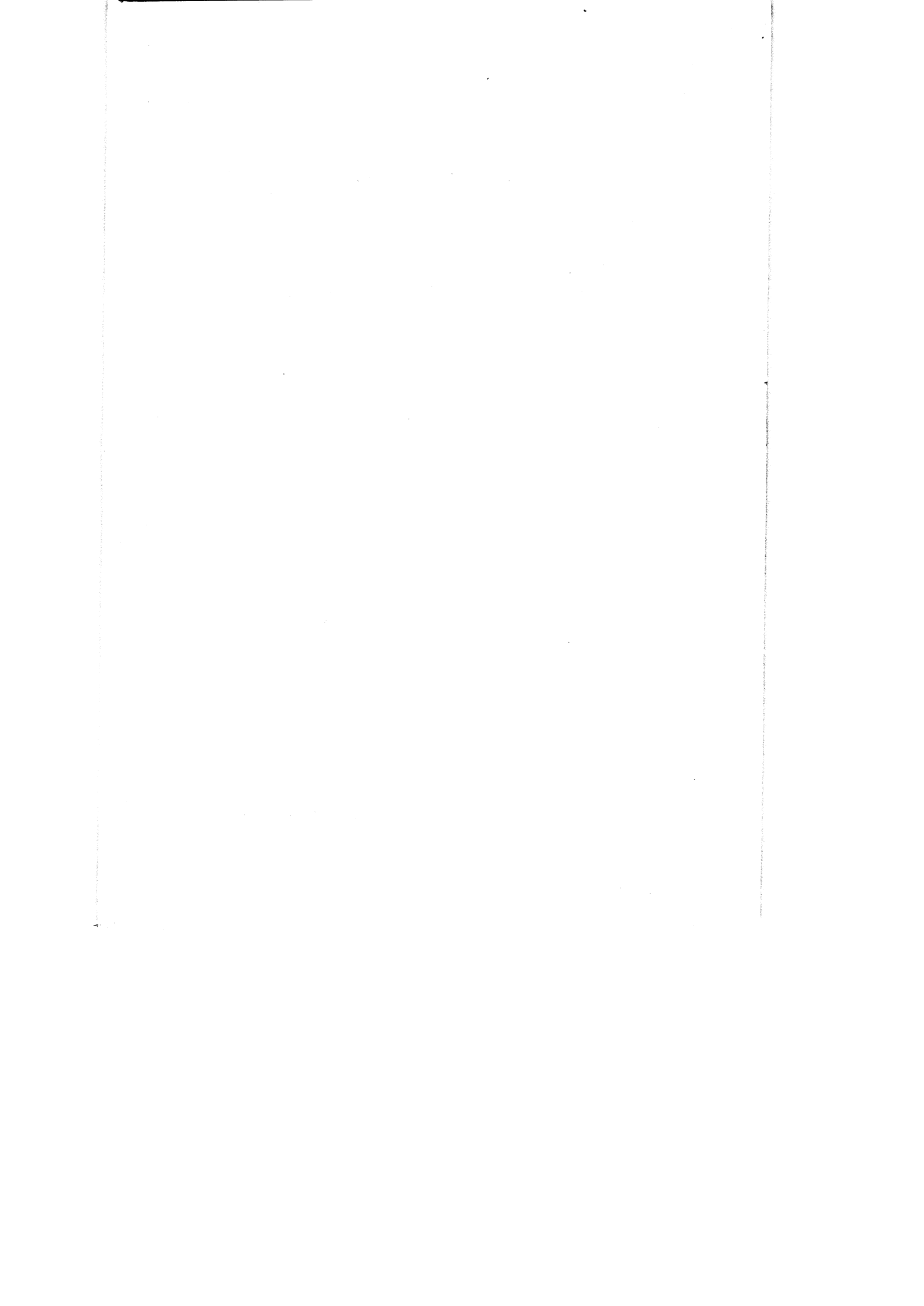


***GENERADORES, MOTORES***

***Y TRANSFORMADORES***

***ELÉCTRICOS***

*Víctor Pérez Amador Barrón*





## PRÓLOGO

El presente libro desarrolla los principios básicos de funcionamiento de los transformadores y de las máquinas electromecánicas. Está dirigido a los alumnos de séptimo u octavo semestre que estudian la carrera de ingeniero mecánico electricista, ya sea en el área de ingeniería mecánica o ingeniería industrial, y es el resultado de la experiencia del autor a lo largo de 27 años de trabajo en la docencia e investigación en la ingeniería eléctrica.

Esta obra se caracteriza por su gran fundamentación técnica y por la simplificación del uso de tecnicismos y procedimientos de análisis de las máquinas eléctricas y los transformadores, que no disminuyen la formalidad del conocimiento de las máquinas eléctricas al nivel de los estudios de licenciatura en ingeniería.

Asimismo, presenta un análisis descriptivo de la estructura y principios de funcionamiento, así como de la respuesta de cada tipo de máquina y permite conocer su comportamiento, desarrollando criterios respecto a su utilización y máximo aprovechamiento en las diferentes necesidades de la industria.

Cabe resaltar, que el método de análisis de la respuesta de las máquinas de corriente directa constituye un trabajo original que aporta el autor en este libro, como consecuencia de varios años de investigación sobre dicho tema.

La estructuración de los problemas, que difiere de los textos convencionales, se ha desarrollado pensando en las necesidades de los ingenieros mecánicos e industriales.

El capítulo 1, Máquinas de corriente directa, trata sobre sus principios básicos de funcionamiento y construcción, así como del análisis de las pérdidas que se presentan en la

operación de éstas, tanto si son utilizadas como motores o generadores, exhibiendo los diferentes arreglos que pueden tener cada uno de éstos y sus formas de control y operación más significativas. Este capítulo reúne la experiencia del autor presentando innovaciones en los métodos de análisis para estas máquinas.

El capítulo 2, Transformadores, estudia sus principios electromagnéticos, construcción básica, pérdidas, modelos equivalentes, pruebas más comunes, características de operación y circuitos de interconexión básicos.

El capítulo 3, Motores de inducción, presenta la estructura y los principios básicos de funcionamiento para luego obtener sus modelos. Se analizan sus pérdidas y pruebas de campo más importantes para caracterizarlos. Asimismo, se explica la obtención de las principales curvas características que determinan el funcionamiento de estos motores y se presentan sus circuitos de control de arranque.

El capítulo, Máquinas síncronas, expone los principios básicos de su funcionamiento y estructura, al igual que sus principales características, ya sea como motor o generador, basadas en una teoría simplificada de análisis, proporcionando los sistemas de arranque para los motores y los controles necesarios para su operación.



FACULTAD DE INGENIERIA

México, Distrito Federal,  
1992.

ING. CARLOS SÁNCHEZ MEJÍA  
Jefe de la División de  
Ingeniería Mecánica e  
Industrial.

**RECONOCIMIENTOS**

A mis maestros de máquinas eléctricas

*Ing. Luis Mascott López*  
*Ing. Ignacio Monterrubio Bustillos*  
*Ing. José Hernández Olmedo*

quienes me proporcionaron los conocimientos que me han permitido el desarrollo de este trabajo.

Al *Ing. Juan Manuel Rojas Gómez* por la revisión técnica de los manuscritos.

Al *Ing. Carlos Sánchez Mejía V.* por los conceptos que sobre esta obra ha plasmado en el prólogo.

A la *Sra. Ma. del Rocío Muñiz González* por la captura.

Al personal de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería:

*M. en L. María Cuairán Ruidíaz.* Jefa de la Unidad.

*Lic. Amelia Gpe. Fiel Rivera.* Revisión didáctica y estilo.

*Pasante Elvia A. Torres Rojas.* Revisión técnica y responsable de edición.

*Sr. Adán Castro Flores.* Dibujo.

quienes contribuyeron a dar el formato final.



## INTRODUCCIÓN

La carrera de ingeniero mecánico electricista en la Facultad de Ingeniería abarca tres áreas de especialización que son : ingeniería mecánica, ingeniería industrial e ingeniería eléctrica y electrónica.

Esta obra está dirigida a estudiantes de ingeniería mecánica e ingeniería industrial, no obstante que el estudio especializado de las máquinas eléctricas es de la competencia de la ingeniería eléctrica.

Se ha procurado enfocar este trabajo hacia el aprovechamiento de las máquinas eléctricas, sin dejar por ello de conocer la estructura y los principios electromagnéticos en que se basa su funcionamiento, pero a la vez, sin abarcar lo relativo a su diseño y demás problemática interna.

La parte medular de los ejercicios que se sugieren al estudiante consiste en obtener las características típicas de respuesta de las diferentes máquinas, aplicando métodos adecuados de análisis. Esto permite sacar conclusiones sobre el servicio que se puede esperar de cada máquina y las condiciones de trabajo en que se obtiene su mejor rendimiento.

Al finalizar los aspectos teóricos de cada capítulo, se incluye la descripción de equipos auxiliares básicos para la instalación, operación y protección de las máquinas.

El alumno que haya dominado los aspectos de estudio propuestos adquiere la capacitación básica para tomar decisiones sobre selección, compra, instalación, operación y mantenimiento de máquinas eléctricas en la industria. La habilidad para hacer esto cada vez mejor se va desarrollando con la práctica.

Para la comprensión y aprovechamiento del contenido de esta obra es indispensable contar con antecedentes como la teoría de circuitos de corriente directa y corriente alterna, así como las leyes fundamentales del electromagnetismo y ferromagnetismo. Las máquinas rotatorias requieren además los conceptos de la mecánica rotacional.

Se estima que el contenido de este libro es adecuado para un curso semestral de aproximadamente 110 horas de clase, incluyendo lo necesario para prácticas de laboratorio. Si el tiempo disponible fuera menor, sería necesario pasar por alto algunos temas o subtemas complementarios, pero que se han incluido para tener un panorama de la materia que no resulte demasiado restringido.

**EL AUTOR**



# ÍNDICE DE CONTENIDO

## CAPÍTULO 1. MÁQUINAS DE CORRIENTE DIRECTA

1.1. GENERALIDADES .....	1
1.1.1 DEFINICIÓN .....	1
1.1.2 ESTRUCTURA .....	2
a) Estator .....	2
b) Rotor .....	2
c) Circuito magnético .....	2
d) Armadura .....	3
1.2. CIRCUITO MAGNÉTICO .....	4
1.2.1 MAGNETIZACIÓN E HISTÉRESIS .....	5
1.2.2 FORMAS DE EXCITAR LAS MÁQUINAS DE C.D. ....	7
a) Excitación en derivación .....	7
b) Excitación en serie .....	7
c) Excitación compuesta .....	8
1.2.3 CURVA DE MAGNETIZACIÓN .....	9
1.2.4 FUNCIÓN DE FROELICH .....	12
1.3. ARMADURA .....	14
1.3.1 FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA EN UN COSTADO DE LA ESPIRA .....	15
1.3.2 EMBOBINADOS DE ARMADURAS REALES .....	18
1.3.3 FUERZA ELECTROMOTRIZ ENTRE LAS ESCOBILLAS DE UNA MÁQUINA REAL .....	20
1.3.4 CURVA DE SATURACIÓN EN VACÍO .....	22
EJEMPLO 1.1 .....	24
1.4. CORRIENTES DE ARMADURA .....	27
1.4.1 PAR ELECTROMAGNÉTICO .....	28
1.4.2 PAR ELECTROMAGNÉTICO DE UNA ARMADURA REAL .....	28
1.4.3 MOTOR DE CORRIENTE DIRECTA .....	30
1.4.4 CONVERSIÓN DE ENERGÍA .....	31
1.4.5 REACCIÓN DE ARMADURA .....	32
1.5 PÉRDIDAS .....	34
1.5.1 PÉRDIDAS ELÉCTRICAS .....	35
1.5.2 PÉRDIDAS MECÁNICAS .....	37
1.5.3 PÉRDIDAS MAGNÉTICAS .....	38
1.5.4 PÉRDIDAS ROTACIONALES .....	39
1.5.5 TRABAJO INTEGRAL DE LA MÁQUINA .....	40
1.5.6 ECUACIONES BÁSICAS DE LA MÁQUINA DE C.D. ....	40

1.6. ANALISIS DE RESPUESTA .....	41
1.6.1 CLASIFICACIÓN .....	42
1.6.2 GENERADOR CON EXCITACIÓN INDEPENDIENTE .....	43
a) Curva de regulación de voltaje .....	44
b) Curva práctica de regulación de voltaje .....	44
c) Regulación de voltaje .....	45
EJEMPLO 1.2 .....	45
1.6.3 GENERADOR CON EXCITACIÓN EN DERIVACIÓN .....	49
EJEMPLO 1.3 .....	52
1.6.4 GENERADOR CON EXCITACIÓN EN SERIE .....	56
EJEMPLO 1.4 .....	57
1.6.5 GENERADOR CON EXCITACIÓN COMPUESTA .....	59
1.6.6 MOTOR CON EXCITACIÓN INDEPENDIENTE .....	61
a) Regulación de velocidad .....	63
b) Control de velocidad .....	64
EJEMPLO 1.5 .....	65
1.6.7 MOTOR CON EXCITACIÓN EN DERIVACIÓN .....	71
a) Regulación de velocidad .....	72
b) Control de velocidad .....	73
EJEMPLO 1.6 .....	74
1.6.8 MOTOR CON EXCITACIÓN EN SERIE .....	80
a) Regulación de velocidad .....	81
Peligro de desbocamiento .....	82
b) Control de velocidad .....	84
EJEMPLO 1.7 .....	84
1.6.9 MOTOR CON EXCITACIÓN COMPUESTA .....	89
1.7. ARRANCADORES Y CONTROLES DE VELOCIDAD .....	91
1.7.1 ARRANCADORES .....	91
1.7.2 CONTROLES DE VELOCIDAD .....	94
EJERCICIOS PROPUESTOS .....	98

## CAPÍTULO 2. TRANSFORMADORES

2.1. GENERALIDADES .....	105
2.1.1 DEFINICIÓN .....	105
2.1.2 ESTRUCTURA .....	106
2.1.3 BOBINA PRIMARIA Y BOBINA SECUNDARIA .....	107
a) Excitación de la bobina primaria .....	107
b) Fuerza electromotriz inducida en el secundario .....	110
2.1.4 PROPORCIONALIDAD Y CONCEPTO DE RELACIÓN DE TRANSFORMACIÓN .....	111
2.1.5 ONDAS EN FASE Y EL CONCEPTO DE POLARIDAD .....	112
2.1.6 ORGANIZACIONES PRÁCTICAS DE LAS TERMINALES .....	113
2.1.7 CORRIENTES DE CARGA .....	114
2.2. TEORÍA DEL TRANSFORMADOR .....	116
2.2.1 TRANSFORMADOR IDEAL .....	116
2.2.2 TRANSFORMADOR REAL .....	117
2.2.3 PÉRDIDAS EN EL TRANSFORMADOR .....	118
a) Pérdidas magnéticas .....	118
b) Pérdidas eléctricas .....	123

2.3. CIRCUITO EQUIVALENTE DEL TRANSFORMADOR .....	127
2.3.1 TRANSFORMADOR DE IMPEDANCIA .....	128
2.3.2 PRIMERA SIMPLIFICACIÓN DEL CIRCUITO EQUIVALENTE .....	130
2.3.3 SEGUNDA SIMPLIFICACIÓN DEL CIRCUITO EQUIVALENTE .....	131
2.4. ASPECTOS PRÁCTICOS DEL CIRCUITO EQUIVALENTE .....	133
2.4.1 DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS .....	133
a) Prueba de circuito abierto .....	134
b) Prueba de circuito corto .....	137
2.4.2 ANÁLISIS DEL CIRCUITO EQUIVALENTE .....	139
a) Pérdidas de voltaje y regulación .....	139
b) Pérdidas de energía y eficiencia .....	141
EJEMPLO 2.1 .....	143
EJEMPLO 2.2 .....	150
2.5. CONEXIONES DE TRANSFORMADORES .....	154
2.5.1 CIRCUITOS MONOFÁSICOS .....	154
a) Secundarios en serie .....	154
b) Secundarios en paralelo .....	155
2.5.2 CIRCUITOS TRIFÁSICOS .....	156
a) Conexión delta-delta .....	157
b) Conexión estrella-estrella .....	160
c) Conexión delta-estrella .....	162
d) Conexión estrella-delta .....	164
e) Otras posibilidades .....	165
2.6. TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS .....	165
2.6.1 PRUEBAS DE CIRCUITO EQUIVALENTE Y ANÁLISIS DE RESPUESTA .....	168
2.7. AUXILIARES DEL TRANSFORMADOR .....	169
2.8. TRANSFORMADORES DE INSTRUMENTOS .....	171
2.8.1 TRANSFORMADORES DE POTENCIAL (T.P.) .....	171
2.8.2 TRANSFORMADORES DE CORRIENTE (T.C.) .....	172
EJERCICIOS PROPUESTOS .....	174

### CAPÍTULO 3. MOTORES DE INDUCCIÓN

3.1. GENERALIDADES .....	179
3.1.1 DEFINICIÓN .....	179
3.1.2 ESTRUCTURA .....	181
a) Estator .....	181
b) Rotor .....	181
c) Armadura .....	181
d) Rotor .....	181

3.2. ARMADURA .....	182
3.2.1 DEMOSTRACIÓN GRÁFICA DEL GIRO DE FLUJO .....	184
3.2.2 DEMOSTRACIÓN ANALÍTICA .....	185
3.2.3 MÁQUINAS MULTIPOLARES Y NUEVAS VELOCIDADES SÍNCRONAS .....	187
3.3. ROTOR .....	189
3.3.1 DESLIZAMIENTO .....	192
3.3.2 FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA EN EL ROTOR .....	193
3.4. CIRCUITO EQUIVALENTE DEL MOTOR DE INDUCCIÓN .....	197
3.4.1 TRANSFORMACIÓN DEL CIRCUITO EQUIVALENTE .....	201
3.4.2 SIMPLIFICACIÓN DEL CIRCUITO EQUIVALENTE TRANSFORMADO .....	203
3.5. DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS .....	205
3.5.1 MEDICIÓN DE LA RESISTENCIA DEL ESTATOR .....	205
3.5.2 PRUEBA DE ROTOR LIBRE .....	206
3.5.3 PRUEBA DE ROTOR BLOQUEADO .....	209
EJEMPLO 3.1 .....	213
3.6. ANÁLISIS DEL CIRCUITO EQUIVALENTE .....	217
1. Velocidad del rotor .....	217
2. Corriente de línea .....	217
3. Factor de potencia .....	218
4. Potencia mecánica .....	219
5. Eficiencia .....	219
6. Par mecánico .....	220
EJEMPLO 3.2 .....	222
3.6.1 ARRANQUE .....	226
1. Corriente de arranque .....	226
2. Par de arranque .....	229
EJEMPLO 3.3 .....	231
3. Arranque a voltaje reducido .....	233
EJEMPLO 3.4 .....	235
3.7. DIAGRAMA CIRCULAR DEL MOTOR DE INDUCCIÓN .....	236
3.7.1 DEMOSTRACIÓN DE QUE LAS CORRIENTES DESCRIBEN UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA .....	237
3.7.2 CORRIENTE DE FASE Y DIAGRAMA CIRCULAR .....	240
3.7.3 ASPECTOS PRÁCTICOS DEL DIAGRAMA CIRCULAR .....	240
3.8. CURVAS PAR-VELOCIDAD .....	244
3.8.1 INCREMENTO DEL PAR DE ARRANQUE .....	246
3.8.2 ROTOR DE RESISTENCIA VARIABLE .....	249
3.9. ARRANCADORES .....	250
3.9.1 ARRANCADORES MANUALES A PLENO VOLTAJE .....	251
3.9.2 ARRANCADORES AUTOMÁTICOS A PLENO VOLTAJE .....	253

3.9.3 ARRANCADOR MANUAL A VOLTAJE REDUCIDO .....	255
3.9.4 ARRANCADOR AUTOMÁTICO A VOLTAJE REDUCIDO .....	256
3.9.5 OTRAS FORMAS DE ARRANQUE A VOLTAJE REDUCIDO .....	258
a) Por resistencia primaria .....	258
b) Devanado bipartido .....	258
c) Estrella-delta .....	258
3.9.6 INSTALACIÓN .....	258
3.10. OTROS USOS DEL MOTOR DE INDUCCION .....	260
3.10.1 GENERADOR DE INDUCCIÓN .....	260
3.10.2 REGULADOR DE FRECUENCIA .....	263
3.10.3 DEFASADOR DE VOLTAJE .....	264
3.10.4 REGULADOR DE VOLTAJE .....	266
3.10.5 CONTROL REMOTO DE POSICIÓN .....	267
3.11. MOTORES MONOFASICOS DE INDUCCION .....	268
3.11.1 ARRANQUE DE LOS MOTORES MONOFÁSICOS .....	271
EJERCICIOS PROPUESTOS .....	274

## CAPÍTULO 4. MÁQUINAS SÍNCRONAS

4.1. GENERALIDADES .....	277
4.1.1 DEFINICIÓN .....	277
4.1.2 ESTRUCTURA .....	278
4.2. CIRCUITO MAGNÉTICO .....	280
4.2.1 CURVA DE MAGNETIZACIÓN .....	282
4.3. LA ARMADURA .....	283
4.3.1 FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA EN UNA ESPIRA .....	283
4.3.2 EMBOBINADOS DE ARMADURA REALES .....	286
4.3.3 CURVA DE SATURACIÓN EN VACÍO .....	290
4.3.4 ARMADURA TRIFÁSICA .....	291
4.3.5 LAS CORRIENTES DE ARMADURA .....	292
4.4. TEORÍA SIMPLIFICADA DE LA MÁQUINA SÍNCRONA .....	296
4.4.1 TENSIÓN INDUCIDA POR EL FLUJO DE ARMADURA .....	297
4.4.2 REACTANCIA DE FLUJO DE ARMADURA .....	298
4.4.3 REACTANCIA DE DISPERSIÓN, REACTANCIA DE FLUJO DE ARMADURA Y REACTANCIA SÍNCRONA .....	298
4.4.4 CIRCUITO EQUIVALENTE DE LA ARMADURA .....	299
4.5. RESPUESTAS DE LOS GENERADORES SÍNCRONOS .....	301
4.5.1 GENERADOR ALIMENTANDO A UNA CARGA AISLADA .....	301
EJEMPLO 4.1 .....	302
4.5.2 GENERADOR SÍNCRONO ACOPLADO A UN SISTEMA INFINITO .....	307
4.5.3 SINCRONIZACIÓN .....	308

4.6. EL MOTOR SÍNCRONO .....	311
4.6.1 EL MOTOR SÍNCRONO COMO MÁQUINA CONECTADA A UN SISTEMA INFINITO .....	314
4.6.2 CAPACITOR SÍNCRONO .....	315
EJEMPLO 4.2 .....	316
4.6.3 CURVAS V .....	322
4.6.4 ARRANQUE DEL MOTOR SÍNCRONO .....	323
4.6.5 ARRANCADORES .....	325
4.7 EXCITACIÓN DE MÁQUINAS SÍNCRONAS .....	326
4.7.1 EXCITACIÓN CON UNA MÁQUINA EXCITATRIZ .....	326
4.7.2 EXCITACIÓN CON DOS MÁQUINAS EXCITATRICES .....	327
4.7.3 EXCITACIÓN SIN ESCOBILLAS .....	329
4.7.4 EXCITACIÓN CON CORRIENTE ALTERNA RECTIFICADA .....	330
4.7.5 AUTOEXCITACIÓN .....	331
EJERCICIOS PROPUESTOS .....	332

# CAPÍTULO 1

## MÁQUINAS DE CORRIENTE DIRECTA

### 1.1. GENERALIDADES

**1.1.1. DEFINICIÓN.** Las *máquinas de corriente directa* son dispositivos que transforman energía mecánica en eléctrica, o energía eléctrica en mecánica. En el primer caso trabajan en la modalidad de generadores y en el segundo como motores.

La energía mecánica entra a la máquina o sale de ella por conducto de una flecha de movimiento rotatorio. Usualmente esta energía se mide por unidad de tiempo, o sea, con base en el concepto de potencia, de manera que sus componentes serían el momento ( o par ) y la velocidad angular.

$$P_m = T \omega$$

En el Sistema Internacional de Unidades, la potencia se mide en watts, el par en newton-metros y la velocidad angular en radianes/segundo, y la fórmula no requiere de ninguna constante de conversión de unidades.

La energía eléctrica sale de la máquina o entra a ella, por conducto de cables y conexiones eléctricas. También se maneja como potencia eléctrica de corriente directa, de modo que sus componentes serían el voltaje y la intensidad de corriente.

$$P_e = V I$$

La potencia se mide en watts, el voltaje en volts y la intensidad de corriente en amperes.

El proceso de conversión de energía se representa en su forma más elemental, con el diagrama de bloque de la figura 1.1.

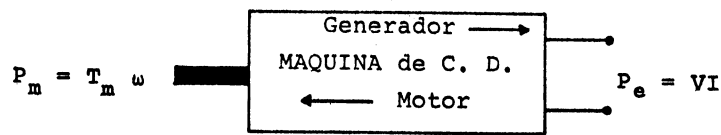


FIGURA 1.1. CONVERSIÓN DE ENERGÍA EN UNA MÁQUINA DE CORRIENTE DIRECTA.

**1.1.2. ESTRUCTURA.** Desde el *punto de vista mecánico*, todas las máquinas eléctricas están constituidas por dos grandes grupos de partes:

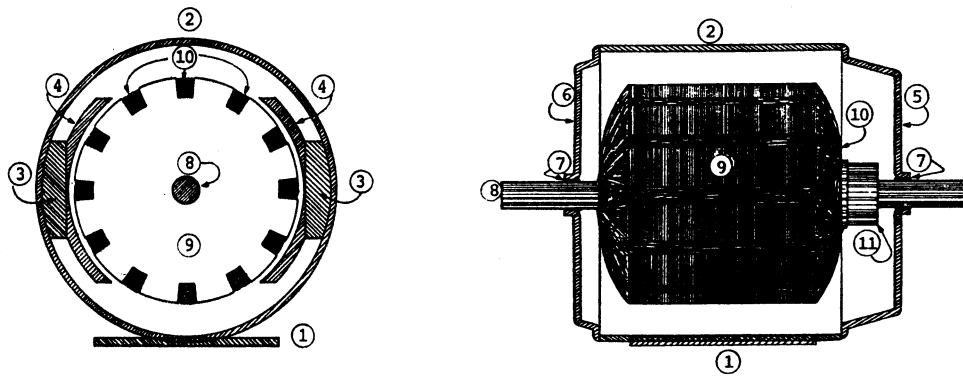
**a) Estator.** Abarca el conjunto de piezas inmóviles (o estáticas, de donde toma su nombre) como se muestra en la figura 1.2. A menudo, cuando nos referimos al estator hablamos solamente de los órganos electromagnéticos fijos en el interior de la coraza, pero en rigor, son todas las piezas que aparecen en la figura.

**b) Rotor.** Abarca el conjunto de piezas giratorias (o rotatorias, de donde toma su nombre), que también se ilustran en la figura 1.2.

Desde el *punto de vista funcional*, también se consideran dos grupos de partes. Este enfoque es más importante para el estudio de la máquina, de manera que su descripción se hará en forma más detallada, refiriéndonos a la misma figura 1.2.

**c) Circuito magnético.** Consta de una serie de piezas de material ferromagnético que dan paso a las líneas de flujo magnético que sirven de apoyo al funcionamiento de la máquina, como son: piezas polares, zapatas polares, núcleo de armadura y coraza. Deberían incluirse también aunque no sean propiamente piezas, los entrehierros o espacios de aire que evitan la fricción entre rotor y estator.





**ESTATOR:**

1. Base
2. Coraza
3. Piezas polares
4. Zapatas polares
5. Tapa posterior
6. Tapa anterior
7. Cojinetes

**ROTOR:**

8. Flecha
9. Núcleo de armadura
10. Embobinado de armadura
11. Conmutador

FIGURA 1.2. ESTRUCTURA DE UNA MÁQUINA DE CORRIENTE DIRECTA. (1) CORTE TRANSVERSAL.  
(2) CORTE LONGITUDINAL DEL ESTATOR Y ROTOR COMPLETO.

Los circuitos magnéticos requieren de una fuente de fuerza magnetomotriz, que se ilustrará hasta la figura 1.3 y que serán dos bobinas devanadas alrededor de las piezas polares.

**d) Armadura.** Se define como armadura el órgano en el que se inducen las fuerzas electromotrices cuando trabajan como generadores, o fuerzas contraelectromotrices como motores.

En el caso de la máquina de corriente directa, la armadura es el rotor y consta de un núcleo cilíndrico de material laminado, ranurado en toda su periferia, y en las ranuras se aloja el embobinado de armadura, cuyas terminales conectan al conmutador.

El conmutador es un cilindro de cobre formado por sectores, sobre el cual se apoyan las escobillas que permiten hacer contacto con el exterior. Tiene además la función de rectificar las fuerzas electromotrices inducidas en los generadores, o alternar los voltajes aplicados a los motores.

## 1.2. CIRCUITO MAGNÉTICO

Para inducir una fuerza electromotriz se requieren tres componentes:

- a) Un flujo magnético.
- b) Un conductor con dirección perpendicular al flujo.
- c) Un movimiento relativo entre conductor y flujo cuya dirección es mutuamente perpendicular a ellos.

El flujo magnético en la máquina lo proporciona una fuente de fuerza magnetomotriz, y las líneas de flujo recorren las diferentes piezas que constituyen el circuito magnético que se ilustra en la figura 1.3.

El recorrido de toda línea de flujo podría comenzar en cualquier punto, por ejemplo, en la pieza polar norte, y continuar por zapata polar norte, entrehierro norte, núcleo de armadura, entrehierro sur, zapata polar sur, pieza polar sur, coraza y cerrar nuevamente en la pieza polar norte.

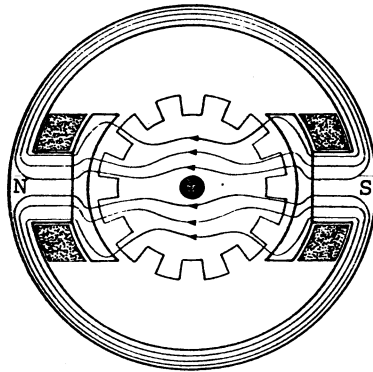


FIGURA 1.3. CORTE TRANSVERSAL DEL CIRCUITO MAGNÉTICO DE LA MÁQUINA DE CORRIENTE DIRECTA.

Las líneas de flujo se rechazan entre sí, de modo que en piezas como las zapatas polares ocupan todo el lugar disponible, atravesando así el núcleo de armadura con la mayor extensión posible.

Otra propiedad de las líneas es que son elásticas, por lo que ante un obstáculo como el entrehierro, buscan el camino más corto, o sea la dirección radial.

En la misma figura se observa alrededor de las piezas polares norte y sur, el corte de la bobina de excitación que constituyen la fuente de fuerza magnetomotriz.

**1.2.1. MAGNETIZACIÓN E HISTÉRESIS.** El circuito magnético de la máquina se podría idealizar en la figura 1.4 con el objeto de comprender mejor algunos razonamientos que se presentarán en el subtema 1.2.2. El aspecto del circuito es bastante simplificado y no se parece a su forma real, sin embargo, representa todas las piezas que se han descrito anteriormente.

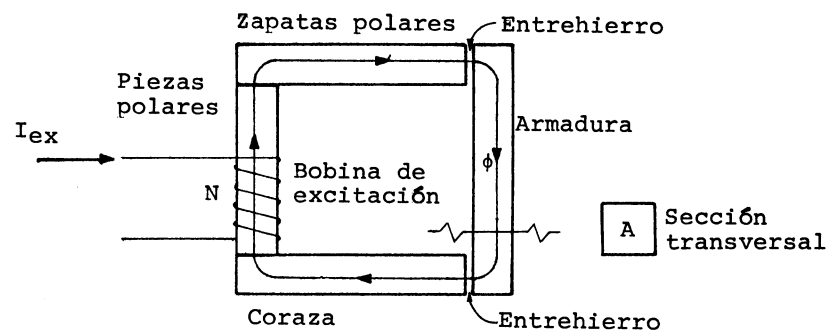


FIGURA 1.4. REPRESENTACIÓN DEL CIRCUITO MAGNÉTICO.

Si se hace circular una corriente  $I_{ex}$  por la bobina de N vueltas, se establece la fuerza magnetomotriz que es el producto de estas dos cantidades.

$$F_{mm} = N I_{ex}$$

Al dividir la fuerza magnetomotriz entre la longitud media del circuito, representada por la línea magnética que se ilustra en el dibujo, se obtiene la fuerza magnetizante.

$$H = \frac{N I_{ex}}{L}$$

La fuerza magnetizante establece un flujo  $\phi$  en el circuito. Dividiendo el flujo entre el área de la sección transversal se obtiene la densidad de flujo.

$$B = \frac{\phi}{A}$$

La primera vez que se excita la máquina, comienza a aparecer una densidad de flujo a partir del origen. A medida que crece la corriente de excitación (y por tanto la fuerza magnetizante) aumenta también la densidad de flujo. Sin embargo, la relación entre la densidad de flujo y la fuerza magnetizante no es lineal, como se muestra en la figura 1.5, que representa las propiedades del material ferromagnético.

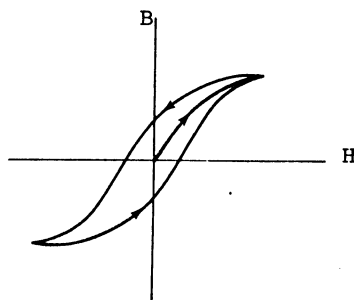


FIGURA 1.5. CURVA DE MAGNETIZACIÓN Y ÁREA DE HISTÉRESIS.

Al inicio de la curva, la pendiente es pequeña debido a la dificultad para orientar los primeros dominios magnéticos del núcleo. En seguida viene una región de máxima pendiente, cuando la fuerza

magnetizante ha adquirido una magnitud apreciable y en el núcleo existen suficientes dominios disponibles para orientar. Por último, dicha fuerza puede seguir creciendo, pero al no haber más dominios orientables en el núcleo, la densidad de flujo tiende a estabilizarse (la curva se acerca a la horizontalidad) y se dice que el núcleo se ha saturado.

Si a partir de la condición de núcleo saturado se comienza a disminuir la excitación se nota una tendencia a retener parte del flujo, debido a que cierta cantidad de dominios permanecen orientados. A este fenómeno se le llama *histéresis* y se manifiesta en la gráfica por un descenso en una trayectoria por arriba de la inicial.

Al desaparecer por completo la excitación, queda en el circuito una pequeña densidad de flujo que se conoce como *magnetismo remanente*. Esto se debe a que las piezas polares de la máquina real se fabrican de imán permanente.

Si se invierte la dirección de la corriente de excitación, se genera la parte simétrica de la gráfica, como se puede observar en la figura, y al disminuir la corriente negativa y volverse otra vez positiva, aparece una nueva trayectoria ascendente. Al área encerrada entre las trayectorias ascendente y descendente se le llama *área de histéresis*.

**1.2.2. FORMAS DE EXCITAR LAS MÁQUINAS DE C.D.** Las bobinas de excitación se fabrican en dos tipos con diferentes características:

a) **Excitación en derivación.** Las bobinas se devanan con alambre delgado y un alto número de vueltas. La fuerza magnetomotriz ( $NI_{ex}$ ) se produce por la gran cantidad de vueltas, y una corriente de excitación pequeña. La resistencia del embobinado es grande y el voltaje necesario para excitar es del mismo orden del voltaje de armadura (en la práctica es un poco menor). El embobinado de excitación se conecta en paralelo (o en derivación) con la armadura, y de ahí el nombre de este tipo de excitación.

b) **Excitación en serie.** Las bobinas se devanan con alambre grueso y un número pequeño de vueltas. La fuerza magnetomotriz ( $NI_{ex}$ ) se produce con pocas vueltas y una corriente de valor elevado. Se

diseña para trabajar con la misma intensidad de corriente que la armadura. Su resistencia es muy pequeña, de modo que la caída de voltaje entre sus extremos es igualmente pequeña, lo que permite conectar este embobinado en serie con la armadura. De ahí el nombre de este tipo de excitación.

c) **Excitación compuesta.** Para la excitación compuesta se utiliza una bobina principal con las mismas características de la bobina en derivación, y una bobina auxiliar parecida a la bobina en serie, pero con menos vueltas, de modo que su fuerza magnetomotriz es menor que la de una excitación en serie.

De acuerdo con la forma de conectar la bobina serie se presentan dos casos:

**Excitación compuesta acumulativa.** La fuerza magnetomotriz de la bobina serie se suma a la de la bobina principal derivada (ambas corrientes dan vuelta alrededor del núcleo en el mismo sentido), de manera que la fuerza magnetomotriz total es la suma de las componentes.

$$F_{mm} = N_d I_d + N_s I_s$$

y la fuerza magnetizante es:

$$H = \frac{N_d I_d + N_s I_s}{L}$$

**Excitación compuesta diferencial.** La fuerza magnetomotriz de la bobina serie se opone a la de la bobina principal derivada (las corrientes dan vueltas alrededor del núcleo en sentidos opuestos), de manera que la fuerza magnetomotriz total es la resta de las componentes.

$$F_{mm} = N_d I_d - N_s I_s$$

y la fuerza magnetizante es:

$$H = \frac{N_d I_d - N_s I_s}{L}$$

En la figura 1.6 se han usado circuitos magnéticos simplificados, igual que en la figura 1.4. Se ilustran las cuatro formas de excitar el circuito.

En la práctica, para las máquinas con excitación compuesta, se devana la bobina en derivación sobre las piezas polares, y la bobina serie sobre la derivada.

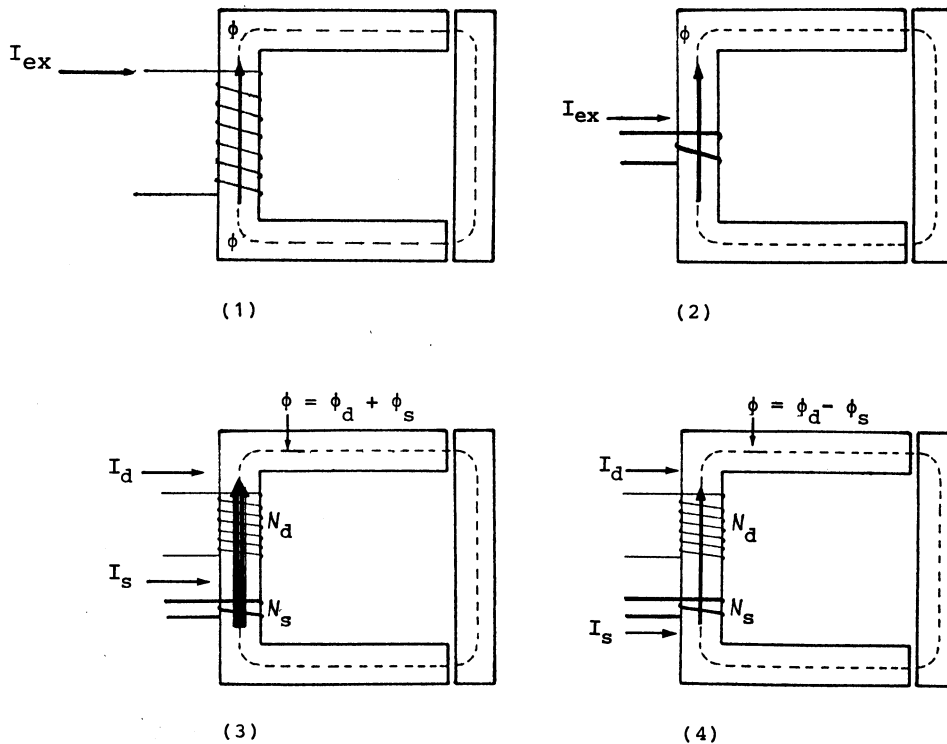


FIGURA 1.6. FORMAS DE EXCITACIÓN. (1) EN DERIVACIÓN (2) EN SERIE  
(3) COMPUESTA ACUMULATIVA (4) COMPUESTA DIFERENCIAL.

**1.2.3. CURVA DE MAGNETIZACIÓN.** En la figura 1.5 se presentó una curva de magnetización y el área de histéresis en un sistema de coordenadas generalizadas, o sea, que muestra las propiedades magnéticas del material, independientemente de la forma y dimensiones que se le den al circuito.

Para que esta figura represente el comportamiento de un circuito magnético en particular, cuyas dimensiones ya han sido definidas, solamente se requiere cambiar las escalas coordenadas.

Recordando el significado de la coordenada horizontal:

$$H = \frac{N I_{ex}}{L}$$

En un circuito elaborado, su longitud media y el número de vueltas de la bobina son cantidades conocidas, de modo que si la fuerza magnetizante se multiplica por  $L$  y se divide entre  $N$  se tiene:

$$H \frac{L}{N} = I_{ex}$$

La nueva abscisa de la curva será la corriente de excitación.

De manera semejante, la densidad de flujo es:

$$B = \frac{\phi}{A}$$

Multiplicando esta escala por el área conocida del circuito se tiene:

$$B A = \phi$$

La nueva ordenada de la curva será el flujo total en cada polo.

Otro detalle más para particularizar la curva de magnetización sería tener en cuenta que la máquina es de corriente directa, o sea que la corriente de excitación será siempre positiva y solamente operará la parte de la gráfica correspondiente al primer cuadrante. Esto trae por consecuencia que el área de histéresis se desarrolle solamente alrededor de la trayectoria descendente de la figura 1.5, convirtiéndose en apariencia en una línea curva algo gruesa.



La curva de magnetización para la máquina de C.D. sería como aparece en la figura 1.7.

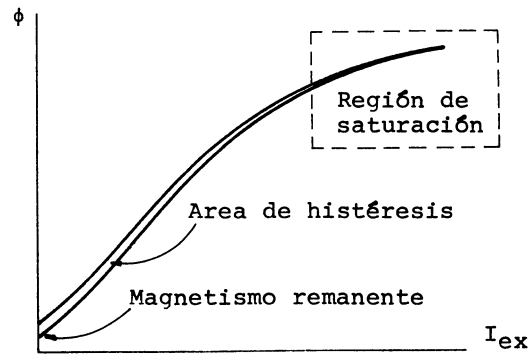


FIGURA 1.7. CURVA DE MAGNETIZACIÓN DE LA MÁQUINA DE C.D.

El hecho de que se manifieste un pequeño flujo sin corriente de excitación se debe al imán permanente de los polos.

*Para las máquinas con excitación en derivación*, la corriente de excitación es de pequeña intensidad y se deriva del circuito de armadura.

*Para máquinas con excitación en serie*, la corriente de excitación es de gran intensidad y es la misma corriente de armadura.

*Para las máquinas con excitación compuesta*, la particularización de la abscisa no es tan simple, pues recordando que la fuerza magnetizante tiene dos componentes:

$$H = \frac{N_d I_d \pm N_s I_s}{L}$$

solamente se podría dividir entre uno de los números de vueltas. Si se elige  $N_d$  se tiene:

$$H \frac{L}{N_d} = I_d \pm \frac{N_s}{N_d} I_s$$

que sería una corriente de excitación hipotética formada por el valor real de la corriente en el campo derivado y una fracción de la corriente en el campo serie. El signo depende de que la conexión serie sea acumulativa o diferencial.

Sea:

$$u = \frac{N_s}{N_d}$$

entonces

$$I_{ex} = I_d \pm u I_s$$

en donde  $I_{ex}$  es la abscisa de la curva de magnetización,  $I_d$  la corriente en el campo en derivación,  $u$  la relación de vueltas de los campos, usualmente mucho más pequeña que la unidad e  $I_s$  la corriente en el campo serie.

**1.2.4. LA FUNCIÓN DE FROELICH.** El conocimiento de la curva de magnetización de la máquina es fundamental para el análisis de su respuesta.

Una función analítica que reprodujera rigurosamente la figura 1.7 resultaría complicada y poco práctica. La función de Froelich en cambio, establece una relación sencilla entre flujo y corriente de excitación y se aproxima a la curva de magnetización de una manera satisfactoria. Su expresión es:

$$\phi = \frac{c I_{ex}}{b + I_{ex}}$$

en donde  $c$  es una constante que gráficamente representa la altura de una asíntota horizontal, y  $b$  es

otra constante que gráficamente representa la abscisa de otra asíntota vertical. Su gráfica corresponde a la de la figura 1.8.

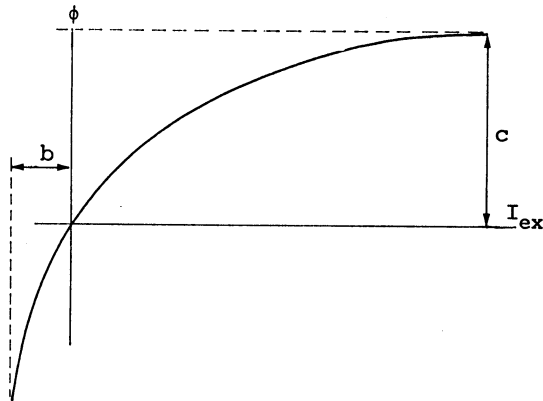


FIGURA 1.8. GRÁFICA DE LA FUNCIÓN DE FROELICH.

El denominador  $b+I_{ex}$  influye sobre la pendiente de la curva, haciéndola más pequeña conforme crece la corriente de excitación, por lo que se le llamará *factor de saturación*.

La comparación de la función de Froelich con la curva real de magnetización se puede hacer en la figura 1.9, de donde se obtienen las siguientes conclusiones:

- La aproximación de la función de Froelich solamente es válida en el primer cuadrante. Esto no representa ningún inconveniente, puesto que la máquina es de corriente directa y siempre trabajará en el primer cuadrante.
- La función de Froelich pasa por el origen y por tanto no tiene en cuenta el magnetismo remanente. Tampoco es inconveniente porque la máquina normalmente no opera en esta

región. En casos excepcionales que se requiera analizar el comportamiento de la máquina con cero corriente de excitación, es fácil introducir una corrección.

- La función de Froelich y la curva de magnetización prácticamente son coincidentes en el inicio de la saturación, donde normalmente trabaja la máquina.

- El problema de definir la función de Froelich para una máquina real, consiste en determinar los parámetros  $c$  y  $b$ , lo cual es factible y se explicará posteriormente.

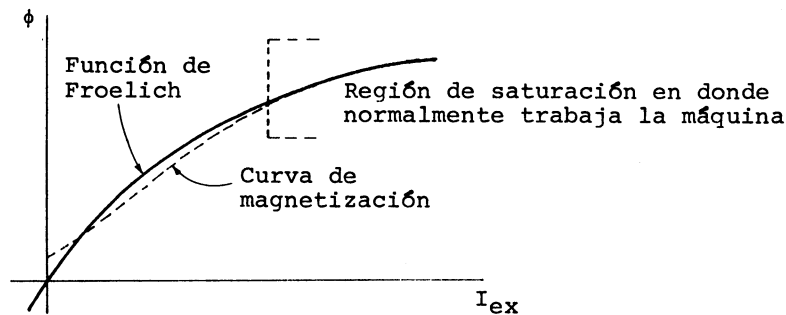


FIGURA 1.9. COMPARACIÓN DE LA FUNCIÓN DE FROELICH CON LA CURVA REAL DE MAGNETIZACIÓN.

### 1.3. LA ARMADURA

Los núcleos de rotor que se han mostrado en la figura 1.2 y 1.3 tienen 12 ranuras en su periferia, en las cuales se acomoda el embobinado de armadura. Estas ilustraciones corresponderían a máquinas pequeñas; conforme crece el tamaño y potencia de la máquina, el número de ranuras y bobinas es mayor, llegando a superar la centena. Sin embargo, para comprender como trabaja una armadura se puede partir del caso más simple, que sería un núcleo con dos ranuras alojando una espira.

Para una mayor claridad en el dibujo, en la figura 1.10 se prescinde de los núcleos y se presenta una perspectiva de la espira, en la que la línea punteada representa el eje de giro y el conmutador está formado por dos sectores o delgas.

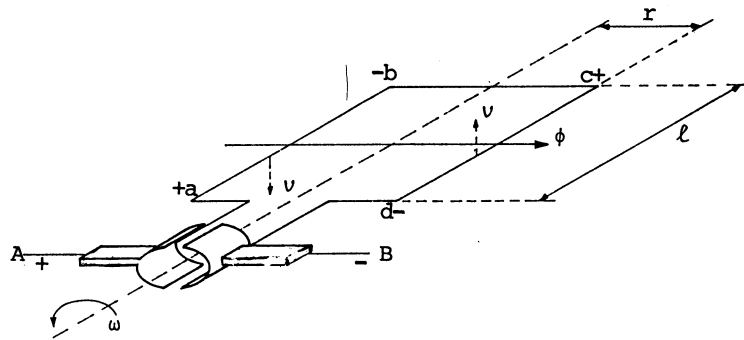


FIGURA 1.10. UNA ARMADURA RUDIMENTARIA DE UNA ESPIRA.

**1.3.1. FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA EN UN COSTADO DE LA ESPIRA.** Para inducir una fuerza electromotriz se requieren tres factores:

- Un flujo magnético que aparece en la figura como el vector  $\phi$ .
- Un conductor inmerso en el flujo, que serían los costados de espira a-b y c-d.
- Un movimiento del conductor dentro del flujo. Al girar la espira, cada costado se desplaza con una velocidad  $v$ , tangencial a su trayectoria de rotación.

La fuerza electromotriz es el producto de los tres factores:

$$e = Blv$$

en donde  $B$  es la densidad de flujo,  $l$  la longitud del conductor y  $v$  su velocidad. En casos más

generalizados ésta fórmula incluye funciones trigonométricas, pero cuando las tres cantidades vectoriales son perpendiculares como se puede apreciar en la figura 1.10, estas funciones no son necesarias.

En la figura 1.3 se puede observar que el flujo en el entrehierro es radial y uniforme, de manera que la triple perpendicularidad se mantiene desde que el conductor penetra a la zona polar (poco menos de  $90^\circ$  antes de la posición de la espira en la figura 1.10) hasta que sale de ella ( poco menos de  $90^\circ$  después). En total son casi  $180^\circ$ , durante los cuales la fuerza electromotriz permanece en un valor constante. La polaridad se puede determinar por la regla de la mano derecha<sup>1</sup>. El extremo a del costado a-b será positivo mientras se deslice frente al polo norte, pero se volverá negativo al pasar frente al polo sur.

La fuerza electromotriz total de la espira  $E$  será del doble de la de un solo costado y es alterna, según la figura 1.11.

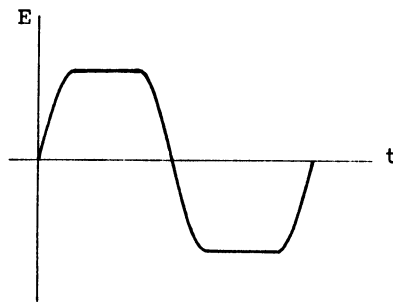


FIGURA 1.11. FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA EN LA ESPIRA.

Como se desea una máquina de corriente directa es necesario rectificar la f.e.m. alterna mediante la acción del conmutador. En la figura 1.12 se pueden ver varias posiciones sucesivas de la espira.

---

<sup>1</sup> Colocando los tres primeros dedos de la mano derecha simulando los tres ejes de un sistema coordenado, al orientar el pulgar según la dirección de la velocidad, el índice según la dirección del flujo, el medio apuntará hacia el polo positivo de la f.e.m. inducida.

En (1) la espira se encuentra en un plano perpendicular al flujo, por lo que no hay inducción. El circuito corto que provocan las escobillas al tocar las dos delgas del conmutador es aparente. En (2) y (3) se muestran dos posiciones en que a-b se desliza frente al polo norte; a es positiva y conecta con la escobilla A, mientras c-d se desliza frente al polo sur; d es negativa y conecta con la escobilla B. En (4) aparece otro instante de conmutación.

En (5) y (6) se muestra dos posiciones en que a se ha vuelto negativa y d positiva, pero ahora d conecta con la escobilla A y a con la escobilla B, de modo que la escobilla A se conserva positiva y la B negativa.

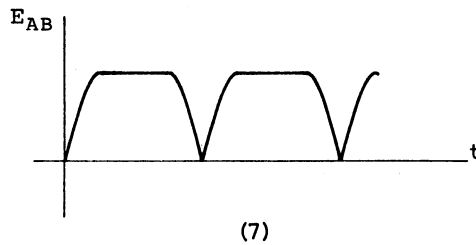
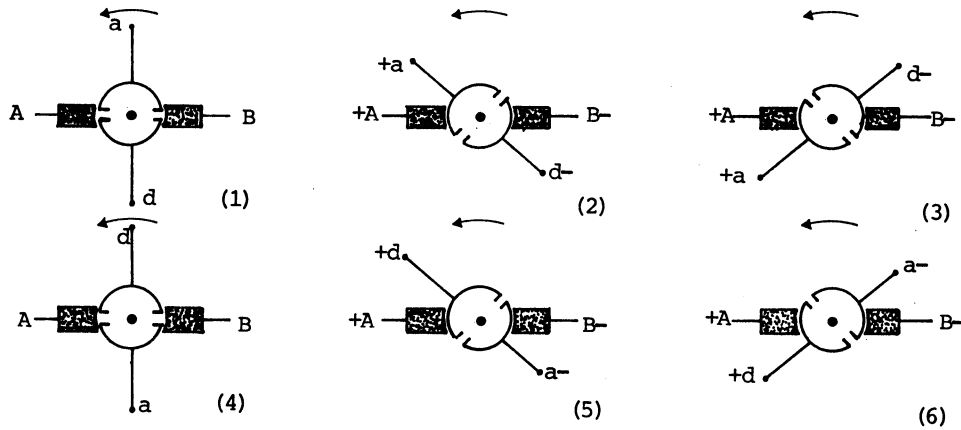


FIGURA 1.12. RECTIFICACIÓN DE LA FUERZA ELECTROMOTRIZ. (1) AL (6) VARIAS POSICIONES DE LA ESPIRA DURANTE LA RECTIFICACIÓN. (7) FORMA DE ONDA RECTIFICADA.

La fuerza electromotriz inducida en una sola espira tiene varios inconvenientes. Los principales serían:

- Magnitud muy pequeña, que no sería aprovechable.

- Pulsaciones con valores nulos en cada instante de conmutación.

La solución al primer problema sería en parte, utilizar bobinas de varias espiras como muestra la figura 1.13.1. La solución total se comentará en la figura 1.14.

La solución al problema de pulsación consiste en colocar en el núcleo un número mayor de bobinas, de tal manera que las escobillas recolecten puras crestas de onda, efectuando las conmutaciones lejos de los valores nulos. Esto se observa en la figura 1.13.2.

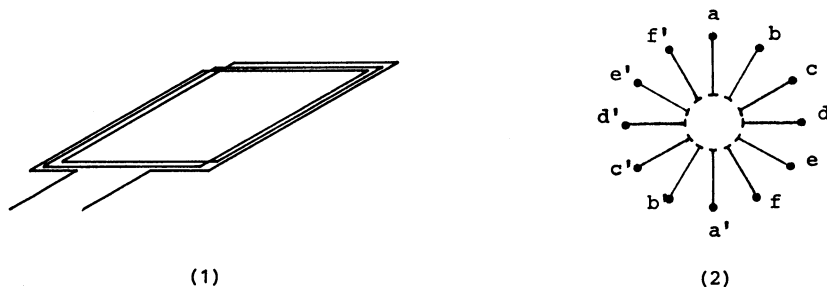


FIGURA 1.13. PRIMERAS SOLUCIONES A LOS INCONVENIENTES DE UNA ARMADURA DE UNA ESPIRA.

(1) BOBINA DE VARIAS ESPIRAS. (2) MAYOR NÚMERO DE BOBINAS.

Al parecer un mayor número de bobinas, el conmutador también debe seccionarse en mayor número de delgas, pero ahora se puede percibir un desperdicio en este nuevo arreglo.

Debido a las zapatas polares, el flujo magnético se extiende a todo el núcleo de armadura, de manera que solamente la bobina a-a' no trabaja en este momento, lo que significa que *hay inducción* en las bobinas b-b', c-c', d-d', e-e' y f-f' y las escobillas solamente recolectarían d-d'.

**1.3.2. EMBOBINADOS DE ARMADURA REALES.** Otro paso más hacia el aprovechamiento de toda la armadura, sería interconectar las bobinas de modo que se puedan sumar todas las fuerzas electromotrices. El circuito que resulta, es complicado y su estudio se extiende fuera del alcance de esta breve exposición, de modo que solamente se mostrarán en la figura 1.14, las primeras conexiones. Obsérvese que la delga a ahora no se encuentra frente a la bobina a-a', si no casi a 90°.



A su vez la bobina a-a' no termina en la delga opuesta, si no en la b, en donde se inicia la bobina b-b' y así sucesivamente.

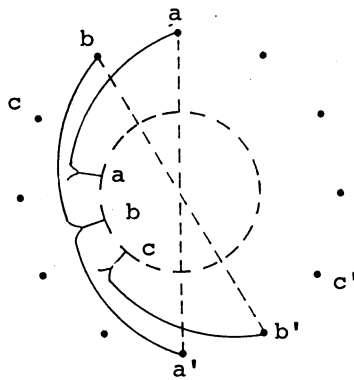


FIGURA 1.14. LAS PRIMERAS CONEXIONES DE UN EMBOBINADO REAL.

Al cabo de media vuelta se encontrará que comienzan a acomodarse dos costados de diferentes bobinas en cada ranura, y el resultado final es que quedan todas las bobinas en serie. En la figura 1.15 se presenta una forma más clara de como se integra el circuito, aunque ya no corresponde a su apariencia real. Se puede notar que las escobillas dividen al embobinado en dos ramas paralelas.

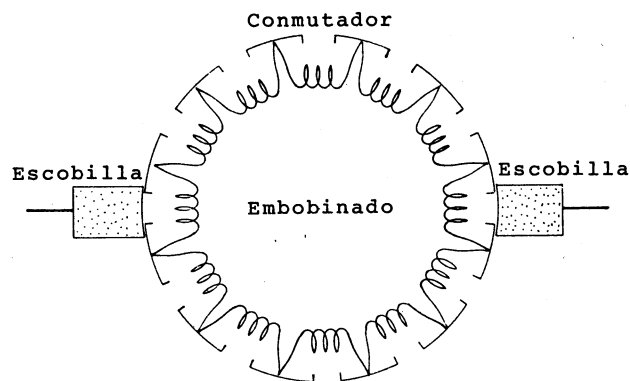


FIGURA 1.15. CIRCUITO DE UN EMBOBINADO REAL.

Un mejor aprovechamiento todavía, se tiene en las máquinas multipolares, en donde los costados de una bobina ya no se encuentran en ranuras diametrales, sino frente a dos polos consecutivos.

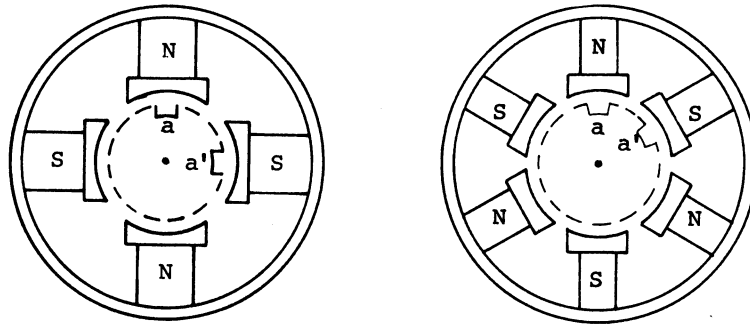


FIGURA 1.16. MÁQUINAS MULTIPOLARES. COMO EJEMPLO LA TETRAPOLAR Y LA HEXAPOLAR.

A partir de la tetrapolar se puede desarrollar un tipo de embobinado que tendría dos ramas paralelas independientemente del número de polos, o se puede continuar con un desarrollo similar al de la figura 1.14 que requiere un número de escobillas igual al de polos y se forman otras tantas ramas en paralelo.

### 1.3.3. FUERZA ELECTROMOTRIZ ENTRE LAS ESCOBILLAS DE UNA MÁQUINA REAL.

En el subtema 1.3.1 se planteó la fuerza electromotriz inducida en un costado de espira

$$e = Blv$$

en donde  $B$  es la densidad de flujo, que se puede evaluar como el flujo por polo dividido entre la parte de área lateral de armadura bajo el dominio de un polo.

$$B = \frac{\phi}{2\pi r l / P} = \frac{P\phi}{2\pi r l}$$

donde:

$\phi$  es el flujo por polo.

$r$  es el radio del núcleo de armadura.

$l$  es la longitud del núcleo de armadura.

$P$  es el número de polos.

De la mecánica rotacional se tiene que la velocidad tangencial es el producto de la velocidad angular por el radio:

$$v = \omega r$$

de modo que sustituyendo en la fórmula de fuerza electromotriz inducida queda:

$$e = \frac{P\phi\omega}{2\pi}$$

Considerando que hay  $z$  costados de espiras en toda la periferia de la armadura, la fuerza electromotriz entre escobillas sería  $ze$ . Pero como se forman  $A$  ramas en paralelo, entonces

será  $\frac{ze}{A}$ .

Por lo tanto:

$$E = \frac{P\phi z\omega}{A 2\pi}$$

que es la f.e.m. entre escobillas de una armadura real. Las constantes se pueden reunir en una sola:

$$K = \frac{Pz}{A 2\pi}$$

por lo que finalmente se tiene

$$E = K\phi\omega$$

La f.e.m. es proporcional al flujo polar y a la velocidad angular de la máquina.

**1.3.4. CURVA DE SATURACIÓN EN VACÍO.** En la última fórmula de f.e.m. entre escobillas, la componente  $\phi$  (flujo polar) no es una cantidad mensurable en el exterior de la máquina, pero el flujo es producido por la corriente de excitación, la cual sí es muy fácil de medir. En el subtema 1.2.4 se estudió la función de Froelich que establece la relación entre flujo y corriente de excitación.

Sustituyendo se obtiene

$$E = K \frac{c I_{ex}}{b + I_{ex}} \omega$$

En esta nueva expresión se tiene el producto de dos constantes que se pueden reunir en una sola. Sea:

$$a = Kc$$

entonces:

$$E = \frac{a I_{ex}}{b + I_{ex}} \omega$$

El parámetro  $a$  reúne características del circuito de armadura ( $K$ ), y del circuito magnético ( $c$ ), de modo que la nueva fórmula representa el proceso integral de inducción en la máquina.

Graficando esta fórmula en un sistema coordenado cuya abscisa sea la corriente de excitación  $I_{ex}$  y la ordenada la f.e.m.  $E$ , para una velocidad constante (de preferencia la nominal) se obtiene de nuevo la curva de magnetización pero con un cambio en la escala de las ordenadas.

A esta nueva gráfica se le da el nombre de *curva de saturación en vacío*.

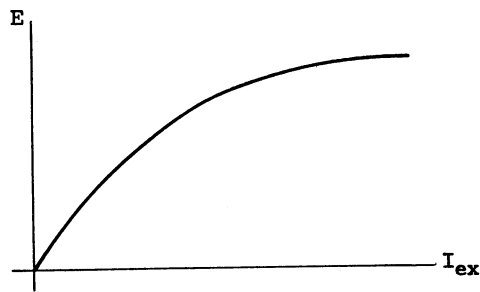


FIGURA 1.17. CURVA DE SATURACIÓN EN VACÍO CON FUNCIÓN DE FROELICH.

Por otra parte, la curva de saturación en vacío se puede obtener en forma práctica para una máquina real. Se requiere acoplar la máquina a un motor, para hacerla girar, de ser posible a su velocidad nominal, sin variaciones. En las terminales de excitación se suministra la corriente correspondiente por medio de una fuente externa, incluyendo un medidor y un reóstato para hacerla variar. Las terminales de armadura deben permanecer en circuito abierto (en vacío) para evitar pérdidas de voltaje, y entre ellas se conecta un voltímetro. Este arreglo se muestra en la figura 1.18 (1), en la que aparece la simbología típica de este tipo de máquina.

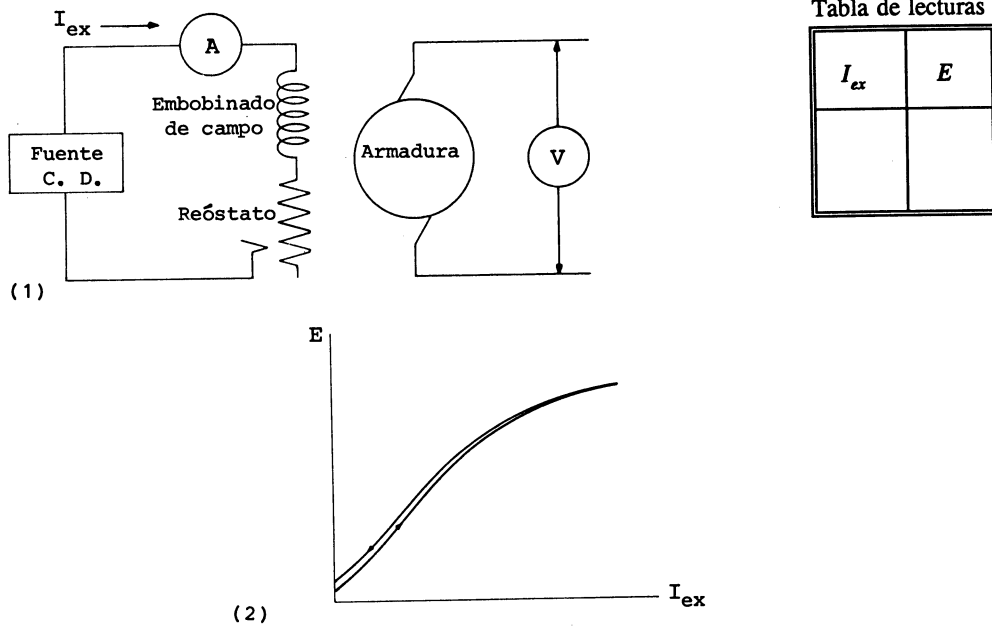


FIGURA 1.18. OBTENCIÓN PRÁCTICA DE LA CURVA DE SATURACIÓN EN VACÍO.  
(1) CIRCUITO DE PRUEBA (2) CURVA RESULTANTE.

La prueba debe iniciarse sin excitación; aparecerá la f.e.m. debida al magnetismo remanente. Este es el primer par de lecturas que se deben anotar en la tabla. Posteriormente se toman las siguientes pares de lecturas, siempre con corriente de excitación ascendente. Al llegar al último punto se comienza una nueva serie de lecturas en dirección descendente hasta el punto de iniciación. Si hay histéresis se genera una curva ascendente y otra descendente.

Aplicando estos resultados a la función de Froelich se obtienen los parámetros **a** y **b**.

### **EJEMPLO 1.1**

A un generador de C.D. cuyas características nominales son:

250 V

40 A

1500 RPM

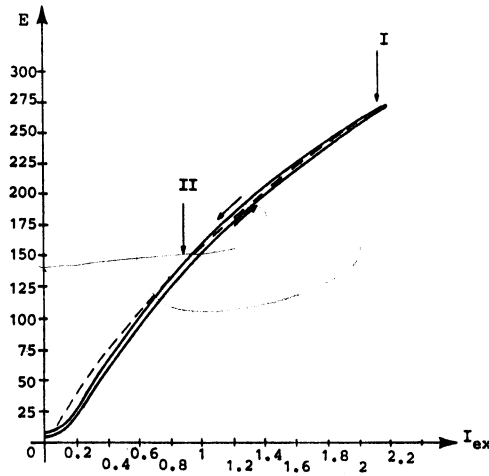
se le hizo la prueba de saturación en vacío, girándolo a su velocidad nominal y tomando lecturas en trayectoria ascendente y descendente, con los siguientes resultados:

$I_{ex}$	$E$
0	4
0.18	22
0.85	136
0.53	215
1.98	258
2.1	270
1.96	259
1.6	225
0.86	140
0.21	26
0	5

1. Trazar su curva de saturación en vacío con sus trayectorias ascendente y descendente.
2. Elegir dos puntos de apoyo y obtener los parámetros de la función de Froelich.
3. Verificar la precisión de la función obtenida.

**Solución**

1.



Trazo de las trayectorias ascendente y descendente de la curva de saturación en vacío con línea continua y verificación de la función de Froelich en línea punteada.

2. Eliendo como primer punto de apoyo el extremo de la curva, se tiene:

$$270 = \frac{a \times 2.1}{b + 2.1} \omega$$

$$165 = \frac{a \times 2.8}{b + 2.8} \quad 1200 \times \frac{2\pi}{60} = \omega$$

al tener en cuenta que la máquina giró a su velocidad nominal:

$$\omega = 125.66$$

$$\omega = 1500 \times \frac{2\pi}{60} = 157$$

entonces:

$$270 = \frac{a \times 2.1}{b + 2.1} \times 157$$

$$165 = \frac{a \times 2.8}{b + 2.8} \times 125.66 \quad (I)$$

Escogiendo arbitrariamente un segundo punto por la región central de la curva, se tiene:

$$140 = \frac{a \times 0.86}{b + 0.86} \times 157$$

$$105 = \frac{a \times 1.3}{b + 1.3} \times 125.66 \quad (II)$$

Con (I) y (II) se forma un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son a y b. Resolviéndolo se obtiene:

$$a = 4.828$$

$$b = 3.799$$

de modo que la función de Froelich queda:

$$E = \frac{4.828 I_{ex} \omega}{3.799 + I_{ex}}$$

3. Tabulando la función obtenida para las mismas corrientes de excitación de la prueba se tiene:

TRAYECTORIA ASCENDENTE		TRAYECTORIA DESCENDENTE	
$I_{ex}$	$E$	$I_{ex}$	$E$
0	0	2.1	270
0.18	34.3	1.96	258.1
0.85	138.3	1.6	224.1
1.53	217.75	0.86	140
1.98	259.8	0.21	39.7
2.1	270	0	0

La curva de Froelich es sólo una. Si se dibuja sobre la misma figura de la curva de saturación, se puede apreciar que:

- La curva de Froelich pasa por el origen y por tanto no tiene en cuenta el magnetismo remanente.
- Al principio de la figura, la curva de Froelich va por encima de las dos trayectorias. Su aproximación es algo burda.
- En la región normal de trabajo de la máquina las curvas reales y la de Froelich prácticamente se confunden. Para la región de trabajo de la máquina, la precisión de la función es suficientemente satisfactoria.

#### COMENTARIOS

Como se trata de una función aproximada, no siempre se tiene la suerte de que al primer par de valores elegido arbitrariamente se obtenga una precisión satisfactoria. En ocasiones hay que intentarlo varias veces, o incluso, recurrir a desplazar las asíntotas hasta obtener suficiente precisión.



## 1.4. LAS CORRIENTES DE ARMADURA

Hasta ahora se ha visto solamente la inducción de la fuerza electromotriz, pero no se ha sacado de ella ningún aprovechamiento. Esto sucedería cuando en el exterior de la máquina se conecte una resistencia de carga.

Para iniciar el razonamiento, recurriremos nuevamente a la armadura más simple, como es la de una sola espira en la figura 1.10, que repetimos a continuación en la figura 1.19, agregándole en el exterior una resistencia de carga  $R$ , con lo que se cierra el circuito y se origina una corriente circulante.

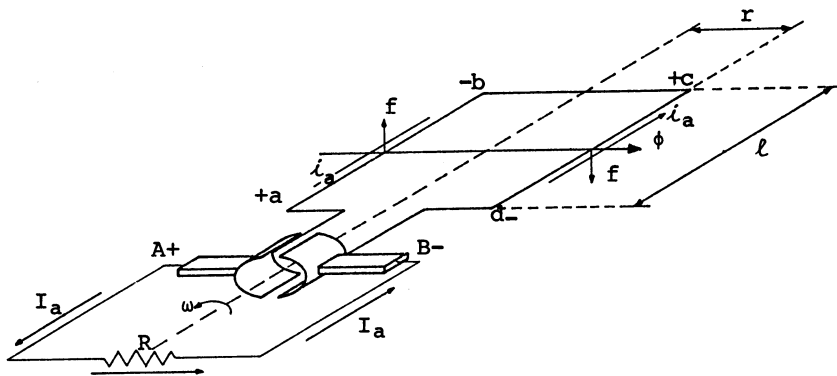


FIGURA 1.19. RESISTENCIA DE CARGA Y CORRIENTE DE ARMADURA.

Si consideramos que la espira está trabajando como fuente de potencial, la corriente sale de ella por la escobilla A que es positiva, atraviesa la resistencia de carga y regresa por la escobilla B negativa,

para cerrar su circuito a través de la espira y darle la vuelta como indica la figura. A esta corriente se le dará el nombre de *corriente de armadura*.

La corriente de armadura en el exterior de la máquina se identificará como  $I_a$ , mientras que la corriente en un costado de espira será  $i_a$ . Para la figura 1.19,  $I_a$  e  $i_a$  son exactamente la misma, pero cuando aparezcan ramas paralelas en una armadura real, entonces

$$i_a = \frac{I_a}{A}$$

**1.4.1. PAR ELECTROMAGNÉTICO.** La corriente de armadura circula por los costados de la espira a-b y c-d en presencia del flujo magnético, lo que origina fuerzas en los conductores cuyo valor es:

$$f = B l i_a$$

La perpendicularidad entre las magnitudes evita el adicionar funciones trigonométricas a la fórmula. El sentido de la fuerza se puede deducir por la regla práctica de la mano derecha<sup>2</sup>, resultando como se indica en la figura 1.19, fuerzas de sentido opuesto en cada costado y formando entre las dos, un par que en la modalidad de trabajo de los generadores, se opone a la velocidad (contrapar).

A este par se le da el nombre de *par electromagnético*.

**1.4.2. PAR ELECTROMAGNÉTICO DE UNA ARMADURA REAL.** Cada costado de la espira en la figura 1.19 aporta su momento al par, cuyo valor es el producto de la fuerza por su radio de acción.

$$T_c = f r$$

---

<sup>2</sup>Para la fuerza sobre una corriente, muchos autores hacen mención a una regla de la mano izquierda. Como todos estos fenómenos electromagnéticos tienen un origen común (Principios de Lorentz), prefiero usar siempre la misma regla como ya se hizo para la fuerza electromotriz, y que además es más fácil de recordar. Formando el sistema trirrectangular con la mano derecha, se orienta el pulgar según la corriente, el índice según el flujo magnético y el dedo medio indica la dirección de la fuerza.

o sea:

$$T_c = B l i_a r$$

Según se dedujo en el subtema 1.4.3, la densidad de campo es

$$B = \frac{P\phi}{2\pi r l}$$

Por otra parte, la corriente en un costado de espira dependiendo de las ramas en paralelo del embobinado, es

$$i_a = \frac{I_a}{A}$$

Por tanto sustituyendo:

$$T_c = \frac{P\phi I_a}{2\pi A}$$

Ahora bien, como en la armadura hay  $z$  costados en total, cada uno con su aportación, el par electromagnético total es

$$T_e = z T_c$$

o sea:

$$T_e = \frac{P\phi z I_a}{2\pi A}$$

También en el subtema 1.4.3 se definió una constante  $K$  :

$$K = \frac{Pz}{2\pi A}$$

de modo que:

$$T_e = K \phi I_a$$

El par electromagnético es proporcional al flujo polar y a la corriente de armadura. Una forma más práctica sería recurrir a la función de Froelich.

$$T_e = K \frac{c I_{ex}}{b + I_{ex}} I_a$$

con lo que obtiene finalmente:

$$T_e = \frac{a I_{ex}}{b + I_{ex}} I_a$$

**1.4.3. MOTOR DE CORRIENTE DIRECTA.** Observemos nuevamente nuestra armadura elemental de una espira, solo que ahora en vez de suministrarle movimiento desde el exterior, se le va a aplicar una fuente de C.D. como muestra la figura 1.20.

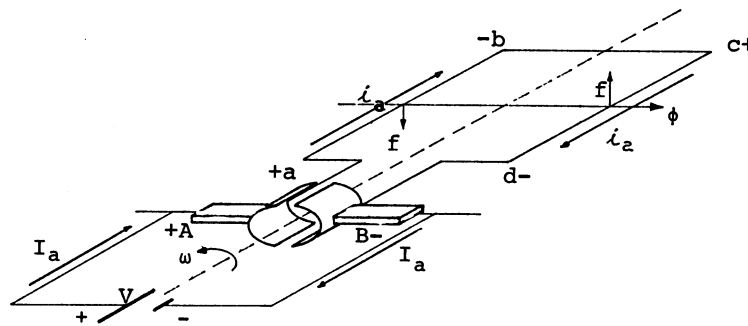


FIGURA 1.20. PRINCIPIO DEL MOTOR DE C.D.

La fuente proporciona la corriente que atraviesa la armadura, por lo que se sigue identificando como  $I_a$  en el exterior de la máquina e  $i_a$  en cada costado de espira. Esta corriente sale por el polo positivo de la fuente, de manera que comparando con la figura 1.19, su sentido se ha invertido, como también

el sentido del par electromagnético, que ahora es a favor de la velocidad.

Independientemente del cambio de sentido, el origen del par es el mismo que para la modalidad de generador, de manera que su magnitud en una máquina real sería:

$$T_e = \frac{aI_{ex}}{b+I_{ex}} I_a$$

El par da origen al movimiento, y habiendo flujo y velocidad se induce una fuerza electromotriz en forma idéntica a como sucedía en el generador:

$$E = \frac{aI_{ex}}{b+I_{ex}} \omega$$

La polaridad sigue siendo también igual que en el generador, de modo que quedaría en oposición con el voltaje aplicado. Muchos autores le llaman por esta razón *fuerza contraelectromotriz*.

La fuerza electromotriz crece con la velocidad, y cuando llega a ser igual al voltaje aplicado deja de circular corriente, cesa el par y el motor queda girando a su velocidad nominal.

Obsérvese que para trabajar como motor, se inviertan los sentidos de dos variables (corriente y Par) mientras los sentidos de las otras dos variables permanecen igual (Velocidad y f.e.m..)

**1.4.4. CONVERSIÓN DE ENERGÍA.** Se ha visto que tanto en la modalidad de generador como en la de motor, existen una fuerza electromotriz:

$$E = \frac{aI_{ex}}{b+I_{ex}} \omega$$

y un par electromagnético:

$$T_e = \frac{a I_{ex} I_a}{b + I_{ex}}$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda, se obtiene:

$$\frac{E}{T_e} = \frac{\omega}{I_a}$$

y al quitar denominadores:

$$E I_a = T_e \omega$$

que es la fórmula de conversión de energía (más propiamente conversión de potencia).

Usando el Sistema Internacional de Unidades se tiene para el primer miembro:

$$V \cdot A = W$$

y para el segundo miembro:

$$N \cdot m \cdot rad/s = W$$

**1.4.5. REACCIÓN DE ARMADURA.** Teniendo en cuenta que las espiras de las figuras 1.19 y 1.20 tienen un eje magnético, el paso de corriente por ellas origina un flujo de armadura que produce una distorsión del flujo polar. Lo mismo que sucede en la armadura de una espira ocurre en una armadura real.

A este flujo se le denomina *reacción de armadura*. La forma como se origina se muestra en la figura 1.21(1) para la modalidad de generador, y en la misma figura 1.21(2) la distorsión que ocasiona en el flujo polar.

Las escobillas deben situarse de tal manera que la conmutación se lleve a cabo sobre la bobina que no trabaja (la que se encuentra en un plano perpendicular al flujo polar), según se analizó en el estudio de la armadura. Ahora bien, si al circular corriente por la máquina, se produce una distorsión, de modo que la densidad de flujo ya no es constante en la superficie polar, se concentra

en un lado de la zapata y escasea en el otro, y aparece un flujo resultante en una posición que no concuerda con las escobillas, entonces aparecen problemas en la conmutación que afectan al óptimo funcionamiento de la máquina, hacen bajar la eficiencia y causan desgaste prematuro en escobillas y conmutador. Se trata, por lo visto de un efecto indeseable que es necesario corregir.

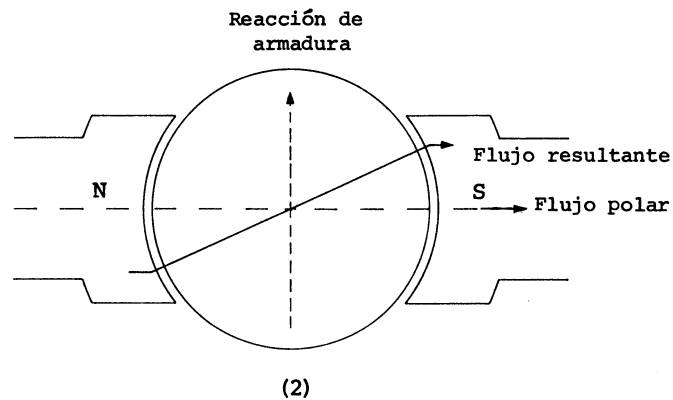
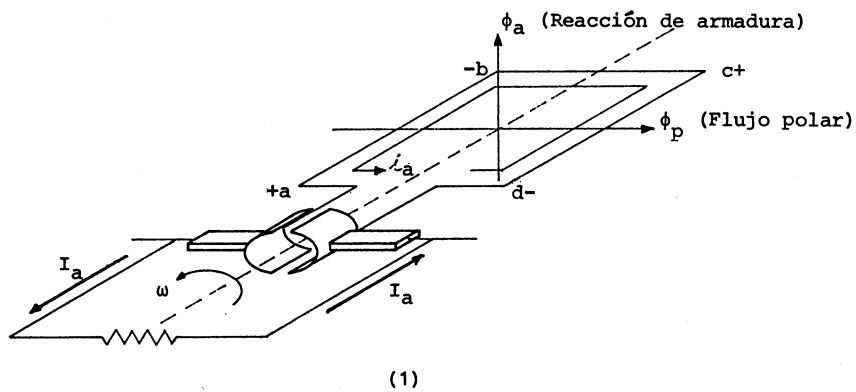


FIGURA 1.21. OTRO EFECTO DE LAS CORRIENTES DE ARMADURA. (1) FLUJO DE REACCIÓN DE ARMADURA.  
(2) DISTORSIÓN DEL FLUJO POLAR.

\* La forma más usada en la actualidad para compensar la reacción de armadura, es el uso de interpolos. Se trata de pequeñas piezas polares situadas entre los polos principales, con bobinas de

alambre grueso y pocas vueltas para conectar en serie con la armadura. Su fuerza magnetomotriz debe ser igual en magnitud y de sentido opuesto a la de la reacción de armadura.

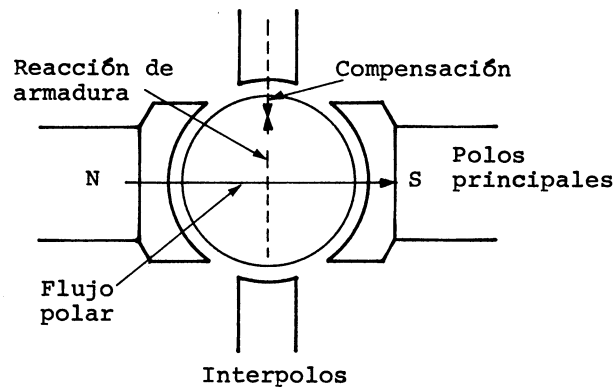


FIGURA 1.22. COMPENSACIÓN DE LA REACCIÓN DE ARMADURA MEDIANTE INTERPOLOS SERIE.

La excitación de interpolos en serie con la armadura permite que el flujo compensador sea siempre opuesto a la reacción y que sus magnitudes sean iguales, cualquiera que sea el sentido e intensidad de la corriente.

En máquinas de buena calidad y dentro de sus condiciones normales de trabajo, no se detectan distorsiones de fuerzas electromotrices debido a su correcta compensación.

## 1.5. PÉRDIDAS

Se ha visto que la armadura es el órgano en el cual se lleva a cabo la conversión de energía, de



acuerdo con la fórmula:

$$EI_a = T_e \omega$$

Dos de estas variables, la fuerza electromotriz y el par electromagnético normalmente no son medibles en el exterior de la máquina cuando está trabajando. La fuerza electromotriz difiere ligeramente del voltaje externo debido a pérdidas eléctricas.

El par electromagnético difiere ligeramente del par mecánico en la flecha en virtud de las pérdidas asociadas al movimiento de rotación.

**1.5.1. PÉRDIDAS ELÉCTRICAS.** Se presenta una pequeña pérdida de voltaje originada por una resistencia en el circuito de armadura, y que se reparte en los siguientes elementos:

- Embobinado de armadura.
- Conmutador.
- Superficie de contacto conmutador-escobillas.
- Escobillas.
- Embobinado interpolar.
- Embobinado de excitación en serie (para máquinas serie y compuestas).

Para referirnos a todo este conjunto lo llamaremos simplemente *resistencia de armadura* y lo representaremos por  $r_a$

La superficie de contacto conmutador-escobillas y las escobillas son los elementos que requieren mantenimiento constante. La superficie se ensucia fácilmente dando lugar a un aumento en la resistencia de armadura. Requiere de una limpieza cuidadosa, que a la vez de ser efectiva, no cause desgaste al conmutador.

Las escobillas se desgastan y es necesario reponerlas cuando han decrecido notoriamente.

La medición directa de la resistencia también representa un problema, ya que tendría que ser con la armadura estática y en estas condiciones la sola aportación de la superficie de contacto da un valor que llega a alcanzar diez veces la resistencia de todo el circuito en condiciones dinámicas.

Sin embargo, resulta fácil calcular su valor dinámico cuando hay buena compensación de la reacción de armadura y no se detectan distorsiones en la fuerza electromotriz con carga (esto se verá en la curva de regulación de voltaje en el subtema 1.6.2 a) y b)). Se trabaja la máquina como generador, girándola a velocidad constante y excitándola con una fuente externa para tener también corriente de excitación constante.

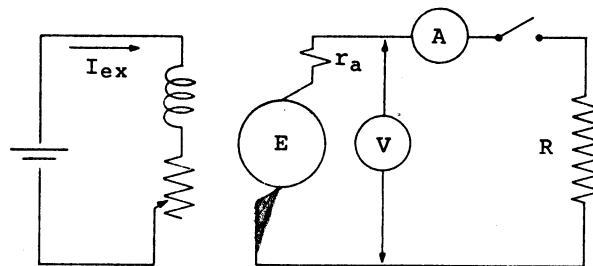


FIGURA 1.23. PRUEBA PARA DETERMINAR LA RESISTENCIA DE ARMADURA.

En las salidas de armadura se incluye una resistencia capaz de hacer circular una corriente alrededor del valor nominal, un interruptor, un voltímetro y un amperímetro como indica la figura 1.23.

Con el interruptor abierto, se mide el voltaje en vacío  $V_0$ . Como no hay corriente, no se presentan pérdidas y entonces:

$$V_0 = E$$

Con el interruptor cerrado, el voltaje externo es igual a la fuerza electromotriz menos las pérdidas:

$$V = E - r_a I_a$$

o sea:

$$V = V_0 - r_a I_a$$

de donde:

$$r_a = \frac{V_0 - V}{I_a}$$

**1.5.2. PÉRDIDAS MECÁNICAS.** Las pérdidas mecánicas se deben a dos factores: La fricción y la ventilación.

La fricción se presenta en los apoyos de la flecha (o cojinetes) y en la superficie de contacto conmutador-escobillas. En los apoyos tiene un valor relativamente alto cuando son de tipo chumacera, en cambio adquiere valores reducidos si son de tipo rodamientos. En el conmutador no es fácil reducir la fricción, ya que ahí se requiere un buen contacto que no acarree más pérdidas de las necesarias en la resistencia del circuito de armadura. Pequeñas inclusiones de grafito en las escobillas logran una lubricación adecuada sin impedir un buen contacto.

El parámetro que servirá para evaluar las pérdidas será el par de fricción, cuyo sentido es siempre opuesto a la dirección de rotación. Generalmente se trata de fricción viscosa debido a la lubricación, y por tanto el par de fricción es una función de la velocidad.

Las pérdidas por ventilación se presentan en aquellas máquinas que tienen un ventilador interno para ayudar al enfriamiento. También se evalúan por su par de oposición y éste es función de la velocidad.

**1.5.3. PÉRDIDAS MAGNÉTICAS.** Las pérdidas magnéticas también se manifiestan por un par en oposición al sentido de rotación, y tienen dos componentes que son la histéresis y las corrientes parásitas.

Recordando que la histéresis es la propiedad de los materiales ferromagnéticos de retener parte del flujo con que fueron magnetizados, supóngase en la figura 1.24(1), una posición de la armadura, magnetizada por el flujo polar. En la figura 1.24(2) la armadura ha girado un pequeño ángulo, reteniendo su flujo de histéresis. Al ser atraído el flujo de histéresis por el flujo polar se genera el par de histéresis, en oposición al sentido de giro.

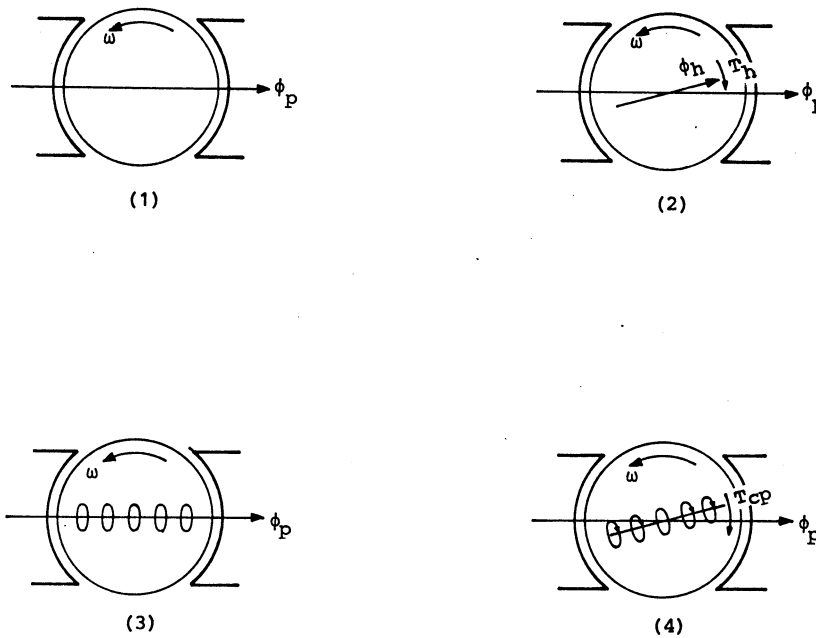


FIGURA 1.24. PÉRDIDAS MAGNÉTICAS. (1),(2) POR HISTÉRESIS (3),(4) POR CORRIENTES PARÁSITAS.

Las corrientes parásitas, también llamadas corrientes de eddy<sup>3</sup> o corrientes de Foucault, se deben a que el material ferromagnético es además conductor de la electricidad. Esto ocasiona que se organicen circuitos en forma de espiras cerradas, alrededor del flujo como se ve en la figura 1.24.3. Al moverse estos circuitos junto con el núcleo, varía el flujo en ellos, se inducen fuerzas electromotrices y circulan corrientes, formando entre todos un solenoide con su flujo central, que al ser atraído por el flujo polar se forma el par debido a corrientes parásitas  $T_{cp}$ , como en la figura 1.24(4).

Las pérdidas por histéresis se reducen usando en la armadura un núcleo de área de histéresis cerrada, y las pérdidas por corrientes parásitas también se reducen construyendo el núcleo con material laminado. Esto puede apreciarse en la figura 1.2.

**1.5.4. PÉRDIDAS ROTACIONALES.** Como se explicó anteriormente, tanto las pérdidas mecánicas como las magnéticas se manifiestan como pares de oposición al movimiento y solo cuando hay rotación. Por estas razones, las agruparemos con el nombre de **pérdidas rotacionales  $T_r$** .

$$T_r = T_{fric} + T_{vent} + T_{hist} + T_{cp}$$

Las pérdidas rotacionales son función de la velocidad y del grado de saturación del circuito magnético, sin embargo al nivel elemental de este estudio se tratarán como constantes.

Uno de los factores que más contribuye a la variación del par con la velocidad es el ventilador, de manera que las máquinas sin ventilador pueden manejarse sin gran error como si tuvieran pérdidas rotacionales constantes.

Existen varios métodos para determinar las pérdidas rotacionales. Uno de los más simples es hacer

---

<sup>3</sup>La palabra eddy del idioma inglés se traduce como remolino, y así se debería llamar propiamente en español esta corriente, sin embargo se ha hecho costumbre usar eddy como tecnicismo tal como aquí se menciona.

girar la máquina como motor en vacío, midiendo la corriente de excitación y de armadura. Se requiere haber obtenido antes su curva de saturación en vacío y la expresión de Froelich.

Si el motor trabaja en vacío, no tiene par mecánico en la flecha. El par electromagnético se emplea íntegramente en vencer las pérdidas rotacionales.

$$T_r = T_e = \frac{a I_{ex}}{b + I_{ex}} I_a$$

**1.5.5. TRABAJO INTEGRAL DE LA MÁQUINA.** Se entenderá como trabajo integral de la máquina, el planteamiento de la conversión de energía considerando las pérdidas que se acaban de estudiar. Esto puede aparecer en forma muy sencilla, simplemente repitiendo la figura 1.1 pero ahora con todos los detalles mencionados.

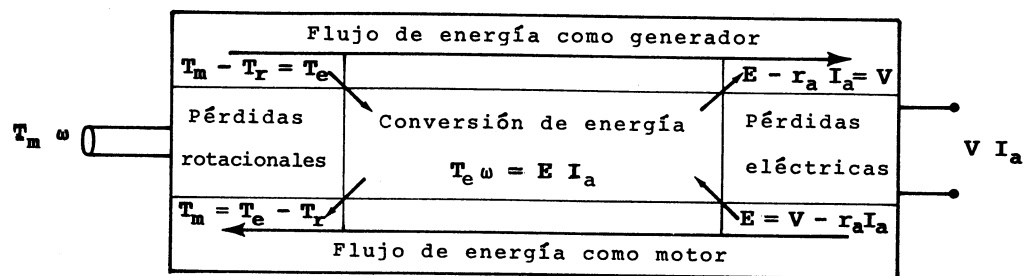


FIGURA 1.25. CONVERSIÓN DE ENERGÍA EN UNA MÁQUINA DE CORRIENTE DIRECTA.

**1.5.6. ECUACIONES BÁSICAS DE LA MÁQUINA DE C.D.** Este subtema es solamente un resumen de la teoría básica de la máquina. Se concentra en cuatro ecuaciones que serán el punto de partida para el análisis de respuesta de la máquina.

Curva de saturación en vacío	$E = \frac{aI_{ex}}{b+I_{ex}} \omega$
Conversión de energía	$EI_a = T_e \omega$
Pérdidas eléctricas	$V = E \pm r_a I_a$
Pérdidas rotacionales	$T_e = T_m \pm T_r$

CUADRO 1.1 ECUACIONES BÁSICAS DE LA MÁQUINA DE C. D.

En las ecuaciones de pérdidas se usará el signo positivo en la modalidad de motor y el signo negativo en la de generador.

En la teoría apareció además la ecuación de par electromagnético. No se ha mencionado aquí, porque está implícita en las dos primeras, y para obtenerla basta sustituir la curva de saturación en vacío en la ecuación de conversión de energía.

## 1.6. ANALISIS DE RESPUESTA

Se ha visto que la máquina manifiesta su comportamiento a través de cuatro variables externas, que son el voltaje aplicado  $V$ , la corriente de armadura  $I_a$ , la velocidad angular  $\omega$ , y el par mecánico  $T_m$ . Sin embargo, no hay que olvidar que el proceso de conversión de energía tiene su

apoyo en el flujo polar, el cual se controla desde el exterior mediante la corriente de excitación  $I_{ex}$  que viene a constituir una quinta variable.

El asignar un valor concreto a una de las variables repercute cuando menos en el valor de otra de ellas, pero a menudo sucede en más de una.

A la acción de asignar un valor a una variable se le conoce aplicar una señal, y el valor que adquiere otra u otras variables será la *respuesta de la máquina*.

**1.6.1. CLASIFICACIÓN.** En máquinas de corriente directa se presentan diversas características de respuesta según la forma de excitación, de modo que esta particularidad es la que define la clasificación tanto de los generadores como de los motores.

GENERADOR DE C.D.	}	CON EXCITACIÓN INDEPENDIENTE	}	ACUMULATIVA DIFERENCIAL
		CON EXCITACIÓN EN DERIVACIÓN		
		CON EXCITACIÓN EN SERIE		
		CON EXCITACIÓN COMPUESTA		
MOTORES DE C.D.	}	CON EXCITACIÓN INDEPENDIENTE	}	ACUMULATIVA DIFERENCIAL
		CON EXCITACIÓN EN DERIVACIÓN		
		CON EXCITACIÓN EN SERIE		
		CON EXCITACIÓN COMPUESTA		

Como se puede observar, la clasificación es igual para los generadores y para los motores, sin embargo, la respuesta es diferente en cada modalidad, y habrá necesidad de analizar cada uno de los casos.



**1.6.2. GENERADOR CON EXCITACIÓN INDEPENDIENTE.** Se trata del generador que ha sido fabricado para excitarse en derivación, solo que aquí se va a trabajar con la excitación alimentada por una fuente independiente, como muestra la figura 1.26(1).

El símbolo que aparece a la izquierda es el de una batería, pero puede ser cualquier fuente de C.D. (Generador, C.A. rectificadora, etc.).

Las cuatro ecuaciones básicas para el generador son:

$$E = \frac{a I_{ex}}{b + I_{ex}} \omega$$

$$E I_a = T_e \omega$$

$$V = E - r_a I_a$$

$$T_e = T_m - T_r$$

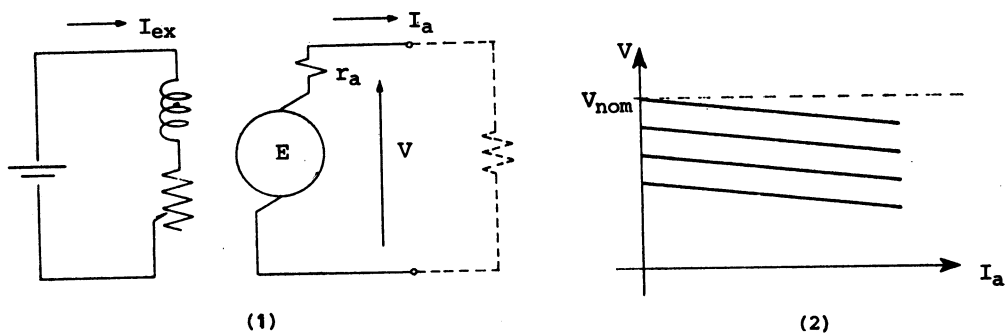


FIGURA 1.26. GENERADOR CON EXCITACIÓN INDEPENDIENTE. 1) DIAGRAMA DE CONEXIONES  
(2) REGULACIÓN DE VOLTAJE.

La operación de la máquina en esta modalidad resulta tan simple, que las cuatro ecuaciones básicas son independientes.

a) **Curva de regulación de voltaje.** Es la gráfica que muestra las variaciones de voltaje (en la escala de las ordenadas) con relación a la corriente de armadura (en la escala de las abscisas).

Se puede considerar que es la curva básica del generador, puesto que representa la principal de sus respuestas.

Teniendo en cuenta la ecuación de pérdidas eléctricas.

$$V = E - r_a I_a$$

se observa claramente que establece la relación entre voltaje y corriente de armadura.

Como la corriente de excitación se suministra por una fuente independiente, no se ve afectada por las variaciones de voltaje externo de la armadura. Si además, el motor que impulsa a este generador es de velocidad constante, entonces la fuerza electromotriz  $E$  también es constante y la ecuación de pérdidas eléctricas adopta la forma típica  $y = mx + b$  (una línea recta) como se muestra en la figura 1.26(2).

b) **Curva práctica de regulación de voltaje.** La gráfica se puede obtener prácticamente en una prueba de laboratorio, impulsando el generador con un motor de velocidad constante y alimentando una corriente de excitación igualmente constante. Es necesario disponer de una resistencia variable de carga, con objeto de poder tomar varios pares de lecturas de voltaje y corriente de armadura para después proceder a graficar los resultados.

Una máquina con buena compensación interpolar da una gráfica de regulación de voltaje recta, como se espera teóricamente. Si no tiene buena compensación interpolar, la fuerza electromotriz no es constante porque se distorsiona a medida que aumenta la corriente de armadura, y la gráfica de regulación de voltaje no es recta, si no que va tomando una curvatura hacia abajo.

c) **Regulación de voltaje.** Se define como regulación de voltaje, la relación entre el voltaje perdido al dar carga a la máquina y el voltaje nominal

$$Reg = \frac{V_0 - V_{pc}}{V_{nom}}$$

en donde

$V_0$  es el voltaje en vacío

$V_{pc}$  es el voltaje con corriente de plena carga.

$V_{nom}$  es el voltaje nominal

Significa *qué fracción del voltaje nominal* pierde la máquina al darle carga, lo que puede interpretarse como un indicador de la calidad de servicio que da el generador.

También suele expresarse en la forma:

$$\%Reg = \frac{V_0 - V_{pc}}{V_{nom}} \times 100$$

### **EJEMPLO 1.2**

Las características de un generador de C.D. son:

250 V

40 A

1500 RPM

En prueba de laboratorio se obtuvieron:

Curva de saturación en vacío:  $E = \frac{4.828 I_{ex}}{3.799 + I_{ex}} \omega$

Resistencia de armadura:  $r_a = 0.19 \Omega$

Resistencia del campo derivado:  $r_c = 122 \Omega$

Par de pérdidas rotacionales:  $T_r = 6.7 \text{ N m}$

Se gira a su velocidad nominal y se excita en forma independiente.

- a) Si se ajusta en vacío a su voltaje nominal, ¿cuál será su corriente de excitación?
- b) Después de ajustado en vacío a voltaje nominal, ¿cuál será su voltaje al circular la corriente de plena carga?
- c) Sabiendo que este generador no tiene distorsión por reacción de armadura, trazar su curva de regulación de voltaje y calcular su porcentaje de regulación.
- d) Si ahora se ajusta al 50% de su voltaje nominal en vacío, calcular su corriente de excitación y su voltaje al darle corriente de plena carga a la armadura.
- e) Calcular la potencia en HP del motor que se requiere para impulsar este generador.

#### SOLUCIÓN

- a) La curva de saturación en vacío es:

$$E = \frac{4.828 I_{ex} \omega}{3.799 + I_{ex}}$$

En vacío  $V = E$  y por tanto  $E = 250 \text{ V}$

y la velocidad angular es:

$$\omega = 1500 \times \frac{2\pi}{60} = 157 \text{ rad/s}$$

Sustituyendo:

$$250 = \frac{4.828 I_{ax}}{3.799 + I_{ax}} \times 157$$

de donde:

$$I_{ax} = 1.869 \text{ A}$$

b) De la ecuación de pérdidas eléctricas:

$$V = E - r_a I_a$$

como la fuerza electromotriz es constante:

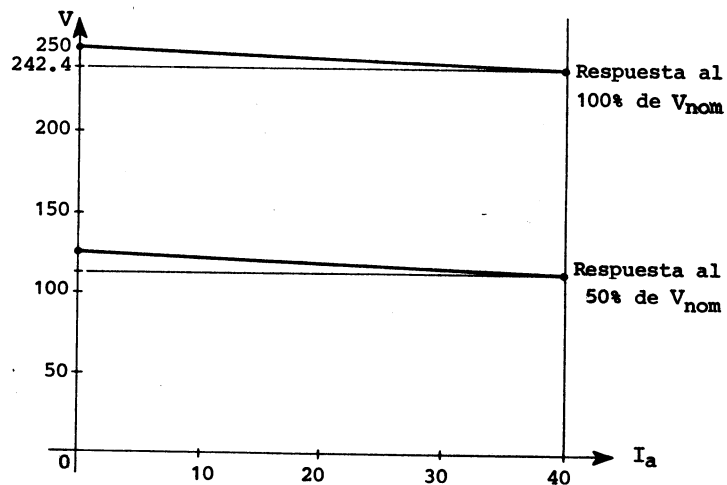
$$V = 250 - (0.19 \times 40)$$

$$V = 242.4 \text{ V}$$

c) La curva de regulación de voltaje en este caso es una recta por lo que bastan dos puntos:

Vacío (0, 250)

Plena carga (40, 242.4)



$$\%Reg = \frac{250 - 242.4}{250} \times 100 = 3.04$$

d) Siguiendo los mismos pasos que para las respuestas a) y b):

$$125 = \frac{4.828 I_{ex}}{3.799 + I_{ex}} \times 157$$

de donde

$$I_{ex} = 0.75 \text{ A}$$

$$V = 125 - (0.19 \times 40)$$

entonces  $V = 117.4 \text{ V}$

e) La potencia mecánica se calcula como:

$$P_m = T_m \omega$$

en donde

$$T_m = T_e + T_r$$

por tanto  $P_m = (T_e + T_r) \omega$

$$= T_e \omega + T_r \omega$$

y por la fórmula de conversión de energía:

$$P_m = EI_a + T_r \omega$$

$$= (250.40) + (6.7 \times 157)$$

$$= 11051.9 \text{ W}$$

$$= 14.8 \text{ HP}$$

Prácticamente  $P_m = 15 \text{ HP}$

## COMENTARIOS

De los resultados del problema, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- El generador se puede ajustar en vacío a cualquier voltaje, dentro de su rango nominal; solamente se requiere un reóstato de campo lo suficientemente amplio a fin de proporcionar corrientes de excitación tan pequeñas como fuera necesario.
- Al hacer circular la corriente de plena carga, la máquina solo pierde un 3.04% de su voltaje nominal, cualquiera que sea el nivel de voltaje a que se ajuste.
- En otras palabras, el comentario anterior puede decir que el generador es estable, cualquiera que sea el nivel de voltaje al que trabaje.
- Este generador puede usarse como una fuente controlada de C.D.

**1.6.3. GENERADOR CON EXCITACIÓN EN DERIVACIÓN.** En esta modalidad, el embobinado de excitación (incluyendo su reóstato de control) se conecta en paralelo con la armadura, alimentándose de la propia energía generada como se muestra en la figura 1.27(1).

La autoexcitación del generador es posible gracias a que:

- La energía necesaria para excitar la máquina es muy pequeña. Esto se puede observar fácilmente en el ejemplo anterior, comparando la corriente de excitación con la corriente nominal de armadura. Aun así, el fabricante diseña la armadura para poder proporcionar este pequeño exceso de corriente destinado a la excitación.
- El magnetismo remanente permite generar un pequeño voltaje, indispensable para iniciar la corriente de excitación.
- La saturación del núcleo impide que el flujo polar crezca indefinidamente y pone un valor tope al voltaje inducido.

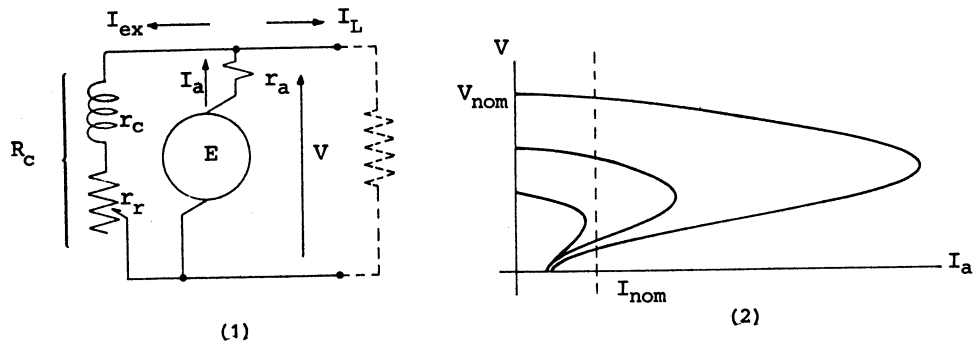


FIGURA 1.27. GENERADOR CON EXCITACIÓN EN DERIVACIÓN (1) DIAGRAMA DE CONEXIONES  
(2) REGULACIÓN DE VOLTAJE.

Para el análisis de este nuevo caso, se parte también de las cuatro ecuaciones básicas:

$$E = \frac{a I_{ex}}{b + I_{ex}} \omega$$

$$E I_a = T_e \omega$$

$$V = E - r_a I_a \quad E = V + r_a I_a$$

$$T_e = T_m - T_r$$

Como ahora la excitación se va a alimentar del voltaje del generador, se agrega una quinta ecuación que es la ley de Ohm:

$$I_{ex} = \frac{V}{R_c}$$

en donde  $R_c$  es la resistencia del circuito de campo, que incluye la resistencia del embobinado de excitación  $r_c$  más la resistencia del reóstato  $r_r$ .



Al sustituir la curva de saturación en vacío en la ecuación de pérdidas eléctricas, se tiene:

$$V = \frac{aI_{ex}}{b+I_{ex}} \omega - r_a I_a$$

e incluyendo en esta expresión la ley de Ohm:

$$V = \frac{a \frac{V}{R_c}}{b + \frac{V}{R_c}} \omega - r_a I_a$$

Rigurosamente  $I_a = I_L + I_{ex}$ , lo que obligaría a incluir también la ley de Ohm en el último término,

sin embargo, sería absurdo tal rigor ya que la corriente de excitación es despreciable como corriente de carga y además, la función de Froelich es una aproximación a partir de la cual no hay una exactitud rigurosa.

La corriente de armadura se tomará en esta expresión como igual a la corriente de línea,

$$I_a = I_L$$

lo que evita hacer más complicada la ecuación.

La función obtenida representa la curva de regulación de voltaje. Se trata de una ecuación de segundo grado cuya variable dependiente sería el voltaje. Si se despeja V se obtiene:

$$V = \frac{a\omega - bR_c - r_a I_a \pm \sqrt{(bR_c + r_a I_a - a\omega)^2 - 4r_a bR_c I_a}}{2}$$

que sería propiamente la ecuación de regulación de voltaje, cuya gráfica aparece en la figura 1.27(2).

Según esta función, para  $V = 0$  también  $I_a = 0$ , pero éste es el único punto que hay que corregir, ya que aunque el voltaje externo sea nulo, en la armadura está la fuerza electromotriz de magnetismo remanente y en esas condiciones

$$I_a = \frac{E_{rem}}{r_a}$$

Para voltajes en vacío menores que el nominal se requiere aumentar el valor de  $R_c$ , y con ese solo hecho, la curva reduce sus dimensiones (más notablemente en escala horizontal que en vertical) y se puede apreciar en la misma figura 1.27(2) la inestabilidad de la máquina.

### **EJEMPLO 1.3**

El mismo generador del ejemplo anterior se va conectar ahora en derivación. Para mayor facilidad se repiten sus características:

250 V

40 A

1500 RPM

$$E = \frac{4.828 I_{ex}}{3.799 + I_{ex}} \omega$$

$$r_a = 0.19 \Omega$$

$$r_c = 122 \Omega$$

$$T_r = 6.7 Nm$$

- a) Se ajusta en vacío a su voltaje nominal. Calcular la corriente de excitación y la resistencia del circuito de campo  $R_c$  (La velocidad de giro es la nominal).
- b) Calcular su voltaje cuando circula la corriente de plena carga.

c) Trazar su curva de regulación de voltaje (únicamente dentro del rango nominal) y calcular su porcentaje de regulación.

### SOLUCIÓN

a) De la misma manera que en el ejemplo anterior, la curva de saturación en vacío es

$$E = \frac{4.828 I_{ex}}{3.799 + I_{ex}} \omega$$

en donde  $E = 250$  y  $\omega = 157$ , por tanto:

$$250 = \frac{4.828 I_{ex}}{3.799 + I_{ex}} \times 157$$

de donde  $I_{ex} = 1.869$  A

Hasta aquí el resultado es idéntico al del ejemplo anterior.

Para la resistencia  $R_c$  se aplica la ley de Ohm.

$$R_c = \frac{V}{I_{ex}}$$

Aunque la corriente de excitación circula por la resistencia de armadura, la caída de voltaje que produce es tan pequeña que en la práctica se desprecia, por lo que  $V = 250$

$$R_c = \frac{250}{1.869} = 133.76 \Omega$$

b) Para el voltaje a plena carga se usa la ecuación de regulación de voltaje.

$$V = \frac{a\omega - bR_c - r_a I_a \pm \sqrt{(bR_c + r_a I_a - a\omega)^2 - 4r_a bR_c I_a}}{2}$$

en donde:

$$a=4.828; \quad \omega=157; \quad b=3.799; \quad R_c=133.76; \quad r_a=0.19$$

Sustituyendo valores se obtiene:

$$V = \frac{249.84 - 0.19I_a \pm \sqrt{(0.19I_a - 249.84)^2 - 386.2I_a}}{2}$$

Para  $I_a = 40$ , las soluciones son:

$$V_1 = 225.081 \text{ V}$$

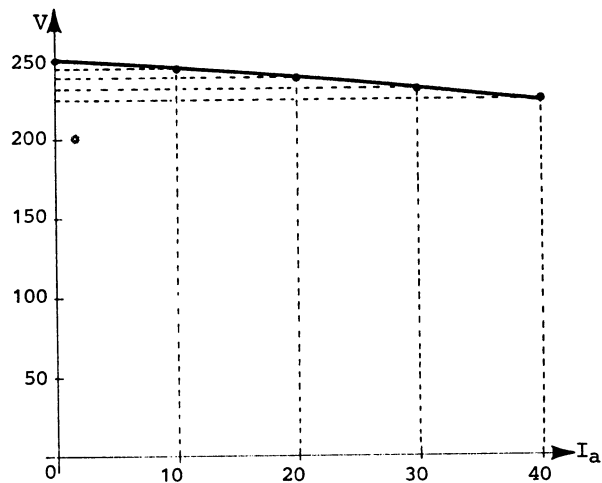
$$V_2 = 17.158 \text{ V}$$

En efecto, en la figura 1.27(2) se observa que para  $I_{nom}$  (y para cualquier valor de  $I_a$ ) se presentan dos valores de  $V$ . La solución válida es la superior, por tanto:

$$V = 225.081 \text{ V}$$

c) La gráfica de regulación de voltaje en este caso es una línea curva, por lo que es necesario tabular varios valores de corriente en la ecuación correspondiente.

$I_a$	$V$
0	250
10	243.98
20	237.92
30	231.67
40	225.08



$$\%Reg = \frac{250 - 225.081}{250} \times 100$$

$$\%Reg = 9.96$$

d) A fin de comparar la respuesta del generador en derivación con la del generador independiente, calcularemos también la  $I_{ex}$  y la  $R_c$  ajustado en vacío al 50% del voltaje nominal.

$$125 = \frac{4.828 I_{ex}}{3.799 + I_{ex}} \times 157$$

de donde:

$$I_{ex} = 0.75A \quad R_c = \frac{125}{0.75} = 166.62 \Omega$$

Si ahora con este valor de  $R_c$  intentamos calcular el voltaje de la máquina con carga de 40 A, al sustituir en la ecuación de regulación se obtiene:

$$v = \frac{117.416 \pm \sqrt{-5456.36}}{2}$$

No hay solución real. En efecto, si se observa la figura 1.27(2) se puede apreciar que para un voltaje en vacío de la mitad del nominal, la extensión horizontal de la curva se reduce a tal grado que ni siquiera es posible alcanzar la corriente nominal.

#### COMENTARIOS

De lo anterior se pueden desarrollar las siguientes conclusiones:

- El generador con excitación en derivación tiene la ventaja de no necesitar fuente auxiliar.
- La regulación de voltaje cuando se excitó en forma independiente fue de 3.04 % y en derivación aumentó a 9.96%.
- Conforme se haga trabajar a voltajes cada vez menores que el nominal, el generador va perdiendo estabilidad. Su mejor comportamiento es alrededor de su voltaje nominal.
- No se puede utilizar como fuente de voltaje controlado.

**1.6.3. GENERADOR CON EXCITACIÓN EN SERIE.** En la figura 1.28(1) se observa claramente que en la máquina serie, las corrientes de excitación y de armadura son la misma y única corriente, de manera que se usará la identificación  $I$ , sin subíndices, tanto en los diagramas como en las ecuaciones de análisis.

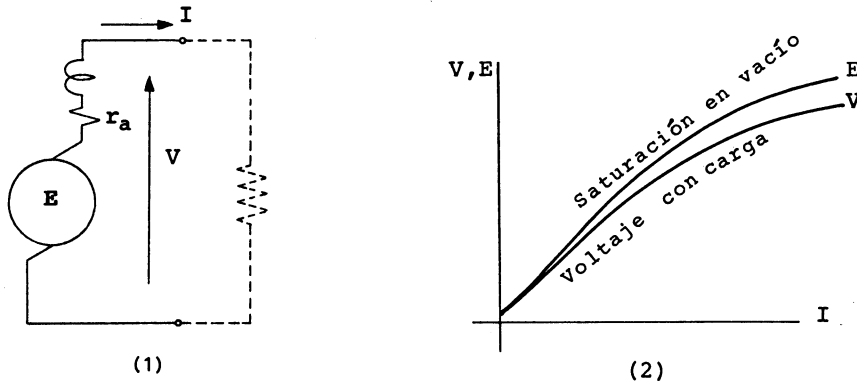


FIGURA 1.28. GENERADOR CON EXCITACIÓN EN SERIE. (1) DIAGRAMA DE CONEXIONES  
(2) REGULACIÓN DE VOLTAJE.

Las cuatro ecuaciones básicas con corriente única son:

$$E = \frac{a I}{b + I} \omega$$

$$EI = T_e \omega$$

$$V = E - r_a I$$

$$T_e = T_m - T_r$$

Sustituyendo la curva de saturación en vacío en la ecuación de pérdidas eléctricas se tiene:

$$V = \frac{aI}{b+I} \omega - r_a I$$

Para graficar esta ecuación se dibujarían las corrientes como abscisas y los voltajes como ordenadas. La curva se desarrolla por abajo de la curva de saturación en vacío como se observa en la figura 1.28(2).

Para los generadores estudiados anteriormente, la gráfica en estas mismas coordenadas llevaba el nombre de curva de regulación de voltaje. Por similitud se le puede dar aquí el mismo nombre, aunque en este caso no procede el concepto de regulación de voltaje ( $Reg = \frac{V_0 - V_L}{V_{nom}}$ ) puesto que esta máquina no tiene voltaje en vacío, ya que en esa condición tampoco tiene excitación (en realidad hay un pequeño voltaje inducido por el magnetismo remanente).

Tampoco es posible hacer ajustes de voltaje en esta máquina, ya que el campo no tiene reóstato de control. La corriente de excitación se fija automáticamente por la magnitud de la resistencia de carga.

#### **EJEMPLO 1.4**

Las características de placa de un generador de C.D. con excitación en serie son:

250 V

60 A

1400 RPM

En prueba de laboratorio se han obtenido los siguientes datos:

Curva de saturación en vacío:  $E = \frac{3.6I}{60+I} \omega$

Resistencia de armadura (incluyendo el campo serie):  $r_a = 0.31 \Omega$

Par de pérdidas rotacionales:  $T_r = 6.1 \text{ N m}$

- a) Trabajando a su velocidad y corriente nominales, ¿dará también voltaje nominal?
- b) Calcular su voltaje y corriente cuando se le conecta una resistencia de carga de  $5 \Omega$

### SOLUCIÓN

- a) Al aplicar la ecuación de regulación de voltaje:

$$V = \frac{3.6 I}{60 + I} \omega - 0.31 I$$

en donde:

$$I = 60$$

$$\omega = 1400 \times \frac{2\pi}{60} = 146.6$$

se obtiene

$$V = \frac{3.6 \times 60}{60 + 60} \times 146.6 - 0.31 \times 60$$

$$V = 245.28 \text{ V}$$

El voltaje difiere del valor nominal, aunque se puede considerar bastante cercano.

- b) Empleando la ecuación de regulación de voltaje

$$V = \frac{3.6 I}{60 + I} \times 146.6 - 0.31 I$$

y la ley de Ohm en la resistencia de carga:

$$V = 5 I$$



y resolviendo como sistema de ecuación simultáneas:

$$V=196.949 \text{ V}$$

$$I=39.389 \text{ A}$$

ambos valores son muy diferentes de los nominales.

#### COMENTARIOS

- Como la máquina no permite ajustes es imposible hacer coincidir sus tres variables características con los valores nominales (salvo en perfecto equilibrio de sus parámetros).
- Solamente con un valor de resistencia de carga se pueden obtener aproximadamente voltaje y corriente nominales.
- La respuesta de este generador (que se puede observar en su curva de regulación de voltaje) la hace muy poco útil y prácticamente no tiene aplicación en la actualidad.

**1.6.5. GENERADOR CON EXCITACIÓN COMPUESTA.** Este tipo de generador tiene un campo principal en derivación y un campo auxiliar en serie, como se puede apreciar en la figura 1.29(1). Para efectos de análisis se usan las cuatro ecuaciones básicas.

$$E = \frac{aI_{ex}}{b+I_{ex}} \omega$$

$$EI_a = T_e \omega$$

$$V = E - r_a I_a$$

$$T_e = T_m - T_r$$

La curva de saturación se obtiene para el campo en derivación, aunque al aplicar la función al análisis de respuesta se usará una corriente de excitación hipotética, con una componente igual a la

corriente de excitación en derivación, y otra que es una fracción de la corriente de excitación en serie, o corriente de línea.

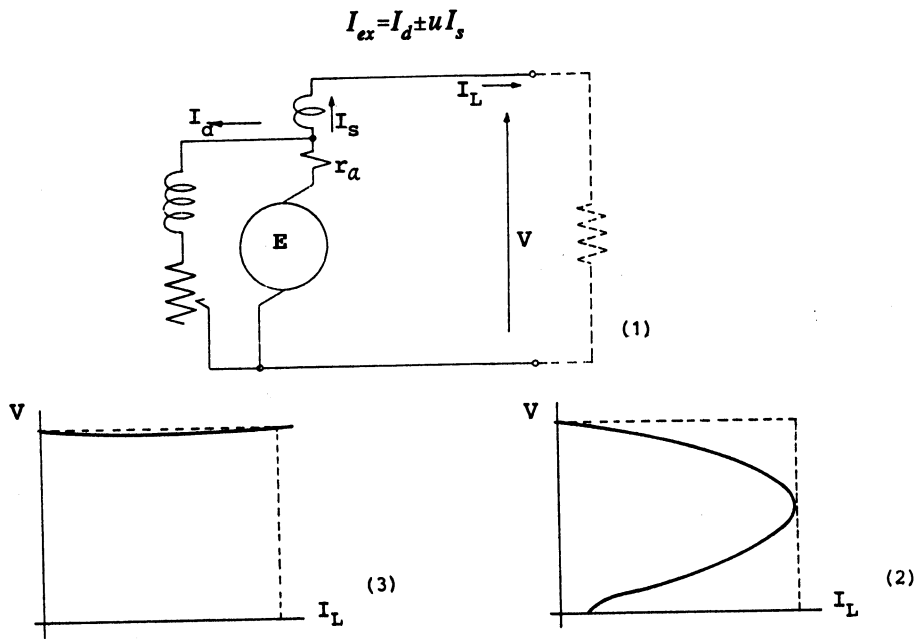


FIGURA 1.29. GENERADOR CON EXCITACIÓN COMPUESTA (1) DIAGRAMA DE CONEXIONES. (2) RESPUESTA CON CONEXIÓN ACUMULATIVA. (3) RESPUESTA CON CONEXIÓN DIFERENCIAL.

El doble signo se debe a la posibilidad de conectar el campo serie de tal forma, que su fuerza magnetomotriz se suma a la del campo derivado (excitación compuesta acumulativa) o bien, que la fuerza magnetomotriz serie se oponga a la derivada (excitación compuesta diferencial).

La metodología de análisis es similar a la del generador con excitación en derivación solamente que se incluye la corriente hipotética de excitación. Para la modalidad acumulativa se usa el signo positivo ( $I_{ex} = I_d + u I_s$ ) y la tendencia es a obtener un generador voltaje constante. Esto no siempre es exacto para todos los valores de carga debido a los problemas de saturación del núcleo. La curva de regulación se puede ver en la figura 1.29(2).

Para la modalidad diferencial se usa el signo negativo(  $I_a = I_f - I_f$  ), y el efecto es reducir las proporciones horizontales de la curva de regulación en derivación, de manera que no sobrepase la corriente nominal. Esta máquina soporta repetidamente las condiciones de circuito corto sin dañarse, y se usa para soldadura de arco. Su curva de regulación se puede observar en la figura 1.29(3).

**1.6.6. MOTOR CON EXCITACIÓN INDEPENDIENTE.** Este motor es el mismo que se fabrica para excitarse en derivación, solamente que en esta modalidad se usa una fuente de pequeña capacidad y voltaje constante para suministrar una corriente de excitación constante, y una fuente de la capacidad de la armadura y de voltaje controlado para alimentar a esta otra parte, como se aprecia en la figura 1.30(1). Las fuentes se representan con el símbolo de baterías, pero puede ser cualquier otro tipo de fuente de C.D.

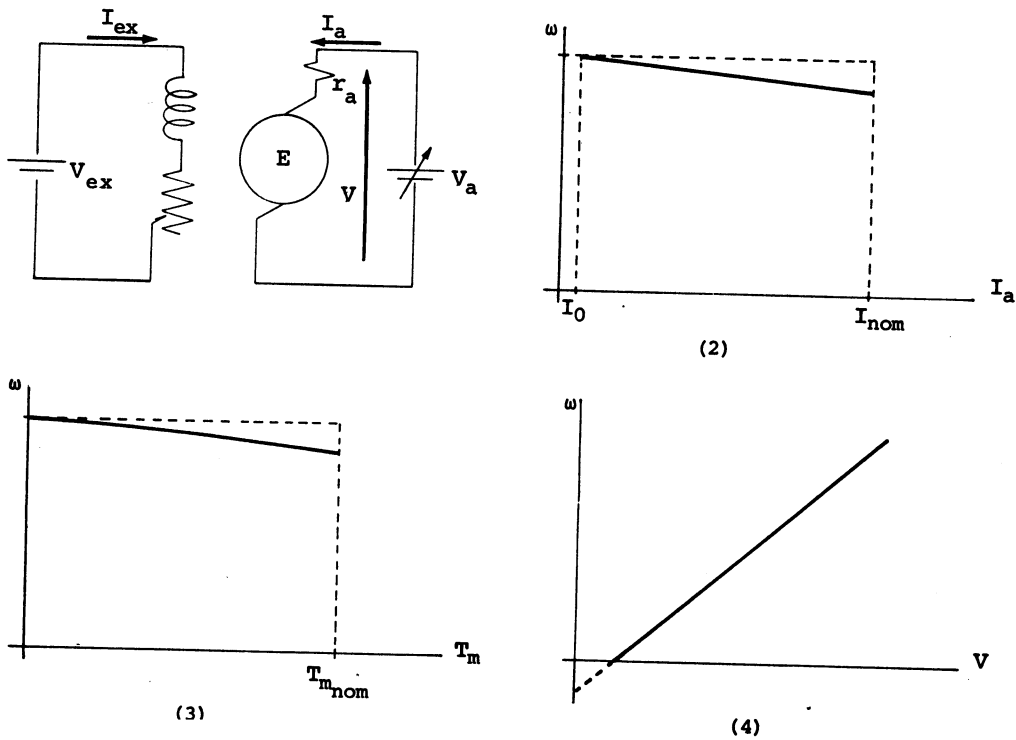


FIGURA 1.30. MOTOR CON EXCITACIÓN INDEPENDIENTE (1) DIAGRAMA DE CONEXIONES (2) Y (3) REGULACIÓN DE VELOCIDAD (4) CONTROL DE VELOCIDAD.

Las cuatro ecuaciones básicas (las dos últimas con signo positivo para motor) son:

$$E = \frac{aI_{ex}}{b+I_{ex}} \omega$$

$$EI_a = T_e \omega$$

$$V = E + r_a I_a$$

$$T_e = T_m + T_r$$

Considerando que este motor trabaja con corriente de excitación constante, se puede definir una constante de excitación:

$$K_e = \frac{aI_{ex}}{b+I_{ex}}$$

de tal manera que:

$$E = K_e \omega$$

Esta constante también repercute en la fórmula de par electromagnético

$$T_e = K_e I_a$$

Sustituyendo la nueva fórmula de fuerza electromotriz en la ecuación de pérdida de voltaje:

$$V = K_e \omega + r_a I_a$$

y despejando la velocidad

$$\omega = \frac{V - r_a I_a}{K_e}$$

que es la fórmula básica de velocidad del motor. Esta fórmula se puede analizar desde dos puntos de vista: regulación de velocidad y control de velocidad.

a) **Regulación de velocidad.** La curva de regulación de velocidad muestra la variación de la velocidad (en el eje de las ordenadas) respecto a la carga del motor (en el eje de las abscisas), mientras el voltaje de alimentación permanece constante.

La primera modalidad de curva es tomando la corriente de armadura como variable de carga. Reordenando la fórmula de velocidad, se obtiene:

$$\omega = -\frac{r_a}{K_e} I_a + \frac{V}{K_e}$$

que es de la forma típica  $y = mx + b$ . La gráfica es una recta (mientras no haya distorsiones por reacción de armadura) como aparece en la figura 1.30(2).

Esta expresión es muy sencilla, pero al graficarla presenta dos inconvenientes:

- Combina una variable mecánica (ordenadas) con una variable eléctrica (abscisas).
- No debe comenzar en el eje vertical, pues la máquina real, aún en vacío tiene una corriente  $I_a$ .

Una forma más apropiada de gráfica sería con dos coordenadas mecánicas, con el par mecánico como abscisa. Para ello hay que tener en cuenta la ecuación de par electromagnético.

$$T_e = K_e I_a$$

y las pérdidas rotacionales

$$T_e = T_m + T_r$$

Sustituyendo en la fórmula de velocidad se obtiene:

$$\omega = \frac{KV - r_a(T_m + T_r)}{K_e^2}$$

y reordenando

$$\omega = -\frac{r_a}{K_e^2} T_m + \frac{KV - r_a T_r}{K_e^2}$$

que también es de la forma típica  $y = mx + b$  como se muestra en la figura 1.30(3). En lenguaje técnico de motores se le suele llamar a esta gráfica *curva par-velocidad*.

**Cálculo de regulación de velocidad.** La regulación de velocidad se evalúa como la relación entre la velocidad que se pierde al dar carga a la máquina y su velocidad nominal

$$Reg = \frac{\omega_0 - \omega_{pc}}{\omega_{nom}}$$

en donde:

$\omega_0$  - es la velocidad en vacío.

$\omega_{pc}$  - es la velocidad a plena carga.

$\omega_{nom}$  - es la velocidad nominal.

La regulación de velocidad significa *qué fracción de la velocidad nominal* pierde la máquina al darle carga, lo que puede interpretarse como un indicador de la calidad de servicio que da el motor.

También suele expresarse en la forma:

$$\%Reg = \frac{\omega_0 - \omega_{pc}}{\omega_{nom}} \times 100$$

**b) Control de velocidad.** Si se establece ahora la condición de que la máquina conserve una carga a par constante, se reflejará en una corriente de armadura constante.

Revisando la fórmula de velocidad se deduce que la variable disponible para control es el voltaje.

Reordenando la fórmula se obtiene:

$$\omega = \frac{1}{K_e} V - \frac{r_a I_a}{K_e}$$

que tiene también la forma típica  $y = mx + b$  y su gráfica aparece en la figura 1.30(4), la cual presenta una pendiente positiva y una pequeña ordenada al origen negativa que hace que la recta cruce al cuarto cuadrante, sin embargo en el cuarto cuadrante no tiene interpretación real.

Mientras se suministre al motor un voltaje demasiado pequeño, no es capaz de vencer sus pérdidas y por lo tanto no arranca. Cuando la recta de control cruza al primer cuadrante el motor arranca y adquiere una velocidad determinada por el voltaje aplicado, que puede estar a cualquier nivel dentro de su rango permisible.

No es prudente exceder más de un 25% (máximo 30%) de la velocidad nominal, si no hay garantía específica del fabricante que indique hasta que velocidad puede trabajar el motor. Véase en el subtema 1.6.8 el peligro de desbocamiento.

### **EJEMPLO 1.5**

La misma máquina del ejemplo 1.2 se utilizará ahora como motor. Por facilidad se repiten a continuación sus características:

250 V

40 A

1500 RPM

Curva de saturación en vacío:

$$E = \frac{4.828 I_{ex}}{3.799 + I_{ex}} \omega$$

Resistencia de armadura:

$$r_a = 0.19 \ \Omega$$

Resistencia del campo derivado:

$$r_c = 122 \ \Omega$$

Par de pérdidas rotacionales:  $T_r = 6.7 \text{ N m}$

- a) ¿ Qué potencia en HP puede dar como motor?
- b) Si se ajusta en vacío a su velocidad nominal ¿ cuál será su velocidad con corriente de plena carga?
- c) Trazar la curva de regulación de velocidad con corriente de armadura como abscisa, indicando su límite inferior.
- d) Trazar la curva de regulación de velocidad con par mecánico como abscisa.
- e) Trazar una familia de curvas de control de velocidad para corriente de vacío y de plena carga.

### SOLUCIÓN

a) La potencia mecánica es:  $P_m = T_m \omega$

en donde

$$T_m = T_e - T_r$$

por tanto

$$P_m = T_e \omega - T_r \omega$$

por conversión de energía

$$P_m = EI_a - T_r \omega$$

por pérdidas eléctricas

$$E = V - r_a I_a$$



por tanto

$$\begin{aligned}P_m &= (V - r_a I_a) I_a - T_r \omega \\ &= (250 - 0.19 \times 40) 40 - 6.7 \times 157 \\ &= 8644 \text{ W} \\ &= 11.58 \text{ HP}\end{aligned}$$

b) En vacío circula una pequeña corriente debido a las pérdidas rotacionales, lo que hace que la fuerza electromotriz sea ligeramente menor a 250 V.

En vacío  $T_m = 0$ , de modo que por la ecuación de pérdidas rotacionales:

$$T_e = T_r = 6.7$$

Por conversión de energía

$$\begin{aligned}E I_a &= T_e \omega \\ &= 6.7 \times 157 = 1051.9\end{aligned}$$

Por la ecuación de pérdidas eléctricas

$$E = V - r_a I_a$$

$$E = 250 - 0.19 I_a$$

Sustituyendo:

$$(250 - 0.19 I_a) I_a = 1051.9$$

que es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

$$I_{a_1} = 1311.56$$

$$I_{a_2} = 4.22$$

La solución que procede es la segunda, por tanto regresando a la ecuación de pérdidas de voltaje:

$$E = 250 - 0.19 \times 4.22$$

$$= 249.1982$$

Recordando que para el motor independiente  $E = K_e \omega$ , la constante de excitación es:

$$K_e = \frac{249.1982}{157} = 1.5872$$

La ecuación de regulación de velocidad será:

$$\omega = -\frac{0.19}{1.5872} I_a + \frac{250}{1.5872}$$

$$\omega = -0.1197 I_a + 157.51$$

Para  $I_a = 40$  se obtiene:

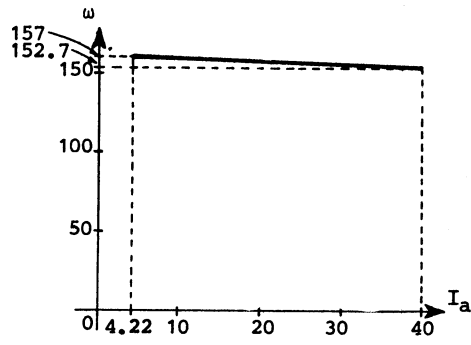
$$\omega = 152.722 \text{ rad/s}$$

$$N = 1458.38 \text{ RPM}$$

c) La gráfica de regulación de velocidad es una línea recta, por lo que bastan los dos puntos determinados en la pregunta anterior:

Vacío (4.22, 157)

Plena carga (40, 152.722)



d) La ecuación par velocidad es:

$$\omega = -\frac{0.19}{1.5872^2} T_m + \frac{1.5872 \times 250 - 0.19 \times 6.7}{1.5872^2}$$

$$\omega = -0.07542 T_m + 157$$

De la ecuación de pérdidas rotacionales

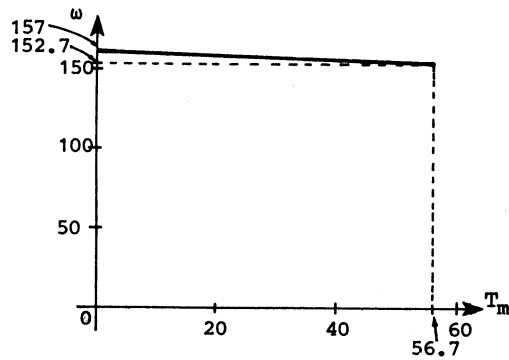
$$\begin{aligned} T_m &= T_o - T_r = K_o I_a - T_r \\ &= 1.5872 I_a - 6.7 \end{aligned}$$

El par mecánico nominal para  $I_a = 40$ , es:

$$T_m = 56.788$$

Tabulando dos puntos:

$T_m$	$\omega$
0	157
56.788	152.717



El porcentaje de regulación será:

$$\%Reg = \frac{157 - 152.72}{157} \times 100 = 2.726$$

e) La ecuación de control de velocidades:

$$\omega = -\frac{1}{1.5872}V + \frac{0.19I_a}{1.5872}$$

$$\omega = 0.63004V - 0.1197I_a$$

Para corriente de vacío:  $I_0 = 4.22$

$$\omega = 0.63004V - 0.5052$$

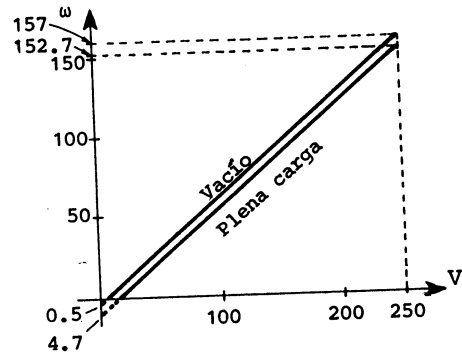
Como es una recta, basta tabular dos puntos

V	$\omega$
0	-0.5152
250	157

Para corriente de plena carga:  $I_{pc} = 40$

$$\omega = 0.63004V - 4.788$$

V	$\omega$
0	-4.788
250	152.722



## COMENTARIOS

- A primera vista parece absurdo tener que alimentar este motor con dos fuentes, sin embargo ya se vio la utilidad de mantener la corriente de excitación para generar par, mientras en la armadura se aplica voltaje variable.
- La regulación de velocidad es muy pequeña, lo que da idea de la gran estabilidad de motor.
- El motor puede responder a un control continuo de su velocidad dentro de todo el rango permisible y dentro del área limitada por la gráfica de vacío y plena carga de la figura, solamente se requiere de una fuente con amplio control de su voltaje.
- La limitante en el control de velocidad es el par mecánico, pues no se debe exceder la corriente nominal de armadura para evitar sobrecalentamiento.

**1.6.7. MOTOR CON EXCITACIÓN EN DERIVACIÓN.** En esta modalidad, la excitación del motor queda conectada en paralelo con la armadura y con la fuente, como se aprecia en la figura 1.31(1). La necesidad de mantener la corriente de excitación impide que se le pueda aplicar voltaje variable. La fuente debe ser de voltaje constante.

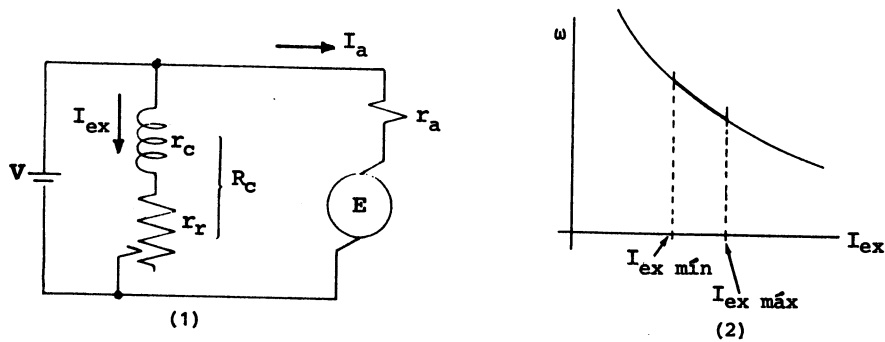


FIGURA 1.31. MOTOR CON EXCITACIÓN EN DERIVACIÓN. (1) DIAGRAMA DE CONEXIONES.  
(2) CONTROL DE VELOCIDAD.

Las cuatro ecuaciones básicas para los motores son:

$$E = \frac{aI_{ex}}{b+I_{ex}} \omega$$

$$EI_a = T_e \omega$$

$$V = E + r_a I_a$$

$$T_e = T_m + T_r$$

Sustituyendo la curva de saturación en vacío en la ecuación de pérdidas eléctricas y despejando la velocidad, se obtiene:

$$\omega = \frac{(V - r_a I_a)(b + I_{ex})}{a I_{ex}}$$

que es la fórmula básica de la velocidad para este tipo de motor.

Se puede interpretar desde dos puntos de vista: regulación de velocidad y control de velocidad.

**a) Regulación de velocidad.** Analiza la variación de la velocidad desde la condición de vacío hasta la de plena carga, mientras el voltaje y la corriente de excitación permanecen constantes.

La variable independiente en la fórmula de velocidad sería la corriente de armadura, y la máquina trabajaría en circunstancias idénticas a cuando se estudio con excitación independiente, de modo que su curva de regulación de velocidad sería la misma de la figura 1.31(2).

También se puede establecer la regulación de velocidad según la curva par velocidad, considerando que:

$$T_e = T_m + T_r$$

$$T_e = \frac{aI_{ex}}{b+I_{ex}} I_a$$

Sustituyendo en la fórmula de velocidad se obtiene:

$$\omega = \frac{b+I_{ex}}{aI_{ex}} V - \left[ \frac{b+I_{ex}}{aI_{ex}} \right]^2 r_a (T_m + T_e)$$

que es una expresión más complicada que cuando se usaba la constante de excitación, sin embargo su gráfica es la misma que para el motor excitado independientemente y que se ha presentado en la figura 1.30(3).

b) **Control de velocidad.** Par analizar el control de velocidad se supondrá que la carga mantiene el par mecánico constante, aun con variaciones de velocidad. Esto repercute en la corriente de armadura, aunque como se analizará en el ejemplo 1.6, no es constante.

El voltaje también debe mantenerse constante, de manera que analizando la fórmula de velocidad, la única variable independiente que queda para control es la corriente de excitación.

Ya sea que se considere la fórmula de velocidad con corriente de armadura, o con par mecánico, la gráfica en coordenadas de corriente de excitación-velocidad es la que aparece en la figura 1.31(2) como en pequeño arco de pseudohipérbola.

La corriente de excitación tiene dos límites;

1. **Límite inferior.** Si se conserva el par, la corriente de armadura crece si se hace disminuir la de excitación, por tanto el límite es cuando la corriente de armadura llega al valor nominal.

$$T_e = \frac{aI_{ex_{min}}}{b+I_{ex_{min}}} I_{a_{nom}}$$

2. **Límite superior.** Cuando se ha quitado todo el reóstato de campo, queda en el circuito la resistencia del embobinado  $r_c$  .

$$I_{ex_{max}} = \frac{V}{r_c}$$

### EJEMPLO 1.6

El mismo motor del ejemplo anterior se conecta ahora con excitación en derivación y se alimenta a su voltaje nominal.

Por facilidad se repiten sus características:

250 V

40 A

1500 RPM

Curva de saturación en vacío:  $E = \frac{4.828I_{ex}}{3.799 + I_{ex}} \omega$

Resistencia de armadura:  $r_a = 0.19 \ \Omega$

Resistencia del campo derivado:  $r_c = 122 \ \Omega$

Par de pérdidas rotacionales:  $T_r = 6.7 \ N \cdot m$

a) Se ajusta en vacío a su velocidad nominal. Calcular su corriente de excitación y el valor de resistencia al que hay que ajustar el reóstato.



b) Calcular su velocidad cuando circule la corriente de armadura nominal.

c) Trazar sus curvas de regulación de velocidad en coordenadas  $I_a-\omega$  y  $T_m-\omega$

d) Trazar una familia de curvas de control de velocidad para vacío y par nominal.

### SOLUCIÓN

a) Los primeros cálculos son iguales que para la respuesta b) del ejemplo anterior, por lo que aquí se plantearán rápidamente. En caso de duda, en el ejemplo 1.5 se explica más detalladamente.

En vacío  $T_m = 0$  por tanto  $T_e = T_r = 6.7$

De la ecuación de conversión de energía

$$EI_a = T_e \omega$$

$$(V - r_a I_a) I_a = T_e \omega$$

$$(250 - 0.19 I_a) I_a = 6.7 \times 157$$

de donde:

$$I_{a_1} = 1311.56 \quad (\text{Valor no aceptable})$$

$$I_{a_2} = 4.22 \quad (\text{Corriente en vacío})$$

La fuerza electromotriz en vacío es:

$$E = 250 - 0.19 \times 4.22 = 249.1982$$

Llevando este valor a la curva de saturación en vacío:

$$249.1982 = \frac{4.828 I_{ex}}{3.799 + I_{ex}} \times 157$$

se obtiene:

$$I_{ex} = 1.86 \text{ A}$$

Por ley de Ohm:

$$R_c = \frac{250}{1.86} = 134.4$$

y la resistencia del reóstato será:

$$r_r = 134.4 - 122 = 12.4 \ \Omega$$

b) Aplicando la fórmula de velocidad:

$$\omega = \frac{(250 - 0.19 \times 40)(3.799 + 1.86)}{4.828 \times 1.86}$$

$$\omega = 152.75 \text{ rad/s}$$

c) Obsérvese que la velocidad a plena carga en este ejemplo coincide con la del ejemplo anterior. El comportamiento de la máquina es el mismo y las gráficas de regulación también, de modo que no tiene caso repetirla aquí. Se sugiere como ejercicio al lector, aplicar la fórmula de velocidad para coordenadas  $T_m - \omega$  y comprobar que el resultado es igual. Las gráficas se pueden observar en el ejemplo 1.5.

d) Como la gráfica es una línea curva, se requieren como mínimo tres puntos, de los cuales uno ya es conocido.

En vacío:

1. punto conocido:  $\omega = 157, I_{ex} = 1.86$

2. Corriente de excitación mínima:  $T_e=0+6.7$

$$6.7 = \frac{4.828 I_{ex}}{3.799 + I_{ex}} \times 40$$

de donde:

$$I_{ex_{\min}} = 0.1365$$

Aplicando esta corriente a la fórmula de velocidad:

$$\omega = \frac{(250 - 0.19 \times 40)(3.799 + 0.1365)}{4.828 \times 0.1365} = 1447$$

Este resultado es del orden de nueve veces la velocidad nominal, y por tanto, imposible en la práctica.  
(Véase en el subtema 1.6.8 peligro de desbocamiento)

3. corriente de excitación máxima:

$$I_{ex_{\max}} = \frac{250}{122} = 2.049$$

Llevando este valor a la fórmula de par eléctrico en vacío:

$$6.7 = \frac{4.828 \times 2.049}{3.799 + 2.049} I_a$$

$$I_a = 3.96 \text{ A}$$

Y sustituyendo en la fórmula de velocidad:

$$\omega = \frac{(250 - 0.19 \times 3.96)(3.799 + 2.049)}{4.828 \times 2.049} = 147.343$$

De modo que los tres puntos en vacío son:

$I_{ex}$	$\omega$
0.1365	1447
1.86	157
2.049	147

A plena carga:

En el ejemplo 1.5 inciso d, se encontró que los pares de plena carga son:

$$T_m = 56.788 \quad \text{y} \quad T_e = 63.488$$

1. Corriente de excitación mínima:

$$63.488 = \frac{4.828 I_{ex}}{3.799 + I_{ex}} \times 40$$

$$I_{ex} = 1.86$$

Sustituyendo en la fórmula de velocidad:

$$\omega = \frac{(250 - 0.19 \times 40)(3.799 + 1.86)}{4.828 \times 1.86}$$

$$\omega = 152.75$$

Estos valores coinciden con el punto conocido, y es la máxima velocidad factible a plena carga.

2. Corriente de excitación máxima:

$$I_{ex_{max}} = \frac{250}{122} = 2.049$$

llevando este valor a la fórmula de par:

$$63.488 = \frac{4.828 \times 2.049}{3.799 + 2.049} I_a$$

$$I_a = 42.316$$

y sustituyendo en la fórmula de velocidad:

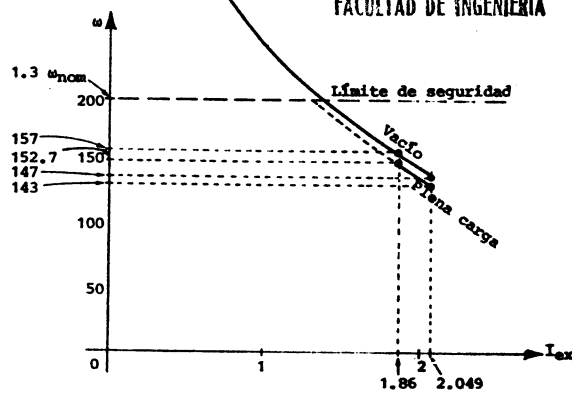
$$\omega = \frac{(250 - 0.19 \times 42.316)(3.799 + 2.049)}{4.828 \times 2.049}$$

$$\omega = 143$$



A plena carga han salido dos puntos:

$I_{ex}$	$\omega$
1.86	152.75
2.049	143.0



### COMENTARIOS

-El motor en derivación tiene la ventaja sobre el independiente de requerir solamente una fuente de alimentación de voltaje constante.

-Su comportamiento en cuanto a regulación de velocidad es igual al del motor independiente.

-El control de velocidad es muy simple y se realiza con el réostato de campo, pero el rango de velocidades es muy limitado y esta alrededor del valor nominal. El comportamiento del motor estará comprendido entre la curva de vacío y plena carga.

-Con poca carga y con más razón en vacío, si no se tiene cuidado con el control se puede desbocar el motor.

**1.6.8. MOTOR CON EXCITACIÓN EN SERIE.** En la figura 1.32(1) se representa el diagrama del motor con excitación en serie. Se puede apreciar que la corriente de excitación es la misma corriente de armadura y además la única, de manera similar a como ocurría con el generador de este tipo.

En las ecuaciones básicas, se prescindirá de los subíndices de corriente, ya que es la misma que aparece en todas ellas

$$E = \frac{aI}{b+I} \omega$$

$$EI = T_e \omega$$

$$V = E + r_a I$$

$$T_e = T_m + T_r$$

Sustituyendo la curva de saturación en vacío en la ecuación de pérdidas eléctricas, y despejando la velocidad, se tiene:

$$\omega = \frac{(V - r_a I)(b + I)}{aI}$$

que es la fórmula básica de velocidad para este tipo de motor. Se parece a la fórmula del motor en derivación, excepto que aquí todos los términos tienen la misma corriente.

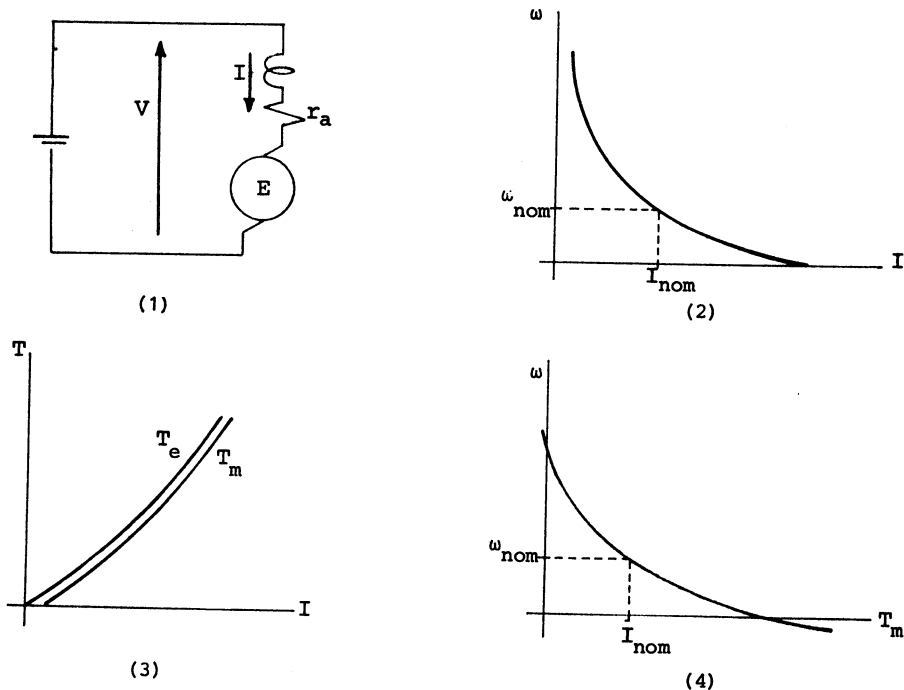


FIGURA 1.32. MOTOR CON EXCITACIÓN EN SERIE. (1) DIAGRAMA DE CONEXIONES (2) Y (4) REGULACIÓN DE VELOCIDAD (3) PAR.

Igual que en casos anteriores, esta fórmula puede interpretarse desde dos puntos de vista: regulación de velocidad y control de velocidad.

a) **Regulación de velocidad.** Considerando que  $(b+I)$  es solamente un factor de saturación, y  $(r_a I)$  tiene una magnitud pequeña, entonces la fórmula de velocidad se aproxima a la curva típica  $y=k/x$  siempre que el voltaje permanezca constante. Se puede decir por tanto, que la curva de regulación de velocidad es una pseudohipérbola como se observa en la figura 1.32(2).

Las escalas coordenadas se han ampliado respecto de sus valores nominales, para hacer notar que la velocidad de este tipo de motor es poco estable.

Si la máquina se queda sin carga, la velocidad parece tender a un valor infinito. Estrictamente hablando, esto no sucede debido a las pérdidas rotacionales, sin embargo llega a adquirir valores que las hacen entrar en una zona peligrosa de trabajo, conocida como desbocamiento.

En el otro extremo la velocidad baja hasta cero haciendo crecer considerablemente la corriente. Esta condición no es fácil de provocarse en la práctica, pues el par aumenta aproximadamente en función del cuadrado de la corriente.

La ecuación general de par es:

$$T_e = \frac{a I_{ex}}{b + I_{ex}} I_a$$

y para la máquina serie es:

$$T_e = \frac{a I^2}{b + I}$$

cuya gráfica está en la figura 1.32(3).

De aquí se puede obtener la curva de regulación en coordenadas par-velocidad. Análíticamente la función es complicada, y en la práctica no se hace necesaria como se verá en el ejemplo 1.7. La curva resulta como se ve en la figura 1.32(4).

El concepto de regulación de velocidad  $Reg = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_{nom}}$  no es aplicable a este motor, puesto que la

velocidad  $\omega_0$  (en vacío) es una condición de desbocamiento.



**PELIGRO DE DESBOCAMIENTO.** Los costados de bobina se acomodan en las ranuras del núcleo y se aseguran con una cuña dieléctrica (de micarta o de madera) como se muestra en la figura. Esta cuña soporta la fuerza centrífuga de las bobinas cuando la armadura está en rotación, y su magnitud es función del cuadrado de su velocidad.

En el lenguaje común, se llama *desbocamiento* a una velocidad mucho mayor que la nominal.

Si el fabricante no especifica hasta qué velocidad máxima garantiza su máquina, puede considerarse desbocada a partir del 150 % o máximo 200 % de la velocidad nominal (según tamaño y condiciones de la máquina). La fuerza centrífuga es tal que rompe la cuña, saca las bobinas de las ranuras y se atorán en las zapatas polares. La inercia impide un paro instantáneo, y lo que ha sucedido en accidentes de esta naturaleza es que se producen deformaciones en las partes de la máquinas que han llegado hasta la fractura de la coraza, y algunas otras piezas que se fraccionan, principalmente costados de bobinas, salen disparadas con la velocidad de un proyectil.

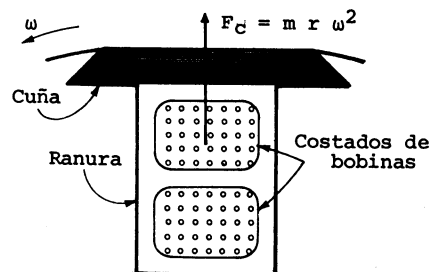


FIGURA 1.33. DETALLE DE UN PERFIL DE RANURA

b) **Control de velocidad.** Para facilitar el análisis de control de velocidad se supondrá como en otras ocasiones, un par de carga constante, con lo cual la corriente también es constante. Analizando la fórmula de velocidad, la única variable independiente para control es el voltaje; la fórmula se puede reordenar de la siguiente manera:

$$\omega = \frac{b+I}{aI}V - \frac{b+I}{aI}r_a I$$

que es de la forma típica  $y = mx + b$ . La gráfica de control es una recta en forma parecida a la del motor con excitación independiente, solo que la corriente influye no solo en la ordenada al origen, si no también en la pendiente, ocasionando que a diferentes regímenes de carga las rectas no sean paralelas, como se muestra en la figura 1.34.

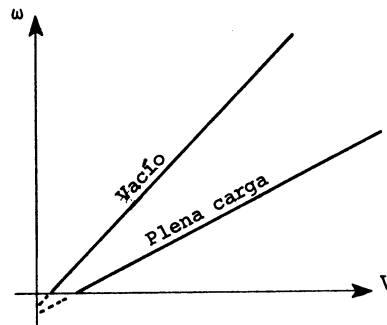


FIGURA 1.34. CONTROL DE VELOCIDAD DE LA MÁQUINA SERIE.

### EJEMPLO 1.7

La misma máquina que se utilizó ejemplo 1.4 se usará aquí como motor. Para mayor facilidad se repiten sus características:

250 V  
60 A  
1400 RPM

Curva de saturación en vacío:

$$E = \frac{3.6I}{60+I} \omega$$

Resistencia de armadura (incluye el campo serie):  $r_a = 0.31 \Omega$

Par de pérdidas rotacionales:

$$T_r = 6.1 \text{ N}\cdot\text{m}$$

a) Trabajando como motor, ¿qué potencia en HP puede suministrar?

Trazar:

b) La curva de regulación de velocidad en coordenadas  $I-\omega$

c) La curva de par mecánico con respecto a la corriente.

d) La curva de regulación de velocidad en coordenadas par-velocidad.

e) Una familia de gráficas de control de velocidad para corriente de vacío y de plena carga.

### SOLUCIÓN

a) La potencia mecánica es:  $P_m = T_m \omega$

en donde  $T_m = T_e - T_r$

por tanto  $P_m = T_e \omega - T_r \omega$

por conversión:  $P_m = EI - T_r \omega$

por pérdidas eléctricas:  $P_m = (V - r_a I) I - T_r \omega$

$$= (250 - 0.31 \times 60) 60 - 6.1 \times 146.6$$

$$= 12989.74 \text{ W}$$

$$P_m = 17.412 \text{ HP}$$

b) La curva no se inicia en el eje vertical, por lo que hay que averiguar la corriente en vacío.

En vacío  $T_m = 0$  por tanto  $T_e = T_r = 6.1$

$$6.1 = \frac{3.6 I^2}{60 + I}$$

que es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

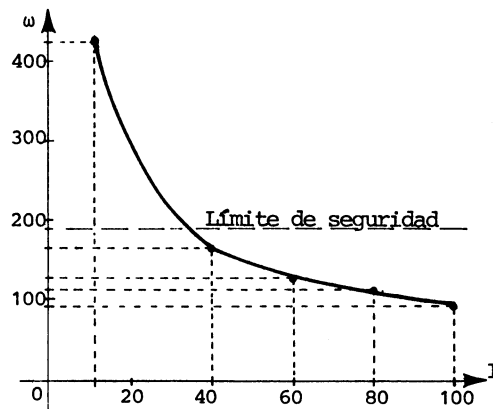
$$I_1 = 10.966$$

$$I_2 = -9.27$$

La solución válida es la primera, que será el punto inicial de tabulación de la fórmula de velocidad

$$\omega = \frac{(250 - 0.31I)(60 + I)}{3.6I}$$

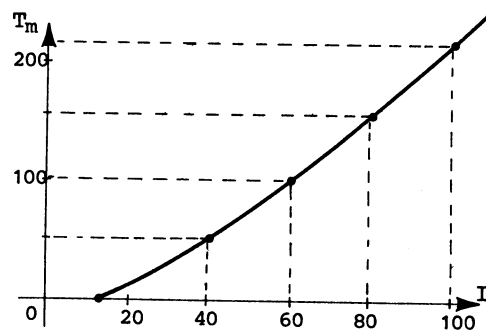
I	$\omega$
10.96	433.29
40	165
60	128.55
80	109.47
100	97.33



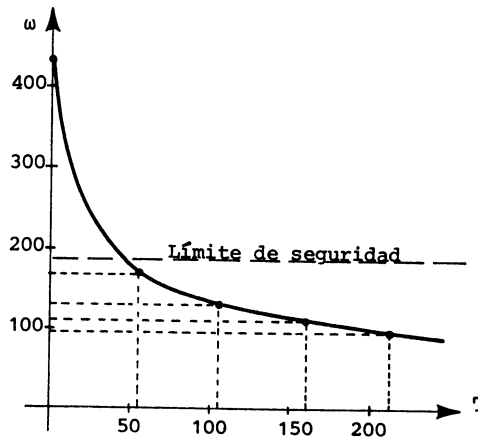
c) Para tabular la ecuación de par es conveniente usar los mismos valores de la tabla anterior, por lo que se repite agregándole una columna.

$$T_m = \frac{3.6I^2}{60+I} - 6.1$$

$I$	$\omega$	$T_m$
10.966	433.29	0
40	165	51.5
60	128.55	101.9
80	109.47	158.47
100	97.33	218.9



d) Para la curva par-velocidad no se requieren cálculos puesto que ya están los datos en la tabla de la respuesta c).



e) Para el control de velocidad se tiene la ecuación:

$$\omega = \frac{60+I}{3.6I} V - \frac{60+I}{3.6I} \times 0.31I$$

Sustituyendo la corriente de vacío  $I = 10.966$

$$\omega = 1.7976V - 6.11$$

Tabulando:

V	$\omega$
0	-6.11
250	443.3

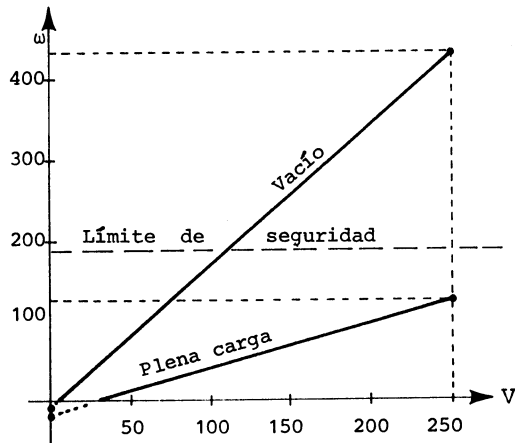
Sustituyendo la corriente nominal:

$$I=60$$

$$\omega=0.5555, \quad V=-10.3333$$

Tabulando:

V	$\omega$
0	-10.333
250	128.55



#### COMENTARIOS.

- El motor serie tiene la ventaja de su alto par de arranque. Cuando se arranca en frío se permiten corrientes mayores a la nominal, ya que su duración es muy corta y es factible superar el par nominal como se calculó en el ejemplo.
- Tiene la desventaja de que por sí solo se desboca cuando queda sin carga. En las gráficas del ejemplo se observa con que facilidad entra en la zona de peligro.
- Por otra parte, su curva par-velocidad es de la misma forma que las que requieren los vehículos para un tránsito fluido<sup>4</sup>, por lo que es muy usado en metro, trolebuses, tranvías, etc.
- En las gráficas de control de velocidad también se aprecia la inestabilidad de velocidad, dada la gran diferencia entre la velocidad de plena carga y la de vacío para un mismo voltaje.

<sup>4</sup> Esta es una experiencia diaria del automovilista, ya que para arrancar usa la primera velocidad, muy poderosa pero muy lenta. El caso es sacar rápidamente del estatismo al automóvil. Conforme hace los siguientes cambios de velocidad hay más rapidez pero menos aceleración.

**1.6.9 MOTOR CON EXCITACIÓN COMPUESTA.** Este tipo de motor tiene un campo principal en derivación y un campo auxiliar en serie como se muestra en la figura 1.35(1). Para efecto de análisis, se usan las cuatro ecuaciones básicas:

$$E = \frac{aI_{ex}}{b + I_{ex}} \omega$$

$$EI_a = T_e \omega$$

$$V = E + r_a I_a$$

$$T_e = T_m + T_r$$

La curva de saturación se obtiene para el campo en derivación, aunque al aplicar la función al análisis de respuesta se usará una corriente de excitación hipotética, con una componente igual a la corriente de excitación en derivación y otra que es una fracción de la corriente de excitación en serie, o corriente de armadura.

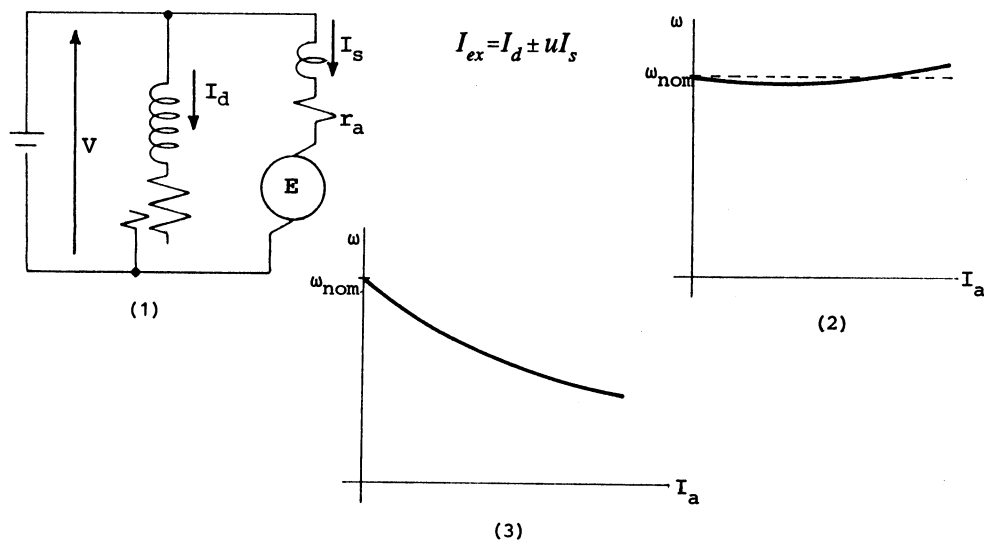


FIGURA 1.35. MOTOR CON EXCITACIÓN COMPUESTA. (1) DIAGRAMA DE CONEXIONES. (2) RESPUESTA CON CONEXIÓN DIFERENCIAL. (3) RESPUESTA CON CONEXIÓN ACUMULATIVA.

El doble signo se debe a la posibilidad de conectar el campo serie de tal forma, que su fuerza magnetomotriz se suma a la del campo derivado (excitación compuesta acumulativa) o bien, que la fuerza magnetomotriz serie se oponga a la derivada (excitación compuesta diferencial).

La metodología de análisis es similar a la del motor con excitación en derivación, solamente que se incluye la corriente hipotética de excitación.

Para la modalidad acumulativa se usa el signo positivo ( $I_{ex}=I_d+uI_s$ ) y el efecto es acercar la respuesta de este motor a la del motor serie, aunque con menor par de arranque y sin el peligro de desbocamiento como se aprecia en la figura 1.35(3). Su uso generalizado es en grúas y montacargas.

Para la modalidad diferencial se usa el signo negativo ( $I_{ex}=I_d-uI_s$ ) y el efecto es que al debilitar el flujo se recupere la velocidad que normalmente se perdería con la sola excitación en derivación. La tendencia es hacia un motor de velocidad constante, aunque no es exactamente así en la realidad, debido a la saturación.

El motor compuesto diferencial oculta un peligro latente, ya que si ocurre una sobrecarga, predomina el campo serie, se invierte el flujo y aparece una inversión súbita de velocidad con los consiguientes sobreesfuerzos eléctricos y mecánicos. En vista de esto, la modalidad diferencial prácticamente no se usa en la actualidad; inclusive hay textos que ni siquiera lo mencionan, o sea que al tratar del motor compuesto únicamente contemplan la modalidad acumulativa. Por otra parte, con el progreso de los controles electrónicos se puede obtener un motor independiente o en derivación con velocidad constante y sin peligro de inversión.



## 1.7. ARRANCADORES Y CONTROLES DE VELOCIDAD

Recordando que en el momento de arranque la velocidad del motor es nula, también lo será la fuerza electromotriz, y entonces la única limitante de la corriente de armadura según la ecuación de pérdidas eléctricas, es su propia resistencia.

$$V=0+r_a I_{a_a}$$

$$I_{a_a} = \frac{V}{r_a}$$

Como la resistencia de armadura es muy pequeña (menor que la unidad), la corriente de arranque tiende a un valor tan elevado que resulta peligroso a la máquina y a la fuente.

Las soluciones para limitar la corriente de arranque pueden ser dos:

1. Aplicar voltaje reducido durante el arranque . Esto se suele hacer cuando se incluye control de velocidad como se verá más adelante.
2. Intercalar una resistencia de arranque  $R_a$  que se suma a la de armadura, de tal modo que la corriente de arranque no sobrepase los valores permisibles.

$$I_{a_a} = \frac{V}{r_a + R_a}$$

En máquinas que arrancan en frío puede aplicarse una corriente de arranque mayor que la nominal, pero en máquinas con paradas y arranques constantes se recomienda no exceder el valor nominal. Cualquiera que sea el caso, la resistencia de arranque debe ser muy pequeña (pocos ohms) pero muy robusta (para soportar muchos amperes).

**1.7.1. ARRANCADORES.** En la figura 1.36 se muestran los diagramas de dos arrancadores. Por normas de seguridad, los elementos del arrancador deben estar protegidos dentro de una caja metálica, que es lo que representa la línea punteada.

La resistencia de arranque tiene varios pasos para eliminarla en forma gradual a medida que se acelera el motor. El contacto deslizante esta montado sobre un eje que sale de la caja, para manipularlo desde el exterior por medio de una palanca. Un resorte mantiene normalmente esta parte en su extremo izquierdo, en la posición de circuito abierto, mientras que en el otro extremo, un electroimán cuya bobina se ilustra en los dibujos, mantiene el contacto en circuito cerrado mientras deba trabajar el motor.

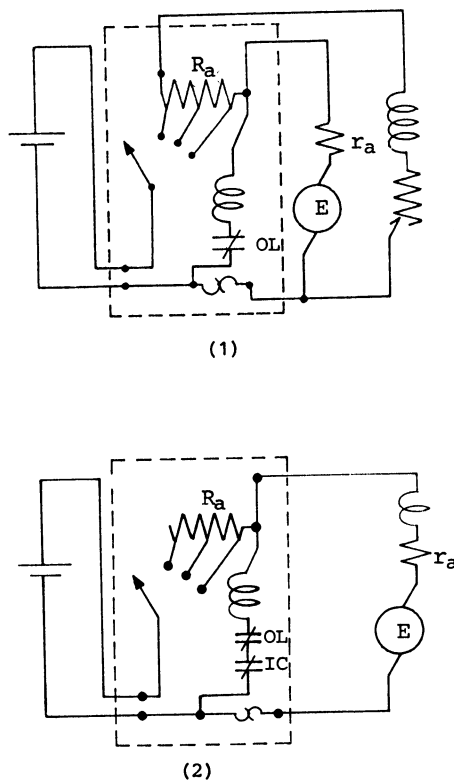


FIGURA 1.36. ARRANCADORES PARA MOTORES DE C.D. (1) CON EXCITACIÓN EN DERIVACIÓN  
(2) CON EXCITACIÓN EN SERIE.

La figura 1.36 (1) es un arrancador para motor con excitación en derivación. Cuando el operador acciona la palanca de arranque, el deslizador hace su primer contacto en la derivación izquierda, con lo que se establece por un lado la corriente de excitación, y por otro queda incluida la resistencia de

arranque  $R_a$  en el circuito de armadura. Luego pasará a las siguientes derivaciones, y al último, cuando llegue al extremo derecho, la resistencia de arranque ha quedado eliminada del circuito de armadura.

La bobina del electroimán ha quedado energizada en paralelo con la armadura, y se encarga de detener el mecanismo deslizante en el extremo derecho de operación de la máquina.

En caso de tener que parar la máquina, basta una pequeña fuerza del operador para vencer la atracción del electroimán, y después el mecanismo por sí solo continúa hasta el extremo de circuito abierto.

En caso de falla en el suministro de energía, el electroimán se desenergiza y el mecanismo corre hasta el extremo de circuito abierto.

En caso de sobrecarga hay un sistema de protección: El símbolo  $\sim\text{C}\sim$  es un sensor de corriente llamado *elemento térmico*. Físicamente se encuentra instalado en una pequeña caja, junto a un interruptor térmico representado por el símbolo  $\text{---}\text{---}$ . La línea cruzada indica que normalmente está cerrado. Las siglas OL aparecen a menudo en los diagramas, aun en español, aunque provienen de las palabras sobre carga en el idioma inglés (*Over Load*).

El elemento térmico es en realidad una pequeña resistencia que genera una cantidad de calor proporcional al cuadrado de la corriente de carga. Si por cualquier circunstancia la corriente excede al valor nominal del motor, el calor generado no se puede disipar y comienza a elevar la temperatura en el interruptor térmico; al cabo de cierto tiempo, de acuerdo con la intensidad de la sobrecarga, el interruptor se abre, desenergizando al electroimán y el mecanismo corre al extremo de circuito abierto.

La figura 1.36 (2) es un arrancador para motor serie en uso estacionario (este arrancador no se usa en vehículos). En principio es similar al anterior, pero con dos pequeñas diferencias:

- No tiene la salida para campo en derivación.

- Incluye un interruptor más en el circuito del electroimán IC. Se trata de un interruptor centrífugo cuyo mecanismo debe estar conectado a la flecha del motor, de manera que en caso de desbocamiento desenergiza inmediatamente el electroimán y para el motor.

Otra medida importante en la instalación de motores serie para usos estacionarios, es nunca utilizar transmisiones por banda. Se deben usar acoplamientos directos o reductores de engranes.

**1.7.2. CONTROLES DE VELOCIDAD.** Los controles de velocidad por el método de voltaje de armadura, son aplicables a los motores con excitación independiente y con excitación en serie.

El control clásico, que lleva el nombre de *Ward Leonard*, aprovecha la característica del generador con excitación independiente, que puede suministrar en forma estable cualquier nivel de voltaje. La excitación tanto del generador como del motor que se controla, se suministra con otro generador pequeño excitado en derivación, al que se le da el nombre de *máquina excitatriz*. El diagrama se muestra en la figura 1.37.

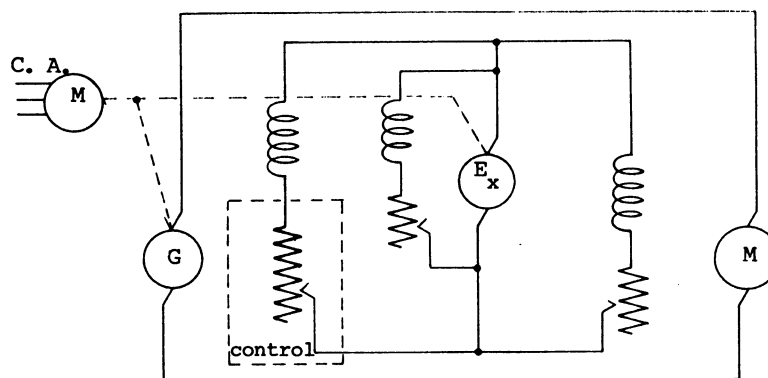


FIGURA 1.37. CONTROL DE VELOCIDAD WARD LEONARD.

El elemento de control es el reóstato de campo del generador, que debe ser lo suficientemente amplio como para que se puedan inducir fuerzas electromotrices desde el valor más pequeño hasta el voltaje nominal. Sirve también de arrancador.

Si se desea, se puede incluir el sistema de protección, intercalando el elemento térmico en la línea de armadura del motor, y el interruptor térmico en la excitación del generador. El motor de C.A debe tener también sistema de protección, y operar aun cuando la sobrecarga se produzca en la sección de C.D.

Aunque el método Ward Leonard permite un control de velocidad efectivo, estable y de gran amplitud, presenta sin embargo algunas desventajas fuertes, como son su baja eficiencia debido a las máquinas en cascada, el lugar relativamente grande que ocupa, la respuesta lenta, el mantenimiento entre otros. La mayoría de estas desventajas han sido superadas con los controles electrónicos.

**Controles electrónicos.** El avance que ha logrado la electrónica de potencia en las últimas décadas ha hecho innecesario el uso de generadores de C.D. como fuente de energía para motores.

Las altas corrientes que requieren las armaduras se obtienen de la red de corriente alterna a través de rectificadores controlados de silicio (conocidos como thyristores o SCR por sus siglas en el idioma inglés). Se dice que son controlados porque aun estando en condiciones de conducir corriente, no lo hacen sino hasta el momento de recibir una señal en una tercera terminal llamada *compuerta*. Una vez recibida la señal, el rectificador continúa conduciendo hasta que la corriente alterna llega a su valor nulo, y de ahí en adelante impide la conducción en sentido negativo.

La señal se puede suministrar en el momento que se inicia la semionda positiva, en cuyo caso la conduce íntegramente, o se puede retrasar para que conduzca solamente una fracción de la onda.

En la figura 1.38(1) se muestra una rectificación de onda completa, comenzando con un ángulo grande de atraso en la señal de disparo y disminuyendo conforme pasa el tiempo. El efecto es que va aumentando el valor eficaz de la señal rectificada. También se pueden rectificar ondas medias y completas de sistemas trifásicos, con lo que se eliminan los tiempos muertos que son indeseables, pero el valor mínimo eficaz es elevado, no permitiendo velocidades muy pequeñas en el motor.

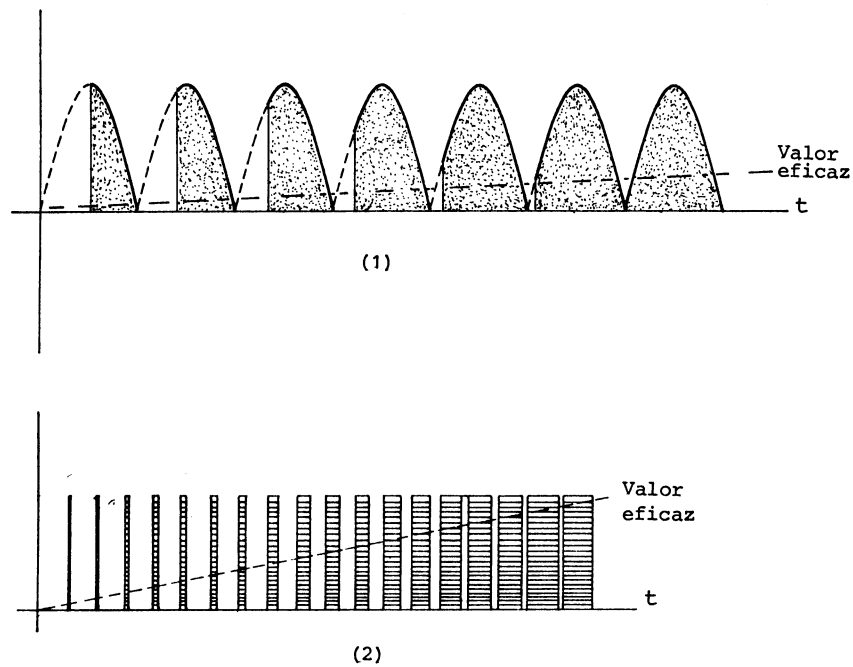


FIGURA 1.38. CONDUCCIÓN DEL RECTIFICADOR CONTROLADO DE SILICIO. (1) RECTIFICACIÓN CONTROLADA DE ONDA COMPLETA DE C.A (2) SECCIONADO DE CORRIENTE DIRECTA.

El rectificador controlado no solamente se usa para rectificar corriente alterna, si no también para conducir corriente directa en forma controlada.

Se da la señal de disparo, con lo que el rectificador empieza a conducir, pero inmediatamente se interrumpe por medio de un circuito auxiliar, con lo que se consiguió solamente un pulso de C.D. lo que se repite constantemente.

El sistema más usado da la señal de disparo a una frecuencia fija, y el valor eficaz se controla por el ancho de pulso como se ilustra en la figura 1.38(2). A este tipo de control se le ha dado el nombre de *chopper* en el idioma inglés y se traduce como seccionador o troceador. Es el que se usa en la tracción vehicular, en donde las líneas de alimentación son de corriente directa.

Los circuitos de control electrónico son algo complicados, y requieren de un estudio extenso que sale del enfoque de esta exposición, de modo que solamente se presentará en diagrama de bloques en la figura 1.39.

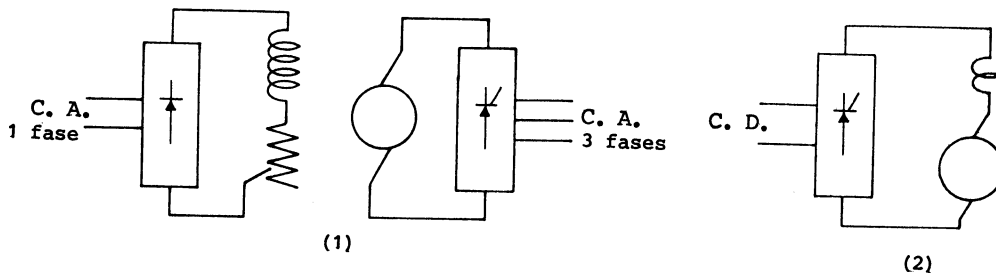


FIGURA 1.39. DIAGRAMAS DE BLOQUES DE CONTROL ELECTRÓNICO. (1) ALIMENTACIÓN DE C.A.  
(2) ALIMENTACIÓN DE C.D.

En el primer dibujo se representa un motor con excitación independiente. La corriente de excitación, que es pequeña, se obtiene de una rectificación fija de onda completa en una fase, mientras que la corriente de armadura la suministran rectificadores controlados de onda completa en tres fases. Se puede observar en el bloque de alimentación de la excitación, el símbolo del rectificador fijo, mientras que en el bloque de alimentación de armadura está el símbolo del rectificador controlado, con la terminal de compuerta.

En el segundo dibujo se muestra la alimentación de corriente directa, y por tanto el bloque representa un seccionador que controla un motor de tracción vehicular.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1 Explicar las diferencias y similitudes entre un generador y un motor.

1.2 ¿Qué es un embobinado de campo y un embobinado de armadura? A veces se les llama también inductor e inducido ¿cuál será cada uno?

1.3 En la descripción de la máquina se analizó cómo el conmutador rectifica la f.e.m. inducida. Explicar cómo el mismo conmutador alterna la C.D. aplicada en la modalidad de motor.

1.4 Aparentemente la resistencia de armadura aumenta con el uso. De ser cierto, ¿a qué se deberá? ¿se podrá restituir el valor original?

1.5 Una máquina de 250 V, 75 A, 1500 RPM se hace girar como motor en vacío, aplicando una tensión de armadura de 150 V. Cuando la corriente de excitación es de 1 A, la corriente de armadura es de 8.1 A y la velocidad de 1542 RPM. Al duplicar la corriente de excitación, la corriente de armadura baja a 5.2 A y la velocidad a 991 RPM.

Despreciando la caída de voltaje en la resistencia de armadura debida a la corriente en vacío, obtener la función de Froelich para curva de saturación en vacío y trazar la curva para la velocidad nominal.

1.6 Calcular el par de pérdidas rotacionales en la máquina del problema 1.5

1.7 La máquina del problema 1.5 se trabaja como generador con excitación independiente, girando a su velocidad nominal y ajustando el voltaje nominal en vacío. Al darle carga de 50 A, el voltaje cae a 242 V. Suponiendo que no hay distorsión de la f.e.m., calcular la resistencia de armadura.

1.8 Si hubiera distorsión de la f.e.m. en el problema 1.7 ¿a qué se puede deber?



1.9 Las características de un generador de C.D. son:

125 V

8 kW

1800 RPM

Curva de saturación en vacío:  $E = \frac{1.35I_{ex}}{2+I_{ex}} \omega$

Resistencia de armadura:  $r_a = 0.08 \ \Omega$

Resistencia de campo:  $r_c = 56 \ \Omega$

Par de pérdidas rotacionales:  $T_r = 5.75 \ N \cdot m$

Se hace girar a su velocidad nominal, excitado en forma independiente y ajustando su voltaje nominal a plena carga, ¿cuál será su voltaje cuando quede en vacío? Trazar su curva de regulación de voltaje y calcular el porcentaje de regulación.

1.10 El generador del problema 1.9 se conecta ahora para excitarse en derivación y sucede que al hacerlo girar en vez de levantar voltaje, el voltaje por magnetismo remanente cae casi a cero ¿qué habrá pasado? ¿cómo se corrige?

1.11 Una vez corregida la anomalía del problema 1.10, se procede a girar el generador a velocidad nominal y ajustarlo a voltaje nominal a plena carga. ¿Cuál será su voltaje cuando quede en vacío? Calcular el porcentaje de regulación de voltaje y comparar con el problema 1.9.

1.12 Para las condiciones de trabajo del problema 1.11, calcular la máxima corriente de armadura que puede dar el generador, compararla con su corriente nominal y trazar la curva de regulación de voltaje, extrapolada a toda su extensión.

1.13 a) Calcular la potencia en HP del motor que se requiere para impulsar el generador de los problemas 1.9 al 1.11.

b) Si se deseara obtener en el laboratorio la curva de regulación del problema 1.12 (aun a riesgo de quemar el generador) ¿de qué potencia debería ser el motor impulsor?

1.14 Las características de un generador de C.D. con excitación en serie son:

250 V

60 A

1400 RPM

Curva de saturación en vacío:  $E = \frac{3.6I}{60+I} \omega$

Resistencia de armadura (incluyendo el campo serie):  $r_a = 0.29 \ \Omega$

Par de pérdidas rotacionales:  $T_r = 8.1 \ N \cdot m$

Se desea disipar 14.4 kW en una resistencia de carga de 4 ohms:

a) ¿A qué velocidad hay que girar el generador?

b) ¿De qué potencia debería ser el motor impulsor?

c) Teniendo en cuenta que será necesario acoplar con una transmisión por bandas, puesto que los motores comerciales son de 1750 RPM. ¿Cambiará la potencia necesaria?

1.15 Si el generador del problema 1.14 pierde 5% de su velocidad, ¿qué potencia se disipará en la resistencia de 4 ohms?

1.16 Las características de un motor de C.D. son:

220 V

20 HP

1200 RPM

Curva de saturación en vacío:  $E = \frac{3.68I_{ex}}{4.65 + I_{ex}} \omega$

Resistencia de armadura:  $r_a = 0.12 \ \Omega$

Resistencia de campo:  $r_c = 35 \ \Omega$

Par de pérdidas rotacionales:  $T_r = 7.2 \ N\cdot m$

Por un error, se olvidó copiar de la placa la corriente nominal. Calcularla.

1.17 Si el motor del problema 1.16 se alimenta a voltaje nominal excitado en forma independiente y se ajusta a velocidad nominal a plena carga ¿cuál será su velocidad si queda en vacío? Trazar su curva de regulación de velocidad en coordenadas  $I_a - \omega$  y  $T_m - \omega$  y calcular el porcentaje de regulación.

1.18 El motor del problema 1.16 se usará para mover una carga cuyo par mecánico es de 105 N-m y que requiere velocidades entre 950 y 1300 RPM. Si se excita igual que en el problema 1.17, calcular los voltajes máximo y mínimo que debe dar la fuente de alimentación, y trazar la gráfica de control de velocidad entre estos dos límites.

1.19 El motor del problema 1.16 se conecta ahora con excitación en derivación, pero resulta que el sentido de rotación es contrario al que se desea, ¿cómo se invierte esta rotación? Si hubiera sucedido lo mismo con excitación independiente, ¿cómo se invertiría la rotación?

1.20 El motor del problema 1.16 trabaja con excitación en derivación, alimentado a voltaje nominal y ajustando su velocidad nominal a plena carga. ¿Cuál será su velocidad en vacío? Trazar su curva de regulación de velocidad en coordenadas  $I_a - \omega$  y  $T_m - \omega$  y calcular el porcentaje de regulación.

¿Coinciden los resultados con los del problema 1.17?

1.21 En el problema 1.18 se planteaba la necesidad de mover una carga de 105 N-m en el rango de velocidades entre 950 y 1300 RPM, ¿Se podrían satisfacer estos requerimientos con el motor excitado en derivación?

1.22 Si el motor se excita en derivación, calcular la corriente de excitación mínima para que en vacío no exceda de 1500 RPM.

1.23 Las características de un motor de C.D. con excitación en serie son:

125 V

75 A

1750 RPM

Curva de saturación en vacío:  $E = \frac{1.136I}{73+I} \omega$

Resistencia de armadura (incluye la resistencia de campo serie):  $r_a = 0.26 \Omega$

Par de pérdidas rotacionales:  $T_r = 2.44 \text{ Nm}$

¿Cuál es su potencia mecánica nominal en HP?

1.24 Si se desea arrancar el motor del problema 1.23 al doble del par mecánico nominal, ¿cuál debe de ser el voltaje de arranque?

1.25 Trazar una familia de curvas de regulación de velocidad (en coordenadas  $I_a - \omega$  y  $T_m - \omega$ ) para el motor del problema 1.23, a voltaje nominal y 24% de voltaje nominal.

1.26 El motor del problema 1.23 se utilizará para mover una carga cuyo par mecánico varía según la ley  $T_m = 5 + 0.18 \omega$ . La velocidad se desea controlar entre 100 y 1750 RPM. Trazar la curva de control de velocidad.

1.27 ¿Cuál deberá ser el voltaje aplicado al motor del problema 1.23 para que en vacío no rebase las 2100 RPM?

1.28 ¿Que habrá que hacer al motor de los problemas 1.23 al 1.27 para invertir el sentido de rotación?



## CAPÍTULO 2

### TRANSFORMADORES

#### 2.1. GENERALIDADES

**2.1.1. DEFINICIÓN.** Un transformador es un dispositivo electromagnético transmisor de potencia eléctrica en la modalidad de corriente alterna. Usualmente, esta potencia la recibe a ciertos valores de sus componentes:

$$P = V_H I_H \cos \theta$$

los cuales cambia (o transforma como lo indica su nombre) para entregarlos como:

$$P = V_X I_X \cos \theta$$

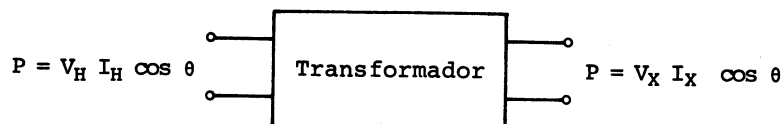


FIGURA 2.1. DIAGRAMA DE BLOQUE DEL TRANSFORMADOR

En una transformación ideal, se supone que tanto la potencia  $P$  como el factor de potencia  $\cos \theta$  no se alteran, de modo que los valores de entrada y salida son los mismos. Sin embargo, un transformador real, como se estudiará más adelante, tiene pérdidas, de modo que los valores de salida difieren ligeramente de los de entrada.

Se acostumbra usar la letra **H** para referirse al lado de mayor voltaje, al que se llama *lado de alto voltaje o de alta tensión*, y la letra **X** para el lado de menor voltaje, llamado *lado de bajo voltaje o de baja tensión*. Así:

$V_H$  e  $I_H$  son voltaje y corriente en el lado de alta tensión.

$V_X$  e  $I_X$  son voltaje y corriente en el lado de baja tensión.

La figura 2.1 representa un diagrama de bloque del transformador ideal. El flujo de energía puede ser de izquierda a derecha, en cuyo caso el transformador trabaja como reductor de voltaje, o de derecha a izquierda, como elevador de voltaje.

**2.1.2. ESTRUCTURA.** Un transformador consta de un núcleo de material ferromagnético, en el cual se encuentran devanadas dos bobinas, generalmente de diferente número de vueltas.

La bobina de mayor número de vueltas es la que trabaja con alta tensión, y la de menor número de vueltas con baja tensión.

En algunos casos, el número de vueltas de las dos bobinas es igual, ambas trabajando a la misma tensión y el objeto del transformador sería aislar eléctricamente los voltajes de uno y otro lado.

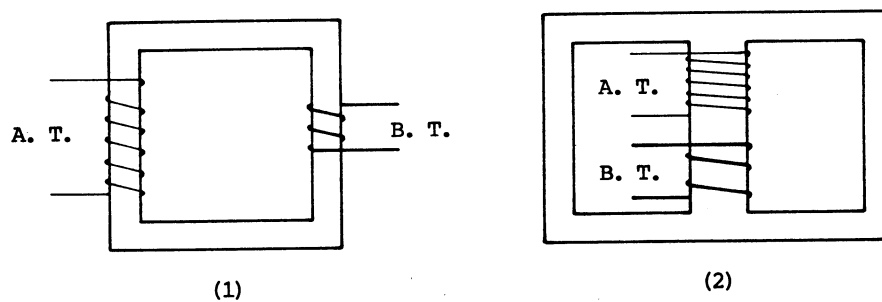


FIGURA 2.2. ESTRUCTURA DEL TRANSFORMADOR. (1) DE NÚCLEO SENCILLO (2) DE NÚCLEO ACORAZADO



En la figura 2.2 se muestran dos disposiciones usuales para los núcleos, siendo mucho más frecuente el caso acorazado. Las bobinas están dibujadas en forma muy elemental, pues en la realidad tienen cientos o miles de vueltas, y en la disposición acorazada, la bobina de baja tensión suele devanarse sobre las de alta tensión, de manera que son concéntricas.

**2.1.3. BOBINA PRIMARIA Y BOBINA SECUNDARIA.** Se llama *bobina primaria*, a aquella por la cual se alimenta el transformador, y *bobina secundaria* a aquella por la que entrega la energía transformada. Son conceptos de operación (no de construcción), de modo que un transformador que no se encuentre conectado y operando en un sistema, no tiene primario ni secundario, sino solamente alta y baja tensión.

Un transformador reductor trabaja con la alta tensión como primario y con la baja como secundario, mientras que un elevador trabaja con baja tensión como primario y alta como secundario.

a) **Excitación de la bobina primaria.** Para este razonamiento, se puede tomar cualquiera de las bobinas como primaria. En la figura 2.3 se ha elegido la de alta tensión. Para simplificar la figura, solamente se ha dibujado una parte del núcleo y no se incluye la bobina secundaria.

La bobina primaria, con un número de vueltas  $N_H$  se conecta a una fuente de voltaje alterno.

$$v = V_{m\acute{a}x} \text{sen} 2\pi ft$$

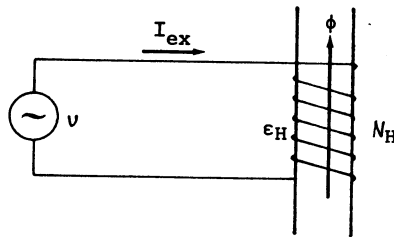


FIGURA 2.3. EXCITACIÓN DE LA BOBINA PRIMARIA.

El voltaje alterno hace fluir en el circuito, una corriente  $I_{ex}$  alterna, la cual induce en el eje magnético de la bobina, un flujo también alterno.

Independientemente del origen del flujo, este induce en la bobina una fuerza electromotriz  $\epsilon_H$  de acuerdo con la ley de Faraday:

$$\epsilon_H = -N_H \frac{d\phi}{dt}$$

El conjunto descrito hasta aquí, constituye una malla, como se puede observar en la figura 2.3, de modo que aplicando la correspondiente ley de Kirchhoff se tiene:

$$v + \epsilon_H = 0$$

y sustituyendo

$$V_{m\acute{a}x} \text{sen} 2\pi ft - N_H \frac{d\phi}{dt} = 0$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene:

$$\phi = \frac{V_{m\acute{a}x}}{2\pi f N_H} [-\cos 2\pi ft] + C$$

La constante de integración solamente tiene validez en los primeros ciclos después de cerrar el circuito, por lo que posteriormente en estado estable  $C=0$ . Por otra parte, en función del valor eficaz  $V_{m\acute{a}x} = \sqrt{2}V$  y juntando las constantes  $\frac{2\pi}{\sqrt{2}} = 4.44$ , la expresión de flujo se reduce a:

$$\phi = \frac{V}{4.44 N_H f} [-\cos 2\pi ft]$$

y la magnitud de la cosenoide es:

$$|\phi| = \frac{V}{4.44 N_H f}$$

Esto significa que el flujo en el núcleo es directamente proporcional al voltaje aplicado, e inversamente proporcional a la frecuencia. Para devanar la bobina, también hay que tener en cuenta que mientras más vueltas contenga, es necesario menos flujo y viceversa. La gráfica de la figura 2.4 puede dar una idea de la cantidad de material necesaria según el número de vueltas.

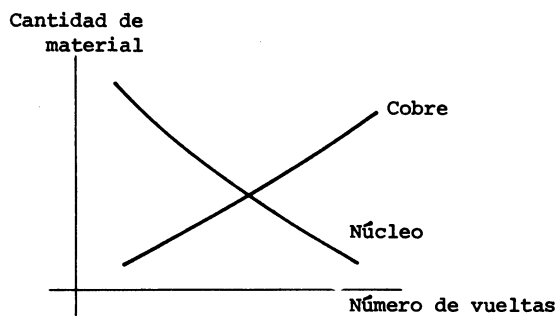


FIGURA 2.4. COMPARACIÓN DE LA CANTIDAD DE COBRE Y FIERRO NECESARIOS.

Ahora que ya se conoce la expresión de flujo, se puede calcular la fuerza electromotriz inducida en la bobina, mediante la ley de Faraday.

$$\epsilon_H = -N_H \frac{d}{dt} \frac{V_{m\dot{x}}}{2\pi f N_H} [-\cos 2\pi f t]$$

de donde:

$$\epsilon_H = -V_{m\dot{x}} \text{sen } 2\pi f t$$

o sea:

$$\epsilon_H = -v$$

En la figura 2.5 se muestran las gráficas correspondientes al voltaje aplicado, el flujo en el núcleo y la fuerza electromotriz inducida.

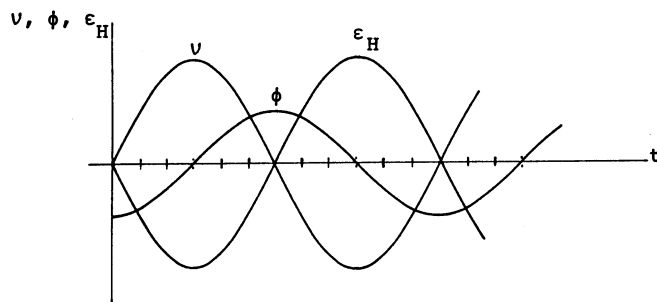


FIGURA 2.5. VARIACIÓN DEL VOLTAJE, EL FLUJO Y LA FUERZA ELECTROMOTRIZ EN EL TIEMPO.

Se observa que el flujo se retrasa noventa grados respecto al voltaje aplicado, la fuerza electromotriz se retrasa noventa grados respecto al flujo y ciento ochenta grados respecto al voltaje aplicado.

b) **Fuerza electromotriz inducida en el secundario.** Para un razonamiento sencillo sobre la inducción en el secundario y algunas relaciones que guarda respecto al primario, es más fácil recurrir al arreglo acorazado, como se muestra en la figura 2.6. Aparece únicamente la columna central del núcleo, por sencillez del dibujo, y se puede observar que las dos bobinas están devanadas en el mismo sentido; solamente difieren en el número de vueltas y en el calibre de alambre que se utiliza. También se observa que el flujo atraviesa las dos bobinas en el mismo sentido.

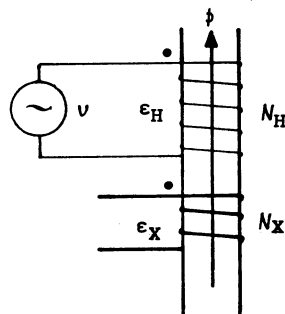


FIGURA 2.6. INDUCCIÓN DE FUERZA ELECTROMOTRIZ EN LA BOBINA SECUNDARIA.

La inducción de fuerza electromotriz en el secundario se lleva a cabo en circunstancias muy parecidas a la inducción en el primario. Se produce por el mismo flujo magnético y solamente difiere en el

número de vueltas, de manera que aplicando la ley de Faraday se tiene:

$$\epsilon_X = -N_X \frac{d}{dt} \frac{V_{máx}}{2\pi f N_H} [-\cos 2\pi f t]$$

que da por resultado

$$\epsilon_X = -\frac{N_X}{N_H} V_{máx} \text{sen} 2\pi f t$$

que es una onda cuya magnitud es proporcional a la de la fuerza electromotriz primaria y además se encuentra en fase con ella.

Ambas fuerzas electromotrices se pueden observar en la figura 2.7. Es conveniente insistir en que, independientemente de la elección que se ha hecho en este razonamiento (alta tensión como primario), en la práctica, cualquiera de ellas puede ser la f.e.m. primaria y la otra, la secundaria.

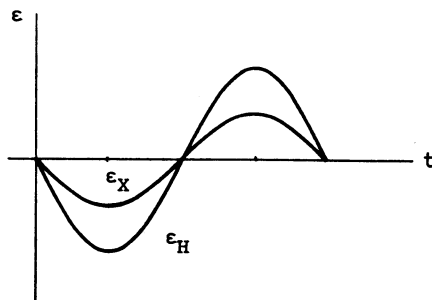


FIGURA 2.7. COMPARACIÓN DE LAS DOS FUERZAS ELECTROMOTRICES INDUCIDAS.

#### 2.1.4. PROPORCIONALIDAD Y CONCEPTO DE RELACIÓN DE TRANSFORMACIÓN.

Considerando que:

$$-V_{máx} \text{sen} 2\pi f t$$

es la fuerza electromotriz inducida en el primario, se tiene:

$$\varepsilon_x = \frac{N_x}{N_H} \varepsilon_H$$

o sea:

$$\frac{N_H}{N_x} = \frac{\varepsilon_H}{\varepsilon_x}$$

Las magnitudes de las fuerzas electromotrices conservan una relación constante, igual a la relación entre los números de vueltas. Se le llama *relación de transformación* y se representa por la letra *a*.

$$\frac{N_H}{N_x} = \frac{\varepsilon_H}{\varepsilon_x} = a$$

Teniendo en cuenta que los numeradores en esta expresión son mayores que los denominadores, la relación de transformación es siempre mayor que la unidad, o cuando menos, igual a la unidad en algunos casos particulares.

**2.1.5. ONDAS EN FASE Y EL CONCEPTO DE POLARIDAD.** Observando en la figura 2.7 que las dos fuerzas electromotrices están en fase, se puede decir que en un instante cualquiera, las dos son nulas, o positivas, o negativas, es decir que en un instante cualquiera ambas fuerzas tienen la *misma polaridad*. Desde el punto de vista práctico, significa que siempre corresponderán en polaridad, una terminal del devanado de alta tensión y una del devanado de baja tensión.

Con la distribución geométrica de la figura 2.6, resulta fácil darse cuenta de que las terminales de igual polaridad son las que tienen la misma posición relativa, por ejemplo las dos de arriba o las dos de abajo. En los diagramas suelen identificarse dos de ellas y se marcan con un punto, como las dos terminales superiores de la figura 2.6.

El conocimiento de las terminales de misma polaridad es indispensable para interconectar correctamente varios transformadores entre si. Puede ser el caso de conexiones en serie o en paralelo en sistema monofásicos, y en delta o en estrella para sistemas trifásicos.

**2.1.6. ORGANIZACIONES PRÁCTICAS DE LAS TERMINALES.** En la práctica, las terminales del transformador deben tener una localización organizada en un tablero, si el transformador se encuentra rodeado de aire, o en la tapa del tanque, si se encuentra sumergido en aceite. Estas terminales se identifican con letras y subíndices, siendo  $H_1$  y  $H_2$  las de alta tensión y  $X_1$  y  $X_2$  las de baja tensión, en donde  $H_1$  y  $X_1$  son de la misma polaridad.

El tablero suele organizarse en dos formas, como aparece en la figura 2.8. Cuando  $H_1$  y  $X_1$  se localizan a la izquierda, se dice que es una organización de polaridad sustractiva, mientras que si  $H_1$  se encuentra a la izquierda y  $X_1$  a la derecha, se dice que es polaridad aditiva.

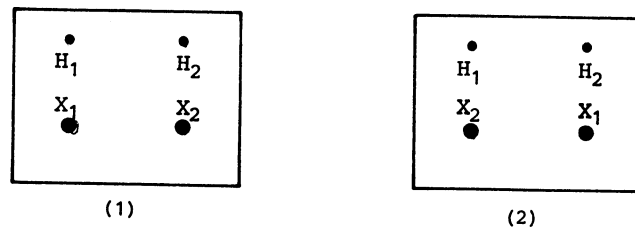


FIGURA 2.8. ORGANIZACIÓN DE TERMINALES EN UN TABLERO.

(1) POLARIDAD SUSTRATIVA (2) POLARIDAD ADITIVA.

Los nombres provienen de una forma de investigar la polaridad en el laboratorio, que consiste en excitar el transformador por las terminales de alta tensión y formar una malla con  $H_1$ - $H_2$ ,  $X_1$ - $X_2$  y un voltímetro, como aparece en la figura 2.9. Supóngase un instante en que las ondas de fuerza

electromotriz son positivas,  $H_1$  y  $X_1$  serán las terminales positivas. Al recorrer la malla se notará que en el primer caso (figura 2.9.1) los voltajes se restan (polaridad sustractiva) y el voltímetro dará una lectura menor que el voltaje aplicado; mientras que en el segundo caso (figura 2.9.2) los voltajes se suman (polaridad aditiva) y el voltímetro dará una lectura mayor que el voltaje aplicado.

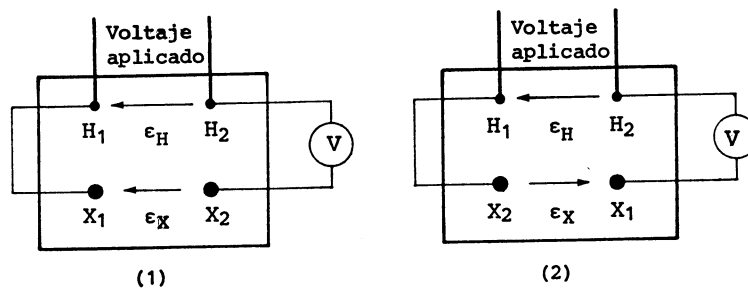


FIGURA 2.9. JUSTIFICACIÓN DE LA NOMENCLATURA.

**2.1.7. CORRIENTES DE CARGA.** A fin de aprovechar la fuerza electromotriz inducida en el secundario, se le agrega una impedancia de carga como muestra la figura 2.10.

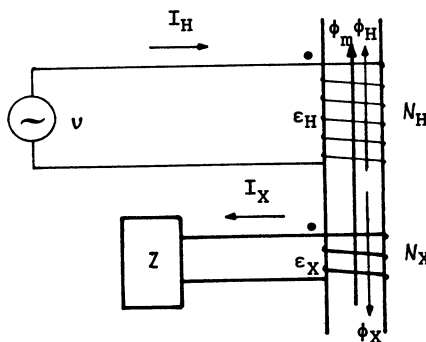


FIGURA 2.10. APROVECHAMIENTO DE LA FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA MEDIANTE LA ADICIÓN DE UNA IMPEDANCIA.



Imaginemos nuevamente un instante en el que las ondas de fuerza electromotriz son positivas, o sea que los puntos de polaridad son positivos. La bobina secundaria se constituye ahora en una fuente de energía, y en el instante mencionado impulsa una corriente  $I_x$  por el punto de polaridad, hacia la carga. Aplicando la ley de la mano derecha<sup>1</sup>, nos damos cuenta que esta corriente debe producir un flujo  $\phi_x$  cuyo sentido es opuesto al flujo originado por la excitación de la bobina primaria. (A este último flujo, por su propiedad de eslabonar las dos bobinas, se le llamará de ahora en adelante *flujo mutuo*,  $\phi_m$  ).

El flujo mutuo, como ya se ha visto, depende del voltaje aplicado y de la frecuencia, de manera que no debe disminuir por el hecho de aparecer ahora una corriente de carga  $I_x$ .

Para evitar que el flujo de carga  $\phi_x$  , haga disminuir al flujo mutuo, debe generarse un equilibrante del primero, como se aprecia en la figura identificada como  $\phi_H$  .

$\phi_H$  y  $\phi_x$  deben ser de la misma magnitud y de sentidos opuestos.

Aplicando ahora a la inversa la ley de la mano derecha, deducimos que el flujo  $\phi_H$  debe ser producido por una corriente  $I_H$ . Esta corriente es independiente de la corriente de excitación  $I_{ex}$  que se ilustró en la figura 2.3 y que intencionalmente no se ha incluido en la figura 2.10, pues en un caso ideal  $I_{ex}$  resulta despreciable junto a  $I_H$ .

Considerando que las magnitudes de los flujos  $\phi_x$  y  $\phi_H$  son iguales (sin interesarnos en este razonamiento sus sentidos), las correspondientes fuerzas magnetomotrices también deben ser iguales, por tanto:

$$N_x I_x = N_H I_H$$

---

<sup>1</sup> Tomando el núcleo con la mano derecha y con los dedos en el mismo sentido de la corriente, el pulgar indica la dirección del flujo magnético que produce.

de donde:

$$\frac{N_H}{N_X} = \frac{I_X}{I_H} = a$$

o sea que la relación de corrientes es inversamente proporcional a la relación de vueltas, y la relación de vueltas es la relación de transformación, por tanto:

$$\frac{N_H}{N_X} = \frac{\varepsilon_H}{\varepsilon_X} = \frac{I_X}{I_H} = a$$

La bobina de mayor número de vueltas opera con el mayor voltaje y la menor corriente, mientras que la de menor número de vueltas opera con el menor voltaje y la mayor corriente. Esta es la razón por la que la bobina de baja tensión se ha dibujado con trazos más gruesos en las figuras 2.6 y 2.10 y también sus correspondientes terminales en las figuras 2.8 y 2.9, pues a mayor corriente se requiere conductor de calibre más grueso.

## 2.2. TEORIA DEL TRANSFORMADOR

**2.2.1. TRANSFORMADOR IDEAL.** Un transformador que obedece fielmente a los planteamientos hechos hasta el subtema 2.1.7 es un *transformador ideal*. Su característica fundamental es que carece de pérdidas.

El núcleo es de un supuesto material no saturable y con una permeabilidad magnética considerablemente mayor que la de los materiales ferromagnéticos conocidos. Esto ocasiona que *todo* el flujo producido por las bobinas (aun con carga) esta contenido en este núcleo, y además la corriente de excitación se vuelve tan pequeña que resulta despreciable (inclusive, indetectable). Nótese que en el subtema 2.1.7 no se ha tenido en cuenta esta corriente.

Las bobinas se devanan también con un supuesto material que carece de resistividad, que no requiere aislamiento y consecuentemente las espiras quedan tan cerca entre si, que no hay el menor espacio intermedio. Esto ocasiona que el voltaje aplicado sea exactamente igual a la fuerza electromotriz como se consideró en el subtema 2.1.3 a), y que no se genere flujo disperso entre espiras.

Para facilitar el dibujo de este transformador en los diagramas eléctricos, se recurre a una simbología simplificada como la que aparece en la figura 2.11.

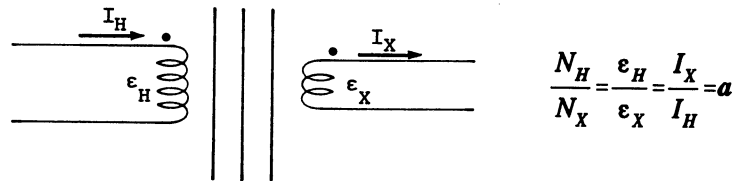
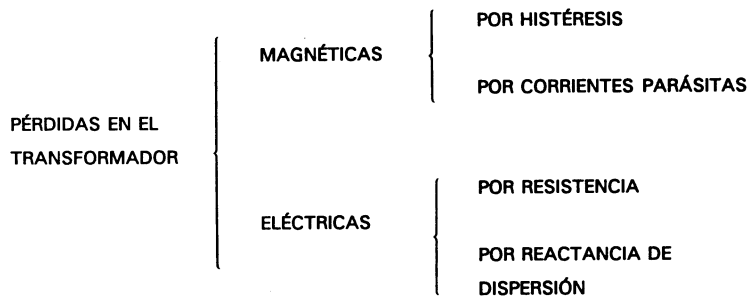


FIGURA 2.11. TRANSFORMADOR IDEAL Y SUS RELACIONES DE COMPORTAMIENTO.

Dos bobinas, una a cada lado y de diferente número de vueltas representan la alta y la baja tensión, con sus respectivas corrientes y polaridades. No se suele hacer énfasis en los diferentes calibres. Las líneas entre bobinas representan el núcleo ideal (En algunos casos, como transformadores electrónicos de alta frecuencia que no tienen núcleo ferromagnético, se dice que tienen núcleo de aire y no se dibujan las líneas).

**2.2.2. EL TRANSFORMADOR REAL.** En un transformador real no se cumplen con rigor las relaciones descritas en la figura 2.11, debido a que los materiales de que se dispone en la naturaleza no pueden efectuar la conversión y transmisión perfecta de energía y aparecen algunas pérdidas, que no se pueden evitar, aunque sí es posible reducirlas a un valor mínimo.

Estas pérdidas se pueden clasificar según el siguiente cuadro.



Un diagrama que represente el comportamiento de un transformador real, tendría como parte central el elemento ideal de la figura 2.11, y tanto a la izquierda como a la derecha se agregan resistencias y reactancias como parámetros concentrados, en los que se disiparían las pérdidas. Un diagrama de esta naturaleza recibe el nombre de *circuito equivalente* y permite analizar el comportamiento del transformador bajo cualquier régimen de carga, inclusive en vacío.

**2.2.3. PÉRDIDAS EN EL TRANSFORMADOR.** Según el cuadro anterior las pérdidas se clasifican:

a) **Pérdidas magnéticas.** Las pérdidas magnéticas o pérdidas en el núcleo se deben a ciertas limitaciones que tienen los materiales ferromagnéticos reales, comparados con el material ideal, como se describe a continuación.

-La permeabilidad del material ferromagnético no tiende a infinito, por lo que la corriente de excitación necesaria para magnetizar el núcleo no es despreciable, como se había supuesto en el transformador ideal.

-La permeabilidad del material ferromagnético no es constante, tendiendo a bajar considerablemente con alto grado de excitación. En estas condiciones, el aumento de corriente no logra aumento apreciable de flujo y se dice que el núcleo está *saturado*, lo que corresponde a la región extrema de la figura 2.12.1.

-El material ferromagnético tiene retentividad. Esta denominación proviene de la tendencia en retener una parte del flujo con que fue magnetizado. En la figura 2.12 (2) se observa que al disminuir la corriente de excitación, el flujo desciende por una trayectoria superior; con corriente nula, el flujo conserva un pequeño valor, y con corriente negativa se genera la parte simétrica de la gráfica. Una corriente alterna hace variar el flujo según el perímetro de la figura, originando *el ciclo de histéresis*.

-El material ferromagnético es también conductor eléctrico.

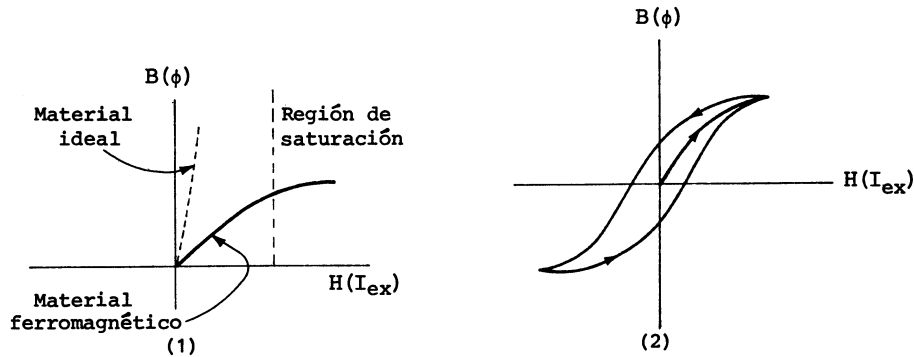


FIGURA 2.12. PÉRDIDAS MAGNÉTICAS. (1) PRIMERA MAGNETIZACIÓN DEL NÚCLEO  
(2) CICLO DE HISTÉRESIS.

Las tres primeras características dan origen a las pérdidas por histéresis, que se describen a continuación, y la última característica, ocasiona las pérdidas por corrientes parásitas, que se describen más adelante.

**Pérdidas por histéresis.** En el subtema 2.1.3 a) se encontró que para un voltaje alterno aplicado se produce en el núcleo un flujo también alterno, cuya representación ondulatoria se ilustra en la figura 2.13.1. Para facilidad de interpretación, el eje de los tiempos se ha dividido en grados geométricos.

Frente a esta gráfica se repite el ciclo de histéresis de la figura 2.12.2, pero considerando las coordenadas particularizadas para un núcleo de determinadas dimensiones, o sea que en las abscisas

en vez de la fuerza magnetizante aparece la corriente de excitación, y en las ordenadas, en lugar de la densidad de flujo aparece el flujo total, como se observa en la figura 2.13.2.

Para construir la gráfica de corriente, hay que dibujar el sistema coordenado correspondiente, abajo del ciclo de histéresis, con la dirección positiva del tiempo hacia abajo y la corriente hacia la derecha, o sea, girado noventa grados respecto a su posición convencional, como se aprecia en la figura 2.13.3.

Una serie de puntos de la gráfica de flujo distanciados treinta grados (2.13.1) se refiere al ciclo de histéresis según sus trayectorias ascendente y descendente (2.13.2) y cada referencia baja al sistema coordenado de corriente, obteniéndose así la forma de onda de la corriente de excitación (2.13.3). Se sugiere al lector girar  $90^\circ$  el libro, a fin de apreciar esta gráfica en su posición convencional. Para mayor facilidad las referencias se han escrito en esta posición.

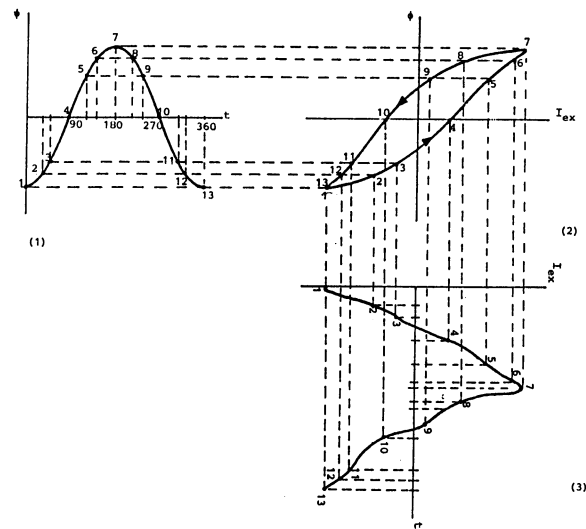


FIGURA 2.13. CONSTRUCCIÓN DE LA ONDA DE CORRIENTE DE EXCITACIÓN.

Dos cosas importantes se observan en esta gráfica:

1. La onda no es senoidal, debido a la gran área de histéresis y al fenómeno de saturación.
2. La onda se retrasa un ángulo apreciablemente menor de  $90^\circ$  respecto al voltaje (que sería una

senoide) debido a la retentividad inherente al fenómeno de histéresis. Esto ocasiona que la potencia para magnetizar el núcleo no sea puramente reactiva como sería el caso ideal, si no que tiene una componente real, dando origen a las *pérdidas por histéresis*.

Las pérdidas por histéresis se pueden reducir con aleaciones de pequeña área de histéresis (figura 2.14.1) y diseñando la sección transversal del núcleo de tal magnitud, que para el flujo que requiere la bobina se produzca un bajo nivel de saturación. La corriente se aproximaría más a la forma senoidal y su defasamiento se acercaría más a los  $90^\circ$  (figura 2.14.2).

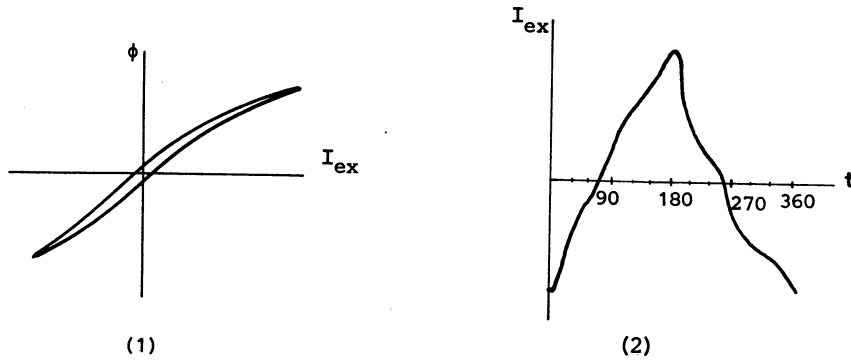


FIGURA 2.14 REDUCCIÓN DE LAS PÉRDIDAS MAGNÉTICAS. (1) NÚCLEO DE PEQUEÑA ÁREA DE HISTÉRESIS Y CON BAJA SATURACIÓN. (2) CORRIENTE DEFASADA CERCA DE  $90^\circ$ .

En estudios más detallados se analiza la corriente, encontrando que consta principalmente de una componente fundamental y una armónica de tercer orden (triple frecuencia).

**Pérdidas por corrientes parásitas.** Las corrientes parásitas se producen debido a que el núcleo es conductor de la electricidad. Esto ocasiona que se organicen circuitos en forma de espiras cerradas, rodeando las líneas de flujo magnético. Como el flujo es variable en el tiempo, se inducen en las espiras, fuerzas electromotrices de acuerdo a la ley de Faraday, y estas a su vez producen corrientes circulantes en forma de remolino, como se ve en la figura 2.15.1.

Estas corrientes reciben el nombre de *corrientes parásitas*, *corrientes de eddy* o *corrientes de Foucault*. Las pérdidas se producen debido al calentamiento del núcleo, y la energía perdida se induce desde el primario, como si se estuviera solicitando por "secundarios parásitos".

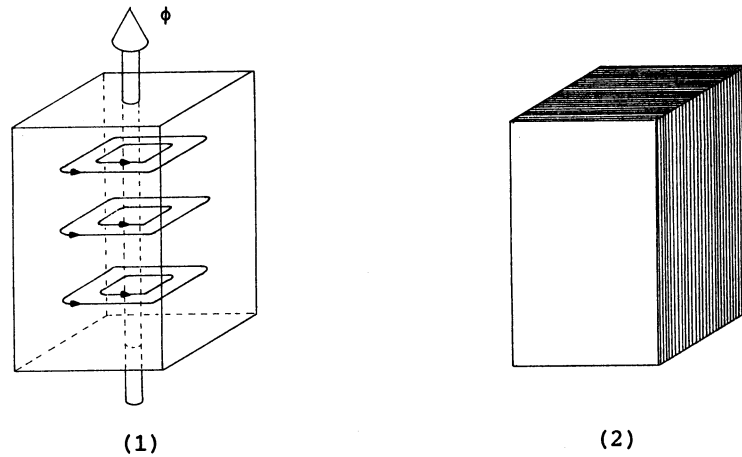


FIGURA 2.15. PÉRDIDAS POR CORRIENTES PARÁSITAS. (1) ORGANIZACIÓN DE ESPIRAS ALREDEDOR DEL FLUJO. (2) REDUCCIÓN DE LAS PÉRDIDAS MEDIANTE LAMINACIÓN.

Las pérdidas por corrientes parásitas se pueden reducir si se les corta su trayectoria tan amplia, lo que se consigue haciendo el núcleo de láminas apiladas, en vez de columnas y yugos macizos, como se observa en la figura 2.15.2.

**Representación de las pérdidas magnéticas.** Para poder analizar el comportamiento del transformador en un diagrama semejante al de la figura 2.11, se recurre al símbolo del transformador ideal tal como el de la figura mencionada, y del lado del embobinado que trabaje como primario se le agrega un circuito R-L.



Como las pérdidas magnéticas se presentan por el solo hecho de energizar el transformador, independientemente de que haya o no carga en el secundario, el circuito R-L tendría que ser paralelo; a la resistencia se le acostumbra representar por  $r_{he}$  (histéresis + eddy) y a la inductancia por  $X_m$  (reactancia de magnetización) como se aprecia en la figura 2.16.

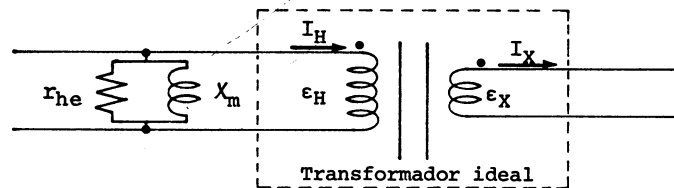


FIGURA 2.16. ADICIÓN DE LAS PÉRDIDAS MAGNÉTICAS AL TRANSFORMADOR IDEAL.

b) **Pérdidas eléctricas** . Las pérdidas eléctricas o pérdidas en el cobre se deben a determinadas características de los embobinados, como son:

El material tiene una resistividad mayor que cero (cero sería el caso del material ideal).

Debe existir una separación entre las espiras, las capas así como entre las bobinas y los núcleos, por la necesidad de interponer aislamientos.

**Pérdidas por resistencia.** El alambre con el cual se devanan las bobinas (usualmente de cobre), tiene una resistencia. En transformadores pequeños es de fracciones de ohm, pero en los grandes, y en particular los de alta tensión llega a ser de algunas unidades o decenas de ohm.

La corriente que pasa por esta resistencia provoca pérdidas de voltaje (ocasionando que la fuerza electromotriz no sea igual al voltaje externo) y pérdidas de energía (que calientan los devanados).

**Pérdidas por reactancia de dispersión.** La separación entre espiras y entre capas de las bobinas, y entre las propias bobinas y el núcleo, permiten que se desarrollen líneas de flujo magnético fuera del núcleo, que cierran a través del aire. Estas líneas de flujo se originan por las fuertes corrientes de carga del transformador y reciben el nombre de *flujo de dispersión*.

La figura 2.17 muestra un corte longitudinal del núcleo y el perfil de una bobina de pocas vueltas, en la que se han exagerado estas separaciones.

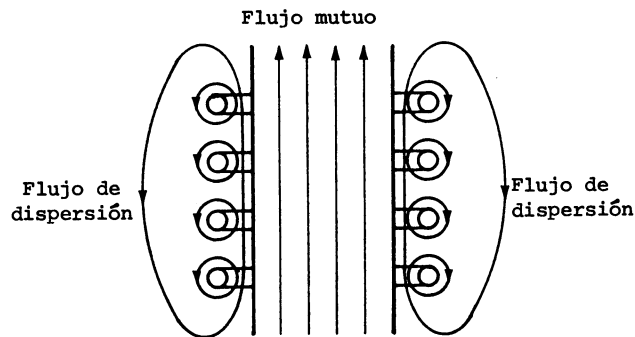


FIGURA 2.17 EL FLUJO DE DISPERSIÓN.

El flujo de dispersión, a diferencia del flujo mutuo, solamente eslabona una bobina, de modo que la bobina de alta tensión tiene su flujo disperso  $\phi_{dH}$  y la de baja tensión  $\phi_{dA}$ .

La fuerza electromotriz total inducida en la bobina de alta tensión se debe al flujo total que eslabona en ella:

$$E_H = -N_H \frac{d\phi_H}{dt}$$

en donde este flujo total tiene dos componentes:

$$\phi_H = \phi_m + \phi_{dH}$$

por tanto, la fuerza electromotriz es:

$$E_H = -N_H \frac{d\phi_m}{dt} - N_H \frac{d\phi_{dH}}{dt}$$

La componente inducida por el flujo mutuo es la misma que se estudio en el subtema 2.1.3 y es la fuerza electromotriz correspondiente al transformador ideal.

$$-N_H \frac{d\phi_m}{dt} = \varepsilon_H$$

En cambio, la componente inducida por el flujo disperso es una pérdida de voltaje que se suma a la pérdida por resistencia. Esta suma debe ser vectorial, pues las caídas de voltaje resistivas están en fase con la corriente, mientras que las fuerzas electromotrices inducidas, como se mostró en la figura 2.5, están en cuadratura con el flujo y por consiguiente, también con la corriente.

Una consideración bastante práctica es que la fuerza electromotriz inducida por flujo disperso se comporta como una pérdida de voltaje en una reactancia, que se puede expresar como:

$$-N_H \frac{d\phi_{dH}}{dt} = X_H I_H$$

y al parámetro  $X_H$  se le conoce como *reactancia de dispersión del embobinado de alta tensión*. De manera semejante, para el embobinado de baja tensión.

$$E_X = -N_X \frac{d\phi_X}{dt}$$

en donde

$$\phi_X = \phi_m + \phi_{dX}$$

por tanto

$$E_x = -N_x \frac{d\phi_m}{dt} - N_x \frac{d\phi_{dx}}{dt}$$

siendo

$$-N_x \frac{d\phi_m}{dt} = e_x$$

y

$$-N_x \frac{d\phi_{dx}}{dt} = X_x I_x$$

Al parámetro  $X_x$  se le llama *reactancia de dispersión del embobinado de baja tensión*.

**Representación de las pérdidas eléctricas.** Las pérdidas eléctricas se deben a la circulación de las corrientes de carga. No se manifiestan cuando no hay carga en el transformador, y ascienden a su máximo valor permisible a plena carga. Este comportamiento se representa mediante circuitos serie, que se agregan a la figura 2.16 a la entrada del primario y a la salida del secundario, sin afectar para nada el elemento central que sigue obedeciendo a las leyes del transformador ideal. El diagrama completo se muestra en la figura 2.18.

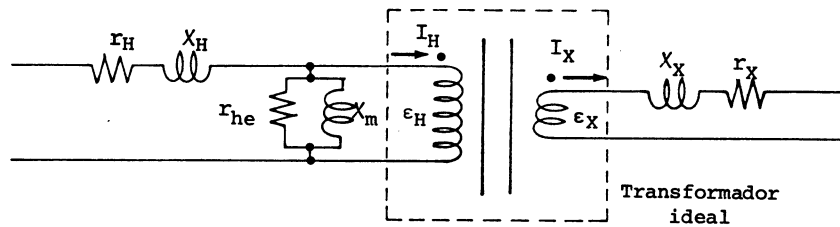


FIGURA 2.18. ADICIÓN DE LAS PÉRDIDAS ELÉCTRICAS AL TRANSFORMADOR IDEAL.

La adición de estos parámetros es muy similar a la forma de considerar la impedancia interna de las fuentes de energía en el análisis de circuitos eléctricos, es decir, como parámetros concentrados afuera del elemento ideal.

### 2.3 CIRCUITO EQUIVALENTE DEL TRANSFORMADOR

El diagrama que se ha obtenido en la figura 2.18 se conoce como *circuito equivalente del transformador*, ya que al aplicarle las técnicas de análisis de circuitos eléctricos, aparece el comportamiento de un transformador real. Las principales características que se analizan son:

- Variación del voltaje secundario con diferentes condiciones de carga.
- Evaluación de las pérdidas magnéticas, eléctricas y de la eficiencia.

En la figura 2.19.1 aparece el circuito equivalente de la figura 2.18, al que se ha agregado el voltaje aplicado  $V_H$ , la corriente primaria  $I_p$  y el voltaje secundario  $V_X$ . Como circuito eléctrico esta incompleto, pues se supone que a la izquierda existe una fuente de energía y a la derecha una impedancia de carga. El transformador trabaja como reductor de voltaje.

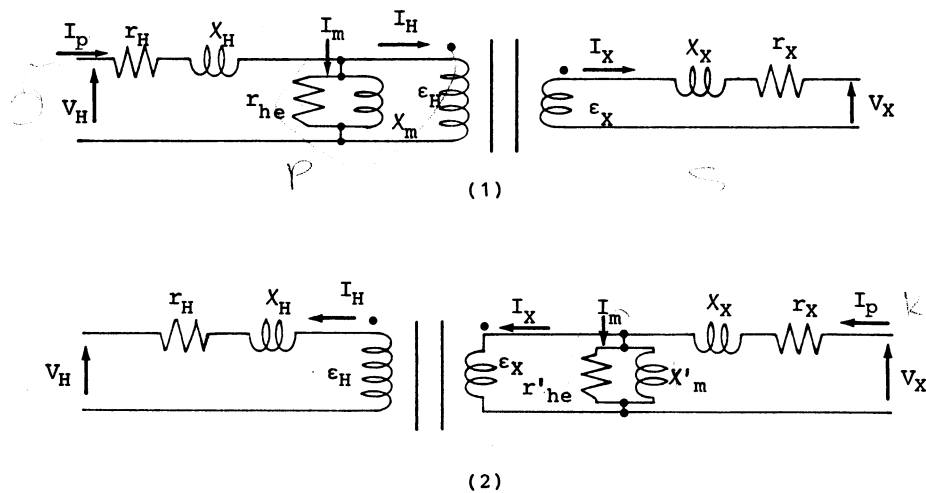


FIGURA 2.19. CIRCUITO EQUIVALENTE DEL TRANSFORMADOR. (1) TRABAJANDO COMO REDUCTOR DE VOLTAJE. (2) TRABAJANDO COMO ELEVADOR DE VOLTAJE.

Si todos los razonamientos hechos hasta aquí hubieran comenzado con la elección de la baja tensión como primario, se hubiera llegado finalmente al circuito equivalente de la figura 2.19.2, en donde el transformador trabaja como elevador de voltaje. Los parámetros de magnetización han quedado ahora del lado de baja tensión, que es por donde se excita el núcleo. *Los parámetros de magnetización siempre están en el lado primario.*

Al excitar el transformador por el lado de baja tensión, se hace con menor voltaje y mayor intensidad de corriente, lo que ocasiona que los parámetros no tengan el mismo valor que en alta tensión. Con objeto de hacer esta distinción, en baja tensión se les ha llamado  $r'_{he}$  y  $X'_m$ .

El análisis de este circuito es algo laborioso, ya que existe un acoplamiento magnético y habría que aplicar la teoría de circuitos acoplados, para lo cual sería necesario que calcular los coeficientes de autoinducción y de inducción mutua.

Para salvar estas dificultades se recurre a las transformaciones que se describen en los subtemas 2.3.2 y 2.3.3.

**2.3.1. TRANSFORMADOR DE IMPEDANCIA.** En todos los razonamientos anteriores se ha tratado al transformador como un elemento que transforma voltajes y que transforma corrientes simultáneamente, pero los voltajes y las corrientes se han estudiado por separado. Si se tienen en cuenta ambas variables combinadas, se puede deducir que también existe transformación de impedancia de carga.

Supóngase que por el momento no se puede ver a la derecha de la línea punteada en las figuras 2.20.1 y 2.20.2; por ejemplo, se puede tapar esta parte con una hoja de papel. A la izquierda se observan dos fuentes idénticas; ambas tienen el mismo voltaje  $E_H$  e igual corriente  $I_H$ , por lo que se supone que a la derecha también hay cargas idénticas.

Al descubrir ahora el lado derecho de las figuras se observa claramente que las cargas no son idénticas, sin embargo el transformador de la primera figura ha cambiado las características de la

impedancia  $Z_X$  de tal modo, que para la fuente resulta igual (o equivalente) a la impedancia  $Z_H$  de la segunda figura.

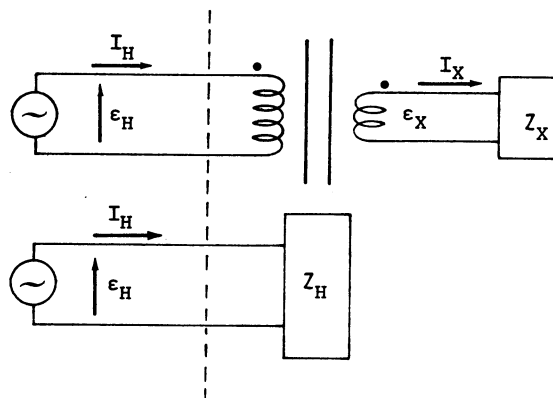


FIGURA 2.20. EL TRANSFORMADOR IDEAL COMO TRANSFORMADOR DE IMPEDANCIA.

La impedancia de la primera figura tiene un valor:

$$Z_X = \frac{\epsilon_X}{I_X}$$

pero por las leyes del transformador ideal:

$$\epsilon_X = \frac{\epsilon_H}{a} \quad I_X = a I_H$$

por lo tanto:

$$Z_X = \frac{1}{a^2} \frac{\epsilon_H}{I_H}$$

en donde  $\frac{e_H}{I_H}$  es la impedancia  $Z_H$  de la segunda figura, que se encuentra conectada directamente a la alta tensión generada por la fuente, de modo que:

$$Z_H = a^2 Z_X$$

Para pasar de la primera figura a la segunda, se elimina el transformador ideal y se conecta directamente la impedancia equivalente en alta tensión, cuyo valor es el de la impedancia de baja tensión multiplicado por el cuadrado de la relación de transformación.

**2.3.2. PRIMERA SIMPLIFICACIÓN DEL CIRCUITO EQUIVALENTE.** Aplicando la regla obtenida al final del subtema anterior, a los circuitos de la figura 2.19, se elimina el transformador ideal y las impedancias del lado derecho se multiplican por  $a^2$ , con lo que se obtienen los circuitos simplificados de la figura 2.21.

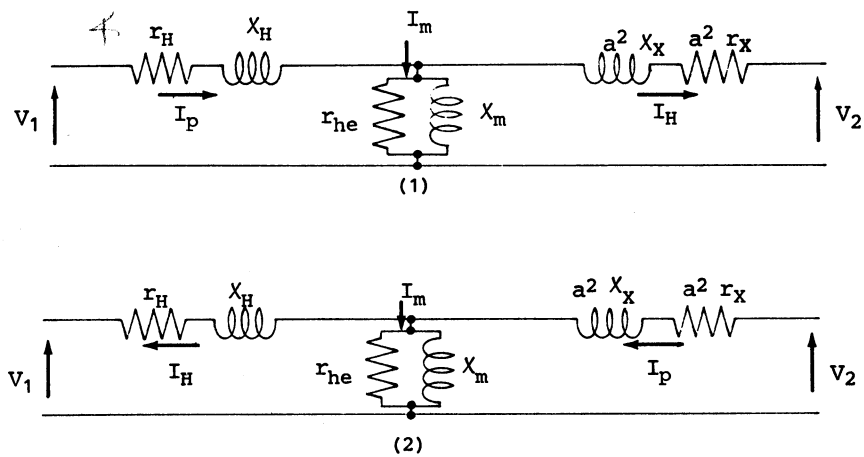


FIGURA 2.21. CIRCUITO EQUIVALENTE DEL TRANSFORMADOR A NIVEL DE ALTA TENSIÓN (1) TRABAJANDO COMO REDUCTOR DE VOLTAJE (2) TRABAJANDO COMO ELEVADOR DE VOLTAJE.



Analizar estos circuitos es mucho más fácil que los de la figura 2.19, puesto que ya no hay acoplamiento magnético, pero hay que tener cuidado de manejar todas las cantidades a nivel de alta tensión.

Trabajar a nivel de alta tensión significa que voltajes y corrientes tomarán valores aproximados a los que corresponden al embobinado de alta tensión, por ejemplo, el voltaje primario será la alta tensión nominal y el voltaje secundario resultará una cantidad ligeramente diferente, pero en el mismo nivel. Igualmente las corrientes que se aplican al circuito son las de alta tensión.

Esto sugiere un cambio de nomenclatura, puesto que ya no hay ni alta ni baja tensión y por tanto no sería adecuado conservar  $V_H$  y  $V_X$ . Sean entonces  $V_1$  y  $V_2$ , en donde:

$$V_1 = V_H \qquad V_2 = a^{-1} V_X$$

Fuera de este cambio, la simplificación ha conducido a dos circuitos casi idénticos en la figura 2.21. Solamente difieren en la dirección de la corriente.

Nótese también que en los dos circuitos aparecen los parámetros de magnetización  $r_{he}$  y  $X_m$  a nivel de alta tensión, puesto que también obedecen a la transformación:

$$r_{he} = a^2 r'_{he}$$

$$X_m = a^2 X'_m$$

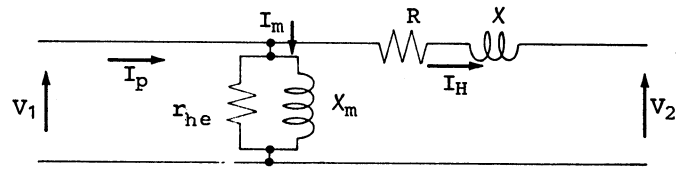
Como las intensidades de corriente son las de alta tensión, se conserva la nomenclatura  $I_H$ , en donde:

$$I_H = \frac{I_X}{a}$$

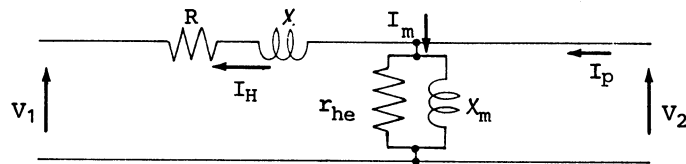
$I_p$  significa corriente primaria e  $I_m$  corriente de magnetización, ambas a nivel de alta tensión.

**2.2.3. SEGUNDA SIMPLIFICACIÓN DEL CIRCUITO EQUIVALENTE.** Considerando que la corriente de magnetización es pequeña comparada con la de carga nominal, no se comete grave error

al trasladar el circuito de magnetización al puerto primario, con lo que los cuatro parámetros de pérdidas eléctricas quedan en serie y se pueden reducir a dos, como aparece en los circuitos de la figura 2.22. Aunque el error es muy pequeño, es conveniente mencionarlo, por lo que a estos circuitos se les da el nombre de *circuitos aproximados*.



(1)



(2)

FIGURA 2.22. CIRCUITO EQUIVALENTE APROXIMADO DEL TRANSFORMADOR A NIVEL DE ALTA TENSIÓN.

(1) TRABAJANDO COMO REDUCTOR DE VOLTAJE. (2) TRABAJANDO COMO ELEVADOR DE VOLTAJE.

En estos circuitos se conservan las condiciones planteadas anteriormente, es decir:

$$V_1 = V_H$$

$$V_2 = aV_X$$

$$I_H = \frac{I_X}{a}$$

y además los parámetros de pérdidas eléctricas han quedado como:

$$R=r_H+a^2r_x$$

$$X=X_H+a^2X_x$$

El circuito equivalente aproximado resulta aun más fácil de analizar y tiene la ventaja de que los cuatro parámetros tal y como han quedado, se pueden determinar a partir de pruebas de laboratorio.

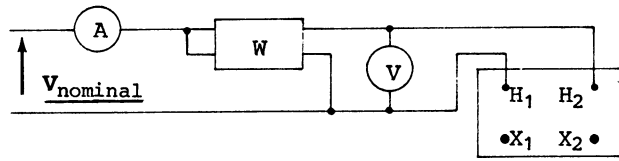
Es importante señalar, que también se pueden obtener circuitos equivalentes a nivel de baja tensión, y los resultados de análisis serían exactamente los mismos. Sin embargo no se tratarán en esta obra para no extender su contenido más de lo necesario.

## 2.4. ASPECTOS PRÁCTICOS DEL CIRCUITO EQUIVALENTE

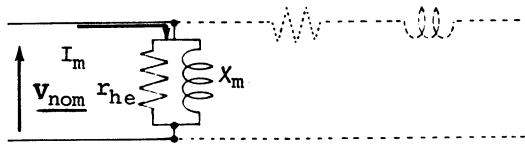
Si se tiene un transformador real, se puede someter a ciertas pruebas de laboratorio de las cuales se evalúan los parámetros del circuito equivalente. Posteriormente se puede analizar el circuito equivalente de ese transformador en particular y se obtiene su comportamiento bajo diversas condiciones de carga. Esto se expondrá con mayor claridad en ejemplos posteriores.

**2.4.1. DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS.** Los parámetros de magnetización se calculan con los resultados de una prueba de laboratorio, haciendo trabajar el transformador en circuito abierto, mientras que los parámetros de pérdidas eléctricas se obtienen de otra prueba en la que se trabaja al transformador en circuito corto.

a) Prueba de circuito abierto<sup>2</sup>. Consiste en energizar el transformador por cualquiera de sus dos lados, a *voltaje nominal* y onda senoidal, mientras el otro lado se mantiene en circuito abierto. Se mide el voltaje, la corriente y la potencia consumida, como se puede apreciar en la figura 2.23.1.



(1)



(2)

FIGURA 2.23. PRUEBA DE CIRCUITO ABIERTO. (1) DIAGRAMA DE PRUEBA. (2) ACCIÓN DE LA PRUEBA EN EL CIRCUITO EQUIVALENTE

En la figura 2.23.2 se puede apreciar fácilmente que si a la derecha se tiene circuito abierto, los parámetros de pérdidas eléctricas no entran en acción (se podrían omitir, pero solamente se han dibujado con línea punteada) y la corriente circulante va exclusivamente al circuito de magnetización. De la prueba se obtiene:

Voltaje aplicado:  $V$  - Lectura del voltímetro. Debe coincidir con el voltaje nominal.

<sup>2</sup> En las normas de transformadores se le llama a esta prueba **pérdidas magnéticas y corriente de excitación** o también **pérdidas de excitación**.

Corriente de excitación: I - Lectura del amperímetro.

Potencia consumida: P - Lectura del wattímetro.

Potencia aparente:  $S = VI$

Potencia reactiva:  $Q = \sqrt{S^2 - P^2}$

Considerando que las potencias real y reactiva en el circuito paralelo de la figura 2.23.2 se formularían como:

$$P = \frac{V^2}{r_{he}}$$

$$Q = \frac{V^2}{X_m}$$

de ahí se obtienen los parámetros de magnetización.

$$r_{he} = \frac{V^2}{P}$$

$$X_m = \frac{V^2}{Q}$$

Cuando la alta tensión del transformador no se puede obtener con las fuentes reguladas del laboratorio, se recurre a energizarlo por el lado de baja tensión, como muestra la figura 2.24.

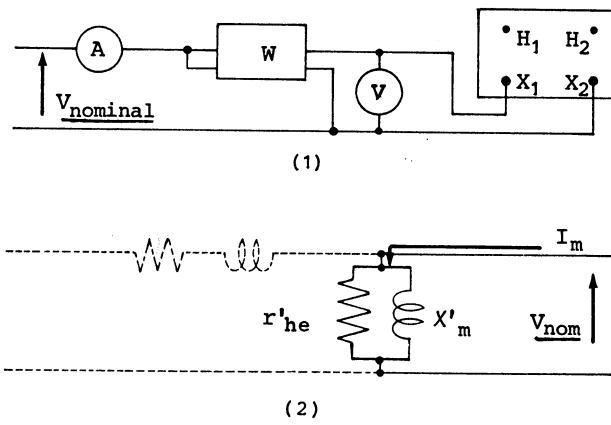


FIGURA 2.24. PRUEBA DE CIRCUITO ABIERTO EFECTUADA POR BAJA TENSIÓN (1) DIAGRAMA DE PRUEBA  
(2) ACCIÓN DE LA PRUEBA EN EL CIRCUITO EQUIVALENTE.

Esta prueba equivale a trabajar el transformador como elevador de voltaje, bajo las condiciones de la figura 2.19.2 , de manera que los parámetros de magnetización que se obtienen son a nivel de baja tensión.

Las operaciones iniciales para el cálculo de parámetros son las mismas; solamente al final hay que tener en cuenta que se trabaja a niveles  $r'_{he}$  y  $X'_m$  , o sea:

$$r'_{he} = \frac{V^2}{P}$$

$$X'_m = \frac{V^2}{Q}$$

y para transferir a nivel de alta tensión:

$$r_{he} = a^2 r'_{he}$$

$$X_m = a^2 X'_m$$

b) **Prueba de circuito corto**<sup>3</sup>. Consiste en energizar el transformador por cualquiera de sus dos lados con *corriente nominal*, mientras el otro lado se mantiene en circuito corto. El voltaje necesario es de valor reducido respecto al nominal, por lo que esta prueba se suele hacer del lado de alta tensión. Se mide el voltaje, la corriente y la potencia consumida como se puede apreciar en la figura 2.25.1.

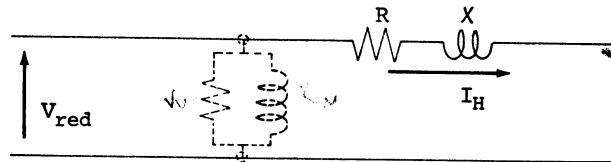
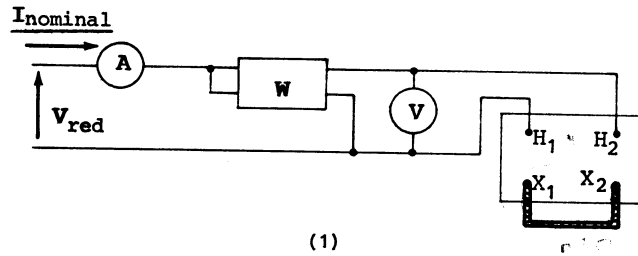


FIGURA 2.25. PRUEBA DE CIRCUITO CORTO. (1) DIAGRAMA DE PRUEBA.

(2) ACCIÓN DE LA PRUEBA EN EL CIRCUITO EQUIVALENTE.

<sup>3</sup> En las normas de transformadores se le llama a esta prueba **pérdidas eléctricas y porcentaje de impedancia** o también **pérdidas de carga**.

La corriente de excitación que normalmente es pequeña a voltaje nominal, en esta prueba se hace despreciable, por lo que no se toma en cuenta el circuito de excitación en la figura 2.25.2 y solamente se ha dibujado con línea punteada.

Se considera entonces, que la corriente aplicada actúa solamente en las pérdidas eléctricas.

De la prueba se obtiene:

Voltaje aplicado:  $V$  - Lectura del voltímetro

Corriente circulante:  $I$  - Lectura del amperímetro. Debe coincidir con la corriente nominal

Potencia consumida:  $P$  - Lectura del wattímetro

Potencia aparente:  $S = V I$

Potencia reactiva:  $Q = \sqrt{S^2 - P^2}$

Considerando que las potencias real y reactiva en un circuito serie se formularían como:

$$P = R I^2$$

$$Q = X I^2$$

de ahí se obtienen los parámetros de pérdidas eléctricas:

$$R = \frac{P}{I^2}$$

$$X = \frac{Q}{I^2}$$



**2.4.2. ANÁLISIS DEL CIRCUITO EQUIVALENTE.** Después de haber determinado los cuatro parámetros del circuito equivalente aproximado, podemos imaginar que en la figura 2.26 en vez de letras se tienen las cantidades de ohms, y se puede proceder al análisis, que abarcaría principalmente dos aspectos: pérdidas de voltaje y regulación, y pérdidas de energía y eficiencia.

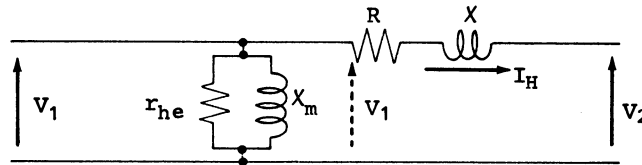


FIGURA 2.26. EL CIRCUITO EQUIVALENTE LISTO PARA ANALIZARSE.

a) **Pérdidas de voltaje y regulación.** Las pérdidas de voltaje aparecen únicamente en los parámetros  $R$  y  $X$ , y en vista de que el voltaje aplicado  $V_1$  se mantiene en toda la parte izquierda de la figura, este análisis abarca desde la línea punteada hasta el voltaje de salida  $V_2$ .

El voltaje de salida es igual al de entrada menos las pérdidas en la resistencia y en la reactancia.

$$V_2 = V_1 - RI - XI$$

Teniendo en cuenta que esta ecuación en corriente alterna es vectorial, y que en un problema de orden práctico (como se observa en la figura 2.27) el fasor  $V_2$  es el que sirve de apoyo, resulta muy útil aplicar la ecuación como suma:

$$V_1 = V_2 + RI + XI$$

Esta ecuación se representa vectorialmente en la figura 2.27.

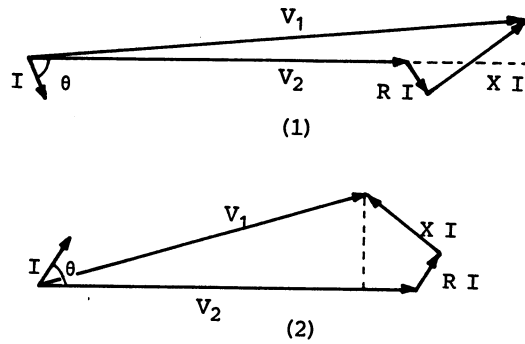


FIGURA 2.27. DIAGRAMA DE FASORES DEL CIRCUITO EQUIVALENTE APROXIMADO  
 (1) CON CORRIENTE RETRASADA (2) CON CORRIENTE ADELANTADA.

El fasor  $V_2$  que representaría el voltaje de carga, se dibuja en posición horizontal. La corriente que pide la carga puede tener dos opciones, atrasada o adelantada respecto al voltaje  $V_2$  (incluyendo el caso intermedio de factor de potencia unitario), y de ahí que se generan los dos diagramas fasoriales de la figura.

Al fasor  $V_2$  se le suma un fasor  $RI$  en fase con la corriente, y un fasor  $XI$  en cuadratura. La suma de los tres fasores da  $V_1$ , como lo plantea la ecuación de partida.

Las líneas punteadas son para determinar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es  $V_1$ . Para la figura 2.27.1 a factor de potencia retrasado, el cateto horizontal es:

$$V_2 + \text{Proyección horizontal de } RI + \text{Proyección horizontal de } XI$$

y el cateto vertical:

$$\text{Proyección vertical de } XI - \text{proyección vertical de } RI.$$

El teorema de Pitágoras queda expresado como:

$$V_1^2 = (V_2 + RI \cos \theta + XI \sin \theta)^2 + (XI \cos \theta - RI \sin \theta)^2$$

Siguiendo un razonamiento similar, el análisis por teorema de Pitágoras a factor de potencia adelantado queda:

$$V_1^2 = (V_2 + RI \cos \theta - XI \sin \theta)^2 + (XI \cos \theta + RI \sin \theta)^2$$

Nótese que las dos fórmulas tienen la *misma estructura*, y sólo difieren en dos signos.

Se entiende por *regulación de voltaje*, la relación entre el voltaje perdido al dar carga, y el voltaje nominal, ambos del lado secundario. Se suele expresar en dos formas:

$$\text{Por unidad: } Reg = \frac{V_0 - V_{pc}}{V_{nom}}$$

$$\text{Por ciento: } \%Reg = \frac{V_0 - V_{pc}}{V_{nom}} \times 100$$

en donde:

$V_0$  - voltaje secundario en vacío

$V_{pc}$  - voltaje secundario a plena carga

$V_{nom}$  - voltaje nominal del secundario

La regulación representa la calidad de servicio que da el transformador. El caso ideal sería que no hubiera variaciones de voltaje ( $Reg = 0$ ) y en la práctica se considera mejor servicio mientras más pequeña sea la regulación.

**b) Pérdidas de energía y eficiencia.** La energía que se pierde en el circuito únicamente puede ser por el calor disipado en las resistencias, por lo que sólo se tienen dos grupos de pérdidas:

Pérdidas magnéticas: 
$$P_{mag} = \frac{V_1^2}{r_{he}}$$

Pérdidas eléctricas: 
$$P_{el} = RI_H^2$$

La eficiencia es la relación de la potencia real de salida a la potencia real de entrada. Se representa por la letra griega  $\eta$

$$\eta = \frac{P_{salida}}{P_{entrada}}$$

pero por ley de conservación de la energía

$$P_{entrada} = P_{salida} + P_{pérdidas}$$

$$P_{entrada} = P_{salida} + P_{mag} + P_{eléc}$$

por lo que sustituyendo, queda finalmente:

$$\eta = \frac{P_{salida}}{P_{salida} + P_{mag} + P_{el}}$$

que también se suele expresar en por ciento:

$$\% \eta = \frac{P_{salida}}{P_{salida} + P_{mag} + P_{el}} \times 100$$

En los transformadores se originan pérdidas muy pequeñas comparadas con su capacidad, de manera

\* que su eficiencia es muy alta y generalmente mayor de 90%.

Como la potencia de salida es función del factor de potencia

$$P = VI \cos \theta$$

la eficiencia adquiere sus valores más altos a factor de potencia unitario.

### **EJEMPLO 2.1**

A un transformador con capacidad de 5 KVA y relación de 220-110 volts se le hicieron las siguientes pruebas;

Circuito abierto	220 V	2.4 A	225 W
Circuito cerrado	9.2 V	22.7 A	72 W

a) Obtener su circuito equivalente.

b) Si se alimenta a 220 V. ¿Qué voltaje habrá en el secundario con corriente de plena carga y factor de potencia 0.6 atrasado? ¿Cuál será su porcentaje de regulación?

c) Igual que la pregunta b) pero con factor de potencia 0.866 atrasado.

d) Igual que las preguntas anteriores pero con factor de potencia 0.8 adelantado.

e) Calcular la potencia aprovechable, las pérdidas y el porcentaje de eficiencia en las condiciones de carga de las preguntas b), c) y d).

### **Solución**

a) Obtención del circuito equivalente.

**De la prueba de circuito abierto:**

Voltaje aplicado:  $V = 220 \text{ V}$  (Obsérvese que es el voltaje nominal del lado de alta tensión)

Corriente de excitación:  $I = 2.4 \text{ A}$

Potencia consumida:  $P = 225 \text{ W}$

Potencia aparente:  $S = 220 \times 2.4 = 528 \text{ VA}$

Potencia reactiva:  $Q = \sqrt{528^2 - 225^2} = 477.66 \text{ VAR}$

Resistencia de histéresis y eddy:  $r_{he} = \frac{220^2}{225} = 215.111 \Omega$

Reactancia de magnetización:  $X_m = \frac{220^2}{477.66} = 101.327 \Omega$

**De la prueba de circuito corto:**

Voltaje aplicado:  $V = 9.2 \text{ V}$

Corriente circulante:  $I = 22.7$  (Obsérvese que es la corriente nominal del lado de alta tensión que se calcula dividiendo la capacidad entre  $V_H$ ).

Potencia consumida:  $P = 72 \text{ W}$

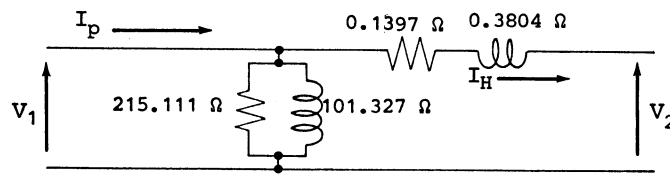
Potencia aparente:  $S = 9.2 \times 22.7 = 208.84 \text{ VA}$

Potencia reactiva:  $Q = \sqrt{208.84^2 - 72^2} = 196 \text{ VAR}$

Resistencia de los embobinados:  $R = \frac{72}{22.7^2} = 0.1397 \Omega$

Reactancia de dispersión:  $X = \frac{196}{22.7^2} = 0.3804 \Omega$

El circuito equivalente es:



b) Voltaje secundario a corriente de plena carga y factor de potencia 0.6 atrasado.

En el subtema 2.18.2 se dedujo la fórmula para este caso:

$$V_1^2 = (V_2 + RI \cos\theta + X I \sin\theta)^2 + (X I \cos\theta - R I \sin\theta)^2$$

en donde:  $V_1 = 220 V$

$V_2 = ?$

$R = 0.1397 \Omega$

$X = 0.3804 \Omega$

$I = I_H$  corriente de plena carga a nivel de alta tensión

$= \frac{5000}{220}$

$$=22.7 A$$

$$\cos \theta = 0.6$$

$$\text{sen } \theta = 0.8$$

Despejando  $V_2$  que es la incógnita:

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 - (X I \cos \theta - R I \text{sen } \theta)^2} - (R I \cos \theta + X I \text{sen } \theta)$$

$$V_2 = \sqrt{220^2 - (0.3804 \times 22.7 \times 0.6 - 0.1397 \times 22.7 \times 0.8)^2} -$$

$$-(0.1397 \times 22.7 \times 0.6 + 0.3804 \times 22.7 \times 0.6)$$

$$V_2 = 211.173 \text{ V}$$

Pero esto es el resultado de un análisis a nivel de alta tensión. En realidad el voltaje secundario

es  $V_x = \frac{V_2}{a}$ , por tanto:

$$V_x = \frac{211.173}{2} = 105.586 \text{ V}$$

*Porcentaje de regulación.* Para poder aplicar la fórmula, obsérvese que en vacío (circuito abierto) no existe corriente de carga ( $I_H$  en el circuito equivalente) y por lo tanto no hay pérdidas en la R ni en la X, por lo que el voltaje en vacío será 220 V a nivel de alta tensión y 110 V en la realidad.

$$\% \text{Reg} = \frac{110 - 105.586}{110} \times 100 = 4.012$$

c) Voltaje secundario a corriente de plena carga y factor de potencia 0.866 atrasada.



El planteamiento sería muy similar al de la respuesta a), excepto que

$$\cos\theta=0.866$$

$$\text{sen } \theta=0.5$$

Utilizando estas cantidades, las respuestas son:

$$V_2 = 212.857$$

$$V_x = 212.857/2 = 106.428$$

$$\%Reg = [(110-106.428)/110] 100 = 3.246$$

d) Voltaje secundario a corriente de plena carga y factor de potencia 0.8 adelantado.

La fórmula que se dedujo para el factor de potencia adelantado es:

$$V_1^2 = (V_2 + RI\cos\theta - XI\text{sen}\theta)^2 + (XI\cos\theta + RI\text{sen}\theta)^2$$

Despejando la incógnita:

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 - (XI\cos\theta + RI\text{sen}\theta)^2} - (RI\cos\theta - XI\text{sen}\theta)$$

en donde:

$$\cos \theta=0.8$$

$$\text{sen } \theta=0.6$$

y las demás cantidades son las mismas que en las respuestas b) y c). Sustituyendo se obtienen los resultados:

$$V_2 = 222.467 \text{ V}$$

$$V_x = 222.467/2 = 111.233$$

$$\%Reg = [(110.-111.233)/110] 110 = -1.121$$

e) La potencia aprovechable se puede calcular en la salida del transformador real como:

$$P = V_x I_x \cos\theta$$

o en la salida del circuito equivalente como:

$$P = V_2 I_H \cos \theta$$

La segunda nos evita calcular la corriente nominal en baja tensión, que hasta ahora no ha habido necesidad de usar. La solución sería:

**A factor de potencia 0.6 atrás:**

$$\begin{aligned} \text{Potencia aprovechable: } P &= 211.173 \times 22.7 \times 0.6 \\ &= 2878.7 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pérdidas magnéticas } P_{\text{mag}} &= 220^2 / 215.111 = 225 \text{ W} \\ &\text{(Obsérvese que si el transformador trabaja a voltaje nominal;} \\ &\text{estas pérdidas son iguales a las de la prueba de circuito abierto)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pérdidas eléctricas } P_{\text{el}} &= 0.1397 \times 22.7 = 72 \text{ W} \\ &\text{(Obsérvese que si el transformador trabaja a plena carga, estas} \\ &\text{pérdidas son iguales a las de la prueba de circuito corto)} \end{aligned}$$

$$\text{Eficiencia: } \% \eta = \frac{2878.7}{2878.7 + 225 + 72} \times 100 = 90.647$$

**A factor de potencia 0.866 atrás:**

$$\text{Potencia aprovechable: } P = 212.857 \times 22.7 \times 0.866 = 4184.385 \text{ W}$$

$$\text{Pérdidas magnéticas: } P_{\text{mag}} = 220^2 / 215.111 = 225 \text{ W}$$

$$\text{Pérdidas eléctricas: } P_{\text{el}} = 0.1397 \times 22.7 = 72 \text{ W}$$

$$\text{Eficiencia: } \% \eta = \frac{4184.385}{4184.385 + 225 + 72} \times 100 = 93.372$$

**A factor de potencia 0.8 adelante:**

$$\text{Potencia aprovechable: } P = 222.467 \times 22.7 \times 0.8 = 4040 \text{ W}$$

$$\text{Pérdidas magnéticas: } P_{\text{mag}} = 220^2 / 215.111 = 225 \text{ W}$$

$$\text{Pérdidas eléctricas: } P_{\text{el}} = 0.1397 \times 22.7 = 72 \text{ W}$$

$$\text{Eficiencia: } \% \eta = \frac{4040}{4040 + 225 + 72} \times 100 = 93.152$$

## COMENTARIOS

**Regulación.** La regulación a factor de potencia bajo y atrasado es grande y la pérdida de voltaje podría llegar a tal grado que dificultaría la correcta operación de algunas cargas.

Aumentando el factor de potencia disminuye la regulación y por consiguiente, las fluctuaciones de voltaje, con mejoramiento en la operación de las cargas.

A factor de potencia adelantado, la regulación se vuelve negativa, lo que significa que en vez de pérdidas hay ganancia de voltaje, haciendo trabajar las cargas a un voltaje mayor del nominal, con el peligro de causarles daño.

**Potencia aprovechable.** Las fluctuaciones son más notorias en este aspecto, ya que disminuyen por bajo voltaje y bajo factor de potencia a la vez, no pudiendo superar la corriente nominal del transformador por el riesgo de sobrecalentamiento y daño permanente a los aislamientos.

A factor de potencia 0.6 atrás se aprovechan solamente 2878 W de una capacidad de 5000 VA; a factor 0.866 se aprovechan 4184 W, notablemente más que en el caso anterior, y curiosamente, a factor de potencia adelantado, a pesar de la regulación negativa, la potencia aprovechable comienza nuevamente a disminuir.

**Eficiencia.** A pesar de que las pérdidas permanecen constantes, la eficiencia varía, ya que es función de la potencia aprovechable y tiene sus valores más altos con factores de potencia elevados.

Factor de potencia. Por lo que se deduce de los resultados del problema, y de los comentarios anteriores, el mejor aprovechamiento del transformador se obtiene a factores de potencia elevados. Estas condiciones siempre son posibles de obtener, ya que el factor de potencia bajo se puede corregir.

Usualmente el factor de potencia bajo se presenta en retraso, de manera que para corregirlo es necesario agregar capacitores al sistema.

No es recomendable corregir hasta el factor de potencia unitario. Desde el punto de vista económico resulta costoso por el tamaño de los capacitores, y desde el punto de vista funcional, la energía oscilante en el sistema alcanza su valor máximo, produciendo efectos indeseables en los núcleos de los equipos, lo que se conoce con el nombre de ferorrresonancia.

Industrias con factor de potencia bajo. Las industrias reciben la energía eléctrica con líneas de alta tensión, de manera que dentro de su terreno debe haber un transformador para bajar la tensión a los voltajes de utilización. El transformador junto con otros equipos auxiliares recibe el nombre de subestación. Un factor de potencia bajo acarrea para la industria, los inconvenientes comentados anteriormente.

Pero hay que tener en cuenta también, que la compañía suministradora de energía eléctrica obtiene sus voltajes de entrega por medio de más transformadores, ya que anteriormente existen en el sistema tensiones aún mayores. Una industria con factor de potencia bajo causa fluctuaciones de voltaje y corrientes elevadas en las líneas de distribución, impidiendo a la compañía dar un buen servicio a los demás vecinos.

Por estas razones, la compañía suministradora exige a los usuarios un buen factor de potencia, y cuando infringen esta disposición les cobra un cargo extra en función de la cantidad de reactivos consumidos.

### ***EJEMPLO 2.2***

Un transformador con capacidad de 15 KVA, y relación de 750 -220 volts se utilizará para elevar el voltaje en una línea de 220 V.

Se le hicieron las siguientes pruebas:

Circuito abierto	220 V	6.1 A	568 W
Circuito corto	34 V	20.0 A	280 W

- a) Obtener su circuito equivalente.  
b) Si se alimenta a 220 V, calcular su voltaje secundario con corriente de plena carga y factor de potencia 0.866 atrasado.

### Solución

- a) Obtención del circuito equivalente.

De la prueba de circuito abierto:

Voltaje aplicado:  $V = 220 \text{ V}$   
(Obsérvese que es el voltaje nominal de baja tensión)

Corriente de excitación:  $I = 6.1 \text{ A}$

Potencia consumida:  $P = 568 \text{ W}$

Potencia aparente:  $S = 220 \times 6.1 = 1342 \text{ VA}$

Potencia reactiva:  $Q = \sqrt{1342^2 - 568^2} = 1215.87 \text{ VAR}$

Resistencia de histéresis y eddy:  $r'_{he} = \frac{220^2}{568} = 85.21 \text{ } \Omega$

Reactancia de magnetización:  $X'_m = \frac{220}{1215.87} = 39.8 \text{ } \Omega$

Estos valores hay que transferirlos a nivel de alta tensión.

$$a = 750/220 = 3.409$$

$$r_{he} = 3.409^2 \times 85.21 = 990.3 \text{ } \Omega$$

$$x_m = 3.409^2 \times 39.8 = 462.63 \text{ } \Omega$$

De la prueba de circuito corto:

Voltaje aplicado:  $V = 34 \text{ V}$

Corriente circulante:  $I = 20 \text{ A}$

(Nótese que es la corriente nominal en el lado de alta tensión)

Potencia consumida:  $P = 280 \text{ W}$

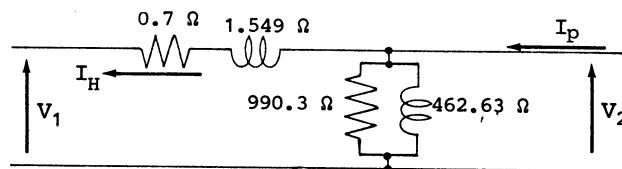
Potencia aparente:  $S = 34 \times 20 = 680 \text{ VA}$

Potencia reactiva:  $Q = \sqrt{680^2 - 280^2} = 619.67 \text{ VAR}$

Resistencia de los embobinados:  $R = \frac{280}{20^2} = 0.7 \text{ } \Omega$

Reactancia de dispersión:  $X = \frac{619.67}{20^2} = 1.549 \text{ } \Omega$

Teniendo en cuenta que el transformador trabajará como elevador, el primario será el lado de baja tensión y ahí se localizará la rama de magnetización:

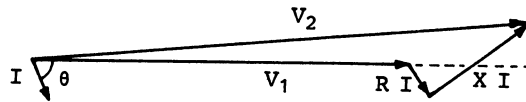


b) Voltaje secundario a corriente de plena carga y factor de potencia 0.866 atrasado.

Como el transformador trabaja para elevar voltaje, el voltaje primario es  $V_2$  y el secundario  $V_1$ , de modo que:

$$V_2 = V_1 + RI + XI$$

cuyo diagrama de fasores es:



y aplicando el teorema de Pitágoras

$$V_2^2 = (V_1 + RI \cos \theta + XI \sin \theta)^2 + (XI \cos \theta - RI \sin \theta)^2$$

Nótese que es la misma estructura de la fórmula deducida en el subtema 2.20.2 para transformador reductor, pero se encuentran intercambiados  $V_1$  y  $V_2$ .

Despejando  $V_1$  se tiene:

$$V_1 = \sqrt{V_2^2 - (XI \cos \theta - RI \sin \theta)^2} - (RI \cos \theta + XI \sin \theta)$$

en donde:

$$V_2 = aV_x = 750 \text{ V}$$

$$R = 0.7 \Omega$$

$$X = 1.549 \Omega$$

$$I_H = 20 \text{ A}$$

$$\cos \theta = 0.866$$

$$\sin \theta = 0.5$$

Sustituyendo y efectuando operaciones se obtiene:

$$V_1 = 722.124 \text{ V}$$

y como  $V_1 = V_H$ , ésta es la respuesta para el transformador real.

$$V_H = 722.124 \text{ V}$$

La regulación de voltaje es:

$$\% \text{ Reg} = [(750 - 722.124)/750] \times 100 = 3.73$$

Se sugiere al lector como ejercicio, hacer los cálculos para otros factores de potencia, así como las potencias aprovechables y las eficiencias. Notará que los comentarios que de aquí se deriven, son los mismos que ya se hicieron en el ejemplo anterior, en el que se trabajaba como reductor de voltaje.

## 2.5. CONEXIONES DE TRANSFORMADORES

Cuando un solo transformador no llena los requerimientos para determinados usos, puede recurrirse a la combinación de dos, tres o más transformadores que satisfagan las necesidades. Las combinaciones pueden ser muy numerosas, así como los problemas que con ellas se resuelven. En este tema se presentarán sólo algunos casos, posiblemente los más frecuentes.

Para sencillez de los diagramas de conexiones, se usará solamente el símbolo del transformador ideal, pero si en algún caso se requiere un análisis de cargas, debe tomarse en cuenta todo el circuito equivalente como el de la figura 2.19 o sus simplificaciones de las figuras 2.21 y 2.22.

**2.5.1. CIRCUITOS MONOFÁSICOS.** Se considerarán los casos en que los primarios se alimentan de una misma línea (en paralelo), y en los secundarios se tienen las siguientes opciones:

a) **Secundarios en serie.** La figura 2.28 muestra las líneas de alimentación con los primarios conectados en paralelo. Para efectuar las conexiones correctamente es indispensable tener en cuenta las marcas de polaridad. Supóngase un instante en que la onda de voltaje sea positiva. En ese mismo instante las marcas de polaridad son positivas y los voltajes secundarios  $V_1$  y  $V_2$  tienen las direcciones marcadas por las flechas.



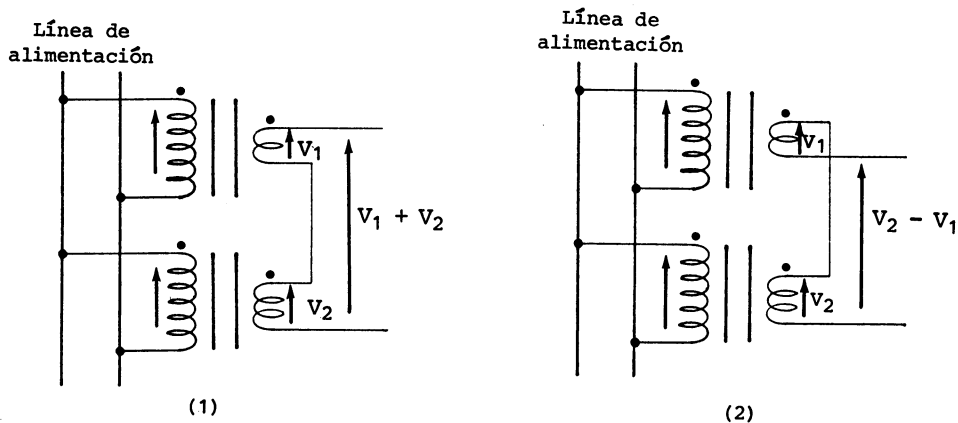


FIGURA 2.28. INTERCONEXIÓN DE SECUNDARIOS EN SERIE. (1) ACUMULATIVA (2) DIFERENCIAL.

Habría dos combinaciones posibles: Para la figura 2.28.1 los voltajes se suman y para la figura 2.28.2 los voltajes se restan. La última no tiene caso si  $V_1 = V_2$ , pues no habría voltaje resultante.

El mejor aprovechamiento del conjunto es cuando los dos transformadores tienen la misma capacidad de corriente (obsérvese que sólo hay una corriente común a los dos secundarios).

Si la corriente nominal no es igual para los dos, la capacidad del conjunto queda limitada por la corriente más pequeña.

b) **Secundarios en paralelo.** La figura 2.29 muestra las líneas de alimentación con los primarios conectados en paralelo. Las marcas de polaridad también en este caso son indispensables para la correcta interconexión. Las terminales marcadas en los primarios conectan al mismo hilo de alimentación, y las terminales marcadas en los secundarios deben conectar también a un mismo hilo de salida. También es importante en esta conexión, que los dos transformadores tengan la misma relación de transformación.

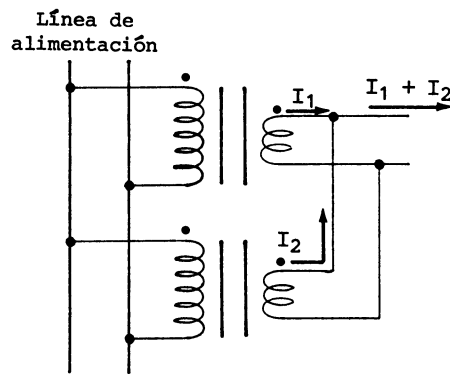


FIGURA 2.29. INTERCONEXIÓN DE SECUNDARIOS EN PARALELO.

Las capacidades pueden ser diferentes, sin embargo, para una adecuada repartición de carga es necesario que las impedancias sean inversamente proporcionales a las capacidades. La solución más sencilla sería utilizar dos transformadores idénticos, de preferencia de la misma marca y números de serie cercanos entre sí.

En este arreglo el voltaje de salida es igual al de cada uno de los elementos, en cambio la corriente de salida es la suma de las corrientes de cada transformador.

**2.5.2. CIRCUITOS TRIFÁSICOS.** También es posible transformar un sistema trifásico de voltajes por medio de tres transformadores con las formas de conexión típicas de tres fases.

Como el transformador tiene dos embobinados (alta tensión y baja tensión) y las formas de conexiones trifásicas también son dos (delta y estrella), se obtienen cuatro combinaciones posibles:

ALTA TENSIÓN	BAJA TENSIÓN	DENOMINACIÓN
$\Delta$	$\Delta$	Delta -delta
$\text{Y}$	$\text{Y}$	Estrella-estrella
$\Delta$	$\text{Y}$	Delta-estrella
$\text{Y}$	$\triangleleft$	Estrella-delta

Las normas de transformadores indican que en estas combinaciones se debe mencionar en primer lugar la conexión en alta tensión, y en segundo lugar la de baja tensión. Igualmente, en el simbolismo los lados de las deltas deben ser paralelas entre sí ( $\Delta \Delta$ ) o las ramas de las estrellas entre sí ( $\text{Y Y}$ ), pero en el caso delta estrella y estrella delta, las ramas de la estrella deben ser paralelas a los lados de la delta ( $\Delta \text{Y}$  ó  $\text{Y} \triangleleft$ ). Esto es porque estos símbolos representan no solamente el tipo de conexiones, sino también los voltajes de alta y baja tensión que deben estar en fase y por tanto dibujarse paralelos (Recuérdese que de esta propiedad surgió el concepto de polaridad).

Para construir un diagrama como el de las figuras 2.28 y 2.29 (sólo que ahora en tres fases), hay que apoyarse en cada uno de los diagramas de fasores que se acaban de describir. Sobre estos diagramas deben aplicarse primeramente tres criterios de identificación, que se describirán con todo detalle en el primer caso.

a) **Conexión delta-delta.** Imaginemos que en este momento solo existen en la figura 2.30, las dos deltas (sin ninguna identificación), las líneas de alta y baja tensión y los transformadores I, II y III (sin conectarse aún a las líneas). En la práctica los tres transformadores se montan sobre una base común; de hecho, al conjunto se le llama *banco de transformadores*, y las líneas de alta y baja tensión son barras o soleras de cobre, soportados sobre aisladores y estos a su vez sobre estructuras adecuadas a este propósito. El tamaño de los aisladores (nivel de aislamiento) depende de la magnitud de las tensiones. Las líneas dispuestas en esta forma se les llama *barras colectoras*.

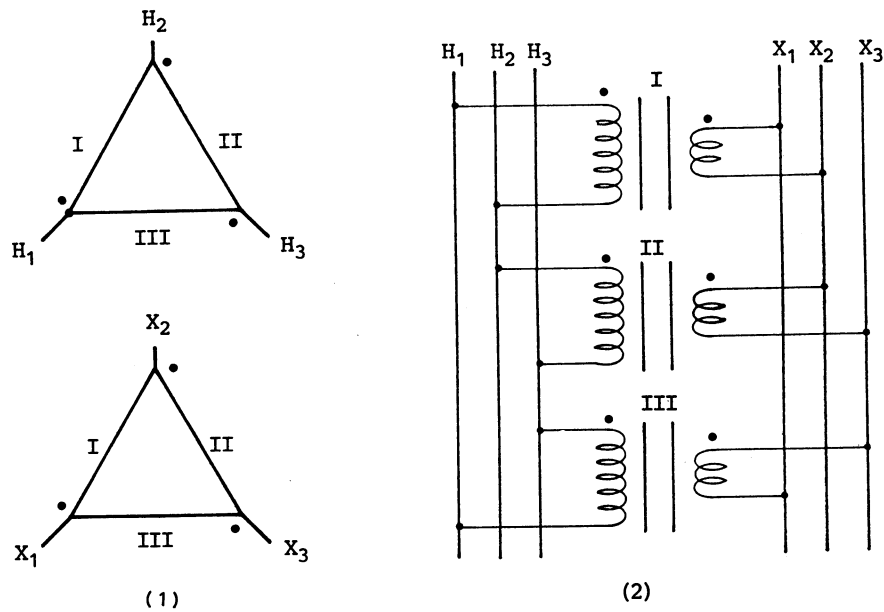


FIGURA 2.30. CONEXIÓN DELTA-DELTA. (1) DIAGRAMA DE FASORES.  
(2) DIAGRAMA DE CONEXIONES ELÉCTRICAS.

Previamente a la conexión del banco es necesario identificar la secuencia de fases a la que operaran las barras alimentadoras. En el mismo orden de secuencia se les identificará como  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$ , y a las barras secundarias se les da también una identificación  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$ . (o bien  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  y  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  si trabajara como elevador).

Ahora, para formar el diagrama de conexiones, se procede a trabajar primeramente sobre las dos deltas de la figura 2.30. (No olvidar que hasta este momento consideramos que no existe ninguna identificación) Se aplicarán los tres siguientes criterios:

1. **Identificación de las líneas.** Cada línea (barra colectora) conectará a un vértice de la delta. Las normas sugieren el orden a seguir: Vértice izquierdo inferior,  $H_1$ ; vértice superior,  $H_2$ ; vértice derecho inferior,  $H_3$ . En baja tensión corresponden las mismas posiciones para  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$ .

**2. Identificación de los transformadores.** Los transformadores en el diagrama de conexiones deben recibir alguna identificación. En la figura se les ha llamado I, II y III. Posteriormente y de manera arbitraria (para esto las normas no sugieren ningún orden), se le da la misma identificación a cada fador de la delta de alta tensión. El fador I representará el voltaje aplicado al transformador I, y de manera similar los II y III. El fador I de la delta de baja tensión deberá ser el paralelo al I de la de alta tensión, e igualmente para los otros dos.

**3. Identificación de polaridades.** En la figura se ha escogido el fador I entre los vértices  $H_1$  y  $H_2$ . Representa el voltaje entre las barras  $H_1$  y  $H_2$  y alguna de ellas debe conectar con la terminal marcada del transformador I. Arbitrariamente se escoge un extremo del fador I para dibujarle su marca de polaridad. Al fador I de baja tensión también se le dibuja la marca de polaridad en el extremo correspondiente. En la figura se ha escogido el extremo inferior de los dos fasores.

Lo mismo se hace para los fasores II y III.

Ahora, siguiendo las indicaciones de los diagramas fasoriales, se procede a completar el diagrama de conexiones:

-La terminal marcada de I y la no marcada de III conectan a la barra  $H_1$ .

-La terminal marcada de II y la no marcada de I conectan a la barra  $H_2$ .

-La terminal marcada de III y la no marcada de II conectan a la barra  $H_3$ .

De manera similar se procede con la baja tensión, y estas mismas conexiones se efectúan en la práctica.

**Características de la conexión delta-delta.** Recordando que por convención los diagramas de fasores se giran en sentido inverso a las manecillas de un reloj, si se establece un punto de referencia (por ejemplo, en la figura 2.31 se ha tomado la parte inferior de las verticales que pasan por el centro de las deltas) se puede deducir que los vértices de las deltas pasan en un orden:

$H_1 - H_2 - H_3$  en alta tensión

$X_1 - X_2 - X_3$  en baja tensión

y además, si giran simultáneamente,  $X_1$  y  $H_1$  pasarán en el mismo instante por la referencia e igualmente  $X_2$  y  $H_2$ , y  $X_3$  y  $H_3$ .

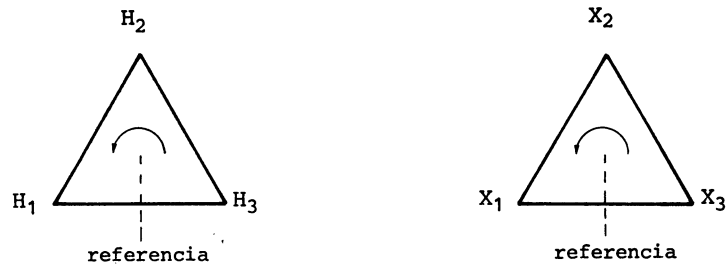


FIGURA 2.31. REFERENCIAS PARA LA SECUENCIA DE FASES Y EL DESPLAZAMIENTO ANGULAR.

Estas características se expresan de la siguiente manera:

Secuencia de fases:  $H_1-H_2-H_3$  ———  $X_1-X_2-X_3$

Desplazamiento angular: Baja tensión en fase con alta tensión ( $0^\circ$ )

b) **Conexión estrella-estrella.** En la figura 2.32 se presentan los diagramas de fasores y de conexiones en forma similar a como se hizo con la conexión delta-delta. Como las estrellas tienen una cuarta conexión (llamada punto neutro), aparece una cuarta barra en alta tensión identificada como  $H_0$  y una en baja tensión como  $X_0$ .

Se sugiere al lector, a manera de ejercicio, verificar los criterios y conexiones siguiendo la misma secuencia que en la conexión anterior.

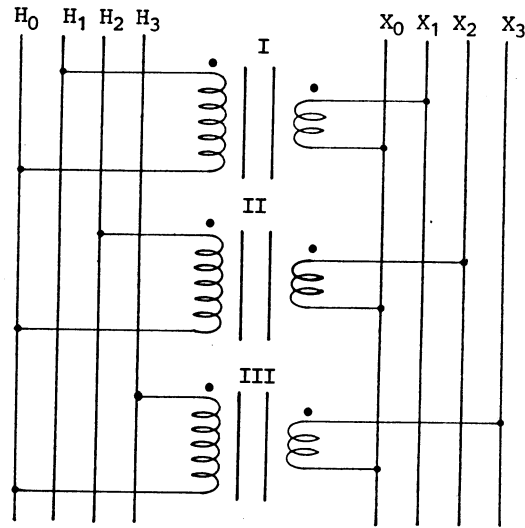
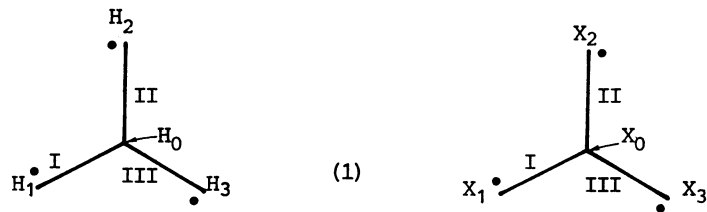


FIGURA 2.32. CONEXIÓN ESTRELLA-ESTRELLA (1) DIAGRAMA DE FASORES.  
(2) DIAGRAMA DE CONEXIONES ELÉCTRICAS.

*Características de la conexión estrella-estrella:*

Secuencia de fases:  $H_1-H_2-H_3$  ———  $X_1-X_2-X_3$

Desplazamiento angular: Baja tensión en fase con alta tensión ( $0^\circ$ )

c) **Conexión delta-estrella.** En la figura 2.33 aparecen los diagramas de fasores y de conexiones en forma similar a los casos anteriores. Se sugiere al lector, como ejercicio, verificar los criterios y conexiones que fueron integrando esta figura. Solamente hay que tener en cuenta que en la estrella de la derecha no hay nada en posición izquierda inferior. La identificación  $X_1$  se ha puesto en el fasor más cercano a esta posición, y lo mismo se dice de  $X_2$  y  $X_3$ .

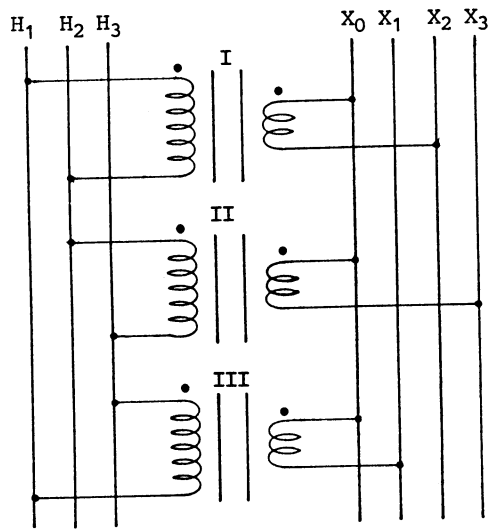
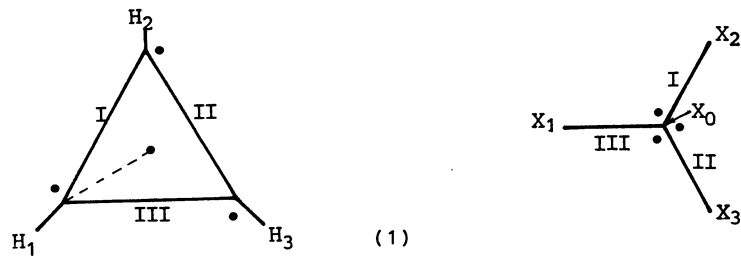


FIGURA 2.33. CONEXIÓN DELTA-ESTRELLA. (1) DIAGRAMA DE FASORES  
(2) DIAGRAMA DE CONEXIONES ELÉCTRICAS



**Características de la conexión delta-estrella.** Recurriendo nuevamente a la referencia vertical, se puede observar en la figura 2.34.1 que al hacer girar las figuras, el orden secuencial sigue siendo  $H_1-H_2-H_3$  en alta tensión y  $X_1-X_2-X_3$  en baja. Sin embargo, en el giro simultáneo no pasan  $H_1$  y  $X_1$  en el mismo instante por sus referencias.

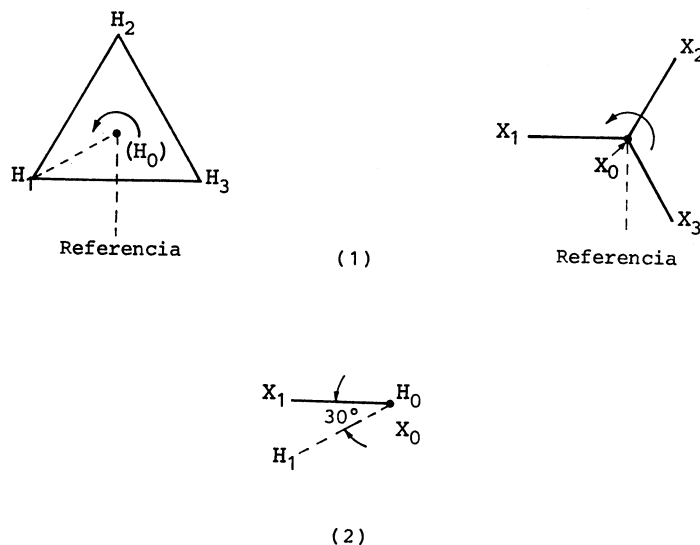


FIGURA 2.34. REFERENCIAS PARA LA SECUENCIA DE FASES Y DESPLAZAMIENTO ANGULAR.

(1) SECUENCIA DE FASES (2) DESPLAZAMIENTO ANGULAR

Supóngase en el centro de la delta un neutro hipotético y su voltaje al neutro  $H_0-H_1$  también hipotético. Nada nos impide dibujarlos sobre el papel, aunque en realidad no existan. Se puede deducir fácilmente que este voltaje al neutro tiene una inclinación de  $30^\circ$ .

Si se dibuja ahora un neutro común en la figura 2.34(2) y a partir de él se trazan los voltajes  $H_0-H_1$  y  $X_0-X_1$ , se puede observar que entre ellos hay un desplazamiento angular de  $30^\circ$ , y según el sentido de giro la baja tensión va retrasada con respecto a la alta.

Estas *características* se expresan de la siguiente manera:

Secuencia de fases:  $H_1-H_2-H_3$  ———  $X_1-X_2-X_3$

Desplazamiento angular: Baja tensión  $30^\circ$  atrás de alta tensión.

d) **Conexión estrella-delta.** En la figura 2.35 se muestran los diagramas de fasores y de conexiones eléctricas.

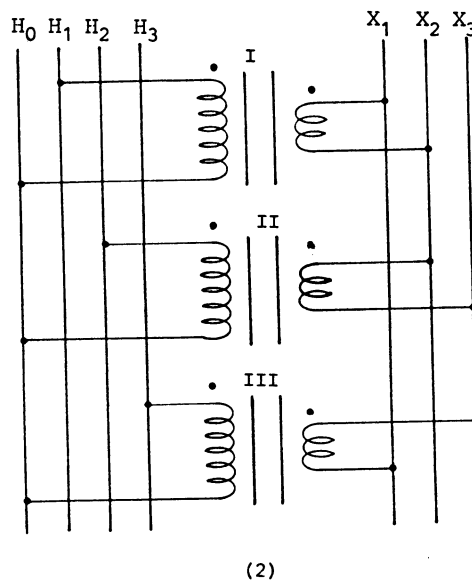
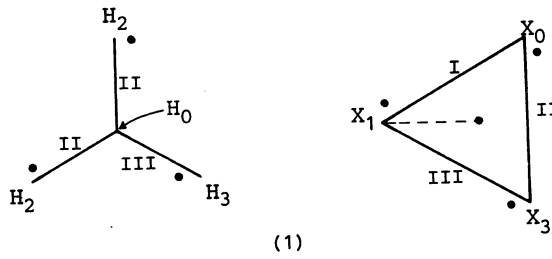






FIGURA 2.35. CONEXIÓN ESTRELLA-DELTA. (1) DIAGRAMA DE FASORES  
(2) DIAGRAMA DE CONEXIONES ELÉCTRICAS

Se sugiere al lector verificar como se han aplicado aquí los criterios para efectuar las conexiones. Las *características* del sistema estrella-delta son:

Secuencia de fases:  $H_1-H_2-H_3$  ———  $X_1-X_2-X_3$

Desplazamiento angular: Baja tensión  $30^\circ$  atrás de alta tensión.

e) **Otras posibilidades.** Respetando el requisito de paralelismo entre fasores de alta y baja tensión, se pueden generar otras cuatro combinaciones para bancos de transformación trifásica.

NOMBRE	SÍMBOLO	CARACTERÍSTICAS
Delta-delta		Baja tensión a $180^\circ$ de alta tensión
Estrella-delta		Baja tensión a $180^\circ$ de alta tensión
Delta-estrella		Baja tensión $30^\circ$ adelante de alta tensión
Estrella-delta		Baja tensión $30^\circ$ adelante de alta tensión

A fin de simplificar y unificar los sistemas, las normas recomiendan únicamente las cuatro primeras combinaciones, ya que estas cuatro últimas no presentan ventajas ni desventajas sobre aquellas.

## 2.6. TRANSFORMADORES TRIFASICOS

En realidad, un transformador trifásico es el conjunto de los tres transformadores monofásicos del banco, pero compartiendo un núcleo común. Esto es factible gracias a la propiedad de *cero valor medio* de los sistemas trifásicos balanceados.

En la figura 2.36.1 se muestran las ondas senoidales de un sistema trifásico balanceado. En este caso se aplican a los flujos magnéticos de los transformadores I, II y III de cualquiera de los bancos estudiados en el tema anterior.

En un tiempo cualquiera, la suma de valores instantáneos de las tres ondas es igual a cero. (Por ejemplo, en el tiempo  $t_1$ , el flujo  $\phi_I$  se encuentra en su máximo positivo, mientras que  $\phi_{II}$  y  $\phi_{III}$  están al 50% del máximo negativo cada uno).

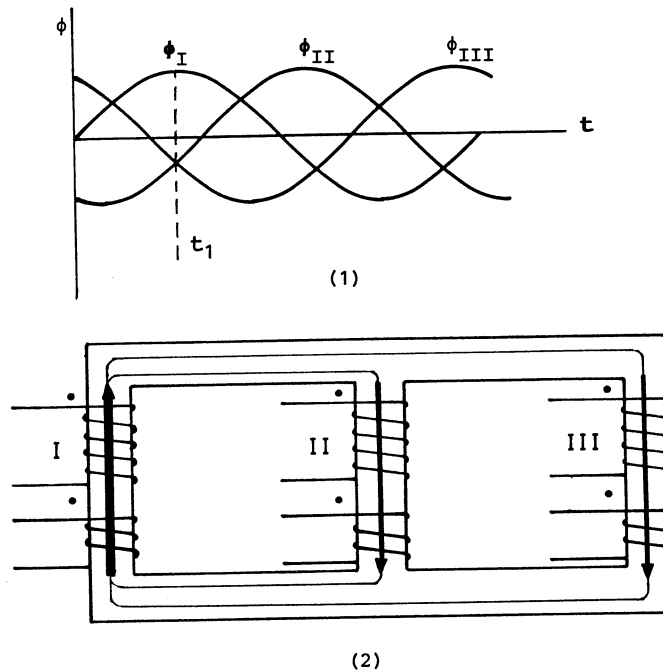


FIGURA 2.36. EL TRANSFORMADOR TRIFÁSICO. (1) DIAGRAMA ONDULATORIO DE FLUJOS  
(2) ESTRUCTURA DE LAS TRES FASES

Aplicando esta propiedad a un núcleo como el de la figura 2.36.2, se puede observar que para el mismo instante  $t_1$  de la primera figura, todo el flujo asciende por la columna I, mientras que el 50% desciende por la II y 50% por la III. A medida que avance el tiempo, las proporciones van variando,

pero siempre se mantiene el equilibrio. Este arreglo presenta las siguientes ventajas sobre un banco de tres transformadores monofásicos:

- Requiere menor cantidad de fierro para el núcleo.
- Ocupa menor espacio.
- Requiere menor capacidad del tanque y por consiguiente menor cantidad de aceite.
- Por lo anterior, resulta más económico.
- Evita el trabajo de hacer las conexiones delta y/o estrella, ya que el fabricante las hace dentro del tanque.
- Las terminales de las deltas y/o estrellas están listas para conectarse a las barras colectoras.

La figura 2.37 muestra esquemáticamente el transformador acomodado dentro del tanque y los devanados de alta tensión en estrella. Las terminales de la estrella y el neutro atraviesan la tapa del tanque por el centro de sus respectivos aisladores. Las terminales de alta tensión son delgadas y los aisladores largos (alto nivel de aislamiento), mientras que las terminales de baja tensión son gruesas y los aisladores cortos. A los aisladores de los conos se conoce también como boquillas o pasamuros.

Para mayor simplicidad del dibujo, se omiten otros detalles, como soporte del núcleo, conexiones de baja tensión, nivel de aceite, etc.

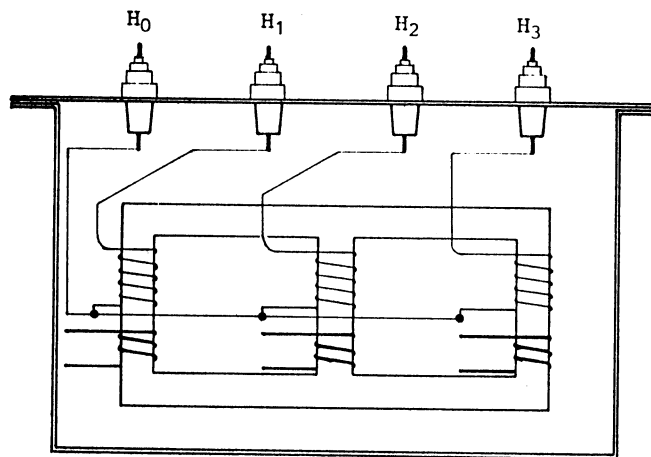


FIGURA 2.37. TRANSFORMADOR TRIFÁSICO DENTRO DE SU TANQUE CON ALTA TENSIÓN EN ESTRELLA.

La figura 2.38 muestra las tapas de los tanques con la posición de terminales según las combinaciones normalizadas. El orden de estas terminales es otro detalle que recomiendan las normas, tal como aparece en los dibujos. Las salidas de baja tensión en algunas ocasiones se localizan en la pared del tanque que correspondería a la línea inferior de las figuras, en vez de la tapa. El orden en este caso sigue siendo el mismo.

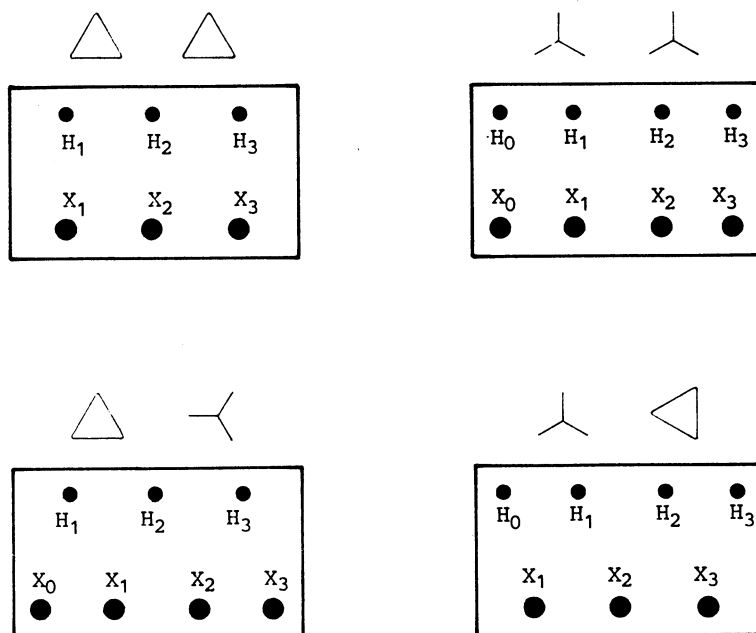


FIGURA 2.38. POSICIÓN NORMALIZADA DE LAS TERMINALES.

**2.6.1. PRUEBAS DE CIRCUITO EQUIVALENTE Y ANÁLISIS DE RESPUESTA.** Las pruebas de circuito abierto y circuito corto se efectúan aplicando al transformador el sistema trifásico de voltajes. Se miden los tres voltajes entre líneas, las tres corrientes en las líneas y la potencia trifásica.

El circuito equivalente se traza para una fase, de manera que para la determinación de parámetros es necesario calcular los valores de fase, a partir de las lecturas en tres fases y el circuito del lado en donde se realizó la prueba. Con estos valores de fase, el cálculo se desarrolla de la misma manera que para el transformador monofásico. La relación de transformación, si se necesita, es el cociente entre el voltaje de fase en alta tensión y el voltaje de fase en baja tensión.

## 2.7. AUXILIARES DEL TRANSFORMADOR

Si se considera que el transformador está constituido básicamente por el núcleo y sus bobinados de alta y baja tensión, las demás piezas, (algunas de las cuales ya se han descrito anteriormente) se pueden considerar como elementos auxiliares.

Existen algunos transformadores con muchas piezas auxiliares, sin embargo nos limitaremos a mostrar en la figura 2.39 las principales y más comunes. Se ha omitido en la figura el transformador, cuyo espacio solamente se marca con línea punteada, con el fin de hacer énfasis en las piezas auxiliares.

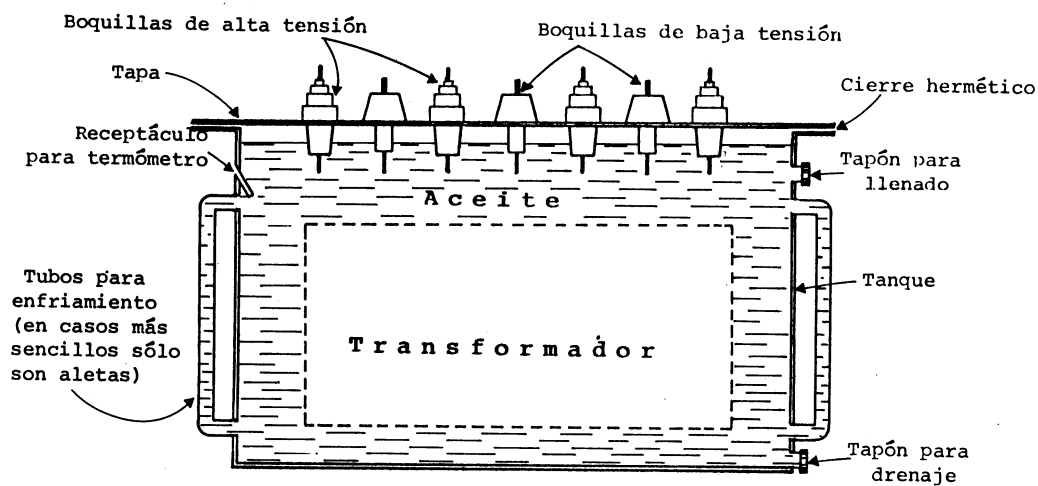


FIGURA 2.39. PIEZAS AUXILIARES DEL TRANSFORMADOR.

Los aisladores o boquillas deben ajustar herméticamente con la tapa o paredes del tanque, y la tapa también debe cerrar herméticamente para evitar que entre al tanque la humedad ambiente, porque el aceite la absorbe fácilmente.

El aceite tiene dos funciones, una aislante y otra refrigerante. Esta última evita que las pérdidas del transformador lo calienten al grado que sus aislamientos comiencen a degradarse, sufriendo daño permanente.

El sistema de enfriamiento del aceite, en los casos más simples es la sola pared del tanque. Un sistema un poco más elaborado consiste en agregar aletas a las paredes, para aumentar la superficie de contacto con el aire circundante. Otro sistema aun más elaborado consiste en poner tubos alrededor del tanque por los cuales circula aceite, como es el caso mostrado en la figura. Para los transformadores de potencia se usan radiadores en un cuerpo aparte del tanque, con bombas para convección forzada y ventiladores para radiación forzada.

Otro auxiliar, que permite un ligero cambio en la relación de transformación, para compensar las pérdidas de voltaje en el sistema, son las derivaciones que se muestran esquemáticamente en la figura 2.40.

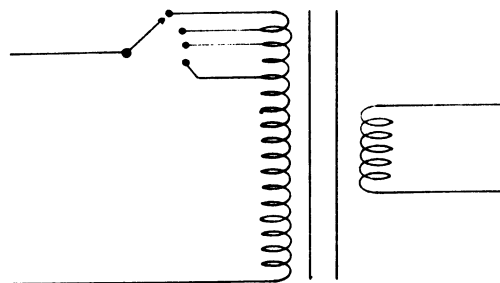


FIGURA 2.40. TRANSFORMADOR CON DERIVACIONES.



El selector para cambio de derivaciones se localiza dentro del tanque, y el cambio se puede hacer desde afuera por un mecanismo que atraviesa las tapas o una pared. En el caso de transformadores trifásicos, un solo mecanismo mueve los tres selectores. Algunos están diseñados para hacer el cambio bajo carga, y se puede efectuar en forma automática.

## 2.8 TRANSFORMADORES DE INSTRUMENTOS

La medición de altas tensiones o de corrientes fuertes con instrumentos conectados directamente a las líneas presenta tal cantidad de problemas y peligros, que no se lleva a cabo de esta manera.

Las características de los transformadores permiten medir altas tensiones con voltímetros ordinarios a escala de 120 volts, o medir corrientes fuertes con amperímetros de 5 amperes.

**2.8.1. TRANSFORMADORES DE POTENCIAL (T. P.).** Estos transformadores tienen una relación de la alta tensión de las líneas por medir, a 120 volts y el nivel adecuado de aislamiento para poder operar el secundario al potencial de tierra.

$$a = \frac{A.T.}{120}$$

Esto es una medida de protección para que la persona lectora se pueda acercar al instrumento tanto como sea necesario, o inclusive, tocarlo. El instrumento puede localizarse en un tablero que también debe estar conectado a tierra.

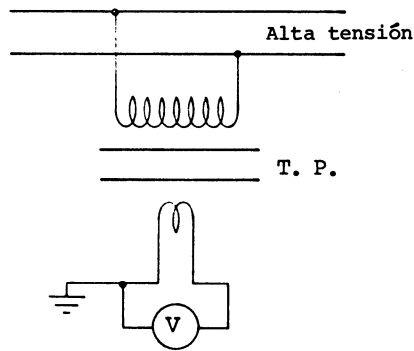


FIGURA 2.41 EL TRANSFORMADOR DE POTENCIAL

El voltaje en las líneas es igual a la lectura del instrumento, multiplicada por la relación de transformación.

Para instrumentos fijos en tableros, se fabrican juegos de T.P. y voltímetro, de tal manera que la escala del aparato se encuentra multiplicada por la relación de su correspondiente transformador, y da la lectura real del voltaje en las líneas.

**2.8.1. TRANSFORMADORES DE CORRIENTE ( T. C.).** Aprovechando ahora la definición de relación de transformación como

$$a = \frac{I_x}{I_H}$$

en donde  $I_x$  es la mayor corriente en el lado de menor número de vueltas, e  $I_H$  la menor corriente en el lado de mayor número de vueltas. Para este caso en particular es preferible no usar las identificaciones de alta tensión y baja tensión, ya que como se comentará, estos transformadores trabajan en circuito corto y no tienen tensiones.

En vez del instrumento que se intercalaría en la línea, se conecta el lado de alta corriente (menos vueltas) y el amperímetro se conecta en el lado de baja corriente, como muestra la figura 2.42.1. Si se tratara de medir la corriente en una línea de alta tensión, el transformador se fabrica con el suficiente nivel de aislamiento para operar el secundario a potencial de tierra.

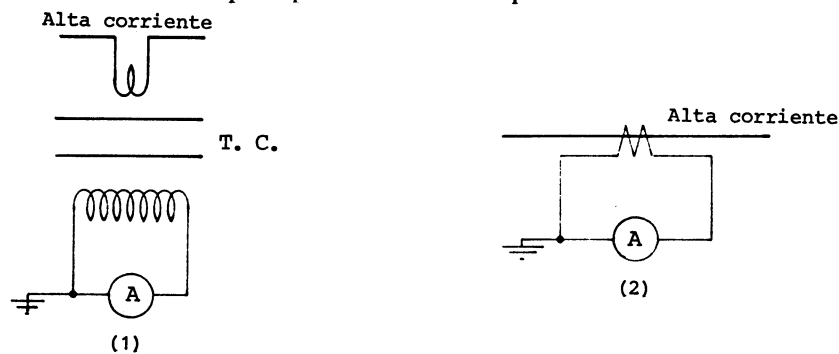


FIGURA 2.42. EL TRANSFORMADOR DE CORRIENTE. (1) EL SÍMBOLO ORDINARIO DEL TRANSFORMADOR. (2) EL SÍMBOLO TÍPICO DE ESTE TRANSFORMADOR.

El amperímetro es un instrumento conductor de la corriente, de manera que al conectarlo al T.C., como se observa en la figura, se pone el secundario en circuito corto (no hay caída de tensión). El circuito corto se transfiere al primario y por tanto, no se produce pérdida de voltaje en el lugar de la línea en donde se intercaló. Sin embargo, hay que tener cuidado de no abrir el circuito secundario en operación, porque entonces si se produciría una caída de tensión en el primario, la cual se multiplica en el secundario pudiendo llegar a valores peligrosos en el punto de apertura.

Muchos de estos transformadores tienen un primario muy elemental al que se le suele llamar de *una vuelta*, pero en realidad es una solera que atraviesa el transformador de un lado al otro.

El secundario es un devanado toroidal con el núcleo en su eje, y el conjunto rodeando la solera. En otras ocasiones no existe la solera, dejando en su lugar una ventana por la que atraviesa el cable de alta corriente. El propio cable constituye el primario.

Estos últimos casos sugieren una simbología simplificada del T.C., que aparece en la figura 2.42.2 y que de hecho, es la usual para representar a este tipo de transformador.

La conexión del secundario a tierra es una medida de seguridad con los mismos propósitos que ya se descubrieron en los T.P.

El uso simultáneo de T.P. y T.C. permite la conexión de wattímetros y watthorímetros y tienen algunas otras aplicaciones, de las cuales la principal seguramente, es en los sistemas de protección.

### **EJERCICIOS PROPUESTOS**

2.1 Un transformador que está saliendo de la fábrica no tiene primario ni secundario ¿Cierto o falso?, ¿por qué?

2.2 Un transformador está trabajando con ruido y calentamiento excesivos. Según los ingenieros es porque el núcleo está saturado. ¿Qué quiere decir esto?, ¿a qué puede deberse?

2.3 ¿Se puede trabajar un transformador a mayor voltaje que el nominal?, ¿a menor voltaje?

2.4 ¿Se puede trabajar un transformador a mayor frecuencia que la nominal?, ¿a menor frecuencia?

2.5 Se tiene un transformador con relación de 120 a 18 volts, pero se desea obtener 24 volts. Para cambiar la relación se pueden disminuir vueltas en alta tensión o aumentarlas en baja. ¿Cuál solución sería la correcta?

2.6 ¿Qué se entiende por relación de transformación?, ¿de qué diferentes maneras se puede definir?

2.7 ¿Qué significa terminales de misma polaridad?

2.8 ¿Qué utilidad tiene conocer las terminales de misma polaridad?

2.9 ¿Qué consecuencia tendría si se equivocan las conexiones de dos secundarios en serie?, ¿y en paralelo?

2.10 ¿Qué consecuencia tendría equivocarse al tratar de formar una estrella?, ¿y al formar una delta?

2.11 A un transformador de 5 KVA, 250-25 V se le hicieron las siguientes pruebas:

Circuito abierto	250 V	1.8 A	205 W
Circuito corto	12 V	20 A	105 W

- Investigar en qué lado se hizo cada prueba.
- Obtener su circuito equivalente aproximado para nivel de alta tensión.

2.12 El transformador del problema 2.11 se alimenta a 250 V y se hace trabajar a plena carga y factor de potencia 0.8 atrasado. Calcular su voltaje secundario y su porcentaje de regulación.

2.13 El transformador del problema 2.11 se conecta a una línea de 220 V y del lado de baja tensión tiene una carga de 160 A a factor de potencia 0.8 atrasado. ¿Cuál será su voltaje en el lado de baja tensión?

2.14 Calcular las pérdidas y porcentaje de eficiencia en las condiciones de trabajo de los problemas 2.12 y 2.13. ¿Cuál será la capacidad del transformador en el problema 2.13?

2.15 Un transformador de 10 KVA, 1000-220 V se va a utilizar para elevar el potencial a partir de una línea de 220 V. Se le hicieron las siguientes pruebas:

Circuito abierto	220 V	4.2 A	420 W
Circuito corto	45 V	10 A	205 W

- Investigar en qué lado se hizo cada prueba.
- Obtener su circuito equivalente aproximado para nivel de alta tensión.

2.16 Si se alimenta el primario a 220 V y en el secundario hay una carga de 8.5 A con un factor de potencia 0.866 atrasado. ¿Cuál será su voltaje en el secundario?

2.17 Igual que el problema 2.16 pero con factor de potencia 0.866 adelantado.

2.18 A un transformador de 5 KVA, 220-100 V se le hicieron las siguientes pruebas:

Circuito abierto	220 V	2.25 A	209 W
Circuito corto	9.2 V	22.75 V	86 W

Se desea alimentarlo con una línea de 220 V y en el lado de baja tensión se conectará una impedancia de  $1.5 + j2$  ohms. Calcular el voltaje y el factor de potencia en el lado de baja tensión.

2.19 Se desea corregir el ángulo de fase de la carga en el problema 2.18 a  $30^\circ$  mediante la adición de un capacitor en paralelo con la impedancia. ¿Qué valores características debe tener el capacitor?

2.20 Supóngase que el transformador está trabajando en las condiciones del problema 2.19 y por un descuido se desconecta la impedancia, dejando el capacitor en servicio ¿Cuál sería el voltaje secundario en estas condiciones?

2.21 Buscar las posibles variantes a las figuras 2.30 a 2.35 para conectar tres transformadores en banco trifásico, siempre que se mantengan las cuatro combinaciones normalizadas.

2.22 Tres transformadores con relación de 440-127 V y capacidad de 5 KVA cada uno, se van a conectar a una línea trifásica de 440 V. Calcular los voltajes (en vacío) secundarios y la capacidad del banco en cada una de las cuatro combinaciones normalizadas.

2.23 A un transformador trifásico de 15 KVA, 440/254-220 V conexión estrella-delta se le hicieron las siguientes pruebas:

PRUEBA	VOLTAJES ENTRE LÍNEAS	CORRIENTE DE LÍNEA	POTENCIA TRIFÁSICA
Circuito abierto	220 V	4 A	690 W
Circuito corto	23 V	20 A	360 W

- a) Investigar de qué lado se hizo cada prueba.
- b) Calcular los voltajes, corrientes y potencias de fase de cada prueba.
- c) Obtener el circuito equivalente aproximado de una fase, para nivel de alta tensión.

2.24 El transformador del problema 2.23 se va a utilizar para elevar el voltaje de una línea trifásica de 220 V. Calcular sus voltajes secundarios (al neutro y entre líneas) cuando tiene una carga de 17.5 A con un ángulo de fase de  $30^\circ$  en retraso.

2.25 Igual al problema anterior pero con ángulo de fase de  $45^\circ$  en adelanto.

2.26 Qué consecuencias traería en el caso de un transformador trifásico, si se alimenta con una secuencia de fases  $H_3-H_2-H_1$  (analizar para cada una de las combinaciones normalizadas).

2.27 Se tiene una línea de alimentación de 220 V, 60 Hz y se desea hacer trabajar una carga de 900 V.A. trifásicos a 60 V entre líneas y con conexión neutra. Como no se encuentran transformadores adecuados va a ser necesario mandarlos fabricar. Si el usuario desea un banco de tres transformadores monofásicos, ¿qué especificaciones le tiene que dar al fabricante?

2.28 Si el usuario desea un transformador trifásico para el problema 2.27 ¿qué especificaciones le tiene que dar al fabricante?





## CAPÍTULO 3

### MOTORES DE INDUCCIÓN

#### 3.1. GENERALIDADES

**3.1.1. DEFINICIÓN.** Los motores de inducción son dispositivos que transforman energía eléctrica (en la modalidad de corriente alterna), en energía mecánica (en la modalidad de movimiento rotatorio).

La medición de la energía, tanto eléctrica como mecánica se suele hacer en la unidad de tiempo, o sea, con base en el concepto de potencia.

La potencia eléctrica tiene como componentes, el voltaje, la intensidad de corriente y el factor de potencia que depende del defasamiento entre las ondas de voltaje y corriente.

$$P_e = VI \cos \theta \quad \text{para una fase}$$

$$P_e = \sqrt{3} VI \cos \theta \quad \text{para tres fases}$$

La potencia se mide en watts, el voltaje en volts y la intensidad de corriente en amperes. El factor de potencia  $\cos \theta$  es adimensional.

En el movimiento rotatorio, la potencia mecánica tiene como componentes el momento (o par) y la velocidad angular.

$$P_m = T \omega$$

En el Sistema Internacional de Unidades, la potencia se mide en watts, el par en newton-metro y la velocidad angular en radianes por segundo. La fórmula no requiere de constantes de conversión de unidades.

No obstante, en el ramo de motores de inducción existen todavía algunas normas de prueba que usan las unidades empíricas que estableció la costumbre, antes de la aceptación de un sistema internacional de unidades.

El **caballo-potencia CP**, (más conocido por su denominación en el idioma inglés **horse power, HP**).

$$1 \text{ CP} = 1 \text{ HP} = 746 \text{ W}$$

El **caballo-vapor**, más usado en Europa y Asia.

$$1 \text{ CV} = 736 \text{ W}$$

El **kilogramo-metro**. Se refiere al kilogramo fuerza del sistema técnico (no el sistema internacional).

El kilogramo-metro es una unidad de par.

$$1 \text{ Kg-m} = 9.81 \text{ N-m}$$

Las **revoluciones por minuto**. Es la unidad práctica de velocidad angular, simbolizada con **N**.

$$RPM = \omega \times \frac{60}{2\pi}$$

La conversión de energía se ilustra en la figura 3.1. Aunque las máquinas eléctricas son reversibles y el motor de inducción no es una excepción, el trabajo usual en este caso es en la modalidad de motor. El flujo de energía en la figura sería por tanto de izquierda a derecha. Al final del capítulo se analizarán los casos en que eventualmente funciona como generador.

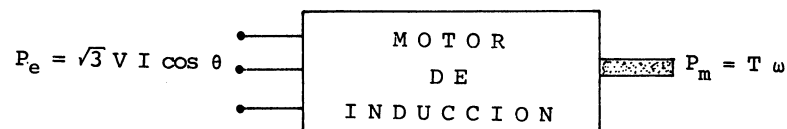


FIGURA 3.1. CONVERSIÓN DE ENERGÍA EN UN MOTOR DE INDUCCIÓN.

**3.1.2. ESTRUCTURA.** Desde el punto de vista mecánico, el motor de inducción, como todas las máquinas rotatorias, se compone de dos grandes conjuntos de piezas:

a) **Estator.** Abarca todo el grupo de partes inmóviles (o estáticas, de donde toma su nombre).

b) **Rotor.** Abarca el grupo de partes giratorias (o rotatorias, de donde toma su nombre).

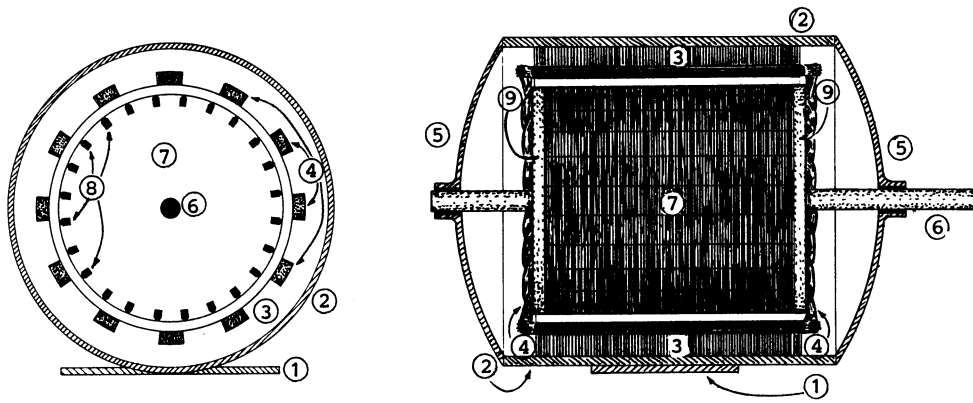
Las piezas que conforman el estator y el rotor pueden apreciarse en su conjunto en la figura 3.2.

*Desde el punto de vista funcional* también se pueden considerar dos grupos de partes, que prácticamente coinciden con las partes de la clasificación mecánica:

c) **Armadura.** Se entiende por armadura, el órgano en el que se inducen las fuerzas electromotrices (o fuerzas contraelectromotrices cuando trabaja en la modalidad de motor). Posiblemente esta definición de carácter general, resulte algo confusa en el caso del motor de inducción, ya que también se inducen fuerzas electromotrices en la otra parte que no es armadura (a ello se debe el nombre del motor), pero el lugar en donde operan las fuerzas contraelectromotrices es sólo en la armadura, y en el caso de esta máquina, es concretamente el embobinado de estator.

d) **Rotor.** La contraparte de la armadura es un sistema polar, que para esta máquina se localiza en el rotor. El embobinado de rotor se excita por inducción, y los polos magnéticos no tienen un lugar fijo, sino que se van deslizando lentamente por la periferia de su núcleo. Por esta razón, los polos magnéticos no son fácilmente identificables y se prefiere conservar el nombre de rotor para este conjunto.

El funcionamiento del motor, como se explicará con más detalle posteriormente, se puede describir en forma resumida de la manera siguiente:



**ESTATOR:**

1. Base
2. Coraza
3. Núcleo de armadura
4. Embobinado de armadura
5. Tapas

**ROTOR:**

6. Flecha
7. Núcleo de rotor
8. Embobinado de rotor
9. Anillos del embobinado de rotor

FIGURA 3.2. ESTRUCTURA DE UN MOTOR DE INDUCCIÓN.

(1) CORTE TRANSVERSAL. (2) CORTE LONGITUDINAL DEL ESTATOR Y ROTOR COMPLETO.

Al energizar la armadura, el estator produce un flujo magnético giratorio, de magnitud y velocidad constantes. En el rotor se inducen polos magnéticos que siguen en su giro al flujo de estator.

### 3.2. ARMADURA

En la figura 3.3.1 se presenta una armadura sumamente simplificada que permitirá analizar con facilidad la forma como se genera el flujo giratorio.

Consta de tres espiras. La primera está formada por un conductor que penetra por la ranura *a*, da vuelta en la parte posterior del dibujo (atrás del plano del dibujo) y sale por la ranura *a'*. La segunda penetra por *b* (distante  $120^\circ$  de *a*) y sale por *b'* y la tercera penetra por *c* (distante  $120^\circ$  de *b* y  $240^\circ$  de *a*) y sale por *c'*.

En el centro aparece el núcleo de rotor, que por el momento no tiene ningún devanado. El objeto es completar el circuito magnético, de tal manera que el flujo generado pueda atravesar por el eje magnético de cada espira (que en la figura sería un diámetro perpendicular al plano de la espira).

Con las tres espiras se formará un circuito trifásico, no importa si es delta o estrella. Al aplicarle un sistema trifásico de voltajes, como representaría una carga balanceada, se produce la circulación del sistema trifásico balanceado de corrientes que se ilustra en la figura 3.3.2. Supóngase que cuando la corriente  $I_a$  es positiva significa que penetra por la terminal *a* de la espira, y cuando es negativa penetra por *a'*. Una convención semejante se hará para  $I_b$  en la espira *b-b'* y para  $I_c$  en la espira *c-c'*.

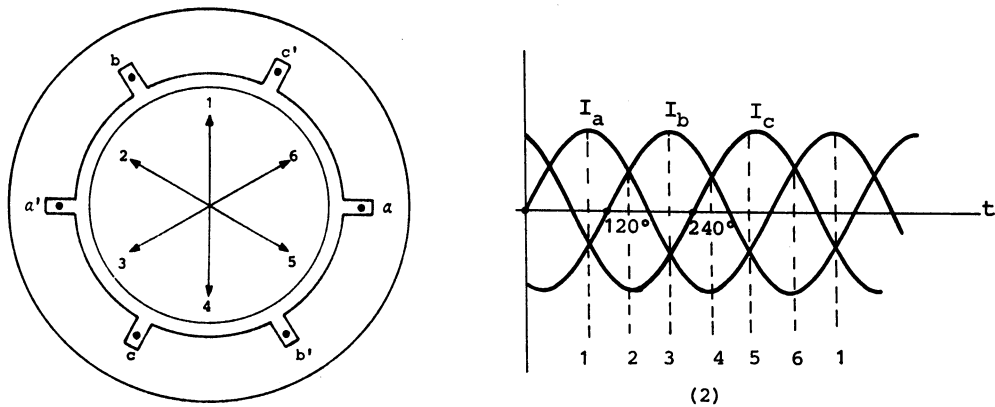


FIGURA 3.3. DESARROLLO DEL FLUJO GIRATORIO DE ESTATOR.  
 (1) EMOBINADO Y FLUJO. (2) SISTEMA TRIFÁSICO DE CORRIENTES.

**3.2.1. DEMOSTRACIÓN GRÁFICA DEL GIRO DE FLUJO.** Analizando ahora diversos instantes en el tiempo que abarcan las ondas de corriente se tiene:

**Instante núm. 1:** la corriente  $I_a$  se encuentra en su máximo positivo, lo que significa que está penetrando por  $a$  y saliendo por  $a'$ . Aplicando a la espira  $a-a'$  la regla práctica de la mano derecha<sup>1</sup>, se deduce que el flujo en ese instante es vertical. El flujo vertical está también identificado con el número 1.

**Instante núm. 2:** la corriente  $I_c$  se encuentra en su máximo negativo, lo que significa que está penetrando por  $c'$  y saliendo por  $c$ . Cambiando ahora la mano derecha a esta nueva posición, el flujo adopta la posición 2.

Los cambios en los sentidos y magnitudes de las corrientes no han sido bruscos, de modo que el flujo no saltó de la posición 1 a la 2, sino que realizó un giro continuo.

**Instante núm 3:** la corriente  $I_b$  se presenta en su máximo positivo. Entra por  $b$  y sale por  $b'$ , y el flujo adopta la posición 3.

**Instante núm. 4:** la corriente  $I_a$  está en su máximo negativo. Son condiciones opuestas a las del instante 1.

**Instante núm. 5:** opuesto al instante 2.

**Instante núm. 6:** opuesto al instante 3.

El siguiente instante no sería el 7, sino que se repite el 1 y así sucesivamente.

Se concluye que el flujo es giratorio y que da una vuelta completa en un ciclo de corriente. En un sistema de 60 Hz daría 60 vueltas en un segundo o 3600 vueltas en un minuto (RPM).

---

<sup>1</sup> Imagínese la mano derecha tan grande como para abrazar con ella toda la máquina. Los dedos del índice al meñique deben seguir la dirección de la espira  $a-a'$  y el sentido de la corriente  $I_a$ , y el pulgar marca el sentido del flujo inducido.

A esta velocidad se le da el nombre de **velocidad síncrona**, pues se dice que está sincronizada con la frecuencia. A otras frecuencias corresponderían otras velocidades.

**3.2.2. DEMOSTRACIÓN ANALÍTICA.** En la figura 3.4 aparecen los tres flujos correspondientes al sentido positivo de sus respectivas corrientes.

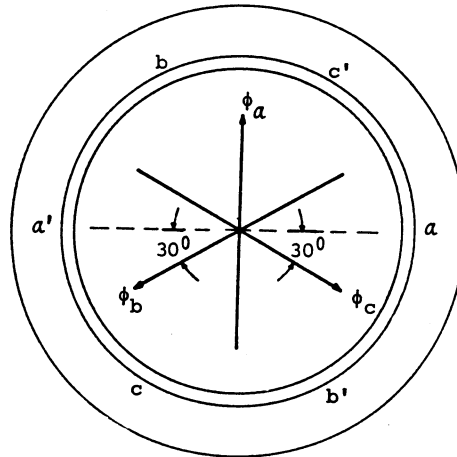


FIGURA 3.4. POSICIÓN DE LOS COMPONENTES DE FLUJO DE CADA ESPIRA.

La corriente instantánea para la fase a es

$$i_a = I_{m\acute{a}x} \text{ sen } 2\pi ft$$

El flujo instantáneo es proporcional a la corriente

$$\phi_a = KI_{m\acute{a}x} \text{ sen } 2\pi ft$$

y sus posición como fasor sería en la dirección de los números imaginarios (o + j).

De manera que el flujo en magnitud y posición quedaría expresado como:

$$\phi_a = [KI_{m\acute{a}x} \text{ sen } 2\pi ft] [0+j]$$

Por razonamientos semejantes, los flujos de las fases b y c serían:

$$\phi_b = [KI_{m\acute{a}x} \text{sen}(2\pi ft - 120^\circ)] [-\cos 30^\circ - j \text{sen} 30^\circ]$$

$$\phi_c = [KI_{m\acute{a}x} \text{sen}(2\pi ft - 240^\circ)] [\cos 30^\circ - j \text{sen} 30^\circ]$$

El flujo resultante sería:

$$\phi = \phi_a + \phi_b + \phi_c$$

Para efectuar la suma es necesario sustituir los senos de resta de ángulos según la fórmula

$$\text{sen}(A-B) = \text{sen} A \cos B - \text{sen} B \cos A$$

Luego se quitan paréntesis, y el resultado de la suma es:

$$\phi = 1.5KI_{m\acute{a}x} \cos 2\pi ft + j 1.5KI_{m\acute{a}x} \text{sen} 2\pi ft$$

que pasado a la forma polar queda:

$$\phi = 1.5KI_{m\acute{a}x} \angle 2\pi ft$$

La magnitud del fasor flujo ( $\phi$ ) es constante y el ángulo de posición es función del tiempo.

En un instante cualquiera, el ángulo de posición es:

$$\gamma = 2\pi ft$$

Recordando el concepto de velocidad angular en la mecánica rotacional

$$\omega = \frac{\gamma}{t}$$

se concluye que:

$$\omega = 2\pi f$$



Para una frecuencia de 60 Hz

$$\omega = 377 \text{ rad/s}$$

equivalente a:

$$N = 3600 \text{ RPM}$$

que es la misma velocidad síncrona deducida en el análisis gráfico.

**Embobinados reales.** Los embobinados reales están formados por bobinas de varias espiras, y cada fase se aloja en más de dos ranuras, dando lugar a nuevos valores de la constante  $k$ . Como no se ha evaluado inicialmente esta constante, en nada cambiarían los razonamientos anteriores.

**3.2.3. MÁQUINAS MULTIPOLARES Y NUEVAS VELOCIDADES SÍNCRONAS.** Para las figuras 3.3 y 3.4, una fase cualquiera, como por ejemplo la espira  $a$ - $a'$  induce un flujo que sale del núcleo de armadura por la parte inferior (lo que determina un polo norte), atraviesa el rotor y penetra nuevamente al núcleo de armadura por la parte superior (en donde se define un polo sur). Se trata de una armadura bipolar.

Supóngase ahora, esta misma fase alojada en cuatro ranuras como se muestra en la figura 3.5.1. En vez de una espira diametral habría que colocar 4 espiras a  $90^\circ$ .

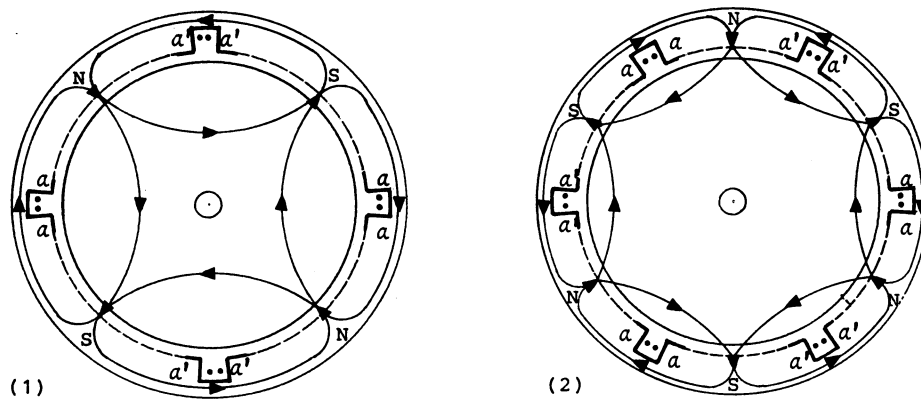


FIGURA 3.5. MÁQUINAS TETRAPOLAR Y HEXAPOLAR.

En un tiempo como el instante 1 de la figura 3.3, la corriente entra por las cuatro terminales a y sale por las cuatro a', definiendo los sentidos y trayectorias de flujo mostradas. Se forman dos polos norte y dos polos sur, por lo que la máquina será tetrapolar. En un recorrido por la periferia, los polos siempre aparecen alternados

N-S - N-S.

Las otras dos fases, b-b' y c-c', se intercalan con la a-a' de manera similar a como se hizo en la máquina bipolar. No se ilustran en la figura para simplificar el dibujo.

Para que un polo norte se desplace hasta ocupar el lugar que ahora tiene el sur, se requieren 90° geométricos y medio ciclo de corriente (180° eléctricos), y en un ciclo (360° eléctricos) el flujo solamente habrá girado media vuelta (180° geométricos).

La velocidad geométrica, (propriadamente llamada velocidad síncrona), es ahora la mitad de la velocidad eléctrica  $\omega = 2\pi f$ , de modo que:

$$\omega_s = \frac{2\pi f}{2} \quad \text{o} \quad N_s = \frac{60f}{2}$$

para cuatro polos.

En la máquina de 6 polos ilustrada en la figura 3.5.2, cada fase consta de 6 bobinas alojadas en 6 ranuras a 60°. Siguiendo un razonamiento semejante al que se desarrolló para la máquina tetrapolar se concluye que en un ciclo (360° eléctricos) el flujo solamente gira un tercio de vuelta. La velocidad síncrona es la tercera parte de la velocidad eléctrica. En general, para cualquier máquina de C.A.

$$\omega_s = \frac{2\pi f}{\frac{P}{2}} \quad \text{y} \quad N_s = \frac{60f}{\frac{P}{2}}$$

en donde P es el número de polos. Simplificando queda finalmente:

$$\omega_s = \frac{4\pi f}{P} \quad \text{rad/s}$$

$$N_s = \frac{120f}{p} \text{ RPM}$$

Estas son las ecuaciones de sincronismo, pues establecen las relaciones entre velocidades síncronas y frecuencias, según el número de polos.

VELOCIDADES SÍNCRONAS A 60 Hz	
P	RPM
2	3600
4	1800
6	1200
8	900

### 3.3. EL ROTOR

Para que el rotor pueda seguir al flujo de estator en su movimiento giratorio, es necesario crear una atracción magnética entre ambos, lo que se consigue mediante un flujo de rotor. A su vez, en todo circuito magnético, un flujo de esta naturaleza se produce por un embobinado de excitación.

El embobinado de excitación más simple que se puede considerar consiste de una espira cerrada, cuyos costados se alojan en ranuras diametralmente opuestas del núcleo de rotor.

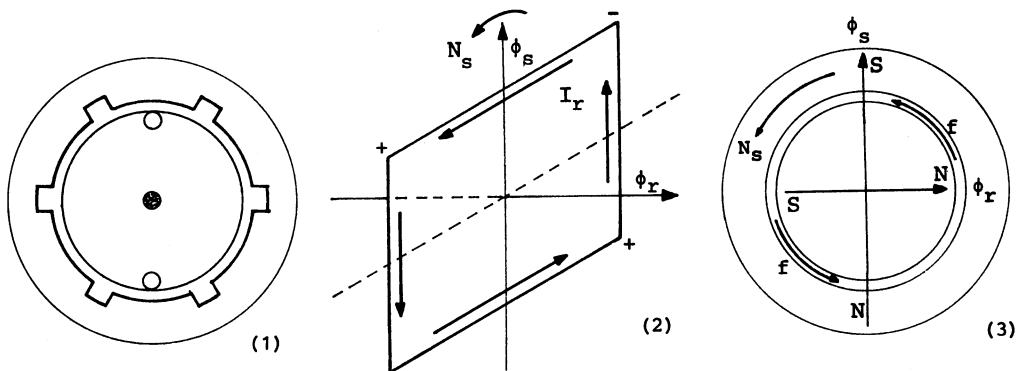


FIGURA 3.6. UN EMOBINADO ELEMENTAL DE ROTOR. (1) RANURAS DE ESTATOR Y ROTOR. (2) LOS FENÓMENOS ELECTROMAGNÉTICOS. (3) GENERACIÓN DEL PAR ELECTROMAGNÉTICO.

En la figura 3.6.1 se muestran los núcleos de estator y rotor con las ranuras correspondientes a los embobinados más elementales. Obsérvese que en el rotor, más que ranuras abiertas son perforaciones muy cercanas a la periferia del núcleo, sin embargo, por costumbre se les ha llamado ranuras.

En la figura 3.6.2 se han omitido los núcleos para presentar el dibujo en su máxima sencillez. La espira cerrada aparece en posición vertical, coincidiendo con la posición del flujo de estator  $\phi_s$  en este instante.

La espira se encuentra inmóvil, mientras que el flujo gira a la velocidad síncrona  $N_s$ , por lo que hay un cruzamiento entre líneas de flujo y costados de espira. Esto induce una fuerza electromotriz en ambos costados; aplicando la regla de la mano derecha<sup>2</sup> se deduce la polaridad de esta f.e.m. en cada costado, como indica la figura.

Haciendo caso omiso por ahora de la reactancia de la espira, supóngase que aparece una corriente en fase con la f.e.m., que se identificará como corriente de rotor  $I_r$ , la que a su vez origina el flujo de rotor  $\phi_r$  hacia la derecha<sup>3</sup> y a  $90^\circ$  atrás del flujo de estator  $\phi_s$ . **La excitación de la bobina de rotor se ha efectuado por inducción, sin necesidad de conexiones al exterior.**

En la figura 3.6.3 aparecen ahora los flujos en sus núcleos. El lugar por el que sale el flujo de estator al entrehierro define el polo norte de estator, y por donde entra nuevamente a su núcleo es el polo sur, igual que el lugar por donde sale el flujo de rotor al entrehierro es el polo norte de rotor, y por donde regresa el polo sur. La atracción entre el norte de rotor y el sur de estator, y entre el norte de estator y el sur de rotor se ilustra con las fuerzas  $f$ . Las dos fuerzas constituyen el par electromagnético que da origen al giro del rotor.

Todo esto sucede en un instante pequeñísimo, mientras el flujo corta los costados de la espira; cuando ya lo ha hecho, desaparece toda la cadena de fenómenos electromagnéticos, para repetirse

---

<sup>2</sup> Simulando un sistema de coordenadas con los dedos pulgar, índice y medio de la mano derecha, se orienta el pulgar según la velocidad relativa de conductor respecto a flujo (hacia la izquierda para el costado superior y hacia la derecha para la inferior), el índice en la dirección del flujo, y el dedo medio apuntando al extremo positivo de la f.e.m. inducida.

<sup>3</sup> Se deduce con la misma regla del subtema 3.3.1.

un poco más de medio ciclo después, (sería medio ciclo exacto si la espira permaneciera inmóvil, pero no hay que olvidar que ya se ha iniciado el movimiento). Esto significa que el par electromagnético es pulsante.

La solución para obtener un par continuo y de magnitud útil, es muy sencilla, pues consiste en acomodar espiras en toda la periferia del núcleo de rotor. En vista de que todas las espiras pueden tener cabezales comunes, estos se construyen en forma de anillo, obteniéndose un embobinado como el que se muestra en la figura 3.7.1. Frecuentemente se le conoce como embobinado de jaula de ardilla (debido a la afición de estos animalitos de meterse a correr en un juguete con esta forma).

El núcleo se construye con lámina de acero al silicio, troquelado y montado en caliente sobre la flecha, de modo que al enfriar queda tan fuertemente apretado que no es posible ningún deslizamiento. Posteriormente se vacía aluminio fundido en las ranuras, previa colocación de los moldes para los anillos, de manera que la jaula queda de una sola pieza. El rotor terminado tiene la apariencia de la figura 3.7.2. Es muy frecuente aprovechar los anillos terminales para agregarles aletas de ventilación, que ayudan al enfriamiento de la máquina.



FIGURA 3.7. ROTOR DEL MOTOR DE INDUCCIÓN.  
(1) CIRCUITO DE JAULA DE ARDILLA. (2) ASPECTO DEL ROTOR.

Con este arreglo sucede que en donde quiera que el flujo de estator cruce el rotor, hay barras de la jaula con las que se forma una espira (o varias espiras en paralelo, ya que el flujo no es concentrado), induciéndose las fuerzas electromotrices de rotor, que producen las corrientes de rotor y el flujo polar o flujo de rotor.

La bobina de excitación se va formando sucesivamente con diferentes juegos de barras de la jaula, o, sea que tanto la bobina de excitación como los polos del rotor son deslizantes, y se mueven por la periferia del núcleo. La bobina de excitación y los polos del rotor giran a la velocidad síncrona, junto con el flujo de estator, mientras el rotor en sí, tiene una velocidad menor.

Solamente en vacío, el rotor puede alcanzar la velocidad síncrona, que es un estado en el que no se cruza el campo de estator con las barras de la jaula, no se puede inducir la excitación ni el flujo de rotor y por tanto no hay par electromagnético.

**3.3.1 DESLIZAMIENTO.** En la teoría del motor se considera que es el rotor el que se desliza con relación a la velocidad síncrona. Se da el nombre de *deslizamiento* a la fracción de velocidad síncrona que pierde el rotor cuando trabaja con carga.

$$S = \frac{N_s - N_r}{N_s}$$

en donde:

S es el deslizamiento

$N_s$  es la velocidad síncrona

$N_r$  es la velocidad del rotor.

También se acostumbra definirlo en porciento:

$$\%S = \frac{N_s - N_r}{N_s} \times 100$$

Existen varios diseños de motores de inducción que se diferencian por las dimensiones de las barras de la jaula. Esto se explicará con más detalle al estudiar las curvas par-velocidad. Los llamados diseños A, B y C deben tener por norma, un deslizamiento a plena carga menor de 5%, mientras que al diseño D se le permite un deslizamiento mayor, sin especificar límite.

**3.3.2. FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA EN EL ROTOR.** En la figura 3.8 se ha tomado un sistema de ejes coordenados fijados al flujo de estator, es decir, girarían en sentido positivo junto con el flujo de estator, que siempre ocuparía el eje de las ordenadas. Se ha seleccionado también una espira de la jaula, de modo que se aprecia el anillo terminal con solamente dos barras opuestas, en una posición cualquiera. La jaula gira a la velocidad de rotor, también en sentido positivo, pero como es más lenta que el flujo de estator, la velocidad relativa de rotor respecto a la síncrona aparece en sentido negativo. En el costado superior se ilustra  $v$ , que es la velocidad tangencial de acercamiento de la barra al flujo, pero  $v \text{ sen } \theta$  es la velocidad efectiva con que se cruza la barra y las líneas de flujo.

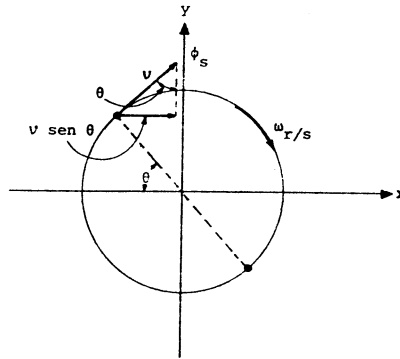


FIGURA 3.8. FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA EN UNA ESPIRA DE LA JAULA.

La fuerza electromotriz inducida en un costado de la espira es:

$$E_c = B l v \text{ sen } \theta$$

y la fuerza electromotriz en toda la espira es:

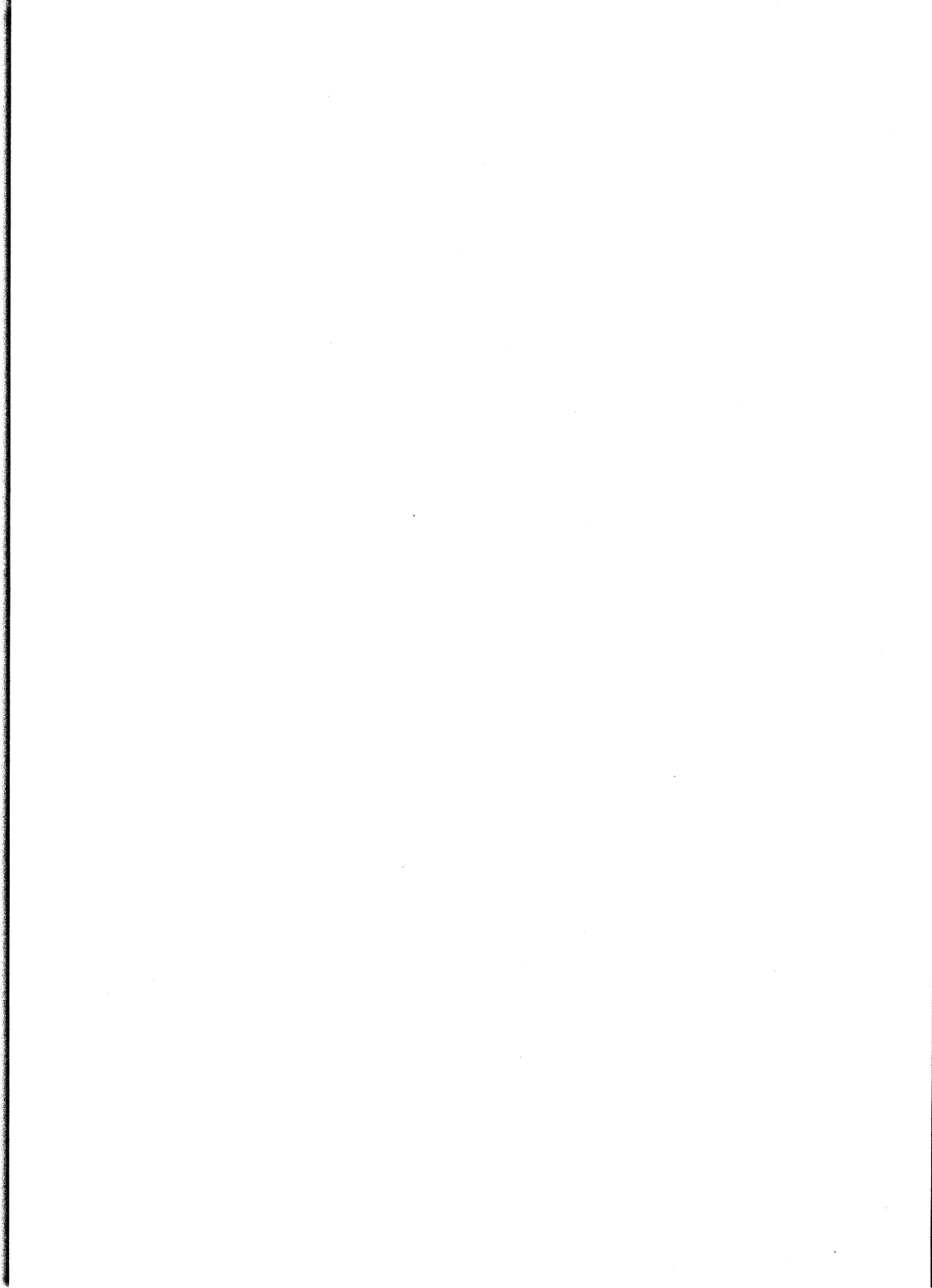
$$E = 2 B l v \text{ sen } \theta$$

La velocidad tangencial se puede expresar en función de la velocidad angular y el radio:

$$E = 2 B l r \omega_{r/s} \text{ sen } \theta$$







No obstante, se puede establecer una simbología similar a la del transformador, representando en el primario una fase del estator y en el secundario una espira de la jaula. Primario y secundario, igual que en el transformador, tienen sus respectivas fuerzas electromotrices y corrientes.

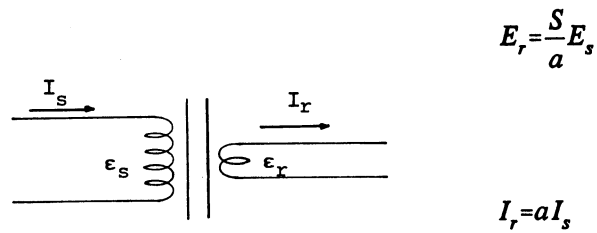


FIGURA 3.9. SIMBOLOGÍA DE LA INDUCCIÓN EN UN MOTOR IDEAL.

Recordando que la fuerza electromotriz de rotor tiene un valor

$$E_r = B A S \omega_s$$

y que para rotor bloqueado:

$$E_{rb} = B A \omega_s$$

entonces se puede concluir que:

$$E_r = S E_{rb}$$

Según se puede observar, la fuerza electromotriz de rotor bloqueado es una constante que no depende del deslizamiento. Esto permite definir la relación:

$$a = \frac{E_s}{E_{rb}}$$

a la que se le llamará *relación de transformación*, siguiendo la similitud de nomenclatura con los

transformadores. Sustituyendo en la fórmula anterior se obtiene:

$$E_r = \frac{S}{a} E_s$$

que será la primera ley a la que se apegue el símbolo de inducción del motor ideal de la figura 3.9.

Si se hiciera un análisis, siguiendo la secuencia de los transformadores en el subtema 2.1.3 , se llegaría a la conclusión de que la relación de transformación del motor también es igual a la relación de vueltas de los embobinados, lo que nos permite aplicarla a las corrientes.

$$I_r = aI_s$$

que será la segunda ley a la que se apegue el símbolo de inducción del motor ideal.

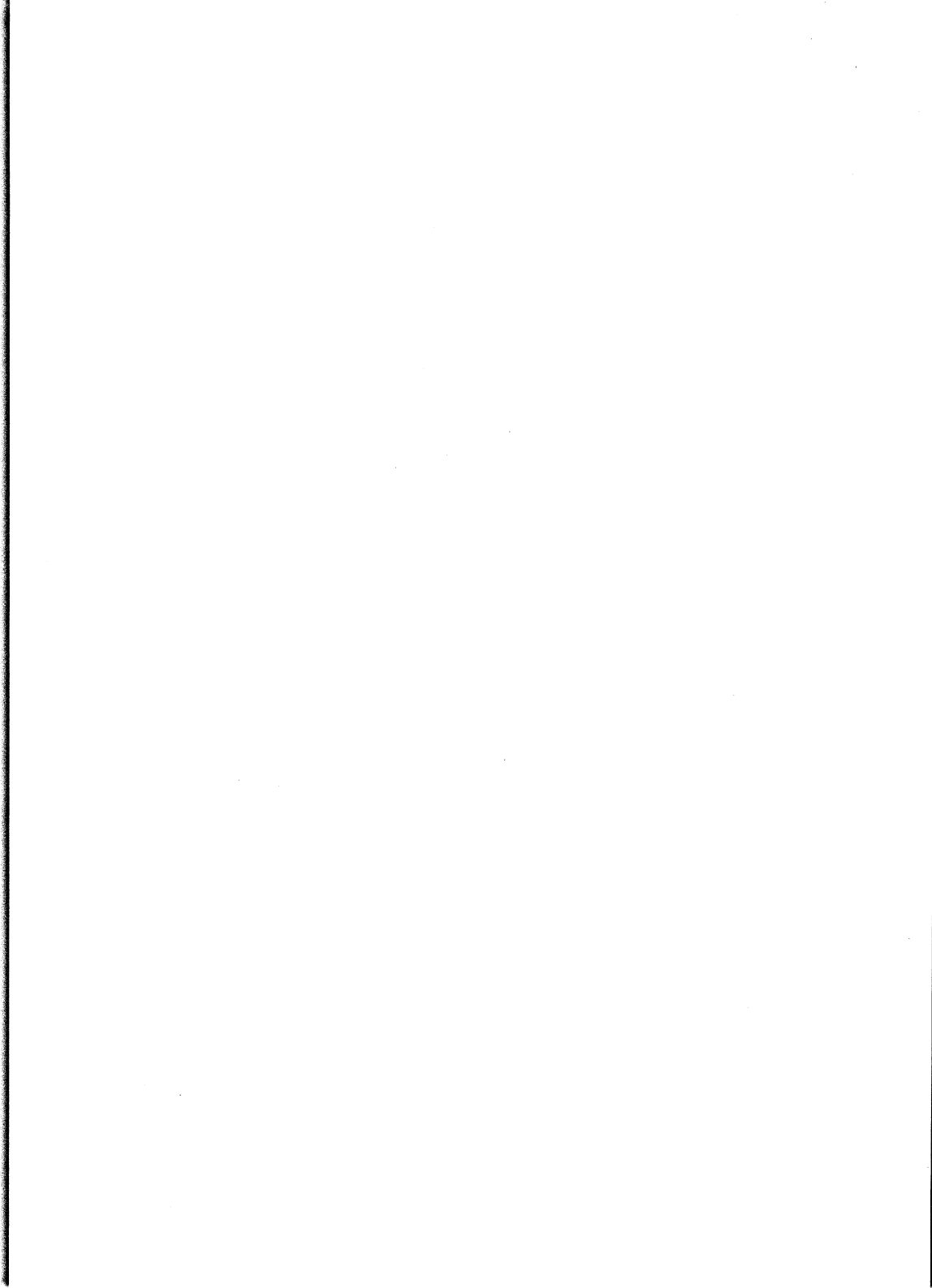
La corriente de rotor es producida por la fuerza electromotriz del rotor. Variará en la medida que varíe la fuerza electromotriz, que es la que depende del deslizamiento, o sea que la ley de corrientes en sí, es independiente del deslizamiento.

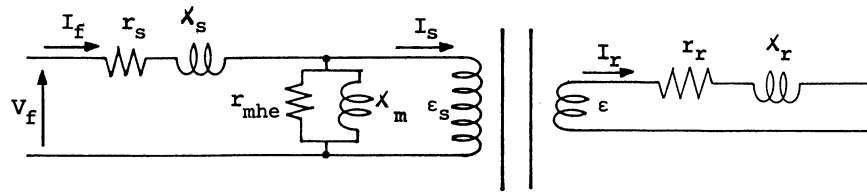
### 3.4. CIRCUITO EQUIVALENTE DEL MOTOR DE INDUCCIÓN

Continuando con el paralelismo entre motores de inducción y transformadores, se va a obtener un circuito equivalente para utilizarlo como herramienta de análisis y así poder conocer la respuesta de la máquina.

El símbolo de la figura 3.9 representa la inducción en un motor ideal, es decir, en un motor que no pierde energía al efectuar la conversión. Si por fuera de este símbolo se agregan los parámetros en los cuales aparecen las pérdidas, se obtiene el circuito equivalente el motor real.







$$E_r = \frac{S}{a} E_s$$

$$f_r = S f_s$$

$$I_r = a I_s$$

$$X_r = S X_{rb}$$

FIGURA 3.12. CIRCUITO EQUIVALENTE DEL MOTOR DE INDUCCIÓN Y SUS LEYES DE COMPORTAMIENTO.

Otro aspecto que es importante analizar, es la reactancia del rotor, dado que como toda reactancia, es función de la frecuencia, o sea

$$X_r = 2\pi f_r L_r$$

y la frecuencia del rotor a su vez, depende del deslizamiento

$$f_r = S f_s$$

por tanto:

$$X_r = 2\pi S f_s L_r$$

Si se bloquea el rotor, el deslizamiento es igual a la unidad y la reactancia sería:

$$X_{rb} = 2\pi f_s L_r$$

que se puede utilizar como otra constante de la máquina, por tanto:

$$X_r = S X_{rb}$$

que habría que agregar a las tres leyes de comportamiento del motor ideal, con lo que el circuito equivalente tiene cuatro leyes que seguir, dos de las cuales dependen del deslizamiento y define las diferencias básicas con el circuito del transformador.

Por los comentarios anteriores se intuye que el análisis de este circuito implica algunas dificultades, ya que no solamente incluye el acoplamiento magnético, sino que el secundario trabaja a niveles de voltaje y a frecuencia diferentes para cada valor de deslizamiento del motor. No obstante, se pueden simplificar los procedimientos mediante ciertas transformaciones, sin que el circuito deje de representar el funcionamiento de la máquina.

**3.4.1. TRANSFORMACIÓN DEL CIRCUITO EQUIVALENTE.** En la figura 3.13(1) se reproduce solamente el secundario del circuito equivalente. Están a la vista la fuerza electromotriz y la impedancia, de manera que la corriente de rotor se puede evaluar por la ley de Ohm:

$$I_r = \frac{E_r}{\sqrt{r_r^2 + X_r^2}}$$

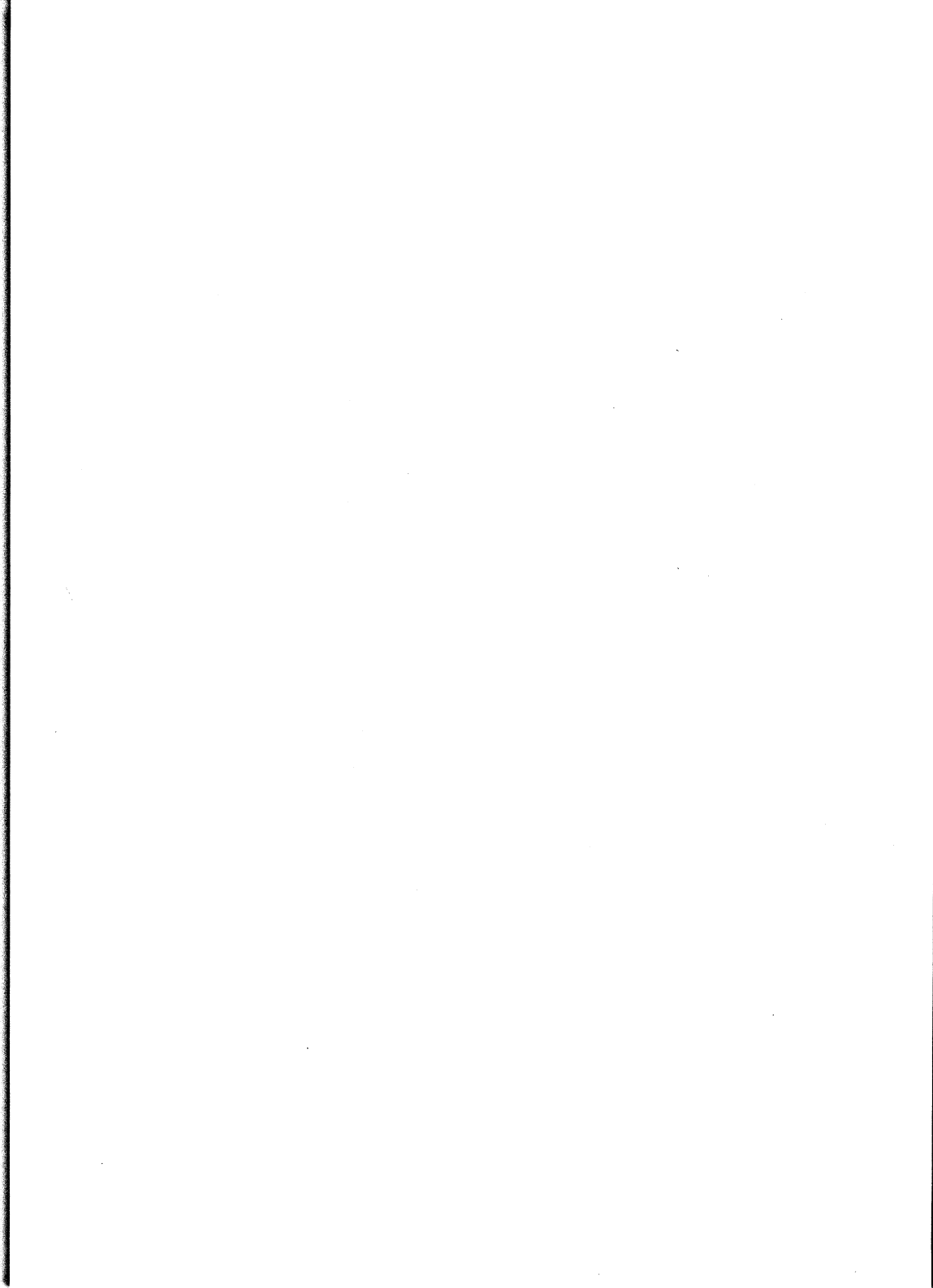
Al sustituir en esta fórmula las leyes de comportamiento que se ilustran en la figura 3.12, se obtiene:

$$a I_s = \frac{\frac{S}{a} E_s}{\sqrt{r_r^2 + (S X_{rb})^2}}$$

Cambiando el deslizamiento y las relaciones de transformación al denominador, e introduciéndolos en el radical:







circuito original, por lo que se le da el nombre de circuito aproximado, como aparece en la figura 3.15, en donde:

$V_f$  es el voltaje de fase

$I_f$  es la corriente de fase

$I_m$  es la corriente de magnetización

$I_c$  es la corriente de carga

$R = r_s + a^2 r_r$ , reúne las resistencias de estator y rotor

$X = x_s + a^2 X_r$ , reúne la reactancia de estator y rotor

$R_c = a^2 r_r \frac{1-s}{s}$  representa la carga mecánica del motor

Los parámetros de pérdidas mecánicas y magnéticas y de corriente de magnetización no han sufrido ningún cambio en su significado desde que aparecieron en el primer circuito.

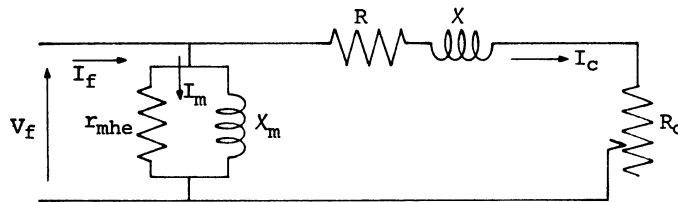


FIGURA 3.15. CIRCUITO EQUIVALENTE APROXIMADO DEL MOTOR DE INDUCCIÓN.

### 3.5. DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS

El valor de los parámetros del circuito equivalente aproximado se puede determinar para una máquina real mediante algunas pruebas de laboratorio, que se describen a continuación.

**3.5.1. MEDICIÓN DE LA RESISTENCIA DE ESTATOR.** La resistencia del estator es pequeña y en muchas ocasiones, menor que la unidad, por lo que el método de medición recomendado es por medio de un puente Kelvin. Este puente tiene cuatro terminales que se conectan a la resistencia a medir, dos para hacer circular una pequeña corriente, y dos para medir la caída de potencial.

Como el valor de las resistencias cambia con la temperatura, es necesario que la máquina en prueba no haya trabajado por lo menos cuatro horas antes de la medición, para tener la seguridad de que ésta se lleva a cabo a temperatura ambiente.

Frecuentemente las conexiones deltas o estrella se encuentran por dentro de la coraza, por lo que no es factible aislar una fase desde el exterior para efectuar la medición. Entonces se recurre a conectar el puente entre dos terminales de la delta o de la estrella, como se muestra en la figura 3.16.

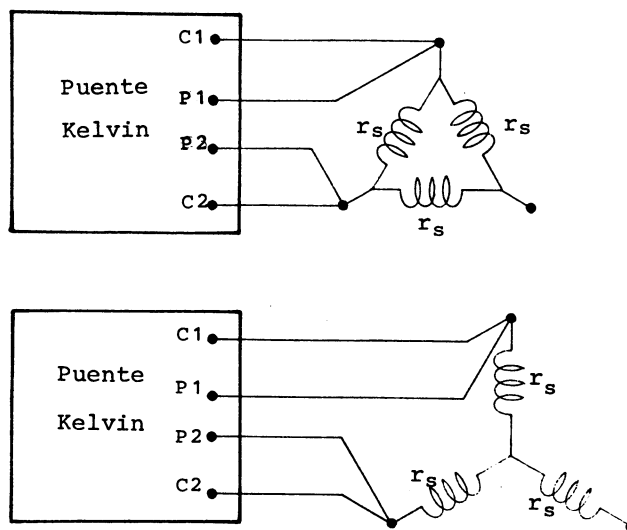
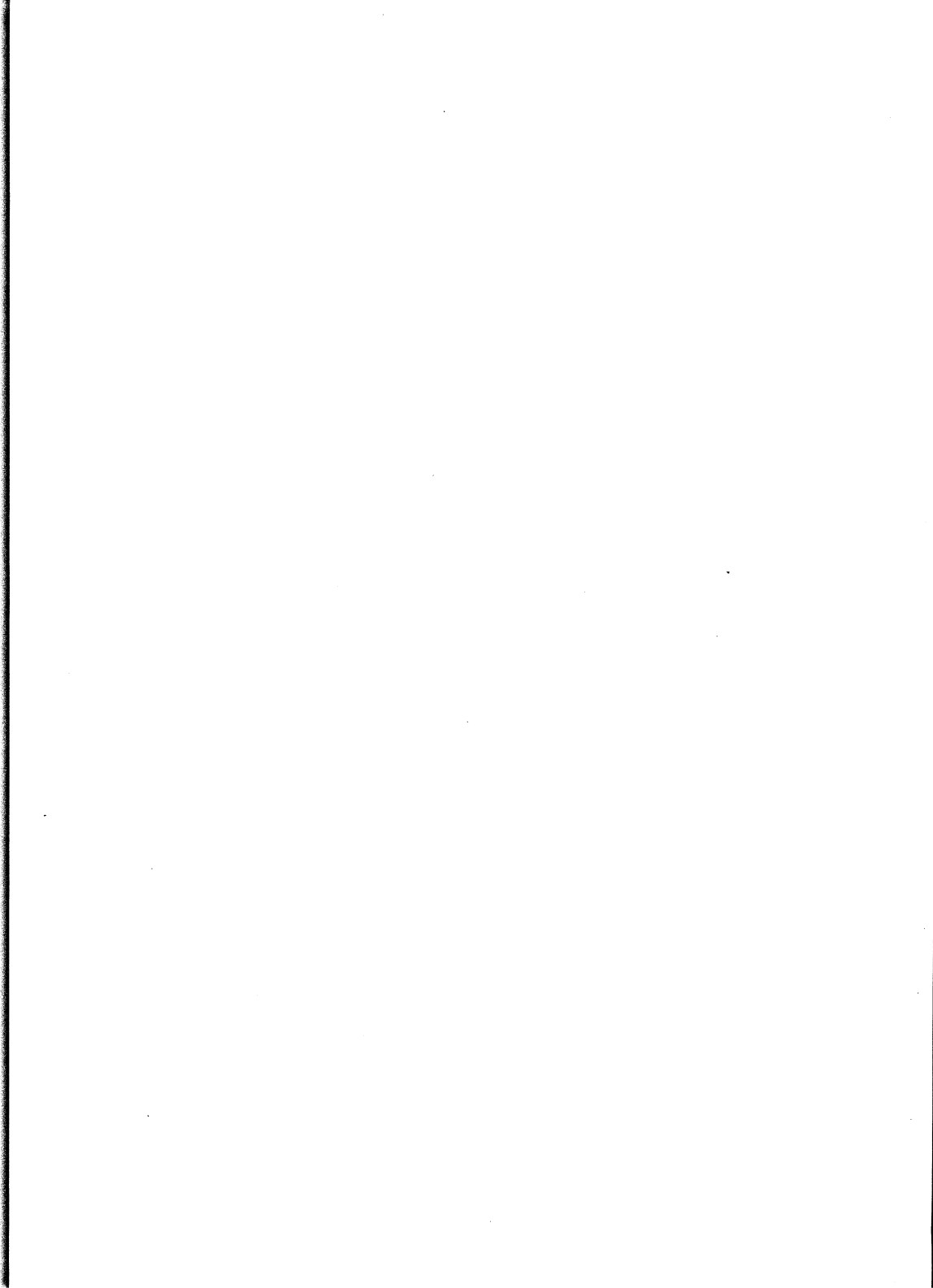


FIGURA 3.16. MEDICIÓN DE LA RESISTENCIA DE ESTATOR.





A partir de las lecturas, se hacen los siguientes cálculos:

Voltaje entre líneas:  $V_L = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{3}$  Debe coincidir con el voltaje nominal.

Corriente de línea:  $I_L = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3}$

Potencia trifásica:  $P = W_1 + W_2 + W_3$  para tres wattímetros.

$P = W_1 + W_2$  (suma algebraica)<sup>4</sup> para dos wattímetros.

Voltaje de fase:  $V_f = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$  para circuito estrella.

$V_f = V_L$  para circuito delta.

Corriente de fase:  $I_f = I_L$  para circuito estrella.

$I_f = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$  para circuito delta.

Potencia real de fase:  $P_f = \frac{P}{3}$

---

<sup>4</sup> El ángulo de fase típico de esta prueba es de 80° y a veces un poco más, por lo que siempre sucederá que la lectura de uno de los aparatos es negativa.

Potencia aparente de fase:  $S_f = V_f I_f$

Potencia reactiva de fase:  $Q_f = \sqrt{S_f^2 - P_f^2}$

Recordando que las potencias real y reactiva en un circuito paralelo se formulan como:

$$P = \frac{V^2}{r}$$

$$Q = \frac{V^2}{X}$$

de ahí se obtienen los parámetros de pérdidas mecánicas y magnéticas

$$r_{mhe} = \frac{V_f^2}{P_f}$$

y la reactancia de magnetización:

$$X_m = \frac{V_f^2}{Q_f}$$

**3.5.3. PRUEBA DE ROTOR BLOQUEADO.** En esta prueba se impide el giro del rotor por medio de cualquier mecanismo que aprisione la flecha. Este no debe ser necesariamente reforzado, puesto que el par que desarrolla el motor es muy débil debido al voltaje reducido. La máquina se energiza, procurando obtener la circulación de *corriente nominal*.

Se mide el voltaje entre líneas, la corriente de línea y la potencia trifásica como muestran las figuras 3.18.1 y 3.18.2.

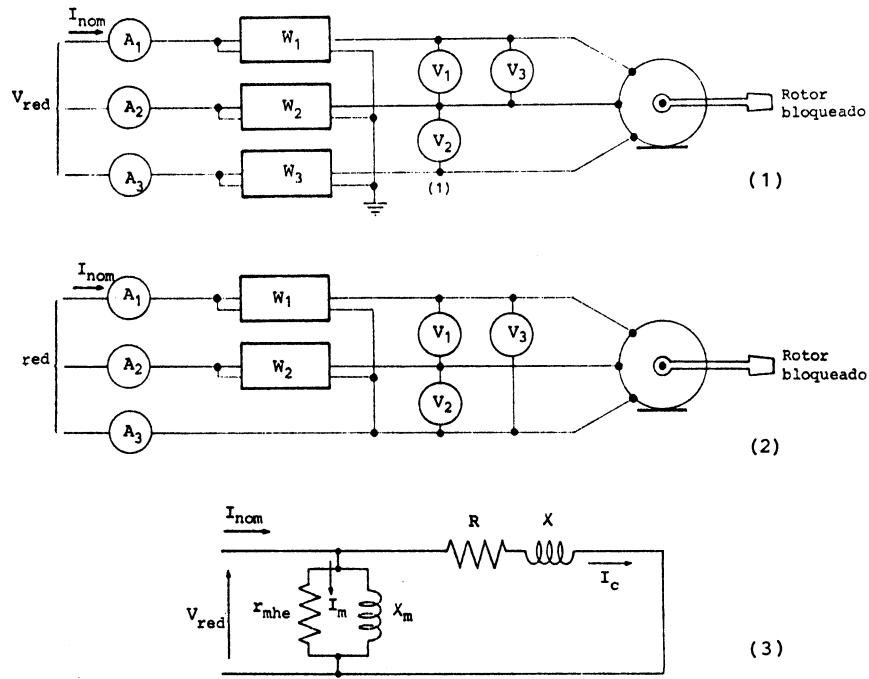


FIGURA 3.18. PRUEBA DE ROTOR BLOQUEADO. (1) DIAGRAMA DE PRUEBA CON TRES WATTÍMETROS. (2) DIAGRAMA DE PRUEBA CON DOS WATTÍMETROS. (3) ACCIÓN DE LA PRUEBA EN EL CIRCUITO EQUIVALENTE.

Como en esta prueba la velocidad de rotor es cero el deslizamiento es igual a la unidad:

$$S = 1$$

y la resistencia de carga:

$$R_c = a^2 r_r \frac{1-1}{1} = 0$$

equivale a poner en circuito corto el extremo derecho del circuito equivalente. Los únicos factores limitantes de la corriente son los parámetros  $R$  y  $X$  que son muy pequeños, por lo cual esta prueba debe efectuarse a voltaje reducido.

En la mayoría de los textos que tratan sobre este tema, se considera como si la prueba de rotor bloqueado actuara solamente en los parámetros  $R$  y  $X$ , considerando despreciable la corriente en el



circuito paralelo (  $r_{mhe}$  y  $X_m$  ), sin embargo, en los motores de inducción, esta corriente sí es notoria, ya que a voltaje nominal, la corriente en vacío está entre 30 y 45% de la corriente nominal.

La prueba de rotor bloqueado actúa sobre los cuatro parámetros del circuito equivalente,  $r_{mhe}$ <sup>5</sup>,  $X_m$  que ya se conocen, y  $R$  y  $X$  que se van a obtener, como muestra la figura 3.18.3.

Una vez obtenidas las lecturas de la prueba, se procede a los siguientes cálculos.

$$\text{Voltaje entre líneas: } V_L = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{3}$$

$$\text{Corriente de línea: } I_L = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3} \quad \text{Debe coincidir con la corriente nominal}$$

$$\text{Potencia trifásica: } P = W_1 + W_2 + W_3 \quad \text{Para tres wattímetros}$$

$$P = W_1 + W_2 \quad \text{(suma algebraica)}^6 \text{ para dos wattímetros}$$

$$\text{Voltaje de fase: } V_f = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \quad \text{para circuito estrella}$$

---

<sup>5</sup> Aunque con rotor bloqueado no hay pérdidas mecánicas, las pérdidas magnéticas aumentan de tal manera que  $r_{mhe}$  mantiene aproximadamente su valor.

<sup>6</sup> El ángulo típico de esta prueba es de unos 65°, por lo que siempre sucederá que la lectura de uno de los aparatos es negativa.

$$V_f = V_L$$

para circuito delta

Corriente de fase:  $I_f = I_L$

para circuito estrella

$$I_f = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$$

para circuito delta

Corriente en el circuito paralelo:

$$I_m = \frac{V_f}{r_{mhe}} - j \frac{V_f}{X_m}$$

Corriente en el circuito de carga:

$$I_c = I_f - I_m$$

Hay que expresar  $I_f$  en forma compleja; de modo que el

resultado debe ser  $I_c \angle \theta$

Potencia real en el circuito de carga:

$$P_c = V_f I_c \cos \theta$$

Potencia reactiva en el circuito de carga:

$$Q_c = V_f I_c \sin \theta$$

Recordando que las potencias real y reactiva en un circuito serie se formulan como:

$$P = I^2 R$$

$$Q = I^2 X$$

De ahí se obtienen los parámetros de carga:

$$R = \frac{P_c}{I_c^2}$$

$$X = \frac{Q_c}{I_c^2}$$

### **EJEMPLO 3.1**

Un motor de inducción tipo jaula de ardilla tiene las siguientes características de placa:

10 HP  
220 V  
26 A  
1740 RPM  
60 Hz

Su embobinado de armadura está en conexión estrella.

En el laboratorio se le practicaron las siguientes pruebas:

Resistencia del estator:  $r_s = 0.221 \Omega$ , ya está calculado el valor por fase y hechas las conexiones por corriente alterna y temperatura.

Rotor libre:	220 V	10 A	465 W
Rotor bloqueado:	37 V	26 A	756 W

En los valores anteriores de las pruebas de rotor libre y rotor bloqueado ya se han tomado promedios de voltajes y corrientes, así como las sumas de potencias.

Obtener su circuito equivalente aproximado.

### Solución

De la prueba de rotor libre:

Voltaje de fase:

$$V_f = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127V$$

Corriente de fase:

$$I_f = 10 A$$

Potencia real de fase:

$$P_f = \frac{465}{3} = 155 W$$

Potencia aparente de fase:

$$S_f = 127 \times 10 = 1270 VA$$

Potencia reactiva de fase:

$$Q_f = \sqrt{1270^2 - 155^2} = 1260 VAR$$

Resistencia de pérdida mecánicas y magnéticas:

$$r_{mhe} = \frac{127^2}{155} = 104 \Omega$$

Reactancia de magnetización:

$$X_m = \frac{127^2}{1260} = 12.8 \Omega$$

De la prueba de rotor bloqueado:

Voltaje de fase:

$$V_f = \frac{37}{\sqrt{3}} = 21.3619 \text{ V}$$

Corriente de fase:

$$I_f = 26 \text{ A}$$

Potencia real de fase:

$$P_f = \frac{756}{3} = 252 \text{ W}$$

Potencia aparente de fase:

$$S_f = 21.3619 \times 26 = 555.4094 \text{ VA}$$

Ángulo de fase:

$$\theta_f = \cos^{-1} \frac{252}{555.4094} = 63^\circ$$

Corriente compleja de fase:

$$I_f = 26 \angle -63^\circ = 11.8037 - j 23.1662$$

Corriente de magnetización:

$$I_m = \frac{21.3619}{104} - j \frac{21.3619}{12.8}$$

$$I_m = 0.2054 - j 1.6689$$

Corriente compleja de carga:

$$I_c = I_f - I_m$$

$$=11.5983-j 21.4973$$

$$=24.4265 \angle -61.652^\circ$$

Potencia real en el circuito de carga:

$$P_c = V_f I_c \cos \theta_c = 247.7616 \text{ W}$$

Potencia reactiva en el circuito de carga:

$$Q_c = V_f I_c \sin \theta_c = 459.2229 \text{ VAR}$$

Resistencia de estator y rotor:

$$R = \frac{247.7616}{24.4265^2} = 0.41525 \ \Omega$$

Reactancia de estator y rotor:

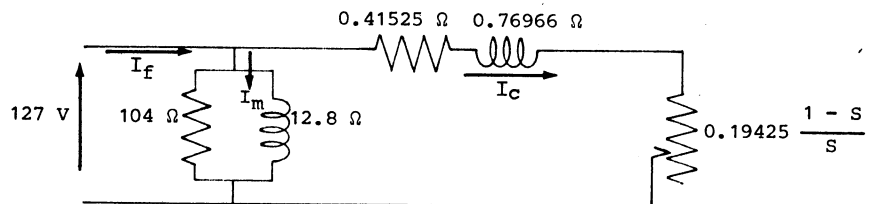
$$X = \frac{459.229}{24.4265^2} = 0.76966 \ \Omega$$

Resistencia del rotor:

$$a^2 r_r = 0.41525 - 0.221 \ \Omega$$

$$= 0.19425 \ \Omega$$

El circuito equivalente es:



### 3.6. ANÁLISIS DEL CIRCUITO EQUIVALENTE

Cuando se conoce el circuito equivalente de un motor de inducción, es necesario definir una condición de carga para determinar el parámetro  $R_c$  y poder proceder al análisis.

Si la condición de carga fuera el deslizamiento, con ella puede quedar determinada la resistencia de carga:

$$R_c = a^2 r_r \frac{1-S}{S}$$

Aplicando ahora el voltaje de fase al circuito cuyos cinco parámetros ya se conocen, se obtiene la siguiente información:

**3.6.1. VELOCIDAD DEL ROTOR.** Esta es una característica muy útil entre las diversas respuestas que da el motor, aunque no se obtiene del análisis del circuito, pues basta sólo conocer el deslizamiento.

Despejando la velocidad de rotor de la fórmula de deslizamiento:

$$S = \frac{N_s - N_r}{N_s}$$

se obtiene:

$$N_r = N_s(1-S)$$

**3.6.2. CORRIENTE DE LÍNEA.** Previamente hay que calcular la corriente de fase, que es la que entra al circuito equivalente. Esta corriente, tiene dos componentes que son la de magnetización (incluye también la de pérdidas mecánicas) y la de carga.

La corriente de magnetización fluye por el circuito paralelo, y se calcula como:

$$I_m = \frac{V_f}{r_{mhc}} - j \frac{V_f}{X_m}$$

La corriente de carga fluye por el circuito serie, y se calcula como:

$$I_c = \frac{V_f \angle 0^\circ}{\sqrt{(R+R_c)^2 + X^2} \angle \tan^{-1} \frac{X}{R+R_c}}$$

Para sumar este resultado con la corriente de magnetización, habría que transformarlo a la forma rectangular:

$$I_f = I_m + I_c$$

Y el resultado de la suma hay que transformarlo nuevamente a la forma polar, con lo que se obtendría:

$$I_f = |I_f| \angle \theta$$

Por último para obtener la corriente de línea:

$$I_L = |I_f| \quad \text{si es circuito estrella.}$$

$$I_L = \sqrt{3} |I_f| \quad \text{si es circuito delta.}$$

**3.6.3 FACTOR DE POTENCIA.** De la expresión polar de corriente de fase del paso anterior, se toma el ángulo de fase para obtener:

$$F_p = \cos \theta$$



**3.6.4. Potencia mecánica.** La resistencia del extremo derecho del circuito representa la carga mecánica, por lo que la potencia disipada en esta resistencia es en realidad la carga por fase del motor.

$$P_{mec/f} = I_c^2 R_c$$

Como el motor tiene tres fases, la potencia mecánica total es:

$$P_{mec} = 3I_c^2 R_c$$

Y el resultado se suele expresar de dos formas:

$$P_{mec} = \frac{3I_c^2 R_c}{1000} \text{ kW}$$

$$P = \frac{3I_c^2 R_c}{746} \text{ HP}$$

**3.6.5. Eficiencia.** Se entiende por eficiencia la relación entre la potencia de salida y la potencia de entrada. La potencia de salida es la potencia mecánica.

$$P_{mec} = 3I_c^2 R_c$$

y la potencia de entrada será la de las tres fases:

$$P = 3V_f I_f \cos \theta$$

por tanto, la eficiencia se calcula como:

$$\eta = \frac{I_c^2 R_c}{V_f I_f \cos \theta}$$

y también se suele expresar en por ciento:

$$\% \eta = \frac{I_c^2 R_c}{V_f I_f \cos \theta} \times 100$$

**3.6.6. Par mecánico.** Recordando que en la mecánica rotacional, la potencia es el producto del par por la velocidad angular:

$$P_{mec} = T \omega$$

de donde

$$T = \frac{P_{mec}}{\omega}$$

En el Sistema Internacional la potencia deberá expresarse en watts y la velocidad en rad/s.

$$T = \frac{3I_c^2 R_c}{N_r \frac{2\pi}{60}}$$

y el par estará en N-m. Para el sistema técnico que por ahora se sigue usando, se necesita expresar el par en kg-m, para lo que hay que introducir la constante de conversión 9.81.

$$T = \frac{3I_c^2 R_c}{9.81 N_r \frac{2\pi}{60}}$$

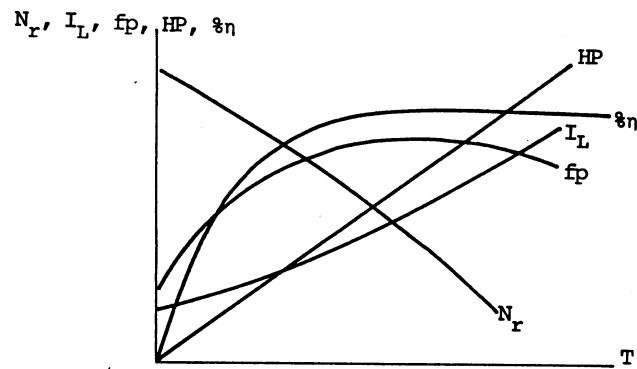
Por último, reuniendo todas las constantes se obtiene la fórmula de par:

$$T = 2.92 \frac{I_c^2 R_c}{N_r}$$

Asignando varios valores arbitrarios al deslizamiento, se repiten todos los cálculos anteriores y los resultados se puedan reunir en una tabla como la de la figura 3.19.1. Graficando esta tabla con el par mecánico como abscisa y la demás características como ordenada se obtienen las curvas de respuesta del motor, como aparecen en la figura 3.19.

$S$	$N_r$	$I_L$	$f_p$	$HP$	$\% \eta$	$T$
0						
0.01						
0.02						
0.03						
0.04						

(1)

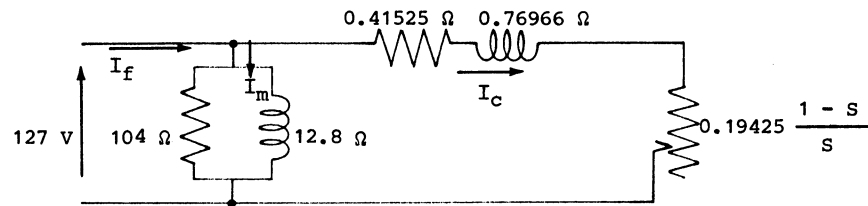


(2)

FIGURA 3.19. ANÁLISIS DEL CIRCUITO EQUIVALENTE. (1) TABLA DE RESULTADOS. (2) GRÁFICAS DE RESPUESTA.

### EJEMPLO 3.2

Analizar el circuito equivalente obtenido en el ejemplo 3.1 que se repite a continuación.



### SOLUCIÓN

Si  $s = 0.01$

1. Velocidad del rotor:

$$N_r = 1800 (1 - 0.01) = 1782 \text{ RPM}$$

Se ha tomado como velocidad síncrona la inmediata superior a 1740 RPM, que según los datos del ejemplo 3.1, es la velocidad a plena carga.

2. Corriente de línea:

a) Corriente de magnetización:

$$I_m = \frac{127}{104} - j \frac{127}{12.8} = 1.2211 - j9.9218$$

b) Resistencia de carga:

$$R_c = 0.19425 \frac{1 - 0.01}{0.01} = 19.23075$$

c) Corriente de carga:

$$I_c = \frac{127 \angle 0}{\sqrt{(0.41525 + 19.23075)^2 + 0.76966^2} \angle 2.2435^\circ}$$
$$= 6.459465 \angle -2.2435^\circ$$
$$= 6.4545 - j0.2528$$

d) Corriente de fase:

$$I_f = (1.2211 + 6.4545) - j(9.9218 + 0.2528)$$
$$= 7.6756 - j10.1746$$
$$= 12.745 \angle -52.969^\circ$$

e) Corriente de línea:

$$I_L = 12.745 \text{ A}$$

3. Factor de potencia:

$$f_p = \cos 52.969^\circ = 0.602$$

4. Potencia mecánica:

$$P_{mec} = \frac{3 \times 6.459^2 \times 19.23075}{746} = 3.226 \text{ HP}$$

5. Eficiencia:

$$\% \eta = \frac{6.459^2 \times 19.23075}{127 \times 12.745 \times 0.602} \times 100 = 82.335$$

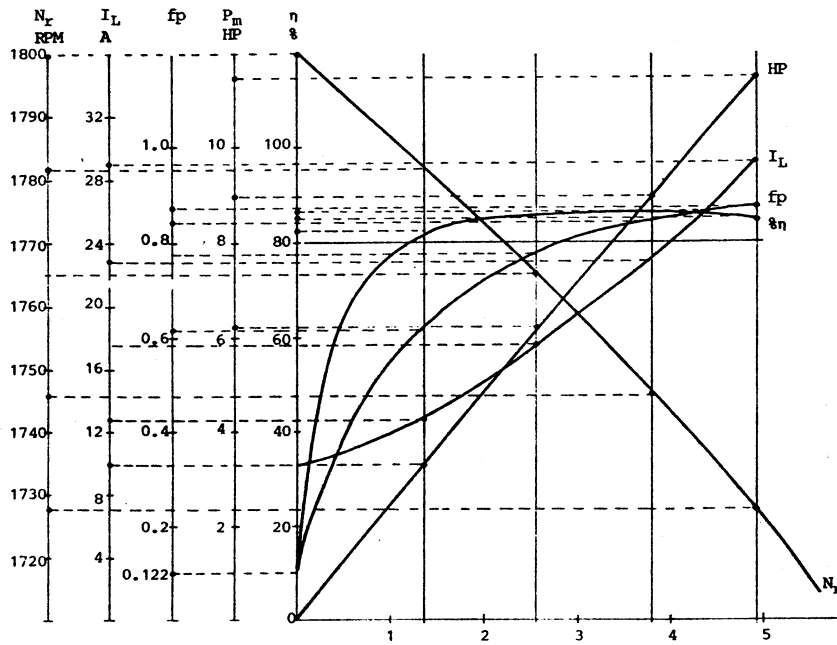
### 6. Par mecánico

$$T = 2.92 \frac{6.459^2 \times 19.23075}{1782} = 1.314 \text{ kg-m}$$

Con estos cálculos se ha mostrado como se obtiene el segundo renglón de la tabla que aparece a continuación. Se sugiere al lector, a manera de ejercicio, verificar los resultados que aparecen en los demás renglones.

<i>S</i>	<i>N<sub>r</sub></i>	<i>I<sub>L</sub></i>	<i>f<sub>p</sub></i>	<i>HP</i>	<i>%η</i>	<i>T</i>
0	1800	10	0.122	0	0	0
0.01	1782	12.745	0.602	3.226	82.335	1.314
0.02	1764	17.691	0.787	6.219	87.46	2.56
0.03	1746	23.31	0.855	8.967	88.1	3.729
0.04	1728	29.065	0.883	11.466	87.48	4.818

Con los resultados de esta tabla se dibujan las curvas de respuesta que se muestran a continuación.



### COMENTARIOS

Como resultado del análisis del circuito equivalente se han obtenido cinco gráficas que ponen a la vista el comportamiento de cinco respuestas del motor, que convendría comentar una por una.

1. Velocidad. La velocidad del rotor se comporta con gran estabilidad (mientras sean también estables el voltaje y la frecuencia de alimentación), pues se puede observar que desde el vacío hasta plena carga, y aún una pequeña sobrecarga que muestran las gráficas, tiene una variación tan pequeña que ha sido necesario amplificar la escala ordenada de velocidades. En la mayoría de los casos, como en este ejemplo, la pérdida de velocidad está entre 3 y 4% de la velocidad síncrona.

2. Corriente. La corriente de línea aumenta con la carga, aunque su variación no es lineal. Su valor en vacío generalmente es entre 30 y 45% de la corriente a plena carga.

**3. Factor de potencia.** El factor de potencia siempre es retrasado, debido al carácter inductivo de la máquina. Su valor en vacío es sumamente pequeño y crece conforme aumenta la carga. Los mejores valores se obtienen a plena carga.

El factor de potencia es un aspecto interesante en el análisis de comportamiento del motor, pues sugiere que no es conveniente operar esta máquina a regímenes de carga baja. Hay que procurar que trabaje siempre a su carga nominal o muy cerca de ella.

**4. Potencia mecánica.** Recordando que la potencia mecánica depende del par y de la velocidad angular, siendo ésta casi constante, la potencia presenta un crecimiento casi lineal conforme aumenta el par de carga.

**5. Eficiencia.** La eficiencia del motor es cero en vacío, pero crece rápidamente con la carga, manteniéndose dentro de los altos valores de eficiencia de las máquinas eléctricas. Su mejor comportamiento está alrededor de la plena carga, y decrece nuevamente en regímenes de sobrecarga, debido al aumento de las pérdidas.

La eficiencia establece otro criterio más para no hacer trabajar el motor cerca de su condición de vacío.

**3.6.7 ARRANQUE.** El arranque del motor presenta ciertas dificultades interesantes de analizar, principalmente en lo que se refiere a corriente y par. En el momento en que se energiza la armadura, aparece el flujo de estator girando a su velocidad síncrona, puesto que no tiene inercia.

El rotor en cambio, tarda un cierto tiempo en acelerarse hasta su velocidad de trabajo, debido a que sí tiene inercia y además hay que sumar la inercia del equipo impulsado.

El primer instante en el arranque, equivale a la condición de rotor bloqueado, o sea deslizamiento unitario.

**a) Corriente de arranque.** En la figura 3.20 se muestra el circuito equivalente correspondiente al instante de arranque.



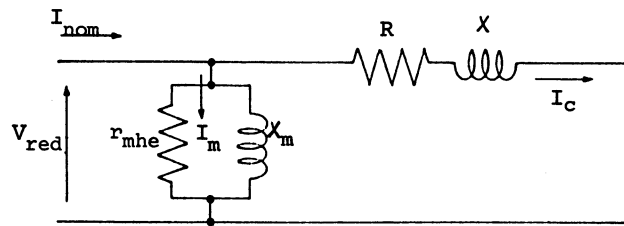


FIGURA 3.20. CIRCUITO EQUIVALENTE CON ROTOR BLOQUEADO.

De la observación de este circuito se deduce que existen dos formas de calcular la corriente de arranque.

1. Por extrapolación de resultados de la prueba de rotor bloqueado. En la figura 3.20 se observa que la impedancia es constante, por lo que la corriente será proporcional al voltaje aplicado.

Sea:

$V_{rb}$  = Voltaje aplicado en la prueba de rotor bloqueado.

$I_{rb}$  = Corriente en la prueba de rotor bloqueado, se recomienda que sea igual a la nominal.

$V_{nom}$  = Voltaje nominal de la máquina.

$I_a$  = Corriente de arranque a voltaje nominal.

Por la proporcionalidad mencionada, se establece que:

$$\frac{I_{rb}}{V_{rb}} = \frac{I_a}{V_{nom}}$$

de donde

$$I_a = \frac{V_{nom}}{V_{rb}} I_{rb}$$

2. Por análisis del circuito equivalente de arranque. Aplicando el voltaje nominal de fase al circuito de la figura 3.20, cambiaría  $V_{red}$  por  $V_{nom}$ , e  $I_{nom}$  por  $I_{af}$ . La corriente de arranque de fase sería la suma de la de magnetización más la de carga.

$$I_{af} = I_m + I_c$$

en donde

$$I_m = \frac{V_{nom}}{r_{mhe}} - j \frac{V_{nom}}{X_m}$$

$$I_c = \frac{V_{nom} \angle 0}{\sqrt{R^2 + X^2} \angle \tan^{-1} X/R}$$

y finalmente

$$I_a = I_{af} \quad \text{para circuito estrella.}$$

$$I_a = \sqrt{3} I_{af} \quad \text{para circuito delta.}$$

Las magnitudes de las corrientes de arranque suelen estar entre 4 y 8 veces la corriente nominal del motor.

b) **Par de arranque.** En el análisis del circuito equivalente se estableció una fórmula sencilla para el par mecánico:

$$T = 2.92 \frac{I_c^2 R_c}{N_r}$$

Sin embargo, en condiciones de rotor bloqueado la resistencia de carga y la velocidad de rotor valen cero, por lo que hay indeterminación en la fórmula y habrá necesidad de sustituir no sólo  $R_c$  y  $N_r$ , sino también  $I_c^2$ .

En general cuando se presenta cierto deslizamiento, se pueden recordar las siguientes relaciones que servirán para hacer las sustituciones:

$$I_c^2 = \frac{V_f^2}{(R + R_c)^2 + X^2}$$

$$R = r_s + a^2 r_r$$

$$R_c = a^2 r_r \frac{1 - S}{S}$$

$$N_r = N_s (1 - S)$$

con lo que se obtiene:

$$T = 2.92 \frac{V_f^2 S a^2 r_r}{[(S r_s + a^2 r_r)^2 + S^2 X^2] N_s}$$

que es la fórmula del par en función del voltaje y del deslizamiento.

Para el caso de rotor bloqueado,  $S=1$ , se tiene:

$$T_a = 2.92 \frac{V_f^2 a^2 r_r}{[R^2 + X^2] N_s}$$

que corresponde a la fórmula del par de arranque.

Aunque las corrientes de arranque son bastante elevadas, el par de arranque sin embargo suele estar entre 1.5 y 2.5 veces el par nominal. Esto se debe a que con rotor bloqueado, la frecuencia de rotor es igual a la del estator, valor mucho mayor al de trabajo normal, y por consecuencia, la reactancia del rotor también aumenta considerablemente.

La alta reactancia de rotor en el arranque da lugar a un retraso de la corriente y del flujo de rotor con respecto al momento en que se induce la fuerza electromotriz, dejando que el flujo de estator siga adelante libremente. La figura 3.6.3 que muestra la generación del par electromagnético normal, se modifica como aparece ahora en la figura 3.21.

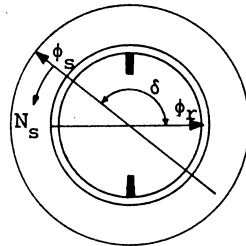


FIGURA 3.21. POSICIÓN RELATIVA DE LOS FLUJOS EN EL ARRANQUE.

En el par de barras de la jaula que se marcan en el dibujo, fue inducida la fuerza electromotriz un momento antes, cuando cruzó por esa posición el flujo de estator. En el momento que muestra la figura, el flujo de estator ha dado cierto avance y es cuando aparecen la corriente y el flujo de rotor.

El ángulo  $\delta$  entre flujos es mayor que  $90^\circ$ , lo que hace disminuir la efectividad del par.

### EJEMPLO 3.3

Para el mismo motor de los ejemplos 3.1 y 3.2, calcular la corriente y el par de arranque aplicando el voltaje nominal.

#### SOLUCIÓN

##### 1. Corriente de arranque por extrapolación de la prueba de rotor bloqueado.

De los datos de ejemplo 3.1 se tiene:

$$V_{nom} = 220 \text{ V}$$

$$V_{rb} = 37 \text{ V}$$

$$I_{rb} = 26 \text{ A}$$

circuito estrella.

La corriente de arranque será:

$$I_a = \frac{220}{37} \times 26 = 154.6 \text{ A}$$

##### 2. Corriente de arranque por análisis del circuito equivalente:

a) Corriente de magnetización:

$$I_m = \frac{127}{104} - j \frac{127}{12.8} = 1.2211 - j9.9218$$

b) Corriente de carga:

$$I_c = \frac{127 \angle 0^\circ}{\sqrt{0.41525^2 + 0.76966^2} \angle 61.652^\circ} = 145.22 \angle -61.652^\circ$$

$$=68.9542 - j127.8052$$

c) Corriente de fase:

$$I_f = (1.2211 + 68.9542) - j(9.9218 + 127.8052)$$

$$=70.1753 - j137.727$$

$$=154.57 \angle -63^\circ$$

como es circuito estrella:

$$I_a = 154.57 \text{ A}$$

### 3. Par de arranque.

Por sustitución en la fórmula de par de arranque se tiene:

$$T_a = 2.92 \frac{127^2 \times 0.19425}{[0.41525^2 + 0.76966^2] \times 1800}$$

$$=6.645 \text{ kg-m}$$

### COMENTARIOS

De los resultados de este ejemplo surgen tres comentarios interesantes.

1. La corriente de arranque ha resultado la misma para los dos métodos de cálculo.
2. La corriente de arranque es de 5.9 veces la nominal. No obstante, su duración es muy pequeña, ya que el arranque normalmente se completa en unos cuantos segundos y el valor inicial empieza a decrecer desde antes de completarse el primer segundo.

Los conductores con los que se efectúa la instalación del motor deben soportar la corriente de arranque, sin embargo, se seleccionan para una capacidad entre 1.5 y 2.5 veces la corriente nominal, dependiendo del voltaje de arranque y la duración del mismo, en función de la inercia del equipo impulsado.

3. El par de arranque es de 1.59 veces el par nominal. Este valor parece pequeño comparado con la magnitud de la corriente de arranque, sin embargo ya se ha justificado por qué causa es así.

c) **Arranque a voltaje reducido.** Una forma de moderar la alta corriente de arranque, es aplicando en ese momento un voltaje menor que el nominal hasta que el motor alcanza aproximadamente un 75 por ciento de su velocidad de trabajo. Después se aumenta el voltaje a su valor nominal.

Tiene la ventaja de disminuir la corriente de arranque, pero también repercute en el par de arranque, como se analizará a continuación.

### ***1. Corriente de arranque.***

La corriente de arranque a voltaje nominal es:

$$I_a = \frac{V_{nom}}{V_{rb}} I_{rb}$$

Si se aplica un voltaje reducido, pero que en la práctica es mayor que el de la prueba de rotor bloqueado, la corriente sería:

$$I_{a-red} = \frac{V_{red}}{V_{rb}} I_{rb}$$

Dividiendo la segunda corriente entre la primera se obtiene:

$$\frac{I_{a-red}}{I_a} = \frac{V_{red}}{V_{nom}}$$

de donde:

$$I_{a-red} = \frac{V_{red}}{V_{nom}} I_a$$

Sea  $r$  el factor de reducción:

$$r = \frac{V_{red}}{V_{nom}}$$

entonces:

$$I_{a-red} = r I_a$$

La corriente de arranque disminuye proporcionalmente al factor de reducción.

## ***2. Par de arranque***

El par de arranque a voltaje nominal es:

$$T_a = 2.92 \frac{V_f^2 \times a^2 r_r}{(R^2 + X^2) N_s}$$

y aplicando voltaje reducido:

$$T_{a-red} = 2.92 \frac{V_{f-red}^2 \times a^2 r_r}{(R^2 + X^2) N_s}$$



Dividiendo el segundo par entre el primero:

$$\frac{T_{a-red}}{T_a} = \frac{V_{f-red}^2}{V_f^2}$$

en donde la relación de voltajes es el mismo factor de reducción:

$$\frac{V_{f-red}}{V_f} = r$$

de modo que:

$$T_{a-red} = r^2 T_a$$

El par de arranque disminuye proporcionalmente al cuadrado del factor de reducción.

### **EJEMPLO 3.4**

Calcular la corriente y par de arranque del motor del ejemplo 3.3, si se aplica el 67% del voltaje nominal.

SOLUCIÓN

a) Corriente de arranque:

$$I_{a-red} = 0.67 \times 154.6$$

$$= 103.582 \text{ A}$$

b) Par de arranque:

$$I_{a-red} = (0.67)^2 \times 6.645 \text{ A}$$

$$= 2.983 \text{ kg-m}$$

## COMENTARIOS

1. Aplicando voltaje reducido se ha logrado que la corriente de arranque baje de 5.9 a 4 veces la nominal.
2. Aplicando voltaje reducido, el par también ha bajado de 1.59 a 0.714 veces el nominal. Si la carga requiere de un par de arranque menor que éste, el motor puede arrancar, pero en caso contrario, no se podrá llevar a cabo el arranque a 67% del voltaje nominal. Habría que experimentar con un valor mayor.

### 3.7 DIAGRAMA CIRCULAR DEL MOTOR DE INDUCCIÓN

En el análisis del circuito equivalente de la figura 3.15 los fasores representativos de la corriente de carga van describiendo en forma sucesiva un arco de circunferencia, como se expone en este tema.

La impedancia del circuito de carga es:

$$Z_c = (R + R_c) + j X$$

cuyas componentes siguen las relaciones de un triángulo rectángulo como el de la figura 3.22.1.

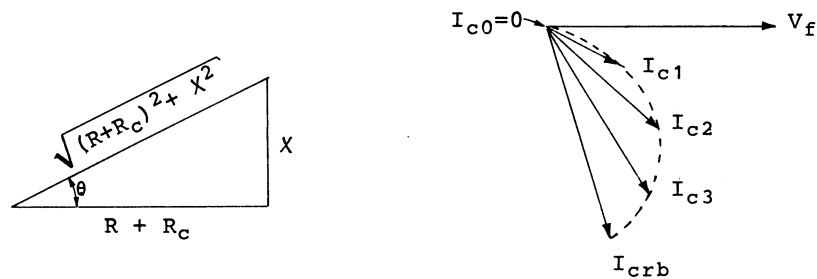


FIGURA 3.22. COMPORTAMIENTO DEL CIRCUITO DE CARGA. (1) SU IMPEDANCIA. (2) LA CORRIENTE DE CARGA.

El ángulo entre el cateto resistivo y la hipotenusa es igual en magnitud y de signo contrario al ángulo de fase.

$$\theta = \tan^{-1} \frac{X}{R+R_c}$$

y la magnitud de la corriente es:

$$I_c = \frac{V_f}{\sqrt{(R+R_c)^2 + X^2}}$$

La resistencia de carga puede variar entre los límites infinito y cero. Conforme la resistencia decrece, tanto el ángulo de fase como la magnitud de la corriente van aumentando según se muestra en la figura 3.22.2. El límite es la condición de rotor bloqueado.

Los extremos de los fasores de corriente describen un arco de circunferencia.

**3.7.1. DEMOSTRACIÓN DE QUE LAS CORRIENTES DESCRIBEN UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA.** Partiendo de la suposición de que la corriente de carga efectivamente se desplaza por un arco de circunferencia, entonces esta corriente tendría dos componentes como se muestra en la figura 3.23.

$$I_c = I_1 + I_2$$

La magnitud de  $I_1$  es igual al radio de la circunferencia y permanece en posición constante.  $I_2$  tiene también una magnitud igual al radio de la circunferencia, y gira alrededor de su origen describiendo el arco.

El ángulo  $\theta_{ba}$  es igual al ángulo de fase por tener sus lados respectivamente perpendiculares.

El arco  $\theta_a$  es doble del ángulo  $\theta_{ba}$ , es decir, es igual a  $2\theta$  y, por lo tanto, el ángulo de inclinación de  $I_2$  es  $90-2\theta$ .

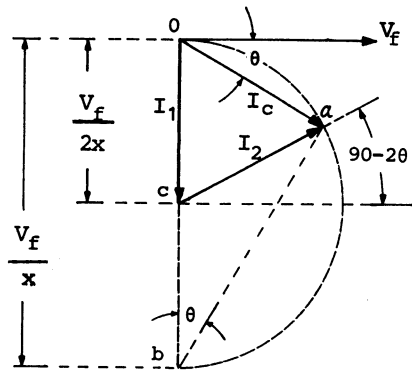


FIGURA 3.23. RELACIONES GEOMÉTRICAS DEL ARCO DE CIRCUNFERENCIA.

Si fuera factible hacer igual a cero todo el parámetro resistivo:

$$R + R_c = 0$$

el arco de circunferencia daría media vuelta y en esas condiciones la corriente de carga sería igual al diámetro.

$$I_{cx} = \frac{V_f}{X} = \text{Diámetro}$$

El radio de la circunferencia será  $V_f / 2X$ .

Expresando las componentes  $I_1$  e  $I_2$  en forma compleja, se tiene:

$$I_1 = 0 - j \frac{V_f}{2X}$$

$$I_2 = \frac{V_f}{2X} \cos(90 - 2\theta) + j \frac{V_f}{2X} \text{sen}(90 - 2\theta)$$

y al efectuar la suma resulta:

$$I_c = \frac{V_f}{2X} \cos(90-2\theta) + j \frac{V_f}{2X} [\operatorname{sen}(90-2\theta) - 1]$$

Recordando las fórmulas trigonométricas:

$$\cos(90-2\theta) = \operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

$$\operatorname{sen}(90-2\theta) = \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

y expresando las funciones por medio de los catetos opuesto, adyacente y la hipotenusa en el triángulo de impedancia de la figura 3.22:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{X}{\sqrt{(R+R_c)^2 + X^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{R+R_c}{\sqrt{(R+R_c)^2 + X^2}}$$

al sustituir en la expresión de la corriente de carga se obtiene:

$$I_c = V_f \frac{R+R_c}{(R+R_c)^2 + X^2} - j V_f \frac{X}{(R+R_c)^2 + X^2}$$

y efectuando las transformaciones adecuadas se llega a

$$I_c = \frac{V_f}{(R+R_c) + jX}$$

que equivale a

$$I_c = \frac{V_f}{Z_c}$$

que corresponde a la corriente de carga obtenida por la ley de Ohm, por lo tanto, una corriente cuyo comportamiento describe el arco de circunferencia planteado, es la corriente de carga.

**3.7.2. CORRIENTE DE FASE Y DIAGRAMA CIRCULAR.** Regresando nuevamente al circuito equivalente de la figura 3.15, se tiene que la corriente de fase consta de dos componentes.

$$I_f = I_m + I_c$$

o sea que para obtener la corriente de fase hay que agregar la corriente de magnetización al diagrama circular, lo que sólo ocasiona un corrimiento de éste hacia el cuarto cuadrante, como aparece en la figura 3.24.

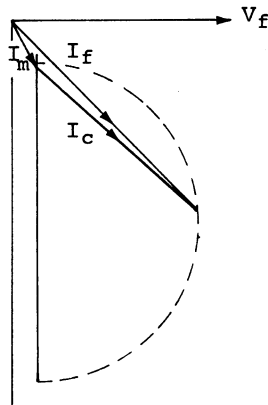


FIGURA 3.24. DIAGRAMA CIRCULAR DEL MOTOR DE INDUCCIÓN.

**3.7.3. ASPECTOS PRÁCTICOS DEL DIAGRAMA CIRCULAR.** El diagrama circular se puede dibujar a partir de los resultados de las pruebas de rotor libre y de rotor bloqueado. Para facilitar el trabajo de dibujo se suele girar todo el diagrama noventa grados, de manera que su mayor dimensión quede en sentido horizontal, como aparece en la figura 3.25.

El voltaje de fase queda sobre el eje vertical. A una escala adecuada de corrientes  $\delta A$ , se dibuja la corriente de arranque  $I_a$  (que se obtiene por extrapolación de la prueba de rotor bloqueado) que queda como el fador  $OA$ .

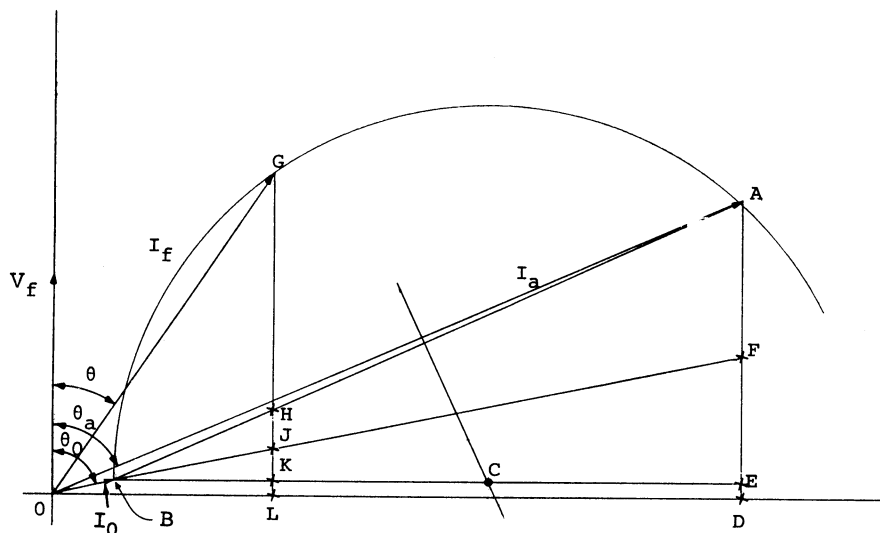


FIGURA 3.25. TRAZOS PARA LA INTERPRETACIÓN DEL DIAGRAMA.

A la misma escala  $\delta A$  se dibuja la corriente de rotor libre  $I_0$  que es el fador  $OB$  y se trazan a continuación la línea  $BA$  y una horizontal por el punto  $B$ . El punto de intersección entre la horizontal y la mediatriz de  $BA$  es el centro  $C$  del círculo.

Cualquier corriente  $I$  de trabajo del motor estará comprendida entre los límites del rotor libre y rotor bloqueado, y tendrá que apoyarse sobre el arco de circunferencia, como  $OG$ .

Con estos trazos iniciales, se puede proceder a la interpretación de las dimensiones del dibujo sobre dos líneas verticales, una que baja por el punto  $A$  y otra que baja por el punto  $G$ .

**a) Condiciones de arranque**

$$AD = I_a \cos \theta_a \quad = \text{Componente real de la corriente de fase de arranque.}$$

$$V_f \times AD = V_f I_a \cos \theta_a \quad = \text{Pérdidas totales en el arranque por fase.}$$

$$V_f \times DE = V_f I_o \cos \theta_o \quad = \text{Pérdidas mecánicas y magnéticas por fase.}$$

$$V_f \times EA \quad = \text{Perds. totales - Perds. mec. y mag.} = \text{Pérdidas eléctricas en el arranque por fase.}$$

Las pérdidas eléctricas en el circuito equivalente se producen por disipación en la resistencia **R**.

Recordando que:

$$R = r_s + a^2 r_r$$

se puede localizar un punto **F** en el diagrama circular de tal manera que guarde la proporción.

$$\frac{AE}{R} = \frac{EF}{r_s}$$

Las pérdidas eléctricas se dividen en:

$$V_f EF \quad = \text{Pérdidas eléctricas en el estator.}$$

$$V_f FA \quad = \text{Pérdidas eléctricas en el rotor.}$$



*b) Condiciones de trabajo normal*

Sobre la vertical trazada en el extremo de la corriente de trabajo, también se pueden obtener las siguientes interpretaciones:

$$GL = I_f \cos\theta \quad = \text{Componente real de la corriente de fase.}$$

$$V_f \times GL = V_f I_f \cos\theta \quad = \text{Potencia real de entrada por fase.}$$

$$V_f \times LK \quad = \text{Pérdidas mecánicas y magnéticas por fase.}$$

$$V_f \times KJ \quad = \text{Pérdidas eléctricas en el estator por fase.}$$

$$V_f \times JH \quad = \text{Pérdidas eléctricas en el rotor por fase.}$$

$$V_f \times HG \quad = \text{Potencia de salida por fase.}$$

Todavía de mayor utilidad, resulta la interpretación de las siguientes relaciones:

$$\frac{JH}{JG} = S \quad \text{Deslizamiento}$$

$$\frac{HG}{JG} \times N_s = N_r \quad \text{Velocidad del rotor}$$

$$OG = I_f \quad \text{Corriente de fase}$$

$$\frac{LG}{OG} = f_p \quad \text{Factor de potencia}$$

$$\frac{3 V_f \times HG}{746} = P_{mec} \quad \text{Potencia total en la flecha en HP}$$

$$\frac{HG}{LG} \times 100 = \% \eta \quad \text{Eficiencia}$$

$$\frac{2.92 V_f \times JG}{N_s} = T \quad \text{Par mecánico en Kg-m}$$

Las últimas siete interpretaciones son las mismas que se obtuvieron al analizar el circuito equivalente, por lo que este procedimiento constituye un método gráfico para el análisis, y recurriendo a varias intensidades de corriente de trabajo, se pueden obtener también las curvas características<sup>7</sup>.

### 3.8. CURVAS PAR-VELOCIDAD

En el análisis del circuito equivalente apareció entre las curvas características del motor, una de ellas que muestra la relación entre par y velocidad del rotor. Esto fue dentro de la región normal de trabajo de la máquina, incluyendo una pequeña sobrecarga.

---

<sup>7</sup>Este tema se tomó de la obra "Pruebas de equipo eléctrico 2", del propio autor. Ahí se describe en forma más detallada la manera de construir el digrama, el uso de las escalas de dibujo para corriente y potencia, la tabla de interpretaciones y la obtención de las curvas características.

También se encontró como parte final del mismo análisis, que el par de arranque es relativamente pequeño comparado con la corriente en esa misma condición, lo que sugiere que la curva en toda su extensión no tiene gran amplitud en la escala horizontal.

El trazo completo de la curva se puede obtener tabulando dos ecuaciones que ya se han manejado y que se reproducen a continuación:

$$N_r = N_s(1 - S)$$

$$T = 2.92 \frac{V_f^2 S a^2 r_r}{[(S r_s + a^2 r_r)^2 + S^2 X^2] N_s}$$

Variando el deslizamiento entre los límites cero y uno. La curva resultante es como la que se muestra en la figura 3.26 en trazo continuo.

En orden ascendente de velocidades, el par se inicia en el arranque aproximadamente en 1.5 veces el par nominal; sigue creciendo hasta que alrededor del 75% de su velocidad de trabajo adquiere un valor de unas tres veces el par nominal y de ahí en adelante disminuye hasta las condiciones de trabajo normal.

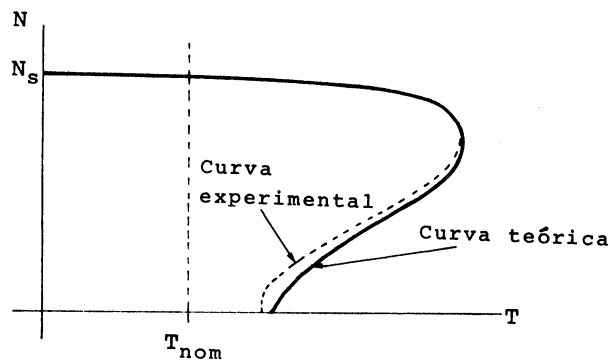


FIGURA 3.26. CURVA PAR-VELOCIDAD TÍPICA.

La curva teórica obtenida del análisis del circuito equivalente, coincide bastante con la curva experimental obtenida por pruebas de laboratorio. En ocasiones la experimental sigue la trayectoria de la línea punteada, debido a la saturación del circuito magnético que no está prevista en las ecuaciones de análisis.

**3.8.1 INCREMENTO DEL PAR DE ARRANQUE.** Como se explicó en el subtema 3.6.7 (a) y en la figura 3.21, el bajo par de arranque se debe a la alta reactancia de rotor en esas condiciones, lo que da lugar a que el flujo de rotor quede retrasado respecto al del estator, un ángulo notablemente mayor de  $90^\circ$  (el ángulo óptimo sería de  $90^\circ$ ).

Como la reactancia no es posible evitarla, la solución para disminuir el ángulo de fase es aumentar la resistencia del rotor, por medio de barras de jaula más angostas. En la figura 3.27.1 se muestra el perfil de ranura para jaula como se utilizó para el razonamiento de la figura 3.21, en cambio en la figura 3.27.2 se ha reducido el perfil, con lo que aumenta la relación  $r_p/x_r$  y el ángulo

$\delta$  disminuye. El par de arranque mejora, aunque no todo lo deseable, puesto que la magnitud del flujo de rotor disminuye.

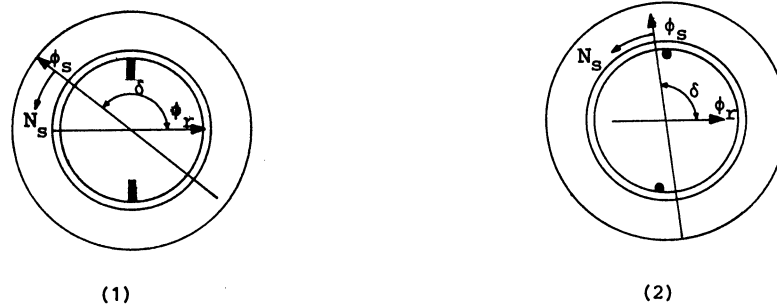


FIGURA 3.27. POSICIÓN RELATIVA DE LOS FLUJOS EN EL ARRANQUE. (1) CON BARRA PROFUNDA LA FIGURA (2) REDUCIENDO EL PERFIL DE BARRA.

Analizando la fórmula de par de arranque

$$T_a = 2.92 \frac{V_f^2 a^2 r_r}{[R^2 + X^2] N_s}$$

se observa que al aumentar la resistencia de rotor, el numerador crece al principio más que el denominador, mejorando el par. Sin embargo, un aumento excesivo lleva a la condición inversa, haciendo crecer más el denominador que el numerador (magnitud de flujo muy pequeña) y entonces el par en vez de mejorar empeora.

Por otra parte, la máquina a plena carga requiere de una determinada resistencia de carga  $R_c$ .

Como:

$$R_c = a^2 r_r \frac{1-S}{S}$$

al disminuir la resistencia  $a^2 r_r$ , debe aumentar la relación  $(1-S)/S$  para conservar la  $R_c$ , lo que da lugar a un aumento del deslizamiento.

En resumen, al reducir el perfil de barra de jaula se consigue un aumento en el par de arranque, pero también aumenta el deslizamiento a plena carga.

A los diferentes perfiles de barra se les da el nombre de *diseño*, siendo cuatro los más usuales:

**Diseño A.** Barra poco profunda. Si se toma como referencia el diseño B que corresponde aproximadamente a los ejemplos usados en el análisis, el diseño A presenta mejor par de arranque y también mejor par máximo. Su deslizamiento a plena carga es igual o ligeramente menor.

**Diseño B.** Barra profunda. Su comportamiento es el de los ejemplos utilizados en el análisis.

**Diseño C.** Doble barra (Doble jaula). Una barra superficial parecida a la del diseño D, que proporciona mejoría en el par de arranque, y otra profunda que acerca el deslizamiento a plena carga al del diseño B.

**Diseño D.** Barra superficial. Esta diseñada para el máximo par de arranque, pero en cambio no presenta par máximo y su deslizamiento a plena carga es a veces bastante mayor del 5%. La figura 3.28 ilustra el comportamiento de los cuatro diseños.

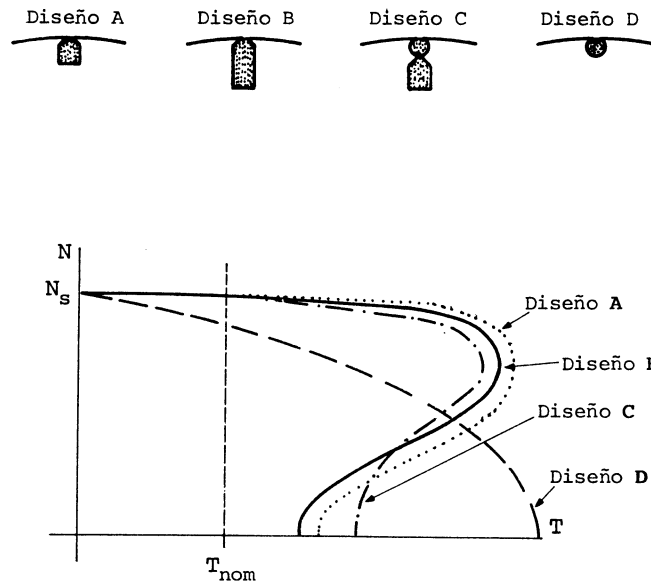


FIGURA 3.28. LOS PERFILES DE BARRA Y SU REPERCUSIÓN EN LAS CURVAS PAR-VELOCIDAD.

Cuando un motor destinado a cierto uso, ha sido correctamente seleccionado en cuanto a potencia y velocidad, y pese a ello presenta problemas en el arranque, es muy posible que no se haya considerado el diseño adecuado. El conocimiento de las curvas par-velocidad del motor y de la carga ayudan a una selección del diseño indicado para cada caso. La figura 3.29 muestra un juego de motor y bomba centrífuga, que no solamente arranca con toda facilidad a voltaje nominal, sino que puede hacerlo en voltaje reducido.

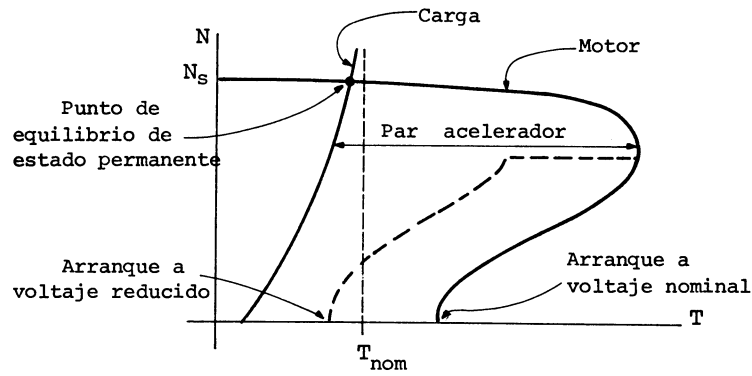


FIGURA 3.29. PARA QUE EL MOTOR PUEDA ARRANCAR Y TOMAR SU VELOCIDAD DE TRABAJO, DEBE HABER UN PAR ACELERADOR.

**3.8.2. ROTOR DE RESISTENCIA VARIABLE.** Si fuera factible obtener un rotor cuya resistencia pudiera hacerse variar mediante un control externo a la máquina, se conseguiría un comportamiento que podría abarcar diferentes diseños. Lo más útil sería que arrancara como diseño D y trabajara como diseño B.

La solución es en realidad mucho más sencilla de lo que parece, aunque a un costo mayor que el de una jaula de ardilla. El núcleo del rotor se construye con ranuras abiertas, igual que un rotor para corriente directa. En ese núcleo se acomoda un devanado similar al de estator, principalmente en cuanto al número de fases y de polos.

El devanado de rotor se conecta en circuito estrella, y las terminales van a dar a un juego de tres anillos colectores, como se muestra en la figura 3.30.

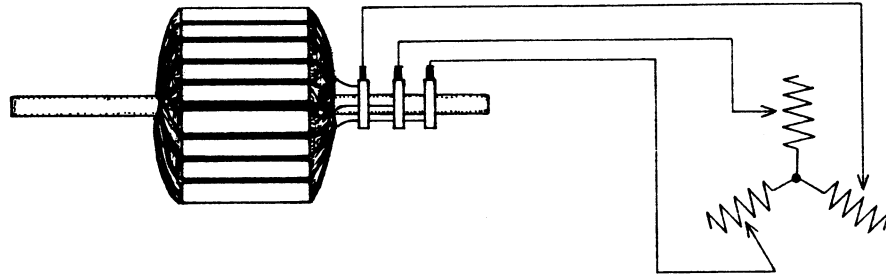


FIGURA 3.30. ROTOR DEVANADO PARA MOTOR DE INDUCCIÓN.

Sobre los anillos se apoyan sendas escobillas que conectan con un banco de resistencias variables por fuera de la máquina. Cuando se incluye la máxima resistencia se comporta como diseño D; mientras que cuando la resistencia es cero, sólo queda en operación la resistencia propia del devanado y se comporta como diseño B.

El banco de resistencia permite además, moderar la corriente de arranque, por lo que no es necesario el arranque a voltaje reducido.

### 3.9. ARRANCADORES

Los arrancadores son equipos que controlan el arranque y paro de los motores, ya sea en forma manual o automática, y además contienen elementos de protección, que detienen la operación de la máquina cuando se presenta alguna condición anormal de trabajo.

Por la *forma de accionar los elementos interruptores* se dividen en:



a) **Manuales.** La fuerza del operador hace que cierren o abran los interruptores por medio de una palanca. Se requiere la presencia del operador en el lugar donde se localice el arrancador.

b) **Automáticos.** Los interruptores cierran por la acción de un electroimán, al energizarse su bobina, y cuando se desenergiza abren nuevamente. El circuito de la bobina se cierra manual o automáticamente. En el primer caso es por medio de pequeños interruptores tipo botón, que se pueden localizar cerca del arrancador, o a cierta distancia, como por ejemplo en una consola general de control.

En el caso de control automático, el circuito de bobina cierra y abre por acción de sensores de determinadas variables de proceso, como por ejemplo flotadores para nivel de líquida, termostatos para temperaturas, etc.

Por *el voltaje de arranque*, se dividen en:

a) **Arrancadores a pleno voltaje.** Aplican al motor su voltaje nominal desde el momento de arranque. Generalmente se usan para motores pequeños.

b) **Arrancadores a voltaje reducido.** Aplican al motor una fracción del voltaje nominal durante el arranque. La forma más generalizada, aunque no la única, de obtener este voltaje reducido es por medio de autotransformadores.

Cuando el motor ha llegado aproximadamente al 75% de su velocidad de trabajo, se le aplica el voltaje íntegro, con lo que completa fácilmente su proceso de arranque.

**3.9.1. ARRANCADORES MANUALES A PLENO VOLTAJE.** Su apariencia es la de un interruptor de luz tipo palanca, aunque de mayor tamaño y se requiere más fuerza para cerrarlo y abrirlo. Su construcción en cambio, sí difiere bastante de la de un interruptor común.

Al cerrar el interruptor en forma manual, se mantiene en esta posición por medio de un mecanismo de trinquete que tiene además la propiedad de ser sensible al calor.

En los lados del cuerpo del interruptor se montan pequeñas resistencias calibradas a la corriente de trabajo del motor. Si por cualquier tipo de sobrecarga se produce una corriente mayor, el calor disipado por la resistencia actúa sobre el mecanismo de trinquete y se produce la apertura del interruptor.

Si se desea parar el motor, basta con operar manualmente la palanca en sentido opuesto al de arranque.

En la figura 3.31 se puede observar el significado de los símbolos. Al interruptor de línea se le llama *normalmente abierto* porque esa es su condición cuando no actúa sobre el la fuerza del trinquete. A la resistencia de protección se le da el nombre de *elemento térmico*.

En segundo lugar aparece el diagrama del arrancador, con un interruptor por línea y dos elementos térmicos.

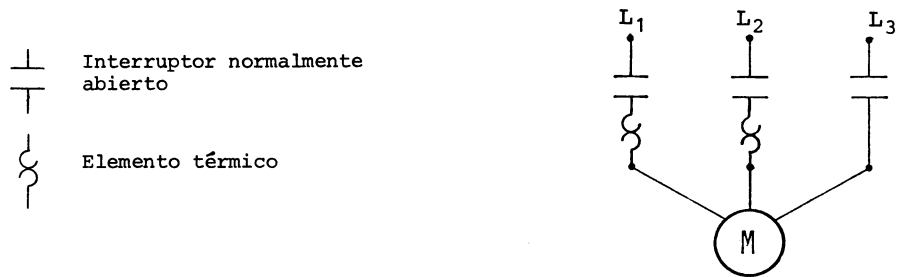


FIGURA 3.31. DIAGRAMA DEL ARRANCADOR MANUAL A PLENO VOLTAJE.

Es interesante observar que los elementos térmicos actúan con la más pequeña sobrecarga que detectan, pero requieren de cierto tiempo para disipar calor. No actúan con la corriente de arranque, debido a que tiene una duración muy corta y no da tiempo suficiente para producir calentamiento.

**3.9.2. ARRANCADORES AUTOMÁTICOS A PLENO VOLTAJE.** En estos arrancadores, los interruptores en vez de cerrarse por la mano del operador, se cierran por un mecanismo de electroimán. Los interruptores normalmente abiertos se cierran al energizar la bobina del electroimán y permanecen así hasta que se desenergice, volviendo a su condición de abiertos.

Los elementos térmicos se localizan en pequeñas cajas de montaje, junto con interruptores normalmente cerrados y que abren automáticamente al elevar su temperatura, interrumpiendo la corriente de la bobina. En la mayoría de los diagramas de circuitos, los interruptores térmicos aparecen identificados con las siglas OL.

Para control de arranque y paro se utilizan interruptores de baja capacidad tipo botón, incluidos en el circuito de la bobina. En la figura 3.32 se muestran el diagrama y la simbología de este tipo de arrancadores.

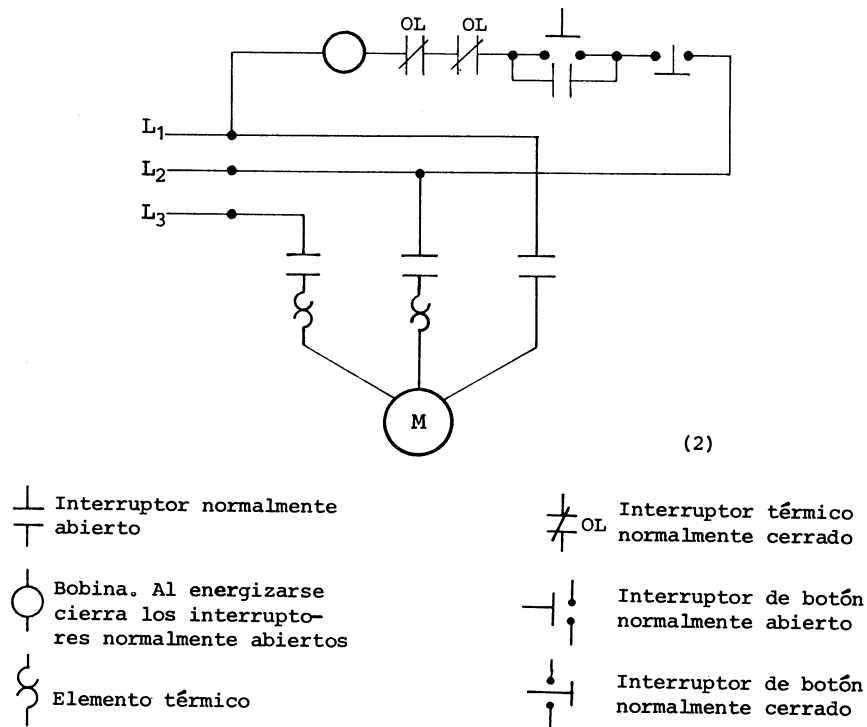


FIGURA 3.32. DIAGRAMA DEL ARRANCADOR AUTOMÁTICO A PLENO VOLTAJE.

Para arrancar el motor, basta una ligera presión sobre el botón normalmente abierto. Con ello se cierra el circuito de bobina, y al energizarse esta, cierra todos los interruptores normalmente abiertos, incluyendo el interruptor auxiliar en paralelo con el botón. Al soltar el botón, este se abre pero el circuito continúa cerrado a través del interruptor auxiliar.

Para parar, solo es necesaria una ligera presión sobre el botón normalmente cerrado, con lo que se abre el circuito de bobina y los interruptores vuelven a su condición de normalmente abiertos.

Este arrancador proporciona además las siguientes protecciones:

- a) **Sobrecarga.** La sobrecarga se manifiesta por corrientes superiores a la normal, que son detectadas por los elementos térmicos.
- b) **Sobrevoltajes.** También producen corrientes superiores a la normal y las detectan los elementos térmicos.
- c) **Bajos voltajes.** La bobina pierde fuerza y no puede mantener cerrados los interruptores.
- d) **Suspensiones de energía.** Al desenergizarse la bobina se abren los interruptores y el motor no tiene un arranque inesperado al volver la energía.

Otras ventajas de este arrancador son:

- La estación de botones se puede instalar lejos del arrancador, si se requiere control remoto.
- Se pueden instalar varias estaciones de control conectando los botones de arranque en paralelo y los de paro en serie.
- Se puede cambiar la estación de botones y su interruptor auxiliar, por un interruptor automático, sensor de nivel, presión, temperatura, etc.

**3.9.3. ARRANCADOR MANUAL A VOLTAJE REDUCIDO.** Existen varias formas de obtener un voltaje reducido para aplicarlo al motor en el momento de arranque. El uso de autotransformadores tiene algunas ventajas importantes, como son:

- Varias derivaciones que permiten al usuario seleccionar el voltaje de arranque. Algunas opciones que ofrecen diversos fabricantes son: 80, 65 y 50; 84, 67 y 50; 80 y 65 por ciento del voltaje nominal.
- Mínima corriente de línea, ya que según se ha visto, la corriente en el motor baja proporcionalmente al factor de reducción, pero por las propiedades de transformación, en la línea baja proporcionalmente al cuadrado del factor de reducción.
- Puede trabajar en arranques prolongados, motivados por cargas de alta inercia.
- Se puede economizar en la transformación trifásica con solo dos autotransformadores en conexión delta abierta (eliminando uno de los tres lados de la delta).

La cantidad de interruptores para conectar y desconectar los autotransformadores, varía según los diferentes modelos o fabricantes. Uno de los arreglos más sencillos se muestra en la figura 3.33.

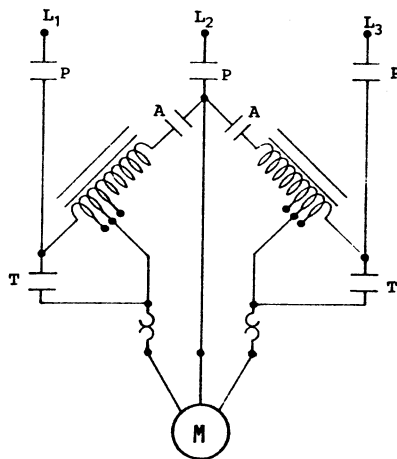


FIGURA 3.33. DIAGRAMA DEL ARRANCADOR A VOLTAJE REDUCIDO.

En el diagrama se observan tres grupos de interruptores:

**a) Interruptores principales P.** Cierran en el arranque y permanecen cerrados durante el trabajo del motor.

**b) Interruptores de arranque A.** Cierran en el arranque para energizar los autotransformadores, y abren en el trabajo, dejándolos flotantes en las líneas opuestas.

**c) Interruptores de trabajo T.** Permanecen abiertos durante el arranque y cierran para el trabajo, conectando el motor directamente a las líneas.

En el arrancador manual, los interruptores cierran y abren por acción de un mecanismo de levas, cuyo eje sale de la caja del equipo y tiene una palanca para accionarlo. La salida del eje generalmente es por el lado derecho, y la palanca se acciona hacia adelante durante el arranque, y hacia atrás para el trabajo. Un sistema de electroimán mantiene la palanca en su posición de trabajo.

Los elementos térmicos que se observan en el diagrama, actúan sobre interruptores térmicos incluidos en el circuito de bobina del electroimán, de modo que en caso de que opere la protección, se desenergiza la bobina y la palanca de mando salta a la posición de reposo.

**3.9.4. ARRANCADOR AUTOMÁTICO A VOLTAJE REDUCIDO.** Los elementos de este arrancador son los mismos que aparecen en el diagrama de la figura 3.33 para el arrancador manual, solamente que los interruptores ahora son accionados por bobinas, como en el caso de los arrancadores automáticos a pleno voltaje.

El grupo de los interruptores principales debe accionarse por una bobina que permanezca energizada, tanto en arranque como en trabajo.

Los dos interruptores de arranque se accionan por otra bobina que sólo se energiza durante el tiempo de arranque, y los de trabajo, por una tercera bobina que se energiza hasta que la de arranque haya salido de operación.

El cambio de la condición de arranque a la de operación se consigue con un relevador de tiempo retardado, que tiene la propiedad de que sus interruptores accionan algunos segundos después de energizada la bobina. La duración de este tiempo se puede calibrar a voluntad.

En la figura 3.34 se ilustra el circuito de bobina para un arreglo de arrancador como el de la figura 3.33, solamente que ahora, automático.

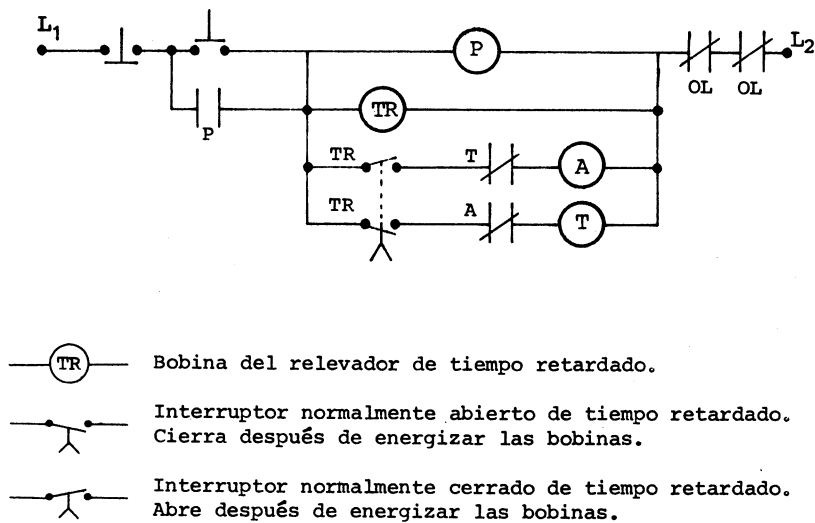


FIGURA 3.34. DIAGRAMA DEL CIRCUITO DE BOBINAS DEL ARRANCADOR AUTOMÁTICO.

Al accionar el botón de arranque, se energizan las bobinas P, TR y A.

La bobina P cierra los interruptores principales y el auxiliar del botón de arranque.

La bobina TR inicia el tiempo para los interruptores de tiempo retardado.

La bobina A cierra los interruptores de arranque y abre un interruptor normalmente cerrado en la bobina T, para evitar que T se energice al mismo tiempo que A.

Después de transcurrido el tiempo calibrado en **TR**, se abre el interruptor de la bobina **A** y se cierra el de la bobina **T**, con lo que se abren los interruptores de arranque y se cierran los de trabajo. La bobina **T** también abre un interruptor normalmente cerrado en la bobina **A**, para evitar que **A** reciba energía al mismo tiempo que **T**. Es una doble medida de seguridad.

Los botones de arranque y paro, y los interruptores de sobrecarga accionan de manera semejante que en los arrancadores a pleno voltaje. También se pueden instalar estaciones de botones a control remoto, varias estaciones de botones, o interruptores sensores automáticos.

**3.9.5. OTRAS FORMAS DE ARRANQUE A VOLTAJE REDUCIDO.** Además del autotransformador, se usan también otras formas de arranque a voltaje reducido. Las principales son:

a) **Por resistencia primaria.** Durante el arranque se intercala en cada línea una resistencia que permite una caída de voltaje aproximadamente al 70% del nominal. En bajas potencias es más económico que el de autotransformador.

b) **Devanado bipartido.** Este no es propiamente un arranque a voltaje reducido, aunque su comportamiento es igual. Se requiere que el motor tenga dos devanados que el arrancador se encarga de conectarlos en paralelo. Se arranca solamente con uno, con lo que se obtiene el 48% del par y 65% de la corriente de arranque. Para el trabajo se adiciona el segundo devanado en paralelo con el de arranque.

c) **Estrella-delta.** Se usa para motores que normalmente trabajan en delta. Durante el arranque se conecta el devanado en estrella, con lo que cada fase recibe el 57% del voltaje nominal. El par y la corriente son 33% de los correspondientes a arranque a pleno voltaje.

**3.9.6. INSTALACIÓN.** En la instalación se debe incluir otro elemento además del arrancador, que es un interruptor de seguridad. Los dos tipos de interruptores más comunes son:



a) De cuchillas (o navajas) con cartucho fusible. Se fabrican con capacidades de 30 a 200 amperes en tipo ligero, y de 30 a 1200 amperes en tipo pesado.

b) Termomagnéticos. No necesitan fusibles. Se abren automáticamente por acción térmica o magnética dependiendo de la magnitud de la sobrecorriente. Se fabrican con capacidades de 15 a 2000 amperes en muy diversos tipos.

El objeto del interruptor de seguridad es poder abrir el circuito de alimentación cuando se requiera revisión o mantenimiento del equipo, y ofrecer una protección contra circuito corto.

No protegen contra corrientes de sobrecarga (para eso es la protección de los arrancadores) y deben soportar las altas corrientes de arranque. Se seleccionan para una capacidad de 2 a 4 veces la corriente nominal, dependiendo del tamaño de motor y del tipo de arrancador. La figura 3.34 presenta esquemáticamente en diagrama unifilar la disposición de los elementos.

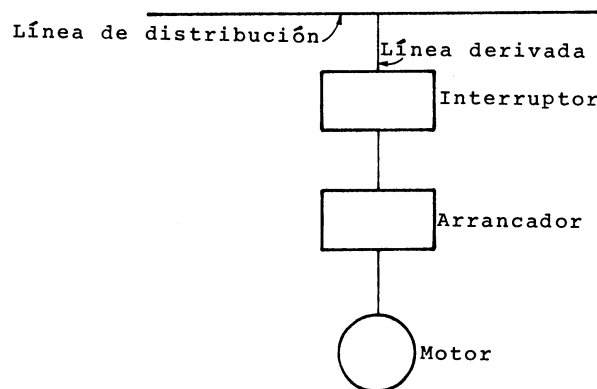


FIGURA 3.35. ELEMENTOS DE INSTALACIÓN DEL MOTOR.

Los conductores para la instalación deben seleccionarse para una capacidad de corriente entre 1.5 y 2.5 veces la corriente nominal, dependiendo también del tamaño del motor, del tipo de arrancador y la duración del arranque.

Los ductos deben tener una sección transversal tal, que los conductores que alojan (incluyendo aislamiento) ocupen solamente un 40% de la misma.

### 3.10. OTROS USOS DEL MOTOR DE INDUCCIÓN

El motor de inducción puede tener algunos aprovechamientos diferentes de la obtención de potencia mecánica, como se describe a continuación.

**3.10.1. GENERADOR DE INDUCCIÓN.** Todas las máquinas eléctricas son reversibles, o sea que pueden trabajar en la modalidad de motores o en la de generadores.

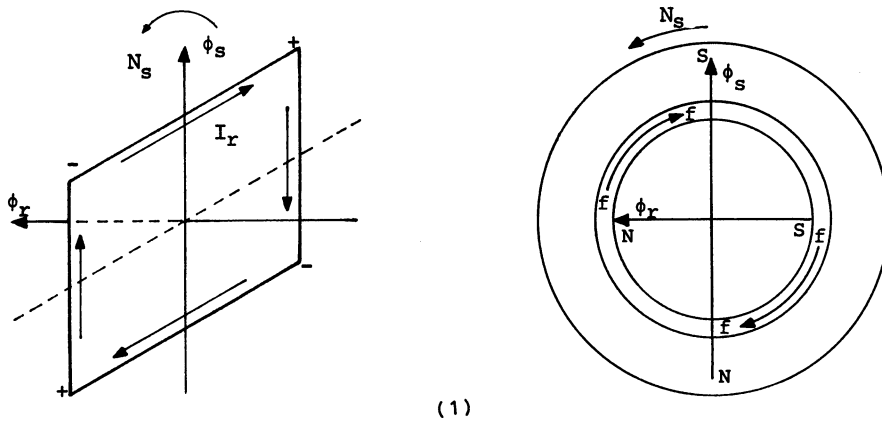
La máquina de inducción no es una excepción, sin embargo, la falta de excitación propia del rotor le impide generar energía eléctrica en forma aislada. Debe formar parte de un sistema en el que otros generadores de tipo síncrono estén aportando las señales de voltaje y frecuencia, con las que la máquina de inducción produce su campo síncrono necesario para la excitación del rotor.

Por este inconveniente pequeño, pero importante, el uso de la máquina de inducción es en forma preferente bajo la modalidad de motor, y solamente en determinados usos, debido a las características de las cargas, trabaja eventualmente como generador.

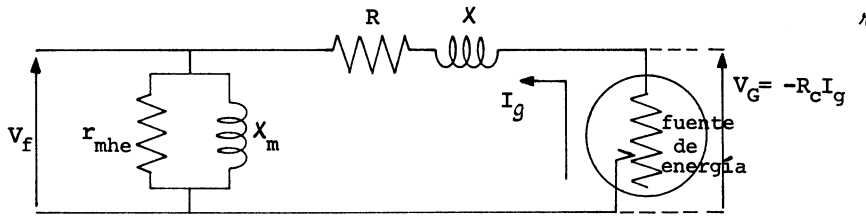
Para hacer que la máquina de inducción trabaje como generador, se requiere que el sistema de energía le suministre voltaje y frecuencia, igual que si se tratara de un motor, con lo que se define el campo de estator y la velocidad síncrona. Entonces, por cualquier dispositivo mecánico se hace subir la velocidad del rotor por arriba del valor síncrono, lo que equivale a un deslizamiento negativo.

Las condiciones de operación como motor que se mostraron en la figura 3.6, cambian ahora por las condiciones de generador que aparecen en la figura 3.36.1. Si el deslizamiento es negativo, ( $N_r > N_s$ ) la velocidad relativa con que la espira de excitación cruza por el campo síncrono es en el mismo sentido de la síncrona.

Aplicando las reglas de la mano derecha se obtienen las polaridades de la fuerza electromotriz, el sentido de la corriente, así como el flujo de rotor.



(1)



(2)



(3)

FIGURA 3.36. GENERADOR DE INDUCCIÓN. (1) COMPORTAMIENTO DEL ROTOR. (2) CIRCUITO EQUIVALENTE. (3) DIAGRAMA CIRCULAR Y DIAGRAMA DE FASORES.

Comparando con la figura 3.6, se observa que la fuerza electromotriz, la corriente, el flujo y el par de rotor se han invertido.

Un ejemplo de este trabajo es un montacargas para transportar material entre diferentes niveles de un edificio. En movimiento ascendente el motor toma energía eléctrica del sistema y entrega energía potencial a la carga, mientras que en movimiento descendente el motor se convierte en freno, impidiendo un descenso en caída libre. Toma energía potencial de la carga y la entrega al sistema en forma de energía eléctrica, es decir, trabaja como generador.

Para efectos de análisis, hay que recordar que :

$$S = \frac{N_s - N_r}{N_s}$$

Si  $N_r > N_s$ , el deslizamiento es negativo. Aplicando un deslizamiento negativo a la resistencia de carga:

$$R_c = a^2 r_r \frac{1 - (-S)}{(-S)}$$

se obtiene también un valor negativo.

En el campo de la física no se concibe una resistencia negativa, sin embargo, tampoco la resistencia de carga  $R_c$  es real, sino una traducción a lenguaje eléctrico de la carga mecánica en la flecha. Considerando lo anterior, se puede proceder a manejar una resistencia negativa en el análisis del circuito.

El producto  $-R_c I_c$  es una diferencia de potencial que en vez de caída de voltaje, es una elevación, y estaría en oposición al voltaje de fase  $V_f$  aplicado. La resistencia  $R_c$  negativa, en vez de disipar energía del circuito está suministrándosela, por lo que a su diferencia de potencial se le llamará **voltaje generado**  $V_G$ , y la corriente de carga se convierte en **corriente generada**  $I_g$ , como se observa en la figura 3.36.2.

Al aplicar la resistencia negativa al análisis del circuito:

$$I_g = \frac{V_f \angle 0}{\sqrt{[R+(-R_c)]^2 + X^2} \angle \tan^{-1} \frac{x}{R+(-R_c)}}$$

hay que tener en cuenta que el ángulo de impedancia es del tercer cuadrante, y la corriente generada aparece en el cuarto cuadrante.

Si se suma la corriente generada a la corriente de magnetización, se obtiene la corriente de fase  $I_{fG}$ , en la modalidad de generador. Finalmente, al comparar la corriente de fase en generación  $I_{fG}$  con el voltaje generado  $V_G$ , se observa en la figura 3.36.3 que el generador de inducción trabaja a factor de potencia adelantado.

Hay que señalar que en esta figura se ha dibujado el voltaje generado como si estuviera exactamente opuesto al de fase, pero en realidad está a un ángulo ligeramente mayor de  $180^\circ$ .

**3.10.2. REGULADOR DE FRECUENCIA.** Para actuar como regulador, o modificador de frecuencia, se utiliza un motor con rotor devanado, y se acopla mecánicamente con un motor de velocidad controlada. El diagrama eléctrico se muestra en la figura 3.37.

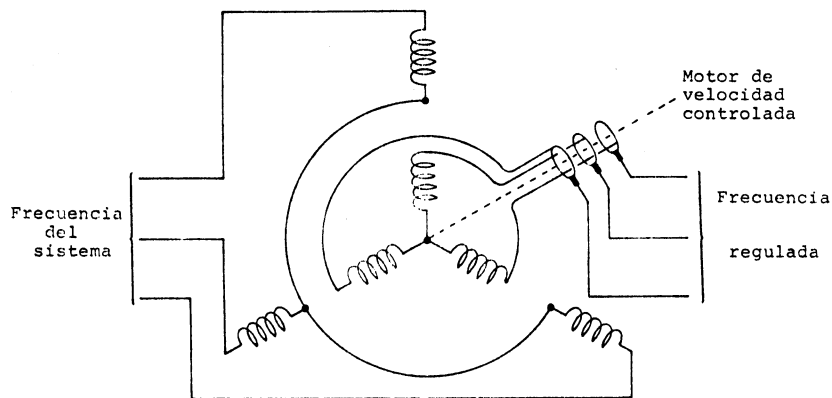


FIGURA 3.37. REGULADOR DE FRECUENCIA.

Con rotor inmóvil (equivalente a rotor bloqueado) el deslizamiento es unitario y el comportamiento de la máquina es lo mas parecido al del transformador.

$$E_r = \frac{E_s}{a}$$

$$f_r = f_s$$

Si se le suministra una velocidad determinada con el motor auxiliar, entonces se tiene también un deslizamiento controlado, y las variables se comportan ahora como:

$$E_r = \frac{S}{a} E_s$$

$$f_r = S f_s$$

Si el movimiento es en el sentido de la velocidad síncrona, el deslizamiento es menor que la unidad y entonces se obtiene una fracción de la frecuencia del sistema, pero la rotación puede ser también contraria a la velocidad síncrona, y el deslizamiento es mayor que la unidad, con lo que también se puede obtener una frecuencia mayor que la del sistema.

Asimismo, como otra consecuencia del deslizamiento, se tiene que el voltaje secundario también varía en la misma proporción que la frecuencia.

El motor auxiliar debe ser cuando menos de la misma capacidad de la máquina de inducción, pues al dar carga, la circulación de corriente genera un par que puede llegar a tomar el valor nominal.

**3.10.3 DEFASADOR DE VOLTAJE.** Con la máquina de inducción de rotor devanado, también es posible obtener un voltaje con cualquier ángulo de defasamiento respecto al voltaje del sistema.

Cualquiera de las dos partes (rotor o estator) se puede utilizar como primario, a manera de transformador y la opuesta sería el secundario, manteniendo al mismo tiempo el rotor bloqueado. De acuerdo con la posición en que se bloquee es el ángulo de defasamiento.

En la figura 3.38 se ilustra en primer lugar el diagrama de la utilización del estator como primario y del rotor como secundario, y abajo, las posiciones relativas de una fase de estator y una de rotor, con el flujo de estator que gira a la velocidad síncrona.

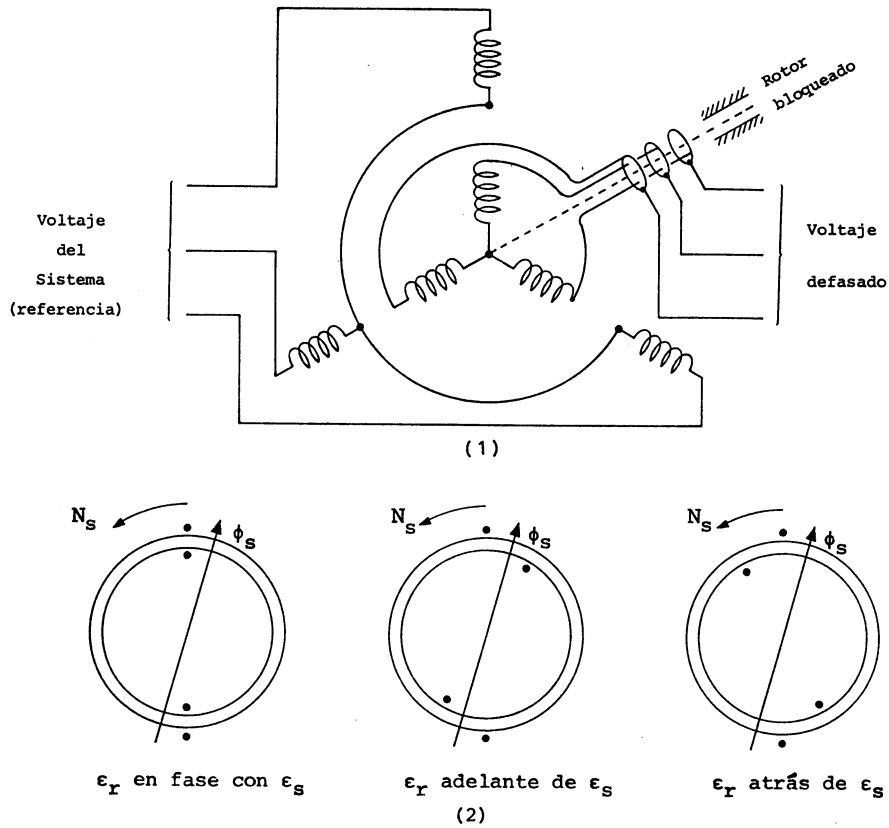


FIGURA 3.38. DEFASADOR DE VOLTAJE (1) ESQUEMA DE CONEXIONES.  
(2) CÓMO SE PRODUCE EL DEFASAMIENTO EN UNA FASE DE ROTOR Y ESTATOR.

En el primer caso, el flujo atraviesa al mismo tiempo la bobina de estator y rotor, induciendo fuerzas electromotrices en fase. En el segundo, el flujo atraviesa primero la bobina de rotor y luego la de estator; la fuerza electromotriz de rotor se adelanta respecto a la de estator. En el tercer caso, el flujo atraviesa primero la bobina de estator y luego la de rotor; la fuerza electromotriz de rotor se atrasa respecto a la de estator.

**3.10.4. REGULADOR DE VOLTAJE.** Aprovechando la característica anterior como defasador de voltaje, se puede conectar rotor y estator en serie como se muestra en la figura 3.39, tomando un arreglo que podría describirse como *autotransformador con defasamiento*.

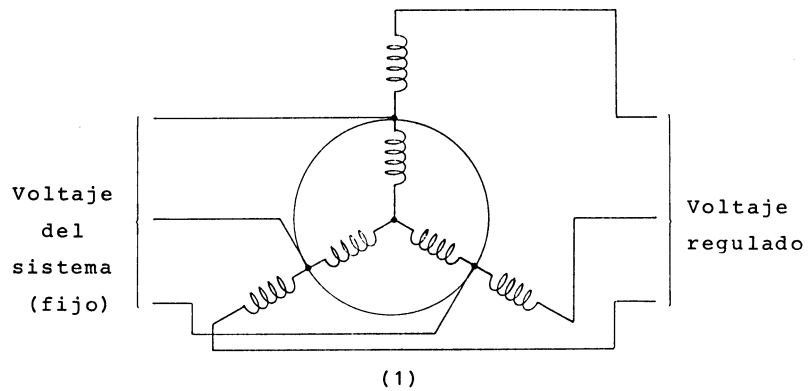


FIGURA 3.39. REGULADOR DE VOLTAJE. (1) ESQUEMA DE CONEXIONES.  
(2) SUMA DE VOLTAJES PARA DIFERENTES POSICIONES DEL ROTOR.

El rotor debe mantenerse bloqueado igual que en el defasador de voltaje.

El conjunto debe alimentarse por la estrella del centro. Generalmente corresponde al rotor, dado que esta estrella ya se encuentra conectada y su neutro está oculto. Cada fase del estator se conecta en



**3.10.5. CONTROL REMOTO DE POSICIÓN.** Se requieren dos máquinas de rotor devanado, que se instalan en lugares alejados, a veces con paredes o con techos de por medio. La característica de este grupo de máquinas es que el estado mecánico en el rotor de una, se reproduce fielmente en el rotor de la otra.

El estado mecánico puede ser una determinada posición de la flecha, el giro de un determinado ángulo (podría ser hasta de varias vueltas), o una velocidad angular. Ejemplos de este tipo de utilización son el control de orientación de antenas desde la consola de mando, o bien, la igualación de velocidades en distintas partes de un equipo como en las fábricas de papel, etc.

Para controles que requieren esfuerzos pequeños se puede alimentar los dos rotores en una fase, pero los estatores deben estar en paralelo en sus tres fases, como se observa en la figura 3.40.1. Es el caso de la mayoría de controles de posición, en que se requieren máquinas de poca capacidad.

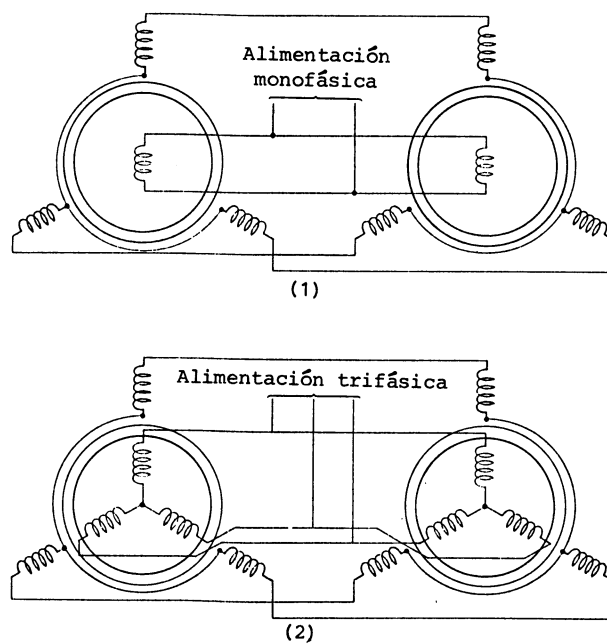


FIGURA 3.40. CONTROL REMOTO DE POSICIÓN. (1) MONOFÁSICO (2) TRIFÁSICO

Cuando se requieren esfuerzos grandes, como es el caso de la transmisión de una velocidad, la alimentación debe ser en las tres fases como se ilustra en la figura 3.40.2. El control remoto se convierte en una transmisión eléctrica de velocidad y se comporta según las curvas par-velocidad del motor.

En esta aplicación, el mayor par que se puede transmitir es a velocidades entre 0.6 y 0.8 de la velocidad síncrona.

En los textos escritos en idioma inglés, a este arreglo se le llama **control selsyn**, que es una contracción de la palabra **selfsynchronizing**, ya que al no haber deslizamiento entre rotores, se dice que se autosincronizan.

### 3.11. MOTORES MONOFÁSICOS DE INDUCCIÓN

Un motor monofásico tendría solamente una de las tres bobinas que se han estudiado para los motores trifásicos. En el caso más sencillo, para facilitar el análisis, sería solamente una de las tres espiras con que se ilustró al principio del capítulo en la figura 3.3, como se muestra ahora en la figura 3.41.1.

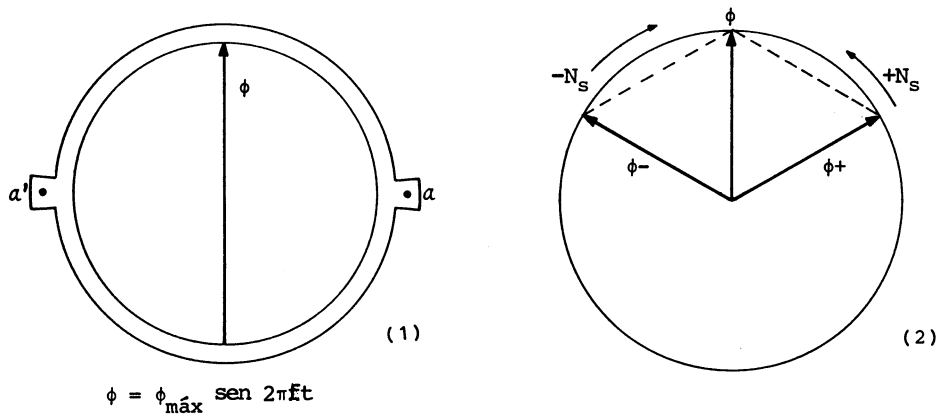


FIGURA 3.41. MOTOR MONOFÁSICO. (1) DIRECCIÓN FIJA DEL FLUJO. (2) TEORÍA DE LOS DOS CAMPOS OPUESTOS.

Una sola fase, induce en su eje magnético, un flujo que conserva la posición del eje, pero cuya magnitud es alterna, o sea, fijo en el espacio y variable en el tiempo.

Al no existir la rotación del flujo como en las máquinas trifásicas, parece imposible obtener el giro del rotor; sin embargo, las primeras experiencias demostraron que lo que no se puede obtener es solamente el arranque, pues una vez que por cualquier medio auxiliar se rompe el estatismo, el rotor continúa girando y además generando un par capaz de mover cierta carga.

La manera más sencilla (aunque no siempre la más convincente) de explicar este fenómeno es por la teoría de los dos campos opuestos, que establece que un flujo alterno como el de la figura 3.41.1 es resultante de dos flujos síncronos (giratorios y de magnitud constante) cuyas velocidades son de sentidos opuestos.

En la figura 3.41.2 se muestra el flujo  $\phi_+$  cuya velocidad síncrona  $+N_s$  tiene sentido positivo, y el flujo  $\phi_-$ , cuya velocidad síncrona  $-N_s$  tiene sentido negativo. La suma de los dos es el flujo resultante  $\phi$ , siempre en dirección vertical y cuya magnitud y sentido varían según:

$$\phi = \phi_{\max} \text{sen } 2\pi ft$$

El valor  $\phi_{\max}$  es el doble de la magnitud de los flujos síncronos opuestos.

Si se coloca ahora el rotor de jaula de ardilla en el centro de la figura 3.41.2, los flujos positivo y negativo ejercerían pares iguales y opuestos, de modo que no se puede iniciar el giro.

En cambio si se le da un impulso, por ejemplo en el sentido positivo, se produce:

a) Deslizamiento respecto al flujo positivo:

$$S_+ = \frac{N_s - N_r}{N_s} < 1$$

b) Reactancia de rotor respecto al flujo positivo:

$$X_{r+} = S_+ X_{rb} < X_{rb}$$

c) Deslizamiento respecto al flujo negativo:

$$S_- = \frac{-N_s - N_r}{-N_s} = \frac{N_s + N_r}{N_s} > 1$$

d) Reactancia de rotor respecto al flujo negativo:

$$X_{r-} = S_- X_{rb} > X_{rb}$$

Recordando que el par es más efectivo mientras más pequeña es la reactancia, se deduce que predomina el par de sentido positivo sobre el de sentido negativo, y el rotor se acelera hasta cerca de la velocidad síncrona. Su deslizamiento, sin embargo, es algo mayor que en los motores trifásicos.

Cuando el deslizamiento respecto al flujo positivo es muy pequeño se tiene que:

$$X_{r+} = S_+ X_{rb} \rightarrow 0$$

y también se puede comprobar que:

$$\frac{N_s + N_r}{N_s} = 2 - \frac{N_s - N_r}{N_s}$$

o sea que

$$S_- = 2 - S_+$$

y

$$X_{r-} = S_- X_{rb} \rightarrow 2X_{rb}$$

La reactancia de dirección positiva tiende a desaparecer, mientras que la de dirección negativa casi duplica a la de rotor bloqueado, y por consecuencia el par positivo adquiere un valor útil, mientras que el negativo (contrapar) se hace muy pequeño.

Si el impulso hubiera sido en sentido negativo, de manera semejante el rotor adquiere velocidad negativa y puede suministrar par negativo.

**3.11.1. ARRANQUE DE LOS MOTORES MONOFÁSICOS.** Para vencer el obstáculo del arranque se ha recurrido a diversos artificios, todos ellos encaminados a producir un giro en el flujo de estator. Se trata de conformar un embobinado lo mas parecido posible a un sistema bifásico.

En el núcleo de estator se colocan dos bobinas, cuyos ejes magnéticos están a 90°. La bobina principal es de alambre grueso, de manera que es más reactiva que resistiva, en cambio la bobina auxiliar es de alambre delgado, siendo más resistiva que reactiva, como se ilustra en forma esquemática en la figura 3.42.1.

Al alimentar ambas bobinas con el mismo voltaje, primero circula corriente en la bobina auxiliar y después en la principal. En el mismo orden se producen sus respectivos flujos, que al atravesar el rotor producen un flujo resultante giratorio.

El defasamiento que se obtiene no es de 90° como se desearía, de modo que para adelantar aún más la corriente auxiliar, se agrega un capacitor en la bobina de arranque como se observa en la figura 3.42.2, permitiendo así el diseño de motores de mayor potencia.

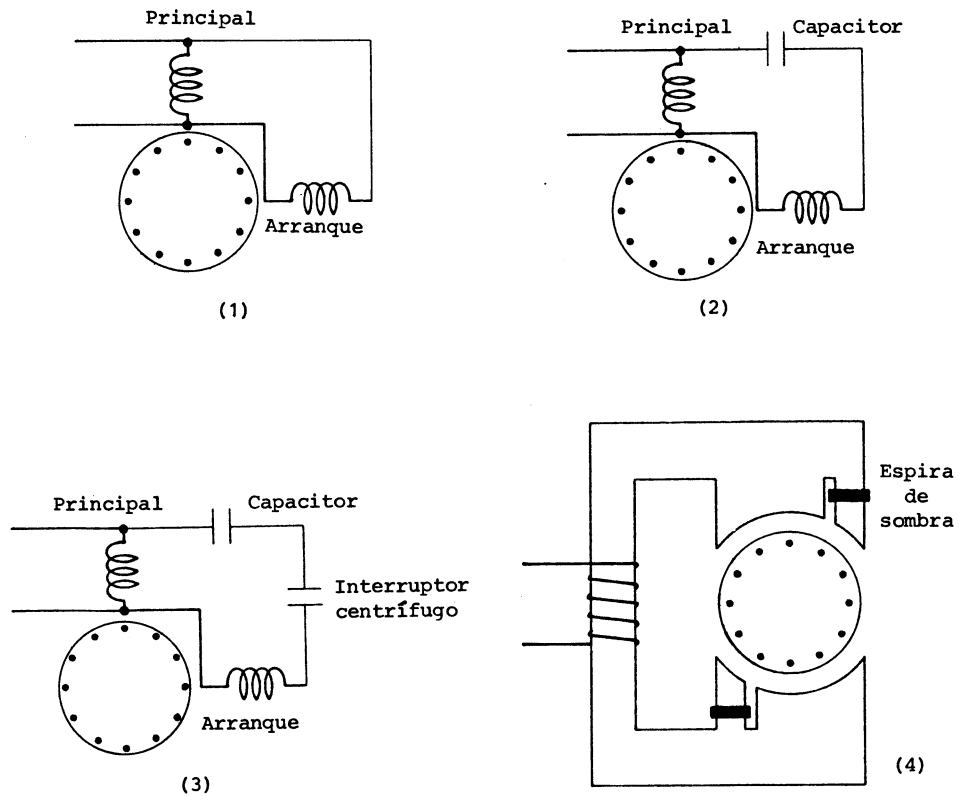


FIGURA 3.42. MOTORES MONOFÁSICOS. (1) CON DEVANADO AUXILIAR DE ARRANQUE (2) CON CAPACITOR EN EL DEVANADO AUXILIAR DE ARRANQUE (3) CON CAPACITOR E INTERRUPTOR CENTRÍFUGO EN EL DEVANADO AUXILIAR DE ARRANQUE (4) CON POLOS SOMBREADOS.

Se ha encontrado que la bobina auxiliar es excelente para el arranque, pero a plena carga produce mayor deslizamiento que con la sola bobina principal, reduciendo la potencia aprovechable y la eficiencia del motor. Una solución a este problema es la adición de un interruptor centrífugo en el circuito de la bobina auxiliar, de tal manera que cuando el motor alcanza aproximadamente en 75% de su velocidad de trabajo, el mecanismo centrífugo abre el interruptor y saca de operación la bobina auxiliar, como se muestra en la figura 3.42.3.

Aunque se dice haber conseguido mayores potencias y eficiencias, los motores monofásicos son de potencia fraccionaria (fracción de HP). Las más grandes son de uno o dos caballos y excepcionalmente se construyen hasta de ocho caballos.

Para motores menores de  $1/20$  HP, clasificados como subfraccionarios, es muy usual el sistema de polo blindado o polo sombreado. La construcción del circuito magnético debe ser similar a la que muestra la figura 3.42.4, a fin de poder seccionar los polos en dos partes, una de ellas mucho más grande que la otra. La parte menor se rodea con una espira cerrada de cobre, que tiene la propiedad de oponerse a los cambios de flujo. Cuando el flujo crece lo hace primero en el polo principal y después en el polo sombreado. Cuando decrece en el polo principal, todavía se conserva por un momento en el polo sombreado, lo que produce un desplazamiento giratorio.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

- 3.1 ¿A qué se debe el nombre de "motor de inducción"?
- 3.2 Explicar cómo se produce un flujo giratorio.
- 3.3 ¿En qué afectaría al flujo giratorio que el voltaje aplicado no sea senoidal?
- 3.4 Explicar cómo se produce el flujo de rotor.
- 3.5 ¿Qué es deslizamiento? ¿Equivale a la regulación de velocidad de motores de C.D.?
- 3.6 Calcular las velocidades síncronas para armadura de 2, 4, 6 y 8 polos en 50 y 25 Hz.
- 3.7 Suponiendo que en promedio, los motores de inducción tienen un deslizamiento de 3.5%, calcular las velocidades de sus rotores para 2, 4, 6 y 8 polos en 60 y 50 Hz.
- 3.8 Graficar la curva par-velocidad completa para el motor de los ejemplos 3.1, 3.2 y 3.3 ¿Cuál es el máximo par que puede desarrollar?
- 3.9 Analizar el circuito equivalente del ejemplo 3.1 por el método del diagrama circular.
- 3.10 A un motor de inducción de 15 HP, 440 V, 18.5 A, y 1150 RPM y devanado de armadura en delta, se le hicieron las siguientes pruebas:
- a) Resistencia del estator: 1.885 ohms por fase (ya se hicieron las correcciones necesarias).
  - b) Prueba de rotor libre:  
440 V    5.5 A    655 W
  - c) Prueba de rotor bloqueado:  
78 V    18.5 A    1173 W
- Obtener su circuito equivalente.



- 3.11 Analizar el circuito equivalente del problema 3.10 por el método algebraico, y obtener sus curvas características.
- 3.12 Obtener por análisis algebraico (sin recurrir a las curvas características), las respuestas del motor del ejemplo 3.1, cuando trabaja con una carga de 8 HP y cuando tiene exactamente su carga nominal.
- 3.13 Obtener por análisis algebraico (sin recurrir a las curvas características) las respuestas del motor del problema 3.10, cuando opera con una sobrecarga de 21 HP.
- 3.14 Calcular la corriente de arranque en el motor y en la línea, y el par de arranque para la máquina del problema 3.10 con base en las siguientes circunstancias:
- Cuando arranca a pleno voltaje.
  - Cuando usa arrancador tipo autotransformador, al 84, 67 y 50% del voltaje nominal.
  - Cuando arranca por el método estrella-delta.
- 3.15 Después de haber instalado un motor de inducción trifásico, se encontró con que giró en sentido opuesto al deseado ¿cómo se invierte el sentido de rotación?
- 3.16 Dibujar el diagrama de un arrancador automático a pleno voltaje, y reversible (que permite girar en uno u otro sentido).
- 3.17 Dibujar la curva par-velocidad completa para el motor del problema 3.10.
- 3.18 Modificar la curva par velocidad del problema 3.17, si arranca con autotransformador al 65% del voltaje nominal.
- 3.19 Modificar la curva par velocidad del problema 3.17 si arranca con el sistema estrella-delta.
- 3.20 Calcular las características de respuesta del motor del problema 3.10, cuando trabaja como generador de inducción girando a 1240 RPM.

3.21 Un motor de inducción con rotor devanado y relación de transformación de 220/110, se va a utilizar para cambiar la frecuencia de 60 a 50 Hz. ¿A qué velocidad hay que girarlo? ¿Qué voltaje secundario se obtiene?

2.22 Un motor de inducción con rotor devanado se desea utilizar para obtener un voltaje defasado  $40^\circ$  respecto al voltaje de la línea. Si la máquina es de 6 polos, ¿qué ángulo habrá que desplazar el rotor con relación a su posición en fase?

3.23 ¿Qué sucederá si no se tiene la precaución de verificar la secuencia de fases al conectar un control remoto de posición?

2.24 ¿Cómo se puede invertir el sentido de rotación de un motor monofásico con bobina auxiliar de arranque?

3.25 Dibujar el circuito de un arrancador reversible (que permita girar en uno u otro sentido) para motor monofásico.

3.26 ¿Cómo se puede invertir el sentido de rotación de un motor de polos sombreados?

## CAPÍTULO 4

### MÁQUINAS SÍNCRONAS

#### 4.1. GENERALIDADES

**4.1.1. DEFINICIÓN.** Las máquinas síncronas son dispositivos que transforman energía eléctrica (en la modalidad de corriente alterna) en energía mecánica (en la modalidad de movimiento rotatorio), o bien, energía mecánica en eléctrica. En el primer caso trabajan como motores síncronos y en el segundo como generadores síncronos.

Por el contenido de la definición anterior se encuentra cierta semejanza con las máquinas de inducción, y aunque ciertamente la hay, también existen diferencias importantes como son:

- La máquina síncrona se usa típicamente en sus dos modalidades, es decir, como generador y motor.
- El generador síncrono puede trabajar aisladamente (como una planta de emergencia) o integrarse a un sistema infinito.
- La máquina síncrona no tiene deslizamiento y gira exactamente a la velocidad síncrona.

Las energías suelen medirse en la unidad de tiempo, o sea bajo el concepto de potencia.

La potencia eléctrica se expresa como:

$$P_e = \sqrt{3} VI \cos \theta$$

y la potencia mecánica como:

$$P_m = T\omega$$

En la figura 4.1 aparece la primera representación de la máquina síncrona, en forma de diagrama de bloque. Cuando la energía fluye de izquierda a derecha, la máquina trabaja como motor, y cuando es de derecha a izquierda, como generador.

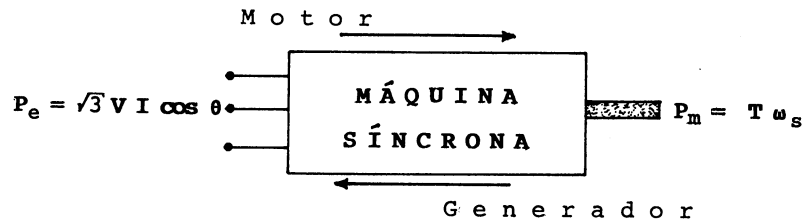


FIGURA 4.1. CONVERSIÓN DE ENERGÍA EN LA MÁQUINA SÍNCRONA.

**4.1.2. ESTRUCTURA.** Desde el *punto de vista mecánico*, la máquina síncrona consta como todas las máquinas rotatorias, de dos grandes conjuntos de piezas:

- a) **Estator.** Abarca todo el grupo de partes inmóviles (o estáticas, de donde toma su nombre).
- b) **Rotor.** Abarca todo el grupo de partes giratorias (o rotatorias, de donde toma su nombre).

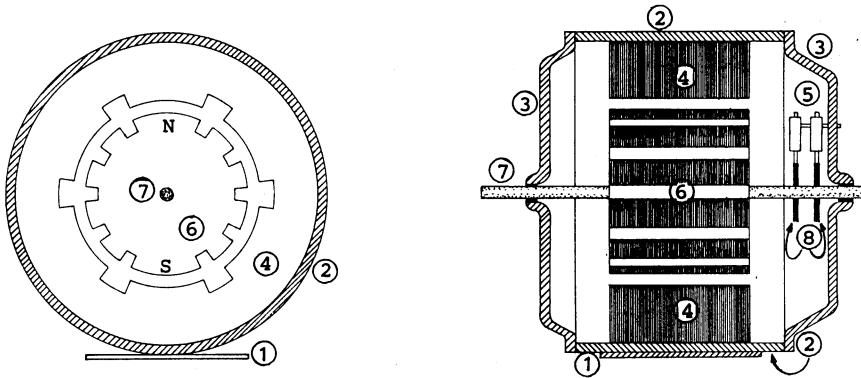
Las principales piezas que conforman el estator y el rotor pueden apreciarse en su conjunto en las figuras 4.2 y 4.3.

Desde el *punto de vista funcional* también se pueden considerar dos grupos de partes:

- a) **Circuito magnético.** Contiene todos los elementos del circuito magnético perfectamente definidos, como son:

-Fuente de fuerza magnetomotriz. Es una bobina que se excita con corriente directa. En virtud de

que es el embobinado de la máquina que consume menos energía, se prefiere siempre montarlo en el rotor, ya que para alimentarlo requiere de escobillas y anillos de menor tamaño. Se divide en tantas partes como polos tiene la máquina.



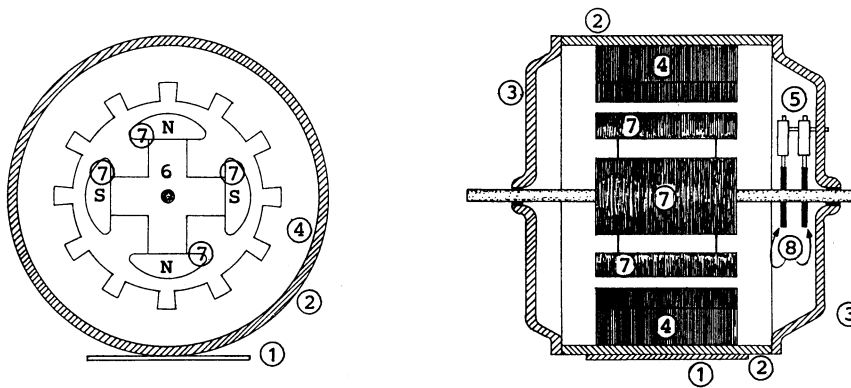
**ESTATOR:**

- |           |               |
|-----------|---------------|
| 1. Base   | 4. Núcleo de  |
| 2. Coraza | armadura      |
| 3. Tapas  | 5. Escobillas |

**ROTOR:**

- |                        |
|------------------------|
| 6. Núcleo polar        |
| 7. Flecha              |
| 8. Anillos deslizantes |

FIGURA 4.2 MÁQUINA SÍNCRONA DE ROTOR CILÍNDRICO.



**ESTATOR:**

- |           |               |
|-----------|---------------|
| 1. Base   | 4. Núcleo de  |
| 2. Coraza | armadura      |
| 3. Tapas  | 5. Escobillas |

**ROTOR:**

- |                        |
|------------------------|
| 6. Piezas polares      |
| 7. Zapatas polares     |
| 8. Anillos deslizantes |

FIGURA 4.3. MÁQUINA SÍNCRONA DE POLOS SALIENTES.

-Circuito ferromagnético. Es el conjunto de trayectorias de material ferromagnético y de entrehierros, por las cuales corren las líneas de flujo magnético.

Para las máquinas de alta velocidad (dos polos, rotor cilíndrico) el circuito consta de núcleo polar, polo norte, entrehierro, núcleo de armadura, entrehierro, polo sur y cierra en el núcleo polar.

Para máquinas de baja velocidad (cuatro o más polos salientes) consta de piezas polares norte, zapatas polares norte, entrehierros, núcleo de armadura, entrehierros, zapatas polares sur y piezas polares sur.

**b) Armadura.** Es el órgano de la máquina en el cual se inducen las fuerzas electromotrices. Sus elementos básicos son bobinas que se alojan en ranuras hechas en el núcleo del estator.

La armadura en el estator permite conectarla sólidamente con el sistema externo, reduciendo al mínimo las pérdidas. Si la armadura estuviera en el rotor, (y los polos en el estator) habría que recurrir a anillos y escobillas para conectarla con el exterior, y dadas las corrientes elevadas que manejan estas máquinas, las pérdidas eléctricas serían grandes.

## 4.2. CIRCUITO MAGNÉTICO

La parte básica del circuito magnético se localiza en el rotor, en donde se encuentra la fuente de fuerza magnetomotriz.

Para máquinas de baja velocidad, el rotor se construye de polos salientes. La bobina de excitación se divide en tantas partes como polos tiene el rotor; cada parte se monta alrededor de una pieza polar y por encima se sujeta la zapata polar, como muestra la figura 4.4.1.

Para obtener la forma senoidal en las fuerzas electromotrices inducidas en la armadura, se requiere que la densidad de flujo también tenga una distribución senoidal, lo cual se consigue con un

entrehierro no uniforme, como también puede observarse en la misma figura. La zapata polar abarca entre 70 y 80% del arco de 180 grados eléctricos.

Para máquinas bipolares resulta peligroso construir las zapatas polares por separado, dadas sus altas velocidades y las fuerzas centrífugas que se desarrollan. En estos casos se recurre a construir el rotor de una sola pieza, de forma cilíndrica, acabado al torno, y con ranuras para alojar la bobina de excitación.

La distribución senoidal del flujo se consigue con la repartición de espiras, como se aprecia en la figura 4.4.2. Las líneas cercanas al eje magnético son generadas por todas las espiras, mientras que las extremas tienen cada vez menos vueltas de fuerza magnetomotriz.

El rotor cilíndrico, aun presentando gran solidez por ser de una sola pieza, se procura que sea de diámetro pequeño. Para máquinas de gran capacidad, se construye de longitud grande.

Los rotores cuando trabajan en estado estable (la mayor parte del tiempo de trabajo) lo hacen con flujo constante, de modo que no están afectados por pérdidas magnéticas, y no es necesario laminarlos.

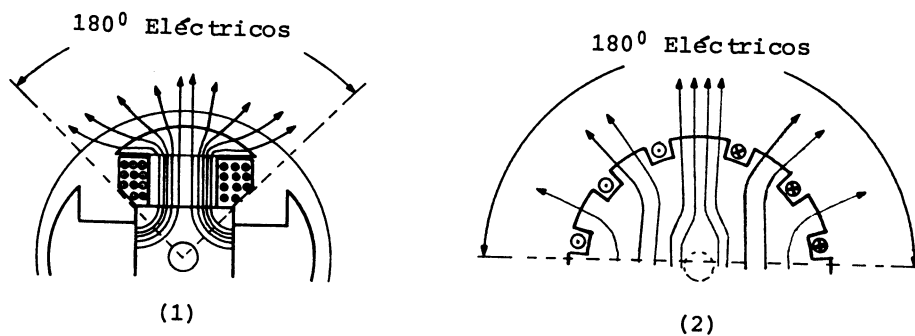


FIGURA 4.4. ROTORES DE MÁQUINAS SÍNCRONAS. (1) DE POLOS SALIENTES (2) CILÍNDRICO.

El circuito magnético se completa con el núcleo de armadura, permitiendo el retorno de las líneas entre la coraza y el embobinado de estator. El flujo magnético se desplaza por este núcleo a gran velocidad, con la inherente producción de pérdidas magnéticas, por lo que esta parte de la máquina es indispensable construirla de laminación.

**4.2.1. CURVA DE MAGNETIZACIÓN.** La característica de magnetización de un material se representa mediante una gráfica en coordenadas  $H$ - $B$ , como se muestra en la figura 4.5.1. Se dice que son las características de un material, porque las coordenadas generalizadas  $H$  (fuerza magnetizante) y  $B$  (densidad de flujo) permiten graficar su comportamiento magnético, independientemente de la forma y dimensiones del circuito.

También se pueden observar en la misma figura, que para los núcleos polares de las máquinas síncronas se usa un material de área de histéresis muy cerrada, pues no suele emplearse el magnetismo remanente, aunque existen excepciones.

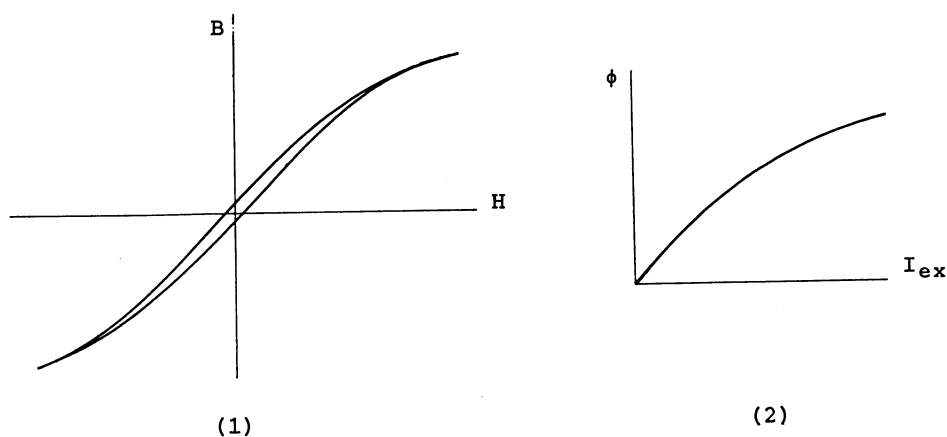


FIGURA 4.5. MAGNETIZACIÓN DE LA MÁQUINA SÍNCRONA (1) CARACTERÍSTICA DEL MATERIAL DEL NÚCLEO, (2) CURVA DE MAGNETIZACIÓN .



En la figura 4.5.2. aparece la curva de magnetización, particularizada para una máquina determinada. Para ello, se toma solamente el primer cuadrante, ya que la excitación de la máquina es con corriente directa y de valor continuo; considerando además, que la fuerza magnetizante es:

$$H = \frac{NI_{ex}}{L}$$

se multiplica la escala horizontal por la longitud media del circuito y se divide entre el número de vueltas de la bobina, con lo que se obtiene la corriente de excitación como abscisa particular:

$$I_{ex} = \frac{L}{N} H$$

y de manera semejante, se multiplica la densidad de flujo por el área de la sección transversal de circuito para obtener la ordenada particular de esta máquina:

$$\phi = BA$$

El flujo polar crece conforme aumenta la corriente de excitación. La relación entre flujo y corriente de excitación no es lineal, pues a medida que crecen estos valores se puede apreciar claramente en la figura la saturación del núcleo.

### 4.3. LA ARMADURA

En este estudio elemental de la máquina síncrona, recurriremos únicamente a la máquina bipolar de rotor cilíndrico. En la figura 4.6.1 se muestra el rotor cilíndrico, y en su exterior la armadura mas sencilla que puede haber, consistente en una sola espira alojada en ranuras diametralmente opuestas.

**4.3.1. FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA EN UNA ESPIRA.** Aunque la realidad es que la armadura se encuentra en el estator, y el flujo polar es el que gira, para facilitar la deducción de la fuerza electromotriz inducida en un costado de espira  $e_c$ , vamos a suponer un sistema de

coordenadas X-Y fijo al rotor. Si el rotor gira en sentido contrario en las manecillas del reloj, en la figura parece que es el estator el que se mueve según las manecillas del reloj.

Debido a este movimiento relativo, el ángulo  $\theta$  que define la posición de la espira  $a-a'$  comienza a crecer por el lado izquierdo de la figura de acuerdo con la ley:

$$\theta = \omega t$$

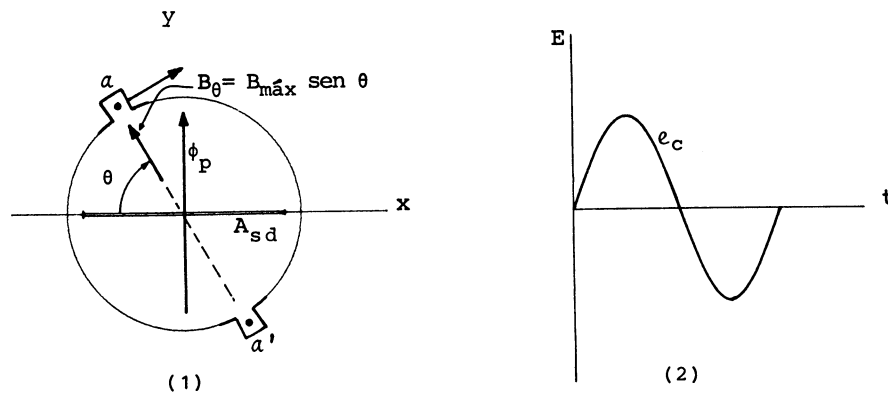


FIGURA 4.6. INDUCCIÓN DE LA FUERZA ELECTROMOTRIZ. (1) MOVIMIENTO RELATIVO ENTRE ESPIRA Y FLUJO. (2) FORMA DE ONDA INDUCIDA.

El eje magnético del rotor  $\phi_p$  se mantiene coincidiendo con el eje de las ordenadas, y la densidad de flujo en la periferia del núcleo tiene una distribución senoidal según:

$$B_\theta = B_{\max} \sin \theta$$

en donde la magnitud  $B_{m\acute{a}x}$  es el cociente entre el flujo total polar y el área de la sección diametral del rotor

$$B_{m\acute{a}x} = \frac{\phi_p}{A_{sd}}$$

Durante el movimiento se va induciendo una fuerza electromotriz en cada costado de la espira. Para el costado  $a$  sería:

$$e_a = B_{\theta} l v_r$$

Sustituyendo las cantidades anteriores y teniendo también en cuenta que la velocidad relativa tangencial es:

$$v_r = \omega r$$

se obtiene:

$$e_a = \frac{l r}{A_{sd}} \phi_p \omega \text{sen } \omega t$$

que es de la forma

$$e_a = E_{a_{m\acute{a}x}} \text{sen } 2\pi f t$$

o sea, una onda senoidal como muestra la figura 4.6.2.

En general, la magnitud de la onda inducida en cualquier costado de la espira es:

$$E_{c_{m\acute{a}x}} = \frac{l r}{A_{sd}} \phi_p \omega$$

y el valor eficaz:

$$E_c = \frac{lr}{\sqrt{2} A_{sd}} \phi_p \omega$$

Si se reúnen las constantes en una sola constante de inducción  $K_i$  :

$$K_i = \frac{lr}{\sqrt{2} A_{sd}}$$

entonces

$$E_c = K_i \phi_p \omega$$

y para la espira completa sería:

$$E_{esp} = 2K_i \phi_p \omega$$

La fuerza electromotriz inducida en esta armadura elemental de una espira es proporcional al flujo polar y a la velocidad angular. Esto mismo puede decirse de embobinados más complejos, puesto que la única diferencia es que la "proporcionalidad" abarca mayor número de constantes.

**4.3.2. EMOBINADOS DE ARMADURAS REALES.** Las dos principales diferencias entre la espira que se analizó anteriormente y los embobinados reales son:

- a) En ocasiones los costados de espira se alojan en ranuras distanciadas menos de  $180^\circ$  eléctricos.
- b) En la práctica se utilizan bobinas de varias espiras y embobinados de más de una bobina, alojados en varios pares de ranuras.

Una breve descripción de estos casos abarca los tres siguientes grupos:

1) **Espira cordal.** Una espira como la que se estudió anteriormente, con sus costados a  $180^\circ$  eléctricos se llama *espira diametral*. Con un poco menos de  $180^\circ$  recibe el nombre de *cordal* o de *paso fraccionario*. En la práctica se usan para amortiguar ciertas corrientes armónicas que aparecen en los sistemas. En la figura 4.7 se muestra que para la posición del rotor en ese instante, ya se indujo el valor máximo en el costado *a*, mientras que aun no sucede en el costado *a'*. Las fuerzas electromotrices no están en fase, y la resultante es menor que para la espira diametral.

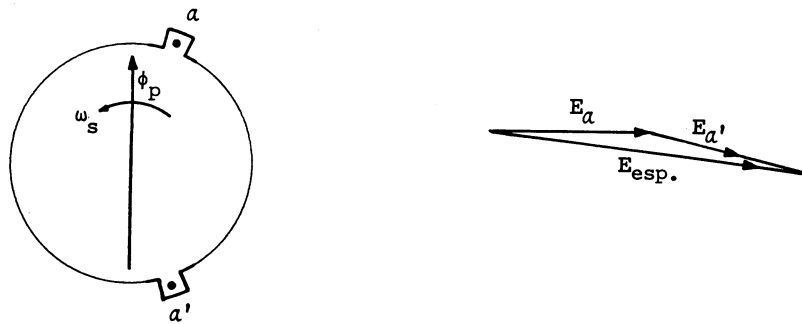


FIGURA 4.7. ESPIRA CORDAL Y SU REPERCUSIÓN EN LA FUERZA ELECTROMOTRIZ RESULTANTE.

Tomando como base la fuerza electromotriz  $E_c$  inducida en un costado de la espira, la resultante  $E_{esp}$  es mas pequeña que  $2E_c$ . A la relación entre estas dos cantidades se le llama **factor de paso**:

$$K_p = \frac{E_{esp}}{2E_c}$$

de manera que

$$E_{esp} = 2K_p E_c$$

Esta fórmula encierra el caso particular de la espira diametral, en que el factor de paso es unitario

$$K_p = 1 \text{ para espira diametral}$$

y es menor que la unidad para espira cordal

$$K_p < 1 \text{ para espira cordal}$$

2) **Bobina de varias espiras.** Una bobina de varias espiras, en vez de tener 2 costados tiene  $Z_b$  costados alojados en las dos ranuras, siendo  $Z_b$  el doble del número de espiras. La fuerza electromotriz resultante en la bobina es:

$$E_b = Z_b K_p E_c$$

3) **Embobinado de varias bobinas.** En la figura 4.8 se observa que al colocar varias bobinas, el flujo polar tiene que pasar sucesivamente (no simultáneamente) por cada una de ellas, por lo que las fuerzas electromotrices inducidas no están en fase. A este tipo de embobinado se le llama *distribuido*.

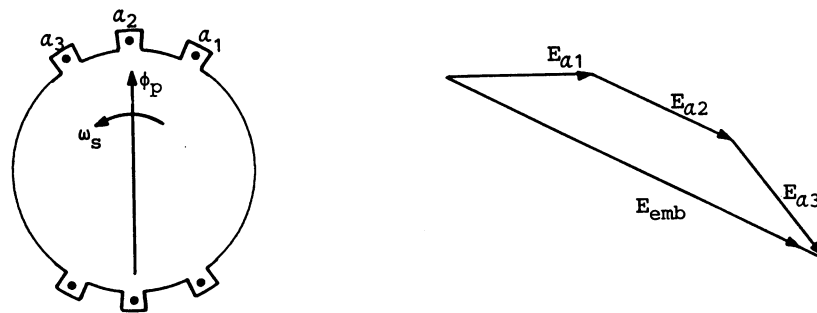


FIGURA 4.8. EMOBINADO DISTRIBUIDO Y SU REPERCUSIÓN EN LA FUERZA ELECTROMOTRIZ RESULTANTE.

Tomando como base la fuerza electromotriz  $E_b$  en una bobina, la fuerza electromotriz  $E_{emb}$  resultante en el embobinado es menor que la suma de las fuerzas electromotrices de  $n$  bobinas,  $nE_b$ . A la relación entre estas dos cantidades se le llama *factor de distribución o factor de banda*.

$$K_b = \frac{E_{emb}}{nE_b}$$

de manera que:

$$E_{emb} = nK_b E_b$$

Sustituyendo la fuerza electromotriz de bobina:

$$E_{emb} = nZ_b K_p K_b E_c$$

y sustituyendo la fuerza electromotriz de costado:

$$E_{emb} = nZ_b K_i K_p K_b \phi \omega$$

Finalmente, reuniendo todas las constantes en una sola:

$$K = nZ_b K_i K_p K_b$$

se obtiene:

$$E_{emb} = K \phi \omega$$

La fuerza electromotriz en un embobinado real es proporcional al flujo polar y a la velocidad angular.

Recordando además, que hay una relación de sincronismo entre la velocidad angular y la frecuencia eléctrica:

$$N = \frac{120f}{P} \quad \text{RPM}$$

$$\omega = \frac{4\pi f}{P} \quad \text{rad/s}$$

la velocidad suele considerarse como una constante más de la máquina, ya que en raras excepciones se tienen máquinas síncronas trabajando a frecuencia y velocidad variables.

Para la generalidad de los casos, se dice entonces que *la fuerza electromotriz inducida en la armadura es proporcional al flujo polar*.

**4.3.3. CURVA DE SATURACIÓN EN VACÍO.** La curva de saturación en vacío es una forma práctica de la curva de magnetización.

La curva de magnetización no se puede obtener en la práctica, ya que el flujo no es una variable medible con la máquina girando en condiciones de trabajo. Si se multiplica la escala vertical de la figura 4.5.2. por la constante global de la máquina y por la velocidad síncrona se obtiene la fuerza electromotriz:

$$E = K\phi_p\omega$$

que es la nueva escala de ordenadas, con la cual el nombre de la gráfica cambia por el de *curva de saturación en vacío*, cuyas coordenadas si son ahora mensurables en el exterior de la máquina.

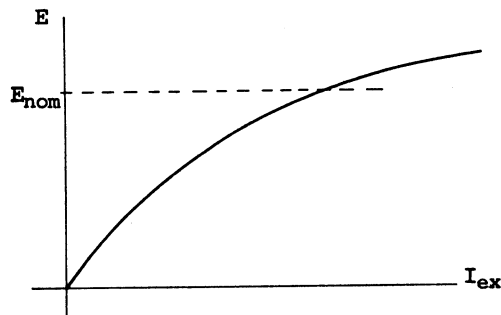


FIGURA 4.9. CURVA DE SATURACIÓN EN VACÍO.



La gráfica es la misma; solo cambia la coordenada vertical. Se observa que se inicia en el origen, y a medida que crece la corriente de excitación, la curva va perdiendo pendiente debido a la saturación del núcleo.

**4.3.4. ARMADURA TRIFÁSICA.** Para inducir un sistema trifásico de fuerzas electromotrices, basta con colocar tres embobinados repartidos a  $120^\circ$  eléctricos entre sí, de modo que las tensiones inducidas quedan defasadas también  $120^\circ$  entre sí. En la figura 4.10.1 se ilustra una armadura trifásica elemental, con solamente tres espiras, y el flujo polar  $\phi_p$  que en el instante dibujado se encuentra en posición vertical, es decir, que ya ha inducido media onda positiva en el costado a de la espira a-a'.

En seguida, en la figura 4.10.2 se ilustran las tres ondas de fuerzas electromotrices, su defasamiento, y la marca (\*) que corresponde al instante ilustrado en la figura anterior.

En los embobinados reales distribuidos, se utiliza toda la circunferencia interior del núcleo de armadura correspondiendo  $1/3$  de las ranuras a cada fase. Toda la circunferencia se encuentra uniformemente ocupada<sup>1</sup>.

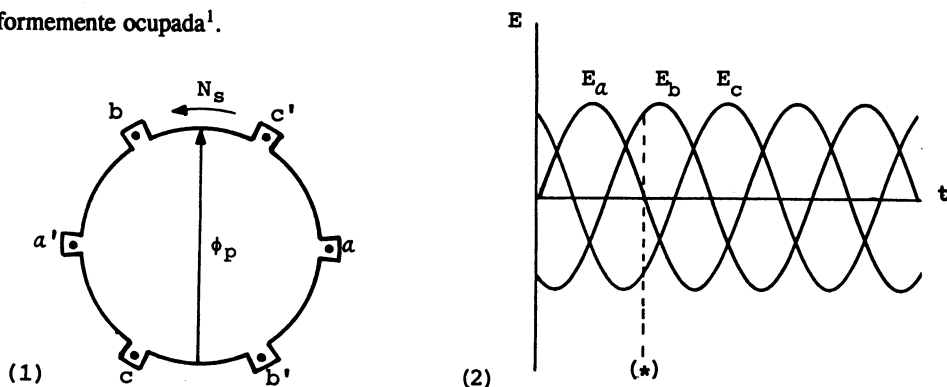


FIGURA 4.10. ARMADURA TRIFÁSICA (1) POSICIÓN DE LAS TRES ESPIRAS. (2) SISTEMA TRIFÁSICO INDUCIDO (\*)INSTANTE QUE CORRESPONDE A LA POSICIÓN DEL FLUJO POLAR EN LA FIGURA (1).

<sup>1</sup> En las máquinas monofásicas, aunque el embobinado sea distribuido no ocupa más del 65 % de la circunferencia.

La armadura de la máquina síncrona no solamente tiene gran parecido con la del motor de inducción, sino que en numerosos casos es la misma; el que sea máquina síncrona o de inducción depende del rotor que se le coloque en su centro.

Las tres espiras en la armadura elemental, o las tres bobinas en una armadura real se pueden conectar entre sí en circuito delta o en circuito estrella, integrándose así el embobinado trifásico.

La curva de saturación en vacío se traza para una de las tres fases.

**4.3.5. LAS CORRIENTES DE ARMADURA.** Para aprovechar las fuerzas electromotrices inducidas en la armadura se conecta una carga en el exterior de la máquina, que produce circulación de corrientes. Consideraremos el caso de una carga balanceada (impedancias idénticas en las tres fases) que tiene la propiedad de producir corrientes de igual magnitud, y defasadas  $120^\circ$  entre sí, de manera semejante a los voltajes que las impulsan.

Fuera de esta restricción, las impedancias de carga pueden considerarse dentro de los casos generalizados, es decir, que contienen elementos resistivos, inductivos y capacitivos, que hacen circular corrientes defasadas con relación a sus respectivos voltajes, un ángulo comprendido entre los límites  $+90^\circ$  (carga capacitiva pura) y  $-90^\circ$  (carga inductiva pura).

Las corrientes deben circular en circuito cerrado, o sea que no solamente pasan por la carga, sino también atraviesan el embobinado de armadura. Una corriente que circula por una bobina, induce en su eje un flujo magnético, que en el caso del embobinado de armadura se le llama *flujo de armadura o reacción de armadura*.

En las figuras 4.11.1 y 4.11.2 se repiten las condiciones de la figura 4.10, mostrando las posiciones de las espiras a-a', b-b' y c-c', el flujo polar (o flujo de rotor), y las fuerzas electromotrices inducidas.

En el tercer dibujo (3), se ilustran las corrientes producidas por una carga balanceada, retrasadas  $30^\circ$  respecto a las fuerzas electromotrices. En el subtema 3.2 del capítulo de motores e inducción se

demostró que estas corrientes producen un flujo de armadura  $\phi_a$  de magnitud constante y que gira a la velocidad síncrona.

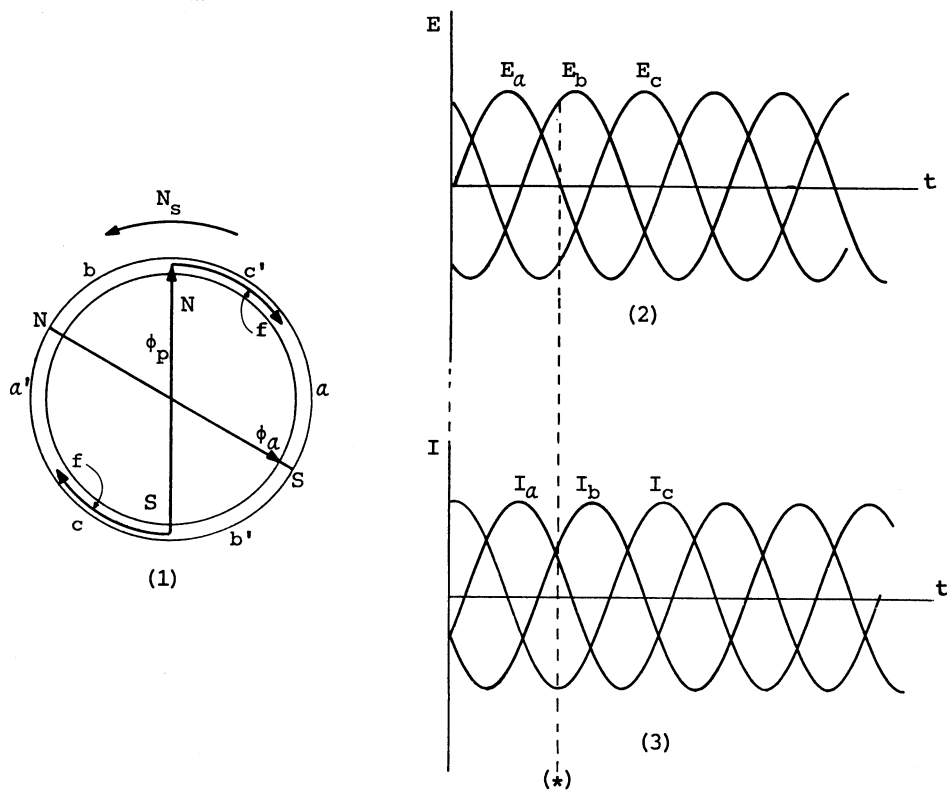


FIGURA 4.11. EFECTO DE LAS CORRIENTES DE ARMADURA (1) POSICIÓN RELATIVA DE FLUJOS Y ESPIRAS DE ARMADURA. (2) Y (3) POSICIÓN RELATIVA EN EL TIEMPO, DE FUERZAS ELECTROMOTRICES Y CORRIENTES. (\*) INSTANTE CORRESPONDIENTE A LA POSICIÓN DE FLUJOS DE LA FIGURA (1).

El instante marcado con (\*) en las ondas de voltaje y de corriente corresponde a la posición vertical del flujo polar  $\phi_p$  en la figura (1). En ese mismo instante, la corriente de la fase c está en su valor máximo negativo, o sea que entra por c y sale por c'; el eje magnético de la espira c-c' está 30°

<sup>2</sup>En el capítulo de motores se consideró la corriente de la fase c como positiva cuando entró por c y salió por c'. En el generador está en sentido inverso, y ésta misma condición es negativa.

abajo de la horizontal, y en esa posición se dibuja el flujo de armadura  $\phi_a$ , que queda a un ángulo de  $120^\circ$  atrás del flujo polar.

El flujo de armadura para esta carga, girará siempre  $120^\circ$  atrás del flujo polar, y ambos a la velocidad síncrona.

El ángulo de  $120^\circ$  en retraso puede expresarse matemáticamente como  $(-90^\circ-30^\circ)$ . La componente de  $90^\circ$  es una constante característica que se analizará en la teoría simplificada de la máquina síncrona donde se plantea la reactancia de flujo de armadura, mientras que la componente de  $30^\circ$  corresponde al ángulo de fase impuesto por la impedancia.

El flujo de armadura produce dos efectos importantes en la máquina:

**1. Par electromagnético.** En la figura 4.11.1 se han marcado las polaridades de los flujos polar y de armadura, considerando polo norte por donde sale el flujo al entrehierro, y polo sur por donde entra nuevamente. La atracción entre el polo norte polar y el polo sur de armadura se ha ilustrado con una fuerza  $f$ , e igualmente para el otro par de polos. Las dos fuerzas  $f$  constituyen el par electromagnético, que en el caso del generador es de sentido contrario al giro del rotor (contrapar), y en el motor, es del mismo sentido que la velocidad angular.

El producto del par por la velocidad angular es la potencia mecánica en la flecha, que en el generador entra a la máquina y se convierte en potencia eléctrica, o en el motor sale de la máquina, como producto de conversión electromecánica de energía.

**2. Distorsión del flujo polar.** En un núcleo no puede haber dos flujos magnéticos, sino que ambos se combinan dando un tercer flujo resultante, como se muestra en la figura 4.12. Esto no anula el razonamiento anterior, pues la combinación de dos componentes en una sola resultante trae asociado un esfuerzo, y sigue existiendo el par electromagnético entre las dos fuentes de fuerza magnetomotriz.

El primer dibujo (1) de la figura 4.12 se ilustra un caso semejante al de las figuras 4.10 y 4.11 es decir, la carga tiene un ángulo de fase atrasado  $(-\theta)$  y el flujo de armadura se encuentra a un ángulo

$(-90^\circ - \Theta)$  respecto al flujo polar. El flujo resultante no coincide con el polar, y por eso se dice que lo distorsiona.

En el segundo dibujo (2), la carga tiene un ángulo de fase adelantado  $(+\Theta)$ , y el flujo de armadura está a  $(-90^\circ + \Theta)$  del flujo polar.

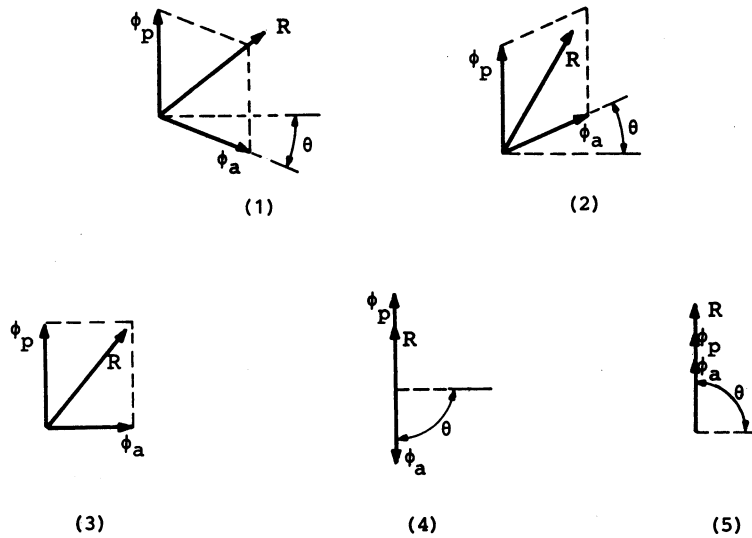


FIGURA 4.12. DISTORSIÓN DE LA REACCIÓN DE ARMADURA. (1) FACTOR DE POTENCIA ATRASADO (2) FACTOR DE POTENCIA ADELANTADO (3) CARGA RESISTIVA PURA (4) CARGA INDUCTIVA PURA (5) CARGA CAPACITIVA PURA.

En seguida aparecen tres casos de cargas puras (un sólo elemento). En el tercer dibujo (3) la carga es resistiva, el ángulo de fase  $\Theta$  es cero y el flujo de armadura está a  $90^\circ$  del flujo polar. Es el mejor aprovechamiento de la conversión de energía, pues el par electromagnético está en su mejor valor, y el factor de potencia es unitario.

En el cuarto dibujo (4), la carga es inductiva, el ángulo de fase  $\Theta$  es de  $-90^\circ$  y el flujo de armadura se encuentra en oposición al flujo polar (*demagnetizante*). No hay conversión de energía, puesto que el par electromagnético es nulo y el factor de potencia es cero.

En el quinto dibujo (5), la carga es capacitiva, el ángulo de fase  $\theta$  es de  $+90^\circ$  y el flujo de armadura se encuentra en el mismo sentido del polar (*magnetizante*). Tampoco existe conversión de energía, puesto que el par electromagnético es nulo y el factor de potencia es cero.

En los cinco dibujos se puede observar también que la magnitud de las flechas no corresponde a las reglas de la suma vectorial, y esto se debe al fenómeno de saturación, que unas veces limita la magnitud de la resultante y otras, la de las componentes.

La fuerza electromotriz real inducida en la armadura, se debe al flujo resultante. La reacción de armadura no se puede compensar como se hace con las máquinas de corriente directa.

#### 4.4. TEORÍA SIMPLIFICADA DE LA MÁQUINA SÍNCRONA

El análisis de respuesta de las máquinas se lleva a cabo con auxilio de ecuaciones en las que intervienen variables y parámetros. Una variable como es la fuerza electromotriz en función del flujo resultante plantea una complejidad muy poco práctica (particularmente en las máquinas de polos salientes), al grado que se ha recurrido como primer paso, a una teoría simplificada, que será la que se utilizará en este estudio. Sus resultados son poco precisos en relación al comportamiento real, pero se puede considerar una aproximación aceptable.

La teoría simplificada se basa en las siguientes características:

a) **Máquina de rotor cilíndrico.** Se ha estudiado que el flujo de armadura, o reacción de armadura puede adoptar cualquier posición entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$  respecto al eje polar (que es el que ocupa el flujo polar). Si el entrehierro es uniforme, la reluctancia al flujo de armadura es constante para cualquier posición, y se tendrá la misma magnitud de flujo siempre que se conserve igual la intensidad de corriente.

b) **Núcleos no saturables.** El flujo de armadura se considerará siempre proporcional a la corriente.

c) **Operación independiente de las componentes.** Se supondrá que el flujo polar no se combina con el de armadura. Cada uno induce en la armadura fuerzas electromotrices que se manejarán separadamente; la inducida por el flujo polar se considerará propiamente como la fuerza electromotriz de la máquina, mientras que la inducida por el flujo de armadura como una tensión cuyas características se analizarán a continuación.

**4.4.1. TENSIÓN INDUCIDA POR EL FLUJO DE ARMADURA.** La característica principal de esta tensión es que se encuentra en cuadratura con la corriente. Para demostrar esto, supóngase en primer lugar, una máquina con carga resistiva, como en la figura 4.13. La corriente está en fase, es decir, en la misma posición con el voltaje.

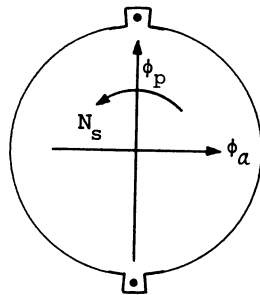


FIGURA 4.13. FUERZAS ELECTROMOTRICES INDUCIDAS POR EL FLUJO POLAR Y EL FLUJO DE ARMADURA.

Si el flujo polar está cruzando en este momento una espira como la que aparece en el dibujo, corresponderá al valor máximo de la onda de fuerza electromotriz. También la corriente estará en su valor máximo, mientras que el flujo de armadura está  $90^\circ$  atrás. Para que la tensión inducida por flujo de armadura en la misma espira, alcance su valor máximo, hay que esperar el tiempo correspondiente a  $90^\circ$  eléctricos.

Si la carga no fuera puramente resistiva, la corriente estaría a un ángulo  $\pm\theta$  respecto a la fuerza electromotriz, y el flujo de armadura a un ángulo  $(-90^\circ \pm \theta)$  respecto al flujo polar, es decir, que de

todas maneras la tensión inducida estará en cuadratura con la corriente, aunque no con la fuerza electromotriz.

**4.4.2. REACTANCIA DE FLUJO DE ARMADURA.** La tensión inducida es proporcional al flujo de armadura; el flujo a su vez, es proporcional a la corriente de armadura, por lo tanto, la tensión es proporcional a la corriente.

En la teoría de circuitos eléctricos, cuando aparece una tensión entre los extremos de un elemento, proporcional a la corriente y en cuadratura con ella, se dice que ese elemento es una reactancia. La constante de proporcionalidad entre la tensión inducida y la corriente, la llamaremos *reactancia de flujo de armadura*.

$$E_{fa} = X_{fa} I_a$$

La tensión inducida por el flujo de armadura se manejará en la teoría de la máquina síncrona, como la diferencia de potencial en los extremos de una reactancia.

**4.4.3. REACTANCIA DE DISPERSIÓN, REACTANCIA DE FLUJO DE ARMADURA Y REACTANCIA SÍNCRONA.** El embobinado de la máquina, como todo embobinado de corriente alterna, tiene una reactancia propia debida al flujo de dispersión (líneas de flujo en el aire, que no recorren el circuito ferromagnético). A esta reactancia se le llama reactancia de dispersión

$$X_{dis} .$$

Otra reactancia del embobinado es la debida al flujo de armadura  $X_{fa}$ , que se definió en el subtema anterior.

La reactancia total será la suma de las reactancias de dispersión y de flujo de armadura, a la que se da el nombre de **reactancia síncrona**  $X_s$  .

$$X_s = X_{dis} + X_{fa}$$



La componente más grande es la debida al flujo de armadura. En máquinas de pequeña capacidad, la reactancia síncrona es alrededor de diez veces la resistencia de armadura, y en máquinas grandes llega a ser mil veces el valor de la resistencia.

**4.4.4. CIRCUITO EQUIVALENTE DE LA ARMADURA.** El circuito con el cual se analizará la respuesta de la máquina síncrona incluye tres elementos:

- a) La fuerza electromotriz inducida por el flujo polar  $E$ .
- b) La resistencia de armadura  $r_a$ .
- c) La reactancia síncrona  $X_s$ .

Estos elementos corresponden a una de las fases, y el circuito como el que se muestra en la figura 4.14 es por fase.

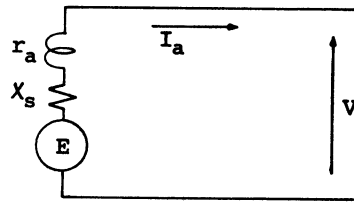


FIGURA 4.14. CIRCUITO EQUIVALENTE.

Cuando la máquina trabaja como generador, la fuerza electromotriz y el voltaje externo guarda la relación:

$$V = E - r_a I_a - X_s I_a$$

en donde todos los términos son cantidades vectoriales. Para plantear el diagrama de fasores es más práctico usar la operación suma, de modo que la ecuación se convierte en:

$$E = V + r_a I_a + X_s I_a$$

con la ventaja de que el voltaje externo que es la cantidad mensurable, se toma como fasor de apoyo (horizontal).

El fasor  $r_a I_a$  debe ser paralelo a la corriente y el fasor  $X_s I_a$  en cuadratura. Dependiendo de la posición de la corriente, se forman los diagramas de fasores mostrados en la figura 4.15.

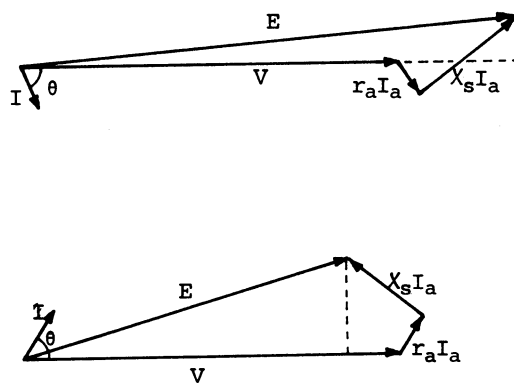


FIGURA 4.15. DIAGRAMAS DE FASORES DEL CIRCUITO EQUIVALENTE (1) PARA FACTOR DE POTENCIA ATRASADO  
(2) PARA FACTOR DE POTENCIA ADELANTADO.

El primer diagrama (1) corresponde a *corriente atrasada*. La línea punteada forma un triángulo rectángulo, en el que se puede aplicar el teorema de Pitágoras de la siguiente manera:

$$E^2 = (V + r_a I_a \cos\theta + X_s I_a \operatorname{sen}\theta)^2 + (X_s I_a \cos\theta - r_a I_a \operatorname{sen}\theta)^2$$

En el segundo diagrama (2), *la corriente esta adelantada*. La línea punteada define el triángulo rectángulo, y el teorema de Pitágoras sería:

$$E^2 = (V + r_a I_a \cos\theta - X_s I_a \operatorname{sen}\theta)^2 + (X_s I_a \cos\theta + r_a I_a \operatorname{sen}\theta)^2$$

Ambas fórmulas se parecen bastante, pues la única diferencia es el cambio de dos signos.

Obsérvese que en el factor de potencia adelantado, el voltaje externo puede ser mayor que la fuerza electromotriz, sin que el trabajo de la máquina deje de ser como generador. La característica distintiva de una máquina síncrona trabajando como generador es que el voltaje externo se atrasa son respecto a la fuerza electromotriz.

#### 4.5. RESPUESTA DE LOS GENERADORES SÍNCRONOS

Un generador síncrono puede trabajar bajo dos condiciones diferentes de carga:

- a) Alimentando a una carga aislada como en el caso de una planta de emergencia.
- b) Aportando energía a un sistema infinito, como lo hacen las diversas plantas generadoras de un país.

Su comportamiento adopta características particulares en cada caso, que se expondrán a continuación.

**4.5.1. GENERADOR ALIMENTANDO A UNA CARGA AISLADA.** Existen ciertos consumidores de energía eléctrica, como hospitales, centros de convenciones, hoteles, etcétera, para los que es sumamente importante la continuidad del servicio. Ante cualquier interrupción, disponen de una planta de emergencia que arranca en ese momento y se encarga de continuar suministrando el servicio mientras dura la falla.

Un interruptor de transferencia desconecta la instalación del edificio del sistema de suministro y la conecta a la planta generadora, que trabaja alimentando esta carga aislada. Queda a merced de la planta, la calidad del servicio de emergencia (el mantenimiento del nivel de voltaje y de la frecuencia).

#### **EJEMPLO 4.1**

El generador síncrono de una planta de emergencia tiene las siguientes características:

**75 KVA**

**220/127 V**

Conexión de armadura en estrella

Resistencia de fase de armadura: 0.01  $\Omega$

Reactancia síncrona: 0.18  $\Omega$

Se ajusta en vacío a su voltaje nominal y su corriente de excitación permanecerá constante.

- a) Calcular su voltaje externo cuando trabaja a corriente de plena carga y factor de potencia 0.6 atrasado.
- b) Lo mismo que en el inciso anterior, pero con factor de potencia 0.866 atrasado.
- c) Igual que el inciso a) pero con factor de potencia 0.8 adelantado.
- d) Calcular la potencia aprovechable y el por ciento de regulación bajo las condiciones de carga de los incisos a), b) y c).

#### **SOLUCIÓN**

La corriente de plena carga es:

$$I = \frac{75000}{\sqrt{3} \times 220} = 196.824 \text{ A}$$

a) A factor de potencia 0.6 atrasado.

La fórmula para factor de potencia atrasado es:

$$E^2 = (V + r_a I_a \cos \theta + X_s I_a \operatorname{sen} \theta)^2 + (X_s I_a \cos \theta - r_a I_a \operatorname{sen} \theta)^2$$

en donde:  $E = 127 \text{ V}$

$V = ?$

$r_a = 0.01$

$X_s = 0.18$

$I_a = 196.824 \text{ A}$

$\cos \theta = 0.6$

$\operatorname{sen} \theta = 0.8$

Despejando V:

$$V = \sqrt{E^2 - (X_s I_a \cos \theta - r_a I_a \operatorname{sen} \theta)^2} - (r_a I_a \cos \theta + X_s I_a \operatorname{sen} \theta)$$

$$V = \sqrt{127^2 - (0.18 \times 196.824 \times 0.6 - 0.01 \times 196.824 \times 0.8)^2} -$$

$$- (0.01 \times 196.824 \times 0.6 + 0.18 \times 196.824 \times 0.8)$$

$V = 95.94 \text{ V}$

Entre líneas:  $V_L = 166.17 \text{ V}$

b) A factor de potencia 0.866 atrasado.

El planteamiento es igual que para la respuesta a), solamente que:

$$\cos \theta = 0.866$$

$$\text{sen } \theta = 0.5$$

Sustituyendo:

$$V = \sqrt{127^2 - (0.18 \times 196.824 \times 0.866 - 0.01 \times 196.824 \times 0.5)^2 - (0.01 \times 196.824 \times 0.866 + 0.18 \times 196.824 \times 0.5)}$$

$$V = 104.06 \text{ V}$$

Entre líneas:  $V_L = 180.23 \text{ V}$

c) A factor de potencia 0.8 adelantado.

La fórmula en este caso es:

$$E^2 = (V + r_a I_a \cos \theta - X_s I_a \text{sen} \theta)^2 + (X_s I_a \cos \theta + r_a I_a \text{sen} \theta)^2$$

Despejando:

$$V = \sqrt{E^2 - (X_s I_a \cos \theta + r_a I_a \text{sen} \theta)^2} - (r_a I_a \cos \theta - X_s I_a \text{sen} \theta)$$

Sustituyendo:

$$V = \sqrt{127^2 - (0.18 \times 196.824 \times 0.8 + 0.01 \times 196.824 \times 0.6)^2} - (0.01 \times 196.824 \times 0.8 - 0.18 \times 196.824 \times 0.6)$$

$$V = 143.2 \text{ V}$$

Entre líneas:  $V_L = 248 \text{ V}$

d) Potencia aprovechable y por ciento de regulación.

En la respuesta a):

$$P=3 \times 95.94 \times 196.824 \times 0.6 = 33989 \text{ W}$$

$$\%Reg = \frac{127 - 95.94}{127} \times 100 = 24.25$$

En la respuesta b):

$$P=3 \times 104.06 \times 196.824 \times 0.866 = 53211 \text{ W}$$

$$\%Reg = \frac{127 - 104.06}{127} \times 100 = 18.06$$

En la respuesta c):

$$P=3 \times 143.2 \times 196.824 \times 0.8 = 67644 \text{ W}$$

$$\%Reg = \frac{127 - 143.2}{127} \times 100 = -12.75$$

#### COMENTARIOS

Como se puede observar, la metodología de análisis que se ha seguido para la máquina síncrona es prácticamente la misma que se usó para los transformadores. Los resultados obtenidos también guardan cierta similitud, aunque las regulaciones de voltaje dan la apariencia de ser exageradas en este problema.

**Regulación.** Las regulaciones de la máquina síncrona parecen enormes comparadas con las de los transformadores o los generadores de C.D. Esto se debe a la gran influencia distorsionante de la reacción de armadura, que se refleja en una reactancia síncrona relativamente grande.

El factor de potencia tiene marcada influencia en la regulación. Cuando es pequeño y retrasado, la pérdida de voltaje es grande, mientras que a altos factores de potencia la pérdida de voltaje disminuyen.

El factor de potencia adelantado es peligroso, porque hace subir el voltaje por encima del valor nominal, causando daño a las cargas conectadas.

**Potencia aprovechable.** Debido a las grandes regulaciones, la potencia aprovechable en este ejemplo es muy pequeña. A factor de potencia 0.6 atrasado solo se aprovecha el 45% de la capacidad de la máquina; a factor 0.866, el 71% y a factor 0.8 adelantado, el 90%.

No obstante el sobrevoltaje a factor de potencia adelantado, el aprovechamiento es menor que la capacidad de la máquina, y como ya se comentó, es peligroso para las cargas.

**La teoría simplificada.** Una de las deficiencias más notorias de la teoría simplificada es no considerar la saturación de los núcleos, lo cual se refleja en regulaciones de voltaje más grandes que las reales. Sin embargo, aunque los resultados de este problema parecen exagerados, no están muy lejos de la realidad.

**Reguladores e voltaje.** En el enunciado del problema se insistió en que la máquina trabajaría con corriente de excitación constante, sin embargo, en la práctica no sucede así.

Los generadores de las plantas están equipados con reguladores de voltaje que se encargan de aumentar o disminuir la corriente de excitación a fin de mantener el voltaje externo de la máquina lo más cercano posible al valor nominal. No obstante es preferible un buen factor de potencia en la carga, lo que hace más eficiente el trabajo del regulador.

Con estas dos características, el aprovechamiento del generador se acerca bastante a su capacidad.

**Frecuencia.** En el problema anterior no se tocó para nada el tema de la frecuencia. Esto es en realidad un asunto de carácter mecánico, y el motor de la planta también debe estar equipado con regulador de velocidad, a fin de mantener velocidad y frecuencia en los valores adecuados.



**4.5.3. GENERADOR SÍNCRONO ACOPLADO A UN SISTEMA INFINITO.** Una red eléctrica que distribuye energía a varias ciudades y centros industriales, y frecuentemente a un país entero, está a su vez alimentada por decenas o cientos de plantas generadoras. El volumen de energía en el sistema es tan grande comparado con la capacidad de cualquiera de los generadores, que por eso se le da el nombre de *sistema infinito*.

Un generador conectado (también se suele decir acoplado o sincronizado) a este sistema, solamente aporta la parte de energía que le corresponde, pero no influye sobre su voltaje ni su frecuencia. Por el contrario, el generador se ve obligado a trabajar al mismo voltaje y frecuencia del sistema.

Bajo estas circunstancias, los principales aspectos de control serían dos:

a) **Carga del generador.** Se dice que el generador se sincroniza con el sistema, porque su armadura recibe la frecuencia del mismo, y por tanto, su rotor queda obligado a girar a la velocidad síncrona. Para suministrarle energía mecánica por la flecha, y que la convierta en energía eléctrica aportada al sistema, es necesario agregarle un par a la velocidad que ya está determinada.

La potencia mecánica que entra por la flecha depende entonces, de la magnitud del par, y éste a su vez, se controla con la alimentación del motor (generalmente algún tipo de turbina) que impulsa al generador.

b) **Factor de potencia.** En el generador que alimenta a una carga aislada como se vio en el inciso 4.5.2, el factor de potencia no se puede controlar porque lo determina el tipo de carga.

En el generador acoplado a un sistema infinito, el factor de potencia por el contrario, es una variable que se controla fácilmente mediante la corriente de excitación. El aumento o disminución de la corriente de excitación repercute en el aumento o disminución de la fuerza electromotriz.

En la figura 4.16 se puede apreciar que si el voltaje  $V$  permanece constante, ya que lo determina el sistema infinito, al variar la fuerza electromotriz  $E$  hace girar sobre su origen a la escuadra formada por los fasores  $r_a I_a$  y  $X_f I_a$ .

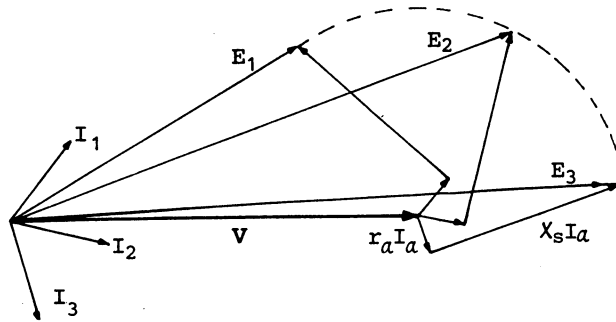


FIGURA 4.16. VARIACIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA.

Como la corriente debe ser paralela a  $r_a I_a$ , se tiene que cuando la fuerza electromotriz es pequeña como  $E_1$ , su respectiva corriente  $I_1$  está adelantada respecto al voltaje  $V$ ; cuando la fuerza electromotriz crece al valor  $E_2$ , la corriente  $I_2$  está ligeramente atrasada, y cuando la fuerza electromotriz adquiere un gran valor como  $E_3$ , la corriente  $I_3$  está considerablemente atrasada.

**4.5.3. SINCRONIZACIÓN.** En la operación del sistema infinito es necesario acoplar y desacoplar generadores en determinados intervalos, debido a que la demanda de energía varía según las diferentes horas del día, y también debido a otros factores, como disturbios, mantenimiento de las unidades, etc.

La maniobra de acoplamiento o sincronización de un generador con el sistema, requiere de ciertas precauciones que se deben tomar, siguiendo los pasos que se describen a continuación:

1. Arrancar el generador y hacerle girar lo más cerca posible de su velocidad síncrona. No debe ser exactamente el valor síncrono porque no habría el momento de coincidencia que se requiere en el paso 4.

2. Excitar el generador hasta obtener una fuerza electromotriz igual al voltaje del sistema.
3. Verificar que la secuencia de fases del generador sea la misma del sistema. Esto es de suma importancia cuando se instala el generador, puesto que en acoplamientos posteriores ya quedan fijas las conexiones en el interruptor.
4. Puesto que la frecuencia generada no es exactamente igual a la del sistema, las ondas de fuerza electromotriz y de voltaje tendrán momentos de coincidencia y de oposición. Es necesario detectar el momento de coincidencia para cerrar el interruptor.
5. Mediante la alimentación del motor, dar la carga adecuada al generador.
6. Ajustar el factor de potencia con el control de la corriente de excitación.

En la figura 4.17 se muestra en el primer dibujo (1), un diagrama simplificado de los elementos para sincronización.

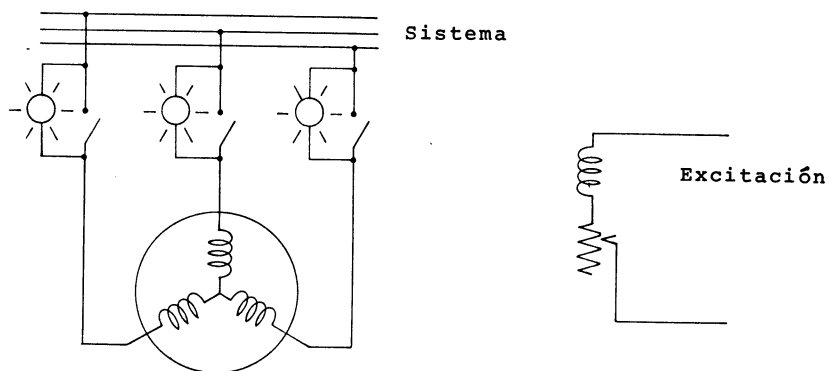


FIGURA 4.17. SINCRONIZACIÓN. (1) DIAGRAMA DE CONEXIONES

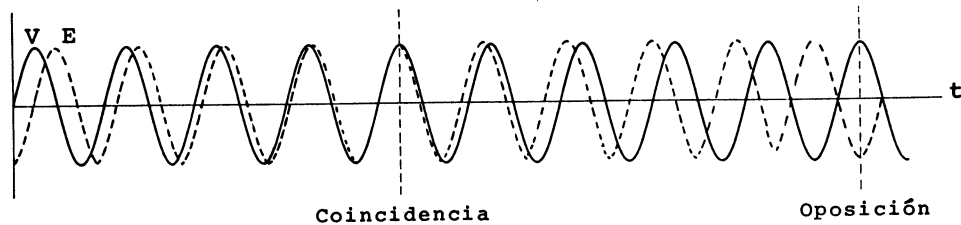


FIGURA 4.17. SINCRONIZACIÓN. (2) MOMENTOS DE COINCIDENCIA Y OPOSICIÓN.

Un método muy sencillo para verificar la secuencia de fases y detectar el momento de coincidencia, es el de las tres lámparas que aparecen entre los extremos de cada línea del interruptor. Con el interruptor abierto, se puede presentar alguno de los tres siguientes casos:

1. Las tres lámparas prenden y apagan simultáneamente. Esta es la señal de que las secuencias de fases están correctas.
2. Las lámparas van prendiendo y apagando alternadamente. Es señal de que las secuencias de fases arriba y abajo del interruptor están invertidas.
3. Las lámparas quedan permanentemente a una cierta intensidad. Sucede cuando la máquina tiene exactamente la velocidad síncrona, y no se puede acoplar por no llegar un momento de coincidencia de ondas.

En el segundo dibujo (2) se muestran dos ondas cuyas frecuencias no son idénticas. La línea continua corresponde al voltaje del sistema, y la línea punteada a la fuerza electromotriz de la máquina, en una de las tres líneas. El desplazamiento de las ondas muestra un momento de coincidencia y uno de oposición. En la práctica las frecuencias deben ser tan parecidas, que la coincidencia se prolongue por algunos cientos de ciclos, es decir que el momento de coincidencia es de algunos segundos, o hasta minutos.

El momento de coincidencia se manifiesta cuando las lámparas están apagadas, y es cuando se debe cerrar el interruptor.

#### 4.6. EL MOTOR SÍNCRONO

El trabajo como motor corresponde a una máquina síncrona conectada a un sistema infinito, que recibe de éste, energía eléctrica para transformarla en energía mecánica que entrega por su flecha.

El análisis de comportamiento de la armadura de motor síncrono, energizada por el sistema es exactamente el mismo que para el motor de inducción, (recuérdese que es la misma armadura) y puede observarse con detalle en el subtema 3.2. La armadura produce un flujo de magnitud constante y que gira a la velocidad síncrona.

El flujo de armadura es el mismo que se le llama *reacción de armadura* en el caso de los generadores, sólo que en los motores no se trata propiamente de una reacción, sino de una acción, puesto que es el flujo motor. Sin embargo, no se usan en la terminología de la máquina, las palabras **acción de armadura**.

Siendo el flujo de armadura el que produce el movimiento, es el que arrastra al flujo polar, por lo que este debe ir atrás del primero. La figura 4.13 que muestra la posición de los flujos para la teoría simplificada del generador, se convierte en la figura 4.18 que se presenta aquí con el flujo de armadura adelante del polar.

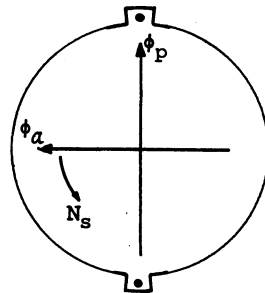


FIGURA 4.18. POSICIÓN RELATIVA DE LOS FLUJOS EN LA MODALIDAD DE MOTOR.

Recuérdese que en la figura 4.13 y por consiguiente en la 4.15 aparece una sola espira de armadura, por simplificar el dibujo y el análisis, pero en realidad están presentes las tres fases.

Salvo la diferencia en la posición relativa de los flujos, las demás consideraciones de la teoría simplificada del generador, son validas para el trabajo como motor, o sea que se tienen dos variables, la fuerza electromotriz y el voltaje externo, y dos parámetros, la resistencia de armadura y la reactancia síncrona.

La fuerza electromotriz, igual que en el trabajo como generador, depende de la corriente de excitación, y la relación entre ambas está dada por la curva de saturación en vacío.

El circuito equivalente aparece en la figura 4.19.

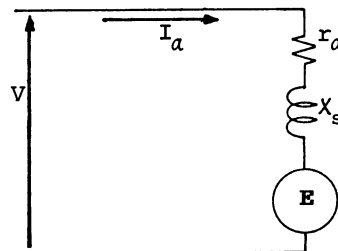


FIGURA 4.19. CIRCUITO EQUIVALENTE DEL MOTOR SÍNCRONO.

La diferencia con el circuito equivalente del motor está en la dirección de la corriente. Esto implica que ahora la fuerza electromotriz es igual al voltaje externo menos las pérdidas en la resistencia de armadura y en la reactancia síncrona.

$$E = V - r_a I_a - X_s I_a$$

Como esta ecuación es vectorial, para el trazo de los fasores que la representan habría mayor facilidad si se convierte en una suma:

$$V = E + r_a I_a + X_s I_a$$

en donde el fasor de apoyo (el que se dibuja en posición horizontal), es el voltaje externo, y los fasores  $r_a I_a$  y  $X_s I_a$  deben ir respectivamente paralelo y en cuadratura con la corriente. Según la corriente sea atrasada o adelantada, se generan los dos diagramas fasoriales que aparecen en la figura 4.20.

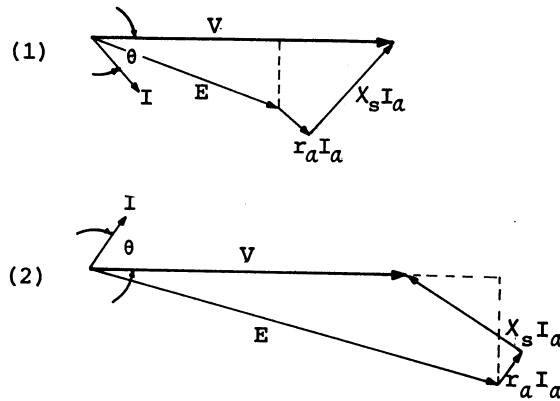


FIGURA 4.20. DIAGRAMAS DE FASORES DEL CIRCUITO EQUIVALENTE (1) PARA FACTOR DE POTENCIA RETRASADO  
(2) PARA FACTOR DE POTENCIA ADELANTADO.

Las líneas punteadas definen triángulos rectángulos en los que las fuerzas electromotrices constituyen las hipotenusas. Aplicando el teorema de Pitágoras para los dos casos se tiene:

Para factor de potencia atrasado:

$$E^2 = (V - X_s I_a \text{sen} \theta - r_a I_a \text{cos} \theta)^2 + (X_s I_a \text{cos} \theta - r_a I_a \text{sen} \theta)^2$$

Para factor de potencia adelantado:

$$E^2 = (V + X_s I_a \operatorname{sen}\theta - r_a I_a \cos\theta)^2 + (X_s I_a \cos\theta + r_a I_a \operatorname{sen}\theta)^2$$

Las fórmulas son bastante parecidas, pues solamente difieren dos signos.

**4.6.1. EL MOTOR SÍNCRONO COMO MÁQUINA CONECTADA A UN SISTEMA INFINITO.** El comportamiento de un motor síncrono es semejante al del generador conectado a un sistema infinito, el cual determina el voltaje y la frecuencia a que debe trabajar la máquina.

En vista de que la frecuencia del sistema es constante, el motor síncrono es una máquina de velocidad estrictamente constante.

En cuanto al voltaje, si se toman los dos dibujos de la figura 4.20 y se hacen coincidir en uno solo en el que el fasor  $V$  es el mismo, se observa que el acortamiento o alargamiento de la fuerza electromotriz hace girar sobre su extremo a la escuadra formada por los fasores  $r_a I_a$  y  $X_s I_a$ .

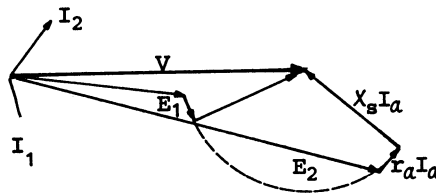


FIGURA 4.21. VARIACIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA.



Cuando la fuerza electromotriz es pequeña ( $E_1$ ), el fasor  $r_a I_a$  está inclinado hacia abajo, y su respectiva corriente  $I_1$  que debe ser paralela también está inclinada hacia abajo, es decir, retrasada.

Si la fuerza electromotriz crece hasta el valor  $E_2$ , ahora el fasor  $r_a I_a$  se inclina hacia arriba, motivando que su respectiva corriente  $I_2$  sea adelantada.

Como la fuerza electromotriz se controla con la corriente de excitación, se deduce que *el factor de potencia de la máquina síncrona se puede controlar a voluntad mediante la corriente de excitación.*

La fuerza electromotriz puede adquirir una magnitud superior a la del voltaje aplicado, sin que por ello deje de trabajar la máquina como motor. La característica fundamental del trabajo como motor es que la fuerza electromotriz está atrasada con respecto al voltaje aplicado.

**4.6.2. CAPACITOR SÍNCRONO.** Un motor lo suficientemente grande como para influir apreciablemente en la carga de una industria, puede hacerse trabajar a factor de potencia adelantado, con lo cual se corrige el bajo factor de potencia retrasado de otros equipos. El motor está desempeñando además de su propio trabajo, la función de un banco de capacitores.

A un motor síncrono trabajando en estas circunstancias se le llama *capacitor síncrono*. Como el grado de adelanto se puede controlar con la corriente de excitación, tiene la ventaja sobre los bancos de capacitores estáticos, de que su capacitancia es variable.

Un motor que se desee trabajar como capacitor síncrono debe tener su embobinado de excitación lo suficientemente reforzado como para soportar la alta corriente que se necesita, sin que su calentamiento supere el límite de seguridad.

### **EJEMPLO 4.2**

Una máquina igual a la de la planta de emergencia del ejemplo 4.1 se va a utilizar como motor síncrono. Por facilidad se repiten aquí sus características:

**75 KVA**

**220/127 V**

**Conexión de armadura en estrella**

**Resistencia de fase de armadura: 0.01  $\Omega$**

**Reactancia síncrona: 0.18  $\Omega$**

**Trabaja con una carga real constante de 48 KW**

- a) Calcular su corriente y fuerza electromotriz cuando su factor de potencia adopta los siguientes valores: 0.5 atrás, 0.866 atrás, 1, 0.866 adelante, 0.5 adelante.
- b) ¿Puede trabajar en régimen permanente a cualquiera de los factores de potencia de la pregunta a)? En caso de respuesta negativa ¿cuál sería el mínimo factor de potencia permisible?
- c) Trazar una gráfica cuya abscisa contenga las fuerzas electromotrices y la ordenada las corrientes de la respuesta a).

### **SOLUCIÓN**

a) **Cálculo de las corrientes.**

De la fórmula de potencia real

$$P = \sqrt{3} VI \cos\theta$$

se despeja la corriente

$$I = \frac{P}{\sqrt{3} V \cos\theta}$$

Para factor de potencia 0.5:

$$I = \frac{48000}{\sqrt{3} \times 220 \times 0.5} = 251.934 \text{ A}$$

Para factor de potencia 0.866:

$$I = \frac{48000}{\sqrt{3} \times 220 \times 0.866} = 145.458 \text{ A}$$

Para factor de potencia unitario:

$$I = \frac{48000}{\sqrt{3} \times 220 \times 1} = 125.967 \text{ A}$$

Cálculo de las fuerzas electromotrices.

A factor de potencia 0.5 atrasado:

$$I = 251.934$$

$$\cos \theta = 0.5$$

$$\text{sen } \theta = 0.866$$

Como ya se dedujo, la fórmula es:

$$E^2 = (V - X_s I_a \text{sen} \theta - r_a I_a \cos \theta)^2 + (X_s I_a \cos \theta - r_a I_a \text{sen} \theta)^2$$

Sustituyendo:

$$E^2 = (127 - 0.18 \times 251.934 \times 0.866 - 0.01 \times 251.934 \times 0.5)^2 + \\ + (0.18 \times 251.934 \times 0.5 - 0.01 \times 251.934 \times 0.866)^2$$

de donde:

$$E = 88.864 \text{ V}$$

De manera semejante, para factor de potencia *0.866 atrasado* se sustituyen las cantidades.

$$I=145.458$$

$$\cos \theta=0.866$$

$$\text{sen } \theta=0.5$$

y se obtiene:

$$E=114.767 \text{ V}$$

Para factor de potencia unitario, se sustituyen en cualquiera de las dos fórmulas (para atraso o adelanto) los valores:

$$I=125.967$$

$$\cos \theta=1$$

$$\text{sen } \theta=0$$

y se obtiene:

$$E=127.768 \text{ V}$$

*A factor de potencia 0.866 adelantado:*

$$I=145.458$$

$$\cos \theta=0.866$$

$$\text{sen } \theta=0.5$$

y la fórmula correspondiente es:

$$E^2=(V+X_s I_a \text{sen} \theta - r_a I_a \cos \theta)^2 + (X_s I_a \cos \theta + r_a I_a \text{sen} \theta)^2$$

Sustituyendo:

$$E^2 = (127 + 0.18 \times 145.458 \times 0.5 - 0.01 \times 145.458 \times 0.866)^2 + \\ + (0.18 \times 145.458 \times 0.866 + 0.01 \times 145.458 \times 0.5)^2$$

de donde:

$$E = 140.789 \text{ V}$$

De manera semejante, para factor de potencia 0.5 adelantado se sustituyen los valores:

$$I = 251.934$$

$$\cos \theta = 0.5$$

$$\text{sen } \theta = 0.866$$

y se obtiene

$$E = 166.873 \text{ V}$$

Los resultados se reúnen en el siguiente cuadro:

Factor de potencia	Corriente	Fuerza electromotriz
0.5 atrás	251.934 A	88.864 V
0.866 atrás	145.458 A	114.767 V
1	125.967 A	127.789 V
0.866 adelante	145.458 A	140.789 V
0.5 adelante	251.934 A	166.873 V

**b) Límite de seguridad**

De la fórmula de potencia aparente

$$S = \sqrt{3} VI$$

se despeja la corriente

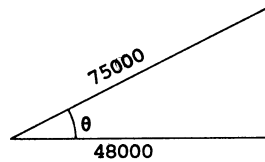
$$I = \frac{S}{\sqrt{3} V}$$

y se obtiene la corriente nominal

$$I = \frac{75000}{\sqrt{3} \times 220} = 196.824 \text{ A}$$

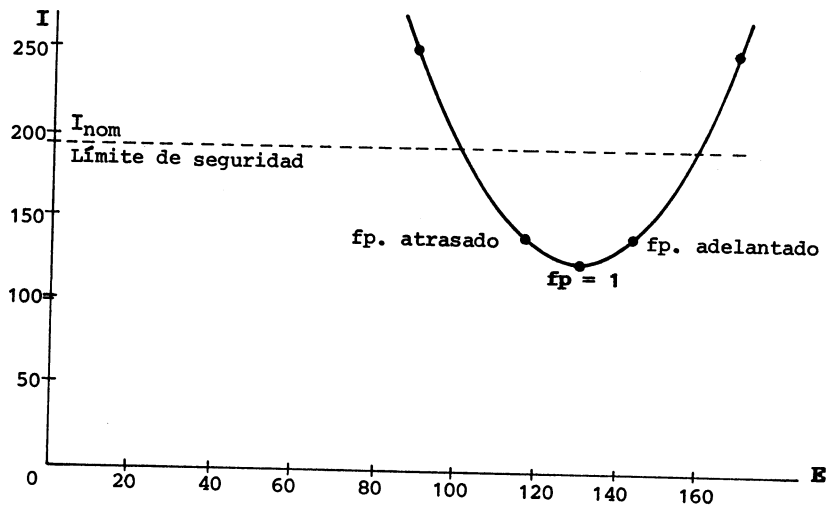
La máquina no puede trabajar a factor de potencia 0.5 porque la corriente en esas circunstancias es superior a la nominal y la temperatura que adquiere la armadura quema sus aislamientos.

El mínimo factor de potencia permisible, de acuerdo con el triángulo de potencia es:



$$\cos \theta = \frac{48000}{75000} = 0.64$$

c) Graficando la tabla de la respuesta a) se tiene:



### COMENTARIOS

**Factor de potencia.** En este ejemplo se puede comprobar que el factor de potencia está en función de la magnitud de la fuerza electromotriz, y como ésta a su vez se controla con la corriente de excitación, se concluye que el factor de potencia del motor síncrono se controla muy fácilmente con la corriente de excitación.

**Capacitor síncrono.** Con una corriente de excitación fuerte, el factor de potencia es adelantado. El mínimo factor de potencia y la cantidad de potencia reactiva que puede suministrar depende de la carga real que se le da al motor. Se puede comprobar en el triángulo de potencias, que bajo las circunstancias de carga que da el enunciado del ejemplo, el motor puede suministrar 57.628 KVAR en régimen permanente.

**Límite de seguridad.** También se puede apreciar que aunque el motor tiene una carga real de 64% de su capacidad, la corriente en cambio puede superar a la nominal si se baja excesivamente el factor de potencia. En la gráfica se muestra muy claramente este límite.

**4.6.3. CURVAS V.** La gráfica que se obtuvo en la respuesta c) del ejemplo anterior es una de las curvas características del motor síncrono. Por su forma se le da el nombre de curva V.

Si la carga real del motor hubiera sido más grande, también lo hubieran sido las corrientes, y la curva se hubiera desplazado hacia arriba, restringiendo la gama de valores de factor de potencia por abajo del límite de seguridad, y por consiguiente limitando la potencia reactiva como capacitor.

Cuando la carga sea igual a la capacidad, la curva V toca con su vértice el límite de seguridad y sólo se podrá operar a factor de potencia unitario.

Hacia el otro extremo, mientras menor sea la carga real, más abajo esta la curva V y será más amplia la gama de factores de potencia. La más amplia será en vacío, con la máquina trabajando exclusivamente como capacitor, (también puede trabajar como inductor síncrono, si se requiere, con baja corriente de excitación).

En la práctica se suele tomar como abscisa la corriente de excitación, ya que la fuerza electromotriz no es mensurable. La figura 4.22 muestra una familia de curvas V y sus demás características asociadas.

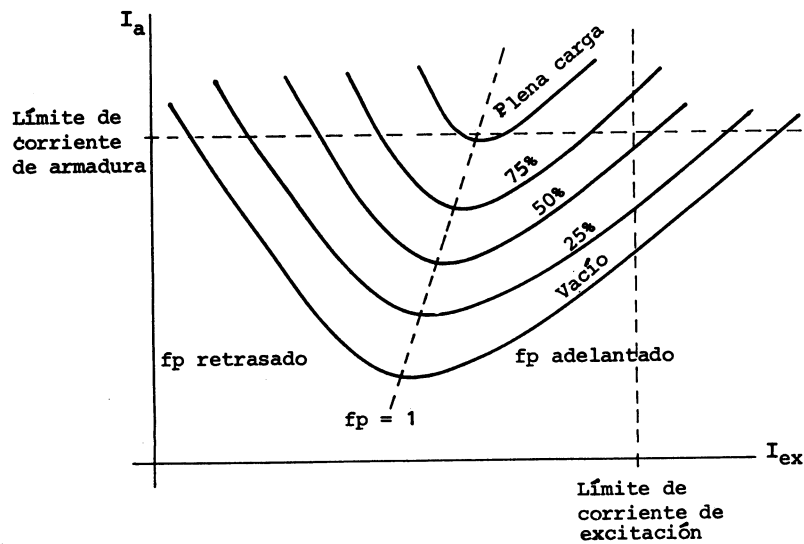


FIGURA 4.22 CURVAS V.



Otra ventaja de tener la corriente de excitación en las abscisas es que también se puede marcar el límite de seguridad para los embobinados de campo. La corriente máxima debe ser un dato suministrado por el fabricante.

La zona comprendida entre el origen y los dos límites puede considerarse zona de seguridad.

Si las condiciones de trabajo de la máquina salen hacia arriba de la zona de seguridad, existe el riesgo de quemarse la armadura; si salen hacia la derecha, corren peligro los campos, y arriba y a la derecha, se arriesga toda la máquina.

**4.6.4. ARRANQUE DEL MOTOR SÍNCRONO.** El motor síncrono carece totalmente de par de arranque. En el momento de energizar la armadura aparece su respectivo flujo girando a la velocidad síncrona, puesto que no tiene inercia. El rotor en cambio, sí la tiene y no puede adquirir instantáneamente la velocidad.

Si el rotor no se encuentra excitado no hay atracción que produzca el par electromagnético, y si lo está, la liga magnética se rompe cada vez que el flujo de armadura pasa frente a los polos con tal rapidez, que no puede vencer la inercia del rotor.

Para arrancar un motor síncrono es necesario algún sistema auxiliar. Existen dos formas de lograrlo, que se describen a continuación:

**1. Con un motor auxiliar.** Un motor auxiliar de cualquier otro tipo (de inducción, de C.D. etc.) acoplado a la flecha del síncrono, se encarga de iniciar el giro hasta obtener la velocidad síncrona. Entonces se energiza la armadura y se excita el campo, con lo que queda sincronizado el motor al sistema.

Si la máquina es de potencia grande, esta labor es más delicada, pues se requiere obtener una velocidad casi síncrona, excitar para que trabaje como generador, y llevar a cabo la operación de acoplamiento y sincronización como se describió en el inciso 4.5.3.

Una vez que el motor ha quedado en sincronía, se desacopla el motor de arranque y se acopla la carga, para lo cual hay que disponer de elementos adecuados de transmisión mecánica.

**2. Con devanado auxiliar de inducción.** Agregando al rotor un devanado de jaula de ardilla, se puede iniciar el giro como motor de inducción.

La jaula no puede tener la misma consistencia que para un motor de inducción, como se puede observar en la figura 4.23, pues si se trata de rotor cilíndrico hay que dejar libre el espacio de las ranuras, en donde se acomoda el embobinado de excitación, y si es de polos salientes, las barras se alojan únicamente en las zapatas polares, pues no tiene ningún objeto agregar barras en el espacio de aire interpolar.



FIGURA 4.23. DEVANADO AUXILIAR DE ARRANQUE.

En los dos casos, la jaula se cierra mediante un anillo frontal y otro posterior.

El arranque se efectúa sin corriente de excitación, pues la presencia de flujo polar interfiere el libre funcionamiento de la jaula, además de que produce un contrapar que dificulta el arranque.

**Protección del embobinado de excitación.** En el instante de arranque, el flujo de armadura cruza con gran rapidez por las bobinas de excitación. Como estas bobinas tienen un gran número de vueltas, se inducen en ellas tensiones que llegan a ser del orden de varias veces el voltaje con que normalmente trabajan.

Las altas tensiones pueden producir descargas en forma de chispas, entre capas o entre espiras del embobinado, perforando el aislamiento y fundiendo el cobre del conductor, causando un daño que deja fuera de servicio a la máquina.

Para evitar estos desperfectos, es necesario incluir una resistencia de descarga entre las terminales libres del embobinado de excitación. En cuanto entre la corriente de excitación, se libera la resistencia de descarga por medio de un conmutador de contactos traslapados, a fin de que no se abra el circuito en ningún momento. El diagrama se ilustra en la figura 4.24.

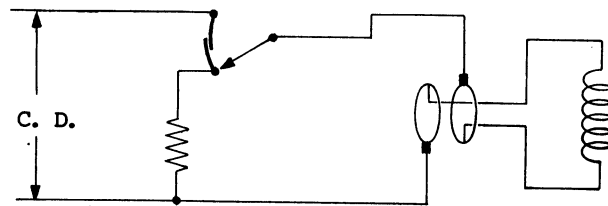


FIGURA 4.24. RESISTENCIA DE DESCARGA DE ARRANQUE.

El arranque se lleva a cabo energizando la armadura, sin corriente de excitación y con la resistencia de descarga incluida, cuando la máquina llega a una velocidad casi síncrona, se conmuta la resistencia de descarga por la corriente de excitación con lo que el motor queda en sincronismo con el sistema.

**4.6.5. ARRANCADORES.** En los motores síncronos con devanado auxiliar de inducción, el arranque se efectúa igual que para los motores de inducción, agregando un último paso que consiste en suministrar la corriente de excitación y ajustar el factor de potencia.

Los arrancadores pueden ser manuales o automáticos, a pleno voltaje o a voltaje reducido y son los mismos que se detallaron para los motores de inducción en el subtema 3.9.

Entre los arrancadores automáticos existen algunos especiales para motores síncronos. El arrancador en sí, es el mismo que para motores de inducción, pero dentro de su gabinete incluye la resistencia de descarga, el conmutador automático con contactos traslapados y un relevador detector de frecuencia y polarización de las tensiones inducidas en el devanado de excitación, con el objeto de que la conmutación se produzca en el momento más adecuado para la sincronización con el sistema alimentador.

## **4.7. EXCITACIÓN DE MÁQUINAS SÍNCRONAS**

Para excitar la máquina síncrona es necesario suministrar corriente directa al rotor por medio de escobillas y anillos deslizantes. Se requiere para ello, una fuente de corriente directa.

En los sistemas de excitación, se han ideado varios arreglos y procedimientos que se describen a continuación:

**4.7.1. EXCITACIÓN CON UNA MÁQUINA EXCITATRIZ.** La máquina excitatriz es un generador de corriente directa con excitación en derivación. Forma parte estructural de la misma máquina síncrona, y tanto ésta como la excitatriz tienen una flecha común.

La energía necesaria para la excitación es muy pequeña comparada con la capacidad de la máquina síncrona, y esto se manifiesta en el tamaño también pequeño de la excitatriz.

En la figura 4.25.1. se muestra la proporción entre las dos máquinas, así como su montaje en una misma estructura con flecha común.

En el dibujo 4.25.2. aparece el diagrama eléctrico del sistema de excitación. Se observa que el único control es el reóstato de campo de la excitatriz.

Como la corriente de excitación de la excitatriz es aún mucho más pequeña que la de la máquina síncrona, su reóstato de campo resulta de dimensiones bastante reducidas. Con él se controla el voltaje de la excitatriz dentro del rango permisible, el cual generalmente es suficiente para controlar también la excitación de la máquina síncrona, no siendo necesario un segundo reóstato antes de los anillos colectores.

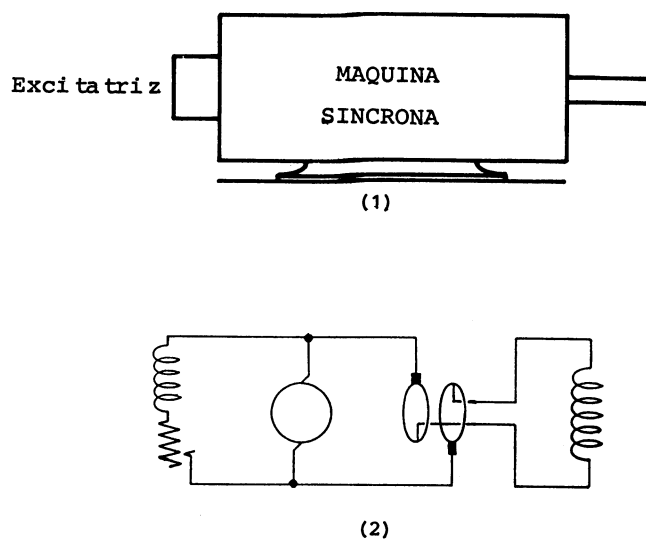


FIGURA 4.25. EXCITACIÓN CON UNA MÁQUINA EXCITATRIZ. (1) ASPECTO EXTERIOR DE LAS MÁQUINAS.  
(2) DIAGRAMA ELÉCTRICO.

**4.7.2. EXCITACIÓN CON DOS MÁQUINAS EXCITATRICES.** Aunque se ha insistido en que la energía necesaria para excitar la máquina es pequeña, en el caso de los grandes generadores de plantas hidroeléctricas es tal su capacidad, que aun una "pequeña" corriente de excitación es de cientos o miles de amperes.

La corriente de excitación de la excitatriz resulta del orden de varias decenas de amperes, que es un valor elevado para su control reostático.

Para proporcionar la corriente de campo de la excitatriz se recurre a un generador todavía más pequeño que se conoce con el nombre de *excitatriz piloto*. Su reóstato ya resulta de dimensiones accesibles para el control.

En la figura 4.26 se muestra en primer lugar (1), el perfil de un gran generador de planta hidroeléctrica, de baja velocidad y eje vertical. La turbina impulsora tipo Francis, se encuentra en un nivel inferior, por debajo del piso, mientras que las dos máquinas excitatrices se localizan encima del generador, impulsadas por la misma flecha.

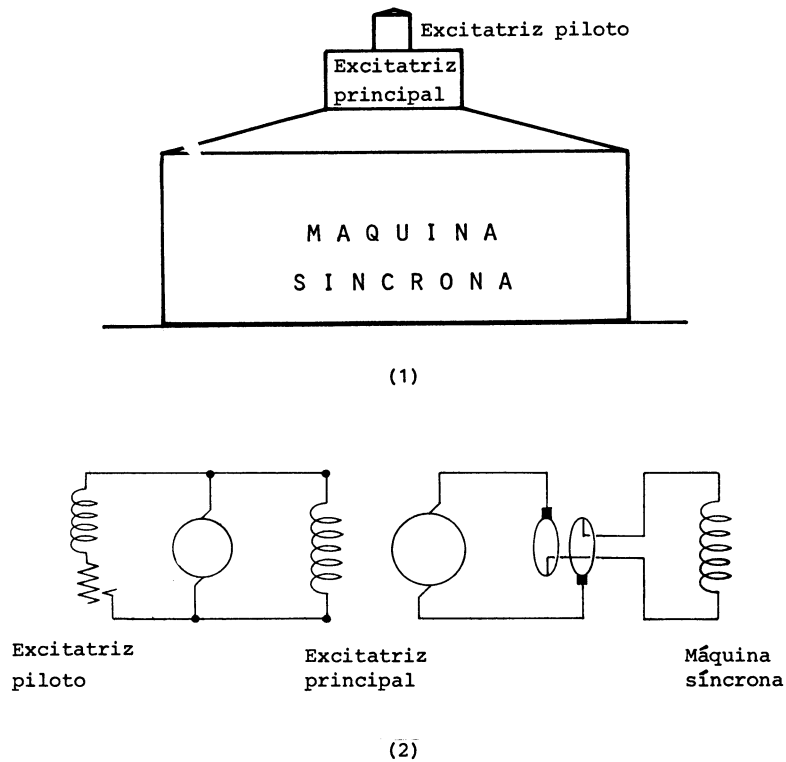


FIGURA 4.26. EXCITACIÓN CON DOS MÁQUINAS EXCITATRICES. (1) ASPECTO EXTERIOR DE LAS MÁQUINAS. (2) DIAGRAMA ELÉCTRICO.

En el dibujo 4.26.2 aparece el diagrama eléctrico mostrando la conexión en cascada. Este sistema opera como amplificador de control, de modo que con el reóstato de dimensiones reducidas de la excitatriz piloto se controla un campo mucho mayor en la excitatriz principal, y con ésta, la gran excitación de la máquina síncrona.

**4.7.3. EXCITACIÓN SIN ESCOBILLAS.** Es un sistema similar al de dos máquinas excitatrices, pero usado en máquinas síncronas de dimensiones menores que las de los hidrogenadores. Se aplica tanto a generadores como a motores.

La excitación sin escobillas aprovecha que el embobinado de excitación de la máquina síncrona y la armadura de la excitatriz principal se montan sobre la misma fecha, para eliminar su interconexión por el exterior a través de escobillas. El conmutador se sustituye por rectificadores de estado sólido.

Para obtener la corriente de campo de la máquina excitatriz principal se recurre a una excitatriz piloto, como muestra la figura 4.27.1, o bien, a una excitatriz piloto tipo síncrona (con armadura en el estator) con rectificadores, y polos de imán permanente como ilustra la figura 4.27.2.

En el caso de que la máquina síncrona trabaje como motor, la excitación de la excitatriz principal también puede obtenerse rectificando la corriente alterna del sistema, como se describe a continuación.

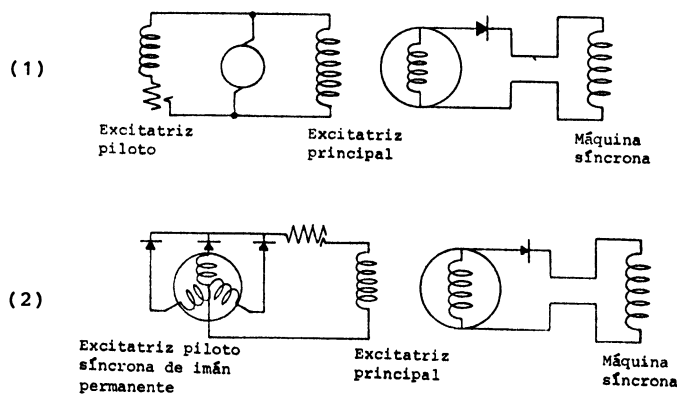
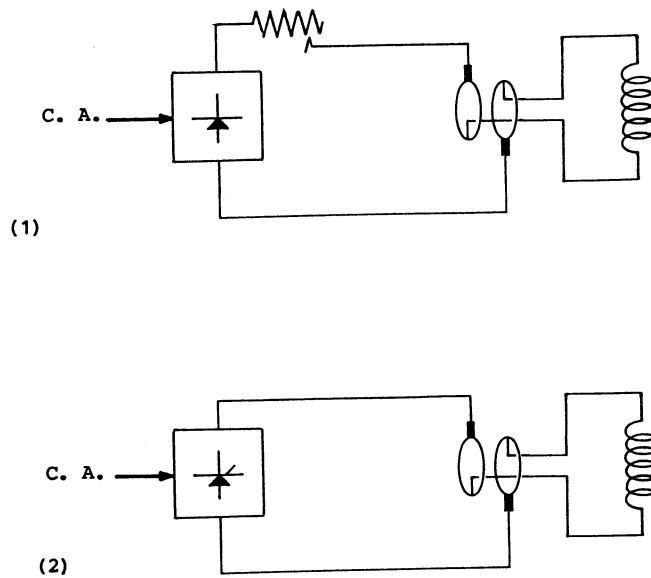


FIGURA 4.27. EXCITACIÓN SIN ESCOBILLAS.

**4.7.4. EXCITACIÓN CON CORRIENTE ALTERNA RECTIFICADA.** Cuando la máquina síncrona trabaja en la modalidad de motor, se dispone en el sistema alimentador, no solamente de la energía alterna para la armadura, sino también de energía que se puede rectificar con objeto de suministrar la corriente directa de excitación.

La rectificación puede ser monofásica o trifásica, según la magnitud de la corriente de excitación.

Si se usan rectificadores fijos, es indispensable incluir el reóstato de control, pero éste puede no ser necesario con el empleo de rectificadores controlados, como se muestra en la figura 4.28.



**FIGURA 4.28. EXCITACIÓN CON CORRIENTE ALTERNA RECTIFICADA. (1) CON RECTIFICADORES FIJOS. (2) CON RECTIFICADORES CONTROLADOS.**





## EJERCICIOS PROPUESTOS

- 4.1. ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre la máquina síncrona y la de corriente directa?
- 4.2. ¿Qué semejanzas y diferencias existen entre la máquina síncrona y la de inducción?
- 4.3. ¿Qué significa *rotor cilíndrico* y *rotor de polos salientes*? ¿Por qué se construyen de estas dos maneras diferentes?
- 4.4. Explicar qué son *reacción de armadura* y *reactancia síncrona*.
- 4.5. A una máquina síncrona de 96 KVA, 220/127 Volts se le obtuvo su curva de saturación en vacío con los siguientes resultados:

Corriente de excitación	Voltaje de fase
0	0
1.5	35.2
3.6	71.5
5	90
7.6	116.6
10	135
12.5	150
14.2	158.5
15.6	164.5

Trazar su curva de saturación en vacío.

4.6. La máquina del problema 4.5 se usará como generador de una planta de emergencia. Su resistencia de armadura es de 0.012 ohms y su reactancia síncrona de 0.16 ohms.

Si se ajusta en vacío a su voltaje nominal y se conserva constante la corriente de excitación, ¿cuál será su voltaje con una carga de 200 A a factor de potencia 0.6 atrasado?

4.7. Igual que el problema 4.6, pero a factor de potencia 0.866 atrasado.

4.8. Si se desea restituir el voltaje nominal con las cargas de los problemas 4.6 y 4.7, ¿qué corriente de excitación hay que suministrar en cada caso? ¿cuál era la corriente de excitación original?

4.9. Si la máquina trabaja a voltaje nominal con las cargas de los problemas 4.6 y 4.7 y de repente se queda en vacío sin variar la corriente de excitación, ¿cuál será su voltaje en vacío en cada caso?

4.10. El generador de los problemas 4.5 al 4.9 se ajusta a su voltaje nominal y después se le conecta una carga de  $0.4 + j 0.2$  ohms por fase, conectada en estrella. Si la corriente de excitación se mantiene constante, ¿cuánto vale la corriente de armadura, el voltaje externo y el factor de potencia con carga?

4.11. Si se corrige el voltaje con carga del problema 4.10 a su valor nominal, ¿puede continuar trabajando el generador en régimen permanente?

4.12. Cuando a un generador síncrono se le da carga a factor de potencia adelantado, ¿por qué aumenta el voltaje en vez de disminuir?

4.13. Suponiendo que el generador de los problemas 4.5 al 4.11 tiene una eficiencia de 82% incluyendo la excitatriz, ¿de cuántos HP debe ser el motor que lo impulse?

4.14. Cuando se acopla un generador síncrono a un sistema infinito, ¿qué sucederá si:

a) ¿no se igualan los voltajes?

b) ¿las frecuencias no son lo suficientemente parecidas?

- c) ¿la secuencia de fases esta equivocada?  
d) ¿se cierra el interruptor en un momento de oposición de ondas?

4.15. Una máquina igual a la de los problemas 4.5 al 4.11 se utilizará ahora como motor. Sus características son:

$$96 \text{ KVA}$$

$$220 \text{ V}$$

conexión de armadura en estrella.

$$r_a = 0.012 \Omega$$

$$X_s = 0.16 \Omega$$

Si tiene una carga real de 60 kW, ¿cuál es el factor de potencia mínimo a que puede trabajar en régimen permanente?

4.16. El motor del problema 4.15 se desea trabajar como capacitor síncrono, ¿qué significa esto?

4.17. La fábrica en donde se encuentra instalada el motor de los problemas 4.15 y 4.16 tiene un consumo de 412 KVA a factor de potencia 0.65 atrasado cuando el motor está fuera de operación. Si el motor entra en servicio en las condiciones de los problemas 4.15 y 4.16, ¿hasta qué valor se puede corregir el factor de potencia de la industria?

4.18. Trazar las curvas V del motor del problema 4.15 para 100%, 50% y 0% de plena carga, en coordenadas E- $I_a$  (Para el consumo en vacío recuérdese que tiene una eficiencia de 82%).

4.19. Trazar las curvas V del problema 4.18 en coordenadas  $I_{ex}$ - $I_a$  y marcar los límites de seguridad. La máxima corriente permisible de excitación es de 14 A.

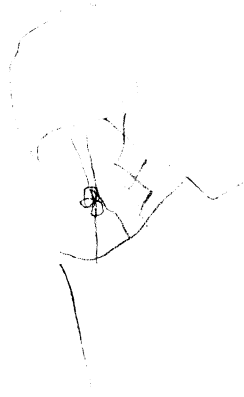
4.20. En los problemas 4.15 al 4.17 no se tomó en cuentas la limitación por corriente de excitación, ¿puede trabajar la máquina en régimen permanente si la máxima corriente de excitación es de 14 A?

4.21. Explicar por qué se puede quemar un motor síncrono aun trabajando a carga parcial.

4.22. Explicar cómo se arranca un motor síncrono.

4.23. Describir las diferentes formas de excitar las máquinas síncronas.

4.24. Un generador de corriente directa autoexcitado solamente levanta voltaje en un sentido de rotación, ¿sucede lo mismo con un generador síncrono autoexcitado?



## ÍNDICE TEMÁTICO

- Alto voltaje, 106
- Análisis,
  - del circuito equivalente, 139, 217
  - de respuesta, 41
- Armadura, 2, 14, 181, 182, 280, 283
  - trifásica, 183, 291
- Arrancadores, 91, 250, 325
  - automáticos,
    - a pleno voltaje, 253
    - a voltaje reducido, 256
  - manuales,
    - a pleno voltaje, 251
    - a voltaje reducido, 255
- Arranque, 226
  - de motores monofásicos, 271
  - del motor síncrono, 323
  - a voltaje reducido, 233, 258
- Aspectos prácticos,
  - del circuito equivalente, 133
  - del diagrama circular, 240
- Auxiliares del transformador, 169
  
- Bajo voltaje, 106
- Bobina,
  - primaria, 107
  - secundaria, 107
  
- Caballo,
  - de potencia (HP), 180
  - de vapor (CV), 180
- Capacitor síncrono, 315
- Chopper, 96
- Circuito,
  - equivalente, 127, 130, 131, 197, 200, 204, 299
  - magnético, 2, 4, 278, 280
- Clasificación de máquinas de C. D., 42
- Conexiones de transformadores, 154
  - delta-delta, 157
  - delta-estrella, 162
  - estrella-delta, 164
  - estrella-estrella, 160
- Control,
  - electrónico, 95
  - remoto de posición, 267
  - de velocidad, 64, 73, 84, 94
- Conversión de energía, 31
- Cordal, 287
- Corriente(s),
  - de armadura, 27, 292
  - de arranque, 226, 233
  - de carga, 114
  - de línea, 217
  - parásitas, 38, 121
- Criterios para conectar
  - un banco de transformadores, 158
- Curva(s),
  - de control de velocidad, 61, 71, 84
  - de magnetización, 9, 11, 282
  - par-velocidad, 244
  - de regulación de velocidad, 61, 71, 81
  - de saturación en vacío, 22, 290
  - V, 322
  
- Defasador de voltaje, 264
- Derivaciones en el transformador, 170
- Desbocamiento, 82
- Deslizamiento, 192
- Determinación de parámetros, 133, 205
- Diagrama circular, 236
- Diseño en motores de inducción, 247
- Distorsión por reacción de armadura, 33, 295
  
- Ecuaciones,
  - básicas de las máquinas de C. D., 40
  - de sincronismo, 189
- Eficiencia, 141, 219
- Elemento térmico, 93
- Embobinados, 18, 286
- Estator, 2, 278
- Estructura, 2, 106, 181, 278
- Excitación,
  - de la bobina primaria, 107
  - compuesta, 8
  - en derivación, 7
  - de máquinas síncronas, 326
  - en serie, 7
  
- Factor,
  - de banda, 289
  - de distribución, 289
  - de paso, 287
  - de potencia, 218
  - de reducción, 234
  - de saturación, 13
- Faraday, 108
- Flujo,
  - de dispersión, 124
  - giratorio, 184
  - magnético, 108
  - mutuo, 115

- Formas de excitar
  - la máquina de C. D., 7
- Foucault*, 122
- Frecuencia de rotor, 195
- Froelich*, 12, 13, 23
- Fuerza,
  - electromotriz, 15, 20, 109, 110, 283,
  - magnetizante, 6
  - magnetomotriz, 5, 115, 193
  
- Generador,
  - de C. D.,
    - con excitación compuesta, 260
    - con excitación en derivación, 49
    - con excitación independiente, 43
    - con excitación en serie, 56
  - de inducción, 260
  - síncrono,
    - acoplado a un sistema infinito, 307
    - alimentando a una carga aislada, 301
- Gráficas de respuesta del motor de inducción, 260
  
- Histéresis, 5, 38, 119
  
- Instalación de un motor de inducción, 258
- Interpolos, 34
- Interruptor,
  - de cuchillas, 259
  - de sobrecarga, 93
  - termomagnético, 259
  
- Magnetismo remanente, 7
- Magnetización, 5, 9, 11, 282
- Máquinas,
  - de C. D., 1
  - multipolares, 20, 187
  - síncronas, 277
- Motor(es),
  - de C. D.,
    - con excitación compuesta, 89
    - con excitación en derivación, 71
    - con excitación independiente, 61
    - con excitación en serie, 80
  - de inducción, 179
    - ideal, 196
    - otros usos del, 260
  - síncrono, 311, 314
- Par,
  - de arranque, 229, 234
  - electromagnético, 28, 294
  - mecánico, 40, 220
  - de pérdidas rotacionales, 39
  
- Pérdidas,
  - por corrientes parásitas, 38, 121
  - eléctricas, 35, 123, 126
  - por histéresis, 38, 119
  - magnéticas, 38, 118, 122
  - mecánicas, 37
  - por reactancia de dispersión, 124
  - por resistencia, 123
  - rotacionales, 39
- Polaridad, 112
  - aditiva y sustractiva, 113
- Potencia,
  - eléctrica, 1, 179
  - mecánica, 1, 179, 219
  - de salida, 143
- Prueba,
  - de circuito abierto, 134
  - de circuito corto, 137
  - de rotor bloqueado, 269
  - de rotor libre, 206
  
- Reacción de armadura, 32, 295
- Reactancia,
  - de dispersión, 124, 298
  - del flujo de armadura, 298
  - síncrona, 298
- Regla de la mano derecha, 16, 28, 115, 184
- Regulación,
  - de velocidad, 63, 64, 72, 81
  - de voltaje, 45, 139
- Regulador,
  - de frecuencia, 263
  - de voltaje, 266
- Relación de transformación, 111
- Resistencia,
  - del circuito de campo, 50
  - del embobinado de excitación, 50
  - del estator, 205
  - del reóstato, 50
- Respuesta,
  - de las máquinas,
    - de C. D., 42
    - síncronas, 301
  - de los motores de inducción, 260
  - de los transformadores, 139
- Rotor,
  - de resistencia variable (devanado), 249
  
- Secundarios,
  - en paralelo, 155
  - en serie, 154
- Sincronismo, 189
- Sincronización, 308
  
- Tensión inducida por flujos de armadura, 297



**Teoría,**

de los campos opuestos, 269  
simplificada de la máquina síncrona, 296  
del transformador, 116

**Trabajo integral de la máquina de C. D., 40**

**Transformador(es), 105**  
de corriente, 172  
ideal, 116  
de impedancia, 128  
de instrumento, 171  
de potencial, 171  
real, 117  
trifásicos, 165

**Velocidad,**

de rotor, 192, 217  
síncrona, 185, 217

**Ward Leonard, 94**



## BIBLIOGRAFÍA

- CHAPMAN, S. J. *Máquinas Eléctricas*. Bogotá, McGraw-Hill, 1987.
- DRAPER, A. *Electrical machines*. London, Longman Group Limited, 1979.
- FITZGERALD, A. E., Ch. Kingsley, A. Kusko. *Electrical machinery*. Tokio, McGraw-Hill, 1971.
- GINGRICH, H. W. *Máquinas eléctricas, transformadores y controles*. Colombia, Prentice Hall Internacional, 1980.
- GOURISHANKAR, V. *Conversión de energía electromecánica*. México, Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1969.
- KOSOW, I. L. *Máquinas eléctricas y transformadores*. Barcelona, Reverté, 1980.
- LANGSDORF, A. S. *Principios de las máquinas de corriente continua*. México, McGraw Hill, 1977.
- Teoría de las máquinas de corriente alterna*. México, McGraw- Hill, 1971.
- LISTER, E. C. *Máquinas y circuitos eléctricos*. México, McGraw-Hill, 1975.
- MATSCH, L. W. *Máquinas electromecánicas y electromagnéticas*. México, Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1974.
- Mc. PHERSON, G. *Introducción a máquinas eléctricas y transformadores*. México, Limusa, 1987.
- NASAR, S. A. y L. E. Unnewehr. *Electromecánica y máquinas eléctricas*. México, Limusa, 1982.
- PÉREZ AMADOR, B. V. *Pruebas de equipo eléctrico*. México, Limusa, 1981.
- Pruebas de equipo eléctrico 2*. México, Limusa, 1983.
- "Método algebraico para el análisis de respuesta en máquinas de corriente directa" en *Revista de Ingeniería*. México, Facultad de Ingeniería, UNAM, vol. LXI, núm. 1, enero-marzo, 1991.

**RESNICK, R. y D. Halliday. *Física. Parte II.* México, CECSA, 1970.**

**SEARS, F. W. *Fundamentos de física II. Electricidad y magnetismo.* Madrid, Aguilar, 1970.**

**SISKIND, CH. S. *Electrical machines.* Tokio, McGraw-Hill, 1959.**

**SLEMON, G. R. and Stranghen. *Electric machines.* USA, Addison-Wesley, 1980.**

## SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS NUMÉRICOS

### CAPÍTULO 1. MÁQUINAS DE CORRIENTE DIRECTA

1.5. 
$$E = \frac{3.26I_{ex}}{2.504 + I_{ex}} \omega$$

1.6. 7.52 N-m

1.7. 0.16  $\Omega$

1.9. 130.12 V , 4.096 %

1.11. 135.012 V , 8.0096 %

1.12. 315.259 , aproximadamente 5  $I_{com}$

1.13. 12.6 HP , 35 HP

1.14. 143 r/s = 1365.6 RPM , 23 HP

1.15. 12.939 kW

1.16. 75 A

1.17. 130.73 r/s = 1248.4 RPM , 4.03 %

1.18. 236.59 V , 175 V

1.20. 130.74 r/s = 1248.47 RPM , 4.03 %

1.21. 964.5 RPM (no satisface), 1346.8 RPM (sí satisface)

1.22. 2.8465 A

1.23. 10 HP

1.24. 31 V

## CAPITULO 2. TRANSFORMADORES

- 2.11.  $r_{he}=304.878 \Omega$  ,  $X_m=156 \Omega$   
 $R=0.2625 \Omega$  ,  $X=0.5395 \Omega$
- 2.12. 23.926 V , 4.296 %
- 2.13. 21.141 V
- 2.14. 310 W , 92.5 % ; 225.952 W , 92.293 % ; 4.4 kW
- 2.15.  $r_{he}=2381 \Omega$  ,  $X_m=1215 \Omega$   
 $R=2.05 \Omega$  ,  $X=4.006 \Omega$
- 2.16. 967.668 V
- 2.17. 1001.2 V
- 2.18. 96.839 V , 0.6 atrasado
- 2.19. 1.7 kVAR a 100 V
- 2.20. 101.31 V
- 2.22. Delta-delta: 127 V , 15 kVA  
Estrella-estrella: 127/73.323 V , 8.66 kVA  
Delta-estrella: 220/127 V , 15 kVA  
Estrella-delta: 73.323 V , 8.66 kVA
- 2.23. b) 220 V , 2.3094 A , 230 W ;  
13.279 V , 20 A , 120 W
- c)  $r_{he}=280.5 \Omega$  ,  $X_m=142.4 \Omega$   
 $R=0.3 \Omega$  ,  $X=0.5923 \Omega$
- 2.24. 244.191 V , 422.952 V
- 2.25. 254.371 V , 440.583 V
- 2.27. 300 VA , 220-34.641 V , 60 Hz c/u
- 2.28. 900 VA , 220-60/34.641 V

### CAPÍTULO 3. MOTORES DE INDUCCIÓN

- 3.6. 3000 , 1500 , 1000 , 750 RPM;  
1500 , 750 , 500 , 375 RPM
- 3.7. 3474 , 1737 , 1158 , 868.5 RPM;  
2895 , 1447.5, 965 , 723.75 RPM
- 3.8. 12.8 kg-m a 1363 RPM
- 3.10.  $r_{mhe}=886.7175 \Omega$  ,  $X_m=140.2875 \Omega$   
 $R=3.7284 \Omega$  ,  $X=6.7193 \Omega$   
 $R_c=1.8434 \frac{1-S}{S}$
- 3.12.  $S=0.02025$  ,  $N_r=1175.7 \text{ RPM}$  ,  $I_L=10.844 \text{ A}$   
 $f_p=0.8316$  ,  $\eta=86.84 \%$  ,  $T=4.94 \text{ kg-m}$   
 $S=0.041$  ,  $N_r=1150.8 \text{ RPM}$  ,  $I_L=18.5 \text{ A}$   
 $f_p=0.908$  ,  $\eta=87.39 \%$  ,  $T=9.464 \text{ kg-m}$
- 3.13.  $S=0.06289$  ,  $N_r=1124.53 \text{ RPM}$  ,  $I_L=26.368 \text{ A}$   
 $f_p=0.918$  ,  $\eta=84.84 \%$  ,  $T=13.547 \text{ kg-m}$
- 3.14. a)  $I_{mot}=I_L=104.359 \text{ A}$   
 $T = 14.706 \text{ kg-m}$   
b)  $I_{mot}=87.745 \text{ A}$  ,  $69.975 \text{ A}$  ,  $52.229 \text{ A}$   
 $I_L=73.706 \text{ A}$  ,  $46.891 \text{ A}$  ,  $26.115 \text{ A}$   
 $T = 10.376 \text{ kg-m}$  ,  $6.601 \text{ kg-m}$  ,  $3.676 \text{ kg-m}$   
c)  $I_{mot}=I_L=34.786 \text{ A}$   
 $T = 4.902 \text{ kg-m}$

- 3.20.  $S = -0.0333$  ,  $I_L = 15 \text{ A}$  ,  $f_p = 0.877$  adelante  
 $P = -15.35 \text{ HP}$  ,  $\eta = 87.68 \%$  ,  $T = 8.988 \text{ kg-m}$
- 3.21. 200 RPM , 91.666 V
- 3.22.  $13.333^\circ$

#### CAPITULO 4. MÁQUINAS SÍNCRONAS

- 4.6. 98.778 V
- 4.7. 106.123 V
- 4.8. 13.5 A , 12 A , 8.9 A
- 4.9. 155 V , 147.353 V
- 4.10. 232.123 V , 103.8 V , 0.894 V
- 4.11. No
- 4.13. 157 HP
- 4.15. 0.625
- 4.17. 0.809
- 4.20. Pasa ligeramente el límite



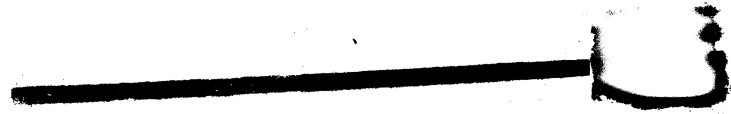
APUNTE  
133-B

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



\*611023\*

G.- 611023



no.

Libro

Bibliotecas

FECHA DE

EL LECTOR SE OBLIGA A DEVOLVER  
ESTE LIBRO ANTES DEL VENCIMIENTO  
DE PRESTAMO INDICADO POR EL SELLO

COLOCACION: CAJA No 133-B	NUMERO DE ADQUISICION: G- 611023
---------------------------------	-------------------------------------

AN

CC

VE

2

Esta obra se terminó de imprimir  
en abril de 1994.  
Departamento de Publicaciones  
de la Facultad de Ingeniería  
Ciudad Universitaria, México, D.F.  
C.P. 04510

**Secretaría de Servicios Académicos.**

El tiraje consta de 1,000 ejemplares  
más sobrantes de reposición.