

AGRADECIMIENTOS

Se agradece la paciencia y apoyo del Dr. Miguel Romo Organista, en particular, por permitir la búsqueda emprendida en los modelos analíticos del presente trabajo de investigación. Al Dr. Efraín Ovando Shelley quiero agradecer su invaluable estímulo, siempre constante y alentador. Sin esta ayuda moral, con toda posibilidad no hubiese sido posible concluir la presente tesis. Agradezco de manera muy especial las críticas agudas y comentarios siempre notables y certeros del Dr. David Murià Vila. Al Dr. Daniel Reséndiz sus cuestionamientos en un resultado relevante obtenido en el desarrollo del estudio. El trabajo que se presenta a continuación fue soportado económicamente por la Gerencia de Estudios de Ingeniería Civil, se agradece el apoyo y la confianza proporcionados. Finalmente, se agradece la disposición de información experimental que auxilió en los resultados de la investigación, esta información fue proporcionada por la Gerencia de Estudios de Ingeniería Civil y la Coordinación de Proyectos Hidroeléctricos ambos pertenecientes a la Comisión Federal de Electricidad.

ÍNDICE

RESUMEN

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES	1
--------------	---

CAPÍTULO 2

MODELOS ANALÍTICOS	7
2.1 MODELOS ESTÁTICOS	7
2.1.1 MODELOS ESTÁTICOS UNIDIMENSIONALES	
DE UNA FUERZA AXIAL VERTICAL	7
2.1.1.1 Modelo unidimensional para un prisma rectangular	7
2.1.1.2 Modelo unidimensional para un prisma trapezoidal	10
2.1.1.3 Modelo unidimensional para un prisma trapezoidal con variación de la rigidez en función de la profundidad	13
2.1.2 MODELOS ESTÁTICOS BIDIMENSIONALES	18
2.1.2.1 Modelo estático bidimensional de una fuerza axial y un cortante vertical	18
2.1.3 MODELOS ESTÁTICOS TRIDIMENSIONALES	25
2.1.3.1 Modelo estático de una fuerza axial y dos cortantes en dirección vertical	25
2.1.3.2 Modelo estático de una fuerza axial y dos cortantes en dirección horizontal	29
2.1.3.3 Modelo estático de una fuerza axial y dos cortantes en dirección horizontal al considerar una función de variación de la rigidez en fun-	

ción de la profundidad	34
2.1.3.4 Modelo estático de una fuerza axial y dos cortantes en dirección vertical para el problema de la carga de agua	35
2.1.3.5 Modelo tridimensional para losas ante la presencia de fuerzas externas	38
2.1.3.6 Modelo estático de dos fuerzas axiales y cuatro fuerzas cortantes en dirección horizontal	47
2.2 MODELOS DINÁMICOS	55
2.2.1 MODELOS UNIDIMENSIONALES	55
2.2.1.1 Modelo unidimensional para un trapecio ante una fuerza cortante horizontal	55
2.2.1.2 Modelo unidimensional para un trapecio ante una fuerza vertical	64
2.2.2 MODELOS BIDIMENSIONALES DINÁMICOS	66
2.2.2.1 Modelo bidimensional dinámico para una geometría de un trapecio Confinado por un cajón	66
2.2.2.2 Modelo bidimensional dinámico de una cuña cuando el movimiento es uniformemente distribuido en dirección X	70
2.2.2.3 Modelo bidimensional dinámico de una cuña cuando el movimiento es uniformemente distribuido en dirección Y	72
2.2.2.4 Modelo bidimensional dinámico de la cuña a partir del modelo bidimensional dinámico del cajón	72
2.2.2.5 Formas modales y funciones de transferencia teórica para los modelos bidimensionales	74
2.3 MODELOS TRIDIMENSIONALES DINÁMICOS	79
2.3.1 Modelo tridimensional dinámico para dos fuerzas cortantes horizontales y una axial	79

CAPÍTULO 3

Observaciones experimentales del contacto losa-enrocamiento

En las presas Aguamilpa y El Cajón 83

Presa Aguamilpa

3.1 Información experimental 83

3.1.1 Instrumentación 83

3.1.2 Inclínómetros 84

Presa El Cajón

3.2 Información Experimental 98

3.2.1 Inclínómetros 98

CAPÍTULO 4

COMPARACIÓN DE MODELOS ANÁLITICOS CONTRA LA INFORMACIÓN

EXPERIMENTAL 105

Modelos Estáticos

4.1 Asentamientos 105

Modelos Dinámicos 125

4.2 Movimientos sísmicos 125

4.3 Pirámide instrumentada 135

CAPÍTULO 5

5.1 Discusión de Resultados 137

CAPÍTULO 6

6.1 Conclusiones 145

BIBLIOGRAFÍA 146

APÉNDICES	148
Apéndice 2.1.1	148
Apéndice 2.2.1	152
Apéndice 2.3.1	153
Apéndice 2.3.2	154
Apéndice 2.3.4	155
Apéndice 2.3.5	156
Nomenclatura Básica	160

RESUMEN

Se plantean una serie de modelos analíticos para analizar problemas como son: deformaciones por peso propio de la estructura, deformación por carga hidráulica y deformación ante la carga por sismo. El enfoque analítico de los problemas es comparado con observaciones experimentales obtenidas en las presas de Aguamilpa, El Cajón e Infiernillo. Se desarrolló también un modelo analítico para estudiar las deformaciones en las losas ante las observaciones de los inclinómetros. Algunos de los aspectos más relevantes que resultaron de la presente investigación, se pueden resumir a continuación:

- Todos los modelos analíticos resueltos, tanto estáticos, como dinámicos, indican que es erróneo suponer que las caras laterales de la estructura (en la dirección longitudinal del río), son libres de esfuerzo. Los modelos analíticos para problemas de peso propio, por ejemplo, indican que la forma en que puede asentarse la estructura es fuertemente dependiente del nivel de esfuerzo que exista en las caras laterales de la presa. Un nivel de esfuerzo bajo en las caras laterales sugiere un asentamiento uniforme de todo el continuo, mientras que un esfuerzo alto concentra los mayores asentamientos hacia el centro de la estructura. Por otro lado, para un problema de empuje de carga de agua, particularmente en la dirección horizontal, los modelos con esfuerzo cero en la cara libre de la estructura, indican una deformación parabólica, sin desplazamientos en la parte superior a la presa, mientras que la presencia de un esfuerzo en la cara libre, genera una serie de curvas que se asemejan más a las observaciones experimentales de desplazamiento observadas en las losas de concreto instrumentadas con inclinómetros. Para los problemas dinámicos considerar nulos los esfuerzos en las fronteras laterales de la estructura lleva a una solución de tipo complejo para el problema de vibración forzada (Bravo y Romo, 1999); la existencia de un esfuerzo en estas fronteras laterales, en cambio, incrementa el movimiento en la corona de la estructura por la acción sísmica, lo cual es congruente con las observaciones experimentales.
- Los módulos elásticos de los materiales constitutivos de una presa de enrocamiento son únicos. No es fácil determinar dichos módulos en laboratorio, en particular si los enrocamientos tienen partículas de gran tamaño. Los modelos analíticos resueltos en este trabajo de investigación indican que los valores de estos módulos pueden variar en función del modelo que se resuelve. Por ejemplo, un modelo bidimensional que no considere restricciones laterales ante un empuje de carga de agua, requerirá módulos elásticos mayores a los que se requerirían al usar un modelo tridimensional que si considere la presencia de estos apoyos laterales. Estas diferencias no se deben a los materiales sino a que el modelo tridimensional es más completo que el modelo bidimensional, entonces no es válido usar los modelos simples para calibrar propiedades mecánicas sobre el prototipo.

- Se desarrollaron modelos dinámicos unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales. En particular, el modelo tridimensional tiene la cualidad de ser relativamente sencillo y bien puede ser una herramienta de mucha utilidad para el estudio de problemas dinámicos en presas. Los resultados de este modelo indican que las estructuras en forma de cuñas tienen un movimiento notable en prácticamente toda la presa, ya que mientras unas formas modales llevan la energía hacia arriba, otras lo hacen hacia abajo, generando con ello un movimiento en todo el continuo. Es posible que la geometría en forma de embudo que tiene la cuña en su base sea importante en este comportamiento. Una de los efectos más importantes en las presas de enrocamiento después de las acciones sísmicas, es el asentamiento de la estructura. Las formas modales que se observan son congruentes con este comportamiento. En otras palabras, los modelos aquí presentados sugieren que los sismos, al parecer, favorecen la estabilidad de los enrocamientos, sin que con ello se quiera decir que esto es bueno o malo para la funcionalidad de la estructura.
- Se realizaron algunas investigaciones sobre el comportamiento de las losas instrumentadas en la presas de Aguamilpa y El Cajón. Las mediciones con inclinómetros muestran que estas losas pueden tener importantes flexiones y experimentar una importante tensión ante el empuje del agua, dicha fuerza de tensión puede ser valorada si se tiene idea de la magnitud de la fuerza en el contacto losa-enrocamiento, lo cual es particularmente difícil si ya ha sido llenado el embalse, pues las fuerzas de fricción en los cantos de las losas no son despreciables en este caso. Se estudió adicionalmente el caso de una losa flexionada en Aguamilpa durante su etapa constructiva. En esta losa se determinó una fuerza de fricción de 0.1 el peso de la losa en el contacto losa-enrocamiento, aquí fue posible despreciar la fricción en los cantos de las losas. Es probable que este valor sea ligeramente superior al que se tiene en la realidad, dado que el estudio se realizó después de una inundación en la estructura, que pudo reducir el coeficiente de fricción por la presencia del agua.
- Los datos experimentales indican una notable fluencia del material de enrocamiento que constituye el cuerpo de la estructura para los años posteriores al primer llenado. Esta fluencia no debe ser ignorada, pues cambia de manera notable los esfuerzos en las losas. Un modelo tridimensional de empuje de agua horizontal que se presenta en el presente trabajo, sugiere no linealidad en el comportamiento del enrocamiento para aproximar las observaciones experimentales a los cálculos. Este comportamiento se observó tanto en la presa de Aguamilpa, como en la presa de El Cajón.

INTRODUCCIÓN

El diseño de presas de enrocamiento con cara de concreto ha cambiado de manera considerable con relación en las primeras estructuras de este tipo. Uno de los aspectos más peculiares en estas presas, es la interacción que se desarrolla entre dos materiales de naturaleza completamente diferentes desde el punto de vista mecánico, como lo son: el enrocamiento, que constituye el cuerpo de la estructura, y las losas de concreto, que forma el sello hidráulico del sistema. La presa Cogoti en Chile cuya construcción se finalizó en 1938 y sin ningún tratamiento de compactación al enrocamiento; es un caso típico de los procedimientos constructivos que se seguían en aquellos tiempos. El área de la cara de concreto es de $16,000 \text{ m}^2$ y los ingenieros, contrarrestaban la notable deformabilidad del enrocamiento, dividiendo la losa en una gran cantidad de paneles individuales (de $10 \times 10 \text{ m}$), separados por juntas libres estructuralmente y limitadas mediante sellos hidráulicos como el cobre, fieltro con bitumen, madera y asfalto (Arrau et al, 1985). En los años 60 del siglo pasado, y con las mejoras importantes en el tratamiento de compactación de los enrocamientos, el número de juntas se redujo de manera notable. En la actualidad, es común la presencia de losas continuas de más de 300 m de longitud por 15 m de ancho, que en general han funcionado correctamente, sin embargo, existen claras incertidumbres sobre su comportamiento y la interacción que guardan con el enrocamiento. Las experiencias obtenidas en las losas instrumentadas con inclinómetros en las presas de Aguamilpa y El Cajón en México, son claras evidencias experimentales que indican que las losas pueden tener comportamientos notablemente diferentes. Es muy importante, y es uno de los aspectos que requiere mayor atención para tener un mejor entendimiento sobre el desempeño de estas losas, poder colocar instrumentos que permitan tener una idea de las fuerzas que se desarrollan entre los contactos losa-losa y losa-enrocamiento. Pero no sólo los aspectos de instrumentación son importantes. Los modelos que se empleen para validar esta información experimental, juegan un papel crucial. La tesis de investigación abarca ambos aspectos: la generación de modelos que auxilien en el entendimiento de las presas de enrocamiento con cara de concreto, y algunas interpretaciones obtenidas a partir de los datos experimentales en las losas de concreto de las presas de Aguamilpa y El Cajón. El trabajo desarrollado aquí permite abrir el panorama de análisis mediante el desarrollo de modelos analíticos en el estudio de este tipo de presas. Considerar que un modelo es la verdad absoluta no tiene sentido, sobre todo cuando existen tantas variables e incertidumbres en las variables involucradas. El enfoque debe plantearse en el sentido de que los modelos deben contribuir a entender conceptos que permitan identificar variables fundamentales del problema en estudio. Esa es la intención de los modelos analíticos de este trabajo. Por ello, se plantean desarrollos unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales que permitan observar lo que cambia entre dos modelos que pretenden resolver el mismo problema, como podría ser por ejemplo el asentamiento, o el comportamiento de la estructura ante la acción de un sismo. La contribución de cada modelo debe ser valorada siempre en comparación con los datos experimentales que son la fuente primaria y fundamental del entendimiento de un fenómeno. Si el modelo es capaz de aproximarse a los datos experimentales, entonces es muy probable que se estén considerando las variables de mayor relevancia del problema en estudio.

CAPITULO 1

ANTECEDENTES

En los años recientes, se ha generado un importante interés en la construcción de presas de enrocamiento con cara de concreto, no sólo en México, sino en muchas otras partes del mundo. Estas estructuras tienen características inherentes en su concepción que las hace seguras y con ventajas sobre otro tipo de presas. Cooke, 1999 menciona algunas de las principales ventajas se tiene en este tipo de estructuras:

- Por la presencia de la cara de concreto, no se generan presiones de poro en los materiales de la estructura.
- El enrocamiento dispone de una resistencia a cortante alta (particularmente en la dirección horizontal, Fitzpatrick et al,1985).
- El enrocamiento es estable y capaz de aceptar importantes flujos de agua sin erosionarse.
- Los asentamientos del enrocamiento son pequeños y generalmente tienden a reducirse después de algunos años.

El comportamiento de presas de enrocamiento con cara de concreto ha mostrado ser satisfactorio en cuanto a la estabilidad de la estructura se refiere, aún ante importantes desplazamientos del enrocamiento, lo que ha llevado a aclarar que el último punto mencionado por Cooke, 1999 no es necesariamente cierto. Estos importantes desplazamientos ocurridos en algunas presas han ocasionado fallas importantes en la cara de concreto. Los casos emblemáticos recientes generados en las presa de Campos Novos y Barra Grande en Brasil, en el año de 2005 y de la presa Mohale, en Sudáfrica, en 2006, han llamado la atención sobre las prácticas que se siguen actualmente en la construcción de este tipo de estructuras. La Figura 1.1 muestra los daños en la cara de concreto para las presas de Campos Novos, en Brasil y Mohale en Sudáfrica (Pinto, 2007 y Johannesson y Tohlang, 2007; respectivamente)

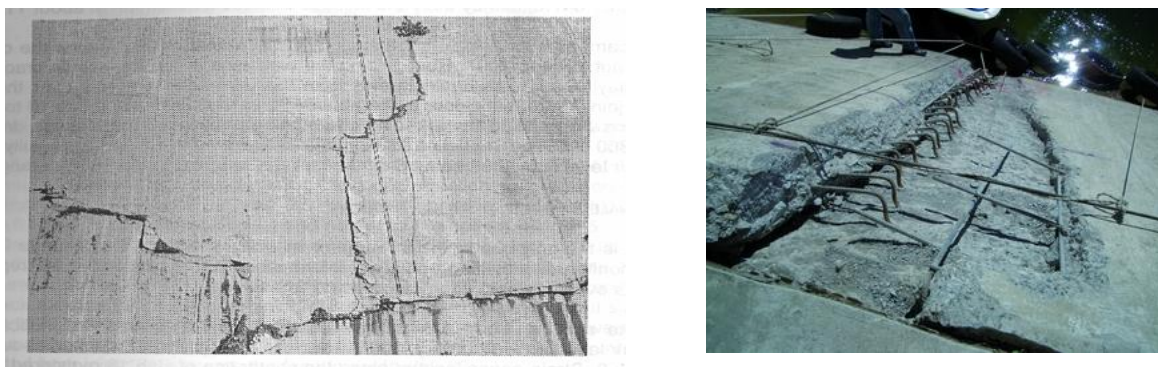


Figura 1.1.- En la imagen izquierda, agrietamiento horizontal y vertical en la cara de concreto de la presa Campos Novos (Pinto, 2007). En la imagen derecha, agrietamiento vertical visto desde arriba para la presa Mohale, después de un llenado rápido en 2006 (Johannesson y Tohlang, 2007)

La altura de diseño en este tipo de presas se ha incrementado de manera notable y la reducción en el número de juntas en la cara de concreto, también ha ido en aumento. Los casos de falla antes mencionados, demuestran la necesidad de incrementar la investigación del comportamiento que estas presas pueden tener. La extrapolación de diseños que funcionan en algunos casos no necesariamente ocurre en otros, sobre todo, cuando muchos aspectos del diseño están basados en fundamentos empíricos. Mucha información experimental se tiene de las presas construidas que ayuda a entender por qué ocurre un comportamiento u otro, sin embargo, la información experimental se valida con modelos y la capacidad de los modelos es crucial para conocer que se puede esperar en un nuevo diseño. En México se han construido en las últimas dos décadas dos grandes presas con cara de concreto: la presa de Aguamilpa y la presa de El Cajón, ambas sobre el río Santiago en el estado de Nayarit. La información disponible de los instrumentos instalados en estas estructuras de más de 150 metros de altura, han mostrado un comportamiento notablemente diferente, no sólo en la cara de concreto sino en el comportamiento general de las estructuras.

La Figura 1.2 presenta dos elásticas observadas por inclinómetros colocados a lo largo de una de las losas centrales que constituyen la cara de concreto de las presas de Aguamilpa y El Cajón. Esta información fue generada por la Gerencia de Estudios de Ingeniería Civil de CFE.

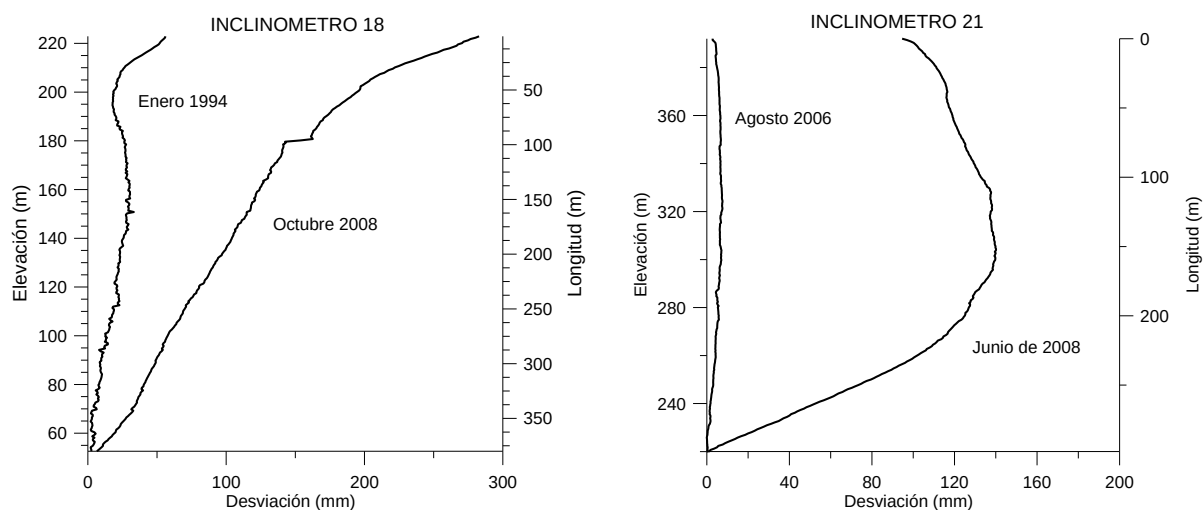


Figura 1.2.- Dos elásticas de una de las losas centrales en las presas de Aguamilpa (izquierda) y Cajón (derecha), medidas con inclinómetros. La desviación en las abscisas indica el movimiento en la dirección perpendicular a la losa. Las mediciones se realizaron después del llenado del embalse.

La Figura 1.2, muestra claramente, no sólo la diferencia entre las elásticas para ambas estructuras, sino los notables cambios que se tienen en la configuración de desplazamientos después de algunos años posteriores al llenado del embalse. Entonces, esta información muestra con claridad que aún en una misma presa, la cara de concreto con toda probabilidad tendrá modificaciones significativas en su configuración de desplazamientos a través del tiempo.

Algunos resultados del presente trabajo sugieren que estos cambios en la configuración de la deformada en la cara de concreto, pueden deberse no solamente a la forma en que se mueve el enrocamiento, sino también a cómo reacciona la losa de concreto a las deformaciones que imponen las fuerzas involucradas en el problema.

Se observa en los modelos analíticos que se presentan aquí, que los cambios en la configuración de desplazamientos en el enrocamiento, pueden explicarse como cambios en la distribución de esfuerzos en éste continuo ante la misma carga. Es decir, el hecho de que la presencia de desplazamientos no cese en la presa para la misma carga de agua, podría explicarse como las variaciones de la forma en que la estructura “toma” ésta demanda de carga con el tiempo. Esto, como se explica en los modelos, no sólo cambia la cantidad del desplazamiento, sino la forma en que este desplazamiento se desarrolla. Sería de esperar que esta importante fluencia del material, sea aún más drástica si la demanda o carga de agua, también cambia de manera significativa en el tiempo.

Al tomar el mismo caso presentado en la Figura 1.2, de la presa Mohale en Sudáfrica; se presenta en la Figura 1.3 los asentamientos medidos en el parapeto de la estructura (tomado de Johannesson y Tohlang, 2007). Es importante aclarar el hecho de que el cierre del embalse en esta presa sudafricana se realizó en el año de 2001, sin daño observable. Los daños se generaron por un llenado rápido en el año de 2006.

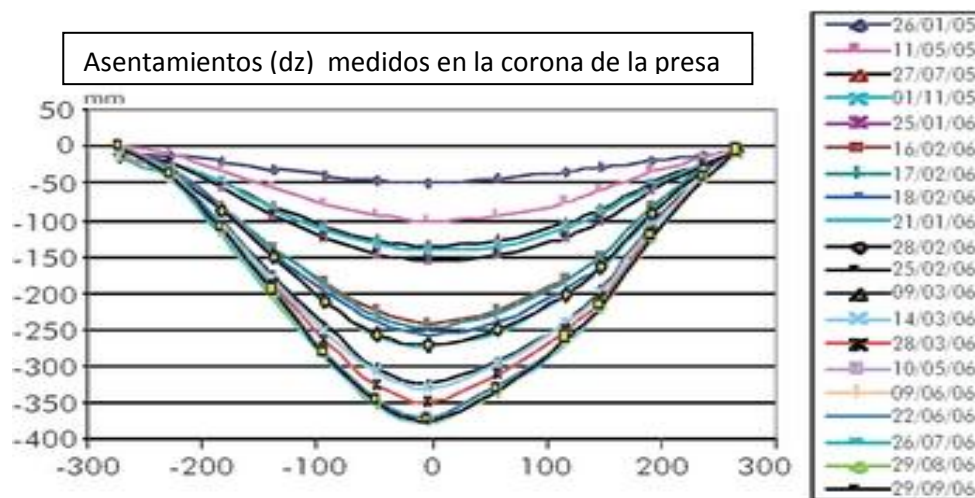


Figura 1.3.- Asentamientos en el parapeto de la presa Mohale en 2006 (Johannesson y Tohlang, 2007).

El daño en la losa de concreto fue observado con claridad en febrero de 2006. Para septiembre de 2006, el asentamiento había avanzado cerca de 15 cm más como se puede ver en la Figura.

Un diagrama del tipo de falla que se generó en las losas 17 y 18 de la presa Mohale se presenta en la Figura 1.4 (Johannesson y Tohlang, 2007). Note en particular el resultado de pasar el acero entre las juntas verticales de la estructura. Sin embargo, es muy probablemente que el daño en las losas

se hubiera generado aún si la presa contara con juntas libres estructuralmente, ya que, según estos mismos autores, la losa 18 traslapó por encima 7.5 cm a la losa 17. La presa de Campos Novos, es otro ejemplo del daño generado por este traslape o choque entre losas, ante los excesivos desplazamientos del terraplén.

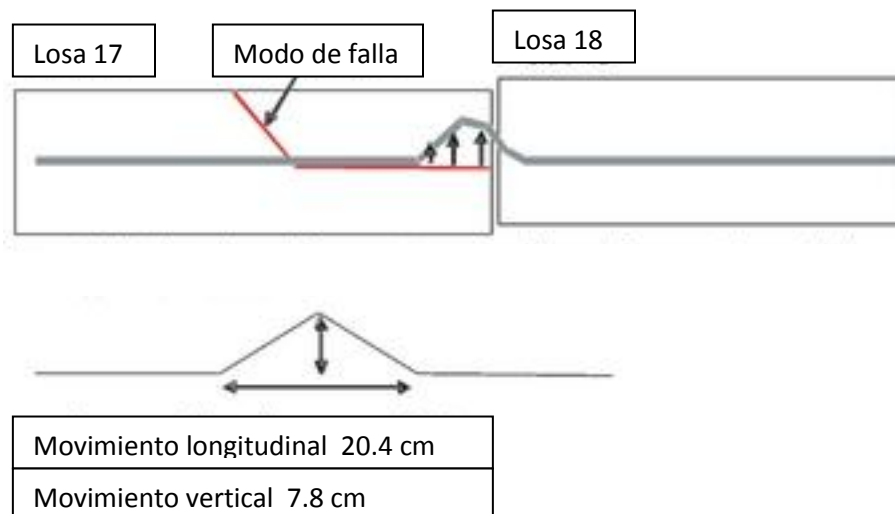


Figura 1.4.- Diagrama de falla en las losas de concreto 17 y 18, de la presa Mohale (Johannesson y Tohlang, 2007).

Note en las elásticas de la Figura 1.3, que las juntas en la parte más alta de la estructura, que podrían considerarse de tensión para el año 2005, para el año 2006, muy bien pudieron haber pasado a un estado de compresión. Ello en particular a las distancias ± 100 a ± 200 m (Figura 1.3).

La notable fluencia del material que caracteriza al enrocamiento, produjo también el agrietamiento en el tercio superior de la presa Aguamilpa, como lo indica claramente la elástica del inclinómetro medido en octubre de 2008, que se presenta en la Figura 1.2.

Los problemas estáticos han requerido de una revisión continua en los últimos años, no sólo en cuanto a la zonificación de los materiales que constituyen el enrocamiento y la explicación de las causas por las que este elemento responde de maneras tan peculiares (ver por ejemplo Pinto, 2007), sino a la línea de defensa que se puede conseguir con el diseño de las juntas libres en la cara de concreto, las cuales pueden mejorar el desempeño que se requiere en el sello hidráulico de la estructura.

Los problemas dinámicos en este tipo de estructuras tienen también una importante cantidad de incertidumbres. En Figura 1.5 se presentan dos fotografías de la presa Zipingpu de 152 m de altura, construida en China. Esta estructura, sufrió los efectos de un terremoto magnitud $M_w=7.9^\circ$, cuyo epicentro se ubicó a sólo 17 km de la presa. El terremoto de Wenchuan en 2008, generó una aceleración en la cresta de la estructura, medida en la cara de concreto, de 2g (Zeping, 2009). La fotografía del lado izquierdo, muestra una grieta horizontal que se produjo a 106 m de altura, a partir de la base, donde se tiene la junta constructiva que liga la tercera etapa de construcción con

la segunda etapa. El salto de la falla es de aproximadamente 15 cm (Zeping,2009). En la fotografía del lado derecho, se puede ver el desconchamiento del concreto en las juntas verticales, como consecuencia de importantes esfuerzos de compresión a lo largo de los bordes verticales de estas tiras de concreto.

Se conoce también, que la junta perimetral (entre el plinto y la losa), experimentó importantes desplazamientos. Algunos instrumentos fueron dañados como consecuencia de que el desplazamiento superó el límite de medición del instrumento. De acuerdo a los instrumentos disponibles, por ejemplo, en la margen izquierda a 100 m la altura de la estructura, un instrumento registró las siguientes mediciones: asentamiento 9.82 cm, separación 5.78 cm y desplazamiento de cortante 1.34 cm. Antes del sismo estos movimientos eran: 0.16 cm de asentamiento, 1.19 cm de apertura y 0.46 cm de cortante, en la junta plinto-losa. El autor no menciona cuales mediciones fueron saturadas, lo que implicaría que los desplazamientos fueron mayores al valor indicado.

Mediante exploraciones por perforación, se conoce que importantes zonas de la cara de concreto se encuentran separadas del enrocamiento en la parte superior de la estructura. Cerca de la corona de la presa, en la margen izquierda se llegaron a medir 23 cm de separación.

Sin embargo, el nivel de infiltraciones en 2009, no superó los 50 l/s, lo que ciertamente hace suponer que los daños principales se limitaron a la parte superior de la presa.



Figura 1.5.- Daños en la cara de concreto de la presa Zipingpu por el sismo de Wuenchuan en la región del Tibet en China en el año de 2008 (Zeping, 2009)

Así por ejemplo, la elástica de la cara de concreto de la presa Aguamilpa, sugiere que era necesaria la construcción de una junta libre para evitar el agrietamiento de la losa en el tercio superior de la estructura para problemas estáticos; mientras que los efectos dinámicos del terremoto de Wuenchuan en la presa Zipingpu en China, sugieren que la presencia de una junta libre horizontal en el tercio superior de esta estructura, pudo haber generado un salto mucho mayor que el observado sin la existencia de esta junta libre horizontal, tal como ocurrió. La comparación debe realizarse atendiendo las características particulares de cada estructura, incluyendo su situación

sísmica. Aquí, lo que se quiere resaltar es la importancia que tienen los modelos en los diseños de las estructuras. Es decir, si los modelos pueden ser capaces de indicar la necesidad o no de colocar una junta libre horizontal en el tercio superior de la presa.

Muchos de los problemas estáticos y dinámicos en las presas de enrocamiento con cara de concreto, han sido estudiados con el uso de la técnica del elemento finito. Esta herramienta, ha jugado un papel fundamental como instrumento de análisis para estudiar el comportamiento de este tipo de estructuras. Los modelos han logrado reproducir buena parte de los comportamientos observados en las mediciones experimentales.

En general, la técnica del elemento finito ha sido la herramienta de mayor utilidad para estudiar el comportamiento de presas de enrocamiento con cara de concreto. Poco se ha recurrido a soluciones cerradas o modelos analíticos. En este trabajo se ha realizado un esfuerzo con la intención de conocer la utilidad de los modelos analíticos en comparación con el comportamiento experimental que se tiene en este tipo de estructuras.

CAPITULO 2

MODELOS ANALÍTICOS

El presente capítulo trata sobre el desarrollo de modelos analíticos que constituirán la herramienta fundamental para realizar los análisis de algunas de las demandas que se dan en presas de enrocamiento con cara de concreto. Los desarrollos que se exponen a continuación, parten de modelos unidimensionales. Se incrementa la complejidad de los problemas, hasta llegar a planteamientos bidimensionales y tridimensionales. Se presentan todos los problemas resueltos en esta tesis, no sólo por los aspectos ilustrativos para personas interesadas en el tema, sino porque la solución de los problemas unidimensionales dieron la pauta para incrementar la complejidad de los modelos como se verá a continuación. Los modelos se separan en dos partes, una corresponde a problemas estáticos y la otra a problemas dinámicos.

2.1 Modelos Estáticos

2.1.1 MODELOS UNIDIMENSIONALES DE UNA FUERZA AXIAL VERTICAL

2.1.1.1 MODELO UNIDIMENSIONAL PARA UN PRISMA RECTANGULAR

Se parte del modelo elemental que se presenta en la Figura 2.1.1, ya que este modelo, por su simplicidad, permite abordar su solución desde diferentes puntos de vista.

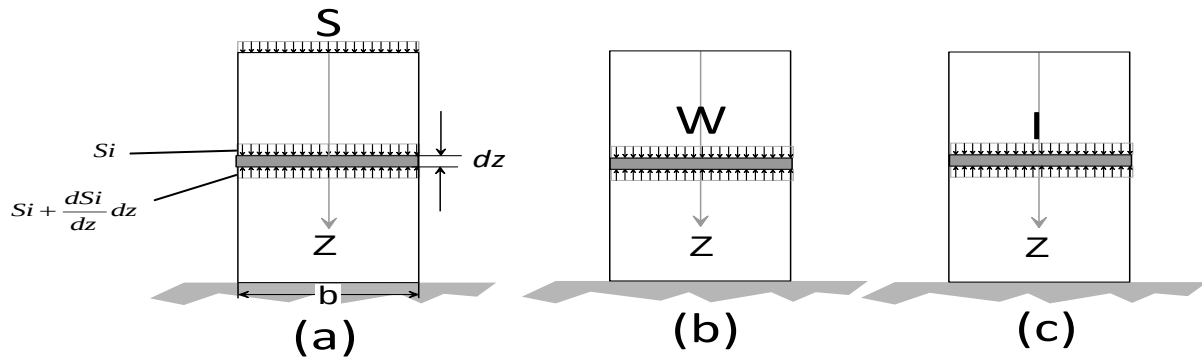


Figura 2.1.1.- Tres modelos estáticos para prismas de sección rectangular

Las diferencias en los casos anteriores consisten en que para el caso (a), el esfuerzo S está en la frontera, para el caso (b), se considera al peso como una constante que actúa como la fuerza interna del sistema, y en el caso (c), es la inercia la fuerza interna que actúa en el sistema

En el caso (a), para un elemento diferencial en el continuo, se tiene el siguiente equilibrio de

$$\text{fuerzas: } S_i = E \frac{du}{dz} \Rightarrow F_i = S_i b = E \frac{du}{dz} b \Rightarrow \frac{dF_i}{dz} dz = E \frac{d^2 u}{dz^2} b dz$$

En el equilibrio: $\frac{dF_i}{dz} dz = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \Rightarrow u = cz + d$. Que al aplicar las siguientes condiciones de frontera: $E \frac{du}{dz} \Big|_{z=0} = -S$; $u|_{z=h} = 0$, da: $u = \frac{S}{E}(h - z)$

Para el caso (b), se asume el peso proporcional a la constante de gravedad g , por lo que se tiene la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\frac{dF_i}{dz} dz = -W, \quad W = \rho g b dz \Rightarrow E \frac{d^2 u}{dz^2} = -\rho g \Rightarrow u = -\frac{g}{2V_p^2} z^2 + cz + d; \quad V_p^2 = \frac{E}{\rho}$$

Al aplicar condiciones de frontera: $E \frac{du}{dz} \Big|_{z=0} = 0$; $u|_{z=h} = 0$, se llega a:

$$u = \frac{g}{2V_p^2} (h^2 - z^2) \quad (2.1.1)$$

Finalmente en el caso (c), la fuerza de gravedad será asumida por una función de la inercia que es dependiente del tiempo. En este caso, la variación de la fuerza sobre el elemento diferencial F_i deberá ser igualada a la inercia, lo que conduce a:

$$\frac{\partial F_i}{\partial z} dz = -I, \quad I = \rho b dz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Si se define el desplazamiento u como el producto de dos funciones: $u = \Phi_z \Phi_t$, al sustituir en la expresión anterior, se tiene:

$$V_p^2 \frac{\Phi_z''}{\Phi_z} + \frac{\Phi_t''}{\Phi_t} = 0 \quad (2.1.2)$$

Si la función de tiempo representa a la fuerza de gravedad, resultaría lógica una solución de tipo hiperbólica para esta función, ya que las funciones hiperbólicas no tiene cruces por cero más que en el origen; y la fuerza de la gravedad no tiene cambios de sentido (o de signo), que es lo que representa físicamente un cruce por cero.

Se aceptará que la segunda derivada de la función de tiempo sea la constante g , y que el desplazamiento en $t=\infty$, sea cero. Para estas condiciones:

$$\begin{aligned} \Phi_t'' &= g \quad \text{para } t=0 \Rightarrow \omega^2 A = g \\ \Phi_t &= 0 \quad \text{para } t=\infty \Rightarrow (A+B)(\infty) + (A-B)(0) = 0 \Rightarrow B = -A \end{aligned}$$

Lo que conduce a la siguiente solución:

$$\Phi_t = \frac{g}{\omega^2} e^{-\omega t}$$

Para $t=0$, es posible “rescatar” el término $\frac{g}{\omega^2}$ en la solución. Este término, se considera fundamental en la solución de los problemas estáticos que se resuelven en los modelos de este capítulo.

Al sustituir la solución del tiempo en (2.1.2):

$$\Phi_z'' + \frac{\omega^2}{V_p^2} \Phi_z = 0$$

Con solución en términos de senos y cosenos. Si se aplican las mismas condiciones de frontera que en el caso anterior, da por solución:

$$\Phi_z = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2h} z\right) \quad \text{con:} \quad \omega = \frac{(2k-1)\pi}{2h} V_p, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$u = \Phi_t \Phi_z = \frac{g}{\omega^2} e^{-\omega t} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2h} z\right) \quad (2.1.3)$$

Al comparar las soluciones (2.1.1) y (2.1.3) para $z=0$, $t=0$, se tiene:

$$u = \frac{gh^2}{2V_p^2} = 0.5 \frac{gh^2}{V_p^2}$$

$$u = \Phi_t \Phi_z = \frac{4gh^2}{\pi^2 V_p^2} = 0.4 \frac{gh^2}{V_p^2}$$

Las soluciones de los planteamientos presentados en la Figura 2.1.1, se muestran con un ejemplo específico en la Figura 2.1.2, al considerar los siguientes parámetros: $V_p=500$ m/s, $h=150$ m y $b=300$ m y $g=9.81$ m/s² y S para el caso (a) se normalizó al caso (b).

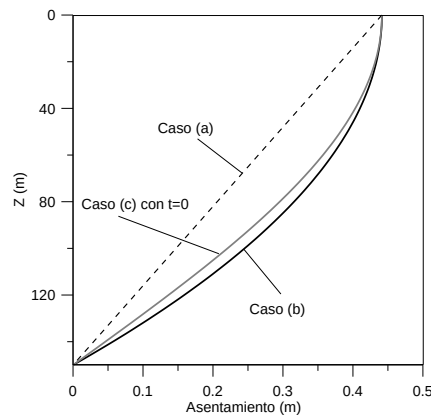


Figura 2.1.2.- Modelos unidimensionales para peso propio.

Como se puede observar, la fuerza externa genera sobre todo el continuo un movimiento lineal. Las curvas para la existencia del peso, como una constante, o como una función de la inercia,

generan curvas semejantes. Lo que se plantea en este ejercicio, es la posibilidad de usar una función de inercia en lugar de la constante gravitacional g , para un problema de peso propio. La ventaja de ello, ante problemas más complejos, es la posibilidad de separar las variables del problema, lo cual no es posible al usar simplemente la constante g . Algo que parece una observación menor, pero que no lo es, es que, para un problema de peso propio, la variación de la fuerza del elemento diferencial, tiene el mismo sentido que la dirección del peso; es decir: $\frac{dF_i}{dz} dz$ tiene el mismo sentido que W o I , en los casos (b) y (c) de la Figura 2.1.1. Ello le da sentido a la dirección de los desplazamientos u , para el sistema de referencia que se presenta en esta misma figura. La consideración de los signos juega un papel fundamental en los problemas bidimensionales y tridimensionales como se verá posteriormente. A continuación, se presentan las soluciones de otros problemas unidimensionales siguiendo la lógica de los planteamientos (b) y (c) presentados en la sección 2.1.1.1

2.1.1.2 MODELO UNIDIMENSIONAL PARA UN PRISMA TRAPEZOIDAL

Considérese el problema unidimensional vertical, al aceptar que la sección varía en función de la variable espacial z . Este caso puede también ser resuelto con facilidad por los dos caminos que se presentaron en la sección anterior.

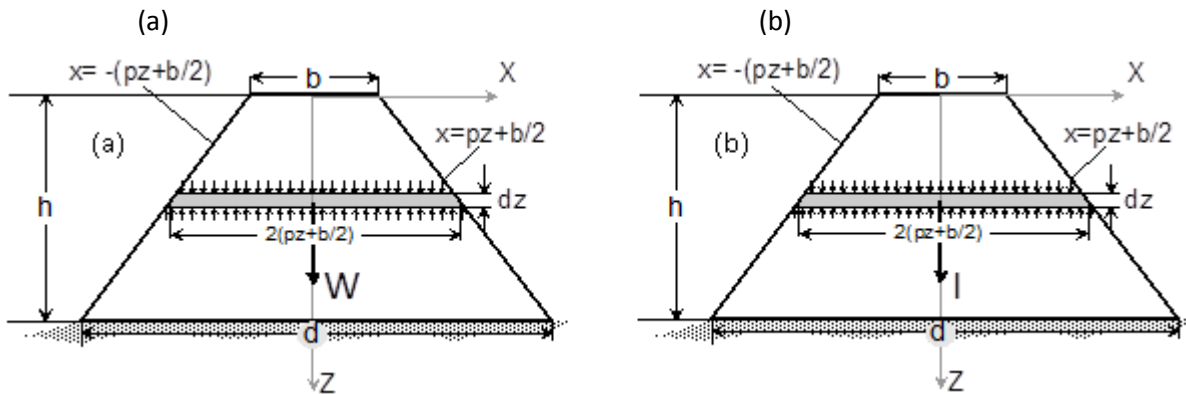


Figura 2.1.3.- Modelos unidimensionales para calcular asentamientos en trapecios

Para el caso (a), y siguiendo la analogía de la Figura 2.1.1, la fuerza F_i estaría dada por:

$$F_i = E \frac{du}{dz} 2(pz + b/2) \Rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial z} dz = 2E \left(\frac{d^2 u}{dz^2} (pz + b/2) + p \frac{du}{dz} \right)$$

$$W = 2\rho g(pz + b/2)dz$$

Lo que lleva a la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{(z + b_0)} \frac{du}{dz} = -\frac{g}{V_p^2}$$

$$V_p^2 = \frac{E}{\rho}, \quad b_0 = \frac{b}{2p}$$

Una solución particular es: $u_p = -\frac{g}{4V_p^2}(z+b_0)^2$

Y la solución de la homogénea asociada es: $u_H = A \log(z+b_0) + B$

La solución general después de aplicar las condiciones de frontera $u(h)=0$, $u'(0)=0$ es:

$$u = A \ln(z+b_0) + B - \frac{g}{4V_p^2}(z+b_0)^2$$

con :

$$A = \frac{g}{2V_p^2}b_0^2, \quad B = \frac{g}{4V_p^2}(h+b_0)^2 - \frac{gb_0^2}{2V_p^2} \ln(h+b_0)$$

Para el caso (b) de la Figura 2.1.3, mediante la separación de variables, se llega a una función exponencial para el tiempo, mientras que para la función de Z se obtiene una función de Bessel, es decir:

$$\Phi_t = \frac{g}{\omega^2} e^{-\omega t}$$

$$V_p^2 \left(\frac{\Phi'' z}{\Phi z} + \frac{1}{(z+b_0)} \frac{\Phi' z}{\Phi z} \right) = -\frac{\Phi'' t}{\Phi t} \quad \text{Si:} \quad \frac{\Phi'' t}{\Phi t} = \omega^2$$

$$\Rightarrow (z+b_0)\Phi'' z + \Phi' z + \frac{\omega^2}{V_p^2}(z+b_0)\Phi z = 0; \quad b_0 = \frac{b}{2p} \quad (2.1.4)$$

Si en (2.1.4), se traslada al origen $(z+b_0)$ mediante el siguiente cambio de variable $z = \nu - b_0$, la expresión (2.1.4) se transforma en:

$$\nu \Phi'' \nu + \Phi' \nu + \frac{\omega^2}{V_p^2} \nu \Phi \nu = 0$$

La solución de la ecuación es:

$$\Phi \nu = C_1 \Phi_{\nu 1} + C_2 \Phi_{\nu 2}$$

$$\Phi_{\nu 1}(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda \nu)^{2n}}{2^{2n} n!^2}$$

$$\Phi_{\nu 2}(\nu) = \Phi_{\nu 1}(\lambda \nu) \ln(\lambda \nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n (\lambda \nu)^{2n}}{2^{2n} n!^2}$$

$$H_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}; \quad \lambda = \frac{\omega}{V_p}$$

Para frontera fija en $z=h$ y libre en $z=0$, implica

$$C_1 \Phi_1(v) + C_2 \Phi_2(v) = 0, \quad (z = h) \quad (2.1.5)$$

$$C_1 \Phi_1'(v) + C_2 \Phi_2'(v) = 0, \quad (z = 0) \quad (2.1.6)$$

Por lo que se requiere resolver la siguiente ecuación característica:

$$\Phi_1(h)\Phi_2'(0) - \Phi_2(h)\Phi_1'(0) = 0$$

Los asentamientos para el caso (b) son: $u = \Phi_t \Phi_z$. La siguiente figura muestra las funciones de asentamientos para las dos soluciones anteriores al variar la relación b/d como se muestra

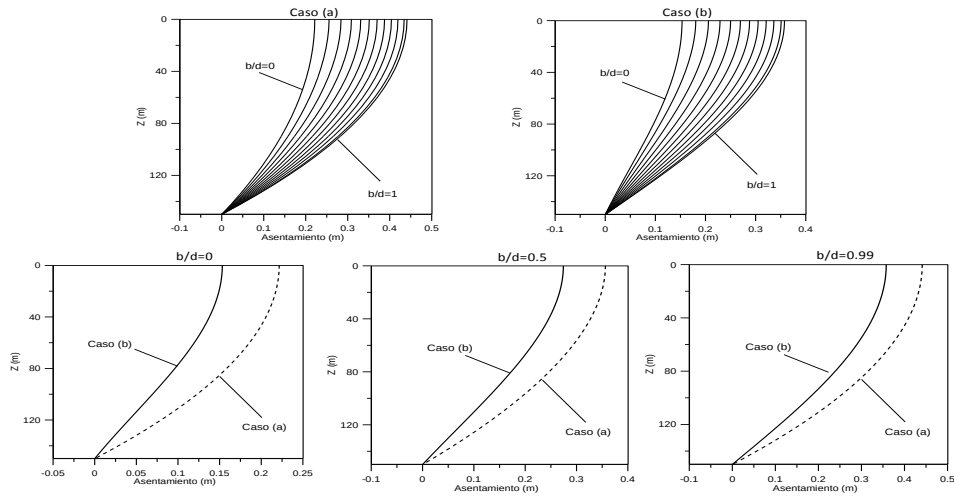


Figura 2.1.4.- Asentamiento para un elemento en forma de trapecio, al considerar el peso propio constante (caso a), y peso propio como función de la inercia (caso b).

Como se puede ver en la Figura 2.1.4, la forma de las curvas de asentamiento son muy semejantes para los dos modelos, sin embargo, los asentamientos son ligeramente mayores cuando el peso es constante, y la diferencia es aún mayor cuando el parámetro b es pequeño. Es importante decir que aquí no se sabe cuál de los dos asentamientos resueltos se acerca más a la realidad. Esto lo debería indicar la evidencia experimental.

Los valores de ω se determinan al resolver las condiciones de frontera de la función Φ_z , en el caso (b). Así, por ejemplo, en la Figura 2.1.5 se presenta la variación de ω para dos valores de la rigidez axial del material en función del parámetro b/d .

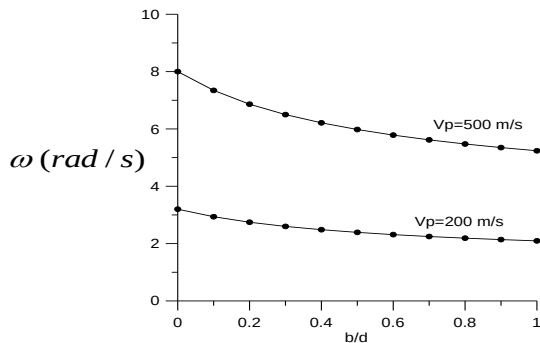


Figura 2.1.5.- Determinación de ω , para dos valores diferentes de la rigidez axial del material

2.1.1.3 MODELO UNIDIMENSIONAL PARA UN PRISMA TRAPEZOIDAL CON VARIACIÓN DE LA RIGIDEZ EN FUNCIÓN DE LA PROFUNDIDAD

Se estudió un tercer caso unidimensional, en el que se acepta la variación de la rigidez axial en función de la profundidad. Este planteamiento se ilustra en la Figura 2.1.6.

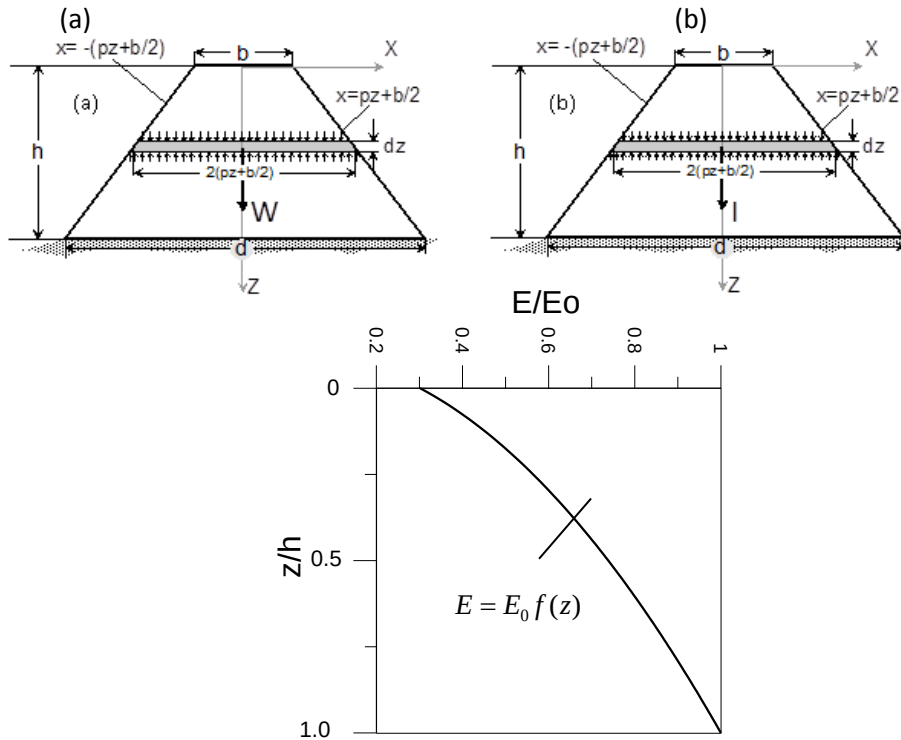


Figura 2.1.6.- Planteamiento estático unidimensional con variación de la rigidez axial en función de la profundidad.

A continuación se presenta una breve discusión sobre la forma de la función de variación de la rigidez $f(z)$, que se ilustra en la Figura 2.1.6. En un trabajo sobre el estado del arte en presas de materiales graduados, Gazetas, 1987 sugiere que la función de variación de rigidez a cortante puede ser definida como $G = G_0 \left(\frac{z}{h} \right)^\alpha$, donde α podría tener un valor del orden de $2/3$. Podría

definirse una función de variación análoga para la rigidez axial; es decir: $E = E_0 \left(\frac{z}{h} \right)^\alpha$, sin embargo,

esta definición tiene el problema de que la rigidez en $z=0$ es nula. Si se resuelve el problema para el caso en el que el peso es proporcional a g , como sería el caso (a) de la Figura 2.1.6, el análisis matemático del problema estático muestra una indeterminación en la solución en este punto. El

problema se podría salvar si: $f(z) = \left(\frac{z + b_0}{h + b_0} \right)^\alpha$, de modo que la rigidez axial no sea nula en $z=0$. Sin

embargo, en $z=0$ el valor de rigidez dependería del valor de b_0 , lo cual puede no tener ningún sentido físico. Para hacer menos arbitrario el valor de la rigidez en $z=0$, se requeriría un parámetro adicional para definir esta función. Así, al seguir la misma filosofía de variación de la función de

rigidez, propuesta por Gazetas, 1987, se puede proponer la siguiente función: $E = E_0 \left(\frac{(z + b_0)^\alpha}{\beta} + \eta \right)$, el valor de β y η definirían el valor de la rigidez en los extremos $z=0$, $z=h$, como se muestra en la Figura 2.1.7.

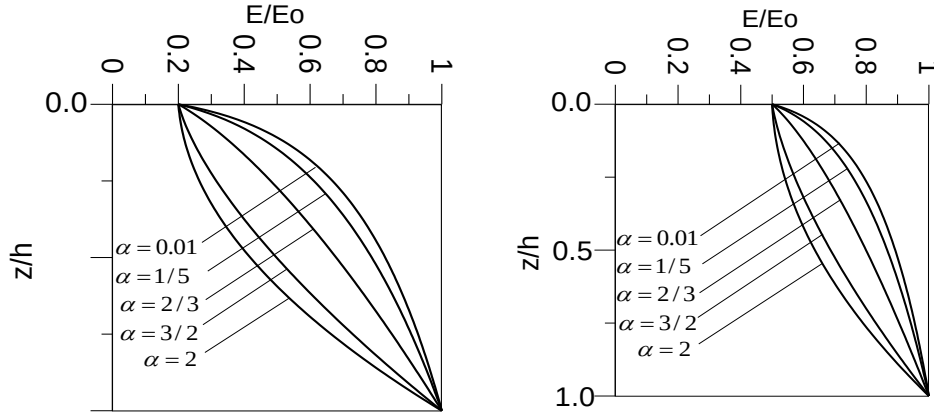


Figura 2.1.7.-Comportamiento de la función de variación de la rigidez axial, para una función de variación definida como: $E = E_0 \left(\frac{(z + b_0)^\alpha}{\beta} + \eta \right)$.

La ecuación diferencial para el caso en que el peso es proporcional a g queda definida por:

$$\begin{aligned}
 Fi &= 2E \frac{du}{dz} (pz + b/2), \quad W = 2\rho g(pz + b/2)dz \\
 E &= E_0 \left(\frac{(z + b_0)^\alpha}{\beta} + \eta \right) \Rightarrow Fi = 2E_0 p \left(\frac{(z + b_0)^{\alpha+1}}{\beta} + \eta(z + b_0) \right) \frac{du}{dz} \\
 \Rightarrow \frac{\partial Fi}{\partial z} dz &= -W \Rightarrow 2pE_0 \left(\left(\frac{(z + b_0)^{\alpha+1}}{\beta} + \eta(z + b_0) \right) \frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{(\alpha+1)(z + b_0)^\alpha}{\beta} + \eta \right) \frac{du}{dz} \right) dz = -2\rho g p(z + b_0) dz
 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{(\alpha+1)(z + b_0)^\alpha + \beta\eta}{(z + b_0)^{\alpha+1} + \beta\eta(z + b_0)} \right) \frac{du}{dz} = -\frac{g\beta}{V_p^2} \left(\frac{1}{(z + b_0)^\alpha + \beta\eta} \right)$$

$$\frac{du}{dz} = \Psi_z$$

$$\Psi'z + P(z)\Psi_z = Q(z)$$

$$P(z) = \left(\frac{(\alpha+1)(z + b_0)^\alpha + \beta\eta}{(z + b_0)^{\alpha+1} + \beta\eta(z + b_0)} \right), \quad Q(z) = -\frac{g\beta}{V_p^2} \left(\frac{1}{(z + b_0)^\alpha + \beta\eta} \right)$$

Con solución:

$$\Psi_z = - \left(\frac{g\beta}{2V_p^2} \frac{z+b_0}{(z+b_0)^\alpha + \beta\eta} + \frac{A}{(z+b_0)^{\alpha+1} + \beta\eta(z+b_0)} \right)$$

La integración general exacta de la expresión anterior, que define los asentamientos, involucra funciones hipergeométricas (*Wolfram Research Mathematica*), por lo que solamente se tomarán algunos casos específicos de α .

Para $\alpha = 1/2$, los asentamientos quedan definidos como:

$$u = \frac{g\beta}{2V_p^2} \left(-2\beta^3\eta^3 \log(\beta\eta + (z+b_0)^{1/2}) + 2\beta^2\eta^2 (z+b_0)^{1/2} - \beta\eta(z+b_0) + \frac{2}{3}(z+b_0)^{3/2} \right) + A \left(\frac{\log(z+b_0) - 2\log(\beta\eta + (z+b_0)^{1/2})}{\beta\eta} \right) + B$$

Para $\alpha = 2/3$, los asentamientos son:

$$u = \frac{3g\beta}{8V_p^2} \left(2\beta^2\eta^2 \log(\beta\eta + (z+b_0)^{2/3}) - 2\beta\eta(z+b_0)^{2/3} + (z+b_0)^{4/3} \right) + A \left(\frac{2\log(z+b_0) - 3\log(\beta\eta + (z+b_0)^{2/3})}{2\beta\eta} \right) + B$$

Para $\alpha = 1$, los asentamientos son:

$$u = \frac{g\beta}{2V_p^2} \left((z+b_0) - \beta\eta \log(\beta\eta + b_0 + z) \right) + A \left(\frac{\log(z+b_0) - \log(\beta\eta + b_0 + z)}{(z+b_0)} \right) + B$$

Para $\alpha = 2$, los asentamientos son:

$$u = \frac{g\beta}{4V_p^2} \log(\beta\eta + (z+b_0)^2) + A \left(\frac{2\log(z+b_0) - \log(\beta\eta + (z+b_0)^2)}{2\beta\eta} \right) + B$$

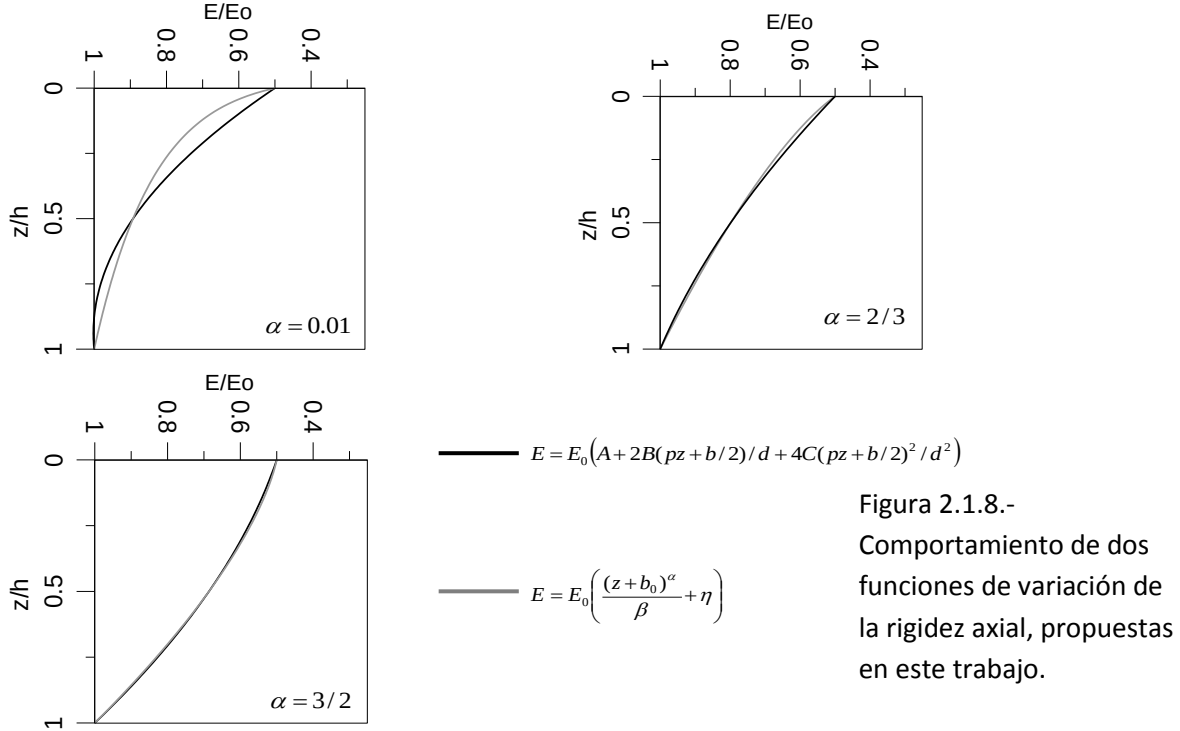
En las soluciones anteriores los parámetros A y B , son las constantes para definir las condiciones de frontera, mientras que los parámetros β y η , están definidos como:

$$\beta = \frac{b_0^\alpha - (h+b_0)^\alpha}{\gamma - 1}; \quad \eta = \frac{b_0^\alpha - \gamma(h+b_0)^\alpha}{b_0^\alpha - (h+b_0)^\alpha} \quad (2.1.7)$$

En (2.1.7) γ representa la fracción de la rigidez que se tendría en $z=0$; es decir, γ va de cero a uno, para el caso en el que la rigidez de la superficie sea inferior a la de la base.

Para la solución del caso (b), que considera al peso del material como función de Φ_t , la ecuación diferencial resultante, se complica de manera extraordinaria cuando el parámetro α no es un entero menor o igual a 2. Por esta razón, se estudia a continuación la posibilidad de plantear la función de variación de la rigidez de la siguiente forma:

$E = E_0 \left(A + 2B(pz + b/2)/d + 4C(pz + b/2)^2/d^2 \right)$. Este planteamiento permite definir tres puntos de la función de variación de la rigidez mediante una función cuadrática y; además, resolver el caso (b). La función de variación se presenta en la siguiente figura en comparación con la que se presentó en el caso anterior:



Se puede ver que los ajustes no son muy diferentes entre ambas funciones de variación. De hecho, la función de variación cuadrática es más versátil, ya que permite definir curvas de variación que no son posibles con la función: $E = E_0 \left(\frac{(z + b_0)^\alpha}{\beta} + \eta \right)$

Al resolver el caso (b) de la Figura 2.1.6, se tiene:

$$\begin{aligned}
 Fi &= 2E \frac{du}{dz} (pz + b/2), \quad I = 2\rho(pz + b/2)dz \frac{d^2u}{dt^2} \\
 E &= E_0 \left(A + 2(pz + b/2)B'/d + 4(pz + b/2)^2 C'/d^2 \right) \Rightarrow Fi = 2E_0 p \left(A(z + b_0) + (z + b_0)^2 B + (z + b_0)^3 C \right) \frac{du}{dz} \\
 B &= \frac{2B'p}{d}, \quad C = \frac{4C'p^2}{d^2}, \quad \text{Si: } \frac{\partial Fi}{\partial z} dz = -I \\
 \Rightarrow &\left(\left(A + (z + b_0)B + (z + b_0)^2 C \right) \frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{A}{z + b_0} + 2B + 3(z + b_0)C \right) \frac{du}{dz} \right) = -\frac{1}{V_p^2} \frac{d^2u}{dt^2}
 \end{aligned}$$

Por lo que al usar el método de separación de variables, la función de t queda como en los casos anteriores, mientras que la función de z a resolver es la siguiente:

$$\left(A + (z + b_0)B + (z + b_0)^2 C \right) \Phi'' z + \left(\frac{A}{z + b_0} + 2B + 3(z + b_0)C \right) \Phi' z + \frac{\omega^2}{V_p^2} \Phi z = 0$$

La expresión anterior puede resolverse mediante el método de Frobenius (consulte el apéndice 2.1.1 para revisar el estudio de esta solución). En la siguiente figura se presentan los resultados de asentamientos para las soluciones de los casos (a) y (b) de la Figura 2.1.6.

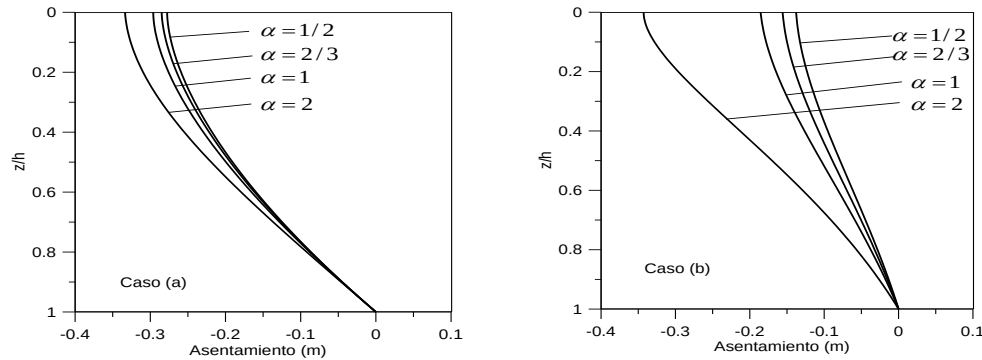


Figura 2.1.9.-Comportamiento de los asentamientos para las dos funciones de variación de la rigidez axial, propuestas en este trabajo.

Como se puede observar, el caso (b) tiene asentamientos menores al caso (a) mientras que α sea menor a 1, cuando $\alpha = 2$, los asentamientos son semejantes. La forma de las curvas de asentamiento es ligeramente diferente entre ambos casos, con una doble curvatura para el caso (b).

La siguiente figura presenta las mediciones de asentamiento observadas en la Central Hidroeléctrica Aguamilpa realizadas por personal de la Gerencia de Estudios de Ingeniería Civil de CFE de 1993 a 2003, a partir del inclinómetro I-1, ubicado en el enrocamiento de esta estructura.

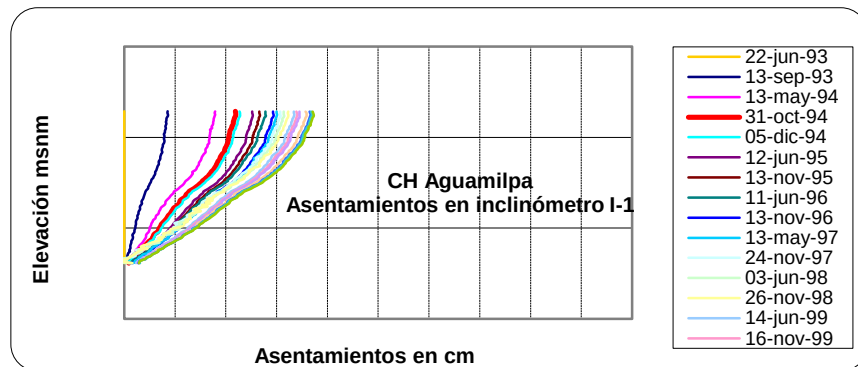


Figura 2.1.10.- Asentamientos observados en un inclinómetro instalado en la Presa de Aguamilpa

En estas mediciones se puede observar que las curvas de observación, no son muy diferentes a las que se obtienen con modelos teóricos unidimensionales. Particularmente son semejantes al último modelo unidimensional presentado, con una doble curvatura en la función de variación del asentamiento.

2.1.2 MODELOS ESTÁTICOS BIDIMENSIONALES

En los desarrollos bidimensionales que se muestran en esta sección, ya no es posible resolver el problema de peso propio a partir de la constante gravitacional g , si se quiere usar el método de separación de variables, por lo que se utilizará la inercia para definir el peso.

2.1.2.1 MODELO ESTÁTICO BIDIMENSIONAL DE UNA FUERZA AXIAL Y UN CORTANTE VERTICAL

El modelo bidimensional de una fuerza cortante y una fuerza axial vertical, se presenta en la Figura 2.2.1. En este caso, las fuerzas están distribuidas de manera uniforme en la dirección Y

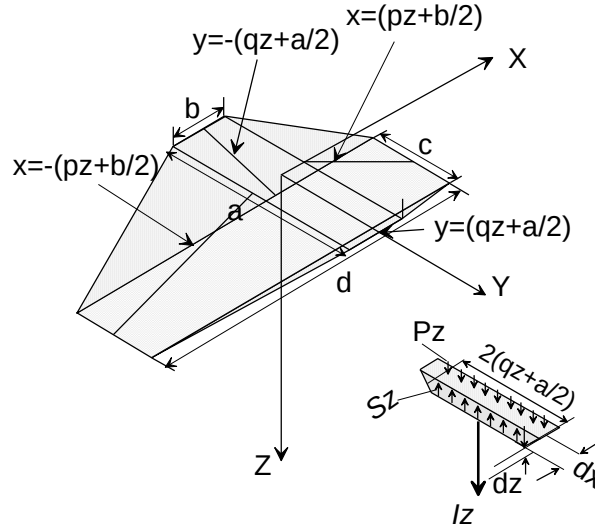


Figura 2.2.1.- Modelo bidimensional de un esfuerzo cortante y un axial en dirección vertical

Al resolver el problema, se obtiene suma de fuerzas igual a cero:

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} dz + \frac{\partial S_z}{\partial z} dz = -I_z$$

Las fuerzas del sistema son:

$$P_z = 2E \frac{\partial w}{\partial z} (qz + a/2) dz \quad ; \quad S_z = 2G(qz + a/2) \frac{\partial w}{\partial x} dx \quad ; \quad I_z = 2\rho(qz + a/2) dx dz \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Entonces:

$$V_p^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{(z + a_0)} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + V_s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad V_p^2 = \frac{E}{\rho}; \quad V_s^2 = \frac{G}{\rho} \quad (2.2.1)$$

Si $u = \Phi_x \Phi_z \Phi_t$, al aplicar sobre la expresión anterior:

$$V_p^2 \left(\frac{\Phi''_z}{\Phi_z} + \frac{1}{(z + a_0)} \frac{\Phi'_z}{\Phi_z} \right) + V_s^2 \frac{\Phi''_x}{\Phi_x} = - \frac{\Phi''_t}{\Phi_t}$$

La solución en dirección X es:

$$\Phi_x = A \cos(\omega_x x) + B \sin(\omega_x x)$$

Para trabajar con las condiciones de frontera de Φ_x , se seguirá el planteamiento que se presenta en la Figura 2.2.2.

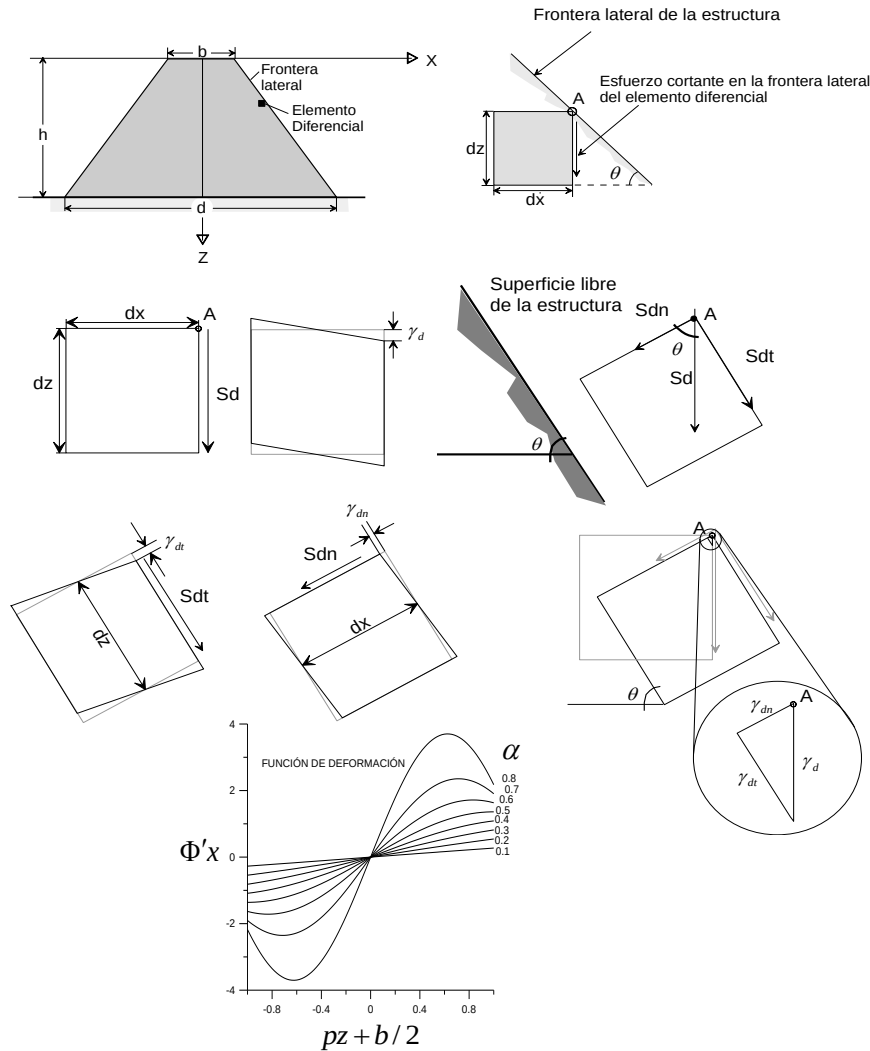


Figura 2.2.2.- Esquema que representa los esfuerzos cortantes del elemento diferencial, en la frontera lateral de la estructura

Si la frontera lateral es libre, por ejemplo, se aceptará que los esfuerzos cortantes no son nulos en la frontera, sino proporcionales al coseno del ángulo θ . Esta hipótesis tiene una doble finalidad:

- Permite resolver el problema dinámico de vibración forzada (como se verá posteriormente); y,
- Genera una serie de soluciones que tienen mayor congruencia con las observaciones experimentales. Cuando el ángulo de inclinación de la frontera es de $\theta=90^\circ$, entonces los esfuerzos deberán ser nulos para el caso de frontera libre, ya que el ángulo de la frontera coincide con el ángulo del elemento diferencial. Geométricamente, esto puede ser explicado como se ilustra en la Figura 2.2.2. Note que cuando el elemento diferencial definido en el problema, toca la frontera libre en el punto A, podríamos rotar al elemento diferencial un ángulo θ , para hacerlo coincidir con la frontera libre de la estructura. Si la dimensión del elemento diferencial se

mantiene, la fuerza cortante Sd puede descomponerse en dos fuerzas cortantes Sdt y Sdn . Ahora bien, como la longitud sobre la que se aplican estas dos fuerzas cortantes, es la misma. Entonces, las deformaciones angulares que se generan, son proporcionales a Sdt y Sdn (dado que el módulo de elasticidad es constante), por lo que la deformación angular γ_d puede descomponerse en γ_{dt} y γ_{dn} . El elemento diferencial rotado presenta el cortante Sdt en coincidencia con la frontera libre, lo que hace nulo su valor, al aplicar la compatibilidad de esfuerzos con la frontera libre. La fuerza residual, o que resta, es Sdn , la cual es proporcional al coseno del ángulo de inclinación de la frontera.

Así, si las fronteras: $x=-(pz+b/2)$, $x=(pz+b/2)$ son libres para el movimiento en dirección u ; entonces,

$$G\Phi'x = \pm G\omega_x \cos \theta$$

Al sustituir en la solución Φ_x , se tiene:

$$\left. \begin{aligned} G\omega_x (-A \sin \omega_x (pz + b/2) + B \cos \omega_x (pz + b/2)) &= -G\omega_x \cos \theta \sin \omega_x (pz + b/2) \\ G\omega_x (A \sin \omega_x (pz + b/2) + B \cos \omega_x (pz + b/2)) &= G\omega_x \cos \theta \sin \omega_x (pz + b/2) \end{aligned} \right\} \Phi_x = \frac{\cos \theta}{\sin \omega_x (pz + b/2)} \cos \omega_x x \quad (2.2.2)$$

El parámetro ω_x , no se ha requerido para definir la solución anterior; sin embargo, al aceptar que el esfuerzo es igual a todo lo largo de la frontera $\pm(pz+b/2)$, la frecuencia natural ω_x deberá al menos ser función de este parámetro:

$$\omega_x = \frac{\alpha\pi}{(pz + b/2)} = \frac{\alpha\pi}{p(z + b_0)}; \quad b_0 = \frac{b}{2p}$$

La Figura 2.2.2 presenta esta función de deformación obtenida en la ec (2.2.2), para diferentes valores de α , donde la fracción que se presenta es la fracción de π . Note que cuando α crece en general la deformación en los bordes crece y por lo tanto el esfuerzo crece. Por otro lado, si para la función de t se tiene una solución hiperbólica, entonces:

$$\frac{\Phi''t}{\Phi t} = \omega^2 \Rightarrow \Phi t = A \cosh \omega t + B \sinh \omega t \quad (2.2.3)$$

Al aplicar (2.2.2) y (2.2.3) en la expresión (2.2.1)

$$(z + a_0)\Phi z'' + \Phi z' + (z + a_0) \left(\frac{\omega^2}{V_p^2} - \frac{C_{kx}^2}{(z + b_0)^2} \right) \Phi z = 0 \quad (2.2.4)$$

$$\text{donde: } C_{kx} = \left(\frac{\alpha\pi V_s}{pV_p} \right)$$

La ecuación (2.2.4) se encuentra resuelta mediante el método de Frobenius en el Apéndice 2.2.1. Esta solución de Z deberá cumplir con esfuerzos nulos en $z=0$ y desplazamiento nulos en $z=h$, que serían las condiciones de frontera del problema planteado en la Figura 2.2.1. Es importante

destacar, que en el caso de la función de Z , la cara superior del elemento diferencial coincide con la cara superior de la estructura en $Z=0$, por lo que si se aplica que las deformaciones sean nulas en esta superficie ($z=0$).

A continuación se presenta la solución de Z para diferentes valores del parámetro α , al conservar la geometría de un caso específico, cuyos parámetros considerados fueron: $a=350$, $b=20$, $c=75$, $d=525$ y $h=150$ m; y con las siguientes propiedades mecánicas: $V_p=500$ m/s y $V_s=350$ m/s.

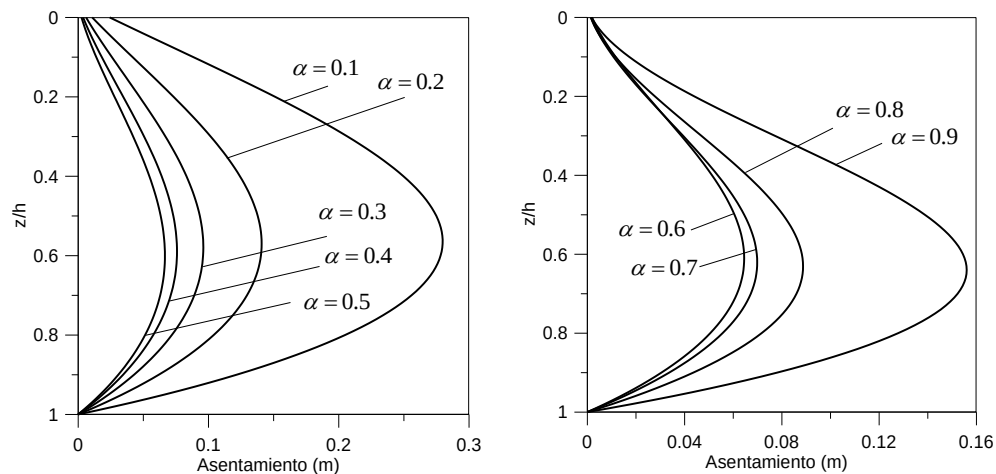


Figura 2.2.3.- Función de asentamientos para $x=0$, en función del parámetro α que define la solución para la función de x .

En la Figura 2.2.4, se muestra la elástica de asentamiento que se genera para los casos $\alpha = 0.1$, 0.5 y 0.9 , donde puede verse claramente el efecto del parámetro. Note de manera particular que si $\alpha > 0.5$, se pueden generar movimientos verticales en dirección contraria a la gravedad, lo cual, aunque no sería el caso para un material granular que carece de capacidad a tensión, si podría presentarse para otro tipo de materiales.

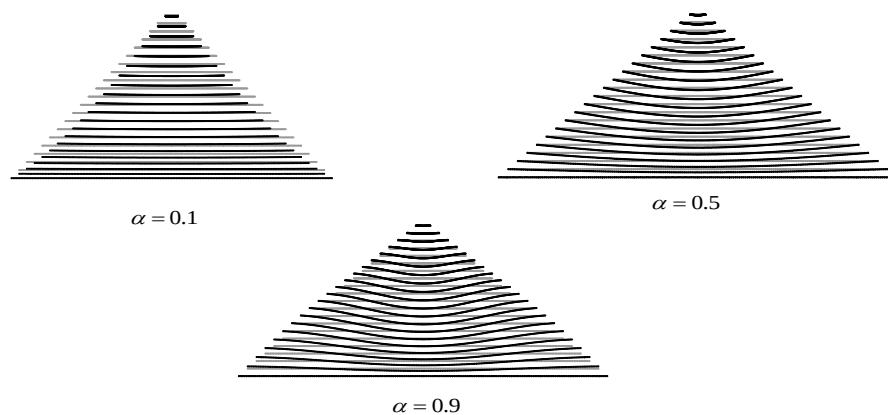


Figura 2.2.4.- Elástica de asentamiento que se genera para el modelo de la figura 2.2.1, al variar el parámetro α

La Figura 2.2.5 presenta el asentamiento para variaciones de la geometría como se indica en la figura. Los parámetros del modelo son como los empleados en la Figura 2.2.3, y solamente se variaron los parámetros b y c , como se especifica en la figura. El asentamiento es máximo para una relación $b/d=0.5$. Por otro lado, cuando el parámetro c es pequeño, el asentamiento migra hacia la base, mientras que cuando este parámetro crece, el asentamiento es más uniforme en el continuo. Es importante recordar que las condiciones de frontera solamente están definidas en las direcciones X y Z en este caso.

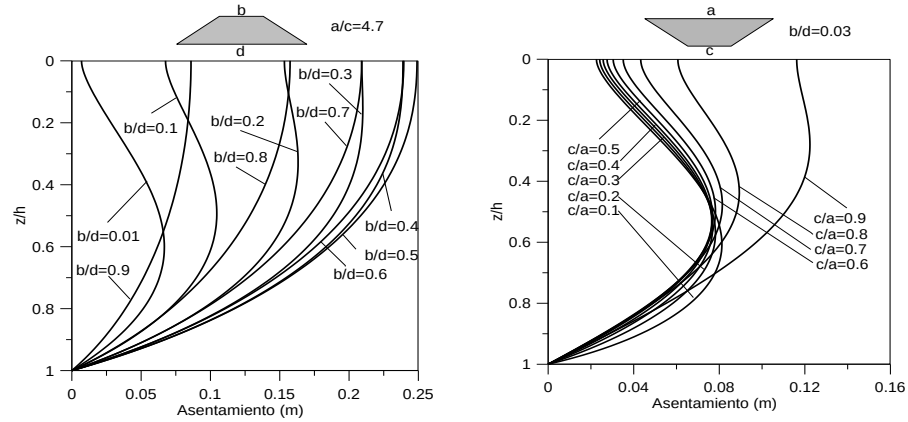


Figura 2.2.5.- Asentamientos para variaciones de la geometría del modelo definido en 2.2.1. El parámetro α es de 0.5 en todos los casos.

Si se estudia el problema en la otra dirección, como se muestra en la Figura 2.2.6. Es decir, ahora las condiciones de fronteras estarán definidas en $y=\pm(qz+a/2)$ y $z=0, z=h$

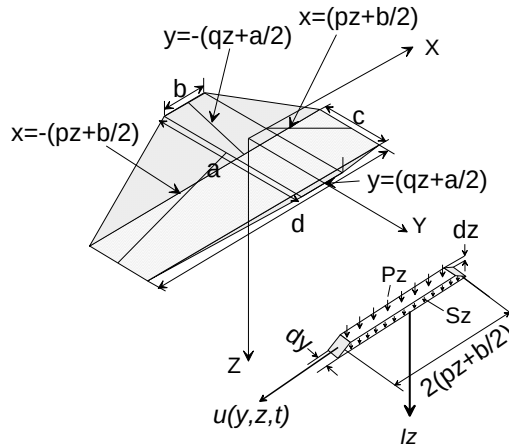


Figura 2.2.6.- Estudio del movimiento bidimensional vertical, con el esfuerzo cortante en la dirección y

De la misma forma que en el caso anterior, se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$V_p^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{(z+b_0)} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + V_s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.2.5)$$

Si $w = \Phi_y \Phi_z \Phi_t$, al aplicar sobre la expresión anterior:

La solución en dirección y es:

$$\Phi_y = A \cos(\omega_y y) + B \sin(\omega_y y)$$

Para el caso de que las fronteras sean fijas en: $y = \pm(qz + a/2)$, la solución se puede expresar como:

$$\Phi_y = A \cos(\omega_y y) \quad \omega_y = \frac{\pi}{2(qz + a/2)}$$

Al considerar la solución anterior sobre (2.2.5) y la solución de t como una solución hiperbólica, se llega a:

$$(z + b_0) \Phi z'' + \Phi z' + (z + b_0) \left(\frac{\omega^2}{V_p^2} - \frac{C_{ly}^2}{(z + a_0)^2} \right) \Phi z = 0 \quad (2.2.6)$$

Donde: $C_{ly} = \left(\frac{\pi V_s}{2qV_p} \right)$

La ecuación (2.2.6) tiene la misma forma que la ecuación (2.2.4), de manera que la solución que se presenta en el Apéndice 2.2.1 es aplicable a (2.2.6).

La Figura 2.2.7 contiene los resultados al variar la relación b/d y a/c , para caso en el que el esfuerzo cortante resuelve las fronteras en $y = \pm(qz + a/2)$. Aquí, como estas fronteras son fijas, el sentido físico de la solución es más lógica con lo que se esperaría físicamente; es decir, la reducción del asentamiento ante reducciones de los parámetros b o c . Como ocurre en la Figura 2.2.7.

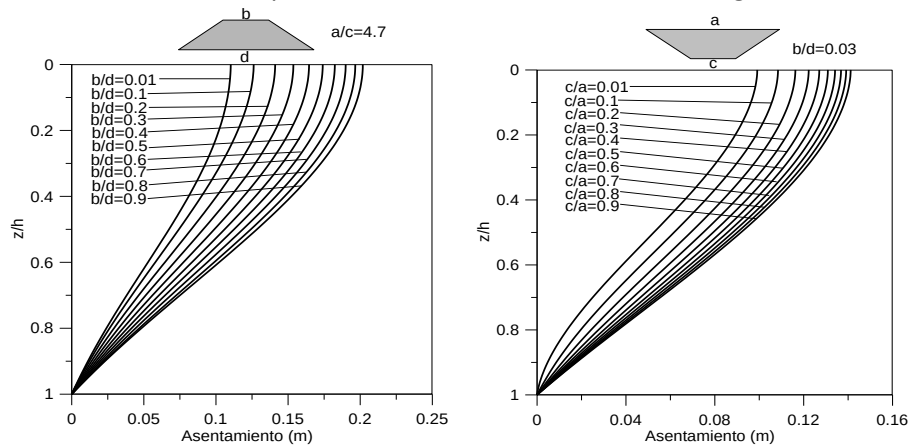


Figura 2.2.7.- Asentamientos para variaciones de la geometría del modelo definido en 2.2.6. El parámetro α es de 0.5 en todos los casos.

Note que también en la figura anterior, mientras es más cerrada la base del cañón, es más pronunciada la doble curvatura que se genera en la función de asentamiento.

Finalmente, en la Figura 2.2.8, se presentan las curvas de asentamiento para las variaciones de la relación V_p/V_s , donde, nuevamente la generación de la doble curvatura, que es importante para el comportamiento de las losas de concreto en presas de enrocamiento, se acentúa cuando la rigidez a cortante es semejante a la rigidez axial del material en el caso en el que las condiciones de frontera están definidas en las direcciones Y y Z (lado derecho de la Figura 2.2.8)

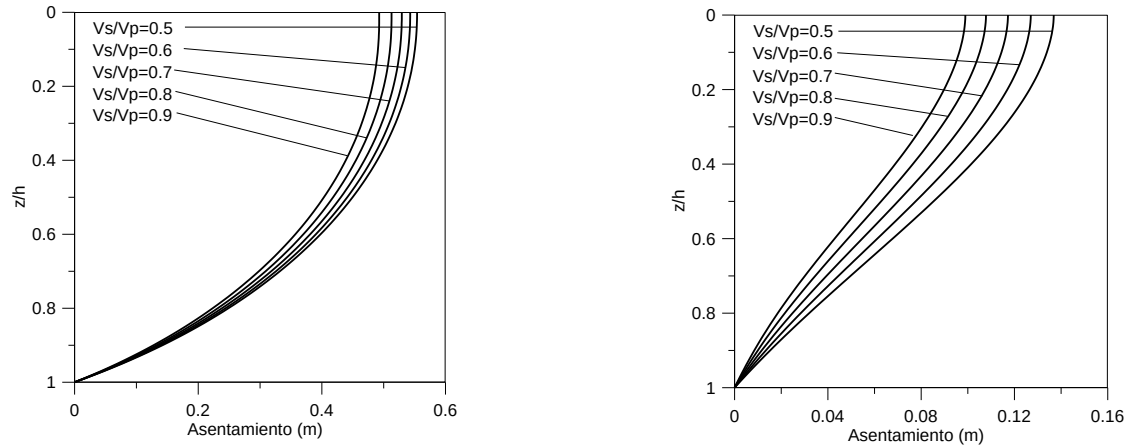


Figura 2.2.8.- Asentamientos para variaciones de la relación V_p/V_s , en el continuo, para los casos donde se definen las condiciones de frontera en $x=\pm(pz+b/2)$, $z=0,h$ (lado izquierdo de la Figura); y en las fronteras $y=\pm(qz+a/2)$, $z=0,h$ (lado derecho de la Figura).

2.1.3 MODELOS ESTÁTICOS TRIDIMENSIONALES

2.1.3.1 MODELO ESTÁTICO DE UNA FUERZA AXIAL Y DOS CORTANTES EN DIRECCIÓN VERTICAL

Siguiendo la lógica del planteamiento anterior, el modelo tridimensional que se presenta a continuación considera a dos fuerzas cortantes y una axial, todas en la misma dirección, por lo que el modelo está limitado a una sola dirección de movimiento. Esta distribución de fuerzas, tiene la ventaja de que permite cumplir con las condiciones en frontera en todas las caras de la cuña que define la geometría de una presa, tal como se muestra en el esquema definido en la Figura 2.3.1

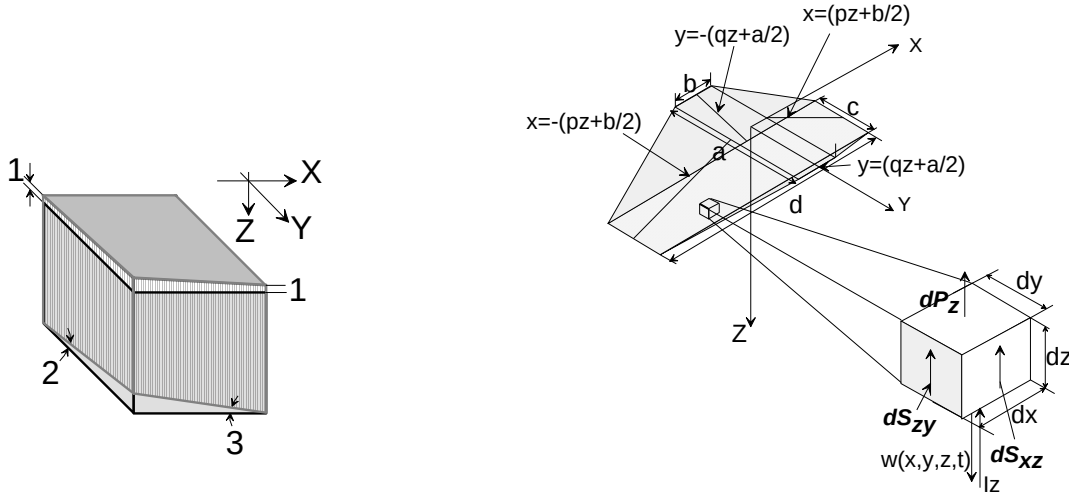


Figura 2.3.1.- Modelo tridimensional para el problema de asentamientos. En la elástica que se muestra en el lado izquierdo, 1 es la deformación debida a la fuerza axial y 2,3 son las deformaciones angulares debidas a las fuerzas cortantes, l_z representa el peso del material.

Al aceptar el sentido de las fuerzas que se ilustran en la Figura 2.3.1, el sistema de fuerzas en equilibrio lleva a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + V_p^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + V_s^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.3.1)$$

Usando el método de separación de variables: $w = \Phi_x \Phi_y \Phi_z \Phi_t$

$$\frac{\Phi_z''}{\Phi_z} + \frac{V_s^2}{V_p^2} \left(\frac{\Phi_x''}{\Phi_x} + \frac{\Phi_y''}{\Phi_y} \right) + \frac{1}{V_p^2} \frac{\Phi_t''}{\Phi_t} = 0$$

Con las siguientes soluciones:

$$\Phi_x = A_k \cos(\omega_x x) + B_k \sin(\omega_x x)$$

$$\Phi_y = A_l \cos(\omega_y y) + B_l \sin(\omega_y y)$$

$$\Phi_t = A_n \cosh(\alpha t) + B_n \sinh(\alpha t)$$

Si la naturaleza del movimiento en las direcciones x , y y t , fuese la misma que la indicada en los casos bidimensionales, solamente resta determinar la ecuación diferencial resultante para z , que esta dada por:

$$\Phi''_z + \left(\frac{\omega^2}{V_p^2} - \frac{C_{ly}^2}{(z+a_0)^2} - \frac{C_{kx}^2}{(z+b_0)^2} \right) \Phi_z = 0 \quad (2.3.2)$$

$$\text{Donde: } C_{kx} = \left(\frac{\alpha \pi V_s}{p V_p} \right); C_{ly} = \left(\frac{\pi V_s}{2q V_p} \right)$$

El estudio de la ecuación (2.3.2) se expone en el Apéndice 2.3.1, por lo que a continuación, solamente se presentan los aspectos más relevante de la solución.

Al estudiar el comportamiento del modelo para diferentes valores del parámetro α que define la solución en x , se tienen los resultados que se presentan en la Figura 2.3.2. Estos resultados son semejantes a los obtenidos en el modelo bidimensional. Note como migra el asentamiento máximo hacia la base de la estructura con el incremento de α . El incremento de α implica comenzar a generar movimientos contrarios al sentido de la gravedad en las fronteras laterales ($\alpha=0.9$), mientras que su reducción implica menor esfuerzo en las fronteras laterales ($\alpha=0.1$), como lo muestra la Figura 2.3.2.

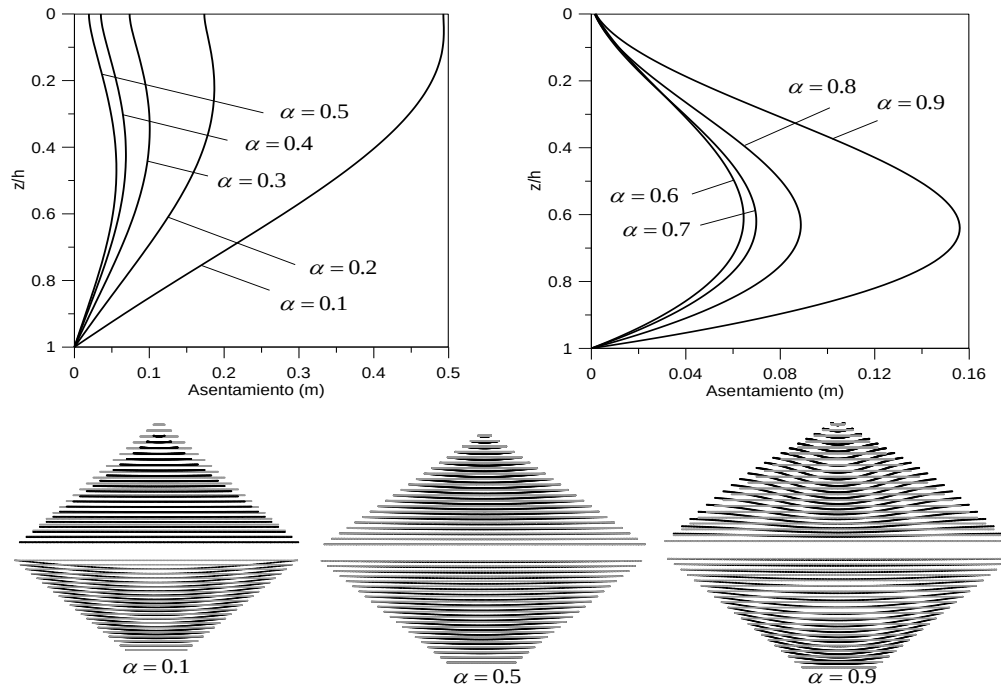


Figura 2.3.2.- Asentamientos para el modelo tridimensional en función del parámetro α

Como en el caso bidimensional, se analiza a continuación la distribución de asentamientos para diferentes geometrías. Los resultados se ilustran en la Figura 2.3.3. En el lado izquierdo de esta Figura, se modifica la relación b/d , manteniendo la relación a/c fija; mientras que en el lado

derecho, se modifica la relación a/c , al mantener fija la relación b/d (refiérase a la Figura 2.3.1, para identificar los parámetros sobre el sistema de referencia).

Es clara la tendencia de migrar el asentamiento máximo hacia la parte media de la estructura para el caso de una relación b/d pequeña; mientras que cerrar la base del cañón (parámetro c), implica reducir el valor del asentamiento hacia la base, como se puede observar en la figura.

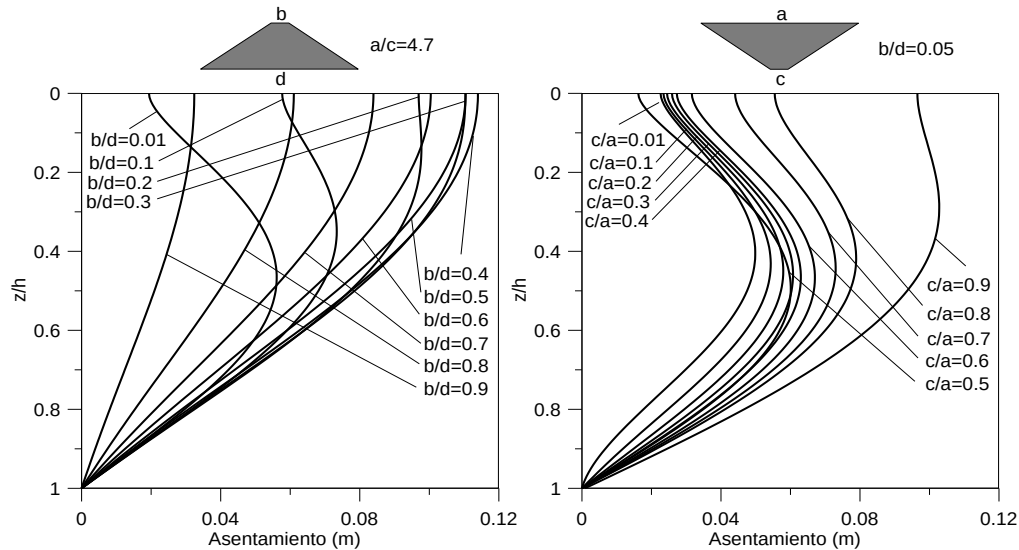


Figura 2.3.3.- Asentamientos en función de la altura ($x=0, y=0$), para el modelo tridimensional al variar la geometría del continuo ($\alpha = 0.5$), con $V_p=500$ m/s, $V_s=350$ m/s.

En las siguientes figuras, se muestran las curvas de asentamiento en las direcciones X e Y, ante la variación de la relación V_p/V_s . La relación $b/d=0.03$ y $a/c=4.7$, se usaron para el ejemplo que se muestra en la Figura 2.3.4.

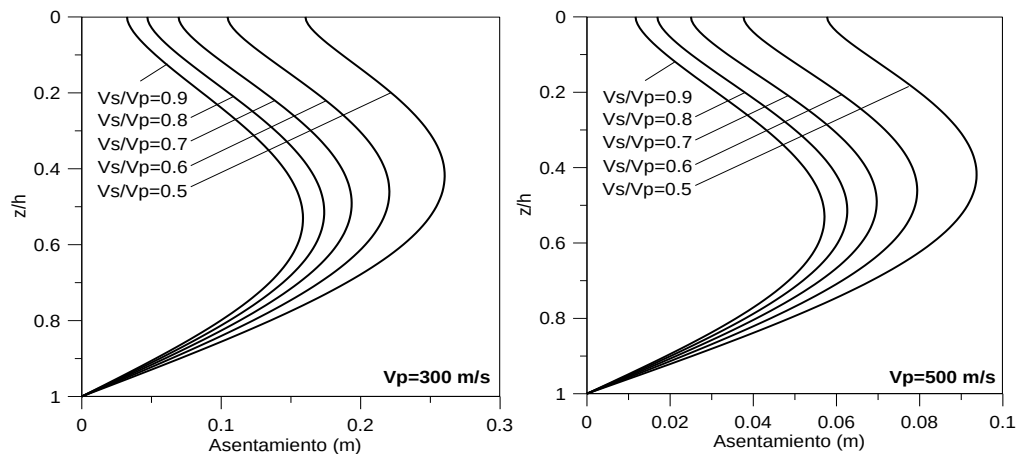


Figura 2.3.4.- Asentamientos en función de la altura ($x=0, y=0$), para el modelo tridimensional al variar la rigidez del material en el continuo ($\alpha = 0.5$)

Algo claro en la Figura 2.3.4, es que el máximo de asentamiento, migra hacia la parte media del continuo cuando crece el valor de V_s en relación al de V_p .

Dado que la solución es tridimensional, se generaron algunas figuras de curvas de igual asentamiento para diferentes casos, que se presenta en la Figura 2.3.5.

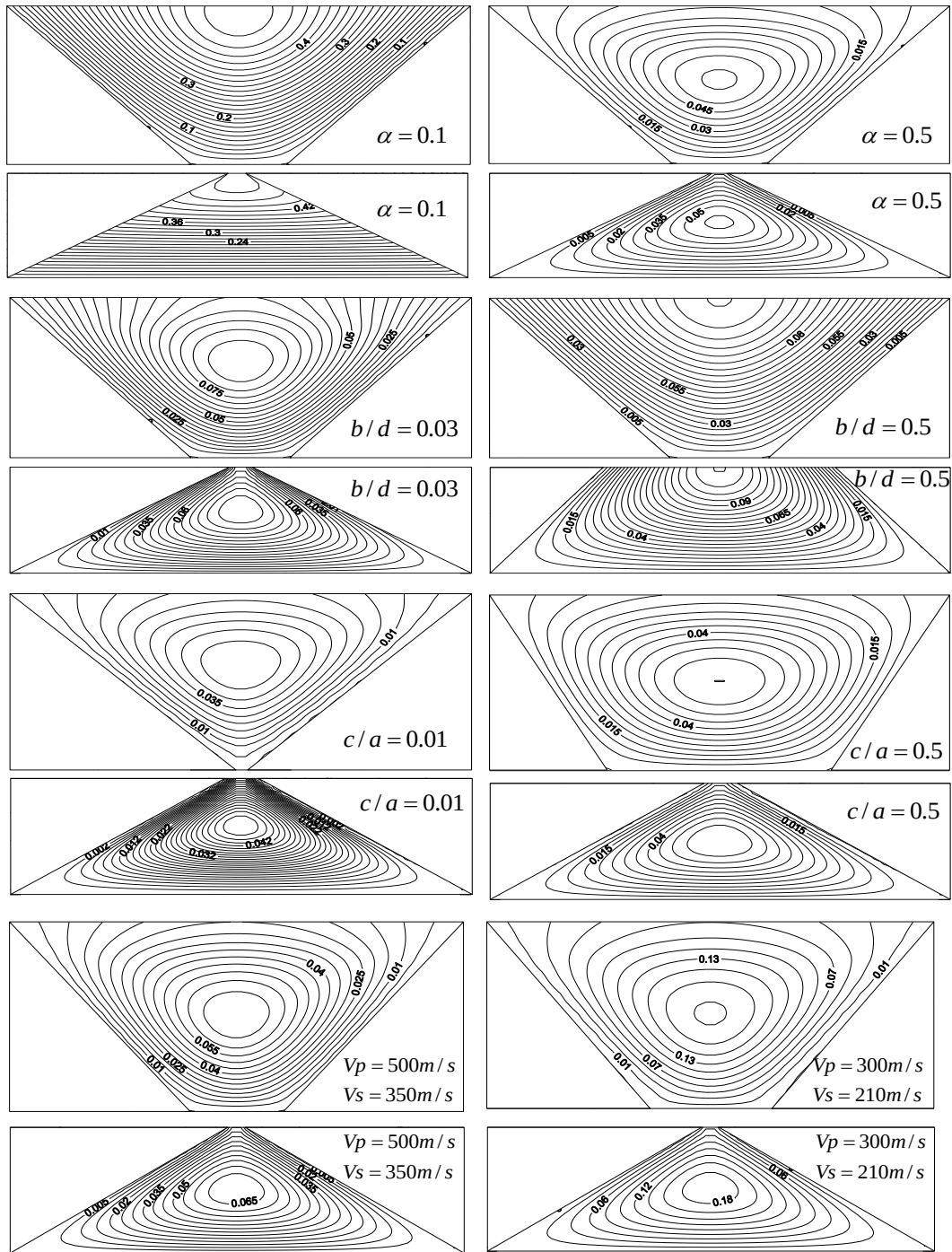


Figura 2.3.5.- Curvas de igual asentamientos en el continuo, al variar diferentes parámetros del modelo tridimensional

En los análisis de la Figura 2.3.5, el modelo base es: $a=350$, $b=20$, $c=75$, $d=525$ y $h=150 \text{ m}$, $V_p=500 \text{ m/s}$, $V_s=350 \text{ m/s}$, $\alpha=0.5$. De manera que se modificó únicamente el parámetro señalado en cada

caso. Para las relaciones b/d y c/a , lo que se modificó fue el parámetro b o c , respectivamente. Esta figura complementa lo observado en las figuras presentadas de 2.3.2 a 2.3.4, e ilustra el comportamiento del modelo.

Como ejemplo del tipo de curvas de asentamiento que se generan en presas de enrocamiento, se presenta en la Figura 2.3.6, las curvas de igual asentamiento para la presa de El Cajón, reportadas por Marengo y Aguirre, 2007, al final de la construcción.

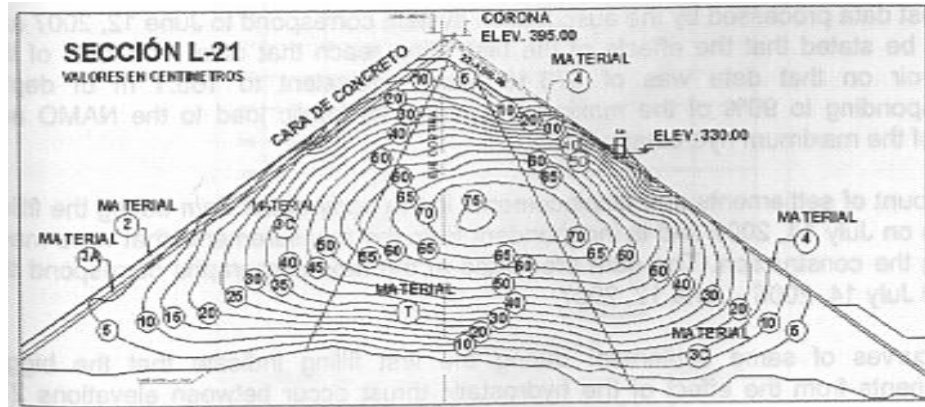


Figura 2.3.6.- Curvas de igual asentamiento en una sección del continuo para la presa Cajón, reportadas por Marengo y Aguirre, 2007

2.1.3.2 MODELO ESTÁTICO DE UNA FUERZA AXIAL Y DOS CORTANTES EN DIRECCIÓN HORIZONTAL

Se presenta el siguiente problema estático tridimensional para estudiar el problema de la carga del embalse. Consideremos las fuerzas del sistema que se ilustran en la Figura 2.3.7

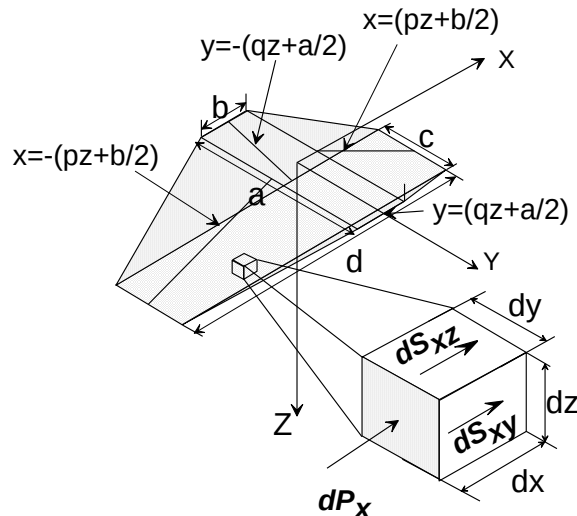


Figura 2.3.7.- Modelo tridimensional para carga de agua en dirección horizontal

Este problema es análogo al problema anterior, solamente que en este caso no se considera a ninguna función de tiempo, dado que solamente se analizará una fuerza horizontal que resuelva la carga de agua en esta dirección. La ecuación de equilibrio da:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.3.3)$$

En el caso anterior, todas las fuerzas internas estaban en la misma dirección, excepto la inercia. En este caso, también todas las fuerzas internas están en la misma dirección y se opondrán a la fuerza externa que define la carga de agua.

Usando el método de separación de variables: $u = \Phi_x \Phi_y \Phi_z \Rightarrow E \frac{\Phi_x''}{\Phi_x} + G \left(\frac{\Phi_y''}{\Phi_y} + \frac{\Phi_z''}{\Phi_z} \right) = 0$

Para el problema de carga de agua consideremos la solución exponencial para la función de x:

$$\Phi_x = A_k e^{\omega_k x} + B_k e^{-\omega_k x}$$

Para la función de y se considerará la solución en términos de senos y cosenos

$$\Phi_y = A_l \cos(\omega_y y) + B_l \sin(\omega_y y)$$

Las soluciones anteriores deberán cumplir con condiciones de frontera de acuerdo al tipo de frontera que exista. Al considerar la carga de agua en una frontera de X, se aceptará que es la función Φ_x la que cumpla con la condición de esfuerzo en $x=(pz+b/2)$, mientras que el otro extremo se considera libre, así:

$$E\Phi'_x = \rho_H g z \text{ en: } x=-(pz+b/2); y,$$

$$E\Phi'_x = 0 \text{ en: } x=(pz+b/2)$$

Se puede mostrar que la solución da:

$$\Phi_x = \frac{\rho_H g z}{E \omega (1 - e^{4\omega(pz+b/2)})} \left(e^{\omega(x+pz+b/2)} + e^{\omega(3(pz+b/2)-x)} \right)$$

Si en cambio, como en los casos de peso propio, se considera que la deformación no es nula en la cara libre, sino proporcional a la inclinación de la frontera, esto llevaría a considerar las dos siguientes condiciones de frontera:

$$E\Phi'_x = \rho_H g z \text{ en: } x=-(pz+b/2); y,$$

$$E\Phi'_x = E \omega \cos \theta \text{ en: } x=(pz+b/2)$$

Esta condición conduce a la siguiente solución:

$$\Phi_x = \frac{\rho_H g z}{E \omega (1 - e^{4\omega(pz+b/2)})} \left(e^{\omega(x+pz+b/2)} + e^{\omega(3(pz+b/2)-x)} \right) + \frac{\cos \theta}{(1 - e^{4\omega(pz+b/2)})} \left(e^{\omega(pz+b/2-x)} + e^{\omega(3(pz+b/2)+x)} \right)$$

Las diferencias fundamentales entre las dos soluciones anteriores, implican que no debería observarse desplazamiento en $z=0$, si el esfuerzo en la frontera contraria a donde se ubica la carga

de agua fuese nulo. Por otro lado, si existiera un esfuerzo en la frontera libre, el movimiento en $z=0$ puede ser diferente de cero. La evidencia experimental muestra que el desplazamiento en la corona de la estructura no es cero, lo que sugiere que la frontera $x=pz+b/2$ está sometida a un esfuerzo.

La solución de y cumple condiciones de frontera fijas en $y=\pm(qz+a/2)$, por lo que y es función de este parámetro en términos de las condiciones de frontera, con solución:

$$\Phi y = A_l \cos(\omega_y y); \quad \omega_y = \frac{(2l-1)\pi}{2(qz+a/2)}$$

La ecuación diferencial resultante para Z es:

$$\Phi''_Z + \left(\frac{E}{G} \omega^2 - \frac{C_{ly}^2}{(z+a_0)^2} \right) \Phi_Z = 0 \quad (2.3.4)$$

$$\text{Con: } C_{ly} = \frac{(2l-1)}{2q} \pi, \quad a_0 = \frac{a}{2q}$$

La ecuación diferencial de Z se resuelve a partir del método de Frobenius (Apéndice 2.3.2), con resultados como los que se muestran en la Figura 2.3.8; donde se muestran los desplazamientos del continuo en el plano XZ , para los costados definidos como $x=\pm(pz+b/2)$ en la Figura 2.3.7, en función de la variación del parámetro b/d . Como se puede ver en la figura, los desplazamientos son independientes de la pendiente del continuo para el lado que tiene la carga de agua, mientras que en el lado libre, los resultados si dependen de la relación b/d , siendo notablemente mayores cuando b es pequeño.

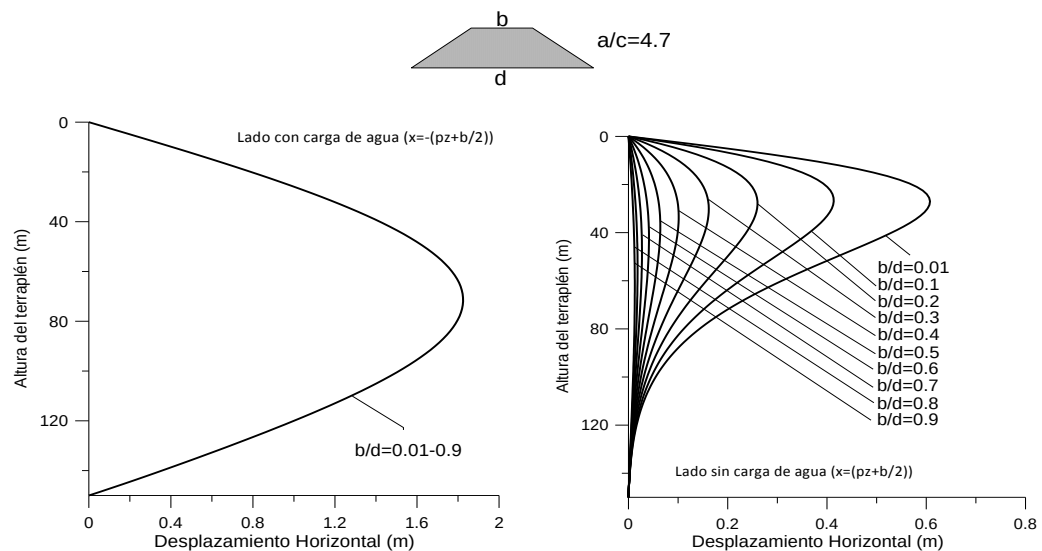


Figura 2.3.8.- Comportamiento del desplazamiento en función de la relación b/d , para los costados $x=\pm(pz+b/2)$

Al estudiar el comportamiento del modelo para la variación del parámetro a/c , se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 2.3.9. Algo que es muy evidente en esta figura, es que el confinamiento del continuo al reducir el valor de c , reduce de manera notable los desplazamientos, y para el lado con carga de agua, que es donde se ubicaría la cara de concreto, se genera una doble curvatura para el movimiento horizontal cuando el parámetro c es muy pequeño.

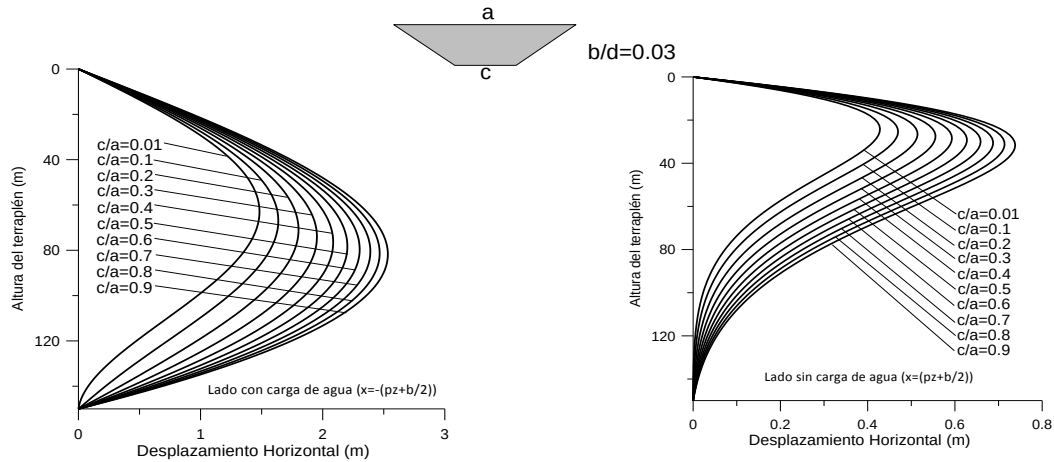


Figura 2.3.9.- Comportamiento del desplazamiento en función de la relación a/c , para los costados $x=\pm(pz+b/2)$

Un par de ejemplos de la elástica que se genera en el continuo para las soluciones anteriores, se presenta en la Figura 2.3.10

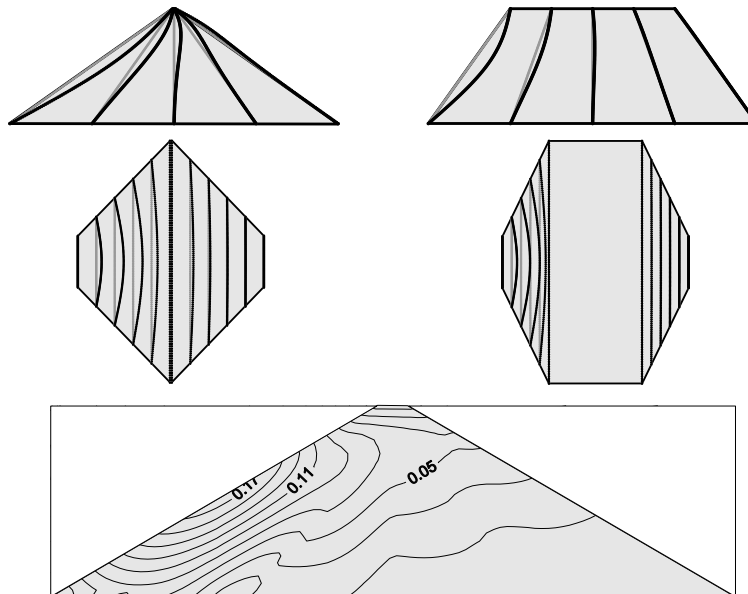


Figura 2.3.10.- Elástica del continuo al considerar dos casos de la relación b/d , así como una distribución de curvas de igual movimiento horizontal que el modelo genera para un caso específico.

Los parámetros base de las soluciones anteriores son, como en los modelos anteriores: $b=25\text{ m}$, $d=525\text{ m}$, $h=150\text{ m}$, $a=350\text{ m}$, $c=75\text{ m}$, $V_p=500\text{ m/s}$, $V_s=350\text{ m/s}$ (para obtener la relación E/G), y se uso un módulo de Young $E=2100\text{ kg/cm}^2$.

Si se considera la variación del módulo de Young, considerando todos los demás parámetros iguales incluida la relación E/G , al considerar $E=21000\text{ kg/cm}^2$ en lugar de $E=2100\text{ kg/cm}^2$ como se realizó en el caso anterior, los desplazamientos son un orden de magnitud inferior a los resultados de la Figura 2.3.8, como se muestra en la Figura 2.3.11, que corresponde al caso $b/d=0.05$.

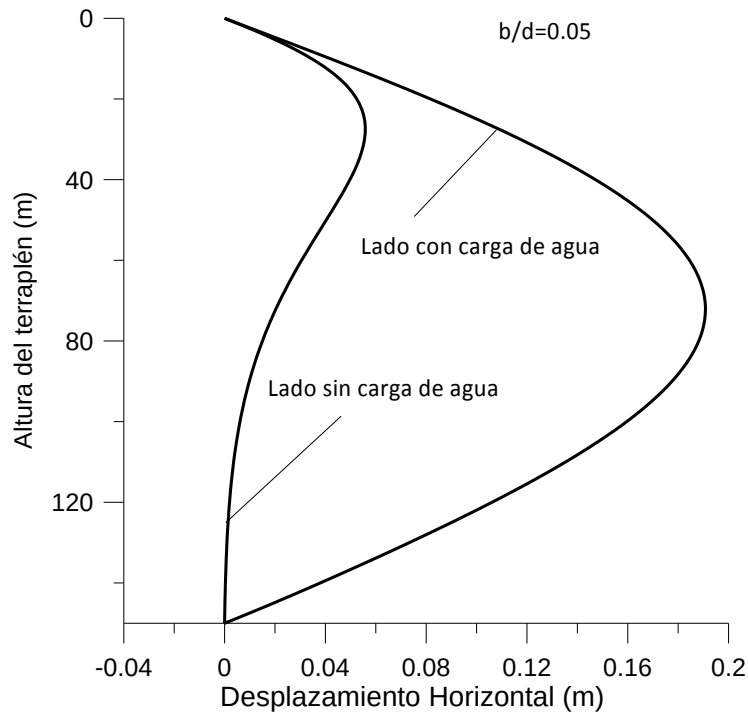


Figura 2.3.11- Desplazamientos horizontales al tomar $E=21000\text{ kg/cm}^2$

Si se considera el problema en el que la derivada de Φx es proporcional al coseno del ángulo de inclinación de la frontera, tal como se realizó para los casos estáticos de peso propio, pero ahora multiplicados por un factor Fr , es decir: $\Phi'x|_{x=pz+b/2} = Fr \cos \theta$, donde, Fr es un indicador de la magnitud de los esfuerzos en la fronteras laterales libres ($x=\pm(pz+b/2)$). Los desplazamientos horizontales serían ahora, como se ilustra en la Figura 2.3.12. En este caso, se usó $E=2100\text{ kg/cm}^2$, y se puede ver que los desplazamientos son muy altos, aunque lo que interesa mostrar es la elástica que se genera. Los números en la figura indican el valor de Fr . La información experimental muestra desplazamientos muy parecidos a los que se tienen en la cara de concreto de la presa Aguamilpa, para diferentes valores del esfuerzo en la frontera libre. Entonces, esta figura sugiere que si los cambios en la configuración de la deformada de la cara con carga de agua, pueden explicarse con cambios en los esfuerzos en la cara libre de la estructura, ello sugiere que hay cambios permanentes en la distribución de esfuerzos en el continuo.

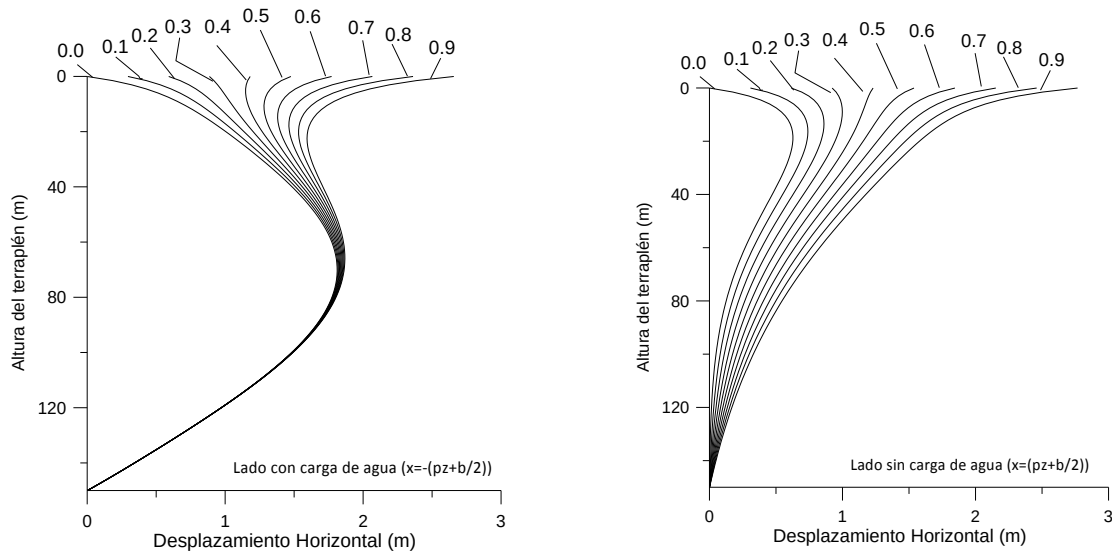


Figura 2.3.12- Desplazamientos horizontales en las fronteras del continuo, al hacer que una frontera es igual al esfuerzo debido a la carga de agua, y la otra proporcional a una fracción del coseno del ángulo de inclinación de la frontera.

2.1.3.3 MODELO ESTÁTICO DE UNA FUERZA AXIAL Y DOS CORTANTES EN DIRECCIÓN HORIZONTAL AL CONSIDERAR UNA FUNCIÓN DE VARIACIÓN DE LA RIGIDEZ EN FUNCIÓN DE LA PROFUNDIDAD

En el siguiente modelo se presenta el mismo caso anterior solamente que variando la relación de rigidez a cortante y módulo elástico al mismo exponente de variación en función de la profundidad, es decir:

$$E = E_0 \left(\frac{z}{h} \right)^\alpha$$

$$G = G_0 \left(\frac{z}{h} \right)^\alpha$$

Estas relaciones muy posiblemente deberían obedecer a un exponente diferente, sin embargo, se presenta este problema porque se simplifica de manera importante la ecuación diferencial para z que queda expresada como:

$$\Phi''z + \frac{\alpha}{z} \Phi'z + \left(\frac{E}{G} \omega^2 - \frac{C_{ly}^2}{(z + a_0)^2} \right) \Phi z = 0 \quad (2.3.5)$$

La solución, como en otros casos, se obtiene a partir del poderoso método de Frobenius. Las soluciones de Φ_x y Φ_y son análogas al planteamiento anterior. Los resultados al variar el parámetro α , que define la función de variación de la rigidez, de 0.1 a 0.6 se muestran en la Figura 2.3.13

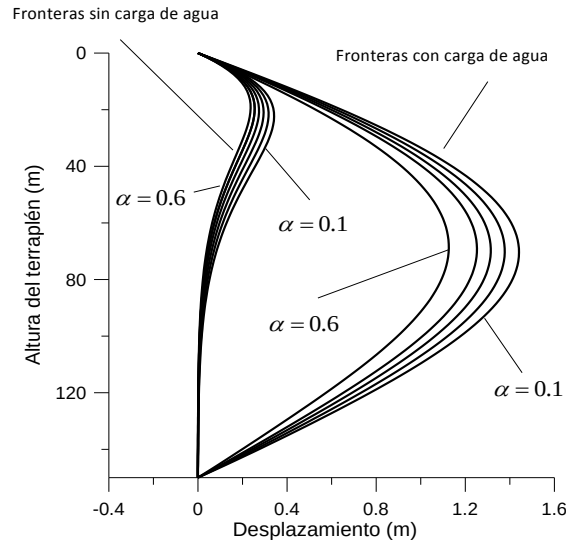


Figura 2.3.13.- Comportamiento del desplazamiento horizontal para un modelo que varía sus constantes elásticas en función de la profundidad

Si los resultados de los modelos son válidos con la realidad, se observa que reducir la base del cañón o incrementar la rigidez de los materiales, producen ambos una reducción en los desplazamientos horizontales y verticales como se observó en la Figura 2.3.3. Es posible entonces que los cañones estrechos sean más eficientes, al menos en la reducción de desplazamientos, que aquellos cañones abiertos.

2.1.3.4 MODELO ESTÁTICO DE UNA FUERZA AXIAL Y DOS CORTANTES EN DIRECCIÓN VERTICAL PARA EL PROBLEMA DE LA CARGA DE AGUA

Siguiendo la lógica del planteamiento de la sección 2.3.3, el modelo tridimensional que se presenta a continuación, considera a dos fuerzas cortantes y una axial, todas en la dirección vertical, para resolver la acción de la carga de agua en un costado de la estructura.

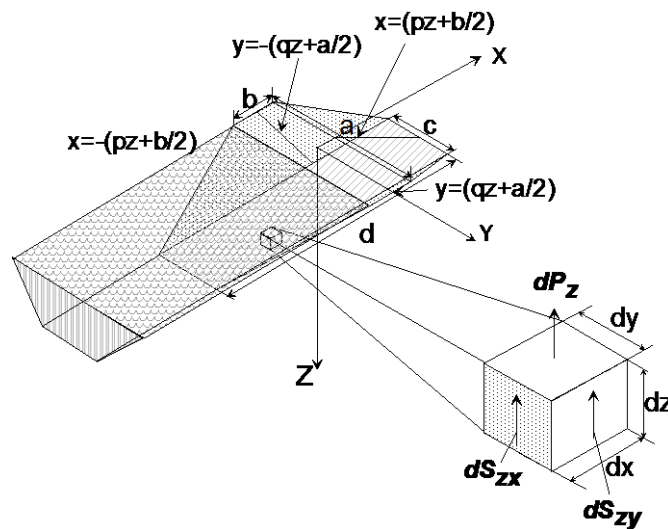


Figura 2.3.14.- Modelo tridimensional para carga de agua en dirección vertical

Al analizar el equilibrio del problema se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$E \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.3.6)$$

Usando el método de separación de variables: $w = \Phi_x \Phi_y \Phi_z$

$$E \frac{\Phi_z''}{\Phi_z} + G \left(\frac{\Phi_x''}{\Phi_x} + \frac{\Phi_y''}{\Phi_y} \right) = 0$$

La función de x resolverá el problema de la carga de agua en dirección vertical por lo que se considerará la solución hiperbólica para esta función mientras que para la función de y (fija en dos extremos), se considerará la solución en términos de senos y cosenos:

$$\Phi_x = A_k \cosh(\omega x) + B_k \sinh(\omega x)$$

$$\Phi_y = A_l \cos(\omega_y y) + B_l \sin(\omega_y y)$$

Al considerar la solución hiperbólica para la función de x , se deberá cumplir con:

$$G\Phi_x' = \rho_H g z \text{ en: } x = -(pz + b/2); \quad y,$$

$$G\Phi_x' = 0 \text{ en: } x = (pz + b/2)$$

Lo que lleva a la siguiente solución:

$$\Phi_x = \frac{\rho_H g z}{G \omega \sinh(2\omega(pz + b/2))} \sinh(\omega(x - (pz + b/2)))$$

La solución de y es:

$$\Phi_y = A \cos(\omega_y y); \quad \omega_y = \frac{\pi}{2(qz + a/2)}$$

Solamente restaría determinar la ecuación diferencial resultante para z , que está dada por:

$$\Phi_z'' + \left(\frac{G}{E} \omega^2 - \frac{C_{ly}^2}{(z + a_0)^2} \right) \Phi_z = 0, \quad C_{ly} = \left(\frac{\pi G}{2qE} \right) \quad (2.3.7)$$

La ecuación (2.3.7) es análoga a la ecuación (2.3.4), de manera que se resuelven de la misma forma. Los resultados de asentamiento para las variaciones de la geometría se muestran en la Figura 2.3.15

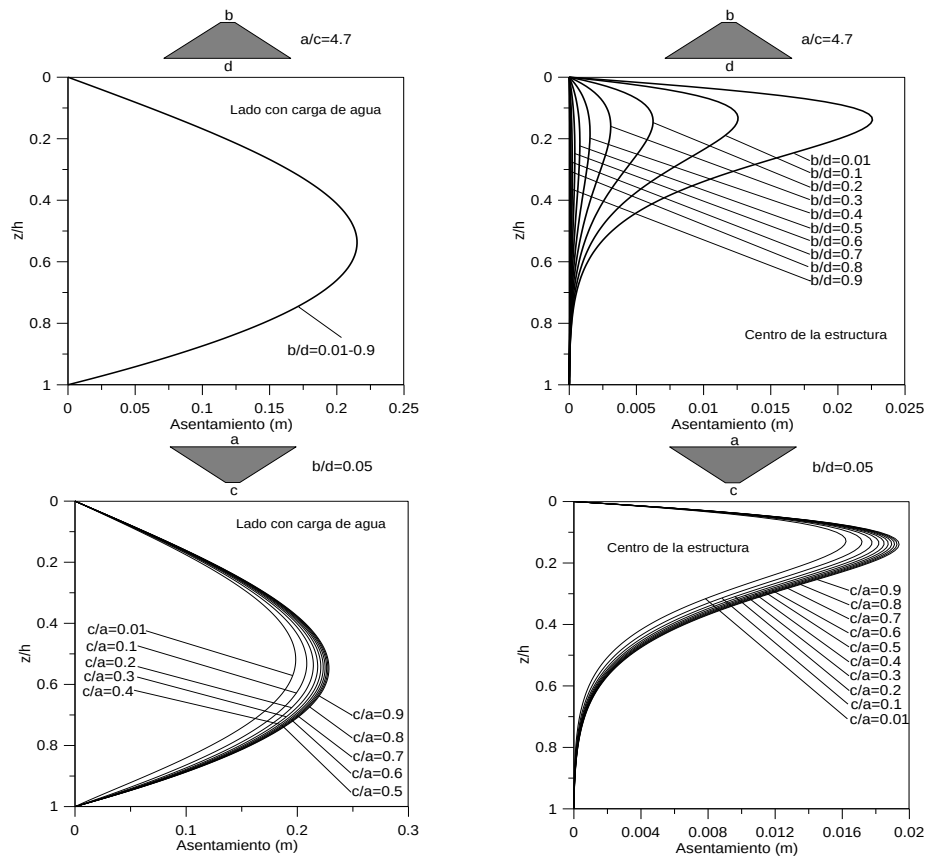


Figura 2.3.15.- Asentamientos por carga de agua, en función de la variación de la geometría

En la siguiente Figura se presenta una muestra de la elástica de la estructura para el modelo propuesto, así como la distribución de asentamientos, para un caso específico.

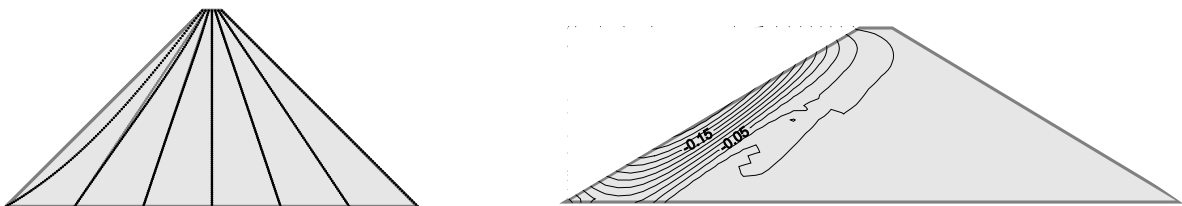


Figura 2.3.16.- Asentamientos por carga de agua para el modelo propuesto

La Figura 2.3.17 presenta las observaciones de curvas de igual asentamiento reportadas por Marengo y Aguirre, 2007 para la presa de Cajón, después del llenado del embalse. En esta Figura, de acuerdo a la información de los autores, ha sido separado el asentamiento que corresponde al proceso constructivo. Aunque el modelo teórico tiene la geometría que se aproxima a la presa El Infiernillo, los resultados son semejantes en la cara donde se encuentra la carga de agua, sin embargo, el modelo subestima los asentamientos en el resto del continuo.

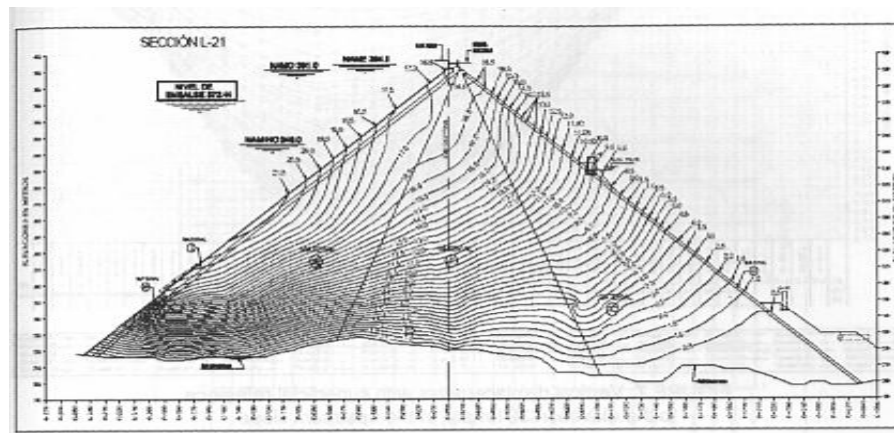


Figura 2.3.17.- Curvas de igual asentamientos para después del llenado del embalse, en una sección del continuo para la presa El Cajón, reportadas por Marengo y Aguirre, 2007

Nuevamente, es interesante conocer el comportamiento del modelo cuando se acepta que la frontera contraria a la carga de agua no es libre, sino que existe en ella un esfuerzo. Al considerar éste esfuerzo proporcional al coseno del ángulo de inclinación de la frontera, tal como se realizó para el caso horizontal, se tiene:

$$\Phi'x|_{x=pz+b/2} = Fr \cos \theta$$

La elástica que genera este esfuerzo en la frontera libre se presenta en la Figura 2.3.18. Note la presencia de un movimiento contrario al sentido de la gravedad, en la parte superior de la estructura. Este comportamiento es muy peculiar. Para este caso se tomó un módulo de Young de $E=2.1 \cdot 10^8 \text{ kg/m}^2$, con una relación $G/E=0.37$ ($\nu=0.35$). Si en cambio se usa $E=2.1 \cdot 10^7 \text{ kg/m}^2$, con una relación $G/E=0.83$ ($\nu=-0.39$), la tendencia a producir movimientos en sentido contrario a la gravedad se reduce, como se presenta en esta misma figura.

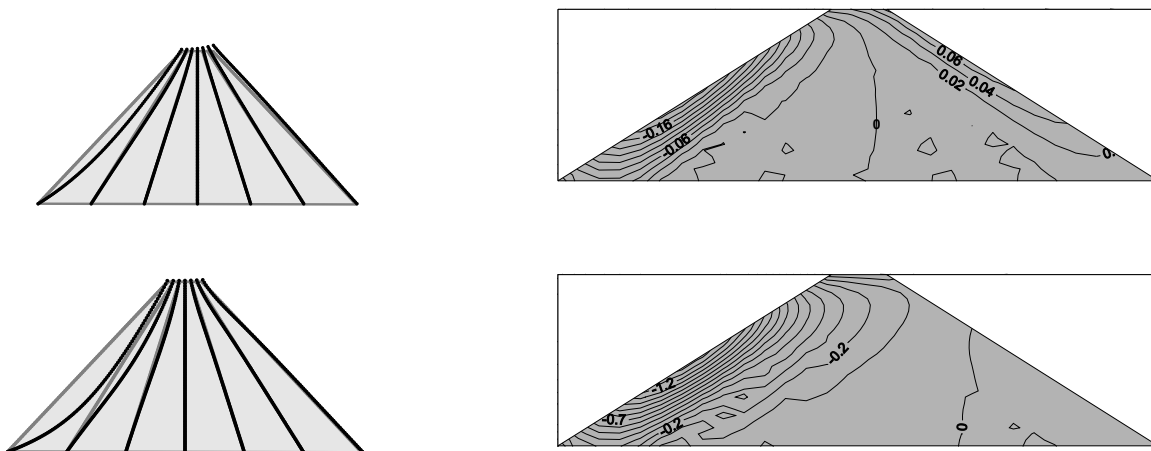


Figura 2.3.18.- Elásticas de problema de carga de agua en un extremo del continuo, al considerar dos casos diferentes de propiedades mecánicas de los materiales y la existencia de un esfuerzo en la frontera derecha del continuo. Se uso $Fr=0.1$ para ambos casos, donde Fr es una fracción del coseno de la inclinación de la frontera, como se indica en el texto.

2.1.3.5 MODELO ESTÁTICO TRIDIMENSIONAL PARA LOSAS ANTE LA PRESENCIA DE FUERZAS EXTERNAS

El modelo que se estudia a continuación considera a una losa para el caso de la existencia de fuerzas externas únicamente (no se está considerando el problema de peso propio). El planteamiento se presenta en la Figura 2.3.19, donde se estudian sólo las fuerzas en las direcciones X y Z . Este modelo tridimensional es más completo que los anteriores pues asume las tres fuerzas en dos direcciones diferentes.

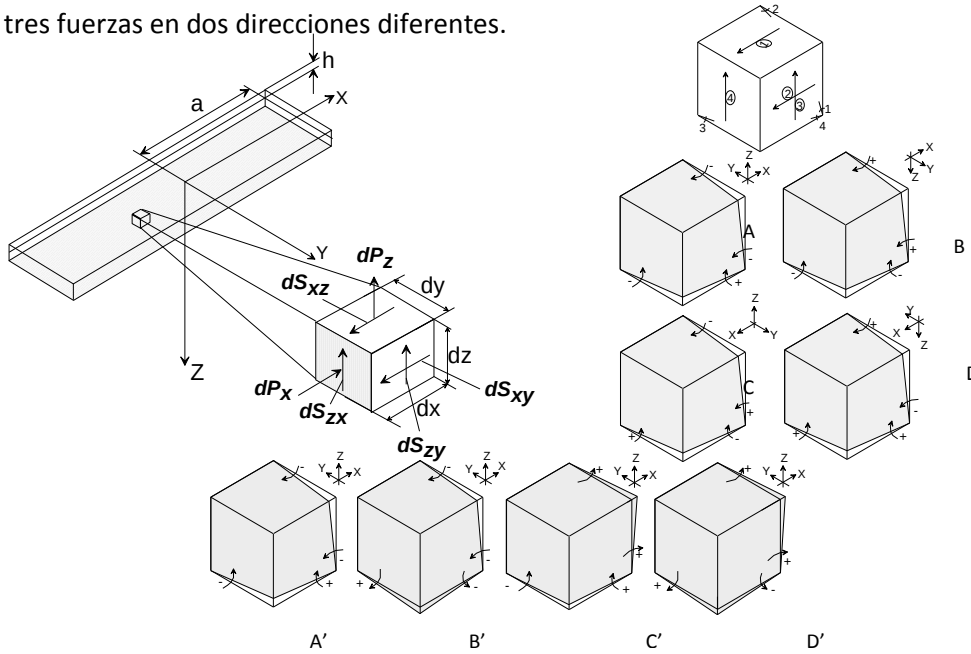


Figura 2.3.19.- Modelo tridimensional de una losa (lado izquierdo), y signos de la elástica del elemento diferencial para las fuerzas cortantes en diferentes sistemas de referencia (lado derecho), y diferentes elásticas del elemento diferencial para el mismo sistema de referencia (abajo).

Los desplazamientos quedan definidos como: $u = u(x, y, z)$; $v = v(x, y, z)$; $w = w(x, y, z)$

Las fuerzas son:

$$\begin{aligned}
 P_x &= E \frac{\partial u}{\partial x} dydz; & \Delta P_x &= \frac{\partial P_x}{\partial x} dx = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy dz & P_z &= E \frac{\partial w}{\partial z} dx dy; & \Delta P_z &= \frac{\partial P_z}{\partial z} dz = E \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dx dy dz \\
 S_{zx} &= G \frac{\partial w}{\partial x} dydz; & \Delta S_{zx} &= \frac{\partial S_{zx}}{\partial x} dx = G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy dz & S_{xz} &= G \frac{\partial u}{\partial z} dx dy; & \Delta S_{xz} &= \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} dz = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dx dy dz \\
 S_{xy} &= G \frac{\partial u}{\partial y} dx dz; & \Delta S_{xy} &= \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} dy = G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy dz & S_{zy} &= G \frac{\partial w}{\partial y} dx dz; & \Delta S_{zy} &= \frac{\partial S_{zy}}{\partial y} dy = G \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy dz
 \end{aligned}$$

Note en la Figura 2.3.19, como, para cuatro sistemas de referencia de mano derecha, cambian los signos para la misma elástica del elemento diferencial, al considerar las deformaciones debidas a fuerzas cortantes. Lo mismo ocurre al considerar diferentes elásticas, para el mismo sistema de referencia. En este esquema, los números indican las deformaciones asociadas a las fuerzas. Así, asociar signos a la ecuación de equilibrio para diferentes sistemas de referencia o diferentes elásticas, implica modificaciones en la ecuación de equilibrio. Otro aspecto que influye en los

signos de la ecuación de equilibrio, es el tipo de solución. Para una solución de tipo seno-coseno el signo es contrario al que se tiene para una solución de tipo hiperbólico.

Sean las siguientes ecuaciones de equilibrio para el elemento diferencial:

$$s_1 E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \left(s_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + s_3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.3.8)$$

$$s_6 E \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + G \left(s_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s_5 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.3.9)$$

Donde s_i son los signos del sistema de referencia o elástica considerada. Por otro lado, el equilibrio de momentos lleva a:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.3.10)$$

Al hacer que se cumpla la ecuación de momentos (2.3.10), se tiene:

$$w = -\Phi_x \Phi'_z \Phi_y + w_0 \quad (2.3.11)$$

$$u = \Phi'_x \Phi_z \Phi_y + u_0 \quad (2.3.12)$$

Por lo que las ecuaciones (2.3.8) y (2.3.9), se transforman en:

$$s_1 E \frac{\Phi'''_x}{\Phi'_x} + G \left(s_2 \frac{\Phi''_y}{\Phi_y} + s_3 \frac{\Phi''_z}{\Phi_z} \right) = 0$$

$$s_6 E \frac{\Phi'''_z}{\Phi'_z} + G \left(s_4 \frac{\Phi''_x}{\Phi_x} + s_5 \frac{\Phi''_y}{\Phi_y} \right) = 0$$

Si se asume que se conoce la función Φ'_x de la primer ecuación diferencial anterior, entonces:

$\Phi_x = \int \Phi'_x dx + C = f_x + C$; y lo mismo para la función de Z , es decir $\Phi_z = \int \Phi'_z dz + \bar{C} = f_z + \bar{C}$. Por lo

que las dos ecuaciones diferenciales anteriores se transforman en:

$$s_1 E \frac{f''_x}{f'_x} + G \left(s_2 \frac{\Phi''_y}{\Phi_y} + s_3 \frac{f''_z}{f_z + \bar{C}} \right) = 0 \quad (2.3.13)$$

$$s_6 E \frac{f''_z}{f'_z} + G \left(s_4 \frac{f''_x}{f_x + C} + s_5 \frac{\Phi''_y}{\Phi_y} \right) = 0 \quad (2.3.14)$$

$$g_x = f_x - C$$

$$\text{Si: } g_z = f_z - \bar{C}$$

(2.3.13) y (2.3.14) se transforman en:

$$s_1 E \frac{g'''x}{g'x} + G \left(s_2 \frac{\Phi''y}{\Phi y} + s_3 \frac{g''z}{gz} \right) = 0 \quad (2.3.15)$$

$$s_6 E \frac{g'''z}{g'z} + G \left(s_4 \frac{g''x}{gx} + s_5 \frac{\Phi''y}{\Phi y} \right) = 0 \quad (2.3.16)$$

Dadas las características geométricas de la losa que se plantea en la Figura 2.3.19, físicamente resultaría aceptable suponer soluciones de tipo seno-coseno para las funciones de X y Y , ya que no sería descartable que la deformación en estas direcciones, tuviera más de un cruce por cero, particularmente en la dirección X ; mientras que en la dirección corta del elemento (dirección Z), más de un cruce por cero en el movimiento, es muy poco probable sin que el elemento falle, por lo que se propone una solución de tipo hiperbólico en este caso.

$$\frac{g'''x}{g'x} = \frac{g''x}{gx} = -\omega_x^2; \quad \frac{g'''z}{g'z} = \frac{g''z}{gz} = \omega_z^2; \quad \frac{\Phi''y}{\Phi y} = -\omega_y^2$$

Al sustituir las soluciones anteriores en (2.3.15) y (2.3.16), se llega a:

$$-s_1 E \omega_x^2 + G(-s_2 \omega_y^2 + s_3 \omega_z^2) = 0 \quad (2.3.17)$$

$$s_6 E \omega_z^2 + G(-s_5 \omega_y^2 - s_4 \omega_x^2) = 0 \quad (2.3.18)$$

Como $\omega_x^2, \omega_y^2, \omega_z^2$ son reales, entonces son positivas, y ambas deberán resolver simultáneamente las ecuaciones (2.3.17) y (2.3.18), por lo que los signos s_i , son muy importantes en la solución que se determina. En el Apéndice 2.3.3 se presentan unas tablas que estudian de manera detallada la influencia de los signos en las relaciones que pueden guardar los parámetros $\omega_x^2, \omega_y^2, \omega_z^2$ entre sí. En estas tablas se evalúan las posibles soluciones sobre los cuatro sistemas de referencia que se presentan en la Figura 2.3.19; al considerar, además, cuatro cambios de signo en el movimiento axial. Las soluciones imaginarias entre ω_x^2, ω_y^2 , se deben a que se considera $G < E$. La relación entre estos módulos de elasticidad se puede considerar como: $E = 2G(1 + \nu)$. Donde ν es el módulo de Poisson. En síntesis, la relación ω_x, ω_y , se puede simplificar en 4 relaciones reales diferentes:

$$\omega_y^2 = \frac{\left(\frac{E-G}{G-E}\right)}{\left(1-\frac{G}{E}\right)} \omega_x^2; \quad \omega_y^2 = \frac{\left(\frac{E+G}{G+E}\right)}{\left(1-\frac{G}{E}\right)} \omega_x^2; \quad \omega_y^2 = \frac{\left(\frac{E+G}{G+E}\right)}{\left(1+\frac{G}{E}\right)} \omega_x^2; \quad \omega_y^2 = \frac{\left(\frac{E-G}{G-E}\right)}{\left(1+\frac{G}{E}\right)} \omega_x^2 \quad (2.3.19)$$

Las relaciones ω_x, ω_z , tiene los siguientes valores:

$$\omega_z^2 = \omega_x^2; \quad \omega_z^2 = \frac{\left(1+\frac{G}{E}\right)}{\left(1-\frac{G}{E}\right)} \omega_x^2; \quad \omega_z^2 = \frac{\left(1-\frac{G}{E}\right)}{\left(1+\frac{G}{E}\right)} \omega_x^2; \quad \omega_z^2 = \omega_x^2 \quad (2.3.20)$$

Las relaciones ω_y, ω_z , tiene los siguientes valores:

$$\omega_y^2 = \frac{\left(\frac{E-G}{G-E}\right)}{\left(1-\frac{G}{E}\right)} \omega_z^2; \quad \omega_y^2 = \frac{\left(\frac{E+G}{G+E}\right)}{\left(1+\frac{G}{E}\right)} \omega_x^2; \quad \omega_y^2 = \frac{\left(\frac{E+G}{G+E}\right)}{\left(1-\frac{G}{E}\right)} \omega_z^2; \quad \omega_y^2 = \frac{\left(\frac{E-G}{G-E}\right)}{\left(1+\frac{G}{E}\right)} \omega_z^2 \quad (2.3.21)$$

Los cuatro valores de la ecuación (2.3.19) y (2.3.20) corresponden respectivamente a los cuatro primeros valores de la ecuación (2.3.21).

Hasta este punto se puede considerar la solución general del problema planteado en la Figura 2.3.19. La solución de cada caso específico, depende de las condiciones de frontera que se tengan en particular.

Para ejemplificar el modelo, en el Apéndice 2.3.4, se presenta un problema donde es posible comparar este modelo con uno que resuelve la teoría de flexión. La intención de este trabajo es establecer comparativamente como son las deformaciones obtenidas por ambos modelos.

El planteamiento del segundo caso de estudio, concierne al tipo de problemas que se presentan en las losas que se instalan en presas de enrocamiento con cara de concreto. Este problema específico se ilustra en la Figura 2.3.20

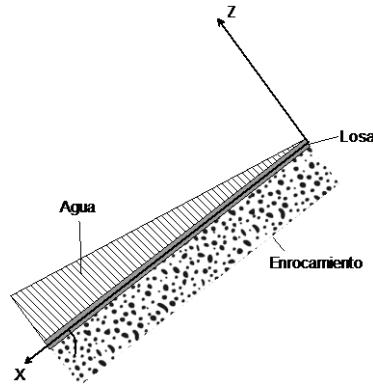


Figura 2.3.20.- Modelo de una losa en presas de enrocamiento

Los desplazamientos determinados del planteamiento anterior son:

$$w = \Phi x \Phi' z \Phi y$$

$$u = \Phi' x \Phi z \Phi y$$

Para resolver las condiciones de frontera del modelo, se recurrirá a las observaciones físicas que se tienen en losas de presas de enrocamiento con cara de concreto. Es decir, se resolverá el modelo de acuerdo a esta información. Sin embargo, podría existir mayor instrumentación en presas futuras, de manera que la solución de las constantes bien pueden resolverse por caminos diferentes al que aquí se ilustra.

Del modelo de la Figura 2.3.20, las dos caras perpendiculares al eje z (fronteras $z=\pm h$), están cargadas; una carga es el peso del agua definido como P_1 , y la otra es la reacción del enrocamiento definida como P_2 . Para el problema de dos cargas axiales en dirección z se determinó la expresión (2.3), que se indica en el Apéndice 2.3.4:

$$\Phi_z = \frac{(P_1 \sinh \omega_z(z+h) - P_2 \sinh \omega_z(z-h))}{E \omega_z^2 \sinh 2\omega_z h} + \bar{C}$$

$$\Phi'_z = \frac{(P_1 \cosh \omega_z(z+h) - P_2 \cosh \omega_z(z-h))}{E \omega_z \sinh 2\omega_z h}$$

La solución en dirección x es:

$$\Phi_x = A \cos \omega_x x + B \sin \omega_x x + C$$

$$\Phi'_x = \omega_x (-A \sin \omega_x x + B \cos \omega_x x)$$

Ahora bien, si mediante el uso de un instrumento se conoce el movimiento w en $z=h$, a todo lo largo de la losa (recorrido de x), y en el centro de la misma ($y=0$), es posible determinar la curvatura al calcular la segunda derivada de w con respecto a x . La intención de este cálculo es obtener los cruces por cero (o puntos homogéneos), del comportamiento real de la losa para el movimiento medido w , y simplificar la obtención de las diferentes constantes que se requieren determinar.

Al suponer que se tienen dos raíces de $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, en $x=a$ y $x=b$, tenemos:

$$w = \Phi_x \Phi'_z \Phi_y \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \Phi''_x \Phi'_z \Phi_y$$

$$-\omega_x^2 (A \cos \omega_x a + B \sin \omega_x a) = 0$$

$$-\omega_x^2 (A \cos \omega_x b + B \sin \omega_x b) = 0$$

Con lo que es posible obtener dos constantes:

$$A = -B \frac{\sin \omega_x a}{\cos \omega_x a}, \quad \omega_x = \frac{\pi}{b-a} \quad (2.3.22)$$

La solución se reduce a:

$$\Phi_x = B \frac{\sin \omega_x (x-a)}{\cos \omega_x a} + C \quad (2.3.23)$$

Como se conoce el movimiento w o deflexión de la losa en los puntos $x=a$ y $x=b$, y puesto que la medición se realizó en $z=h, y=0$ se tiene:

$$w_{z=h, x=a, y=0} = w_a = \Phi'_{z=h} \Phi_{x=a} \Phi_{y=0}$$

$$w_{z=h, x=b, y=0} = w_b = \Phi'_{z=h} \Phi_{x=b} \Phi_{y=0}$$

$$\Phi'_{z=h} = \frac{P_1 \cosh 2\omega_z h - P_2}{E \omega_z \sinh 2\omega_z h}, \quad \Phi_{x=a} = \Phi_{x=b} = C, \quad \Phi_{y=0} = 1$$

Como las cargas P_1 y P_2 son diferentes en los puntos $x=a$ y $x=b$, las ecuaciones que se tienen son:

$$w_a = C \frac{P_{1a} \cosh 2\omega_z h - P_{2a}}{E\omega_z \sinh 2\omega_z h} \Rightarrow C = \frac{w_a E\omega_z \sinh 2\omega_z h}{P_{1a} \cosh 2\omega_z h - P_{2a}} \quad (2.3.24)$$

Para el punto b se tiene:

$$w_b = C \frac{P_{1b} \cosh 2\omega_z h - P_{2b}}{E\omega_z \sinh 2\omega_z h}$$

Al Sustituir el valor de C , en la expresión anterior se tiene:

$$\frac{w_b}{w_a} = \frac{P_{1b} \cosh 2\omega_z h - P_{2b}}{P_{1a} \cosh 2\omega_z h - P_{2a}}$$

Entonces, la reacción del enrocamiento en el punto b , en términos de los desplazamientos w , se puede expresar como:

$$P_{2b} = \frac{(w_a P_{1b} - w_b P_{1a})}{w_a} \cosh 2\omega_z h + \frac{w_b}{w_a} P_{2a} \quad (2.3.25)$$

Puesto que se conoce el movimiento w a todo lo largo de la losa, es posible determinar la reacción del enrocamiento en todos los puntos, en función de la deflexión w , y bien puede asumirse que la reacción del enrocamiento es igual a la carga de agua en el plinto, donde la cercanía de la losa al apoyo fijo en la base de la estructura hace más factible esta suposición.

Así, para el punto x_i

$$w_i = \left(\frac{B \sin \omega x (x_i - a)}{\cos \omega x a} + C \right) \frac{P_{1i} \cosh 2\omega_z h - P_{2i}}{E\omega_z \sinh 2\omega_z h}$$

Y para el punto x_j

$$w_j = \left(\frac{B \sin \omega x (x_j - a)}{\cos \omega x a} + C \right) \frac{P_{1j} \cosh 2\omega_z h - P_{2j}}{E\omega_z \sinh 2\omega_z h}$$

Igualando las dos expresiones anteriores en términos de C , se tiene:

$$\frac{w_i E\omega_z \sinh 2\omega_z h}{P_{1i} \cosh 2\omega_z h - P_{2i}} - \frac{B \sin \omega x (x_i - a)}{\cos \omega x a} = \frac{w_j E\omega_z \sinh 2\omega_z h}{P_{1j} \cosh 2\omega_z h - P_{2j}} - \frac{B \sin \omega x (x_j - a)}{\cos \omega x a}$$

Con lo que es posible obtener la reacción del enrocamiento en todos los puntos del recorrido de x , mediante la siguiente expresión (recuerde que esta evaluación se está obteniendo en $z=h$ y $y=0$):

$$P_{2j} = C_1 - \frac{C_2}{C_3}$$

$$C_1 = \left(\frac{w_i E \omega_z \sinh 2\omega_z h}{P_{1i} \cosh 2\omega_z h - P_{2i}} - \frac{B \sin \omega x (x_i - a)}{\cos \omega x a} + \frac{B \sin \omega x (x_j - a)}{\cos \omega x a} \right)$$

$$C_2 = w_j E \omega_z \sinh 2\omega_z h$$

$$C_3 = P_{1j} \cosh 2\omega_z h$$

La constante C de la solución de x es:

$$C = \frac{w_i E \omega_z \sinh 2\omega_z h}{P_{1i} \cosh 2\omega_z h - P_{2i}} - \frac{B \sin \omega x (x_i - a)}{\cos \omega x a} \quad (2.3.26)$$

Falta la constante B en la solución de x . Si mediante el uso de un extensómetro entre el plinto y la losa instrumentada se conoce el movimiento u_h , entonces:

$$u_{z=h, x=a, y=0} = u_h = \Phi_{z=h} \Phi'_{x=a} \Phi_{y=0}$$

$$\Phi'_{x=a} = B \frac{\omega_x}{\cos \omega_x a}, \quad \Phi_z = \frac{P_1}{E \omega_z^2} + \bar{C}, \quad \Phi_y = 1 \Rightarrow B = \frac{u_h E \omega_z^2 \cos \omega_x a}{P_1 + \bar{C} E \omega_z^2} \quad (2.3.27)$$

Finalmente, la constante $\bar{C}$ define, como en el caso anterior, la posición del eje neutro en el peralte de la losa.

$$\Phi_z = \frac{(P_1 \sinh \omega_z (z + h) - P_2 \sinh \omega_z (z - h))}{E \omega_z^2 \sinh 2\omega_z h} + \bar{C}$$

Si se aceptara que el eje neutro se encuentra en $z=0$, para todo el recorrido de x , se requeriría lo siguiente:

$$\Phi_z = \frac{(P_1 + P_2) \sinh \omega_z h}{E \omega_z^2 \sinh 2\omega_z h} + \bar{C} = 0 \Rightarrow \bar{C} = -\frac{(P_1 + P_2) \sinh \omega_z h}{E \omega_z^2 \sinh 2\omega_z h} \quad (2.3.28)$$

En cambio, si se aceptara que no hay movimiento en el contacto de la losa con el enrocamiento ($u=0$ en $z=-h$), se tiene:

$$\bar{C} = -\frac{P_2}{E \omega_z^2} \quad (2.3.29)$$

Dada la naturaleza periódica de la solución Φx (resuelta en términos de senos y cosenos). La correlación entre el modelo y los datos experimentales, sugeriría que las curvaturas observadas experimentalmente, tendrían que comportarse de forma periódica. Este resultado se tiene en cierta medida en las observaciones. La Figura 2.3.21, presenta las curvaturas para dos losas instrumentadas con inclinómetros de las presas Aguamilpa. Un comportamiento similar se observa para las losas de la presa El Cajón.

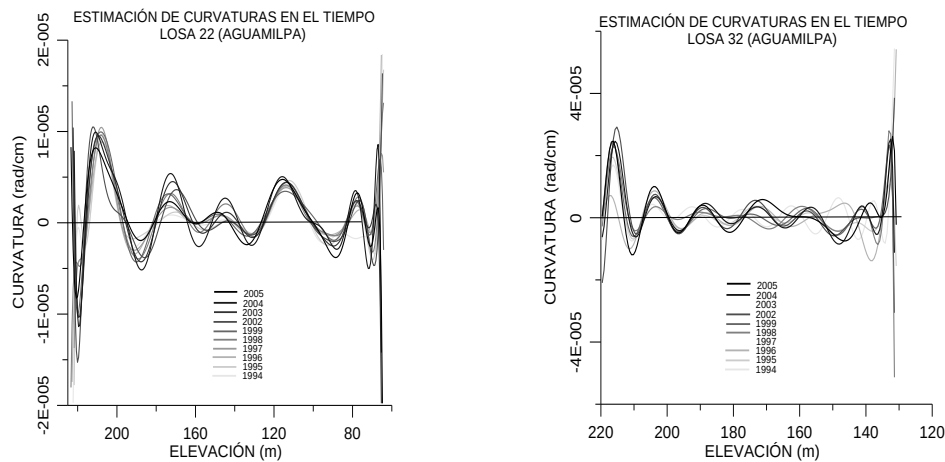


Figura 2.3.21.- Estimación de curvaturas para dos losas instrumentadas de la presa Aguamilpa

En resumen, para obtener información del modelo usando los datos experimentales de una losa instrumentada se puede proceder de la siguiente manera:

- Se determinan dos puntos que presenten un cruce por cero de las curvaturas de las mediciones experimentales con los que se determina el valor de ω_x y una constante de la solución de x . Los valores de ω_y y ω_z , deben determinarse a partir de las ecuaciones (2.3.19) y (2.3.20)
- De la medición de deflexiones w , se determina la reacción del enrocamiento, usando la ecuación (2.3.25), al considerar que la reacción del enrocamiento es igual a la carga de agua en la base de la estructura
- La constante C de la solución de x y la constante B se obtienen a partir de la ecuación (2.3.26) y (2.3.27), respectivamente
- La constante C de la solución z depende de la posición del eje neutro y podría ser la ecuación (2.3.28) o (2.3.29)

La solución de un caso específico, se muestra en la Figura 2.3.22. La solución se obtuvo a partir de la medición de una losa instrumentada con un inclinómetro en la presa El Cajón.

Para obtener los cálculos, primero se suavizó la medición con un polinomio de grado diez, luego se calculó la curvatura de la medición con una segunda derivada. Para el cálculo de los desplazamientos se utilizaron las raíces 2 y 3 de la curvatura calculada. Puede verse que la reacción del enrocamiento (P_2) calculado resultó prácticamente igual a la carga de agua (P_1). Además, los desplazamientos w de la losa indican que la losa está en compresión en la base, donde la carga de agua es mayor.

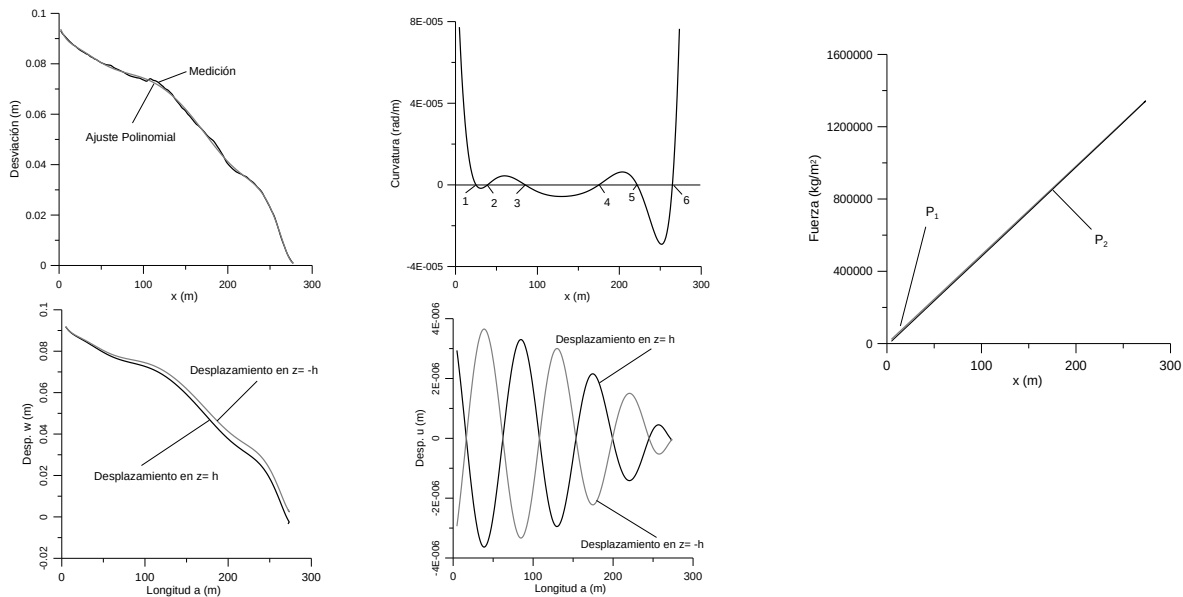


Figura 2.3.22.- Solución de desplazamientos en las direcciones x (u) y z (w), para una medición de deflexiones en una losa instrumentada de la presa El Cajón.

Si en cambio, en lugar de utilizar las raíces 2 y 3 de la función de curvatura calculada, se utilizaran las raíces 3 y 4, los resultados de los cálculos serían los que se indican en la Figura 2.3.23

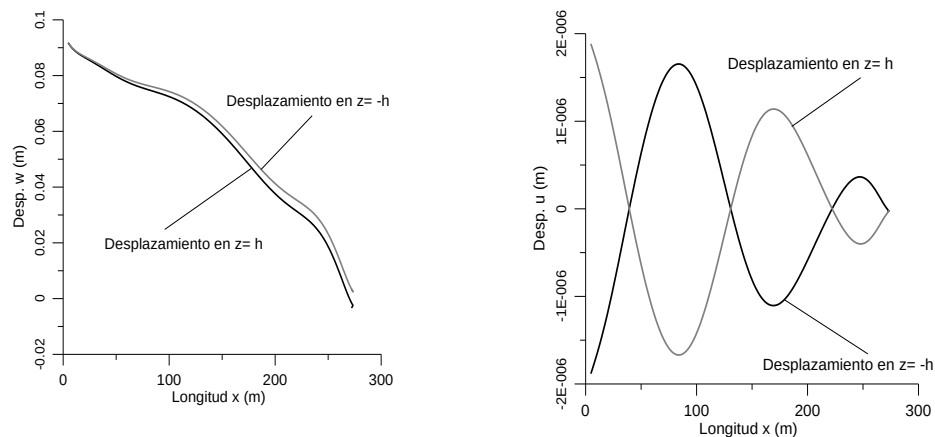


Figura 2.3.23.- Solución de desplazamientos en las direcciones x (u) y z (w), para una medición de deflexiones en una losa instrumentada de la presa el Cajón, al usar las raíces 2 y 3 de la función de curvaturas.

Como se puede ver, han cambiado los desplazamientos en la dirección x . Para entender de manera más clara la naturaleza de las soluciones, se presenta en Figura 2.3.24, la elástica de los dos casos. En esta figura, se exageró por un lado, la elástica del movimiento w , y por el otro, la elástica del movimiento u , para los dos casos. Es claro que las zonas en tensión y compresión que generarían los movimientos u son más próximas unas a otras cuando se utilizan las raíces 2 y 3, mientras que cuando se emplean las raíces 3 y 4, estas zonas de tensión y compresión se encuentran más

separadas. Al observar el movimiento u y w simultáneamente, parece más lógica la solución que considera a las raíces 3 y 4.

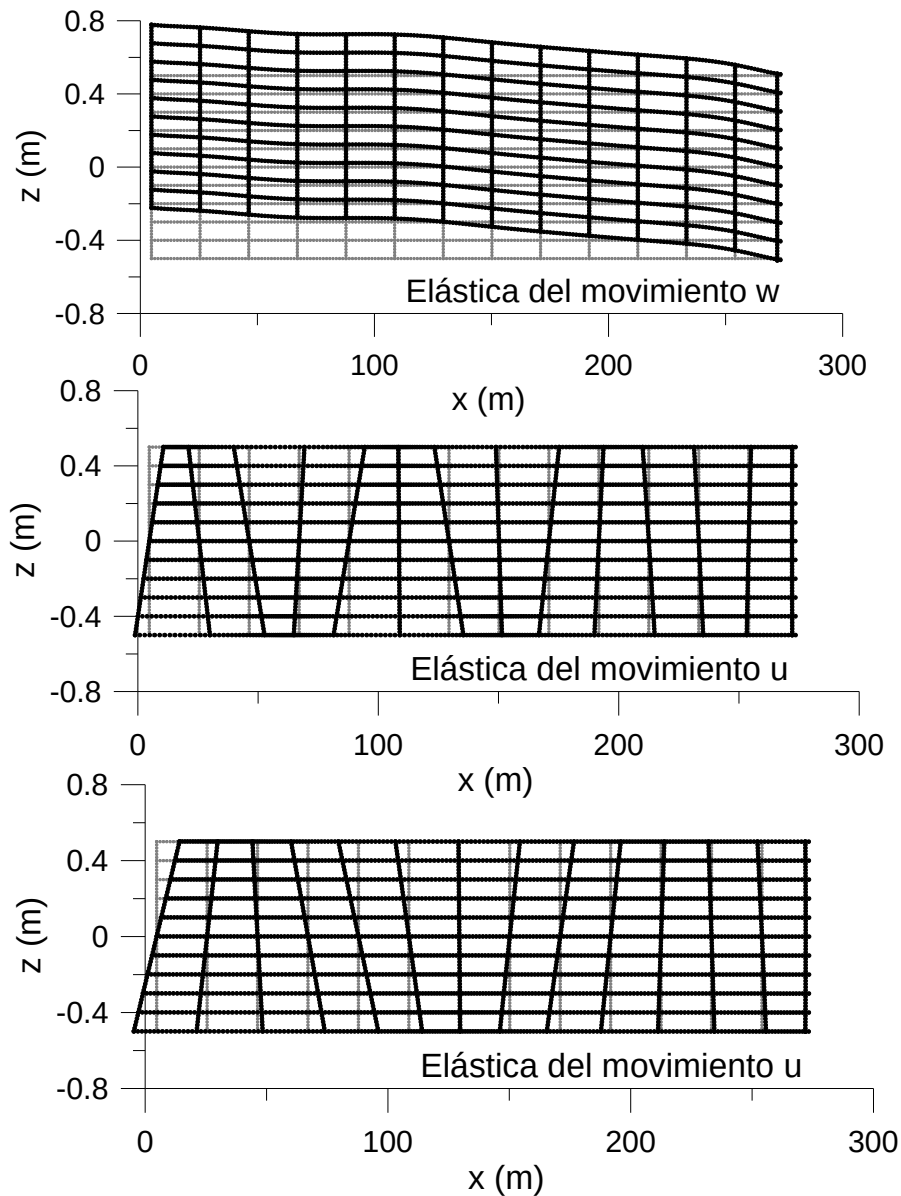


Figura 2.3.24.- Elásticas de los movimientos u y w , en una losa instrumentada, los dos caso del movimiento u se obtuvieron al tomar dos raíces diferentes de las curvaturas obtenidas a partir de la medición.

2.1.3.6 MODELO ESTÁTICO DE DOS FUERZAS AXIALES Y CUATRO FUERZAS CORTANTES EN DIRECCIÓN HORIZONTAL

El modelo que se presenta a continuación es una solución tridimensional con las fuerzas en las direcciones x e y , y se plantea para el problema de la carga de agua.

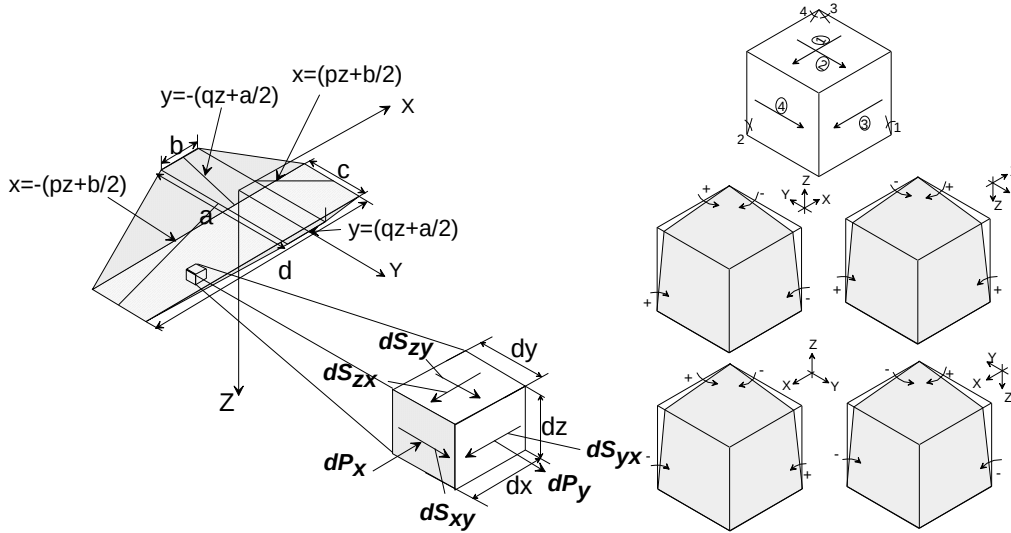


Figura 2.3.25.- Modelo Tridimensional para carga de agua

Las fuerzas en las dos direcciones están dadas por:

$$dPx = E \frac{\partial u}{\partial x} dydz; \quad dSyx = G \frac{\partial u}{\partial y} dxdz; \quad dSzx = G \frac{\partial u}{\partial z} dxdy$$

$$dPy = E \frac{\partial v}{\partial y} dxdz; \quad dSxy = G \frac{\partial v}{\partial x} dydz; \quad dSzy = G \frac{\partial v}{\partial z} dxdy$$

De nuevo, son importantes los signos en la distribución de fuerzas en el elemento diferencial. Las posibles combinaciones indicarían nuevamente, tal como en el modelo anterior, los valores de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ y su relación en las ecuaciones de equilibrio. La representación de los signos sobre cada una de las fuerzas, se expresan mediante el parámetro s_i (donde $i=1,2...6$), tal como se realizó en el modelo anterior.

Así, por el equilibrio de fuerzas en las dos direcciones se deberán cumplir con las siguientes dos ecuaciones diferenciales:

$$s_1 E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \left(s_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + s_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.3.30)$$

$$s_5 E \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + G \left(s_4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + s_6 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.3.31)$$

Adicionalmente se deberá cumplir con la siguiente ecuación de momentos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.3.32)$$

Supónganse los siguientes desplazamientos:

$$v = -\Phi_x \Phi'_y \Phi_z + v_0 \quad (2.3.33)$$

$$u = \Phi'_x \Phi_y \Phi_z + u_0 \quad (2.3.34)$$

La definición de (2.3.33) y (2.3.34), cumple con la ecuación (2.3.32), por lo que solamente resta resolver (2.3.30) y (2.3.31). Al sustituir (2.3.33) y (2.3.34) en (2.3.30) y (2.3.31), se tiene:

$$s_1 E \frac{\Phi'''_x}{\Phi'_x} + G \left(s_2 \frac{\Phi''_z}{\Phi_z} + s_3 \frac{\Phi''_y}{\Phi_y} \right) = 0 \quad (2.3.35)$$

$$s_5 E \frac{\Phi'''_y}{\Phi'_y} + G \left(s_4 \frac{\Phi''_x}{\Phi_x} + s_6 \frac{\Phi''_z}{\Phi_z} \right) = 0 \quad (2.3.36)$$

Supóngase que se conoce la función Φ'_x de (2.3.35), entonces: $\Phi_x = \int \Phi'_x dx + C = f_x + C$; y de manera análoga, si se conoce Φ'_y de (2.3.36), entonces: $\Phi_y = \int \Phi'_y dy + \bar{C} = f_y + \bar{C}$

Al sustituir en (2.3.35) y (2.3.36), se tiene:

$$s_1 E \frac{f'''_x}{f'_x} + G \left(s_2 \frac{\Phi''_z}{\Phi_z} + s_3 \frac{f''_y}{f_y + \bar{C}} \right) = 0 \quad (2.3.37)$$

$$s_5 E \frac{f'''_y}{f'_y} + G \left(s_4 \frac{f''_x}{f_x + C} + s_6 \frac{\Phi''_z}{\Phi_z} \right) = 0 \quad (2.3.38)$$

Si las constantes C y $\bar{C}$ no son nulas, y:

$$h_x = f_x - C$$

$$h_y = f_y - \bar{C}$$

Al Sustituir las expresiones en (2.3.37) y (2.3.38), se tiene:

$$s_1 E \frac{h'''_x}{h'_x} + G \left(s_2 \frac{\Phi''_z}{\Phi_z} + s_3 \frac{h''_y}{h_y} \right) = 0 \quad (2.3.39)$$

$$s_5 E \frac{h'''_y}{h'_y} + G \left(s_4 \frac{h''_x}{h_x} + s_6 \frac{\Phi''_z}{\Phi_z} \right) = 0 \quad (2.3.40)$$

Asumamos la solución para X en términos hiperbólicos, de manera análoga a los otros problemas de carga de agua en esa dirección:

$$\frac{h'''_x}{h'_x} = \frac{h''_x}{h_x} = \omega_x^2 \Rightarrow h'_x = \omega_x (A \sinh \omega_x x + B \cosh \omega_x x) \Rightarrow h_x = A \cosh \omega_x x + B \sinh \omega_x x$$

Al aceptar que la solución de Y sea en términos de senos y cosenos (puesto que se considerará fija en los extremos y ello requiere al menos dos cruces por cero):

$$\frac{h''y}{h'y} = \frac{h''y}{hy} = -\omega_y^2 \Rightarrow h'y = \omega_y(-A \sin \omega_y y + B \cos \omega_y y) \Rightarrow hy = A \cos \omega_y y + B \sin \omega_y y + C$$

Las ecuaciones (2.3.39) y (2.3.40), se transforman en:

$$s_1 E \omega_x^2 + G \left(s_3 \frac{\Phi''z}{\Phi z} - s_2 \omega_y^2 \right) = 0 \Rightarrow \Phi''z + \left(\frac{s_1}{s_3} \frac{E \omega_x^2}{G} - \frac{s_2}{s_3} \omega_y^2 \right) \Phi z = 0$$

$$-s_5 E \omega_y^2 + G \left(s_4 \omega_x^2 + s_6 \frac{\Phi''z}{\Phi z} \right) = 0 \Rightarrow \Phi''z + \left(\frac{s_4}{s_6} \omega_x^2 - \frac{s_5}{s_6} \frac{E \omega_y^2}{G} \right) \Phi z = 0$$

Dado que los coeficientes de Φz deben ser iguales para que las dos ecuaciones diferenciales anteriores tengan la misma solución, se exploraron los signos tal como en el caso anterior, encontrándose que ω_x, ω_y tiene dos posibilidades en función de E y G :

$$\left(\frac{E}{G} - 1 \right) \omega_x^2 = \left(\frac{E}{G} + 1 \right) \omega_y^2 \quad \text{y,} \quad \left(\frac{E}{G} + 1 \right) \omega_x^2 = \left(\frac{E}{G} - 1 \right) \omega_y^2 \quad (2.3.41)$$

Mientras que las posibilidades de la relación ω_x, ω_z , son:

$$\left(\left(\frac{E}{G} \right)^2 + 1 \right) \omega_y^2 = \left(\frac{E}{G} - 1 \right) \omega_z^2 \quad \text{y,} \quad \left(\left(\frac{E}{G} \right)^2 + 1 \right) \omega_y^2 = \left(\frac{E}{G} + 1 \right) \omega_z^2 \quad (2.3.42)$$

Las soluciones de (2.3.42), son respectivas con las de las ecuaciones (2.3.41).

Al estudiar las condiciones de frontera para la función de x , se considerará que tiene la carga de agua en un costado; mientras que el otro extremo es libre (pero con un esfuerzo debido a su inclinación).

$$E \Phi''x = \rho_H g z \text{ en: } x = -(pz + b/2); \quad y,$$

$$E \Phi''x = Fr \cos \theta \text{ en: } x = (pz + b/2)$$

Lo que lleva a la siguiente solución:

$$\Phi x = \frac{-\rho_H g z}{E \omega_x^2 \sinh(2\omega_x(pz + b/2))} \sinh(\omega_x(x - (pz + b/2))) + \frac{Fr \cos \theta}{\sinh(2\omega_x(pz + b/2))} \sinh(\omega_x(x + (pz + b/2))) + C \quad (2.3.43)$$

La ecuación (2.3.43) explica en cierta medida porque la solución de X debe ser en términos hiperbólicos. Si se observa con cuidado esta expresión, se puede ver que tiene en el denominador el término $\sinh(2\omega_x(pz + b/2))$, que no tiene cruces por cero más que para $\omega_x = 0$. En cambio, si la solución de x se propone en términos de senos y cosenos, la solución es muy semejante a (2.3.43),

con el denominador conteniendo al término $\sin(2\omega_x(pz + b/2))$. Ello implicaría que ω_x , fuese tal que $\sin(2\omega_x(pz + b/2))$, no presentara cruces por cero, para que no existieran indeterminaciones en (2.3.43), lo cual no ocurre en el problema que aquí se presenta, como se verá a continuación.

La solución de y implica desplazamientos nulos para los desplazamientos u y v en $y = \pm(qz + a/2)$, por lo que se tiene:

$$u = 0 \text{ en: } y = \pm(qz + a/2) \Rightarrow \Phi y = \bar{A} \cos \omega_y y + \bar{B} \sin \omega_y y + \bar{C} = 0 \text{ para: } y = \pm(qz + a/2)$$

$$v = 0 \text{ en: } y = \pm(qz + a/2) \Rightarrow \Phi' y = \omega_y (-\bar{A} \sin \omega_y y + \bar{B} \cos \omega_y y) = 0 \text{ para: } y = \pm(qz + a/2)$$

Por lo que la solución es:

$$\Phi y = \bar{B}(\cos \omega_y y + 1) \quad (2.3.44)$$

$$\Phi' y = -\bar{B} \omega_y \sin \omega_y y$$

$$\omega_y = \frac{\pi}{(qz + a/2)}$$

Resta resolver la ecuación de Z de la ecuación (2.3.42):

$$\Phi'' z - \frac{\pi^2 \beta}{q^2 (z + a_0)^2} \Phi z = 0 \quad (2.3.45)$$

Donde el parámetro β , puede tener dos soluciones:

$$\beta = \left(\frac{\left(\frac{E}{G} \right)^2 + 1}{\frac{E}{G} - 1} \right) \quad \beta = \left(\frac{\left(\frac{E}{G} \right)^2 + 1}{\frac{E}{G} + 1} \right) \quad \text{y:} \quad a_0 = \frac{a}{2q}$$

Si $a_0 < 0$, se requiere el siguiente cambio de variable: $z = -u - a_0$. En cambio $a_0 > 0$ el cambio de variable se puede tomar como: $z = u - a_0$. Así, para cualquiera de los dos casos, al sustituir en (2.3.45) se tiene:

$$\Phi'' u - \frac{\pi^2 \beta}{q^2 u^2} \Phi u = 0 \quad (2.3.46)$$

Sea por solución:

$$\Phi u = u^\alpha$$

Al sustituir en (2.3.46), se tiene:

$$(\alpha(\alpha-1)+C_0)u^{\alpha-2}=0$$

$$C_0 = \frac{\pi^2 \beta}{q^2}$$

Con lo que:

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4C_0}}{2}$$

$$\Phi u = Au^{\alpha_1} + Bu^{\alpha_2}$$

Como condiciones de frontera se requiere que los desplazamientos sean nulos en $z=h$, por lo que, para el caso $a_0 < 0$, la solución de la función de z es:

$$A(-h-a_0)^{\alpha_1} + B(-h-a_0)^{\alpha_2} = 0 \Rightarrow B = -A(-h-a_0)^{\alpha_1-\alpha_2}$$

$$\Phi z = A((-z-a_0)^{\alpha_1} - (-h-a_0)^{\alpha_1-\alpha_2}(-z-a_0)^{\alpha_2})$$

Note que deformaciones nulas en la cresta de la estructura no son posibles de determinar con la solución obtenida de Z . Lo que queda, es usar la constante A para normalizarla solución de z en $z=0$:

$$A = \frac{1}{((-a_0)^{\alpha_1} - (-h-a_0)^{\alpha_1-\alpha_2}(-a_0)^{\alpha_2})}$$

Como en el problema de la sección 2.3.2, se estudió el comportamiento de la solución en función de la geometría de la estructura.

Para la variación de la relación b/d , se presenta la Figura 2.3.27, mientras que para estudiar la variación de la relación c/a , se presenta la Figura 2.3.28.

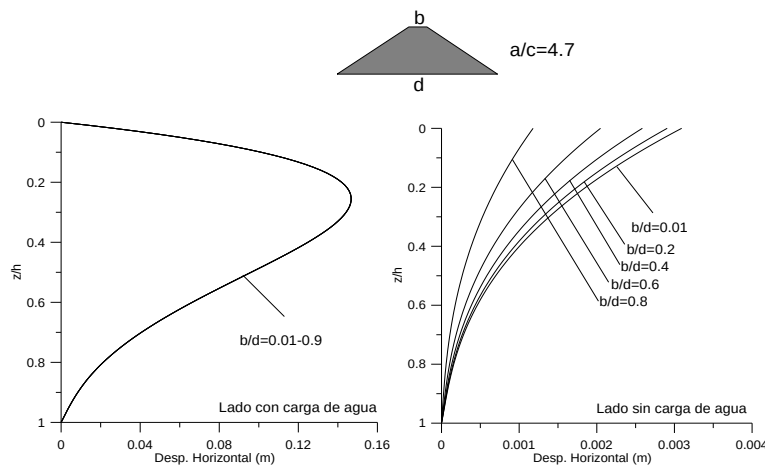


Figura 2.3.26.- Comportamiento del desplazamiento en función de la relación b/d , para los costados $x=\pm(pz+b/2)$

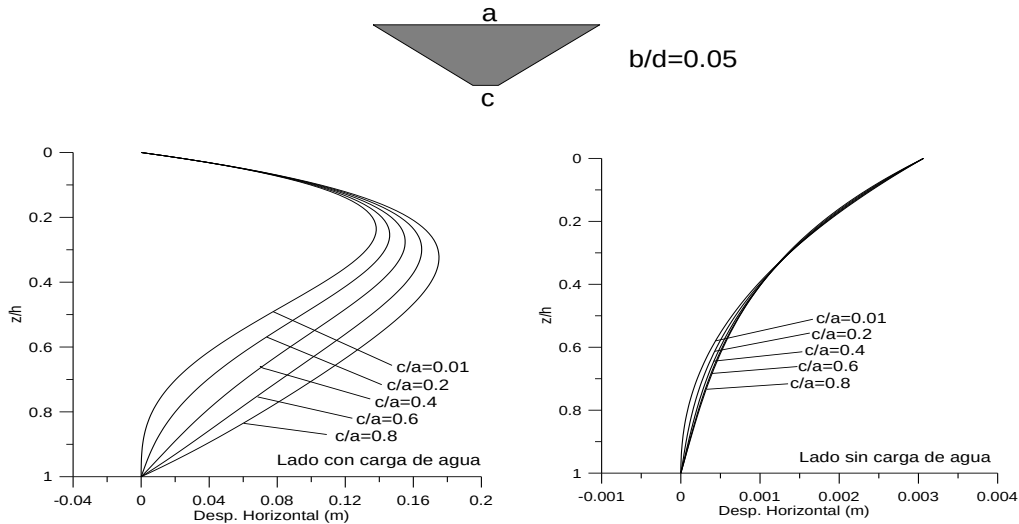


Figura 2.3.27.- Comportamiento del desplazamiento en función de la relación c/a , para los costados $x=\pm(pz+b/2)$

Se puede observar en las figuras anteriores que ha cambiado la naturaleza del movimiento con respecto a lo que se observa en el modelo de la sección 2.3.2. Particularmente en el lado con carga de agua donde ya no se observa un comportamiento parabólico. En la Figura 2.3.28, se presentan las elásticas en las tres direcciones, de manera análoga a como se presenta en la Figura 2.3.10. Importantes diferencias pueden observarse en la solución de este modelo contra el planteado en la sección 2.3.2, con una importante reducción del movimiento hacia la base, pero fundamentalmente, la presencia de una doble curvatura en el movimiento que se observa en la planta de las sección. La evidencia experimental de los movimientos en las losas de concreto muestra que las zonas cercanas a los apoyos laterales se encuentran en tensión, mientras que la parte central se encuentra en compresión. Este efecto puede generarse para la elástica que se presenta en los casos de la Figura 2.3.28, mientras que no podría ocurrir en el modelo de la sección 2.3.2, cuyas plantas presentan una curvatura simple como se puede observar en la Figura 2.3.10

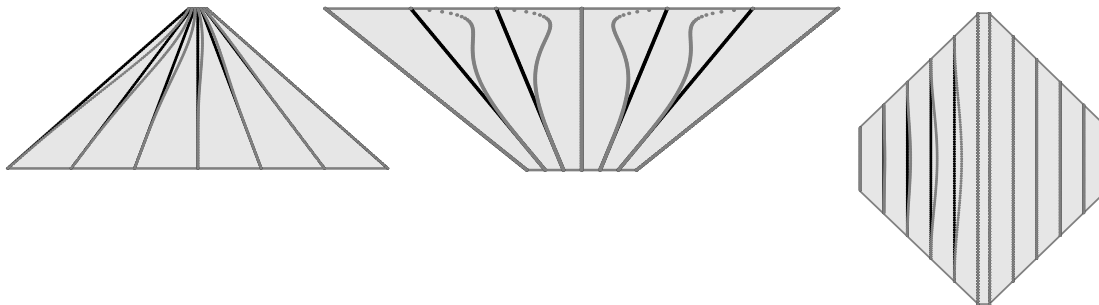


Figura 2.3.28.- Elástica exagerada del continuo al considerar el modelo de esta sección. En el lado izquierdo es un corte sobre el plano XZ, en la parte central es un corte sobre el plano YZ y en el lado derecho es una vista en planta sobre el plano xy (refiérase a la Figura 2.3.13 para ver el continuo en perspectiva)

En los casos anteriores se tomó un módulo de Poisson de $\nu = -0.4$, con un módulo de Young de $E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^2$. Además, se aceptó que existe un esfuerzo en dirección X, en la frontera que se

considera libre en la estructura, proporcional a una fracción Fr del coseno del ángulo de inclinación de la frontera. El valor de β , utilizado fué de:

$$\beta = \left(\frac{\left(\frac{E}{G} \right)^2 + 1}{\frac{E}{G} - 1} \right)$$

Para comparar el efecto del módulo de Poisson en los desplazamientos del continuo, se presenta en la siguiente Figura, las elásticas que se generan al usar dos casos de los módulos de Poisson $\nu = -0.4$ y $\nu = -0.3$; así como las curvas de igual desplazamiento en los movimientos u (dirección X), y v (en la dirección Y).

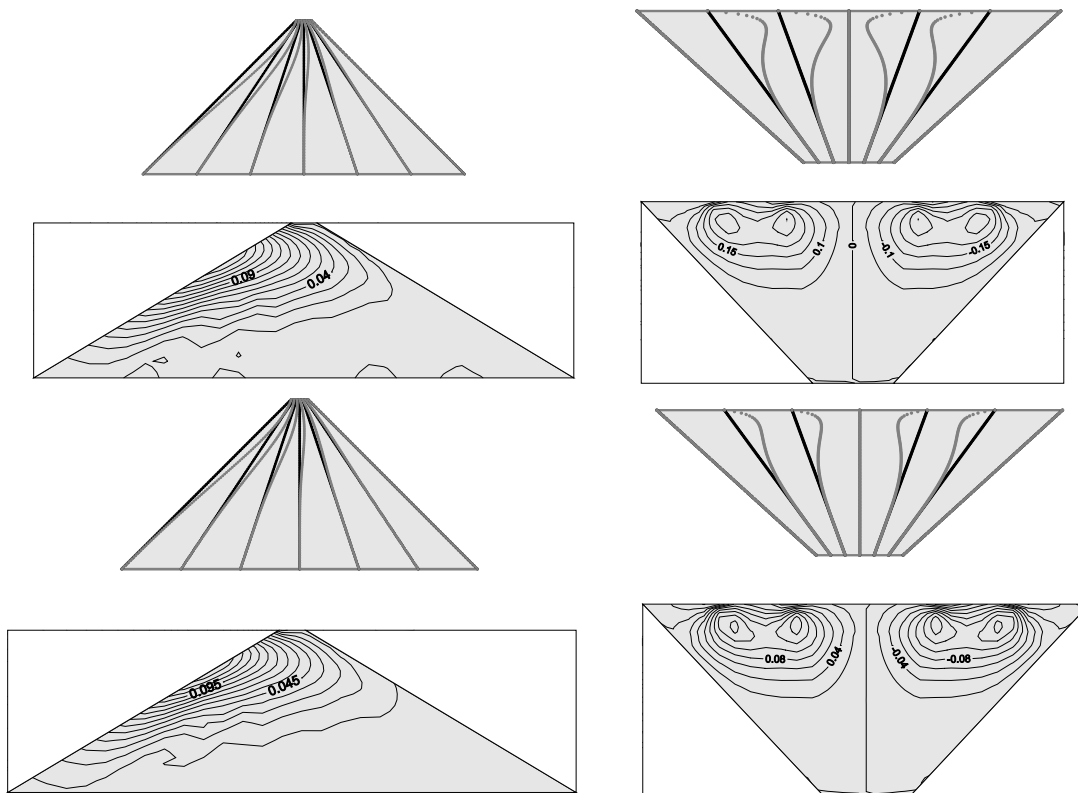


Figura 2.3.29.- Elásticas del problema de carga de agua en la dirección horizontal, al considerar dos valores diferentes del módulo de Poisson ($\nu = -0.4$, arriba; y $\nu = -0.3$, abajo). Los módulos de elasticidad son de $E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^2$, en ambos casos. Se usó $Fr = 1.0$, donde Fr es una fracción del coseno de la inclinación de la frontera.

La Figura 2.3.29 muestra que reducir el módulo de Poisson, reduce la magnitud del desplazamiento en la dirección Y , el cual se concentra en la parte superior de la estructura

2.2 Modelos Dinámicos

2.2.1 MODELOS UNIDIMENSIONALES

Los desarrollos que se presentan a continuación, son análogos a los problemas estáticos, con la diferencia en que ahora, todas las funciones involucradas son de tipo seno-coseno, incluida la función del tiempo que representa a una carga transitoria como puede ser un sismo.

2.2.1.1 MODELO UNIDIMENSIONAL PARA UN TRAPEZIO ANTE UNA FUERZA CORTANTE HORIZONTAL

Un modelo unidimensional de viga de cortante para el análisis sísmico de presas fue presentado inicialmente por Mononobe et al, 1936, el cual consiste en una sección triangular y un cortante actuando en secciones horizontales como se muestra en la Figura 2.4.1. Este modelo es modificado en este trabajo al considerar en lugar de un triángulo, la geometría de un trapezio, que le da generalidad al planteamiento al definir la existencia de b .

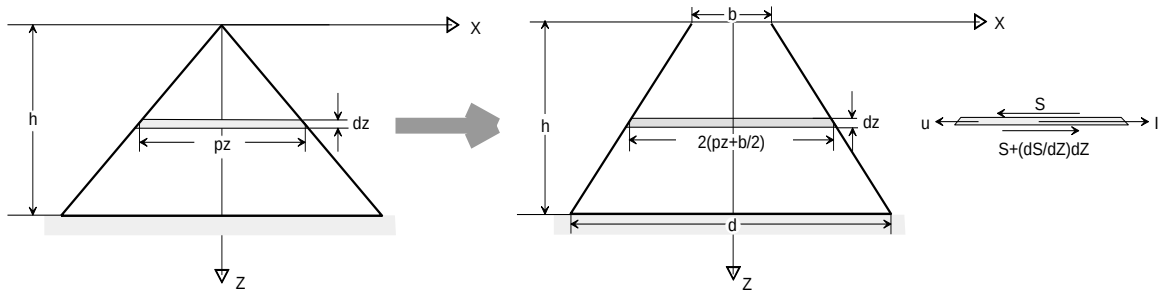


Figura 2.4.1.- Modelos unidimensionales de la viga de cortante para el análisis sísmico de presas

En la figura anterior S es la fuerza cortante, $u(z,t)$ es un movimiento arbitrario del elemento diferencial e I es la inercia sobre dicho elemento. Al hacer suma de fuerzas igual a cero:

$$S - \left(S + \frac{dS}{dz} dz \right) + I = 0$$

$$S = 2G(pz + b/2) \frac{du}{dz}; \quad I = 2\rho(pz + b/2) dz \frac{d^2u}{dt^2}; \quad p = \frac{(d-b)}{2h}$$

Donde:

$$V_s^2 \left((pz + b/2) \frac{d^2u}{dz^2} + p \frac{du}{dz} \right) = \frac{d^2u}{dt^2} \quad (2.4.1)$$

$$V_s^2 = \frac{G}{\rho}; \quad G = \text{Modulo de rigidez}, \quad \rho = \text{Densidad}$$

Por separación de variables: $u(z,t) = \Phi z \Phi t$

$$V_s^2 \left(\frac{\Phi''z}{\Phi z} + \frac{1}{(z+b_0)} \frac{\Phi'z}{\Phi z} \right) = \frac{\Phi''t}{\Phi t} \quad \text{Si:} \quad \frac{\Phi''t}{\Phi t} = -\omega^2 \Rightarrow (z+b_0)\Phi''z + \Phi'z + \frac{\omega^2}{V_s^2}(z+b_0)\Phi z = 0; \quad b_0 = \frac{b}{2p}$$

Las soluciones de Φt , es una solución en términos de senos y cosenos:

$$\Phi t = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Para la función Φz , se tiene una ecuación de Bessel trasladada, análoga a la presentada en la ecuación (2.1.4), y resuelta en el planteamiento estático unidimensional de la sección 2.1.2. Sin embargo, aquí se consideran los diferentes valores de ω que cumplen con las condiciones de deformaciones nulas en $z=0$ y desplazamientos nulos en $z=h$. Dichas funciones son, como se sabe, los modos de vibración en la solución de los problemas dinámicos.

El estudio de los problemas dinámicos requiere también analizar el problema de vibración forzada, el cual se estudia a continuación al considerar el movimiento en el apoyo. Considérese el desplazamiento total del elemento diferencial como:

$$u_t = u_g + u$$

u_t = desplazamiento total del elemento diferencial

u_g = desplazamiento del apoyo

u = desplazamiento del elemento diferencial con respecto al apoyo

Al sustituir u_t por u , en la ecuación (2.4.1), se tiene:

$$\ddot{u} - V_s^2 \left(u'' + \frac{p}{(pz+b/2)} u' \right) = -\ddot{u}_g \quad (2.4.2)$$

$$\text{Con: } \ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \ddot{u}_g = \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2}; \quad u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \quad u' = \frac{\partial u}{\partial z}$$

La ecuación (2.4.2), corresponde a la ecuación diferencial para el caso de vibración forzada.

De la solución general del problema de vibración libre, se tiene:

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) q(\beta_n z)$$

(Se ha cambiado la nomenclatura Φz por q). La solución función de t , para el modo n es:

$$p_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \quad \Rightarrow \quad \ddot{p}_n(t) = -\omega^2 (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) = -\omega^2 p_n(t)$$

Por lo que la aceleración para el modo n , se puede expresar como:

$$\ddot{u}_n(z, t) = -\omega_n^2 p_n(t) q(\beta_n z)$$

De manera, análoga para el modo m :

$$\ddot{u}_m(z, t) = -\omega_m^2 p_m(t) q(\beta_m z)$$

La diferencial de masa de la sección está dada por:

$$dm = \rho(pz + b/2)dz$$

Por lo que las fuerzas de inercia para cada modo, son:

$$F_n = m \ddot{u}_n = -m \omega_n^2 p_n(t) q(\beta_n z)$$

$$\Rightarrow dF_n = -\omega_n^2 \rho(pz + b/2) p_n(t) q(\beta_n z) dz$$

$$F_m = m \ddot{u}_m = -m \omega_m^2 p_m(t) q(\beta_m z)$$

$$\Rightarrow dF_m = -\omega_m^2 \rho(pz + b/2) p_m(t) q(\beta_m z) dz$$

Al aplicar el teorema de Maxwell-Betti, se tiene:

$$F_n u_m(z, t) = F_m u_n(z, t)$$

$$p_n(t) p_m(t) (\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^h \rho(pz + b/2) q(\beta_n z) q(\beta_m z) dz = 0$$

$$\text{Si: } (\omega_n^2 - \omega_m^2) \neq 0, \text{ para } m \neq n \Rightarrow \int_0^h \rho(pz + b/2) q(\beta_n z) q(\beta_m z) dz = 0$$

La última expresión es la propiedad ortogonal de las formas modales, que servirá para desacoplar las funciones de z y t . Así, al aplicarla en la ecuación (2.4.2), se tiene:

$$p_n \int_0^h (pz + b/2) q(\beta_n z) q(\beta_n z) dz - p_n V_S^2 \int_0^h (pz + b/2) q''(\beta_n z) q(\beta_n z) dz - p_n p V_S^2 \int_0^h q'(\beta_n z) q(\beta_n z) dz = -u_g \int_0^h (pz + b/2) q(\beta_n y) dz$$

La igualdad anterior, requiere de un laborioso proceso de integración; sin embargo, al usar las propiedades conmutativa entre sumatoria e integración y distributiva entre sumatorias, todas estas integrales son inmediatas. En los casos bidimensionales y tridimensionales que se presentan posteriormente, las integraciones se realizaron de manera numérica.

Sea:

$$a_{1n} = \int_0^h (pz + b/2) q(\beta_n z) q(\beta_n z) dz$$

$$a_{2n} = - \int_0^h (pz + b/2) q''(\beta_n z) q(\beta_n z) dz$$

$$a_{3n} = - \int_0^h p q'(\beta_n z) q(\beta_n z) dz$$

$$a_{4n} = \int_{D_0}^{D_1} (pz + b/2) q(\beta_n z) dz$$

Se puede verificar que se cumple la siguiente igualdad: $a_{1n} = V_s^2(a_{2n} + a_{3n})$. Por lo que el problema de vibración forzada para cada modo de vibración se reduce a la solución de una ecuación elemental de movimiento:

$$\ddot{p}_n + \omega_n^2 p_n = -\frac{a_{4n}}{a_{1n}} \ddot{u}_g \quad ; \quad AM = \frac{a_{4n}}{a_{1n}}$$

El coeficiente AM en el miembro derecho de la igualdad, corresponde al factor de amplificación modal. Es importante mencionar que en todos y cada uno de los problemas unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales resueltos en este trabajo, se observó que las soluciones obtenidas, conducen a esta ecuación elemental de movimiento.

La ecuación anterior puede ser resuelta con el uso de la integral de Duhamel:

$$p_n(t) = \frac{a_{4n}}{a_{1n}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau$$

Si en cambio, la señal de la excitación correspondiera a una señal armónica, la función de transferencia teórica, se puede obtener como:

$$|FT(\omega)|^2 = \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{\omega^2 AM_j (\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega)^2} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n \frac{-2\xi_j \omega_j \omega^3 AM_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_j \omega_j \omega)^2} \right)^2$$

Una explicación muy clara y detallada de la obtención de la expresión anterior puede encontrarse en Taborda y Ordaz, 2003.

La solución del modelo anterior se presenta en las Figuras 2.4.2 y 2.4.3, donde se muestran las formas modales, factores de amplificación modal y frecuencias naturales, para las variaciones de la relación b/d y d/b .

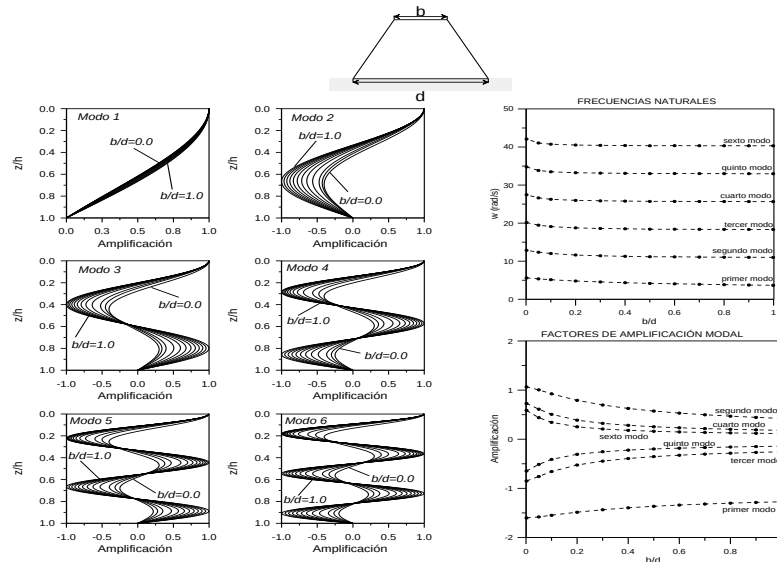


Figura 2.4.2.- Solución del modelo unidimensional de viga de cortante cuando $b < d$

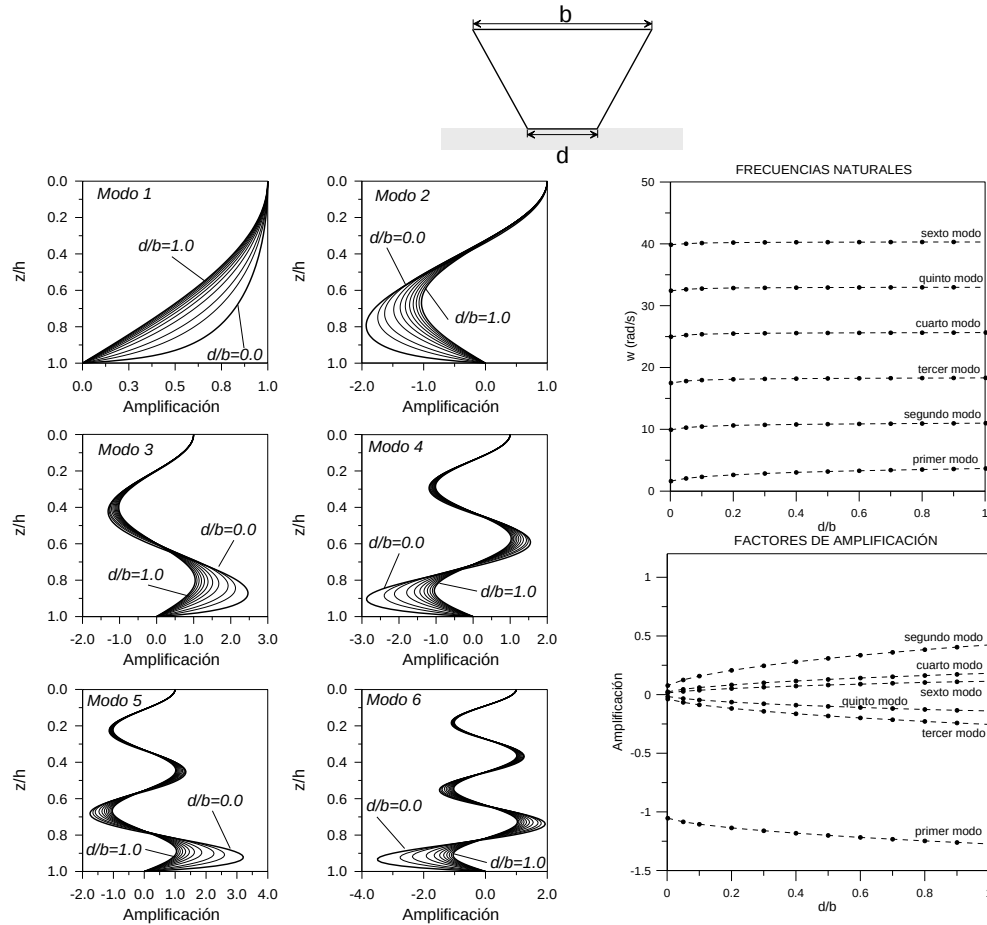


Figura 2.4.3.- Solución del modelo unidimensional de viga de cortante cuando $d < b$

Se obtuvieron las funciones de transferencia teóricas para la formulación del trapecio, al considerar un amortiguamiento de 5%, las cuales se muestran en la Figura 2.4.4

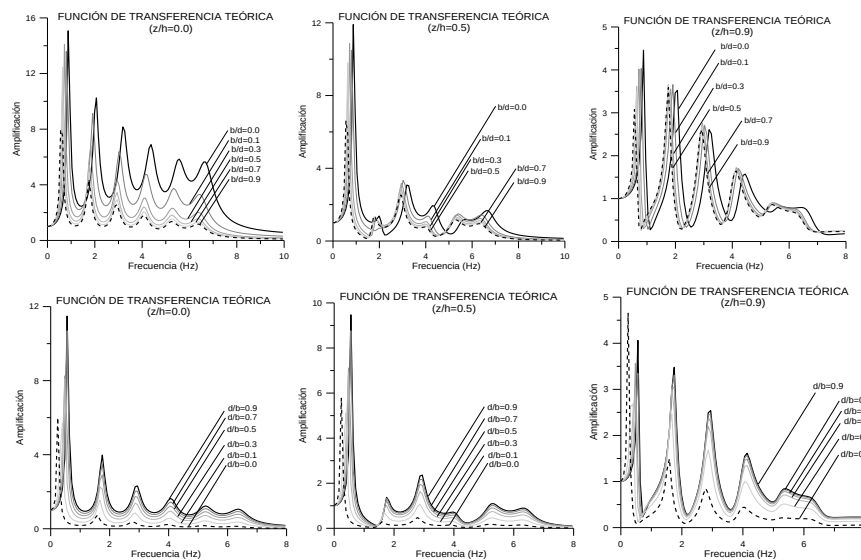


Figura 2.4.4.- Funciones de transferencia teóricas

Varias conclusiones pueden extraerse de estos modelos unidimensionales pero un resultado muy evidente es que la respuesta dinámica para el triángulo ($b/d=0$) en la cima ($z/h=0$), es mayor con respecto a todas las otras geometrías, como lo indican claramente las funciones de transferencia. Otro resultado importante es que la amplificación del modo fundamental en la base del trapecio ($z/h=0.9$), es mayor para el triángulo invertido ($d/b=0$), con respecto a las otras geometrías, lo que refleja el movimiento con un efecto de embudo.

El planteamiento unidimensional permite solamente aplicar condiciones de frontera sobre el eje Z ya que los planos perpendiculares a este eje, son tangentes a la fuerza cortante que se presenta en el planteamiento. Las fronteras laterales del trapecio, no tienen condiciones de frontera definidas (no son ni libres, ni fijas), sin embargo, se utilizan para definir la magnitud de la fuerza cortante y la inercia. En este sentido, se podría considerar elementos diferenciales con dimensión tridimensional, sobre el modelo unidimensional y observar su comportamiento. Un prisma tridimensional en forma de cuña se presenta en la Figura 2.4.5. El elemento diferencial para estudiar el modelo unidimensional está definido por el plano L_1 - L_2 y tiene espesor dz .

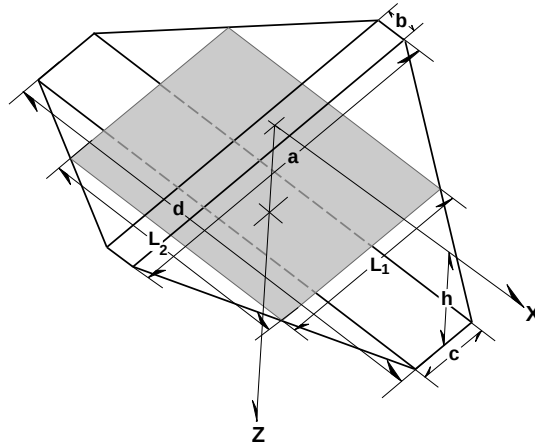


Figura 2.4.5.- Modelo unidimensional de viga de cortante con distribución de masa tridimensional

Las fuerzas del problema son: $S = L_1 L_2 G \frac{\partial u}{\partial y}$; $I = \rho L_1 L_2 dy \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$$L_1 = 2(qz + a/2); \quad L_2 = 2(pz + b/2); \quad p = \frac{d-b}{2h}; \quad q = \frac{c-a}{2h}$$

En el equilibrio: $\frac{\partial S}{\partial z} dz = I$

$$\Rightarrow V_s^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{(z+a_0)} + \frac{1}{(z+b_0)} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad a_0 = \frac{a}{2q}; \quad b_0 = \frac{b}{2p}$$

Por separación de variables: $u(z,t) = \Phi z \Phi t$

$$\frac{\Phi_t''}{\Phi_t} = -\omega^2 \Rightarrow (z+a_0)(z+b_0)\Phi_z'' + 2\left(z + \frac{a_0+b_0}{2}\right)\Phi_z' + \frac{\omega^2}{V_s^2}(z+a_0)(z+b_0)\Phi_z = 0 \quad (2.4.2)$$

$$(\nu^2 - C_o^2)q'' + 2\nu q' + \frac{\omega^2}{V_s^2}(\nu^2 - C_o^2)q = 0 \quad z = \nu - \frac{a_0 + b_0}{2}; \quad C_o = \frac{a_0 + b_0}{2} \quad (2.4.3)$$

La ecuación (2.4.3) se simplifica en una ecuación esférica de Bessel cuando $C_o = 0$, lo que implica que: $a_0 = -b_0$. Esto incluye a la pirámide cuadrada y algunas pirámides rectangulares que cumplen con la relación anterior. La solución de una ecuación esférica de Bessel es:

$$\Phi_\nu = A_0 \frac{\cos\left(\frac{\omega}{V_s}\nu\right)}{\left(\frac{\omega}{V_s}\nu\right)} + B_0 \frac{\sin\left(\frac{\omega}{V_s}\nu\right)}{\left(\frac{\omega}{V_s}\nu\right)}$$

Se realizó un análisis análogo al presentado para el trapecio, cuyos resultados se presentan en la Figura 2.4.6 para el caso de la pirámide y la Figura 2.4.7 para el caso de la pirámide invertida.

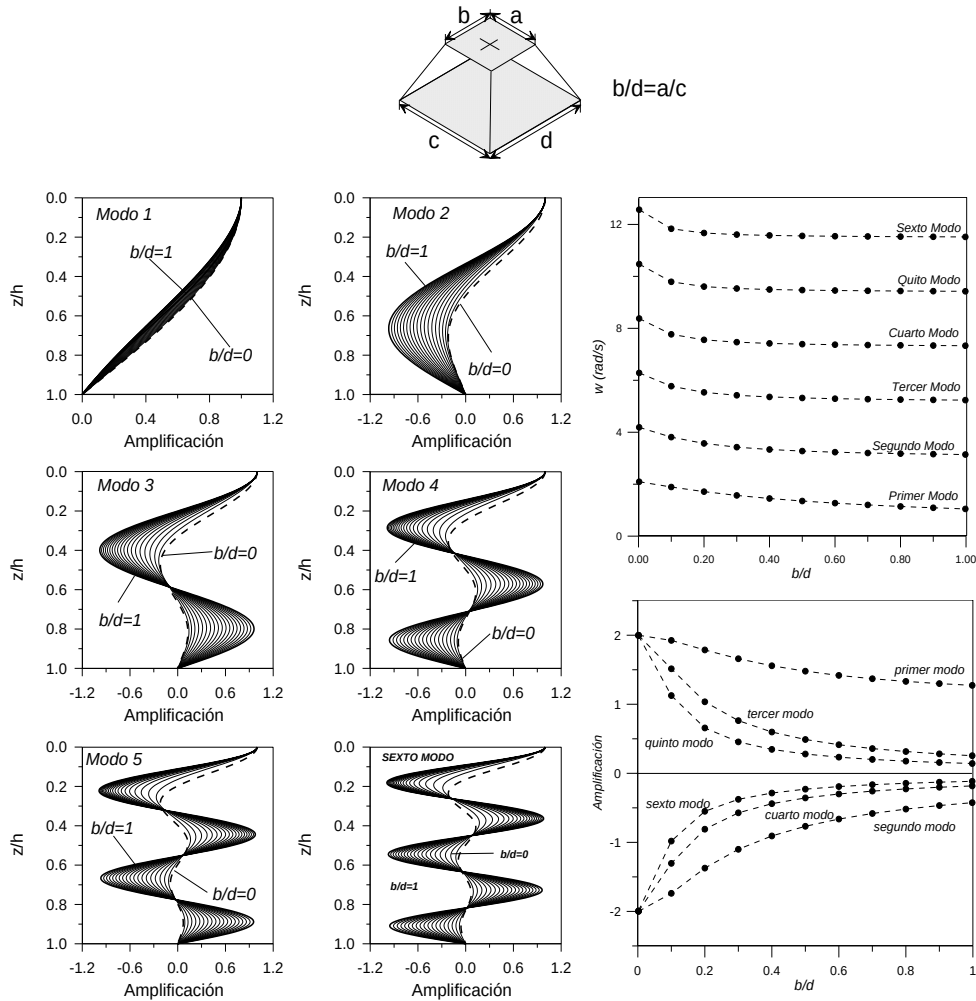


Figura 2.4.6.- Solución del modelo unidimensional de la pirámide cuando $b < d$ (bajo la condición $b/d = a/c$)

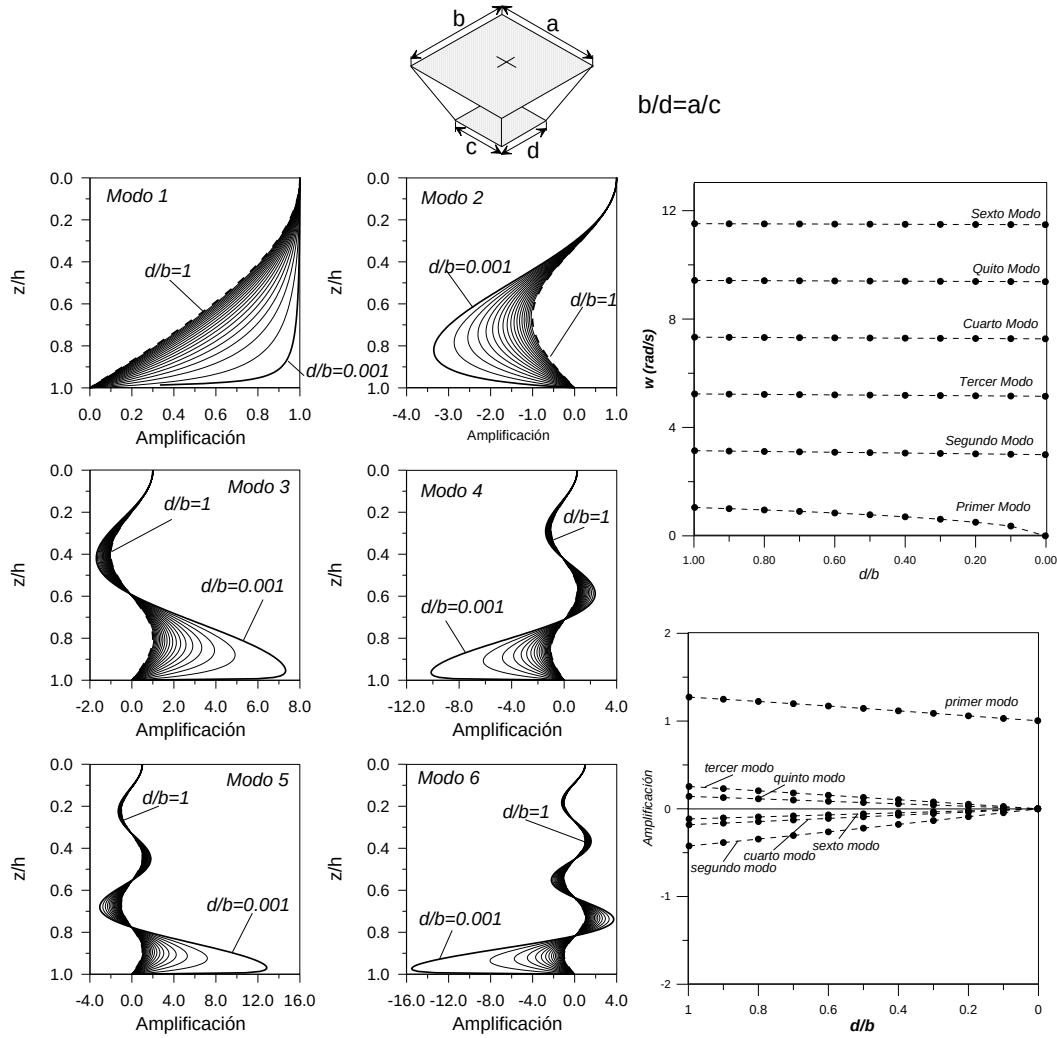


Figura 2.4.7.- Solución del modelo unidimensional de la pirámide cuando $d < b$ (bajo la condición $b/d = a/c$).

En la solución de la pirámide invertida se puede ver la inestabilidad de la estructura cuando el valor de d tiende a cero, dado que los factores de amplificación modal son todos cero, excepto en el primer modo, sin embargo, la frecuencia natural del primer modo es cero, lo que se interpreta como una estructura infinitamente flexible.

Para el caso en el que $C_0 \neq 0$ en la expresión (2.4.3), un segundo cambio de variable sobre esta ecuación permite transformarla en la siguiente ecuación diferencial

$$(\nu^2 - 1)\Phi_z'' + 2\nu\Phi_z' q' + \frac{\omega^2 C_0^2}{V_s^2}(\nu^2 - 1)\Phi_z = 0 \quad \text{con:} \quad \nu = \frac{\nu}{C_0} \quad (2.4.4)$$

La expresión 2.4.4 es una ecuación conocida en la literatura como la ecuación escalar de onda esferoidal, y existe software que resuelve este tipo de funciones (ej. *Mathematica* de Wolfram

Research Inc.). En este trabajo se encontró que mediante series de Frobenius es posible obtener la convergencia de las series cuando en la expresión (2.4.2) se traslada el valor de a_0 o b_0 al origen, mediante los siguientes cambios de variable

$$\text{Cuando se traslada } b_0 \begin{cases} z = u - b_0 & \text{si: } b_0 > 0 \Rightarrow d_0 = a_0 - b_0 \\ z = -u - b_0 & \text{si: } b_0 < 0 \Rightarrow d_0 = b_0 - a_0 \end{cases}$$

$$\text{Cuando se traslada } a_0 \begin{cases} z = u - a_0 & \text{si: } a_0 > 0 \Rightarrow d_0 = b_0 - a_0 \\ z = -u - a_0 & \text{si: } a_0 < 0 \Rightarrow d_0 = a_0 - b_0 \end{cases}$$

Estos cambios de variable conducen a la siguiente ecuación diferencial

$$(u^2 + d_0 u) \Phi_u'' + 2 \left(u + \frac{d_0}{2} \right) \Phi_u' + \frac{\omega^2}{V_s^2} (u + d_0 u) \Phi_u = 0$$

Con la siguiente solución en series de Frobenius

$$\begin{aligned} \Phi_u &= A \Phi_{u1} + B \Phi_{u2}; & \Phi_{u1} &= \sum_{n=0}^{\infty} e_n u^n; & e_n &= -\frac{(n-1)}{n d_0} e_{n-1} - \frac{\beta^2}{n^2} e_{n-2} - \frac{\beta^2}{n^2 d_0} e_{n-3} \\ \Phi_{u2} &= \Phi_{u1} \ln u + \Psi_{u2}; & \Psi_{u2} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n u^n; & f_n &= -\frac{2}{n} e_n - \frac{(2n-1)}{2 n d_0} e_{n-1} - \frac{(n-1)}{2 d_0} f_{n-1} - \frac{\beta^2}{n^2} f_{n-2} - \frac{\beta^2}{d_0 n^2 d_0} f_{n-3} \\ e_n &= f_n = 0 \quad \forall \quad n < 0; & e_0 &= 1; & e_1 &= f_1 = 0; & \beta &= \frac{\omega}{V_s} \end{aligned}$$

A continuación se presentan las soluciones para una cuña con las dimensiones de la presa El Infiernillo, al hacer variar solamente la dimensión de la base del cañón (parámetro c), como se indica en la Figura 2.4.8

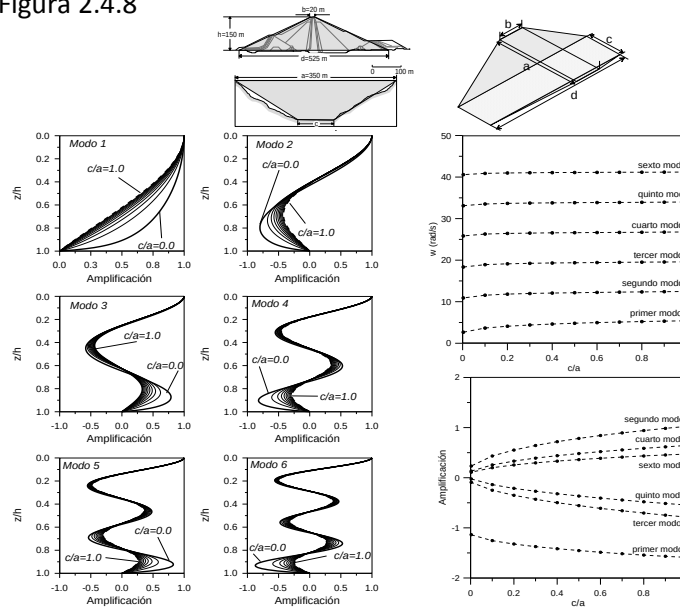


Figura 2.4.8.- Solución del modelo unidimensional de la cuña

Las funciones de transferencia para la solución anterior se presentan en la Figura 2.4.9

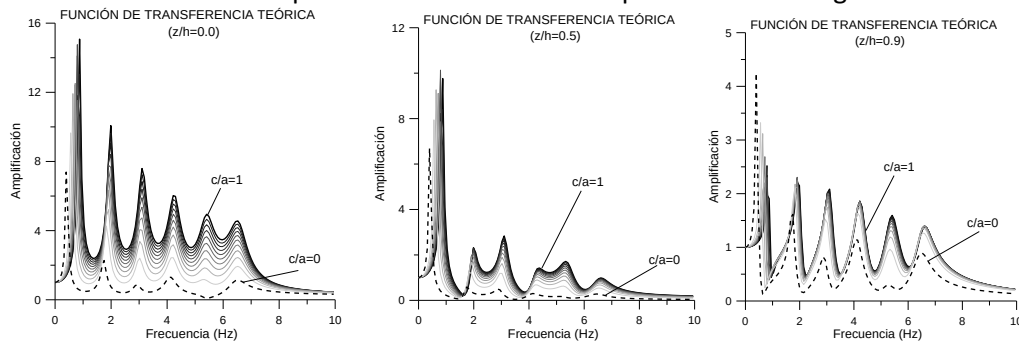


Figura 2.4.9.- Funciones de transferencia teórica para tres diferentes niveles de la cuña, al variar la dimensión de la base (parámetro c).

En la Figura 2.4.9, se puede mostrar que la amplificación de la cima ($z/h=0.0$), es mayor cuando el cañón tiene forma rectangular ($c=a$), pero que las amplificaciones del modo fundamental son mayores en la base de la cuña ($z/h=0.9$) cuando la base del cañón es estrecha ($c=0$). Si observamos la forma modal del modo fundamental multiplicada por su factor de amplificación, para la variación de c/a , se puede observar que dichas formas modales se cruzan indicando mayores amplificaciones en la cima para cañones abiertos y mayores amplificaciones en la base para cañones cerrados, lo cual explica lo que se observa en las funciones de transferencia ilustradas en la Figura 2.4.9.

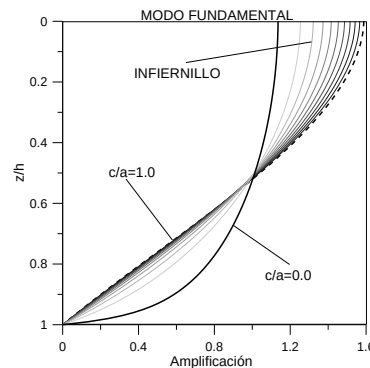


Figura 2.4.10.- Amplificación de las formas modales del modo fundamental, al variar el parámetro c/a .

2.2.1.2 MODELO UNIDIMENSIONAL PARA UN TRAPECIO ANTE UNA FUERZA AXIAL VERTICAL

En este caso se plantea un modelo unidimensional con una fuerza axial uniformemente distribuida en planos horizontales del trapecio, tal como se muestra en la Figura 2.4.11.

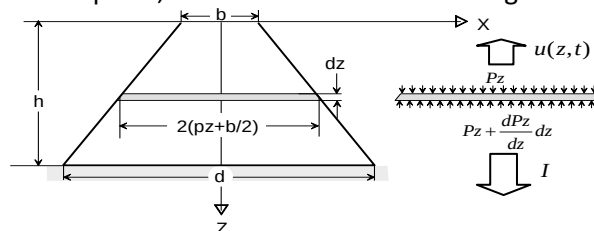


Figura 2.4.11.- Modelo unidimensional de una fuerza axial y la inercia

Las fuerzas actuantes en este modelo, son:

$$\frac{dP_z}{dz} dz = I \Rightarrow V_p^2 \left((pz + b/2) \frac{d^2 u}{dz^2} + p \frac{du}{dz} \right) = \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (2.4.5)$$

Donde: $P_z = 2E(pz + b/2) \frac{du}{dz}$; $I = 2\rho(pz + b/2) dz \frac{d^2 u}{dt^2}$; $p = \frac{(d-b)}{2h}$

La ecuación (2.4.5) es análoga a (2.4.1) por lo que las soluciones presentadas anteriormente son todas válidas para este modelo, incluidos los casos con distribución tridimensional de la masa, con la única diferencia de sustituir el parámetro V_s por V_p . Sin embargo, la naturaleza del movimiento en este planteamiento es en dirección al eje Z , lo que produciría formas modales como las que se presentan en la Figura 2.4.12, donde se ilustran algunos casos del trapecio y trapecio invertido. De manera análoga podrían obtenerse formas modales para cuñas y pirámides, tal como se presentó en el caso anterior.

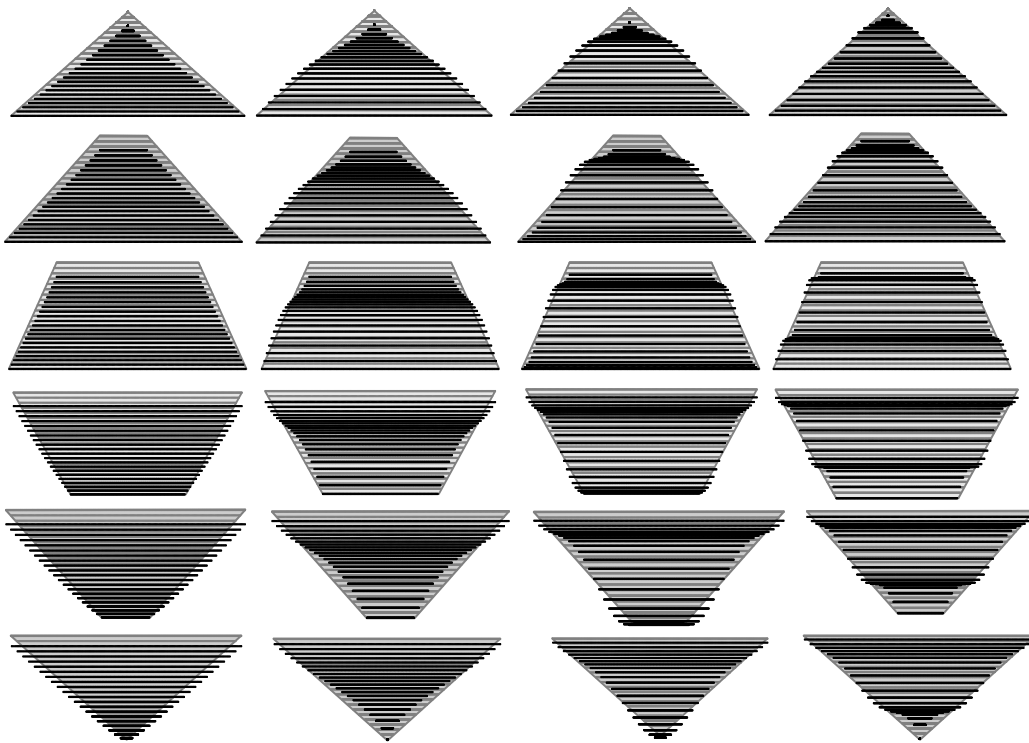


Figura 2.4.12.- Primeras cuatro formas modales para diferentes trapecios, al considerar el modelo unidimensional de carga axial.

Las formas modales de la Figura 2.4.16 son sumamente interesantes y reflejan con mucha claridad la importancia del movimiento en la cresta y la base en el triángulo y triángulo invertido, respectivamente. Todos los demás resultados son análogos al planteamiento unidimensional de un cortante horizontal.

2.2.2 MODELOS BIDIMENSIONALES DINÁMICOS

2.2.2.1 MODELO BIDIMENSIONAL DINÁMICO PARA UNA GEOMETRÍA DE UNA TRAPÉZIO CONFINADO POR UN CAJÓN

En esta sección se proponen los modelos que se presentan en la Figura 2.5.1, donde se puede ver que los modelos (a), (c) y (e), tienen las fuerzas uniformemente distribuidas en dirección X y los casos (b), (d) y (f) tiene la fuerza uniformemente distribuida en la dirección Y .

De acuerdo con el caso (a) de la Figura 2.5.1, se tienen las siguientes fuerzas

$$F_{xy} = 2G \frac{\partial u}{\partial y} (pz + b/2) dz \quad ; \quad F_{xz} = 2G \frac{\partial u}{\partial z} (pz + b/2) dy \quad ; \quad I_x = 2\rho (pz + b/2) dy dz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

G es el módulo de cortante y ρ es la densidad de un material homogéneo.

Por equilibrio dinámico

$$V_s^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{(z + b_0)} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.5.1)$$

$b_0 = b/2p$; $p = (d - b)/2h$

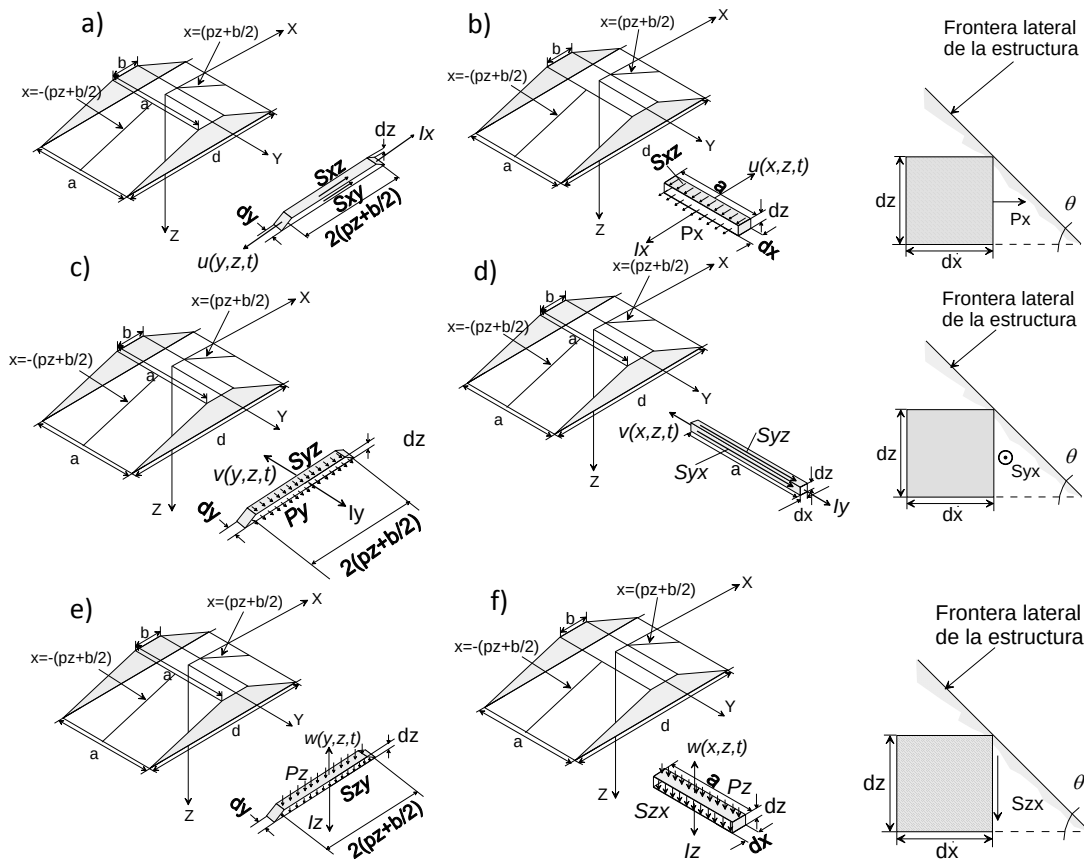


Figure 2.5.1. Modelos bidimensionales. En los casos (a), (c) y (e), el movimiento es uniforme en la dirección X mientras que en los casos (b), (d) y (f), el movimiento es uniforme en la dirección Y .

Usando el método de separación de variables, se tiene:

$$u = \Phi_y \Phi_z \Phi_t \quad (2.5.2)$$

Al sustituir (2.5.2) en (2.5.1):

$$V_s^2 \left(\frac{\Phi_y''}{\Phi_y} + \frac{\Phi_z''}{\Phi_z} + \frac{1}{(z+b_0)} \frac{\Phi_z'}{\Phi_z} \right) = \frac{\Phi_t''}{\Phi_t} \quad (2.5.3)$$

$$\frac{\Phi_y''}{\Phi_y} = -\omega_y^2; \quad \frac{\Phi_t''}{\Phi_t} = -\omega^2$$

Con:

$$\Phi_y = A \cos(\omega_y y) + B \sin(\omega_y y)$$

$$\Phi_t = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$$

Las constantes A, B , dependendelas condiciones de frontera de Y ; y C, D dependen de las condiciones iniciales. Para extremos fijos en $y = \pm \frac{a}{2}$ la solución Φ_y es:

$$\Phi_y = A_k \cos(\omega_y y); \quad \omega_y = \frac{(2k-1)\pi}{a}$$

La ecuación diferencial de Z es:

$$(z+b_0) \frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial z^2} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} + \lambda(z+b_0) \Phi_z = 0; \quad \lambda = \left(\frac{\omega^2}{V_s^2} - \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{a^2} \right) \quad (2.5.4)$$

Por inspección note que cuando $a \rightarrow \infty$ y $b_0 = 0$ la ecuación (2.5.4) es la ecuación de Bessel típica del modelo unidimensional de viga de cortante. Para resolver (2.5.4), que es un problema de Bessel, se realiza el siguiente cambio de variable: $z = \nu - b_0$ si $b_0 > 0$; o, $z = -\nu - b_0$ si $b_0 < 0$; y, cualquiera de ambos cambios da:

$$\nu \Phi'' \nu + \Phi' \nu + \lambda \nu \Phi \nu = 0 \quad (2.5.5)$$

La ecuación (2.5.5) tiene la misma solución del problema estático que se presenta en la ecuación (2.1.4), es decir:

$$\Phi \nu = C_0 \Phi_{1\nu}(\lambda \nu) + C_1 \Phi_{2\nu}(\lambda \nu) \quad (2.5.6)$$

Donde:

$$\Phi_{1\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda \nu)^{2n}}{2^{2n} n!^2}; \quad \Phi_{2\nu} = \Phi_{1\nu} \ln(\lambda \nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n (\lambda \nu)^{2n}}{2^{2n} n!^2}; \quad H_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}; \quad \lambda = \left(\frac{\omega^2}{V_s^2} - \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{a^2} \right)$$

Las condiciones de frontera para Φ_z son:

$$\begin{aligned} C_0 \Phi_{1z}(h) + C_1 \Phi_{2z}(h) &= 0 \quad (z = h \text{ base fija}) \\ C_0 \Phi'_{1z}(h) + C_1 \Phi'_{2z}(h) &= 0 \quad (y = 0, \text{ cima libre}) \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Las frecuencias naturales son ahora:

$$\omega_{nk} = \left(\frac{\beta_{nk}^2 (d-b)^2}{d^2 h^2} + \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{a^2} \right)^{1/2} V_s \quad (2.5.8)$$

β_{nk} , son las raíces de la solución Φz

Para los casos (c), y (e), la soluciónes la misma, solamente cambia el parámetro λ en la ecuación

$$(2.5.4), \text{ tal que, } \lambda = \left(\frac{\omega^2}{V_s^2} - \frac{V_p^2 (2k-1)^2 \pi^2}{V_s^2 a^2} \right), \text{ y } \lambda = \left(\frac{\omega^2}{V_p^2} - \frac{V_s^2 (2k-1)^2 \pi^2}{V_p^2 a^2} \right), \text{ respectivamente.}$$

Cuando el movimiento es uniforme en la dirección Y (caso (b)), se tienen las siguientes fuerzas:

$$F_{xy} = 2E \frac{\partial u}{\partial y} adz; \quad F_{xz} = 2G \frac{\partial u}{\partial z} adx; \quad I_x = 2\rho adxdz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Y da las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow V_p^2 \frac{\Phi x''}{\Phi x} + V_s^2 \frac{\Phi z''}{\Phi z} = \frac{\Phi t''}{\Phi t} \quad (2.5.9)$$

$$u = \Phi x \Phi z \Phi t; \quad V_p^2 = \frac{E}{\rho}; \quad V_s^2 = \frac{G}{\rho}$$

La solución Φx es:

$$\Phi x = A \cos(\omega_x x) + B \sin(\omega_x x) \quad (2.5.10)$$

Si las fronteras laterales son libres en $x = \pm(pz + b/2)$, entonces se podría tomar $\Phi' x|_{x=\pm(pz+b/2)} = 0$, para hacer esfuerzos nulos en estas fronteras del continuo, pero para resolver la ecuación (2.5.10), para fronteras libres, no se tienen esfuerzos cero en las fronteras laterales porque las fronteras tienen una inclinación con respecto a la frontera lateral del elemento diferencial (Figura 2.5.1). De modo que las deformaciones pueden ser proporcionales a $\omega_x \cos \theta$; donde θ es la inclinación de la frontera lateral. Si $\theta = 0$ entonces la deformación es proporcional a ω_x , y si $\theta = \pi/2$, la frontera del continuo coincide con la frontera lateral del elemento diferencial, tal que la deformación es cero. Ésta es una consideración muy importante en la solución de los problemas que se resuelven en este trabajo y ya ha sido explicada en los problemas estáticos. Así se tienen las siguientes condiciones de frontera para la solución de X :

$$\begin{aligned} \omega_x (A \sin(\omega_x (pz + b/2)) + B \cos(\omega_x (pz + b/2))) &= -\omega_x \cos \theta \\ \omega_x (-A \sin(\omega_x (pz + b/2)) + B \cos(\omega_x (pz + b/2))) &= \omega_x \cos \theta \end{aligned}$$

$$\Phi_x = -\frac{\cos\theta}{\sin\omega_x(pz+b/2)}\cos\omega_x x$$

El término ω_x , no ha sido usado aún; por lo que podemos definir $\omega_{xi} = \frac{\alpha_i}{pz+b/2}$, tal que Φ_x tenga un valor constante a lo largo de $x = \pm(pz+b/2)$. Ahora, si Φ_{xi} es una función ortogonal con respecto a Φ_{xj} , donde i y j son dos diferentes soluciones de Φ_x , entonces:

$$F = \int_{-(pz+b/2)}^{(pz+b/2)} \Phi_{xi} \Phi_{xj} dx = 0; \Rightarrow \int_{-(pz+b/2)}^{(pz+b/2)} \left(\cos \frac{\alpha_i x}{pz+b/2} \right) \left(\cos \frac{\alpha_j x}{pz+b/2} \right) dx = (pz+b/2) \left(\frac{\sin(\alpha_j - \alpha_i)}{(\alpha_j - \alpha_i)} + \frac{\sin(\alpha_j + \alpha_i)}{(\alpha_j + \alpha_i)} \right) = 0 \quad (2.5.11)$$

En efecto, la ecuación (2.5.11) es ortogonal como se puede observar en la Figure 2.5.2

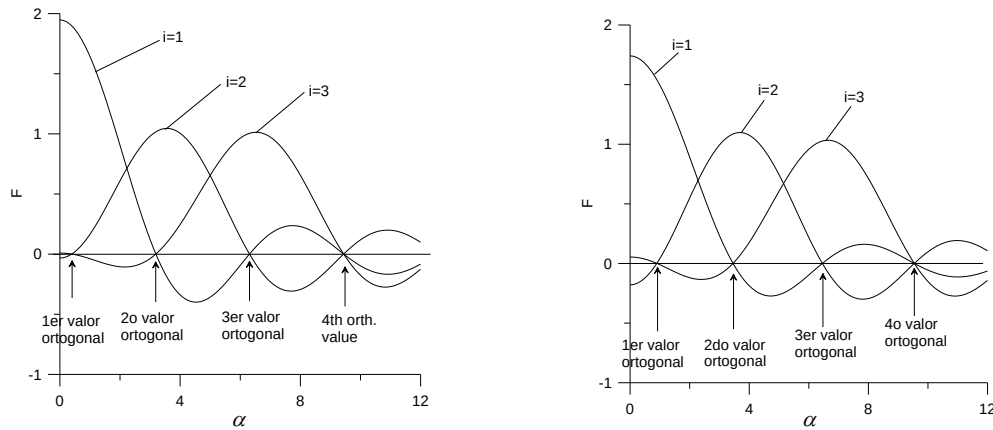


Figura 2.5.2.- Valores ortogonales de la ecuación (2.5.11), para dos valores de α_1 . En estos ejemplos, $\alpha_1 = 0.4$ (lado izquierdo), y $\alpha_1 = 0.9$ (lado derecho).

Note que el primer valor ortogonal corresponde a α_1 . Ahora, sustituyendo las soluciones Φ_x y Φ_t en la ecuación (2.5.9), la función Φ_z deberá resolverse a partir de la siguiente ecuación:

$$\Phi''_z + \left(\frac{\omega^2}{V_s^2} - \frac{V_p^2 \alpha_k^2}{V_s^2 p^2 (z+b_0)^2} \right) \Phi_z = \Phi''_z + \lambda \Phi_z = 0, \text{ donde: } \lambda = \left(\frac{\omega^2}{V_s^2} - \frac{V_p^2 \alpha_k^2}{V_s^2 p^2 (z+b_0)^2} \right) \quad (2.5.12)$$

De nuevo, se puede hacer el siguiente cambio de variable: $z = v - b_0$ si: $b_0 > 0$; o, $z = -v - b_0$ si: $b_0 < 0$.

Y, si: $C_{kx} = \frac{V_p \alpha_k}{V_s p}$, la ecuación (2.5.12) puede ser transformada en la siguiente ecuación:

$$\Phi''_v + \left(\frac{\omega^2}{V_s^2} - \frac{C_{kx}^2}{v^2} \right) \Phi_v = 0 \quad (2.5.13)$$

A partir del método de Frobenius la ecuación (2.5.13), tiene la siguiente solución:

$$\Phi_v = A \sum_{n=0}^{\infty} c_n v^{n+\kappa_1} + B \sum_{n=0}^{\infty} d_n v^{n+\kappa_2} \quad (2.5.14)$$

$$c_n = -\frac{\omega^2}{V_s^2} \frac{c_{n-2}}{(n+\kappa_1)(n+\kappa_1-1)-C_{kx}^2}; \quad d_n = -\frac{\omega^2}{V_s^2} \frac{d_{n-2}}{(n+\kappa_2)(n+\kappa_2-1)-C_{kx}^2}; \quad \kappa_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4C_{kx}^2}}{2}$$

De nuevo, la ecuación (2.5.14) necesita satisfacer las condiciones de frontera dadas en la ecuación (2.5.7).

Para los casos (d), y (f), el problema es resuelto bajo la misma lógica, pero es necesario cambiar el parámetro λ en la ecuación (2.5.12), tal que, $\lambda = \left(\frac{\omega^2}{V_s^2} - \frac{\alpha_k^2}{p^2(z+b_0)^2} \right)$, y $\lambda = \left(\frac{\omega^2}{V_p^2} - \frac{V_s^2 \alpha_k^2}{V_p^2 p^2 (z+b_0)^2} \right)$, respectivamente, en cada caso.

Ya que Φ_x , Φ_y y Φ_z son todas funciones ortogonales, es posible resolver el problema de vibración forzada.

2.2.2.2 MODELO BIDIMENSIONAL DINÁMICO DE LA CUÑA CUANDO EL MOVIMIENTO ES UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDO EN DIRECCIÓN X

El modelo bidimensional de la cuña se presenta en la Figura 2.5.3. En este caso se tienen dos esfuerzos cortantes en una geometría formada por dos trapecios.

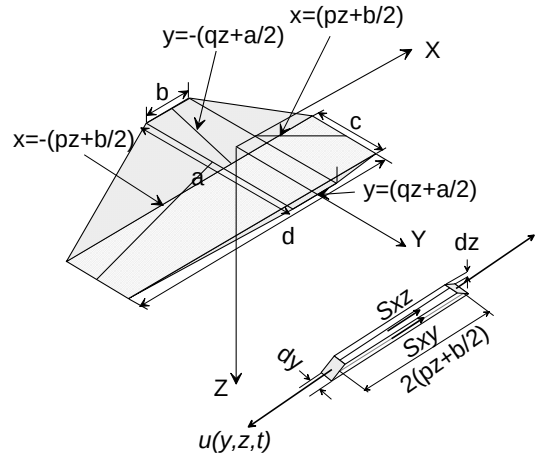


Figura 2.5.3.- Se tienen dos esfuerzos cortantes (S_{xz} y S_{xy}), y $u(y,z,t)$ uniforme en dirección X. La geometría es un trapecio confinado por un trapecio.

La diferencia fundamental con el caso (a) de la Figura 2.5.1, es que ahora se tiene la solución Φ_y dependiente de Z, en el sentido de las condiciones de frontera, tal que, la solución para fronteras fijas ($y = \pm(qz + a/2)$), es:

$$\Phi_y = A_k \cos(\omega_y y); \quad \omega_y = \frac{(2k-1)\pi}{2(qz + a/2)}; \quad q = \frac{(c-a)}{2h}; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

La ecuación diferencial que resulta para Z es:

$$(z+b_0) \frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial z^2} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} + (z+b_0) \left(\frac{\omega^2}{V_s^2} - \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4(qz + a/2)^2} \right) \Phi_z = 0 \quad (2.5.15)$$

Puede verse en la ecuación anterior que si $c \rightarrow a$, entonces $q \rightarrow 0$, y la ecuación (2.5.15) se transforma en la ecuación (2.5.4).

Es posible encontrar la solución de la ecuación (2.5.15) usando el método de Frobenius. Primero, para el siguiente cambio de variable: $z = v - b_0$ si: $b_0 > 0$; o, $z = -v - b_0$ si: $b_0 < 0$, la ecuación (2.5.15) se transforma en:

$$v\Phi_v'' + \Phi_v' + v\left(\beta^2 - \frac{C_0^2}{(v-D_0)^2}\right)\Phi_v = 0 \quad (2.5.16)$$

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{V_s^2}; \quad C_0 = \frac{(2k-1)\pi}{2q}; \quad D_0 = b_0 - a_0 = \frac{qb - ap}{2pq}$$

Con la siguiente solución:

$$\Phi_v = A\Phi_{1v} + B\Phi_{2v}$$

$$\Phi_{1v} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n, \quad \Phi_{2v} = \Phi_{1v} \ln v + \Psi_2, \quad \Psi_2 = \sum_{n=2}^{\infty} b_n v^n$$

$$a_n = -\frac{-2D_0(n-1)^2 a_{n-1} + ((n-2)^2 + \beta^2 D_0^2 - C_0^2) a_{n-2} + \beta^2 (a_{n-4} - 2D_0 a_{n-3})}{D_0^2 n^2}$$

$$b_n = -\frac{2D_0^2 n a_n + B_1 + B_2 + \beta^2 (b_{n-4} - 2D_0 b_{n-3})}{D_0^2 n^2}$$

$$B_1 = -4D_0(n-1)a_{n-1} - 2D_0(n-1)^2 b_{n-1}$$

$$B_2 = 2(n-2)a_{n-2} + ((n-2)^2 + \beta^2 D_0^2 - C_0^2)b_{n-2}$$

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{V_s^2}, \quad a_0 = 1, \quad a_n = b_n = 0 \quad \text{para } n < 0 \quad \text{y para } n = 1$$

Pero, para el siguiente cambio de variable: $z = v - a_0$ si: $a_0 > 0$; o, $z = -v - a_0$ si: $a_0 < 0$, la ecuación (2.5.15) se transforma en

$$(v + D_0)\Phi_v'' + \Phi_v' + (v + D_0)\left(\beta^2 - \frac{C_0^2}{v^2}\right)\Phi_v = 0 \quad (2.5.17)$$

Aquí; $D_0 = b_0 - a_0$, cuando $z = v - a_0$, o; $D_0 = a_0 - b_0$ cuando $z = -v - a_0$. Con la siguiente solución en serie de Frobenius

$$\Phi_v = A\Phi_{1v} + B\Phi_{2v}$$

$$\Phi_{1v} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^{n+\kappa_1}, \quad \Phi_{2v} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n v^{n+\kappa_2}, \quad \kappa_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+C_0^2}}{2}$$

$$a_n = -\frac{d_n}{e_n} a_{n-1} - \frac{D_0 \beta^2}{e_n} a_{n-2} - \frac{\beta^2}{e_n} a_{n-3}; \quad b_n = -\frac{f_n}{g_n} b_{n-1} - \frac{D_0 \beta^2}{g_n} b_{n-2} - \frac{\beta^2}{g_n} b_{n-3}$$

$$d_n = (\kappa_1 + n - 1)^2 - C_0^2; \quad e_n = D_0((\kappa_1 + n)(\kappa_1 + n - 1) - C_0^2); \quad f_n = (\kappa_2 + n - 1)^2 - C_0^2; \quad g_n = D_0((\kappa_2 + n)(\kappa_2 + n - 1) - C_0^2)$$

Las condiciones de frontera para la ecuación (2.5.15), están dadas por la ecuación (2.5.7), esto da la siguiente ecuación característica

$$\Phi z 1(h) \Phi' z 2(0) + \Phi z 1(h) \Phi' z 1(0) = 0 \quad (2.5.18)$$

Por otro lado, se puede ver que la ecuación (2.5.15) es un problema de Sturm-Liouville

$$(R(z) \Phi' z)' + (Q(z) + \lambda P(z)) \Phi z = 0$$

Donde

$$R(z) = (z + b_0); \quad Q(z) = \frac{C_0^2(z + b_0)}{(z + a_0)^2}; \quad P(z) = (z + b_0); \quad \lambda = \frac{\omega}{V_s}; \quad a_0 = a/2q; \quad b_0 = b/2p$$

$Q(z)$ es continuo en el intervalo $(0 \leq z \leq h)$

En este sentido, la siguiente ecuación es satisfecha

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^h (z + b_0) \Phi_{zm} \Phi_{zn} dz = (R(z) (\Phi_{zm} \Phi'_{zn} - \Phi_{zn} \Phi'_{zm})) \Big|_0^h \quad (2.5.19)$$

Donde n y m son dos raíces de la solución Φ_z , y el lado izquierdo de la ecuación (2.5.19) es cero de acuerdo con las condiciones de frontera del problema, tal que Φ_{zn} y Φ_{zm} , son soluciones ortogonales.

Si se resuelve el problema de vibración forzada, y usando las propiedades de ortogonalidad de las formas modales, es posible encontrar que, se necesita resolver una ecuación elemental de movimiento para cada modo de vibración, tal que:

$$\ddot{\Phi}_{knt} + \omega_{kn}^2 \Phi_{knt} = A_{kn} \ddot{u}_g \quad A_{kn} = \frac{- \int_0^h \int_{-qz+a/2}^{qz+a/2} \Phi_{ky} dy \Phi_{knz} dz}{\int_0^h \int_{-qz+a/2}^{qz+a/2} \Phi_{ky}^2 dy \Phi_{knz}^2 dz} \quad (2.5.20)$$

2.2.2.3 MODELO BIDIMENSIONAL DINÁMICO DE LA CUÑA CUANDO EL MOVIMIENTO ES UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDO EN DIRECCIÓN Y

El último modelo bidimensional se presenta en la Figura 2.2.5. En este caso, se está modelando una fuerza axial y una fuerza cortante en una geometría formada por dos trapecios.

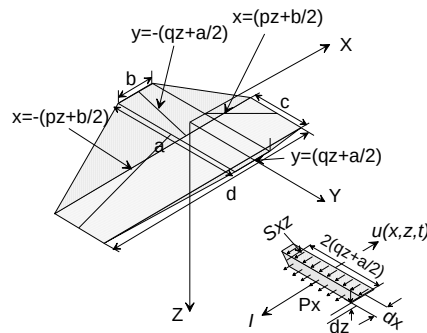


Figura 2.5.4.- La geometría es una cuña con un esfuerzo cortante y un esfuerzo axial; $u(x,z,t)$ es uniforme sobre el eje Y

El procedimiento es completamente análogo al caso (b) de la Figura 2.5.1. La única diferencia es que S_{xz} es dependiente de Z para este caso, tal que, la ecuación diferencial para Φ_Z es ahora

$$(z + a_0) \frac{\partial^2 \Phi_Z}{\partial Z^2} + \frac{\partial \Phi_Z}{\partial Z} + (z + a_0) \left(\frac{\omega^2}{V_s^2} - \frac{C_0^2}{(z + b_0)^2} \right) \Phi_Z = 0 \quad (2.5.21)$$

$$C_0 = \frac{V_p \alpha_k}{V_s p}$$

De nuevo, en la ecuación (2.5.21), si $q \rightarrow 0$ (a partir de $a_0 = \frac{a}{2q}$), entonces, esta ecuación puede ser transformada en la ecuación (2.5.12). Se puede ver que la ecuación (2.5.21) es similar a la ecuación (2.5.15), por lo que puede ser resuelta de la misma forma

2.2.2.4 MODELO BIDIMENSIONAL DINÁMICO DE LA CUÑA A PARTIR DEL MODELO BIDIMENSIONAL DINÁMICO DEL CAJÓN

Se observó que, por inspección, la ecuación diferencial del modelo de la cuña puede ser transformada en la ecuación diferencial del cajón, tanto para el movimiento uniformemente distribuido en dirección X , como para el movimiento uniformemente distribuido en dirección Y . Sin embargo, otra forma de validar la lógica que se plantea en la solución de la cuña, es obtener los resultados de las formas modales de la cuña, a partir de las formas modales del cajón. Este planteamiento se presenta en la Figura 2.5.5.

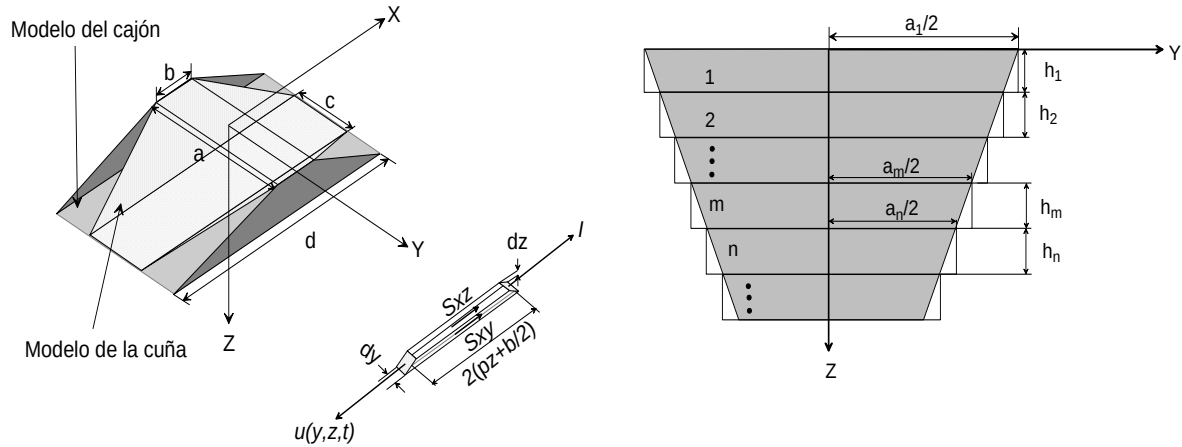


Figura 2.5.5.- Generación del modelo de la cuña a partir de elementos de forma rectangular.

Primero, es posible considerar un sistema local de referencia en cada elemento en forma de cajón. Posteriormente, es necesario dar continuidad a esfuerzos y desplazamientos en las fronteras de

los planos XY . Por definición, los desplazamientos son: $u = \Phi_x \Phi_z \Phi_t$, y los esfuerzos en los planos XY son:

$$S_{xz} = G \frac{\partial u}{\partial z} = G \Phi_y \Phi_t \Phi'_z$$

La solución Φ_z , para el elemento m , está dada por:

$$\Phi_z = A_m \Phi_{zm1} + B_m \Phi_{zm2}$$

A_m y B_m son constantes en el elemento m

Si Ψ_z es la solución Z para el elemento $m=n+1$, entonces:

$$\Psi_z = A_n \Psi_{zn1} + B_n \Psi_{zn2}$$

Note que existe discontinuidad en la solución Φ_y entre los elementos n y m , ya que se necesitan cumplir las mismas condiciones de frontera y las dimensiones de ambos son diferentes, ($a_n/2$ y $a_m/2$, en la Figura 5). Un criterio práctico puede ser usado para evitar este problema. Sin embargo, es claro que $\Phi_{ym} = \Phi_{yn}$ en $Y=0$, y esto simplifica el problema. Se trabajará en este punto por simplicidad. Ahora, tomando un sistema local de referencia y dando continuidad a esfuerzos y desplazamientos, se tiene:

$$\begin{aligned} A_m \Phi_{zm1}(hm) + B_m \Phi_{zm2}(hm) &= A_n \Psi_{zn1}(0) + B_n \Psi_{zn2}(0) \\ A_m \Phi'_{zm1}(hm) + B_m \Phi'_{zm2}(hm) &= A_n \Psi'_{zn1}(0) + B_n \Psi'_{zn2}(0) \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

A partir de (2.5.22) es posible encontrar la siguiente ecuación de recurrencia

$$\begin{aligned} B_n &= \left(\frac{\Phi'_{zm1}(hm) \Psi_{zn1}(0) - \Phi_{zm1}(hm) \Psi'_{zn1}(0)}{\Psi'_{zn2}(0) \Psi_{zn1}(0) - \Psi_{zn2}(0) \Psi'_{zn1}(0)} \right) A_m + \left(\frac{\Phi'_{zm2}(hm) \Psi_{zn1}(0) - \Phi_{zm2}(hm) \Psi'_{zn1}(0)}{\Psi'_{zn2}(0) \Psi_{zn1}(0) - \Psi_{zn2}(0) \Psi'_{zn1}(0)} \right) B_m \\ A_n &= \frac{\Phi_{zm1}(hm) A_m + \Phi_{zm2}(hm) B_m - \Psi_{zn1}(0) B_n}{\Psi_{zn1}(0)} \end{aligned}$$

La condición inicial de la recurrencia anterior es dada por la frontera libre en $z=0$ para el primer elemento.

La Figura 2.5.6 muestra las formas modales para el tercer modo en dirección Y y el primer modo en dirección Z . Se muestra la solución para el modelo de la caja, el modelo de la cuña y las aproximaciones que se obtienen para dos y cinco elementos. Esta figura sugiere una rápida convergencia del método de aproximación propuesto.

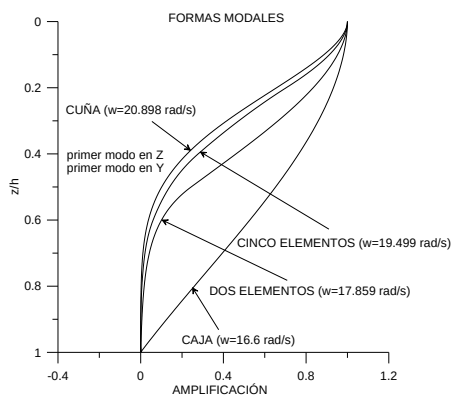


Figura 2.5.6.- Generación de las formas modales para la solución Φ_z de la cuña, a partir de la solución de elementos en forma de cajón. Los modelos fueron calculados para los siguientes parámetros de la cuña: $a=350$ m, $b=20$ m, $c=75$ m, $d=525$ m. El valor de V_s utilizado fue de $V_s=350$ m/s.

2.2.2.5 FORMAS MODALES Y FUNCIONES DE TRANSFERENCIA TEÓRICA PARA LOS MODELOS BIDIMENSIONALES

Se presentan, en la Figura 2.5.7, las formas modales para una geometría que se aproxima a las dimensiones de Infiernillo, al considerar el cañón con forma de rectángulo. En estos casos el parámetro n representa el modo en Z mientras que el parámetro k representa el modo en Y y X , respectivamente para los casos (a) y (b). Note como para el caso (a), no cambian las formas modales para la sección en estudio, mientras que en el caso (b), si cambian, al variar el parámetro k .

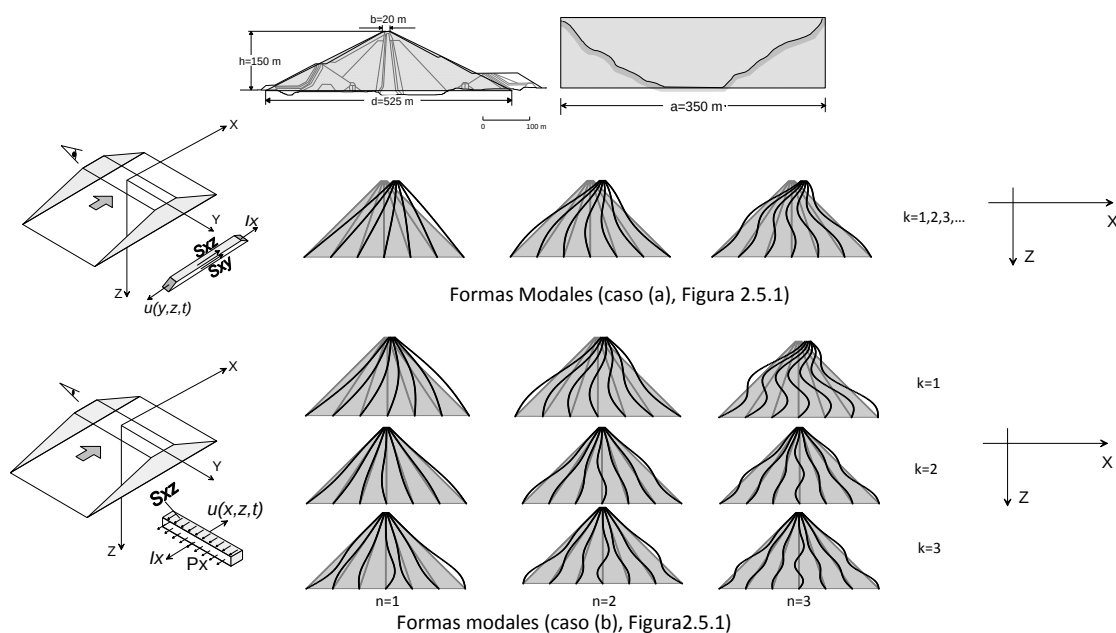


Figura 2.5.7.- Formas modales para dos modelos bidimensionales con el movimiento en dirección X . La geometría es una aproximación de la presa El Infiernillo (arriba).

Si ahora se estudia el movimiento en la dirección Y , las formas modales son las que se presentan en la Figura 2.5.8.

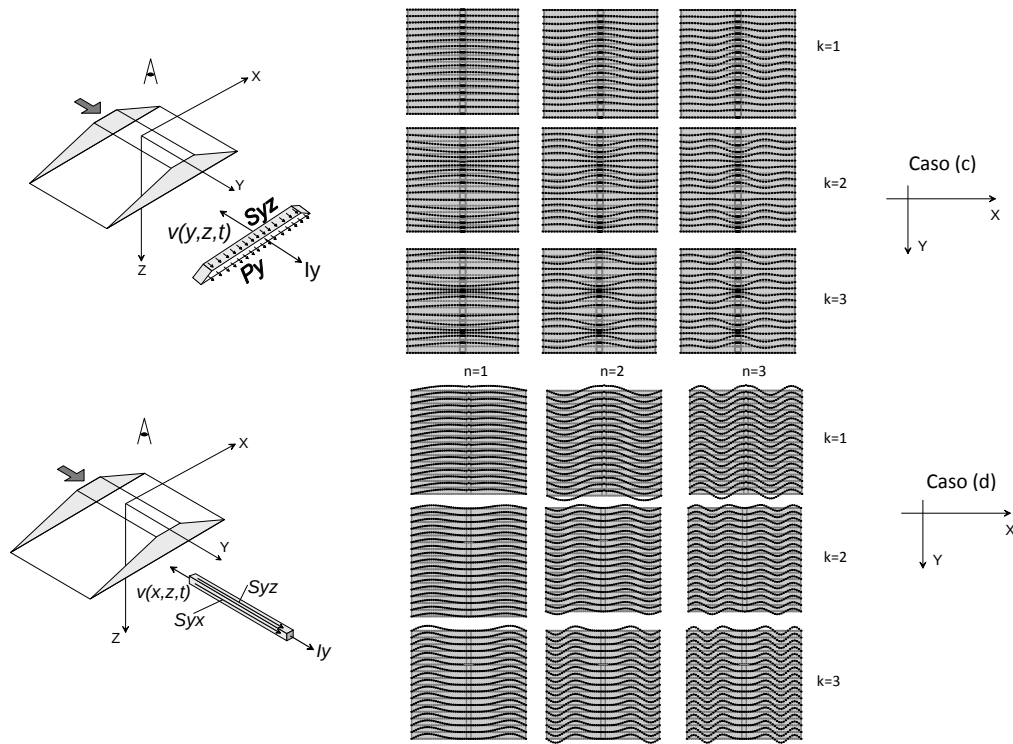


Figura 2.5.8. Formas modales para el movimiento en dirección Y. La vista del movimiento es visto desde arriba.

En el mismo sentido, la Figura 2.5.9 presenta las formas modales para el movimiento en la dirección Z (casos (e) y (f)), de la Figura 2.5.1).

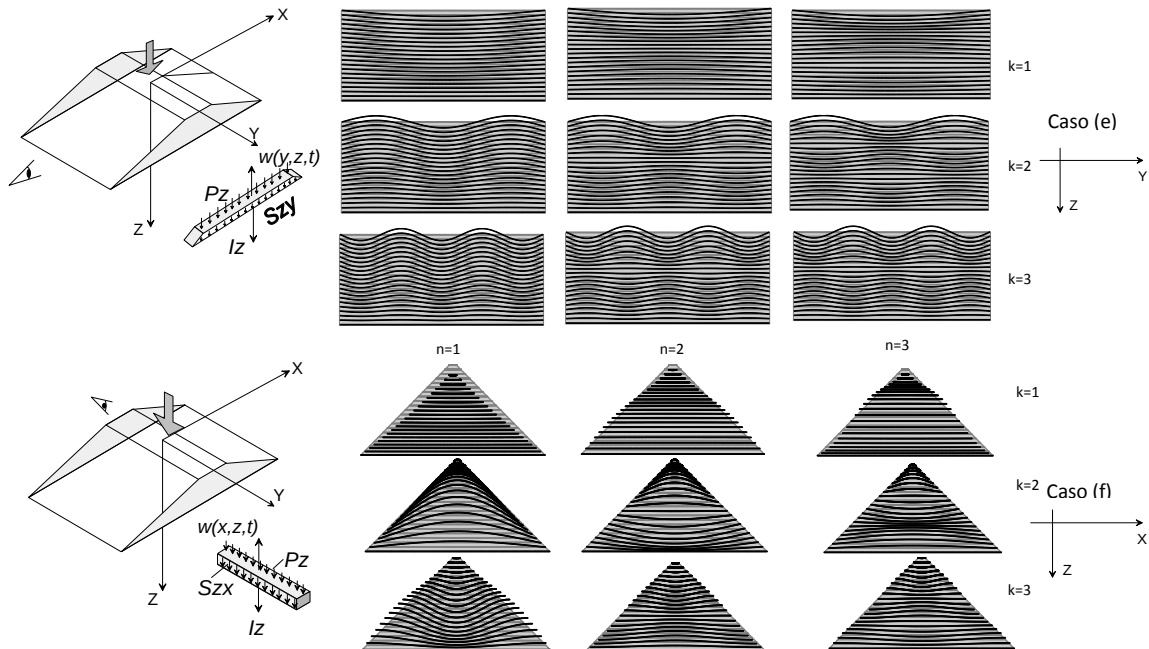


Figura 2.5.9. Formas modales para el movimiento en dirección Z. La vista del movimiento es en los planos YZ (arriba); y a partir del plano XZ (abajo).

Para los casos (b), (d) y (f); se usó $\alpha_1 = 0.5$ en la solución Φ_x . El efecto de este parámetro es importante en la configuración de las formas modales como se puede ver en la Figura 2.5.10,

donde se presenta el modo fundamental para los movimientos en las tres direcciones al considerar diferentes valores de α_1

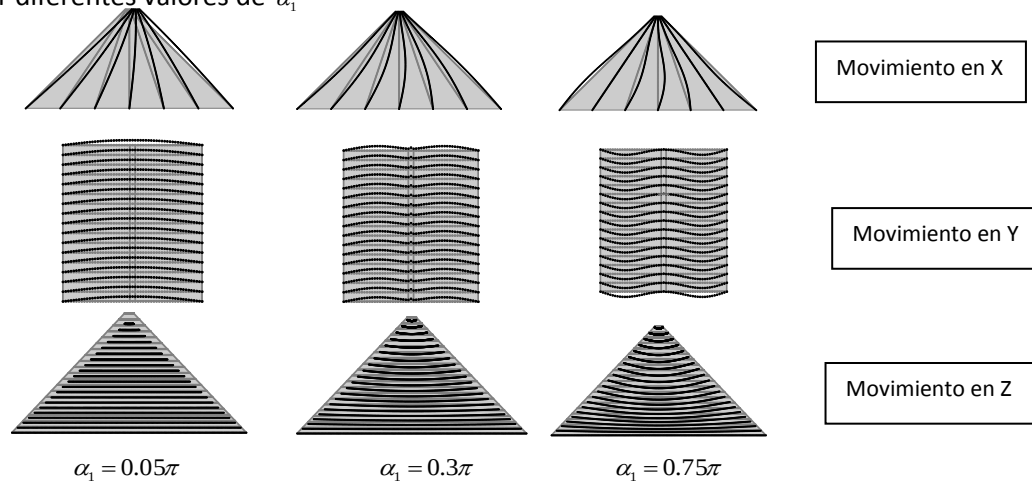


Figura 2.5.10. Forma modal fundamental para diferentes valores de α_1 en la solución de ΦX

La Figura 2.5.10 muestra que cuando α_1 incrementa su valor, el movimiento es más importante hacia la base del continuo y menos importante hacia la cima.

Se revisó el cambio de las amplificaciones del modelo de dos cortantes (caso (a) de la Figura 2.5.1), para cambios en las dimensiones del cañón como se muestra en la Figura 2.5.11. Para ello se calcularon las funciones de transferencia teóricas como se muestra en esta misma figura.

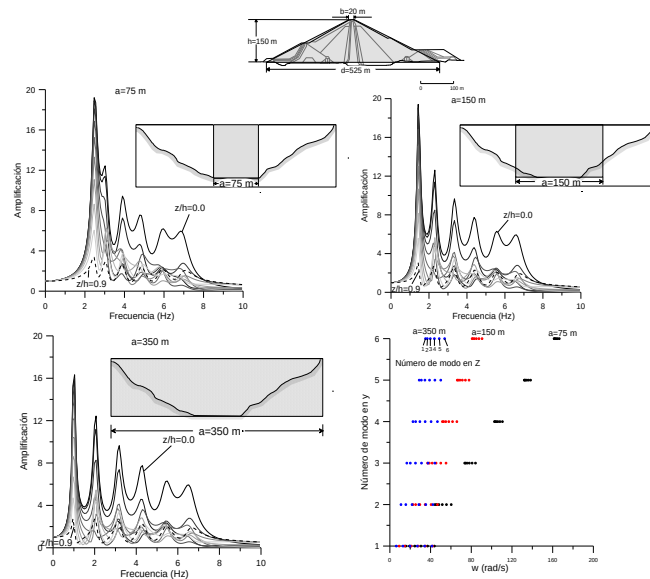


Figura 2.5.11.- Funciones de Trasferencia teórica para tres variaciones del parámetro a

Para estudiar los modelos bidimensionales de la cuña que se presentan en la Figura 2.5.3 y 2.5.4, se presentan en las Figura 2.5.12 y 2.5.13, las formas modales en $X=Y=0$ al considerar dos valores de la dimensión de la base (parámetro c).

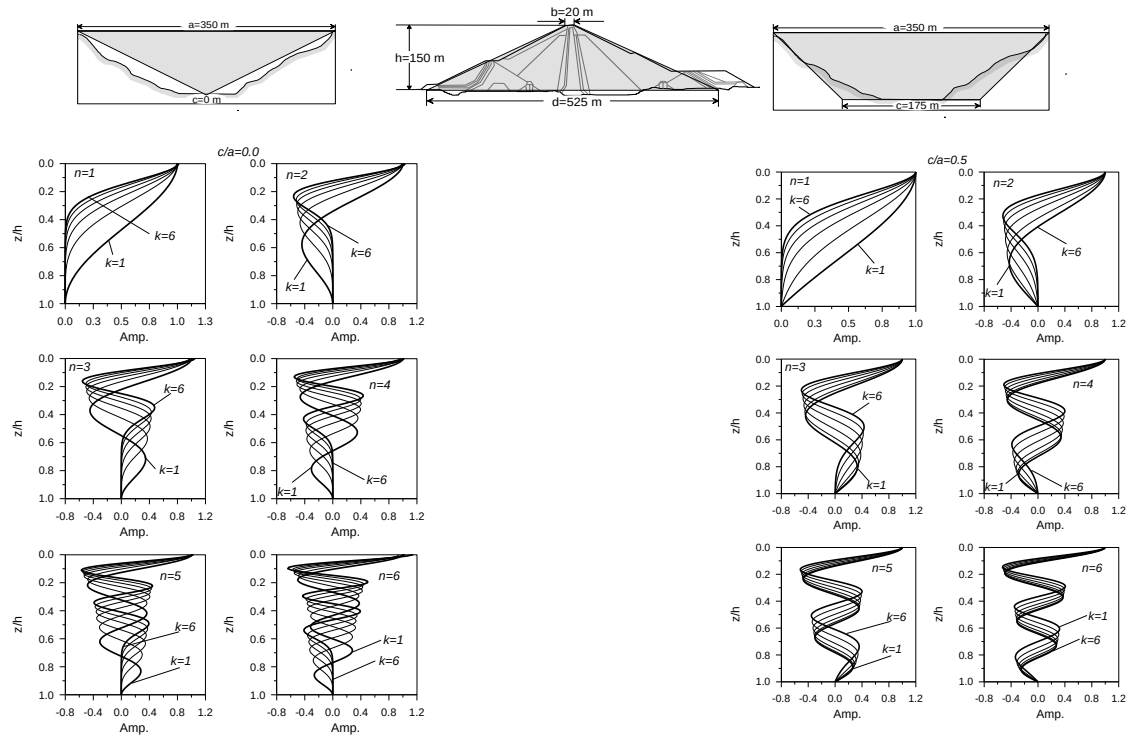


Figura 2.5.12. Formas modales para el modelo de la cuña de dos cortantes (Figura 2.5.3).

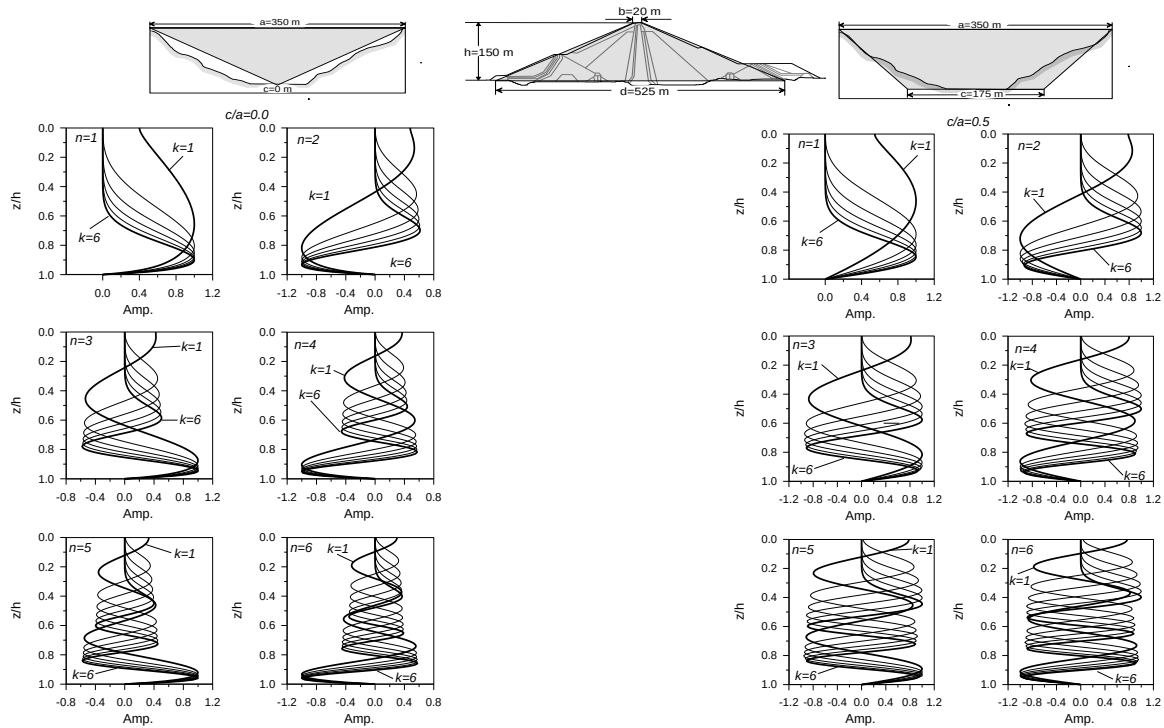


Figura 2.5.13. Formas modales para el modelo de la cuña de dos cortantes (Figura 2.5.4).

En la Figura 2.5.12, es clara la tendencia del movimiento de migrar hacia arriba, con el incremento del valor de k . Esta tendencia es más importante cuando se cierra la base del cañón. En cambio, si el movimiento, en lugar de ser generado por dos fuerzas cortantes, es generado por una fuerza

axial y una cortante (Figura 2.5.4), la tendencia del movimiento es migrar hacia abajo con el incremento del valor de k . Esta tendencia también es más importante cuando se cierra la base del cañón.

2.3 MODELOS DINÁMICOS TRIDIMENSIONALES

2.3.1 MODELO DINÁMICO TRIDIMENSIONAL PARA DOS FUERZAS CORTANTES HORIZONTALES Y UNA AXIAL

Siguiendo las ideas expresadas en la sección 2.5, se presenta el modelo tridimensional que se plantea en la Figura 2.6.1

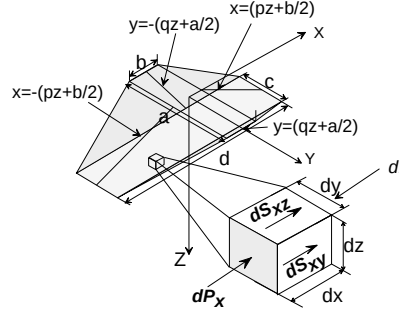


Figura 2.6.1.- Modelo tridimensional de una cuña. Se consideran dos esfuerzos cortantes y uno axial sobre el elemento tridimensional.

Por equilibrio dinámico, y si las variables son separadas, se tiene:

$$V_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V_s^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow V_p^2 \frac{\Phi_x''}{\Phi_x} + V_s^2 \left(\frac{\Phi_y''}{\Phi_y} + \frac{\Phi_z''}{\Phi_z} \right) = \frac{\Phi_t''}{\Phi_t} \quad (2.6.1)$$

Si las soluciones de X y Y son como las presentadas en los problemas bidimensionales

$$\Phi_y = A_k \cos(\omega_y y); \quad \omega_y = \frac{(2l-1)\pi}{2(qz+a/2)}; \quad q = \frac{(c-a)}{2h}; \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Phi_x = -\frac{\cos \theta}{\sin \omega_x (pz+b/2)} \cos \omega_x x; \quad \omega_x = \frac{\alpha_k}{pz+b/2}; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

La ecuación diferencial para la variable Z es:

$$\Phi_z'' + \left(\beta^2 - \frac{C_{ly}^2}{(z+a_0)^2} - \frac{C_{kx}^2}{(z+b_0)^2} \right) \Phi_z = 0; \quad C_{ly} = \frac{(2l-1)\pi}{2qV_s}; \quad C_{kx} = \frac{V_p \alpha_k}{V_s p}; \quad \beta^2 = \frac{\omega^2}{V_s^2} \quad (2.6.2)$$

Para resolver la ecuación (2.6.2) se propone la siguiente transformación:

$$\Phi_z = \begin{cases} (z+a_0)^\eta (z+b_0)^\gamma \Psi_z & \text{si } a_0 > 0 \text{ y } b_0 > 0 \\ (-z-a_0)^\eta (z+b_0)^\gamma \Psi_z & \text{si } a_0 < 0 \text{ y } b_0 > 0 \\ (z+a_0)^\eta (-z-b_0)^\gamma \Psi_z & \text{si } a_0 > 0 \text{ y } b_0 < 0 \\ (-z-a_0)^\eta (-z-b_0)^\gamma \Psi_z & \text{si } a_0 < 0 \text{ y } b_0 < 0 \end{cases}$$

En el caso específico de una cuña, se tiene: $a_0 < 0$, y $b_0 > 0$, que transforma a la ecuación (2.6.2) en:

$$\Psi_z'' + 2 \left(\frac{\gamma}{z+b_0} + \frac{\eta}{z+a_0} \right) \Psi_z' + \left(\beta^2 + \frac{2\gamma\eta}{(z+b_0)(z+a_0)} \right) \Psi_z = 0 \quad (2.6.3)$$

Donde γ y η tienen dos posibles valores: $\gamma = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4C_{kx}^2}}{2}$, $\eta = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4C_{ly}^2}}{2}$

Ahora, es posible trasladar Z a un punto donde la convergencia numérica de la solución sea posible usando un lenguaje de programación comercial como podría ser QBASIC. Así, si $z = v - \kappa$, se tiene:

$$\Psi''v + 2\left(\frac{\gamma}{v + b_{0\kappa}} + \frac{\eta}{v + a_{0\kappa}}\right)\Psi'v + \left(\beta^2 + \frac{2\gamma\eta}{(v + b_{0\kappa})(v + a_{0\kappa})}\right)\Psi v = 0; \quad a_{0\kappa} = a_0 - \kappa; \quad b_{0\kappa} = b_0 - \kappa \quad (2.6.4)$$

La solución en series de Frobenius de la ecuación (2.6.4) es:

$$\Psi v = A \left(c_0 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n v^n \right) + B \sum_{n=1}^{\infty} d_n v^n$$

$$c_n = -\frac{(n-1)(e_0(n-2) + h_0)c_{n-1} + ((n-2)((n-3) + g_0) + i_0)c_{n-2} + \beta^2 e_0 c_{n-3} + \beta^2 c_{n-4}}{f_0 n(n-1)}; \quad c_0 = 1; \quad c_1 = 0; \quad n > 2$$

$$d_n = -\frac{(n-1)(e_0(n-2) + h_0)d_{n-1} + ((n-2)((n-3) + g_0) + i_0)d_{n-2} + \beta^2 e_0 d_{n-3} + \beta^2 d_{n-4}}{f_0 n(n-1)}; \quad d_0 = 0; \quad d_1 = 1; \quad n > 1$$

$$c_n = d_n = 0 \quad \text{cuando} \quad n < 0; \quad e_0 = a_{0\kappa} + b_{0\kappa}; \quad f_0 = a_{0\kappa}b_{0\kappa}; \quad g_0 = 2(\eta + \gamma);$$

$$h_0 = 2(\eta b_{0\kappa} + \gamma a_{0\kappa}); \quad i_0 = \beta^2 a_{0\kappa}b_{0\kappa} + 2\eta\gamma$$

Este modelo tridimensional puede usarse para resolver el movimiento en las direcciones Y y Z, y todas las soluciones presentadas aquí (bidimensionales y tridimensionales), llevan a una ecuación elemental de movimiento en vibración forzada.

Para observar las características de las soluciones determinadas, se presenta en la Figura 2.6.2, las formas modales para el movimiento en dirección X. Los parámetros k, l, n corresponden a los modos en las direcciones X, Y, Z; respectivamente.

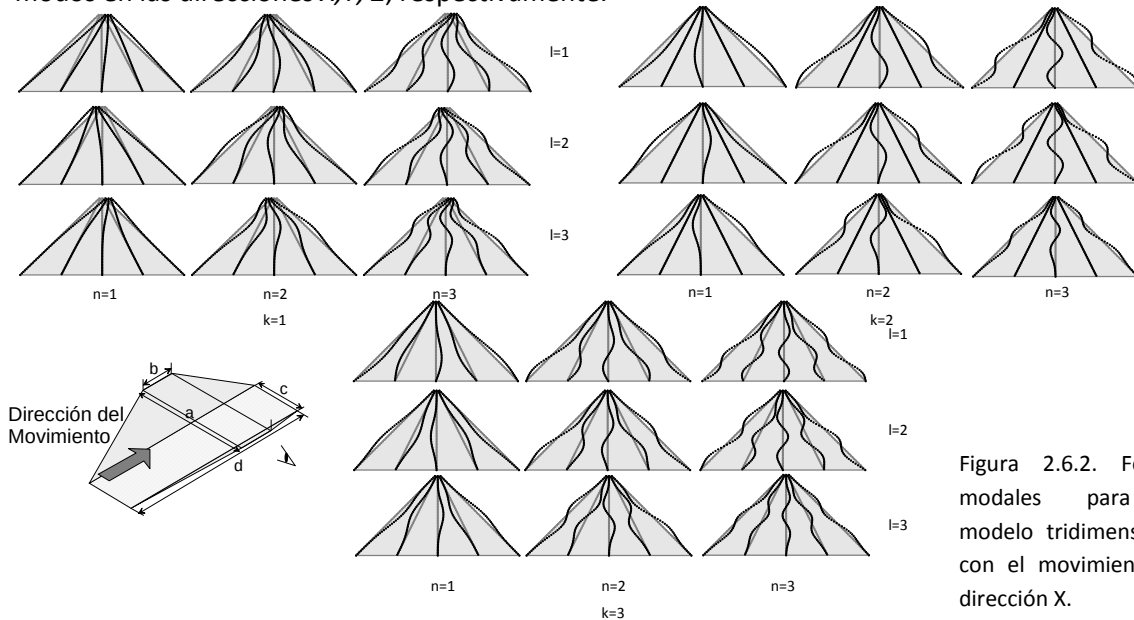


Figura 2.6.2. Formas modales para el modelo tridimensional, con el movimiento en dirección X.

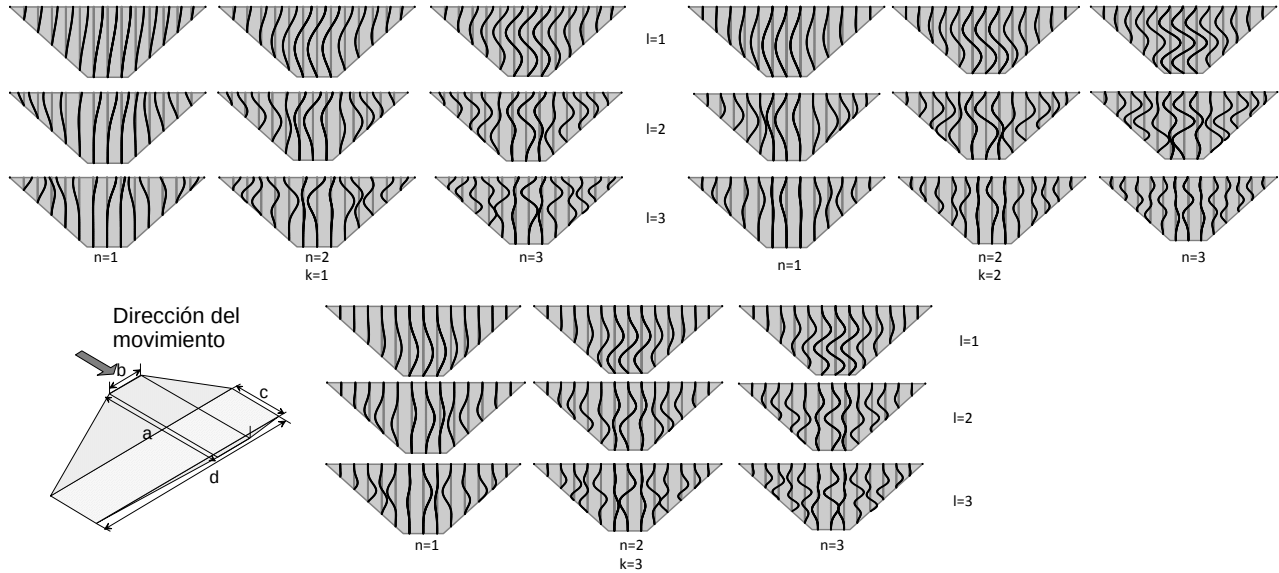


Figura 2.6.3. Formas modales para el modelo tridimensional de dos esfuerzos axiales y uno cortante para el movimiento en dirección Y.

De nuevo, las Figuras 2.6.2 y 2.6.3, muestran que el movimiento va hacia arriba del continuo cuando el modo l incrementa su valor (con k y n iguales), y va hacia abajo del continuo cuando el modo k incrementa su valor (para el mismo valor de l y n). En efecto, estos modelos tienen las mismas características de los modelos bidimensionales, y dan una solución más general del problema. La solución de Φ_x para las formas modales que se presentan en las Figuras 2.6.2 y 2.6.3, consideró un valor de $\alpha_1 = 0.05\pi$. Si se incrementa el valor de α_1 a $\alpha_1 = 0.5\pi$, el movimiento de la cresta de la estructura tiende a desaparecer. Esto se puede ver claramente en las Figuras 2.6.4 y 2.6.5, donde se presentan las funciones de transferencia teóricas para el movimiento en las direcciones X y Y, al considerar dos valores diferentes del parámetro α_1 ($\alpha_1 = 0.05\pi$ y 0.5π).

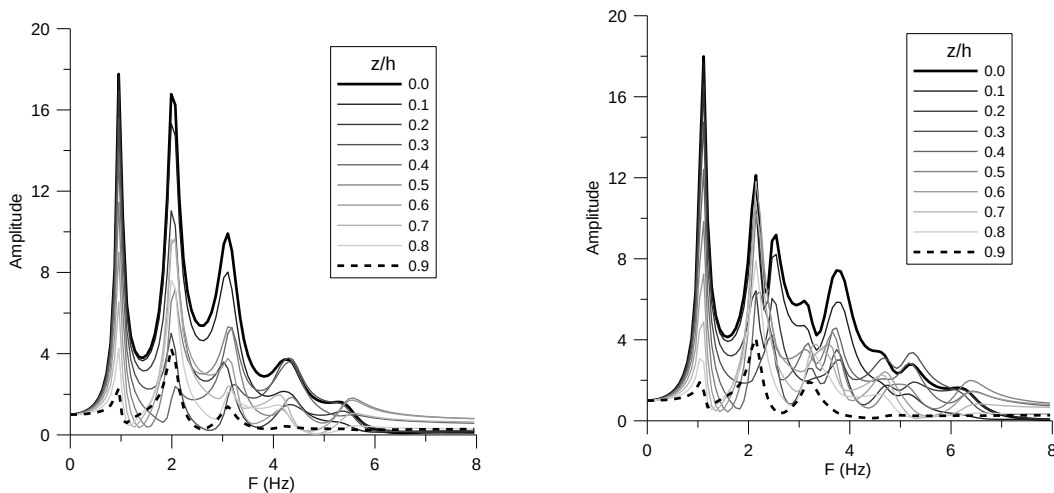


Figura 2.6.4. Funciones de transferencia teóricas para el movimiento en dirección X (lado izquierdo) y en dirección Y (lado derecho), para las geometrías presentadas en las Figuras 2.6.2 and 2.6.3 ($x=0$ y $y=0$). En este caso $\alpha_1 = 0.05\pi$, y $V_p/V_s=1.3$.

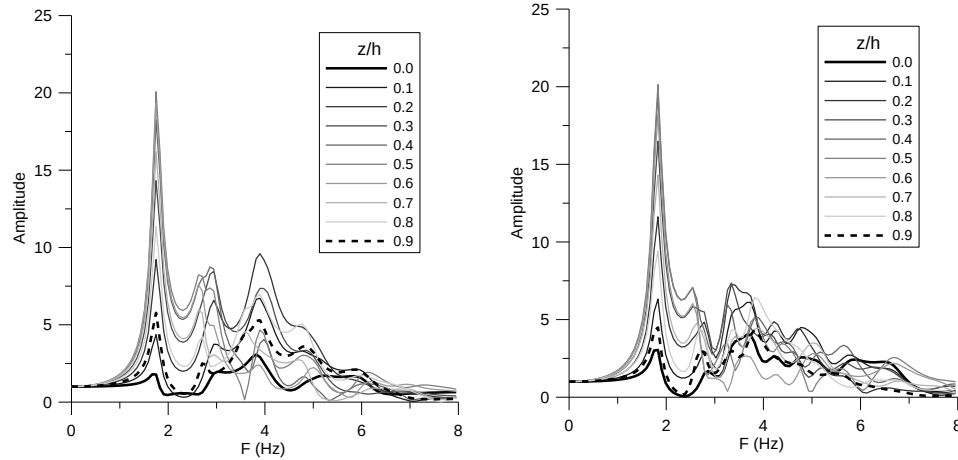


Figura 2.6.5. Funciones de transferencia teóricas para el movimiento en dirección X (lado izquierdo) y en dirección Y (lado derecho), para las geometrías presentadas en las Figuras 2.6.2 y 2.6.3 ($x=0$ and $y=0$). En este caso $\alpha_1 = 0.5\pi$, y $V_p/V_s=1.3$.

Se puede examinar el término $C_{kx} = \frac{V_p \alpha_k}{V_s p}$ de la ecuación (2.6.2). Si $\alpha_1 = 0.01$; $V_p/V_s = 0.30$; $V_s = 450 \text{ m/s}$.

El valor de C_{kx} , es el mismo en comparación con: $\alpha_1 = 0.15$; $V_p/V_s = 1.5$; $V_s = 450 \text{ m/s}$. Las funciones de transferencia son muy similares, al menos en $X=0$ y $Y=0$. Esto puede explicarse matemáticamente, sin embargo, se sugiere que el parámetro α_1 tiene que ver con los “verdaderos” valores de V_p y V_s . Por otro lado, resulta mecánicamente más lógica una relación $V_p/V_s = 1.5$, que una relación $V_p/V_s = 0.3$. Se realizó la siguiente investigación de estos parámetros: se mantuvo fija la relación V_p/V_s , incrementando el valor de V_s y usando al mismo tiempo el valor de α_1 para mantener la frecuencia fundamental en el mismo valor. La Figura 2.6.6 muestra el resultado de este trabajo

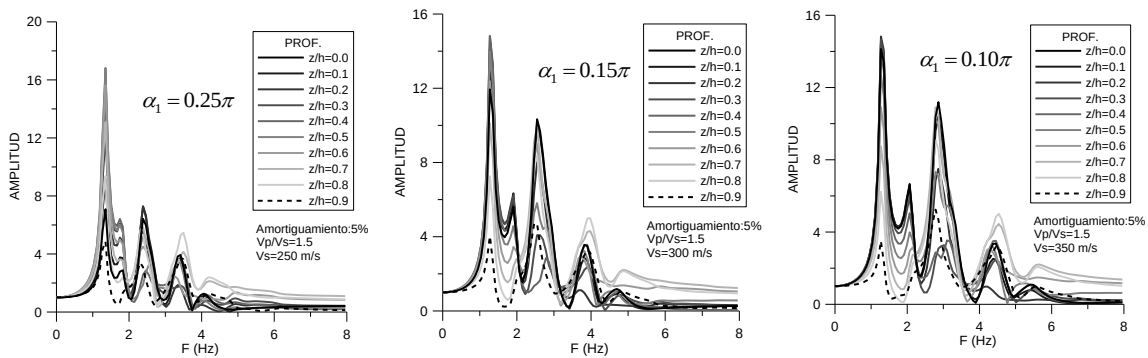


Figura 2.6.6. Funciones teóricas de transferencia para diferentes valores de V_s , al conservar constante la relación V_p/V_s y el modo fundamental de la respuesta.

Note en la Figura 2.6.6 como los modos se separan cuando el valor de α_1 decrece.

CAPITULO 3

OBSERVACIONES EXPERIMENTALES DEL CONTACTO LOSA-ENROCAMIENTO EN LAS PRESAS AGUAMILPA Y EL CAJÓN

El capítulo 3 se refiere a la evaluación de los datos experimentales de inclinómetros instalados en las losas de concreto de las presas de Aguamilpa y El Cajón. Con esta información, se pudieron evaluar algunos aspectos del comportamiento de estas losas sobre la estructura misma, pero sobre todo, se realizaron algunas interpretaciones físicas de uno de los aspectos fundamentales en el entendimiento de este tipo de estructuras, que es el contacto losa-enrocamiento.

Presa Aguamilpa

3.1 INFORMACIÓN EXPERIMENTAL

3.1.1 INSTRUMENTACIÓN

La Figura 3.1.1 presenta la instrumentación disponible en la cara de concreto de la presa de Aguamilpa (Galván, 2003). Se puede ver en esta figura, la instalación en particular de cuatro inclinómetros instalados a todo lo largo de las tiras que conforman la cara de concreto, y un número importante de medidores de juntas que consisten en extensómetros que miden el movimiento de estas separaciones estructurales en diferentes direcciones. Se tienen adicionalmente referencias topográficas en la corona de la estructura.

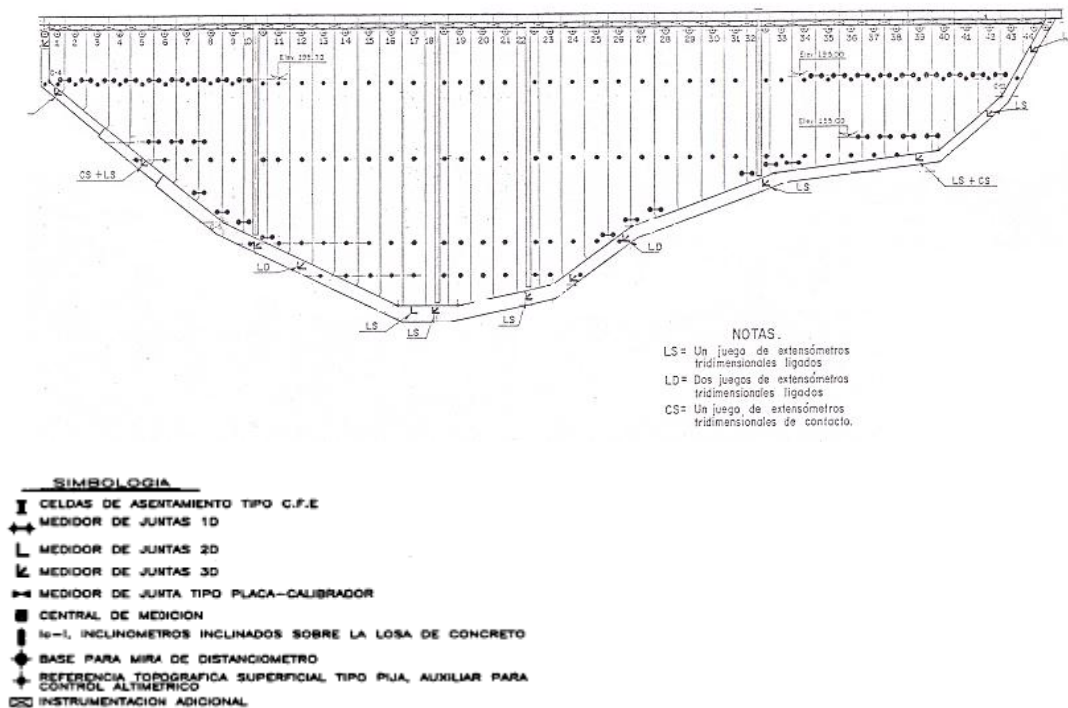


Figura 3.1.1.- Instrumentación en la cara de concreto de la presa Aguamilpa (Galván, 2003).

3.1.2 INCLINÓMETROS

Se recopiló la información de inclinómetros de las caras de concreto de las presas de Aguamilpa y El Cajón, que fue proporcionada por la Gerencia de Estudios de Ingeniería Civil de CFE. La información de los armados de las losas que constituyen la cara de concreto de dichas estructuras, fue proporcionada por la Coordinación de Proyectos Hidroeléctricos, también de CFE.

Del total de losas de Aguamilpa, cuatro de ellas se encuentran instrumentadas con inclinómetros como lo indica la Figura 3.1.2. Los tubos en los que se realizan las mediciones de los inclinómetros, se encuentran fuera de las losas de concreto como se muestra en las fotografías que se presentan en esta misma figura.

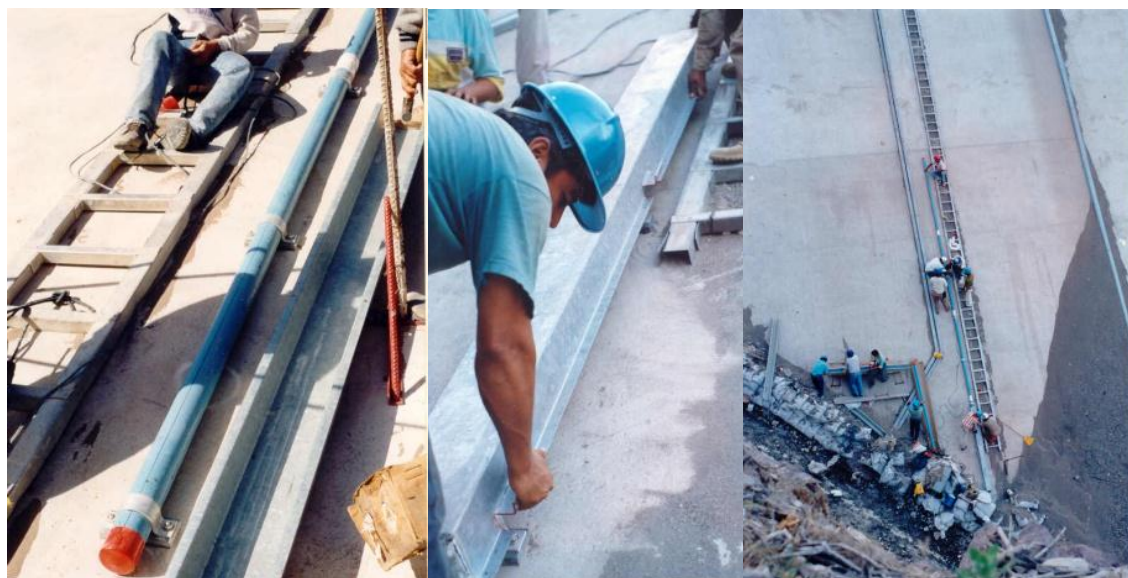
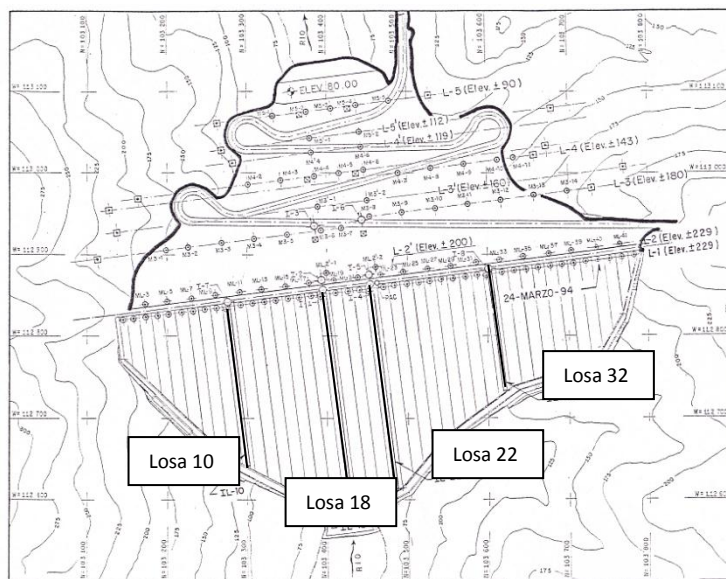


Figura 3.1.2- Vista en planta de la ubicación de los inclinómetros instalados en las losas de concreto de la presa Aguamilpa (arriba); Galván, 2003; y detalles de la instalación de la tubería para los inclinómetros (abajo); cortesía de CFE.

La cara de concreto de Aguamilpa, está constituida por una serie de tiras verticales de 15 metros de ancho, las cuales son continuas estructuralmente desde el plinto hasta la corona de la presa ya que solamente disponen de juntas necesarias para la construcción de dichos elementos. El espesor de las losas varía según la relación $E=0.3+0.003 \cdot H$, donde E es el espesor de la losa y H la altura a partir de la corona de la presa en metros. Entre cada tira de concreto, existen una serie de sellos hidráulicos formados a partir de material de cobre y madera. La información estructural indica que los armados de las diferentes losas, se ubican en un solo lecho. En todas las losas el acero fue colocado a la mitad del peralte de las mismas. Los armados indican que no existe acero que cruce entre diferentes tiras, de manera que todas las tiras son independientes estructuralmente. La cuantía de acero varía también en función de la profundidad de la losa. Se indica un concreto con especificación de $F'c=250 \text{ kg/cm}^2$.

La Figura 3.1.3 presenta las mediciones realizadas mediante los inclinómetros en diferentes fechas. En esta figura se desecharon algunas mediciones de características sumamente ruidosas que, se considera, solamente quitan claridad a la información.

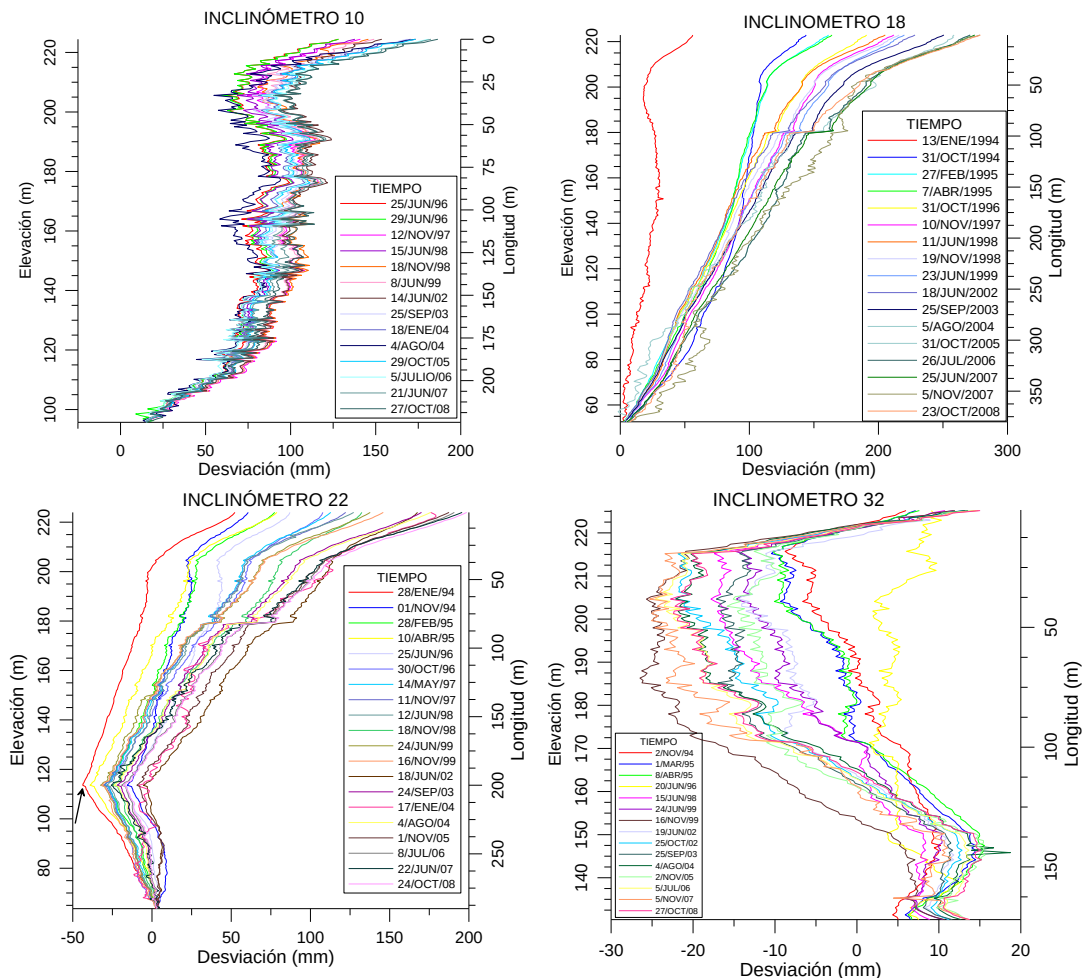


Figura 3.1.3.- Mediciones de los inclinómetros en las losas de la presa Aguamilpa, la flecha que se muestra en el inclinómetro 22 es un punto de probable agrietamiento explicado en el texto.

La desviación que se indica en la figura anterior, corresponde al movimiento perpendicular a la losa. Es evidente la presencia de una señal ruidosa de alta frecuencia montada en la medición, que difícilmente tendría que ver con la deformación de una losa cuyo espesor tiene como mínimo 30 cm. El Ingeniero Reginaldo Hernández de la Subgerencia de Seguridad de Estructuras de CFE, quien tiene muchos años

trabajando con este tipo de instrumentación, considera que este ruido puede deberse a las imperfecciones del riel sobre el que se desliza el instrumento y a las características electrónicas de la medición. Así pues, para poder utilizar las mediciones de los inclinómetros, se requiere de un proceso de suavizado.

En la Figura 3.1.4 se presenta un método de suavizado que se ideó para que la curva se suavice y al mismo tiempo no se aleje de la señal original, tratando con ello de conservar las características fundamentales de la medición. El método consiste en usar tres puntos de medición (a, b, c). El valor de la medición del punto intermedio (b), se evalúa en el punto p_1 que corresponde al valor de la recta que une a los puntos extremos ($a-c$). Entonces el punto c es reevaluado en p_2 que corresponde al punto intermedio de la recta formada por p_1-d , y así sucesivamente. Por otro lado, si se interpolan puntos intermedios entre las mediciones (puntos a', b' y c' , en la figura), y aplicamos el método descrito anteriormente llegamos al esquema intermedio de la figura (dx se ha reducido a la mitad). Un siguiente paso en la reducción del intervalo de muestreo lleva a la curva del esquema del tercer renglón. Es claro que si dx tiende a cero, se tiende a la curva original y por tanto se tiene un modo de controlar la medida del suavizado y que tanto se aleja la curva suavizada de la curva original. La segunda columna de esta Figura 3.1.4, muestra un segundo suavizado sobre la primera curva suavizada. Como se puede ver, las características de estas curvas indican una menor variación de la pendiente con respecto a la curva original. El procedimiento de suavizado permite entonces controlar la separación entre la curva original y suavizada mediante la interpolación de puntos, y al mismo tiempo una menor variación de la pendiente entre puntos de medición.

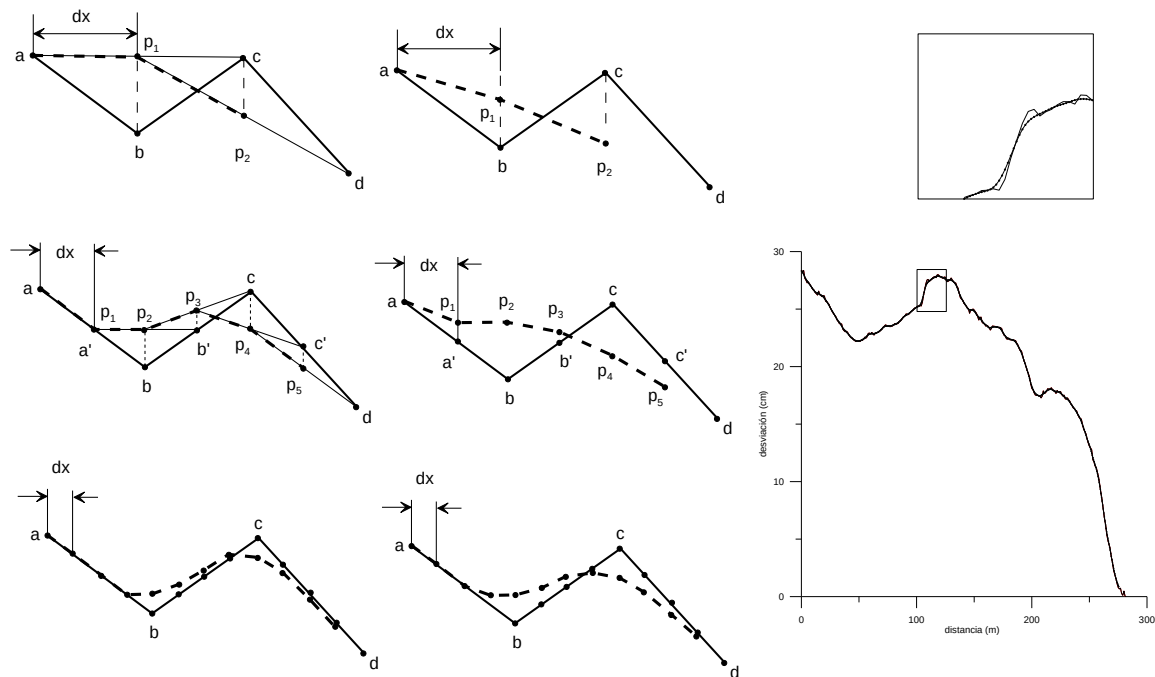


Figura 3.1.4.- Método de suavizado para las mediciones de inclinómetros y la aplicación sobre una medición.

En la Figura 3.1.5 se muestran las observaciones disponibles para la losa 10, en comparación con las que se obtienen al aplicar el suavizado descrito anteriormente, al interpolar un punto intermedio de medición y 4 veces el procedimiento de suavizado, sobre la losa original.

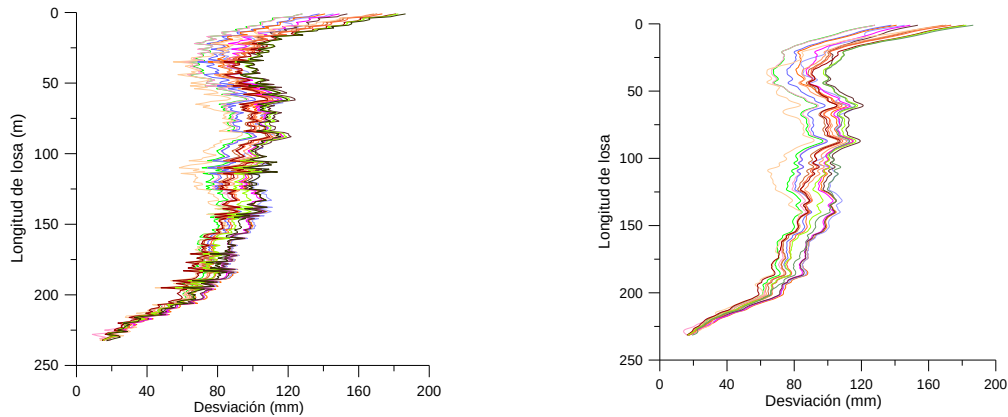


Figura 3.1.5.- Método de suavizado aplicado cuatro veces al considerar la interpolación de un punto intermedio sobre la medición original (derecha) y la medición original (izquierda).

Debido a que se identificaron grietas en el tercio superior de las losas de Aguamilpa, el personal de CFE realizó una campaña de inspección para mapear dichas grietas, que pueden ser observadas en la Figura 3.1.6 (Galván 2003). Entonces, se dispone de información sobre los movimientos perpendiculares a la losa y de los efectos que tuvieron dichos movimientos en estos elementos. La intención del trabajo que se presenta a continuación, es utilizar esta información para conocer cómo funciona el procedimiento de suavizado y por tanto, la validez de las mediciones que se realizan con los inclinómetros.

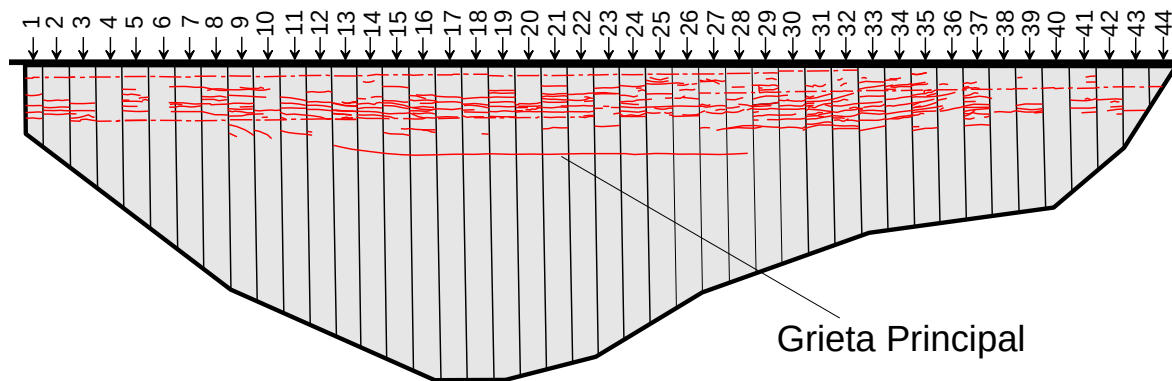
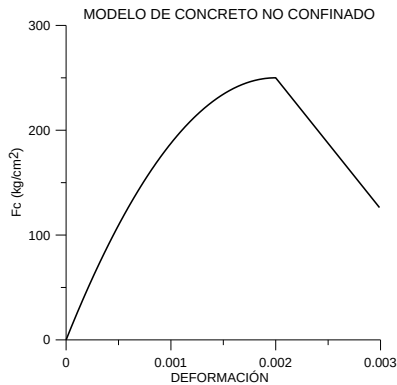


Figura 3.1.6.- Mapeo de agrietamiento en las losas de la presa Aguamilpa (tomado de Galván, 2003)

De acuerdo a la teoría de flexión para elementos de concreto reforzado, se tienen las siguientes consideraciones:

- 1.- las secciones planas antes de la flexión permanecen planas después de la flexión
- 2.- Se conoce la curva esfuerzo-deformación del acero
- 3.- Se conoce la curva esfuerzo-deformación del concreto
- 4.- Se desprecia la resistencia a tensión del concreto

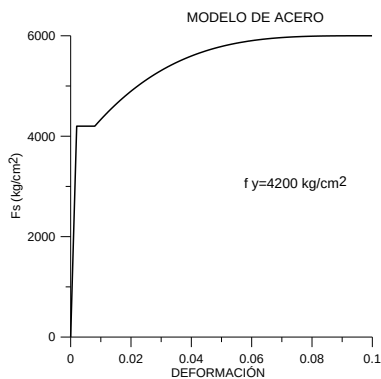
Unos de los modelos extensamente utilizados para concreto confinado y no confinado, es el que proponen Kent y Park, 1971, cuyos parámetros se presentan en la Figura 3.1.7.



$$f_c = \begin{cases} f'_c \left[\frac{2\varepsilon_c}{0.002} - \left(\frac{\varepsilon_c}{0.002} \right)^2 \right] & 0 < \varepsilon_c < 0.002 \\ f'_c \left[1 - \frac{\varepsilon_c - 0.002}{0.002} \right] & 0.002 < \varepsilon_c < 0.004 \end{cases}$$

Figura 3.1.7.- Modelo esfuerzo-deformación para concreto no confinado propuesto por Kent y Park, 1971.

De la misma manera, uno de los modelos para comportamiento del acero ampliamente utilizado es el que se muestra en la Figura 3.1.8.



$$f_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & 0 < \varepsilon_s < \varepsilon_y \\ f_y & \varepsilon_y < \varepsilon_s < \varepsilon_{sh} \\ f_{sm} + (f_y - f_{sm}) \left[\frac{\varepsilon_{sm} - \varepsilon_s}{\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{sh}} \right]^P & \end{cases}$$

$$E_s = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \quad f_{sm} = 6000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_{sh} = 0.008 \quad \varepsilon_{sm} = 0.10 \quad P = 3.5$$

Figura 3.1.8.- Modelo esfuerzo-deformación para acero y los parámetros recomendados para este modelo (Mander, 1989)

Es claro que la función de la cara de concreto en presas como las de Aguamila y El Cajón, no es por resistencia, sino como sello hidráulico. Entonces, sería de interés conocer, en el detalle posible, como es el comportamiento del elemento en flexión y cuando ocurre su agrietamiento en función de la curvatura. Para tal fin, se realizaron una serie de análisis que se presentan a continuación.

En un análisis típico de momento-curvatura, de un elemento de concreto reforzado sometido a flexión, se sigue el siguiente procedimiento:

Se impone una curvatura y se asume una posición del eje neutro; se divide el bloque a compresión de concreto, en una serie de celdas cuya deformación determinará la fuerza en compresión que actúa sobre cada una de dichas celdas (de acuerdo al modelo de concreto propuesto). Se obtiene la fuerza total en compresión del concreto y se obtienen entonces las fuerzas del refuerzo (tanto en compresión, como en tensión), el valor de dichas fuerzas depende de la posición del eje neutro y de la curvatura impuesta. Moviendo la posición del eje neutro, se busca el equilibrio de fuerzas para esa curvatura. Se incrementa la curvatura y se inicia nuevamente, generando con ello un diagrama de momento resistente vs curvatura.

Se generó un programa de computadora que resolviera el problema anterior, con la consideración adicional de tomar en cuenta el concreto a tensión. La intención es poder seguir la distancia con respecto al eje neutro a partir de la cual se ha superado la resistencia a tensión para la curvatura de análisis. Las consideraciones para el concreto a tensión son las siguientes:

La resistencia a tensión del concreto no confinado en flexión está dada por el módulo de ruptura (Park y Paulay, 1994):

$$f_r = K\sqrt{f'_c} \quad \text{en } \text{lb}/\text{pulg}^2$$

El valor de K varía de 7 a 13.

El modelo de esfuerzo-deformación para el concreto a tensión se puede idealizar como una línea recta hasta la resistencia a tensión. Se puede asumir que el módulo de elasticidad es el mismo en tensión y compresión (Park y Paulay, 1994).

La deformación límite a tensión es entonces: $\varepsilon_t = \frac{f_r}{E_c}$

Donde, E_c es el módulo de elasticidad del concreto, que cuando es de clase I, se puede estimar como $E_c = 14000\sqrt{f'_c}$, (reglamento de construcciones del D.F.).

Si los modelos constitutivos de los materiales son adecuados. Es posible conocer en detalle, el momento resistente de las losas para cualquier curvatura.

Como ejemplo, se muestra en la siguiente Figura un cálculo de momento vs curvatura para un armado típico de una de las losas instrumentadas de la presa de Aguamilpa. En esta Figura se incluyen dos curvas: una considerando el concreto en tensión y otra sin considerarlo.

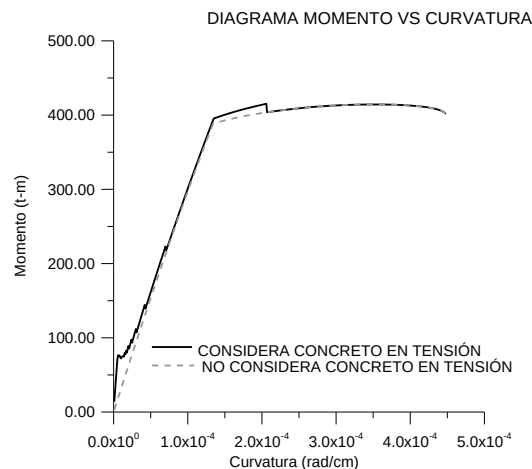


Figura 3.1.9.- Diagrama momento vs curvatura para la losa 10, evaluado en la elevación 115 m debajo de la corona de la presa Aguamilpa (ver Figura 3.1.3 como referencia).

Las grietas de tensión en vigas, han sido estudiadas por diferentes autores. Park y Paulay, 1994, por ejemplo, presentan las características del agrietamiento por flexión en vigas que se reproducen en la Figura 3.1.10.

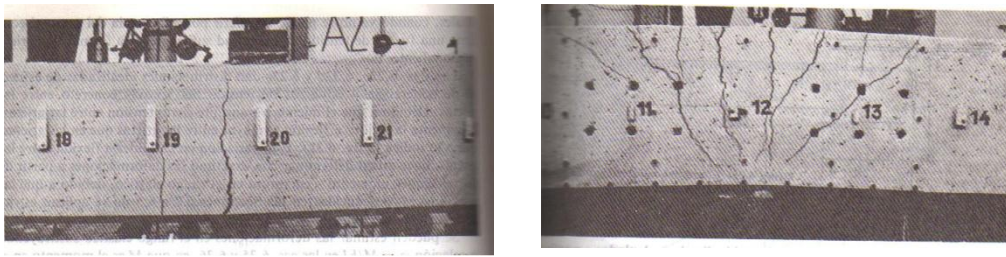


Figura 3.1.10.- Agrietamiento de una viga debido a flexión. En la parte izquierda, la viga está cerca del momento último sin fuerza cortante significativa. En la parte derecha, la viga se encuentra cerca del momento último con fuerza cortante significativa (tomado de Park y Paulay, 1994)

En la figura anterior se puede observar como una viga sin presencia de cortante tiene un patrón de agrietamiento más simple, que cuando la fuerza cortante es significativa. La combinación de tensión y cortante produce no solo un área mayor de agrietamiento, sino agrietamiento por tensión diagonal. En el caso de ausencia de cortante, el agrietamiento se concentra en una o dos grietas significativas, que si continúa la flexión puede generar grietas intermedias adicionales.

Una estimación aproximada del agrietamiento en función de la curvatura al usar los programas generados de momentos resistentes, sería: identificar la profundidad de la fibra a tensión del concreto que ha superado la resistencia a tensión propuesta en el modelo. En la Figura 3.1.11, se muestra como sería el “avance” de la grieta de tensión debida a flexión, en función de la curvatura; comparativamente con el momento resistente del elemento. Esta estimación se basa en los modelos constitutivos presentados anteriormente y la profundidad de la grieta se considera a partir de la fibra que ha superado la resistencia a tensión del concreto. La curvatura se presenta en escala logarítmica para identificar claramente el inicio del agrietamiento. La sección de análisis corresponde al caso que se presenta en la Figura 3.1.9.

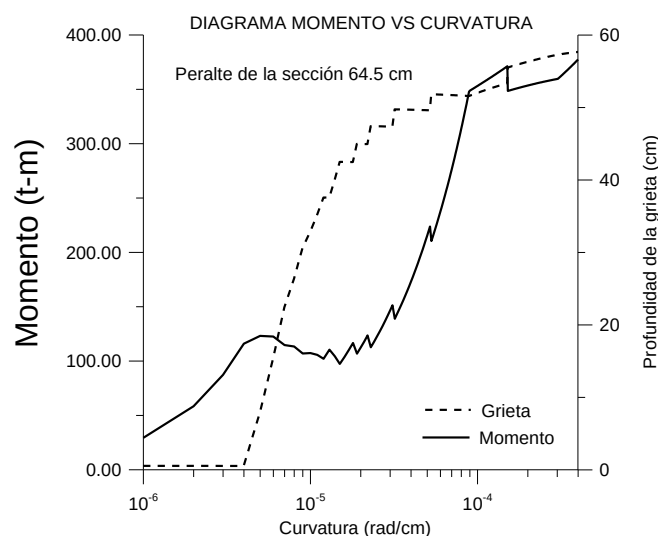


Figura 3.1.11.- Comportamiento del momento resistente y del agrietamiento en tensión de la losa 10 a la elevación 115 m de la presa Aguamilpa. La línea punteada corresponde a la profundidad de la grieta, mientras que la línea continua corresponde al momento resistente del elemento.

Además, se realizaron algunas modificaciones a los programas de análisis para que tomaran en cuenta la variación del peralte de las losas y las diferentes cuantías de acero que se tienen a las diferentes distancias del elemento. Con ello se logró obtener las curvaturas a las que inicia el agrietamiento a todo lo largo de las losas. Por otro lado, de las mediciones de los inclinómetros se obtuvieron las curvaturas mediante la siguiente relación:

$$\Phi = \frac{\frac{d^2 y}{d^2 x}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} \approx \frac{d^2 y}{d^2 x}$$

Lo que permite obtener las curvaturas medidas contra las curvaturas a la que inicia el agrietamiento, de acuerdo al planteamiento antes expuesto.

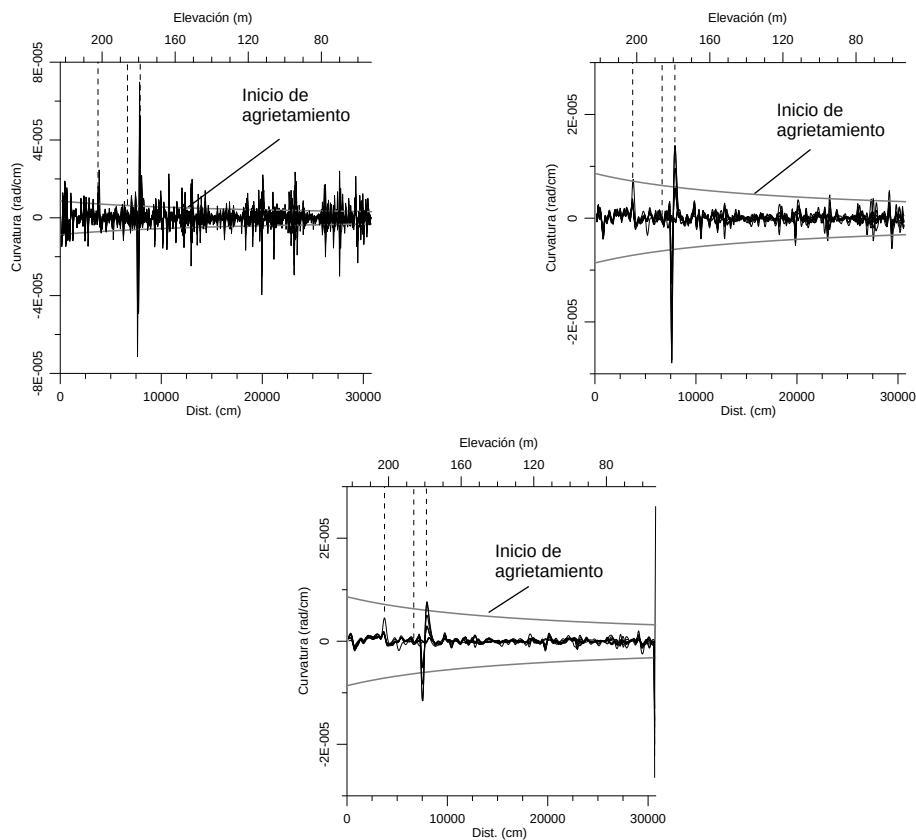


Figura 3.1.12.- Tres estimaciones de curvatura a partir de las mediciones del inclinómetro 18 y el método de suavizado presentado en la Figura 3.1.4.

La Figura 3.1.12 muestra los resultados al interpolar un punto de la curva original y aplicar el suavizado una, cuatro y nueve veces repetidamente. Se muestra adicionalmente el inicio del agrietamiento de la losa de acuerdo al módulo de ruptura de Park y Paulay.

Con líneas punteadas en la Figura anterior, se indican los puntos en los que se ha detectado agrietamiento en la losa 18 en campañas de observación realizadas por CFE. Entonces, se puede observar como el procedimiento permite ir (limpiando) la señal del inclinómetro dejando los rasgos más importantes de la medición. A continuación se presentan las estimaciones de curvatura en los diferentes inclinómetros al

reducir dx con un punto intermedio y suavizando las curvas hasta cuatro veces, de acuerdo al procedimiento de suavizado.

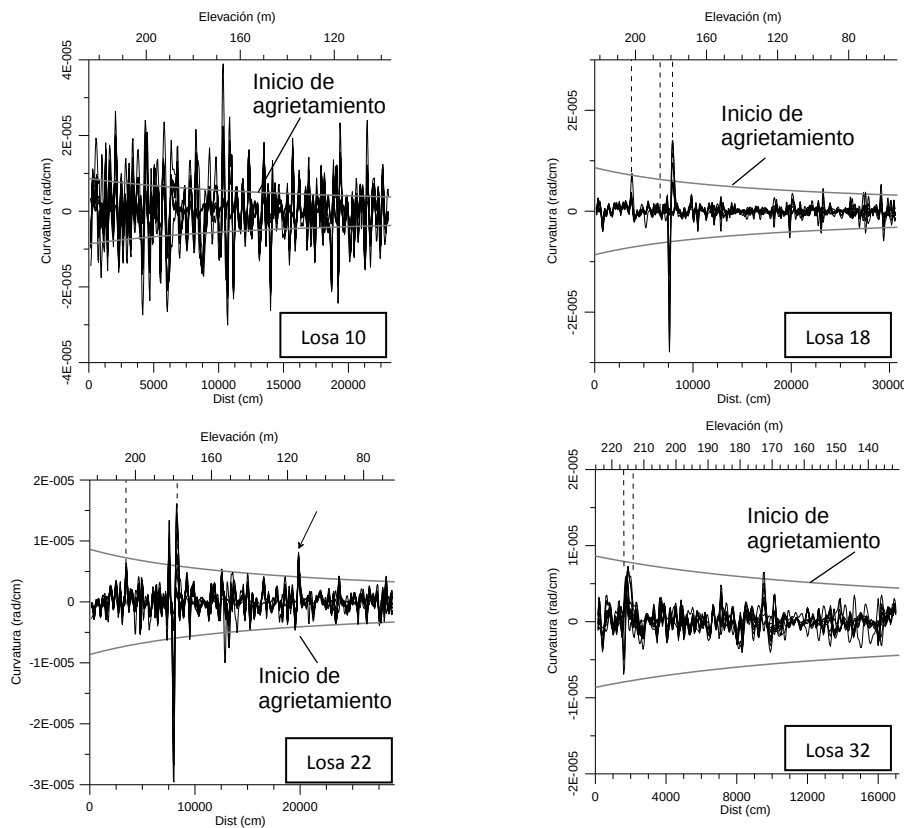


Figura 3.1.13.- Estimación de curvaturas a partir de la medición de inclinómetros, para las losas instrumentadas de Aguamilpa.

Varios resultados pueden anotarse del ejercicio anterior:

- Las señales de la losa 10 son demasiado ruidosas para el proceso de suavizado propuesto en este trabajo (Figura 3.1.13)
- Las curvaturas calculadas para las losas 18 y 22, son congruentes con la ubicación de la grieta principal (Figura 3.1.6)
- Se identifica un agrietamiento en la losa 22 en la elevación que se aproxima a 120 m, señalado con una flecha en la Figura 3.1.13 y que se puede confirmar en la flecha señalada en la Figura 3.1.3
- Podrían existir otros puntos de agrietamiento, sin embargo, el nivel de ruido no permite detectarlos
- Las curvaturas para las grietas menores están subestimadas, o también es probable que la losa tenga una importante influencia de cortante, que hace que dichas grietas no sean atribuibles al valor de la curvatura

Si se eligiera la utilización de un polinomio para suavizar la medición de los inclinómetros, se podrá ver que se pierde la información del agrietamiento. Un ejemplo se presenta en la Figura 3.1.14.

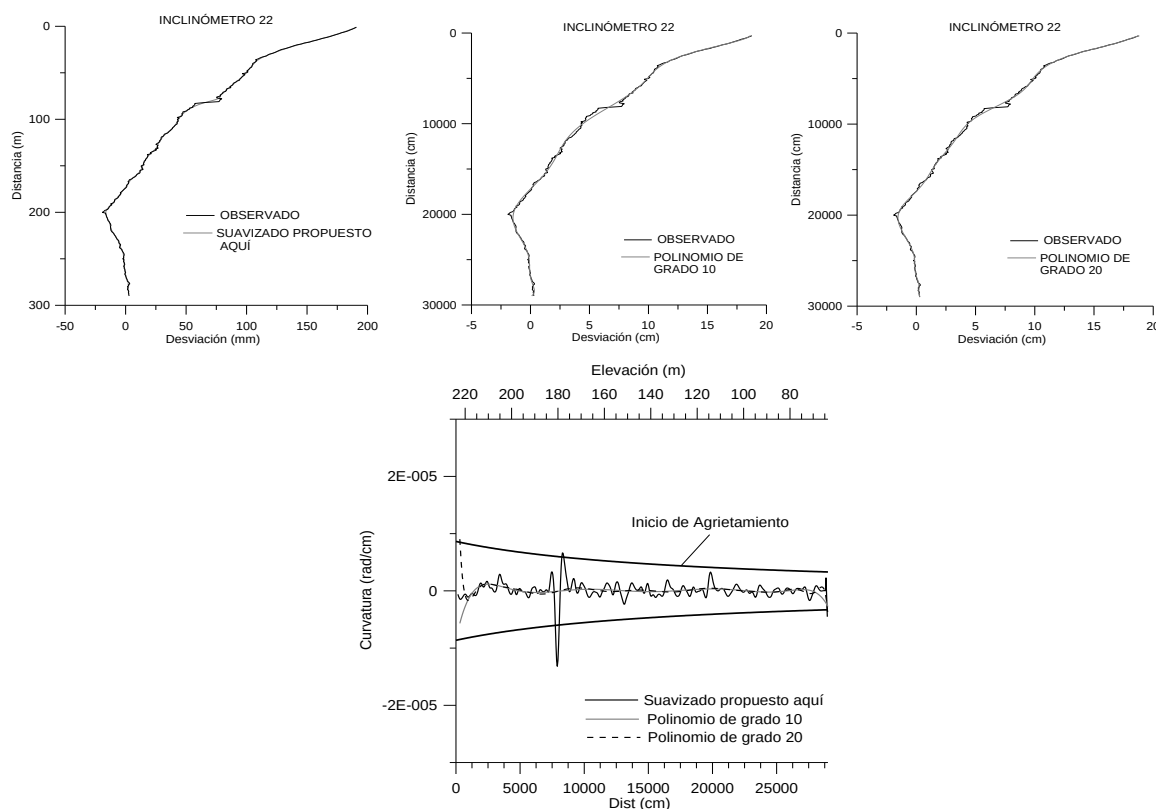


Figura 3.1.14.- Estimación de curvaturas al considerar diferentes funciones de suavizado en la medición del inclinómetro.

En efecto, la Figura 3.1.14 muestra como el polinomio no puede ver detalles que pudieran indicar agrietamiento; sin embargo, se considera que esta aproximación es más representativa del comportamiento general de la losa, dado que elimina cualquier medición de alta frecuencia, incluidas evidentemente la presencia de grietas.

Al revisar la información experimental disponible de la presa Aguamilpa se encontró que durante la construcción de la losa 18, se realizaron mediciones en el inclinómetro cuando la losa se encontraba en construcción. Lo más importante de este trabajo, son las características tan particulares de las mediciones realizadas, las cuales se ilustran en la Figura 3.1.15.

Observe la configuración notablemente diferente que se obtuvo en la medición de mayo 25 y la de junio 8 de 1992. La comba de cerca de 3 cm que describe la losa en las proximidades del plinto desaparece doce días después. ¿Porque la losa adquirió dicha configuración? Es una pregunta difícil de responder, aunque sugiere que pudiera deberse a peso propio de la losa y pérdida de fricción, puesto que la comba se ubica en la base de la losa. Sin embargo, no hay mediciones anteriores en el inclinómetro que aclararían esta suposición. En esta misma figura, se presenta el nivel del agua en la estructura y como se puede ver, existieron dos avenidas extraordinarias en enero de ese mismo año que alcanzaron la elevación 78 m en la cortina de la presa (Castro y Montañez, 1993). De acuerdo a estos mismos autores, la losa 18 se encontraba construida en la elevación 94 (50 metros más abajo), cuando las inundaciones ocurrieron. Lo que físicamente parece poco cuestionable de las mediciones, es que la losa “disipó” energía entre mayo 25 y junio 8. La forma en que se interpreta este hecho, es por el decremento del momento flexionante. Es decir,

el momento flexionante después de mayo 25 fue superior al coeficiente de fricción estática entre losa y enrocamiento, de modo que la losa deslizó. Entonces, la caída de momentos entre las dos configuraciones de la losa podría dar un indicio del valor límite del coeficiente de fricción en el contacto losa-enrocamiento.

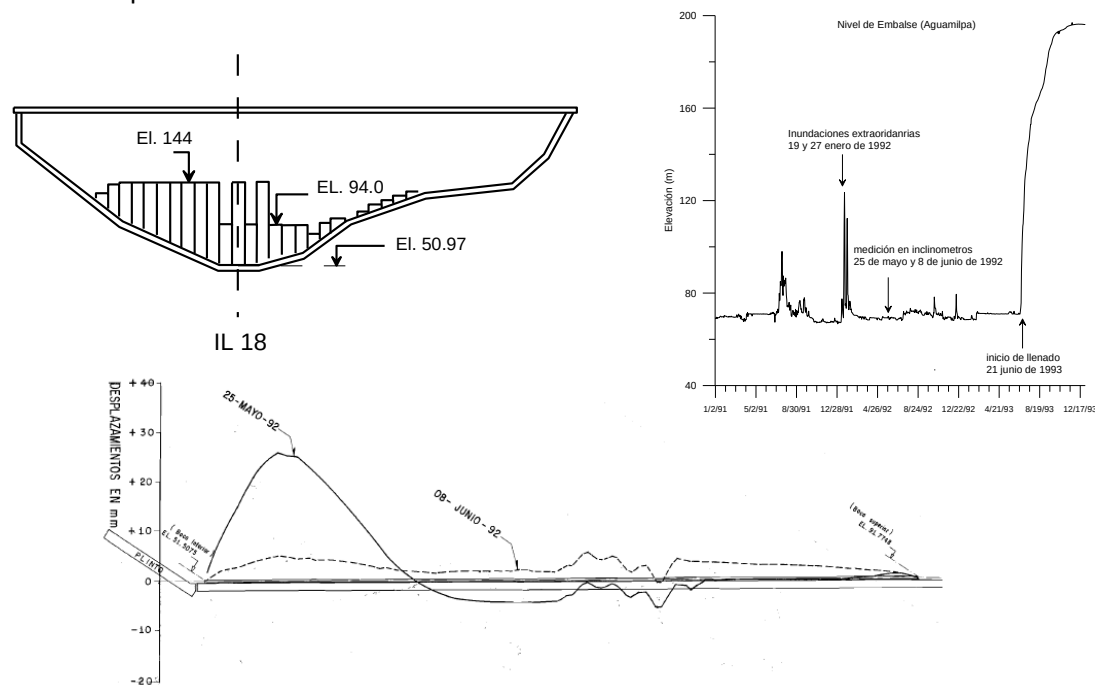


Figura 3.1.15.- Avance de construcción de losas en mayo de 1992 (arriba), mediciones del inclinómetro IL18 de Aguamilpa en mayo y junio de 1992 (abajo), e historia del nivel de agua (arriba a la derecha).

Al investigar la información disponible del inclinómetro 18 se encontró que existen cuatro mediciones entre mayo y junio de 1992, las cuales se presentan en la Figura 3.1.16. En esta misma figura, se incluyen las curvaturas de estas mediciones (calculadas con el suavizado propuesto en este trabajo).

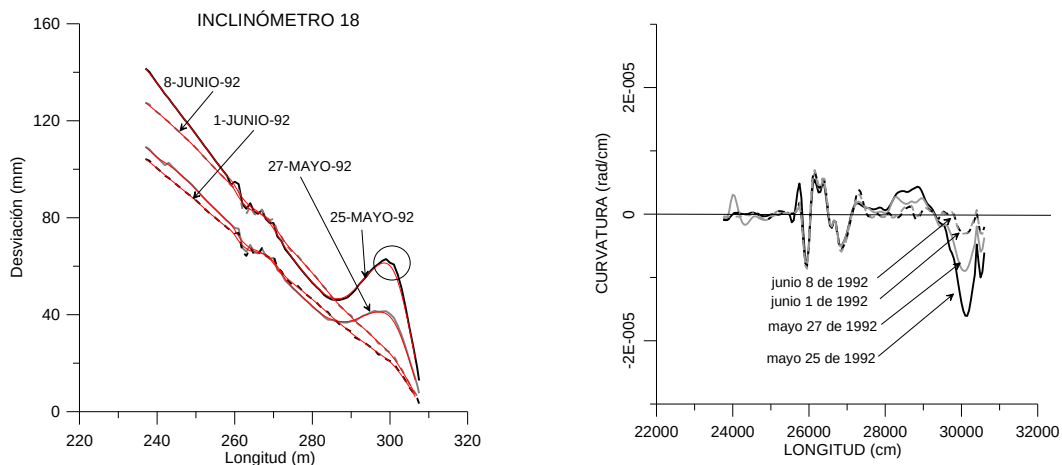


Figura 3.1.16.- Mediciones del inclinómetro 18 entre mayo 25 y junio 8 de 1992 (izquierda), y cálculo de curvaturas de ésta mediciones (derecha).

De acuerdo a los cálculos de curvatura, no parecería extraño que la losa presentara claros indicios de agrietamiento. De hecho, se piensa que el agrietamiento se localizó en las dos pequeñas discontinuidades que se observan en la medición de mayo 25 (encerradas con un círculo en la Figura 3.1.16). Esta misma Figura 3.1.16, sugiere que el relajamiento del momento flexionante en la losa fue gradual.

Se calcularon los momentos flexionantes a partir de la información que se presenta en la Figura 3.1.15. Para ello, se digitizaron las señales del inclinómetro y luego se suavizaron mediante el procedimiento presentado en este trabajo, con lo que se calcularon las curvaturas. No se utilizó la información digital disponible de la Figura 3.1.16, porque se requiere de la información de un extensómetro al pie de la losa y no se dispone de dicha información. La Figura 3.1.17 muestra los datos digitizados (líneas azules), y suavizados (líneas rojas), de la señal de la Figura 3.1.15, así como las curvaturas calculadas.

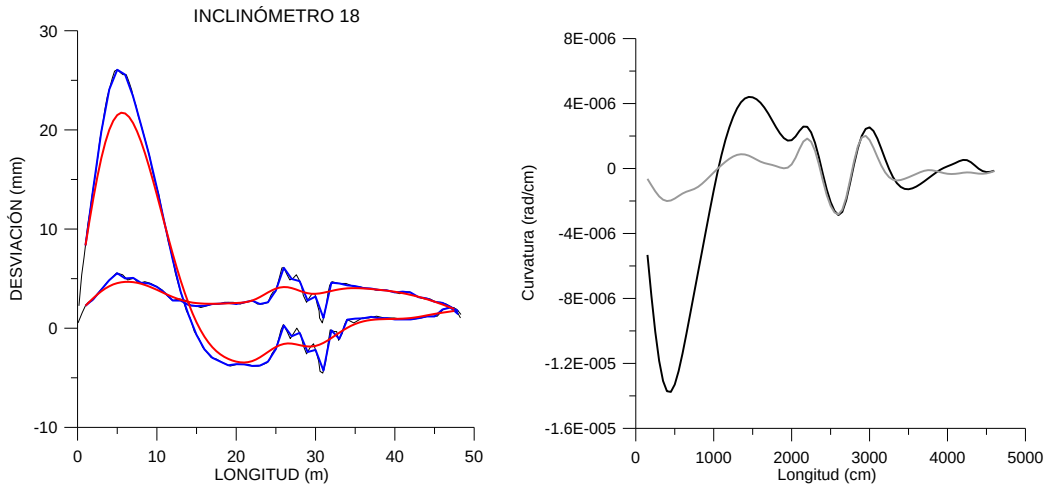


Figura 3.1.17.- Cálculo de curvaturas para las mediciones de mayo 25 y junio 8 de 1992

Por otro lado, se hará la suposición de que la pérdida de momento interno de la losa se traduce en el desplazamiento de la losa con respecto al enrocamiento (u), en este sentido, la losa se comportaría como cuerpo rígido. Esta suposición se ilustra esquemáticamente en la siguiente Figura 3.1.18.

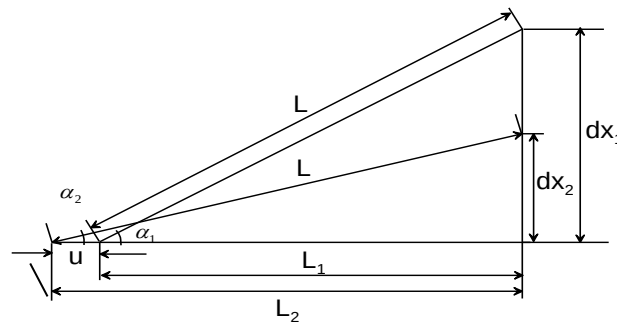


Figura 3.1.18.- Obtención de desplazamientos entre losa y enrocamiento (valor de u), a partir de las mediciones del inclinómetro (dx_1 y dx_2). L es el largo de la losa.

En la Figura 3.1.18 dx_1 y dx_2 , son dos mediciones del inclinómetro de la losa, L es su longitud (que no cambia en las dos mediciones, ya que se asume que la losa se comporta como cuerpo rígido) y el valor de u (correspondiente al desplazamiento de la losa), se obtiene como:

$$u = L_2 - L_1 = L \left[\left(1 - \left(\frac{dx_2}{L} \right)^2 \right)^{1/2} - \left(1 - \left(\frac{dx_1}{L} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \quad (3.1.1)$$

Al aplicar la suposición anterior y considerar que la caída de momento se puede obtener como

$$\Delta M = Fr * uA \quad (3.1.2)$$

Donde: Fr es el módulo de rigidez a fricción (con unidades de fuerza sobre área), en el contacto losa-enrocamiento

u es el desplazamiento de la losa respecto del enrocamiento

A es el área de deslizamiento de la losa

Observe en la expresión (3.1.2) que si los desplazamientos entre losa y enrocamiento (u), son nulos, entonces la caída de momentos debería ser nula. A continuación se presenta la estimación de los desplazamientos utilizando la expresión (3.1.1), así como la diferencia de momentos entre las mediciones de mayo 25 y junio 8 de 1992.

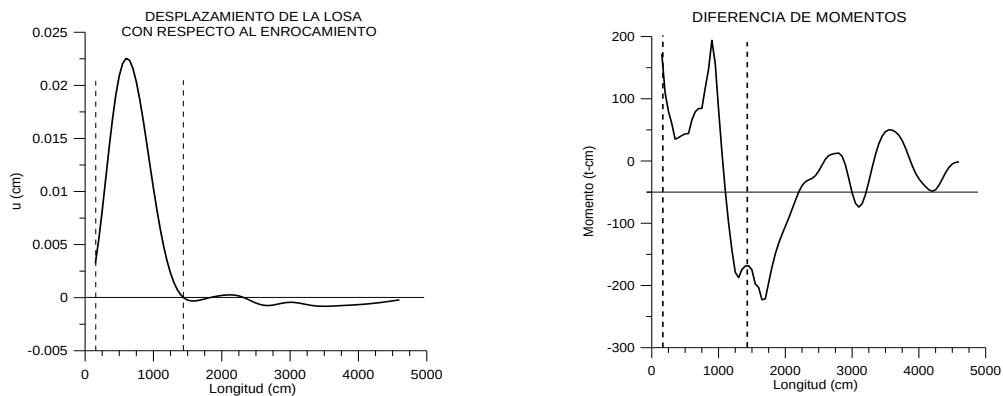


Figura 3.1.19.- Estimación de desplazamientos entre losa y enrocamiento

La Figura 3.1.19 indica que el deslizamiento entre losa-enrocamiento se presenta entre 0 y 15 metros a partir del plinto (líneas punteadas). Sin embargo, la diferencia de momentos que se muestra en la figura, es mayor a esa distancia; es decir, existe diferencia de momentos, sin deslizamiento. Físicamente es razonable ver que la pérdida del arqueamiento de la losa, reduzca la reacción del enrocamiento en la vecindad de este arqueamiento. Este hecho se ilustra en la Figura 3.1.19, donde, ante la reducción del momento M_1 a M_2 (segmento AB), se reduce la reacción de la losa sobre el enrocamiento (segmento BC), y la losa tiende a deslizarse hacia arriba en este tramo.

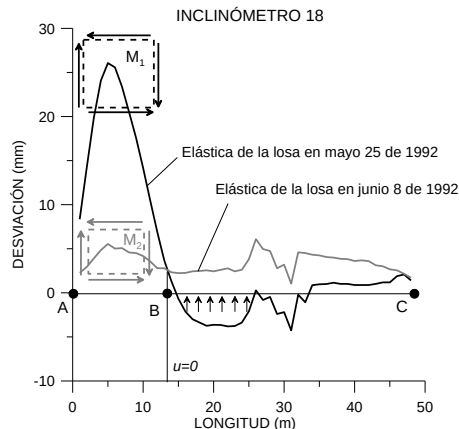


Figura 3.1.20.- Cambio de la acción de la losa sobre el enrocamiento (segmento BC), debido a la pérdida de momento en la losa por el deslizamiento de ésta (segmento AB)

El hecho anterior explicaría la existencia de cambios de curvatura en el segmento BC, y por tanto, los cambios de momento. Por lo tanto, la determinación del coeficiente de fricción (Fr) a partir de la expresión (3.1.2), se determinó solamente para el segmento AB, que es la zona donde se tiene desplazamiento de la losa, de acuerdo a la Figura 3.1.19. Los resultados se presentan en la Figura 3.1.21. El área de deslizamiento considerada en el cálculo, es de un metro, que es el intervalo de evaluación de cada deslizamiento a lo largo de la losa, por un ancho de 15 metros. Se desprecia la fricción que pudiera existir en los cantos de la losa 18.

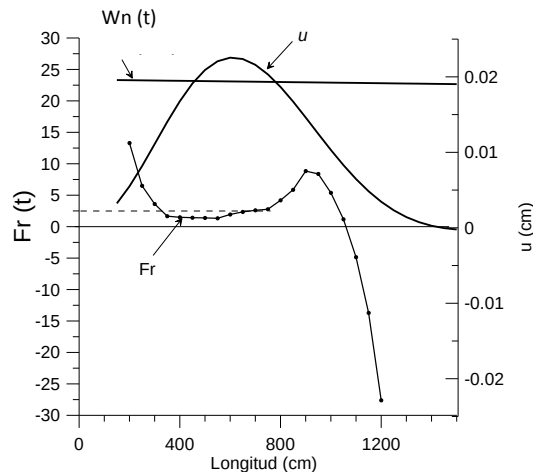


Figura 3.1.21.- Estimación del límite de fricción estática en la losa 18 de Aguamilpa durante la construcción de la presa (mediciones entre mayo 25 y junio 8 de 1992)

En esta Figura 3.1.21 se presenta W_n que corresponde al peso de la losa 18 en la dirección perpendicular al enrocamiento, al considerar un peso de concreto de 2.3 t/m^3 , y un volumen de losa de 15 metros de ancho por un metro de largo y un espesor de losa definido por: $E=0.3+0.003 \cdot h$ (h es la altura de la estructura respecto a la corona).

De la Figura 3.1.21, si se considera que Fr es del orden de 2.5 t (para el área unitaria de deslizamiento considerada), para el modelo de Coulomb, se tendría que esta fuerza es 0.1 veces el peso de la losa (W_n), aunque la fricción crece en los bordes de la zona de desplazamiento, lo cual haría sentido con la interpretación física que se está asumiendo del fenómeno. No sobra marcar el interés de obtener valores de Fr directamente sobre la estructura, ya que éste parámetro, es fundamental para conocer el grado de acoplamiento que existe entre el enrocamiento y las losas.

Se investigó el agrietamiento detectado en la losa 22 a la elevación 120 m, considerándose la posibilidad de que alguna irregularidad topográfica de la roca de cimentación bajo la losa pudiera ser responsable de la presencia de dicho agrietamiento. Al disponer de una superficie del cañón de la presa de Aguamilpa, se ubicó el punto de agrietamiento sobre esta superficie, el cual se muestra en la Figura 3.1.22. Se observa que, aunque si existe una irregularidad topográfica cercana a la losa, esta irregularidad no se encuentra debajo de la grieta identificada en la misma. Otra posibilidad del agrietamiento que se detecta, es que la losa 22 sufriera un arqueamiento semejante al que experimentó la losa 18 y que ha sido analizado en este trabajo; aunque, en el caso de la losa 22, ésta no se recuperó, pero esto no se puede comprobar, porque no existen mediciones previas en esta losa.

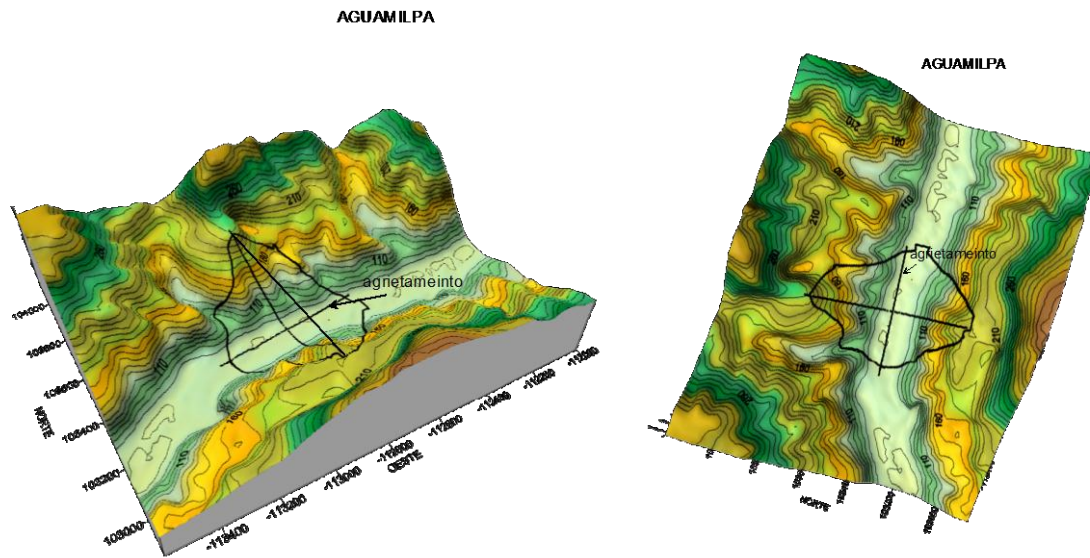


Figura 3.1.22.- Ubicación del punto de agrietamiento de la losa 22 en la topografía del cañón de la presa Aguamilpa.

Presa Cajón

3.2 INFORMACIÓN EXPERIMENTAL

3.2.1 INCLINÓMETROS

La Figura 3.1.22 presenta la ubicación de los inclinómetros instalados en la presa Cajón, de los cuales se dispone de información.

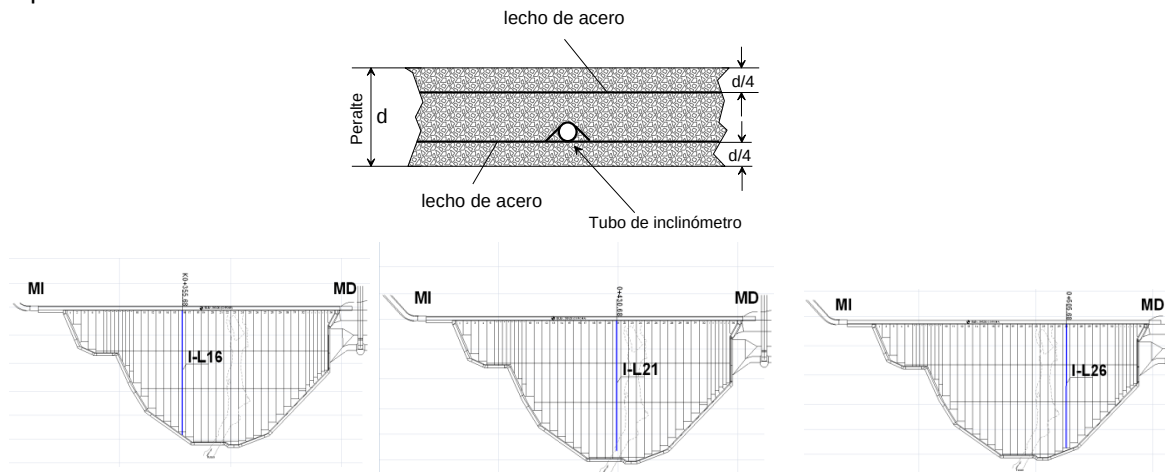


Figura 3.1.23.- Esquema de la ubicación del acero de refuerzo en la presa Cajón (arriba), y ubicación de las losas instrumentadas con inclinómetros (abajo).

Como se puede ver en la Figura 3.1.23, la tubería instalada para las mediciones de las losas, a diferencia de la presa Aguamilpa, se encuentra ahogada en la losa de concreto. El acero de refuerzo se distribuye en dos lechos para esta estructura, mientras que para Aguamilpa se encuentra en un solo lecho a la mitad del peralte de la losa.

La Figura 3.1.24, muestra las mediciones disponibles en los tres inclinómetros de El Cájón, y a diferencia de Aguamilpa no se tuvieron que desechar datos. Note como el hecho de haber ahogado la tubería del inclinómetro en la losa parece haber reducido el nivel de ruido en las mediciones.

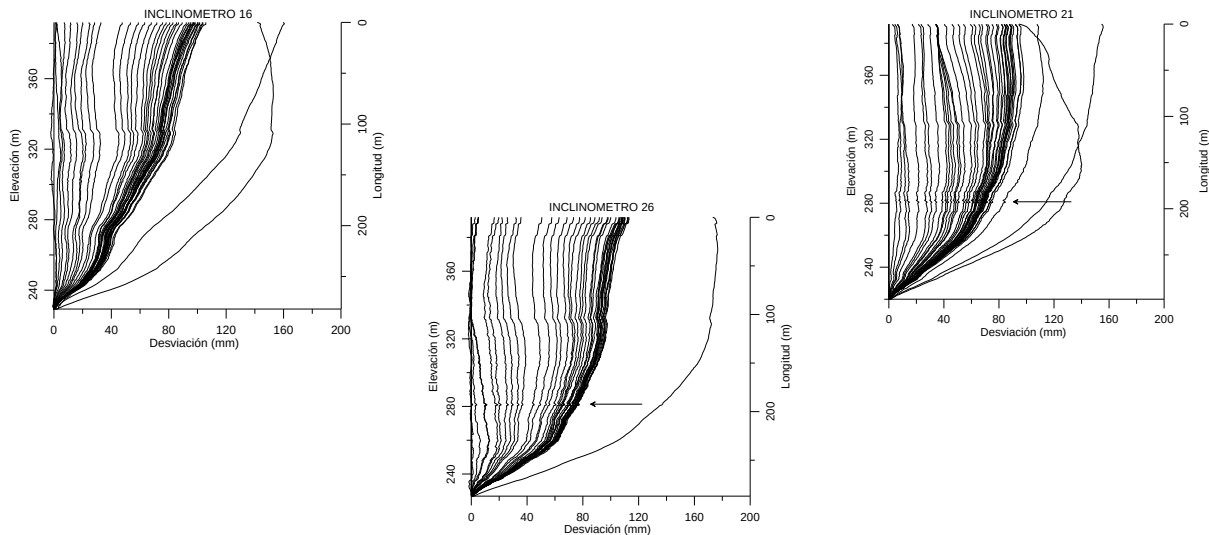


Figura 3.1.24.- Mediciones de los inclinómetros en las losas de la presa Cájón

Resulta interesante el cálculo de los valores de curvatura a los que inicia el agrietamiento para las losas de El Cájón en comparación con las losas de la presa Aguamilpa.

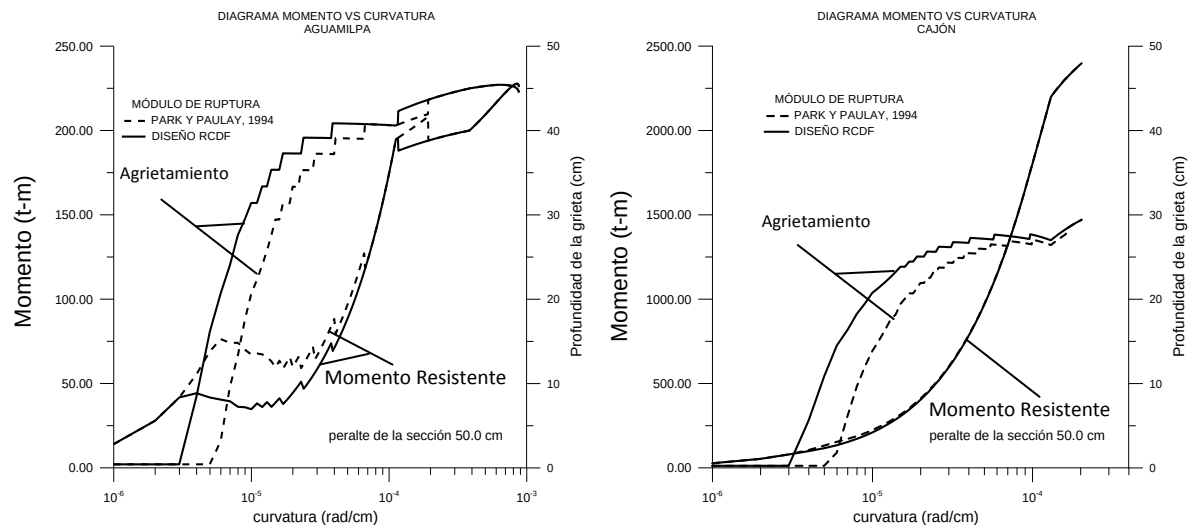


Figura 3.1.25.- Estimación de momentos resistentes y curvaturas de agrietamiento para las losas de Aguamilpa en comparación con las losas de El Cájón

En la Figura 3.1.25, se incluye un cálculo al considerar el valor del módulo de ruptura para diseño que las Normas Técnicas Complementarias para Estructuras de Concreto del Reglamento de Construcciones del DF, indican. Éste valor es de $f_r = 1.3 \sqrt{0.8 f'_c}$ (kg/cm^2). Como se sabe, los valores de diseño, generalmente tienen un

margen mayor de seguridad que los valores obtenidos experimentalmente. De la figura anterior, se pueden hacer dos anotaciones importantes:

- Aunque los momentos resistentes de las losas de El Cajón son diez veces mayores a los que se obtienen para las losas de Aguamilpa, los valores de curvatura a los que inicia el agrietamiento, son prácticamente iguales para ambas presas
- Los rangos de curvatura para el inicio del agrietamiento, en esta sección específica, van de 6 a $8 \cdot 10^{-6}$ rad/cm en ambas estructuras

En la Figura 3.1.25, se presentan los valores de curvatura de las mediciones a todo lo largo de las losas y se anota, como referencia, la curvatura a la que inicia el agrietamiento, la cual se calculó de acuerdo a la información de los armados. El cálculo de curvaturas se realizó como en el caso de Aguamilpa, es decir, interpolando un punto y suavizando la curva hasta cuatro veces, de acuerdo al procedimiento planteado en la sección anterior. Con flechas en esta figura, se indican los puntos donde la curvatura se aproxima más al inicio del agrietamiento. Los resultados indican que la losa 16 no tiene problemas. Para la losa 21 y 26, se tiene un claro salto en la medición del inclinómetro (para ambas losas), que se indica también con una flecha en la Figura 3.1.23. Este salto incrementa la curvatura en las dos caras de las losas y no es descartable un incipiente agrietamiento en ellas.

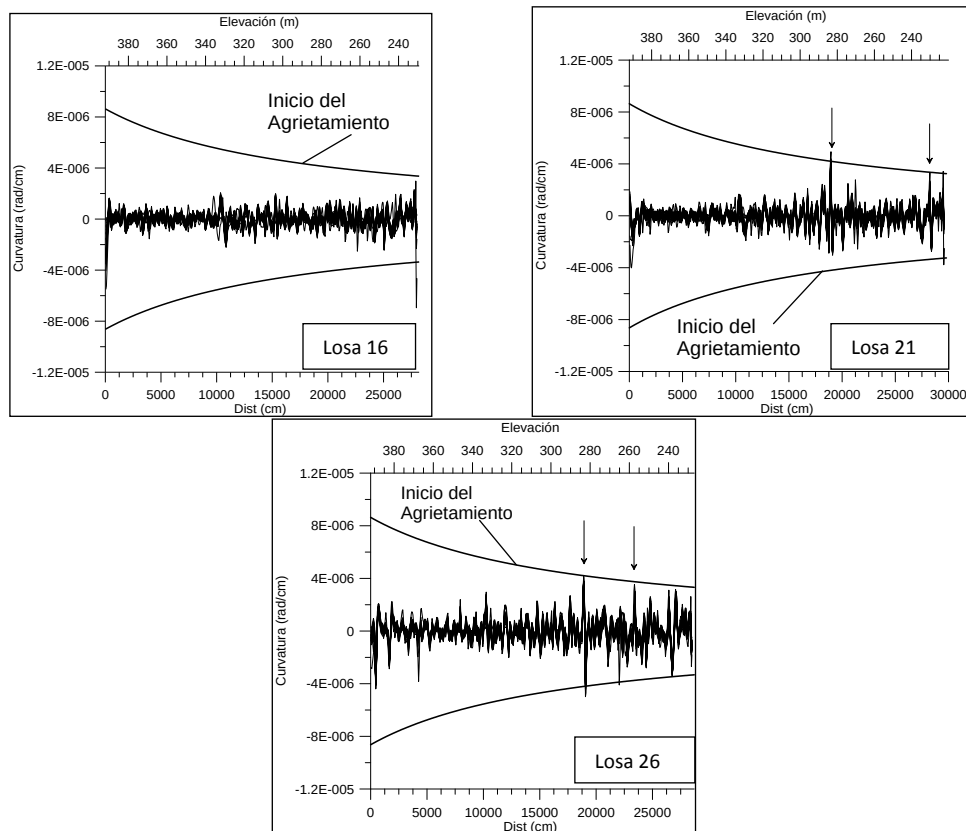


Figura 3.1.26.- Estimación de curvaturas de las mediciones de inclinómetros en la presa El Cajón. Las líneas indican el cálculo del inicio del agrietamiento siguiendo el mismo procedimiento empleado en Aguamilpa, y las flechas indican los puntos de mayores curvaturas observadas.

El Cajón revela en la información de sus inclinómetros características muy peculiares que, al parecer, también podrían darnos información del valor de la fuerza que ocurre en el contacto losa-enrocamiento, como se explica a continuación.

Las mediciones en los inclinómetros de esta presa fueron realizadas en intervalos muy cortos de tiempo, cuando inició el llenado de la presa en julio de 2006, sin embargo, para los años de 2007, 2008 y 2009 se ha realizado prácticamente una medición por año, de acuerdo con la información disponible. Estas tres últimas mediciones, se destacan en la Figura 3.1.26. No se dispone de la medición de 2009 para el Inclinómetro 26.

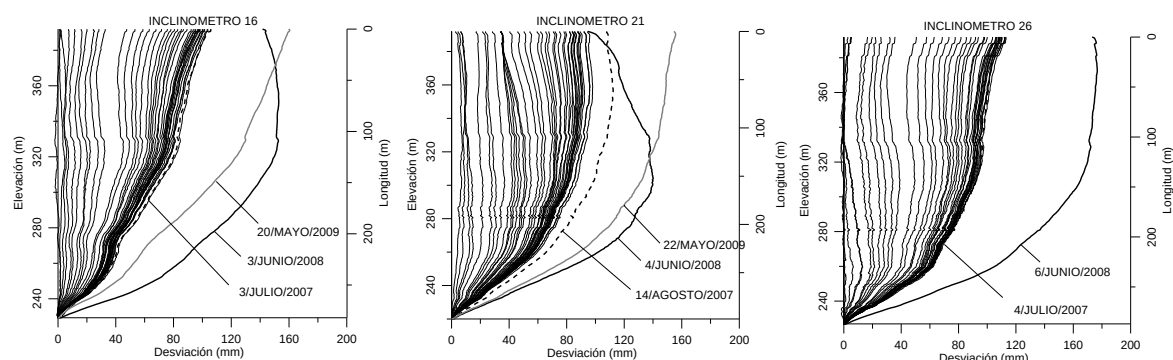


Figura 3.1.27.- Se destacan las mediciones de los inclinómetros realizadas en 2007, 2008 y 2009 en la presa El Cajón.

Las curvaturas de estas tres mediciones se presentan en la Figura 3.1.27.

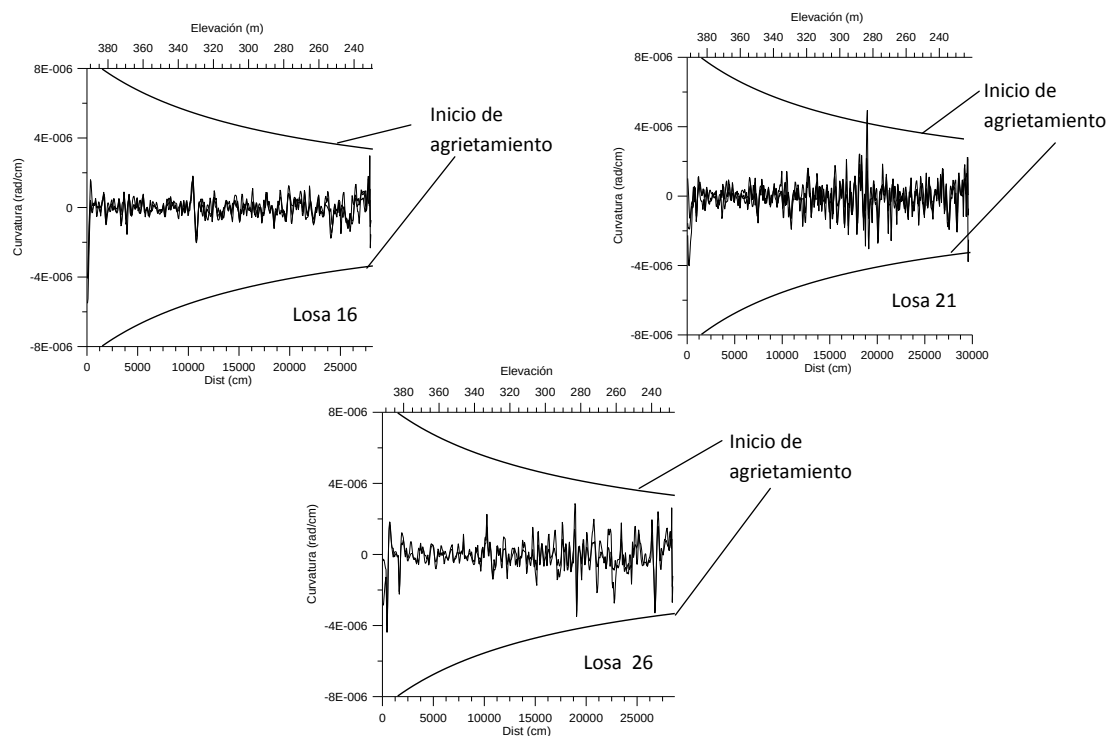


Figura 3.1.28.- Cálculos de curvatura para las mediciones de 2007, 2008 y 2009 en la presa El Cajón.

Note en la Figura 3.1.28 que, aunque las elásticas de las losas medidas por los inclinómetros son notablemente diferentes en las tres mediciones, las curvaturas no cambian de manera significativa. Este

hecho es notablemente peculiar. La curvatura se calculó como la segunda derivada de la señal del inclinómetro, pero de hecho, la primera derivada parece básicamente estar rotada en las señales de 2007, 2008 y 2009, como se muestra en la Figura 3.1.28.

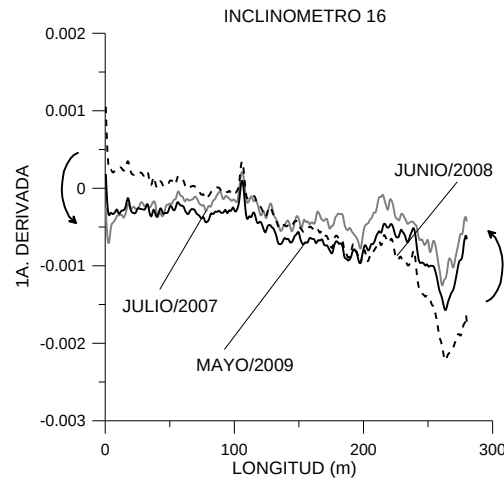


Figura 3.1.29.- Cálculo de la primera derivada para las mediciones de 2007, 2008 y 2009 en el Inclinómetro 16 de la presa El Cajón

Una forma en que se podría interpretar la información, es mediante la siguiente hipótesis: Se asume que no hay deslizamiento entre la losa y el enrocamiento. El empuje del agua incrementa la longitud de la losa al deformarla; entonces, la losa acumula energía por tensión axial y no por flexión, puesto que no hay cambios importantes de curvatura. Si esta tensión supera la resistencia a fricción de la losa con el enrocamiento, la losa desliza acortándose nuevamente.

De acuerdo a lo anterior, el primer problema requeriría interpretar el cambio de longitud axial de la losa, a partir de las mediciones del inclinómetro, esto se realizó como se indica a continuación. Considérese la Figura 3.1.30

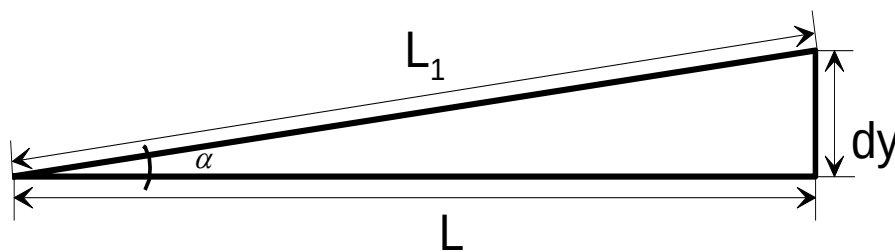


Figura 3.1.30.- Cambio de longitud de la losa al usar mediciones del inclinómetro

En la Figura 3.1.30, L es la longitud inicial de la losa, dy es la observación del inclinómetro y L_1 es la nueva longitud de la losa debida a la deflexión dy . Esta solución geométrica indicaría que:

$$L_1 = (L^2 + dy^2)^{1/2}$$

$$dy = L \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{L_1}{L} = (1 + \tan^2 \alpha)^{1/2}$$

Ante la suposición, la expresión anterior indicaría que toda la deflexión es traducida en alargamiento de la losa, lo que implicaría que no existe deslizamiento en el contacto losa-enrocamiento.

La deformación de la losa es:

$$\varepsilon = \frac{L - L_1}{L} = 1 - (1 + \tan^2 \alpha)^{1/2}$$

Y la fuerza que se genera por este alargamiento es:

$$F = \varepsilon(f_c A_c + f_s A_s)$$

Las fuerzas f_c y f_s son los esfuerzos que se generan en los modelos de concreto y acero, respectivamente, por la deformación ε . Los parámetros A_c y A_s , son las áreas de concreto y acero, respectivamente, para la sección. La Figura 3.1.29 presenta los alargamientos de las losas (L_1/L). Para obtener esta figura, se suavizaron las curvas como en el planteamiento presentado para flexión.

Es importante indicar que la deformación de agrietamiento se encuentra en un valor de $1.4 \cdot 10^{-4}$, mientras que las deformaciones de la Figura 3.1.30, son inferiores a $3 \cdot 10^{-6}$, es decir, las losas son seguras para agrietamiento por tensión axial.

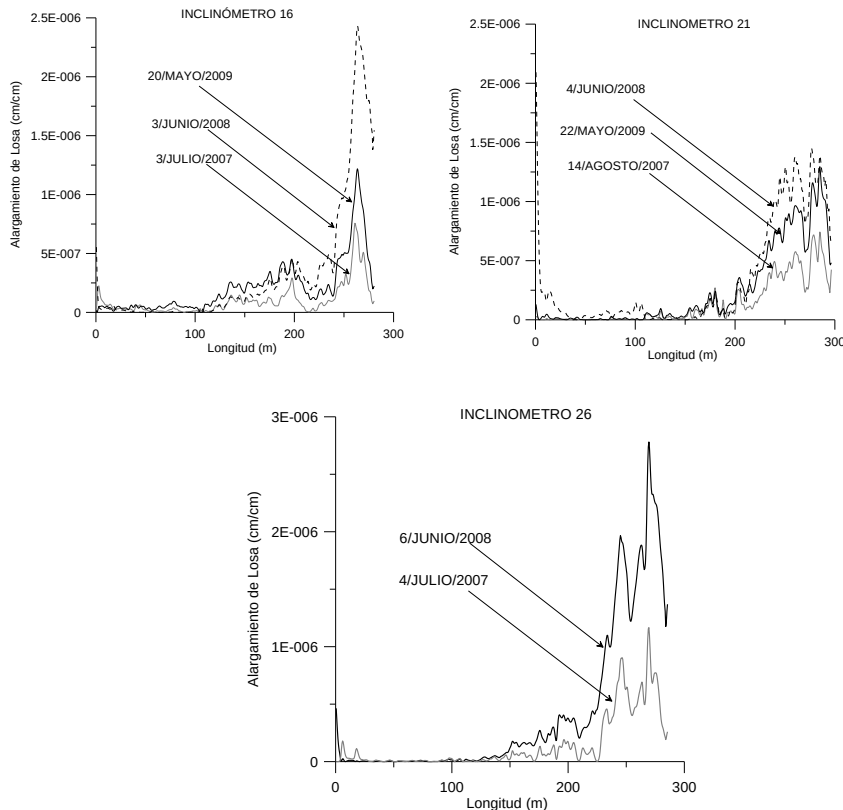


Figura 3.1.31.- Alargamiento de la losa en términos de la deflexión observada por el inclinómetro.

Para tener una idea de la magnitud de las fuerzas que generan las deformaciones que se tienen en la Figura 3.1.30, se presentan en la Figura 3.1.31 dichas fuerzas, sin embargo, no se conoce el área de fricción para

determinar la fuerza que se desarrolla en el contacto losa-enrocamiento, con la información de la Figura 3.1.31. Además, aquí no sería correcto despreciar la fricción que existe en los cantos, como se hizo con Aguamilpa durante el proceso constructivo.

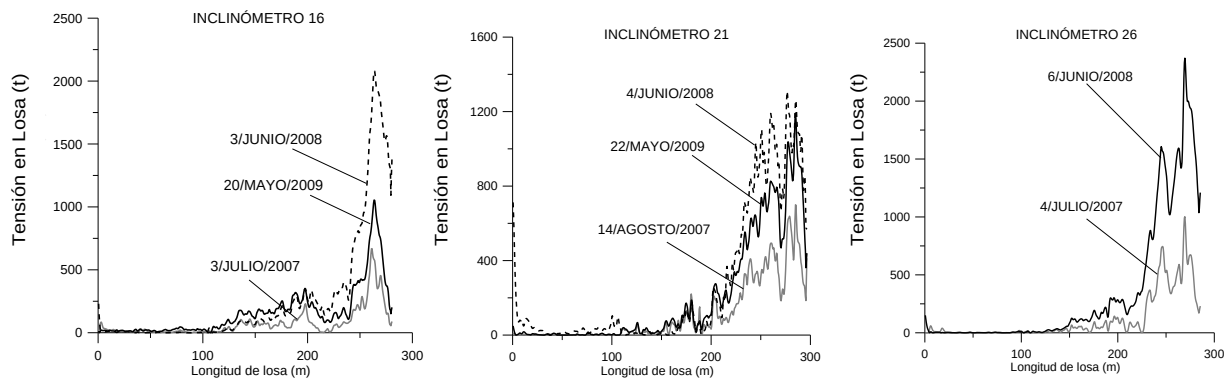


Figura 3.1.32.- Fuerzas axiales en las losas debidas a la tensión por alargamiento, de acuerdo a los armados y modelos constitutivos de acero y concreto

CAPÍTULO 4

COMPARACIÓN DE MODELOS ANALÍTICOS CONTRA LA INFORMACIÓN EXPERIMENTAL

En este capítulo se investiga el comportamiento de los modelos teóricos que se presentan en el capítulo 2, en comparación con la información experimental. Se pone especial atención a la información que se tiene de las dos grandes presas de enrocamiento con cara de concreto que se han construido en México; las presas de Aguamilpa y El Cajón, aunque también se realizan comparaciones de los modelos dinámicos con la información que se tiene de la presa El Infiernillo, y una pirámide que tienen instrumentación sísmica en la zona arqueológica de Monte Albán, Oaxaca.

Modelos Estáticos

4.1 ASENTAMIENTOS

Las características geométricas de la presa de Aguamilpa se presentan en la Figura 4.1.1. Esta estructura tiene 180 m de altura, con respaldos que siguen una pendiente 1.5:1 el de aguas arriba, y de 1.4:1 el de aguas abajo. La cara de concreto está formada por 44 tiras de concreto de 15 m de ancho y un espesor que sigue la relación $T=0.3+0.003H$ (donde T es el espesor de concreto y H la altura a partir de la corona de la presa), la información del proyecto puede consultarse por ejemplo en Montañez, 1991. En la Figura 4.1.1, se presentan dos perfiles sobre el eje de la cortina y perpendicular a éste. Como se puede observar, existe una clara asimetría del cañón que se debe tomar en cuenta en los modelos.

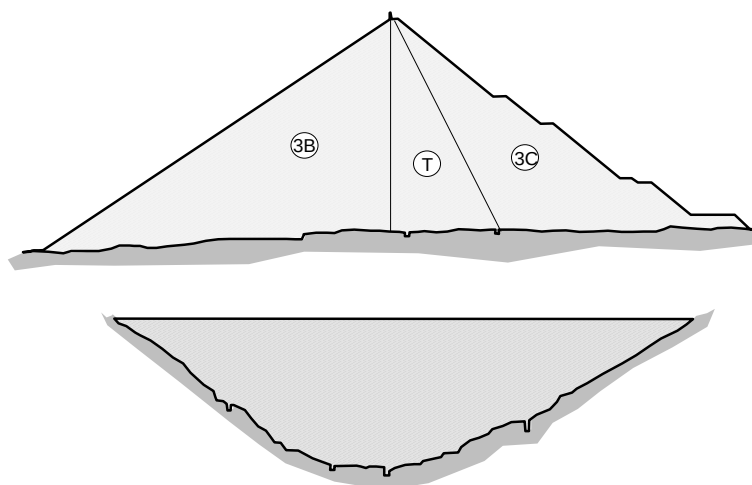


Figura 4.1.1- Perfiles sobre las secciones máximas de la presa de Aguamilpa. Arriba, es un corte en la dirección perpendicular al eje de la cortina, y abajo es un corte sobre el eje de la cortina

Adicionalmente, los materiales con los que se construyó el cuerpo de la presa son diferentes. El material 3B, que se indica en la Figura 4.1.1, es un aluvión compactado, el material T está compuesto de los materiales 3B o 3C, mientras que el material 3C es un enrocamiento formado de ignimbrita compactada. Estas diferencias de materiales tuvieron un efecto importante en la distribución de asentamientos durante la construcción, como se puede observar en la Figura 4.1.2, donde se presentan las curvas de igual asentamiento.

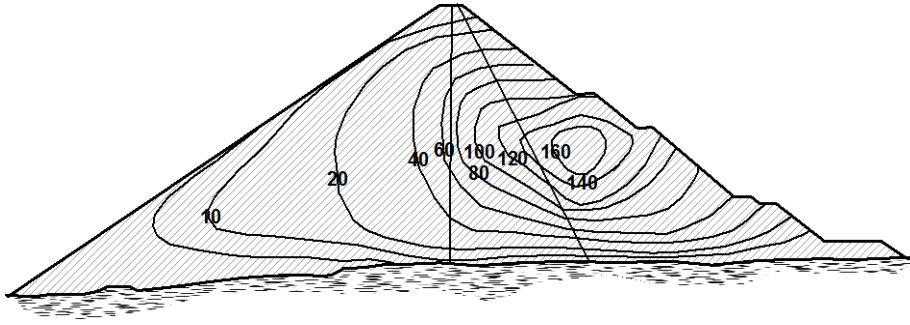


Figura 4.1.2.- Distribución de curvas de igual asentamiento durante la construcción de Aguamilpa. Los valores son en centímetros (tomado de Montañez, 1991).

Para tomar en cuenta la asimetría del cañón y la diferencia de pendientes en los respaldos de esta estructura, se modificó el modelo original como se ilustra en la Figura 4.1.3.

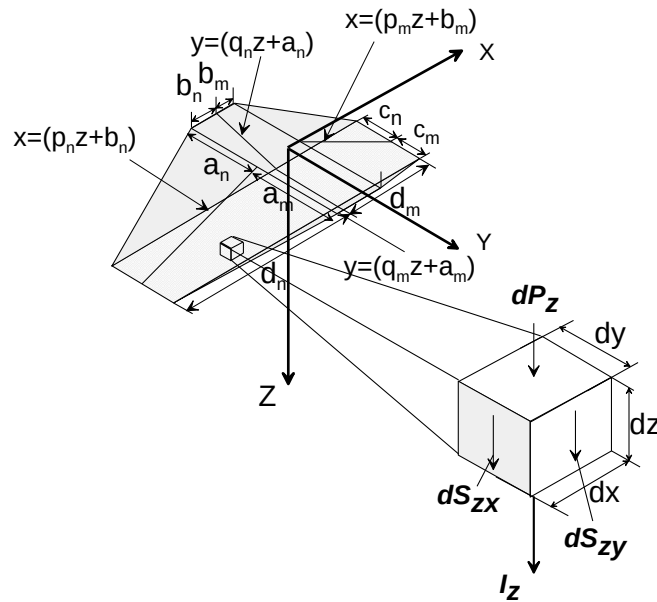


Figura 4.1.3. Geometría formada por dos trapecios asimétricos. Se presenta un elemento diferencial y las fuerzas verticales consideradas en el modelo.

El equilibrio del elemento diferencial, como en la sección 2.3.1, deberá cumplir con la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + V_p^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + V_s^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

Con lo que al separar las variables se llega a:

$$\frac{\Phi''_z}{\Phi_z} + \frac{V_s^2}{V_p^2} \left(\frac{\Phi''_x}{\Phi_x} + \frac{\Phi''_y}{\Phi_y} \right) + \frac{1}{V_p^2} \frac{\Phi''_t}{\Phi_t} = 0 \quad (4.1)$$

Con soluciones:

$$\Phi_x = A_x \cos(\omega_x x) + B_x \sin(\omega_x x)$$

$$\Phi_y = A_y \cos(\omega_y y) + B_y \sin(\omega_y y)$$

$$\Phi_t = A \cosh(\omega t) + B \sinh(\omega t)$$

Donde: $\omega, \omega_x, \omega_y$ son constantes de separación en la expresión (4.1)

Considerar la asimetría de los trapecios, únicamente requiere aplicar las condiciones de frontera en las variables de Z que definen dicha asimetría, pero como se verá, el resultado final conduce a una ecuación diferencial muy similar a la que se observa para el caso simétrico.

Si como en los casos bidimensionales y tridimensionales anteriores, se considera que las deformaciones en las fronteras libres de x no son nulas, sino proporcionales al coseno del ángulo de inclinación de las fronteras θ_1 y θ_2 , se tiene:

$$\begin{aligned} \omega_x (-A_x \sin(\omega_x (p_m z + b_m)) + B_x \cos(\omega_x (p_m z + b_m))) &= -\omega_x \cos \theta_2 \\ \omega_x (-A_x \sin(\omega_x (p_n z + b_n)) + B_x \cos(\omega_x (p_n z + b_n))) &= \omega_x \cos \theta_1 \end{aligned}$$

Se puede mostrar que de acuerdo a las condiciones de frontera anteriores, la solución es:

$$\Phi_x = \frac{\cos \theta_1 \cos \omega_x ((p_m z + b_m) - x) + \cos \theta_2 \cos \omega_x ((p_n z + b_n) - x)}{\sin \omega_x ((p_m z + b_m) - (p_n z + b_n))}$$

En los casos bidimensionales y tridimensionales antes presentados, como en éste, el parámetro ω_x no se requiere para resolver las condiciones de frontera planteadas, de modo que este valor puede ser definido como:

$$\omega_x = \frac{\alpha}{(p_m - p_n)z + (b_m - b_n)} = \frac{\alpha}{pz + b}; \quad p = p_m - p_n \quad b = b_m - b_n$$

Para fronteras fijas en la solución de y se puede demostrar que se llega a la siguiente solución:

$$\Phi_y = \sin(\omega_y (y - (q_m z + a_m))) \quad \omega_y = \frac{\pi}{(qz + a)}; \quad q = q_m - q_n; \quad a = a_m - a_n$$

El comportamiento geométrico de esta solución es interesante y se muestra en la Figura 4.1.4

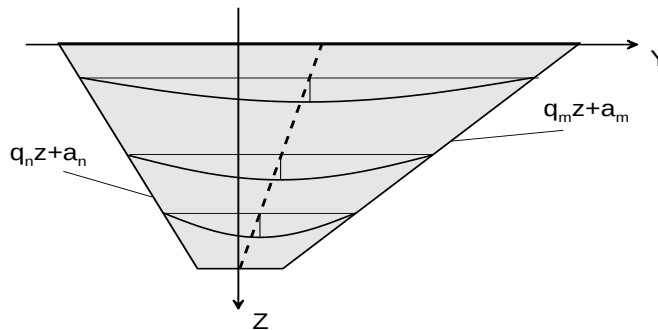


Figura 4.1.4.- Cumplimiento de las condiciones de frontera fijas para un trapecio asimétrico

Como se puede ver, la solución busca el punto medio del continuo en cada altura (valor de z), para cumplir con las condiciones de frontera en sus extremos.

La solución de la función de tiempo es, como en los casos anteriores:

$$\Phi t = \frac{g}{\omega^2} e^{-\omega x}$$

Finalmente, la ecuación diferencial resultante para la función de Z, es la siguiente:

$$\Phi''z + \left(\frac{\omega^2}{V_p^2} - \frac{V_s^2}{V_p^2} (\omega_x^2 - \omega_y^2) \right) \Phi z = \Phi''z + \left(\frac{\omega^2}{V_s^2} - \frac{C_{kx}^2}{(pz+b)^2} - \frac{C_{ly}^2}{(qz+a)^2} \right) \Phi z = 0$$

$$C_{kx}^2 = \frac{V_s^2}{V_p^2} \omega_x^2; \quad C_{ly}^2 = \frac{V_s^2}{V_p^2} \omega_y^2$$

Los trapecios que se proponen para modelar la geometría de Aguamilpa, se presentan en la Figura 4.1.5

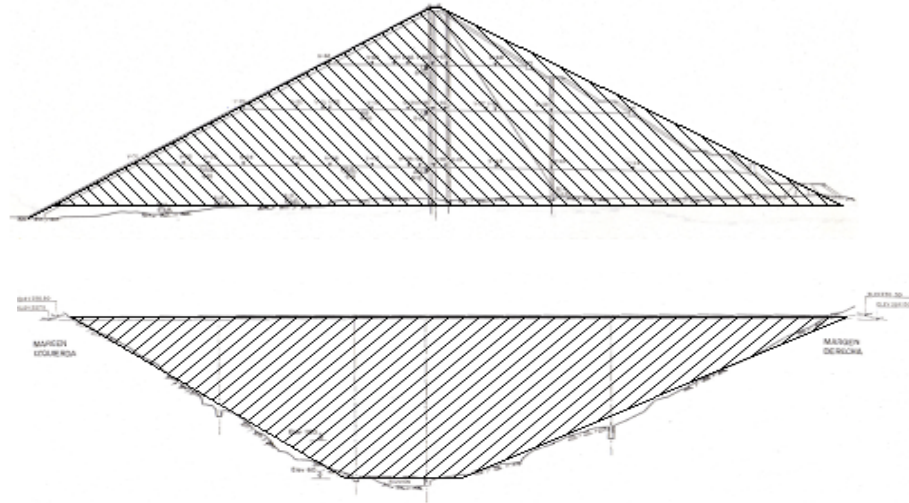


Figura 4.1.5.- Modelación de Aguamilpa con trapecios asimétricos

En la siguiente Figura se presentan las curvas de igual asentamiento, al variar uno de los respaldos de la cuña, mientras que todos los demás parámetros se mantienen iguales.

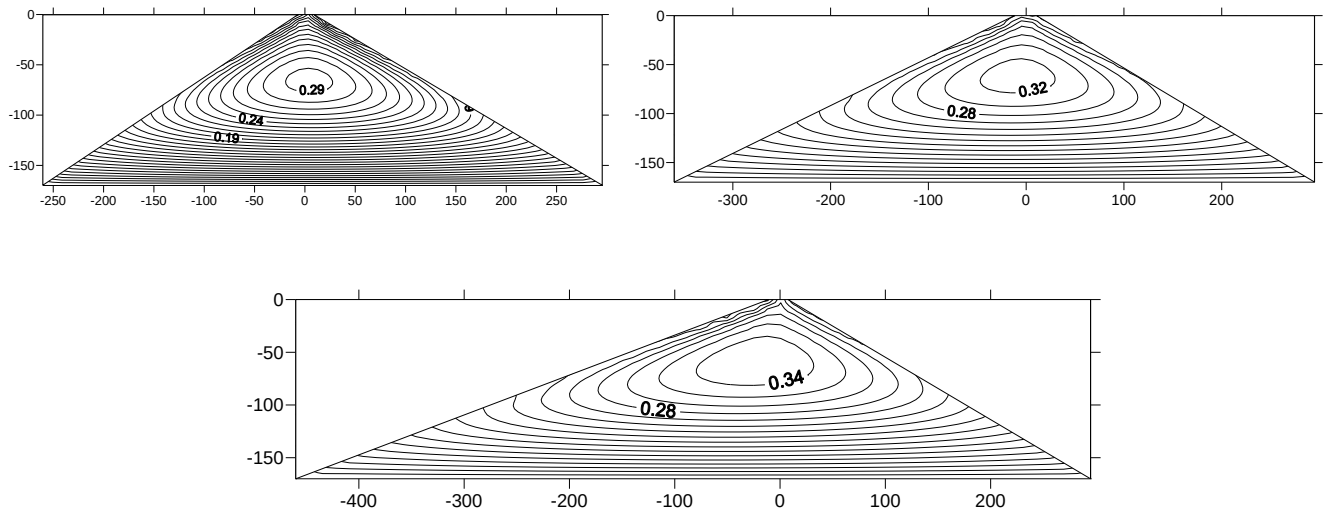


Figura 4.1.6.- Distribución de curvas de igual asentamiento, al variar una de las pendientes del respaldo

La Figura 4.1.6, muestra que al variar una de las pendientes de las fronteras laterales, el modelo propuesto genera cierta asimetría en la distribución de asentamientos.

Por otro lado, para tomar en consideración diferencias de los materiales en la estructura se propone modelar el problema mediante dos elementos. En realidad el planteamiento que se presenta a continuación es un bosquejo de como se podría atacar el problema, sin embargo, se requiere una mayor investigación. En la Figura 4.1.7 se plantean dos elementos separados por una frontera vertical, de manera que se deberá cumplir continuidad de desplazamientos y deformaciones entre los dos elementos.

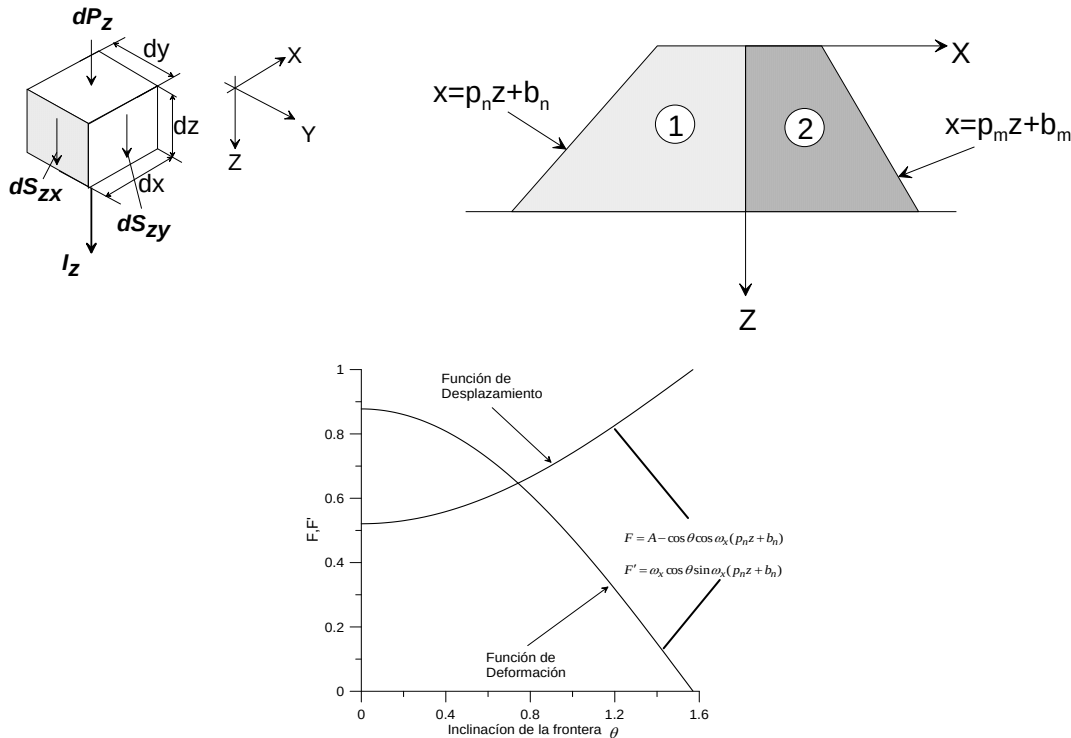


Figura 4.1.7.- Problema tridimensional para dos elementos separados por una frontera vertical (arriba). Posibles funciones de variación del desplazamiento y deformación en las fronteras laterales (abajo).

El elemento diferencial de la Figura 4.1.7, muestra que el esfuerzo S_{zx} es el que deberá observar continuidad entre los elementos 1 y 2, los cuales tendrán diferencias en sus módulos de rigidez a cortante. Por lo tanto, se aceptará que la solución de desplazamiento de los dos elementos está dada por:

$$w = \Phi_x \Phi_y \Phi_z \Phi_t \text{ para el elemento 1}$$

$$w = \Psi_x \Phi_y \Psi_z \Phi_t \text{ para el elemento 2}$$

Es decir, se considera que solamente son diferentes las soluciones Φ_x y Ψ_x , de las variables separadas. Ello implica que las constantes de separación $\omega, \omega_y, \omega_z$ son iguales. Por tanto, se tienen las siguientes dos ecuaciones de equilibrio para los elementos:

$$\frac{\Phi''_z}{\Phi_z} + \frac{V_{S1}^2}{V_P^2} \left(\frac{\Phi''_x}{\Phi_x} + \frac{\Phi''_y}{\Phi_y} \right) + \frac{1}{V_P^2} \frac{\Phi''_t}{\Phi_t} = 0 \quad \text{para el elemento 1} \quad (4.2)$$

$$\frac{\Phi''_z}{\Phi_z} + \frac{V_{S2}^2}{V_p^2} \left(\frac{\Psi''_x}{\Psi_x} + \frac{\Phi''_y}{\Phi_y} \right) + \frac{1}{V_p^2} \frac{\Phi t''}{\Phi t} = 0 \quad \text{para el elemento 2} \quad (4.3)$$

Al usar las constantes de separación, e igualar las dos expresiones anteriores, se llega a:

$$\omega_x^2 = \frac{V_{S2}^2}{V_{S1}^2} (\omega_x^2 + \omega_y^2) - \omega_y^2 = \frac{G_2}{G_1} (\omega_x^2 + \omega_y^2) - \omega_y^2 \quad (4.4)$$

Para que la constante de separación ω_x sea real, se requiere que el miembro derecho de la expresión (4.4) sea positivo, lo que implica la siguiente condición: $\omega_x^2 \geq \left(\frac{G_1}{G_2} - 1 \right) \omega_y^2$

Donde:

G_1 y G_2 , son los módulos de rigidez a cortante de los elementos 1 y 2, respectivamente.

$$\frac{\Phi''_x}{\Phi_x} = -\omega_x^2$$

$$\frac{\Psi''_x}{\Psi_x} = -\omega_x^2$$

Note que el caso particular en que $\omega_x^2 = \left(\frac{G_1}{G_2} - 1 \right) \omega_y^2 \Rightarrow \omega_x = 0$

Se requiere continuidad de esfuerzos y desplazamientos en $x=0$, que es la frontera entre los dos elementos, es decir:

Si: $\Phi_x = A \cos(\omega_x x) + B \sin(\omega_x x)$, para el primer elemento

y: $\Psi_x = \bar{A} \cos(\omega_x x) + \bar{B} \sin(\omega_x x)$, para el segundo elemento

La igualdad de desplazamientos en $x=0$, da:

$$\bar{A} = A \quad (4.5)$$

Y la igualdad de esfuerzos en $x=0$, da:

$$B = \frac{G_1 \omega_x}{G_2 \omega_x} \bar{B} \quad (4.6)$$

Si θ_1 es la inclinación de la frontera lateral del elemento 1 y se aceptan esfuerzos proporcionales a esta inclinación multiplicados por la solución anti simétrica de esta solución en la frontera $x = p_n z + b_n$, es decir:

$G_1 \Phi'_x|_{x=p_n z + b_n} = G_1 \omega_x \cos \theta_1 \sin(\omega_x (p_n z + b_n))$. Si se integra la expresión anterior, los desplazamientos en esta

misma frontera serían proporcionales a $\Phi_x|_{x=p_n z + b_n} = A - \cos \theta_1 \cos(\omega_x (p_n z + b_n))$. Si $A=1$, las funciones de deformación se presentan en la Figura 4.1.7. Note en estas funciones, que para una frontera vertical la deformación (F') sería cero, ya que el elemento diferencial coincide con la frontera lateral; y los desplazamientos serían unitarios (F). En cambio si el ángulo de inclinación fuese cero, entonces se

incrementarían las deformaciones y se reducirían los desplazamientos, pero estos no llegarían a cero porque la frontera no es fija. Esta solución da por resultado para las constantes del primer elemento:

$$A = \cos(\omega_x(p_n z + b_n)) - \cos\theta_1$$

$$B = \sin(\omega_x(p_n z + b_n))$$

Las constantes de la solución del segundo elemento, ya están determinadas por la continuidad definida en las ecuaciones (4.5) y (4.6). Si se acepta que la deformación en la frontera lateral del segundo elemento es su solución anti simétrica, entonces se debe cumplir que:

$$G_2 \Phi'_x|_{x=p_m z + b_m} = G_2 \varpi_x \cos\theta_2 \sin(\varpi_x(p_m z + b_m))$$

Como ya están determinadas las constantes de la segunda solución Ψ_x , para cumplir con esta condición lo que queda es resolver la siguiente ecuación característica:

$$G_2 \varpi_x \sin(\varpi_x(p_m z + b_m)) \cos(\omega_x(p_n z + b_n)) + G_2 \varpi_x \cos(\theta_1) \sin(\varpi_x(p_m z + b_m)) \\ - G_1 \omega_x \sin(\omega_x(p_n z + b_n)) \cos(\varpi_x(p_m z + b_m)) + G_2 \varpi_x \cos(\theta_2) \sin(\varpi_x(p_m z + b_m)) = 0$$

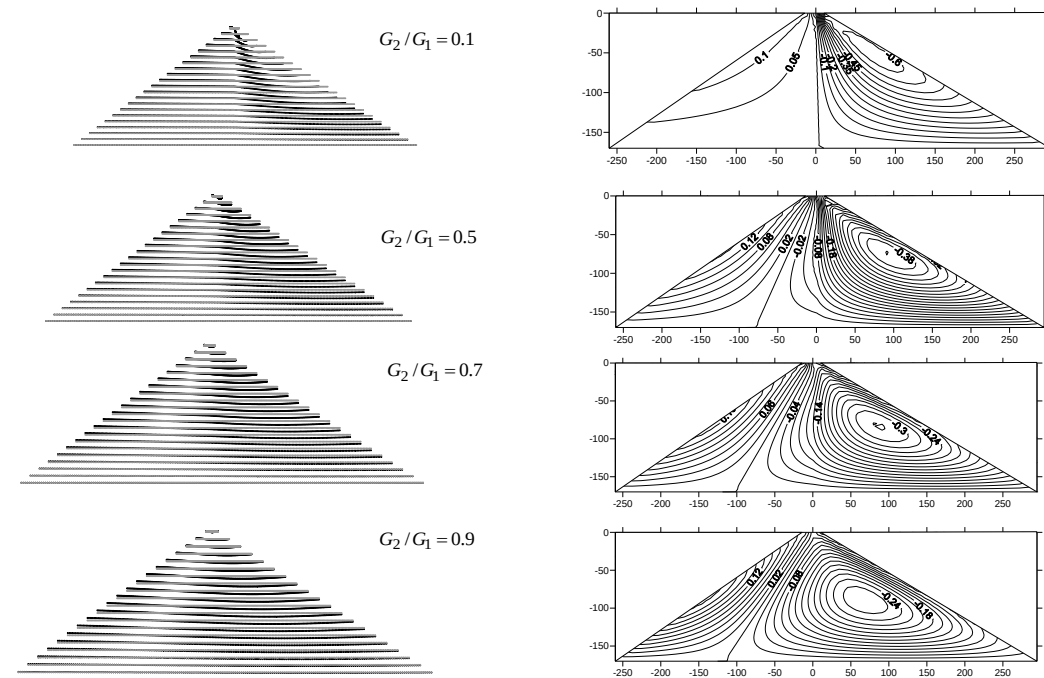


Figura 4.1.8.- Asentamientos para diferentes valores de la rigidez a cortante de los dos elementos

Note en la Figura 4.1.8, como el elemento menos rígido tiende desplazarse en sentido contrario a la fuerza de gravedad, en la frontera lateral. Sin embargo, los materiales granulares que constituyen las presas de enrocamiento, carecen de resistencia a tensión de modo que si la tendencia del elemento menos rígido fuera la que indica el modelo presentado, los desplazamientos en la frontera lateral derecha sería próxima acero.

Si en cambio proponemos que la deformación fuese proporcional al coseno de la inclinación de la frontera del primer elemento y el desplazamiento proporcional al seno de esta misma inclinación el modelo tomaría las siguientes características:

$$\Phi x = \sin(\omega_x (x - (p_n z + b_n)) + \theta_1)$$

Ya que:

$$\begin{aligned} A &= \sin(\theta_1 - \omega_x (p_n z + b_n)) \\ B &= \cos(\theta_1 - \omega_x (p_n z + b_n)) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por lo tanto, la solución sobre el segundo elemento es:

$$\Psi x = \bar{A} \cos \bar{\omega}_x x + \bar{B} \sin \bar{\omega}_x x$$

Donde $\bar{A}, \bar{B}$ se obtienen de (4.5) y (4.6). Finalmente, si se acepta que el esfuerzo en $x = p_m z + b_m$ es proporcional a la inclinación de la cara libre del segundo elemento, entonces: $G_2 \Psi' x|_{x=p_m z + b_m} = -G_2 \bar{\omega}_x \cos \theta_2$, donde θ_2 es la inclinación de la frontera del elemento 2. Esta última condición, y dado que las constantes $\bar{A}$ y $\bar{B}$, ya se encuentran determinadas, se deberá cumplir con la siguiente ecuación característica:

$$-\bar{A} \sin \bar{\omega}_x (p_m z + b_m) + \bar{B} \cos \bar{\omega}_x (p_m z + b_m) + \cos \theta_2 = 0 \quad (4.8)$$

La solución de la función de y para el caso de fronteras fijas es:

$$\Phi_y = \sin(\omega_y (y - (q_m z + a_m))) \quad \omega_y = \frac{\pi}{(qz + a)}; \quad q = q_m - q_n; \quad a = a_m - a_n \quad (4.9)$$

La solución de la función de t es:

$$\Phi t = \frac{g}{\omega^2} e^{-\omega t}$$

La ecuación que se requiere resolver para la función de z , al usar la igualdad de la expresión (4.4), es:

$$\Phi'' z + \left(\frac{\omega^2}{V_p^2} - \frac{V_{s1}^2 G_2}{V_p^2 G_1} \left(\frac{\alpha_0^2}{(z + \beta_0)^2} + \frac{\pi^2}{q^2 (z + a_0)^2} \right) \right) \Phi z = 0$$

El procedimiento de cálculo, al igual que el primer planteamiento es el siguiente:

- Se propone $\bar{\omega}_x$
- Usando (4.9) y (4.4) se determinan ω_x, ω_y
- Se determinan las constantes $A, B, \bar{A}, \bar{B}$ mediante (4.5), (4.6) y (4.7)
- Se evalúa (4.8). Si el valor propuesto de $\bar{\omega}_x$ no cumple con (4.8), se cambia el valor de $\bar{\omega}_x$ y se repiten los tres pasos anteriores, hasta que (4.8) se cumpla. Esto se hace para todos los valores de z .

Se observó que los valores de $\bar{\omega}_x$ y ω_x , resultado de resolver la ecuación característica (4.8), pueden ser aproximados en función de Z , mediante las siguientes expresiones:

$$\omega_x = \frac{\alpha_0}{z + \beta_0} \text{ y } \bar{\omega}_x = \frac{\alpha_1}{z + \beta_1}$$

La siguiente figura, presenta los resultados de asentamiento, al variar la relación de módulos de rigidez a cortante de los dos elementos, junto con las elásticas que se generan de la solución del problema.

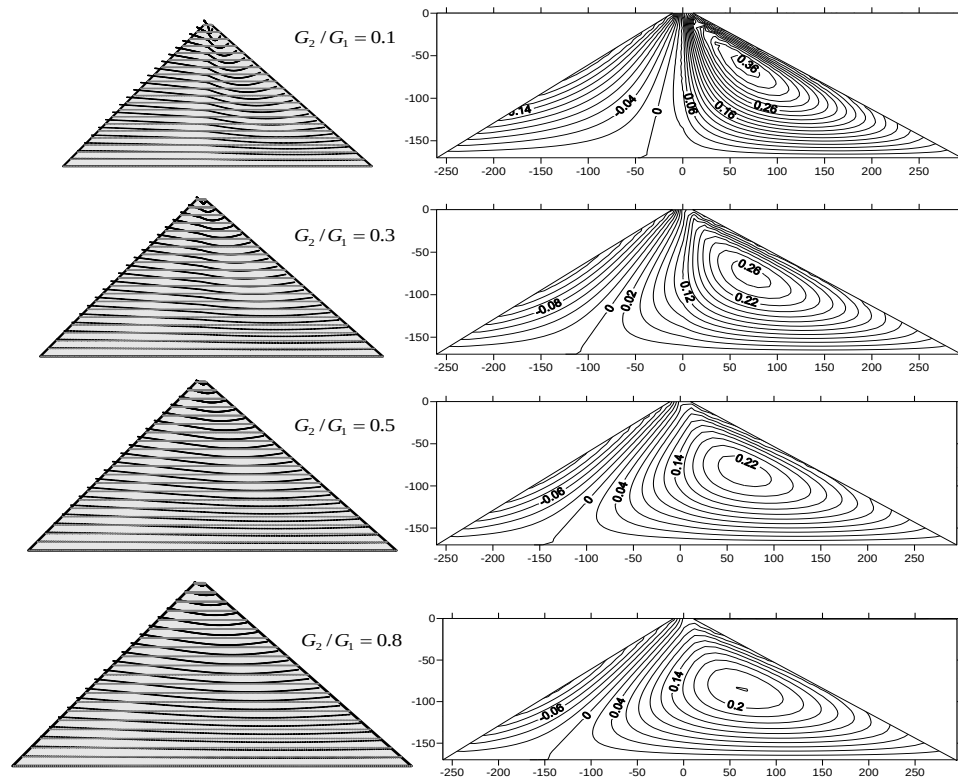


Figura 4.1.8'.- Comportamiento de la elástica y valores de asentamiento, para un continuo formado por dos elementos de diferente módulo de rigidez a cortante, ante el problema de peso propio.

En el ejercicio anterior, note como el contraste entre los módulos de rigidez a cortante incrementa o reduce la continuidad de desplazamientos en la frontera de los elementos. También este contraste muestra claramente el efecto de la asimetría del asentamiento. Se observa que esta asimetría, generada por la diferencia de rigideces, tiende a producir movimientos contrarios al sentido de la gravedad en la frontera libre del elemento 1, tal como ocurrió en el caso anterior. Particularmente si es muy alto el contraste de rigideces. Como se dijo, es posible que esta tendencia no se cumpla para un material granular cuya resistencia a tensión es sumamente baja o nula.

Se plantea a continuación que la frontera lateral del elemento 1 cumpla con asentamientos proporcionales a $\alpha \sin \theta_1$, por lo que solamente se modifican las siguientes dos constantes:

$$A = \sin \theta_1 \cos \omega_x (p_n z + b_n) - \cos \theta_1 \sin \omega_x (p_n z + b_n)$$

$$B = \cos \theta_1 \cos \omega_x (p_n z + b_n) + \sin \theta_1 \sin \omega_x (p_n z + b_n)$$

El efecto de éste parámetro se ilustra en la Figura 4.1.9

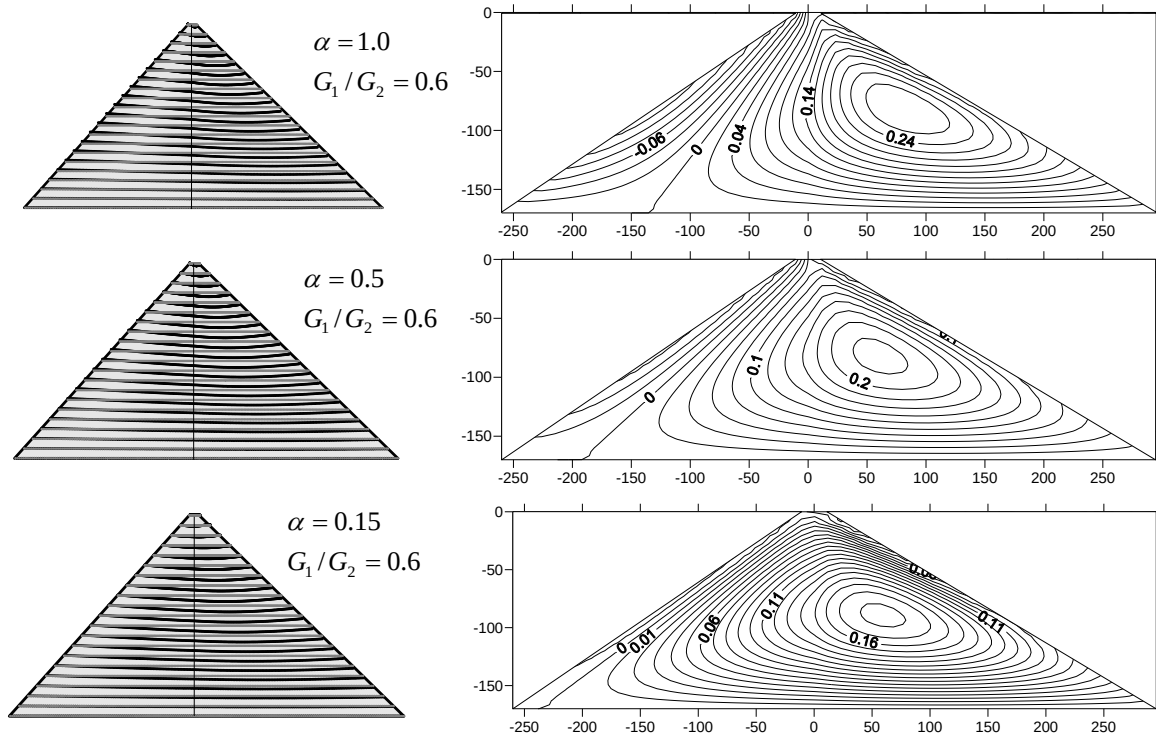


Figura 4.1.9.- Comportamiento de la elástica y valores de asentamiento, para un continuo formado por dos elementos de diferente módulo de rigidez a cortante, ante el problema de peso propio y al variar el valor del esfuerzo en una frontera del continuo como función del parámetro α .

La Figura 4.1.9 muestra que en la medida que el parámetro α tiende a cero, los asentamientos en la frontera libre del elemento 1 se aproximan a cero.

Si en lugar de considerar una frontera vertical como se indicó en la Figura 4.1.7, se propone una frontera inclinada como se indica en la Figura 4.1.10, se presenta a continuación una solución simplificada, ya que la inclinación de esta frontera genera dos componentes de esfuerzo, como se a mostrados con los casos de las fronteras laterales libres. A continuación se presenta un planteamiento simplificado, que puede dar pauta a otras soluciones. La simplificación considera que la continuidad de esfuerzos y desplazamientos deberá cumplirse solamente para la componente de x , tal como en el caso vertical. Esta simplificación implica que las constantes del segundo elemento $\bar{A}, \bar{B}$ deberán cumplir con la siguiente igualdad.

$$\bar{B} = \frac{G_1 \omega_x}{G_2 \bar{\omega}_x} (B \cos \omega_x x_i - A \sin \omega_x x_i) \cos \bar{\omega}_x x_i + (A \cos \omega_x x_i + B \sin \omega_x x_i) \sin \bar{\omega}_x x_i$$

$$\bar{A} = (A \cos \omega_x x_i + B \sin \omega_x x_i - B \sin \varpi_x x_i) / \cos \varpi_x x_i$$

$$x_i = (p_i z + b_i)$$

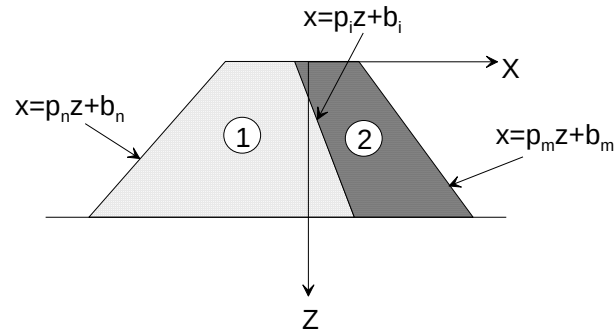


Figura 4.1.10.- Solución de dos elementos separados por la frontera $x = p_i z + b_i$

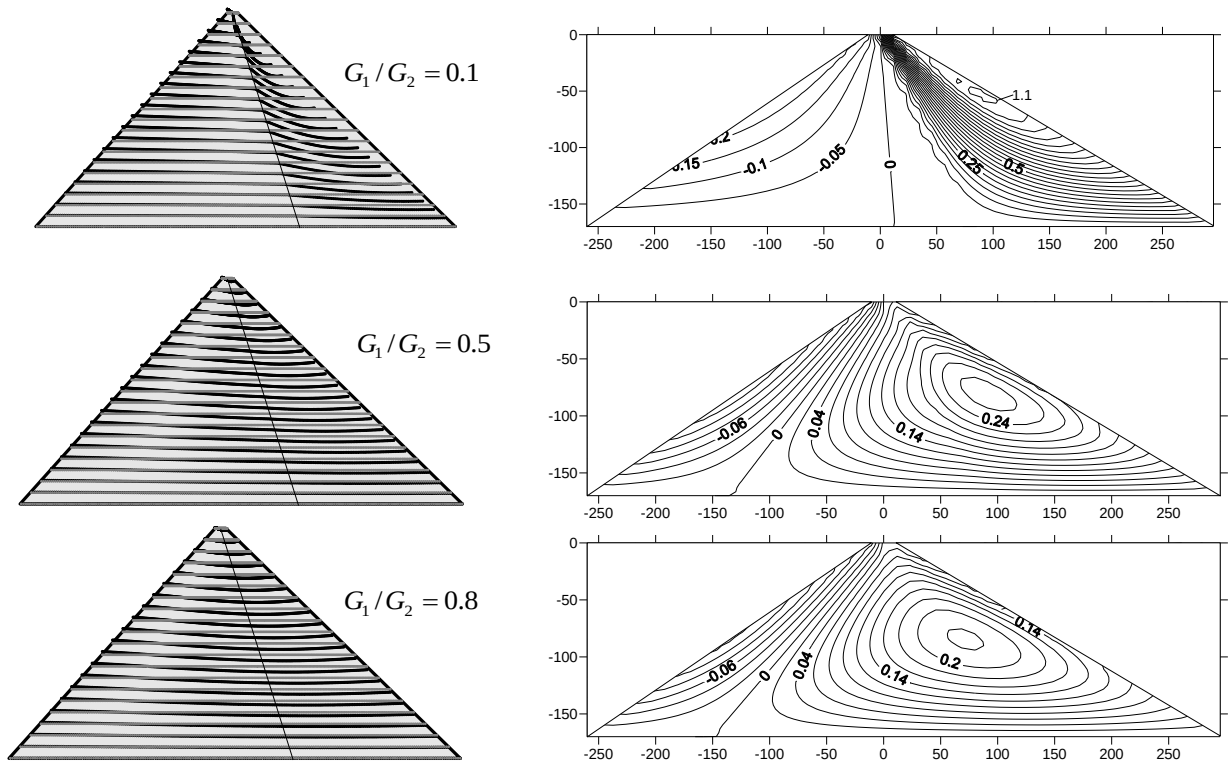


Figura 4.1.11.- Elásticas y curvas de igual asentamiento para dos elementos con una frontera inclinada, al variar los módulos de rigidez a cortante como se indica.

Nuevamente se considera el caso en que los desplazamientos en la frontera del elemento 1 son proporcionales al parámetro α , por el seno de la inclinación de esta frontera. Este caso se presenta en la Figura 4.1.12, en comparación con la Figura 4.1.11 en donde $\alpha = 1$

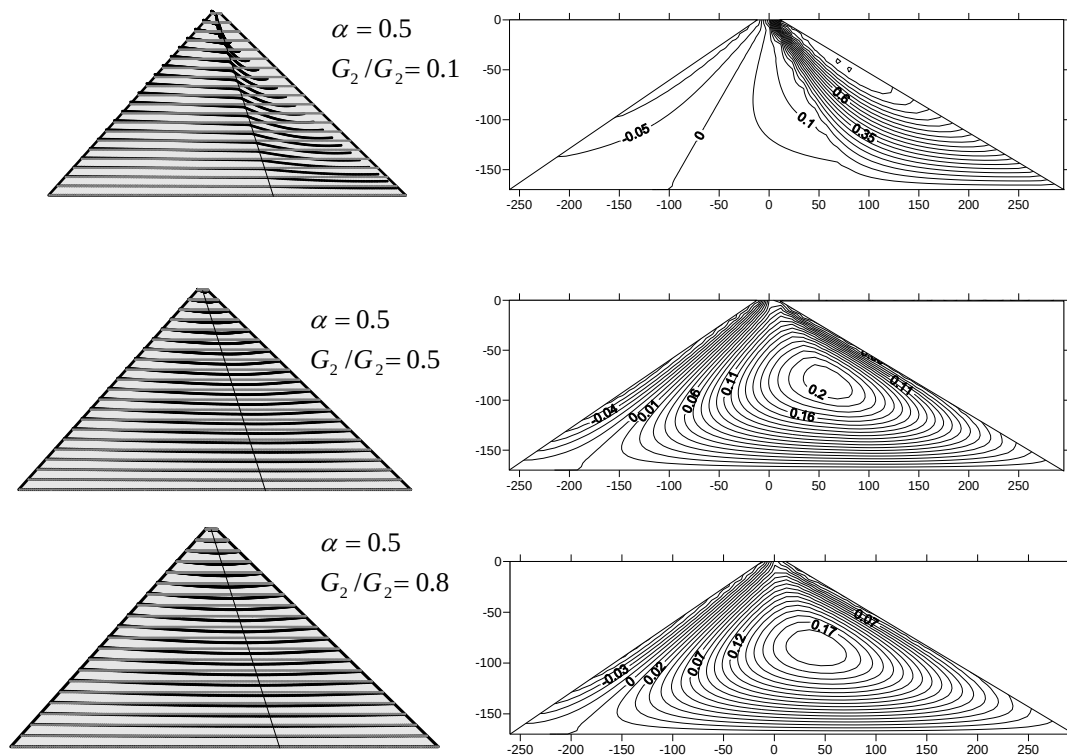


Figura 4.1.12.- Elásticas y curvas de igual asentamiento para dos elementos con una frontera inclinada, al variar los módulos de rigidez a cortante como se indica y considerar un factor α en las condiciones de la frontera lateral del elemento 1.

En general, el orden de los asentamientos obtenidos en los casos presentados, es 20 a 30 cm. Todos los ejemplos consideraron los siguientes valores de rigidez axial y de rigidez a cortante: $V_p=350$ m/s y $V_s=200$ m/s. Las observaciones experimentales en Aguamilpa indican asentamientos hasta de 170 cm, como se ilustra en la Figura 4.1.2. Al variar los parámetros de rigidez axial y a cortante del modelos a los valores de $V_p=110$ m/s y a $V_s=75$ m/s, respectivamente, y usando contraste de rigedeces a cortante de 0.6 para el segundo elemento con respecto al primero, se obtienen los resultados de la Figura 4.1.13, que es una aproximación razonable a los valores observados en la Figura 4.1.2. Se usó un valor de $\alpha = 0.15$

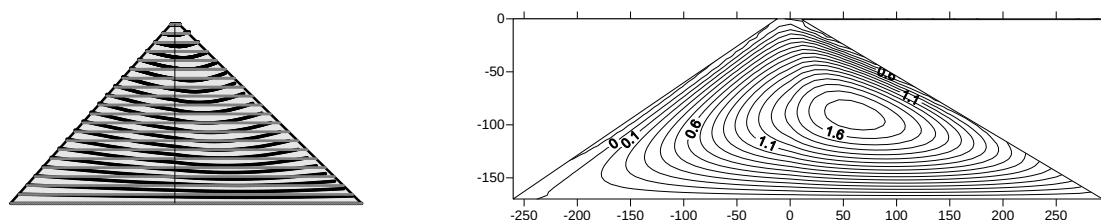


Figura 4.1.13.- Aproximación a los valores de asentamiento observados en Aguamilpa mediante la variación de los parámetros V_p y V_s , los valores utilizados fueron: $V_p=110$ m/s y $V_s=75$ m/s.

Para los asentamientos debidos al llenado del embalse, se puede proceder de manera análoga al caso anterior, con algunas diferencias menores. Como se planteó en el Capítulo 2, el modelo tridimensional considera dos fuerzas cortantes y una axial, todas en la dirección vertical, para resolver la acción de la carga de agua en un costado de la estructura, como se indica en la Figura 4.1.14.

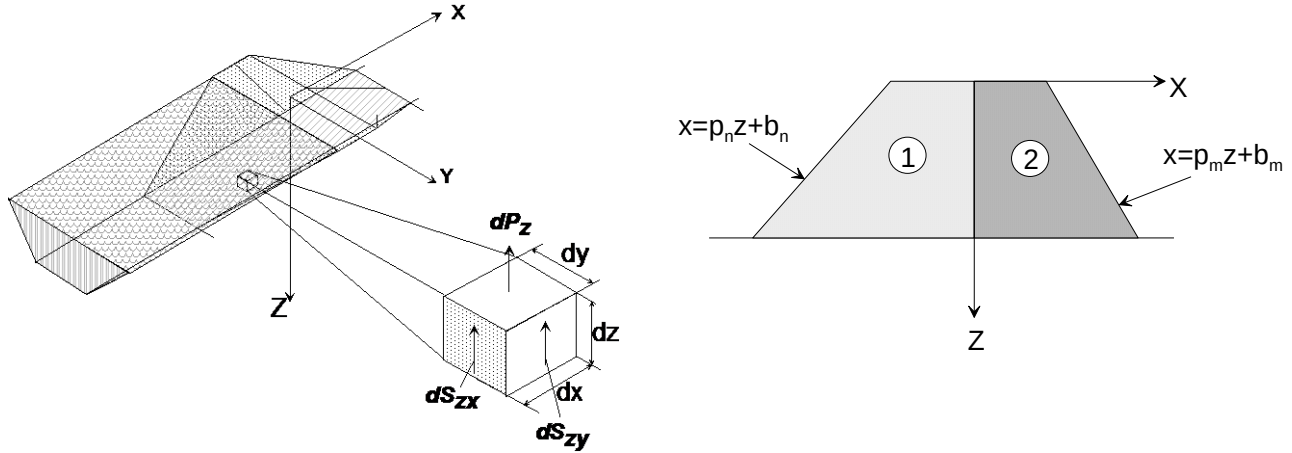


Figura 4.1.14.- Modelo tridimensional para carga de agua en dirección vertical

Entonces, las ecuaciones de equilibrio de los dos elementos deberán cumplir con la siguiente ecuación diferencial:

$$E \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

Si los desplazamientos para los dos elementos quedan definidos por:

$$w = \Phi_x \Phi_y \Phi_z \quad \text{Para el elemento 1}$$

$$w = \Psi_x \Phi_y \Phi_z \quad \text{Para el elemento 2}$$

Al asumir que las soluciones de x son de tipo hiperbólico y las de y son en términos de senos y cosenos; y usando las constantes de separación ω_z , ω_x y ω_y , se tiene para las dos ecuaciones de equilibrio:

$$E \omega_z^2 + G_1 (\omega_x^2 - \omega_y^2) = 0 \quad \text{Para el elemento 1}$$

$$E \omega_z^2 + G_2 (\omega_x^2 - \omega_y^2) = 0 \quad \text{Para el elemento 2}$$

Al igualar las dos expresiones anteriores, se tiene:

$$\omega_x^2 = \frac{G_2}{G_1} (\omega_x^2 - \omega_y^2) + \omega_y^2 \quad (4.9)$$

Para que ω_x sea real en la expresión (4.9), se requiere que: $\omega_x^2 > \left(1 - \frac{G_1}{G_2}\right) \omega_y^2$

Si las soluciones para las funciones de x son:

$$\Phi_x = A \cosh(\omega_x x) + B \sinh(\omega_x x)$$

$$\Psi_x = \bar{A} \cosh(\bar{\omega}_x x) + \bar{B} \sinh(\bar{\omega}_x x)$$

La continuidad de desplazamientos y deformaciones en $x=0$ requiere, como en el caso anterior, que:

$$\bar{A} = A \quad \text{y} \quad \bar{B} = \frac{G_1 \omega_x}{G_2 \bar{\omega}_x} B$$

Si la carga de agua se encuentra en: $x = p_n z + b_n$, se deberá cumplir la siguiente condición:

$$G_1 \Phi'_x = \rho_H g z$$

Lo que lleva a:

$$\Phi_x = \frac{\rho_H g z}{G_1 \omega_x \cosh(\omega_x (p_n z + b_n))} \sinh(\omega_x x) + A \frac{\cosh(\omega_x (x - (p_n z + b_n)))}{\cosh(\omega_x (p_n z + b_n))}$$

Puesto que:

$$B = \frac{\frac{\rho_H g z}{G_1 \omega_x} - A \sinh(\omega_x (p_n z + b_n))}{\cosh(\omega_x (p_n z + b_n))}$$

Finalmente, considérense esfuerzos nulos en la frontera $x = p_m z + b_m$ del elemento 2, lo que conduce a:

$$A = - \frac{\rho_H g z \cosh(\bar{\omega}_x (p_m z + b_m))}{G_2 \bar{\omega}_x \sinh(\bar{\omega}_x (p_m z + b_m)) \cosh(\omega_x (p_n z + b_n)) - G_1 \omega_x \sinh(\omega_x (p_n z + b_n)) \cosh(\bar{\omega}_x (p_m z + b_m))}$$

La solución de la función de y para el caso de fronteras fijas es:

$$\Phi_y = \sin(\omega_y (y - (q_m z + a_m))) \quad \omega_y = \frac{\pi}{(qz + a)}; \quad q = q_m - q_n; \quad a = a_m - a_n$$

Solamente restaría determinar la ecuación diferencial resultante para z , que está dada por:

$$\Phi''_z + \left(\frac{G_2}{E} \omega_x^2 - \frac{C_{ly}^2}{(z + a_0)^2} \right) \Phi_z = 0, \quad C_{ly} = \left(\frac{\pi G_2}{qE} \right) \quad (4.10)$$

En la Figura 4.1.15, se muestra la distribución de asentamientos para tres contrastes de los módulos de rigidez a cortante de los dos elementos.

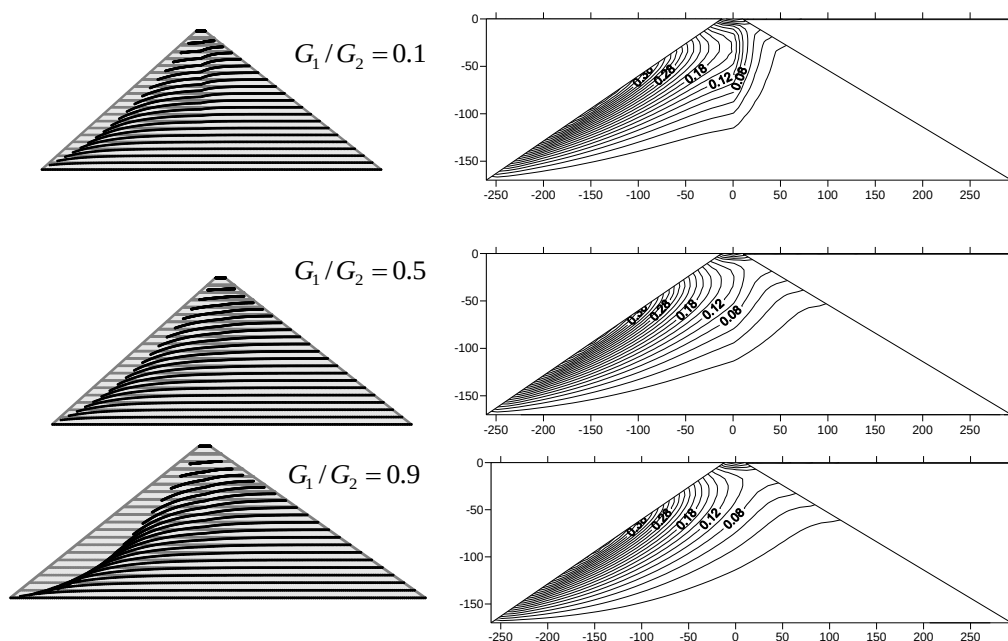


Figura 4.1.15.- Distribución de asentamientos para el problema de la carga de agua ante tres diferentes contrastes de la relación del módulo de rigidez que tienen los elementos.

Las mediciones de asentamientos reportadas por González Valencia 1994, para la presa de Aguamilpa después del llenado del embalse, son muy peculiares y se presentan en la Figura 4.1.16. Se incluyen las mediciones ya presentadas de asentamientos que se observaron durante la construcción. Observé en particular el punto de máximo asentamiento en 170 cm durante la construcción y de solo 15 cm después del llenado. Este punto tuvo que ascender del orden de 145 cm por la acción vertical del agua en la cara de concreto. Esta misma Figura sugiere que la única parte que en realidad se asentó después del llenado, fue la corona de la sección. El trabajo de González Valencia, 1994, no indica mayor explicación que la que aparece al pie de la figura, por lo que no se pudo validar el modelo de llenado del embalse con la información experimental.

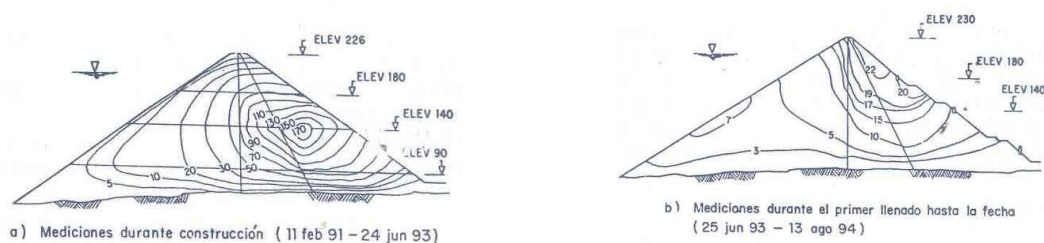


Figura 4.1.16.- Asentamientos después del primer llenado y durante las construcción en la presa de Aguamilpa.

Para observar el comportamiento del empuje horizontal del agua, al considerar un continuo constituido por dos materiales, separados por una frontera vertical, se procede de manera análoga al caso anterior. La Figura 4.1.17 presenta el modelo

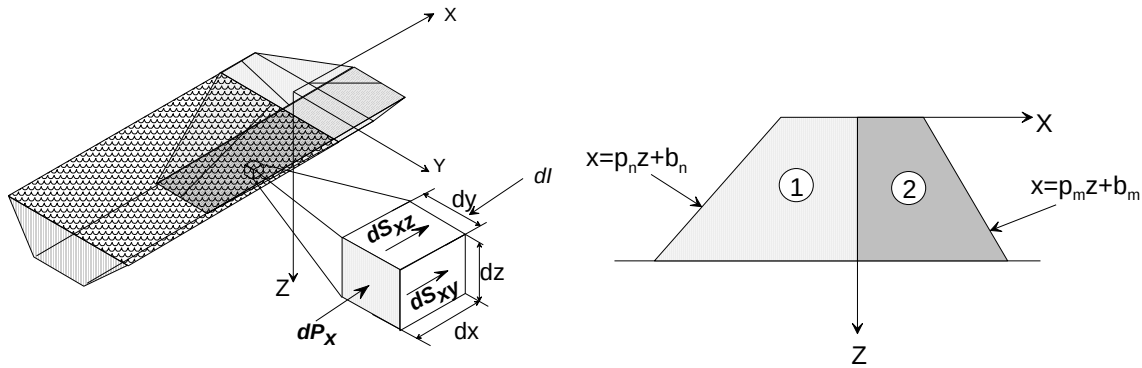


Figura 4.1.17.- Modelo tridimensional para carga de agua en dirección horizontal

Entonces, las ecuaciones de equilibrio de los dos elementos deberán cumplir con la siguiente ecuación diferencial:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

Si los desplazamientos para los dos elementos quedan definidos por:

$$w = \Phi_x \Phi_y \Phi_z \quad \text{Para el elemento 1}$$

$$w = \Psi_x \Phi_y \Phi_z \quad \text{Para el elemento 2}$$

Al asumir que las soluciones de x son de tipo hiperbólico y las de y son en términos de senos y cosenos; y usando las constantes de separación ω_z , ω_x y ω_y , se tiene para las dos ecuaciones de equilibrio:

$$\frac{\Phi''_z}{\Phi_z} + \frac{E_1}{G} \omega_x^2 - \omega_y^2 = 0 \quad \text{Para el elemento 1}$$

$$\frac{\Phi''_z}{\Phi_z} + \frac{E_2}{G} \omega_x^2 - \omega_y^2 = 0 \quad \text{Para el elemento 2}$$

Al igualar las dos expresiones anteriores, se tiene:

$$\omega_x^2 = \frac{E_2}{E_1} \omega_x^2$$

Si las soluciones para las funciones de x son:

$$\Phi_x = A \cosh(\omega_x x) + B \sinh(\omega_x x)$$

$$\Psi_x = \bar{A} \cosh(\bar{\omega}_x x) + \bar{B} \sinh(\bar{\omega}_x x)$$

La continuidad de desplazamientos y deformaciones en $x=0$ requiere, como en el caso anterior, que:

$$\bar{A} = A \quad \text{y} \quad \bar{B} = \frac{E_1 \omega_x}{E_2 \bar{\omega}_x} B$$

Si la carga de agua se encuentra en: $x = p_n z + b_n$, se deberá cumplir la siguiente condición:

$$E_1 \Phi'_x = \rho_H g z$$

Lo que lleva a:

$$\Phi_x = \frac{\rho_H g z}{E_1 \omega_x \cosh(\omega_x (p_n z + b_n))} \sinh(\omega_x x) + A \frac{\cosh(\omega_x (x - (p_n z + b_n)))}{\cosh(\omega_x (p_n z + b_n))}$$

Puesto que:

$$B = \frac{\frac{\rho_H g z}{E_1 \omega_x} - A \sinh(\omega_x (p_n z + b_n))}{\cosh(\omega_x (p_n z + b_n))}$$

Finalmente, considérense esfuerzos nulos en la frontera $x = p_m z + b_m$ del elemento 2, lo que conduce a:

$$A = - \frac{\rho_H g z \cosh(\omega_x (p_m z + b_m))}{E_2 \omega_x \sinh(\omega_x (p_m z + b_m)) \cosh(\omega_x (p_n z + b_n)) - E_1 \omega_x \sinh(\omega_x (p_n z + b_n)) \cosh(\omega_x (p_m z + b_m))}$$

La solución de la función de y para el caso de fronteras fijas es:

$$\Phi_y = \sin(\omega_y (y - (q_m z + a_m))) \quad \omega_y = \frac{\pi}{(qz + a)}; \quad q = q_m - q_n; \quad a = a_m - a_n$$

Solamente restaría determinar la ecuación diferencial resultante para z , que está dada por:

$$\Phi''_z + \left(\frac{E_2}{G} \omega_x^2 - \frac{C_{ly}^2}{(z + a_0)^2} \right) \Phi_z = 0, \quad C_{ly} = \left(\frac{\pi}{q} \right)$$

En este caso, el parámetro ω_x se requiere para determinar las condiciones de frontera de la solución Φ_z . La Figura 4.1.17, presenta los resultados de movimiento horizontal, para diferentes valores de la relación E_2 / E_1

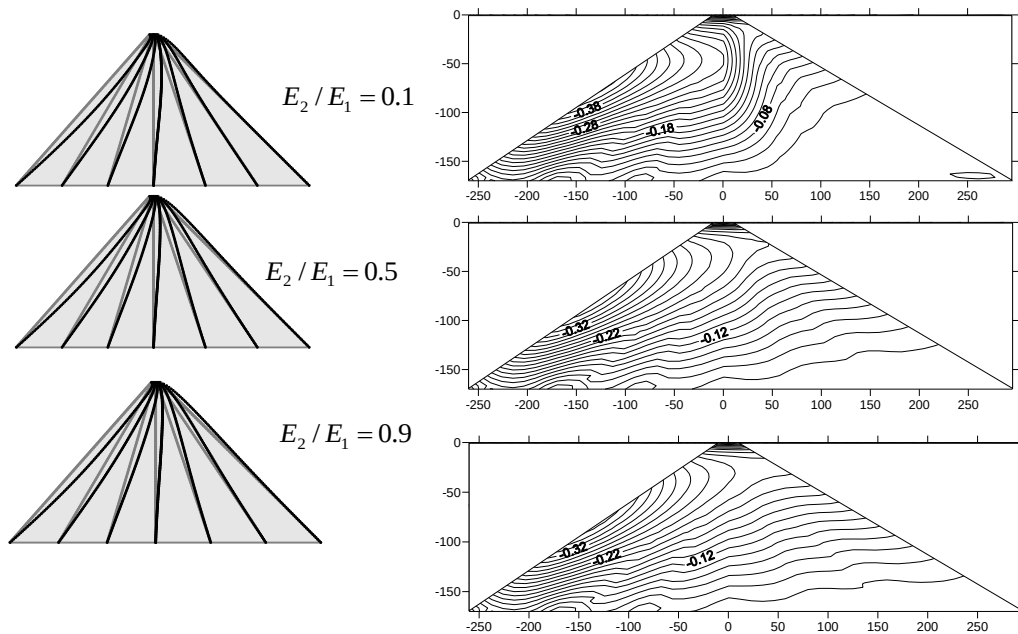


Figura 4.1.18.- Modelo tridimensional para carga de agua en dirección horizontal

Para el estudio de asentamientos de la presa Cajón, se presenta en la Figura 4.1.19, la aproximación de la geometría de la estructura mediante dos trapecios, tal como se realizó para la presa de Aguamilpa.

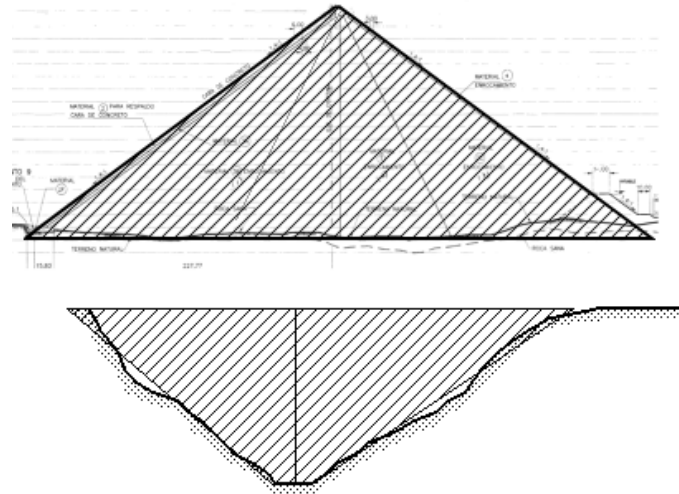


Figura 4.1.19.- Modelo de aproximación a la geometría de la presa de Cajón mediante la configuración de dos trapecios

La distribución de asentamientos por peso propio que se muestra en la Figura 4.1.20 se obtuvo usando la geometría de la Figura 4.1.19, al usar una frontera vertical para dos elementos cuya relación de rigidez a cortante entre ambos es de $G_2 / G_1 = 0.6$ y un valor de $Vp=150 \text{ m/s}$ y $Vs=120 \text{ m/s}$. Se usó un valor de $\alpha = 0.1$. En esta misma Figura se muestra la distribución de asentamientos reportada por Marengo y Aguirre, 2007.

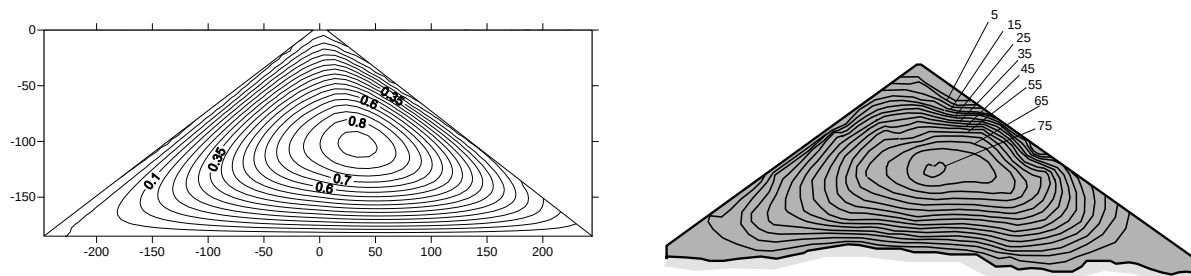


Figura 4.1.20.- Comparación de asentamientos entre un modelo teórico de dos elementos separados por una frontera vertical y la distribución de asentamientos observada por Marengo y Aguirre, 2007 para la presa de Cajón

Un ajuste más exacto podría obtenerse pero no se considera de mayor relevancia. Lo que parece claro, es que las propiedades mecánicas de la presa Cajón muestran ser mayores a las propiedades de los materiales de Aguamilpa para los mismos modelos estudiados.

Para el problema de desplazamientos verticales debidos a la carga de agua, se tiene también el reporte de Marengo y Aguirre. La aproximación con el modelo de dos elementos se presenta en la Figura 4.1.21, aquí se usó una relación de rigideces entre los dos modelos de $E_2 / E_1 = 0.6$, para una frontera vertical entre los dos elementos. El valor de módulo de Young para el primer elemento fue de 3500 MPa, se usó un módulo de Poisson de 0.4. Este valor tan alto del módulo de elasticidad se explica por las características del modelo.

Si se usara el modelo tridimensional que se presenta en la sección 2.3.4, el módulo de elasticidad requerido para obtener los desplazamientos de la Figura 4.1.21, sería muy probablemente un orden de magnitud inferior al que se obtiene de considerar el modelo de la sección 2.3.2 como es el caso.

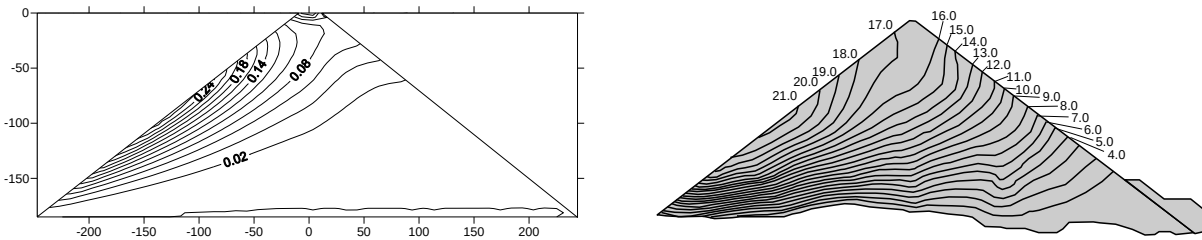


Figura 4.1.21.- Distribución de asentamientos para el problema de carga de agua usando un modelo de dos elementos separados por una frontera vertical (lado izquierdo), y las observaciones reportadas por Marengo y Aguirre, 2007.

Para comparar la elástica que se observa en la losa de concreto de Aguamilpa, contra el modelo tridimensional de empuje horizontal por carga de agua que se presenta en la sección 2.3.2, se presenta en la Figura 4.1.22, el cálculo de la deformada en la frontera donde se encuentra la carga de agua, contra la información observada en el inclinómetro instalado en la losa.

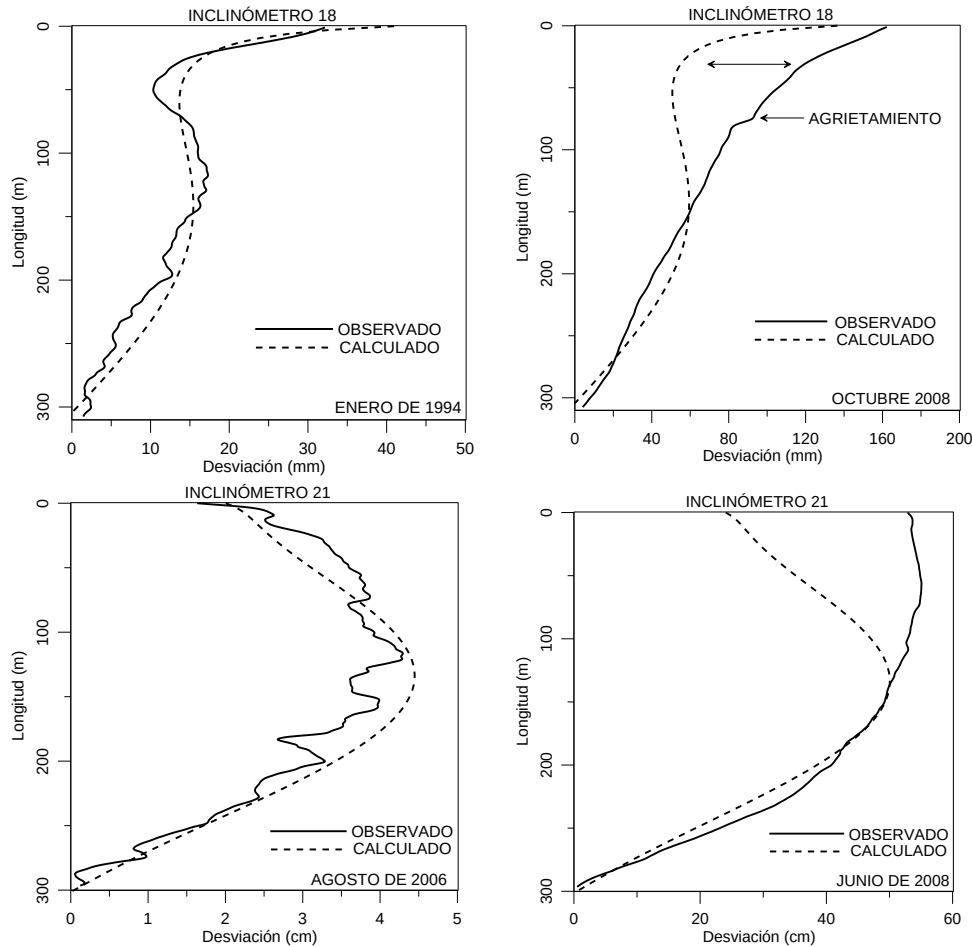


Figura 4.1.22.- Ajuste de las mediciones de la losa del inclinómetro 18 de Aguamilpa (arriba) contra el modelo de movimiento horizontal por empuje de agua de la sección 2.3.2. El ajuste de abajo corresponde a la presa El Cajón.

Note en la Figura 4.1.22, para el caso de Aguamilpa, como el ajuste para la medición de enero de 1994 es aproximadamente bueno, en cambio para la medición de 2008, el ajuste es menor, pero deben tenerse en consideración dos aspectos importantes: primero, que no se considera la iteración entre losa y enrocamiento, es decir, la losa genera un momento que no se está tomando en cuenta; y lo segundo, es que la losa está agrietada lo que debe afectar la elástica que se observa en la realidad. Se dejó este ajuste, porque se puede ver en la losa la correspondencia en la curvatura para el tramo arriba del agrietamiento (señalado con una flecha).

Para el cálculo de elástica de enero de 1994 se usaron los siguientes parámetros: $a=600\text{ m}$, $b=15\text{ m}$, $c=70\text{ m}$, $d=520\text{ m}$, $E=2.9 \cdot 10^9\text{ kg/m}^2$, $\nu=-0.49$, $Fr=0.008$. Mientras que para el cálculo de la elástica de Octubre de 2008, se modificaron los siguientes parámetros $E=7.5 \cdot 10^8\text{ kg/m}^2$, y $Fr=0.03$. Lo que indicaría que se redujo el modulo de elasticidad y se incremento el esfuerzo en la frontera libre de la estructura. El valor del módulo de Poisson fue de $\nu=-0.49$ en ambos casos. En el caso del inclinómetro 21 de la presa El Cajón, nuevamente el ajuste es mejor para la medición próxima al primer llenado del embalse, y es menos buena para la medición de dos años después. En este caso la geometría de la presa se ajustó con los siguientes parámetros: $a=477\text{ m}$, $b=15\text{ m}$, $c=40\text{ m}$, $d=491\text{ m}$. Para la medición de agosto de 2006, se usó: $E=9.0 \cdot 10^9\text{ kg/m}^2$, $Fr=0.0005$; mientras que para la medición de junio de 2008, se usó: $E=8.0 \cdot 10^8\text{ kg/m}^2$, $Fr=0.006$. Es decir, de manera análoga al caso de Aguamilpa, se redujo el modulo de elasticidad y se incrementó el esfuerzo en la frontera libre. Nuevamente en la solución de los casos de El Cajón se usó un módulo de Poisson de $\nu=-0.49$, para ambos cálculos.

Si en realidad la variación de la elástica de la cara de concreto se puede explicar de esta manera, ello indicaría que el continuo está teniendo una redistribución importante del esfuerzo ante la misma carga. Y es probable que la causa de esta redistribución del esfuerzo sea que el material del enrocamiento fluye de manera importante.

Los análisis de los modelos han mostrado de manera consistente que los módulos elásticos son dependientes del modelo que se utiliza. Así, para el modelo de la sección 2.3.4, los módulos requeridos para producir una magnitud del desplazamiento en el continuo son menores que los módulos que requiere el modelo de la sección 2.3.2 para producir el mismo desplazamiento. Sin embargo, al comparar los resultados de dos presas sobre un mismo modelo, se obtienen valores más significativos. En efecto, El Cajón tiene una rigidez horizontal probablemente 3 veces más alta que la que tiene Aguamilpa.

Modelos Dinámicos

4.2 MOVIMIENTOS SÍSMICOS

La validación de los movimientos sísmicos debiera realizarse también utilizando la información de las presas de cara de concreto, tal como se realizó en el trabajo estático, sin embargo, estas estructuras no han sido objeto de importantes demandas sísmicas. No sólo eso, al revisar los registros sísmicos de Aguamilpa, que son los datos de donde se dispone información, se ha detectado que dichos registros están influenciados por una señal de alta frecuencia que es persistente en toda la información disponible, por lo que se toma la información con reserva. Desafortunadamente, el problema se presenta en los únicos dos instrumentos ubicados en la estructura. Uno de los instrumentos se ubica en la corona y el otro, inmerso en el enrocamiento, dentro de un pozo a 50 m de profundidad de la corona. Los acelerogramas disponibles, son en general de baja intensidad por lo que, cuando los datos son débiles, la señal de ruido cobra mayor relevancia. En la Figura 4.1.23, se muestra un registro en el instrumento de la corona y la información concerniente al ruido. Este sismo es uno de los más intensos registrados en la estructura (con aceleración de 80 cm/s^2). Aquí, se puede observar con claridad, la señal sísmica “montada” en la señal de alta frecuencia que muy probablemente sea de tipo eléctrico, y le da un aspecto extraño al acelerograma.

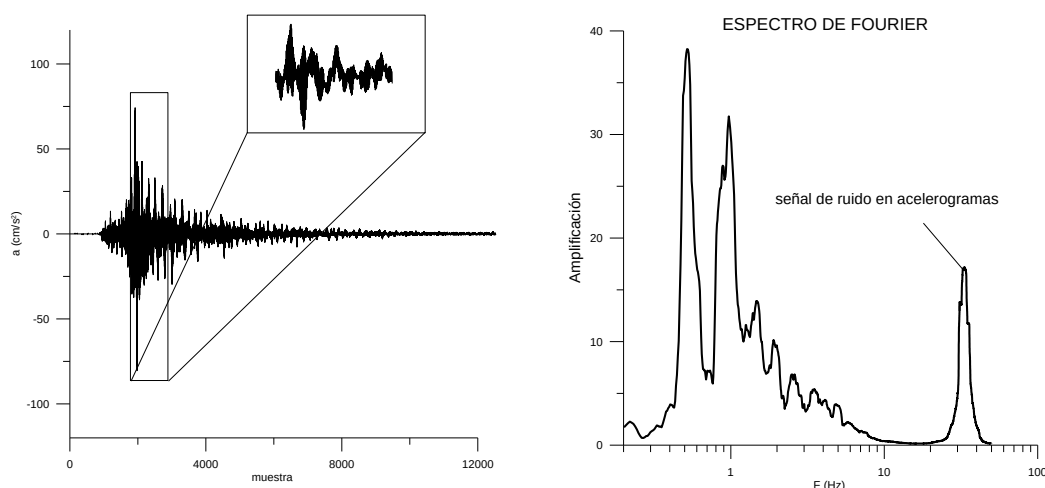


Figura 4.1.23.- Registro de aceleración agcc9810.281 en la corona centro de Aguamilpa donde se puede observar la señal de ruido de alta frecuencia que se presenta en todos los registros del instrumento.

Una de las presas más relevantes de México construidas a partir de materiales granulares es la presa El Infiernillo. Esta estructura de 150 m de altura, ha sido sometida a varios terremotos de diferentes características, por lo que ha sido objeto de una importante cantidad de trabajos de investigación internacional. No sólo es una estructura que se ha comportado de manera excelente, sino que tiene una instrumentación sísmica que ha trabajado sin interrupción desde los años 60. Para la validación de los modelos sísmicos que se presentan en este trabajo, se utilizará uno de los registros sísmicos de la presa El Infiernillo. El sismo que se analiza, es un evento que ocurrió en enero de 1997, y tuvo aceleraciones superiores a 300 cm/s^2 . La instrumentación de la estructura se presenta en la Figura 4.1.24, junto con los registros del sismo estudiado. Los sismos en los puntos E y H deben considerarse datos de campo libre. El

sismo en la margen derecha (punto D) que corresponde a otro punto de campo libre no fue registrado en este caso.

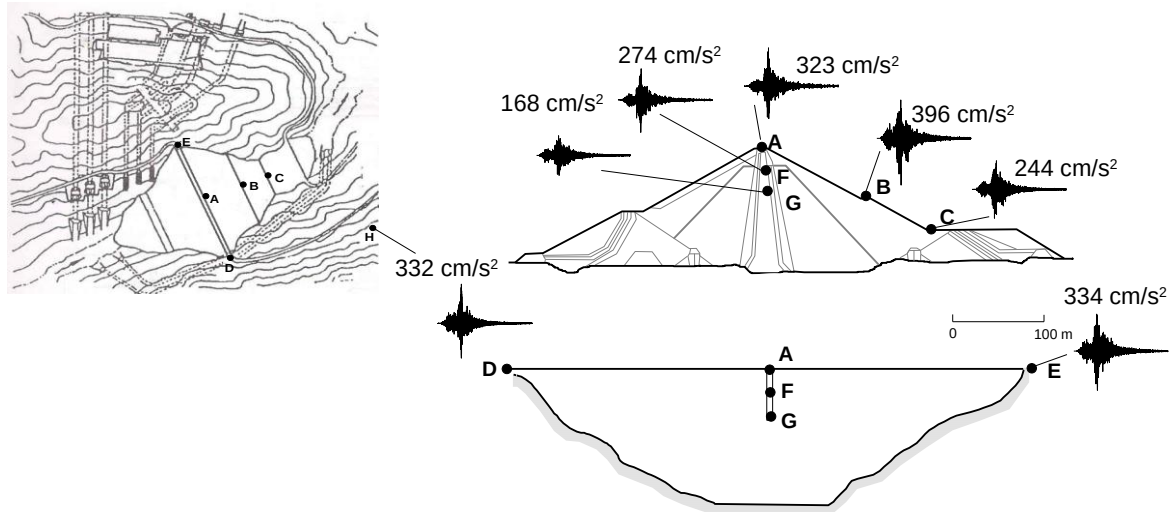


Figura 4.1.24.- Distribución de instrumentos acelerográficos en El Infiernillo. Se muestran los acelerogramas del terremoto del 11 de enero de 1997; A-Corona Centro, B-Nivel 120, C- Nivel 80, E- Margen Izquierda, F- Pozo 25 m, G- Pozo 50 m y H- Planta Potabilizadora, en la dirección longitudinal al río. Los números indican el valor máximo de aceleración.

Para observar las comparaciones entre los modelos y los registros de aceleración se emplearan los modelos tridimensionales que se indican en la Figura 4.1.25.

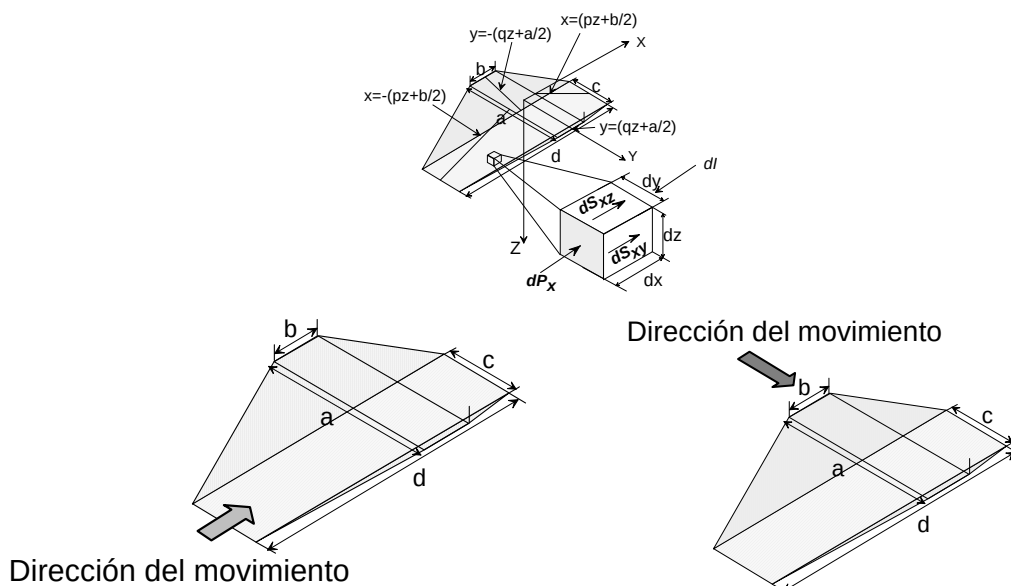


Figura 4.1.25.- Modelos tridimensionales de dos fuerzas cortantes y una axial, para estudiar el comportamiento sísmico de la presa El Infiernillo

Como en los casos estáticos, se considerará que las fronteras en dirección X nos son libres, y que por tanto las deformaciones en esa dirección, son proporcionales al coseno del ángulo de inclinación de la frontera θ .

Las fronteras en dirección Y se considerarán fijas y en dirección Z, se acepta la frontera fija en la base de la estructura y libre en la corona.

Bajo estas condiciones, las soluciones son:

$$\Phi_x = -\frac{\cos \theta}{\sin \alpha_k \pi} \cos \omega_{kx} x; \quad \omega_x = \frac{\alpha_k \pi}{pz + b/2}$$

$$\Phi_y = \cos \omega_{ly} y; \quad \omega_y = \frac{(2l-1)\pi}{2(qz + a/2)}$$

La solución de la función de z, deberá resolver de manera general la siguiente ecuación diferencial:

$$\Phi''_z + \left(\beta^2 - \frac{C_{kx}^2}{(z+b_0)^2} - \frac{C_{ly}^2}{(z+a_0)^2} \right) \Phi_z = 0$$

Donde:

$$\beta = \frac{\omega}{V_p} \quad \text{Movimiento en dirección Z}$$

$$\beta = \frac{\omega}{V_s} \quad \text{Movimiento en direcciones X y Y}$$

$$C_{kx} = \frac{V_s \alpha_k \pi}{V_p p}; \quad C_{ly} = \frac{V_s (2l-1)\pi}{2V_p q} \quad \text{Movimiento en dirección Z}$$

$$C_{kx} = \frac{V_p \alpha_k \pi}{V_s p}; \quad C_{ly} = \frac{(2l-1)\pi}{2q} \quad \text{Movimiento en dirección X}$$

$$C_{kx} = \frac{\alpha_k \pi}{p}; \quad C_{ly} = \frac{V_p (2l-1)\pi}{2V_s q} \quad \text{Movimiento en dirección Y}$$

La solución de la función de Z, ha sido presentada en el Capítulo 2 para el movimiento en dirección X. La geometría de Infiernillo fue aproximada mediante dos trapecios simétricos, como se ilustra en la Figura 4.1.26.

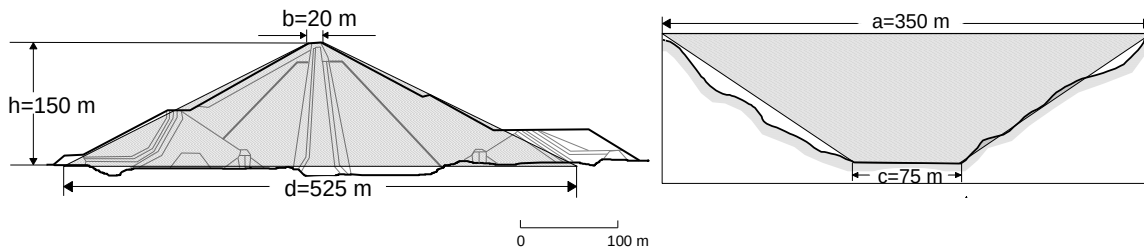


Figura 4.1.26.- Aproximación de la geometría de Infiernillo mediante dos trapecios simétricos.

De acuerdo al planteamiento, considerar tres modos en cada dirección, implica resolver 27 frecuencias naturales. Las soluciones que se muestran en la Figura 4.1.27, incluyen estas 27 primeras frecuencias naturales, a través de las formas modales que generan en la dirección X .

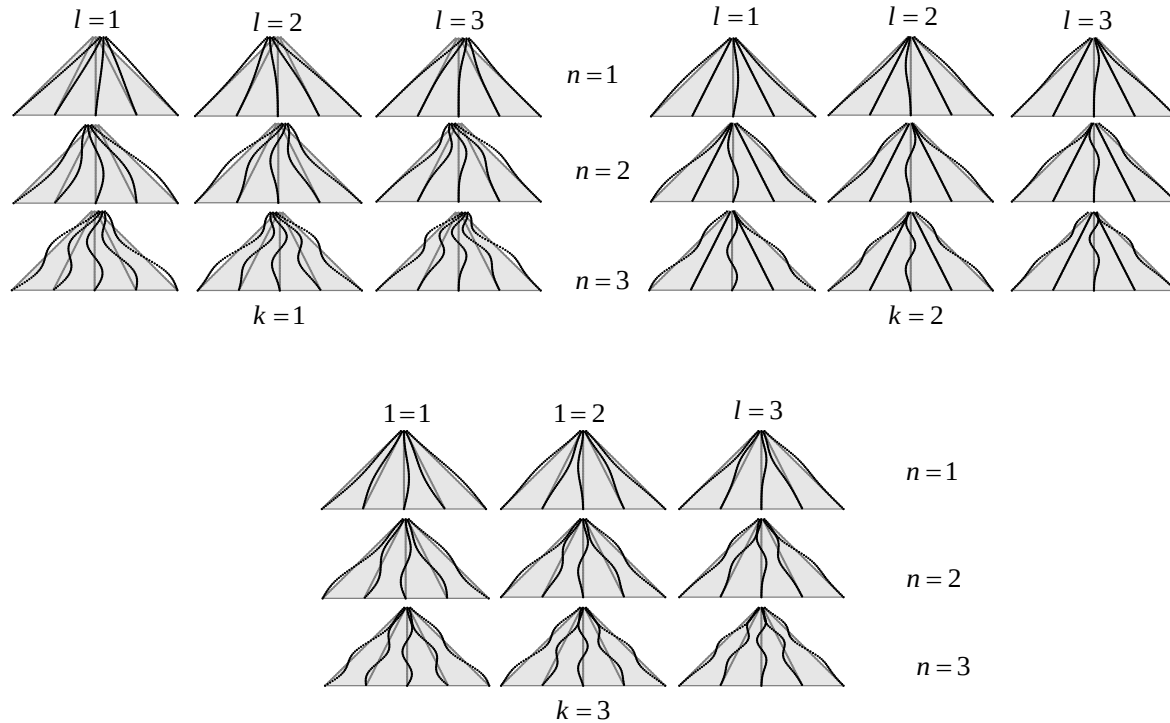


Figura 4.1.27.- Modos de la solución en dirección X para $\alpha_1 = 0.1$. Los valores de k , l y n corresponden a los números de modo en X , Y y Z respectivamente.

Los espectros de Fourier de los registros disponibles de campo libre del sismo que se presenta en la Figura 4.1.24, se muestran en la Figura 4.1.28.

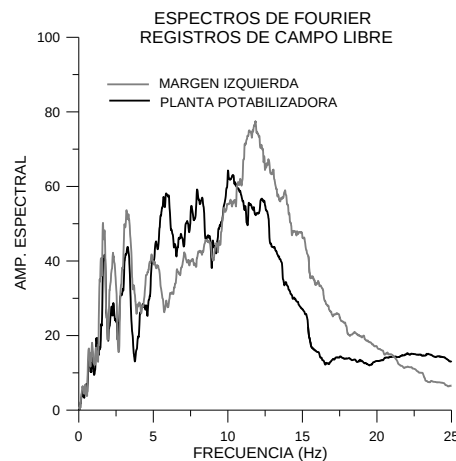


Figura 4.1.28.- Espectros de Fourier de los registros disponibles de campo libre para el sismo de enero de 1997, disponibles en la presa El Infiernillo

La Figura 4.1.28 presenta notables diferencias en la señal de los dos puntos de campo libre, que pueden atribuirse a diferencias geológicas y topográficas en los sitios de medición.

Si se obtienen las funciones de transferencia empíricas para los puntos de la estructura al considerar los dos registros de campo libre, se tienen los resultados que se presentan en la Figura 4.1.29.

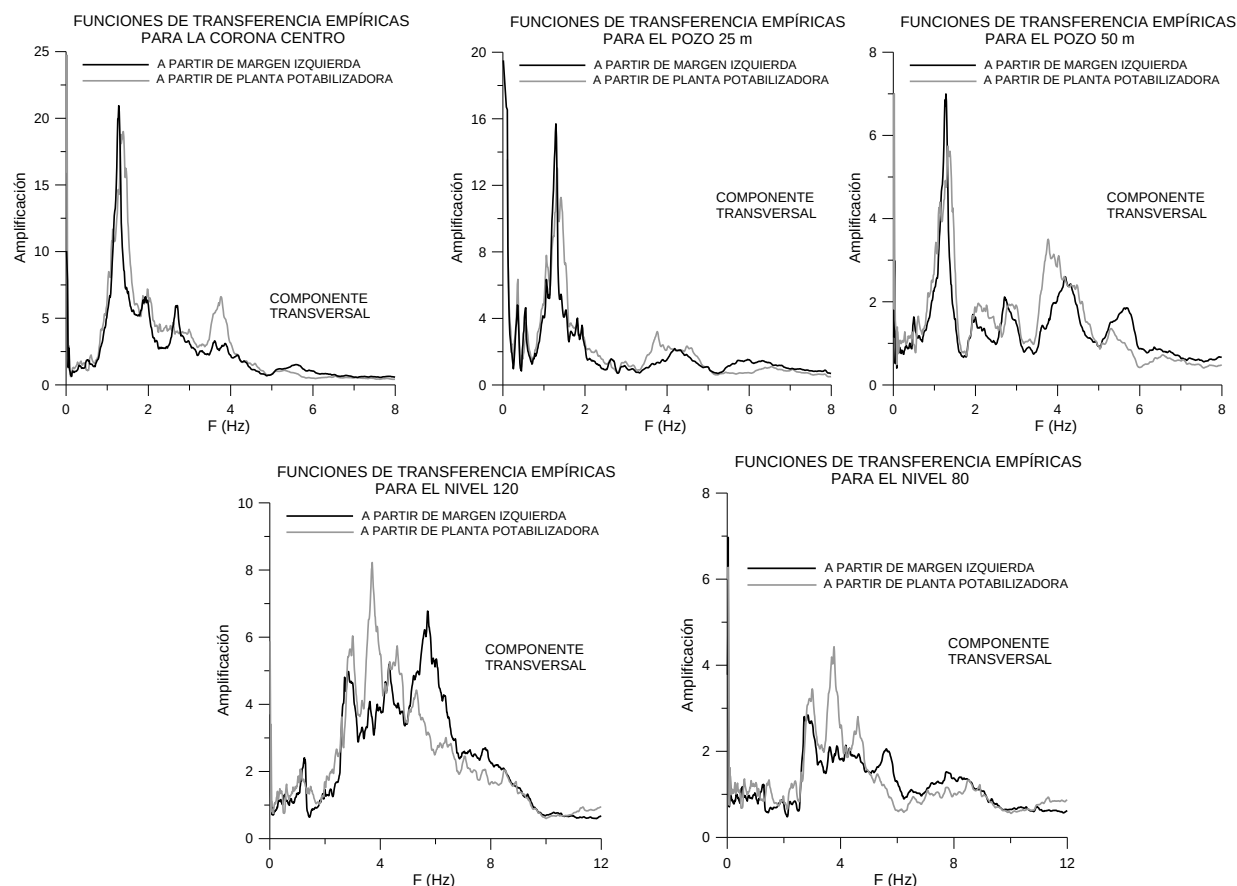


Figura 4.1.29.- Funciones de transferencia empírica en los diferentes puntos de la estructura, a partir de los dos registros disponibles de campo libre: Margen Izquierda y Planta Potabilizadora

La Figura 4.1.29, indica que las funciones de transferencia de los registros ubicados en los pozos, son menos sensibles a la influencia de cual señal se utiliza como señal de campo libre, mientras que los registros ubicados en la ladera de la estructura presentan mayores diferencias al considerar los diferentes registros de campo libre. Es un resultado en cierta medida desconcertante.

Por otro lado, las funciones de transferencia empíricas indican que las respuestas en la estructura pueden separarse en dos grupos: uno formado por los instrumentos ubicados en el material de arcilla (puntos A, F y G), y la respuesta de los instrumentos ubicados en el material de enrocamiento a volteo (puntos B y C). La Figura 4.1.30, muestra las funciones de transferencia en las tres direcciones del movimiento. Se aclara que transversal es perpendicular al eje de la cortina, o en otras palabras, paralela a la dirección del río.

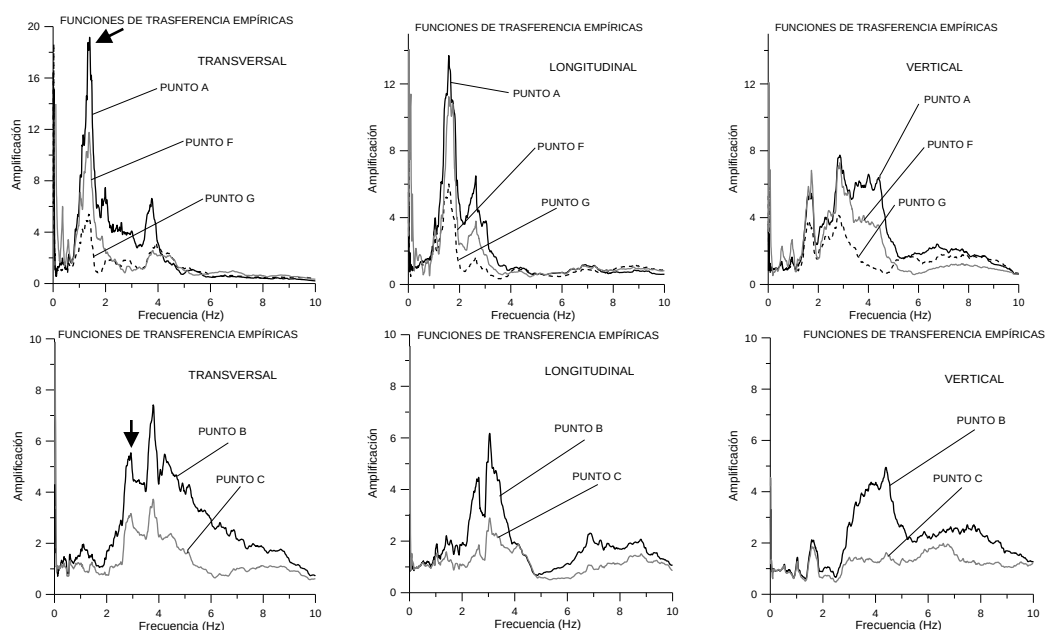


Figura 4.1.30.- Funciones de transferencia empíricas en Infiernillo para el sismo de enero de 1997, en los diferentes puntos de la estructura. Los puntos A, F y G se ubican en la arcilla del núcleo, y los puntos B y C, sobre el enrocamiento.

Estas congruencias y diferencias entre los dos grupos de observación, bien pueden deberse a la diferente características mecánicas de los materiales, aunque, evidentemente, la posición en la geometría de la estructura también es importante.

Puesto que el modelo que se plantea involucra una variedad importante de parámetros y cada vez que se modifica un parámetro es necesario resolver 27 frecuencias naturales, se realizó el siguiente ensayo que considera la siguiente simplificación: se tomó como señal de entrada a la estructura la que se obtuvo en el nivel 80 de la presa; es decir, aquella que se ubica en el contrafuerte que cambia de manera drástica la geometría de la presa como se ilustra en la Figura 4.1.31. Ello permitió, no solo reducir la incertidumbre que se tiene en la señal de campo libre, sino también simplificar la presencia del contrafuerte y en consecuencia ver el efecto que tiene en la respuesta de la estructura. En esta simplificación, se acepta que se desprecia el hecho de que la base del elemento superior que se modela, no es fija, como se plantea en el modelo, y por tanto, se desprecia movimiento relativo del elemento inferior con el superior (ambos elásticos).

Los resultados de las funciones de transferencia observadas y calculadas al considerar una subestructura como la señalada en la Figura 4.1.31, se presentan en la Figura 4.1.32. Para las estimaciones de la respuesta, se usaron los siguientes parámetros: $a=350$ m, $c=210$ m, $b=20$ m, $d=382$ m y valores de $V_p=392$ m/s y $V_s=560$ m/s ($V_p/V_s=0.7$). Los valores de amortiguamiento usados fueron del 5 % para los puntos A y F y del 10% para los puntos B, C y G. El valor de α para la primer solución de x fue: $\alpha_1 = 0.15\pi$, α_2 y α_3 , cumplen con la ortogonalidad para la solución propuesta para X. Los resultados menos semejantes entre observaciones y cálculos, corresponden al punto B, que se ubica sobre material de enrocamiento en el respaldo de la estructura.

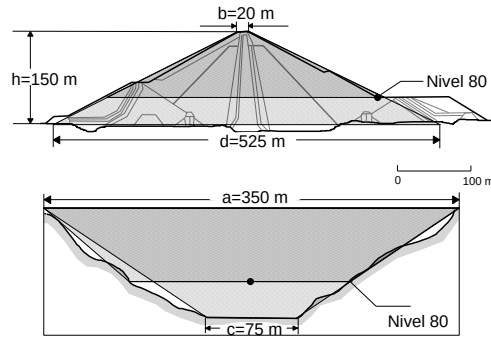


Figura 4.1.31.- Reducción de la estructura El Infiernillo en dos elementos. El elemento superior es estudiado a partir del registro sísmico que se tiene en el Nivel 80, señalado en la figura con un punto.

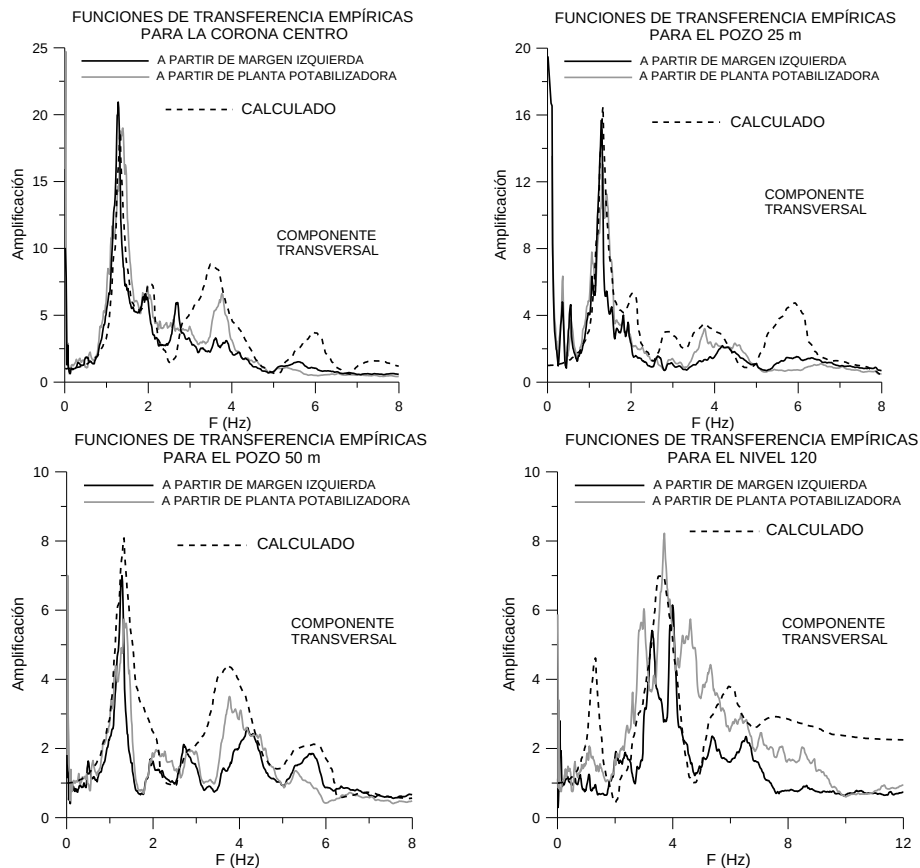


Figura 4.1.32.- Estimaciones de las funciones de transferencia teóricas, al emplear como señal de la fuente el registro del Nivel 80 en la componente transversal.

Usando ahora la geometría que se ilustra en la Figura 4.1.33, con los mismos parámetros de $V_p=392 \text{ m/s}$ y $V_s= 560 \text{ m/s}$ y amortiguamientos del 5 % para los puntos A y F y del 10% para los puntos B, C y G. Y considerando los mismos valores de α para la solución del primer modo en dirección X, es decir: $\alpha_1 = 0.15\pi$, la correlación entre observaciones y cálculos, se reduce aún más, como se ilustra en esta misma Figura 4.1.33

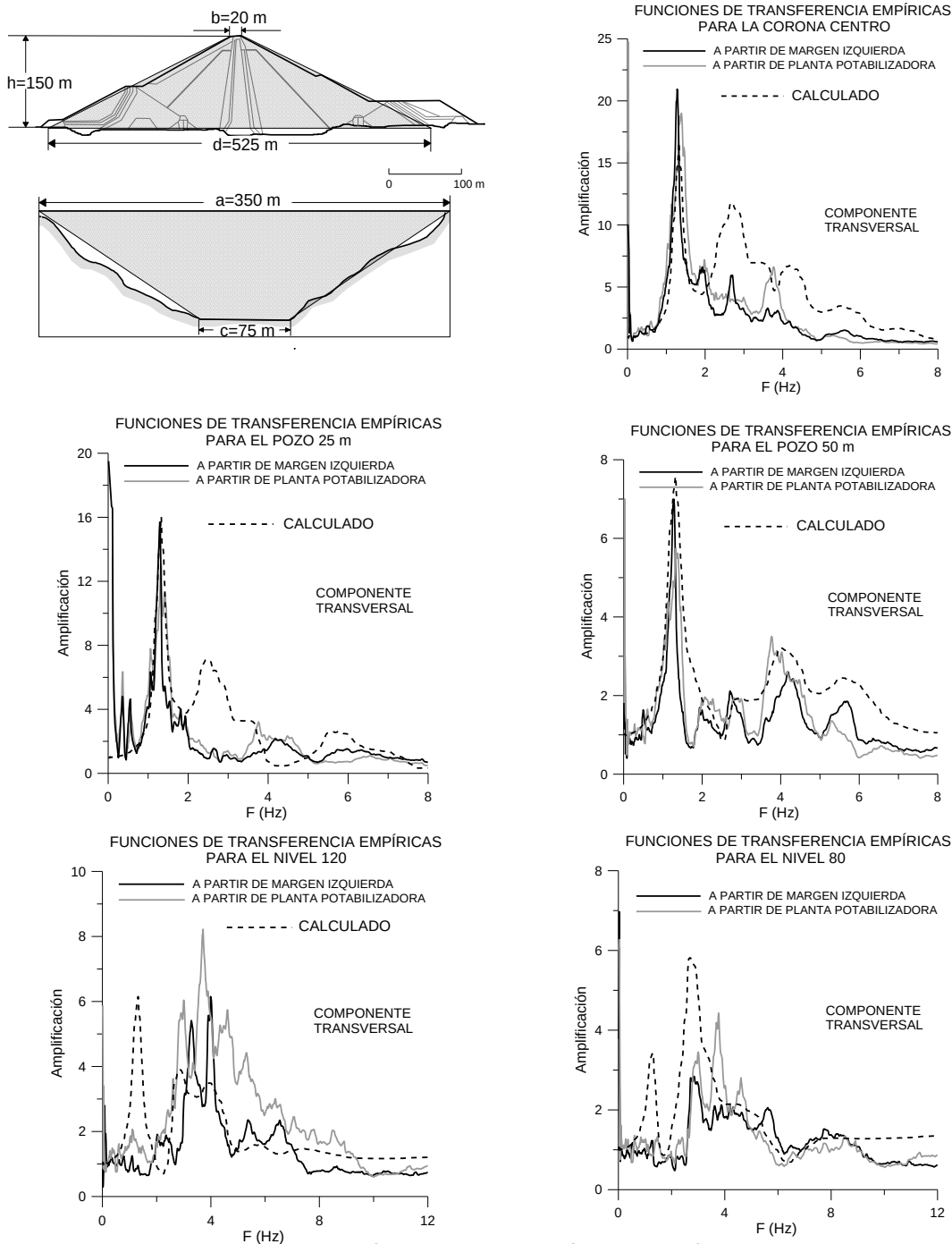


Figura 4.1.33.- Estimaciones de las funciones de transferencia teóricas, al emplear la geometría de la estructura como se ilustra en esta misma Figura.

El resultado anterior, sugiere que el contrafuerte juega un papel importante en la dinámica de la estructura. No sólo eso, sino que las heterogeneidades de los materiales parecen hacer que las respuestas pudieran tener modos fundamentales diferentes de los instrumentos ubicados en los diferentes materiales, como se indica con una flecha en la Figura 4.1.30 para los instrumentos ubicados en arcilla y los ubicados en el enrocamiento.

Para estudiar el modelo en la otra dirección, se presenta en la siguiente Figura las observaciones de las funciones de transferencia empíricas en la dirección Y

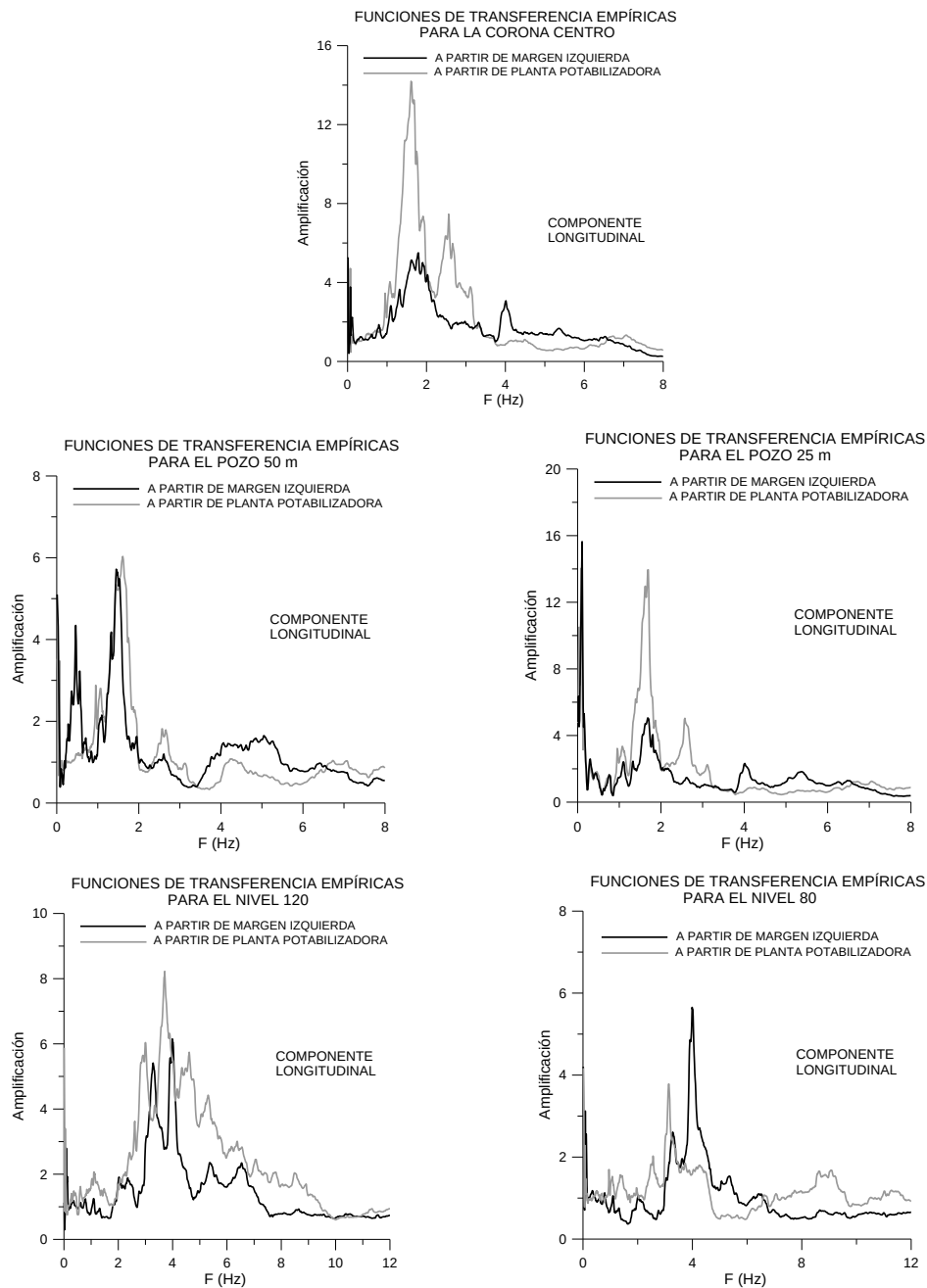


Figura 4.1.34.- Estimaciones de las funciones de transferencia teóricas, al emplear la geometría de la estructura como se ilustra en esta misma Figura.

En la Figura 4.1.34, las funciones de transferencia son aún menos consistentes unas con otras al usar las diferentes señales de campo libre disponibles. Estas mayores diferencias bien pueden explicarse como consecuencia de un mayor efecto topográfico que tiene el instrumento ubicado en la margen izquierda, el cual, como se puede observar en las curvas de nivel de la Figura 4.1.35 (punto E), está ubicado en un cerro alargado, cuya extensión delgada se tiene precisamente en la dirección longitudinal al eje de la estructura.

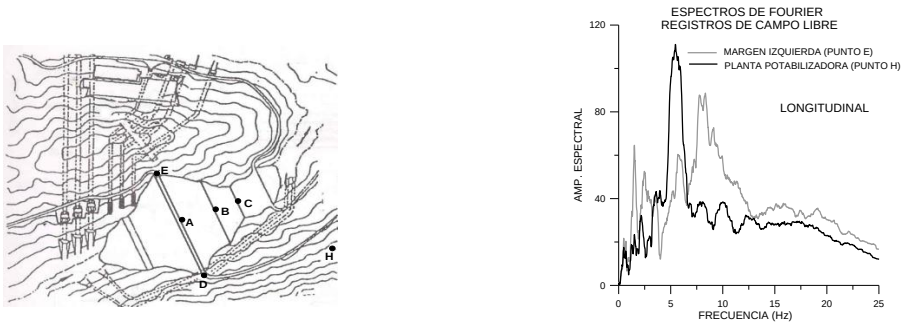


Figura 4.1.35.- Diferencias entre registros de campo libre para la componente longitudinal al eje de la cortina

Al considerar estas diferencias, se tomará como señal de campo libre el punto H que esta menos influenciado por el efecto topográfico del cerro ubicado en la margen izquierda. Se tomó la estructura completa, con la geometría que se ilustra en la Figura 4.1.26

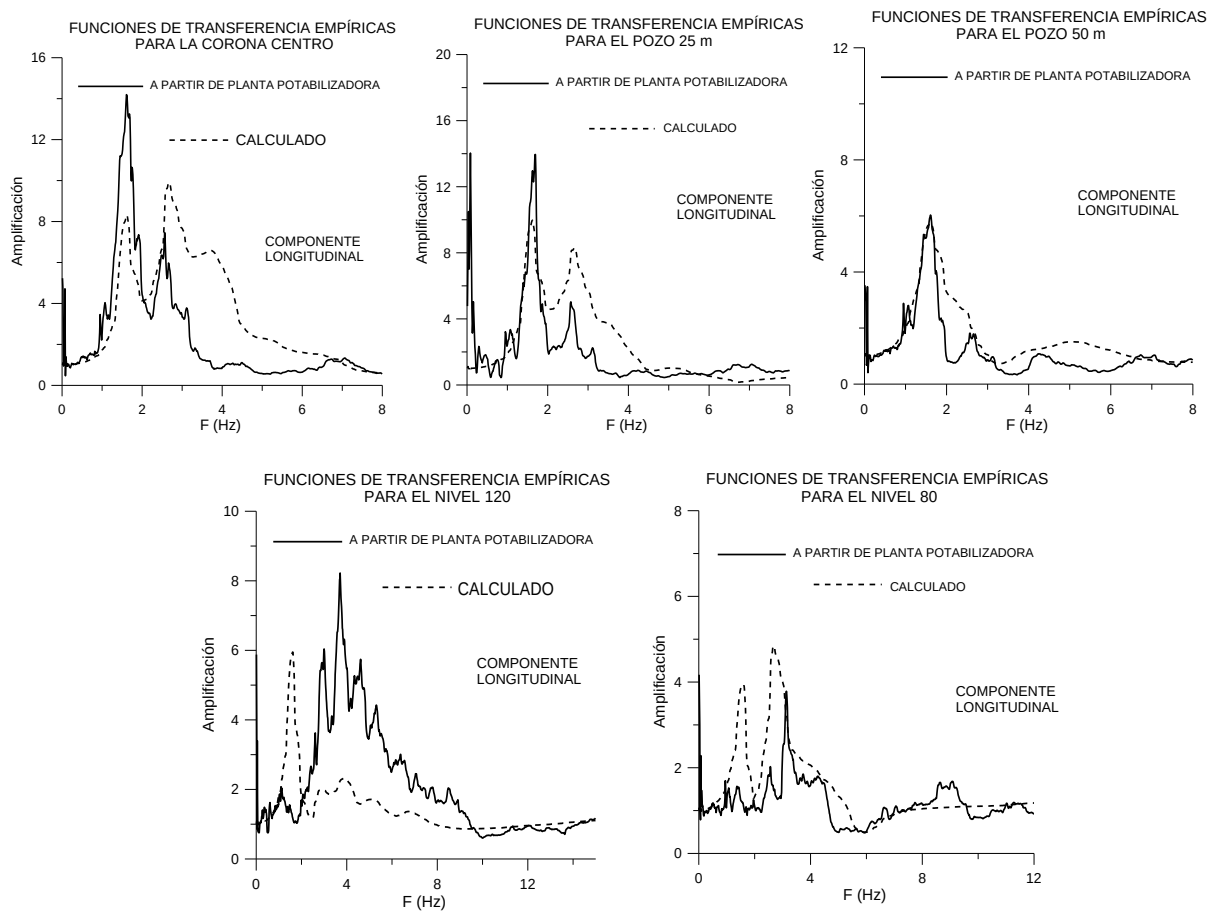


Figura 4.1.36.- Comparaciones entre observaciones y cálculos en la componente longitudinal

PIRAMIDE INSTRUMENTADA

La zona arqueológica de Monte Albán, Oaxaca, cuenta en la actualidad con una serie de instrumentos sísmicos ubicados en sus estructuras piramidales. Estas estructuras fueron dañadas por un sismo en 1999 y a partir de 2004, se inició un monitoreo sísmico por parte del Instituto Nacional de Antropología e Historia con el apoyo en la operación por parte del Instituto de Ingeniería de la UNAM. La instrumentación es un acelerógrafo con cuatro medidores de aceleración de tres componentes en cuatro puntos de la estructura, como se muestra en la Figura 4.1.37, donde se presenta además una fotografía de la pirámide analizada. Las dimensiones de la estructura se tomaron del plano disponible en esta figura, y fueron las siguientes: $a=5.0$, $b=12.5$, $c=17.5$ and $d=25.0$ m (donde a y c son las dimensiones en la cima y base, respectivamente en la dirección EW; y b y d , son las dimensiones en la dirección NS), $h=11.0$ m (donde h es la altura de la pirámide). El sismo más intenso registrado tiene una aceleración máxima en la estructura de 80 cm/s^2 , y se utilizó en el análisis. De acuerdo con la información del personal de la oficina de Instrumentación Sísmica del Instituto de Ingeniería, el acelerómetro 3 no está en la base de la estructura sino en un montículo cercano a la base. En cualquier caso se tomó la información del instrumento 3 como la entrada de la señal a la pirámide y se comparó con las mediciones obtenidas por el instrumento 4.

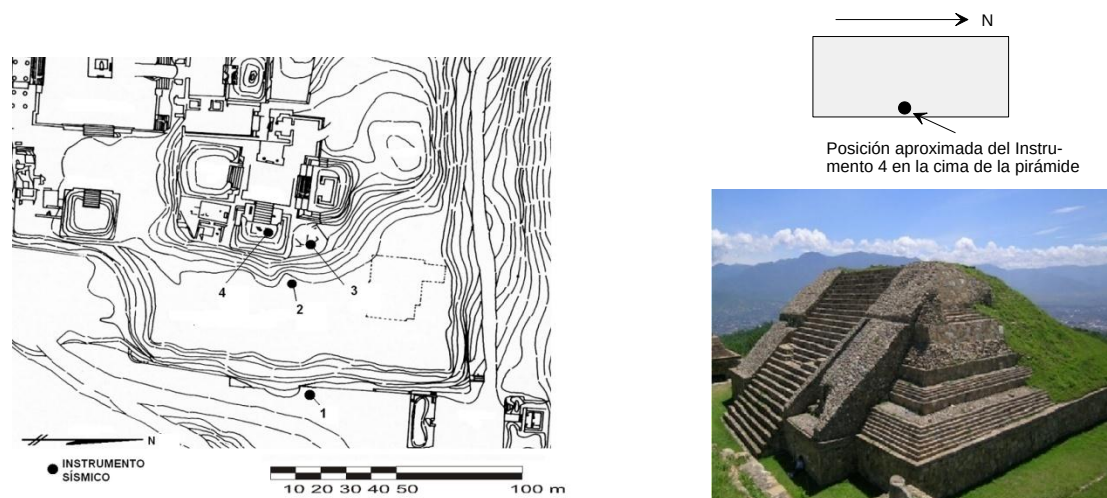


Figura 4.1.37.- Instrumentación sísmica en Monte Albán, la fotografía muestra la pirámide en donde se ubica el instrumento 4, cuya posición fue descrita por personal de instrumentación del Instituto de Ingeniería.

Se determinaron las funciones de transferencia empíricas para la pirámide en las dos direcciones horizontales de observación de los instrumentos, al obtener el cociente espectral entre el acelerograma del equipo 4 sobre el equipo 3, cuyos resultados se presentan en la Figura 4.1.38. Usando los modelos tridimensionales del trapecio, se determinó la respuesta de esta estructura en las dos direcciones, las propiedades de los materiales se determinaron por observación de las funciones de transferencia empíricas contra las calculadas. En la misma Figura 4.1.38 se presentan los resultados de los cálculos en términos de las funciones de transferencia y espectros de Fourier. Los parámetros requeridos por el modelo para las señales calculadas fueron: $V_p/V_s=1.7$ y $V_s=75 \text{ m/s}$, en dirección X y $V_p/V_s=1.7$ y $V_s=60 \text{ m/s}$ en dirección Y . Se usó: $\alpha_{x1} = 0.2\pi$ y $\alpha_{y1} = 0.2\pi$ en ambas direcciones. El amortiguamiento utilizado en los cálculos fue del 10 % en ambas direcciones.

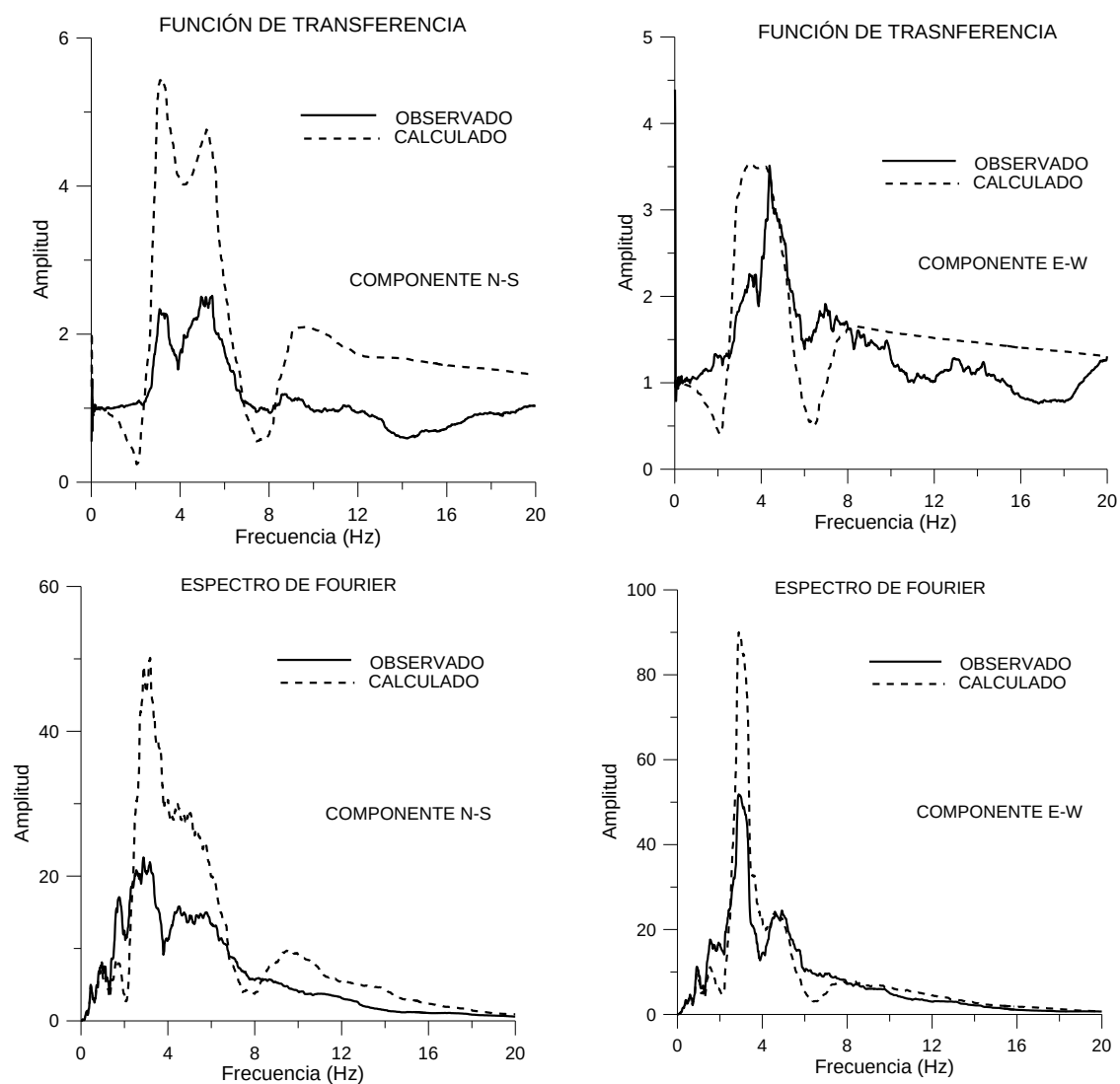


Figura 4.1.38.- Funciones de transferencia empíricas y calculadas para la pirámide de Monte Albán y los espectros de Fourier, en las direcciones horizontales de la pirámide.

CAPÍTULO 5

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo se sintetizan los principales resultados de la presente investigación. Para el lector del presente trabajo e interesado en este tipo de temas, no es difícil observar que las posibilidades de los modelos analíticos son amplias. El ingenio aplicado en las soluciones analíticas, podrá mostrar que este tipo de modelos tienen posibilidades simples y robustas en la solución de los problemas relacionados con presas.

Es posible observar de manera sencilla el comportamiento del asentamiento en los modelos más simples desarrollados aquí. Esto se muestra en la Figura 5.1 donde se presenta el modelo unidimensional en comparación con modelos bidimensionales donde se va cerrando el cajón que confina el continuo (reducción del parámetro a).

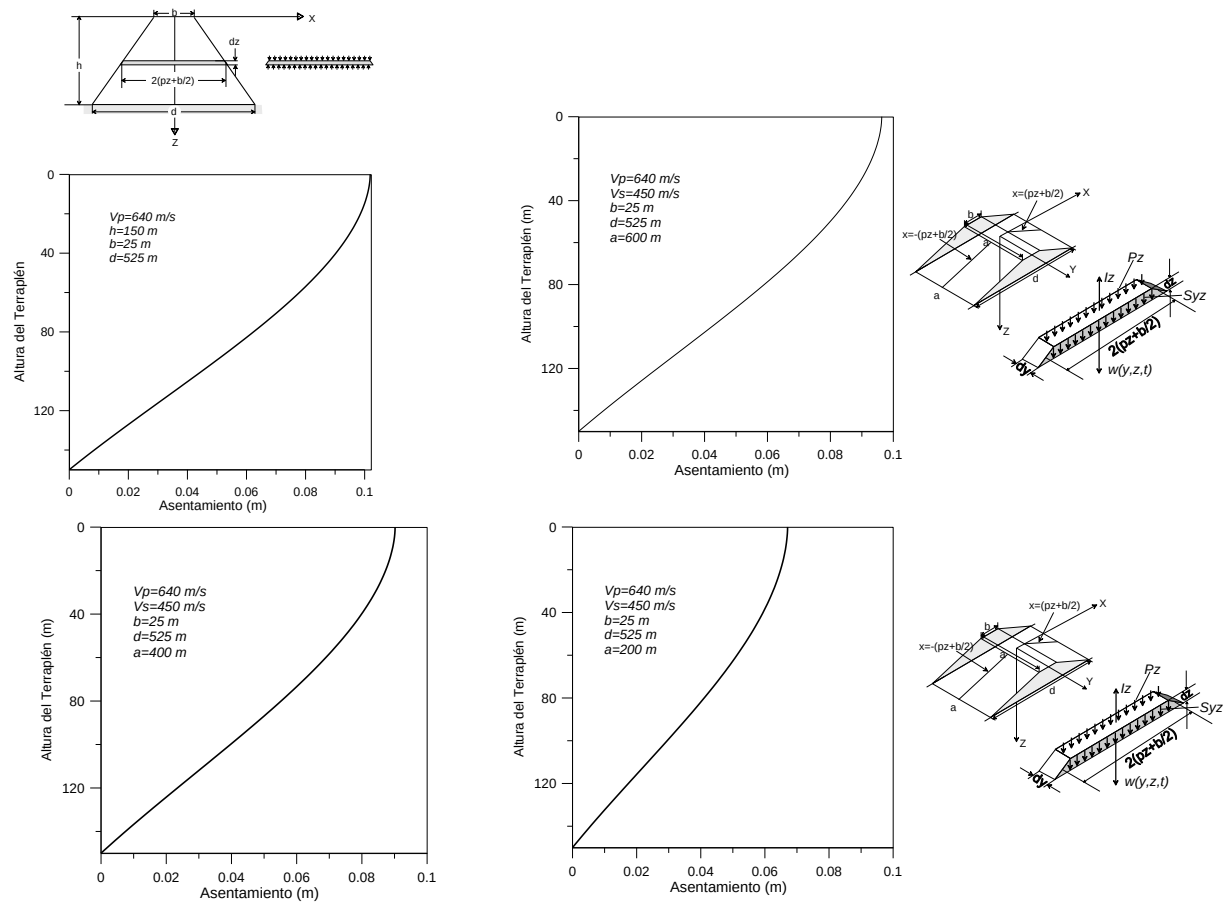


Figura 5.1.- Asentamiento para el modelo unidimensional y modelos bidimensionales donde se va reduciendo el parámetro a (o ancho del cajón confinante). El caso superior de la derecha es el modelo unidimensional.

Por otro lado, el modelo bidimensional de la cuña, comparativamente con el modelo tridimensional, que se presentan en la Figura 5.2, muestra cómo se comportan los asentamientos para ambos tipos de modelos

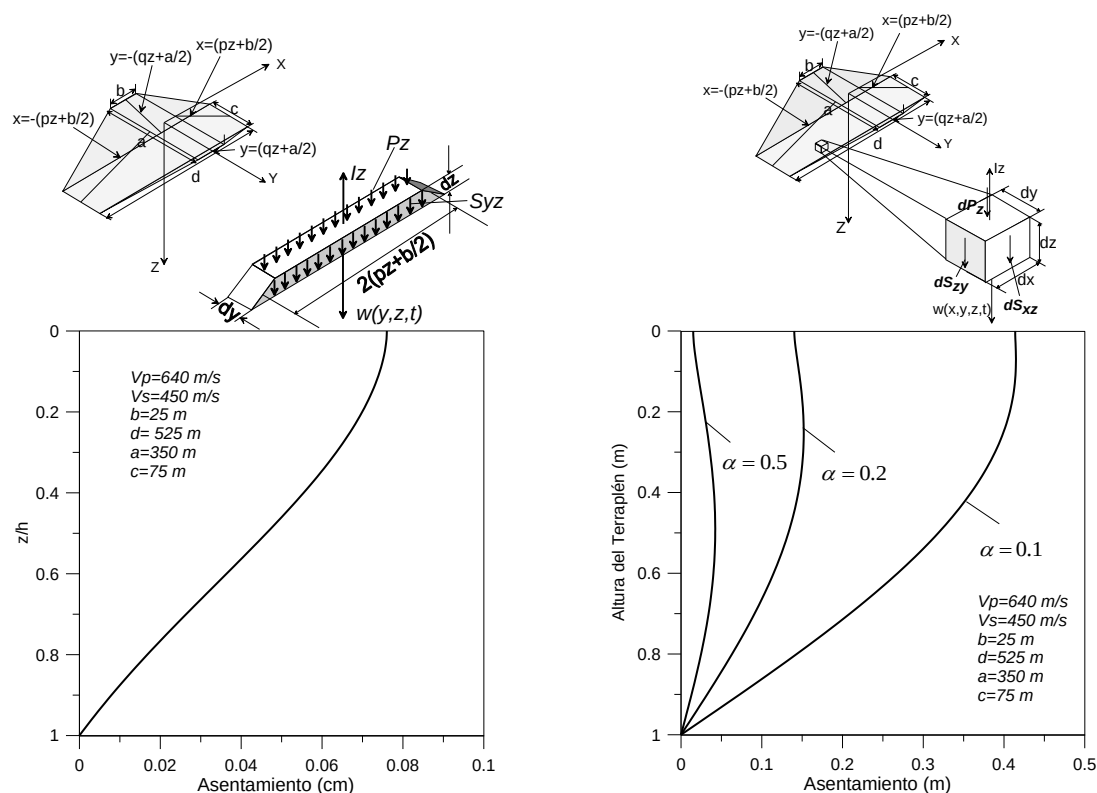


Figura 5.2.- Comparación del asentamiento para el modelo bidimensional y tridimensional de la cuña.

Como se indicó en el capítulo 2, el asentamiento del modelo tridimensional es fuertemente dependiente del nivel de esfuerzo que exista en las fronteras laterales de la estructura las cuales son superficies libres durante la construcción. Si el esfuerzo es bajo en estas superficies, el continuo se asentará de manera uniforme, mientras que el crecimiento de este parámetro, o incremento del esfuerzo, no sólo reducirá los asentamientos en las fronteras laterales, sino que éstos serán mayores en la parte media del continuo. Es muy probable que el valor del esfuerzo en las fronteras laterales (parámetro α o Fr en los modelos), tenga que ver con la rigidez horizontal del material del enrocamiento.

Los parámetros elásticos del continuo, representados por V_p y V_s en las Figuras 5.1 y 5.2, indican que sus valores en realidad son relativos a la cantidad de variables y fuerzas que se incluyen en el planteamiento del problema. Dicho en otras palabras, si un modelo es capaz de reproducir aspectos fundamentales del asentamiento de una presa, se requiere calibrar los valores de sus propiedades mecánicas con las observaciones reales. Estos parámetros mecánicos no necesariamente son reales, bien podrían aproximarse a la realidad, sin embargo, se verán afectados por las simplificaciones involucradas en el modelo, por lo que calibrar propiedades mecánicas de los enrocamientos usando los modelos, debe verse con cautela.

Se realizaron modelos analíticos tridimensionales para el problema de la carga de agua en un costado de la estructura, al considerar la cara contraria libre de esfuerzo, o bien con la presencia de éste. Los resultados sugieren que las observaciones experimentales se ajustan más a la posibilidad de que la cara libre se encuentre cargada con un esfuerzo, lo que permite obtener curvas en la cara con carga de agua semejantes a las observadas por los inclinómetros de las losas instrumentadas como se mostró en la Figura 4.1.22 del

Capítulo 4. Sin embargo, no se hizo inca pie, en este modelo, sobre la influencia del módulo de Poisson y su efecto en la elástica de la curva que se genera en la frontera donde existe la carga de agua. La Figura 5.3 presenta los cambios en función del módulo de Poisson al conservar todos los demás parámetros iguales

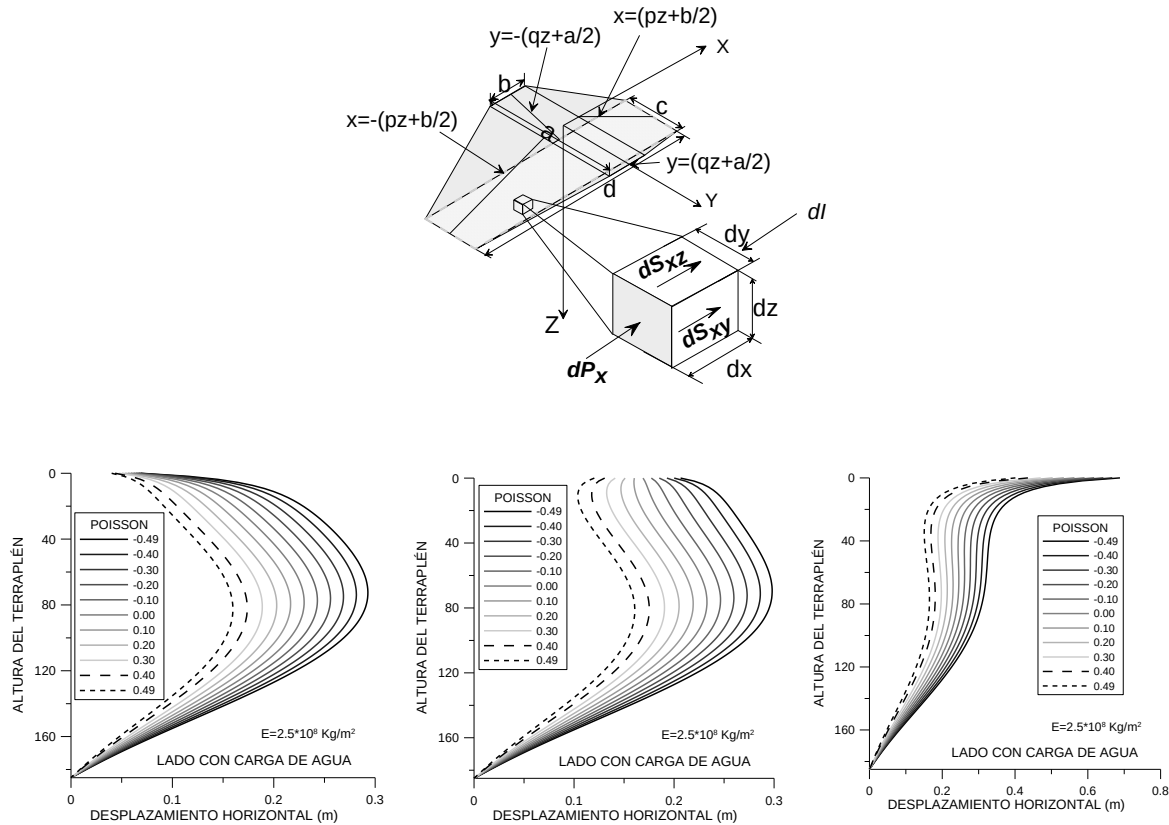


Figura 5.3.- Cambios en la elástica del lado con carga de agua para diferentes valores del modulo de Poisson y tres casos del valor de Fr en el lado libre de la estructura. El valor de Fr es 0.01, 0.03 y 0.10 de izquierda a derecha, respectivamente.

Es importante aclarar que el cálculo considera la deformada del continuo y no de la losa de concreto que se encuentra sobre él. La iteración entre ambos elementos, que debe influenciar la deformada que se obtiene en la losa, no se considera en el presente análisis, aunque algunas valoraciones sobre el prototipo se realizaron en el capítulo 3.

Uno de los aspectos más interesantes de las mediciones, es la fluencia que se observa en el comportamiento de los enrocamientos. En las siguientes gráficas se presenta el desplazamiento de diferentes puntos de las losas instrumentadas en el tiempo.

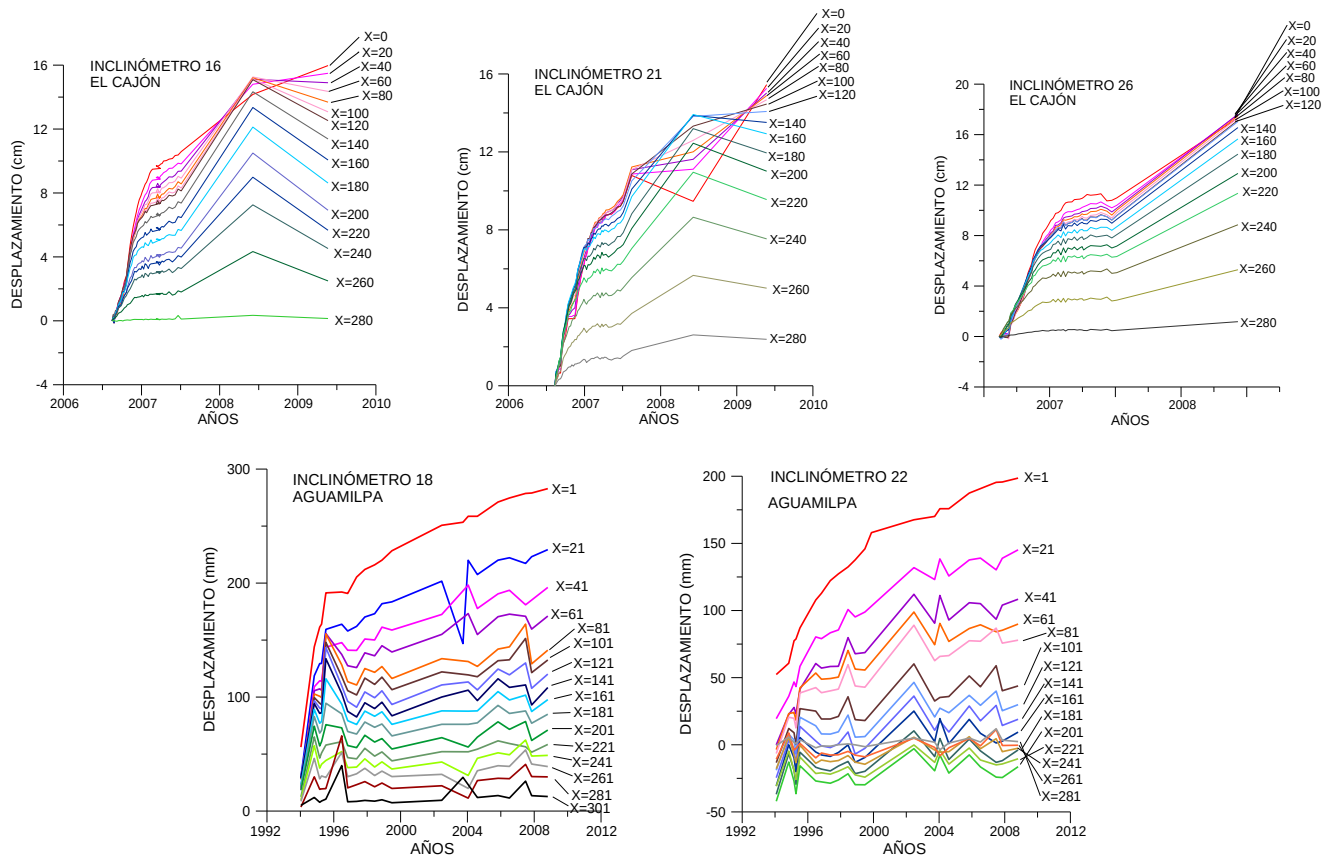


Figura 5.4.- Comparación de los desplazamientos en las losas a largo plazo a diferentes distancias a partir de la corona (parámetro X).

Es claro en la figura anterior que aunque la fluencia del enrocamiento ha alcanzado los 30 cm para la presa de Aguamilpa (Inclinómetro 18), es más largo el periodo de observación. Mientras El Cajón tiene desplazamientos horizontales inferiores a 16 cm, no sabemos realmente cuanto alcanzará en los años siguientes (no se dispone de información de 2010, 2011 y 2012). La fluencia es claramente mayor cerca de la corona de la estructura, para las dos presas. Estos desplazamientos de largo plazo, no deben ser ignorados y su comportamiento está íntimamente ligado a las fuerzas que se desarrollan en las losas como se mostró en el capítulo 3.

También, en el Capítulo 2, se desarrolló un modelo tridimensional al considerar las fuerzas horizontales en las dos direcciones (X e Y), éste modelo muestra que las zonas de tensión y compresión en las juntas de las losas de la cara de concreto podrían deberse a que se consideran los desplazamientos nulos en las direcciones X e Y , es decir, los apoyos del cañón están empotrados. Así los resultados del modelo sugieren que la separación entre zona de tensión y compresión se ubicarían en la inflexión de una función coseno, como se muestra en la Figura 5.5. Sin embargo, se considera que este modelo, aunque presenta una solución exacta, bien puede mostrar otro tipo de soluciones menos rígidas en la deformación en dirección X

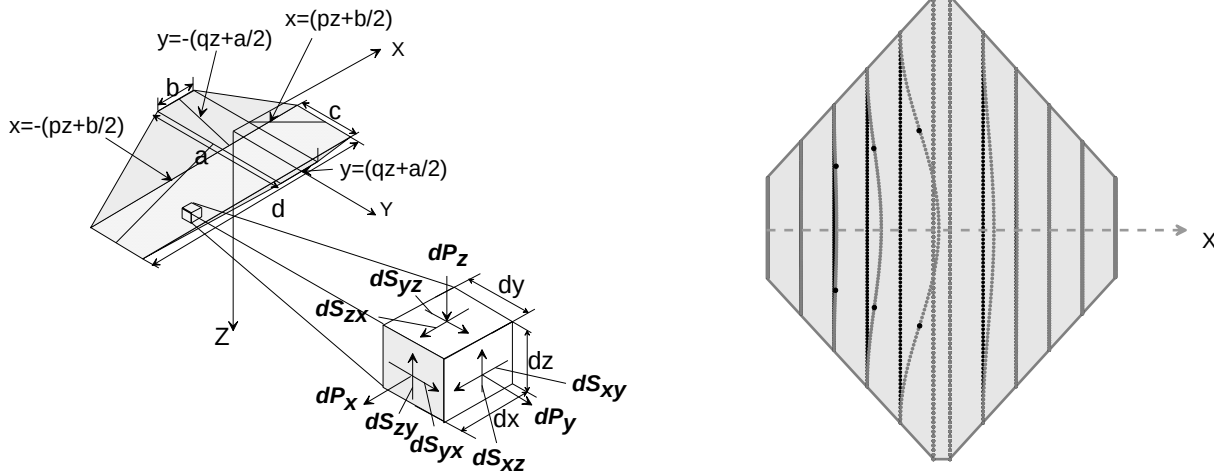


Figura 5.5.- Deformada del movimiento horizontal para un modelo que considera el movimiento en dos direcciones horizontales. Los puntos indican los puntos de inflexión de la función coseno, que definen los cambios de concavidad de la curva de deformación.

Se desarrollaron en detalle modelos unidimensionales y bidimensionales para los problemas dinámicos, sin embargo, de todos los desarrollos planteados, queda claro que el modelo tridimensional que se presenta en la sección 2.6.1, del Capítulo 2, contiene información más completa y que en cierta medida guardan los modelos simples.

Uno de los aspectos más relevantes del modelo tridimensional; es, como ocurre con los problemas estáticos, la presencia de un esfuerzo en las caras libres de la estructura. En los problemas dinámicos, no considerar la existencia de un esfuerzo en éstas caras, requiere de una solución de tipo compleja para resolver el problema de vibración forzada como se explica en Bravo y Romo, 2010. Además, al considerar esfuerzos no nulos en estas fronteras libres, se generan aceleraciones importantes en la corona de la presa, lo cual, hace más congruente la solución del problema con la información real observada en presas durante la acción de los sismos. La Figura 5.6, presenta un ejemplo, en el que se determinaron las aceleraciones absolutas máximas, así como los desplazamientos relativos máximos para un sismo Tipo. El sismo utilizado corresponde a un registro en roca, del sismo de 21 de septiembre de 1985 a una distancia del orden de 80 km a la estación.

Usando esta información, se estudió el movimiento en las direcciones X e Y , de acuerdo a la misma Figura 5.7 y 5.8, con lo que se obtuvieron los valores máximos de aceleración absoluta y desplazamiento relativo, que se presentan. Las propiedades mecánicas utilizadas fueron: $V_p=450$ m/s y $V_s=300$ m/s, en dirección X ; y $V_p=550$ m/s y $V_s=350$ m/s, en la dirección Y . Con un valor del parámetro α_1 , de $\alpha_1 = 0.01\pi$ y $\alpha_1 = 0.05\pi$, en las direcciones X e Y , respectivamente.

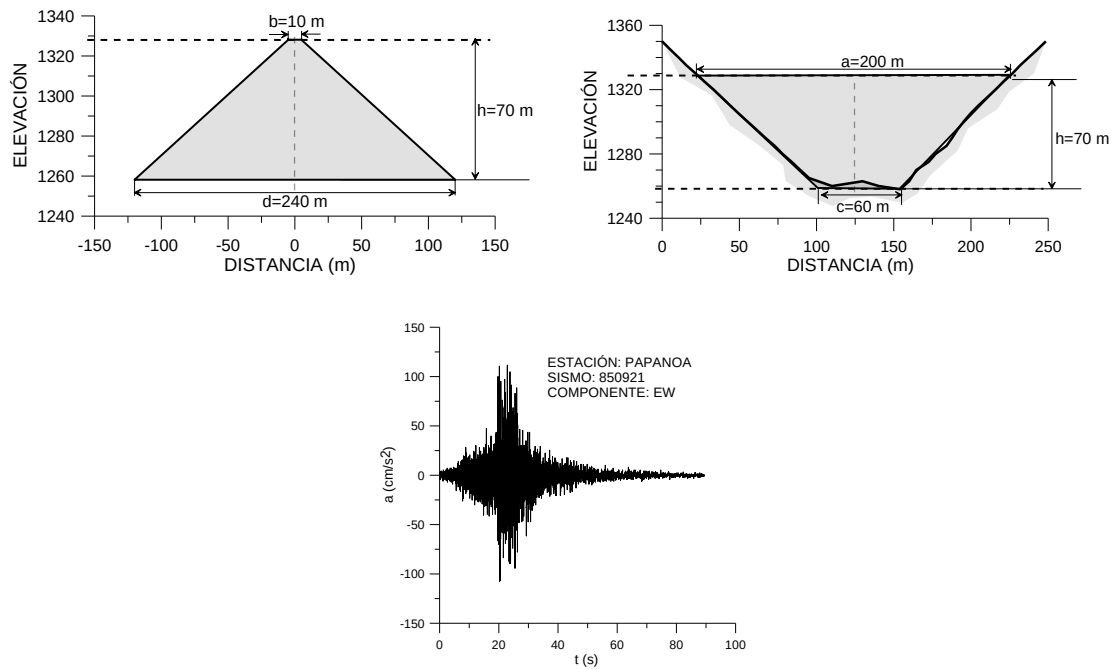


Figura 5.6.- Geometría de una presa para estudiar las aceleraciones máximas y desplazamientos relativos en una de las caras laterales de la presa, al usar el sismo que se muestra en esta misma figura. Los cálculos se realizaron al 5% de amortiguamiento.

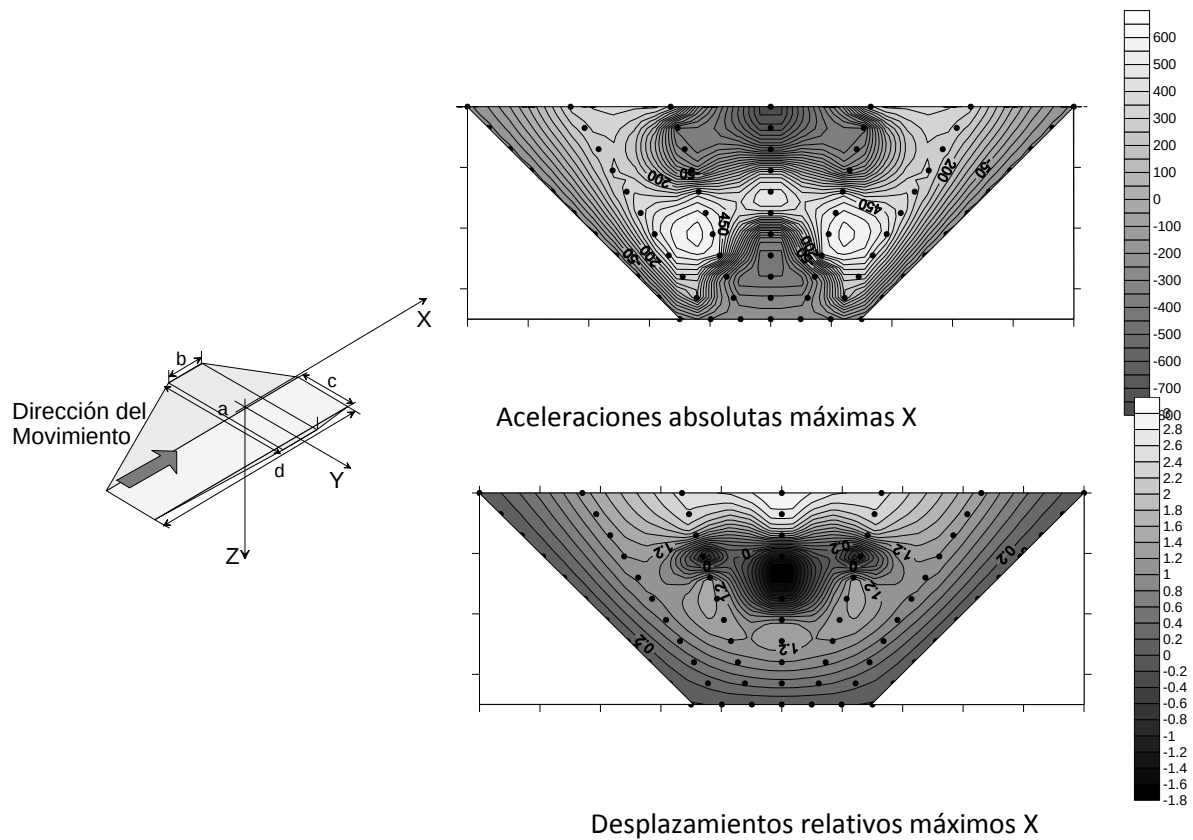


Figura 5.7.- Curvas de aceleración absoluta y desplazamiento relativo, máximo para la superficie de la presa donde se ubicaría la cara de concreto, cuando el movimiento es perpendicular a esta superficie, se considera 5% de amortiguamiento. Los valores están en cm/s^2 (arriba) y cm (abajo).

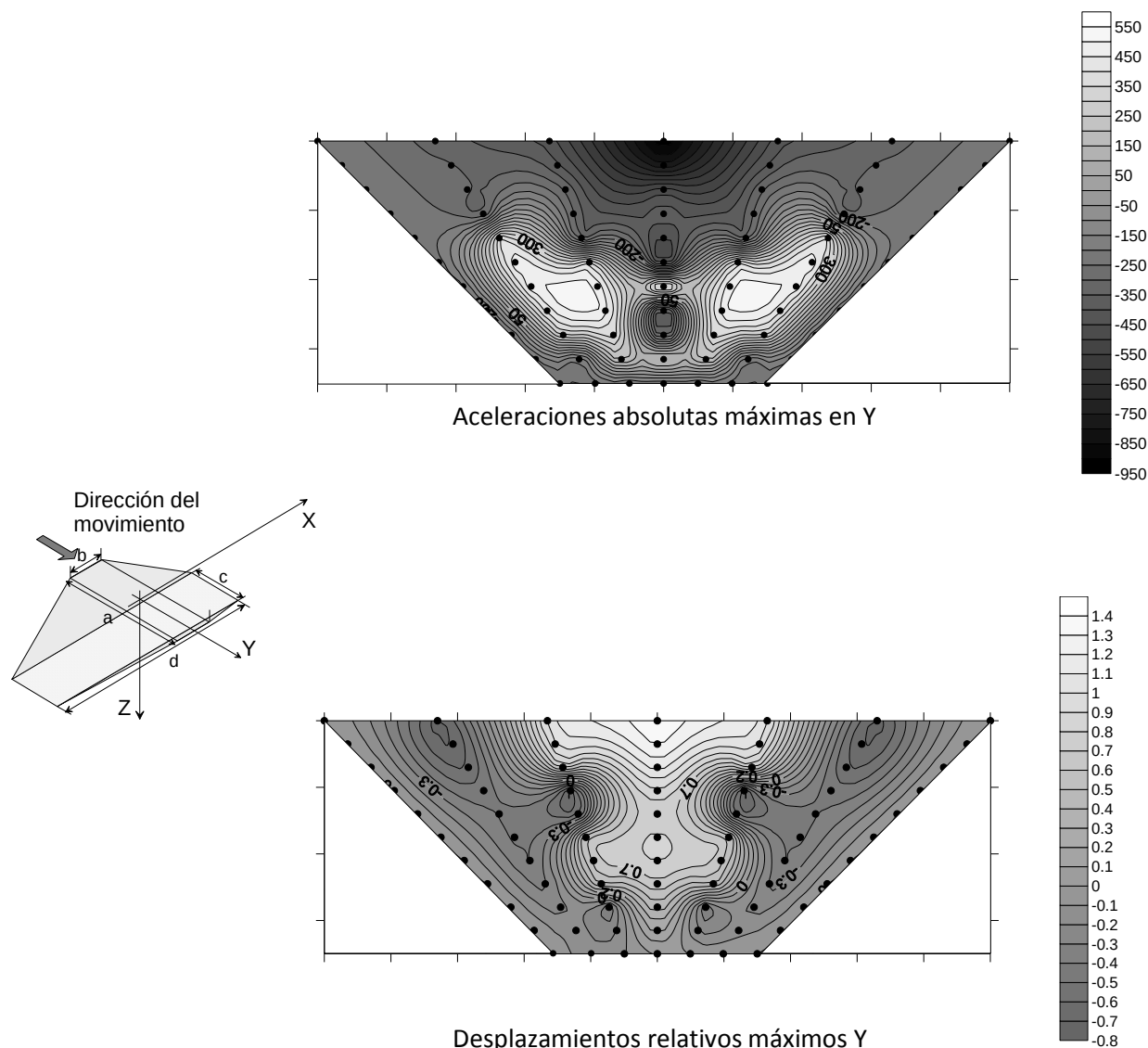


Figura 5.8.- Curvas de aceleración absoluta y desplazamiento relativo, máximo para la superficie de la presa donde se ubicaría la cara de concreto, cuando el movimiento es cortante a esta superficie, se considera 5% de amortiguamiento. Los valores están en cm/s^2 (arriba) y cm (abajo).

Note en las Figuras 5.7 y 5.8, como los valores máximos de aceleración pueden ser cercanos a 1.0 de g. Estos niveles de aceleración han sido observados en estructuras de este tipo y sus efectos parecen estar relacionados más al asentamiento de la presa, que a la posible inestabilidad de los taludes laterales. El hecho es que una presa de enrocamiento es **toda** de material granular susceptible de asentarse; por otra parte, su forma de cuña genera aceleraciones importantes en todo el continuo como lo indica claramente la distribución de aceleraciones máximas. Finalmente, un sismo genera el movimiento de manera **simultánea** sobre todo el enrocamiento y no de manera puntual como lo realiza una máquina durante el proceso constructivo. La presa de Xipingpu en China, como ya se dijo, tuvo aceleraciones medidas de 2 g en la corona de la presa por el sismo de Wenchuan de 2008. Aún ante el tamaño de las aceleraciones, uno de los principales efectos fue el asentamiento de la estructura (próximo a 75 cm), mientras que no hubo problemas por estabilidad en los taludes laterales (Zeping, 2008). Este es sólo un ejemplo, pero existen más

y al parecer los mecanismos de falla por estabilidad de los taludes de las estructuras de enrocamiento, requieren de una mayor investigación. Es probable incluso, que los enrocamientos sean más seguros en cuanto a estabilidad, después de las acciones sísmicas. La evidencia teórica y experimental así lo sugiere; aunque, se reitera, se requiere mayor investigación. Lo anterior, tampoco quiere decir que el asentamiento y los movimientos en los taludes laterales, no pudieran afectar la funcionalidad de la cara de concreto; de hecho, la presa Xipingpu sufrió daños por estos efectos, como ya se indicó en el Capítulo 1.

Finalmente, se estudió el contacto losa-enrocamiento en los datos de las presas de Aguamilpa y El Cajón, con lo que se obtuvieron algunos resultados interesantes. Uno de ellos sugiere que la fuerza de fricción en el enrocamiento con la losa para la presa de Aguamilpa debe ser superior a 0.1 veces la fuerza normal. Se determinó además que muy probablemente las losas se estén estirando por el empuje del agua, particularmente si en ellas se sigue un proceso constructivo que incrementa de manera notable la restricción a los deslizamientos en el contacto losa enrocamiento como se muestra esquemáticamente en la Figura 5.9. La inspección de los datos de inclinómetros en la presa del Cajón, sugieren que las losas se estiran si el contacto losa-enrocamiento no experimenta deslizamiento. Los cálculos realizados en este sentido, en el Capítulo 3, indican que los armados que se tienen en esta estructura permiten superar la resistencia que impone la fricción en este contacto, sin que se llegue al agrietamiento. Si se revisa la parte final del capítulo 3, no se pudo calcular el valor de la fuerza de fricción porque se desconoce el área de deslizamiento de las losas y porque después del llenado, no es posible despreciar la fricción que existe en los cantos de losas continuas que se encuentran a compresión. Conocer el valor que se genera en los contactos laterales entre losas es un dato muy importante para entender las fuerzas que se generan en esta parte de la estructura, esto se podría lograr posiblemente colocando celdas de presión en estos límites.

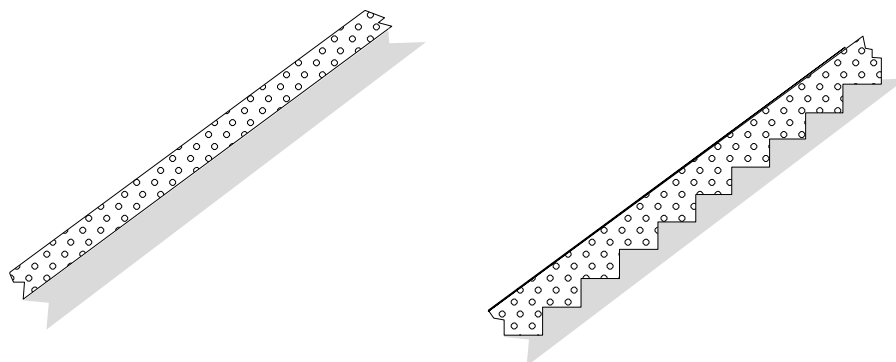


Figura 5.9.- Detalle del proceso constructivo en las losas de Aguamilpa (izquierda) y El Cajón (derecha). Pareciera más seguro y mejor el mecanismo del lado derecho, sin contar con la ayuda que puede brindar al proceso constructivo de las losas; sin embargo, existe información que sugiere que las losas se tensan al incrementar la fricción en el contacto losa-enrocamiento. Para problemas de flexión incrementar la fricción de este contacto lleva el eje neutro hacia la cara del enrocamiento.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

Las principales conclusiones de la presente investigación son las siguientes:

De acuerdo a los modelos presentados en este trabajo, es erróneo suponer esfuerzos nulos en las superficies laterales libres inclinadas de un terraplén, al usar elementos diferenciales con caras verticales. La forma en que puede asentarse un terraplén depende fuertemente del esfuerzo que exista en estas caras laterales. Los modelos estáticos presentados, sugieren que cuando el esfuerzo es alto en estas caras laterales, el terraplén se asentará de manera uniforme, si en cambio, este esfuerzo es bajo y tiende a cero el asentamiento principal será más importante hacia la parte media del continuo y en las caras laterales se generarán movimientos en sentido contrario a la fuerza de gravedad. Por otro lado los problemas dinámicos indican que la existencia de este esfuerzo genera movimientos sísmicos importantes en la corona de la estructura. La existencia de esfuerzos en estas caras laterales no implica perder la ortogonalidad de las formas modales que es requisito indispensable para resolver un problema de vibración forzada.

Las observaciones experimentales en las losas de concreto de las presas de Aguamilpa, sugieren que la fuerza de fricción en el contacto losa-enrocamiento debe ser superior a 0.1 el peso de la losa durante el proceso constructivo. Las observaciones experimentales de la presa El Cajón sugieren que las losas se estiran por el llenado del embalse y el comportamiento dúctil del enrocamiento. No se detectó que este estiramiento de las losas fuese generador de agrietamientos.

Se estudió el comportamiento dinámico de la presa El Infiernillo, encontrándose que es una estructura de movimiento complejo; se considera que incluir la presencia del agua en los modelos dinámicos puede ayudar a mejorar los resultados. Se observó también el comportamiento del modelo tridimensional para una pirámide instrumentada en la zona arqueológica de Monte Albán. Los resultados en este caso fueron mejores y reproducen los diferentes modos de la estructura aunque con diferente amplificación a las observadas. Se usó un solo valor de amortiguamiento en el estudio comparativo.

Un modelo tridimensional estático estudiado en este trabajo, indica que la separación entre la zona de tensión y compresión en la cara de concreto, se encuentra en los puntos de inflexión de una función coseno, como ya ha sido anotado en la discusión de resultados.

Los resultados dinámicos de los modelos estudiados en este trabajo indican que toda la cuña puede experimentar importantes aceleraciones. Algunas formas modales llevan el movimiento hacia arriba y otros hacia abajo. En este sentido, se considera que los enrocamientos, al ser susceptibles de asentamiento en toda su masa, tenderán a asentarse más que a generar superficies laterales de falla. Esta conclusión es resultado de las observaciones experimentales y teóricas presentadas, aunque como ya se ha mencionado, debe realizarse una mayor investigación en este sentido.

BIBLIOGRAFÍA

Arrau, L., Ibarra, I., y Noguera G. (1985). "Performance of Cogoti Dam under seismic loading" Proc. of Symp. on Concrete-Face Rockfill Dams-Design, Construction and Performance. ASCE, New York, N.Y., 1-14.

Base Mexicana de Datos de Sismos Fuertes, (1996), R. Quaas, L. Alcántara, C. Pérez, B. López, S. Medina, J.A. Flores, C. Javier, R. Vázquez, E. Mena, J.M. Espinosa y J.A. Otero, Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica. V 2.0

Bravo, H. y Romo M.P. (2009) , Soluciones analíticas bidimensionales de prismas continuos ante la acción de fuerzas horizontales, XVII Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Puebla, México, Noviembre.

Castro, A. J. y Montañez C. L. (1993), Behavior of Aguamilpa dam and diversion Works during the January 1992 floods, International Symposium on High Earth-Rockfill Dams, Vol 2, Pekin China, 697-715.

Cooke, J.B. (1999), The development of today's CFRD dam, Proc. of Second Symp. on CFRD, Florianópolis, Brasil, Oct., 3-11.

Fitzpatrick, M., Cole, B., Kinstler, F., y Knoop, B. (1985), Design of concrete face rockfill dams, Proc. of Symp. on Concrete-Face Rockfill Dams-Design, Construction and Performance. ASCE, New York, N.Y., 410-434.

Galván M.G., (2003), Comportamiento de la central hidroeléctrica Aguamilpa hasta el año 2002, Informe interno, Subgerencia de Comportamiento de Estructuras, CFE.

Gazetas G., (1987), Seismic Response of Earth Dams: Some Recent Developments, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 6, No. 1, 1987, State-of-the-Art Volume, 1-48.

Gonzalez V.F., (1994), Deformabilidad de la presa Aguamilpa, Memorias de la XVII Reunion Nacional de Mecánica de Suelos, Jalapa, SMMS, Vol I, México, 207-221.

Johannesson, P., Tohlang S.L. (2007), Lessons Learned from Mohale, Int. Water Power and Dam Construction, August 2007, 16-25.

Kent, D.C, y Park, R., (1971), Flexural members with confined concrete, Journal of the Structural Division, Proc. of the American Society of Civil Engineers, 1969-1990.

Taborda, R. y Ordaz, M., (2003), Procedimiento para estimar amortiguamientos de un sistema a partir de funciones de transferencia, XIV Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, León Guanajuato, México, Nov. 19 a 22.

Marengo, H., y Aguirre, S. (2007), Instrumentation and Behaviour of "El Cajon" dam, III Symposium on CFRD Dams Honoring J. Barry Cooke. Florianópolis-SC-Brazil, 25 to 27 October, 279-288.

Mononobe, N., Takada, A., and Matsumura, M. (1936), Seismic stability of earth dam, Trans. 2nd Congress on Large Dams, Washington D.C., 435-444.

Pinto, Nelson L. (2007), Very high CFRD Dams-Behaviour and design features, III Symposium on CFRD Dams Honoring J. Barry Cooke. Florianópolis-SC-Brazil, 25 to 27 October, 3-16.

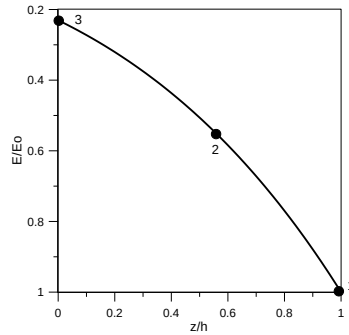
Wolfram Research Mathematica, Sitio Web:integrals.wolfram.com/index.jsp .

Zeping, X. (2008), Performance of Zipingpu CFRD during the strong earthquake, Proc. 10th International Symposium on Landslides and Engineered Slopes, Xian, China, June 30 to July 4.

APÉNDICE 2.1.1

El problema unidimensional de la variación de la rigidez en función de la profundidad, propone una variación de la función de la siguiente forma:

$$E = (A + B(z + b_0) + C(z + b_0)^2)E_0$$



Función de variación de la rigidez en función de la profundidad de Z

La función propuesta permite definir tres puntos de la curva. Estos tres puntos deberán cumplir con las siguientes igualdades:

$$A + B(h + b_0) + C(h + b_0)^2 = 1$$

$$A + B(\gamma h + b_0) + C(\gamma h + b_0)^2 = \beta$$

$$A + Bb_0 + Cb_0^2 = \alpha$$

De las expresiones anteriores se deduce que:

$$z = h \Rightarrow E/E_0 = 1$$

$$z = \gamma h \Rightarrow E/E_0 = \beta$$

$$z = 0 \Rightarrow E/E_0 = \alpha$$

Al resolver el sistema de ecuaciones planteado, se llega a lo siguiente:

$$C = \frac{\beta}{\gamma h^2}; \quad B = \frac{1-\beta}{h} - \frac{\beta(\gamma h + 2b_0)}{\gamma h^2}; \quad A = \beta - \left(\frac{1-\beta}{h} - \frac{\beta(\gamma h + 2b_0)}{\gamma h^2} \right) b_0 - \frac{\beta}{\gamma h^2} b_0^2$$

Las fuerzas involucradas en el problema son:

$$Fi = 2E \frac{du}{dz} (pz + b/2), \quad I = -2\rho(pz + b/2) dz \frac{d^2u}{dt^2}; \text{ pero:}$$

$$E = E_0 (A + (z + b_0)B + (z + b_0)^2 C) \Rightarrow Fi = 2Ep (A(z + b_0) + (z + b_0)^2 B + (z + b_0)^3 C) \frac{du}{dz}$$

$$Si : \frac{\partial Fi}{\partial z} dz = I$$

$$\Rightarrow \left((A(z+b_0) + B(z+b_0)^2 + (z+b_0)^3 C) \frac{d^2 u}{dz^2} + (A + 2B(z+b_0) + 3C(z+b_0)^2) \frac{du}{dz} \right) = -\frac{1}{V_p^2} (z+b_0) \frac{d^2 u}{dt^2}$$
 Por lo que al

usar el método de separación de variables, la función de t queda como en los casos anteriores, mientras que la función de z a resolver es la siguiente:

$$(A(z+b_0) + B(z+b_0)^2 + C(z+b_0)^3) \Phi'' z + (A + 2B(z+b_0) + 3C(z+b_0)^2) \Phi' z + \frac{\omega^2}{V_p^2} (z+b_0) \Phi z = 0$$

Una solución de la ecuación diferencial anterior, es trasladar z al punto $z = u - b_0$

$$(Au + Bu^2 + Cu^3) \Phi'' u + (A + 2Bu + 3Cu^2) \Phi' u + \frac{\omega^2}{V_p^2} u \Phi u = 0 \quad (2.1.1)$$

Mediante el método de Frobenius, se supone una solución de la forma:

$$\Phi u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^{n+\lambda}; \quad \Phi' u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\lambda) u^{n+\lambda-1}; \quad \Phi'' u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\lambda)(n+\lambda-1) u^{n+\lambda-2}$$

Lo que lleva a la siguiente ecuación

$$A(n+\lambda)^2 a_n u^{n+\lambda-2} + B(n+\lambda)(n+\lambda+1) a_n u^{n+\lambda-1} + (C(n+\lambda)(n+\lambda+2) + \frac{\omega^2}{V_p^2}) a_n u^{n+\lambda} = 0 \quad (2.1.2)$$

Para $n=0$, el término correspondiente al exponente $u^{\lambda-2}$, lleva a la siguiente ecuación inicial:

$$A\lambda^2 a_0 u^{\lambda-2} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0$$

Si se sustituye uno de los valores $\lambda_1 = 0$ en (2.1.2), se tiene la siguiente ecuación de recurrencia:

$$a_n = -\frac{Bn(n-1)a_{n-1} + (Cn(n-2) + \beta^2)a_{n-2}}{An^2}; \quad \beta^2 = \frac{\omega^2}{V_p^2}$$

La primera solución es

$$\Phi_{u1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n \quad (2.1.3)$$

La segunda solución puede ser obtenida mediante la siguiente expresión

$$\Phi_{u2} = \Phi_{u1} \ln u + u \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n \quad (2.1.4)$$

Por lo que

$$\Phi'_{u2} = \Phi'_{u1} \ln u + \frac{\Phi'_{u1}}{u} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n u^{n-1} \quad (2.1.5)$$

$$\Phi''_{u2} = \Phi''_{u1} \ln u + 2 \frac{\Phi'_{u1}}{u} - \frac{\Phi_{u1}}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) b_n u^{n-1} \quad (2.1.6)$$

Al sustituir (2.1.4), (2.1.5) y (2.1.6) en (2.1.1), lleva a:

$$2\left(A+Bu+Cu^2\right)\left(\frac{\Phi'_{u1}}{u}+\Theta'_2\right)+\left(\frac{B}{u}+2C\right)\Phi_{u1}+\left(\frac{A}{u}+2B+3Cu\right)\Theta'_2+\beta^2\Theta_2=0$$

Donde:

$$\Theta_2=\sum_{n=1}^{\infty}b_nu^n; \quad \Theta'_2=\sum_{n=1}^{\infty}nb_nu^{n-1}; \quad \Theta''_2=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)b_nu^{n-2}$$

Después de un proceso algebraico, se llega a:

$$b_n=-\frac{2nAa_n+B(2n-1)a_{n-1}+nB(n-1)b_{n-1}+2(n-1)Ca_{n-2}+(nC(n-2)+\beta^2)b_{n-2}}{n^2A}$$

$$a_n=b_n=0, \text{ para } n < 0$$

$$b_0=0; \quad a_0=1$$

Sin embargo, se observó que diferentes casos de esta solución no convergen de manera sencilla para algunos casos de funciones de rigidez, por lo que esta alternativa de solución es sólo una posibilidad. Deberán plantearse otras. A continuación se plantea otro procedimiento que podría utilizarse:

De la ecuación 2.1.1, supóngase que la solución Φu es el producto de dos funciones:

$\Phi u = pq \Rightarrow \Phi' u = p'q + pq' \Rightarrow \Phi'' u = p''q + 2p'q' + pq''$ al sustituir en (2.1.1), la ecuación se puede describir de la siguiente manera:

$$((Au+Bu^2+Cu^3)q)p''+(2(Au+Bu^2+Cu^3)q')q'+(A+2Bu+3Cu^2)qp'+((Au+Bu^2+Cu^3)q''+(A+2Bu+3Cu^2)q')q'+\beta^2uq)p=0$$

Si la función q , se define como la primera solución determinada en el caso anterior: $q=\sum_{n=0}^{\infty}a_nu^n$

Con: $a_n=-\frac{Bn(n-1)a_{n-1}+(Cn(n-2)+\beta^2)a_{n-2}}{An^2}$; $\beta^2=\frac{\omega^2}{V_p^2}$, lo que resta es resolver:

$$p''+\left(\frac{2q'}{q}+\frac{A+2Bu+3Cu^2}{Au+Bu^2+Cu^3}\right)p'=0$$

Entonces:

$$p'=e^{-\int R(u)du}+C$$

Donde:

$$R(u)=\left(\frac{2q'}{q}+\frac{A+2Bu+3Cu^2}{Au+Bu^2+Cu^3}\right)$$

La solución sería entonces:

$$p=\int e^{-\int R(u)du} du + Cu + D$$

En esta solución que se plantea, se podría integrar numéricamente la función $R(u)$, lo cual no induce errores importantes.

APÉNDICE 2.2.1

Solución de la ecuación diferencial

$$(z + a_0)\Phi''z + \Phi'z + (z + a_0)\left(\frac{\omega^2}{V_p^2} - \frac{C_{kx}^2}{(z + b_0)^2}\right)\Phi z = 0; \quad C_{kx}^2 = \frac{\alpha\pi V_s}{pV_p} \quad (2.2.1)$$

Sea la siguiente transformación:

$$\Phi z = (z + b_0)^\alpha \Psi z \quad \text{para } b_0 > 0$$

$$\Phi z = (-z - b_0)^\alpha \Psi z \quad \text{para } b_0 < 0$$

Con lo que la ecuación (2.2.1), se transforma en la siguiente ecuación

$$\Psi''z + \left(\frac{2\alpha}{z + b_0} + \frac{1}{z + a_0}\right)\Psi'z + \left(\frac{\omega^2}{V_p^2} + \frac{\alpha}{(z + a_0)(z + b_0)}\right)\Psi z = 0 \quad (2.2.3)$$

Con dos posibles valores del valor de $\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4C_{kx}^2}}{2}$

Siempre es posible trasladar z a un punto donde se tenga convergencia de la solución

$$z = u + \gamma$$

$$\Psi''u + \left(\frac{2\alpha}{u + b_{0\gamma}} + \frac{1}{u + a_{0\gamma}}\right)\Psi'u + \left(\frac{\omega^2}{V_p^2} + \frac{\alpha}{(u + a_{0\gamma})(u + b_{0\gamma})}\right)\Psi u = 0; \quad a_{0\gamma} = a_0 + \gamma; \quad b_{0\gamma} = b_0 + \gamma \quad (2.2.4)$$

Al suponer una solución en series de Frobenius de la forma

$$\Psi u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^{\lambda+n}$$

Los valores de λ para resolver (2.2.4) son $\lambda_{1,2} = 0,1$ con las siguientes dos soluciones

APÉNDICE 2.3.1

La ecuación diferencial de la variable z es

$$\Phi''z + \left(\beta^2 - \frac{C_{ly}^2}{(z+a_0)^2} - \frac{C_{kx}^2}{(z+b_0)^2} \right) \Phi z = 0; \quad C_{ly} = \frac{(2l-1)\pi}{2q}; \quad C_{ky} = \frac{\alpha_k}{p}; \quad \beta^2 = \frac{\omega^2}{V_s^2} \quad (2.3.1)$$

Para resolver (2.3.1), se propone la siguiente transformación

$$\Phi z = \begin{cases} (z+a_0)^\eta (z+b_0)^\gamma \Psi z & \text{if } a_0 > 0 \text{ and } b_0 > 0 \\ (-z-a_0)^\eta (z+b_0)^\gamma \Psi z & \text{if } a_0 < 0 \text{ and } b_0 > 0 \\ (z+a_0)^\eta (-z-b_0)^\gamma \Psi z & \text{if } a_0 > 0 \text{ and } b_0 < 0 \\ (-z-a_0)^\eta (-z-b_0)^\gamma \Psi z & \text{if } a_0 < 0 \text{ and } b_0 < 0 \end{cases}$$

Para el caso específico de la cuña se tiene que: $a_0 < 0$, y $b_0 > 0$, que transforma la ecuación (2.3.1) en

$$\Psi''z + 2 \left(\frac{\gamma}{z+b_0} + \frac{\eta}{z+a_0} \right) \Psi'z + \left(\beta^2 + \frac{2\gamma\eta}{(z+b_0)(z+a_0)} \right) \Psi z = 0 \quad (2.3.2)$$

Donde γ y η pueden tener dos posibles valores: $\gamma = \frac{1 \pm \sqrt{1+4C_{kx}^2}}{2}$, $\eta = \frac{1 \pm \sqrt{1+4C_{ly}^2}}{2}$

Ahora, es posible trasladar z a un punto donde se pueda tener convergencia de la solución tal que $z = \nu - \kappa$

$$\Psi''\nu + 2 \left(\frac{\gamma}{\nu+b_{0\kappa}} + \frac{\eta}{\nu+a_{0\kappa}} \right) \Psi'\nu + \left(\beta^2 + \frac{2\gamma\eta}{(\nu+b_{0\kappa})(\nu+a_{0\kappa})} \right) \Psi \nu = 0; \quad a_{0\kappa} = a_0 - \kappa; \quad b_{0\kappa} = b_0 - \kappa \quad (2.3.3)$$

La solución en series de Frobenius de la ecuación (2.3.3) es

$$\Psi \nu = A \left(c_0 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \nu^n \right) + B \sum_{n=1}^{\infty} d_n \nu^n$$

$$c_n = - \frac{(n-1)(e_0(n-2) + h_0)c_{n-1} + ((n-2)((n-3) + g_0) + i_0)c_{n-2} + \beta^2 e_0 c_{n-3} + \beta^2 c_{n-4}}{f_0 n(n-1)}; \quad c_0 = 1; \quad c_1 = 0; \quad n > 2$$

$$d_n = - \frac{(n-1)(e_0(n-2) + h_0)d_{n-1} + ((n-2)((n-3) + g_0) + i_0)d_{n-2} + \beta^2 e_0 d_{n-3} + \beta^2 d_{n-4}}{f_0 n(n-1)}; \quad d_0 = 0; \quad d_1 = 1; \quad n > 1$$

$$c_n = d_n = 0 \quad \text{cuando } n < 0$$

$$e_0 = a_{0\kappa} + b_{0\kappa}; \quad f_0 = a_{0\kappa} b_{0\kappa}; \quad g_0 = 2(\eta + \gamma); \quad h_0 = 2(\eta b_{0\kappa} + \gamma a_{0\kappa}); \quad i_0 = \beta^2 a_{0\kappa} b_{0\kappa} + 2\eta\gamma$$

APÉNDICE 2.3.2

La ecuación diferencial de la variable Z es

$$\Phi''_Z + \left(\lambda^2 - \frac{C_y^2}{(z + a_0)^2} \right) \Phi_Z = 0; \quad C_y = \frac{(2l-1)\pi}{2q}; \quad \lambda^2 = \frac{E\omega^2}{G} \quad (2.3.2)$$

Si se realiza el siguiente cambio de variable: $z = \nu - a_0$ si $a_0 > 0$; o, $z = -\nu - a_0$ si $a_0 < 0$. La ecuación (2.3.2), puede ser transformada en

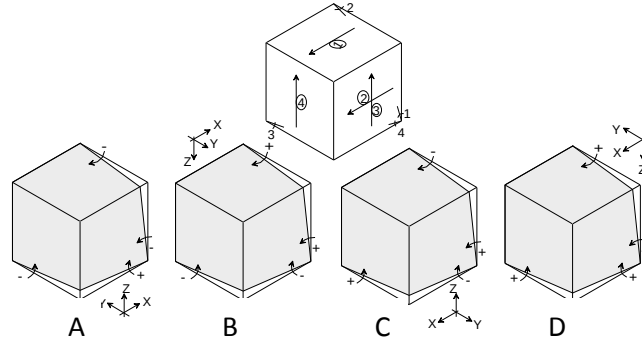
$$\Phi''_\nu + \left(\lambda^2 - \frac{C_y^2}{\nu^2} \right) \Phi_\nu = 0 \quad (2.3.3)$$

A partir del método de Frobenius se tiene:

$$\Phi_\nu = A \sum_{n=0}^{\infty} c_n \nu^{n+\kappa_1} + B \sum_{n=0}^{\infty} d_n \nu^{n+\kappa_2} \quad (2.3.4)$$

$$c_n = -\frac{E\omega^2}{G} \frac{c_{n-2}}{(n+\kappa_1)(n+\kappa_1-1)-C_y^2}; \quad d_n = -\frac{E\omega^2}{G} \frac{d_{n-2}}{(n+\kappa_2)(n+\kappa_2-1)-C_y^2}; \quad \kappa_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4C_y^2}}{2}$$

Apéndice 2.3.4



$$-s_1 E \omega_x^2 + G(-s_2 \omega_y^2 + s_3 \omega_z^2) = 0 \Rightarrow \omega_z^2 = \frac{s_1}{s_3} \frac{E}{G} \omega_x^2 + \frac{s_2}{s_3} \omega_y^2 \quad (u)$$

(u)

$$s_6 E \omega_z^2 + G(-s_5 \omega_y^2 - s_4 \omega_x^2) = 0 \Rightarrow \omega_z^2 = \frac{s_4}{s_6} \frac{G}{E} \omega_x^2 + \frac{s_5}{s_6} \frac{G}{E} \omega_y^2 \quad (w)$$

(w)

Sist Ref	Ec. u w	X s ₁ s ₄	Y s ₂ s ₅	Z s ₃ s ₆	ω_z^2	Igualdad ω_x^2, ω_y^2	Igualdad ω_y^2, ω_z^2	Igualdad ω_x^2, ω_z^2
A	u	+	-	-	$-E\omega_x^2/G + \omega_y^2$	$\left(\frac{E}{G} - \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(1 - \frac{G}{E}\right)\omega_y^2$	$\left(1 - \frac{G}{E}\right)\omega_y^2 = \left(\frac{E}{G} - \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$	$\omega_x^2 = \omega_z^2$
A	w	+	-	-	$-G\omega_x^2/E + G\omega_y^2/E$			
A	u	-	-	-	$E\omega_x^2/G + \omega_y^2$	$\left(\frac{E}{G} - \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(-1 - \frac{G}{E}\right)\omega_y^2$	$\left(-1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2 = \left(\frac{E}{G} - \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$	$\omega_x^2 = \omega_z^2$
A	w	+	-	+	$G\omega_x^2/E - G\omega_y^2/E$			
A	u	+	-	-	$-E\omega_x^2/G + \omega_y^2$	$\left(\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2$	$\left(1 - \frac{G}{E}\right)\omega_y^2 = \left(-\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$	$\left(1 - \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(-1 - \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$
A	w	+	-	+	$G\omega_x^2/E - G\omega_y^2/E$			
A	u	-	-	-	$E\omega_x^2/G + \omega_y^2$	$\left(\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(-1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2$	$\left(1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2 = \left(\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$	$\left(1 + \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(-1 + \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$
A	w	+	-	-	$-G\omega_x^2/E + G\omega_y^2/E$			
B	u	+	+	+	$E\omega_x^2/G + \omega_y^2$	$\left(\frac{E}{G} - \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(-1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2$	$\left(1 - \frac{G}{E}\right)\omega_y^2 = \left(\frac{E}{G} - \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$	$\left(1 - \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(-1 + \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$
B	w	-	-	-	$G\omega_x^2/E + G\omega_y^2/E$			
B	u	-	+	+	$-E\omega_x^2/G + \omega_y^2$	$\left(\frac{E}{G} - \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2$	$\left(1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2 = \left(-\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$	$\left(1 + \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(-1 - \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$
B	w	-	-	+	$-G\omega_x^2/E - G\omega_y^2/E$			
B	u	+	+	+	$E\omega_x^2/G + \omega_y^2$	$\left(\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(-1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2$	$\left(-1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2 = \left(\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$	$\left(-1 + \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(-1 - \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$
B	w	-	-	+	$-G\omega_x^2/E - G\omega_y^2/E$			
B	u	-	+	+	$-E\omega_x^2/G + \omega_y^2$	$\left(\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(1 - \frac{G}{E}\right)\omega_y^2$	$\left(1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2 = \left(\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$	$\left(1 + \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(1 - \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$
B	w	-	-	-	$G\omega_x^2/E + G\omega_y^2/E$			
C	u	+	-	+	$E\omega_x^2/G - \omega_y^2$	$\left(\frac{E}{G} - \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(1 - \frac{G}{E}\right)\omega_y^2$	$\left(-1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2 = \left(\frac{E}{G} - \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$	$\left(-1 + \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(1 - \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$
C	w	-	+	-	$G\omega_x^2/E - G\omega_y^2/E$			
C	u	-	-	+	$-E\omega_x^2/G - \omega_y^2$	$\left(\frac{E}{G} - \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(-1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2$	$\left(-1 - \frac{G}{E}\right)\omega_y^2 = \left(-\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$	$\left(-1 - \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(1 + \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$
C	w	-	+	+	$-G\omega_x^2/E + G\omega_y^2/E$			
C	u	+	-	+	$E\omega_x^2/G - \omega_y^2$	$\left(\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2$	$\left(1 - \frac{G}{E}\right)\omega_y^2 = \left(\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$	$\left(1 - \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(1 + \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$
C	w	-	+	+	$-G\omega_x^2/E + G\omega_y^2/E$			
C	u	-	-	+	$-E\omega_x^2/G - \omega_y^2$	$\left(\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(-1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2$	$\left(1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2 = \left(-\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$	$\left(1 + \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(1 - \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$
C	w	-	+	-	$G\omega_x^2/E - G\omega_y^2/E$			
D	u	+	+	-	$-E\omega_x^2/G - \omega_y^2$	$\left(\frac{E}{G} - \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(-1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2$	$\left(1 - \frac{G}{E}\right)\omega_y^2 = \left(-\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$	$\omega_x^2 = \omega_z^2$
D	w	+	+	-	$-G\omega_x^2/E - G\omega_y^2/E$			
D	u	-	+	-	$E\omega_x^2/G - \omega_y^2$	$\left(\frac{E}{G} - \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2$	$\left(1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2 = \left(\frac{E}{G} - \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$	$\omega_x^2 = \omega_z^2$
D	w	+	+	+	$G\omega_x^2/E + G\omega_y^2/E$			
D	u	+	+	-	$-E\omega_x^2/G - \omega_y^2$	$\left(\frac{E}{G} - \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(-1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2$	$\left(-1 + \frac{G}{E}\right)\omega_y^2 = \left(-\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$	$\left(-1 + \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(1 + \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$
D	w	+	+	+	$-G\omega_x^2/E + G\omega_y^2/E$			
D	u	-	+	-	$E\omega_x^2/G - \omega_y^2$	$\left(\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(1 - \frac{G}{E}\right)\omega_y^2$	$\left(-1 - \frac{G}{E}\right)\omega_y^2 = \left(\frac{E}{G} + \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$	$\left(-1 - \frac{G}{E}\right)\omega_x^2 = \left(1 - \frac{G}{E}\right)\omega_z^2$
D	w	+	+	-	$-G\omega_x^2/E - G\omega_y^2/E$			

Apéndice 2.3.5

Se tomará el caso de un elemento tipo viga que puede deformarse en flexión, al considerar el peso propio como una fuerza externa actuando en una cara del continuo. Note que en el planteamiento presentado, podría haberse resuelto el problema de peso propio, a través de la inercia como ya se ha planteado en otros problemas, sin embargo, para este problema interesa más el comportamiento del elemento ante la acción de fuerzas externas como se verá posteriormente.

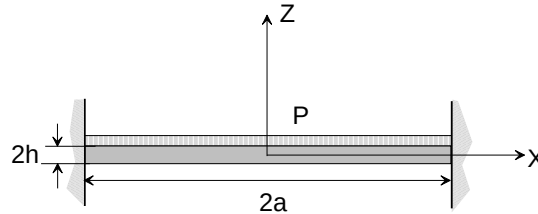


Figura 2.3.1.- Modelo de un elemento prismático con los bordes fijos en los extremos

Al trabajar con las condiciones de frontera del problema.

$$u = \Phi'_x \Phi_z \Phi_y + u_0$$

$$w = \Phi_x \Phi'_z \Phi_y + w_0$$

Si las fronteras: $x=-a$, $x=a$ son fijas para el movimiento en dirección u ; entonces:

$$u|_{x=\pm a} = 0$$

Lo que implica que $\Phi'_x = f'_x = 0$ en estos puntos, es decir:

$$-A \sin \omega_x a + B \cos \omega_x a = 0$$

$$A \sin \omega_x a + B \cos \omega_x a = 0$$

Como la frontera $x=\pm a$ también es fija para el movimiento w , se requiere cumplir con:

$$w|_{x=\pm a} = 0 \Rightarrow \Phi_x = 0 \quad \text{en} \quad x = \pm a$$

$$A \cos \omega_x a - B \sin \omega_x a + C = 0$$

$$A \cos \omega_x a + B \sin \omega_x a + C = 0$$

Para resolver las cuatro condiciones de frontera anteriores, se tiene que si $B=0$, entonces $\omega_x = \pi/a$, y $C=A$

$$\Phi_x = A(\cos \omega_x x + 1), \quad \omega_x = \frac{\pi}{a}$$

$$\Phi'_x = -A \omega_x \sin \omega_x x$$

Para la función de y se considerará que la solución es simétrica

$$\Phi_y = A \cos \omega_y y$$

Se trabaja ahora con la función de z :

$$\Phi_z = A \cosh \omega_z z + B \sinh \omega_z z + C$$

Considérese el caso general en el que las dos caras perpendiculares al eje z estén cargadas y luego hagamos una de las fuerzas nulas para resolver el problema actual y, al mismo tiempo, tener una solución general que será usada posteriormente en otro problema presentado en este trabajo. Sea:

$$E \frac{\partial w}{\partial z} = P_1 \Rightarrow E \Phi''_z = P_1 \quad (z = h)$$

$$E \frac{\partial w}{\partial z} = P_2 \Rightarrow E \Phi''_z = P_2 \quad (z = -h)$$

Se puede mostrar que:

$$\Phi_z = \frac{(P_1 \sinh \omega_z (z+h) - P_2 \sinh \omega_z (z-h))}{E \omega_z^2 \sinh 2\omega_z h} + C \quad (2.3)$$

Si $P_1 = 0$, entonces:

$$\Phi_z = \frac{-P_2 \sinh \omega_z (z-h)}{E \omega_z^2 \sinh 2\omega_z h} + C$$

La expresión anterior cumple con las condiciones de frontera que requiere w en su movimiento axial.

Si aceptamos además, que para un material homogéneo el eje neutro se encuentra en $z=0$:

$$u|_{z=0} = 0 \Rightarrow \Phi_z = \frac{P_2 \sinh \omega_z h}{E \omega_z^2 \sinh 2\omega_z h} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{P_2 \sinh \omega_z h}{E \omega_z^2 \sinh 2\omega_z h}$$

Donde se tienen tres opciones para ω_z :

$$\omega_z^2 = \omega_x^2; \quad \omega_z^2 = \left(\frac{1 + \frac{G}{E}}{1 - \frac{G}{E}} \right) \omega_x^2; \quad \omega_z^2 = \left(\frac{1 - \frac{G}{E}}{1 + \frac{G}{E}} \right) \omega_x^2$$

Resultará interesante comparar las deflexiones w , del modelo resuelto en este trabajo con la teoría de flexión. Se sabe de la teoría de flexión que: $\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{P_1}{EI}$, integrando y tomando las siguientes condiciones de frontera: $\frac{dw}{dx} \Big|_{x=\pm a} = 0$, $w \Big|_{x=\pm a} = 0$, que corresponden al caso de extremos fijos en $x=\pm a$, se puede deducir la siguiente expresión:

$$w = \frac{P_1}{24EI} (x^2 - a^2)^2$$

Que indicaría las deflexiones para la carga P_1 . El conocimiento del movimiento w podría obedecer a una observación experimental como se presentará posteriormente.

Asumamos en el ejemplo que se presenta a continuación que el elemento tiene un espesor de 0.2 m ($h=0.1$), por 5 metros de largo ($a=2.5$) y un ancho de 3 metros. El módulo de elasticidad considerado es $E=2.1 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ y un peso volumétrico del concreto de 2400 kg/m^3 . La siguiente figura presenta la elástica exagerada del elemento para el modelo propuesto en comparación con el modelo de flexión. Las deflexiones que se presentan en línea negra corresponden a la solución del modelo tridimensional, mientras que la elástica en líneas grises corresponde a la teoría de flexión. Las comparaciones se presentan para tres valores del módulo de Poisson. La aproximación de la teoría de flexión con el modelo de este trabajo, se aproximan solo cuando el módulo de Poisson es negativo y próximo a su valor límite de -0.5.

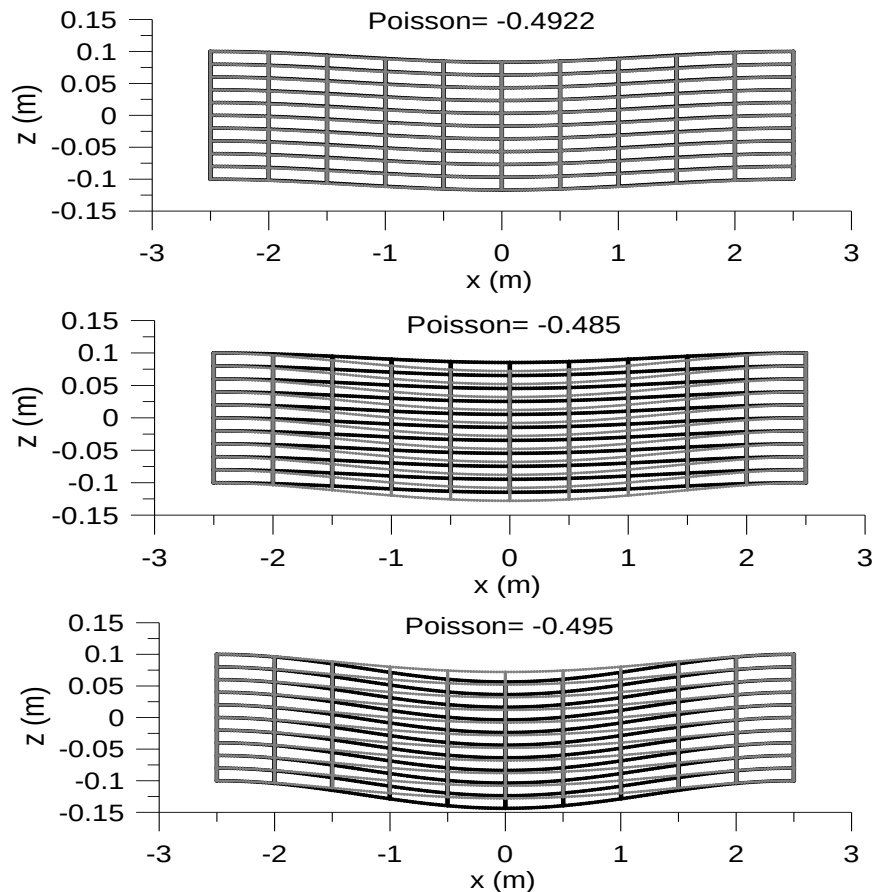


Figura 2.3.2.- Elástica del modelo tridimensional de una losa en comparación con la teoría de flexión para un elemento de 0.2 m de espesor.

Si consideramos que el peralte del mismo elemento es de 2 m en lugar de 20 cm, la elástica de los dos modelos es la que se muestra en la Figura 2.3.3

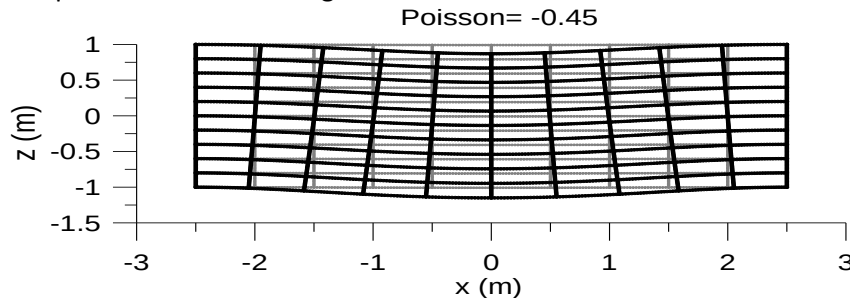


Figura 2.3.3.- Elástica del modelo tridimensional de una losa en comparación con la teoría de flexión para un elemento de 2 m de espesor.

Algo muy evidente es el crecimiento de la deformación angular, o la mayor variación del movimiento en dirección u , en relación al movimiento w , para el elemento de mayor peralte, lo cual es congruente con la evidencia física. Si se incrementa el módulo de Poisson el desarrollo de los movimientos u y w es notablemente mayor. Los valores numéricos de los desplazamientos se presentan en la Figura 2.3.4.

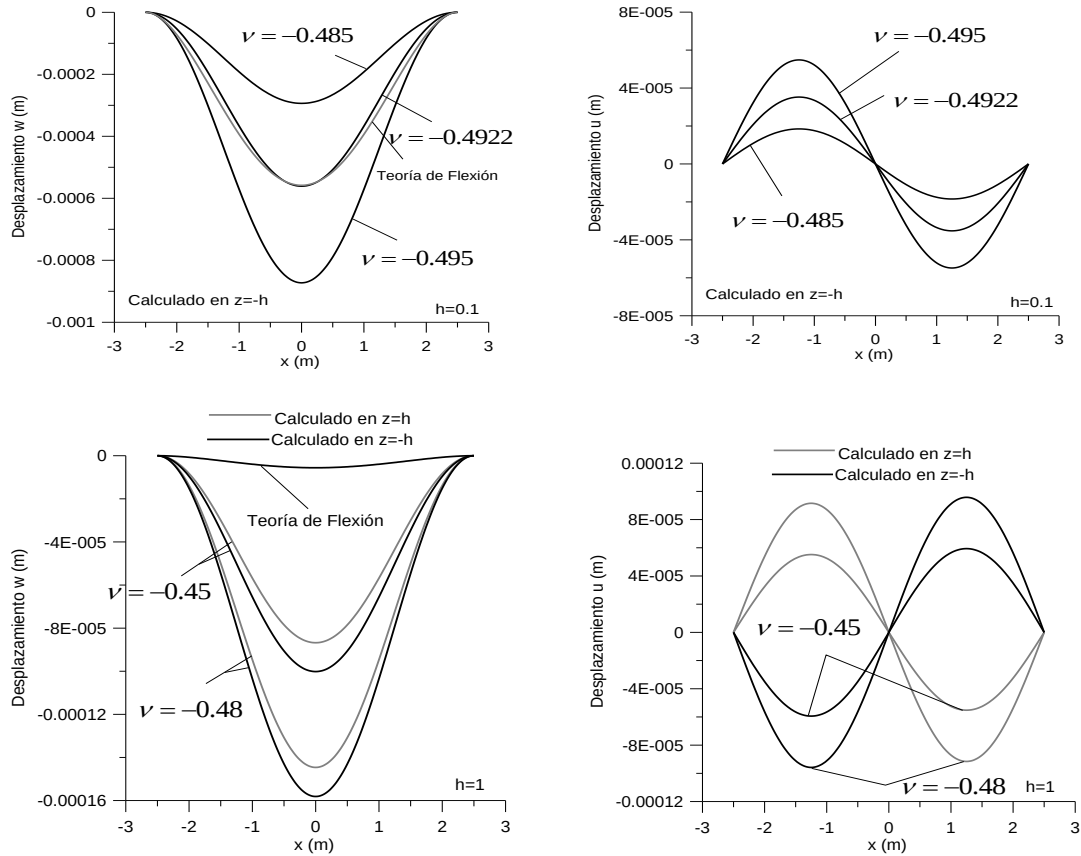


Figura 2.3.4.- Valores de desplazamiento para el modelo tridimensional de la losa.

NOMENCLATURA BÁSICA

u - Movimiento en dirección X ó también desplazamiento en la interfaz losa-enrocamiento

v - Movimiento en dirección Y

w - Movimiento en dirección Z

Φ_x - Función dependiente de la variable espacial X

Φ'_x - Primera derivada de Φ_x con respecto a X

Φ_y - Función dependiente de la variable espacial Y

Φ'_y - Primera derivada de Φ_y con respecto a Y

Φ_z - Función dependiente de la variable espacial Z

Φ'_z - Primera derivada de Φ_z con respecto a Z

Φ_t - Función dependiente del tiempo

Φ'_t - Primera derivada de Φ_t con respecto a t

ω_x - Frecuencia natural de X

ω_y - Frecuencia natural de Y

ω_z - Frecuencia natural de Z

ω - Frecuencia natural de t

C_{kx} - Constante que depende de la frecuencia natural de x

C_{ly} - Constante que depende de la frecuencia natural de y

α - parámetro que depende del nivel de deformación en la frontera de x

a - largo en la corona de una presa formada por trapecios

b - ancho en la corona de una presa formada por trapecios

c - largo en la base de una presa formada por trapecios

d - ancho en la base de una presa formada por trapecios

h - altura de una presa

$p = \frac{d-b}{2h}$ - pendiente del trapecio en dirección X

$q = \frac{c-a}{2h}$ - pendiente del trapecio en dirección Y

$a_0 = \frac{a}{2p}$ - Constante

$b_0 = \frac{b}{2q}$ - Constante

P_x - Esfuerzo axial en dirección X

P_y - Esfuerzo axial en dirección Y

P_z - Esfuerzo axial en dirección Z

S_{xz} - Esfuerzo cortante en dirección X en caras paralelas al plano XY

S_{yz} - Esfuerzo cortante en dirección Y en caras paralelas al plano XY

S_{zx} - Esfuerzo cortante en dirección Z en caras paralelas al plano YZ

S_{zy} - Esfuerzo cortante en dirección Z en caras paralelas al plano XZ

S_{xy} - Esfuerzo cortante en dirección X en caras paralelas al plano XZ

S_{yx} - Esfuerzo cortante en dirección Y en caras paralelas al plano YZ

I_x - Inercia en dirección X

I_y - Inercia en dirección Y

I_z - Inercia en dirección Z

E - Módulo de rigidez axial

G - Módulo de rigidez a cortante

ρ - Densidad del material

V_P - Velocidad de ondas de compresión

V_S - Velocidad de ondas de corte

AM - Factor de amplificación modal

Fr - Esfuerzo de rigidez a fricción en la interfaz losa enrocamiento

Fr - Escalar adimensional de esfuerzo en la frontera libre