

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO: X CURSO INTERNACIONAL DE  
INGENIERIA SISMICA ( DINAMICA ESTRUCTURAL) del 30 de julio al  
10 de agosto de 1984 .

1. M. EN I. RAMON CERVANTES BELTRAN  
SECRETARIO GENERAL  
FACULTAD DE INGENIERIA  
U N A M  
MEXICO, D.F.  
548 96 65
  
2. M. EN C. ENRIQUE DEL VALLE CALDERON  
P R O F E S O R  
D E P F I  
U N A M  
México, D.F.  
550 52 15 Ext. 4479
  
3. M. EN C. JORGE PRINCE ALFARO  
INVESTIGADOR  
INSTITUTO DE INGENIERIA  
CUBICULO 211  
UNAM  
MEXICO, D.F.  
548 11 35
  
4. DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ (COORDINADOR)  
DIRECTOR  
FACULTAD DE INGENIERIA  
UNAM  
MEXICO, D.F.  
548 33 54

100

101

102

X. CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

1 9 8 4

DINAMICA ESTRUCTURAL

FECHA	HORARIO	TEMARIO	PROFESOR
Julio 30	17:30 a 21:45 h	INTRODUCCION. ANALISIS SISMICO DE SISTEMAS ELASTICOS DE UN GRADO DE LIBERTAD	Dr. Octavio A. Rascón Chávez
Agosto 1o.	17:00 a 19:00 h	VIBRACIONES LIBRES DE SISTEMAS ELASTICOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD	M en C Jorge Prince Alfaro
Agosto 1o.	19:15 a 21:15 h	METODOS DE HOLTZER Y NEWMARK - PARA CALCULAR FRECUENCIAS NATURALES	M en C Enrique del Valle C.
Agosto 3	17:00 a 21:15 h	VIBRACIONES FORZADAS DE SISTEMAS ELASTICOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD. ANALISIS MODAL. RESPUESTA SISMICA MAXIMA	M en C Jorge Prince Alfaro
Agosto 6	17:00 a 21:15 h	METODO DE NEWMARK PARA OBTENER LA RESPUESTA SISMICA DE SISTEMAS ELASTICOS E INELASTICOS. ANALISIS DE SISTEMAS DE TORSION CON TRASLACION, O CABECEO CON TRASLACION.	Dr. Octavio A. Rascón Chávez
Agosto 8	17:00 a 21:15 h	VIBRACION DE VIGAS DE FLEXION Y	
Agosto 10	17:00 a 21:15 h	VIGAS DE CORTANTE. INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO	M en I Ramón Cervantes Beltrán



# EVALUACION DEL PERSONAL DOCENTE

**CURSO:** X CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA (DINAMICA ESTRUCTURAL)

**FECHA:** del 10 de julio al 10 de agosto, 1984

	DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANTENIMIENTO DEL INTERES. (COMUNICACION CON LOS ASISTENTES, AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION).	PUNTUALIDAD	
<b>CONFERENCISTA</b>					
1. DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ					
2. M. EN C. JORGE PRINCE ALFARO					
3. M. EN C. ENRIQUE DEL VALLE CALDERON					
4. M. EN I. RAMON CERVANTES BELTRAN					
5.					
6.					
7.					
8.					
9.					
<b>ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10</b>					

# EVALUACION DE LA ENSEÑANZA

②

SU EVALUACION SINCERA NOS AYUDARA A MEJORAR LOS PROGRAMAS POSTERIORES QUE DISEÑAREMOS PARA USTED.

TEMA	ORGANIZACION Y DESARROLLO DEL TEMA	GRADO DE PROFUNDIDAD LOGRADO EN EL TEMA	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL TEMA	UTILIDAD PRACTICA DEL TEMA	
INTRODUCCION ANA. SISMICO DE SIST. ELASTI					
VIBRACIONES LIBRES DE SIST. ELASTICOS DE .					
METODOS DE HOLTZER Y NEWMARK PARA CALCULAR					
VIBRACIONES FORZADAS DE SISTEMAS ELASTICOS.					
METODO DE NEWMARK PARA OBTENER LA RESPUESTA					
VIBRACION DE VIGAS DE FLEXION Y VIGAS DE..					

ESCALA DE EVALUACION : 1 a 10

## EVALUACION DEL CURSO

③

	CONCEPTO	EVALUACION
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS.	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO CON EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO CON EL CURSO	

ESCALA DE EVALUACION DE 1 A 10

1. ¿Qué le pareció el ambiente en la División de Educación Continua?

MUY AGRADABLE	AGRADABLE	DESAGRADABLE

2. Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

PERIODICO EXCELSIOR ANUNCIO TITULADO DE VISION DE EDUCACION CONTINUA	PERIODICO NOVEDADES ANUNCIO TITULADO DE VISION DE EDUCACION CONTINUA	FOLLETO DEL CURSO

CARTEL MENSUAL	RADIO UNIVERSIDAD	COMUNICACION CARTA, TELEFONO, VERBAL, ETC.

REVISTAS TECNICAS	FOLLETO ANUAL	CARTELERA UNAM "LOS UNIVERSITARIOS HOY"	GACETA UNAM

3. Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

AUTOMOVIL PARTICULAR	METRO	OTRO MEDIO

4. ¿Qué cambios haría usted en el programa para tratar de perfeccionar el curso?

---



---



---

5. ¿Recomendaría el curso a otras personas?

SI	NO



6. ¿Qué cursos le gustaría que ofreciera la División de Educación Continua?

---



---

7. La coordinación académica fue:

EXCELENTE	BUENA	REGULAR	MALA

8. Si está interesado en tomar algún curso intensivo ¿Cuál es el horario más conveniente para usted?

LUNES A VIERNES DE 9 A 13 H. Y DE 14 A 18 H. (CON COMIDAS)	LUNES A VIERNES DE 17 A 21 H.	LUNES, MIÉRCOLES Y VIERNES DE 18 A 21 H.	MARTES Y JUEVES DE 18 A 21 H.

VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 14 H.	VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 13 Y DE 14 a 18 H.	OTRO

9. ¿Qué servicios adicionales desearía que tuviese la División de Educación Continua, para los asistentes?

---

10. Otras sugerencias:

---



---



---



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

DINAMICA ESTRUCTURAL

ESTUDIO ESTADISTICO DE LOS CRITERIOS PARA ESTIMAR LA RESPUESTA  
SISMICA DE SISTEMAS LINEALES CON DOS GRADOS DE LIBERTAD

OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ  
AUGUSTO VILLARREAL ARANDA

JULIO, 1984

# Estudio estadístico de los criterios para estimar la respuesta sísmica de sistemas lineales con dos grados de libertad

Octavio A. Rascón  
Augusto G. Villarreal\*

## RESUMEN

El objeto de este trabajo es verificar el grado de aproximación de dos métodos que con frecuencia se utilizan para estimar la respuesta sísmica máxima de sistemas lineales con varios grados de libertad. Para ello se aplica el método de Monte Carlo en el estudio de tres tipos de estructuras con dos grados de libertad: torsión y traslación, cabeceo y traslación, y traslación en dos pisos. Como excitaciones se utilizan sismos simulados y reales; se comparan las respuestas estimadas con las exactas, se hacen recomendaciones acerca del empleo de dichos métodos, y se obtienen las distribuciones de probabilidades de los cocientes de las respuestas exactas entre las estimadas.

## ABSTRACT

The purpose of this work is to verify the degree of approximation of two methods used frequently for estimating the maximum seismic response of linear systems with various degrees of freedom. To do this, the Monte Carlo method is used in the study of three types of structures with two degrees of freedom: torsion and translation, rocking and translation, and translation in a two story building. Simulated and real earthquakes are used as ground excitations; estimated responses are compared with the exact ones, recommendations for the use of such methods are given, and the probability distributions of the ratios of exact to estimated responses are obtained.

## 1. INTRODUCCION

En este trabajo se analiza el comportamiento dinámico de algunos tipos de estructuras de comportamiento lineal de dos grados de libertad cuando se les sujeta a sollicitaciones sísmicas. El objeto es verificar el grado de aproximación de dos métodos propuestos por Rosenblueth (refs 1 y 2) para estimar la respuesta máxima total, mediante su comparación con las respuestas máximas exactas obtenidas con el método de análisis modal, al superponer en el tiempo los efectos del sismo en los dos modos naturales de vibración de la estructura.

El método 1 consiste en estimar la respuesta máxima total,  $Q$ , extrayendo la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la respuesta en cada modo natural de vibración,  $Q_i$ , es decir

$$Q = \sqrt{\sum_{i=1}^n Q_i^2} \quad (1.1)$$

\* Profesores Investigadores, Instituto de Ingeniería, UNAM

donde  $n$  es el total de grados de libertad del sistema.

El método 2 consiste en aplicar la fórmula

$$Q = \sqrt{\sum_{i=1}^n Q_i^2 + \sum_{i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{1 + \epsilon_{ij}}} \quad (1.2)$$

siendo

$$\epsilon_{ij} = \frac{\omega_i - \omega_j}{\zeta_i \omega_i + \zeta_j \omega_j} \quad (1.3)$$

donde

$Q_i$  respuesta máxima en el  $i$ -ésimo modo de vibración, tomada con el mismo signo que el de la correspondiente función de transferencia cuando esta alcanza su valor máximo absoluto

$\omega_i$   $i$ -ésima frecuencia circular natural de vibración del sistema sin amortiguamiento

$\omega_i^* = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$   $i$ -ésima frecuencia circular natural de vibración del sistema amortiguado

$\zeta_i$  fracción del amortiguamiento crítico en el  $i$ -ésimo modo natural

$\zeta_i^* = \zeta_i + 2/(\omega_i S)$  fracción del amortiguamiento crítico equivalente

$S$  duración del sismo con el que se excita al sistema

El interés primordial al realizar esta verificación radica en que el método 1, actualmente en uso en varios reglamentos de construcción (refs 3 y 4), podría llegar a sustituirse por el método 2.

Se han propuesto otros procedimientos para estimar  $Q$  (ref 5) que son función no lineal de los resultados del método 1; sin embargo, no se discuten en este trabajo porque han sido estudiados con base en estructuras sin amortiguamiento, las cuales, como se verá, conducen a conclusiones diferentes de las que corresponden a estructuras amortiguadas.

Para realizar estadísticamente este estudio, se emplearon técnicas de reducción de variancia del método de Monte Carlo.

En cuanto al análisis, este se limita a tres casos, los cuales se detallan en el Apéndice:

1. Torsión en estructuras de un piso, considerando que las respuestas dinámicas son la fuerza cortante y el momento torsionante.

2. Cabeceo en estructuras de un piso, considerando como respuestas la fuerza cortante y el momento de cabeceo.

3. Traslación en estructuras de dos pisos, tomando en cuenta las fuerzas cortantes en los entrepisos uno y dos.

## 2. CALCULO DE LAS RESPUESTAS MAXIMAS

Las respuestas elásticas máximas de los diversos tipos de estructuras se calcularon utilizando:

a) Método 1 (ec 1.1, criterio del Reglamento de Construcciones del Departamento del Distrito Federal, ref 3)

b) Método 2 (ec 1.2 y nuevo criterio de Rosenbluath, ref 2)

c) Análisis modal (respuesta exacta).

Los resultados del análisis modal sirvieron como base de comparación del grado de aproximación de las estimaciones logradas con los otros dos criterios.

Como excitaciones sísmicas se emplearon cuatro sísmos simulados de acuerdo con el método indicado en la ref 6 (figs 1 a 4), y uno real (fig 5), registrado en la zona blanda de la ciudad de México (ref 7).

El análisis de los tres casos se realizó empleando el método de Monte Carlo, que consiste en estudiar el comportamiento de un modelo matemático determinado, mediante la simulación de los datos de entrada (generalmente en computadora digital) y del estudio estadístico de los resultados. Cada vez que se introduce un conjunto de datos y se obtiene la respuesta del modelo, se dice que se efectúa un *experimento conceptual* del problema; la colección de resultados constituye la *muestra* que sirve de base para inferir cuál es el grado de aproximación con que dicho modelo matemático representa el fenómeno para el cual se formuló.

Conforme aumenta el número de parámetros que intervienen en el modelo matemático, se incrementa la cantidad de experimentos necesaria para dilucidar cuáles influyen en el problema, es decir, para verificar si en los resultados que se obtienen al variar los valores de los parámetros existen diferencias estadísticas significativas; sin embargo, eso representa un costo de computación que en ocasiones hace prohibitivo tal tipo de estudios, a menos que se emplee alguna técnica de *reducción de variancia* (refs 11 y 12), lo que permite un ahorro considerable en el número de experimentos necesario para obtener conclusiones adecuadas.

La técnica de reducción de variancia que se emplea en este trabajo es muy común y consiste en:

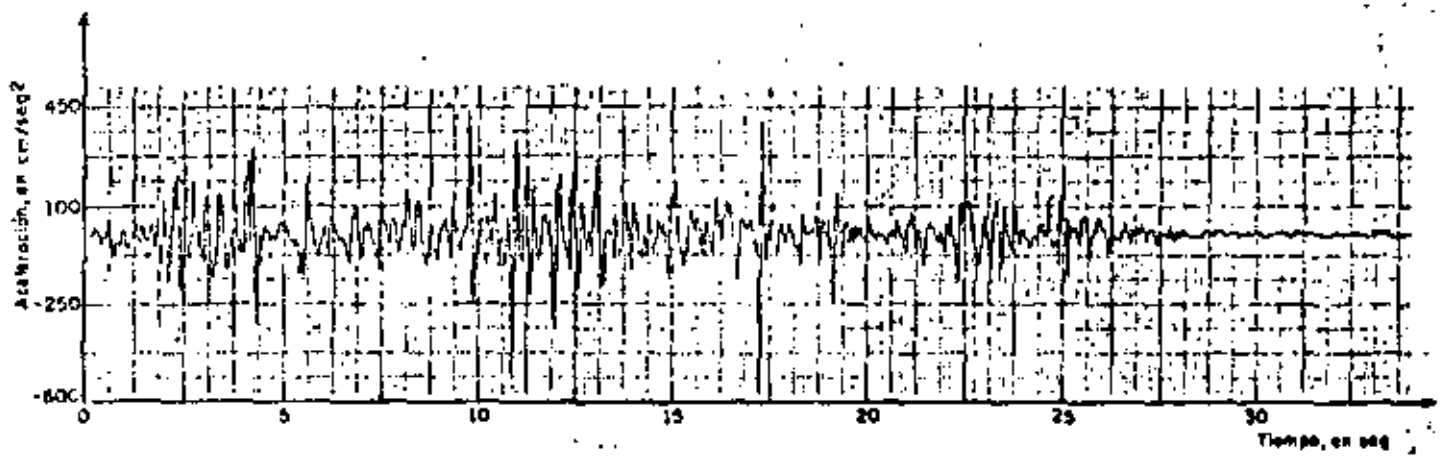


Fig. 1. Sismo simulado No 1

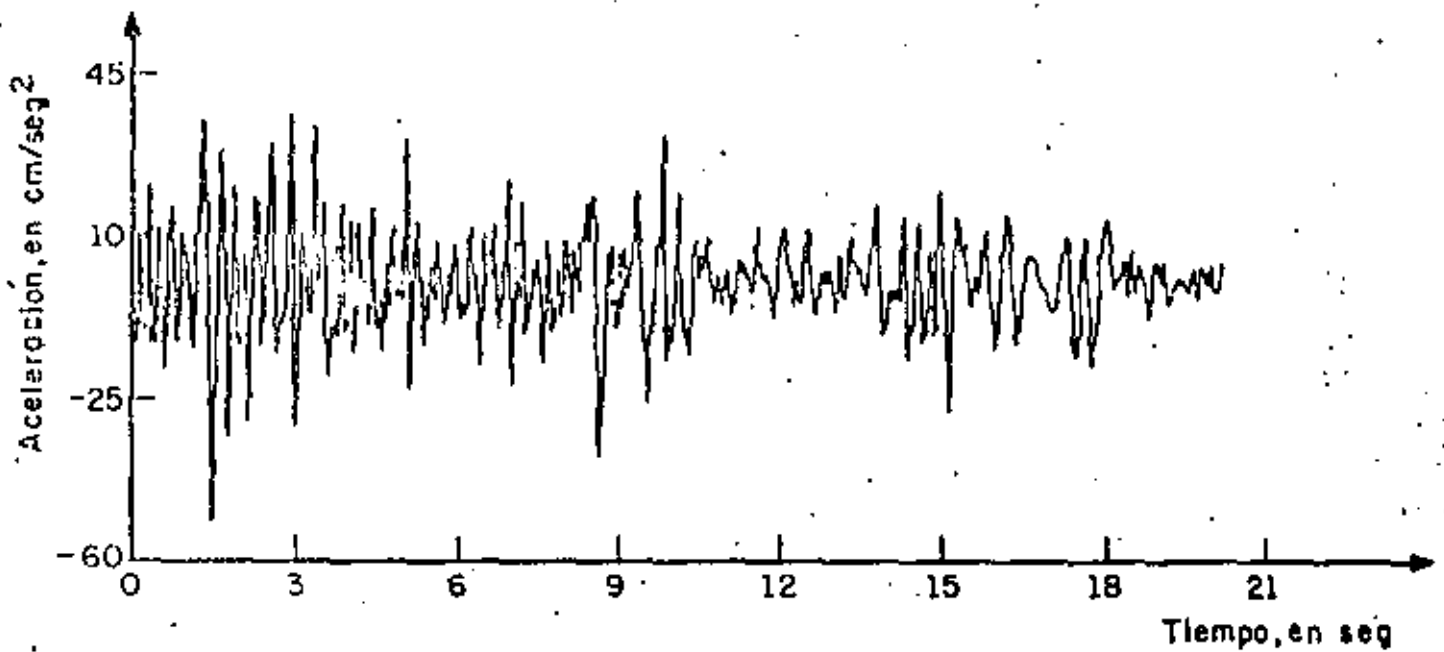


Fig. 2. Sismo simulado No 2

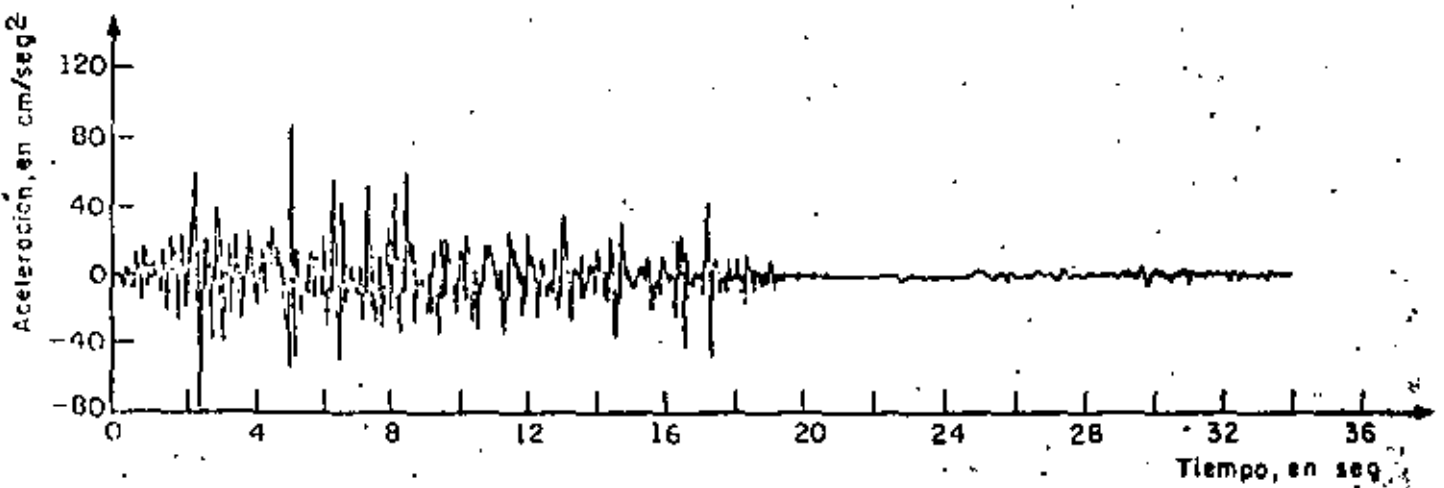


Fig. 3. Sismo simulado No 3

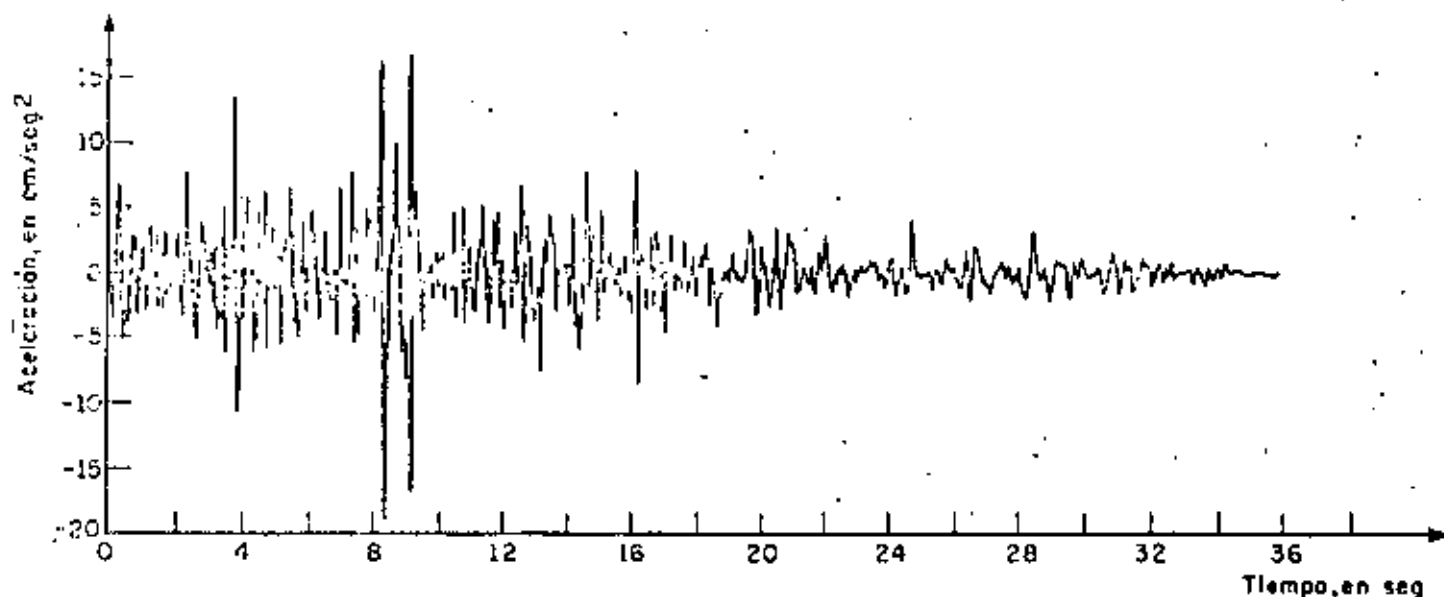


Fig 4. Sismo simulado No. 4

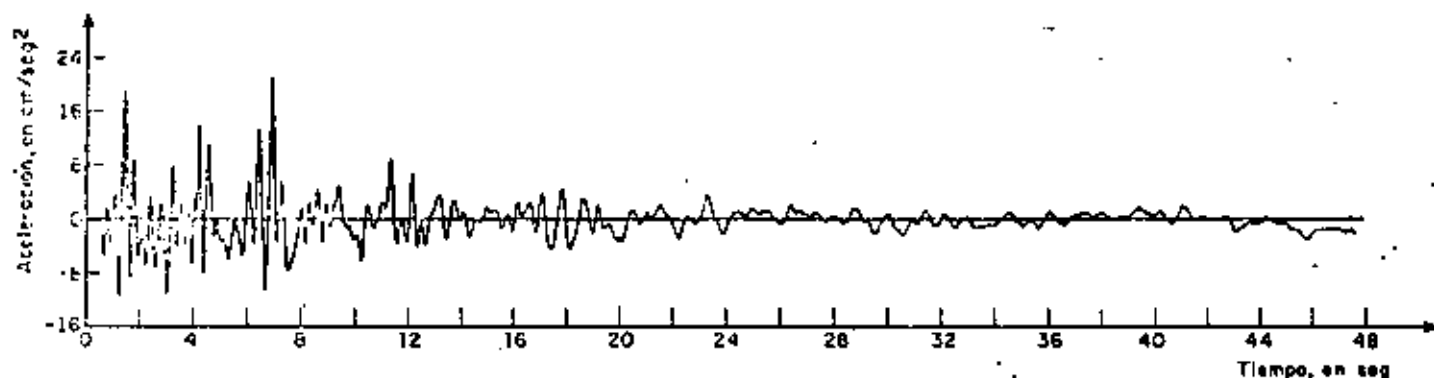


Fig 5. Sismo real registrado en la Alameda Central, México, D. F., el 10 de diciembre de 1961

a). Asignar diversos valores a cada parámetro que interviene en el problema, de manera que se cubran los intervalos de interés de cada uno.

b). Calcular la respuesta máxima exacta y las estimadas con los métodos 1 y 2 para cada combinación de valores de los diferentes parámetros.

c). Obtener las respuestas normalizadas dividiendo los valores exactos entre los estimados; esto se hace para cada combinación de valores de los parámetros, con lo cual se elimina la dispersión en los resultados ocasionada por la magnitud y variación con el tiempo de los datos de entrada (se reduce la variancia).

d). Estudiar si existen diferencias estadísticas significativas entre los resultados obtenidos al variar los valores asignados a uno de los parámetros. Si las hay, se infiere que los resultados logrados con cada valor de dicho parámetro corresponden a poblaciones estadísticas diferentes; en caso contrario, la población estadística es la misma y, por consiguiente, las mues-

tras respectivas pueden agruparse en una sola de mayor tamaño, a partir de la cual es factible obtener conclusiones más generales y confiables acerca del modelo en estudio, ya que la variancia del promedio de la estimación se reduce en proporción a  $1/n$  (ref 11). Esta etapa se repite sucesivamente para cada uno de los parámetros restantes, con lo que se realiza, de hecho, un análisis de variancia.

## 2.1 Resultados del problema de torsión (caso 1)

Para diseño sísmico de edificios, los elementos mecánicos que usualmente interesa conocer son las fuerzas y momentos que obran sobre cada elemento estructural. Para simplificar, con objeto de aislar los efectos de la fuerza cortante y del momento torsionante, en este problema de torsión se considerará una estructura (fig 6) con masa uniformemente distribuida, con un solo muro en dirección Z que resista la fuerza cortante directa, y dos idénticos en dirección Y (per-

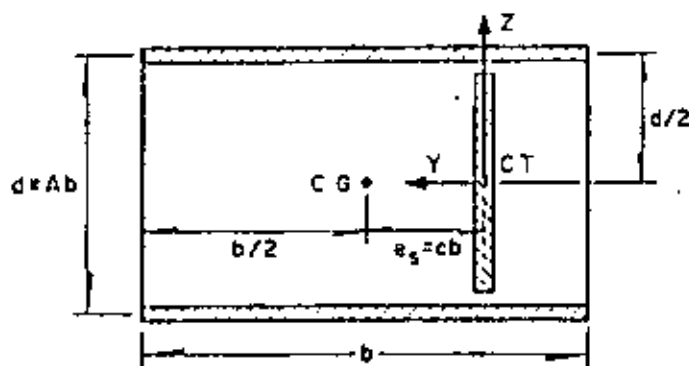


Fig. 6. Estructura tipo considerada en el problema de torsión

pendicular al movimiento), de manera que cada uno de estos últimos resista una fuerza cortante igual a  $M/d$ , donde  $M$  es el momento torsionante dinámico y  $d$  es la separación de los dos muros. En este caso, la estructura presenta excentricidad solo en dirección perpendicular a la de excitación,  $Z$ .

Los parámetros que se escogieron para estudiar el problema de torsión fueron (fig 6):

$$A = b/d$$

$b$  dimensión en la dirección  $Y$

$$c = e_g/b$$

$$T_1 \text{ periodo fundamental de vibración} = \omega_1/2\pi = \lambda_1/(2\pi K/m)$$

$\zeta$  fracción de amortiguamiento respecto al crítico en ambos modos de vibración

$\eta$  cociente de la frecuencia angular entre la lineal =  $(L/J)/(K/m)$

Los valores que se asignaron a  $A$ ,  $b$  y  $c$  son los consignados en la tabla 1; los de  $\zeta$  son 0, 0.05 y 0.10; los de  $\eta$ , 0.5, 0.9, 1.0, 1.1, 1.5, 2.0, 2.5, 3 y 4, y los de  $T_1$ , 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 1.5, 2, 3 y 4 seg. Los casos de  $\eta = 1, 0.9$  y  $1.1$  se estudiaron con especial cuidado debido a que para valores de  $\eta = 1$  y cercanos, sucede que las dos frecuencias naturales de vibración resultan más próximas entre sí (ec A.3) y, en consecuencia, el término  $\epsilon_1^2$  de las ecs A.8 y A.9 del Apéndice puede asumir valores pequeños (ec 1.3), en cuyo caso se pueden presentar diferencias considerables entre los resultados de ambos métodos, puesto que el término de la doble suma de la ec 1.2 asume valores tanto mayores cuanto menores son los de  $\epsilon_1^2$ .

Para cada uno de los casos de la tabla 1 se obtuvieron las fuerzas cortantes y los momentos torsionantes máximos correspondientes a todas las combinaciones de  $\zeta$ ,  $T_1$  y  $\eta$ .

En las figuras que aparecen más adelante no se hace distinción de los resultados obtenidos con cada sismo

ni con cada combinación de  $A$ ,  $b$  y  $c$ , ya que las muestras respectivas se mezclaron al no haberse encontrado diferencias estadísticas significativas con un 95 por ciento de nivel de confianza en los mismos, a pesar de la marcada diferencia entre los valores de dichos parámetros y de las características de los sismos, tales como duración y frecuencia dominante.

### 2.1.1 Momento torsionante

En las figs 7 a 9 se presentan los resultados correspondientes a los casos en los que  $T_1 = 2.0$  seg y  $\zeta = 0, 0.05$  y  $0.10$ , respectivamente. En el eje de las abscisas se localizan los valores de  $\eta$ , y en el de las ordenadas los cocientes de los momentos torsionantes exactos,  $M$ , entre los estimados,  $\hat{M}$  y  $\tilde{M}$ , con los métodos 1 y 2, respectivamente (Apéndice).

En la fig 7, en la que el amortiguamiento es nulo, se aprecia mayor dispersión en los resultados de ambos métodos que corresponden a  $\eta = 0.9, 1.0$  y  $1.1$  que para los demás valores de  $\eta$ . En cambio, en las figs 8 y 9, que corresponden a  $\zeta = 0.05$  y  $\zeta = 0.10$ , respectivamente, se observa que la dispersión de los resultados del método 2 es prácticamente la misma para todos los valores de  $\eta$  (el coeficiente de variación es cercano a 0.2), cosa que no sucede con los resultados del método 1, para los cuales se tiene mayor dispersión cuando  $\eta = 0.9, 1.0$  y  $1.1$ . Estas observaciones llevan a la conclusión de que para el método 1 no se pueden mezclar las muestras correspondientes a todos los valores de  $\eta$ , ya que los resultados dependen de este parámetro, mientras que para el método 2 podrían mezclarse las que no se refieren a amortiguamiento nulo si se verificara que los valores medios correspondientes a cada  $\eta$  son estadísticamente iguales.

Para lograr dicha verificación, se investigó primero si los resultados del método 2 son independientes del periodo fundamental,  $T_1$ . Con este fin se trazó un juego de figuras del mismo tipo que las figs 10 a 12, que corresponden a  $\eta = 1.0$  con  $\zeta = 0, 0.05$  y  $0.10$ , respectivamente. En la fig 10, que corresponde a  $\zeta = 0$ , se observa que los resultados sí dependen de  $T_1$ , ya que los valores medios son sensiblemente más grandes para periodos mayores de 1.0 seg que para los menores. Por lo contrario, en las figs 11 y 12 se nota que los valores medios son prácticamente independientes de  $T_1$  en el intervalo de periodos estudiado, por lo que las muestras de cada periodo pueden agruparse en una sola (esta conclusión también es válida para los resultados del método 1).

Para verificar estadísticamente la conclusión anterior, se realizó una prueba de hipótesis acerca de si la pendiente de la recta que se ajusta a los datos puede considerarse nula, habiéndose aceptado con 95 por ciento de nivel de confianza.

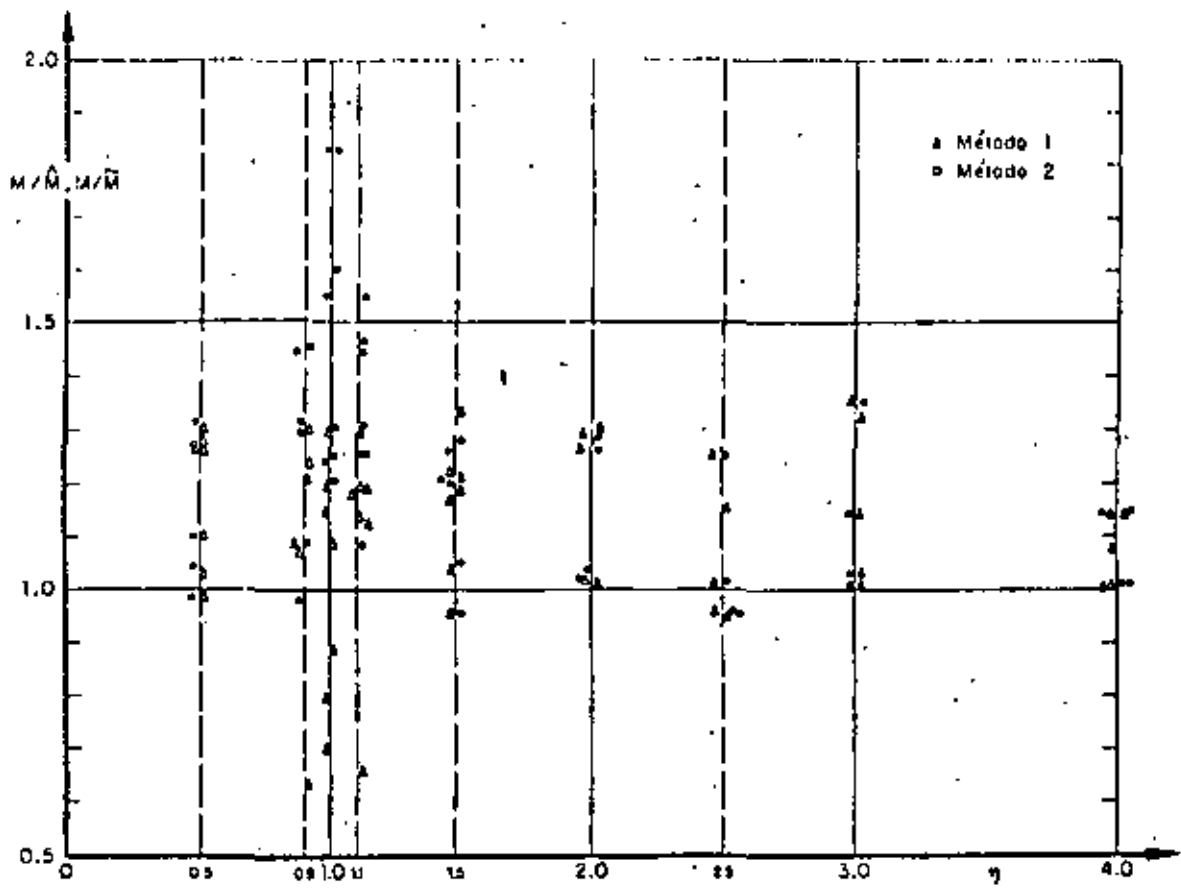


Fig 7. Resultados de los momentos torsionantes para  $T_1 = 2.0$  seg. y  $\zeta = 0$

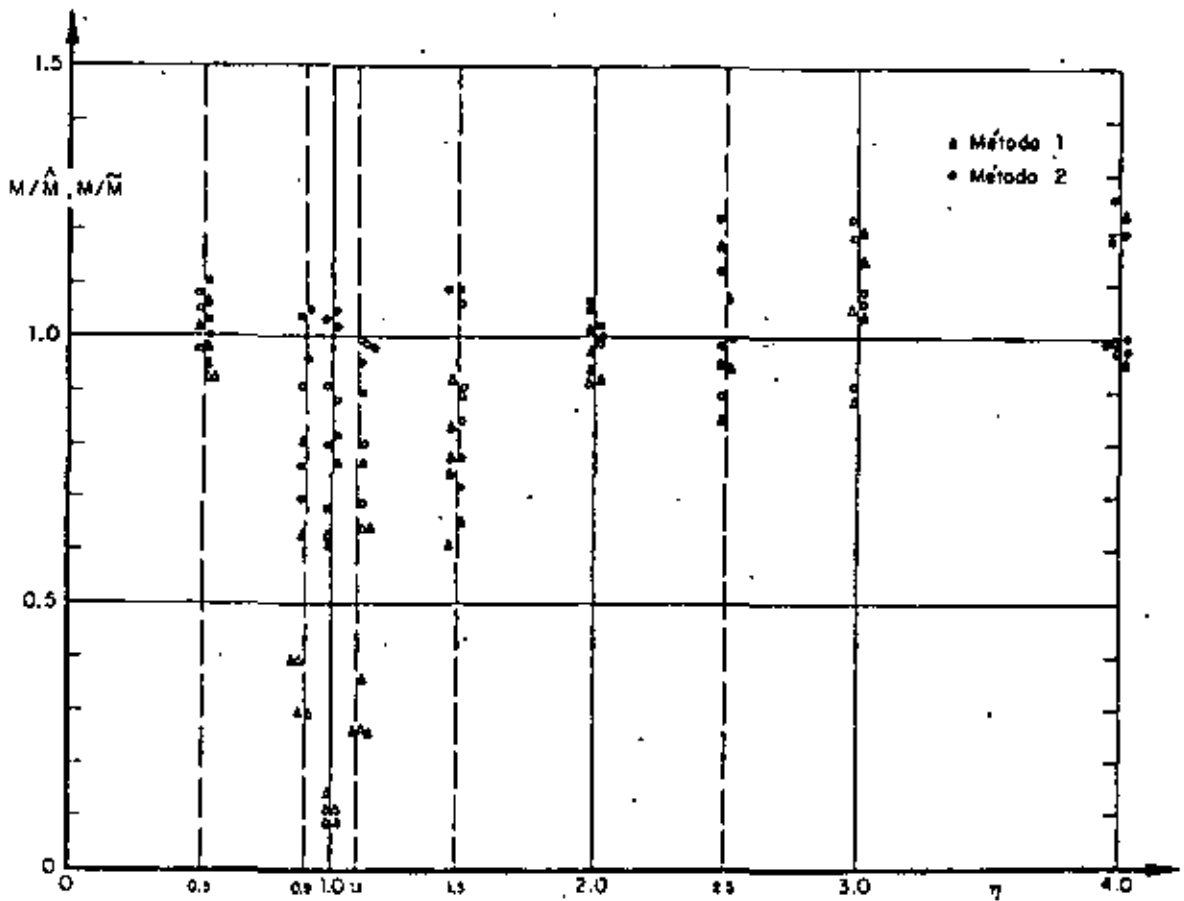


Fig 8. Resultados de los momentos torsionantes para  $T_1 = 2.0$  seg. y  $\zeta = 0.03$



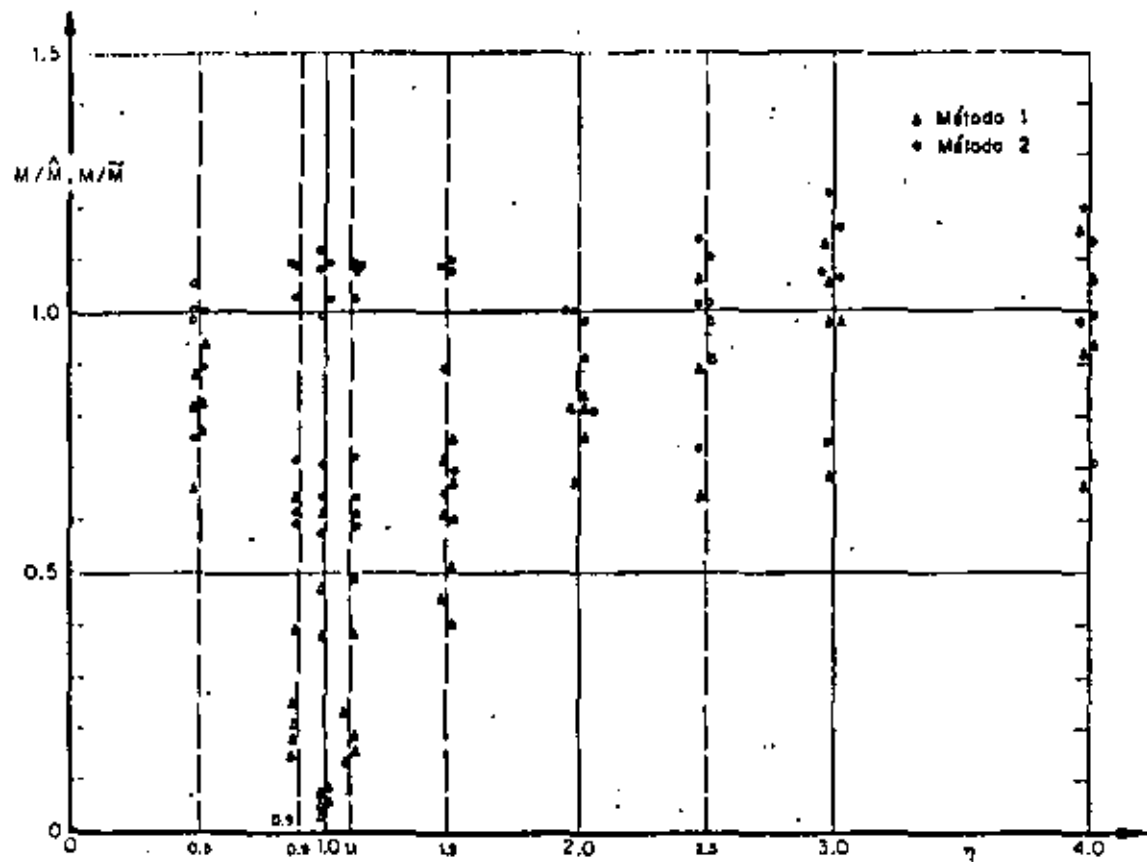


Fig 9. Resultados de los momentos tardanates para  $T_1 = 2.0$  seg, y  $\zeta = 0.10$

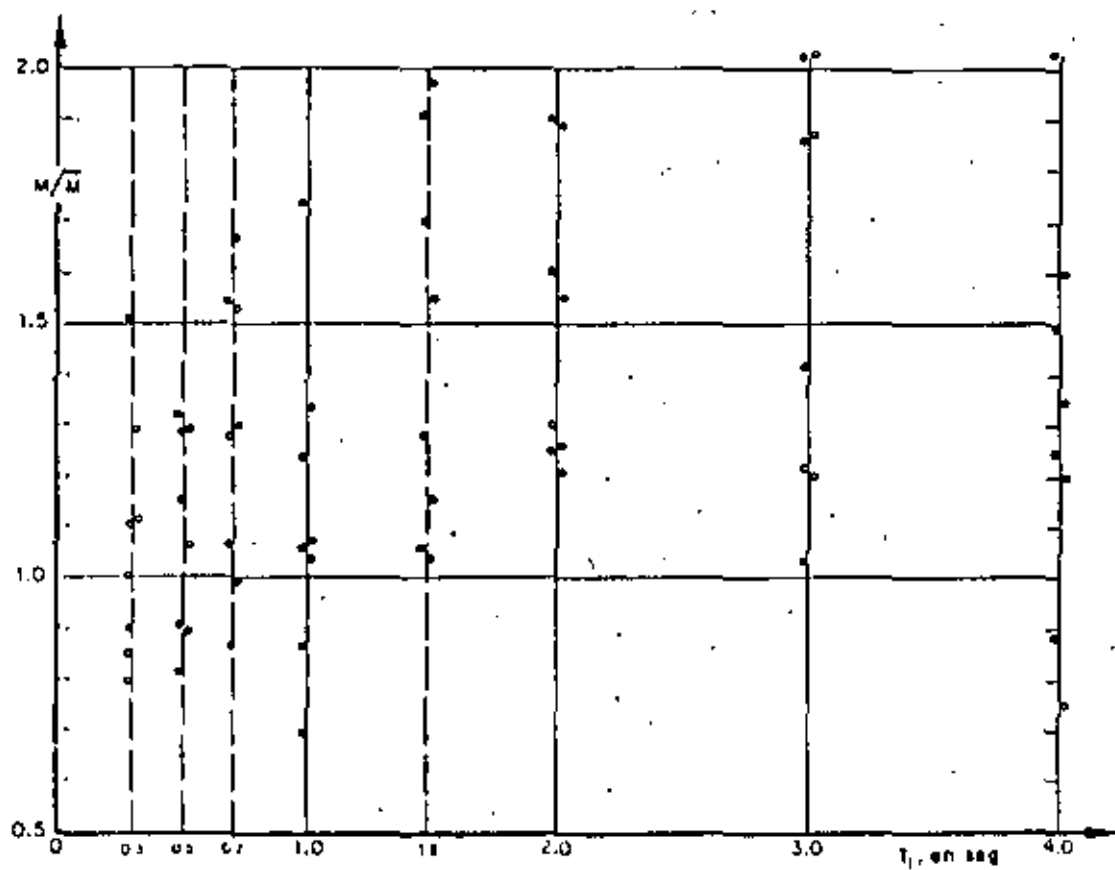


Fig 10. Resultados de los momentos tardanates para  $\eta = 1.0$ , y  $\zeta = 0$ . Método 2

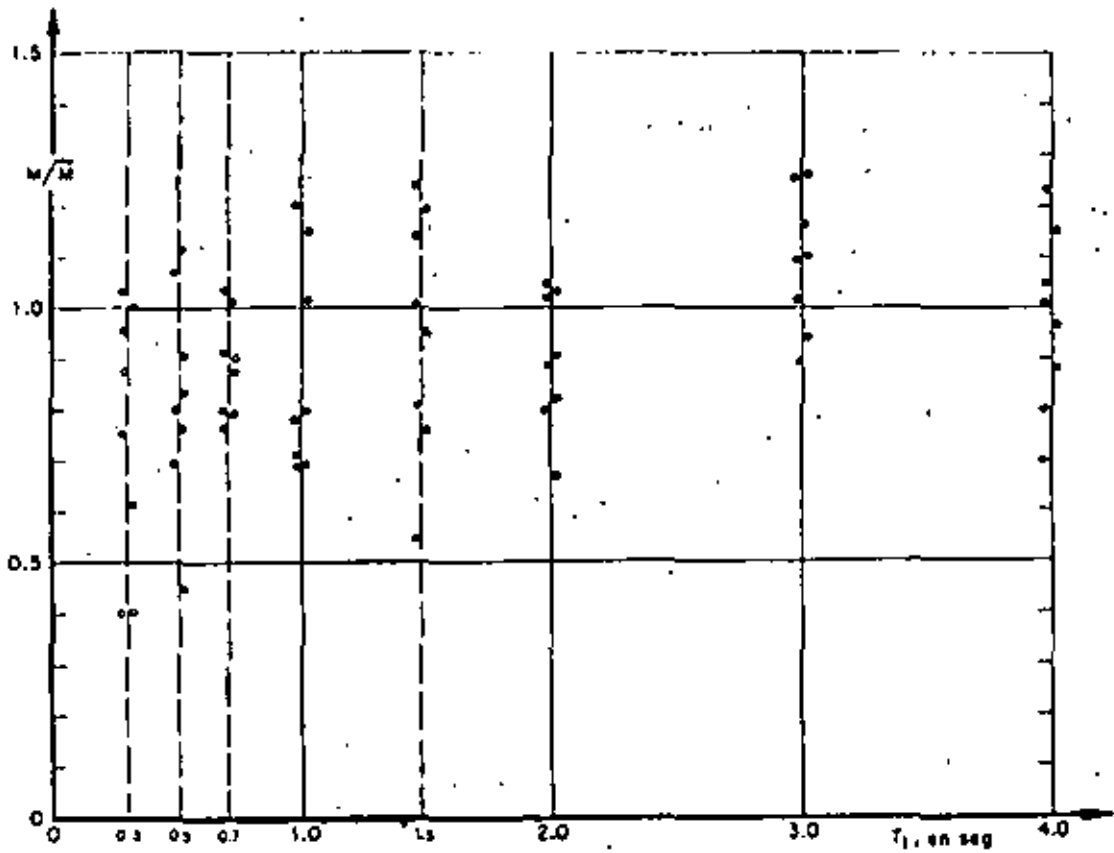


Fig 11. Resultados de los momentos torsionantes para  $\eta = 1.0$ , y  $\zeta = 0.05$ . Método 2

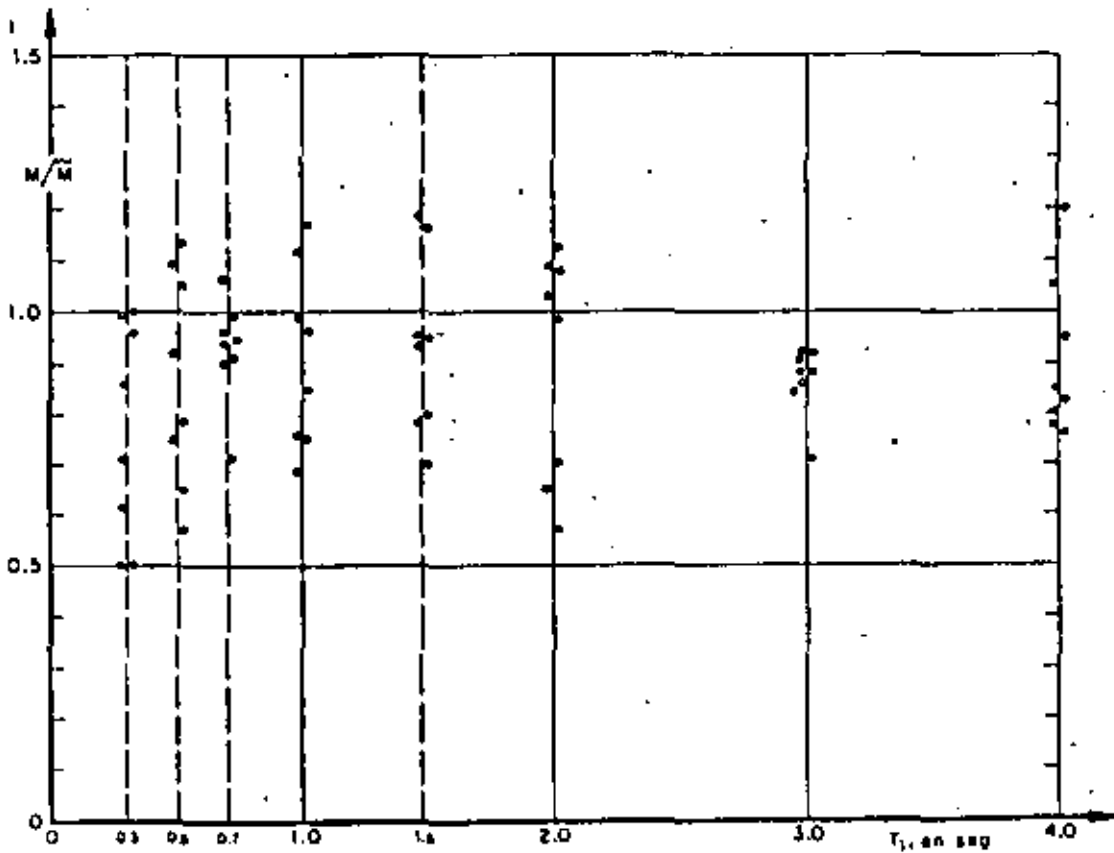


Fig 12. Resultados de los momentos torsionantes para  $\eta = 1.0$ , y  $\zeta = 0.10$ . Método 2

En la fig 13 se presentan en el eje de las ordenadas los promedios,  $(\bar{M}/\bar{M})$  y  $(\bar{M}/\bar{M})$ , de los resultados obtenidos respectivamente con los métodos 1 y 2, considerando que estos son independientes de  $T_1$ ; en el eje de las abscisas se localizan los valores de  $\eta$ . Se observa que, para  $\eta = 0.9, 1.0$  y  $1.1$ , el método 2 sobrestima ligeramente la respuesta media (en 10 por ciento), tendiendo a subestimarla en 5 por ciento conforme los valores de  $\eta$  se alejan de 1.0, cuando  $\zeta = 0.05$  y 0.10

Con objeto de verificar si con el método 2 los resultados son independientes de  $\eta$ , se realizaron pruebas de hipótesis de igualdad de medias, siendo aceptables con 95 por ciento de nivel de confianza. Por lo contrario, los resultados del método 1 no fueron independientes de  $\eta$ , lo cual es obvio, puesto que con  $\zeta = 0.10$  se tiene que el promedio de  $\bar{M}/\bar{M}$  es 0.31 para  $\eta = 1$  (el mínimo valor fue 0.04 y el máximo 0.68), y 0.99 para  $\eta = 4$  (el mínimo fue 0.66 y el máximo 1.28).

En la fig 13 se observa también que los promedios obtenidos con el método 1 se acercan a los exactos conforme  $\eta$  aumenta, presentándose mayores errores para valores de  $\eta$  muy cercanos a 1.0, para el cual las frecuencias naturales de la estructura resultan más

próximas entre sí (ec A.3), lo que trae como consecuencia que en muchas ocasiones las respuestas máximas en ambos modos de vibración ocurran simultáneamente y con signo contrario, por lo que la respuesta combinada máxima es la suma algebraica de ambas respuestas, que da resultados menores que los de la ec A.11.

Otra conclusión inmediata que se obtiene de la fig 13 es que los resultados del método 2 son prácticamente independientes de  $\zeta$  cuando  $\zeta \geq 0.05$  y que el método 1 pierde aproximación conforme aumenta  $\zeta$ , y  $\eta$  se aproxima a 1

De lo anterior se concluye también que en estructuras amortiguadas, que son las de interés práctico, el método 2 proporciona, en promedio, mejores resultados que el método 1, aunque el 2 subestime más y con mayor frecuencia la respuesta máxima. En estructuras no amortiguadas, que únicamente son de interés académico, el método 1 proporciona mejores resultados.

Otro punto importante de discusión es el del cociente de la excentricidad dinámica exacta,  $e_d$ , entre la estática,  $e_s$ . En las figs 14 a 16 se tiene  $\eta$  en el eje de las abscisas, y  $e_d/e_s$  en el eje de las ordenadas.

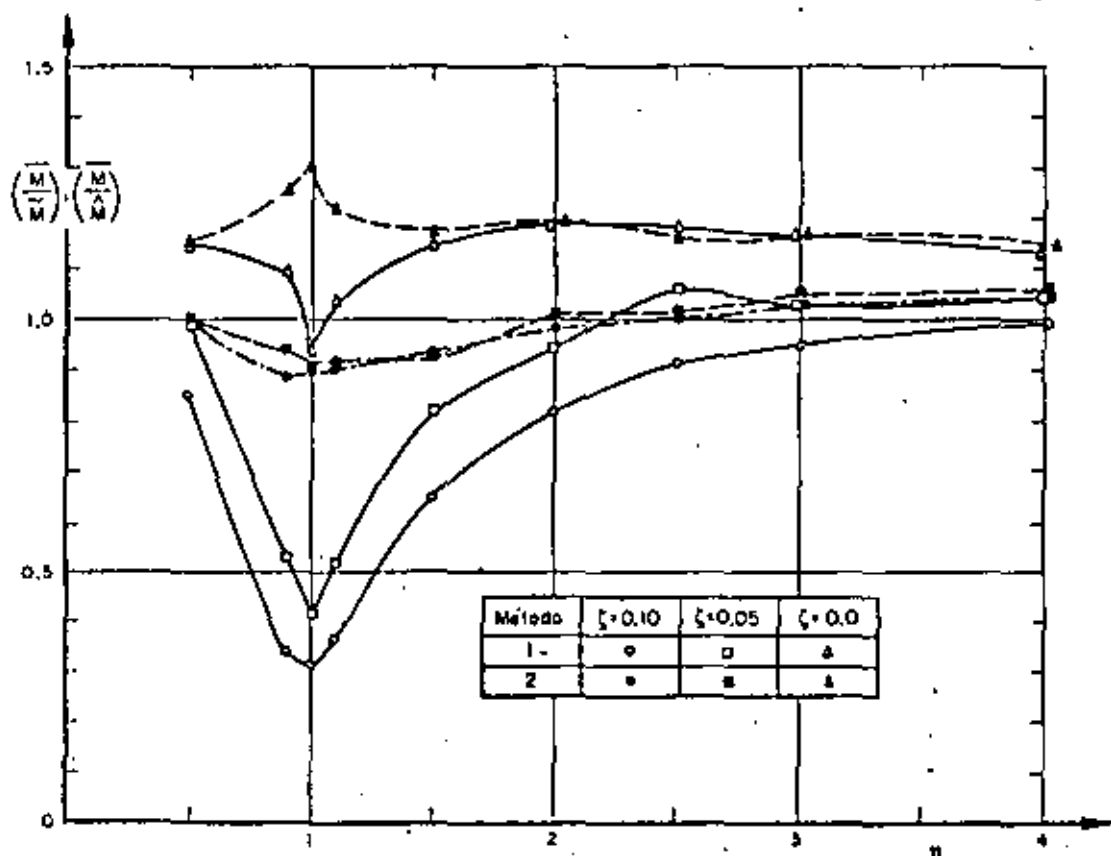


Fig 13. Variación con  $\eta$  de los promedios de los momentos normalizados estimados

Se observa en la fig 14, que corresponde a amortiguamiento nulo, que para  $\eta = 0.9, 1.0$  y  $1.1$  hay una marcada diferencia entre los resultados obtenidos para el caso I con los casos II y III (la de estos últimos entre sí no es tan importante). Así, cuando  $\eta = 1.0$ , en el caso I el promedio de  $e_d/e_s$  fue 38.5 y la desviación estándar 16.6; en el caso II estos parámetros estadísticos valieron 5.4 y 0.6, respectivamente. Para valores de  $\eta$  separados de 1.0 en 0.5 unidades o más hay diferencias menos apreciables entre los resultados de los tres casos. Además,  $e_d/e_s$  disminuye rápidamente conforme  $\eta$  se aleja de 1.0.

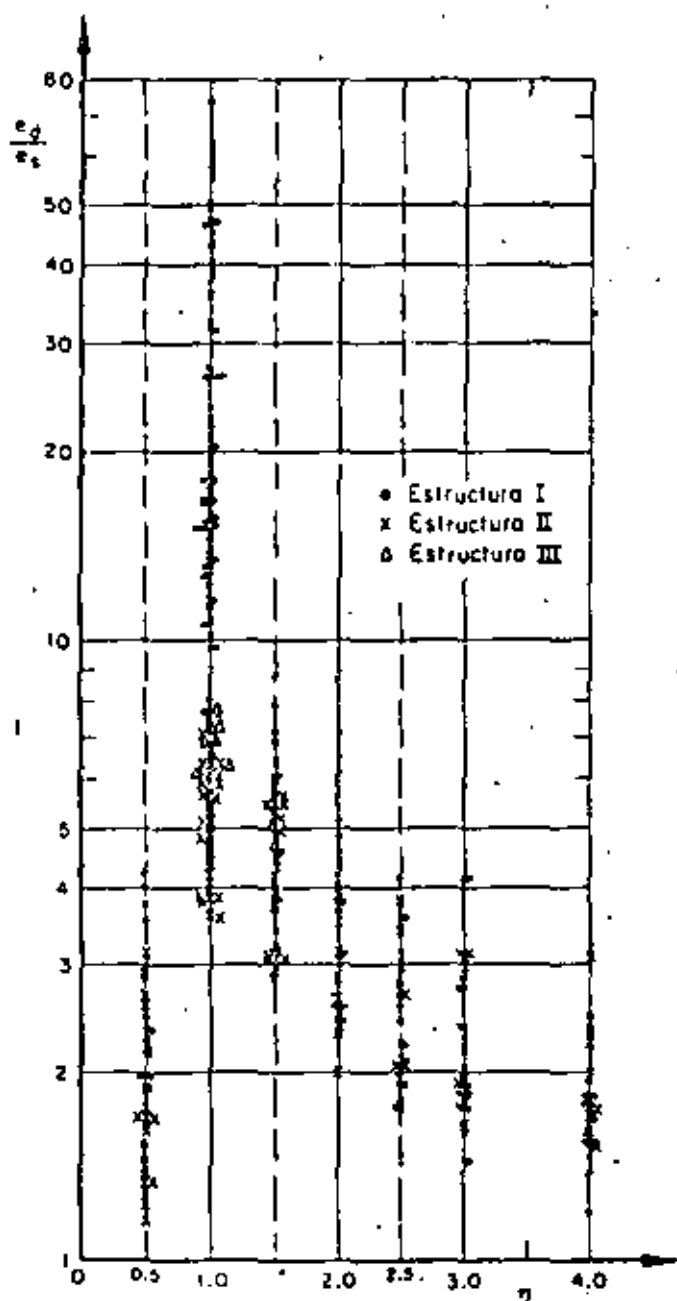


Fig 14. Cocientes  $e_d/e_s$  para  $\zeta = 0$

variación dinámica exacta entre la estática

En las figs 15 y 16, para  $\zeta = 0.05$  y  $0.10$ , respectivamente, casi no hay diferencias entre los resultados de los dos casos, aunque persiste la dependencia respecto a  $\eta$ . Comparando estas tres últimas figuras se nota también que  $e_d/e_s$  disminuye conforme el amortiguamiento aumenta. Así, para  $\zeta = 0.05$  el promedio fue 4.6 y la desviación estándar 1.3, mientras que para  $\zeta = 0.10$ , los valores correspondientes fueron 2.7 y 0.7.

De las figs 15 y 16 se concluye que la disposición del Reglamento de Construcciones del Departamento del Distrito Federal de que se tome  $e_d/e_s = 1.5$  subestima el valor promedio para todos los valores de  $\eta$  mayores de 0.5 y menores de 4.0 (aquí se omitió el término  $\pm 0.05b$  que se agrega a 1.5 en la disposición del Reglamento, porque dicho término tiene como finalidad prevenir excentricidades accidentales ocasionadas por variaciones imprevisibles de masas y rigideces y posibles excitaciones torsionales).

Con objeto de estimar probabilidades de eventos relacionados con los momentos torsionantes, se trazaron en papel de probabilidades los datos de frecuencias acumuladas correspondientes a diferentes casos. Las distribuciones de probabilidades empleadas fueron la logarítmica normal, la extrema tipo II y la normal, de las cuales, por apreciación visual, se consideró que esta última daba en general mejores resultados (figs 17 a 19).

Para verificar que las poblaciones bajo estudio tienen distribuciones normales, se realizaron pruebas de hipótesis estadísticas con un 95 por ciento de nivel de confianza.

Los resultados fueron:

#### Método 1

(Con resultados de  $\eta = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$  y  $4.0$  mezclados; fig 17)

$\zeta = 0$ : se rechaza la hipótesis nula de que la distribución es normal con media 1.16 y desviación estándar 0.12 (esta hipótesis se rechaza también con un 99 por ciento de nivel de confianza)

$\zeta = 0.05$  y  $\zeta = 0.10$ : se aceptan las hipótesis nulas de que las distribuciones son normales con medias 0.96 y 0.85, y desviaciones estándar 0.15 y 0.17, respectivamente.

#### Método 2

(Con resultados de  $\eta = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$  y  $4.0$  mezclados; fig 18)

$\zeta = 0, 0.05$  y  $0.10$ : se aceptan las hipótesis de que las distribuciones son normales con medias 1.15, 1.06 y 1.00, y desviaciones estándar 0.15, 0.15 y 0.15, respectivamente. Para  $\zeta = 0.05$ , la hipótesis se acepta con 99 por ciento de nivel de confianza; las otras con 45 por ciento.

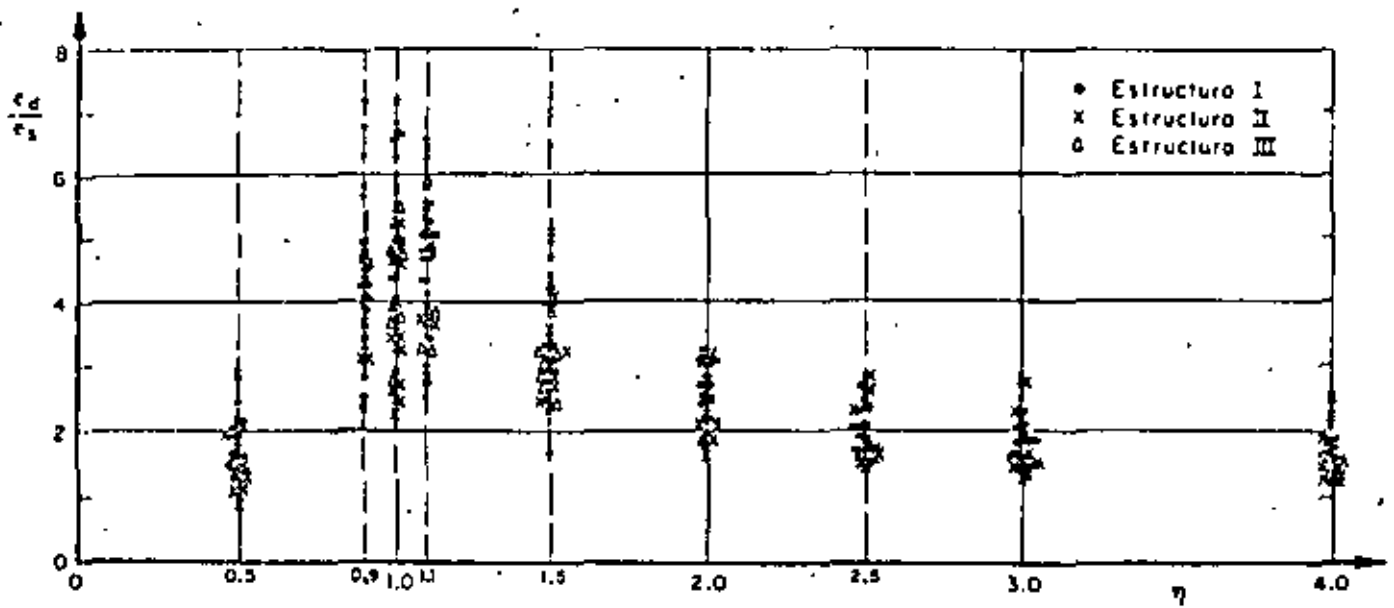


Fig 15. Cocientes de la excentricidad dinámica exacta entre la estática, para  $\zeta = 0.05$

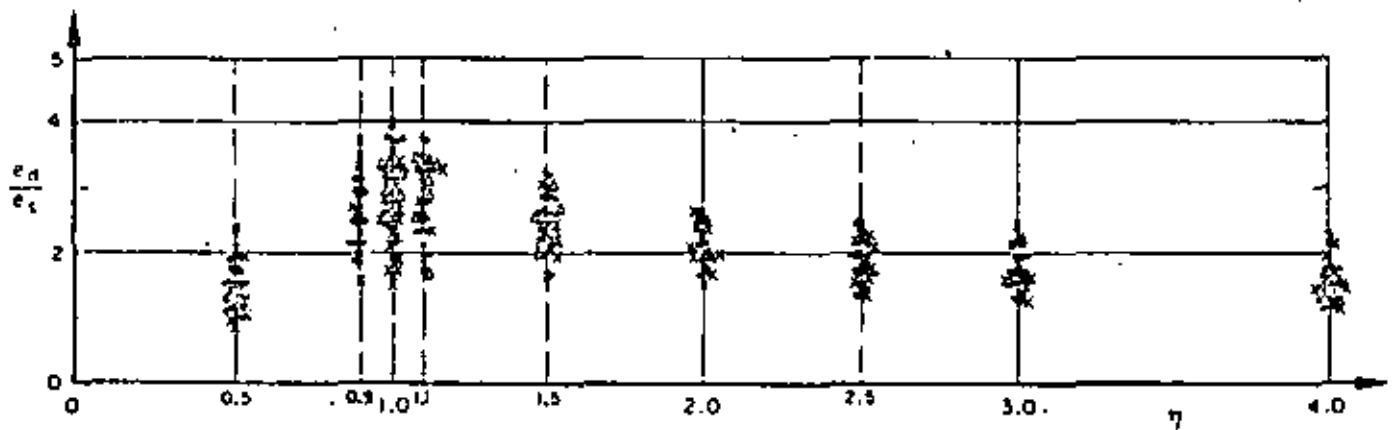


Fig 16. Cocientes de la excentricidad dinámica exacta entre la estática, para  $\zeta = 0.10$

Además, para  $\zeta = 0.10$  se estudió el caso en que se mezclaron los resultados de  $\eta = 1$  y  $\eta = 1.1$  (fig 19), obteniéndose una distribución normal con media 0.88 y desviación estándar 0.17. También se mezclaron los resultados de los valores de  $\eta$  de 1 a 4, para los cuales se obtuvo una distribución de igual tipo con media 0.95 y desviación estándar 0.16. Ambas hipótesis fueron aceptables, pero con 97.5 por ciento de nivel de confianza.

En todos los casos descritos en que se acepta la hipótesis nula, se observa que la desviación estándar es muy semejante, ya que varía de 0.15 a 0.17, mientras que la media va de 0.86 a 1.15.

### 2.1.2 Fuerza cortante

Los resultados obtenidos con los métodos 1 y 2, correspondientes a  $\eta = 1.0$  y  $\zeta = 0$ , se muestran en la fig 20. En el eje de las abscisas se tienen los periodos

fundamentales,  $T_1$ , y en el de las ordenadas las fuerzas cortantes normalizadas,  $V/\bar{V}$  y  $\bar{V}/\bar{V}$ , obtenidas al dividir las fuerzas cortantes,  $V$ , calculadas mediante análisis modal entre las estimadas con los métodos 1 y 2,  $\bar{V}$  y  $\bar{V}$ , respectivamente.

De la fig 20 y otras similares se concluyó que las fuerzas cortantes normalizadas obtenidas con ambos métodos son independientes del periodo fundamental,  $T_1$ , con 95 por ciento de nivel de confianza. Además, para valores de  $\eta$  menores de 0.9 y mayores de 1.1, los resultados fueron independientes de los parámetros  $A$ ,  $b$  y  $c$ , con errores de  $\pm 5$  por ciento. Esta independencia también se obtuvo para el método 2, inclusive cuando  $\eta = 0.9$ , 1.0 y 1.1, con errores máximos de 40 por ciento en defecto y 20 por ciento en exceso para  $\zeta = 0$ , tendiendo a reducirse conforme aumenta el amortiguamiento, así, para  $\zeta = 0.05$ , se obtuvieron errores máximos de  $\pm 20$  por ciento, y para  $\zeta = 0.10$  de  $\pm 10$  por ciento.

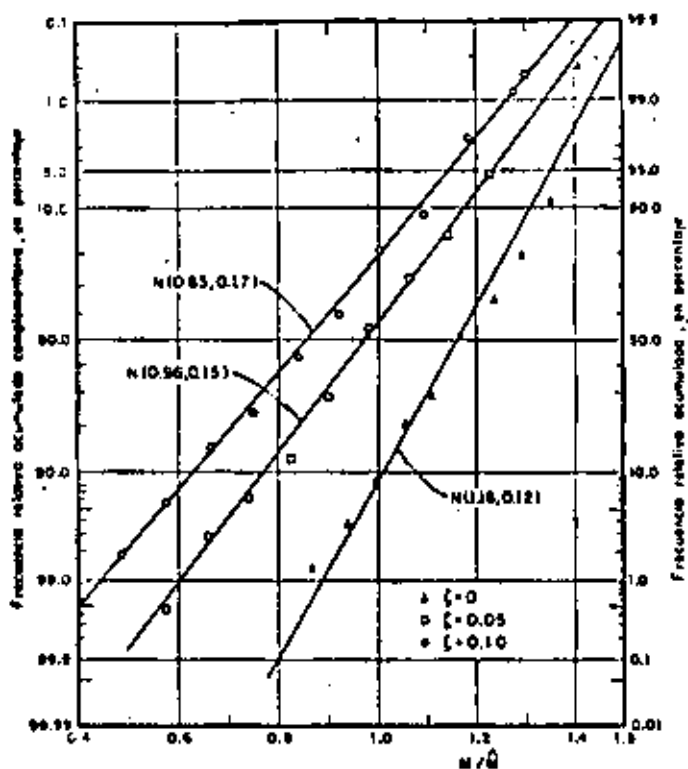


Fig 17. Resultados de los momentos torsionantes para  $\eta = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$  y  $4.0$  mezclados. Papel de probabilidades normal, método 1

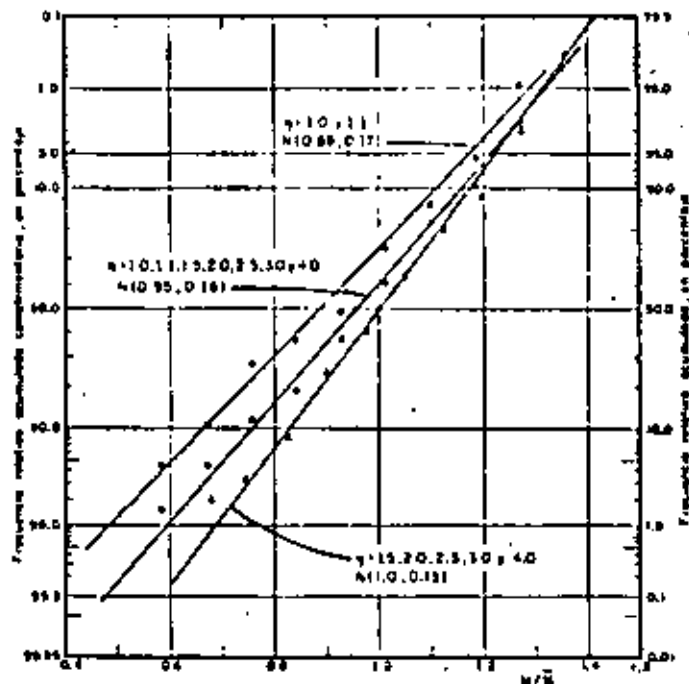


Fig 19. Resultados del método 2 para  $\zeta = 0.10$

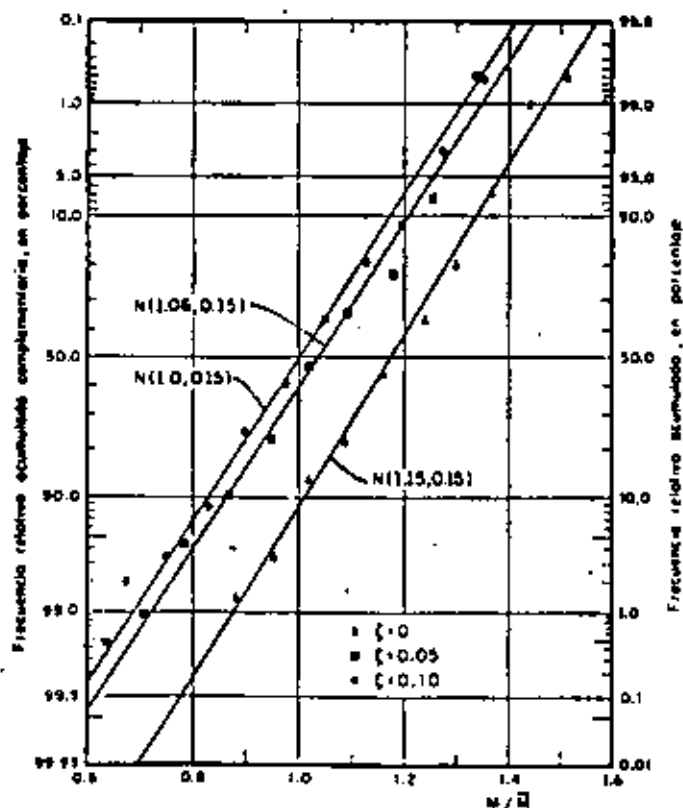


Fig 18. Resultados de los momentos torsionantes para  $\eta = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$  y  $4.0$  mezclados. Papel de probabilidades normal, método 2

Para el método 1, con  $\eta = 1.0$ , los errores máximos fueron: 41 por ciento en defecto para la estructuración del caso I y 32 por ciento en defecto en los casos II y III. Los errores medios respectivos fueron 36 y 15 por ciento, ambos en defecto. Para  $\eta = 1.1$ , la estructuración del caso I tuvo errores máximos de  $\pm 5$  por ciento, y las tipo II y III, 38 por ciento en defecto y 11 por ciento en exceso.

Respecto al amortiguamiento, se concluyó que las fuerzas cortantes normalizadas son prácticamente independientes de este; así, para  $\eta = 1$ , los promedios globales de los métodos 1 y 2 fueron 1.23 y 1.11, respectivamente, para  $\zeta = 0$ ; para  $\zeta = 0.05$  de 1.30 y 1.02, y para  $\zeta = 0.10$  de 1.30 y 1.0.

Como puede apreciarse mediante los promedios citados en el párrafo anterior, los resultados que se obtienen con el método 2 son mejores que los del 1 cuando  $\eta = 1.0$ . Una conclusión semejante se obtuvo cuando  $\eta = 0.9$  y  $1.1$ , aunque las diferencias se redujeron en un 10 por ciento. Para valores de  $\eta$  fuera del intervalo  $0.9 \leq \eta \leq 1.1$ , los resultados de ambos métodos fueron prácticamente iguales.

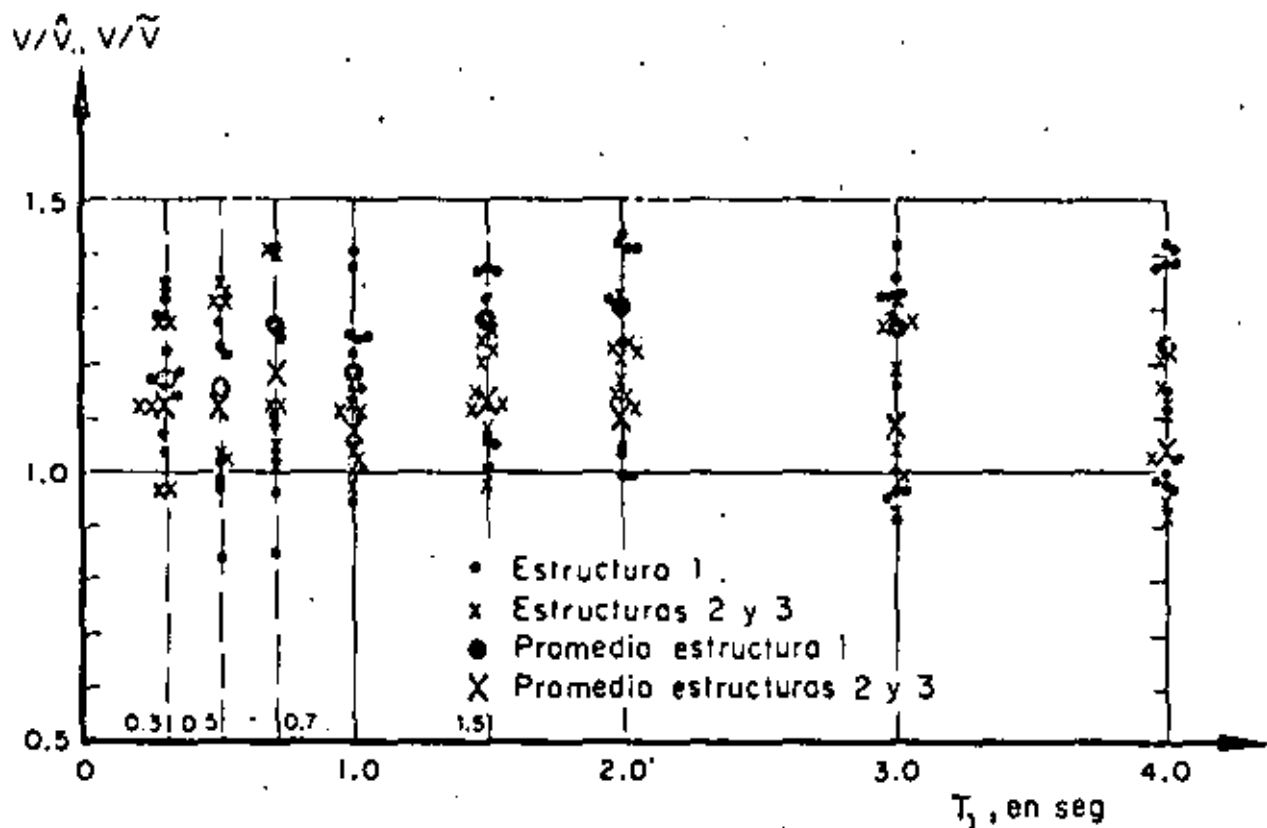


Fig. 20. Fuerzas cortantes normalizadas estimadas con los métodos 1 y 2, para  $\eta_c = 1.0$  y  $\xi = 0$

## 2.2 Resultados del problema de cabeceo (caso 2)

Los parámetros que se escogieron para estudiar el problema de cabeceo fueron:

- $m$  masa total
- $L$  distancia del suelo al centro de gravedad
- $T_1$  periodo fundamental
- $\xi$  fracción de amortiguamiento respecto al crítico en ambos modos de vibración
- $\eta_c$  cociente de la frecuencia angular entre la lineal

Los valores que se asignaron a  $T_1$  fueron 0.3, 0.7, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0 y 4.0 seg; a  $\xi$ , 0, 0.05 y 0.10, y a  $\eta_c$ , 0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0 y 4.0. En cuanto a  $m$  y  $L$ , únicamente se usaron 2.0 ton  $\text{seg}^2/\text{m}$  y 4 m, respectivamente, ya que por los resultados (fuerzas y momentos normalizados) que se obtuvieron con estas combinaciones se juzgó innecesario el uso de otros valores; por la misma razón se emplearon únicamente tres de los sísmos del problema de torsión.

En este problema, igual que en el de torsión, no hubo diferencias apreciables entre los resultados obtenidos en los tres sísmos que se emplearon como excitación, por lo cual se agruparon los resultados en una sola muestra. Además, tanto las fuerzas cortantes como

los momentos de cabeceo máximos normalizados fueron estadísticamente independientes del periodo fundamental,  $T_1$ , con nivel de confianza de 95 por ciento.

Otra conclusión interesante es que los resultados obtenidos con los métodos 1 y 2 (Apéndice) son prácticamente iguales, con diferencias máximas entre ellos de 5 por ciento. Esto se debe a que los valores de  $\epsilon_1^2$  (ec. 1.3) son grandes porque las frecuencias de vibración no resultan con valores muy cercanos entre sí, aun cuando se usaron  $\eta_c$  muy pequeñas, de manera que el radical de la ec. A.17 fuera también pequeño y, por tanto, que las diferencias entre las dos frecuencias fundamentales fueran mínimas. Esto hace que los términos que contienen a  $\epsilon_1^2$  en las ecs. A.24 y A.25 resulten muy pequeños y que estas ecuaciones sean casi iguales a las ecs. A.22 y A.23, respectivamente.

Aprovechando las conclusiones anteriores, se acumularon las muestras correspondientes a todos los periodos fundamentales, y para cada amortiguamiento se elaboraron dos gráficas: una de fuerzas cortantes y otra de momentos de cabeceo normalizados, empleando únicamente los resultados del método 2. En ellas, el eje de las abscisas representó a  $\eta_c$ , y el de las ordenadas a los cocientes  $V/\bar{V}$  o  $M/\bar{M}$ , donde  $V$  y  $M$  representan la fuerza cortante y el momento de cabeceo exactos, y  $\bar{V}$  y  $\bar{M}$  los mismos elementos medidos con el método 2.

Debido a que las conclusiones obtenidas de esas gráficas son prácticamente las mismas, en este trabajo solo se reproduce la correspondiente a las fuerzas cortantes con  $\xi = 0.10$  (fig 21). Dichas conclusiones fueron, además de las mencionadas, las siguientes:

- Los resultados son estadísticamente independientes de  $\eta$  con 95 por ciento de nivel de confianza, cuando  $\xi \geq 0.05$
- La respuesta normalizada se subestima con mayor frecuencia que lo que se sobrestima, en proporción de 2 a 1
- El error máximo en defecto fue 29 por ciento, y en exceso, 22 por ciento
- El promedio global de los resultados con  $\xi \geq .05$  es 1.05, y el coeficiente de variación, 10 por ciento

- Los resultados varían ligeramente al introducir amortiguamiento a la estructura; se hace notar que para  $\xi = 0$ , la respuesta normalizada promedio se subestima aproximadamente en 10 por ciento más que con  $\xi = 0.05$  y 0.10 (fig 22). En estos dos últimos casos no se aprecia diferencia significativa en los promedios de las respuestas ni en las dispersiones. Así, los errores máximos que se tuvieron para  $\xi = 0.05$  alcanzaron 31 por ciento en defecto y 19 por ciento en exceso; en cuanto a  $\xi = 0.10$  fueron, respectivamente, 27 y 21 por ciento

- Dado que existe gran incertidumbre en otros factores del diseño sísmico, tales como magnitud del sismo de diseño (o en las amplitudes del espectro de diseño), contenido de frecuencias, duración y variación temporal del mismo, se puede concluir que las estimaciones obtenidas con los dos métodos son, en promedio, satisfactorias en este tipo de estructuras.

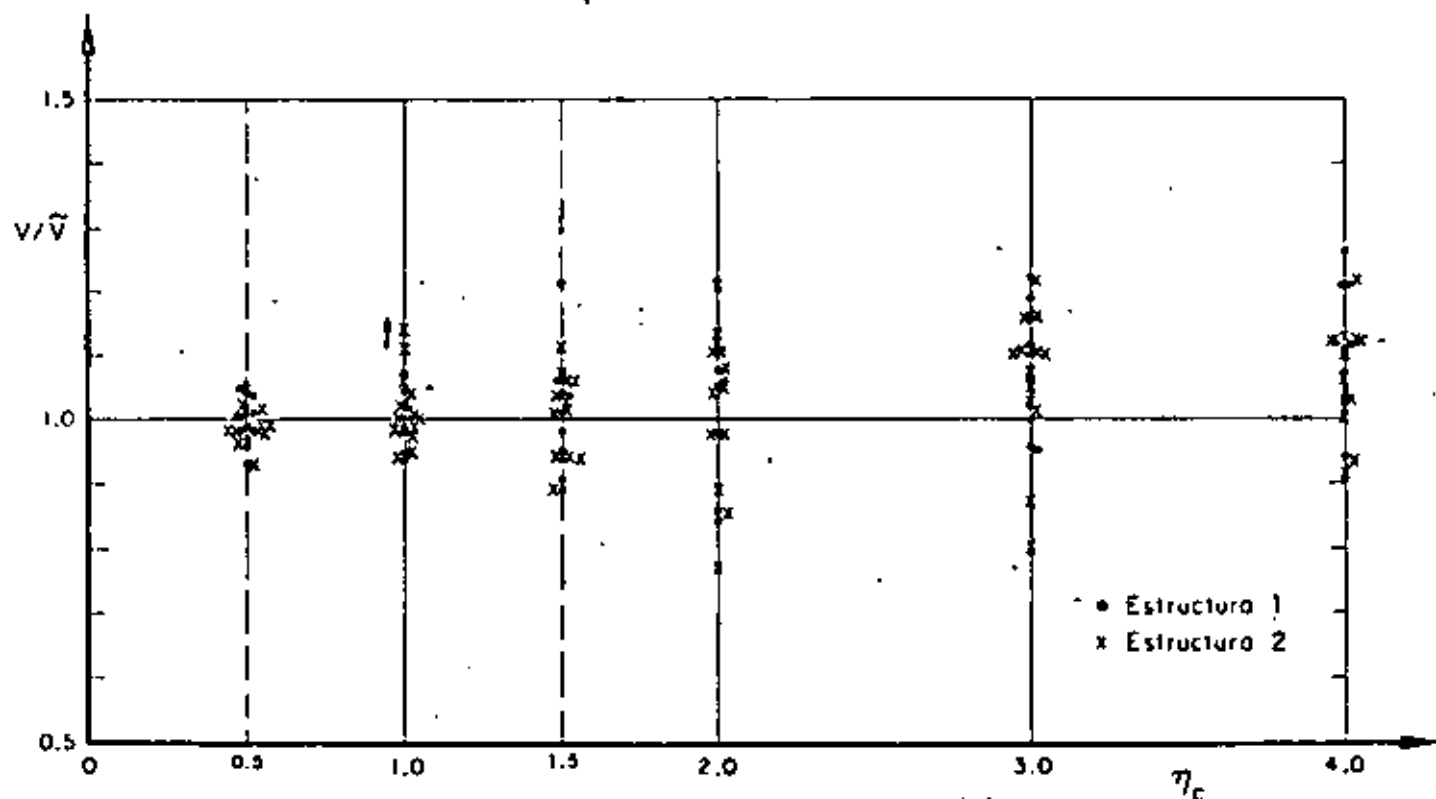


Fig 21. Fuerzas cortantes normalizadas estimadas con el método 2, para  $\xi = 0.10$ . Problema de cabecero



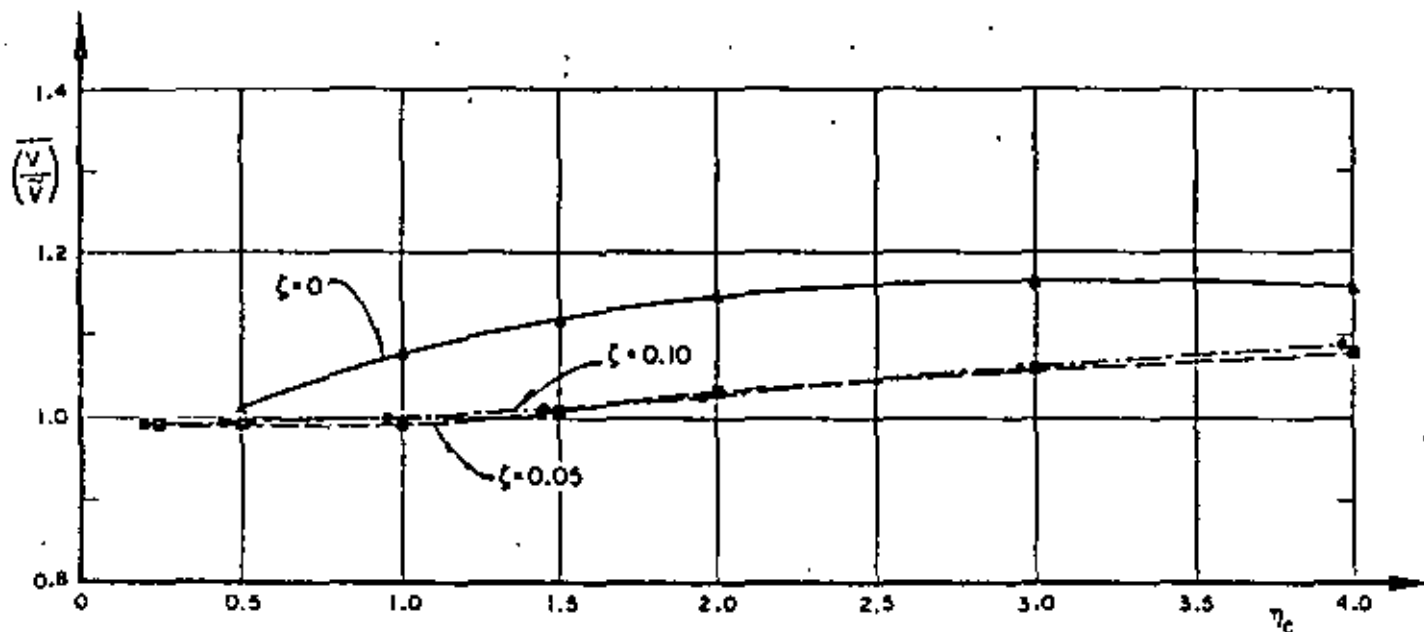


Fig. 22. Variación con  $\eta_c$  de los promedios de las fuerzas cortantes estimadas con el método 2. Problema de cabeceo

### 2.3 Resultados del problema de traslación (caso 3)

Para estudiar este problema se escogieron como parámetros:

$$\eta_1 = (k_2/m_2)/(k_1/m_1)$$

$T_1$  periodo fundamental

$\zeta$  fracción de amortiguamiento respecto al crítico en ambos modos de vibración

$m_2/m_1$  relación de masas

Los valores que se asignaron a  $\eta_1$  fueron 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 1.5 y 3; a  $T_1$ , 0.3, 1.0 y 4.0 seg; a  $\zeta$ , 0, 0.05 y 0.10; y a  $m_2/m_1$ , 0.5, 1.0 y 2.0

Los resultados se analizaron mediante gráficas con  $\eta_1$  o  $T_1$  en el eje de las abscisas, y cocientes de las fuerzas cortantes exactas entre las estimadas en el eje de las ordenadas (fuerzas cortantes normalizadas). Debido a que los resultados no difirieron mucho de los de cabeceo, se empleó únicamente un mismo como excitación. Las conclusiones a que se llegó son:

- Las estimaciones que se obtienen con los métodos 1 y 2 son prácticamente iguales, debido a que los valores de las frecuencias de vibración no resultan muy cercanas entre sí en cada caso, lo cual hace que las  $\epsilon_{1,2}^2$  (ec 1.3) resulten grandes y, por tanto, que el término de las ecs A.36 y A.37 que las incluye sea muy pequeño, en cuyo caso las ecs A.34 y A.35 son iguales a las ecs A.36 y A.37, respectivamente. Lo se observó aun cuando se estudiaron casos adicionales de  $m_2/m_1$  y  $\eta_1$ , para los cuales el radical de la ec. A.29 fue mínimo, con lo cual hubo las dife-

rencias mínimas posibles entre las dos frecuencias fundamentales y, por tanto, los valores más pequeños de  $\epsilon_{1,2}^2$ . Esto ocurre cuando

$$\eta_1 = \frac{1 - m_2/m_1}{(1 + m_2/m_1)^2}, \text{ si } m_2/m_1 < 1$$

Dichos casos adicionales fueron:  $m_2/m_1 = 0.2$  con  $\eta_1 = 0.555$ ;  $m_2/m_1 = 0.5$  con  $\eta_1 = 0.222$ , y  $m_2/m_1 = 0.8$  con  $\eta_1 = 0.062$ . En estos, la diferencia máxima que se obtuvo entre los resultados de los dos métodos fue de 13 por ciento, siendo mejores los del método 2

- Las estimaciones normalizadas son estadísticamente independientes del periodo fundamental,  $T_1$ , con nivel de confianza de 95 por ciento
- En la fig 23 se observa que las estimaciones de  $V_1$  y  $V_2$  tienen, en promedio, errores muy parecidos, por lo que en las conclusiones no es necesario hacer distinciones entre ellas
- La respuesta se sobrestima solamente en 30 por ciento de los casos. El error máximo en exceso que se observó fue 46 por ciento, y en defecto 41 por ciento. El coeficiente de variación para  $\zeta = 0.10$  alcanzó 12 por ciento
- En la fig 24 se observa que los promedios de las estimaciones con  $\zeta = 0.05$  y 0.10 son mayores que las que corresponden a  $\zeta = 0$ , lo cual hace pensar que las conclusiones obtenidas en la ref 5 respecto a  $\zeta = 0$  no pueden generalizarse para  $\zeta > 0$

— Los promedios globales de las fuerzas cortantes normalizadas fueron, para  $\xi = 0, 1, 15$ ; para  $\xi = 0.05, 1.04$ , y en cuanto a  $\xi = 0.10, 1.04$ . Además, se observa que respecto a  $\xi = 0.05$  y  $0.10$ , los resultados son muy similares, es decir, son independientes de  $\xi$  si  $\xi \geq 0.05$

— Las medias de los resultados normalizados son estadísticamente independientes de la relación de masas,  $m_2/m_1$ , con un nivel de confianza de 95 por ciento, pero los casos especiales de  $m_2/m_1$  y  $\eta_1$  indicados anteriormente tuvieron mayor dispersión

— Para  $\xi = 0.05$  y  $0.10$ , las estimaciones normalizadas son estadísticamente independientes de  $\eta_1$ , con un nivel de confianza de 95 por ciento, como puede apreciarse en la fig 24 en la que aparecen únicamente los resultados del método 2. Para  $\xi = 0$  esta hipótesis no se aceptó

— Por la misma razón indicada en el último párrafo de conclusiones del problema de cabeceo, las estimaciones obtenidas con ambos métodos son en promedio satisfactorias en este tipo de estructuras

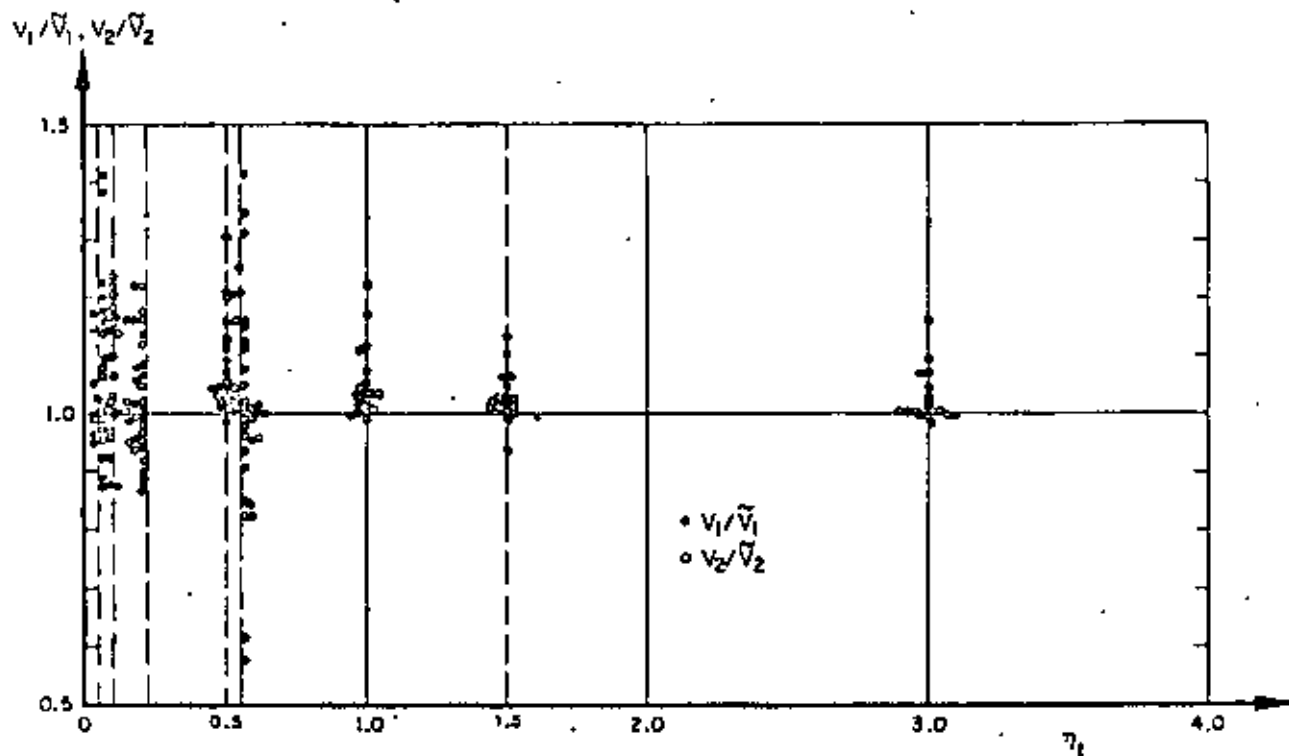


Fig 23. Fuerzas cortantes estimadas con el método 2, para  $\xi = 0.10$ . Problema de tracción

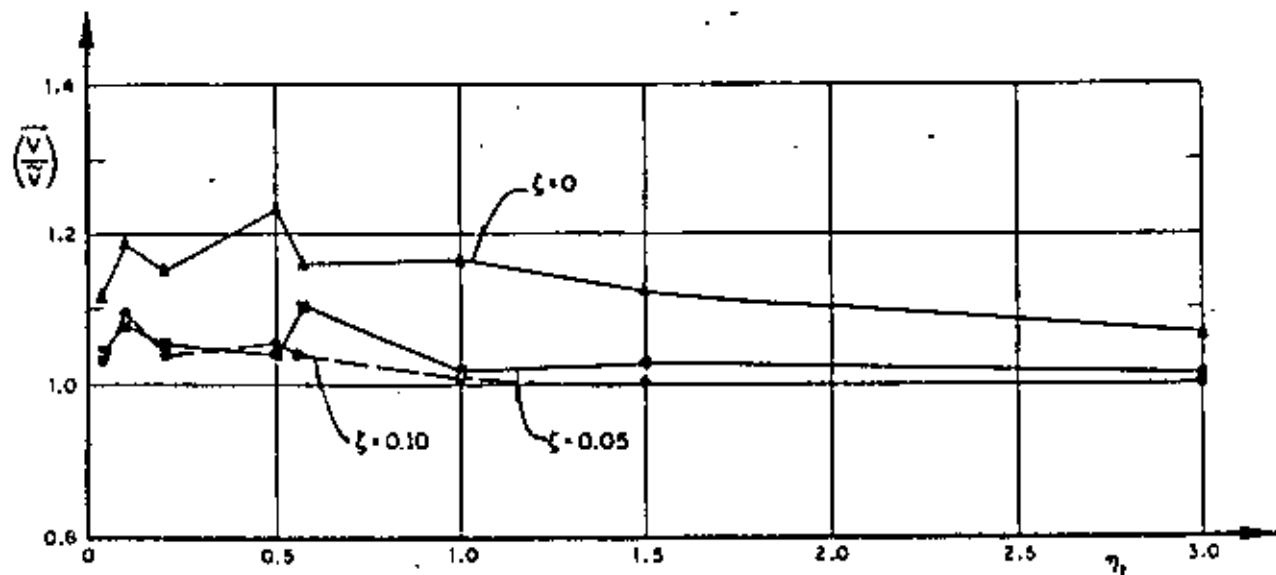


Fig 24. Variación con  $\eta_1$  de los promedios de las fuerzas cortantes estimadas con el método 2. Problema de tracción

### 3. CONCLUSIONES

El resumen de las conclusiones obtenidas de los tres problemas estudiados es:

En cabeceo y traslación:

— En promedio las estimaciones normalizadas de las respuestas máximas logradas con los métodos 1 y 2 son satisfactorias y prácticamente iguales; esto último debido a que  $\epsilon_{1,2}^2 \gg 0$

— La respuesta se subestimó con mayor frecuencia que lo que se sobrestimó, reduciéndose el error al considerar amortiguamiento en la estructura. Además, los valores exactos divididos entre los estimados fueron estadísticamente independientes de  $T_1$  y  $\eta_c$  o  $\eta_1$ , así como del tipo de respuesta que se trató (momento de cabeceo o fuerza cortante)

En torsión:

— Las conclusiones sí difieren al tomar en cuenta el momento torsionante o la fuerza cortante. Además, debido a que en algunos casos  $\epsilon_{1,2}^2$  es pequeña, los dos métodos dan resultados diferentes

— Las estimaciones del momento torsionante al considerar amortiguamiento estructural nulo dependen en gran medida de la relación de frecuencias,  $\eta$ . Además, estos difieren al usar el método 1 o el 2, siendo más aproximados los del 1 para valores de  $\eta$  comprendidos en el intervalo  $0.5 < \eta < 1.5$  o muy parecidos fuera de él

— Para los tres amortiguamientos estudiados, los resultados del método 2 son estadísticamente independientes de  $\eta$ , no así los del 1; son mejores los del método 2 cuando  $\xi = 0.05$  y  $0.10$

— Cuando se tenga  $0.5 < \eta < 2$ , se recomienda usar el método 2; en los demás casos es indistinto el empleo de cualquiera de los dos métodos

— La relación de excentricidad dinámica a excentricidad estática se subestima en las disposiciones del Reglamento de Construcciones del Distrito Federal, siendo esto más cuando el valor de  $\eta$  queda comprendido entre 0.8 y 2. En particular, para  $0.9 < \eta < 1.1$  esta relación vale, en promedio, 4.6 para  $\xi = 0.05$  y 2.7 para  $\xi = 0.10$ . De lo anterior se concluye que es necesario realizar estudios exhaustivos sobre este aspecto, considerando vibración torsional en estructuras de varios pisos y con comportamiento inelástico

— Las distribuciones de probabilidades del cociente del valor exacto sobre el estimado son normales con desviación estándar cercana a 0.16 y media comprendida en el intervalo  $1 \pm 0.12$  (fig 19)

### APENDICE

#### A.1 ANALISIS DINAMICO DE UNA ESTRUCTURA SUJETA A TORSION

La fig A.1 representa un edificio de un piso, de forma arbitraria, con la línea del centro de torsión (CT) al centro de gravedad (CG) perpendicular a la dirección del sismo considerado.

En dicha figura se tiene que

- $m$  masa total del sistema
- $J$  momento polar de masa respecto al centro de gravedad
- $L_1$  rigidez torsional respecto al centro de torsión
- $K$  rigidez lineal en la dirección del movimiento
- $e_s$  excentricidad estática
- $b$  dimensión de la estructura en dirección  $Y$
- $c = e_s/b$

Considerando que la rigidez torsional respecto al centro de gravedad es

$$L = L_1 + K e_s^2$$

y aplicando el principio de D'Alembert para obtener las ecuaciones de equilibrio del sistema en vibraciones libres, se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden (ref 8)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + K(x - e_s \phi) &= 0 \\ J\ddot{\phi} + L\phi - K e_s x &= 0 \end{aligned} \quad (A.1)$$

Sustituyendo en la ec A.1 a  $\ddot{x} = -\omega^2 x$  y  $\ddot{\phi} = -\omega^2 \phi$  (por ser vibraciones libres), donde  $\omega$  es la frecuencia circular natural del sistema, y resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas resultante, se obtiene la ecuación característica:

$$\lambda^4 - \lambda^2(1 + \eta) + \eta - c^2/j^2 = 0 \quad (A.2)$$

donde  $\lambda^2 = \omega^2/(k/m)$ ,  $j^2 = J/(mb^2)$  y  $\eta = (L/J)/(K/m)$ . Las raíces de la ec A.2 son

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{\eta + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\eta - 1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}} \quad (A.3)$$

mientras que los vectores de las configuraciones modales son

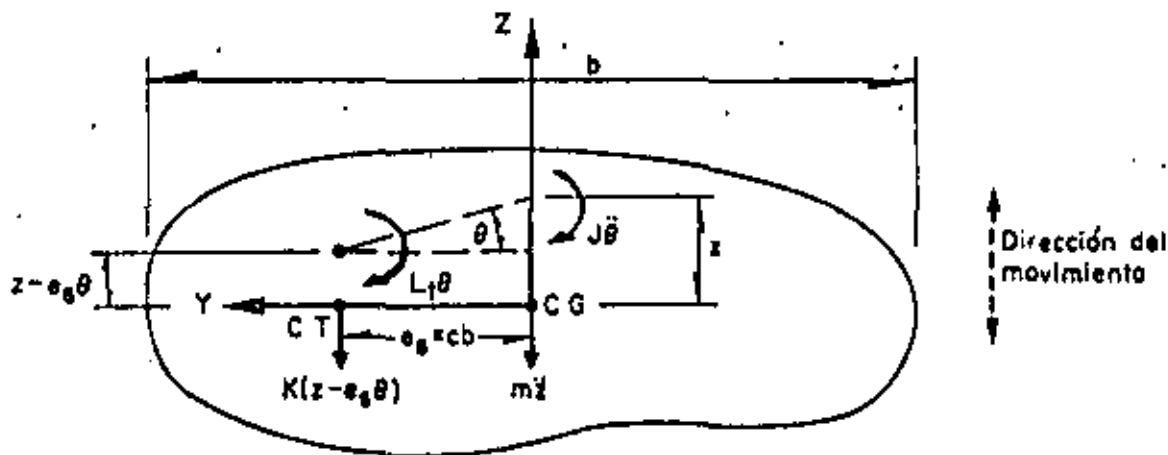


Fig A.1. Diagrama de cuerpo libre de una estructura sujeta a torsión y traslación (masa superior)

$$\begin{bmatrix} zn \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - \lambda_n^2 \\ cb \end{bmatrix}; n = 1, 2 \quad (\text{A.4})$$

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 \frac{V_1 V_2}{1 + e_{12}^2}} \quad (\text{A.8})$$

$$\tilde{M} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 - 2 \frac{M_1 M_2}{1 + e_{12}^2}} \quad (\text{A.9})$$

En términos de las raíces  $\lambda_{1,2}^2$  de la ec A.3, se puede demostrar (ref 6) que los coeficientes de participación de los modos 1 y 2 (las proporciones en que contribuyen los modos a la respuesta total del sistema) se encuentran dados por

$$C_n = \frac{c^2}{c^2 + (1 - \lambda_n^2)^2 / j^2}; n = 1, 2 \quad (\text{A.5})$$

Ahora, si se suponen conocidas las aceleraciones espectrales de cada modo,  $a_n$ , la fuerza cortante máxima vale

$$V_n = m a_n C_n; n = 1, 2 \quad (\text{A.6})$$

y el momento torsionante máximo respecto al centro de torsión es

$$M_n = \frac{(1 - \lambda_n^2) J V_n}{cbm}; n = 1, 2 \quad (\text{A.7})$$

Una vez conocidos los valores de  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $M_1$  y  $M_2$ , la aplicación de la ec 1.2 conduce a la estimación de la fuerza cortante y del momento torsionante máximos mediante el método 2; ellos son, respectivamente

donde  $e_{ij}^2$  se obtiene aplicando la ec 1.3. El signo negativo asociado al doble producto que aparece en la ec A.9 se debe a que las funciones de transferencia de los momentos en el primero y segundo modos tienen signo contrario, ya que el factor  $(1 - \lambda_n^2)$  que aparece en la ec A.7 es positivo para el primer modo ( $n = 1$ ) y negativo para el segundo ( $n = 2$ ), lo cual se demuestra como sigue:

De la ec A.3

$$\lambda_1^2 = \frac{\eta + 1}{2} - \sqrt{\frac{(\eta - 1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}}$$

por lo que

$$\lambda_1^2 < \frac{\eta + 1}{2} - \frac{\eta - 1}{2} = 1$$

Análogamente

$$\lambda_2^2 = \frac{\eta + 1}{2} + \sqrt{\frac{(\eta - 1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}}$$

de ahí que, si  $\eta > 1$

$$\lambda_2^2 > \frac{\eta + 1}{2} + \frac{\eta - 1}{2} = \eta$$

o, si  $\eta < 1$

$$\lambda_2^2 > \frac{\eta + 1}{2} + \frac{1 - \eta}{2} = 1$$

En consecuencia,  $(1 - \lambda_1^2) > 0$  y  $(1 - \lambda_2^2) < 0$

Además, según el Reglamento del Distrito Federal (método 1) las respuestas dinámicas máximas del mismo sistema están dadas por (ec 1.1)

$$\hat{V} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \quad (\text{A.10})$$

$$\hat{M} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, por el método exacto, las respuestas máximas totales,  $V$  y  $M$ , se obtienen localizando los máximos en el tiempo,  $t$ , de las sumas de las respuestas (cortante o momento, según sea el caso) en los modos 1 y 2, es decir,

$$V = \text{Máx} \left| \left\{ m C_1 a_1(t) + m C_2 a_2(t) \right\} \right| = \text{Máx} \left| \left\{ V_1(t) + V_2(t) \right\} \right| \quad (\text{A.12})$$

$$M = \text{Máx} \left| \left\{ \Gamma_1 V_1(t) + \Gamma_2 V_2(t) \right\} \right| \quad (\text{A.13})$$

donde

$$\Gamma_n = \frac{(1 - \lambda_n^2) J}{cbm} ; n = 1, 2 \quad (\text{A.14})$$

## A.2 ANALISIS DINAMICO DE UNA ESTRUCTURA SUJETA A CABECEO

Es frecuente que en la práctica se presenten estructuras constituidas por una hilera de columnas o una sola columna que sostiene una losa o un cascarón (péndulos invertidos), tal como la que aparece en la fig A.2. La respuesta dinámica de una estructura de este tipo se debe obtener (ref 9) considerando el efecto que la inercia rotacional de la cubierta induce en el movimiento total del sistema.

En la fig A.2 se empleó la notación:

- $W$  peso de la cubierta más la parte tributaria de la columna
- $m$   $W/g$
- $g$  aceleración de la gravedad
- $J_c$  momento de inercia de la masa de la cubierta respecto al eje  $Z$
- $E$  módulo de elasticidad del material de la columna
- $I_c$  momento de inercia de la sección transversal de la columna respecto al eje  $Z$
- CG centro de gravedad de la cubierta
- $L$  distancia del suelo al centro de gravedad

El diagrama de cuerpo libre de la estructura anterior aparece en la fig A.3, en la cual se tiene que (ref 9)

$$K \text{ rigidez por traslación} = 3EI_c/L^3$$

$$K_r \text{ rigidez por rotación} = EI_c/L$$

$x$  desplazamiento del centro de gravedad de la cubierta

$\phi$  rotación del centro de gravedad de la cubierta

$$\alpha = (x - k_r \gamma \phi)/k$$

$$\beta = (\phi - k_r \gamma x)/k$$

$$\gamma = L^2/2 EI_c$$

$$k = 1 - KL^2/4EI_c = 0.25$$

Las ecuaciones diferenciales de movimiento correspondientes al diagrama de cuerpo libre de la estructura son

$$m \ddot{x} + (Kx - K K_r \gamma \phi)/k = 0$$

$$J_c \ddot{\phi} + (K_r \phi - K K_r \gamma x)/k = 0 \quad (\text{A.15})$$

Considerando que se satisfacen las relaciones  $\ddot{x} = -\omega^2 x$  y  $\ddot{\phi} = -\omega^2 \phi$ , donde  $\omega$  es la frecuencia circular natural de vibración de la estructura, y resolviendo el sistema de ecuaciones A.15, se obtiene la ecuación característica

$$\omega^4 - \frac{K J_c + m K_r}{m J_c k} \omega^2 + \frac{K K_r}{4m J_c k^2} = 0 \quad (\text{A.16})$$

que es una ecuación de segundo grado en  $\omega^2$ . Si se efectúan algunas transformaciones algebraicas y se considera que

$K/m = p^2$  cuadrado de la frecuencia circular natural por traslación

$K_1/J_c = \Omega^2$  cuadrado de la frecuencia circular natural por rotación

$$\lambda = \omega^2/\rho^2$$

$$\eta_c = \Omega^2/\rho^2$$

se llega a

$$\tau_{1,2} = 2(1 + \eta_c \pm \sqrt{(1 + \eta_c)^2 - \eta_c}) \quad (\text{A.17})$$

Por otra parte, los vectores de las configuraciones modales son

$$\begin{bmatrix} x_n \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 - \lambda_n \\ 2L \end{bmatrix}; n = 1, 2 \quad (\text{A.18})$$

Se puede demostrar (ref 9) que los coeficientes de participación correspondientes a los modos 1 y 2 se encuentran dados por la expresión

$$C_n = \frac{x_n m}{x_n^2 m + \phi_n^2 J_c}; n = 1, 2 \quad (\text{A.19})$$

Partiendo del hecho de que se conocen las aceleraciones espectrales de cada modo,  $a_n$ , la fuerza cortante máxima y el momento máximo de cabeceo correspondientes valen

$$V_n = m a_n C_n x_n = m a_n C_n; n = 1, 2 \quad (\text{A.20})$$

$$M_n = J a_n C_n \phi_n = J a_n C_n \frac{4 - \lambda_n}{2L} = \frac{(4 - \lambda_n) J_c}{2 L m} V_n \quad (\text{A.21})$$

Las respuestas dinámicas de la estructura de acuerdo con los criterios del Reglamento de Construcciones del D. F. (método 1) y de Rosenblueth (método 2), se obtienen haciendo uso de las ecuaciones

$$\hat{V} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \quad (\text{A.22})$$

$$\hat{M} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad (\text{A.23})$$

$$\hat{V} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 \frac{V_1 V_2}{1 + \epsilon_{12}^2}} \quad (\text{A.24})$$

$$\hat{M} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 - 2 \frac{M_1 M_2}{1 + \epsilon_{12}^2}} \quad (\text{A.25})$$

donde  $\epsilon_{12}^2$  se calcula mediante la ec 1.3. El signo menos aparece en la ec A.25 debido a que la función de transferencia del segundo modo es de signo opuesto a la del primero, ya que se puede demostrar, a partir de la ec A.17, que  $\lambda_1 \leq 4$  y  $\lambda_2 \geq 4$ , por lo que el factor  $4 - \lambda_n$  que aparece en la ec A.21 tiene signo positivo en el modo 1, y negativo en el 2.

La respuesta dinámica exacta se obtiene utilizando las expresiones

$$V = \text{Máx} \left| \left\{ C_1 m x_1 a_1(t) + C_2 m x_2 a_2(t) \right\} \right| \quad (\text{A.26})$$

$$M = \text{Máx} \left| \left\{ C_1 J_c \phi_1 a_1(t) + C_2 J_c \phi_2 a_2(t) \right\} \right| \quad (\text{A.27})$$

### A.3 ANALISIS DINAMICO DE UNA ESTRUCTURA SUJETA A TRASLACION

Consideremos ahora el caso de una estructura de constante de dos pisos, en la cual no existe rotación en los planos horizontales en los niveles de los pisos (fig A.4).

La ecuación matricial de equilibrio de este sistema es (ref 10)

$$\begin{bmatrix} m_1 \omega^2 - K_1 - K_2 & K_2 \\ K_2 & m_2 \omega^2 - K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = [0] \quad (\text{A.28})$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas concentradas en los niveles 1 y 2, y  $K_1$  y  $K_2$  son las rigideces de los entrepisos 1 y 2, respectivamente.

Partiendo de este sistema de ecuaciones y haciendo  $\eta_1 = (K_1/m_1)/(K_2/m_2)$  y  $\lambda = \omega^2/(K_2/m_2)$ , se obtienen las raíces

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ \eta_1 + (m_2/m_1) \eta_1 + 1 \right] \pm$$

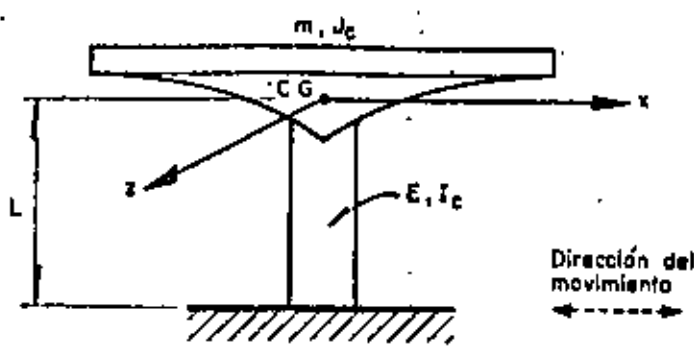


Fig A.2. Estructura en forma de péndulo invertido (vista lateral)

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[ \eta_1 + (m_2/m_1) \eta_1 + 1 \right]^2 - 4 \eta_1} \quad (\text{A.29})$$

Además, los vectores de configuraciones modales resultan ser

$$\begin{bmatrix} z_{1,n} \\ z_{2,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{(K_1/m_1) - \omega_n^2}{\eta_1 (K_1/m_1) (m_2/m_1)} \end{bmatrix}; n = 1, 2 \quad (\text{A.30})$$

Además, se puede demostrar (ref 10) que los coeficientes de participación de los modos 1 y 2 se encuentran dados por

$$C_n = \frac{z_{1,n} + (m_2/m_1) z_{2,n}}{z_{1,n}^2 + (m_2/m_1) z_{2,n}^2}; n = 1, 2 \quad (\text{A.31})$$

Si se conocen las aceleraciones espectrales de cada modo,  $a_n$ , la fuerza cortante máxima correspondiente al entrepiso 1 en cada modo vale

$$V_{1,n} = C_n a_n (m_1 z_{1,n} + m_2 z_{2,n}); n = 1, 2 \quad (\text{A.32})$$

en tanto que la fuerza cortante máxima correspondiente al entrepiso 2 es

$$V_{2,n} = C_n a_n m_2 z_{2,n}; n = 1, 2 \quad (\text{A.33})$$

Ya conocidos los valores de  $V_{1,n}$  y  $V_{2,n}$ , las respuestas máximas dinámicas totales de la estructura estimadas con los métodos 1 y 2 se calculan haciendo uso de las fórmulas

$$\bar{V}_1 = \sqrt{V_{1,1}^2 + V_{1,2}^2} \quad (\text{A.34})$$

$$\bar{V}_2 = \sqrt{V_{2,1}^2 + V_{2,2}^2} \quad (\text{A.35})$$

$$\bar{V}_1 = \sqrt{V_{1,1}^2 + V_{1,2}^2 + 2 \frac{V_{1,1} V_{1,2}}{1 + \epsilon_{12}^2}} \quad (\text{A.36})$$

$$\bar{V}_2 = \sqrt{V_{2,1}^2 + V_{2,2}^2 - 2 \frac{V_{2,1} V_{2,2}}{1 + \epsilon_{12}^2}} \quad (\text{A.37})$$

donde  $\epsilon_{12}^2$  se calcula mediante la ec 1.3

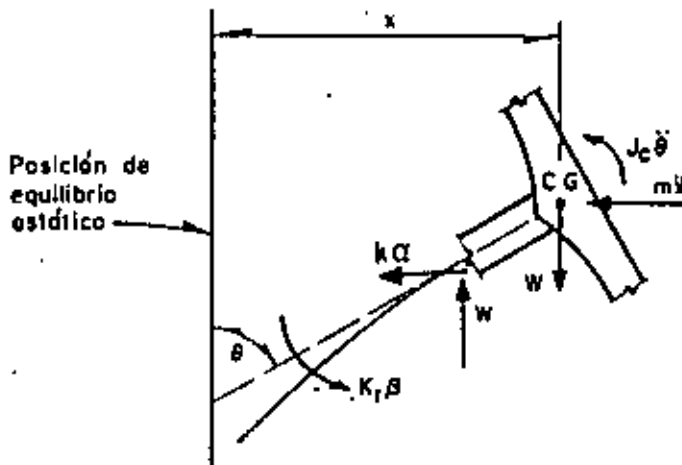


Fig A.3. Diagrama de cuerpo libre de la estructura de la fig A.2

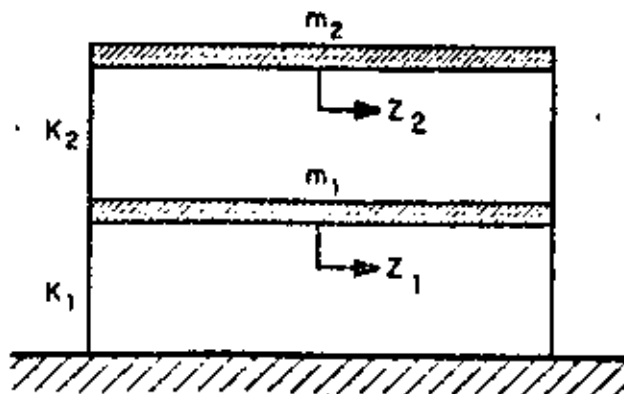


Fig A.4. Estructura de dos pisos sujeta a traslación (vista lateral)

Finalmente, las respuestas máximas dinámicas de la estructura en cuestión se pueden obtener mediante el método exacto haciendo uso de las ecuaciones

$$V_1 = \text{Máx} \left\{ \left| \sum_{n=1}^2 C_n a_n(t) \left[ m_1 z_{1,n} + m_2 z_{2,n} \right] \right| \right\} \quad (\text{A.38})$$

$$V_2 = \text{Máx} \left\{ \left| \sum_{n=1}^2 C_n a_n(t) m_2 z_{2,n} \right| \right\} \quad (\text{A.39})$$

## REFERENCIAS

1. E. Rosenblueth, "A Basis for Aseismic Design", Tesis doctoral, *Universidad de Illinois*, Urbana (1951)
2. E. Rosenblueth, "Sobre la respuesta sísmica de estructuras de comportamiento lineal", *Segundo Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica*, Veracruz (1968)
3. "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", *Diario Oficial*, México, D. F. (feb 1966)
4. "Los Angeles City Building Code", Los Angeles, Cal. (1966)
5. R. Husid, "Estimación de la respuesta máxima de tranques de tierra sometidos a la acción de terremotos", *Tercer Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica*, Acapulco (1971)
6. O. A. Rascón, "Modelo estocástico para simular registros de temblores en terreno duro", Tesis doctoral, *Facultad de Ingeniería, UNAM*, México, D. F. (1968)
7. M. Chávez, O. A. Rascón y L. Alenso, "Un nuevo método para corrección de la línea base de registros de temblores", *Tercer Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica*, Acapulco (1971)
8. J. Elorduy, y E. Rosenblueth, "Torsiones sísmicas en edificios de un piso", Informe 164, *Instituto de Ingeniería, UNAM*, México, D. F. (1968)
9. O. A. Rascón, "Efectos sísmicos en estructuras en forma de péndulo invertido", *Revista de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica*, Vol 3, No 1, México, D. F. (1965), pp 8-16
10. E. Rosenblueth, y L. Esteva, "Folleto complementario: diseño sísmico de edificios, proyecto de Reglamento de Construcciones en el Distrito Federal", *Ediciones Ingeniería*, México, D. F. (1962)
11. T. Naylor et al, "Técnicas de simulación en computadoras", *Limusa-Wiley*, México, D. F. (1971)
12. J. Hammersley y D. Handscomb, "Monte-Carlo Methods", *Methuen*, Londres (1964)







**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

DINAMICA ESTRUCTURAL.

DEFINICION

DR. OCTAVIO A RASCON CHAVEZ  
JULIO DE 1984.

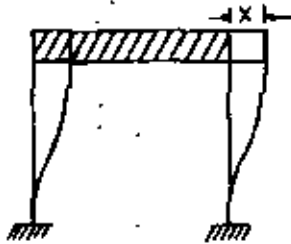
DINAMICA ESTRUCTURAL

DR. OCTAVIO A. RASCON CH.

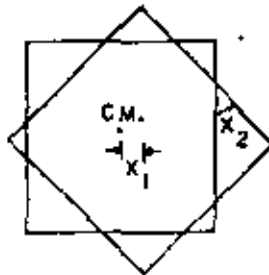
DEFINICION.

GRADOS DE LIBERTAD = NUMERO DE COORDENADAS GENERALIZADAS (DESPLAZAMIENTOS O GIROS) QUE SE REQUIEREN PARA DEFINIR LA POSICION DEL SISTEMA EN CUALQUIER INSTANTE.

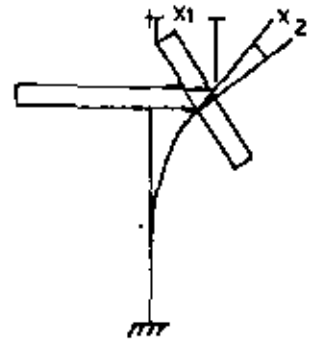
EJEMPLOS



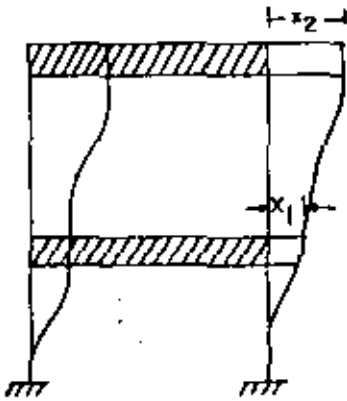
UN GRADO DE LIBERTAD



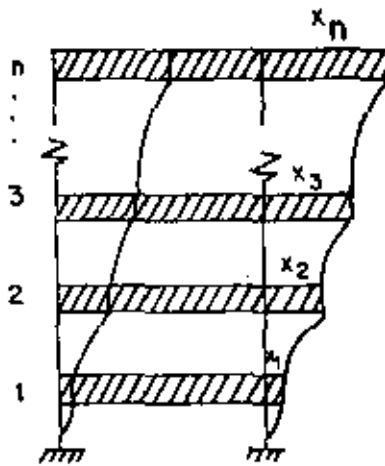
DOS GRADOS DE LIBERTAD



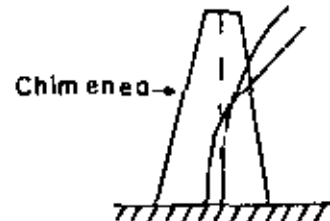
DOS GRADOS DE LIBERTAD



DOS GRADOS DE LIBERTAD



n GRADOS DE LIBERTAD



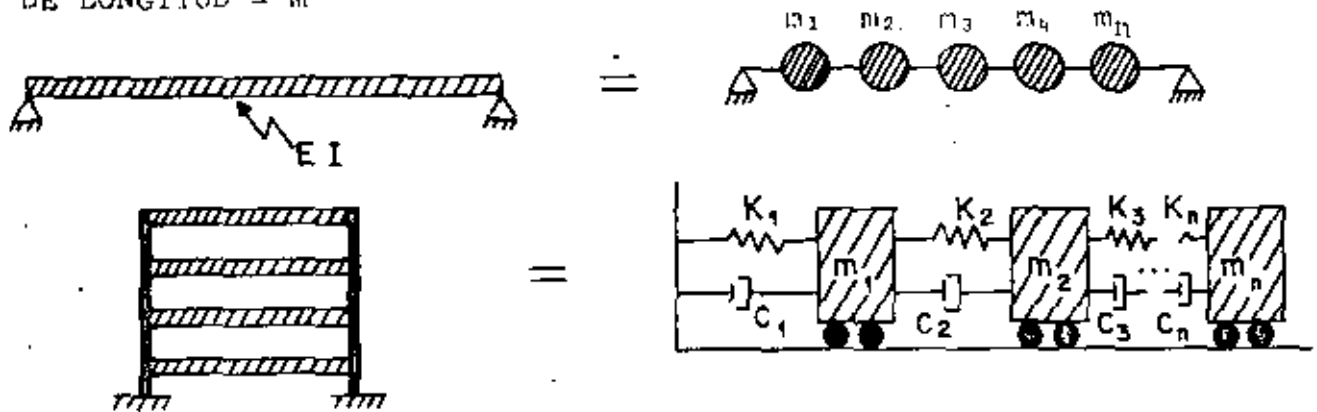
INFINITO NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD

MÉTODOS DE DISCRETIZACIÓN DE SISTEMAS CONTINUOS

1. POR CONCENTRACION DE MASAS

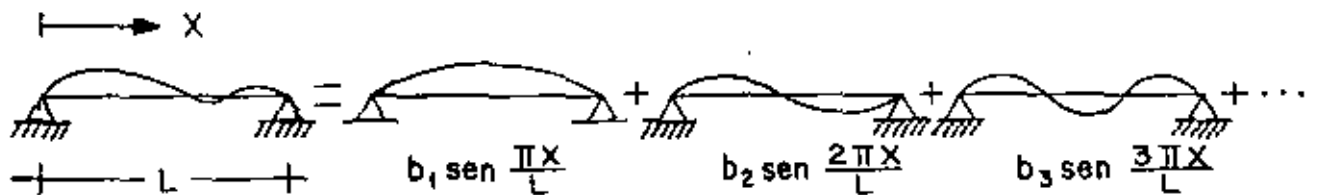
MASA POR UNIDAD

DE LONGITUD =  $m$



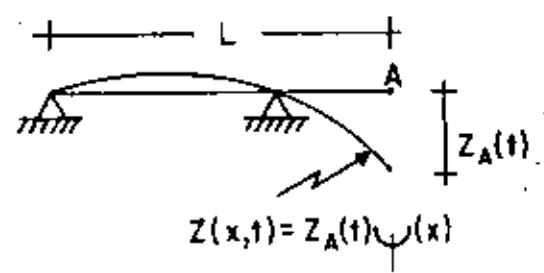
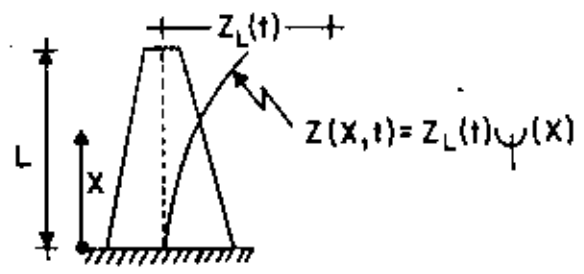
2. EXPRESANDO LA CONFIGURACION DE VIBRACION DE LA ESTRUCTURA COMO UNA SERIE DE FUNCIONES ESPECIFICADAS. POR EJEMPLO, SI ESTAS FUNCIONES SON ARMONICAS:

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^N b_i \text{sen } \frac{i\pi x}{L}$$

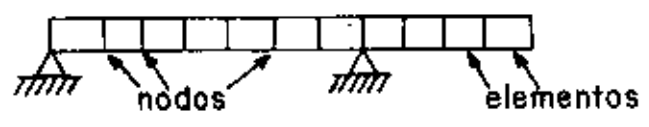


EN GENERAL, PARA CUALQUIER TIPO DE FUNCION  $\psi(x)$  :

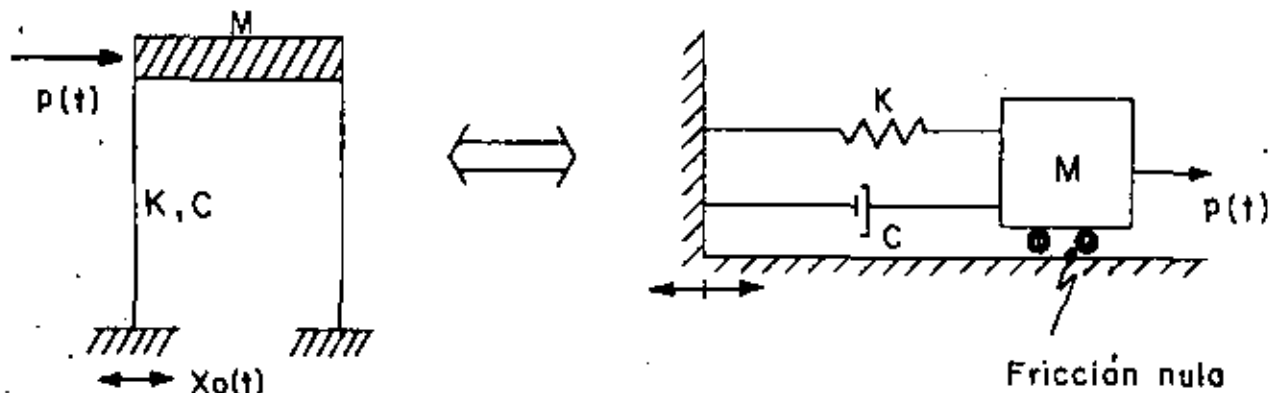
$$z(x,t) = \sum_{i=1}^N z_i(t) \psi_i(x)$$



### 3. MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS



RESPUESTA DINAMICA DE SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD  
CON AMORTIGUAMIENTO VISCOZO



$t$  = TIEMPO

$M$  = MASA

$K$  = RIGIDEZ

$C$  = AMORTIGUAMIENTO

$f(t)$  = FUERZA EXTERNA

$X_0(t)$  = DESPLAZAMIENTO DEL SUELO

EL AMORTIGUAMIENTO VISCOZO ES TAL QUE PRODUCE UNA FUERZA DE RESTAURACION PROPORCIONAL A LA VELOCIDAD RELATIVA DE LA MASA RESPECTO AL SUELO.

EL AMORTIGUAMIENTO SE DEBE PRINCIPALMENTE A LA FRICCION INTERNA ENTRE LOS GRANOS O PARTICULAS DEL MATERIAL DE LA ESTRUCTURA, Y A FRICCION EN LAS JUNTAS Y CONEXIONES DE LA MISMA. ES EL ELEMENTO DEL SISTEMA QUE DISCIPA ENERGIA.

2a. LEY DE NEWTON:

"LA RAPIDEZ DE CAMBIO DEL MOMENTUM DE CUALQUIER MASA,  $m$ , ES IGUAL A LA FUERZA QUE ACTUA SOBRE ELLA"

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left( m \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x})$$

$p(t)$  = FUERZA ACTUANTE

$x$  = DESPLAZAMIENTO

$t$  = TIEMPO

SI  $m$  ES CONSTANTE:  $p(t) = m\ddot{x}$

### PRINCIPIO DE D'ALAMBERT

SI LA 2a. LEY DE NEWTON LA ESCRIBIMOS COMO

$$p(t) - m\ddot{x} = 0$$

AL SEGUNDO TERMINO DE LA ECUACION SE LE CONOCE COMO FUERZA DE INERCIA; EL CONCEPTO DE QUE UNA MASA DESARROLLA UNA FUERZA DE INERCIA PROPORCIONAL A SU ACELERACION Y QUE SE OPONE A ELLA SE CONOCE COMO PRINCIPIO DE D'ALAMBERT, Y PERMITE QUE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO SE EXPRESEN COMO ECUACIONES DE EQUILIBRIO DINAMICO.

### ECUACION DE EQUILIBRIO

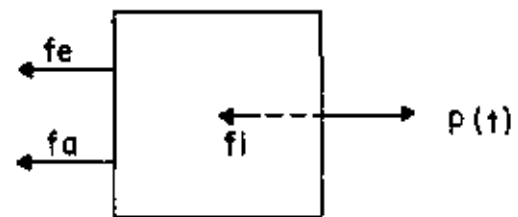
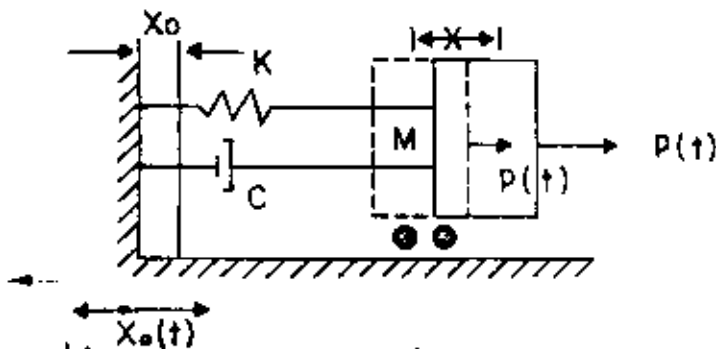


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

$$\text{EQUILIBRIO: } f_e + f_a + f_i = p(t) \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{PARA UN SISTEMA ELASTICO: } f_e = K(x - x_0) = ky \\ \text{PARA AMORTIGUAMIENTO VISCOSO: } f_a = c(\dot{x} - \dot{x}_0) = c\dot{y} \\ \text{POR EL PRINCIPIO DE D'ALAMBERT: } f_i = m\ddot{x} = m(\ddot{y} + \ddot{x}_0) \end{array} \right\} \quad (2)$$

SUSTITUYENDO LAS ECS. 2 EN LA EC. 1 SE OBTIENE:

$$m(\ddot{y} + \ddot{x}_0) + c\dot{y} + ky = p(t)$$

DE DONDE

$$\boxed{\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{p(t)}{m} - \ddot{x}_0} \quad (3)$$

DIVIDIENDO ENTRE M AMBOS MIEMBROS DE LA EC. 3:

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{p(t)}{m} - \ddot{x}_0$$

SI  $\frac{c}{m} = 2h$ , Y  $\frac{k}{m} = \omega^2$ , DONDE  $\omega$  = FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL, EN RAD/SEG:

$$\boxed{\ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega^2y = \frac{p(t)}{m} - \ddot{x}_0} \quad (4)$$

CUANDO SE TIENEN EXCITACIONES EN EL SISTEMA SE TRATA DE UN PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS; EN CASO CONTRARIO EL PROBLEMA ES DE VIBRACIONES LIBRES.

### VIBRACIONES LIBRES

EN ESTE CASO LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO RESULTA SER

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega^2y = 0$$

CUYA SOLUCION ES

$$y(t) = e^{-ht} (C_1 \text{ sen } \omega't + C_2 \text{ cos } \omega't) \quad (5)$$

DONDE  $\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2}$  = FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL AMORTIGUADA

Y  $C_1$  Y  $C_2$  SON CONSTANTES QUE DEPENDEN DE LAS CONDICIONES INICIALES



(EN  $t=0$ ) DE DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD QUE TENGA LA MASA DEL SISTEMA.

ESTAS RESULTAN SER

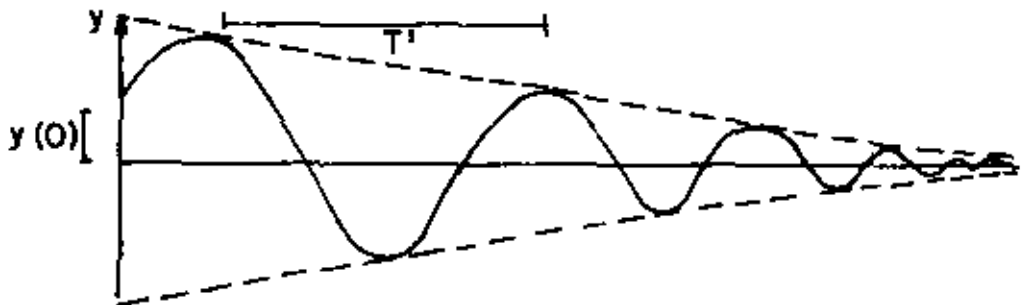
$$\boxed{C_1 = \frac{\dot{y}(0) + hy(0)}{\omega'}} \quad \text{y} \quad \boxed{C_2 = y(0)} \quad (6)$$

LA EC (5) SE PUEDE ESCRIBIR TAMBIEN COMO:

$$\boxed{y(t) = Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta)} \quad (7)$$

DONDE  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  Y  $\theta = \tan^{-1} \frac{C_1}{C_2} = \text{ANGULO DE FASE}$

LA GRAFICA DE LA EC (7) ES



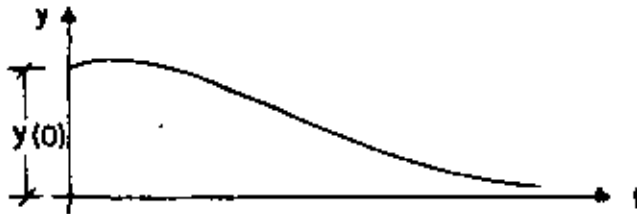
$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \text{PERIODO NATURAL AMORTIGUADO, SEG}$$

$$f' = \frac{1}{T'} = \text{FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA, cps}$$

VEAMOS EL CASO ESPECIAL DE LA EC. (5) EN QUE  $h=\omega$ . EN TAL CASO,  $\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2} = 0$ ,  $\cos \omega't = 1$  Y  $\sin \omega't = \omega't$ , CON LO CUAL LA EC. (5) SE REDUCE A

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\omega t} \left\{ \left[ \frac{\dot{y}(0) + h y(0)}{\omega'} \right] (\omega't) + y(0) \right\} \\ &= e^{-\omega t} [y(0)t + (1 + \omega t)y(0)] \end{aligned}$$

LA GRAFICA DE ESTA ECUACION ES



Y OBTIENIENDO NO REPRESENTA UN MOVIMIENTO OSCILATORIO, POR LO CUAL SI  $h = \omega$  SE DICE QUE SE TIENE AMORTIGUAMIENTO CRITICO. EN TAL CASO:

$$h_{cr} = \omega = \frac{C_{cr}}{2M} = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

DE DONDE  $C_{cr} = 2\sqrt{KM}$ . (8)

A LA RELACION  $\zeta = C/C_{cr}$  SE LE LLAMA FRACCION DEL AMORTIGUAMIENTO CRITICO.

DESPEJANDO A  $M$  DE LA EC. (8) Y SUSTITUYENDOLA EN LA EC.  $h = C/(2M)$  SE OBTIENE:

$$h = \frac{C}{2 \frac{C_{cr}^2}{4K}} = \frac{C}{C_{cr}} \frac{2K}{2\sqrt{KM}} = \zeta \sqrt{\frac{K}{M}} = \zeta \omega$$

ADEMAS:

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2} = \sqrt{\omega^2 - \omega^2 \zeta^2} = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (9)$$

LOS VALORES USUALES EN ESTRUCTURAS QUE ASUME  $\zeta$  VARIAN ENTRE 2 Y 5%. EN ESTE INTERVALO  $\omega'$  Y  $\omega$  SON CASI IGUALES; VEAMOS, POR EJEMPLO, EL CASO EN QUE  $\zeta = 0.1$

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - 0.01} = 0.995\omega$$

OTRA FORMA DE MEDIR EL GRADO DE AMORTIGUAMIENTO QUE TIENE UNA ESTRUCTURA ES MEDIANTE EL DECREMENTO LOGARITMICO, EL CUAL SE DEFINE COMO EL LOGARITMO DEL COCIENTE DE DOS AMPLITUDES CONSECUTIVAS

$$\begin{aligned} L &= \ln \frac{y(t)}{y(t+T')} = \ln \frac{Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta)}{Ae^{-h(t+T')} \cos[\omega'(t+T') - \theta]} \\ &= \ln \left( \frac{e^{-ht}}{e^{-h(t+T')}} \frac{\cos(\omega't - \theta)}{\cos(\omega't + \omega'T' - \theta)} \right) \\ &= \ln \left( \frac{e^{-ht}}{e^{-ht} e^{-hT'}} \frac{\cos(\omega't - \theta)}{\cos(\omega't - \theta + 2\pi)} \right) \\ &= \ln e^{+hT'} = hT' = \zeta\omega T' = \zeta\omega \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned}$$

$$L = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

(10)

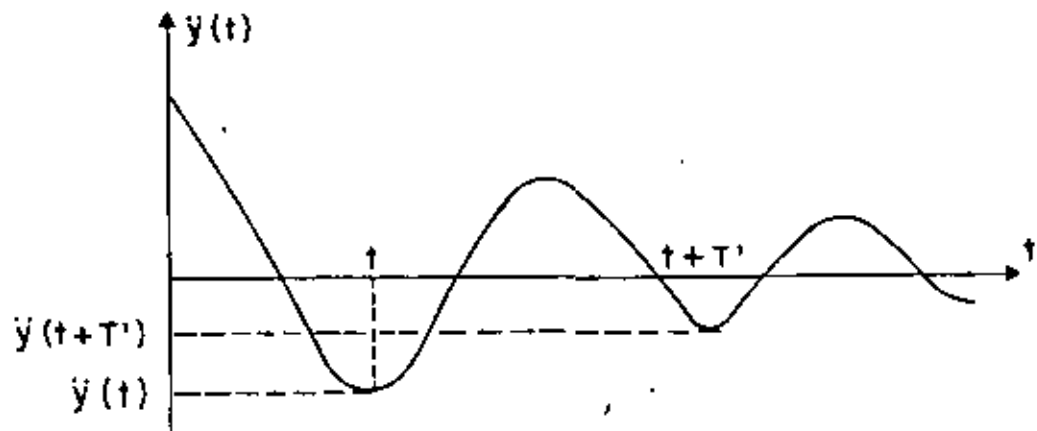
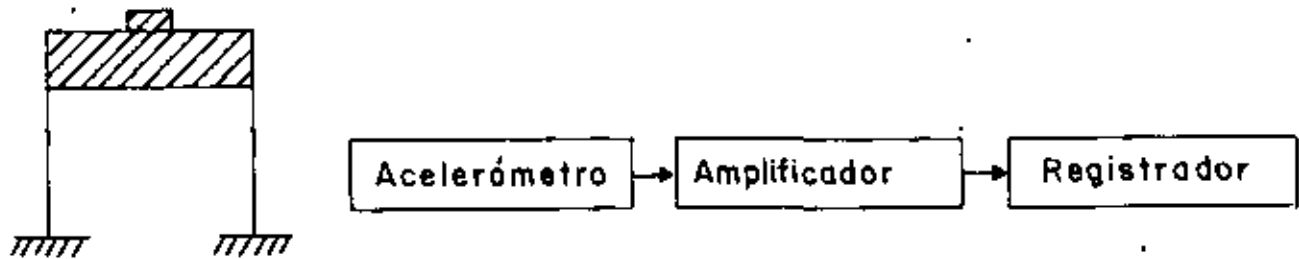
SI  $\zeta$  ES PEQUEÑO,

$$L \approx 2\pi\zeta$$

(11)

DETERMINACION EXPERIMENTAL DE  $\zeta$  EN ESTRUCTURAS REALES O EN MODELOS

SI SE REALIZA UN EXPERIMENTO EN EL CUAL SE SACA A LA ESTRUCTURA DE SU POSICION SE SACA A LA ESTRUCTURA DE SU POSICION DE EQUILIBRIO ESTATICO Y SE DEJA VIBRANDO LIBREMENTE, EL REGISTRO DE LAS ACELERACIONES QUE SE REGISTREN EN LA MASA TENDRA LA MISMA FORMA QUE LA GRAFICA DE LA EC. 7.

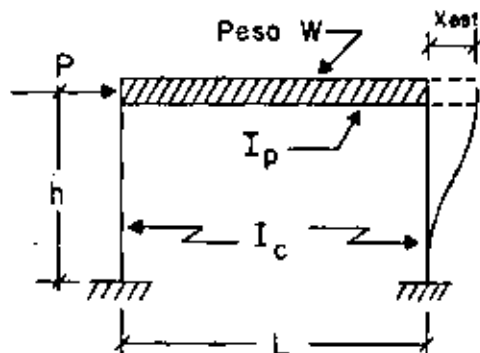


SI DE DICHO REGISTRO SE MIDEN  $\ddot{y}(t + T')$  y  $\ddot{y}(t)$  SE PUEDE OBTENER  $L$  Y, DE LA EC. (11), DESPEJAR A  $\zeta$

$$\zeta = \frac{L}{2\pi}$$

EJEMPLO

CALCULAR EL PERIODO NATURAL DE VIBRACION DE LA ESTRUCTURA MOSTRADA EN LA SIGUIENTE FIGURA:



$P$  = carga estática

$$K = \frac{P}{x_{est}}$$

$x_{est}$  = desplazamiento producido por  $P$

$I_c$  = momento de inercia de las columnas

$I_p$  = momento de inercia del sistema de piso

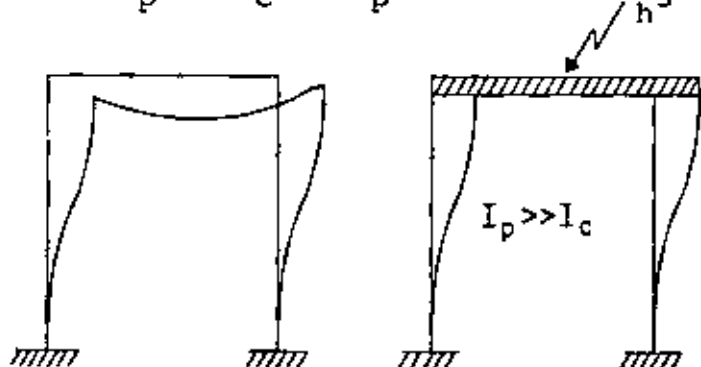
MEDIANTE EL ANALISIS ESTATICO DEL MARCO SE ENCUENTRA QUE

$$x_{est} = \frac{Ph^3}{6EI_c} \frac{\frac{3}{2} + \frac{I_c L}{I_p h}}{6 + \frac{I_c L}{I_p h}} \Rightarrow K = \frac{6EI}{h^3} \frac{6 + \frac{I_c L}{I_p h}}{\frac{3}{2} + \frac{I_c L}{I_p h}}$$

$$\text{Período natural} = T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{gK}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Wh^3}{g6EI} \frac{\frac{3}{2} + \frac{I_c L}{I_p h}}{6 + \frac{I_c L}{I_p h}}}, \text{ en seg}$$

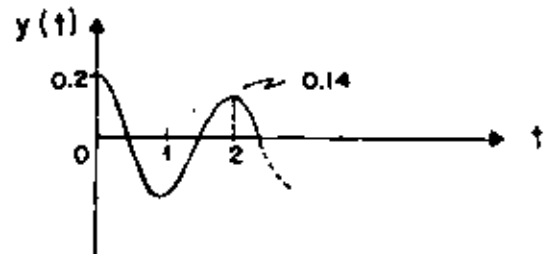
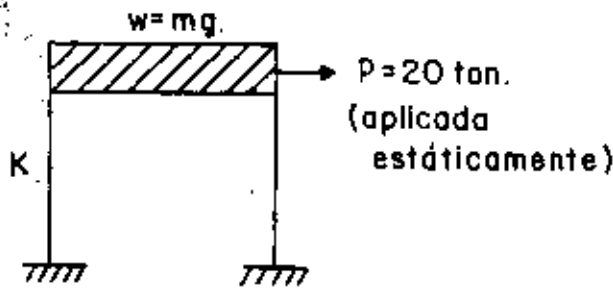
$$\text{Si } I_p \gg I_c \quad (I_p \rightarrow \infty), \quad K = \frac{24EI}{h^3}$$



ESTRUCTURA DE CORTANTE:  
CUANDO LAS DEFORMACIONES  
OCURREN PRINCIPALMENTE  
DEBIDO A LA FUERZA COR-  
TANTE DE ENTREPISO.

EJEMPLO

A UNA ESTRUCTURA DE UN PISO SE LE APLICA UNA CARGA HORIZONTAL DE 20 TON EN SU MASA, OBSERVANDOSE UN DESPLAZAMIENTO ESTÁTICO DE 0.2 CM. AL SOLTAR SUBITAMENTE LA FUERZA SE REGISTRA UN PERIODO DE OSCILACION DE 0.2 SEG, Y QUE LA AMPLITUD EN EL SEGUNDO CICLO ES DE 0.14 CM.



CALCULAR  $\omega$ ,  $\omega'$ ,  $f'$ ,  $L$  Y  $\zeta$

$$1. \quad \text{DE } T' = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi^2}{\sqrt{\frac{K}{M}}} = \frac{2\pi\sqrt{W'}}{\sqrt{Kg'}} = 0.2 \quad \text{Y} \quad K = \frac{2.0}{0.2} = 100 \frac{\text{TON}}{\text{CM}}$$

SE OBTIENE

$$W' = T'^2 Kg/4\pi^2 = (0.2)^2 \times 100 \times 981/4\pi^2 = \frac{0.04 \times 100 \times 981}{4 \times 9.87}$$

$$W' = 99.4 \text{ TON}$$

$$2. \quad \omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}} ; \quad f' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ cps}$$

$$3. \quad L = \ln \frac{0.2}{0.14} = \ln 1.43 = 0.357$$

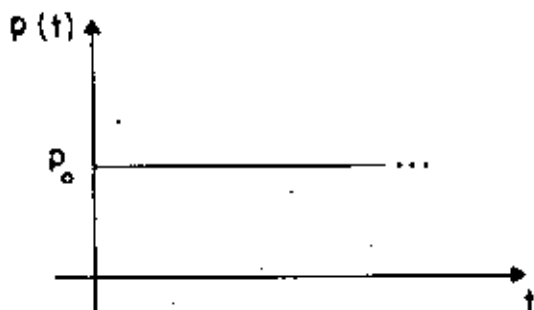
$$\zeta = \frac{L}{2\pi} = \frac{0.357}{2\pi} = 0.0568 \quad \text{O} \quad \zeta = 5.68 \%$$

$$C = \zeta C_{cr} = \zeta 2\sqrt{KM'} = 0.1132 \sqrt{100 \times 99.4/981}$$

$$= 1.132 \times 0.318 = 0.36 \text{ TON SEG/CM}$$

EJEMPLO

CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD SUJETO A LA SIGUIENTE EXCITACION:

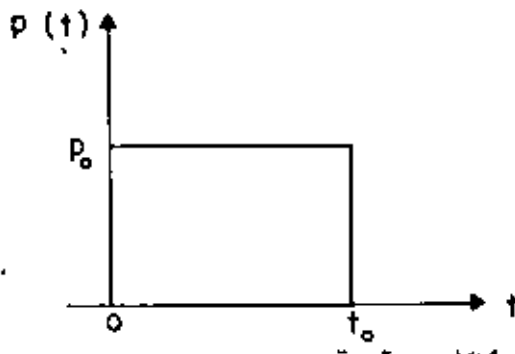


$$\therefore x = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t);$$

$$B = \text{FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA} = \frac{x}{\left(\frac{p_0}{k}\right)} = (1 - \cos \omega t)$$

$$B_{\text{MAX}} = 2, \text{ EN } t = T/2, 3T/2 \dots$$

AHORA, SI LA EXCITACION ES DE DURACION  $t_0$ :



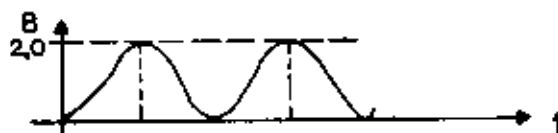
$$\text{CON } C = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = p_0$$

$$x = C_1 \text{ sen} \omega t + C_2 \text{ cos} \omega t + p_0/k$$

$$\text{SI EN } t = 0, x = 0 \text{ Y } \dot{x} = 0:$$

$$C_2 = -p_0/k \quad \text{Y} \quad C_1 = 0$$



$$\text{SI } t < t_0:$$

$$x = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\omega p_0}{k} \text{ sen} \omega t$$

$$\text{EN } t = t_0:$$

$$x(t_0) = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t_0)$$

$$\dot{x}(t_0) = \frac{\omega p_0}{k} \text{ sen} \omega t_0$$

CONDICIONES INICIALES PARA  $t > t_0$

SI  $t > t_0$ ,  $x = A \cos \omega t' + B \sin \omega t'$ , CON  $t' = t - t_0$

EN  $t' = 0$  ( $t = t_0$ ), SE DEBEN CUMPLIR LAS CONDICIONES INICIALES ANTERIORES, LO CUAL CONDUCE A

$$A = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t_0) \quad Y \quad B = \frac{p_0}{k} \sin \omega t_0$$

POR LO QUE  $x = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t_0) \cos \omega t' + \frac{p_0}{k} \sin \omega t_0 \sin \omega t'$

$$= \frac{p_0}{k} \sqrt{(1 - \cos \omega t_0)^2 + \sin^2 \omega t_0} \sin(\omega t' - \theta)$$

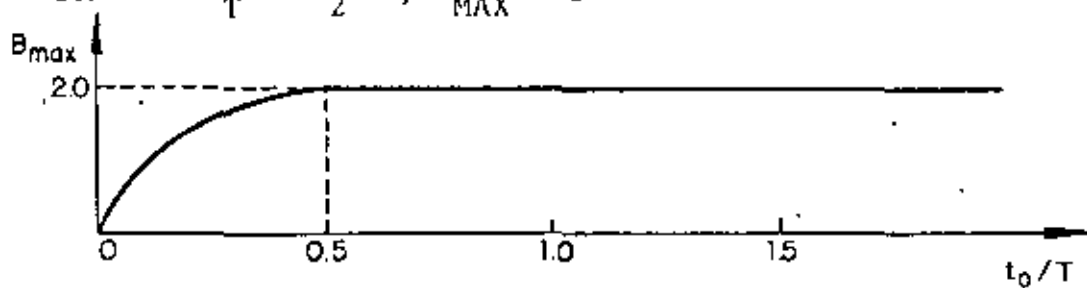
$$x = \frac{p_0}{k} \sqrt{2(1 - \cos t_0)} \sin(\omega t' - \theta)$$

$$= \frac{p_0}{k} \underbrace{\left( 2 \sin \frac{\omega t_0}{2} \right)}_{B} \sin(\omega t' - \theta)$$

B = FACTOR DE AMPLIFICACION

$$B_{MAX} = 2 \sin \frac{\omega t_0}{2} = 2 \sin \left( \pi \frac{t_0}{T} \right)$$

CUANDO  $\frac{\pi t_0}{T} = \frac{\pi}{2}$ ,  $B_{MAX} = 2$



EL MAXIMO OCURRE DESPUES DE LA EXCITACION



EL MAXIMO OCURRE DURANTE LA EXCITACION

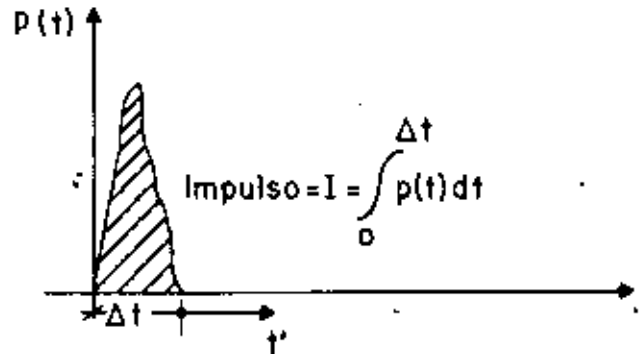
SI  $t_0/T$  ES MUY PEQUEÑO,  $\sin \frac{\pi t_0}{T} = \pi t_0/T$



$$Y \ x_{MAX} = \frac{2p_0}{k} \frac{\pi t_0}{T} = \frac{2p_0}{\frac{mk}{m}} \frac{\omega t_0}{2} = \frac{p_0 t_0}{m\omega} = \frac{I}{m\omega}$$

EN DONDE  $i = p_0 t_0 =$  AREA BAJO LA EXCITACION

EJEMPLO: EXCITACION DADA POR UN IMPULSO, SEA UN IMPULSO APLICADO DURANTE UN INTERVALO DE TIEMPO  $\Delta t$  MUY PEQUEÑO, TAL QUE  $\Delta t/T \ll 1$ :



POR EL PRINCIPIO IMPULSO - MOMENTO SE TIENE QUE

$$I = \int_0^{\Delta t} p(t) dt = m\dot{x}$$

EN DONDE  $\dot{x}$  ES LA VELOCIDAD QUE EL IMPULSO LE IMPRIME A LA MASA DEL SISTEMA. DESPUES DE  $\Delta t$  EL SISTEMA QUEDA VIBRANDO LIBREMENTE CON VELOCIDAD INICIAL  $\dot{x}(0) = \frac{I}{m}$ , MIDIENDO EL TIEMPO EN LA ESCALA DE  $t'$ , Y CON DESPLAZAMIENTO INICIAL QUE PUEDE CONSIDERARSE NULO, DEBIDO A QUE EN EL CORTO INTERVALO DE TIEMPO  $\Delta t$  LA MASA ADQUIERE UN DESPLAZAMIENTO DE MAGNITUD DESPRECIABLE. EN TAL CASO LA RESPUESTA RESULTA SER

$$x(t') = \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \text{sen}\omega t' = \frac{I}{m\omega} \text{sen}\omega t'$$

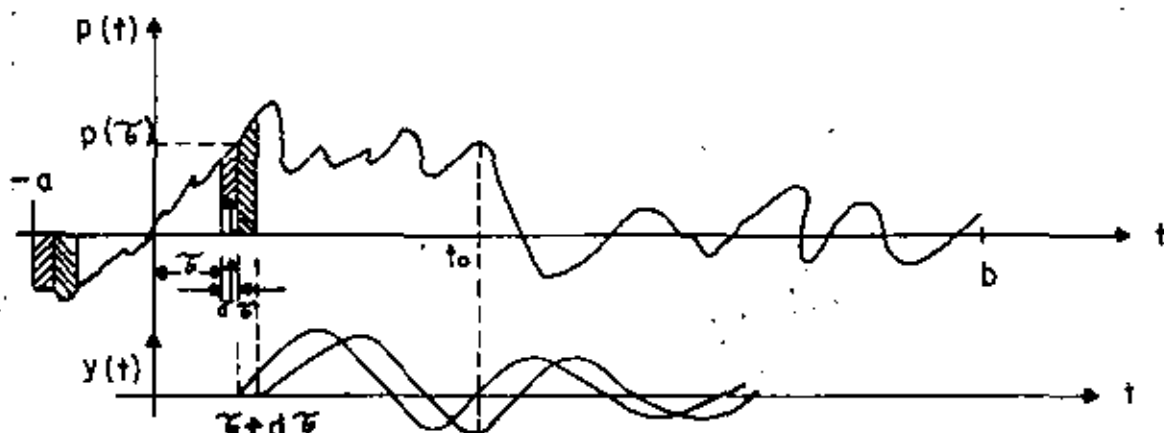
SI EL SISTEMA TIENE AMORTIGUAMIENTO,

$$x(t') = \frac{I}{m\omega} e^{-\zeta\omega t'} \text{sen}\omega' t'$$

SOLUCION AL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS

A. FUERZA EXTERNA

VEAMOS PRIMERO EL CASO EN QUE EXISTE  $p(t)$  Y QUE  $\ddot{x}_0(t) = 0$ ,  
SIENDO  $p(t)$  ARBITRARIA



PUESTO QUE  $d\tau \ll T$ , LA FUERZA APLICADA EN  $t = \tau$  PRODUCIRA UN INCREMENTO INSTANTANEO EN LA VELOCIDAD DE LA MASA IGUAL A

$$\dot{y} = \frac{p(\tau)d\tau}{M}$$

Y UN INCREMENTO INSTANTANEO NULO EN EL DESPLAZAMIENTO, ES DECIR,  $y=0$ . TOMANDO ESTOS INCREMENTOS COMO CONDICIONES INICIALES EN  $t = \tau$ , LA EC. 5 DA COMO RESULTADO

$$y(t) = \frac{p(\tau)d\tau}{M\omega'} \text{ sen } \omega'(t-\tau) e^{-h(t-\tau)} ; t \geq \tau$$

PUESTO QUE EL SISTEMA ES LINEAL ES POSIBLE SUPERPONER LOS EFECTOS OCASIONADOS POR LOS IMPULSOS APLICADOS EN CADA  $\tau$  QUE HAYAN OCURRIDO ANTES DEL INSTANTE  $t$  DE INTERES; ES DECIR,

$$y(t) = \frac{1}{M\omega'} \int_{-\infty}^t p(\tau) e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau) d\tau \quad (12)$$

LA FUNCION  $\frac{1}{M\omega'} e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau)$ , QUE ES LA RESPUESTA A UN IMPULSO INSTANTANEO UNITARIO DE FUERZA, SE LE CONOCE COMO FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA.



LA SOLUCION DADA EN LA EC. (12) SE DENOMINA INTEGRAL DE DUHAMEL. ESTA CONSTITUYE LA SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO; LA SOLUCION GENERAL ES:

$$y(t) = Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta) + \frac{1}{M\omega'} \int_{-\infty}^t p(\tau) e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau) d\tau$$

EN DONDE A y  $\theta$  DEPENDEN DE LAS CONDICIONES INICIALES DE DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD,  $y(0)$  Y  $\dot{y}(0)$ , RESPECTIVAMENTE. EN GENERAL LA PARTE DE LA RESPUESTA DADA POR LA SOLUCION PARTICULAR ES LA MAS IMPORTANTE, YA QUE LA OTRA PARTE SE AMORTIGUA RAPIDAMENTE.

#### B. MOVIMIENTO DEL SUELO

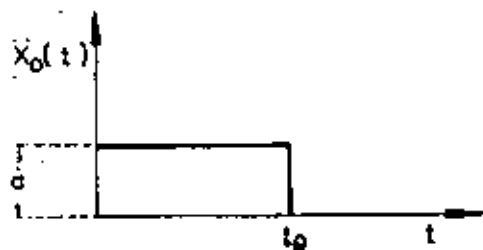
PARA ESCRIBIR LA SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO PARA EL CASO DE VIBRACION FORZADA POR MOVIMIENTO DE LA BASE DE LA ESTRUCTURA, BASTA CAMBIAR  $p(\tau)/M$  DE LA EC. (12) POR  $-\ddot{x}_0$ , YA QUE EN DICHA ECUACION APARECE EN EL MIEMBRO DERECHO  $p(t)/M$  CUANDO LA EXCITACION ES  $p(t)$  Y APARECE  $-\ddot{x}_0$  CUANDO LA EXCITACION ES POR MOVIMIENTO DEL SUELO. EN ESTE CASO

LA SOLUCION PARTICULAR ES, ENTONCES

$$y(t) = \frac{-1}{\omega^2} \int_{-\infty}^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h(t-\tau)} \text{sen} \omega'(t-\tau) d\tau \quad (14)$$

### EJEMPLO

CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD CON AMORTIGUAMIENTO NULO, CUANDO LA EXCITACION ES LA SIGUIENTE:



$$\begin{aligned} \tau &= 0 \\ \ddot{x}_0(t) &= a, \text{ SI } 0 \leq t \leq t_0 \\ \ddot{x}_0(t) &= 0, \text{ SI } t < 0 \text{ Ó } t > t_0 \end{aligned}$$

CONSIDERESE QUE  $y(0)=0$  Y  $\dot{y}(0)=0$ . PUESTO QUE LAS CONDICIONES INICIALES SON NULAS SE TIENE QUE  $A=0$  (UTILIZANDO LA EC. (13) Y LA SOLUCION PARTICULAR QUE SIGUE, EC. (A)):

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{-1}{\omega^2} \int_{-\infty}^t a \text{sen} \omega(t-\tau) d\tau = \frac{-a}{\omega^2} \int_0^t \text{sen} \omega(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{-a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \quad \text{SI } 0 \leq t \leq t_0 \end{aligned} \quad (A)$$

PARA FINES DE DISEÑO ESTRUCTURAL ES IMPORTANTE CONOCER LA RESPUESTA MAXIMA; ESTA OCURRE CUANDO  $\cos \omega t = -1$ , O SEA, CUANDO

$$\omega t = \pi \quad \text{O} \quad t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2\pi/T} = \frac{T}{2}$$

Y VALE

$$\text{MAX} \{ [y(t)] \} = \frac{2a}{\omega^2} = \frac{a}{2\pi^2} T^2, \text{ SI } 0 \leq \frac{T}{2} \leq t_0 \text{ O } 0 \leq T \leq 2t_0$$

PARA  $t > t_0$ , O SEA, PARA  $T/2 > t_0$  ES NECESARIO OBTENER LA RESPUESTA EN VIBRACION LIBRE CON LAS CONDICIONES INICIALES DE VELOCIDAD Y DESPLAZAMIENTO CORRESPONDIENTES A  $t = t_0$ :

$$\dot{y}(t_0) = \frac{-a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t_0) ; \quad y(t_0) = \frac{-a}{\omega} \text{sen} \omega t_0$$

APLICANDO LAS ECS. (5) Y (6) OBTENEMOS:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{-a}{\omega^2} [\text{sen} \omega t_0 \text{sen} \omega t' - (1 - \cos \omega t_0) \cos \omega t'] \\ &= \frac{-a}{\omega^2} \sqrt{\text{sen}^2 \omega t_0 + (1 - \cos \omega t_0)^2} \text{sen} (\omega t' - \theta) \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{-2a}{\omega^2} \frac{\text{sen} \omega t_0}{2} \text{sen} (\omega t' - \theta)$$

DONDE  $t' = t - t_0$  Y  $\theta = \tan^{-1} \left( \frac{1 - \cos \omega t_0}{\text{sen} \omega t_0} \right)$

EL VALOR MAXIMO DE LA RESPUESTA EN ESTE INTERVALO ES

$$\text{MAX} \{ [y(t)] \} = \frac{2a}{\omega^2} \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right|, \text{ SI } t > t_0 \text{ O } T > 2t_0$$

EXCITACION ARMONICA

CONSIDEREMOS AHORA EL CASO EN QUE LA ESTRUCTURA ES EXCITADA POR LA FUERZA ARMONICA

$$p(t) = p_0 \operatorname{sen}\omega t$$

DE DURACION INDEFINIDA.

LA SOLUCION DE ESTE PROBLEMA SE PUEDE ENCONTRAR SUSTITUYENDO A  $p(t) = p_0 \operatorname{sen}\omega t$  EN LA INTEGRAL DE DUHAMEL Y OBTENIENDO SU SOLUCION. SIN EMBARGO, EL RESULTADO LO OBTENDREMOS DE LA CONSIDERACION DE QUE PARA QUE EL MIEMBRO DERECHO DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO APAREZCA UN TERMINO ARMONICO ES NECESARIO QUE EN EL IZQUIERDO SE TENGAN COMBINACIONES DE TERMINOS TAMBIEN ARMONICOS. CONSIDEREMOS, POR LO TANTO, LA SOLUCION

$$y(t) = A \operatorname{sen}\omega t + B \operatorname{cos}\omega t \quad (14)$$

Y DETERMINEMOS LOS VALORES QUE DEBEN TENER A Y B PARA SATISFACER LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO, PARA LO CUAL HAY QUE SUSTITUIR A  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  Y  $\ddot{y}(t)$  EN LA ECUACION DIFERENCIAL. HACIENDO ESTO Y FAC-  
TORIZANDO:

$$\begin{aligned} &(-A\omega^2 - 2h\omega B + \omega^2 A) \operatorname{sen}\omega t + \\ &(-B\omega^2 + 2h\omega A + \omega^2 B) \operatorname{cos}\omega t = \frac{P_0}{M} \operatorname{sen}\omega t + 0 \times \operatorname{cos}\omega t \end{aligned}$$

PARA QUE ESTA IGUALDAD SE CUMPLA SE REQUIERE QUE

$$\begin{aligned} -A\omega^2 - 2h\omega B + \omega^2 A &= \frac{P_0}{M} \\ -B\omega^2 + 2h\omega A + \omega^2 B &= 0 \end{aligned}$$

RESOLVIENDO ESTE SISTEMA DE ECUACIONES SE OBTIENE:

$$A = \frac{\frac{P_0}{M} (\Omega^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}$$

$$B = \frac{-2h\Omega \frac{P_0}{M}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}$$

SUSTITUYENDO A Y B EN LA EC. (14):

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{M}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2} \{ (\Omega^2 - \omega^2) \text{sen}\Omega t - 2h\Omega \text{cos}\Omega t \} \quad (15)$$

O, TAMBIEN

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{M}}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}} \text{sen}(\Omega t - \vartheta) \quad (16)$$

$$\text{EN DONDE } \vartheta = \text{ANG TAN} \left( \frac{-B}{A} \right) = \text{TAN}^{-1} \frac{2h\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} = \text{ANGULO DE FASE} \quad (17)$$

DIVIDIENDO NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LAS ECS, (16) Y (17) ENTRE  $\omega^2$  SE OBTIENE:

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \text{sen}(\Omega t - \vartheta) \quad (18)$$

$$\vartheta = \text{TAN}^{-1} \frac{2\zeta \frac{\Omega}{\omega}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \quad (19)$$

SOLUCION GENERAL PARA EL CASO  $\zeta = 0$ 

$$y(t) = C_1 \operatorname{sen} \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{P_0}{M} \frac{\operatorname{sen} \Omega t}{\omega^2 - \Omega^2}$$

SI EL SISTEMA PARTE DEL REPOSO, LAS CONDICIONES INICIALES SON

$y(0) = 0$  y  $\dot{y}(0) = 0$ . EN ESTE CASO:

$$y(0) = 0 = C_1 \operatorname{sen}(\omega 0) + C_2 \cos(\omega 0) + \frac{P_0}{M} \frac{\operatorname{sen}(\Omega 0)}{\omega^2 - \Omega^2} = 0$$

$$= 0 + C_2 + 0 = C_2 = 0$$

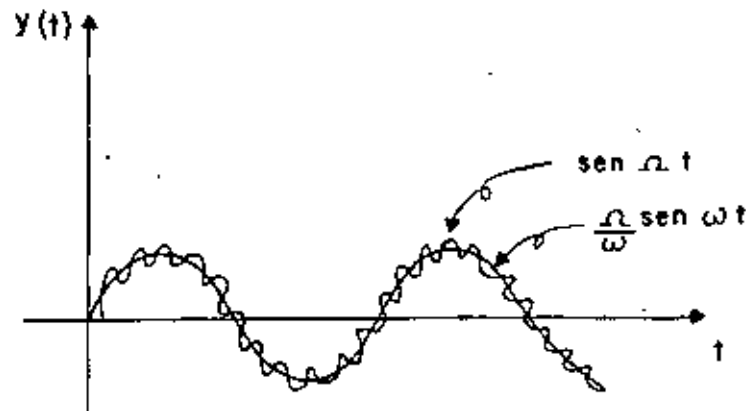
$$\dot{y}(0) = C_1 \omega \cos(\omega 0) - C_2 \omega \operatorname{sen}(\omega 0) + \frac{P_0 \Omega}{M} \frac{\cos(\Omega 0)}{\omega^2 - \Omega^2} = 0$$

$$= C_1 \omega + \frac{P_0 \Omega}{M} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} = 0$$

$$C_1 = \frac{-P_0}{M} \frac{(\Omega/\omega)}{\omega^2 - \Omega^2}$$

$$y(t) = \frac{P_0}{M} \left( \frac{\operatorname{sen} \Omega t}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{\Omega}{\omega} \frac{\operatorname{sen} \omega t}{\omega^2 - \Omega^2} \right)$$

$$y(t) = \frac{(P_0/M)}{(1 - \omega^2/\Omega^2)} \left[ \operatorname{sen} \omega t - \frac{\Omega}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \right] \quad (20')$$





SI SE TIENE EXCITACION ARMONICA EN LA BASE DE LA ESTRUCTURA  
 $x_0(t) = a \sin \Omega t$ , O SEA,  $\ddot{x}_0 = a \Omega^2 \sin \Omega t$ . BASTA CAMBIAR A  $p_0/M$  EN LA  
 EC. (16) POR  $-a \Omega^2$ ; HACIENDO ESTO SE OBTIENE

$$y(t) = \frac{(\Omega/\omega)^2}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta\frac{\Omega}{\omega})^2}} a \sin(\Omega t - \theta) \quad (20)$$

FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA DE DESPL. =  $B_d = \text{MAX} \left[ \frac{y(t)}{a} \right]$

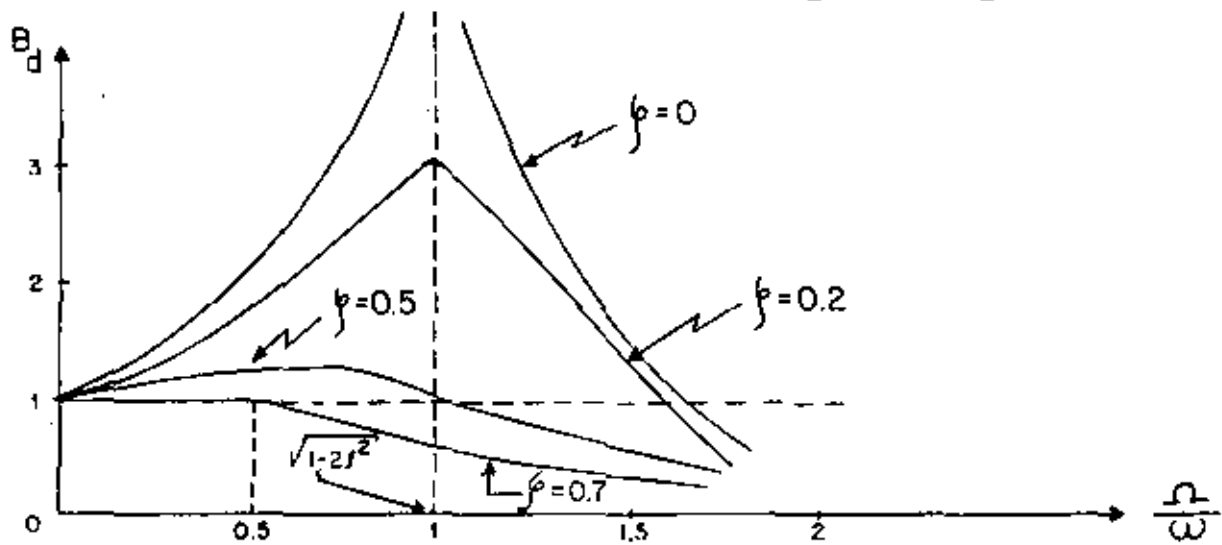


FIG. 1. CURVAS DE AMPLIFICACION DINAMICA PARA EL CASO DE FUERZA EXTERNA

$$B_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta\frac{\Omega}{\omega})^2}} \quad (21)$$

LOS FACTORES DE AMPLIFICACION DINAMICA DE VELOCIDAD Y ACELERACION SE  
 SE PUEDEN OBTENER DERIVANDO RESPECTO A  $t$  LA EC. (16) O LA (20), SEGUN  
 SEA EL CASO. LOS RESULTADOS SON, RESPECTIVAMENTE,

$$\text{MAX} \left[ \frac{\dot{y}(t)}{a\omega} \right] = B_v = \frac{\Omega}{\omega} B_d \quad \text{Y} \quad B_a = \left( \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 B_d = \text{MAX} \left[ \frac{\ddot{y}(t)}{a\omega^2} \right] \quad (22)$$

EJEMPLO

CON UNA MAQUINA VIBRATORIA PORTATIL QUE PRODUCE FUERZAS ARMONICAS

SE PROBO UNA ESTRUCTURA, AJUSTANDO LA MAQUINA EN LAS FRECUENCIAS

$\Omega_1 = 16 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$  Y  $\Omega_2 = 25 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$ , CON UNA FUERZA MAXIMA DE 500 LB EN CADA CASO. LAS AMPLITUDES Y ANGULOS DE FASE DE LA RESPUESTA QUE SE MIDIERON FUERON:

$$\rho_1 = 7.2 \times 10^{-3} \text{ in, } \theta_1 = 15^\circ (\cos\theta_1 = 0.966 ; \sin\theta_1 = 0.259)$$

$$\rho_2 = 14.5 \times 10^{-3} \text{ in, } \theta_2 = 55^\circ (\cos\theta_2 = 0.574 ; \sin\theta_2 = 0.819)$$

EVALUAR LAS PROPIEDADES DINAMICAS DEL SISTEMA.

HACIENDO:

$$\rho_i = \frac{P_0}{k} B_{d_i} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \underbrace{\left( \frac{1}{1 + [2\zeta\beta/(1-\beta^2)]^2} \right)^{1/2}}_{\cos\theta_i}$$

$$\rho_i = \frac{P_0}{k} \frac{\cos\theta_i}{1 - \beta^2} ; \beta = \Omega/\omega$$

$$k - k\beta^2 = \frac{P_0 \cos\theta_i}{\rho_i} = k - \Omega^2 m \quad (23)$$

SUSTITUYENDO LOS VALORES EXPERIMENTALES DE LAS DOS PRUEBAS:

$$\left. \begin{aligned} k - (16)^2 m &= \frac{500 (0.966)}{7.2 \times 10^{-3}} \\ k - (25)^2 m &= \frac{500 (0.574)}{14.5 \times 10^{-3}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\rightarrow k = 100\,000 \frac{\text{lb}}{\text{in}} \\ &\rightarrow m = 128.5 \frac{\text{lb SEG}^2}{\text{in}} \end{aligned}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 27.9 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$$

USANDO LAS ECS. (17) Y (23) SE OBTIENE:

$$\zeta = \frac{p_o \operatorname{sen} \theta_i}{2\beta_i k_{p_i}} ; \text{ DE DONDE } \zeta = \frac{500 (0.259)}{2 \frac{16}{27.9} 100\,000 (7.2 \times 10^{-3})} = 15.7\%$$

### RESONANCIA

CUANDO LA EXCITACION TIENE FRECUENCIA IGUAL A LA NATURAL DEL SISTEMA, SE DICE QUE SE PRESENTA EL CASO DE RESONANCIA. DE LA EC. (20) ES EVIDENTE QUE SI  $\beta = \Omega/\omega = 1$  SE TIENE

$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{2\zeta}}_{B_d} a \operatorname{sen}(\Omega t - \theta)$$

$O(B_d)_{\text{res}} = \frac{1}{2\zeta}$  EN CASO DE MOVIMIENTO DEL SUELO Y DE FUERZA EXTERNA

SIN EMBARGO, AUNQUE ESTA RESPUESTA ES CASI IGUAL A LA MAXIMA, ESTA OCURRE CUANDO  $\Omega = \omega \sqrt{1-2\zeta^2}$ . EN EL CASO DE  $\dot{y}(t)$  Y  $\ddot{y}(t)$ , EL MAXIMO OCURRE, RESPECTIVAMENTE, CUANDO

$$\Omega = \omega \quad \text{Y} \quad \Omega = \frac{\omega}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \quad \text{SI} \quad \zeta \leq 20\%, \text{ LOS VALORES DE ESTAS } \Omega \text{ NO}$$

DIFIEREN EN MAS DE 2%.

EL MAXIMO VALOR DE  $B_d$  (PARA  $\Omega = \omega \sqrt{1-2\zeta^2}$ ) ES

$$(B_d)_{\text{MAX}} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{O} \quad (B_d)_{\text{MAX}} = \frac{(\Omega/\omega)^2}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$$

SI SE TIENE FUERZA EXTERNA O MOVIMIENTO DEL SUELO, RESPECTIVAMENTE. SE OBSERVA EN ESTAS ECUACIONES QUE SI  $\zeta=0$ ,  $(B_d)_{\text{MAX}} = \infty$ .

SI SE ANALIZA LA SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE MOVIMIENTO PARA EL CASO DE CONDICIONES INICIALES NULAS Y  $\beta=1$  SE TIENE QUE:

$$y(t) = e^{-ht} (A \operatorname{sen} \omega't + B \operatorname{cos} \omega't) - \frac{p_0}{k} \frac{\operatorname{cos} \omega t}{2\zeta}$$

$$y(0) = B - p_0/(2\zeta k) = 0$$

DE DONDE, HACIENDO  $y(0)=0$  Y  $\dot{y}(0)=0$ , SE OBTIENEN:

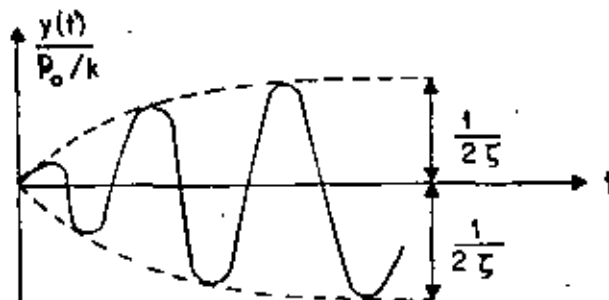
$$A = \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{2\omega'} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} ; B = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\zeta}$$

POR LO QUE

$$y(t) = \frac{1}{2\zeta} \frac{p_0}{k} \left[ e^{-ht} \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega't + \operatorname{cos} \omega't \right) - \operatorname{cos} \omega t \right]$$

PARA AMORTIGUAMIENTOS PEQUEÑOS:

$$\frac{y(t)}{p_0/k} \approx \frac{1}{2\zeta} (e^{-ht} - 1) \operatorname{cos} \omega t$$

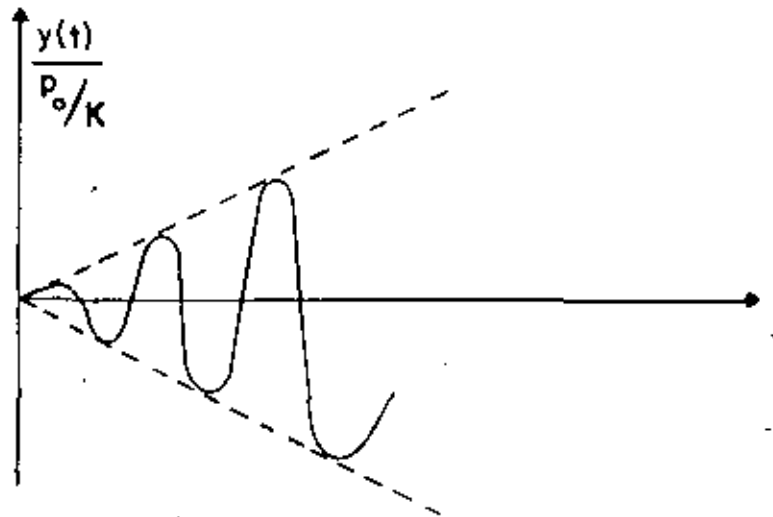


SI  $\zeta > 0$  Y  $\beta = 1$

SI  $\zeta = 0$ , APLICANDO LA REGLA DE L'HOSPITAL, SE OBTIENE:

$$\frac{y(t)}{p_0/k} = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \omega t - \omega t \operatorname{cos} \omega t)$$

O SEA, EL MAXIMO DE LA RESPUESTA TIENDE A INFINITO GRADUALMENTE.



CARACTERISTICAS DINAMICAS DE LOS REGISTRADORES DE SISMOS.

SI LA ACELERACION DE LA BASE DE UN INSTRUMENTO ES ARMONICA, DADA POR LA ECUACION

$$\ddot{x}_0(t) = a \operatorname{sen} \Omega t$$

EL FACTOR DE AMPLIFICACION RESULTA SER

$$\bar{B}_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \quad \frac{1}{\omega^2} = \frac{B_d}{\omega^2}$$

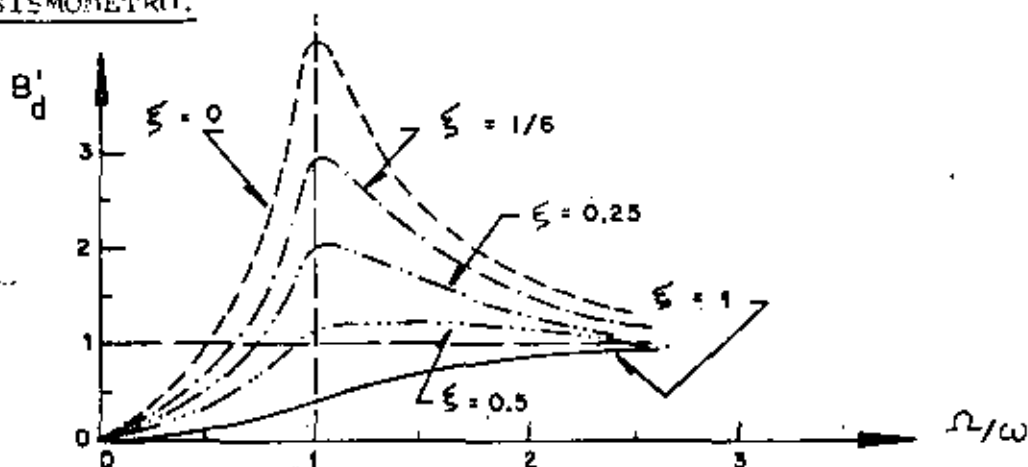
PUESTO QUE LA FIG I CORRESPONDE A  $B_d$ , Y EN ELLA SE OBSERVA QUE PARA  $\zeta = 0.7$  SE TIENE  $B_d \approx 1$  PARA  $0 \leq \Omega/\omega \leq 0.6$ , SE CONCLUYE QUE EL DESPLAZAMIENTO DE LA MASA DE UN SISTEMA ES PROPORCIONAL A LA ACELERACION DE SU BASE, SI ESTE TIENE AMORTIGUAMIENTO DEL 70% Y SI LAS EXCITACIONES QUE SE TRATAN DE REGISTRAR TIENEN FRECUENCIAS INFERIORES AL 60% DE LA FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA. SI ESTO SE CUMPLE, EL APARATO RESULTA SER UN ACELEROMETRO.

EN INGENIERIA SISMICA LA MAXIMA FRECUENCIA DE INTERES ES DEL ORDEN DE 10 CPS ( $T = 0.1$  SEG), POR LO QUE LOS ACELEROMETROS TIENEN FRECUENCIA NATURAL DE 16 A 20 CPS.

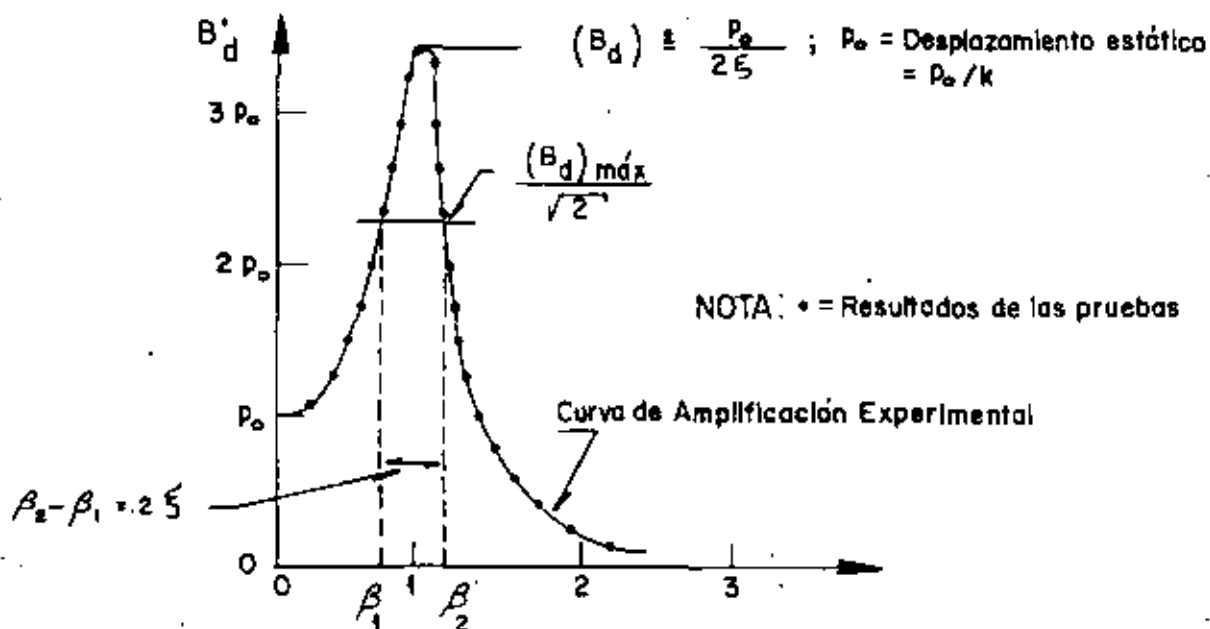
POR OTRA PARTE SI LA EXCITACION DEL SUELO ES  $x_o = a \text{ sen } \Omega t$ , O SEA,  $\ddot{x} = -a \Omega^2 \text{ sen } \Omega t$ , ENTONCES EL FACTOR DE AMPLIFICACION RESULTA SER EL SEÑALADO EN LA ECUACION (20), ES DECIR,

$$B'_d = \frac{(\Omega/\omega)^2}{\sqrt{(1 - (\Omega/\omega)^2)^2 + (2\zeta\Omega/\omega)^2}}$$

EN LA GRAFICA CORRESPONDIENTE SE OBSERVA QUE SI  $\zeta = 0.5$  Y  $\Omega > \omega$  EL DESPLAZAMIENTO DE LA MASA ES PROPORCIONAL AL DEL SUELO; SI ESTO SE CUMPLE, EL APARATO, CONSTITUYE UN DESPLAZOMETRO, CONOCIDO TAMBIEN COMO SISMOMETRO.



DETERMINACION EXPERIMENTAL DEL AMORTIGUAMIENTO DE UNA ESTRUCTURA MEDIANTE VIBRACIONES FORZADAS ARMONICAS



SI SE DETERMINA  $B_d$  EXPERIMENTALMENTE MEDIANTE UNA SERIE DE PRUEBAS DE VIBRACION FORZADA CON FUERZAS ARMONICAS, Y ADEMAS SE DETERMINA  $p_o$ , ENTONCES

$$\zeta \doteq \frac{p_o}{2(B_d)_{MAX}} \quad (24)$$

OTRO METODO PARA DETERMINAR  $\zeta$  CON BASE EN LA CURVA EXPERIMENTAL DE  $B_d$  SE CONOCE CON EL NOMBRE DE "METODO DEL ANCHO DE BANDA DE LA MITAD DE POTENCIA". ESTE SE BASA EN DETERMINAR LAS FRECUENCIAS QUE CORRESPONDEN AL VALOR rms DE LA AMPLITUD EN RESONANCIA, EL CUAL VALE  $(B_d)_{MAX}/\sqrt{2}$ ; SEAN  $\beta_2$  Y  $\beta_1$  ESTAS FRECUENCIAS. DE LA ECUACION DE  $B_d$  SE OBTIENE:

$$rms = \frac{A}{\sqrt{2}} = \text{RAIZ CUADRADA DEL VALOR MEDIO CUADRATICO}$$



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{p_o}{2\zeta} = p_o / \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

ELEVANDO AL CUADRADO AMBOS MIEMBROS:

$$\frac{1}{8\zeta^2} = \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

$$\text{DE DONDE } \beta^2 = 1 - 2\zeta^2 \pm 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}$$

DE AQUI, DESPRECIANDO EL TERMINO  $\zeta^2$  DEL RADICAL, SE OBTIENE

$$\beta_1^2 \doteq 1 - 2\zeta - 2\zeta^2 \quad ; \quad \beta_1 \doteq 1 - \zeta - \zeta^2$$

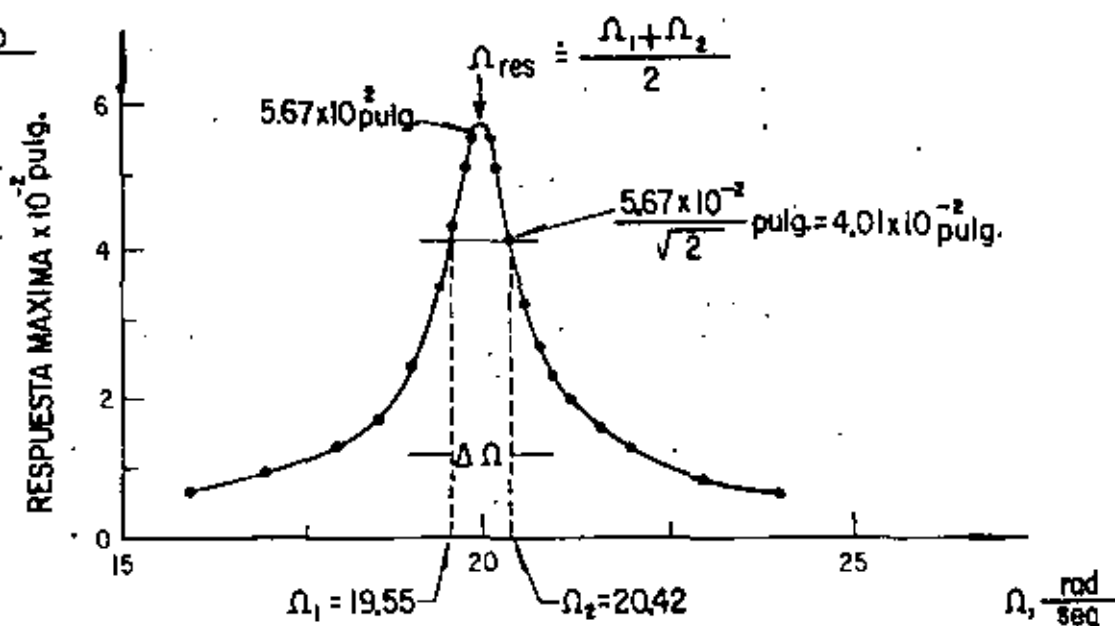
$$\beta_2^2 \doteq 1 + 2\zeta - 2\zeta^2 \quad ; \quad \beta_2 \doteq 1 + \zeta - \zeta^2$$

$$\beta_2 - \beta_1 \doteq 2\zeta$$

DE DONDE

$$\zeta = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}$$

(25)

EJEMPLO

DE LA EC (25)

$$\Delta \Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 0.87 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$$

$$\zeta = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} = \frac{\frac{\Omega_2}{\Omega_{res}} - \frac{\Omega_1}{\Omega_{res}}}{2} = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_2 + \Omega_1} = \frac{0.87}{39.97} = 2.18\%$$

METODO NUMERICO B DE NEWMARK PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE VIBRACIONESFORZADAS.

EL METODO QUE A CONTINUACION SE DESCRIBE ES ADAPTABLE A SISTEMAS NO LINEALES CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.

PROCEDIMIENTO:

1. SEAN  $y_i$ ,  $\dot{y}_i$  y  $\ddot{y}_i$  CONOCIDOS EN EL INSTANTE  $t_i$ , Y  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ .  
SUPONGAMOS EL VALOR DE  $\ddot{y}_{i+1}$
2. CALCULEMOS  $\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + (\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1})\Delta t/2$  (26)



3. CALCULEMOS  $y_{i+1} \doteq y_i + \dot{y}_i \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{y}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{y}_{i+1} (\Delta t)$  (27)

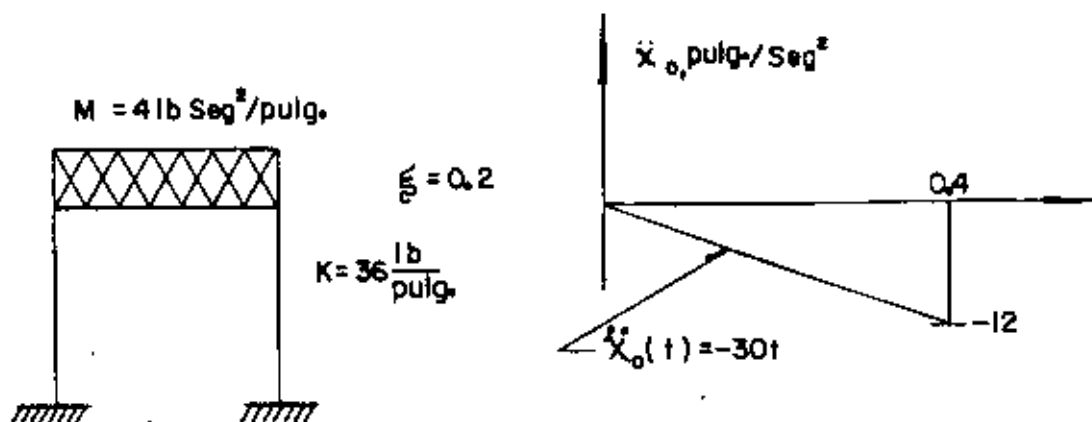
4. CALCULEMOS UNA NUEVA APROXIMACION PARA  $\ddot{y}_{i+1}$  A PARTIR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO:

$$\ddot{y}_{i+1} \doteq -2\zeta\omega\dot{y}_{i+1} - \omega^2(y_{i+1} - y_{est}) - (\ddot{x}_0)_{i+1} \quad (29)$$

DONDE  $y_{est} = p(t_{i+1})/k$

5. REPITAMOS LAS ETAPAS 2 A 4 EMPEZANDO CON EL NUEVO VALOR  $\ddot{y}_{i+1}$  HASTA QUE EN DOS CICLOS CONSECUTIVOS SE TENGAN VALORES DE  $\ddot{y}_{i+1}$  CASI IGUALES.

SE RECOMIENDAN VALORES DE  $\beta$  DE 1/6 A 1/4 Y  $\Delta t \doteq 0.1T$  PARA ASEGURAR CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD.



CALCULAR LA RESPUESTA DE LA ESTRUCTURA APLICANDO EL METODO B DE NEWMARK

$$\omega_n = \sqrt{K/M} = \sqrt{36/4} = 3 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$$

$$h = \zeta \omega_n = 0.2 \times 3 = 0.6 \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2.09 \text{ SEG}$$

TOMAREMOS  $\beta = 0.2$  Y  $\Delta t = 0.2$  ( $\approx 0.1T$ ) SUSTITUYENDO EN LAS ECS. (26),

(27) y (28):

$$y_{i+1} \stackrel{\Delta}{=} y_i + 0.1 (\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1})$$

$$y_{i+1} \stackrel{\Delta}{=} y_i + 0.2\dot{y}_i + 0.012\ddot{y}_i + 0.008\ddot{y}_{i+1}$$

$$\ddot{y}_{i+1} = -1.2\ddot{y}_{i+1} - 9y_{i+1} - (\ddot{x}_0)_{i+1}$$

EN  $t=0$  SABEMOS QUE SE TIENE  $y=0$ ,  $\dot{y}=0$  Y  $\ddot{y}=0$

EN  $t=0 + \Delta t = 0.2 \text{ SEG}$ ; SUPONGAMOS  $\ddot{y}_{i+1} = 5.0 \text{ IN/SEG}^2$ ;  $\ddot{x}_0 = -6$

$$y_i = 0$$

$$\dot{y}_i = 0$$

$$1^{\text{er}} \text{ CICLO} \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_{i+1} = 0 + 0.1 (0 + 5) = 0.5 \quad ; \quad y_{i+1} = 0 + 0 + 0 + 0.008 \times 5 = 0.04 \\ \ddots \\ \ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 0.5 - 9 \times 0.04 - (-30 \times 0.2) = 5.04 \end{array} \right.$$

$$2^{\text{do}} \text{ CICLO} \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_{i+1} = 0 + 0.1 (0 + 5.04) = 0.504 \quad ; \quad y_{i+1} = 0 + 0 + 0 + 0.008 \times 5.04 = \\ \quad = 0.04032 \\ \ddots \\ \ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 0.504 - 9 \times 0.4032 - (-6) = 5.033 \text{ IN/SEG}^2 \end{array} \right.$$

ESTOS CALCULOS SE PUEDEN ORGANIZAR MEDIANTE UNA TABLA COMO LA SIGUIENTE:

t SEG.	$x_0$ IN/SEG <sup>2</sup>	y ING/SEG <sup>2</sup>	Y ING/SEG	y IN
0	0	0	0	0
0.2	-6	5.0000	0.5000	0.04000
		5.040	0.5040	0.04032
		5.033	0.5033	0.04026
		5.034	0.5034	0.04027
0.4	-12	8.0000	1.8078	0.26536
		7.442	1.7510	0.26079
		7.534	1.7602	0.26163
		7.533	1.7601	0.26162
0.4 <sup>+</sup>	0	-4.467	1.7601	0.26162
0.6	0	-6.000	0.7134	0.51204
		-5.464	0.7670	0.51633
		-5.550	0.7584	0.51564
		.	.	.

EN  $t = 0.2 + \Delta t = 0.4$  SEG:  $x_0 = -30 \times 0.4 = -12$

$\ddot{y}_1 = 5.034, \quad \dot{y}_1 = 0.5034, \quad y_1 = 0.04027$

SUPONIENDO  $\ddot{y}_{i+1} = 8.000$  SE OBTIENE:

$$\text{1er CICLO} \left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = 0.5034 + 0.1 (5.034 + 8.000) = 1.8068 \\ \dot{y}_{i+1} = 0.04027 + 0.2 \times 0.5034 + 0.012 \times 5.034 + 0.008 \times 8 = 0.26536 \\ \ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 1.8068 - 9 \times 0.26536 - (-12) = 7.442 \text{ IN/SEG}^2 \end{array} \right.$$

EN  $t = 0.4^+$  SOLO CAMBIA  $\ddot{y}$  :  $\ddot{y}_{0.4+} = \ddot{y}_{0.4-} + \ddot{x}_0 = 7.533 - 12 = -4.467$

EN  $t = 0.6$ ,  $\ddot{y}_i = -4.467$   $\dot{y}_i = 1.7601$ ;  $y = 0.26162$

## ESPECTROS DE RESPUESTA ESTRUCTURAL

RECORDAMOS QUE LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS CON EXCITACION SISMICA ES

$$y(t) = \frac{-1}{\omega'} \int_{-\infty}^t \ddot{x}_0(t-\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega'(t-\tau) d\tau$$

DE LA OBSERVACION DE ESTA ECUACION SE CONCLUYE QUE EL DESPLAZAMIENTO RELATIVO,  $y(t)$ , ES FUNCION DEL TIEMPO,  $t$ . EL AMORTIGUAMIENTO,  $\zeta$ , Y LA FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL,  $\omega$  (O DEL PERIODO NATURAL):

$$y(t) = f(t, \omega, \zeta)$$

FIJEMOS UN VALOR DE  $\zeta$ , POR EJEMPLO  $\zeta=0$ , Y LUEGO ASIGNEMOS VALORES A  $\omega$ , POR EJEMPLO 0.1, 0.2, 0.3, ETC, HASTA CUBRIR UN INTERVALO DE INTERES, Y PARA CADA CASO CALCULEMOS LA FUNCION RESULTANTE DE APLICAR LA ECUACION ANTERIOR. CON ESTA OBTENEMOS

$$y_1(t) = f_1(t, 0.1, 0) = f_1(t)$$

$$y_2(t) = f_2(t, 0.2, 0) = f_2(t)$$

$$y_3(t) = f_3(t, 0.2, 0) = f_3(t)$$

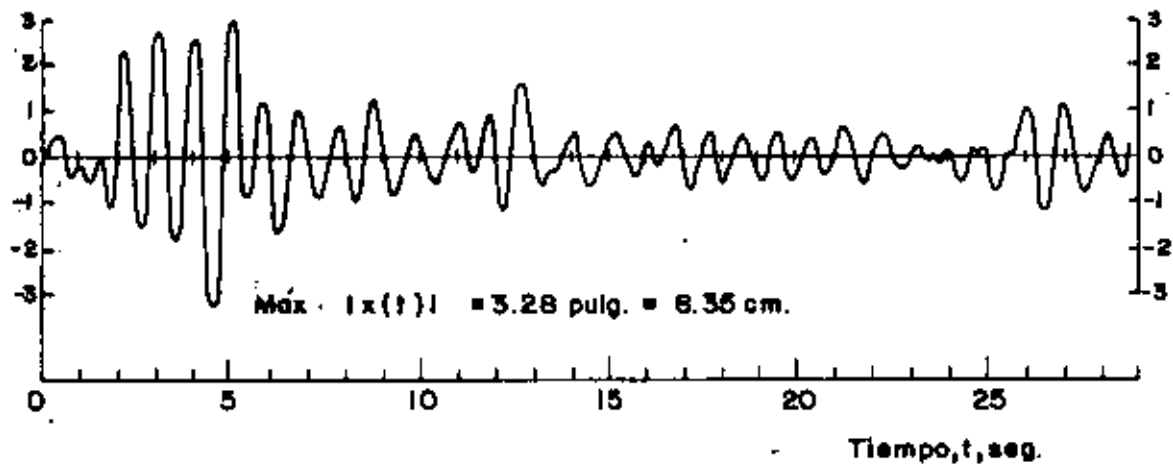
$$\text{SEAN } D_1 = \text{MAX} |y_1(t)| = D(\omega_1, \zeta)$$

$$D_2 = \text{MAX} |y_2(t)| = D(\omega_2, \zeta)$$

$$D_3 = \text{MAX} |y_3(t)| = D(\omega_3, \zeta)$$

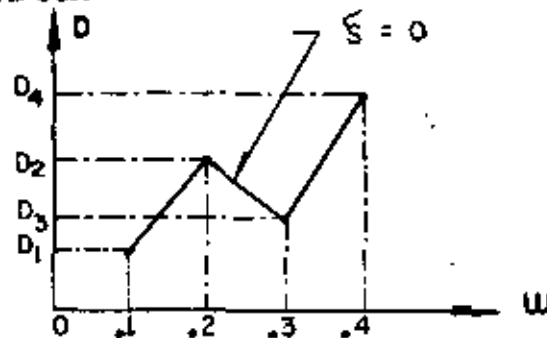
⋮

Desplazamiento relativo,  
 $X(t)$ , pulg.



Respuesta de un sistema amortiguado simple  
con  $T_1 = 1.0$  seg y  $\zeta = 0.10$ , al sismo de  
El Centro, Cal., 1940, componente N-S

EN TAL CASO, LA GRAFICA



ES EL ESPECTRO DE RESPUESTA DE DESPLAZAMIENTOS PARA  $\zeta=0$ . SI ESTE PROCESO DE REPITE FIJANDO OTROS VALORES DE  $\zeta$ , POR EJEMPLO,  $\zeta=0.02, 0.05, 0.1, 0.2$ , ETC, SE OBTENDRAN LOS ESPECTROS DE DESPLAZAMIENTOS CORRESPONDIENTES.

DE MANERA ANALOGA SE PUEDEN OBTENER LOS ESPECTROS PARA OTROS TIPOS DE RESPUESTA, TALES COMO VELOCIDAD RELATIVA, ACELERACION ABSOLUTA, ETC, QUE SON, RESPECTIVAMENTE

$$V = \text{MAX} |\dot{y}(t)|_{\zeta, \omega} ; A = \text{MAX} |\ddot{x}(t)|_{\zeta, \omega} \quad (29)$$

### PSEUDO - ESPECTROS

ESTADISTICAMENTE SE HA ENCONTRADO QUE

$$S_V = \omega D \dot{\quad} V \quad (30)$$

$$S_A = \omega^2 D \dot{\quad} A \dot{\quad} \omega V \quad (31)$$

A  $S_V$  Y  $S_A$  SE LES LLAMA PSEUDOESPECTROS.

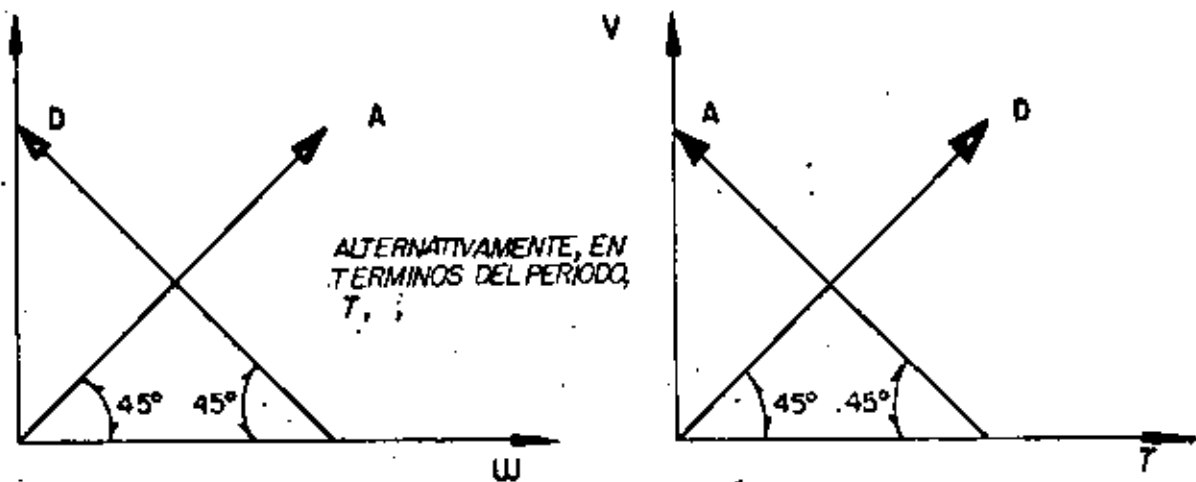
DE LA EC. (30):  $\log D = \log V - \log \omega = \log V + \log T - \log 2\pi$

DE LA EC. (31):  $\log A = \log V + \log \omega = \log V - \log T + \log 2\pi$

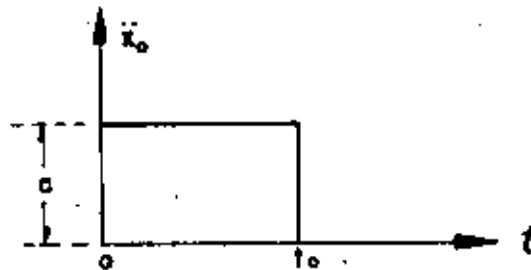
ESTAS ECUACIONES CORRESPONDEN A LINEAS RECTAS EN PAPEL LOGARITMICO;

LA PRIMERA CON PENDIENTE -1 Y LA SEGUNDA CON PENDIENTE +1, SI SE USA

$\omega$  COMO VARIABLE INDEPENDIENTE; SI SE USA T, LA PRIMERA TENDRA PENDIENTE + 1, Y LA SEGUNDA, -1.

**EJEMPLO**

CALCULAR EL ESPECTRO CORRESPONDIENTE A LA EXCITACION (CONSIDERESE  $\zeta=0$ )



EN UN EJEMPLO ANTERIOR SE OBTUVO

$$y(t) = \frac{-a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t), \text{ SI } 0 \leq t \leq t_0$$

$$D = \text{MAX}|Y(t)| = \frac{2a}{\omega^2} ; 0 \leq \frac{T}{2} \leq t_0, (0 \leq T \leq 2t_0)$$

$$S_V = \omega D = \frac{2a}{\omega} , S_A = \omega V = 2a$$

$$Y \quad D = \text{MAX}|y(t)| = \frac{2a}{\omega^2} \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} , \text{ SI } T > 2t_0$$

$$S_V = \omega D = \frac{2a}{\omega} \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right| ; S_A = \omega V = 2a \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right|$$

$$\text{LIM}_{\omega \rightarrow 0} S_V = \text{LIM}_{\omega \rightarrow 0} \left( a t_0 \frac{\text{sen} \frac{\omega t_0}{2}}{\frac{\omega t_0}{2}} \right) = a t_0$$

CASO PARTICULAR: SI  $t_0 = 1$  SEG y  $a = 100$  IN/SEG<sup>2</sup>

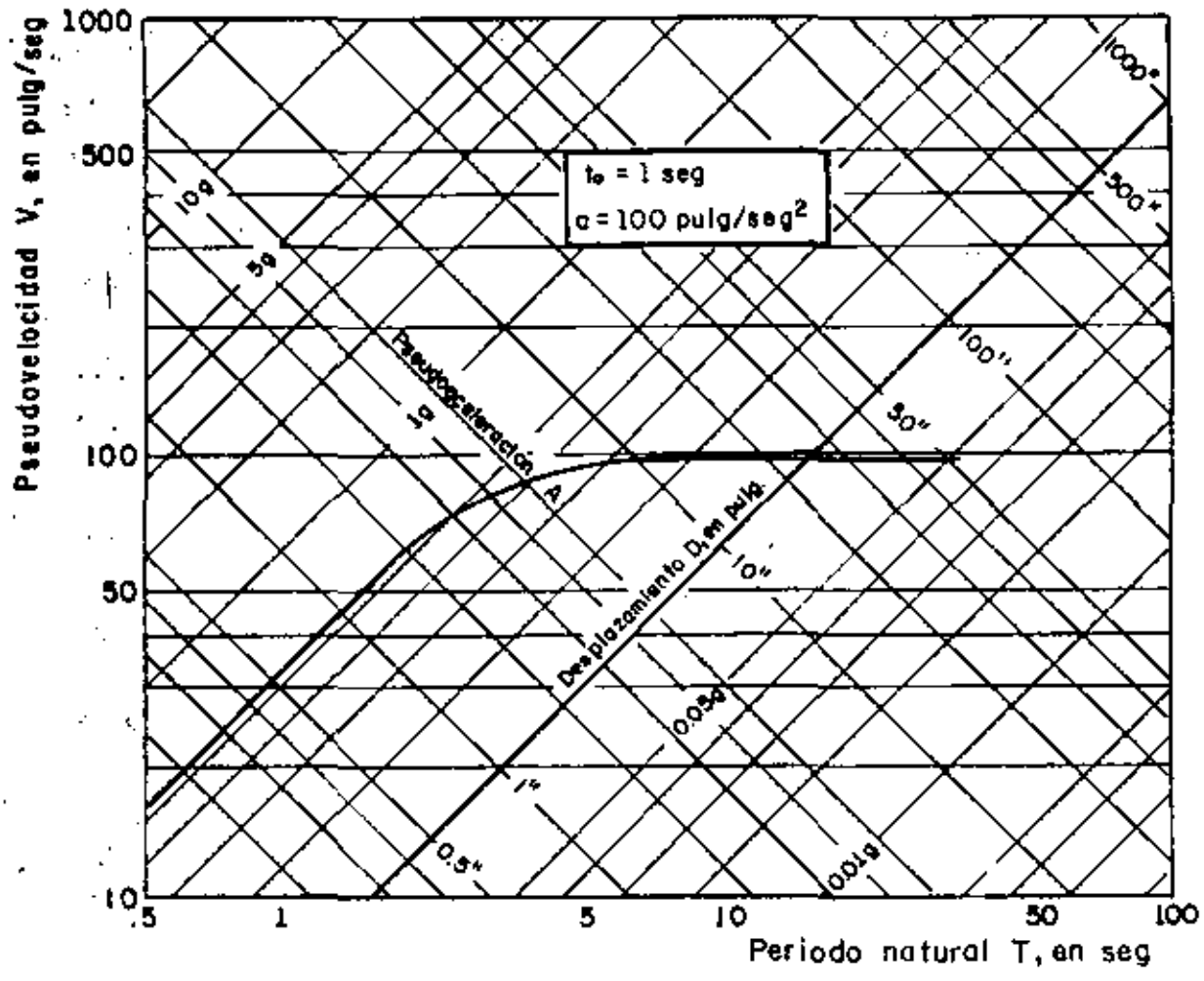
$$S_V = \frac{2 \times 100}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{100}{\pi} T, \text{ SI } 0 \leq T \leq 2 \text{ SEG}$$



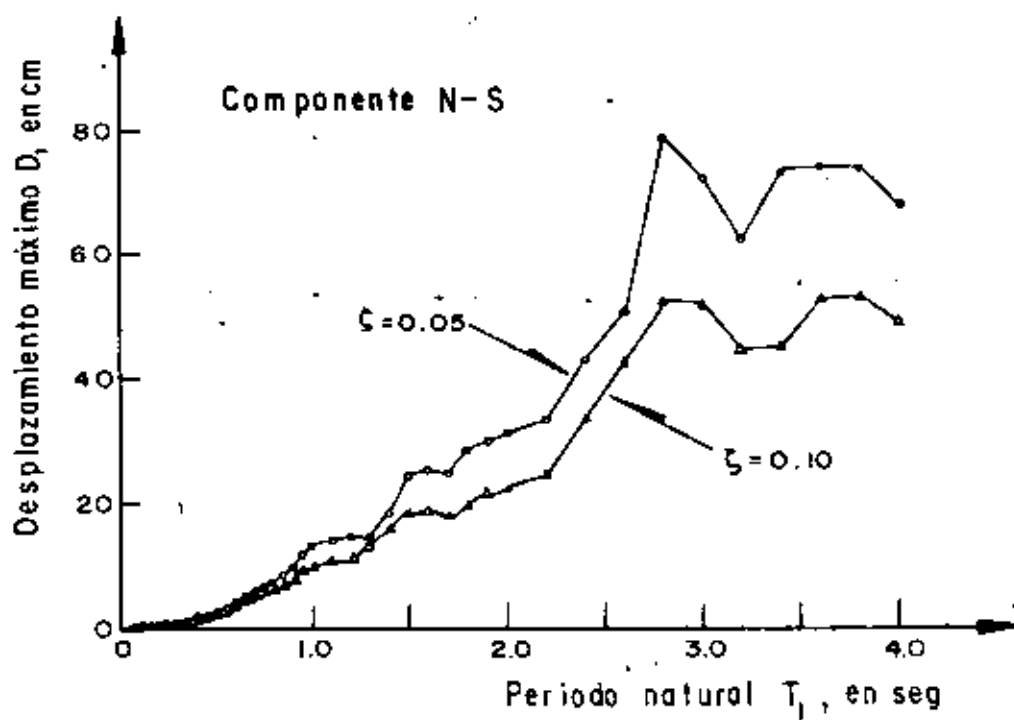
$$S_V = \frac{100T}{\pi} \left| \text{sen} \frac{2\pi x_1}{T} \right| =$$

$$= \frac{100T}{\pi} \left| \text{sen} \frac{\pi}{T} \right| \text{ SI } T > 2 \text{ SEG}$$

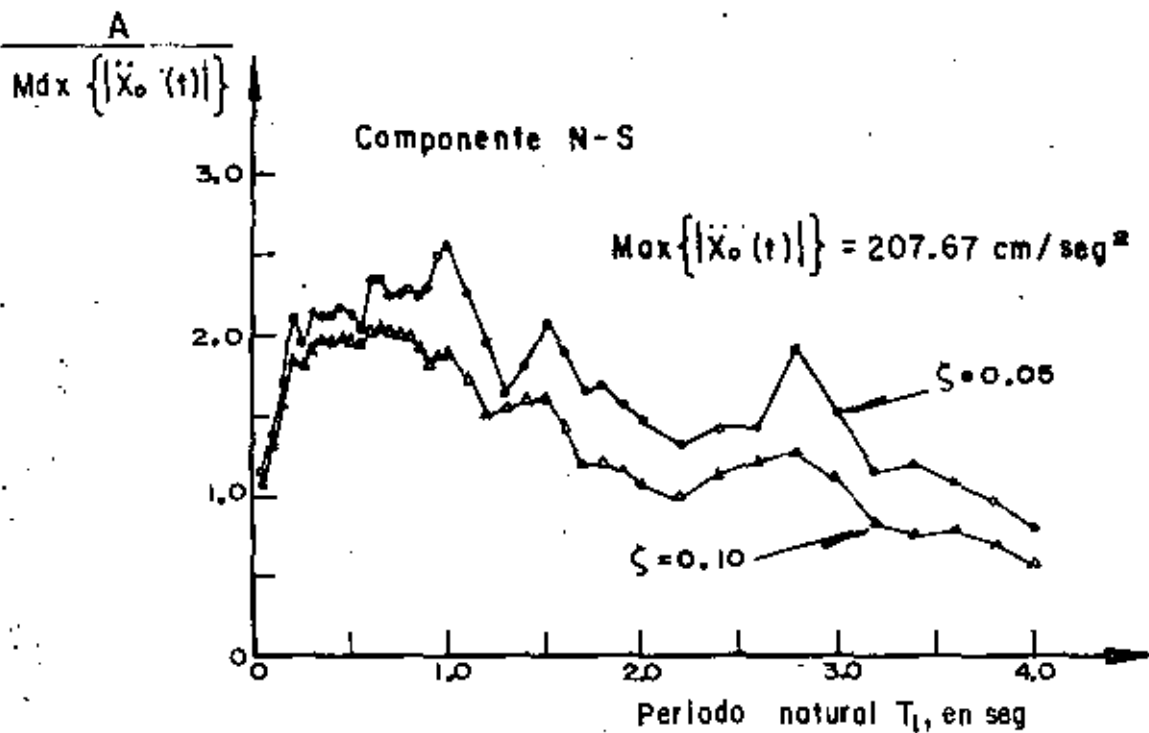
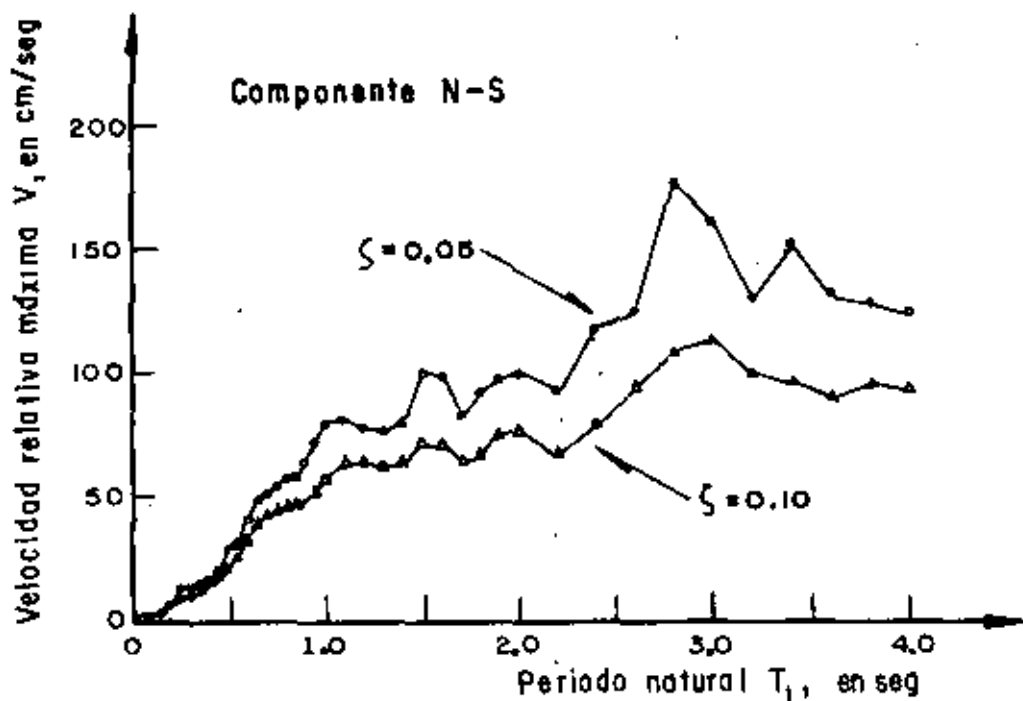
$$\lim_{T \rightarrow \infty} S_V = 100 \text{ IN/SEG}$$



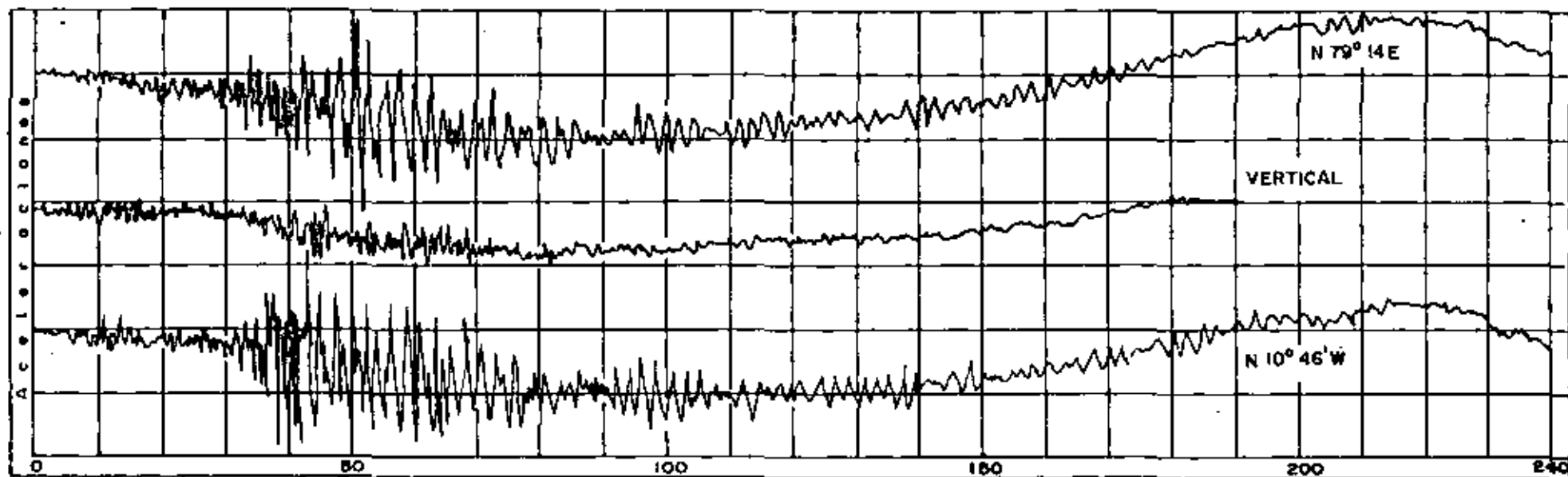
**Espectro no amortiguado correspondiente a un pulso rectangular de aceleraciones. Según N. Newmark y E. Rosenbluth, ref 1**



Espectro de desplazamientos. Sismo de Tokachi-Oki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurata y K. Sudo, ref 4



Espectros de velocidades y de aceleraciones. Sismo de Tokachi-Oki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurata y K. Sudo, ref. 4



Acelerogramas originales del sismo registrado el  
11-V-1962, en la ALAMEDA CENTRAL, Mex. D.F.  
(Tomada de la ref 2)

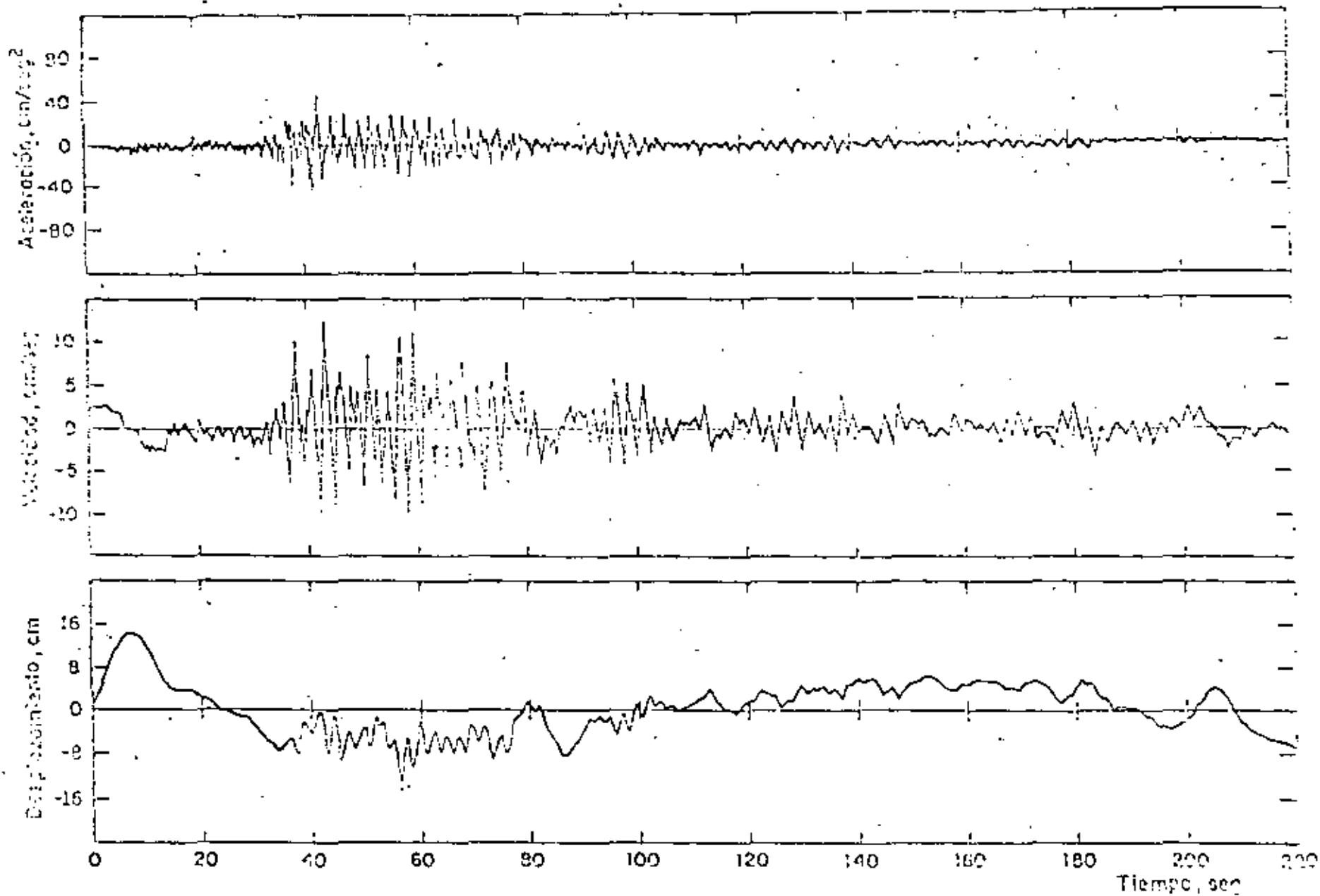


Fig 7 Movimiento del terreno. Alameda Central, 11 de mayo de 1962

COMPONENTE N 70°14'E

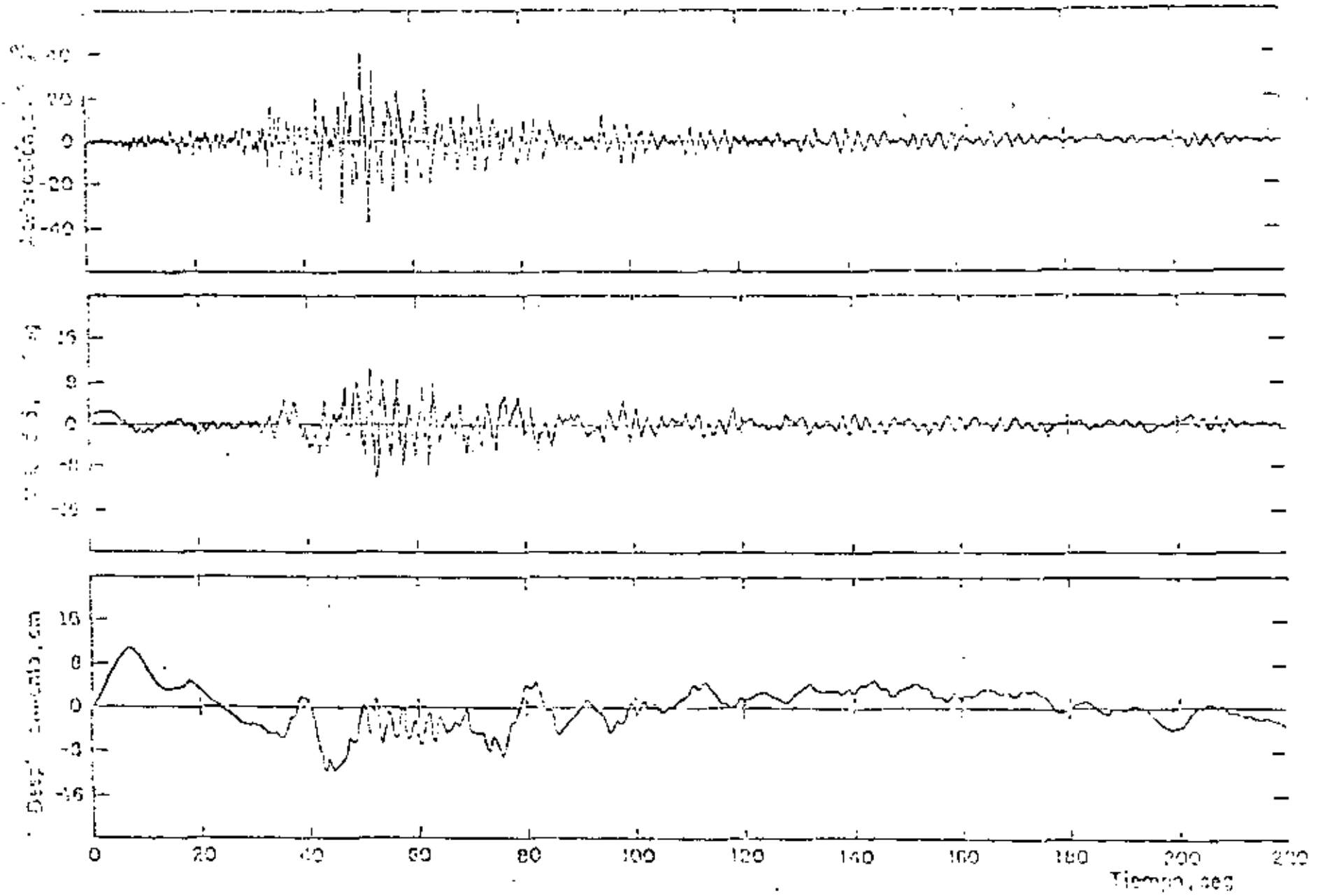


Fig 8 Movimiento del terreno. Alameda Central, 11 de mayo de 1962

COMPONENTE VERTICAL

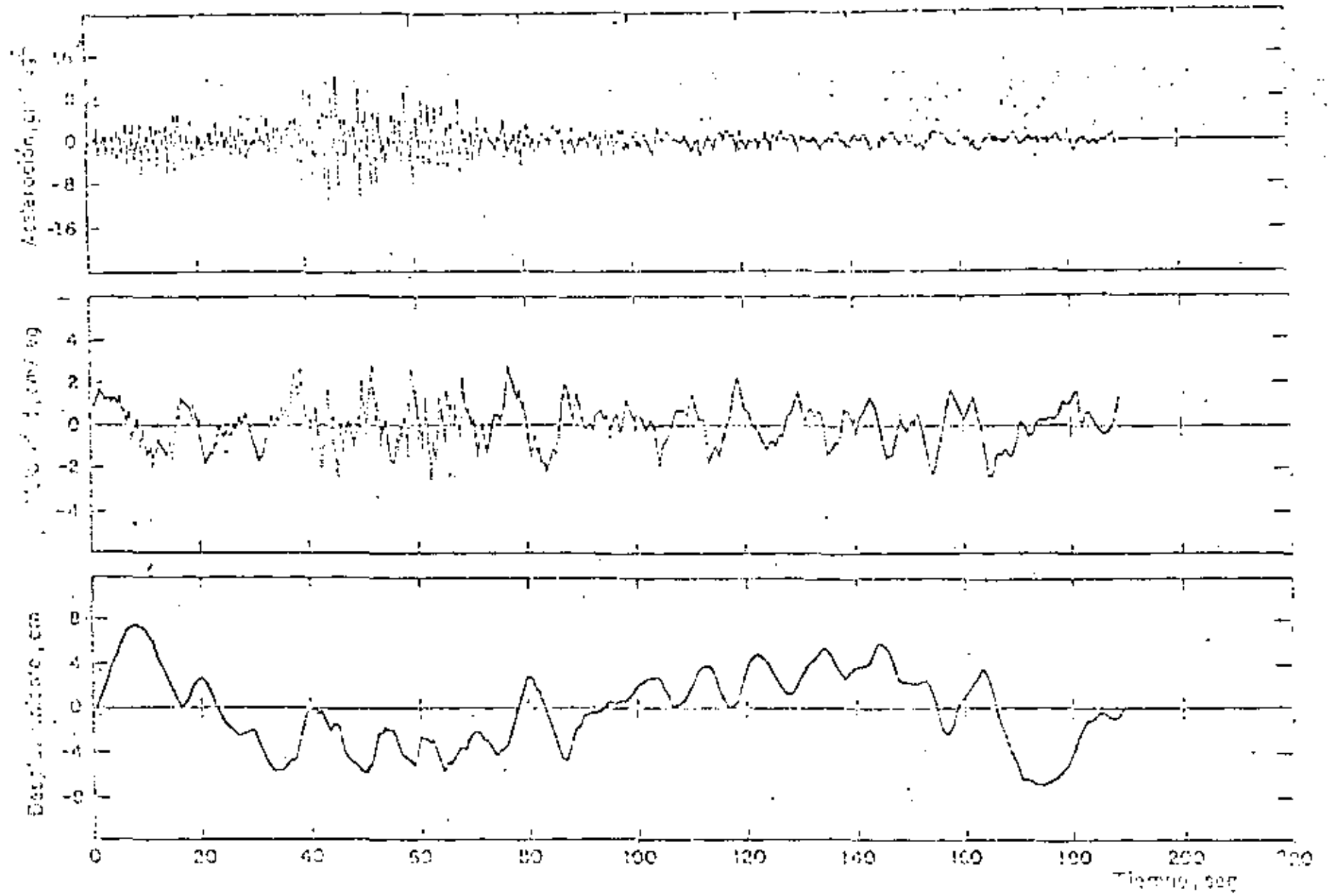


Fig 2 Movimiento del terreno, Alameda Centrus, 11 de mayo de 1962



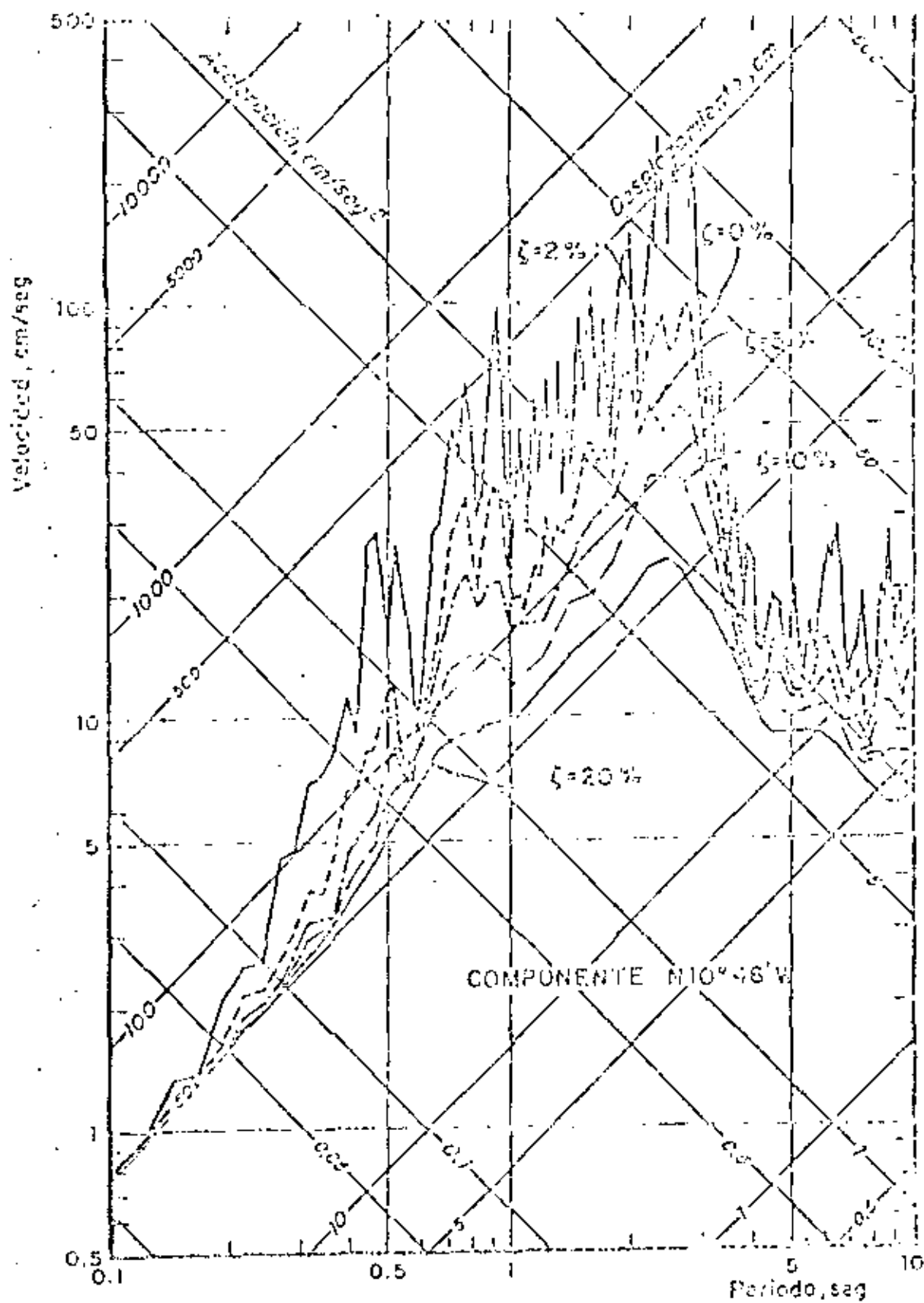


Fig 80 Espectros de respuesta. Alameda C. 1967,  
11 de mayo de 1967

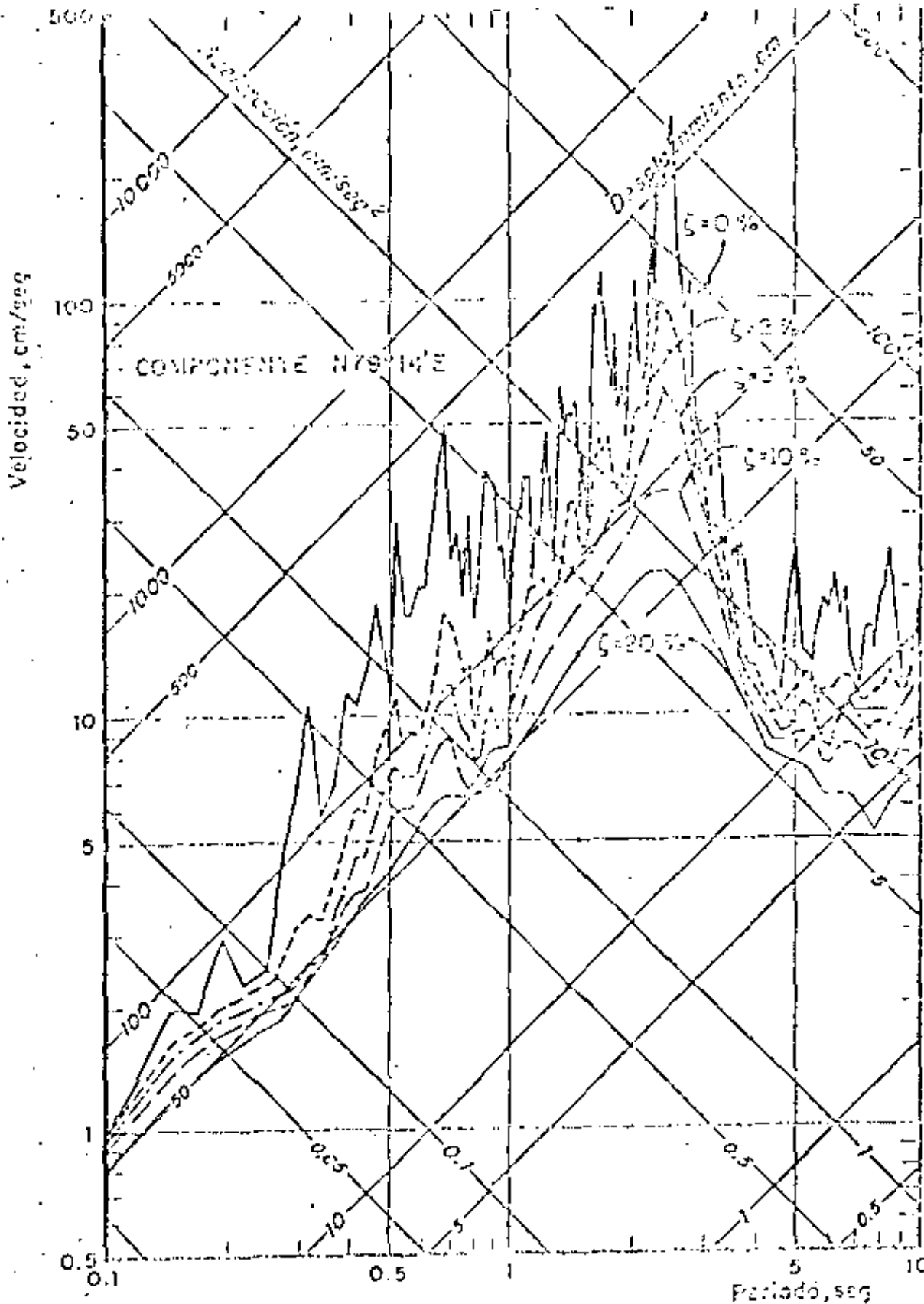


Fig B1 Espectros de respuesta. Alameda. Con ref.,  
11 de mayo de 1962.

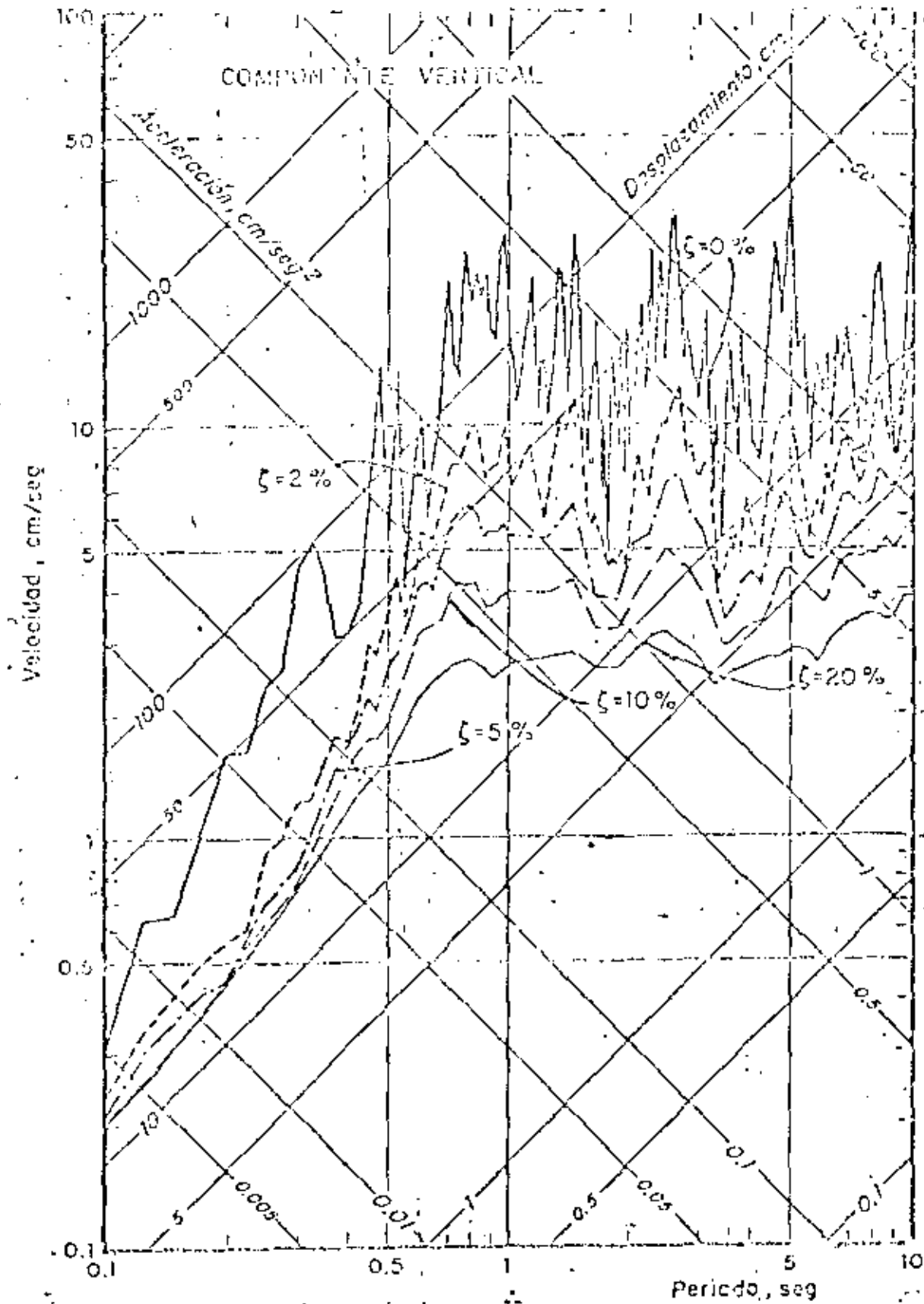


Fig 82 Espectros de respuesta. Alameda Central,  
11 de mayo de 1932.

COMPONENTE E-W

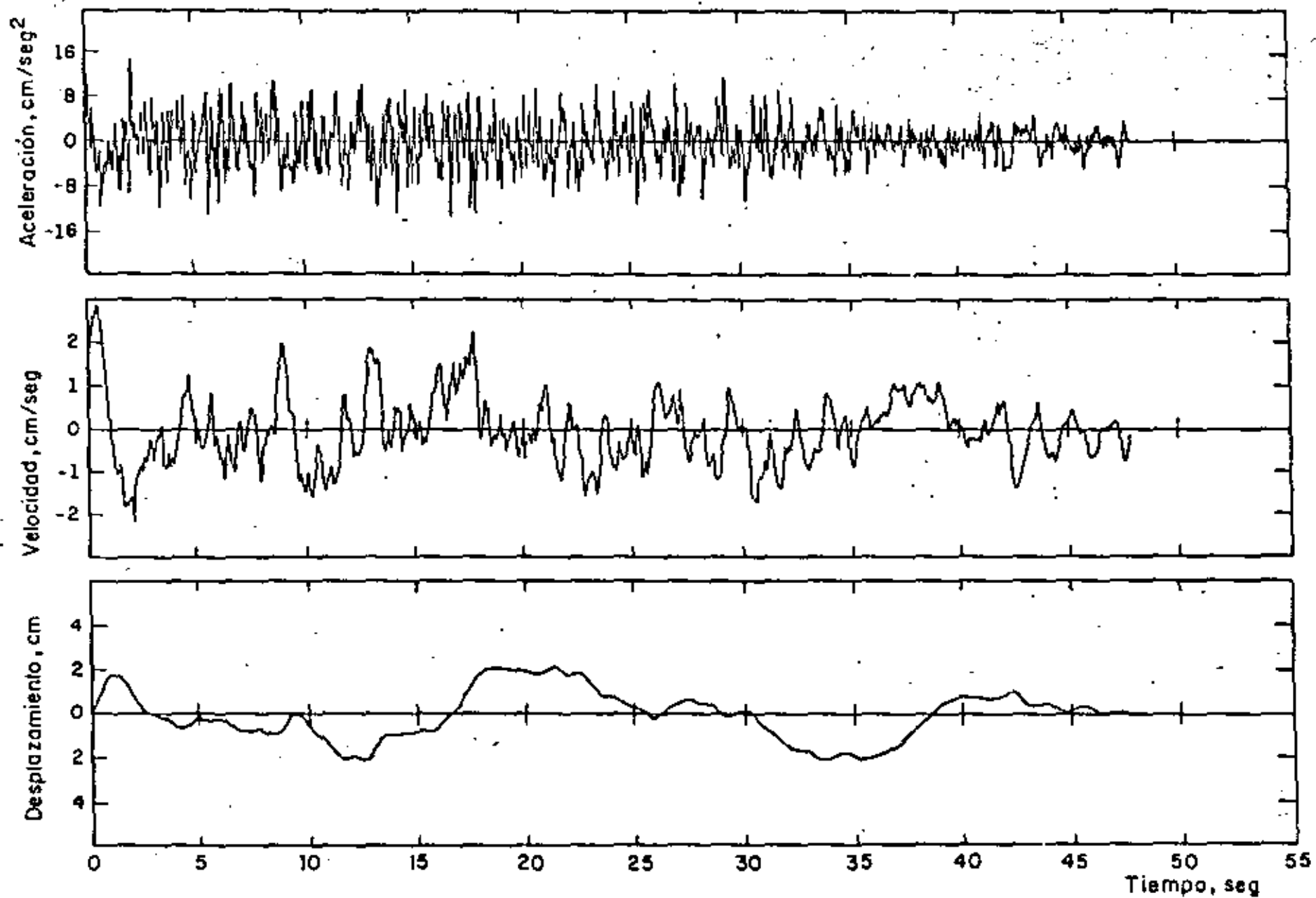


Fig 42 Movimiento del terreno. Ciudad Universitaria, 6 de julio de 1964

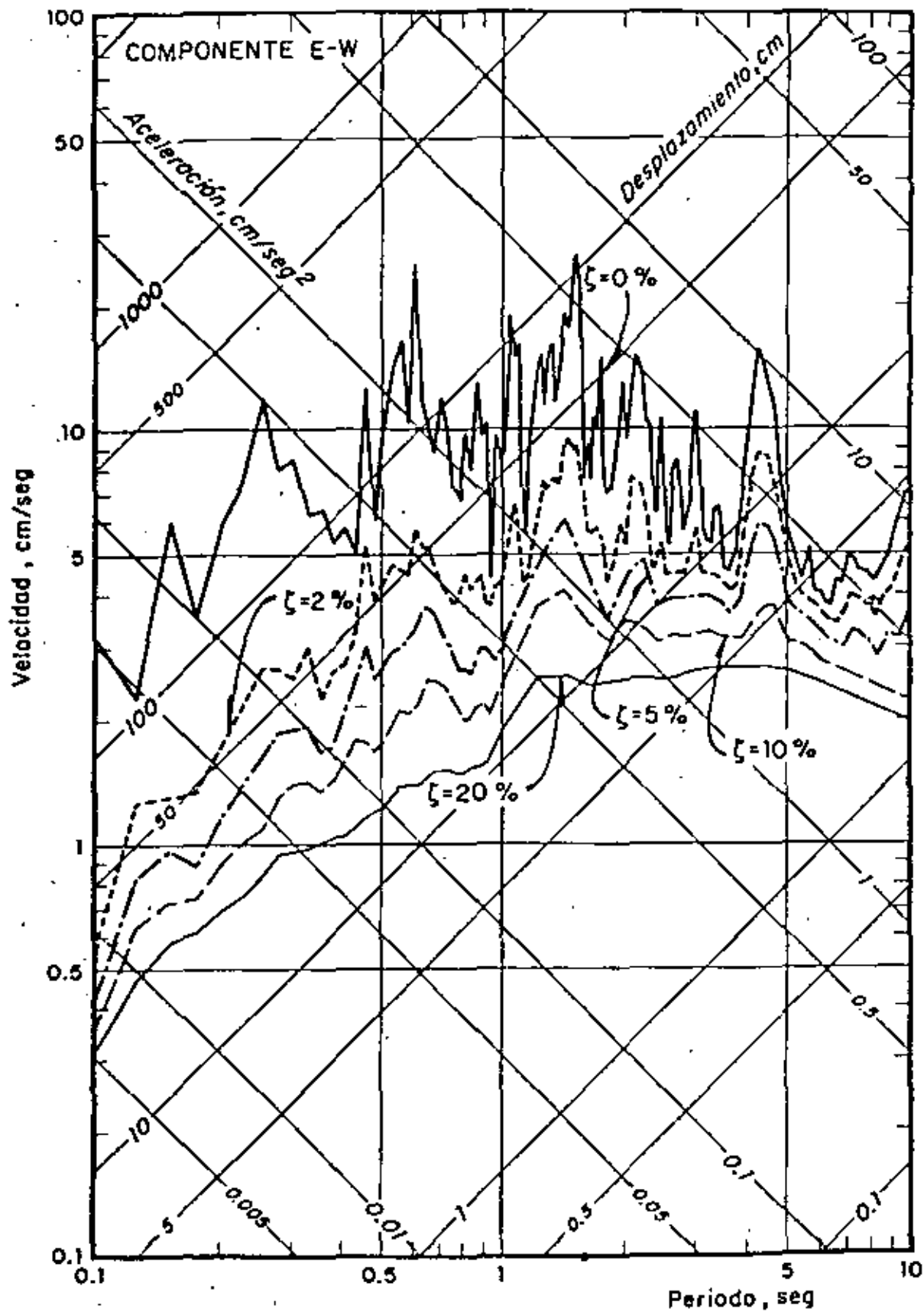
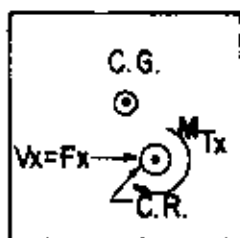
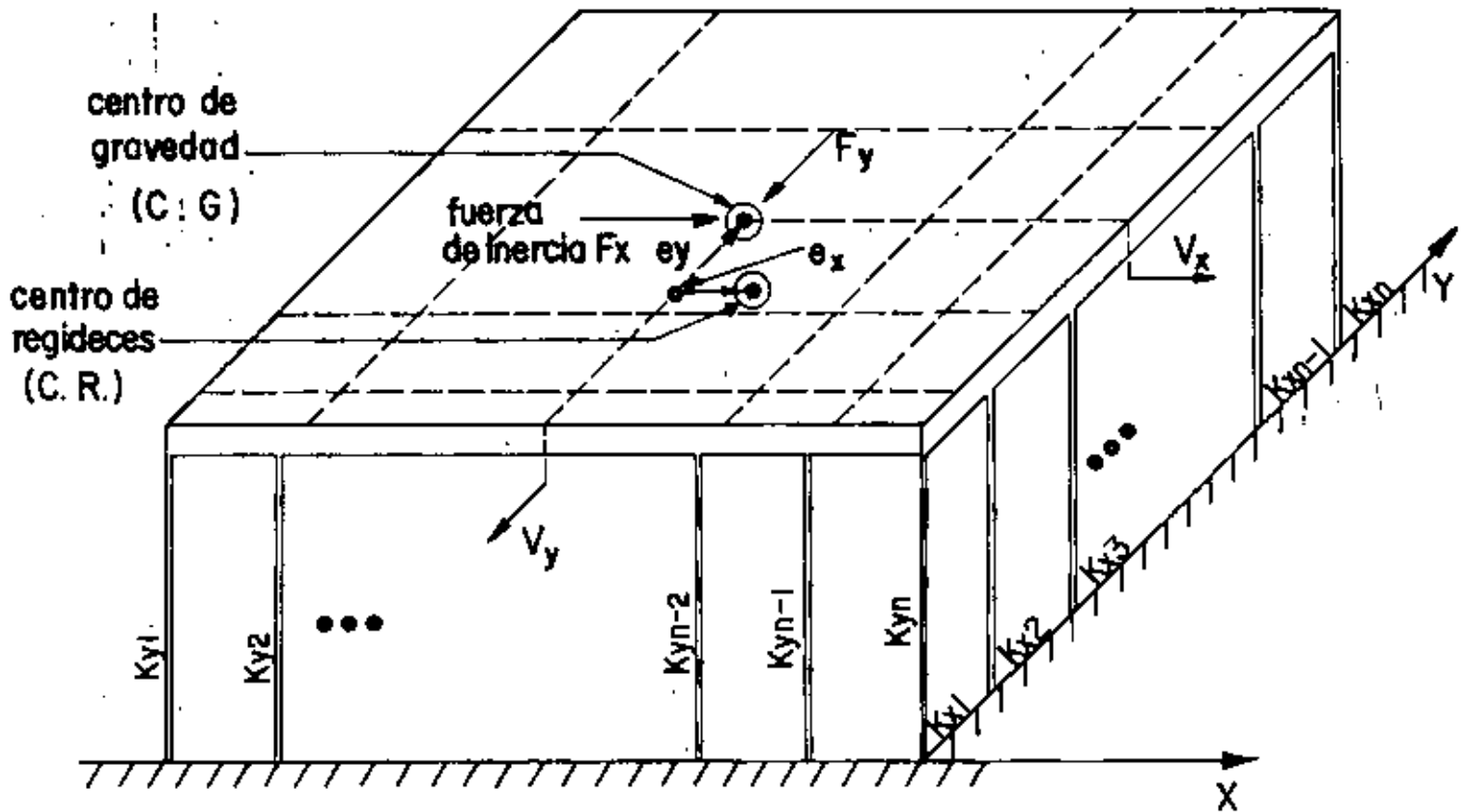
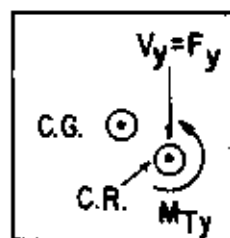


Fig 116 Espectros de respuesta, Ciudad Universitaria,  
6 de julio de 1964

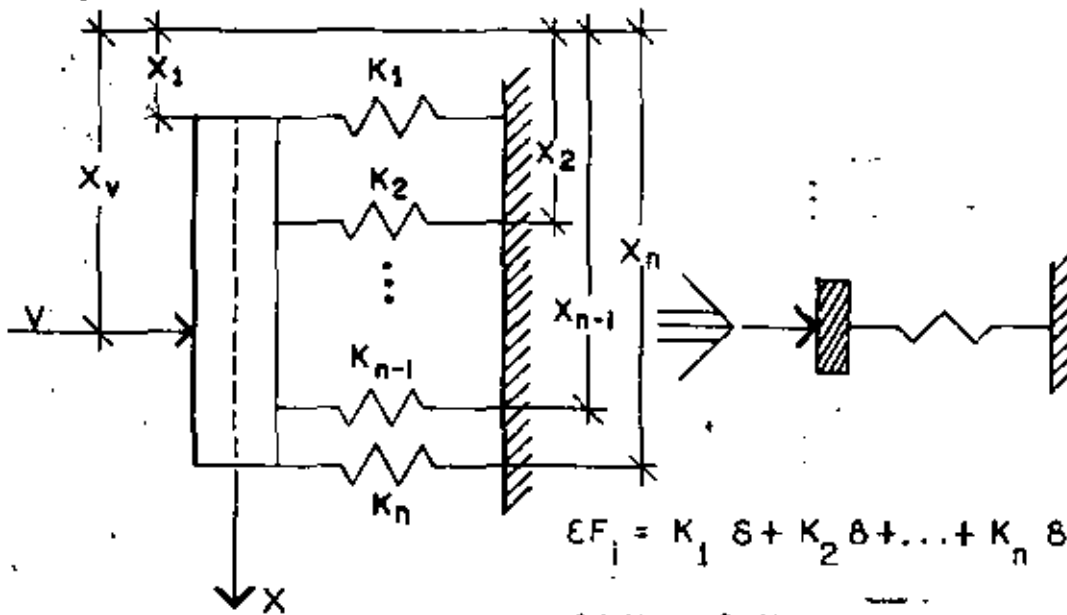
## DISTRIBUCION DE FUERZAS CORTANTES DIRECTAS Y POR TORSION



+



DISTRIBUCION DE LAS FUERZAS CORTANTES EN UN ENTREPISO



$$\sum F_i = K_1 \delta + K_2 \delta + \dots + K_n \delta = V = K_{eq} \delta$$

$$\delta \sum K_i = \delta K_{eq}$$

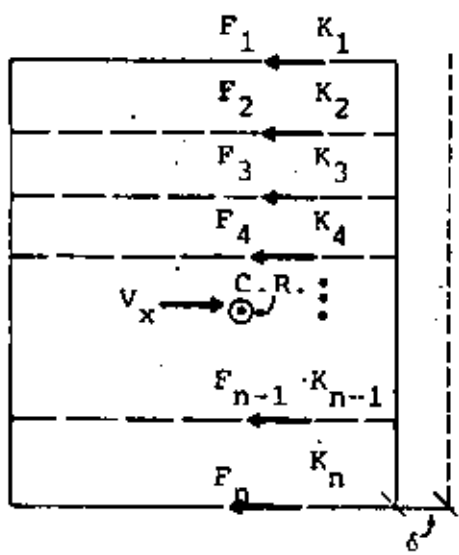
$$K_{eq} = \sum_{i=1}^n K_i$$

$$X_v = \frac{\sum_{i=1}^n K_i X_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$

$$\sum M_i = \sum F_i X_i = \sum K_i \delta X_i = \delta \sum K_i X_i = V X_v = K_{eq} \delta X_v$$

← POSICION DEL CENTRO DE RIGIDECES

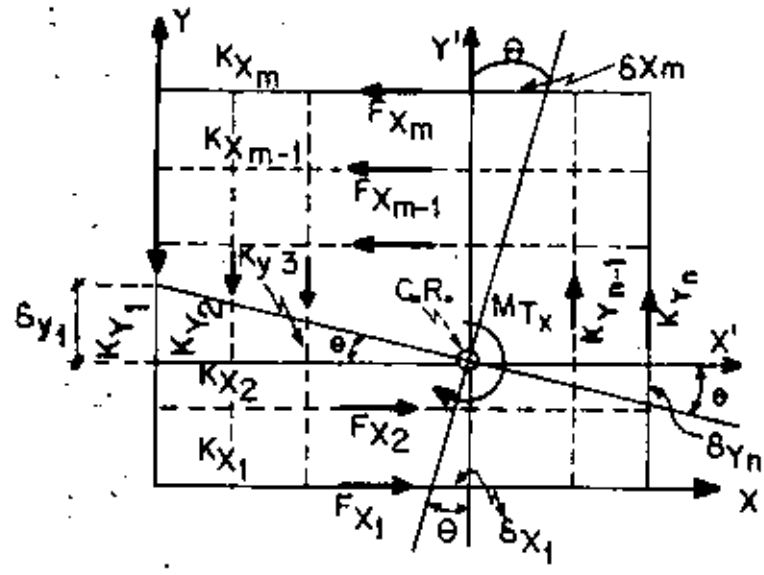
VEAMOS COMO SE DISTRIBUYEN LAS FUERZAS CORTANTES EN LOS MARCOS



$$F_i = K_i \delta$$

$$\sum F_i = \sum K_i \delta = V_x \therefore \delta = \frac{V_x}{\sum K_i}$$

$$F_i = V_x \frac{K_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$



$$F_{x_i} = K_{x_i} \delta_{x_i} = K_{x_i} Y'_i \theta$$

$$F_{y_i} = K_{y_i} \delta_{y_i} = K_{y_i} X'_i \theta$$

$$\sum M_{C.R.} = \sum F_{x_i} Y'_i + \sum F_{y_i} X'_i$$

$$= \theta (\sum K_{x_i} Y_i'^2 + \sum K_{y_i} X_i'^2)$$

$$= M_{TX}$$

DE DONDE  $\theta = \frac{M_{TX}}{\sum K_{x_i} Y_i'^2 + \sum K_{y_i} X_i'^2}$

POR LO QUE

$$F_{x_i} = M_{TX} \frac{K_{x_i} Y'_i}{\sum K_{x_i} Y_i'^2 + \sum K_{y_i} X_i'^2}$$

$$F_{y_i} = M_{TX} \frac{K_{y_i} X'_i}{\sum K_{x_i} Y_i'^2 + \sum K_{y_i} X_i'^2}$$



## SISTEMAS NO LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD

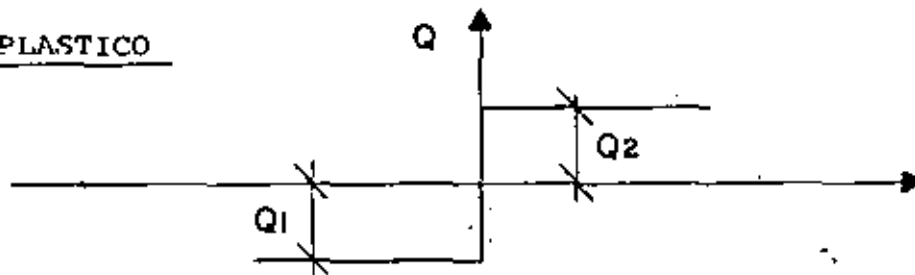
ECUACION DE MOVIMIENTO:

$$M\ddot{x} + Q(y, \dot{y}) = P(t) \quad ; \quad y = x - x_0 = \text{DESPLAZAMIENTO RELATIVO}$$

SI  $Q(y, \dot{y}) = KY + C\dot{y}$  SE TIENE EL SISTEMA ELASTICO LINEAL

MODELOS PARTICULARES

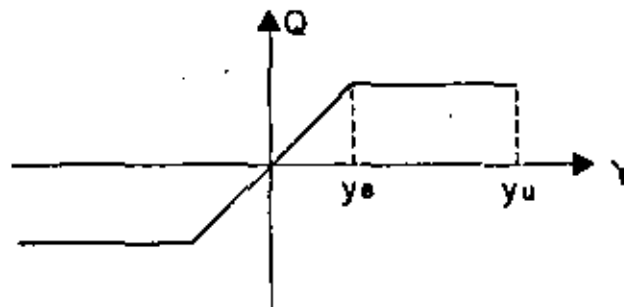
### 1. RIGIDO-PLASTICO



$$Q = -Q_1 + C\dot{y}, \text{ SI } \dot{y} < 0$$

$Q = Q_2 + C\dot{y}, \text{ SI } \dot{y} > 0$  EN DONDE C = CONSTANTE. SE HA EMPLEADO COMO MODELO EN EL ANALISIS DE TALUDES Y CORTINAS DE PRESAS DE TIERRA Y ENROCAMIENTO

### 2. ELASTO-PLASTICO



$$Q = Q_1(y) + C\dot{y}$$

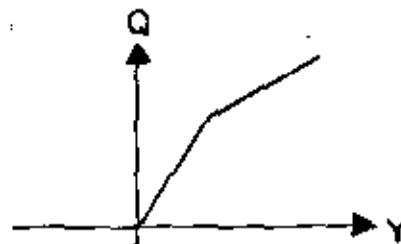
SE EMPLEA COMO MODELO EN EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS DUCTILES.

FACTOR DE DUCTILIDAD  $= \nu = y_u / y_e$

$y_u$  = DESPLAZAMIENTO MAXIMO QUE PUEDE SOPORTAR EL SISTEMA SIN FALLAR.

3. SISTEMA BILINEALCON ENDURECIMIENTO

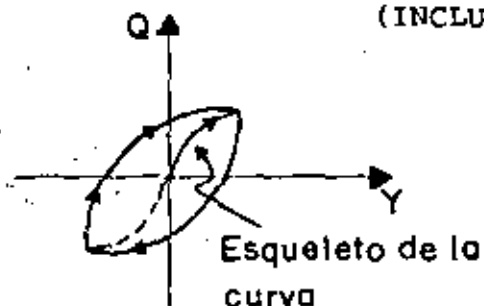
SE USA COMO MODELO PARA ANALISIS  
DE Puentes COLGANTES

CON ABLANDAMIENTO

SE USA COMO MODELO DE SISTEMAS  
QUE SE DEGRADAN POR AGRIETA-  
MIENTO (MUROS DE MAMPOSTERIA,  
POR EJEM)

4. TIPO MASING

(INCLUYE A LOS ANTERIORES COMO CASOS ESPECIALES)



$$\frac{Q - Q_0}{2} = Q_1 \left( \frac{y - y_0}{2} \right)$$

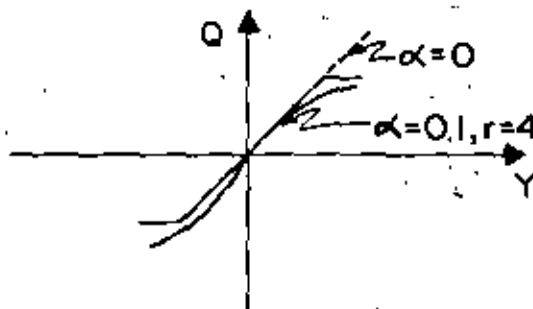
$Q_0$  = FUERZA EN  $y = y_0$

$y_0$  = DESPLAZAMIENTO EN EL CUAL EL PROCESO SE INVIRTIÓ (Y CAMBIO  
DE SIGNO) POR ULTIMA VEZ

## CASO PARTICULAR DEL ESQUELETO

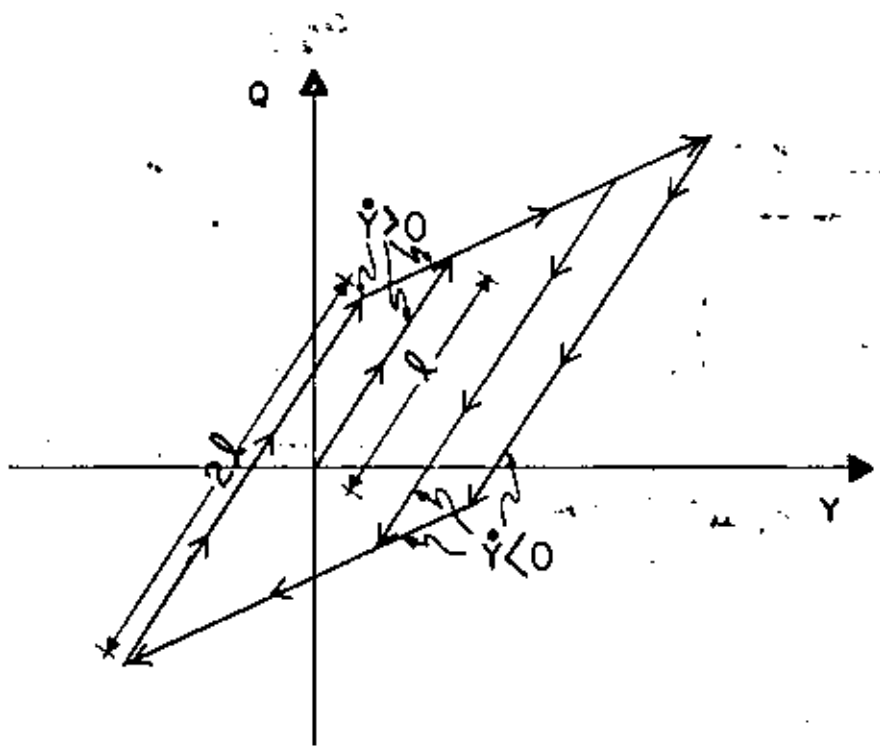
$$\frac{y}{y_1} = \frac{Q}{Q_1} + \alpha \left( \frac{Q}{Q_1} \right)^r \quad \text{(MODELO RAMBER - OSGOOD)}$$

DONDE  $y_1$ ,  $Q_1$ ,  $\alpha$  y  $r$  SON CONSTANTES POSITIVAS



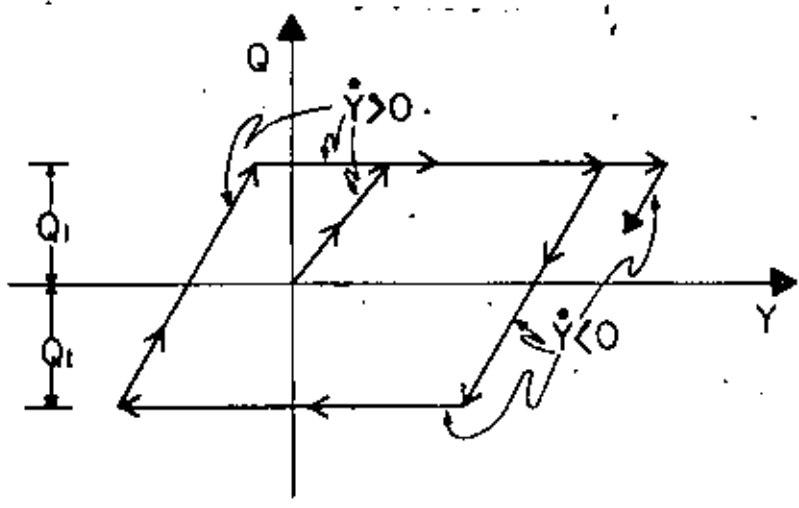
EJEMPLO:

CASO BILINEAL



EJEMPLO

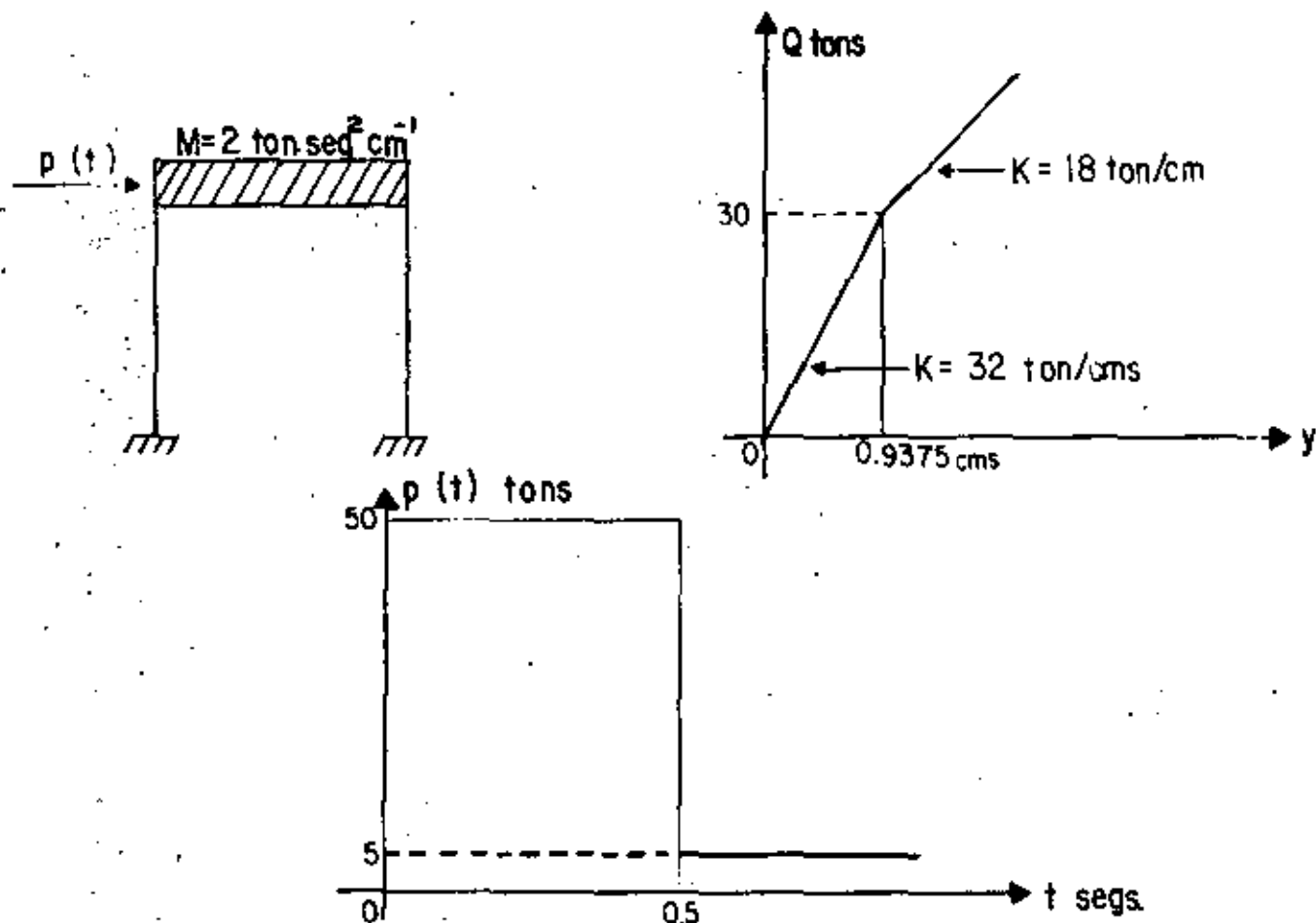
- - CASO ELASTOPLASTICO . . . .



METODO B DE NEWMARK

PARA EL ANALISIS DE SISTEMAS NO LINEALES, SE PUEDE USAR EL METODO B DE NEWMARK DESCRITO ANTERIORMENTE.

## EJEMPLO



ECUACION DE EQUILIBRIO DINAMICO ,  $M\ddot{Y} + Q(Y) = P(t)$

$$\ddot{Y} = \frac{P(t) - Q(Y)}{M} = \frac{P(t) - Q(y)}{2} \quad (I)$$

PARA LA APLICACION DEL METODO DE NEWMARK SE TIENEN LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \Delta t / 2$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i \Delta t + (0.5 - \beta) \ddot{Y}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{Y}_{i+1} (\Delta t)^2$$

CONSIDERANDO  $\Delta t = 0.10 \text{ SEG.}$  Y  $\beta = 1/6$  SE PUEDE ESCRIBIR:

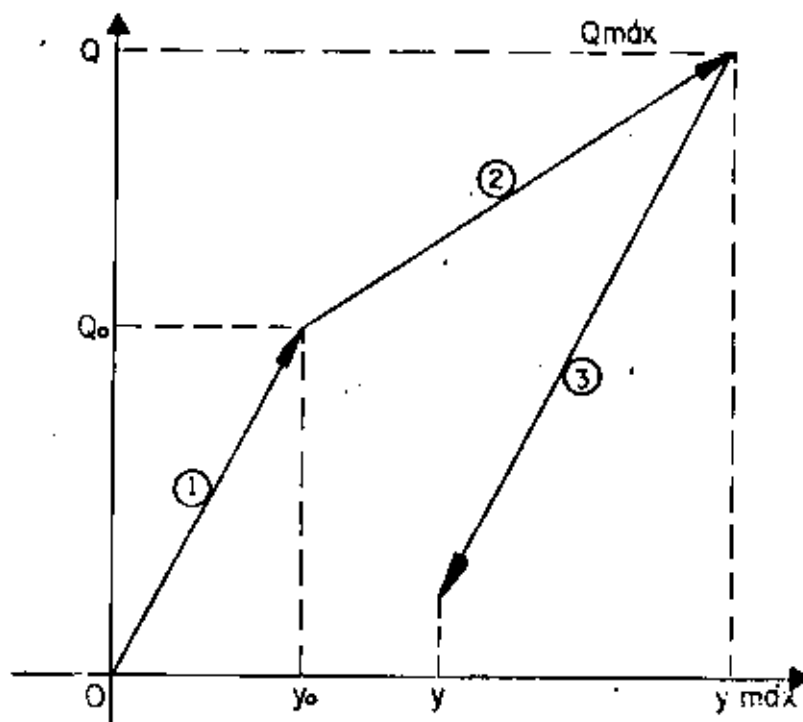
$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + \frac{1}{20} (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \quad \text{(II)}$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i (0.10) + \frac{1}{600} (2\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \quad \text{(III)}$$

EL PROCEDIMIENTO DE CALCULO ES COMO SIGUE:

- |   |   |                  |                       |
|---|---|------------------|-----------------------|
| { | SE ASUME                                      | $\ddot{Y}_{i+1}$ |                       |
|   | SE CALCULA                                    | $\dot{Y}_{i+1}$  | CON LA ECUACION (II)  |
|   | SE CALCULA                                    | $Y_{i+1}$        | CON LA ECUACION (III) |
|   | SE CALCULA UN MEJOR VALOR DE $\ddot{Y}_{i+1}$ |                  | CON LA ECUACION (I).  |
|   | ETC.  |                  |                       |

PARA LA FUNCION DE RESISTENCIA  $Q$  SE TIENEN LOS SIGUIENTES CASOS:



- |    |                         |   |
|----|-------------------------|---|
| 1. | COMPORTAMIENTO ELASTICO | , $Q = 32 Y$ TONS                       |
| 2. | CAMBIO DE RIGIDEZ       | , $Q = 30 + 18 (Y - Y_0)$ TON           |
| 3. | DESCARGA                | , $Q = Q_{mdx} - 32 (Y_{MAX} - Y)$ TONS |

ESTA ULTIMA EXPRESION MANTIENE SU VALIDEZ HASTA QUE,  $(Y_{MAX} - Y) \leq 2Y_0$

$$Y_0 = 0.9375 \text{ CMS} \quad ; \quad Q_0 = 30.0 \text{ TON}$$

$$\text{PARA } t=0, \quad \ddot{y} = \frac{P}{M} = \frac{50}{2} = 25 \quad ; \quad y = 0; \quad \dot{y} = 0$$

$$\text{PARA } t = 0.10, \quad y_1 = \dot{y}_1 = 0 \quad ; \quad \ddot{y}_1 = 25$$

1er. CICLO

SEA  $\ddot{y}_{i+1} = 20$  COMO PRIMER TANTEO. EN TAL CASO

$$\dot{y}_{i+1} = 0 + \frac{1}{20} (0 + 25) = 2.25$$

$$y_{i+1} = 0 + 0.10 \times 0 + \frac{1}{600} (2 \times 25 + 20) = 0.1167$$

$$Q = 32 \times 0.1167 = 3.7330$$

$$\ddot{y}_{i+1} = \frac{50 - 3.733}{2} = 23.134$$

2o. CICLO

$$\dot{y}_{i+1} = 23.134/2 = 16.567$$

$$y_{i+1} = 73.134/600 = 0.1219$$

$$Q = 32 \times 0.1219 = 3.9000$$

$$\ddot{y}_{i+1} = (50 - 3.9)/2 = 23.050$$

3er. CICLO

4o. CICLO

$$\bar{y}_{i+1} = 23.052$$

$$\bar{y}_{i+1} = 23.052/2 = 2.4026$$

$$\bar{y}_{i+1} = 73.052/600 = 0.12175$$

$$\Omega = 32 \times 0.12175 = 3.8960$$

$$\bar{y} = (50 - 3.8960)/2 = 23.052 \dots \text{ETC.}$$

LOS CALCULOS BASICOS SE MUESTRAN EN LA TABLA SIGUIENTE:

t SEGS	p TONS	$\ddot{Y}$ CM SEG <sup>-2</sup>	$\dot{Y}$ CM SEG <sup>-1</sup>	Y CMS	Q TONS
0.0	50.00	25.000	0.00	0.00	0.00
0.10	50.00	20.000	2.2500	0.1167	3.7330
		23.134	2.4070	0.1219	3.9000
		23.050	2.4025	0.12175	3.3960
		23.052	2.4026	0.12175	3.8960
0.20	50.00	20.000	4.5552	0.4722	15.110
		17.445	4.4270	0.46793	14.970
		17.513	4.4310	0.46804	14.977
		17.511	4.43075	0.46204	14.977
0.30	50.00	10.000	5.8060	0.98610	30.8750
		9.560	5.7840	0.98540	30.8620
		9.569	5.7848	0.98543	30.8630
0.40	50.00	0.00	6.2630	1.5958	41.849
		4.0750	6.4670	1.6026	41.972
		4.0141	6.4640	1.6025	41.970
		4.0150	6.4640	1.60250	41.970
0.50 <sup>-</sup>	50.00	0.00	6.6650	2.2623	53.846
		-1.9230			
		-1.9000	6.56975	2.2591	53.789
		-1.8944			
0.50 <sup>+</sup>	5.00	-1.8946	6.5700	2.25912	53.789
		-24.3946	6.5700	2.25912	53.789
0.60	5.00	-30.000	3.8503	2.7848	63.251
		-29.126	3.8940	2.78626	63.278
		-29.136	3.89347	2.78624	63.277
		-29.138	3.89347	2.78624	63.277
0.70	5.00	-32.000	0.83657	3.025127	67.577
		-31.289			
		-31.320	0.87057	3.02626	67.598
		-31.299			
0.7278	5.00	-31.301	0.87147	3.02641	67.600
		-31.620	-0.00313	3.03850	67.818
0.7278	5.00	-31.409			
		-31.420	-0.000352	3.03853	67.818
		-31.4093	-0.000205	3.03853	67.818

En  $t=0.5 + \text{SEG}$ ,  $\ddot{Y} = -45/2 = -22.5 \therefore -22.5 - 1.8946 = -24.3946$



## CONTINUACION DEL CUADRO ANTERIOR

t	P	$\ddot{Y}$	$\dot{Y}$	Y	Q
0.80	5.0	-28.000	-2.1449	2.959611	65.293
		-30.146			
		-30.000	-2.21708	2.957874	65.237
		-30.118			
		-30.117	-2.22127	2.95777	65.234
0.90	5.0	-27.00	-5.07712	2.59025	53.473
		-24.236			
		-25.00	-4.97712	2.59358	53.580
		-24.290			
		-24.294	-4.94182	2.59476	53.617
		-24.308	-4.94242	2.59474	53.617
1.00	5.0	-14.00	-6.85782	1.99614	34.461
		-14.7305			
		-14.7200	-6.89382	1.99494	34.423
		-14.7120	-6.89342	1.99495	34.423

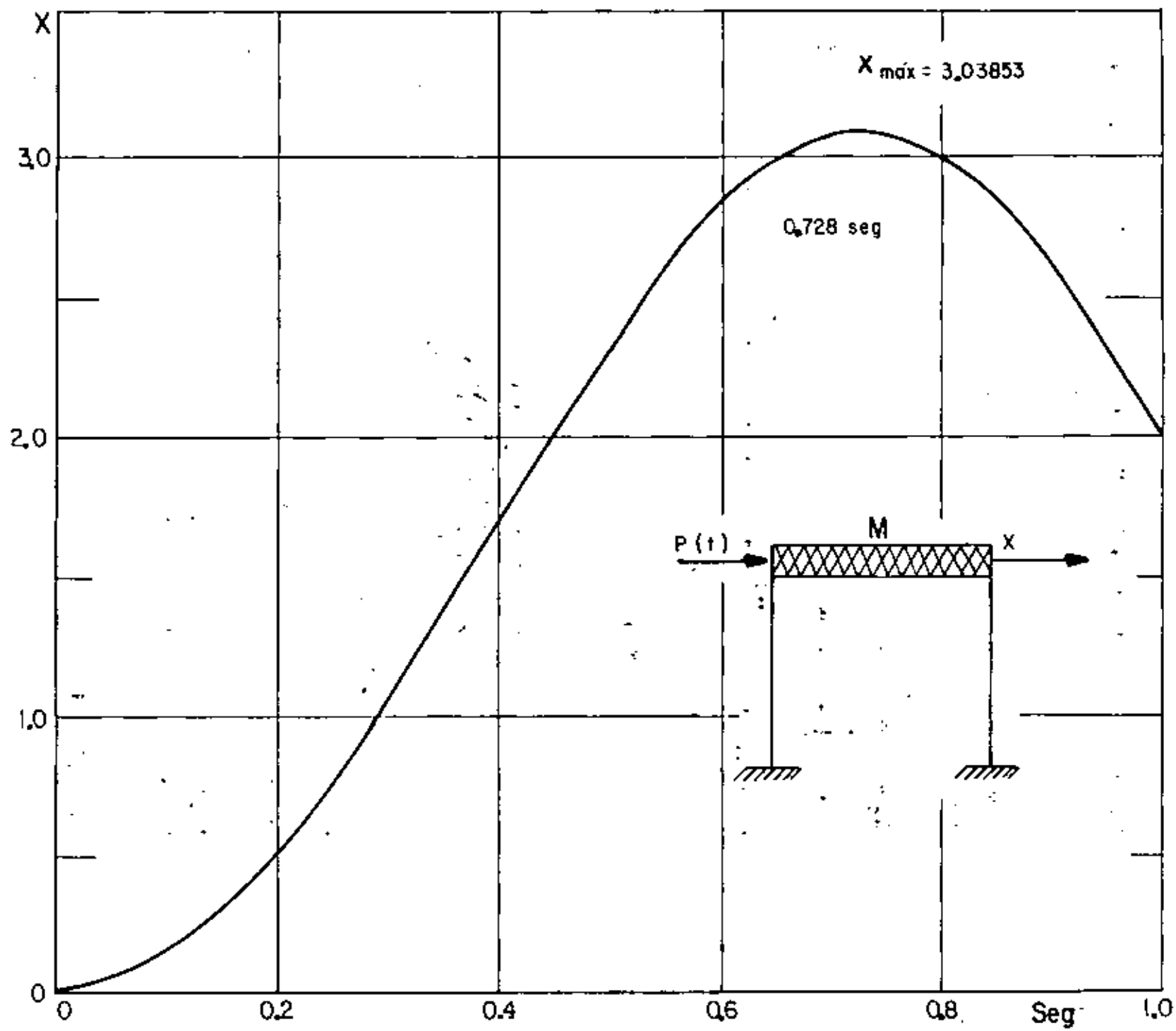
EN ESTOS CALCULOS SE INTRODUJO  $t = 0.50^-$  Y  $0.50^+$  PORQUE PARA ESTE INSTANTE SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA CARGA  $P(t)$  DE 50.00 TONS A 5.00 TONS, CON LO CUAL SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA ACELERACION DEL SISTEMA  $\ddot{Y}$ . EN ESTE INSTANTE NO SE PRODUCEN CAMBIOS EN  $\dot{Y}$  Y Y. EL TIEMPO  $t = 0.7273$  SEG. SE INTRODUJO POR LA NECESIDAD DE CALCULAR LOS VALORES DE  $\dot{Y}$  Y DE Q, PUES A PARTIR DE DICHO INSTANTE SE INICIA LA DESCARGA DEL SISTEMA. ESTA CONDICION SE ENCONTRO SOBRE LA BASE DE APROXIMAR  $\ddot{Y}$  A CERO, OBTENIENDOSE  $\dot{Y}_{MAX} = 3.03853$  CMS Y  $Q_{MAX} = 67.818$  TON.

EN EL CUADRO SIGUIENTE SE PRESENTA UN RESUMEN DE LOS RESULTADOS.

t Seg.	Y(supuesta) Cm Seg <sup>-2</sup>	P Ton	Y Cm.	Q Ton	Y(calculado) Cm Seg <sup>-2</sup>	Y Cm Seg <sup>-1</sup>	NOTAS
0.0	- -	50.00	0.00	0.00	25.00	0.00	
0.10	23.0520	50.00	0.12175	3.896	23.0520	2.40260	
0.20	17.5110	50.00	0.46804	14.977	17.5110	4.43075	
0.30	9.5690	50.00	0.98543	30.863	9.5690	5.78480	CAMBIO DE RIGIDEZ
0.40	4.0150	50.00	1.60250	41.970	4.0150	6.4640	
0.50	-1.8946	50.00	2.25912	53.789	-1.8946	6.5700	
0.50+	- -	5.00	2.25912	53.789	-24.3945	6.5700	CAMBIO DE CARGA
0.60	-29.1380	5.00	2.78624	63.277	-29.1380	3.89347	
0.70	-31.3010	5.00	3.02641	67.600	-31.3010	0.87147	
0.7278	-31.4093	5.00	3.03853	67.818	-31.4093	-0.000205	Qmáx, Ymáx.
0.800	-30.1170	5.00	2.95777	65.234	-30.1170	-2.22127	
0.90	-24.3080	5.00	2.59474	53.617	-24.3080	-4.94242	
1.00	-14.7120	5.00	1.99495	34.423	-14.7120	-6.89342	

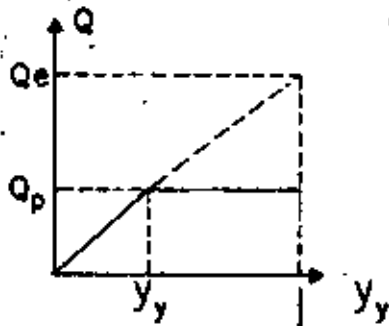
RESPUESTA MAXIMA

$$\left\{ \begin{array}{l} Y \text{ máx} = 3.03853 \text{ cms} \\ Q \text{ máx} = 67.818 \text{ tons} \end{array} \right.$$



CRITERIOS PARA TRAZAR ESPECTROS DE DISEÑO ELASTOPLASTICOS A PARTIR DEL ELASTICO

1. CRITERIO DE IGUAL DESPLAZAMIENTO MAXIMO DEL SISTEMA ELASTICO Y EL ELASTOPLASTICO DE IGUAL PERIODO:

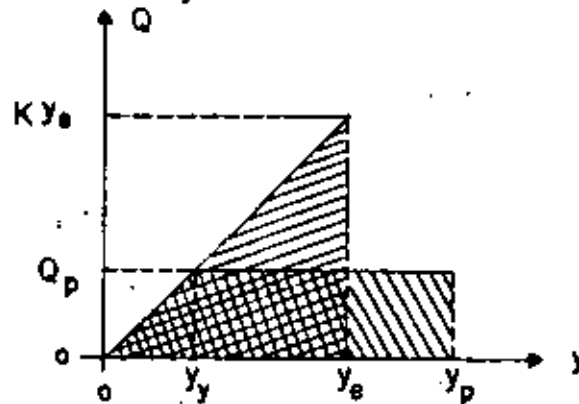


$$Q_p = Ky_y = \frac{Ky_{MAX}}{\mu} = \frac{Q_e}{\mu}$$

$$y_{MAX} = D_e = \mu y_y = \mu D_p$$

$$D_p = \frac{D_e}{\mu}$$

2. CRITERIO DE IGUAL ENERGIA ABSORVIDA POR LA ESTRUCTURA:



$$\frac{Ky_e y_e}{2} = \frac{Ky_y y_y}{2} + Ky_y (y_p - y_y)$$

$$\frac{1}{2} y_e^2 = \frac{1}{2} y_y^2 + y_y y_p - y_y^2 = y_y y_p - \frac{y_y^2}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{y_e}{y_y}\right)^2 = \frac{y_p}{y_y} - \frac{1}{2} = \mu - \frac{1}{2}$$

$$\frac{y_e}{y_y} = \sqrt{2\mu - 1}$$

$$y_y = \frac{y_e}{\sqrt{2\mu - 1}}$$

$$y_{y\_MAX} = D_p = \frac{y_e]_{MAX}}{\sqrt{2\mu - 1}} = \frac{D_e}{\sqrt{2 - 1}}$$

POR LO TANTO

$$D_p = D_e / \sqrt{2\mu - 1} \quad Y \quad Q_p = Q_e / \sqrt{2\mu - 1}$$



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

DINAMICA ESTRUCTURAL.

METODO  $\beta$  DE NEWMARK

SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

Dr. Octavio A. Rasón Chávez  
Julio, 1984

MÉTODO  $\beta$  DE NEWMARK

SISTEMAS ELÁSTICOS LINEALES DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

PARA CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE N GRADOS DE LIBERTAD Y COMPORTAMIENTO ELÁSTICO LINEAL SE EMPLEAN LAS MISMAS ECUACIONES QUE PARA UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD.

$$\dot{x}_j(t_{i+1}) = \dot{x}_j(t_i) + [\ddot{x}_j(t_i) + \ddot{x}_j(t_{i+1})] \frac{\Delta t}{2}$$

$$x_j(t_{i+1}) = x_j(t_i) + \dot{x}_j(t_i)\Delta t + [(1/2-\beta)\ddot{x}_j(t_i) + \beta\ddot{x}_j(t_{i+1})](\Delta t)^2$$

EN DONDE  $j = 1, 2, \dots, N$ .

EN ESTE CASO SE RECOMIENDA TAMBIEN UN VALOR DE  $\beta$  COMPRENDIDO ENTRE 1/4 Y 1/6, Y QUE  $\Delta t \leq 0.1 T_N$ , EN DONDE  $T_N$  ES EL PERIODO NATURAL DE VIBRACION MAS PEQUEÑO.

EJEMPLO

SEA UN SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD CON AMORTIGUAMIENTO NULO, CUYAS MATRICES DE MASAS Y RIGIDEZES SON:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

USANDO EL METODO  $\beta$  DE NEWMARK CON  $\Delta t = 0.2$  seg Y  $\beta = 1/6$  CALCULE LA RESPUESTA DINAMICA ANTE UNA EXCITACION DADA POR LOS DESPLAZAMIENTOS DEL SUELO:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1.2 t & \text{SI } 0 \leq t \leq 2 \text{ seg} & \quad (x_0 \text{ EN CENTIMETROS}) \\ x_0 &= 4.8 - 1.2 t & \text{SI } 2 \leq t \leq 4 \text{ seg} \\ x_0 &= 0 & \text{SI } t < 0 \text{ o } t > 4 \text{ seg} \end{aligned}$$

PUESTO QUE ESTA EXCITACION IMPLICA QUE  $\ddot{x}_0(t) = 0$  PARA TODO  $t$ , SE TIENE QUE LA ECUACION MATRICIAL DE EQUILIBRIO RESULTA SER

$$\underline{M}\ddot{\underline{Y}} + \underline{K}\underline{Y} = \underline{M}\ddot{\underline{Y}} + \underline{Q} = \underline{0}$$

POR LO QUE

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + Q_1 &= 0 & \rightarrow & \ddot{y}_1 = Q_1/m_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 + Q_2 &= 0 & \rightarrow & \ddot{y}_2 = Q_2/m_2 \end{aligned}$$

EN DONDE  $y_1 = x_1 - x_0$  Y  $y_2 = x_2 - x_0$ .

CON  $\Delta t = 0.2$  seg Y  $\beta = 1/6$ , LAS ECUACIONES DEL METODO  $\beta$  DE NEWMARK QUEDAN EN LA FORMA

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t_{i+1}) &= \dot{x}_j(t_i) + 0.1 [\ddot{x}_j(t_i) + \ddot{x}_j(t_{i+1})] \\ x_j(t_{i+1}) &= x_j(t_i) + 0.1 \dot{x}_j(t_i) + 0.04 [\ddot{x}_j(t_i)/3 + \ddot{x}_j(t_{i+1})/6] \end{aligned}$$



$$\text{EN } t = 0, y_i = x_i = 0, \dot{y}_i = \dot{x}_i = 0, \ddot{y}_i = \ddot{x}_i = 0.$$

$$\text{EN } t = 0.2, x_0 = 1.2 \times 0.2 = 0.24 \text{ cm}; \text{ SUPONGAMOS } \ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 1.35$$

$$\text{Y } \ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 1.50 \text{ cm/seg};$$

### PRIMER CICLO

$$\text{PARA LA MASA 1: } \dot{x}_1 = 0 + 0.1(0 + 1.35) = 0.135 \text{ cm/seg}$$

$$x_1 = 0 + 0 + 0.04(0 + 1.35/6) = 0.009 \text{ cm}$$

$$y_1 = 0.009 - 0.24 = -0.231 \text{ cm}$$

$$\text{PARA LA MASA 2: } \dot{x}_2 = 0 + 0.1(0 + 1.50) = 0.15$$

$$x_2 = 0 + 0 + 0.04(0 + 1.50/6) = 0.01$$

$$y_2 = 0.01 - 0.24 = -0.23 \text{ cm}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.231 \\ -0.230 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.540 \\ -1.381 \end{bmatrix}$$

$$\text{POR LO QUE } \ddot{y}_1 = \ddot{x}_1 = 2.54/2 = 1.27 \neq 1.35$$

$$\ddot{y}_2 = \ddot{x}_2 = 1.381/1 = 1.381 \neq 1.50$$

### SEGUNDO CICLO

$$\dot{x}_1 = 0.1 \times 1.27 = 0.127$$

$$x_1 = 0.04 \times 1.27/6 = 0.0085$$

$$y_1 = 0.0085 - 0.24 = -0.2315$$

$$\dot{x}_2 = 0.1 \times 1.381 = 0.138$$

$$x_2 = 0.04 \times 1.381/6 = 0.0092$$

$$y_2 = 0.0092 - 0.24 = -0.2308$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2315 \\ -0.2308 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.546 \\ -1.386 \end{bmatrix}$$

DE DONDE  $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 2.546/2 = 1.273 \neq 1.27$   
 $\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 1.386/1 = 1.386 \neq 1.381$

EN  $t = 0.2 + 0.2 = 0.4$  seg SE TIENEN  $x_0 = 1.2 \times 0.4 = 0.48$ ,

$$\begin{aligned} x_1(t_i) &= 0.0085 & ; & & x_2(t_i) &= 0.0092 \\ \dot{x}_1(t_i) &= 0.127 & ; & & \dot{x}_2(t_i) &= 0.138 \\ \ddot{x}_1(t_i) &= 1.273 & ; & & \ddot{x}_2(t_i) &= 1.386 \end{aligned}$$

### PRIMER CICLO

SUPONIENDO  $\ddot{x}_1(t_{i+1}) = 2.3$  Y  $\ddot{x}_2(t_{i+1}) = 2.1$  SE OBTIENEN:

$$\dot{x}_1 = 0.127 + 0.1(1.273 + 2.3) = 0.484$$

$$x_1 = 0.0085 + 0.2 \times 0.127 + 0.04(1.273/3 + 2.3/6) = 0.0662$$

$$y_1 = 0.0662 - 0.48 = -0.4138$$

$$\dot{x}_2 = 0.138 + 0.1(1.386 + 2.1) = 0.486$$

$$x_2 = 0.0092 + 0.2 \times 0.138 + 0.04(1.386/3 + 2.1/6) = 0.0693$$

$$y_2 = 0.0693 - 0.48 = -0.4107$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4138 \\ -0.4107 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.548 \\ -2.468 \end{bmatrix}$$

DE DONDE  $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 4.548/2 = 2.274 \neq 2.3$   
 $\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 2.468 \neq 2.1$

ETCETERA. LOS RESULTADOS DEL PROBLEMA SE PRESENTAN EN LA TABLA 1.

Tomado del libro de N. Newmark y E. Rosenblueth D.

Tabla 2.1. Ejemplo 2.7

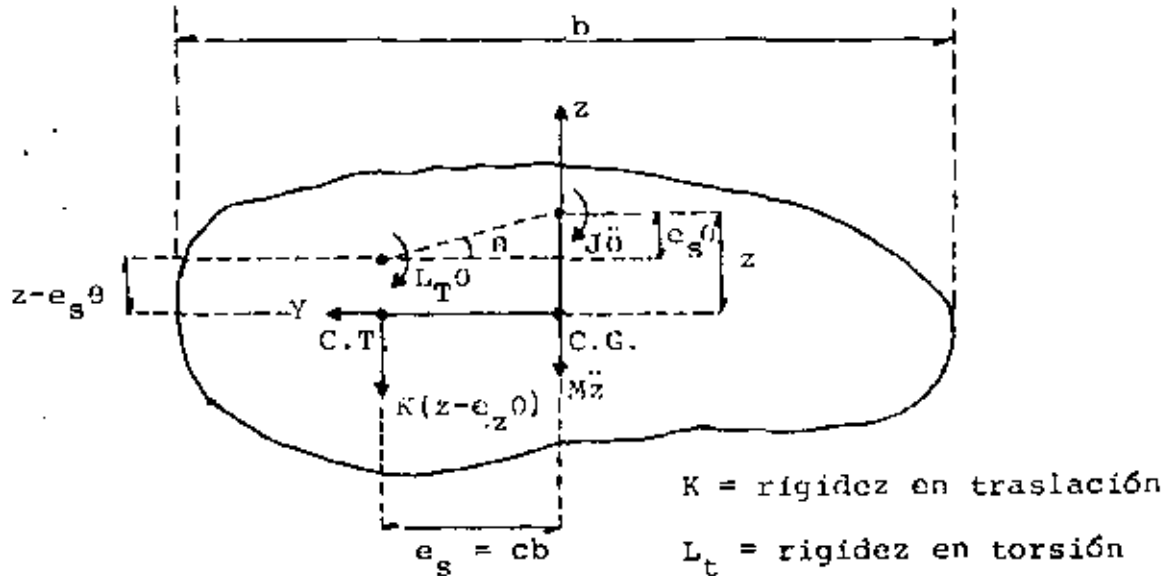
$\frac{1}{g}$	$Q_1$ ton	$\ddot{Y}$ cm/seg <sup>2</sup>	$\ddot{f}$ cm/seg <sup>2</sup>	$X_1$ cm	$X_2 - X_1$ cm	$U_1$ cm	$\frac{U_1}{g}$ cm/seg <sup>2</sup>	$\ddot{f}$ cm/seg <sup>2</sup>	$X_2$ cm	$X_2 - X_1$ cm	$X_3$ cm
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	2.540	1.350	0.135	0.0030	-0.2310	1.041	1.500	0.150	0.0100	-0.2100	0.24
0.2	2.546	1.270	0.127	0.0045	-0.2315	1.386	1.380	0.138	0.0250	-0.2550	0.24
0.2	2.546	1.273	0.127	0.0045	-0.2315	1.386	1.386	0.138	0.0250	-0.2306	0.24
0.4	4.543	2.500	0.483	-0.0642	-0.4138	2.464	2.100	0.486	+0.0533	-0.4107	0.45
0.4	4.543	2.274	0.481	0.0672	-0.4140	2.455	2.464	0.523	0.0718	-0.4042	0.45
0.4	4.543	2.274	0.481	0.0673	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0717	-0.4065	0.45
0.4	4.543	2.274	0.481	0.0673	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0717	-0.4041	0.45
0.6	5.545	2.700	0.778	3.2105	0.5095	2.960	3.200	1.044	0.2301	-0.4933	0.72
0.6	5.531	2.713	0.787	0.2111	-0.5043	2.967	2.963	1.044	0.2305	-0.4915	0.72
0.6	5.540	2.719	0.787	0.2111	-0.5041	2.966	2.967	1.045	0.2296	-0.4914	0.72
0.6	5.540	2.719	0.787	0.2111	-0.5039	2.965	2.966	1.045	0.2296	-0.4914	0.72
0.8	5.403	2.900	1.350	0.4653	-0.4953	2.745	2.983	1.640	0.5010	-0.4530	0.96
0.8	5.423	2.704	1.335	0.4637	-0.4963	2.798	2.793	1.641	0.4917	-0.4601	0.96
0.8	5.422	2.711	1.337	0.4654	-0.4952	2.797	2.798	1.642	0.4931	-0.4602	0.96
0.8	5.422	2.711	1.337	0.4631	-0.4962	2.797	2.797	1.642	0.4930	-0.4602	0.96
1.0	4.104	2.150	2.023	0.8216	-0.3764	1.977	2.200	2.142	0.8302	-0.3194	1.20
1.0	4.111	2.052	2.013	0.8210	-0.3773	1.945	1.977	2.120	0.8287	-0.3213	1.20
1.0	4.111	2.055	2.014	0.8210	-0.3793	1.945	1.945	2.121	0.8287	-0.3213	1.20
1.0	4.111	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.945	1.945	2.121	0.8287	-0.3213	1.20
1.2	1.931	0.950	2.315	1.2575	-0.1875	0.712	0.700	2.590	1.3541	-0.1054	1.44
1.2	1.950	0.945	2.316	1.2576	-0.1874	0.712	0.712	2.591	1.3541	-0.1054	1.44
1.2	1.950	0.945	2.316	1.2576	-0.1874	0.712	0.712	2.591	1.3541	-0.1054	1.44
1.4	-0.653	-0.120	2.341	1.7316	0.0516	0.735	-0.900	2.347	1.8165	0.1365	1.68
1.4	-0.652	-0.124	2.340	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.341	1.8164	0.1364	1.68
1.4	-0.652	-0.124	2.340	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.341	1.8164	0.1364	1.68
1.6	-3.045	-1.500	2.197	2.1917	0.2732	2.026	-0.100	2.404	2.2797	0.3507	4.72
1.6	-3.043	-1.511	2.193	2.1921	0.2723	2.021	-2.026	2.314	2.2712	0.3512	4.72
1.6	-3.040	-1.510	2.193	2.1921	0.2723	-2.026	-2.026	2.314	2.2712	0.3512	4.72
1.8	-4.830	-2.500	1.789	2.5943	0.4343	-2.869	-2.900	1.618	2.1171	0.4471	2.16
1.8	-4.816	-2.415	1.787	2.5947	0.4343	-2.871	-2.869	1.621	2.1175	0.4473	2.16
1.8	-4.816	-2.418	1.787	2.5941	0.4343	-2.871	-2.871	1.621	2.1175	0.4473	2.16
2.0	-5.547	-2.900	1.275	2.9034	0.5034	-3.043	-3.000	1.014	2.1137	0.4137	2.40
2.0	-5.549	-2.773	1.278	2.9031	0.5034	-3.043	-3.043	1.027	2.1127	0.5127	2.40
2.0	-5.545	-2.774	1.275	2.9036	0.5034	-3.043	-3.043	1.027	2.1127	0.5127	2.40

Table 2.1. Example 2.7 (Cont.)

$i$	$Q_i$	$X_{1i}$	$X_{2i}$	$Z_i$	$\frac{X_{1i} X_{2i}}{Q_i}$	$U_i$	$\frac{X_{1i}^2}{U_i}$	$\frac{X_{2i}^2}{U_i}$	$\frac{X_{1i} X_{2i}}{U_i}$	$V_i$	$\frac{V_i}{Q_i}$	$F_i$
no.	ton	cm/kg	cm/kg	cm	cm	ton	cm/kg	cm/kg	cm	ton	ton	
22	10.156	1.700	0.484	3.0725	0.9275	5.552	5.460	0.174	5.0450	0.1508	2.16	
22	10.161	1.678	0.493	3.0683	0.9283	5.537	5.332	0.187	5.0412	0.1517	2.16	
22	10.165	1.653	0.493	3.0683	0.9283	5.537	5.332	0.186	5.0412	0.1517	2.16	
24	12.579	1.950	0.765	3.0734	1.1551	6.386	6.200	0.918	2.9054	1.0441	1.92	
24	12.587	1.927	0.744	3.0722	1.1542	6.387	6.306	0.987	2.9050	1.0452	1.92	
24	12.585	1.704	0.741	3.0720	1.1570	6.383	6.383	0.996	2.9072	1.0472	1.92	
24	12.585	1.700	0.746	3.0720	1.1570	6.383	6.383	0.996	2.9072	1.0472	1.92	
26	17.218	1.760	1.977	2.9175	1.1475	5.958	6.900	2.824	2.7489	0.9619	1.68	
26	17.218	1.754	1.956	2.9125	1.1425	5.959	6.978	2.770	2.7429	0.9622	1.68	
26	17.218	1.754	1.936	2.9125	1.1425	5.959	6.979	2.770	2.7429	0.9622	1.68	
28	9.572	1.400	2.945	2.3320	0.9970	4.155	4.100	1.066	2.0625	0.8775	1.44	
28	9.580	1.487	2.994	2.3328	0.9978	4.150	4.175	1.212	2.0521	0.8721	1.44	
28	9.581	1.470	2.942	2.3329	0.9979	4.150	4.150	1.211	2.0521	0.8721	1.44	
28	9.581	1.470	2.942	2.3329	0.9979	4.150	4.150	1.211	2.0521	0.8721	1.44	
30	4.687	2.500	3.719	1.6102	0.4102	1.371	1.400	5.766	1.7852	0.4659	1.20	
30	4.698	2.243	3.703	1.6113	0.4513	1.378	1.378	3.764	1.7654	0.4654	1.20	
30	4.698	2.249	3.704	1.6113	0.4513	1.378	1.378	3.764	1.7654	0.4654	1.20	
32	1.400	0.800	3.679	0.6645	0.0715	1.748	1.700	3.752	0.9311	0.3341	0.96	
32	1.406	0.745	3.684	0.6628	0.0712	1.746	1.746	3.727	0.9159	0.3261	0.96	
32	1.405	0.723	3.683	0.6629	0.0711	1.748	1.748	3.727	0.9158	0.3241	0.96	
32	1.405	0.723	3.683	0.6629	0.0711	1.748	1.748	3.727	0.9158	0.3241	0.96	
34	1.608	1.100	3.418	0.1377	0.1725	4.501	4.700	3.482	0.4345	0.7149	0.72	
34	1.629	1.204	3.428	0.1357	0.1742	4.515	4.506	3.101	0.4410	1.1017	0.72	
34	1.628	1.214	3.429	0.1358	0.1742	4.515	4.515	3.100	0.4411	1.1017	0.72	
34	1.628	1.214	3.429	0.1358	0.1742	4.515	4.515	3.100	0.4411	1.1017	0.72	
36	10.578	1.400	2.718	0.4718	0.9216	6.251	6.300	1.978	0.0795	1.6159	0.48	
36	10.589	1.589	2.579	0.4725	0.9525	6.277	6.251	2.627	0.1442	1.0142	0.48	
36	10.589	1.599	2.577	0.4725	0.9525	6.277	6.277	2.070	0.1441	1.0141	0.48	
36	10.589	1.599	2.577	0.4725	0.9525	6.277	6.277	2.070	0.1441	1.0141	0.48	
38	12.729	1.200	1.477	0.9750	1.1150	6.812	6.800	0.712	0.0521	1.0291	0.24	
38	12.764	1.170	1.474	0.9754	1.1164	6.818	6.812	0.731	0.1103	1.1662	0.24	
38	12.764	1.132	1.434	0.9764	1.1164	6.818	6.818	0.730	0.1103	1.1603	0.24	
40	11.223	1.600	0.260	1.0441	1.0441	5.454	5.400	0.472	0.0121	0.1421	0	
40	11.319	1.601	0.257	1.0437	1.0437	5.453	5.414	0.477	0.0112	0.0912	0	
40	11.319	1.600	0.255	1.0437	1.0437	5.453	5.453	0.477	0.0112	0.0912	0	
42	10.721	1.720	0.846	0.9976	0.9976	5.430	5.300	1.149	0.0641	0.6641	0	
42	10.725	1.727	0.846	0.9976	0.9976	5.429	5.370	1.227	0.0640	0.6640	0	

PROBLEMA DE VIBRACIONES DE TORSION

ACOPLADA CON TRASLACION



$$\sum F_z = M\ddot{z} + K(z - e_s\theta) = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_{C.G.} = J_0\ddot{\theta} + L_t\theta - K(z - e_s\theta)e_s = 0$$

$$J_0\ddot{\theta} + L\theta - Ke_s z = 0 \quad (2)$$

EN DONDE  $L = L_t + Ke_s^2$

PUESTO QUE LAS VIBRACIONES SON ARMONICAS:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta \quad \text{y} \quad \ddot{z} = -\omega^2 z$$

Sustituyendo en ec (1):

$$-\omega^2 Mz + Kz - Ke_s\theta = 0$$

$$(K - \omega^2 M)z - Ke_s\theta = 0 \quad (1')$$

Sustituyendo (3) en (2):

$$- J\omega^2\theta + L_T\theta - Ke_s z = 0$$

$$(L_T - J\omega^2)\theta - Ke_s z = 0 \quad (2')$$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} K - \omega^2 M & - Ke_s \\ - Ke_s & L_T - J\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(K - \omega^2 M)(L_T - J\omega^2) - K^2 e_s^2 = 0$$

$$KL_T - KJ\omega^2 - \omega^2 ML_T + MJ\omega^4 - K^2 e_s^2 = 0$$

$$\omega^4 - \frac{KJ + ML_T}{MJ} \omega^2 + \frac{KL_T}{MJ} - \frac{K^2 e_s^2}{MJ} = 0$$

DIVIENDO POR  $(K/M)^2$ :

$$\frac{\omega^4}{(K/M)^2} - \frac{\omega^2}{K/M} \frac{KJ + ML_T}{(MJ)(K/M)} + \frac{KL_T}{MJ(K/M)^2} - \frac{K^2 e_s^2}{MJ(K/M)^2} = 0$$

SI  $\lambda^2 = \omega^2 / (K/M)$  Y CONSIDERANDO  $e_s = cb$ :

$$\lambda^4 - \lambda^2 \left(1 + \frac{L_T/J}{K/M}\right) + \frac{L_T/J}{K/M} - \frac{c^2}{J/(Mb^2)} = 0$$

SI  $(L_T/J)/(K/M) = n$  Y  $j^2 = J/(Mb^2)$

$$\lambda^4 - \lambda^2 (1 + n) + n - c^2/j^2 = 0$$

$$\therefore \lambda_{1,2}^2 = \frac{n+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(n+1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}}$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \lambda_1 (K/M) \text{ Y } \omega_2^2 = \lambda_2 (K/M)$$

SUSTITUYENDO A  $\omega_1^2$ , EN (1') O EN (2'):

$$\underline{z}_1 = \begin{bmatrix} z_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \lambda_1^2}{cb} \end{bmatrix} ;$$

SUSTITUYENDO A  $\omega_2^2$ :

$$\underline{z}_2 = \begin{bmatrix} z_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \lambda_2^2}{cb} \end{bmatrix} \quad \text{o:} \quad \underline{z}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \lambda_n^2}{cb} \end{bmatrix}$$



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

DINAMICA ESTRUCTURAL

EFECTOS SISMICOS EN ESTRUCTURAS EN FORMA

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ  
JULIO DE 1981.



# Efectos sísmicos en estructuras en forma de péndulo invertido

Octavio RASCON CH. \*

## INTRODUCCION

En la práctica se presentan estructuras constituidas por una sola columna la cual sostiene una cubierta que puede ser una losa o un cascarón. Su comportamiento dinámico debe estudiarse considerando el efecto que la inercia rotacional de la cubierta induce en el movimiento total de la estructura.

A principios de este año se presentó en California, E.U.A. un trabajo<sup>1</sup> en el cual se trató este problema desde un punto de vista energético. Se calculó sólo el periodo fundamental y con base en él, la respuesta de la estructura a un determinado temblor. Los periodos calculados para cuatro estructuras de este tipo ya construidas fueron menores que los medidos *in situ*. La discrepancia fue atribuida a efectos de rotación y traslación de la base.

El objeto de este trabajo es introducir un análisis modal, el cual nos proporcionará los efectos del acoplamiento que existe entre los modos de vibración. También se tomarán en cuenta en forma aproximada los efectos de rotación y traslación de la base.

## CALCULO DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES DE VIBRACION

### 1. Suelo rígido

Para el caso en que el centro de gravedad de la cubierta se encuentra localizado en la prolongación del eje de la columna, el movimiento de la estructura podrá estudiarse en dos direcciones perpendiculares entre sí. En tal caso el problema podrá discretizarse como de dos modos de vibración acoplados en cada dirección.

Para el cálculo de las frecuencias de vibración se idealizará la estructura como de comportamiento lineal, constituida por una cubierta infinitamente rígida de masa simétricamente distribuida y soportada por una sola columna. Como primer caso se considerará al suelo infinitamente rígido (fig. 1).

En fig. 1

$W$  = peso de la cubierta más la parte tributaria de la columna

$I$  = momento de inercia de la masa de la cubierta respecto al eje  $z$

\* Asistente de Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM.

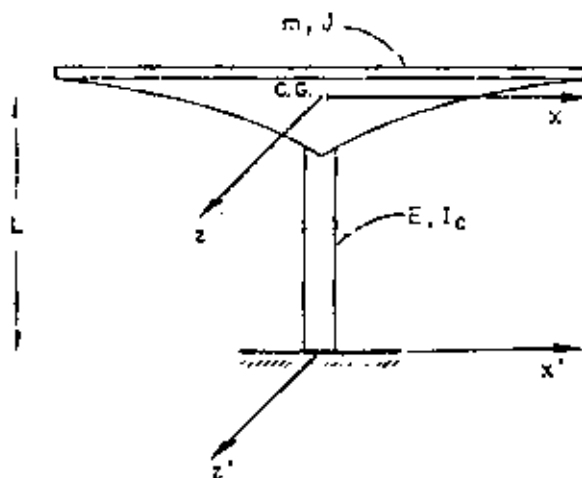


Fig. 1. Péndulo invertido

$E$  = módulo de elasticidad del material de la columna

$I_c$  = momento de inercia de la sección transversal de la columna con respecto al eje  $z$

C.G. = centro de gravedad de la cubierta

$l$  = distancia de C.G. al suelo.

Para la columna mostrada en las figs. 2a y 2b.

$k$  = rigidez por traslación (fuerza horizontal aplicada en C.G. necesaria para que este se desplace la unidad)

$k_r$  = rigidez por rotación (par aplicado en C.G. necesario para producir un giro unitario a la altura de C.G.)

$\theta$  = rotación en C.G. debida a la fuerza  $k$

$\delta$  = desplazamiento lateral de C.G. debido al momento  $k_r$ .

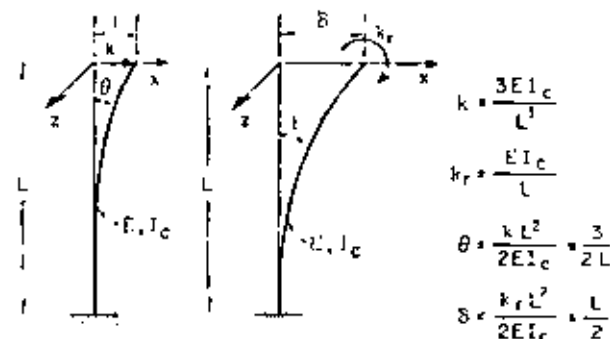


Fig. 2. Rigideces

$$k = \frac{3EI_c}{L^3}$$

$$k_r = \frac{EI_c}{L}$$

$$\theta = \frac{kL^2}{2EI_c} = \frac{3}{2L}$$

$$\delta = \frac{k_r l^2}{2EI_c} = \frac{L}{2}$$

Despreciando las deformaciones por cortante, las expresiones para  $k$ ,  $k_r$ ,  $\epsilon$  y  $\delta$  pueden encontrarse por estática y valen

$$k = 3EI_c/L^3; \quad (1a)$$

$$k_r = EI_c/L; \quad (2a)$$

$$\epsilon = 1.5/L \quad (1b)$$

$$\delta = L/2 \quad (2b)$$

Para una fuerza de magnitud  $\alpha k$ , el desplazamiento será  $\alpha$  y el giro  $\alpha\epsilon$ . Para un par de magnitud  $\beta k_r$ , el giro será  $\beta$  y el desplazamiento  $\beta\delta$ . Al aplicarse ambos simultáneamente, el desplazamiento total de C.G. será  $x_1$  y el giro  $\epsilon_1$  (fig. 3).

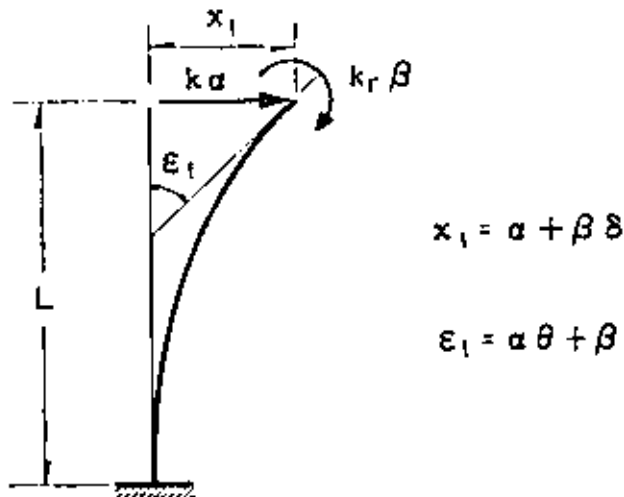


Fig. 3. Desplazamientos y giros totales

Por tanto los valores de  $x_1$  y  $\epsilon_1$  quedan dados por

$$x_1 = \alpha + \beta\delta \quad (3)$$

$$\epsilon_1 = \alpha\epsilon + \beta \quad (4)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3 y 4 para  $\alpha$  y  $\beta$ , y utilizando las ecs 1b y 2b se obtiene

$$\alpha = (x_1 - k_r\gamma\epsilon_1)/k; \quad (5a)$$

$$\beta = (\epsilon_1 - k\gamma x_1)/k \quad (5b)$$

en las cuales

$$\gamma = L^2/2EI_c; \quad (6a)$$

$$\kappa = 1 - kL^3/4EI_c = 0.25 \quad (6b)$$

Para las oscilaciones del péndulo mostrado en la fig 1, el diagrama de cuerpo libre de la cubierta está indicado en la fig 4. Las ecuaciones de movimiento, despreciando efectos gravitacionales, serán

$$m\ddot{x}_1 + kx = 0 \quad (7)$$

$$J\ddot{\epsilon}_1 + k_r\beta = 0 \quad (8)$$

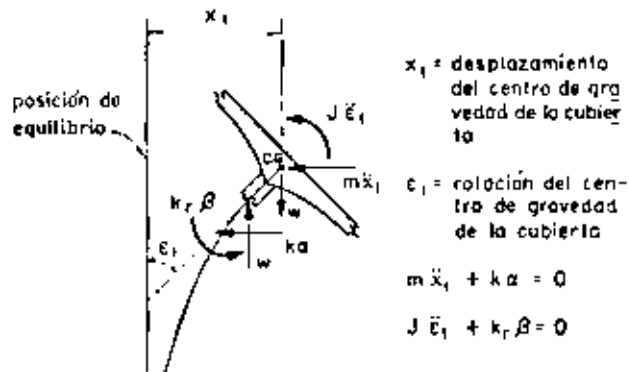


Fig. 4. Diagrama de cuerpo libre

Sustituyendo a (5a) y (5b) en (7) y (8) se obtiene

$$m\ddot{x}_1 + (kx_1 - k_r\gamma\epsilon_1)/\kappa = 0 \quad (9)$$

$$J\ddot{\epsilon}_1 + (k_r\epsilon_1 - k\gamma x_1)/\kappa = 0 \quad (10)$$

Las ecs. 9 y 10 se pueden expresar matricialmente en la forma

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\epsilon}_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} k & -\gamma k k_r \\ -\gamma k k_r & k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

Utilizando las ecs 1a, 2a y 6a se encuentra que

$$\gamma k k_r = Lk/2 \quad (12)$$

Puesto que el movimiento es armónico se tiene que

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \quad \text{y} \quad \ddot{\epsilon}_1 = -\omega^2 \epsilon_1 \quad (13)$$

en donde  $\omega$  es la frecuencia circular natural de vibración.

Sustituyendo las ecs. 12 y 13 en (11) se obtiene

$$-\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \omega^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} k & -Lk/2 \\ -Lk/2 & k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

Factorizando en la ec. 14

$$\left[ \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} k & -Lk/2 \\ -Lk/2 & k_r \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

La ec 15 representa un sistema de ecuaciones homogéneas, el cual, para tener solución diferente de la trivial, necesita que su determinante sea nulo. Por tanto

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{\kappa} - m\omega^2 & -\frac{Lk}{2\kappa} \\ -\frac{Lk}{2\kappa} & \frac{k_r}{\kappa} - J\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

Desarrollando el determinante se llega a

$$m f \omega^4 - \frac{1}{\kappa} (k f + m k_c) \omega^2 + \frac{1}{4 \kappa^2} (4 k k_c - L^2 k^2) = 0 \quad (17)$$

Dividiendo ambos miembros entre  $m f$  y considerando que  $L^2 k^2 = 3 k k_c$ , se obtiene

$$\omega^4 - \frac{k f + m k_c}{m f \kappa} \omega^2 + \frac{k k_c}{4 m f \kappa^2} = 0 \quad (18)$$

que es una ecuación de segundo grado en  $\omega^2$ , cuyas soluciones son

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k f + m k_c}{2 m f \kappa} \pm \sqrt{\frac{(k f + m k_c)^2}{4 m^2 f^2 \kappa^2} - \frac{k k_c}{4 m f \kappa^2}} \quad (19)$$

Dividiendo numerador y denominador de (19) entre  $m f$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k/m + k_c/f}{2 \kappa} \pm \frac{1}{2 \kappa} \sqrt{(k/m + k_c/f)^2 - (k/m)(k_c/f)} \quad (20)$$

Llamando a

$k/m = p^2 =$  cuadrado de la frecuencia circular natural por traslación

$k_c/f = \Omega^2 =$  cuadrado de la frecuencia circular natural por rotación

se obtiene

$$\omega_{1,2}^2 = 2 \left( p^2 + \Omega^2 \pm \sqrt{(p^2 + \Omega^2)^2 - p^2 \Omega^2} \right) \quad (21)$$

Dividiendo ambos miembros de (21) entre  $p^2$  y haciendo  $\omega^2/p^2 = \lambda$  y  $\Omega^2/p^2 = \mu$  se llega a

$$\lambda_{1,2} = 2 \left( 1 \pm \mu \pm \sqrt{(1 + \mu)^2 - \mu} \right) \quad (22)$$

Es interesante notar que si  $f = 0$  (masa concentrada) de la ec 17 se obtiene  $\omega^2 = k/m = p^2$ .

Las configuraciones modales pueden obtenerse de cualquiera de las dos ecuaciones algebraicas contenidas en la ecuación matricial dada en ec 15. La primera de ellas es

$$\left( \frac{k}{\kappa} - m \omega^2 \right) x_{1,n} - \frac{L k}{2 \kappa} \theta_{1,n} = 0 \quad (23)$$

donde el índice  $n$  indica el número del modo y de la cual se obtiene

$$x_{1,n} / \theta_{1,n} = \frac{L k}{2 \kappa} \left( \frac{k}{\kappa} - m \omega^2 \right) \quad (24)$$

dividiendo numerador y denominador de (24) entre  $\theta_{1,n}$  y considerando que  $L^2 k^2 = 3 k k_c$  que  $\lambda_n = \omega_n^2 / p^2$  se llega a

$$x_{1,n} / \theta_{1,n} = 2 L / (4 - \lambda_n) \quad (25)$$

Si se desean tomar en cuenta las deformaciones por cortante basta con modificar las rigideces mediante un análisis de estática y partir de nuevo de la ec 17 sin considerar que  $L^2 k^2 = 3 k k_c$ . Si existe excentricidad en alguna dirección su efecto podrá tomarse en cuenta introduciendo un grado de libertad adicional.

En las figs 5 y 6 se encuentran representados los resultados de las ecs 22 y 25.

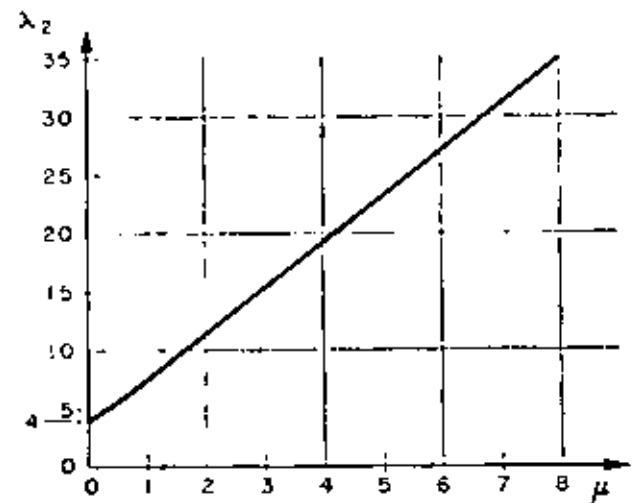
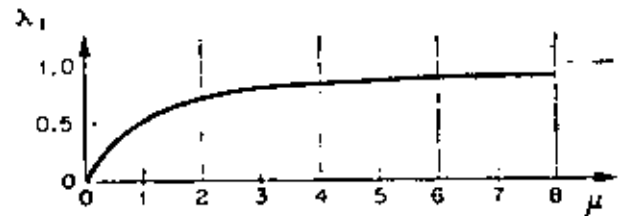


Fig. 5. Gráfica de frecuencias

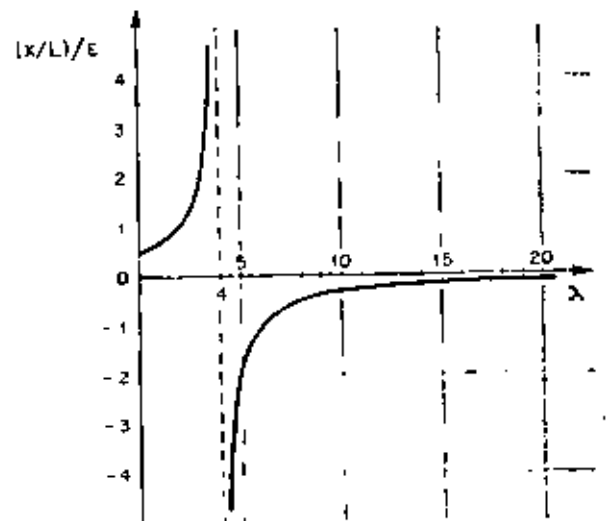


Fig. 6. Gráfica  $(x/L)/\theta$  vs  $\lambda$

El valor absoluto de la respuesta máxima en cada uno de los modos será  $\gamma$ .

$$\begin{bmatrix} V_n \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_n \\ r_n \end{bmatrix} S_{an} \quad (28)$$

donde

$S_{an}$  = ordenada del espectro de aceleraciones afectada por el coeficiente sísmico  $C = 0.15$ .

El espectro que será utilizado es el propuesto en el reglamento de construcciones del Distrito Federal<sup>5</sup> (fig. 9). Los valores de las ordenadas espectrales correspondientes a  $T_1$  y  $T_2$  son 100 cm/seg<sup>2</sup> y 80.6 cm/seg<sup>2</sup> respectivamente.

Sustituyendo valores en ec. 28 se llega a

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 957 \text{ kg} \\ 268,000 \text{ kg cm} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 893 \text{ kg} \\ 216,000 \text{ kg cm} \end{bmatrix} \quad (30)$$

El criterio propuesto en ref. 8 será utilizado para el cálculo de la respuesta total (considerando los efectos combinados de los dos modos). Por lo anterior la respuesta total de la estructura valdrá

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} ; M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad (31a, 31b)$$

En ecs. 31a y 31b

$V$  = fuerza cortante total en la columna

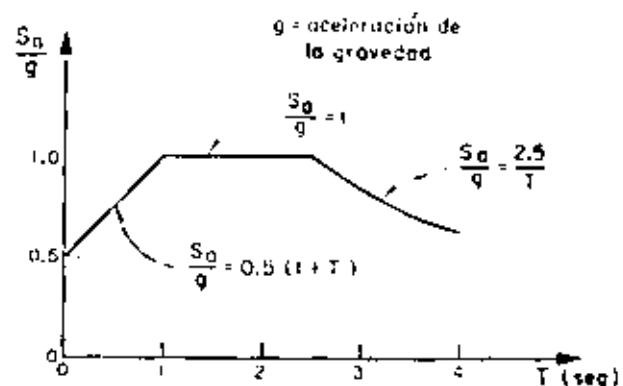


Fig. 9. Espectro de aceleraciones (Después de E. Rosenbluth y L. Esteva)

$M$  = momento flexionante total en C. C. Sustituyendo los valores dados en ecs. 29 y 30 en (31) se obtiene

$$V = 1,310 \text{ kg} ; M = 344,000 \text{ kg cm}$$

El momento en la base de la columna valdrá  $M_b = 344,000 + 1,310 \times 419 = 893,000 \text{ kg cm}$

Los resultados de este caso se resumen en la fig. 10a.

## CASO 2. SUELO FLEXIBLE

a) Cálculo de frecuencias y modos de vibración.

Para considerar las restricciones del suelo emplearemos el método propuesto anteriormente procediendo en forma tabular. Sustituyendo valores en ecuaciones para  $K$  y  $R$  se obtienen  $1.55 \times 10^4 \text{ kg/cm}$  y  $6.35 \times 10^5 \text{ kg cm/rad}$  respectivamente.

### PRIMER MODO

Parámetros	Valores (ver. cálcs)		Factor común
$x, r$ (supuestos)	$x = 400 \text{ cm}$	$r = 1 \text{ rad}$	
$F = m \omega_1^2 x, M = I \omega_1^2 r$	$F = 8320$	$M = 1,386,000$	$\omega_1^2$
$F_n = F, M_n = M + FL'$	$F_n = 8320$	$M_n = 5,376,000$	$\omega_1^2$
$x_n = F_n/K, r_n = M_n/R$	$x_n = 0.4420$	$r_n = 0.00847$	$\omega_1^2$
$\alpha = F/k, \beta = M/k_r$	$\alpha = 0.6570$	$\beta = 0.00187$	$\omega_1^2$
$\beta \delta, \alpha \theta$	$\beta \delta = 0.3892$	$\alpha \theta = 0.00235$	$\omega_1^2$
$x_1 = \alpha + \beta \delta, r_1 = \beta + \alpha \theta$	$x_1 = 1.0462$	$r_1 = 0.00422$	$\omega_1^2$
$x_2 = r_n I'$	$x_2 = 4.0650$		$\omega_1^2$
$x' = x_n + x_1 + x_2, r' = r_n + r_1$	$x' = 5.5532$	$r' = 0.01269$	$\omega_1^2$
$\omega_1^2 = x/x', \omega_1^2 = r/r'$	72.0	78.7	

$$x/r' = 438, \quad X_1^* = [438 \text{ U}]$$

786

6

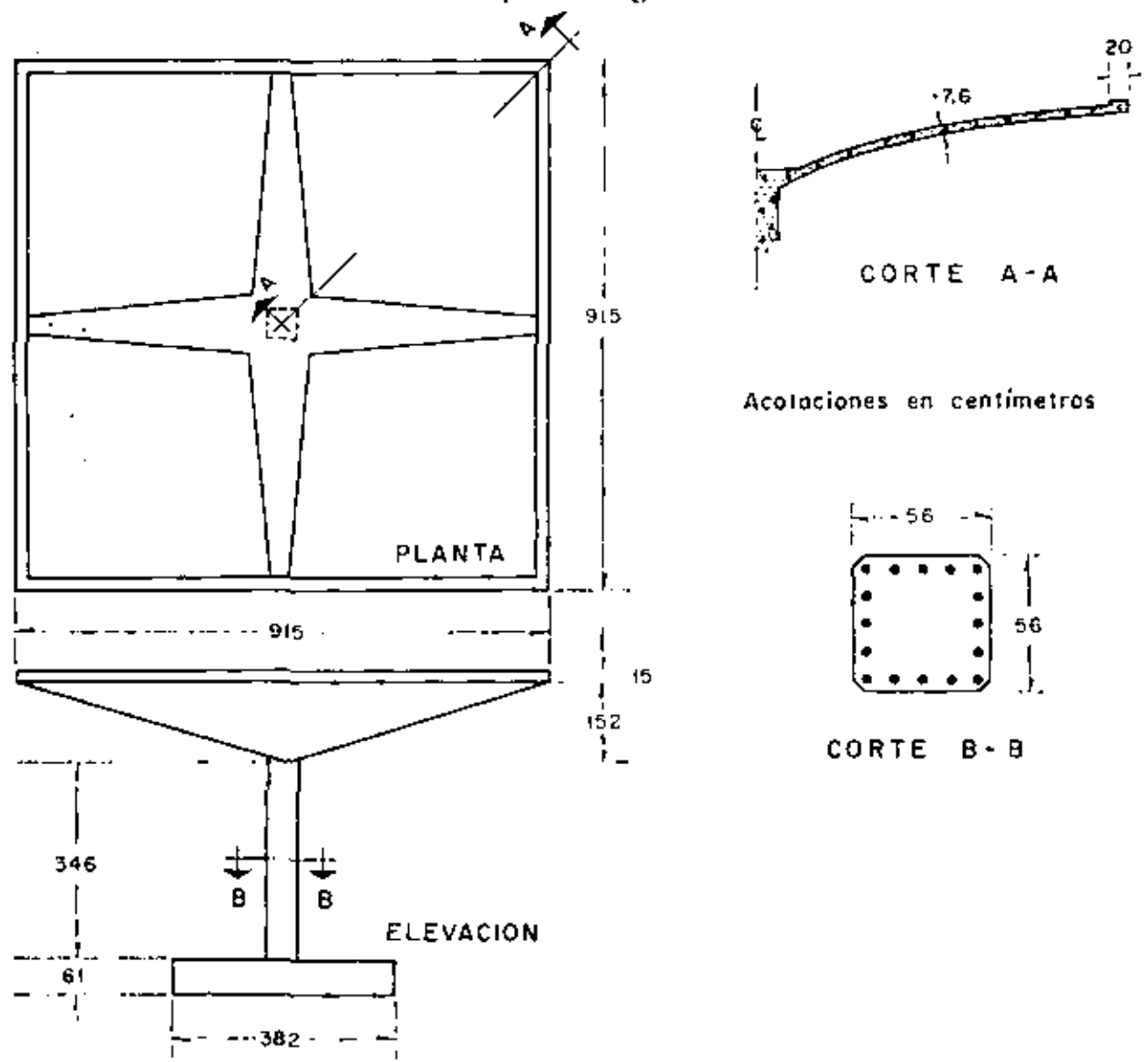


FIG. 3. Cascarón utilizado para ejemplo. (Después de R. McLent)

en la cual

$\vec{i}$  es un vector que representa los desplazamientos estáticos de cada grado de libertad de la estructura inducidos por un desplazamiento estático unitario de la base.

$\vec{X}_n$  es el vector modal para el enésimo modo ( $n$ )

$\vec{M}$  es la matriz de inercia y

$\vec{X}_n^T$  es el vector traspuesto de  $\vec{X}_n$ .

Para nuestro caso se tendrá

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} X_{est} \\ v_{est} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 238 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -275 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_1^T = \begin{bmatrix} 238 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_2^T = \begin{bmatrix} -275 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.81 & 0 \\ 0 & 1.386 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores en ec 27 y efectuando los productos matriciales en ella indicados se obtiene

$$C_1 = \frac{4.960}{2.566 \times 10^6} = 0.00193$$

$$C_2 = \frac{-5.720}{2.950 \times 10^6} = -0.00193$$

## 2. Suelo flexible

Al oscilar una estructura cimentada en suelo blando, existe interacción dinámica suelo-estructura que en la mayoría de los casos no debe despreciarse al calcular las frecuencias y los modos de vibración. En lo que sigue se propone la adaptación de un método numérico para tomar en cuenta dicho efecto.

Las restricciones del suelo serán idealizadas mediante resortes de comportamiento lineal: uno para desplazamientos lineales horizontales y otro para deformaciones angulares de cabeceo de la cimentación<sup>2,3</sup>.

En la fig. 7 se hace referencia a los parámetros que a continuación se mencionan

$K$  = rigidez del resorte correspondiente a la traslación de la base  $\tau = C_r A$

$C_r$  = coeficiente de cortante elástico uniforme del suelo.

$A$  = área de contacto de la cimentación.

$R$  = rigidez del resorte correspondiente a rotación de la base  $\tau = C_q I_b = W' \eta$

$C_q$  = coeficiente de compresión elástica no uniforme del suelo.

$I_b$  = momento de inercia de área de la base de la cimentación con respecto al eje  $z'$

$W'$  = peso total de la estructura

$\hat{y}$  = altura del centro de gravedad de la estructura sobre el nivel de desplante

$F = m \omega_0^2 x$

$x$  = desplazamiento lineal total en C.G.

$M = J \omega_0^2 r$

$r$  = desplazamiento angular total en C.G.

$L$  = altura de C.G. sobre el nivel de desplante

$x_0$  = traslación de la base

$r_0$  = rotación de la base

$x_1 = \alpha + \beta \delta$

$r_1 = \beta \cdot | \cdot m^{-1}$

$x_2 = L r_0$

$\alpha = F/k$

$\beta = M/k_r$

$J, L, \delta, \eta, k, k_r, x_1, r_1$  y  $W'$  ya definidos anteriormente.

El problema será resuelto utilizando un procedimiento iterativo y la tabulación propuesta por N. M. Newmark<sup>4</sup>; se despreciarán la variación de la rigidez de la columna debida a la fuerza normal  $W$  y los momentos en la misma, causados por la excentricidad del peso debida a deformaciones de la columna.

Sean

$P_0$  = fuerza horizontal en la base de la cimentación  $= F$

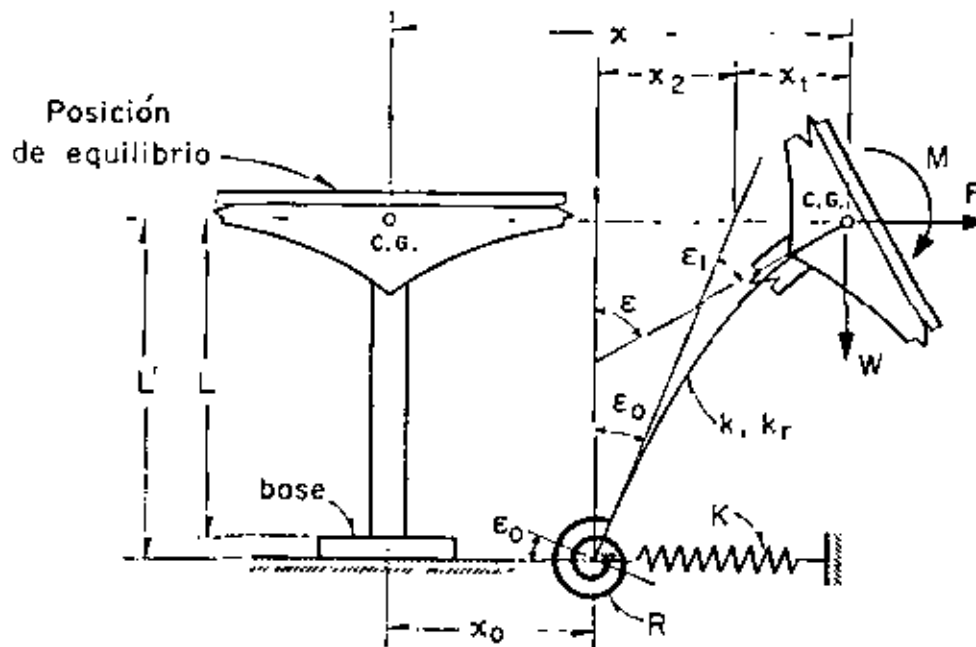
$M_0$  = momento flexionante en la base de la cimentación  $= M + P'L$

$x_0 = F_0/K$

$r_0 = M_0/R$

A continuación se describe el procedimiento a seguir:

1. Suponer valores para  $x$  y  $r$
2. Calcular  $F$  y  $M$  usando las expresiones  $F = m \omega_0^2 x$  y  $r = J \omega_0^2 r$ . En esta etapa el valor de  $\omega_0$  aún no se conoce; por tanto se llevará como factor común en el resto del cálculo



(Fig. 7. Modelo de interacción dinámica suelo-estructura)

3. Calcular la fuerza y el momento en la base mediante las fórmulas  
 $F_b = F$  y  $M_b = M + FL$
4. Encontrar los valores de los desplazamientos  $x_0 = F_0/K$  y  $r_0 = M_0/R$
5. Calcular los valores de los parámetros  $\alpha = F/k$  y  $\beta = M/k_r$
6. Efectuar los productos  $\beta\delta$  y  $\alpha\theta$
7. Calcular  $x_1 = \alpha + \beta\delta$  y  $r_1 = \beta + \alpha\theta$
8. Efectuar el producto  $x_2 = L'r_0$
9. Calcular los desplazamientos lineales y angulares totales de C.G. mediante las expresiones  
 $x' = x_0 + x_1 + x_2$  y  $r' = r_0 + r_1$
10. Encontrar el valor de  $\omega_0^2$  mediante los cocientes  $x/x'$  y  $r/r'$
11. Si los valores de  $\omega_0^2$  calculados en el paso anterior son aproximadamente iguales, el proceso habrá concluido. En caso contrario repitase la secuela utilizando como valores de partida para  $x$  y  $r$  los encontrados en etapa 9 o valores cuyo cociente sea igual al de  $x'$  entre  $r'$ . El proceso deberá continuarse hasta lograr la aproximación deseada.

EJEMPLO DE APLICACION

Con motivo de ilustrar los conceptos enunciados anteriormente se calcularán las frecuencias y modos de vibración de un cascarón ya construido en California, E.U.A. (fig 8). Los datos necesarios han sido extraídos de la ref 1. Se computarán también las respuestas sísmicas suponiendo que esa estructura fuera a construirse en la zona blanda de la ciudad de México. Se utilizarán por tanto los parámetros elásticos de las arcillas del Valle de México y los espectros de diseño propuestos en el reglamento de construcción para el Distrito Federal<sup>5</sup>.

Los datos necesarios de la estructura son

- $L = 419$  cm
- $L' = 480$  cm
- $\gamma = 249$  cm
- $W = 20,450$  kg ( $m = 20.81$  kg seg<sup>2</sup>/cm)
- $W' = 43,600$  kg
- $I_b = 1.775 \times 10^8$  cm<sup>4</sup>
- $I_r = 1.065 \times 10^8$  cm<sup>4</sup>
- $k = 1.266 \times 10^4$  kg/cm
- $k_r = 7.41 \times 10^4$  kg cm/rad
- $J = 1.386 \times 10^6$  kg seg<sup>2</sup> cm
- $\theta = 0.00358$  rad/cm
- $\delta = 208$  cm/rad

Las expresiones para  $C_r$  y  $C_\varphi$  son las siguientes<sup>7</sup>

$$C_r = F_1 \frac{E'}{1 - \nu^2} \frac{1}{\sqrt{JA}}; C_\varphi = F_2 \frac{E'}{1 - \nu^2} \frac{1}{\sqrt{JA}} \quad (26)$$

En ecs 26

- $E'$  = módulo de elasticidad del suelo
- $\nu$  = relación de Poisson del suelo

- $A$  = área de contacto de la cimentación
- $F_1, F_2$  = factores de forma de la cimentación

Para el caso de la zona blanda del Valle de México un valor representativo de  $E'$  es 50 kg/cm<sup>2</sup> y  $\nu \approx 0.5$ <sup>6</sup>. Para una cimentación cuadrada los valores de  $F_1$  y  $F_2$  son 0.704 y 2.11 respectivamente.

Sustituyendo valores en ecs 26 se obtiene

$$C_r = 0.123 \text{ kg/cm}^2$$

$$C_\varphi = 0.369 \text{ kg/cm}^2$$

CASO 1. SUELO RIGIDO

a) Cálculo de frecuencias y modos de vibración

Para el cálculo de las frecuencias de vibración usaremos la fórmula dada en ec 22. Los valores de los parámetros a sustituir son

$$p^2 = k/m = 608 \text{ (rad/seg)}^2$$

$$\omega^2 = k_r/J = 535 \text{ (rad/seg)}^2$$

$$\mu = \omega^2/p^2 = 0.882$$

con los cuales

$$\lambda_{1,2} = 2(1.882 \pm \sqrt{3.55 - 0.882}) = 0.494; 7.034$$

Por tanto

$$\omega_1 = \sqrt{0.494 \times 608} = \sqrt{300} = 17.32 \text{ rad/seg}$$

$$\omega_2 = \sqrt{7.034 \times 608} = \sqrt{4260} = 65.30 \text{ rad/seg}$$

Los periodos naturales son

$$T_1 = 2\pi/\omega_1 = 0.362 \text{ seg} \quad (T_1 \text{ obtenido de un registro de vibraciones libres de la estructura y reportado en ref 1} = 0.483 \text{ seg})$$

$$T_2 = 2\pi/\omega_2 = 0.096 \text{ seg}$$

Comparando los valores calculado y medido de  $T_1$  se puede ver la importancia de la interacción dinámica suelo-estructura.

Las relaciones modales se obtienen de las ecs. 25 y sus valores son

$$x_1/r_1 = \frac{2 \times 419}{4 - 0.494} = 238 \text{ cm/rad}$$

$$x_2/r_2 = \frac{2 \times 419}{4 - 7.034} = -275 \text{ cm/rad}$$

b) Respuesta sísmica

Para el cálculo de la respuesta sísmica de sistemas de varios grados de libertad es necesario calcular los coeficientes de participación de cada modo de vibración. Se puede demostrar<sup>7</sup> que para este caso es aplicable la siguiente ecuación

$$C_n = \frac{\sum_i X_i^* M \bar{1}}{\sum_i X_i^* M X_n} \quad (27)$$

PRIMER MODO				SEGUNDO MODO			
Parámetros	Valores (2º ciclo)		Factor común	Parámetros	Valores (1er. ciclo)		Factor común
$x, r$	438	1	—	$x, r$	-151	1	—
$F, M$	9130	1,386,000		$F, M$	-3143	1,386,000	
$F_u, M_u$	9130	5,766,000		$F_u, M_u$	-3143	-123,000	
$x_u, r_u$	0.4860	0.00910		$x_u, r_u$	-0.1672	-0.0001940	
$\alpha, \beta$	0.7210	0.00187		$\alpha, \beta$	-0.2481	0.0018700	
$\beta\delta, \alpha\theta$	0.3892	0.002585		$\beta\delta, \alpha\theta$	0.3892	-0.0008890	
$x_1, r_1$	1.1102	0.004455		$x_1, r_1$	0.1411	0.00019810	
$x_2, r_2$	4.365	—		$x_2, r_2$	-0.0930	—	
$x', r'$	5.961	0.013565		$x', r'$	-0.1191	0.0007870	
$\omega_1^2$	73.5	75.8		$\omega_2^2$	1267	1270	

Suponiendo que la aproximación es suficiente resulta

$$x'/r' = 440, X_1^r = [440, 1], \omega_1^2 \approx 74 \text{ (rad/seg)}^2$$

$$T_1 = 0.731 \text{ seg.}$$

El procedimiento para el cómputo de los parámetros del segundo modo es el mismo, sólo que la configuración supuesta deberá "limpiarse", antes de proseguir el cálculo, de las componentes del primer modo que pudiera contener. Se demuestra<sup>7</sup> que si  $X_2^r$  es el vector de la configuración supuesta, el vector libre de componentes del primer modo queda dado por

$$X_2 = X_2^r - \frac{X_2^{rT} M X_1^r}{X_1^{rT} M X_1^r} X_1^r \quad (32)$$

Suponiendo para el primer ciclo

$$X_2^r = \begin{bmatrix} -150 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y sustituyendo valores en la ecuación matricial 32 se obtiene

$$X_2 = \begin{bmatrix} -151 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que nos da los valores de partida para el primer ciclo de cálculo.

$$x'/r' = -151, X_2^r = [-151, 1], T_2 = 0.176 \text{ seg.}$$

En este caso se supuso un valor cercano al real y por tanto sólo se necesitó un ciclo para que se obtuviera la aproximación deseada. Si el valor supuesto no hubiese sido ese sino otro cualquiera seguramente no hubiera sido suficiente un ciclo de cálculo. En los ciclos subsiguientes se procedería en igual forma que antes; suponer inicialmente la configuración obtenida en el ciclo anterior; limpiarla de las componentes del primer modo; etc.

#### b) Respuesta sísmica

Los valores de los coeficientes de participación y de las ordenadas espectrales para este caso son:

$$C_1 = 0.001689, \quad C_2 = -0.001689$$

$$S_{u1} = 127.4 \text{ cm/seg}^2, \quad S_{u2} = 86.6 \text{ cm/seg}^2$$

Las respuestas máximas para cada modo valen

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,970 \text{ kg} \\ 298,200 \text{ kg cm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461 \text{ kg} \\ 203,000 \text{ kg cm} \end{bmatrix}$$

Las respuestas máximas totales serán (fig 10b)

$$V = 2,030 \text{ kg}$$

$$M = 361,000 \text{ kg cm}$$

$$M_b = 1,200,000 \text{ kg cm}$$



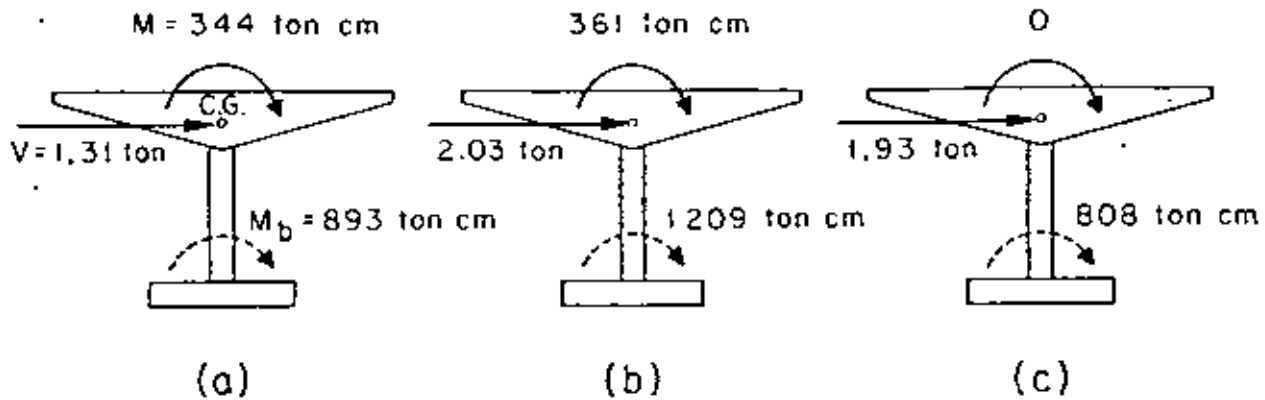


Fig. 10. Respuestas sísmicas

### CASO 3. BASE RÍGIDA Y MASA CONCENTRADA

Para comparación de resultados se verá cuál es el valor de la respuesta máxima en el caso de despreciar la inercia rotacional y la interacción suelo-estructura.

Para este caso  $\rho^2 = 608 \text{ (rad/seg)}^2$ ,  $T = 0.325$  seg,  $0.15S_u = 92.6 \text{ cm/seg}^2$ ,  $V = mS_u = 1,930 \text{ kg y}$   $M_b = 808.000 \text{ kg cm}$  (fig 10c).

### CONCLUSIONES

En la siguiente tabla se resumen los resultados de los tres casos, indicados como porcentajes del segundo caso.

Concepto	Caso 1	Caso 2	Caso 3
V	64.4%	100%	95.0%
M	95.2%	100%	0 %
$M_b$	73.8%	100%	66.7%

Los resultados de la tabla anterior dan una idea clara de la importancia que tiene el considerar la inercia rotacional de la cubierta y la interacción suelo-estructura. La importancia del primer concepto aumentará conforme mayor sea el momento de inercia de masa de la cubierta con respecto al eje z. El último concepto es tanto más importante cuanto más blando sea el suelo de cimentación. En particular puede observarse que en el tipo de solución 3 no se obtiene momento flexionante a la altura de C.G. Esto puede traer consigo serios errores en la cuantía del acero de refuerzo necesario en la unión columna-cubierta que es donde más ductilidad necesita desarrollarse.

### AGRADECIMIENTO

El autor manifiesta su agradecimiento a los doctores E. Rosenblueth y J. A. Nieto, así como al Ing. E. del Valle por sus valiosos comentarios y sugerencias.

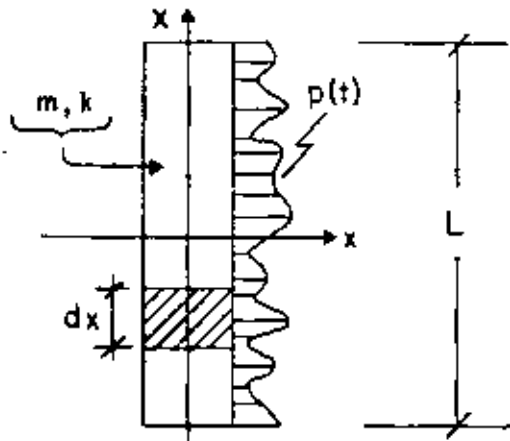
### REFERENCIAS

1. McLean, R. S., "Inverted pendulum structures", technical report of Consulting Civil and Structural Engineers, Fullerton, Cal. (ene, 1965).
2. Barkan, D. D., "Dynamics of bases and foundations", McGraw Hill Book Co. Inc. (1962).
3. Jacobsen, L. S., y Ayre, R. S., "Engineering vibrations", McGraw Hill Book Co. Inc. (1958).
4. Newmark, N. M., "Numerical procedure for computing deflections, moments and buckling loads", Transactions ASCE, Vol. 108 (1943), pp. 1161-1234.
5. Rosenblueth, E. y Esteva, L., "Proyecto de replanteo de las construcciones en el Distrito Federal. Folleto complementario. Diseño sísmico de edificios", Ediciones Ingeniería, México (1962).
6. Marsal, R., y Mazari, M., "El subsuelo de la Ciudad de México", Publicación del Instituto de Ingeniería, UNAM (1962).
7. Newmark, N. M., y Rosenblueth, E., "Earthquake Engineering", será publicado por Prentice-Hall, Inc.
8. Rosenblueth, E., "Some applications of probability theory in aseismic design", Proceedings, 1st World Conference on Earthquake Engineering, Berkeley, Cal. (1956), paper 8.

### VIGAS DE CORTANTE NO AMORTIGUADAS

SON SISTEMAS CONTINUOS CUYOS CAMBIOS DE PENDIENTE SON PROPORCIONALES AL CORTANTE QUE ACTUA EN LA SECCION.

SEAN  $m$  y  $p$  LA MASA Y FUERZA EXTERNA DISTRIBUIDAS POR UNIDAD DE LONGITUD, Y SEA  $k$  LA RIGIDEZ POR CORTANTE:



$$k = FAG$$

$F$  = FACTOR DE FORMA

$A$  = AREA SECCION TRANSVERSAL

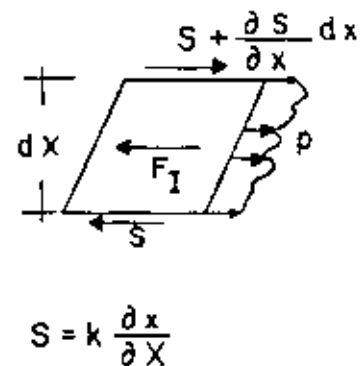
$G$  = MODULO DE ELASTICIDAD DINAMICO AL CORTANTE

$$F_I = (mdX) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

POR EQUILIBRIO:

$$\frac{\partial S}{\partial X} dX + p dX - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dX = 0$$

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - k \frac{\partial x}{\partial X} = p(t) \quad (1)$$



LA EC HOMOGENEA QUEDA (CON  $p=0$ )

$$(2) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = 0 ; \quad v^2 = \frac{k}{m}$$

ESCRIBIENDO  $x(t) = Z_n(x)\theta_n(t)$ , LA EC (2) QUEDA

$$Z_n \ddot{\theta}_n - v^2 Z_n'' \theta_n = 0$$

$$\frac{\ddot{\theta}_n(t)}{\theta_n(t)} - v^2 \frac{Z_n''}{Z_n} = 0 \Rightarrow \frac{\ddot{\theta}_n(t)}{\theta_n(t)} - v^2 \frac{Z_n''}{Z_n} = -\omega_n^2 = \text{CONSTANTE}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_n + \omega_n^2 \theta_n = 0 ; \quad Z_n'' + \frac{\omega_n^2}{v^2} Z_n = 0$$

$$\theta_n = B_n \text{sen } \omega_n (t - t_n), \quad Z_n = \Lambda_n \text{sen } \frac{\omega_n}{v} (x - a_n)$$

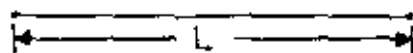
$$\therefore x_n = \bar{\Lambda}_n \text{sen} \left[ \frac{\omega_n}{v} (x - a_n) \right] \text{sen} \left[ \omega_n (t - t_n) \right], \quad n=1, 2, \dots ; \quad \bar{\Lambda}_n = B_n \Lambda_n$$

LAS CONSTANTES  $a_n$  Y  $\omega_n$  SE DETERMINAN EN CADA PROBLEMA EN FUNCION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA.

CONDICION DE ORTOGONALIDAD:

$$\int_0^L x_n(x) x_j(x) dx = 0, \text{ SI } n \neq j$$

EJEMPLO 1: CUERDA VIBRANTE DE LONGITUD  $L$ , Y EXTREMOS FIJOS:



EN EL EXTREMO  $x=0$  SE TENDRA

$$(3) \quad x(0, t) = 0 \Rightarrow \frac{\omega_n a_n}{v} = j\pi ; \quad j = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow a_n = 0$$

EN EL EXTREMO  $x = l$ . SE TENDRA

$$(4) \quad x(l, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_n l}{v} = n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

PUESTO QUE EN LA EC (3) SE TOMA  $j=0$ , YA QUE  $j=1, 2, \dots$  DAN LA MISMA SOLUCION, LO CUAL CONDUCE A  $a_n = 0$ .

DE LA EC (4):  $\omega_n = \frac{n\pi v}{l}$  ;  $n = 1, 2, \dots$

FRECUENCIA FUNDAMENTAL

SI  $n=1$ ,  $\omega_1 = \frac{\pi v}{l}$   $\therefore \omega_n = n \omega_1$

Y  $T_1 = \frac{2l}{v}$   $T_n = \frac{T_1}{n}$

LAS CONFIGURACIONES MODALES QUEDAN:

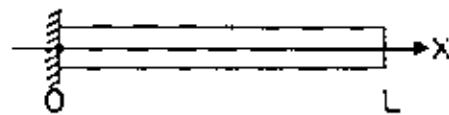
$$z_n = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \quad ; \quad x(t, x) = \bar{A}_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi v}{l} (t - t_n)$$

CONDICION DE ORTOGONALIDAD:

$$\int_0^l A_i \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{l} A_j \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{l} dx = 0, \quad \text{SI } i \neq j$$

EJEMPLO 2: VIGA DE CORTANTE APOYADA EN  $x = 0$  Y LIBRE EN  $x = l$ .

DE  $x(0, t) = 0 \Rightarrow a_n = 0$



DE  $x'(l, t) = 0$  (PUESTO QUE EN  $x = l$  SE DEBE CUMPLIR QUE LA FUERZA CORTANTE,  $S$ , SEA NULA),

$$x'(x, t) = A_n \frac{\omega_n}{v} \cos \frac{\omega_n x}{v} \operatorname{sen} \omega_n (t - t_n)$$

$$\therefore x'(L, t) = 0 = \cos \frac{\omega_n L}{v} \Rightarrow \frac{\omega_n L}{v} = \frac{\pi}{2}(2n-1)$$

$$0 \quad \omega_n = \frac{v}{L} \frac{\pi}{2} (2n-1) \quad n = 1, 2, \dots$$

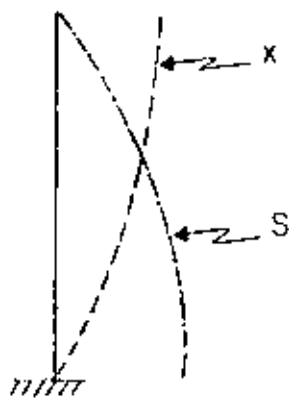
$$\text{SI } n=1, \omega_1 = \frac{\pi v}{L \cdot 2} \Rightarrow T_1 = \frac{4L}{v}$$

$$\therefore \omega_n = \omega_1 (2n-1) : T_n = \frac{T_1}{2n-1}$$

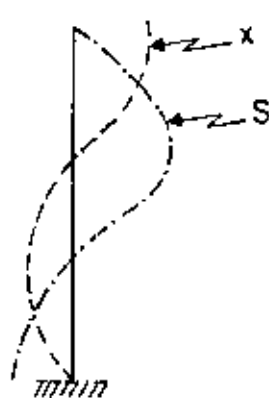
$$\text{ASI: } T_2 = \frac{T_1}{3}, T_3 = \frac{T_1}{5}, \text{ ETC.}$$

DISTRIBUCION DE CORTANTES:

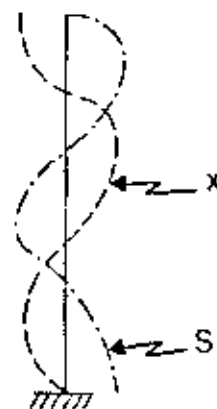
$$S_n = k \frac{\partial x}{\partial X} = \bar{A}_n k \frac{\omega_n}{v} \cos \frac{\omega_n X}{v} \operatorname{sen} \omega_n (t - t_n)$$



1er. MODO (FUNDAMENTAL)



2o. MODO



3er. MODO

## VIBRACIONES FORZADAS EN VIGAS DE CORTANTE

SEA  $\ddot{x}_0(t)$  LA EXCITACION DEL TERRENO. LA RESPUESTA,  $x(t)$ , DEL SISTEMA ES

$$(3) \quad x(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n} \operatorname{sen} \frac{\omega_n}{v} X \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) \operatorname{sen} \omega_n (t-\tau) d\tau$$

DONDE:

$$(4) \quad a_n = \frac{\int_0^L n \operatorname{sen} \frac{\omega_n v}{X} dx}{\int_0^L n \operatorname{sen}^2 \frac{\omega_n v}{X} dx} = \frac{4}{(2n-1)\pi}$$

TAREA: DEMOSTRAR ECS (3) Y (4) Y ESTUDIAR SECCION 3.15.

EJEMPLO: CALCULAR EL LIMITE SUPERIOR DEL CORTANTE EN UNA VIGA DE CORTANTE A CUYA BASE SE LE SOMETE A UNA ACELERACION CONSTANTE,

$a$ .

EL ESPECTRO DE ESTA EXCITACION ES  $V = a/\omega$

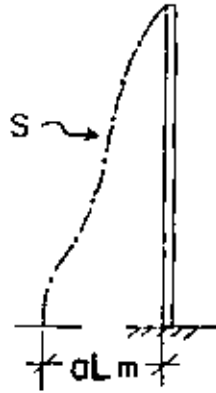
POR LO TANTO,  $S \leq k \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n} \operatorname{sen} \frac{\omega_n}{v} X \right) \right] V$

$$S \leq \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ka_n v}{\omega_n} \frac{\omega_n}{v} \cos \frac{\omega_n}{v} X \right] = \frac{4k}{v} \frac{a}{v} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2L}(2n-1)X}{(2n-1) \frac{v}{L} \frac{\pi}{2}(2n-1)} \right]; \text{ con } v^2 = \frac{k}{m}$$

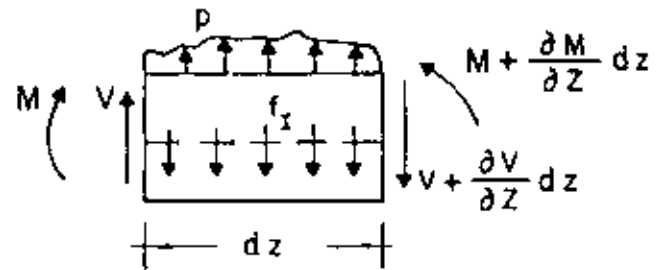
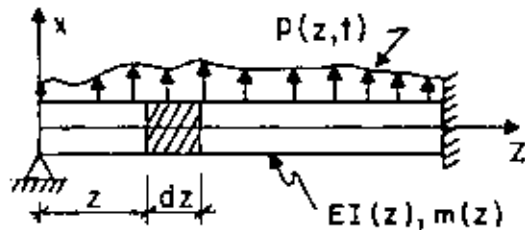
$$S \leq \frac{8aLm}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \left[ \cos \frac{(2n-1)\pi X}{2L} \right]$$

HN X = 0:

$$S \leq \underbrace{(8al,m)/\pi^2}_{\pi^2/8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = al,m$$



## VIBRACION DE VIGAS EN FLEXION

a. AMORTIGUAMIENTO NULO

$$V + pdz - (V + \frac{\partial V}{\partial z} dz) - f_I dz = 0 \quad (1)$$

$$\text{EN DONDE } f_I dz = (mdz) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (2)$$

SUSTITUYENDO (2) EN (1) Y SIMPLIFICANDO:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = p - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$M + Vdz - (M + \frac{\partial M}{\partial z} dz) = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial z} = V \quad (4)$$

(DESPRECIANDO LOS TERMINOS DE SEGUNDO ORDEN DE LOS MOMENTOS DE  $p$  Y  $f_I$ ).

SUSTITUYENDO (4) EN (3) SE OBTIENE

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p \quad (4')$$

TOMANDO EN CUENTA QUE  $\frac{M}{EI} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$  SE OBTIENE FINALMENTE

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p \quad (5)$$



b. AMORTIGUAMIENTO VISCOZO

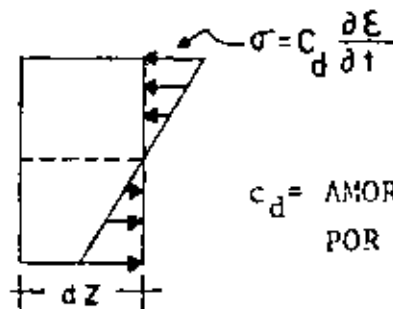
- FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO POR

$$\text{VELOCIDAD TRANSVERSAL} = c(z) \frac{\partial x}{\partial t} dz$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = p - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - c \frac{\partial x}{\partial t} \quad (6)$$

- FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO POR DEFORMACION DE LA VIGA.

ACEPTANDO LA HIPOTESIS DE NAVIER DE DEFORMACION PLANA



$$M_{\text{amort}} = \int \sigma y da = c_d I(z) \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t}$$

$c_d$  = AMORTIGUAMIENTO  
POR DEFORMACION

INCORPORANDO EL MOMENTO DEBIDO AL AMORTIGUAMIENTO EN LA

EC. (5)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t} \right) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c \frac{\partial x}{\partial t} = p \quad (6)$$

SI LA EXCITACION ES POR MOVIMIENTO DE LOS APOYOS, SE PUEDE DEMOSTRAR (CLOUGH Y PENZIEN, PAG 303) QUE:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t} \right) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c \frac{\partial x}{\partial t} = p_{\text{efect.}}$$

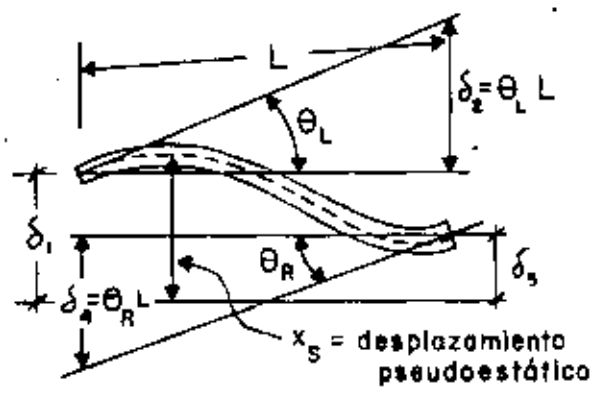
EN DONDE

$$p_{\text{efect}} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI \frac{\partial^2 x_s}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x_s}{\partial z^2 \partial t} \right) - m \frac{\partial^2 x_s}{\partial t^2} - c \frac{\partial x_s}{\partial t} \quad (7)$$

$$x(t)(z, t) = x_s(z, t) + x(z, t)$$

$x_s$  = DESPLAZAMIENTO PSEUDOESTATICO OCASIONADO POR EL MOV. DE LOS APOYOS DE MANERA ESTATICA

$x$  = DESPLAZAMIENTO DINAMICO



SI SE TIENE UNA ROTACION Y UNA TRASLACION POR APOYO:

$$x_s = \sum_{i=1}^4 \theta_i \delta_i(t) \quad (8)$$

$\theta_i(z)$  = CONFIGURACION DE LA VIGA DEBIDA A  $\delta_i=1$

INCORPORANDO (8) EN (7):

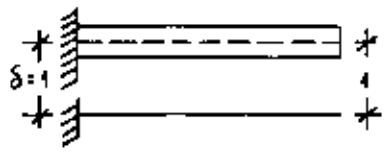
$$P_{efect} = -\sum_{i=1}^4 \{ m \theta_i \ddot{\delta}_i(t) + c \theta_i \dot{\delta}_i(t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [ I(z) \frac{\partial^2 \theta_i(z)}{\partial z^2} (\delta_i(t) c_d + E) ] \} \quad (9)$$

EN LA MAYORIA DE LOS CASOS EL AMORTIGUAMIENTO INFLUYE POCO EN LA FUERZA EFECTIVA Y LA EC. (9) SE SIMPLIFICA A

$$P_{efect} = -\sum_{i=1}^4 m \theta_i(z) \ddot{\delta}_i(t)$$

EN EL CASO DE UN VOLADIZO:

$$\theta_1(z) = 1$$



Y

$$P_{efect} = -m(z) \ddot{\delta}_1(t)$$

ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES

CONSIDEREMOS UNA VIGA DE SECCION CONSTANTE ( $EI = \text{CONSTANTE}$  ;  $\bar{m} = \text{MASA}$  POR UNIDAD DE LONGITUD).

DE LA EC. (5):  $EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$

$$\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

RESOLVIENDO LA EC. (10) POR SEPARACION DE VARIABLES:

$$x(z, t) = \theta(z) Y(t)$$

$$\theta^{IV}(z) Y(t) + \frac{\bar{m}}{EI} \theta(z) \ddot{Y}(t) = 0 ; \frac{\theta^{IV}(z)}{\theta(z)} + \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = 0$$

POR LO QUE

$$\frac{\theta^{IV}(z)}{\theta(z)} = -\frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = C = a^4 \quad (C = \text{CONSTANTE})$$

POR LO TANTO OBTENEMOS DOS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS:

$$\theta^{IV}(z) - a^4 \theta(z) = 0$$

$$\ddot{Y}(t) + \omega^2 Y(t) = 0, \quad \text{DONDE} \quad \omega^2 = \frac{a^4 EI}{\bar{m}}$$

$$0 \quad a^4 = \frac{\omega^2 \bar{m}}{EI}$$

LA SOLUCION DE LA SEGUNDA DE ESTAS ES:

$$Y(t) = \frac{\dot{Y}(0)}{\omega} \text{sen} \omega t + Y(0) \text{cos} \omega t \quad (11)$$

LA SOLUCION DE LA PRIMERA ES:

$$\theta(z) = A_1 \operatorname{sen} az + A_2 \cos az + A_3 \operatorname{senh} az + A_4 \operatorname{cosh} az \quad (12)$$

EN DONDE LAS  $A_j$  SE CALCULAN EN FUNCION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE LA VIGA EN AMBOS EXTREMOS.

### EJEMPLO

#### VIGA SIMPLEMENTE APOYADA

LAS CUATRO CONDICIONES DE FRONTERA SON:

$$\text{en } z=0: \theta(0)=0, M(0) = EI \theta''(0) = 0$$

$$\text{en } z=L: \theta(L)=0, M(L) = EI \theta''(L) = 0$$

SUSTITUYENDO  $\theta(0)=0$  Y  $\theta''(0)=0$  EN LA EC. (12) Y SU SEGUNDA DERIVADA:

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) &= A_2 + A_4 \operatorname{cosh} 0 = 0 \\ \theta''(0) &= a^2(-A_2 + A_4 \operatorname{cosh} 0) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_2 = A_4 = 0$$

HACIENDO LO MISMO CON  $\theta(L) = 0$  y  $\theta''(L) = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \theta(L) &= A_1 \operatorname{sen} aL + A_3 \operatorname{senh} aL = 0 \\ \theta''(L) &= a^2(-A_1 \operatorname{sen} aL + A_3 \operatorname{senh} aL) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow A_3 = 0$$

POR LO TANTO,  $\theta(L) = A_1 \operatorname{sen} aL = 0$

PUESTO QUE  $A_1=0$  ES LA SOLUCION TRIVIAL, SE DEBE TENER QUE  $A_1$  SEA ARBITRARIA Y QUE

$$\operatorname{sen} aL = 0 \rightarrow aL = n\pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

POR LO TANTO,  $a = n\pi/L$ . RECORDANDO QUE

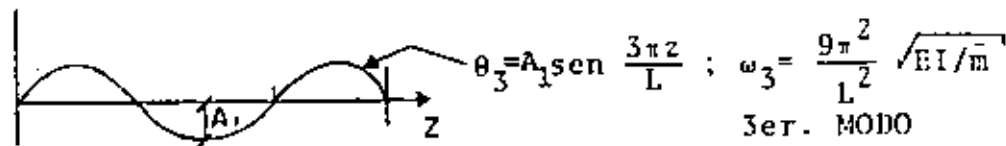
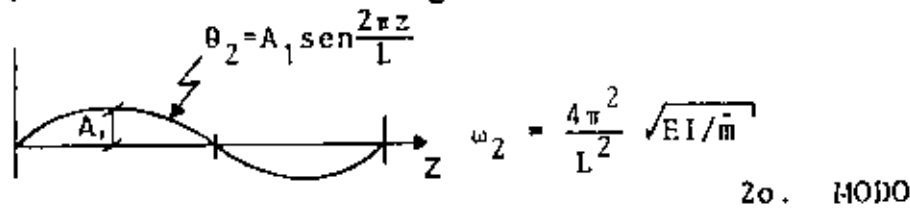
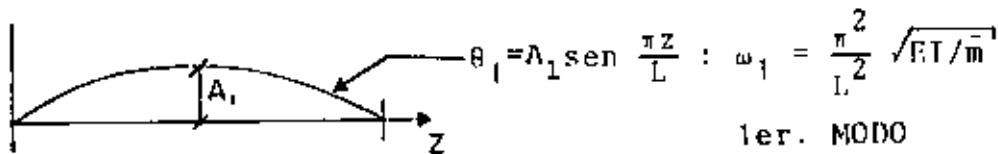
$$a^4 = \omega_m^2/EI, \text{ SE TIENE QUE}$$

$$\omega_n^2 = (n\pi/L)^2 EI/\bar{m} \quad \text{O} \quad \omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{EI/\bar{m}}$$

SON LAS FRECUENCIAS CIRCULARES NATURALES DE VIBRACION DE LA VIGA.

LAS CONFIGURACIONES MODALES SON

$$\theta_n(z) = A_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} z$$



$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 :: 1 : 4 : 9$$

$$\omega_i = n^2 \omega_1$$



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

DINAMICA ESTRUCTURAL

VIBRACION DE SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS  
GRADOS DE LIBERTAD

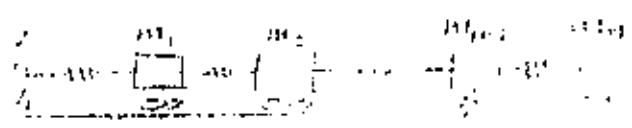
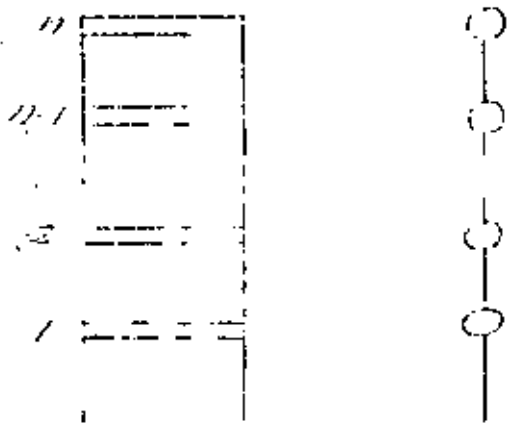
DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ  
JULIO DE 1984

VIBRACION DE SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

Ejemplos de sistemas de n GL.

Características:

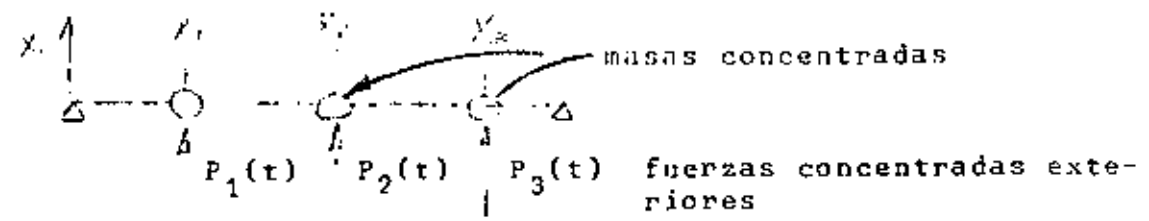
- masas { concentradas
- { rígidas
- columnas solo se deforman lateralmente
- con una coordenada por masa queda definida la configuración del sistema
- equivale a:



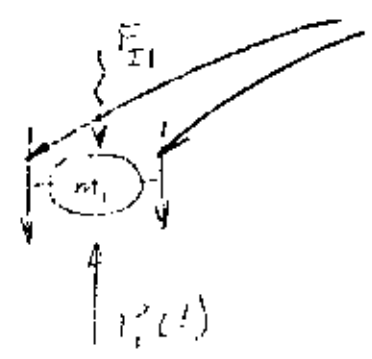
Además, la consideramos elástica, lineal



Supongamos:



aislemos una masa:



$$F_{r1} = \sum \text{fuerzas resistencia elástica a la deformación}$$

$$F_{11} \quad \text{fuerza de resistencia}$$

Las ecuaciones condensadas de movimiento serán:

$$F_{I1} + F_{r1} = P_1(t)$$

$$F_{I2} + F_{r2} = P_2(t)$$

$$F_{I3} + F_{r3} = P_3(t)$$

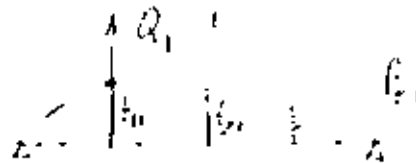
$\underbrace{\quad}_{I}$

Fuerzas asociadas al desplazamiento,  
NO al movimiento

∴ la determinación de estas fuerzas es un problema estático.

### Coefficientes de influencia

1. De flexibilidad



$f_{ij}$  = despl. de la coord. i debido a una carga unitaria en coord. j (desplazamiento y fuerza en = dirección)

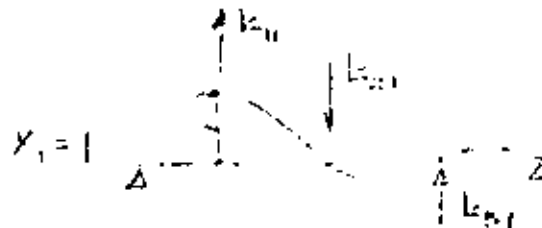
Por superposición

$$x_1 = f_{11} Q_1 + f_{12} Q_2 + f_{13} Q_3$$

$$x_2 = f_{21} Q_1 + f_{22} Q_2 + f_{23} Q_3 \quad \text{inv. (1)}$$

$$x_3 = f_{31} Q_1 + f_{32} Q_2 + f_{33} Q_3$$

2. De rigidez:



$K_{ij}$  = fuerza en coordenada i por un desplazamiento unitario en coordenada j.



Por superposición

$$\begin{aligned} Q_1 &= K_{11} X_1 + K_{12} X_2 + K_{13} X_3 \\ Q_2 &= K_{21} X_1 + K_{22} X_2 + K_{23} X_3 \\ Q_3 &= K_{31} X_1 + K_{32} X_2 + K_{33} X_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Desde luego  $K_{ij} = K_{ji}$  (y  $f_{ij} = f_{ji}$ ) (Maxwell-Mohr)

La ecuación 2 también puede escribirse:

$$Q_i = \sum_{j=1}^3 K_{ij} X_j$$

o bien, en notación matricial

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

matriz de rigideces

Ponemos:

$$\{Q\} = [K] X$$

$$\text{Claro que } [K]^{-1} = F = [f_{ij}]$$

Sustituyendo (2) o (3) en ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{X}_1 + K_{11} X_1 + K_{12} X_2 + K_{13} X_3 &= P_1(t) \\ m_2 \ddot{X}_2 + K_{21} X_1 + K_{22} X_2 + K_{23} X_3 &= P_2(t) \\ m_3 \ddot{X}_3 + K_{31} X_1 + K_{32} X_2 + K_{33} X_3 &= P_3(t) \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

o también:

$$\begin{aligned}
 [M] \{ \ddot{x} \} + [K] \{ x \} &= \{ P(t) \} \quad (\text{vibración forzada}) \\
 &= \{ 0 \} \quad (\text{vibración libre})
 \end{aligned}$$

1. VIBRACION LIBRE

$$[M] \{ \ddot{x} \} + [K] \{ x \} = \{ 0 \} \tag{1.1}$$

Supongamos la solución

$$\begin{aligned}
 \{ x \} &= \underbrace{\{ r \}}_{\text{constante con } t} (A \underbrace{\text{sen } pt + B \text{ cos } pt}_{\text{escalar}}) = \{ r \} Y(t) \\
 &\quad \text{define:} \\
 &\quad - \text{variación armónica} \\
 &\quad - \text{amplitud}
 \end{aligned}$$

tenemos:

$$\begin{aligned}
 \{ \ddot{x} \} &= \{ r \} (A \text{ sen } pt + B \text{ cos } pt) = r Y(t) \\
 \{ \dot{x} \} &= \{ r \} (Ap \text{ cos } pt - B p \text{ sen } pt) \\
 \{ \ddot{x} \} &= \{ r \} (-Ap^2 \text{ sen } pt - B p^2 \text{ cos } pt) = -p^2 \{ r \} Y(t)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Sustituyendo 1.2 en 1.1 y dividiendo entre Y(t) nos queda:

$$-p^2 [M] \{ r \} + [K] \{ r \} = \{ 0 \}$$

o sea:

$$\underbrace{[K] - p^2 [M]}_{[F]} \{ r \} = \{ 0 \} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
 [K] \{r\} &= p^2 [M] \{r\} & [K] \{r\} &= p^2 [M] \{r\} \\
 \text{pre x } [M]^{-1} & & \text{pre x } [K]^{-1} & \cdot \frac{1}{p^2} \\
 [M]^{-1} [K] \{r\} &= p^2 \{r\} & \frac{1}{p^2} \{r\} &= [K]^{-1} [M] \{r\}
 \end{aligned}$$

En las dos formas llegamos a un problema de VAC

$$[L] u = \lambda \{u\}$$

Problema de valores característicos:

- Dada una matriz cuadrada de orden  $(n \times n)$   $[L]$ , que representa una transformación lineal de vectores  $n$ -dimensionales, debe encontrarse un vector  $\{u\}$  que transformado por  $[L]$  resulte en otro vector  $\lambda \{u\}$  en la misma "dirección". O sea,  $[L]$  solo cambia la magnitud de  $\{u\}$  sin cambiar la dirección.

El vector es un vector característico (o eigenvector) de  $[L]$ .  $\lambda$  (escalar) representa la relación entre las "longitudes" antes y después de la transformación y para llegar a los VEC debe tomar valores de un conjunto de valores característicos (VAC) (o eigenvalores).

El problema de encontrar frecuencias y modos naturales puede considerarse un problema de VAC. - (STD)

Tenemos

$$[K] - p^2 [M] \{r\} = \{0\} \quad (1.3)$$

Si en el sistema de ecuaciones

$$[A] \{x\} = \{0\}$$

$[A]$  es no singular, la solución única es la trivial

$\{x\} = \{0\}$ , de donde nos interesa el caso en que  $[A]$  es singular. En este caso la adjunta\*  $[\hat{A}]$  existe y puede pre X por ella, con el resultado

$$[A] \{x\} = \{0\}$$

porque  $[\hat{A}] [A] = [A] [I] V^T [A]$  (nxn)

Puesto que  $[A] = 0$ ,  $\{x\}$  no necesariamente es nulo, pero si se asigna un valor dado a uno de sus elementos los demás quedan determinados en forma única.

También notamos que si  $\{x\}$  es solución de  $[A] \{x\} = \{0\}$  y  $\alpha$  es una constante, entonces  $\alpha \{x\}$  es también solución.

Por lo tanto, hay un número infinito de soluciones. Todos estas se considerarán juntas y hablaremos de una "solución" como un conjunto de relaciones entre los elementos de  $\{x\}$ .

Volvemos a 
$$\begin{bmatrix} [K] & -p^2 [M] \\ & [E] \end{bmatrix} \{r\} = \{0\} \quad (1.3)$$

Al desarrollar  $[E] = 0$  llegamos a una ecuación de grado n en  $p^2$ , cuyas raíces son los VAC.

- Como  $[K]$  y  $[M]$  son simétricas y positivas definidas\*,

\*Transpuesta de la matriz de cofactores.

\*\* $[A]$  es POS. DEF. si  $\{q\} [A] \{q\} > 0$  para todo  $\{q\}$  no nulo

puede demostrarse que las raíces de la ecuación característica son reales y positivas. Las llamamos  $p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2$ .

Las  $n$  frecuencias naturales son los términos positivos de las raíces y la más baja es llamada frecuencia fundamental.

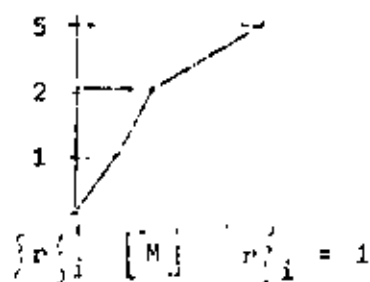
- Para la gran mayoría de los casos de interés las frecuencias son diferentes entre sí.
- Para cada frecuencia  $p_i$  existe una VEC asociado:

$$[K] \{r\}_i = p_i^2 [M] \{r\}_i \quad i = 1, \dots, n$$

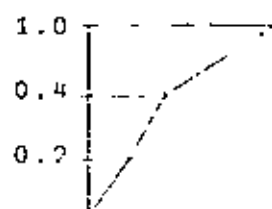
o sea para cada  $p_i$  existe una solución  $\{r\}_i$  no trivial

- Normalización (solo conveniencia, sin significado físico)

Varias formas:



$$\{r\}_i [M] \{r\}_i = 1$$



(modos normales)

- Los modos y frecuencias naturales del sistema son propiedades características derivadas de las propiedades de inercia y rigidez expresadas por los elementos de  $[M]$  y  $[K]$ .
- Llamaremos matriz modal  $[R]$  a la que tiene los VEC, o vectores modales, como columnas.

ORTOGONALIDAD DE MODOS DE VIBRACION

Se dice que dos vectores  $\{a\}$  y  $\{b\}$  son ortogonales con respecto a la matriz simétrica  $[J]$  si

$$\{a\}' [J] \{b\} = \{b\}' [J] a = 0$$

Demostremos que dos vectores modales  $\{r\}_i$  y  $\{r\}_j$ , asociados a frecuencias diferentes ( $\omega_i \neq \omega_j$ ) son ortogonales con respecto a las matrices de inercia y elásticas.

- Cada uno de estos vectores satisface la ecuación 1.3

$$p^2 [M] \{r\} = [K] \{r\} \quad [M] \{r\} = \frac{1}{p^2} [K] \{r\}$$

es decir:

$$p_i^2 [M] \{r\}_i = [K] \{r\}_i \quad [M] \{r\}_i = \frac{1}{p_i^2} [K] \{r\}_i$$

$$p_j^2 [M] \{r\}_j = [K] \{r\}_j \quad [M] \{r\}_j = \frac{1}{p_j^2} [K] \{r\}_j$$

pre X i y j por  $\{r\}_j'$  y  $\{r\}_i'$  respectivamente

$$\begin{aligned} p_i^2 \{r\}_j' [M] \{r\}_i &= \{r\}_j' [K] \{r\}_i \quad \{r\}_j' [M] \{r\}_i = \frac{1}{p_i^2} \{r\}_j' [K] \{r\}_i \\ p_j^2 \{r\}_i' [M] \{r\}_j &= \{r\}_i' [K] \{r\}_j \quad \{r\}_i' [M] \{r\}_j = \frac{1}{p_j^2} \{r\}_i' [K] \{r\}_j \end{aligned} \quad (a)$$

pero como  $[M]$  y  $[K]$  son simétricas:

$$\begin{aligned} \{r\}_j' [K] \{r\}_i &= \{r\}_i' [K] \{r\}_j \\ \{r\}_j' [M] \{r\}_i &= \{r\}_i' [M] \{r\}_j \end{aligned}$$

∴, restando miembro a miembro en ecuaciones (a):

$$(p_i^2 - p_j^2) \left( \{r\}_i^T [M] \{r\}_j \right) = 0 \quad 0 = \left( \frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{p_j^2} \right) \{r\}_i^T [K] \{r\}_j$$

y como  $p_i^2 \neq p_j^2$

$$\{r\}_i^T [M] \{r\}_j = 0 \quad \{r\}_i^T [K] \{r\}_j = 0$$

Tenemos ecuaciones de ortogonalidad.

$$\begin{aligned} \{r\}_i^T [M] \{r\}_j &= 0 \\ \{r\}_i^T [K] \{r\}_j &= 0 \end{aligned} \quad \text{si } i \neq j$$

La ec

$$[M] \{x\} + [K] x = \{0\} \quad (a)$$

y la matriz modal  $[R]$

Hagamos:

$$\{x\} = [R] \{y\}$$

y sustituyendo en (a):

$$[M] [R] \{y\} + [K] [R] \{y\} = \{0\}$$

premultiplicando por  $[R]^T$ :

$$[R]^T [M] [R] \{y\} + [R]^T [K] [R] \{y\} = \{0\} \quad (b)$$

diagonales

$[R]^T$

M, K

$i \neq j$

Llamemos

$$[R]' [M] [R] = [M^*]$$

$$[R]' [K] [R] = [K^*]$$

∴ la ec (b) (p. 14) puede ponerse:

$$[M^*] \ddot{y} + [K^*] y = 0$$

que equivale a:

$$m_{11}^* \ddot{y}_1 + k_{11}^* y_1 = 0$$

$$m_{22}^* \ddot{y}_2 + k_{22}^* y_2 = 0$$

$$m_{nn}^* \ddot{y}_n + k_{nn}^* y_n = 0$$

de las que

$$p_1^2 = \frac{k_{11}^*}{m_{11}^*}, \dots, p_n^2 = \frac{k_{nn}^*}{m_{nn}^*}$$

Recordar que para

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad y \quad p^2 = \frac{k}{m}$$

O sea, con la transformación

$$\{x\} = [R] \{y\}$$

aplicada a la ecuación

$$[M] \ddot{x} + [K] x = 0$$



hemos descompuesto un sistema de nGL en n sistemas de 1GL independientes.

Consideremos el producto

$$\begin{aligned} [M^*]^{-1} [K^*] &= ([R]^T [M] [R])^{-1} [R]^T [K] [R] = [K^*] [M^*]^{-1} \\ &= [R]^{-1} [M]^{-1} [R]^T [R]^T [K] [R] \\ &= [R]^{-1} [M]^{-1} [K] [R] = [P] \end{aligned}$$

$[P]$  contiene las frecuencias naturales en la diagonal principal

∴ El problema de encontrar frecuencias y modos naturales equivale al de encontrar la matriz  $[R]$  que diagonalice  $[M]$  y  $[K]$  de acuerdo con

$$\begin{aligned} [R]^T [M] [R] &= [M^*] \\ [R]^T [K] [R] &= [K^*] \end{aligned}$$

Las frecuencias naturales se obtendrán de

$$[M^*]^{-1} [K^*] = [K^*] [M^*]^{-1} = [P]$$

Veámoslo en otra forma

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\}$$

Sustituyendo  $\{x\} = [R] \{y\}$

$$[M] [R] \{\ddot{y}\} + [K] [R] \{y\} = \{P(t)\}$$

premultiplicando por  $\{r\}_j^T$

$$\underbrace{\{r\}_j^T}_{(a)} [M] \underbrace{\{R\}}_{(b)} \{\ddot{y}\} + \{r\}_j^T [K] \{R\} \{y\} = \underbrace{\{r\}_j^T}_{\text{escalar}} P(t)$$

En los productos (a) y (b) solo queda (por ortogonalidad):

$$\{r\}_j^T [M] \{r\}_j \ddot{y}_j + \{r\}_j^T [K] \{r\}_j y_j = \{r\}_j^T P(t)$$

$$M_j^* \ddot{y}_j + K_j^* y_j = P_j^*(t)$$

$$K_j^* = p_j^2 M_j^* \quad P_j^* = \sum_i P_i r_{ij}$$

y para el modo  $j$  tenemos:

$$M_j^* \ddot{y}_j + p_j^2 M_j^* y_j = P_j^*(t)$$

o bien

$$M_j^* \ddot{y}_j + K_j^* y_j = P_j^*(t) \quad (1.5)$$

análoga a la ecuación de movimiento para 1 GL:

$$m \ddot{x} + k x = P(t)$$

En (1.5) tenemos:

$n$  ecuaciones independientes para  $n$  GL

1 ecuación independiente para cada modo

Para vibración libre (1GL)

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad p^2 = \frac{k}{m}$$

la solución es:

$$x = A \cos pt + B \sin pt \quad (c)$$

y para el modo  $j$  tendremos ( $P_j(t) = 0$ )

$$y_j = A_j \cos p_j t + B_j \sin p_j t \quad (d)$$

Si en (c) hacemos

$$x_{t=0} = x_0 \quad \dot{x}_{t=0} = \dot{x}_0$$

llegamos a

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt$$

y en (d):

$$y_j = y_{0j} \cos p_j t + \frac{\dot{y}_{0j}}{p_j} \sin p_j t$$

Cualquier configuración del sistema puede expresarse como una suma de formas modales multiplicadas por ciertos coeficientes.

Esquemáticamente:

$$\begin{array}{c} \left\{ X \right\} \\ \text{estática} \\ \circ \\ \text{dinámica} \end{array} = \begin{array}{c} \left\{ r \right\}_1 \\ \vdots \\ \left\{ r \right\}_2 \\ \vdots \\ \left\{ r \right\}_3 \\ \vdots \end{array} Y_1 + \begin{array}{c} \left\{ r \right\}_2 \\ \vdots \\ \left\{ r \right\}_1 \\ \vdots \\ \left\{ r \right\}_3 \\ \vdots \end{array} Y_2 + \begin{array}{c} \left\{ r \right\}_3 \\ \vdots \\ \left\{ r \right\}_1 \\ \vdots \\ \left\{ r \right\}_2 \\ \vdots \end{array} Y_3 + \dots$$

$Y = Y(t)$

$$\left( \left\{ X \right\} = \left\{ x(t) \right\} \right)$$

En nuestra expresión

$$\{x\} = [R]^{-1} \{y\} \quad 1.4$$

$\{x\}$  puede no ser función de  $t$ , por ejemplo:

$$\{1\} = [R]^{-1} c$$

donde  $\{c\}$  es el vector de constantes que prex  $[R]$  nos da la configuración  $\{1\}$

De la ec. (e):

$$\{c\} = [R]^{-1} \{1\} \quad ([R] \text{ NOSING})$$

En 1.4 también podríamos hacer

$$\{y\} = [R]^{-1} \{x\}$$

pero sigamos otro camino, premultiplicando por  $\{r\}_j^T [M]$

o por  $\{r\}_j^T [K]$

$$\begin{aligned} \{r\}_j^T [M] \{x\} &= \{r\}_j^T [M] [R]^{-1} \{y\} = \{r\}_j^T [M] \{r\}_1 y_1 + \\ &+ \{r\}_j^T [M] \{r\}_2 y_2 + \dots \\ &+ \{r\}_j^T [M] \{r\}_n y_n \end{aligned}$$

Por ortogonalidad todos estos productos son nulos excepto el término

$$\{r\}_j^T [M] \{r\}_j y_j$$

de donde tenemos

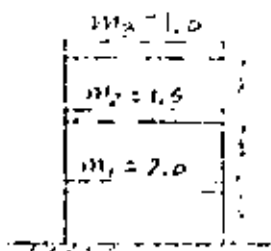
$$\{r\}_j^T \cdot [M] \{x\} = \{r\}_j^T [M] \{r\}_j y_j$$

de donde:

$$y_j = \frac{\{r\}_j^T [M] \{x\}}{\{r\}_j^T [M] \{r\}_j} = \frac{\{r\}_j^T [M] \{x\}}{M_j^*} = \frac{\{r\}_j^T [K] \{x\}}{K_j} = \frac{\{r\}_j^T}{p_j^2} \frac{K_j}{M_j^*} \{x\}$$

(coeficiente de participación)

Ejemplo (vigas rígidas)



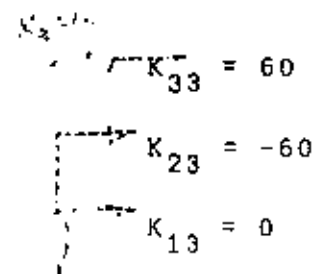
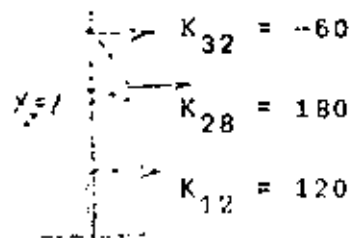
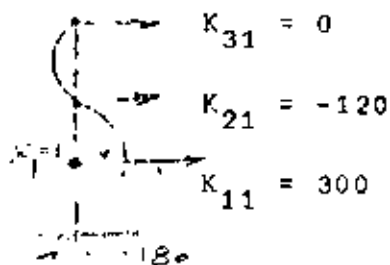
60 T/cm

120 T/cm

-180 T/cm

$$[M] = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \frac{\text{ton seg}^2}{\text{cm}}$$

Matriz de rigideces



$$\therefore [K] = \begin{bmatrix} 300 & -120 & 0 \\ -120 & 180 & -60 \\ 0 & -60 & 60 \end{bmatrix} = 60 \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{T/cm})$$

$$[E] = [K] - p^2 [M] \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 60 \begin{bmatrix} (5 - \frac{2}{60} p^2) & -2 & 0 \\ -2 & (3 - \frac{1.5}{60} p^2) & -1 \\ 0 & -1 & (1 - \frac{1}{60} p^2) \end{bmatrix}$$

si  $d = p^2/60$  :

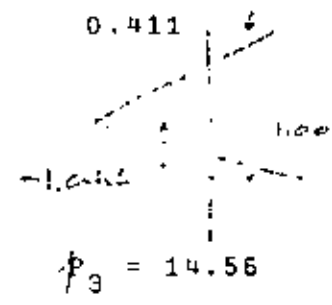
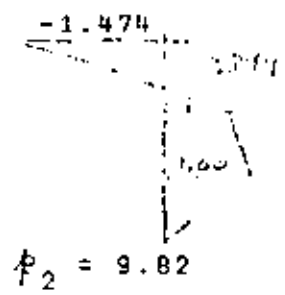
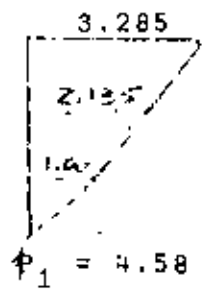
$$[E] = 60 \begin{bmatrix} (5-2d) & -2 & 0 \\ -2 & (3-1.5d) & -1 \\ 0 & -1 & (1-d) \end{bmatrix}$$

$$|E| = 0 = 60 (d^3 - 5.5 d^2 + 7.5 d - 2) = 0$$

- $d_1 = 0.35$
- $d_2 = 1.61$
- $d_3 = 3.54$

$$p^2 = 60 d: \quad \left. \begin{array}{l} p_1^2 = 21.0 \quad p_1 = 4.58 \\ p_2^2 = 96.5 \quad p_2 = 9.82 \\ p_3^2 = 212.4 \quad p_3 = 14.56 \end{array} \right\} \text{frecuencias naturales}$$

Modos:



$$[R] = \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 2.135 & 0.899 & -1.044 \\ 3.285 & -1.474 & 0.411 \end{bmatrix}$$

$$[M^*] = [R]^T [M] [R] = \begin{bmatrix} 19.629 & 0.038 & 0.007 \\ 0.037 & 5.386 & -0.014 \\ 0.006 & -0.014 & 3.804 \end{bmatrix}$$

Ej:

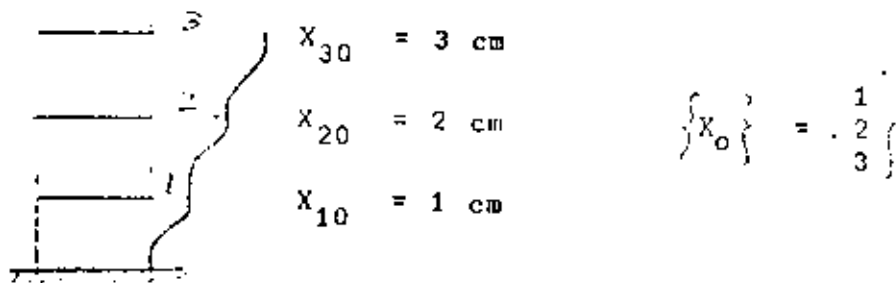
$$19.6296 = \{r\}_1^T [M] \{r\}_1 = M_1^* = \sum r_{i1}^2 m_i$$

$$[K^*] = [R]^T [K] [R] = 60 \begin{bmatrix} 6.899 & 0.042 & 0.034 \\ 0.042 & 8.651 & -0.040 \\ 0.034 & -0.040 & 13.473 \end{bmatrix}$$

$$\text{Comprobación con } [K^*] = [r^2 M^*] =$$

$$= \begin{bmatrix} 412.209 & 0 & 0 \\ 0 & 519.749 & 0 \\ 0 & 0 & 807.970 \end{bmatrix} = [r^2 M^*]$$

$$[K^*] = \begin{bmatrix} 413.940 & 0 \dots & 0 \dots \\ 0 \dots & 519.060 & 0 \dots \\ 0 \dots & 0 \dots & 808.380 \end{bmatrix}$$



$$Y_{01} = \frac{\{r\}_1^T [M] \{x_0\}}{M_1^*} = \frac{2.0 + 6.405 + 9.855}{19.629} = 0.9303 \text{ cm}$$

$$Y_{02} = \frac{\{r\}_2^T [M] \{x_0\}}{M_2^*} = \frac{2.0 + 2.697 - 4.422}{5.386} = 0.0511$$

$$Y_{03} = \frac{\{r\}_3^T [M] \{x_0\}}{M_3^*} = \frac{2.0 - 3.132 + 1.233}{3.804} = 0.0266$$

Modo  $Y_1(t)$

$$P_1 = 4.58$$

$$P_2 = 9.82$$

$$P_3 = 14.56$$

En p.

0.930 cm

0.051 cm

0.026 cm

son amplitudes de los  
modos



Para obtener los desplazamientos de las masas debemos multiplicar por las configuraciones modales:

$$x_{i1} = \{r\}_1 \quad Y_1(t) = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.135 \\ 3.285 \end{pmatrix} \quad 0.93 \cos 4.58 t$$

$$x_{i2} = \{r\}_2 \quad Y_2(t) = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.899 \\ -1.474 \end{pmatrix} \quad 0.051 \cos 9.82 t$$

$$x_{i3} = \{r\}_3 \quad Y_3(t) = \begin{pmatrix} 1.00 \\ -1.044 \\ 0.411 \end{pmatrix} \quad 0.0266 \cos 14.56 t$$

y sumar. O sea los desplazamientos  $x_i(t)$  de las masas serán

$$\{x(t)\} = [R] \{y(t)\}$$

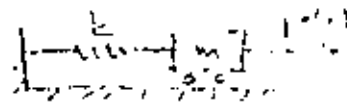
$$x_1(t) = r_{11} Y_1(t) + r_{12} Y_2(t) + r_{13} Y_3(t)$$

$$x_2(t) = r_{21} Y_1(t) + r_{22} Y_2(t) + r_{23} Y_3(t)$$

$$x_3(t) = r_{31} Y_1(t) + r_{32} Y_2(t) + r_{33} Y_3(t)$$

#### Otro ejemplo

Para IGL tenemos



$$P(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2}$$

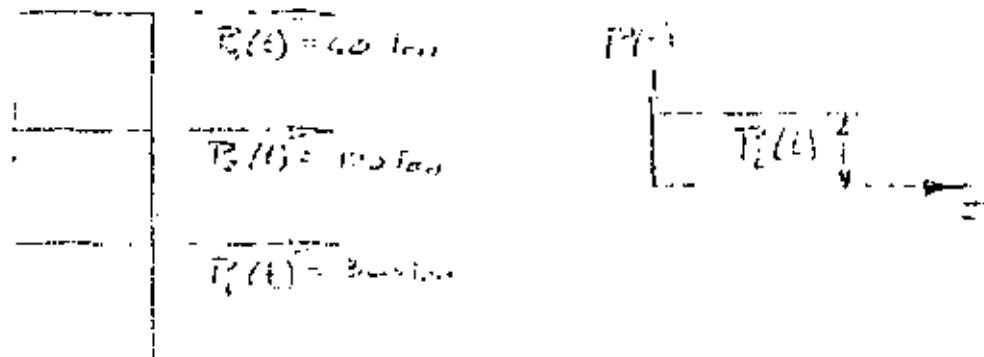
La ec:

$$x + P^2 x = \frac{P(t)}{m} = \frac{P_0}{m}$$

y para  $CI = 0$  la solución

$$x = \frac{P_0}{K} (1 - \cos pt)$$

Tenemos ahora el problema de encontrar la respuesta de



Para el modo  $j$ :

$$\ddot{Y}_j + p_j^2 Y_j = \frac{P_j^*(t)}{M_j^*} = \frac{P_{j0}^*}{M_j^*} \quad \text{cuya solución es:}$$

$$Y_j = \frac{P_{j0}^*}{K_j^*} (1 - \cos p_j t) = \frac{P_{j0}^*}{p_j^2 M_j^*} (1 - \cos p_j t)$$

Cálculo de  $P_j^*$

$$P_j^* = \begin{Bmatrix} r_{1j} \\ r_{2j} \\ r_{3j} \end{Bmatrix} \{P(t)\} = \begin{Bmatrix} r_{1j} \\ r_{2j} \\ r_{3j} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 360 \\ 120 \\ 60 \end{pmatrix}$$

modo

$$\begin{array}{l} 1 \quad P_1^* = P_1 r_{11} + P_2 r_{21} + P_3 r_{31} = 360 + 256.2 + 197.1 = 813.3 \\ 2 \quad P_2^* = P_1 r_{12} + P_2 r_{22} + P_3 r_{32} = 360 + 107.88 - 88.4 = 379.48 \\ 3 \quad P_3^* = P_1 r_{13} + P_2 r_{23} + P_3 r_{33} = 360 - 125.28 + 24.66 = 259.98 \end{array}$$

Ahora bien,

$$Y_j(st) = \frac{P_j^*}{p_j^2 M_j^*} = \frac{P_j^*}{K_j^*}$$

$$Y_{1(st)} = \frac{813.30}{21 \times 19.629} = 1.973 \text{ cm}$$

$$Y_{2(st)} = \frac{379.48}{965 \times 5.386} = 0.730 \text{ cm}$$

$$Y_{3(st)} = \frac{259.38}{212.4 \times 3.804} = 0.321 \text{ cm}$$

de donde

$$Y_j = \frac{P_j^*}{P_j^2 M_j} (1 - \cos P_j t), \quad \text{tenemos:}$$

$$Y_1(t) = Y_{1(st)} (1 - \cos p_1 t)$$

$$Y_2(t) = Y_{2(st)} (1 - \cos p_2 t)$$

$$Y_3(t) = Y_{3(st)} (1 - \cos p_3 t)$$

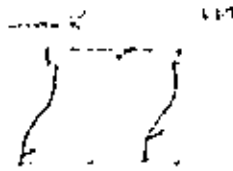
y, finalmente:

$$\{x(t)\}' = \{r_1\} Y_1(t) + \{r_2\} Y_2(t) + \{r_3\} Y_3(t) = R \{Y\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.135 \\ 3.285 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.973 (1 - \cos p_1 t) \\ \dots \\ 0.321 (1 - \cos p_3 t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -1.044 \\ 0.411 \end{Bmatrix}$$

EXCITACION SISMICA

## A. Sistemas 1GL

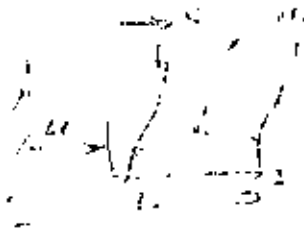


$$m \ddot{x} + kx + P(t) \quad (a)$$

Para  $P(t)$  cualquiera y para  $CI \neq 0$  la solución de (a) es:

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt + \frac{1}{mp} \int_0^t P(\tau) \sin p(t-\tau) d\tau$$

Para excitación sísmica:



$$m(\ddot{x} + \ddot{u}) + kx = 0$$

o sea,

$$m \ddot{x} + kx = -m\ddot{u} \quad (b)$$

De la comparación de (a) y (b), la solución completa de ésta es:

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt - \frac{1}{p} \int_0^t \ddot{u}(\tau) \sin p(t-\tau) d\tau$$

## B. Sistemas de nGL:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [k] \{x\} = \{P(t)\} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_1 \ddot{u} \\ -m_2 \ddot{u} \\ \vdots \\ -m_n \ddot{u} \end{Bmatrix}$$

$$= - \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{Bmatrix} \ddot{u} \quad \ddot{u} = - \{m\} \ddot{u}$$

Es decir, tenemos:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\} = - \{m\} \ddot{u}$$

$$\text{sust. } \{x\} = [R] \{y\}$$

$$[M] [R] \{\ddot{y}\} + [K] [R] \{y\} = \{P(t)\} = - \{m\} \ddot{u}(t)$$

$$\text{pre } x \quad \{r\}'_j$$

$$\{r\}'_j [M] [R] \{\ddot{y}\} + \{r\}'_j [K] [R] \{y\} = \underbrace{\{r\}'_j}_j \{P\} = - \underbrace{\{r\}'_j}_j \{m\} \ddot{u}$$

por ortogonalidad:

$$\{r\}'_j [M] \{r\} \ddot{y}_j + \{r\}'_j [K] \{r\} y_j = P_j^* = U_j^*$$

y queda:

$$M_j^* \ddot{y}_j + K_j^* y_j = P_j^* = U_j^* = - m_j^* \ddot{u}$$

∴ la solución (CI = 0) de esta ecuación es:

Para  $P_j^*$ :

$$y_j(t) = \frac{1}{\phi_j M_j^*} \int_0^t P_j^*(\tau) \sin \phi_j(t-\tau) d\tau$$

Para  $U_j^*$ :

$$y_j(t) = \frac{1}{\phi_j M_j^*} \int_0^t U_j^*(\tau) \sin \phi_j(t-\tau) d\tau$$

que puede escribirse:

$$y_j(t) = - \frac{m_j^*}{p_j M_j} \int_0^t \ddot{u}(z) \sin p_j(t-z) dz$$

$$+ y_{0j} \cos p_j t + \frac{\dot{y}_{0j}}{p_j} \sin p_j t \quad \begin{array}{l} \text{término } a \\ \text{para} \\ \text{CI} \neq 0 \end{array}$$

Una vez obtenidos los elementos de  $\{y\}$  solo falta premultiplicar por  $[R]$  para obtener  $\{x\}$ :

$$\{x(t)\} = [R] \{y(t)\}$$

#### GENERALIZACION DE LAS CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD

Tenemos la ecuación:

$$[\bar{K}] - p^2 [\bar{M}] \{x\} = \{0\}$$

que convenimos en escribir en la forma:

$$(K - p^2 M) x = 0$$

como los vectores modales la satisfacen:

$$K r_j = p_j^2 M r_j \quad (a)$$

y premultiplicando por:  $r_j^T M M^{-1}$  tenemos:

$$r_j^T M M^{-1} K r_j = p_j^2 M M^{-1} M r_j = p_j^2 M M^{-1} K r_j = 0$$

que puede escribirse

$$r_i' M (M^{-1} K)^2 r_j = 0$$

y así podría seguirse para llegar a:

$$r_i' M (M^{-1} K)^{\ell} r_j = 0 \quad - \begin{matrix} \ell \text{ entero} \\ \ell = 1, 2, \dots \end{matrix}$$

$$r_i' M (M^{-1} K)^{\ell} r_j = 0 \quad (b)$$

en forma análoga podemos obtener

$$r_i' (MF)^{\ell} M r_j = 0 \quad (c)$$

o

$$r_i' (K M^{-1})^{\ell} K r_j = 0$$

En (b):

$$\ell = -2 \quad M (M^{-1} K)^{-2} = M (M^{-1} K)^{-1} (M^{-1} K)^{-1}$$

$$(\text{en (c), con } \ell=2) \quad = M K^{-1} M K^{-1} M = \underline{M F M F M}$$

$$\ell = -1 \quad M (M^{-1} K)^{-1} = M K^{-1} M = \underline{M F M}$$

$$\ell = 0 \quad M (M^{-1} K)^0 = \underline{M}$$

$$\ell = 1 \quad M (M^{-1} K)^1 = M M^{-1} K = \underline{K}$$

$$\ell = 2 \quad M (M^{-1} K)^2 = M M^{-1} K M^{-1} K = \underline{K M^{-1} K}$$

$$\ell = 3 \quad M (M^{-1} K)^3 = M M^{-1} K M^{-1} K M^{-1} K = \underline{K M^{-1} K M^{-1} K}$$

VIBRACION LIBRE Y FORZADA DE SISTEMAS DE N GL CON AMORTIGUAMIENTO

Las ecuaciones de equilibrio dinámico son:

$$\{F_I\} + \{F_a\} + \{F_r\} = \{P(t)\}$$

Ya tenemos:

$$\{F_I\} = [M] \{\ddot{x}\}$$

$$\{F_r\} = [K] \{x\}$$

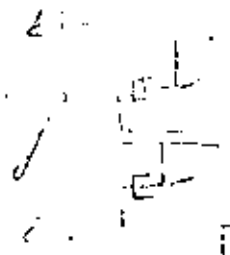
y ahora hacemos

$$\{F_a\} = [c] \{\dot{x}\}$$

donde

$$[c] = [c_{ij}]$$

y  $c_{ij}$  = fuerza de amortiguamiento en la coordenada  $i$  debido a una velocidad unitaria en la coordenada  $j$ .



$$c_{jk} = c_{kj}$$

$$c_{ij} = c_{ji}$$

} indica  
acoplamiento

La ecuación de movimiento es

$$[M] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\}$$



Hagamos:  $\{X\} = [R] \{y\}$  premultiplicando por  $\{r\}_j^T$

$$\{r\}_j^T [M] [R] \{y\} + \{r\}_j^T [C] [R] \{y\} + \{r\}_j^T [K] [R] \{y\} = \{r\}_j^T \{P(t)\}$$

Para desacoplar estas ecuaciones debemos tener

$$\left. \begin{aligned} \{r\}_j^T [M] \{r\}_i &= 0 & i \neq j \\ \{r\}_j^T [K] \{r\}_i &= 0 & i \neq j \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{cierto por} \\ \text{ortogonalidad} \end{array}$$

$$\{r\}_j^T [C] \{r\}_i = 0 \quad i \neq j \quad \text{¿pero ésta? (a)}$$

1º admitamos que se cumple:

Ya definimos

$$\begin{aligned} \{r\}_j^T [M] \{r\}_j &= M_j^* \\ \{r\}_j^T [K] \{r\}_j &= K_j^* \end{aligned} \quad \{r\}_j^T \{P(t)\} = P_j^*$$

y ahora

$$\{r\}_j^T [C] \{r\}_j = C_j^* = 2\beta_j \dot{P}_j M_j^*$$

y nuestra ecuación para el modo  $j$  queda:

$$M_j^* \ddot{y}_j + 2\beta_j \dot{P}_j M_j^* \dot{y}_j + P_j^2 M_j^* y_j = P_j^*$$

o bien:

$$\ddot{y}_j + 2\beta_j \dot{P}_j \dot{y}_j + P_j^2 y_j = \frac{P_j^*}{M_j^*}$$

Como las soluciones para un sistema de IGL (cuya ec. es  $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + p^2x = \frac{P(t)}{m}$ ) ya las conocemos, solo nos falta saber cómo debe ser  $[C]$  para que se cumpla

$$\{r\}'_i [C] \{r\}_j = 0 \quad i \neq j \quad (a)$$

además, claro, de

$$y \quad \left. \begin{aligned} \{r\}'_i [M] \{r\}_j &= 0 \\ \{r\}'_i [K] \{r\}_j &= 0 \end{aligned} \right\} i \neq j$$

La ec. (a) se satisface si

- i)  $[C]$  es proporcional a  $[M]$  o a  $[K]$
- ii)  $[C]$  es una combinación lineal de  $[M]$  y  $[K]$ , o sea:

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K]$$

esto es muy restringido.

- iii) En forma más general:

$$[C] = [M] \sum_1 a_1 [M^{-1}K]^{-1} = \sum_1 [C_1] \quad (38.1)$$

pues ya sabemos que todas las posibles formas

$$[M] [M^{-1}K]^{-1} \text{ son satisfactorias y (38.1) es}$$

una C. L. de matrices de este tipo.

Si la estructura tiene variaciones importantes con la altura, convendrá valuar  $p$  en distintos niveles.

#### Efectos de deformación axial de las columnas.

Hasta aquí se ha considerado que las deformaciones axiales de las columnas, en el caso de marcos rígidos, son despreciables y no contribuyen a la deformación horizontal. Esto es válido sólo si la relación entre altura y ancho de la estructura es pequeña, tal vez menor que 3. Al aumentar el valor de esa relación, el efecto de momento de volteo en el edificio adquiere mayor importancia y se pueden cometer errores importantes al despreciar los acortamientos y alargamientos de las columnas debido a fuerza axial.

Quando las trabes se vuelven muy flexibles en comparación con las columnas, cada una de las columnas trabajará como voladizo y la fuerza axial en ellas será pequeña.

En el caso de marcos contraventeados, la cruzía o cruzías contraventeadas tendrán comportamiento similar al de un muro y deberán por tanto considerarse como estructuras de flexión, calculando sus periodos como se indicó en el método de Stodola-Vianello-Newmark.

Quando se tienen marcos y muros trabajando simultáneamente la situación se complica pues la interacción entre ambos sistemas estructurales hace que varíe la fuerza que toman uno y otro en cada entrepiso; los muros suelen tomar la mayor proporción de la cortante total en los entrepisos inferiores mientras que la situación se invierte en los niveles superiores. Ver referencia 1. Esto hace difícil la aplicación de métodos numéricos para calcular los modos de vibración de este tipo de estructuras, siendo más

conveniente el empleo de métodos matriciales para este fin.

#### REFERENCIA 1

Blume, John A., "Dynamic Characteristics of Multistory Buildings", Proceedings ASCE, Structural Division, February 1968.

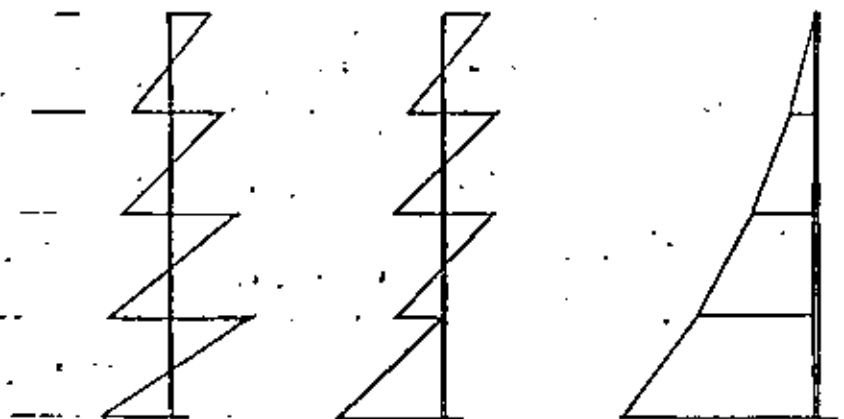
(Se entregará copia de ella como parte del material del curso)

#### REFERENCIA 2

Godden, William G., "Numerical Analysis of Beam and Column Structures", Prentice Hall.

Nótese que en ambos casos se trata de estructuras aparentemente iguales, constituidas por marcos rígidos formados por traveses y columnas unidos en los nudos, sin embargo, como puede apreciarse en las figuras 1 y 3, las deformaciones de la estructura cuando todas las fuerzas se aplican en el mismo sentido son muy diferentes en uno y otro caso. En la figura 2, la tangente en el extremo superior es vertical, mientras que en la figura 4, la tangente en el extremo superior tiene la inclinación máxima.

La figura 5 ilustra la forma en que variarían los momentos flexionantes en las columnas del marco en los casos extremos y en uno intermedio. Nótese que la aplicación de métodos aproximados para la obtención de momentos en traveses y columnas sin verificar cual es la situación del marco, puede conducir a errores muy importantes de subestimación de momentos en las columnas y de desplazamientos horizontales de la estructura,



marco con traveses rígidos en comparación con las columnas.

marco en situación intermedia

voladizo (traveses muy flexibles comparados con las columnas).

Momentos flexionantes en columnas.

Fig. 5

ya que los métodos aproximados en general suponen la formación de articulaciones (puntos de momento nulo) en cada entrepiso, y la situación pueda ser tal que los puntos de inflexión del diagrama de momentos desaparezcan en uno, varios o todos los niveles.

Cualquier edificio de la práctica estará en una posición intermedia con respecto a los casos descritos.

Para conocer cual es la situación en cada caso particular, John A. Blume (referencia 1) sugiere el empleo de un índice de rotación modal, que defino como

$$p = \frac{\sum (I/I)_{\text{traveses}}}{\sum (I/I)_{\text{cols}}}$$

y se puede valorar en cualquier entrepiso. (Blume lo hace para el entrepiso medio). Aquí  $\sum (I/I)_{\text{traveses}}$  es la suma de rigideces relativas de las traveses de un cierto nivel y  $\sum (I/I)_{\text{cols}}$  es la suma de rigideces relativas de las columnas en que se apoyan las traveses antes mencionadas.

Blume encontró que si  $p > 0.10$  hay puntos de momento nulo en las columnas de todos los entrepisos mientras que, para valores de  $p$  menores de 0.01 la estructura se asemeja más a un voladizo. Para valores de  $p$  entre 0.01 y 0.10 la situación es intermedia y habrá entrepisos en que no haya puntos de momento nulo, por lo que los métodos aproximados de análisis pueden conducir a fuertes errores del lado de la inseguridad por lo que respecta a los valores de los momentos flexionantes para los que debe diseñarse así como respecto a los desplazamientos laterales de la estructura; la rigidez de entrepiso pierde significado y conviene emplear métodos matriciales para analizarla.

para fines de análisis sísmico. Las rigideces serán función de las propiedades elástico-geométricas de los materiales empleados, que no es sencillo definir y de la estructuración, sobre todo de la relación que guardan las rigideces relativas de las barras que forman la estructura, traveses y columnas.

Dado el modelo matemático de un edificio como una serie de masas unidas por resortes, definimos como sistema estrechamente acoplado a aquel en que la rigidez de entrepiso es independiente de la distribución de cargas laterales a que se ve sometido el modelo, esto es, la rigidez de entrepiso es invariable independientemente de la elástica que adquiere la estructura al ser sometida a cargas laterales. Aquí se entiende por rigidez de entrepiso, como se indicó anteriormente, la fuerza necesaria para producir el desplazamiento unitario de un nivel con respecto al otro, esto es

$$R = \frac{V}{\Delta X} \quad ; \quad \text{para } \Delta X=1, \quad R=V$$

En la figura 2 se muestra el modelo matemático de un edificio de 4 niveles sometido a distintos sistemas de fuerzas. De acuerdo con lo antes dicho, la rigidez debe ser independiente de las fuerzas aplicadas (este tipo de estructuras se conoce también como estructura "de cortante").

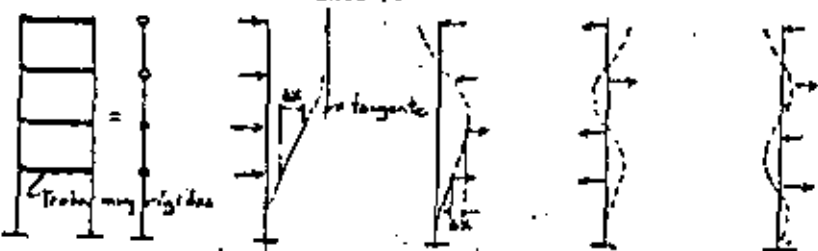


Fig 2

Para que esto se cumpla, la rigidez de entrepiso debe ser función única y exclusivamente de las columnas de cada entrepiso, para lo cual, los giros de los nudos deben ser nulos, lo que se logra si las traveses son infinitamente rígidas en comparación con las columnas, en cuyo caso la elástica de cada una de las columnas es la mostrada en la figura 3, y los elementos mecánicos que aparecen son los que ahí se muestran, para barras de sección constante.

$$F = \frac{12EI\Delta X}{h^3} \quad M = \frac{6EI\Delta X}{h^2} \quad \text{Fig 3}$$

En la práctica, es difícil que la rigidez relativa de las traveses ( $k=I/I_c$ ) sea muy grande en comparación con la de las columnas, lo que hará que los giros de los nudos no sean cero, relajándose el sistema y reduciéndose la rigidez del marco para un mismo tamaño de columnas. Debido a esto, el caso de traveses infinitamente rígidas en comparación con las columnas recibe a veces el nombre de cota superior de rigidez.

Al ser significativos los giros de los nudos, la rigidez de entrepiso ya no será independiente del sistema de fuerzas horizontales aplicadas. En el límite inferior, llegaremos al caso del voladizo mostrado en la figura 4, para el cual no tiene sentido hablar de rigidez de entrepiso, pues será diferente para cada una de las posibles configuraciones de fuerzas aplicadas. A este caso lo definiremos como sistema remotamente acoplado.

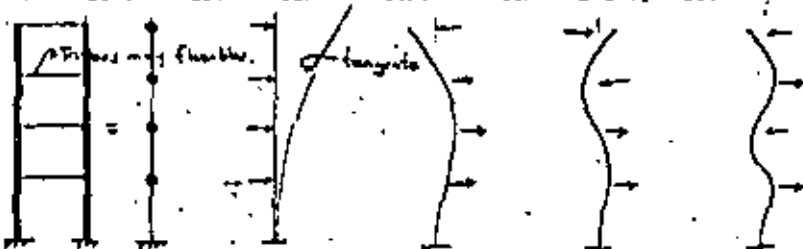
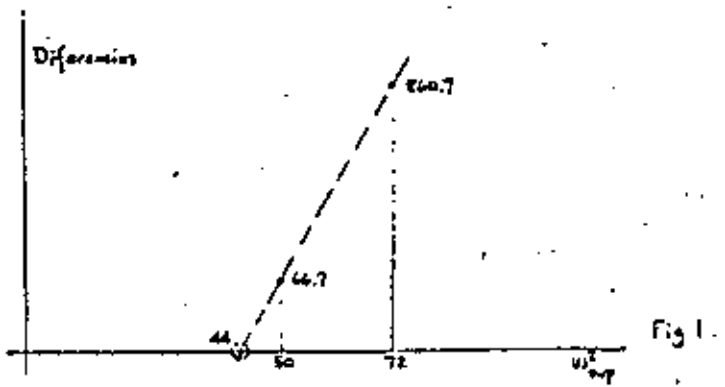


Fig 4

Trazando la gráfica  $w_{sup}^2$  - diferencias encontramos



que el valor de  $w^2$  que hace cero las diferencias es aproximadamente 44 (podría obtenerse por triángulos semejantes, pero sabemos que aún cuando se hiciera así el valor no nos llevará exactamente a cero diferencia pues la variación no es lineal como estamos suponiendo, excepto en intervalos muy cerrados).

Suponiendo entonces  $w^2 = 44$

Ni-vel	n	R	$m\omega^2$	$\Delta K$	X	F	V	FX	VFX
4	2	50	88	-3.174	-1.944	-102.27	Dif. = 1.57	299.23	503.71
3	2	100	88	-0.417	1.33	117	-41.7	155.61	17.39
2	2	150	88	0.747	1.747	153.7	117	259.51	83.66
1	2	200	88	1.0	1.0	88	200	88	200
0								2811.35	804.76

$$w^2 = 44 \frac{804.76}{811.35} = 43.64 \text{ 1/seg}^2$$

Usando  $w_{sup}^2 = 43.64 \text{ 1/seg}^2$

Ni-vel	n	R	$m\omega^2$	$\Delta K$	X	F	V
4	2	50	87.28	-3.158	-1.809	-157.89	Dif. = 0.05 -157.94
3	2	100	87.28	-0.401	1.350	117.83	-40.11
2	2	150	87.28	0.751	1.751	157.83	117.72
1	2	200	87.28	1.0	1.0	87.28	200
0							

Como puede verse, la diferencia al final de este último ciclo es despreciable, por lo que

$$w_2^2 = 43.64 \text{ 1/seg}^2, w_2 = 6.606 \text{ 1/seg}, T_2 = 0.951 \text{ seg}$$

y la configuración modal es la indicada.

Suponiendo otro valor mayor de  $w^2$  podría calcularse el tercero y cuarto modos. Puede también verificarse que la frecuencia del primer modo obtenido con el método de Stodola-Vianello-Newmark es correcta.

Comentarios adicionales

para las estructuras a base de marcos rígidas. En los métodos presentados se tiene como datos las masas y las rigideces de entrepiso. Las masas son relativamente fáciles de calcular y dependen exclusivamente del peso de los materiales con que está hecha la estructura y de la carga viva que se considere

con el eje de las abscisas de la línea que une los puntos antes obtenidos, o su prolongación si ambas diferencias tienen el mismo signo. Con este tercer valor supuesto para  $w^2$  seguramente obtendremos otra diferencia, menor que las anteriores, que nos definirá un tercer punto en la gráfica. Podremos entonces trazar una curva entre los tres puntos y definir así un nuevo valor de  $w^2$  que seguramente estará muy próximo a la frecuencia correcta de uno de los modos de vibrar de la estructura.

Cuando ya se está cerca del valor correcto, se puede mejorar el valor supuesto de  $w^2$  empleando el cociente de Crandall siguiente:

$$\bar{w}^2 = w^2 \frac{IV \cdot \delta X}{I \cdot F X}$$

donde  $\bar{w}^2$  es el valor que debemos suponer en el ciclo siguiente.

El método presentado sirve para calcular cualquier modo natural de vibración teniendo como datos las masas y las rigideces de entrepiso de la estructura. El modo de que se trate se obtendrá de la inspección de la configuración modal, tomando en cuenta que en el primero todas las deformaciones tienen el mismo signo, en el segundo hay un cambio de signo, en el tercero dos cambios de signo y así sucesivamente.

Si se conoce la frecuencia del primer modo de vibrar (por haberlo calculado empleando el método Stodola-Vianello-Nowmark, por ejemplo), se puede estimar gruesamente el valor de las frecuencias de los modos superiores empleando la relación  $w_2^2 \approx 9w_1^2$ ;  $w_3^2 \approx 25w_1^2$ , etc. (Esta aproximación puede ser demasiado burda dependiendo de los valores relativos de las masas y rigideces en cada caso particular, pero sirve como orientación).

Ejemplo:

Calculemos el segundo modo de vibrar de la estructura que se usó en el método de Stodola-Vianello-Nowmark, suponiendo

$$w_2^2 = 9w_1^2 = 9 \times 8 = 72 \frac{1}{\text{seg}^2}$$

Usaremos la tabulación siguiente:

Ni- vel	m	R	$mw^2_{sup}$	$\Delta X$	X	F	V	
4	2	50	144	-2.707	-2.751	-396.1	-135.4	Dir. = 260.7
3	2	100	144	-1.417	-0.044	-5.3	-141.7	
2	2	150	144	0.373	1.373	-187.7	55	
1	2	200	144	1.0	1.0	144	200	

$w^2_{sup} = 72$

\* Obsérvese que aunque la diferencia encontrada es fuerte, la configuración se parece a un segundo modo, pues tiene un cambio de signo.

Usando un nuevo valor de  $w^2_{sup}$  de  $50 \frac{1}{\text{seg}^2}$ , tendremos

Ni- vel	m	R	$mw^2$	$\Delta X$	X	F	V	
4	2	50	100	-3.334	-2.334	-233.4	-166.7	Dir. = 60.7
3	2	100	100	-0.847	1.03	100	-64.7	
2	2	150	100	0.867	1.667	166.7	100	
1	2	200	100	1.0	1.0	100	200	

Método de Holzer

Como se indicó anteriormente, para conocer completamente un modo de vibrar necesitamos conocer tanto la configuración modal como la frecuencia del modo. Hemos visto que en el método de Stodola-Vianello-Newmark se supone una configuración relativa y a partir de ella se calcula el valor de  $w^2$ . Holzer procede exactamente al revés, esto es, supone la frecuencia y a partir de ella se calcula la configuración relativa de abajo hacia arriba de la estructura. Dado que la configuración es relativa se puede suponer también la deformación de la primera masa (por consiguiente el incremento de deformación entre la base y la primera masa.) El método tiene las siguientes etapas:

Los datos son las masas y las rigideces de entrepiso, igual que antes.

1. Suponer un valor de  $w^2$
2. Obtener los valores de  $m w^2_{sup}$  para cada masa
3. Suponer la deformación del primer nivel:  $X_1$ ; conviene suponer un valor unitario. Esto equivale también, como ya se dijo a suponer  $\Delta X_1$ .
4. Calcular la fuerza cortante en la base de la estructura, (primer entrepiso) que será por definición de rigidez de entrepiso

$$V_1 = R_1 \Delta X_1 \quad \text{si } \Delta X_1 = 1, \quad V_1 = R_1$$

5. Calcular la fuerza de inercia asociada a la masa del primer nivel:

$$F_1 = m_1 w^2_{sup} X_1$$

6. Por definición de fuerza cortante, como la suma acumulativa de las fuerzas arriba de un cierto nivel, podremos calcular la cortante del segundo entrepiso restando a la cortante en la base la fuerza de inercia del primer nivel, esto es

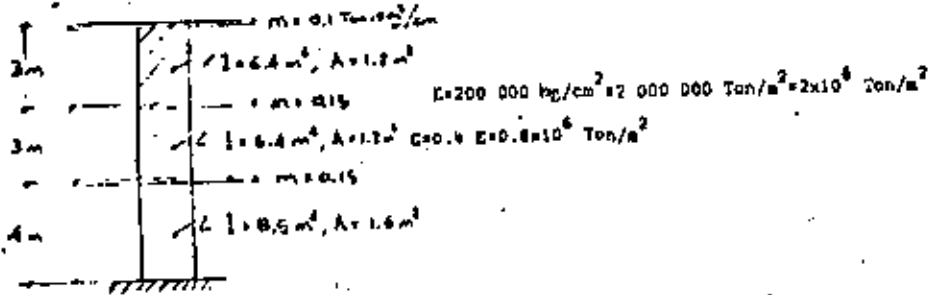
$$V_2 = V_1 - F_1$$

7. Conocida la fuerza cortante en el entrepiso 2 podemos calcular el incremento de deformación en ese entrepiso dividiendo la cortante entre la rigidez de entrepiso  $\Delta X_2 = \frac{V_2}{R_2}$
8. Sumando  $\Delta X_2$  a la deformación del primer nivel obtendremos la deformación del segundo nivel  $X_2 = X_1 + \Delta X_2$  y podemos repetir los pasos 4 a 8 para todas las masas hasta llegar al extremo superior de la estructura.

Si la frecuencia supuesta corresponde a un modo de vibrar, obtendremos que la fuerza de inercia del último nivel es igual a la fuerza cortante del entrepiso correspondiente (por equilibrio dinámico). Si la frecuencia supuesta no es la correspondiente a un modo de vibrar, se obtendrá una diferencia entre el valor de la fuerza de inercia y el de la fuerza cortante en el extremo de la estructura. En este caso el método no es convergente, pero si hacemos otro ciclo con otro valor de  $w^2$  relativamente cercano al anterior, encontraremos otra diferencia y podremos trazar una gráfica que nos relacione las frecuencias supuestas (abscisas) con las diferencias entre fuerza de inercia y fuerza cortante en el extremo superior de la estructura (ordenadas). Una vez que tenemos dos puntos de esa gráfica podremos buscar un valor de  $w^2$  supuesto en la intersección



Para fijar ideas, a continuación se presenta un ejemplo de análisis de una estructura en que las fuerzas laterales son resistidas por muros, cuyos valores de I y A son los indicados en la figura siguiente:



$\frac{h}{m}$	$\frac{m^4}{I}$	$\frac{Ton \cdot m^2}{EI}$	$\frac{m^2}{A}$	$\frac{Ton}{GA}$	$\frac{cm}{K_{sup}}$	$\frac{m^2}{K_{sup}}$	$\frac{Ton}{V}$	$\Delta M = Vh$	$\frac{Ton \cdot m}{M}$	$\frac{1/m}{\frac{M}{EI}}$
0.10	6.4	$12.8 \times 10^8$	1.2	$0.96 \times 10^6$	3	$0.50w^2$	$0.5w^2$	$1.5w^2$	0	0
0.15	6.4	$12.8 \times 10^8$	1.2	$0.96 \times 10^6$	3	$0.30w^2$	$0.86w^2$	$2.54w^2$	$1.5w^2$	$0.1172 \times 10^{-6} w^2$
0.15	8.5	$17.0 \times 10^8$	1.6	$1.28 \times 10^6$	4	$0.15w^2$	$1.03w^2$	$4.12w^2$	$4.14w^2$	$0.3734 \times 10^{-6} w^2$ $0.2433 \times 10^{-6} w^2$
									$8.76w^2$	$0.4459 \times 10^{-6} w^2$

Ejemplo de cálculo de las concentraciones equivalentes al diagrama de M/EI

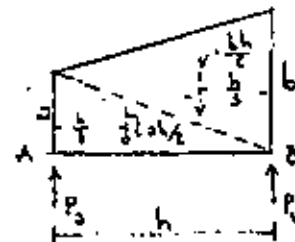
Para el nivel 3

$$P_{eq} = \frac{2}{6} (2 \times 0 + 0.1172 \times 10^{-6} w^2) = 0.0586 \times 10^{-6} w^2$$

(Ver aclaración al pie de la tabla de la página siguiente)

Nivel	Poq <sup>a</sup>	Voq <sup>a</sup>	$\Delta M = Voq \cdot h = \Delta X_p$	$\Delta X_v$	$\Delta X_{tot}$	$X_{cal}$
3	$0.0586 \times 10^{-6} w^2$					$23.0632 \times 10^{-6} w^2$
2	$0.1172 \times 10^{-6} w^2$	$2.2069 \times 10^{-6} w^2$	$6.7107 \times 10^{-6} w^2$	$3.9525 \times 10^{-6} w^2$	$8.2732 \times 10^{-6} w^2$	$14.732 \times 10^{-6} w^2$
	$0.2789 \times 10^{-6} w^2$					
1	$0.3820 \times 10^{-6} w^2$	$1.8406 \times 10^{-6} w^2$	$5.5224 \times 10^{-6} w^2$	$2.75 \times 10^{-6} w^2$	$8.2724 \times 10^{-6} w^2$	$6.4596 \times 10^{-6} w^2$
	$0.6486 \times 10^{-6} w^2$					
0	$0.8102 \times 10^{-6} w^2$	$0.8102 \times 10^{-6} w^2$	$3.2406 \times 10^{-6} w^2$	$3.2188 \times 10^{-6} w^2$	$6.4596 \times 10^{-6} w^2$	0

$V_{oq}^2$	$X_{sup}$
2173.42	3.56
1896.99	2.28
1548.08	1.0



Para obtener cargas concentradas equivalentes al diagrama de M/EI se puede usar la fórmula siguiente:

$$P_a = \frac{b}{6} (2a+b); \quad P_b = \frac{b}{6} (2b+a)$$

donde h es la distancia entre dos puntos A y B con ordenadas de M/EI iguales a a y b respectivamente. La variación de M/EI entre A y B es lineal, por lo que esta expresión se obtiene considerando dos triángulos con alturas a y b respectivamente y base h. P<sub>a</sub> y P<sub>b</sub> son las concentraciones correspondientes en los puntos A y B. (Ref. 2)

Recuérdese que el empotramiento de la viga conjugada en el extremo superior, por lo que se empieza de abajo hacia arriba el cálculo

Quisiera que en el primer entrepiso la deformación por cortante sea prácticamente igual a la de flexión por lo que despreciarla conduciría a errores muy grandes. Al ir aumentando la altura de la estructura la deformación por cortante va reduciendo su importancia en comparación con la de flexión y puede llegar a ser despreciable. En este caso la deformación por cortante en el tercer entrepiso es 23% de la debida a flexión.

Dobe tenerse cuidado con las unidades al evaluar  $w^2$  pues es fácil equivocarse. Obsérvese que  $X_{sup}$  está en cm y X<sub>calc</sub> resulta en metros

Aplicación del Método de Stodola-Vianello-Henmark Para Estructuras de Flexión

Como se verá más adelante, cuando las trabes de los marcos son muy flexibles en comparación con las columnas, o cuando las fuerzas laterales son resistidas por muros que trabajan esencialmente a flexión, la rigidez de entrepiso no es independiente de la distribución de fuerzas a que está sometida la estructura y por tanto no puede suponerse constante para el cálculo de los distintos modos de vibrar. En general, la pseudorigidez equivalente que se obtendría para un segundo modo será mayor que la correspondiente al primer modo, pues los efectos de flexión de conjunto se reducen considerablemente al no tener todas las fuerzas actuando en el mismo sentido. Lo mismo podría decirse para modos superiores (ref. 1).

En esos casos, las propiedades elástico geométricas de la estructura no quedarán definidas por rigideces de entrepiso sino por la variación de los productos EI y GA con los cuales se podrán calcular las deformaciones debidas a flexión y a fuerza cortante respectivamente.

Para calcular las deformaciones por flexión es conveniente el empleo de los teoremas de la viga conjugada, que es, para el caso de un voladizo, otro voladizo empotrado en el extremo opuesto cargado con el diagrama de momentos entre EI, y en el cual los momentos flexionantes corresponden a las deformaciones de la viga real.

Las deformaciones por cortante, que en el caso de estructuras a base de muros pueden ser importantes en comparación con las de flexión, sobre todo en los niveles inferiores, se calculan mediante la expresión  $\Delta X_{V_i} = \frac{V_i h_i}{A_i G}$ , donde  $\Delta X_{V_i}$  es el incremento de deformación por

cortante entre dos niveles consecutivos,  $V_i$ ,  $h_i$  y  $A_i$  son, respectivamente la fuerza cortante, la altura y el área efectiva de cortante entre esos mismos niveles y G es el módulo de elasticidad al corte del material de la estructura.

Para calcular los modos de vibración, se supone una configuración modal, se calculan las fuerzas de inercia  $F_i = m_i \ddot{w}_i$  asociadas a la configuración y las fuerzas cortantes correspondientes y a partir de ellas se valúan los incrementos de momento de cada entrepiso y los momentos de volteo acumulados de arriba hacia abajo, los cuales se dividen entre EI (habrá dos valores de M/EI en un mismo nivel en los casos en que haya cambio de sección de los muros). La integración numérica del diagrama de M/EI nos permitirá transformar ese diagrama en una serie de cargas concentradas equivalentes a él aplicadas en los distintos niveles con los cuales es muy fácil calcular los cortantes equivalentes correspondientes a cada entrepiso y los incrementos de momento flexionante en la viga conjugada que serán iguales a los incrementos de deformación por flexión entre dos niveles consecutivos (es el equivalente de  $\Delta X = V/A$  del caso visto anteriormente). A estos incrementos de deformación por flexión se sumarán los correspondientes a la deformación por cortante y con esa suma se podrá calcular la nueva configuración, que será como antes función de  $w^2$  y de donde podremos despejar este valor y un caso de que no sea igual para todas las masas volver a hacer otro ciclo tomando como configuración de partida la encontrada anteriormente normalizándola con respecto a una de las masas para poder comparar la evolución de las configuraciones de cada ciclo.

Ni- vel	$w_{i1}^2$ calc.	$-C_{11} K_{11}$	$\bar{x}_{2\text{calc}}$	$w^2$	$\bar{x}_{12\text{sup}}$	$m \bar{x}_{12\text{sup}}^2$	$v$	$\Delta X$	$x_{\text{col}}$
4	$-0.3653w^2$	$+0.00676w^2$	$-0.02144w$	39.86	-1.3047	$2.6088w^2$	$-2.6088w^2$	$-0.05717w^2$	$-0.051w^2$
3	$0.0057w^2$	$0.00072w^2$	$0.01352w^2$	-2.66	0.6669	$1.3330w^2$	$-1.2746w^2$	$-0.01275w^2$	$0.02677w^2$
2	$0.1362w^2$	$0.00284w^2$	$0.03344w^2$	59.15	1.6495	$3.2990w^2$	$2.0244w^2$	$0.01350w^2$	$0.03357w^2$
1	$.0376w^2$	$0.00127w^2$	$0.07007w^2$	49.33	0.990	$1.9800w^2$	$4.0044w^2$	$0.07002w^2$	$0.02002w^2$
I	$-0.1743w^2$								

$$C_1 = \frac{-0.1743w^2}{99.167} = -0.0012735w^2$$

\*\* Normalización con respecto a 0.99 en el primer nivel, para comparar la evolución de la configuración.

Ni- vel	$m \bar{x}_{11}^2$ calc.	$-C_{11} Y_{11}$	$\bar{x}_{2\text{calc}}$	$w^2$ sup	$\bar{x}_{12\text{sup}}$	$m \bar{x}_{12\text{sup}}^2$	$v$	$\Delta X$
4	$0.34339w^2$	$+0.000017w^2$	$-0.031388w^2$	41.55	-1.5570	$-3.104w^2$	$-3.104w^2$	$-0.06208w^2$
3	$0.15391w^2$	$+0.000009w^2$	$0.020778w^2$	32.10	1.0274	$2.0548w^2$	$-1.0402w^2$	$-0.01049w^2$
2	$0.14973w^2$	$+0.000005w^2$	$0.032525w^2$	49.20	1.8577	$3.3154w^2$	$2.2662w^2$	$0.01511w^2$
1	$0.04004w^2$	$+0.000002w^2$	$0.020022w^2$	49.45	0.99	$1.98w^2$	$4.2462w^2$	$0.02123w^2$

$$I = -0.00021w^2$$

$$I = 3.1731$$

$$|I| = 5.2271$$

$$C_1 = \frac{-0.00021w^2}{99.167} = -0.0000021177w^2$$

\*\* Nótese que el intervalo de  $w^2$  queda comprendido entre 32.1 y 49.49 y que el ajuste en la curva ocurre casi entre los dos últimos modos. Obsérvese que la corrección al limpiar es muy pequeña.

Ni- vel	$x_{\text{calc}}$	$m \bar{x}_{11}^2$ calc.	$-C_{11} Y_{11}$	$\bar{x}_{\text{calc}}$	$w^2$	$\bar{x}_{\text{sup}}$
4	$-0.03673w^2$	$-0.34621w^2$	$+0.000023$	$-0.036207w^2$	42.86	-1.705
3	$0.02585w^2$	$0.19155w^2$	$+0.000015$	$0.025065w^2$	39.72	1.706
2	$0.03634w^2$	$0.16175w^2$	$+0.000009$	$0.03634w^2$	43.61	1.645
1	$0.02123w^2$	$0.04246w^2$	$+0.000004$	$0.02123w^2$	46.62	0.99
0	0	$I = -0.00041w^2$		$I = 0.047241w^2$	prom. 43.70 46.94	

$$I = 0.11645w^2 \quad (val. abs.) \quad 43.68$$

$$C_1 = \frac{-0.00041w^2}{99.167} = -0.0000041w^2$$

\*\*\*\* El intervalo de variación de  $w^2$  se ha reducido a 39.72 - 46.62 (dif = 6.9) y los ajustes en la curva son mejores. En uno o dos ciclos más se llegaría al valor correcto de  $w^2$  y  $x_1$ . Nótese que para estimar un valor de  $w^2$  procediendo como se indicó anteriormente podemos hacer las sumas de  $\bar{x}_{\text{sup}}$  y de los coeficientes de  $\bar{x}_{\text{calc}}$  tomando valores absolutos o tomando en cuenta el signo correspondiente. La variación que se obtiene en este caso es de 3% aprox. Si sacamos el promedio de  $w^2$  se obtiene un valor casi igual al obtenido con las sumas de valores absolutos, que es más correcto.

Si no hubiéramos hecho la limpia en ninguno de los ciclos, al cabo de 8 habríamos llegado a la configuración del primer modo (en vez de 4 ciclos que se necesitaron cuando la configuración supuesta se parecía a la del primer modo).

$X_{im}$  son configuraciones modales.

Si multiplicamos la expresión anterior de  $X_{sup}$  por  $X_{i1}$  y sumamos para todas las masas, considerando que los coeficientes de participación son constantes y pueden salir de la sumatoria, tendremos:

$$I_{m1} X_{i1} X_{sup} = C_1 I_{m1} X_{i1}^2 + C_2 I_{m1} X_{i1} X_{i2} + C_3 I_{m1} X_{i1} X_{i3} + \dots$$

donde los términos que multiplican a  $C_2$ ,  $C_3$ , etc. son nulos por la propiedad de ortogonalidad de los modos, quedando entonces

$$C_1 = \frac{I_{m1} X_{i1} X_{sup}}{I_{m1} X_{i1}^2}$$

Esta expresión es válida para cualquier modo n.

Por tanto, si queremos calcular el segundo modo de vibrar, supondremos una configuración que se parezca a este modo, es decir, que tenga un punto de deflexión nula, calcularemos el valor de  $C_1$  con la expresión anterior y restaremos a la configuración supuesta para el segundo modo la participación del primer modo  $-C_1 X_{i1}$ , lo que da por resultado una nueva configuración supuesta para el segundo modo en la que el modo más bajo presente es el segundo y por lo tanto, al aplicar el método habrá convergencia hacia este modo. A la operación antes descrita se le llama "limpia" de modos.

Si quisiéramos calcular el tercer modo de vibrar, tendríamos que conocer de antemano las configuraciones correctas de primero y segundo modo, y suponer una configuración que se parezca al tercer modo, (que tenga dos puntos de deflexión nula); calcularíamos dos coeficientes de participación  $C_1$  y  $C_2$ , correspondientes a los modos primero y segundo, en la configuración supuesta y la limpiaríamos para que el modo más bajo presente en ella sea el tercero y el método converja a este modo.

Esto es:

$$X_{i3sup} = C_1 X_{i1} + C_2 X_{i2} + C_3 X_{i3} + C_4 X_{i4} + \dots$$

$$C_1 = \frac{I_{m1} X_{i1} X_{i3sup}}{I_{m1} X_{i1}^2} \quad ; \quad C_2 = \frac{I_{m1} X_{i2} X_{i3sup}}{I_{m1} X_{i2}^2}$$

$$\bar{X}_{i3sup} = X_{i3sup} - C_1 X_{i1} - C_2 X_{i2} = C_3 X_{i3} + C_4 X_{i4} + \dots$$

De manera semejante se procede para calcular otros modos superiores.

En la práctica, y debido a errores numéricos o de aproximación que van acarreándose no basta con una sola limpieza. Para lograr convergencia adecuada da buen resultado limpiar la configuración calculada al cabo de cada ciclo, antes de calcular los valores de  $w^2$ . Esa misma configuración limpiada, normalizada, nos sirva como nueva configuración para un nuevo ciclo. Es conveniente llevar cuando menos tres cifras significativas en los cálculos.

Para fijar ideas, calculemos tres ciclos del segundo modo de vibrar de la estructura para la cual calculamos anteriormente el primer modo.

Nivel	m	R	$X_{i1}$	$mX_{i1}$	$mX_{i1}^2$	$X_{i2sup}$	$mX_{i2} X_{i2sup}$	$-C_1 X_{i1}$	$\bar{X}_{i2}$	$\frac{I_{i2}^2}{mX_{i2}^2} w^2$	V	$\Delta X$	X Calc.
4	2	50	6.458	10.936	59.796	-1.0	-10.936	-0.054	-1.054	-2.108w	-2.108w <sup>2</sup>	-0.0427w <sup>2</sup>	-0.031w <sup>2</sup>
3	2	100	0.705	7.41	27.454	0	0	-0.036	-0.036	-0.072w	-2.180w <sup>2</sup>	-0.0219w <sup>2</sup>	0.0095w <sup>2</sup>
2	2	150	2.277	4.852	9.918	2.0	4.910	-0.022	1.978	3.956w	1.776w <sup>2</sup>	0.0118w <sup>2</sup>	0.0206w <sup>2</sup>
1	2	200	1.00	2.0	2.0	1.0	2.0	-0.010	0.990	1.980w	2.756w <sup>2</sup>	0.0146w <sup>2</sup>	0.0166w <sup>2</sup>
0					[ = 99.163		[ = 0.974						

DATOS

$$C_1 = \frac{0.974}{99.163} = 0.00982$$

\* La configuración supuesta puede ser cualquiera, pero desde luego es conveniente que se parezca a un segundo modo, esto es, que tenga un cambio de signo en la configuración modal.

esto es, dividiendo la configuración calculada entre  $0.1w^2$  en cada nivel.

## 2o. Ciclo

Nivel	n	R	$X_{sup}$	$\Gamma$	$\gamma$	$\Delta X$	$X$	$w^2$	$X_1$
4	2	50	5.7	$10.4w^2$	$10.4w^2$	$0.208w^2$	$0.651w^2$	7.988	3.425
3	2	100	3.6	$7.2w^2$	$17.6w^2$	$0.176w^2$	$0.443w^2$	8.126	3.692
2	2	150	2.2	$4.4w^2$	$22w^2$	$0.147w^2$	$0.267w^2$	8.240	2.223
1	2	200	1.0	$2.0w^2$	$24w^2$	$0.120w^2$	$0.170w^2$	8.333	1.0
0							0		

Obsérvese que el intervalo de variación de  $w^2$  se redujo a 7.988 y 8.333 y que las variaciones en la configuración modal fueron mucho menores que las que tuvo el primer ciclo.

Tomando como base de partida nuevamente la configuración calculada, en un tercer ciclo se tiene:

Nivel	n	R	$X_{sup}$	$\Gamma$	$\gamma$	$\Delta X$	$X$	$w^2$	$X_1$
4	2	50	3.425	$10.85w^2$	$10.85w^2$	$0.2170w^2$	$0.6735w^2$	8.050	3.461
3	2	100	3.692	$7.364w^2$	$18.234w^2$	$0.1823w^2$	$0.4562w^2$	8.081	3.703
2	2	150	2.223	$4.45w^2$	$22.684w^2$	$0.1512w^2$	$0.2746w^2$	8.103	2.223
1	2	200	1.0	$2.0w^2$	$24.684w^2$	$0.1734w^2$	$0.1234w^2$	8.104	1.00
0							0		

y finalmente, en un cuarto ciclo, la aproximación se considera suficiente:

Nivel	n	R	$X_{sup}$	$\Gamma$	$\gamma$	$\Delta X$	$X$	$w^2$	$X_1$
4	2	50	5.461	$10.922w^2$	$10.922w^2$	$0.218w^2$	$0.6775w^2$	8.061	3.468
3	2	100	3.703	$7.406w^2$	$18.378w^2$	$0.1837w^2$	$0.4591w^2$	8.066	3.705
2	2	150	2.225	$4.45w^2$	$22.778w^2$	$0.1519w^2$	$0.2756w^2$	8.067	2.226
1	2	200	1.00	$2.00w^2$	$24.778w^2$	$0.1239w^2$	$0.1219w^2$	8.071	1.00
0			$\Gamma = 12.389$				$\Gamma = 1.5383w^2$	$8.064$	

\* El valor final de  $w^2$  lo obtenemos con más precisión dividiendo la suma de  $X_{sup}$  entre la suma de coeficientes de  $X_{calc}$ . Esto es más preciso que promediar los valores de  $w^2$  de cada nivel.

$$w = \sqrt{8.064} = 2.8397; \quad T = \frac{2\pi}{w} = \frac{6.2832}{2.8397} = 2.213 \text{ seg.}$$

## Cálculo de modos superiores empleando este método

Como se indicó antes, el método converge al modo más bajo presente en la configuración supuesta, y al suponer una combinación cualquiera ésta estará constituida por una combinación lineal de los distintos modos de vibrar:

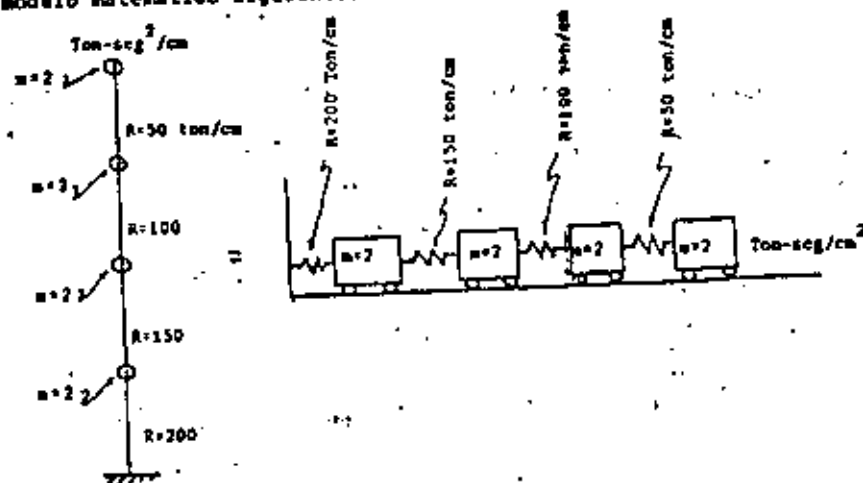
$X_{sup} = C_1 X_{11} + C_2 X_{12} + C_3 X_{13} + C_4 X_{14}$ , donde  $X_{11}$  a  $X_{14}$  son las configuraciones modales y  $C_1$  son coeficientes de participación.

Si queremos calcular el segundo modo de vibrar empleando este método, tendremos que quitar a la configuración supuesta la participación del primer modo:  $C_1 X_{11}$ , para lo cual necesitamos conocer  $X_{11}$  y  $C_1$ .  $X_{11}$  lo calculamos como se indicó antes y  $C_1$  lo podemos calcular recurriendo a la propiedad de ortogonalidad de los modos de vibración que indica que  $\int_0^L X_i X_j dx = 0$  si  $i \neq j$ , donde  $X_{12}$  y

no serán iguales en el primer ciclo, pero el método es de rápida convergencia si se usa como nueva configuración supuesta la obtenida al final de cada ciclo, de preferencia normalizándola, esto es, haciendo que la deformación de una de las masas, por ejemplo la primera, tenga siempre el mismo valor, con objeto de observar como se modifica la configuración relativa después de cada ciclo. Los valores de  $w^2$  obtenidos en cada ciclo nos dan también un intervalo de valores que se va cerrando hasta que se obtiene finalmente los mismos valores para todas las masas.

El método descrito anteriormente converge siempre hacia el modo más bajo que está presente en la configuración supuesta, y dado que al suponer una configuración cualquiera ésta estará formada por una combinación lineal de todos los modos posibles, el modo más bajo será el primero o fundamental. Más adelante se indica como hacer para calcular modos superiores.

Ejemplo. Calcular la frecuencia y configuración modal del primer modo de vibrar de la estructura representada por el modelo matemático siguiente.



Para realizar los pasos antes indicados conviene usar una tabulación como la siguiente:

1er. Ciclo

Nivel	$\frac{\text{ton seg}^2}{\text{cm}}$ m	$\frac{\text{ton}}{\text{cm}}$ R	$\frac{\text{cm}}{\text{cm}}$ $\frac{1}{\omega^2}$	$\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}$ $\frac{1}{\omega^2}$	$\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}$ v	$\frac{\text{cm}}{\text{cm}}$ $\frac{\Delta X}{X}$	$\frac{\text{cm}}{\text{cm}}$ $\frac{X}{X}$	$\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}$ $\frac{1}{\omega^2}$	$\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}$ $\frac{1}{\omega^2}$
4	2	50	4	$6w^2$	$8w^2$	$0.16w^2$	$0.17w^2$	$7.692 = \frac{1}{0.52}$	5.7
3	2	100	3	$6w^2$	$14w^2$	$0.14w^2$	$0.32w^2$	$8.333 = \frac{1}{3.36}$	3.6
2	2	150	2	$4w^2$	$18w^2$	$0.12w^2$	$0.22w^2$	$9.091 = \frac{2}{0.22}$	2.2
1	2	200	1	$2w^2$	$20w^2$	$0.1w^2$	$0.1w^2$	$10.0 = \frac{1}{0.1}$	1
0							0		

Nótese que los valores R, v y  $\Delta X$  están defasados, pues corresponden al entrepiso.

\* Para iniciar el cálculo puede usarse cualquier valor de X. En general, al método convergirá más rápido entre más acertada sea la configuración supuesta, pero si se supone por ejemplo una configuración que se parezca a un segundo, tercero o cuarto modo, de cualquier manera, al término de algunos ciclos más, llegaremos al primer modo.

\*\* Nótese que en este caso, el valor de  $w^2$  estará comprendido entre  $7.692 \frac{1}{\text{seg}^2}$  y  $10 \frac{1}{\text{seg}^2}$

\*\*\* En un segundo ciclo, usaremos como nueva configuración supuesta la obtenida al final del primer ciclo normalizada de tal modo que la deformación del primer nivel, sea unitaria.

MÉTODOS DE STODOLA-VIANELLO-NEWMARK Y DE HOLZER PARA EL CÁLCULO DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES

Enrique del Valle C. A.

Para calcular las frecuencias y configuraciones modales de estructuras idealizadas como una serie de masas unidas por resortes, sin amortiguamiento, en vibración libre, se puede suponer que cada masa se mueva en movimiento armónico simple definido por  $X=X_0 \cos \omega t$  o  $X=X_0 \sin \omega t$  donde  $X_0$  define la amplitud y  $\omega$  la frecuencia circular del movimiento.

La aceleración estará dada entonces por  $\ddot{X} = -\omega^2 X_0 \cos \omega t$  ó  $\ddot{X} = -\omega^2 X_0 \sin \omega t = -\omega^2 X$  y las fuerzas de inercia a que estará sometida cada masa, de acuerdo con la segunda ley de Newton, serán  $F_i = m\ddot{X} = -m\omega^2 X$ .

Por otro lado, la fuerza restitutiva que aparece en cada resorte estará dada por  $F_e = RX$ , donde  $R$  es la rigidez de entrepiso, que podemos definir como la fuerza cortante que es necesario aplicar para producir un desplazamiento unitario entre dos niveles consecutivos:  $R = V/\Delta X$ , para  $\Delta X = 1$ .

Vamos entonces, que las fuerzas a que se verá sujeta cada masa dependerán de  $X$  y de  $\omega^2$  únicamente.

Por otro lado, sabemos que para conocer un modo de vibrar necesitamos conocer tanto la frecuencia  $\omega$  (o período  $T$ ) como la configuración modal relativa, y que si la estructura está vibrando en un modo dado, la frecuencia del movimiento de cada masa será la misma.

Tomando en cuenta lo anterior, se pueden emplear dos métodos numéricos para el cálculo de las frecuencias y configuraciones modales.

\* Profesor Titular, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM

El método propuesto por Stodola-Vianello-Newmark, consiste en:

1. Suponer una configuración deformada de la estructura:  $X_{supuesta}$

2. Valorar las fuerzas de inercia asociadas a esa configuración  $F_i = -m\omega^2 X_i$ , dejando  $\omega^2$  como factor común cuyo valor no conocemos.

3. Valorar la fuerza cortante en la estructura, como la suma acumulativa de las fuerzas de inercia de arriba abajo del edificio.  $V_i = \sum_{j=1}^i F_j$  (función de  $\omega^2$ )

4. Calcular los incrementos de deformación correspondientes a las fuerzas cortantes.

$$\Delta X_i = \frac{V_i}{R_i} \quad (\text{función de } \omega^2).$$

5. Obtener la configuración calculada de la estructura como la suma acumulativa de los incrementos de deformación, de abajo hacia arriba.

$$X_{calc} = \sum_{i=1}^n \Delta X_i = \text{coef.} \cdot \omega^2$$

Esto nos dará un coeficiente multiplicado por  $\omega^2$  para cada masa.

6. Si la estructura está vibrando en un modo la configuración calculada será proporcional a la supuesta. Y el factor de proporcionalidad será  $\omega^2$ . Esto es, para cada masa podremos calcular

$$\omega^2 = \frac{X_{supuesta}}{\text{Coef. de } X_{calc}}$$

En general, los valores de  $\omega^2$  calculados para cada masa,



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

X CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

Métodos de Stodola-Vianello-Newmark y de  
Holzer para el cálculo de frecuencias y  
configuraciones modales.

M. en C. Enrique del Valle Calderón  
Julio, 1984



††  
∴

$$x_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} y_j = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j z_j(t)$$

De aquí (sin sumar para todos los modos)

$$\left. \begin{aligned} |X_{ij}|_{\max} &= r_{ij} C_j |z_j(t)|_{\max} = r_{ij} C_j S_d \\ &= r_{ij} C_j \frac{S_a}{p_j^2} \end{aligned} \right\} S_a = p S_v = p^2 S_d$$

De esta ec. pasamos a:

$$|X_i|_{\max}^{\text{ABS}} = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j S_d = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j \frac{S_a}{p_j^2}$$

$$|X_i|_{\max}^{\text{PROB}} = \sqrt{\sum (|X_{ij}|_{\max})^2}$$

$$C_j = \frac{m_j^2}{M_j^2} = \frac{\{r\}_j^T \{m\}}{\{r\}_j^T \{M\} \{r\}_j} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_{ij}}{\sum_{i=1}^n m_i r_{ij}^2}$$

y  $\therefore$  podemos poner:

$$y_j(t) = C_j z_j(t)$$

en la que  $C_j$  está definida arriba y

$$z_j(t) = -\frac{1}{p_j} \int_0^t \ddot{u}(\tau) \operatorname{sen} p_j(t-\tau) d\tau$$

(y semejante si  $\beta \neq 0$ )

$$y_j(t) = C_j z_j(t)$$

Además, tenemos

$$\{X\} = [R] \{Y\}$$

o sea

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2j} & \cdots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nj} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{Bmatrix}$$

$$[C] = [M] \sum_1 a_1 [M^{-1}K]^{-1}$$

Por ejemplo para nuestra estructura de 3GL asignemos:

$$\beta_1 = 0.10, \quad \beta_2 = 0.05, \quad \beta_3 = 0.02$$

$$\beta_1 = 0.10 = \frac{1}{2p_1^3} [a_{-1}(p_1^2)^{-1} + a_0(p_1^2)^0 + a_1(p_1^2)^1]$$

$$\beta_2 = 0.05 = \frac{1}{2p_2^3} [a_{-1}(p_2^2)^{-1} + a_0(p_2^2)^0 + a_1(p_2^2)^1]$$

$$\beta_3 = 0.02 = \frac{1}{2p_3^3} [a_{-1}(p_3^2)^{-1} + a_0(p_3^2)^0 + a_1(p_3^2)^1]$$

o, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} 0.10 \\ 0.05 \\ 0.02 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/p_1^3 & 1/p_1 & p_1 \\ 1/p_2^3 & 1/p_2 & p_2 \\ 1/p_3^3 & 1/p_3 & p_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$$

al resolver para  $a_1$  resulta

$$[C] = a_{-1} [MFM] + a_0 [M] + a_1 [K]$$

En p. tenemos que para  $CI = 0$  y  $\beta = 0$ , para excitación sísmica

$$y_j(t) = - \frac{m_j \ddot{u}}{P_j M_j^2} \int_0^t u(\tau) \text{sen } P_j(t-\tau) d\tau$$

coeficiente de participación =  $\frac{m_j}{M_j}$

La selección adecuada de  $a_1$  dará a  $[C]$  las propiedades deseadas, o sea, podremos dar valores específicos a los elementos de  $[C]$ . ¿Cuáles le damos?

Asignamos un cierto valor de  $\beta$  a cada modo.

$$C_{j1}^* = \{r\}_j^T [C] \{r\}_j = 2\beta_j \{r\}_j^T M_{jj}^* = \sum_1 \{r\}_j^T [C_{11}] \{r\}_j = \sum_1 C_{j1}^* \quad (38.2)$$

De 38.1 y A

$$C_{j1}^* = \{r\}_j^T [M]^{-1} [M^{-1}K] \{r\}_j a_1 \quad (38.3)$$

Por otra parte, para vibración libre:

$$(K - \dot{\beta}_j^2 M) r_j = 0$$

$$K r_j = \dot{\beta}_j^2 M r_j \Leftrightarrow \frac{1}{\dot{\beta}_j^2} K r_j = M r_j$$

premultiplicando por  $r_j^T M$ :

$$\frac{1}{\dot{\beta}_j^2} r_j^T M r_j = r_j^T M M r_j$$

es decir

$$(\dot{\beta}_j^2)^{-1} M_{jj}^* = r_j^T M (M^{-1} K)^{-1} r_j$$

y así podríamos llegar a que, para cualquier  $l$ :

$$(\dot{p}_j^c)^1 M_j^* = r_j^1 M (M^{-1} K)^1 r_j = \frac{C_{j1}^*}{a_1} \quad 39.1$$

por 38.3

De 39.1:

$$C_{j1}^* = (\dot{p}_j^c)^1 M_j^* a_1$$

$$C_{j1}^* = (\dot{p}_j^2)^1 M_j^* a_1$$

y sumando sobre  $j$ :

$$\sum_1 C_{j1}^* = \sum_1 (\dot{p}_j^2)^1 M_j^* a_1$$

pero ya teníamos que

$$\sum_1 C_{j1}^* = 2B_j \dot{p}_j M_j^*$$

$$\therefore 2B_j \dot{p}_j M_j^* = \sum_1 (\dot{p}_j^2)^1 M_j^* a_1$$

de donde:

$$B_j = \frac{1}{2\dot{p}_j} \sum_1 (\dot{p}_j^2)^1 a_1$$

Con los  $n$  valores de  $B_j$  para los  $n$  modos podemos resolver para los  $n$  valores de  $a_1$  y formar nuestra  $[C]$  con la ecuación

DIRECTORIO DE ALUMNOS DEL CURSO "DINAMICA ESTRUCTURAL" IMPARTIDO EN ESTA  
DIVISION DEL 30 DE JULIO AL 10 DE AGOSTO DE 1984

- 1.- ACAD MARTINEZ CARLOS  
COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD  
SUPERVISOR DE ESTRUCTURAS  
MISSISSIPPI No. 71-11o. PISO  
COL. CUAUHEMOC  
DELEGACION CUAUHEMOC  
553-71-33 ext. 2003  
CALLE 7 No. 22  
COL. VALENTIN GOMEZ FARIAS  
DELEGACION YENUSTIANO CARRANZA  
15010 MEXICO, D. F.  
784-28-16
- 2.- ALVARADO BALLEZA JAIME  
QUERETARO
- 3.- ANDRADE LAZARO SANTIAGO  
S. A. R. H.  
ANALISTA TITULAR  
AV. NUEVO LEON No. 210-10  
COL. CONDESA  
DELEGACION CUAUHEMOC  
AV. PERALVILLO No. 86-14  
COL. MORELOS  
DELEGACION CUAUHEMOC  
767-32-52
- 4.- ANDRADE HERNANDEZ ANTONIO  
COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD  
JEFE DE GRUPO  
RIO MISSISSIPPI No. 71  
COL. CUAUHEMOC  
553-71-33 ext. 2434  
PROL. TEPANECOS No. 124  
COL. ELECTRICISTAS  
DELEGACION AZCAPOTZALCO  
02060 MEXICO, D.F.  
352-30-57
- 5.- ANGEL GARIBAY SERGIO  
COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD
- 6.- ARCOS ISLAS RUBEN  
S. C. T.
- 7.- ARIAS MATTOS PEDRO  
UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER  
PROFESOR TIEMPO COMPLETO ESTRUCTURAS  
AVENIDA GRAN COLOMBIA No. 12E-96  
BARRIO COLSAG  
CUCUTA COLOMBIA  
44253  
CALLE 16 No. 2-16  
CUCUTA COLOMBIA  
29632
- 8.- ARTETA OCAÑA JESUS SALVADOR  
DIREC. DE OBRAS MARITIMAS, S.C.T.  
INGENIERO ANALISTA  
PROVIDENCIA No. 807-1er. PISO  
COL. DEL VALLE  
687-79-41  
ONIQUINA No. 6339-5  
COL. TRES ESTRELLAS  
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO  
78720 MEXICO, D.F.  
781-24-83



- 9.- BECERRIL MACALCO AGUSTIN  
S. C. T.
- 10.- BECERRIL QUIROZ LETICIA  
S. C. T.
- 11.- BRAVO GONZALEZ EDUARDO  
CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO  
ING. JEFE DE GRUPO  
TLALOC No. 90-4o. PISO  
COL. ANAHUAC  
DELEGACION MIGUEL HIDALGO  
546-46-12
- 12.- CALDERON GUZMAN JAVIER  
ESCUELA DE ING. CIVIL  
UNIVERSIDAD MICHOACANA  
JEFE DEL DEPARTAMENTO DE MATERIALES  
EDIFICIO A CIUDAD UNIVERSITARIA  
MORELIA, MICHOACAN  
2-74-06
- 13.- CERVANTES LOPEZ ROBERTO  
INSTITUTO MEXICANO DEL CEMENTO Y  
DEL CONCRETO  
REVISOR TECNICO DE PUBLICACIONES  
INSURGENTES SUR No. 1796  
COL. FLORIDA  
DELEGACION ALVARO OBREGON  
01030 MEXICO, D.F.
- 14.- CHAVEZ GALINDO VICTOR MANUEL  
S. C. T.  
PROYECTISTA  
XOLA Y LAZARO CARDENAS  
COL. ALAMOS  
590-89-76
- 15.- DE LA CRUZ REYES BARTOLOME  
DESPACHO PROPIO  
AV. CHIMALHUACAN 469  
COL. BENITO JUAREZ  
DELEGACION NETZAHUALCOYOTL  
57000
- 16.- REZA ARZATE GUILLERMO  
INSTITUTO DE INGENIERIA  
BECARIO DE TESIS  
CIUDAD UNIVERSITARIA
- SUR 69-A No. 3131  
COL. VIADUCTO  
DELEGACION IZTACALCO  
08200 MEXICO, D.F.  
519-46-52
- LUIS DE VELASCO No. 212  
MORELIA, MICH.
- INSURGENTES SUR 1824-602  
COL. FLORIDA  
DELEGACION ALVARO OBREGON  
01030 MEXICO, D.F.  
534-24-40
- CERRO ZAPOPAN No. 154  
COL. CAMPESTRE CHURUBUSCO  
04200 MEXICO, D.F.  
544-34-86
- MONEDITA DE ORO No. 154  
COL. BENITO JUAREZ  
NETZAHUALCOYOTL
- EMILIANO ZAPATA No. 140  
COL. PORTALES  
539-12-93



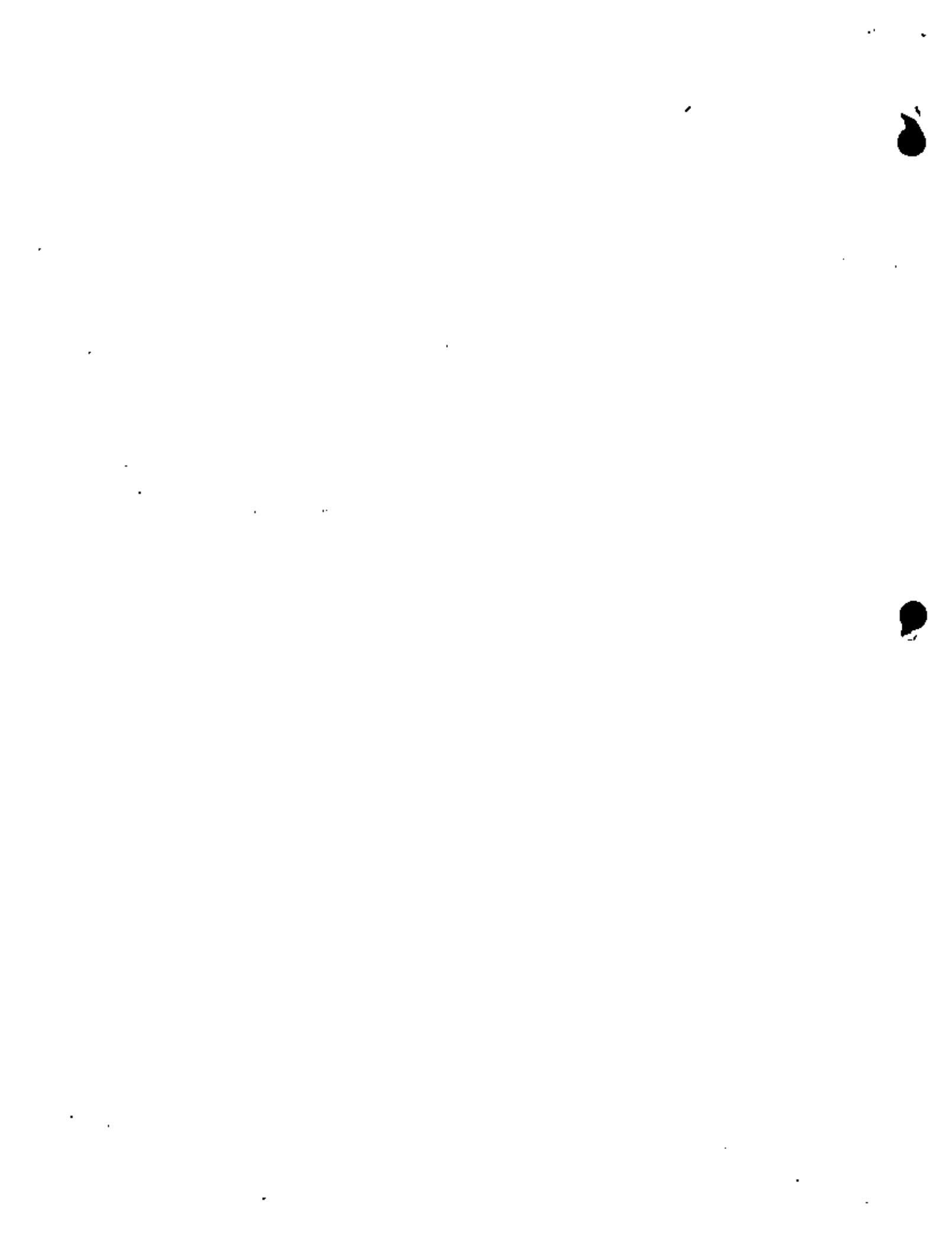
- 17.- PEREZ GONZALEZ SAUL ENRIQUE  
INSTITUTO DE INGENIERIA  
CIUDAD UNIVERSITARIA  
GALICIA No. 126 ALTOS  
COL. ALAMOS  
DELEGACION BENITO JUAREZ  
03400 MEXICO, D.F.  
538-77-93
- 18.- DE LA ROSA RENTERIA RAMON  
INSIITUTO DE INVESTIGACIONES ELEC.  
INVESTIGADOR  
DANTE No. 36-5o. PISO  
COL. ANZURES  
DELEGACION MIGUEL HIDALGO  
11590 MEXICO, D.F.  
525-67-39  
RIO CAZONES EDIFICIO 19 DEPTO. 403  
COL. PASEOS DE CHURBUSCO  
DELEGACION IZTAPALAPA
- 19.- ESPINOSA BLANCO PASCUAL  
S. C. T.
- 20.- GALINDO ELIZALDE LUIS  
JEFE OFIA. EDIF. ING. CIVIL  
EJE CENTRAL L. CARDENAS No. 152  
COL. IND. VALLEJO  
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO  
567-66-20 ext. 20287  
EDIF. 1 DEPTO. 13 U. PATERO VALLEJO  
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO  
567-47-88
- 21.- GALVAN AIZPURU JOAQUIN  
S. A. R. H.  
SUBJEFE DEPTO. RESISTENCIA MAT.  
SIERRA GORDA No. 23  
COL. LOMAS DE CHAPULTEPEC  
DELEGACION MIGUEL HIDALGO  
11000 MEXICO, D.F.  
540-60-83 al 88  
MIGUEL LAURENT No. 74 DEPTO. 1  
COL. DEL VALLE  
DELEGACION BENITO JUAREZ  
03100 MEXICO, D.F.
- 22.- GALLARDO DOMINGUEZ SALVADOR  
C. F. E.  
PROYECTISTA  
MISSISSIPPI No. 71-12  
COL. CUAUHTEMOC  
DELEGACION CUAUHTEMOC  
553-71-33  
DINAMARCA No. 73-4  
COL. JUAREZ  
DELEGACION CUAUHTEMOC
- 23.- GOMEZ MEJIA MARIO  
UNIVERSIDAD DE YUCATAN  
JEFE DIV. LABS. INVEST.  
CALLE 14x41  
MERIDA YUC.  
7-30-44  
CALLE 37 No. 461-B  
COL. JESUS CARRANZA  
MERIDA, (YUC.  
7-46-19
- 24.- HERNANDEZ JIMENEZ HUMBERTO



- 25.- HERNANDEZ SANCHEZ VICENTE  
S. C. T.
- 26.- HURTADO SOTO FRANCISCO  
ESCUELA ING. CIVIL  
PROFESOR DE CARRERA  
UNIDAD CIENCIAS ING.  
CIUDAD UNIVERSITARIA, MORELIA  
274-06  
SERAPIO RENDON No. 276  
COL. CENTRO  
2-21-36
- 27.- JORDA LOZANO RAUL GUILLERMO  
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA  
PROFESOR ESC. ING. CIVIL  
4 SUR No. 104  
PUEBLA, PUE.  
AV. SAN BALTAZAR No. 2464-A  
PUEBLA, PUE.  
72570
- 28.- LASTRA RUIZ VICTOR ALEJANDRO  
ISTME  
JEFE DE PROYECTO  
CALZADA LEGARIA No. 252  
COL. PENSIL
- 29.- LEON AGUILAR BERNARDO  
LA HABANA CUBA
- 30.- LEON LARA L. ABRAHAM  
FAC. DE ARQUITECTURA  
JEFE DEPTO. SEGUIMIENTO ACADEMICO  
CERRO DE COATEPEC  
CIUDAD UNIVERSITARIA, TOLUCA  
548-52  
CERRO DE COATEPEC
- 31.- LIANO QUEZADA FOSCOLO  
DIREC. GRAL. OBRAS PUBLICAS  
INGENIERO PROYECTISTA  
10a. CALLE 9-37 ZONA 1 GUATEMALA  
7a. AVENIDA 26-48 ZONA 8
- 32.- LOPEZ LOPEZ AMBROSIO  
ING.SISTEMAS TRANSP. METROPOLITANO  
JEFE DE GRUPO  
CALZADA LEGARIA No. 252  
COL. PENSIL  
DELEGACION MIGUEL HIDALGO  
399-69-22  
CALZ. SAN LORENZO No. 300 CASA 6  
COL. PARAJE SAN JUAN  
DELEGACION IZTAPALAPA  
09830 MEXICO, D.F.
- 33.- LOPEZ Y LOPEZ JOSE FIDEL  
CONSTRUCTORA MABEK  
7 OTE No. 406  
COL. CENTRO  
72000 MEXICO, D.F.  
42-98-53  
20 OTE No. 468  
COL. CENTRO  
92000 MEXICO, D.F.  
42-90-28



- 34.- MACIAS VAZQUEZ JORGE
- 35.- MADRID MONTES DE OCA ROLANDO  
S. C. T.
- 36.- MALANCO CASTANEDA MA. EUGENIA A.  
S. A. R. H.  
JEFE DE OFICINA  
SIERRA GORDA No. 23  
COL. LOMAS DE CHAPULTEPEC  
DELEGACION MIGUEL HIDALGO  
11000 MEXICO, D.F. AV. CONSTITUYENTES No. 820 PTE.  
TOLUCA, MEX.
- 37.- MATIAS ACEVEDO JUAN  
INSTITUTO MEXICANO DEL PETROLEO  
INGENIERO DE DISEÑO  
LJE CENTRAL LAZARO CARDENAS No. 152 EDIFICIO C No. 102  
U. CAMINO SAN JUAN DE ARAGON  
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO  
07980 MEXICO, D.F.
- 38.- MELLENDZ MANZANO FAUSTO  
UNIV. ESTATAL GUAYAQUIL  
PROFESOR GUAYAQUIL EDUADOR
- 39.- MORALES FLORES RODOLFO  
COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD  
ING. B. MININO  
RIO MISSISSIPPI No. 71  
DELEGACION MIGUEL HIDALGO  
553-03-39 OTE 245 A No. 135  
DELEGACION IXTAPALAPA
- 40.- NAVARRO SANCHEZ LUIS MANUEL  
UNIVERSIDAD MICHOACANA  
PROFESOR  
UNIDAD CIENCIAS ING. Y HUMANIDADES  
MORELIA, MICH. INFONAVIT PLAN DE AYALA  
EDIFICIO 21 DEPTO. 2  
MORELIA, MICH.  
3-10-44
- 41.- ORDONEZ RUIZ JORGE  
UNIVERSIDAD AUTONOMA CHIAPAS  
PROFESOR  
BOULEVARD BELIZARIO DOMINGUEZ  
CARRETERA PANAMERICANA KM. 154 CALLE OCASINGO No. 127  
COL. I.S.S.S.T.E.
- 42.- ORTEGA HERIDA PORFIRIO  
CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO  
ING. PROJ. ESTRUCT.  
TLALOC No. 90-2o. PISO  
COL. AVAHIAC  
DELEGACION MIGUEL HIDALGO  
592-35-63 SUPERMANZANA 3 HANZANA 37 LOTE 17  
COL. EJERCITO CONSTITUCIONALISTA  
SAN JUAN DE ARAGON



- 43.- ORTEGA SAAVEDRA RAFAEL
- 44.- PAEZ ROBLES ALFREDO A.  
T. M. P.  
JEFE SECCION TECNICA  
AV. LAZARO CARDENAS No. 152  
COL. LINDAVISTA VALLEJO  
569-66-00 ext. 70391  
AV. FLORES MAGON No. 295-201  
COL. TLATELOLCO  
DELEGACION CUAUHTEMOC  
06900 MEXICO, D.F.
- 45.- PAYER PEREZ ALFREDO  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA  
DOCENTE  
AVENIDA VELEZ SORSFIELD No. 299  
CORDOBA ARGENTINA  
DERQUI No. 428  
CORDOBA ARGENTINA
- 46.- PEREZ SANCHEZ GUSTAVO  
S. A. R. II.
- 47.- PRESILLA JIMENEZ VICTOR MANUEL  
S. C. T.
- 48.- RAMIREZ RODRIGUEZ JOSE  
COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD
- 49.- RENDON GAN LUIS  
COMISION DE VIALIDAD Y TRANSPORTE  
URBANO (COVITUR)  
RESIDENTE DE OBRA CIVIL DEL METRO  
AV. UNIVERSIDAD No. 800  
DELEGACION BENITO JUAREZ  
540-13-09  
MITLA No. 663  
COL. VERTIZ MARUARTE  
DELEGACION BENITO JUAREZ  
539-25-52
- 50.- ROJAS BRAVO JULIO  
LIMA PERU
- 51.- SALCEDO LUNA GERMAN  
INTERVENTORIA Y ESTUDIO TECNICO  
INGENIERO RESIDENTE  
CALLE 12 No. 26-15  
COL. BARRANCA BERNEJO  
SANTANDER COLOMBIA  
CALLE 99 No. 19-49 FONTANA  
COL. BUCARAMANGA  
SANTANDER COLOMBIA
- 52.- SANCHEZ ROA LEONCIA AGUSTIN
- 53.- SALCEDO LUNA JOSE  
BOGOTA, COLOMBIA





- 54.- SANTANA LCHILGARAY GABRIEL  
SERVICIOS Y ELEMENTOS PREFORZADOS  
GERENTE TECNICO  
NUEVO LEON No. 249  
COL. HIPODROMO CONDESA  
DELEGACION ALVARO OBREGON  
06100 MEXICO, D.F.  
515-36-27
- ROMERO DE TERREROS No. 1209  
COL. NARVARTE  
DELEGACION BENITO JUAREZ  
03020 MEXICO, D.F.  
543-54-27
- 55.- VILAR ROJAS JORGE IVAN  
INSTIT. DE INVESTIGACIONES ELECTRICAS  
INVESTIGADOR  
LEIBNITZ No. 14-2o. PISO  
COL. NVA. ANZURES  
511-42-63
- LONDRES No. 190-119  
COL. JUAREZ  
511-33-25
- 56.- ZAFRA SALAZAR VICTOR  
INSTITUTO MEXICANO DEL SEGURO SOCIAL  
VERIFICADOR  
MAGDALENA DE LAS SALINAS No. 10  
COL. INSURGENTES  
DELEGACION ANAHUAC  
754--46-99
- JULIO GARCIA No. 55  
SATELITE

