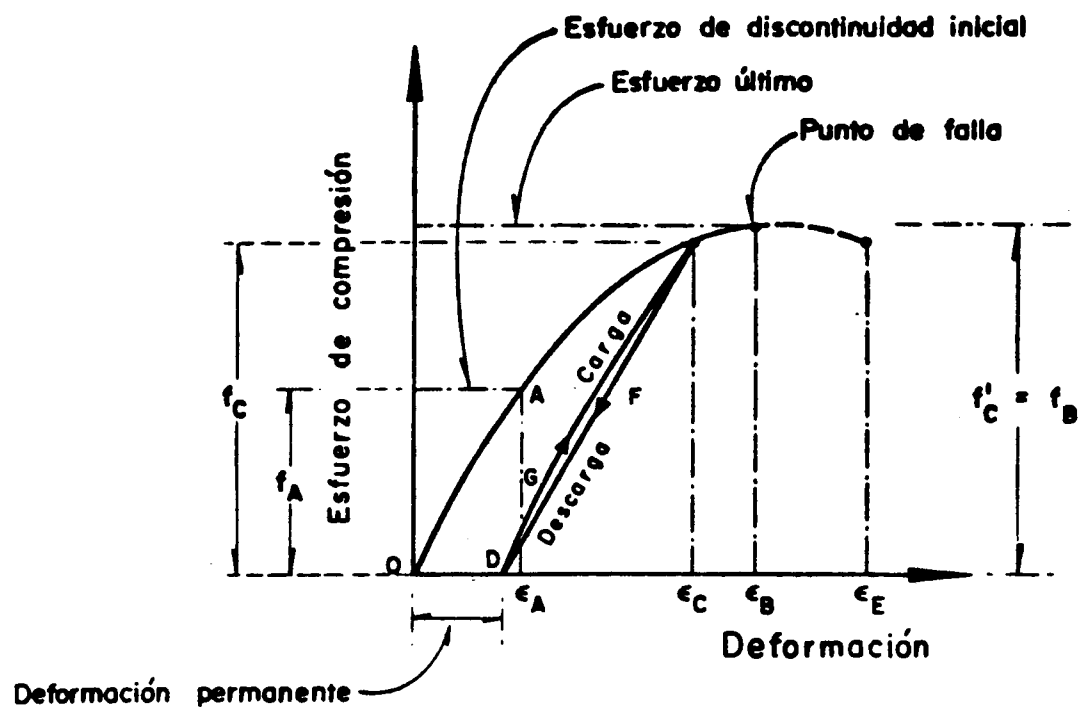
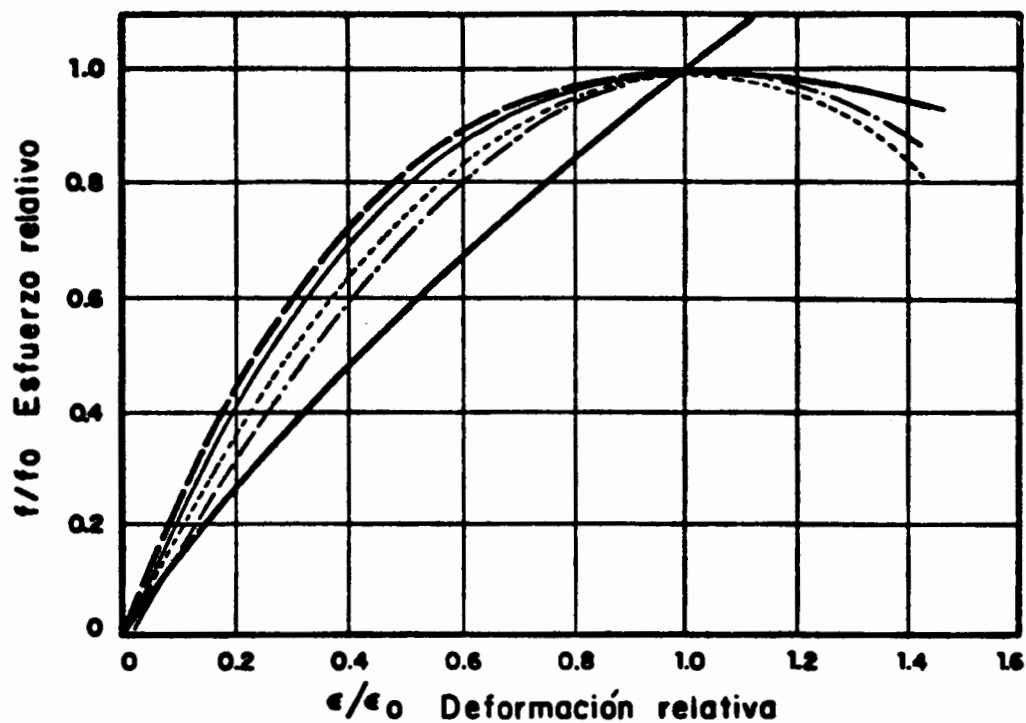


Fig 2 Curva esfuerzo - deformación uniaxial del concreto



— $f/f_0 = (\epsilon/\epsilon_0)^{0.8}$

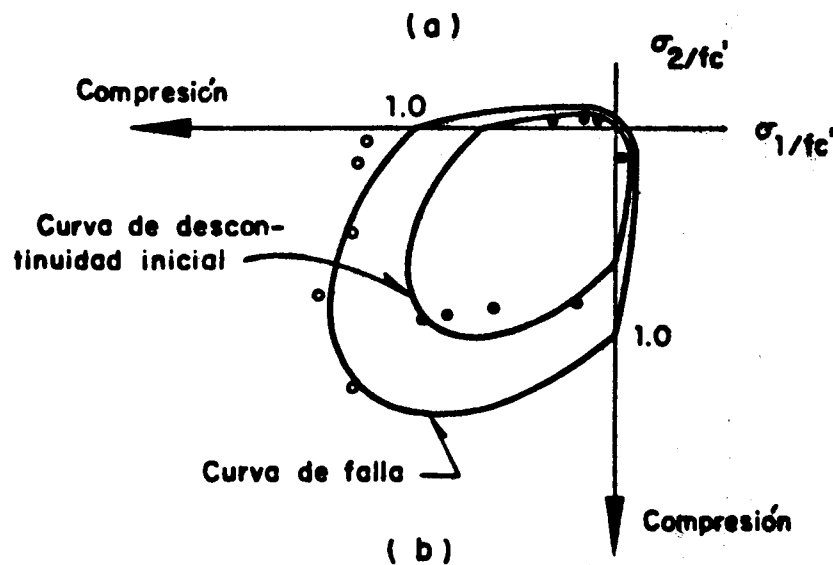
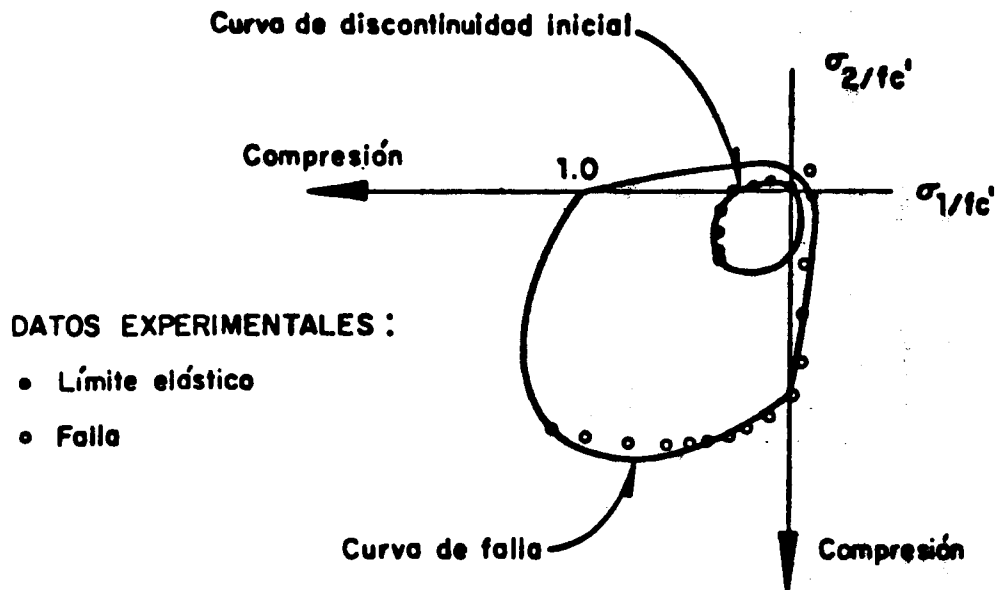
— $f/f_0 = (\epsilon/\epsilon_0) \frac{3}{2 + (\epsilon/\epsilon_0)^3}$

----- $f/f_0 = (\epsilon/\epsilon_0) (2 - \epsilon/\epsilon_0)$

— $f/f_0 = (\epsilon/\epsilon_0) e^{1-\epsilon/\epsilon_0}$

— $f/f_0 = (\epsilon/\epsilon_0) \frac{2}{1 + (\epsilon/\epsilon_0)^2}$

Fig 3 Comparación de varias fórmulas para diagramas uniaxiales esfuerzo deformación del concreto



DATOS EXPERIMENTALES :

- Discontinua
- Falla

Fig 4 Curvas de falla y de discontinuidad inicial en el espacio de esfuerzos principales biaxiales: a) Datos experimentales de Kupfer (1969) ; b) Datos experimentales de Ville (1968)

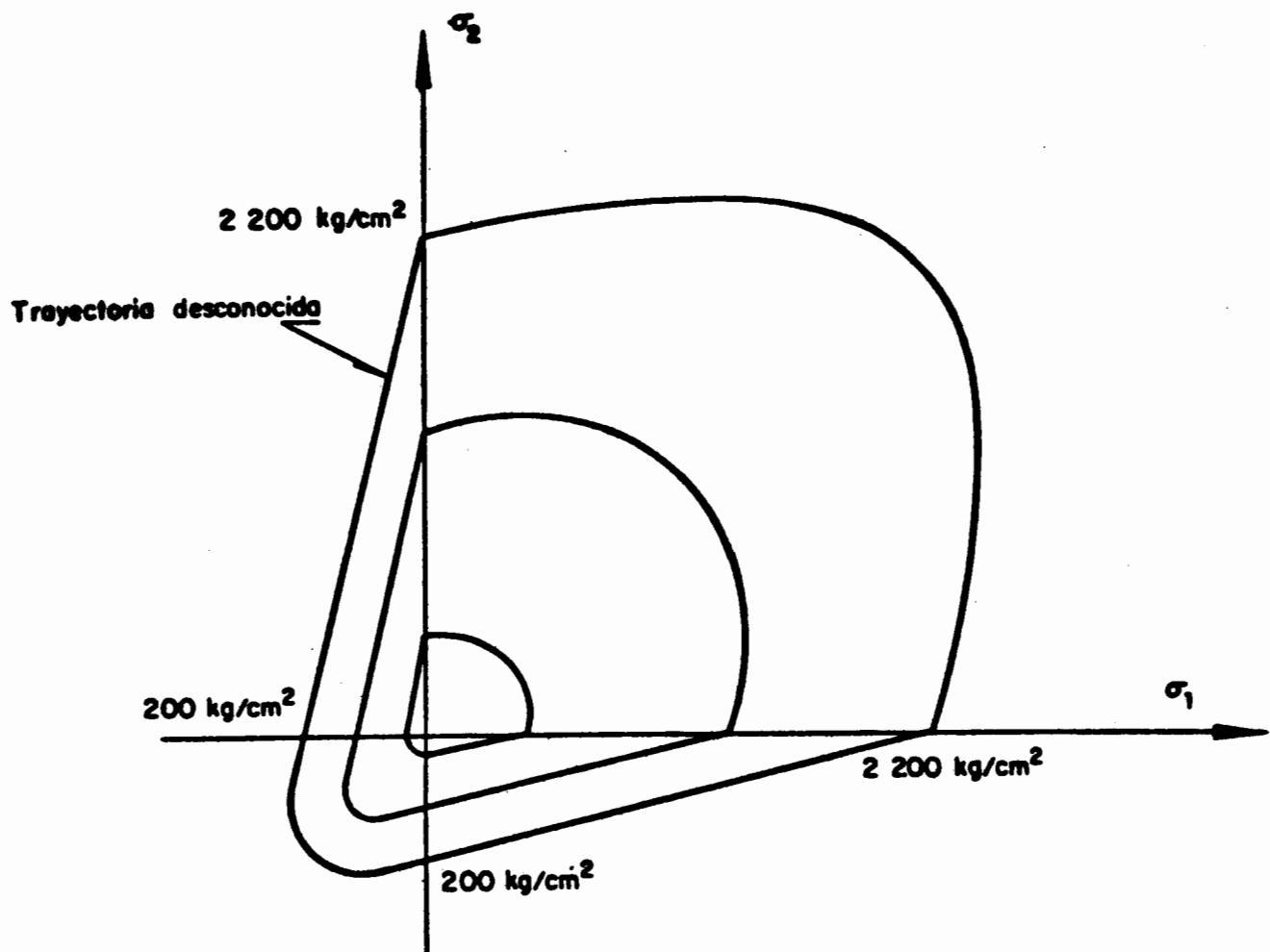


Fig 5 Superficie de falla del concreto en el plano $\sigma_1 - \sigma_2$, con $f'_c = 200\text{ kg/cm}^2$ y $f_y = 2\,200\text{ kg/cm}^2$, siguiendo el acero las direcciones principales de esfuerzo.

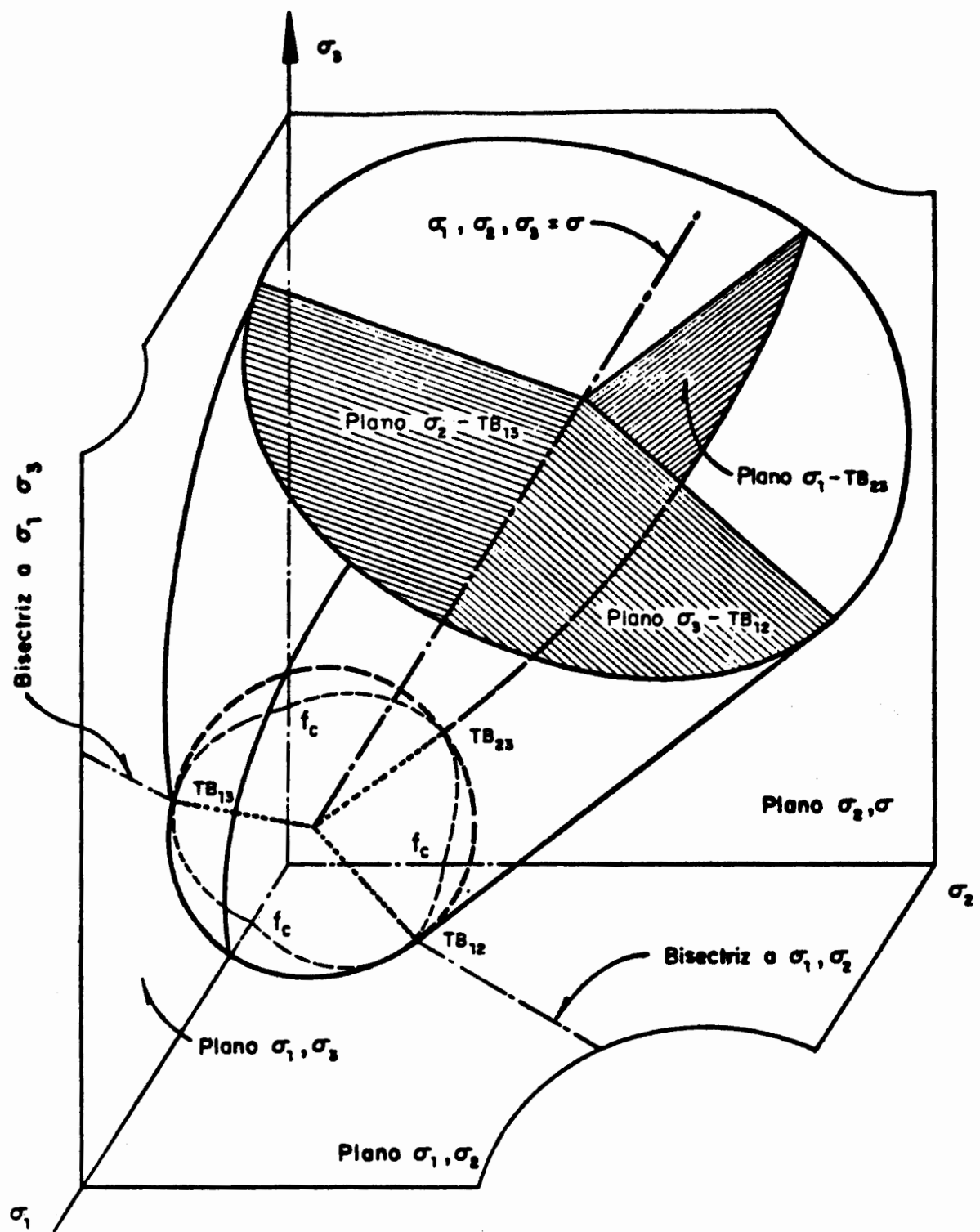


Fig 6 Superficie de falla en el espacio de esfuerzos σ_i

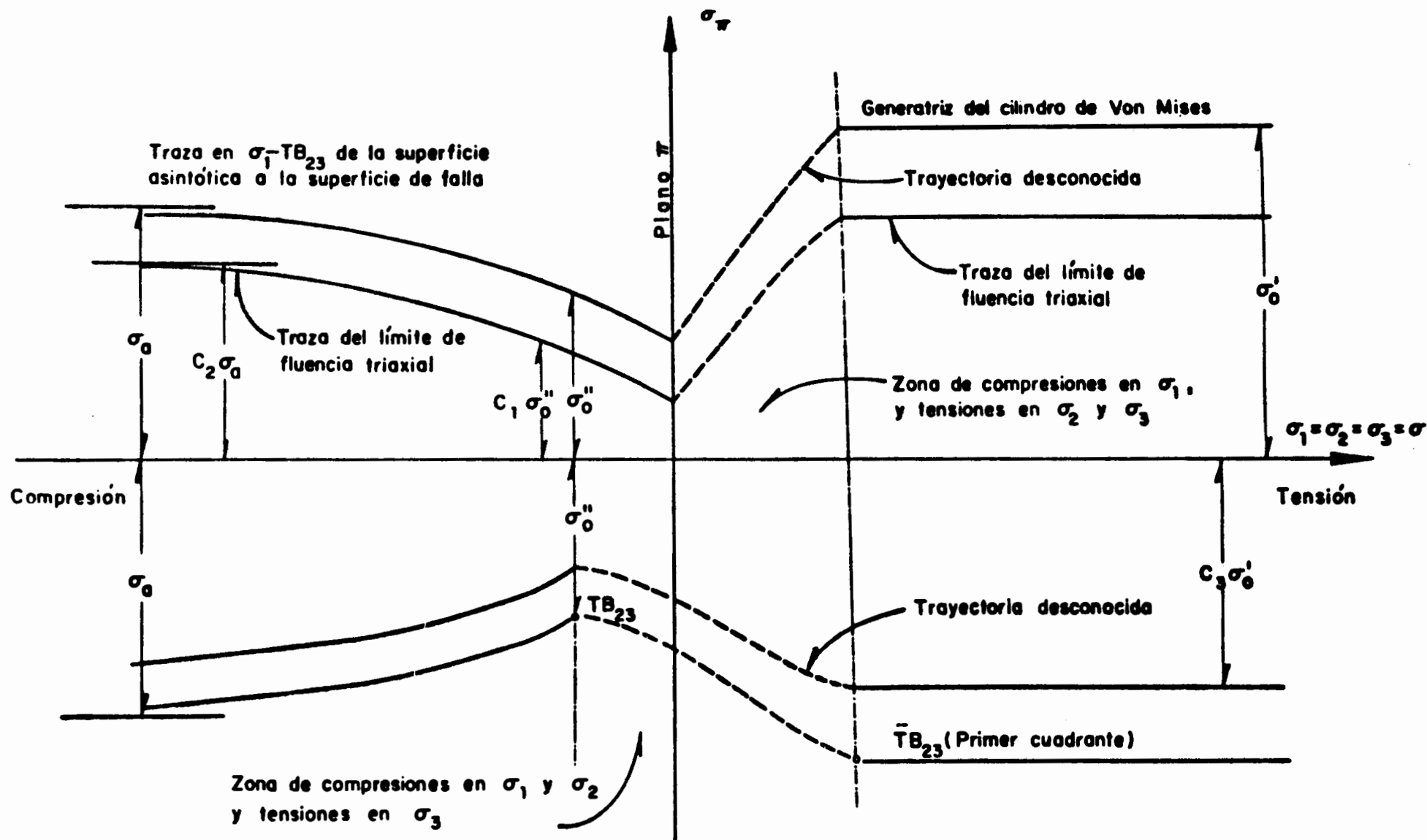


Fig 7 Traza de superficies de falla y fluencia inicial en plano σ_1 - TB_{23}

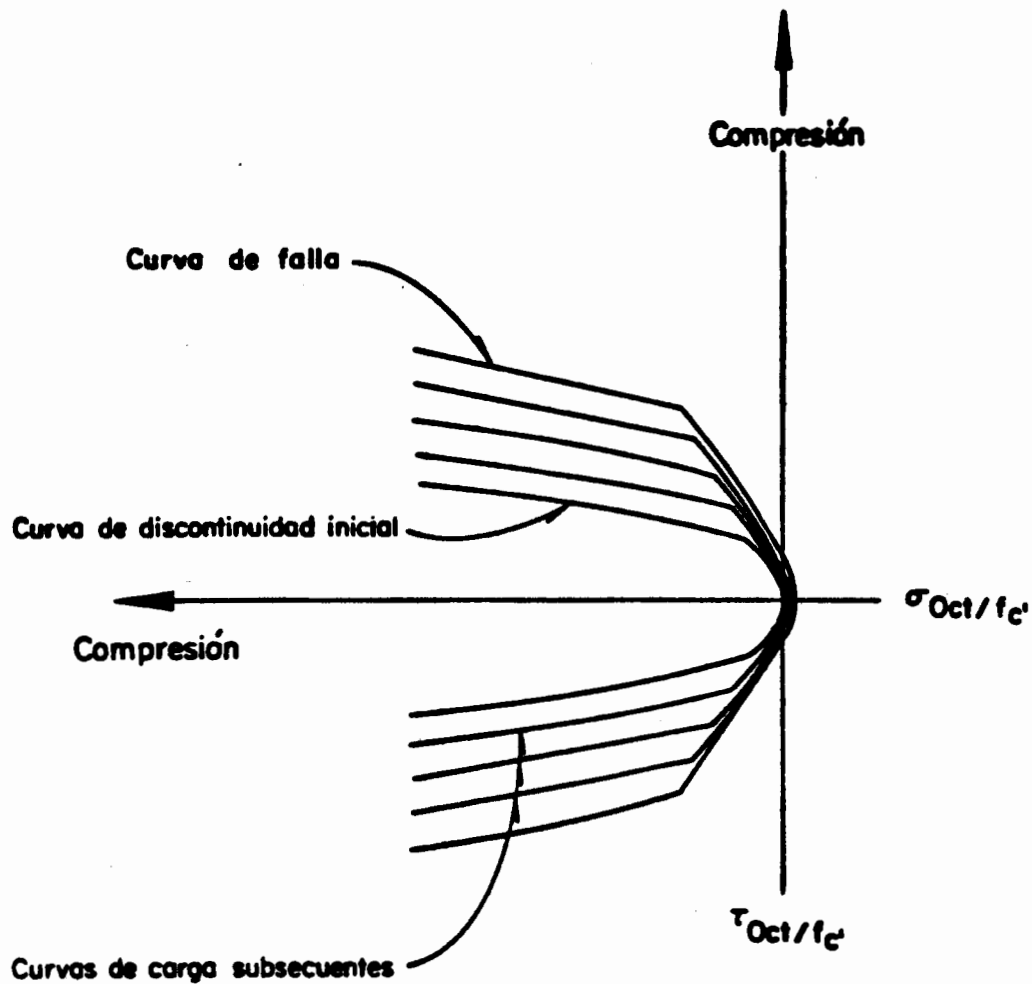


Fig 8 Curvas de discontinuidad inicial ,de carga subsecuente y de falla en el espacio de esfuerzos normales y esfuerzos cortantes octaédricos .

F-DEPFI/D-46/1986/Ej.2



702425

