

CAPÍTULO 4

ESFUERZOS

4.1 CONCEPTOS GENERALES

Como una primera etapa se ha estudiado la descripción del movimiento del medio continuo sin considerar las causas que lo provocan, asimismo se ha procedido a definir la deformación tanto para el caso finito como infinitesimal. En la teoría clásica de medios continuos, el concepto de esfuerzo es introducido a través de la descripción de fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie. Las definidas como fuerzas de cuerpo son aquellas que actúan sobre el volumen del MC a gran distancia (sin que exista contacto); ejemplo de éstas son la fuerza gravitacional, las electrostáticas y las magnéticas; estas fuerzas son resultado de la presencia de campos (gravitacionales, electrostáticos o magnéticos) y se representan a través de la aceleración que generan en el MC, de tal forma que

$$f_c = \int_V \rho B dV$$

donde $\rho = \rho(x,t)$ es la densidad del medio en un punto x del cuerpo a un tiempo t y B representa la aceleración producida por las fuerzas de cuerpo; este término es referido como fuerza de cuerpo por unidad de masa o simplemente como aceleración de fuerza de cuerpo.

Por otra parte, las fuerzas de superficie son aquellas que para transmitirse demandan contacto y que actúan sobre una superficie real o "imaginaria" (definida al separar en partes el cuerpo). Las fuerzas de superficie son sollicitaciones externas que actúan sobre la superficie del cuerpo; por ejemplo, la fuerza que genera el viento al hacer contacto con una estructura o las que se producen al sumergir un cuerpo en un líquido o también al estar en contacto dos sólidos. Las fuerzas de superficie totales que actúan en una superficie S del cuerpo de volumen V y configuración β , se expresan en la forma

$$f_s = \int_S t dS,$$

donde t representa un vector cuyas unidades son fuerza por unidad de área, el cual es función de x , y representa una coordenada que corresponde a la superficie S . Dicho vector es denominado como vector de fuerza superficial por unidad de área de S o vector de esfuerzos o tracción en S .

Las fuerzas, sean de cuerpo o de contacto, representan sollicitaciones sobre el MC; sus efectos dependerán evidentemente de su magnitud y dirección, pero también de las condiciones geométricas del cuerpo. Por tal motivo y para facilitar el análisis del efecto de estas fuerzas es necesario describir el área sobre la que se presentan para definir el concepto de esfuerzo.

Considere un MC (figura 4.1), el cual es sometido a una serie de fuerzas f_i . Si se corta el cuerpo con un plano π , la sección remanente deberá estar en equilibrio, de tal forma que sobre el plano π aparecerá una fuerza resultante f_R , dicha fuerza se representa en principio en el centroide del área descrita sobre el plano de corte π ; sin embargo, resulta evidente que la carga se distribuye sobre el área de la superficie A_π , por lo que se puede definir el concepto de vector de esfuerzos t_π de la forma

$$t_\pi = \lim_{\Delta A_\pi \rightarrow 0} \frac{\Delta f_\pi}{\Delta A_\pi}$$

Por otra parte, es evidente que f_π se puede descomponer en su componente normal a la superficie

$$f_{\pi N} = f_\pi \cdot n_\pi$$

donde n_π es el vector normal unitario del plano π ; mientras que su componente tangencial es

$$f_{\pi T} = \sqrt{|f_\pi|^2 - |f_{\pi N}|^2}$$

de tal forma que se pueden definir entonces los esfuerzos normales

$$\sigma = \lim_{\Delta A_\pi \rightarrow 0} \frac{\Delta f_{\pi N}}{\Delta A_\pi}$$

y los tangenciales o de corte

$$\tau = \lim_{\Delta A_{\pi} \rightarrow 0} \frac{\Delta f_{\pi T}}{\Delta A_{\pi}}$$

Resulta evidente que para definir al esfuerzo es necesario describir la dirección de la fuerza y la normal al plano, entonces

$$T_{ij} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S n_j}$$

por lo que los esfuerzos en un punto del MC se describirán a través de un tensor de segundo rango $[T, T_{ij}]$ o $[\sigma, \sigma_{ij}]$ por esta razón se requerirá de nueve términos para definir éste. Sin embargo, por condiciones de equilibrio, como se demostrará más adelante, el tensor es simétrico (considerando el área instantánea) y se representa en un espacio hexadimensional.

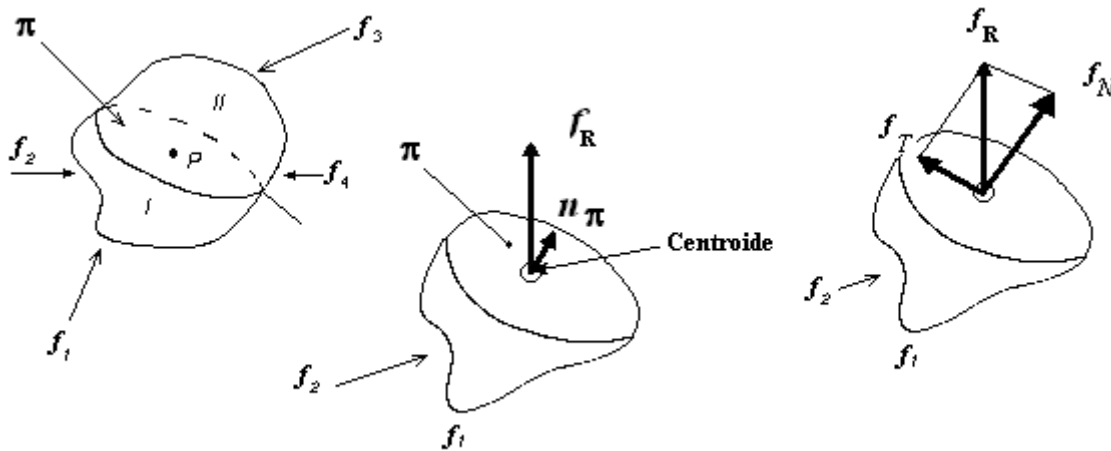


FIGURA 4.1 MEDIO CONTINUO SOMETIDO A UN CONJUNTO DE FUERZAS DE CUALQUIER ORIGEN, LAS CUALES GENERAN UNA SERIE DE SOLICITACIONES AL INTERIOR DEL MISMO

4.2 VECTOR DE ESFUERZOS

Se considera que el vector de esfuerzos permite describir la fuerza en un punto de la superficie del cuerpo, el cual no toma en cuenta la curvatura en la superficie del elemento diferencial bajo análisis. Esto es asumido como principio de esfuerzos de Cauchy, que es un axioma básico de la mecánica del continuo.

Sea el cuerpo de la figura 4.2 y s un plano que pasa a través de un punto arbitrario P , cuya normal es n .

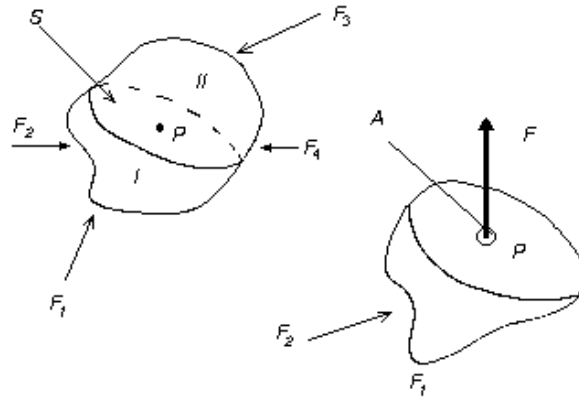


FIGURA 4.2 PARA LA DETERMINACIÓN DEL VECTOR DE ESFUERZOS SE CONSIDERA UN PLANO s QUE CONTIENE UN PUNTO P . EL PLANO s CORTA AL CUERPO EN DOS PORCIONES DANDO LUGAR A UNA COMPONENTE F QUE GARANTIZA EL EQUILIBRIO DEL CUERPO

El plano corta al cuerpo en dos porciones. La parte I se considera como un cuerpo libre, razón por la que en la superficie s debe considerarse una carga resultante Δf que actúa en un área ΔA en la que se encuentra P . Se define al vector de esfuerzos que corresponde al punto P del plano s como t_p , donde éste está dado por:

$$t_p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

Si la porción del cuerpo marcada como II es considerada ahora como un cuerpo libre, a partir de la Tercera Ley de Newton que considera que a cada acción corresponde una reacción de igual magnitud pero en sentido contrario, entonces, en el mismo punto P enunciado anteriormente, pero considerándolo parte del elemento II, se tiene que la normal del plano es la misma pero en dirección opuesta a la definida anteriormente para el cuerpo, es entonces que

$$s_{IP} = -s_{IIP}$$

Con relación al punto P se puede hacer pasar un número infinito de planos de área A_n , considerando que la sollicitación permanece constante donde Δf es la fuerza resultante en el área ΔA_n en la superficie A_n . El vector de esfuerzos de Cauchy en P de A_n se define como:

$$t_{nP} = \lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A_n} = \lim_{\Delta s_n \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{n \Delta s_n}$$

A partir de lo antes definido se describe el **Principio de esfuerzos de Cauchy**. El vector de esfuerzos en cualquier lugar y tiempo tiene un valor común en todas las partes del material que cuentan con un plano tangente común, entonces, si n representa la normal al plano y t es el vector de esfuerzos, a un tiempo τ , se tiene que

$$t = t(x, \tau, n)$$

Es entonces que el vector de esfuerzos asociado a un plano que pasa a través de un elemento espacial x , esto para un tiempo τ , dependerá solo de la normal n asociada al plano. Esta dependencia, como se presentará más adelante, se expresa como

$$t(x, \tau, n) = T(x, \tau)n$$

donde T representa una transformación lineal.

4.3 TENSOR DE ESFUERZOS DE CAUCHY

De acuerdo a lo mencionado en líneas anteriores, el vector de esfuerzos referido a un plano que pasa a través de un punto espacial x a un tiempo τ depende solamente de la normal unitaria n del plano, sea entonces una transformación T , tal que:

$$t_n = Tn$$

A esta transformación se le denomina tensor de esfuerzos o tensor de esfuerzos de Cauchy.

Componentes del tensor de esfuerzos

Las componentes del vector de esfuerzos están relacionadas con el tensor de esfuerzos T por:

$$t_1 = T_{1j}n_j\hat{e}_1$$

$$t_2 = T_{2j}n_j\hat{e}_2$$

$$t_3 = T_{3j}n_j\hat{e}_3$$

Esto se puede expresar como $t_i = T_{ij}n_j$, o en notación general como $t = T \cdot n$, o también como $t_i = n_j T_{ji}$ o $t = nT^T$. La forma dependerá de la definición con la cual se manejen los índices. Si el primer índice (i) se emplea para describir la dirección de la componente del esfuerzo y el segundo (j) para la normal del plano sobre el que está resuelto, se empleará la expresión descrita en primera instancia. Por otra parte, si el primer índice representa la normal del plano y el segundo la dirección de la componente del esfuerzo, la transformación se premultiplicará por la normal quedando de la forma:

$$t_1 = n_1T_{11}\hat{e}_1 + n_2T_{21}\hat{e}_2 + n_3T_{31}\hat{e}_3$$

$$t_2 = n_1T_{12}\hat{e}_1 + n_2T_{22}\hat{e}_2 + n_3T_{32}\hat{e}_3$$

$$t_3 = n_1T_{13}\hat{e}_1 + n_2T_{23}\hat{e}_2 + n_3T_{33}\hat{e}_3$$

En este libro se considerará, a menos de que se precise lo contrario, que el primer índice representa la dirección del componente de esfuerzo y el segundo la dirección de la normal al plano; así, t_i es el vector de esfuerzos que actúa en el plano cuya normal es \hat{e}_i . Es claro que $T_{ij} \forall i = j$ representa a las componentes normales, mientras que $T_{ij} \forall i \neq j$ a las componentes tangenciales.

A la descripción del estado de esfuerzos T_{ij} referida al elemento diferencial (x_i, t) se le define como **tensor de esfuerzos de Cauchy**. Dicho tensor es simétrico ($T_{ij} = T_{ji}$), en virtud de la existencia de equilibrio de momentos sobre los tres ejes coordenados.

Simetría del tensor de esfuerzos de Cauchy

Considérese un elemento diferencial sobre el plano x_1x_2 (figura 4.3), por facilidad se definirá el origen en el centroide del elemento de tal forma que los esfuerzos normales (σ_{11}, σ_{22}) pasen a través de éste; por otra parte, los esfuerzos de corte (σ_{12}, σ_{21}) se definen a una distancia $\frac{dx_2}{2}, \frac{dx_1}{2}$ del origen respectivamente, el cual representa a su vez el punto de rotación del sistema.

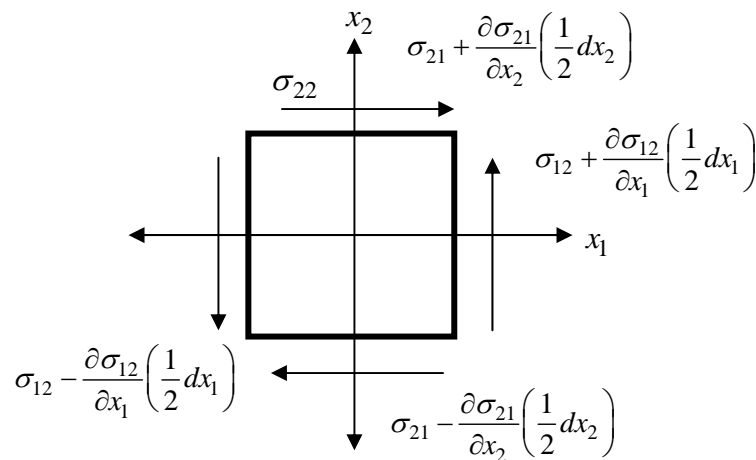


FIGURA 4.3 CARGAS SOBRE UN ELEMENTO DIFERENCIAL DESCRITO EN EL PLANO x_1x_2 . EN ESTA REPRESENTACIÓN DEL ESTADO DE ESFUERZOS σ_{ij} , EL PRIMER ÍNDICE REPRESENTA LA NORMAL AL PLANO Y EL SEGUNDO LA DIRECCIÓN DE LA CARGA

A partir del hecho de que solo los cortantes producen momento sobre el origen del sistema coordenado, siendo x_3 el eje de giro

$$\left(\sum M\right)_{x_3} = (\sigma_{12} - \sigma_{21})dx_1dx_2dx_3 = 0$$

Por lo que

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

asimismo, se puede demostrar que

$$\sigma_{13} = \sigma_{31}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}$$

entonces, en general se tiene que

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

se concluye por tanto que el tensor de esfuerzos es simétrico

$$\therefore T = T^T$$

Por lo que el espacio vectorial de los esfuerzos es hexadimensional, es decir, está representado con solo 6 componentes linealmente independientes.

Esfuerzos principales

En virtud de que las componentes T_{ij} asociadas al tensor de esfuerzos pertenecen a los reales y que dicho tensor es simétrico, entonces existirán al menos tres eigenvalores (esfuerzos principales) mutuamente perpendiculares entre sí (eigenvectores de T). Los planos cuya normal corresponde a la dirección de los esfuerzos se denominan planos principales. En estos planos el vector de esfuerzos es normal y a estos esfuerzos normales se les denomina esfuerzos principales.

Entonces, los esfuerzos principales (eigenvalores de T) incluyen los valores máximo y mínimo de los esfuerzos normales considerando todos los planos que pasan a través del punto.

Los esfuerzos principales se pueden determinar de la ecuación característica asociada al tensor de esfuerzos:

$$\sigma^3 - I_{1\sigma}\sigma^2 + I_{2\sigma}\sigma - I_3 = 0$$

donde, de acuerdo con lo deducido, para esfuerzos y direcciones principales, se tiene que

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)$$

$$I_3 = \frac{1}{6}(\sigma_{ii}\sigma_{jj}\sigma_{kk} + 2\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} - 3\sigma_{ii}\sigma_{jk}^2) = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - (\sigma_{11}\sigma_{23}^2 + \sigma_{22}\sigma_{31}^2 + \sigma_{33}\sigma_{12}^2)$$

donde I_1 , I_2 , e I_3 son los invariantes asociados al tensor de esfuerzos.

Esfuerzos cortantes máximos (τ_i)

Si bien en las direcciones principales las componentes de corte asociadas son nulas, en los planos inclinados a un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ se presentarán los cortantes máximos. En esta sección se demostrará que los esfuerzos cortantes máximos están dados por un medio de la diferencia de los esfuerzos principales máximos y mínimos que actúan en el plano que bisecta el ángulo entre las direcciones de los esfuerzos principales, esto es

$$\tau_i = \left| \frac{\sigma_j - \sigma_k}{2} \right|$$

Sean $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ las direcciones principales de T , donde T_1, T_2, T_3 son los esfuerzos principales. Si $n_i = n_1\hat{e}_1 + n_2\hat{e}_2 + n_3\hat{e}_3$ es la normal unitaria al plano, las componentes del vector de esfuerzos en el plano están dadas por

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 T_1 \\ n_2 T_2 \\ n_3 T_3 \end{bmatrix}$$

$$t_i = n_1 T_1 \hat{e}_1 + n_2 T_2 \hat{e}_2 + n_3 T_3 \hat{e}_3$$

y el esfuerzo normal en dicho plano se define por $T_N = t \cdot n$, por lo que

$$T_N = t \cdot n = n_1^2 T_1 + n_2^2 T_2 + n_3^2 T_3$$

entonces T_s denota la magnitud del esfuerzo cortante en el plano

$$T_s^2 = |t|^2 - T_N^2$$

$$T_s^2 = T_1^2 n_1^2 + T_2^2 n_2^2 + T_3^2 n_3^2 - (T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2)^2 \quad (4.1)$$

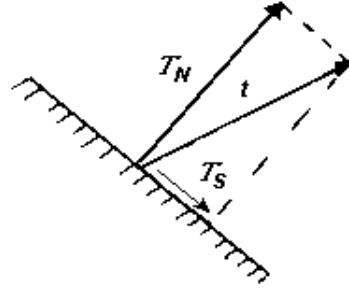


FIGURA 4.4 DESCOMPOSICIÓN DEL VECTOR DE ESFUERZOS t , DEFINIDO EN UN PLANO CUYA NORMAL ESTÁ DADA POR n_i

Para valores conocidos de T_1, T_2, T_3 , la ecuación 4.1 establece que T_s es función de n_i , entonces

$$T_s^2 = f(n_1, n_2, n_3)$$

donde T_s debe corresponder con un máximo y será necesario determinar n_1, n_2, n_3 al cual se presente éste. Dado que los cosenos directores no pueden variar independientemente uno del otro, se debe de cumplir que

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (4.2)$$

entonces, para determinar un máximo respetando lo indicado por la ecuación 4.1 es necesario derivar con respecto a la normal al plano e igualar a cero

$$dT_s = \frac{\partial T_s^2}{\partial n_i} dn_i = \frac{\partial T_s^2}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial T_s^2}{\partial n_2} dn_2 + \frac{\partial T_s^2}{\partial n_3} dn_3 = 0 \quad (4.3)$$

Al derivar la ecuación 4.2, se tiene que:

$$n_1 dn_1 + n_2 dn_2 + n_3 dn_3 = 0 \quad (4.4)$$

Si se considera que dn_1, dn_2, dn_3 pueden variar independientemente una de la otra (lo cual no es el caso), entonces la ecuación 4.3 define la condición para determinar T_s^2 , de tal forma que:

$$\frac{\partial T_s^2}{\partial n_1} = 0; \quad \frac{\partial T_s^2}{\partial n_2} = 0; \quad \frac{\partial T_s^2}{\partial n_3} = 0$$

Pero la realidad es que n_1, n_2, n_3 (como ya fue mencionado) no pueden variar independientemente ya que éstas presentan una relación de acuerdo con lo establecido en las ecuaciones 4.2 y 4.3.

Considerando que

$$\frac{\partial T_s^2}{\partial n_1} = \lambda n_1; \quad \frac{\partial T_s^2}{\partial n_2} = \lambda n_2; \quad \frac{\partial T_s^2}{\partial n_3} = \lambda n_3 \quad (4.5)$$

Entonces se tiene que al sustituir en la ecuación 4.3

$$\lambda n_1 dn_1 + \lambda n_2 dn_2 + \lambda n_3 dn_3 = 0 \quad (4.6)$$

La ecuación 4.6 es satisfecha a la vez de que se cumple con la ecuación 4.2, en tal caso las ecuaciones 4.2 y 4.5 representan un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas n_1, n_2, n_3 y λ , lo cual corresponde a valores estacionarios de T_s^2 . Éste es el método del multiplicador de Lagrange y el parámetro λ recibe tal denominación.

Calculando las derivadas parciales a partir de la ecuación 4.1, las ecuaciones 4.5 quedan:

$$n_1 \lambda = 2n_1 \left[T_1^2 - 2(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2) T_1 \right] \quad (4.7)$$

$$n_2 \lambda = 2n_2 \left[T_2^2 - 2(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2) T_2 \right] \quad (4.8)$$

$$n_3 \lambda = 2n_3 \left[T_3^2 - 2(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2) T_3 \right] \quad (4.9)$$

A partir de las ecuaciones 4.2, 4.7, 4.8, 4.9 y considerando que las direcciones principales son $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, las cuales corresponden con los mínimos de los esfuerzos cortantes en $T_s = 0$, entonces las direcciones que corresponden a los planos donde se presentan los cortantes máximos son

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.10)$$

Los planos definidos por las ecuaciones 4.7 a 4.9 son los principales, los cuales se caracterizan porque los valores T_s son mínimos, de hecho $T_s = 0$; entonces dichos planos definidos por las soluciones 4.10 permiten obtener los valores de T_s^2 .

Para

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_2 \quad \Rightarrow \quad T_s^2 = \frac{(T_1 - T_2)^2}{4}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_3 \quad \Rightarrow \quad T_s^2 = \frac{(T_1 - T_3)^2}{4}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_3 \quad \Rightarrow \quad T_s^2 = \frac{(T_2 - T_3)^2}{4}$$

Por lo tanto, la máxima magnitud del cortante T_s está definida por el mayor de los valores

$$\frac{|T_1 - T_2|}{2}, \quad \frac{|T_2 - T_3|}{2}, \quad \frac{|T_1 - T_3|}{2}$$

En otras palabras,

$$(T_s)_{\text{máx}} = \frac{(T_N)_{\text{máx}} - (T_N)_{\text{mín}}}{2}$$

donde $(T_N)_{\text{máx}}$ y $(T_N)_{\text{mín}}$ son los valores máximo y mínimo de los esfuerzos normales. Se puede demostrar que en el plano de máximo esfuerzo cortante, el esfuerzo normal se obtiene a partir de la expresión

$$T = \frac{|(T_N)_{\text{máx}} - (T_N)_{\text{mín}}|}{2}$$

Entonces, los cortantes máximos se expresan

$$\tau_1 = \frac{|T_3 - T_2|}{2}; \quad \tau_2 = \frac{|T_1 - T_3|}{2}; \quad \tau_3 = \frac{|T_2 - T_1|}{2}$$

4.4 CÍRCULO DE MOHR PARA ESFUERZOS

Considere un estado de esfuerzos biaxial T_{ij} (plano), de tal forma que

$$T_{ij} = 0 \quad \forall \quad i, j = 3$$

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para determinar los valores principales la ecuación cúbica queda

$$\sigma^3 - I_{1\sigma}\sigma^2 + I_{2\sigma}\sigma - I_{3\sigma} = 0$$

donde para el estado biaxial de esfuerzos los invariantes asociados están dados por

$$I_{1\sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22}$$

$$I_{2\sigma} = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2$$

$$I_{3\sigma} = 0$$

por lo que la ecuación se puede expresar como

$$\sigma(\sigma^2 - I_{1\sigma}\sigma + I_{2\sigma}) = 0$$

de esta ecuación se desprende que una de las raíces (esfuerzos principales) será cero, mientras que los otros dos se determinan a partir de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, de tal manera que

$$a = 1$$

$$b = -(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$c = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 4(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)}}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \left(\sigma - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2$$

En un sistema coordenado cuyos ejes son los esfuerzos normales σ (eje horizontal) y los cortantes τ (eje vertical); la ecuación anterior representa dos puntos de un círculo (el círculo tiene su centro sobre el eje σ) de la forma: $(\sigma - a)^2 + \tau^2 = r^2$; cuyo centro se encuentra en

$$\left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, 0 \right)$$

y cuyo radio está dado por

$$\left[\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

En este caso los cortantes máximos estarán dados por el radio

$$\tau_{1,2} = \pm \left[\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Es entonces que los esfuerzos principales asociados son

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Para el caso de un estado triaxial de esfuerzos, el cual en valores principales se representa como

$$\sigma_{ijp} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Para un plano P cualesquiera, el esfuerzo normal σ_N está dado por

$$\sigma_N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

dado que σ_c es el esfuerzo cortante, entonces se tiene que

$$\sigma_N^2 + \sigma_c^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

Y como los cosenos directores cumplen con

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

Considerando las 3 ecuaciones anteriores con 3 cosenos directores

$$n_1^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_c^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (4.11)$$

$$n_2^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_3)(\sigma_N - \sigma_1) + \sigma_c^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \quad (4.12)$$

$$n_3^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_2) + \sigma_c^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \quad (4.13)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son valores conocidos mientras que σ_N y σ_c son función de los cosenos directores n_1, n_2, n_3 . Para las ecuaciones 4.11 a 4.13 y considerando los valores extremos que pueden tomar los cosenos directores (n_i vale cero o uno). Para la ecuación 4.11 y $n_i = 0$

$$\begin{aligned} & \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \\ \Rightarrow & \sigma_1 - \sigma_2 > 0 \\ \Rightarrow & \sigma_1 - \sigma_3 > 0 \\ \therefore & n_1^2 > 0 \end{aligned}$$

Como consecuencia

$$(\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_c^2 \geq 0$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$\left(\sigma_N - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)\right)^2 + \sigma_c^2 = \left(\frac{1}{2}(\sigma_N - \sigma_3)\right)^2$$

Entonces, un estado triaxial de esfuerzos se podrá representar en un plano $\sigma - \tau$ con tres círculos que pasan por σ_1, σ_2 ; σ_2, σ_3 ; σ_3, σ_1 y cuyos radios estarán dados, respectivamente, por

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

Cortante octaédrico

Cualquier estado de esfuerzos se puede descomponer en un normal octaédrico o esfuerzo hidrostático y un cortante octaédrico, como se demostrará más adelante. Considérese en primera instancia un elemento diferencial sometido a un estado de esfuerzos σ_{ij} , el cual se presenta en la figura 4.5.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

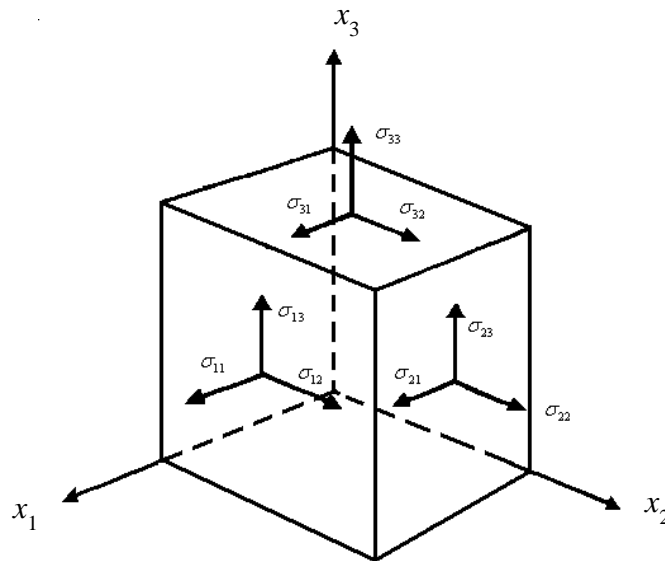


FIGURA 4.5 DESCRIPCIÓN DEL ESTADO DE ESFUERZOS EN UN ELEMENTO DIFERENCIAL DE VOLUMEN

Dicho estado de esfuerzos se puede representar en valores principales como (véase figura 4.6):

$$\sigma_{ij}^p = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

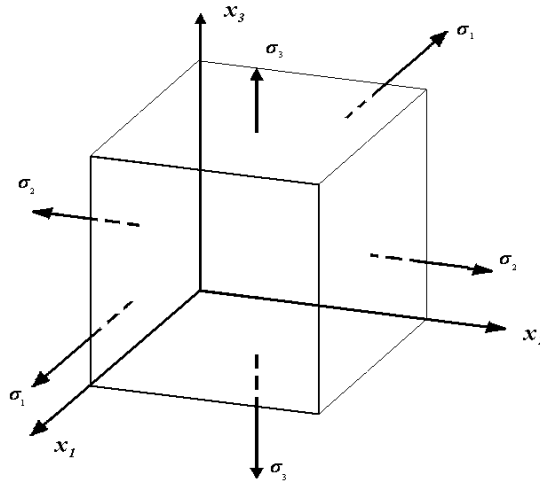


FIGURA 4.6 DESCRIPCIÓN DEL ESTADO DE ESFUERZOS EN VALORES PRINCIPALES EN UN ELEMENTO DIFERENCIAL DE VOLUMEN

Ahora bien, si se determina el esfuerzo equivalente sobre un plano octaédrico (igualmente inclinado con todos los ejes) tal como se muestra en la figura 4.7, se tiene que:

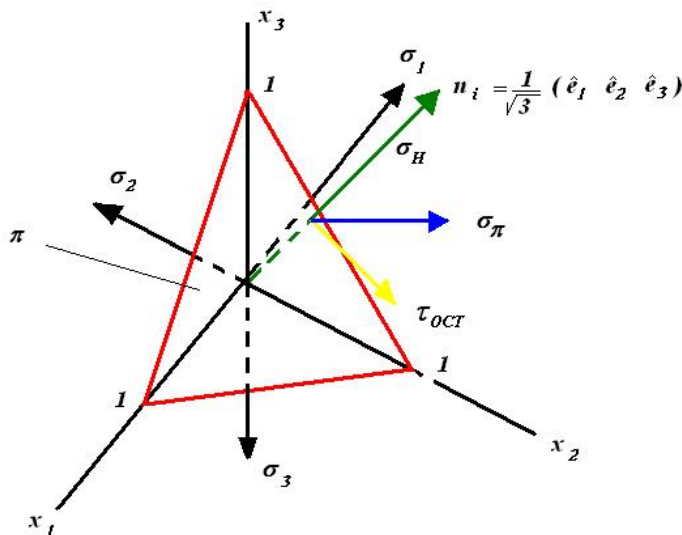


FIGURA 4.7 EL ELEMENTO DIFERENCIAL DE VOLUMEN ES CORTADO POR UN PLANO IGUALMENTE INCLINADO CON RESPECTO A LOS EJES PRINCIPALES (PLANO OCTAÉDRICO). EL ESFUERZO RESULTANTE SOBRE EL PLANO (σ_π) SE PUEDE DESCOMPONER EN DOS TÉRMINOS; UNO NORMAL (σ_H) Y EL OTRO TANGENCIAL (τ_{oct})

La normal unitaria al plano octaédrico está dada por

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3)$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{bmatrix} t_1^\pi \\ t_2^\pi \\ t_3^\pi \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Entonces,

$$t_i^\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 \hat{e}_1 + \sigma_2 \hat{e}_2 + \sigma_3 \hat{e}_3)$$

La magnitud del esfuerzo normal sobre dicho plano está dado por

$$\sigma_N = t_i^\pi \cdot n_i$$

$$\therefore \sigma_N = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

por otra parte

$$|t_i^\pi|^2 = \sigma_N^2 + \tau_{oct}^2$$

donde τ_{oct} representa al cortante en el plano octaédrico, despejándolo se tiene

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1))$$

Por lo que reordenando como binomios, el cortante octaédrico queda expresado por

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)^{1/2}$$

o considerando los cortantes principales

$$\tau_{oct} = \left(\frac{4\tau_3^2 + 4\tau_1^2 + 4\tau_2^2}{9} \right)^{1/2}$$

4.5 TENSORES DE ESFUERZOS DE PIOLA-KIRCHHOFF O TENSOR DE ESFUERZOS LAGRANGIANO

Primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff o tensor de esfuerzos lagrangiano

Esta representación del estado de esfuerzos considera las sollicitaciones aplicadas; no desde el punto de vista del área instantánea o deformada (tensor de esfuerzos de Cauchy), sino del área inicial (antes de la deformación) del medio continuo. Esta condición es una situación que en muchos casos, sobre todo en ingeniería, es prácticamente una condición implícita. Desde cualquier óptica es necesario determinar el valor de esta representación del estado de esfuerzos en función del tensor de esfuerzos de Cauchy T que resulta la más usual. Para lo anterior, considérese un área diferencial material (lagrangiana) dA_0 (figura 4.8), la cual tiene una normal n_0 , esto a un tiempo de referencia τ_0 .

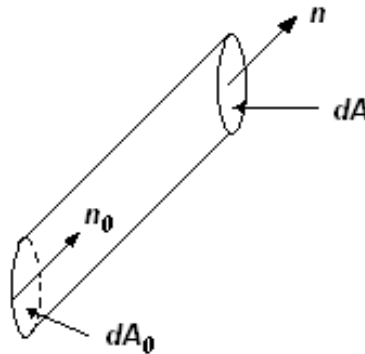


FIGURA 4.8 LA SUPERFICIE DIFERENCIAL DE ÁREA LAGRANGIANA dA_0 SE CARACTERIZA POR SU NORMAL n_0 . DICHA SUPERFICIE PARA CUALQUIER TIEMPO (DESCRIPCIÓN EULERIANA) dA SE DESCRIBE POR LA NORMAL n

Para un tiempo τ , esta área se transforma en dA con una normal n . Es entonces que dA_0 representa el área sin deformar (inicial) y dA el área deformada. Considere que df representa la fuerza actuante (causal de la deformación), es entonces que:

$$df = tdA$$

Donde t representa al vector de esfuerzos, por tanto, se tiene que

$$t = Tn \quad \text{o} \quad t_i = T_{ij}n_j$$

y T representa al tensor de esfuerzos de Cauchy. Por su parte, la fuerza también se puede representar con base en el área no deformada, es entonces que $df = t_0 dA_0$.

Por otro lado,

$$t_0 = T_0 n_0$$

donde T_0 se denomina como primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff, el cual describe el estado de esfuerzos desde la perspectiva del área inicial, de ambas maneras se representa la sollicitación aplicada, por lo que

$$df = t_0 dA_0 = t dA$$

$$\Rightarrow T_0 n_0 dA_0 = T n dA \quad (4.14)$$

Como ya se demostró en el capítulo anterior, el área inicial y el área para cualquier tiempo se relacionan a través del gradiente de deformación F , de tal manera que

$$n dA = dA_0 (\det F) (F^{-1})^T n_0$$

por lo que sustituyendo en el lado derecho de la ecuación 4.11, se tiene que:

$$T_0 n_0 dA_0 = T dA_0 |F| (F^{-1})^T n_0$$

donde $|F|$ representa al determinante del gradiente de deformación, es por tanto que

$$T_0 = |F| T (F^{-1})^T$$

$$\therefore T = \frac{T_0}{|F|} F^T$$

Entonces, en notación índice queda

$$\Rightarrow (T_0)_{ij} = |F| T_{im} F_{jm}^{-1}$$

$$T_{ij} = \frac{1}{|F|} (T_0)_{im} F_{jm}$$

De todo lo anterior resulta evidente que como el gradiente de deformación no necesariamente es simétrico, entonces el primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff tampoco lo será, con todos los inconvenientes que esto representa.

Segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff (\bar{T})

Este tensor no tiene un significado físico y resulta de la aplicación del gradiente de deformación a un pseudovector de fuerza $d\bar{f}$, el cual se define como $d\bar{f} = \bar{t}dA_0$ donde $df = Fd\bar{f}$, esto equivale a $dx = FdX$; que como ya se mencionó, la pseudofuerza diferencial $d\bar{f}$ se transforma bajo el gradiente de deformación definido para la posición deformada; entonces, el pseudovector de esfuerzos \bar{t} está, en general, en dirección diferente que el vector de esfuerzos de Cauchy t . Es por tanto, como ya se comentó, que \bar{T} no tiene significado físico.

El segundo tensor de esfuerzos de Cauchy es una transformación lineal \bar{T} tal que

$$\bar{t} = \bar{T}n_0$$

donde n_0 es la normal al área no deformada, resulta entonces que

$$\Rightarrow d\bar{f} = \bar{T}n_0dA_0$$

Sustituyendo en la definición se tiene que

$$df = F\bar{T}n_0dA_0$$

por otra parte,

$$df = TndA$$

y también

$$df = t_0 dA_0 = T_0 n_0 dA_0$$

Igualando

$$F\bar{T}n_0 dA_0 = T_0 n_0 dA_0$$

Por consecuencia

$$\Rightarrow T_0 = F\bar{T}$$

por tanto, el segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff está relacionado con el primero de Piola-Kirchhoff a través de

$$\bar{T} = F^{-1}T_0$$

y también con el tensor de esfuerzos de Cauchy como

$$\bar{T} = F^{-1}|F|T(F^{-1})^T$$

$$\bar{T} = |F|F^{-1}T(F^{-1})^T$$

En general, para la descripción de esfuerzos se emplea el tensor de esfuerzos de Cauchy, el cual considera la configuración actual. Para algunos casos, por ejemplo la elasticidad no lineal, es conveniente la definición de una fuerza superficial medida con relación al área inicial dA_0 , y de ahí la conveniencia de emplear el primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff.

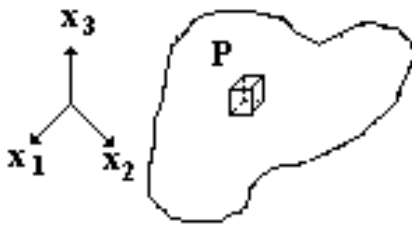
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El estado de esfuerzos en un punto de un medio continuo está dado por

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2\sigma & \alpha\sigma & \beta\sigma \\ \alpha\sigma & -\sigma & \gamma\sigma \\ \beta\sigma & \gamma\sigma & -\sigma \end{pmatrix}$$

Determine los valores de las constantes α , β y γ , de tal forma que el vector de esfuerzos en el plano octaédrico (igualmente inclinado con relación a los ejes) no exista.

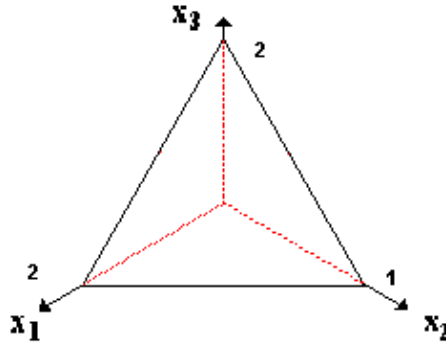
- ¿Cuál será el esfuerzo normal y esfuerzos de corte asociados a dicho plano?
 - ¿Cuál será la magnitud de la deformación hidrostática asociada al punto analizado?
 - Defina el tensor de deformaciones asociado.
 - ¿En qué magnitud difieren los esfuerzos principales asociados al tensor y desviador de esfuerzos correspondiente?
 - Determine los esfuerzos principales en el punto analizado.
2. En un punto $P(x_i)$ de un continuo, el estado de esfuerzos está dado por



$$\sigma_{ij_p} = \begin{pmatrix} -200 & 20 & 30 \\ 20 & 100 & 10 \\ 30 & 10 & -300 \end{pmatrix}$$

Con base en lo antes expuesto determine:

- El vector de esfuerzos t_i correspondiente al plano de la figura.



- b) Magnitud del cortante y normal asociados al plano.
 c) Si se trata de un sólido elástico lineal e isotrópico ¿Cuál será la deformación hidrostática definida para el punto en cuestión?
 d) ¿En qué magnitud difieren los esfuerzos principales asociados al tensor con relación a los asociados al desviador?
3. Un plano octaédrico es aquel que está igualmente inclinado con los ejes principales asociados al sistema.

a) Demuestre que el esfuerzo normal en un plano octaédrico está dado por $\sigma_{oct} = \frac{I_1 \sigma}{3}$

b) Demuestre que el esfuerzo de corte en el plano octaédrico está dado por

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2)^{1/2}$$

donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son los esfuerzos principales.

4. El estado de esfuerzos en un punto p de un material está dado por

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 20 \\ 10 & 15 & -10 \\ 20 & -10 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

Determine el vector de esfuerzos en un plano que pasa por p y es paralelo al plano $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$, así como el ángulo que describe con respecto a la normal al plano y sus componentes normal y tangencial.

5. El estado de esfuerzos en un medio continuo está dado por

$$\sigma_{ij} = \beta \begin{pmatrix} x_3 x_1 & x_3^2 & 0 \\ x_3^2 & 0 & x_2^2 \\ 0 & x_2^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

Determine el vector de esfuerzo en el punto $p = (1,1,2)$ correspondiente a la superficie

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3$$

6. En un punto p de un medio continuo se han determinado tres diferentes vectores de esfuerzo para los planos que pasan por p , estos son

$$t_1(n) = \hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3 \quad \text{para } n_1 = -\hat{e}_1$$

$$t_2(n) = 2\sqrt{3}\hat{e}_1 + 2\sqrt{3}\hat{e}_2 \quad \text{para } n_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3)$$

$$t_3(n) = 2(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3) \quad \text{para } n_3 = \hat{e}_2$$

¿Cuál es el tensor de esfuerzos para p ?

7. La distribución de esfuerzos en un medio continuo está dado por

$$\sigma_{ij} = \kappa \begin{pmatrix} 0 & 100x_1 & -100x_2 \\ 100x_1 & 0 & 0 \\ -100x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

Determine el vector de esfuerzos para un plano que pasa por $(1/2, \sqrt{3}/2, 3)$ y que es tangente a la superficie cilíndrica $x_1^2 + x_2^2 = 1$

8. Una barra elíptica con una superficie lateral definida por $x_2^2 + 2x_3^2 = 1$ presenta la siguiente distribución de esfuerzos:

$$\sigma_{ij} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & -2x_3 & x_2 \\ -2x_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

Demuestre que el vector de esfuerzos en cualquier punto (x_1, x_2, x_3) en la superficie lateral es cero.

9. En algunos análisis es conveniente definir el estado de esfuerzos considerando el área sin deformación, de tal forma se definen el primer y segundo tensores de esfuerzos Piola-Kirchhoff.

En particular al primer tensor de esfuerzos Piola-Kirchhoff también se le conoce como tensor lagrangiano de esfuerzos T_0 . Si T es el tensor de esfuerzos de Cauchy y

$$F = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \text{ demuestre que}$$

$$T_0 = (\det F) T (F^{-1})^T$$

y por lo tanto

$$T = \left(\frac{1}{\det F} \right) T_0 F^T$$

10. ¿Qué representa el segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff?
11. Si el segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff \bar{T} se relaciona con el primero T_0 a través de

$$\bar{T} = F^{-1} T_0$$

Demuestre que el tensor de esfuerzos de Cauchy \bar{T} está relacionado con el segundo tensor de Piola-Kirchhoff a través de

$$\bar{T} = (\det F) F^{-1} T (F^{-1})^T$$

12. La configuración de equilibrio de un campo está descrita por

$$x_1 = -\frac{1}{2}X_1, \quad x_2 = \frac{1}{2}X_3, \quad x_3 = -4X_2$$

Si el tensor de esfuerzos de Cauchy está dado por

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

- ¿Cuál es el correspondiente primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff?
- ¿Cuál es el correspondiente segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff?

13. La configuración de equilibrio de un cuerpo está descrita por

$$x_1 = 16X_1, \quad x_2 = -\frac{1}{4}X_2, \quad x_3 = -\frac{1}{4}X_3$$

Si el tensor de esfuerzos de Cauchy está dado por $T_{11} = 750$ MPa, mientras que los otros $T_{ij} = 0$, determine el primer y segundo tensores de esfuerzos de Piola-Kirchhoff.

14. Considere la siguiente distribución de esfuerzos para una barra de sección circular

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha x_3 & \alpha x_2 \\ -\alpha x_3 & 0 & 0 \\ \alpha x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

¿Cuál será la distribución de esfuerzos en la superficie circular $x_2^2 + x_3^2 = 4$?

¿Cuál es el vector de esfuerzos sobre las superficies que limitan a la barra en ambos extremos sobre el eje x_1 ($x_1 = 0; x_1 = l$)?

Determine el momento sobre una superficie cuya normal es $n_i = \hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$

15. Se puede demostrar que el cortante octaédrico está dado por

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2)^{1/2}$$

donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son los esfuerzos principales. Por otra parte, el criterio de cedencia de von Mises (energía de distorsión) indica que la cedencia se presenta cuando el segundo invariante del desviador de esfuerzos $J_2 = 6k^2$, donde k representa el cortante crítico. Con base en lo anterior determine:

- a) El criterio de Von Mises en la forma $\sigma_0 = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.
- b) El esfuerzo de cedencia en función del cortante octaédrico