



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS DEL CENTRO DE EDUCACION
CONTINUA

Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del Jefe del Centro de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en la constancia, deberán entregar copia del mismo o de su cédula a más tardar el SEGUNDO DIA de clases, en las oficinas del Centro con la señorita encargada de inscripciones.

El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona encargada de entregar las notas del curso. Las inasistencias serán computadas por las autoridades del Centro, con el fin de entregarle constancia solamente a los alumnos que tengan un mínimo del 80% de asistencia.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.

Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso. Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes, entregando el oficio respectivo.

Con objeto de mejorar los servicios que el Centro de Educación Continua ofrece, al final del curso se hará una evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes.

REGISTRO DE ASISTENTES Y PROFESORES.

6	7
---	---

--	--

INGENIERIA DE SISTEMAS Y APLICACIONES
(Del 4 al 26 de noviembre de 1977)

Fecha	Duración	Tema	Profesor
Nov. 4	17 a 21 h	EL ENFOQUE DE SISTEMAS	M. EN C. LUIS P. M. GRIJALVA
Nov. 5	9 a 13 h	JERARQUIZACION	M. EN C. MARCIAL PORTILLA ROBERTSON
	14 a 18 h	PROCESAMIENTO DE INFORMACION	M. EN C. MARCIAL PORTILLA ROBERTSON
Nov. 11	17 a 21 h	MODELADO	M. EN C. MAURICIO MIER
Nov. 12	9 a 13 h	SIMULACION	M. EN C. MAURICIO MIER
	14 a 18 h	EVALUACION DE PROYECTOS	DR. VICTOR GEREZ GREISER
Nov. 18	17 a 21 h	OPTIMIZACION	M. EN C. VERONICA CZITROM
Nov. 19	9 a 13 h	OPTIMIZACION	
	14 a 18 h	APLICACIONES	DR. VICTOR GEREZ GREISER
Nov. 25	17 a 21 h	APLICACIONES	DR. VICTOR GEREZ GREISER
Nov. 26	9 a 13 h	TEORIA DE DECISIONES	DR. JESUS ACOSTA FLORES

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO

INGENIERIA DE SISTEMAS Y APLICACIONES

DR. JESUS ACOSTAFLORES
Asesor del C. Director de la
Dirección General de Ingeniería de Sistemas
S.A.H.O.P.
Av. Universidad s/n
México 12, D.F.
Tel.: 590.30.85

DR. VICTOR GEREZ GREISER
Profesor Titular
Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Facultad de Ingeniería .
UNAM
Tel.: 550.52.15 E. 3746

M. EN C. VERONICA CZITROM
Profesora de Matemáticas
DESFI, UNAM
Tel.: 548.09.50

M. EN C. LUIS PABLO MANUEL GRIJALVA LOPEZ
Jefe de la Sección de Ingeniería de Control
Sección de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Facultad de Ingeniería, UNAM
Tel.: 550.52.15 E. 3751

M. EN C. MAURICIO MIER MUTH
Investigador
División de Sistemas de Potencia
Shakespeare 6-3°
México 5, D.F.
Tel.: 525.64.52

M. EN C. MARCIAL PORTILLA ROBERTSON
Jefe de la Sección de Computación
Edificio de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Facultad de Ingeniería
UNAM
Tel.: 550.52.15 E. 3750

EVALUACION DEL ENSEÑANZA

CURSO: INGENIERIA DE SISTEMAS Y APLICACIONES

FECHA: DEL 4 al 26 DE NOVIEMBRE DE 1977.

DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANT. DEL INTERES (AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION, COMUNICACION CON LOS ASISTENTES)	PUNTUALIDAD
El Enfoque de Sistemas (Grijalva)			
Jerarquización (Portilla)			
Procesamiento de Información (Portilla)			
Modelado (Mier)			
Simulación (Mier)			
Evaluación de Proyectos (Gerez)			
Optimización (Czitrom)			
Aplicaciones (Gerez)			
Teoría de Decisiones (Acosta)			

EVALUACION DEL CURSO

CONCEPTO		EVALUACION
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO CON EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO CON EL CURSO	

ESCALA DE EVALUACION DE 1 A 10

1. ¿Qué le pareció el ambiente del Centro de Educación Continua?

Muy agradable ☐

Agradable ☐

Desagradable ☐

2. Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

Periódico
Excelsior ☐

Periódico
Novedades ☐

Folleto del
Curso ☐

Cartel
mensual ☐

Radio
Universidad ☐

Comunicación
carta, teléfono
no, verbal, etc. ☐

3. Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

Automóvil
particular ☐

Metro ☐

Otro medio ☐

4. ¿Qué cambios haría usted en el programa para tratar de perfeccionar el curso?

5. ¿Recomendaría el curso a otras personas?

Si ☐

No ☐

6. ¿Qué curso le gustaría que ofreciera el Centro de Educación Continua?

7. ¿Qué servicios desearía que tuviese el CEC para los asistentes a cursos?

8. Otras sugerencias:

2

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

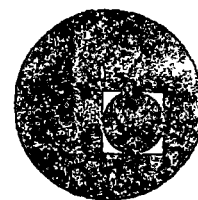
1

1

1



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



INGENIERIA DE SISTEMAS APLICADO A LA PLANEACION
Y ADMINISTRACION

PROBLEMA DEL INVENTARIO

DR. VICTOR GEREZ GREISER

NOVIEMBRE DE 1977.

Problema del Inventario -

1

Un ejemplo servirá para ilustrar mejor la naturaleza de este problema.

* Supóngase que durante cuatro trimestres se desea maximizar el beneficio que se obtiene de operar un almacén de vainilla congelada. Se conoce:

la capacidad del almacén = 100 ton
y los precios de venta y compra de la vainilla.

trimestre	costo por tonelada c.	precio de venta por tonelada v.
1	5100	4800
2	4750	5400
3	4400	4500
4	3900	4200

* Además se sabe que se iniciaron operaciones con 40 ton y al término de los cuatro trimestres al almacén se entregó vacío.

Supóngase además que:

(2)
* Se ordena con 40 ton y se entregará vacío

Todos los costos de almacenamiento están incluidos en el costo; además los pedidos se colocan el último día del trimestre y se reciben al día siguiente.

Solución:

* Para establecer el modelo matemático de optimización se empezará por definir las variables del problema:

* Variables:

Estado inicial:
material en bodega al iniciarse el trimestre, antes de recibir la orden =

Notese que en este problema existen dos variables de decisión, la cantidad de varilla que se decide comprar y la cantidad de varilla que se va a vender.

* Como funciones en este modelo se denota:

Estado final: ③
material en bodega al terminar el trimestre = $\tilde{x}_i$

Variables de decisión:
Confidada que se compra y cantidad que se vende: C_i, V_i
 $\underline{d}_i = (C_i, V_i)$

* Funciones

Beneficios:

$$r_i = V_i v_i - C_i p_i$$

Transición de estado:

$$\tilde{x}_i = x_i + C_{i+1} - V_i$$

donde C_{i+1} indica ese periodo se recibe el material comprado el periodo anterior

Existe otra restricción:

No puede venderse
más vanilla que la
que existe en ~~podar~~
el inicio del trimestre
después de recibir el
pedido del mes
anterior, es decir:

$$X_i + C_{i+1} \geq V_i$$

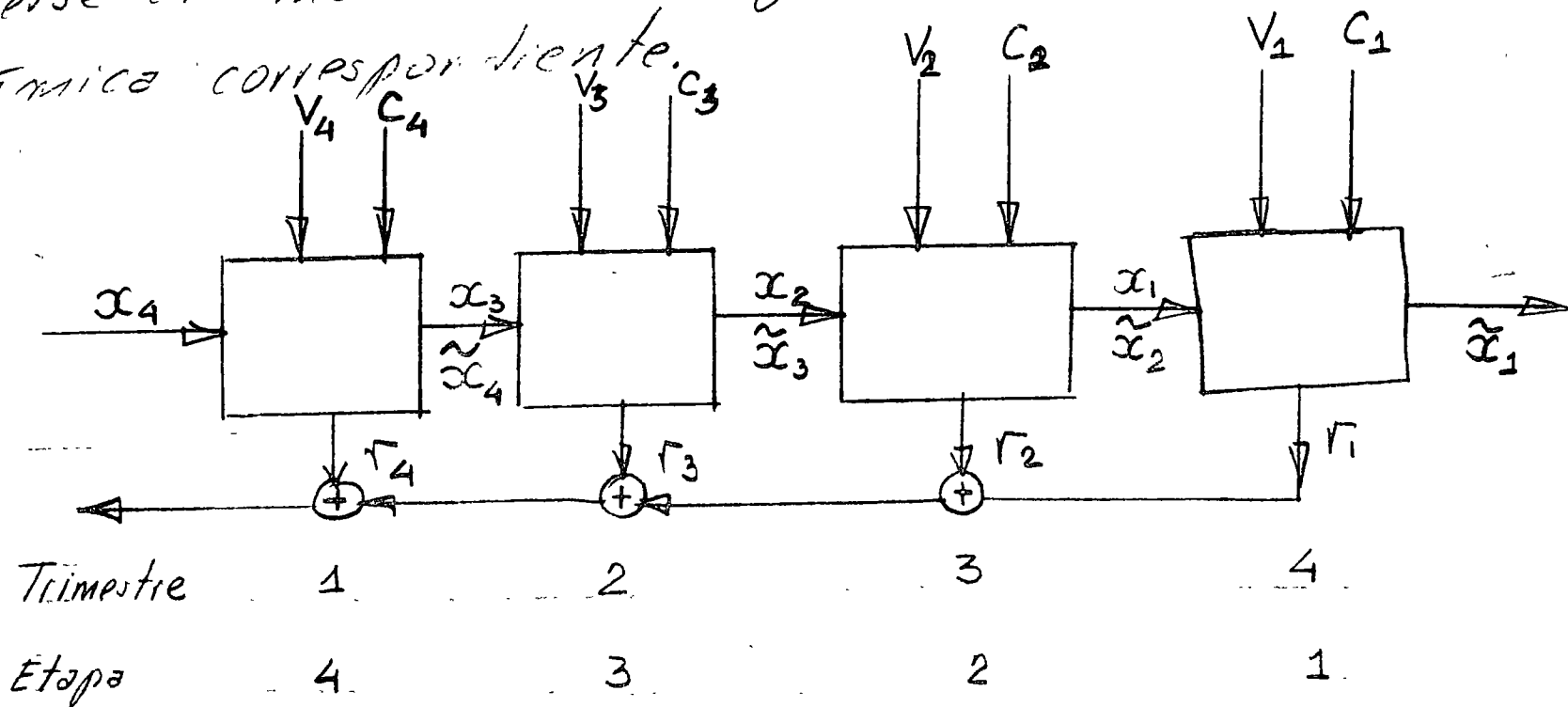
* Existe además una restricción:

$$x_i + C_{i+1} \leq 100 \quad (4)$$

$x_i + C_{i+1}$ = cantidad de varilla al iniciarse las operaciones del mes.

ATRAS

Definidas estas variables puede establecerse el modelo de programación dinámica correspondiente.



Como condiciones iniciales se tiene:

* Condiciones iniciales ⑤
 $\tilde{x}_1 = 0$

El almacén debe entregarse vacío

$$x_4 = 100$$

El almacén se recibió con 100 ton

Para la primer etapa de solución (último trimestre de operación del almacén) la función beneficio es:

ya que en ese mes no se compra por terminarse las operaciones

$$r_1 = V_1 v_1$$

$$C_1 = 0$$

El optimo será—

$$f_1(x_1) = \max_{V_1} V_1 v_1$$

Como el almacén se entregará vacío:

$$\tilde{x}_2 = x_1 + C_2 - V_1 = 0$$

y además no se compra de donde:

$$C_1 = 0 \rightarrow$$

$$V_1 = x_1 + C_2$$

El beneficio y la descripción óptimas se-
ñan: -

$$f_1(x_1) = 4200(x_1 + C_2)$$

$$\underline{d}_1^* = (0, x_1)$$

Para la segunda etapa el algorit-
mo de programación dinámica seña-
la que:

$$f_2(x_2) = \max_{\underline{d}_2 = (C_2, V_2)} \left(r_2(x_2, d_2) + f_1(\tilde{x}_2 = x_1) \right)$$

Sustituyendo () para el bene-
ficio de la etapa $r_2(x_2, d_2)$ y
() para el beneficio óptimo
de la primera $f_1(x_1)$ se tiene:

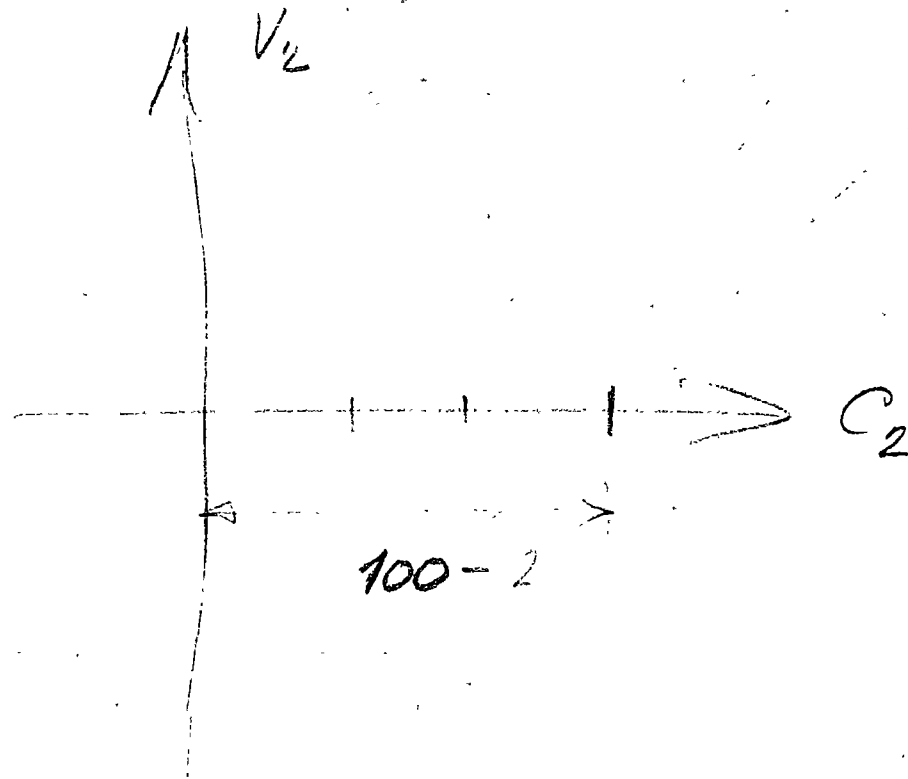
$$f_2(x_2) = \max_{\underline{d}_2 = (C_2, V_2)} \left(4500V_2 - 4400C_2 + 4200(x_1 + C_2) \right)$$

$$x_1 = \tilde{x}_2 = x_2 + C_3 - V_2$$

pero:

• Sustituyendo en la función $f_2(x_2)$

$$-V_2 + C_2 = \overbrace{100 - 80}^{20}$$



(7)

se obtiene:

$$f_2(x_2) = \max_{\underline{d}_2 = (C_2, V_2)} (4500 V_2 - 4400 C_2 + 4200(x_2 + C_3 - V_2 + C_2))$$

$$= \max_{\underline{d}_2 = (C_2, V_2)} (300 V_2 - 200 C_2 + 4200(x_2 + C_3))$$

Esta maximización está sometida a las restricciones de la capacidad del almacén:

$$x_1 + C_2 \leq 100$$

$$x_1 = \tilde{x}_2 = x_2 + C_3 - V_2$$

Sustituyendo

$$x_2 + C_3 - V_2 + C_2 \leq 100$$

Además no puede venderse más de las existencias del almacén al iniciarse el trimestre es decir:

$$x_2 + C_3 \geq V_2$$

* Se trata por lo tanto de un problema de programación lineal, la optimización de esta etapa, con la siguiente función objetivo:

* Programación lineal (8)

* Función objetivo:

$$m = 300 V_2 - 200 C_2$$

No es necesario tomar en cuenta el término $4200(x_2 + C_3)$ por ser constante en esta etapa.

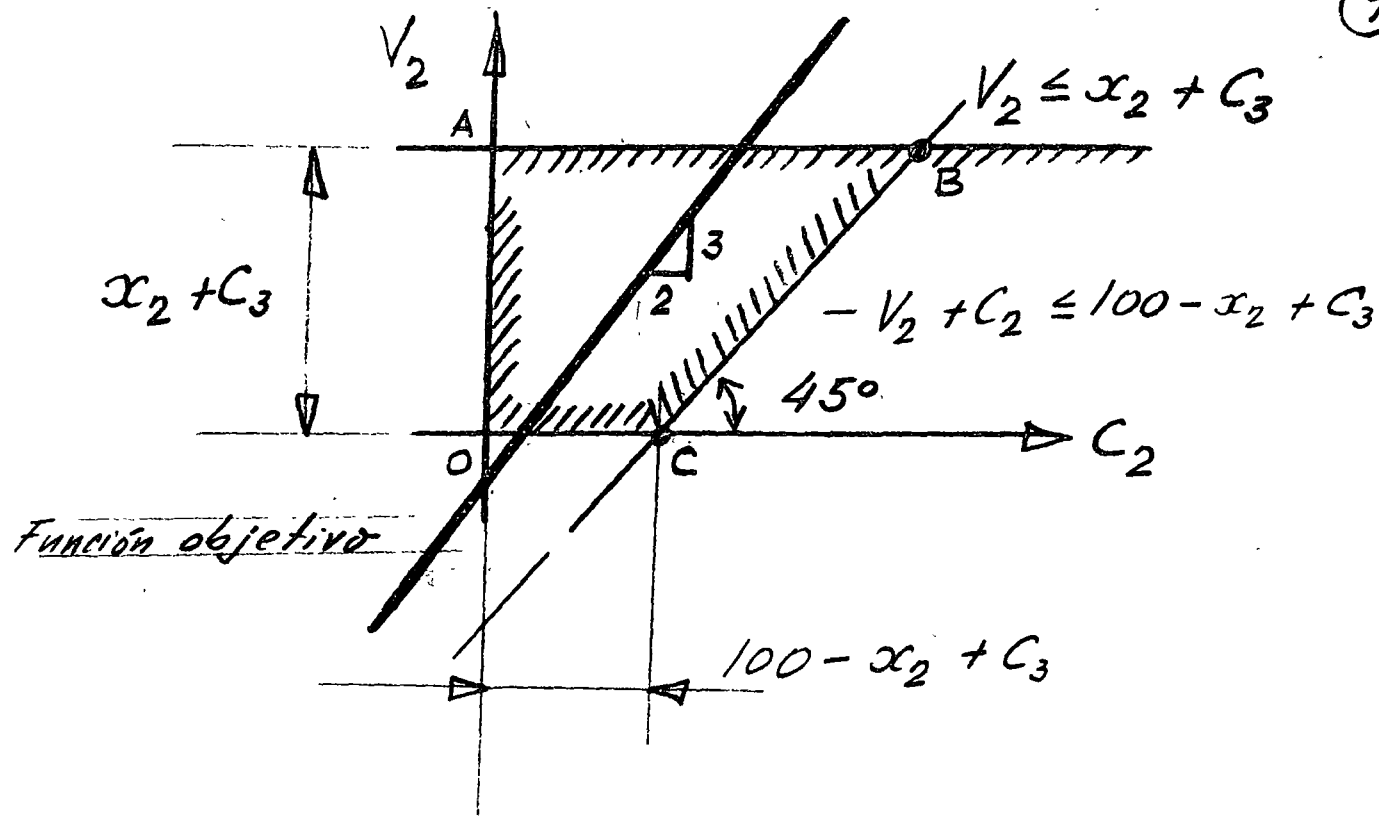
Las restricciones son:

$$-V_2 + C_2 \leq 100 - x_2 + C_3$$

$$V_2 \leq x_2 + C_3$$

Estas restricciones definen la zona de soluciones factibles mostrada:

9



Dado la pendiente de la función objetivo el óptimo se encuentra en el punto B de coordenadas:

$$V_2 = x_2 + C_3$$



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



INGENIERIA DE SISTEMAS APLICADO A LA PLANEACION
Y ADMINISTRACION

PROGRAMACION LINEAL Y OPTIMIZACION

M. EN C. VERONICA CZITROM

NOVIEMBRE DE 1977.

PROGRAMACIÓN LINEAL

ARQUITECTURA, INGENIERÍA, CONSTRUCCIÓN,
PLANEACIÓN URBANA Y REGIONAL

MINIMIZAR COSTO

MAXIMIZAR GANANCIA

FUNCIONES OBJETIVO

LINEALES

RESTRICCIONES LINEALES

EJEMPLO

MAQUINA	* HORAS REQUERIDAS		# TOTAL HORAS DISPONIBLES
	PROD. 1	PROD. 2	
1	2	1	70
2	1	1	40
3	1	3	90
GANANCIA/PIEDA	40	60	

MAX. GANANCIA

x_1 = # DE PRODUCTOS 1

x_2 = # " " 2

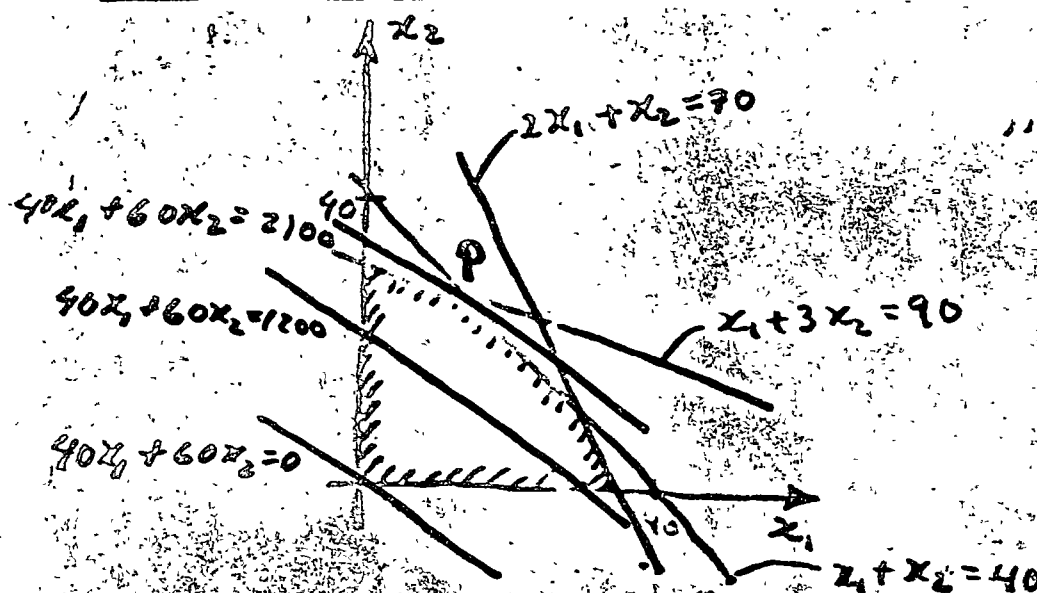
$$\text{RESTRICCIONES} \left\{ \begin{array}{lcl} \text{MAQ. 1} & : & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ \text{" 2} & : & x_1 + x_2 \leq 40 \\ \text{" 3} & : & x_1 + 3x_2 \leq 90 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{CONDICIONES DE NO NEGATIVIDAD}$$

$$\text{MAX: GANANCIA} = 40x_1 + 60x_2$$

SOLUCIÓN GRÁFICA

(2)



///: REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES

SOL. EN FRONTERA PARA REGIÓN CONVEXA

P: $x_1 = 15, x_2 = 25$

SOLUCIÓN ANALÍTICA (MÉTODO SIMPLEX)

LADOS POLÍGONO CONVEXO

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 \leq 90 \end{cases}$$

→

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 70 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 &= 90 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4,5$$

SIST. 3 ECS 5 INCOGNITAS

MAX. $M = 40x_1 + 60x_2$

1ª SOLUCIÓN FACTIBLE: $x_1 = x_2 = 0$

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = 0 &\Rightarrow x_3 = 70 \\ &x_4 = 40 \\ &x_5 = 90 \end{aligned}$$

VARIABLES DE LA BASE

$M = 40 \times 0 + 60 \times 0 = 0$

$$M = 40x_1 + 60x_2 \begin{cases} x_1: 0 \rightarrow 1 \Rightarrow M: 0 \rightarrow 40 \\ x_2: 0 \rightarrow 1 \Rightarrow M: 0 \rightarrow 60 \end{cases}$$

MAXIMO INCREMENTO EN M

CON $x_1 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_3 + x_4 = 70 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 90 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 70 - x_2 \\ x_4 = 40 - x_2 \\ x_5 = 90 - 3x_2 \end{array}$$

$$x_2 \nearrow \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 \downarrow \\ x_4 \downarrow \\ x_5 \downarrow \end{array} \right.$$

$$x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 70$$

$$x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 40$$

$$x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{90}{3} = 30 \leftarrow$$

EL MENOR

2ª SOLUCION FACTIBLE

$$x_1 = 0$$

$$x_5 = 0$$

$$x_2 = 30$$

$$x_3 = 40$$

$$x_4 = 10$$

VAR. BASE

$$M = 40x_1 + 60x_2 = 0 + 60 \times 30 = 1800 = M$$

$$M = 40x_1 + 60x_2 = 40x_1 + 60\left(30 - \frac{x_5}{3} - \frac{x_1}{3}\right)$$

$$M = 1800 + 20x_1 - 20x_5 \left\{ \begin{array}{l} x_1 \nearrow 1 \Rightarrow M \nearrow 20 \leftarrow \\ x_5 \searrow 1 \Rightarrow M \searrow 20 \end{array} \right.$$

SIST. ECS:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{3}x_1 + x_3 - \frac{1}{3}x_5 = 40 \\ \frac{2}{3}x_1 + x_4 - \frac{1}{3}x_5 = 10 \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_5 = 30 \end{array} \right.$$

VAR. BASE

2ª ITERACIÓN

CON $x_5 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{3}x_1 + x_3 - \frac{1}{3}x_5 = 40 \\ \frac{2}{3}x_1 + x_4 - \frac{1}{3}x_5 = 10 \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_5 = 30 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = 40 - \frac{5}{3}x_1 = 0 \quad x_1 = 24 \\ x_4 = 10 - \frac{2}{3}x_1 = 0 \quad x_1 = 15 \leftarrow \\ x_2 = 30 - \frac{1}{3}x_1 = 0 \quad x_1 = 90 \end{array} \right.$$

3ª SOLUCIÓN FACTIBLE

$$x_4 = 0$$

$$x_1 = 15$$

$$x_5 = 0$$

$$x_2 = 25$$

$$x_3 = 15$$

$$M = 1800 + 20x_1 - 20x_5 = 1800 + 20\left(15 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5\right) - 20x_5$$

$$M = 2100 - 30x_4 - 10x_5$$

$$M = 2100$$

$$M = 2100 - 30x_4 - 10x_5 \begin{cases} x_4 \nearrow 1, M \searrow 30 \\ x_5 \nearrow 1, M \searrow 10 \end{cases}$$

∴ YA SE TIENE SOL. FACTIBLE ÓPTIMA.

INTERPRETACIÓN

$$\begin{array}{l} x_1 = 15 \\ x_2 = 25 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 15 \text{ PRODUCTOS \# 1} \\ 25 \text{ " " 2} \end{array} \right.$$

$$\text{MAQ. 1: } 2x_1 + x_2 + x_3 = 70$$

$$\text{MAQ. 2: } x_1 + x_2 + x_4 = 40$$

$$\text{MAQ. 3: } x_1 + 3x_2 + x_5 = 90$$

$$x_3 = 15 \Rightarrow \text{HOLGURA DE 15 HORAS MAQ. 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{NO HAY HOLGURA MAQS. 2 Y 3}$$

$$\text{MAX. GANANCIA} = M = 2100$$

NOTACIÓN MATRICIAL

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 70 \\ x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{MAX. } M = 40x_1 + 60x_2$$

$$A x \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$\text{MAX: } M = c^T x$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 70 \\ 40 \\ 90 \end{pmatrix}$$

$$c^T = (40 \quad 60)$$

METODO SIMPLEX EN TÉRMINOS DE MATRICES

PROGRAMA PARA COMPUTADORA

1ª ITERACIÓN
BASE

TABLEAUX
(TABLA)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
M	2	1	1	0	0	30	30
	1	1	0	1	0	40	40
	1	3	0	0	1	90	$90/3 = 30 \leftarrow$ MAS CHICO
	-40	-60	0	0	0	0	$M - 40x_1 - 60x_2 = 0$

2ª ITERACIÓN

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
M	$5/3$	0	1	0	$-1/3$	40	$40/(5/3) = 24$
	$2/3$	0	0	1	$-1/3$	10	$10/(2/3) = 15 \leftarrow$
	$1/3$	1	0	0	$1/3$	30	$30/(1/3) = 90$
	-20	0	0	0	20	1800	$M - 20x_1 + 20x_5 = 1800$

3ª ITERACIÓN

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
M	0	0	1	-2.5	0.5	15	$\Rightarrow x_3 = 15$
	1	0	0	1.5	-0.5	15	$x_1 = 15$
	0	1	0	-0.5	0.5	25	$x_2 = 25$
	0	0	0	30	10	2100	$x_4 = x_5 = 0$

$M + 30x_4 + 10x_5 = 2100$

FORMA STANDARD PROGRAMACION LINEAL

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$\vdots$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \leq b_j$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

m ECUACIONES
LINEALES O
DESIGUALDADES
CON n VARIABLES

COEFICIENTES
ESTRUCTURALES

RESTRICCIONES

$x_i \geq 0$ CONDICIONES DE NO-NEGATIVIDAD

OPT. $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

COEFICIENTES DE COSTOS

EJEMPLO

MIN: $w = 2x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 - 4x_2 \geq 3 \\ 5x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

DESIGUALDADES $\rightarrow$ IGUALDADES
VARIABLES

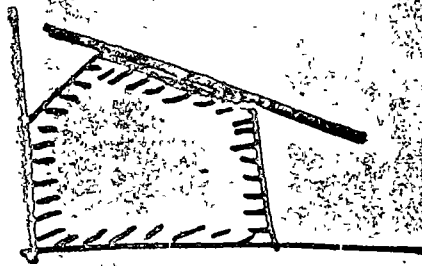
$3x_1 + 2x_2 + x_3$	$= 5$	+ HOLGORA
$x_1 - 4x_2 - x_4 + a_1$	$= 3$	+ HOLGORA + ARTIFICIAL
$5x_1 + x_2 + a_2$	$= 7$	+ ARTIFICIAL

MIN: $w = 2x_1 + 4x_2 + 1000a_1 + 1000a_2$

PARA MAXIMIZACIÓN

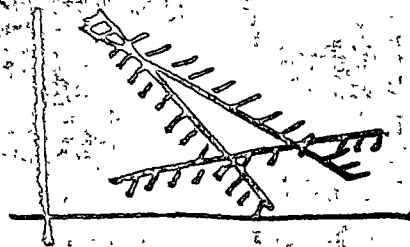
CASOS ESPECIALES

1) SOLUCIONES ÓPTIMAS NO ÚNICAS



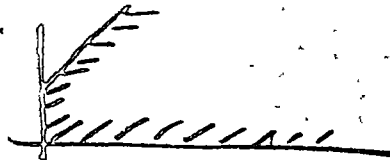
METODO SIMPLEX: $M_i = M_{i+1} = M$ MÁXIMA
2 ITERACIONES

2) RESTRICCIONES CONTRADICTORIAS



SIMPLEX: SOL. FACTIBLE CONTIENE VAR. ARTIF.

3) SOLUCIÓN NO ACOTADA



SIMPLEX: M TAN GRANDE COMO SE DESEE
PROBLEMA DUAL

PROBLEMA PRIMO

$$\text{MAX: } M = \underline{C}^T \underline{x}$$

$$\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

PROBLEMA DUAL

$$\text{MIN: } V = \underline{b}^T \underline{y}$$

$$\underline{A}^T \underline{y} \geq \underline{c}$$

$$\underline{y} \geq 0$$

AL MENOS 21 UNIDADES VITAMINA A
" " " " " B

ALIMENTO	VITAMINA/UNIDAD ALIMENTO		COSTO/UNIDAD ALIMENT
	A	B	
1 (NARANJA)	1	0	20
2 (MANDARINA)	0	1	20
3 (LECHUGA)	1	2	31
4 (CHICHARO)	1	1	11
5 (FANAJA)	2	1	12

MIN. COSTO

DIE FISTA

 X_i = CANTIDAD DE ALIMENTO i

VIT. A: $x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 21$ / RESTRICCIONES

UIT. 6: $x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 12$

CONDS. NO NEGATIVIDAD

$$\text{MIN: COSTO} = 20x_1 + 20x_2 + 31x_3 + 11x_4 + 12x_5$$

FUNCION OBJETIVO

DUAL : CIA. FARMACEUTICA "LA CAMPANA"

λ_1 = PRECIO DE CADA PÍLDORA DE VIT. A

100

$$\lambda_i \geq 0$$

CONDS. NO NEGATIVIDAD

MAX. GANANCIA = $21\lambda_1 + 12\lambda_2$ FUNCIÓN OBJETIVO

PRECIOS COMPETITIVOS: 1 d. € 20

 $\lambda_2 \leq 20$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 31$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{I}$$
$$2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 12$$

RESTRICCIO-
NES

DIETISTA

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{MIN: COSTO} = (20 \ 20 \ 31 \ 11 \ 12) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

LA CAMPANA

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 31 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{MAX: GANANCIA} = (21 \ 12) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO

CONSTRUCCIÓN CASAS DE 2, 3 Y 4 RECÁMARAS

MAX. GANANCIA.

RESTRICCIONES:

1.- PROYECTO $\leq \$1,000,000$

2.- # UNIDADES ≥ 150

3.- MAX PORCENTAJE: CASAS 2 REC: 20%

" 3 " : 60%

" 4 " : 40%

4.- COSTOS CONSTRUX. :

" 2 " : \$20,000

" 3 " : \$25,000

" 4 " : \$30,000

5.- GANANCIA NETA :

" 2 " : \$2,000

" 3 " : \$3,000

" 4 " : \$4,000

6r GANANCIA: $Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ (EN MILES DE \$)

1-4: $29,000x_1 + 25,000x_2 + 30,000x_3 \leq 9,000,000$

$20x_1 + 25x_2 + 30x_3 \leq 9,000$

2- $x_1 + x_2 + x_3 \geq 350$

3- $x_1 \leq .2(x_1 + x_2 + x_3)$

$x_2 \leq .6(x_1 + x_2 + x_3)$

$x_3 \leq .4(x_1 + x_2 + x_3)$

$20x_1 + 25x_2 + 30x_3 \leq 9,000 \rightarrow 20x_1 + 25x_2 + 30x_3 + x_4 = 9,000$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 350 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 350$

$(x_1 + x_2 + x_3 = 350 + x_5)$

$x_1 \leq .2(x_1 + x_2 + x_3) \rightarrow x_1 \leq .2(350 + x_5) \rightarrow x_1 - .2x_5 + x_6 = 70$

$x_2 \leq .6(x_1 + x_2 + x_3) \rightarrow x_2 \leq .6(350 + x_5) \rightarrow x_2 - .6x_5 + x_7 = 210$

$x_3 \leq .4(x_1 + x_2 + x_3) \rightarrow x_3 \leq .4(350 + x_5) \rightarrow x_3 - .4x_5 + x_8 = 140$

PARA TENER 1~ SOL FACTIBLE CON $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

IGUAL: $x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_9 = 350$

VAR. ARTIFICIAL

FUN. OBJETIVO: $Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 1000x_9$

COEF. COSTO GDE -

MAX: $Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 1000x_9$

REST: $20x_1 + 25x_2 + 30x_3 + x_4$

$x_1 + x_2 + x_3$

$-x_5$

$+x_9 = 350$

x_1

$-.2x_5 + x_6$

$= 70$

x_2

$-.6x_5$

$+x_7$

$= 210$

x_3

$-.4x_5$

$+x_8$

$= 140$

MINIMIZACIÓN

MIN $\rightarrow$ MAY

EJEMPLO:

$$\text{MIN: } y = 3x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 7$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \geq 9$$

$$x_i \geq 0$$

EQUIVALENTE

$$\text{MAX: } z = -y = -3x_1 - 4x_2 - 7x_3$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 7$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \geq 9$$

$$x_i \geq 0$$

APLICACIONES

PROBLEMA DE COMBINACIÓN

COMPONENTES: SE COMBINAN PARA DAR 1 O MAS PRODUCTOS

TIENEN CIERTOS COSTOS Y CARACTERÍSTICAS

x = CANTIDAD DE CADA COMPONENTE

SUJETAS A CIERTAS LIMITACIONES

MIN: COSTO TOTAL

EJEMPLO

PLANTA 1

PLANTA 2

5 MILL. GAL. AGUA $\rightarrow$
DÍA

$\rightarrow$
2 MILL. GAL. AGUA
DÍA

GENERACIÓN DE UNIDADES DE CONTAMINANTE AL DÍA

20

14

COSTO REMOVER 1 UNIDAD CONTAM.

\$1000

20%

\$800

CONT. SE ELIMINA

CUANDO MÁS: 2 UNID. CONT/MILLON DE GALONES

x = OPERACIÓN MAX CAPACIDAD DE TRATAMIENTO CONTAMIN.

$x_{1,2}$ = # DE UNIDADES DE CONTAMINANTE ELIMINADAS POR LAS PLANTAS 1, 2

MIN: COSTO = \$1000 x_1 + \$800 x_2

PLANTA 1: $\underbrace{(20 - x_1)}_{\substack{\text{SE GENERAN} \\ \text{UNIDADES DE} \\ \text{CONTAMINANTE}}} \leq \underbrace{\left(\frac{5 \text{ MILL. GAL. AGUA}}{\text{DIA}} \right)}_{\substack{\text{SE ELIMINAN} \\ \text{MILL. GAL.}}} \left(\frac{2 \text{ UNID. CONT.}}{\text{MILL. GAL.}} \right)$

PLANTA 2: $\underbrace{8(20 - x_1)}_{\substack{\text{UNID. CONT. LLEGAN} \\ \text{DE PLANTA 1}}} + \underbrace{(14 - x_2)}_{\substack{\text{UN. CONT.} \\ \text{SE GENERAN}}} \leq (5+2) \frac{\text{MILL. G.}}{\text{DIA}} \left(\frac{2 \text{ U.C.}}{\text{M. G.}} \right)$

UNID. CONT. LLEGAN DE PLANTA 1 UN. CONT. SE GENERAN

$x_1 \leq 20$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \leq 14$

MIN. COSTO = 1000 x_1 + 800 x_2

RESTRICCIONES: $x_1 \geq 10$

$8x_1 + x_2 \geq 16$

$x_1 \leq 20$

$x_2 \leq 14$

CONDOS. NO NEGAT.

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

← SUPERFLUO

PROBLEMAS DE TRANSPORTE

UN PRODUCTO SE TRANSPORTA DE M CENTROS DE PRODUCCIÓN EN CANTIDADES $a_1, \dots, a_m$

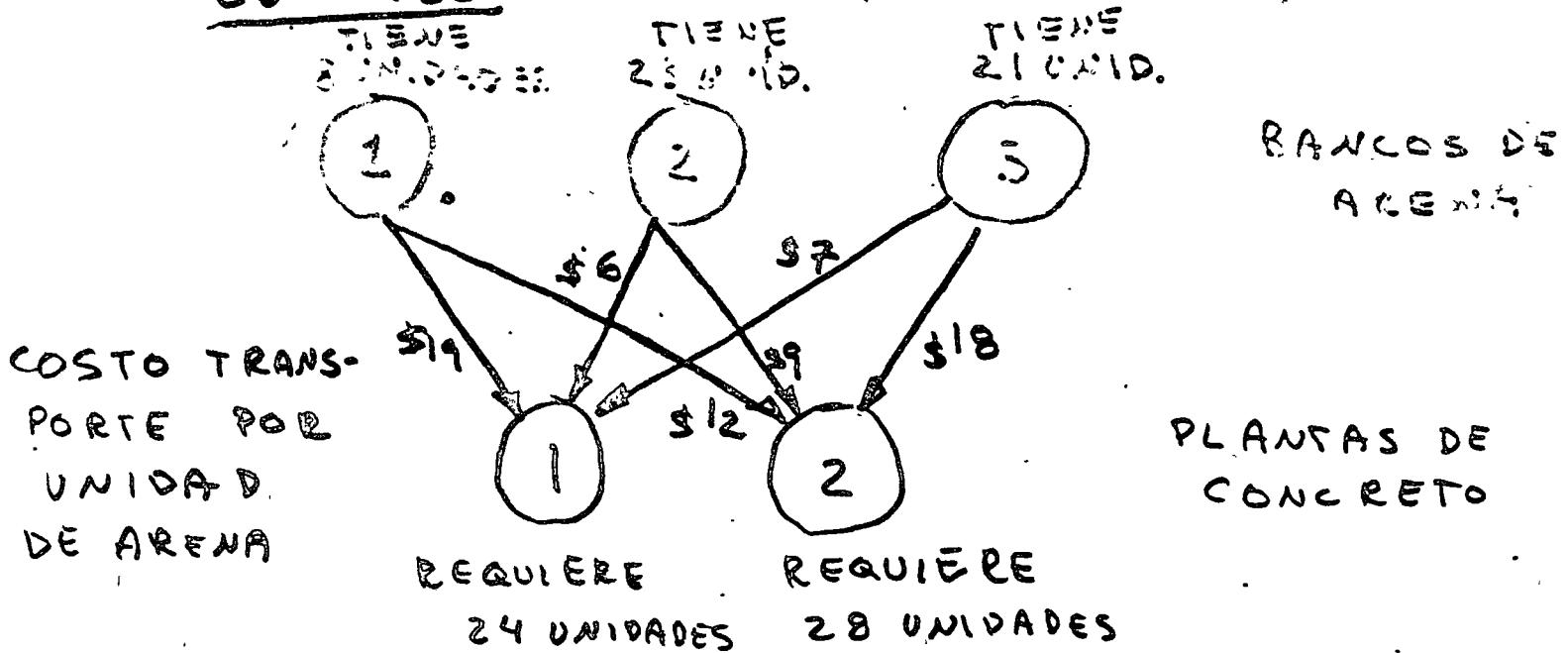
- SE RECIBE EN N CENTROS EN CANT. $b_1, \dots, b_n$

- SE CONOCEN COSTOS TRANSP. CENTRO I DESTINO J

- ? = CANT. QUE SE TRANSP CENTRO I A DESTINO J

- MIN. COSTO TRANSPORTE

EJEMPLO



? = CUÁNTA ARENA TRANSPORTAR DE CADA BANCO A CADA PLANTA
MIN: COSTOS DE TRANSPORTE.

x_{ij} = NUM. UNIDADES DE ARENA DE BANCO i A PLANTA j .

$$\begin{aligned} \text{BANCO DE ARENA 1: } & x_{11} + x_{12} \leq 23 \\ \text{" " " 2: } & x_{21} + x_{22} \leq 23 \\ \text{" " " 3: } & x_{31} + x_{32} \leq 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{PLANTA DE CONCRETO 1: } & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 24 \\ \text{" " " 2: } & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 28 \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

MIN: COSTOS DE TRANSPORTE =

$$19x_{11} + 12x_{12} + 6x_{21} + 9x_{22} + 7x_{31} + 18x_{32}$$

PROBLEMAS DE TRANSPORTE

TIPO PROG. LINEAL; SE SIMPLIFICAN POR LA ESTRUCTURA PARTICULAR DEL PROBLEMA

M FABRICAS QUE PRODUCEN CANTIDADES

$a_1, \dots, a_m$ DE UN PRODUCTO

N CENTROS DE CONSUMO QUE CONSUMEN $b_1, \dots, b_n$

c_{ij} : COSTO DE TRANSPORTAR PRODUCTO DE FABRICA i A CENTRO j .

x_{ij} = NUM. DE PRODS. MANDADOS DE FABRICA i A CENTRO j .

LO QUE SE FABRICA SE CONSUME

Ejem. 1.0

CENTROS
CONSUMO

			INVENTARIOS	
	1	2		
FABRICAS	1	15	20	15
	2	18	22	25
	3	25	19	20
DEMANDA	35	25	60	OFERTA = DEMANDA

COSTOS
TRANSPORTE

MIN COSTO TRANSPORTE

PLAN DE TRANSPORTE = ?

x_{ij} = NUM. UNIDADES DE FABRICA i A CENTRO j

$$\text{MIN: } Z = 15x_{11} + 18x_{21} + 25x_{31} + 20x_{12} + 22x_{22} + 19x_{32}$$

$$x_{11} + x_{12} = 15$$

$$x_{21} + x_{22} = 25$$

$$x_{31} + x_{32} = 19$$

PRODUCCION (INVENTARIOS)

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 35$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 25$$

DEMANDA CENTROS CONSUMO

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j$$

COMO OFERTA = DEMANDA, SÓLO 4 DE LAS 6 ECUACIONES SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES; SE PUEDE ELIMINAR 1 ECUACIÓN.

POR METODO SIMPLEX, HABRÍA QUE INTRODUCIR 4 VARS. ARTIFICIALES PARA FORMAR UNA SOL. INICIAL FACTIBLE.

SE PUEDE APLICAR UNA SIMPLIFICACIÓN DEL MÉTODO SIMPLEX PORQUE:

- 1.- LOS COEFICIENTES DE TODAS LAS VARS. = 1
- 2.- CUALQUIER VARIABLE x_{ij} APARECE UNA SOLA VEZ EN LAS PRIMERAS 3 ECUACIONES Y UNA " " " " ÚLTIMAS 2 " .

$$\text{MATRIZ DE COSTOS} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 18 & 22 \\ 25 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\text{MATRIZ DE DISTRIBUCIÓN} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = ?$$

QUITANDO ÚLTIMA ECUACIÓN:

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} = 15 \\ x_{21} + x_{22} = 25 \\ x_{31} + x_{32} = 20 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 35 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{CONJUNTO DE 4 ECUACIONES LINEALMENTE INDEPENDIENTES CON 6 INCÓGNITAS} \end{array}$$

UNA SOL. FACTIBLE: DOS VARIABLES IGUALES A CERO, SIN CREAR INCONSISTENCIA

PERO EJEMPLO: $x_{12} = 0, x_{31} = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} = 15 \\ x_{21} + x_{22} = 25 \\ x_{32} = 20 \\ x_{11} + x_{21} = 35 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{11} = 15 \\ x_{11} + x_{21} + x_{32} = 35 \\ x_{11} + x_{22} = 25 \\ x_{32} = 20 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 35 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR $\Rightarrow$ SIST. SE RESUELVE FÁCILMENTE

$$x_{11} = 15 \quad x_{12} = 0$$

$$x_{21} = 20 \quad x_{22} = 5$$

$$x_{31} = 0 \quad x_{32} = 20$$

SOLUCIÓN FACTIBLE, NO NECESARIAMENTE ÓPTIMA.

OPTIMIZACIÓN

FORMULACIÓN MATEMÁTICA GENERAL:

ENCUENTRA EL VALOR DE LAS VARIABLES

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

QUE MAXIMICEN O MINIMICEN (OPTIMICEN)
A LA FUNCIÓN (OBJETIVO)

$$M = M(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

SUJETA A LAS RESTRICCIONES

$$C_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, \dots, p$$

$$C_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad i = p+1, \dots, r$$

$$C_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad i = r+1, \dots, m$$

m. Ecs., n. VARIABLES (INCÓGNITAS)

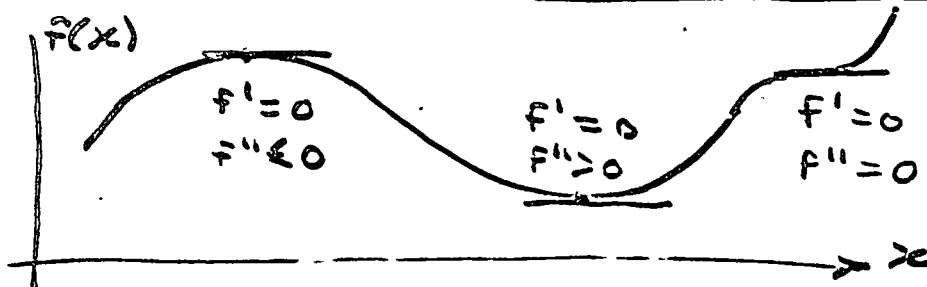
ESTRATEGIAS

DE OPTIMIZACIÓN:

GRADIENTE
ENUMERACIÓN

RESTRICCIONES $\rightarrow$ REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES

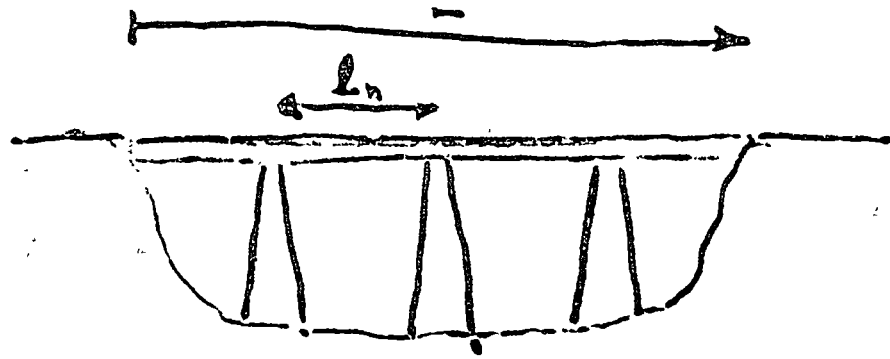
OPTIMIZACIÓN POR DIFERENCIACIÓN



$f(x)$

↑
UNA SOLA VAR. INDEPENDIENTE

EJEMPLO.



$L_n = ?$ PARA MIN. COSTO

COSTO POR METRO PUENTE $\propto$ DIST. ENTRE PILARES

COSTO PILARES $\propto$ CONST.

$$n = \# \text{ CLAROS} = L / L_n$$

A = COSTO (FIJO) PILARES TERMINALES

P = " PILASTRA INTERMEDIA

W = COSTO POR METRO DE PUENTE

$$W = k L_n$$

$$\begin{aligned} \text{MIN: COSTO} &= A + (n-1)P + L \underbrace{k L_n}_W \\ &= A + \left(\frac{L}{L_n} - 1 \right) P + L k L_n \end{aligned}$$

$$\frac{dC}{dL_n} = - \frac{LP}{L_n^2} + kL = 0$$

$$\therefore \left[L_n = \sqrt{\frac{P}{k}} \right]$$

$$\frac{d^2C}{dL_n^2} = \frac{2LP}{L_n^3} > 0 \Rightarrow \text{COSTO } \underline{\text{MÍNIMO}}$$

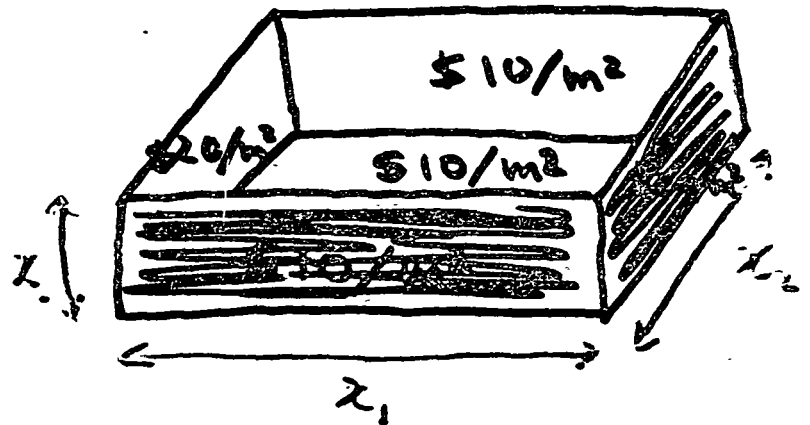
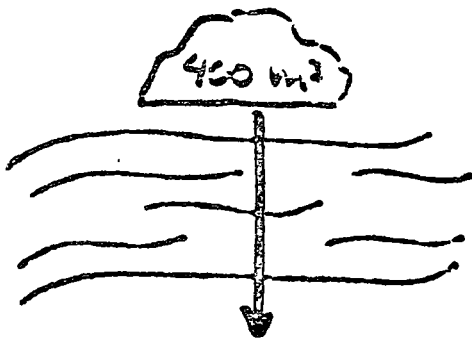
VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES:

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{SI: } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

ENTONCES LA FUNCIÓN ES
MAX O MIN

EJEMPLO



CADA VIAJE: \$.10

$x_1, x_2, x_3 = ?$, $x_4 = \text{NUM VIAJES} = ?$

MIN: COSTO TRANSPORTE

$$\begin{aligned} \text{COSTO} &= 10(x_1 x_2 + 2x_1 x_3) + 20(2x_2 x_3) + .10 x_4 \\ &= 10x_1 x_2 + 20x_1 x_3 + 40x_2 x_3 + .10 x_4 \end{aligned}$$

$$\text{RESTRICCIÓN: } \underbrace{x_1 x_2 x_3}_{\text{\# VIAJES X VOLUMEN CAJA}} \underbrace{x_4}_{\text{MATERIAL TRANSPORTE}} = 400$$

VIAJES X VOLUMEN CAJA MATERIAL TRANSPORTE = 400

$$\text{DESPEJANDO } x_4 = \frac{400}{x_1 x_2 x_3} \quad \text{Y SUST.}$$

$$\text{MIN: COSTO} = 10x_1 x_2 + 20x_1 x_3 + 40x_2 x_3 + \frac{40}{x_1 x_2 x_3}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x_1} = 10x_2 + 20x_3 - \frac{40}{x_1^2 x_2 x_3} = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial x_2} = 10x_1 + 40x_3 - \frac{40}{x_1 x_2^2 x_3} = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial x_3} = 20x_1 + 40x_2 - \frac{40}{x_1 x_2 x_3^2} = 0$$

SOLUCIÓN: $x_1 = 2$

$x_2 = 1$

$x_3 = 1/2$

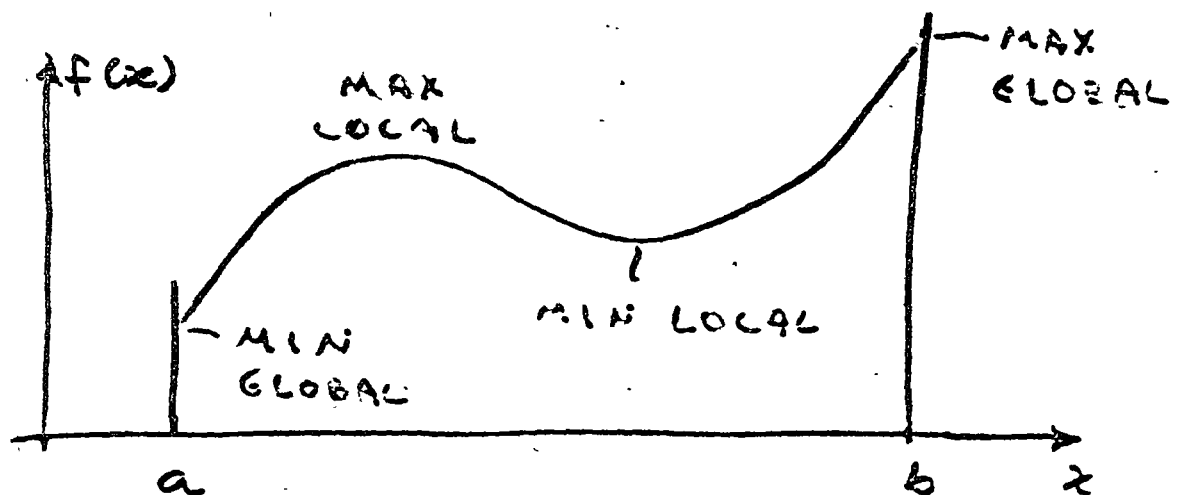
$$x_4 = \frac{400}{x_1 x_2 x_3} = 400$$

$$C = \$100$$

OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE, SIN RESTRICCIONES.

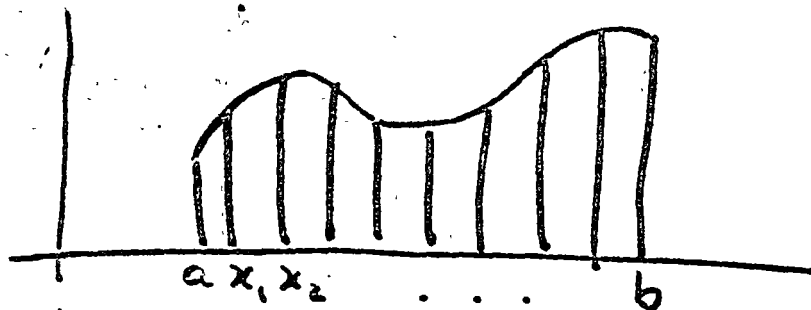
MÉT. SIMULTAN: BÚSQUEDA EXHAUSTIVA
BÚSQUEDA ALEATORIA

MÉT. SECUENC: TRISECCIÓN
FIBONACCI } UN SOLO MAX O MIN
EN INTERVALO (UNIMOD)



DIFFERENCIACIÓN → LOCALES

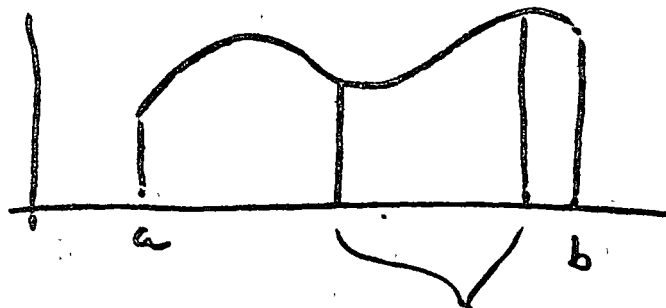
BÚSQUEDA EXHAUSTIVA



MUCHAS EVALUACIONES

AUMENTA NUM. INTERVALOS, AUMENTA PRECISIÓN

BÚSQUEDA ALEATORIA



NUMS ALEATORIOS

EJEMPLO: $f(x) = -.4x^2 + 4x$ EN $(0, 10)$

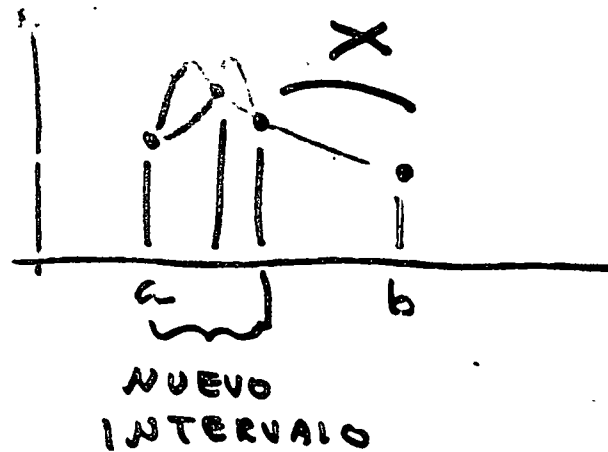
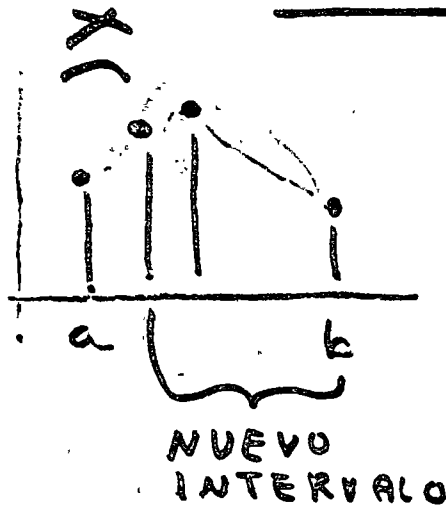
DIFERENCIANDO: $f'(x) = -0.8x + 4$
 $f'(5) = 0$

EXACTO

DE NUMS.
ALEATORIOS

	x	$f(x)$
25	4.9051	9.9964
100	4.9051	9.9964
250	4.9091	9.9966
500	5.0038	9.9999

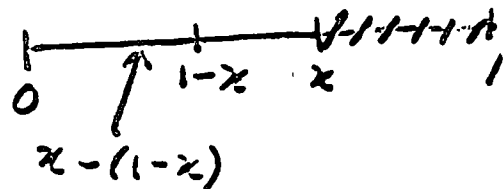
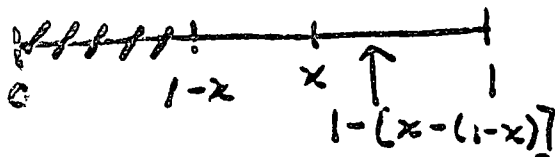
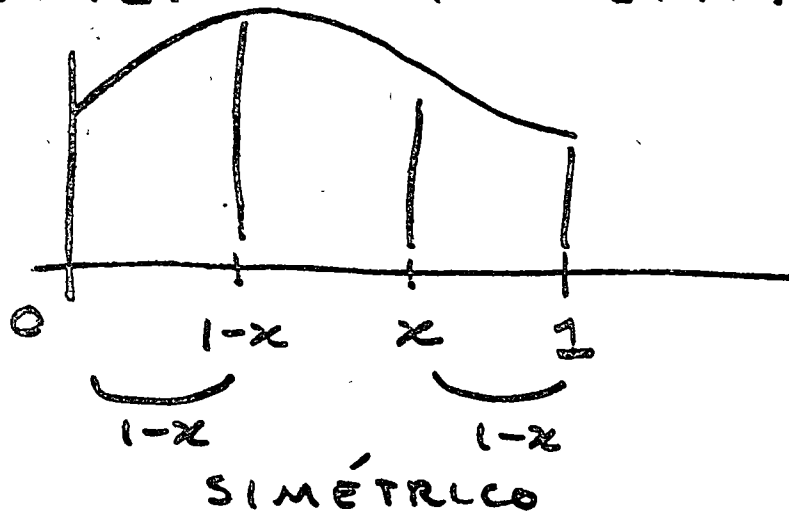
TRISECCIÓN



HASTA LLEGAR A INTERVALO SUF. CHICO
EN CADA ETAPA, SE EVALUA f EN 2 PUNTOS

FIBONACCI

1 EVALUACIÓN POR ETAPA

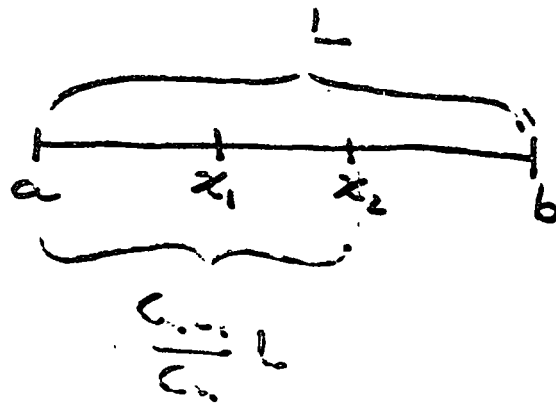


$$= \frac{\text{NÚM. DE EVAL. ITER.}}{\text{NÚM. DE ITER.}} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots \rightarrow 0.618$$

(COCIENTE
DORADO)

$F = \frac{2}{3}$ TRISECCIÓN (SE ELIMINA $\frac{1}{3}$ DEL
INTERVALO)

FIBONACCI: 40% EVALUACIONES TRISECCIÓN

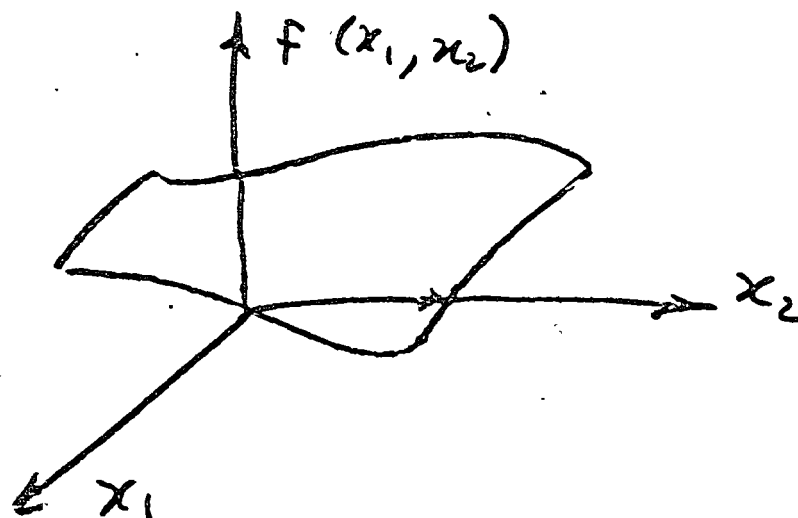


MÉTODOS DE BÚSQUEDA MULTIDIMENSIONAL

MET. SIMULTÁNEOS: BÚSQUEDA EXHAUSTIVA
: BÚSQUEDA ALEATORIA

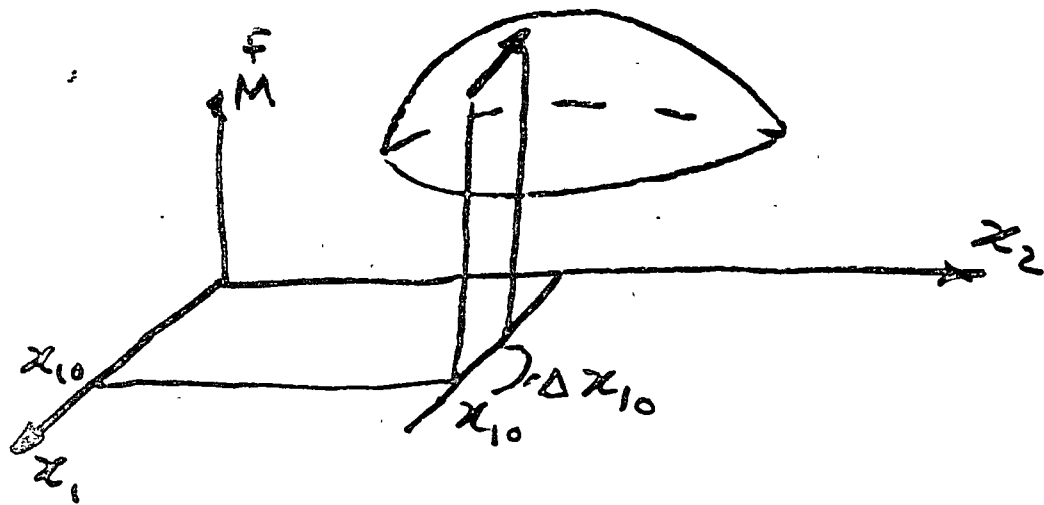
MET. SECUENCIALES: BÚSQUEDA DE REJILLA } FUN.
" UNIVARIADA } UNID.
" DE GRADIENTE } DALES

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$



TÉCNICAS DE GRADIENTE

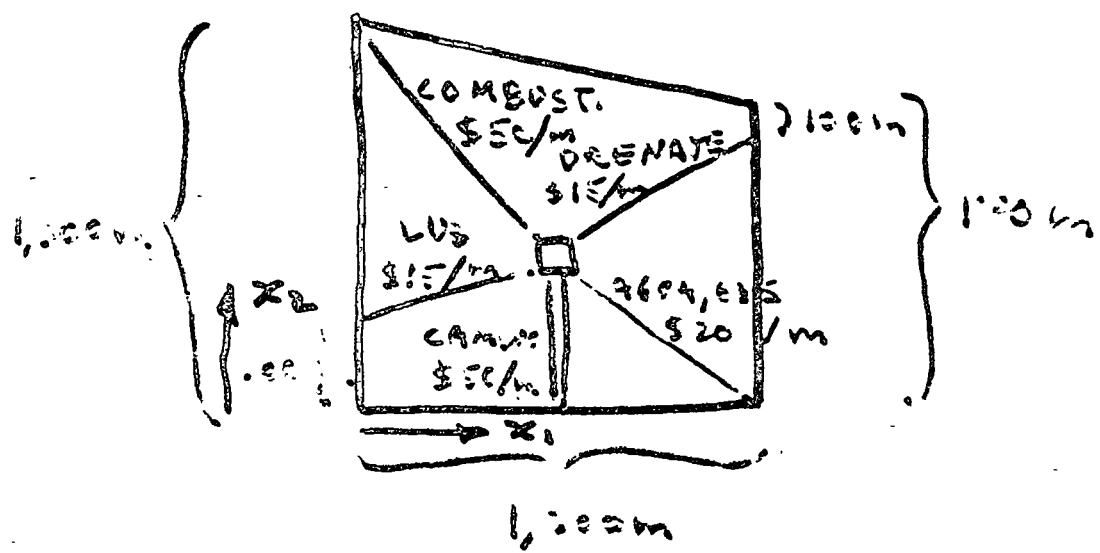
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$



$$\Delta M = \left. \frac{\partial M}{\partial x_1} \right|_{\underline{x}_0} \Delta x_1 + \left. \frac{\partial M}{\partial x_2} \right|_{\underline{x}_0} \Delta x_2$$

$$\approx \frac{M(x_{10} + \Delta x_1, x_{20}) - M(x_{10}, x_{20})}{\Delta x_1}$$

EJEMPLO: LOCALIZAR ÓPTIMAMENTE LA PLANTA PARA MINIMIZAR COSTOS

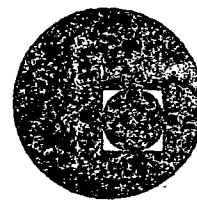


$$\begin{aligned} \text{MIN: COSTO} = & 50x_2 + 15 \left\{ x_1^2 + (x_2 - 300)^2 \right\}^{1/2} \\ & + 50 \left\{ x_1^2 + (1300 - x_2)^2 \right\}^{1/2} + \\ & + 15 \left\{ (1300 - x_1)^2 + (900 - x_2)^2 \right\}^{1/2} \\ & + 20 \left\{ (1300 - x_1)^2 + x_2^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

RESTRICCIONES: NO SALIR DEL PREDIO



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



INGENIERIA DE SISTEMAS APLICADO A LA PLANEACION
Y ADMINISTRACION

OPTIMIZACION DEL NIVEL DE EMPLEO

DR. VICTOR GEREZ GREISER

NOVIEMBRE DE 1977.

Optimización del Nivel de Empleo.-

* Se Resolvió el problema suponiendo que:

* Hipótesis

- 1.- Tiene que cubrirse la demanda de empleo
- 2.- Esta demanda se conoce con certidumbre
- 3.- No pueden trabajarse horas extras

Ejemplo:

Debido a fluctuaciones periódicas en la demanda de los productos que elabora una fábrica, los requerimientos de mano de obra varían según muestra la tabla:

Cuatrimestre	Personal
1	95
2	100
3	150
4	120

Como datos adicionales se conocen los siguientes costos:

* a) El costo de contratar o despedir a un empleado es de:

* Costo de contratar o despedir $4500 |\Delta x|^2$

Δx = cambio del ②
nivel de empleo de
un trimestre al si-
guiente

* b) El costo de tener un empleado
desocupado por trimestre es de

* Costo del desempleo:
50 000 por persona.

* Existen tres alternativas para
resolver este problema:

* Alternativas:

- a) Mantener el nivel de empleo a su nivel máxi-
mo de 150. Esta solución implica altos cos-
tos de personal que no se requiere, 50 000 por per-
sona y trimestre
- b) Ajustar el nivel de empleo a las necesidades
exactas. Esta alternativa, tiene altos costos por
contratación y despido, 4500 por el método de las per-
sonas que se contratan o despiden.
- c) Una solución intermedia, que no implique
tener continuamente el máximo de 150 ni
tampoco haya necesario ajustar exactamente los

niveles al valor dado y luego al final de
de contratación y despido. Es decir, balancear
los costos de desempleo contra los de contratación
y despido

Solución:

* Para resolver este problema se empezará
estableciendo un modelo matemático. Es necesario
definir las variables siguientes:

* Variables:

Variable de estado inicial x_i :
Nivel de empleo al iniciarse
el trimestre

Variable de estado final $\tilde{x}_i$:
Nivel de empleo al fina-
lizar el trimestre

Variable de descripción d_i :
empleados contratados o
despedidos

Nivel mínimo de empleo
requerido $(x_i)_{\max}$

* Además es necesario encontrar dos
relaciones funcionales:

* Funciones:

I Relación entre estado inicial, final y decisión ④

$$\tilde{x}_i = T_i(x_i, d_i)$$

En este caso:

$$\tilde{x}_i = x_i + d_i$$

$d_i > 0$ si se contrata

$d_i < 0$ si se despiden

II Función de costos

$$T_i = R_i(x_i, d_i)$$

$$T_i = 50000(x_i + d_i - (x_i)_{\max}) + 4500 d_i^2$$

* Restricción

* Además hay la restricción: <

En cada trimestre hay empleados

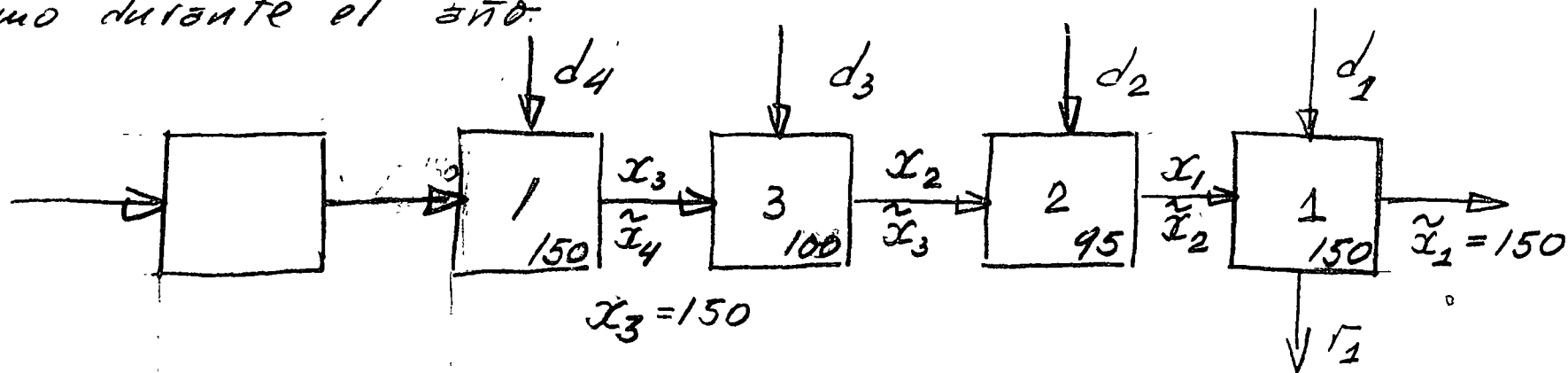
$x_i + d_i$ gente y se necesitan $(x_i)_{\max}$ (Deben cubrirse las necesidades de personal)

la diferencia $(x_i + d_i - (x_i)_{\max})$ representa por lo tanto las personas contratadas que no se necesitan.

Para facilitar la solución conviene renumerar los trimestres, a partir de aquel cuyo nivel de empl. se con-

ce que es el tercero en este trimestre
no se tendrán más de 150 empleados,
el máximo durante el año.

(5)



Trimestre	1	3	2	1	3
Etapas		1	3	2	1

Fig: Solución secuencial del problema.

* Notese que renumerando las etapas en la forma mostrada por la Fig:

conoce el estado final de la primera etapa; $\tilde{x}_1 = 150$
y el inicial de la tercer etapa: $x_4 = 150$

* Se conoce

* Puede procederse a formular el algoritmo de programación dinámica
Para la primera etapa se tiene:

* Para la primera etapa

(6)

$$f_1(x_1) = \min_{d_1} (r_1(x_1, d_1))$$

En esta etapa:

$$x_1 + d_1 - (x_1)_{\max} = 0$$

ya que no hay personal excedente.

Por lo tanto la función costos se reduce

a:

$$r_1 = 4500 d_1^2$$

$$\text{pero: } d_1 = (x_1)_{\max} - x_1$$

$$d_1^* = 150 - x_1$$

$$r_1 = 4500 (150 - x_1)^2$$

Esta función de costos no depende de la variable de decisión, por lo tanto en la primera etapa ya no hay que optimizar:

$$f_1(x_1) = 4500 (150 - x_1)^2$$

Para la siguiente etapa se tiene:

$$f_2(x_2) = \min_{d_2} (r_2(x_2, d_2) + f_1(\tilde{x}_2 = x_2))$$

Sustituyendo el valor de la función de costos de la etapa 2 $r_2(x_2, d_2)$ y el beneficio optimo de la etapa 1 se tiene:

$$f_2(x_2) = \min_{d_2} (50\,000(x_2 + d_2 - 95)^2 + 4500d_2^2 + 4500(150 - x_2)^2)$$

* Antes de poder proceder a minimizar es necesario revisar que como únicas variables aparezcan x_2 y d_2 . Para eliminar x_1 se emplea la relación:

* Solo deben aparecer x_2 y d_2 .

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_2 &= x_2 + d_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$f_2(x_2) = \min_{d_2} (50\,000(x_2 + d_2 - 95)^2 + 4500d_2^2 + 4500(150 - x_2 - d_2)^2)$$

Para minimizar esta relación es necesario derivar parcialmente con respecto a d_2

obteniéndose:

$$\frac{\partial F_2(x_2, d_2)}{\partial d_2} = 50\,000 + 9000 d_2 - 9000(150 - x_2 - d_2)$$

donde se ha designado con $F_2(x_2, d_2)$ a la cantidad dentro del parentesis.

Iguando a cero esta derivada y despejando a la variable de descripción se obtiene:

$$d_2^* = 77.8 + 0.5x_2$$

* Antes de continuar es necesario determinar si se ha encontrado un máximo o mínimo de la función.

* ¿Se trata de un mínimo o máximo?

La segunda derivada lleva a:

$$\frac{\partial^2 F(x_2, d_2)}{\partial d_2^2} = +9000 + 9000 > 0$$

Es un mínimo.

* Además hay que encontrar si no se viola la restricción

* ¿Se viola la restricción?

$$x_2 + d_2 \geq (x_2)_{\max}$$

Se tiene:

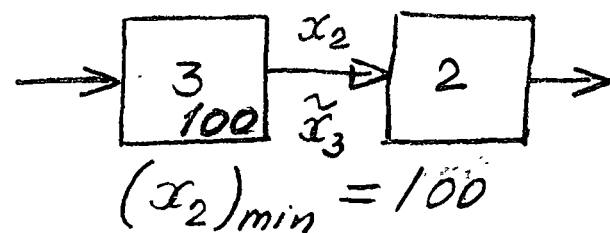
y sustituyendo la descripción optima d_2^*

$$(x_2)_{\max} = 95 \quad (9)$$

$$x_2 + 77.8 + 0.5 x_2 \geq 95$$

$$1.5 x_2 + 77.8 \geq 95$$

Como el menor valor posible de x_2 , estado inicial de la etapa 2 y final de la 3, donde se requiere por lo menos 68 empleados se tiene para el caso mas desfavorable:



$$1.5 \cdot 100 + 77.8 \geq 95$$

$$150 + 77.8 \geq 95$$

Cumplíendose por lo tanto la restricción.

* El valor de la descripción optima tiene que sustituirse en la función

$F_2(x_2, d_2)$ para obtener el optima $f_2(x_2)$ se tiene:

$$d_2^* = 77.8 + 0.5 x_2$$

Sustituyendo en $F_2(x_2, d_2)$

$$f_2(x_2) = 50000(1.5x_2 - 17.2) + 4500(11265.7 - 138.8x_2 + 2.5x_2^2)$$

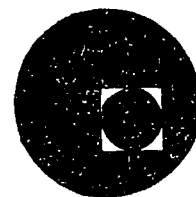
Nótese que se ha obtenido una función del estado inicial de la etapa 2 exclusivamente.

De manera análoga se procede para las etapas subsecuentes. Los resultados aparecen en la tabla siguiente:

Etapa	Optimando	Descripción
1	$f_1(x_1) = 4500(150 - x_1)$	$d_1^* = 150 - x_1$
2	$f_2(x_2) = 50000(92 - 0.08x_2)$ $+ 4500(150 - x_2)^2$	$d_2^* = 92 - 0.92x_2$



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



INGENIERIA DE SISTEMAS

COMPLEMENTO AL APENDICE B: PROBABILIDAD

M. EN C. JORGE RIVERA BENITEZ

PALACIO DE MINERIA
Tacuba 5, primer piso. México 1, D. F.
TELEFONOS: 513-27-95
512-31-23 521-73-35

INTRODUCCION

1. VARIABLES ALEATORIAS
2. FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD
 - 2.1 Funciones de densidad de probabilidad discretas: uniforme, binomial, Poisson
 - 2.2 Funciones de densidad de probabilidad continuos: uniforme, exponencial, normal.
3. VALOR ESPERADO.
4. GENERACION DE VARIABLES ALEATORIAS.
5. METODO DE MONTECARLO.

INTRODUCCION.

FENOMENOS ALEATORIOS

Los diferentes fenómenos que se presentan en el mundo real, ya sean físicos, biológicos, económicos, sociológicos, etc., se pueden clasificar dentro de dos grandes grupos: los fenómenos determinísticos y los fenómenos aleatorios *. A este último grupo de fenómenos pertenecen la mayoría de los fenómenos mencionados.

Un fenómeno determinístico es aquel que se caracteriza por la propiedad de que al realizarlo bajo condiciones similares se obtienen los mismos resultados. Algunos ejemplos de fenómenos determinísticos son:

1. Observar el color de una bola extraída de una que contiene solamente bolas blancas. Al ocurrir este fenómeno siempre observaremos una bola blanca.
2. Determinar el resultado de la suma de dos números pares. Por teoría de los números sabemos que si sumamos dos números pares, la suma de ellos es par, por lo tanto el resultado observado siempre será par cada vez que realicemos el experimento de sumar dos números pares.

A diferencia de los fenómenos determinísticos, los fenómenos aleatorios se caracterizan por el hecho de que al realizarlos, bajo condiciones similares, nunca se observa que todos los resultados sean iguales sino solo se advierte una frecuencia de ocurrencia de cada uno de ellos. A esta frecuencia de ocurrencia se le llama regularidad estadística. Se acostumbra cuantificar a la regularidad estadística de cada uno de los resultados por un número entre cero y uno, en forma tal que representa la frecuencia de ocurrencia del resultado considerado. Entre los numerosos fenómenos que son fenómenos aleatorios se encuentran los siguientes:

*También son llamados fenómenos al azar, probabilísticos ó casuales.

1. Observar la cara de la moneda, al tirarla desde una altura determinada.
En este fenómeno cada vez que tiremos la moneda podemos tener dos posibles resultados: águila ó sol.
2. Observar el número obtenido al tirar un dado.
Los resultados posibles son: 1,2,3,4,5,6.
3. Registrar el número de accidentes de tránsito en la intersección de dos avenidas, entre las 7 y 8 de la mañana. Los posibles resultados serían : 0,1,2,3, ...
4. Registrar la demanda semanal de un artículo.
5. Observa diariamente el precio de un comestible.
6. Analizar el contenido de níquel en cierto tipo de acero.
7. El número de cuentas bacterianas en un producto alimenticio.
8. El número de defectos encontrados en la fabricación de un medidor de presión.
9. Determinar el número de personas que llegan a un cierto servicio como un supermercado, ó un aeropuerto, etc.
10. Observar el tiempo de vida de una máquina, un problema de interés asociado a este fenómeno aleatorio es determinar el tiempo óptimo para reemplazar la máquina.

PROBABILIDAD.

El estudio de los fenómenos determinísticos se realiza en los propios campos de los que surgen, así, si la temperatura de ebullición de una substancia se considera determinístico entonces el estudio de la temperatura y de sus implicaciones que tenga será dentro de la física ó físicoquímica.

El objetivo de la probabilidad es el estudio de los fenómenos aleatorios con el fin de predecir su comportamiento en un tiempo futuro y así poder elegir la acción más apropiada para hacer frente a las implicaciones que tenga el fenómeno aleatorio bajo estudio, así por ejemplo, si el fenómeno aleatorio estudiado es el número de personas que arriban a un cierto servicio, nos interesa conocer su comportamiento futuro ó incluso presente para después decidir qué número de servidores son necesarios para atender esa demanda de servicios. Si el fenómeno aleatorio de interés es observar el porcentaje de níquel de un envío de materia previa nos interesa conocer el número de muestras que debemos tomar y después tener un criterio para decidir si este producto cumple con la calidad especificada en el contrato de compra-venta.

Entonces con la ayuda de probabilidad conoceremos el comportamiento del fenómeno aleatorio pero no las implicaciones del sistema del que forma parte. Por lo tanto en un sistema complejo en el que están involucrados uno ó varios fenómenos generalmente aleatorios, el objetivo del analista de sistemas no es solo conocer el fenómeno aleatorios, el objetivo del analista de sistemas no es solo conocer el fenómeno aleatorio sino las implicaciones que tiene al tomar una decisión para resolver el sistema. Por ejemplo, considere que el sistema de interés es un sistema de inventarios en el que debemos decidir cuando surtir nuestro almacén y cuanto ordenar para que el nivel de inventarios en el almacén sea tal que minimice los costos de inventarios. En este sistema interviene un fenómeno determinístico ó aleatorio (generalmente aleatorio) que es la demanda, el cual forma parte del sistema y es un factor importante en la solución del sistema. Por lo tanto, el analista de sistema le interesa la probabilidad solo como una herramienta para conocer las propiedades probabilísticas de su demanda, pero su papel principal será encontrar un modelo matemático que represente su sistema de inventarios y la solución del mismo. -

Por esta razón uno de los objetivos de estas notas es dar el conocimiento probabilístico necesario que requiere un analista de sistema en la modelación y en particular - cuando el modelo elegido es un modelo de simulación. También se presentará el método de Montecarlo como un método de simulación de variables aleatorias independientes con una función de probabilidad preespecificada.

La teoría de probabilidad nos presenta medios para representar y conocer un fenómeno aleatorio. Sin embargo una vez estudiado las características del fenómeno, y posiblemente habiendo elegido alguna función de probabilidad que proporciona la frecuencia de ocurrencia de cada uno de los posibles resultados, será necesario estimar los parámetros de la función de probabilidad elegida. Este problema de estimación corresponde al campo de la Estadística.

ESTADISTICA.

En general la estadística se divide en dos ramas : la estadística descriptiva y la inferencia estadística. La estadística descriptiva comprende técnicas de agrupación, representación y cálculo de ciertas medidas de interés de un conjunto de datos obtenidos al observar un fenómeno aleatorio. Algunas medidas básicas son la media, variancia, Etc.

La inferencia estadística proporciona técnicas que en base a un conjunto de - datos experimentales proporcionan las características desconocidas de un fenómeno aleatorio. Algunos problemas concernientes, a la inferencia estadística son : estimación de parámetros de la función de distribución que sigue un fenómeno aleatorio, pruebas de hipótesis, regresión, análisis de variancia, control de calidad, Etc.

1. VARIABLES ALEATORIAS

DEFINICION 1.1 El espacio muestra de un fenómeno aleatorio, es el conjunto de todos los posibles resultados que se pueden obtener al realizar el fenómeno. El espacio muestra se indicará por Ω . Otra notación que se acostumbra usar para el espacio muestra es S . Los resultados, o sea los elementos de Ω , se indicarán por ω .

EJEMPLOS.

1. Si el fenómeno aleatorio consiste en tirar una moneda desde una altura determinada, entonces los posibles resultados son águila (que será abreviada por a) y sol (abreviado s), ie.,

$$\Omega = \{\omega : \omega = a, s\} = \{a, s\}$$

2. Si observamos el número obtenido al tirar un dado entonces su espacio muestra es

$$\Omega = \{\omega : \omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

3. Si el fenómeno aleatorio consiste en observar el número de accidentes de tránsito en la intersección de dos avenidas durante las 7 y 8 de la mañana entonces

$$\Omega = \{\omega : \omega = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

4. El espacio muestra correspondiente a la demanda semanal de un artículo podría ser

$$\Omega = \{\omega : \omega = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

o en caso de que la región tuviera 1000 habitantes, el espacio muestra sería

$$\Omega = \{\omega : \omega = 0, 1, 2, 3, \dots, 1000\}$$

5. Para el precio de un artículo determinado, el espacio muestra sería

$$\Omega = \{\omega : \omega \text{ es un número real positivo o cero}\}$$

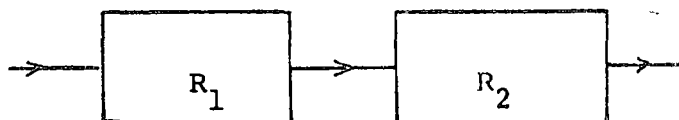
$$\Omega = \{\omega : \omega \geq 0\}$$

6. Si observamos el tiempo de vida de una máquina, éste podría ser cualquier número real positivo, ie.,

$$\Omega = \{\omega : \omega \geq 0\}$$

El posible resultado $\omega=0$, significa que la máquina estaba defectuosa cuando fue adquirida.

7. Considere el diagrama que muestra dos reactores de etileno y cloro-etileno conectados en serie.



Suponga que cada reactor puede operar o no operar en un tiempo determinado, y que el fenómeno aleatorio de interés es observar las condiciones en que se encuentra el sistema formado por los reactores en serie.

Defina Z_1 como una variable que nos representa el estado del reactor 1, y Z_2 otra variable que representa el estado del reactor 2. Si definimos Z_i por

$$Z_i = \begin{cases} 0 & \text{si el reactor } i \text{ no opera} \\ 1 & \text{si el reactor } i \text{ opera} \end{cases} \quad (i=1,2)$$

entonces el estado del sistema esta dado por el par $\omega = (Z_1, Z_2)$, y el espacio muestra será

$$\Omega = \{(Z_1, Z_2): (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

$$\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

$$\Omega = \{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$$

donde $\omega^1 = (0,0)$, $\omega^2 = (0,1)$, $\omega^3 = (1,0)$ y $\omega^4 = (1,1)$ son puntos de un espacio bidimensional.

DEFINICION 1.2 Sea Ω el espacio muestra de un experimento. Un evento del experimento, es cualquier subconjunto de Ω . Los eventos se indicarán por letras latinas mayusculas.

NOTA. Se dice que el evento A ocurre si cualquier elemento de A ocurre, ie., si $A = \{1,2,3\}$ es un subconjunto de un espacio muestra y al observar un experimento se obtiene $\omega = 2$, entonces el evento A ocurre, o sea que para que el evento A ocurra no se necesita que cada uno de los elementos de A ocurra.

EJEMPLOS.

1. Para el ejemplo 1 mencionado anteriormente, con $\Omega = \{a,s\}$, los subconjuntos

$$A = \{a\}, \quad B = \{s\}, \quad C = \emptyset, \quad D = \Omega$$

son eventos. El subconjunto $A = \{a\}$, representa el evento de obtener un aguila. El subconjunto $B = \{s\}$, representa el evento de obtener un sol. El subconjunto $C = \emptyset$, el vacio, representa el evento de que moneda desaparece o que caiga de canto, o que ruede indefinidamente. El subconjunto propio $D = \Omega$, llamado el evento seguro, representa la seguridad de que el experimento (o fenómeno aleatorio) se lleve a cabo.

2. Algunos eventos del ejemplo de la tirada de un dado, con espacio muestra $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$, son

$$A = \{1, 3, 5\}, \quad B = \{2, 4, 6\}, \quad C = \{3, 4, 5, 6\}$$

El subconjunto A representa el evento de obtener un número par, B el evento de obtener un número impar, C obtener un número mayor que dos, etc.

3. Para el sistema de reactores mostrado en el ejemplo 7, defina los eventos A y B como sigue

A es el evento de que el sistema de reactores opere

B es el evento de que al menos uno de los reactores opere

Expresa A y B como subconjuntos de Ω , dando sus elementos. Encuentra A^C y B^C .

SOLUCION.

$$A = \{(1,1)\}, \quad B = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$$

$A^C = \{(0,1), (1,0), (0,0)\}$ representa que el sistema no funciona, ya que están en serie

$B^C = \{(0,0)\}$ representa que ninguno de los reactores funciona

DEFINICION 1.3 Se dice que dos eventos son mutuamente exclusivos si no ocurren simultáneamente, i.e., si su intersección es el vacío.

EJEMPLO. Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el espacio muestra de la tirada de un dado. Sea A el evento correspondiente a aquellas tiradas que muestren un número menor o igual a 4, sea B que muestren un número mayor de 3, y sea C el evento equivalente a obtener el número 5. Entonces,

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{4, 5, 6\}, \quad C = \{5\}$$

Los eventos A y B no son mutuamente exclusivos ya que pueden ocu-

rrir simultáneamente, porque el elemento 4 es común a ambos conjuntos, $A \cap B = \{4\} \neq \emptyset$

Para los eventos A y C, se tiene que $A \cap C = \emptyset$, por lo tanto son mutuamente exclusivos. B y C no son mutuamente exclusivos porque $B \cap C = \{5\} \neq \emptyset$.

DEFINICION 1.4 Se dice que dos eventos elementales w_i y w_j son igualmente probables si se espera que cada uno de ellos ocurra con igual frecuencia cuando se repite el experimento un gran número de veces, es decir, si existe el mismo número de oportunidades para que ocurra cada uno de ellos.

EJEMPLO. Si $\Omega = \{a, s\}$ es el espacio muestra el juego de volados, entonces $w_1 = a$ y $w_2 = s$ son igualmente probables ya que una moneda solo tiene dos cantos marcados: uno para águila y otro para sol. Por lo tanto, el número de oportunidades para obtener sol (ó sea el número de veces que está acuñado el sol en la moneda) es igual al número de oportunidades para obtener águila.

DEFINICION 1.5 (DEFINICION CLASICA DE PROBABILIDAD). Sea Ω el espacio muestra de un fenómeno aleatorio que puede ocurrir en n caminos mutuamente exclusivos e igualmente probables. Si el evento A puede ocurrir en n_A de esos n caminos entonces la probabilidad del evento A, indicada por $P(A)$, se define por

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

EJEMPLO. Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el espacio muestra en la tirada de un dado. Si $A = \{1, 3, 5\}$ es el evento de obtener un número par entonces $n_A = 3$ y $n = 6$, por lo tanto

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Si $B = \{1, 4\}$ entonces

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

NOTA. La definición clásica de probabilidad está restringida a determinado tipo de fenómenos aleatorios que reúna las condiciones dadas en la definición. Las desventajas que tiene son:

- i. Solo se aplica a espacios muestra finitos
- ii. Define probabilidad en términos del concepto de eventos elementales igualmente probables, ie hay una redundancia al definir probabilidad en términos de la misma palabra.
- iii. Está restringida a problemas con eventos elementales igualmente probables.

DEFINICION 1.6 (DEFINICION FRECUENCIAL DE PROBABILIDAD). La probabilidad del evento A , se define como el límite de la frecuencia relativa del evento A cuando el número de veces que se repite el fenómeno tiende a infinito, ie. si $f_A(N)$ es la frecuencia de ocurrencia del evento A cuando el experimento se repite N veces, ó sea la frecuencia relativa de A es $f_A(N) / N$, entonces

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f_A(N)}{N}$$

NOTAS.

1. La definición frecuencial es también llamada una definición aposteriori, porque su determinación se hace después de realizado el experimento.
2. Las desventajas de esta definición son:
 - i) Es difícil saber cual es el límite de esta frecuencia relativa, ya que esta frecuencia es empírica y no analítica.
 - ii) Es necesaria la experimentación para conocer la frecuencia relativa.

EJEMPLO. Considere el juego de volados en el que deseamos conocer la probabilidad de obtener un águila. Defina

$$Z_N = \begin{cases} 0 & \text{si no ocurre águila en el } N\text{-ésimo volado} \\ 1 & \text{si ocurre águila en el } N\text{-ésimo volado} \end{cases}$$

y defina A como el evento de obtener un águila, $A = \{a\}$. Suponga que al tirar 30 veces un volado se obtuvo los resultados siguientes:

Repetición N	Z_N	$f_A(N)$	$f_A(N)/N$
1	1	1	1/1
2	1	2	2/2
3	0	2	2/3
4	1	3	3/4
5	0	3	3/5
6	0	3	3/6
7	1	4	4/7
8	0	4	4/8
9	0	4	4/9
10	1	5	5/10
11	1	6	6/11
12	0	6	6/12
13	0	6	6/13
14	0	6	6/14
15	1	7	7/15
16	1	8	8/16
17	1	9	9/17
18	1	10	10/18
19	0	10	10/19
20	0	10	10/20
21	0	10	10/21
22	1	11	11/22
23	1	12	12/23
24	1	13	13/24
25	0	13	13/25
26	0	13	13/26
27	1	14	14/27
28	0	15	15/28
29	1	16	16/29
30	1	17	17/30

Si se traza la frecuencia $f_A(N) / N$ contra N se puede "intuir" que el límite de $f_A(N) / N$ es $1/2$, sin embargo es necesario repetir muchas veces el experimento para poder tener una idea a que número tiende esta frecuencia.

DEFINICION 1.7 (DEFINICION AXIOMATICA DE PROBABILIDAD). Sea Ω un conjunto arbitrario que representa el espacio muestra de un fenómeno aleatorio. Una función probabilidad es una función que va de una colección de subconjuntos de Ω al intervalo $[0,1]$, en forma tal que satisface los siguientes axiomas.

i) $P(A) \geq 0$ para cada A de la colección de subconjuntos de

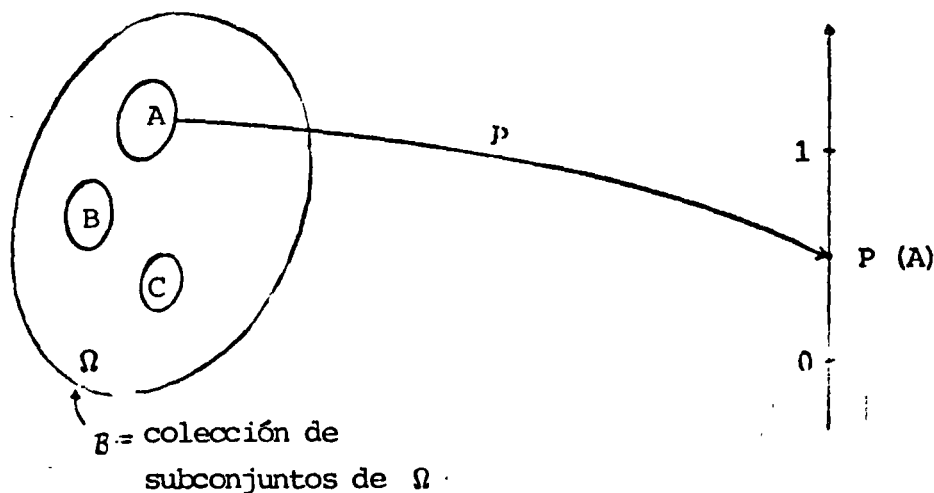
ii) $P(\Omega) = 1$

iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$

Si $A_1, A_2, \dots$ es una colección de subconjuntos de Ω , mutuamente exclusivos, ie $A_i \cap A_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$.

NOTAS

1. La representación de la función de probabilidad, usando la representación de función en teoría de conjuntos, es



2. El número $P(A)$, asociado al elemento A de $\mathcal{B}$, es llamado la probabilidad del evento A . Este número $P(A)$ debe satisfacer los axiomas de la definición.

TEOREMA 1.8 Sea Ω un espacio muestra y P una función de probabilidad asociada a una colección β de subconjuntos de Ω . Se afirma:

- i) $P(A) = 1 - P(A^c)$
- ii) $P(\emptyset) = 0$
- iii) Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$
- iv) $0 \leq P(A) \leq 1$ para cada $A \in \beta$
- v) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- vi) $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

donde $A \Delta B$ es la diferencia simétrica de A y B , la cual se define por
 $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

DEMOSTRACION. (Ver Mood, Parzen, ó Hogg dados en las referencias).

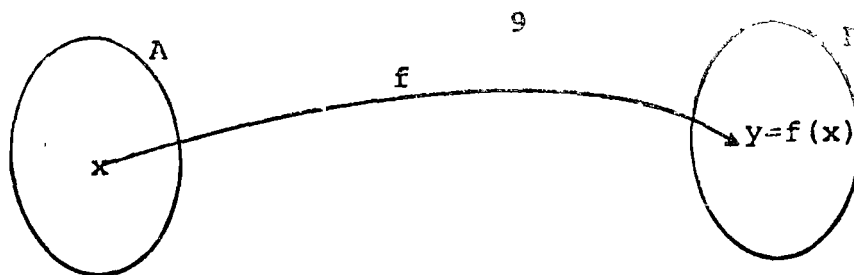
La siguiente definición de función solo tiene como objeto recordar conceptos fundamentales que serán necesarios para definir variable aleatoria.

DEFINICION 1.9 Sean A y B dos conjuntos preespecificados. Si a cada elemento x de A le está asociado uno y solo un elemento y de B , a través de una regla f , entonces se dice que f es una función de A a B . Al conjunto A se le llama el dominio de la función f , y al conjunto B se le llama el contradominio de f . Si a un elemento x de A le corresponde el elemento y de B , se dice que y es la imagen de x bajo la regla f , y se escribe $y = f(x)$. El conjunto de todas las imágenes de los elementos de A , se llama el rango de f y se indica por $\text{rng}(f)$, ie.

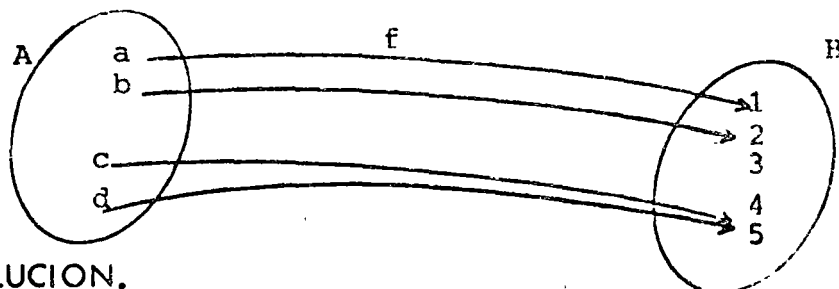
$$\text{rng}(f) = \{ y : y = f(x) \text{ para alguna } x \in A \}$$

NOTAS:

1. Si una función f tiene como dominio al conjunto A y contradominio el conjunto B , entonces se escribe $f: A \rightarrow B$.
2. La representación de una función $f, f: A \rightarrow B$, en teoría de conjuntos es



EJEMPLO. Si $f: A \rightarrow B$, es la función mostrada en la figura de abajo, dé el dominio, el contradominio y el rango de f .



SOLUCION.

dominio de $f = \{a, b, c, d\}$

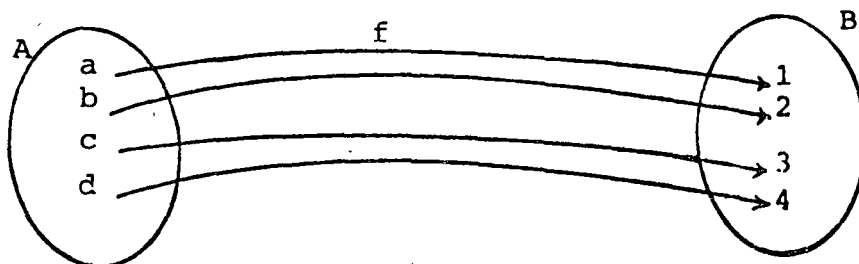
contradominio de $f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

rango de $f = \text{rng}(f) = \{1, 2, 4\}$

DEFINICION 1.10 Se dice que una función $f: A \rightarrow B$, es inyectiva si para cada par de elementos x_1 y x_2 del dominio les corresponden distintos elementos y_1 y y_2 respectivamente, del contradominio, ie f es inyectiva si para todo

$$x_1 \neq x_2 \rightarrow y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2).$$

EJEMPLO. La función mostrada abajo es inyectiva



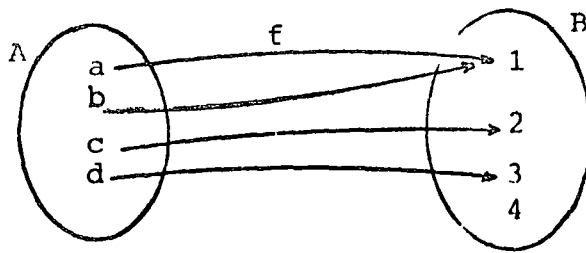
observe en este ejemplo que:

$$\text{dom}(f) = \{a, b, c, d\} = A$$

$$\text{contrdom}(f) = \{1, 2, 3, 4, 5\} = B$$

$$\text{rng}(f) = \{1, 2, 4, 5\}$$

EJEMPLO. La función siguiente

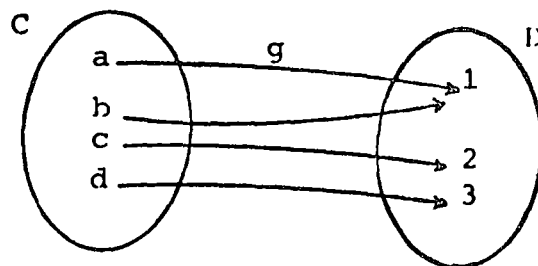
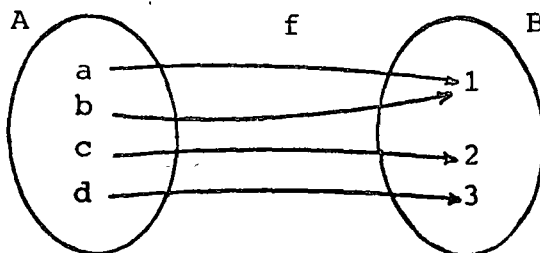


no es inyectiva porque existe un par, a y b , de elementos de A que tienen la misma imagen, ie.,

$$f(a) = 1 = f(b)$$

DEFINICION 1.11. Se dice que una función $f, f: A \rightarrow B$, es suprayectiva si el rango de f es igual a su contradominio.

EJEMPLOS. Considere las funciones $f, f: A \rightarrow B$, y $g, g: C \rightarrow D$, mostradas a continuación.



Se observa que $\text{contradom}(f) = \{1, 2, 3\} = B$ es igual al $\text{rng}(f) = \{1, 2, 3\}$. Por lo tanto f es suprayectiva. Para la función g , se tiene que

$$\text{contradom}(g) = \{1, 2, 3, 4\}$$

es distinto que

$$\text{rng}(g) = \{1, 2, 3\}$$

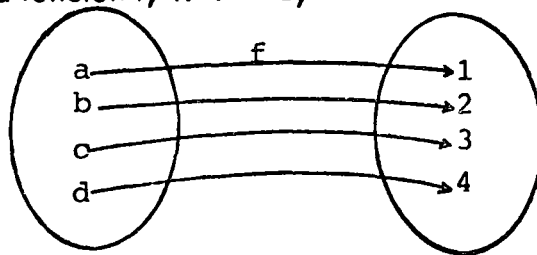
Por lo tanto g no es suprayectiva

DEFINICION 1.12 Se dice que una función $f, f: A \rightarrow B$, es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva.

NOTA. Si una función es biyectiva también se acostumbra decir que es uno a uno

EJEMPLOS.

1. La función $f, f: A \rightarrow B$,

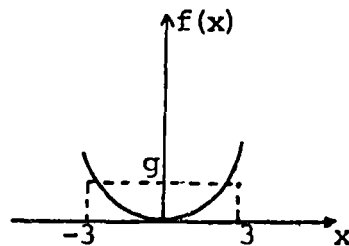


es biyectiva ya que es inyectiva y suprayectiva.

2. La función $f, f: A \rightarrow B$, con

$A = \mathbb{R}; B = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ es el conjunto de números reales

$$f(x) = x^2$$



no es inyectiva ya que para todo x_1 y $x_2 = -x_1$ tiene que $f(x_1) = x_1^2$ y $f(x_2) = x_2^2 = (-x_1)^2 = x_1^2$ son iguales. Por lo tanto, no es biyectiva.

3. La función $f, f: A \rightarrow B$, con

$A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x + 4$$

es inyectiva y suprayectiva. Por lo tanto, es biyectiva.

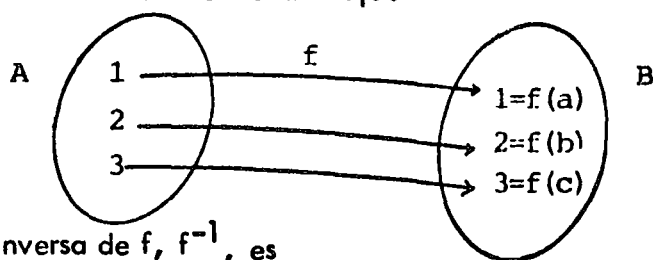
DEFINICION 1.13. Sea $f, f: A \rightarrow B$, una función biyectiva dada. La función inversa de f , indicada por f^{-1} , es una función cuyo dominio es B y su contradominio A en forma tal que si x es la imagen de y bajo la regla f^{-1} (ie., $x = f^{-1}(y)$) entonces se satisface $y = f(x)$.

NOTAS:

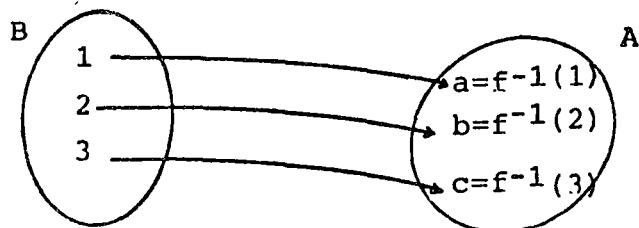
1. Si $f: A \rightarrow B$; es una función dada y f^{-1} es su inversa entonces se escribe $f^{-1}: B \rightarrow A$
2. Para que la inversa de f se defina es necesario que f sea biyectiva.

EJEMPLOS

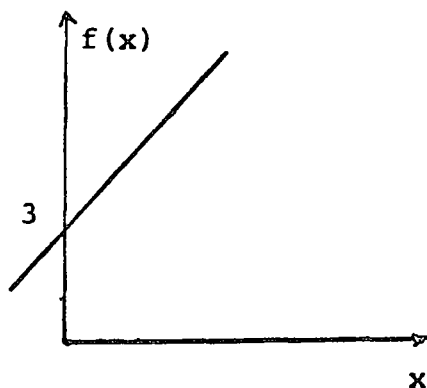
1. Sea f la función mostrada abajo.



La inversa de f , f^{-1} , es

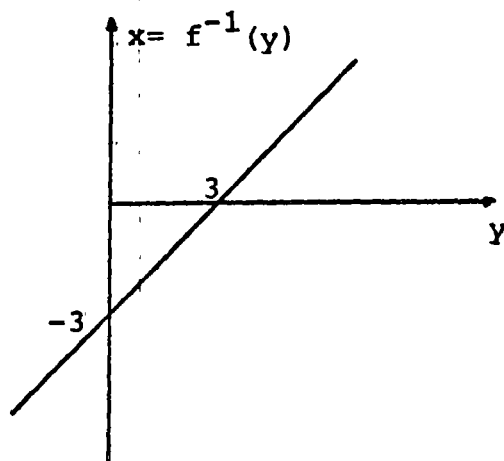


2. Sea $y = f(x) = x + 3$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determine su inversa

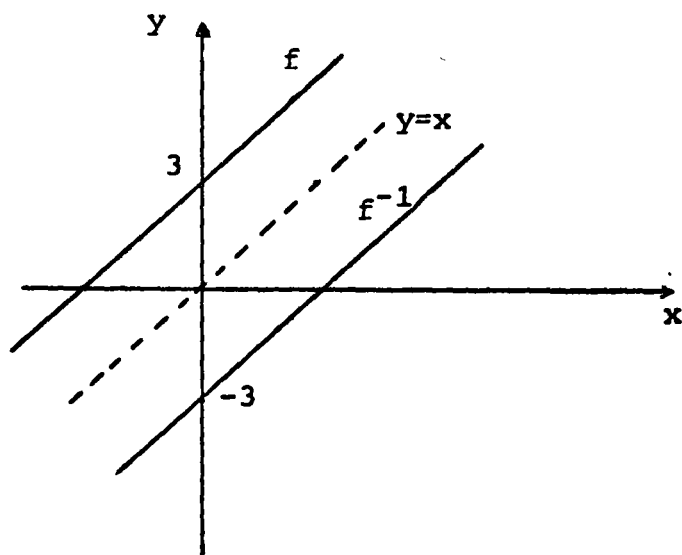


Si $y = x + 3$ entonces $x = y - 3$. Por lo tanto, la función inversa f^{-1} , está dada por

$$x = f^{-1}(y) = y - 3$$



En la función inversa $x = f^{-1}(y) = y - 3$, los elementos del ^{do}cominio están indicados por y , y los elementos de contradominio por x . Sin embargo, debido a la costumbre que se tiene de indicar a los elementos del dominio por x y a los del contradominio por y , - podemos rebautizar estos elementos en la función inversa $x = f^{-1}(y) = y - 3$ escribiendo $y = f^{-1}(x) = x + 3$. Con esta convención, las gráficas de f y f^{-1} , en un mismo sistema de coordenadas aparece abajo



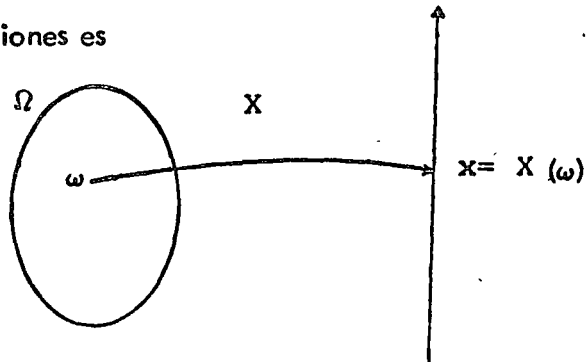
NOTA; Observe que f^{-1} es la imagen de f con respecto a la línea $y = x$.

DEFINICION 1.14 Sea Ω un espacio muestra arbitrario, y sea P una función de probabilidad asociada a una clase de subconjuntos de Ω . Una variable aleatoria, indicada por X , es una función cuyo dominio es Ω y su contradominio los reales.

NOTAS

1. La variable aleatoria (v.a.) X , $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, representada en diagrama de -

funciones es



2. Observe que existe una contradicción entre el nombre de variable aleatoria y su definición, ya que en el nombre se habla de una variable y en su definición se dice que es una función. Sin embargo esta ambigüedad se sigue manteniendo por motivos históricos.
3. Otra observación importante es con respecto a los símbolos usados para una variable aleatoria. La variable aleatoria se indica por letras mayúsculas, por ejemplo X . Este símbolo X debe entenderse como la regla que asocia elementos de Ω con elementos de $\mathbb{R}$, de acuerdo con el carácter de función que tiene X . Por lo tanto, la notación

$$x = X(\omega)$$

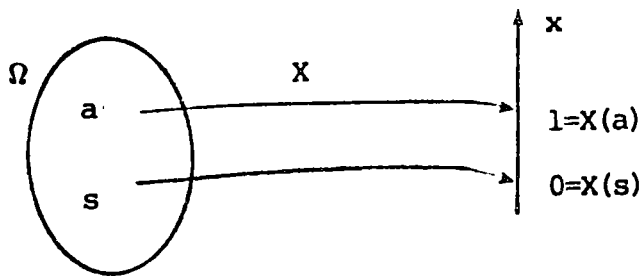
Significa que x es el valor que toma la función X cuando se evalúa en el punto ω , o que x es la imagen de ω bajo la regla X . Esta observación se refuerza con la notación

$$X(\cdot)$$

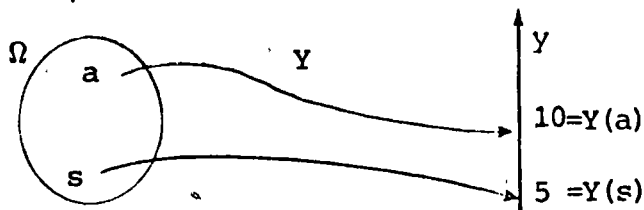
la cual significa que X es una función, y que $X(\cdot)$ corresponde al valor que toma la función cuando se evalúa en un punto cualquiera del dominio. El punto que aparece entre paréntesis representa cualquier elemento del dominio, y es llamado el argumento de la función X .

EJEMPLO . Para el fenómeno de la tirada de una moneda con espacio muestra

$\Omega = \{ a, s \}$, se podrá definir la siguiente función.



Otra posible función sería:



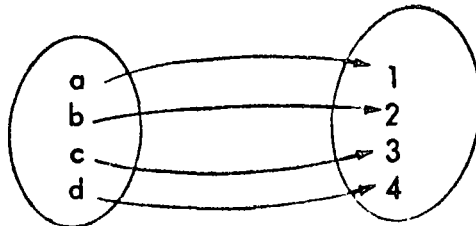
DEFINICION 1.15. Se dice que una variable aleatoria X es discreta si los valores x que puede tomar la función X son discretos, y se dice que es continua si los valores que toma son continuos.

NOTA: Una definición más apropiada de variable aleatoria discreta y continua involucra el concepto de conjuntos finitos, infinitos, denumerables y contables. Estos conceptos se dan a continuación.

1. Se dice que un conjunto A es finito si existe un número entero M , $M < \infty$, tal que se puede encontrar una función uno a uno entre el conjunto A y el conjunto $\{1, 2, \dots, M\}$, y se dice que A es infinito si A no es finito.

Ejemplos.

- i) El conjunto $\{a, b, c, d\}$ es finito ya que existe un número entero M , $M=4$, tal que existe una función f entre A y $\{1, 2, 3, 4\}$, por ejemplo la mostrada en la figura



- ii) El conjunto $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ no es finito ya que no es posible encontrar un número M , M , tal que exista una función uno a uno entre A y $\{1, 2, \dots, M\}$. Por lo tanto A es infinito.

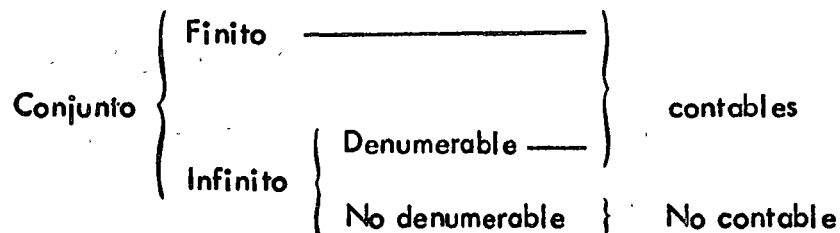
- iii) El conjunto $A = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$ no es finito.

2. Se dice que un conjunto A es denumerable si existe una función uno a uno entre A y el conjunto N de números naturales, $N = \{n: n = 1, 2, 3, \dots\}$.

EJEMPLOS

- i) El conjunto $A = \{x: x = 2, 4, 6, \dots\}$ es denumerable ya que existe una función f , $f(x) = \frac{x}{2}$, entre A y N ; o sea para cada x de A existe un n de N , a través de la función $f: n = \frac{x}{2}$.
- ii) El conjunto $A = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$ no es denumerable.

3. Se dice que un conjunto A es contable si es finito o es infinito denumerable. Se dice que A es no contable si es infinito no denumerable. Entonces un conjunto A puede clasificarse de acuerdo a la siguiente caracterización esquemática:



DEFINICION 1.16. Se dice que la variable aleatoria es discreta si $\text{rng}(X)$ es un conjunto contable, y es continua si $\text{rng}(X)$ es un conjunto no contable.

2. FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD Y FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD.

DEFINICION 2.1. Se dice que $f_X(x)$ es una función de densidad de probabilidad discreta de la v.a. X , si

- i) $f_X(x) \geq 0$ para todo x
- ii) $\sum_{x=-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$
- iii) Si A es un evento, entonces

$$P(A) = \sum_{x \in A} f(x)$$

DEFINICION 2.2. Se dice que $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad continua

- i) $f(x) \geq 0$ para todo x .
- ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

- iii) Si A es un evento, entonces

$$P(A) = \int_{x \in A} f(x) dx$$

DEFINICION 2.3. La función de distribución de probabilidad (acumulada) de una v.a. X , indicada por $F_X(x)$, se define por

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}$$

NOTAS: 1. Otra notación para $F_X(x)$ es $F(x)$.

- 2. Si X es una v.a. discreta entonces

$$F_X(x) = \sum_{s=-\infty}^x f_X(s)$$

- 3. Si X es una v.a. continua entonces

$$F_X(x) = \int_{s=-\infty}^x f_X(s) ds$$

3. ESPERANZA MATEMATICA O VALOR ESPERADO

DEFINICION 3.1 Sea X una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f_X(x)$. Sea $u(X)$ una función de la variable aleatoria X . El valor esperado de $u(X)$, indicado por $E[u(X)]$, se define por

$$E[u(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} u(x)f_X(x)$$

si X es una variable aleatoria discreta y si $\sum_{x=-\infty}^{\infty} u(x)f_X(x)$

existe. Si X es una variable aleatoria continua entonces el valor esperado de $u(X)$ se define por

$$E[u(X)] = \int_{x=-\infty}^{\infty} u(x)f_X(x)dx$$

siempre y cuando esta integral exista.

NOTA: Otro nombre para valor esperado es esperanza matemática.

TEOREMA 3.2 Sea X una variable aleatoria. Se afirma que

i) Si $u(X)$ y $v(X)$ son funciones de la variable aleatoria X , y si $u(X) = cv(X)$ donde c es una constante, entonces

$$E[cv(X)] = cE[u(X)]$$

ii) Si $v_1(X)$ y $v_2(X)$ son funciones de la variables aleatoria X , y c_1 y c_2 son constantes entonces

$$E[c_1v_1(X) + c_2v_2(X)] = c_1E[v_1(X)] + c_2E[v_2(X)]$$

DEMOSTRACION. Use solo la definición de valor esperado.

INTERPRETACION DE VALOR ESPERADO.

A continuación se presenta un ejemplo en el que se ilustra la interpretación de valor esperado.

EJEMPLO. Considere un juego de salón en el que se ganan \$8 si al tirar una moneda se obtiene un águila y se pierden \$5 si se obtiene sol.

Si una persona participa 20 veces en el juego se espera que obtenga 10 águilas y por lo tanto gana $10 \times 8 = 80$ pesos, también se espera que obtenga 10 soles y por lo tanto una pérdida de $10 \times 5 = 50$ pesos. Por lo tanto

$$\text{Ganancia total en 20 tiradas} = 10 \times 8 + 10(-5) = 80 - 50 = 30$$

$$\text{Ganancia esperada por tirada} = 30/20 = 1.5$$

Si consideramos que la persona participa 50 veces entonces

$$\text{Ganancia esperada total en 50 tiradas} = 25(8) + 25(-5) = 75$$

$$\text{Ganancia esperada por tirada} = 75/50 = 3/2 = 1.5$$

Similarmente, si se participa en N tiradas, entonces

$$\text{Ganancia esperada total en } N \text{ tiradas} = (N/2)(8) + (N/2)(-5)$$

$$\text{Ganancia esperada por tirada} = \frac{(N/2)(8) + (N/2)(-5)}{N} = 3/2$$

Este procedimiento intuitivo, se puede obtener usando el concepto de valor esperado, si definimos una función $u(X)$ por

$$u(x) = \begin{cases} 8 & \text{si } x=0 \text{ (=águila)} \\ -5 & \text{si } x=1 \text{ (=sol)} \end{cases}$$

Sabiendo que la función de densidad de probabilidad para la tirada de una moneda es

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x=0 \\ 1/2 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De acuerdo a la definición de valor esperado se tiene:

$$\begin{aligned} E[u(X)] &= \sum_{x=-\infty}^{\infty} u(x)f_X(x) = u(0)f_X(0) + u(1)f_X(1) \\ &= 8(1/2) + (-5)(1/2) = 1.5 \end{aligned}$$

REFERENCIAS

1. Freiberger, W., and Grenander, U., A SHORT COURSE IN COMPUTATIONAL PROBABILITY AND STATISTICS, Springer-Verlag, 1971.
2. Gridgement, N. T., GEOMETRIC PROBABILITY AND THE NUMBER π , Scripta Mathematica, 25, p. 183-195, 1960.
3. Gross, D., and Harris, C. M., FUNDAMENTALS OF QUEUEING THEORY, Wiley, 1974.
4. Harris, R. D., Maggard, M. J., and Lesoo, W. G., COMPUTERS MODEL IN OPERATIONS RESEARCH, Harper and Row, 1974.
5. Hillier, F. S., and Lieberman, G. J., INTRODUCTION - TO OPERATIONS RESEARCH, 2nd. ed., Holden Day, 1974.
6. Hogg, R. V., and Craig, A. T., INTRODUCTION TO MATHEMATICAL STATISTICS, MacMillan, 1970.
7. Kendall, M. G., and Moran, P. A. P., GEOMETRICAL PROBABILITY, Griffin, 1963, p. 70-71.
8. Meier, R. C., Newell, W. T., and Pazer, H. L., SIMULATION IN BUSINESS AND ECONOMICS, Prentice Hall, 1969.
9. Mood, A. M., Graybill, F. A., and Boes, D. C., INTRODUCTION TO THE THEORY OF STATISTICS, 3th. ed., McGraw Hill, 1974.
10. Neuts, M., PROBABILITY, Allyn and Bacon, 1973.
11. Parzen, E., MODERN PROBABILITY THEORY AND ITS APPLICATIONS, Wiley-Toppan, 1960.
12. Wagner, H. M., PRINCIPLES OF OPERATIONS RESEARCH, 2nd. ed., Prentice Hall, 1975.

TABLE 3A

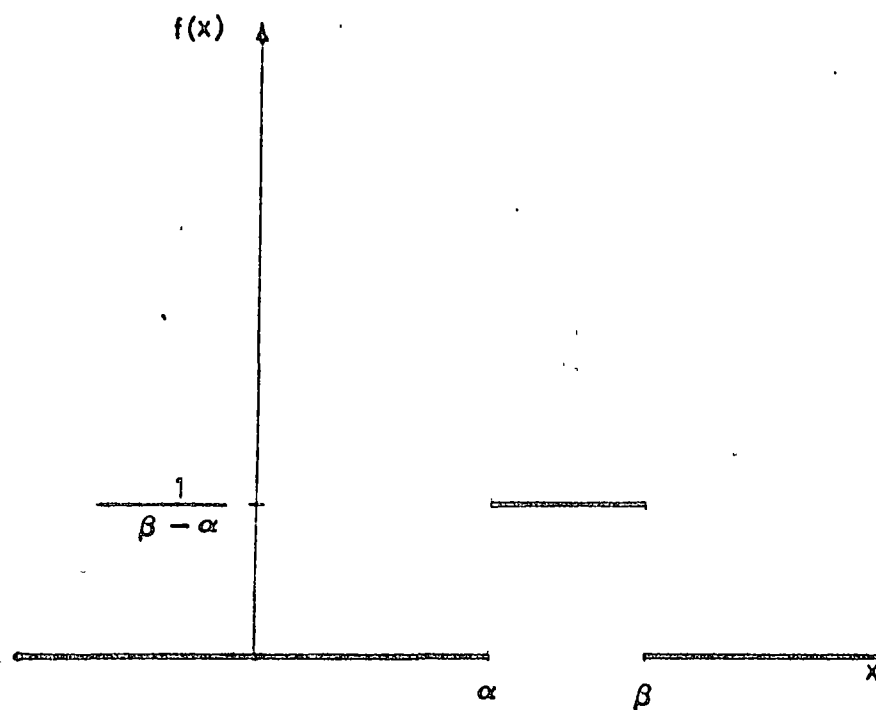
SOME FREQUENTLY ENCOUNTERED DISCRETE PROBABILITY LAWS WITH THEIR MOMENTS AND GENERATING FUNCTIONS

Probability Law	Parameters	Probability Mass Function $p(\cdot)$	Mean $m = E[x]$	Variance $\sigma^2 = E[x^2] - E^2[x]$
Bernoulli	$0 \leq p \leq 1$	$p(x) = p \quad x = 1$ $= q \quad x = 0$ $= 0 \quad \text{otherwise}$	p	pq
Binomial	$n = 1, 2, \dots$ $0 \leq p \leq 1$	$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$ $= 0 \quad \text{otherwise}$	np	npq
Poisson	$\lambda > 0$	$p(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$ $= 0 \quad \text{otherwise}$	λ	λ
Geometric	$0 \leq p \leq 1$	$p(x) = pq^{x-1} \quad x = 1, 2, \dots$ $= 0 \quad \text{otherwise}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Negative binomial	$r > 0$ $0 \leq p \leq 1$	$p(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x$ $= \binom{-r}{x} p^r (-q)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$ $= 0 \quad \text{otherwise}$	$\frac{rq}{p} = rP$ if $P = \frac{q}{p}$	$\frac{rq}{p^2} = rPQ$ if $Q = \frac{1}{p}$
Hypergeometric	$N = 1, 2, \dots$ $n = 1, 2, \dots, N$ $p = 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1$	$p(x) = \frac{\binom{Np}{x} \binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad x = 0, 1, \dots, n$ $= 0 \quad \text{otherwise}$	np	$npq \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$

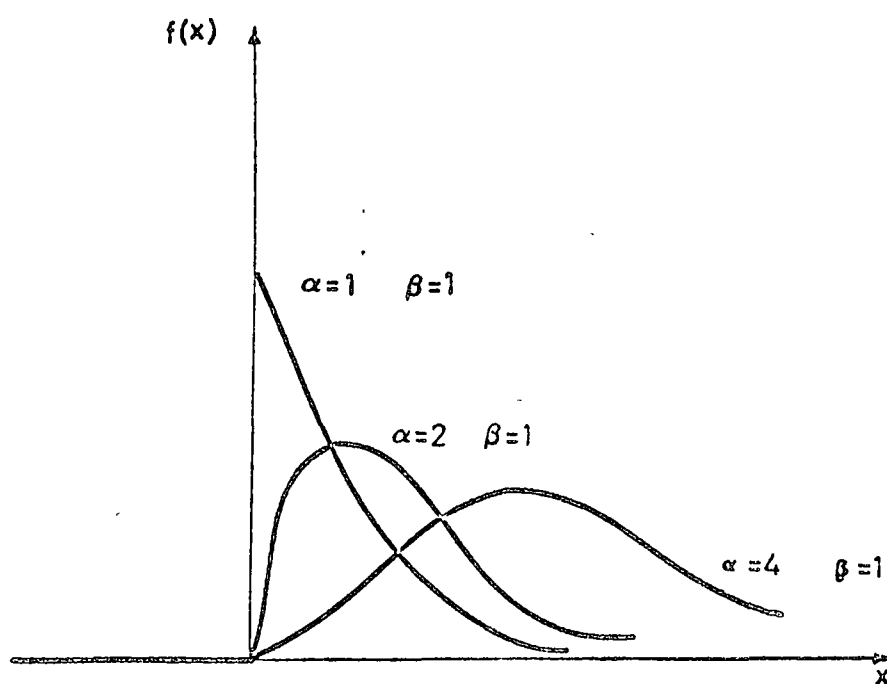
TABLE 3B

SOME FREQUENTLY ENCOUNTERED CONTINUOUS PROBABILITY LAWS WITH THEIR MOMENTS AND GENERATING FUNCTIONS

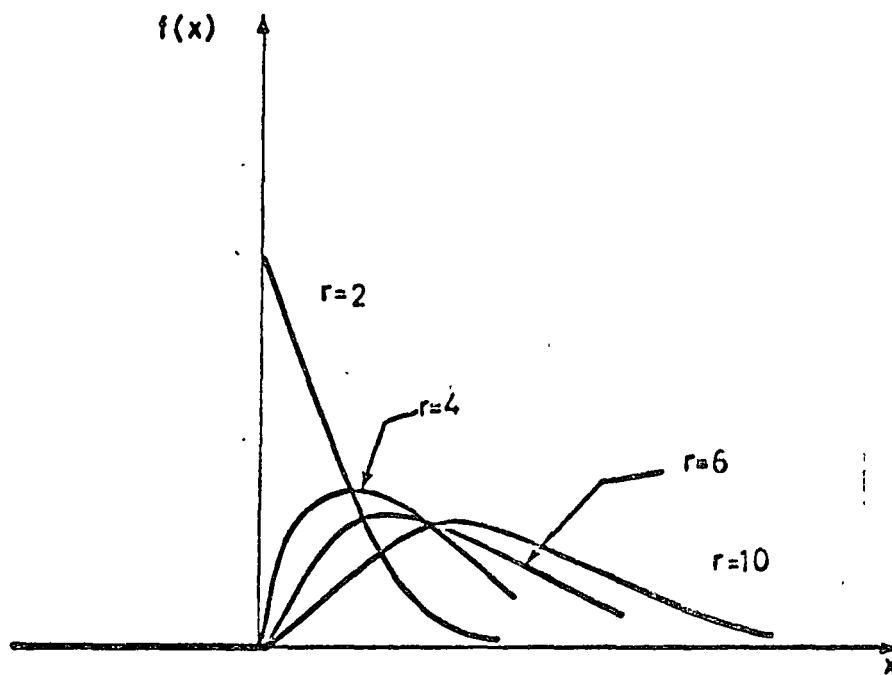
Probability Law	Parameters	Probability Density Function $f(\cdot)$	Mean $m = E[x]$	Variance $\sigma^2 = E[x^2] - E^2[x]$
Uniform over interval a to b	$-\infty < a < b < \infty$	$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a < x < b$ $= 0 \quad \text{otherwise}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal	$-\infty < m < \infty$ $\sigma > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$	m	σ^2
Exponential	$\lambda > 0$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$ $= 0 \quad \text{otherwise}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma	$r > 0$	$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} \quad x > 0$ $= 0 \quad \text{otherwise}$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$



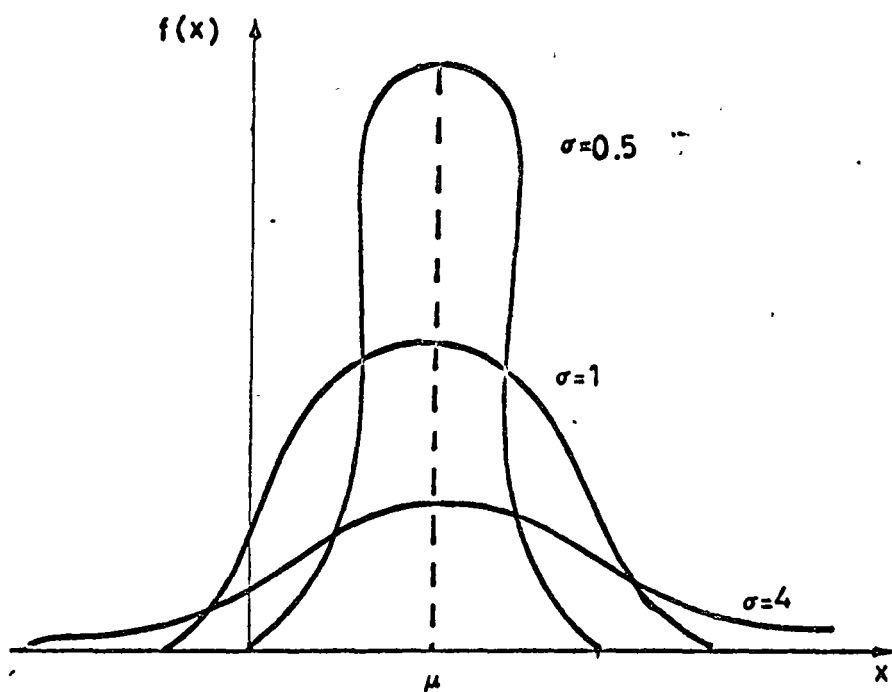
1.- Funcion de densidad de probabilidad uniforme de parametros α y β



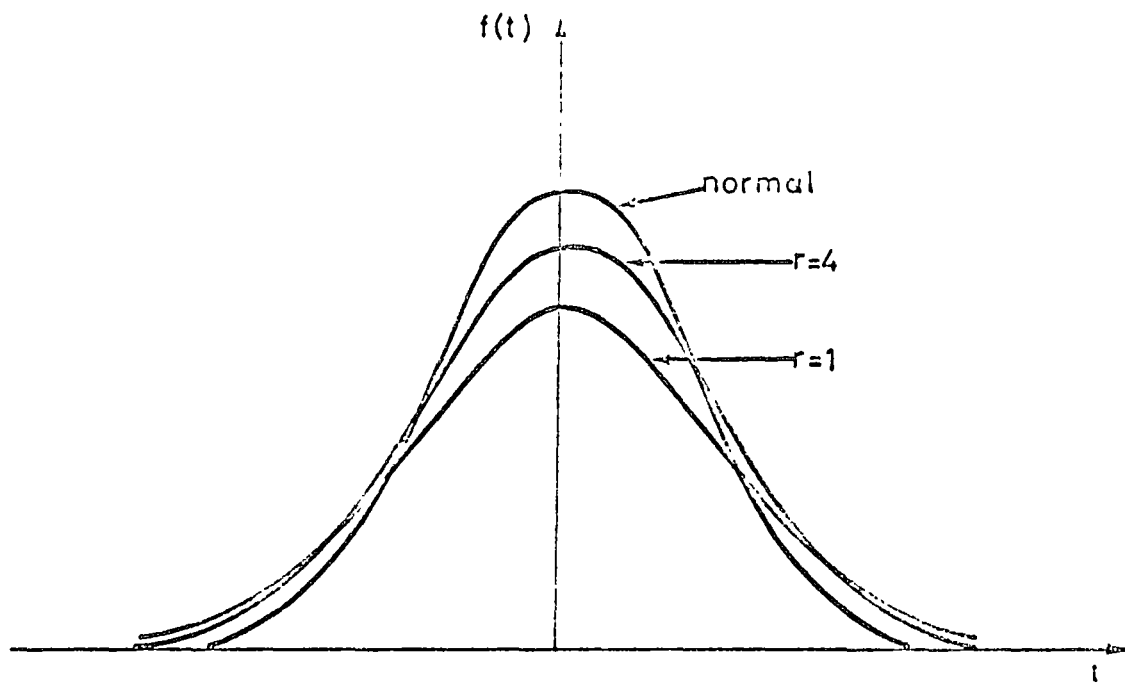
2.- Funcion de densidad de probabilidad gamma de parametros α y β



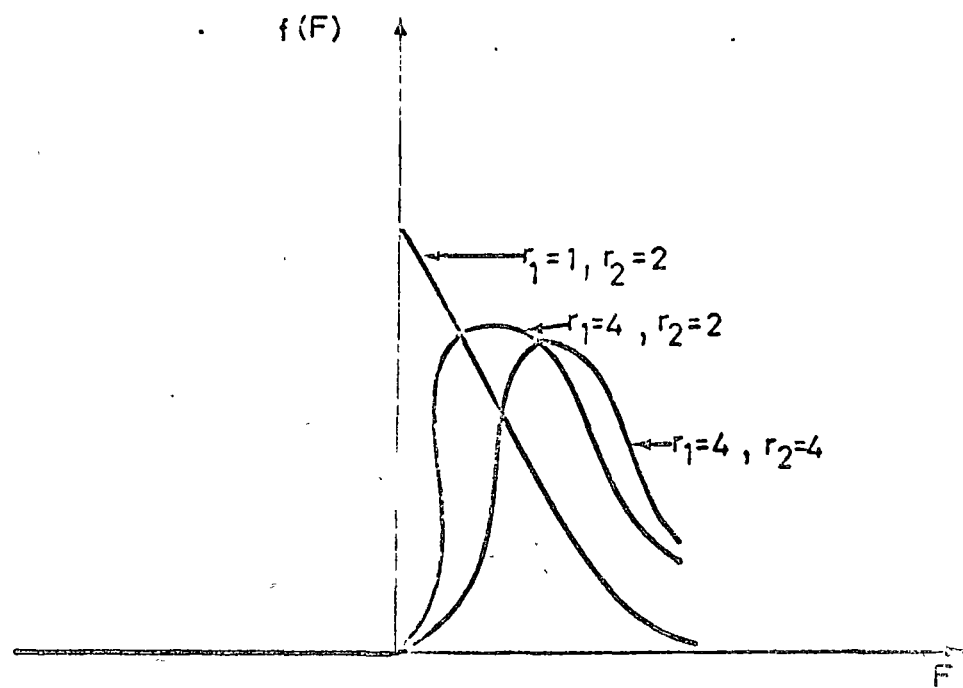
3.- Funcion de densidad de probabilidad j-i cuadrada de parametro r



4.- Funcion de densidad de probabilidad normal de parametros μ, σ



5.-Funcion de densidad de probabilidad de student con parametro r



6.-Funcion de densidad de probabilidad F con parametros r_1 y r_2

Table 15.1 Table of Random Digits[†]

09656	96657	64842	49222	49506	10115	48455	23505	90430	04180
24712	55799	60857	73479	31581	12110	30406	05842	72044	90164
07202	96141	23699	76171	79126	01112	15426	15980	88898	06358
84575	46820	54083	43918	46989	05179	70682	43081	66171	38942
38144	87037	46626	70529	27918	34191	98668	13482	43998	75733
48048	56349	01986	29814	69800	91609	65174	22928	09704	59343
41936	58566	31276	19952	01352	18834	99596	09302	20087	19063
73391	94006	03822	81845	76158	41152	40596	14325	27020	17546
57580	08954	73554	28698	29022	11568	35668	59906	39557	27217
92646	41113	91411	56215	69302	86419	61224	41936	56939	27816
07118	12707	35622	81485	73354	49800	60805	05648	28898	60933
57842	57831	24130	75408	83784	64307	91620	40810	06539	70387
65078	44981	81009	33697	98124	46928	34198	96032	98426	77488
04294	96120	67629	55265	26248	40602	25566	12520	89785	93932
48381	06807	43775	09708	73199	53406	02910	83292	59249	18597
00459	62045	19249	67095	22752	24636	16965	91836	00582	46721
38824	81681	33323	64086	55970	04849	24819	20749	51711	86173
91465	22232	02907	01050	07121	53536	71070	26916	47620	01619
50874	00807	77751	73952	03073	69063	16894	85570	81746	07568
26644	75871	15618	50310	72610	66205	82640	86205	73453	90232

[†] Reproduced with permission from The Rand Corporation, *A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates*. Copyright, The Free Press, Glencoe, Ill., 1955, top of p. 182.

bers or not.¹ Basically the requirements are that each successive number in the sequence must have an equal probability of taking on any one of the possible values, and it must be statistically independent of the other numbers in the sequence. In other words, the numbers need to be random observations from a (discretized) *uniform distribution*.

If a digital computer is to be used for executing the simulation, the random numbers it needs could be fed into the computer from one of the available tables. (In fact, the Rand table already is available on punched cards.) However, it is more common to have the computer itself generate the random numbers. There are a number of methods for doing this, of which the most popular are the *congruential methods* (additive, multiplicative, and mixed). The *mixed congruential method* has become probably the most widely used in recent years, so we shall focus on this approach.

The mixed congruential method generates a *sequence* of random numbers by always calculating the next random number from the last one obtained, given an initial random number x_0 (called the *seed*), which may be obtained from some published source such as the Rand table. In particular, it calculates the $(n+1)$ st random number x_{n+1} from the n th random number x_n by using the recurrence relation

$$x_{n+1} \equiv (ax_n + c)(\text{modulo } m),$$

¹ The interested reader is referred to Selected References 4 and 6 for a description of these tests and for more details about the generation of random numbers.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE INGENIERIA DE SISTEMAS
APLICADO A LA PLANEACION Y ADMINISTRACION 1977.

ALFREDO F. ACOSTA VUELTIFLOR
Av. Central 170
México 21, D.F.
Tel.: 544.32.42.

JOSE MARIO AGUIRRE ORTIZ
Multibanco Comermex, S.A.
Uruguay 19-3°
México 1, D.F.
Tel.: 512.13.53

Edif. Gral. Anaya Depto. 201-A
San Juan de Letrán Nte. 470
México 3, D.F.
Tel.: 583.30.55

JUAN MANUEL ANTUNA SANDOVAL
PEMEX
Marina Nal. 329
México 17, D.F.
Tel.: 545.80.91

José Ma. Rico 634-204
México 12, D.F.
Tel.: 524.16.59

LIC. ANGELINA APARICIO RODRIGUEZ
SAHOP
Dirección General de Planeación Territorial

M. SUSANA AZCONA SANCHEZ
PEMEX
Av. Marina Nal. 329
México 17, D.F.
Tel.: 250.36.22

J. Peón Contreras 17
Cir. Dramaturgos
Cda. Satélite, Edo. de Méx.
Tel.: 572.25.67

JOSE LUIS BERMUDEZ Y MARES
Sría. de Comunicaciones y Transportes
Dir. Gral. de Planeación
Av. Uni. y Xola
México 12, D.F.
Tel.: 530.10.28

Nigromante 30
México 13, D.F.
Tel.: 539.19.49

F. JAVIER CABALLERO AVILA
INFONAVIT
Bca. del Mto. 280
México, D.F.
Tel.: 524.95.25

Canal Miramontes 1744
México 20, D.F.
Tel.: 549.71.45

EUGENIO G. CACERES CONTRERAS
Centro Regional de Const. Escolares para
América Latina y la Región del Caribe
Auditorio Nal.
Apartado Postal 41-518
México 10, D.F.
Tel.: 520.96.40

Parroquia 201 Depto. 704
México 12, D.F.
Tel.: 534.45.97

ENRIQUE CALDERON JIMENEZ
Av. Juárez 145 Depto. 15
México 1, D.F.
Tel.: 535.57.36

VICTOR MANUEL CAMARGO HEREDIA
Esc. Sup. de Ing. Textil
I. P. N.
México 14, D.F.

CARLOS CAMPOS ROMERO
C. F. E.
Río Ródano 14
México 5, D.F.
Tel.: 553.71.33

RUBEN ISAAC CARIÑO GARAY
Inst. Nal. de Invest. Agrícolas
Arcos de Belem 79
México, D.F.
Tel.: 585.60.44 E.176

FRANCISCO CEDILLO SALINAS
S. A. R. H.
P. de la Reforma 69
México, D.F.

EMILIO CRUZ CRUZ
S. A. H. O. P.
Tepozteco 36-2°
México 12, D.F.
Tel.: 590.24.80

REGINO A. CHAVEZ ORTIZ
Desarrollo de Infraestructura, S.A. de C.V.
Culiacán 108-3°
México, D.F.

JOSE AQUILINO DE LA FUENTE A.
Industrias Electrónicas ESE, S.A.
Carpio 253
México 4, D.F.
Tel.: 541.69.72

FRANCISCO DIAZ ALBÖRES
I. P. N.
Unidad Profesional Zacatenco
Mexico 14, D.F.
Tel.: 754.19.32

ARMANDO DIAZ ESPEJEL
Facultad de Ingeniería
U N A M
Tel.: 550.52.15 E.3751

Av. Fdo. Amilpa 105
México 14, D.F.
Tel.: 781.03.80

Hamburgo 269-11
México 6, D.F.
Tel.: 511.68.31

Playa Revolcadero 325-5
México 13, D.F.
Tel.: 579.43.33

Sacaverry 1060-203
México 14, D.F.
Tel.: 535.98.22

Tajín 325-41
México 12, D.F.

Adolfo Prieto 221
México 12, D.F.
Tel.: 564.10.88

Bosques de Oyaneles 90
Bosques de las Lomas
México 10, D.F.

Andador 8 #1-2
Acueducto Guadalupe
México, D.F.
Tel.: 392.46.74

Calz. Tacubaya 117
México 11, D.F.
Tel.: 515.70.55

MARIO DIAZ OTERO
S. A. R.H.
Reforma 109-10°
México 1, D.F.

ALFONSO F. ENRIQUEZ CANALES
Teléfonos de México
Sullivan 199
México, D.F.
Tel.: 592.06.61

Holbein 138 Depto. 11
México 18, D.F.
Tel.: 563.18.88

ING. JOSE JAIME ENRIQUEZ FELIX
Universidad Tecnológica de México, A.C.
Av. Marina Nal. 162
México 17, D.F.
Tel.: 527.03 .16. E.28

GABRIEL FERNANDEZ JUAREZ
Dirección General de Obras Marítimas
Insurgentes Sur 465
México, D.F.
Tel.: 564.57.28

Norte 56 # 3616-4
México 12, DF.
Tel.: 517.01.42

JAVIER FRANCO LOPEZ
ICATEC, S.A.
González de Cosío 24-4°
México 12, D.F.
Tel.: 535.85.60

Amsterdam 285-103
México 11, D.F.
Tel.: 584.37.53

JOSE GUERRERO G.
Cía Minera Autlán, S.A.
Mariano Escobedo 510-4°
México 5, D.F.
Tel.: 250.19.77

Altata 57 Int. 3
México 11, D.F.
Tel.: 515.25.70

ANTONIO HERNANDEZ,
Pacífico 517-D 204
México 21, D.F.
Tel.: 575.82.24

HUGO HERNANDEZ REYES
Motores Perkins, S.A.
Antiguo Camino a San Lorenzo s/n
Toluca, Edo. de México
Tel.: 4.44.55

Mar. de Irlanda 52
México 17, D.F.
Tel.: 527.81.30

MARTIN HIDALGO WONG
S. A.R.H.
Reforma 69-10°
México 1, D.F.
Tel.: 566.17.91

Pujili 21-9
México 14, D.F.
Tel.: 754.17.53

CARLOS ENRIQUE IBARRA CABALLERO
Romero S. Hnos, S.A.
7 Nte. 356
Tehuacán, Pue.
Tel.: 2.15.80

JOSE L. JARDINES MORENO
S.A.R.H.
Reforma 69
México, D.F.
Tel.: 592.39.82 y 546.34.36

ANDRES LIZANDO AMADOR MARTINEZ
Cfa. Minera Autlán
Mariano Escobedo 510-4°
México, D.F.
Tel.: 250.19.77 E.185

CARLOS JULIAN LOPEZ LOPEZ
S.A.R.H.
Reforma 35 Piso 11
México 1, D.F.
Tel.: 591.03.83

ALEJANDRO LOPEZ PEREZ
Sistema de Transporte Colectivo
Delicias 67
México, D.F.
Tel.: 585.67.55

GUILLERMO MACIAS GARCIA VELAZQUEZ
C.Nal. Coordinadora de Puertos
Cuernavaca 5
México, D.F.
Tel.: 553.87.11

JUAN CARLOS MEDINA BRAVO
Romero S. Hermanos, S.S.
7 Norte No. 356
Tehuacán, Pue.
Tel.: 2.15.80

JOSE LUIS MIMIAGA RODRIGUEZ
S. A. R.H.
P. De la Reforma 69
México, D.F.
Tel.: 535.98.22

BERNARDO OBAYA CAPISTRAN
ICATEC, S.A.
González de Cosío 24-4°
México 12, D.F.
Tel.: 535.86.60 E. 31

7 Nte. S/N
Apdo. Postal 236
Tehuacán, Pue.
Tel.: 2.23.89

Plateros 110 Plaza 73-102
México 19, D.F.
Tel.: 651.25.06

Troncoso y Francisco del Paso
México 9, D.F.
Tel.: 552.21.45

Fundidora de Monterrey 354
México 14, D.F.
Tel.: 577.41.65

Hortensias 9
México, D.F.

5 Sur No. 304
Tehuacán, Pue.
Tel.: 2.23.42

Marquez Sterling 17-12
México 1, D.F.
Tel.: 510.39.22

Tecualiapan 54-204
México 21, D.F.
Tel.: 554.56.04

GUSTAVO M. OLGUIN GARCIA
Comisión de Operación y Fomento
de Actividades Académicas
I.P.N.
Tres Guerras 27
México 1, DF.
Tel.: 585.07.06

Madrid 35-3
México 6, D.F.
Tel.: 566.85.47

RICARDO OSORNO SALDAÑA
ICATEC, S.A.
González de Cosío 24-4°
México 12, D.F.
Tel.: 535.86.60 E.31

Sanchez Ascona 1616-103
México, D.F.

SERGIO PEREZ SANCHEZ
Cía. de Luz y Fza. del Centro, S.A.
melchor Ocampo 171
México 17, D.F.
Tel.: 546.11.55

Río Poo 54
México 5, D.F.
Tel.: 525.14.24

FRANCISCO PINEDA GONZALEZ
Ferrocarriles Nal. de Méx.
Edif. Pte. 2°
Estación B. Vista
México 3, D.F.
Tel.: 547.52.40 E.6377

Agustín Leyva 15
Circ. Escultores
Satélite, Edo. de Méx.

LUIS JOAQUIN POOT AYALA
Dir. Gral. de Planeación Territorial
insurgentes Sur 1443
México, D.F.
Tel.: 563.80.76

Dr. Vértiz 757-27
México 12, D.F.

ING. LUIS RAGGI CARDENAS
Desarrollo de Infraestructura, S.A. de C.V.
Culiacán 108-3°
México 11, D.F.
Tel.: 564.85.00

Av. Universidad 1815-102
México 20, D.F.
Tel.: 548.01.40

CARLOS IGNACIO RIVAS PALACIOS
Dir. Gral. de Mejoramiento Profesional
del Magisterio
S. E. P.
Arcos de Belén Esq. Balderas
México, D.F.
Tel.: 585.79.77

Genaro García Retorno 15 # 8
México 9, D.F.
Tel.: 552.39.59

GERARDO RODRIGUEZ ALONSO
PEMEX
Marina Nal. 329

Copa de Oro 42

FRANCISCO ROMERO LUNA
S. A. R. H.
Av. San Bernabe 549
México 20, D.F. Tel.: 595.24.55

Av. Cuauhtémoc 883-10
México 12, D.F.
Tel.: 543.63.60

GUSTAVO L. ROSADO ROMERO
Motores Perkins, S.A.
Camino Antiguo a Sn. Lorenzo
Toluca, Edo. de Méx.

Rio Churubusco 461
México 13, D.F.
Tel.: 670.16.79

GABRIEL EDUARDO RUIZ LEZAMA
Cía. Constructora LCA, S.A.
B. California 255 B Desp. 703
México, D.F.
Tel.: 574.70.62

Leon Cavallo 249-5
México 14, D.F.
Tel.: 537.29.97

ANTONIO ALEJANDRO SANCHEZ MORENO
Motores Perkins S.A.
Antiguo Camino a San Lorenzo
Toluca, Edo. de Mex.
Tel. 4.44.55

Huizache 19
Col. Iztacalco

JESUS ALBERTO SALAZAR LIZARRAGA
I.P.N.
Peluqueros y Orfebreria
México 2, D.F.
Tel. 526.73.73

Av. Inst. Téc. Indus. 204
México 17, D.F.
TEL.: 547.71.91

JOSE MARIA SALCEDO LOREDO
S. A. R. H.
Reforma 69-10
México 1, D.F.

Nte. 67 # 4789-18
México, DF.
Tel.: 566.17.91

JUAN JOSE SASTRE GARCIA
Cía. Explanadora del Istmo, S.A.
Texistepec, Ver.

Leona Vicario 12
Minatitlán, Ver.

JORGE SESIN MAZON
CAPFCE
Vito Alessio Robles 380
México 20, D.F.
Tel.:

Hda. de Trasquila 48
México 22, D.F.
Tel.: 594.72.98

SILVESTRE ORTIZ J. REFUGIO
S. A. R. H.
Reforma 76
México, D.F.

Cumbres de Maltrata 385
México 12, D.F.
Tel.: 590.22.91

ARMANDO SUAREZ VELAZQUEZ
S. T. C. Metro
Delicias 67
México 1, D.F.
Tel.: 521.86.20

Av. Universidad 1953 Edif. 2-603
México 20, D.F.
Tel.: 550.68.65

ROBERTO A. TAYLOR TREVIÑO
S.A.O.P.
Tepozteco 36-2°
México 12, D.F.
Tel.: 590.24.31

Unidad Esperanza 5-524
México 12, D.F.
Tel.: 519.45.23

CARLOS JORGE TIRADO VILLAPUDUA
S.A.R.H.
Reforma 76
México, D.F.

MIGUEL ANTONIO TRUJILLO L.
Recursos Hidráulicos
Reforma 69
México 1, D.F.

JORGE TURCOTT RIOS
PEMEX
Marina Nal. 329
México 17, D.F.
Tel.: 250.36.22

VICENTE VARGAS GARCIA
S. A. H. O. P.
Tepozteco 36-2°
México 12, D.F.
Tel.: 590.24.80 y 31

EMILIA YONG CORONADO
Dir. Gral. de Planeación
S. C. T.
Av. Xola y Universidad Edif. H-3°
México 12, D.F.
Tel.: 519.18.81

• Cumbres de Maltrata 385
México 12, D.F.
Tel.: 590.22.91

Cumbres de Maltrata 385
México 12, D.F.
Tel.: 590.22.91

José Ma. Correa 199
México 8, D.F.
Tel.: 519.79.65

California 19 B 203
México 21, D.F.
Tel.: 549.16.98

Médanos 37
México, D.F.
Tel.: 593.05.51

