



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**

**Análisis de la vulnerabilidad de sistemas dinámicos**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**INGENIERIA ELECTRICA - CONTROL**

**P R E S E N T A**

**César Tlakaélel Martínez Villegas**

DIRIGIDA POR:

**Dra. María Cristina Verde Rodarte**

Instituto de Ingeniería, UNAM

**Dr. Paul Rolando Maya Ortíz**

Facultad de Ingeniería, UNAM

MÉXICO, D. F., MAYO 2015

## **JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Gerardo René Espinoza Pérez  
Secretario: Dr. Leonid Fridman  
Vocal: Dra. María Cristina Verde Rodarte  
1er Suplente: Dr. Paul Rolando Maya Ortiz  
2do Suplente: Dr. Claudio Rubén Fuerte Esquivel

Lugar dónde se realizó esta tesis:

Instituto de Ingeniería, UNAM

Dra. María Cristina  
Verde Rodarte

Dr. Paul Rolando  
Maya Ortiz

---

firma

firma

*“Todas las personas sueñan, pero no de la misma manera. Las que sueñan de noche en los polvorientos recovecos de su espíritu, se despiertan al día siguiente para descubrir que todo era vanidad. Sin embargo, las que sueñan de día son personas peligrosas, porque pueden vivir su sueño con los ojos abiertos con el fin de hacerlo realidad.”*

T. E. Lawrence

A lo largo de mi vida he soñado mucho, he soñado a través de mis propios ojos y los ojos de alguien más. He vivido el sueño de tener una familia que forma un conjunto magnífico y perfecto, pero sobre todas las cosas es una fuente inagotable de nuevos sueños. También he tenido la fortuna de encontrarme en el camino a una persona maravillosa que, como salida de una historia fantástica, ha mejorado cada aspecto de mi vida.

Aún no tengo la certeza del momento en el que sueño, algunas veces he podido ver una pequeña luz filtrándose por los resquicios de mi ser, ¿Podría ser esta la luz del día o solamente es una ilusión?, no lo se, pero seguiré trabajando para mantener la claridad.

Quiero agradecer profundamente a Jimena, Adelina, Miyarai y Ángel, por compartir conmigo todos los sueños siempre. Los amo con todo mi corazón.

César Tlakaélel

# Agradecimientos

- A mi familia, por creer en mí. En especial a mis tíos Blanca Martínez y Roberto Nava y a mis primos Jorge y Erik Nava por haberme apoyado en cada una de las etapas de mi vida, por estar presentes en épocas difíciles y por celebrar siempre junto a mí los buenos momentos.
- A la familia Castro Gutiérrez: Sra. Ángeles Gutiérrez, Sr. Eusebio Castro, Nere y Aris, por abrirme las puertas de su hogar y brindarme su amistad y su apoyo en todo momento.
- A Rubén Rodríguez, por los momentos compartidos y por ser un hermano más en mi hogar.
- A mis amigos y compañeros de vida. A Hibraim Pérez, por motivarme siempre a hacer cosas que quizá de otra manera no hubiera imaginado, por su ejemplo de vida increíble y por su amistad siempre sincera. A Eduardo Fernández por su nobleza y su capacidad de hacer de cualquier momento malo uno bueno, por los años de amistad sin condiciones y por su esfuerzo diario por ser un mejor ser humano. A Carlos Castro por su inteligencia y por que a pesar de lo que pueda suceder en el futuro siempre seremos esa familia que formamos. A Eduardo Oropeza por ser siempre esa mezcla de fuerza, tenacidad e inteligencia, por haber sido más que un amigo, un hermano.

- A Oscar Pilloni y Gabriel Aranda por enseñarme que la profundidad y compromiso en una amistad sincera es independiente del tiempo de convivencia que se tenga. Este camino ha sido grato con ustedes a un lado y tengo la certeza de que lo que viene es aún mejor.
- A mis compañeros de grupo en la maestría de control por aceptarme dentro de su entorno y compartir conmigo conocimientos y experiencias que me llevo gratamente hacia los siguientes retos de mi vida.
- A mis tutores Dra. Cristina Verde y Dr. Paul Maya por compartir conmigo este proyecto, por su paciencia, dedicación y exigencia. Sus comentarios y opiniones acertadas, siempre buscaron mi crecimiento profesional y personal, lo agradezco enormemente.
- Al los investigadores y profesores del programa de posgrado en ingeniería eléctrica de la UNAM, en particular a los sinodales asignados a este proyecto: Dr. Gerardo Espinoza, Dr. Leonid Fridman y Dr. Claudio Fuerte, por sus valiosos comentarios y correcciones que permitieron enriquecer el trabajo aquí presentado.
- A la Universidad Nacional Autónoma de México, mi alma máter, y su gran comunidad de profesores, trabajadores y alumnos por haberme formado académica y personalmente a lo largo de estos años.
- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por brindarme los recursos económicos para la realización de mis estudios de posgrado.

- A la Dirección General de Asuntos de Personal Académico por proporcionar los recursos que me permitieron concluir el trabajo de tesis a través del proyecto IT00414 “Diagnóstico de fallas con modelos parametrizados y búsqueda de extremos”, a cargo de la Dra. María Cristina Verde Rodarte.
- Por ultimo quiero compartir este logro con los alumnos mexicanos de todos los niveles de educación, sobre todo con aquellos que se esfuerzan diariamente por conseguir la educación que merecen a pesar de las circunstancias adversas.

A todos ellos les agradezco de corazón.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes y Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivo del trabajo . . . . .	9
1.3. Estructura del trabajo . . . . .	11
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>13</b>
2.1. Detectabilidad de eventos . . . . .	14
2.2. Modelos algebraicos generadores de mediciones $\mathbf{y}_m$ . . . . .	17
2.2.1. Representación en espacio de estados con forma des- criptor . . . . .	18
2.2.2. Matriz de transferencia . . . . .	21
2.3. Sistemas estructurados . . . . .	23
2.4. Propiedades estructurales de los sistemas dinámicos . . . . .	26
2.5. Grafos dirigidos . . . . .	28
2.5.1. Definiciones . . . . .	29
<b>3. Herramientas de análisis para la determinación de eventos no detectables</b>	<b>33</b>

3.1. Condiciones algebraicas para la existencia de eventos no detectables . . . . .	34
3.2. Búsqueda de eventos $\bar{e}$ vía análisis algebraico . . . . .	39
3.3. Condiciones estructurales para la existencia de eventos no detectables . . . . .	41
3.4. Búsqueda de eventos $\bar{e}$ vía teoría de grafos . . . . .	45
<b>4. Caso de estudio: Circuito eléctrico resonante</b>	<b>48</b>
4.1. Determinación de eventos no detectables con mediciones de voltaje y corriente a través del capacitor . . . . .	50
4.1.1. Modelo LTI . . . . .	50
4.1.2. Modelo LTID . . . . .	57
4.1.3. Simulación . . . . .	62
4.2. Determinación de eventos no detectables con mediciones de corriente a través de los inductores . . . . .	63
4.2.1. Modelo LTI . . . . .	63
4.2.2. Simulación . . . . .	67
4.3. Análisis de resultados . . . . .	68
<b>5. Conclusiones</b>	<b>72</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>75</b>



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes y Motivación

El objetivo fundamental de la ingeniería es la solución a problemas que afectan a la sociedad. Para ello, el ingeniero moderno cuenta con herramientas, técnicas y conocimientos científicos que le permiten desarrollar sistemas tanto físicos como abstractos, con objetivos específicos para satisfacer necesidades de la sociedad. En ese contexto se han desarrollado redes eléctricas, acueductos, sistemas de comunicación, automóviles, aeronaves, sistemas electrónicos, computadores personales, teléfonos celulares, entre otros.

Uno de los problemas a los que se enfrentan los ingenieros que se deriva de la existencia perturbaciones y desviaciones de los valores de diseño, es el de mantener en operación de forma continua los sistemas y procesos diseñados con un mínimo de mantenimiento y acciones preventivas. Este tipo de tareas se lleva a cabo con ayuda de esquemas retroalimentados y una buena sintonía de las leyes de acción que actúan sobre las variables internas del sistema.

Debido a ésto en los últimos 80 años se han establecido las bases de la rama de la ingeniería conocida como *ingeniería de control de sistemas dinámicos*.

A lo largo de la historia, la ingeniería de control ha estudiado, y resuelto, distintos problemas de gran trascendencia, empezando por el gobernador de Watt. En un principio el objetivo de los sistemas de control era el de estabilizar y lograr una regulación automática. A partir de los años 70 del siglo pasado se ha buscado dotar a los sistemas con mayor capacidad y versatilidad de manera tal, que se puedan lograr propiedades de optimización y robustez ante perturbaciones e incertidumbres. Hoy en día, las grandes capacidades de cómputo y de los sistemas de comunicación permiten la implementación de algoritmos de control sofisticados que logran un buen desempeño y que cuentan con un conjunto de propiedades específicas que permite hacerlos robustos ante ciertas perturbaciones e incertidumbres. Asíb es posible mantener, de manera permanente, las redes eléctricas o de transporte de forma automática, con un alto índice de desempeño.

Sin embargo, el avance logrado a través de la incorporación de las tecnologías de la información en los sistemas de control, también ha generado nuevas problemáticas. Los sistema de control moderno, son más complejos ya que cuentan con un alto número de interconexiones y dispositivos; su funcionamiento está regido por fenómenos físicos complejos y pueden estar distribuidos en regiones muy grandes.

Recientemente, la comunidad de control automático se ha interesado en el estudio de la problemática inherente a los sistemas complejos que integran procesos físicos, recursos computacionales y dispositivos de comunicación, como un todo. Dichos sistemas son conocidos como *cibersistemas* (*cyber-*

*physical systems*); [Samad and Annaswamy, 2011], dentro de los cuáles se incluyen sistemas de infraestructura crítica de las ciudades como son las redes de transporte, los sistemas de generación y distribución de energía eléctrica, las redes de distribución de agua y gas y los sistemas de comunicación avanzada, entre otros [Goetz and Sheno, 2008].

Tomando en cuenta que es inaceptable que un sistema ponga en riesgo a la sociedad y al medio ambiente, los sistemas complejos actuales son diseñados con normas de seguridad y confiabilidad, es decir, tratan en general de reducir el riesgo. Para ello se desarrollan esquemas de supervisión y monitoreo automático que diagnostican las causas y fallas que provocan desviaciones de la operación normal del sistema como pueden ser; el desgaste de algún componente o simplemente una falta de mantenimiento.

Los argumentos arriba presentados, han dado lugar al estudio de la seguridad de procesos y sistemas de gran escala. El estudio de la seguridad en los sistemas dentro de la comunidad de control, es un tema que ha sido abordado y desarrollado por varias décadas. La importancia de los trabajos derivados de este interés está reflejada en las diversas publicaciones en revistas de relevancia internacional, así como en los congresos y seminarios que se organizan periódicamente por las organizaciones interesadas en el área de control automático; un ejemplo de ello es el simposio organizado cada tres años por la Federación Internacional de Control Automático (IFAC - Safe-process Symposium) el cuál presentará su novena edición en el año 2015.

Una causa de malos funcionamientos en los sistemas, es el factor humano, éste puede alterarlos ya sea por descuido, por error o de forma premeditada. Específicamente, las instalaciones de infraestructura crítica son susceptibles

de ser atacadas con el objeto de generar una falla o un paro inesperado de grandes consecuencias. El alcance de estos ataques se intensifica si se considera que el ente malicioso cuenta con información amplia que le permite generar eventos con mayor efecto dañino en las instalaciones.

En años recientes se ha evidenciado que los cibernormas son susceptibles a fallas y ataques en su infraestructura física, en las capas de comunicación y procesamiento de datos, y en el software que ejecuta las tareas de monitoreo y control. Esta problemática se ha manifestado por ejemplo: en el ataque al sistema SCADA adquirido por el consejo de Queensland, Australia, para el control del flujo y tratamiento de aguas residuales, ocasionando malos funcionamientos en 150 estaciones de bombeo [Slay and Miller, 2008]; en los apagones en Brasil en 2009, los cuáles privaron de energía eléctrica a 70 millones de personas en 18 estados del país y a la población entera de Paraguay [Conti, 2010]; y con la aparición del gusano “StuxNet”, el cuál atacó a una planta nuclear en Irán mediante el secuestro de computadoras que, conectadas con PLC’s, controlan los procesos para el enriquecimiento de Uranio-235 [Farwell and Rohozinski, 2011]; entre otros.

Recientemente se han realizado esfuerzos para formalizar el análisis de riesgo en los sistemas, con objeto de identificar los sistemas con alto grado de vulnerabilidad ante eventos naturales o provocados por el hombre, que pongan en riesgo a los seres vivos, la infraestructura o el medio ambiente; sin embargo, los conceptos y la metodología aplicada han evolucionado de manera lenta y son pocos los cibernormas en donde se realizan estudios de análisis de riesgos ante una gran variedad de eventos. Normalmente, se toman los de mayor probabilidad, y pocas veces se considera el sistema global

involucrando la infraestructura, el sistema de comunicación y el software. Existe entonces una necesidad de desarrollar herramientas adecuadas para estudiar condiciones de riesgo, para sistemas de gran escala.

En particular, el adjetivo *vulnerable*, para el caso de los cbersistemas permite enmarcar la problemática de provocar daños ante diversos eventos y perturbaciones.

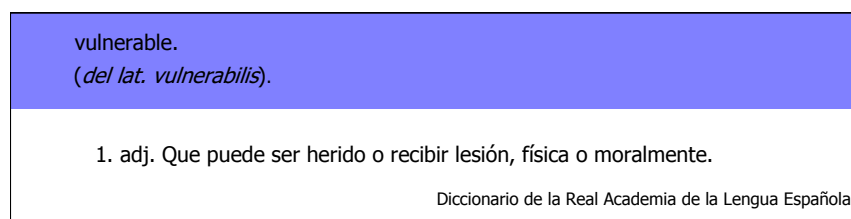


Figura 1.1: Definición del adjetivo vulnerable. Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española.

La definición de vulnerabilidad del diccionario de la Real Academia de la Lengua Española hace referencia a una cualidad de un sujeto de ser susceptible a recibir algún daño. En el contexto de la ingeniería si un cbersistema se dice que es vulnerable, se entiende como la posibilidad de que éste reciba un daño modificandose su funcionamiento normal, sin que los operadores o responsables lo perciban antes de que los efectos provocados por el daño tengan consecuencias irreversibles y de alto impacto.

El concepto de vulnerabilidad visto como una propiedad global de un sistema se centra en tres indicadores:

- El grado de pérdida y daños causados por el impacto de un evento potencialmente dañino.

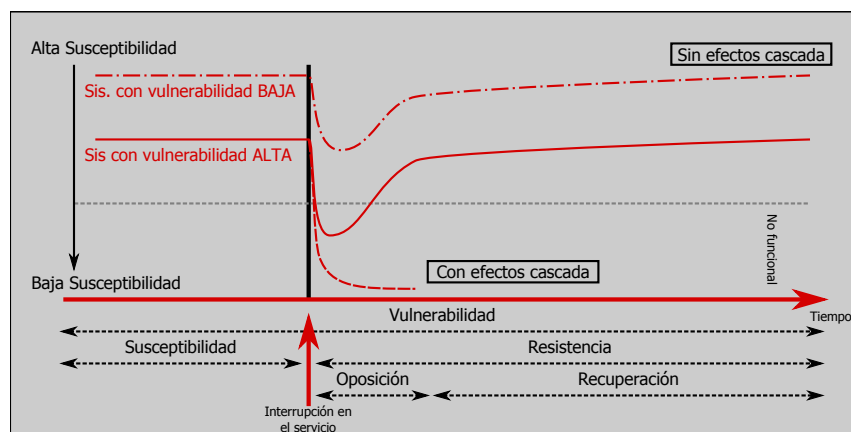


Figura 1.2: Elementos de la vulnerabilidad y escenarios de respuesta asociados [Kröger and Zico, 2011]

- El grado de exposición del sistema a un evento potencialmente dañino, ésto es la posibilidad de exposición a eventos dañinos y la susceptibilidad de un elemento en riesgo de sufrir pérdidas y daños (el elemento en riesgo puede ser un sistema).
- El grado de robustez, es decir, la capacidad de un sistema para anticipar, enfrentar, resistir y recuperarse del impacto de un evento.

La Figura 1.2 muestra estos indicadores junto con los escenarios que pueden presentarse, dependiendo de las características del sistema; se ejemplifica que los efectos en cascada pueden conducir al sistema hacia una avería total.

En [Kröger and Zico, 2011] se define vulnerabilidad como la imperfección o debilidad (característica inherente, incluyendo la capacidad de resistencia), en el diseño, implementación, operación, y/o administración de un sistema de infraestructura o sus elementos, de manera que éste sea susceptible a ser

destruido o incapacitado al ser expuesto a un peligro o amenaza, o se reduzca su capacidad para recobrar nuevas condiciones estables.

Los estudios sobre la vulnerabilidad o integridad de los ciberistemas intentan determinar las condiciones más críticas en que se puede encontrar un sistema. En general dichos estudios se llevan a cabo a partir de modelos matemáticos de los sistemas, con ayuda de herramientas de análisis de sistemas dinámicos y simulaciones. Un estudio amplio incluye las siguientes tareas:

1. Dado un sistema y su estado de operación normal, identificar el conjunto de eventos y secuencias de eventos que pueden ocasionar daños y pérdidas sin que éstos se perciban una vez que están presentes en las mediciones y registros del ciberistema.
2. Identificar el conjunto relevante de *eventos iniciales dañinos* y evaluar su impacto en cascada sobre un subconjunto de elementos, o el sistema como un todo.
3. Dado un sistema y sus condiciones de operación nominal, identificar el conjunto de eventos o secuencias de eventos que causan un efecto en cascada, que lo lleva al colapso.
4. Dado un conjunto de condiciones iniciales y mediciones, estudiar las interdependencias entre subsistemas y su acoplamiento de manera tal que puedan evitarse efectos en cadena de los daños de un subsistema.

Existen estudios de vulnerabilidad para aplicaciones y escenarios de ataques específicos. Por ejemplo, Amin et al. [2009] estudia los ataques por engaño y denegación de servicio en contra de sistemas de control vía redes.

Liu et al. [2011] introduce el concepto de ataque por inyección de datos falsos, y estudia su efecto sobre los estimadores estáticos. Adicionalmente se han realizado estudios sobre la seguridad en sistemas ciberfísicos específicos, tales como redes eléctricas de potencia [DeMarco et al., 1996], [Dán and Sandberg, 2010], [Mohsenian-Rad and Leon-Garcia, 2011], [Pasqualetti et al., 2011b], [Cui et al., 2012], [Sridhar et al., 2012] y sistemas de distribución de agua [Eliades and Polycarpou, 2010], [Amin et al., 2010], [Amin et al., 2013].

Recientemente, se ha propuesto un procedimiento para determinar la vulnerabilidad considerando propiedades estructurales de los sistemas dinámicos lineales generalizados en los trabajos [Pasqualetti et al., 2011a][Pasqualetti et al., 2013]. En estas contribuciones se usan propiedades de teoría de grafos y se establecen condiciones de existencia de nodos del sistema en donde las señales introducidas alteran el comportamiento interno sin modificar las mediciones. El método desarrollado fue probado en simulación para un sistema eléctrico de potencia de 3 generadores y 6 buses donde se muestra la existencia de puntos de la red en los cuales ciertas perturbaciones no se detectan en las mediciones, pero alteran efectivamente el comportamiento interno del sistema.

Los trabajos de Pasqualetti arriba mencionados dejan algunas preguntas abiertas respecto a las condiciones de existencia de los eventos dañinos y la relación entre la dimension del vector de eventos  $\mathbf{e}(t)$  y la dimension del vector de mediciones  $\mathbf{y}_m(t)$  que se tienen disponibles, además no se menciona explícitamente si dichas condiciones asumen independencia lineal de las mediciones. Este hecho motivó el trabajo aquí reportado, en donde se pretende establecer un marco de referencia inicial formal para el estudio de



la vulnerabilidad de los sistemas descriptores lineales a partir de definir un evento no detectable y además se estudian con profundidad los trabajos previos para explicar la aplicación de los métodos que han sido propuestos. Cabe hacer notar que a pesar de que el concepto de cero en el caso de un sistema MIMO ha sido estudiado desde los años setenta [Desoer and Schulman, 1974] [MacFarlane and Karcnias, 1976] [Pugh, 1977], éste ha sido escasamente explotado en análisis de riesgo. Como se verá a lo largo de la presentación del trabajo, el concepto de cero y sus implicaciones en el espacio de las salidas y el de los eventos dañinos juegan un papel importante en el análisis de vulnerabilidad.

## 1.2. Objetivo del trabajo

En el caso de un sistema estático se podría decir, a simple vista, que entre mayor sea el número de mediciones  $q$  independientes que se tengan de un sistema, mayor será el conocimiento del comportamiento interno de éste, ya que esto implica mayor información para identificar la presencia de eventos perturbadores. Por el contrario, un mayor número de puntos donde se altera, sea por software o hardware, la información del sistema, aumenta el efecto del daño pero también puede aumentar la posibilidad de detectar la presencia de los eventos. Por lo cual, el número de mediciones y la dimensión del vector de eventos de un sistema dinámico no son suficientes para determinar la presencia de eventos no detectables. Para ello, se requiere considerar el comportamiento dinámico interno del sistema.

El análisis de vulnerabilidades del presente trabajo está enfocado a buscar

condiciones estructurales en los sistemas, tal que algunos eventos alteren el comportamiento interno de éstos, sin ser percibidos en las mediciones disponibles; a esta clase de eventos se les denotará como *eventos no detectables*. La consecuencia de la existencia de eventos no detectables es la imposibilidad de generar medidas preventivas y planes de emergencia que reduzcan los daños o el colapso de infraestructuras costosas y pérdidas de seres humanos.

Para llevar a cabo el análisis se considera que el sistema a estudiar puede ser descrito por un modelo dinámico lineal en forma descriptor con un conjunto de puntos de acceso donde se introducen los eventos y un conjunto de puntos de medición. Se considera también que los eventos son explícitamente generados para dañar parte del sistema y que éstos son diseñados conociendo el modelo, las variables que son medibles y en algunos casos las condiciones del sistema en el momento de introducir las perturbaciones.

Dado lo anterior, el objetivo principal es estudiar la existencia de escenarios de ataque a través de herramientas de análisis de sistemas dinámicos, como son los ceros de invariantes y la teoría de grafos. En particular, a partir de los resultados reportados en las referencias [Dion et al., 2003] y [Pasqualetti et al., 2013] se comparan las ventajas del modelo algebraico y el grafo dirigido para sistemas descriptores cuando se aplican para buscar la presencia de condiciones estructurales que ponen en riesgo a dichos sistemas al existir conjuntos de eventos no detectados en las mediciones.

La aportación principal consiste en analizar en detalle todas las condiciones de existencia del vector complejo de las eventos no detectables en la matriz de transferencia, dado un conjunto de puntos de acceso al sistema.

Las herramientas numéricas para la obtención de los ceros y direcciones

en el espacio de las entradas existen en distintas aplicaciones diseñadas para sistemas descriptores lineales invariantes sobre la plataforma de MATLAB Misra et al. [1994], Misra et al. [1995] y Varga [2000]. En este trabajo se utilizó como herramienta el toolbox para análisis de sistemas descriptores desarrollado por dichos autores.

### **1.3. Estructura del trabajo**

La estructura del presente trabajo está integrada por cinco capítulos como se describen a continuación:

En el Capítulo 2 se presenta una formulación formal de eventos no detectables que provocan cambios internos sin alterar las mediciones del sistema y que permiten generar indicadores de vulnerabilidad ante eventos perniciosos. Además, se incluyen las bases y conceptos teóricos, tanto algebraicos como de teoría de grafos, sobre los cuales se sustentan los procedimientos de búsqueda de eventos maliciosos que se proponen posteriormente. En este capítulo se introduce el concepto de sistema estructurado y propiedades estructurales. A partir de dicho sistema se asigna un grafo dirigido que contiene la información acerca de la interconexión de las variables del sistema.

En el Capítulo 3 se desarrollan las herramientas algebraicas y de teoría de grafos, para la búsqueda de eventos no detectables en sistemas lineales invariantes en el tiempo con forma descriptor. A partir de un modelo lineal descriptor en espacio de estados se establecen las condiciones para la existencia de puntos estratégicos del sistema donde los eventos maliciosos provocados en instantes específicos provocan alteraciones en el comportamiento interno

y no pueden ser visualizados en las mediciones. También, se establecen condiciones para la existencia de eventos no detectables en el marco de teoría de grafos. Dado lo genérico del análisis en este caso, la herramienta no permite determinar los eventos específicos y condiciones del estado del sistema ante los cuáles el sistema es vulnerable. Sin embargo tiene la ventaja de que puede ser aplicado a sistemas de grandes dimensiones como son las redes eléctricas o de transporte de fluidos.

El Capítulo 4 se ejemplifican los procedimientos desarrollados mediante el análisis de existencia de eventos no detectables en un circuito eléctrico resonante. En dicho circuito se abordan los diferentes escenarios de existencia de eventos no detectables y la manera en que éstos pueden ser inyectados al sistema de manera que se altere efectivamente la dinámica interna del sistema sin ocasionar variaciones en las mediciones. Este capítulo hace evidentes las fortalezas y debilidades de los dos métodos de búsqueda propuestos.

En el capítulo 5 se presenta la discusión de resultados, la comparación de los métodos y las conclusiones del trabajo, así como el trabajo futuro que puede realizarse.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

La clase de eventos dañinos que afectan las propiedades de los sistemas pueden considerarse como perturbaciones insertadas en puntos específicos del sistema. Desde un punto de vista algebraico, dichos eventos son en general funciones vectoriales del tiempo  $\mathbf{e}(t)$  que inciden en algún conjunto de variables del sistema, en otras palabras, la función  $\mathbf{e}(t)$  modifica directamente la dinámica del conjunto de estados del sistema a estudiar.

En el análisis que se lleva a cabo se considera que el sistema cuenta con un conjunto de sensores que proporcionan información sobre el comportamiento dinámico interno del sistema. Dicha información se encuentra en una función vectorial  $\mathbf{y}_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}(t), t)$  que depende de la condición inicial del sistema  $\mathbf{x}_0$ , del evento malicioso  $\mathbf{e}(t)$  y del tiempo. Dicho de otra manera, existe una función que mapea un conjunto de eventos y condiciones iniciales en un conjunto de mediciones.

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^q \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^p$  y  $\mathbf{y}_m \in \mathbb{R}^q$ .

A partir de dicha función se puede afirmar que un evento es identificable cuando la información disponible en el vector de medición  $\mathbf{y}_m$  es suficiente para la reconstrucción de dicho evento. En caso de que la medición  $\mathbf{y}_m$  solamente permita determinar la presencia de eventos que alteran el sistema se habla de detectabilidad del evento. El peor escenario se presenta cuando  $\mathbf{y}_m$  no permite percibir la presencia de eventos que alteran el comportamiento del sistema, lo cual implica que la alteración interna producida por el evento no se manifiesta en las mediciones, lo cual genera una condición de alta vulnerabilidad.

De manera que el grado de vulnerabilidad de los sistemas en el contexto del presente trabajo depende exclusivamente de la información del sistema contenida en la función (2.1) y de los modelos matemáticos generadores de dichas función.

En la siguiente sección se especifica la estructura del modelo matemático con el que se genera el vector de mediciones  $\mathbf{y}_m$  en términos de los eventos y las condiciones normales de operación.

## 2.1. Detectabilidad de eventos

La respuesta de los sistemas lineales invariantes en el tiempo ante un evento específico consta de dos términos: un término debido a la entrada (respuesta forzada) y un término originado por las condiciones iniciales del sistema (respuesta libre). Las señales que se obtienen a partir de las mediciones de los sistemas dinámicos pueden verse como una respuesta ante un

evento.

$$\mathbf{y}_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}(t), t) = \mathbf{y}_{mf}(\mathbf{e}(t), t) + \mathbf{y}_{ml}(\mathbf{x}_0, t) \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{y}_{mf}$  es el término correspondiente con el evento  $\mathbf{e}(t)$  y  $\mathbf{y}_{ml}$  se asocia con la operación normal del sistema.

**Definición 2.1.1 (Evento no detectable)** *Un evento  $\bar{\mathbf{e}}(t)$  se dice no detectable si dada una condición de operación normal denotada por  $\mathbf{y}_m(\mathbf{x}_0^*, \mathbf{0}, t)$  existe una condición inicial  $\mathbf{x}_0$  tal que:*

$$\mathbf{y}_m(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{e}}(t), t) = \mathbf{y}_m(\mathbf{x}_0^*, \mathbf{0}, t) \quad (2.3)$$

Esta definición se simplifica cuando las condiciones iniciales coinciden.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}_0^* \\ \implies \mathbf{y}_m(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{e}}(t), t) &= \mathbf{y}_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}, t) \\ \implies \mathbf{y}_{mf}(\bar{\mathbf{e}}(t), t) + \mathbf{y}_{ml}(\mathbf{x}_0, t) &= \mathbf{y}_{mf}(\mathbf{0}, t) + \mathbf{y}_{ml}(\mathbf{x}_0, t) \\ \implies \mathbf{y}_{mf}(\bar{\mathbf{e}}, t) &= \mathbf{y}_{mf}(\mathbf{0}, t) \\ \implies \mathbf{y}_{mf}(\bar{\mathbf{e}}, t) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Por lo tanto si se conoce la condición inicial  $\mathbf{x}_0$ , los llamados *eventos no detectables* se caracterizan mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{y}_{mf}(\bar{\mathbf{e}}(t), t) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.4)$$

La medición que se obtiene considerando la acción de dichos eventos sobre el sistema es igual que la que se obtiene en condiciones normales de operación.

**Definición 2.1.2 (Evento no identificable)** *Dos eventos son no identificables cuando la medición asociada a ambos es igual. Es decir si existe  $\mathbf{e}^*(t) \neq \mathbf{e}(t)$  tal que*

$$\mathbf{y}_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}(t), t) = \mathbf{y}_m(\mathbf{x}_0^*, \mathbf{e}^*(t), t) \quad (2.5)$$

En caso de que se tenga la misma condición inicial ( $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^*$ ), la ecuación previa se reduce a

$$\mathbf{y}_{mf}(\mathbf{e}(t), t) = \mathbf{y}_{mf}(\mathbf{e}^*(t), t) \quad (2.6)$$

con  $\mathbf{e}^*(t) \neq \mathbf{e}(t)$ .

A partir de las ecuaciones (2.4) y (2.6), se infieren directamente algunas propiedades que relacionan eventos no detectables con los no identificables.

**Propiedad 2.1.1** *Todo evento no detectable es no identificable.*

Sea  $\bar{\mathbf{e}}(t) \neq \mathbf{0}$  un evento no detectable, lo cuál implica que  $\mathbf{y}_{mf}(\bar{\mathbf{e}}(t), t) = \mathbf{0}$ . Por otro lado, la medición asociada con el evento cero  $\mathbf{y}_{mf}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ , lo cuál implica  $\mathbf{y}_{mf}(\bar{\mathbf{e}}(t), t) = \mathbf{y}_{mf}(\mathbf{0}, t)$  con  $\bar{\mathbf{e}}(t) \neq \mathbf{0}$ . Por lo tanto  $\bar{\mathbf{e}}(t)$  es un evento no identificable.

**Propiedad 2.1.2** *La existencia de un evento no detectable  $\bar{\mathbf{e}}$  en sistemas lineales invariantes en tiempo genera una familia aditiva de eventos no identificables ( $\tilde{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{e}} + \mathbf{e}$  dónde  $\bar{\mathbf{e}}$  es no detectable y  $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ ).*

Sea  $\bar{\mathbf{e}}(t)$  un evento no detectable y sea  $\mathbf{e}(t) \neq \mathbf{0}$  un evento arbitrario.  
 $\tilde{\mathbf{e}}(t) = \bar{\mathbf{e}}(t) + \mathbf{e}(t) \implies \mathbf{y}_{mf}(\tilde{\mathbf{e}}(t), t) = \mathbf{y}_{mf}(\bar{\mathbf{e}}(t) + \mathbf{e}(t), t) = \mathbf{y}_{mf}(\bar{\mathbf{e}}(t), t) +$



$\mathbf{y}_{\mathbf{mf}}(\mathbf{e}(t), \mathbf{t}) = \mathbf{y}_{\mathbf{mf}}(\mathbf{e}(\mathbf{t}), \mathbf{t})$ . Dado que  $\mathbf{e}(t) \neq \mathbf{0}$  se concluye que  $\tilde{\mathbf{e}}(t) \neq \mathbf{e}(t)$  y  $\mathbf{y}_{\mathbf{mf}}(\tilde{\mathbf{e}}(t), t) = \mathbf{y}_{\mathbf{mf}}(\mathbf{e}(\mathbf{t}), \mathbf{t})$ , por lo tanto  $\mathbf{e}(t)$  es un evento no identificable.

**Propiedad 2.1.3** *La existencia de dos eventos no identificables en un sistema lineal e invariante en el tiempo implica la existencia de un evento no detectable correspondiente a la diferencia entre los eventos no identificables siempre y cuando se considere una misma condición inicial.*

Sea  $\mathbf{e}(t)$  un evento no identificable es decir, existe un evento  $\tilde{\mathbf{e}}(t) \neq \mathbf{e}(t)$  tal que  $\mathbf{y}_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{e}}(t), t) = \mathbf{y}_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}(t), t)$  lo cual implica que  $\mathbf{y}_{\mathbf{mf}}(\tilde{\mathbf{e}}(t), t) - \mathbf{y}_{\mathbf{mf}}(\mathbf{e}(t), t) = 0$ . Para sistemas lineales invariantes en el tiempo  $\mathbf{y}_{\mathbf{mf}}(\tilde{\mathbf{e}}(t), t) - \mathbf{y}_{\mathbf{mf}}(\mathbf{e}(t), t) = \mathbf{y}_{\mathbf{mf}}(\tilde{\mathbf{e}}(t) - \mathbf{e}(t), t) = 0$ . Dado que  $\tilde{\mathbf{e}}(t) \neq \mathbf{e}(t)$ , y considerando  $\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{e}}(t) - \mathbf{e}(t)$ ,  $\mathbf{y}_{\mathbf{mf}}(\mathbf{r}(t), t) = 0$ , se concluye que  $\mathbf{r}(t)$  es no detectable.

Los resultados previos establecen un vínculo entre la existencia de eventos no detectables y no identificables en sistemas lineales invariantes en el tiempo.

La existencia de eventos no detectables en los sistemas dinámicos y la vulnerabilidad de dichos sistemas son conceptos relacionados. En consecuencia, este trabajo consideró únicamente el análisis de eventos no detectables.

## 2.2. Modelos algebraicos generadores de mediciones $\mathbf{y}_{\mathbf{m}}$

La búsqueda y clasificación de eventos no detectables requiere hacer un análisis de los modelos generadores de la función (2.1). A lo largo de este

capítulo se usa un modelo lineal obtenido a partir de un conjunto de ecuaciones algebraicas y diferenciales expresadas en un espacio de estados con forma descriptor (espacio de estados generalizado).

### 2.2.1. Representación en espacio de estados con forma descriptor

La representación en espacio de estados es un modelo matemático que describe de cierta manera la dinámica interna de los sistemas. La forma más general de este tipo de modelos supone la existencia de un conjunto de variables y un conjunto de ecuaciones diferenciales y algebraicas que relacionan dichas variables. Las variables se expresan usualmente en tres vectores: entradas, salidas y estados.

Para obtener un modelo en espacio de estados se requiere determinar en primer lugar el conjunto de variables físicas mediante las cuáles se caracteriza la dinámica del sistema, dicho conjunto de variables se conoce como *estado* del sistema. Posteriormente se establecen las relaciones entre los estados usando técnicas de identificación o mediante la aplicación de leyes físicas entre variables, dichas relaciones se expresan en dos conjuntos de ecuaciones con la siguiente estructura:

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{e}(t), t) = 0 \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{y}_m(t), t) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

donde  $\mathbf{x}(t)$  es el vector de estado del sistema,  $\mathbf{e}(t)$  es el vector de evento y  $\mathbf{y}_m(t)$  es el vector de medición.

Las dimensiones de las funciones vectoriales  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  están determinadas por

las dimensiones de los vectores de estado, evento y medición del sistema.

El conjunto de ecuaciones (2.7) constituye una representación en espacio de estados de un sistema dinámico no lineal. A partir de éste se puede obtener un modelo lineal invariante en el tiempo con la forma descriptor.

$$\Sigma \triangleq \begin{cases} E\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + F\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}_m(t) &= C\mathbf{x}(t) + H\mathbf{e}(t) \end{cases} \quad (2.8)$$

donde  $E = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times n}$ ,  $A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times n}$ ,  $F = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{e}} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times p}$ ,  $C = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  y  $H = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{e}} \in \mathbb{R}^{q \times p}$  son matrices constantes evaluadas en un punto de operación.

El conjunto de ecuaciones (2.8) representan un sistema LTID (lineal invariante en el tiempo en forma descriptor).

### Propiedades [Duan, 2010]

Se dice que un sistema descriptor es cuadrado cuando  $n = \tilde{n}$ . Un sistema cuadrado en donde la matriz  $E$  es no singular se conoce como sistema *normal*. A partir de dichos sistemas se puede obtener lo que se conoce como sistema estándar normal.

$$\begin{aligned} E\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + F\mathbf{e}(t) \\ \implies E^{-1}E\dot{\mathbf{x}}(t) &= E^{-1}A\mathbf{x}(t) + E^{-1}F\mathbf{e}(t) \\ \implies \dot{\mathbf{x}}(t) &= E^{-1}A\mathbf{x}(t) + E^{-1}F\mathbf{e}(t) \\ \implies \dot{\mathbf{x}}(t) &= \tilde{A}\mathbf{x}(t) + \tilde{F}\mathbf{e}(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde  $\tilde{A} = E^{-1}A$  y  $\tilde{F} = E^{-1}F$ . La ecuación de medición permanece igual.

Un concepto importante asociado con el análisis de sistemas LTID es el concepto de regularidad.

**Definición 2.2.1 (Regularidad)** *Un sistema LTID es regular cuando se cumple*

$$\det(sE - A) \neq 0 \forall s \in \mathbb{C} \quad (2.10)$$

*excepto en un número finito de valores de  $s$  que constituyen el espectro (el conjunto de polos)  $\sigma(E, A)$  del sistema. Los polos son las soluciones de la ecuación  $\det(sE - A) = 0$ .*

La regularidad de los sistemas lineales invariantes en el tiempo en forma descriptor garantiza la existencia y unicidad de las soluciones del sistema dinámico, con lo cual se asevera que un conjunto de eventos y condiciones iniciales está asociado con un solo conjunto de mediciones. Es conveniente notar que lo converso no necesariamente se cumple, es decir, un conjunto de mediciones no está asociado en general con un solo conjunto de eventos y condiciones iniciales.

Para garantizar que las trayectorias  $\mathbf{x}(t)$  existen, son únicas y varían suavemente, se consideran las siguientes suposiciones [Pasqualetti et al., 2013]

1. El sistema es regular.
2. Las condiciones iniciales son consistentes, esto es  $A\mathbf{x}(0) + F\mathbf{e}(0) \in \text{Im}(E)$ .
3. El evento  $\mathbf{e}(t)$  varía suavemente.

Los sistemas descriptor constituyen la forma más general de los sistemas cuya dinámica se representa en el espacio de variables de estado, es decir, cuentan con propiedades análogas a las de los sistemas representados en espacio de estados (estabilidad, observabilidad, controlabilidad), sin embargo poseen características propias (regularidad, i-observabilidad, i-controlabilidad). Para obtener información más detallada y precisa sobre el análisis y diseño de controladores y observadores de sistemas lineales en forma descriptor se recomienda revisar la referencia [Duan, 2010].

### 2.2.2. Matriz de transferencia

El conjunto de matrices  $\{A, F, C, H, E\}$  caracteriza completamente al sistema (2.8). La estructura y valores específicos de estas matrices dependen de los eventos, las mediciones y los estados que se consideren. En un sistema físico, las matrices  $\{A, C, E\}$  se determinan a partir de los estados que se consideren y las mediciones que se tengan disponibles. Las matrices  $\{F, H\}$  contienen información sobre los nodos de incidencia sobre los cuáles actúa el evento. Dichos nodos se determinan considerando escenarios de eventos específicos de acuerdo con el sistema bajo estudio, es decir, se debe de establecer un conjunto de estados que sean susceptibles a recibir la inyección del evento  $\mathbf{e}(t)$ , con lo que se define la estructura de las matrices  $\{F, H\}$ .

Transformando las ecuaciones (2.8) al dominio de Laplace se obtiene:

$$\begin{aligned}
sE\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) &= A\mathbf{X}(s) + F\mathbf{E}(s) \\
\implies sE\mathbf{X}(s) - A\mathbf{X}(s) &= F\mathbf{E}(s) + \mathbf{x}(0) \\
\implies (sE - A)\mathbf{X}(s) &= F\mathbf{E}(s) + \mathbf{x}(0) \\
\implies \mathbf{X}(s) &= (sE - A)^{-1}F\mathbf{E}(s) + (sE - A)^{-1}\mathbf{x}(0)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\mathbf{Y}_m(s) = C\mathbf{X}(s) + H\mathbf{E}(s) \tag{2.12}$$

Sustituyendo (2.11) en (2.12) se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_m(s) &= C(sE - A)^{-1}F\mathbf{E}(s) + C(sE - A)^{-1}\mathbf{x}(0) + H\mathbf{E}(s) \\
&= (C(sE - A)^{-1}F + H)\mathbf{E}(s) + C(sE - A)^{-1}\mathbf{x}(0)
\end{aligned}$$

Definiendo

$$G(s) = C(sE - A)^{-1}F + H \tag{2.13}$$

$$\implies \mathbf{Y}_m(s) = G(s)\mathbf{E}(s) + C(sE - A)^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{2.14}$$

La ecuación (2.13) representa la matriz de transferencia del sistema que es calculada a partir de una representación en espacio de estados con forma descriptor. Para tal efecto se ha supuesto la existencia de la matriz inversa  $(sE - A)^{-1}$ , lo cual se garantiza con la regularidad del sistema.

La ecuación (2.14) en el dominio de Laplace es consistente con la ecuación (2.2) en el dominio del tiempo.

La matriz de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo con  $p$  eventos,  $q$  mediciones y considerando condiciones iniciales nulas tiene la forma:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1p}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(s) & G_{q2}(s) & \dots & G_{qp}(s) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

con

$$G_{ij} = \frac{Y_{mfi}(s)}{E_j(s)} \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (2.16)$$

donde  $Y_{mfi}(s)$ ,  $E_j(s)$  son las transformadas de Laplace de la  $i$ -ésima medición ( $\mathcal{L}[y_{mfi}(t)]$ ) y el  $j$ -ésimo evento ( $\mathcal{L}[e_j(t)]$ ) respectivamente.

El vector de medición en el dominio de Laplace es:

$$\mathbf{Y}_{mf}(s) = G(s)\mathbf{E}(s) \quad (2.17)$$

## 2.3. Sistemas estructurados

En el contexto de la teoría de control tradicional, se considera que las entradas de las matrices  $A$ ,  $F$ ,  $C$ ,  $H$  y  $E$  del sistema (2.8) son valores numéricos dados con precisión absoluta. Sin embargo, por razones físicas, los parámetros a partir de los cuales se determinan las entradas de las matrices son inciertos en cierta medida. En consecuencia, una aproximación distinta

es considerar la mayoría de las entradas de las matrices involucradas como parámetros libres fijando solamente las entradas que son iguales a cero.

**Definición 2.3.1 (Matriz estructurada)** *Una matriz estructurada  $[Q]$  es aquella cuyos elementos pueden ser cero o un valor indeterminado libre completamente independiente. Por ejemplo:*

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ q_{21} & 0 & 0 & q_{24} & q_{25} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 & 0 & q_{36} \\ 0 & q_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{54} & q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

donde  $q_{13}, q_{21}, q_{24}, q_{25}, q_{33}, q_{36}, q_{42}, q_{54}, q_{55} \in \mathbb{R}$ .

**Definición 2.3.2 (Realización numérica admisible)** *Una matriz numérica  $Q$  se conoce cómo realización numérica admisible (con respecto de  $[Q]$ ) si puede ser obtenida al fijar todas las entradas indeterminadas de  $[Q]$  a un valor particular. Por ejemplo:*

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 9 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

es una realización numérica admisible de  $[Q]$ .



Dos matrices  $Q'$  y  $Q''$  se dicen *estructuralmente equivalentes* si ambas son realizaciones numéricas admisibles de la misma matriz estructurada  $[Q]$ .

**Definición 2.3.3 (Sistema estructurado)** *El sistema estructurado asociado con el sistema descriptor  $\Sigma$  se obtiene al sustituir las matrices del sistema original  $\{A, F, C, H, E\}$  por sus respectivas matrices estructuradas  $\{[A], [F], [C], [H], [E]\}$ .*

### Ejemplo

Un modelo LTID para un oscilador armónico amortiguado está dado por:

$$\begin{cases} E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + F\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}_m(t) = C\mathbf{x}(t) + H\mathbf{e}(t) \end{cases} \quad (2.20)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

El sistema estructurado ( $\{[A], [B], [C], [D], [E]\}$ ) se obtiene al sustituir las entradas distintas de cero de cada matriz por parámetros libres.

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 \\ 0 & e_{22} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

con  $a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{21}, c_{11}, e_{11}, e_{22} \in \mathbb{R}$ .

## 2.4. Propiedades estructurales de los sistemas dinámicos

Una propiedad se cumple estructuralmente dentro de una clase de sistemas estructuralmente equivalentes si la propiedad bajo investigación se cumple numéricamente “para casi toda” realización numérica admisible.

Esta definición se explica con detalle interpretando la clase de sistemas estructuralmente equivalentes como un espacio euclideo  $d$ -dimensional  $\mathbb{R}^d$ . Entonces, el conjunto de sistemas que tienen la propiedad bajo investigación en el sentido numérico usual forma un subconjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^d$ . Para la clase bajo consideración la propiedad se cumple estructuralmente si y sólo si  $S$  es denso en  $\mathbb{R}^d$ . La noción de densidad en este caso es igual a la que se usa en topología (Un subconjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^d$  se dice denso en  $\mathbb{R}^d$  si para todo  $r \in \mathbb{R}^d$  y cada  $\epsilon \geq 0$  existe una  $s \in S$  tal que la distancia euclidea  $d(s, r) \leq \epsilon$ ).

Dos ejemplos de propiedades estructurales son la observabilidad y la controlabilidad. Si se determina la *observabilidad estructural/controlabilidad estructural* en una clase de sistemas estructuralmente equivalentes implica que casi todas las realizaciones numéricas admisibles del sistema estructurado

son observables/controlables excepto quizá un subconjunto que consiste de realizaciones numéricas aisladas.

Ahora bien, en el estudio de sistemas estructurados se supone que los parámetros libres de las matrices estructuradas pueden tomar cualquier valor en los números reales y además dichos parámetros son independientes entre ellos. Estas suposiciones no siempre se cumplen si se consideran sistemas físicos reales, usualmente lo que se tiene es que los valores de los parámetros están restringidos a un intervalo o conjunto de valores y dependen unos de otros.

Para la aplicación de la teoría de sistemas estructurados y teoría de grafos para el análisis de sistemas físicos se requiere un resultado que relaje la suposiciones hechas. Dichos resultado se encuentra en [Pasqualetti et al., 2011a], [Pasqualetti et al., 2013] y dice que una propiedad estructural se cumple cuando el espacio de parámetros del sistema se restringe a un polígono Laplaciano.

Un polígono Laplaciano se define por:

1. *Restricciones de fila:*  $a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij} a_{ij} = c_i$  para un subconjunto de índices (posiblemente vacío)  $i \in \{j \mid j \in 1, \dots, n, [A]_{jj} \neq 0\}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ , y  $w_{ij} \in \mathbb{R}$ ,
2. *Restricciones de simetría:*  $a_{ij} = a_{ji}$  para un subconjunto de índices (posiblemente vacío)  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .
3. *Restricciones de signo definido:*  $\text{sign}(a_{ij}) \geq 0$  y  $\text{sign}(a_{kl}) \leq 0$ , para un subconjunto de índices (posiblemente vacío)  $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ .

## 2.5. Grafos dirigidos

Un grafo es una estructura matemática que está compuesta por dos tipos de conjuntos que pueden ser interpretados geoméricamente como vértices (nodos) y aristas (líneas) que unen dichos vértices. Los conjuntos de vértices y aristas se denotan  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots\}$  y  $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots\}$ . Los vértices y aristas de un grafo están relacionados entre sí de manera que los puntos finales de una arista son vértices.

En la mayoría de los casos de estudio de sistemas dinámicos a través de teoría de grafos es apropiado asignar una orientación a cada arista de un grafo. Para visualizar esto usualmente se usa una flecha en lugar de una línea en la representación gráfica. Un grafo cuyo conjunto completo de aristas cuenta con una dirección se conoce como grafo dirigido o digrafo.

En el trabajo presentado se asoció un grafo dirigido  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  con el sistema descrito por las matrices estructuradas  $\{[A], [F], [C], [H], [E]\}$ . El conjunto de vértices  $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}_m$  consiste de los vértices asociados con los eventos, los estados y las mediciones sobre el sistema dados por  $\mathcal{U} = \{e_1, \dots, e_m\}$ ,  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ , y  $\mathcal{Y}_m = \{y_1, \dots, y_p\}$  respectivamente, mientras que el conjunto de líneas dirigidas  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{[A]} \cup \mathcal{E}_{[F]} \cup \mathcal{E}_{[C]} \cup \mathcal{E}_{[H]} \cup \mathcal{E}_{[E]}$  está compuesto por los conjuntos  $\mathcal{E}_{[A]} = \{(x_j, x_i) \mid [A]_{ij} \neq 0\}$ ,  $\mathcal{E}_{[F]} = \{(e_j, x_i) \mid [F]_{ij} \neq 0\}$ ,  $\mathcal{E}_{[C]} = \{(x_j, y_i) \mid [C]_{ij} \neq 0\}$ ,  $\mathcal{E}_{[H]} = \{(e_j, y_i) \mid [H]_{ij} \neq 0\}$ , y  $\mathcal{E}_{[E]} = \{(x_j, x_i) \mid [E]_{ij} \neq 0\}$ . En las expresiones previas  $[\cdot]_{ij} \neq 0$  significa que la entrada  $(i, j)$  de la matriz estructurada correspondiente es un parámetro libre. Por otro lado la notación  $(x_i, x_j)$  quiere decir que existe una línea que va del vértice  $x_i$  al vértice  $x_j$ .

## Ejemplo

A partir del sistema estructurado caracterizado por las matrices (2.21) se genera el grafo dirigido de la Figura 2.1. En dicha figura se muestran los conjuntos de vértices de entrada, estados y mediciones así como los vértices correspondientes a cada una de las entradas libres.

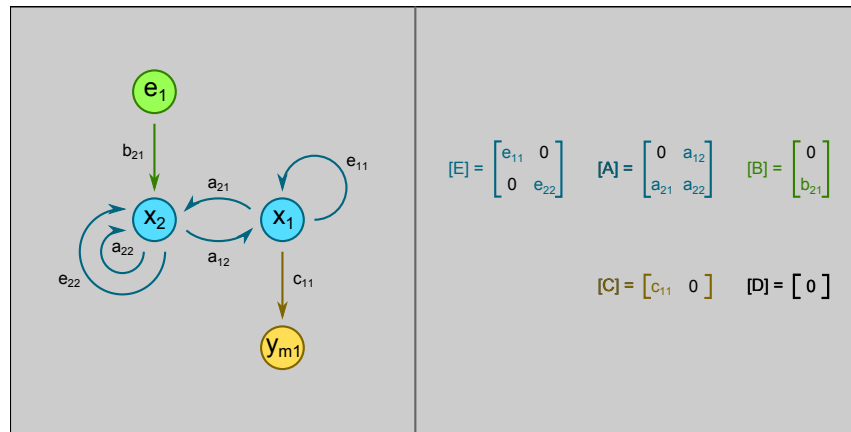


Figura 2.1: Grafo dirigido correspondiente a la dinámica de un oscilador armónico amortiguado. Se muestran en color verde los vértices de evento; en color azul los vértices de estados; y en color amarillo los vértices de medición.

### 2.5.1. Definiciones

Sea  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  un grafo dirigido donde  $(V)$  y  $(E)$  denotan los conjuntos de vértices y bordes dirigidos respectivamente.

**Definición 2.5.1 (Camino)** *Se conoce como camino a una secuencia de vértices donde cada vértice está conectado al siguiente en la secuencia mediante una arista dirigida.*

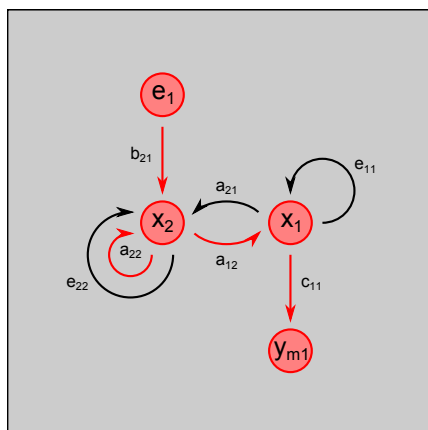


Figura 2.2: Camino formado por la secuencia de vértices  $e_1, x_2, x_2, x_1, y_{m1}$  y las aristas que los conectan ( $b_{21}, a_{22}, a_{12}, c_{11}$ ).

En la Figura 2.2 se muestra un camino cuyos vértices extremos son  $e_1$  y  $y_{m1}$ , la secuencia de vértices es  $e_1, x_2, x_2, x_1, y_{m1}$  conectada a través de las aristas  $b_{21}, a_{22}, a_{12}, c_{11}$ .

**Definición 2.5.2 (Camino simple)** *Un camino simple es un camino donde cada vértice (excepto posiblemente el primero y el último) ocurre solamente una vez en la secuencia.*

En la Figura 2.3 se muestra un camino simple cuya secuencia de vértices  $e_1, x_2, x_1, y_{m1}$  está conectada por las aristas  $b_{21}, a_{12}, c_{11}$ .

Dos caminos son *desconectados* si no comparten ningún vértice. La Figura 2.4 muestra un par de caminos desconectados.

**Definición 2.5.3 (Encadenamiento)** *Se conoce como encadenamiento de tamaño  $l$  entre dos conjuntos de vértices  $S_1$  y  $S_2$  a un conjunto de  $l$  caminos mutuamente desconectados que conectan vértices del conjunto  $S_1$  con vértices de  $S_2$ .*

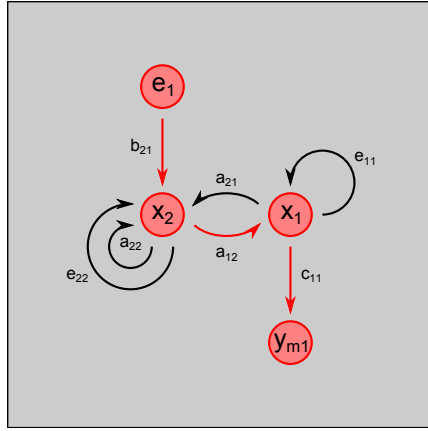


Figura 2.3: Camino simple formado por la secuencia de vértices  $e_1, x_2, x_1, y_{m1}$  y las aristas que los conectan ( $b_{21}, a_{12}, c_{11}$ ). Se observa que los vértices aparecen una sola vez en la secuencia.

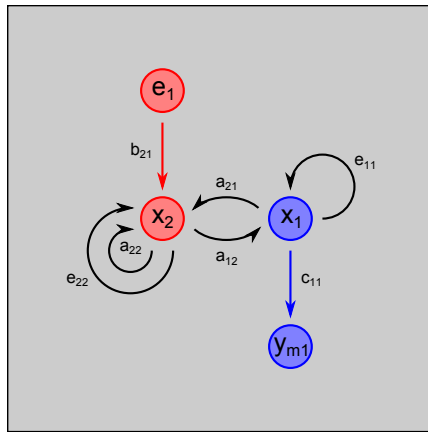


Figura 2.4: Par de caminos desconectados. Se observa que el primer camino conecta los vértices  $e_1$  y  $x_2$  (color rojo), mientras que el segundo conecta los vértices  $x_1$  y  $y_{m1}$  (color azul), se observa que entre los caminos no se comparte ningún vértice.

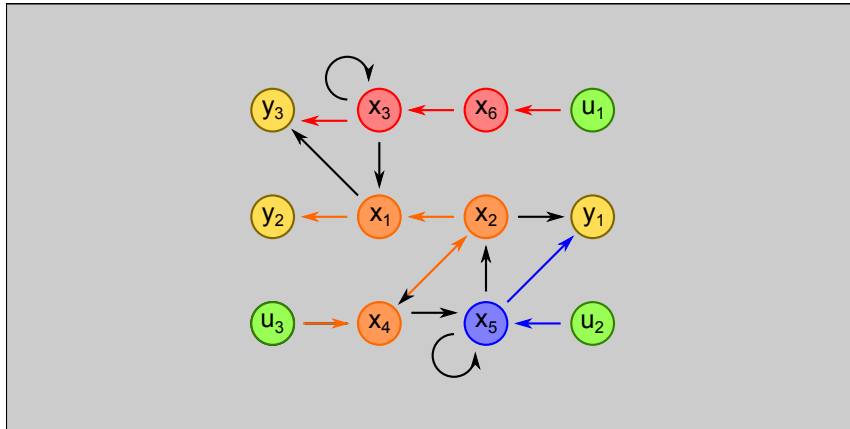


Figura 2.5: Encadenamiento de tamaño 3 entre que conecta los conjuntos de vértices  $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$  y  $\mathcal{Y}_m = \{y_1, y_2, y_3\}$  en colores verde y amarillo respectivamente. El camino en color rojo conecta  $u_1$  con  $y_3$ , mientras que el camino en color naranja conecta  $u_3$  con  $y_2$  y el camino en color azul conecta  $u_2$  con  $y_1$ . Se observa que los caminos mencionados son simples y desconectados entre sí.

En la Figura 2.5 se muestra un encadenamiento de tamaño 3 entre los el conjunto de vértices  $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$  y  $\mathcal{Y}_m = \{y_1, y_2, y_3\}$ .



## Capítulo 3

# Herramientas de análisis para la determinación de eventos no detectables

En este capítulo se establecen dos métodos para la búsqueda de eventos no detectables en sistemas dinámicos. El primer método utiliza herramientas algebraicas para determinar la existencia de eventos no detectables a partir de una condición de rango sobre la función de transferencia. En caso de que el sistema cuente con ceros de transmisión, se requiere de una realización en espacio de estados para calcular sus respectivas condiciones iniciales y vector de dirección de evento.

El segundo método utiliza herramientas de teoría de grafos para determinar el rango genérico de un sistema estructurado que represente al sistema que se quiere utilizar. En este caso no es posible determinar expresiones explícitas para los eventos no detectables ni bases para sus subespacios.

### 3.1. Condiciones algebraicas para la existencia de eventos no detectables

Para una matriz de transferencia, la condición de eventos no detectables (2.4) se transforma en el dominio de Laplace como:

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{mf}}(\bar{\mathbf{E}}(s), s) = 0 \quad (3.1)$$

Ya que  $\mathbf{Y}_{\mathbf{mf}}(\bar{\mathbf{E}}(s), s) = G(s)\bar{\mathbf{E}}(s)$ , la ecuación (3.1) es:

$$G(s)\bar{\mathbf{E}}(s) = 0 \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) representa un sistema homogéneo de ecuaciones lineales sobre el campo de funciones racionales, donde  $\bar{\mathbf{E}}(s)$  es un vector desconocido. La existencia de soluciones no triviales a dicho sistema se ha estudiado ampliamente dentro de la rama del álgebra lineal [Friedberg et al., 2002] [Bronshtein et al., 2007]. La condición para la existencia de soluciones no triviales del sistema homogéneo (3.2) es:

$$\text{rank}(G(s)) < p \quad \forall s \in \mathbb{C}^1 \quad (3.3)$$

donde  $p$  es la dimensión del vector de eventos  $\bar{\mathbf{E}}(s)$

---

<sup>1</sup>Esta condición también puede ser interpretada como  $\text{rank}_{\text{norm}}(G) < p$  donde  $p$  es la dimensión del vector de eventos  $\bar{\mathbf{E}}(s)$  y  $\text{rank}_{\text{norm}}(G)$  es el *rango normal* de la matriz  $G$  definido como  $\text{rank}_{\text{norm}}(G) = \text{rank}(G(s)) \quad \forall s \in \mathbb{C}$  excepto quizá en un subconjunto de medida cero del plano complejo. El *rango normal* también puede ser definido como  $\text{rank}_{\text{norm}}(G) = \max\{\text{rank}(G(s)) | s \in \mathbb{C}\}$ .

Dependiendo del rango de la matriz de transferencia  $rank(G(s))$ , la dimensión del vector de eventos  $p$  y medición  $q$  se tienen los casos expuestos en la Tabla 3.1, en dicha tabla se muestra la herramienta utilizada y las conclusiones que se derivan del análisis.

**Caso 1: La dimensión del vector de eventos  $p$  es mayor que la dimensión del vector de medición  $q$**

El rango de la matriz  $G(s)$  cumple en general:

$$rank(G(s)) \leq \min\{p, q\} = q < p, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (3.4)$$

Con lo que se asegura el cumplimiento de la condición (3.3), por lo tanto, se puede asegurar que, en un sistema cuya dimensión del vector de evento es mayor que la dimensión del vector de medición, siempre existen soluciones no triviales del sistema (3.2), garantizando la existencia de eventos no detectables.

**Caso 2: La dimensión del vector de eventos  $p$  es menor o igual que la dimensión del vector de medición  $q$**

De este caso se desprenden dos escenarios de acuerdo con el rango de la función de transferencia

$$p \leq q \quad \begin{cases} rank(G(s)) < p \quad \forall s \in \mathbb{C} \\ \exists z \in \mathbb{C} \text{ tal que } rank(G(z)) = p \end{cases}$$

En caso de que  $rank(G(s)) < p \quad \forall s \in \mathbb{C}$  (condición (3.3)), existen eventos no detectables, los cuales son solución del sistema homogéneo (3.2). Di-

Tabla 3.1: Escenarios que se dan dependiendo de la dimensión del vector de eventos, el vector de medición y el rango de la matriz de transferencia.

Condiciones	Modelo	Conclusiones
Dimensión del vector de eventos mayor que la dimensión del vector de medición	Matriz de transferencia	Existen eventos no detectables y forman un subespacio en $\mathbb{C}$
Rango de la matriz de transferencia menor que la dimensión del vector de eventos para todo $s \in \mathbb{C}$	Matriz de transferencia	Existen eventos no detectables y forman un subespacio en $\mathbb{C}$
Rango de la matriz de transferencia menor que la dimensión del vector de eventos para algún $z \in \mathbb{C}$	Matriz de transferencia/Espacio de estados	Los ceros de transmisión del sistema constituyen eventos no detectables con su respectivo vector de dirección y condiciones iniciales

chas soluciones no triviales, linealmente independientes, forman una base del subespacio de soluciones del sistema homogéneo.

Sea  $\mathbf{k}$  una solución no trivial del sistema  $G(s)\mathbf{k} = 0$ . Ahora bien  $G(s)(f * \mathbf{k}) = f * G(s)\mathbf{k} = f * 0 = 0$  con  $f \in$  campo de funciones racionales por lo que  $f * \mathbf{k}$  es solución del sistema siempre y cuando  $\mathbf{k}$  sea solución. Esta idea puede extenderse para abarcar un conjunto máximo de soluciones linealmente independientes con lo cuál se caracteriza el espacio de soluciones del sistema.

De esta manera, en un sistema lineal invariante en el tiempo existe un subespacio de eventos no detectables, con medida distinta de cero si y sólo si

$$\text{rank}(G(s)) < p \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (3.5)$$

donde  $p$  es la dimensión del evento considerado.

En caso que  $\text{rank}(G(z)) < p$  solamente en un conjunto de valores  $z \in \mathbb{C}$  con medida cero, el conjunto de eventos no detectables está constituido por los ceros del sistema considerando sus condiciones iniciales y direcciones específicas.

El análisis de eventos que se propone se basa en la definición de cero que se encuentra en [MacFarlane and Karcianias, 1976]. En dicho artículo se explica que los ceros de transmisión (frecuencias  $z$  en el plano complejo para las cuales la matriz de transferencia pierde rango) son un subconjunto de los ceros invariantes. Dichos conjuntos coinciden cuando el sistema  $\{A, F, C, H, E\}$  es una realización mínima de  $G(s)$ .

La frecuencia compleja  $z$  se conoce como *cero invariante* de un sistema dinámico descrito por el conjunto de matrices  $\{A, F, C, H, E\}$  si existe una condición inicial  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  y un vector  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^p$  tal si se considera un evento

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{g} \exp(z t) 1(t) \quad (3.6)$$

donde  $1(t)$  es la función escalón unitario, la medición correspondiente es

$$\mathbf{y}_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}(t), t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.7)$$

Una condición suficiente y necesaria para la existencia de  $z$ ,  $\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{g}$  tal que la frecuencia compleja  $z$  sea un cero invariante es

$$\begin{bmatrix} zE - A & -F \\ C & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

Considerando

$$P(z) = \begin{bmatrix} zE - A & -B \\ C & H \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

La ecuación (3.8) representa un sistema de ecuaciones lineales homogéneo que tiene solución no trivial si y solo si  $\text{rank}(P(z)) < n + p$ , donde  $n$  es la dimensión del vector de estado,  $p$  es la dimensión del vector de evento.

Un hecho importante a destacar es que los eventos (3.6) cumplen con la definición de evento no detectable siempre y cuando  $z$  sea un cero invariante del sistema.

Sea  $z$  un cero invariante del sistema, es decir, existe  $\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{g}$  tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= \mathbf{g} \exp(z t) 1(t) \\ \implies \mathbf{y}_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}(t), t) &= \mathbf{0}, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Sea  $\mathbf{y}_{\text{ml}}(\mathbf{x}_0^*, t)$  la medición asociada con una condición normal de operación. Entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{\text{ml}}(\mathbf{x}_0^*, t) &= \mathbf{y}_{\text{ml}}(\mathbf{x}_0^*, t) + \mathbf{y}_{\text{m}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}(t), t) \\
 &= \mathbf{y}_{\text{ml}}(\mathbf{x}_0^*, t) + \mathbf{y}_{\text{ml}}(\mathbf{x}_0, t) + \mathbf{y}_{\text{mf}}(\mathbf{e}(t), t) \\
 &= \mathbf{y}_{\text{ml}}(\mathbf{x}_0^* + \mathbf{x}_0, t) + \mathbf{y}_{\text{mf}}(\mathbf{e}(t), t) \\
 &= \mathbf{y}_{\text{m}}(\mathbf{x}_0^* + \mathbf{x}_0, \mathbf{e}(t), t)
 \end{aligned}$$

$$\implies \mathbf{y}_{\text{ml}}(\mathbf{x}_0^*, t) = \mathbf{y}_{\text{m}}(\mathbf{x}_0^* + \mathbf{x}_0, \mathbf{e}(t), t) \quad (3.10)$$

Por lo tanto, el evento  $\mathbf{e}(t)$  dado por (3.6) es no detectable.

Si el sistema no tiene ceros invariantes finitos se puede asegurar que el conjunto de eventos no detectables es vacío, por lo tanto, todo evento que sea inyectado al sistema a través de las matrices  $F$  y  $H$  es detectable y el sistema no se considera vulnerable en el sentido abordado en este trabajo.

## 3.2. Búsqueda de eventos $\bar{\mathbf{e}}$ vía análisis algebraico

A continuación se resume el procedimiento a seguir para realizar un análisis algebraico de los posibles eventos no detectables de un sistema dinámico, caracterizando de esta manera un cierto índice de vulnerabilidad.

1. Disponer de un modelo matemático que describa adecuadamente el comportamiento dinámico del sistema, incluyendo los eventos  $\bar{\mathbf{e}}$  como

entradas exógenas. El modelo que se usó para este efecto fue la representación en espacio de estados, lineal invariante en el tiempo generalizada (2.8).

- a) Establecer la manera en la que los eventos pueden ser inyectados al sistema. Ésto se hace mediante la elección de las matrices  $F$  y  $H$  del sistema.
  - b) Determinar la matriz  $C$  considerando el conjunto de mediciones que se tengan disponibles.
2. Determinar la matriz de transferencia que relaciona los eventos con las mediciones usando la expresión (2.13).
  3. Calcular el rango de la matriz de transferencia ( $rank(G(s))$ ).
    - a) Si se cumple que  $rank(G(s)) < p \forall s \in \mathbb{C}$ , entonces, se establece que existen eventos no detectables y, por lo tanto, el sistema es vulnerable. La base del subespacio nulo de la matriz de transferencia se usa para encontrar una expresión explícita de los eventos  $\bar{e}$  no detectables que pueden ser usados con el objeto de generar un daño en el sistema.
    - b) En caso que  $rank(G(z)) < p$  para un subconjunto de valores  $z \in \mathbb{C}$  aislados, se concluye que el conjunto de eventos no detectables está constituido por los ceros invariantes del sistema que, junto con el correspondiente vector de dirección y las condiciones iniciales asociadas en el espacio de estados pueden usarse para generar un daño al sistema si se aplican en el momento en el que dicho sistema



se encuentra en ciertas condiciones de operación.

La Figura 3.1 resume el proceso para realizar un análisis algebraico de vulnerabilidad en un sistema dinámico. En ella se muestra en color verde el inicio del proceso; en color rojo el fin del mismo; los procesos a realizar en color amarillo; las decisiones en color cyan; mientras que los resultados y teoremas usados se muestran en color magenta.

### 3.3. Condiciones estructurales para la existencia de eventos no detectables

Usando las definiciones de sistemas estructurados y teoría grafos presentadas las secciones 2.4 y 2.5, Pasqualetti et al. [2011a] y Pasqualetti et al. [2013] han establecido un resultado que vincula el concepto de encadenamiento con el concepto de invertibilidad estructural por la izquierda y se resume en el siguiente teorema:

**Teorema 3.3.1 (Invertibilidad estructural por la izquierda)** *Sea  $[\Sigma]$  un sistema estructurado definido por las matrices  $\{[A], [F], [C], [H], [E]\}$  cuyo espacio de parámetros define un polítopo Laplaciano en  $\mathbb{R}^d$  para algún  $d \in \mathbb{N}_0$ . Supongase que  $s[E] - [A]$  es estructuralmente no degenerado ( $\det(s[E] - [A]) \neq 0$  para casi toda realización admisible del sistema). Si el sistema  $[\Sigma]$  es estructuralmente invertible por la izquierda entonces existe un encadenamiento de tamaño  $|\mathcal{E}|$  de  $\mathcal{E}$  a  $\mathcal{Y}_m$ .*

El resultado previo establece una condición necesaria para la invertibilidad estructural por la izquierda, esto es, en los grafos asociados a sistemas

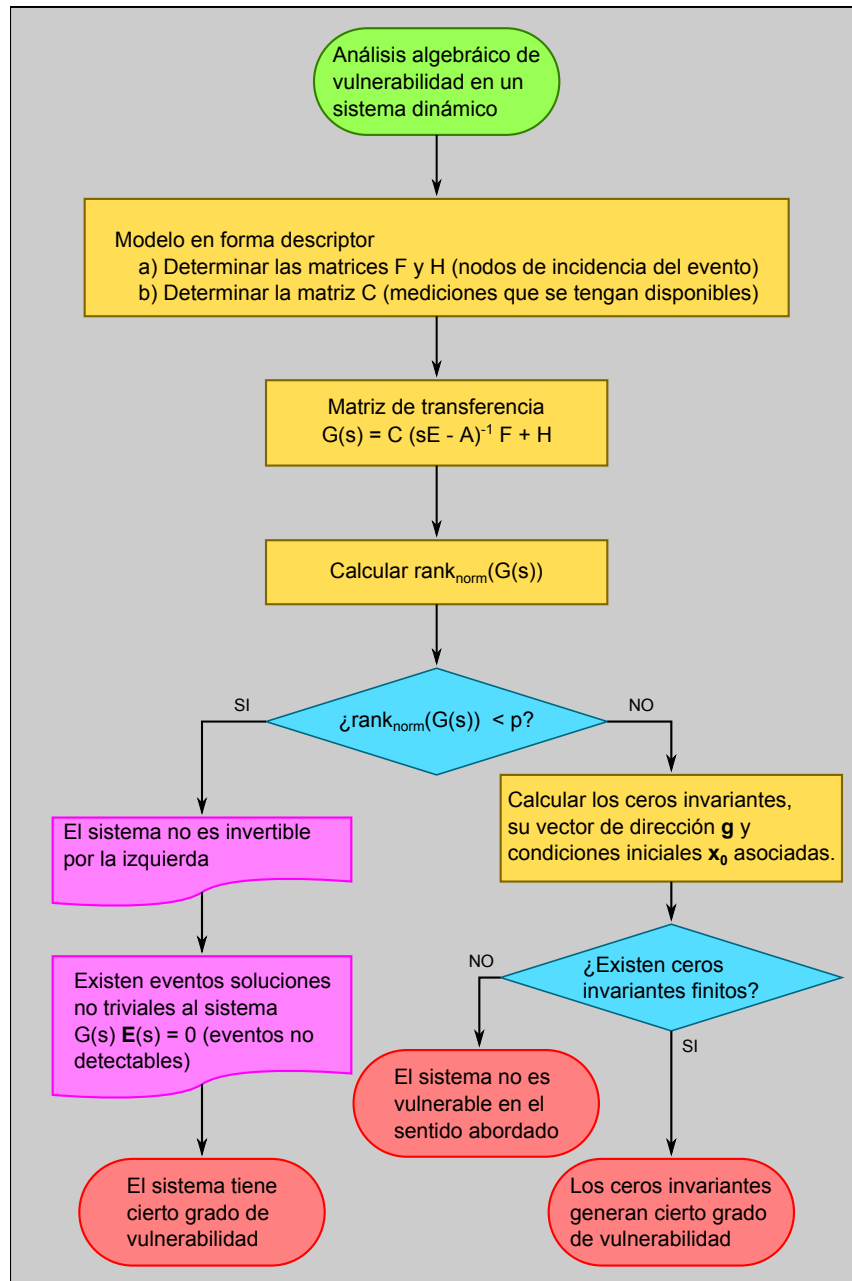


Figura 3.1: Diagrama de flujo que resume el proceso para realizar un análisis algebraico de vulnerabilidad en un sistema dinámico.

estructurados en donde la invertibilidad por la izquierda es una propiedad estructural existe siempre un encadenamiento de tamaño  $|\mathcal{E}|$  que conecta el conjunto de vértices del evento con el conjunto de vértices de medición, sin embargo, el hecho de que exista dicho encadenamiento no garantiza la invertibilidad de toda realización numérica admisible. Dicho resultado es consistente con el siguiente teorema publicado por Dion et al. [2003], el cual es válido para sistemas estructurados lineales en forma normal.

**Teorema 3.3.2 (Estructura genérica en el infinito)** *Considere un sistema estructurado del tipo*

$$[\Sigma] : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= [A]\mathbf{x}(t) + [F]\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}_m(t) &= [C]\mathbf{x}(t) + [H]\mathbf{e}(t) \end{cases} \quad (3.11)$$

*y su grafo asociado  $\mathcal{G}$ . Sea  $[G](s)$  la matriz de transferencia asociada con dicho sistema.*

1. *El rango genérico  $g - \text{rank}([G](s))$  es igual al tamaño máximo de un encadenamiento en  $\mathcal{G}$  que conecta el conjunto de vértices de evento  $\mathcal{E}$  con el conjunto de vértices de medición  $\mathcal{Y}_m$ .*
2. *Sea el rango genérico  $g - \text{rank}([G](s)) = r$ . La suma de todos los ordenes genéricos de los ceros en infinito (también llamado el número genérico de ceros en infinito) es igual al número mínimo de vértices de  $\mathcal{X}$  contenidos en un encadenamiento de tamaño  $r$  en  $\mathcal{G}$  entre  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{Y}_m$ .*
3. *Sea  $g - \text{rank}[G](s) = r$  y sea  $\alpha_i$  el mínimo número de vértices contenidos en un encadenamiento de tamaño  $i$  en  $\mathcal{G}$  entre  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{Y}_m$  para  $i = 1, 2, \dots, r$ . Entonces los ordenes genéricos de los ceros en infinito*

del sistema estad dados por la lista  $g - l_{infz} = \{g - t_i | i = 1, \dots, r\}$ , donde  $g - t_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$  para  $i = 1, 2, \dots, r$ , con  $\alpha_0 = 0$ . Con lo cual  $\sum_{i=1}^r g - t_i = g - n_{infz}$ .

Este resultado se relaciona con la invertibilidad por la izquierda de manera natural ya que para que una matriz de transferencia correspondiente a una realización numérica admisible de un sistema estructurado sea invertible por la izquierda se requiere que  $rank(G(s)) = |\mathcal{E}| \forall s \in \mathcal{C}$  excepto quizá en un subconjunto de puntos aislados de  $\mathcal{C}$ . Por lo que se puede asegurar que, si el tamaño máximo de un encadenamiento entre  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{Y}_m$  en el grafo asociado a un sistema estructurado es menor que la dimensión del vector de evento entonces ninguna realización numérica admisible de dicho sistema es invertible por la izquierda garantizando la no invertibilidad estructural del sistema. Por otro lado, si el tamaño máximo del encadenamiento es igual a la dimensión del vector de eventos se concluye que existen realizaciones numéricas invertibles por la izquierda, sin embargo, no descarta la posibilidad de que existan realizaciones numéricas que sean no invertibles por la izquierda, lo cuál es consistente con el resultado de Pasqualetti et al. [2013].

De manera consistente con lo explicado en la sección 3.1, la existencia de eventos no detectables en un sistema LTI se asegura con el cumplimiento de una condición sobre el rango de su matriz de transferencia ( $rank(G(s)) < |\mathbf{e}(t)| \forall s \in \mathcal{C} \implies \exists \bar{\mathbf{e}}(t)$ ). Con esta condición se relaciona la invertibilidad por la izquierda con la existencia de eventos no detectables. Si un sistema no es invertible por la izquierda se concluye inmediatamente la existencia de eventos no detectables.

En resumen, si en un grafo asociado a un sistema estructural es imposible encontrar un encadenamiento de tamaño  $|\mathcal{E}|$  entre  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{Y}_m$  entonces existen eventos no detectables en toda realización numérica admisible, entonces, la existencia de eventos no detectables es una propiedad estructural del sistema.

### 3.4. Búsqueda de eventos $\bar{e}$ vía teoría de grafos

Conforme con los hechos antes presentados, a continuación se resume un procedimiento para determinar la existencia estructural de eventos no detectables en un sistema considerando un conjunto específico de nodos de entrada de evento:

1. Establecer un modelo matemático estructurado que condense la información sobre las conexiones entre las variables que representan al sistema. Dicho modelo puede obtenerse a partir del modelo descriptor lineal e invariante en el tiempo. En este punto se deben considerar los nodos de entrada del ataque que se considere.
2. Asociar un grafo dirigido con el modelo estructurado siguiendo las reglas descritas en la sección 2.5
3. Determinar el tamaño máximo de un encadenamiento entre los conjuntos de vértices de evento y medición en el grafo asociado.
  - a) Si dicho tamaño máximo es menor que la dimensión del vector de evento (número de vértices de evento) se concluye que el sistema

es estructuralmente no invertible por la izquierda y, en consecuencia, existen eventos no detectables en toda realización numérica admisible del sistema estructurado, por lo cual se dice que el sistema tiene una vulnerabilidad estructural asociada con los nodos de evento considerados.

- b) En caso de que el máximo tamaño para un encadenamiento con las características mencionadas sea igual a la dimensión del evento se concluye que existen realizaciones numéricas invertibles por la izquierda, sin embargo, no se descarta la existencia de realizaciones numéricas no invertibles por la izquierda.

En la Figura 3.2 se muestra un diagrama de flujo que resume el proceso que se propone para establecer la vulnerabilidad estructural en sistemas dinámicos (estructurados). En este punto resulta conveniente mencionar que el método funciona adecuadamente para establecer la vulnerabilidad estructural, sin embargo, no se puede garantizar que en toda realización numérica admisible todo evento sea detectable incluso si se conoce el estado al momento en el que se inyecta la señal de ataque. En caso que no se pueda concluir la vulnerabilidad estructural se recomienda buscar otro sistema estructurado que represente al sistema que se quiere estudiar, esto puede hacerse aprovechando la flexibilidad con la que cuentan los sistemas descriptores.

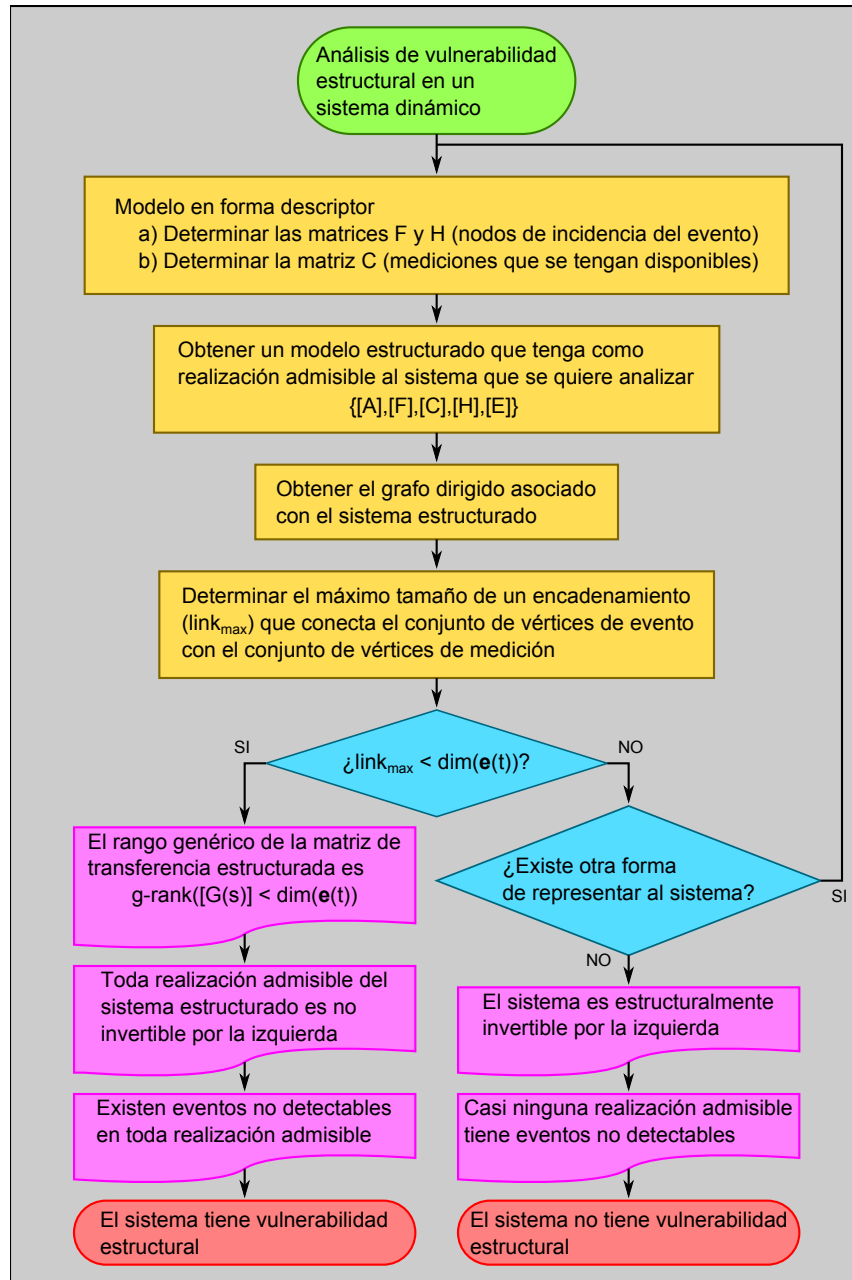


Figura 3.2: Diagrama de flujo que resume el proceso para realizar un análisis de vulnerabilidad estructural en un sistema dinámico.

# Capítulo 4

## Caso de estudio: Circuito eléctrico resonante

A continuación se muestra el procedimiento de búsqueda de eventos no detectables en el circuito eléctrico resonante de la Figura 4.1 utilizando tanto herramientas algebraicas como la teoría de grafos.

Los métodos de análisis propuestos requieren de modelos matemáticos LTI que representen al sistema. En el caso de circuitos eléctricos, dichos modelos pueden obtenerse a partir de las Kirchhoff y las expresiones para las relaciones constitutivas de capacitores e inductores [Wellstead, 2000].

Considerando que los valores de capacitancia e inductancia son constantes en el tiempo y que las relaciones constitutivas entre las variables del sistema son lineales se tiene:

$$C \frac{dV_C}{dt} = i_C \quad (4.1)$$

donde  $i_C$  y  $V_C$  son la corriente y el voltaje a través del capacitor y  $C$  es la



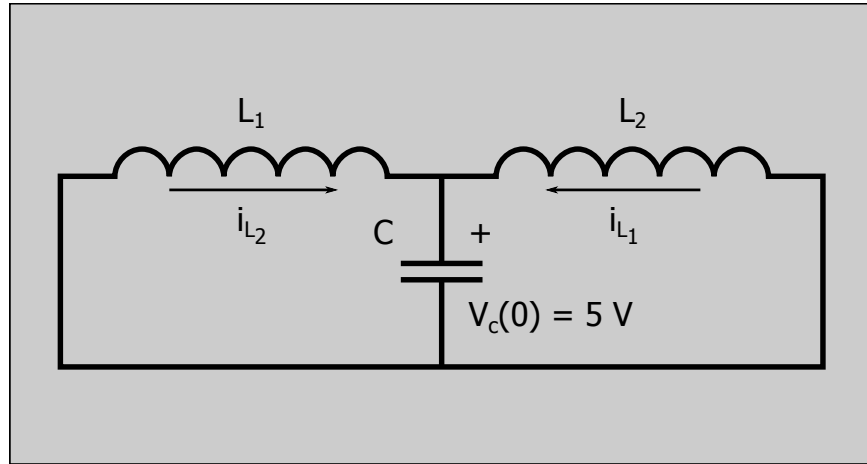


Figura 4.1: Diagrama del circuito eléctrico resonante que consta de dos inductores y un capacitor. Para garantizar asegurar el flujo de corriente en el circuito se supuso que el voltaje a través del capacitor al tiempo 0 es 5 Volts.

capacitancia.

Las relaciones constitutivas correspondientes a los inductores son:

$$L_k = \frac{di_{L_k}}{dt} = V_{L_k} \quad k = 1, 2 \quad (4.2)$$

donde  $i_{L_k}$  y  $V_{L_k}$  son las corrientes y voltajes a través de los inductores y  $L_k$  son las inductancias. El subíndice  $k$  denota a un inductor específico del circuito.

Aplicando las leyes de Kirchhoff se obtienen las siguientes ecuaciones de mallas y nodo:

$$V_{L_1} + V_C = 0 \quad (4.3)$$

$$V_{L_2} + V_C = 0 \quad (4.4)$$

$$i_{L_1} + i_{L_2} - i_C = 0 \quad (4.5)$$

## 4.1. Determinación de eventos no detectables con mediciones de voltaje y corriente a través del capacitor

### 4.1.1. Modelo LTI

A partir de las ecuaciones constitutivas y las ecuaciones de mallas y nodos se construye el modelo LTI:

$$\begin{cases} E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + F\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}_m(t) = C\mathbf{x}(t) + H\mathbf{e}(t) \end{cases} \quad (4.6)$$

considerando  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_{L_1} & i_{L_2} & V_C \end{bmatrix}^T$ , la matriz  $A$  es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, las matrices  $F$  y  $H$  se escogen de manera que representen los nodos en donde se quiere analizar la vulnerabilidad. En este caso se consideró que las variables que son sujetas a recibir la acción de un evento premeditado

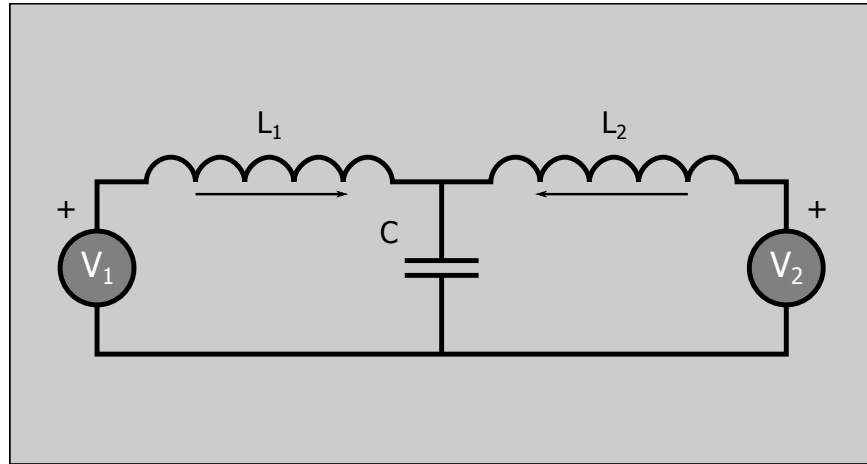


Figura 4.2: Diagrama del circuito eléctrico resonante considerando los nodos de incidencia del evento (fuentes externas).

son los voltajes de las mallas. El evento se manifiesta físicamente como un par de fuentes de voltaje (Figura 4.2). Las matrices  $F$  y  $H$  del sistema son:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si se supone que, para obtener información acerca de la dinámica del circuito, se cuenta con mediciones de voltaje y corriente a través del capacitor, la matriz  $C$  es:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de transferencia del sistema se obtiene con la ecuación (2.13), considerando que la matriz  $E$  es igual a la matriz identidad.

$$G(s) = \frac{1}{(CL_1L_2)s^2 + (L_1 + L_2)} \begin{bmatrix} L_2 & L_1 \\ (CL_2)s & (CL_1)s \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

### Análisis algebraico

Para determinar la existencia de eventos no detectables en el sistema se debe verificar el cumplimiento de la condición (3.3).

Se observa que el segundo renglón de la matriz en la ecuación (4.7) es combinación lineal del primero para cualquier valor  $s$ .

$$R_2 = (Cs) \begin{bmatrix} L_2 & L_1 \end{bmatrix} = (Cs)R_1 \quad (4.8)$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  son el primero y segundo vector renglón de la matriz de transferencia respectivamente. Con ésto se prueba que el rango de la matriz de transferencia es:

$$\text{rank}(G(s)) = 1 < p = 2 \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (4.9)$$

donde  $p$  es la dimensión del evento  $\mathbf{e}(t)$ .

Ya que el rango de la matriz de transferencia es menor que la dimensión del evento que se esta considerando, para todo valor  $s \in \mathbb{C}$ , se concluye que el sistema tiene evento no detectables siempre y cuando sean inyectados al sistema de manera consistente con las matrices  $F$  y  $H$ .

Debido a que se cumple con la condición para eventos no detectables para todo  $s \in \mathbb{C}$ , existe un subespacio de eventos no detectables con medida

distinta de cero. Los vectores en dicho subespacio cumplen con la ecuación (3.2):

$$\implies G(s)\bar{\mathbf{E}}(s) = \frac{1}{(CL_1L_2)s^2 + (L_1 + L_2)} \begin{bmatrix} L_2 & L_1 \\ (CL_2)s & (CL_1)s \end{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}(s) = 0 \quad (4.10)$$

Considerando  $\bar{\mathbf{e}}(s) = [\bar{e}_1(s) \quad \bar{e}_2(s)]'$  se tiene que la ecuación previa se cumple siempre y cuándo se cumplan las siguientes ecuaciones simultáneamente:

$$\begin{cases} L_2\bar{e}_1(s) + L_1\bar{e}_2(s) = 0 \\ (CL_2)s\bar{e}_1(s) + (CL_1)s\bar{e}_2(s) = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Las soluciones de este sistema homogéneo de ecuaciones están dadas por la expresión

$$\bar{e}_2 = -\frac{L_2}{L_1}\bar{e}_1(s) \quad (4.12)$$

A partir de dicha expresión se infiere la base del subespacio de eventos no detectables del sistema:

$$\mathcal{B}_{nd} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{L_2}{L_1} \end{bmatrix} \right\} \quad (4.13)$$

Por lo tanto, existen eventos no detectables mediante las mediciones de corriente y voltaje a través del capacitor con la forma:

$$\bar{\mathbf{e}}(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{L_2}{L_1} \end{bmatrix} f(s) \quad (4.14)$$

donde  $f(s) \neq 0$  es una función arbitraria en el dominio de Laplace.

### Análisis vía teoría de grafos

El modelo en variables de estado para el circuito eléctrico que se utiliza en esta sección es:

$$\begin{cases} E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + F\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}_m(t) = C\mathbf{x}(t) + H\mathbf{e}(t) \end{cases} \quad (4.15)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbf{y}_m = [V_C \ i_C]^T$ ,  $\mathbf{x} = [i_{L_1} \ i_{L_2} \ V_C]^T$ .

El sistema estructurado está determinado por el conjunto de matrices estructuradas  $\{[A], [F], [C], [H], [E]\}$ :

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad [F] = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

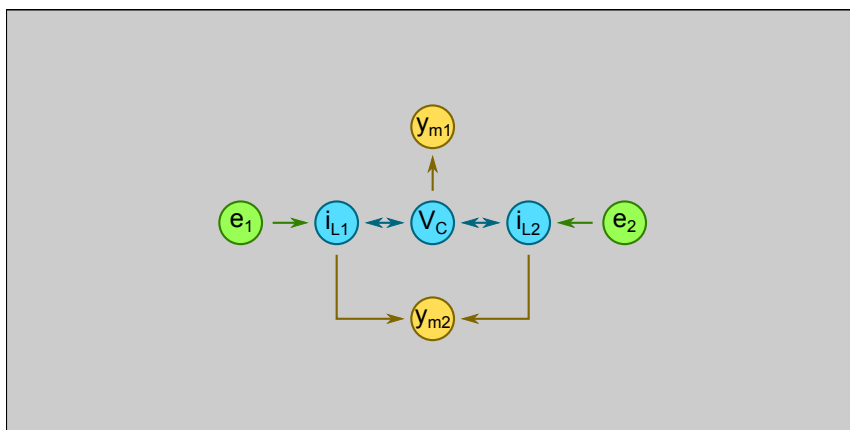


Figura 4.3: Grafo dirigido asociado con el sistema estructurado  $\{[A], [F], [C], [H], [E]\}$ . Los conjuntos de vértices de eventos, mediciones y estados son  $\{e_1, e_2\}$ ,  $\{y_{m1}, y_{m2}\}$  y  $\{i_{L1}, i_{L2}, V_C\}$  respectivamente. Por simplicidad se han omitido las aristas que conectan un vértice consigo mismo (autolazos).

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & 0 \end{bmatrix} \quad [H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{bmatrix}$$

donde  $a_{13}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, f_{11}, f_{22}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, e_{11}, e_{22}, e_{33} \in \mathbb{R}$

En la Figura 4.3 se muestra el grafo dirigido correspondiente al sistema estructurado  $\{[A], [F], [C], H, [E]\}$ . La Figura 4.4 muestra la existencia de un encadenamiento de tamaño 2 entre los vértices de evento y los vértices de medición, estableciendo de esta manera la existencia de realizaciones numéricas invertibles por la izquierda a través del teorema 3.3.2, sin embargo

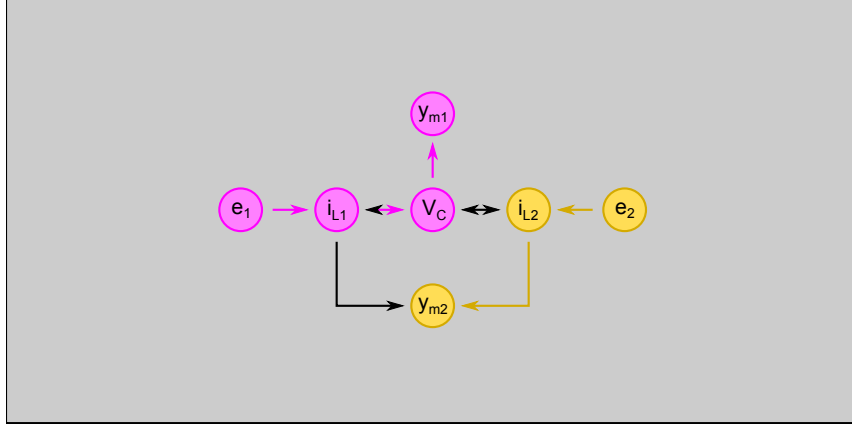


Figura 4.4: Grafo dirigido asociado con el sistema estructurado  $\{[A], [F], [C], [H], [E]\}$ . Se observa la existencia de un encadenamiento de tamaño 2.

este resultado no excluye la existencia de realizaciones numéricas no invertibles, en particular, se demostró en la sección previa que las realizaciones numéricas correspondientes al circuito eléctrico tienen subespacios de eventos no detectables y en consecuencia son no invertibles por la izquierda. Esto se corrobora al calcular el rango genérico de la función de transferencia del sistema estructurado.

$$[G](s) = \begin{bmatrix} \frac{a_{31}f_{11}c_{13}e_{22}s}{e_{11}e_{22}e_{33}s^3 - (a_{13}a_{31}e_{22} + a_{23}a_{32}e_{11})s} & \frac{a_{32}f_{22}c_{13}e_{11}s}{e_{11}e_{22}e_{33}s^3 - (a_{13}a_{31}e_{22} + a_{23}a_{32}e_{11})s} \\ \frac{f_{11}[c_{21}(e_{22}e_{33}s^2 - a_{23}a_{32}) + a_{23}a_{31}c_{22}]}{e_{11}e_{22}e_{33}s^3 - (a_{13}a_{31}e_{22} + a_{23}a_{32}e_{11})s} & \frac{f_{22}[c_{22}(e_{11}e_{33}s^2 - a_{13}a_{31}) + a_{13}a_{32}c_{21}]}{e_{11}e_{22}e_{33}s^3 - (a_{13}a_{31}e_{22} + a_{23}a_{32}e_{11})s} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\implies g - \text{rank}([G](s)) = 2 \quad (4.17)$$

Con el modelo LTI considerado en esta sección fue posible determinar la existencia de eventos no detectables usando herramientas algebraicas, sin



embargo, el sistema estructurado que se deriva de dicho modelo LTI no permitió establecer la existencia de dichos eventos en las realizaciones numéricas admisibles que constituyen circuitos eléctricos contruidos a partir del diagrama de la Figura 4.2. Para poder determinar la existencia de eventos no detectables usando herramientas de teoría de grafos se aprovecha la flexibilidad que permite el uso de modelos LTID, este procedimiento se ejemplifica con detalle en la siguiente sección.

#### 4.1.2. Modelo LTID

Una manera distinta de representar la dinámica del circuito eléctrico resonante es mediante un modelo descriptor. Se tiene que la segunda ecuación de medición ( $y_{m2} = i_C = i_{L_1} + i_{L_2}$ ) puede ser incluida explícitamente dentro del modelo si se amplía el vector de estado a  $\mathbf{x}' = [i_{L_1} \ i_{L_2} \ i_C \ V_C]^T$  obteniendo el modelo descriptor:

$$\begin{cases} E'\dot{\mathbf{x}}' = A'\mathbf{x}' + F'\mathbf{e} \\ \mathbf{y}_m' = C'\mathbf{x}' + H'\mathbf{e} \end{cases} \quad (4.18)$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad F' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad H' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E' = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

La matriz de transferencia  $G(s) = C'(sE' - A')^{-1}F' + H'$  es:

$$G(s) = \frac{1}{(CL_1L_2)s^2 + (L_1 + L_2)} \begin{bmatrix} L_2 & L_1 \\ (CL_2)s & (CL_1)s \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

### Análisis algebraico

Debido a que la función de transferencia es igual a la que se obtuvo a partir del sistema LTI de la sección previa, se concluye que existen eventos no detectables siguiendo el mismo procedimiento expuesto en dicha sección.

### Análisis vía teoría de grafos

El sistema estructurado está determinado por las matrices  $\{[A'], [F'], [C'], [H'], [E']\}$ :

$$[A'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix} \quad [F'] = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{14} \\ 0 & 0 & c_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad [H'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

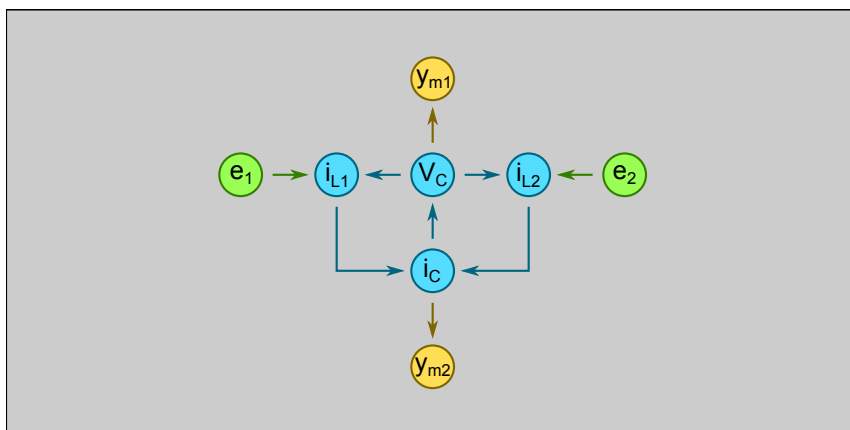


Figura 4.5: Grafo dirigido asociado con el sistema estructurado  $\{[A'], [F'], [C'], [H'], [E']\}$ . Los conjuntos de vértices de eventos, mediciones y estados son  $\{e_1, e_2\}$ ,  $\{y_{m1}, y_{m2}\}$  y  $\{i_{L1}, i_{L2}, i_C, V_C\}$  respectivamente. Por simplicidad se han omitido las aristas que conectan un vértice consigo mismo (autolazos).

$$[E'] = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{44} \end{bmatrix}$$

El grafo dirigido asociado a este sistema estructurado se muestra en la Figura 4.5. En dicho grafo se puede ver que cualquier par de caminos simples que conecten los vértices de evento con los vértices de medición comparten el vértice de estado  $i_C$ , por lo tanto se afirma que el tamaño máximo de un encadenamiento de entre dichos conjuntos es menor que en número de vértices de evento (Figura 4.6). Haciendo uso del teorema 3.3.1 se concluye que el sistema es estructuralmente no invertible por la izquierda y por lo tanto existen eventos no detectables en toda realización numérica admisible

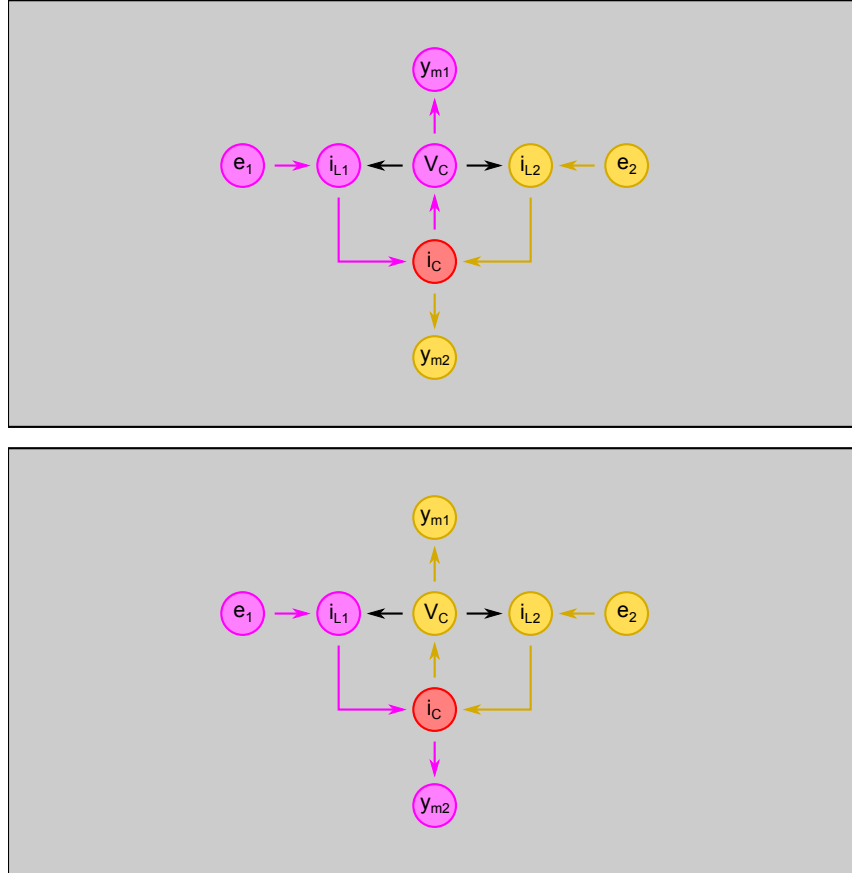


Figura 4.6: Grafo dirigido asociado con el sistema estructurado  $\{[A'], [F'], [C'], [H'], [E']\}$ . Se muestran las dos posibilidades que existen para conectar los vértices de eventos con los vértices de mediciones ( $e_1$  con  $y_{m1}$  y  $e_2$  con  $y_{m2}$ ; y  $e_1$  con  $y_{m2}$  y  $e_2$  con  $y_{m1}$ ), en ambos casos se observa que el vértice  $i_C$  es compartido por los caminos simples, con lo cual se excluye la existencia de un encadenamiento de tamaño 2 entre los conjuntos de vértices  $\{e_1, e_2\}$  y  $\{y_{m1}, y_{m2}\}$ .

del sistema estructurado, incluido todo circuito eléctrico resonante formado a partir del diagrama en la Figura 4.2. Este hecho se comprueba al observar la matriz de transferencia genérica que se obtiene a partir de las matrices estructuradas del sistema:

$$[G'](s) = \frac{1}{a_{33}e_{11}e_{22}e_{44}s^2 + a_{14}a_{31}a_{43}e_{22} + a_{24}a_{32}a_{43}e_{11}} \begin{bmatrix} -a_{31}a_{43}b_{11}c_{14}e_{22} & -a_{32}a_{43}b_{22}c_{14}e_{11} \\ -a_{31}b_{11}c_{23}e_{22}e_{44}s & -a_{32}b_{22}c_{23}e_{11}e_{44}s \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Se observa que el segundo renglón de dicha matriz es una combinación lineal del primero.

$$R_2([G'](s)) = \frac{c_{23}e_{44}s}{a_{43}c_{14}} R_1([G'](s)) \quad (4.21)$$

Por lo tanto el rango genérico válido para casi toda realización genérica admisible es

$$g - \text{rank}([G'](s)) = 1 \quad (4.22)$$

Por lo que el sistema  $\{[A'], [F'], [C'], [H'], [E']\}$  es estructuralmente no invertible por la izquierda y existen eventos no detectables en toda realización numérica admisible de dicho sistema estructurado.

El resultado obtenido a partir de este sistema LTID en forma descriptor es congruente con el que se obtuvo con el análisis algebraico, esto es, existen eventos no detectables en todo circuito eléctrico resonante si se cuenta con mediciones de voltaje y corriente a través del capacitor.

### 4.1.3. Simulación

A continuación se muestran los resultados en simulación del circuito eléctrico representado en la Figura 4.2. Para realizar dichas simulaciones se consideraron los valores mostrados en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Valores de los parámetros para la simulación del circuito eléctrico resonante.

$L_1 =$	1.0000 H
$L_2 =$	1.0000 H
$C =$	0.8106 F
$V_C(0) =$	5.0000 V

En la Figura 4.7 se muestra el comportamiento dinámico del sistema en lo que se define como operación normal, en el sentido de que no está influenciado por la acción de las fuentes externas de voltaje. La dinámica del sistema cambia exclusivamente debido a la condición inicial que se consideró ( $V_C(0) = 5 V$ ). La frecuencia de oscilación natural del sistema es  $\omega_0 = \pi/2 \text{ rad/seg}$ .

En la Figura 4.8 se muestra la respuesta del circuito ante un evento tal que  $V_1 = 24 \sin(0.5\pi t)$  y  $V_2 = -24 \sin(0.5\pi t)$ . Dicho evento se encuentran en el subespacio nulo de la matriz de transferencia ya que, con los parámetros del sistema que se consideraron ( $L_1 = L_2 = 1 H$ ), una base para el subespacio nulo es  $\{[1, -1]\}$ . La medición de voltaje y corriente a través del capacitor en este caso es igual a la que se obtuvo sin considerar evento alguno, con lo que se asegura que el evento en cuestión es no detectable. Se observa también que la corriente que pasa a través de los inductores es un orden de magnitud

más grande que aquella correspondiente a la operación normal. Si se supone que el diseño del circuito se basó en los datos que se obtuvieron en el caso de la Figura 4.7, el comportamiento de las corriente en este caso podría dañar físicamente al sistema.

El comportamiento del sistema ante un evento tal que  $V_1 = 0 V$  y  $V_2 = 5 V$  se muestran en la Figura 4.9. En este caso, el evento no se encuentra en el subespacio nulo de la matriz de transferencia por lo que las mediciones que se obtienen en este caso son distintas que las que se obtienen con el evento nulo (Figura 4.7), con lo cual se concluye que el evento es detectable. Por otro lado, si se considera un evento tal que  $V_1 = 24 \sin(0.5\pi t)$  y  $V_2 = 5 - 24 \sin(0.5\pi t)$  (Figura 4.10), se observa que las mediciones obtenidas son iguales a las que se obtuvieron en el caso anterior, por lo tanto los eventos involucrados son no identificables a través de las mediciones consideradas.

## **4.2. Determinación de eventos no detectables con mediciones de corriente a través de los inductores**

### **4.2.1. Modelo LTI**

Una manera de reducir la dimensión del subespacio de eventos no detectables consiste en aumentar la dimensión del vector de medición o, en su defecto, cambiar las variables que se miden de manera que el rango de la matriz de transferencia sea igual a la dimensión del vector del evento para casi todo valor de  $s \in \mathbb{C}$ .

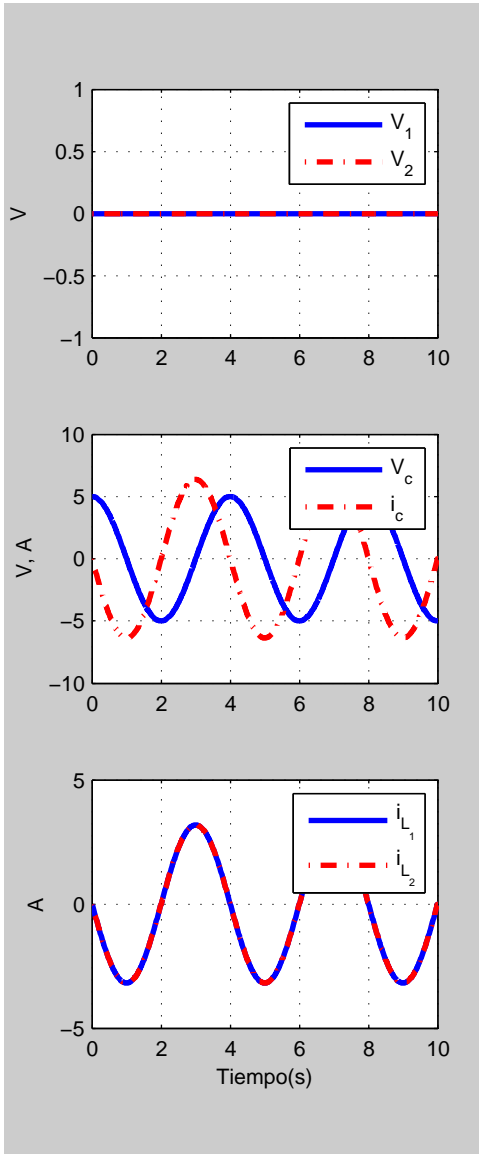


Figura 4.7: Comportamiento dinámico ante el evento  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = 0$  y condición inicial  $V_C(0) = 5V$ .

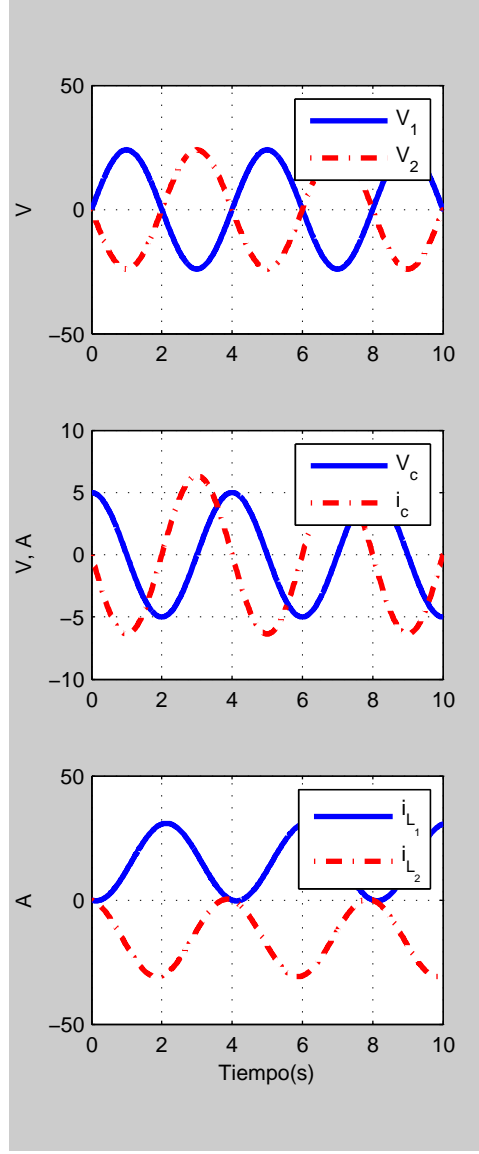


Figura 4.8: Comportamiento dinámico ante el evento  $V_1 = 24\sin(0.5\pi t)$ ,  $V_2 = -24\sin(0.5\pi t)$  y condición inicial  $V_C(0) = 5V$ .



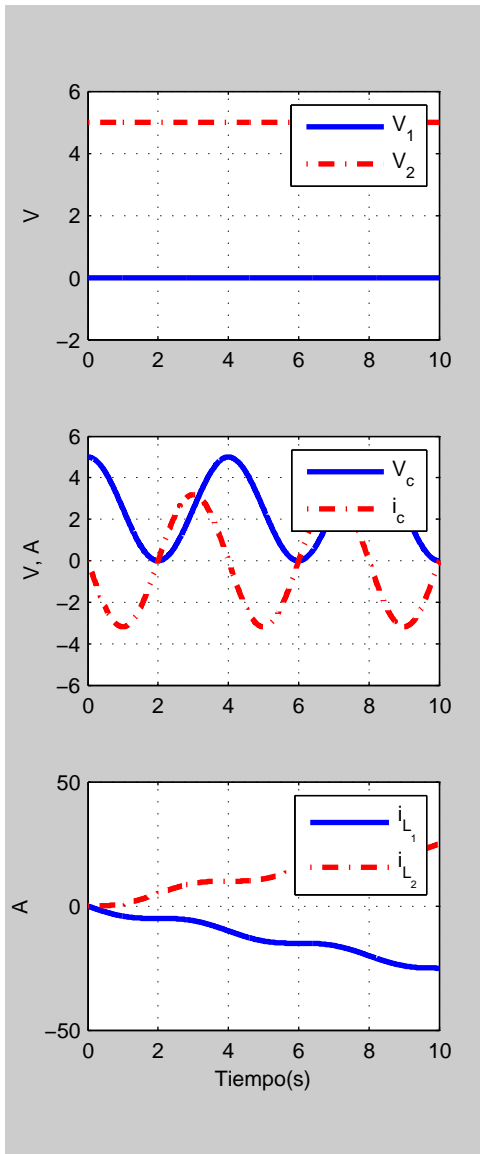


Figura 4.9: Comportamiento dinámico ante el evento  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = 5$  y condición inicial  $V_C(0) = 5$  V.

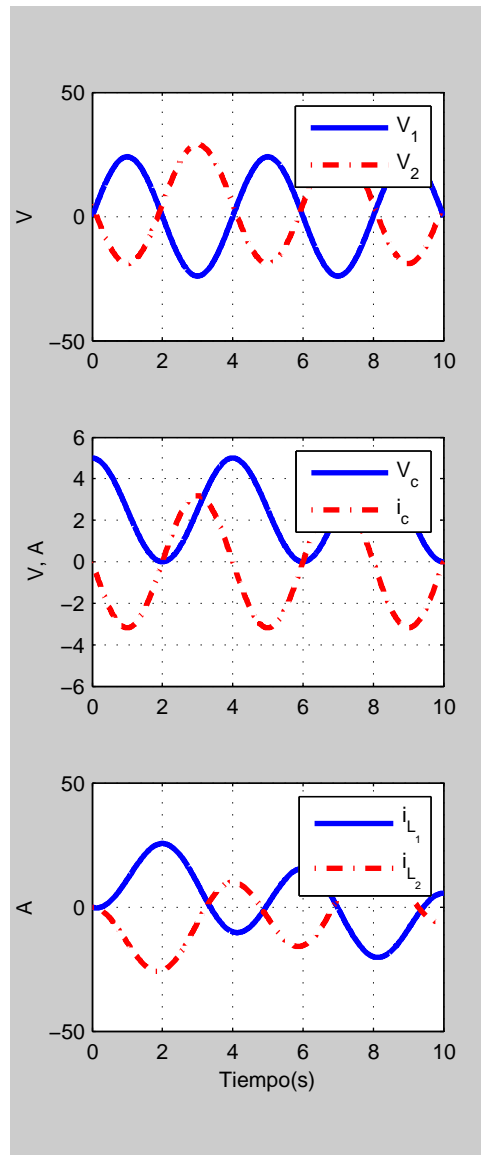


Figura 4.10: Comportamiento dinámico ante el evento  $V_1 = 24 \sin(0.5\pi t)$ ,  $V_2 = 5 - 24 \sin(0.5\pi t)$  y condición inicial  $V_C(0) = 5$  V.

En el circuito eléctrico resonante esto se logra cambiando las mediciones del voltaje y la corriente a través del capacitor a las corrientes en los inductores, con esto, el nuevo vector de medición es  $\mathbf{y}_m = \begin{bmatrix} i_{L_1} & i_{L_2} \end{bmatrix}^T$ . Las matrices  $C'$  y  $H'$  correspondientes son:

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de transferencia del sistema  $\{A, F, C', H'\}$  es:

$$G'(s) = \frac{1}{(CL_1L_2)s^2 + (L_1 + L_2)} \begin{bmatrix} CL_2s^2 + 1 & -1 \\ -1 & CL_1s^2 + 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

### Análisis algebraico

Dicha función de transferencia tiene rango  $rank(G'(s)) = 2$  para valores  $s \in \mathbb{C}$  tales que  $s \neq 0$ , con lo que se concluye que el conjunto de eventos no detectables está constituido por los ceros del sistema.

La frecuencia compleja  $s = 0$  constituye un cero de transmisión de la función del sistema  $G'(s)$ . Para calcular su condición inicial y vector de dirección correspondientes se requiere de una realización en espacio de estados. Las condiciones iniciales y vectores de dirección cumplen con la siguiente condición:

$$\begin{bmatrix} zE - A & -F \\ C' & H' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}'(0) \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

donde  $z$  es un cero del sistema,  $\mathbf{x}'(0)$  es el vector de condiciones iniciales y  $\mathbf{g}$  es el vector de dirección del evento.

La condición (4.24) para el ejemplo que se está analizando es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L_1}(0) \\ i_{L_2}(0) \\ V_C(0) \\ g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.25)$$

$$\implies \begin{cases} \frac{V_C(0)}{L_1} - \frac{g_1}{L_1} = 0 \\ \frac{V_C(0)}{L_2} - \frac{g_2}{L_2} = 0 \\ -\frac{i_{L_1}(0)}{C} - \frac{i_{L_2}(0)}{C} = 0 \\ i_{L_1}(0) = 0 \\ i_{L_2}(0) = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{x}'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_C(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} V_C(0) \\ V_C(0) \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Por lo tanto, la medición que se obtiene a partir de la condición inicial  $\mathbf{x}'(0)$  y el evento

$$\bar{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{g} \exp(0t) 1(t) = \mathbf{g} 1(t) \quad (4.28)$$

es  $\mathbf{y}_m'(\mathbf{x}'(0), \bar{\mathbf{e}}(t), t) = 0 \forall t \geq 0$

### 4.2.2. Simulación

A continuación se muestran resultados de la simulación correspondiente a la aplicación del cero de transmisión  $s = 0$  para generar cambios en la di-

námica interna del sistema que no son perceptibles a partir de las mediciones de corriente a través de los inductores.

La figura 4.11 muestra la condición de operación normal, mientras que la figura 4.12 muestra la simulación considerando la inyección de una evento con frecuencia compleja 0 (función escalón). Se observa que las gráficas correspondientes a las mediciones de corriente en los inductores son idénticamente iguales mientras que los estados internos: el voltaje y la corriente a través del capacitor varían después de la inyección de la señal.

En la figura 4.14 se muestra que la no detectabilidad del evento en cuestión depende fuertemente del cumplimiento de las relaciones entre las direcciones del vector de evento y las condiciones iniciales. En caso de que la sincronización entre la dirección del evento y la condición inicial se pierda, el evento se percibe en la medición.

### **4.3. Análisis de resultados**

En este capítulo se ejemplificó la aplicación de los dos métodos de búsqueda de eventos no detectables propuestos en el capítulo previo. A partir de este desarrollo se evidenciaron las ventajas y desventajas de cada uno de ellos.

El método de búsqueda de eventos no detectables a partir de análisis algebraico permite determinar, además de la existencia de dichos eventos, una base para el subespacio de eventos no detectables. También permite la determinación de eventos no detectables en subconjuntos de medida cero, esto se hace a través de la búsqueda de los ceros del sistema mediante una

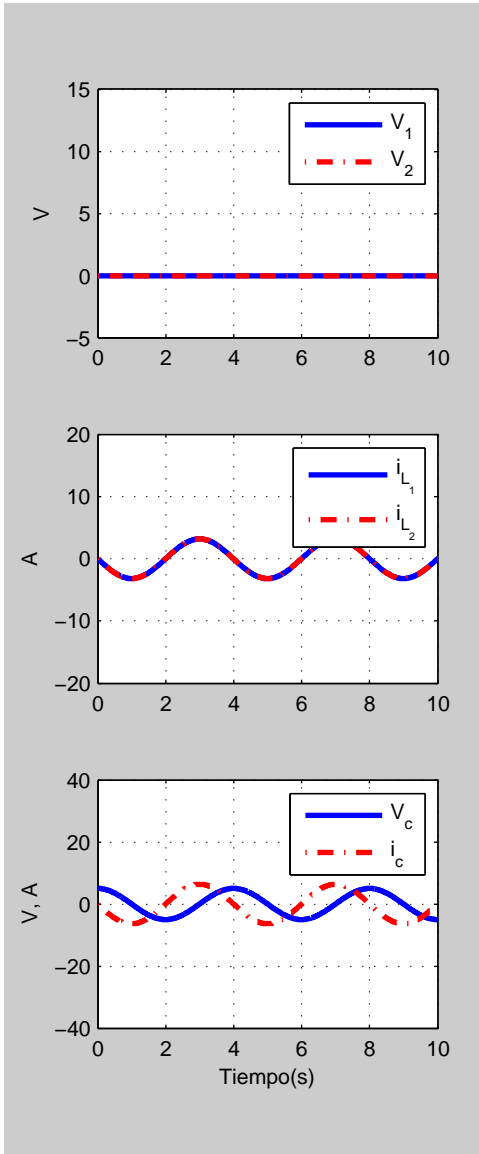


Figura 4.11: Comportamiento dinámico ante el evento  $V_1 = 0, V_2 = 0$  y condición inicial  $V_C(0) = 5 V$ .

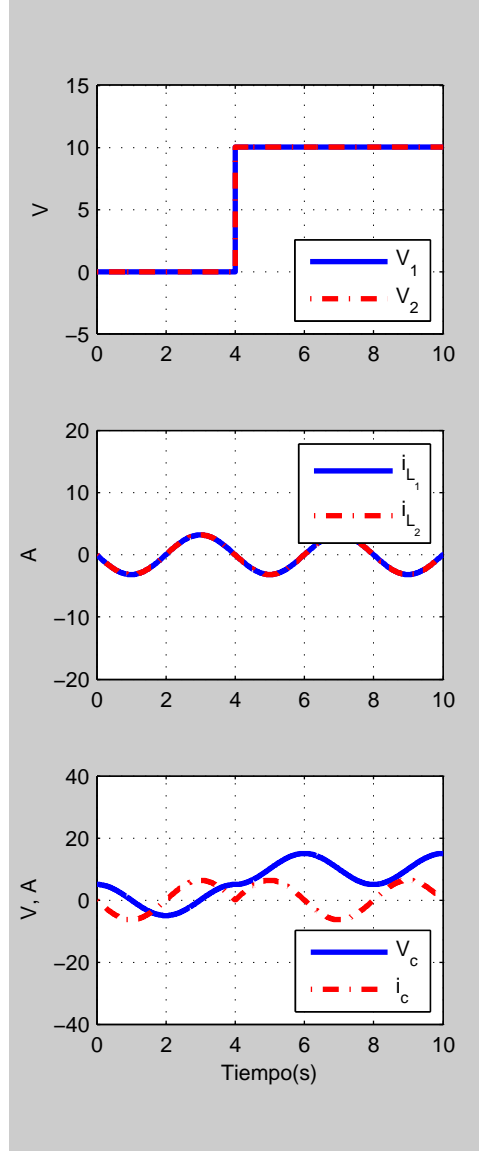


Figura 4.12: Comportamiento dinámico ante el evento  $V_1 = 10 * 1(t - 4), V_2 = 10 * 1(t - 4)$  y condición inicial  $V_C(0) = 5 V$ .

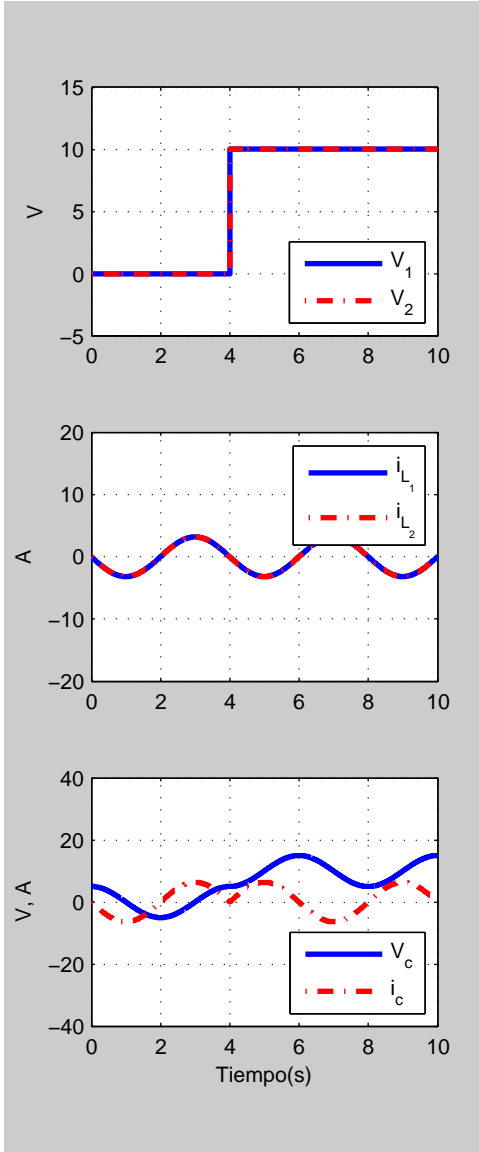


Figura 4.13: Comportamiento dinámico ante el evento  $V_1 = 10 * 1(t - 4)$ ,  $V_2 = 10 * 1(t - 4)$  y condición inicial  $V_C(0) = 5V$ .

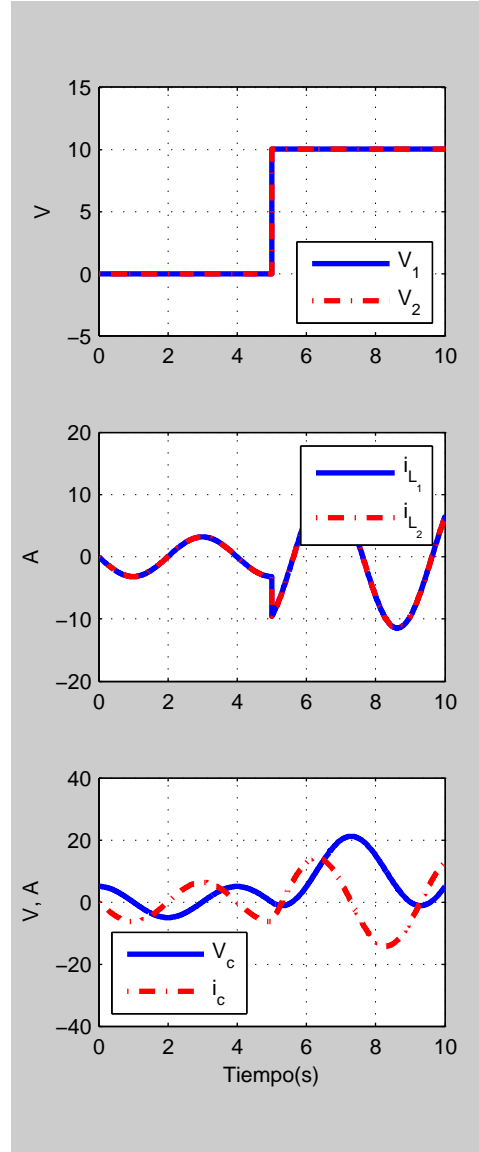


Figura 4.14: Comportamiento dinámico ante el evento  $V_1 = 10 * 1(t - 5)$ ,  $V_2 = 10 * 1(t - 5)$  y condición inicial  $V_C(0) = 5V$ .

realización en espacio de estados. Dicho método fue aplicado con éxito en este caso, sin embargo se debe tomar en cuenta que el sistema que se analizó es de pequeñas dimensiones y con matrices que se pueden analizar fácilmente, en particular, las condiciones de rango y los casos de pérdida del mismo se pudieron establecer de manera sencilla. En sistemas de mayor complejidad y mayores dimensiones esto puede no ser sencillo. Como una alternativa, se presentó la aplicación del método para determinar la existencia de eventos no detectables vía teoría de grafos.

El método de determinación de eventos no detectables vía teoría de grafos cuenta con la ventaja de que la condición para la existencia de dichos eventos es sencilla de comprobar a partir de la representación pictórica del grafo, haciendo posible su uso en sistemas de grandes dimensiones. A pesar de ello se debe tener en cuenta que las conclusiones que se derivan de los teoremas aplicados dependen del sistema estructurado que se esté usando. Para obtener resultados adecuados se requiere tener un modelo que represente con detalle las interconexiones internas entre las variables del sistema sin importar que el modelo que se obtenga esté sobredeterminado.

# Capítulo 5

## Conclusiones

El tema de la vulnerabilidad de sistemas dinámicos cuenta con gran relevancia en la actualidad y requiere de atención de múltiples disciplinas para establecer en primer lugar un marco de referencia común. Los objetivos de este trabajo fueron los de establecer un primer acercamiento para el estudio de un tipo de vulnerabilidad que esta representada por los eventos no detectables, los cuáles causan cambios en la dinámica interna de los sistema sin alterar las mediciones de los mismos. En el estudio presentado se obtuvieron condiciones generales a partir de la función de transferencia y realizaciones  $\{A, F, C, H, E\}$  que, en principio, pueden ser no mínimas.

Se consideraron dos metodologías, reportadas en la literatura, para el estudio de vulnerabilidad en sistemas eléctricos de potencia, que permiten determinar la existencia de eventos no detectables en sistemas lineales e invariantes en el tiempo con restricciones algebraicas (sistemas descriptores). La primera de ellas utiliza herramientas algebraicas para determinar los eventos no detectables encontrando expresiones explícitas para dichos eventos bajo



algunas condiciones; mientras que la segunda usa herramientas de la teoría de grafos para determinar si un conjunto de nodos del sistema es susceptible a recibir la inyección de una señal maliciosa.

Ambos métodos presentan ventajas y desventajas en su aplicación.

La principal ventaja de la búsqueda de eventos no detectables mediante herramientas algebraicas es que es posible encontrar expresiones explícitas de los eventos a partir de la función de transferencia, no obstante, cuenta con la desventaja de que requiere un cálculo adecuado de los rangos de la matriz de transferencia, lo cual se complica con sistemas de grandes dimensiones y/o cuyas matrices estén mal condicionadas, además de que los resultados obtenidos no pueden ser inmediatamente extendidos al caso de sistemas que consideren ruido, variaciones paramétricas o sistemas no lineales. Es conveniente mencionar que, en caso de que el conjunto de eventos no detectables esté constituido solamente por los ceros invariantes del sistema, se debe considerar que cuando se trabaje con una realización  $\{A, F, C, H, E\}$  no mínima existen ceros que no se pueden calcular a partir de la condición de pérdida de rango en la matriz de transferencia. La validez de los resultados mostrados para el caso de realizaciones  $\{A, F, C, H, E\}$  no mínimas no se garantiza con los resultados de este trabajo. La generalización de los métodos presentados de manera que sea posible su aplicación sobre realizaciones no mínimas es una problema que puede generar nuevas líneas de investigación.

El método basado en la teoría de grafos es más sencillo en su aplicación incluso en sistemas de grandes dimensiones; al no considerar parámetros específicos y fijos en el sistema los resultados pueden extenderse al caso de variaciones paramétricas y sistemas no lineales, sin embargo, a través de este

método no se pueden encontrar expresiones para los eventos no detectables, además de que la prueba de no existencia de eventos no detectables no es 100 % fiable, esto es, si se encuentran condiciones para la existencia de eventos no detectables en una clase de sistemas estructuralmente equivalentes se sabe que toda realización numérica admisible tiene eventos no detectables, sin embargo, si una clase de sistemas estructuralmente equivalentes no muestra condiciones para la existencia de vulnerabilidad estructural, no se puede asegurar que todo evento en toda realización numérica admisible sea detectable.

Dentro de los eventos con potencial para generar daños se encuentran los ceros de los sistemas, ya que pueden ser utilizados con fines maliciosos siempre y cuando el atacante tenga suficiente información sobre el sistema de manera que sea capaz de sincronizar la inyección del evento cero en cierto momento.

En este trabajo no se consideraron los efectos de eventos con términos impulsivos ni sistemas con condiciones iniciales inconsistentes, los cuales pueden representar nuevos escenarios de vulnerabilidad en los sistemas que no fueron considerados. De igual manera, están abiertas las problemáticas de determinar cuantitativamente el potencial de daño de los eventos, así como su factibilidad de aplicación; y la de determinar los subsistemas que se ven afectados para diseñar planes de contingencia.

Por otro lado, dentro del marco de la teoría de grafos, se requieren explorar los algoritmos que permiten la búsqueda de encadenamientos ya que de éstos depende, en buena medida, el éxito de la prueba.

# Bibliografía

Saurabh Amin, Alvaro A. Cárdenas, and S. Shankar Sastry. Safe and secure networked control systems under denial-of-service attacks. In Rupak Majumdar and Paulo Tabuada, editors, *Hybrid Systems: Computation and Control*, volume 5469, pages 31–45. Springer-Verlag, Abril 2009.

Saurabh Amin, Xavier Litrico, Shankar Sastry, and Alexandre M. Bayen. Stealthy deception attacks on water scada systems. In *HSCC '10 Proceedings of the 13th ACM international conference on Hybrid systems: computation and control*, pages 161–170, Estocolmo, Suecia, Abril 2010. doi: 10.1145/1755952.1755976.

Saurabh Amin, Xavier Litrico, Shankar Sastry, and Alexandre M. Bayen. Cyber security of water scada systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(5):1963–1970, Septiembre 2013.

Ilja N. Bronshtein, Konstantine A. Semendyayev, Gerhard Musiol, and Heiner Muehlig. *Handbook of Mathematics*. Springer, 5 edition, 2007.

Juan Pablo Conti. The day the samba stopped. *Engineering and Technology*, 5(4):46 – 47, Marzo 2010.

Shuguang Cui, Zhu Han, Soumya Kar, Tung T. Kim, H. Vincent Poor, and Ali Tajer. Coordinated data-injection attack and detection in the smart grid. *IEEE Signal Processing Magazine*, 29(5):106–115, Septiembre 2012. doi: 10.1109/MSP.2012.2185911.

György Dán and Henrik Sandberg. Stealth attacks and protection schemes for state estimators in power systems. In *1st IEEE International Conference on Smart Grid Communications*, pages 214–219, Gaithersburg, Maryland, EUA, Octubre 2010.

Christopher L. DeMarco, Jayant V. Sarlashkar, and Fernando Alvarado. The potential for malicious control in a competitive power systems environment. In *IEEE International Conference on Control Applications*, pages 462–467, Dearborn, Michigan, EUA, Septiembre 1996.

Charles A. Desoer and Jerry D. Schulman. Zeros and poles of matrix transfer functions and their dynamical interpretation. *IEEE Transactions on Circuits*, CAS-21(1):3 – 8, Enero 1974.

Jean-Michel Dion, Christian Commault, and Jacob van der Woude. Generic properties and control of linear structured systems: A survey. *Automatica*, 39:1125–1144, 2003. doi: 10.1016/S0005-1098(03)00104-3.

Guang-Ren Duan. *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*, volume 23 of *Advances in Mechanics and Mathematics*. Springer, 2010. doi: 10.1007/978-1-4419-6397-0.

Demetrios G. Eliades and Marios M. Polycarpou. A fault diagnosis and secu-

- rity framework for water systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 18(6):1254–1265, Noviembre 2010.
- James P. Farwell and Rafal Rohozinski. Stuxnet and the future of cyber war. *Survival: Global Politics and Strategy*, 53:23 – 40, 2011.
- Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence. *Lineal Algebra*. Pearson, 4th edition, Noviembre 2002.
- Eric Goetz and Sujeet Shenoi, editors. *Critical Infrastructure Protection*. Springer, 2008.
- Wolfgang Kröger and Enrico Zico. *Vulnerable Systems*. Springer - Verlag, 2011.
- Yao Liu, Peng Ning, and Michael K. Reiter. False data injection attacks against state estimation in electric power grids. *ACM Transactions on Information and System Security*, 14:13:1 – 13:33, 2011.
- A. G. J. MacFarlane and N. Karcanias. Poles and zeros of linear multivariable systems: A survey of the algebraic, geometric and complex - variable theory. *International Journal of Control*, 24(1):33 – 74, 1976.
- Pradeep Misra, Paul Van-Dooren, and Andras Varga. Computation of structural invariants of generalized state-space systems. *Automatica*, 30(12): 1921–1936, 1994.
- Pradeep Misra, Paul Van-Dooren, and Vassilis Syrmos. Pole-zero representation of descriptor systems. *Automatica*, 31(6):907–912, 1995.

- Amir-Hamed Mohsenian-Rad and Alberto Leon-Garcia. Distributed internet-based load altering attacks against smart power grid. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2(4):667–674, Diciembre 2011. doi: 10.1109/TSG.2011.2160297.
- Fabio Pasqualetti, Antonio Bicchi, and Francesco Bullo. A graph-theoretic characterization of a power network vulnerabilities. In *American Control Conference*, 2011a.
- Fabio Pasqualetti, Florian Dörfler, and Francesco Bullo. Cyber-physical attacks in power networks: Models, fundamente limitations and monitor design. In *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, Orlando, Floride, EUA, Diciembre 2011b.
- Fabio Pasqualetti, Florian Dörfler, and Francesco Bullo. Attack detection and identification in cyber-physical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(11):2715 – 2729, Noviembre 2013.
- A. C. Pugh. Transmission and system zeros. *International Journal of Control*, 26(2):315 – 324, 1977.
- Tariq Samad and Anuradha Annaswamy. *The Impact of Control Technology*. IEEE Control Systems Society, 2011.
- Jill Slay and Michael Miller. *Critical Infrastructure Protection*, chapter 6: Lessons learned from the Maroochy water breach, pages 73 – 82. Springer, 2008.

Siddharth Sridhar, Adam Hahn, and Manimaran Govindarasu. Cyber-physical system security for the electric power grid. *Proceedings of the IEEE*, 100(1):210 – 224, Enero 2012. doi: 10.1109/JPROC.2011.2165269.

Andras Varga. A descriptor systems toolbox for matlab. In *Proceedings of the 2000 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design*, Anchorage, Alaska, EUA, Septiembre 2000.

Peter E. Wellstead. *Introduction to Physical System Modelling*. Control Systems Principles, 2000.