



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS DEL CENTRO DE EDUCACION  
CONTINUA

Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del Jefe del Centro de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en la constancia, deberán entregar copia del mismo o de su cédula a más tardar el SEGUNDO DIA de clases, en las oficinas del Centro con la señorita encargada de inscripciones.

El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona encargada de entregar las notas del curso. Las inasistencias serán computadas por las autoridades del Centro, con el fin de entregarle constancia solamente a los alumnos que tengan un mínimo del 80% de asistencia.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.

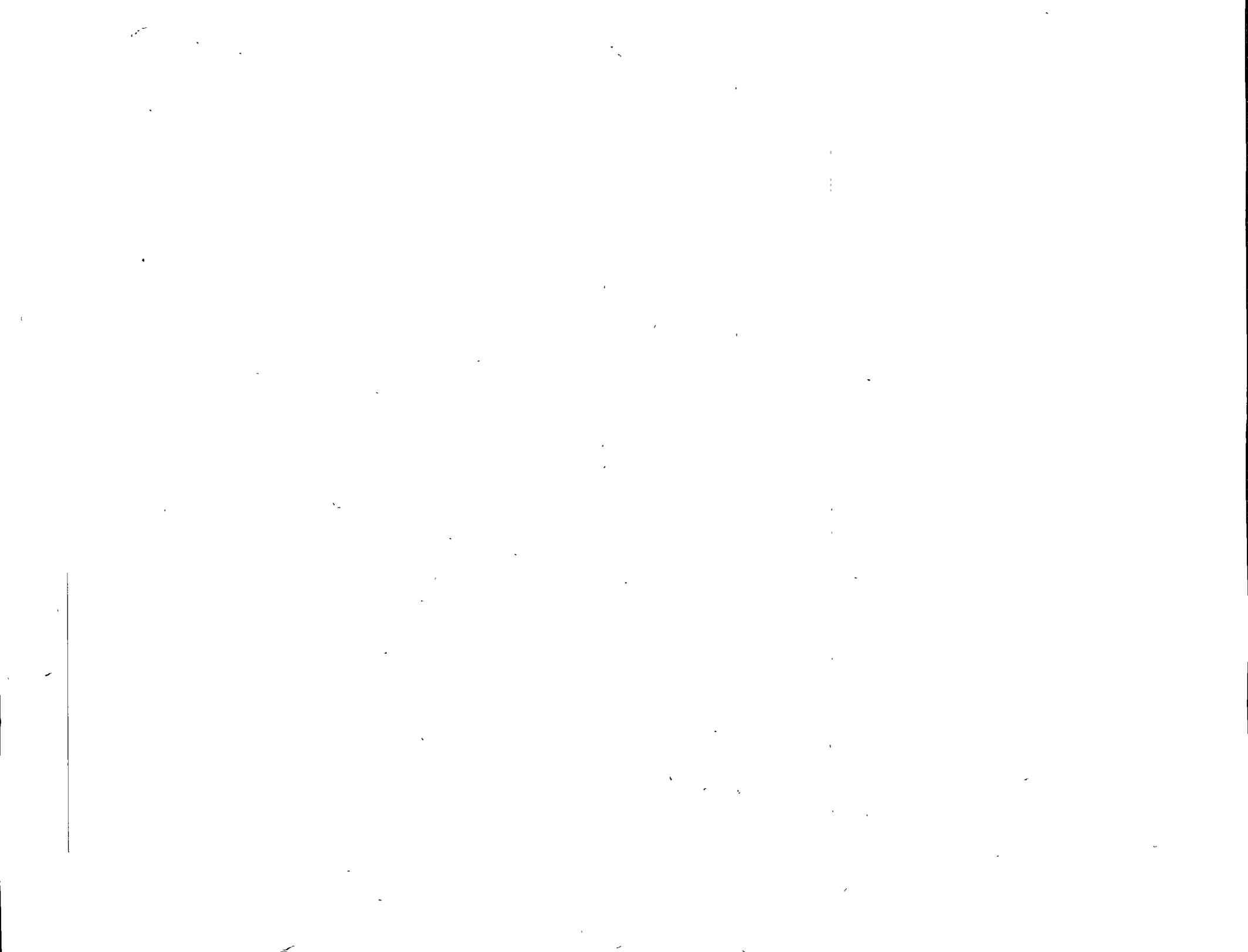
Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso. Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes, entregando el oficio respectivo.

Con objeto de mejorar los servicios que el Centro de Educación Continua ofrece, al final del curso se hará una evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes.



## ANALISIS ESTRUCTURAL 1978

Fecha	Duración	Tema	Profesor
Febrero 27	9 a 13 h y de 15 a 17 h	I. Fundamentos de Elasticidad  Ecuaciones deformación-desplazamiento. Ecuaciones constitutivas. Ecuaciones de equilibrio. Ecuaciones de compatibilidad. Fundamentos energéticos.	Dr. Porfirio Ballesteros Barocio
Febrero 28	9 a 13 h y de 15 a 17 h	II. Método de las Flexibilidades  Introducción. Desplazamientos. Ecuaciones básicas de análisis por flexibilidad. Ejemplos.	Dr. Porfirio Ballesteros Barocio
Marzo 1 <sup>o</sup>	9 a 13 h y de 15 a 17 h	III. Método de las Rigideces  Introducción. Elemento viga tridimensional. Elemento viga bidimensional. Transformación de sistemas coordinados. Análisis de sistemas estructurales bidimensionales. Análisis de sistemas estructurales tridimensionales. Uso de computadora en análisis de sistemas estructurales. Ejemplos.	Dr. Porfirio Ballesteros Barocio
Marzo 2	9 a 12 h 12 a 13 h y de 15 a 17 h	IV. Introducción al Elemento Finito	Dr. Porfirio Ballesteros Barocio
" 3	9 a 13 h y de 15 a 17 h  17 a 18 h	Método directo de las rigideces, Determinación de la rigidez de un elemento por medio del principio del trabajo virtual. Tipos de elementos finitos. Elemento rectangular para estados planos de esfuerzos Ejemplo de un sistema bidimensional muro-marco mediante computadora. Clausura.	

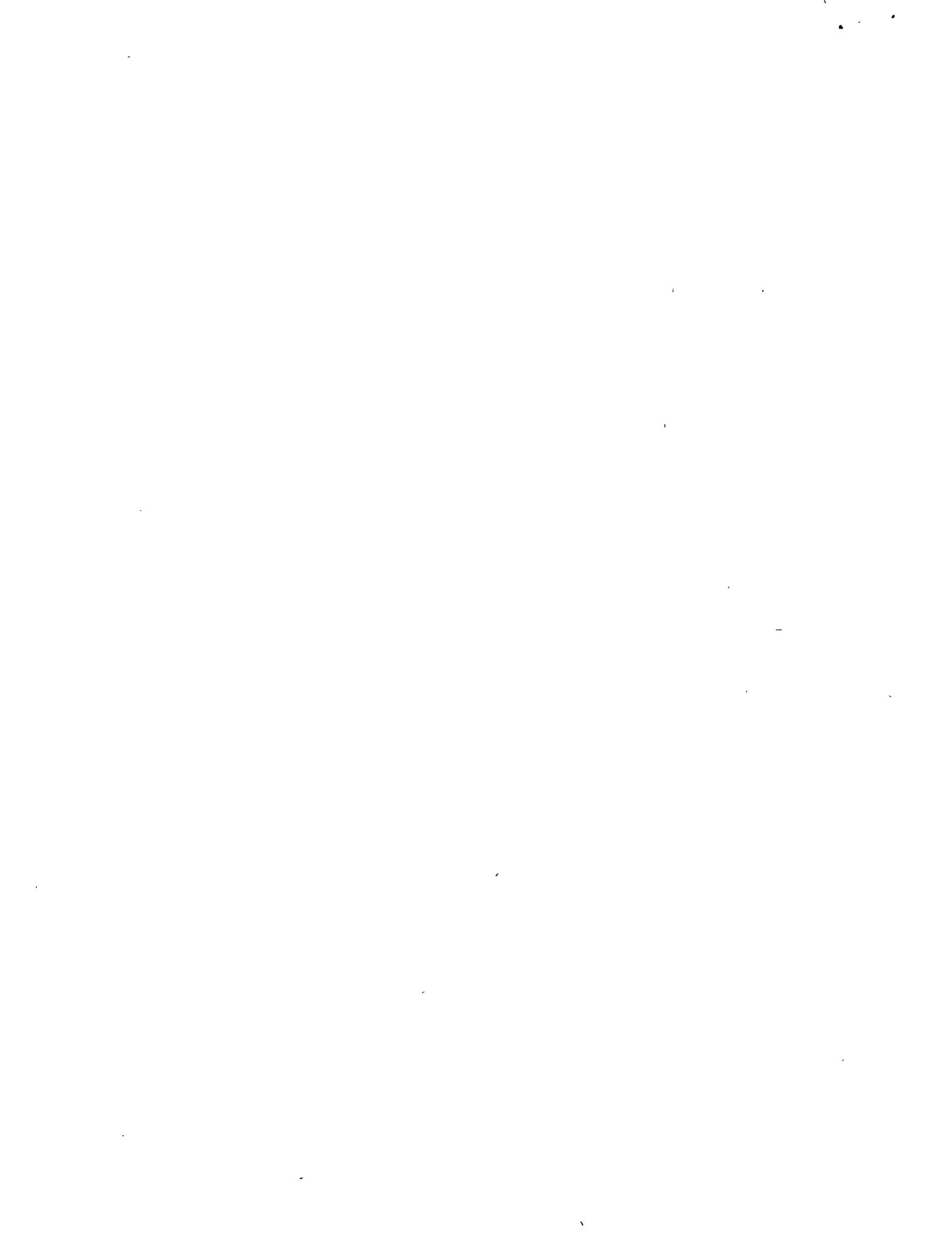


## DIRECTORIO DEL CURSO ANALISIS ESTRUCTURAL

Dr. Porfirio Ballesteros Barocio  
Jefe de la Sección de Estructuras  
División de Estudios Superiores  
Facultad de Ingeniería, UNAM.

Jefe de la Sección de Mecánica Teórica  
y Aplicada  
División de Estudios Superiores  
Facultad de Ingeniería, UNAM.  
Tel.: 550.52.15 Ext. 4498.





EVALUACION DEL CURSO

CONCEPTO		EVALUACION
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO CON EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO CON EL CURSO	

ESCALA DE EVALUACION DE 1 A 10

1. ¿Qué le pareció el ambiente del Centro de Educación Continua?

Muy agradable

Agradable

Desagradable

2. Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

Periódico  
Excélsior

Periódico  
Novedades

Folleto del  
Curso

Cartel  
mensual

Radio  
Universidad

Comunicación  
carta, teléfono,  
no, verbal, etc.

3. Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

Automóvil  
particular

Metro

Otro medio

4. ¿Qué cambios haría usted en el programa para tratar de perfeccionar el curso?

---

---

---

5. ¿Recomendaría el curso a otras personas? Si  No

6. ¿Qué curso le gustaría que ofreciera el Centro de Educación Continua?

---

---

---

7. ¿Qué servicios desearía que tuviese el CEC para los asistentes a cursos?

---

---

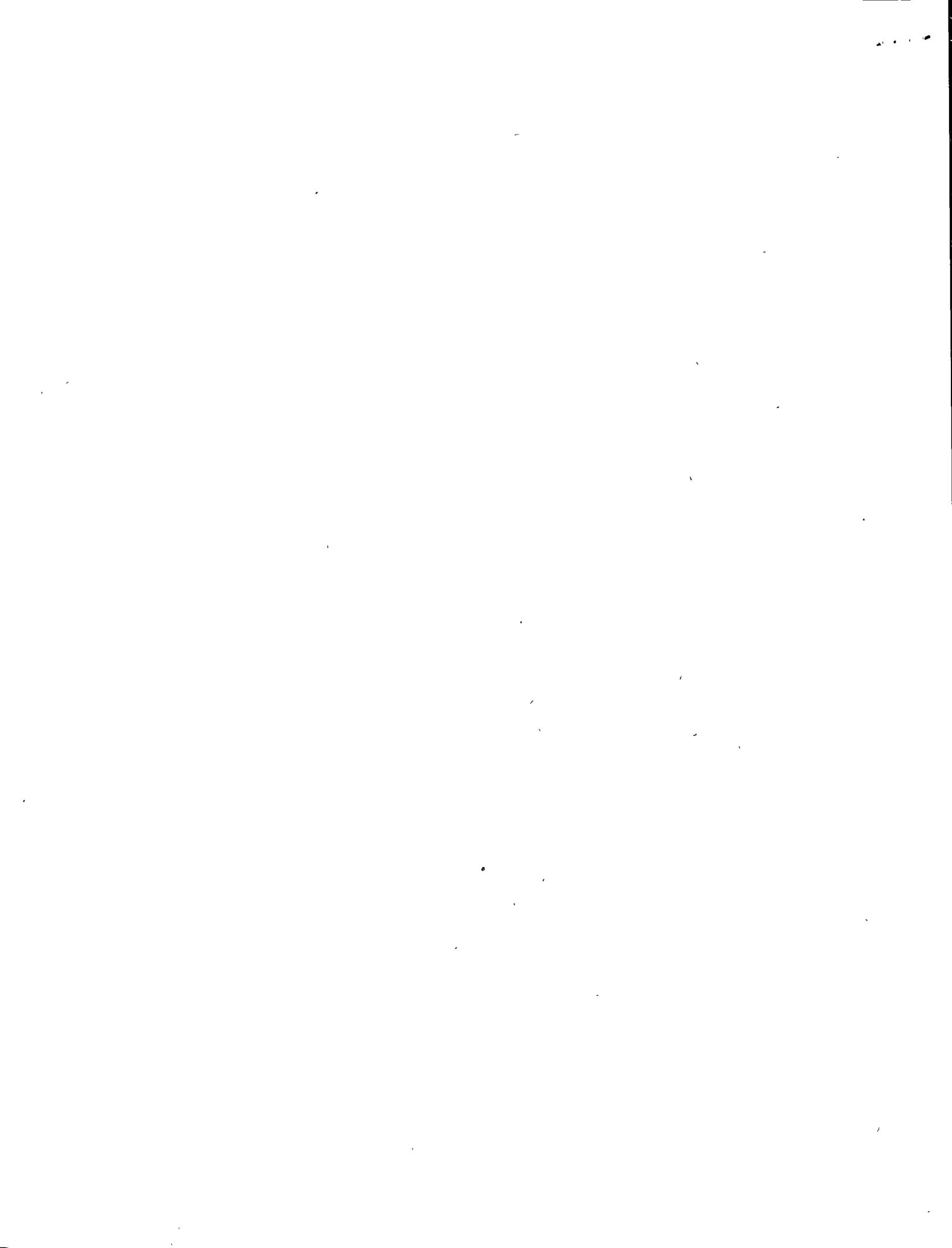
---

8. Otras sugerencias:

---

---

---

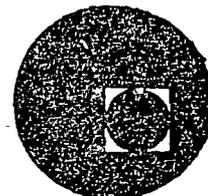


17. HUEBNER, K. H., The Finite Element Method For Engineers; John Wiley, New York, 1975
18. ROCKEY, K. C., et al, The Finite Element Method, Crosby, Lockwood, Staples, London, 1975
19. CONNOR, J. J. and BREBBIA, C. A., Finite Element Techniques for Fluid Flow, Butterworths, London, 1976
20. ODEN, J. J. and REDDY, J. N., An Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley, New York, 1976
21. SEGERLIND, L. J., Applied Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1976
22. BATHE, K. J. and WILSON, E. L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, N. J., 1976
23. NORRIE, D. H. and de VRIES, G., "A Finite Element Bibliography (3 Parts), Report No. 57, Mechanical Engineering Department The University of Calgary, Canada, 1974





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam

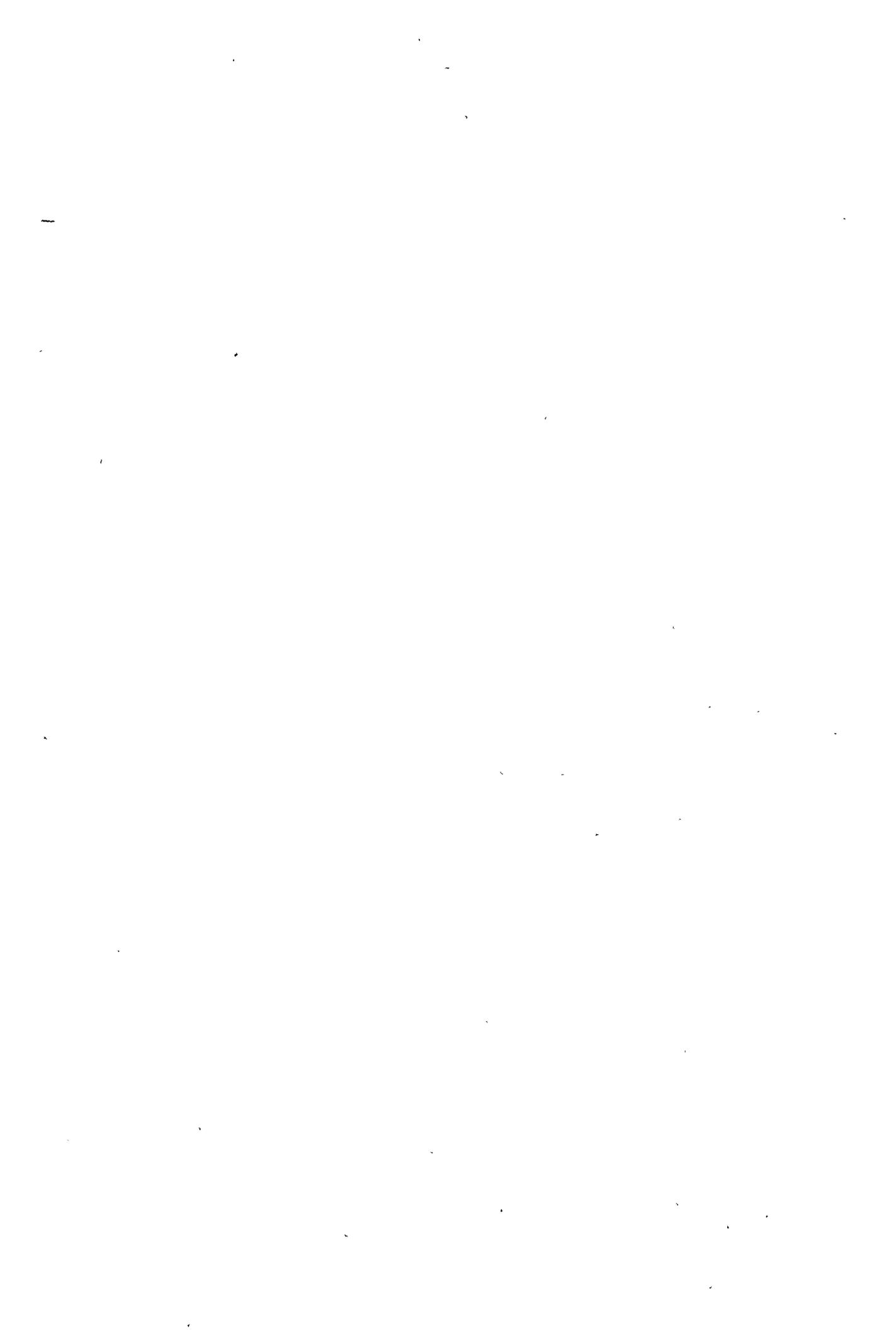


ANALISIS ESTRUCTURAL

TEMA: ELEMENTOS DE ALGEBRA MATRICIAL.

PROF. DR. PORFIRIO BALLESTEROS.

Febrero-Marzo, 1978.



## 2.2 Elementos de algebra matricial

2.2.1 En la solución de sistemas estáticamente indeterminados independientemente de que se aplique el método de las fuerzas o de deformaciones es necesario la solución de ecuaciones simultáneas lineales algebraicas. Independientemente de cualquier problema de análisis estructural, un sistema de tales ecuaciones sería

$$\begin{array}{l}
 \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ columnas}} \\
 \left. \begin{array}{l}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = C_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = C_2 \\
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = C_m \\
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = C_n
 \end{array} \right\} \text{m renglones} \quad (a)
 \end{array}$$

Para simplificar la técnica de la solución de (a), es conveniente utilizar algebra matricial, en notación matricial (a) puede escribirse

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{Bmatrix} \quad (b)$$

$$[a_{ij}] \{x_j\} = \{C_j\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (c)$$

$$A x = C \quad (d)$$

cada arreglo de números dentro de los parentesis angulares es llamado "matriz", los números o símbolos se llaman elementos, y en (a) se tienen  $m$  renglones y  $n$  columnas, la matriz se dice que es de orden  $m \times n$ . Cuando hay solamente una columna o un renglón de elementos en la matriz es llamada vector columna o vector renglón. Se entiende que la matriz  $[a_{ij}]$ , en (b), opera sobre el vector columna  $\{x_j\}$  en tal forma que produce el sistema de ecuaciones (a).

Es conveniente mencionar que el uso de métodos matriciales no representa ninguna evolución en el análisis de sistemas estructurales elásticos lineales, es realmente ventajoso para el uso de las computadoras electrónicas digitales.

### 2.2.2 Suma de matrices.

Para sumar dos matrices, simplemente se suman los elementos correspondientes para obtener la matriz suma. Es posible solamente si las dos matrices son del mismo orden  $m \times n$ . la regla de suma se establece simbólicamente como sigue

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \quad (e)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) & \dots & (a_{1n} + b_{1n}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) & \dots & (a_{2n} + b_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1} + b_{m1}) & (a_{m2} + b_{m2}) & \dots & (a_{mn} + b_{mn}) \end{bmatrix}$$

### 2.2.3 Resta de matrices

Similarmente a (2.2.2) la regla de resta de matrices es

$$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}] \quad (f)$$

de lo anterior se observa que dos matrices son iguales si son iguales sus elementos correspondientes,  $a_{ij} = b_{ij}$ .

De la regla de suma de matrices, para multiplicar una matriz dada por un número escalar  $\lambda$ , simplemente se multiplica cada elemento por  $\lambda$ , simbólicamente

$$\lambda [a_{ij}] = [\lambda a_{ij}] \quad (g)$$

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \quad (g)$$

### 2.2.3 Multiplicación de matrices.

Para obtener el producto  $AB$  de dos matrices  $A$  y  $B$ , se tiene lo siguiente: el elemento  $C_{ij}$  del renglón  $i$  de  $A$  y la columna  $j$  de  $B$ , de la matriz producto es obtenido multiplicando el renglón  $i$  de  $A$  con la columna  $j$  de  $B$ , elemento por elemento, y sumando los productos obtenidos. Si  $A$  es de orden  $m \times n$  y  $B$  del orden  $n \times q$ . En forma simbólica, el elemento  $C_{ij}$  de la matriz producto  $C = AB$  será

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} b_{kj} = (a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}) \quad (k)$$

o sea:

	columns					
	1	2	...	j	...	n

	columns					
	1	2	...	j	...	q

Renglones 1 2 ...	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1j}$	...	$a_{1n}$
	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2j}$	...	$a_{2n}$
	.	.	.	.	.	.
	$a_{i1}$	$a_{i2}$	...	$a_{ij}$	...	$a_{in}$
	.	.	.	.	.	.
$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mj}$	...	$a_{mn}$	

$b_{11}$	$b_{12}$	...	$b_{1j}$	...	$b_{1q}$
$b_{21}$	$b_{22}$	...	$b_{2j}$	...	$b_{2q}$
.	.	.	.	.	.
$b_{i1}$	$b_{i2}$	...	$b_{ij}$	...	$b_{iq}$
.	.	.	.	.	.
$b_{n1}$	$b_{n2}$	...	$b_{nj}$	...	$b_{nq}$

(l)

$$A \equiv [a_{ij}]$$

orden  $m \times n$

$$B \equiv [b_{ij}]$$

orden  $n \times q$

(Renglones)  $\times$  (columnas)

$$\begin{bmatrix}
 \overbrace{(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \dots + a_{1n}b_{n1})}^{c_{11}} & \overbrace{(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2})}^{c_{12}} & \dots & \overbrace{(a_{11}b_{1q} + a_{12}b_{2q} + \dots + a_{1n}b_{nq})}^{c_{1q}} \\
 \overbrace{(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n1})}^{c_{21}} & \overbrace{(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n2})}^{c_{22}} & \dots & \overbrace{(a_{21}b_{1q} + a_{22}b_{2q} + \dots + a_{2n}b_{nq})}^{c_{2q}} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \overbrace{(a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \dots + a_{mn}b_{n1})}^{c_{m1}} & \overbrace{(a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \dots + a_{mn}b_{n2})}^{c_{m2}} & \dots & \overbrace{(a_{m1}b_{1q} + a_{m2}b_{2q} + \dots + a_{mn}b_{nq})}^{c_{mq}}
 \end{bmatrix}$$

$$C = [c_{ij}] = [(a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj})] \quad (2)$$

orden  $n \times q$      $n$  renglones,  $q$  columnas

Debe observarse que la multiplicación  $[a_{ij}][b_{ij}]$  es posible solamente si el número de columnas de  $A = [a_{ij}]$  es igual al número de renglones de  $B = [b_{ij}]$

Es necesario observar que la multiplicación matricial no es conmutativa, es decir,  $AB \neq BA$ .

Ejemplo sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

A es de orden  $2 \times 3$  y B de orden  $3 \times 2$  el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, la multiplicación es posible

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}) \end{bmatrix}$$

orden  $2 \times 2$

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}) & (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}) & (b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23}) \\ (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}) & (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}) & (b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23}) \\ (b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21}) & (b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22}) & (b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23}) \end{bmatrix}$$

se verifica que  $AB \neq BA$

orden  $3 \times 3$

No siempre ambos productos existen  $AB$  y  $BA$ . Volviendo a la expresión matricial (b) del sistema de ecuaciones lineales algebraicas (a). al efectuar la multiplicación  $[a_{ij}] \{x_j\}$  se obtiene el sistema de ecuaciones. Ello explica la razón por la cual se ha establecido la regla anterior de multiplicación matricial.

### 2.2.4 Transposición de matrices

La matriz transpuesta de  $A$ , representada por  $A^T$ , se obtiene reescribiendo la matriz  $A$  en tal forma que sus renglones lleguen a ser columnas, tomadas en la misma secuencia y viceversa. Simbólicamente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv [a_{ij}] \equiv A \quad (a)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv [a_{ji}] = [a_{ij}]^T = A^T \quad (m)$$

Considerando la regla de multiplicación junto con la de transposición se demuestra

el producto matricial transpuesto  $(AB)^T$  es igual al producto conmutado de las transpuestas individuales.

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (n)$$

### 2.2.5 Matriz de identidad

La matriz

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (o)$$

es llamada matriz identidad, de orden  $n \times n$ , tiene todos los elementos cero excepto los de la diagonal principal que son igual a la unidad. En algebra matricial la matriz de identidad  $I$  corresponde en todas las formas a la idea de unidad del algebra ordinaria.

Si una matriz identidad es multiplicada por un número escalar  $\lambda$  se obtiene

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \quad (\phi)$$

la cual se llama matriz escalar.

### 2.2.6 Matriz diagonal.

Una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

es llamada matriz diagonal de orden  $n$ . La matriz identidad  $I$  y la matriz escalar  $\lambda I$ , son por supuesto casos especiales de matriz diagonal.

Hay varios otros tipos especiales de matrices, pero las introducidas serán suficientes para nuestros propósitos. En resumen tenemos:

- La matriz rectangular de orden  $m \times n$
- " " cuadrada " "  $n \times n$
- El vector renglón  $\{x_i\}$ ,  $\{x_i\}^T$ ,  $\{x\}$
- " " columna  $\{x_j\}$ ,  $\{x_j\}^T$ ,  $\{x\}$
- La matriz identidad de orden  $n \times n$
- " " escalar " " "
- " " diagonal " " "

### 2.2.7 Inversión de matrices

Volviendo de nuevo al sistema de ecuaciones (a), (b), (c) ó (d) y escribiéndolo en la forma matricial  $[A]\{x\} = \{c\}$ , establecemos por definición que la solución puede ser

expresada en la siguiente forma:

$$x = \frac{a}{A} = A^{-1}c = Rc$$

$$\text{ó } x = \frac{\{c_j\}}{[a_{ij}]} = [a_{ij}]^{-1} \{c_j\} \quad (r)$$

esto nos da la idea de dividir una matriz por otra, o, más apropiadamente, de encontrar la recíproca  $R$  de una matriz dada  $A$ . Este proceso es llamado inversión.

Para efectuarlo, se busca una matriz  $R$  tal que  $RA = I$ , donde  $I$  es la matriz de identidad. Es importante observar que un sistema de ecuaciones simultáneas tendrá una solución única solamente si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, por lo tanto  $A = [a_{ij}]$  será siempre una matriz cuadrada de orden  $n \times n$  ó un determinante de orden  $n$ . De lo contrario, el concepto de inversión de matrices no tiene significado.

Existen varios procedimientos para la inversión de una matriz cuadrada. A continuación describiremos uno de los procedimientos. Primero

es necesario introducir el concepto de adjunta de una matriz dada  $A$  lo cual se escribe  $\text{Adj } A$ . Se define como la transpuesta de otra matriz  $C$  formada por los cofactores de los elementos  $a_{ij}$  de la matriz dada  $A$ .

la ilustración de lo anterior se puede observar mediante el siguiente ejemplo.

Sea la matriz dada

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Entonces la matriz  $C$ , formada por los cofactores de  $A$ , será

$$C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} a_2 c_2 \\ a_3 c_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} b_1 c_1 \\ b_3 c_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_3 c_3 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_3 b_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde el determinante

$|b_2 c_3| \equiv \begin{vmatrix} b_2 c_2 & \\ & b_3 c_3 \end{vmatrix} = b_2 c_3 - c_2 b_3$  es llamado el cofactor del elemento  $a_1$

$-|b_1 c_3| \equiv -|b_3 c_3| = -(b_1 c_3 - c_1 b_3)$  es el cofactor del elemento  $a_2$ . La regla de signos para los cofactores es

$$\begin{bmatrix} (+) & (-) & (+) & \dots \\ (-) & (+) & (-) & \dots \\ (+) & (-) & (+) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

En general para determinar el cofactor de un elemento cualquiera  $a_{ij}$  de una matriz de orden  $n \times n$ , se tacha el renglón  $i$  y la columna  $j$  y se escribe el determinante de los términos remanentes de acuerdo con la regla de signos mencionada, por ejemplo en el caso anterior el cofactor del elemento  $a_2$ , con  $i=2$ ,  $j=1$ .

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}; \text{Cof. de } a_2 \equiv A_2 = -| \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} |$$

Habiendo obtenido la matriz  $C$  de los cofactores de la matriz  $(s)$ , de acuerdo con la regla anterior la matriz adjunta de  $A$ , de finida como la transpuesta de  $C$ , será

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} |b_2 c_2| & -|b_1 c_1| & |b_1 c_1| \\ |b_3 c_3| & -|b_3 c_3| & |b_2 c_2| \\ |a_2 c_2| & |a_1 c_1| & -|a_1 c_1| \\ |a_3 c_3| & |a_3 c_3| & -|a_2 c_2| \\ |a_2 b_2| & -|a_1 b_1| & |a_1 b_1| \\ |a_3 b_3| & -|a_3 b_3| & |a_2 b_2| \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} |b_2 c_3| & -|b_1 c_3| & |b_1 c_2| \\ -|a_2 c_3| & |a_1 c_3| & -|a_1 c_2| \\ |a_2 b_3| & -|a_1 b_3| & |a_1 b_2| \end{bmatrix} \quad (u)$$

Cuando la adjunta de una matriz cuadrada  $A$  ha sido formada, se puede demostrar que

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|I \quad (r)$$

donde  $|A|$  es el determinante de  $A$  y  $I$  es la matriz identidad. Dividiendo (r) por  $|A| \neq 0$ ,

$$\frac{A(\text{adj } A)}{|A|} = \frac{(\text{adj } A)A}{|A|} = I = RA$$

Entonces,

$$R = \frac{\text{adj } A}{|A|} = |A|^{-1} \text{adj } A \quad (w)$$

es la requerida inversa de  $A$

Si siguiendo las reglas para invertir cualquier matriz cuadrada, puede fácilmente demostrarse que la inversa de cualquier matriz diagonal será obtenida simplemente invirtiendo cada uno de los elementos a lo largo de la diagonal principal. Entonces, si

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{entonces } [A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conociendo ahora el método de inversión de una matriz cuadrada, se puede ilustrar la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas algebraicas lineales de orden  $3 \times 3$ , considerando

$$3x + 2y - z = 4$$

$$x - y + 2z = 5$$

$$-2x + y - z = -3$$

En notación matricial estas ecuaciones se escriben en la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

la matriz  $G$  de los cofactores de  $A$  será

$$G = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

la adjunta de  $A$  será la Transpuesta de  $G$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & -5 & -7 \\ -1 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

Para determinar el valor del determinante de  $A$ , se desarrolla por cofactores de los elementos de la primer hilera y se obtiene

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(-1) - 2(3) - 1(-1) = -3 - 6 + 1 = -8 \end{aligned}$$

Finalmente despejando el vector columna de ecuaciones  $(x)$  y  $(w)$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & -5 & -7 \\ -1 & -7 & -5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 \times 4 + 1 \times 5 + 3 \times (-3) \\ -3 \times 4 - 5 \times 5 - 7 \times (-3) \\ -1 \times 4 - 7 \times 5 - 5 \times (-3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{Bmatrix} -8 \\ -16 \\ -24 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Esto es,  $x=1$ ,  $y=2$ ,  $z=3$  representa la solución requerida. Este ejemplo simple involucra muchas de las operaciones de álgebra matricial previamente discutidas, y es conveniente que todas las etapas sean claras antes de seguir posteriormente.

Es conveniente mencionar algunos ejemplos de escribir expresiones algebraicas en notación matricial. Por ejemplo,

$$c = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \quad (*)$$

multiplicando el vector renglón por el vector columna

$$[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

De nuevo tomando

$$c = a_{11} x_1 y_1 + a_{22} x_2 y_2 + \dots + a_{nn} x_n y_n \quad (**)$$

en conexión con (\*\*) definimos las siguientes matrices:

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Transponiendo el vector columna  $x$  en el vector renglón  $x^T$  y efectuando la multiplicación  $x^T A y$  se obtiene

$$[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = [a_{11} x_1 y_1 + a_{22} x_2 y_2 + \dots + a_{nn} x_n y_n]$$

de lo anterior se ve que la ecuación (\*\*) puede ser expresada matricialmente como

$$c = x^T A y = [x][a]\{y\}$$

## 2.2.8 Problemas de tarea

1- Determinar la matriz suma  $A+B$  si

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2- De los valores de  $A$  y  $B$  en 1 determinar la matriz producto  $AB$

3- De los valores  $AB$  de del Prob 1 determinar la matriz producto  $BA$

4- Escribir las transpuestas de cada una de las matrices dadas en el problema 1.

5- Dadas las matrices cuadradas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

demuestre que  $B$  es la adjunta de  $A$  y determine la matriz producto  $AB$ .

## 2.2.9 Referencias para algebra matricial.

a) Fuller, E.L. "Basic matrix theory", Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.

b) Aitken A.C. "Determinants and Matrices", Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



ANALISIS ESTRUCTURAL

TEMA I : FUNDAMENTOS DE LA ELASTICIDAD.

PROF. DR. PROFIRIO BALLESTEROS.

febrero-marzo 1978.

1.- Introducción. - La naturaleza de las fuerzas que actúan dentro de un cuerpo para equilibrar el efecto de las fuerzas de cuerpo y externas o de superficie, es una de las partes principales del estudio de la mecánica de sólidos. Se aplicará el método de secciones para aislar un elemento diferencial y definir el concepto de esfuerzo.

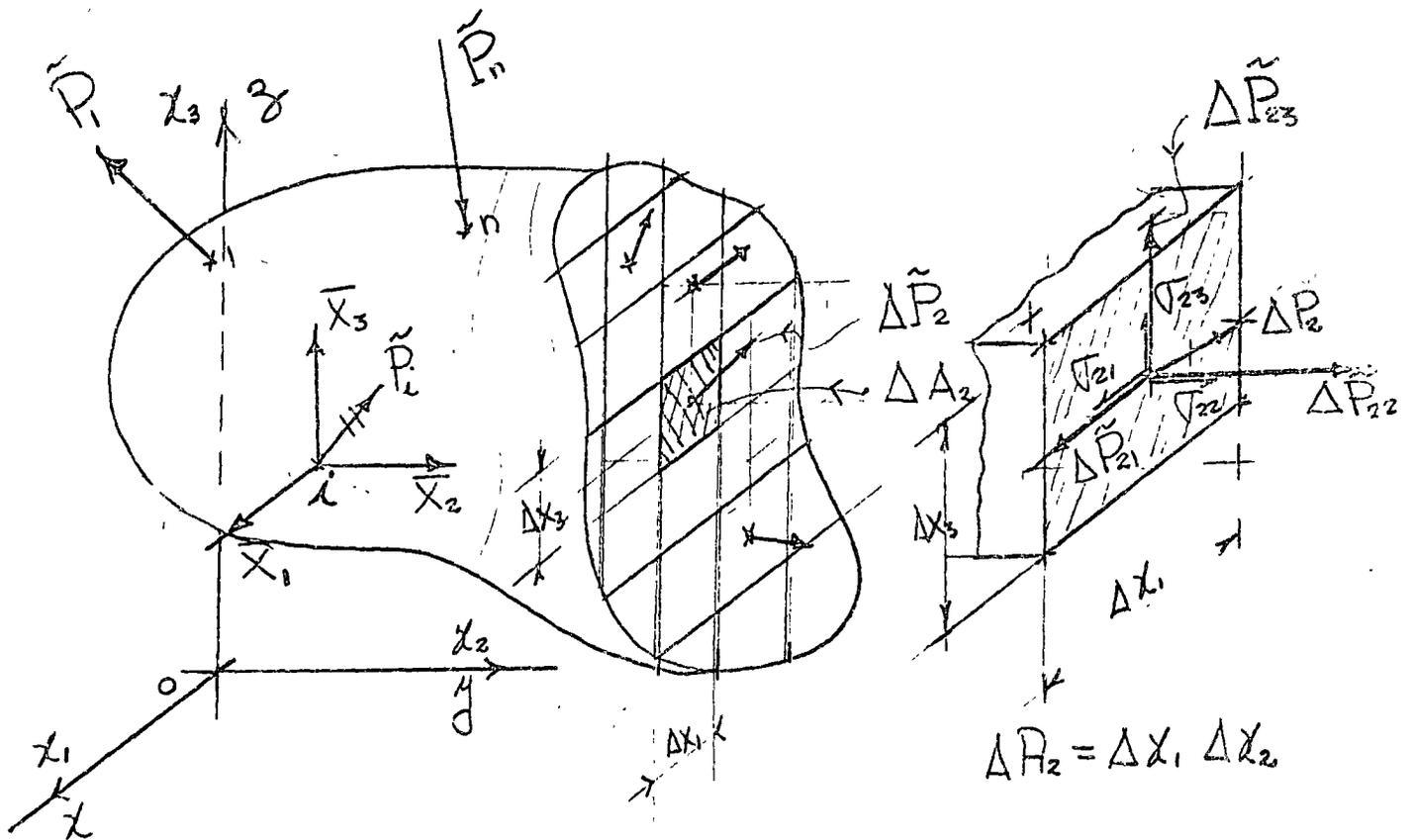


Fig. 1 Cuerpo seccionado paralelo al plano  $x_1, x_2$ .

2.- Definición de esfuerzo.

En general, las fuerzas internas actuando sobre las áreas infinitesimales  $\Delta x_i \Delta x_j$  del corte, son de

magnitudes y direcciones variables. Fuerzas de naturaleza rectorial y mantienen el equilibrio. En mecánica de sólidos es particularmente significativo determinar la intensidad y dirección en distintos puntos a travez del corte. En general varían de punto a punto en intensidad y dirección. Es usual resolver sus intensidades perpendicular y paralelas a la sección en consideración. En particular el corte de la Fig. 1 es perpendicular al eje  $x_1$ ,  $\Delta \vec{P}_2$  es la fuerza resultante que actúa sobre  $\Delta A_2 = \Delta x_1 \Delta x_2$ , cuyas componentes son:  $[\Delta \vec{P}_{21}, \Delta \vec{P}_{22}, \Delta \vec{P}_{23}]$ , el primer subíndice significa que el plano en que actúan es perpendicular al eje  $x_2$  y el segundo respecto al eje que son paralelos, Puesto que las componentes de fuerza por unidad de área, son correctas solo en el punto, la definición matemática de esfuerzo es\*

$$\sigma_{21} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{21}}{\Delta A_2}, \quad \sigma_{22} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{22}}{\Delta A_2}, \quad \sigma_{23} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{23}}{\Delta A_2}$$

similarmente los esfuerzos actuando en un plano perpendicular a  $x_1$  son

$$\sigma_{11} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{11}}{\Delta A_1}, \quad \sigma_{12} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{12}}{\Delta A_1}, \quad \sigma_{13} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{13}}{\Delta A_1}$$

y los esfuerzos actuando sobre un plano perpendicular a  $x_3$  son

$$\sigma_{31} = \lim_{\Delta A_3 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{31}}{\Delta A_3}, \quad \sigma_{32} = \lim_{\Delta A_3 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{32}}{\Delta A_3}, \quad \sigma_{33} = \lim_{\Delta A_3 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{33}}{\Delta A_3}$$

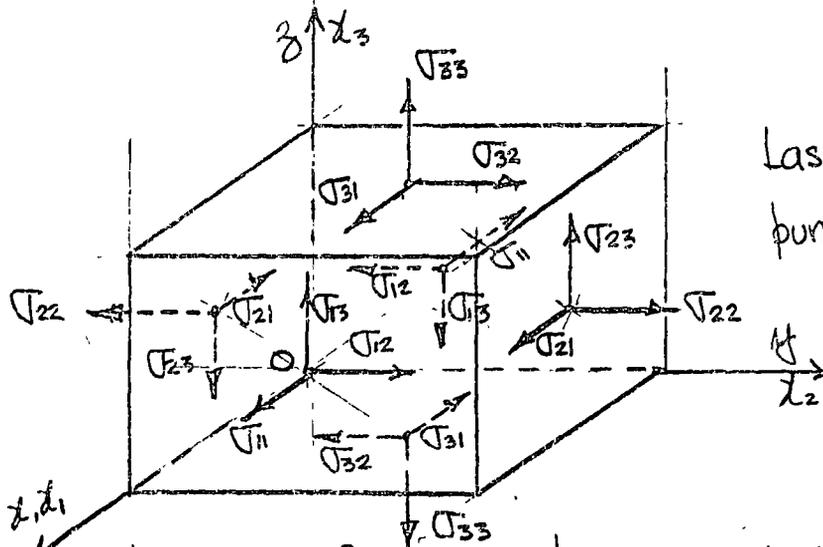
\* Cuando  $\Delta A_i \rightarrow 0$ , existen preguntas desde el punto de vista atómico en definir esfuerzo en esta forma. Sin embargo, un modelo homogéneo para materia molecular no homogénea trabaja bien en problemas de Ingeniería

Se observa que las definiciones de esfuerzo normal y cortante representan la intensidad de una fuerza sobre una area, y sus unidades son de  $[\frac{F}{L^2}]$ ; en el sistema métrico  $\text{kg/cm}^2$  o  $\text{ton/cm}^2$  y en el Ingles  $\text{lbs/pul}^2$  o  $\text{KIPS/pul}^2$ .

Debe notarse que los esfuerzos multiplicados por las areas sobre las cuales actúan nos dan fuerzas, y es la suma de estas fuerzas, y es la suma de estas fuerzas sobre cualquier corte imaginario lo que conserva el equilibrio de un cuerpo.

### 3. Tensor de esfuerzos.

Si, además del diagrama de cuerpo libre de la Fig. se hacen pasar tres pares de planos paralelos y separados por distancias infinitesimales, un cubo de dimensiones infinitesimales será aislado del cuerpo con el origen del sistema local coordinado en el punto de coordenadas  $x_i (x_1, x_2, x_3)$ . Tal cubo se muestra en la Fig. 3.1



Las coordenadas del punto O son  $(x_1, x_2, x_3)$

Fig. 3.1 Estado de esfuerzos actuando en el elemento  $dx_i$ . El sentido indicado es convencionalmente el positivo.

Examinando la Fig. 3.1, se observa que hay tres esfuerzos normales  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ , y seis esfuerzos cortantes  $\sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, \sigma_{31}, \sigma_{13}$ . El arreglo matricial

$$\underline{\sigma} = [\sigma_{ij}] = [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

es la representación del tensor de esfuerzos. Es un tensor de segundo orden referido al espacio Euclidiano tridimensional. Un vector es un tensor de primer orden y un escalar es un tensor de cero orden

#### 4.- Fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie

En el mismo elemento diferencial consideremos el vector de fuerzas de cuerpo por unidad de volumen  $\{X_i\}^T = [X_1, X_2, X_3]$ , y en consideraciones no polares el vector de momentos de cuerpo por unidad de volumen  $\{m_i\}^T = [m_1, m_2, m_3]$  actuando en el centroide del elemento diferencial como se indica en la Fig. 4.1

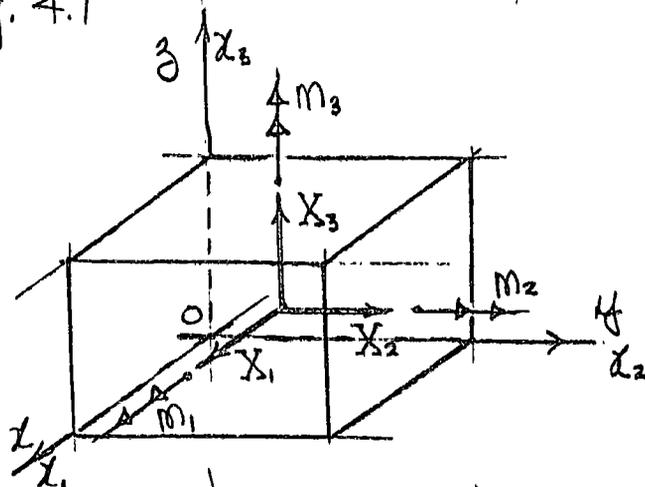


Fig. 4.1 Fuerzas y momentos de cuerpo por unidad de volumen  $\{X_i\}$  y  $\{m_i\}$  actuando en el centro de gravedad de  $dx_i$ .

en donde  $X_i = \rho (f_i - a_i)$  (4.1)

donde  $\rho$  es la densidad o masa específica,  $f_i$  es la fuerza por unidad de masa en la dirección  $x_i$  y  $a_i$  es la aceleración del elemento  $dx_i$  en la dirección de  $x_i$ .

- Las fuerzas de superficie actúan en la frontera del cuerpo y las tres componentes de  $\vec{P}_i$  Fig. 1.1 las designaremos por  $\{\bar{X}_i\}^T = [\bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3]_i$ ; sus unidades son fuerza por unidad de área  $[\frac{F}{L^2}]$ ,  $\text{kg/cm}^2$  en el sistema métrico;  $\text{lbs/pul}^2$  en el inglés, y en el internacional  $\text{Newtons/cm}^2$ . Las unidades de las fuerzas de cuerpo serán  $[\frac{F}{L^3}]$ . Las fuerzas de superficie deben satisfacer las condiciones en la frontera [Fig. 5.1] que para el punto  $i$  [Fig. 1.1] son

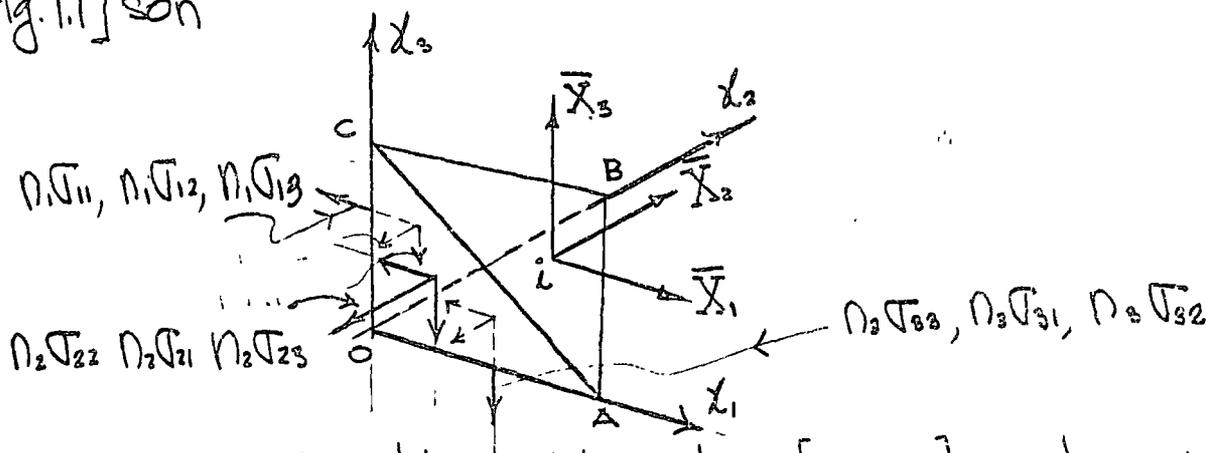


Fig. 5.1 Equilibrio del punto  $i$  [Fig. 1.1] en la superficie, si  $ABC = \text{unidad}$ ,  $oBC = \cos \alpha = n_1$ ,  $oAC = \cos \beta = n_2$ , y  $oAB = \cos \gamma = n_3$ , donde  $\{n_i\}^T = [n_1 \ n_2 \ n_3]$  son los cosenos directores de la normal al plano  $ABC$ , y del equilibrio de  $oABC$  se obtiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad [\sigma_{ij}]^T \{n_i\} = \{\bar{X}_i\} \quad (4.1)$$

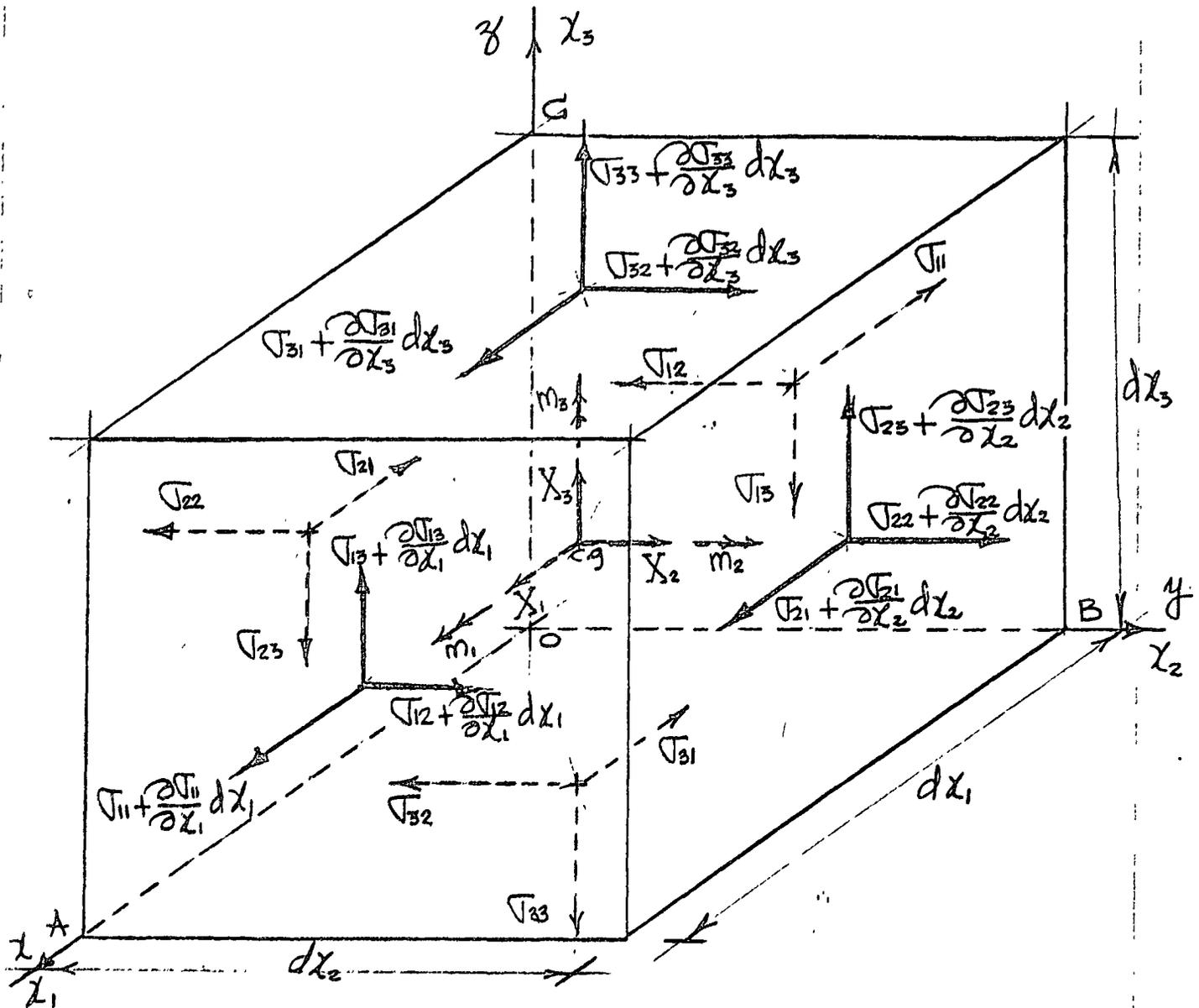


Fig. 5.1. Equilibrio de esfuerzos  $\{\sigma\}$ , fuerzas de cuerpo  $\{X\}$  y momentos de cuerpo  $\{m\}$ , en el elemento  $dx_i$ .

(4.1) es la representación matricial de las condiciones de equilibrio del punto  $i$  en la frontera  $x_i$ .

5.- Equilibrio del elemento  $dx_i$ .

Las seis ecuaciones de equilibrio del elemento de la Fig. 5.1 son

$$\sum F_{x_1} = \sum F_{x_2} = \sum F_{x_3} = \sum M_{x_1} = \sum M_{x_2} = \sum M_{x_3} = 0 \quad (5.1)$$

de  $\sum F_{x_1} = 0$ , en el límite cuando  $dx_i \rightarrow 0$  se obtiene

$$\left( T_{11} + \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - T_{11} dx_2 dx_3 + \left( T_{21} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3$$

$$- T_{21} dx_1 dx_3 + \left( T_{31} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - T_{31} dx_1 dx_2 + X_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

efectuando operaciones algebraicas se obtiene

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} + X_1 = 0$$

Similarmente

$$\text{de } \sum F_{x_2} = 0, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_3} + X_2 = 0 \quad (5.2)$$

$$\text{de } \sum F_{x_3} = 0, \quad \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0$$

De  $\sum M_{x_1} = 0$ , en el límite cuando  $dx_i \rightarrow 0$ , y considerando el eje de momentos paralelo a  $ox_1$  y a través del centroide del elemento  $dx_i$ , y despreciando los diferenciales de segundo orden  $dx_i^2$ , se obtiene bajo la convención de signos de la Fig. 5.1 lo siguiente

$$\left( T_{23} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} + T_{23} dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2}$$

$$- \left( T_{32} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 \frac{dx_3}{2} - T_{32} dx_1 dx_2 \frac{dx_3}{2} + m_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

efectuando operaciones algebraicas se obtiene

$$T_{23} - T_{32} + m_1 = 0$$

$$\text{Similarmente de } \sum M_{x_2} = 0, \quad T_{31} - T_{13} + m_2 = 0 \quad (5.3)$$

$$\text{y de } \sum M_{x_3} = 0, \quad T_{12} - T_{21} + m_3 = 0$$

Las ecuaciones (5.2) y (5.3) son las seis ecuaciones de equilibrio en coordenadas rectangulares y en su forma polar, generalmente los momentos de cuerpo  $m_i = 0$ .

Expresando (5.2) matricialmente se tiene

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (5.4)$$

$$\circ \quad \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \right] [\sigma_{ij}] + \{X_i\} = 0 \quad (5.5)$$

Con notación índice (5.2) se representa

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (5.6)$$

en donde  $\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ . Y las ecuaciones (5.3)

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ji} + m_k = 0 \quad (5.7)$$

## 6. Diferentes notaciones del tensor de esfuerzos.

A continuación gráficamente mostraremos las diferentes notaciones que han sido utilizadas para representar las componentes del tensor de esfuerzos.

### 6.1 Cauchy inicialmente.

$$\begin{bmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{bmatrix}$$

( $m_k=0$ )

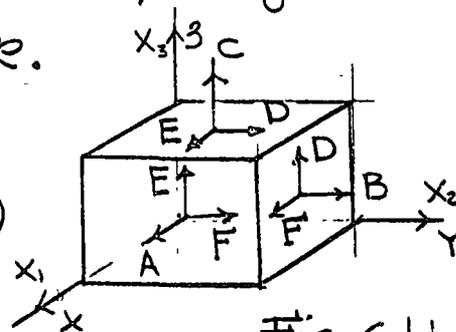


Fig. 6.1.1

### 6.2 Kelvin.

$$\begin{bmatrix} P & V & T \\ V & Q & S \\ T & S & R \end{bmatrix}$$

( $m_k=0$ )

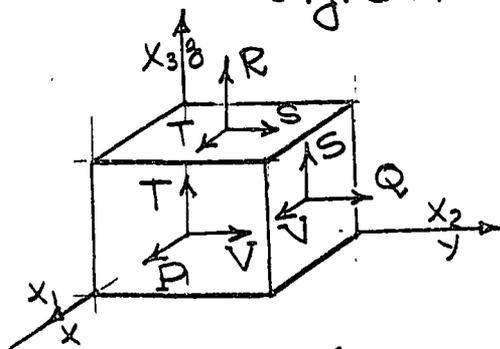


Fig. 6.1.2

6.2 Cauchy posteriormente, Saint-Venant ó Maxwell, introducen por primera vez la notación cartesiana, y

$$\begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{bmatrix}$$

condiciones polares.

$(m_k \neq 0)$

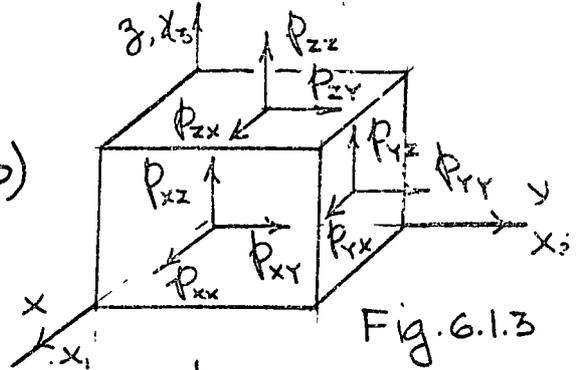


Fig. 6.1.3

6.3 Newman, Kirchhof y Love.

$$\begin{bmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{bmatrix}$$

$(m_k \neq 0)$

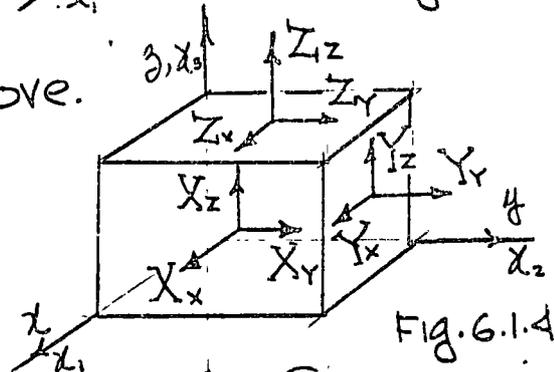


Fig. 6.1.4

6.4 K. Pearson.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_x & \hat{x}_y & \hat{x}_z \\ \hat{y}_x & \hat{y}_y & \hat{y}_z \\ \hat{z}_x & \hat{z}_y & \hat{z}_z \end{bmatrix}$$

$(m_k \neq 0)$

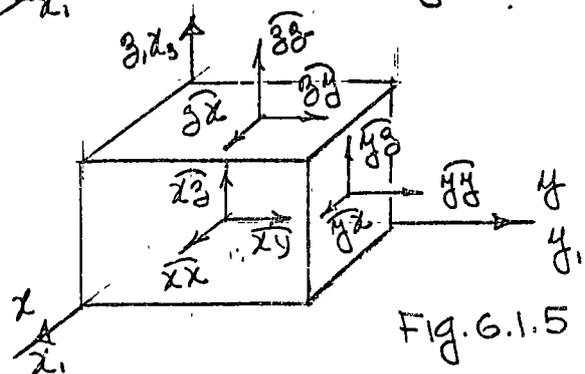


Fig. 6.1.5

6.5 S. Timoshenko y T. von Karmán introducen la notación de Ingeniería, simplificando la notación cartesiana utilizando solo un subíndice en los esfuerzos normales denominándolos por  $\sigma$ , y los tangenciales por  $\tau$ .

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$(m_k \neq 0)$

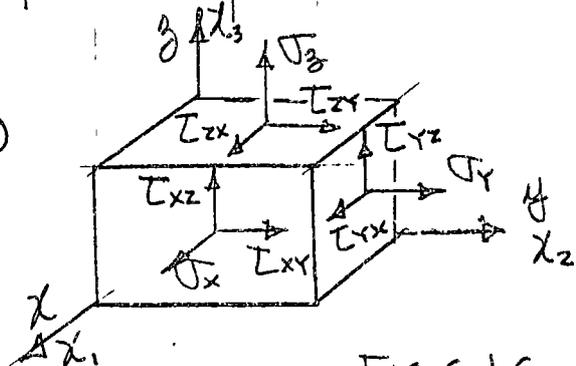


Fig. 6.1.6

6.6 Green, Ierna y autores Rusos introducen la notación índice similar a la utilizada previamente

$$[\sigma_{ij}] = [\tau_{ij}]$$

6.7 Clebsch, G. Truesdell y A.C. Eringen, también utilizan la notación índice representando el tensor de esfuerzos

$$[t_{ij}]$$

6.8 D.C. Leigh, y L. Malvern, también utilizan notación índice representando el tensor de esfuerzos como

$$[T_{ij}]$$

Es importante observar que en la derivación de las ecuaciones de equilibrio (5.6) y (5.7) las propiedades mecánicas del material no han sido usadas. Lo cual significa que son aplicables a materiales elásticos, plásticos, o viscoelásticos. También es muy importante observar que no hay suficientes ecuaciones de equilibrio para determinar las incógnitas esfuerzo, el problema es estáticamente indeterminado.

## 7. Desplazamiento, deformación.

El análisis de la deformación de un sólido es de importancia paralela al análisis de esfuerzos. Requiere la definición precisa de deformación, la cual significa la intensidad del desplazamiento. Un cuerpo sólido sujeto a un cambio de temperatura o a cargas externas.

Por ejemplo, si una muestra es sujeta a una fuerza  $P$  como se muestra en la Fig. 7.1, Un cambio de longitud ocurre entre los dos puntos de calibración A y B. Si  $l_0$  es la longitud inicial y  $l$  la longitud observada bajo la carga  $P$ , y el alargamiento  $\Delta l = l - l_0$ . El

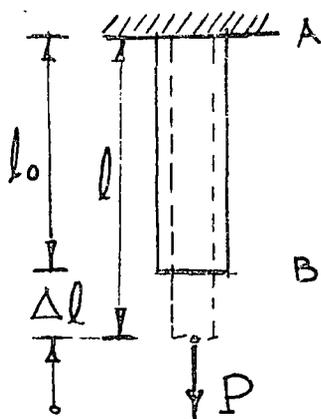


Fig. 7.1 Muestra a tensión.

alargamiento por unidad de longitud  $\epsilon$  (epsilon) es

$$\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (7.1)$$

el cual es llamado deformación lineal. Es una cantidad adimensional, pero generalmente se mide o se refiere en  $\frac{\text{cm}}{\text{cm}}$  o  $\frac{\text{pulg}}{\text{pulg}}$ . Algunas veces se expresa en por ciento. La cantidad  $\epsilon$  es generalmente muy pequeño. En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería tiene un orden máximo de magnitud de 0.001. Cuando las deformaciones son grandes, por ejemplo, en formado de metales, se introduce el la deformación natural que implica una  $l_0$  variable, dada por

$$\bar{\epsilon} = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \epsilon) \quad (7.2)$$

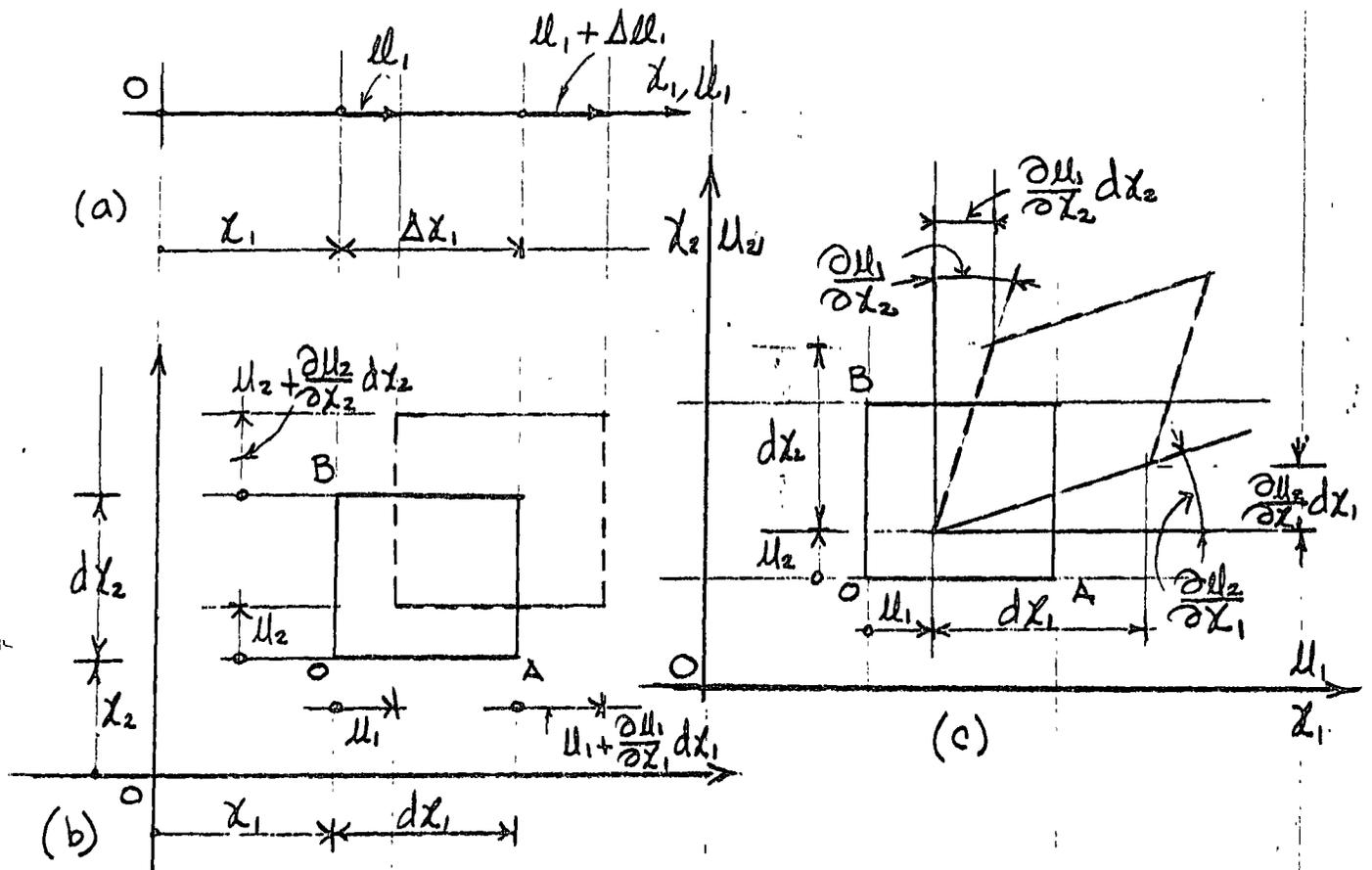


Fig. 7.2 Elementos deformados en posiciones inicial y final

Sea el vector de desplazamientos  $\{u_i\}^T = [u_1 \ u_2 \ u_3]$  en las direcciones  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  respectivamente, en base a los desplazamientos mostrados en la Fig. 7.2a, la definición de deformación lineal es

$$\epsilon_{11} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{u_1 + \Delta u_1 - u_1}{\Delta x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \equiv u_{1,1} \quad (7.2)$$

Similarmente

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \equiv u_{2,2}, \quad \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \equiv u_{3,3} \quad (7.3)$$

el signo positivo significa alargamientos. El elemento también experimenta deformaciones de cortante como

se muestra en la Fig. 7.2c el ángulo recto AOB es reducido por la cantidad  $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ . Por lo tanto, para pequeños cambios del ángulo, la definición de deformación de cortante asociada con el plano  $x_1, x_2$  es

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = \gamma_{21} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \equiv u_{1,2} + u_{2,1}, \text{ análogamente con} \\ \text{los otros planos, } \gamma_{23} = \gamma_{32} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \equiv u_{2,3} + u_{3,2} \\ \gamma_{31} = \gamma_{13} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \equiv u_{3,1} + u_{1,3} \end{aligned} \quad (7.4)$$

en el caso que las deformaciones no sean pequeñas, se muestra fácilmente que

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \\ \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \\ \epsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\gamma_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

En las ecuaciones (7.5) aplicables a deformaciones grandes ya se observa la no linealidad en geometría. (7.4) es un caso particular de (7.5) cuando los términos de segundo grado son despreciables respecto a los de primer grado o sea pequeñas deformaciones. (7.5) en

notación compacta queda

$$\epsilon_{11} = u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{1,1}^2 + u_{3,1}^2 + u_{3,1}^2)$$

$$\epsilon_{22} = u_{2,2} + \frac{1}{2}(u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,2}^2)$$

$$\epsilon_{33} = u_{3,3} + \frac{1}{2}(u_{1,3}^2 + u_{2,3}^2 + u_{3,3}^2)$$

(7.6)

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = u_{1,2} + u_{3,1} + u_{1,1}u_{1,2} + u_{3,1}u_{3,2} + u_{3,1}u_{3,2}$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} = u_{2,3} + u_{3,2} + u_{1,2}u_{1,3} + u_{3,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3}$$

$$\gamma_{31} = \gamma_{13} = u_{3,1} + u_{1,3} + u_{1,1}u_{1,3} + u_{3,1}u_{2,3} + u_{3,1}u_{3,3}$$

Examinando las ecuaciones deformación-desplazamiento para pequeñas deformaciones (7.2), (7.3) y (7.4), se observa que son seis ecuaciones que dependen solamente de tres desplazamientos  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ . Por lo tanto las ecuaciones no pueden ser independientes. Por lo tanto seis ecuaciones independientes pueden desarrollarse relacionando a  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$ ,  $\epsilon_{33}$ ,  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{23}$  y  $\gamma_{31}$ , ecuaciones conocidas como ecuaciones de compatibilidad.

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} ; 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} ; 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} ; 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right)$$

substituyendo (7.2), (7.3) y (7.4) en (7.7) se verifican las ecuaciones de compatibilidad de pequeñas deformaciones.

Similarmente a las componentes del Tensor de esfuerzos en las notaciones índice, cartesiana y de ingeniería, se representan las componentes del tensor de deformaciones como

$$[e_{ij}] = \underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

(índice)                      (cartesiana)                      (ingeniería)

en (7.8) fué necesario fué necesario modificar las relaciones de deformación por cortante con el objeto de someter al tensor  $\underline{\underline{e}}$  enteramente obedecer ciertas leyes de transformación, por lo que  $e_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij}$  para toda  $i \neq j$ . Análogamente al tensor de esfuerzos  $[e_{ij}]$  puede diagonalizarse quedando

$$\begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

8. Ley de Hooke en un estado uniaxial de esfuerzos,

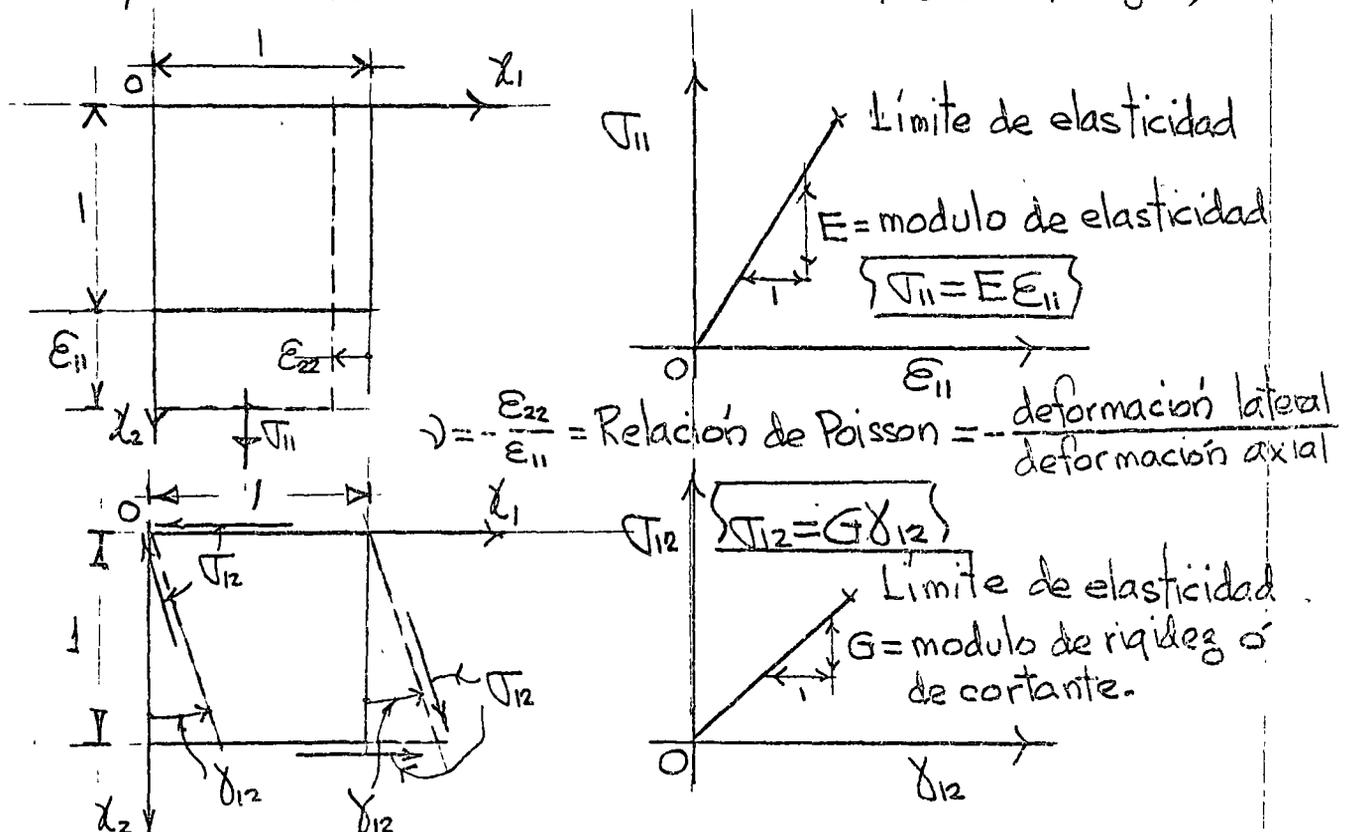


Fig. 8.1 Ley de Hooke en tensión uniaxial  $\sigma_{11}$  y corte puro  $\tau_{12}$ .

puesto que el sistema es elástico lineal rige el principio de superposición de causas y efectos, por lo tanto en la Fig. 8.2 se considera un estado triaxial llegando a él en tres etapas de carga, etapa 1: actuando  $\sigma_{11}$ , etapa 2: actuando  $\sigma_{11}$  y  $\sigma_{22}$  y etapa 3: actuando  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  y  $\sigma_{33}$ . Se llega a las siguientes ecuaciones constitutivas

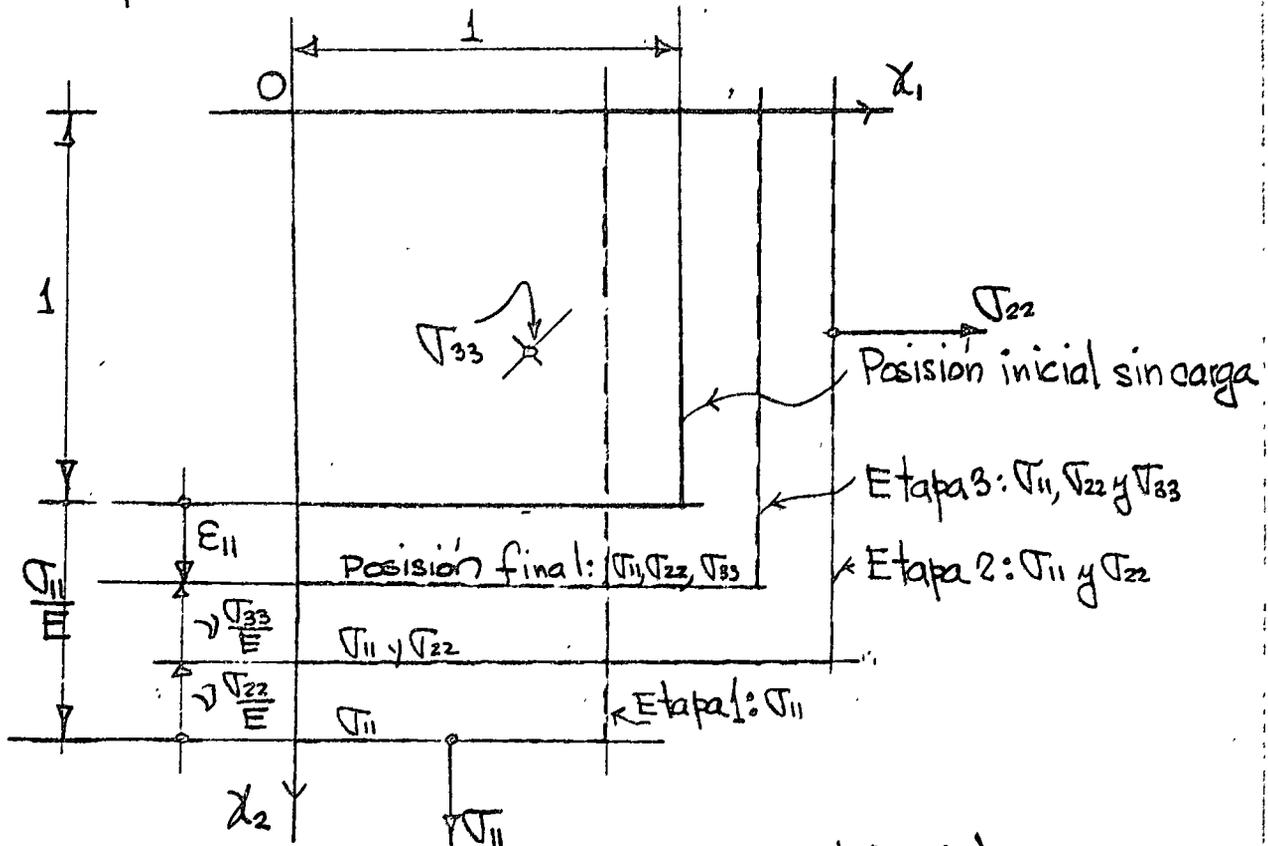


Fig. 8.2 Ley de Hooke en condiciones triaxiales

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33}$$

$$\epsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} + \frac{1}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33}$$

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} + \frac{1}{E} \sigma_{33}$$

$$\gamma_{12} =$$

$$\frac{1}{G} \sigma_{12}$$

$$\gamma_{23} =$$

$$\frac{1}{G} \sigma_{23}$$

$$\gamma_{31} =$$

$$\frac{1}{G} \sigma_{31}$$

(8.1)

(8.1) representa la ley de Hooke en condiciones triaxiales ó más correctamente las ecuaciones constitutivas para un sólido elástico homogéneo e isotrópico. Las constantes  $E$ ,  $G$  y  $\nu$  son experimentales y están relacionadas por

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (8.2)$$

substituyendo (8.2) en (8.1) y expresando el resultado matricialmente se obtiene (considerando  $\epsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}$  para  $i \neq j$ )

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

$$\{\epsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad (8.4)$$

despejando  $\{\sigma\}$  de (8.4) se obtiene

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

$$\text{o sea } \{\sigma\} = [C]^{-1}\{\epsilon\} \quad (8.6)$$

Se observa en las ecuaciones anteriores que solo interviene  $E$  y  $\nu$ .

En un medio elástico lineal anisotrópico en las ecuaciones (8.3), aceptando el principio de superposición se expresan

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

Las ecuaciones constitutivas (8.7) tienen 36 constantes. Sin embargo a través de consideraciones energéticas\* se demuestra que el número de constantes es 21 y que  $C_{ij} = C_{ji}$  para  $i \neq j$ , son simétricas respecto a la diagonal principal de (8.7). Todas las constantes  $C_{ij}$  deben determinarse experimentalmente. Se supone el material homogéneo, Ejemplos de estos materiales son: concreto, concreto reforzado, madera, plástico reforzado con filamentos, hierro fundido, etc. Cuando se tienen tres direcciones ortogonales anisotrópicas el material se dice que es ortotrópico, y para estos materiales el número de constantes se reduce solo a nueve constantes independientes.

Haciendo  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  y considerando (8.2) las

\* Sokolnikoff, I.S., "Mathematical Theory of Elasticity", McGraw-Hill, 1956, p.61.

ecuaciones constitutivas (8.3) con notación índice se escriben\*

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2G \epsilon_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (8.8)$$

donde,  $\delta_{ij} = 1$  para  $i=j$ , y  $\delta_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ , y  $\epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \equiv e$ . Desarrollando (8.8) se tiene

$$\begin{aligned} \text{para } i=1, j=1, \quad \sigma_{11} &= \lambda e + 2G \epsilon_{11} \equiv \lambda e + 2G \epsilon_x = \sigma_x \\ i=2, j=2, \quad \sigma_{22} &= \lambda e + 2G \epsilon_{22} \equiv \lambda e + 2G \epsilon_y = \sigma_y \\ i=3, j=3, \quad \sigma_{33} &= \lambda e + 2G \epsilon_{33} \equiv \lambda e + 2G \epsilon_z = \sigma_z \\ i=1, j=2, \quad \sigma_{12} &= 2G \epsilon_{12} \equiv 2G \epsilon_{xy} = G \gamma_{xy} = \tau_{xy} \\ i=2, j=3, \quad \sigma_{23} &= 2G \epsilon_{23} \equiv 2G \epsilon_{yz} = G \gamma_{yz} = \tau_{yz} \\ i=3, j=1, \quad \sigma_{31} &= 2G \epsilon_{31} \equiv 2G \epsilon_{zx} = G \gamma_{zx} = \tau_{zx} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Si en el sólido existe un incremento de temperatura  $\Delta T$ , siendo  $\alpha$  el coeficiente de expansión térmica las ecuaciones (8.8) quedan

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} + \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.10)$$

\* Green, A.E., and W. Zerna: "Theoretical Elasticity", Oxford University Press, Fair Lawn, N. J. · 1970.

# 9. Elasticidad bidimensional.

Utilizando la notación de Timoshenko y Von Karman ó la notación de ingeniería las ecuaciones de equilibrio en un elemento  $dx dy$  se reducen a

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

(9.1) matricialmente queda

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 0 \quad (9.2)$$

Y las ecuaciones de compatibilidad (7.7) se reducen a

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (9.3)$$

En la Fig. 6.1 se muestran los dos estados o condiciones de esfuerzos que en este caso se tienen, esfuerzos planos;

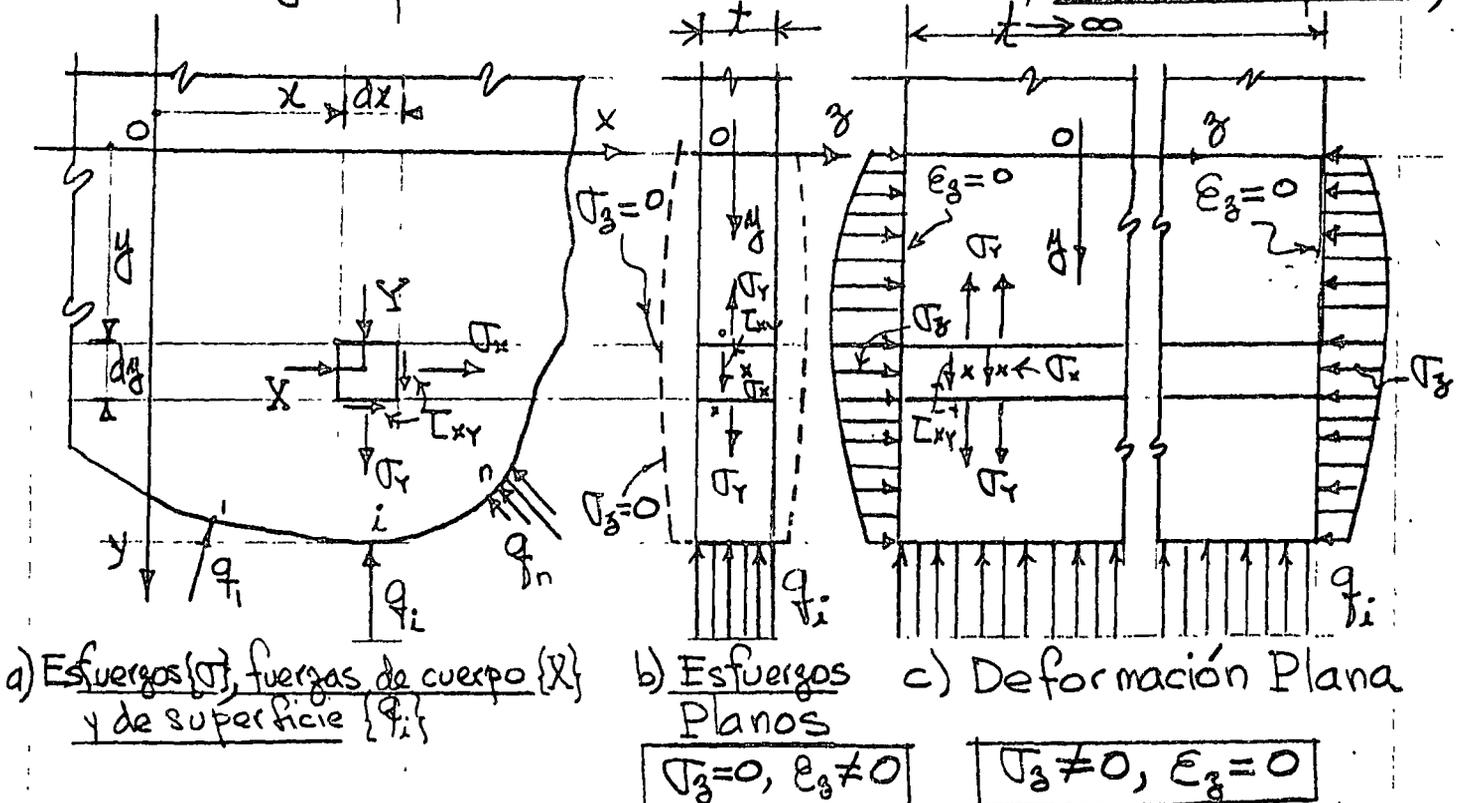


Fig. 6.1. Estados o condiciones de esfuerzos bidimensionales.

caso de una placa de espesor finito  $t$ , sin problemas de pandeo que se deforma bajo la acción de  $\{\epsilon\}$  y  $\{\sigma\}$  según la línea punteada indicada en la Fig. 6.1 b, las ecuaciones (8.3), bajo la condición de  $\nabla_{33} \equiv \nabla_3 = 0$  se reducen a

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9.4)$$

$\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  y  $\bar{\tau}_{xy}$  son el promedio sobre el espesor pequeño  $t$  y son independientes de  $z$ . Las componentes  $\gamma_{yz}$  y  $\gamma_{zx}$  se anulan en las superficies, mientras que la componente  $\epsilon_z$  es dada por

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (9.5)$$

Problemas de cuerpos largos en la dirección longitudinal  $z$  y cuya geometría y cargas no varían en  $z$  se consideran problemas de deformación plana en la Fig. 6.2 se muestran como ejemplos un muro de presa, y una zapata corrida larga,

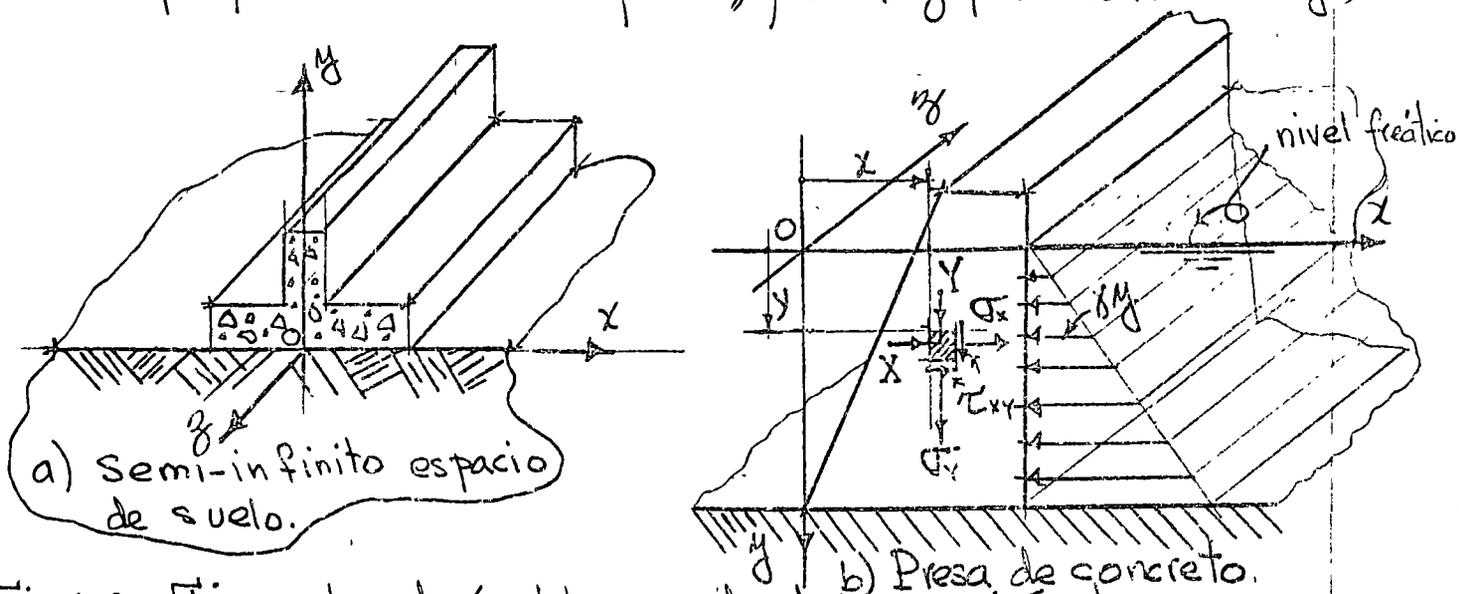


Fig. 6.2. Ejemplos de problemas de deformación plana.

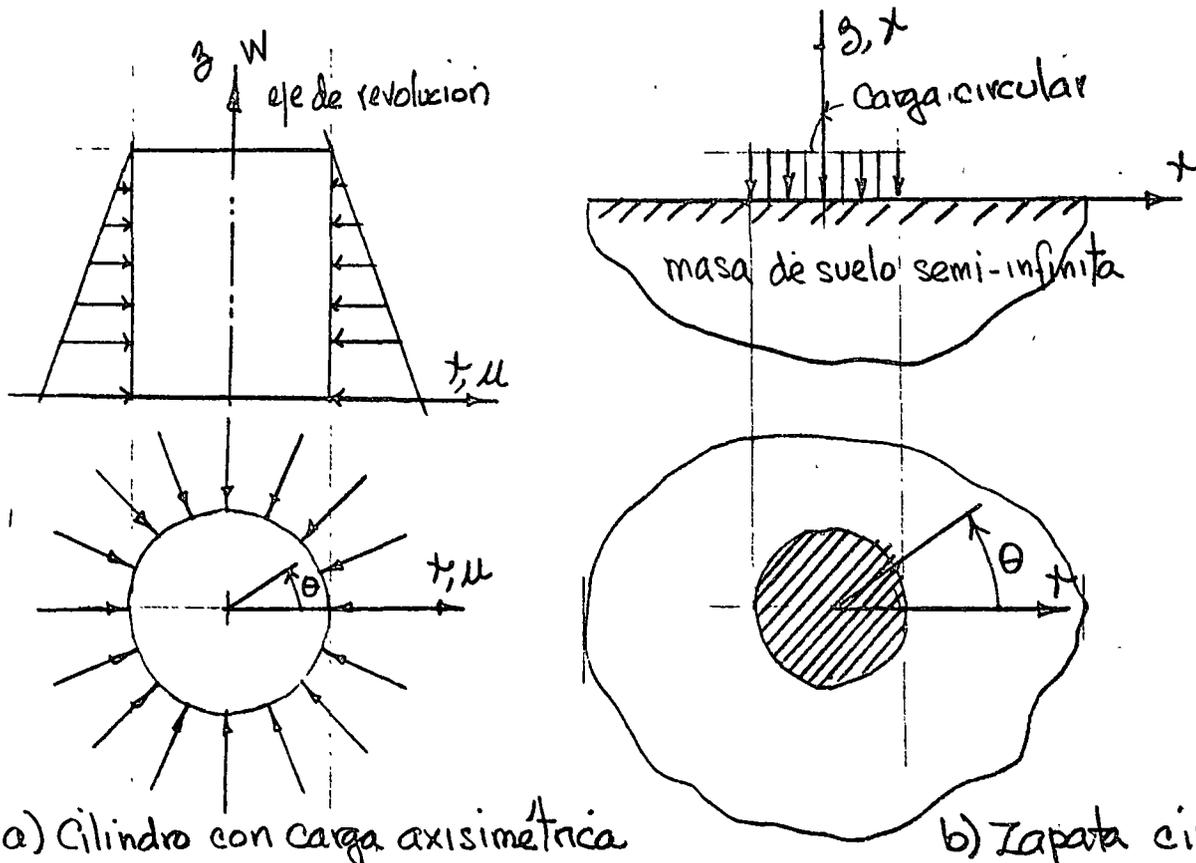
en estos casos el desplazamiento  $u_3 \equiv W = 0$  por lo tanto  $\epsilon_{33} \equiv \epsilon_z = 0$ ,  $\gamma_{rz} = 2\epsilon_{z3} = 0$ , y  $\gamma_{zx} = 2\epsilon_{31} = 0$ . Las ecuaciones (8.3) se reducen a

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9.6)$$

y el esfuerzo  $\sigma_z$  se expresa en términos de  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  como

$$\sigma_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (9.7)$$

Muchos problemas de ingeniería involucran sólidos de revolución (sólidos axisimétricos) sujetos a carga de revolución o axialmente simétrica, por ejemplo un cilindro circular bajo presión externa uniforme, zapata circular en una masa de suelo semi-infinita como se muestran en la Fig. 6.3



a) Cilindro con carga axisimétrica

b) Zapata circular

Fig. 6.3 Problemas axisimétricos.

Debido al eje axisimétrico respecto a geometría y cargas, las componentes del esfuerzo son independiente del ángulo  $\theta$ ; por lo tanto todas las derivadas respecto a  $\theta$  se anulan y las componentes  $\nu$ ,  $\gamma_{r\theta}$ ,  $\gamma_{\theta z}$ ,  $\tau_{r\theta}$ , y  $\tau_{\theta z}$  son cero. Las componentes de esfuerzo diferente de cero son  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  y  $\tau_{rz}$ . Las relaciones de formación de desplazamiento son, para las deformaciones diferente de cero

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (9.8)$$

y la relación constitutiva es

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 \\ & & 1-\nu & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (9.9)$$

(simétrica)

despejando de (9.4)  $\{\epsilon\}$ , substituyéndolo en la ecuación de compatibilidad (9.3), y eliminando por medio de (9.1) a

$\frac{\partial^2 \tau_{rz}}{\partial x \partial y}$  se obtiene

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_r) = -(1+\nu) \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) \quad (9.10)$$

La ecuación (9.10) junto con las de equilibrio (9.1) son suficientes para la solución del problema de esfuerzos

planos  $\sigma_z = 0$ , de ellas se obtiene  $\{\sigma\}^T = [\sigma_x \ \sigma_r \ \tau_{rz}]$ .

Similarmente despejando  $\{\epsilon\}$  de (9.6) y substituyéndolo en la ecuación de compatibilidad (9.3), y eliminando por medio de las ecuaciones de equilibrio (9.1) a  $\frac{\partial^2 \tau_{rz}}{\partial x \partial y}$  se

obtiene

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \quad (9.11)$$

La ecuación (9.11) junto con las de equilibrio (9.1) son suficientes para la solución del problema de deformación plana ( $e_z=0$ ), con fuerzas de cuerpo diferente de cero, de ellas se obtiene  $\{\sigma\}^T = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]$ .

Cuando las fuerzas de cuerpo  $X$  es solo función de  $y$ , constante o cero, y cuando la fuerza de cuerpo  $Y$  es solo función de  $x$ , constante o cero, las ecuaciones (9.10) y (9.11) para esfuerzos y deformación plana respectivamente, se reducen a una sola que es

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (9.12)$$

Es importante observar que en este caso, en las ecuaciones de equilibrio (9.1), y la de compatibilidad (9.12), modificada por las ecuaciones constitutivas, no intervienen las constantes elásticas del sólido  $E$  y  $\nu$ . Conclusión de fundamental importancia para el uso de modelos transparentes en Fotoelasticidad. También se concluye en este caso que en ambos estados; de esfuerzos y deformación plano los esfuerzos  $\{\sigma\}$  son iguales, solamente las deformaciones  $\{e\}$  y los desplazamientos  $\{u\}$  son diferentes. I

Para la solución del problema anterior cuando  $\{X\}=0$  Airy, G. B. (Brit. Assoc. Advan. Sci. Rept., 1862) introduce

una función  $\phi(x,y)$ , llamada función de esfuerzos, en forma tal que

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (9.13)$$

(9.13) satisface las ecuaciones de equilibrio (9.1) cuando las fuerzas de cuerpo  $\{X\}$  son cero, y substituyéndolas en (9.12) se obtiene

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (9.14)$$

desarrollando el operador bi-laplaciano se obtiene

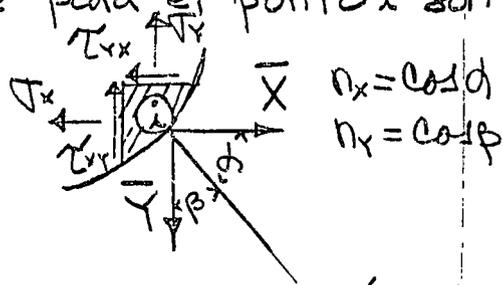
$$\nabla^4 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (9.15)$$

La ecuación (9.14) se llama bi-armónica o bi-laplaciana y la forma (9.15) gradiente cuarto de  $\phi$ .

Por lo demostrado anteriormente el problema de solución de esfuerzos en medios elásticos lineales homogéneos e isotrópicos bidimensionales se reduce a una solución de (9.15) que satisfaga las condiciones en la frontera bidimensional que para el punto  $i$  son

$$\bar{X}_i = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y$$

$$\bar{Y}_i = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y$$



matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{Bmatrix} \quad (9.10)$$

Del Teorema de la unicidad\* la solución mencionada es única.

\* Timoshenko, S. and J.N. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw Hill, 1966.

Si las fuerzas de cuerpo existen, generalmente es posible relacionarlas mediante una función potencial  $V(x, y)$  en forma tal que

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (9.11)$$

substituyendo (9.11) en las ecuaciones de equilibrio (9.1) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (9.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

en este caso la función de esfuerzos es

$$\sigma_x - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (9.13)$$

por supuesto (9.13) satisface las ecuaciones de equilibrio (9.1), y substituyéndola en la ecuación (9.10) la reduce

$$a \quad \nabla^4 \phi = -(1+\nu) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = -(1+\nu) \nabla^2 V \quad (9.14)$$

(9.14) nos resuelve el problema de esfuerzos planos con fuerzas de cuerpo relacionadas por (9.11).

Substituyéndolo (9.13) en (9.11) se obtiene

$$\nabla^4 \phi = -\frac{1}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{1+\nu} \nabla^2 V \quad (9.15)$$

10. Ecuaciones de equilibrio en términos de los desplazamientos  $\{u\}^T = [u_1, u_2, u_3] \equiv [u, v, w]$ .

Uno de los métodos de solución en problemas de elasticidad lineal, homogénea e isotrópica consiste

en eliminar las componentes de esfuerzos  $\{\sigma\}$  de las ecuaciones de equilibrio (5.2) expresando las ecuaciones constitutivas (8.5) en términos de los desplazamientos (7.2), (7.3) y (7.4). Por lo tanto substituyendo (7.2), (7.3) y (7.4) en (8.9) se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_x &\equiv \sigma_{11} = \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y &\equiv \sigma_{22} = \lambda e + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z &\equiv \sigma_{33} = \lambda e + 2G \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &\equiv \tau_{12} = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &\equiv \tau_{23} = G \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} &\equiv \tau_{31} = G \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (10.1)$$

$$\text{donde } e = e_{11} + e_{22} + e_{33} \equiv e_x + e_y + e_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (10.2)$$

Substituyendo (10.1) en las ecuaciones de equilibrio (5.2) se obtiene

$$(\lambda + G) \begin{Bmatrix} \frac{\partial e}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial y} \\ \frac{\partial e}{\partial z} \end{Bmatrix} + G \nabla^2 \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.3)$$

donde en este caso el operador diferencial  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

En (10.3) cuando las fuerzas de cuerpo  $\{X\}$  son cero

(10.3) queda

$$(\lambda + G) \begin{Bmatrix} \frac{\partial e}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial y} \\ \frac{\partial e}{\partial z} \end{Bmatrix} + G \nabla^2 \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.4)$$

En las ecuaciones (10.4), diferenciando la primera respecto a  $x$ , la segunda respecto a  $y$ , y la tercera respecto a  $z$ , y después sumándolas se obtiene

$$(\lambda + 2G)\nabla^2 e = 0 \quad (10.5)$$

(10.5) significa que la expansión volumétrica unitaria  $e = e_x + e_y + e_z$  satisface la ecuación diferencial

$$\nabla^2 e = \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = 0 \quad (10.6)$$

En la ecuación (10.3) las fuerzas de cuerpo son

$$\begin{aligned} X &= \rho(f_x - a_x) \\ Y &= \rho(f_y - a_y) \\ Z &= \rho(f_z - a_z) \end{aligned} \quad (10.7)$$

donde  $f_x, f_y$  y  $f_z$  son las fuerzas por unidad de masa,  $a_x, a_y$  y  $a_z$  las componentes de la aceleración, y  $\rho$  es la densidad ó masa específica. Si en las ecuaciones (10.3) la primera la multiplicamos por el vector unitario  $\bar{i}$ , la segunda por el vector unitario  $\bar{j}$ , y la tercera por el vector unitario  $\bar{k}$ , y las sumamos entre sí se obtiene la expresión vectorial de las ecuaciones (10.3) como

$$(\lambda + G)\text{grad div } \bar{s} + G\nabla^2 \bar{s} + \rho(\bar{f} - \bar{a}) = 0 \quad (10.8)$$

en donde

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z \\ \bar{f} &= \bar{i}f_x + \bar{j}f_y + \bar{k}f_z \\ \bar{s} &= \bar{i}u + \bar{j}v + \bar{k}w \end{aligned} \quad (10.9)$$

$$\text{div } \bar{s} = e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\text{grad div } \bar{s} = \bar{i}\frac{\partial e}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial e}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial e}{\partial z}$$

# TRABAJO VIRTUAL

Principio del trabajo virtual: Si una partícula se encuentra en equilibrio, el trabajo total efectuado por todas las fuerzas actuando sobre la partícula, bajo cualquier desplazamiento virtual es cero. Sean

$\delta u, \delta v, \delta w$ : Componentes del desplazamiento virtual en las direcciones  $x, y, z$ .

$\sum F_x, \sum F_y, \sum F_z$ : Sumas de fuerzas en las direcciones  $x, y, z$  que actúan sobre la partícula o cuerpo rígido.

$$\delta u = \delta u + \delta v + \delta w$$

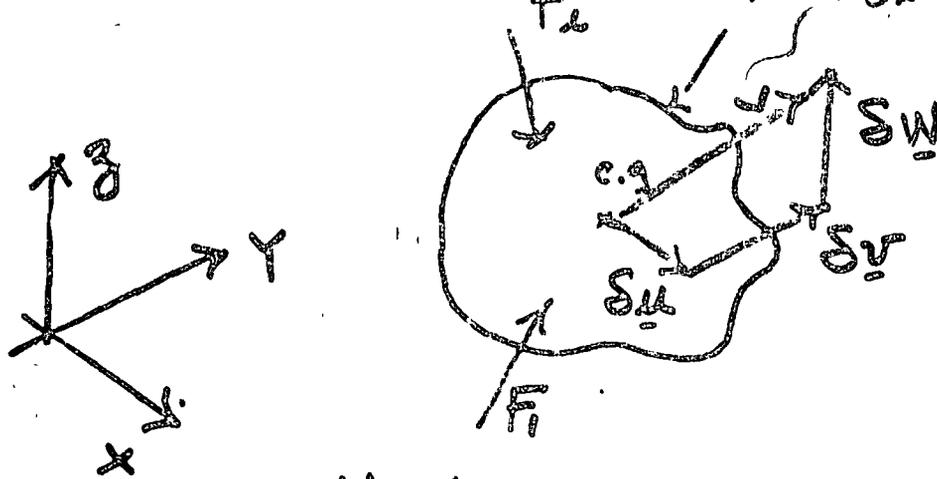


Fig. 1

El principio del desplazamiento virtual establece que

$$\delta u \sum_{i=1}^n F_{xi} = 0$$

$$\delta v \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0$$

(1)

$$\delta w \sum_{i=1}^n F_{zi} = 0$$

Si el sistema está en equilibrio y permanece en equilibrio después del desplazamiento virtual se satisface (1).

Un cuerpo elástico en reposo constituye un conjunto de partículas sobre las que en cada elemento actúa un subconjunto de fuerzas en equilibrio. En cualquier desplazamiento virtual, el trabajo virtual sobre cada partícula es cero, por lo tanto el Trabajo virtual total también debe ser cero. Es conveniente que  $\delta u_i$  sean consistentes con las condiciones de apoyo.

Sean:

P. Ballesteros (3)

$[u \ v \ w]$  componentes de los desplazamientos debido a las cargas en  $\mathcal{L}_i$ .

$[\delta u \ \delta v \ \delta w]$  componentes del desplazamiento virtual en  $\mathcal{L}_i$ . (funciones arbitrarias de  $\mathcal{L}_i$ )

Para deformaciones lineales pequeñas, los desplazamientos virtuales correspondientes a las seis componentes de deformación son

$$\delta \epsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} (\delta u), \quad \delta \gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u)$$

$$\delta \epsilon_y = \frac{\partial}{\partial y} (\delta v), \quad \delta \gamma_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta v) \quad (2)$$

$$\delta \epsilon_z = \frac{\partial}{\partial z} (\delta w), \quad \delta \gamma_{zx} = \frac{\partial}{\partial z} (\delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta w)$$

y el trabajo virtual en un elemento  $dx dy dz$  es

$$\delta U_0 dV = [\sigma_x (\delta \epsilon_x) + \sigma_y (\delta \epsilon_y) + \sigma_z (\delta \epsilon_z) + \tau_{xy} (\delta \gamma_{xy}) + \tau_{yz} (\delta \gamma_{yz}) + \tau_{zx} (\delta \gamma_{zx})] dV \quad (3)$$

Sean:

$\bar{X}dA, \bar{Y}dA, \bar{Z}dA$ , Fuerzas de superficie en el elemento  $dV = dx dy dz$ .

$XdV, YdV, ZdV$ , Fuerzas de cuerpo en el elemento  $dV = dx dy dz$ .

La afirmación de que el Trabajo virtual es cero es

$$\int_A (\bar{X}\delta u + \bar{Y}\delta v + \bar{Z}\delta w) dA + \int_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dV - \int_V \delta U_0 dV = 0 \quad \text{④}$$

Puesto que las fuerzas de superficie  $\{\bar{X}\}$ , las de cuerpo  $\{X\}$  y los esfuerzos  $\{\sigma\}$ , no varían durante un desplazamiento virtual pequeño, el símbolo variacional  $\delta$  se puede sacar fuera del signo integral quedando

(5)

$$\int_V \left[ \int_V u_0 dV - \int_V (Xu + Yv + Zw) dV - \int_A (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dA \right] = 0 \quad (5)$$

Matricialmente:

$$\int_V \left[ \int_V [L\sigma] \{e\} - \int_V [X] \{u\} dV - \int_A [\bar{X}] \{u\} dA \right] = \vec{0} \quad (6)$$

(a) = Energía potencial de deformación

(b) = " " " " fuerzas de cuerpo

(c) = " " " " " " superficie

en (6)

$$[L\sigma] = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}]$$

$$\{e\}^T = \{e_x \ e_y \ e_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T$$

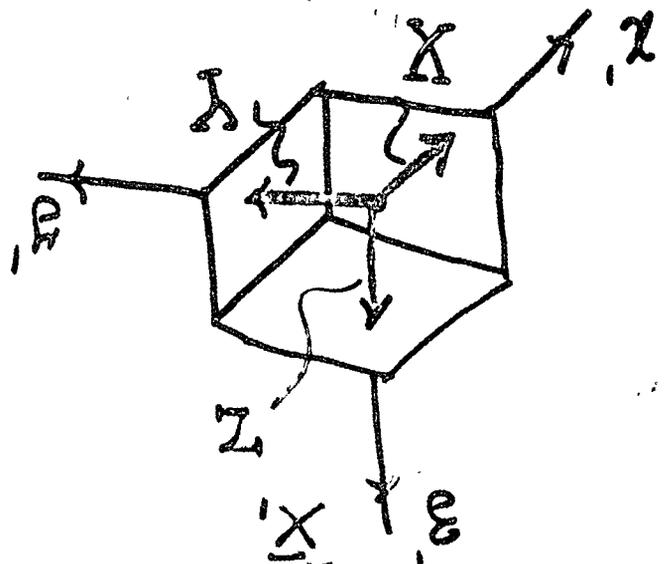
$$[X] = [X \ Y \ Z]$$

$$\{u\}^T = [u \ v \ w]$$

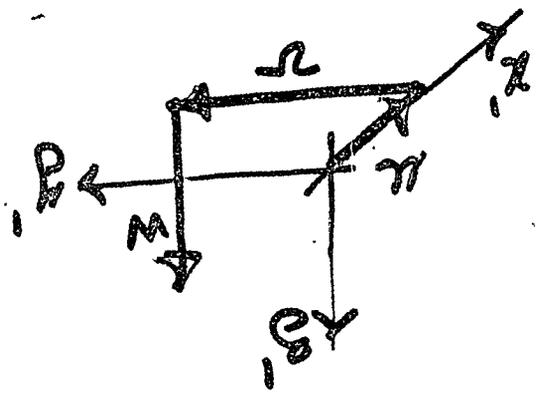
$$[\bar{X}] = [\bar{X} \ \bar{Y} \ \bar{Z}]$$

P. Ballesteros

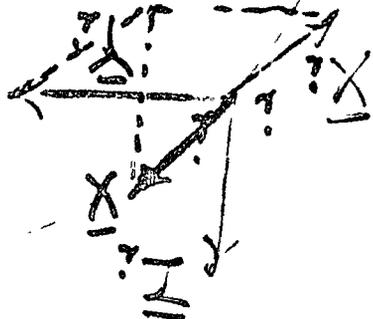
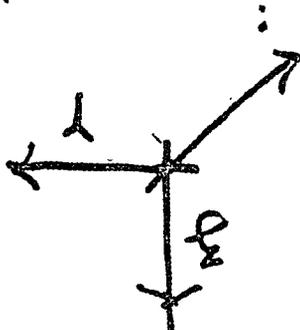
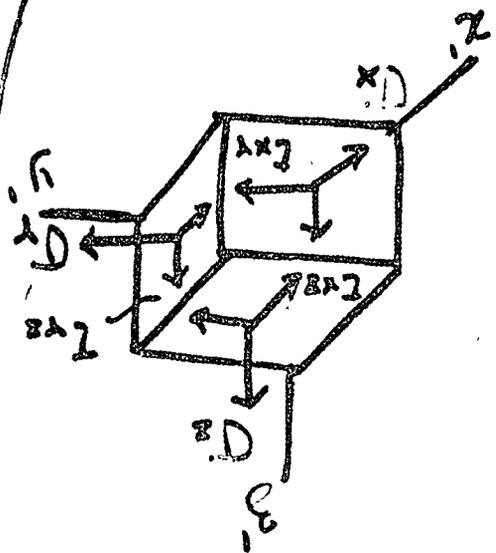
Fuerzas de cuerpo



des desplazamientos



Esfuerzos



Fuerzas de superficie

P Ballesteros Xn

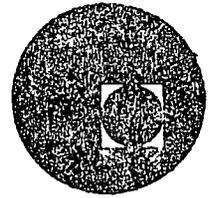
+  
P. Ballesteros ⑦

(a) Establece que los desplazamientos  $\delta u$  y  $\delta w$  bajo ciertas fuerzas de superficie y de cuerpo dadas, son tal que la variación de primer orden de la energía potencial total ES CERO para cualquier desplazamiento virtual, o brevemente La energía potencial total es estacionaria.

El término desplazamiento o trabajo virtual implican multiplicadores arbitrarios  $\delta u$  y  $\delta w$  con las ecuaciones de equilibrio, es conveniente referirse a ellos como variaciones de  $u, v, w$ .



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



ANALISIS ESTRUCTURAL

TEMA IV : ANTECEDENTES e INTRODUCCION DE ELEMENTO  
FINITO.

PROF. DR. PORFIRIO BALLESTEROS.

febrero-marzo 1978.

# METODO DE ANALISIS POR ELEMENTOS FINITOS.

## INTRODUCCION.

El ingeniero en la busca de los valores numéricos adecuados para describir su proceso de diseño, se encontraba generalmente con formulaciones matemáticas difíciles. Por ejemplo, considerando el simple caso de teoría de flexión de placas, bajo las hipótesis de pequeñas deformaciones y que las secciones planas permanecen planas después de la deformación, la ecuación diferencial que gobierna el análisis para un material elástico lineal homogéneo e isotrópico es

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1)$$

donde  $W$  es la deflexión en el punto  $(x, y)$ ,  $q$  es la intensidad de la carga en el punto  $(x, y)$ , y  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  es la rigidez flexionante de la placa la cual depende del módulo de elasticidad  $E$ , el espesor de la placa  $h$  y la relación de Poisson  $\nu$ . En la Fig. 1 se presenta un elemento diferencial de la placa y las acciones y reacciones sobre él. Combinando la flexión simple en dos direcciones se obtiene para los momentos y cortantes por unidad de longitud de placa lo siguiente:

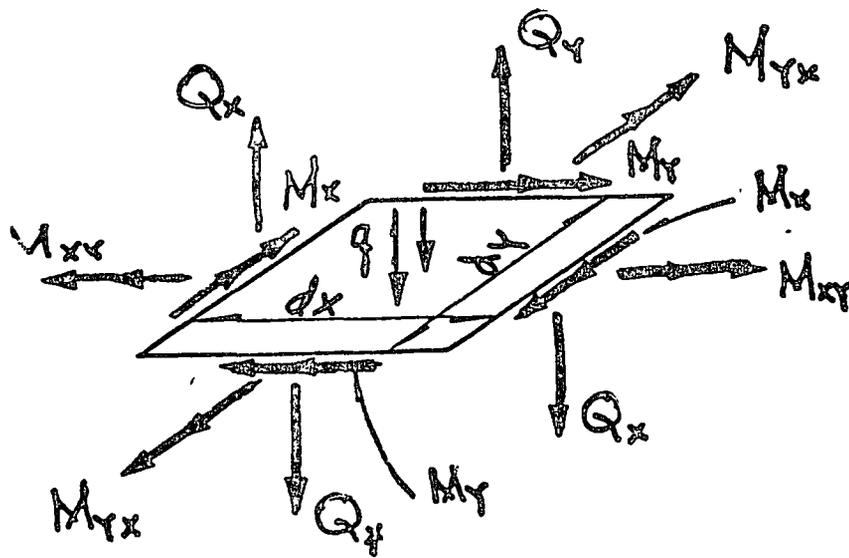
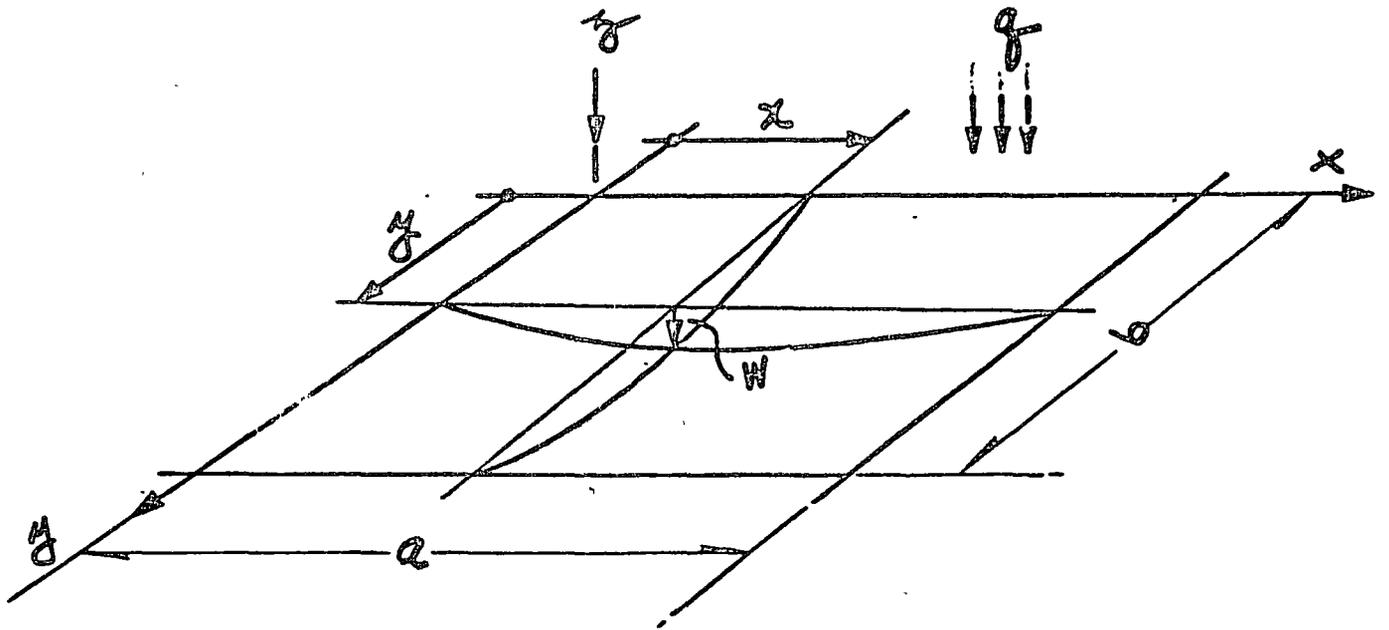


Fig. 1 Superficie media de una placa, y un elemento diferencial  $dx, dy$ .

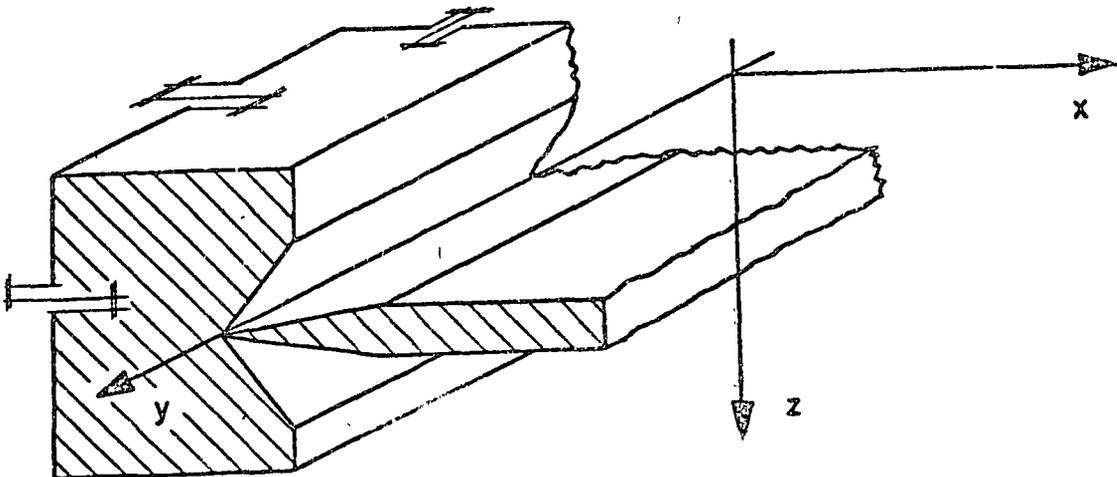
$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) \\
 M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right) \\
 M_{xy} &= D(1-\nu) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \\
 Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \bar{w} \\
 Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \bar{w}
 \end{aligned} \tag{2}$$

donde

$$\nabla^2 \bar{w} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2}$$

Para el caso particular de la placa libremente apoyada, y rectangular, -  
cuyas condiciones en la frontera ( Fig. 2 ) son:

$$\begin{aligned}
 w(0,y) &= 0 \\
 w_{xx}(0,y) + \nu w_{yy}(0,y) &= 0
 \end{aligned} \tag{3}$$



Navier en 1820 presentó a la Academia Francesa de Ciencias, la solución representando la carga  $q(x, y)$ , por medio de una serie trigonométrica doble

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (4)$$

substituye (4) en (1) y considerando las propiedades de ortogonalidad de las series trigonométricas obtiene la solución de la ecuación diferencial bi-armónica

(1) como

$$W = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (5)$$

en donde el coeficiente  $A_{mn}$  viene expresado por

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy \quad (6)$$

El procedimiento de Navier consiste en lo siguiente: Conocida la función de carga  $q(x, y)$ , se substituye en (6) y se obtiene el coeficiente  $A_{mn}$  el cual nuevamente se substituye en (5) y se obtiene la deflexión  $W(x, y)$ , y por medio las ecuaciones (2) se obtienen los momentos y cortantes  $\{M\}$  y  $\{Q\}$

Es importante observar que las limitaciones de Navier se refieren a una placa rectangular libremente apoyada y con una función de carga  $q(x, y)$  impar con respecto a  $x$ , y con respecto a  $Y$ , es decir,  $f(x) = -f(-x)$  y

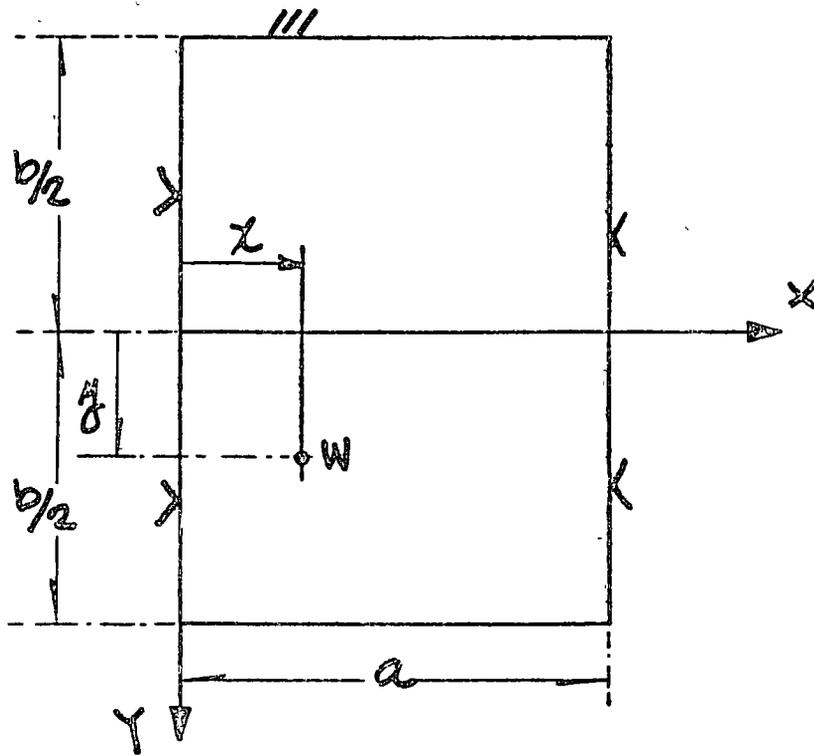
Si la función fuese par, la representación de  $q(x, y)$  sería mediante una serie de cosenos, y si  $q(x, y)$  fuese una función cual

quiera, se representaría mediante una serie trigonométrica doble completa de senos y cosenos, y se tendrían problemas en satisfacer las condiciones en la frontera. Generalmente la convergencia de la serie (5) es lenta, y en algunos casos es necesario considerar más de 500 términos para asegurar la solución correcta.

Posteriormente en 1900 M. Levy cambia de posición los ejes coordenados ( Fig. 3 ) e utiliza una serie trigonométrica simple

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \tag{7}$$

El procedimiento de Levy consiste en substituir (7) en (1) obteniendo una ecuación diferencial lineal de cuarto orden en  $f_m(y)$  con coeficientes constantes no homogénea con la cual ya es posible satisfacer diferentes condiciones en la frontera  $y = \pm \frac{b}{2}$  pero continua limitado a una placa rectangular libremente apoyada en las fronteras  $x = 0$  y  $x = a$ .



Las limitaciones de análisis tan restringidas, como los ejemplos anteriores, aparecían en innumerables problemas de ingeniería, lo cual originó el principio de los métodos numéricos, el cual presenta dos etapas de desarrollo. Antes de la época de las computadoras, donde representa un importante papel el Prof. Southwell del Colegio Imperial de Inglaterra, desarrollando y aplicando los métodos numéricos de relajación y diferencias finitas, superando las limitaciones restringidas de los métodos analíticos de solución.

Durante la era de las computadoras digitales, el método de análisis por elementos finitos ha obtenido gran popularidad, puesto que en este procedimiento como resultado de la discretización del medio por analizar, se obtienen sistemas grandes de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas, lo cual actualmente su solución no representa ningún problema. Por ejemplo, en el caso de análisis elástico lineal de placas, podemos tener cualquier condición de apoyo, de geometría y de cargas, prácticamente se eliminan la mayoría de las restricciones de las soluciones analíticas mencionadas, el problema más importante es verificar adecuadamente su convergencia.

El primer trabajo referente al método se debe a Hrenikoff Ref. 1 publicado en 1941, y el segundo a McHenry publicado en 1943 en ambos trabajos ( Fig. 4 ) se verifican soluciones de problemas de elasticidad bidimensional en estado plano de esfuerzos, discretizando el medio y buscando la analogía con la solución estructural.

Posteriormente en 1949 Newmark, en su libro de Métodos Numéricos - - Ref. 3 , presenta los métodos de Hrenikoff y McHenry. Sin embargo, el

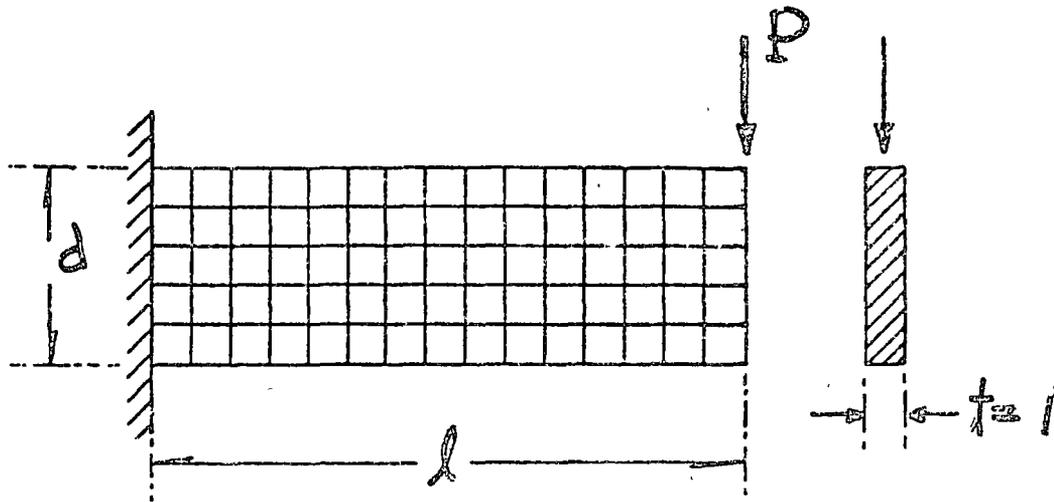


Fig. 4 Primera solución presentada por Hrenikoff en 1941.

crédito de aplicarlo a medios continuos es de Turner, Clough, Martin y Topp Ref. 5 , y no es, sino hasta 1960 con Clough, Ref. 6 nace por primera vez el nombre mágico de "Elemento Finito", derivando más correctamente las propiedades básicas del elemento triangular y el rectangular, y el hecho de que en el mismo tiempo la computadora comienza a ser una herramienta muy efectiva, conduce rápidamente a la solución numérica de problemas elástico lineales complejos, en los cuales una solución analítica no era posible.

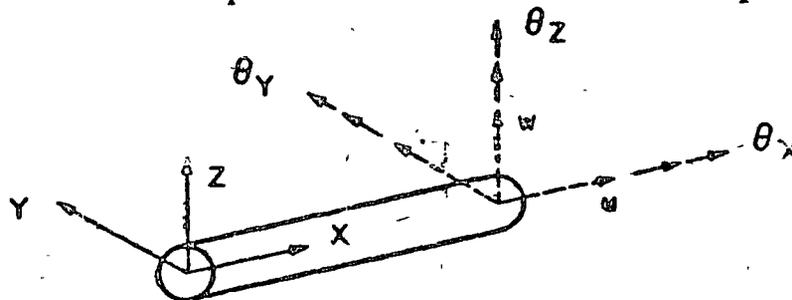
Se inician la derivación de las propiedades de rigidez de los elementos finitos, el campo de desplazamientos en el medio se expresa en función de los desplazamientos nodales del elemento, satisfaciendo continuidad, las fuerzas internas se definen aplicando el principio del trabajo virtual, la identidad de este proceso con el de minimizar la energía potencial total, o sea, el proceso de Rayleigh-Ritz

Ref. 7 es obvia. El desarrollo anterior se acentúa en el campo de la Mecánica de Sólidos y posteriormente Zienkiewicz Ref. 13 y Wilson Ref. 14 lo aplican en Mecánica de fluidos y en problemas de análisis de conducción de calor.

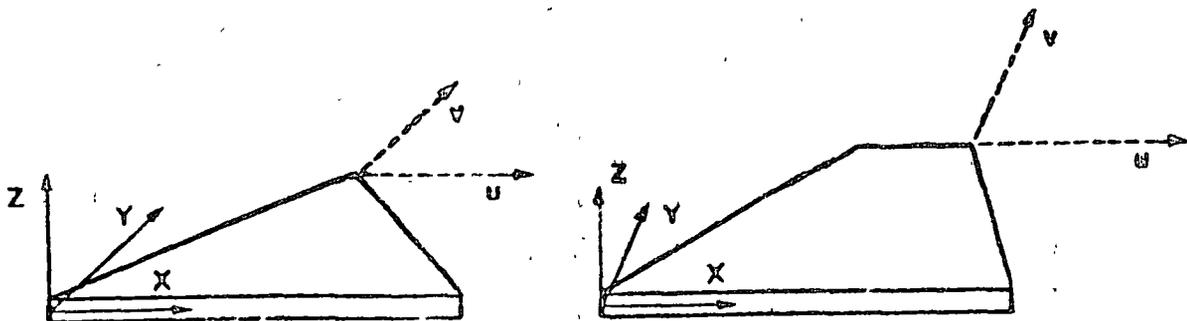
Se presenta al final una lista de referencias de importancia del método del elemento finito

Al iniciar la determinación de esfuerzos y desplazamientos en cierto problema de diseño, las ecuaciones que gobiernan el problema en cualquier forma deben satisfacer equilibrio y continuidad.

El Método del Elemento Finito es un procedimiento analítico, y cuando se aplica a un medio continuo, éste se modela analíticamente subdividiéndolo en sub-regiones ( los elementos finitos ) en los que el comportamiento de cada uno es definido por grupos separados de funciones que supuestamente definen esfuerzos y desplazamientos en esa región, las funciones se seleccionan en forma tal que se satisfaga la condición de continuidad a través de todo el medio, por lo tanto, el método del elemento finito en común con las soluciones por series y diferencias finitas representa una aproximación a la solución del problema

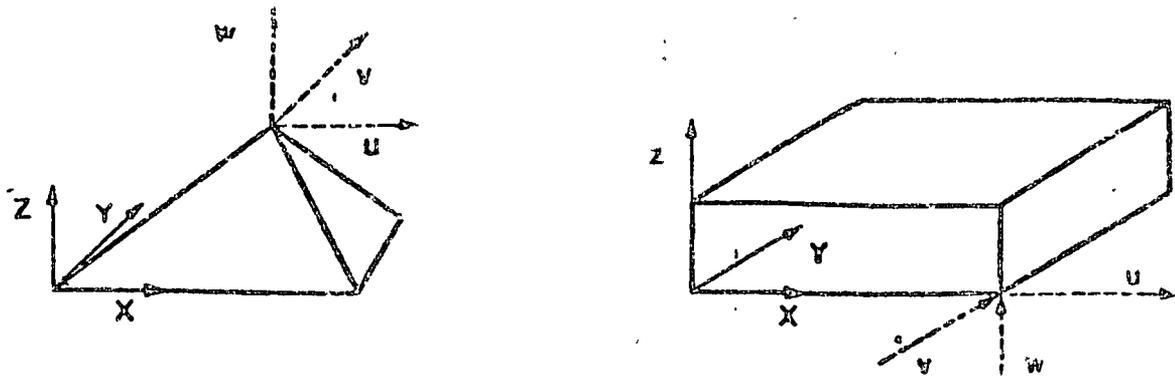


a ) Elemento. estructural



$$\gamma_{XY} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}$$

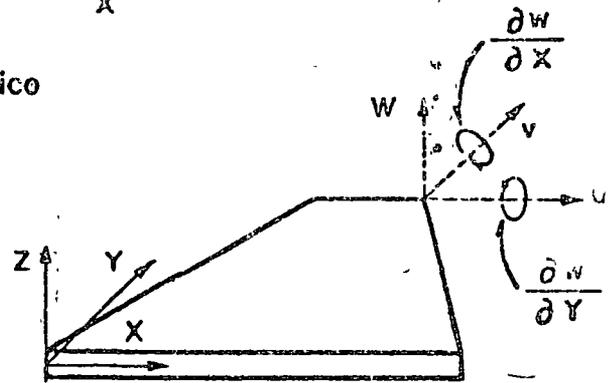
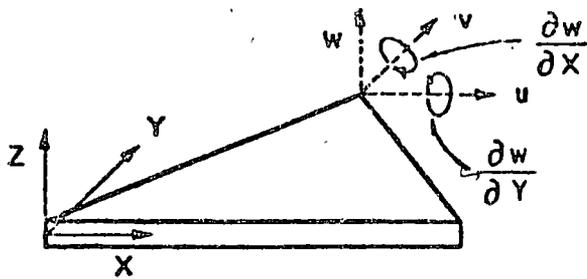
b ) Esfuerzos planos



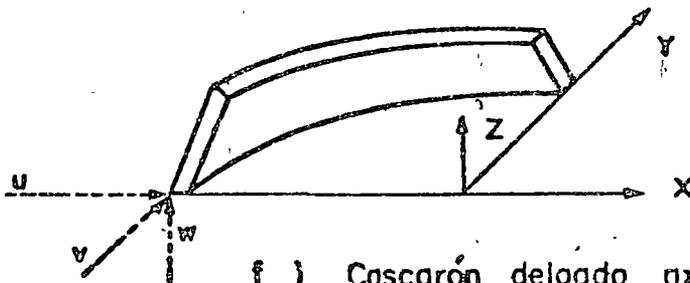
c) Elementos sólidos.



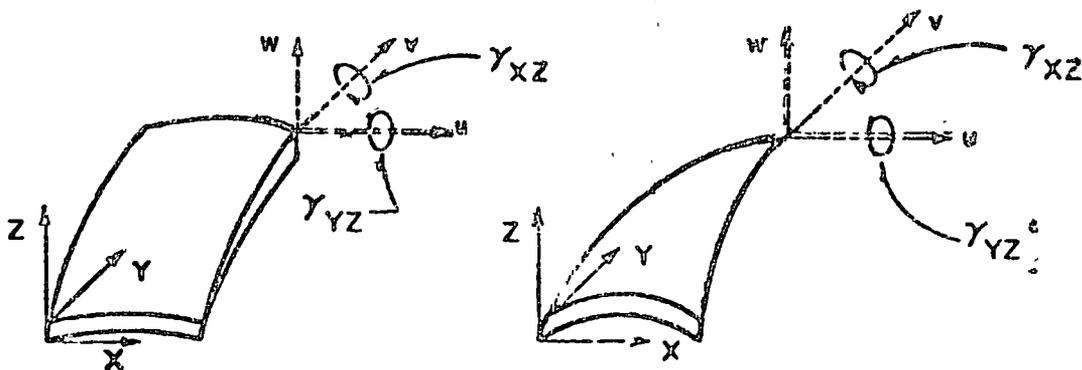
d) Sólidos axisimétrico



e) Flexión de placas



f) Cascarón delgado axisimétrico



g) Cascarones delgados curvos

Fig 5 Tipos de elementos finitos

TIPOS DE ELEMENTOS.

Elementos que son usados comunmente en la práctica son ilustrados en la Fig. 5.

El elemento estructural simple, Fig. 5 (a), es un miembro de la familia - total de elementos finitos. Cuando se usa con elementos del mismo tipo describe armaduras y estructuras espaciales. Cuando se combina con elementos de tipo diferente, especialmente con elementos de placa generalmente se describen miembros de rigidez.

Los elementos básicos en análisis por elementos finitos son placas delgadas con cargas contenidas en su plano ( condición de esfuerzos planos ), triangulares y cuadriláteros se ilustran en la Fib 5b. Se denominan básicos porque los primeros desarrollos concernientes con el método se refieren a ellos.

Los elementos sólidos, Fig. 5 (c), son la generalización tridimensional de los elementos de esfuerzos planos. El tetrahedro y el hexaedro son las formas más comunes y son esenciales para modelar analíticamente problemas de mecánica de suelos, rocas y estructuras nucleares. Es conveniente mencionar que la única forma práctica de resolver problemas tridimensionales prácticos, es el método de elementos finitos.

Uno de los campos más importantes de aplicación del método de elementos finitos es en el análisis de "sólidos axisimétricos", Fig. 5 (d). Una gran varie-dad de problemas de ingeniería caen en esta categoría, incluyendo concreto, tan-ques, recipientes nucleares, rotores, pistones, flechas de motores, y la cabeza de los roquets. Generalmente son medios de carga y geometría axisimétrica.

En la Fig. 5 (d) se muestra el elemento triangular, también se usan secciones cuadriláteras.

Elemento de placa plana en flexión es empleado no solo en conexión con el comportamiento de placas planas, sino también en cascarones y miembros de pared delgada. Fig. 5 (e).

Estructuras de cascarón delgado axisimétricas, Fig. 5 (f), tienen el mismo rango de significado en la aplicación práctica que los sólidos axisimétricos. Sin embargo, las relaciones gobernantes se derivan de la teoría de cascarones delgados.

Cuando una estructura de cascarón delgado que de hecho es curva, es preferible emplear elementos de cascarón curvos delgados para el modelo analítico, tienen la ventaja de describir más aproximadamente la superficie curva del cascarón, y la apropiada representación del acoplamiento de deformación y equilibrio entre cada elemento. Elementos típicos de cascarones de doble curvatura se muestran en Fig. 5 (g). Gran número de formulaciones para este elemento existen.

### ALGUNAS APLICACIONES DE ELEMENTOS FINITOS.

Examinaremos algunas aplicaciones del método de elementos finitos en diseño estructural con el objeto de ilustrar la forma en la cual se usan los elementos de la Fig. 5, y la escala y complejidad de los problemas.

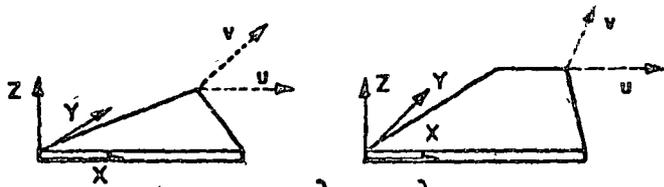
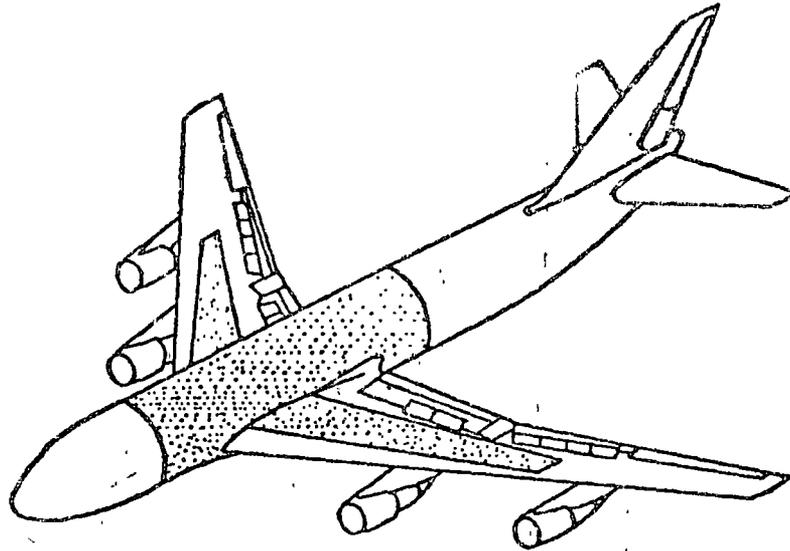
El desarrollo del método del elemento finito se debe a los investigadores relacionados con la industria aeronáutica. La Figura 6 muestra la forma en que

se aplicó el análisis por elementos finitos de una porción del avión Boeing 747. La estructura del fuselaje de un avión consiste de laminas de aluminio ligadas a una estructura interna formada por armaduras y atezadores. La experiencia ha mostrado que los efectos locales de flexión en el cascarón son despreciables, por lo tanto, se supone que consiste de elementos en condición plana de esfuerzos Fig. 5(b). El análisis de elementos finitos del Boeing 747, de la parte achurada, región que conecta el cuerpo o Cascarón Monocoque con las alas, área achurada en Fig. 6, consiste de 7000 incógnitas. Por lo tanto, es común en la práctica dividir la estructura en regiones, o subestructuras, y analizar cada una por elementos finitos con el objeto de producir un superelemento. Los superelementos se ligan entre sí por medio de un procedimiento convencional que determina la fase final del análisis.

El esquema de subestructuración del Boeing 747 es mostrado en la Fig. 6 y los detalles son listados en la Tabla 1.

Sub-Estructura	Descripción	Nodos	Condición Carga	Elemento Viga	Elemento Placa	Grados libertad interacción elementos.	Grado de libertad total.
1	Ala	262	14	355	363	104	796
2	Centro ala	267	8	414	295	198	880
3	Cascarón Monocoque	291	7	502	223	91	1,026
4	Cascarón M.213	213	5	377	185	145	820
5	Cascarón M	292	7	415	241	200	936
6	Caja Tren Aterrizaje	170	10	221	103	126	686
7	Cascarón M	285	6	392	249	233	909
8	Caja Tren Aterrizaje	129	10	201	93	148	503
9	Cascarón M	286	7	497	227	92	1,038
TOTAL		2,195	63	3,374	1,979	555	7,594

Tabla 1 Subestructuración del Boeing 747



$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Esfuerzos planos

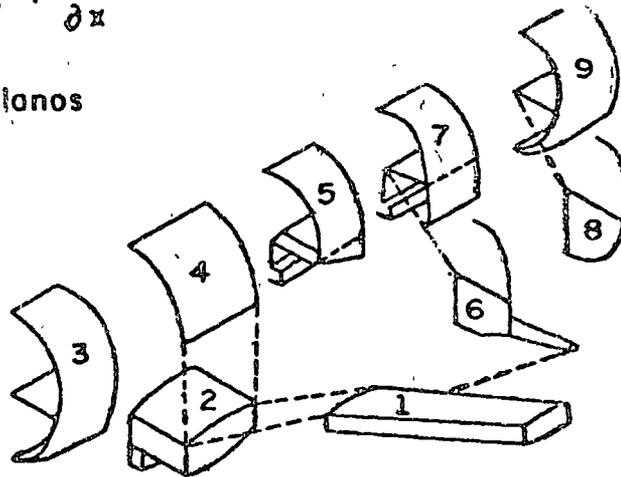


Fig 6 Boeing 747

Como es usual en el diseño de aviones, se hicieron pruebas en el prototipo y los resultados se compararon con la solución por elementos finitos, coincidiendo como se muestra en la Fig. 7

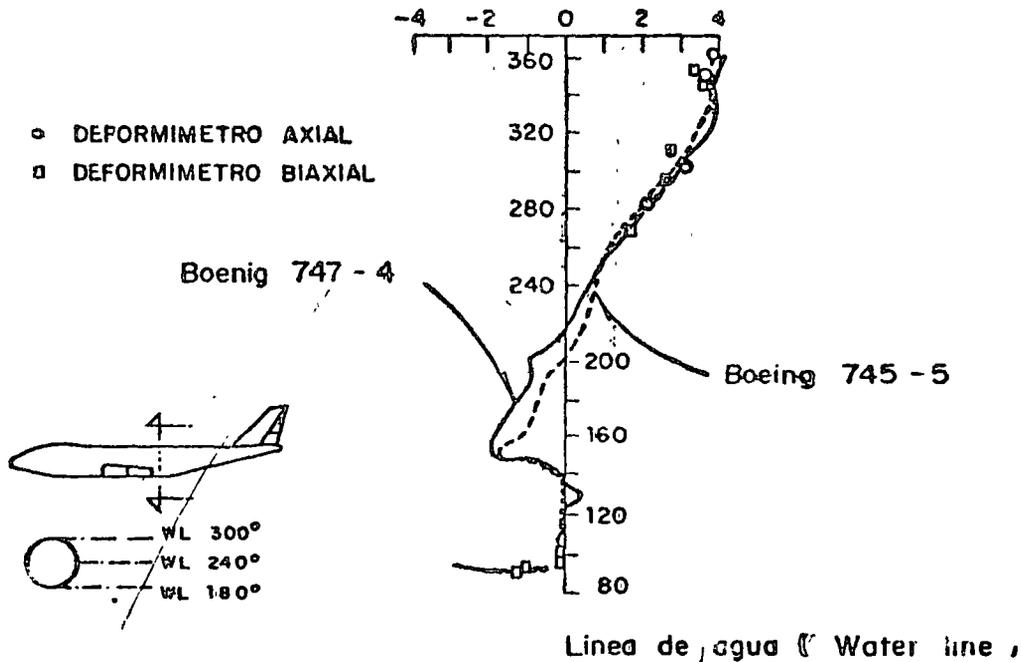


Fig. 7 Comparación entre análisis y experimentación del Boeing 747

Es importante agregar que la respuesta dinámica de un avión es muy importante, así como su inestabilidad elástica es una forma importante de falla. Ninguno de estos fenómenos puede tratarse por los métodos simplificados, pero su análisis usando el método de elementos finitos ha probado ser muy aceptable.

Problemas similares se encuentran en Arquitectura Naval. Figura 8 una porción de una estructura de un transbordador. La parte plana es representada por elementos en estado plano de esfuerzos, Fig. 5 (b). Elementos estructurales, Fig. 5 (a), son empleados en la representación de la estructura interna.

El número total de incógnitas para definir las partes importantes de un barco es del orden de 50,000, y de nuevo se subdivide el problema en subestructuras obteniendo menos incógnitas.

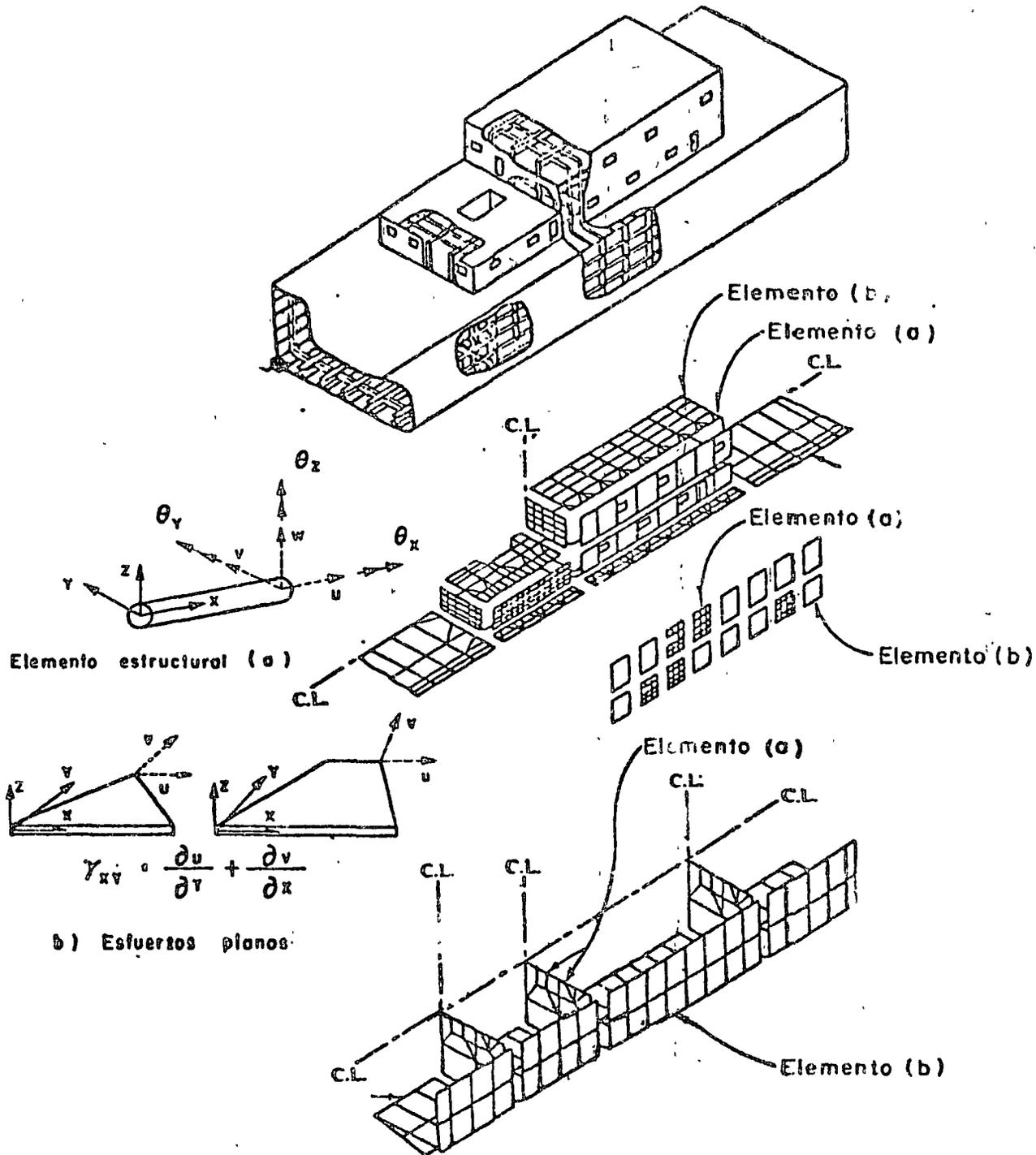


Fig. 8 Análisis por elemento finito de estructura de un transbordado

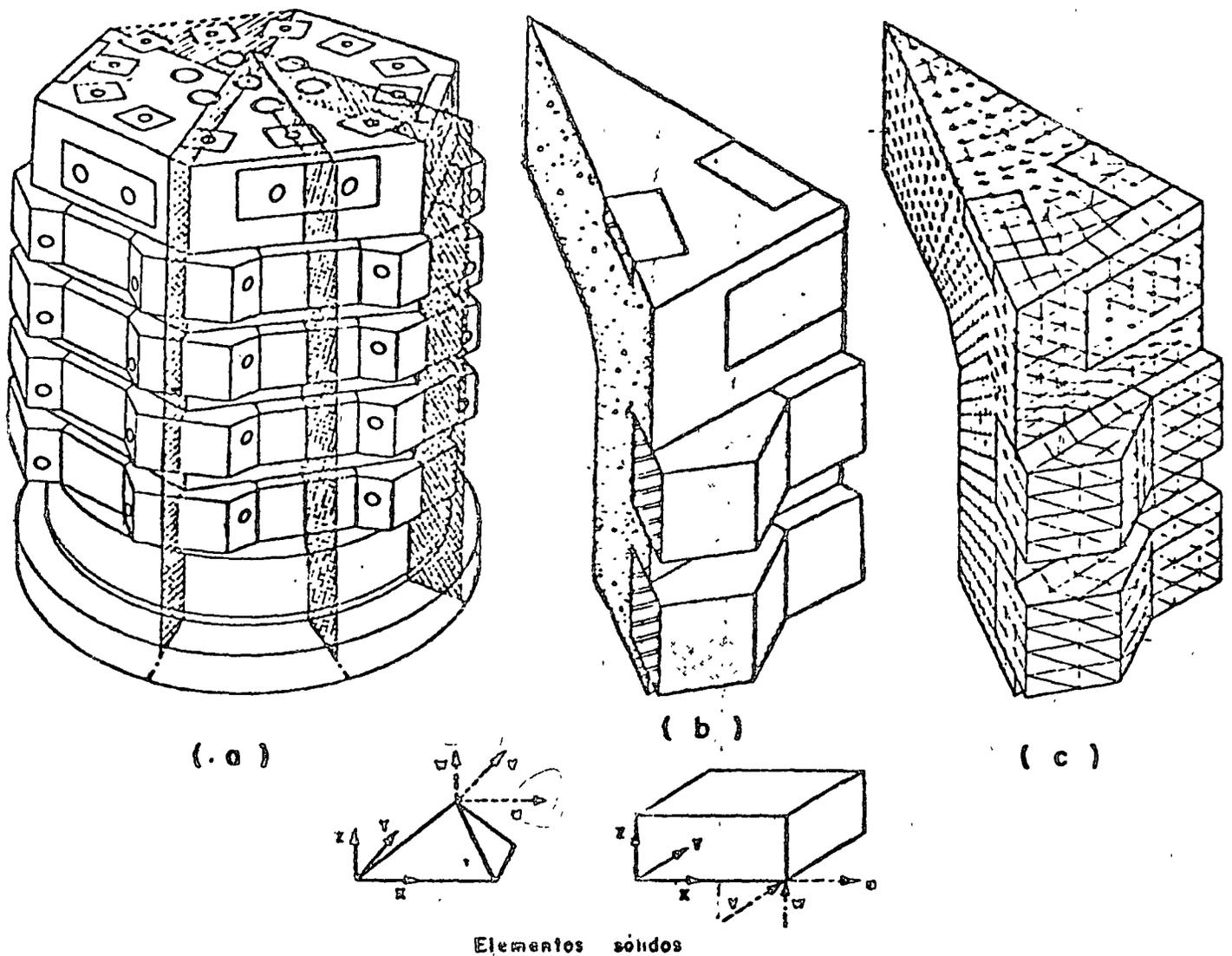


Fig 9 Analisis por elementos finitos de un recipiente reactor de concreto presforzado

Requerimientos de seguridad en el diseño estructural de los reactores nucleares han causado que la industria use ampliamente el análisis por elementos finitos. Figura 9 (a) un recipiente reactor de concreto presforzado. Debido a la simetría es posible analizar solamente un doceavo de la estructura total, - - Fig. 9 (b). Su volumen se modela analíticamente en un ensamble de elementos tetraedrales y hexaedrales, Fig. 5 (c). En problemas de este tipo, el número de incógnitas es del orden de 20,000, y muy común hacer el análisis en condiciones no lineales en material y geometría.

No todos los problemas de aplicación del método de elementos finitos son de proporciones monumentales. Las figuras 10 y 11 muestran aplicaciones básicas a ciertos problemas de ingeniería civil. Una forma de incrementar la eficiencia de diseño en secciones roladas de acero estructural es cortando el alma en la forma dentada mostrada en la Fig. 10 (a), colocando una sección sobre la otra y soldándolas, Fig. 10 (b). Y se obtiene una viga más aperaltada reduciendo el acero en el alma, y por supuesto que en este problema rutinario de diseño, no es necesario el uso del método de elementos finitos.

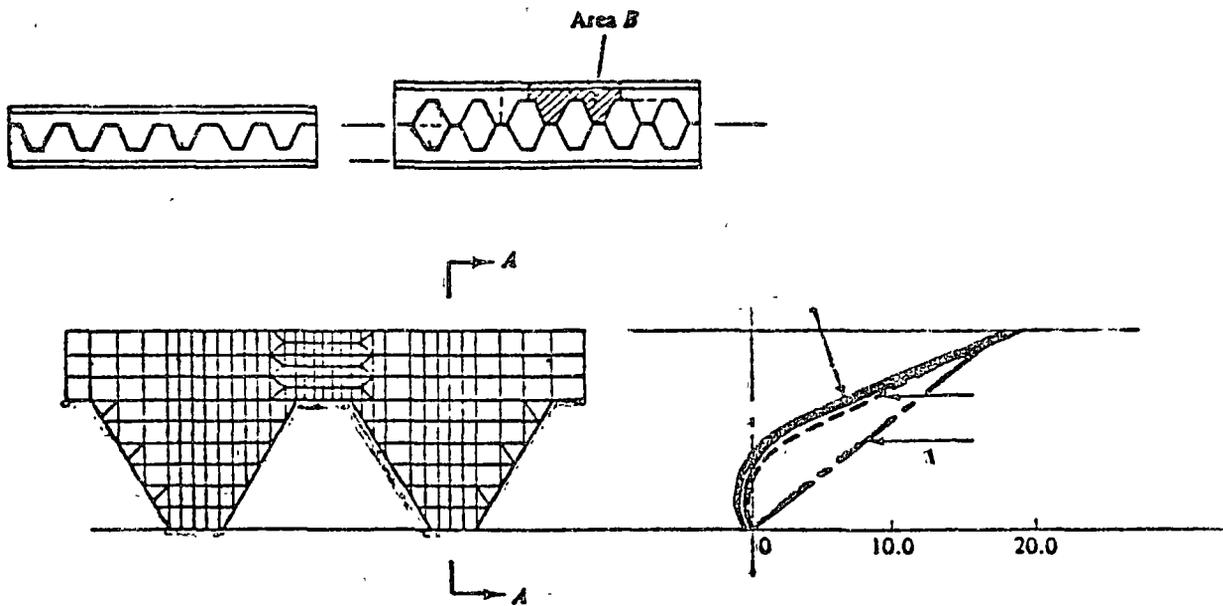


Fig. 10 Análisis de elementos finitos de una viga aperaltada en celosía.

Un problema todavía más común es el de una viga de concreto reforzado, Fig. 11, para el cual se conoce muy poco respecto a la adherencia entre el acero de refuerzo y el concreto, y la formación y crecimiento de las grietas al aumentar la carga. La Figura 11 (a) muestra el modelo analítico de ele-

mentos finitos y la descripción de las trayectorias de grietas y las gráficas de esfuerzos se muestran en la Fig. 11 (b).

Los pocos ejemplos mostrados muestran que el método de elementos finitos puede ser usado ventajosamente en cualquier situación que se requiera la predicción de esfuerzos y deformaciones internas, desplazamientos, vibraciones, inestabilidad elástica, mecánica de fluidos, transferencia de calor. Situaciones que se levantan de diversos campos que tradicionalmente han sido considerados como disciplinas ingenieriles separadas. Ejem., Ingeniería Civil, Mecánica, - Aeroespacial, Arquitectura Naval. El método del elemento finito proporciona una tecnología unificada de análisis en casi todos los campos.

Es nuestro intento en este curso desarrollar los conceptos teóricos básicos y estudiar problemas específicos de carácter práctico. Un compendio de tales problemas llenaría muchos volúmenes, por lo tanto es recomendable consultar las memorias de congresos y publicaciones periódicas correspondientes.

### PROGRAMAS DE PROPOSITOS GENERALES.

Se ha indicado que las ecuaciones del método de elementos finitos son de una forma tal que su carácter general permite teóricamente escribir un solo programa de computadora que resuelva la mayoría de los problemas que se presentan en la Mecánica de Medio Continuos. Programas de computadora con este objetivo, aún en escala restringida, son llamados programas "de propósitos generales". La ventaja de programas de propósitos generales no es sólo su capacidad,

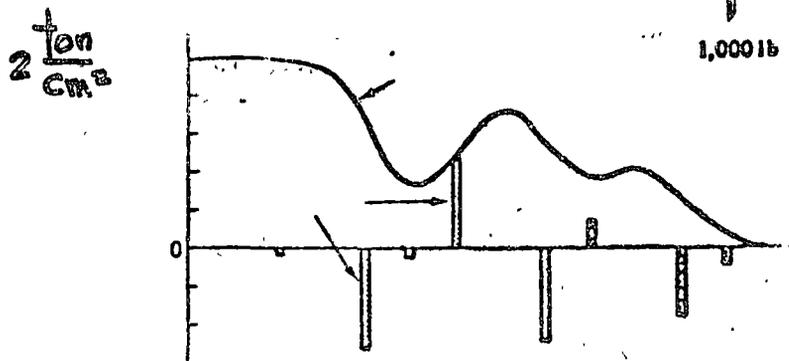
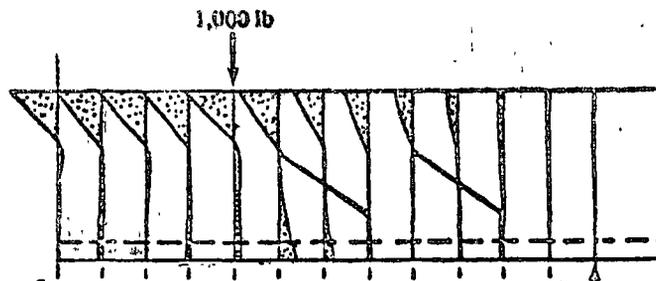
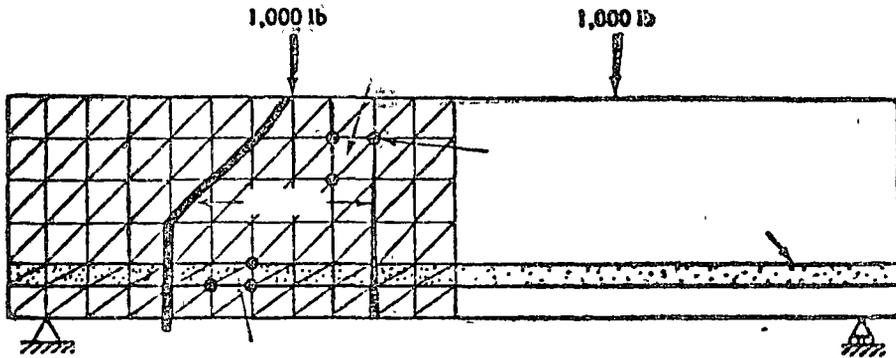


Fig. 11 Análisis por elementos finitos de una viga de concreto reforzado.

sino también en la instrucción de los probables usuarios respecto a la interpretación de la documentación, los datos y procedimientos de entrada y salida de resultados.

El costo de desarrollo de un programa de propósitos generales es usualmente muy alto por lo que la amortización de la inversión es esencial. Ciertos programas de propósitos generales son codificados en un lenguaje computacional que permite operar el programa a muchas organizaciones diferentes localizadas en grandes separaciones geográficas. Otros programas de propósitos especiales de limitada capacidad se usan en organizaciones industriales y gubernamentales con un costo menor en su desarrollo y operación.

Las cuatro componentes mostradas en el diagrama de flujo de la Fig. 12, son comunes en el desarrollo de programas de propósitos generales, fase de datos de entrada, requiere del usuario información del medio o material, descripción geométrica de la representación por elementos finitos y las condiciones de carga y de frontera. Los programas de propósitos generales más sofisticados facilitan el proceso de entrada como propiedades constitutivas del material, almacenados previamente, esquemas de modelar analíticamente el medio, trazar estereográficamente la idealización por elementos finitos en forma tal que los errores pueden detectarse antes de efectuar los cálculos.

La fase de biblioteca de elementos finitos es de interés primordial en el curso. En ella se tienen los procesos de codificación formulativos para los elementos individualmente. La mayoría de los programas de propósitos generales contienen todos los elementos de la Fig. 5, así como ciertas otras alternativas de formulación para un tipo dado de elemento, por ejemplo el trián-

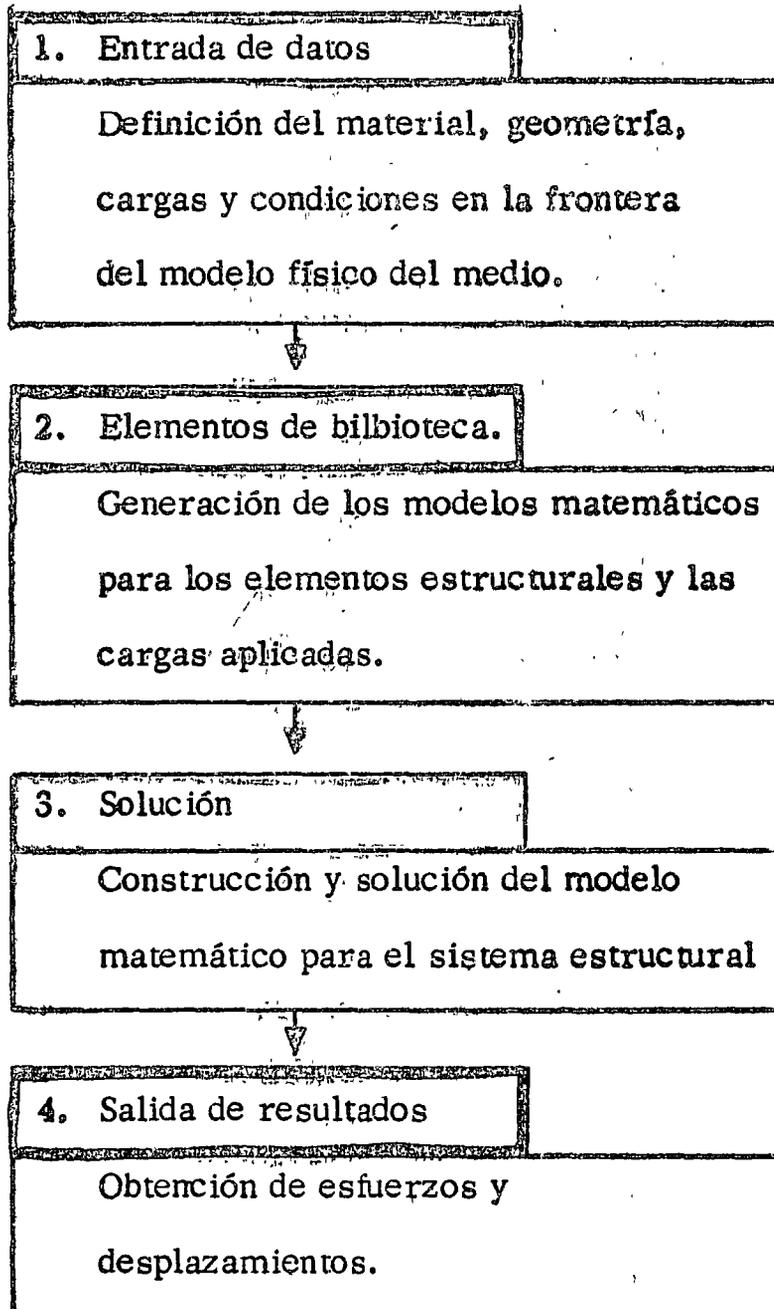


Fig. 12 Diagrama de flujo computacional en Análisis Estructural.

guío en flexión. Teóricamente el elemento biblioteca es de extremos abiertos y capaz de acomodar cualquier nuevo elemento de cualquier grado de complejidad.

La fase elemento de biblioteca recibe los datos almacenados y establece las relaciones algebraicas del elemento por medio de la aplicación de los procesos formulativos relevantes de codificación. Esta fase del programa de propósitos generales también incluye todas las relaciones algebraicas para interconectar los elementos vecinos y la conexión del proceso en sí. Las operaciones posteriores producen un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas para representar la estructura completa por elementos finitos.

La fase solución del programa de propósitos generales opera sobre las ecuaciones del problema formadas en la fase anterior. En el caso de un problema de análisis estructural solo significa la solución de un conjunto de ecuaciones lineales algebraicas. Soluciones para respuesta dinámica requerirán computaciones más extensas sobre la historia-tiempo de las cargas aplicadas. En algunos casos hay que operar en regiones subdivididas como en el caso del análisis del Boeing 747, o efectuar operaciones especiales en las ecuaciones construídas originalmente. Incluídas en esta fase están las operaciones necesarias de sustitución para obtener todos los aspectos deseados de la solución.

La fase salida de resultados presenta el análisis con un registro de la solución sobre la cual se pueden tomar decisiones respecto al dimensionamiento estructural o diseño. El registro comunmente es presentado mediante una lista impresa de esfuerzos y desplazamientos de los respectivos elementos. Así como en la fase de entrada existe una fuerte tendencia a la representación gráfica de datos, -

tales como gráficas de trayectorias principales de esfuerzos o modos de pandeo y vibración.

### ALGUNOS PROGRAMAS DE PROPOSITOS GENERALES.

ICES-STRUDL II, Integrated Civil Engineering System, (ICES), MIT, Maneja problemas de deformación y esfuerzos planos, cascarones rebajados, sólidos tridimensionales, flexión de placas con y sin deformación axial. Su uso en problemas muy especializados resulta caro. ASKA, Automatic System for Kinematic Analysis. Desarrollado por J. H. Argyris, H. A. Kamel y otros en la Universidad de Stuttgart. Sistema general muy potente el cual incluye una biblioteca de 42 elementos diferentes. Puede ser costoso para un usuario especializado. SAP, A General Structural Analysis Program, elaborado por E. L. Wilson de la Universidad de California. Incluye análisis lineal estático y dinámico de estructuras elásticas, estructuras tridimensionales, sólidos axisimétricos, sólidos tridimensionales, esfuerzos y deformación plana, placas y cascarones.

Zienkiewicz, O.C., programa desarrollando en la Universidad de Wales, Swansea. Incluye lo de los programas anteriores y problemas de Mecánica de Fluidos y transferencia de calor.

NASTRAN, NAsa STRuctural ANalysis. Desarrollado por U. S. National Aeronautical and Space Administration para análisis elástico de varias estructuras incluye, análisis de expansión térmica, respuesta dinámica a cargas transitorias y excitaciones random, cálculo de valores característicos reales y complejos, esta

**SAMIS, Structural Analysis and Matrix Interpretative System.** Desarrollado por Jet Propulsion Laboratory, y Manned Spacecraft Center. Contiene un elemento unidimensional general y elementos triangulares para deformaciones por flexión y membrana.

**ELAS y ELAS 8, Equilibrium Problems of Linear Structures.** Desarrollado por el Jet Propulsion Laboratory. Incluye una biblioteca de elementos unidimensionales triangulares, cuadriláteros, tetraedros, hexaedros, cónicos, sólidos axisimétricos de secciones cuadriláteros y triangulares.

**MARC, elaborado por P. V. Marcal, incluye análisis lineal y no lineal de problemas de Mecánica de Medios Continuos.**

**LISTA DE REFERENCIAS EN ORDEN CRONOLOGICO DEL METODO DE  
ELEMENTOS FINITOS**

- (1) Hrenikoff, A., "Solution of problems in elasticity by the framework method," *J. Appl. Mech.* 8, A 169-175, 1941.
- (2) McHenry, D., "A lattice analogy for the solution of plane stress problems," *J. Inst. Civ. Eng* 21, 59-82, 1943.
- (3) Newmark, N. M., "Numerical methods of analysis in bars plates and elastic bodies," "Numerical Methods of Analysis in Engineering," edited by L. E. Grinter, MacMillan (1949).
- (4) Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. J., "Stiffness and deflection analysis of complex structures," *J. Aero Sci.* 23, 805-823, 1956; AMR 10 (1957), Rev. 1776.
- (5) Clough, R. W., "The finite element in plane stress analysis," *Proc. 2nd. ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.*
- (6) Argyris, J. H., "Energy Theorems and structural analysis," Butterworth, London (1960). (Reprinted from *Aircraft Eng.* 1954-55); AMR 15 (1962), Rev. 2705.
- (7) Clough, R. W., "The finite element method in structural mechanics," (Ch. 7 "Stress Analysis", O. C. Zienkiewicz and G. S. Hollister, edited by, Wiley & Son (1965); chapter in AMR 20 (1967), Rev. 3942.
- (8) Courant, R., "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration," *Bull. Am. Math. Soc.* 49, 1-23, 1943.
- (9) Prager, W., and Synge, J. L., "Approximation in elasticity based on the concept of function space," *Quart. Appl. Math.* 5, 241-69, 1947.
- (10) Synge, J. L., "The hypercircle in mathematical physics, Cambridge Univ. Press (1957); AMR 11 (1958), Rev. 733.
- (11) Schmelter, J., "The energy method of networks of arbitrary shape in problems of theory of elasticity," *Proc. IUTAM Symp. on Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity, W. Olszak, edited by, Pergamon Press (1959).*
- (12) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "Finite elements in the solution of field problems," *Engineer*, 200, 507-510, Sept. 1965.
- (13) Wilson, E. L., and Nickell, R. E., "Application of finite element method to heat conduction analysis," *Nuclear Eng. and Design* 3, 1-11, 1966.

- (95) Ariett, P. L., Bahrani, A. K., and Zienkiewicz, O. C., "Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation (wave guides)," Proc. Inst. El. Eng. 115, 1762-1964, 1968.
- (96) Zienkiewicz, O. C., and Newton, R. E., "Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid," Int. Symp. on finite element techniques in shipbuilding, Stuttgart, 1969.
- (97) Taylor, C., Patil, B. S., and Zienkiewicz, O. C., "Harbour oscillation in a numerical treatment for undamped modes," Proc. Inst. Civ. Eng. 43, 141-153, 1969.
- (98) Archer, J. S., and Rubin, C. P., "Improved linear axisymmetric-shell - fluid model for launch vehicle longitudinal response analysis," Proc. Conf. Mat. Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (99) Zienkiewicz, O. C., Irons, B., and Nath P., "Natural frequencies of complex free or submerged structures by the finite element method," Symp. on Vibration in Civ. Eng., Inst. Civ. Eng., (Butterworth), London, 1965.
- (100) Sandhu, R. S., and Wilson, E. L., "Finite element analysis of seepage in elastic media," J. of Engr. Mech. Div., Proc. ASCE 95, 641-651, 1969.
- (101) Rashid, Y. R., "Three-dimensional analysis of elastic solids," Int. J. Solids Struct., " Part I: Analysis procedure," 5, 1311-33, 1969; Part II: " The computational problem," 6, 195-207, 1970.
- (102) Irons, B. M., "A frontal solution program for finite element analysis," Int. J. Num. Meth. in Eng. 2, 5-32, 1970.
- (103) Johnson, W. M., and Mclay, R. W., "Convergence of the finite element method in the theory of elasticity," J. Appl. Mech. Trans. ASME, 274-278, June 1968.
- (104) Przemieniecki, J. S., "Theory of matrix structural analysis," McGraw-Hill, 1968.
- (105) Jenkins, W. M., "Matrix and digital computer methods in structural analysis," McGraw-Hill, 1969.
- (106) Pope, G. G., " The application of the matrix displacement method in plane elastoplastic stress problems," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (107) Miller, R. E. and S. D. Hansen, "Large Scale Analysis of Current Aircraft," On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed), ASME Special Publication, New York, N. Y., 1970.

(108) Smith, C. S. and G. Mitchell, "Practical Considerations in the Application of Finite Element Techniques to Ship Structures," Proc. of Symposium on Finite Element Techniques, U. of Stuttgart, Stuttgart, Germany, June, 1969.

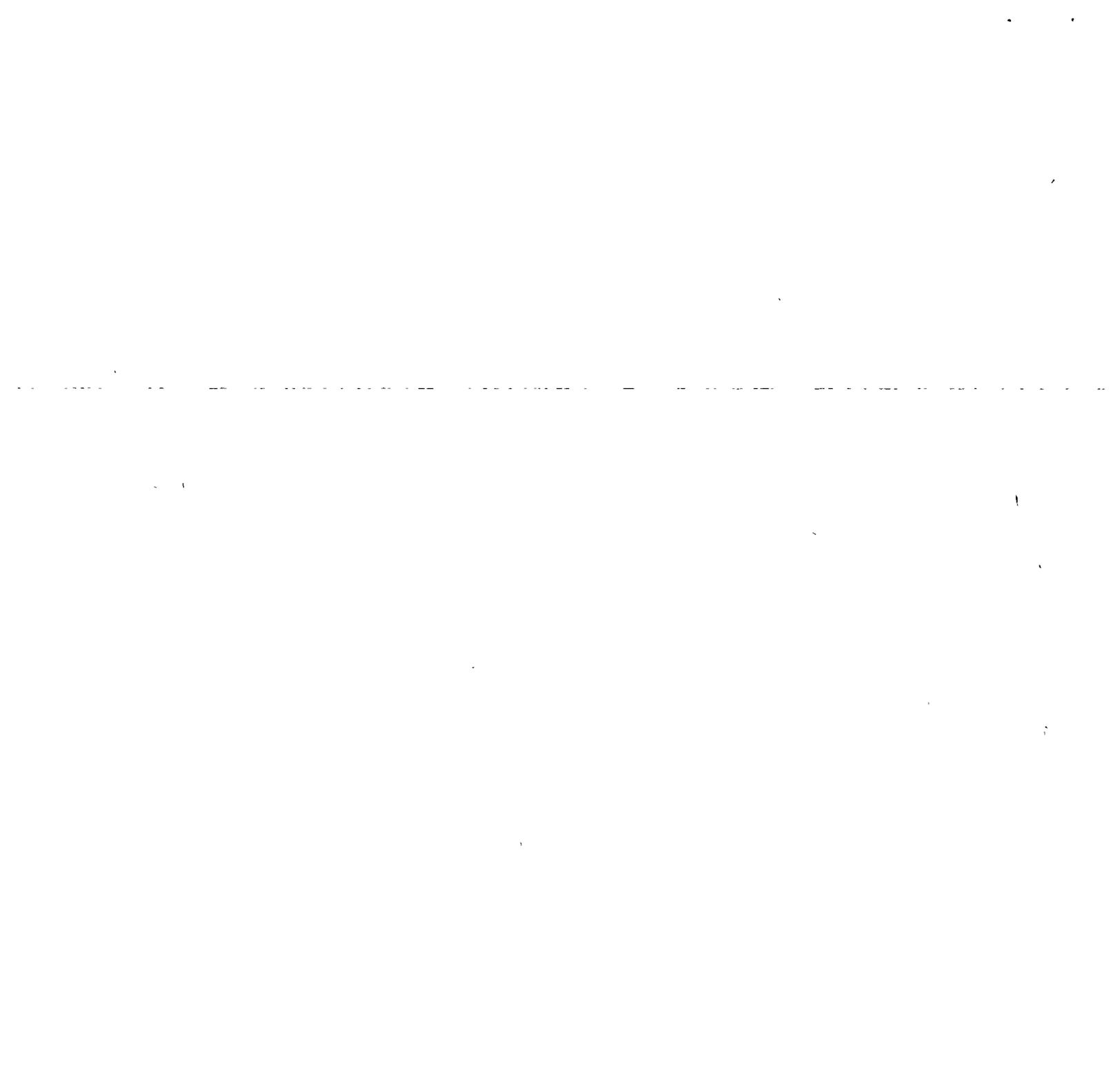
(109) Corum, J. M. and J. E. Smith, "Use of Small Models in Design and Analysis of Prestressed-Concrete Reactor Vessels," Report ORNL-4346, Oak Ridge Nat. Lab., Oak Ridge, Tenn., May, 1970.

(110) Cheng, W. K., M. U. Hesain, and V. V. Neis, "Analysis of Castellated Beams by the Finite Element Method," Proc. of Conf. on Finite Element Method in Civil Eng., McGill U., Montreal, Canada, 1972, pp. 1105-1140.

(111) Gallagher, R. H., "Large-Scale Computer Programs for Structural Analysis" in On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed.), ASME Special Publication, 1970, pp. 3-34.

(112) Marcal, P. V., "Survey of General Purpose Programs for Finite Element Analysis," in Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, J. T. Oden, et al. (ed.), U. of Alabama Press, University, Ala., 1972.

(113) Gallagher, R. H. and O. C. Zienkiewicz, Optimum Structural Design, John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y., 1973.



# FINITE ELEMENT METHOD THEORY AND APPLICATION

## 1. INTRODUCTION

### 1.1 HISTORICAL BACKGROUND

The finite element method (FEM) has become a powerful numerical technique for solving complex problems in science and engineering, mainly due to the advances made earlier in the numerical methods particularly in matrix methods as well as due to the rapid introduction of high speed computers in the market. However, the introduction of concepts and applications of FEM dates back to the era of mathematicians who tried to calculate the perimeter and area of a circle by idealizing it as a regular polygon. It is also interesting to note that the bound solutions which are often discussed in FEM can be traced back to the solution of the area of a circle. If the circle is modelled with an inscribed polygon, a lower bound solution is obtained whereas an upper bound solution is obtained by replacing the circle by a circumscribed polygon. Even though the basic concepts of FEM existed for over two thousand years, for all practical purposes, one can only say that these concepts were actually used for solving physical problems in 1950s by the aeronautical engineers.

In 1956, Turner et al (Ref 1) presented the stiffness analysis for the complex structures, which is the starting point in the rediscovery of FEM. Nevertheless, Clough (Ref 2) was the one who actually used the term FEM in 1960. Since then, a tremendous amount of research has been done in this field and

quite a large number of papers have been published in almost all the journals related to all fields of engineering as well as some in the fields of mathematics and science. In addition, several conferences have been held all over the world and hundreds of papers have been presented in each. The theory and application of FEM have also been presented in numerous text books (Ref 3-22) In order to help the research workers in tracing the references required for their particular work several bibliographies have either been published or under preparation, among them notably Ref (23) is a good source of information.

## 1.2 APPLICATIONS OF FEM

The FEM is applicable to a variety of boundary value and initial value problems in engineering as well as applied science. Some of these applications are:

1. Stress Analysis of Structures, Stability of Structures, Dynamic response of structures, Thermal Stress Analysis, Torsion of prismatic members
2. Stress Analysis of Geomechanics problems, Soil-Structure Interaction, Slope Stability problems, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Seepage in soils and rocks, Consolidation settlement
3. Solutions in Fluid Mechanics, Harbour oscillations, Pollution Studies, Sedimentation
4. Analysis of Nuclear Reactor Structures
5. Stress Analysis and Flow Problems in Biomechanics
6. Characteristic Study of Composites in Fibre Technology
7. Wave Propagation in Geophysics
8. Field Problems in Electrical Engineering

Apart from the above mentioned areas, the FEM is also applicable to any other problem as long as the analyst makes certain that the problem is amenable to solution based on the assumptions introduced in the formulation of FEM and appropriate material properties can be provided in a realistic manner.

### 1.3 METHODS OF ANALYSIS

In general, there are four basic methods of analysis in FEM- displacement method, equilibrium method, mixed method and hybrid method. The field variables or unknown quantities in each of these methods are as follows.

Displacement method - displacements and their derivatives

Equilibrium method - stress components

Mixed method - some displacements and some stress components

Hybrid method - displacements or boundary forces

In the displacement method, smooth displacement distribution is assumed within an element, interelement compatibility of displacement is generally assured and minimum potential energy criterion is used in the formulation.

In the equilibrium method, the interior stress distribution is assumed to be smooth, the equilibrium of boundary tractions is maintained and the minimum complementary energy is the basis for the formulation.

In the mixed method which is generally used for plate and shell problems, both displacements and stresses are assumed smooth

in the interior, the displacement components and the equivalent stress components are considered to be continuous at the inter-element boundaries and the formulation is based on Reissner's principle.

In the hybrid method, depending on whether the model is displacement type or equilibrium type, the distribution of displacements or stresses within the element is considered to be smooth and along the interelement boundary either assumed compatible displacements or assumed equilibrating boundary tractions are ensured and either modified complementary energy or modified potential energy principle is adopted for the formulation.

Among these four methods, the displacement method is the most widely used approach. However, for plate bending problems either the equilibrium or mixed method is preferred and for some field problems hybrid method is more suitable.

#### 1.4 DESCRIPTION OF FEM

A structure, continuum or a domain is divided into a number of arbitrary shaped parts or regions known as elements. These elements are interconnected at joints known as nodes. The principal unknown is termed as the field variable. This field variable can be displacement, temperature, pore-pressure or stress. The distribution of the field variable within an element is approximated by the use of certain polynomial functions. Variational methods or residual methods are employed

to develop the finite element equations which relate the field variables at the nodes to the corresponding action vector at the nodes of the element. This relationship is provided by the so called property matrix which is based on the material and the geometric properties of the element. Finally these finite element equations are assembled to form a system of algebraic equations for the entire domain. The unknown field variable is obtained by solving this system of algebraic equations.

### 1.5 BASIC STEPS IN FE ANALYSIS

The basic steps in the finite element analysis of general problems are as follows.

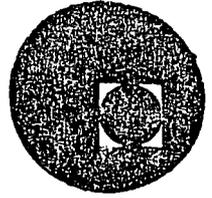
1. The continuum is divided into finite elements of any arbitrary shape.
2. A suitable polynomial is chosen to represent the distribution of the field variable within an element in terms of its nodal values. Thus, the field variables at the nodes become the primary unknowns.
3. Using variational methods or residual methods, the finite element equations are formulated.
4. The individual finite element equations obtained in step 3 are assembled to form a set of algebraic equations for the overall continuum.
5. The solution of the algebraic equations obtained in step 4 yields the values of the field variables at the nodes.
6. From the field variables at the nodes, the secondary variables such as stress, strain for an element can be obtained.

## REFERENCES

1. TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C., and TOPP, L. J., "Stiffness and deflection analysis of complex structures", J. Aero, Sci., Vol. 23, No. 9, 1956, pp 805-823
2. CLOUGH, R. W., "The finite element method in plane stress analysis", Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, 1960, pp 345-378
3. ZIENKIEWICZ, O. C. and CHEUNG, Y. K., The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, London, 1967
4. ZIENKIEWICZ, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971
5. SMITH, G. N., An Introduction to Matrix and Finite Element Methods in Civil Engineering, Applied Science, London, 1971
6. DESAI, C. S. and ABEL, J. F., Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand and Reinhold, New York, 1972
7. ODEN, J. T., Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New York, 1972
8. URAL OKTAY, Finite Element Method, Intext Educational Publishers, New York, 1973
9. MARTIN, H. C. and CAREY, G. F., Introduction to Finite Element Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973
10. STRANG, G. and FIX, G. J., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice Hall, N. J., 1973
11. BREBBIA, C. A. and CONNOR, J. J., Fundamentals of Finite Element Technique, Butterworths, London, 1973
12. NORRIS, D. H. and de VRIES, G., The Finite Element Method- Fundamentals and Applications, Academic Press, New York, 1973
13. COOK, R. D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1974
14. WACHPRESS, E. L., A Rational Finite Element Basis, Academic Press, New York, 1975
15. FENNER, R. T., Finite Element Method for Engineers, MacMillan Press, London, 1975
16. GALLAGHER, R. H., Finite Element Analysis-Fundamentals, Prentice-Hall, N. J., 1975



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



ANALISIS ESTRUCTURAL

TEMA IV . 2. INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO  
FINITO  
ELEMENTO RECTAGULAR PARA ESTADO PLANO  
DE ESFUERZOS.

PROF.DR. PORFIRIO BALLESTEROS.

febrero-marzo 1978.



The displacements of a node have two components

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

and the six components of element displacements are listed as a vector

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}. \quad (4.2)$$

## 4. Plane Stress and Plane Strain

### 4.1 Introduction

Two-dimensional elastic problems were the first successful examples of the application of the finite element method.<sup>1,2</sup> Indeed, we have already used this situation to illustrate the basis of the finite element formulation in Chapter 2 where the general relationships were derived. These basic relationships are given in Eqs. (2.1), (2.2), (2.3), (2.9), (2.10), and (2.16) and for quick reference are summarized in Appendix II.

In this chapter the particular relationships for the problem in hand will be derived in more detail, and illustrated by suitable practical examples, a procedure that will be followed throughout the remainder of the book.

Only the simplest, triangular, element will be discussed in detail but the basic approach is general. More elaborate elements to be discussed in later chapters would be introduced to the same problem in an identical manner.

The reader not familiar with the applicable basic definitions of elasticity is referred to elementary texts on the subject, in particular to the text by Timoshenko and Goodier,<sup>3</sup> whose notation will be widely used here.

In both problems of plane stress and plane strain the displacement field is uniquely given by the  $u$  and  $v$  displacements in directions of the cartesian, orthogonal  $x$  and  $y$  axes.

Again, in both, the only strains and stresses that have to be considered are the three components in the  $x$ - $y$  plane. In the case of *plane stress*, by definition, all other components of stress are zero and therefore give no contribution to internal work. In *plane strain* the stress in a direction perpendicular to the  $x$ - $y$  plane is not zero. However, by definition, the strain in that direction is zero, and therefore no contribution to internal work is made by this stress, which can in fact be explicitly evaluated from the three main stress components, if desired, at the end of all computation.

### 4.2 Element Characteristics

**4.2.1 Displacement functions.** Figure 4.1 shows the typical triangular element considered, with nodes  $i, j, m$  numbered in an anti-clockwise order.

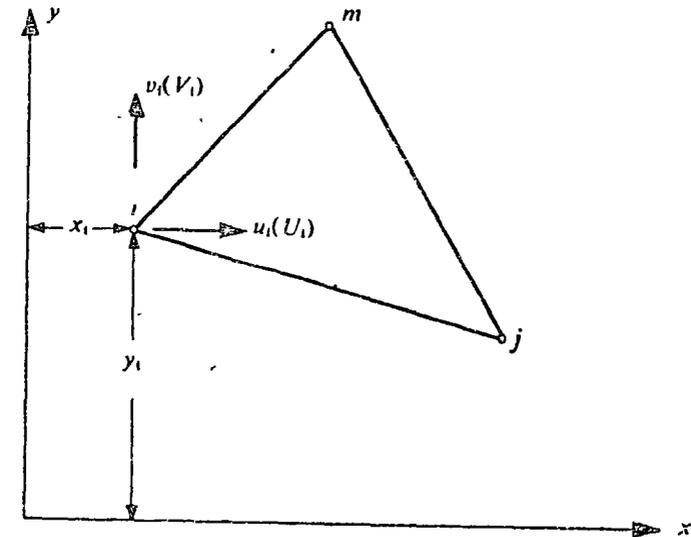


Fig. 4.1 An element of a continuum in plane stress or plane strain

The displacements within an element have to be uniquely defined by these six values. The simplest representation is clearly given by two linear polynomials

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{aligned} \quad (4.3)$$

The six constants  $\alpha$  can be evaluated easily by solving the two sets of three simultaneous equations which will arise if the nodal co-ordinates are inserted and the displacements equated to the appropriate nodal displacements. Writing, for example,

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{aligned} \quad (4.4)$$

we can easily solve for  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , and  $\alpha_3$  in terms of the nodal displacements  $u_i$ ,  $u_j$ ,  $u_m$  and obtain finally

$$u = \frac{1}{2\Delta} \{(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m\} \quad (4.5a)$$

in which

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m = y_{jm} \\ c_i &= x_m - x_j = x_{mj} \end{aligned} \quad (4.5b)$$

with the other coefficients obtained by a cyclic permutation of subscripts in the order,  $i, j, m$ , and where

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2 \quad (\text{area of triangle } ijm). \quad (4.5c)$$

As the equations for the vertical displacement  $v$  are similar we also have

$$v = \frac{1}{2\Delta} \{(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)v_m\}. \quad (4.6)$$

Though not strictly necessary at this stage we can represent the above relations Eqs. (4.5a) and (4.6) in the standard form of Eq. (2.1)

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}^e = [IN'_i, IN'_j, IN'_m] \{\delta\}^e \quad (4.7)$$

with  $I$  a two by two identity matrix, and

$$N'_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta \text{ etc.} \quad (4.8)$$

*Note:* if co-ordinates are taken from the centroid of the element then  $x_i + x_m + x_j = y_i + y_j + y_m = 0$  and  $a_i = 2\Delta/3 = a_j = a_m$ .

The chosen displacement function automatically guarantees continuity of displacements with adjacent elements because the displacements vary linearly along any side of the triangle and, with identical displacement imposed at the nodes, the same displacement will clearly exist all along an interface.

**4.2.2 Strain (total).** The total strain at any point within the element can be defined by its three components which contribute to internal work.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (4.9)$$

Using Eqs. (4.7) or (4.5a) and (4.6) we have

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N'_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N'_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N'_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N'_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N'_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N'_i}{\partial y} & \frac{\partial N'_i}{\partial x} & \frac{\partial N'_j}{\partial y} & \frac{\partial N'_j}{\partial x} & \frac{\partial N'_m}{\partial y} & \frac{\partial N'_m}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{\delta\}^e \end{aligned} \quad (4.10)$$

which defines the matrix  $[B]$  of Eq. (2.2) explicitly.

It will be noted that in this case the  $[B]$  matrix is independent of the position within the element, and hence the strains are constant throughout it. Obviously, the criterion of constant strain mentioned in Chapter 2 is satisfied by the shape functions.

**4.2.3 Initial strain (thermal strain).** 'Initial' strains, that is strains which are independent of stress, may be due to many causes. Shrinkage, crystal growth or, most frequently, temperature changes will, in general, result in an initial strain vector.

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix}. \quad (4.11)$$

Although this initial strain may, in general, depend on the position within the element, it will usually be defined by average, constant, values. This is consistent with the constant strain conditions imposed by the prescribed displacement function.

Thus, for the case of *plane stress* in an isotropic material in an element subject to a temperature rise  $\theta^e$  with a coefficient of thermal expansion  $\alpha$ ,

we will have, for instance,

$$\{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

as no shear strains are caused by a thermal dilatation.

In *plane strain* the situation is more complex. The presumption of plane strain implies that stresses perpendicular to the  $x$ - $y$  plane will develop due to thermal expansion even without the three main stress components, and hence the initial strain will be affected by the elastic constants.

It will be shown that in such a case

$$\{\epsilon_0\} = (1+\nu) \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

where  $\nu$  is the Poisson's ratio.

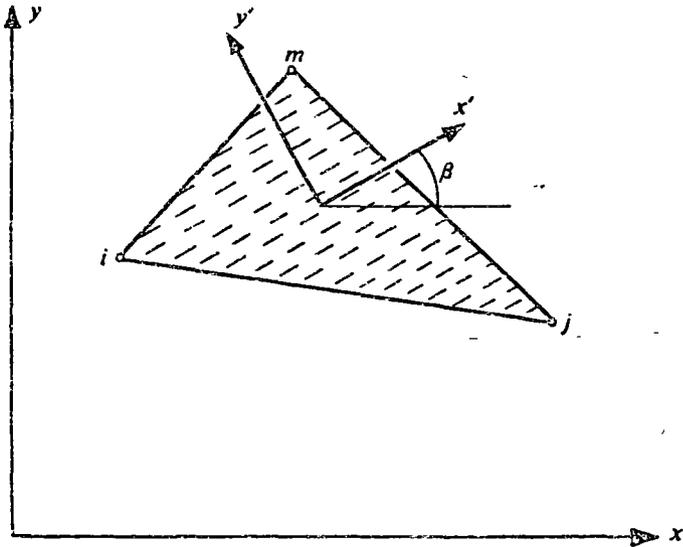


Fig. 4.2 An element of a stratified (transversely-isotropic) material

Anisotropic materials present special problems, since the coefficients of thermal expansion may vary with direction. Let  $x'$  and  $y'$  in Fig. 4.2 show the principal directions of the material. The initial strain due to thermal expansion becomes, with reference to these co-ordinates for plane stress

$$\{\epsilon_0\}' = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x',0} \\ \epsilon_{y',0} \\ \gamma_{x'y',0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1\theta^e \\ \alpha_2\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

where  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  are the expansion coefficients referred to the  $x'$  and  $y'$  axes respectively.

To obtain the strain components in the  $x, y$  system it is necessary to use an appropriate strain transformation matrix  $[T]$  giving

$$\{\epsilon_0\} = [T]^T \{\epsilon_0\}'. \quad (4.15)$$

With the  $\beta$  as defined in Fig. 4.2 it is easily verified that

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & -2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

Thus,  $\{\epsilon_0\}$  can be simply evaluated. It will be noted that no longer is the shear component of strain equal to zero in the  $x$ - $y$  co-ordinates.

4.2.4 *Elasticity matrix.* The matrix  $[D]$  of the relation Eq. (2.3)

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \{\epsilon_0\} \quad (4.16)$$

can be explicitly stated for any material (excluding here  $\{\epsilon_0\}$  which is simply additive).

*Plane stress—*isotropic material. For plane stress in an isotropic material we have, by definition,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \sigma_x/E - \nu\sigma_y/E + \epsilon_{x0} \\ \epsilon_y &= -\nu\sigma_x/E + \sigma_y/E + \epsilon_{y0} \\ \gamma_{xy} &= 2(1+\nu)\tau_{xy}/E + \epsilon_{xy0}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Solving the above for the stresses, we obtain matrix  $[D]$  as

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

in which  $E$  is the elastic modulus and  $\nu$  is the Poisson's ratio.

*Plane strain—*isotropic material. In this case a normal stress  $\sigma_z$  exists in addition to the three other stress components. For the special case of isotropic thermal expansion we have

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \sigma_x/E - \nu\sigma_y/E - \nu\sigma_z/E + \alpha\theta^e \\ \epsilon_y &= -\nu\sigma_x/E + \sigma_y/E - \nu\sigma_z/E + \alpha\theta^e \\ \gamma_{xy} &= 2(1+\nu)\tau_{xy}/E. \end{aligned} \quad (4.19)$$

but in addition

$$\epsilon_z = 0 = -\nu\sigma_x/E - \nu\sigma_y/E + \sigma_z/E + \alpha\theta^e.$$

On eliminating  $\sigma_z$  and solving for the three remaining stresses we obtain the previously quoted expression for the initial strain Eq. (4.13), and by comparison with Eq. (4.16), the matrix  $[D]$

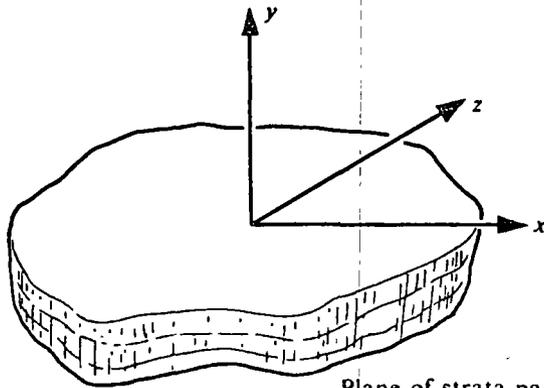
$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

*Anisotropic materials.* For a completely anisotropic material, 21 independent elastic constants are necessary to define completely the three-dimensional stress-strain relationship.<sup>4,5</sup>

If two-dimensional analysis is to be applicable a symmetry of properties must exist, implying at most six independent constants in the  $[D]$  matrix. Thus, it is always possible to write

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ & d_{22} & d_{23} \\ (\text{sym}) & & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

to describe the most general two-dimensional behaviour. (The necessary symmetry of the  $[D]$  matrix follows from the general equivalent of the Maxwell-Betti reciprocal theorem and is a consequence of invariant energy irrespective of the path taken to reach a given strain state.)



Plane of strata parallel to  $x-z$

Fig. 4.3 A stratified (transversely-isotropic) material

A case of particular interest in practice is that of a 'stratified' or transversely-isotropic material in which a rotational symmetry of properties exists within the plane of the strata. Such a material possesses only five independent elastic constants.

The general stress-strain relations give in this case, following the notation of Lekhnitskii,<sup>4</sup> and taking now the  $y$  axis as perpendicular to the strata (neglecting initial strain), Fig. 4.3.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \sigma_x/E_1 - \nu_2\sigma_y/E_2 - \nu_1\sigma_z/E_1 \\ \epsilon_y &= -\nu_2\sigma_x/E_2 + \sigma_y/E_2 - \nu_2\sigma_z/E_2 \\ \epsilon_z &= -\nu_1\sigma_x/E_1 - \nu_2\sigma_y/E_2 + \sigma_z/E_1 \\ \gamma_{xz} &= \{2(1+\nu_1)/E_1\}\tau_{xz} \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_2}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_2}\tau_{yz} \end{aligned} \quad (4.22)$$

in which the constants  $E_1, \nu_1$  ( $G_1$  is dependent) are associated with the behaviour in plane of the strata and  $E_2, G_2, \nu_2$  with a direction normal to these.

The  $[D]$  matrix in two-dimensions becomes now, taking

$$\frac{E_1}{E_2} = n \quad \text{and} \quad \frac{G_2}{E_2} = m$$

$$[D] = \frac{E_2}{(1-n\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-n\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

for plane stress, or

$$D = \frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)}$$

$$\begin{bmatrix} n(1-n\nu_2^2) & n\nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ n\nu_2(1+\nu_1) & (1-\nu_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

for plane strain.

When, as in Fig. 4.2, the direction of strata is inclined to the  $x$ -axis then to obtain the  $[D]$  matrices in the universal co-ordinates a transformation

is necessary. Taking  $[D]$  as relating the stresses and strains in the inclined co-ordinate system ( $x', y'$ ) it is easy to show that

$$[D] = [T][D'][T]^T \quad (4.25)$$

where  $[T]$  is the same as given in Eq. (4.15)

If the stress systems  $\{\sigma'\}$  and  $\{\sigma\}$  correspond to  $\{\epsilon'\}$  and  $\{\epsilon\}$  respectively then by equality of work

$$\{\sigma'\}^T \{\epsilon'\} = \{\sigma\}^T \{\epsilon\}$$

or

$$\{\epsilon'\}^T [D'] \{\epsilon'\} = \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\}$$

from which Eq. (4.25) follows on substitution of Eq. (4.15). (See also Chapter 1.)

**4.2.5 The stiffness matrix.** The stiffness matrix of the element  $ijm$  is defined from the general relationship Eq. (2.10) as

$$[k] = \int [B]^T [D] [B] t \, dx \, dy \quad (4.26)$$

where  $t$  is the thickness of the element and the integration is taken over the area of the triangle. If the thickness of the element is assumed to be constant, an assumption convergent to the truth as size of elements decreases, then, as neither of the matrices contains  $x$  or  $y$  we have, simply

$$[k] = [B]^T [D] [B] t \Delta \quad (4.27)$$

where  $\Delta$  is the area of the triangle (defined already by Eq. (3.5)). This form is now sufficiently explicit for computation with the actual matrix operations being left to the computer.

The matrix  $[B]$  defined by Eq. (4.10) can be written as

$$[B] = [B_i, B_j, B_m] \quad \text{with} \quad [B_i] = \begin{Bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{Bmatrix} / 2\Delta, \text{ etc.} \quad (4.28)$$

Now the stiffness matrix can be written in a partitioned form as

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

in which the 2 by 2 submatrices are built up as

$$[k_{rs}] = [B_r]^T [D] [B_s] t \Delta. \quad (4.30)$$

This form is often convenient for computation.

**4.2.6 Nodal forces due to initial strain.** These are given directly by the expression Eq. (2.12) which, on performing the integration, becomes

$$\{F\}_{i0} = -[B]^T [D] [\epsilon_0] t \Delta, \text{ etc.} \quad (4.31)$$

Partitioning, one can write alternatively

$$\{F_i\}_{i0} = -[B_i]^T [D] [\epsilon_0] t \Delta, \text{ etc.} \quad (4.32)$$

These 'initial strain' forces are contributed to the nodes of an element in an unequal manner and require precise evaluation. Similar expressions are derived for initial stress forces.

**4.2.7 Distributed body forces** In the general case of plane stress or strain each element of unit area in the  $x$ - $y$  plane is subject to forces

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

in the direction of the appropriate axes.

Again, by Eq. (2.11), the contribution of such forces to these at each node is given by

$$\{F_i\}_p = - \int [N]^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} dx \, dy,$$

or by Eq. (4.7)

$$\{F_i\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \int N_i \, dx \, dy, \text{ etc.} \quad (4.33)$$

if the body forces  $X$  and  $Y$  are constant. As  $N_i$  is no longer constant the integration has to be carried out explicitly. Some general integration formulae for a triangle are given in Appendix III.

In this special case the calculation will be simplified if the origin of co-ordinates is taken at the centroid of the element. Now

$$\int x \, dx \, dy = \int y \, dx \, dy = 0$$

and on using Eq. (3.8)

$$\{F_i\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \int a_i \, dx \, dy / 2\Delta = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} a_i / 2$$

$$\text{or} \quad \{F_i\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \Delta / 3 = \{F_j\}_p = \{F_m\}_p \quad (4.34)$$

by relations noted on p. 50.

Explicitly, for the whole element

$$\{F\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ X \\ Y \\ X \\ Y \end{Bmatrix} \Delta / 3 \quad (4.35)$$

which means simply that the total forces acting in  $x$  and  $y$  direction due to the body forces are distributed to the nodes in three equal parts. This fact corresponds with physical intuition, and was often assumed implicitly.

4.2.8 *Body force potential.* In many cases the body forces are defined in terms of a body force potential  $\phi$  as

$$X = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (4.36)$$

and this potential, rather than the values of  $X$  and  $Y$ , is known throughout the region and is specified at nodal points. If  $\{\phi\}^e$  lists the three values of the potential associated with the nodes of the element, i.e.,

$$\{\phi\}^e = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

and has to correspond with constant values of  $X$  and  $Y$ ,  $\phi$  must vary linearly within the element. The 'shape function' of its variation will obviously be given by a procedure identical to that used in deriving Eqs. (4.4) to (4.6), and yields

$$\phi = [N'_i, N'_j, N'_m]\{\phi\}^e. \quad (4.38)$$

Thus,

$$X = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -[b_i, b_j, b_m]\{\phi\}^e/2\Delta$$

and

$$Y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = -[c_i, c_j, c_m]\{\phi\}^e/2\Delta. \quad (4.39)$$

The vector of nodal forces due to the body force potential will now replace Eq. (4.35) by

$$\{F\}_p^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \{\phi\}^e \quad (4.40)$$

4.2.9 *Evaluation of stresses.* The formulae derived enable the full stiffness matrix of the structure to be assembled, and a solution for displacements to be obtained.

The stress matrix given in general terms in Eq. (2.15) is obtained by the appropriate substitutions for each element.

The stresses are, by the basic assumption, constant within the element. It is usual to assign these to the centroid of the element, and in most of the examples in this chapter this procedure is followed. An alternative consists of obtaining stress values at the nodes by averaging the values in the adjacent elements. Some 'weighting' procedures have been used in this context on an empirical basis but their advantage appears small.

It is usual to arrange for the computer to calculate the principal stresses and their directions of every element.

### 4.3 Examples—An Assessment of Accuracy

There is no doubt that the solution to plane elasticity problems as formulated in Section 4.2 is, in the limit of subdivision, an exact solution. Indeed at any stage of a finite subdivision it is an approximate solution as, say, a Fourier series solution with a limited number of terms.

As already explained in Chapter 2 the total strain energy obtained during any stage of approximation will be below the true strain energy of the exact solution. In practice it will mean that the displacements, and hence also the stresses, will be underestimated by the approximation in its *general picture*. However, it must be emphasized that this is not necessarily true at every point of the continuum individually; hence the value of such a bound in practice is not great.

What is important for the engineer to know is the order of accuracy achievable in typical problems with a certain fineness of element subdivision. In any particular case the error can be assessed by comparison with known, exact, solutions or by a study of the convergence, using two or more stages of subdivision.

With the development of experience the engineer can assess *a priori* the order of approximation that will be involved in a specific problem tackled with a given element subdivision. Some of this experience will perhaps be conveyed by the examples considered in this book.

In the first place attention will be focused on some simple problems for which exact solutions are available.

*Uniform stress field.* If the exact solution is in fact that of a uniform stress field then, whatever the element subdivision, the finite element solution will coincide exactly with the exact one. This is an obvious corollary of the formulation, nevertheless it is useful as a first check of written computer programs.

*Linearly varying stress field.* Here, obviously, the basic assumption of constancy of stress within elements means that solution will be approximate only. In Fig. 4.4 a simple example of a beam subject to constant

bending moment is shown with a fairly coarse subdivision. It is readily seen that the axial ( $\sigma_x$ ) stress given by the element 'straddles' the exact values and, in fact, if the constant stress values are associated with centroids of the elements and plotted, the best 'fit' line represents the exact stresses.

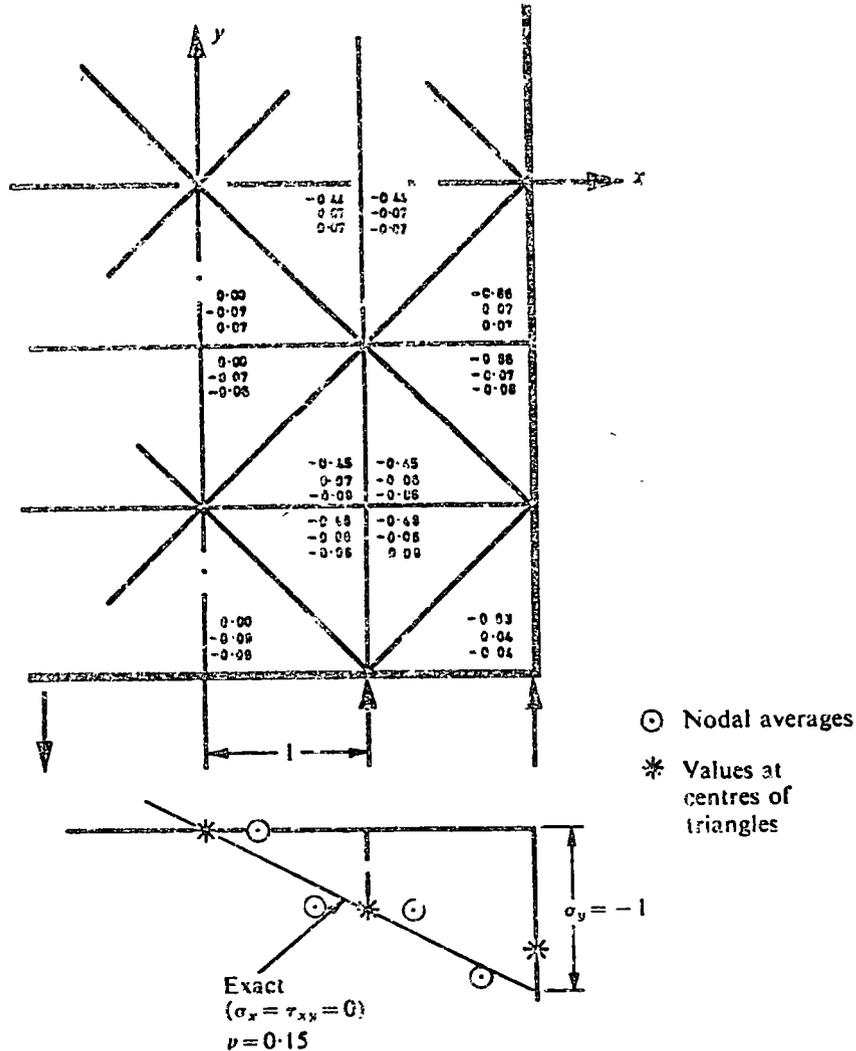


Fig. 4.4 Pure bending of a beam solved by a coarse subdivision into elements of triangular shape. (Values of  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$ , and  $\tau_{xy}$  listed in that order)

The horizontal and shear stress components differ again from the exact values (which are simply zero). Again, however, it will be noted that they oscillate by equal, small amounts around the exact values.

At internal nodes, if the average of stresses of surrounding elements is taken it will be found that the exact stresses are very closely represented. The average at external faces is not, however, so good. The overall improvement in representing the stresses by nodal averages, as shown on Fig. 4.4, is often used in practice for improvement of the approximation.

A weighting of averages near the faces of the structure can further be used for refinement. Without being dogmatic on this point, it seems preferable, when accuracy demands this, simply to use a finer mesh subdivision.

*Stress concentration.* A more realistic test problem is shown in Figs. 4.5 and 4.6. Here the flow of stress around a circular hole in an isotropic and in an anisotropic stratified material is considered when the stress conditions are uniform.<sup>6</sup> A graded division into elements is used to allow a more detailed study in the region where high stress gradients are expected. The high degree of accuracy achievable can be assessed from Fig. 4.6 where some of the results are compared against exact solutions.<sup>3,7</sup>

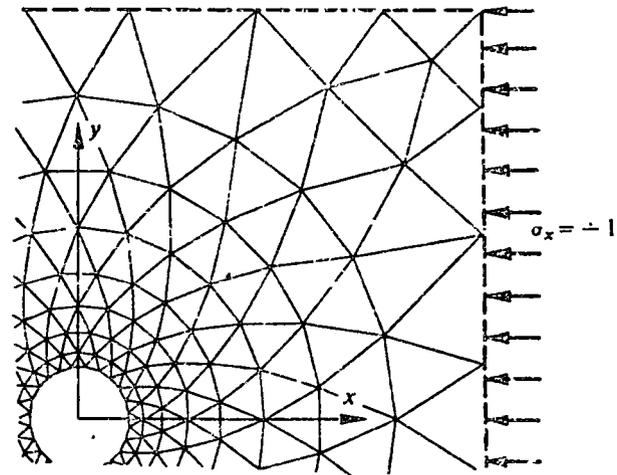


Fig. 4.5 A circular hole in a uniform stress field. (a) isotropic material; (b) stratified (orthotropic) material;  $E_x = E_1 = 1$ ,  $E_y = E_2 = 3$ ,  $\nu_1 = 0.1$ ,  $\nu_2 = 0$ ,  $G_{xy} = 0.42$

#### 4.4 Some Practical Applications

Obviously, the practical applications of the method are limitless, and indeed at this moment of time the use of the finite element method is superseding experimental technique for plane problems because of its high accuracy, low cost, and versatility. The ease of treatment of material anisotropy, thermal stresses, or body force problems add to its advantages.

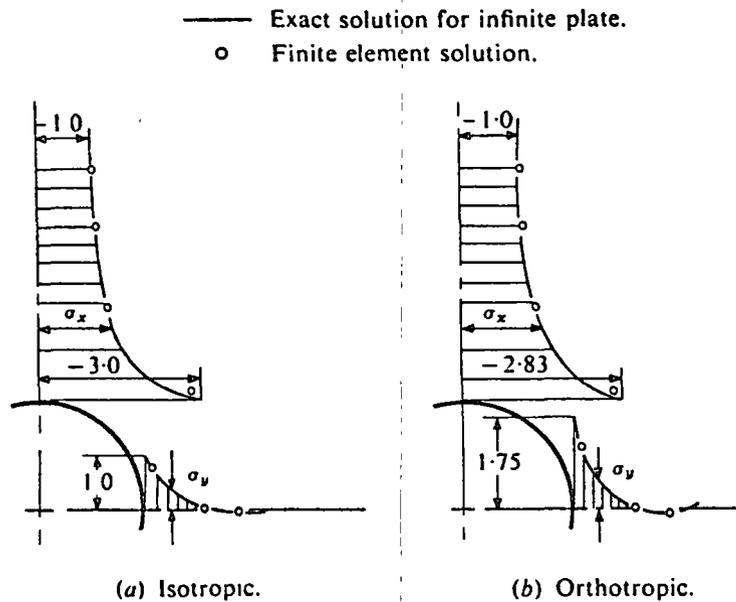


Fig. 4.6 Comparison of theoretical and finite element results for cases (a) and (b) of Fig. 4.5

A few examples of actual applications to complex problems of engineering practice will now be given.

*Stress flow around a reinforced opening* (Fig. 4.7). In steel pressure vessels or aircraft structures, openings have to be introduced in the stressed skin. The penetrating duct itself provides some reinforcement round the edge and, in addition, the skin itself is increased in thickness to reduce the stresses due to the concentration effects.

Analysis of such problems treated as cases of plane stress presents no difficulties. The elements are so chosen as to follow the thickness variation, and appropriate values of this are assigned.

The narrow band of thick material near the edge can be represented either by special beam-type elements, or more easily in a standard programme by very thin triangular elements of the usual type, to which appropriate thickness is assigned. The latter procedure was used in the problem shown in Fig. 4.7 which gives some of the resulting stresses near the opening itself. The fairly large extent of the region introduced in the analysis and the grading of the mesh should be noted.

*An anisotropic valley subject to tectonic stress*<sup>6</sup> (Fig. 4.8). A symmetrical valley subject to a uniform horizontal stress is considered. The material is stratified, hence is 'transversely isotropic', and the direction of strata varies from point to point.

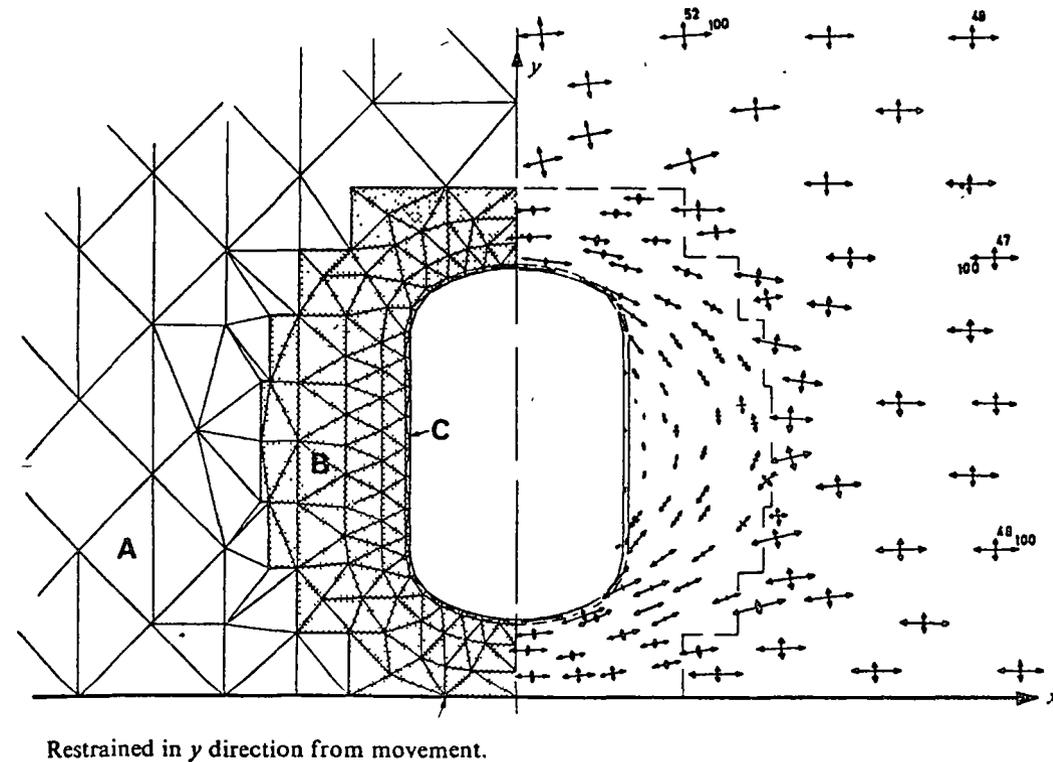


Fig. 4.7 A reinforced opening in a plate. Uniform stress field at a distance from opening  $\sigma_x = 100$ ,  $\sigma_y = 50$ . Thickness of plate regions A, B, and C is in the ratio of 1:3:23

The stress plot shows the tensile region that develops. This phenomenon is of considerable interest to geologists and engineers concerned with rock mechanics.

*A dam subject to external and internal water pressures*<sup>8,9</sup> (Fig. 4.9). A buttress dam on a somewhat complex rock foundation is here analysed. The heterogeneous foundation region is subject to plane strain conditions while the dam itself is considered as a plate (plane stress) of variable thickness.

With external and gravity loading no special problems of analysis arise, though perhaps it should be mentioned that it was found worth while to 'automatize' the computation of gravity nodal loads.

When pore pressures are considered, the situation, however, requires perhaps some explanation.

It is well known that in a porous material the water pressure is trans-

mitted to the structure as a *body force* of magnitude

$$X = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

and that now the external pressure need not be considered.

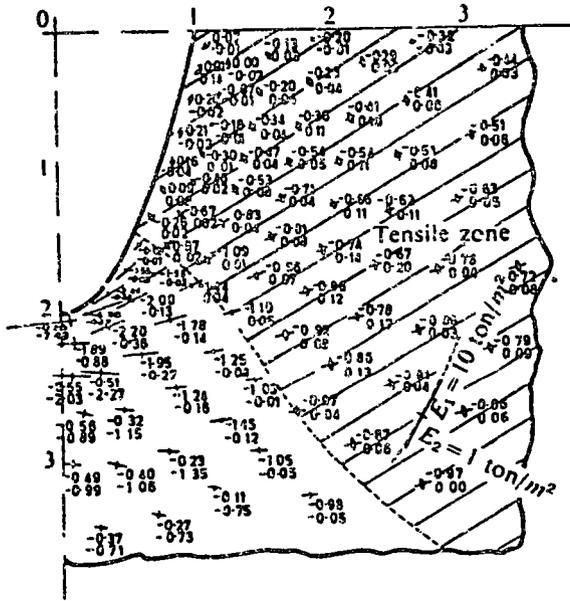
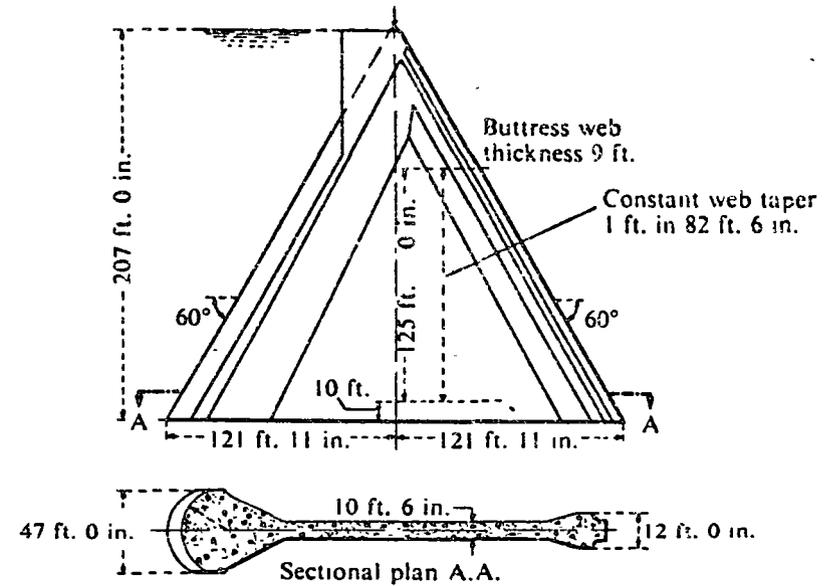
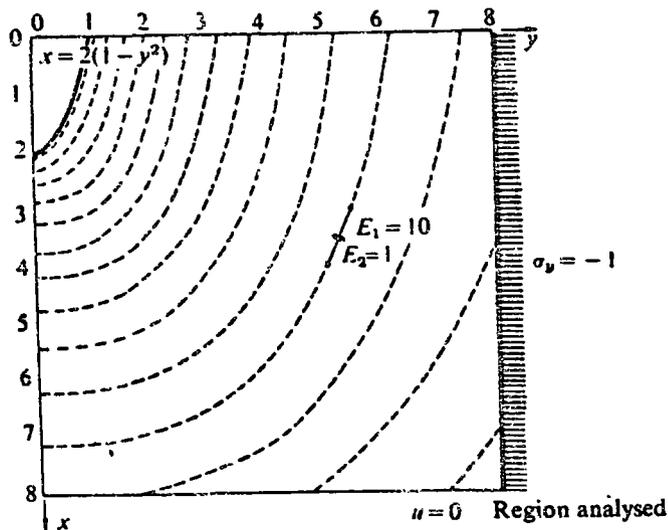
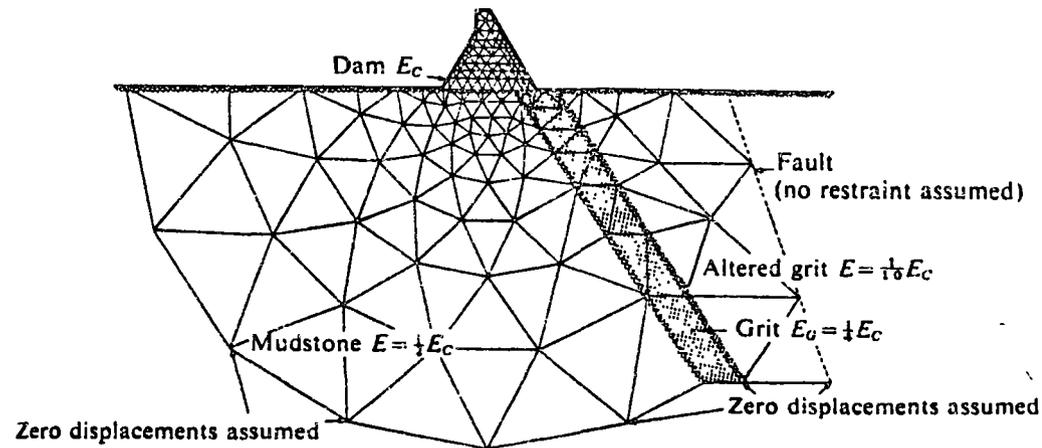


Fig. 4.8 A valley with curved strata subject to a horizontal tectonic stress (plane strain 170 nodes, 298 elements)



(a)



(b)

Fig. 4.9 Stress analysis of a buttress dam. Plane stress condition assumed in dam and plane strain in foundation. (a) The buttress section analysed. (b) Extent of foundation considered and division into finite elements

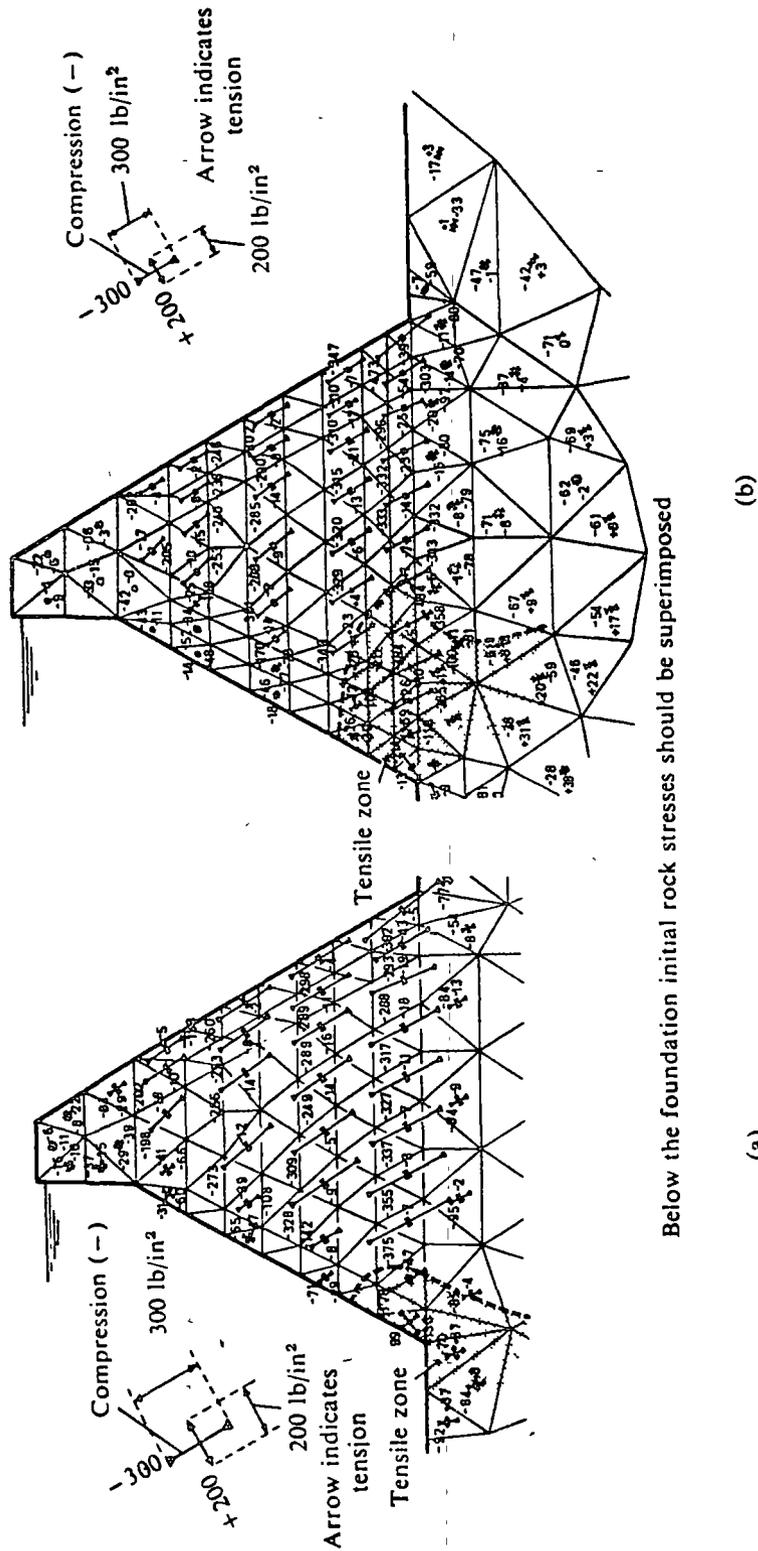


Fig. 4.9. Stress analysis of the buttress dam for gravity loads combined with water pressures, which are assumed to act (a) as external loads, (b) as body forces due to pore pressure

The pore pressure  $p$  is, in fact, now a body force potential, as defined in Eq. (4.36). Figure 4.9 shows the element subdivision of the region and the outline of the dam. Figure 4.10(a) and (b) show the stresses resulting from gravity (applied to the dam only) and due to water pressure assumed to be acting as an external load or, alternatively as an internal pore pressure. Both solutions indicate large tensile regions, but the increase of stresses due to the second assumption is important.

**Cracking.** The tensile stresses in the previous example will doubtless cause the rock to crack. If a stable situation can develop when such a crack spreads then the dam can be considered safe.

Cracks can be introduced very simply into the analysis by assigning zero elasticity values to chosen elements. An analysis with a wide cracked wedge is shown in Fig. 4.11, where it can be seen that with the extent of the crack assumed no tension within the dam body develops.

A more elaborate procedure for following crack propagation and resulting stress redistribution can be developed and will be discussed later (see Chapter 18).

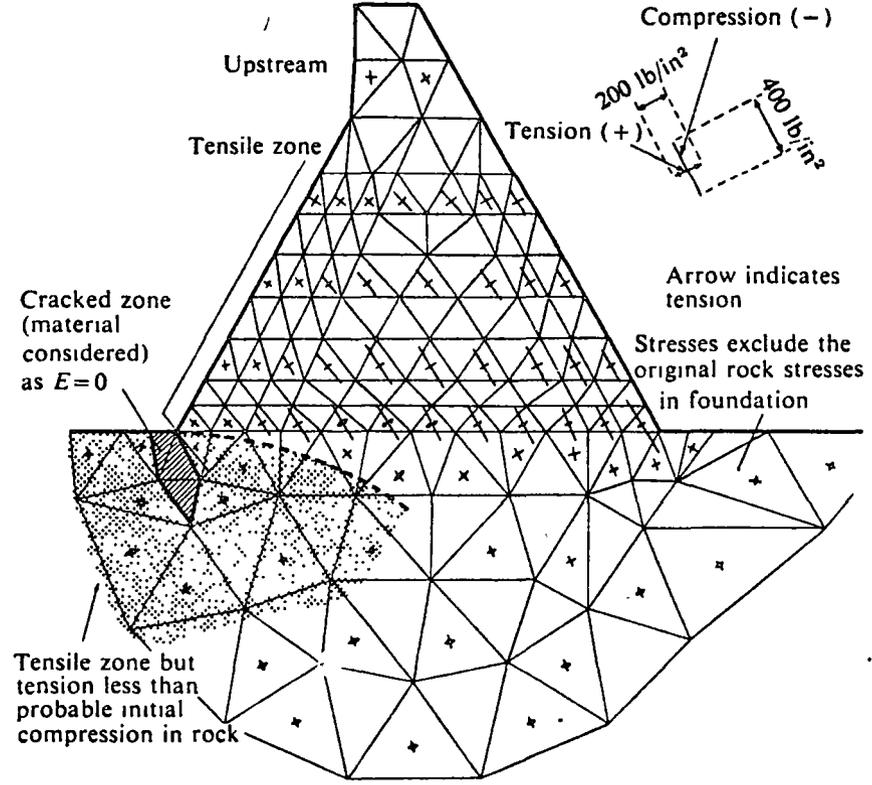


Fig. 4.11 Stresses in a buttress dam. An introduction of a 'crack' modifies stress distribution (same loading as Fig. 4.10(b))

**Thermal stresses.** As an example of thermal stress computation the same dam is shown under simple temperature distribution assumptions. Results of this analysis are given in Fig. 4.12.

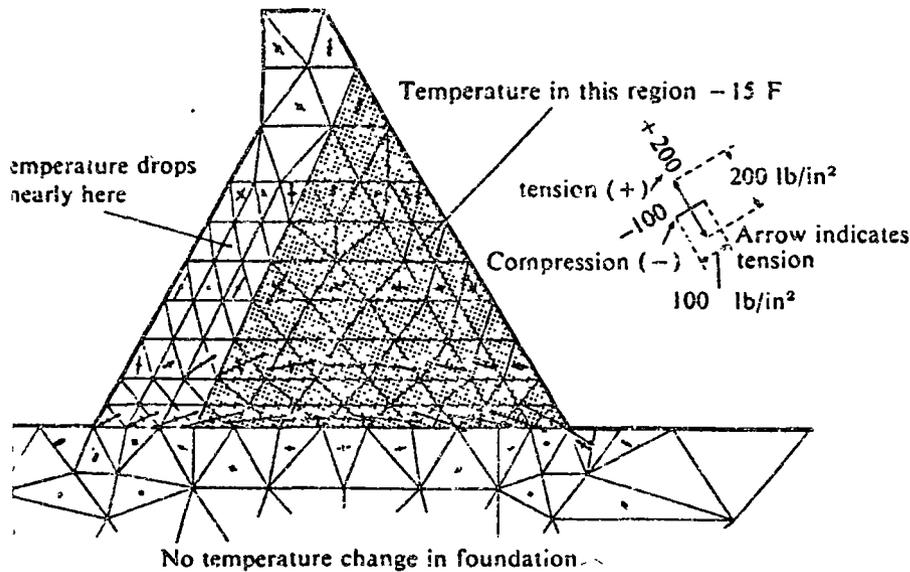


Fig. 4.12 Stress analysis of a buttress dam. Thermal stresses due to cooling of shaded area by  $15^{\circ}\text{F}$  ( $E = 3 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$ ,  $\alpha = 6 \times 10^{-6}/\text{deg F}$ )

**Gravity dams.** A buttress dam is a natural example for the application of finite element methods. Other types, such as gravity dams with or without piers and so on, can also be simply treated. Figure 4.13 shows an analysis of a large dam with piers and crest gates.

In this case an approximation of assuming a two-dimensional treatment in the vicinity of the abrupt change of section, i.e., where the piers join the main body of the dam, is clearly involved, but this leads to localized errors only.

It is important to note here how, in a single solution, the grading of element size is used to study concentration of stress at the cable anchorages, the general stress flow in the dam, and the foundation behaviour. The linear ratio of size of largest to smallest elements is of the order of 30 to 1 (the largest elements occurring in the foundation are not shown in the figure).

**Underground power station.** This last example illustrated in Figs. 4.14 and 4.15 shows an interesting large-scale application. Here principal stresses are plotted automatically. In this analysis very many different

components of  $\{\sigma_0\}$ , the initial stress, were used due to uncertainty of knowledge about geological conditions. The rapid solution and plot of many results enabled the limits within which stresses vary to be found and an engineering decision arrived at.

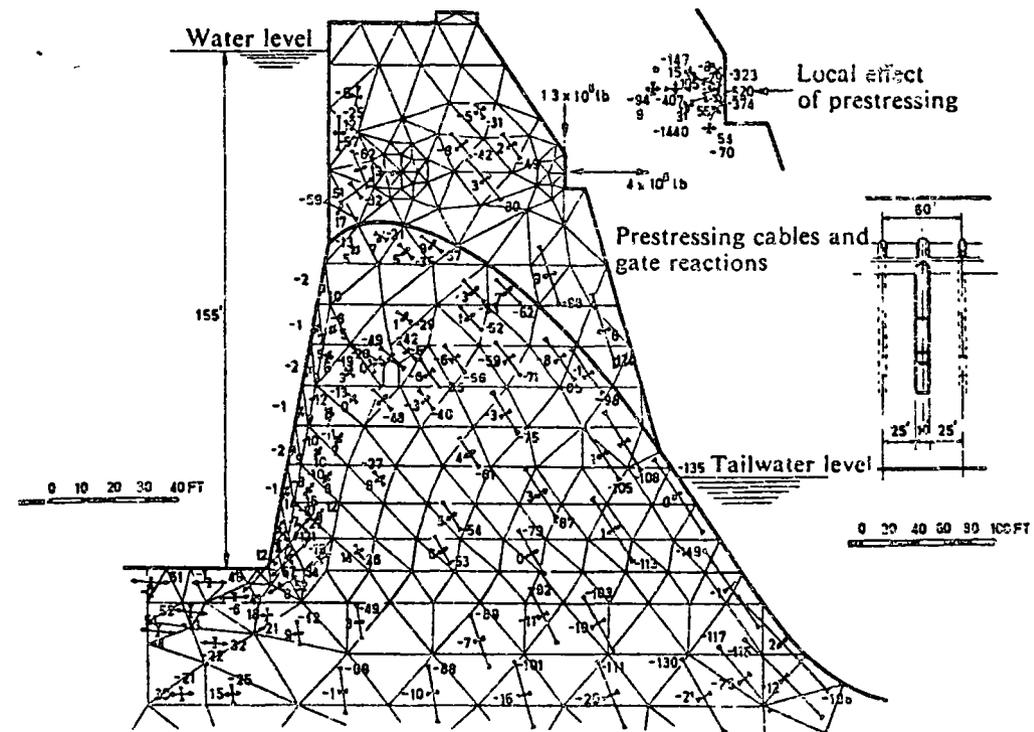


Fig. 4.13 A large barrage with piers and prestressing cables

#### 4.5 Special Treatment of Plane Strain with an Incompressible Material

It will have been noted that the relationship Eq. (4.20) defining the elasticity  $[D]$  matrix for an isotropic material breaks down when the Poisson's ratio reaches a value of 0.5 as the factor in the parentheses becomes infinite. A simple way of side-stepping the difficulty presented is to use values of Poisson's ratio approximate to 0.5 but not equal to it. Experience shows, however, that if this is done the approximation of solution deteriorates. An alternative procedure has been suggested by Herrman.<sup>10</sup> This involves the use of a new variational formulation, and readers are referred to his work for details.

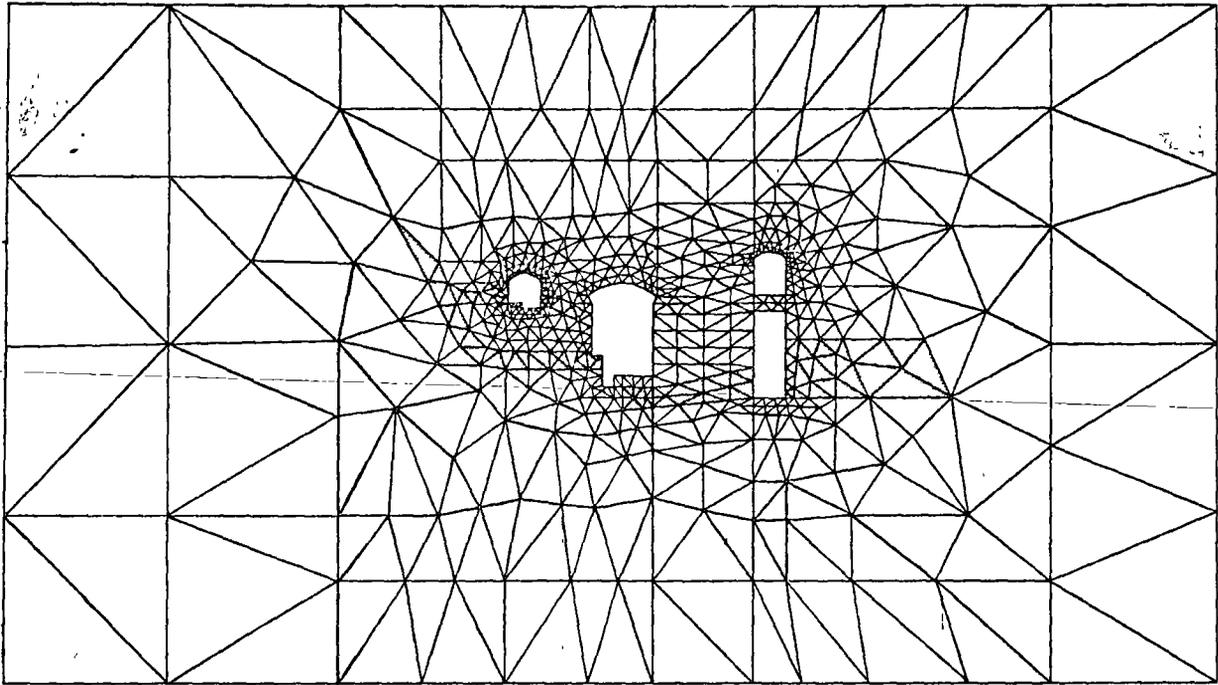


Fig. 4.14 An underground power station. Mesh used in analysis.

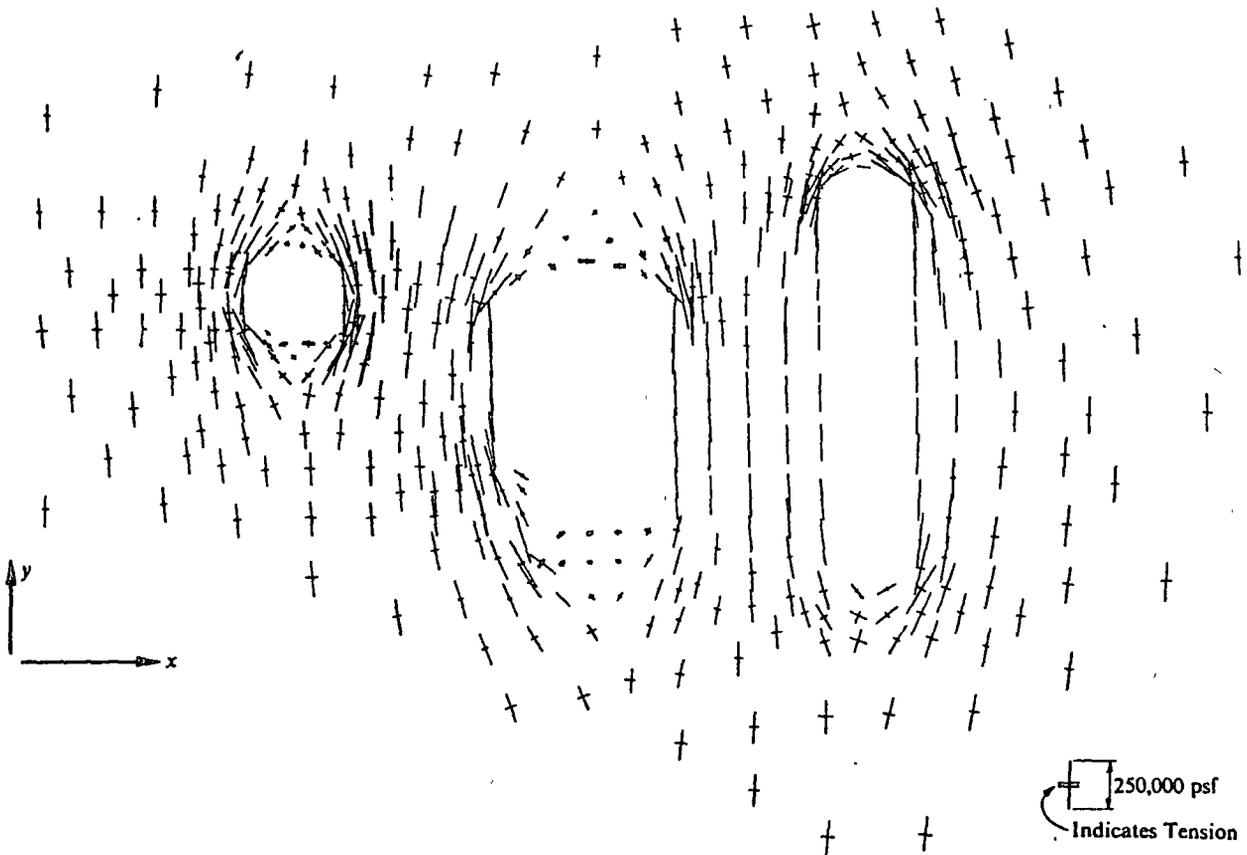


Fig. 4.15 An underground power station. Plot of principal stresses.

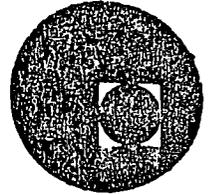
## References

1. M. J. TURNER, R. W. CLOUGH, H. C. MARTIN, and L. J. TOPP, 'Stiffness and deflection analysis of complex structures', *J. Aero. Sci.*, 23, 205-23, 1956.
2. R. W. CLOUGH, 'The finite element in plane stress analysis', *Proc. 2nd A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation*, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.
3. S. TIMOSHENKO and J. N. GOODIER, *Theory of elasticity*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1951.
4. S. G. LEKHNITSKII, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Translation from Russian by P. Fern, Holden Day, San Francisco, 1963.
5. R. F. S. HEARMON, *An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity*, Oxford Univ. Press, 1961.
6. O. C. ZIENKIEWICZ, Y. K. CHEUNG, and K. G. STAGG, 'Stresses in Anisotropic Media with particular reference to problems of rock mechanics', *J. Strain Analysis*, 1, 172-82, 1966.
7. G. N. SAVIN, *Stress Concentration Around Holes*, Pergamon Press, 1961. (Translation from Russian.)
8. O. C. ZIENKIEWICZ and Y. K. CHEUNG, 'Buttress Dams on Complex rock foundations', *Water Power*, 16, 193, 1964.
9. O. C. ZIENKIEWICZ and Y. K. CHEUNG, 'Stresses in Buttress Dams', *Water Power*, 17, 69, 1965.
10. L. R. HERRMANN, 'Elasticity equations for incompressible, or nearly incompressible materials by a variational theorem', *J.A.I.A.A.*, 3, 1896, 1965.





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



## ANALISIS ESTRUCTURAL

### V. ANALISIS DE ESFUERZOS Y TEORIA DE FALLA.

PROF. DR. PORFIRIO BALLESTEROS.  
febrero-marzo, 1978.

# Cuadrada de Esfuerzos de Cauchy, superficies de esfuerzos, Esfuerzos principales, Invariantes

Las componentes del tensor de esfuerzos en notación índice e Ingeniería son

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

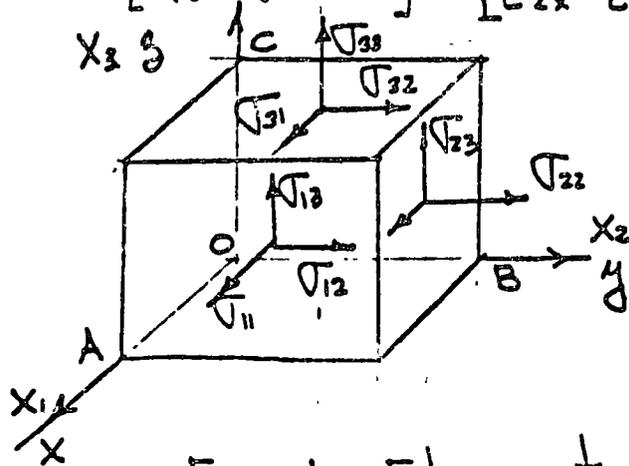
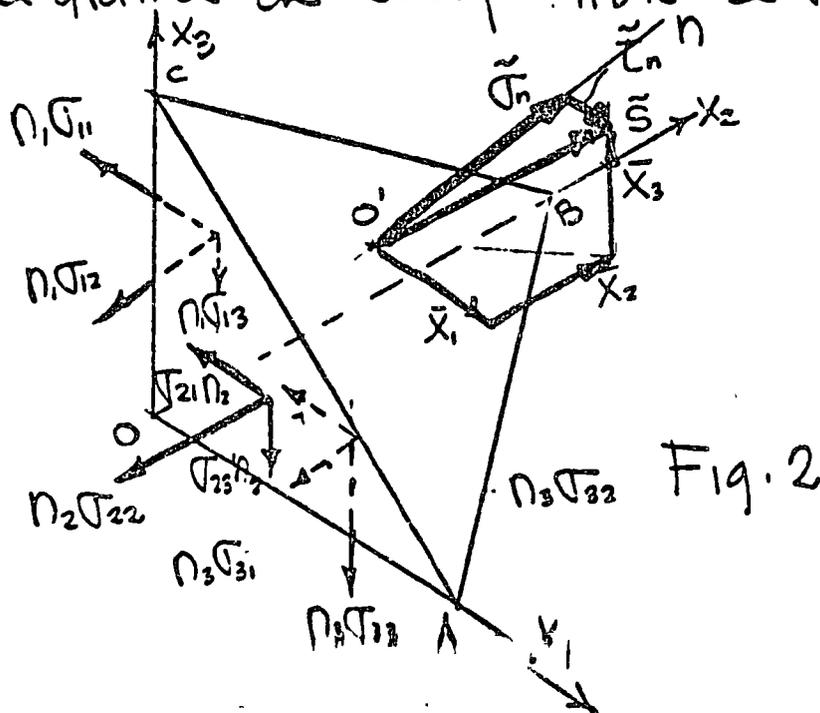


Fig. 1 Elemento diferencial, actuando los esfuerzos  $[\sigma_{ij}]$ .

Llevando un plano a travez de ABC y considerando su dia grama de cuerpo libre se tiene



En la Fig. 2 se tiene lo siguiente.

$o'n$  es normal al plano ABC, formando ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  con respecto a los ejes coordenados  $x_1$ ,  $x_2$ , y  $x_3$  respectivamente, la distancia  $oo'$  es igual a  $r$  las coordenadas de  $o'$  son  $x_1, x_2, x_3$  por lo tanto

$$n_1 = \cos \alpha = \frac{x_1}{r}, n_2 = \cos \beta = \frac{x_2}{r}, n_3 = \cos \gamma = \frac{x_3}{r} \quad (2)$$

donde  $\{n_i\} = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$  es el vector columna de cosenos directores de la normal al plano ABC ( $o'n$  y  $oo'$ ). Si el area ABC es considerada como la unidad, las proyecciones

$$\begin{aligned} n_1 &= \text{area OBC} \\ n_2 &= \text{area OAC} \\ n_3 &= \text{area OAB} \end{aligned} \quad (2)$$

$\bar{s}$  = Esfuerzo resultante actuando sobre el plano ABC

$$\{\bar{x}_i\} = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \bar{x}_3]^T; \text{ proyecciones de } \bar{s} \text{ sobre } x_i$$

$\tilde{\sigma}_n$  = Proyección de  $\bar{s}$  sobre la normal al plano ABC

$\tilde{\tau}_n$  = Proyección de  $\bar{s}$  sobre el plano ABC.

Del equilibrio del elemento OABC se obtiene

$$X_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3$$

$$X_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3$$

$$X_3 = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

(3)

expresando (3) matricialmente se obtiene

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Si no existen momentos de cuerpo,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  para  $i \neq j$   
 y  $[\sigma_{ij}] = [\sigma_{ij}]^T$  por lo que (4) puede escribirse

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{ó } \{X_i\} = [\sigma_{ij}] \{n_j\} \quad (6)$$

El esfuerzo normal al plano ABC es

$$\sigma_n = X_1 n_1 + X_2 n_2 + X_3 n_3 \quad (7)$$

$$\text{ó } \sigma_n = \{X_i\}^T \{n_i\} \quad (8)$$

Substituyendo (5) en (7) se obtiene

$$\sigma_n = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2(\sigma_{12} n_1 n_2 + \sigma_{23} n_2 n_3 + \sigma_{31} n_3 n_1)$$

ó matricialmente de (6) y (8)

$$\sigma_n = [n_i] [\sigma_{ij}] \{n_j\} \quad (10)$$

$$S^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \quad (11)$$

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = S^2 \quad (12)$$

Es fuerzos principales. Es fuerzo principal es un valor particular del es fuerzo normal tal que  $\tau_n = 0$  por lo tanto

$$X_1 = \sigma_n n_1 \quad (13)$$

$$X_2 = \sigma_n n_2$$

$$X_3 = \sigma_n n_3$$

De (5) y (13) se obtiene

$$\begin{cases} \sigma_n n_1 \\ \sigma_n n_2 \\ \sigma_n n_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{cases} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{cases} \quad (14)$$

De donde

$$\begin{bmatrix} (\sigma_n - \sigma_{11}) & -\sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ -\sigma_{21} & (\sigma_n - \sigma_{22}) & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & (\sigma_n - \sigma_{33}) \end{bmatrix} \begin{cases} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{cases} = 0 \quad (15)$$

puesto que  $\{n_i\} \neq 0$ , entonces el determinante

$$\begin{vmatrix} (\sigma_n - \sigma_{11}) & -\sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ -\sigma_{21} & (\sigma_n - \sigma_{22}) & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & (\sigma_n - \sigma_{33}) \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

De (16) se obtiene

$$\sigma_n^3 - (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \sigma_n^2 + (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2) \sigma_n - (\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2) = 0 \quad (17)$$

Las tres raíces de la ecuación (17) nos determinan los valores de los esfuerzos principales  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  cuyos coeficientes nos representan los invariantes de esfuerzos, dependen de  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  independientes del sistema de ejes coordinados.

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \equiv \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 \equiv \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \quad (18)$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 \equiv \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

donde  $I_1, I_2$  e  $I_3$  son los invariantes de esfuerzos; otras expresiones de invariantes pueden formarse de (18) por ejemplo

$$2I_1^2 - 6I_2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \quad (19)$$

(19) se usa en la expresión de la energía de deformación, su uso se discutirá posteriormente

Después de diagonalizar el tensor de esfuerzos  $[\sigma_{ij}]$ , el elemento de la Fig. 2 se muestra en la Fig. 3, y las ecuaciones de equilibrio (5) quedan.

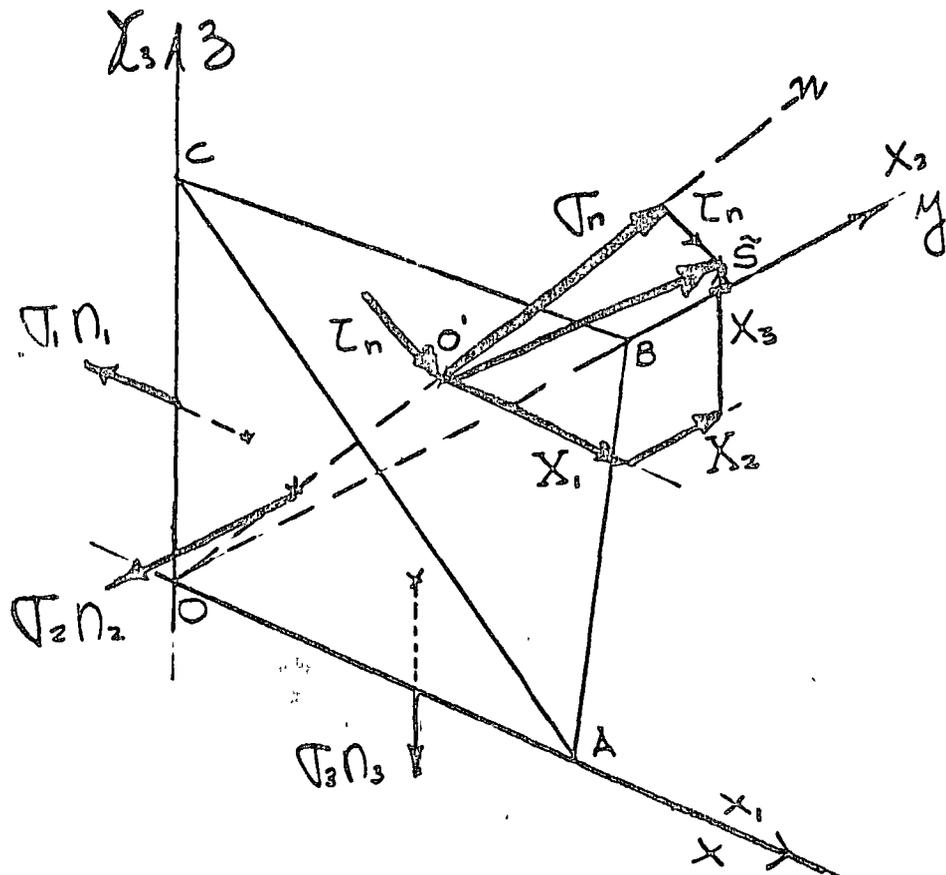


Fig. 3 Componentes del tensor de esfuerzos diagonalizado

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

En (20) las componentes  $\{X_i\}$ ,  $\{n_i\}$ ,  $\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{\tau}$ ,  $\bar{\tau}$  son diferentes a las (5) que se muestran en Fig. 2.

De geometría se conoce que

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (21)$$

Substituyendo (20) en (21) se obtiene la ecuación

$$\frac{X_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{X_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{X_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (22)$$

la cual representa una superficie elipsoidal en el espacio de esfuerzos  $\sigma_i$ , algunos autores lo denominan elipsoide de Lamé; en la Fig. 4 se muestra su perspectiva isométrica. Para el conjunto

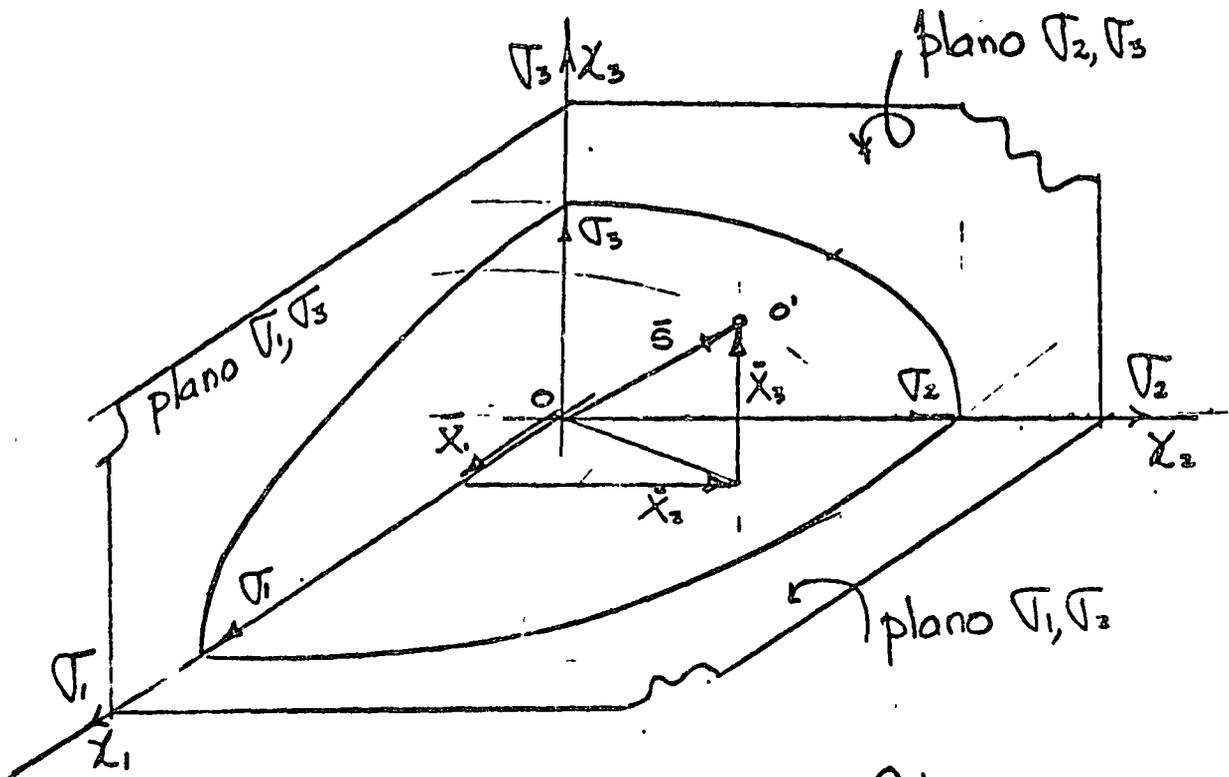


Fig. 4 Elipsoide de Lamé referido al espacio de esfuerzos  $\sigma_i$ , (un octaedro).

de planos con cosenos directores  $\{n_i\}$  a través de  $o$  Fig. 2, le corresponde el conjunto de componentes  $\{X_i\}$ , los cuales junto con los esfuerzos principales  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  forman la superficie elipsoidal de la Fig. 4.

De (20), si  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ , la superficie es esférica.  
 Si  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 \neq 0$  y  $\sigma_3 = 0$  la superficie es cilíndrica de sección elíptica con eje contenido en el eje  $\sigma_3$ . Si  $\sigma_1 = \sigma_2$  y  $\sigma_3 = 0$  la superficie es cilíndrica de sección circular con eje contenido en el eje  $\sigma_3$ , Si  $\sigma_1 \neq 0$  y  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  la superficie son dos planos paralelos al plano  $\sigma_2, \sigma_3$  a continuación se indican los casos particulares mencionados

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma^2 \quad (24)$$

$$\sigma = S$$

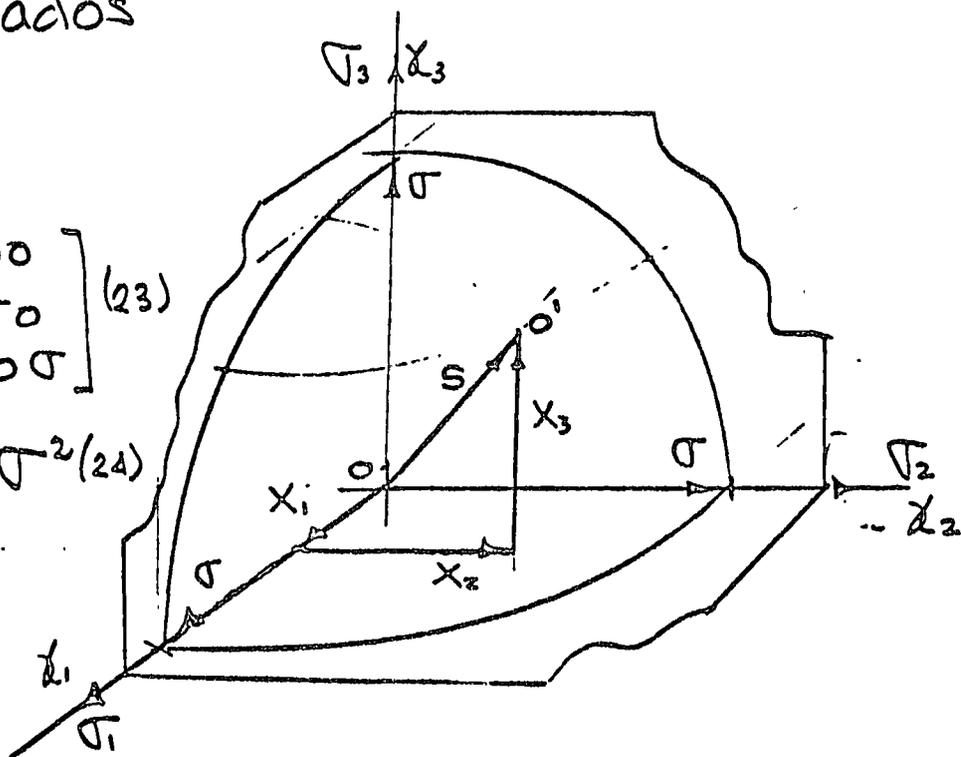


Fig. 5 Superficie esférica, equivalente a una Tensión o compresión uniforme o hidrostática

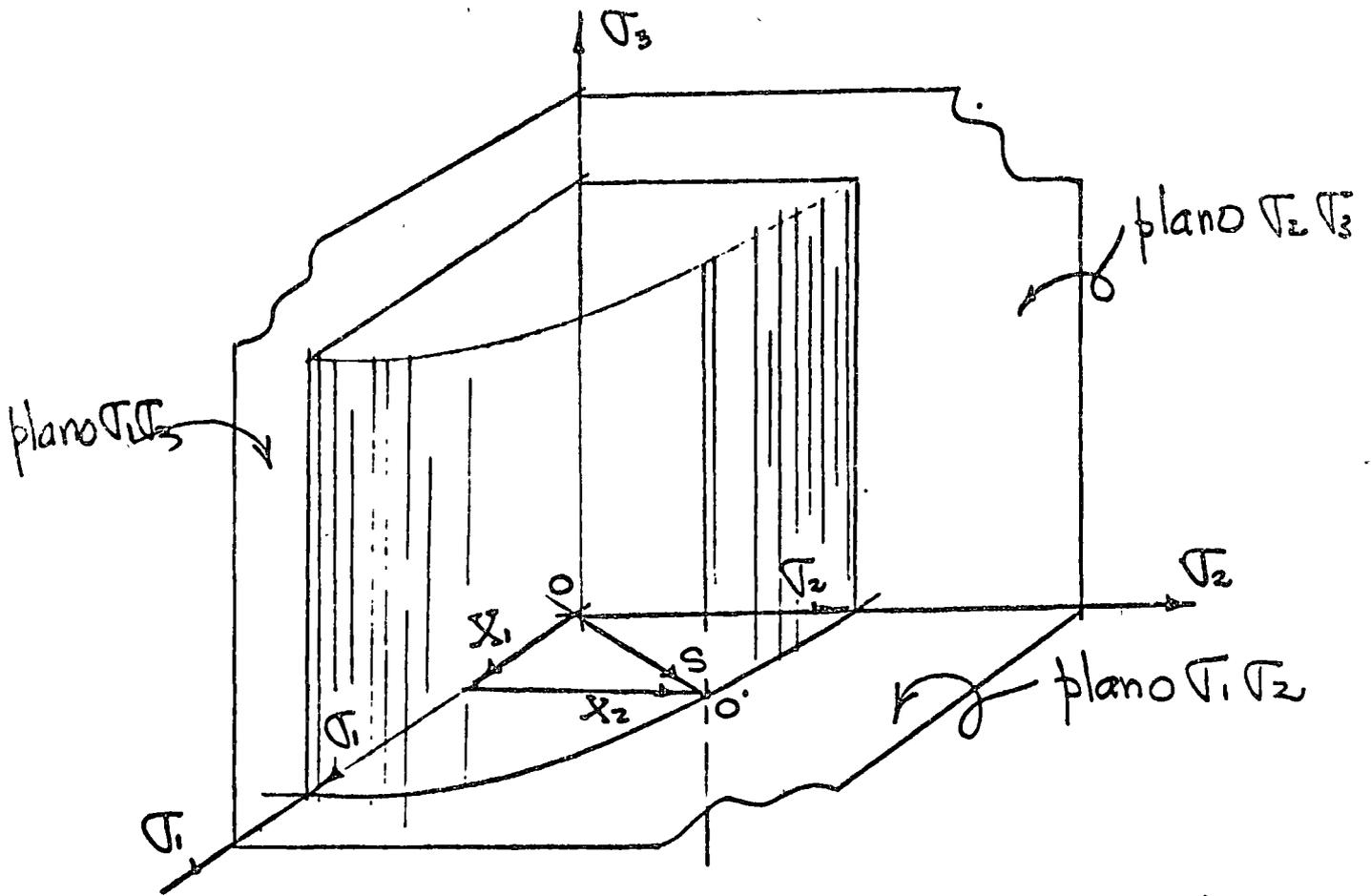


Fig. 6 Superficie cilíndrica de sección elíptica directrices, paralelas al eje  $O\sigma_3$ .

Componentes del tensor de esfuerzos:  $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  (25)

Ecuación de la superficie:  $\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} = 1$  (26)

Como caso particular de (25) si  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  se tiene un cilindro con componentes del tensor de esfuerzos

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

y ecuación de la superficie

$$x_1^2 + x_2^2 = \sigma^2 \quad (28)$$

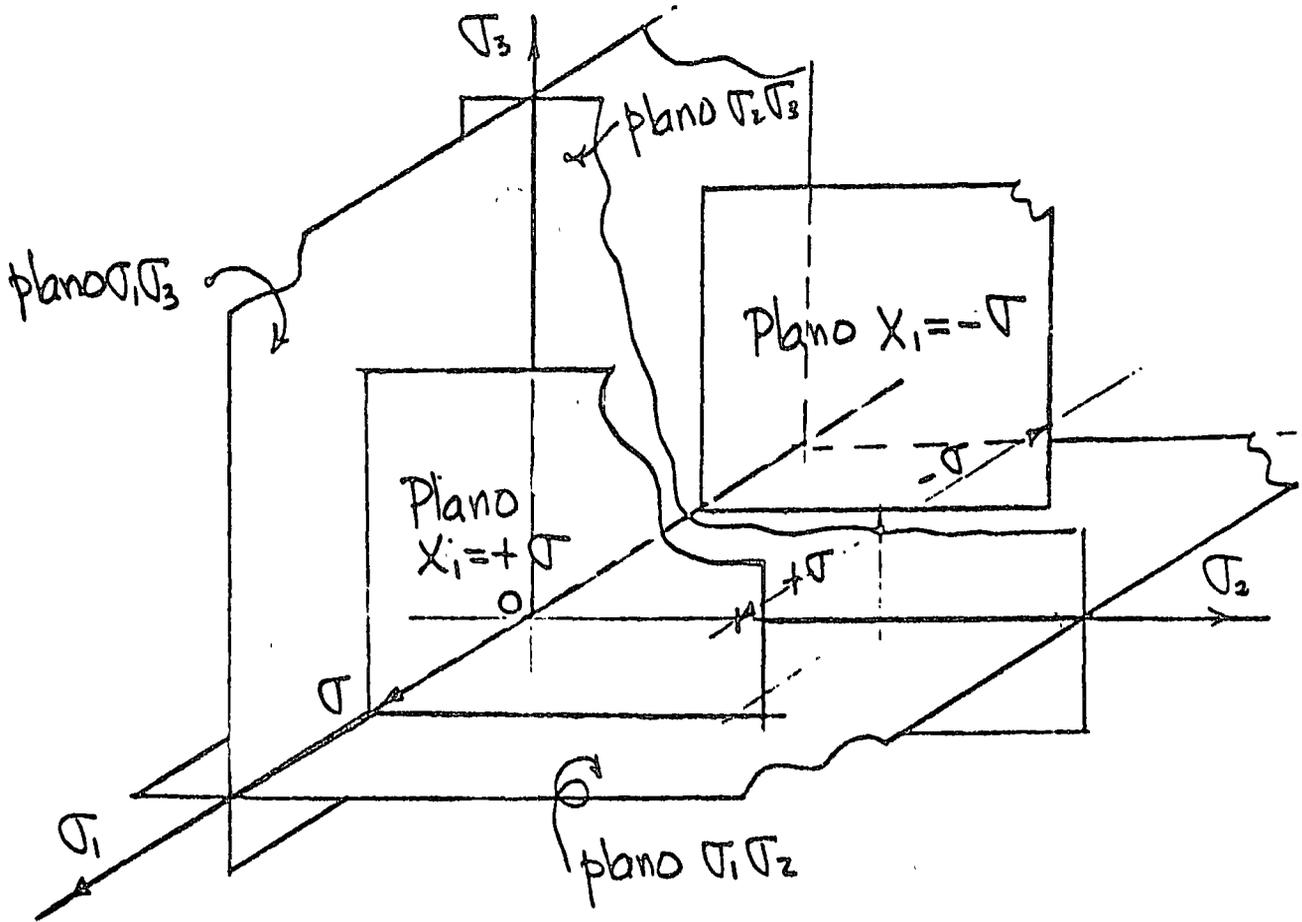


Fig. 6 Superficies planas paralelas al plano  $\sigma_2\sigma_3$   
Componentes del tensor de esfuerzos:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Ecuación de la Superficie:

$$X_1 = \pm \sigma \quad (30)$$

La ecuación (21) en el espacio de cosenos directores nos representa una esfera de radio unitario como se muestra en la Fig. 7

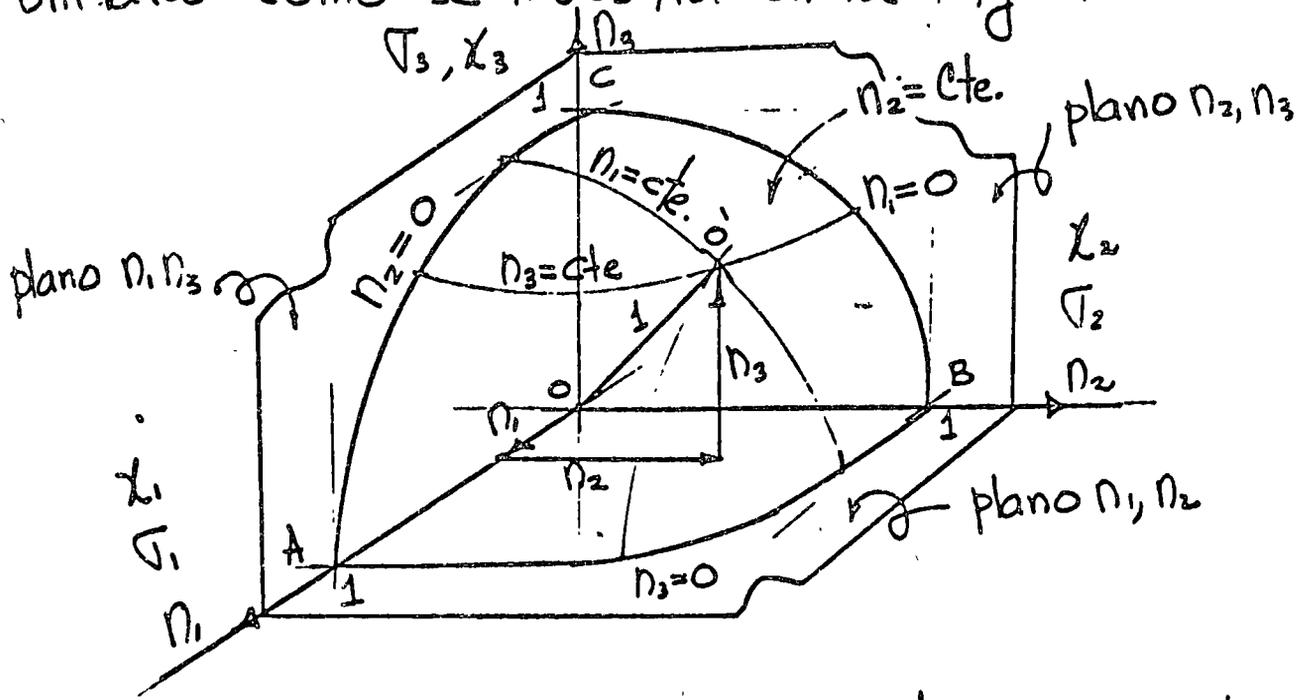


Fig. 7 Espacio de cosenos directores. un octagono de la esfera de Mohor.

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OO'} = 1$$

De la Fig. 3 se observa que substituyendo (20) en (7) se obtiene

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \tag{31}$$

Substituyendo (20) y (31) en (11) y (12) se obtiene

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \tag{32}$$

de las ecuaciones (31), (32) y (21) se obtiene el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas no lineal en  $n_1, n_2$  y  $n_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ f(\sigma_1 n_1^2) & f(\sigma_2 n_2^2) & f(\sigma_3 n_3^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \tau_n \\ \tau_n^2 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

de (33) se obtiene

$$n_1^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_n)(\sigma_3 - \sigma_n) + \tau_n^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} \quad (34)$$

$$n_2^2 = \frac{(\sigma_3 - \sigma_n)(\sigma_1 - \sigma_n) + \tau_n^2}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)} \quad (35)$$

$$n_3^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_n)(\sigma_2 - \sigma_n) + \tau_n^2}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)} \quad (36)$$

De la Fig. 7 considerando  $n_1 = \text{constante}$  de la ecuación (34) se obtiene

$$n_1^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) = (\sigma_2 - \sigma_n)(\sigma_3 - \sigma_n) + \tau_n^2 \quad (37)$$

efectuando operaciones algebraicas en (37) se obtiene

$$n_1^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 = \left[\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right]^2 + \tau_n^2 = \text{Constante}$$

de donde:  $x_1^2 = \left[\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right]^2 + \tau_n^2 = (x - a)^2 + y^2$  que

es la ecuación de un círculo a una distancia  $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$

del origen por lo tanto el radio  $r_1$  que haciendo centro en  $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$  localiza el punto de coordenadas

$\sigma_n \tau_n$  en el diagrama de Mohor es

$$\tau_1 = \sqrt{n_1^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2} \quad (38)$$

Similarmente suponiendo  $n_2 = \text{constante}$  de (35) se obtiene

$$\tau_2 = \sqrt{n_2^2 (\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2} \quad (39)$$

Similarmente suponiendo  $n_3 = \text{constante}$  de (36) se obtiene

$$\tau_3 = \sqrt{n_3^2 (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2} \quad (40)$$

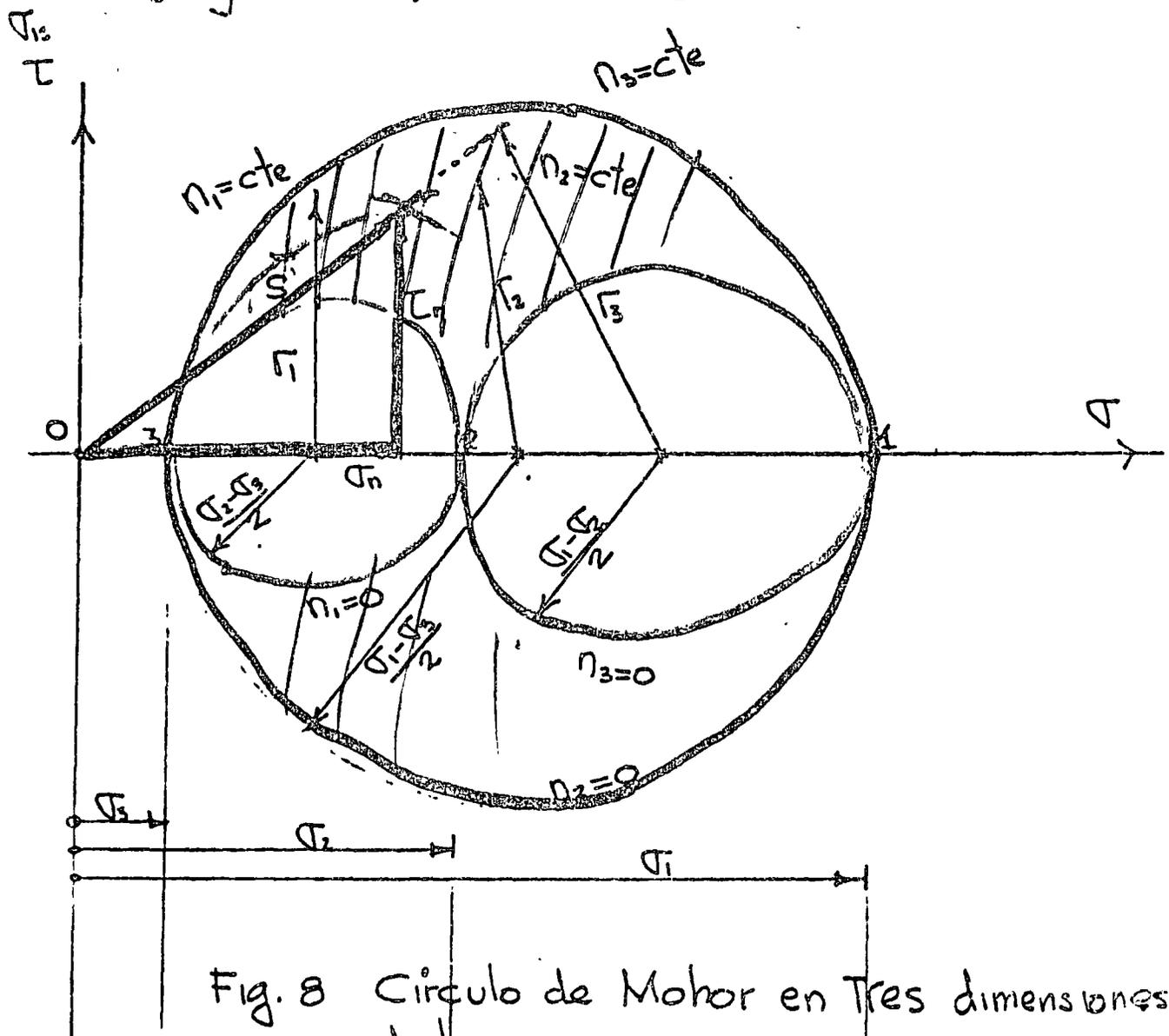


Fig. 8 Círculo de Mohr en Tres dimensiones  
 determinar  $\sigma_n, \tau_n$ , conociendo  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  y  
 $n_1, n_2$  y  $n_3$

2. Esfuerzos cortantes máximos, esfuerzo esférico, esfuerzo octaédral

Sean  $x_1, x_2, x_3$  las direcciones principales (Fig. 3) y  $n_1, n_2, n_3$  los cosenos directores de cierto plano ABC, se tiene que

$$\tau_n^2 = S^2 - \sigma_n^2 \quad (41)$$

$$S^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad (42)$$

$$\sigma_n^2 = (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \quad (43)$$

substituyendo (43) y (42) en (41) se obtiene

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \quad (44)$$

Para determinar las direcciones máximas de corte de  $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$  se elimina  $n_3$  de (44) y se determinan

$$\frac{\partial}{\partial n_1} (\tau_n^2) = 0; \quad n_1 \left[ (\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \right] = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_2} (\tau_n^2) = 0; \quad n_2 \left[ (\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 - \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \right] = 0 \quad (46)$$

las soluciones de (45) y (46) que hacen  $\tau_n$  máximo.

$$\begin{array}{lll} \text{Si } n_2 = 0 & n_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} & n_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \text{" } n_1 = 0 & n_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} & n_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \text{" } n_3 = 0 & n_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} & n_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \end{array} \quad \text{y similarmente}$$

se repiten los cálculos en (44) se elimina  $n_1$  y después  $n_2$ . Conviene observar que en (45) y (46)

no hay soluciones de  $n_1$  y  $n_2$  que sean ambos diferentes de cero, porque las expresiones dentro del parentesis no pueden anularse.

	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_1$	$n_2$	$n_3$
$n_1$	0	0	$\pm 1$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
$n_2$	0	$\pm 1$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
$n_3$	$\pm 1$	0	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0

Esf. Principales  
 $T_n = 0$

Cortantes  
maximos

Tabla 1 Cosenos directores

Repetiendo los calculos en (44), eliminado  $n_1$  y determinando  $n_2$  y  $n_3$  tal que  $T_n$  sea máximo y después  $n_2$  y determinando  $n_1$  y  $n_3$  tal que  $T_n$  sea máximo se obtienen los valores

$$(T_{max})_1 = T_1 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \tag{47}$$

$$(T_{max})_2 = T_2 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$(T_{max})_3 = T_3 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

de (47) y (32) se puede expresar  $T_n$  en la siguiente forma

$$T_n^2 = 4(n_1^2 n_2^2 T_3^2 + n_2^2 n_3^2 T_1^2 + n_1^2 n_3^2 T_2^2) \tag{48}$$

Las 3 primeras columnas de la Tabla 1 dan las direcciones de los planos coordenados de las direcciones principales, para ellos  $T_n = 0$  y (32) es un minimo, las tres columnas restantes dan planos a travez de un eje principal bisectando los otros dos direcciones de esfuerzos principales, substituyendo los valores de Tabla 1 en (32)



$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (49)$$

de (48) y (49) se obtiene

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_n)^2 + (\sigma_2 - \sigma_n)^2 + (\sigma_3 - \sigma_n)^2]} \quad (50)$$

al esfuerzo de corte dado por (49) y (50) es llamado esfuerzo octaedral de corte, porque la cara donde actua es la cara ABC del octaedro regular de la Fig. 9 que tiene vertices en los ejes coordenados, se usa frecuentemente en Teoría de Plasticidad

TEORIAS DE FALLA

18

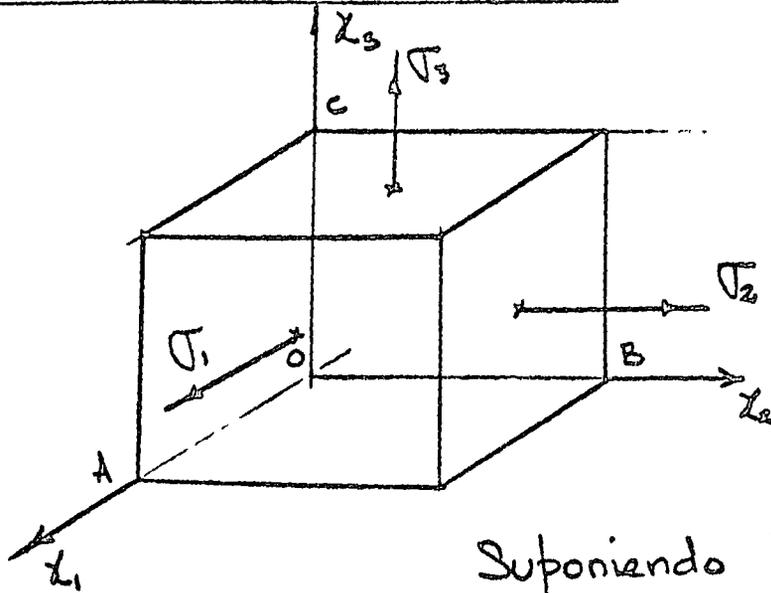
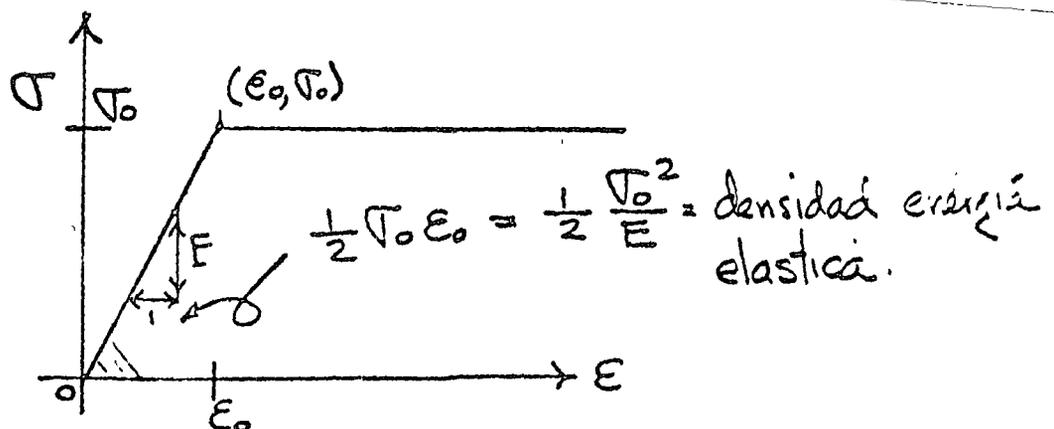
Suponiendo  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 

Fig. 10

En la Fig. 1, después de diagonalizar las componentes del tensor de esfuerzos, se tiene

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (51)$$

se trata de obtener la superficie  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$  en la cual el medio entra a falla plástica, a continuación se presenta el diagrama idealizado esfuerzo deformación en condiciones uniaxiales





espacio de esfuerzos  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  es

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_0) - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 0 \quad (53)$$

en (53) suponiendo  $\sigma_3 = 0$  y para  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  (esfuerzos planos) se obtiene para  $\nu = 0.3$

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= (1 - \nu)\sigma \\ \sigma &= \frac{1}{1 - \nu} \sigma_0 = \frac{1}{1 - 0.3} \sigma_0 = 1.43 \sigma_0 \end{aligned} \quad (54)$$

Si  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_0$

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= (1 + \nu)\sigma \\ \sigma &= \frac{1}{1 + \nu} \sigma_0 = \frac{1}{1 + 0.3} \sigma_0 = 0.77 \sigma_0 \end{aligned} \quad (55)$$

Llevando los valores (54) y (55) al plano  $\sigma_1, \sigma_2$  del espacio de esfuerzos se obtiene las rectas de falla de la Fig. 13

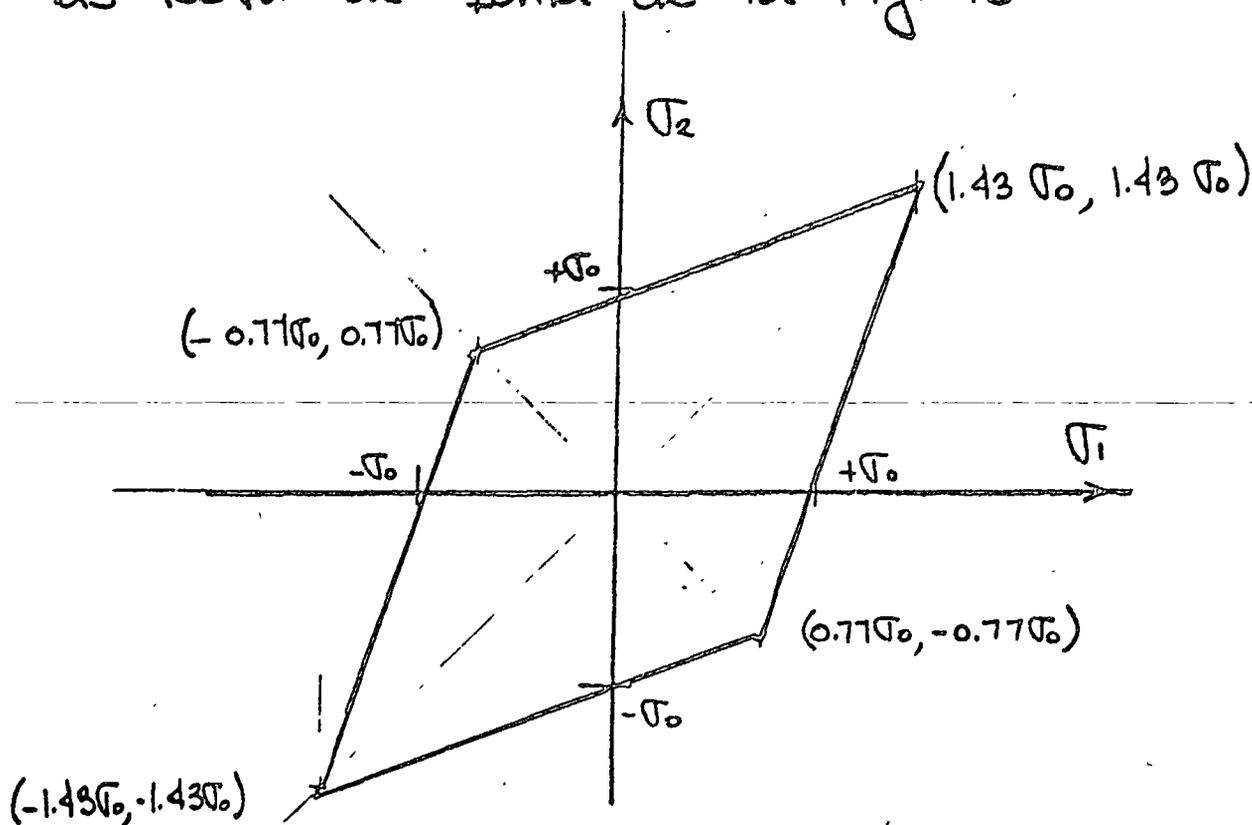


Fig. 13 Teoría de deformación máxima (Saint-Venant)

## c) Teoría del Esfuerzo Cortante Máximo (Coulomb) <sup>21</sup>

Si  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  Coulomb establece que la falla se alcanza cuando

$$(\tau_s)_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{1}{2} \sigma_0 \quad (56)$$

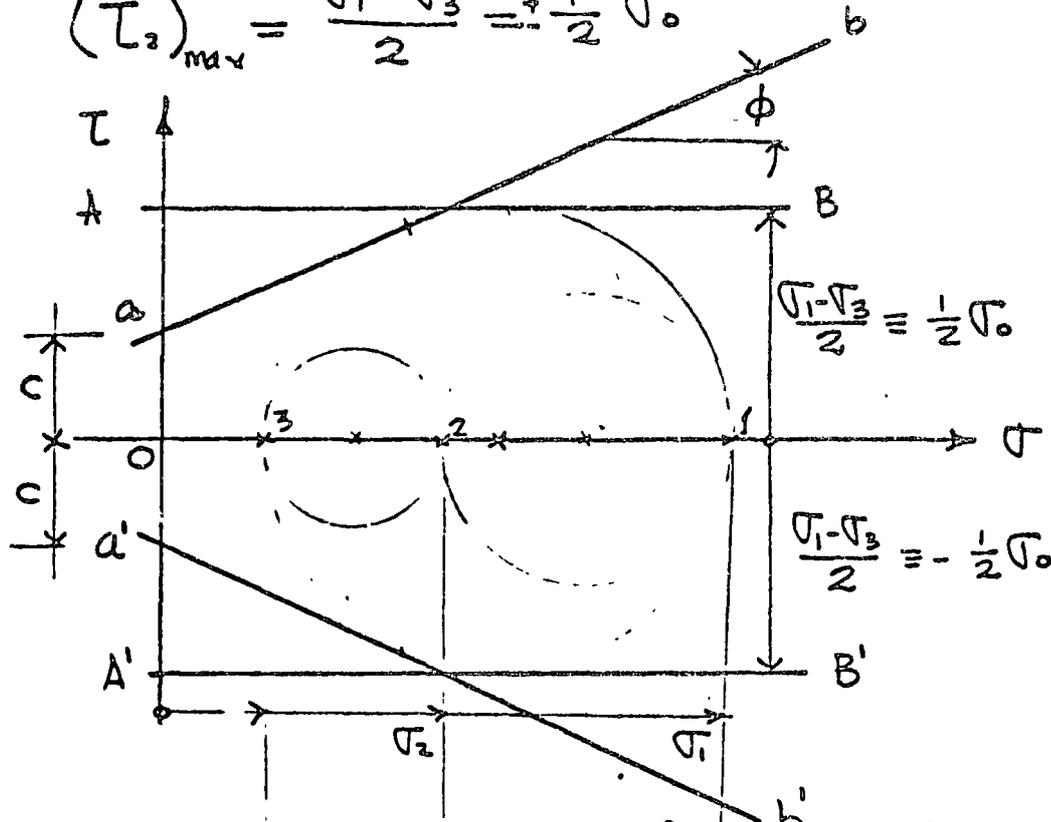


Fig. 13 Teoría del esfuerzo cortante máximo

(56) en el diagrama de Mohr establece como rectas de falla a  $AB$  y  $A'B'$  en Fig. 13 cuando el ángulo de fricción interna  $\phi = 0$ , y cuando  $\phi > 0$  las rectas de falla son las  $ab$  y  $a'b'$  cuya ecuación es igual a

$$\tau_{\max} = c + \sigma \tan \phi \quad (57)$$

$c$  = cohesión o resistencia al esfuerzo cortante puro  
 $\phi$  = ángulo de fricción interna  
 $\sigma$  = esfuerzo de falla.

$c$  y  $\phi$  son constantes constitutivas experimentales<sup>22</sup> que se pueden obtener mediante una prueba triaxial de ruptura. La ecuación 56 en el plano de esfuerzos  $\sigma_1, \sigma_3$  se muestra en la fig. 14

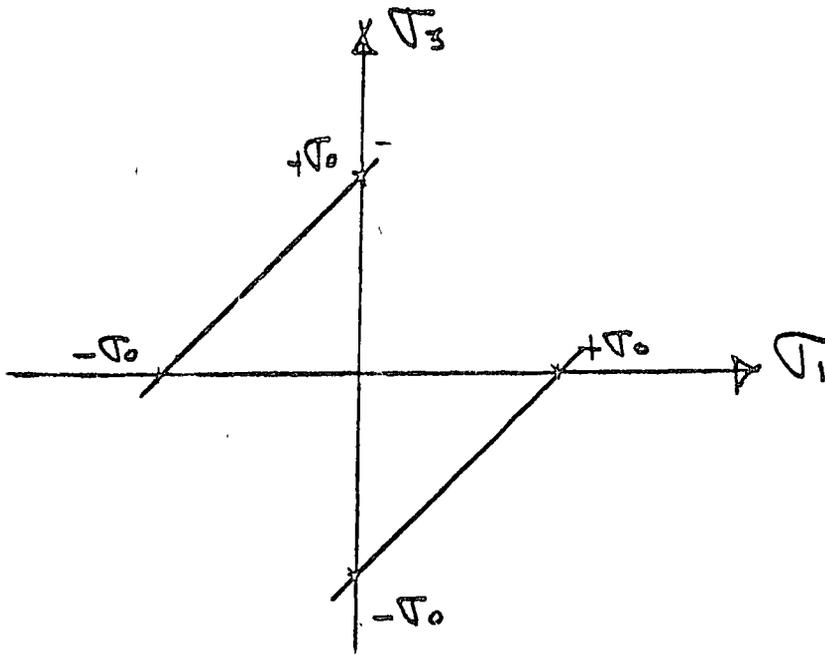


Fig. 14 Teoría del esfuerzo cortante máximo

d) Teoría de la máxima energía de de formación (Beltrami, Haig)

La densidad de energía en un medio elástico lineal viene dada por

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \quad (58)$$

de la Fig. 11 la densidad de energía hasta el límite elástico  $\sigma_0$  es

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{E} \quad (59)$$

de (58) y (59) se obtiene la superficie de falla

$$f(\sigma_i) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - \sigma_0^2 = 0 \quad (60)$$

En esfuerzos planos  $\sigma_3 = 0$  se obtiene

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} - \nu\sigma_1\sigma_2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \quad (61)$$

(61) es la ecuación de una elipse la cual en el plano de esfuerzos  $\sigma_1, \sigma_2$  se muestra en la Fig. 15 para el acero con  $\nu = 0.3$ , y las

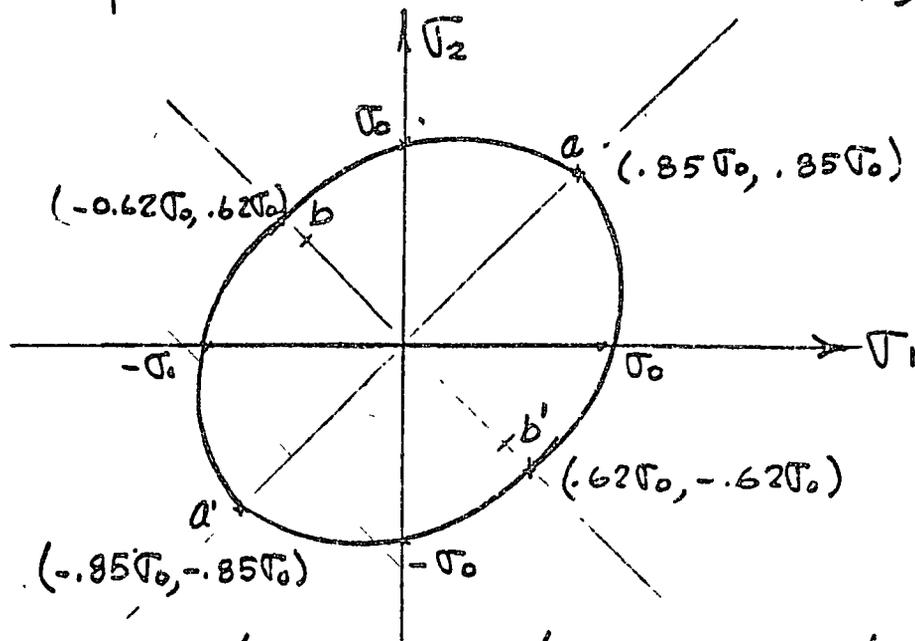


Fig. 15 Teoría de la máxima energía de deformación en el plano  $\sigma_1, \sigma_2$  para  $\nu = 0.3$   
 coordenadas de los puntos a, a', b, y b'.

e) Teoría de energía máxima distorsional.  
 (1856, J.C. Maxwell, M.T. Huber, R.V. Mises, H. Hencky).

Los esfuerzos cortantes máximos actúan sobre el plano octaédrico cuyos cosenos directores son

$n_i = [\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}]$ , y el esfuerzo normal correspondiente llamado, medio, esférico o hidrostático es

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (62)$$

la expansión volumétrica por unidad de volumen correspondiente se expresa por

$$e = e_1 + e_2 + e_3 = \frac{2(1-2\nu)}{E} p \quad (63)$$

la energía por cambio unitario de volumen sea

$$U_1 = \frac{1}{2} p e \quad (64)$$

Substituyendo (62) y (63) en (64) se obtiene

$$U_1 = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (65)$$

en un medio elástico lineal homogéneo e isotrópico la energía de deformación por unidad de volumen es

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \quad (66)$$

La densidad de energía desviatoria máxima es

$$\Delta U = U_0 - U_1 \quad (67)$$

substituyendo (65) y (66) en (67) se obtiene

$$\Delta U = \frac{1+\nu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right] \quad (68) \quad 25$$

el valor máximo en (68) sería si  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$   
 y (68) se transforma para  $\sigma_1 = \sigma_0$  en

$$\Delta U_{\max} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_0^2 \quad (69)$$

por lo tanto de (68) y (69) se obtiene cuando  
 $\Delta U = \Delta U_{\max}$

$$f(\sigma_i) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 2\sigma_0^2 = 0 \quad (70)$$

(70) es la ecuación de un cilindro circular cuyo eje y directrices en el espacio de esfuerzos forma iguales ángulos con los ejes  $\sigma_i$ , la intersección de (70) con el plano  $\sigma_1, \sigma_2$  se obtiene de (70) para  $\sigma_3 = 0$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_0^2 = 0 \quad (71)$$

(71) y (61) deben ser iguales para  $\nu = 0.5$   
 material incompresible (71) representa también una elipse como en la Fig. 15 solo que las coordenadas de  $a, a', b$  y  $b'$  son para  $\nu = 0.3$

$$\begin{array}{ll} a(\sigma_0, \sigma_0) & b(-0.577\sigma_0, 0.577\sigma_0) \\ a'(-\sigma_0, -\sigma_0) & b'(0.577\sigma_0, -0.577\sigma_0) \end{array}$$

ABCD: Teoría del esfuerzo máximo. (Rankine)

26

EFGH: " deformación máxima. (Saint-Venant)

— " de máxima energía de deformación. (Beltrami)

- - - " " " " " distorcionante. (von-Mises)

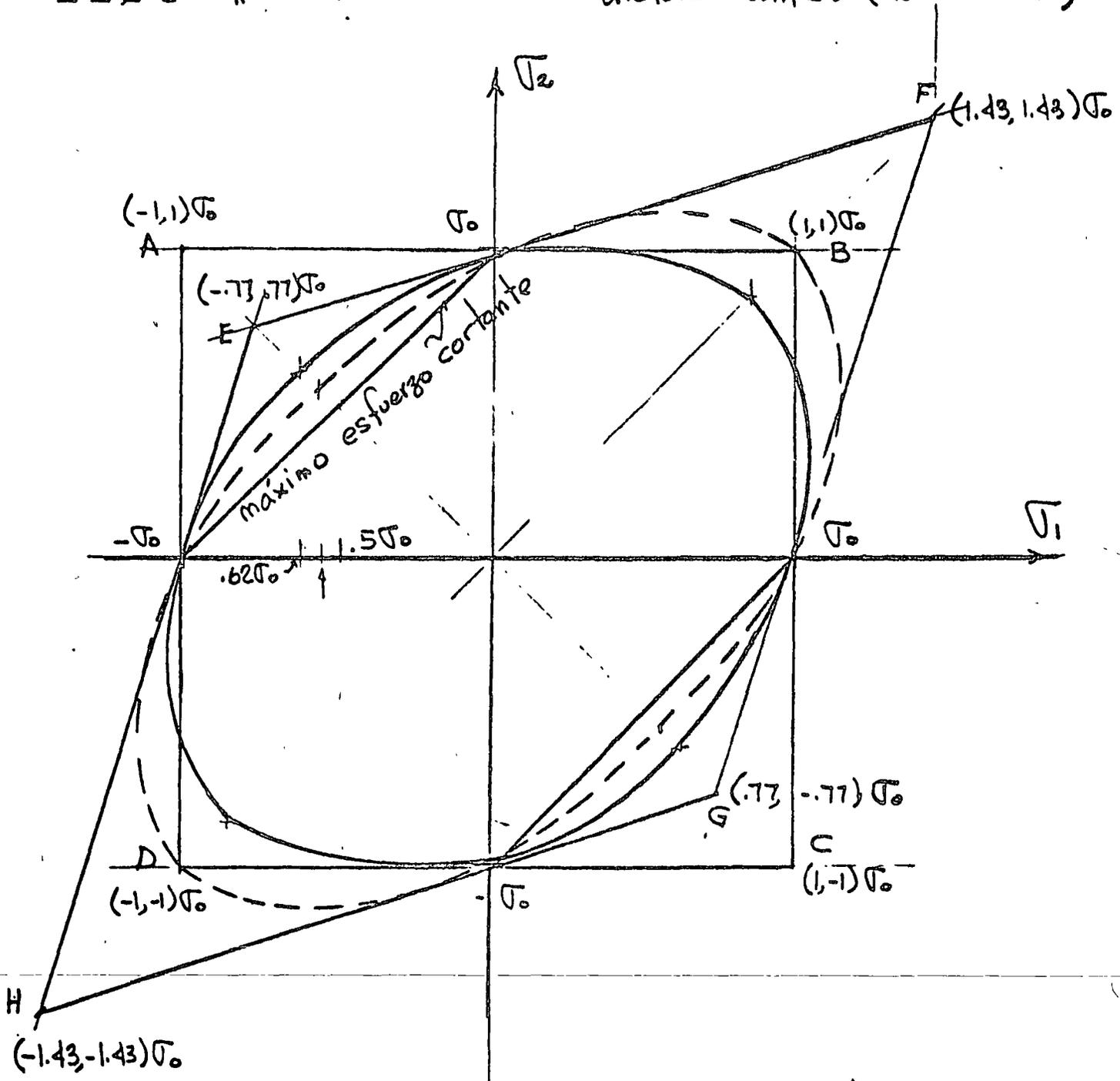
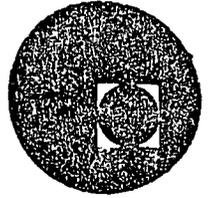


Fig. 16 Comparación entre las distintas Teorías de falla para  $\nu = 0.3$ ,  $\phi = 0$



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



ANALISIS ESTRUCTURAL

TEMA III METODO DE LAS RIGIDECES.  
( ESTABILIDAD ) Continuación.

PROF. DR. PORFIRIO BALLESTEROS.

febrero-marzo, 1978.



# Ecuación Diferencial de la Curva Elástica

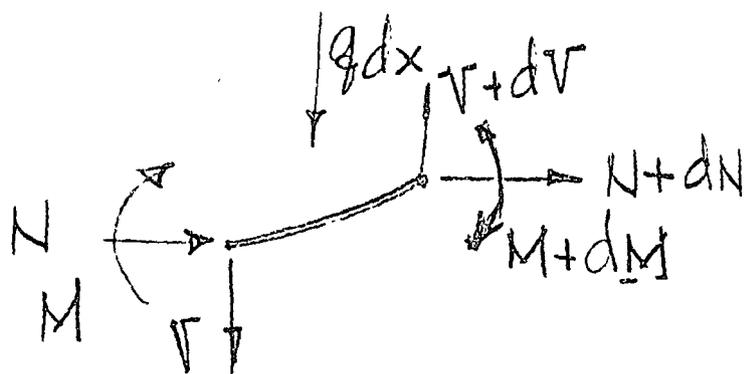
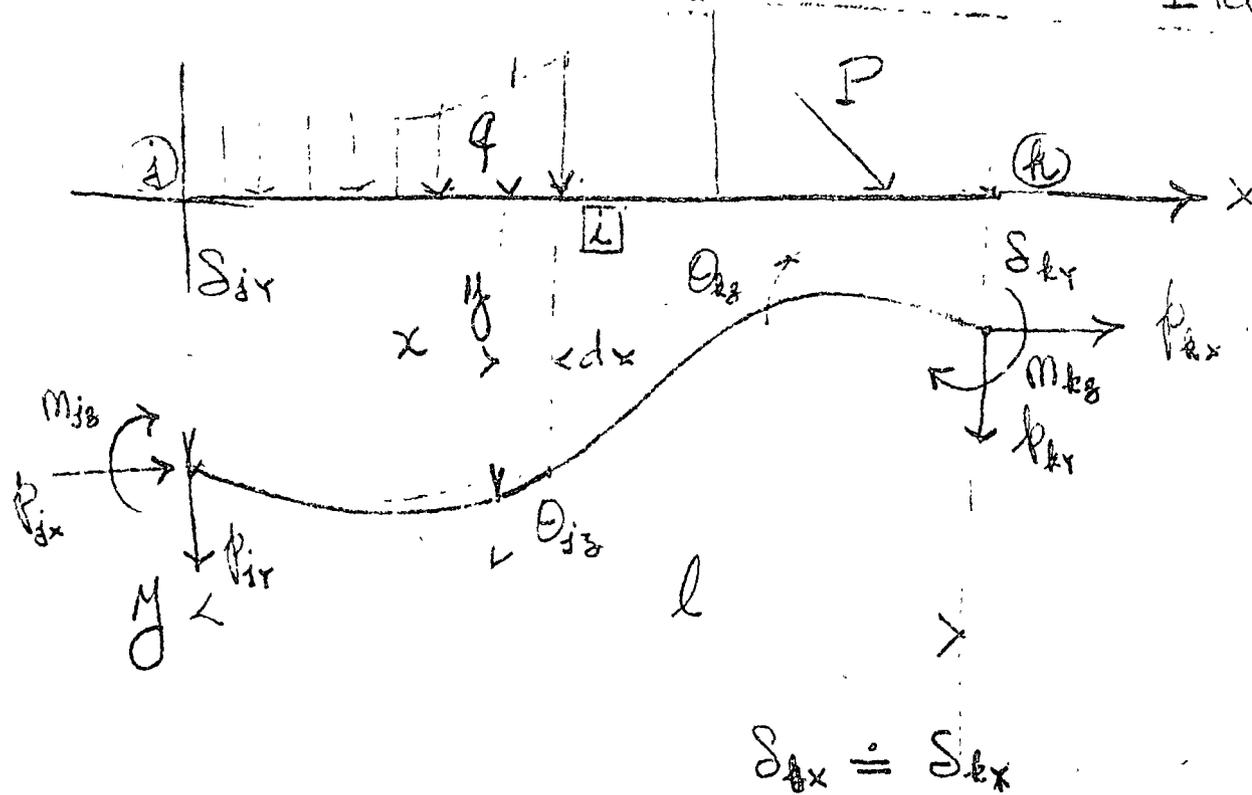


Fig. 1

De las hipótesis de deformación plana, equilibrio relación lineal esfuerzo deformación se obtiene

la relación momento curvatura para pequeñas deformaciones (Linealidad geométrica).

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \quad (1)$$

diferenciando (1) dos veces respecto a  $x$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = - \frac{d^2 M}{dx^2} \quad (2)$$

De la figura 1, de  $\sum M_{x+dx} = 0$ , y diferenciando respecto a  $x$  se obtiene

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = +N \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dV}{dx} = N \frac{d^2 y}{dx^2} - q \quad (3)$$

Substituyendo (3) en (2)

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + N \frac{d^2 y}{dx^2} = q} \quad (4)$$

(4) es la ecuación diferencial de la elástica considerando en el equilibrio el efecto de la variación de la carga normal  $N(x)$ . En el caso más general  $E$ ,  $N$  y  $q$  pueden ser

funciones de  $x$ , considerando  $f(x) = 0$  y  
 $P_{ix} = P_{jk} = P = \text{constante}$  y  $EI = \text{constante}$  (4)  
 se escribe

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \lambda \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (5)$$

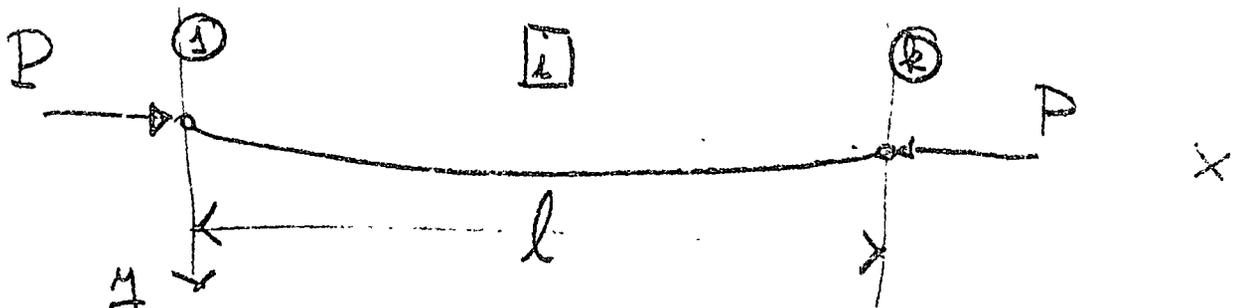
$$\text{donde } \lambda = \frac{P}{EI} \quad (5a)$$

La solución general de (5) es de la forma

$$y = K_1 \sin \sqrt{\lambda} x + K_2 \cos \sqrt{\lambda} x + K_3 x + K_4 \quad (6)$$

Primer caso

Barra articulada



Cond.  
Iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{iz} = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$$

Cond.  
en  
la  
Frontera

$$M_{kz} = 0, \quad y''(l) = 0 \\ y(l) = 0$$

de  $y(0) = y''(0) = 0$  se obtiene  $K_2 = K_4 = 0$

y (6) toma la forma

$$y = K_1 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x + K_3 x \quad (8)$$

Las condiciones en la frontera  $x = l$

$$y(l) = y''(l) = 0 \quad \text{nos dan} \quad (9)$$

$$K_1 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} l + K_3 l = 0 \quad (10)$$

Así que soluciones no triviales de el problema existen solamente si  $\operatorname{sen} \sqrt{\lambda} l = 0$  y  $K_3 = 0$ . Por lo tanto  $\lambda$  toma los valores característicos de la forma

$$\sqrt{\lambda_n} l = n \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (11)$$

y las correspondientes funciones características son los modos de deflexión

$$\phi_n(x) = \text{sen } \frac{n\pi}{l} x \quad (2)$$

Los valores de la carga axial correspondientes a estos modos son conocidos como cargas críticas de pandeo, y son dadas de subst. (2) en (1)

$$\frac{n^2 \pi^2}{l^2} = \frac{P_n}{EI}$$

de donde 
$$P_n = n^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (3)$$

Para cargas axiales en magnitud, más pequeñas que el valor crítico menor

$$(n=1) \quad P_1 = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (4)$$

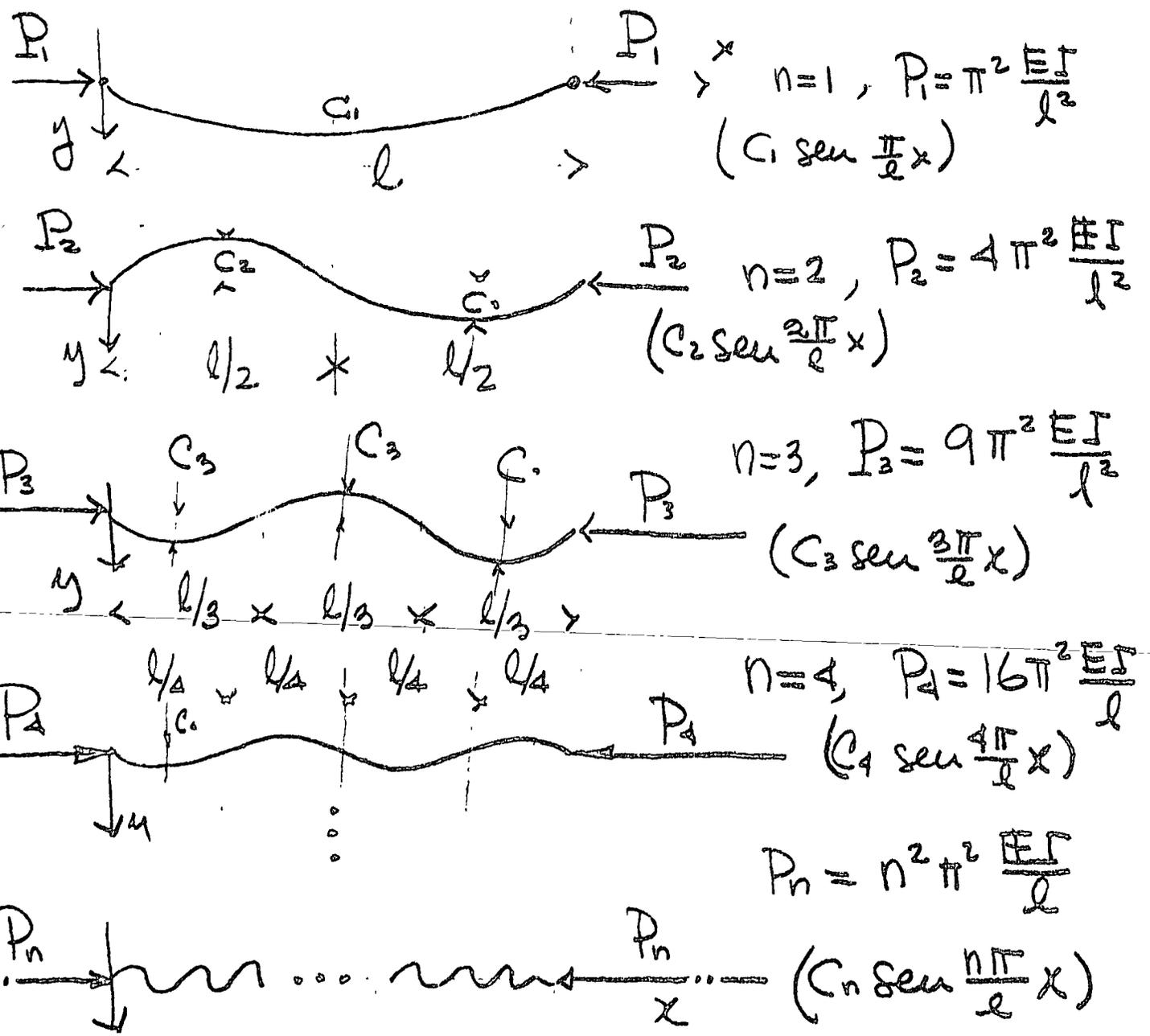
la columna es estable y se encuentra en posición no flexionada, cuando  $P = P_1$ , esta teoría predice que la columna tomará la forma

$$y = C \text{sen } \frac{\pi x}{l} \quad (5)$$

conocida como modo fundamental de pandeo

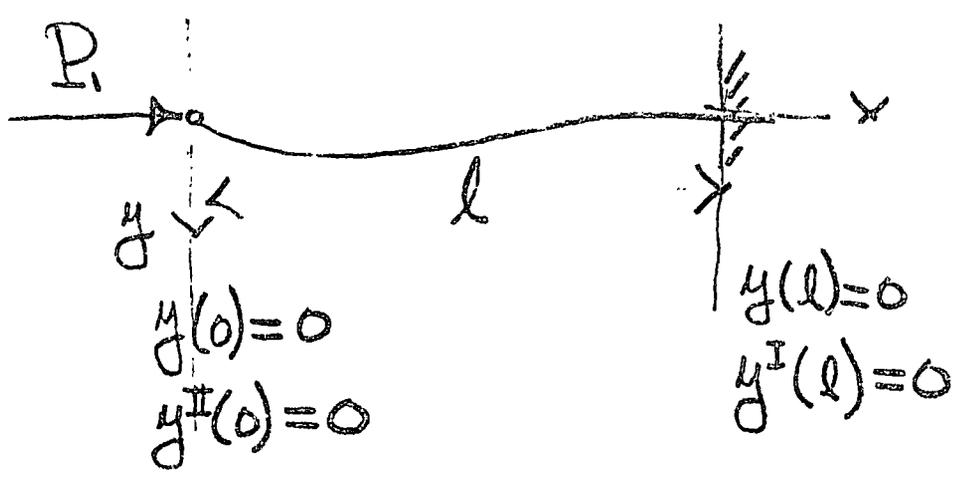
A pesar que la teoría lineal no predice la amplitud  $C$  de la deformación sinusoidal. Analisis más exacto muestra que la amplitud incrementará al aumentar  $P > P_1$ , hasta que falla por flexocompresión ocurre.

(14) Se conoce como la carga de Euler



En la práctica la falla no es causada enteramente por flexión y puede ocurrir la falla antes de la carga de Euler, ocurre solo para columnas largas.

Segundo ejemplo (tarea) Apoyo  $x=0$  articulado y apoyo  $x=l$  empotrado



En la ec. (8)  $y = K_1 \sin \sqrt{x} l + K_2 x$  solo nos falta impartirle las condiciones en la frontera  $y(l) = y'(l) = 0$  (15)

e introduciendo el parametro adimensional  $\mu = \sqrt{x} l = \sqrt{\frac{P}{EI}} l$  (17)

las cargas críticas sean de la forma

$$P_n = \mu_n^2 \frac{EI}{l^2} \quad (18)$$

donde  $\mu_n$  es una solución positiva de la ecuación trascendental

$$\tan \mu = \mu \quad (19)$$

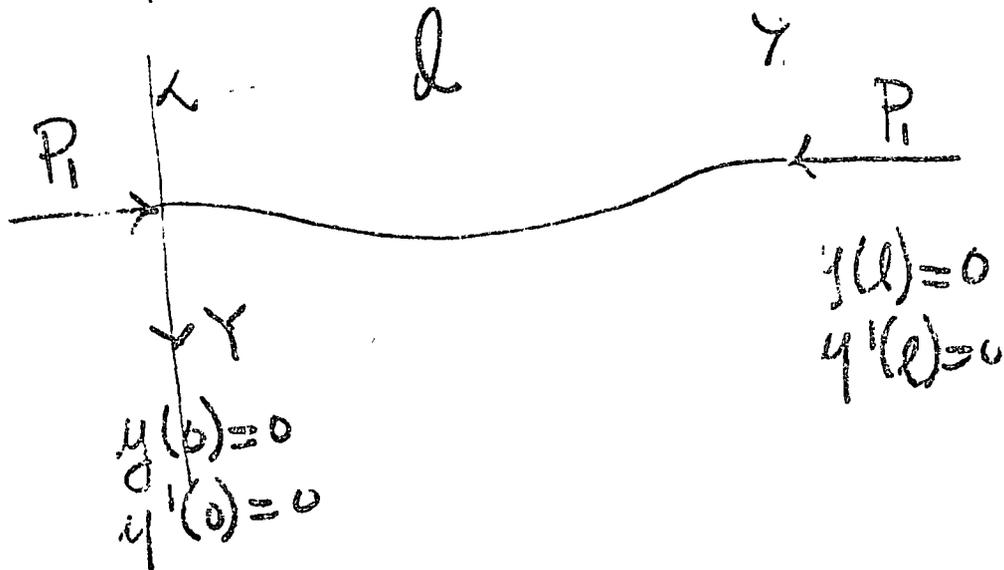
y los correspondientes modos de flexión son de la forma

$$\Phi_n(x) = \frac{\operatorname{sen} \frac{\mu_n}{l} x}{\operatorname{sen} \mu_n} - \frac{x}{l} \quad (20)$$

Dado que la raíz más pequeña de (19) es aproximadamente  $\mu_1 = 1.43 \pi$ , la carga de Euler es en este caso

$$P_1 = (1.43\pi)^2 \frac{EI}{l^2} = 2.05 \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (21)$$

9  
 Ejemplo: Δ apoyado  $x=0$  y  $x=l$  empotrados



de las condiciones  $y(0)=y'(0)=0$  en (6)

se obtiene  $K_2 = -K_4$  y  $K_3 = -\sqrt{\lambda} K_1$  (23)

e introduciendo de nuevo la notación (7)

(6) se transforma a

$$y = K_1 \left( \sin \mu \frac{x}{l} - \mu \frac{x}{l} \right) + K_4 \left( 1 - \cos \mu \frac{x}{l} \right) \quad (24)$$

y de (24) y las condiciones en la frontera

(25)  $y(l)=y'(l)=0$  se obtiene

$$\begin{bmatrix} (\mu \sin \mu - 1) & (1 - \cos \mu) \\ (1 - \cos \mu) & \mu \sin \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (26)$$

desarrollando el determinante del sistema

(26)

$$(27) \quad 2(1 - \cos \mu) - \mu \sin \mu = 4 \sin \frac{\mu}{2} \left( \sin \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2} \cos \frac{\mu}{2} \right)$$

cuyo valor es cero solo si

$$\begin{aligned} \sin \frac{\mu_n}{2} &= 0 & (28) \\ \text{o} \quad \tan \frac{\mu}{2} &= 0 \end{aligned}$$

La alternativa  $\sin \frac{\mu}{2} = 0$  nos da

los valores  $\mu_n = 2n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (29)$

y de (26)  $K_1 = 0$  y de (24) se ve que los modos de deflexión son de la forma

$$\Phi_n(x) = 1 - \cos \frac{2n\pi}{l} x \quad (30)$$

y las cargas críticas correspondientes en "

$$P_n = 4 n^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (31)$$

...  $l/4$

$$P_1 = 4 \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

o  $l/2$

$$P_{II} = \pi^2 \frac{EI}{(l/2)^2} = 4 \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

o  $l/4$

La segunda alternativa en (28)  $\tan \frac{\mu l}{2} = \frac{\mu l}{2}$  nos da la siguiente función característica

$$f_n(x) = \frac{\mu_n \frac{x}{l} - \text{sen} \mu_n \frac{x}{l}}{\mu_n - \text{sen} \mu_n} - \frac{1 - \text{cos} \mu_n \frac{x}{l}}{1 - \text{cos} \mu_n} \quad (32)$$

obtenida cuando  $\mu_n$  es solución de (28b), y las cargas críticas correspondientes son

$$P_n = \mu_n^2 \frac{EI}{l^2} \quad (33)$$

La raíz más pequeña de (28b) es  $\mu_1 = 2.86 \pi$  cuya carga crítica es  $P'_{cr} = (2.86)^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (34)$

$$P'_{cr} = 8.18 \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (35)$$

(35) es mayor que (31). Esta alternativa no da  $P_{cr}$ .

Tres condiciones deben ser observadas en el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas

- 1) Relación esfuerzo deformación del material
- 2) Equilibrio
- 3) Compatibilidad geométrica de deformaciones

Convención de signos en Fig. 1

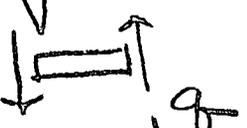
Deflexión;  $y(x)$

Convención  
↓ + y

Pendiente;  $y'(x) = \theta(x)$



Momento;  $-EI y''(x) = -EI \theta'(x) = M(x)$  

CORTE;  $-EI y'''(x) = -EI \theta''(x) = M'(x) = V(x)$  

Carga;  $-EI y^{(4)}(x) = -EI \theta'''(x) = M''(x) = V'(x) = q(x)$  

De la Fig 1 para  $q = 0$  se tienen las siguientes condiciones iniciales y en la frontera:

$$\left. \begin{aligned}
 (y)_{x=0} = y(0) &= \delta_{jv} \\
 (y)_{x=l} = y(l) &= \delta_{kv} \\
 (y^I)_{x=0} = y^I(0) &= \theta_{jz} \\
 (y^I)_{x=l} = y^I(l) &= \theta_{kz}
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Comp.} \\ \text{Geométrica} \end{array} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned}
 (y^{II})_{x=0} = y^{II}(0) &= -\frac{M_{jz}}{EI} \\
 (y^{II})_{x=l} = y^{II}(l) &= \frac{M_{kz}}{EI}
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Equilibrio y} \\ \text{relaciones} \\ \text{Est. Def.} \end{array} \quad (37)$$

Substituyendo (6) en (36) se obtienen  $K_1, K_2, K_3, y K_4$  y substituyendo (6) en sus valores de  $K_i$  en 37 se obtiene

$$\begin{aligned}
 (1) \quad M_{jz}^i &= C_{1z}^i K_z^i \theta_{jz}^i + C_{2z}^i K_z^i \theta_{kz}^i + (C_{1z} + C_{2z})^i K_z^i \frac{\delta_{jv} - \delta_{kv}}{l} \\
 M_{kz}^i &= C_{2z}^i K_z^i \theta_{jz}^i + C_{1z}^i K_z^i \theta_{kz}^i + (C_{1z} + C_{2z})^i K_z^i \frac{\delta_{jv} - \delta_{kv}}{l}
 \end{aligned}$$

Donde:

$$C_{1y}^i = \frac{1 - d^i \cot d^i}{\frac{2 \operatorname{Tan} \frac{d^i}{2}}{d^i} - 1} \quad (40)$$

$$C_{2y}^i = \frac{d^i \sec d^i - 1}{\frac{2 \operatorname{Tan} \frac{d^i}{2}}{d^i} - 1} \quad (41)$$

$$K^i = \left( \frac{EI}{l} \right)^i \quad d^i = \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}}$$

Factor de transporte:  $C^i = \frac{C_2^i}{C_1^i} = \frac{d^i \sec d^i - 1}{1 - d^i \cot d^i} \quad (42)$

$$C_2^i = C^i C_1^i$$

$$C_1^i + C_2^i = C_1^i (1 + C^i)$$

Problema.- Cuando la carga normal  $P=0$ , derive la ecuación de la elástica  $y=f(x)$ , y las ecuaciones (38) y (39) que en este caso son

$$M_{j3}^i = 4K_{j3}^i \theta_{j3}^i + 2K_{k3}^i \theta_{k3}^i + 6K_{j3}^i \frac{\delta_{j3} - \delta_{k3}}{l_i} \quad (43)$$

$$M_{k3}^i = 2K_{j3}^i \theta_{j3}^i + 4K_{k3}^i \theta_{k3}^i + 6K_{k3}^i \frac{\delta_{j3} - \delta_{k3}}{l_i}$$

$$K_{j3}^i = \frac{EI_{j3}}{l}$$

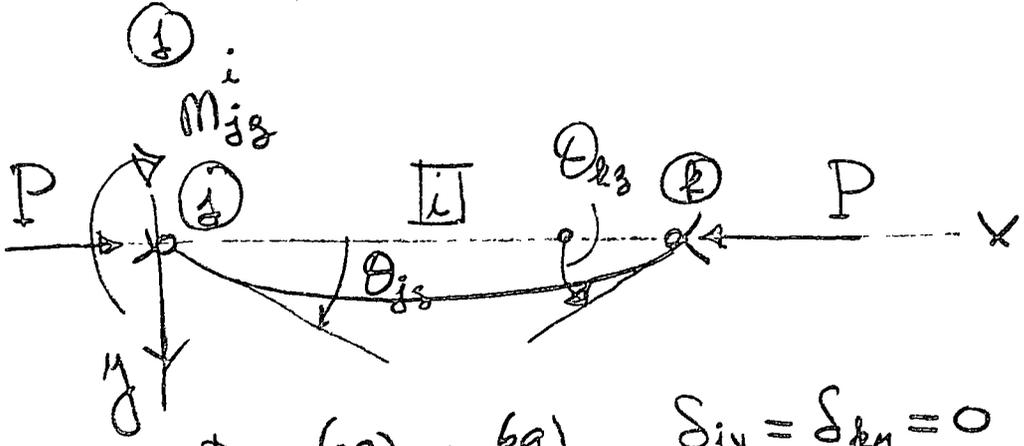
El principio de superposición requiere dos condiciones

- Ley de Hooke (Relación lineal  $\sigma-\epsilon$ )
- La deformación debida a un sistema de fuerzas no es substancialmente afectada por otro sistema de fuerzas

$$\lim_{d \rightarrow 0} C_{j3}^i = 4 \quad \lim_{d \rightarrow 0} C_{k3}^i = 2 \quad (44)$$

Por substitución de (44) en (38) y (39) se obtiene (43)

Barra articulada en (1) con un momento aplicado en



De (38) y (39)  $\delta_{jy} = \delta_{ky} = 0$   
 $M_{k3} = 0$

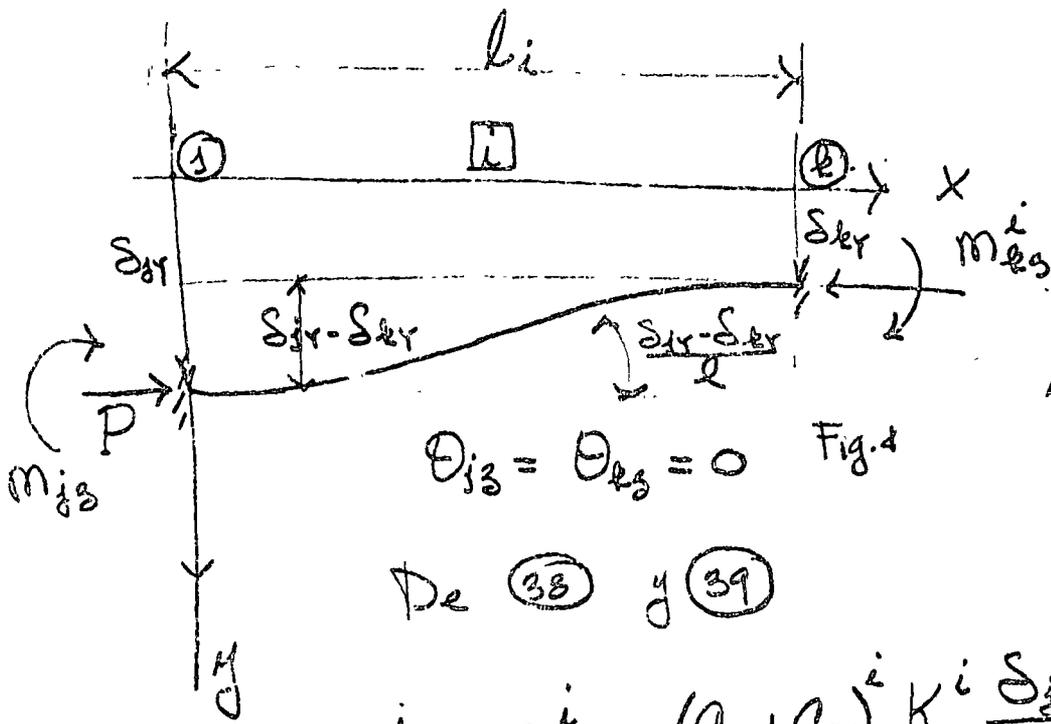
$$M_{j3}^i = C_{13}^i K_3^i \theta_{j3}^i + C_{23}^i K_3^i \theta_{k3} \tag{a}$$

$$0 = C_{23}^i K_3^i \theta_{j3}^i + C_{13}^i K_3^i \theta_{k3}$$

De (a) eliminando  $\theta_{k3}^i$  se obtiene:

$$M_{j3}^i = \left[ C_1 - \frac{(C_2)^2}{C_1} \right]_3^i K_3^i \theta_{j3}^i \tag{5}$$

que para  $P = 0$ ,  $\left[ C_1 - \frac{(C_2)^2}{C_1} \right]_3^i = 3$



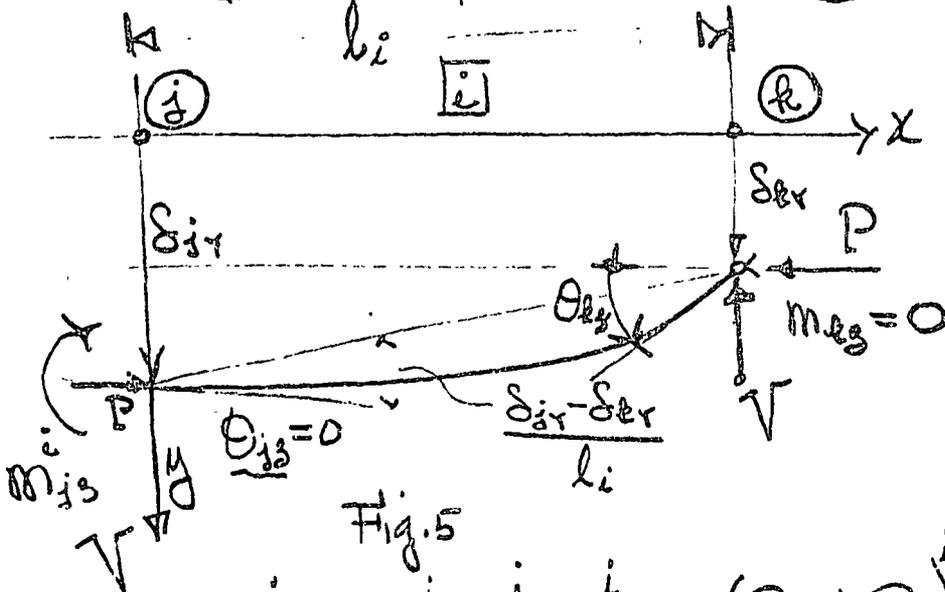
$\theta_{j3} = \theta_{k3} = 0$  Fig. 4

De (38) y (39)

$$m_{j3}^i = m_{k3}^i = (C_{13} + C_{23})^i K_3^i \frac{\delta_{j3} - \delta_{k3}}{l_i} \quad (46)$$

y Para  $P=0$   $m_{j3}^i = m_{k3}^i = 6 K_3^i \frac{\delta_{j3} - \delta_{k3}}{l_i}$

Para articulación en (k)



De (38) y (39)

$$m_{j3}^i = C_{23}^i K_3^i \theta_{k3}^i + (C_{13} + C_{23})^i K_3^i \frac{\delta_{j3} - \delta_{k3}}{l_i} \quad (47)$$

$$0 = C_{13}^i K_3^i \theta_{k3}^i + (C_{13} + C_{23})^i K_3^i \frac{\delta_{j3} - \delta_{k3}}{l_i}$$

Eliminando en (47) a  $\theta_{k3}^i$  se obtiene

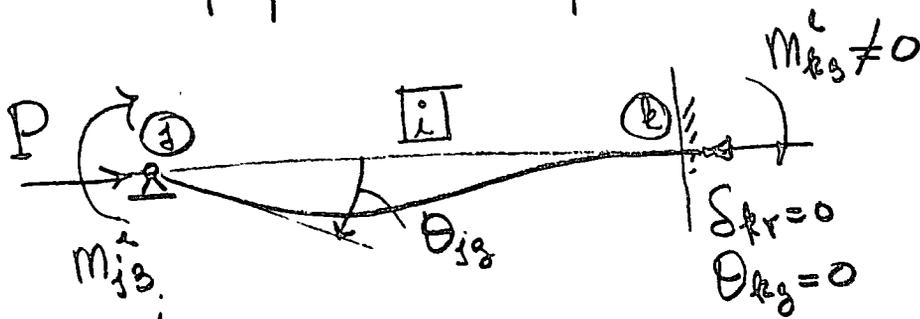
$$M_{j3}^i = \left[ C_{13} - \frac{(C_{23})^2}{C_{13}} \right] K_3^i \frac{\delta_{jr} - \delta_{er}}{l_i} \quad (48)$$

en (48) para  $P=0$  se obtiene

$$M_{j3}^i = 3 K_3^i \frac{\delta_{jr} - \delta_{er}}{l_i} \quad (49)$$

Rigideces flexionantes

Apoyo (k) empotrado (Caso I)



$$\begin{aligned} M_{j3}^i & \neq 0 \\ \delta_{jr} & = 0 \\ \theta_{j3}^i & \neq 0 \\ M_{k3}^i & \neq 0 \end{aligned}$$

De (38) y (39) se obtiene

$$\begin{aligned} M_{j3}^i & = C_{13}^i K_3^i \theta_{j3}^i \\ M_{k3}^i & = C_{23}^i K_3^i \theta_{j3}^i \end{aligned} \quad (50)$$

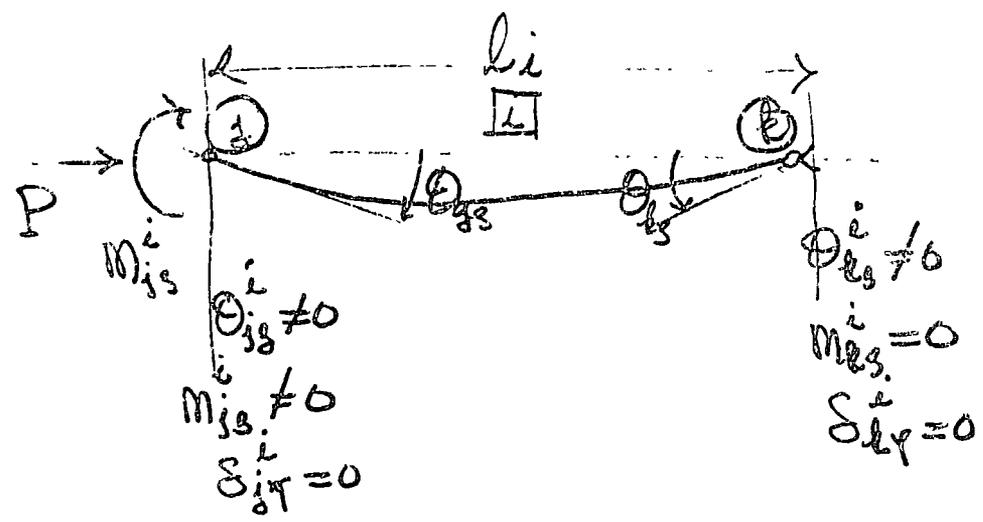
(57°18') Rigidez momento necesario para producir un giro de un radian

$$\frac{M_{j3}^i}{\theta_{j3}^i} = C_{13}^i K_3^i \quad (51)$$

para  $P=0$   $C_{13}^i = 4$

Factor de Transporte:  $\frac{M_{k3}^i}{M_{j3}^i} = \frac{C_{23}^i}{C_{13}^i}$  para  $P=0, 1/2$  (52)

# Apoyo (B) articulado (Caso II)



De (38) y (39) se obtiene

$$\begin{aligned}
 M_{13}^i &= C_{13}^i K_3^i \theta_{13}^i + C_{23}^i K_3^i \theta_{23}^i \\
 0 &= C_{23}^i K_3^i \theta_{13}^i + C_{13}^i K_3^i \theta_{23}^i
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

Eliminando  $\theta_{23}^i$  en (53) se obtiene

$$M_{13}^i = \left[ C_{13}^i - \frac{(C_{23}^i)^2}{C_{13}^i} \right] K_3^i \theta_{13}^i \tag{54}$$

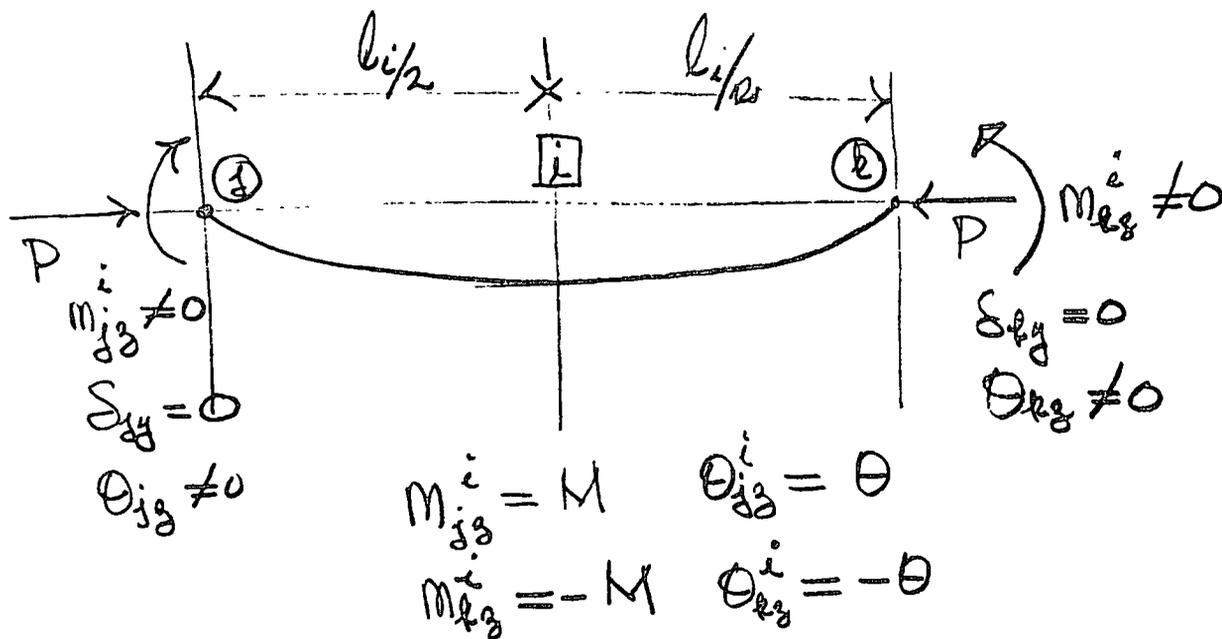
Rigidez de articulación  $\frac{M_{13}^i}{\theta_{13}^i} = \left[ C_{13}^i - \frac{(C_{23}^i)^2}{C_{13}^i} \right] K_3^i$

para  $P=0$   $C_{13}^i - \frac{(C_{23}^i)^2}{C_{13}^i} = 3$

El factor de transporte:  $\frac{M_{23}^i}{M_{13}^i} = 0$  } (55)

# Flexión Simétrica (Caso III)

(30)



De (38) y (39) se obtiene

$$M = C_{13}^i K_3^i \theta + C_{23}^i K_3^i (-\theta) = (C_{13}^i - C_{23}^i) K_3^i \theta \quad (56)$$

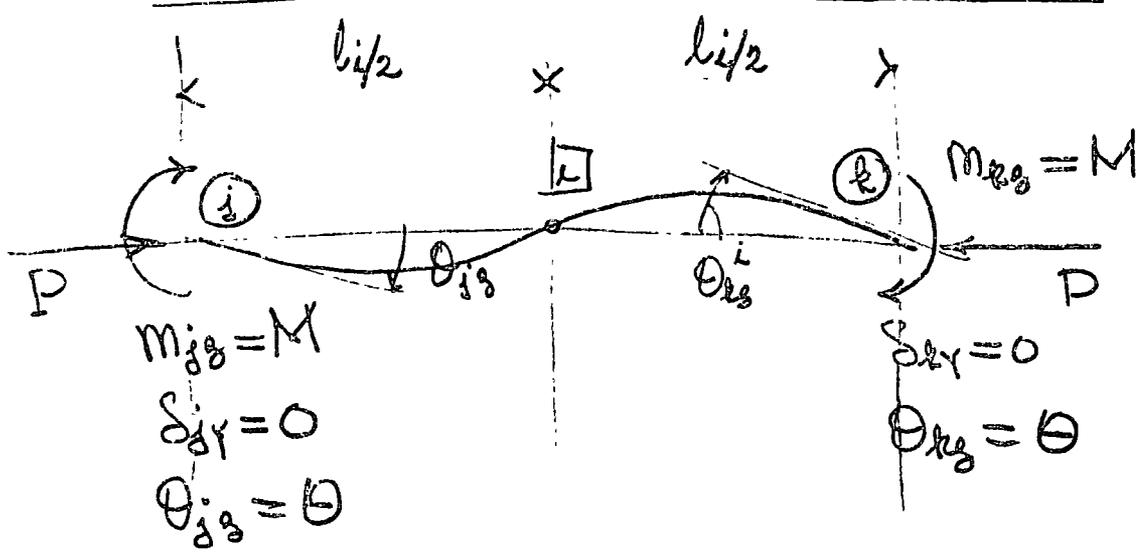
$$-M = C_{23}^i K_3^i \theta - C_{13}^i K_3^i \theta = -(C_{13}^i - C_{23}^i) K_3^i \theta$$

La rigidez de simetría es:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{\theta} &= (C_{13}^i - C_{23}^i) K_3^i \\ \text{para } P=0 \quad C_{13}^i - C_{23}^i &= 2 \end{aligned} \right\} (57)$$

El factor de transporte:  $-1$

# Flexión antisimétrica (Caso IV)



De (38) y (39) se obtiene

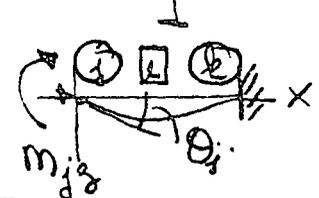
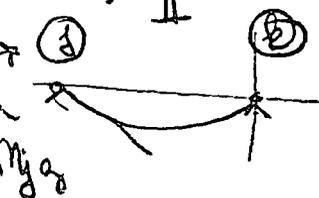
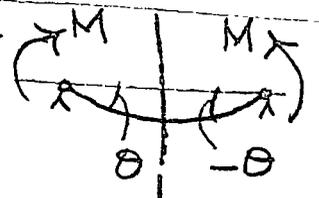
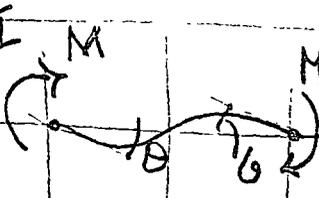
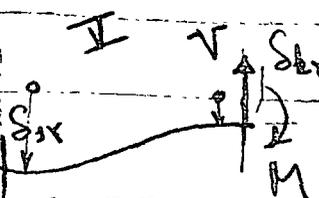
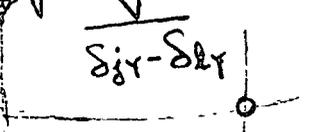
$$M = C_{13}^i K_3^i \Theta + C_{23}^i K_3^i \Theta = (C_{13}^i + C_{23}^i) \Theta \quad (38)$$

$$M = C_{23}^i K_3^i \Theta + C_{13}^i K_3^i \Theta = \quad //$$

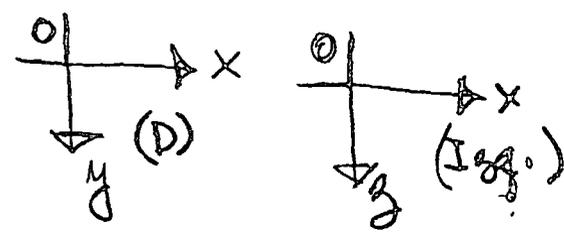
La rigidez de antisimetría es:  $(C_{13}^i + C_{23}^i) K_3^i$ , vale la pena para  $P=0$  es  $(C_{13}^i + C_{23}^i) = 6$ , el factor de

transporte es  $\frac{m_{ee}^i}{m_{ii}^i} = \frac{M}{M} = 1$

# Resumen de Rigideces

Caso	Condiciones de apoyo	Rigidez	Rigidez
I 	<p>Ⓐ</p> $m_{12} \neq 0$ $\delta_{1y} = 0$ $\theta_{1z} \neq 0$	<p>Ⓑ (empot.)</p> $m_{23} \neq 0$ $\delta_{2y} = 0$ $\theta_{2z} = 0$	$P \neq 0$ $C_{12}^i K_s^i$
II 	<p>Ⓐ</p> $m_{12} \neq 0$ $\delta_{1y} = 0$ $\theta_{1z} \neq 0$	<p>Ⓑ (Articulado)</p> $m_{23} = 0$ $\delta_{2y} = 0$ $\theta_{2z} \neq 0$	$P = 0$ $\Delta K_y^i$
III 	$m_{12} = M$ $\delta_{1y} = 0$ $\theta_{1z} = \theta$	$m_{23} = -M$ $\delta_{2y} = 0$ $\theta_{2z} = -\theta$	$\left[ C_{12}^i - \frac{(C_{23}^i)^2}{C_{13}^i} \right] K_y^i$ $3K_y^i$
IV 	$m_{12} = M$ $\delta_{1y} = 0$ $\theta_{1z} = \theta$	$m_{23} = M$ $\delta_{2y} = 0$ $\theta_{2z} = \theta$	$(C_{12}^i - C_{23}^i) K_y^i$ $2K_y^i$
V 	$m_{12} = M$ $\delta_{1y} \neq 0$ $\theta_{1z} = \theta$	$m_{23} = M$ $\delta_{2y} \neq 0$ $\theta_{2z} = \theta$	$(C_{12}^i + C_{23}^i) K_y^i$ $6K_y^i$
VI 	$m_{12} = M$ $\delta_{1y} \neq 0$ $\theta_{1z} = 0$	$m_{23} = M$ $\delta_{2y} \neq 0$ $\theta_{2z} = 0$	$2(C_{12}^i + C_{23}^i) \frac{K_y^i}{l_i}$ $\frac{12 K_y^i}{l_i}$
			$\left[ C_{12}^i - \frac{(C_{23}^i)^2}{C_{13}^i} \right] \frac{K_y^i}{l_i}$ $\frac{2 K_y^i}{l_i}$

(Tabla 1)



Donde:

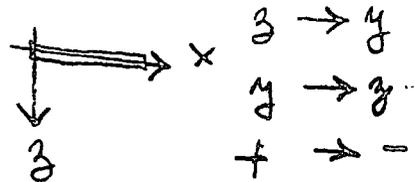
$$C_{12}^i = \frac{1 - d_z^i \cot d_z^i}{2 \tan \frac{d_z^i}{2} - 1}$$

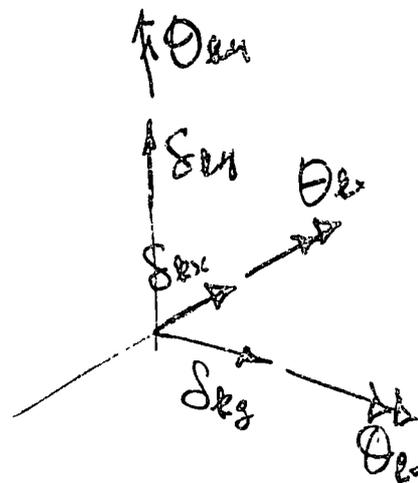
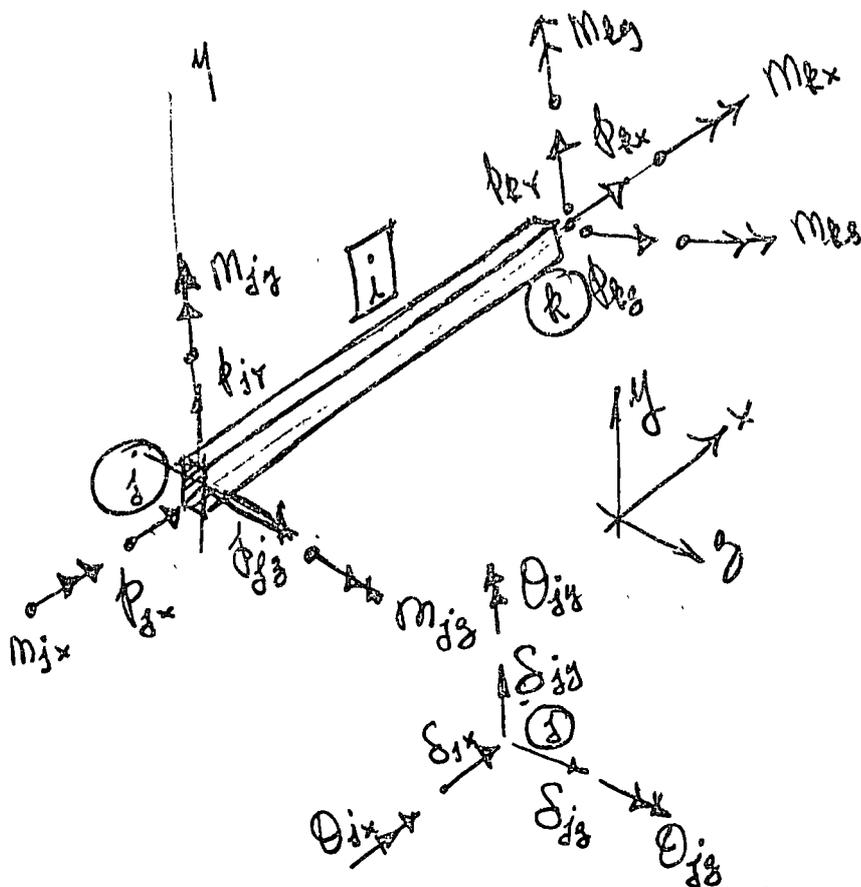
$$C_{23}^i = \frac{d_z^i \cot d_z^i - 1}{2 \tan \frac{d_z^i}{2} - 1}$$

$$K_y^i = \frac{EI_z^i}{l_i}$$

$$d_z^i = \sqrt{\frac{Pl_i^3}{EI_z^i}}$$

$$= \sqrt{\lambda_z^i \cdot l_i}$$





$$\begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \\ \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \\ P_{jx} \\ P_{jy} \\ P_{jz} \\ \theta_{jx} \\ \theta_{jy} \\ \theta_{jz} \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1-12} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2-12} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \dots & k_{3-12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{12-1} & k_{12-2} & k_{12-3} & \dots & k_{12-12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{ix} \\ S_{iy} \\ S_{iz} \\ \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \\ S_{jx} \\ S_{jy} \\ S_{jz} \\ \theta_{jx} \\ \theta_{jy} \\ \theta_{jz} \end{Bmatrix}_i + \{ Q \} + \{ M_F \}_i$$

# SIMETRIA Y ANTISIMETRIA

a) Simetría - Una estructura geométrica es simétrica respecto a un eje se dice ser simétrica, cuando girada  $180^\circ$  respecto a dicho eje est y carga resulta igual

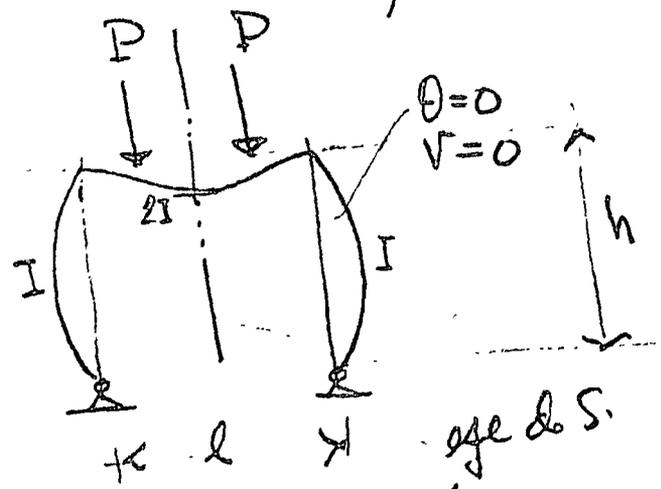


Fig. 10

b) Antisimetría - Una estructura geométrica se dice que es antisimétrica, cuando girada  $180^\circ$  respecto al eje de antisimetría, la est. y la carga resulta idéntica solo cambia la carga de

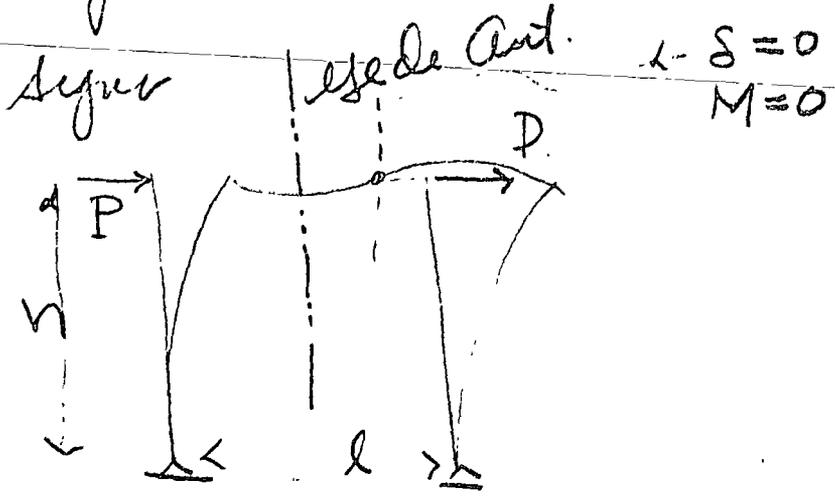


Fig. 11

Falso est. geométricoa simi bajo cualquier sistema de carga se puede decomponer en un simi. y uno Ant.

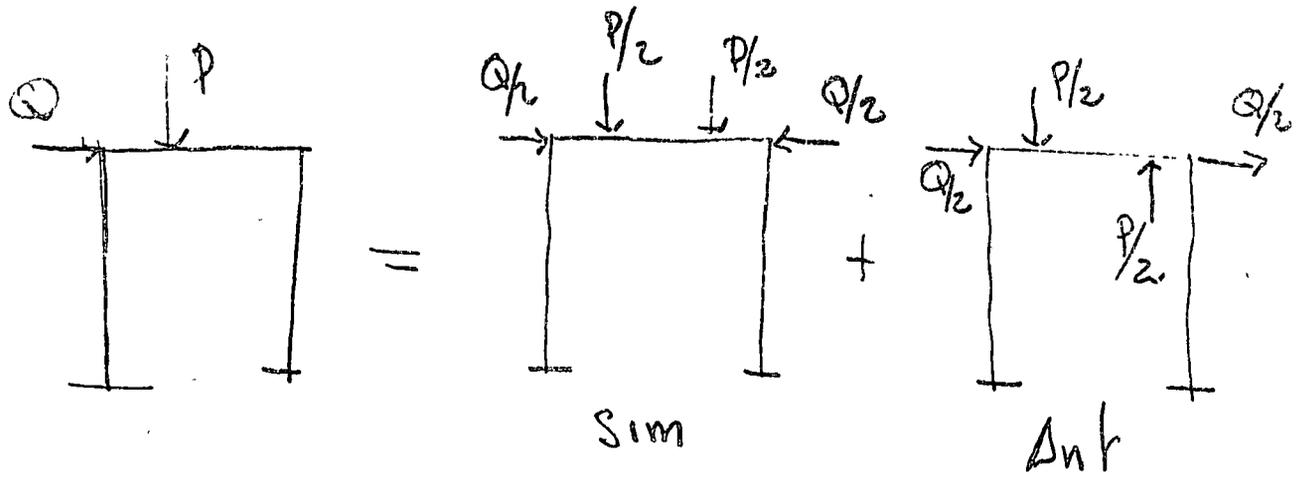
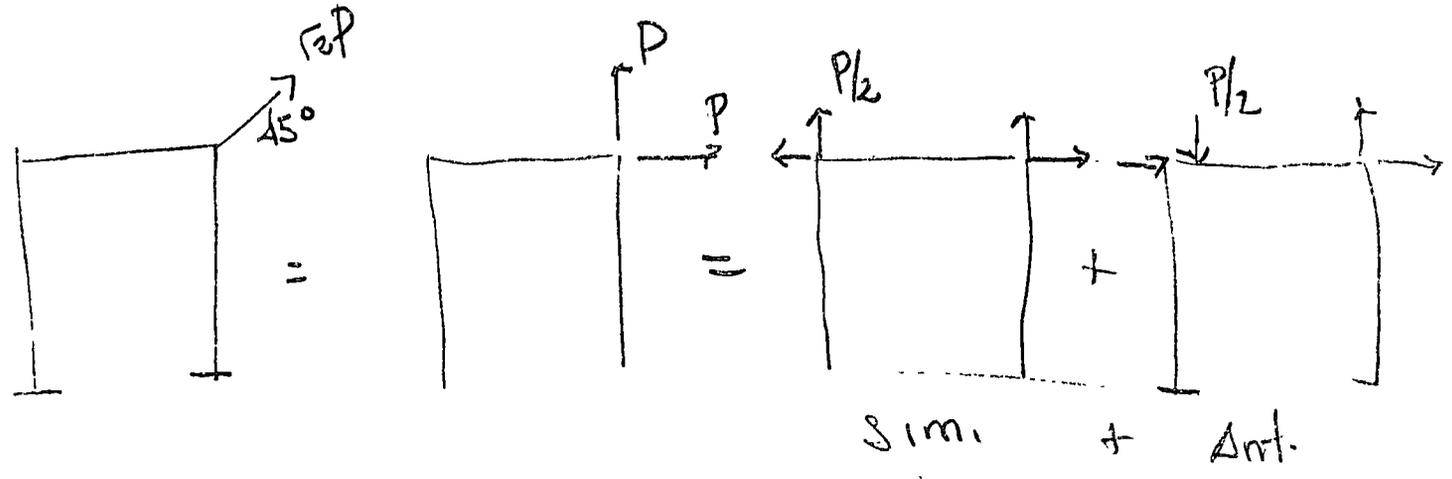


Fig. 12



Prob. 2 Derive la ecuación de la curva elast.  $y = f(x)$ , para el caso gen.  $P \neq 0$  (Expise  $y(x)$  en terminos de  $\theta_{AB}$ ,  $\theta_{BA}$ ,  $S_{AB}$ ,  $S_{BA}$ )

# EST. DE COLUMNAS CONTINUAS Y EST.

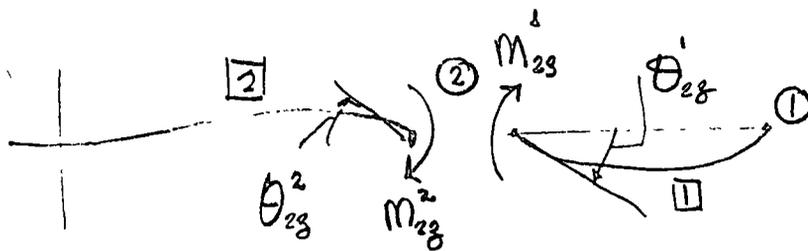
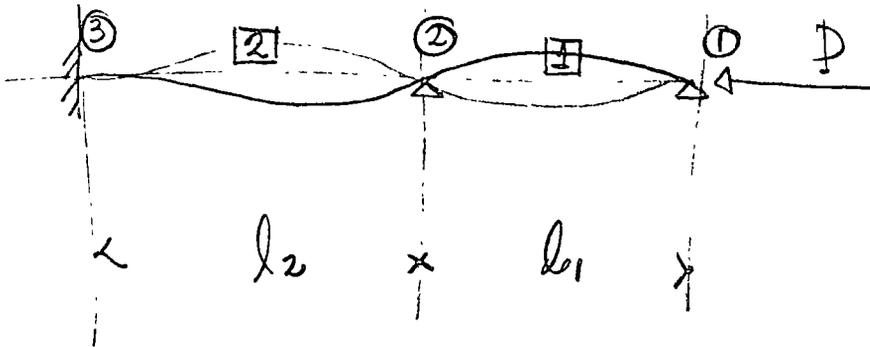


Fig. 14

De la Ec. (54) aplicandola a la barra II,

$$M_{23}^1 = \left[ C_{13}^1 - \frac{(C_{23}^2)^2}{C_{13}^2} \right] K_3^1 \theta_{23} \quad (59)$$

De la Ec (60) aplicada a la barra I,

$$M_{23}^2 = C_{13}^2 K_3^2 \theta_{23} \quad (60)$$

de  $\sum M = 0$  en el nodo (2)

$$M_{23}^1 + M_{23}^2 = 0 \quad (61)$$

subst (59) y (60) en (61) se obtiene

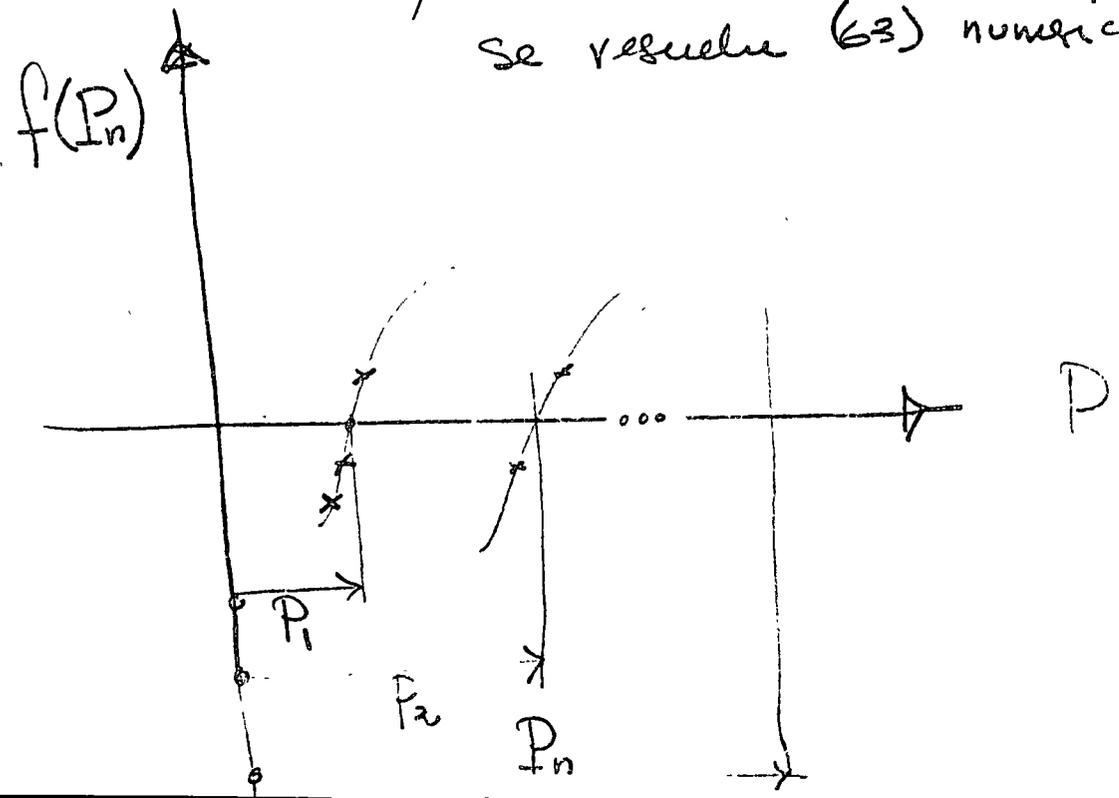
$$\left[ C_{13}^1 - \frac{(C_{23}^2)^2}{C_{13}^2} \right] \frac{EI_3^1}{l_1} \theta_{23} + C_{13}^2 \frac{EI_3^2}{l_2} \theta_{23} = 0 \quad (62)$$

subst (40) y (A1) en (62) y simplifcand

$$f(P_n) = \frac{(d'_3)^2}{1 - (d'_3)^2 \cot^2(d'_3)^2} \frac{EI_3^1}{l_1} + \frac{1 - (d_3^2)^2 \cot^2 d_3^2}{2 \tan \frac{d_3^2}{2}} \frac{EI_3^2}{l_2} = 0 \quad (63)$$

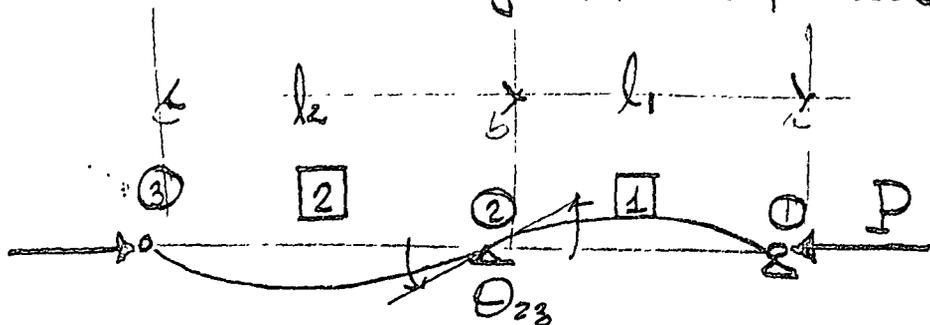
donde  $d'_3 = \sqrt{\frac{Pl_1^2}{EI_3^1}}$        $d_3^2 = \sqrt{\frac{Pl_2^2}{EI_3^2}}$

La condición de equilibrio (61) y (62) se le denomina criterio de Est. (63) tiene solo una incógnita que es  $P_n$ . El menor valor de  $P$  o sea  $P_1$  que satisface la ecuación característica (63) es la carga crítica - de pandeo de la Est. de la Fig 14 se resuelve (63) numéricamente.



Consid. en Fig. 14 ant. en (3)

28



$$\left[ C_{13}^1 - \frac{(C_{23}^1)^2}{C_{13}^1} \right] \frac{EI_3^1}{l_1} \theta_{23} + \left[ C_{12}^2 - \frac{(C_{23}^2)^2}{C_{12}^2} \right] \frac{EI_3^2}{l_2} \theta_{23} = 0 \quad (64)$$

Subst. (40) y (41) en (64) se tiene:

$$\frac{(d_3^1)^2}{1 - d_3^1 \cot d_3^1} EI_3^1 + \frac{(d_3^2)^2}{1 - d_3^2 \cot d_3^2} \frac{EI_3^2}{l_2} = 0 \quad (65)$$

El menor valor de P que satisface (65) es la carga crítica de pandeo

Para el caso particular cuando  $I_3^1 = I_3^2, l_1 = l_2$

(65) se transforma a

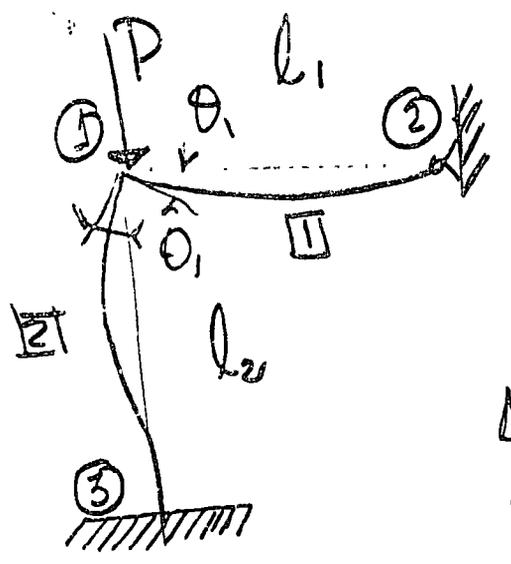
$$\frac{(d_3)^2 \operatorname{sen} d_3}{\operatorname{sen} d_3 - d_3 \operatorname{cose} d_3} = 0 \quad (66)$$

para que (66) sea cero  $\operatorname{sen} d_3 = 0$ . por lo tanto

$$d_3 = \frac{n\pi}{2} \quad \text{y para } n=1$$

$$\sqrt{\frac{P_{cr} l^2}{EI}} = \pi \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (67)$$

Def. la es. que define la carga crítica de la Est. mostrada.



apl. (45) a la barra II

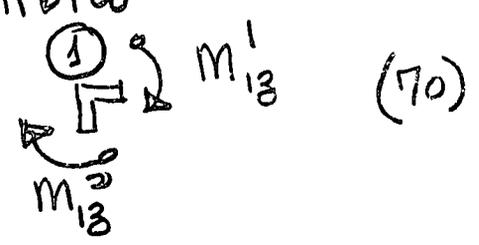
$$M_{13}^1 = \left[ C_{13}^1 - \frac{(C_{23}^1)^2}{C_{13}^2} \right] K_3^1 \theta_{13} \quad (68)$$

apl. (50) a barra I se tiene

$$M_{13}^2 = C_{13}^2 K_3^2 \theta_{13} \quad (69)$$

La cond. de est. es el equilibrio

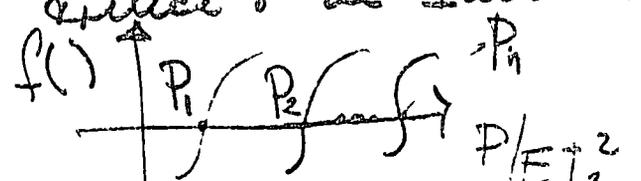
$$M_{13}^1 + M_{13}^2 = 0$$

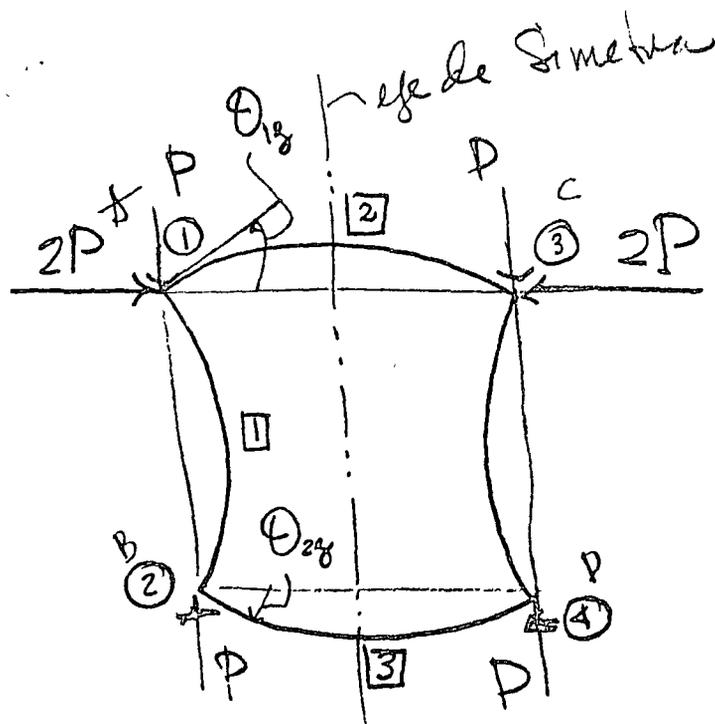


Subst. (40), (41), (68) y (69) en (70) se obtiene

$$f\left(\frac{P}{EI_3^2}\right) = \frac{1 - l_2 \sqrt{\frac{P}{EI_3^2}} \cot l_2 \sqrt{\frac{P}{EI_3^2}} \frac{EI_3^2}{l_2} + \frac{3 EI_3^1}{l_1}}{2 \tan \frac{l_2}{2} \sqrt{\frac{P}{EI_3^2}} - 1} = 0 \quad (71)$$

El menor valor de P que satisfase la es. caract. (71) es la carga crítica o de Pander.

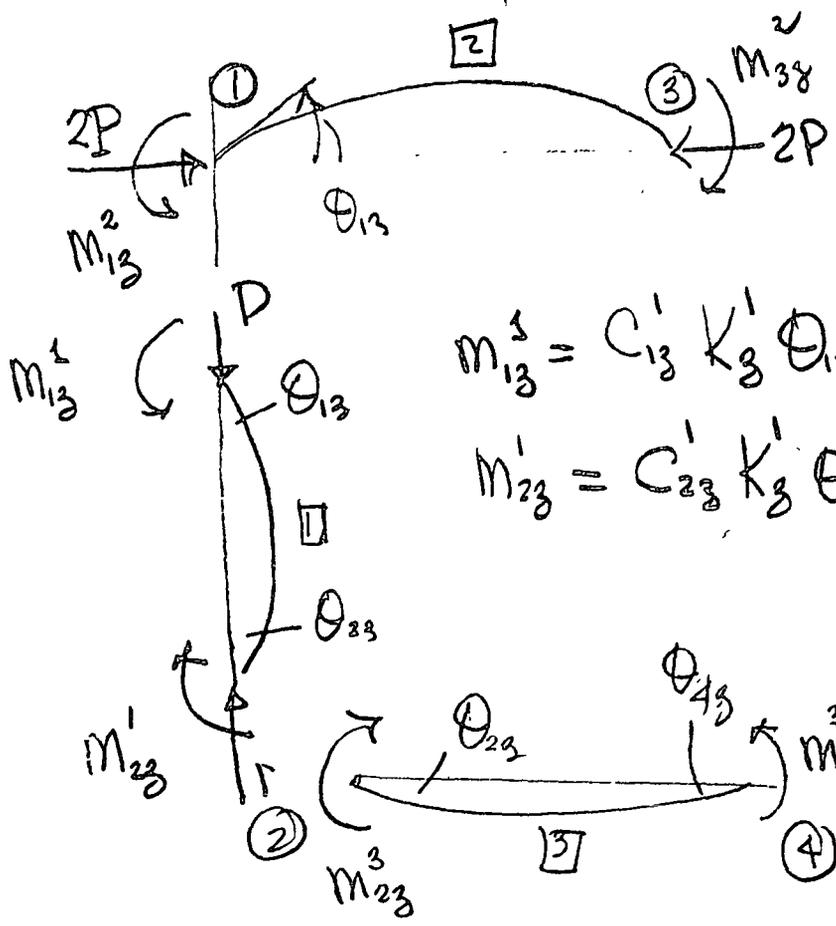




$$I_1 = I_2$$

$$l_1 = l_2$$

$$m_{13}^2 = (C_{13}^2 - C_{23}^2) K_3^2 \theta_{13}$$



$$m_{13}^1 = C_{13}^1 K_3^1 \theta_{13} + C_{23}^1 K_3^1 \theta_{23}$$

$$m_{23}^1 = C_{23}^1 K_3^1 \theta_{23} + C_{13}^1 K_3^1 \theta_{13}$$

$$m_{23}^3 = 2 K_3^3 \theta_{23}$$

Equilibrio (o Criterio de Estabil.)

$$\sum M_{13} = 0$$

$$\sum M_{23} = 0$$

de  $M_{13}^2 + M_{13}^1 = 0$

$$(C_{13}^2 - C_{23}^2) K_3^2 \theta_{13} + C_{13}^1 K_3^1 \theta_{13} + C_{13}^1 K_3^1 \theta_{13} = 0$$

$$(C_{13}^2 - C_{23}^2 + C_{13}^1) \theta_{13} + C_{13}^1 \theta_{23} = 0$$


---

de  $M_{23}^1 + M_{23}^3 = 0$

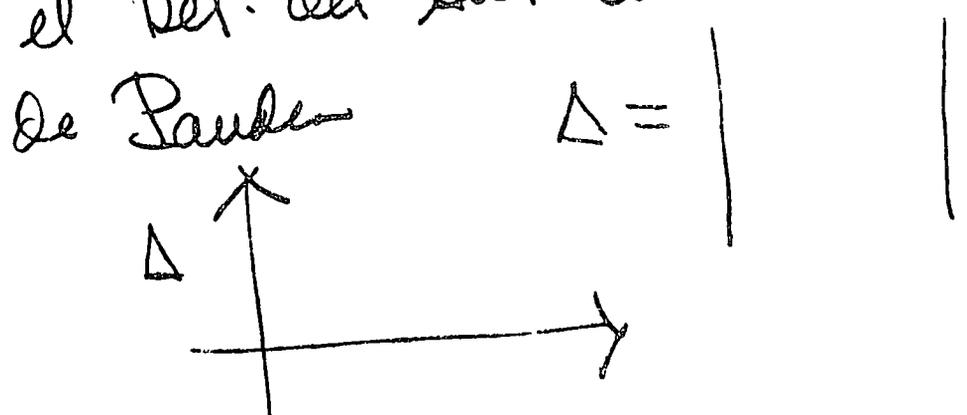
$$C_{23}^1 K_3^1 \theta_{23} + C_{13}^1 K_3^1 \theta_{13} + 2 K_3^3 \theta_{23} = 0$$

$$(2 + C_{23}^1) \theta_{23} + C_{13}^1 \theta_{13} = 0$$


---

$$\begin{bmatrix} (C_{13}^2 - C_{23}^2 + C_{13}^1) & C_{13}^1 \\ C_{13}^1 & 2 + C_{23}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{13} \\ \theta_{23} \end{Bmatrix} = 0$$

El menor valor de P que hace cero el Det. del Sist. Ant. es la carga crítica de Pandeo



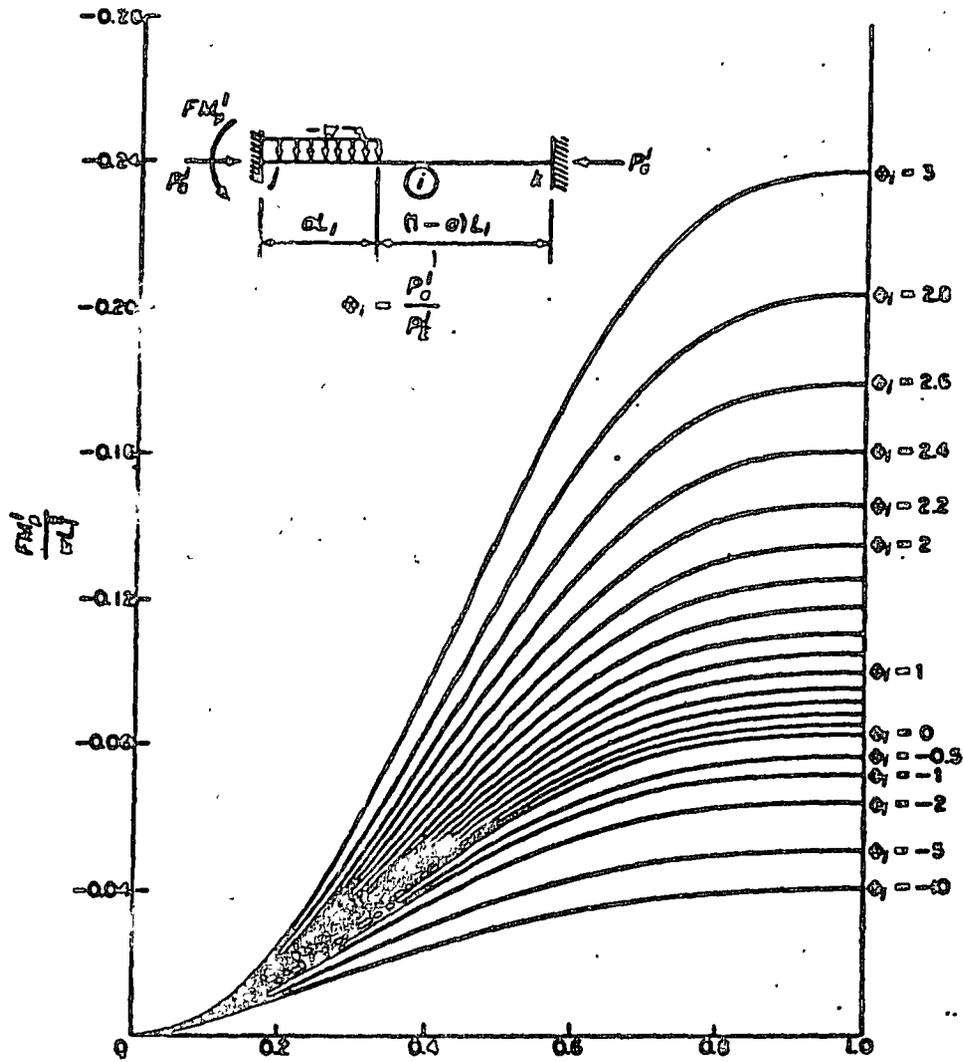


Fig. 8-7 Curves for fixed end moment at *j*-end due to partially distributed lateral load.

and

$$B = \frac{L_1^3}{2EI} FM'_0 \quad (8-72b)$$

Inserting these values of *A* and *B* into Eq. (8-70) and rearranging yields

$$\frac{EI}{L_1^3} y = FM'_0 \cos\left(\frac{u}{L_1} x\right) - \frac{L_1(FP'_0)}{u} \sin\left(\frac{u}{L_1} x\right) + FP'_0(x) - FM'_0 \quad 0 \leq x \leq aL_1 \quad (8-73)$$

$$\begin{aligned}
 FM'_D = -WL_1 & \left[ \frac{\alpha(1 - \cosh u_1) - (1 - \cosh \alpha u_1) \left( \frac{\sinh u_1}{u_1} - \cosh u_1 \right)}{2(1 - \cosh u_1) + u_1 \sinh u_1} \right. \\
 & \left. + \frac{\left( \frac{1 - \cosh u_1}{u_1} + \sinh u_1 \right) \sinh \alpha u_1}{2(1 - \cosh u_1) + u_1 \sinh u_1} \right] \quad (8-37)
 \end{aligned}$$

which is applicable for the case of a tensile axial load.

The fixed end moments due to a series of concentrated loads may be obtained by the method of superposition. The shear forces  $FP'_1$  and  $FP'_2$  can be obtained by considering equilibrium conditions of the beam element.

Curves relating fixed end moments due to a concentrated lateral load to values of span ratio  $\alpha$  are shown in Fig. 8-10.

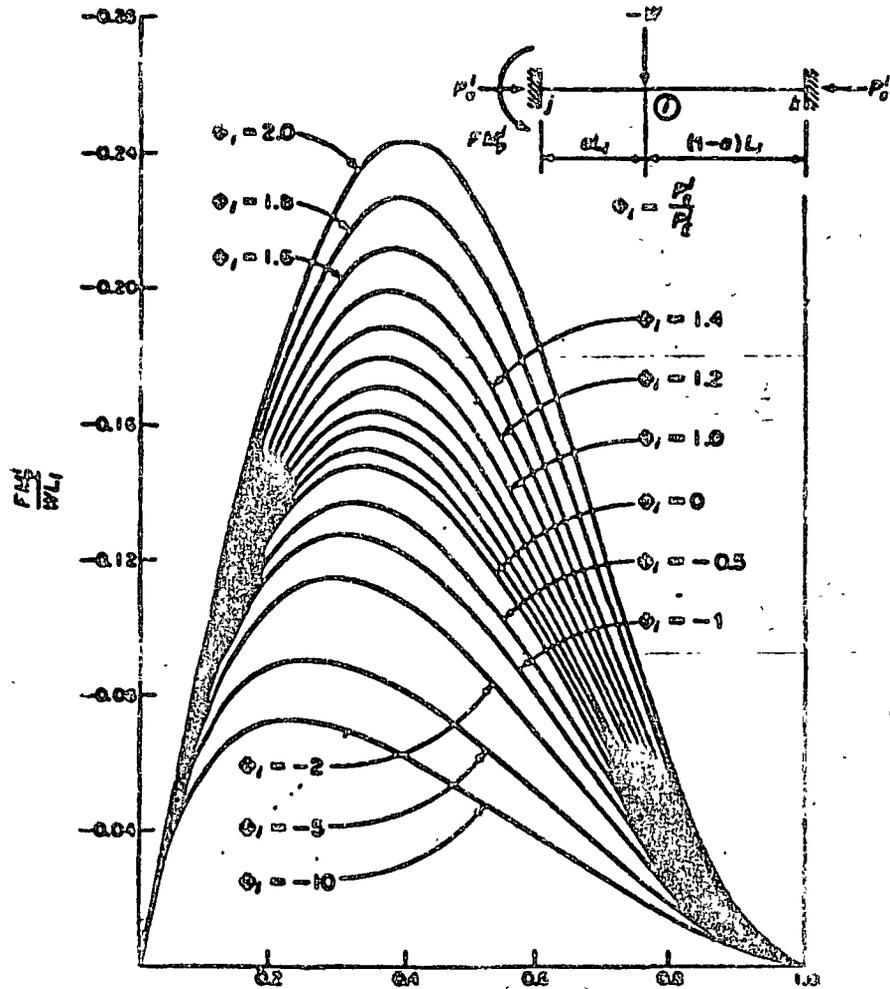


Fig. 8-10 Curves for fixed end moment due to concentrated lateral load.

A P E N D I C E

Valores de "C<sub>1</sub>" y "C<sub>2</sub>" para distintos valores de  $P/P_{cr}$   
 donde

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$P/P_{cr}$	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	$P/P_{cr}$	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>
0.00	4.000	2.000	1.05	2.375	2.500
0.05	3.933	2.016	1.10	2.282	2.535
0.10	3.866	2.033	1.15	2.187	2.572
0.15	3.798	2.051	1.20	2.090	2.609
0.20	3.729	2.070	1.25	1.990	2.649
0.25	3.659	2.088	1.30	1.888	2.690
0.30	3.588	2.108	1.35	1.784	2.733
0.35	3.516	2.128	1.40	1.678	2.778
0.40	3.443	2.149	1.45	1.568	2.825
0.45	3.369	2.171	1.50	1.456	2.874
0.50	3.294	2.193	1.55	1.342	2.926
0.55	3.217	2.216	1.60	1.223	2.980
0.60	3.140	2.240	1.65	1.102	3.036
0.65	3.061	2.265	1.70	0.977	3.096
0.70	2.980	2.291	1.75	0.849	3.158
0.75	2.899	2.317	1.80	0.716	3.224
0.80	2.815	2.345	1.85	0.580	3.293
0.85	2.731	2.374	1.90	0.449	3.366
0.90	2.644	2.404	1.95	0.293	3.443
0.95	2.557	2.435	2.00	0.142	3.524
1.00	2.467	2.467	2.05	-0.013	3.610
1.05	2.375	2.500	2.10	-0.175	3.701

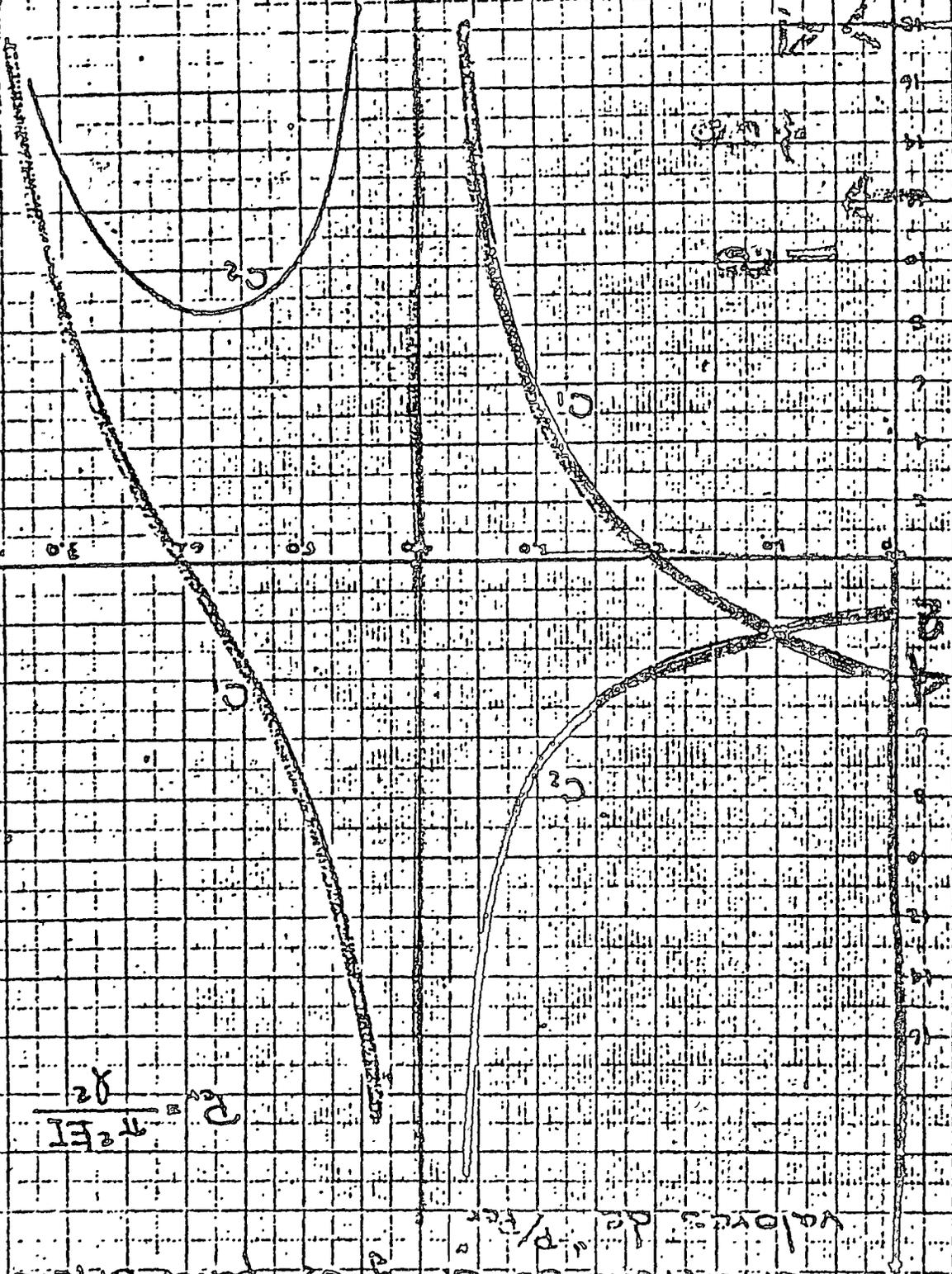
$P/P_{cr}$	$C_1$	$C_2$
2.15	-0.344	3.798
2.20	-0.519	3.901
2.25	-0.702	4.010
2.30	-0.892	4.126
2.35	-1.091	4.250
2.40	-1.300	4.383
2.45	-1.519	4.525
2.50	-1.749	4.677
2.55	-1.992	4.841
2.60	-2.249	5.018
2.65	-2.520	5.208
2.70	-2.809	5.415
2.75	-3.116	5.639
2.80	-3.444	5.884
2.85	-3.797	6.151
2.90	-4.176	6.444
2.95	-4.586	6.767
3.00	-5.032	7.123
3.05	-5.518	7.520
3.10	-6.052	7.962
3.15	-6.641	8.459
3.20	-7.297	9.021
3.25	-8.032	9.661
3.30	-8.863	10.395
3.35	-9.692	11.246
3.40	-10.908	12.242
3.45	-12.192	13.425
3.50	-13.719	14.847
3.55	-15.570	16.576

$P/P_{cr}$	$C_1$	$C_2$
3.60	-17.867	18.786
3.65	-20.800	21.611
3.70	-24.886	25.388
3.75	-30.098	30.687
3.80	-38.178	39.653
3.85	-51.593	51.953
3.90	-70.349	70.591
3.95	-98.447	98.59
4.00	427,637.0	-427,637.0
4.05	161.35	-161.47
4.10	81.314	-81.565
4.15	54.569	-54.950
4.20	41.150	-41.663
4.25	33.061	-33.709
4.30	27.637	-28.422
4.35	23.735	-24.660
4.40	20.784	-21.852
4.45	18.465	-19.680
4.50	16.590	-17.954
4.55	15.035	-16.553
4.60	13.722	-15.396
4.65	12.592	-14.427
4.70	11.608	-13.606
4.75	10.738	-12.904
4.80	9.961	-12.299
4.85	9.261	-11.775
4.90	8.623	-11.319
4.95	8.033	-10.919
5.00	7.498	-10.569

Gráficas de  $C_1$  y  $C_2$  para diferentes valores de  $\mu/\epsilon_0$

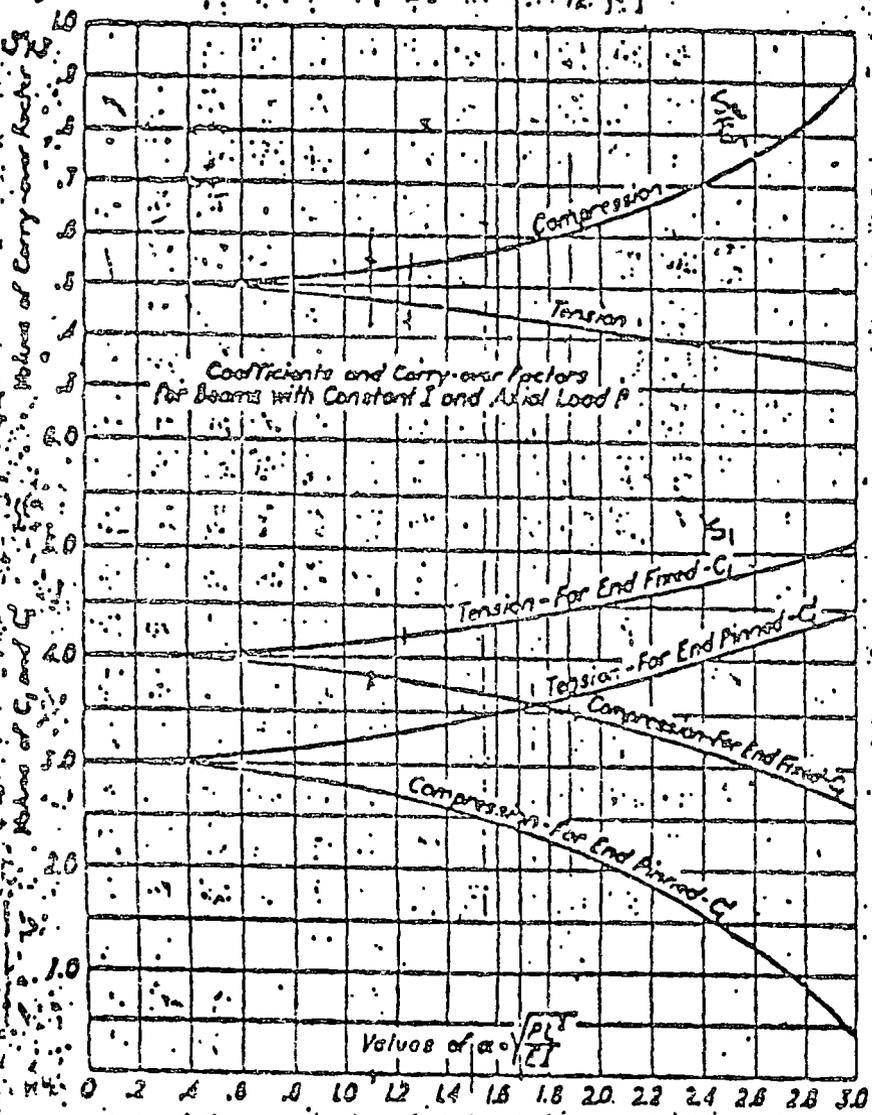
$$C_1 = \frac{\mu^2}{\epsilon_0^2}$$

$\mu/\epsilon_0$



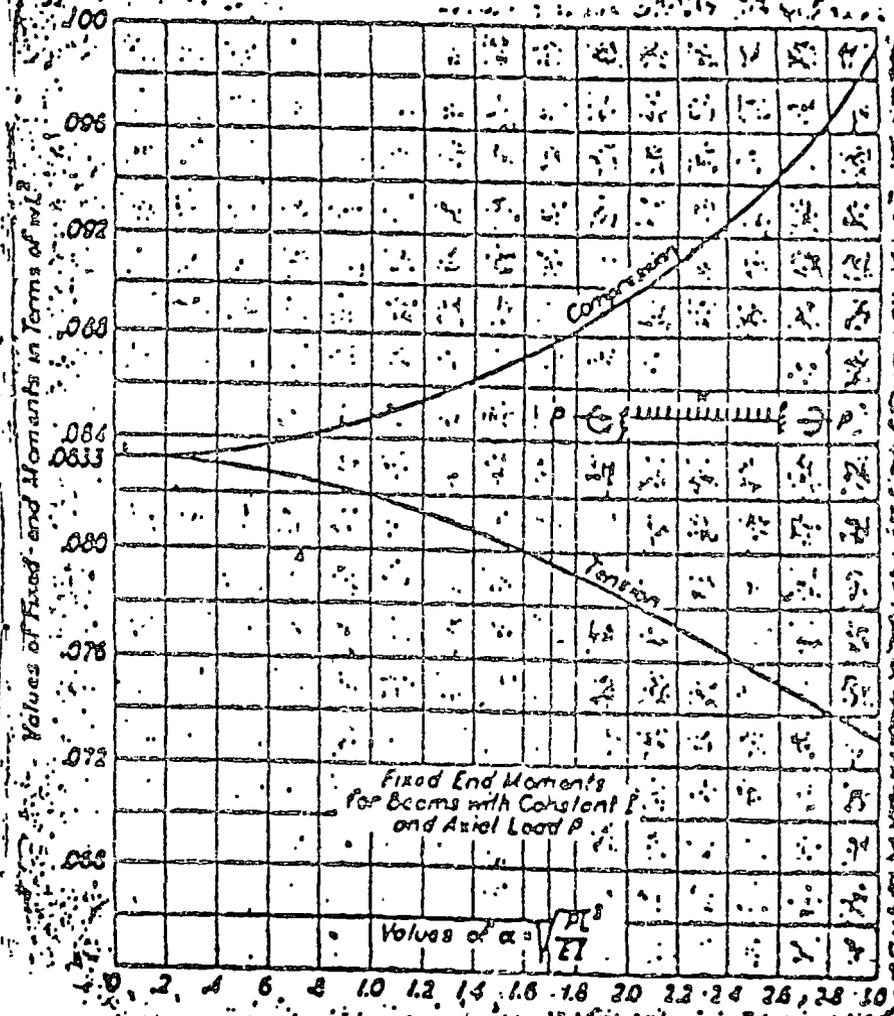
APPENDIX

COEFFICIENTS FOR MOMENTS WITH AXIAL LOAD AND CONSTANT CROSS SECTION



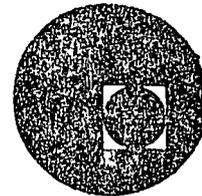
APPENDIX

FIXED-END MOMENTS FOR A UNIFORM LOAD APPLIED TO MEMBERS WITH AXIAL LOAD AND CONSTANT CROSS SECTION





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam

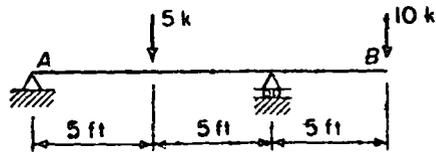


ANALISIS ESTRUCTURAL

TEMA: PROBLEMAS SOBRE FLEXIBILIDAD Y RIGIDEZ.

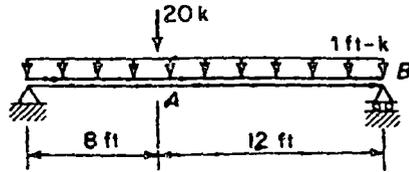
TOMADO DE: COMPUTER METHODS OF  
ESTRUCTURAL ANALYSIS, DE FRED W. BEAUFIT.  
BEAUFIT ET AL. PAGES. 73-76, 138-142,  
286-295.

FEBRERO-MARZO, 1978.



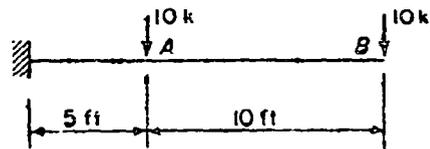
$EI = \text{Constant}$

Prob. 3-1



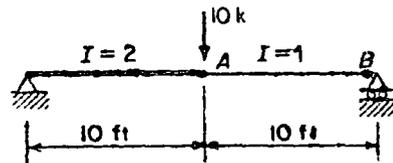
$EI = \text{Constant}$

Prob. 3-2



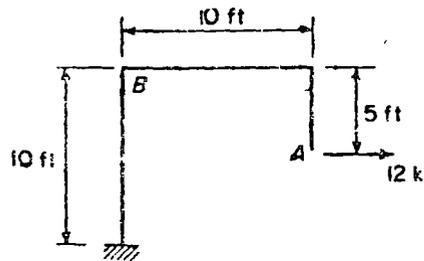
$EI = \text{Constant}$

Prob. 3-3



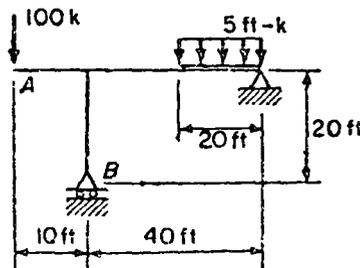
$E = \text{Constant}$

Prob. 3-4



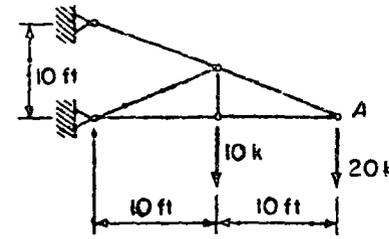
$EI = \text{Constant}$

Prob. 3-5



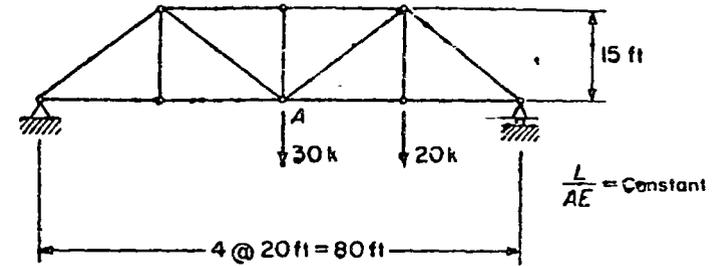
$EI = \text{Constant}$

Prob. 3-6



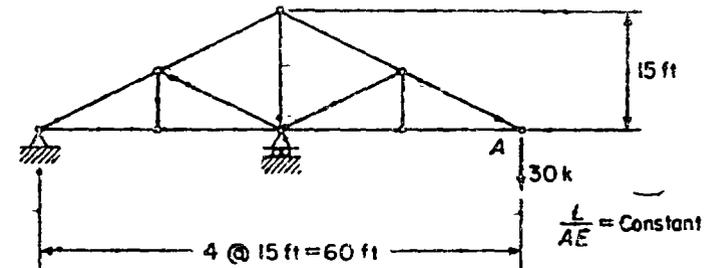
$\frac{L}{AE} = \text{Constant}$

Prob. 3-7



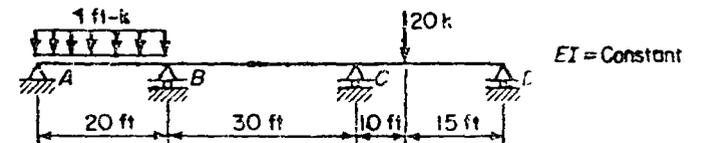
$\frac{L}{AE} = \text{Constant}$

Prob. 3-8



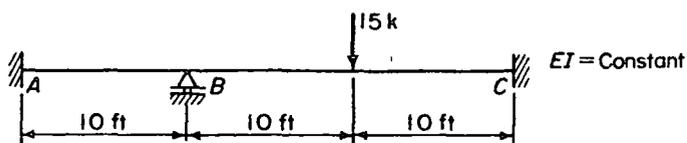
$\frac{L}{AE} = \text{Constant}$

Prob. 3-9

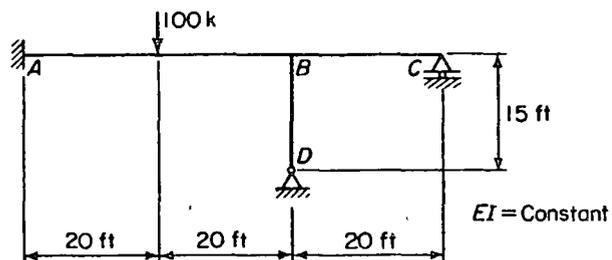


$EI = \text{Constant}$

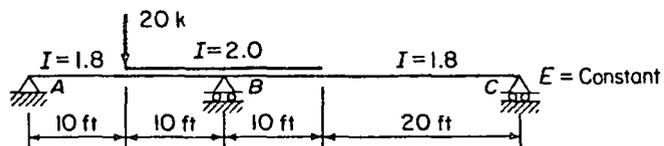
Prob. 3-16



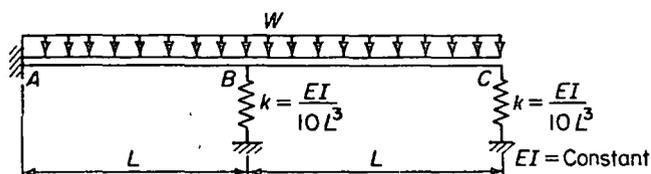
Prob. 3-17



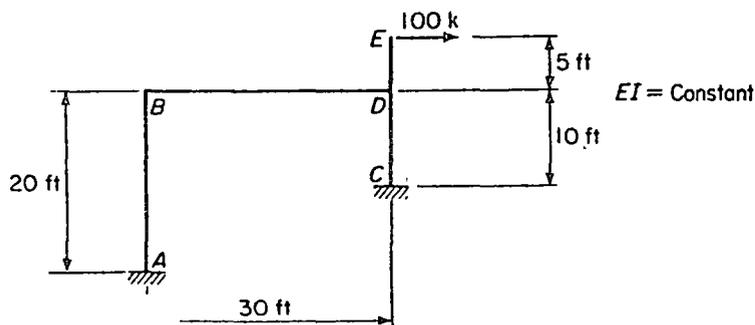
Prob. 3-18



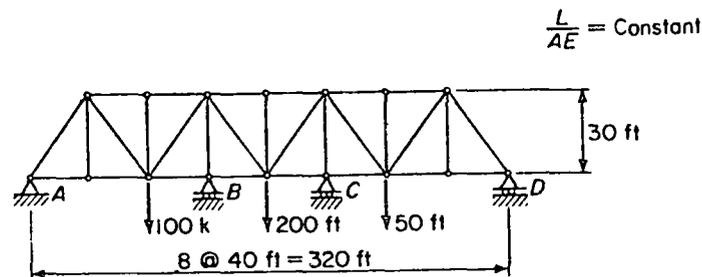
Prob. 3-19



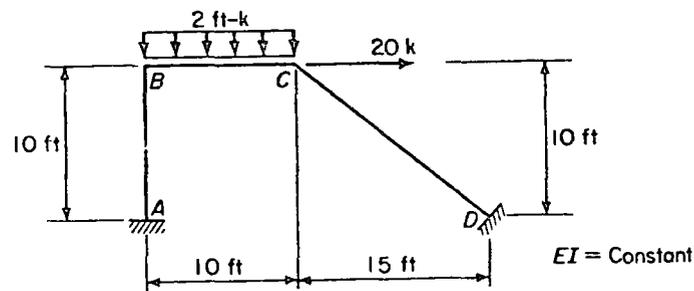
Prob. 3-20



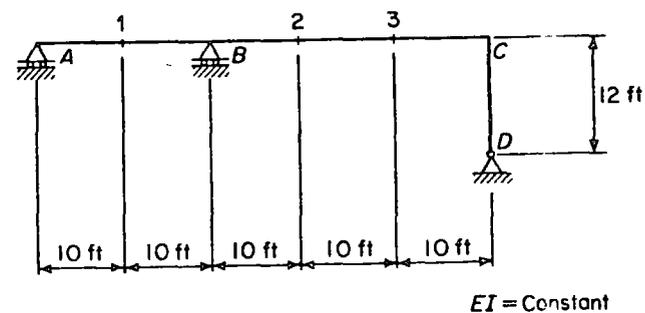
Prob. 3-21



Prob. 3-22



Prob. 3-23



Load case 1 - a single vertical 20 k load at point 1  
 Load case 2 - a single vertical 20 k load at point 2  
 Load case 3 - a single vertical 20 k load at point 3

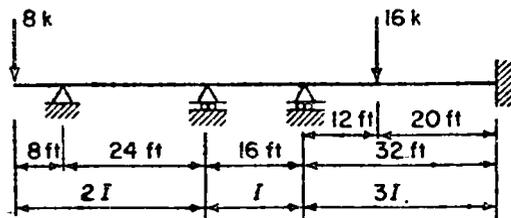
Prob. 3-24

SELECTED REFERENCES

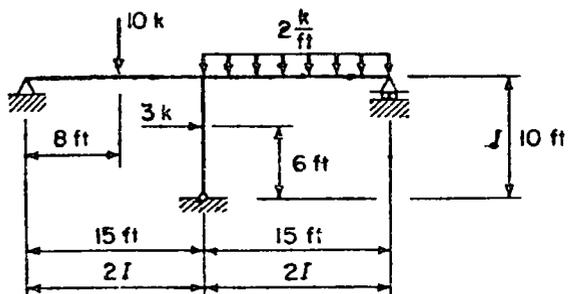
- 3-1 Rogers, G. L. and M. L. Causey, *Mechanics of Engineering Structures*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- 3-2 Carpenter, Samuel, *Structural Mechanics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.

4-7  
Problems

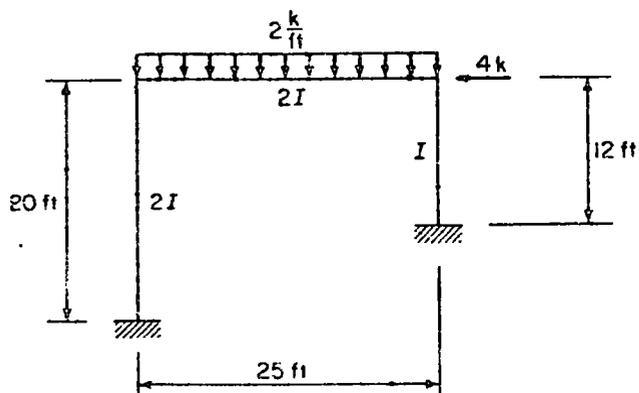
4-1 to 4-6. Analyze the structural system for the indicated loading, and draw the shear and moment diagrams for each member;  $E = \text{constant}$  and the relative value of moment of inertia is indicated for each member.



Prob. 4-1

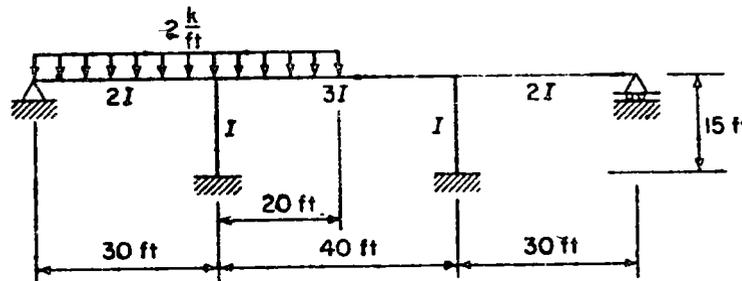


Prob. 4-2

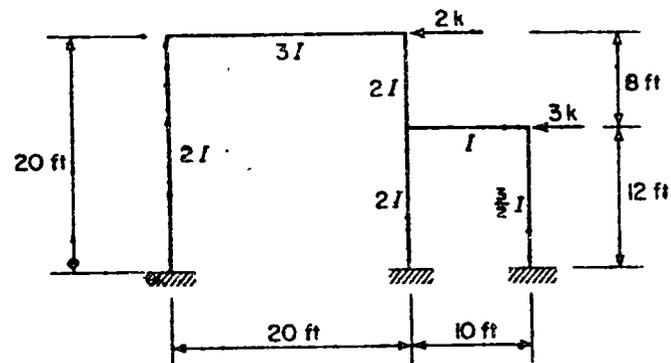


Prob. 4-3

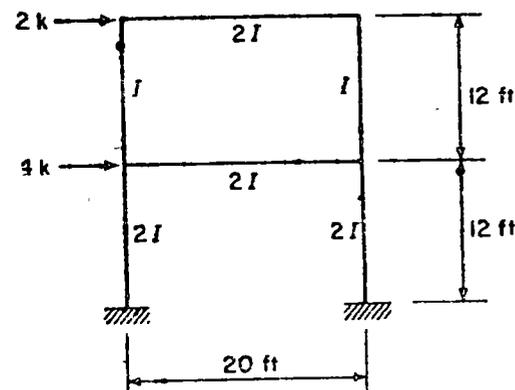
c. 4-7



Prob. 4-4



Prob. 4-5



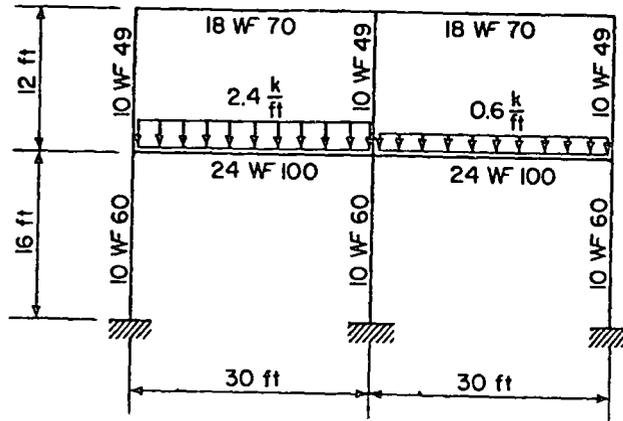
Prob. 4-6

4-7. Analyze the rigid frame of Prob. 4-2 for a settlement of the center support of 0.6 in.;  $I = 500 \text{ in}^4$ ,  $E = 30,000 \text{ ksi}$ .

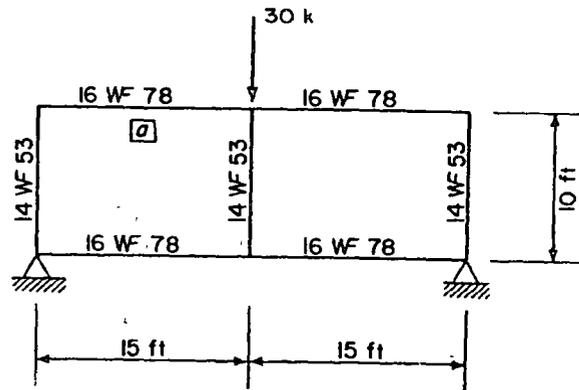
4-8. Determine the final member end actions and the support reactions for the frame of Prob. 4-3 caused by a clockwise rotation of the left support of  $2^\circ$ ;  $I = 5000 \text{ in}^4$ ,  $E = 3000 \text{ ksi}$ .

4-9. Analyze the planar orthogonal frame of Prob. 4-4 for a settlement of the left column support of 0.6 in. and of the right column support of 0.8 in.;  $I = 6000 \text{ in}^4$ ,  $E = 3000 \text{ ksi}$ .

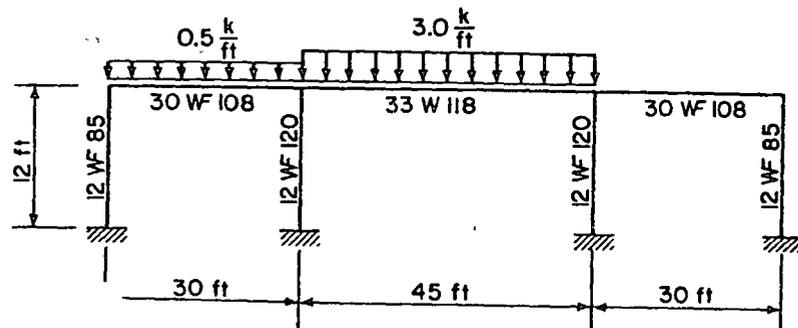
4-10 to 4-12. Calculate the final member end actions and the support reactions for the indicated loading of the structure, and draw the shear and moment diagrams for each member;  $E = 30,000 \text{ ksi}$ .



Prob. 4-10



Prob. 4-11

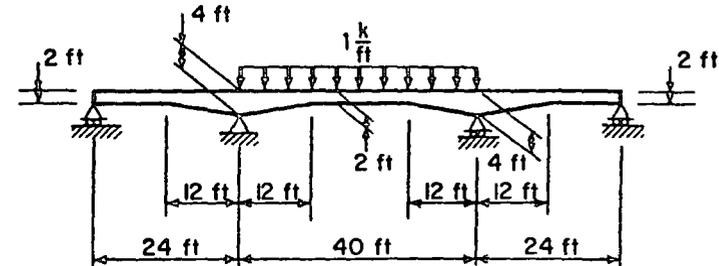


Prob. 4-12

4-13. Determine the final member end actions and the support reactions for the frame of Prob. 4-11 if member  $a$  is fabricated with a  $6^\circ$  bend (rotating the right end of the member counterclockwise) at a point 5 ft from the left end of the member.

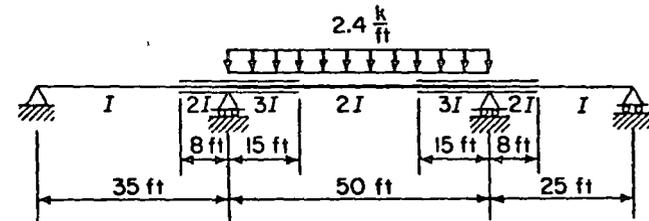
4-14. Analyze the frame of Prob. 4-12 for a fabrication error of 0.75 in. which resulted in the 33 W 118 being too short.

4-15. Analyze the continuous beam for the given loading. The beams are 1.5-ft wide and have straight haunches;  $E = 3000 \text{ ksi}$ .



Prob. 4-15

4-16. Analyze the continuous beam for the indicated loading condition. Draw the shear and moment diagrams for each beam. The relative values of moments of inertia for each member are indicated;  $E = \text{constant}$ .



Prob. 4-16

4-17. Write a computer program using the stiffness method to analyze a continuous beam for a uniform vertical load applied to any span and acting over the entire span. Assume that the moment of inertia is constant over the span of each beam and is different for each beam;  $E$  is constant for the structure.

4-18. Develop a computer program to analyze a general planar orthogonal frame by the stiffness method for the following load cases: (1) a uniform normal load over the span of a member; (2) a normal concentrated load applied at point within the span of a member; (3) a vertical or horizontal concentrated load applied at a joint; and (4) a moment applied at a joint. Assume that the beam elements are prismatic and that  $E$  is constant for the structure.

4-19. Write a computer program to develop the member stiffness matrix and to compute the fixed end actions for a uniform normal load acting over the entire span for a non-prismatic beam element.

### SELECTED REFERENCES

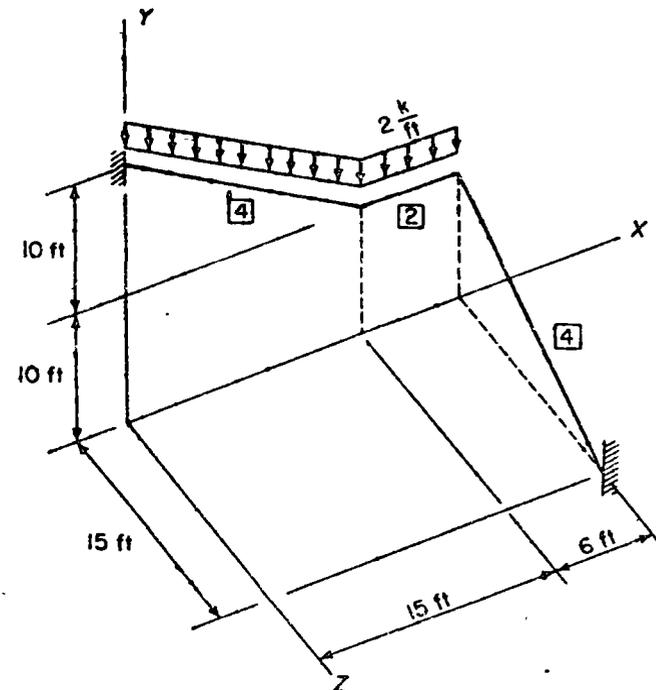
- 4-1 Pei, Ming L., "Stiffness Method of Rigid Frame Analysis," ASCE, *Second Conference on Electronic Computation*. Pittsburgh, Pa.: September 8 and 9, 1960.
- 4-2 Kinney, J. Sterling, *Indeterminate Structural Analysis*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1957.
- 4-3 Gere, James M., and William Weaver, Jr., *Analysis of Framed Structures*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Co., Inc., 1965.
- 4-4 Wang, Chu-Kia, *Statically Indeterminate Structures*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953.
- 4-5 Morice, P. B., *Linear Structural Analysis*. London: Thames and Hudson, 1959.
- 4-6 Hall, A. S., and R. W. Woodhead, *Frame Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1961.
- 4-7 Rubinstein, Moshe F., *Matrix Computer Analysis of Structures*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1966.
- 4-8 Willems, Nicholas, and William M. Lucas, Jr., *Matrix Analysis for Structural Engineers*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1968.
- 4-9 Livesley, R. K., *Matrix Methods of Structural Analysis*. New York: The Macmillan Company, Inc., 1964.

The stiffness method is a very powerful tool when coupled with the electronic digital computer for analyzing complex as well as simple structures. The procedure for carrying out the analysis is a very orderly, systematic procedure that is not restricted to a particular type of system. Only those matrices that are required to describe the behavior of particular structural elements are different. Thus, the problem of analyzing a given structure becomes one of developing the proper matrices to describe the response of the elements which make up the system.

### 6-9

#### Problems

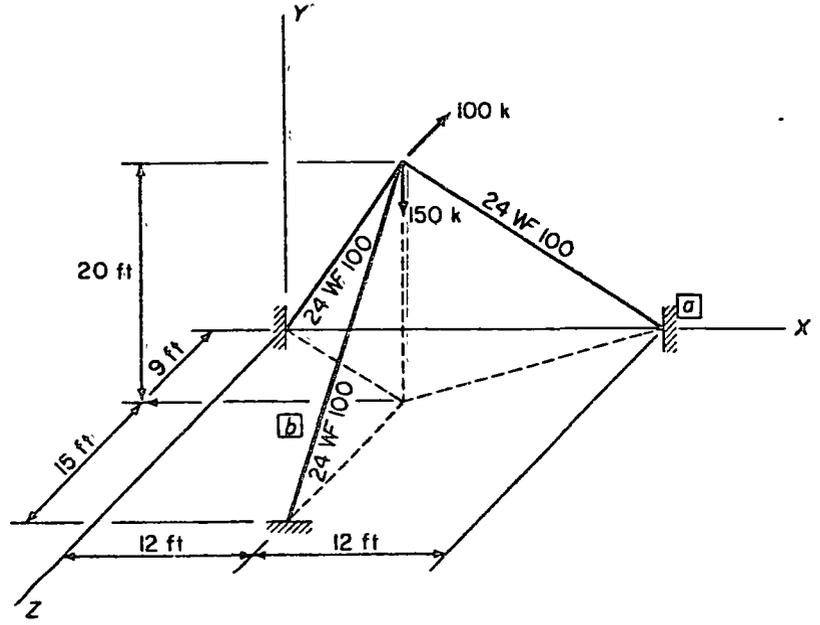
6-1. Determine the final end actions developed at the end of each member and the support reactions of the rigid frame caused by the indicated loading. For each member,  $I_x = 3I/2$ ,  $I_y = 2I$ ,  $I_z = 4I$ , and  $A_x = I/4$ ;  $E = \text{constant}$  and  $G = E/2$ . The relative value of  $I$  for each member is given in the box adjacent to the member. The  $y_m-x_m$  plane of each member is perpendicular to the  $X-Z$  reference.



Prob. 6-1 Note: The  $y_m-x_m$  plane of each member is perpendicular to the  $X-Z$  plane.

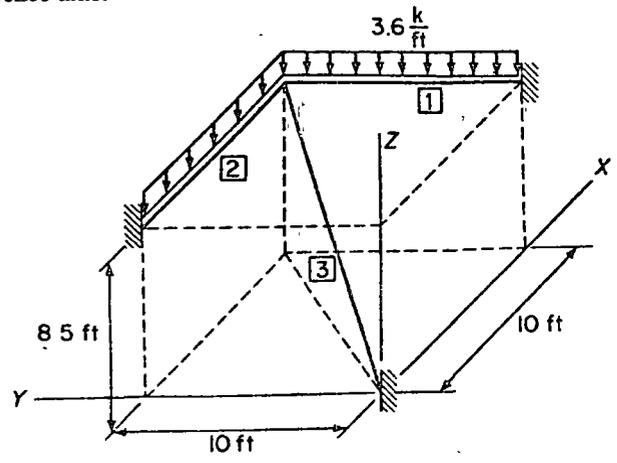
6-2. Analyze the space frame for the imposed loading condition. The members are prismatic 24 WF 100 steel beams;  $E = 30,000$  ksi and  $G = 12,000$  ksi. The members are

oriented such that the  $y_m-x_m$  plane of each beam, where the  $y_m$  axis defines the minor axis of the cross-section, is perpendicular to the  $X-Z$  reference plane.



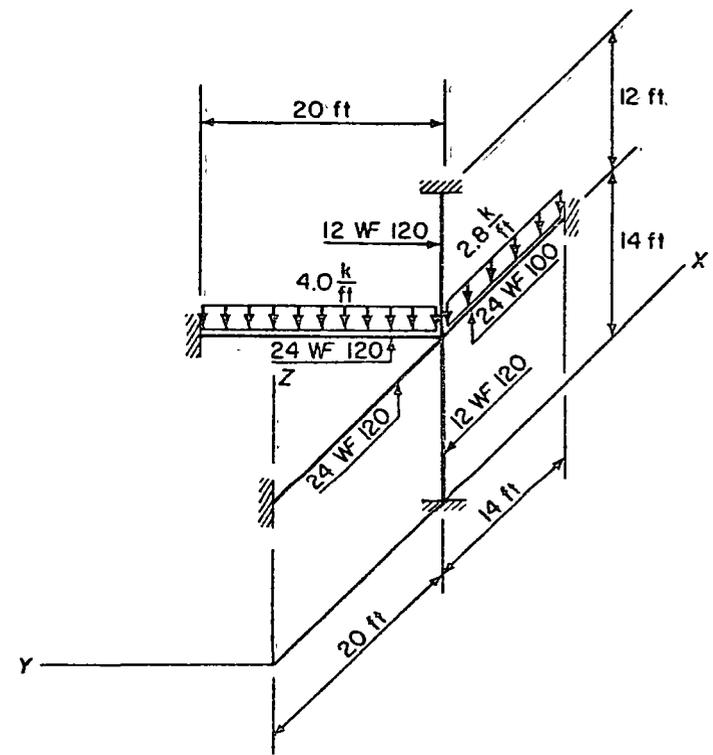
Prob. 6-2 Note: The  $y_m-x_m$  plane of each member is perpendicular to the  $X-Z$  plane.

6-3. Compute the support reactions and final end actions. For members 1 and 2,  $I_x = 2I/3$ ,  $I_y = I$ ,  $I_z = 3I$ , and  $A_x = I/5$ ; for member 3,  $I_x = I$ ,  $I_y = 2I$ ,  $I_z = 5I$ , and  $A_x = I/4$ ;  $E = \text{constant}$  and  $G = E/2$ . The  $y_m-x_m$  plane of each beam is perpendicular to the  $X-Y$  reference axis.



Prob. 6-3 Note: The  $y_m-x_m$  plane of each member is perpendicular to the  $X-Y$  plane.

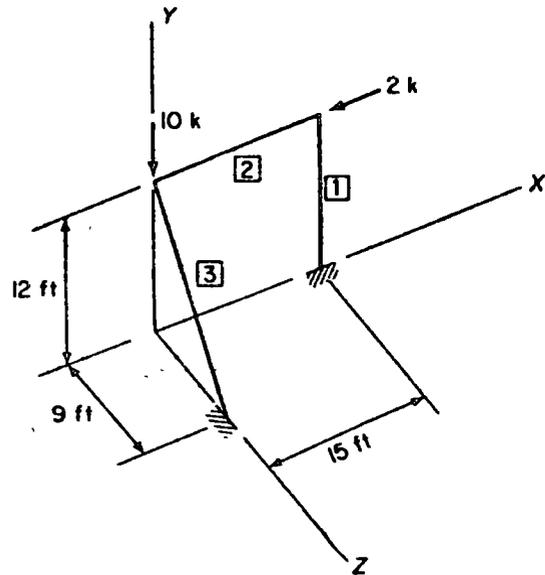
6-4. The space frame is to be analyzed for the indicated loading condition. With the  $y_m$  axis defining the minor principal axis of the cross-section, the  $y_m-x_m$  plane of each beam is perpendicular to the  $X-Y$  reference plane and the  $y_m-x_m$  plane of each column is perpendicular to the  $X-Z$  reference plane;  $E = 30,000 \text{ ksi}$  and  $G = 12,000 \text{ ksi}$ .



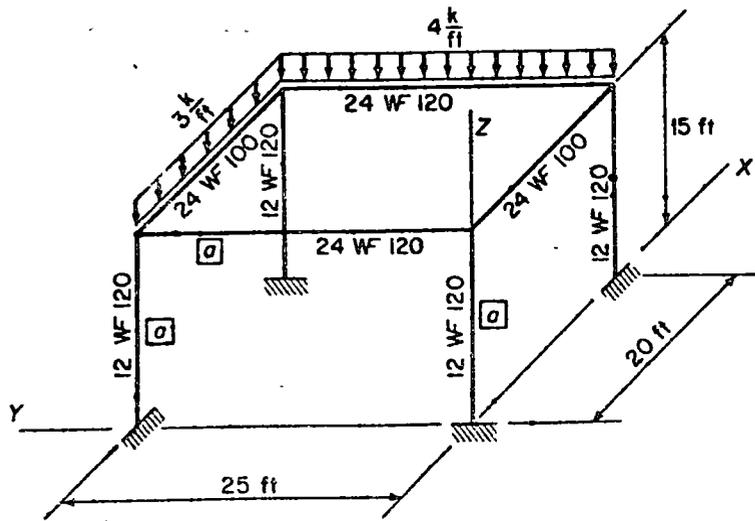
Prob. 6-4 Note: The  $y_m-x_m$  planes of the beams are perpendicular to the  $X-Y$  plane, and the  $y_m-x_m$  planes of the columns are perpendicular to the  $X-Z$  plane.

6-5. Determine the final end actions for each member and the support reactions for the structure caused by the applied loading. For members 1 and 2,  $I_x = I/2$ ,  $I_y = 6I$ ,  $I_z = 8I$ , and  $A_x = I/5$ ; for member 3,  $I_x = I$ ,  $I_y = 10I$ ,  $I_z = 10I$ , and  $A_x = I/4$ ;  $E = \text{constant}$  and  $G = E/2$ . Letting the  $y_m$  axis define the minor principal axis of a member's cross-section, the  $y_m-x_m$  plane of members 2 and 3 are perpendicular to the  $X-Z$  reference plane and the  $y_m-x_m$  plane of member 1 coincides with the  $X-Y$  reference plane.

6-6. Develop the complete structure stiffness matrix for the rigid space frame described in the figure and set up the complete joint load matrix for the indicated loading condition. Letting the  $y_m$  axis define the minor principal axis of a cross-section, the  $y_m-x_m$  plane of each column is parallel to the  $Y-Z$  reference plane and for each beam the  $y_m-x_m$  plane is perpendicular to the  $X-Y$  reference plane;  $E = 30,000 \text{ ksi}$  and  $G = 12,000 \text{ ksi}$ .



Prob. 6-5 Note: The  $y_m-x_m$  plane of member 1 coincides with the  $X-Y$  reference plane. The  $y_m-x_m$  plane of members 2 and 3 is perpendicular to the  $X-Z$  plane in both cases.



Prob. 6-6

6-7. Analyze the frame of Prob. 6-2 for a vertical settlement of 0.75 in. of the support  $a$ .

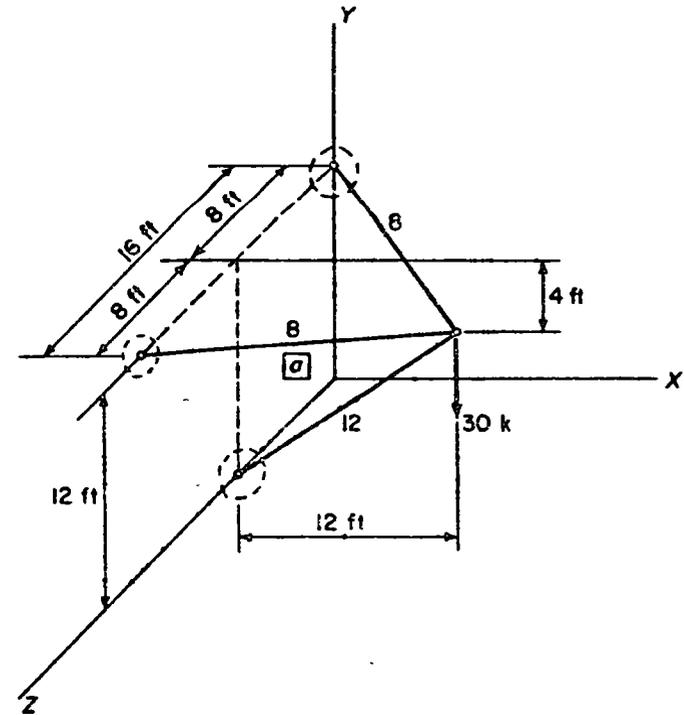
6-8. Determine the final end actions and support reactions developed by the rigid frame of Prob. 6-2 if member  $b$  is fabricated 1 in. too short.

6-9. Analyze the space frame of Prob. 6-5 for a vertical settlement of 0.5 in. of the support of member 1. Let  $I = 1000 \text{ in}^4$ ,  $E = 3000 \text{ ksi}$ , and  $G = 1000 \text{ ksi}$ .

6-10. Analyze the rigid space frame of Prob. 6-6 for the indicated loading.

6-11. Analyze the rigid frame structure of Prob. 6-6 for an increase in temperature of  $40^\circ$  of members  $a$  over the other members of the structure.

6-12 to 6-15. Determine the bar forces developed in the space truss. The orientation of the local axes for each member may be selected for convenience of computation;  $E = 30,000 \text{ ksi}$ . The cross-sectional area of each member (in terms of sq in.) is indicated adjacent to the member.



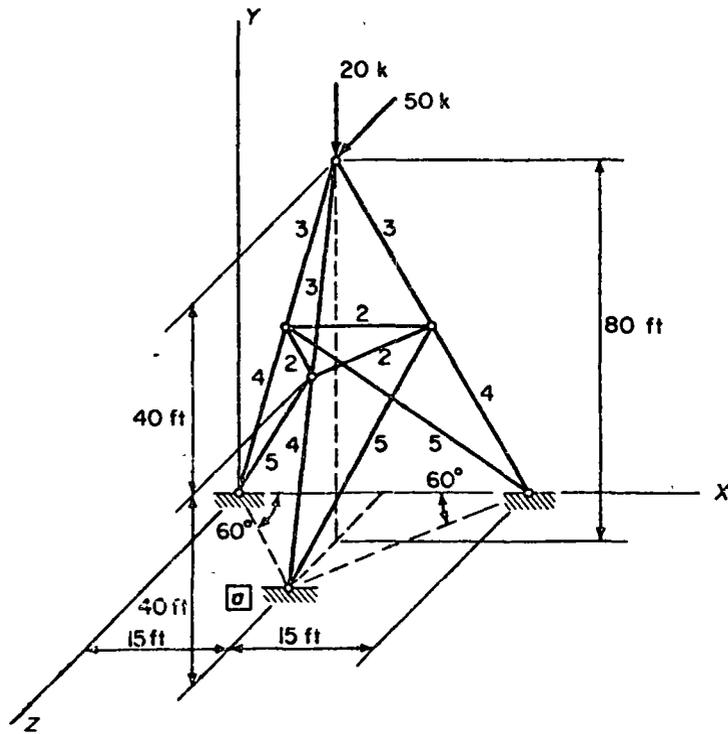
Prob. 6-12

6-16. Compute the bar forces developed in the space truss of Prob. 6-12 if member  $a$  is fabricated 0.5 in. too short.

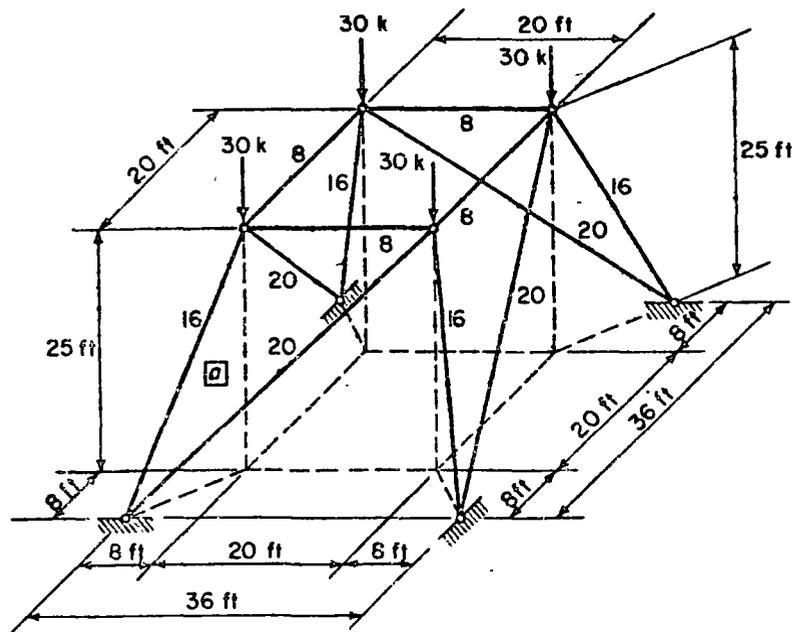
6-17. Analyze the space truss of Prob. 6-13 for a settlement of support  $a$  of 0.75 in.

6-18. Determine the bar forces in each member and the support reactions for the structure if member  $a$  of the truss of Prob. 6-14 is fabricated 0.25 in. too long.

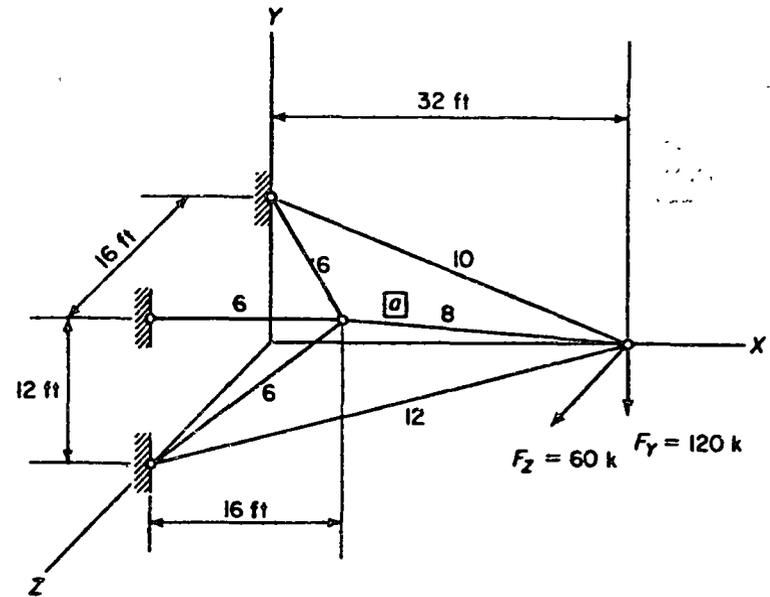
6-19. Analyze the structure of Prob. 6-15 for a fabrication error of 0.3 in. shortening the length of member  $a$ .



Prob. 6-13

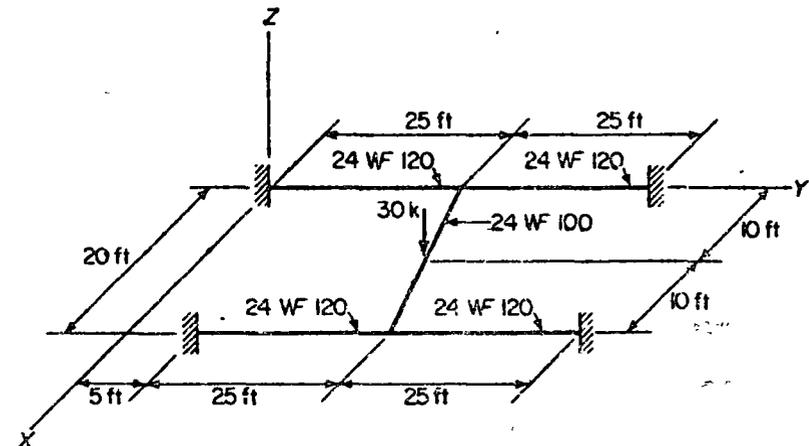


Prob. 6-14

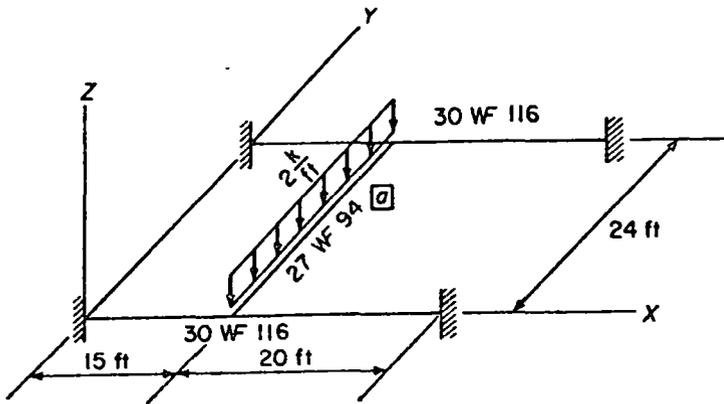


Prob. 6-15

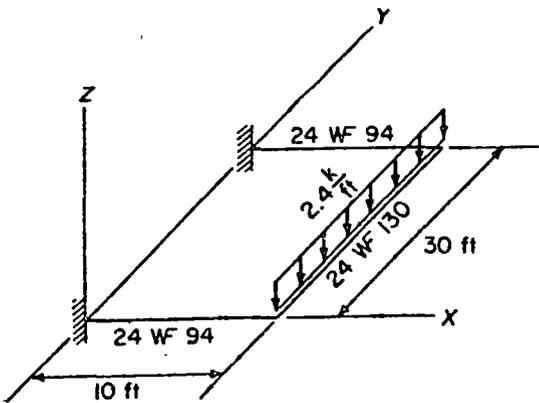
6-20 to 6-23. Analyze the planar grid structures for the indicated loading. Each member is positioned in the  $X$ - $Y$  reference plane so that the major principal axis ( $y_m$ ) of each cross-section lies in the plane;  $E = 30,000$  ksi and  $G = 12,000$  ksi.



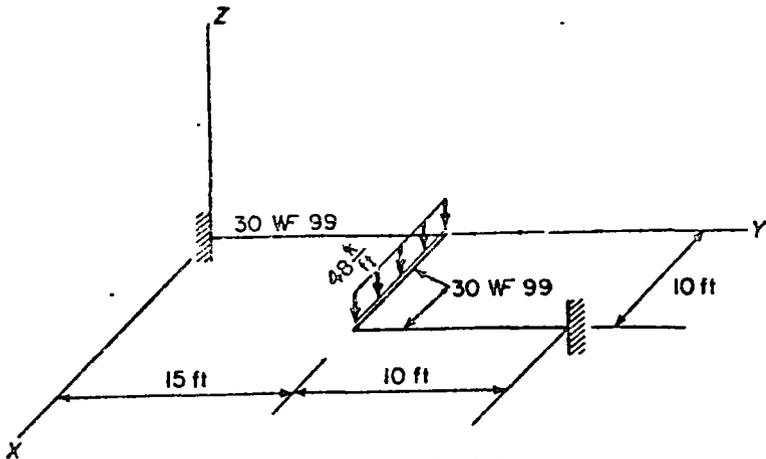
Prob. 6-20 Note: Major principal axis of the cross section of each member lies in the  $X$ - $Y$  reference plane.



Prob. 6-21 Note: Major principal axis of the cross section of each member lies in the X-Y reference plane.

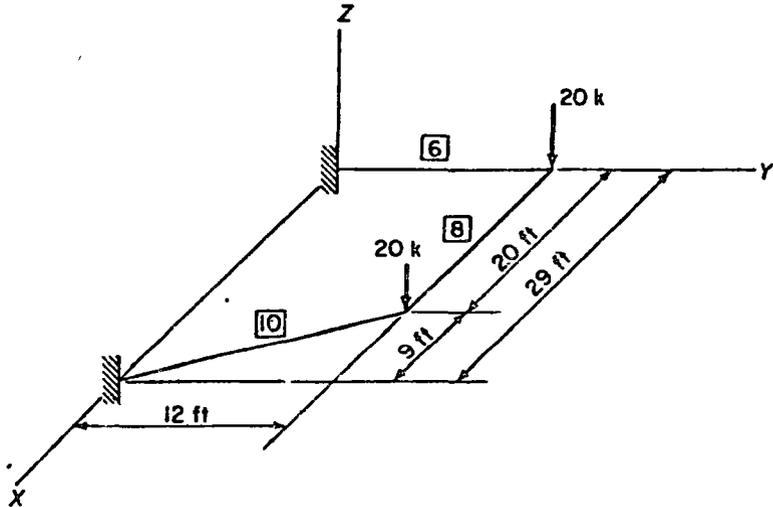


Prob. 6-22 Note: Major principal axis of the cross section of each member lies in the X-Y reference plane.



Prob. 6-23 Note: Major principal axis of the cross section of each member lies in the X-Y reference plane.

6-24. Analyze the planar grid structure shown in the figure for the indicated loading. For each member,  $I_x = 3I/2$ ,  $I_y = 2I$ ,  $I_z = I$ , and  $A_x = I/6$ . The major principal axis ( $y_m$ ) of the cross-section of each member lies in the X-Y reference plane. The relative value of  $I$  for each member is given in the box adjacent to the member;  $E = \text{constant}$  and  $G = E/3$ .



Prob. 6-24 Note: Major principal axis of the cross section of each member lies in the X-Y reference plane.

6-25. Determine the final end actions and the support reactions for the structure of Prob. 6-21 if member  $a$  is fabricated with a bend of  $5^\circ$  (rotating right end in a counter-clockwise direction) at midspan.

6-26. (a) Establish all of the matrices for a beam element with either a variable or constant cross-section over its span length, arbitrarily oriented in a three-dimensional space, with both ends of the member restrained against translation in the  $x_m$ ,  $y_m$ , and  $z_m$  directions, both ends restrained against rotation about the  $x_m$  and  $y_m$  axes, and both ends free to rotate about the  $z_m$  axis so that this type of member could be handled in a stiffness analysis.

(b) Evaluate the member stiffness matrix for this beam element if it were a prismatic member.

6-27. Develop the grid member stiffness matrix  $[K_G]_i$  for a prismatic grid member with a pin at the  $j$ -end of the member so that it is free to rotate about the major principal axis  $y_m$ . The member is assumed to be restrained against all other possible components of end displacement. Also, establish the transformation matrix  $[T_G]_i$  and the transformed grid member stiffness matrix  $[K_G]_i$  for this member.

6-28. Establish the member stiffness matrix  $[K^*]_i$  for a prismatic 12 in. [25#] beam. Note that for this member the shear center and the centroid of the cross-section do not

coincide. The  $x_m$  axis will define the centroidal axis of the beam and the  $z_m$  principal axis will contain both the centroid and the shear center of the channel section.

6-29. Develop a computer program to analyze by the stiffness method a planar grid frame for any possible loading condition. *Hint: Let fixed end actions be input data.*

6-30. Write a computer program to analyze by the stiffness method a space truss system for loads applied only at the joints.

6-31. Write a computer program to carry out the analysis of a rigid space frame by the stiffness method for any possible loading condition. *Hint: Use fixed end actions as input.*

#### SELECTED REFERENCES

- 6-1 Willems, Nicholas, and William M. Lucas, Jr., *Matrix Analysis for Structural Engineers*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1968.
- 6-2 Gere, James M., and William Weaver, Jr., *Analysis of Framed Structures*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Company, Inc., 1965.
- 6-3 Seely, Fred B., and James O. Smith, *Advanced Mechanics of Materials*, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1952.
- 6-4 Timoshenko, S. P., and J. H. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1951.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE ANALISIS ESTRUCTURAL  
( DEL 27 DE FEBRERO AL 3 DE MARZO DE 1978 )

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

1. OCTAVIO ALBA RAMIREZ  
Guirnaldas No. 475  
Col. Villa de las Flores  
Coacalco, Edo. de México  
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA  
ARQUITECTURA (I.P.N.)  
Edificio No. 4  
Unidad Profesional de Zacatenco  
Col. Lindavista  
México, D. F.  
Tel: 5-86-96-44
2. ING. ERNESTO ALCANTAR ORTIZ  
Mariano Escobedo No. 17-11  
Col. Anáhuac  
México 17, D. F.  
Tel: 3-99-25-21  
SECRETARIA DE LA DEF. NACIONAL  
México 10, D. F.
3. ING. ENRIQUE ALVAREZ CASTILLA  
Av. Murillo Vidal No. 8  
Col. Ensueño  
Jalapa, Ver.  
FACULTAD DE INGENIERIA-UNIVERSIDAD  
VERACRUZANA  
Zona Universitaria  
Jalapa, Ver.  
Tel: 7-66-98
4. ING. EDUARDO CANO LOPEZ  
Fco. Ayala No. 94  
Col. Vista Alegre  
México 12, D. F.  
Tel: 5-30-09-11  
COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD  
Ródano No. 14-507  
Col. Cuauhtémoc  
México 8, D. F.  
Tel: 5-53-71-33 Ext. 2138
5. ARQ. MA. LOURDES CASTAÑEDA  
Heriberto Jara No. 58  
Col. Modelo  
Jalapa, Ver.  
Tel: 7-65-46
6. ING. HECTOR CASTILLO GUTIERREZ  
Asie No. 60  
Col. Romero Rubio  
México 9, D. F.  
COMISION DE AGUAS DEL VALLE DE  
MEXICO  
Balderas No. 55  
México 1, D. F.  
Tel: 5-855066 Ext. 315
7. ROLAND ENGLAND  
Emilio Castelar 213-B  
Col. Polanco  
México 5, D. F.  
Tel: 5-45-32-77  
IIMAS, UNAM  
Ciudad Universitaria  
México 20, D. F.  
Tel: 5-48-54-65
8. CIRENIO ESCAMIROSA TINOCO  
Av. Jalisco No. 258-36  
Col. Tacubaya  
México 18, D. F.  
Tel: 5-64-51-01  
S.C.T. SUBSECRETARIA DE PUERTOS Y  
MARINA MERCANTE  
Av. Insurgentes Sur No. 465  
Col. Condesa  
México 11, D. F.  
Tel: 5-64-51-01

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE ANALISIS ESTRUCTURAL  
( DEL 27 DE FEBRERO AL 3 DE MARZO DE 1978 )

<u>NOMBRE Y DIRECCION</u>	<u>EMPRESA Y DIRECCION</u>
9. ING. ALFONSO FERREIRO ALEGRE Loma de la Plata No. 33 México 19, D. F. Tel: 6-51-00-38	SERVI ESTRUCTURAS ALFA, S.A. Calle Laguna No. 3 Xalostoc Edo. de México Tel: 5-69-36-26
10. ING. HECTOR FLORES CARDENAS Hda. de la Encarnación No. 85 Col. Prado Coapa México 22, D. F.	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Río Ródano No. 14-5o. Piso Col. Cuauhtémoc México 5, D. F. Tel: 5-53-71-33 Ext. 2642
11. SERGIO GALLEGOS MEZA Av. 20 de Noviembre 604-1 Ote. Durango, Dgo. Tel: 1-52-03	
12. HUGO RENE GARDUÑO CONTRERAS Chihuahua 169-2 Col. Roma México 7, D. F. Tel: 5-84-76-53	
13. ING. TEODULO GRAVE PAEZ Linares 689-1 Col. Lindavista México 14, D. F. Tel: 5-86-53-81	ESIA-IPN Edificio 4 Unidad Profesional Zacatenco Col. Lindavista México 14, D. F.
14. ING. JORGE GUERRERO GUERRA Crestón 252 Pedregal de San Angel México 20, D. F. Tel: 5-68-2301	CONSTRUCCIONES Y BIENES RAICES COBRA, S. A. Petén Norte 15 Bis-201 Col. Narvarte México 7, D. F. Tel: 5-19-83-96
15. JUAN TITO GUTIERREZ RIVERO Henry Ford No. 4010 Col. G. Sánchez México 14, D. F. Tel: 5-51-03-05	PIR, S. A. Parral No. 40-205 Col. Condesa México 11, D. F.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO ANALISIS ESTRUCTURAL  
( DEL 27 DE FEBRERO AL 3 DE MARZO DE 1978 )

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

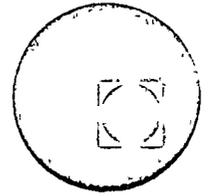
- |     |  |   |
|-----|--|---|
| 16. | JORGE HERNANDEZ DIAZ<br>Hacienda y Crédito Público<br>No. 28<br>Col. Federal<br>México 9, D. F.<br>Tel: 7-62-06-37         | S.C.T.SUBSECRETARIA DE PUERTOS Y<br>MARINA MERCANTE<br>Insurgentes Sur No. 465<br>Col. Condesa<br>México 11, D. F.<br>Tel: 5-64-51-01                       |
| 17. | DAGOBERTO HERNANDEZ PINZON<br>Manuel López Cotilla No.1015<br>Col. del Valle<br>México 12, D. F.<br>Tel: 5-59-00-34        | I.A.E.S.A.<br>Baja California No. 284-702<br>Col. Condesa<br>México 11, D. F.<br>Tel: 5-64-51-28  |
| 18. | ING. HUMBERTO HERNANDEZ Y M.<br>Campamento Cd. Alemán,Ver.   | COMISION DEL PAPALOAPAN<br>Campamento Cd. Alemán, Ver.  |
| 19. | ING. JOSE HUMBERTO LORIA ARCILA<br>Guillermo Pérez Valenzuela<br>No. 42<br>Coyoacán<br>México 21, D. F.<br>Tel: 5-54-77-94 | FACULTAD DE INGENIERIA,UNIVERSIDAD<br>DE YUCATAN<br>Calles No.41x14<br>Mérida,Yuc.<br>Tel:2-10-33   |
| 20. | ING. HECTOR E. MARTINEZ A.<br>Zaragoza No. 2147<br>Col. Guerrero<br>Nuevo Laredo<br>Tel: 2-85-73                           | INSTITUTO TECNOLOGICO REGIONAL DE<br>NUEVO LAREDO<br>Reforma Cruz con César López de<br>Lara<br>Nuevo Laredo.<br>Tel: 2-47-57                               |
| 21. | GREGORIO MONTOYA GOMEZ<br>Calle "F" No. 15<br>Manzana 5<br>Col. Educación<br>México 21, D. F.<br>Tel: 5-49-80-08           | SECRETARIA DE AGRICULTURA Y<br>RECURSOS HIDRAULICOS<br>Reforma No. 69<br>México, D. F.<br>Tel: 5-66-07-48   |
| 22. | ING. ALEJANDRO MUÑOZ DIAZ<br>Playa Miramar No.568<br>Col. Reforma Iztaccihuatl<br>México 13, D. F.<br>Tel: 5-39-59-38      | SECRETARIA DE ASENTAMIENTOS HUMA-<br>NOS Y OBRAS PUBLICAS<br>Miguel Laurent No. 840-7o. Piso<br>Col. Vertiz Narvarte<br>México 13, D. F.<br>Tel: 5-75-87-32 |

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE ANALISIS ESTRUCTURAL  
( DEL 27 DE FEBRERO AL 3 DE MARZO DE 1978 )

<u>NOMBRE Y DIRECCION</u>	<u>EMPRESA Y DIRECCION</u>
23. DR. JEAN PIERRE HENNART Galileo 240-A Col. Polanco México 5, D. F. Tel: 2-50-93-86	IIMAS-UNAM Ciudad Universitaria México 20, D. F. Tel: 5-48-54-65
24. ING. JOSE RENE RAMOS GONZALEZ Libertad No. 113-Sur Frontera, Coah. Tel: 5-14-58	ALTOS HORNOS DE MEXICO, S.A. Morelos s/n Monclova, Coah. Tel: 3-11-11
25. ING. JORGE LUIS RUIZ MAGAÑA Calle 8 No. 97 Col. Progreso Nacional México 14, D. F. Tel: 3-92-28-69	COMISION DE AGUAS DEL VALLE DE MEXICO Balderas No. 55 México 1, D. F. Tel: 5-85-50-66 Ext.315
26. RICARDO SANCHEZ ROSADO Av. Fernando 268-3er. Piso Col. Portales México 13, D. F. Tel: 5-90-81-30	SECRETARIA DE ASENTAMIENTOS HUMANOS Y OBRAS PUBLICAS Xola y Av. Universidad México 13, D. F. Tel: 5-90-91-96
27. ING. OTHON VALERIANO SOTO Campamento Cd. Alemán, Ver.	COMISION DEL PAPALOAPAN Campamento Cd. Alemán, Ver.
28. ING. MIGUEL A. VAZQUEZ CONTRERAS Cerro del Cubilete 121-202 Col. Campestre Churubusco México 21, D. F. Tel: 5-95-54-79	ISTME, S.A. Minería No. 145 Edificio "F" Col. Escandón México 18, D. F. Tel: 5-16-04-60 Ext.280
29. ING. ALEJANDRO VELASCO LEVY Coscomate No. 97 Bosque Tetlameya México 22, D. F. Tel: 5-73-84-18	IIMAS-UNAM Ciudad Universitaria México 20, D. F. Tel: 5-48-54-65
30. ING. RAFAEL LUIS TREVIÑO PARKER Cerro Dos Conejos No. 160 Col. Romero de Terreros México 21, D. F. Tel: 5-54-37-43	COMISION FEDERAL DE ELECTRICI- DAD Río Ródano No. 14 Col. Cuauhtémoc México 5, D. F. Tel: 5-53-71-33 Ext.2066



centro de educación continua  
facultad de ingeniería, unam



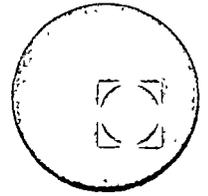
CURSO DE ANALISIS ESTRUCTURAL.

CONCEPTOS FUDAMENTALES DE MECANICA ESTRUCTURAL.

DR. PORFIRIO BALLESTEROS.



centro de educación continua  
facultad de ingeniería, unam



CEC

UNAM

P. BALLESTEROS

Feb./1974.

1-. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE MECANICA ESTRUCTURAL

1.1-. Energía de la Formación.

- 1.1.1-. Tensión.
- 1.1.2-. Corte.
- 1.1.3-. Torsión.
- 1.1.4-. Flexión.
- 1.1.5-. Expresión general.

1.2-. Principio de Superposición.

- 1.2.1-. Introducción.
- 1.2.2-. Casos en que no rige el principio de superposición.
- 1.2.3-. Ecuaciones generales de superposición de causas y efectos.
  - 1.2.3.1 Introducción.
  - 1.2.3.2 Estructura hiperestática de grado "n"
  - 1.2.3.3 Ejemplos.

1.3-. Generalización de la energía de deformación.

- 1.3.1 Ejemplos.

1.4-. Teorema de Castigliano.

- 1.4.1 Ejemplos.

1.5-. Teorema del Trabajo mínimo.

- 1.5.1 Ilustración mediante ejemplos.

2-. METODOS MATRICIALES DE ANALISIS ESTRUCTURAL

2.1-. Método de Fuerzas y de Formación.

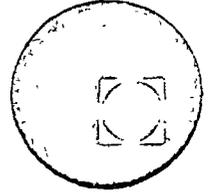
- 2.1.1-. Método de deformación.
- 2.1.2-. Método de fuerzas.

2.2-. Elementos de algebra matricial.

- 2.2.1-. Introducción.
- 2.2.2-. Suma de matrices.
- 2.2.3-. Resta de matrices.
- 2.2.4-. Multiplicación escalar de matrices.
- 2.2.5-. Multiplicación entre matrices.
- 2.2.6-. Transposición de matrices.
- 2.2.7-. Tipos particulares de matrices.



centro de educación continua  
facultad de ingeniería, unam;



- 2.2.7.1-. Matris unitaria.
- 2.2.7.2-. Matris diagonal.
- 2.2.7.3-. Concepto de inversión de matrices.
- 2.2.7.4-. Adjunta de una matris.

2.2.8-. Ejemplos

- 2.3-. Métodos matriciales en armaduras.
- 2.4-. Análisis matricial de vigas continuas.
- 2.5-. Análisis matricial de estructuras reticulares.

1.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE MECANICA ESTRUCTURAL

1.1.- Energía de de formación

Considerando sistemas elásticos lineales y que el sistema estructural se deforma bajo la acción de incrementos graduales de fuerzas externas, las cuales producen trabajo que es almacenado en el sistema en forma de Energía de de formación. Si se desprecian las pequeñas pérdidas de energía calorimétrica, la energía puede ser recuperada descargando gradualmente el sistema.

1.1.1.- Energía de de formación por tensión.

Considerando la barra prismática de la figura 1.1.1a de sección transversal  $A$ , modulo de elasticidad  $E$  y longitud  $l$ , bajo la acción de incrementos graduales de  $P$ , se tiene

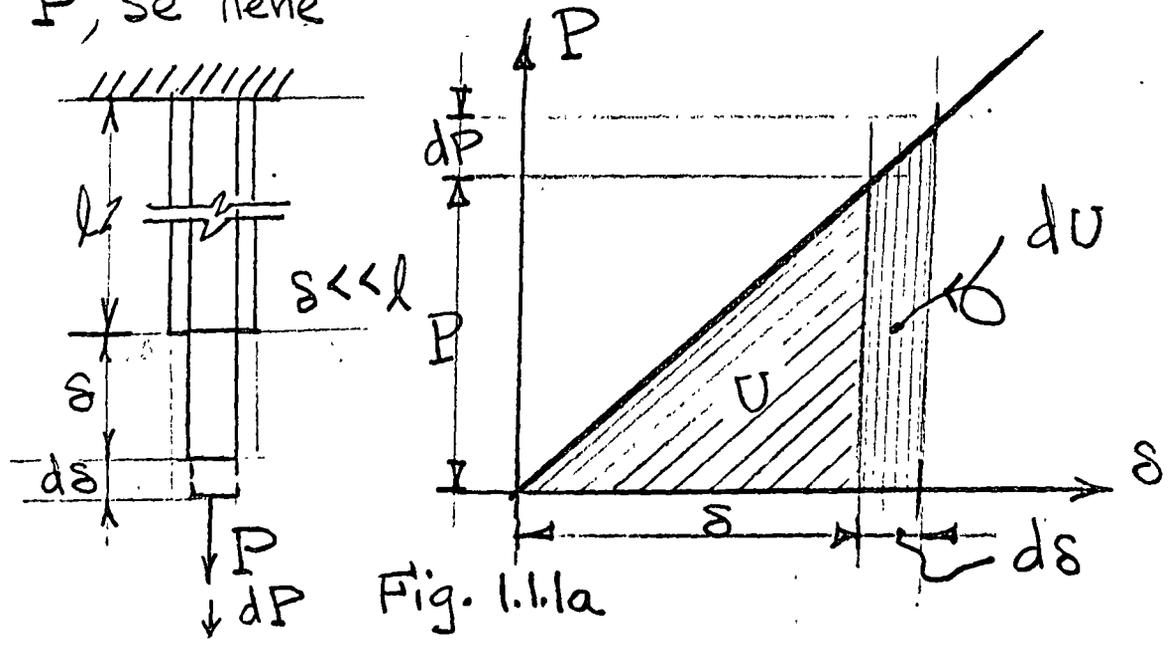


Fig. 1.1.1a

$$dU = P ds \quad (a)$$

$$U = \int_0^S P ds = \frac{1}{2} PS \quad (b)$$

donde  $U$  es la energía de deformación almacenada en la barra en la deformación de 0 a  $S$ .

De la ley de Hooke

$$s = \frac{Pl}{AE} \quad (c)$$

substituyendo (c) en (b) se obtiene

$$U = \frac{P^2 l}{2AE} \quad (d)$$

$$U = \frac{AES^2}{2l} \quad (e)$$

la energía por unidad de volumen es

$$u = \frac{U}{Al} \quad (f)$$

de (d), (e) y (f) se obtiene

$$u = \frac{P^2}{2A^2 E} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (g)$$

$$u = \frac{E s^2}{2l^2} = \frac{E \epsilon^2}{2} \quad (h)$$

por ejemplo la energía por unidad de volumen que puede almacenar el acero

estructural hasta el límite elástico  
 $\sigma_r = 2.3 \text{ Ton/cm}^2$  para  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$  es

$$u = \frac{(2,300)^2}{2 \times 2.1 \times 10^6} = 1.26 \frac{\text{Kg-cm}}{\text{cm}^3}$$

1.1.2.- Energía de deformación por corte

De la figura 1.1.2a se observa que

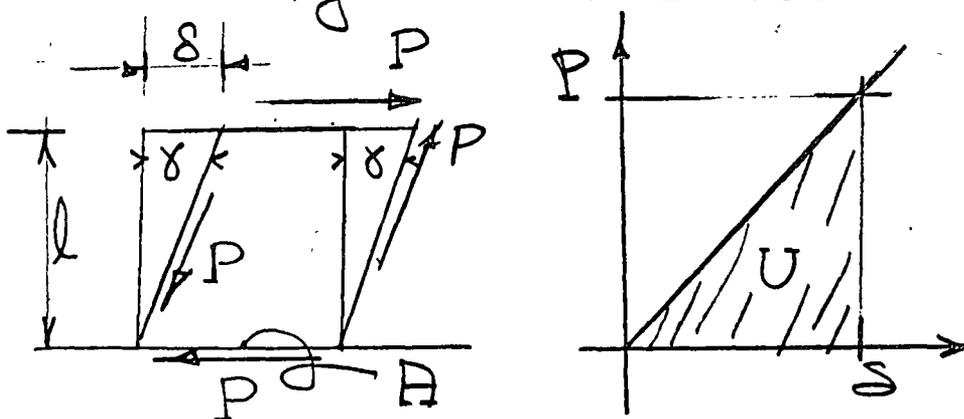


Fig. 1.1.2a

$$U = \frac{P\delta}{2} \quad (a)$$

para pequeñas deformaciones

$$\gamma = \frac{\delta}{l} = \frac{P}{AG} = \frac{\tau}{G} \quad (b)$$

donde  $G$  es el modulo de rigidez o de corte  
 de (a) y (b) se obtiene

$$U = \frac{P^2 l}{2AG} = \frac{AG\delta^2}{2l} \quad (c)$$

y la energía por unidad de volumen es

$$u = \frac{U}{Al} = \frac{P^2}{2AG} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G\delta^2}{2l^2} = \frac{G\gamma^2}{2} \quad (d)$$

1...3.- Energía de deformación por torsión de una barra circular.

De la Fig. 1.1.3a se observa que

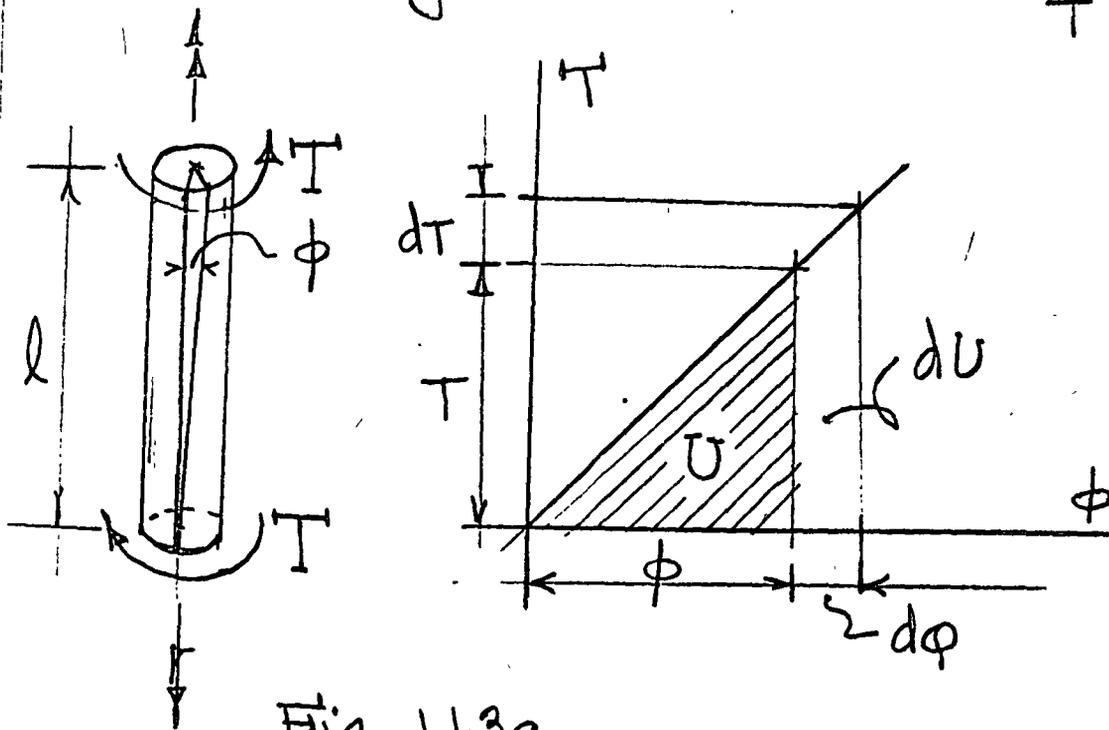


Fig. 1.1.3a

$$U = \frac{T\phi}{2} \quad (a)$$

$$\phi = \frac{Tl}{C} \quad (b)$$

donde  $l$  es la longitud de la barra y  $C = GJ$  es la rigidez de torsión,  $G$  es el módulo de torsión y  $J$  el momento polar de inercia de la sección transversal de la barra. Substituyendo (b) en (a)

$$U = \frac{T^2 l}{2C}, \quad U = \frac{\phi^2 C}{2l} \quad (c)$$

### 1.1.4 Energía de de formación por flexión

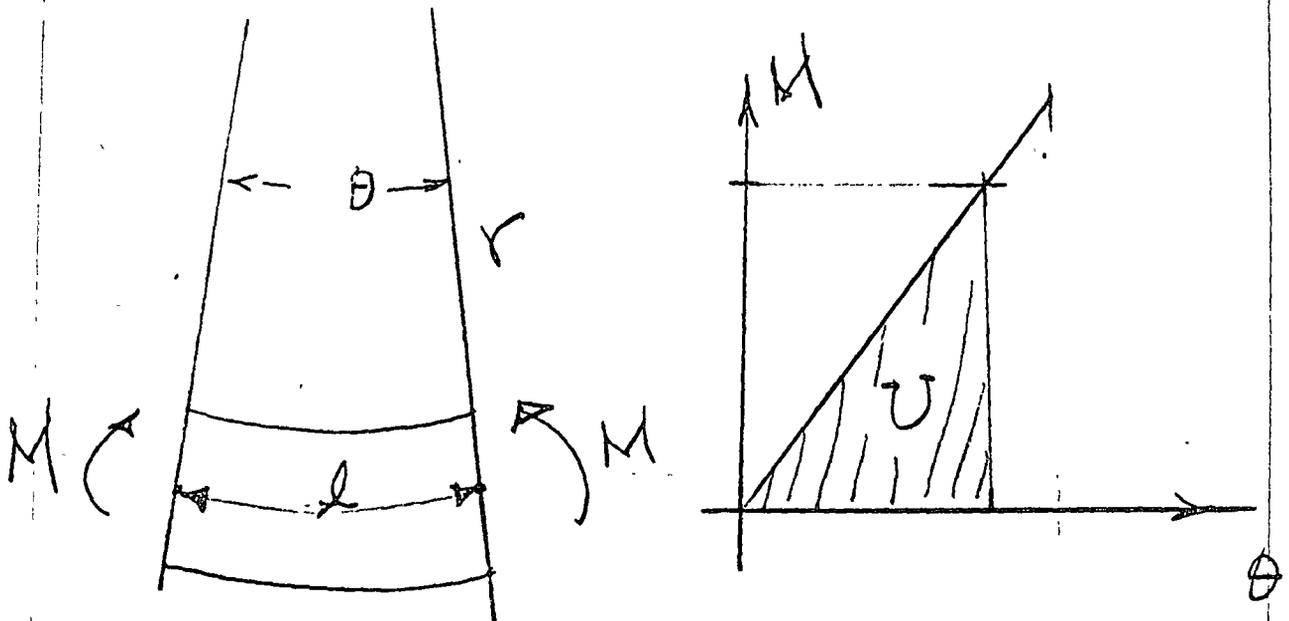


Fig. 1.1.4a

De la figura 1.1.4a se observa que

$$U = \frac{M\theta}{2} \quad (a)$$

$$\theta = \frac{Ml}{EI} \quad (b)$$

de (a) y (b) se obtiene

$$U = \frac{M^2 l}{2EI} \quad \text{y} \quad U = \frac{\theta^2 EI}{2l} \quad (c)$$

donde  $EI$  es la rigidez de flexión,  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal

1.1.5 Expresión general de la energía de deformación en una barra.

en (1.1.1.a) reemplazando  $P$  por  $N$  y  $l$  por  $ds$  se tiene

$$dU_N = \frac{N^2 ds}{2AE}, \text{ integrando}$$

$$U_N = \int_0^s \frac{N^2 ds}{2AE} \quad (a)$$

En 1.1.4c substituyendo  $l$  por  $ds$

$$dU_M = \frac{M^2 ds}{2EI}, \text{ integrando}$$

$$U_M = \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EI} \quad (b)$$

En 1.1.3b substituyendo  $T$  por  $M_T$  y  $l$  por  $ds$  se tiene

$$dU_T = \frac{M_T^2 ds}{2C}, \text{ integrando}$$

$$U_T = \int_0^s \frac{M_T^2 ds}{2C} \quad (c)$$

Para determinar la energía de deformación por corte considerando la barra de la figura 1.1.5a se tiene

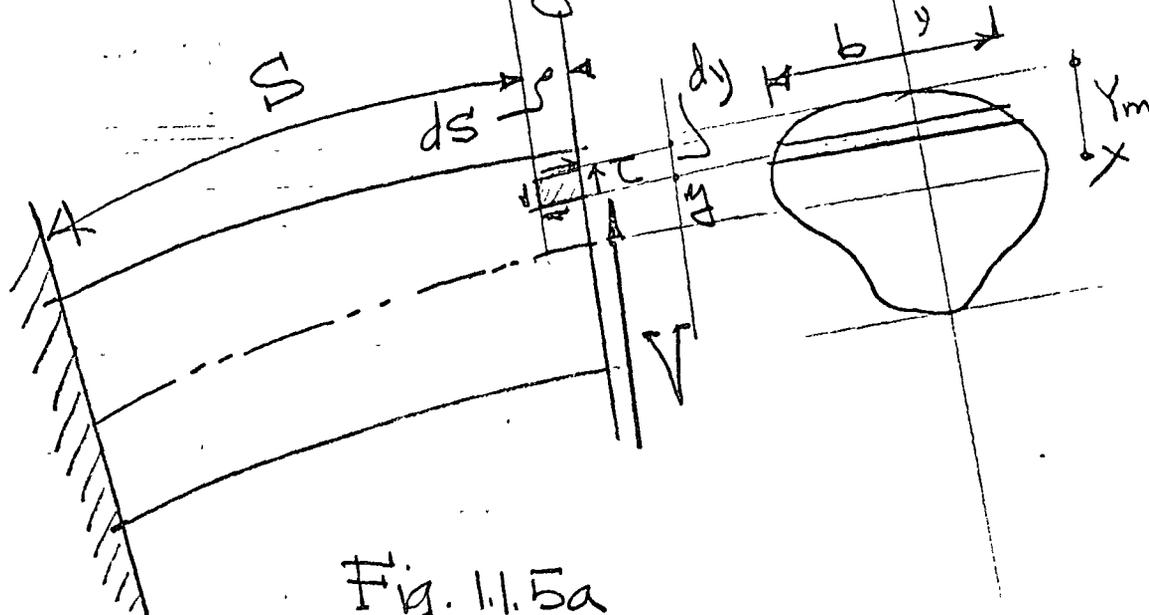


Fig. 1.1.5a

$$dU_v = u dV = u (b ds dy) \quad (d)$$

substituyendo (1.1.2d) en (1.1.5d)

$$dU_v = \frac{b T^2}{2G} ds dy, \text{ integrando}$$

$$U_v = \int_0^s \int_0^y \frac{b T^2}{2G} ds dy \quad (e)$$

aceptando la teoría elemental de vigas

$$T = \frac{V Q_y^{y_m}}{b I} \quad (f)$$

en (f)  $V$  es el cortante función de  $s$   
 $Q_y^{y_m}$  es el momento estático de  $y$  a  $y_m$  el

cual es función de  $y$ ,  $b$  es el ancho a la distancia  $y$  respecto a los ejes centroidales principales  $x, y$ , substituyendo (f) en (e) se obtiene

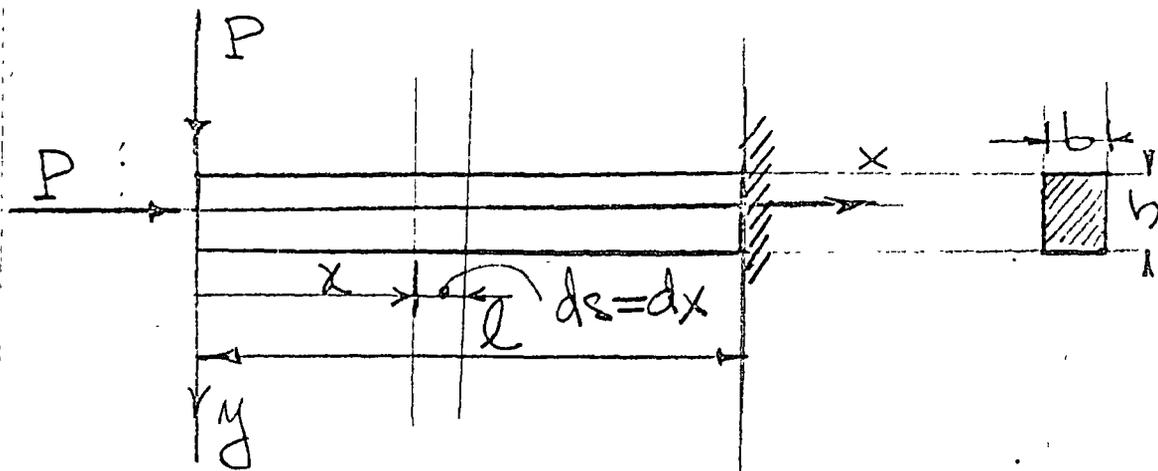
$$U_v = \int_0^s \int_0^y \frac{V^2 Q_{xy}^2}{2bI^2G} ds dy \quad (g)$$

Sumando 1.1.5a, b, c, y g se obtiene la expresión de la energía de deformación debido a una carga normal  $N$ , momento flector  $M$ , momento de torsión  $M_T$  y cortante  $V$  en una barra coplanar de longitud  $s$ .

$$U = \int_0^s \frac{N^2 ds}{2EA} + \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EI} + \int_0^s \frac{M_T^2 ds}{2GJ} + \int_0^s \int_0^y \frac{bT^2}{2G} ds dy \quad (h)$$

### 1.1.6 Ejemplos

En la viga en cantiliver mostrada de sección rectangular  $b h$  determinar las energías de deformación por corte carga normal y compararlas con la energía por flexión.



### 1.1.6.1 Energía de Flexión

$$M = -Px \quad 0 \leq x \leq l \quad (a)$$

$$I = \frac{1}{12} bh^3 \quad (b)$$

substituyendo (a) y (b) en (1.1.5h)

$$U_M = \int_0^l \frac{M^2 ds}{2EI} = \int_0^l \frac{(-Px)^2 dx}{2E \frac{1}{12} bh^3}$$

integrando y efectuando operaciones algebraicas

$$U_M = 2 \frac{P^2}{Eb} \left( \frac{l}{h} \right)^3 \quad (c)$$

### 1.1.6.2.- Energía por carga normal

$$N = -P \quad (a)$$

$$A = bh \quad (b)$$

substituyendo (a) y (b) en (1.1.5h)

$$U_N = \int_0^l \frac{N^2 ds}{2EA} = \int_0^l \frac{(-P)^2 dx}{2Ebh}$$

Integrando y efectuando operaciones algebraicas

$$U_N = \frac{1}{2} \frac{P^2}{Eb} \left( \frac{l}{h} \right) \quad (c)$$

### 1.1.6.2.- Energía por cortante

Para una sección rectangular  $b$   $h$

$$\tau = \frac{V Q_y}{b I} = \frac{V}{2I} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (a)$$

substituyendo (a) en (1.1.5 h) se tiene

$$U_V = \int_0^x dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{b}{2G} \frac{V^2}{2^2 I^2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy \quad (b)$$

considerando la relación modular

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{para } \nu = 0.3, \quad I = \frac{1}{12} b h^3$$

en (b) e integrando respecto a  $y$  y respecto a  $x$  y efectuando operaciones algebraicas, se obtiene

$$U_V = 1.56 \frac{P^2}{Eb} \frac{l}{h} \quad (c)$$

Comparando las expresiones (1.1.6.1c) (1.1.6.2c) y (1.1.6.2c) para un claro  $l = 5.00$  m y un feralte  $h = 30$  cm se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} U_V &= 0.00286 U_M \\ U_N &= 0.0009 U_M \end{aligned} \right\} (a)$$

En la mayoría de los problemas estructurales elásticos lineales la energía de deformación debida a la carga normal  $N$  y cortante  $V$  es despreciable respecto a la energía de deformación debida al momento flexionante  $M$ .

Cuando existe momento torsionante  $M_T$  (vigas en balcón, etc.), su energía de deformación es considerable y debe tomarse en cuenta su valor.

## 1.2 Principio de Superposición

### 1.2.1.- Introducción

En los sistemas de cargas en los que las deflexiones son funciones lineales de las cargas, se puede obtener la deflexión en un punto cualquiera, mediante la suma de las deflexiones producidas individualmente en dicho punto por cada una de las cargas.

### 1.2.2.- Casos en que no rige el principio.

Considerando el ejemplo mostrado en la figura 1.2.2a, la viga AB está sujeta a la

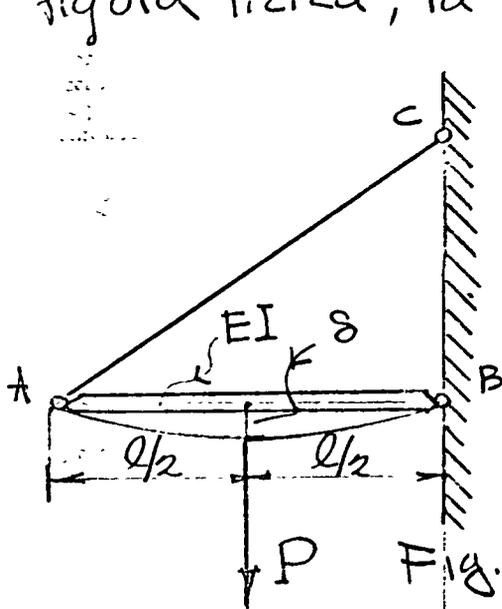
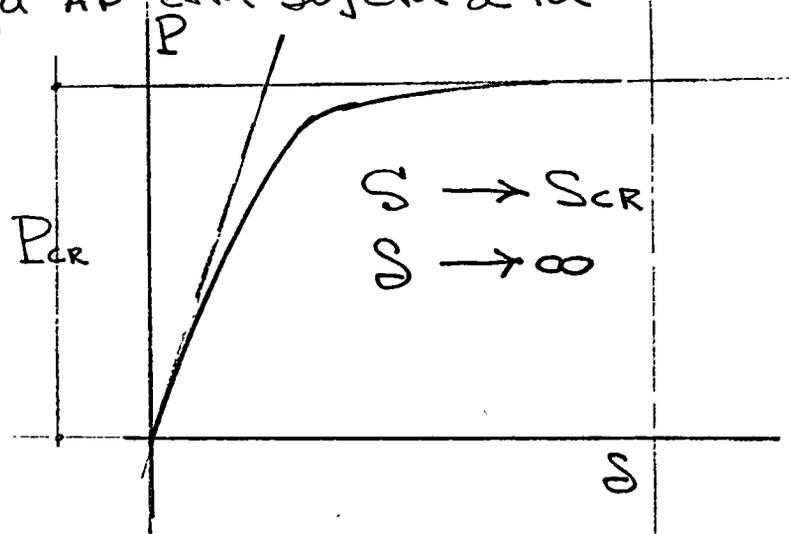


Fig. 1.2.2a



acción simultánea de fuerzas axiales y laterales, se concluye que  $\delta$  no es función lineal de  $P$  y puede ser representada por la fórmula

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI} \frac{1}{1 - S/S_{CR}} \quad (1.22.a)$$

donde,  $S_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ ,  $S$  carga axial en AB debida a  $P$ .

Otro ejemplo en el cual el principio de superposición no rige, sería el sistema mostrado en la figura 1.2.2.b, formado por dos barras articuladas, bajo la acción de pequeñas deformaciones ( $\tan \alpha \approx \alpha$ ).

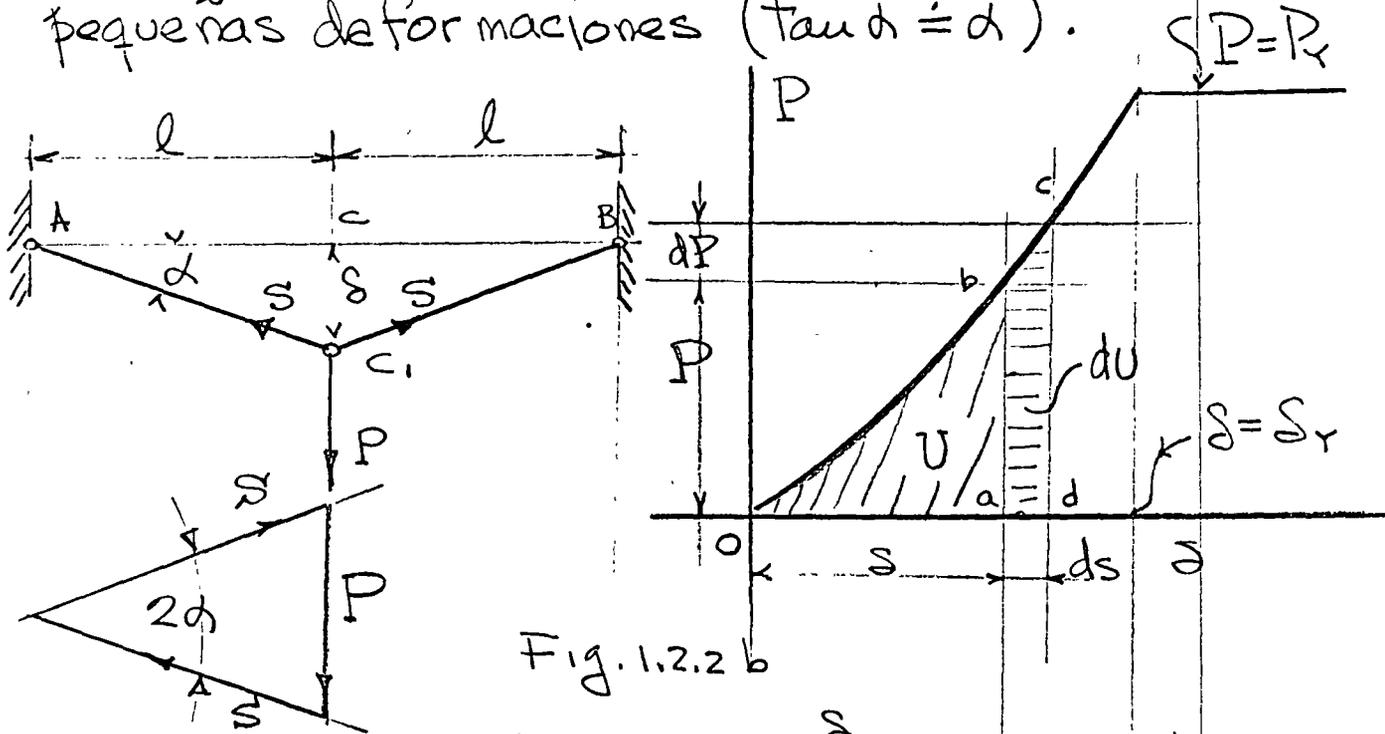


Fig. 1.2.2 b

pequeñas deformaciones:  $\alpha \approx \frac{s}{l}$  1.2.2b

Equilibrio:  $S = \frac{P}{2\alpha}$  1.2.2c

Compatibilidad geométrica: la deformación axial unitaria es

$$\epsilon = \frac{\sqrt{l^2 + s^2} - l}{l} \approx \frac{1}{2} \frac{s^2}{l^2}$$
 1.2.2d

Ley de Hooke:  $\epsilon = \frac{S}{AE}$  1.2.2e

de 1.2.2 c, d y e se obtiene

$$\left\{ s = l \sqrt[3]{\frac{P}{AE}}, \quad P = \frac{S^3 AE}{l^3} \right\}$$
 1.2.2 f

De nuevo se observa que la deflexión  $\delta$  no es función lineal de  $P$ , aunque el material cumple internamente con la ley de Hooke y la relación entre  $\delta$  y  $P$  es representada por la curva de la figura 1.2.2 b. El área  $Oab$  representa el trabajo efectuado por  $P$  durante la deflexión  $\delta$  y es igual a la energía de deformación almacenada en las barras  $AC$  y  $CB$ , la cual es igual a

$$U = \int_0^{\delta} P d\delta = \frac{AE}{l^3} \int_0^{\delta} \delta^3 d\delta = \frac{AE\delta^4}{4l^3} \quad 1.2.2 g$$

$$U = \frac{lP^{4/3}}{4^3\sqrt{AE}} \quad 1.2.2 h$$

Es muy importante observar que en los ejemplos anteriores  $U$  no es función de segundo grado de  $\delta$  o  $P$ , como se obtiene en los casos que el principio de superposición rige.

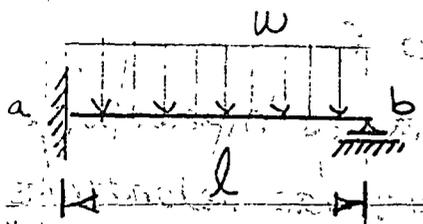
En los ejemplos anteriores, se observa que la acción de las fuerzas externas es considerablemente afectada por las pequeñas deformaciones del sistema, en el primer ejemplo hay una flexión adicional  $\delta\delta$  a la compresión  $S$  y la barra trabaja en flexo compresión.

## 1.2.3 Ecuaciones generales de superposición

### 1.2.3.1. Introducción

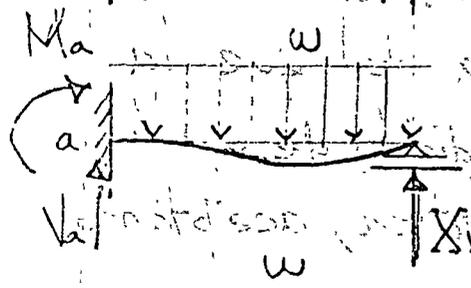
En el análisis de esfuerzos en estructuras estáticamente indeterminadas no solamente hay que considerar la geometría y estática, si no también las propiedades elásticas tales como módulo de elasticidad momento de inercia, etc., Generalmente para llegar al dimensionamiento final de la estructura, se suponen dimensiones preliminares de los miembros y se efectúa su análisis correspondiente, ciclo que puede repetirse en algunos casos hasta llegar al diseño final. En general los esfuerzos desarrollados en estructuras hiperestáticas son debidos no solo a las cargas, si no también a cambios de temperatura, asentamiento de apoyos, errores de fabricación, etc. Es importante observar que la estructura este en condiciones de equilibrio estable. Con el propósito de ilustrar el uso de las ecuaciones generales de superposición de causas y efectos, consideraremos el siguiente ejemplo, viga con carga uniforme  $w$

empotrada en a y libremente apoyada en b.



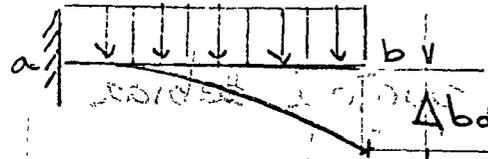
Estructura actual.

$\Delta_b =$  Deflexión de el punto b en la estructura debida



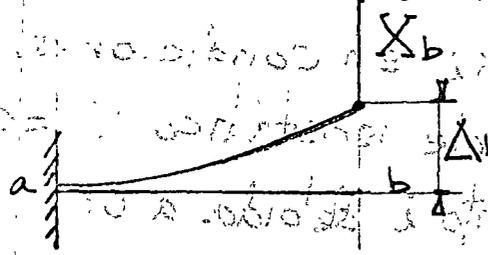
Estructura primaria.

Selección de redundante,  $X_b$



$\Delta_{b0} =$  Condición de equilibrio  $X_b = 0$

$\Delta_{b0} =$  Deflexión en dirección de la redundante con

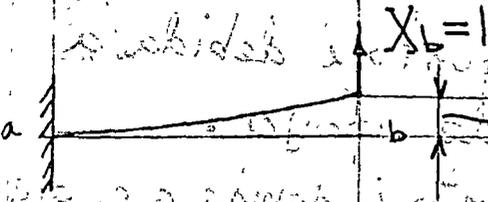


$X_b = 0$

$\Delta_{bb}$

$\Delta_{bb} =$  Deflexión en dirección de la redundante

debida a  $X_b$  con  $w=0$



$X_b = 1$

$S_{bb} =$  Deflexion en

dirección de la redundante debido a

una fuerza unitaria  $X_b = 1$

La ecuación de superposición si el principio es valido:

$$\Delta_b = \Delta_{b0} + \Delta_{bb} = \Delta_{b0} + X_b S_{bb} = 0 \quad (a)$$

de donde: 
$$X_b = - \frac{\Delta_{b0}}{S_{bb}} \quad (b)$$

( $S_{b0}$ ,  $q_{bb}$  es llamado coeficiente de flexibilidad)

### 1.2.3.2 Ecuaciones generales de superposición en análisis de estructuras estáticamente indeterminadas de grado $n$ .

Suponiendo que la estructura es hiperestática de grado  $n$ , se seleccionan las redundantes  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , en una forma tal que la estructura primaria en condición de equilibrio  $X_i = 0$  sea estable e isostática, aceptando la siguiente notación:

$\Delta_i$  = Deflexión total del punto  $i$  debida a todas las cargas y efectos.

$\Delta_{i0}$  = Deflexión del punto  $i$  en dirección de la redundante  $X_i$  en condiciones de equilibrio estable isostático  $X_i = 0$ .

$\Delta_{iT}$  = Deflexión del punto  $i$  debida a un cambio de temperatura  $\Delta T$ .

$\Delta_{iA}$  = Deflexión del punto  $i$  debida a asentamientos de apoyo.

$\Delta_{iE}$  = Deflexión en el punto  $i$  debida a errores de fabricación.

$S_{i1}$  = Deflexión en el punto  $i$  debida a la condición  $X_1 = 1$

$S_{i2}$  = " " " " " " " " " "  $X_2 = 1$

$\vdots$   $\vdots$   $\vdots$   $\vdots$   $\vdots$   $\vdots$   $\vdots$   $\vdots$   $\vdots$   $\vdots$

$S_{in}$  = " " " " " " " " " "  $X_n = 1$

Cualquier redundante puede ser positiva o negativa en cierto sentido. Cualquier deflexión del punto de aplicación de la redundante deberá ser medida a lo largo de su línea de acción y será positiva cuando el sentido es el mismo que el supuesto para la redundante.

Por lo tanto usando la notación y convención de signos mencionada, las ecuaciones generales de superposición en sistemas estructurales coplanares y espaciales son:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{10} + \Delta_{1T} + \Delta_{1A} + \Delta_{1E} + X_1 S_{11} + X_2 S_{12} + \dots + X_n S_{1n} \\ \Delta_2 &= \Delta_{20} + \Delta_{2T} + \Delta_{2A} + \Delta_{2E} + X_1 S_{21} + X_2 S_{22} + \dots + X_n S_{2n} \\ &\vdots \\ \Delta_n &= \Delta_{n0} + \Delta_{nT} + \Delta_{nA} + \Delta_{nE} + X_1 S_{n1} + X_2 S_{n2} + \dots + X_n S_{nn} \end{aligned} \right\} (a)$$

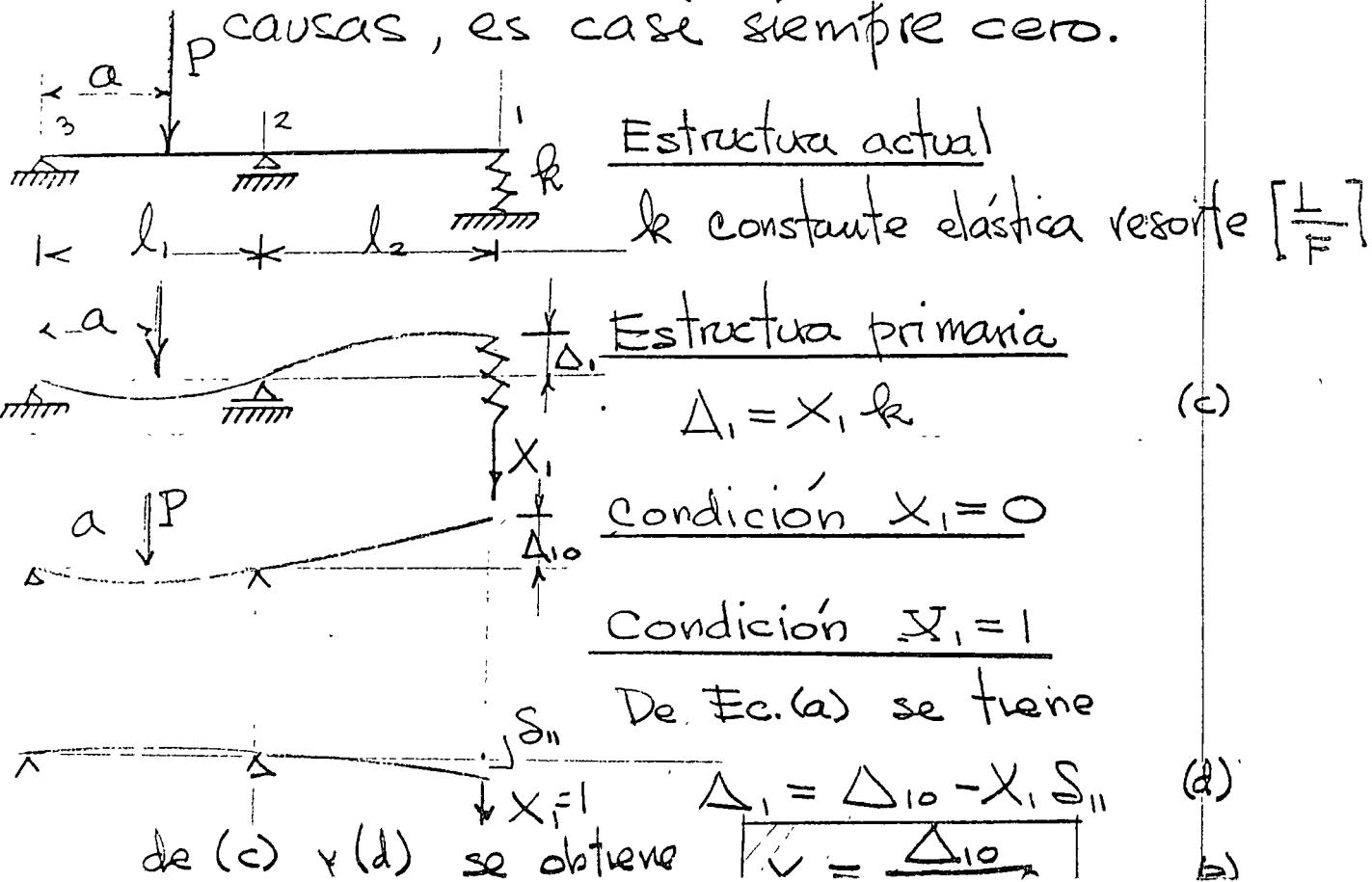
Expresando (a) matricialmente se tiene

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta_1 - \Delta_{10} - \Delta_{1T} - \Delta_{1A} - \Delta_{1E}) \\ (\Delta_2 - \Delta_{20} - \Delta_{2T} - \Delta_{2A} - \Delta_{2E}) \\ \vdots \\ (\Delta_n - \Delta_{n0} - \Delta_{nT} - \Delta_{nA} - \Delta_{nE}) \end{bmatrix} \quad (b)$$

1.2.3.3.- Ejemplos que ilustran el uso de las ecuaciones de superposición.

Antes de estudiar los ejemplos es conveniente observar lo siguiente:

- 1- Nunca seleccionar como redundante una reacción estaticamente determinada, ello conduciría a una estructura primaria en equilibrio inestable en condición  $X_i = 0$
- 2- El sentido positivo de la redundante se puede seleccionar arbitrariamente, y su deflexión será positiva si tiene el mismo sentido
- 3- Debe observarse que  $\Delta_i$ , deflexión Total del punto de aplicación de la redundante  $X_i$  debida a todas las causas, es casi siempre cero.



Estructura actual:

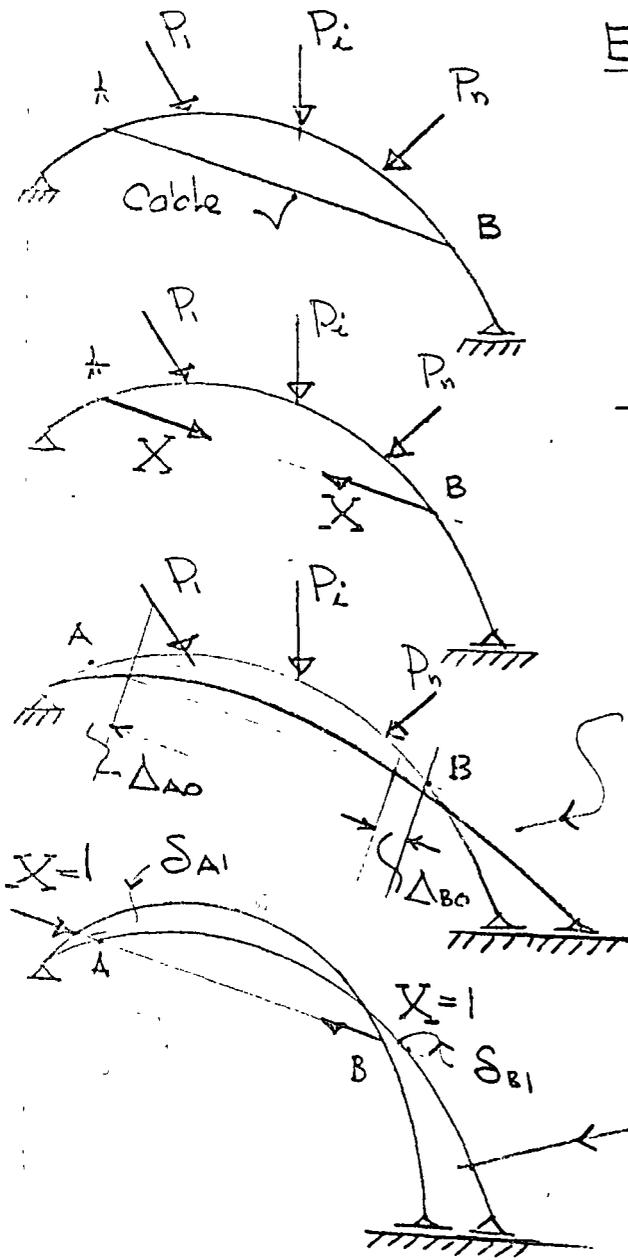
Arco coplanar con un tirante AB bajo un sistema de cargas  $P_n$

Estructura primaria

Selección como redundante la tensión en el cable,  $X$ .

Condición  $X=0$

Condición  $X=1$



$$\Delta_{AB} = \Delta_{A0} + \Delta_{B0} \quad (f)$$

$$\Delta_A = \Delta_{A0} + X S_{A1} \quad (g)$$

$$\Delta_B = \Delta_{B0} + X S_{B1} \quad (h)$$

Sumando (g) y (h)

$$\Delta_A + \Delta_B = \Delta_{A0} + \Delta_{B0} + X(S_{A1} + S_{B1}) = 0$$

de donde despejando la redundante  $X$  se tiene

$$X = - \frac{\Delta_{A0} + \Delta_{B0}}{S_{A1} + S_{B1}} \quad (i)$$

BARRA PLANA EMPOTRADA

Problema hiperestático de orden 3

Estructura Primaria

Selección de redundantes

$X_1, X_2, X_3$  y condición de empotramiento  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$

Condición  $X=0$

Condición  $X_1=1$

Condición  $X_2=1$

Condición  $X_3=1$

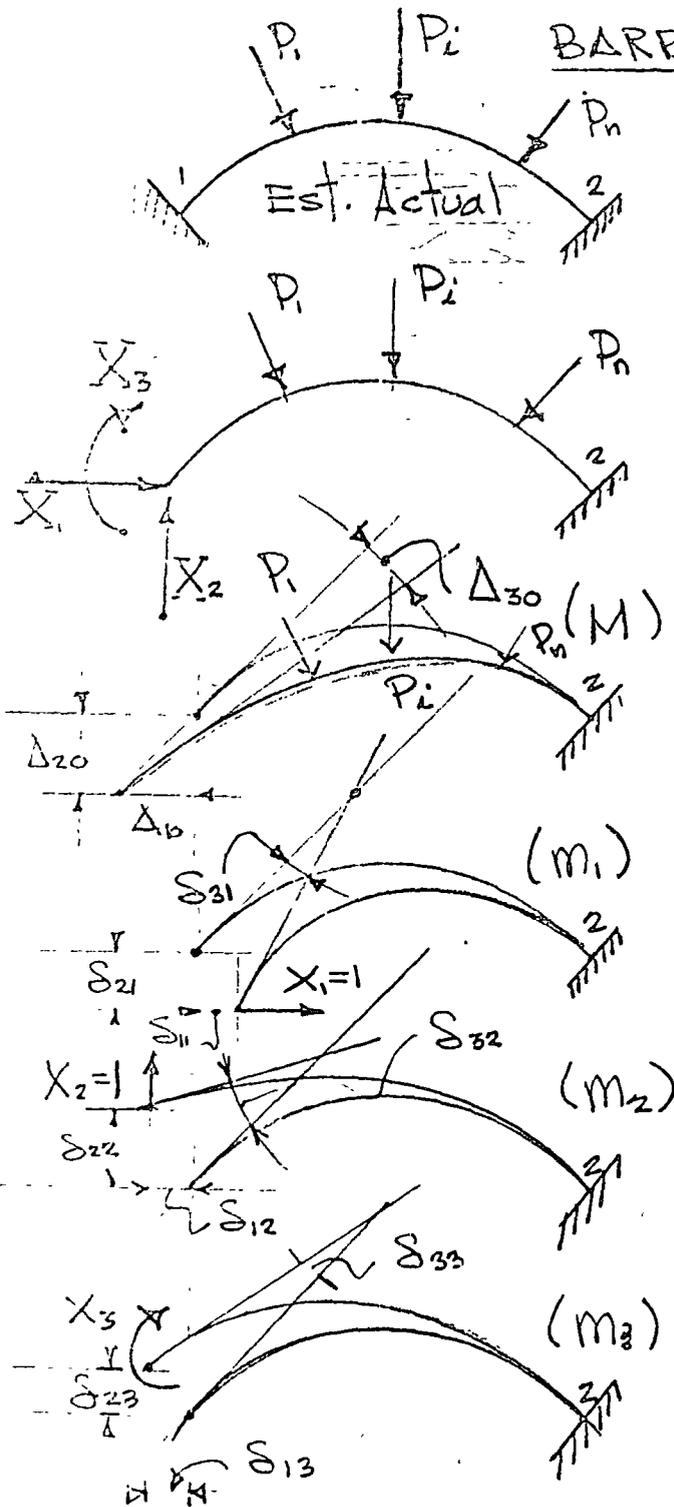
Las ecuaciones aplicando

el principio de superposición son

$$\Delta_1 = \Delta_{01} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13}$$

$$\Delta_2 = \Delta_{02} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23}$$

$$\Delta_3 = \Delta_{03} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33}$$



expresando (j) en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_{01} \\ \Delta_{02} \\ \Delta_{03} \end{bmatrix} \quad (k)$$

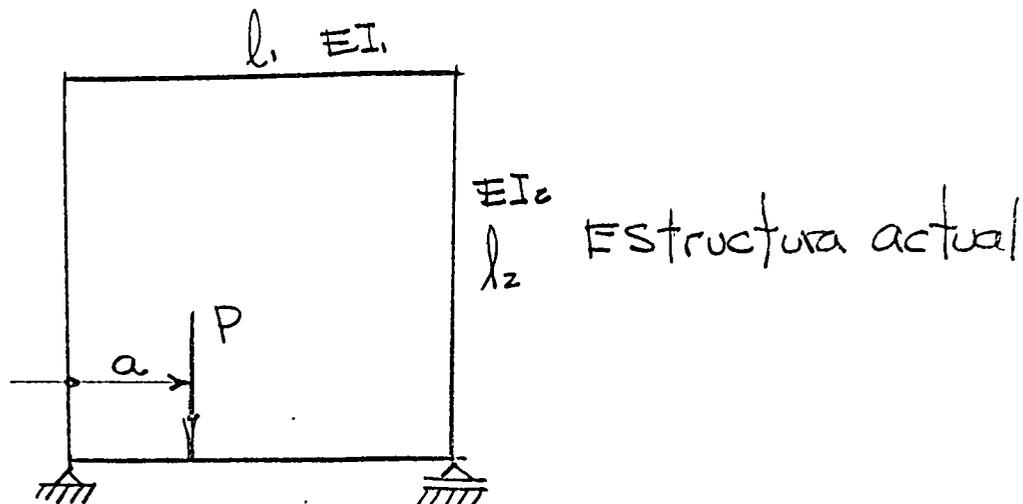
Aplicando el Teorema de Castigliano y la expresión de la energía de deformación por flexión, los coeficientes de flexibilidad  $S_{ij}$  son igual a

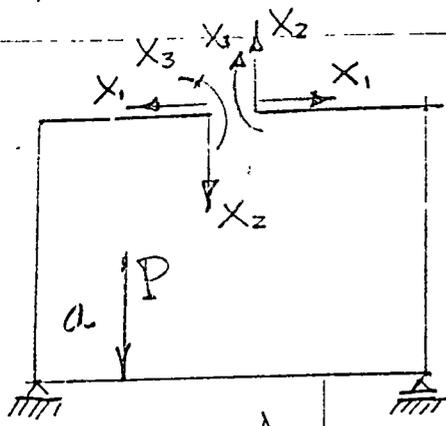
$$\Delta_{01} = \int \frac{M m_1}{EI} ds, \quad \Delta_{02} = \int \frac{M m_2}{EI} ds, \quad \Delta_{03} = \int \frac{M m_3}{EI} ds$$

$$S_{11} = \int \frac{m_1^2 ds}{EI}, \quad S_{22} = \int \frac{m_2^2 ds}{EI}, \quad S_{33} = \int \frac{m_3^2 ds}{EI} \quad (l)$$

$$S_{12} = S_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds, \quad S_{13} = S_{31} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds, \quad S_{23} = S_{32} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} ds$$

MARCO CONTINUO RECTANGULAR BAJO LA ACCION DE UNA CARGA P





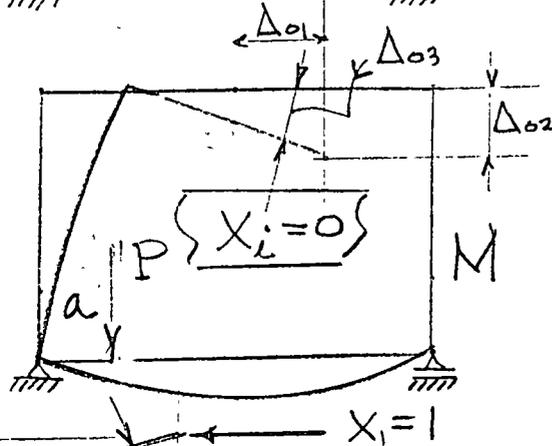
Estructura primaria:

Selección de redundantes

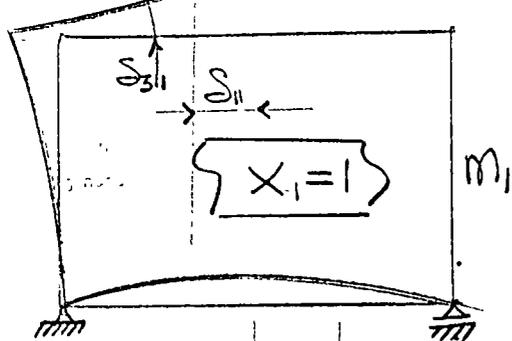
En este caso las ecuaciones de superposición son:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{01} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} = 0 \\ \Delta_2 &= \Delta_{02} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} = 0 \quad (m) \\ \Delta_3 &= \Delta_{03} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} = 0 \end{aligned}$$

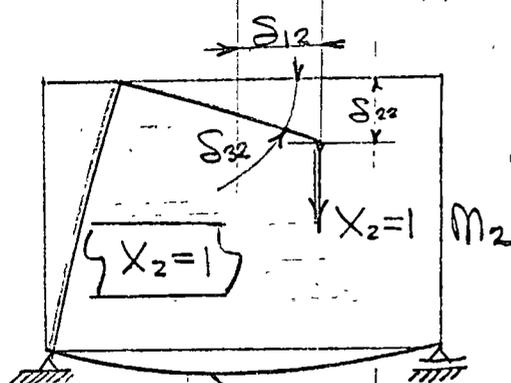
$$\text{ó } \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_{01} \\ \Delta_{02} \\ \Delta_{03} \end{bmatrix} \quad (n)$$



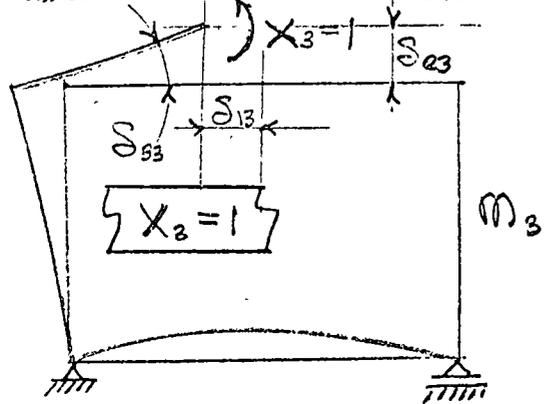
Del Teorema de Castigliano y la energía elástica de de formación se obtienen los coeficientes de flexibilidad  $\delta_{ij}$  y  $\Delta_{0i}$ .



$$\Delta_{01} = \int \frac{M m_1}{EI} ds, \quad \Delta_{02} = \int \frac{M m_2}{EI} ds, \quad \Delta_{03} = \int \frac{M m_3}{EI} ds$$



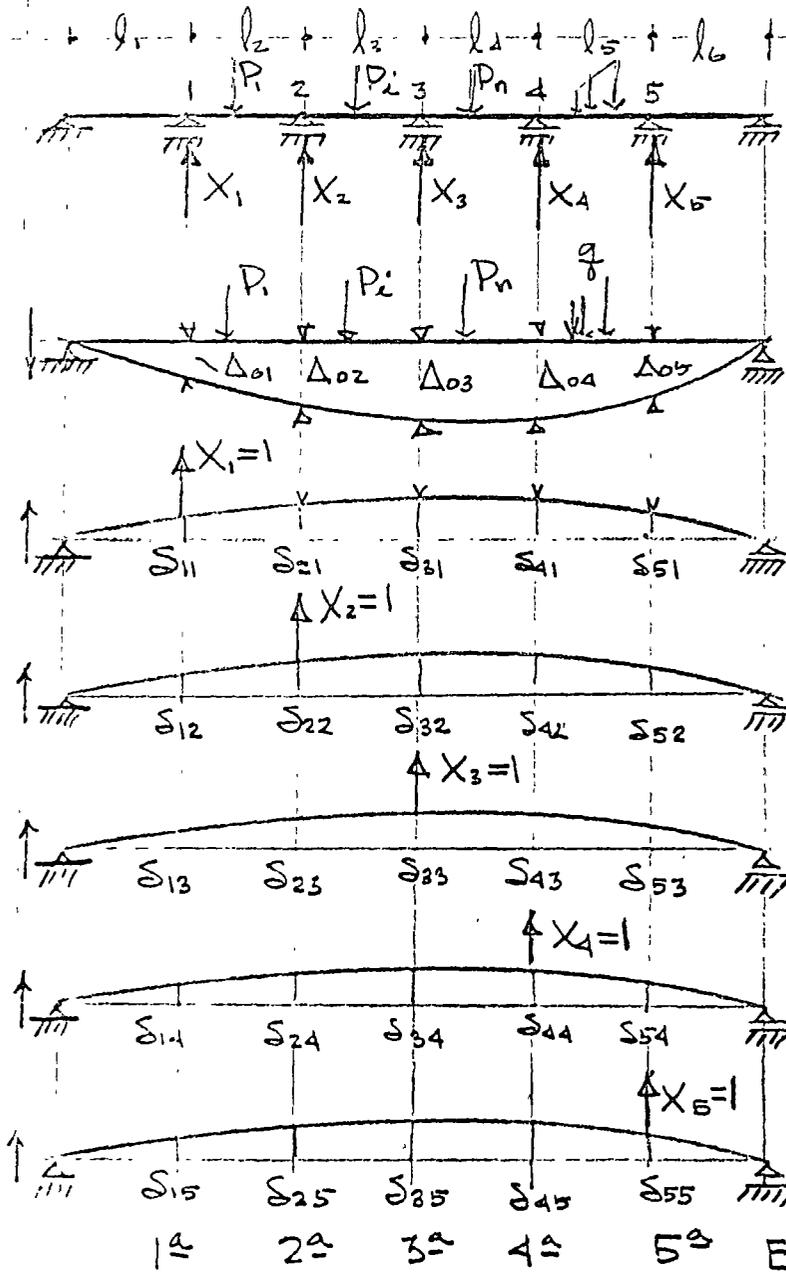
$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} ds, \quad \delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} ds, \quad \delta_{33} = \int \frac{m_3^2}{EI} ds$$



$$\delta_{12} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds, \quad \delta_{13} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds, \quad \delta_{23} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} ds$$

$$\delta_{12} = \delta_{21}, \quad \delta_{13} = \delta_{31}, \quad \delta_{23} = \delta_{32}$$

Viga continua de 7 apoyos



ESTRUCTURA ACTUAL  
Y PRIMARIA

Condición  $X_i = 0$

Condición  $X_1 = 1$

Condición  $X_2 = 1$

Condición  $X_3 = 1$

Condición  $X_4 = 1$

Condición  $X_5 = 1$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{01} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + X_4 \delta_{14} + X_5 \delta_{15} = 0 & 1^a \text{ Ec} \\ \Delta_2 &= \Delta_{02} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + X_4 \delta_{24} + X_5 \delta_{25} = 0 & 2^a \text{ " } \\ \Delta_3 &= \Delta_{03} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + X_4 \delta_{34} + X_5 \delta_{35} = 0 & 3^a \text{ " } \\ \Delta_4 &= \Delta_{04} + X_1 \delta_{41} + X_2 \delta_{42} + X_3 \delta_{43} + X_4 \delta_{44} + X_5 \delta_{45} = 0 & 4^a \text{ " } \\ \Delta_5 &= \Delta_{05} + X_1 \delta_{51} + X_2 \delta_{52} + X_3 \delta_{53} + X_4 \delta_{54} + X_5 \delta_{55} = 0 & 5^a \text{ " } \end{aligned}$$

$$[\delta_{ij}] [X_j] = -[\Delta_{0j}]$$

### 1.3 Generalización de la energía de deformación

La energía de deformación de una barra elástica puede representarse como una función de segundo grado de la carga o la deformación. La misma conclusión es válida para cualquier estructura dentro del régimen elástico, siempre y cuando el principio de superposición pueda aplicarse, en la Fig. 1.3.1 suponiendo que las fuerzas se aplican simultáneamente e incrementan gradualmente hasta su valor final. Si

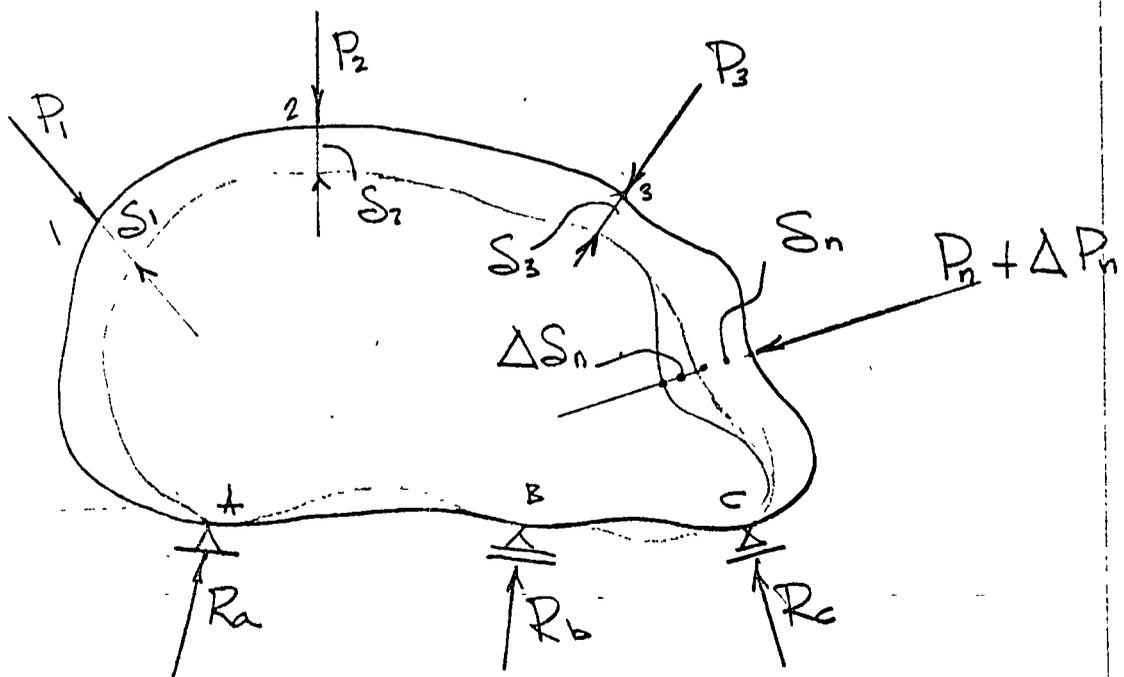


Fig. 1.3.1

el principio de superposición rige, los desplazamientos serán funciones lineales de las cargas. El trabajo elástico de todas

las fuerzas externas es igual a la energía interna de deformación almacenada en el cuerpo elástico de la figura 1.3.1 y será

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \delta_i = \frac{1}{2} (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \dots + P_n \delta_n) \quad (1.3.1)$$

1.3.1.- Ejemplo, viga libremente apoyada cargada como se indica en la Fig. 1.3.1a

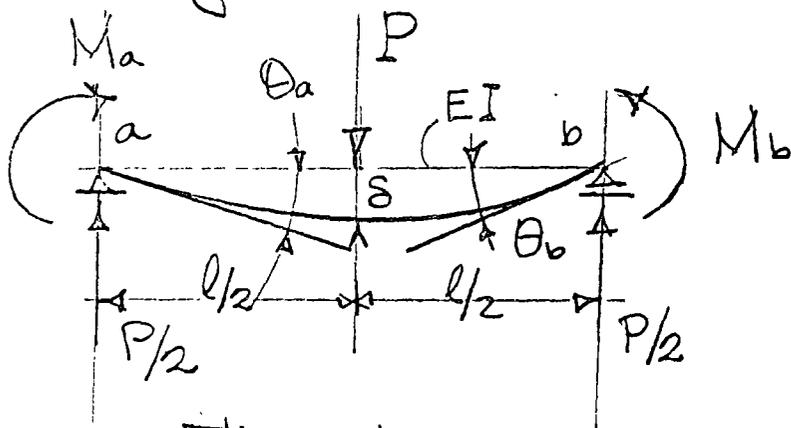


Fig. 1.3.1a

La energía de deformación es

$$U = \frac{1}{2} (P\delta + M_a \theta_a + M_b \theta_b) \quad (a)$$

De la curva elástica de la viga se demuestra que:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{Mal^2}{16EI} + \frac{Mbl^2}{16EI} \\ \theta_a &= \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{Mal}{3EI} + \frac{Mbl}{6EI} \\ \theta_b &= \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{Mal}{6EI} + \frac{Mbl}{3EI} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Substituyendo (b) en (a) se obtiene

$$U = \frac{l^3}{96EI} \left( P^2 + \frac{6}{l} PM_a + \frac{6}{l} PM_b + \frac{16}{l^2} M_a^2 + \frac{16}{l^2} M_b^2 + \frac{16}{l^2} M_a M_b \right) \quad (c)$$

en (c) se observa que  $U$  es una función de segundo grado de las fuerzas y momentos  $P$ ,  $M_a$  y  $M_b$

Tarea

En el ejemplo de la viga de la Fig 13.1a Demostrar:

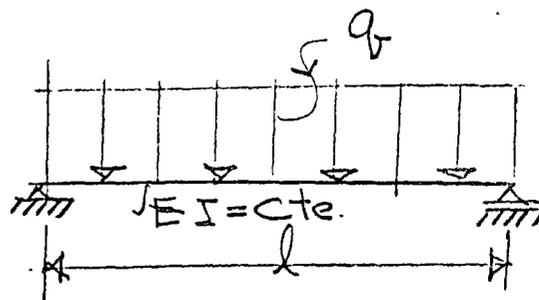
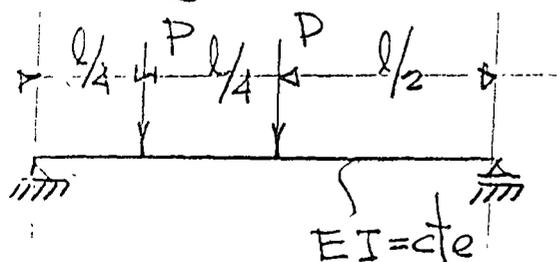
a)  $\frac{\partial U}{\partial P} = \delta$ ,  $\frac{\partial U}{\partial M_a} = \theta_a$ ,  $\frac{\partial U}{\partial M_b} = \theta_b$

b) De (a) y (b) obtener  $U$  en función de los desplazamientos  $\delta$ ,  $\theta_a$ ,  $\theta_b$

c) Demostrar que

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_a} = M_a, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_b} = M_b$$

Calcular la energía de deformación de las siguientes vigas de sección transversal  $b \cdot h$



## 1.4 Teorema de Castigliano

Suponiendo que el principio de superposición rige, y que  $U$  se expresa en función de las fuerzas externas se tiene que: LA DERIVADA DE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN CON RESPECTO A UNA DE LAS FUERZAS O MOMENTOS EXTERNOS DA EL DESPLAZAMIENTO O EL GIRO DE LA CORRESPONDIENTE FUERZA O MOMENTO

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} = S_n \quad (1.4.1)$$

Considerando el cuerpo elástico bajo la aplicación de  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Durante la aplicación de  $P_i$  se producen deformaciones  $\delta_i$  y se almacena cierta energía de deformación dentro del cuerpo (Fig. 1.3.1).

Si sucesivamente a  $P_n$  se aplica un incremento  $\Delta P_n$ , la energía  $U$  incrementará

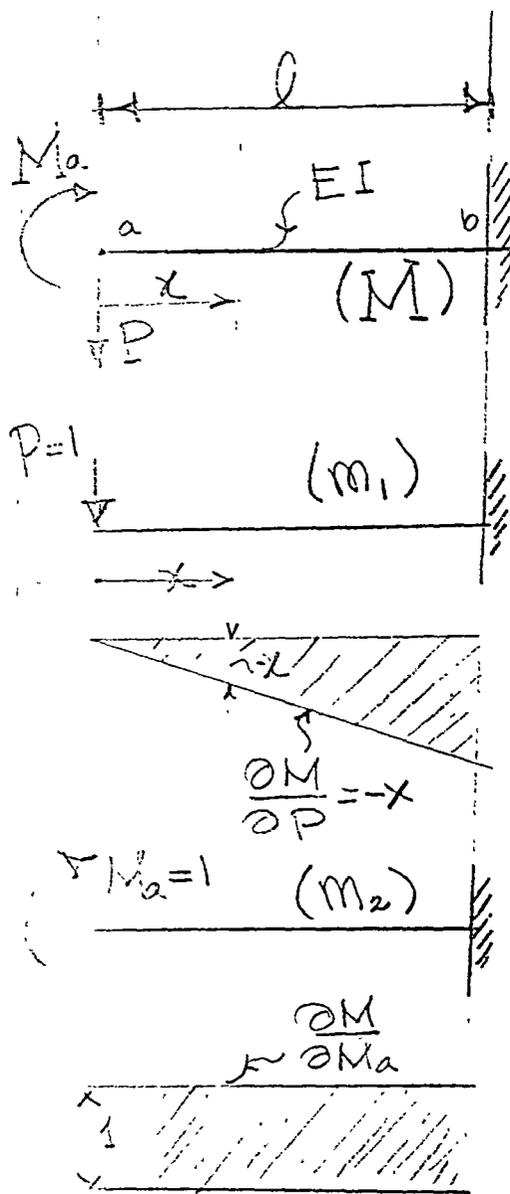
$$U + \Delta U = U + \frac{\partial U}{\partial P_n} \Delta P_n \quad (1.4.2)$$

Si en vez de aplicar  $\Delta P_n$  después de las cargas se aplica antes se tiene

$$U + \Delta U = U + \Delta P_n (S_n + \Delta S_n) = U + \Delta P_n S_n \quad (1.4.3)$$

igualando (1.4.2) con (1.4.3) se demuestra (1.4.1)

1.2.1 Ejemplos de aplicación



La variación de  $M(x)$  es  
 $M = M_a - Px$  (a)

La energía de deformación por flexión.

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (b)$$

Del Teorema de Castigliano.

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \Delta_a = \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial P}}{EI} ds$$

$$\Delta_a = \int_0^l \frac{M m_1}{EI} ds \quad (c)$$

Substituyendo (a) en (c)

$$\Delta_a = \frac{1}{EI} \int_0^l (M_a - Px)(-x) dx$$

$$\Delta_a = \frac{Pl^3}{EI} - \frac{M_a l^2}{2EI} \quad (d)$$

De nuevo del teorema de Castigliano

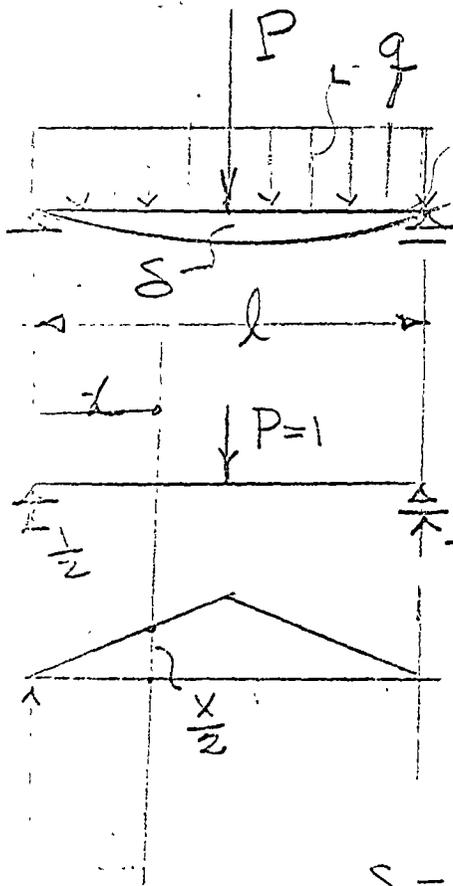
$$\frac{\partial U}{\partial M_a} = \Theta_a = \int_0^l \frac{M \frac{\partial M}{\partial M_a}}{EI} dx = \int_0^l \frac{M m_2}{EI} dx \quad (e)$$

Substituyendo (a) en (e) se obtiene

$$\Theta_a = \frac{1}{EI} \int_0^l (M_a - Px)(1) dx = \frac{M_a l}{EI} - \frac{Pl^2}{2EI}$$

En el ejemplo anterior no se calculó  $U$  en función de las fuerzas externas, sino se utilizó la energía de deformación por flexión y se derivó bajo el signo integral.

Es importante observar que las derivadas corresponden a la variación de momento flexor debido a causas unitarias  $P$  y  $M_u$ .



$$M = \frac{P}{2}x + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \quad (f)$$

$$m = \frac{x}{2} \quad (g)$$

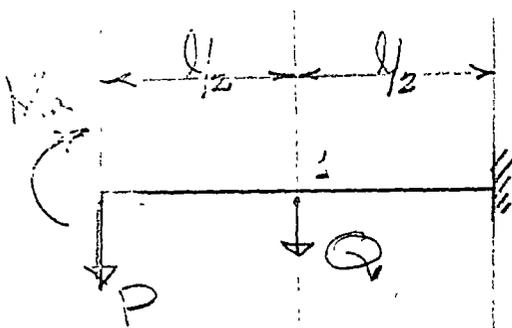
De la energía de deformación por flexión y el Teorema de Castigliano

$$\delta = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{Mm}{EI} dx \quad (h)$$

Substituyendo (f) y (g) en (h) se obtiene

$$\delta = 2/EI \int_0^{\frac{l}{2}} \left( \frac{P}{2}x + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) \left( \frac{x}{2} \right) dx = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{5}{584} \frac{ql^4}{EI} \quad (h)$$

En los casos en los cuales es necesario determinar los desplazamientos en un lugar donde no hay fuerzas o momentos, se agrega al sistema actual de fuerzas una fuerza ficticia de magnitud infinitesimal, tal que no afecta al sistema actual de fuerzas y se obtiene el desplazamiento derivando con respecto a ella.



$$M = M_a - Px \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (i)$$

$$M = M_a - Px - Q(x - \frac{l}{2}) \quad (j)$$

para  $\frac{l}{2} \leq x \leq l$

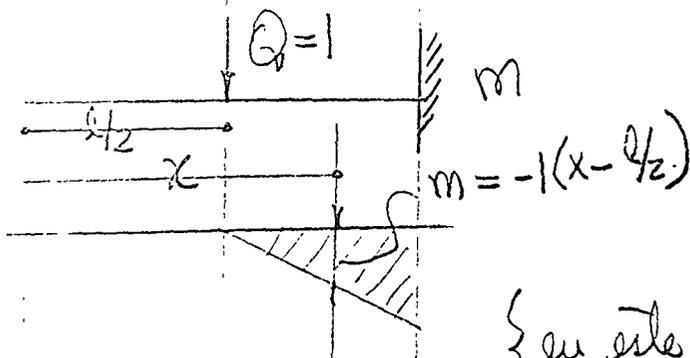
$$\frac{\partial M}{\partial Q} = m = -(x - \frac{l}{2}) \quad (k)$$

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$

energía de def. por flexión

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \delta_1 = \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial Q}}{EI} dx = - \int_{l/2}^l \frac{1}{EI} (M_a - Px)(x - \frac{l}{2}) dx$$

$$\delta_1 = \frac{5Pl^3}{48EI} - \frac{M_a l^2}{8EI} \quad (l)$$



$$\delta = \int \frac{Mm}{EI} dx \quad (m)$$

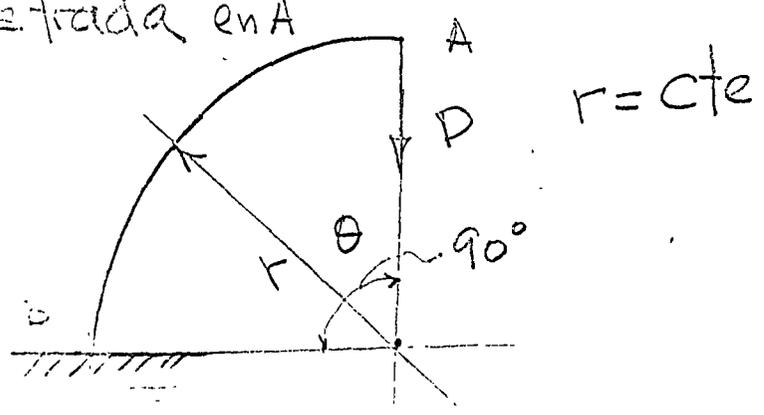
$$\left\{ \text{en este caso } \frac{\partial U}{\partial P} = 0 \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \right\}$$

En conclusión se observa que la derivación del Teorema de Castigliano, fue basada en el principio de superposición. De allí que la energía de deformación  $U$  debe ser una función de segundo grado de las fuerzas actuantes. Si el principio de superposición no rige y  $U$  no es función de segundo grado de las fuerzas, el Teorema de Castigliano no es aplicable, lo anterior se ilustró mediante ejemplos.

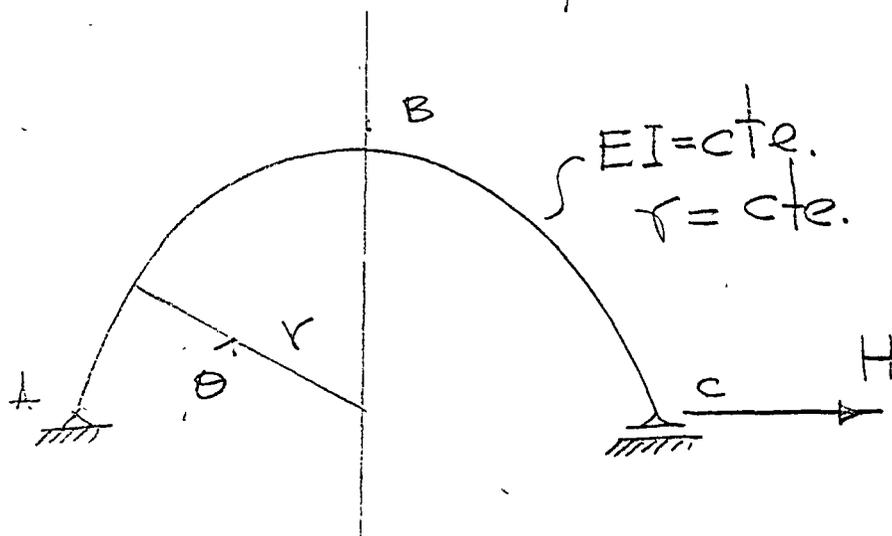
Ejemplos de Tarea

a) Utilizando el teorema de Castigliano determinar los ángulos en los extremos de una viga libremente apoyada con carga uniforme  $q$ , claro  $l$ , y rigidez flexionante  $EI = \text{constante}$ .

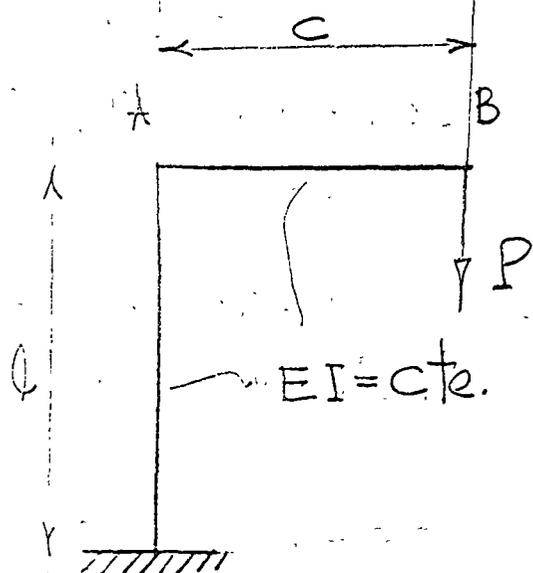
b) Determinar los desplazamientos horizontal y vertical de la viga curva mostrada en A



c) Determinar el desplazamiento horizontal en C y el vertical en B en la estructura mostrada.



d) Determinar los desplazamientos horizontal y vertical de A y B en la estructura mostrada.



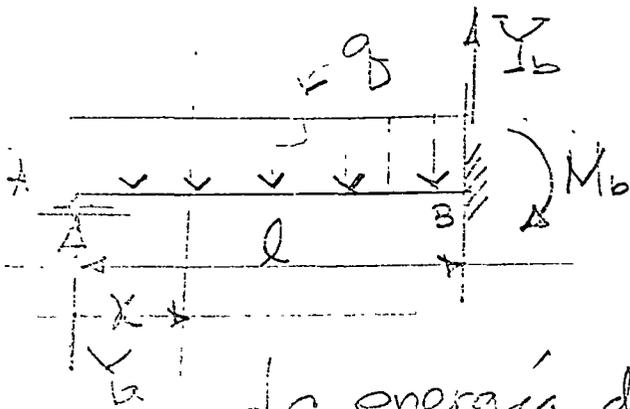
## 1.5 Teorema del Trabajo mínimo

Se han considerado aplicaciones del teorema de Castiglione a sistemas de fuerzas estáticamente determinados. Aplicándolo a sistemas estáticamente indeterminados se concluye que la derivada de la energía de deformación con respecto a cualquier redundante deberá ser cero si su acción es la de impedir desplazamientos en su punto de aplicación, de allí que las ecuaciones de las reacciones redundantes en sistemas hiperestáticos serán tal que la energía de deformación del sistema en dicho punto sea máxima o mínima, lo anterior es el método del trabajo mínimo para calcular redundantes. En una estructura hiperestática de grado "n" se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n} = 0 \quad (1.5.1)$$

### 1.5.1 Ejemplos

a) Viga empotrada en un extremo con carga uniforme. (grado  $n=1$ ).



La energía de deformación del sistema por flexión es

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (a)$$

Del teorema del trabajo mínimo

$$\frac{\partial U}{\partial Y_a} = 0 = \frac{\partial}{\partial Y_a} \left[ \int \frac{M^2 dx}{2EI} \right] = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial Y_a} dx \quad (b)$$

$$M = Y_a x - \frac{q x^2}{2} \quad (c)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Y_a} = x \quad (d)$$

Substituyendo (c) y (d) en (b) se obtiene

$$\int_0^l \left( Y_a x - \frac{q x^2}{2} \right) x dx = \frac{l^3}{3} Y_a - \frac{q l^4}{8} = 0$$

de donde  $Y_a = \frac{3}{8} q l$  (e)

En el sistema se tienen 3 reacciones  $Y_a, Y_b, M_b$  y 3 ecuaciones dos de estática y una del teorema de Castigliano.

en el ejemplo anterior si se considera  
 si se considera como redundante  $M_b$   
 se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial M_b} = \frac{\partial}{\partial M_b} \left[ \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \right] = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_b} dx = 0 \quad (f)$$

el momento flector es

$$M = \left( \frac{ql}{2} - \frac{M_b}{l} \right) x - \frac{qx^2}{2} \quad (g)$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_b} = -\frac{x}{l} \quad (h)$$

substituyendo (g) y (h) en (f) se obtiene

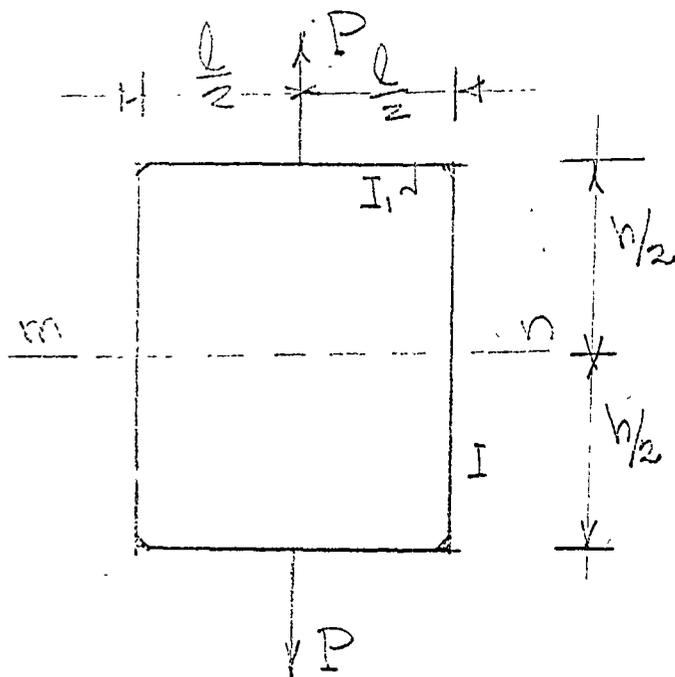
$$\int_0^l \left[ \left( \frac{ql}{2} - \frac{M_b}{l} \right) x - \frac{qx^2}{2} \right] \frac{x}{l} dx = 0 \quad (i)$$

integrando (i) y despejando  $M_b$  se  
 obtiene

$$M_b = \frac{ql^2}{8} \quad (j)$$

Ejemplos de tarea

1- Determinar los momentos en la sección m-n en la estructura mostrada



2-

BIBLIOTECA DE PROGRAMAS DE ANALISIS NUMERICO  
SECCION DE INVESTIGACION DE OPERACIONES (DESFI)

PROGRAMAS DE CONTROL WFL

PROGRAMA: COMPILACION Y EJECUCION DE UN PROGRAMA FUENTE  
RESIDENTE EN DISCO

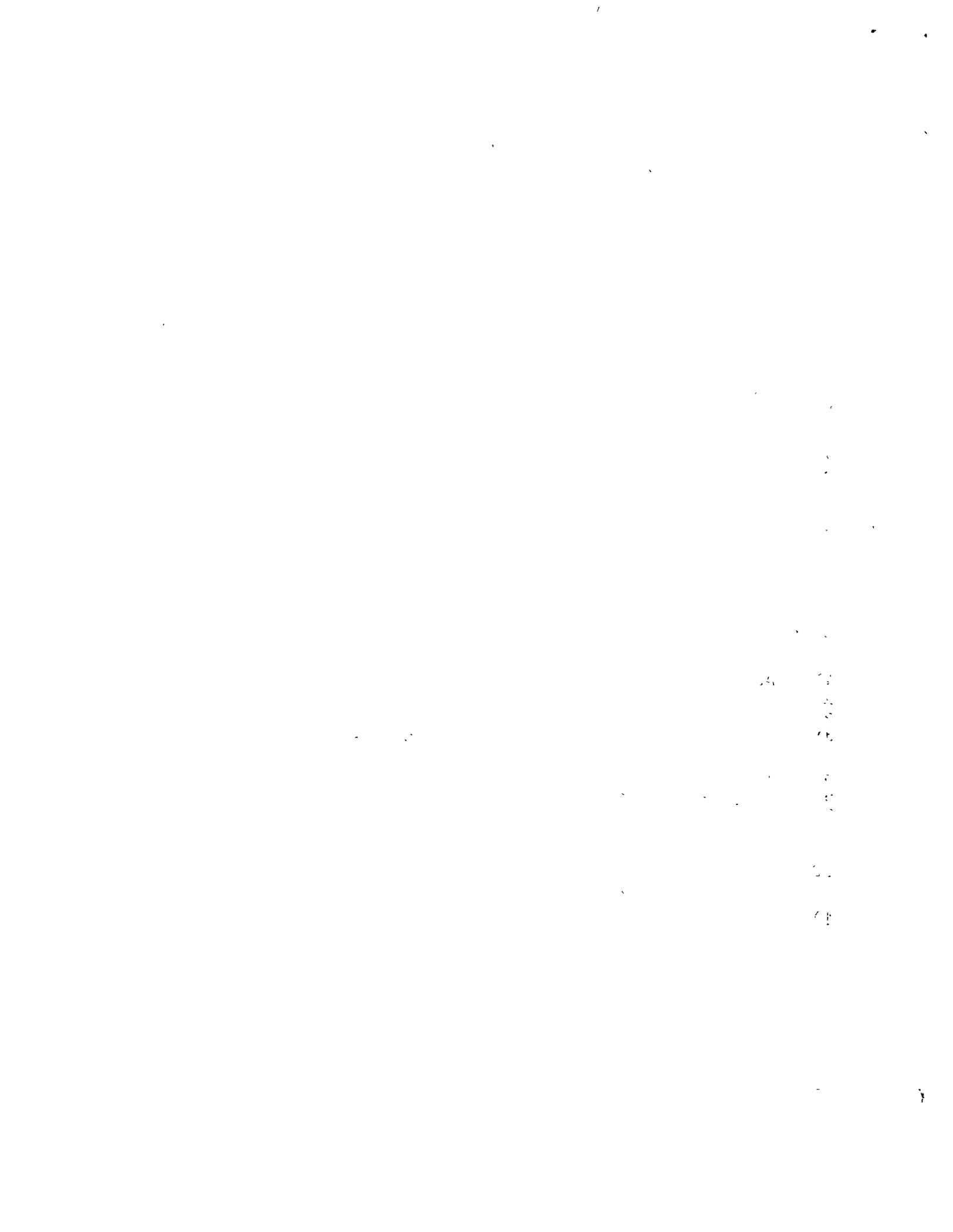
CLAVE 2.5

PROGRAMA DE CONTROL:

- 1) ? JOB NOMBRE/TAREA; USER=XXXX/YY; CLASS=3;
- 2) ? FAMILY DISK = PACK OTHERWISE DISK;
- 3) ? BEGIN
- 4) ? COMPILE PROGRAMA/OBJETO FORTRAN LIBRARY GO;
- 5) ? FORTRAN FILE TAPE = PROGRAMA/FUENTE;
- 6) ? DATA
- 7) \$ SET MERGE
- 8) ? DATA FILES
- 9) < Tarjetas de datos >
- 10) ? END JOB

DESCRIPCION DEL PROGRAMA:

- 1) Acceso al sistema, identificación y clave del usuario
- 2) Indica el uso de disco.
- 3) Inicio de la tarea
- 4) Llama al compilador deseado, indica que se ejecutará el programa residente en disco
- 5) Indica que se trabaja en un archivo creado anteriormente
- 6) Señala la entrada del programa fuente.
- 7) Opción: emerge el programa fuente
- 8) Entrada de datos
- 9) Tarjetas de datos
- 10) Final de la tarea



BIBLIOTECA DE PROGRAMAS DE ANALISIS NUMERICO  
SECCION DE INVESTIGACION DE OPERACIONES (DESFI)

PROGRAMAS DE CONTROL WFL

PROGRAMA: EJECUCION DE UN PROGRAMA OBJETO RESIDENTE EN DISCO  
DEL USUARIO ZZZZ, bajo la clave del usuario XXXX/yy.

CLAVE 2.4

PROGRAMA DE CONTROL:

- 1) ? JOB NOMBRE/TAREA; USER XXXX/yy; CLASS = 3;
- 2) ? FAMILY DISK = PACK OTHERWISE DISK;
- 3) ? BEGIN
- 4) ? EXECUTE (ZZZZ) OBJECT/PROGRAMA/OBJETO
- 5) ? DATA FILE5
- 6) < Tarjetas de Datos >
- 7) ? END JOB

DESCRIPCION DEL PROGRAMA:

- 1) Acceso al sistema, identificación y clave del usuario.
- 2) Indica la utilización de disco.
- 3) Inicio de la tarea.
- 4) Ejecución del programa objeto, PROGRAMA/OBJETO, pertenece al usuario ZZZZ.
- 5) Indica la entrada de datos.
- 6) Tarjetas de datos.
- 7) Final de tarea.

OBSERVACIONES:

- 1) Con el fin de ejecutar los programas del catalogo de la programoteca de la Sección de Investigación de Operaciones, escribir JL95 en lugar de ZZZZ, esto es ZZZZ + JL95.

SF80

SF80



BIBLIOTECA DE PROGRAMA DE ANALISIS NUMERICO  
SECCION DE INVESTIGACION DE OPERACIONES (DESFI)

PROGRAMAS DE CONTROL WFL

PROGRAMA: EJECUCION DE UN PROGRAMA OBJETO RESIDENTE EN DISCO.

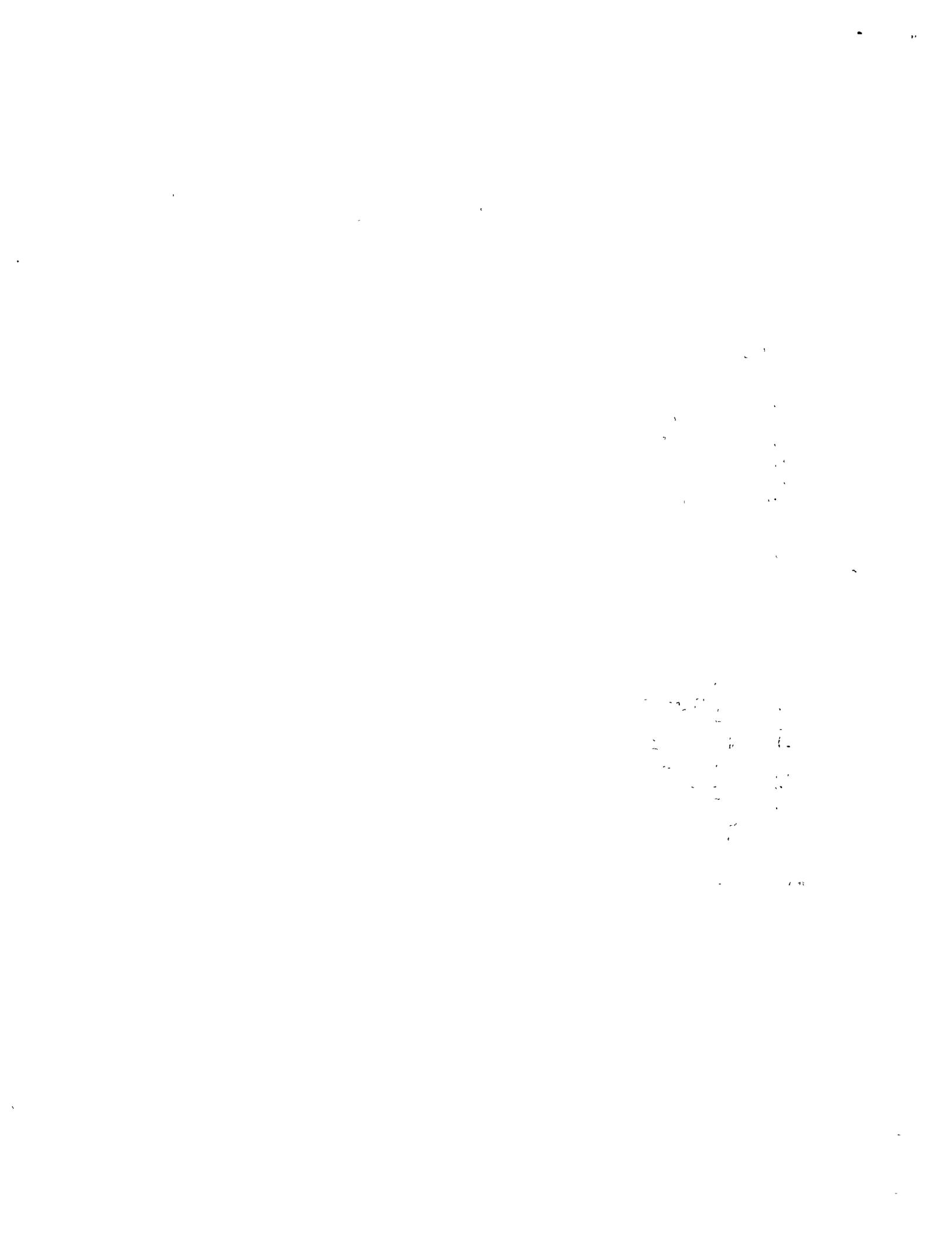
CLAVE 2.3.

PROGRAMA DE CONTROL:

- 1) ? JOB NOMBRE/TAREA; USER = XXXX/yy; CLASS = 3
- 2) ? FAMILY DISK = PACK OTHERWISE DISK:
- 3) ? BEGIN
- 4) ? EXECUTE OBJECT/PROGRAMA/OBJETO
- 5) ? DATA FILE5
- 6) < Tarjetas de Datos >
- 7) ? END JOB

DESCRIPCION DEL PROGRAMA:

- 1) Acceso al sistema, identificación y clave de usuario.
- 2) Indica la utilización de disco.
- 3) Inicio de la tarea.
- 4) Señala la ejecución de un programa objeto, grabado bajo el nombre PROGRAMA/OBJETO.
- 5) Indica la entrada de datos.
- 6) Tarjetas de datos.
- 7) Final de la tarea.



BIBLIOTECA DE PROGRAMAS DE ANALISIS NUMERICO  
SECCION DE INVESTIGACION DE OPERACIONES (DESFI)

PROGRAMAS DE CONTROL WFL

PROGRAMA; GRABADO DE UN PROGRAMA FUENTE EN TARJETAS A DISCO.

CLAVE 2.2

PROGRAMA DE CONTROL:

- 1) ? JOB NOMBRE/TAREA; USER = XXXX/yy; CLASS = 3
- 2) ? FAMILY DISK=PACK OTHERWISE DISK;
- 3) ? BEGIN
- 4) ? COMPILE PROGRAMA/OBJETO FORTRAN LIBRARY;
- 5) ? FORTRAN FILE NEWTAPE = PROGRAMA/FUENTE;
- 6) ? DATA
- 7) \$ SET NEW
- 8) \$ SET SEQ B + I
- 9) < Tarjetas del Programa fuente >
- 10) ? END JOB

DESCRIPCION DEL PROGRAMA:

- 1) Acceso al sistema, identificación y clave del usuario.
- 2) Indica la utilización de disco.
- 3) Inicio de la tarea.
- 4) Llama al compilador deseado, indica solo la grabación en disco.
- 5) Indica la creación de un nuevo archivo.
- 6) Señala la entrada del programa fuente.
- 7) Opción: Es un programa nuevo.
- 8) Opción: Secuenciación con base "B" e incremento "I"
- 9) Tarjetas del programa fuente.
- 10) Final de la tarea.

ANALISIS ESTRUCTURAL

TEMA IV. 1. INTRODUCCION AL METODO DE ELEMENTOS FINITOS  
EJEMPLO DE ANALISIS Y DISEÑO DE UN EDIFICIO  
CON MURO DE CORTANTE ( MURO - MARCO )  
MEDIANTE EA COMPUTADORA.

PROF. DR. PORFIRIO BALLESTEROS.

febrero-marzo 1978.



# APLICACION

MARCO A

P. Billesteros

15

150			200				200				100		100		210		214		214	
22 49 64			80 96 112 128 144				150		166		182		198		214		230			
14	8	93	23	113	38	128	53					145	68	158	83					
15	31	49	65	79	95	111	127	143			165	181	197	213	229					
16	90	158	105	73	30	120	45	135	20		164	180	196	212	228					
17	7	97	22	77	112	37	127	52	9	149	14	163	179	195	211	227				
18	89	14	104	76	29	119	44	134			162	178	194	210	226					
19	6	96	21	75	111	36	126	51	5		161	177	193	209	225					
20	38	13	103	74	28	118	43	123	8	148	13	160	176	192	208	224				
21	5	95	20	73	110	35	125	50			159	175	191	207	223					
22	87	12	102	72	27	117	42	132	8		158	174	190	206	222					
23	4	94	19	71	109	34	124	49	7	147	12	157	173	189	205	221				
24	86	11	101	70	26	116	41	131			156	172	188	204	220					
25	3	93	18	69	108	33	123	48	6		155	171	187	203	219					
26	5	10	100	68	25	115	40	130	6	146	11	154	170	186	202	218				
27	2	92	17	67	107	32	122	47			153	169	185	201	217					
28	84	9	99	66	24	114	39	129	5		152	168	184	200	216					
29		91	16	65	106	31	121	46			151	167	183	199	215					

PROGRAMA MURO-MARCO

CODIFICADO POR Rallos

REVISADO POR Salinas

FECHA MARZO

PAGINA 1 DE 1

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75
? JOB MURØ/MARCØ ; USER XYTZ/AB ; CLASS=3 ; BEGIN ;																	
EXECUTE (YP80) DESFI/SMTA/P7405 ;																	
PROCESS 180 ; IØ 180 ;																	
BCL TQUE																	
A11 TITULO PROBLEMA GENERAL																	
ANALISIS DE UNA ESTRUCTURA TIPO MURO MARCO																	
A12 ARCHIVOS																	
10	15	20	25	Numero de Lineas (horizontal) (columnas verticales) y (subestructuras)													
A13 ESTRUCTURAS POR ANALIZAR																	
A141 TITULO PROBLEMA PARTICULAR																	
ANALISIS DEL MURO MARCO A (Cualquier informacion de la estructura)																	
A142 CANTIDAD DE BARRAS, CUADRADOS, MATERIAL, NUDOS Y SECCIONES																	
20	165	1	230	2													
A143 CARACTERISTICAS DEL MATERIAL (Identificador de material, E, $\nu$ , $\gamma$ )																	
1	1500000.0	0.15	2.4														
A144 CARACTERISTICAS DE LAS SECCIONES (Tipo, forma rectangular, b, h)																	
1	2	70.	15.														
2	2	100.	20.														
A145 COORDENADAS PUNTOS NODALES																	
1	0.0	0.0															
16	0.0	13.0	1	(1 indica punto verticalmente de nodo 1 a nodo 16)													
17	0.5	0.0															
32	0.5	13.0	1	(1 indica punto verticalmente del nodo 17 al nodo 32)													

- IDENTIFICACION DE LA TARJETA POR PERFORAR (NO SE PERFORA)

U. N. A. M.  
INSTITUTO DE INGENIERIA  
FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA MURO-MARCO

CODIFICADO POR Ballesteros

REVISADO POR Salinas

FECHA MARZO 1976

PAGINA 2 DE 10

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
	33			1.0		0.0												
	48			1.0		13.0	1											
	49			1.5		0.0												
	64			1.5		13.0	1											
	65			3.5		0.0												
	80			3.5		13.0	1											
	81			4.0		0.0												
	96			4.0		13.0	1											
	97			4.5		0.0												
	112			4.5		13.0	1											
	113			5.0		0.0												
	128			5.0		13.0	1											
	129			5.5		0.0												
	144			5.5		13.0	1											
	145			6.5		0.0												
	150			6.5		13.0	1											
	151			7.5		0.0												
	166			7.5		13.0	1											
	167			8.025		0.0												
	182			8.025		13.0	1											
	183			8.550		0.0												
	198			8.550		13.0	1											
	199			9.075		0.0												
	214			9.075		13.0	1											
	215			9.600		0.0												

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75
	230		9.600		13.0	1			(I indica elemento de 215 a 230)								
-	A147		LOCALIZACION DE BARRAS Y CARACTERISTICAS														
	1	52	68			1					BARRA	NODO I	NODO I				No de seccion
	5	64	80			1			1		"	"	"	"			Significaci
	6	132	146			1											
	7	135	147			1											
	8	138	148			1											
	9	141	149			1											
	10	144	150			1											
	11	146	154			1											
	12	147	157			1											
	13	148	160			1											
	14	149	168			1											
	15	150	166			1											
	16	145	146			2											
	20	149	150			2			1								Generacion [5]
-	A149		ANGULO FUERZA DE GRAVEDAD, Y ESPESOR DEL MURO														
		270.0			0.20												
-	A1410		TIPO DE LOS CUADRADOS														
		00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000
		00000	0	165-82 = 32					29462 165								
-	A1411		LOCALIZACION DE CUADRADOS														
	1	2	1	17	18						1						Indicador de fuerza en la cimentacion
	8	16	15	3	32						1						Indicador de fuerza del 1 a 8

U. N. A. M.  
INSTITUTO DE INGENIERIA  
FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA MURO-MARCO

CODIFICADO POR Ballesteros

REVISADO POR Salinas

FECHA MARZO 1976

PAGINA 4 DE 10

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
	9		19		18		34		35									
	15		31		30		46		47		1							
	16		34		33		49		50			1						
	23		48		47		63		64		1							
	24		67		66		82		83									
	30		79		78		94		95		1							
	31		82		81		97		98			1						
	38		96		95		111		112		1							
	39		99		98		114		115									
	45		111		110		126		127		1							
	46		114		113		129		130			1						
	53		128		127		143		144		1							
	54		153		152		148		149									
	60		165		164		180		181		1							
	61		168		167		183		184			1						
	68		182		181		197		198		1							
	69		185		184		200		201									
	75		197		196		212		213		1							
	76		200		199		215		216			1						
	83		214		213		229		230		1							
	84		3		2		18		19									
	90		15		14		30		31		1							
	91		18		17		33		34			1						
	98		32		31		47		48		1							
	99		35		34		5		51									

U. N. A. M.  
INSTITUTO DE INGENIERIA  
FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA MURO-MARCO

CODIFICADO POR Priller-Larios

REVISADO POR Selinas

FECHA MARZO 19

PAGINA 5 DE 7

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75
105		47		46		62				1							
106		66		65		81					1						
113		80		79		95				1							
114		83		82		98											
120		95		94		110				1							
121		98		97		113					1						
128		112		111		127				1							
129		115		114		130											
135		127		126		142				1							
136		152		151		167					1						
143		166		165		181				1							
144		169		168		184											
150		181		180		196				1							
151		184		183		199					1						
158		198		197		213				1							
159		201		200		216											
165		213		212		228				1							
- A1412		CANTIDAD DE NUDOS RESTRINGIDOS, CONDICIONES DE CARGA Y RIGIDEZ REQUERIDA															
	15	1		0													
- A1413		TIPO DE RESTRICCION DE NUDOS (Nota, rest. en U, rest. en F, rest. A) (1013)															
	1111		17111		33111		99111		65111		81111		97111		115111		129111
	151111		167111		183111		199111		215111								
- A14141		CANTIDAD DE NIVELES Y NUDOS POR NIVEL															
	5		15														
- A14142		INDICACION EL CALCULO DE RIGIDEZ DE ENTREPISO															

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
CALCULO DE LAS RIGIDEZES DE ENTREPISO																		
A14143 CANTIDAD DE NUDOS EN CADA NIVEL																		
	15	15	15	15	15													
A14144 NUMERACION DE LOS NUDOS POR NIVEL																		
	4	20	36	52	68	84	100	116	132	146	154	170	186	202	218			
	7	23	39	55	71	87	103	119	135	147	157	173	189	205	221			
	10	26	42	58	74	90	106	122	138	148	160	176	192	208	224			
	13	29	45	61	77	93	109	125	141	149	163	179	195	211	227			
	16	32	48	64	80	96	112	128	144	150	166	182	198	214	230			
A14145 ALTURAS DE ENTREPISO																		
	2.60		2.60		2.60		2.60		2.60		2.60							
A14146 PESOS POR NIVEL																		
	33.23		33.23		33.23		33.23		33.23		33.23							
A14147 COEFICIENTE SISMICO																		
	0.08																	
A1415 INDICACION DEL TIPO DE CONDICION DE CARGA																		
ANALISIS DEL MURO MARCO A CONSIDERANDO CARGA ESTATICA Y EFECTO SISMICO																		
A1416 CANTIDAD DE BARRAS Y NUDOS CARGADOS																		
	20	90																
A14171 NUMERO DE BARRAS CON INDICE DE GRAFICACION																		
	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	7	1	8			
	9	1	10	1	11	1	12	1	13	1	14	1	15	1	16			
	17	1	18	1	19	1	20	1										
A14172 CARGAS EN LAS BARRAS																		
	1	4																

de mallas intermedias y mallas laterales con la misma carga

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
	1			-0.50					1 carga vertical, -0.5 ton/m									
	1		9						Barra [6] de una carga intermedia, y 9 barras restantes con carga igual									
	1			-0.25					1 carga vertical 0.25 ton/m									
	1		4						columna [10] de una carga intermedia y 4 restantes con carga igual									
	1			0.00					1 tipo carga de 0.00 valor									
A1418				CARGAS EN LOS NUDOS														
	1			0.0					-1.491									
	17			0.0					-2.982									
	33			0.0					-2.982									
	49			0.0					-2.982									
	65			0.0					-2.982									
	81			0.0					-2.982									
	97			0.0					-2.982									
	113			0.0					-2.982									
	129			0.0					-2.982									
	145			0.0					-2.982									
	151			0.0					-2.982									
	167			0.0					-2.982									
	183			0.0					-2.982									
	199			0.0					-2.982									
	215			0.0					-1.491									
	4			0.056					-1.491									
	20			0.056					-2.982									
	36			0.056					-2.982									
	52			0.056					-2.982									

U. N. A. M.  
INSTITUTO DE INGENIERIA  
FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA MURO-MARCO

CODIFICADO POR Ballesteros

REVISADO POR Salinas

FECHA MARZO 1976

PAGINA 8 DE 10

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
	68			0.056		-2.982												
	84			0.056		-2.982												
	100			0.056		-2.982												
	116			0.056		-2.982												
	132			0.056		-2.982												
	146			0.056		-2.982												
	154			0.056		-2.982												
	170			0.056		-2.982												
	186			0.056		-2.982												
	202			0.056		-2.982												
	218			0.056		-1.491												
	7			0.112		-1.491												
	23			0.112		-2.982												
	39			0.112		-2.982												
	55			0.112		-2.982												
	71			0.112		-2.982												
	87			0.112		-2.982												
	103			0.112		-2.982												
	119			0.112		-2.982												
	135			0.112		-2.982												
	147			0.112		-2.982												
	157			0.112		-2.982												
	173			0.112		-2.982												
	189			0.112		-2.982												
	205			0.112		-2.982												

PROGRAMA MURO-MARCO

CODIFICADO POR Ballesteros

REVISADO POR Silva

FECHA MARZO 1976

PAGINA 9 DE 10

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80	
221			0.112		-1.491														
10			0.168		-1.491														
26			0.168		-2.982														
42			0.168		-2.982														
58			0.168		-2.982														
74			0.168		-2.982														
90			0.168		-2.982														
106			0.168		-2.982														
122			0.168		-2.982														
138			0.168		-2.982														
148			0.168		-2.982														
140			0.168		-2.982														
176			0.168		-2.982														
192			0.168		-2.982														
208			0.168		-2.982														
224			0.168		-1.491														
13			0.220		-1.491														
29			0.220		-2.982														
45			0.220		-2.982														
61			0.220		-2.982														
77			0.220		-2.982														
93			0.220		-2.982														
109			0.220		-2.982														
125			0.220		-2.982														
141			0.220		-2.982														

PROGRAMA MURO - MARCO

CODIFICADO POR Ballesteros

REVISADO POR Silinas

FECHA NOV 20 1976

PAGINA 10 DE 10

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
149			0.220		-2.982													
163			0.220		-2.982													
179			0.220		-2.982													
195			0.220		-2.982													
211			0.220		-2.982													
227			0.220		-1.491													
16			0.280		-1.491													
32			0.280		-2.982													
48			0.280		-2.982													
64			0.280		-2.982													
80			0.280		-2.982													
96			0.280		-2.982													
112			0.280		-2.982													
128			0.280		-2.982													
144			0.280		-2.982													
150			0.280		-2.982													
166			0.280		-2.982													
182			0.280		-2.982													
198			0.280		-2.982													
214			0.280		-2.982													
230			0.280		-1.491													
? END JOB																		

ANÁLISIS DE UNA ESTRUCTURA TIPO MARCO

20	NO. DE ELEMENTOS
690	NO. DE ECUACIONES
1	NO. DE TIPOS DE MATERIAL
230	NO. DE PUNTOS DE LA ESTRUCTURA
165	NO. DE CUADRIÁTEROS
2	NO. DE TIPOS DE SECCION
0	NO. DEL PRIMER PUNTO FRONTERA

CONSTANTES ELASTICAS DE LOS MATERIALES

MODULO DE ELASTICIDAD	COCIENTE DE POISSON	PESO VOLUMETRICO
(TON/M**2)		(TON/M**3)
1500000.00	0.15	2.400

PARÁMETROS QUE DEFINEN LAS SECCIONES

*TIPO*	*SECCION*	*PARAMETROS**
0	ESPECIAL	(A, IZ, FY)
1	RECTANGULAR	(B, H)
2	I	(B, H, V, T)
3	I	(B, H, V, T)
4	CANAL	(B, H, V, T)
5	ANGULO	(B, H, V, T)
6	CIRCULAR	(D)
7	CAJON	(B, H, V, T)
8	CIRCULAR HUECA	(D, T)
9	CRUZ	(B, H, V, T, C)
10	ZETA	(B1, H, V, T1, C, P)
11	I	(B, H, V, T)

\*\*NOMENCLATURA\*\* (VER FIGURAS DEL CATALOGO DE SECCIONES)

B	ANCHO DE LA SECCION TIPO 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10 Y 11
DI	ANCHO INFERIOR DE LA SECCION TIPO 10
D	DIAMETRO DE LAS SECCIONES TIPO 6 Y 8
T	ALTEZA DE LAS SECCIONES TIPO 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10 Y 11
TC	ESPESOR DE LA SECCION CIRCULAR HUECA
V	ANCHO DEL ALMA DE LAS SECCIONES TIPO 2, 3, 4, 7, 9, 10 Y 11
T	ESPESOR DEL PATIN DE LAS SECCIONES TIPO 2, 3, 4, 5, 7, 9 Y 11
TI	ESPESOR DEL PATIN INFERIOR DE LA SECCION TIPO 10
P	ESPESOR DEL PATIN SUPERIOR DE LA SECCION TIPO 10
B1	ANCHO SUPERIOR DE LA SECCION TIPO 10
C	DISTANCIA ENTRE LAS FIRMAS SUPERIORES DEL ALMA Y PATIN RESPECTIVAMENTE DE LAS SECCIONES 9 Y 10

(CM)	CENTIMETROS
(M**2)	METROS A LA SEGUNDA POTENCIA
(M**4)	METROS A LA CUARTA POTENCIA
A	AREA
I	MOMENTO DE INERCIA RESPECTO AL EJE Z
FY	FACTOR DE FUERZA PARA LA DIRECCION Y

SECCION	TIPO	B-DI-D-A (CH)	P-IZ-TC (CH)	V-FY (CH)
1	1	70.000	15.000	0.000
2	1	100.000	20.000	0.000

SECCION NO	TIPO	A (11*2)	IZ (11*4)	FY
1	1	0.105000000	0.000106875	1.200000000
2	1	0.200000000	0.000666667	1.200000000

ORDENADA  
NO. (H)

1	0.000	0.000
2	0.000	0.867
3	0.000	1.733
4	0.000	2.600
5	0.000	3.467
6	0.000	4.333
7	0.000	5.200
8	0.000	6.067
9	0.000	6.933
10	0.000	7.800
11	0.000	8.667
12	0.000	9.533
13	0.000	10.400
14	0.000	11.267
15	0.000	12.133
16	0.000	13.000
17	0.500	0.000
18	0.500	0.867
19	0.500	1.733
20	0.500	2.600
21	0.500	3.467
22	0.500	4.333
23	0.500	5.200
24	0.500	6.067
25	0.500	6.933
26	0.500	7.800
27	0.500	8.667
28	0.500	9.533
29	0.500	10.400
30	0.500	11.267
31	0.500	12.133
32	0.500	13.000
33	1.000	0.000
34	1.000	0.867
35	1.000	1.733
36	1.000	2.600
37	1.000	3.467
38	1.000	4.333
39	1.000	5.200
40	1.000	6.067
41	1.000	6.933

↓ sigue igual

9.600	6.067
9.600	6.933
9.600	7.800
9.600	8.667
9.600	9.533
9.600	10.400
9.600	11.267
9.600	12.133
9.600	13.000

NO.	HUGO I	HUGO J	AT. NO.	SEC. NO.	APUY I	APUY J	LONGITUD
1	52	60	1	1	0	0	2.000
2	55	71	1	1	0	0	2.000
3	58	74	1	1	0	0	2.000
4	61	77	1	1	0	0	2.000
5	64	80	1	1	0	0	2.000
6	132	145	1	1	0	0	1.000
7	135	147	1	1	0	0	1.000
8	138	148	1	1	0	0	1.000
9	141	149	1	1	0	0	1.000
10	144	150	1	1	0	0	1.000
11	145	154	1	1	0	0	1.000
12	147	157	1	1	0	0	1.000
13	148	160	1	1	0	0	1.000
14	149	163	1	1	0	0	1.000
15	150	166	1	1	0	0	1.000
16	145	146	1	2	0	0	2.000
17	146	147	1	2	0	0	2.000
18	147	148	1	2	0	0	2.000
19	148	149	1	2	0	0	2.000
20	149	150	1	2	0	0	2.000

270.00 GRADOS, ANGULO ENTRE GRAVEDAD Y EJE X GLOBAL

0.20 METROS, ESPESOR DOMINANTE EN EL MUNDO

NO. NO. TIPO DE ELEMENTO

1	?
2	?
3	?
4	?
5	?
6	?
7	?
8	?
9	?
10	?
11	?
12	?
13	?
14	?
15	?
16	?
17	?
18	?
19	?
20	?
21	?

} sigue igual

142	1
143	1
144	1
145	1
146	1
147	1
148	1
149	1
150	1
151	1
152	1
153	1
154	1
155	1
156	1
157	1
158	1
159	1
160	1
161	1
162	1
163	1
164	1
165	1

ELEM: NO=NODO I=NODO J=NODO K=NODO L=MAT. NO.=ESPESOR(M) INGEN

1	2	1	17	18	1	0.20	0
2	4	3	19	20	1	0.20	1
3	6	5	21	22	1	0.20	1
4	8	7	23	24	1	0.20	1
5	10	9	25	26	1	0.20	1
6	12	11	27	28	1	0.20	1
7	14	13	29	30	1	0.20	1
8	16	15	31	32	1	0.20	1
9	18	18	34	35	1	0.20	0
10	21	20	36	37	1	0.20	1
11	23	22	38	39	1	0.20	1
12	25	24	40	41	1	0.20	1
13	27	26	42	43	1	0.20	1
14	29	28	44	45	1	0.20	1
15	31	30	46	47	1	0.20	1
16	34	33	49	50	1	0.20	0
17	36	35	51	52	1	0.20	1
18	38	37	53	54	1	0.20	1
19	40	39	55	56	1	0.20	1
20	42	41	57	58	1	0.20	1
21	44	43	59	60	1	0.20	1
22	46	45	61	62	1	0.20	1
23	48	47	63	64	1	0.20	1
24	67	66	82	83	1	0.20	0
25	69	68	84	85	1	0.20	1
26	71	70	86	87	1	0.20	1
27	73	72	88	89	1	0.20	1
28	75	74	90	91	1	0.20	1
29	77	76	92	93	1	0.20	1
30	79	78	94	95	1	0.20	1
31	82	81	97	98	1	0.20	0

} signa igual

152	186	185	201	202	1	0.20	1
153	188	187	203	204	1	0.20	1
154	190	189	205	206	1	0.20	1
5	192	191	207	208	1	0.20	1
156	194	193	209	210	1	0.20	1
157	196	195	211	212	1	0.20	1
158	198	197	213	214	1	0.20	1
159	201	200	216	217	1	0.20	0
160	203	202	218	219	1	0.20	1
161	205	204	220	221	1	0.20	1
162	207	206	222	223	1	0.20	1
163	209	208	224	225	1	0.20	1
164	211	210	226	227	1	0.20	1
165	213	212	228	229	1	0.20	1

## 54 ANCHO DE SEMIBANDA DE LA MATRIZ DE RIGIDECES

## 15 NO. DE NUDOS FRONTERA

1 NO. DE CONDICIONES DE CARGA

0 INDICADOR DE RIGIDECES DE ENTREPISO

NUDO RESTRICCION TIPO 0=LIBRE, 1=FIJO  
 RESTRICCION D=X D=Y R=Z

1	1	1	1
17	1	1	1
33	1	1	1
49	1	1	1
65	1	1	1
81	1	1	1
97	1	1	1
113	1	1	1
129	1	1	1
145	1	1	1
151	1	1	1
167	1	1	1
183	1	1	1
199	1	1	1
215	1	1	1

NO. DE RESTRICCIONES DE LA ESTRUCTURA 45  
 NO. RESTRICCION C.I. RESTRINGIDO

1	1
2	2
3	3
4	42
5	50
6	51
7	97
8	98
9	99
10	145
11	146

13	193
14	194
15	195
16	241
17	242
18	243
19	287
20	290
21	291
22	337
23	338
24	339
25	385
26	386
27	387
28	433
29	434
30	435
31	451
32	452
33	453
34	499
35	500
36	501
37	547
38	548
39	549
40	595
41	596
42	597
43	643
44	644
45	645

~~CALCULO DE LAS RIGIDEZES DE ENTREPISO~~

PUNTOS NODALES EN CADA NIVEL

NIVEL	Nº. DE NUDOS
1	15
2	15
3	15
4	15
5	15

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NÚM. 1

4	20	36	52	68	84	100	116	132	148	164	180	196	212
---	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NÚM. 2

7	23	39	55	71	87	103	119	135	151	167	183	199	215
---	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NÚM. 3

10	26	42	58	74	90	106	122	138	154	170	186	202	218
----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

## NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 4

13	20	45	61	77	93	109	125	141	147	163	179	195	211	227
----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

## NUMERACION DE LOS NUDOS CONTENIDOS EN EL NIVEL NO. 5

10	32	48	64	80	96	112	128	144	150	166	182	198	214	230
----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

ALTURAS DE LOS ENTREPISOS  
ENTREPISO NO. ALTURA (M).

1	2.60
2	2.60
3	2.60
4	2.60
5	2.60

PESOS DE LOS NIVELES  
NIVEL NO. PESO (TON)

1	33.230
2	33.230
3	33.230
4	33.230
5	33.230

COEFICIENTE SISMICO= 0.080

## NIVEL \* ALTURA (M) \* FZA. RIGIDEZ (TON)

1	2.60	0.886
2	5.20	1.772
3	7.80	2.658
4	10.40	3.545
5	13.00	4.431

## RIGIDEZES DE ENTREPISO, EN TON/M

2.9036E+04 1.2200E+04 8.2321E+03 5.8534E+03 3.3549E+03

ANALISIS DEL MURO MARCO A CONSIDERANDO CARGA ESTADICA Y TRACCION

1 NO. DE CONDICION DE CARGA  
 20 NO. DE BARRAS CARGADAS  
 20 NO. DE NUDOS CARGADOS

DATOS PARA EL CASO DE BARRAS CON CARGAS INTERMEDIAS DISTINTAS A PESO PROPIA

BARRA	NO. INFO. GRAFI
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1
11	1
12	1
13	1
14	1
15	1
16	1
17	1
18	1
19	1
20	1

- BARRA 1 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = 0.5000
- BARRA 2 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR
- ~~BARRA 3 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR~~
- BARRA 4 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR
- BARRA 5 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR
- ~~BARRA 6 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = 0.2500~~
- BARRA 7 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR
- BARRA 8 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR
- ~~BARRA 9 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR~~
- BARRA 10 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR
- BARRA 11 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR
- ~~BARRA 12 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR~~
- BARRA 13 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M) = A LA BARRA ANTERIOR

BARRA 14 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR  
 BARRA 15 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR  
 BARRA 16 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)= 0.0000  
 BARRA 17 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR  
 BARRA 18 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR  
 BARRA 19 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR  
 BARRA 20 CARGA DIST UNIFOR CONTIN(TON/M)=A LA BARRA ANTERIOR

ACCIONES CONCENTRADAS EN LOS NUDOS (EN TON Y TON-M)  
 NUDO NO. FZA. HORIZONTAL FZA. VERTICAL MOMENTO

NUDO NO.	FZA. HORIZONTAL	FZA. VERTICAL	MOMENTO
1	0.000	-1.491	0.00000
17	0.000	-2.982	0.00000
33	0.000	-2.982	0.00000
49	0.000	-2.982	0.00000
65	0.000	-2.982	0.00000
81	0.000	-2.982	0.00000
97	0.000	-2.982	0.00000
113	0.000	-2.982	0.00000
129	0.000	-2.982	0.00000
145	0.000	-2.982	0.00000
161	0.000	-2.982	0.00000
177	0.000	-2.982	0.00000
193	0.000	-2.982	0.00000
209	0.000	-2.982	0.00000
225	0.000	-1.491	0.00000
4	0.056	-1.491	0.00000
20	0.056	-2.982	0.00000
36	0.056	-2.982	0.00000
52	0.056	-2.982	0.00000
68	0.056	-2.982	0.00000
84	0.056	-2.982	0.00000
100	0.056	-2.982	0.00000
116	0.056	-2.982	0.00000
132	0.056	-2.982	0.00000
148	0.056	-2.982	0.00000
164	0.056	-2.982	0.00000
180	0.056	-2.982	0.00000
196	0.056	-2.982	0.00000
212	0.056	-2.982	0.00000
228	0.056	-1.491	0.00000
7	0.112	-1.491	0.00000
23	0.112	-2.982	0.00000
39	0.112	-2.982	0.00000
55	0.112	-2.982	0.00000
71	0.112	-2.982	0.00000
87	0.112	-2.982	0.00000
103	0.112	-2.982	0.00000
119	0.112	-2.982	0.00000
135	0.112	-2.982	0.00000
151	0.112	-2.982	0.00000
167	0.112	-2.982	0.00000
183	0.112	-2.982	0.00000

173	0.112	-2.982	0.00000
189	0.112	-2.982	0.00000
205	0.112	-2.982	0.00000
221	0.112	-1.491	0.00000
19	0.168	-1.491	0.00000
36	0.168	-2.982	0.00000
52	0.168	-2.982	0.00000
58	0.168	-2.982	0.00000
74	0.168	-2.982	0.00000
90	0.168	-2.982	0.00000
106	0.168	-2.982	0.00000
122	0.168	-2.982	0.00000
138	0.168	-2.932	0.00000
148	0.168	-2.982	0.00000
160	0.168	-2.982	0.00000
176	0.168	-2.982	0.00000
192	0.168	-2.982	0.00000
208	0.168	-2.982	0.00000
224	0.168	-1.491	0.00000
13	0.220	-1.491	0.00000
29	0.220	-2.982	0.00000
45	0.220	-2.982	0.00000
61	0.220	-2.982	0.00000
77	0.220	-2.982	0.00000
93	0.220	-2.982	0.00000
109	0.220	-2.982	0.00000
125	0.220	-2.982	0.00000
141	0.220	-2.982	0.00000
149	0.220	-2.932	0.00000
163	0.220	-2.982	0.00000
179	0.220	-2.982	0.00000
195	0.220	-2.982	0.00000
211	0.220	-2.982	0.00000
227	0.220	-1.491	0.00000
16	0.280	-1.491	0.00000
32	0.280	-2.982	0.00000
48	0.280	-2.982	0.00000
64	0.280	-2.982	0.00000
80	0.280	-2.982	0.00000
96	0.280	-2.982	0.00000
112	0.280	-2.982	0.00000
128	0.280	-2.982	0.00000
144	0.280	-2.982	0.00000
150	0.280	-2.982	0.00000
166	0.280	-2.982	0.00000
182	0.280	-2.982	0.00000
198	0.280	-2.982	0.00000
214	0.280	-2.982	0.00000
230	0.280	-1.491	0.00000

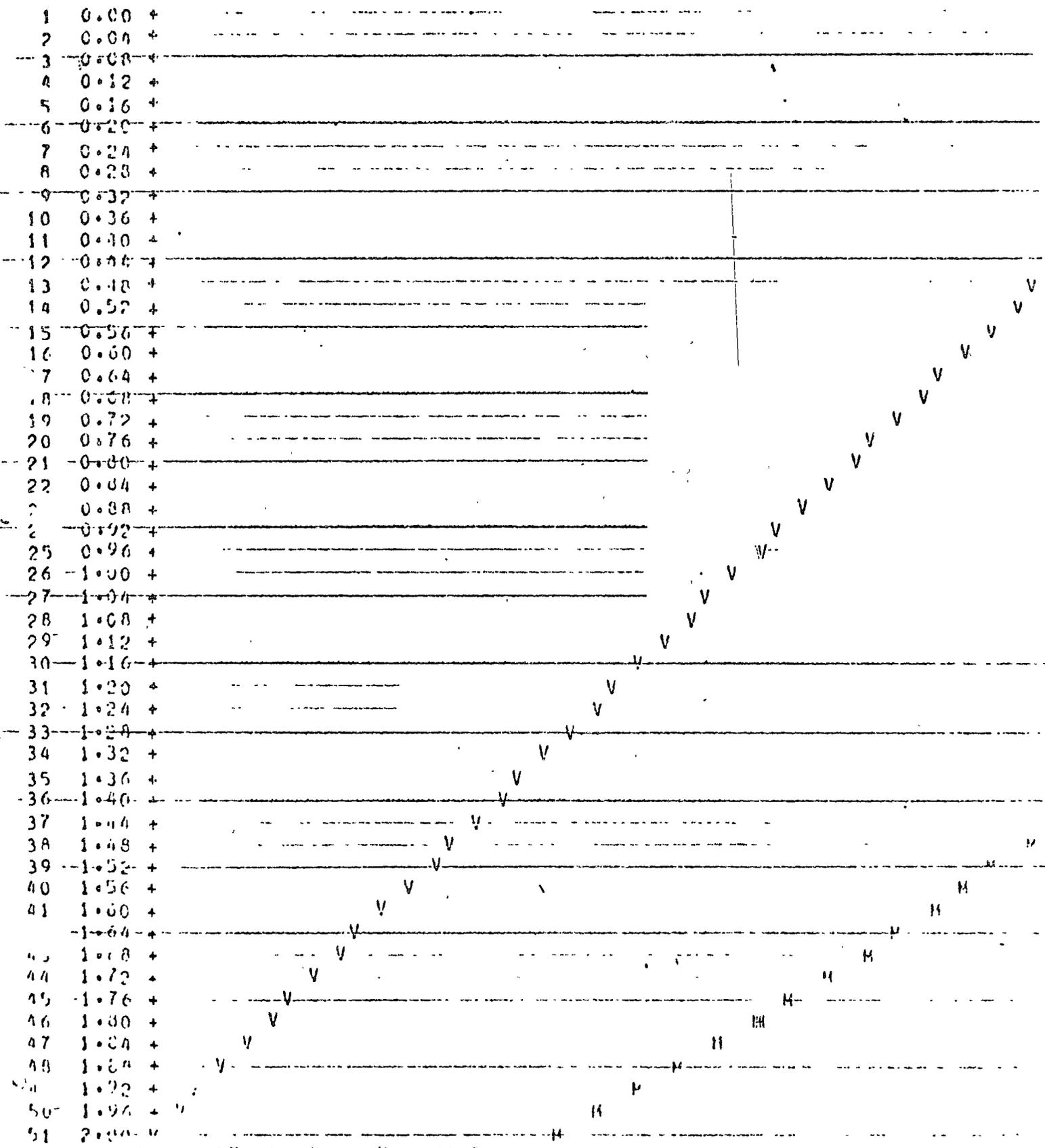
DESPLAZAMIENTOS NODALES DE LA ESTRUCTURA (CM)

NO. NOD.	H O R I Z O N T A L	V E R T I C A L	G I R O S (RAD)
1	0.	0.	0.
2	-3.4578361E-05	-4.3730483E-05	-9.6072576E-05
3	1.8176531E-04	-6.8345851E-05	-1.9723313E-04
4	3.6482475E-04	-1.4563486E-04	-2.7230434E-04
5	-6.2696880E-04	-1.9214011E-04	-3.3306038E-04
6	9.3653634E-04	-2.4714974E-04	-3.8158451E-04
7	1.2833062E-03	-3.1083004E-04	-4.0188536E-04

↓ sigue igual

ESCALA DE LA GRÁFICA = 1,16380E-02 UNIDADES/COLUMNA 11  
 ORDENADA MENOR = -9,02614E-01  
 ORDENADA MAYOR = 2,61189E-01

BARRA NO. 1, NUDO INICIAL = 52, NUDO FINAL

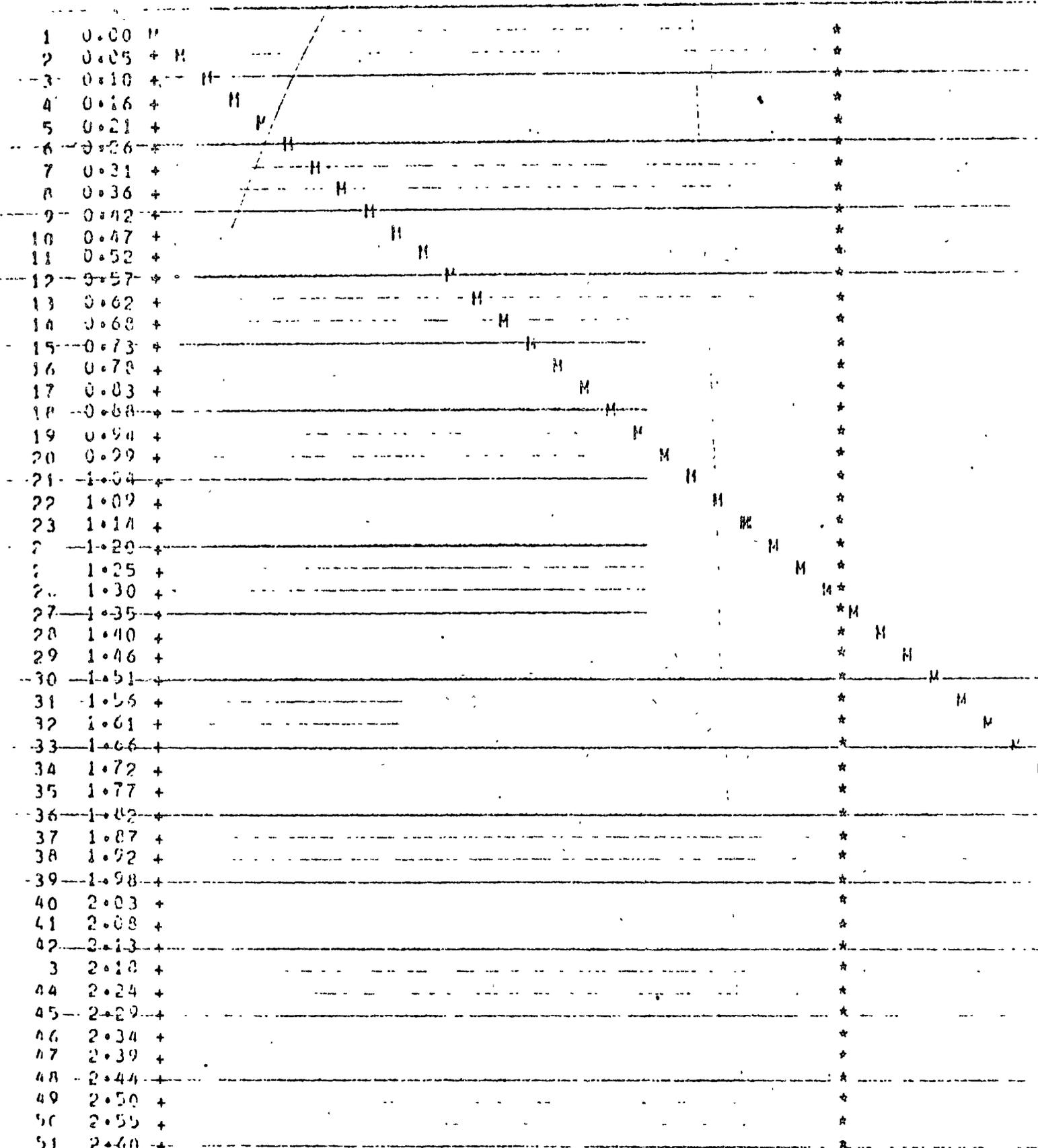


CONTANTOS EN TORO Y PUNTOS EN TORO



ESCALA DE LA GRAFICA =  $7.12272E-03$  UNIDADES/COLUMA  
 ORDENADA MENOR =  $-3.59964E-01$   
 ORDENADA MAYOR =  $3.52308E-01$

BARRA NO. 16, NUDDO INICIAL = 145, NUDDO FINAL =



CORTANTES EN TON. Y MOMENTOS EN TON-M

AL = 105. NUDD FTAL = 746

V

M

*			V	+	2.74F=01	=	3.60F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	3.46F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	3.31F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	3.17F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	3.03F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	2.89F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	2.74F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	2.60F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	2.46F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	2.32F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	2.18F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	2.03F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	1.89F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	1.75F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	1.61F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	1.46F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	1.32F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	1.18F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	1.04F=01		
*			V	+	2.74F=01	=	8.93F=0		
*			V	+	2.74F=01	=	7.51F=02		
*			V	+	2.74F=01	=	6.08F=02		
*			V	+	2.74F=01	=	4.66F=02		
*			V	+	2.74F=01	=	3.23F=02		
*			V	+	2.74F=01	=	1.81F=02		
M*			V	+	2.74F=01	=	3.83F=03		
*M			V	+	2.74F=01	=	1.04F=02		
* M			V	+	2.74F=01	=	2.47F=02		
* M M			V	+	2.74F=01	=	3.80F=02		
* M M			V	+	2.74F=01	=	5.32F=02		
* M M			V	+	2.74F=01	=	6.74F=02		
* M M			V	+	2.74F=01	=	8.16F=02		
* M M			V	+	2.74F=01	=	9.59F=02		
* M M			V	+	2.74F=01	=	1.10F=01		
* M M			V	+	2.74F=01	=	1.24F=01		
* M M			V	+	2.74F=01	=	1.39F=01		
* M M			V	+	2.74F=01	=	1.53F=01		
* M M			V	+	2.74F=01	=	1.67F=01		
* M M			V	+	2.74F=01	=	1.81F=01		
* M M			V	+	2.74F=01	=	1.96F=01		
* M M			V	+	2.74F=01	=	2.10F=01		
* M M			V	+	2.74F=01	=	2.24F=01		
* M M			V	+	2.74F=01	=	2.38F=01		
* M M			V	+	2.74F=01	=	2.53F=01		
* M M			MV	+	2.74F=01	=	2.67F=01		
* M M			VH	+	2.74F=01	=	2.81F=01		
* M M			V H	+	2.74F=01	=	2.95F=01		
* M M			V M	+	2.74F=01	=	3.10F=01		
* M M			V M	+	2.74F=01	=	3.24F=01		
* M M			V M	+	2.74F=01	=	3.38F=01		
* M M			V M	+	2.74F=01	=	3.52F=01		

BARRA EXTREMO NORMAL EXTREMO INICIAL (TON Y TON-M) \*\*\*  
 NO. INICIAL FINAL CORTANTE FLEXIONANTE N

NO.	X	Y	TXX U TSS	TTY O TTY	TXY O TSY	T11
1	0.250	0.433	-2.7130E+00	-1.1632E+02	-3.2908E+00	-2.6178E+00
2	0.250	2.167	-1.6729E+00	-1.2962E+02	5.1504E+00	-1.4660E+00
3	0.250	3.900	1.1331E+01	-1.1664E+02	2.7319E+00	1.7720E+01
4	0.250	5.633	1.3506E+00	-1.0003E+02	1.3674E+00	1.3850E+00
5	0.250	7.367	-1.8471E+00	-1.0671E+02	3.3696E+00	-1.7300E+00
6	0.250	9.100	-9.4658E+02	-7.8668E+01	3.7715E+01	9.6867E+01
7	0.250	10.833	1.1813E+00	-4.5407E+01	-1.7995E+00	-1.2507E+00
8	0.250	12.567	-3.4803E+00	-3.0996E+01	2.1333E+00	-3.3159E+00
9	0.750	1.300	2.2988E+00	-2.0299E+02	6.8115E+00	2.5245E+00
10	0.750	3.033	1.9747E+00	-1.6211E+02	4.5920E+00	-2.1031E+00
11	0.750	4.767	-8.6727E+01	-1.5610E+02	6.2326E+00	-6.1700E+01
12	0.750	6.500	-2.2665E+01	-1.1867E+02	4.3487E+00	3.8540E+00
13	0.750	8.233	9.9559E+01	-8.1042E+01	-5.8073E+01	9.9070E+01
14	0.750	9.967	-5.4520E+01	-7.5519E+01	1.2030E+00	-5.2590E+01
15	0.750	11.700	4.9256E+01	-3.8914E+01	-1.5742E+00	5.5535E+01
16	1.250	0.433	-3.1459E+01	-2.8913E+02	7.2605E+00	-3.1255E+01
17	1.250	2.167	-1.9015E+00	-2.6637E+02	1.9460E+00	-1.8472E+00
18	1.250	3.900	-3.7152E+01	-2.0097E+02	3.0162E+00	-3.2617E+01
19	1.250	5.633	-4.4169E+00	-1.8239E+02	-1.2720E+00	-8.8003E+00
20	1.250	7.367	1.9265E+00	-1.2741E+02	2.6868E+00	1.9823E+00
21	1.250	9.100	3.0246E+01	-7.7599E+01	2.2454E+01	3.0311E+01
22	1.250	10.833	-5.3077E+00	-3.6086E+01	-4.4242E+00	-8.6864E+00
23	1.250	12.567	1.7134E+00	-4.2566E+01	-2.1240E+00	1.8151E+00
24	3.750	1.300	-2.2063E+00	-8.4175E+01	7.7766E+00	2.9005E+00
25	3.750	3.033	9.3962E+00	-7.6809E+01	1.3024E+01	1.1321E+01
26	3.750	4.767	-1.0298E+01	-1.1618E+02	1.2253E+01	-1.6787E+01
27	3.750	6.500	1.0979E+00	-9.2124E+01	4.5565E+00	1.3201E+00
28	3.750	8.233	-1.2549E+01	-6.8625E+01	-1.1860E+01	-1.0246E+01
29	3.750	9.967	-1.9853E+01	-9.1638E+01	9.9401E+00	-1.9502E+01
30	3.750	11.700	5.3633E+00	-4.8286E+01	1.3925E+00	5.3002E+00
31	4.250	0.433	-1.6448E+01	-1.5290E+02	-7.9152E+00	-1.5090E+01
32	4.250	2.167	-5.8700E+00	-1.6255E+02	1.5659E+01	-4.3205E+00
33	4.250	3.900	4.0725E+01	-1.3557E+02	1.9736E+01	3.2025E+00
34	4.250	5.633	-4.4613E+00	-1.0599E+02	-7.1942E+00	-6.9197E+00
35	4.250	7.367	-6.1507E+00	-1.0897E+02	1.9155E+01	-5.1578E+00
36	4.250	9.100	-2.1116E+01	-7.7235E+01	-1.5605E+01	3.2370E+00
37	4.250	10.833	-6.3101E+00	-4.2527E+01	-4.9079E+01	-6.3150E+00
38	4.250	12.567	-8.9754E+00	-3.3925E+01	2.2655E+00	-8.6505E+00
39	4.750	1.300	1.1622E+01	-2.3719E+02	1.8806E+01	1.6114E+00
40	4.750	3.033	-1.4066E+00	-1.8485E+02	-1.1051E+01	-8.1702E+00
41	4.750	4.767	-4.9239E+00	-1.6749E+02	1.0149E+01	5.5193E+00
42	4.750	6.500	4.3703E+01	-1.2396E+02	1.0857E+01	3.2327E+00
43	4.750	8.233	-4.1312E+00	-8.1678E+01	-4.2541E+00	-3.8003E+00
44	4.750	9.967	7.1900E+00	-7.2009E+01	4.1159E+00	7.4033E+00
45	4.750	11.700	-6.0367E+02	-3.7668E+01	1.4248E+01	4.7208E+00
46	5.250	0.433	-4.1364E+01	-3.3618E+02	-1.4708E+01	-4.0632E+01
47	5.250	2.167	5.6458E+00	-2.8689E+02	9.2066E+00	5.9353E+00
48	5.250	3.900	-2.8978E+01	-2.1472E+02	5.4979E+00	-1.4801E+01
49	5.250	5.633	-2.3122E+01	-1.6247E+02	-6.4186E+00	-2.2027E+01
50	5.250	7.367	1.5496E+01	-1.2399E+02	1.5407E+01	1.7170E+01
51	5.250	9.100	1.2946E+00	-7.5611E+01	2.5903E+00	1.3023E+00

NTF \*\*\*\*\* EXTREMUM FINAL (TON Y TON=M)  
 N O R M A L C O R R A N T F I C I T I O N A N T F

ESFERAS PRINCIPALES REFXY (TON/M\*\*2) + + + NTO PPAI \*  
 T11 T22 TAIMAX (GRADOS) T

-2.6178E+00	-1.1642E+02	5.6000E+01	-16.578
-1.4660E+00	-1.2982E+02	6.4179E+01	23.015
1.7720E-01	-1.1670E+02	5.8440E+01	13.307
1.3850E+00	-1.0007E+02	5.0726E+01	10.548
-1.7340E+00	-1.0681E+02	5.2538E+01	18.386
9.6067E-02	-7.8670E+01	3.9383E+01	2.746
-1.2507E+00	-4.5476E+01	2.3363E+01	-22.087
-3.3159E+00	-3.1161E+01	1.3022E+01	44.070
2.5245E+00	-2.0322E+02	1.0287E+02	18.083
-2.1031E+00	-1.6224E+02	8.2169E+01	16.018
-6.1744E-01	-1.5635E+02	7.7868E+01	22.054
3.8549E-01	-1.1893E+02	5.0608E+01	20.010
9.9970E-01	-8.1046E+01	4.1023E+01	8.056
-5.2590E-01	-7.5538E+01	3.7506E+01	9.191
5.5535E-01	-3.8976E+01	1.9766E+01	-22.881
-3.1255E+01	-2.8934E+02	1.2904E+02	16.127
-1.8872E+00	-2.6639E+02	1.3225E+02	8.216
-3.2617E-01	-2.0101E+02	1.0034E+02	8.613
-4.4043E+00	-1.4240E+02	6.8097E+01	-5.282
1.9823E+00	-1.2746E+02	8.4722E+01	11.896
3.0311E-01	-7.7592E+01	3.8951E+01	1.651
-4.6804E+00	-3.6710E+01	1.6013E+01	-80.106
1.8151E+00	-4.2658E+01	2.2241E+01	-27.000
2.9004E+00	-8.4869E+01	4.3885E+01	51.035
1.1321E+01	-7.8733E+01	4.5027E+01	80.063
-1.6787E+01	-1.1769E+02	5.0450E+01	70.281
1.3201E+00	-9.2346E+01	4.6833E+01	27.017
-1.0246E+01	-7.0323E+01	4.2285E+01	81.405
-1.9502E+01	-9.2989E+01	3.7243E+01	77.308
5.3994E+00	-4.8322E+01	2.6861E+01	14.859
-1.5090E+01	-1.5336E+02	6.8684E+01	33.087
-4.3205E+00	-1.6410E+02	7.9891E+01	56.516
3.2925E+00	-1.3837E+02	7.0831E+01	80.805
-6.9197E+00	-1.0645E+02	5.6680E+01	36.058
-5.1574E+00	-1.0996E+02	5.2402E+01	55.867
3.2322E+00	-8.0261E+01	4.1749E+01	100.783
-6.3150E+00	-4.2532E+01	2.4023E+01	-5.757
-8.6505E+00	-3.4250E+01	1.2800E+01	64.683
1.6114E+00	-2.3869E+02	1.2015E+02	45.282
-8.1702E-01	-1.8551E+02	9.2349E+01	30.363
5.5193E+00	-1.6809E+02	8.6803E+01	33.573
3.2327E+00	-1.2675E+02	6.4993E+01	84.332
-3.8983E+00	-8.1911E+01	3.9006E+01	31.321
7.4033E+00	-7.2222E+01	3.9813E+01	20.670
4.7208E+00	-4.2457E+01	2.3589E+01	185.780
-4.0633E+01	-3.3691E+02	1.4414E+02	28.875
5.9353E+00	-2.8718E+02	1.4656E+02	18.008
-1.8891E-01	-2.1486E+02	1.0736E+02	14.678
-2.2827E+01	-1.6277E+02	6.9070E+01	26.317
1.7170E+01	-1.2567E+02	7.1023E+01	62.287
1.3823E+00	-7.5706E+01	3.8541E+01	10.326

Signe  
+ equal



