

INGENIERIA ECONOMICA.

ING. JAVIER JIMENEZ ESPRIU.

INTRODUCCION.

La Ingeniería tiene para sus actividades dos campos de acción; el uno que -- concierne a los materiales y a las fuerzas de la naturaleza, el otro que se -- refiere a la satisfacción de necesidades humanas.

Para participar en ambos, el ingeniero, a más de las ciencias que le son y -- le han sido familiares (la física, la química, las matemáticas, etc.) y que -- comprenden el campo que tradicionalmente se ha llamado ingeniería, debe en -- tender y manejar las ciencias de la economía.

La Ingeniería Económica ha nacido de la necesidad de tomar decisiones sobre alternativas que se diferencian o desde el punto de vista de la ingeniería, o desde el punto de vista económico, o en ambos aspectos.

En este caso, "la toma de decisiones", cuya metodología estudia la Ingeniería Económica, se compone de dos grandes pasos: la generación de alternativas, o sea la creación de las posibilidades de solución física y su análisis, y el estudio económico de las alternativas, para la selección de la más conveniente.

En el curso que desarrollaremos, nos dedicaremos al segundo paso, en el -- cual se ha supuesto que las alternativas que debemos analizar son factibles físicamente, por lo que la metodología a estudiar es perfectamente accesible no solo a ingenieros sino en general a toda persona cuya actividad este-

relacionada con el aspecto financiero de una decisión.

En vista de que en toda organización pública o privada se presenta en todos los niveles y especialmente en los ejecutivos la necesidad de mejorar las normas -- existentes, la generación de alternativas para reemplazo, mejoramiento, renta, adquisiciones, etc., debe ser función imprescindible y su selección adecuada la meta general.

Cada inversión que se hace, o aquella que se pretende no hacer, constituye -- un motivo de decisión económica.

Considerando que los recursos económicos son en general inferiores a las necesidades por satisfacer o que aún en caso de suficiencia de recursos, es menester aplicarlos en la forma más productiva, la evaluación económica debe efectuarse exhaustivamente.

Con lo anterior nos referimos a que la mejor decisión económica será aquella que se haya tomado después de comparar todas las alternativas convenientes -- pues omitir alguna equivaldrá a considerarla, a priori, inferior a las analizadas. Al hablar en Ingeniería Económica de comparación de alternativas, no estamos -- hablando en cada una de ellas de su eficiencia de ingeniería, sino de su eficiencia económica pues finalmente veremos que el aspecto concluyente es el económico: la energía eléctrica necesaria para una población se tratará de obtener no sin pérdidas de transmisión, sino a los costos más bajos posibles.

En este curso intensivo de Ingeniería Económica se tratará de presentar la me-

metodología para la evaluación de alternativas económicas.

Esta evaluación exige el que presentemos todas las alternativas a analizar, en una sola unidad de comparación; en este caso, en el que el análisis será económico, la unidad de comparación será la unidad monetaria de cambio: el peso.

Cada una de las alternativas deberá ser medida en pesos, y así comparadas — para seleccionar aquella que, en función de los objetivos de la empresa, maximice utilidades, minimice costos o maximice los beneficios por peso invertido.

Cada uno de los renglones de nuestras alternativas será considerado desde el punto de vista de su costo: el costo de inversión, de mantenimiento, de mano de obra, de accidentes, de reemplazo, de reparación, indirectos, impuestos, etc.

Aquí, veremos algunos ejemplos, estableceremos como ya se mencionó, los métodos, haremos lo posible por considerar la mayor cantidad de circunstancias pero partiremos del hecho, lamentable, de que no existe ninguna receta definitiva para toma de decisiones, ya que cada caso es un caso particular de las generalidades que discutiremos en este curso.

Conceptos fundamentales.

Normalmente, es posible llegar a un resultado deseado en muy diversas formas, desde el punto de vista de la ingeniería. Cada una de ellas es una alternativa y la toma de decisiones es la selección de aquella que, satisfaciendo nuestra necesidad física nos representa el menor costo, es decir, la toma de decisiones en este curso significará la selección de la mejor alternativa económica. Para el análisis de alternativas económicas consideraremos fundamentalmente que el dinero cuesta y que su valor varía en el tiempo.

En la evaluación tendremos en cuenta que si son utilizadas máquinas y equipos, la depreciación será un factor importante, así como el mantenimiento; — que la consideración de los costos laborales es trascendental; que los materiales que se emplearán deben considerarse en función del mercado durante la vida de la alternativa; que los riesgos económicos y físicos son naturales cuando se analiza el futuro; que los impuestos sobre utilidades pueden tener una influencia decisiva en la selección, etc.

Para la selección del número de alternativas, para la correcta cuantificación de los costos y valores, etc., manejaremos una serie de conceptos fundamentales, de los que consideraremos por lo pronto los siguientes:

Alternativa económica.— Conjunto de medidas tendientes a mejorar los estándares establecidos o a lograr estándares predeterminados para una actividad, representado en unidades económicas.

Costo.— Gasto de una actividad. Esto puede ser un costo presente o puede ser,

como en el caso de un bien que se adquiere para una vida útil determinada, -- costo de un activo, que es el gasto de operación efectuado por adelantado. -- Desde el punto de vista contable, es el reparto racional del costo de inversión, a lo largo de la vida útil del bien.

Costo del capital. - Es la tasa que debe pagarse por el uso del capital.

Costo de oportunidad. - El capital no es nunca gratuito. Al invertir en una alternativa, se pierde la oportunidad de hacerlo en otra, que pudiera haber reportado mayores beneficios. Este es un costo real, que se llama de oportunidad.

Valor cronológico del dinero. - El dinero tiene un valor que varía en el tiempo, - los estudios económicos deben considerar esta condición para establecer comparaciones congruentes.

Utilidad. - Al tener el dinero un costo, el usuario del mismo deberá pagar una cantidad de acuerdo al tiempo que usa el dinero a su dueño, para el cual esta cantidad será la utilidad.

El porcentaje que en el tiempo se recibe o se paga por el dinero, recibe diferentes nombres que son: tasa de rendimiento, rédito, ganancia, interés, tasa de interés, etc.

Tasa mínima de rendimiento. - Es el porcentaje mínimo de utilidad (después de la recuperación del capital) que debe aceptarse en una inversión.

Depreciación. - Es el sistema que permite distribuir el costo u otro valor básico de un activo fijo, una vez restado el valor de salvamento, a lo largo de su vida útil estimada.

Amortización.- Es la diferencia entre el costo de un activo fijo en el momento - de la compra y el valor en libros, lograda en base a un método sistemático y racional de depreciación.

Valor de salvamento.- Es el valor estimado que tendrá un activo, al finalizar - el período de su vida útil, valor que se considera recuperable.

DEFINICION DE ALTERNATIVAS.

Si nuestra función será la de "toma de decisiones", esta tiene que surgir de una condición "sine qua non" y que es, la existencia de más de una alternativa, es decir de un conjunto de alternativas.

Estas, para permitir una decisión acertada deberán a su vez estar bien definidas y ser económicamente mesurables. Quien va a comparar alternativas tiene, antes del compromiso de decidir la mejor, el de seleccionar cuales de entre las posibles conviene analizar, pues también este análisis tiene un costo. Para la evaluación o estudio económico de alternativas, es tan malo omitir el análisis de alguna alternativa conveniente, con lo que se puede decidir por alguna que no es la mejor, como el exagerar el estudio del número de ellas, con lo que se aumentará el costo y en ocasiones no se recuperará con la selección adecuada.

- En estos casos, es la experiencia o la visión del evaluador lo que permite la mejor definición de las alternativas.

Igualmente, habrá que considerar con el criterio del analista, el grado de precisión necesario en los costos a considerar, porque también aquí habrá renglones poco relevantes en la alternativa, en los que bastará un dato aproximado - que nos evitará costos excesivos en el diseño de la misma.

Habrà, en estos casos de número de alternativas a estudiar, o precisión de los conceptos, que hace congruentes las ventajas a obtener y el costo adicional - que se tendrá.

Será necesario, para una buena decisión, una mente que podríamos definir como "de gran angular", que pueda ver un amplio horizonte y seleccionar la forma mejor, que no es siempre, o mejor dicho casi nunca, la más perfecta desde el punto de vista material o de ingeniería y necesario igualmente será, definir, antes del análisis, desde que punto de vista nos interesa obtener la mejor alternativa.

Además de esto, las decisiones deberán considerar las consecuencias de cada alternativa, estimar el futuro, con los errores naturales que una predicción implica; sin embargo en muchos casos es posible llegar a un buen grado de confiabilidad en el escenario estimado del porvenir. Aquí otra vez, el criterio y experiencia del analista necesitan actuar, para el mejor resultado. Es necesario recalcar, que para efecto de la evaluación, estas consecuencias deberán llevarse a la unidad general utilizada, la monetaria, para tener una base de comparación, y cuando esto no sea posible, deberán indicarse, luego del análisis económico, para su consideración especial.

NECESIDAD DE CRITERIOS Y METODOS PARA TOMA DE DECISIONES ECONOMICAS.

En toda empresa u organismo es necesario definir el o los criterios para toma de decisiones de inversión, en función de las consecuencias predecibles.

El primer criterio debe establecerse sobre las alternativas cuyas consecuencias pueden ser presentadas en términos de unidades monetarias, partiendo de la -- premisa de que los recursos son siempre inferiores a las necesidades por satisfacer y que al usarlos deberemos hacerlo en la forma más productiva, sea para obtener mayores utilidades, sea para lograr mayores beneficios, sea para disminuir costos, etc.

Un criterio secundario será necesario para considerar aquellas consecuencias que no puedan ser mesurables en términos económicos, como pudiera ser un malestar social por ejemplo.

El establecimiento de criterios definidos para analizar los proyectos de inversión evita el posible error humano de aceptar la alternativa mejor presentada o más elocuentemente expuesta en contra de la más conveniente y mejor analizada pero tímidamente propuesta.

Es importante establecer también la importancia de analizar las posibilidades de inversión en el marco general de la empresa u organismo, tomando en cuenta que existen generalmente interrelaciones entre las partes de un sistema, y las consecuencias de una alteración de uno de los subsistemas pueden tener importantes repercusiones en los otros. Es pues conveniente considerar los efectos laterales de una decisión y cuantificarlos desde el punto de vista del conjunto.

SELECCION DE ALTERNATIVAS ECONOMICAS.

En términos generales, la Ingeniería Económica estudia alternativas a medio y largo plazo en las que como hemos expresado deben analizarse los diferentes renglones de la alternativa considerando el valor del dinero en función del tiempo. Sin embargo, hay muchas situaciones en las cuales, diseños diferentes, materiales distintos ó métodos no iguales dan resultados idénticos: tanto en cuanto a servicio como en la gran mayoría de los renglones monetarios, por esto es necesario recalcar en beneficio del costo del análisis económico, que para efectos de comparación, no deberán considerarse entre las diferentes alternativas sino aquellos conceptos que entre sí presenten diferencias, con lo que se ahorrará tiempo y complejidad en el estudio económico. Para la toma de decisiones, podemos considerar esta secuencia lógica, a partir de criterios de evaluación establecidos.

- 1.- Definición de alternativas.
- 2.- Selección de alternativas relevantes.
- 3.- Cuantificación económica de todos los costos e ingresos de las alternativas.
- 4.- Aplicación de las técnicas de evaluación.
- 5.- Toma de decisión económica.

El temario del curso nos permitirá ir conociendo estas técnicas de evaluación económica y a medida que avancemos, estar en posibilidad de analizar alternativas cada vez más complejas, llegando al final de este curso con el acervo -- suficiente para poder en adelante, evaluar metodológica y técnicamente nuestros proyectos de inversión.

EQUIVALENCIA.

Habiendo ya dicho, en la plática anterior, el objetivo que se persigue en -- este curso, entremos al análisis ya de detalle de los conceptos para evaluación de inversiones, antes de entrar al de las técnicas y métodos.

Cuando se habla de inversión, sea pública o privada, entendemos por ello- proyectos que se realizarán a largo plazo y por ende que las inversiones co- rrespondientes al proyecto, pueden efectuarse en función de muchas varia- bles, en diferentes formas a corto o largo plazo también.

Para comparar planes aparentemente diferentes de inversión, es necesario - analizar el valor que el dinero tendrá en los diferentes momentos en que de- bamos invertirlo o recibirlo en base a los proyectos a evaluar.

El valor cronológico del dinero estará indicado por la tasa de interés; si su- ponemos un préstamo de \$1,000.00 pesos y consideramos una. tasa de inte- rés del 9% anual estamos estableciendo que en \$1,000.00 actuales serán -- \$1,090.00 dentro de un año.

La tasa de interés indicará normalmente la relación entre lo que se debe pa- gar al final del período que en general es no mayor de un año y la cantidad - inicial invertida que produce el interés.

En el ejemplo anterior el interés es de \$90.00 y la tasa

$$\frac{90}{1000} = 0.09 = 9\%$$

$$\frac{\text{utilidad}}{P} = \text{Tasa de interés}$$

(capital)

....#

Es posible también que se convenga que el interés anual, se pague mensual,
trimestral o semestralmente por ejemplo, lo que no hace variar la tasa que en
este caso será de interés nominal, aún cuando el interés efectivo varíe.
(AL FIN DEL PERÍODO) (FORMA DE PAGO.)

Para los efectos de nuestros estudios económicos cuando hablemos de interés nos estaremos refiriendo a tasas de interés compuesto, es decir, a intereses sobre saldos insolutos.

Planes de Reembolso. - Supongamos que hemos decidido aceptar un programa de inversión para el cual es necesario obtener un financiamiento, mismo que nos ofrecen con planes de pago diferentes, entre los que deberemos seleccionar - uno.

La inversión original es de \$1'000,000.00 de pesos y nos proponen los 4 planes de pago siguientes, a diez años, y con un interés anual sobre saldos insolutos del 8%.

	<u>PLAN A</u>	<u>PLAN B</u>	<u>PLAN C</u>	<u>PLAN D</u>
1	80,000.00	180,000.00	149,030.00	--
2	80,000.00	172,000.00	149,030.00	--
3	80,000.00	164,000.00	149,030.00	--
4	80,000.00	156,000.00	149,030.00	--
5	80,000.00	148,000.00	149,030.00	--
6	80,000.00	140,000.00	149,030.00	--
7	80,000.00	132,000.00	149,030.00	--
8	80,000.00	124,000.00	149,030.00	--
9	80,000.00	116,000.00	149,030.00	--
10	1'080,000.00	108,000.00	149,030.00	2'158,900.00
total	1.800,000.00	1.440,000.00	1.490,300.00	2.158,900.00

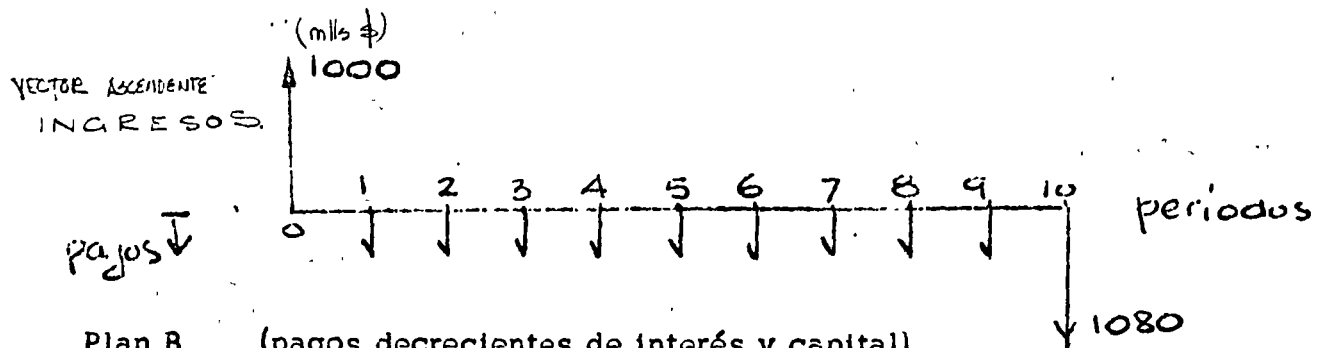
Representamos gráficamente estos planes, para introducir los "diagramas de —

• • • #

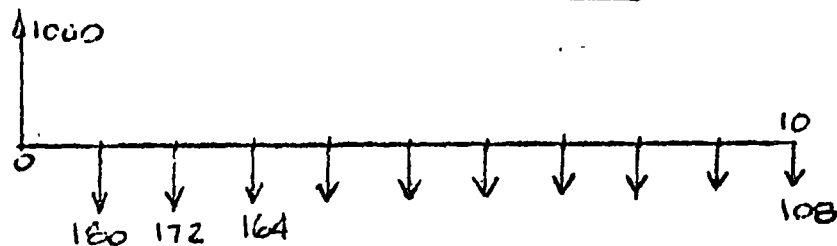
flujo de efectivo".

Esta representación vectorial hace más objetivo el análisis y nos ayuda a --
considerar todos los costos o ingresos asociados a las propuestas.

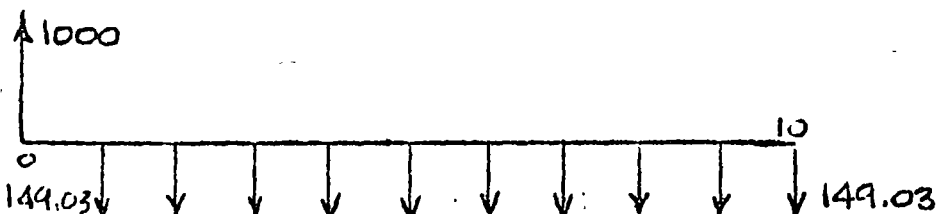
Plan A (pago del interés al vencimiento)



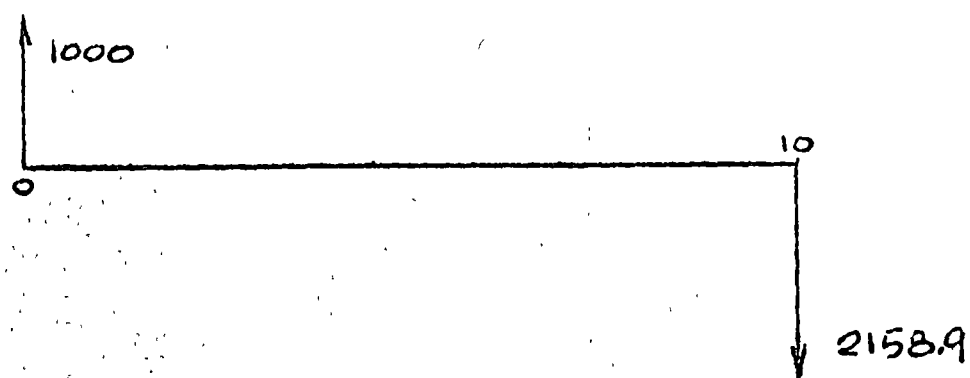
Plan B (pagos decrecientes de interés y capital)



Plan C (pagos iguales; interés y capital).



Plan D (un pago final).



....#

En el último plan, el gran total incluye el capital, más los intereses anuales sobre el capital, más los intereses de los intereses caídos y no pagados, o sea, un solo pago al final del plan, con interés compuesto.

Los pagos efectuados en estos cuatro planes, son "equivalentes" aún -- cuando difieran en magnitud, en el plan A, se han pagado \$1'800,000.00; en el plan B \$1'440,000.00; en el C \$1'490,300.00 y en el D \$2'158,300.00.

Este concepto de diferentes alternativas con diferente magnitud de pagos pero equivalentes, es sumamente importante y en él se basan las técnicas de evaluación de ingeniería económica.

Con un préstamo como el señalado, el prestamista puede esperar, pues se trata de una promesa, ya que es a futuro, puede esperar decimos, planes -- de pagos como los anotados, entre otros.

Desde el punto de vista de quien solicita el préstamo, considerando que el valor del dinero en este caso quedó establecido en 8% anual, cualquier -- plan es equivalente, pero no idéntico, ya que el uso que se puede dar al dinero en los cuatro planes puede ser distinto.

"La equivalencia no implica uso igual de los fondos, sino que el uso desigual se compensa por la tasa de interés acordada para ese uso".

Dada una tasa de interés, cualquier pago o serie de pagos que reembolsan la cantidad actual de dinero con interés a esa tasa es equivalente a esa cantidad y todas las posibilidades equivalentes a la cantidad original serán obviamente equivalentes entre sí.

VALOR ACTUAL. - Considerado un plan de pagos a futuro, de acuerdo con una tasa de interés preestablecida, se llama Valor Actual a la inversión necesaria en el momento presente que nos asegure la promesa de ese o esos pagos futuros a esa tasa de interés.

En este caso, ese Valor Actual o Valor Presente, es también equivalente a los pagos futuros acordados.

En el caso del ejemplo anterior, el millón de pesos del financiamiento es equivalente a los \$2'158,900.00 del plan D de pagos, o a los \$1'800,000.00 del plan A por lo que también, los planes A y D son equivalentes entre sí, y con los planes B y C.

Las diferencias entre las magnitudes de los pagos son solo aparentes.

Si 4 alternativas económicas como las presentadas fueran analizadas, la decisión, podría tomarse por cualesquiera de ellas. Influirían en este caso, y a otros factores para seleccionar una u otra.

ECUIVALENCIA Y TASA DE INTERES.

Cuando analizamos alternativas y las encontramos equivalentes, esta condición será solamente a la tasa de interés considerada.

Si se modificara la tasa de interés, los planes A, B, C y D estudiados, dejarían de ser equivalentes; por ejemplo los \$2,158,900.00 del plan D, en valor presente serán, si la tasa fuera del 5% equivalentes a \$1'²⁰⁵195,529.73 y no a \$1'000,000.00 como antes, y si la tasa fuera del 12% a \$695,165.30. -✓

Es decir cuando la tasa sube, el valor actual de un plan dado de pagos baja o viceversa.

Desde el punto de vista algebraico, el concepto de equivalencia lo podemos representar así:

$$V_{jt}(i, T) = S_{jt} \times \overset{\text{Tasa de interés}}{\underbrace{(1+i)^{T-t}}_{\text{TIEMPO. } \begin{cases} t: \text{ presente} \\ T: \text{ futuro} \end{cases}}} \quad \begin{matrix} \text{TIEMPO} \\ \downarrow \\ \text{ALTERNATIVA} \end{matrix}$$

↑ FLUJO DE EFECTIVO

en donde:

j es el número con el que bautizamos a la alternativa de que se trate

$V_{jt}(i, T)$: es el flujo de efectivo al tiempo T

S_{jt} : es el flujo de efectivo equivalente, en el tiempo t y a la tasa de interés i .

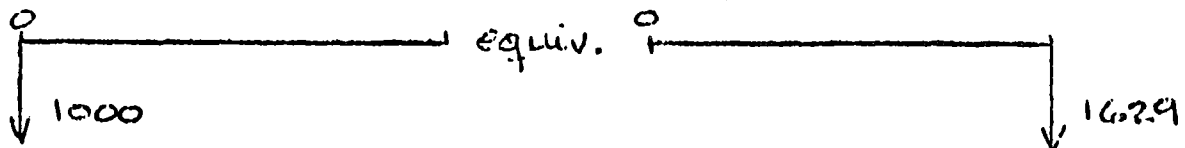
$$X = (1+i)^T = e^r$$

$$V_{jt}(i, T) = S_{jt} (1+i)^{T-t}$$

Ejemplo: un depósito de \$1,000.00 en el tiempo presente $t=0$ en una cuenta de ahorro en la cual el interés $i = 5\% = 0.05$ anual, es equivalente a un depósito dentro de 10 años ($T = 10$) por la cantidad siguiente:

$$V_{j0}(0.05, 10) = \underbrace{-1000}_{\text{FLUJO DE EFECTIVO}} \underbrace{(1.05)^{10}}_{(1+i)^{T-t}} = -1629$$

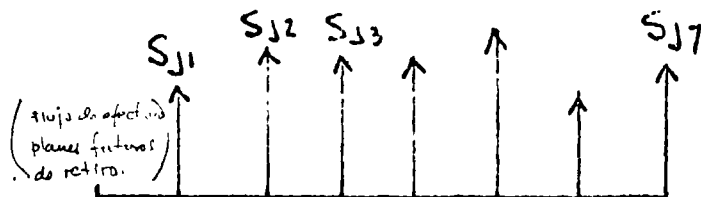
Gráficamente



Igualmente, un retiro de \$1,000.00 pesos dentro de 10 años, es equivalente a un retiro de \$613.90 en el momento actual si la tasa es del 5%.

$$\begin{matrix} t=0 \\ T=10 \end{matrix} \quad V_{j10}(0.05, 10) = \underbrace{-1000}_{\text{FLUJO DE EFECTIVO}} \underbrace{(1.05)^{-10}}_{(1+i)^{t-T}} = 613.90$$

En vista de que los planes futuros de retiro pueden ser muchos, podemos tener:



y su representación algebraica será: (Sigma)

$$V_j(i, T) = \sum_{t=0}^H S_{jt} (1+i)^{T-t}$$
Suma desde que el índice varía de $t=0$ a $t=H$
 H : horizonte.

en donde H será el horizonte de planeación en años ($H = 6$ para el ejemplo gráfico).

Esta notación es importante porque se ajusta a los arreglos matriciales que se emplean en computación electrónica.

$$V_j(i, T) = S_{j0} (1+i)^T + S_{j1} (1+i)^{T-1} + S_{j2} (1+i)^{T-2} \dots + S_{j6} (1+i)^{T-6}$$

CENTRO DE EDUCACION CONTINUA

FACULTAD DE INGENIERIA

CURSO SOBRE INGENIERIA ECONOMICA

Análisis de Beneficio-Costo

Ing. Enrique Jiménez Espriu

Para llevar a cabo decisiones racionales relativas a inversiones, existen en la actualidad muchos y muy variados métodos de evaluación entre los cuales el análisis de BENEFICIO-COSTO está siendo cada vez más aceptado, particularmente por aquellos que están involucrados en la tarea de evaluar proyectos de inversión pública ya que en este método se toma en cuenta el punto de vista social.

En general, se puede decir que los pasos a seguir antes de tomar una decisión sobre como, cuanto, cuando y donde invertir, son los siguientes:

1. Definir todas y cada una de las posibles alternativas de inversión
2. Determinar los beneficios y costos involucrados en c/una de las alternativas.
3. Cuantificar los beneficios y los costos en términos monetarios.
4. Actualizar estas cifras para representar el valor actual de los beneficios y los costos ó utilizar su equivalencia en cifras anuales.
5. Cálculo de los índices que determinarán la aceptación o rechazo de el (los) proyecto(s), una vez que hayan sido establecidos los criterios de decisión.

DEFINICION DE ALTERNATIVAS

Una vez que han sido establecidos los objetivos a alcanzar con el proyecto, sea elevar el índice de rentabilidad de una empresa, generar

un número determinado de empleos, multiplicar un servicio, reducir los costos de transporte, disminuir la contaminación ambiental, aumentar las tierras de riego, etc., será necesario conocer todas las alternativas que pudieran alcanzar el objetivo señalado y en esa forma obtener el mejor rendimiento de los recursos disponibles, que por regla general, son limitados.

Cuando este primer paso ha sido omitido, puede darse el caso de aceptar un proyecto que fuera rechazado si existieran otras alternativas para resolver el mismo problema.

Supongamos que existe el proyecto de llevar el servicio de energía eléctrica de una población A a una población B a un costo anual de \$850,000.00. Si este servicio va a producir beneficios anuales equivalentes a \$ 975,000.00 entonces:

$$B - C = 975,000.00 - 850,000.00 = 125,000$$

$$6 \quad \frac{B}{C} = \frac{975,000.00}{850,000.00} = 1.14 > 1$$

por lo tanto el proyecto sería aceptado lógicamente.

Sin embargo si existiera la alternativa de construir una pequeña planta en la población B cuyos costos de operación fueran de \$ 780,000.00 produciendo los mismos beneficios que la 1a. alternativa, entonces esta segunda sería aceptada, rechazando la 1a. alternativa ya que tanto $B-C$ como $\frac{B}{C}$ son mayores en el segundo caso

$$B-C = 975,000.00 - 780,000.00 = 195,000.00$$

$$\frac{B}{C} = \frac{975,000.00}{780,000.00} = 1.25 > 1$$

Este primer paso debe ser rechazado por personas con conocimiento y experiencia en el área de estudio en que se encuentre localizado el problema.

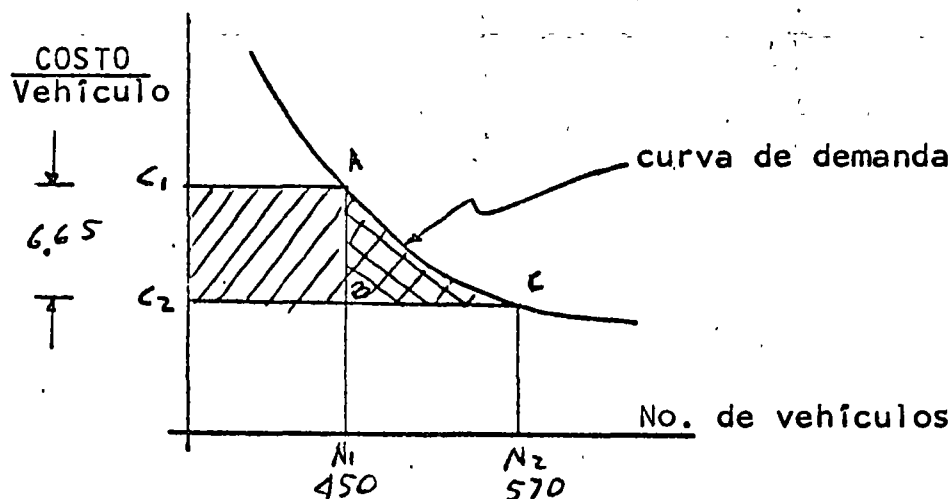
DETERMINACION DE LOS BENEFICIOS Y LOS COSTOS

En cada una de las propuestas de inversión, se deberán determinar los beneficios y costos a ser considerados en el proyecto. Desde luego que esta tarea se presenta mucho mas difícil en los proyectos de inversión pública ya que para identificar las consecuencias positivas y negativas relevantes se requiere realizar un análisis detallado sobre la interacción de los elementos que intervienen en el proceso económico.

Si este análisis no es llevado a cabo por personas de gran capacidad, se correrá el riesgo de autorizar inversiones cuyos beneficios sean en realidad menores que los costos.

Para conocer que tipo de consecuencias deben ser considerados como beneficio tenemos el siguiente ejemplo:

Supóngase que se desea realizar ciertas mejoras a una carretera con la consecuente disminución del costo de tránsito y el aumento de la demanda de acuerdo a la figura 1



Los beneficios a considerar serían por ejemplo:

- Ahorro de costo de tránsito
- Ahorro correspondiente al número de vehículos que aumentan
- Ahorro por tiempo de transporte
- Ahorro por reducción del costo de mantenimiento de la carretera, etc.

CUANTIFICACION DE LOS BENEFICIOS Y LOS COSTOS

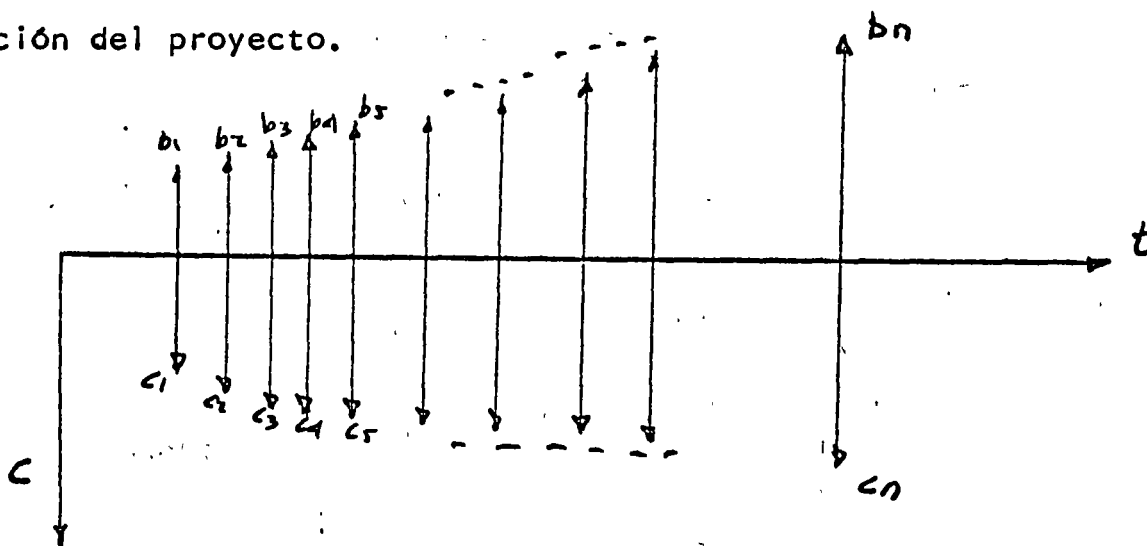
Es preciso obtener una cifra para cada uno de los renglones considerado en los beneficios y en los costos aún cuando sea un valor esperado.

Supongase que en el ejemplo anterior se ha reducido la longitud de la carretera en 19 Km. Para calcular el ahorro de un automovil al usar la carretera se deberán considerar la gasolina, el desgase de la llantas, el aceite, etc. Si el ahorro por todos estos conceptos es de $35/\text{km}$. en promedio, entonces el ahorro por automóvil será de $.35 \times 19 = \$ 6.65$.

Si el número de vehículos N , = 450/día entonces el ahorro será de

$$450 \times 6.65 = 2,992.50$$

En esta forma deberán de cuantificarse cada uno de los conceptos hasta contar con un diagrama de flujo de Beneficios y Costos a través de la duración del proyecto.



ACTUALIZACION DE LOS BENEFICIOS Y LOS COSTOS

Una vez que han sido estimados los beneficios y los costos a lo largo de la vida del proyecto, que en general son diferentes de un año a otro, es necesario obtener una cifra que represente el valor de todos los beneficios y costos en el momento actual. En esta forma cualquier índice de B-C que se desee utilizar será consistente. Para ello utiliza-

remos el método del valor presente que ya se ha estudiado en anteriores sesiones. También es permitido, para manejar el método de Beneficio-Costo, utilizar los costos y beneficios anuales equivalentes.

CALCULO DE LOS INDICES DE BENEFICIO-COSTO

Existen varios coeficientes en el método de B-C que pueden ser utilizados como método de evaluación existiendo para cada uno de ellos un criterio definido de decisión como se muestra en la siguiente tabla

COEFICIENTE	NOMBRE	CRITERIO DE DECISION
$B - C$	Diferencia a valor presente	> 0
$\frac{B_j}{C_j}$	relación beneficio-costo	> 1
$\frac{B_j - C_j}{C_j}$	relación beneficio neto-costo	> 0
$b_j \div [C_j + c_j]$	relación Eckstein	> 1

en donde

b_{tj} = beneficios brutos del proyecto j al tiempo t

c_{tj} = Costos brutos del proyecto j al tiempo t

$B_{tj} = b_{tj} - c_{tj}$ = beneficios netos del proyecto j al tiempo t

C_j = Inversión inicial del proyecto j en el tiempo 0

$b_j \equiv$ Beneficios netos
 $c_j \equiv$ costos

La decisión de aceptar o rechazar un proyecto se basa en la siguiente premisa "Los beneficios que resulten de un proyecto, sea quien fuere el beneficiado, deberán ser mayores que los costos en que se incurran"

COSTOS Y BENEFICIOS NEGATIVOS (se consideran como costos)

Si un beneficio negativo se considera para el análisis como un costo y viceversa todos los coeficientes considerados con excepción del 1o, variarán considerablemente.

Supóngase el siguiente ejemplo:

Proyecto X

Costos = 40,000,000

Beneficios = 56,000,000

Beneficios negativos = 8,000,000

en donde los costos representan la inversión de un organismo público y los beneficios negativos las consecuencias que el proyecto tendrá en la economía doméstica de un sector de la población. En estas condiciones

$$\frac{B}{C} = \frac{56,000,000 - 8,000,000}{40,000,000} = 1.2 > 0$$

Si estos beneficios negativos son considerados como costos entonces

$$\frac{B}{C} = \frac{56,000,000}{40,000,000 + 8,000,000} = 1.16 > 0$$

resultando una diferencia considerable.

Sin embargo la decisión sobre aceptar o rechazar el proyecto podría cambiar siempre que se consideraran más alternativas para el proyecto de inversión y que el coeficiente de alguno de ellos fuera mayor que 1.16. De otro modo un proyecto con un coeficiente mayor que 1 seguirá siendo aún cuando los beneficios negativos sean considerados como gastos, ya que:

$$\begin{array}{l} \text{Para} \\ \frac{B - X}{X} \left\{ \begin{array}{ll} > 1 & X > B - C \\ = 1 & X = B - C \\ < 1 & X < B - C \end{array} \right\} \\ \\ \frac{B}{C + X} \left\{ \begin{array}{ll} > 1 & X > B - C \\ = 1 & X = B - C \\ < 1 & X < B - C \end{array} \right\} \end{array}$$

en donde

$$B - C > 0$$

$$B - C > 0$$

X = Beneficios negativos

MAGNITUD DE LOS COEFICIENTES DE B-C

En general, se considera que un proyecto es mayor cuanto mayor es el valor de $\frac{B}{C}$, sin embargo este criterio puede conducir a decisiones erróneas si no se toman en cuenta otros factores como es el logro de los objetivos establecidos y que pueden ser debidamente cuantificados. Es recomendable considerar siempre además de los índices de eficiencia, los índices de eficacia.

ELECCION ENTRE VARIAS ALTERNATIVAS

Como se dijo en un principio, en la práctica se presentan siempre varias propuestas para resolver un problema determinado. Si entre las propuestas consideradas seleccionamos aquella que tenga el coeficiente B-C mas grande. Puede suceder que la decisión sea equivocada. Como veremos a continuación

<u>Propuesta</u>	<u>Beneficio</u>	<u>Costo</u>	<u>Coeficiente B/C</u>
I	24,000	12,000	2.00
II	14,800	8,000	1.85
III	12,000	4,000	3.00
IV	16,000	10,000	1.6

resultando que el proyecto III se seleccionaría como la mejor inversión.

Sin embargo en un análisis diferencial en el que se tomará en cuenta únicamente las diferencias entre los beneficios y los costos de las alternativas, el resultado sería el siguiente:

<u>PROPUESTA</u>	<u>DIFERENCIAS</u>					
	<u>B</u>	<u>C</u>	<u>$\frac{B}{C}$</u>	<u>B</u>	<u>C</u>	<u>B/c</u>
III	12,000	4,000	3.00	---	---	---
II	14,800	8,000	1.85	2,800	4,000	< 1
IV	16,000	10,000	1.60	4,000	6,000	< 1
I	24,000	12,000	2.00	12,000	8,000	1.5

en donde el criterio de decisión será aceptar aquella propuesta en donde el coeficiente B/C de las diferencias sea mayor que 1.

TASA MINIMA DE RENTABILIDAD

Uno de los aspectos más importantes en la evaluación de proyectos es la selección de la tasa mínima de rentabilidad es decir aquella que deberá aplicarse para la actualización de los beneficios y los costos.

En la mayoría de los casos, existe una limitación de fondos que nos impide realizar todos los proyectos que presenten algún atractivo, por lo que el principio a seguir será, que la tasa de rentabilidad seleccionada proporcione los máximos beneficios posibles en la utilización de los recursos. Si no existiera limitación de capital se optaría por considerar el costo del capital como la tasa mínima de rentabilidad.

VALOR DE DINERO EN EL TIEMPO

El concepto del valor del dinero en el tiempo debe ser considerado al fijar la tasa mínima de rentabilidad dependiendo de que el capital provenga de fondos propios de financiamiento externo.

En el primero caso no hay necesidad de pagar intereses por el capital razón por la cual la tasa mínima dependería únicamente de lo que se conoce en términos económicos como "costo de oportunidad"

En el segundo caso la tasa deberá ser mayor que el costo del dinero prestado para poder justificar el riesgo que se corre en la inversión.

RIESGO DE LA INVERSION

El factor riesgo debe considerarse seriamente en la fijación de la tasa mínima de rentabilidad ya que a mayor riesgo, el período de recuperación de capital deberá reducirse al mínimo.

Sin embargo existe un gran desacuerdo entre los autores sobre considerar el factor al determinar la tasa mínima de rentabilidad o introducir este

concepto en alguna otra forma. Este tema será tratado en detalle en subsecuentes sesiones.

COMPOSICION DE FONDOS DE INVERSION

El costo de capital como base para fijar la tasa mínima de rentabilidad, depende de la composición del mismo y será un promedio ponderado de los costos de capital propio y los costos de capital financiado, externamente o en general este costo será mayor al costo de capital propio.

TASA DE RENTABILIDAD ANTES Y DESPUES DE IMPUESTOS

Desde el punto de vista del inversionista privado, la tasa de rentabilidad debe ser considerada después de impuestos y el análisis deberá de realizarse bajo estas bases ya que suele suceder que los mejores proyectos antes de impuestos no siempre son los mejores considerando el pago del impuesto.

Desde el punto de vista gubernamental el análisis siempre será hecho antes de impuestos ya que estos pasan a formar parte también de los beneficios inducidos por el proyecto.

DETERMINACION DE LA TASA MINIMA DE RENTABILIDAD 6

PROYECTO DE INVERSION PUBLICA

Cuando se quiere realizar un proyecto gubernamental, en donde el capital está formado por el pago del impuesto de los habitantes del país, se debe de fijar la tasa mínima de rentabilidad considerando que el causante ha dejado de percibir beneficios del dinero pagado al gobierno.

Es por este motivo que los proyectos de inversión pública deben producir una rentabilidad mayor o igual que la que hubiera causado en ahorro o inversiones ya que de otro modo se estarán generando beneficios negativos que van en deterioro de la economía nacional.

ENRIQUE JIMENEZ E.

COSTOS INCREMENTALES

Desde el punto de vista Económico, lo importante al comparar alternativas es conocer las deficiencias futuras, es decir, a partir del momento en que se tome la decisión.

Cuando se esta proponiendo un cambio, ya sea aumentar la producción, reemplazar un equipo, etc. lo que interesa saber son las consecuencias en caso de que sea o que no sea ejecutado ese cambio.

El concepto de "Costo Incremental" o "Costo Diferencial" debe ser aplicado en estas situaciones.

Se conoce como "Costo Incremental" al gasto diferencial o adicional en el que se incurre al llevar a cabo un cambio. Este costo puede ser calculado por unidad.

Cuando se lleva a cabo un estudio económico para aumentar la producción en una planta, NO deben ser utilizados los costos unitarios, pues correríamos el riesgo de hacer crecer artificialmente los costos indirectos resultando cifras erróneas que nos llevarían a rechazar un proyecto que pudiera ser conveniente.

PROBLEMA

Una compañía papelerá produce pulpa de papel en dos plantas, una en Monterrey y la otra en el Edo. de México

La primera planta ha venido operando al 75% de su capacidad instalada, produciendo 2700 Ton./mes a un costo de \$773/Ton. La planta del Edo. de México ha operado a un 60% de su capacidad, produciendo 3,600 Ton. mensuales a un costo total de \$850/Ton.

Para la elaboración de la pulpa se requiere una buena proporción de desperdicios. Por cada 100 Ton. de producto final, se requieren 80 Ton. de esta Mat. prima. El costo del desperdicio de papel en Monterrey es de - 187.50/Ton. estando limitada la cantidad a 1440/Ton/mes.

En el Edo. de México el precio es de \$200/ton, pudiéndose obtener hasta 4000 ton./mes. Además existe otra oferta de \$275.00 LAB en cualquiera de las 2 plantas.

Los costos indirectos son los siguientes:

\$ 594,000/mes planta en Monterrey

\$ 1,080,000/mes " " el Edo. de México

Preguntas

Si el mercado continua demandando las 6300 ton./mes ¿Continuaría produciendo lo mismo en cada planta o cambiaría su programación?

S O L U C I O N

MONTERREY

$$\begin{aligned} \text{Costo} &= (2700 \times 733 - 594,000 - (187.50 \times 1440)) \\ &\quad - 275 ((2700 \times .8) - 1440) \quad 2700 \\ &= (2090000 - 594000 - 270000) \\ &\quad - 198000) \quad 2700 = 380/\text{ton.} \end{aligned}$$

EDO. DE MEXICO

$$\begin{aligned} \text{Costo} &= (3600 \times 850 - 1080000 - 200 (3600 \times .8)) \\ &\quad 3600 = \$ 390/\text{ton.} \end{aligned}$$

CAPACIDAD TOTAL DE LAS PLANTAS:

$$\text{Monterrey} = 2700 \frac{100}{75} = 3600$$

$$\text{Edo. de Méx.} = 3600 \frac{100}{60} = 6000$$

por lo tanto será necesario seguir operando las 2 Plantas

Costos Incrementales

en Monterrey	380	275	\$ 655/ton
en Edo. de Méx.	390	200	\$ 590/ton.

La desición sería incrementar la producción en el Edo. de México.

El precio unitario en Monterrey será menor si se produce menos de $\frac{1440}{.8} = 1800$ por lo tanto se deberá producir

1800 ton. en Monterrey y
(6.300 - 1800) 4500 ton. en Edo. de México

b) Si la demanda aumenta a 9100 tons/mes

¿Cuanto sería recomendable producir en c/planta?

¿Cual sería el costo total de cada planta?

La producción total utilizando la materia prima local sería

$$\left(\frac{1440}{.8} - \frac{4000}{.8} \right) = (1800 - 5000) = 6800$$

por lo tanto será necesario comprar materia prima a \$ 275.

Como la planta en Monterrey tiene costos variables menores que la planta en el Edo. de México hagamos que Monterrey Trabaje a su máxima capacidad y que la planta del Edo. de México produzca el resto.

Monterrey	3600	ton/mes
Edo. de México	5500	ton/mes

Costo Mensual

$$\text{Mont.} = (594000 - 380 (3600)) (187.50 - 2750) - 1800 = 2794500$$

$$\text{Edo. de Méx.} = (1080000 - (390 \times 5500) - 200 (4000) - 275 \times 1500) = 4437500$$

COSTOS NO RECUPERABLES

De acuerdo a lo anteriormente expuesto, cuando se desean conocer las diferencias que existen entre alternativas, solo será necesario calcular las diferencias futuras.

Cualquier gasto realizado en el pasado es irrelevante para un analisis de alternativas ya que todo lo que haya sucedido hasta el momento de la desición, no puede ser cambiado.

La dificultad de aplicar éste concepto se presenta con mucha frecuencia, sobre todo en casos como estudios de reemplazo de equipo, en donde se cree debe ser tomado el valor en libros del equipo sujeto a reemplazo.

En estos casos el valor del equipo en el mercado es la cifra a considerar no importando si es mucho menor o mucho mayor que el valor en libros. La depreciación se toma en cuenta para efectos contables y no para conocer el valor del equipo.

EJEMPLO

Supongase que se ha adquirido un terreno a \$50.00 m² y que la plusvalía en dos años ha sido de \$120.00 m² es decir el costo actual del terreno es de \$170.00 m², existiendo una demanda que asegure una fácil venta en un tiempo mínimo.

Si se recibiera una oferta de \$130.00 m² estaríamos obteniendo una ganancia de \$80.00 m² lo cual aparentemente es una buena operación.

Sin embargo para llegar a una decisión no debe ser tomado en cuenta el gasto hecho anteriormente, ya que el valor del terreno es realmente mayor a los \$130 que se ofrecen y si después de realizar esta operación deseáramos adquirir otro terreno semejante, perderíamos la diferencia entre \$170 y \$130.

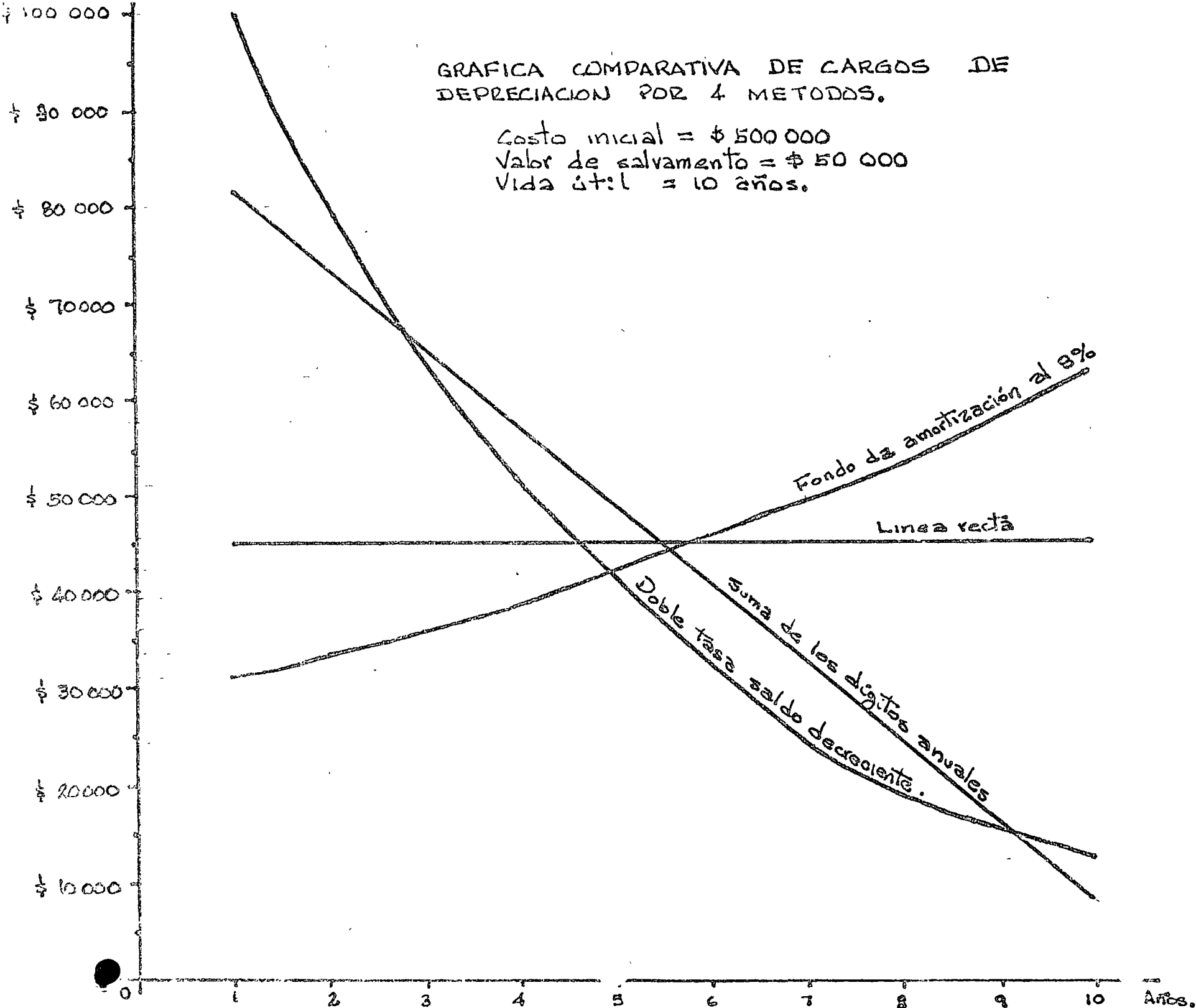
TABLA DE COMPARACION DE CARGOS DE DEPRECIACION Y VALOR
EN LIBROS PARA CUATRO METODOS DE DEPRECIACION CONTABLE.

(Activo con costo inicial de \$500,000. vida estimada de 20 años, y va -
lor de salvamento de \$50,000).

Año	CARGO DE DEPRECIACION ANUAL				VALOR EN LIBROS A FIN DE AÑO			
	Tasa doble saldo decreciente	Dígitos años	Línea recta	Fondo amortización 8%	Tasa doble saldo decreciente	Dígitos años	Línea recta	Fondo amortización 8 %
0					500 000	500 000	500 000	500 000
1	100 000	81 818	45 000	31 063	400 000	418 182	455 000	468 937
2	80 000	73 637	45 000	33 548	320 000	344 545	410 000	435 389
3	64 000	65 455	45 000	36 232	256 000	279 090	365 000	399 157
4	51 200	57 273	45 000	39 131	204 800	221 817	320 000	360 026
5	40 960	49 091	45 000	42 262	153 840	172 726	275 000	317 764
6	31 768	40 909	45 000	45 643	122 072	131 817	230 000	272 121
7	24 414	32 727	45 000	49 294	97 657	107 500	185 000	222 827
8	19 351	24 545	45 000	53 237	78 126	74 552	140 000	169 590
9	15 625	16 373	45 000	57 496	62 500	58 181	95 000	112 094
10	12 500	8 181	45 000	62 094	50 000	50 000	50 000	50 000

GRAFICA COMPARATIVA DE CARGOS DE DEPRECIACION POR 4 METODOS.

Costo inicial = \$ 500 000
 Valor de salvamento = \$ 50 000
 Vida útil = 10 años.



Ley del Impuesto sobre la Renta. (Publicada en el diario oficial de la federación el 31 de diciembre de 1964. Contiene las reformas publicadas en el "Diario Oficial" de la federación hasta el 30 de diciembre de 1970). Título II Capítulo II.

Art. 21. - La depreciación de los activos fijos tangibles y la amortización de los intangibles y de los cargos diferidos se sujetarán a las siguientes reglas:

1. No excederán de los siguientes por cientos anuales, sobre el monto original de la inversión respectiva:

a) Activos fijos intangibles y cargos diferidos.. 5%

b) Bienes de activo fijo empleados normalmente por los diversos tipos de empresa en el curso de sus actividades:

Edificios y construcciones, salvo las viviendas que

a continuación se citan..... 3%

Viviendas que las empresas proporcionen a sus trabajadores en cumplimiento de la Ley Federal

del Trabajo..... 5%

Ferrocarriles y embarcaciones (excepto compañías de transporte)..... 6%

Mobiliario y Equipo de oficina..... 10%

Autobuses 11%

Aviones (excepto compañías de aviación) 17%

Camiones de carga pesada y remolques. Automóviles y camiones de carga ligera..... 20%

Tractores 25%

c) Maquinaria y equipo destinados a actividades industriales de:

Producción de energía eléctrica; transportes eléctricos..... 3%

Cemento; granos y derivados; azúcar y derivados; aceite vegetal y derivados; plantas de energía nuclear; compañías de transporte marítimo, fluvial y lacustre..... 5%

Fabricación de productos derivados del petróleo y carbón natural productos metálicos primarios; productos derivados de tabaco..... 6%

Fabricación de telas (excepto tejidos de punto); petróleo y gas natural; papel y productos similares; productos de caucho..... 7%

Fabricación de vehículos de motor y sus partes; construcción de ferrocarriles y navíos; fabricación de productos de metal, de maquinaria y de instrumentos profesionales y científicos; producción de alimentos y bebidas (excepto granos, azúcar, aceite vegetal y derivados)..... 8%

Curtido de piel y fabricación de artículos de piel; productos químicos, fabricación de productos básicos para otras industrias de productos plásticos, publicación e imprenta..... 9%

Prestación de servicios de construcción; fabricación de ropa y productos textiles; tejidos y prendas tejidas	11%
Construcción de aeronaves; compañías de transporte terrestre, de carga y de pasajeros.....	12%
Compañías de transporte aéreo; transmisión por radio y televisión.....	16%
d) Actividades agropecuarias:	
Agricultura	14%
Cría de ganado mayor	11%
Cría de ganado menor	25%
e) Otras actividades no especificadas en la enumeración anterior	10%.

II. Los por cientos elegidos por el causante serán fijos, constantes y obligatorios, pero cuando el causante hubiere utilizado factores de depreciación menores que los señalados en este precepto, la Secretaría de Hacienda y Crédito Público podrá autorizar su modificación siempre y cuando no excedan de los por cientos señalados por la ley.

III. Las deducciones respectivas podrán hacerse sólo para fines fiscales aun cuando no se efectúen contablemente. También podrán ser diferentes los por cientos utilizados para uno y otro fin.

IV. La Secretaría de Hacienda y Crédito Público, con fines de fomento económico, podrá autorizar a las empresas industriales, agrícolas, ganaderas o de pesca, para que efectúen depreciación acelerada de las inversiones en maquinaria y equipo, con arreglo a las siguientes bases:

a) La autorización se hará mediante acuerdos de carácter general, que señalen las ramas de la producción que podrán gozar del beneficio, los métodos aplicables, el plazo de su vigencia y los requisitos que deban cumplir los interesados;

b) La autorización señalará el porcentaje máximo del valor del activo que podrá depreciarse en forma acelerada y el período durante el cual debe efectuarse dicha depreciación;

c) La depreciación acelerada sólo se referirá a inversiones que se efectúen con posterioridad a las resoluciones que las autoridades fiscales deberán emitir en cada caso;

d) Las empresas interesadas deberán obtener el acuerdo correcto de las autoridades fiscales, para aplicar el método de depreciación acelerada.

ING. LUIS MANUEL MORAN MOGUEL.

FORMULAS DE INTERES COMPUESTO Y APLICACIONES

En esta parte del curso se introducen los conceptos y terminología -- aplicables al interés compuesto, mismo que es profusamente empleado en el análisis financiero. Se establecen en esta sección, los fundamentos matemáticos que serán la base de los elementos a emplear en la toma de decisiones económicas. Debemos, sin embargo, aclarar que aún cuando estos conceptos son elementales en su dificultad, es deseable profundizar en la esencia de los mismos porque constituyen la herramienta base en la cuantificación de los estudios económicos.

SIMBOLOGIA

- (i): Tasa de interés por período.
- (n): Número de períodos considerados en el estudio.
- (P): Cantidad de dinero en el momento actual .
- (F): Cantidad de dinero al final de n períodos contados a partir de la fecha actual, la cual es equivalente a P a la tasa de interés i.
- (A): Pago o ingreso de fin de período en una serie uniforme continua para n períodos contados a partir del momento presente. La serie completa equivalente a P a la tasa de interés i.

TERMINOLOGIA DE USO COMUN:

- (i): Tasa de interés.
- (n): Número de períodos.

(P): Valor presente o cantidad principal.

(F): Valor futuro.

(A): Pago anual o anualidad.

Estos símbolos son los recomendados por la División de Ingeniería-Económica de la Sociedad Americana de Educación en Ingeniería.

FORMULAS PARA EL CALCULO DE LOS FACTORES DE INTERES COMPUUESTO.
NOTACION Y TERMINOLOGIA.

Descripción <i>hallar</i>	Notación	Fórmula
Factor de pago simple <u>cantidad</u> compuesta, (FUTURO)	$(F/P, i, n)$	$(1+i)^n$
Factor de pago simple <u>valor ac-</u> tual.	$(P/F, i, n)$	$(1+i)^{-n}$
Factor de <u>fondo de amortización</u> (ANUALIDAD)	$(A/P, i, n)$	$\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$
Factor de <u>recuperación de capital</u> (ANUALIDAD)	$(A/P, i, n)$	$\left[\frac{i (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$
Factor de series uniformes <u>canti-</u> dad compuesta, (FUTURO)	$(F/A, i, n)$	$\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$
Factor de series uniformes <u>valor-</u> actual.	$(P/A, i, n)$	$\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i (1+i)^n} \right]$

TABLAS DE INTERES COMPUUESTO

Analizando las fórmulas de los factores, observamos que éstas se encuentran en función de dos parámetros (para una aplicación dada), la tasa de in-

- 20 -

(~ ~)

terés (i) y el número de períodos (n) . Haciendo el cálculo del factor para los valores más comunes de ambos parámetros podemos construir las tablas de interés compuesto. El empleo de los valores tabulados facilita en buena medida la solución de los problemas de equivalencia.

RELACIONES ENTRE FACTORES DE INTERES COMPUESTO

Estudiando la deducción de las fórmulas encontramos las relaciones que se muestran a continuación:

$$\frac{1}{(F/P, i, n)} = (P/F, i, n)$$

$$\frac{1}{(A/F, i, n)} = (F/A, i, n)$$

$$\frac{1}{(A/P, i, n)} = (P/A, i, n)$$

$$(F/A, i, n) = 1.000 + \sum_{m=1}^{n-1} (F/P, i, m)$$

$$(P/A, i, n) = \sum_{m=1}^n (P/F, i, m)$$

$$(A/P, i, n) = (A/F, i, n) + i$$

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} = 1000 = \frac{2594}{(1.10)^{10}} = 1000 = \frac{2594}{2.594}$$

INTERES COMPUESTO

$$F = P_1 + P = P(1+i)$$

$$F = P(1+i)^n = 2594 = 1000(1.10)^{10}$$

$$F = P(1+i) + P_1(1+i) = P(1+i)^2 \dots ###$$

GRADIENTE UNIFORME

Los problemas de Ingeniería Económica a menudo incluyen desembolsos o ingresos que aumentan o disminuyen anualmente en cantidades variables. Si el aumento o disminución es el mismo cada año, el incremento o decremento anual es conocido como "Gradiente Aritmético Uniforme".

Aún cuando es razonable considerar que los gastos o ingresos anuales aumentarán o disminuirán en forma un tanto irregular, la suposición de gradiente uniforme puede resultar en muchos casos la forma más conveniente de estimar la condición cambiante enunciada. Debido a lo anterior, se han desarrollado factores que nos sirven para determinar la equivalencia de series de gradientes con valores presentes y con series anuales uniformes.

Descripción	Notación	Fórmula
<u>Factor serie gradiente-serie anual uniforme.</u>	$(A/G, i, n)$	$\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$
<u>Factor serie gradiente-valor presente.</u>	$(P/G, i, n)$	$\left[\frac{1 - n i + 1}{i (1+i)^n} \right]$

La relación entre estos dos factores es la siguiente:

$$(P/G, i, n) = (A/G, i, n) (P/A, i, n)$$

Tablas para ambos factores existen igualmente. (Tablas E-26 y E-27 del Grant-Ireson).

INTERES NOMINAL E INTERES EFECTIVO

Por simplicidad, lo expuesto hasta ahora ha considerado períodos de interés anuales, sin embargo, a menudo los convenios especifican que el interés deberá ser pagado con mayor frecuencia tales como semestralmente, trimestralmente o mensualmente.

A las tasas de interés asociadas con este cómputo más frecuente del interés normalmente se le denomina en términos de base anual de acuerdo con la siguiente convención; cuando la tasa real o "tasa efectiva" de interés es del 6% de interés computado cada período de seis meses, se le denomina como el interés-anual o "interés nominal" de "12% al año cómputo semestral". Para una tasa efectiva del 3% computado al final de cada período de tres meses, se especificará al interés nominal como "12% al año cómputo trimestral". Así pues, la tasa nominal de interés es expresada en base anual y se le determina multiplicando la tasa de interés efectiva por período de interés por el número de períodos de interés en el año.

El efecto de efectuar el cómputo del interés con mayor frecuencia es el de que el interés efectivo anual es mayor que el interés nominal. Por ejemplo, - consideremos una tasa de interés nominal del 6% computado semestralmente. El valor de \$ 1 al final de un año cuando \$ 1 es computado al 3% para cada período de medio año es:

$$F = \$ 1 (1.03)^2 = \$ 1.0609$$

Y el interés que ha ganado el peso en el año es $1.0609 - 1.000 = 0.0609$. Por lo tanto, la tasa efectiva de interés es del 6.09%.

De el anterior razonamiento podemos deducir la siguiente expresión:

$$\text{Tasa de interés anual efectiva} = \left(1 + \frac{r}{c}\right)^c - 1$$

donde:

(r) = interés nominal.

(c) = número de períodos de cómputo de interés en el año.

Si consideramos que podemos computar el interés un número infinito de veces al año, o sea, continuamente, podemos determinar el valor límite del interés efectivo de la siguiente forma:

$$\left(1 + \frac{r}{c}\right)^c - 1 = \left[\left(1 + \frac{r}{c}\right)^{c/r}\right]^r - 1$$

pero

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{c}\right)^{c/r} = e$$

de donde:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{r}{c}\right)^{c/r}\right]^r - 1 = e^r - 1$$

Por lo tanto, cuando el interés es computado continuamente la tasa de interés anual efectiva es $e^r - 1$. Como comparación veamos; para una tasa de interés nominal anual del 6% tendremos:

Cómputo	Interés Efectivo
Anual	6.000 %
Semestral	6.090 %
Cuatrimestral	6.136 %
Mensual	6.158 %
Semanal	6.180 %

-24-
-3-

Diario 6,183 %

Continuo 6,184 %

Ejemplo: Determinemos qué es más deseable, recibir 16% computado -
anualmente o 15% computado mensualmente. La tasa de interés efectiva anual para -
16% computada anualmente es desde luego 16%, mientras que para 15% computado --
mensualmente la tasa anual efectiva de interés es:

$$\left(1 + \frac{r}{c}\right)^c - 1 = \left(1 + \frac{0.15}{12}\right)^{12} - 1 = 16.1 \%$$

DETERMINACION DE TASAS DE INTERES DESCONOCIDAS

A menudo, son conocidas tanto la inversión inicial como el conjunto -
futuro de ingresos y se desea conocer la tasa de interés que será obtenida con la in-
versión.

Cuando se tiene un pago simple y un ingreso simple y es conocido el -
número de períodos n la solución es muy sencilla.

Sabemos que:

$$F = P (1+i)^n$$

Por lo tanto:

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1$$

Esta expresión puede ser resuelta por logaritmos si se quiere una solu-
ción exacta, o bien se puede obtener la solución empleando las tablas de interés com-
puesto e interpolando.

PROBLEMAS DE INTERES COMPUESTO

- 1 - Si una inversión de \$ 10,000.00 en el momento actual resulta en un ingreso - de \$ 15,010.00 dentro de 6 años, ¿Cuál es la tasa de interés anual a la que dicha inversión trabaja ?

Datos:

Valor presente
= Valor actual.

$$P = 10,000.00$$

Valor futuro.

$$F = 15,010.00$$

tiempo en periodos

$$n = 6$$

Formula para encontrar el valor futuro en función del presente.

$$F = P (F/P, i, n)$$

$$(F/P, i, n) = \frac{F}{P}$$

$$(F/P, i, 6) = \frac{15,010}{10,000} = 1.501$$

para $(F/P, (7\%), 6) = 1.5007 \checkmark \therefore F = P (F/P, 7\%, 6) = 10,000 (1.5007) = \$ 15,007$

para $(F/P, (8\%), 6) = 1.5859 \checkmark$ Demasiado alta en comparación a 1.501

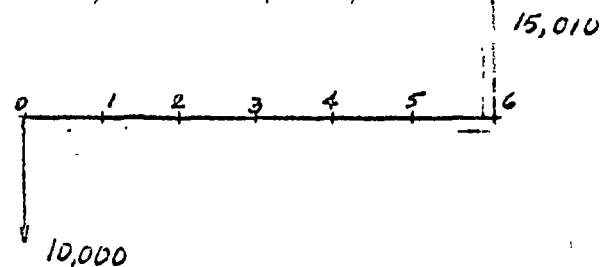
Por lo tanto, no se hace necesario interpolar

SOLUCION. i = 7%

Incognita:

$$i = ?$$

Gráfica del tiempo efectivo.



- 2 - ¿Qué serie de pagos iguales es necesaria para liquidar la cantidad presente de \$ 30,000.00 en 5 años al 4% ?

Datos

Valor presente: $P = 30,000$

periodo

$$n = 5 \text{ años}$$

Tasa de interés

$$i = 4\%$$

Incognita:

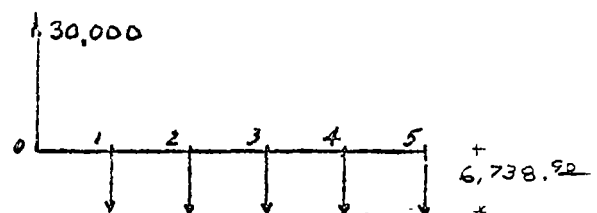
$$A = ?$$

$$A = P (A/P, i, n)$$

$$= 30,000 (A/P, 4, 5)$$

$$= 30,000 (0.22463)$$

$$= \$ 6,738.90 \checkmark$$



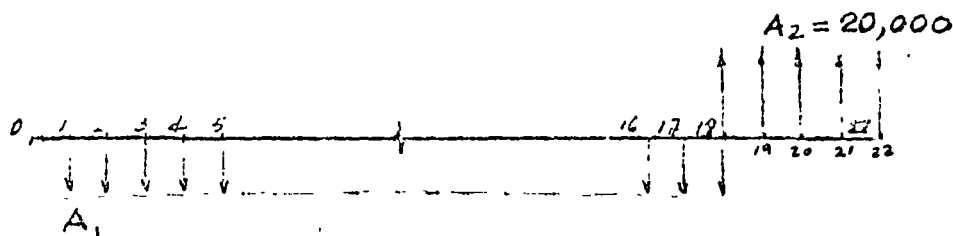
- 26 -

3 - ¿ El día en que un niño nace, su padre decide establecer un fondo con el propósito de garantizar el que tendrá dinero suficiente para asistir a la Universidad, decide hacerlo depositando una cierta cantidad en el fondo en cada uno de sus cumpleaños a partir del primero al 18. El padre estima que, retirando \$ 20,000.00 anuales durante los cinco años considerados a partir del cumpleaños número 18 al 22 del niño, quedará cubierta esa necesidad.

¿ Cuánto deberá depositar anualmente si el fondo produce el 4% de interés-anual ?

Solución:

En este problema resulta altamente conveniente hacer un diagrama.



Resulta evidente que puede ser resuelto de varias formas. Hagamoslo de la siguiente manera:

Encontremos el valor presente de los cinco retiros en el año 17 y después el valor presente en el año cero de esa cantidad con objeto de obtener posteriormente la anualidad a lo largo de los 18 años.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 20,000 \cdot (P/A, 4\%, 5) (P/F, 4\%, 17) (A/P, 4\%, 18) \\
 &= 20,000 \cdot (4.452) (0.5134) (0.07899) = \\
 &= (8.704) (0.0405534) = \$331.08747 \\
 A_1 &= \$ \underline{\underline{3610.87}}
 \end{aligned}$$

[20.000] (4.452) [0.5134] [0.07899]

PROBLEMAS

1 - Si gastamos en el momento actual \$ 15,000.00 en la adquisición de un motor diesel, - obtendremos ahorros anuales de \$ 2,600.00 en combustible en comparación con un motor - de gasolina. ¿ Durante cuánto tiempo deberá continuar este ahorro para que se justifique la inversión que hacemos en el tiempo cero ? El costo del dinero es de 12%.

$$P = 15,000$$

$$A = 2,600$$

$$i = 12\%$$

$$n = ?$$

$$P = (A)(P/A, 12\%, n)$$

$$\frac{15,000}{2,600} = 5.76 \text{ (entre 10 y 11 años según tabla)}$$

$$n = \approx 10.50 \text{ años}$$

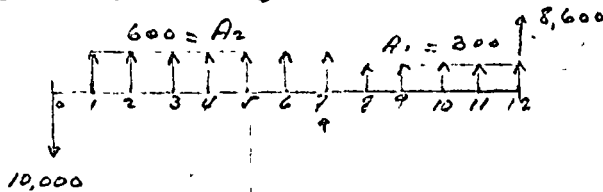
2 - Un inversionista pago \$ 10,000.00 por 10 acciones comunes hace 12 años. Recibió - dividendos de \$ 600.00 por acción al final de cada año durante los primeros 7 años y - - - \$ 300.00 por acción al final de cada uno de los restantes 5 años. Si acaba apenas de vender sus acciones por \$ 8,600.00 ¿ Cué tasa de rentabilidad obtuvo de su inversión ?

$$① - P = 10,000$$

$$n = 7$$

$$i = 6\%$$

$$F = ?$$



$$F = P(F/P, 6\%, 7)$$

$$F = 10,000(1.5036)$$

$$F = \underline{15,036.00}$$

$$② - P = 15,036$$

$$n = 5$$

$$i = 3\%$$

$$F = ?$$

$$(1.1592)$$

$$F = 15,036(F/P, 3\%, 5)$$

$$F = 17,431.23$$

$$F = 17,431.23 - 10,000 + 8,600$$

$$F = \underline{16,031.23}$$

$$10,000 = A_1(P/A, i, 5)(P/F, i, 7) + A_2(P/A, i, 7) + 8,600(P/F, i, 12)$$

$$VP = 0 = -10,000 + 300 \left[\frac{(1+i)^5 - 1}{i(1+i)^5} \right] + 600 \left[\frac{(1+i)^7 - 1}{i(1+i)^7} \right] + 8600 \left[\frac{1}{(1+i)^{12}} \right]$$

$$F = \underline{16,031.23}$$

$$n = 12$$

$$P = 10,000$$

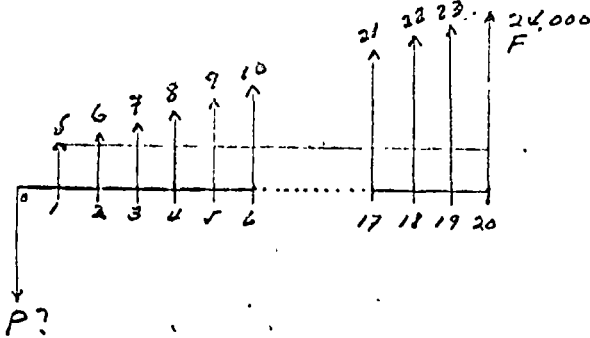
$$i = ? \therefore i = 2\%$$

$$F = P(F/P, 12, i) \therefore \frac{16,031.23}{10,000} = 1.603 = (F/P, i, 12)$$

$$i = 4\%$$

SERIE GRADIENTE-VALOR PRESENTE

3 - Se desea hacer una inversión en el momento actual que permita un retiro de \$ 5,000.00 al final de un año, \$ 6,000.00 al final del 2o. año y que continuará aumentando \$ 1,000.00 anuales hasta retirar \$24,000.00 al final del 20o. año. ¿ Cué cantidad será requerido invertir si se tiene un interés de 5% de cómputo anual ?



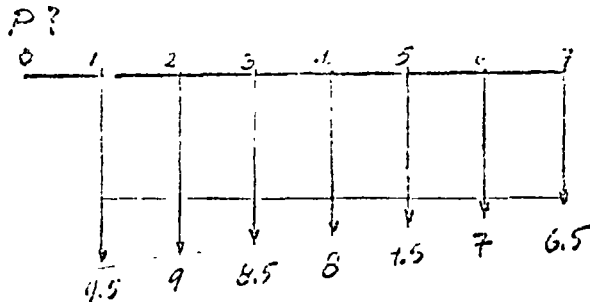
$$P = A(P/A, i, n) + G(P/G, i, n)$$

$$P = A(P/A, 5\%, 20) + G(P/G, 5\%, 20)$$

$$P = 5,000(12.462) + 1,000(98.4884) \text{ (TABLA E 21)}$$

$$P = \$ \underline{\underline{160,798.40}}$$

4 - Supongamos que tenemos el siguiente diagrama de flujo de efectivo. ¿ Cuái será el valor presente del mismo si $i = 10\%$?



$$P = G(P/G, i, n) - A(P/A, i, n)$$

$$P = G(P/G, 10\%, 7) - A(P/A, 10\%, 7)$$

$$P = 500(12.7631) - 9500(4.868)$$

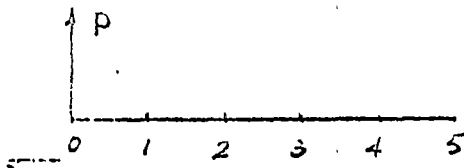
$$P = -\$ \underline{\underline{37,864.45}}$$

-29-

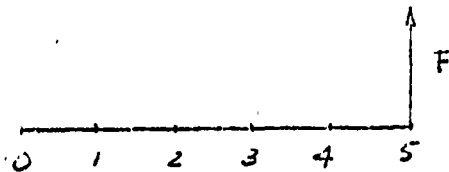
3

5 - Transformar los diagramas de flujo del lado izquierdo en diagramas de flujo del lado derecho dando la expresión que se que calcularían.

Ejemplo:

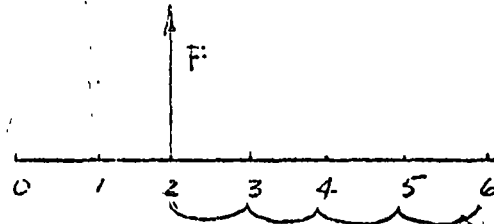
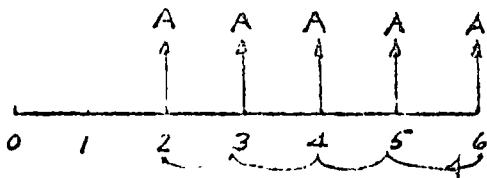


$$F = P(F/P, 0, 5)$$



$$F = P(1, 2)^n$$

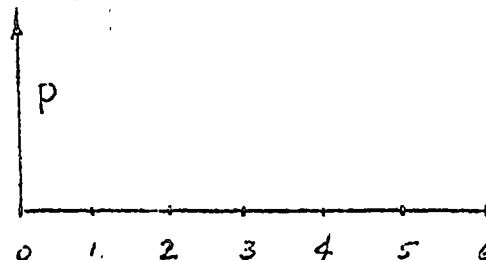
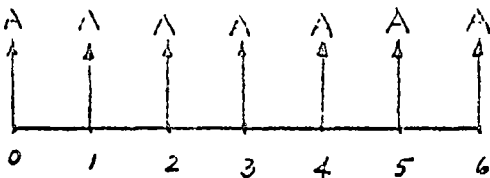
a)



Para el valor de $n=6$ al valor de $n=1$

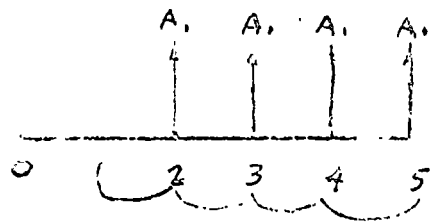
$$F = A(P/A, 2, 4) + A = A(F/A, 2, 5)(P/F, 2, 4)$$

b)

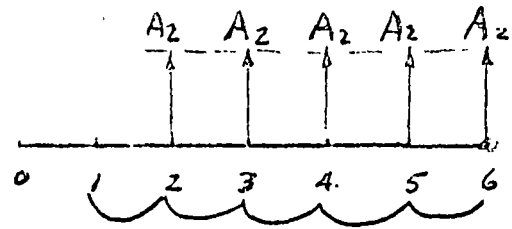


$$P = A(P/A, 0, 6) + A$$

-30-

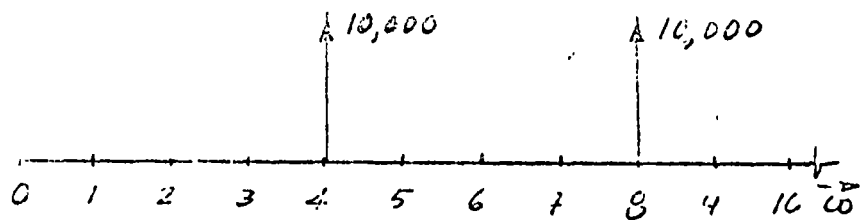
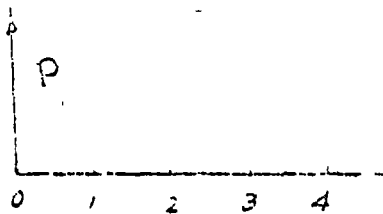


$$A_2 = A_1 \cdot (P/A, i, 4) (P/A, i, 5)$$



21)

¿Cuanto tendremos que depositar en el año cero a un interés i para que podamos cobrar \$ 10,000.00 cada cuatro años indefinidamente? Dar solo la expresión.



$$P = A (P/A, i, 4)$$

Es como un rédito (interés) cada cuatro años dejando un capital de 10,000 en estos periodos de 4 años sin retirarlos.

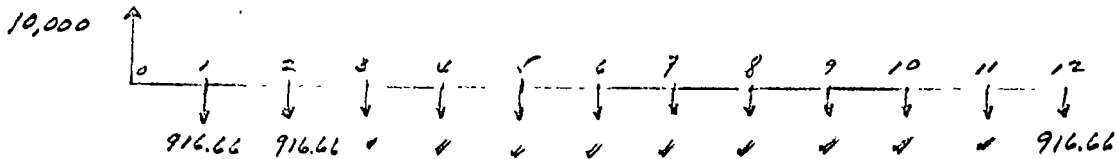
-31-

-15-

5 - Recurrimos a solicitar un préstamo a un banco que ofrece un plan de préstamos personales al que llama " El plan del 10% anual ". Nuestra solicitud es por \$ 10,000.00 y en el banco nos hacen la siguiente aclaración:

El 10%, interés que cobramos por su préstamo es de \$ 1,000.00 por lo tanto deberá usted liquidar \$ 11,000.00. Su pago mensual será de \$ $\frac{11,000}{12} = \$ 916.66$.

¿Cuál es la tasa real de interés anual interés efectivo ?



$$(A/P, i_{ef}, 12) \therefore \frac{916.66}{P=10,000} = 0.09166 = (A/P, i_{ef}, 12)$$

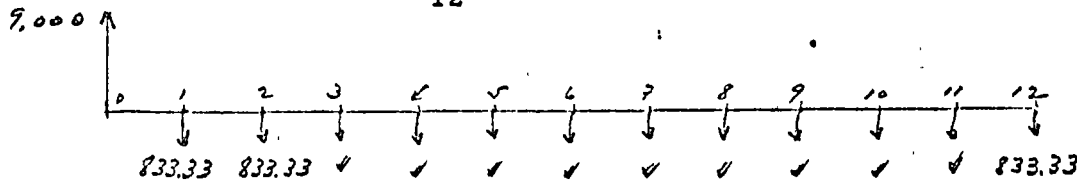
$$i_{ef} = 1.5\% \text{ mensual; Interés nominal} = 1.5 \times 12 = 18\%$$

$$r = \text{Tasa de interés nominal por año} \therefore r = \left(\frac{r}{c}\right)^c$$

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{r}{c}\right)^c - 1 = \left[\left(1 + \frac{r}{c}\right)^c\right]^r$$

$$i_{ef} = (F/P, \frac{r}{c}, c) - 1 = (F/P, 1.5, 12) - 1 = 1.1956 - 1 = 0.1956 = 19.56\%$$

Supongamos ahora que " descuentan " el interés por adelantado y nos entregan \$9,000.00. El pago mensual se calcula $\frac{10000}{12} = \$ 833.33$



$$A = P(A/P, i_{nom}, 12) \therefore \frac{833.33}{9,000} = 0.09259 = (A/P, i_{ef}, 12)$$

$$(A/P, 1.5\%, 12) = 0.09168$$

$$(A/P, 1.75\%, 12) = 0.09311$$

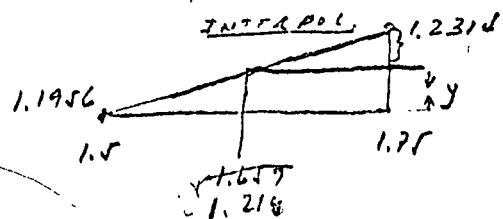
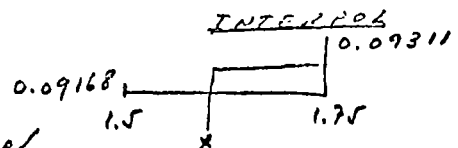
$$i_{nom} = 1.659\% \therefore i_{nom} = 1.659 \times 12 = 19.908\%$$

$$i_{ef} = (F/P, 1.659, 12) - 1$$

$$(F/P, 1.5\%, 12) = 1.1956$$

$$(F/P, 1.75\%, 12) = 1.2314$$

$$(F/P, 1.659, 12) = 1.1956 + y = 1.2184$$



ALGUNOS ASPECTOS EN EL ANALISIS DE ALTERNATIVAS MULTIPLES

Los principios generales de toma de decisiones son más sencillos de comprender cuando únicamente dos alternativas son consideradas. Por esta razón la mayor parte de los ejemplos y problemas estudiados hasta ahora a lo largo del curso tratan con alternativas en pares. Sin embargo, en la mayor parte de los casos la decisión debe ser tomada entre un cierto número de propuestas distintas, y aún cuando los mismos principios aplicables al análisis de alternativas por pares son empleados, a menudo simplifica el trabajo y elimina errores de razonamiento el enfoque de análisis de alternativas múltiples que presentamos en esta sesión. De igual utilidad resulta en muchos casos el uso de técnicas matemáticas para la determinación de soluciones óptimas, sin embargo, es importante el que los analistas estén conscientes de sus limitaciones, mismas que también estudiaremos.

TIPOS DE PROPUESTAS DE INVERSION.

Una propuesta de inversión es considerada como un proyecto único, mientras que, una alternativa de inversión es definida como una opción de decisión. De acuerdo a estas definiciones, toda propuesta de inversión puede ser considerada como una alternativa de inversión, sin embargo, una alternativa de inversión puede consistir de un conjunto de propuestas de inversión así como también puede representar a la opción de "no hacer nada". Así, si se están considerando las propuestas A y B, es posible tener cuatro opciones de decisión o alternativas como a continuación se muestra:

Alternativas	X_a	X_b
No hacer nada (Rechazar A, Rechazar B)	0	0
Aceptar únicamente A	1	0
Aceptar únicamente B	0	1
Aceptar A y B	1	1

Para cada propuesta de inversión existe una variable binaria X_j - que tendrá el valor 0 ó 1 indicando si la propuesta j es rechazada (0) ó aceptada (1). Cada renglón de números binarios representa una alternativa de inversión. - Emplearemos esta convención a lo largo del presente capítulo.

PROPUESTAS INDEPENDIENTES.

Cuando la aceptación de una propuesta no tiene efecto sobre la - aceptación de alguna(s) otra(s) propuesta(s) del conjunto de propuestas en consi- deración, se dice que la propuesta es independiente. Por ejemplo, la decisión - de introducir aire acondicionado en el Departamento de Producción de una Cía., - normalmente sería independiente de la decisión de llevar a cabo una campaña pu- blicitaria.

TABLA 1. TRES PROPUESTAS INDEPENDIENTES.

Fin de Año	FLUJO MONETARIO		
	Propuesta A	Propuesta B	Propuesta C
0	- \$ 10,000	- \$ 30,000	- \$ 50,000
1	6,000	15,000	20,000
2	6,000	15,000	20,000
3	6,000	15,000	20,000

PROPUESTAS DEPENDIENTES.

Se les considera de dos tipos: propuestas mutuamente exclusivas y propuestas contingenciales. Si las propuestas contenidas en el conjunto de propuestas bajo estudio se encuentran relacionadas de tal forma que la aceptación de una de ellas elimina la aceptación de alguna(s) otra(s) de las propuestas del conjunto, se dice que las propuestas son mutuamente exclusivas. Una situación en la cual las propuestas son mutuamente exclusivas ocurre cuando existe un número de propuestas que satisfacen una cierta necesidad. Tal caso se presenta por ejemplo, en la necesidad de adquirir un tractor de carriles de cierta potencia que cumplirá un trabajo específico y para el cual existen varias marcas en el mercado.

TABLA 2. CONJUNTO DE PROPUESTAS MUTUAMENTE EXCLUSIVAS.

Propuesta	Tipo de Equipo	
A1	Tractor de Carriles - Modelo D4D	Caterpillar
A2	Tractor de Carriles - Modelo MF300	Massey Ferguson
A3	Tractor de Carriles - Modelo TD9	International
A4	Tractor de Carriles - Modelo AD-7	Fiat
A5	Tractor de Carriles - Modelo JD450	John Deere

El otro tipo de relación entre propuestas surge cuando un proyecto inicial conduce a otras inversiones auxiliares que resultan factibles como consecuencia de la inversión inicial. A este tipo de propuestas se les llama contingenciales porque su aceptación está condicionada a la aceptación de otra propuesta. Un ejemplo de ello es la compra de una unidad de lectura de cintas magnéticas en una computadora, la cual está condicionada a la adquisición de la unidad central de proceso. Por lo anteriormente expresado, una relación contingencial es una dependencia unilateral entre propuestas, o sea, la aceptación de la propuesta contingencial es dependiente de la aceptación de alguna propuesta prerequisite, pero la aceptación de la propuesta prerequisite es independiente de las propuestas contingenciales.

Cuando existen limitaciones sobre la cantidad de dinero disponible y el costo inicial de todas las propuestas excede el total de dinero a invertir, se introducen las interdependencias financieras entre las propuestas. Estas interdependencias son normalmente complejas y ocurrirán ya sea que las propuestas sean independientes, mutuamente exclusivas o contingenciales. Para ejemplificar lo anterior, supongamos que tenemos las tres propuestas independientes mostradas en la tabla 1. Si se cuenta únicamente con \$ 55,000 para invertir, podemos fácilmente observar que la aceptación de la propuesta C elimina la aceptación de las propuestas A y B. Igualmente, la aceptación de las propuestas A ó B impide la aceptación de la propuesta C. Dependiendo de el capital presupuestado (a invertir), el número de propuestas y su costo inicial, las interdependencias pueden-

ser más o menos complejas. Para el ejemplo anterior, los posibles arreglos aparecen en la tabla 3.

TABLA 3. ARREGLOS ACEPTABLES DE PROPUESAS INDEPENDIENTES PARA UNA RESTRICCIÓN PRESUPUESTAL DE \$55,000.

Arreglos posibles de propuestas.	Propuestas			Cantidad total requerida por arreglo.	Presupuesto Remanente
	Xa	Xb	Xc		
1	0	0	0	0	\$ 55,000
2	1	0	0	\$ 10,000	45,000
3	0	1	0	30,000	25,000
4	0	0	1	50,000	5,000
5	1	1	0	40,000	15,000
6	1	0	1	50,000	5,000
7	0	1	1	80,000	25,000
8	1	1	1	90,000	85,000

COMPARACIÓN DE ALTERNATIVAS MUTUAMENTE EXCLUSIVAS

En la comparación de alternativas mutuamente exclusivas, su diferencia futura (esperada) es la relevante en la determinación de la deseabilidad económica de una respecto a la otra.

Pasa a la hoja No. 6

TABLA 4. DIFERENCIA ENTRE ALTERNATIVAS MUTUAMENTE EXCLUSIVAS

Fin de Año	Alternativa A1	Alternativa A2	Flujo de efectivo de la diferencia.	
			A2	- A1)
0	- \$ 10,000	- \$ 15,000	- \$	5,000
1	8,000	7,000		1,000
2	8,000	13,000		5,000
3	8,000	13,000		5,000

Analicemos las alternativas mostradas en la tabla 4. El flujo de efectivo -- que representa a la alternativa A2 puede ser considerado como la suma de dos flujos efectivos distintos y separados, siendo uno de ellos idéntico al flujo de efectivo de la alternativa A1 y el otro representando la diferencia entre la alternativa -- A1 y la alternativa A2. Si el flujo de efectivo que representa las diferencias es -- económicamente deseable, entonces la alternativa A2 (la cual consiste de un flujo de efectivo que es la suma de un flujo de efectivo idéntico a la alternativa A1 y -- un flujo de efectivo "deseable") será desde luego económicamente superior a la al ternativa A1. Si por otra parte, la diferencia entre alternativas es considerada in-- deseable, entonces la alternativa A2 es inferior a la alternativa A1. Los métodos-- para determinar la mencionada "deseabilidad" ya han sido estudiados durante el -- curso (valor presente positivo a la tasa mínima de rentabilidad, tasa de rentabili-- dad mayor que la tasa mínima de rentabilidad, etc.)

FORMACION DE ALTERNATIVAS MUTUAMENTE EXCLUSIVAS

Cualquier criterio de decisión diseñado para tomar decisiones acerca de alternativas mutuamente exclusivas puede así mismo ser aplicado para propuestas independientes, mutuamente exclusivas o contingenciales simplemente formando arreglos de propuestas de alternativas mutuamente exclusivas. Además, la imposición de una restricción presupuestal puede ser fácilmente incorporada en tal criterio de decisión. De hecho, un arreglo como el mencionado ya se presentó cuando se formuló la tabla 3 a partir de las tres propuestas independientes que aparecen en la tabla 1. La tabla 5 muestra los flujos monetarios que pueden realizarse para cada alternativa mutuamente exclusiva a partir de las propuestas independientes de la misma tabla 1.

TABLA 5. ALTERNATIVAS MUTUAMENTE EXCLUSIVAS PARA TRES PROPUESTAS INDEPENDIENTES.

Alternativas mutuamente exclusivas	Propuestas			Flujo de efectivo			
	Xa	Xb	Xc	Fin de año			
				0	1	2	3
1	0	0	0	\$ 0	0	0	0
2	1	0	0	- 10,000	\$ 6,000	\$ 5,000	\$ 9,000
3	0	1	0	- 30,000	15,000	15,000	5 15,000
4	0	0	1	- 50,000	20,000	20,000	20,000
5	1	1	0	- 40,000	21,000	21,000	21,000
6	1	0	1	- 40,000	26,000	21,000	26,000
7	0	1	1	- 80,000	35,000	35,000	35,000
8	1	1	1	- 90,000	41,000	41,000	41,000

Si las propuestas son contingenciales podremos arreglar las propuestas en un conjunto de alternativas mutuamente exclusivas por medio de la enumeración de las combinaciones de propuestas que son factibles considerando -- sus interrelaciones. Supongamos que las propuestas en consideración son -- la propuesta C, sujeta a la aceptación de A y B y la propuesta B sujeta a la -- aceptación de A. La tabla 6 muestra las alternativas mutuamente exclusivas que se obtendrán.

TABLA 6. ALTERNATIVAS MUTUAMENTE EXCLUSIVAS PARA PRO - PUESTAS CONTINGENCIALES.

Alternativas Mutuamente Exclusivas.	P r o p u e s t a s		
	Xa	Xb	Xc
1	0	0	0
2	1	0	0
3	1	1	0
4	1	1	1

Los arreglos en alternativas mutuamente exclusivas simplifican la -- diversidad de tratamientos para la decisión y además permiten el empleo de las formulaciones de programación matemática.

La determinación ^(N) del número máximo de alternativas mutuamente exclusivas se obtiene:

$$N = \prod_{j=1}^S (M_j + 1) = (M_1 + 1) (M_2 + 1) (M_3 + 1) \dots (M_S + 1)$$

donde:

S = Número máximo de conjuntos de propuestas independientes.

M_j = Número máximo de propuestas en cada conjunto "j" donde cada propuesta en dicho conjunto es mutuamente exclusiva.

Supongamos que se tienen las siguientes propuestas a considerar:

A1 A2 A3 A4 A5 A6

B1 B2 B3

C1 C2 C3 C4

D1 D2

Donde las propuestas en cada renglón son mutuamente exclusivas y el conjunto de propuestas en cada renglón es independiente de cualquier otro conjunto o renglón de propuestas. O sea, las propuestas A1 y A2 son mutuamente exclusivas pero las propuestas A1 y B1 son independientes. El número máximo de alternativas mutuamente exclusivas se determina:

$$S = 4$$

$$M_1 = 6, M_2 = 3, M_3 = 4, M_4 = 2$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} N &= (M_1 + 1) (M_2 + 1) (M_3 + 1) (M_4 + 1) \\ &= (7) (4) (5) (3) = 420 \end{aligned}$$

Pasa a la hoja No. 10

Lo cual es un número considerable de alternativas mutuamente exclusivas para este problema relativamente sencillo.

CRITERIOS DE DECISION PARA ALTERNATIVAS MUTUAMENTE EXCLUSIVAS

Problema.- Determinar cuál de las alternativas mutuamente exclusivas que se muestran en la tabla 8 es la más atractiva.

TABLA 8. FLUJO DE EFECTIVO PARA CUATRO ALTERNATIVAS MUTUAMENTE EXCLUSIVAS.

Fin de Año	Alternativas			
	No hacer nada	A1	A2	A3
0	0	- \$ 50,000	- \$ 80,000	\$ -100,000
1-10	0	14,000	19,000	25,000

$i = 15\%$

ANALISIS POR VALOR PRESENTE

$V_0 = \$ 0.00$
 $VPA1 = -50,000 + 14,000 (P/A, 15, 10) = 20263.2$
 $VPA2 = -80,000 + 19,000 (P/A, 15, 10) = 15357.2$
 $VPA3 = -100,000 + 25,000 (P/A, 15, 10) = 25470.0$ ✓

Por lo tanto seleccionamos A3

Pasa a la hoja No. 11

ANALISIS POR VALOR PRESENTE DE INVERSION INCREMENTAL

Fin de Año	Diferencias Incrementales		
	A1 - 0	A2-A1	A3 - A1
0	- \$ 50,000	- \$ 30,000	- 50 000
1 - 10	14,000	(17-14,000) 5,000	9000

Tasa 15%

$$VP_{A1-0} = -50000 + 14000(P/A, 15, 10) = 20263.2$$

$$VP_{A2-A1} = -30000 + 5000(P/A, 15, 10) = -4905$$

$$VP_{A3-A1} = -50000 + 9000(P/A, 15, 10) = 5209$$

20 263

- 4905

15 172

Solucionar A3

ANALISIS POR TASA DE RENTABILIDAD DE LA INVERSION INCREMENTAL

Si determinamos la tasa de rentabilidad de cada alternativa tenemos:

$$i_0 = 0\%, i_{A1} = 25\%; i_{A2} = 19.9\%, i_{A3} = 21.9\%$$

Aquí se vé que la mejor alternativa es A1.

Encontremos ahora los valores de i a los que trabajan los incrementos de inversión:

$$0 = -\$50,000 + \$14,000(P/A, i_{A1} - 0, 10)$$

$$i_{A1} - 0 = 25\%$$

Pasa a la hoja No. 12

Como es mayor que $TMR = 15\%$, $A1$ es nuestra "mejor alternativa al presente".

$$0 = - \$ 30,000 + \$ 5,000 (P/A, i_{A2 - A1}, 10)$$

$$i_{A2 - A1} = 10.5 \%$$

$A_1 = 25\%$ (mejor) $A_2 =$ en la tabla 8 se muestra que A_1 es la mejor alternativa.
Como es menor que $TMR = 15\%$, $A1$ sigue siendo nuestra mejor alternativa al presente.

$$0 = - \$ 50,000 + \$ 11,000 (P/A, i_{A3 - A1}, 10)$$

$$i_{A3 - A1} = 17.3 \%$$

y $A3$ es mejor que $A1$ porque $i_{A3 - A1} > TMR$. Como todas las alternativas han sido comparadas, $A3$ es la solución.

APLICACION DE CRITERIOS DE DECISION CUANDO EL CAPITAL DE INVERSION ESTA RESTRINGIDO.

En la tabla 8 se muestra el conjunto de propuestas a considerar. Cada subconjunto de propuestas que tienen la misma letra ($A1, A2$) es considerado independiente de los otros conjuntos que tienen designaciones diferentes de letras ($B1, B2$). Por lo tanto, no se puede aceptar más que una propuesta de igual letra mientras que propuestas de letras diferentes si lo pueden ser.

Pasa a la hoja No. 13

TABLA 8. FLUJOS DE EFECTIVO PARA CINCO PROPUESTAS DE -
INVERSION.

Propuesta	Costo Inicial	Ingreso neto (Años 1 - 10)	Valor de - Salvamento (Año 10)	Valor presente j
A1	- \$ 100,000	\$ 20,000	\$ 10,000	\$ 38,830
A2	- 120,000	21,000	20,000	30,180
A3	- 200,000	31,000	50,000	31,300
B2	- 300,000	50,000	80,000	72,550
C1	- 350,000	45,000	100,000	- 1,730

El problema consiste en seleccionar la(s) propuestas(s) que maximicen el valor presente total si la cantidad de dinero disponible para inversión es de \$ 350,000 y la tasa mínima de rentabilidad es de 3%.

De acuerdo a la fórmula para determinar el número de alternativas mutuamente exclusivas:

$$N = (2^3) - 1 = 7$$

$$N = (3) (3) (2) = 18$$

Sin embargo, conviene encontrar el valor presente de las propuestas con objeto de eliminar de consideración a las que lo tengan negativo. Esto es debido a que cualquier propuesta con valor presente negativo que sea combinada con otra propuesta para formar una alternativa mutuamente exclusiva — reducirá el valor presente total de dicha alternativa .

La última columna de la tabla 9. muestra que el valor presente de C1 es negativo por lo que se le elimina y el número de alternativas mutuamente exclusivas será:

Pasa a la hoja No. 14

El grupo C. por ser negativo no quedan 3 opciones

TABLA 9. RESULTADOS Y ARREGLO DE LAS ALTERNATIVAS MUTUAMENTE EXCLUSIVAS A PARTIR DE LAS PROPUESTAS DE LA TABLA 8.

Alternativas.	Propuestas				Propuestas Aceptadas	Costo Inicial	Ingreso Neto Años 1 - 10	Valor de Salvamento Año 10	Valor presente - j
	A1	A2	B1	B2					
1	0	0	0	0	Ninguna	\$ 0	0	0	0
2	1	0	0	0	A1	- 100,000	\$ 20,000	\$ 10,000	\$ 38,830
3	0	1	0	0	A2	- 120,000	21,000	20,000	30,180
4	0	0	1	0	B1	- 200,000	31,000	50,000	31,300
5	0	0	0	1	B2	- 300,000	50,000	80,000	72,550 **
6	1	0	1	0	A1, B1	- 300,000	51,000	60,000	-70,230
7	1	0	0	1	A1, B2	- 400,000	70,000	90,000	-111,380 *
8	0	1	1	0	A2, B1	- 320,000	52,000	70,000	61,780
9	0	1	0	1	A2, B2	- 420,000	71,000	100,000	-102,730 *

* No son factibles porque se excede el presupuesto. (350 000)

** Resultado por la suma de los valores presentes.

FORMULACION DE PROGRAMACION LINEAL ENTERA PARA EL PROBLEMA-
DE CAPITAL DE INVERSION RESTRINGIDO.

Cuando un número elevado de propuestas es tomado en consideración, el número de alternativas mutuamente exclusivas que pueden formarse es bastante grande. Por ejemplo, para 100 propuestas independientes se pueden formar aproximadamente 1.258×10^{30} alternativas mutuamente exclusivas. Por lo tanto, para resolver muchos problemas de un modo práctico, es necesario utilizar técnicas matemáticas que consideren todas las alternativas sin tener que hacer cálculos para cada una de ellas.

Una técnica que sirve para el propósito enunciado es la programación lineal entera, la cual requiere que el problema en consideración sea formulado de acuerdo al formato que veremos más adelante. Una vez apropiadamente formulado, existen procedimientos de solución o algoritmos -- disponibles para resolver problemas. Estos algoritmos, convergen hacia una solución óptima de forma altamente eficiente y con computadora se obtienen los resultados en unos cuantos minutos.

El formato del problema de programación lineal entera es el siguiente:

$$\text{Maximizar } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$$

Pasa a la hoja No. 16 . . .

Sujeto a:

$$\begin{aligned} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \dots + A_{1n}X_n &\leq B_1 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \dots + A_{2n}X_n &\leq B_2 \end{aligned}$$

función objetivo $A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \dots + A_{mn}X_n \leq B_m$
 X_i para $i = 1, 2, \dots, n$ debe ser un entero ≥ 0

Las letras C, A y B son constantes y las X son las variables de decisión que representan los valores a determinar. La solución de este tipo de problemas está dada por los valores de X que maximizan Z de tal forma que todas las restricciones (ecuaciones bajo "sujeto a") son satisfechas.

El problema de toma de decisiones entre alternativas es fácilmente convertido a el formato de programación lineal entera. Las variables de decisión, en vez de ser enteros mayores o iguales a cero, son confinadas a los enteros 0 (rechazar propuesta j) ó 1 (aceptar propuesta j). El valor de C_j es el valor presente de la propuesta j a la tasa mínima de rentabilidad. Para el problema relacionado a las propuestas de la tabla 8 la formulación es la siguiente:

$$\text{Maximizar } Z = \$ 38,830 X_{A1} + \$ 30,180 X_{A2} + \$ 31,600 X_{B1} + \$ 72,555 X_{B2} - \$ 1,730 X_{C1}.$$

Sujeta a:

(Restricción presupuestal)

$$\begin{aligned} \$ 100,000 X_{A1} + \$ 120,000 X_{A2} + \$ 200,000 X_{B1} + \$ 300,000 X_{B2} \\ + \$ 350,000 X_{C1} \leq \$ 350,000 \end{aligned}$$

(Restricción de exclusión mutua)

$$X_{A1} + X_{A2} \leq 1$$

(Restricción de exclusión mutua)

$$X_{B1} + X_{B2} \leq 1$$

(Restricción cero-uno)

$$X_j = 0 \text{ ó } 1 \text{ para todas las propuestas}$$

La solución de este problema con las técnicas existentes da el siguiente resultado:

$$X_{A1} = 0, X_{A2} = 0, X_{B1} = 0, X_{B2} = 1, X_{C1} = 0$$

O sea se acepta la propuesta B2 y todas las otras propuestas son rechazadas como se muestra en la tabla 9. El valor de Z para esta solución es \$ 72,550.

FORMULAS PARA DETERMINAR EL PUNTO DE MINIMO COSTO

Cuando la variación del costo es función de una variable de diseño, puede ser expresada como una ecuación algebraica y es posible el empleo del cálculo diferencial para encontrar el valor de la variable de diseño que minimiza el costo.

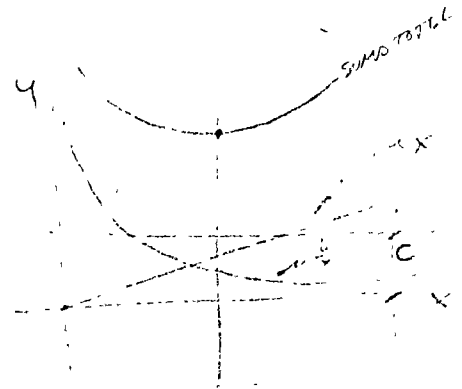
El caso más sencillo se presenta cuando un elemento de costo varía en proporción directa a la variable de diseño, y un segundo elemento de costo varía inversamente a la misma variable y todos los otros costos son independientes de ella. Una solución general del problema en tales circunstancias se obtiene de la siguiente manera:

Sea

Y = Costo total

X = Variable de diseño

$$Y = a x + \frac{b}{x} + C$$



Obteniendo la primera derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \left(a - \frac{b}{x^2} \right) = 0$$

Igualando a cero y despejando X ,

$$X = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Pasa a la hoja No. 2

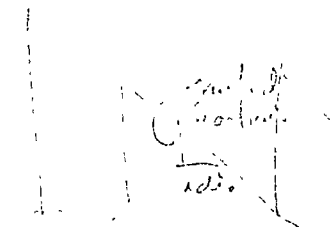
Este es el valor de la variable de diseño que minimiza el costo

Cuando $X = \frac{b}{a}$, los costos de variación directa son iguales a los costos de variación inversa.

Costos de variación directa - $A X = a \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{2b}$

Costos de variación inversa = $\frac{b}{X} = \frac{b}{\sqrt{\frac{b}{a}}} = \sqrt{2b}$

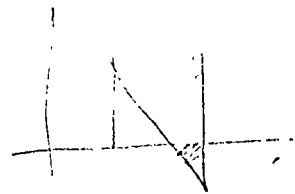
LOTE ECONOMICO DE PRODUCCION.
minimizar el costo de inventario (Problema de importancia)



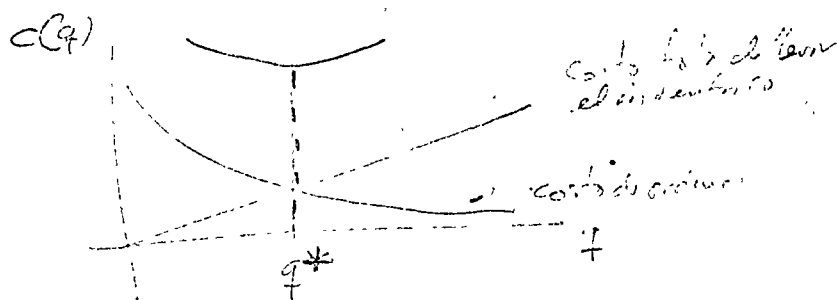
Costos asociados

$C_1 =$ costo de "tener el inventario".

$C_2 =$ costo de inexistencia $\rightarrow$



$C_3 =$ Costo de ordenar



$q =$ costo total.

$C(q) = \frac{q}{2} C_1 + \frac{U}{q} C_3$ --- ①

$U =$ uso anual.

$m =$ uso diario.

$\frac{U}{q} =$ número de órdenes en un año.

$q^* = q' = \sqrt{\frac{2UC_3}{C_1}}$

$ax = \sqrt{ab}$

$x = \sqrt{\frac{a}{b}}$

$C(q) = \frac{q}{2} C_1 + \frac{U}{q} C_3$

$a = \frac{C_1}{2}, b = UC_3$

$q^* = \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{2UC_3}{C_1}}$

Sust. en ①

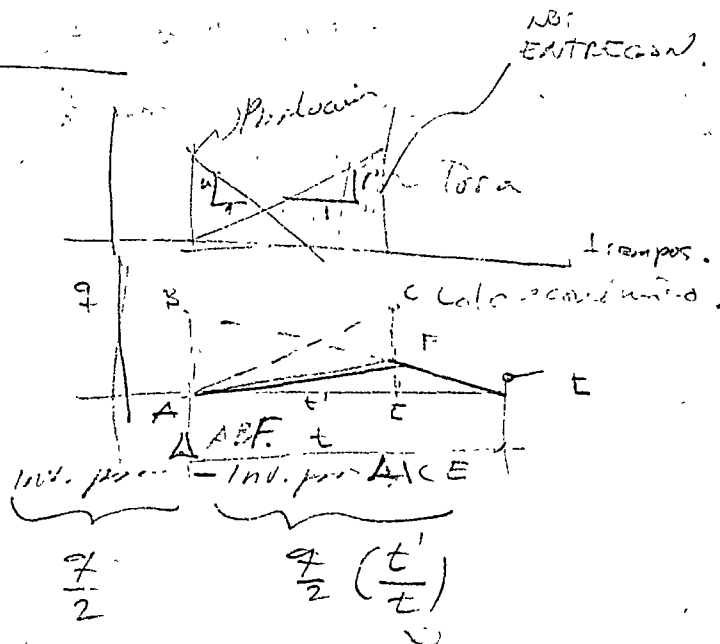
$C^* = \sqrt{\frac{2UC_3}{C_1}} \frac{C_1}{2} + \frac{UC_3}{\sqrt{\frac{2UC_3}{C_1}}} =$

$$C^* = \frac{\frac{2u C_3 \frac{C_1}{2} + \dots}{\sqrt{\frac{2u C_3}{C_1}}} = \frac{2u C_3 \sqrt{C_1}}{\sqrt{2u C_3}}$$

$$C^* = \sqrt{2u C_3} \sqrt{C_1} = \boxed{\sqrt{2u C_3 C_1}} \quad \text{Costo mínimo óptimo}$$

$$\frac{q}{2} \times T.M.R.$$

2º MODELO.



Inv. promedio =

$$u = \frac{q}{t} \quad p = \frac{q}{t'}$$

$$ut = pt' \quad \frac{t'}{t} = \frac{u}{p}$$

$$C(q) = C_1 \frac{q}{2} \left(1 - \frac{u}{p}\right) + C_3 \frac{u}{q} \quad \text{--- (2)}$$

$$= q \left[\frac{C_1}{2} \left(1 - \frac{u}{p}\right) \right] + \frac{1}{q} (C_3 u)$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2u C_3}{C_1 \left(1 - \frac{u}{p}\right)}} \quad \text{sustit. en (2)}$$

$$C^* = \frac{C_1}{2} \sqrt{\frac{2u C_3}{C_1 \left(1 - \frac{u}{p}\right)}} \left(1 - \frac{u}{p}\right) + \frac{C_3 \cdot u}{\sqrt{\frac{2u C_3}{C_1 \left(1 - \frac{u}{p}\right)}}}$$

$$C^* = \frac{\frac{C_1}{2} \frac{2u C_3}{C_1 \left(1 - \frac{u}{p}\right)} \left(1 - \frac{u}{p}\right) + C_3 u}{\sqrt{\frac{2u C_3}{C_1 \left(1 - \frac{u}{p}\right)}}} = \frac{\frac{2u C_3}{2} \sqrt{C_1 \left(1 - \frac{u}{p}\right)}}{\sqrt{2u C_3}}$$

$$C^* = \sqrt{2u C_3 \cdot \frac{C_1}{2} \left(1 - \frac{u}{p}\right)} \quad \text{Costo mínimo}$$

PROBLEMA DEL LOTE ECONOMICO

$C1$ = Costo de "llevar el inventario" unitario.

$C2$ = Costo asociado a la carencia é inexistencia en almacén de artículos: (no lo estudiaremos)

$C3$ = Costo de Ordenar.

$C1$ = (TMR, seguro contra incendio, personal en almacén, deterioro, etc.)

$C3$ = (papaleo, personal de compras, transportes, manejo al arribo a almacén, etc.)

MODELO 1 (Previsión instantánea)

$$\text{Inventario Promedio} = \frac{q}{2}$$

$$C(q) = \frac{q}{2} C1 + \frac{U}{q} C3 \dots \textcircled{1} \quad \text{COSTO TOTAL.}$$

$$a = \frac{C1}{2} ; b = U C3.$$

$$q^* = \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{2UC3}{C1}}$$

lote económico.
(Cantidad económica de pedido)

sustituido en ①

$$C^* = \sqrt{\frac{2UC3}{C1}} \frac{C1}{2} + \frac{UC3}{\sqrt{\frac{2UC3}{C1}}}$$

$$= \frac{2UC3}{C1} \frac{C1}{2} + UC3 = \frac{2UC3\sqrt{C1}}{\sqrt{2UC3}}$$

$$C^* = \sqrt{2UC3C1} \quad \text{Costo m\u00ednimo.}$$

Ejemplo 2

Una Cía. Manufacturera posee un almacén en una ciudad distante de su planta productora. El almacén es empleado por la sucursal distribuidora para venta de ciertos productos. Un espacio igual de almacenamiento se encuentra disponible en un nuevo almacén comercial y como ha recibido una oferta favorable de compra, se está dando seria consideración a su venta y a la renta del espacio mencionado.

La propiedad no era nueva cuando fué comprada hace 10 años por \$ 1'000,000.00. Para propósitos de impuestos, fué dividida en \$ 800,000.00 por concepto del edificio del almacén y en \$ 200,000.00 por terreno. Se ha empleado depreciación lineal para propósitos contables y de Presuptos suponiendo 40 años - el remanente de vida y valor de salvamento nulo. El almacén puede ahora ser vendido en \$ 1 500,000.00 netos después del pago de los gastos de venta.

Durante los últimos años, los gastos anuales del almacén han promedio \$ 64,400.00 por operación y mantenimiento, \$ 22,400.00 por impuesto a la propiedad, \$ 4,200.00 por seguro contra incendios del edificio y \$ 14,000.00 por seguro contra incendios de los productos. Se espera que estos costos serán aproximadamente iguales si no es vendido el almacén.

Igual espacio en el almacén comercial puede ser rentado por -- \$ 316,000.00 al año. Los gastos anuales esperados para ^{conversión} operación y mantenimiento son de \$ 28,000.00 y el seguro contra incendio de los productos será reducido a \$ 9,000.00 al año.

Si se toma la decisión de no vender el almacén, se estima que se conservará por otros 10 años y su precio probable de venta será de - - - - - \$ 900,000.00.

Se emplea para estudios económicos una tasa mínima de rentabilidad de 20% antes de impuestos y de 10% después de impuestos. Se considera -- así mismo que la tasa de impuestos sobre la renta es de 40%.

SOLUCION DEL EJEMPLO:

Comparación de costo anual antes de impuestos.

Costo anual comparativo - Continuando la propiedad

Pasa a la hoja No. 2

$$CRC = (1'500,000 - 900,000)(A/P, 20\%, 10) + 900,000 (0.20)$$

$$CRC = (1'500,000 - 900,000)(A/P, 20\%, 10) + 900,000 (0.20) \dots\dots 323,100$$

OPERACION CONSERVACION	64,400
IMPUESTO PREDIAL	22,400
SEGURO CONTRA INCENDIO (EDIFICIO Y PRODUCTOS)	18,200
TOTAL	\$ 428,100

COSTO ANUAL COMPARATIVO - RENTA DE IGUAL ESPACIO

RENTA	316,000
OPERACION Y CONSERVACION	28,000
SEGURO CONTRA INCENDIO DE PRODUCTOS	9,000
TOTAL	\$ 353,000 ✓

COMPARACION DE COSTOS ANUALES DESPUES DE IMPUESTOS

^{VL}
CALCULO DEL VALOR EN LIBROS:

$$\text{Depreciación} = \frac{VI - VS}{n} = \frac{800,000 - 0}{40} = \$ 20,000$$

$$VL \text{ almacén} = VI - 10 (20,000) = 800,000 - 200,000 = 600,000$$

$$VL \text{ de propiedad} = VL \text{ terreno} + VL \text{ almacén} = 200,000 + 600,000 = 800,000 \quad \checkmark$$

Cálculo del valor neto realizable:

Si la tasa de impuestos sobre Ingresos es del 40%:

Pasa a la hoja No. 3

Producto de Capital por concepto de venta = $1'500,000 - 800,000 = 700,000$

Impuestos sobre el renglón anterior = $(0.40) (700,000) = 280,000$

Por lo tanto:

Valor neto realizable $1'500,000 - 280,000 = 1'220,000$

Similarmente, si el almacén es vendido en \$ 900,000 dentro de 10 años, la ganancia será de \$ 300,000.00 de acuerdo al valor en libros que tendrá la propiedad para entonces.

VL = $1'000,000 - 20,000 = 980,000$

Producto de Capital = $900,000 - 600,000 = 300,000$

Impuestos = $(0.40) (300,000) = 120,000$

Valor neto realizable = $900,000 - 120,000 = 780,000$

Los impuestos anuales sobre ingresos también estarán influenciados por la decisión de retiro:

Continuando Propiedad Actual:

Depreciación	20,000	
Desembolsos Conocidos	105,000	$\left\{ \begin{array}{l} 64,400 \\ 24,400 \\ 16,200 \end{array} \right.$
Total	125,000	

Rentando local:

Renta, mantenimiento y seguro..... 353,000

Por lo tanto, continuando con la propiedad, el impuesto anual sobre ingresos sobre la renta será más alta que con la renta del local en \$ 228,000. $(353,000 - 125,000)$ empleando la tasa de impuesto del 40%, los desembolsos anuales por concepto de impuestos son mayores conservando la propiedad que rentando el almacén en $(0.40) (228,000) = \$ 91,200$.

Pasa a la hoja No.4

Costo anual comparativo - continuando la propiedad

$$CRC = (1,200,000 - 780,000) (A/P, 10\%, 10) + 780,000 (0.1) = \$149,610$$

Operación y conservación	34,400
--------------------------	--------

Impuesto predial	22,400
------------------	--------

Seguro contra incendios	18,200
-------------------------	--------

Impuestos adicionales en comparación con la propuesta de renta de local	91,200
---	--------

Total	<u>\$345,810</u>
-------	------------------

COSTO ANUAL COMPARATIVO/ RENTA DE IGUAL ESPACIO.

Renta	317,000
-------	---------

Operación y conservación	28,000
--------------------------	--------

Seguro contra incendios	9,000
-------------------------	-------

Total	<u>\$353,000</u>
-------	------------------

*continuar en
propiedad*

Comparando ambos totales, la decisión que minimiza el costo anual es la de continuar con la propiedad.

FLUJO DE EFECTIVO ANUAL UNIFORME EQUIVALENTE

Ninguno de nosotros realizaría o propondría que se realizara una inversión, a menos que nos parezca que puede ser recuperada a una tasa que resulte atractiva.

La introducción del valor del dinero en función del tiempo en los estudios económicos, involucra la premisa de que el dinero debe recuperarse con una utilidad.

En ésta sesión y en las siguientes se explicarán cuatro diferentes formas de comparar alternativas que presentan diferentes series de egresos e ingresos.

Las formas son:

1. Flujo de efectivo anual uniforme equivalente.
2. Valor presente neto, como criterio de evaluación.
3. Cálculo de la tasa interna de recuperación de capital
4. Relación beneficio-costeo.

Conforme avancemos en el desarrollo del curso se podrá apreciar que cualquiera de las formas de evaluar alternativas nos conducen a la misma decisión cuando es posible seleccionar solo una de las alternativas. Sin embargo veremos que cada uno de los métodos tiene ciertas ventajas y desventajas como guía de juicio.

Para comparar series no uniformes de gastos de dinero en donde el dinero tiene valor con el tiempo, es necesario de alguna manera hacerlas comparables. Una forma de hacerlo es reduciendo cada una a una serie uniforme anual equivalente de pagos.

"Costo Anual" quiere decir "Gastos netos anuales uniformes equivalentes"

CONSIDERACION DE IMPUESTOS EN LA EVALUACION DE INVERSIONES

En las empresas privadas en la mayoría de los países industrializados y en muchos de los países en desarrollo, los impuestos que gravan la inversión pueden ser influenciados por decisiones con respecto a la inversión. Si las decisiones son hechas desde el punto de vista de los dueños de la empresa, los efectos de los impuestos esperados para cada decisión necesitan ser reconocidos.

En general no hay una respuesta enteramente satisfactoria a la pregunta ¿En qué forma y en qué punto deben los asuntos relacionados con impuestos ser tratados en un estudio de Ingeniería Económica? La dificultad estriba en que aún cuando bajo determinadas circunstancias la estimación de los efectos de impuestos es muy sencilla, bajo otras circunstancias ésta estimación puede resultar demasiado compleja exigiendo un conocimiento más profundo de contabilidad así como de reglamentos y leyes sobre impuestos.

INFLUENCIA DEL VALOR DE SALVAMENTO EN EL COSTO ANUAL DE RECUPERACION DE CAPITAL

Consideramos:

P = Valor inicial de una máquina o activo

h = Vida en años

L = Valor de salvamento esperado

i = Mínima tasa de retorno

El costo anual de recuperación de capital puede expresarse de la siguiente manera:

$$CRC = (P-L) \left[\frac{i (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] + Li$$

$$CRC = (P - L) (A/p, i, n) + Li$$

PROBLEMA A 1

3



COSTO DE RECUP. C.R.C.

$$\begin{aligned} C.R.C &= P(A/P, i, n) - L(A/F, i, n) \\ &= P\left(\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right) - L\left(\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right) \\ &= P\left(\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right) - L\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} + i - i\right] \\ &= P\left(\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right) - L\left[\frac{i + i[(1+i)^n - 1]}{(1+i)^n - 1}\right] + Li \\ &= P\left(\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right) - L\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] + Li \end{aligned}$$

$$C.R.C = (P - L)\left(\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right) + Li$$

ALTERNATIVA B:

$$C.R.C = 150000(A/P, 8\%, 10)$$

$$C.R.C = 150000(0.14903)$$

$$C.R.C = \$22,350$$

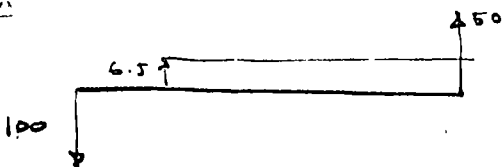
$$\begin{array}{r} + 64000 \\ \hline 22,350 \\ \hline CA = \$86,350 \end{array}$$

ALTERNATIVA "C"

$$C.R.C = [(250 - 50)(0.14903) + 50 \times 0.08] \times 10^3$$

$$C.R.C = 33810$$

$$\begin{array}{r} + 57,500 \\ \hline 33,810 \\ \hline CA = \$91,310 \end{array}$$



$$VP = -100 + 65(P/A, i, 10) + 50(P/F, i, 10)$$

$$i = 5\%$$

$$VP = -19.24$$

$i = 2\%$ inestable si prima 8% minimo.

$$VP = -0.6$$

PROBLEMA 1

ALTERNATIVA A

Establecimiento de alternativas.- En la actualidad en una Compañía Manufacturera se está llevando a cabo el almacenamiento de sus productos en forma manual. Los gastos anuales por éste concepto (incluyendo entre otros Seguro Social, tiempo extra, vacaciones, etc.), son de \$ 92,000.00

Se propone modificar ésta situación adquiriendo equipo para mecanizar la bodega. El equipo (alternativa "B") cuesta inicialmente \$ 150,000.00 y se estima que reducirá los gastos mencionados de mano de obra a \$ 33,000.00. Los pagos anuales por energía eléctrica mantenimiento e impuestos se estiman en \$ 4,000.00, \$ 11,000.00 y \$ 3,000.00. Gastos extras por impuestos adicionales y varios se estiman en \$ 13,000.00. si i=8%
no interesa
64 000.00

Se espera que ésta situación prevalezca durante 10 años, y como el equipo es específico no tiene valor de salvamento. La tasa atractiva mínima es del 8%.

Se podría adquirir otro equipo (Alternativa "C") el cual tendría las siguientes características:

Costo Inicial. \$ 250,000.00/año

L = Valor de Salvamento \$ 50,000.00 "

Como éste equipo está mas automatizado, reducirá los gastos de Mano de Obra a \$ 17,000.00

Energía Eléctrica	\$ 6,000.00	/año	} \$7500
Mantenimiento	\$ 15,000.00	"	
Impuestos	\$ 5,000.00	"	
Gastos extras	\$ 14,500.00	"	

Indique cual es la mejor alternativa

TABLA COMPARATIVA DE FLOJOS EFECTIVO.							
AÑO	A	B	B-A	AÑO	B	C	C-B
0		-150 000	-150 000	0	-150 000	-250 000	-100 000
1	-92 000	-64 000	+ 28 000	1	-64 000	-57 500	6 500
2	-92 000	-64 000	+ 28 000	2	-64 000	-57 500	
3	-92 000	-64 000	+ 28 000	3	-64 000	-57 500	
4	-92 000	-64 000	+ 28 000	4	-64 000	-57 500	
5	-92 000	-64 000	+ 28 000	5	-64 000	-57 500	
6	-92 000	-64 000	+ 28 000	6	-64 000	-57 500	
7	-92 000	-64 000	+ 28 000	7	-64 000	-57 500	
8	-92 000	-64 000	+ 28 000	8	-64 000	-57 500	
9	-92 000	-64 000	+ 28 000	9	-64 000	-57 500	
10	-92 000	-64 000	+ 28 000	10	-64 000	-57 500	+ 50 000
TOTAL	-920 000	-790 000	+ 130 000		-790 000		15 000

PROBLEMA 2

En el diseño de un edificio industrial se nos presentan dos alternativas.

	A	B
Costo Inicial	\$ 500,000.00	\$ 1,200,000.00
Vida	20	40
L : VALOR DE SALVAMENTO.	100 000.00	200 000.00
Gastos de operación y mantenimiento	\$ 90,000.00 ✓	\$ 60,000.00
Gastos extras varios	- -	\$ 12,500.00

¿Cuál es la mejor alternativa utilizando una tasa mínima del 8% anual?

AÑO	A	B	A - B
0	-500,000	-1 200 000	-700 000
1 a 19	-90 000/año	-72 500/año	+17 500/año
20 {	-90 000 +100 000 -500 000	{ -72 500	+17 500 +400 000
21 a 39	-90 000/año	-72 500/año	+17 500/año
40 {	-90 000 +100 000	72 500 +200 000	+17 500 +100 000
TOTAL	-4 400 000	-3 900 000	+500 000

$$C.R.C_A = (500 - 100)(A/P, 8, 20) + 100(0.08)]10^3 + A_A$$

$$= 48,740$$

$$A_A = 90 000$$

$$C.A_A = 138 740$$

$$C.R.C_B = (1200 - 200)(A/P, 8, 40) + 200(0.08)$$

$$= 99860$$

$$A_B = 72 500$$

$$C.A_B = 172,360 \quad (\text{SOLUCIÓN})$$

PROBLEMA 3

Una máquina "A" tiene un costo inicial de medio millón de pesos, una vida estimada de servicio de 12 años, y un valor de salvamento también estimado de \$ 200,000.00 al final de los 12 años. Los gastos esperados por operación y mantenimiento son de \$ 60,000.00 el primer año, \$ 63,000.00 el segundo año y se irán incrementando en \$ 3,000.00 en cada uno de los años subsecuentes.

Se considera otra máquina "B" alternativa cuyo costo inicial es de \$ 300,000.00 y que no tiene valor de salvamento al final de los 12 años de vida. Los gastos estimados de operación y mantenimiento son de \$ 80,000.00 el primer año y de \$ 85,000.00 el segundo año y seguirán aumentando en \$ 5,000.00 en cada uno de los años subsecuentes.

Los impuestos por utilidades adicionales son de \$ 10,000.00 el primer año, \$ 11,000.00 el segundo y seguirán aumentando en \$ 1,000.00 cada año, entre la máquina "A" y la "B".

Empleando una tasa de interés del 10%, compare los costos anuales uniformes equivalentes de ambas máquinas para hacer la selección.

DATOS ALTERNATIVA (A)

$$P = 500\ 000$$

$$n_A = 12\ \text{años}$$

$$L_A = 200\ 000$$

G.O. y Mantenimiento

$$60\ 000.00\ 1^{\text{er}}\ \text{año}$$

$$63\ 000.00\ 2^{\text{do}}\ \text{año}$$

DATOS ALTERNATIVA (B)

$$P = 300\ 000$$

$$n_B = 12\ \text{años}$$

$$L_B = 0$$

GASTOS DE OP Y MANT.

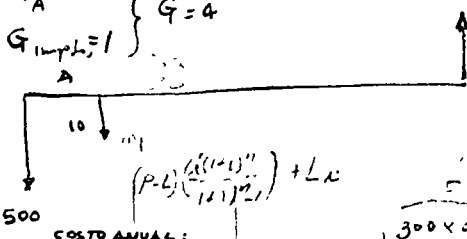
$$80\ 000\ 1^{\text{er}}\ \text{año}$$

$$85\ 000\ 2^{\text{do}}\ \text{año}$$

$$i = 10\% \text{ Hip.}$$

$$\left. \begin{array}{l} G_A = 3 \\ G_{\text{imp.}} = 1 \end{array} \right\} G = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} G_B = 5 \\ G_{\text{imp.}} = 1 \end{array} \right\}$$



$$C.A. = C.R.C. + A + A_G$$

$$C.A. = (500 - 200) \left(\frac{A}{P}, 10\%, 12 \right) + 200(0.1) + A + A_G = 151\ 600$$

RECIPIER.

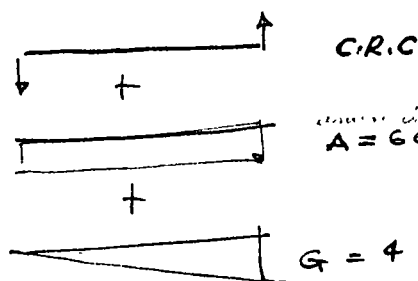
$$C_{A_1} = 151\ 588.00$$

$$C_{A_2} = 145\ 978.00$$

COMPARACION.

COSTO ANUAL B

$$C_{A_1} = [300 (0.1468) + 10 + 80 + 5 (4.39)] =$$



$$A_G = G \left(\frac{A}{G}, 10\%, 12 \right)$$

$$A_G = 400$$

$$A_G =$$

$$\begin{array}{r} 44040 \\ 20 \\ 70 \\ 17560 \end{array}$$

$$41040$$

$$\begin{array}{r} 3010 \\ 2110 \\ 45940 \end{array}$$

M E T O D O D E L A T A S A D E R E T O R N O

I.- ¿QUE ES LA TASA DE RETORNO?.-

La tasa de retorno puede ser definida como aquella tasa de interés para la cual el valor presente de los ingresos es exactamente igual al valor presente de los costos.

Las decisiones de aceptación-rechazo tomadas por éste método son compatibles y consistentes con aquellas tomadas mediante los Métodos del Costo Anual y Valor Presente.

Este método se utiliza cuando en lugar de ver si una inversión es buena dada una cierta tasa de interés que es atractiva para el inversionista, nos interesa calcular cuál será el rendimiento (tasa de retorno) que esa inversión nos suministrará.

A pesar de que existe un método matemático que nos proporciona la tasa de retorno exacta para una inversión, la solución del mismo suele ser bastante complicada, razón por la cual en general se usa un método de solución por prueba y error en el cual dos o mas tasas de interés se suponen para la inversión, se calculan los valores presentes correspondientes y la tasa de retorno se calcula por interpolación entre aquellas tasas que originaron cambio de signo en el valor presente.

La fórmula que se utiliza para encontrar la tasa de retorno por interpolación es la siguiente:

$$i = i_1 + (i_2 - i_1) \left[\frac{VP_{i1}}{VP_{i2} - VP_{i1}} \right]$$

II.- TASA DE RETORNO PARA UNA INVERSIÓN TERMINADA.-

Siempre es factible ver que tan productiva nos resultó una determinada inversión, sin importar que la misma ya esté terminada.

EJEMPLO 1.-

Hace 5 años se compró un auto de alquiler en \$22,000.00. Ese mismo año se pagaron \$3,000.00 por las placas, por lo que la inversión inicial ascendió a \$25,000.00. Al final del 5º año se vendió el auto en \$21,000.00 (placas incluidas) pero se pagaron \$1,000.00 de comisión de venta a la persona que consiguió al cliente. La columna 2 de la tabla muestra las percepciones tenidas al trabajar el auto mientras que la columna 3 muestra los desembolsos ocasionados por el mantenimiento del auto, impuestos, etc. la columna 4 muestra el neto resultante de percepciones menos desembolsos.

(1) Año	(2) Percepciones	(3) Desembolsos	(4) Neto
0		-\$25,000.00	-\$25,000.00
1	+\$ 4,000.00	-\$ 1,000.00	+\$ 3,000.00
2	+\$ 5,000.00	-\$ 1,000.00	+\$ 4,000.00
3	+\$ 5,000.00	-\$ 800.00	+\$ 4,200.00
4	+\$ 4,000.00	-\$ 1,100.00	+\$ 2,900.00
5	+\$ 5,000.00	-\$ 1,000.00	+\$ 4,000.00
5	+\$21,000.00	-\$ 1,000.00	+\$20,000.00
Totales	+\$44,000.00	-\$30,900.00	+\$13,100.00

Año	(5) V.P. a 10%	(6) V.P. a 12%
0	-\$25,000.00	-\$25,000.00
1	3,000 (0.9091) = +\$ 2,727.00	3,000 (0.8929) = +\$ 2,679.00
2	4,000 (0.8264) = +\$ 3,306.00	4,000 (0.7972) = +\$ 3,189.00
3	4,200 (0.7513) = +\$ 3,155.00	4,200 (0.7118) = +\$ 2,989.00
4	2,900 (0.6830) = +\$ 1,981.00	2,900 (0.6355) = +\$ 1,843.00
5	4,000 (0.6209) = +\$ 2,484.00	4,000 (0.5674) = +\$ 2,269.00
5	20,000 (0.6209) = +\$12,418.00	20,000 (0.5674) = +\$11,348.00
Totales	+\$ 1,071.00	-\$ 683.00

efectuando la interpolación lineal entre 10% y 12% obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \text{tasa de retorno} &= 10\% + (12\% - 10\%) \left[\frac{1,071}{1,071 + 683} \right] \\
 &= 10 + 2 \left[\frac{1,071}{1,754} \right] \\
 &= 10 + 2 \times 0.6106 \\
 &= 10 + 1.2212 \\
 &= 11.22\%
 \end{aligned}$$

III.- TASA DE RETORNO DE UNA INVERSION FUTURA.-

Siempre es conveniente que antes de efectuar una inversión analicemos el rendimiento que vamos a obtener de la misma para poder juzgar si es atractiva para nosotros o no.

EJEMPLO 2.-

Una propiedad puede ser comprada en \$300,000.00 y puede proporcionar unos ingresos anuales de \$50,000.00 con costos anuales de operación de \$20,000.00. Se estima que el costo de reventa dentro de 10 años será de \$150,000.00. Encontrar la tasa de retorno de esta inversión.

Solución.-

Año	Percepciones	Desembolsos	Neto
0		-\$300,000.00	-\$300,000.00
1	+\$ 50,000.00	-\$ 20,000.00	+\$ 30,000.00
2	+\$ 50,000.00	-\$ 20,000.00	+\$ 30,000.00
3	+\$ 50,000.00	-\$ 20,000.00	+\$ 30,000.00
4	+\$ 50,000.00	-\$ 20,000.00	+\$ 30,000.00
5	+\$ 50,000.00	-\$ 20,000.00	+\$ 30,000.00
6	+\$ 50,000.00	-\$ 20,000.00	+\$ 30,000.00
7	+\$ 50,000.00	-\$ 20,000.00	+\$ 30,000.00
8	+\$ 50,000.00	-\$ 20,000.00	+\$ 30,000.00
9	+\$ 50,000.00	-\$ 20,000.00	+\$ 30,000.00
10	+\$ 50,000.00	-\$ 20,000.00	+\$ 30,000.00
10	+\$150,000.00		+\$150,000.00

Sea $i = 6\%$:

$$\begin{aligned} \text{V.P.} &= -300,000 + 30,000(P/A, 6\%, 10) + 150,000(P/F, 6\%, 10) \\ &= -300,000 + 30,000(7.360) + 150,000(0.5584) \\ &= -300,000 + 220,800 + 83,760 \\ &= \$4,560.00 \end{aligned}$$

Sea $i = 7\%$:

$$\begin{aligned} \text{V.P.} &= -300,000 + 30,000(P/A, 7\%, 10) + 150,000(P/F, 7\%, 10) \\ &= -300,000 + 30,000(7.024) + 150,000(0.5083) \\ &= -300,000 + 210,720 + 76,245 \\ &= -\$13,035.00 \end{aligned}$$

interpolando:

$$\begin{aligned} i &= 6\% + (7\% - 6\%) \left[\frac{4,560}{4,560 + 13,035} \right] \\ &= 6 + (4,560/17,595) \\ &= 6 + 0.26 \\ &= 6.26\% \end{aligned}$$

IV.- TASA DE RETORNO CUANDO EL PERIODO DE INVERSION DURA VARIOS AÑOS.-

No siempre es posible el encontrar inversiones en donde el desembolso inicial se efectue en un solo año, sino que es mas probable encontrarlas con desembolsos iniciales distribuidos a lo largo de varios años. El tratamiento que se les dá a este tipo de problemas es el mismo que el que se ha visto hasta ahora, como lo podemos apreciar en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.-

La fabricación de un nuevo producto en una compañía manufacturera, requerirá de una inversión de \$400,000.00 en terreno. Esta inversión se deberá efectuar 2 años antes del inicio de operaciones de la nueva planta. La inversión en la estructura y el equipo, la cual se efectuará un año antes de la puesta en marcha de la planta, será de \$1,200,000.00 y \$1,050,000.00 se gastarán el año del inicio de operaciones por el mismo concepto anterior. Se invertirán \$300,000.00 en Capital de Trabajo en la fecha de inauguración. El exceso de ingresos sobre desembolsos (a excepción de aquellos debidos a impuestos), se estiman como \$150,000.00 para el primer año de operaciones, \$300,000.00 para el 2o., \$450,000.00 para el 3° y \$600,000.00 cada año entre los años 4° y 13°. En el año 14 serán de \$400,000.00 y en el 15° de \$200,000.00. Los desembolsos anuales por causa de impuestos se estiman como el 50% del exceso de las cifras anteriores sobre \$150,000.00.

Encuentre la probable tasa de retorno después del pago de los impuestos, bajo la suposición de que la planta (equipo y estructura) tendrá valor cero de salvamento al final de los 15 años y que las inversiones en tierra y capital de trabajo se recobrarán totalmente en esta fecha.

Solución.-

Año	Flujo Monetario Antes de Imptos.	Flujo Monetario Después Imptos	Valor Presente en el Año 0	
			7%	8%
-2	-\$ 400,000	-\$ 400,000	-400,000 (F/P, 7%, 2) = -400,000 (1.1449) = -\$ 457,960	-400,000 (F/P, 8%, 2) = -400,000 (1.1664) = -\$ 466,560
-1	-\$1,200,000	-\$1,200,000	-1,200,000 (F/P, 7%, 1) = -1,200,000 (1.0700) = -\$1,284,000	-1,200,000 (F/P, 8%, 1) = -1,200,000 (1.0800) = -\$1,296,000
0	-\$1,350,000	-\$1,350,000	-\$1,350,000	-\$1,350,000
1	+\$ 150,000	+\$ 150,000	+150,000 (P/F, 7%, 1) = +150,000 (0.9346) = +\$ 140,190	+150,000 (P/F, 8%, 1) = +150,000 (0.9259) = +\$ 138,885
2	+\$ 300,000	+\$ 225,000	+225,000 (P/F, 7%, 2) = +225,000 (0.8734) = +\$ 196,515	+225,000 (P/F, 8%, 2) = +225,000 (0.8573) = +\$ 192,892
3	+\$ 450,000	+\$ 300,000	+300,000 (P/F, 7%, 3) = +300,000 (0.8163) = +\$ 244,890	+300,000 (P/F, 8%, 2) = +300,000 (0.7938) = +\$ 238,140
4	+\$ 600,000	+\$ 375,000		
5	+\$ 600,000	+\$ 375,000		
6	+\$ 600,000	+\$ 375,000		
7	+\$ 600,000	+\$ 375,000		
8	+\$ 600,000	+\$ 375,000	+375,000 [(P/A, 7%, 13) - (P/A, 7%, 3)] = +375,000 [(8.358) - (2.624)] = +375,000 (5.734) = +\$2,150,250	+375,000 [(P/A, 8%, 13) - (P/A, 8%, 3)] = +375,000 [(7.904) - (2.577)] = +375,000 (5.327) = +\$1,997,625
9	+\$ 600,000	+\$ 375,000		
10	+\$ 600,000	+\$ 375,000		
11	+\$ 600,000	+\$ 375,000		
12	+\$ 600,000	+\$ 375,000		
13	+\$ 600,000	+\$ 375,000		
14	+\$ 400,000	+\$ 275,000	+275,000 (P/F, 7%, 14) = +275,000 (0.3878) = +\$ 106,645	+275,000 (P/F, 8%, 14) = +275,000 (0.3405) = +\$ 93,638
15	+\$ 900,000	+\$ 875,000	+875,000 (P/F, 7%, 15) = +875,000 (0.3624) = +\$ 317,100	+875,000 (P/F, 8%, 15) = +875,000 (0.3152) = +\$ 275,300
	+\$5,250,000	+\$2,625,000	+\$ 63,630	-\$ 175,590

interpolando:

$$i = 7\% + (8\% - 7\%) \left[\frac{63,630}{63,630 + 175,590} \right]$$

$$= 7 + 0.266$$

$$= 7.27\%$$

Debe notarse que en éste cálculo de valor presente intervinieron las cantidades compuestas correspondientes a los años -1 y -2. Exactamente el mismo resultado ($i = 7.27\%$) hubiera sido obtenido si el año cero hubiera sido nuestro año -2, pues como ya se mencionó con anterioridad, la obtención del valor presente puede considerarse en relación a cualquier año.

Las cantidades gastadas en los años -2, -1 y 0, así como la recuperación en el año 15 del valor del terreno y del capital de trabajo, no tienen efecto sobre la cantidad considerada para efectos del impuesto, debido a que se recuperan sin ninguna ganancia. De haberse obtenido una ganancia, se hubiese tenido que aplicar el impuesto correspondiente a ésta ganancia de capital.

El anterior proyecto sería aceptable si nuestra mínima tasa de retorno atractiva fuese menor que 7.27% y sería rechazado si ésta fuese mayor que 7.27%.

Se puede notar que en los tres ejemplos anteriores, el método utilizado para encontrar la tasa de retorno es el mismo, a pesar de que primero se trató de una inversión ya terminada y después de una inversión futura.

De los ejemplos anteriores es claro que el cálculo de la tasa de retorno requiere de mucha aritmética para calcular los valores presentes de las cifras para cada año, por lo menos para dos tasa de interés distintas (más de dos si nuestro cálculo inicial falló), razón por la cual es de suma importancia el tener siempre en mente el uso del Factor SerieUnif-Valor Actual en aquellos casos en que tenemos flujos monetarios anuales uniformes y del Factor Gradiente-Valor Actual cuando sea aplicable, con objeto de simplificar el trabajo de cálculo.

V.- DETERMINACION DE LA TASA DE RETORNO PROBABLE DE UNA INVERSION EN BONOS.

En muchas ocasiones se nos presenta la oportunidad de invertir en bonos u obligaciones las cuales se nos ofrecen a un precio diferente de su valor nominal y nos interesa ver que tan atractiva puede resultarnos ésta inversión.

EJEMPLO 4.-

Un bono de \$1,000.00 al 4%, vence dentro de 20 años y puede ser comprado por \$950.00. El interés sobre éste bono es pagadero semestralmente. Se desea saber la tasa de retorno de un comprador que retenga el bono hasta su fecha de maduración. Se desea conocer la tasa de retorno nominal.

Solución.-

Dado que los intereses son pagaderos semestralmente, calculamos primero la tasa de retorno semestral, para lo cual el número de periodos a considerar es de 40. El flujo monetario será:

<u>1/2 Años</u>	<u>Flujo Mon.</u>
0	-\$ 950.00
1 al 40	+\$ 20.00
40	+\$1,000.00

Sea $i = 2\%$:

Naturalmente a esta tasa de enterés, el valor presente de las percepciones será de \$1,000.00, por lo que el V.P. del flujo monetario será de:

$$-\$950 + \$1,000.00 = \$50.00$$

Sea $i = 2.5\%$:

$$\begin{aligned} \text{V.P.} &= -950 + 20(P/A, 2.5\%, 40) + 1,000(P/F, 2.5\%, 40) \\ &= -950 + 20(25.103) + 1,000(0.3724) \\ &= -\$75.50 \end{aligned}$$

interpolando:

$$\begin{aligned}
 i &= 2\% + (2.5\% - 2\%) \left[\frac{50}{50 + 75.50} \right] \\
 &= 2 + 0.5(50/125.5) \\
 &= 2.2\%
 \end{aligned}$$

por lo que la tasa de retorno anual nominal será:

$$2(2.2) = 4.4\%$$

VI.- COMPARACION DE TRES O MAS ALTERNATIVAS. PRECAUCIONES.-

Al comparar tres o mas alternativas, puede ser necesario calcular tanto la tasa de retorno general como la tasa de retorno incremental, razón por la cual se dice que el Método de la Tasa de Retorno en estos casos, requiere de mas trabajo ya que ni el Método de Costo Anual ni el de Valor Presente requieren de un análisis incremental. Estos 2 últimos métodos nos permiten la selección de una alternativa sin necesidad de dicho análisis incremental. El Método de la Tasa de Retorno. El Método de la Tasa de Retorno, sin un análisis incremental, solo nos permite escoger aquella alternativa que maximiza la tasa de retorno, siendo que alguna alternativa que tenga una tasa de retorno general mas baja pueda aun ser atractiva. La necesidad del análisis incremental se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.-

Se tienen tres planes para el mejoramiento de un proceso productivo: Plan A: Dejar la instalación tal como está; Plan B: efectuar reformas al equipo existente y Plan C: cambiar el equipo. Los costos asociados con las tres alternativas se dan a continuación. Se estima que la mínima tasa de retorno atractiva es de 10%.

Solución.-

Año	Plan A	Plan B	B - A	Plan C	C - B
0		-\$15,000	-\$15,000	-\$25,000	-\$10,000
1	-\$8,200	-\$ 5,100	+\$ 3,100	-\$ 4,300	+\$ 800
2	-\$8,200	-\$ 5,100	+\$ 3,100	-\$ 4,300	+\$ 800
3	-\$8,200	-\$ 5,100	+\$ 3,100	-\$ 4,300	+\$ 800
4	-\$8,200	-\$ 5,100	+\$ 3,100	-\$ 4,300	+\$ 800
5	-\$8,200	-\$ 5,100	+\$ 3,100	-\$ 4,300	+\$ 800
6	-\$8,200	-\$ 5,100	+\$ 3,100	-\$ 4,300	+\$ 800
7	-\$8,200	-\$ 5,100	+\$ 3,100	-\$ 4,300	+\$ 800
8	-\$8,200	-\$ 5,100	+\$ 3,100	-\$ 4,300	+\$ 800
9	-\$8,200	-\$ 5,100	+\$ 3,100	-\$ 4,300	+\$ 800
10	-\$8,200	-\$ 5,100	+\$ 3,100	-\$ 4,300	+\$ 800
10				+\$ 5,000	+\$ 5,000
	-\$82,000	-\$66,000	+\$16,000	-\$63,000	+\$ 3,000

Calculemos primero el valor presente de las 3 alternativas:

$$\begin{aligned}
 V.P._A &= 8,200 (P/A, 10\%, 10) = 8,200 (6.144) \\
 &= \$50,380.00 \\
 V.P._B &= 15,000 + 5,100 (P/A, 10\%, 10) = 15,000 + 5,100 (6.144) \\
 &= \$46,330.00 \\
 V.P._C &= 25,000 + 4,300 (P/A, 10\%, 10) - 5,000 (P/F, 10\%, 10) \\
 &= 25,000 + 4,300 (6.144) - 5,000 (0.3855) = 25,000 + 26,420 - 1,930 \\
 &= \$49,490.00
 \end{aligned}$$

y vemos que el Plan B resultaría elegido.

Nuestros cálculos de tasa de retorno deberán también conducirnos a la selección del Plan B.

Analicemos primero los planes A y B:

Sea $i = 15\%$:

$$\begin{aligned}
 V.P. &= -15,000 + 3,100 (P/A, 15\%, 10) \\
 &= -15,000 + 3,100 (5.019) \\
 &= -15,000 + 15,559 \\
 &= +\$559.00
 \end{aligned}$$

Sea $i = 20\%$:

$$\begin{aligned}
 V.P. &= -15,000 + 3,100 (P/A, 20\%, 10) \\
 &= -15,000 + 3,100 (4.192) \\
 &= -15,000 + 12,995 \\
 &= -\$2,005.00
 \end{aligned}$$

interpolando:

$$i = 16\%$$

El Plan B, comparado con el Plan A, promete una tasa de retorno del 16% que al ser mayor que el 10% establecido como mínimo, hace a B superior a A.

Analicemos ahora los planes B y C:

Sea $i = 3\%$:

$$\begin{aligned}
 V.P. &= -10,000 + 800 (P/A, 3\%, 10) + 5,000 (P/F, 3\%, 10) \\
 &= -10,000 + 800 (8.530) + 5,000 (0.7441) \\
 &= -10,000 + 6,824 + 3,720 \\
 &= +\$544.00
 \end{aligned}$$

Sea $i = 4\%$:

$$\begin{aligned}
 V.P. &= -10,000 + 800 (P/A, 4\%, 10) + 5,000 (P/F, 4\%, 10) \\
 &= -10,000 + 800 (8.111) + 5,000 (0.6756) \\
 &= -10,000 + 6,489 + 3,378 \\
 &= -\$133.00
 \end{aligned}$$

interpolando:

$$i = 3.8\%$$

La inversión adicional de \$10,000.00 requerida para el Plan C, rendirá únicamente el 3.8%, comparada con el Plan B. Dado que 3.8% es menor de nuestro mínimo del 10%, el Plan C no se justifica.

Se debe tener cuidado de no obtener conclusiones erróneas, debidas a la comparación de pares de alternativas equivocadas. Por ejemplo, si el Plan C se compara con el Plan A, la tasa de retorno resulta 10.8%. Alguien que favoreciera al Plan C, esgrimiría el argumento de que 10.8% es mayor que el 10% mínimo y que por lo tanto el Plan C se justifica.

Si el Plan B no existiera, entonces el Plan C sí se justificaría sobre el Plan A, pero debido a la disponibilidad del Plan B, el Plan C no es atractivo. El incremento de \$10,000.00 en gastos de C sobre B sólo rendirá 3.8%.

En general, cada incremento separable de inversión propuesto, debe de ser considerado en forma aparte para descubrir si se justifica o no.

VII.- TASA DE RETORNO DE ALTERNATIVAS CON VIDAS DIFERENTES.-

Para calcular la tasa de retorno en esta situación, es necesario que los dos planes sirvan durante el mismo número de años. Con objeto de lograr esto, se utiliza como período de estudio el mínimo común múltiplo de las vidas de las diferentes alternativas, para lo cual se hace la suposición de que los costos de reposición serán iguales a los costos iniciales.

EJEMPLO 6.-

Sean los datos del ejemplo 5 del capítulo del Método del Valor Presente. Allí teníamos:

	Quemador C	Quemador D
Costo Inicial	\$4,500.00	\$10,000.00
Vida	12 años	24 años
Costo Anual	\$1,000.00	\$720.00
Valor Salvamento	0	\$1,800.00

alternativas que fueron comparadas considerando $i = 5\%$.

Para efectos de cálculo, suponemos que a los 12 años tendríamos que reemplazar el quemador C al mismo costo inicial con lo cual el flujo monetario de la diferencia de los quemadores $D - C$ será:

Año	$D - C$
0	-\$5,500.00
1 al 12	+\$ 280.00
12	+\$4,500.00
13 al 24	+\$ 280.00
24	+\$1,800.00

Sea $i = 7\%$:

$$\begin{aligned}
 V.P. &= -5,500 + 280(P/A, 7\%, 24) + 4,500(P/F, 7\%, 12) + 1,800(P/F, 7\%, 24) \\
 &= -5,500 + 280(11.469) + 4,500(0.4440) + 1,800(0.1971) \\
 &= -5,500 + 3,211 + 1,998 + 355 \\
 &= +\$64.00
 \end{aligned}$$

Sea $i = 8\%$:

$$\begin{aligned}
 V.P. &= -5,500 + 280(P/A, 8\%, 24) + 4,500(P/F, 8\%, 12) + 1,800(P/F, 8\%, 24) \\
 &= -5,500 + 280(10.529) + 4,500(0.3971) + 1,800(0.1577) \\
 &= -5,500 + 2,948 + 1,789 + 284 \\
 &= -\$479.00
 \end{aligned}$$

interpolando:

$$i = 7.12\%$$

El mismo resultado se obtendría si en lugar de haber calculado el valor presente de la diferencia $D - C$, se hubiese calculado el V.P. de la alternativa D y el V.P. de la alternativa C, para 7% y para 8% y se hubiese efectuado la interpolación entre los valores obtenidos de la diferencia de los V.P. a cada tasa de interés.

Se vé que la inversión extra de \$5,500.00 si es atractiva ya que se recupera con 7.12%, mientras que nuestra mínima $i = 5\%$.

VIII.- ESTIMACION INICIAL DE LA TASA DE RETORNO.-

Con objeto de evitar trabajo aritmético inútil y tedioso, es conveniente hacer la primera estimación para el cómputo del valor presente a una tasa de interés cercana a la tasa de retorno desconocida.

La primera cosa que debe de hacerse antes de probar con la primera tasa de interés, es efectuar una inspección del flujo monetario que se llevará a cabo, con lo cual podremos anticipar si la tasa de retorno será alta o baja.

En muchas ocasiones es conveniente efectuar un cálculo preliminar que nos permita conocer aproximadamente cual será el valor de la tasa de retorno buscada.

Sea el caso del ejemplo 2 de éste capítulo en el cual tenemos un desembolso inicial de \$300,000.00 y percepciones anuales de \$30,000.00 durante 10 años y \$150,000.00 en el 10° año. Se puede suponer que los \$150,000.00 se reparten en los 10 años, dando un ingreso de \$45,000.00 anuales, con lo que resulta que:

$$\begin{aligned} 45,000 (P/A, i\%, 10) &= 300,000 \\ (P/A, i\%, 10) &= 300,000 / 45,000 \\ &= 6.667 \end{aligned}$$

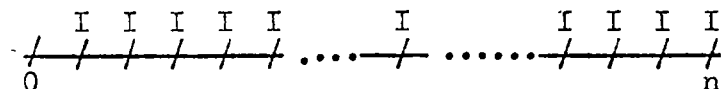
mirando en las tablas, $(P/A, 8\%, 10) = 6.710$, por lo que tomando en consideración que hemos adelantado las fechas de recepción de los \$150,000.00, debemos suponer que la tasa de retorno deberá ser mas baja, por lo que empezamos el primer cálculo con $i = 7\%$, siendo la siguiente tasa de interés escogida de acuerdo al valor presente obtenido.

IX.- TASAS DE RETORNO DUALES.-

Para la mayoría de los problemas realistas en estudios económicos, existe una y solo una tasa de retorno (solución única). Existen sin embargo unos patrones de flujo monetario que pueden resultar en mas de una tasa de retorno. La posibilidad de una solución no única se señala cuando el flujo monetario anual neto acumulado cambia de signo mas de una vez. Si el flujo monetario anual neto acumulado cambia de signo sólo una vez, entonces tenemos asegurada una solución única.

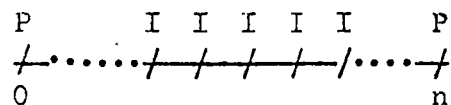
En general, se presenta tasa de retorno dual cuando:

a) La distribución en el tiempo del ingreso anual I y del costo de inversión P tiene la siguiente forma:



es decir, cualquier secuencia $I - P - I$ en donde $P < \sum_{i=0}^n I$

b) Si la distribución de I y P en el tiempo es:



es decir, cualquier secuencia en el tiempo P-I-P si $\sum_{i=0} P > \sum_{i=0} I$

Quando 2 o mas tasas de retorno se pueden presentar, los dos casos anteriores nos marcan la pauta para poder preveerlos. Así pues, si tenemos I-P-I-P-I, las 4 inversiones de signo sugieren la posibilidad de 4 tasas de retorno si $\sum_{i=0} P < \sum_{i=0} I$.

EJEMPLO 7.-

Sea el siguiente flujo monetario durante 20 años:

Año	Ingresos	Desembolsos
1 al 20	\$1,000	
4		\$10,000

Sea $i = 20\%$:

$$\begin{aligned}
 V.P. &= -10,000 (P/F, 20\%, 4) + 1,000 (P/A, 20\%, 20) \\
 &= -10,000 (0.4823) + 1,000 (4.870) \\
 &= -4,823 + 4,870 \\
 &= +\$47.00
 \end{aligned}$$

Sea $i = 25\%$:

$$\begin{aligned}
 V.P. &= -10,000 (P/F, 25\%, 4) + 1,000 (P/A, 25\%, 20) \\
 &= -10,000 (0.4096) + 1,000 (4.870) \\
 &= -4,096 + 3,954 \\
 &= -\$142.00
 \end{aligned}$$

interpolando:

$$i = 21.24\%$$

sin embargo, vemos que éste flujo monetario sigue el patrón I-P-I y además $P < \sum_{i=0} I$ ya que $\$10,000.00 < \$20,000.00$, por lo que deberá existir otra tasa de retorno.

Sea $i = 50\%$:

$$\begin{aligned}
 V.P. &= -10,000 (P/F, 50\%, 4) + 1,000 (P/A, 50\%, 20) \\
 &= -10,000 (0.1975) + 1,000 (1.999) \\
 &= -1,975 + 1,999 \\
 &= +\$24.00
 \end{aligned}$$

Sea $i = 45\%$:

$$\begin{aligned}
 V.P. &= -10,000 (P/F, 45\%, 4) + 1,000 (P/A, 45\%, 20) \\
 &= -10,000 (0.2262) + 1,000 (2.221) \\
 &= -2,262 + 2,221 \\
 &= -\$41.00
 \end{aligned}$$

interpolando:

$$i = 48.16\%$$

X.- PUNTOS DE VISTA CONTABILIDAD VS. INGENIERIA ECONOMICA RESPECTO A LA TASA DE RETORNO.-

Si existin divergencias entre el analista de Ingeniería Económica y el Contador, esto no es debido a errores en las técnicas de sus respectivas profesiones, sino a una mutua incomprensión respecto a lo que cada uno de ellos está haciendo. Sin embargo, una mutua comprensión debe ser desarrollada, ya que el economista debe trabajar con el contador o con sus libros de cuentas con objeto de obtener datos para predecir proyectos futuros o auditar proyectos pasados; así mismo, los altos ejecutivos financieros con entrenamiento contable deben a menudo aprobar o rechazar las demandas para gastos de capital.

El contador puede fácilmente no estar de acuerdo con el Método de la Tasa de Retorno, debido a que en él se carga la tasa de interés i al costo de cada alternativa, mientras que el contador nunca carga como costo el interés a menos que éste sea un desembolso. Obviamente cada uno está hablando de cosas diferentes. El economista, trabajando en el futuro, suma "i" no como un interés sino como una ganancia que debe ser obtenida en el futuro para asegurar la continuación del negocio. El contador, por el otro lado, examina el pasado y no suma esta tasa i de ganancia a sus libros debido a que el resultado neto de sus esfuerzos es el de encontrar esta cifra, la cual representa la ganancia neta obtenida debida a operaciones pasadas. El economista adjudica este "interés" de forma que el contador pueda subsecuentemente encontrarlo, como ganancia.

Otra area de desacuerdo frecuente puede ser la diferencia en los períodos de vida usados por el contador y el economista al computar las ganancias de la empresa.

XI.- PRECAUCIONES A TOMAR EN LA INTERPRETACION DE LAS TASAS DE INTERES.-

En múltiples ocasiones, un examen superficial de una inversión puede conducir a una subvaloración de la tasa de interés que está siendo pagada en realidad.

Esta situación se presenta por ejemplo en la compra de una propiedad a plazos en la cual existe una diferencia de precio para un comprador de contado y para el comprador que accede a pagar el precio de compra en pagos periódicos con interés.

EJEMPLO 8.-

Un coche está en venta en \$24,000.00 bajo las siguientes condiciones: \$4,000.00 de enganche y los \$20,000.00 restantes a pagarse en pagos anuales durante 15 años con interés al 7%. También se debe pagar \$600.00 de gastos de apertura de crédito. El coche puede ser comprado en \$21,000.00 al contado

El pago anual sería:

$$\begin{aligned} A &= 20,000 (A/P, 7\%, 15) \\ &= 20,000 (0.10979) \\ &= \$2,196.00 \end{aligned}$$

La alternativa es entonces pagar \$21,000.00 ahora o bien pagar \$4,600.00 de enganche y \$2,196.00 durante 15 años. Estos \$2,196.00 anuales son una alternativa para el pago de \$16,400.00 ahora.

El costo real de la compra a plazos sería:

$$\frac{A}{P} = \frac{2,196}{16,400} = 0.1339$$

interpolando entre $i = 10\%$ e $i = 12\%$ obtenemos que:

$$i = 10.3\%$$

La diferencia entre el interés aparente del 7% y el interés real del 10.3% pagado por el comprador a plazos, es debida a la diferencia entre el precio de contado y el precio de crédito, además de los cargos iniciales correspondientes al préstamo.

XII.- DIFERENCIAS ENTRE LOS DISTINTOS METODOS DE COMPARACION EN LA FORMA DE COMUNICAR CUAL ES LA ALTERNATIVA MAS ATRACTIVA.-

Se han presentado 3 métodos básicos para la comparación de alternativas. Los 3 métodos son equivalentes, pero la forma de comunicar sus resultados es diferente en cada uno de ellos.

EJEMPLO 9.-

Una máquina, cuyo costo inicial es de \$8,500.00, tendrá costos anuales de operación de \$4,500.00. Un proceso alternativo costará \$7,000.00 inicialmente y costará \$4,800.00 anuales. Ambas alternativas tienen una vida económica de 10 años y la tasa mínima de retorno es de 10% . Compare estas alternativas por los tres métodos.

Solución.-

a)

$$\begin{aligned} C.A. A &= 8,500 (A/P, 10\%, 10) + 4,500 \\ &= 8,500 (0.16275) + 4,500 \\ &= \$5,883.00 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C.A. B &= 7,000 (A/P, 10\%, 10) \\ &= 7,000 (0.16275) + 4,800 \\ &= \$5,939.00 \end{aligned}$$

$$\text{Ventaja en costo anual para A: } \$5,939 - \$5,883 = \$56.00$$

b)

Ventaja en valor presente para A:

$$56 (P/A, 10\%, 10) = 56 (6.144) = \$344.00$$

c)

Tasa de retorno de la inversión extra en A:

$$\begin{aligned} 1,500 &= 300 (P/A, i\%, 10) \\ (P/A, i\%, 10) &= 5 \end{aligned}$$

interpolando entre los valores encontrados en las tablas para 15% y 20% :

$$i = 15.1\%$$

M E T O D O D E L V A L O R P R E S E N T E

I.- INTRODUCCION.-

El Método de Comparación del Valor Presente consiste básicamente en la reducción de todas las diferencias entre las alternativas a una suma actual equivalente.

Existen tres usos fundamentales para los cálculos de valor presente:

a) Comparación de series alternativas de percepciones monetarias y desembolsos estimados.

b) Para efectuar una evaluación sobre percepciones monetarias probables.

c) Para el cálculo por prueba y error de la Tasa de Retorno.

El Valor Presente es lo que comercialmente se conoce como Valor Descontado. Por ejemplo descontar una letra en un banco.

EJEMPLO 1.-

Para la Dirección de Aguas y Saneamiento se le propone usar ya sea una tubería de 10" o una de 12" en una instalación que está proyectando. La tubería de 10" tiene un costo inicial de \$45,000.00 y su costo anual de bombeo se estima en \$9,000.00. La tubería de 12" tiene un costo inicial de \$60,000.00 con un costo anual de bombeo estimado en \$5,500.00. El servicio se requerirá durante 15 años; no se espera ningún valor de salvamento para ninguna de las dos alternativas. El impuesto anual de propiedad se estima como el 2% del costo inicial, mientras que los demás impuestos anuales se estiman en el 3% del costo inicial. Compare los Valores Presentes del costo de los 15 años de servicio para las dos alternativas usando una tasa de interés del 6%.

Solución.-

	<u>Tubería 10"</u>	<u>Tubería 12"</u>
Costo Inicial =	\$45,000.00	\$60,000.00
V.P. del Costo de Bombeo:		
9,000 (P/A, 6%, 15) = 9,000 (9.712) =	\$87,408.00	
5,500 (P/A, 6%, 15) = 5,500 (9.712) =		\$53,416.00
V.P. de los Impuestos Anuales:		
45,000 (0.02) (P/A, 6%, 15)		
= 45,000 (0.02) (9.712) =	\$ 8,741.00	
45,000 (0.03) (P/A, 6%, 15)		
= 45,000 (0.03) (9.712) =	\$13,111.00	
60,000 (0.02) (P/A, 6%, 15)		
= 60,000 (0.02) (9.712) =		\$11,654.00
60,000 (0.03) (P/A, 6%, 15)		
= 60,000 (0.03) (9.712) =		\$17,432.00
	<u>\$154,260.00</u>	<u>\$142,552.00</u>

Vemos del ejemplo anterior que la diferencia de valores presentes es:

\$11,708.00

y que el % extra del valor presente de 10" sobre el valor presente de 12" es de:

8.21%

II.- CONVERSION DE VALOR PRESENTE A COSTO ANUAL Y VICEVERSA.

En el tema anterior se vió que el Costo Anual se calculaba directamente de los flujos monetarios estimados. Una alternativa para encontrar dichos Costos Anuales sería la de primero calcular el Valor Presente y a partir de él calcular el Costo Anual usando el Factor de Recuperación de Capital ($A/P, i\%, n$).

El hecho de que una comparación de Valor presente pueda ser convertida a Costo Anual (y viceversa) es muy significativo. Esto indica que todos los principios que se aplican a las comparaciones de Costo Anual pueden también ser aplicadas al valor presente. P. ej. el hecho de que sólo las diferencias son relevantes, etc.

En general, el Costo Anual puede ser calculado a partir del valor Presente multiplicando éste por el Factor de Recuperación de Capital adecuado ($A/P, i\%, n$); el Valor Presente puede ser calculado partiendo del Costo Anual, multiplicando éste por el Factor de Series Uniformes-Valor Actual adecuado ($P/A, i\%, n$), o dividiéndolo entre el Factor de Recuperación de Capital.

Es importante hacer notar que aquella alternativa que resulta favorecida en una comparación de Costo Anual, resulta también favorecida en una comparación de Valor Presente y además por la misma proporción (siempre y cuando se utilice la misma tasa de interés en ambas comparaciones).

EJEMPLO 2.-

Encontrar los Costos Anuales para las alternativas del Ejemplo 1.

Solución.-

$$C.A. 10" = \$154,260 (A/P, 6\%, 15) = 154,260 (0.10296) = \$15,883.00$$

$$C.A. 12" = \$142,552 (A/P, 6\%, 15) = 142,552 (0.10296) = \$14,677.00$$

vemos en éste ejemplo que la diferencia de Costos Anuales es de :

\$1,206.00

y que el % extra del Costo Anual de 10" sobre el Costo anual de 12" es:

8.21%

III.- IMPORTANCIA DEL PERIODO DE TIEMPO CONSIDERADO EN EL ESTUDIO.

El Valor Presente de una serie depende naturalmente del número de términos en la serie y por lo tanto de la longitud del tiempo sobre el cual se computa el Valor Presente. El Valor Presente de una ventaja de \$1,000.00 de Costo Anual, tiene un valor sobre un período de 5 años y otro diferente sobre un período de 10 años.

¿Qual debe de ser el período de tiempo usado en una comparación de Valor Presente?. Este período deberá ser aquel durante el cual se espera que existan diferencias de costos entre las alternativas. Es por esto que una comparación de Valor Presente deberá efectuarse sobre el mismo número de años para cada alternativa. Lo anterior es apropiado debido a que cualquier acción que se tome al concluir éste período común es irrelevante para nuestro estudio, debido a que será la misma para ambas alternativas. Mas adelante veremos como solucionar el problema de alternativas con vidas diferentes.

IV.- SIGNIFICADO DE UNA COMPARACION POR VALOR PRESENTE.-

En el ejemplo 1, la alternativa 12" tenía una ventaja de valor presente de \$11,708.00. ¿Que es lo que esto significa?

Del ejemplo 2 vemos que la alternativa 12" requiere de una mayor inversión inicial pero que también tiene un menor costo anual, por lo que podemos concluir que la inversión extra es recuperada a la tasa de interés requerida mas una suma presente de dinero.

El Método de Comparación de Valor presente demuestra las ventajas o desventajas de una selección en formas que no son posibles para el Método del Costo Anual. Estas posibilidades surgen del hecho de que las diferencias entre las alternativas pueden ser expresadas como una sola cantidad en lugar de una serie de cantidades.

Un ejemplo puede encontrarse cuando se trata de demostrar al comprador consciente del precio, la diferencia entre el precio y el costo total de comprar algo. Debe observarse que una decisión de compra implica el compromiso de pagar por todos los gastos de operación durante el tiempo de servicio de la propiedad adquirida; por lo tanto el comparar el precio y los compromisos totales expresados como una sóla cantidad, demuestra la importancia relativa del costo inicial respecto al costo total.

EJEMPLO 3.-

Busquemos el valor presente de la diferencia en flujos monetarios entre las alternativas del ejemplo 1.

	<u>Tub 10"</u>	<u>Tub 12"</u>	<u>Dif 10" - 12"</u>
Costo Inicial	\$45,000.00	\$60,000.00	-\$15,000.00
Costo Anual de Bombeo	\$ 9,000.00	\$ 5,500.00	+\$ 3,500.00
Costo Anual por Imptos	\$ 2,250.00	\$ 3,000.00	-\$ 750.00
			+\$2,750.00

$$\begin{aligned}
 \text{V.P.} &= -15,000 + 2,750(P/A, 6\%, 15) \\
 &= -15,000 + 2,750(9.712) \\
 &= -15,000 + 26,708 \\
 &= \$11,708.00
 \end{aligned}$$

mismos que habíamos ya obtenido de restar el V.P. de la tubería de 10" menos el V.P. de la tubería de 12".

Se vé que los \$15,000.00 extra en el costo inicial se recuperan de los futuros ahorros descontados al 6% mas una suma actual de

\$11,708.00 , o viendolo mas precisamente, la inversión extra será recuperada durante un período de 15 años a un 6% mas una suma actual de \$11,708.00.

Para el caso en que la alternativa con una inversión inicial tenga también un mayor valor presente, la interpretación es que la inversión extra no puede ser recuperada con el 1% de interés precisamente por la cantidad de la diferencia del valor presente.

V.- COMPARACION DE ALTERNATIVAS QUE ENVUELVEN SERIES IRREGULARES DE DESEMBOLOSOS.-

Cuando se presenta este caso, el Método del Valor Presente tiene ventajas de cálculo sobre el Método del Costo Anual, ya que para éste último es necesario pasar primero todas las cantidades a valor presente antes de transformarlas en costos anuales.

Veamos como tratar ésta situación por medio de un ejemplo.

EJEMPLO 4.-

Un programa de expansión completo para una compañía de productos químicos (Plan A), deberá ser comparado con un programa escalonado para el mismo fin (Plan B), sirviendo ambos durante 50 años. El Plan A requiere de una inversión de \$700,000.00 ahora. El Plan B requiere de un gasto de \$400,000.00 ahora, \$300,000.00 dentro de 10 años y \$300,000.00 dentro de 20 años. Los desembolsos anuales estimados para el Plan A respecto al Plan B, son de \$10,000.00 extra durante los primeros 10 años, iguales durante los segundos 10 años y \$5,000.00 menos durante los 30 años finales. Comparar el valor presente de los dos planes usando $i = 7\%$. Ninguno de los dos planes tiene valor de salvamento.

Solución.-

<u>Año</u>	<u>A</u>	<u>B</u>	<u>A - B</u>
0	-\$700,000.00	-\$400,000.00	-\$300,000.00
1 al 10	-\$ 10,000.00	--	-\$ 10,000.00
10	--	-\$300,000.00	+\$300,000.00
11 al 20	--	--	--
20	--	-\$300,000.00	+\$300,000.00
21 al 50	--	-\$ 5,000.00	+\$ 5,000.00
<u>Totales</u>	<u>-\$800,000.00</u>	<u>-\$1150,000.00</u>	<u>=\$350,000.00</u>

PLAN A.-

Inversión Inicial =	\$700,000.00
V.P. de los desembolsos extra durante los 1os. 10 años:	
$10,000(P/A, 7\%, 10) = 10,000(7.024) =$	\$ 70,240.00
	<u>\$770,240.00</u>

PLAN B.-

Inversión Inicial =	\$400,000.00
V.P. de la inversión hecha a los 10 años: $300,000(P/F, 7\%, 10) = 300,000(0.5083) =$	\$152,490.00
V.P. de la inversión hecha a los 20 años: $300,000(P/F, 7\%, 20) = 300,000(0.2584) =$	\$77,520.00
V.P. de los gastos entre los años 21 y 50: $5,000[(P/A, 7\%, 50) - (P/A, 7\%, 20)]$ $= 5,000(13.801 - 10.594) = 5,000(3.207) =$	\$ 16,035.00
	\$646,045.00

Nótese que el valor presente de los gastos entre los años 21 y 50 del Plan B también se pudo haber calculado así:

$$\begin{aligned}
 \text{V.P.} &= 5,000(P/A, 7\%, 30)(P/F, 7\%, 20) \\
 &= 5,000(12.409)(0.2584) \\
 &= 5,000(3.207) \\
 &= \$16,035.00
 \end{aligned}$$

De los cálculos anteriores resulta evidente que la alternativa B es la más económica.

VI.- COMPARACIONES DE VALOR PRESENTE CUANDO LAS ALTERNATIVAS TIENEN VIDAS DIFERENTES.-

Como ya se había mencionado en el punto III, las comparaciones de valor presente deberán efectuarse siempre sobre el mismo número de años para cada alternativa. Al analizar costos anuales, el problema de que las alternativas tuviesen vidas diferentes se resolvió con la suposición de que el costo de reposición sería el mismo que el costo inicial que se hubiese considerado para el presente. Para el cálculo del valor presente seguiremos con la misma suposición.

Cuando se asume la anterior suposición de que los costos actuales se repetirán para las reposiciones, el período de estudio se considera como el mínimo común múltiplo de las vidas de las diferentes alternativas involucradas.

EJEMPLO 5.-

Se está proyectando una compañía laminadora de acero y existen dos alternativas para el quemador del horno. El quemador C tiene un costo inicial de \$4,500.00, una vida estimada de 12 años y no tendrá valor de salvamento, su costo de mantenimiento anual será de \$1,000.00. El quemador D tiene un costo inicial de \$10,000.00, vida estimada de 24 años, valor de salvamento de \$1,800.00 y costo anual de mantenimiento de \$720.00. Comparar los valores presentes del costo de 24 años de servicio usando $i=5\%$.

Solución.-

	Quemador C	Quemador D
Costo Inicial =	\$4,500.00	\$10,000.00
V.P. del costo de reemplazo: $4,500(P/F, 5\%, 12) = 4,500(0.5568) =$	\$2,506.00	
V.P. del valor de salvamento: $-1,800(P/F, 5\%, 24) = -1,800(0.3101) =$		-\$ 558.00
V.P. del costo anual de mantenimiento: $1,000(P/A, 5\%, 24) = 1,000(13.799) =$ $720(P/A, 5\%, 24) = 720(13.799) =$	\$13,799.00 \$20,805.00	\$ 9,935.00 \$19,377.00

Vemos que el quemador D es el que económicamente es mas recomendable.

Cabe hacer notar que las comparaciones no son muy sensitivas a cambios en el valor estimado del valor de salvamento distante aunque el interés sea muy bajo. Por ejemplo, un peso dentro de 50 años vale 2.13 centavos hoy si $i = 8\%$.

VII.- COMPARACIONES SOBRE UN PERIODO DE SERVICIO DETERMINADO.-

En ocasiones, es deseable el efectuar un análisis, en donde las alternativas tienen vidas diferentes, escogiendo un período arbitrario de análisis que es mas corto que el período esperado de servicio o vida total de las alternativas; por ejemplo cuando un equipo se usará en un trabajo de duración conocida y la comparación se desea efectuar sobre ese período de duración del trabajo. Cuando es éste el caso, se efectúan valuaciones sobre el equipo al final del período de análisis, considerándose esta valuación como el valor de salvamento.

EJEMPLO 6.-

Un contratista tiene una obra que durará 2 años. Se tiene que acarrear un material hasta la obra para lo cual existen dos alternativas: El Plan E que consiste en comprar un transportador con costo inicial de \$100,000.00 y costo anual de operación de \$70,000.00. La vida del transportador es de 5 años, pero al final del 2o. año el analista le calcula un valor de \$40,000.00. Como alternativa tiene el Plan F que consiste en subcontratar el trabajo de acarreo a un costo de \$15,000.00 al mes. Efectuar una comparación de valor presente si $i = 8\%$.

Solución.-

PLAN E.-

$$\begin{aligned} \text{V.P.} &= 100,000 + 70,000(P/A, 8\%, 2) - 40,000(P/F, 8\%, 2) \\ &= 100,000 + 70,000(1.783) - 40,000(0.8573) \\ &= 100,000 + 124,810 - 34,292 \\ &= \$190,518.00 \end{aligned}$$

PLAN F.-

$$\begin{aligned} \text{V.P.} &= 12 \times 15,000(P/A, 8\%, 2) \\ &= 180,000(1.783) \\ &= \$320,940.00 \end{aligned}$$

y vemos que es mas económico comprar el transportador.

VIII.- COSTOS CAPITALIZADOS.-

Una comparación de costos capitalizados no es otra cosa que una comparación de valor presente para un período que se supone infinito.

El análisis por costos capitalizados es apropiado cuando las vidas económicas son indefinidamente largas "a los ojos del analista" o bien cuando se vislumbran una serie de reemplazos "al mismo costo" a lo largo del tiempo.

Un análisis típico de costos capitalizados se ilustra con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7.-

Se está considerando la compra de dos posibles tipos de maquinaria cuyos costos serán:

	Máquina G	Máquina H
Costo Inicial	\$8,000.00	\$12,000.00
Vida	12 años	18 años
Costo de Reemplazo	\$5,000.00	\$ 5,000.00
Costo Anual de Mto.	\$ 400.00	\$ 300.00

El reemplazo se efectúa solamente en las partes móviles del equipo, razón por la cual el costo de reemplazo no corresponde al costo inicial.

Compare las dos alternativas sobre la base de costos capitalizados para una vida perpetua usando interés al 3.5% anual.

Solución.-

	Máquina G	Máquina H
Costo Inicial =	\$8,000.00	\$12,000.00
V.P. del costo de reemplazo:		
5,000(A/F, 3.5%, 12) ÷ 0.035		
= 5,000(0.06848) ÷ 0.035		
= 342.4 ÷ 0.035 =	\$9,732.00	
5,000(A/F, 3.5%, 18) ÷ 0.035		
= 5,000(0.04082) ÷ 0.035		
= 204.1 ÷ 0.035 =		\$ 5,830.00
V.P. del Costo Anual de Mto.:		
400 ÷ 0.035 =	\$11,428.00	
300 ÷ 0.035 =		\$ 8,570.00
	<u>\$29,210.00</u>	<u>\$26,400.00</u>

de donde la máquina H es la más económica.

Debe notarse que el primer paso que se siguió fué el de convertir los costos de reemplazo en costos anuales. Así, \$5,000.00 al final de 12 años equivales a \$342.40 anuales por siempre (debido a los siguientes costos de reemplazamiento), mientras que \$5,000.00 al final de 18 años equivalen a \$204.10 al año, por siempre. El valor presente entonces, se puede calcular dividiendo ésta cifra entre la tasa de interés expresada en forma decimal. Esto es correcto, ya que podemos considerar que una cantidad P a un interés anual de 3.5% nos reditúa en un caso \$342.40 y en el otro \$204.10, por lo que:

$$\begin{aligned} \text{Si: } P_1 \times 0.035 &= 342.40 & \text{entonces } P_1 &= 342.40 \div 0.035 \\ P_2 \times 0.035 &= 204.10 & \text{entonces } P_2 &= 204.10 \div 0.035 \end{aligned}$$

La diferencia entre Costos Capitalizados y Valor Presente se vá haciendo menor a medida que el período considerado es mayor.

EJEMPLO 8.-

Una represa (I) cuesta \$1,000,000.00 y costará \$150,000.00 al año mantenerla y operarla. Otro diseño (J) costará \$1,500,000.00 para su construcción y \$100,000.00 anuales el operarla y mantenerla. Ambas instalaciones se pueden considerar permanentes. La tasa de interés es 5%.

Solución.-

	Presa I	Presa J
Valor Inicial =	\$1,000,000	\$1,500,000
Costo Cap. del costo anual:		
* 150,000 $\div$ 0.05 =	\$3,000,000	
** 100,000 $\div$ 0.05 =		\$2,000,000
	<u>\$4,000,000</u>	<u>\$3,500,000</u>

también se pudo haber calculado:

$$* = 150,000 (P/A, 5\%, \infty) = 150,000 \times 20.0 = \$3,000,000$$

$$** = 100,000 (P/A, 5\%, \infty) = 100,000 \times 20.0 = \$2,000,000$$

IX.- INVERSIONES DIFERIDAS.-

Aquella decisiones que se efectúan con vista a satisfacer emergencias inmediatas, en general resultan muy costosas a la larga.

En aquellos casos en que se desprecia la planeación, es muy factible el cometer errores que costarán mucho mas para ser corregidos que lo que hubiese costado evitarlos. Una planeación del crecimiento es pues una parte esencial en todo diseño de ingeniería.

En problemas que envuelven crecimiento o expansión planeada, es a menudo mas económico el instalar una planta de plena capacidad antes de que sea necesaria que el diferir la adición de mas equipo hasta el momento en que sea necesario. Algunos de los factores económicos que hacen ventajoso el instalar plantas de plena capacidad antes de que sea necesitada son:

a) Posibles incrementos en los costos reales de instalar mas equipo como el actual en el futuro.

b) Los problemas que ocasiona en el negocio la nueva adición (Interferencias con producción, etc.).

c) La observación económica de que una instalación mas grande produce unidades con un costo por unidad menor que dos instalaciones pequeñas.

Un ejemplo de lo mencionado en el párrafo anterior es que la adición a la capacidad de los ductos subterráneos para cables de telefonos de México, requiere de una zanja que debe ser rellena y repavimentada mientras que si se instalan ductos con capacidad sobrada, el gasto futuro consiste sólo en el costo de la introducción del cable.

Por el otro lado, una serie de factores económicos trabajan en contra de todos los requerimientos futuros sean instalados antes de que sean necesitados. La respuesta a si instalar plena capacidad ahora o solo la requerida actualmente debe ser encontrada mediante un análisis económico.

EJEMPLO 9.-

Un equipo para eliminar los desperdicios industriales de una planta, puede ser instalado por \$30,000.00 con costos anuales de operación de \$5,000.00. Este equipo cubre las necesidades completas de la fábrica durante 10 años al final de los cuales esta capacidad debe duplicarse mediante la instalación de un equipo idéntico. La vida del primer equipo se estima en 20 años mientras que la del segundo en sólo 10 años debido al tipo de desperdicios que tendrá que manejar. Como alternativa existe la posibilidad de instalar la plena capacidad anticipada desde el primer momento a un costo de \$50,000.00 y costo anual de operación de \$6,000.00 durante los primeros 10 años y de \$9,500.00 durante los segundos 10 años. Este equipo tiene una vida de 20 años. Ninguna de las 2 alternativas tiene valor de salvamento. Aquí $i = 10\%$;

Solución.-

	<u>1/2 Cap</u>	<u>Plena Cap</u>
Costo Inicial =	\$30,000	\$50,000
V.P. del costo del 2o. equipo:		
$30,000(P/F, 10\%, 10) = 30,000(0.3855) =$	\$11,565	
V.P. del costo anual de operación:		
$5,000(P/A, 10\%, 10) + 9,500(P/A, 10\%, 20) - (P/A, 10\%, 10)$		
$= 5,000(6.144) + 9,500(8.514 - 6.144) =$		\$59,379
$5,000(P/A, 10\%, 10) + 10,000(P/A, 10\%, 20) - (P/A, 10\%, 10)$		
$= 5,000(6.144) + 10,000(2.370) =$	\$54,420	
	<u>\$95,985</u>	<u>\$109,379</u>

vemos que la ventaja a favor de la inversión diferida es de :

$$\$109,379 - \$95,985 = \$13,394$$

EJEMPLO 10.-

Un plan para suministrar las necesidades actuales de cierta compañía puede ser construido por \$120,000 con un costo anual de operación de \$30,000.00. Se predice que al final de 10 años, los requerimientos de producción pueden ser duplicados para lo cual se necesitará equipo extra con costo de \$120,000.00. Una planta que puede suministrar la plena capacidad puede ser construida por \$200,000.00 y sus gastos anuales de operación serán de \$32,000.00 cuando opere a 1/2 capacidad (los primeros 10 años) y de \$58,000.00 cuando lo haga a plena capacidad. Las plantas tienen una vida indeterminadamente larga. Aquí $i=8\%$.

Solución.-

	<u>1/2 Cap.</u>	<u>Plena Cap.</u>
Costo Inicial =	\$120,000	\$200,000
V.P. del costo del 2o. equipo:		
$120,000(P/F, 8\%, 10) = 120,000(0.4632) =$	\$ 55,584	
V.P. del costo anual de operación:		
$30,000(P/A, 8\%, 10) + (60,000 \div 0.08)(P/F, 8\%, 10)$		
$= 30,000(6.710) + (750,000)(0.4632) =$	\$548,700	
$32,000(P/A, 8\%, 10) + (58,000 \div 0.08)(P/F, 8\%, 10)$		
$= 32,000(6.710) + (725,000)(0.4632) =$		\$550,540
	<u>\$724,284</u>	<u>\$750,540</u>

El análisis indica la ventaja de diferir la inversión hasta que sea necesitada dentro de 10 años, mostrando que la inversión extra de \$80,000.00 hoy para la planta de plena capacidad, falla al ser recuperada al 3% por \$26,256.00 hoy

El ejemplo anterior muestra algunos de los factores económicos que prevalecen en una situación de inversiones diferidas. Se vio que una planta de 1/2 capacidad cuesta mas de la mitad del costo inicial de una planta de plena capacidad; esto es generalmente el resultado de costos fijos los cuales son inelásticos con los cambios en tamaño de la planta, así como el trabajo extra necesario para coordinar y unir las 2 mitades. Otro elemento se puede observar mediante el hecho de que los desembolsos operativos a iguales producciones no son iguales para las 2 alternativas. Lo anterior expresa el hecho de que:

a) La eficiencia operativa del equipo grande puede ser mayor que la eficiencia de una unidad pequeña para cualquier producción.

b) Que el equipo produciendo a media capacidad, probablemente tendrá baja eficiencia. Esto explica el porque la planta pequeña tiene bajos desembolsos durante los primeros 10 años pero que 2 plantas de 1/2 capacidad tienen mayores desembolsos en los últimos 10 años.

X.- NIVELES DE INVERSION.-

Muchos problemas prácticos abarcan un gran número de alternativas de diseño y se desea estimar cual de todas ellas es la mas conveniente. Un ejemplo clásico es la determinación de la altura "económica" de un edificio de oficinas propuesto. En problemas de éste tipo un enfoque práctico es el de analizar todas las alternativas posibles en lugar de 2 a un tiempo. Lo anterior se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 11.-

El costo inicial de varios espesores de aislamiento para una tubería de vapor se tabulan en la 2a. columna de la Tabla I. El costo estimado anual por pérdida de calor se da en la columna 3. Se calcula que la tubería será usada durante 15 años. Se supone $i = 8\%$.

(1)	(2)	(3)	(4)=(2)+(3) (P/A, 8%, 15)
espesor del aislamiento	Costo Inicial	Pérdida Anual Por Calor	Valor Presente de Todos los Costos 15 años vida 8%
0	\$ 0	\$1,800.00	$0+1800(8.559)=15,401$
3/4"	\$1,800.00	\$ 900.00	$1,800+ 900(8.559)= 9,503$
1"	\$2,545.00	\$ 590.00	$2,545+ 590(8.559)= 7,595$
1-1/2"	\$3,340.00	\$ 450.00	$3,340+ 450(8.559)= 7,192$
2-1/4"	\$4,630.00	\$ 360.00	$4,630+ 360(8.559)= 7,441$
3"	\$5,730.00	\$ 310.00	$5,730+ 310(8.559)= 8,383$
3-1/2"	\$7,280.00	\$ 285.00	$7,280+ 285(8.559)= 9,719$

La selección del menor valor presente muestra que el aislamiento de 1-1/2" es la instalación mas económica, aunque de hecho la instalación mas económica no está en la lista como se mostrará a continuación.

Rearreglando los datos anteriores de forma que muestren los gastos extra en la columna (3) y los ahorros por pérdida de calor en la columna (5), tenemos:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Espesor del Aislamiento	Costo Inicial	Inversión Extra	Pérdida Anual Por Calor	Ahorro Anual en Calor	Ventaja de V.P. de efectuar la inversión extra
0	\$ 0	\$ 0	\$1,800	\$ 0	\$ 0
3/4"	\$1,800	\$1,800	\$ 900	\$ 900	\$5,898
1"	\$2,545	\$ 745	\$ 590	\$ 310	\$1,908
1-1/2"	\$3,340	\$ 795	\$ 450	\$ 140	\$ 403
2-1/4"	\$4,360	\$1,020	\$ 360	\$ 90	-\$ 249
3"	\$5,730	\$1,370	\$ 310	\$ 50	-\$ 942
3-1/4"	\$7,280	\$1,550	\$ 285	\$ 25	-\$1,336

donde los valores en la columna (6) se calcularon con la fórmula:

$$(\text{col } 5)(P/A, 8\%, 15) - (\text{col } 3) = (\text{col } 6)$$

por ejemplo:

$$310(8.559) - 745 = \$1,908$$

cifra que representa la ventaja de efectuar la inversión extra debido a que los ahorros exceden a los costos.

Como se observa en la columna (6), el aislamiento de 1-1/2" es el más económico debido a que el gasto extra de \$1,020 necesario para instalar el aislamiento de 2-1/4" falla en ser recuperado al 8% por \$249 actuales. Sin embargo notamos en la columna (6) que, cuando menos matemáticamente, existe una alternativa entre 1-1/2" y 2-1/4" que deberá cubrir justamente nuestros requerimientos económicos mínimos. Esta situación se satisfacería si la alternativa de un aislamiento de 1-3/4" se pudiese diseñar.

Espesor del Aislamiento	Costo Inicial	Inversión Extra	Pérdida Anual Por Calor	Ahorro Anual en Calor	Ventaja de V.P. de efectuar la Inversión Extra
1-1/2"	\$3,340	\$795	\$450	\$140	\$403
1-3/4"	\$3,845	\$505	\$391	\$ 59	0
2-1/4"	\$4,360	\$515	\$360	\$ 31	-\$249

y el aislamiento de 1-3/4" se seleccionaría como la alternativa que cumple con el objetivo de maximizar ganancias con fondos limitados y oportunidades limitadas.

XI.- VALUACION.-

La Valuación ha sido definida como: "El arte de estimar la medida monetaria justa del deseo de propiedad de bienes específicos para propósitos específicos".

La base de la valuación en la ausencia de un valor justo y conocido de mercado, es el valor presente de todos los ingresos futuros menos los gastos futuros, computados a una tasa de interés justa. Si el precio de compra de la propiedad productiva de ingresos es mayor que el valor presente computado, las estimaciones muestran que la propiedad se quedará corta de ganar su mínima tasa de retorno atractiva y la compra no es conveniente.

También es conveniente la valuación para juzgar el valor que una propiedad tiene para su dueño actual. Hablando en forma general, una propiedad vale para su propietario cuando menos la cantidad neta por

la cual puede él venderla, razón por la cual el valor de mercado tiende a establecer un límite inferior en el valor de la propiedad para su dueño, mientras que un límite superior queda establecido por el exceso del valor presente de las percepciones sobre los gastos (sin considerar por supuesto el valor sentimental y cosas similares).

EJEMPLO 12.-

Un bono de \$1,000.00 a 20 años al 4% paga sus cupones de interés semestralmente. El primer pago se efectuará dentro de 6 meses. ¿Cual será el precio del bono para que rinda: a) 6% anual, b) 4% anual, c) 8% anual.

Solución.-

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad V.P. &= 20(P/A, 3\%, 40) + 1,000(P/F, 3\%, 40) \\
 &= 20(23.115) + 1,000(0.3066) \\
 &= 462.30 + 306.60 \\
 &= \$768.90 \\
 \text{b)} \quad V.P. &= 20(P/A, 2\%, 40) + 1,000(P/F, 2\%, 40) \\
 &= 20(27.355) + 1,000(0.4529) \\
 &= 547.10 + 452.90 \\
 &= \$1,000.00 \\
 \text{c)} \quad V.P. &= 20(P/A, 4\%, 40) + 1,000(P/F, 4\%, 40) \\
 &= 20(19.793) + 1,000(0.2083) \\
 &= 395.86 + 208.30 \\
 &= \$604.16
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 13.-

Se desea saber cuánto deberá pagar una compañía por una máquina usada considerando el valor que la misma tenga para la compañía, si la máquina se usará durante 3 años. El vendedor pretende que se pague por ella \$5,000.00. El costo de transporte e instalación es de \$500.00. La máquina costó \$25,000.00 cuando nueva hace 10 años. Una máquina nueva puede comprarse ahora por \$20,000.00 ya instalada y costará \$8,000.00 al año el operarla y mantenerla comparado con \$12,000.00 para la máquina vieja. Dentro de 3 años la máquina nueva tendrá un valor de salvamento de \$15,000.00 mientras que se espera que la máquina usada se pueda vender todavía por \$5,000.00. La mínima tasa de retorno atractiva es de 15%.

Solución.-

año	usada	nueva	usada-nueva
0	P	\$20,000	P - \$20,000
1	\$12,000	\$ 8,000	\$4,000
2	\$12,000	\$8,000	\$4,000
3	\$12,000	\$ 8,000	\$4,000
3	-\$ 5,000	-\$15,000	\$10,000

$$\begin{aligned}
 20,000 - P &= 4,000(P/A, 15\%, 3) + 10,000(P/F, 15\%, 3) \\
 &= 4,000(2.283) + 10,000(0.6575) \\
 &= 9,132 + 6,575
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P &= 20,000 - 15,707 \\
 &= \$4,292.00
 \end{aligned}$$

es decir, lo máximo que se debe pagar por la máquina usada es \$4,292.00 y los \$5,000.00 pedidos por ella resulta por lo tanto muy caro.

XI.- ERRORES QUE SE DEBEN EVITAR AL USAR VALOR PRESENTE.-

1) El usar Costos Capitalizados (es decir, asumir vida perpétua) en lugar de Valor Presente cuando las vidas son relativamente cortas.

2) El usar tasas de interés que no corresponden con las correctas. En general se usan tasas de interés menores que las que deberían ser usadas.

3) El utilizar las fechas de gastos contables en lugar de las fechas de los desembolsos reales en el cálculo del V.P., p.ej. Sea un edificio con un costo inicial de \$500,000.00 y una vida estimada de 50 años. Si se usa depreciación lineal, la depreciación anual en libros será de \$10,000.00. Si se considera que existe un gasto de \$10,000.00 anuales y se obtiene el valor presente con $i = 10\%$, obtendremos un valor de \$99,150.00, por lo que hemos convertido un gasto real de \$500,000.00 en el año cero en \$99,150.00 en el año cero. Este resultado proviene del hecho de haber transformado los \$500,000.00 en \$2,000.00 anuales a un interés 0% y haberlos regresado al 10% .

XII.- GENERALES.-

A los cálculos de valor presente en México se les suele denominar como Valor Descontado, razón por la cual es muy común oír por ejemplo: desconté una letra de \$x en el Banco y obtuve por ella \$y.

ALGUNOS ASPECTOS DE ESTUDIOS ECONOMICOS PARA COMPAÑIAS DE SERVICIOS PUBLICOS Y ACTIVIDADES GUBERNAMENTALES

Lic. Bosco A. Muro G.

Distinción entre costos privados y sociales

El empresario privado al estudiar un proyecto de inversión - cuida de que los ingresos esperados sean suficientes para cubrir sus gastos fijos y de operación, y de que, asimismo, le quede un amplio margen de utilidades. En términos económicos el empresario trata de cubrir sus costos tanto explícitos como implícitos.

Los costos explícitos representan un desembolso real de dinero: compra de materias primas, mano de obra, maquilas, pago de intereses y del principal, impuestos, etc. Los costos implícitos, en cambio, son aquellos que, sin constituir un flujo real de dinero, deben contabilizarse debido a que son el pago a recursos que, de asignarse a otra actividad, recibirían un pago. Puede citarse, como ejemplo, el sueldo que el empresario debe asignarse dentro de la empresa, aun cuando en realidad no lo perciba.

Costo de oportunidad

De la noción de costos implícitos se desprende fácilmente el concepto de costo de oportunidad de los recursos, que es el ingreso o beneficio que la asignación de tales recursos reportaría al empresario en otra alternativa de inversión.

Una inversión, sin embargo, produce otros costos a terceros que tal vez el empresario privado no alcanza a detectar o simplemente no le conviene reconocer. Asimismo también pueden derivarse beneficios sociales que al empresario no necesariamente toma en cuenta al realizar su inversión.

Las entidades públicas y las empresas gubernamentales están obligadas, en cambio, a considerar todos los costos y beneficios que les resultan tanto a ellas, como a toda la sociedad, de las inversiones que realizan en algún sector de la economía.

Costos y beneficios sociales

Los costos y beneficios sociales deben estimarse tomando en cuenta elementos que el empresario no toma en cuenta o asignando un nuevo precio a los recursos (precios-sombra). Se tienen así dos grandes rubros:

A) Elementos que el empresario no toma en cuenta

- Impuestos directos (que son un ingreso de la sociedad)
- Beneficios sociales de proyectos no comerciales
- Efectos externos, etc.

B) Elementos que deben revaluarse

- Divisas
- Mano de obra
- Capital, etc.

Nociones de economía del bienestar

A fin de poder comprender por qué algunos de los recursos deben ser estimados a sus precios-sombra o costos de oportunidad es necesario sentar algunas nociones de economía del bienestar.

Podemos simplificar la economía, para comprenderla mejor, y suponer que con la tecnología y recursos existentes únicamente es posible producir los bienes A y B, de los que se pueden elegir una infinidad de combinaciones, lo que se representa con una curva de transformación o de posibilidades de producción (pág. 3). La sociedad naturalmente tratará de elegir la combinación óptima, es decir, trataría de obtener el máximo bienestar social. Esto lo logrará maximizando su ingreso total, para lo cual deberá tomar en cuenta los precios que tales productos tienen dentro de la sociedad. El ingreso total puede expresarse como una función lineal, que podemos representar como una línea recta en la gráfica de la página 3. Esta línea se llama de isoingreso (de ingreso constante). La pendiente de esta línea es el cociente negativo del precio de A entre el precio de B y el punto de intersección de la ordenada es el cociente de IT entre el precio de B.

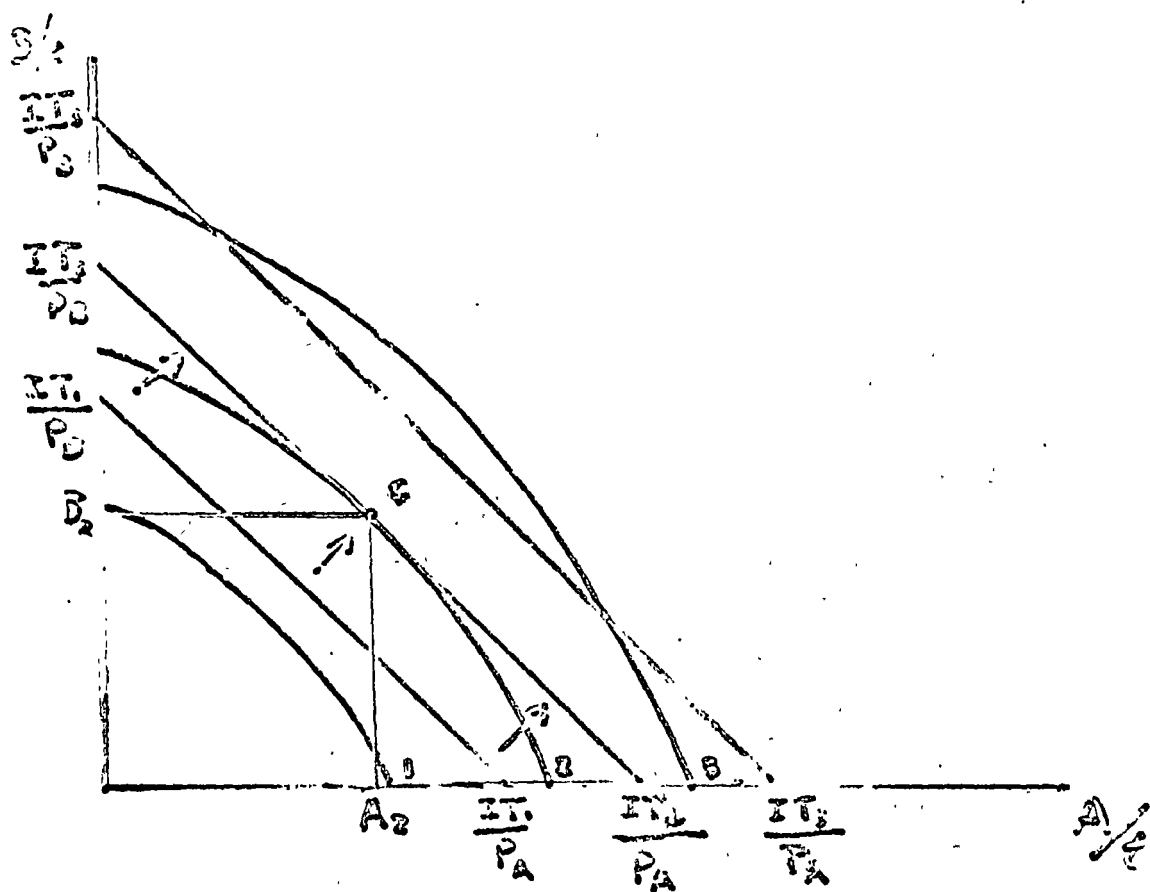
$$IT = AP_A + BP_B$$

$$B = IT/P_B - P_A/P_B$$

que en la notación usual sería

$$y = a + bx$$

CURVA DE TRANSFORMACION



$$IT = AP_A + BP_B$$

$$\text{Si } A=0 \Rightarrow B = \frac{IT}{P_B}$$

$$\text{Si } B=0 \Rightarrow A = \frac{IT}{P_A}$$

Queda así determinada
la curva de isoingreso o de igual
ingreso.

Supongamos que la curva de transformación 2 es la que representa nuestra economía. Si elegimos un IT pequeño, esto significa que la línea pasará por abajo de los puntos de la curva 2, por lo que no estaremos utilizando plenamente nuestros recursos. Al experimentar con ingresos totales mayores, la línea de isoingreso se irá desplazando hacia arriba en forma paralela hasta ser tangente con la curva de transformación en el punto C. Ahoray no es posible obtener un ingreso total mayor, por lo que el punto C marcará la combinación óptima que podemos producir, alcanzando así el máximo bienestar.

Sin embargo, aunque conozcamos la combinación óptima de productos, nos queda por fijar el precio de los insumos que intervienen en el proceso de la producción. Su precio será fijado de acuerdo con su contribución al logro del punto óptimo de producción. Se llega de esta forma a la noción de precio-sombra o costo de oportunidad de los insumos.

A continuación se determinará la metodología para estimar tales precios-sombra o costos de oportunidad de los factores. Veremos en primer lugar cómo se puede utilizar la programación lineal para lograr dicha estimación, siendo éste un método de equilibrio general, dado que entran todos los sectores de la economía y se consideran todos los factores productivos. En segundo lugar obtendremos el precio social de las divisas mediante uno de los métodos de equilibrio parcial, en los que se consideran las medidas que se adoptan para regular la asignación de un solo recurso: las divisas.

El precio sombra de los modelos de programación lineal como estimación del costo de oportunidad de los objetivos.

En la página 6 se presenta un ejemplo simple de programación lineal donde la representación gráfica de las restricciones lineales nos da la aproximación de una curva de transformación (unión de puntos W, X, Y, Z). Se trata nuevamente de maximizar el ingreso total. Si comenzamos con un ingreso de 35 unidades, la línea de isoingreso estará por abajo de la curva de transformación por lo que estaremos desperdiciando recursos, ya que podríamos incrementar el ingreso con sólo desplazar la línea de isoingreso hasta ser tangente a la curva de transformación en el punto Y, alcanzando así un ingreso total máximo de 70.

Nuevamente estamos sin conocer los costos de oportunidad de los insumos. Obtendremos una estimación de ellos mediante la solución dual del modelo de programación lineal donde ahora la función objetivo debe minimizarse; las nuevas variables P_a , P_b , P_c deben determinarse, y los coeficientes de la función objetivo de la forma primal son límites inferiores de las nuevas restricciones.

Para comprender bien el significado de esta nueva formulación del programa de optimización es necesario recordar un poco de teoría económica. En la página vemos una primera gráfica representando los costos e ingresos totales en una planta que produce exclusivamente A. La curva de ingresos totales es una línea recta que parte del origen, dado - que el precio al que se vende A es constante. La curva de costos totales en cambio es una curva como la de la gráfica en la que los costos marginales van cambiando.

PRECIO SOMBRA DE LOS FACTORES : 6

materias primas :

Existencias

$$a = 36$$

$$b = 50$$

$$c = 30$$

$$P_A = 13$$

$$P_B = 10$$

Requerimientos por unidad

$$A \begin{cases} a = 9 \\ b = 10 \\ c = 5 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} a = 9 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{cases}$$

Función objetivo: Maximizar

$$13A + 10B = IT$$

Restricciones

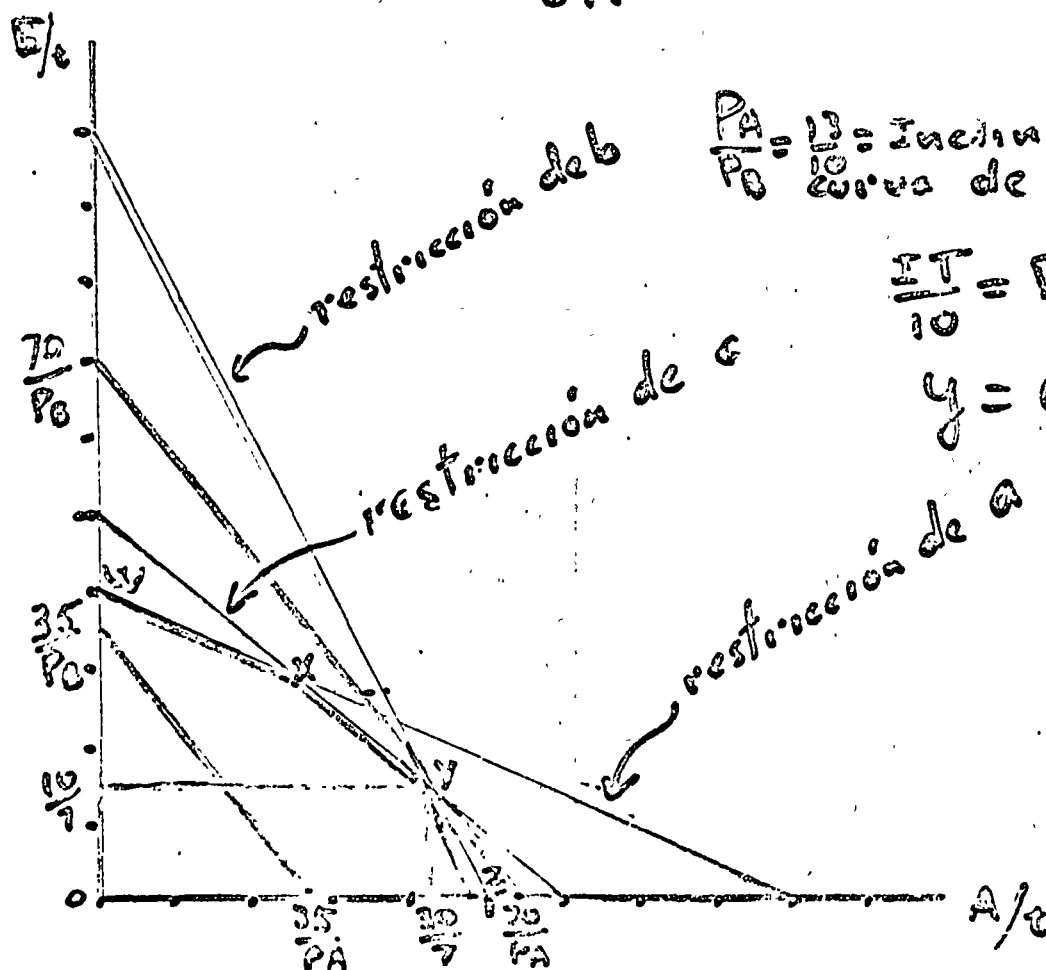
$$A \geq 0$$

$$B \geq 0$$

$$4A + 9B \leq 36$$

$$10A + 5B \leq 50$$

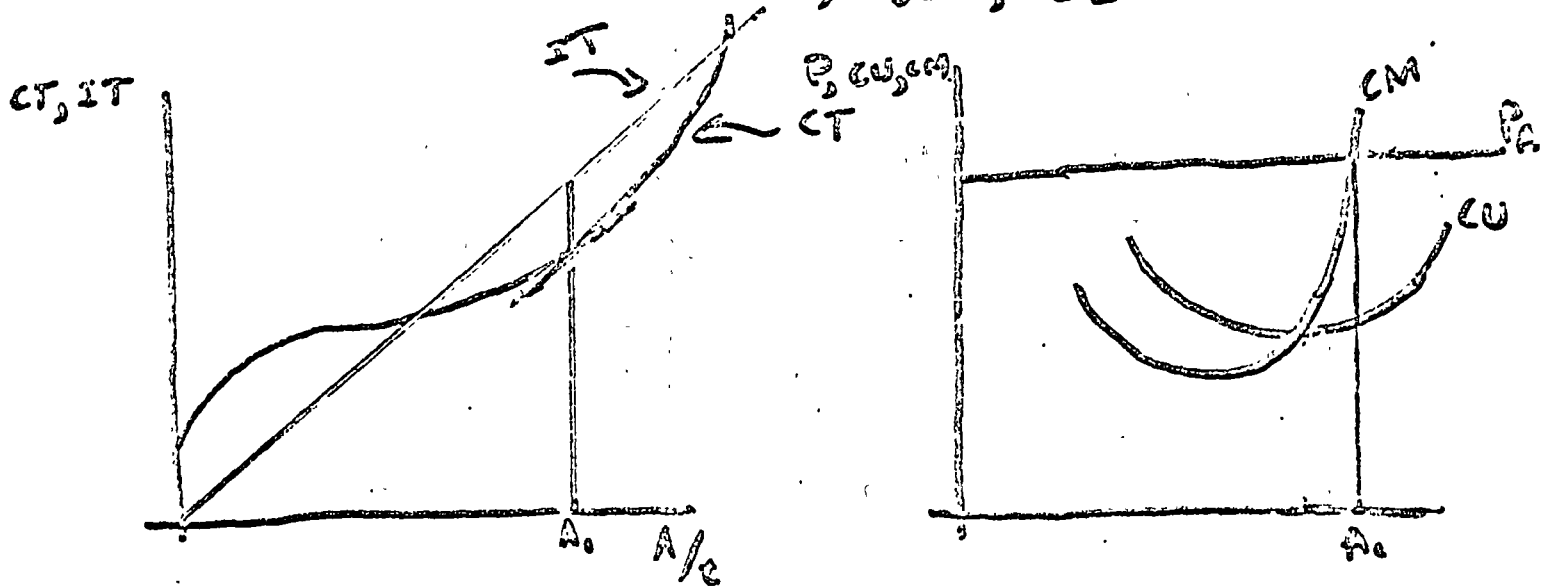
$$5A + 6B \leq 30$$



SOLUCION DUAL

Minimizar $36P_A + 50P_B + 30P_C = CT$
 Sujeito a $4P_A + 10P_B + 5P_C \geq 13$
 $9P_A + 5P_B + 6P_C \geq 10$

$P_A \geq 0, P_B \geq 0, P_C \geq 0$



Sol. óptima $\rightarrow$ # de insumos usados exhaustivamente = # de productos

1) Si $P_A = 0 \Rightarrow P_B = \$0.80, P_C = \$1.00$

2) Si $P_B = 0 \Rightarrow P_A = -\$1.33 \times$

3) Si $P_C = 0 \Rightarrow P_A = \$0.50, P_B = \$1.10$

$\rightarrow 36(0.50) + 50(1.10) + 30(0) = \73

$\rightarrow 36(0) + 50(0.80) + 30(1.00) = \$70 \checkmark$

ECUACIONES DEL MODELO DE PROGRAMACION LINEAL "EXPORTA"

- 1-45 Balance sectorial: $X_i + M_i - C_i - I_i - E_i = 0$
- 46-90 Importaciones $m_i M_i + n_i I_i - M_i = 0$
- 91-135 Crecimiento de la demanda sectorial
- 136-180 Inversión necesaria.
- 181-225 Aumento de la capacidad
- 226 Inversión en años intermedios
- 227 Inversión en el año final
- 228 Ahorro en el año final
- 229 Ingreso nacional en el año final
- 230-274 Límite inferior $X_i \geq X$
- 275-319 Límite superior $X_i \leq X$
- Función objetivo: Maximizar $\sum E_i - \sum M_i$

RESULTADOS

#	ΔK	Precio sombra de divisas
1	125 000	1.39
2	140 000	1.39
3	155 000	1.26
4	197 800	1.26

Hay que obtener una media ponderada de todas las T_i a fin de ver cuál es el efecto promedio de todas las medidas proteccionistas.

Como los productos participan en diferentes proporciones en la balanza comercial es necesario que cada tarifa sea ponderada por el porcentaje que del total de importaciones representa el producto en cuestión. Así obtenemos para la tasa social de cambio (E^*) un valor que depende de la tasa oficial (E) que es \$12.50 en nuestro caso, de las tarifas (T_i) y de los porcentajes (W_i) que del total de importaciones representa cada producto.

En la estimación se emplearon los valores que de tarifas efectivas para la protección obtuvo el Lic. Gerardo Bueno de Nacional Financiera. Se consideraron 47 tipos de artículos, que fueron agropados en 10 clases. En la página 11 se muestra un resumen de tal cuadro.

Con este material se hizo una estimación del tipo social de cambio que resultó ser de \$16.25 por dólar, implicando un porcentaje de 30 por encima del oficial.

El costo marginal no es más que la pendiente de la curva de CT en cada uno de sus puntos; siendo siempre positivo. El punto óptimo de producción es aquel donde la diferencia $IT - CT$ se hace máxima. En la gráfica sería el punto A_1 , donde las pendientes de las curvas son las mismas. En la gráfica 2 de la página 7 están representadas las pendientes de las 2 curvas: P_A es el precio del producto A, que es constante, y CM es la representación de la pendiente de la curva CT. El CM y el P_A son iguales en el punto A_1 , que es el punto óptimo de producción. Producir menos significa desperdiciar recursos y producir más significa reducir las ganancias.

Las restricciones significan, pues, la utilización de los recursos tienen que ser tales, que los costos marginales de producción sean iguales a los precios de A y B: 13 y 10 respectivamente.

Para los que están familiarizados con la programación lineal es conocido que el número de insumos usados exhaustivamente es igual al número de productos incluidos en el programa. En nuestro caso, por tanto, quedaría un insumo sin ser utilizado exhaustivamente por lo que su precio-sombra sería igual a cero. Asignando este valor a cada uno de los insumos, vemos que el insumo a es el que tiene el precio-sombra igual a cero, mientras que $P_b = \$0.80$ y $P_c = 1.10$ (ver página 7).

Hemos visto que la programación lineal puede proporcionarnos los precios sombra o costos de oportunidad de los factores. Como un ejemplo de aplicación a toda la economía se puede citar el artículo del Dr. Saúl Trejo R., "Un modelo de política económica: Promoción de exportaciones y crecimiento óptimo de la economía" que apareció en El Trimestre Económico, octubre-diciembre de 1971. Un resumen del mismo aparece en la página 8.

Obtención del precio social de las divisas mediante un método de equilibrio parcial.

Este método toma en consideración las distintas medidas que se adoptan para regular la asignación de las divisas, pero siempre dentro del contexto de una estructura económica del país que no varía sustancialmente. Si se trata de evaluar un proyecto que origine cambios estructurales en la economía, este método ya no tiene validez.

Hay varios factores que hacen que la tasa de cambio oficial difiera de la social. Pueden citarse: los impuestos, las tarifas, las cuotas, los permisos, etc. Tenemos que representar la influencia de todos estos factores como la diferencia porcentual (T_i) entre el precio doméstico (P_{Di}) y el precio mundial (P_{Mi}).

ACTIVIDADES

 w_i T_i $w_i(1+T_i)$ I: Agropecuario (4)

Agricultura

0.0104

0.0430

0.01085

Ganadería

0.0049

0.0260

0.00503

Forestal

0.

0.0540

Pesca

0.0005

-0.0130

0.00049

II Alimentos procesados (3)III Bebidas y tabacos (2)IV Minerales y energéticos (3)V Materiales de construcción (3)VI A Productos intermedios (8)VI B " " (13)VII Bienes de consumo no-durables (5)VIII " " " durables (3)

Aparatos eléctricos

0.0049

0.8770

0.00920

Motos y bicicletas

0.

0.9760

Vehículos de motor

0.1301

0.4850

0.19319

IX Maquinaria (2)X Equipo de transporte (1)

SUMA

 $\Sigma w_i = 1.0000$ $1 + \bar{T} = 1.29962$ $PD_i = PM_i(1+T_i)$ $\bar{T} = \Sigma w_i T_i = 0.29962$ $E^* = E(1+\bar{T})$ $E^* = 12.50(1.29962)$ $E^* = 16.25$

FACULTAD DE INGENIERIA
CENTRO DE EDUCACION CONTINUA
CURSO SOBRE INGENIERIA ECONOMICA

ALGUNAS RELACIONES ENTRE CONTABILIDAD DE
DEPRECIACION Y LA INGENIERIA ECONOMICA:

Ing. Miguel Alonzo Calles

1. LOS DIFERENTES SIGNIFICADOS DE DEPRECIACION

En la práctica cotidiana, depreciación es la posible disminución en valor de un objeto a través del tiempo. Este concepto implica la estimación del valor del objeto en dos fechas diferentes.

El concepto contable de depreciación de un activo, es un costo de amortización distribuido entre dos años de su vida útil. Debe reconocerse que es un costo y no un valor lo que se distribuye a través del tiempo.

Definición.-La contabilidad de la depreciación es un sistema contable, el cual permite distribuir el costo de activos tangibles de capital menos el valor de salvamento, sobre la vida útil estimada de la unidad de una manera sistemática y racional. Es un proceso de asignación y no de valuación.

Aunque se utilice la frase como "valor en libros", para describir la diferencia entre el costo de un activo y el total de cargos hechos hasta la fecha en contra del activo, ésta diferencia es mejor descrita por "costo no amortizado".

Diferencia en valor entre un activo existente y un activo hipotético nuevo, tomado como patrón de comparación. Este es el concepto de avalúo de la depreciación. El avalúo de la depreciación es la inferioridad en valor a una fecha particular del activo siendo valuado con respecto al activo hipotético usado como base de comparación. Este concepto implica dos activos y la medición de sus valores a una fecha determinada.

DETERIORO.- A medida que las máquinas se hacen viejas, son comúnmente incapaces de mantener las cerradas tolerancias que podían proporcionar cuando nuevas. Los ingenieros han usado la palabra depreciación para referirse a dicho deterioro de la eficiencia funcional.

Debe observarse que no es en ningún sentido un concepto de valor. Activos que son físicamente tan buenos como cuando nuevos, no son necesariamente tan valiosos como cuando nuevos. Este concepto está prácticamente fuera de uso.

Cualquier presentación de los elementos contables deberá prestar la mayor atención a dos importantes estados obtenidos de las cuentas: el balance y el estado de pérdidas y ganancias.

El balance describe la condición de la empresa en un momento particular. Este balance muestra lo que la compañía debe y lo que posee. Y muestra el valor del capital social como el exceso de activo sobre pasivo.

El estado de Pérdidas y Ganancias, llamado también estado de ingresos, muestra los ingresos y egresos de una empresa para un período determinado de tiempo, estableciendo si la empresa ha ganado o perdido y la cantidad correspondiente.

Ejemplo para ilustrar la relación entre la contabilidad de la depreciación y los estados de balance y pérdidas y ganancias.

El Señor Alejandro Esparza emprendedor hombre de negocios se aventuró en años pasados a manejar una empresa productora de champiñones. Para ello rentó un terreno en una zona estratégica en las afueras de la Ciudad de México e invirtió \$ 50,000.00 en instalaciones. Después de la primera cosecha obtuvo un ingreso de \$ 60,000.00 por la venta de su producto y pago un total de \$ 20,000.00 por gastos de operación. En ese tiempo rechazó una oferta de \$ 90,000.00 que le hiciera un competidor por su empresa. En el siguiente ciclo sus ingresos escasamente alcanzaron para cubrir sus gastos, continuando así por otros dos ciclos, por lo cual decidió abandonar el negocio.

Cuando la construcción de las bodegas para el cultivo de los champiñones fué terminada, el balance de la compañía era:

<u>ACTIVO</u>	<u>PASIVO Y CAPITAL</u>
Instalaciones \$ 50,000.00	Capital (Inv. de A. Esparza) (\$50,000.00)

Al término de la primera cosecha, si el señor Esparza se no hubiera considerado que parte de la vida de sus instalaciones ha expirado, consideraría una utilidad de \$40,000.00 (\$60,000.00 - \$ 20,000.00). Bajo esta consideración poco real, su balance antes de destinar para algún uso su aparente utilidad, hubiera sido:

<u>ACTIVO</u>	<u>PASIVO Y CAPITAL</u>
Caja y Bancos - \$ 40,000.00	Capital (Inv. de A. Esparza) \$ 50,000.00
Instalaciones - \$ 50,000.00	Ganancias Retenidas 40,000.00
\$ 90,000.00	\$ 90,000.00

Realmente él estimó para sus instalaciones una vida de cinco años y decidió considerar \$ 10,000.00 como el gasto de depreciación para su primer año de operaciones. El valor en libros de sus instalaciones fué reducido en \$ 10,000.00 como resultado del asiento contable de la depreciación y la cifra de utilidad mostrado por sus cuentas fué \$ 10,000.00 menos que cuando la depreciación no fué considerada.

Su balance al final de año después de haber considerado esta depreciación fué:

ACTIVOPASIVO Y CAPITAL

Caja y Bancos	\$ 40,000.00	Capital (Inv.A.Esparza)	\$50,000.00
Instalaciones	\$ 50,000.00	Ganancias retenidas	\$30,000.00
Menos fondo de Depreciación	10,000.00		
	\$ 40,000.00		
	<u>\$ 80,000.00</u>		<u>\$80,000.00</u>

Su Estado de Pérdidas y Ganancias para el año fué:

Ingresos por ventas	-- -- -- -- --	\$ 60,000.00
Menos		
Gastos de Operación:		
Renta, Sueldos, Impuestos	\$ 20,000.00	
Depreciación	\$ 10,000.00	<u>\$ 30,000.00</u>
Utilidad del Período		\$ 30,000.00

La utilidad mostrada por los libros fué el 60% de su inversión orig.

MÉTODOS DE DEPRECIACION.-

El costo de un activo es considerado como un activo diferido que será distribuido sobre los años de servicio de una manera racional y sistemática. Hay muchos métodos que obviamente son sistemáticos. Mas aún, métodos con grandes diferencias entre sí pueden ser consideradas como racionales.

Clasificación de los Métodos Contables de Depreciación:

1. Métodos de Depreciación Acelerada.- Aquellos que permiten una asignación mayor del costo en los primeros años que en los últimos. (tasa de saldo decreciente y suma de los dígitos de los años).
2. Métodos de Depreciación Constante.- La asignación del costo es uniforme durante la vida útil del activo. (Linea recta).
3. Métodos de Depreciación Desacelerada.- Los que proporcionan una menor asignación en los primeros años y mayor en los últimos (Fondo de amortización).

MÉTODO DE LA LINEA RECTA.-

Se estima la vida útil (v.u.) total del activo y el posible valor de salvamento (v.s.). Este último se puede expresar como un porcentaje del valor inicial.

$$\text{Tasa de depreciación anual} = \frac{100\% - \text{porcentaje del v.s.}}{\text{v.u. estimada}}$$

Ejemplo:

Costo inicial de una máquina (incluyendo instalación) = \$ 500,000.00
 Valor de salvamento estimado = \$ 50,000.00
 Vida útil estimada = 10 años.

$$\text{Tasa de depreciación anual} = \frac{100\% - 10\%}{10} = \frac{90\%}{20} = 9\%$$

$$\text{Carga de depreciación anual} = 09 \times 500,000 = \$ 45,000.00$$

6

$$\text{carga de depreciación anual} = \frac{500,000 - 50,000}{10} = \frac{450,000}{10} = \$ 45,000$$

Tasa de saldo decreciente.

Es usado comúnmente para activos que en sus últimos años serán destinados para servicios, de emergencia. Debido a que la contribución de los activos a los ingresos de la empresa son normalmente mayores en sus primeros años, parece razonable descontar el costo con mayor rapidez en los primeros años de la vida del activo.

En cualquier método de tasa de saldo decreciente, una tasa fija de depreciación es aplicada cada año al valor en libros, esto es, a la porción del costo del activo que no ha sido cancelada en años previos. Por ejemplo si una tasa del 10% se aplica a un activo cuyo costo inicial es de \$ 500,000.00, el cargo de depreciación para el primer año será 0.10 (500,000) = \$ 50,000.00. En el segundo año el cargo será (500 000-50,000) x .10

= \$ 45,000. Para el tercero tendremos (450,000 - 45,000).10

= (405 000) .10 = \$ 40,500 y así sucesivamente. Usualmente la tasa mayor autorizada se calcula de la siguiente forma:

$$\text{Tasa de depreciación} = \frac{200\%}{\text{v.u. estimado}} \quad * \quad \begin{array}{l} \text{El valor de salvamento no se toma} \\ \text{en consideración en los métodos de} \\ \text{depreciación, saldo decreciente} \end{array}$$

Este método es conocido como "Método de tasa doble saldo decreciente".

Supongamos que: P representa el costo inicial del activo.

f=Tasa de depreciación (expresada en decimales).

L=valor de salvamento.

El valor en libros al final de "n" años será

$$\text{Cargo para el primer año} = P \times f \quad \text{valor en libros} = P - P f = P(1-f)$$

$$\begin{aligned} \text{Cargo el segundo año} &= [P - P f] \cdot f = P(1-f) f \quad \text{valor en libros} = P(1-f) - P(1-f) f \\ &= P(1-f) [1-f] = P(1-f)^2 \end{aligned}$$

Valor en libros al

$$\text{Cargo para el año } n\text{-ésimo} = P(1-f)^n \quad \text{aunque el valor de salvamento no se toma en consideración}$$

Consideremos que deseamos calcular una tasa "f" de tal forma que el valor en libros al final del año "n" sea igual al valor de salvamento estimado "L".

Por lo tanto

$$L = P(1-f)^n \quad ; \quad \sqrt[n]{\frac{L}{P}} = (1-f) \quad ;$$

$$\therefore f = 1 - \sqrt[n]{\frac{L}{P}}$$

Este método es raramente empleado y además no puede usarse con un valor de salvamento de cero. Cuando un método de tasa de saldo decreciente es empleado, una tasa mas apropiada es aquella que se calcula tomando en consideración todos los elementos relevantes del caso en vez de usar una fórmula como la establecida.

Suma de los dígitos anuales.

En éste método el cargo de depreciación es calculado multiplicando una fracción que depende de la Vida Util estimada por el costo depreciable (Costo Inicial-Valor de Salvamento) del activo.

Ejemplo.-

C.I. = \$ 500,000
V.U. = 10 años
V.\$ = 50,000

Suma de los dígitos de 1 a 10 = $\frac{10}{55} \left(\frac{10 \times 11}{2} = 210 \right)$

El cargo de depreciación para el primer año será:

$$\frac{10}{55} (500000 - 50000) = \frac{450000}{55} = 8181.80$$

Para el segundo año:

$$\frac{9}{55} (450000) = 73637$$

para el tercer año

$$\frac{8}{55} (450000) = 65455$$

El cargo disminuye en

\$ 8181.80

~~65~~ 450000

cada año hasta que en el año 10 es de 8,181.80. Este método carga aproximadamente $\frac{3}{4}$ del costo depreciable en la primera mitad de la vida estimada.

FONDO DE AMORTIZACION

Este método considera un fondo de amortización imaginario que consiste en un depósito al final de cada año de la vida del activo. Estos depósitos supuestamente rendirán un interés a una tasa fija y al final de la vida del activo el fondo igualará al costo del activo menos el valor de salvamento. El cargo de depreciación anual consiste del depósito del fondo de amortización más el interés en el fondo imaginario acumulado. El valor en libros en cualquier fecha es el primero costo del activo menos la cantidad acumulada en el fondo imaginario. El método del fondo de amortización es también conocido como el método del valor presente. El valor en libros a cualquier fecha es igual al valor presente del costo uniforme anual de la recuperación del capital por los años restantes de vida más el valor presente del posible valor de salvamento.

Ejemplo: Considere que nuestra máquina de \$ 500,000.- será depreciada por el método de fondo de amortización, al 8%. El depósito de amortización anual es

$$(500000 - 50000) (A/F, 8\%, 10) = (450000) (0.06903) = 31063$$

Este será también el cargo de depreciación en el primer año. En el segundo año el cargo de depreciación será: $31063 + 31063 \times 0.08 = 33548$

En el tercer año será:

$$31063 + (31063 + 33548)(0.08) = 36232$$

y Así sucesivamente.

El valor en libros en cualquier año puede ser calculado encontrando la cantidad en el fondo de amortización imaginario y restandola del costo inicial. Por ejemplo, el fondo de depreciación al final de ~~0.10~~ años será

~~$$(F/A, 8\%, 10) = 9832.5 (14.487)$$~~

$$31063 (F/A, 8\%, 8) = 31063 (10.637) = \$ 330410$$

El valor en libros en esta fecha es por lo tanto $500,000.00 - 330410 =$
 $= \$ 169,590$

La siguiente tabla muestra los cargos de depreciación anuales y los valores en libros para nuestra máquina de \$ 500,000.00 . Por los cuatro métodos que hemos explicado.

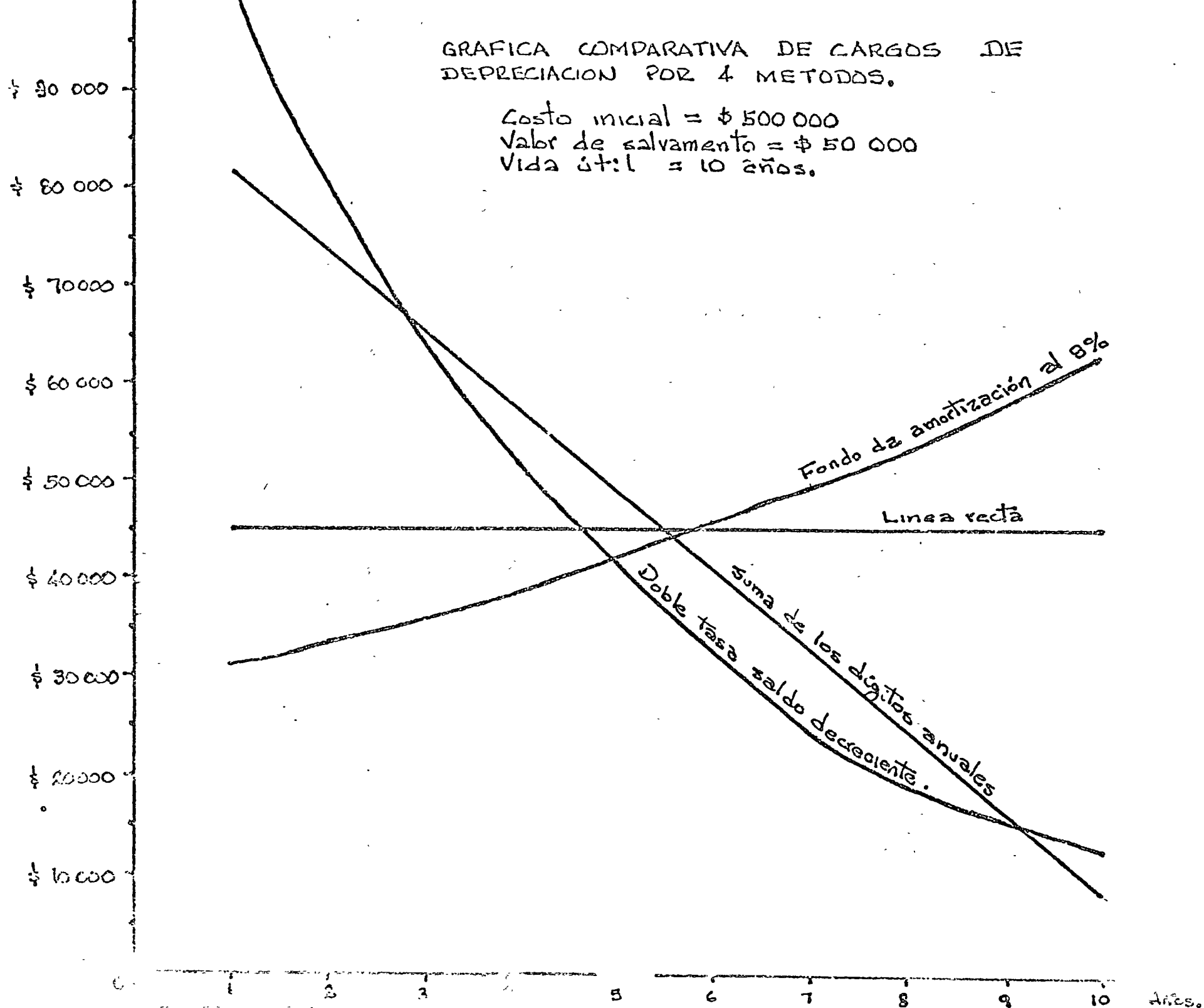
TABLA DE COMPARACION DE CARGOS DE DEPRECIACION Y VALOR
EN LIBROS PARA CUATRO METODOS DE DEPRECIACION CONTABLE.

(Activo con costo inicial de \$500,000. vida estimada de 20 años, y va -
lor de salvamento de \$50,000).

Año	CARGO DE DEPRECIACION ANUAL				VALOR EN LIBROS A FIN DE AÑO			
	Tasa doble saldo decreciente	Dígitos años	Línea recta	Fondo amortización 8%	Tasa doble saldo decreciente	Dígitos años	Línea recta	Fondo amortización 8%
0					500 000	500 000	500 000	500 000
1	100 000	81 818	45 000	31 063	400 000	418 182	455 000	468 937
2	80 000	73 637	45 000	33 548	320 000	344 545	410 000	435 389
3	64 000	65 455	45 000	36 232	256 000	279 090	365 000	399 157
4	51 200	57 273	45 000	39 131	204 800	221 817	320 000	360 026
5	40 960	49 091	45 000	42 262	153 840	172 726	275 000	317 764
6	31 768	40 909	45 000	45 643	122 072	131 817	230 000	272 121
7	24 414	32 727	45 000	49 294	97 657	97 657	185 000	222 827
8	19 351	24 545	45 000	53 237	78 126	74 552	140 000	169 590
9	15 625	16 373	45 000	57 496	62 500	58 181	95 000	112 094
10	12 500	8 181	45 000	62 094	50 000	50 000	50 000	50 000

GRAFICA COMPARATIVA DE CARGOS DE DEPRECIACION POR 4 METODOS.

Costo inicial = \$ 500 000
 Valor de salvamento = \$ 50 000
 Vida útil = 10 años.



En estudios económicos para calcular el costo anual de recuperación de capital, se usa la expresión $C.R.C. = (P-L)(A/P, i, n) + Li$

Esta ecuación que involucra el uso del factor de recuperación de capital es obviamente independiente de las cuentas de depreciación.

En algunos estudios económicos que usan el método de costos anuales, varias combinaciones de depreciación e interés son usados. El total de depreciación más interés, sirve el mismo propósito de nuestro costo anual de recuperación de capital con una tasa de retorno. Tres de los métodos que comúnmente son usados, son los siguientes:

1. Depreciación por fondo de amortización más interés sobre el costo inicial.
2. Depreciación por línea recta más interés sobre el costo inicial.
3. Depreciación por línea recta más interés promedio.

1. Depreciación por fondo de amortización más interés sobre el costo inicial. Este es un método correcto de interés compuesto que da el mismo costo anual de recuperación de capital, que el método convencional. Considerando que la tasa en el fondo de amortización es igual a la mínima tasa atractiva de retorno estipulada. En algunas ocasiones a este método se le llama "Interés más amortización". Como ya ha sido explicado, el factor de recuperación de

capital es igual al factor de fondo de amortización más la tasa de interés.

$$[A/P, i, n] = (A/F, i, n) + i$$

Por lo tanto, nuestra ecuación básica para recuperación de capital puede ser escrita:

$$C.R. = P(A/P, i, n) - L(A/F, i, n)$$

$$C.R. = P[(A/F, i, n) + i] - L(A/F, i, n)$$

$$C.R. = (P-L)(A/F, i, n) + Pi$$

Interés sobre el costo inicial.

En efecto, el método de depreciación de fondo de amortización más interés en el costo inicial, está basado en ésta ó última fórmula:

Ejemplo:

Consideremos un activo con un costo inicial de \$ 20,000, un valor de salvamento de \$ 2,000.00 y una vida estimada de diez años. Usando una mínima tasa atractiva de retorno de 10 %, tenemos usando el método convencional

$$\begin{aligned} C.R. &= (20000 - 2000)(A/P, 10\%, 10) + 2000(0.10) \\ &= 18000(0.16275) + 2000(0.10) = 2929.5 + 200 \end{aligned}$$

Considerando el uso de una tasa de interés del 10% para el método de depreciación de fondo de amortización más interés, tenemos:

$$\text{Fondo de Amortización} = (P-L) \left(\frac{R}{F, i, n} \right) = \$18000 (0.06275) = 1129.5$$

$$\text{Interés sobre el costo inicial} = P_i = 20000 (0.10) = \frac{2000}{3129.5}$$

Costo total anual de recuperación de capital con 10%

Observe que la cifra de depreciación por fondo de amortización no es el cargo total que se haría en los libros; es solamente una porción del cargo de depreciación. Los cargos de depreciación habría que calcularlos año con año como ya hemos ilustrado, la cifra de \$ 1,129.50 corresponde solamente a la depreciación en el primer año.

Cargo de depreciación por línea recta más interés sobre el costo inicial.- Si este método fuera usado el costo anual de recuperación de capital de nuestro activo de \$ 20,000.00 se calcularía de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Cargo de depreciación} &= \frac{P-L}{n} \\ &= \frac{20000 - 2000}{10} = \frac{18000}{10} = \$1800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Interés sobre costo inicial} &= P_i = 20000 (0.10) = \$2000 \\ \text{Total} &= \frac{\$3800}{14\% \text{ y no } 10\%} > 3129.5 \end{aligned}$$

Con este método invariablemente se obtiene una cifra demasiado alta para el costo anual, equivalente (exceptuando el caso en que el valor de salvamento fuera de 100%).

Los \$ 3,800.00 anuales que según el método es necesario para recuperar nuestra inversión de \$ 20,000.00 con una tasa del 10%, es de hecho suficiente para permitir la recuperación con una tasa de aproximadamente 14%.

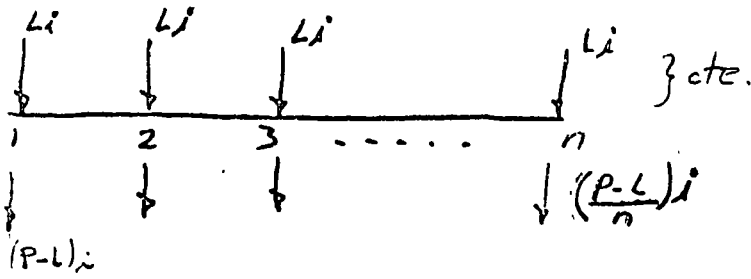
3. Depreciación por línea recta más interés promedio.

El método de línea recta más interés promedio calcula una cifra anual promedio que representará el costo del activo. En el caso general con un costo inicial P, un valor de salvamento L, vida n y tasa i el cargo de depreciación es = $\frac{P-L}{n}$

$$\text{y el interés promedio} = (P-L) \left(\frac{i}{2} \right) \left(\frac{n+1}{n} \right) + Li$$

Interpretación del interés promedio

y que además el pago de (P-L) será de principal (dividiendo $\frac{P-L}{n}$) y del interés correspondiente sobre saldos insolutos tendremos para los pagos por intereses:



ya qué:

Interés para el primer año por $(P-L) = (P-L)i$

Para el segundo año = $\left[(P-L) - \left(\frac{P-L}{n} \right) \right] i = \frac{n(P-L) - (P-L)}{n} i$

$$\text{Para el tercer año} = \left[(P-L) - \frac{2(P-L)}{n} \right] i = \frac{n(P-L) - 2(P-L)}{n} i$$
$$\begin{aligned} \text{Para el } n\text{ésimo año} &= \frac{n(p-L) - (n-1)(p-L)}{n} \\ &= \frac{n(p-L) - n(p-L) + (p-L)}{n} \quad i = \left(\frac{p-L}{n}\right)i \end{aligned}$$

• el interés promedio es:

1. interés promedio es:

$$\frac{(P-L)i + \left(\frac{P-L}{n}\right)i}{2} + Li^o = \frac{\frac{n(P-L)i + (P-L)i^o}{n}}{2} + \underline{\underline{Li^o}}$$

$$\text{1. Prom.} \quad \boxed{= (P-L)\frac{i}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right) + Li^o}$$

Para el ejemplo de activo de \$ 20,000 tenemos:

Cargo de dep = $\frac{20\,000 - 2\,000}{10} = \dots \dots \dots \1800

$$\text{interés promedio} = \left[(20000 - 2000) \left(\frac{0.10}{2} \right) \left(\frac{11}{10} \right) \right] + 2000(0.10)$$

$$= \$990 + 200 \quad \dots \quad \underline{\underline{\$1190}}$$

Lo cual es un poco menor a los \$ 3,129 del costo anual uniforme equivalente.

Este método es en algunos casos una aproximación al costo anual equivalente y aunque es raramente usado es utilizado para conciliaciones cuando el método de depreciación es el de línea recta y las estimaciones de vida útil y valor de salvamento usados en estudios económicos coinciden con los de los libros contables.

Ley del Impuesto sobre la Renta. (Publicada en el diario oficial de la federación el 31 de diciembre de 1964. Contiene las reformas publicadas en el "Diario Oficial" de la federación hasta el 30 de diciembre de 1970). Título II Capítulo II.

Art. 21.- La depreciación de los activos fijos tangibles y la amortización de los intangibles y de los cargos diferidos se sujetarán a las siguientes reglas:

I. No excederán de los siguientes por cientos anuales, sobre el monto original de la inversión respectiva:

a) Activos fijos intangibles y cargos diferidos..	5%
b) Bienes de activo fijo empleados normalmente por los diversos tipos de empresa en el curso de sus actividades:	
Edificios y construcciones, salvo las viviendas que a continuación se citan.....	3%
Viviendas que las empresas proporcionen a sus trabajadores en cumplimiento de la Ley Federal del Trabajo.....	5%
Ferrocarriles y embarcaciones (excepto compañías de transporte).....	6%
Mobiliario y Equipo de oficina.....	10%
Autobuses	11%
Aviones (excepto compañías de aviación)	17%
Camiones de carga pesada y remolques. Automóviles y camiones de carga ligera.....	20%
Tractores	25%
c) Maquinaria y equipo destinados a actividades industriales de:	
Producción de energía eléctrica; transportes eléctricos.....	3%
Cemento; granos y derivados; azúcar y derivados; aceite vegetal y derivados; plantas de energía nuclear; compañías de transporte marítimo, fluvial y lacustre.....	5%
Fabricación de productos derivados del petróleo y carbón natural productos metálicos primarios; productos derivados de tabaco.....	6%
Fabricación de telas (excepto tejidos de punto); petróleo y gas natural; papel y productos similares; productos de caucho.....	7%
Fabricación de vehículos de motor y sus partes; construcción de ferrocarriles y navíos; fabricación de productos de metal, de maquinaria y de instrumentos profesionales y científicos; producción de alimentos y bebidas (excepto granos, azúcar, aceite vegetal y derivados).....	8%
Curtido de piel y fabricación de artículos de piel; productos químicos, fabricación de productos básicos para otras industrias de productos plásticos, publicación e imprenta.....	9%

Prestación de servicios de construcción; fabricación de ropa y productos textiles; tejidos y prendas tejidas	11%
Construcción de aeronaves; compañías de transporte terrestre, de carga y de pasajeros.....	12%
Compañías de transporte aéreo; transmisión por radio y televisión.....	16%
d) Actividades agropecuarias:	
Agricultura	14%
Cría de ganado mayor	11%
Cría de ganado menor	25%

e) Otras actividades no especificadas en la enumeración anterior 10%.

II. Los por cientos elegidos por el causante serán fijos, constantes y obligatorios, pero cuando el causante hubiere utilizado factores de depreciación menores que los señalados en este precepto, la Secretaría de Hacienda y Crédito Público podrá autorizar su modificación siempre y cuando no excedan de los por cientos señalados por la ley.

III. Las deducciones respectivas podrán hacerse sólo para fines fiscales aun cuando no se efectúen contablemente. También podrán ser diferentes los por cientos utilizados para uno y otro fin.

IV. La Secretaría de Hacienda y Crédito Público, con fines de fomento económico, podrá autorizar a las empresas industriales, agrícolas, ganaderas o de pesca, para que efectúen depreciación acelerada de las inversiones en maquinaria y equipo, con arreglo a las siguientes bases:

a) La autorización se hará mediante acuerdos de carácter general, que señalen las ramas de la producción que podrán gozar del beneficio, los métodos aplicables, el plazo de su vigencia y los requisitos que deban cumplir los interesados;

b) La autorización señalará el porcentaje máximo del valor del activo que podrá depreciarse en forma acelerada y el período durante el cual debe efectuarse dicha depreciación;

c) La depreciación acelerada sólo se referirá a inversiones que se efectúen con posterioridad a las resoluciones que las autoridades fiscales deberán emitir en cada caso;

d) Las empresas interesadas deberán obtener el acuerdo correcto de las autoridades fiscales, para aplicar el método de depreciación acelerada.

FACULTAD DE INGENIERIA
CENTRO DE EDUCACION CONTINUA
CURSO SOBRE INGENIERIA ECONOMICA

Estimación del Efecto de los Impuestos Sobre el
Ingreso en Ciertas Decisiones de Inversión en la
Industria Competitiva.

Ing. Miguel Alonso Calles

Los edificios, terrenos, maquinaria y equipo, que poseen las empresas, están sujetos universalmente a impuestos por parte de los poderes fiscales. Dichos impuestos dependen de la valoración de la propiedad y de la tasa establecida de impuestos. Los impuestos sobre la propiedad son siempre importantes en un estudio económico, pero su efecto sobre los resultados es ligero, a causa de la pequeña magnitud relativa del monto de los impuestos. Los impuestos sobre la renta están basados en los ingresos netos, sin embargo, los "gastos" utilizados para determinar los ingresos netos deben ser calculados de acuerdo con los reglamentos Fiscales.

En la Mayoría de los países desarrollados y en desarrollo los impuestos están diseñados de tal forma que tienen una tasa de interés mayor a medida que los ingresos son más elevados. Sin embargo, las tasas y las reglas que definen el ingreso sujeto a impuestos varían mucho con el tiempo y son muy diferentes en cada país. Ello implica que para un estudio económico siempre es necesario constar con información actualizada. Aunque para nuestros fines podemos ilustrar el efecto de los impuestos sin observar las reglas en un 100%.

En estudios económicos los posibles impuestos futuros deben considerarse como un desembolso tal como los gastos de operación, mantenimiento, y como ellos requiere la estimación de la cantidad y tiempos de los flujos efectivos.

Relación entre las tasas de retorno antes y después de impuestos.- La variación entre tasas de retorno calculados antes y después de impuestos depende de las reglas de imposición sobre el ingreso. Para ilustrar lo anterior consideremos cuatro proposiciones que representan un egreso de \$ 500,000 estimando que cada una de ellas reducirían los egresos futuros en \$ 120,000/año por 10 años. A una tasa de interés del 20%, el valor presente de \$ 120,000/año es \$ 503,000, la tasa de retorno antes de impuestos es de aproximadamente 20.2%.

1er. caso.- Tasa de retorno después de impuestos considerando que el costo inicial es asignado uniformemente durante su período de uso efectivo.

Se propone una inversión de \$ 500,000 en equipo para el manejo de materiales, que reducirá los gastos de mano de obra, en \$ 170,000 cada año por 10 años, e incrementará los gastos de mantenimiento, energía, impuestos sobre la propiedad y seguros

en \$ 50,000. El método de depreciación empleado será el de la línea recta, con vida útil de 10 años (10%) y valor de salvamento de cero.

Cálculo de la tasa de retorno después de impuestos.- La tabla muestra los cálculos del futuro efecto de la inversión sobre el flujo efectivo después de impuestos, considerando una tasa de 42% (ingresos netos mayores de \$ 1,500,000). Por 10 años.

Estimación del flujo efectivo después de impuestos T A B L A - I

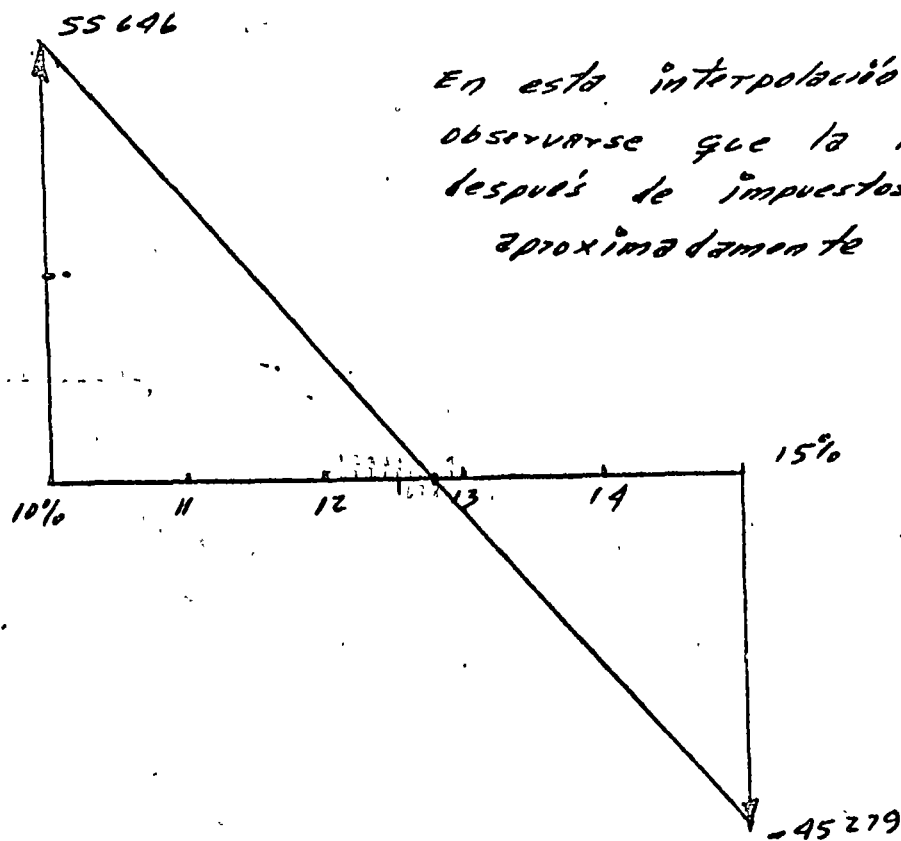
Año	Flujo efectivo antes de impuestos.	Descuento del costo inicial para propósitos de depreciación.	Ingreso sujeto a impuestos A + B	Efecto de la depreciación por concepto de impuestos -.42 C	Impuestos flujo efectivo después de impuestos A + D
	A	B	C	D	E
0	- 500 000				- 500 000
1	+ 120 000	- 50 000	+ 70 000	- 29 400	+ 90 600
2	+ 120 000	- 50 000	+ 70 000	- 29 400	+ 90 600
3	+ 120 000	- 50 000	+ 70 000	"	+ 90 600
4	"	"		"	
5	"	"		"	
6	"	"		"	
7	"	"		"	
8	"	"		"	
9	"	"		"	
n = 10	+ 120 000	- 50 000	+ 70 000	- 29 400	+ 90 600
TOTALES	+ 700 000	- 500 000	+ 700 000	- 294 000	+ 406 000

En este simple caso es evidente que el desembolso inmediato de 500 000 incrementará el flujo efectivo en + 90 600/año por 10 años

$$\begin{aligned}
 \text{valor presente al } 10\% &= -500\,000 + 90\,600 (P/A, 10\%, 10) \\
 &= -500\,000 + 90\,600 (6.144) \\
 &= -500\,000 + 555\,646 = 55\,646
 \end{aligned}$$

$$\text{Valor presente al } 15\% = -500000 + 90600(5.019) \quad 3.$$

$$= -500000 + 454721 = -45279$$



En esta interpolación puede observarse que la tasa de retorno después de impuestos es de aproximadamente 12.8 %

2dp. caso.- Tasa de retorno después de impuestos considerando que el costo inicial es distribuido sobre un período considerablemente mayor que su período de mayor productividad.

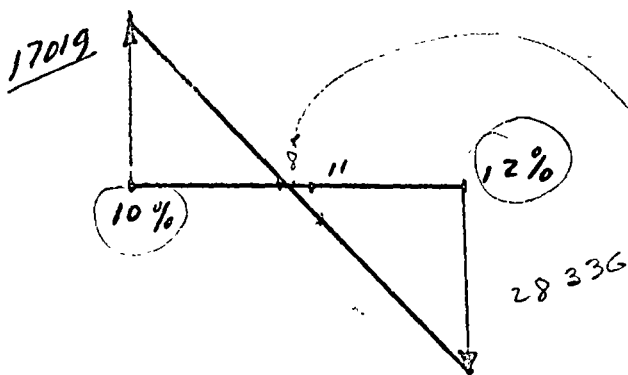
Datos.- Inversión de \$ 500,000.00 para maquinaria, en el que el período de servicio eficiente es calculado en 10 años. Durante estos 10 años se estima que la maquinaria reducirá la mano de obra en \$ 190,000 y que incrementará los gastos de mantenimiento, operación, impuestos, sobre propiedad y seguros en \$ 70,000. Las autoridades permiten una tasa de depreciación anual del 5% (20 años)

Estimación de flujo efectivo después de impuestos

año	Flujo antes de impuesto	Depreciación para propósitos de imp.	Ingreso sujeto a impuestos A+B	Pagos por concepto de imp.	flujo después de impuestos A+D
	B	5% B	C	D	
0	-500 000				-500 000
1 a 10	+120 000/año	+25 000/año	95 000	-39 900	80 100/año
1 a 20	0	-25 000/año	-25 000	+10 500	10 500/año
TOTALES	700 000	-500 000	700 000	294 000	406 000

$$\begin{aligned}
 \text{Valor presente al } 10\% &= -500000 + 80100(P/A, 10\%, 10) + 10500(P/F, 10\%, 10) \times 4 \\
 &= -500000 + 80100(6.144) + 10500(6.144)(0.6768) \\
 &= -500000 + 492134 + 10500(2.37) + 24885 \\
 &= -500000 + 517019 = 17019
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Valor presente al } 12\% &= \\
 &= -500000 + 80100(P/A, 12\%, 10) + 10500[P/A, 12\%, 10](P/F, 10\%, 10) \\
 &= -500000 + 80100(5.65) + 10500(5.65)(0.322) \\
 &= -500000 + 452565 + 19099 \\
 &= -500000 + 471664 = -28336
 \end{aligned}$$



En la interpolación resulta que la tasa después de impuestos es de 10.8%

3er. caso.- Tasa de retorno después de impuestos considerando que el costo inicial es distribuido (depreciado) en un período menor a su vida de mayor productividad.

Datos.- Los datos y estimaciones son idénticas al 2do. caso con la excepción de que la depreciación permitida es del 20% durante 5 años, debido a que la maquinaria producirá artículos necesarios para un determinado plan gubernamental.

Cálculo de la tasa después de impuestos.-

4o. caso.- Tasa de retorno después de impuestos considerando que el costo inicial es descontado del ingreso anual.

Datos.- El departamento de ingeniería industrial de la empresa propone una reubicación del equipo de producción existente, un gasto inmediato de \$ 500,000 es necesario para relocalizar la maquinaria. Se ha estimado que la nueva localización reducirá el costo de manejo de materiales en \$ 120,000 anuales por 10 años. Debido a que los \$ 500,000 no involucran adquisición alguna de nuevos activos, la cantidad total será considerada como un gasto (para la contabilidad y los propósitos fiscales) en el año en el cual se realiza (año cero)

T A B L A IV

AÑOS	Flujo efectivo antes de impuestos	gasto anual para propósitos de impuestos	ingreso sujeto a impuestos (para años de 1 a 10) A+B	Efecto del gasto por concepto de impuestos - 0.42 C	flujo efectivo después de impuestos A+D
	A	B	C	D	E
0	-500 000	-500 000	-500 000	+210 000	-290 000
1 a 10	+120 000/año		+120 000	-50 400	+69 600
TOTALES	+700 000	-500 000	700 000	-294 000	406 000

$$\text{Valor presente al } 20\% = -290\,000 + 69\,600(P/A, 20\%, 10)$$

$$= -290\,000 + 69\,600(4.192)$$

$$= -290\,000 + 291\,763 = +1\,763$$

tasa después de impuestos aprox 20%

En los cuatro casos pasados puede observarse que antes de impuestos todos son igualmente atractivos. Sin embargo, al considerar los impuestos encontramos grandes diferencias. Si los fondos disponibles para inversión hubieran sido limitados y si además estas cuatro proposiciones hubieran estado compitiendo con otras proposiciones diferentes es obvio que la elección no podría hacerse adecuadamente si no se consideraran los impuestos.

Efecto del método contable de depreciación empleado sobre la tasa de retorno después de impuestos.

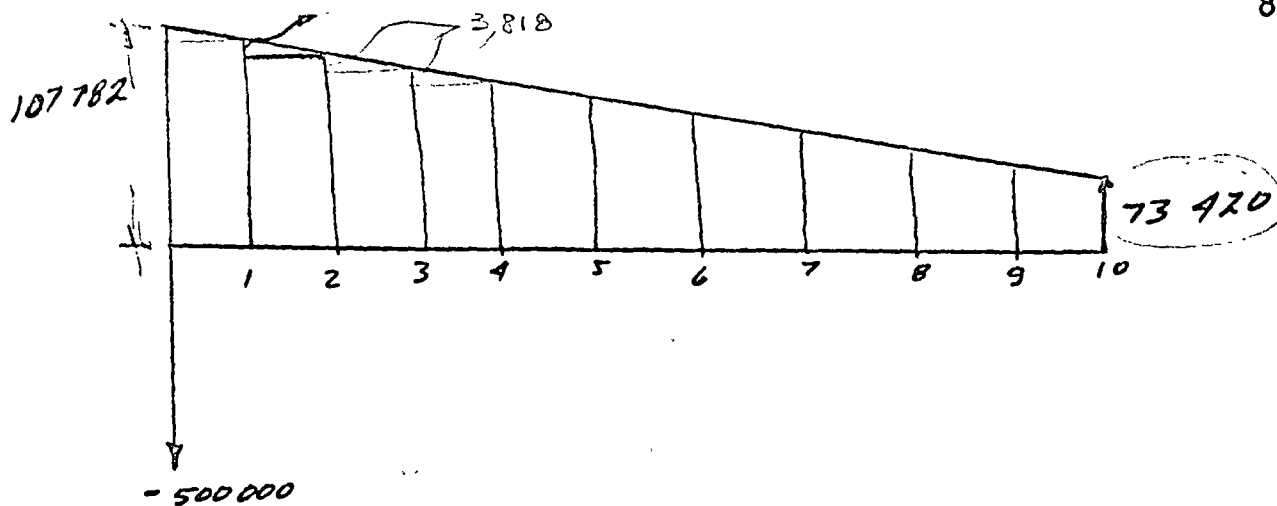
Es fácil de observar que mientras mas acelerado es el método de depreciación empleado mayor será la tasa de retorno durante los primeros años de la vida del activo. Las diferencias en las tasas de retorno entre los métodos contables de depreciación no son tan grandes como las mostradas en los casos anteriores. Para ilustrar su magnitud tomaremos el primero de los casos ya estudiados y compararemos el método de línea recta con el de la suma de los dígitos de los años.

Usando el método de línea recta encontramos ya que la tasa después de impuestos es del 12.8%. La tabla V muestra las consideraciones necesarias para la depreciación por medio del método de suma de los dígitos de los años.

TABLA V

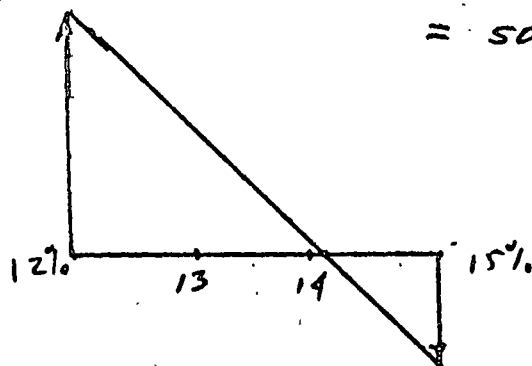
Estimación del flujo efectivo después de impuestos

<i>AÑOS</i>	<i>Flujo efectivo antes de impuestos</i>	<i>Depreciación</i>	<i>ingreso sujeto a impuestos A+B</i>	<i>flujo efectivo por impuestos -0.426</i>	<i>flujo efectivo después del impuesto A+B</i>
	A	B	C	D	E
0	-500 000	0			-500 000
1	+120 000	-90909	29 091	-12 219	107 782
2	+120 000	-81818	38182	-16 056	103 944
3	+120 000	-72727	47273	-19 854	100 146
4	+120 000	-63636	56364	-23 672	96 328
5	+120 000	-54545	65455	-27 490	92 510
6	+120 000	-45454	74546	-31 308	88 692
7	+120 000	-36363	83637	-35 126	84 874
8	+120 000	-27272	92728	-38 944	81 056
9	+120 000	-18181	101 819	-42 762	77 238
10	+120 000	-9090	110 910	-46 580	73 420



$$\begin{aligned}
 \text{Valor presente al } 15\% &= -500000 + 107782(P_A, 15\%, 10) - 3818(P_E, 15\%, 10) \\
 &= -500000 + 107782(5.019) - 3818(16.4795) \\
 &= -500000 + 540958 - 64828 \\
 &= -564828 + 540958 = -13870
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Valor presente al } 12\% &= -500000 + 107782(5.65) - 3818(20.2) \cdot (-1) \\
 &= -500000 + 608968 - 77330 = 31638
 \end{aligned}$$



$\therefore$ La tasa después de impuestos es 14.2 %
 que es superior al 12.8 %
 encontrado por el método de línea recta

El concepto de una "tasa efectiva de impuestos". Aún cuando el ingreso pueda estar sujeto a dos o más tasas de impuestos en diferentes períodos para propósitos prácticos es conveniente combinarlas en una sola tasa. Así podemos hablar de una sola tasa incremental en uno o varios años. Toda Tasa efectiva deberá ser determinada considerando todos los impuestos relevantes, tales como, federales y estatales, individuales y de corporaciones, etc.

LEY DEL IMPUESTO SOBRE LA RENTA

TITULO II

Del impuesto al ingreso global de las empresas

CAPITULO I

Del objeto y del sujeto

Art. 16. - Son objeto del impuesto a que este Título se refiere, los ingresos en efectivo, en especie o en crédito, que provengan de la realización de actividades comerciales, industriales, agrícolas, ganaderas o de pesca, las cuales se definen como sigue, para los efectos de esta ley:

I. Comerciales: las que conforme a las leyes federales tengan ese carácter y no estén comprendidas en las fracciones siguientes;

II. - Industriales: la extracción, conservación o transformación de materias primas, el acabado de productos, la elaboración de satisfactores y los servicios públicos;

III. - Agrícolas: el conjunto de las encaminadas a la siembra, cultivo y cosecha y la venta de primera mano de los productos obtenidos, que no hayan sufrido transformación industrial;

IV. - Ganaderas: el conjunto de las desarrolladas en la cría y engorda de ganado, la cría de animales y aves de corral y la venta de primera mano de sus productos, que no hayan sufrido transformación industrial.

V. - De pesca: la captura y extracción de toda clase de peces y mariscos, ya sea en agua dulce o salada, y la venta de primera mano de esos productos, que no hayan sufrido transformación industrial.

Art. 17. - Son sujetos del impuesto al ingreso global de las empresas, las personas físicas y las morales, que realicen actividades comerciales, industriales, agrícolas, ganaderas o de pesca. Lo son igualmente las unidades económicas sin personalidad jurídica, cuando realicen dichas actividades.

En esta ley se denominan causantes mayores a quienes tengan percepciones acumulables en un ejercicio regular por cantidad que exceda de \$ 150,000.00, o percepciones menores en un ejercicio irregular si dividido el monto de las mismas entre el número de días del ejercicio y multiplicado por 365, el resultado fuere superior a la cantidad citada. Se denominan causantes menores a las personas cuyas percepciones acumulables, determinadas como antes se indica, fueren hasta de \$ 150,000.00.

CAPITULO III

Del pago de los causantes mayores

Art. 34. - El impuesto de los causantes mayores se calculará aplicando al ingreso global gravable del ejercicio, determinado de acuerdo con las disposiciones de esta ley, la siguiente

TARIFA

Límite inferior			Límite Superior			Cuota fija		Porcentaje para aplicar-se s/ el excedente del límite inferior
M \$ N			M \$ N			M \$ N		%
De	0.01	a	2,000.00					Exento
De	2,000.01	a	3,500.00					5.00
De	3,500.01	a	5,000.00			75.00		6.00
De	5,000.01	a	8,000.00			165.00		7.00
De	8,000.01	a	11,000.00			375.00		8.00
De	11,000.01	a	14,000.00			615.00		9.00
De	14,000.01	a	20,000.00			885.00		10.00
De	20,000.01	a	26,000.00			1,485.00		11.00
De	26,000.01	a	32,000.00			2,145.00		13.00
De	32,000.01	a	38,000.00			2,925.00		16.00
De	38,000.01	a	50,000.00			3,885.00		18.00
De	50,000.01	a	62,000.00			6,045.00		19.00
De	62,000.01	a	74,000.00			8,325.00		20.00
De	74,000.01	a	86,000.00			10,725.00		21.50
De	86,000.01	a	100,000.00			13,305.00		22.50
De	100,000.01	a	150,000.00			16,455.00		24.10
De	150,000.01	a	200,000.00			28,505.00		26.76
De	200,000.01	a	300,000.00			41,885.00		29.64
De	300,000.01	a	400,000.00			71,525.00		34.00
De	400,000.01	a	500,000.00			105,525.00		38.00
De	500,000.01	en adelante				210,000.00		42.00

Si el ingreso global gravable estuviera comprendido entre \$500,000.01 y \$1.500,000.00, se deducirá de la cuota fija de \$210,000.00, la cantidad que resulte de aplicar el 6.65% sobre la diferencia entre \$1.500,000.00 y el ingreso global gravable.

LA INFLUENCIA DE LAS FUENTES DE FONDOS DE INVERSION EN ESTUDIOS ECONOMICOS

Miguel Alonzo Calles

Miércoles 27, 71

COSTO DE CAPITAL

Las decisiones de inversión están directamente ligadas a las decisiones financieras, ya que la aceptación de una proposición de inversión depende de como será financiada.

Las dos cuestiones principales en las que enfocaremos nuestro estudio de -- costos de capital son:

- 1.- Cual de las diferentes formas de financiamiento deberemos seleccionar para financiar una proposición específica.
- 2.- Cual es el costo de financiamiento de una empresa con una determinada estructura de capital.

En general podemos clasificar a las fuentes de financiamiento en tres tipos básicos:

- 1.- Capital de Deuda. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Préstamos de largo plazo} \\ \text{Bonos} \end{array} \right.$
- 2.- Arrendamiento a largo plazo
- 3.- Emisión de Nuevas Acciones
- 4.- Fondos propios

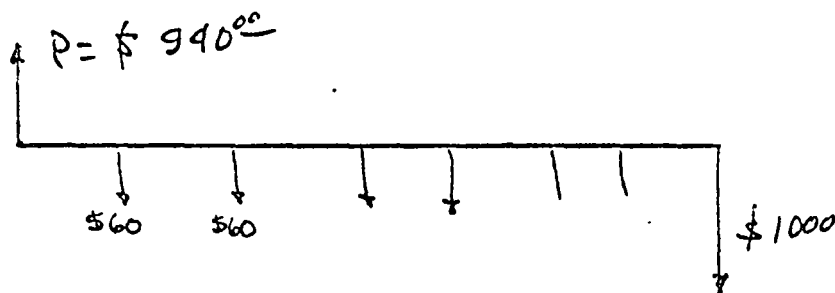
Costo de Deuda.-

Los riesgos de obtener capital a través de préstamos se derivan de la obligación legal inobjetable de pagar los intereses y el capital al vencer los plazos especificados por el contrato. El costo aparentemente bajo, es debido a los pocos riesgos que corre el prestamista y puede resultar económico para una empresa, ya que el interés de la deuda es deducible de impuestos.

Ejemplo:

Una serie de bonos de \$1000, al 6%, se ofrece al público por \$960 a través de un corredor, el que después de cobrar su comisión entrega a la empresa \$940 por bono.

Si se pagan los intereses anualmente y la fecha de vencimiento es 10 años (al vencimiento se pagarán \$1000/bono). ¿Cual es el costo de capital para la Campaña?



$$0 = 940 - 60(P/A, i, 10) - 1000(P/F, i, 10)$$

Para 7%

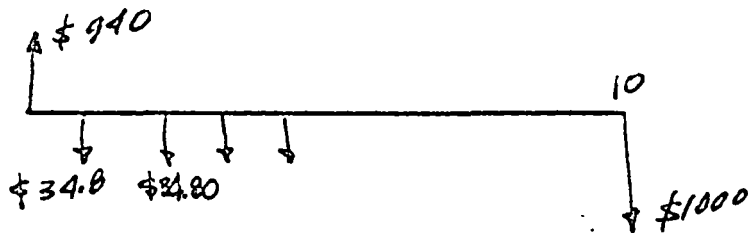
$$\begin{aligned} 0 &= 940 - 60 \times 7.024 - 1000 \times 0.5083 \\ &= 940 - 421.44 - 508.3 = 940 - 929.74 = 10.26 \end{aligned}$$

Para 6%

$$0 = 940 - 60 \times 7.36 - 100 \times 55.84 = 940 - 99.96 = -59.6$$

$$\therefore i = 6 + \frac{59.6}{69.86}(1) = \underline{\underline{6.86\%}}$$

sin embargo supongamos que la tasa efectiva de impuestos de la empresa es de 42%



$$0 = 940 - 34.8(P/A, i, 10) - 1000(P/F, i, 10)$$

Para 4%

$$\begin{aligned} 0 &= 940 - 34.8 \times 8.111 - 1000 \times 0.675 = 940 - 282 - 675 \\ &= 940 - 957 = -17 \end{aligned}$$

Para 4 1/2 % ✓

$$\begin{aligned} 0 &= 940 - 34.8 \times 7.913 - 1000 \times 0.644 = 940 - 275 - 644 = \\ &= 940 - 919 = 21 \end{aligned}$$

$\therefore$ El costo de capital para la compañía es de aproximadamente 4 1/4 %

Costo del arrendamiento.

Los riesgos para el arrendador son mayores que para el prestamista. En los contratos de arrendamiento el arrendador adquiere el activo y lo alquila al arrendatario, quién pagará una renta, generalmente compuesta, por el pago de capital más intereses. Además, generalmente existe una opción de compra al final del período de arrendamiento. El costo de capital para el arrendatario puede resultar económico, ya que la renta total es deducible de impuestos. En la mayoría de los contratos se establece un anticipo que puede o no ser reembolsado al arrendatario.

Arrendamiento vs. Prestamo.

La determinación del método más conveniente depende de los flujos efectivos de cada uno de ellos y de los costos de oportunidad de los fondos. Para ilustrar un método de análisis, compararemos arrendamiento con financiamiento a través de deuda, usando un ejemplo hipotético.

a) Arrendamiento.

Supongamos que una empresa ha decidido adquirir un activo con costo de \$2 000 000, el cual tiene una vida económica de diez años y valor de salvamento nulo. El flujo neto efectivo después de descontar los gastos de operación pero antes de considerar la depreciación y los impuestos, es calculado en \$400 000 anuales. La empresa debe decidir entre financiar el activo por medio de arrendamiento o deuda.

El arrendador requiere que el costo del activo sea totalmente amortizado en diez años y que su inversión tenga un rendimiento del 14%. Los pagos deberán hacerse anuales y por adelantado. El pago anual debe ser calculado por medio de la siguiente ecuación:

$$\$2\,000\,000 = X + X(P/A, 14\%, 9)$$

$$\$2\,000\,000 = X(1 + 4.857)$$

$$\frac{2\,000\,000}{5.857} = \$341,470.$$

Si consideramos una tasa de impuestos de 42%, los flujos efectivos serán:

TABLA I

Fin del año	Flujo efectivo antes de pagos (arrend. e impuestos).	Flujo por pago de arrend.	Ingreso sujeto a imp.	Flujo por pago de impuestos	Flujo despues de impuestos A+B+D
	A	B	C	D	E
0		-341 470	-341 470	+143 417	-197 953
1-9	\$400 000	-341 470	+ 58 630	- 24 624	+ 33 906
10	\$400 000		\$400 000	-168 000	+232 000

b) Préstamo.

Si el activo es comprado, supongamos que la empresa puede financiarlo por medio de un préstamo a largo plazo al 13%. Los pagos del principal son considerados en \$200 000 por año pagaderos al final de cada uno de los diez años venideros. Los pagos de intereses se efectuarán también a fin de año y son sobre saldos insolutos. Bajo estas condiciones el préstamo total se pagará en la forma que se muestra en la siguiente tabla:

TABLA II
CALENDARIZACION Y MAGNITUD DE LOS PAGOS

Final del año	Pago del Principal	Saldo por Pagar	Pago por Interés	Pago Total A+C
	A	B	C	D
1	\$200 000	1 800 000	260 000	460 000
2	200 000	1 600 000	234 000	434 000
3	200 000	1 400 000	208 000	408 000
4	200 000	1 200 000	182 000	382 000
5	200 000	1 000 000	156 000	356 000
6	200 000	800 000	130 000	330 000
7	200 000	600 000	104 000	304 000
8	200 000	400 000	78 000	278 000
9	200 000	200 000	52 000	252 000
10	200 000	-----	26 000	226 000

Suponiendo que se usa el método de líneas recta (tasa de depreciación anual del 10%) para depreciar el activo, el cargo de depreciación anual será de \$200 000. La tabla III muestra la estimación del flujo efectivo después de impuestos.

TABLA III

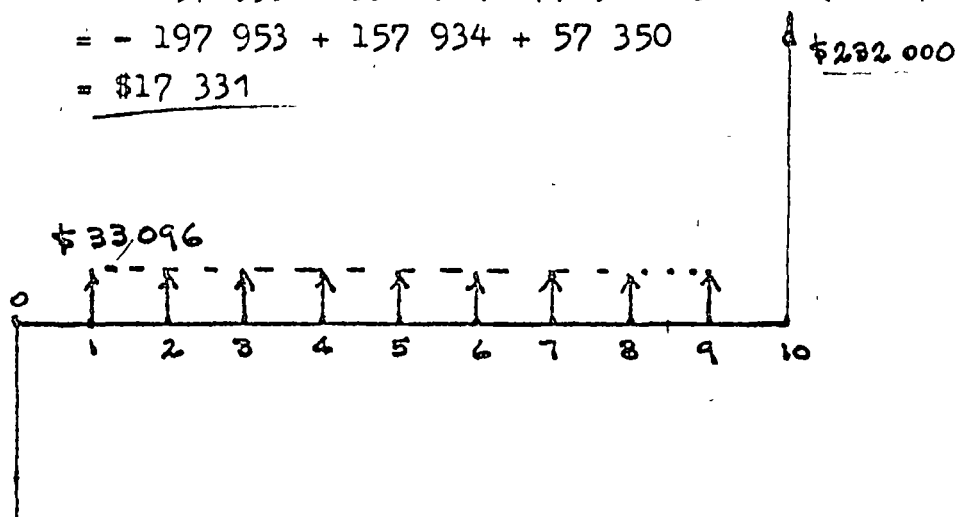
ESTIMACION DEL FLUJO EFECTIVO DESPUES DE
IMPUESTOS.

Año	Flujo efect. antes de depreciación e intereses	Deprec. más interés	Utilidad antes de impuestos A+B	Flujo por Impuestos -.42C	Flujo Ef. deuda + Impuesto	Flujo Ef. después de impuestos A+E
	A	B	C	D	E	F
1	\$400 000	- 460 000	- 60 000	+ 25 200	- 434 800	- 34 800
2	400 000	- 434 000	- 34 000	+ 14 280	- 419 720	- 19 720
3	400 000	- 408 000	- 8 000	+ 3 360	- 404 640	- 4 640
4	400 000	- 382 000	+ 18 000	- 7 560	- 389 560	+ 10 440
5	400 000	- 356 000	+ 44 000	- 18 480	- 374 480	+ 25 520
6	400 000	- 330 000	+ 70 000	- 29 400	- 359 400	+ 40 600
7	400 000	- 304 000	+ 96 000	- 40 320	- 344 320	+ 55 680
8	400 000	- 278 000	+ 122 000	- 51 240	- 329 240	+ 70 760
9	400 000	- 252 000	+ 148 000	- 62 160	- 314 160	+ 85 840
10	400 000	- 226 000	+ 174 000	- 73 080	- 299 080	+ 100 920

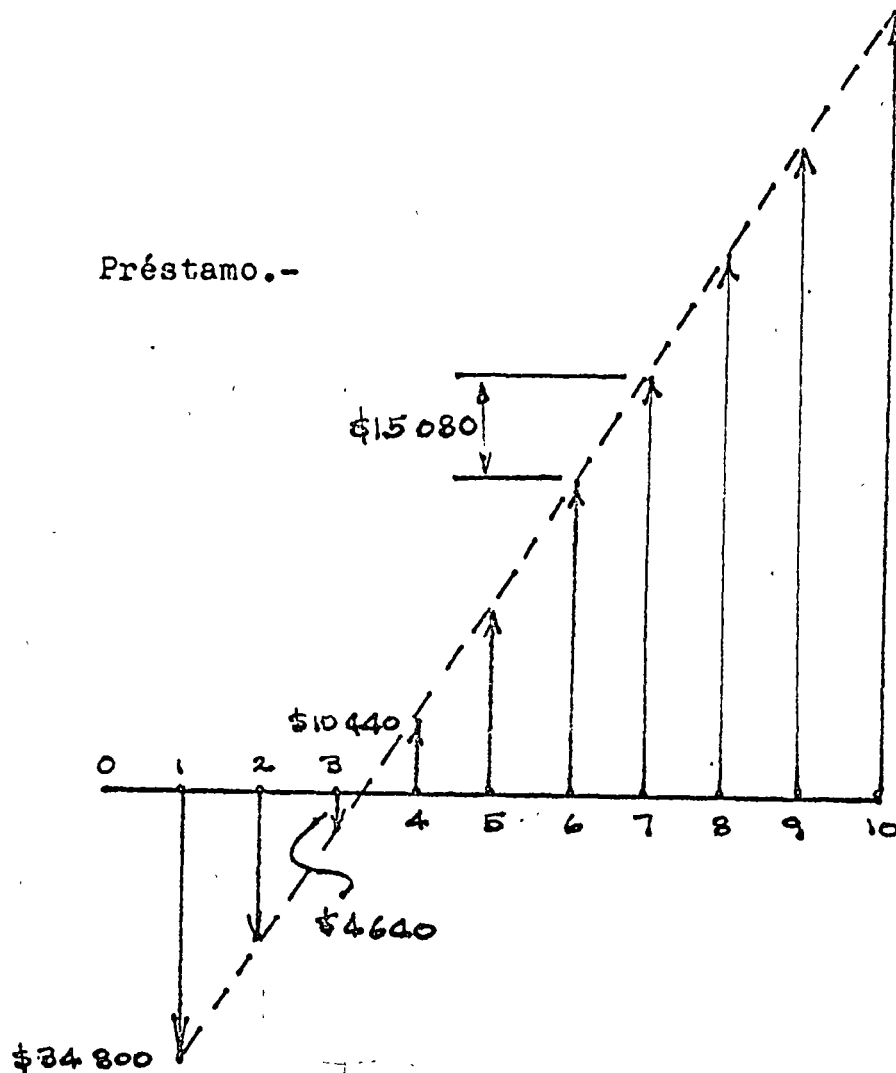
Supongamos que el costo de oportunidad de los fondos para una inversión de esta naturaleza es de 15% después de impuestos. Si usamos esta tasa para descontar los flujos efectivos después de impuestos para las dos alternativas, tenemos:

Arrendamiento.-

$$\begin{aligned}
 \text{Valor presente al 15\%} &= -197\,953 + 33\,096(P/A, 15\%, 9) + 232\,000(P/F, 15\%, 10) \\
 &= -197\,953 + 33\,096(4.772) + 232\,000(0.2472) \\
 &= -197\,953 + 157\,934 + 57\,350 \\
 &= \$17\,331
 \end{aligned}$$



Préstamo.-



$$\begin{aligned}
 VP \text{ al } 15\% &= (10\,440(P/A, 15\%, 7) + 15\,080(P/G, 15\%, 7))(P/F, 15\%, 3) \\
 &\quad - 34\,800(P/A, 15\%, 3) + 15\,080(P/G, 15\%, 3) \\
 &= (10\,440(4.160) + 15\,080(10.192))(0.6575) - 34\,800(2.283) \\
 &\quad + 15\,080(2.071) \\
 &= (43\,430 + 153\,695)(0.6575) - 79\,448 + 31\,231 \\
 &= 126\,610 - 79\,448 + 31\,231 = 81\,393
 \end{aligned}$$

De acuerdo con el análisis anterior la empresa deberá de financiar el activo por medio de deuda, ya que el valor presente de los flujos efectivos con préstamo es mayor que con arrendamiento.

Esta decisión de obtener un préstamo descansa en la calendarización y magnitud de los flujos efectivos de las dos alternativas y también en la tasa de descuento empleada. El valor de salvamento también afecta a los flujos efectivos.

Particularmente en México, en algunos casos la tasa de depreciación permitida a las empresas comerciales (arrendadoras por ejemplo) es mayor que la que se permite a las industriales. Por tal motivo, la opción de compra para el arrendatario después de un período determinado, podría ser menor que el valor en libros que tendría el activo si fuera propiedad de la empresa. Esto último, favorecerá al plan de arrendamiento, ya que la depreciación en caso de compra es menor para el mismo período.

LA INFLUENCIA DE LAS FUENTES DE FONDOS DE INVERSIÓN EN ESTUDIOS ECONÓMICOS. (CONTINUACIÓN)

Ing. M. Alonzo Calles

Costo de Acciones preferentes.-

El costo de las acciones preferentes es una función del dividendo establecido. Este dividendo no es una obligación contractual de la empresa, sin embargo, las empresas que emiten acciones de este tipo intentan pagar el dividendo.

Debido a que las acciones preferentes no tienen fecha de vencimiento, su costo puede ser representado como

$$k_p = \frac{D}{P_0} \quad \frac{\text{DIVIDENDO ANUAL}}{\text{PRECIO DE LA ACCIÓN COMÚN}} \quad (1)$$

en donde D es el dividendo anual establecido y P_0 son los ingresos totales por la venta de las acciones. Si una empresa fuera capaz de vender acciones preferentes con 8 1/2% (con un valor par de \$ 1 000) y obtener \$980 por acción, el costo sería de $8 \frac{1}{2} / 980 = 8.6\%$. Obsérvese que este costo no es ajustado por concepto de impuestos, ya que el dividendo es pagado después de impuestos (no es deducible de impuestos).

El costo del capital social es el más difícil de determinar. Teóricamente, puede ser definido como la tasa mínima atractiva de retorno que la empresa debe de obtener en la parte financiada por capital social para mantener sin variación el precio de las acciones en el mercado. Si la empresa invierte en proyectos donde la tasa de retorno esperada es menor que el retorno mencionado, el precio en el mercado de las acciones a largo plazo será afectado negativamente. ~~En~~ En la práctica poder determinar el costo del capital social, debemos analizar la valuación de las acciones comunes en el mercado.

Modelo para la Valuación del Dividendo.

El valor de una acción para los inversionistas es el valor presente de la serie esperada de futuros ingresos que la acción les pagará. Debido a que los dividendos es todo lo que los accionistas reciben de su inversión, ésta serie de ingresos son los dividendos efectivos pagados en los períodos futuros y quizá un dividendo final de liquidación. Al tiempo 0 el valor de una acción es:

$$P_0 = D_1(P/F, k_c, 1) + D_2(P/F, k_c, 2) + \dots + D_n(P/F, k_c, n)$$

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+k_c)} + \frac{D_2}{(1+k_c)^2} + \dots + \frac{D_\infty}{(1+k_c)^\infty}$$

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k_c)^t} \quad \text{Valor exp. de los dividendos.} \quad (2)$$

Al final

en donde P_0 = valor de la acción común al tiempo 0.
 D_t = es el dividendo por acción esperado en el período t .
 k_c = es la tasa de descuento apropiada al riesgo de la empresa.

Los inversionistas formulan distribuciones de probabilidad subjetivas de los dividendos por acción que serán pagados en períodos futuros. Para el inversionista individual, los D_t son los valores esperados o medias, de dichas distribuciones de probabilidad.

El costo del capital para acciones comunes puede ser definido como la tasa de descuento en el mercado k_c que iguala el valor presente de todos los futuros dividendos esperados por acción con el precio actual de la acción en el mercado. Este costo es encontrado resolviendo la ecuación anterior para k_c .

Si se espera que los dividendos de una compañía crezcan a una tasa constante " g ", a medida que las ganancias se incrementan, la ecuación (2) queda:

$$P_0 = \frac{D_0(1+g)}{(1+k_c)} + \frac{D_0(1+g)^2}{(1+k_c)^2} + \dots + \frac{D_0(1+g)^{\infty}}{(1+k_c)^{\infty}} \quad (3)$$

Considerando que k_c es mayor que g y que el caso es continuo la ecuación (3) se reduce a:

$$P_0 = \frac{D_0}{k_c - g} \quad \left[P_0 = \int_0^{\infty} D_0 e^{gt} e^{-k_c t} dt = \int_0^{\infty} D_0 e^{-t(k_c - g)} dt \right]$$

integrando esta expresión:

$$\left[\int e^{-x} dx = -\frac{1}{x} \right] \quad \left(P_0 = \frac{D_0}{k_c - g} \right)$$

Por lo tanto el costo de capital es:

$$k_c = \frac{P_0}{D_0} + g \quad (3')$$

La consideración crítica en este modelo es que se espera que los dividendos por acción crecerán perpetuamente a una tasa compuesta " g ". Para ciertas compañías, esta puede ser una buena aproximación a la realidad.

Por ejemplo:

$D = \$20/\text{acción}$
 $g = 4\%$
 Si los dividendos actuales de una compañía son de \$20/acción, el precio actual en el mercado es de \$500 y se espera que las ganancias y dividendos por acción crezcan en 4% por año el costo de capital de las acciones comunes para la empresa será de:

$$k_c = \frac{20}{500} + 4\% = 8\% \quad \text{Tasa de descuento}$$

Es importante observar que el modelo de valuación de dividendos comprende a los dividendos y a las ganancias *de capital* (retenidos) estas últimas son el medio para financiar el crecimiento futuro de las ganancias y de los dividendos por acción. En la valuación de una acción, el inversionista debe de considerar el precio actual de la acción en el mercado como la combinación del valor presente de los futuros dividendos y la ganancia en

capital en el momento de venderla. Así:

$$P_0 = \sum_{t=1}^n \frac{D_t}{(1+k_c)^t} + \frac{D_n}{(1+k_c)^n} \quad (4)$$

el primer término en ésta ecuación representa el valor presente de los esperados futuros dividendos durante el período en que se posee la acción y el segundo es el precio en el mercado al cual el inversionista espera ser capaz de vender su acción al final del año n. Sin embargo, ~~el valor presente de los futuros dividendos a partir del año "n", o sea: el precio esperado al final del año n, será el valor presente de los futuros dividendos a partir del año n. o sea:~~ $P_n = \sum_{t=n}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k_c)^{t-n}} \quad (5)$

Por tanto, el precio actual en el mercado es:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k_c)^t} \quad (6)$$

Así puede verse que el modelo de valuación considera intrínsecamente las ganancias de capital.

Si una empresa vende una nueva emisión de acciones comunes al público, la emisión deberá venderse a un precio menor que el precio actual en el mercado. Resultando, los ingresos de la venta de las acciones menor que el precio actual en el mercado multiplicado por el número de acciones emitidas. Los cálculos para determinar el costo del capital social deberán ser modificados para tomar en cuenta este factor. Así, el costo deberá ser calculado resolviendo la siguiente ecuación para (k_c)

$$P_f = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k_c)^t} \quad (7)$$

en donde (P_f) es el ingreso de la venta de las acciones comunes. La única diferencia entre esta expresión y la ecuación (2) es que P_f es sustituido por P_0 . Debido a que P_f es menor que P_0 el costo del capital social k_c será en poco mayor que el encontrado por la ecuación (2).

En resumen, el costo del capital social es la tasa de retorno requerida por los inversionistas en la porción financiada por esta fuente de una proposición de inversión, manteniendo constante la estructura de capital, el riesgo y la política de dividendos de la empresa.

Costo de Ganancias Retenidas. (FONDOS PROPIOS)

En muchas empresas una gran porción de su financiamiento para proyectos de inversión es obtenida de ganancias retenidas. Puede parecer a simple vista que estos fondos no tienen costo alguno, sin embargo, existe un costo de oportunidad definido para esta fuente de fondos. Este costo de oportunidad es simplemente el dividendo no distribuido a los accionistas. En ausencia de impuestos el mínimo costo de retener estas

ganancias es el costo del capital social, basado en el precio actual de las acciones en el mercado y no es los ingresos netos por la venta de las acciones, (Pr). Este costo es determinado resolviendo la siguiente ecuación para (kr)

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+kr)^t}$$

Costo explícito de las ganancias retenidas

Si la firma es incapaz de generar oportunidades de inversión que proporcionen un retorno igual a kr , los accionistas supuestamente pueden encontrar acciones de otras compañías en el mercado con el mismo grado de riesgo que proporcionen dicho retorno. En vez de invertir en proyectos que proporcionen un retorno menor, la empresa deberá distribuir las ganancias a los accionistas y dejarlos invertir por cuenta propia. Decimos que kr es el mínimo costo de ganancias retenidas, debido a que los dividendos pueden tener un valor por arriba de la tasa de oportunidad de inversión de los accionistas.

Si consideramos los impuestos, los accionistas no disfrutarán de las ganancias totales sino de la porción que les queda después de impuestos. Por ejemplo, si la tasa de impuesto del accionista es de 30%, dispondrá solamente del 70% del dividendo. Si kr es 10% el retorno total que el accionista es capaz de obtener invirtiendo el dividendo en una compañía con el mismo riesgo es $0.70 (0.10) = 0.07$. Muchos autores sostienen que el costo de las ganancias retenidas debe tomar en cuenta los impuestos que un accionista debe pagar por el dividendo que recibe. De acuerdo a esto, el costo de ganancias retenidas es:

$$\hat{kr} = (1-t)kr$$

en donde t es la tasa de impuestos ponderada para todos los accionistas y kr es el costo de las ganancias retenidas calculado en ausencia del impuesto.

Costo Promedio Ponderado de Capital.

Una vez que los costos de los componentes individuales de la estructura de capital han sido calculados pueden ser ponderados de acuerdo a algún estándar y así calcular el costo promedio ponderado de capital. Como ilustración de la mecánica de los cálculos, supongamos que una empresa tiene la siguiente estructura de capital.

	<u>Cantidad</u>	<u>Proporción</u>
Deuda	\$ 30 millones	30%
Acciones Preferentes	10 millones	10
Acciones Comunes	20 millones	20
Ganancias Retenidas	40 millones	40
T o t a l	<u>\$100 millones</u>	<u>100%</u>

Supongamos además que la firma ha calculado los siguientes costos de capital después de impuestos para cada uno de los elementos.

Deuda	12%
Acciones Preferentes	13%
Acciones Comunes	14%
Gañan. Retenidas	13%

Si las ponderaciones anteriores son usadas, el costo promedio ponderado de capital para este ejemplo es

Método de Financiamiento	Proporción	Costo	Costo Ponderado
Deuda	.30	12%	3.6%
Acciones Preferentes	.10	13%	1.3%
Acciones Comunes	.20	14%	2.8%
Ganancias Retenidas	.40	13%	5.2%
Costo promedio ponderado de capital			12.9%

para que sea
prop. 150
Establecimiento.

Con el cálculo de un costo promedio ponderado de capital lo crítico consiste en poder afirmar que la cifra representa el costo real de capital de la empresa para poder usarse en la evaluación de los proyectos de inversión. La veracidad de esta afirmación depende de que tan adecuadamente hemos medido los costos individuales, del sistema de ponderación y de algunos otros factores. Consideremos por ahora que somos capaces de medir adecuadamente los costos individuales de las fuentes de financiamiento y examinemos la importancia del sistema de ponderación.

Sistema de Ponderación.

Una de las consideraciones críticas en cualquier sistema de ponderación es que la firma pueda realmente obtener capital en las proporciones especificadas. Si no es así, el capital es obtenido en otras proporciones que las usadas al calcular el costo. El resultado será que el costo promedio ponderado de capital será diferente al calculado y usado para decisiones de inversiones de capital. Aún cuando proporciones rígidas no pueden ser mantenidas, la mayoría de las empresas son capaces de mantener proporciones aproximadas a largo plazo.

Gran parte de la decisión financiera está constituida por la retención de ganancias.

Sin embargo, las ganancias retenidas son restringidas por las ganancias absolutas. Si las oportunidades de inversión de una empresa garantizan una expansión a una tasa mayor que el

crecimiento de las ganancias, el financiamiento por medio de ganancias retenidas disminuirá con relación a otros medios. Cuando la expansión es continua por un número de años, la estructura de financiamiento de la empresa está sujeta a una restricción con respecto a la habilidad de la empresa para retener ganancias. Sin embargo, frecuentemente, la expansión se concentra en períodos cortos de tal forma que a largo plazo, las empresas son capaces de financiar con una proporción relativamente constante de ganancias retenidas.

Costo de Depreciación.

Al igual que las ganancias retenidas, los fondos generados por la depreciación tienen un costo de oportunidad. Desafortunadamente, estos fondos son a menudo considerados libres de costo debido a que no aparecen en el pasivo en el balance general. La depreciación representa la transformación de activos en flujo efectivo. Estos fondos no serán reinvertidos en activos fijos a menos que los activos alcancen el estándar mínimo de aceptación. Este estándar mínimo deberá ser el costo de capital debido a que es el costo de oportunidad para su uso.

Supongamos que una compañía se inicia con una capitalización de \$500 000 en acciones comunes. Supongamos además, que la compañía consigue un préstamo e invierte un millón en activos fijos y que tiene la política de mantener una relación de capital entre deuda de uno a uno, basada en los valores en libros. El balance general para la compañía es:

		Deuda \$500 000
Activo Fijo	\$1 000 000	Acc. Comunes \$500 000
	<u>\$1 000 000</u>	<u>\$1 000 000</u>

Si los activos son depreciados por el método de la línea reecta y la vida depreciable es de 10 años, los cargos anuales por depreciación son de \$100 000. Para simplificar, considere que la compañía tiene una utilidad de cero en el primer año y no mas proposiciones de inversión en el futuro. El balance después del primer año de operaciones será,

Caja y bancos	\$ 100 000	Deuda \$ 500 000
Activo Fijo	\$1 000 000	
Depreciación	- 100 000	Ac. Com. <u>500 000</u>
Activo Fijo Neto	<u>900 000</u>	
	<u>\$1 000 000</u>	<u>\$1 000 000</u>

Si la compañía tuviera la política de distribuir el efectivo reduciendo proporcionalmente el lado derecho del balance, pagará \$500 000 de la deuda y recomprará \$ 50 000 de las acciones. El costo de oportunidad por el uso de los fondos de depreciación es el costo promedio ponderado de deuda y capital social.

Presupuestos de Capital.

Los presupuestos de capital constituyen uno de los aspectos más importantes en el proceso de toma de decisiones de toda empresa. Las fuentes de fondos de inversión y las proposiciones alternativas de inversión forman el cuerpo central de los presupuestos de capital.

Las proposiciones de inversión deben competir entre sí por sus propios méritos independientemente de la fuente de inversión a la que haya que recurrir para financiarlas. Mas aún, las alternativas de fuentes de financiamiento deben evaluarse en función de sus propios méritos y la combinación de fuentes necesaria para el financiamiento no deberá ser determinada por las proposiciones aprobadas.

No hay ninguna razón para obtener nuevos fondos o retener fondos que deben ser legalmente distribuidos a los accionistas a menos de que dichos fondos puedan ser invertidos de tal forma que proporcionen beneficios aceptables a los accionistas de la empresa. Así, las políticas generales referentes a la cantidad de fondos de inversión que una empresa debe disponer, están directamente ligados a la existencia de proposiciones de inversión atractivas.

El costo y la disponibilidad del capital que puede ser obtenido de cualquier fuente variará con el tiempo y de una empresa a otra. Es conocido que existen algunas dificultades para encontrar una estructura de capital constante para obtener el costo ponderado de capital. Si pudiera existir en cada caso particular, una estructura de capital invariable, y si no existiera ninguna dificultad para la obtención de nuevos fondos, podríamos aseverar que la mínima tasa de retorno atractiva sería igual al costo de capital. En la realidad, esta consideración no es simple aún con condiciones ideales.

Aún cuando en muchos casos se pueda presuponer que se cuenta con fondos suficientes para cualquier inversión atractiva en muchos casos de inversionistas individuales, el presupuesto es un límite.

Los presupuestos de capital involucran inversiones presentes en las cuales los beneficios o flujos de caja, se esperan recibir en algún tiempo futuro. Un flujo de caja puede naturalmente ser un ingreso (positivo) o un egreso (negativo). Debido a que estos flujos de caja ocurrirán en el futuro, pueden ser estimaciones. Estas estimaciones con el empleo de distribuciones de probabilidad son los valores esperados.

Algunos autores sostienen que los presupuestos de capital, abarcan desde la generación de proposiciones de inversión hasta la revaluación de los proyectos después de su aceptación: Considerando como pasos intermedios, la estimación de los flujos de

las proposiciones, la evaluación de estos flujos y la selección de los proyectos basados en algún criterio de aceptación. Algunos otros autores consideran solamente bajo el tema la estimación y evaluación (en cantidad y tiempo) de los flujos de caja para determinar las necesidades de financiamiento de las proposiciones de inversión.

En esta ocasión veremos cuales son las formas mas usuales de presentar éstos flujos de caja sin contradecir ninguna de las dos opiniones, pero si recalcaremos que los pasos de evaluación en los cuales los métodos comunes son valor presente, costo anual, etc. son estudiados detenidamente en otras sesiones de este curso.

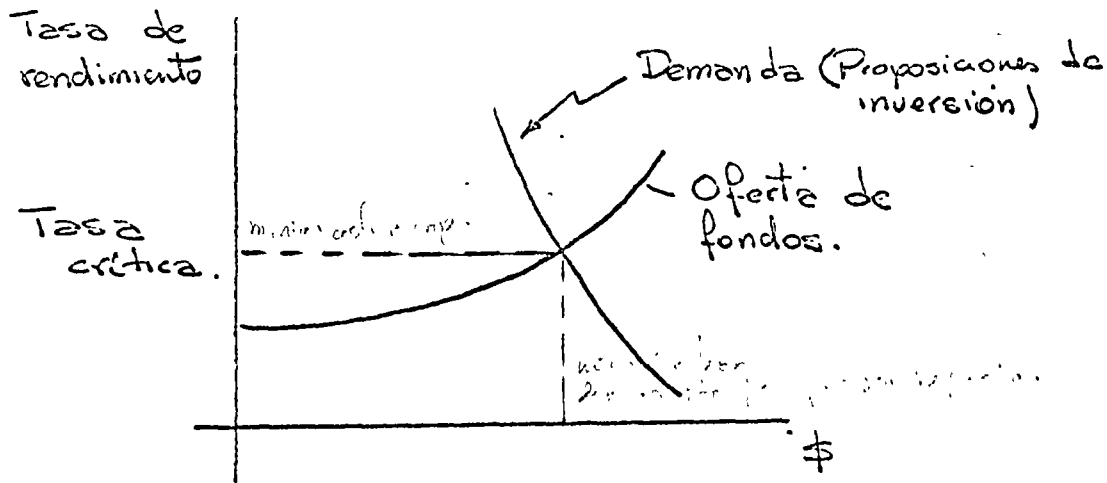
~~2~~ Ejemplo de la Presentación de Proposiciones de Inversión.-

En este ejemplo la inversión propuesta se inicia en 1970 con la compra del terreno y la construcción de la planta tiene lugar en 1971/72. Las ventas del producto se inician en 1972 con 600 toneladas y alcanzan una cifra de 1200 toneladas/año en el sexto año. Aunque el estudio considera ventas por 20 años, las consecuencias de impuestos en las deducciones por depreciación se muestra por 30 años.

El presupuesto de capital es un problema multiperiodico. El presupuesto anual no puede establecerse independientemente de las necesidades futuras. Los mejoramientos en perspectiva de una compañía se establecen en planes de cinco y diez años y el presupuesto anual es la integración de esas necesidades a corto y a largo plazo. Ese planteamiento de las necesidades de la compañía debe ir acompañado por un planteamiento del suministro de fondos.

En esta situación, los planes a largo plazo deben tomar en consideración el efecto sobre el costo de capital de reinversión, ampliación de deuda y nuevas acciones, con el fin de obtener una combinación óptima.

Gráfica de la tasa mínima requerida de rendimiento.



La tasa mínima requerida de rendimiento llamada también la tasa crítica, es el punto de intersección de las curvas de la oferta de fondos y la demanda (proposiciones) de inversiones.

HOJA DE TRABAJO PARA ESTIMAR LAS NECESIDADES DE INVERSION

INVERSION INMEDIATA

DE TRABAJO

FUTURAS

OBLIGACIONES

	1970 - 2	1971 - 1	1972 0	1973 19	TOTAL
CAPITAL					
1- Terreno	600 000				600 000
2- Edificio		2 000 000			2 000 000
3- Equipo de proceso		8 000 000	2 000 000		10 000 000
4- Sub-total	600 000	10 000 000	2 000 000		12 600 000
GASTOS					
5- Preparación terreno		500 000			500 000
6- Relocalización					
7- Pérdidas de invent.					
8-					
9- Sub-total		500 000			500 000
10- Total Autorizado	600 000	10 500 000	2 000 000		13 100 000
DE TRABAJO					
11- Cuentos por cobrar			600 000	300 000	900 000
12- Inventario en prima			300 000		300 000
13- Inventario en refacc.			100 000		100 000
14- Inventario en proceso			250 000		250 000
15- Inventario prod. term.			600 000		600 000
16- Total requerido			1 850 000	300 000	2 150 000
FUTURAS					
17- Terreno	$\text{m}^2 @ \text{\$/m}^2 =$				
18- Bodegas	400	$\text{m}^2 @ 2.00$	$\text{\$/m}^2 =$		80 000
19- Oficinas	20	empleados @ 10 000	$\text{\$/empleado}$		200 000
20- Sub-total	Edificios				280 000
21- Vapor	300	HP @ 500	$\text{\$/HP}$		150 000
22- Energía eléctrica					
23- Refrigeración					
24- Agua de enfriamiento					
25- Aire comprimido	100	Pies ³ @ 500	$\text{\$/pie}^3$		50 000
26- Sub-total	Equipo de servicio				200 000
27- Total requerido en 1975					480 000

INVERSION TOTAL

\$15,730 000

LA EVALUACION DE LA INCERTIDUMBRE EN EL ANALISIS DE INVERSIONES

1. Importancia de la confiabilidad de estimaciones en la etapa actual de la técnica de evaluación de inversiones.

Mucho esfuerzo se ha aplicado al desarrollo de métodos para mejorar nuestra habilidad de discriminar entre alternativas de inversión. El mayor énfasis de estas investigaciones se ha puesto en calcular en forma más exacta y definir cuál es el valor de las inversiones de capital a una compañía. Como resultado, se han desarrollado métodos que partiendo de fórmulas matemáticas de variada complejidad para evaluar los posibles efectos de diversas inversiones y de combinaciones entre estas variables que pueden afectar dichas inversiones. Conforme las técnicas han progresado, las matemáticas se han vuelto más y más precisas, de tal manera que podemos calcular rentabilidad de una inversión con mucha exactitud.

Sin embargo, el analista de inversiones sabe que detrás de todos estos cálculos precisos existe información que no es tan precisa. En el mejor de los casos, la información sobre rentabilidad de una inversión se basa en un "promedio" de diversas opiniones con diversa confiabilidad y diferentes rangos de probabilidad. Cuando la rentabilidad de dos posibles inversiones es casi similar, es muy posible que su decisión se vea influenciada por la evaluación de aquellos factores que se consideren intangibles. En otros casos, aun cuando los datos para la evaluación de dos inversiones sean completamente diferentes, de tal manera que la selección entre una y otra parezca muy clara, generalmente existe incertidumbre en la mente del analista acerca de los resultados en el futuro.

Así, vemos que el responsable de tomar una decisión necesita tener otra información aparte de los valores calculados de rentabilidad de una inversión. Le es muy necesario saber cuál es la naturaleza de la información en la cual se han basado los cálculos de la rentabilidad de la inversión, y la forma en que esa información ha sido procesada. De aquí vemos que, independientemente de las técnicas de análisis que se han utilizado, muchas de las variables que entre en el juego en el cálculo de la rentabilidad de una inversión está sujeta a un alto grado de incertidumbre.

Como un ejemplo podemos ver el siguiente. La vida útil de una

nueva pieza de maquinaria generalmente no se conoce con una certi
dumbre suficiente. Entran en juego variaciones en la obsolescencia
 o el deterioro, y los cambios relativos en la vida útil de un equipo
 pueden implicar a grandes cambios en la rentabilidad de una inver-
 sión. No obstante, al hacer los cálculos de rentabilidad de una in-
 versión, muchos datos se consideran mentalmente para producir un
 pronóstico de la vida posible, el cual después se incorpora al análi-
 sis de rentabilidad de inversión. Lo mismo se hace para otros fac-
 tores que tienen un peso importante en la decisión que se va a tomar.

Como conclusión, vemos que la determinación de los flujos de
 efectivo generalmente es el corazón de una evaluación, y por lo tan
to es un aspecto importante en el estudio de evaluación de inversiones.
 A continuación, se analizarán algunas de las fuentes de incertidum-
 bre en las estimaciones de flujo de efectivo.

2. Fuentes de incertidumbre

En nuestro mundo actual de extensas organizaciones que crecen
 en forma horizontal por la diversificación de productos y verticalmen-
 te por la integración, ningún equipo de análisis puede esperar tener
 la información suficiente y actualizada de todas las situaciones en las
 cuales la organización tiene que tomar decisiones técnicas o financie
ras. El contacto estrecho entre los miembros de la organización y las
 comunicaciones adecuadas no son sólo costosas sino muchas veces im-
 posibles. De tal manera, los ejecutivos se ven forzados a utilizar -
 más y más las comunicaciones internas y las estimaciones de los ex-
 pertos de la organización que pueden estar en diferentes zonas geo-
 gráficas y en diversos niveles de la organización para obtener aque-
 lla información que requieren al tomar decisiones sobre inversión -
 que pueden ser cruciales para la compañía.

Desafortunadamente, en el contexto de la comunicación de in-
 formación sobre análisis de inversiones, el grado de confusión y erro
res en la información que resultan cuando un simple dato se pide y -
 acerca del cual se tiene incertidumbre, generalmente es alto. Fre-
 cuentemente los ejecutivos acaban con impresiones e información com
pletamente diferente de aquella que hubieran obtenido si ellos hubie-
 ran estado en el lugar de la obtención de la información. La investi-
 gación empírica conducida sobre el proceso de decisiones en las gran
des organizaciones ha revelado que cuando existe incertidumbre y es
 necesario que la información acerca de una decisión de inversión flu-
 ya de los niveles bajos hacia arriba o de un compañero de trabajo a -
 otro, resultan los siguientes fenómenos:

- 1) se generan ambigüedades y mala interpretación debido a que el juicio sobre la incertidumbre es difícil de transmitir y no fluye fácilmente de una persona a otra
- 2) se efectúan distorsiones en los datos por los siguientes motivos:
 - a. los expertos no siempre están seguros qué es lo que los ejecutivos requieren
 - b. las medidas de evaluación de la eficiencia y los sistemas de control utilizados por los ejecutivos muchas veces rigidizan la mente de los subordinados, en tal forma que es imposible obtener una estimación sincera
 - c. la actitud al riesgo ante incertidumbre difiere entre los diversos individuos.
- 3) los métodos de estimación utilizados por los expertos no son sistemáticos, ni estables, de tal manera que la información que fluye tiene diverso significado para los que la reciben
- 4) los técnicos que cuentan con diferente información, conocimiento o experiencia aprecian y evalúan en forma distinta la incertidumbre acerca de un evento dado.

A continuación daremos algunos ejemplos que ilustren los puntos anteriores.

3. Ausencia de un lenguaje adecuado de estimación

Es común en los informes administrativos que se reporte que hay una "buena" oportunidad de que las ventas de un producto sean mayores de mil unidades, o que hay una "regular" probabilidad de que las ventas sean de mil quinientas unidades. Los adjetivos "razonable", "bajos", no explican cuantitativamente qué es lo que se quiere decir al aplicarlos. Lo mismo se puede decir de las estimaciones que se juzgan "optimistas", "pesimistas", o "un mejor estimado". Estos términos tienen diferentes significados para cada persona. Por ejemplo una persona X puede utilizar el término "optimista" cuando estime que hay una probabilidad de uno en diez de excederlo, mientras que otra persona Y, utilizará el término cuando estime que hay una posibilidad en veinte de excederlo.

4. Metodología de la evaluación de inversiones

Generalmente, la metodología usual aplicada en la evaluación de inversiones sólo utiliza un número acerca de cada uno de los factores que se tomarán en cuenta en el análisis. De tal manera, ninguna de las técnicas usuales permite incorporar una metodología cuantitativa para tomar en cuenta este factor. Así, el ejecutivo sólo puede aceptar el estimado de sus expertos acerca de los posibles resultados en el futuro, o compensar subjetivamente de acuerdo a su buen juicio. Sin embargo, no es muy cla-

ro para él cómo debe compensar esos datos. ¿Debe ser hacia arriba o hacia abajo?

5. Controles administrativos de actuación

Los métodos usuales de control administrativo en una organización, generalmente les solicitan a los técnicos que hagan un pronóstico mediante el cual posteriormente se medirá la eficiencia de su actuación. De tal manera, aquellos que en su actuación excedan la marca puesta por el pronóstico son "recompensados", y los que no llegaron a la meta, son "penalizados". Bajo este tipo de control, si un ejecutivo desea ser recompensado, la predicción de su futura actuación deberá ser menor de la que realmente espera. Esto le dará mayor confianza de exceder la meta que él propone a sus superiores.

Al tomar en cuenta este tipo de estimaciones para evaluar una inversión, la subestimación de una medida de actuación, (i.e., sobre las ventas de un producto) puede resultar en que una posible buena inversión se juzgue como mala y se rechace, con un consiguiente costo de oportunidad para la organización.

Obviamente el conflicto básico es que el objetivo del sistema de control es influenciar la eficiencia del personal, mientras que el objetivo de un sistema de pronóstico es el de proveer información que sirva para toma de decisiones. En tal forma, los altos ejecutivos deben decidir qué es más importante -tomar las mejores decisiones de inversión, u obtener la máxima eficiencia de aquellas inversiones que ya tienen. Obviamente, este último debe ser más bien un problema de motivación en la organización que de controles operativos.

6. La comparación entre la información histórica acerca de inversiones pasadas y los pronósticos de inversiones futuras.

Al estimar el valor de una inversión potencial, generalmente los ejecutivos en las organizaciones se preocupan por buscar una inversión anterior comparable para medir una nueva inversión en vez de identificar las variables que son relevantes y pronosticar la incertidumbre concerniente. De tal manera, el pronóstico de la incertidumbre se trata de evadir, mientras que la certidumbre de información histórica se le asigna un peso superior dominando así el proceso mental de los ejecutivos.

7. Factores de corrección que usualmente se aplican en la evaluación de incertidumbre

Un factor de ajuste usualmente aplicado, es la corrección de las estimaciones que han surgido de otros miembros de la organización, ajustán

dolos hacia arriba o hacia abajo, sin tomar en cuenta la opinión de las personas que estimaron. Generalmente, el analista de inversión nunca sabrá si ajustó la información en la dirección adecuada, o si el grado de ajuste fue suficiente o demasiado.

Otra forma de corregir para tomar en cuenta el riesgo derivado de la incertidumbre de la información es elevar la tasa de actualización de capital al evaluar la inversión.

Una corrección adicional es la de asignar cierta preferencia a una alternativa menos riesgosa que a una riesgosa. Es usual que al evaluar dos alternativas, aun cuando no se haya evaluado cuantitativamente el riesgo implicado al tomar cada una de ellas, se opte por una de más baja rentabilidad pero que cuyo riesgo aparente sea menor. Generalmente esta evaluación del riesgo se hace en forma altamente intuitiva.

Es usual que se apliquen este tipo de medidas de corrección simultáneamente, el ajuste en la medida de evaluación de una inversión puede ser demasiado fuerte y es importante que una buena inversión no sea rechazada por el uso de una alta tasa de descuento.

Ilustraremos el efecto de la corrección por medio de tasa de actualización con el siguiente ejemplo.

Supongamos que se tienen dos inversiones, una más riesgosa que la segunda. (Por el momento no especificaremos la vaguedad en la medición de la cantidad de riesgo). Con la primera inversión usaremos una tasa de evaluación del 10%, y con la segunda una evaluación con una tasa del 20%. Las dos inversiones tienen un flujo esperado de cien mil pesos en los años número 1 y 50. Lo anterior se ilustra en la siguiente tabla.

Año	flujo de efectivo	factor de actualización ($i = 10\%$)	Valor presente ($i = 10\%$)	factor de actualización ($i = .20$)	Valor presente ($i = .20$)
1	10,000	.9091	\$ 9,091	.8333	8,333
50	10,000	.0085	85	.0001	1

Nótese que el valor presente de los flujos de efectivo del año 1 de la inversión menos riesgosa es 1.09 veces mayor que el flujo de efectivo de la inversión más riesgosa. No obstante, el valor presente de los flujos de efectivo del año número 50 es aproximadamente 85 veces mayor. El uso de una mayor tasa de actualización para la inversión más riesgosa puede influir a la decisión en la dirección correcta (a mayor riesgo en la inversión, menor será el valor asignado a los flujos de efectivo en

el futuro). No obstante, hace esto en una manera aproximada y con efectos no predecibles. No podemos estar seguros del impacto que la tasa de actualización mayor puede tener en el valor del dinero en el tiempo - sin hacer cálculos adicionales, y del efecto en la actualización por riesgo no será igual para cada año.

Generalmente, el uso de una tasa de descuento aplicada por riesgo supone que la diferencia en riesgo entre dos inversiones se incrementa - en dirección al futuro. Esta suposición no necesariamente es correcta, - ya que podemos tener mayor riesgo en una inversión en el corto plazo, y que las dos alternativas tengan el mismo riesgo a futuro. Aun cuando esta suposición sea correcta, es necesario preguntarnos si el factor de descuento mide en manera apropiada la desventaja de este riesgo.

Por otro lado, cuando el horizonte en el tiempo en el cual se valúan las inversiones es relativamente corto, una tasa de actualización por riesgos no puede afectar en forma significativa en la evaluación de una inversión, ya que vemos que el factor actualización es únicamente fuerte cuando se aplica para grandes períodos de tiempo.

A continuación examinaremos algunas soluciones a los problemas que se han planteado en los párrafos anteriores.

8. Medidas posibles para una mejor evaluación del riesgo en inversiones

A continuación veremos dos medidas de tipo organizacional

a. Descentralización de las decisiones. Idealmente, la toma de decisiones debe descentralizarse al nivel más bajo posible en la organización en el cual exista capacidad para realizar el análisis de una inversión, que se combine con la capacidad requerida en recolectar y analizar la información para el análisis. Desgraciadamente, excepto en organizaciones pequeñas, existe un vacío de conocimientos y de información entre el ejecutivo que toma las decisiones y el experto sobre la información de interés sobre la inversión. Para solucionar el problema, o la autoridad para la toma de decisiones se transfiere a los técnicos que tienen información adecuada, o la información se transfiere al punto donde se debe tomar la decisión.

No obstante, aun en organizaciones bastante descentralizadas, la toma de decisiones se puede delegar sólo hasta cierto punto antes de que el costo en salarios de técnicos adecuados, o la pérdida de coordinación y control empiecen a afectar al sistema. De tal forma, esta solución sólo es parcial, y en algún punto la organización encontrará que es más eficiente mover la información hacia arriba en vez de la autorización de de-

cisión hacia abajo. Más adelante se hablará de este aspecto.

b. Otra medida parcial, consiste en separar el sistema de control administrativo de los métodos de pronóstico. De tal manera, los ejecutivos de alto nivel tenderán a proporcionar una información más centrada sobre lo que ellos esperan que sea la realidad de una inversión y se evitará el sesgo en la información derivado de los sistemas de control administrativo.

c. Análisis de sensibilidad. Por último, una medida parcial que se puede aplicar en forma sencilla para cada análisis de alternativas es examinar qué tanta importancia tiene la incertidumbre sobre las variables principales de las inversiones en la selección que se tome. A esta técnica se le denomina "análisis de sensibilidad".

d. Desarrollo de mejores técnicas de análisis de inversiones. Otro campo que recientemente se ha empezado a investigar, es el desarrollo de métodos adecuados de evaluación cuantitativa de riesgo e incertidumbre, y su incorporación a la metodología de evaluación de inversiones. Cuando se desarrollen estas técnicas, en forma suficientemente operacional, permitirán incorporar la incertidumbre en las estimaciones, información que podrá ser incorporada por los técnicos, proporcionando así mejores elementos para la toma de decisiones.

Principiaremos primero por examinar el concepto de análisis de sensibilidad, ya que es relativamente fácil de aplicar y permite introducir algunos conceptos que posteriormente serán útiles en el desarrollo de una metodología formal de evaluación de incertidumbre. Posteriormente, se verá en forma superficial algunas técnicas que se han desarrollado para la evaluación de inversiones ante incertidumbre, las cuales están en etapa de prueba en algunas organizaciones y están siendo aceptadas progresivamente.

ANALISIS DE SENSIBILIDAD EN INGENIERIA ECONOMICA

1. El concepto de sensibilidad

Todos los ejemplos y problemas que se han tratado en los temas anteriores de este curso han tratado sobre estimaciones de elementos de costo tales como combustible, energía, mano de obra, impuestos, reparaciones, mantenimiento y elementos tales como ganancia bruta, valor de salvamento, vida útil de los equipos, y otros factores que pueden afectar el análisis económico de una alternativa de inversión. Las recomendaciones a favor o en contra de una propuesta eran el resultado de estudios económicos que utilizaban esas estimaciones o pronósticos, y posiblemente algunos factores irreducibles que se tomaban en cuenta como imponderables. Es obvio que si las estimaciones utilizadas en algunos de los ejemplos hubieran sido diferentes, las recomendaciones y decisiones también lo habrían sido. No obstante, en algunos ejemplos, hubiera sido posible alterar uno de los elementos estimados en forma radical sin cambiar la decisión resultante del estudio económico.

El análisis de sensibilidad se refiere a la magnitud relativa y cambio en uno o más elementos de un problema de ingeniería económica que puede cambiar la decisión entre alternativas. Cuando un elemento particular se puede variar a través de un amplio rango de valores sin afectar la decisión, la decisión en cuestión se dice no ser sensible a incertidumbre respecto a ese elemento en particular. Por otro lado, si un pequeño cambio en la estimación de un elemento altera la decisión, ésta se califica como muy sensitiva a cambios en las estimaciones sobre ese elemento en particular.

Al realizar un análisis de sensibilidad, el analista observa la variación en el valor del indicador de rentabilidad en función de la variación de los valores de un elemento sobre el rango de interés. Con esta información él puede formar un juicio acerca de la sensibilidad de una decisión en particular a un error en el pronóstico de ese elemento en particular. Además, puede juzgar el costo en el que incurrirá si tiene un error en su pronóstico.

Como todas las estimaciones están sujetas a un cierto grado de incertidumbre, el análisis de sensibilidad es muy útil al analizar una propuesta de inversión, o en la comparación de alternativas.

2. El concepto del punto de indiferencia

En ocasiones se puede seleccionar entre dos alternativas en donde una de ellas es más rentable bajo un conjunto de condiciones y la otra es

más atractiva bajo otro conjunto de circunstancias. Si alteramos el valor de una de las variables que se considera, manteniendo todos los demás puntos de diferencia entre las dos alternativas constantes, es posible encontrar un valor de la variable para el cual las dos alternativas son exactamente igual de rentables. Este valor se puede definir como el punto de indiferencia o equilibrio. Un ejemplo adecuado de este concepto es el "tamaño adecuado de una planta": para una cierta demanda baja de un producto una planta de baja capacidad será más económica que una planta de alta capacidad; por el contrario, si la demanda es alta, la planta mayor será más rentable que una de poca capacidad. No obstante, debe existir algún valor de la demanda para el cual las dos plantas son igualmente rentables, a dicho valor de la demanda se le calificaría como el valor de indiferencia.

En el campo de la ingeniería económica, la mejor forma de determinar el punto de indiferencia es calculando directamente el valor de rentabilidad de una y otra alternativa en función de varios valores de la variable en cuestión. A continuación veremos algunos ejemplos que ilustrarán este concepto.

EJEMPLO No. 1

Incertidumbre sobre la demanda*.

Una estimación sobre la demanda de un servicio dado es generalmente un elemento de importancia en un análisis económico. En este ejemplo ilustraremos cómo el análisis de sensibilidad puede ser utilizado para incorporar la incertidumbre acerca de la demanda acerca de un servicio.

Una compañía compara un método manual contra un método mecanizado para hacer perforaciones para instalar postes. Actualmente, la compañía utiliza mano de obra para la perforación con un costo de \$212.50 por perforación y desea analizar si debe comprar un camión especial que permitiría perforar en forma mecanizada.

El equipo de perforación, incluyendo el camión, costaría alrededor de \$100 000. Su vida útil se estima como 8 años, con un valor de salvamento de \$12 500. Los costos de mantenimiento tales como almacenamiento, tenencia, etc. se estiman alrededor de \$16 500 por año. Este costo es independiente del número de perforaciones que se lleven a cabo en un año. Además, se estima que costará \$500 por cada día de operación del equipo. Este costo no se incurre cuando el equipo no se opera. La tasa de actualización que se utilizará para el estudio es de 12%, y la de impuestos es de .53. Se desea comparar las dos alternativas en término de una ganancia neta -- equivalente anual después de impuestos en función de la demanda anual de perforaciones. Para simplificar el análisis, supondremos que la demanda de instalación de postes será constante a través de un período de 8 años. Otra variable acerca de la cual se tiene incertidumbre es la capacidad de perforación del equipo por día. En caso de que se compre la maquinaria, el método de depreciación que se utilizará será el lineal.

Como anotación, llamaremos al método manual alternativa A, y al método mecanizado, alternativa B. A continuación resumimos los datos del ejemplo para facilitar su referencia.

*Para mayor detalle véase la referencia No. 6.

- DATOS DEL EJEMPLO 1

Alternativa A

perforaciones por año	N	
costo por perforación, método manual		212.50 \$
tasa de impuestos, a .53		

Alternativa B

costo inicial del camión		100 000 \$
valor de salvamento		12 500
vida útil		8 años
costos anuales fijos de		
mantenimiento		16 500 \$
costo por día de uso		500 \$
(variable)		
tasa de interés		12%
H número promedio de capacidad		
de perforación del equipo por día		H

SOLUCION DEL EJEMPLO 1

Objetivo: Calcular la ganancia equivalente anual después de impuestos

Alternativa A

$$\begin{aligned}
 G_A &= (g - 212.50) N (1-a) \\
 &= gN (.47) - 212.50 NX.47 \\
 &= .47 gN - 99 N
 \end{aligned}$$

Alternativa B

$$\begin{aligned}
 G_B &= \text{costo de recuperación de inversión en maquinaria} \\
 &\quad + \text{ganancia neta de operación del equipo} \\
 &\quad + \text{deducción de impuestos por depreciación} \\
 &= C_1 + G_1 + D
 \end{aligned}$$

Costo de recuperación de maquinaria = C_1

$$\begin{aligned}
 C_1 &= [-100\,000 + 12,500 (P/F, 12\%, 8)] (A/P, 12\%, 8) \\
 &= (-100,000 + 12\,500 \times .4039) (.2013) \\
 &= -19,100
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G &= \text{ganancia neta de operación} \\
 &= (1-.53) (gN - 16\,500 - 500 \frac{N}{H}) \\
 &= .47 (-16\,500 - 500 \frac{N}{H}) + .47 gN \\
 &= -7750 - 225 \frac{N}{H} + .47 gN
 \end{aligned}$$

$$D = .53 \frac{(81\,500)}{\text{TIEMPO } 8} = 5\,800$$

$$\begin{aligned}
 G_B &= C_1 + D + G = -19\,100 + 5,800 + .47 gN - 7750 - 225 \frac{N}{H} \\
 &= .47 gN - 21\,000 - 225 \frac{N}{H}
 \end{aligned}$$

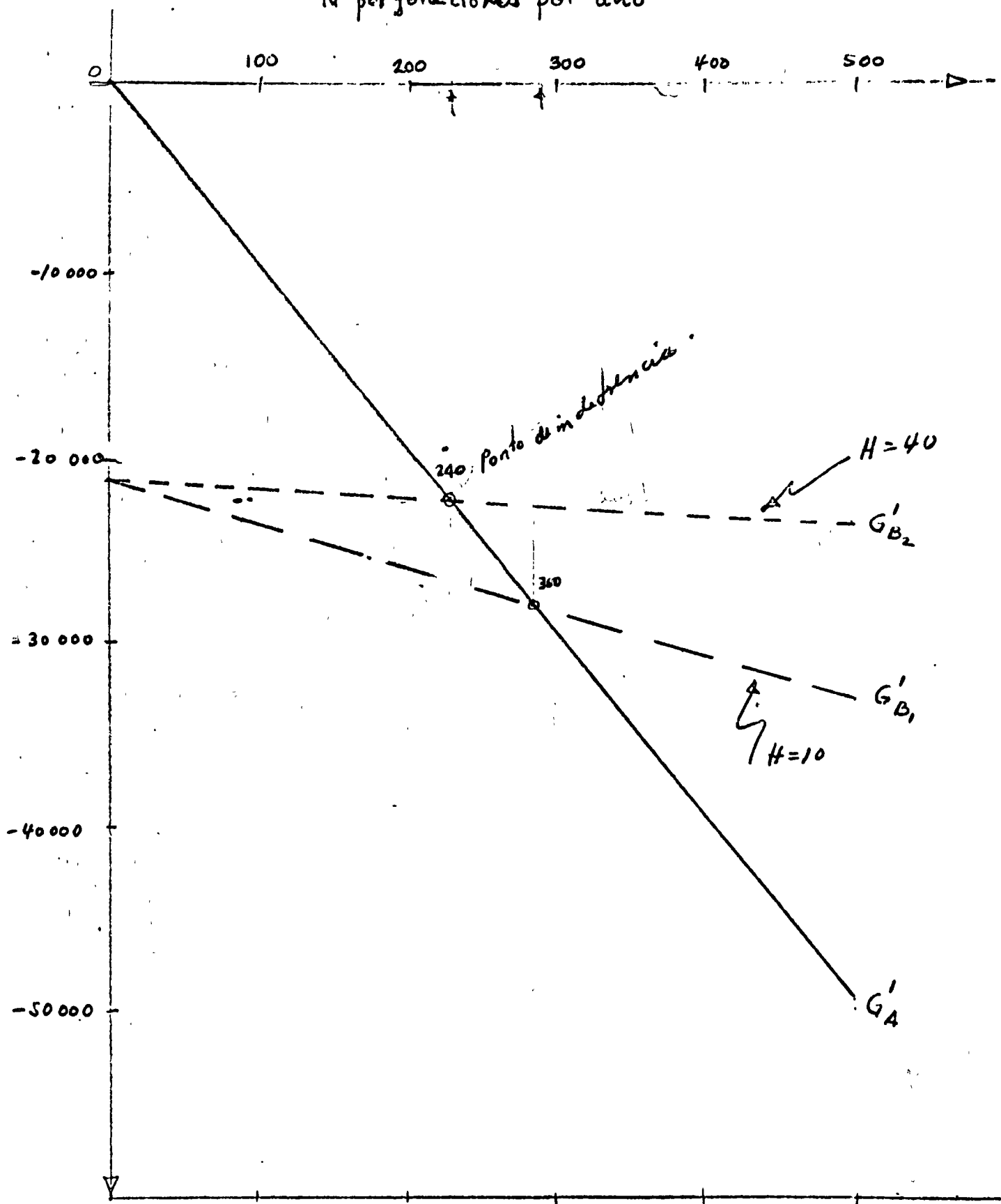
para un valor de $t_1 = 10$, los terminos variables
 para comparación de las alternativas son
 $G' = G - .479N = \text{terminos variable}$

N	G'_A	G'_B	
0	0	-21 000	$A > B$
200	-19800	-25 500	$A > B$
500	-49500	-33 250	$B > A$

Para un valor de $t = 40$, se tiene

N	G'_A	G'_B
0		-21 000
200		-22 225
500		-23 800

N perforaciones por año



terminos variables de
la ganancia anual equivalente

EJEMPLO 1

Comentarios al ejemplo 1.

En la gráfica del ejemplo No. 1, se han trazado los términos variables de las ecuaciones de ganancia anual equivalente después de impuestos para las alternativas A y B. La ganancia anual equivalente para la alternativa A parte del origen y es la línea más inclinada. La ganancia para la alternativa B, cuando el valor promedio de capacidad de perforación del equipo por día es de 10 perforaciones, está señalada para un valor de H igual a 10. Vemos que las dos líneas se interceptan para un valor de N alrededor de 290 perforaciones por año. Para un valor de H alrededor de 40, la ganancia de las dos alternativas es cuando N es equivalente aproximadamente a 225. De tal manera, si se estima que la demanda sea menor de 200 perforaciones por año, la decisión deberá ser continuar el método manual, y esta decisión es relativamente insensible a incertidumbre sobre de la demanda anual. Por otro lado, si se estima que la demanda es mayor de 325 perforaciones por año, el método mecanizado para perforar es mucho más rentable, y esa decisión es relativamente insensible a cambios en la demanda anual.

No obstante, si la incertidumbre que tenemos nos dice que la demanda anual de perforaciones sería entre 25 y 390 por año, la decisión es bastante sensible a incertidumbre acerca del valor de la demanda anual y de la capacidad de perforación del equipo por día.

Es importante observar que el costo por tomar una decisión incorrecta cuando la demanda esté en el área de sensibilidad, no será muy elevado. Por ejemplo supongamos que la estimación de demanda es de 300 perforaciones por año. De acuerdo a esto, nuestra decisión deberá ser el método mecanizado. Si después, el valor real de la demanda sucede ser de 250 unidades y la capacidad del equipo de 10 perforaciones por día, el costo anual por haber escogido esa alternativa será de \$2 750 ya que la mejor alternativa, hubiese sido continuar con el método anual.

EJEMPLO 2.

Incetidumbre acerca de la tasa adecuada de actualización.

Ilustraremos cómo el análisis de sensibilidad se puede utilizar para investigar el efecto de la incertidumbre acerca de la tasa adecuada de actualización. Utilizaremos como ejemplo la selección que ocurre frecuentemente en el plan de instalación de una capacidad de producción o de servicio.

En un programa de capacidad, la instalación de capacidad extra como parte de la construcción original es muy probable que requiera menos gasto que si se opta por agregar esta capacidad - cuando llegue el momento futuro en que se necesite. Este costo en erogación presente puede deberse a menores costos unitarios - de instalación de capacidad que generalmente acompañan a los --- equipos de gran capacidad. Por otro lado, puede deberse a que - los cambios futuros incorporan gastos que se pueden evitar si la - capacidad en exceso se provee inicialmente. Como ejemplo podemos considerar la capacidad de un conducto de agua en la ciudad. Cuando el momento llegue para expandir la capacidad de ese conducto, será necesario volver a excavar, hacer construcción y volver a repavimentar en forma adecuada.

El ejemplo es el siguiente. En el desarrollo de una por--- ción de un sistema de bombeo de agua que se está proyectando, se desea escoger entre instalar alta capacidad ahora, que llamaremos el Plan 1, y un programa gradual, Plan 2. El Plan 1 requiere una inversión inicial de 5 millones, otra segunda expansión de 3.750 millones en 10 años, y una tercera inversión de 3.750 millones en 20 años. Además, los gastos de operación también son variables. Se estima que los gastos anuales para los primeros 10 años serán 125 mil pesos más altos para el primer plan que en el segundo. Para la segunda década, se estima que los costos anuales serán iguales. Por último, se estima que los costos de mantenimiento del año 20 en adelante serán 125 mil pesos más altos para el segundo plan que para el primero. Como medida de rentabilidad, se utilizará el valor presente de cada una de las alternativas como factor de decisión.

SOLUCION DEL EJEMPLO 2

$$F_1(i) = 7.5 - .125 (P/A, i, 10) \quad (\text{en millones de pesos})$$

$$F_2(i) = -5$$

$$- 3.75 (P/F, i, 10)$$

$$- 3.75 (P/F, i, 20)$$

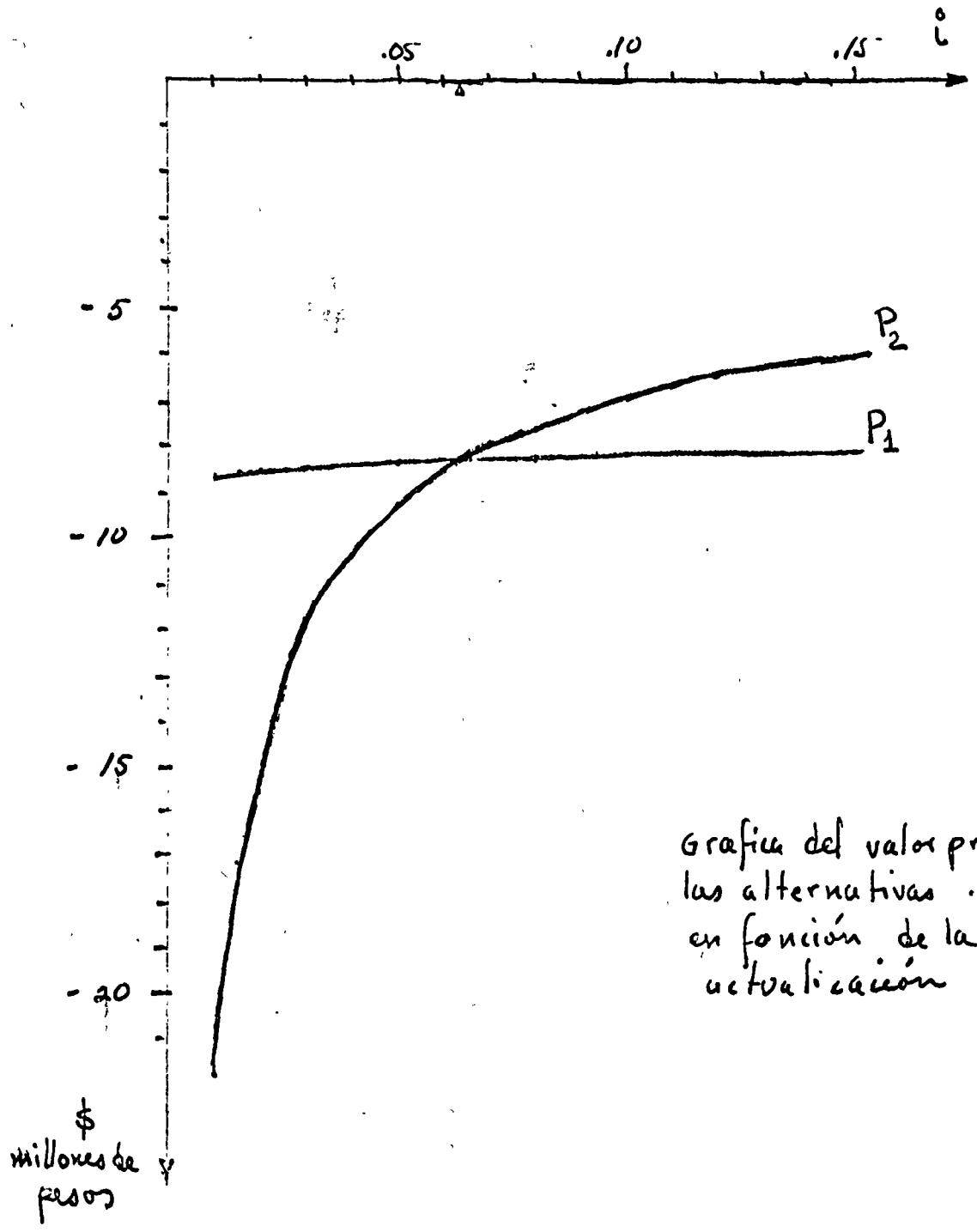
$$- \frac{.125}{i} (P/F, i, 20)$$

$$= -5 - 3.75 (P/F, i, 10) - (3.75 + \frac{.125}{i}) (P/F, i, 20)$$

tabla para determinar F_1 y F_2 para diferentes valores de i

i	$(P/A, i, 10)$	$(P/F, i, 10)$	$(P/F, i, 20)$	$F_1(i)$	$F_2(i)$
.01	9.471	.9053	.8195	8.685	21.870
.015	9.222	.8617	.7425	8.651	17.160
.02	8.983	.8203	.6730	8.622	15.620
.03	8.530	.7444	.5537	8.568	11.830
.05	7.722	.6139	.3769	8.478	9.373
.08	6.710	.4632	.2145	8.340	7.716
.12	5.650	.3220	.1037	8.206	6.596
.15	5.019	.2472	.0611	8.129	6.130

tasa de actualización



Grafica del valor presente de las alternativas 1 y 2 en función de la tasa de actualización

EJEMPLO # 2

EJEMPLO 3

INCERTIDUMBRE EN VALOR DE SALVAMENTO

Alternativa B

G_B = costo de recuperación del equipo
 ganancia neta de operación
 deducción de impuestos por depreciación
 valor de salvamento
 impuestos por diferencia entre v. salvamento y cantidad
 depreciada en libros

$$= C'_1 + G + D + L' + I$$

$$\begin{aligned}
 C'_1 &= -100\,000 \text{ (A/P, 12\%, 8)} \\
 &= -100\,000 \text{ (. 2013)} \\
 &= -20\,130
 \end{aligned}$$

$$G = -7750 - 225 \frac{N}{H} + .47gN$$

$$\text{para } N = 245, H = 10$$

$$G = .47gN - 13250$$

$$D = 5800$$

$$\begin{aligned}
 L' &= L \times (A/P, 12\%, 8) (P/F, 12\%, 8) \\
 &= L (.2013) (.4039) = .0810 L
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= -(L - 12500) (.53) (P/F, 12\%, 8) (A/P, 12\%, 8) \\
 &= +12500 (.53) (.2013) (.4039) \\
 &\quad - L (.53) (.0810) \\
 &= +536 - .043 L
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_B &= -20\,130 - 13\,250 + 5800 + .47gN \\
 &\quad + 536 + .038 L \\
 &\quad .47gN - 27044 + .038 L
 \end{aligned}$$

Si deseamos obtener G_B en función de la relación valor de salvamento a costo inicial del equipo (F), se tiene

$$L = \frac{L}{F} F, \quad F = 100 \text{ ooo}$$

$$G_{13} = .47gN - 27044 + 3800 \frac{L}{F}$$

Por otro lado, para $N = 245$

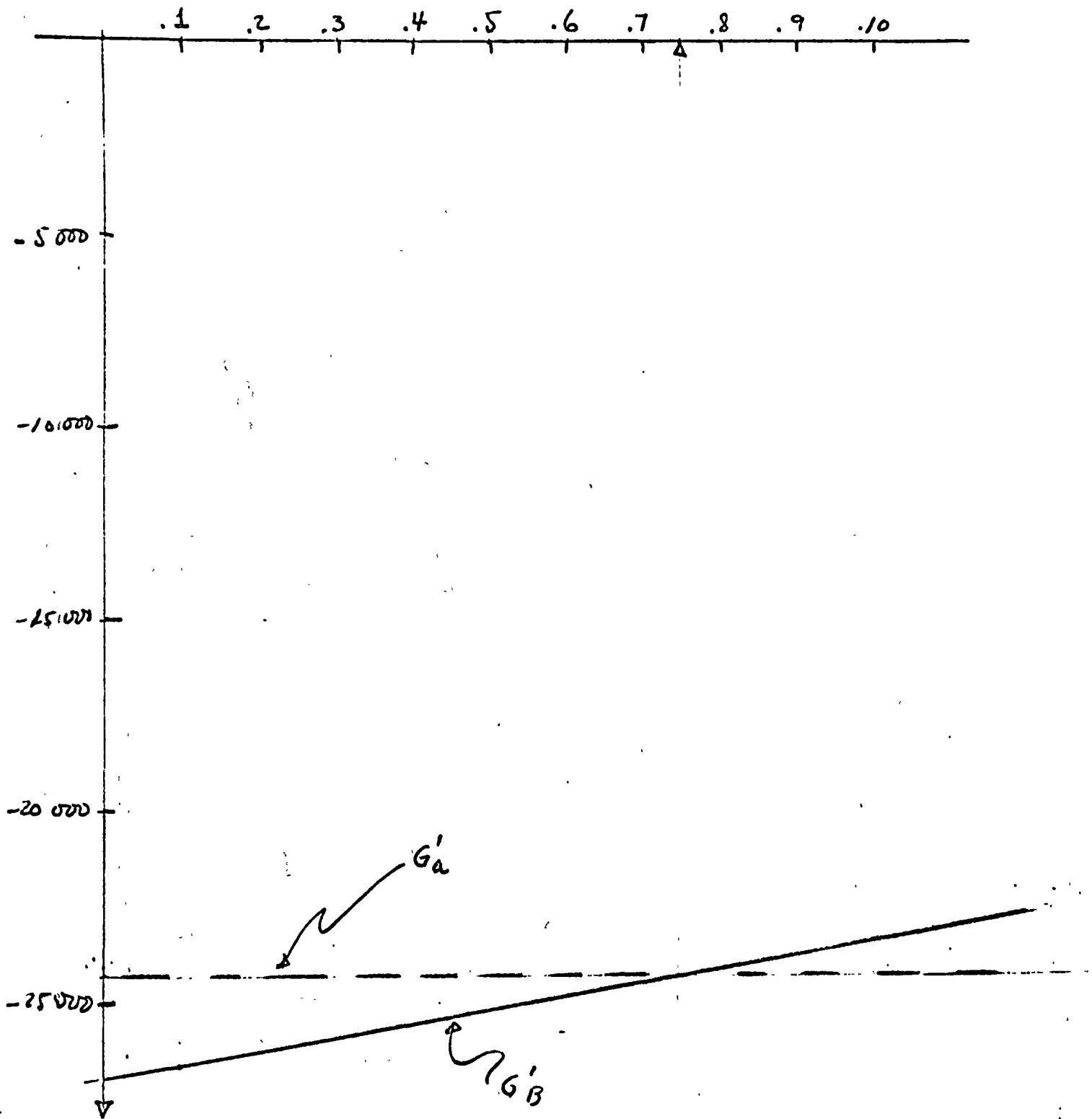
$$G_a \approx .47gN - 24250$$

Calculando G'_B para varios valores de $\frac{L}{F}$, tenemos

$\frac{L}{F}$	G'_B
.1	-26664
.2	-26284
.5	-25144

relación entre el valor de salvamento
y el costo inicial del equipo

21



terminos variables
de la ganancia anual
equivalente

Ejemplo 3

Plan 1

Costo construcción

42.5 millones

Plan 2

Ahora

30 M

bombeo

1.25 M

inflación

.01 anual

en T

30 M $(1.01)^T$

bombeo

1.25 M $(1.01)^T$

tasa de actualización

10%

Valor presente

$$VP_1 = -42.5$$

Valor Presente Plan 2.

 $VP_2 =$ construcción actual

bombeo para plan actual hacia el infinito

construcción en tiempo t

bombeo de allí en adelante.

$$= C_0 + B_0 + C_t + B_t$$

$$C_0 = 30 \text{ M}$$

$$B_0 = 1.25 \text{ M} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1.01}{1.10} \right)^n = 1.25 \text{ M} \sum_{n=0}^{\infty} (1-.09)^n$$

$$= \frac{1.25 \text{ M}}{.09}$$

$$C_t = 30 \text{ M} \left(\frac{1.01}{1.10} \right)^t$$

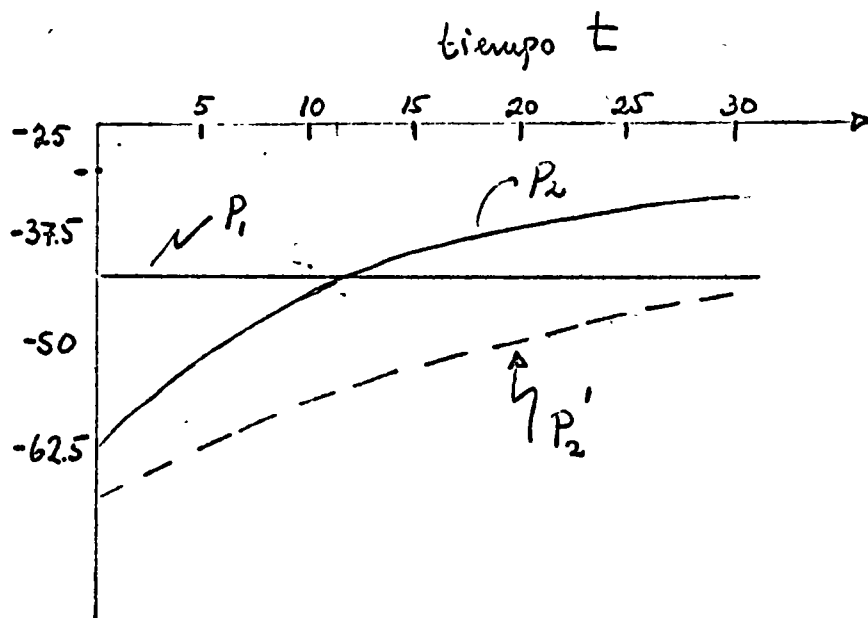
$$B_t = 1.25 \text{ M} \left(\frac{1.01}{1.10} \right)^t \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1.01}{1.10} \right)^n$$

$$= \frac{1.25 \text{ M}}{.09} \left(\frac{1.01}{1.10} \right)^t$$

$$VP_2 = C_0 + B_0 + C_t + B_t$$

$$= - \left[30 + \frac{1.25}{0.09} \right] \left[1 + \left(\frac{1.01}{1.10} \right)^t \right]$$

$$= -31.4 \left(1 + \left(\frac{1.01}{1.10} \right)^t \right)$$



Para una tasa de .05 actualización

$$VP_2 = -33.1 \left[1 + \left(\frac{1.01}{1.05} \right)^t \right]$$

REFERENCIAS

1. Harold Bierman, Jr. Seymour Smidt. THE CAPITAL BUDGETING DECISION. Collier-Macmillan International Editions, 1969. Caps. 6, 11, 15, 16.
2. Eugene L. Grant, W. Grant Ireson, PRINCIPLES OF ENGINEERING ECONOMY. The Ronald Press Company. New York, 1970. Caps. 13 y 14.
3. David B. Hertz, RISK ANALYSIS IN CAPITAL INVESTMENT. Harvard Business Review, enero-febrero 1964.
4. Frederick S. Hillier, David V. Heebink, EVALUATING RISKY CAPITAL INVESTMENTS. California Management Review, 1965.
5. Frederick S. Hillier, THE DERIVATION OF PROBABILISTIC INFORMATION FOR THE EVALUATION OF RISK INVESTMENTS, - Management Science, Vol. 9, No. 3, abril 1963.
6. Robert V. Oakford, CAPITAL BUDGETING, Ronald Press Co, New York, 1970. Caps. 9, 10, 11.
7. Paul Welter. PUT POLICY FIRST IN DCF ANALYSIS, Harvard Business Review, enero-febrero 1970.
8. Donald H. Woods, IMPROVING ESTIMATES THAT INVOLVE UNCERTAINTY, Harvard Business Review, Julio-Agosto 1966.

EUGENE L. GRANT

STANFORD UNIVERSITY

W. GRANT IRESON

STANFORD UNIVERSITY

**PRINCIPLES OF
ENGINEERING
ECONOMY**

FIFTH EDITION

THE RONALD PRESS COMPANY • NEW YORK

Preface

This is a book about a particular type of decision making. It explains the principles and techniques needed for making decisions about the acquisition and retirement of capital goods by industry and government. Normally, such decisions should be made on grounds of long-run economy. Because engineers make many such decisions and make recommendations for many others, the body of principles and techniques relating to them has been called "engineering economy."

The same concepts and methods that are helpful in guiding decisions about investments in capital goods are useful in certain kinds of decisions between alternative types of financing (for example, ownership versus leasing) and in many personal decisions. Applications to these other areas of decision making are also discussed in this book.

As in the past, our book may be used in two ways. First, it can serve as a college textbook. The material covered is appropriate not only for engineering students but also for students of economics, accounting, finance, and management. Second, it can serve as a working manual for engineers, management personnel, government officials, and others whose duties require them to make decisions about investments in capital goods.

The underlying philosophy regarding comparisons of alternatives is the same as in previous editions. As before, continued emphasis throughout the book is placed on the following two important points:

1. It is prospective *differences* between alternatives that are relevant in their comparison.
2. The fundamental question regarding a proposed investment in capital goods is whether the investment is likely to be recovered plus a return commensurate with the risk and with the return obtainable from other opportunities for the use of limited resources. The purpose of calculations that involve the time value of money should be to answer this question.

Although our underlying philosophy remains the same, we have rewritten much of the content of the book for this Fifth Edition. As in the nearly complete rewritings for the last three editions, our changes have been aimed in part at the introduction of new material and in part at

improved presentation of fundamental principles. Some changes that will be of interest to users of the previous editions are as follows:

1. The first two chapters are now devoted to explicit introduction of the basic concepts that are developed and applied throughout the remainder of the book.

2. Comparisons that involve estimates of how a choice among alternatives will influence income taxes are introduced fairly early in the book using certain simple assumptions. This makes it possible to use realistic after-tax minimum attractive rates of return in early examples and problems. A more sophisticated look at how to estimate the income tax consequences of decisions is still deferred until the later chapters of the book.

3. The benefit-cost ratio, now so common as a technique for the evaluation of public works projects, is introduced fairly early in the book in a short new chapter.

4. In general, we have adopted the compound interest symbols suggested by the ad hoc standardization committee of the Engineering Economy Division of the American Society for Engineering Education. (However, we have continued the long-established practice of using the lower case n to represent number of compounding periods.) Functional symbols rather than mnemonic symbols have been selected to represent the various factors.

5. The former chapter on dealing with uncertainties in forecasts has been divided into two chapters, one dealing with sensitivity analysis and the other dealing with analysis that uses the mathematics of probability.

6. A new chapter has been added dealing with economy studies for regulated public utilities.

7. An appendix contains an expanded treatment of the analysis of proposals that, because cash flow series have two or more reversals of sign, combine investment at one time with borrowing or financing at another time.

8. In rewriting the problem material, we have tried to increase the complexity and sophistication of a number of problems. Our chief aim in writing certain new problems has been to provide a frame of reference for useful class discussion—in some cases discussion to illuminate basic concepts and in other cases to permit examination of controversial issues. Certain specialized topics are now introduced in problems rather than in examples in the text.

In the choice of interest rates and minimum attractive rates of return for the examples and problems in this new edition, we have tried to avoid being unduly influenced by the actual interest rates in effect at the time of writing. Our aim has been to illustrate a range of rates that may be reasonable in various settings and over a period of years.

Our arrangement of chapters recognizes the fact that some introductory courses are too short to permit a full coverage of the subject. Most of the material in Chapters 1 to 17 is fundamental and should be included in any presentation of basic principles. The subject matter of Chapters 18 to 21 is appropriate for an elementary course if time permits but might also be deferred until an advanced course. Appendixes A to D cover topics that might be omitted in elementary college courses but should be included in advanced courses and in any presentation to persons in industry.

The authors wish to thank many of the users of the Fourth Edition for helpful suggestions for changes and improvements. In this connection we want to make special mention of help from Professors Gerald Fleischer, Robert Hemmes, Donald Newnan, Robert Oakford, Henry Steiner, and Ralph Swalm, and from Messrs. Lawrence Bell, Carter Harrison, and Robley Winfrey.

We are indeed grateful for the widespread acceptance of this book over a period of four decades, and we appreciate the obligation that this acceptance places on us. In preparing this Fifth Edition, we have been mindful of our responsibility and have made every effort to provide the reader with a body of knowledge that he can carry well into the 1970's.

EUGENE L. GRANT
W. GRANT IRESON

Palo Alto, California
February, 1970

Contents

PART I

Some Basic Concepts in Engineering Economy

CHAPTER

- | | | |
|---|---|----|
| 1 | Defining Alternatives and Predicting Their Consequences | 3 |
| 2 | The Need for Criteria and Analytical Procedures
in Making Decisions about Proposed Investments | 15 |

PART II

Judging the Attractiveness of Proposed Investments

- | | | |
|----|---|-----|
| 3 | Equivalence | 25 |
| 4 | Interest Formulas | 33 |
| 5 | Solving Interest Problems | 46 |
| 6 | Equivalent Uniform Annual Cash Flow | 66 |
| 7 | Present Worth | 88 |
| 8 | Calculating an Unknown Interest Rate | 109 |
| 9 | Benefit-Cost Ratio | 135 |
| 10 | Some Relationships Between Depreciation
Accounting and Engineering Economy | 148 |
| 11 | Choice of a Minimum Attractive Rate of Return | 192 |

PART III

Techniques for Economy Studies

- | | | |
|----|--|-----|
| 12 | Some Aspects of the Analysis of Multiple Alternatives | 213 |
| 13 | Sensitivity Analysis in Economy Studies | 251 |
| 14 | Use of the Mathematics of Probability in Economy Studies | 279 |
| 15 | Increment Costs and Sunk Costs | 302 |

CHAPTER

16	Estimating Income-Tax Consequences of Certain Investment Decisions in Competitive Industry	337
17	Economy Studies for Retirement and Replacement	383
18	The Influence on Economy Studies of Sources of Investment Funds	423
19	Some Aspects of Economy Studies for Governmental Activities	456
20	Some Aspects of Economy Studies for Public Utilities	494
21	Capital Budgeting	517

APPENDIXES

A	Continuous Compounding of Interest and the Uniform- Flow Convention	537
B	The Analysis of Prospective Cash Flow Series That Have Two or More Reversals of Sign	546
C	The Reinvestment Fallacy in Project Evaluation	566
D	Some Aspects of the Various MAPI Systems	574
E	Compound Interest Tables	594
F	Selected References	629
	Index	635

Compound Interest Tables

FORMULAS FOR CALCULATING COMPOUND INTEREST FACTORS

Single Payment—Compound Amount Factor (F/P , i , n)	$(1 + i)^n$
Single Payment—Present Worth Factor (P/F , i , n)	$\frac{1}{(1 + i)^n}$
Sinking Fund Factor (A/F , i , n)	$\frac{i}{(1 + i)^n - 1}$
Capital Recovery Factor (A/P , i , n)	$\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}$
Uniform Series—Compound Amount Factor (F/A , i , n)	$\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$
Uniform Series—Present Worth Factor (P/A , i , n)	$\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}$

TABLE E-1
1% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0100	0.9901	1.000 00	1.010 00	1.000	0.990	1
2	1.0201	0.9803	0.497 51	0.507 51	2.010	1.970	2
3	1.0303	0.9706	0.330 02	0.340 02	3.030	2.941	3
4	1.0406	0.9610	0.246 28	0.256 28	4.060	3.902	4
5	1.0510	0.9515	0.196 04	0.206 04	5.101	4.853	5
6	1.0615	0.9420	0.162 55	0.172 55	6.152	5.795	6
7	1.0721	0.9327	0.138 63	0.148 63	7.214	6.728	7
8	1.0829	0.9235	0.120 69	0.130 69	8.286	7.652	8
9	1.0937	0.9143	0.106 74	0.116 74	9.369	8.566	9
10	1.1046	0.9053	0.095 58	0.105 58	10.462	9.471	10
11	1.1157	0.8963	0.086 45	0.096 45	11.567	10.368	11
12	1.1268	0.8874	0.078 85	0.088 85	12.683	11.255	12
13	1.1381	0.8787	0.072 41	0.082 41	13.809	12.134	13
14	1.1495	0.8700	0.066 90	0.076 90	14.947	13.004	14
15	1.1610	0.8613	0.062 12	0.072 12	16.097	13.865	15
16	1.1726	0.8528	0.057 94	0.067 94	17.258	14.718	16
17	1.1843	0.8444	0.054 26	0.064 26	18.430	15.562	17
18	1.1961	0.8360	0.050 98	0.060 98	19.615	16.398	18
19	1.2081	0.8277	0.048 05	0.058 05	20.811	17.226	19
20	1.2202	0.8195	0.045 42	0.055 42	22.019	18.046	20
21	1.2324	0.8114	0.043 03	0.053 03	23.239	18.857	21
22	1.2447	0.8034	0.040 86	0.050 86	24.472	19.660	22
23	1.2572	0.7954	0.038 89	0.048 89	25.716	20.456	23
24	1.2697	0.7876	0.037 07	0.047 07	26.973	21.243	24
25	1.2824	0.7798	0.035 41	0.045 41	28.243	22.023	25
26	1.2953	0.7720	0.033 87	0.043 87	29.526	22.795	26
27	1.3082	0.7644	0.032 45	0.042 45	30.821	23.560	27
28	1.3213	0.7568	0.031 12	0.041 12	32.129	24.316	28
29	1.3345	0.7493	0.029 90	0.039 90	33.450	25.066	29
30	1.3478	0.7419	0.028 75	0.038 75	34.785	25.808	30
31	1.3613	0.7346	0.027 68	0.037 68	36.133	26.542	31
32	1.3749	0.7273	0.026 67	0.036 67	37.494	27.270	32
33	1.3887	0.7201	0.025 73	0.035 73	38.869	27.990	33
34	1.4026	0.7130	0.024 84	0.034 84	40.258	28.703	34
35	1.4166	0.7059	0.024 00	0.034 00	41.660	29.409	35
40	1.4889	0.6717	0.020 46	0.030 46	48.886	32.835	40
45	1.5648	0.6391	0.017 71	0.027 71	56.481	36.095	45
50	1.6446	0.6080	0.015 51	0.025 51	64.463	39.196	50
55	1.7285	0.5785	0.013 73	0.023 73	72.852	42.147	55
60	1.8167	0.5504	0.012 24	0.022 24	81.670	44.955	60
65	1.9094	0.5237	0.011 00	0.021 00	90.937	47.627	65
70	2.0068	0.4983	0.009 93	0.019 93	100.676	50.169	70
75	2.1091	0.4741	0.009 02	0.019 02	110.913	52.587	75
80	2.2167	0.4511	0.008 22	0.018 22	121.672	54.888	80
85	2.3298	0.4292	0.007 52	0.017 52	132.979	57.078	85
90	2.4486	0.4084	0.006 90	0.016 90	144.863	59.161	90
95	2.5735	0.3886	0.006 36	0.016 36	157.354	61.143	95
100	2.7048	0.3697	0.005 87	0.015 87	170.481	63.029	100

1¼% Compound Interest Factors

Single Payment			Uniform Series				
	Compound Amount Factor <i>F/P</i>	Present Worth Factor <i>P/F</i>	Sinking Fund Factor <i>A/F</i>	Capital Recovery Factor <i>A/P</i>	Compound Amount Factor <i>F/A</i>	Present Worth Factor <i>P/A</i>	
<i>n</i>							<i>n</i>
1	1.0125	0.9877	1.000 00	1.012 50	1.000	0.988	1
2	1.0252	0.9755	0.496 89	0.509 39	2.012	1.963	2
3	1.0380	0.9634	0.329 20	0.341 70	3.038	2.927	3
4	1.0509	0.9515	0.245 36	0.257 86	4.076	3.878	4
5	1.0641	0.9398	0.195 06	0.207 56	5.127	4.818	5
6	1.0774	0.9282	0.161 53	0.174 03	6.191	5.746	6
7	1.0909	0.9167	0.137 59	0.150 09	7.268	6.663	7
8	1.1045	0.9054	0.119 63	0.132 13	8.359	7.568	8
9	1.1183	0.8942	0.105 67	0.118 17	9.463	8.462	9
10	1.1323	0.8832	0.094 50	0.107 00	10.582	9.346	10
11	1.1464	0.8723	0.085 37	0.097 87	11.714	10.218	11
12	1.1608	0.8615	0.077 76	0.090 26	12.860	11.079	12
13	1.1753	0.8509	0.071 32	0.083 82	14.021	11.930	13
14	1.1900	0.8404	0.065 81	0.078 31	15.196	12.771	14
15	1.2048	0.8300	0.061 03	0.073 53	16.386	13.601	15
16	1.2199	0.8197	0.056 85	0.069 35	17.591	14.420	16
17	1.2351	0.8096	0.053 16	0.065 66	18.811	15.230	17
18	1.2506	0.7996	0.049 88	0.062 38	20.046	16.030	18
19	1.2662	0.7898	0.046 96	0.059 46	21.297	16.819	19
20	1.2820	0.7800	0.044 32	0.056 82	22.563	17.599	20
21	1.2981	0.7704	0.041 94	0.054 44	23.845	18.370	21
22	1.3143	0.7609	0.039 77	0.052 27	25.143	19.131	22
23	1.3307	0.7515	0.037 80	0.050 30	26.457	19.882	23
24	1.3474	0.7422	0.035 99	0.048 49	27.788	20.624	24
25	1.3642	0.7330	0.034 32	0.046 82	29.135	21.357	25
26	1.3812	0.7240	0.032 79	0.045 29	30.500	22.081	26
27	1.3985	0.7150	0.031 37	0.043 87	31.881	22.796	27
28	1.4160	0.7062	0.030 05	0.042 55	33.279	23.503	28
29	1.4337	0.6975	0.028 82	0.041 32	34.695	24.200	29
30	1.4516	0.6889	0.027 68	0.040 18	36.129	24.889	30
31	1.4698	0.6804	0.026 61	0.039 11	37.581	25.569	31
32	1.4881	0.6720	0.025 61	0.038 11	39.050	26.241	32
33	1.5067	0.6637	0.024 67	0.037 17	40.539	26.905	33
34	1.5256	0.6555	0.023 78	0.036 28	42.045	27.560	34
35	1.5446	0.6474	0.022 95	0.035 45	43.571	28.208	35
40	1.6436	0.6084	0.019 42	0.031 92	51.490	31.327	40
45	1.7439	0.5718	0.016 69	0.029 19	59.916	34.258	45
50	1.8610	0.5373	0.014 52	0.027 02	68.882	37.013	50
55	1.9803	0.5050	0.012 75	0.025 25	78.422	39.602	55
60	2.1072	0.4746	0.011 29	0.023 79	88.575	42.035	60
65	2.2422	0.4460	0.010 06	0.022 56	99.377	44.321	65
70	2.3859	0.4191	0.009 02	0.021 52	110.872	46.470	70
75	2.5388	0.3939	0.008 12	0.020 62	123.103	48.489	75
80	2.7015	0.3702	0.007 35	0.019 85	136.119	50.387	80
85	2.8746	0.3479	0.006 67	0.019 17	149.968	52.170	85
90	3.0588	0.3269	0.006 07	0.018 57	164.705	53.846	90
95	3.2548	0.3072	0.005 54	0.018 01	180.386	55.421	95
100	3.4634	0.2887	0.005 07	0.017 57	197.072	56.901	100

1½% Compound Interest Factors

Single Payment			Uniform Series				
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
n							n
1	1.0150	0.9852	1.000 00	1.015 00	1.000	0.985	1
2	1.0302	0.9707	0.496 28	0.511 28	2.015	1.956	2
3	1.0457	0.9563	0.328 38	0.343 38	3.045	2.912	3
4	1.0614	0.9422	0.244 44	0.259 44	4.091	3.851	4
5	1.0773	0.9283	0.194 09	0.209 09	5.152	4.783	5
6	1.0934	0.9145	0.160 53	0.175 53	6.230	5.697	6
7	1.1098	0.9010	0.136 56	0.151 56	7.323	6.598	7
8	1.1265	0.8877	0.118 58	0.133 58	8.433	7.486	8
9	1.1434	0.8746	0.104 61	0.119 61	9.559	8.361	9
10	1.1605	0.8617	0.093 43	0.108 43	10.703	9.222	10
11	1.1779	0.8489	0.084 29	0.099 29	11.863	10.071	11
12	1.1956	0.8364	0.076 68	0.091 68	13.041	10.908	12
13	1.2136	0.8240	0.070 24	0.085 24	14.237	11.732	13
14	1.2318	0.8118	0.064 72	0.079 72	15.450	12.543	14
15	1.2502	0.7999	0.059 94	0.074 94	16.682	13.343	15
16	1.2690	0.7880	0.055 77	0.070 77	17.932	14.131	16
17	1.2880	0.7764	0.052 08	0.067 08	19.201	14.908	17
18	1.3073	0.7649	0.048 81	0.063 81	20.489	15.673	18
19	1.3270	0.7536	0.045 88	0.060 88	21.797	16.426	19
20	1.3469	0.7425	0.043 25	0.058 25	23.124	17.169	20
21	1.3671	0.7315	0.040 87	0.055 87	24.471	17.900	21
22	1.3876	0.7207	0.038 70	0.053 70	25.838	18.621	22
23	1.4084	0.7100	0.036 73	0.051 73	27.225	19.331	23
24	1.4300	0.6995	0.034 92	0.049 92	28.634	20.030	24
25	1.4509	0.6892	0.033 26	0.048 26	30.063	20.720	25
26	1.4727	0.6790	0.031 73	0.046 73	31.514	21.399	26
27	1.4948	0.6690	0.030 32	0.045 32	32.987	22.068	27
28	1.5172	0.6591	0.029 00	0.044 00	34.481	22.727	28
29	1.5400	0.6494	0.027 78	0.042 78	35.999	23.376	29
30	1.5631	0.6398	0.026 64	0.041 64	37.539	24.016	30
31	1.5865	0.6303	0.025 57	0.040 57	39.102	24.646	31
32	1.6103	0.6210	0.024 58	0.039 58	40.688	25.267	32
33	1.6345	0.6118	0.023 64	0.038 64	42.299	25.879	33
34	1.6590	0.6028	0.022 76	0.037 76	43.933	26.482	34
35	1.6839	0.5939	0.021 93	0.036 93	45.592	27.076	35
40	1.8140	0.5513	0.018 43	0.033 43	54.268	29.916	40
45	1.9542	0.5117	0.015 72	0.030 72	63.614	32.552	45
50	2.1052	0.4750	0.013 57	0.028 57	73.683	35.000	50
55	2.2679	0.4409	0.011 83	0.026 83	84.530	37.271	55
60	2.4432	0.4093	0.010 39	0.025 39	96.215	39.380	60
65	2.6320	0.3799	0.009 19	0.024 19	108.803	41.338	65
70	2.8355	0.3527	0.008 17	0.023 17	122.364	43.155	70
75	3.0546	0.3274	0.007 30	0.022 30	136.973	44.842	75
80	3.2907	0.3039	0.006 55	0.021 55	152.711	46.407	80
85	3.5450	0.2821	0.005 89	0.020 89	169.665	47.861	85
90	3.8189	0.2619	0.005 32	0.020 32	187.930	49.210	90
95	4.1141	0.2431	0.004 82	0.019 82	207.606	50.462	95
100	4.4320	0.2256	0.004 37	0.019 37	228.803	51.625	100

TABLE E-4

1 3/4% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0175	0.9828	1.000 00	1.017 50	1.000	0.983	1
2	1.0353	0.9659	0.495 66	0.513 16	2.018	1.949	2
3	1.0534	0.9493	0.327 57	0.345 07	3.053	2.898	3
4	1.0719	0.9330	0.243 53	0.261 03	4.106	3.831	4
5	1.0906	0.9169	0.193 12	0.210 62	5.178	4.748	5
6	1.1097	0.9011	0.159 52	0.177 02	6.269	5.649	6
7	1.1291	0.8856	0.135 53	0.153 03	7.378	6.535	7
8	1.1489	0.8704	0.117 54	0.135 04	8.508	7.405	8
9	1.1690	0.8554	0.103 56	0.121 06	9.656	8.260	9
10	1.1894	0.8407	0.092 38	0.109 88	10.825	9.101	10
11	1.2103	0.8263	0.083 23	0.100 73	12.015	9.927	11
12	1.2314	0.8121	0.075 61	0.093 11	13.225	10.740	12
13	1.2530	0.7981	0.069 17	0.086 67	14.457	11.538	13
14	1.2749	0.7844	0.063 66	0.081 16	15.710	12.322	14
15	1.2972	0.7709	0.058 88	0.076 38	16.984	13.093	15
16	1.3199	0.7576	0.054 70	0.072 20	18.282	13.850	16
17	1.3430	0.7446	0.051 02	0.068 52	19.602	14.595	17
18	1.3665	0.7318	0.047 74	0.065 24	20.945	15.327	18
19	1.3904	0.7192	0.044 82	0.062 32	22.311	16.046	19
20	1.4148	0.7068	0.042 19	0.059 69	23.702	16.753	20
21	1.4395	0.6947	0.039 81	0.057 31	25.116	17.448	21
22	1.4647	0.6827	0.037 66	0.055 16	26.556	18.130	22
23	1.4904	0.6710	0.035 69	0.053 19	28.021	18.801	23
24	1.5164	0.6594	0.033 89	0.051 39	29.511	19.461	24
25	1.5430	0.6481	0.032 23	0.049 73	31.027	20.109	25
26	1.5700	0.6369	0.030 70	0.048 20	32.570	20.746	26
27	1.5975	0.6260	0.029 29	0.046 79	34.140	21.372	27
28	1.6254	0.6152	0.027 98	0.045 48	35.738	21.987	28
29	1.6539	0.6046	0.026 76	0.044 26	37.363	22.592	29
30	1.6828	0.5942	0.025 63	0.043 13	39.017	23.186	30
31	1.7122	0.5840	0.024 57	0.042 07	40.700	23.770	31
32	1.7422	0.5740	0.023 58	0.041 08	42.412	24.344	32
33	1.7727	0.5641	0.022 65	0.040 15	44.154	24.908	33
34	1.8037	0.5544	0.021 77	0.039 27	45.927	25.462	34
35	1.8353	0.5449	0.020 95	0.038 45	47.731	26.007	35
40	2.0016	0.4996	0.017 47	0.034 97	57.234	28.594	40
45	2.1830	0.4581	0.014 79	0.032 29	67.599	30.966	45
50	2.3808	0.4200	0.012 67	0.030 17	78.902	33.141	50
55	2.5965	0.3851	0.010 96	0.028 46	91.230	35.135	55
60	2.8318	0.3531	0.009 55	0.027 05	104.675	36.964	60
65	3.0884	0.3238	0.008 38	0.025 88	119.339	38.641	65
70	3.3683	0.2969	0.007 39	0.024 89	135.331	40.178	70
75	3.6735	0.2722	0.006 55	0.024 05	152.772	41.587	75
80	4.0064	0.2496	0.005 82	0.023 32	171.794	42.880	80
85	4.3694	0.2289	0.005 19	0.022 69	192.539	44.065	85
90	4.7654	0.2098	0.004 65	0.022 15	215.165	45.152	90
95	5.1972	0.1924	0.004 17	0.021 67	239.840	46.148	95
100	5.6682	0.1764	0.003 75	0.021 25	266.752	47.061	100

TABLE E-5

2% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0200	0.9804	1.000 00	1.020 00	1.000	0.980	1
2	1.0404	0.9612	0.495 05	0.515 05	2.020	1.942	2
3	1.0612	0.9423	0.326 75	0.346 75	3.060	2.884	3
4	1.0824	0.9238	0.242 62	0.262 62	4.122	3.808	4
5	1.1041	0.9057	0.192 16	0.212 16	5.204	4.713	5
6	1.1262	0.8880	0.158 53	0.178 53	6.308	5.601	6
7	1.1487	0.8706	0.134 51	0.154 51	7.434	6.472	7
8	1.1717	0.8535	0.116 51	0.136 51	8.583	7.325	8
9	1.1951	0.8368	0.102 52	0.122 52	9.755	8.162	9
10	1.2190	0.8203	0.091 33	0.111 33	10.950	8.983	10
11	1.2434	0.8043	0.082 18	0.102 18	12.169	9.787	11
12	1.2682	0.7885	0.074 56	0.094 56	13.412	10.575	12
13	1.2936	0.7730	0.068 12	0.088 12	14.680	11.348	13
14	1.3195	0.7579	0.062 60	0.082 60	15.974	12.106	14
15	1.3459	0.7430	0.057 83	0.077 83	17.293	12.849	15
16	1.3728	0.7284	0.053 65	0.073 65	18.639	13.578	16
17	1.4002	0.7142	0.049 97	0.069 97	20.012	14.292	17
18	1.4282	0.7002	0.046 70	0.066 70	21.412	14.992	18
19	1.4568	0.6864	0.043 78	0.063 78	22.841	15.678	19
20	1.4859	0.6730	0.041 16	0.061 16	24.297	16.351	20
21	1.5157	0.6598	0.038 78	0.058 78	25.783	17.011	21
22	1.5460	0.6468	0.036 63	0.056 63	27.299	17.658	22
23	1.5769	0.6342	0.034 67	0.054 67	28.845	18.292	23
24	1.6084	0.6217	0.032 87	0.052 87	30.422	18.914	24
25	1.6406	0.6095	0.031 22	0.051 22	32.030	19.523	25
26	1.6734	0.5976	0.029 70	0.049 70	33.671	20.121	26
27	1.7069	0.5859	0.028 29	0.048 29	35.344	20.707	27
28	1.7410	0.5744	0.026 99	0.046 99	37.051	21.281	28
29	1.7758	0.5631	0.025 78	0.045 78	38.792	21.844	29
30	1.8114	0.5521	0.024 65	0.044 65	40.568	22.396	30
31	1.8476	0.5412	0.023 60	0.043 60	42.379	22.938	31
32	1.8845	0.5306	0.022 61	0.042 61	44.227	23.468	32
33	1.9222	0.5202	0.021 69	0.041 69	46.112	23.989	33
34	1.9607	0.5100	0.020 82	0.040 82	48.034	24.499	34
35	1.9999	0.5000	0.020 00	0.040 00	49.994	24.999	35
40	2.2080	0.4529	0.016 56	0.036 56	60.402	27.355	40
45	2.4379	0.4102	0.013 91	0.033 91	71.893	29.490	45
50	2.6916	0.3715	0.011 82	0.031 82	84.579	31.424	50
55	2.9717	0.3365	0.010 14	0.030 14	98.587	33.175	55
60	3.2810	0.3048	0.008 77	0.028 77	114.052	34.761	60
65	3.6225	0.2761	0.007 63	0.027 63	131.126	36.197	65
70	3.9996	0.2500	0.006 67	0.026 67	149.978	37.499	70
75	4.4158	0.2265	0.005 86	0.025 86	170.792	38.677	75
80	4.8754	0.2051	0.005 16	0.025 16	193.772	39.745	80
85	5.3829	0.1858	0.004 56	0.024 56	219.144	40.711	85
90	5.9431	0.1683	0.004 05	0.024 05	247.157	41.587	90
95	6.5617	0.1524	0.003 60	0.023 60	278.085	42.380	95
100	7.2446	0.1380	0.003 20	0.023 20	312.232	43.098	100

TABLE E-6

2½% Compound Interest Factors

Single Payment			Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Factor F/A	Present Worth Factor P/A	n
1	1.0250	0.9756	1.000 00	1.025 00	1.025 00	0.976	1
2	1.0506	0.9518	0.493 83	0.518 83	2.075	1.927	2
3	1.0769	0.9286	0.325 14	0.350 14	3.156	2.875	3
4	1.1038	0.9060	0.240 82	0.265 82	4.153	3.822	4
5	1.1314	0.8839	0.190 25	0.215 25	5.256	4.646	5
6	1.1597	0.8623	0.156 55	0.181 55	6.388	5.508	6
7	1.1887	0.8413	0.132 50	0.157 50	7.547	6.319	7
8	1.2184	0.8207	0.114 47	0.139 47	8.736	7.170	8
9	1.2489	0.8007	0.100 46	0.125 46	9.955	7.971	9
10	1.2801	0.7812	0.089 26	0.114 26	11.203	8.752	10
11	1.3121	0.7621	0.080 11	0.105 11	12.483	9.514	11
12	1.3449	0.7436	0.072 49	0.097 49	13.796	10.258	12
13	1.3785	0.7254	0.066 05	0.091 05	15.140	10.983	13
14	1.4130	0.7077	0.060 54	0.085 54	16.519	11.691	14
15	1.4483	0.6905	0.055 77	0.080 77	17.932	12.381	15
16	1.4845	0.6736	0.051 60	0.076 60	19.380	13.055	16
17	1.5216	0.6572	0.047 93	0.072 93	20.865	13.712	17
18	1.5597	0.6412	0.044 67	0.069 67	22.386	14.353	18
19	1.5987	0.6255	0.041 76	0.066 76	23.946	14.979	19
20	1.6386	0.6103	0.039 15	0.064 15	25.545	15.589	20
21	1.6796	0.5954	0.036 79	0.061 79	27.183	16.185	21
22	1.7216	0.5809	0.034 65	0.059 65	28.863	16.765	22
23	1.7646	0.5667	0.032 70	0.057 70	30.584	17.332	23
24	1.8087	0.5529	0.030 91	0.055 91	32.349	17.885	24
25	1.8539	0.5394	0.029 28	0.054 28	34.158	18.424	25
26	1.9003	0.5262	0.027 77	0.052 77	36.012	18.951	26
27	1.9478	0.5134	0.026 38	0.051 38	37.912	19.464	27
28	1.9965	0.5009	0.025 09	0.050 09	39.860	19.965	28
29	2.0464	0.4887	0.023 89	0.048 89	41.856	20.454	29
30	2.0976	0.4767	0.022 78	0.047 78	43.903	20.930	30
31	2.1500	0.4651	0.021 74	0.046 74	46.000	21.395	31
32	2.2038	0.4538	0.020 77	0.045 77	48.150	21.849	32
33	2.2589	0.4427	0.019 86	0.044 86	50.354	22.292	33
34	2.3153	0.4319	0.019 01	0.044 01	52.613	22.724	34
35	2.3732	0.4214	0.018 21	0.043 21	54.928	23.145	35
40	2.6851	0.3724	0.014 84	0.039 84	67.403	25.103	40
45	3.0379	0.3292	0.012 27	0.037 27	81.516	26.833	45
50	3.4371	0.2909	0.010 26	0.035 26	97.484	28.362	50
55	3.8888	0.2572	0.008 65	0.033 65	115.551	29.714	55
60	4.3998	0.2273	0.007 35	0.032 35	135.992	30.909	60
65	4.9780	0.2009	0.006 28	0.031 28	159.118	31.965	65
70	5.6321	0.1776	0.005 40	0.030 40	185.284	32.898	70
75	6.3722	0.1569	0.004 65	0.029 65	214.388	33.723	75
80	7.2100	0.1387	0.004 03	0.029 03	248.383	34.452	80
85	8.1570	0.1226	0.003 49	0.028 49	286.279	35.096	85
90	9.2289	0.1084	0.003 04	0.028 04	329.154	35.666	90
95	10.4416	0.0958	0.002 65	0.027 65	377.664	36.169	95
100	11.8137	0.0846	0.002 31	0.027 31	432.549	36.614	100

TABLE E-7

3% Compound Interest Factors

Single Payment			Uniform Series				
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
n							n
1	1.0300	0.9709	1.000 00	1.030 00	1.000	0.971	1
2	1.0609	0.9426	0.492 61	0.522 61	2.030	1.913	2
3	1.0927	0.9151	0.323 53	0.353 53	3.091	2.829	3
4	1.1255	0.8885	0.239 03	0.269 03	4.184	3.717	4
5	1.1593	0.8626	0.183 35	0.218 35	5.309	4.580	5
6	1.1941	0.8375	0.154 60	0.181 60	6.468	5.417	6
7	1.2299	0.8131	0.130 51	0.160 51	7.662	6.230	7
8	1.2668	0.7894	0.112 46	0.142 46	8.892	7.020	8
9	1.3048	0.7664	0.098 43	0.128 43	10.159	7.786	9
10	1.3439	0.7441	0.087 23	0.117 23	11.464	8.530	10
11	1.3842	0.7224	0.078 08	0.108 08	12.808	9.253	11
12	1.4258	0.7014	0.070 46	0.100 46	14.192	9.954	12
13	1.4685	0.6810	0.064 03	0.094 03	15.618	10.635	13
14	1.5126	0.6611	0.058 53	0.088 53	17.086	11.296	14
15	1.5580	0.6419	0.053 77	0.083 77	18.599	11.938	15
16	1.6047	0.6232	0.049 61	0.079 61	20.157	12.561	16
17	1.6528	0.6050	0.045 95	0.075 95	21.762	13.166	17
18	1.7024	0.5874	0.042 71	0.072 71	23.414	13.754	18
19	1.7535	0.5703	0.039 81	0.069 81	25.117	14.324	19
20	1.8061	0.5537	0.037 22	0.067 22	26.870	14.877	20
21	1.8603	0.5375	0.034 87	0.064 87	28.676	15.415	21
22	1.9161	0.5219	0.032 75	0.062 75	30.537	15.937	22
23	1.9736	0.5067	0.030 81	0.060 81	32.453	16.444	23
24	2.0328	0.4919	0.029 05	0.059 05	34.426	16.936	24
25	2.0938	0.4776	0.027 43	0.057 43	36.459	17.413	25
26	2.1566	0.4637	0.025 94	0.055 94	38.553	17.877	26
27	2.2213	0.4502	0.024 56	0.054 56	40.710	18.327	27
28	2.2879	0.4371	0.023 29	0.053 29	42.931	18.764	28
29	2.3566	0.4243	0.022 11	0.052 11	45.219	19.188	29
30	2.4273	0.4120	0.021 02	0.051 02	47.575	19.600	30
31	2.5001	0.4000	0.020 00	0.050 00	50.003	20.000	31
32	2.5751	0.3883	0.019 05	0.049 05	52.503	20.389	32
33	2.6523	0.3770	0.018 16	0.048 16	55.078	20.766	33
34	2.7319	0.3660	0.017 32	0.047 32	57.730	21.132	34
35	2.8139	0.3554	0.016 54	0.046 54	60.462	21.487	35
40	3.2620	0.3066	0.013 26	0.043 26	75.401	23.115	40
45	3.7816	0.2644	0.010 79	0.040 79	92.720	24.519	45
50	4.3839	0.2281	0.008 87	0.038 87	112.797	25.730	50
55	5.0821	0.1968	0.007 35	0.037 35	136.072	26.774	55
60	5.8916	0.1697	0.006 13	0.036 13	163.053	27.676	60
65	6.8300	0.1464	0.005 15	0.035 15	194.333	28.453	65
70	7.9178	0.1263	0.004 34	0.034 34	230.594	29.123	70
75	9.1789	0.1089	0.003 67	0.033 67	272.631	29.702	75
80	10.6409	0.0949	0.003 11	0.033 11	321.363	30.201	80
85	12.3357	0.0811	0.002 65	0.032 65	377.857	30.631	85
90	14.3005	0.0699	0.002 26	0.032 26	443.349	31.002	90
95	16.5782	0.0603	0.001 93	0.031 93	519.272	31.323	95
100	19.2186	0.0520	0.001 65	0.031 65	607.288	31.599	100

TABLE E-8

3½% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0350	0.9662	1.000 00	1.035 00	1.000	0.966	1
2	1.0712	0.9335	0.491 40	0.526 40	2.035	1.900	2
3	1.1087	0.9019	0.321 93	0.356 93	3.106	2.802	3
4	1.1475	0.8714	0.237 25	0.272 25	4.215	3.673	4
5	1.1877	0.8420	0.186 48	0.221 48	5.362	4.515	5
6	1.2293	0.8135	0.152 67	0.187 67	6.550	5.329	6
7	1.2723	0.7860	0.128 54	0.163 54	7.779	6.115	7
8	1.3168	0.7594	0.110 48	0.145 48	9.052	6.874	8
9	1.3629	0.7337	0.096 45	0.131 45	10.368	7.608	9
10	1.4106	0.7089	0.085 24	0.120 24	11.731	8.317	10
11	1.4600	0.6849	0.076 09	0.111 09	13.142	9.002	11
12	1.5111	0.6618	0.068 48	0.103 48	14.602	9.663	12
13	1.5640	0.6394	0.062 06	0.097 06	16.113	10.303	13
14	1.6187	0.6178	0.056 57	0.091 57	17.677	10.921	14
15	1.6753	0.5969	0.051 83	0.086 83	19.296	11.517	15
16	1.7340	0.5767	0.047 68	0.082 68	20.971	12.094	16
17	1.7947	0.5572	0.044 04	0.079 04	22.705	12.651	17
18	1.8575	0.5384	0.040 82	0.075 82	24.500	13.190	18
19	1.9225	0.5202	0.037 94	0.072 94	26.357	13.710	19
20	1.9898	0.5026	0.035 36	0.070 36	28.280	14.212	20
21	2.0594	0.4856	0.033 04	0.068 04	30.269	14.698	21
22	2.1315	0.4692	0.030 93	0.065 93	32.329	15.167	22
23	2.2061	0.4533	0.029 02	0.064 02	34.460	15.620	23
24	2.2833	0.4380	0.027 27	0.062 27	36.667	16.058	24
25	2.3632	0.4231	0.025 67	0.060 67	38.950	16.482	25
26	2.4460	0.4088	0.024 21	0.059 21	41.313	16.890	26
27	2.5316	0.3950	0.022 85	0.057 85	43.759	17.285	27
28	2.6202	0.3817	0.021 60	0.056 60	46.291	17.667	28
29	2.7119	0.3687	0.020 45	0.055 45	48.911	18.036	29
30	2.8068	0.3563	0.019 37	0.054 37	51.623	18.392	30
31	2.9050	0.3442	0.018 37	0.053 37	54.429	18.736	31
32	3.0067	0.3326	0.017 44	0.052 44	57.335	19.069	32
33	3.1119	0.3213	0.016 57	0.051 57	60.341	19.390	33
34	3.2209	0.3105	0.015 76	0.050 76	63.453	19.701	34
35	3.3336	0.3000	0.015 00	0.050 00	66.674	20.001	35
40	3.9593	0.2526	0.011 83	0.046 83	84.550	21.355	40
45	4.7024	0.2127	0.009 45	0.044 45	105.782	22.495	45
50	5.5849	0.1791	0.007 63	0.042 63	130.998	23.456	50
55	6.6331	0.1508	0.006 21	0.041 21	160.947	24.264	55
60	7.8781	0.1269	0.005 09	0.040 09	196.517	24.945	60
65	9.3567	0.1069	0.004 19	0.039 19	238.763	25.518	65
70	11.1128	0.0900	0.003 46	0.038 46	288.938	26.000	70
75	13.1986	0.0758	0.002 87	0.037 87	348.530	26.407	75
80	15.6757	0.0638	0.002 38	0.037 38	419.307	26.749	80
85	18.6179	0.0537	0.001 99	0.036 99	503.367	27.037	85
90	22.1122	0.0452	0.001 66	0.036 66	603.205	27.279	90
95	26.2623	0.0381	0.001 39	0.036 39	721.781	27.484	95
100	31.1914	0.0321	0.001 16	0.036 16	862.612	27.655	100

TABLE E-9

4% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0400	0.9615	1.000 00	1.040 00	1.000	0.962	1
2	1.0816	0.9246	0.490 20	0.530 20	2.040	1.886	2
3	1.1249	0.8890	0.320 35	0.360 35	3.122	2.775	3
4	1.1699	0.8548	0.235 49	0.275 49	4.246	3.630	4
5	1.2167	0.8219	0.184 63	0.224 63	5.416	4.452	5
6	1.2653	0.7903	0.150 76	0.190 76	6.633	5.242	6
7	1.3159	0.7599	0.126 61	0.166 61	7.898	6.002	7
8	1.3686	0.7307	0.103 53	0.148 53	9.214	6.733	8
9	1.4233	0.7026	0.091 49	0.131 49	10.583	7.435	9
10	1.4802	0.6756	0.081 29	0.123 29	12.006	8.111	10
11	1.5395	0.6496	0.074 15	0.114 15	13.486	8.760	11
12	1.6010	0.6246	0.066 55	0.106 55	15.026	9.385	12
13	1.6651	0.6006	0.060 14	0.100 14	16.627	9.986	13
14	1.7317	0.5775	0.054 67	0.094 67	18.292	10.563	14
15	1.8009	0.5553	0.049 24	0.089 24	20.024	11.118	15
16	1.8730	0.5339	0.045 82	0.085 82	21.825	11.652	16
17	1.9479	0.5134	0.042 20	0.082 20	23.698	12.166	17
18	2.0258	0.4936	0.038 99	0.078 99	25.645	12.659	18
19	2.1068	0.4746	0.036 14	0.076 14	27.671	13.134	19
20	2.1911	0.4564	0.033 58	0.073 58	29.773	13.590	20
21	2.2788	0.4388	0.031 28	0.071 28	31.969	14.029	21
22	2.3699	0.4220	0.029 20	0.069 20	34.248	14.451	22
23	2.4647	0.4057	0.027 31	0.067 31	36.618	14.857	23
24	2.5633	0.3901	0.025 59	0.065 59	39.083	15.247	24
25	2.6658	0.3751	0.024 01	0.064 01	41.646	15.622	25
26	2.7725	0.3607	0.022 57	0.062 57	44.312	15.983	26
27	2.8834	0.3468	0.021 24	0.061 24	47.084	16.330	27
28	2.9987	0.3335	0.020 01	0.060 01	49.968	16.663	28
29	3.1187	0.3207	0.018 88	0.058 88	52.966	16.984	29
30	3.2434	0.3083	0.017 83	0.057 83	56.085	17.292	30
31	3.3731	0.2965	0.016 86	0.056 86	59.328	17.588	31
32	3.5081	0.2851	0.015 95	0.055 95	62.701	17.874	32
33	3.6484	0.2741	0.015 10	0.055 10	66.210	18.148	33
34	3.7943	0.2636	0.014 31	0.054 31	69.858	18.411	34
35	3.9461	0.2534	0.013 58	0.053 58	73.652	18.665	35
40	4.8010	0.2083	0.010 52	0.050 52	95.026	19.793	40
45	5.8412	0.1712	0.008 26	0.048 26	121.029	20.720	45
50	7.1067	0.1407	0.006 55	0.046 55	152.667	21.482	50
55	8.6464	0.1157	0.005 23	0.045 23	191.159	22.109	55
60	10.5196	0.0951	0.004 20	0.044 20	237.991	22.623	60
65	12.7987	0.0781	0.003 39	0.043 39	294.968	23.047	65
70	15.5716	0.0642	0.002 75	0.042 75	364.290	23.395	70
75	18.9453	0.0528	0.002 23	0.042 23	448.631	23.680	75
80	23.0500	0.0434	0.001 81	0.041 81	551.245	23.915	80
85	28.0436	0.0357	0.001 48	0.041 48	676.090	24.109	85
90	34.1193	0.0293	0.001 21	0.041 21	827.983	24.267	90
95	41.5114	0.0241	0.000 99	0.040 99	1 012.785	24.398	95
100	50.5049	0.0198	0.000 81	0.040 81	1 237.624	24.505	100

TABLE E-10
4½% Compound Interest Factors

Single Payment			Uniform Series				
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	n
1	1.0450	0.9569	1.000 00	1.045 00	1.000	0.957	1
2	1.0920	0.9157	0.489 00	0.531 00	2.045	1.873	2
3	1.1412	0.8763	0.318 77	0.363 77	3.137	2.749	3
4	1.1925	0.8386	0.233 74	0.278 74	4.278	3.568	4
5	1.2462	0.8025	0.182 79	0.227 79	5.471	4.390	5
6	1.3023	0.7679	0.148 88	0.193 88	6.717	5.158	6
7	1.3609	0.7348	0.124 70	0.169 70	8.019	5.893	7
8	1.4221	0.7032	0.106 61	0.151 61	9.330	6.596	8
9	1.4861	0.6729	0.092 57	0.137 57	10.802	7.269	9
10	1.5530	0.6439	0.081 38	0.126 38	12.288	7.913	10
11	1.6229	0.6162	0.072 25	0.117 25	13.841	8.529	11
12	1.6959	0.5897	0.064 67	0.109 67	15.464	9.119	12
13	1.7722	0.5643	0.058 28	0.103 28	17.160	9.683	13
14	1.8519	0.5400	0.052 82	0.097 82	18.932	10.223	14
15	1.9353	0.5167	0.048 11	0.093 11	20.784	10.740	15
16	2.0224	0.4945	0.044 02	0.089 02	22.719	11.234	16
17	2.1134	0.4732	0.040 42	0.085 42	24.742	11.707	17
18	2.2085	0.4528	0.037 24	0.082 24	26.855	12.160	18
19	2.3079	0.4333	0.034 41	0.079 41	29.064	12.593	19
20	2.4117	0.4146	0.031 88	0.076 88	31.371	13.008	20
21	2.5202	0.3968	0.029 60	0.074 60	33.783	13.405	21
22	2.6337	0.3797	0.027 55	0.072 55	36.303	13.784	22
23	2.7522	0.3634	0.025 68	0.070 68	38.937	14.148	23
24	2.8760	0.3477	0.023 99	0.068 99	41.689	14.495	24
25	3.0054	0.3327	0.022 44	0.067 44	44.565	14.828	25
26	3.1407	0.3184	0.021 02	0.066 02	47.571	15.147	26
27	3.2820	0.3047	0.019 72	0.064 72	50.711	15.451	27
28	3.4397	0.2916	0.018 52	0.063 52	53.993	15.743	28
29	3.5840	0.2790	0.017 41	0.062 41	57.423	16.022	29
30	3.7453	0.2670	0.016 39	0.061 39	61.007	16.289	30
31	3.9139	0.2555	0.015 44	0.060 44	64.752	16.544	31
32	4.0900	0.2445	0.014 56	0.059 56	68.666	16.789	32
33	4.2740	0.2340	0.013 74	0.058 74	72.756	17.023	33
34	4.4664	0.2239	0.012 98	0.057 98	77.030	17.247	34
35	4.6673	0.2143	0.012 27	0.057 27	81.497	17.461	35
40	5.8164	0.1719	0.009 34	0.054 34	107.030	18.402	40
45	7.2482	0.1380	0.007 20	0.052 20	138.850	19.156	45
50	9.0326	0.1107	0.005 60	0.050 60	178.503	19.762	50
55	11.2563	0.0888	0.004 39	0.049 39	227.918	20.248	55
60	14.0274	0.0713	0.003 45	0.048 45	289.498	20.638	60
65	17.4807	0.0572	0.002 73	0.047 73	366.238	20.951	65
70	21.7841	0.0459	0.002 17	0.047 17	461.870	21.202	70
75	27.1470	0.0368	0.001 72	0.046 72	581.044	21.404	75
80	33.8301	0.0296	0.001 37	0.046 37	729.558	21.565	80
85	42.1585	0.0237	0.001 09	0.046 09	914.632	21.695	85
90	52.5371	0.0190	0.000 97	0.045 87	1145.269	21.799	90
95	65.4708	0.0153	0.000 70	0.045 70	1432.684	21.883	95
100	81.5885	0.0123	0.000 56	0.045 56	1790.856	21.950	100

TABLE E-11
5% Compound Interest Factors

Single Payment			Uniform Series				
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	n
1	1.0500	0.9524	1.000 00	1.050 00	1.000	0.952	1
2	1.1025	0.9070	0.487 80	0.537 80	2.050	1.859	2
3	1.1576	0.8638	0.317 21	0.367 21	3.153	2.723	3
4	1.2155	0.8227	0.232 01	0.282 01	4.310	3.546	4
5	1.2763	0.7835	0.180 97	0.230 97	5.526	4.329	5
6	1.3401	0.7462	0.147 02	0.197 02	6.802	5.076	6
7	1.4071	0.7107	0.122 82	0.172 82	8.142	5.786	7
8	1.4775	0.6768	0.104 72	0.154 72	9.549	6.463	8
9	1.5513	0.6446	0.090 69	0.140 69	11.027	7.108	9
10	1.6289	0.6139	0.079 50	0.129 50	12.578	7.722	10
11	1.7103	0.5847	0.070 39	0.120 39	14.207	8.306	11
12	1.7959	0.5568	0.062 83	0.112 83	15.917	8.863	12
13	1.8856	0.5303	0.056 46	0.106 46	17.713	9.394	13
14	1.9800	0.5051	0.051 02	0.101 02	19.599	9.899	14
15	2.0789	0.4810	0.046 34	0.096 34	21.579	10.380	15
16	2.1829	0.4581	0.042 27	0.092 27	23.657	10.838	16
17	2.2920	0.4363	0.038 70	0.088 70	25.840	11.274	17
18	2.4066	0.4155	0.035 55	0.085 55	28.132	11.690	18
19	2.5270	0.3957	0.032 75	0.082 75	30.539	12.085	19
20	2.6533	0.3769	0.030 24	0.080 24	33.066	12.462	20
21	2.7860	0.3589	0.028 00	0.078 00	35.719	12.821	21
22	2.9253	0.3418	0.025 97	0.075 97	38.505	13.163	22
23	3.0715	0.3256	0.024 14	0.074 14	41.430	13.489	23
24	3.2251	0.3101	0.022 47	0.072 47	44.502	13.799	24
25	3.3864	0.2953	0.020 95	0.070 95	47.727	14.094	25
26	3.5557	0.2812	0.019 56	0.069 56	51.113	14.375	26
27	3.7335	0.2678	0.018 29	0.068 29	54.669	14.643	27
28	3.9201	0.2551	0.017 12	0.067 12	58.403	14.898	28
29	4.1161	0.2429	0.016 05	0.066 05	62.323	15.141	29
30	4.3219	0.2314	0.015 05	0.065 05	66.439	15.372	30
31	4.5380	0.2204	0.014 13	0.064 13	70.761	15.593	31
32	4.7649	0.2099	0.013 28	0.063 28	75.299	15.803	32
33	5.0032	0.1999	0.012 49	0.062 49	80.064	16.003	33
34	5.2533	0.1904	0.011 76	0.061 76	85.067	16.193	34
35	5.5160	0.1813	0.011 07	0.061 07	90.320	16.374	35
40	7.0400	0.1420	0.008 28	0.058 28	120.800	17.159	40
45	8.9850	0.1113	0.006 26	0.056 26	159.700	17.774	45
50	11.4674	0.0872	0.004 78	0.054 78	209.348	18.256	50
55	14.6356	0.0683	0.003 67	0.053 67	272.713	18.633	55
60	18.602	0.0535	0.002 83	0.052 83	353.584	18.929	60
65	23.8399	0.0419	0.002 19	0.052 19	456.798	19.161	65
70	30.4264	0.0329	0.001 70	0.051 70	588.529	19.343	70
75	38.8327	0.0258	0.001 32	0.051 32	756.654	19.485	75
80	49.5614	0.0202	0.001 03	0.051 03	971.229	19.596	80
85	63.2544	0.0158	0.000 80	0.050 80	1245.087	19.684	85
90	80.7304	0.0124	0.000 63	0.050 63	1594.607	19.752	90
95	103.0357	0.0097	0.000 49	0.050 49	2040.694	19.806	95
100	131.5013	0.0076	0.000 38	0.050 38	2610.025	19.848	100

TABLE E-12

5½% Compound Interest Factors

Single Payment		Uniform Series				n
Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0550	0.9479	1.000 00	1.055 00	1.000	0.948
2	1.1130	0.8985	0.486 62	0.511 62	2.055	1.846
3	1.1742	0.8516	0.315 65	0.370 65	3.168	2.698
4	1.2388	0.8072	0.230 29	0.285 29	4.342	3.505
5	1.3070	0.7651	0.179 18	0.234 18	5.581	4.270
6	1.3788	0.7252	0.145 18	0.200 18	6.888	4.996
7	1.4547	0.6874	0.120 96	0.175 96	8.267	5.683
8	1.5347	0.6516	0.102 86	0.157 86	9.722	6.335
9	1.6191	0.6176	0.088 84	0.143 84	11.256	6.952
10	1.7081	0.5854	0.077 67	0.132 67	12.875	7.538
11	1.8021	0.5549	0.068 57	0.123 57	14.583	8.093
12	1.9012	0.5260	0.061 03	0.116 03	16.386	8.619
13	2.0058	0.4986	0.054 68	0.109 68	18.287	9.117
14	2.1161	0.4726	0.049 28	0.104 28	20.293	9.590
15	2.2325	0.4479	0.044 63	0.099 63	22.409	10.038
16	2.3553	0.4246	0.040 58	0.095 58	24.641	10.462
17	2.4848	0.4024	0.037 04	0.092 04	26.996	10.865
18	2.6215	0.3815	0.033 92	0.088 92	29.481	11.246
19	2.7656	0.3616	0.031 15	0.086 15	32.103	11.608
20	2.9178	0.3427	0.028 68	0.083 68	34.868	11.950
21	3.0782	0.3249	0.026 46	0.081 46	37.786	12.275
22	3.2475	0.3079	0.024 47	0.079 47	40.864	12.583
23	3.4262	0.2919	0.022 67	0.077 67	44.112	12.875
24	3.6146	0.2767	0.021 04	0.076 04	47.538	13.152
25	3.8134	0.2622	0.019 55	0.074 55	51.153	13.414
26	4.0231	0.2486	0.018 19	0.073 19	54.966	13.662
27	4.2444	0.2356	0.016 95	0.071 95	58.989	13.898
28	4.4778	0.2233	0.015 81	0.070 81	63.234	14.121
29	4.7241	0.2117	0.014 77	0.069 77	67.711	14.333
30	4.9840	0.2006	0.013 81	0.068 81	72.435	14.534
31	5.2581	0.1902	0.012 92	0.067 92	77.419	14.724
32	5.5473	0.1803	0.012 10	0.067 10	82.677	14.904
33	5.8524	0.1709	0.011 33	0.066 33	88.225	15.075
34	6.1742	0.1620	0.010 63	0.065 63	94.077	15.237
35	6.5138	0.1535	0.009 97	0.064 97	100.251	15.391
40	8.5133	0.1175	0.007 32	0.062 32	136.606	16.046
45	11.1266	0.0899	0.005 43	0.060 43	184.119	16.548
50	14.5420	0.0688	0.004 06	0.059 06	246.217	16.932
55	19.0058	0.0526	0.003 05	0.058 05	327.177	17.225
60	24.8398	0.0403	0.002 31	0.057 31	433.171	17.450
65	32.4646	0.0308	0.001 75	0.056 75	572.083	17.622
70	42.4299	0.0236	0.001 33	0.056 33	753.271	17.753
75	55.1542	0.0180	0.001 01	0.056 01	990.076	17.854
80	72.4764	0.0138	0.000 77	0.055 77	1,299.571	17.931
85	94.7233	0.0106	0.000 59	0.055 59	1,704.069	17.990
90	123.8002	0.0081	0.000 45	0.055 45	2,232.731	18.035
95	161.8019	0.0062	0.000 34	0.055 34	2,923.671	18.069
100	211.4686	0.0047	0.000 26	0.055 26	3,826.702	18.096

TABLE E-13

6% Compound Interest Factors

Single Payment		Uniform Series				n
Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.0600	0.9434	1.000 00	1.060 00	1.000	0.943
2	1.1236	0.8900	0.485 44	0.545 44	2.060	1.833
3	1.1910	0.8396	0.314 11	0.374 11	3.184	2.673
4	1.2625	0.7921	0.228 59	0.288 59	4.375	3.465
5	1.3382	0.7473	0.177 40	0.237 40	5.637	4.212
6	1.4185	0.7050	0.143 36	0.203 36	6.975	4.917
7	1.5036	0.6651	0.112 14	0.179 14	8.394	5.582
8	1.5938	0.6274	0.101 04	0.161 04	9.897	6.210
9	1.6895	0.5919	0.087 02	0.147 02	11.491	6.802
10	1.7908	0.5584	0.075 87	0.135 87	13.181	7.360
11	1.8983	0.5268	0.066 79	0.126 79	14.972	7.887
12	2.0122	0.4970	0.059 28	0.119 28	16.870	8.384
13	2.1329	0.4688	0.052 96	0.112 96	18.882	8.853
14	2.2609	0.4423	0.047 58	0.107 58	21.015	9.295
15	2.3966	0.4173	0.042 96	0.102 96	23.276	9.712
16	2.5404	0.3936	0.038 95	0.098 95	25.673	10.106
17	2.6928	0.3714	0.035 44	0.095 44	28.213	10.477
18	2.8543	0.3503	0.032 36	0.092 36	30.906	10.828
19	3.0256	0.3305	0.029 62	0.089 62	33.760	11.158
20	3.2071	0.3118	0.027 18	0.087 18	36.786	11.470
21	3.3996	0.2942	0.025 00	0.085 00	39.993	11.764
22	3.6035	0.2775	0.023 05	0.083 05	43.392	12.042
23	3.8197	0.2618	0.021 28	0.081 28	46.996	12.303
24	4.0489	0.2470	0.019 68	0.079 68	50.816	12.550
25	4.2919	0.2330	0.018 23	0.078 23	54.865	12.783
26	4.5494	0.2198	0.016 90	0.076 90	59.156	13.003
27	4.8223	0.2074	0.015 70	0.075 70	63.706	13.211
28	5.1117	0.1956	0.014 59	0.074 59	68.528	13.406
29	5.4184	0.1846	0.013 58	0.073 58	73.640	13.591
30	5.7435	0.1741	0.012 65	0.072 65	79.058	13.765
31	6.0881	0.1643	0.011 79	0.071 79	84.802	13.929
32	6.4534	0.1550	0.011 00	0.071 00	90.890	14.084
33	6.8406	0.1462	0.010 27	0.070 27	97.343	14.230
34	7.2510	0.1379	0.009 60	0.069 60	104.184	14.368
35	7.6861	0.1301	0.008 97	0.068 97	111.435	14.498
40	10.2857	0.0972	0.006 46	0.066 46	154.762	15.046
45	13.7646	0.0727	0.004 70	0.064 70	212.744	15.456
50	18.4202	0.0543	0.003 44	0.063 44	290.336	15.762
55	24.6503	0.0406	0.002 54	0.062 54	394.172	15.991
60	32.9877	0.0303	0.001 88	0.061 88	533.128	16.161
65	44.1450	0.0227	0.001 39	0.061 39	719.083	16.289
70	59.0759	0.0169	0.001 03	0.061 03	967.932	16.385
75	79.0569	0.0126	0.000 77	0.060 77	1,300.847	16.456
80	105.7960	0.0095	0.000 57	0.060 57	1,746.600	16.509
85	141.5789	0.0071	0.000 43	0.060 43	2,342.982	16.549
90	189.4645	0.0053	0.000 32	0.060 32	3,141.075	16.579
95	253.5163	0.0039	0.000 24	0.060 24	4,209.104	16.601
100	339.3021	0.0029	0.000 18	0.060 18	5,638.368	16.618

TABLE E-14

7% Compound Interest Factors

Single Payment			Uniform Series				
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
n							n
1	1.0700	0.9346	1.000 00	1.070 00	1.000	0.935	1
2	1.1449	0.8734	0.483 09	0.553 09	2.070	1.308	2
3	1.2250	0.8163	0.311 05	0.381 05	3.115	2.524	3
4	1.3108	0.7629	0.225 23	0.295 23	4.140	3.387	4
5	1.4026	0.7130	0.173 89	0.213 89	5.151	4.100	5
6	1.5007	0.6663	0.139 80	0.209 80	7.153	4.767	6
7	1.6058	0.6227	0.115 55	0.185 55	8.454	5.389	7
8	1.7182	0.5820	0.097 47	0.167 47	10.260	5.971	8
9	1.8385	0.5439	0.083 49	0.153 49	11.978	6.515	9
10	1.9672	0.5083	0.072 38	0.142 38	13.816	7.024	10
11	2.1049	0.4751	0.063 36	0.133 36	15.784	7.499	11
12	2.2522	0.4440	0.055 90	0.125 90	17.888	7.943	12
13	2.4098	0.4150	0.049 65	0.119 65	20.141	8.358	13
14	2.5785	0.3878	0.044 34	0.114 34	22.550	8.745	14
15	2.7590	0.3624	0.039 79	0.109 79	25.129	9.108	15
16	2.9522	0.3387	0.035 86	0.105 86	27.888	9.447	16
17	3.1588	0.3166	0.032 13	0.102 13	30.840	9.763	17
18	3.3799	0.2959	0.029 41	0.099 41	33.999	10.059	18
19	3.6165	0.2765	0.026 75	0.096 75	37.379	10.336	19
20	3.8697	0.2584	0.024 39	0.094 39	40.995	10.594	20
21	4.1406	0.2415	0.022 29	0.092 29	44.865	10.836	21
22	4.4304	0.2257	0.020 41	0.090 41	49.006	11.061	22
23	4.7405	0.2109	0.018 71	0.088 71	53.436	11.272	23
24	5.0724	0.1971	0.017 19	0.087 19	58.177	11.469	24
25	5.4274	0.1842	0.015 81	0.085 81	63.249	11.654	25
26	5.8074	0.1722	0.014 56	0.084 56	68.676	11.826	26
27	6.2139	0.1609	0.013 43	0.083 43	74.484	11.987	27
28	6.6488	0.1504	0.012 39	0.082 39	80.698	12.137	28
29	7.1143	0.1406	0.011 45	0.081 45	87.347	12.278	29
30	7.6123	0.1314	0.010 59	0.080 59	94.461	12.409	30
31	8.1451	0.1228	0.009 80	0.079 80	102.073	12.532	31
32	8.7153	0.1147	0.009 07	0.079 07	110.218	12.647	32
33	9.3253	0.1072	0.008 41	0.078 41	118.933	12.754	33
34	9.9781	0.1002	0.007 80	0.077 80	128.259	12.854	34
35	10.6766	0.0937	0.007 23	0.077 23	138.237	12.948	35
40	14.9745	0.0668	0.005 01	0.075 01	199.635	13.332	40
45	21.0025	0.0476	0.003 50	0.073 50	285.749	13.606	45
50	29.4570	0.0339	0.002 46	0.072 46	406.529	13.801	50
55	41.3150	0.0242	0.001 74	0.071 74	575.929	13.940	55
60	57.9464	0.0173	0.001 23	0.071 23	813.520	14.039	60
65	81.2729	0.0123	0.000 87	0.070 87	1 146.755	14.110	65
70	113.9894	0.0088	0.000 62	0.070 62	1 614.134	14.160	70
75	159.8760	0.0063	0.000 44	0.070 44	2 269.657	14.196	75
80	221.2744	0.0045	0.000 31	0.070 31	3 189.063	14.222	80
85	314.5403	0.0032	0.000 22	0.070 22	4 478.576	14.240	85
90	441.1030	0.0023	0.000 16	0.070 16	6 287.185	14.253	90
95	613.6697	0.0016	0.000 11	0.070 11	8 823.854	14.263	95
100	867.7163	0.0012	0.000 08	0.070 08	12 381.662	14.269	100

TABLE E-15

8% Compound Interest Factors

Single Payment			Uniform Series				
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
n							n
1	1.0800	0.9259	1.000 00	1.080 00	1.000	0.926	1
2	1.1664	0.8573	0.480 77	0.560 77	2.080	1.783	2
3	1.2597	0.7938	0.308 03	0.388 03	3.246	2.577	3
4	1.3605	0.7350	0.221 92	0.301 92	4.506	3.312	4
5	1.4693	0.6806	0.170 16	0.250 16	5.867	3.993	5
6	1.5869	0.6302	0.136 32	0.216 32	7.336	4.623	6
7	1.7138	0.5835	0.112 07	0.192 07	8.923	5.206	7
8	1.8509	0.5403	0.094 01	0.174 01	10.637	5.747	8
9	1.9990	0.5002	0.080 08	0.160 08	12.488	6.247	9
10	2.1589	0.4632	0.069 03	0.149 03	14.487	6.710	10
11	2.3316	0.4289	0.060 08	0.140 08	16.645	7.139	11
12	2.5182	0.3971	0.052 70	0.132 70	18.977	7.536	12
13	2.7196	0.3677	0.046 52	0.126 52	21.495	7.904	13
14	2.9372	0.3405	0.041 30	0.121 30	24.215	8.244	14
15	3.1722	0.3152	0.036 83	0.116 83	27.152	8.559	15
16	3.4259	0.2919	0.032 98	0.112 98	30.324	8.851	16
17	3.7000	0.2703	0.029 63	0.109 63	33.750	9.122	17
18	3.9960	0.2502	0.026 70	0.106 70	37.450	9.372	18
19	4.3157	0.2317	0.024 13	0.104 13	41.446	9.604	19
20	4.6610	0.2145	0.021 85	0.101 85	45.762	9.818	20
21	5.0338	0.1987	0.019 83	0.099 83	50.423	10.017	21
22	5.4365	0.1839	0.018 03	0.098 03	55.457	10.201	22
23	5.8715	0.1703	0.016 42	0.096 42	60.893	10.371	23
24	6.3412	0.1577	0.014 98	0.094 98	66.765	10.529	24
25	6.8485	0.1460	0.013 68	0.093 68	73.106	10.675	25
26	7.3964	0.1352	0.012 51	0.092 51	79.954	10.810	26
27	7.9881	0.1252	0.011 45	0.091 45	87.351	10.935	27
28	8.6271	0.1159	0.010 49	0.090 49	95.339	11.051	28
29	9.3173	0.1073	0.009 62	0.089 62	103.966	11.158	29
30	10.0627	0.0994	0.008 83	0.088 83	113.283	11.258	30
31	10.8677	0.0920	0.008 11	0.088 11	123.346	11.350	31
32	11.7371	0.0852	0.007 45	0.087 45	134.214	11.435	32
33	12.6760	0.0789	0.006 85	0.086 85	145.951	11.514	33
34	13.6901	0.0730	0.006 30	0.086 30	158.627	11.587	34
35	14.7853	0.0676	0.005 80	0.085 80	172.317	11.655	35
40	21.7245	0.0460	0.003 86	0.083 86	259.057	11.925	40
45	31.9204	0.0313	0.002 59	0.082 59	386.506	12.108	45
50	46.9016	0.0213	0.001 74	0.081 74	573.770	12.233	50
55	68.9139	0.0145	0.001 18	0.081 18	848.923	12.319	55
60	101.2571	0.0099	0.000 80	0.080 80	1 253.213	12.377	60
65	148.7798	0.0067	0.000 54	0.080 54	1 847.248	12.416	65
70	218.6064	0.0046	0.000 37	0.080 37	2 720.030	12.443	70
75	321.2045	0.0031	0.000 25	0.080 25	4 002.557	12.461	75
80	471.9548	0.0021	0.000 17	0.080 17	5 886.935	12.474	80
85	693.4565	0.0014	0.000 12	0.080 12	8 655.706	12.482	85
90	1 018.9151	0.0010	0.000 08	0.080 08	12 723.939	12.488	90
95	1 497.1205	0.0007	0.000 05	0.080 05	18 701.507	12.492	95
100	2 199.7613	0.0005	0.000 04	0.080 04	27 181.516	12.494	100

TABLE E-16
10% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.1000	0.9091	1.000 00	1.100 00	1.000	0.909	1
2	1.2100	0.8264	0.476 19	0.576 19	2.100	1.736	2
3	1.3310	0.7513	0.302 11	0.402 11	3.310	2.487	3
4	1.4641	0.6830	0.215 47	0.315 47	4.641	3.170	4
5	1.6105	0.6209	0.163 80	0.263 80	6.105	3.791	5
6	1.7716	0.5645	0.129 61	0.229 61	7.716	4.355	6
7	1.9487	0.5132	0.105 41	0.205 41	9.487	4.868	7
8	2.1436	0.4665	0.087 44	0.187 44	11.436	5.335	8
9	2.3579	0.4241	0.073 64	0.173 64	13.579	5.759	9
10	2.5937	0.3855	0.062 75	0.162 75	15.937	6.144	10
11	2.8531	0.3505	0.053 96	0.153 96	18.531	6.495	11
12	3.1384	0.3186	0.046 76	0.146 76	21.384	6.814	12
13	3.4523	0.2897	0.040 78	0.140 78	24.523	7.103	13
14	3.7975	0.2633	0.035 75	0.135 75	27.975	7.367	14
15	4.1772	0.2394	0.031 47	0.131 47	31.772	7.606	15
16	4.5950	0.2176	0.027 82	0.127 82	35.950	7.824	16
17	5.0545	0.1978	0.024 66	0.124 66	40.545	8.022	17
18	5.5599	0.1799	0.021 93	0.121 93	45.599	8.201	18
19	6.1159	0.1635	0.019 55	0.119 55	51.159	8.365	19
20	6.7275	0.1486	0.017 46	0.117 46	57.275	8.514	20
21	7.4002	0.1351	0.015 62	0.115 62	64.002	8.649	21
22	8.1403	0.1228	0.014 01	0.114 01	71.403	8.772	22
23	8.9543	0.1117	0.012 57	0.112 57	79.543	8.883	23
24	9.8497	0.1015	0.011 30	0.111 30	88.497	8.985	24
25	10.8347	0.0923	0.010 17	0.110 17	98.347	9.077	25
26	11.9182	0.0839	0.009 16	0.109 16	109.182	9.161	26
27	13.1100	0.0763	0.008 26	0.108 26	121.100	9.237	27
28	14.4210	0.0693	0.007 45	0.107 45	134.210	9.307	28
29	15.8631	0.0630	0.006 73	0.106 73	148.631	9.370	29
30	17.4494	0.0573	0.006 08	0.106 08	164.494	9.427	30
31	19.1943	0.0521	0.005 50	0.105 50	181.943	9.479	31
32	21.1138	0.0474	0.004 97	0.104 97	201.138	9.526	32
33	23.2252	0.0431	0.004 50	0.104 50	222.252	9.569	33
34	25.5477	0.0391	0.004 07	0.104 07	245.477	9.609	34
35	28.1024	0.0356	0.003 69	0.103 69	271.024	9.644	35
40	45.2593	0.0221	0.002 26	0.102 26	442.593	9.779	40
45	72.8905	0.0137	0.001 39	0.101 39	718.905	9.863	45
50	117.3909	0.0085	0.000 86	0.100 86	1 163.909	9.915	50
55	189.0591	0.0053	0.000 53	0.100 53	1 880.591	9.947	55
60	304.4816	0.0033	0.000 33	0.100 33	3 034.816	9.967	60
65	490.3707	0.0020	0.000 20	0.100 20	4 893.707	9.980	65
70	789.7470	0.0013	0.000 13	0.100 13	7 887.470	9.987	70
75	1 271.8952	0.0008	0.000 08	0.100 08	12 708.954	9.992	75
80	2 048.4002	0.0005	0.000 05	0.100 05	20 474.002	9.995	80
85	3 298.9690	0.0003	0.000 03	0.100 03	32 979.690	9.997	85
90	5 313.0226	0.0002	0.000 02	0.100 02	53 120.226	9.998	90
95	8 556.6760	0.0001	0.000 01	0.100 01	85 556.760	9.999	95
100	13 780.6123	0.0001	0.000 01	0.100 01	137 796.123	9.999	100

TABLE E-17
12% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.1200	0.8929	1.000 00	1.120 00	1.000	0.893	1
2	1.2544	0.7972	0.471 70	0.591 70	2.120	1.690	2
3	1.4049	0.7118	0.296 35	0.416 35	3.374	2.402	3
4	1.5735	0.6355	0.209 23	0.329 23	4.779	3.037	4
5	1.7623	0.5674	0.157 41	0.277 41	6.353	3.605	5
6	1.9738	0.5066	0.123 23	0.243 23	8.115	4.111	6
7	2.2107	0.4523	0.099 12	0.219 12	10.089	4.564	7
8	2.4760	0.4039	0.081 30	0.201 30	12.300	4.968	8
9	2.7731	0.3606	0.067 68	0.187 68	14.776	5.328	9
10	3.1058	0.3220	0.056 98	0.176 98	17.549	5.650	10
11	3.4785	0.2875	0.048 42	0.168 42	20.655	5.938	11
12	3.8960	0.2567	0.041 44	0.161 44	24.133	6.194	12
13	4.3635	0.2292	0.035 68	0.155 68	28.029	6.424	13
14	4.8871	0.2046	0.030 87	0.150 87	32.393	6.628	14
15	5.4736	0.1827	0.026 82	0.146 82	37.280	6.811	15
16	6.1304	0.1631	0.023 39	0.143 39	42.753	6.974	16
17	6.8660	0.1456	0.020 46	0.140 46	48.884	7.120	17
18	7.6900	0.1300	0.017 94	0.137 94	55.750	7.250	18
19	8.6128	0.1161	0.015 76	0.135 76	63.440	7.366	19
20	9.6463	0.1037	0.013 88	0.133 88	72.052	7.469	20
21	10.8038	0.0926	0.012 24	0.132 24	81.699	7.562	21
22	12.1003	0.0826	0.010 81	0.130 81	92.503	7.645	22
23	13.5523	0.0738	0.009 56	0.129 56	104.603	7.718	23
24	15.1786	0.0659	0.008 46	0.128 46	118.155	7.784	24
25	17.0001	0.0588	0.007 50	0.127 50	133.334	7.843	25
26	19.0401	0.0525	0.006 65	0.126 65	150.334	7.896	26
27	21.3249	0.0469	0.005 90	0.125 90	169.374	7.943	27
28	23.8839	0.0419	0.005 24	0.125 24	190.699	7.984	28
29	26.7499	0.0374	0.004 66	0.124 66	214.583	8.022	29
30	29.9599	0.0334	0.004 14	0.124 14	241.333	8.055	30
31	33.5551	0.0298	0.003 69	0.123 69	271.292	8.085	31
32	37.5817	0.0266	0.003 28	0.123 28	304.847	8.112	32
33	42.0915	0.0238	0.002 92	0.122 92	342.429	8.135	33
34	47.1425	0.0212	0.002 60	0.122 60	384.520	8.157	34
35	52.7996	0.0189	0.002 32	0.122 32	431.663	8.176	35
40	93.0510	0.0107	0.001 30	0.121 30	767.091	8.244	40
45	163.9876	0.0061	0.000 74	0.120 74	1 358.230	8.283	45
50	289.0022	0.0035	0.000 42	0.120 42	2 400.018	8.305	50
∞				0.120 00		8.333	∞

TABLE E-18

15% Compound Interest Factors

Single Payment		Uniform Series				n
Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.1500	0.8696	1.000 00	1.150 00	1.000	0.870
2	1.3225	0.7561	0.465 12	0.615 12	2.150	1.626
3	1.5209	0.6575	0.287 98	0.437 98	3.472	2.283
4	1.7490	0.5718	0.200 26	0.350 27	4.993	2.855
5	2.0114	0.4972	0.148 32	0.298 32	6.742	3.352
6	2.3131	0.4323	0.114 24	0.264 24	8.754	3.784
7	2.6600	0.3759	0.090 36	0.240 36	11.067	4.160
8	3.0590	0.3269	0.072 85	0.222 85	13.727	4.487
9	3.5179	0.2843	0.059 57	0.209 57	16.786	4.772
10	4.0456	0.2472	0.049 25	0.199 25	20.304	5.019
11	4.6524	0.2149	0.041 07	0.191 07	24.349	5.234
12	5.3503	0.1869	0.034 48	0.184 48	29.002	5.421
13	6.1528	0.1625	0.029 11	0.179 11	34.352	5.583
14	7.0757	0.1413	0.024 69	0.174 69	40.505	5.724
15	8.1371	0.1229	0.021 02	0.171 02	47.580	5.847
16	9.3576	0.1069	0.017 95	0.167 95	55.717	5.954
17	10.7613	0.0929	0.015 37	0.165 37	65.075	6.047
18	12.3755	0.0808	0.013 19	0.163 19	75.836	6.128
19	14.2318	0.0703	0.011 34	0.161 34	88.212	6.198
20	16.3665	0.0611	0.009 76	0.159 76	102.444	6.259
21	18.8215	0.0531	0.008 42	0.158 42	118.310	6.312
22	21.6447	0.0462	0.007 27	0.157 27	137.632	6.359
23	24.8915	0.0402	0.006 28	0.156 28	159.276	6.399
24	28.6252	0.0349	0.005 43	0.155 43	184.168	6.434
25	32.9190	0.0304	0.004 70	0.154 70	212.793	6.464
26	37.8568	0.0264	0.004 07	0.154 07	245.712	6.491
27	43.5353	0.0230	0.003 53	0.153 53	283.569	6.514
28	50.0656	0.0200	0.003 06	0.153 06	327.104	6.534
29	57.5755	0.0174	0.002 65	0.152 65	377.170	6.551
30	66.2118	0.0151	0.002 30	0.152 30	434.745	6.566
31	76.1435	0.0131	0.002 00	0.152 00	500.957	6.579
32	87.5651	0.0114	0.001 73	0.151 73	577.100	6.591
33	100.6998	0.0099	0.001 50	0.151 50	664.666	6.600
34	115.8048	0.0086	0.001 31	0.151 31	765.365	6.609
35	133.1755	0.0075	0.001 13	0.151 13	881.170	6.617
40	267.8635	0.0037	0.000 56	0.150 56	1 779.090	6.642
45	538.7693	0.0019	0.000 28	0.150 28	3 585.128	6.654
50	1 083.6574	0.0009	0.000 14	0.150 14	7 217.716	6.661
∞				0.150 00		6.667
∞						∞

TABLE E-19

20% Compound Interest Factors

Single Payment		Uniform Series				n
Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.2000	0.8333	1.000 00	1.200 00	1.000	0.833
2	1.4400	0.6944	0.154 55	0.654 55	2.200	1.528
3	1.7280	0.5787	0.274 73	0.474 73	3.640	2.106
4	2.0736	0.4823	0.186 29	0.386 29	5.368	2.589
5	2.4883	0.4019	0.134 38	0.334 38	7.442	2.991
6	2.9860	0.3349	0.100 71	0.300 71	9.930	3.326
7	3.5832	0.2791	0.077 42	0.277 42	12.916	3.605
8	4.2998	0.2326	0.060 61	0.260 61	16.499	3.837
9	5.1598	0.1938	0.048 08	0.248 08	20.799	4.031
10	6.1917	0.1615	0.038 52	0.238 52	25.959	4.192
11	7.4301	0.1346	0.031 10	0.231 10	32.150	4.327
12	8.9161	0.1122	0.025 26	0.225 26	39.581	4.439
13	10.6993	0.0935	0.020 62	0.220 62	48.497	4.533
14	12.8392	0.0779	0.016 89	0.216 89	59.196	4.611
15	15.4070	0.0649	0.013 88	0.213 88	72.035	4.675
16	18.4884	0.0541	0.011 44	0.211 44	87.442	4.730
17	22.1861	0.0451	0.009 44	0.209 44	105.931	4.775
18	26.6233	0.0376	0.007 81	0.207 81	128.117	4.812
19	31.9480	0.0313	0.006 46	0.206 46	154.740	4.844
20	38.3376	0.0261	0.005 36	0.205 36	186.688	4.870
21	46.0051	0.0217	0.004 44	0.204 44	225.026	4.891
22	55.2061	0.0181	0.003 69	0.203 69	271.031	4.909
23	66.2474	0.0151	0.003 07	0.203 07	326.237	4.925
24	79.4968	0.0126	0.002 55	0.202 55	392.484	4.937
25	95.3962	0.0105	0.002 12	0.202 12	471.981	4.948
26	114.4755	0.0087	0.001 76	0.201 76	567.377	4.956
27	137.3706	0.0073	0.001 47	0.201 47	681.853	4.964
28	164.8447	0.0061	0.001 22	0.201 22	819.223	4.970
29	197.8136	0.0051	0.001 02	0.201 02	984.068	4.975
30	237.3763	0.0042	0.000 85	0.200 85	1 181.882	4.979
31	284.8516	0.0035	0.000 70	0.200 70	1 419.258	4.982
32	341.8219	0.0029	0.000 59	0.200 59	1 704.109	4.985
33	410.1863	0.0024	0.000 49	0.200 49	2 045.931	4.988
34	492.2235	0.0020	0.000 41	0.200 41	2 456.118	4.990
35	590.6682	0.0017	0.000 34	0.200 34	2 948.341	4.992
40	1 469.7716	0.0007	0.000 14	0.200 14	7 343.858	4.997
45	3 657.2620	0.0003	0.000 05	0.200 05	18 281.310	4.999
50	9 100.4382	0.0001	0.000 02	0.200 02	45 497.191	4.999
∞				0.200 00		5.000
∞						∞

TABLE E-20

25% Compound Interest Factors

Single Payment		Uniform Series					n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.2500	0.8000	1.000 00	1.250 00	1.000	0.800	1
2	1.5625	0.6400	0.444 44	0.694 44	2.250	1.410	2
3	1.9531	0.5120	0.262 30	0.512 30	3.813	1.52	3
4	2.4414	0.4096	0.173 44	0.423 44	5.766	2.362	4
5	3.0518	0.3277	0.121 85	0.371 85	8.207	2.689	5
6	3.8147	0.2621	0.088 82	0.338 82	11.259	2.951	6
7	4.7684	0.2097	0.066 34	0.316 34	15.073	3.161	7
8	5.9605	0.1678	0.050 40	0.300 40	19.842	3.329	8
9	7.4506	0.1342	0.038 76	0.288 76	25.802	3.463	9
10	9.3132	0.1074	0.030 07	0.280 07	33.253	3.571	10
11	11.6415	0.0859	0.023 49	0.273 49	42.566	3.656	11
12	14.5519	0.0687	0.018 45	0.263 45	54.208	3.725	12
13	18.1899	0.0550	0.014 54	0.264 54	68.760	3.780	13
14	22.7374	0.0440	0.011 50	0.261 50	86.949	3.824	14
15	28.4217	0.0352	0.009 12	0.259 12	109.687	3.859	15
16	35.5271	0.0281	0.007 24	0.257 24	138.109	3.887	16
17	44.4089	0.0225	0.005 76	0.255 76	173.636	3.910	17
18	55.5112	0.0180	0.004 59	0.254 59	218.045	3.928	18
19	69.3889	0.0144	0.003 66	0.253 66	273.556	3.942	19
20	86.7362	0.0115	0.002 92	0.252 92	342.945	3.954	20
21	108.4202	0.0092	0.002 33	0.252 33	429.681	3.963	21
22	135.5253	0.0074	0.001 86	0.251 86	538.101	3.970	22
23	169.4066	0.0059	0.001 48	0.251 48	673.626	3.976	23
24	211.7582	0.0047	0.001 19	0.251 19	843.033	3.981	24
25	264.6978	0.0038	0.000 95	0.250 95	1 054.791	3.985	25
26	330.8722	0.0030	0.000 76	0.250 76	1 319.489	3.988	26
27	413.5903	0.0024	0.000 61	0.250 61	1 659.361	3.990	27
28	516.9879	0.0019	0.000 48	0.250 48	2 063.952	3.992	28
29	646.2349	0.0015	0.000 39	0.250 39	2 580.939	3.994	29
30	807.7936	0.0012	0.000 31	0.250 31	3 227.174	3.995	30
31	1 009.7420	0.0010	0.000 25	0.250 25	4 034.968	3.996	31
32	1 262.1774	0.0008	0.000 20	0.250 20	5 044.710	3.997	32
33	1 577.7218	0.0006	0.000 16	0.250 16	6 306.887	3.997	33
34	1 972.1523	0.0005	0.000 13	0.250 13	7 884.609	3.998	34
35	2 465.1903	0.0004	0.000 10	0.250 10	9 856.761	3.998	35
40	7 523.1638	0.0001	0.000 03	0.250 03	30 088.655	3.999	40
45	22 958.8740	0.0001	0.000 01	0.250 01	91 831.496	4.000	45
50	70 064.9232	0.0000	0.000 00	0.250 00	280 255.693	4.000	50
∞				0.250 00		4.000	∞

TABLE E-21

30% Compound Interest Factors

Single Payment		Uniform Series					n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.3000	0.7692	1.000 00	1.300 00	1.000	0.769	1
2	1.6900	0.5917	0.434 78	0.734 78	2.300	1.361	2
3	2.1970	0.4552	0.250 63	0.550 63	3.990	1.816	3
4	2.8561	0.3501	0.161 63	0.461 63	6.187	2.166	4
5	3.7129	0.2693	0.110 58	0.410 58	9.043	2.436	5
6	4.8268	0.2072	0.078 39	0.378 39	12.756	2.643	6
7	6.2749	0.1594	0.056 87	0.356 87	17.583	2.802	7
8	8.1573	0.1226	0.041 92	0.341 92	23.858	2.925	8
9	10.6045	0.0943	0.031 24	0.331 24	32.015	3.019	9
10	13.7858	0.0725	0.023 46	0.323 46	42.619	3.092	10
11	17.9216	0.0558	0.017 73	0.317 73	56.405	3.147	11
12	23.2981	0.0429	0.013 45	0.313 45	74.327	3.190	12
13	30.2875	0.0330	0.010 24	0.310 24	97.625	3.223	13
14	39.3738	0.0254	0.007 82	0.307 82	127.913	3.249	14
15	51.1859	0.0195	0.005 98	0.305 98	167.286	3.268	15
16	66.5417	0.0150	0.004 58	0.304 58	218.472	3.283	16
17	86.5042	0.0116	0.003 51	0.303 51	285.014	3.295	17
18	112.4554	0.0089	0.002 69	0.302 69	371.518	3.304	18
19	146.1920	0.0068	0.002 07	0.302 07	483.973	3.311	19
20	190.0496	0.0053	0.001 59	0.301 59	630.165	3.316	20
21	247.0645	0.0040	0.001 22	0.301 22	820.215	3.320	21
22	321.1839	0.0031	0.000 94	0.300 94	1 067.280	3.323	22
23	417.5391	0.0024	0.000 72	0.300 72	1 388.464	3.325	23
24	542.8008	0.0018	0.000 55	0.300 55	1 806.003	3.327	24
25	705.6410	0.0014	0.000 43	0.300 43	2 348.803	3.329	25
26	917.3333	0.0011	0.000 33	0.300 33	3 054.444	3.330	26
27	1 192.5333	0.0008	0.000 25	0.300 25	3 971.778	3.331	27
28	1 550.2933	0.0006	0.000 19	0.300 19	5 164.311	3.331	28
29	2 015.3813	0.0005	0.000 15	0.300 15	6 714.604	3.332	29
30	2 619.9956	0.0004	0.000 11	0.300 11	8 729.985	3.332	30
31	3 405.9943	0.0003	0.000 09	0.300 09	11 349.981	3.332	31
32	4 427.7926	0.0002	0.000 07	0.300 07	14 755.975	3.333	32
33	5 756.1304	0.0002	0.000 05	0.300 05	19 183.768	3.333	33
34	7 482.9696	0.0001	0.000 04	0.300 04	24 939.899	3.333	34
35	9 727.8604	0.0001	0.000 03	0.300 03	32 422.868	3.333	35
∞				0.300 00		3.333	∞

TABLE E-22
35% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.3500	0.7407	1.000 00	1.350 00	1.000	0.741	1
2	1.8225	0.5487	0.425 53	0.775 53	2.350	1.289	2
3	2.4604	0.4064	0.239 66	0.589 66	4.172	1.696	3
4	3.3215	0.3011	0.150 76	0.500 76	6.633	1.997	4
5	4.4840	0.2230	0.100 46	0.450 46	9.954	2.220	5
6	6.0534	0.1652	0.069 26	0.419 26	14.438	2.385	6
7	8.1722	0.1224	0.048 80	0.398 80	20.192	2.507	7
8	11.0324	0.0906	0.034 89	0.384 89	28.664	2.598	8
9	14.8937	0.0671	0.025 19	0.375 19	39.696	2.665	9
10	20.1066	0.0497	0.018 32	0.368 32	54.590	2.715	10
11	27.1439	0.0368	0.013 39	0.363 39	74.697	2.752	11
12	36.6442	0.0273	0.009 82	0.359 82	101.841	2.779	12
13	49.4697	0.0202	0.007 22	0.357 22	138.485	2.799	13
14	66.7841	0.0150	0.005 32	0.355 32	187.954	2.814	14
15	90.1585	0.0111	0.003 93	0.353 93	254.738	2.825	15
16	121.7139	0.0082	0.002 90	0.352 90	344.897	2.834	16
17	164.3138	0.0061	0.002 14	0.352 14	466.611	2.840	17
18	221.8236	0.0045	0.001 59	0.351 58	630.925	2.844	18
19	299.4619	0.0033	0.001 17	0.351 17	852.748	2.848	19
20	404.2736	0.0025	0.000 87	0.350 87	1 152.210	2.850	20
21	545.7693	0.0018	0.000 64	0.350 64	1 556.484	2.852	21
22	736.7886	0.0014	0.000 48	0.350 48	2 102.253	2.853	22
23	994.6646	0.0010	0.000 35	0.350 35	2 839.042	2.854	23
24	1 342.7973	0.0007	0.000 26	0.350 26	3 833.706	2.855	24
25	1 812.7763	0.0006	0.000 19	0.350 19	5 176.504	2.856	25
26	2 447.2480	0.0004	0.000 14	0.350 14	6 939.280	2.856	26
27	3 303.7848	0.0003	0.000 11	0.350 11	9 436.528	2.856	27
28	4 460.1095	0.0002	0.000 08	0.350 08	12 710.313	2.857	28
29	6 021.1478	0.0002	0.000 06	0.350 06	17 200.422	2.857	29
30	8 128.5495	0.0001	0.000 04	0.350 04	23 221.570	2.857	30
31	10 973.5418	0.0001	0.000 03	0.350 03	31 350.120	2.857	31
32	14 814.2815	0.0001	0.000 02	0.350 02	42 323.661	2.857	32
33	19 999.2800	0.0001	0.000 02	0.350 02	57 137.943	2.857	33
34	26 999.0280	0.0000	0.000 01	0.350 01	77 137.223	2.857	34
35	448.6878		0.000 01	0.350 01	104 136.251	2.857	35
∞				0.350 00		2.857	∞

TABLE E-23
40% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.4000	0.7143	1.000 00	1.400 00	1.000	0.714	1
2	1.9600	0.5102	0.416 67	0.816 67	2.400	1.224	2
3	2.7440	0.3644	0.229 36	0.629 36	4.360	1.589	3
4	3.8416	0.2603	0.140 77	0.540 77	7.104	1.849	4
5	5.3782	0.1859	0.091 36	0.491 36	10.946	2.035	5
6	7.5295	0.1328	0.061 26	0.461 26	16.324	2.168	6
7	10.5414	0.0949	0.041 92	0.441 92	23.853	2.263	7
8	14.7579	0.0678	0.029 07	0.429 07	34.395	2.331	8
9	20.6610	0.0484	0.020 34	0.420 34	49.153	2.379	9
10	28.9255	0.0346	0.014 32	0.414 32	69.814	2.414	10
11	40.4957	0.0247	0.010 13	0.410 13	98.739	2.438	11
12	56.6939	0.0176	0.007 18	0.407 18	139.235	2.456	12
13	79.3715	0.0126	0.005 10	0.405 10	195.929	2.469	13
14	111.1201	0.0090	0.003 63	0.403 63	275.300	2.478	14
15	155.5681	0.0064	0.002 59	0.402 59	386.420	2.484	15
16	217.7953	0.0046	0.001 85	0.401 85	541.988	2.489	16
17	304.9135	0.0033	0.001 32	0.401 32	759.784	2.492	17
18	426.8789	0.0023	0.000 94	0.400 94	1 064.697	2.494	18
19	597.6304	0.0017	0.000 67	0.400 67	1 491.576	2.496	19
20	836.6826	0.0012	0.000 48	0.400 48	2 089.206	2.497	20
21	1 171.3554	0.0009	0.000 34	0.400 34	2 925.889	2.498	21
22	1 639.8976	0.0006	0.000 24	0.400 24	4 097.245	2.498	22
23	2 295.8569	0.0004	0.000 17	0.400 17	5 737.142	2.499	23
24	3 214.1997	0.0003	0.000 12	0.400 12	8 032.999	2.499	24
25	4 499.8796	0.0002	0.000 09	0.400 09	11 247.199	2.499	25
26	6 299.8314	0.0002	0.000 06	0.400 06	15 747.079	2.500	26
27	8 819.7640	0.0001	0.000 05	0.400 05	22 046.910	2.500	27
28	12 347.6696	0.0001	0.000 03	0.400 03	30 866.674	2.500	28
29	17 286.7374	0.0001	0.000 02	0.400 02	43 214.343	2.500	29
30	24 201.4324	0.0000	0.000 01	0.400 02	60 501.081	2.500	30
31	33 882.0053		0.000 01	0.400 01	84 702.513	2.500	31
32	47 434.8074		0.000 01	0.400 01	118 584.519	2.500	32
33	66 408.7304		0.000 01	0.400 01	166 019.326	2.500	33
34	92 972.2225		0.000 00	0.400 00	232 428.056	2.500	34
35	130 161.1116			0.400 00	325 400.279	2.500	35
∞				0.400 00		2.500	∞

TABLE E-24

45% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.4500	0.6897	1.000 00	1.450 00	1.000	0.690	1
2	2.1025	0.4756	0.408 16	0.858 16	2.450	1.165	2
3	3.0486	0.3280	0.219 66	0.669 66	4.552	1.493	3
4	4.4205	0.2262	0.131 56	0.581 56	7.601	1.720	4
5	6.4097	0.1560	0.083 18	0.513 18	12.022	1.876	5
6	9.2941	0.1076	0.054 26	0.504 26	18.431	1.983	6
7	13.4765	0.0742	0.036 07	0.486 07	27.725	2.057	7
8	19.5409	0.0512	0.024 27	0.474 27	41.202	2.109	8
9	28.3343	0.0353	0.016 46	0.466 46	60.743	2.144	9
10	41.0847	0.0243	0.011 23	0.461 23	89.077	2.168	10
11	59.5728	0.0168	0.007 68	0.457 68	130.162	2.185	11
12	86.3806	0.0116	0.005 27	0.455 27	189.735	2.196	12
13	125.2518	0.0080	0.003 62	0.453 62	276.115	2.204	13
14	181.6151	0.0055	0.002 49	0.452 49	401.367	2.210	14
15	263.3419	0.0038	0.001 72	0.451 72	582.982	2.214	15
16	381.8458	0.0026	0.001 18	0.451 18	846.324	2.216	16
17	553.6764	0.0018	0.000 81	0.450 81	1 228.170	2.218	17
18	802.8308	0.0012	0.000 56	0.450 56	1 781.846	2.219	18
19	1 164.1047	0.0009	0.000 39	0.450 39	2 584.677	2.220	19
20	1 687.9518	0.0006	0.000 27	0.450 27	3 748.782	2.221	20
21	2 447.5301	0.0004	0.000 18	0.450 18	5 436.734	2.221	21
22	3 548.2187	0.0003	0.000 13	0.450 13	7 884.264	2.222	22
23	5 145.9321	0.0002	0.000 09	0.450 09	11 433.182	2.222	23
24	7 461.6015	0.0001	0.000 06	0.450 06	16 579.115	2.222	24
25	10 819.3222	0.0001	0.000 04	0.450 04	24 040.716	2.222	25
26	15 688.0173	0.0001	0.000 03	0.450 03	34 860.038	2.222	26
27	22 747.6250	0.0000	0.000 02	0.450 02	50 548.056	2.222	27
28	32 984.0563		0.000 01	0.450 01	73 295.681	2.222	28
29	47 826.8816		0.000 01	0.450 01	106 279.737	2.222	29
30	69 348.9783		0.000 01	0.450 01	154 106.618	2.222	30
∞				0.450 00		2.222	∞

TABLE E-25

50% Compound Interest Factors

n	Single Payment		Uniform Series				n
	Compound Amount Factor F/P	Present Worth Factor P/F	Sinking Fund Factor A/F	Capital Recovery Factor A/P	Compound Amount Factor F/A	Present Worth Factor P/A	
1	1.5000	0.6667	1.000 00	1.500 00	1.000	0.667	1
2	2.2500	0.4444	0.400 00	0.900 00	2.500	1.111	2
3	3.3750	0.2963	0.210 53	0.710 53	4.750	1.407	3
4	5.0625	0.1975	0.123 08	0.623 08	8.125	1.605	4
5	7.5938	0.1317	0.075 83	0.575 83	13.188	1.737	5
6	11.3906	0.0878	0.048 12	0.548 12	20.781	1.824	6
7	17.0859	0.0585	0.031 08	0.531 08	32.172	1.883	7
8	25.6289	0.0390	0.020 30	0.520 30	49.258	1.922	8
9	38.4434	0.0260	0.013 35	0.513 35	74.887	1.948	9
10	57.6650	0.0173	0.008 82	0.508 82	113.330	1.965	10
11	86.4976	0.0116	0.005 85	0.505 85	170.995	1.977	11
12	129.7463	0.0077	0.003 88	0.503 88	257.493	1.985	12
13	194.6195	0.0051	0.002 58	0.502 58	387.239	1.996	13
14	291.9293	0.0034	0.001 72	0.501 72	581.859	1.993	14
15	437.8939	0.0023	0.001 14	0.501 14	873.788	1.995	15
16	656.8408	0.0015	0.000 76	0.500 76	1 311.682	1.997	16
17	985.2613	0.0010	0.000 51	0.500 51	1 768.523	1.998	17
18	1 477.8919	0.0007	0.000 34	0.500 34	2 953.784	1.999	18
19	2 216.8378	0.0005	0.000 23	0.500 23	4 431.676	1.999	19
20	3 325.2567	0.0003	0.000 15	0.500 15	6 648.513	1.999	20
21	4 987.8851	0.0002	0.000 10	0.500 10	9 973.770	2.000	21
22	7 481.8276	0.0001	0.000 07	0.500 07	14 961.655	2.000	22
23	11 222.7415	0.0001	0.000 04	0.500 04	22 443.483	2.000	23
24	16 834.1122	0.0001	0.000 03	0.500 03	33 666.224	2.000	24
25	25 251.1683	0.0000	0.000 02	0.500 02	50 500.337	2.000	25
∞				0.500 00		2.000	∞

TABLE E-26

**Factors To Convert a Gradient Series to an Equivalent
Uniform Annual Series**

This table contains multipliers for a gradient G to convert the n -year end-of-year series $0, G, 2G, \dots, (n-1)G$ to an equivalent uniform annual series for n years.

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	10%	n
2	0.50	0.50	0.49	0.49	0.49	0.49	0.48	0.48	0.48	2
3	0.99	0.99	0.98	0.97	0.97	0.96	0.95	0.95	0.94	3
4	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.40	1.38	4
5	1.98	1.96	1.94	1.92	1.90	1.88	1.86	1.85	1.81	5
6	2.47	2.44	2.41	2.39	2.36	2.33	2.30	2.28	2.22	6
7	2.96	2.92	2.88	2.84	2.81	2.77	2.73	2.69	2.62	7
8	3.45	3.40	3.34	3.29	3.24	3.20	3.15	3.10	3.00	8
9	3.93	3.87	3.80	3.74	3.68	3.61	3.55	3.49	3.37	9
10	4.42	4.34	4.26	4.18	4.10	4.02	3.95	3.87	3.73	10
11	4.90	4.80	4.70	4.61	4.51	4.42	4.33	4.24	4.06	11
12	5.38	5.26	5.15	5.03	4.92	4.81	4.70	4.60	4.39	12
13	5.86	5.72	5.59	5.45	5.32	5.19	5.06	4.94	4.70	13
14	6.34	6.18	6.02	5.87	5.71	5.56	5.42	5.27	5.00	14
15	6.81	6.63	6.45	6.27	6.10	5.93	5.76	5.59	5.28	15
16	7.29	7.08	6.87	6.67	6.47	6.28	6.09	5.90	5.55	16
17	7.76	7.52	7.29	7.07	6.84	6.62	6.41	6.20	5.81	17
18	8.23	7.97	7.71	7.45	7.20	6.95	6.72	6.49	6.05	18
19	8.70	8.41	8.12	7.83	7.56	7.29	7.02	6.77	6.29	19
20	9.17	8.84	8.52	8.21	7.90	7.61	7.32	7.04	6.51	20
21	9.63	9.28	8.92	8.58	8.24	7.92	7.60	7.29	6.72	21
22	10.10	9.70	9.32	8.94	8.57	8.22	7.87	7.54	6.92	22
23	10.56	10.13	9.71	9.30	8.90	8.51	8.14	7.78	7.11	23
24	11.02	10.55	10.10	9.65	9.21	8.80	8.39	8.01	7.29	24
25	11.48	10.97	10.48	9.99	9.52	9.07	8.64	8.23	7.46	25
26	11.94	11.39	10.85	10.33	9.83	9.34	8.88	8.44	7.62	26
27	12.39	11.80	11.23	10.66	10.12	9.60	9.11	8.64	7.77	27
28	12.85	12.21	11.59	10.99	10.41	9.86	9.33	8.83	7.91	28
29	13.30	12.62	11.96	11.31	10.69	10.10	9.54	9.01	8.05	29
30	13.75	13.02	12.31	11.63	10.97	10.34	9.75	9.19	8.18	30
31	14.20	13.42	12.67	11.94	11.24	10.57	9.95	9.36	8.30	31
32	14.65	13.82	13.02	12.24	11.50	10.80	10.14	9.52	8.41	32
33	15.10	14.22	13.36	12.54	11.76	11.02	10.32	9.67	8.52	33
34	15.54	14.61	13.70	12.83	12.01	11.23	10.50	9.82	8.61	34
35	15.98	15.00	14.04	13.12	12.25	11.43	10.67	9.96	8.71	35
40	18.18	16.89	15.65	14.48	13.38	12.36	11.42	10.57	9.10	40
45	20.33	18.70	17.16	15.70	14.36	13.14	12.04	11.04	9.37	45
50	22.44	20.44	18.56	16.81	15.22	13.80	12.53	11.41	9.57	50
60	26.53	23.70	21.07	18.70	16.61	14.79	13.23	11.90	9.80	60
70	30.47	26.66	23.21	20.20	17.52	15.46	13.67	12.18	9.91	70
80	34.25	29.26	25.04	21.37	18.35	16.00	13.93	12.33	9.96	80
90	37.37	31.79	26.57	22.28	18.87	16.12	14.08	12.41	9.98	90
100	41.34	33.99	27.84	22.98	19.23	16.37	14.17	12.45	9.99	100

TABLE E-26--Continued

**Factors To Convert a Gradient Series to an Equivalent
Uniform Annual Series**

This table contains multipliers for a gradient G to convert the n -year end-of-year series $0, G, 2G, \dots, (n-1)G$ to an equivalent uniform annual series for n years.

n	12%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%	
2	0.47	0.47	0.45	0.44	0.43	0.43	0.42	0.41	0.40	
3	0.92	0.91	0.88	0.85	0.83	0.80	0.78	0.76	0.74	
4	1.36	1.33	1.27	1.22	1.18	1.13	1.09	1.05	1.02	
5	1.77	1.72	1.64	1.56	1.49	1.42	1.36	1.30	1.24	
6	2.17	2.10	1.98	1.87	1.77	1.67	1.58	1.50	1.42	
7	2.55	2.45	2.29	2.14	2.01	1.88	1.77	1.66	1.56	
8	2.91	2.78	2.58	2.39	2.22	2.06	1.92	1.79	1.68	
9	3.26	3.09	2.84	2.60	2.40	2.21	2.04	1.89	1.76	
10	3.58	3.38	3.07	2.80	2.55	2.33	2.14	1.97	1.82	1
11	3.90	3.65	3.29	2.97	2.68	2.44	2.22	2.03	1.87	1
12	4.19	3.91	3.48	3.11	2.80	2.52	2.28	2.08	1.91	1
13	4.47	4.14	3.66	3.24	2.89	2.59	2.33	2.12	1.93	1
14	4.73	4.36	3.82	3.36	2.97	2.64	2.37	2.14	1.95	1
15	4.98	4.56	3.96	3.45	3.03	2.69	2.40	2.17	1.97	1
16	5.21	4.75	4.09	3.54	3.09	2.72	2.43	2.18	1.98	1
17	5.44	4.93	4.20	3.61	3.13	2.75	2.44	2.19	1.98	1
18	5.64	5.08	4.30	3.67	3.17	2.78	2.46	2.20	1.99	1
19	5.84	5.23	4.39	3.72	3.20	2.79	2.47	2.21	1.99	1
20	6.02	5.37	4.46	3.77	3.23	2.81	2.48	2.21	1.99	2
21	6.19	5.49	4.53	3.80	3.25	2.82	2.48	2.21	2.00	2
22	6.35	5.60	4.59	3.84	3.26	2.83	2.49	2.22	2.00	2
23	6.50	5.70	4.65	3.86	3.28	2.83	2.49	2.22	2.00	2
24	6.64	5.80	4.69	3.89	3.29	2.84	2.49	2.22	2.00	2
25	6.77	5.88	4.74	3.91	3.30	2.84	2.49	2.22	2.00	2
26	6.89	5.96	4.77	3.92	3.30	2.85	2.50	2.22	2.00	2
27	7.00	6.03	4.80	3.94	3.31	2.85	2.50	2.22	2.00	2
28	7.11	6.10	4.83	3.95	3.32	2.85	2.50	2.22	2.00	2
29	7.21	6.15	4.85	3.96	3.32	2.85	2.50	2.22	2.00	2
30	7.30	6.21	4.87	3.96	3.32	2.85	2.50	2.22	2.00	30
31	7.38	6.25	4.89	3.97	3.32	2.85	2.50	2.22	2.00	31
32	7.46	6.30	4.91	3.97	3.33	2.85	2.50	2.22	2.00	32
33	7.53	6.34	4.92	3.98	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	33
34	7.60	6.37	4.93	3.98	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	34
35	7.66	6.40	4.94	3.99	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	35
40	7.90	6.52	4.97	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	40
45	8.06	6.58	4.99	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	45
50	8.16	6.62	4.99	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	50
60	8.27	6.65	5.00	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	60
70	8.31	6.66	5.00	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	70
80	8.32	6.67	5.00	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	80
90	8.33	6.67	5.00	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	90
100	8.33	6.67	5.00	4.00	3.33	2.86	2.50	2.22	2.00	100

TABLE E-27

Factors To Compute the Present Worth of a Gradient Series
—Interest Rates from 1% to 50%

This table contains multipliers for a gradient G to find the present worth of the n -year end-of-year series $0, G, 2G, \dots, (n-1)G$.

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	n
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1
2	0.9803	0.9612	0.9426	0.9246	0.9070	0.8900	2
3	2.9215	2.8458	2.7729	2.7025	2.6347	2.5692	3
4	5.8044	5.6173	5.4383	5.2670	5.1038	4.9455	4
5	9.6103	9.2403	8.8888	8.5557	8.2369	7.9345	5
6	14.3205	13.6801	13.0762	12.5062	11.9680	11.4594	6
7	19.9168	18.9035	17.9547	17.0657	16.2321	15.4497	7
8	26.3812	24.8779	23.4806	22.1806	20.9700	19.8416	8
9	33.6959	31.5720	29.6119	27.8013	26.1268	24.5768	9
10	41.8435	38.9551	36.3088	33.8814	31.6520	29.6023	10
11	50.8067	46.9977	43.5330	40.3772	37.4988	34.8702	11
12	60.5687	55.6712	51.2482	47.2477	43.6241	40.3369	12
13	71.1126	64.9475	59.4196	54.1546	49.9879	45.9629	13
14	82.4221	74.7999	68.0741	61.9618	56.5538	51.7128	14
15	94.4810	85.2021	77.6002	69.7355	63.2880	57.5546	15
16	107.2734	96.1288	86.4777	77.7441	70.1597	63.4592	16
17	120.7834	107.5554	96.6280	85.9581	77.1405	69.4011	17
18	134.9957	119.4581	106.0137	94.3498	84.2043	75.3569	18
19	149.8950	131.8139	116.2788	102.8933	91.3275	81.3062	19
20	165.4664	144.6003	126.7987	111.5647	98.4884	87.2304	20
21	181.6950	157.7959	137.5496	120.3414	105.6673	93.1136	21
22	198.5663	171.3795	148.5094	129.2024	112.8461	98.9412	22
23	216.0660	185.3309	159.6566	138.1284	120.0087	104.7007	23
24	234.1800	199.6305	170.9711	147.1012	127.1402	110.3812	24
25	252.8945	214.2592	182.4336	156.1040	134.2275	115.9732	25
30	355.0021	291.7164	241.3613	201.0618	168.6226	142.3588	30
35	470.1583	374.8826	301.6267	244.8768	200.5807	165.7427	35
40	596.8561	461.9931	361.7500	286.5303	229.5452	185.9568	40
45	733.7038	551.5652	420.6325	325.4028	255.3146	203.1097	45
50	879.4177	642.3606	477.4801	361.1639	277.9148	217.4574	50
n	7%	8%	10%	12%	15%	20%	n
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1
2	0.8734	0.8573	0.8264	0.7972	0.7561	0.6944	2
3	2.5060	2.4450	2.3291	2.2208	2.0712	1.8519	3
4	4.7947	4.6501	4.3781	4.1273	3.7864	3.2986	4
5	7.6467	7.3724	6.8618	6.3970	5.7751	4.9061	5
6	10.9784	10.5233	9.6842	8.9302	7.9368	6.5806	6
7	14.7149	14.0242	12.7631	11.6443	10.1924	8.2551	7
8	18.7889	17.8061	16.0287	14.4715	12.4807	9.8831	8
9	23.1404	21.8081	19.4215	17.3563	14.7548	11.4335	9
10	27.7156	25.9768	22.8913	20.2541	16.9795	12.8871	10
11	32.4665	30.2657	26.3963	23.1789	19.1289	14.2330	11
12	37.3506	34.6339	29.9012	25.9523	21.1849	15.4667	12
13	42.3302	39.0463	33.3772	28.7024	23.1352	16.5883	13
14	47.3718	43.4723	36.8005	31.3624	24.9725	17.6008	14
15	52.4461	47.8857	40.1520	33.9202	26.6930	18.5095	15

TABLE E-27—Continued

Factors To Compute the Present Worth of a Gradient Series
—Interest Rates from 1% to 50%

This table contains multipliers for a gradient G to find the present worth of the n -year end-of-year series $0, G, 2G, \dots, (n-1)G$.

n	7%	8%	10%	12%	15%	20%	n
16	57.5271	53.2640	43.4164	36.3670	28.2900	19.3208	16
17	62.5923	56.8283	46.5820	38.6973	29.7828	20.0419	17
18	67.6220	60.1116	49.6396	40.9080	31.1565	20.6805	18
19	72.5991	63.0134	52.5827	42.9979	32.4213	21.2439	19
20	77.5091	65.6822	55.4069	44.9676	33.5822	21.7395	20
21	82.3393	68.1209	58.1095	46.8188	34.6448	22.1742	21
22	87.0793	70.4251	60.6393	48.5543	35.6150	22.5546	22
23	91.7201	72.6026	63.1162	50.1776	36.4988	22.8867	23
24	96.2645	74.6597	65.5413	51.6929	37.3023	23.1760	24
25	100.7165	76.6044	67.9264	53.1017	38.0314	23.4276	25
30	120.9718	103.4558	77.0766	58.7821	40.7526	24.2628	30
35	138.1353	116.0920	83.9872	62.6052	42.3587	24.6614	35
40	152.3928	126.0122	89.9826	65.1159	43.2830	24.8469	40
45	163.7559	133.7331	92.4515	66.7343	43.8051	24.9316	45
50	172.9951	139.5228	94.3889	67.7625	44.0958	24.9698	50
n	25%	30%	35%	40%	45%	50%	n
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1
2	0.6400	0.5717	0.5187	0.4702	0.4256	0.3844	2
3	1.6640	1.3920	1.3616	1.2391	1.1317	1.0370	3
4	2.8228	2.3524	2.2643	2.0200	1.8103	1.6296	4
5	4.2035	3.6297	3.4568	3.1637	2.8344	2.5564	5
6	5.5142	4.6656	3.9828	3.4273	2.9723	2.5933	6
7	6.7725	5.6218	4.7170	3.9970	3.4176	2.9465	7
8	7.9469	6.4800	5.3515	4.4713	3.7758	3.2196	8
9	9.0207	7.2344	5.8887	4.8585	4.0581	3.4277	9
10	9.9870	7.8872	6.3363	5.1696	4.2772	3.5838	10
11	10.8460	8.4452	6.7047	5.4166	4.4450	3.6994	11
12	11.6020	8.9173	7.0049	5.6106	4.5724	3.7842	12
13	12.2617	9.3135	7.2474	5.7618	4.6682	3.8459	13
14	12.8334	9.6437	7.4421	5.8788	4.7398	3.8904	14
15	13.3260	9.9172	7.5974	5.9688	4.7929	3.9224	15
16	13.7482	10.1426	7.7206	6.0376	4.8322	3.9452	16
17	14.1085	10.3276	7.8180	6.0901	4.8611	3.9614	17
18	14.4147	10.4788	7.8946	6.1299	4.8823	3.9729	18
19	14.6741	10.6019	7.9547	6.1601	4.8978	3.9811	19
20	14.8932	10.7019	8.0017	6.1828	4.9090	3.9868	20
21	15.0777	10.7828	8.0384	6.1998	4.9172	3.9908	21
22	15.2326	10.8482	8.0669	6.2127	4.9231	3.9936	22
23	15.3625	10.9009	8.0890	6.2222	4.9274	3.9955	23
24	15.4711	10.9433	8.1061	6.2294	4.9305	3.9969	24
25	15.5618	10.9773	8.1194	6.2347	4.9327	3.9979	25
30	15.8316	11.0687	8.1517	6.2466	4.9372	3.9997	30
35	15.9367	11.0980	8.1603	6.2493	4.9381		35
40	15.9766	11.1071	8.1625	6.2498			40
45	15.9915	11.1099	8.1631				45
50	15.9969	11.1108					50

TABLE E-28

Present Worth at Zero Date of \$1 Flowing Uniformly
Throughout One-Year Periods

This table assumes continuous compounding of interest at various
stated effective rates per annum.

Period	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	10%
0 to 1	0.9950	0.9902	0.9854	0.9806	0.9760	0.9714	0.9669	0.9625	0.9538
1 to 2	0.9852	0.9707	0.9567	0.9429	0.9295	0.9164	0.9037	0.8912	0.8671
2 to 3	0.9754	0.9517	0.9288	0.9067	0.8853	0.8646	0.8445	0.8252	0.7883
3 to 4	0.9658	0.9331	0.9017	0.8718	0.8431	0.8156	0.7893	0.7641	0.7165
4 to 5	0.9562	0.9148	0.8755	0.8383	0.8030	0.7695	0.7377	0.7075	0.6515
5 to 6	0.9467	0.8968	0.8500	0.8060	0.7647	0.7259	0.6894	0.6551	0.5922
6 to 7	0.9374	0.8792	0.8252	0.7750	0.7283	0.6848	0.6443	0.6065	0.5384
7 to 8	0.9281	0.8620	0.8012	0.7452	0.6936	0.6461	0.6021	0.5616	0.4895
8 to 9	0.9189	0.8451	0.7779	0.7165	0.6606	0.6095	0.5628	0.5200	0.4450
9 to 10	0.9098	0.8285	0.7552	0.6890	0.6291	0.5750	0.5259	0.4815	0.4045
10 to 11	0.9008	0.8123	0.7332	0.6625	0.5992	0.5421	0.4915	0.4458	0.3677
11 to 12	0.8919	0.7964	0.7118	0.6370	0.5706	0.5117	0.4594	0.4128	0.3313
12 to 13	0.8830	0.7807	0.6911	0.6125	0.5435	0.4828	0.4293	0.3822	0.3039
13 to 14	0.8743	0.7654	0.6710	0.5889	0.5176	0.4554	0.4012	0.3539	0.2763
14 to 15	0.8656	0.7504	0.6514	0.5663	0.4929	0.4297	0.3750	0.3277	0.2512
15 to 16	0.8571	0.7357	0.6325	0.5445	0.4695	0.4053	0.3505	0.3034	0.2283
16 to 17	0.8486	0.7213	0.6140	0.5236	0.4471	0.3824	0.3275	0.2809	0.2076
17 to 18	0.8402	0.7071	0.5962	0.5034	0.4258	0.3608	0.3061	0.2601	0.1887
18 to 19	0.8319	0.6933	0.5788	0.4841	0.4055	0.3403	0.2861	0.2409	0.1716
19 to 20	0.8236	0.6797	0.5619	0.4655	0.3862	0.3211	0.2674	0.2230	0.1560
20 to 21	0.8155	0.6664	0.5456	0.4476	0.3678	0.3029	0.2499	0.2065	0.1415
21 to 22	0.8074	0.6533	0.5297	0.4303	0.3503	0.2857	0.2335	0.1912	0.1285
22 to 23	0.7994	0.6405	0.5143	0.4138	0.3336	0.2696	0.2182	0.1773	0.1172
23 to 24	0.7915	0.6279	0.4993	0.3979	0.3178	0.2543	0.2040	0.1639	0.1065
24 to 25	0.7837	0.6156	0.4847	0.3826	0.3026	0.2399	0.1906	0.1518	0.0956
25 to 26	0.7759	0.6035	0.4706	0.3679	0.2882	0.2263	0.1782	0.1405	0.0840
26 to 27	0.7682	0.5917	0.4569	0.3537	0.2745	0.2135	0.1665	0.1301	0.0800
27 to 28	0.7606	0.5801	0.4436	0.3401	0.2614	0.2014	0.1556	0.1205	0.0778
28 to 29	0.7531	0.5687	0.4307	0.3270	0.2490	0.1900	0.1454	0.1116	0.0661
29 to 30	0.7456	0.5576	0.4181	0.3144	0.2371	0.1793	0.1352	0.1033	0.0601
30 to 31	0.7382	0.5466	0.4060	0.3024	0.2258	0.1691	0.1270	0.0956	0.0547
31 to 32	0.7309	0.5359	0.3941	0.2907	0.2151	0.1596	0.1187	0.0885	0.0497
32 to 33	0.7237	0.5254	0.3827	0.2795	0.2048	0.1505	0.1109	0.0820	0.0452
33 to 34	0.7165	0.5151	0.3715	0.2688	0.1951	0.1420	0.1037	0.0759	0.0411
34 to 35	0.7094	0.5050	0.3607	0.2585	0.1858	0.1340	0.0969	0.0703	0.0373
35 to 36	0.7024	0.4951	0.3502	0.2485	0.1769	0.1261	0.0906	0.0651	0.0339
36 to 37	0.6955	0.4854	0.3400	0.2390	0.1685	0.1192	0.0845	0.0603	0.0309
37 to 38	0.6886	0.4759	0.3301	0.2298	0.1605	0.1125	0.0791	0.0558	0.0281
38 to 39	0.6818	0.4666	0.3205	0.2209	0.1528	0.1061	0.0739	0.0517	0.0255
39 to 40	0.6750	0.4574	0.3111	0.2124	0.1456	0.1001	0.0691	0.0473	0.0232
40 to 41	0.6683	0.4484	0.3021	0.2043	0.1386	0.0944	0.0646	0.0443	0.0211
41 to 42	0.6617	0.4396	0.2933	0.1964	0.1320	0.0891	0.0603	0.0410	0.0192
42 to 43	0.6552	0.4310	0.2847	0.1888	0.1257	0.0841	0.0564	0.0380	0.0174
43 to 44	0.6487	0.4226	0.2764	0.1816	0.1198	0.0793	0.0527	0.0352	0.0158
44 to 45	0.6422	0.4143	0.2684	0.1746	0.1141	0.0748	0.0493	0.0326	0.0144
45 to 46	0.6359	0.4062	0.2606	0.1679	0.1086	0.0706	0.0440	0.0302	0.0131
46 to 47	0.6296	0.3982	0.2530	0.1614	0.1035	0.0656	0.0410	0.0279	0.0119
47 to 48	0.6234	0.3904	0.2456	0.1552	0.0985	0.0628	0.0402	0.0259	0.0108
48 to 49	0.6172	0.3827	0.2385	0.1492	0.0938	0.0593	0.0376	0.0239	0.0098
49 to 50	0.6111	0.3752	0.2315	0.1435	0.0894	0.0559	0.0351	0.0222	0.0089

TABLE E-28—Continued

Present Worth at Zero Date of \$1 Flowing Uniformly
Throughout One-Year Periods

This table assumes continuous compounding of interest at various
stated effective rates per annum.

Period	12%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%
0 to 1	0.9454	0.9333	0.9141	0.8963	0.8796	0.8639	0.8491	0.8352	0.82
1 to 2	0.8441	0.8115	0.7618	0.7170	0.6766	0.6399	0.6065	0.5760	0.543
2 to 3	0.7537	0.7057	0.6348	0.5736	0.5205	0.4740	0.4332	0.3973	0.36
3 to 4	0.6729	0.6136	0.5290	0.4589	0.4004	0.3511	0.3095	0.2740	0.24
4 to 5	0.6008	0.5336	0.4408	0.3671	0.3080	0.2601	0.2210	0.1889	0.16
5 to 6	0.5365	0.4640	0.3674	0.2937	0.2369	0.1927	0.1579	0.1303	0.108
6 to 7	0.4790	0.4035	0.3061	0.2350	0.1822	0.1427	0.1128	0.0899	0.07
7 to 8	0.4277	0.3508	0.2551	0.1880	0.1402	0.1057	0.0806	0.0620	0.043
8 to 9	0.3818	0.3051	0.2126	0.1504	0.1078	0.0783	0.0575	0.0427	0.032
9 to 10	0.3409	0.2653	0.1772	0.1203	0.0829	0.0580	0.0411	0.0295	0.021
10 to 11	0.3044	0.2307	0.1476	0.0962	0.0638	0.0430	0.0294	0.0203	0.014
11 to 12	0.2718	0.2006	0.1230	0.0770	0.0491	0.0318	0.0210	0.0140	0.009
12 to 13	0.2427	0.1744	0.1025	0.0616	0.0378	0.0236	0.0150	0.0097	0.006
13 to 14	0.2167	0.1517	0.0854	0.0493	0.0290	0.0175	0.0107	0.0067	0.004
14 to 15	0.1935	0.1319	0.0712	0.0394	0.0223	0.0129	0.0076	0.0046	0.002
15 to 16	0.1727	0.1147	0.0593	0.0315	0.0172	0.0096	0.0055	0.0032	0.001
16 to 17	0.1542	0.0997	0.0494	0.0252	0.0132	0.0071	0.0039	0.0022	0.001
17 to 18	0.1377	0.0867	0.0412	0.0202	0.0102	0.0053	0.0028	0.0015	0.000
18 to 19	0.1229	0.0754	0.0343	0.0161	0.0078	0.0039	0.0020	0.0010	0.000
19 to 20	0.1098	0.0656	0.0286	0.0129	0.0060	0.0029	0.0014	0.0007	0.000
20 to 21	0.0980	0.0570	0.0238	0.0103	0.0046	0.0021	0.0010	0.0005	0.000
21 to 22	0.0875	0.0496	0.0199	0.0083	0.0036	0.0016	0.0007	0.0003	0.000
22 to 23	0.0781	0.0431	0.0166	0.0066	0.0027	0.0012	0.0005	0.0002	0.000
23 to 24	0.0698	0.0375	0.0138	0.0053	0.0021	0.0009	0.0004	0.0002	0.000
24 to 25	0.0623	0.0326	0.0115	0.0042	0.0016	0.0006	0.0003	0.0001	
25 to 26	0.0556	0.0284	0.0096	0.0034	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	
26 to 27	0.0497	0.0247	0.0080	0.0027	0.0010	0.0004	0.0001	0.0001	
27 to 28	0.0443	0.0214	0.0067	0.0022	0.0007	0.0003	0.0001		
28 to 29	0.0396	0.0186	0.0055	0.0017	0.0006	0.0002	0.0001		
29 to 30	0.0353	0.0162	0.0046	0.0014	0.0004	0.0001			
30 to 31	0.0316	0.0141	0.0039	0.0011	0.0003	0.0001			
31 to 32	0.0282	0.0123	0.0032	0.0009	0.0003	0.0001			
32 to 33	0.0252	0.0107	0.0027	0.0007	0.0002	0.0001			
33 to 34	0.0225	0.0093	0.0022	0.0006	0.0002				
34 to 35	0.0201	0.0081	0.0019	0.0005	0.0001				
35 to 36	0.0179	0.0070	0.0015	0.0004	0.0001				
36 to 37	0.0160	0.0061	0.0013	0.0003	0.0001				
37 to 38	0.0143	0.0053	0.0011	0.0002	0.0001				
38 to 39	0.0127	0.0046	0.0009	0.0002					
39 to 40	0.0114	0.0040	0.0007	0.0001					
40 to 41	0.0102	0.0035	0.0006	0.0001					
41 to 42	0.0091	0.0030	0.0005	0.0001					
42 to 43	0.0081	0.0026	0.0004	0.0001					
43 to 44	0.0072	0.0023	0.0004	0.0001					
44 to 45	0.0065	0.0020	0.0003						
45 to 46	0.0058	0.0017	0.0002						
46 to 47	0.0051	0.0015	0.0002						
47 to 48	0.0046	0.0013	0.0002						
48 to 49	0.0041	0.0011	0.0001						
49 to 50	0.0037	0.0010	0.0001						

TABLE E-29

Present Worth at Zero Date of \$1 Per Year Flowing
Uniformly Throughout Stated Periods Starting at Zero Date

This table assumes continuous compounding of interest at various
stated effective rates per annum.

Period	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	10%
0 to 1	0.995	0.990	0.985	0.981	0.976	0.971	0.967	0.962	0.954
0 to 2	1.980	1.961	1.942	1.924	1.906	1.888	1.871	1.854	1.821
0 to 3	2.956	2.913	2.871	2.830	2.791	2.752	2.715	2.679	2.609
0 to 4	3.921	3.846	3.773	3.702	3.634	3.568	3.504	3.443	3.326
0 to 5	4.878	4.760	4.648	4.540	4.437	4.338	4.242	4.150	3.977
0 to 6	5.824	5.657	5.498	5.346	5.202	5.063	4.931	4.805	4.570
0 to 7	6.762	6.536	6.323	6.121	5.930	5.748	5.576	5.412	5.108
0 to 8	7.690	7.398	7.124	6.867	6.623	6.394	6.178	5.974	5.597
0 to 9	8.609	8.244	7.902	7.583	7.284	7.004	6.741	6.494	6.042
0 to 10	9.519	9.072	8.658	8.272	7.913	7.579	7.267	6.975	6.447
0 to 11	10.419	9.884	9.391	8.935	8.512	8.121	7.758	7.421	6.815
0 to 12	11.311	10.681	10.103	9.572	9.083	8.633	8.218	7.834	7.149
0 to 13	12.194	11.461	10.794	10.184	9.627	9.116	8.647	8.216	7.453
0 to 14	13.069	12.227	11.465	10.773	10.144	9.571	9.048	8.570	7.729
0 to 15	13.934	12.977	12.116	11.339	10.637	10.001	9.423	8.897	7.980
0 to 16	14.791	13.713	12.749	11.884	11.107	10.406	9.774	9.201	8.209
0 to 17	15.640	14.434	13.363	12.407	11.554	10.789	10.101	9.482	8.416
0 to 18	16.480	15.141	13.959	12.911	11.979	11.149	10.407	9.742	8.605
0 to 19	17.312	15.835	14.538	13.395	12.385	11.490	10.693	9.983	8.777
0 to 20	18.136	16.514	15.100	13.860	12.771	11.811	10.961	10.206	8.932
0 to 21	18.951	17.181	15.645	14.308	13.139	12.114	11.210	10.412	9.074
0 to 22	19.759	17.834	16.175	14.738	13.489	12.399	11.444	10.604	9.203
0 to 23	20.558	18.475	16.689	15.152	13.823	12.669	11.662	10.781	9.320
0 to 24	21.349	19.102	17.188	15.550	14.141	12.923	11.866	10.945	9.427
0 to 25	22.133	19.718	17.673	15.932	14.443	13.163	12.057	11.096	9.524
0 to 26	22.909	20.322	18.144	16.300	14.732	13.389	12.235	11.237	9.612
0 to 27	23.677	20.913	18.601	16.654	15.006	13.603	12.402	11.367	9.692
0 to 28	24.438	21.493	19.044	16.994	15.268	13.804	12.557	11.487	9.765
0 to 29	25.191	22.062	19.475	17.321	15.517	13.994	12.703	11.599	9.831
0 to 30	25.937	22.620	19.893	17.636	15.754	14.174	12.838	11.702	9.891
0 to 31	26.675	23.166	20.299	17.938	15.979	14.343	12.965	11.798	9.945
0 to 32	27.406	23.702	20.693	18.229	16.195	14.502	13.084	11.887	9.995
0 to 33	28.129	24.228	21.076	18.508	16.399	14.653	13.195	11.969	10.040
0 to 34	28.846	24.743	21.447	18.777	16.594	14.795	13.299	12.044	10.081
0 to 35	29.555	25.248	21.808	19.035	16.780	14.929	13.396	12.115	10.119
0 to 40	32.999	27.628	23.460	20.186	17.585	15.493	13.793	12.395	10.260
0 to 45	36.275	29.784	24.885	21.132	18.215	15.915	14.076	12.587	10.348
0 to 50	39.392	31.737	26.114	21.909	18.709	16.230	14.278	12.717	10.403
0 to 55	42.358	33.505	27.174	22.548	19.096	16.466	14.422	12.805	10.437
0 to 60	45.179	35.107	28.089	23.073	19.399	16.642	14.525	12.865	10.458
0 to 65	47.864	36.558	28.878	23.505	19.636	16.773	14.598	12.906	10.471
0 to 70	50.419	37.872	29.558	23.859	19.822	16.871	14.650	12.934	10.479
0 to 75	52.850	39.063	30.145	24.151	19.968	16.945	14.688	12.953	10.484
0 to 80	55.162	40.141	30.652	24.391	20.082	17.000	14.714	12.966	10.487
0 to 85	57.363	41.117	31.088	24.588	20.172	17.041	14.733	12.975	10.489
0 to 90	59.456	42.001	31.465	24.749	20.242	17.071	14.747	12.981	10.490
0 to 95	61.448	42.802	31.790	24.883	20.297	17.094	14.756	12.983	10.491
0 to 100	63.344	43.528	32.071	24.992	20.340	17.111	14.763	12.988	10.491

TABLE E-29—Continued

Present Worth at Zero Date of \$1 Per Year Flowing
Uniformly Throughout Stated Periods Starting at Zero Date

This table assumes continuous compounding of interest at various
stated effective rates per annum.

Period	12%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%
0 to 1	0.945	0.933	0.914	0.896	0.880	0.864	0.849	0.835	0.822
0 to 2	1.790	1.745	1.676	1.613	1.556	1.504	1.456	1.411	1.370
0 to 3	2.543	2.450	2.311	2.187	2.077	1.978	1.889	1.809	1.736
0 to 4	3.216	3.064	2.840	2.646	2.477	2.329	2.198	2.083	1.979
0 to 5	3.817	3.598	3.281	3.013	2.785	2.589	2.419	2.271	2.142
0 to 6	4.353	4.062	3.648	3.307	3.022	2.782	2.577	2.402	2.250
0 to 7	4.832	4.465	3.954	3.542	3.204	2.924	2.690	2.492	2.322
0 to 8	5.260	4.816	4.209	3.730	3.344	3.030	2.771	2.554	2.370
0 to 9	5.642	5.121	4.422	3.880	3.452	3.108	2.828	2.596	2.402
0 to 10	5.983	5.386	4.599	4.000	3.535	3.166	2.869	2.626	2.412
0 to 11	6.287	5.617	4.747	4.096	3.599	3.209	2.899	2.646	2.438
0 to 12	6.559	5.818	4.870	4.173	3.648	3.241	2.920	2.660	2.447
0 to 13	6.802	5.992	4.972	4.235	3.686	3.265	2.935	2.670	2.454
0 to 14	7.018	6.144	5.058	4.284	3.715	3.282	2.945	2.677	2.458
0 to 15	7.212	6.276	5.129	4.324	3.737	3.295	2.953	2.681	2.461
0 to 16	7.385	6.390	5.188	4.355	3.754	3.305	2.958	2.684	2.463
0 to 17	7.539	6.490	5.238	4.381	3.767	3.312	2.962	2.686	2.464
0 to 18	7.676	6.577	5.279	4.401	3.778	3.317	2.965	2.688	2.465
0 to 19	7.799	6.652	5.313	4.417	3.785	3.321	2.967	2.689	2.465
0 to 20	7.909	6.718	5.342	4.430	3.791	3.324	2.968	2.690	2.466
0 to 21	8.007	6.775	5.366	4.440	3.796	3.326	2.969	2.690	2.466
0 to 22	8.095	6.824	5.385	4.448	3.800	3.328	2.970	2.691	2.466
0 to 23	8.173	6.868	5.402	4.455	3.802	3.329	2.971	2.691	2.466
0 to 24	8.243	6.905	5.416	4.460	3.804	3.330	2.971	2.691	2.466
0 to 25	8.305	6.938	5.427	4.465	3.806	3.330	2.971	2.691	2.466
0 to 26	8.360	6.966	5.437	4.468	3.807	3.331	2.972	2.691	2.466
0 to 27	8.410	6.991	5.445	4.471	3.808	3.331	2.972	2.691	2.466
0 to 28	8.454	7.012	5.452	4.473	3.809	3.331	2.972	2.691	2.466
0 to 29	8.494	7.031	5.457	4.474	3.810	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 30	8.529	7.047	5.462	4.476	3.810	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 31	8.561	7.061	5.466	4.477	3.810	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 32	8.589	7.073	5.469	4.478	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 33	8.614	7.084	5.471	4.479	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 34	8.637	7.093	5.474	4.479	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 35	8.657	7.101	5.476	4.480	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 40	8.729	7.128	5.481	4.481	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 45	8.770	7.142	5.483	4.481	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 50	8.793	7.148	5.484	4.481	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 55	8.807	7.152	5.485	4.481	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 60	8.814	7.153	5.485	4.481	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 65	8.818	7.154	5.485	4.481	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 70	8.821	7.155	5.485	4.481	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 75	8.822	7.155	5.485	4.481	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 80	8.823	7.155	5.485	4.481	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 85	8.823	7.155	5.485	4.481	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 90	8.824	7.155	5.485	4.481	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 95	8.824	7.155	5.485	4.481	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466
0 to 100	8.824	7.155	5.485	4.481	3.811	3.332	2.972	2.691	2.466