P R E F A C I O

Los presente apuntes tienen por objeto completar los ya desarrollados por el Departamento de Ingeniería Industrial e Investigación de Operaciones, para el curso de Estadística Aplicada.

Aunque por el momento se publican en forma separada, estarán incluídos en la próxima impresión.

Tratan fundamentalmente de los conceptos probabilísticos y los elementos de Estadística necesarios para el curso. Se desarrollan también algunos temas fundamentales de Inferencia Estadística

El propósito es hacer hincapié en lo que se considera como bases de la materia, y relacionar éstas con algunos de los temas posteriores.

La presentación aunque se pretende que sea completa, está condensada, por lo que se recomienda el completar su utilización con los libros citados en la Bibliografía.

Agradezco la motivación del Ing. Juán José Di Matteo, Jefe del Departamento de Ingeniería Industrial e Investigación de Operaciones, para escribir estos apuntes y espero que sean de ayuda para el alumno en la comprensión de la materia.

Ing. Víctor Flores Zavala Torres Torija
Ciudad Universitaria, D.F. Diciembre 1979.

INDICE TEMATICO.

Pag.

I N T R O D U C C I O N.- Un examen de los orígenes de cualquier campo científico, sea Astronomía, Física o Psicología, indica que la disciplina comenzó como una masa de observaciones y experimentos. Es natural, entonces, que los primeros pasos en cuantificar la materia deban involucrar la colección, presentación y tratamiento de datos. Consecuentemente, el estudio de la Estadística ha jugado un papel dominante en la preparación matemática de estudiantes que trabajan en las áreas cuantitativas de las Ciencias Sociales y de la vida. Un tratamiento estadístico de los datos puede ser muy elemental, involucrando un poco más que listado, selección y unos pocos cálculos. Puede ser también muy sofisticado, involucrando complicadas ideas matemáticas y problemas delicados de diseño de experimentos.

El problema original casi siempre se presenta en el mundo real, algunas veces en las condiciones relativamente controladas de un laboratorio y algunas veces en el menos entendible ambiente de todos los días. Por ejemplo, un ingeniero observa el número de artículos defectuosos producidos por cierta máquina, un genetista anota los resultados de un experimento de hibridización o un economista registra el volumen de transacciones internacionales bajo ciertas políticas de tarifas, y entonces, conjeturan ciertas razones para sus observaciones. Estas conjeturas pueden estar basadas completamente en la intuición, pero más a menudo son el resultado de un estudio detallado y del reconocimiento de ciertas similitudes con otras situaciones que se entienden mejor.

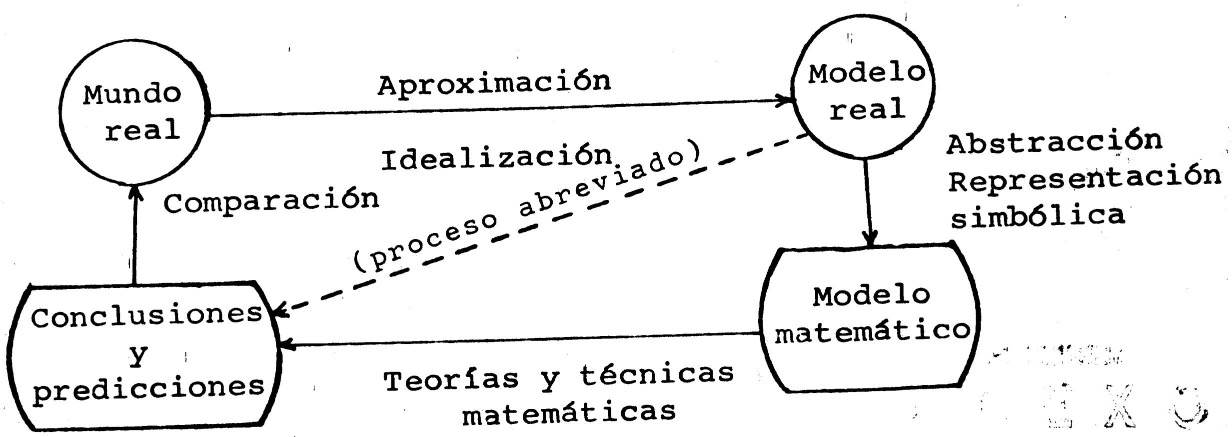
El siguiente paso es un intento de hacer al problema tan preciso como sea posible. Esto quiere decir un entendimiento claro y definido de las palabras y conceptos usados. Un aspecto importante en este paso es el intento de identificar y seleccionar aquellos conceptos que se consideren básicos en el estudio. El propósito es eliminar información innecesaria y simplificar la que se conserva tanto como sea posible. Este paso de identificación, aproximación e idealización se conoce como construcción del modelo real. Por ejemplo, en el caso del ingeniero, él puede construir un modelo real en el cual todos los artículos se puedan clasificar como defectuosos o no defectuosos y nunca estén en un nivel intermedio.

En el siguiente paso después del estudio y formación del modelo real, uno ve este modelo e intenta identificar el proceso operativo. La meta es expresar la situación entera en términos simbólicos. Entonces el modelo real se convierte en un modelo matemático, en donde las cantidades reales y los procesos se reemplazan por símbolos y operaciones matemáticas. A menudo mucho del valor del estudio se pierte en este paso, debido a que una identificación inapropiada entre el mundo real y el mundo matemático no puede llevar a resultados útiles.

Después de que el problema ha sido transformado en términos simbólicos, el sistema matemático resultante se estudia usando técnicas e ideas matemáticas apropiadas. Los resultados del estudio matemático son teoremas, desde el punto de vista matemático, y predicciones desde el punto de vista empírico. La motivación para el estudio matemático no es producir nuevas matemáticas, es decir, nuevas ideas abstractas o nuevos teoremas, aunque ésto puede suceder, sino más importante, producir nueva información acerca de la situación estudiada.

El paso final en el proceso de construcción del modelo es la comparación de los resultados predichos en base al trabajo matemático, con el mundo real.

El proceso anterior se puede representar de la siguiente manera:



Uno de los primeros aspectos que se deben determinar acerca de una situación es si se debe modelar más apropiadamente en términos determinísticos o estocásticos. Un modelo se dice que es determinístico si dada suficiente información en un instante de tiempo o en una etapa, entonces se puede determinar exactamente el comportamiento futuro del sistema. Por ejemplo, se puede escoger modelar el crecimiento de una población en términos determinísticos. La hipótesis es entonces que el crecimiento de la población se conoce y que se dá el tamaño de ella en un instante de tiempo, de manera que se puede determinar exactamente el tamaño de la po-- blación para todos los tiempos futuros.

Por otro lado, un modelo estocástico sí incorpora el comportamiento probabilístico. Para estos modelos las predicciones son de tal naturaleza, que no importa cuánto se conozca del sistema en un instante de tiempo, es imposible determinar con certeza absoluta el estado del sistema en el futuro.

Muchos de los modelos más útiles en las Ciencias Sociales y de la vida son modelos cuya descripción matemática involucra el azar y la incertidumbre, y ésto es de esperarse, ya que aunque el mundo real es un sistema determinístico, la imperfección de los medios que tenemos para percibirlo y lo limitado de nuestros sentidos, nos lo presentan como un sistema estocástico. Es por ésto que se impone antes que nada, el estudio de técnicas y conceptos matemáticos probabilísticos.

F U N C I O N E S D E P R O B A B I L I D A D.- Dado un espacio muestra S y una familia $\mathcal{A}$ de eventos en S, una función de probabilidad asocia a cada evento A de $\mathcal{A}$ un número real P(A), la probabilidad del evento A y se deben cumplir los siguientes axiomas:

1.- $P(A) \geq 0$ para todo A

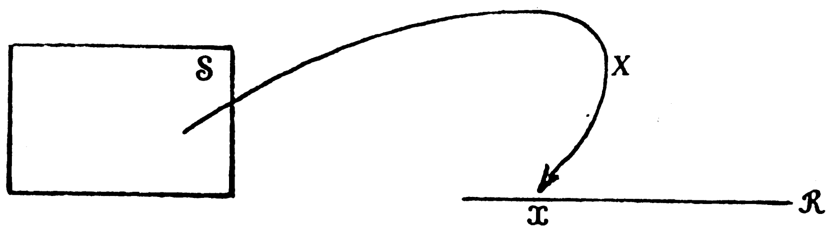
2.- $P(S)= 1$

3.- Si existe un conjunto contable de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ y si estos eventos son mutuamente exclusivos, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$$

V A R I A B L E S A L E A T O R I A S.- El espacio muestra S es el conjunto de todos los eventos elementales que son los posibles resultados de algún experimento simple. Estos resultados puede ser números (por ejemplo, una temperatura en °C de cierto lugar en un mes determinado, el precio del oro en un día particucular, etc.) o se pueden expresar en términos no numéricos (por ejemplo, el sexo de cierta persona, el hecho de que llueva o nó en un día particular).

Si el símbolo X representa una función que asocia un número real a todos y cada uno de los eventos elementales (cualquier elemento de S) en el espacio muestra, entonces X se llama una variable aleatoria. En otras palabras, una variable aleatoria X es una función real definida en el espacio muestra.



La expresión P(X=x) simboliza la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor particular x.

Sea un conjunto de eventos $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ y supóngase que formen una partición del espacio muestra S, es decir, son mutuamente exclusivos y exhaustivos. El conjunto de probabilidades $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_k)$ es una distribución de probabilidad.

Por ejemplo, considérese el espacio muestra de todos los empleados en una fábrica. Se selecciona un empleado al azar y se registra su altura. Se utilizan seis intervalos de clase para la altura y la distribución de probabilidad puede ser

Altura en cms.	Probabilidad
150 - 158	0.023
159 - 167	0.136
168 - 176	0.682
177 - 185	0.136
186 - 194	0.021
195 - 203	0.002
	1.000

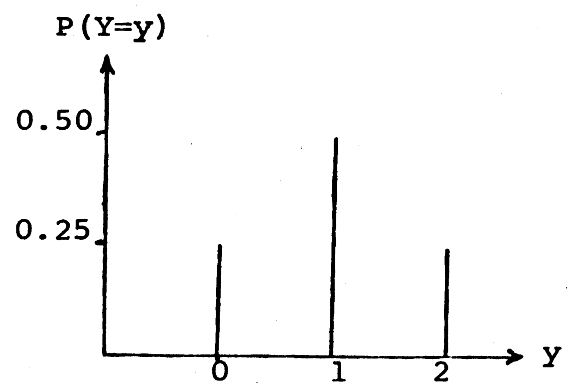
Un conjunto de probabilidades o una distribución de probabilidad para los eventos elementales en S determina un conjunto de probabilidades o una distribución de probabilidad para cualquier variable aleatoria definida en S. Por ejemplo, Se tiene el espacio muestra de los resultados de tirar dos monedas: {aa,as,sa,ss} y sea la variable aleatoria Y el número de águilas que aparecen al tirar estas dos monedas. Entonces la distribución de probabilidad del resultado de tirar las dos monedas es:

x	P(X=x)
aa	0.25
as	0.25
sa	0.25
ss	0.25
	1.00

La distribución de probabilidad del número de águilas es:

y	P(Y=y)
0	0.25
1	0.50
2	0.25
	1.00

Si la variable aleatoria X puede tomar únicamente valores finitos determinados o valores en un conjunto infinito contable, se dice que es una variable aleatoria discreta. La distribución de probabilidad de una variable discreta se puede especificar listando todos los posibles valores de la variable aleatoria junto con sus correspondientes probabilidades. Este listado se puede representar a menudo por una gráfica, que se denomina función de probabilidad de masa o simplemente función de probabilidad. Por ejemplo, para la variable aleatoria Y definida arriba



En algunos casos puede ser posible expresar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta en la forma de una función matemática. Por ejemplo, sea la variable aleatoria X que puede tomar exactamente K posibles valores, los enteros 1 a K, y que cada valor tiene probabilidad 1/K. Esta distribución se puede expresar como sigue:

$$P(X=x) = \begin{cases} 1/K & \text{si } x = 1,2,\ldots,K \\ 0 & \text{si } x \text{ tiene otro valor} \end{cases}$$

Una variable aleatoria X se dice que es continua si para todo par de valores u y v tales que $P(X\leq u)<P(X\leq v)$ se cumple que $P(u<x<v)>0$, es decir, la variable tiene cierta probabilidad de tomar cualquier valor en un intervalo de valores y tiene probabilidad cero de asumir un valor particular en el intervalo. O sea que en el caso continuo no se considera la probabilidad de que X tome un valor x. En lugar de ésto se trabaja con la densidad de probabilidad de X en x, simbolizada por:

$f(x)$ = densidad de probabilidad de X en x

La probabilidad en un intervalo (a,v) está dada por:

$$P(a\leq X\leq v) = \int_a^v f(x)\,dx$$

es decir, la probabilidad de un intervalo es el área bajo la curva de la densidad de probabilidad en el intervalo de interés, y el área total es igual a 1.

Una función de densidad de probabilidad, $f(x)$, debe satisfacer dos propiedades:

1.- $f(x) \geq 0$ para toda x.

2.- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.0$

Ejemplo: sea X la vida útil (en horas) de un foco. Suponga que X está uniformemente distribuida en el intervalo de 80 a 100, es decir, se está seguro de que el foco durará al menos 80 horas pero no más de 100. Entre 80 y 100 horas la probabilidad está uniformemente distribuida. Esto significa que si se divide el intervalo entre 80 y 100 en subintervalos de longitud i, estos subintervalos tienen la misma probabilidad. La función de densidad de probabilidad de X se puede representar en forma funcional de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 1/20 & \text{si } 80 \leqq x \leqq 100 \\ 0 & \text{para otros valores de } x \end{cases}$$

Se puede verificar fácilmente que f(x) satisface los dos requerimientos de la función de densidad de probabilidad.

FUNCION DE DISTRIBUCION ACUMULADA

La probabilidad de que una variable aleatoria X tome un valor igual o inferior a un número dado x se escribe como:

$$F(x) = P(X \leqq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

El símbolo F(x) representa la función de distribución acumulada, la cual debe satisfacer ciertas propiedades matemáticas, siendo las más importantes:

1.- $0 \leqq F(x) \leqq 1$

2.- si $a < b$ entonces $F(a) \leqq F(b)$

3.- $F(\infty) = 1$ y $F(-\infty) = 0$

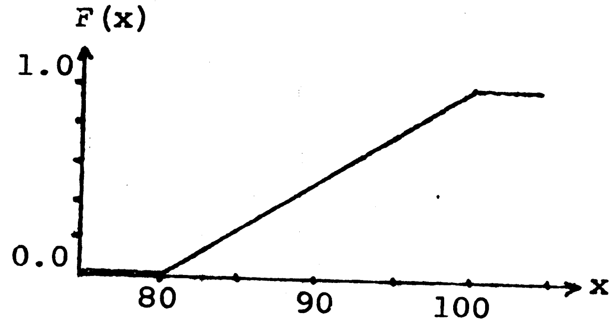
Una variable aleatoria X se dice que es contínua si su función de distribución acumulada F(x) es una función continua. Por otra parte, la función de distribución acumulada de una variable aleatoria discreta es siempre una función escalonada. Si se conoce la función de distribución acumulada F(x), es posible conocer la función de densidad f(x).

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

Por ejemplo, para el caso del foco:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{80} 0\ dx + \int_{80}^{x} (1/20)\ dx = x/20\Big|_{80}^{x} = (x-80)/200$$

La gráfica de F(x) es



La probabilidad de que una variable aleatoria tome cualquier valor entre los límites a y b se puede encontrar de la siguiente manera: $P(a \leqq X \leqq b) = F(b) - F(a)$

V A L O R E S P E R A D O.- Si la distribución de X es discreta, entonces el valor esperado de X se define como:

$$E(X) = \sum_{x} x\ P(X=x) = \sum_{x} x\ P(x)$$

donde la suma se considera para todos los valores que pueda tomar X. Para una variable continua, el valor esperado se define como:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx$$

Por ejemplo, sea X la ganancia que se obtiene al comprar 100 partes de un inventario y venderlas dentro de un año. La distribución de probabilidad de X es

x	P(x)
-500	0.03
-250	0.07
0	0.10
250	0.25
500	0.35
750	0.15
1000	0.05

El valor esperado de X es:

$$E(X) = (-500)(0.03) + (-250)(0.07) + (0)(0.10) + (250)(0.25) + (500)(0.35) + (750)(0.15) + (1000)(0.05) = 367.5$$

luego la ganancia esperada por vender este bien es de \$367.50

La vida esperada del foco de los ejemplos anteriores sería:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx = \int_{80}^{100} x\ (1/20)\ dx = x^2/40\Big|_{80}^{100} = 3600/40 = 90$$

luego la vida esperada del foco es de 90 horas.

Las reglas para manejar el valor esperado son:

1.- Si g(X) es alguna función de X, entonces

$E[g(X)] = \sum_x g(x)\ P(x)$ para el caso discreto.

y $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ f(x)\ dx$ para el caso continuo

2.- Si a es una constante, entonces $E(a) = a$

3.- Si a es una constante real y X es una variable aleatoria con valor esperado E(X), entonces

$$E(aX) = a\ E(X)$$

4.- Si a es una constante real y X es una variable aleatoria, entonces: $E(X + a) = E(X) + a$

5.- Si X es una variable aleatoria con valor esperado E(X) y Y es una variable aleatoria con valor esperado E(Y), entonces: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

6.- Dado un número finito de variable aleatorias, el valor esperado de la suma de estas variables es la suma de los valores esperados individuales. Esta regla es una generalización de la anterior para cuando se tienen K variables aleatorias.

M E D I D A S D E T E N D E N C I A C E N T R A L.-

1.- La media: $E(X) = \mu$ = media de la distribución de X

El valor esperado de la desviación alrededor de la media es cero en cualquier distribución.

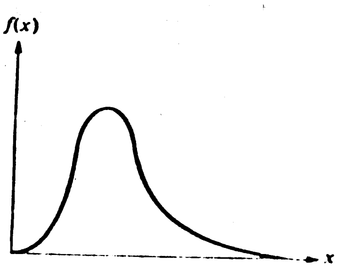
$$E(X - \mu) = E(X) - E(\mu) = E(X) - \mu = \mu - \mu = 0$$

2.- La mediana: si $P(X \leqq a) \geqq 0.50$ y $P(X \geqq a) \geqq 0.50$ entonces a se llama la mediana de la distribución de X. La mediana es una clase de las medidas conocidas como fractiles.

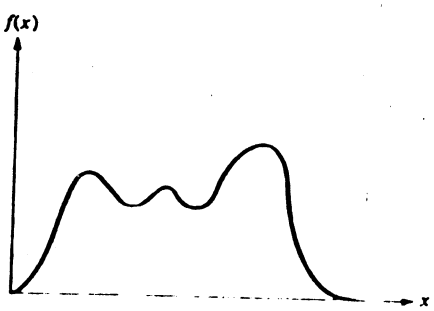
Si $F(a) = P(X \leqq a) \geqq f$ y $P(X \geqq a) \geqq 1-f$ entonces a se denomina el fractil f de la distribución de X.

3.- La moda: es el valor de X en el cual la función de densidad de probabilidad de X alcanza su punto más alto.

Una distribución se puede describir por el número de máximos relativos que exhibe, es decir, su modalidad.

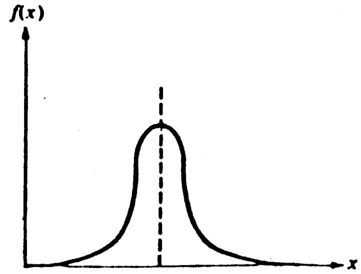


Distribución Unimodal

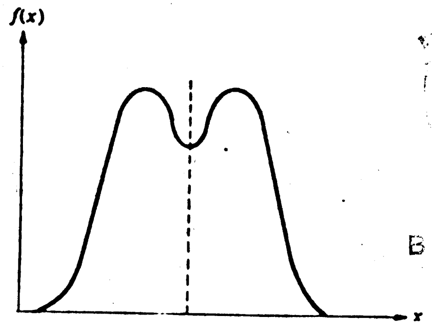


Distribución Multimodal

Otra característica de una distribución es su simetría, o inversamente, su sesgo. Una distribución es simétrica sólo si es posible dividir su gráfica en dos imágenes especulares.

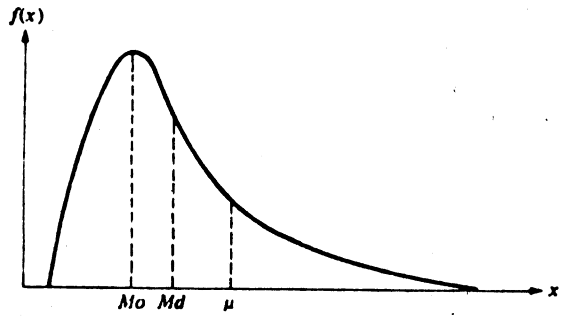


Distribución Simétrica Unimodal

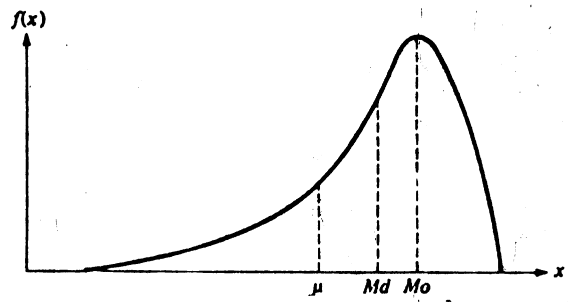


Distribución Semétrica Bimodal

Una distribución no simétrica se dice que es sesgada, lo que significa que la longitud de una de sus colas, relativa a la sección central, está desproporcionada respecto a la otra.



Distribución Positivamente Sesgada



Distribución Negativamente Sesgada

M E D I D A S D E D I S P E R S I O N.-

1.- La variancia: para cualquier distribución, el índice V(X) o σ^2 , igual al valor esperado del cuadrado de la desviación de la media: $V(X) = \sigma^2 = E(X - \mu)^2$ se llama la variancia de la distribución.

Las reglas para la variancia son:

a) La viariancia de una variable aleatoria es igual al valor esperado del cuadrado de la variable aleatoria menos el cuadrado del valor esperado de la variable.

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

b) Si a es una constante real y X es una variable aleatoria con valor esperado E(X) y variancia σ^2, entonces la variable aleatoria (X + a) tiene variancia σ^2.

$$V(X + a) = V(X) = \sigma^2$$

c) Si a es una constante real y X es una variable aleatoria con variancia σ^2, la variancia de la variable aleatoria aX es

$$V(aX) = a^2 V(X) = a^2\sigma^2$$

2.- La desviación estandar: la raíz cuadrada de la variancia de una distribución se llama la desviación estandar, y es un índice de variabilidad expresado en las unidades de medida originales.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{E(X - \mu)^2}$$

La variancia refleja el grado de expansión, ya que V(X) será cero si y sólo si hay un solo valor para X, la media. Conforme los valores tiendan a diferir entre sí y de la media, mayor será la variancia.

Por ejemplo, sean X y Y las ganancias en pesos por adquirir dos tipos de seguros. Sus distribuciones son:

x	P(x)	y	P(y)
0	0.10	-500	0.10
500	0.80	0	0.20
1000	0.10	500	0.40
		1000	0.20
		1500	0.10

Efectuando cálculos se tiene que E(X) = 500, E(Y) = 500, V(X) = 50,000, V(Y) = 300,000

La variancia de Y es seís veces más grande que la de X, refle jando mayor dispersión en la distribución de Y. Al comparar los dos seguros se puede decir que, aunque las ganancias esperadas son iguales, la seguridad representada por Y es mucho más riesgosa que la seguridad representada por X.

La desviación estandar de X es $\sigma = \sqrt{50,000} = 223.6$ y la de Y es $\sigma = \sqrt{300,000} = 547.7$. Hay que hacer notar en este ejemplo que la variancia tiene unidades en términos cuadrados $(\text{pesos})^2$, mientras que la desviación estandar tiene unidades de pesos.

La variancia y la desviación estandar se calculan siempre en términos de la media ya que es entonces cuando el valor esperado del cuadrado de la desviación es el menor.

El uso principal de la media y la desviación estandar es transformar variables aleatorias en variables aleatorias estandarizadas. Si X es una variable aleatoria, su correspondiente variable aleatoria estandarizada es:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

La variable aleatoria estandarizada es una desviación del valor esperado, relativa a la desviación estandar. Para cualquier valor de X, el valor correspondiente de Z dice cuántas desviaciones estandar se aleja el valor de X de la media E(X). La media de la distribución de una variable aleatoria estandarizada es siempre 0, y la desviación estandar es siempre 1.0.

Hay una conexión muy cercana entre el tamaño de las desviaciones de la media y la probabilidad, que se cumple para distribuciones con variancia y media finitas. La siguiente relación es la desigualdad de Chebyshev:

$$P(|X - \mu| \geqq b) \leqq \sigma^2/b^2$$

es decir, la probabilidad de que una variable aleatoria X difiera absolutamente de su valor esperado en b o más unidades ($b > 0$) es siempre menor o igual que la relación de σ^2 a b^2. Cualquier desviación del valor esperado de b o más unidades no puede ser más probable que σ^2/b^2. Si se hace $b = k\sigma$, entonces

$$P(|X - \mu|/\sigma \geqq k) \leqq 1/k^2$$

es decir, la probabilidad de que una variable aleatoria estandarizada tenga un valor absoluto mayor o igual que algún número positivo k es siempre menor o igual que $1/k^2$. O sea, dada una distribución con media y variancia finitas, la probabilidad de observar un caso con valor estandarizado de 2 o más (descartando el signo) debe ser cuando más 1/4.

Ejemplo: sea X el número de días que tarda en llegar un paquete por correo de México, D.F. a Zurich en Suiza. Todo lo que se sabe de la distribución de X es que su media es 100 y su desviación estandar 25. Es imposible hacer postulados probabilísticos más exactos sobre X, ya que no se conoce exactamente su distribución. Sin embargo, usando la desigualdad de Chebysheb se puede hacer un postulado probabilístico aproximado en forma de desigualdades de probabilidad. De manera que la probabilidad de que X esté alejada 75 unidades de la media en cualquier dirección se puede calcular de la siguiente manera: Los valores estandarizados son: $Z_1 = (25 - 100)/25 = -3$ y $Z_2 = (175 - 100)/25 = 3$

luego $P(|Z| \geqq 3) \leqq 1/9$; la probabilidad de observar un valor de 3 ó más desviaciones estandar de la media es no más de 1/9, sin importar la distribución. Esto significa que hay cuando más 1/9 de probabilidad de que el paquete llegue en 25 días o menos, o en 175 días o más.

MOMENTOS DE UNA DISTRIBUCION.- Los momentos de una distribución son simplemente los valores esperados de las diferentes potencias de la variable aleatoria. O sea que el primer momento alrededor del origen de la variable aleatoria X es $E(X)$ = la media. El segundo momento alrededor del origen es $E(X^2)$; el tercero es $E(X^3)$, etc. Cuando la media se substrae de X antes de que se tome la potencia, se dice que el momento es alrededor de la media; la variancia $E[X - E(X)]^2$ es el segundo momento alrededor de la media; $E[X - E(X)]^3$ es el tercer momento alrededor de la media, y se usa para medir el grado de sesgo; será cero para una distribución simétrica, negativo para una sesgada a la izquierda y positivo para una sesgada a la derecha.

DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD CONJUNTA.- Supóngase que se tienen dos variables aleatorias discretas: X cuyo rango es $x_1, x_2, \ldots, x_J$

Y cuyo rango es $y_1, y_2, \ldots, y_K$

Se puede discutir el evento de que X tome algún valor x y de que Y tome algún valor y, éste es el evento $(X = x, Y = y)$ [redacted] probabilidad $P(X = x, Y = y)$. El conjunto de todos estos eventos junto con sus probabilidades, constituyen la distribución de probabilidad conjunta de X y Y. Aunque el interés principal puede estar centrado en la relación entre las dos variables aleatorias, se puede querer saber algo de las dos variables tomadas individualmente; las distribuciones individuales calculadas de la conjunta se llaman probabilidades marginales.

$$P(X = x_j) = \sum_{k=1}^{K} P(X = x_j, Y = y_k)$$

$$P(Y = y_k) = \sum_{j=1}^{J} P(X = x_j, Y = y_k)$$

Usando las probabilidades conjuntas y marginales se pueden determinar las probabilidades condicionales:

$$P(X = x/Y = y) = P(X = x, Y = y)/P(Y = y)$$

$$P(Y = y/X = x) = P(X = x, Y = y)/P(X = x)$$

Para el caso de una variable aleatoria continua, se considera una función de densidad conjunta f(x,y) tal que:

1.- $f(x,y) \geqq 0$ para todo real x,y

2.- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1.0$

Aquí $P(a \leqq X \leqq b, c \leqq Y \leqq d) = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\, dx\, dy$

las funciones de densidad marginal son

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$$

Las funciones de densidad condicional son;

$$f(x/Y = y) = f(x,y)/f(y)$$

$$f(y/X = x) = f(x,y)/f(x)$$

Ejemplo: sea X la porción de horas durante el día que hay sol en Acapulco durante el mes de mayo de cualquier año, y Y represente lo mismo para el mes de septiembre del mismo año. Suponga que -

la densidad conjunta de X y Y está dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & \text{si } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases}$$

Las funciones de densidad marginal de X y Y son:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 4xy\,dy = \int_0^1 4xy\,dy = 2xy^2\Big|_0^1 = 2x \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 4xy\,dx = \int_0^1 4xy\,dx = 2x^2y\Big|_0^1 = 2y \quad \text{para } 0 \leq y \leq 1$$

Las funciones de densidad condicional son:

$$f(x/y) = 4xy/2y = 2x \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$$

$$f(y/x) = 4xy/2x = 2y \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$$

Dos variables aleatorias X y Y son independientes si y sólo si $P(X = x, Y = y) = P(X = x)\ P(Y = y)$, para todo par de valores x,y

Una variable aleatoria X con densidad f(x) en x y una variable aleatoria Y con densidad f(y) en y son independientes si y sólo si para todo (x,y) $f(x,y) = f(x)\ f(y)$.

Si X y Y son variables aleatorias con función de probabilidad conjunta P(x,y) en el caso discreto, o función de densidad conjunta f(x,y) en el caso continuo, y si g(X,Y) es una función de X y de Y, entonces:

$$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y)\ P(x,y) \quad \text{para el caso discreto.}$$

$$E[g(X,Y)] = \iint g(x,y)\ f(x,y)\ dx\ dy \quad \text{para el caso continuo.}$$

Dada la variable aleatoria X con valor esperado E(X) y la variable aleatoria Y con valor esperado E(Y), entonces si X y Y son independientes: $E(XY) = E(X)\ E(Y)$. Si $E(XY) \neq E(X)\ E(Y)$ las variables X y Y no son independientes.

Un momento de la distribución conjunta de X y Y que refleja la dirección de su relación, es la covarianza, definida como sigue:

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E\left[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)\right]$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E\left[(XY)\right] - E(X)\ E(Y)$$

Si X y Y son independientes se tiene que cov(X,Y) = 0. Supóngase que X y Y están positivamente relacionadas, significando ésto que a valores grandes de X corresponden valores grandes de Y y a valores bajos de X corresponden valores bajos de Y, entonces la covariancia es positiva. Si a valores grandes de X corresponden valores bajos de Y y viceversa, entonces la covariancia es negativa. Desafortunadamente la magnitud de la covariancia depende de las unidades de X y Y, de manera que es difícil dar una interpretación de la fuerza de la relación entre X y Y. Este problema se resuelve dividiendo la covariancia entre una cantidad que tenga las mismas unidades de X y Y. Esta medida que refleja la fuerza y la dirección de la relación, es el coeficiente de corelación:

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_x\ \sigma_y} \qquad \text{y} \qquad -1 \leqq \rho \leqq +1$$

D I S T R I B U C I O N E S   D E   P R O B A B I L I D A D   E S P E C I A L E S.-

1.- Proceso de Bernoulli: la distribución de probabilidad más simple es una con sólo dos eventos, cada uno con cierta probabilidad. Un experimento que puede resultar en uno de dos posibles resultados se llama ensayo de Bernoulli. Un proceso de Bernoulli consiste en una serie independiente de ensayos de Bernoulli. Cada evento del ensayo se denomina éxito o fracaso, p es la probabilidad de éxito en un ensayo dado, y permanece fija de ensayo en ensayo.

Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución Bernoulli cuando sólo puede tomar los valores (0,1) y su función de probabilidad puede expresarse como:

$$P(x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1-p & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases}$$

$$E(X) = (1)(p) + (0)(1-p) = p$$

$$V(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = p(1-p)$$

2.- Distribución binomial: se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución binomial si su función de probabilidad puede expresarse como:

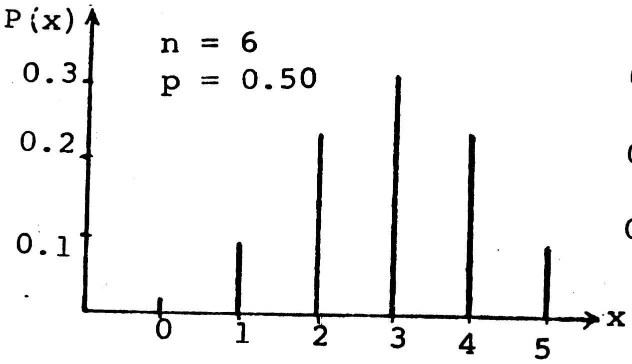
$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases}$$

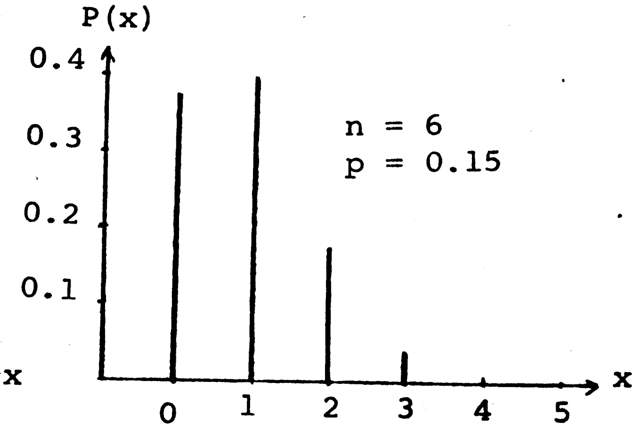
donde n es un entero positivo y $0 < p < 1$. Se dice que n y p son los parámetros de la distribución.

$$\mu = np \qquad \sigma^2 = np(1-p)$$

Esta función de distribución nos da la probabilidad de observar exactamente x éxitos en n intentos.

Aunque la regla matemática para la distribución binomial es la misma sin importar los valores particulares de n y p, la forma del histograma u otra representación de la distribución binomial depende de n y p.





Ejemplo: supóngase que el gerente de una planta se enfrenta con el siguiente problema en un proceso de manufactura. De tiempo en tiempo, el proceso se sale de control y produce muchos artículos defectuosos. Si está fuera de control, se puede corregir con un ajuste. Sin embargo para efectuarlo tendrá que llamar a un mecánico y gastar dinero. Por otro lado, si el proceso permanece fuera de control, resulta muy caro reparar los artículos defectuosos. Si el proceso está bajo control, el gerente no quiere pagar por el ajuste, pero si está fuera de control, sí está dispuesto a hacer el gasto.

En este caso el proceso se puede pensar como un proceso de Bernoulli con parámetro p, es decir, la probabilidad de que un solo artículo sea defectuoso. El proceso se considera bajo control si p no es mayor que 0.10, de otra manera el proceso está fuera de control. En otras palabras, el gerente tiene una hipótesis: el proceso está bajo control, es decir, p no es mayor que 0.10. Si él pudiera estar seguro de que su hipótesis es cierta, tomaría una acción, no ajustar el proceso; pero si pudiera estar seguro de que su hipótesis es falsa, tomaría una acción diferente, es decir, llamaría al mecánico para ajustar el proceso.

El gerente no tiene la menor idea de si el proceso está o nó fuera de control, pero puede observar una muestra de diez artículos. Suponiendo la distribución anterior y suponiendo que el proceso es independiente y estacionario (es decir, los ensayos son independientes y p permanece fija de ensayo en ensayo), puede calcular las probabilidades de las varias posibles combinaciones resultantes para una muestra de tamaño 10, usando la distribución binomial.

La decisión de llamar al mecánico o nó, depende no sólo de los resultados de la muestra, sino también, de los costos relevantes. Esto es, depende del costo de llamar al mecánico y del costo de reparar los artículos defectuosos. Si el primero es mucho mayor que el segundo, el gerente puede decidir continuar aun cuando el resultado de la muestra favorezca poco su hipótesis. Si el segundo es mucho mayor que el primero el gerente puede decidir llamar al mecánico aun cuando el resultado de la muestra tienda a favorecer su hipótesis.

3.- Distribución de Pascal: una variable aleatoria X tiene una distribución de Pascal si tiene la siguiente función de probabilidad:

$$P(X) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} & r = 0,1,\ldots,x \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases}$$

$$\mu = r/p \qquad \sigma^2 = r(1-p)/p^2$$

Se puede pensar que esta función representa la probabilidad de que tome exactamente x ensayos de tipo Bernoulli el observar r éxitos. Un caso especial es la distribución geométrica.

4.- Distribución geométrica: una variable aleatoria X tiene distribución geométrica si tiene la siguiente función de probabilidad:

$$P(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x = 1,2,3,\ldots \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases}$$

Se puede pensar que la variable aleatoria X denota el número de pruebas de un ensayo de Bernoulli hasta que se obtiene el primer éxito.

5.- Distribución multinomial: los conceptos básicos de la distribución binomial se pueden generalizar a situaciones con más de dos eventos. Esta generalización se conoce como distribución multinomial y tiene la siguiente regla:considérenseK eventos exclusivos y exhaustivos, con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Si se efectúan n observaciones independientes y al azar, entonces la probabilidad de que exactamente n_1 sean del evento 1, n_2 del evento 2,..., n_k del evento K donde $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, está dada por: $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} (p_1)^{n_1} (p_2)^{n_2} \ldots (p_k)^{n_k}$

Ejemplo: un artículo defectuoso de un lote de producción puede tener 1, 2, 3 ó 4 defectos. Las probabilidades del diferente número de defectos son: $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.18$, $p_3 = 0.01$ y $p_4 = 0.01$. Estas probabilidades son las mismas para todos los artículos defectuosos, y los ensayos son independientes. Se puede considerar que el proceso es multinomial, y la probabilidad de obtener exactamente 5 artículos con un defecto ($n_1 = 5$), 3 artículos con 2 defectos ($n_2 = 3$), 2 artículos con 3 defectos ($n_3 = 2$) y 1 artículo con 4 defectos ($n_4 = 1$) en una muestra de 11 artículos defectuosos es:

$$\frac{11!}{5!\,3!\,2!\,1!}(.80)^5\,(.18)^3\,(.01)^2\,(.01)^1 = 0.000053$$

6.- Distribución hipergeométrica: dada una población con w elementos, que se puede dividir en K clases mutuamente exclusivas y exhaustivas, con w_1 elementos en la clase 1, w_2 en la 2, ..., w_K en la K. Se toma una muestra de n observaciones, al azar y sin reemplazamiento, y se encuentra que contiene n_1 elementos de la clase 1, n_2 de la clase 2, ..., n_K de la clase K. La probabilidad de ocurrencia de esta muestra está dada por:

$$\frac{\binom{w_1}{n_1}\binom{w_2}{n_2}\cdots\binom{w_k}{n_k}}{\binom{w}{n}}$$

donde $n_1 + n_2 + \ldots + n_K = n$ y $w_1 + w_2 + \ldots + w_K = w$

$$\binom{w}{n} = \frac{w!}{n!\,(w-n)!}$$

Ejemplo: en una población muy pequeña de 20 consumidores de café, 10 prefieren la marca X, 6 la marca Y y 4 la marca Z. Se toma una muestra al azar de 10 consumidores sin reemplazamiento. La probabilidad de que 7 prefieran la marca X, 2 la marca Y y 1 la marca Z es:

$$\frac{\binom{10}{7}\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{20}{10}} = 0.03897$$

si el muestreo hubiera ocurrido con reemplazamiento se hubiera utilizado la regla multinomial.

7.- Distribución de Poisson: se puede demostrar matemáticamente que si en una distribución binomial n se hace muy grande y p muy pequeña, de manera que el producto np permanece constante, la distribución de X se aproxima a la Poisson, la cual se puede expresar como:

$$p(X = x/n,p) = \begin{cases} \dfrac{e^{-np}\ (np)^x}{x!} & x = 0,\ 1,\ \ldots \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases}$$

Ya que np permanece constante, se acostumbra hacer $np = \lambda t$, donde λ se considera la intensidad del proceso (tasa esperada de ocurrencia de A) por unidad de tiempo y λt es la intensidad en un período de tiempo de longitud t, de manera que:

$$P(X = x/\lambda,t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda T}\ (\lambda t)^x}{x!} & x = 0,\ 1,\ \ldots \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases}$$

$$\mu = \lambda t \qquad \sigma^2 = \lambda t$$

Ejemplo: un conmutador de teléfonos maneja 300 llamadas en promedio durante una hora de actividad y el tablero puede hacer a lo más 10 conexiones por minuto. Estimar la probabilidad de que el tablero esté sobrecargado en un minuto dado.

Se pide $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 10)$

$$P(X \leqq 10) = \sum_{x} P(x) = \sum \frac{e^{-\lambda T}(\lambda t)}{x!}$$

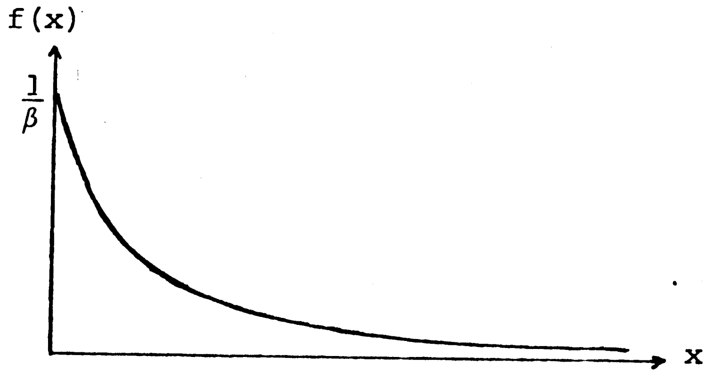
$\lambda = .5$ llamadas/min. $t = 1$ min. $\lambda t = 5$ llamadas

luego $P(X \leqq 10) = \sum \frac{e^{-5}5^{x}}{x!} = 0.9863$ $\qquad P(X \geqq 10) = 0.0137$

8.- Distribución exponencial: una variable aleatoria cuya función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x \geqq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

se conoce como una variable aleatoria distribuida exponencialmente. La distribución exponencial es una función de un solo parámetro, $1/\beta$, donde $\beta > 0$. Esta función tiene la forma general:



La distribución exponencial es la distribución de la cantidad de tiempo hasta la primera ocurrencia de un evento, o equivalentemente, la distribución de la cantidad de tiempo entre ocurrencias de un evento, cuando las ocurrencias están gobernadas por un proceso de Poisson.

Ejemplo: una central telefónica genera en promedio 2 llamadas por minuto y se desea conocer la distribución de la cantidad de tiempo en minutos hasta la siguiente llamada.

Si las llamadas se producen de acuerdo a un proceso de Poisson, esta distribución es exponencial con $1/\beta = 2$. La probabilidad de que la siguiente llamada se produzca en los próximos 5 minutos es

$$P(X \leq 5) = \int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^5 \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = - e^{-x/\beta}\Big|_0^5 = 1 - e^{-5/\beta}$$

$$= 1 - e^{-10} = 0.999955$$

Es decir, se tiene casi la certeza de que la siguiente llamada se efectúe dentro de 5 minutos.

9.- Distribución uniforme: una variable aleatoria se dice que tiene distribución uniforme si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases}$$

$$\mu = \frac{b+a}{2} \qquad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ejemplo: anteriormente se discutió que la vida en horas de un foco tiene distribución uniforme en el intervalo de 80 a 100. Se desea saber la probabilidad de que el foco falle en 86 horas ó menos, de que dure exactamente 93 horas, y de que en un lote de 20 focos exactamente 4 duren más de 95 horas.

El primer caso es igual a la probabilidad de que el foco dure 86 horas o menos, es decir:

$$P(X \leq 86) = \int_{80}^{86} 1/20\,dx = x/20\Big|_{80}^{86} = (86 - 80)/20 = 6/20 = 0.3$$

la probabilidad de que falle en 86 horas o menos es 0.3.

Para el segundo caso, ya que la variable aleatoria es continua, la probabilidad de que tome un valor particular es cero.

Para el tercer caso, la probabilidad de que un foco dure más de 95 horas es:

$$P(X > 95) = 1 - P(X \leqq 95) = 1 - \int_{80}^{95} 1/20 \, dx = 1 - 1/20 \, x\Big|_{80}^{95}$$

$$1 - (95 - 80)/20 = 1 - 3/4 = 0.25$$

La probabilidad de que un foco dure menos de 95 horas es 0.75.

La probabilidad de que en un lote de 20 focos, exactamente 4 duren más de 95 horas es igual al producto: $(0.25)^4 \, (0.75)^{16} = .000039$.

10.- Distribución normal: una de las distribuciones más importantes en estadística es la distribución normal. Su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Los números π, e, y 2 son simplemente constantes matemáticas positivas, la parte de trabajo en la función es el exponente:

$$-(x - \mu)^2/2\sigma^2$$

donde un valor particular x de la variable X aparece junto con dos parámetros μ y σ^2. Conforme más difiera x de μ, será mayor el numerador del exponente. Esta desviación entra en una cantidad cuadrática, de manera que dos valores diferentes de x que muestren la misma desviación absoluta a partir de μ, tienen la misma densidad de probabilidad. El exponente negativo significa que a mayor desviación absoluta de x de μ, menor será la función de densidad.

E S T A D I S T I C A.- En Estadística generalmente no se sabe nada acerca de la población o proceso de interés, pero se tiene alguna información relevante, como el resultado de una muestra aleatoria tomada de la población o proceso. Esta información se puede investigar desde el punto de vista descriptivo y/o desde el punto de vista inferencial.

La Estadística descriptiva consiste de un conjunto de procedimientos para describir y sumarizar la información de la muestra.

La Estadística inferencial consiste de métodos para hacer inferencias acerca de la población o proceso usando los datos de la muestra.

M U E S T R E O A L E A T O R I O.- Dado algún experimento simple y el correspondiente espacio muestra de eventos elementales, el conjunto de resultados de n ensayos separados, es una muestra. Cuando la muestra se toma con reemplazamiento, el mismo elemento de la población se puede observar más de una vez. Cuando la muestra se toma sin reemplazamiento, el mismo elemento de la población no se puede observar más de una sola vez en una muestra dada.

Un método para tomar muestras tal que todas y cada una de las distintas muestras de tamaño n tiene la misma probabilidad de ser seleccionada, se llama muestreo sencillo aleatorio.

D I S T R I B U C I O N E S D E F R E C U E N C I A.-

Cuando un estadístico hace algunas observaciones, aún en los casos más sencillos, las clasifica en un conjunto de clases de -

medidas cualitativas. Estas clases son mutuamente exclusivas y -- exhaustivas, de manera que cada observación cae dentro de una y - sólo una de las clases.

Cualquier representación de la relación entre un conjunto de clases de medidas y la frecuencia de cada una, es una distribu--- ción de frecuencia . Por ejemplo, en un estudio hecho a un grupo de 25 consumidores para determinar qué marca preferían, se clasificaron de acuerdo a la marca A, B, C ó D. Se obtuvo la siguiente tabla que muestra la preferencia de estos consumidores.

Consumidor	Marca preferida	Consumidor	Marca preferida
1	A	14	B
2	B	15	A
3	A	16	B
4	A	17	D
5	A	18	B
6	C	19	D
7	D	20	A
8	A	21	B
9	A	22	B
10	A	23	A
11	D	24	A
12	B	25	D
13	D		

Aunque este listado contiene toda la información relevante, es muy largo y a menudo confuso. Si sólo se está interesado en el patrón de preferencias del grupo, el número asignado a las personas es irrelevante, y todo lo que se necesita es el número de individuos que prefieren cada marca. Estos datos se condensan en la distribución de frecuencia

Clase	f
A	11
B	7
C	1
D	6
	25 = n

M E D I D A S D E T E N D E N C I A C E N T R A L Y D E D I S P E R S I O N P A R A D I S T R I B U C I O N E S D E F R E C U E N C I A.- La media muestral de una muestra de observaciones, se determina tomando el promedio aritmético de los valores; si la muestra es de tamaño n y los valores observados son $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la media muestral es:

$$m = \frac{\sum x_i}{n}$$

La mediana se define, para un conjunto de datos observados, dependiendo de si n es nón ó par. Cuando n es nón y los n valores están arreglados en orden numérico, la mediana corresponde al $[(n + 1)/2]$-ésimo valor. Cuando n es par y los n valores están arreglados en orden numérico, la mediana se define como el número intermedio entre el $(n/2)$-ésimo valor y el $[(n/2) + 1]$-ésimo valor.

La moda es simplemente el punto o clase con mayor frecuencia.

La variancia de la muestra se define como el promedio de las desviaciones cuadráticas de los valores muestrales, de la media muestral.

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - m)^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - m^2$$

En algunas ocasiones se utiliza una variancia de la muestra modificada:

$$\hat{S}^2 = \frac{\sum (x_i - m)^2}{n - 1} = \frac{\sum x_i^2}{n - 1} - \frac{n}{n - 1} m^2$$

La desviación estandar de la muestra es simplemente la raíz cuadrada de la variancia muestral.

P O B L A C I O N E S, P A R A M E T R O S Y E S T A D I G R A F O S.- Una población es el conjunto de objetos de donde se toma la muestra. Dada una población de observaciones potenciales, el valor numérico asignado a una observación particular se puede considerar como una variable aleatoria; la distribución de esta variable aleatoria es la distribución poblacional. Esta distribución tendrá alguna forma matemática, con media μ y variancia σ^2, que se llaman parámetros poblacionales. Así como los parámetros son característicos de las poblaciones, los estadígrafos son medidas de las muestras. La media muestral y la variancia muestral son ejemplos de estadígrafos.

D I S T R I B U C I O N E S M U E S T R A L E S.- Antes de que una muestra se observe, un estadígrafo se considera como una variable aleatoria con una distribución de probabilidad particular. Por ejemplo, antes de tomar una muestra, la media muestral - es una variable aleatoria, con una distribución de probabilidad - que depende de la población o del proceso que genera los datos de la muestra. Las distribuciones de probabilidad de los estadígrafos muestrales deben obedecer las leyes de probabilidad. Con obje to de distinguirlas de otras distribuciones de variables aleatorias que no son estadígrafos muestrales, se les denomina distribuciones muestrales.

Una distribución muestral es una distribución de probabilidad teórica, que muestra la relación funcional entre los posibles valores de un estadígrafo y la probabilidad asociada con cada valor del estadígrafo sobre todas las posibles muestras de tamaño particular de una población. En general la distribución muestral del estadígrafo no es la misma que la distribución poblacional, sin embargo, sí depende en alguna manera de ella.

Una de las distribuciones muestrales más importantes es la distribución muestral de la media muestral y ésta es una distribución teórica que relaciona los posibles valores de la media muestral con la probabilidad de cada uno sobre todas las posibles muestras de tamaño n.

En resumen, se ha tratado con trés clases distintas de distribuciones. La primera, es la distribución poblacional, la cual es una distribución teórica que describe la probabilidad asociada con varios valores de una variable aleatoria de una población. La segunda, es la distribución de frecuencias; esta distribución resume un conjunto de datos, describiendo las frecuencias asociadas con varias clases, basadas en un subconjunto de la población seleccionado aleatoriamente. Finalmente la distribución muestral, que es una distribución probabilística teórica, que relaciona varios valores o intervalos de valores, de algún estadígrafo a las probabilidades de ocurrencia sobre todas las muestras posibles.

MEDIA Y VARIANCIA DE LA DISTRIBUCION MUESTRAL.- Sea G un estadígrafo; si la distribución muestral de G es discreta, su media es:

$$E(G) = \mu_G = \sum g\, P(g)$$

Si G es variable continua, su media es:

$$E(G) = \mu_G = \int g\, f(g)\, dg$$

La variancia de la distribución muestral del estadígrafo es:

$$\sigma_G^2 = E(G - \mu_G)^2$$

$$\sigma_G^2 = E(G^2) - [E(G)]^2$$

La variancia del estadígrafo G da una medida de la dispersión de ciertos valores muestrales, alrededor del valor medio de G sobre todas las posibles muestras de tamaño n. La desviación estandar del estadígrafo G, σ_G, se denomina error estandar del estadígrafo.

Por ejemplo, si $G = M = \sum X_i/n$, entonces:

$$E(M) = \mu \qquad V(M) = \sigma^2/n$$

O sea, la media y variancia de la distribución muestral de la media muestral son: la media poblacional y la variancia poblacional dividida entre el tamaño n de la muestra. El error estandar es:

$$\sigma_M = \sigma/\sqrt{n}$$

Conforme crece el tamaño de la muestra, es más probable que la media muestral se acerque a la media poblacional.

Una propiedad estadística de la media y variancia muestrales de poblaciones normales es que, si se tienen observaciones aleatorias e independientes, estos estadígrafos son independientes.- Si la población no es normal, los estadígrafos no son independientes a lo largo de las muestras.

COMBINACIONES LINEALES DE VARIABLES ALEATORIAS.- Una combinación lineal de variables aleatorias es una suma ponderada de la forma:

$$Y = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n = \sum C_iX_i$$

donde $(C_1, \ldots, C_n)$ es un conjunto de n números reales (no todos cero) usados como ponderadores.

Si n variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ están normalmente distribuidas, cualquier combinación lineal Y de estas variables aleatorias también está normalmente distribuida. El valor esperado de Y es:

$$E(Y) = C_1E(X_1) + C_2E(X_2) + \ldots + C_nE(X_n)$$

La variancia de Y es:

$$\sigma_Y^2 = C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \ldots + C_n^2\sigma_n^2$$

TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL.- Es muy común en estadística tratar con poblaciones en donde la distribución de la población es, definitivamente, distinta de la normal, y a menudo se deben hacer suposiciones acerca de la media de esta población. Para hacer ésto de forma efectiva, se debe conocer la distribución muestral de la media, y para conocer ésta exactamente es necesario especificar la forma de la distribución de la población; pero si se tiene suficiente evidencia para ésto, se tiene un estimador muy bueno de la media de la población y no se requiere de ningún método estadístico. La solución a esta aparente redundancia es el teorema del límite central, que tiene el siguiente postulado:

Si una población tiene variancia σ^2 y media μ, finitas, entonces la distribución de la media muestral de una muestra de n observaciones independientes, se aproxima (conforme n aumenta) a una distribución normal con variancia σ^2/n y media μ. Cuando n es muy grande, la distribución muestral de M es aproximadamente normal.

En este teorema no se dice nada acerca de la distribución de la población.

E S T I M A C I O N.- Se usarán los estadígrafos muestrales para estimar los parámetros de la población, es decir, se generalizará de la muestra a la población, por medio de la estimación. Se discutirán dos tipos de estimación: 1) estimación puntual, que consiste en usar un estadígrafo muestral para determinar un solo valor que se usará como estimado del parámetro poblacional, y 2) estimación por intervalos, que involucra determinar un intervalo de valores dentro del cual se debe encontrar el parámetro poblacional, dada cierta confianza.

E S T I M A C I O N P U N T U A L.- Si se está interesado en un parámetro particular de la población, como la media de la población o su variancia, el utilizar un estadígrafo para determinar un solo valor, que se usará como estimado del parámetro poblacional de interés, se conoce como estimación puntual. Es decir, se toma como estimado un solo valor o un punto en el espacio de todos los posibles valores.

Es útil recalcar cierta diferencia en la terminología que se usa en esta parte: un estadígrafo que se usa para estimar un parámetro poblacional se llama estimador del parámetro; un valor específico del estadígrafo, calculado a partir de una muestra particular, se llama estimado o estimación de parámetro. O sea, un estimador es una variable aleatoria y se puede hablar de su distribución de probabilidad (que es una distribución muestral, ya que el estimador es un estadígrafo); un estimado o estimación, es un valos específico de esta variable aleatoria.

Hay que recalcar que la muestra representa un subconjunto muy pequeño de observaciones, sacadas de un conjunto mucho muy grande de posibles observaciones, y es muy riesgoso decir que cualquier estimado es exactamente igual al valor poblacional.

Un estadígrafo debe reunir una serie de propiedades para que sea un buen estimador del parámetro poblacional. Cuatro de estas propiedades son: insesgadez, consistencia, eficiencia y suficiencia. Aunque pocos estadígrafos satisfacen todas estas propiedades, se considera que son útiles para los estimadores.

1.- Insesgadez: un estadígrafo G se dice que es un estimador insesgado de θ si

$$E(G) = \theta$$

Por ejemplo, considérese a la media de la muestra como un estimador de la media de la población. Aquí:

$$G = M = \sum X_i/n \quad y \quad \theta = \mu$$

$$E(G) = E(\sum X_i/n) = (1/n)E(\sum X_i) = (1/n)\sum E(X_i) = n\mu/n = \mu$$

luego la media de la muestra es un estimador insesgado de la media poblacional.

Un estimador sesgado de la variancia poblacional es la variancia de la muestra. Es decir: $E(S^2) \neq \sigma^2$.

$$E(S^2) = [(n - 1)/n]\sigma^2$$

Un estimador insesgado de la variancia basado en cualquier muestra de n ensayos independientes es:

$$\hat{S}^2 = [n/(n - 1)]\, S^2$$

2.- Consistencia: una propiedad atractiva para un estimador, es que el estimador muestral tenga una mayor probabilidad de estar cerca del valor poblacional θ conforme aumente el tamaño de la muestra. Los estadígrafos que tienen esta propiedad se llaman estimadores consistentes. Más formalmente, el estadígrafo G es un estimador consistente de θ si para cualquier número arbitrario ϵ :

$$P(|G - \theta| < \epsilon) \rightarrow 1 \quad \text{conforme } n \rightarrow \infty$$

La probabilidad de que G esté a cierta distancia ϵ del parámetro θ , se aproxima a uno conforme el tamaño de la muestra se aproxima a infinito, no importando qué tan pequeño sea el número positivo ϵ .

Por ejemplo, la media de la muestra es un estimador consistente de μ . Aplicando la desigualdad de Chebyshev se tiene que:

$$P(|X - \mu| < b) \geq 1 - \sigma^2/b^2 \quad ó \quad P(|M - \mu| < b) \geq 1 - \sigma_M^2/b^2$$

que se reduce a $P(|M - \mu| < b) \geq 1 - \sigma^2/nb^2$

es evidente que conforme crece n, el término $\sigma^2/nb^2 \rightarrow 0$; luego - $P(|M-\mu|<b) \rightarrow 1$ conforme $n \rightarrow \infty$

Una condición suficiente pero no necesaria para que el estimador sea consistente es: si G es un estimador insesgado de θ, y si $V(G) \rightarrow 0$, conforme $n \rightarrow \infty$, entonces G es un estimador consistente de θ.

3.- Eficiencia relativa: un tercer criterio para evaluar un - estadígrafo G como estimador del parámetro θ, es que G sea efi--- ciente relativo a otros estadígrafos que se pueden usar para estimar a θ. Supóngase que se calculan de los mismos datos dos dife-- rentes estadígrafos G y H, y que estos estadígrafos son estimado-- res insesgados del mismo parámetro poblacional θ. La distribución muestral de G determinada con muestras de tamaño n, tiene un error estandar σ_G. Hay también una distribución muestral de H con error estandar σ_H. Cada uno de estos dos errores estandar reflejan la - tendencia del estadígrafo a desviarse, por azar, del valor pobla-- cional. Entonces, para cualquier n, la eficiencia del estadígrafo G relativa al estadígrafo H, ambos como estimadores de θ, está dada por:

$$\sigma_H^2 / \sigma_G^2 = \text{eficiencia de G relativa a H}$$

El estimador más eficiente es el que tiene menor error estandar, de manera que esta relación será mayor que 1.00 cuando la varianza del estimador más eficiente aparezca en el denominador.

Por ejemplo, en una distribución unimodal simétrica, la media y la mediana poblacionales tienen el mismo valor. Se desea estimar este valor μ a partir de una muestra de tamaño n. Se puede utilizar la media de la muestra (estadígrafo G) o la mediana de la muestra (estadígrafo H). En una muestra dada, estos valores muy probablemente no serán los mismos.

Si la población está normalmente distribuida, entonces aproximadamente: $\sigma^2_{Md} = \pi\sigma^2/2n$ y $\sigma^2_M = \sigma^2/n$

$$\sigma^2_{Md}/\sigma^2_M = (\pi\sigma^2/2n)(n/\sigma^2) = \pi/2 = 1.57$$

Esto nos indica que la media es un estimador más eficiente que la mediana para una distribución normal. Se puede demostrar que la media de la muestra es el estimador más eficiente de μ .

El concepto de eficiencia relativa está restringido a estimadores insesgados. Un concepto más general es el de error medio cuadrático. Si G es un estimador de θ , el error medio cuadrático de G es:

$$EMC(G) = E(G - \theta)^2$$

Si G es insesgado, el error medio cuadrático es idéntico a la variancia de G, ya que $E(G) = \theta$. Si se define el sesgo de un estimador como:

$$S(G) = E(G) - \theta$$

se tiene que $EMC(G) = V(G) + S(G)^2$.

4.- Suficiencia: un estadígrafo G se dice que es un estimador suficiente del parámetro θ, si G contiene toda la información disponible en los datos acerca del valor de θ .

METODOS PARA ESCOGER ESTIMADORES.-

Sea X una variable aleatoria que tiene una distribución que depende de algún parámetro poblacional θ. La forma de la función de densidad se supone conocida, pero nó el valor de θ . Se toma una muestra de n observaciones independientes, produciendo el conjunto de valores $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Sea $\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n/\theta)$ la verosimilitud o probabilidad de esta muestra particular dado θ. Para cada posible valor de θ , la verosimilitud de la muestra puede ser diferente. Entonces, el principio de máxima verosimilitud dice que se seleccione como estimado, aquel valor de θ que haga que $\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n/\theta)$ tome su valor más grande. O sea, cuando se tengan varios valores del parámetro, uno de los cuales puede ser el verdadero de la población, la mejor elección será la de aquel valor del parámetro que hace que la muestra obtenida tenga la mayor probabilidad.

Por ejemplo, el precio diario de un artículo se comporta de acuerdo a un proceso de Bernoulli, donde los resultados son: "el precio sube" y "el precio no sube", y p es la probabilidad de que el precio suba, siendo ésta probabilidad la misma día con día y los cambios sucesivos de precio son independientes. Se tienen tres posibles valores de p: 0.4, 0.5 y 0.6.

Se tomó una muestra aleatoria de 15 días y se registró el comportamiento del precio del artículo. El resultado fue que en 9 de los 15 días el precio subió. Usando la distribución binomial con n = 15, x = 9 y p = 0.4, 0.5 y 0.6 se tiene que:

si $p = 0.4$ $\quad P(X = 9) = 0.0612$

si $p = 0.5$ $\quad P(X = 9) = 0.1527$

si $p = 0.6$ $\quad P(X = 9) = 0.2066$

Usando el principio de máxima verosimilitud para decidir entre estas tres posibles alternativas, se escogería el valor de $p = 0.6$.

Para cualquier valor de p en el intervalo (0,1), la verosimilitud se puede escribir como:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n/p) = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r}$$

Para encontrar el valor de p que maximice a $\mathcal{L}$ se utiliza cálculo. Primero se puede tomar el logaritmo, ya que el logaritmo de un argumento positivo es una función creciente monotónica, entonces el maximizar la función de verosimilitud es equivalente a maximizar el logaritmo de la función de verosimilitud, que en este caso es:

$$\ln \mathcal{L} = \ln\left(\frac{n!}{r!(n-r)!}\right) + r \ln p + (n-r) \ln(1-p)$$

se toma la derivada con respecto a p y se iguala a cero.

$$\frac{d \ln \mathcal{L}}{dp} = \frac{r}{p} - \frac{(n-r)}{(1-p)} = 0 \qquad \frac{r}{p} = \frac{(n-r)}{(1-p)}$$

$$r(1-p) = (n-r)p \qquad r - rp = np - rp \qquad p = r/n$$

O sea que el valor de p que maximiza la función de verosimilitud es simplemente la relación r/n. A r/n se le llama estimador de máxima verosimilitud de p. En el ejemplo, $r/n = 9/15 = 0.6$.

M E T O D O D E L O S M O M E N T O S.- Un segundo método para determinar estimadores puntuales, es el método de los momentos, que esencialmente consiste en igualar los momentos muestrales y los momentos poblacionales, y resolver las ecuaciones resultantes para el o los parámetros de interés. El k-ésimo momento poblacional (alrededor del origen) de una variable aleatoria X se define como $E(X^k)$ y se determina de la siguiente manera:

$$E(X^k) = \begin{cases} \sum x^k P(X=x) & \text{si X es discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx & \text{si X es continua} \end{cases}$$

El k-ésimo momento poblacional se denota a veces por μ_k. Si se toma una muestra de tamaño n de la población, y se observan -- los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ el k-ésimo momento muestral se define como m_k, donde:

$$m_k = \frac{\sum x_i^k}{n}$$

Con estas definiciones de m_k y μ_k, el método de los momentos consiste en igualar m_1 y μ_1, m_2 y μ_2, y así hasta que se - tengan suficientes ecuaciones para permitir una solución en términos de θ, el parámetro que se desea estimar.

Por ejemplo: $\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \mu_2 - \mu_1^2$

haciendo $\mu_1 = m_1$ y $\mu_2 = m_2$ se tiene que

$$\text{est } \sigma^2 = m_2 - m_1^2 = \frac{\sum x_i}{n} - m^2$$

E S T I M A C I O N P O R I N T E R V A L O S.- Cuando se desea estimar la media de una población normal, se ha visto que la media de la muestra M es el estimador de máxima verosimilitud y del método de los momentos; además de que satisface todas las propiedades de los estimadores. O sea, que la media muestral es un buen estimador para μ. Sin embargo, las dos casi nunca serán iguales debido a un error de muestreo. De la misma manera, la variancia muestral rara vez será igual a la correspondiente variancia poblacional. La estimación puntual sola, no da ninguna idea de la magnitud del posible error de muestreo.

Una manera de investigar la exactitud del estimador, es considerar su distribución muestral. El solo valor del estadígrafo no dice nada acerca de esta exactitud, pero un procedimiento in-- termedio que sirve para indicar la magnitud general del error de muestreo, en una situación particular, es la estimación por in-- tervalos. Una estimación por intervalo, o intervalo de confianza, es un intervalo aleatorio con cierta probabilidad de cubrir el verdadero parámetro poblacional. Cuando exista un alto grado de error de muestreo, el intervalo de confianza estimado a partir de cualquier muestra será grande; el rango de valores que probablemente contenga al parámetro poblacional es amplio. Por otro lado, si el error de muestreo es pequeño, el rango de valores que probablemente contenga al parámetro poblacional es estrecho.

Para ilustrar ésto, considérese una población normalmente distribuida de la cual se desea estimar su media, y se supone conocida su variancia. Para una muestra de un solo artículo, el valor de X que se observa sirve como estimador de μ . Ya que este único valor se ha obtenido de una población normal con media μ y variancia σ^2 , la distribución de X antes de que se tome la muestra es idéntica a la distribución poblacional. De las tablas de la distribución normal:

$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$$

Es decir, aproximadamente el 95% del área bajo la densidad normal estandarizada, se encuentra entre -1.96 y 1.96. Pero $Z = (X - \mu)/\sigma$ de manera que

$$P(-1.96 \leq (X - \mu)/\sigma \leq 1.96) = 0.95$$

$$P(-1.96\sigma \leq X - \mu \leq 1.96\sigma) = 0.95$$

$$P(-1.96\sigma - X \leq -\mu \leq 1.96\sigma - X) = 0.95$$

$$P(1.96\sigma + X \geq \mu \geq X - 1.96\sigma) = 0.95$$

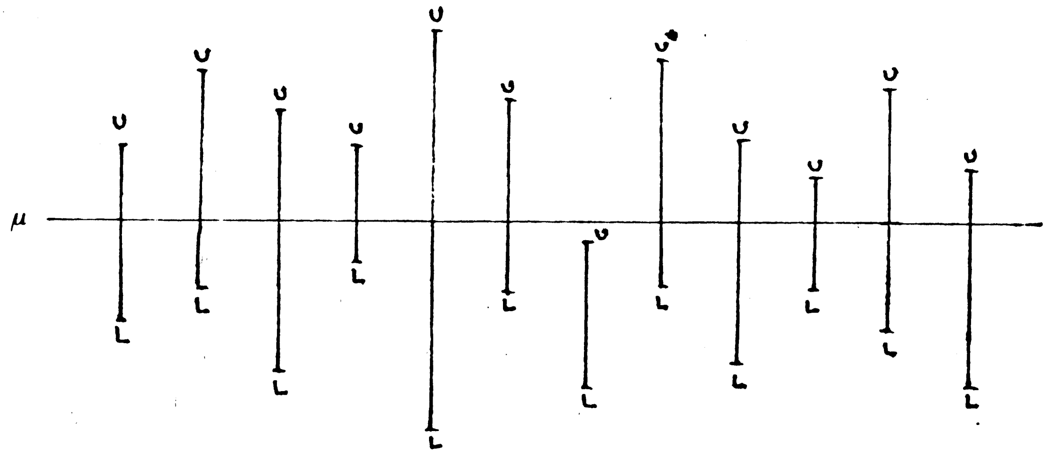
o sea $$P(X - 1.96\sigma \leq \mu \leq X + 1.96\sigma) = 0.95$$

Esta expresión indica que sobre todas las muestras posibles, se tiene una probabilidad de 0.95 de que el intervalo de $X - 1.96\sigma$ a $X + 1.96\sigma$ incluya a μ . Por tanto este intervalo se llama intervalo de confianza del 95% para μ . Las dos fronteras del intervalo, $X - 1.96\sigma$ y $X + 1.96\sigma$, se llaman límites del 95% de confianza.

Resumiendo: la estimación por intervalos es de la forma (L,U), donde L es una cota inferior y U es una cota superior.

Los intervalos estimadores considerados serán funciones de la muestra, es decir, son variables aleatorias que tienen la propiedad de que, antes de la experimentación se pueden hacer postulados probabilísticos acerca de ellos. Por tanto si el parámetro a ser estimado es θ, el intervalo para estimar a θ es (L,U), y existe una probabilidad dada $1 - \alpha$ de que $L \leq \theta \leq U$, L y U se llaman los límites de confianza del $(1 - \alpha)100\%$ para un parámetro dado, y el intervalo entre ellos es el intervalo de confianza del $(1 - \alpha)100\%$. La fracción $1 - \alpha$ se llama a menudo coeficiente de confianza.

Por ejemplo, se desea determinar el peso promedio μ, de los recipientes que llena determinada máquina. Es decir determinar el intervalo de confianza (L,U) del 95%. Esto implica que, en un grán número de veces, 95% de los límites así calculados se puede esperar que contengan al verdadero peso promedio μ, de la máquina. Si en cada caso se asegura que μ se encuentra dentro de los límites calculados, se esperan aseveraciones correctas 95 veces de cada 100 y aseveraciones erróneas 5 veces de cada 100. Es decir, la aseveración "el verdadero peso promedio que da la máquina se encuentra dentro del rango calculado" tiene una probabilidad de 0.95 de ser correcto. En un muestreo repetido, el intervalo de confianza variará en posición y en amplitud (si se desconoce la variabilidad de la máquina), de una muestra a otra. Este fenómeno se ilustra en la siguiente figura:



INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL CUANDO SE CONOCE SU VARIANCIA.

Sea X una variable aleatoria normalmente distribuida con media μ y desviación estandar σ (conocida). Considérese una muestra aleatoria de tamaño n. Sea M la media de la muestra. El intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$ para μ está dado por $M \pm Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$, donde $Z_{\alpha/2}$ es el punto $100\alpha/2\%$ de la distribución normal. Este resultado se obtiene considerando que $(M-\mu)\sqrt{n}/\sigma$ es una variable aleatoria estandarizada, o sea que:

$$P(-Z_{\alpha/2} \leq (M-\mu)\sqrt{n}/\sigma \leq Z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$P(-Z_{\alpha/2}\sigma \leq (M-\mu)\sqrt{n} \leq Z_{\alpha/2}\sigma) = 1-\alpha$$

$$P(-Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq M-\mu \leq Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}) = 1-\alpha$$

$$P(-M - Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq -\mu \leq Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} - M) = 1-\alpha$$

$$P(M - Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq M + Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}) = 1-\alpha$$

La longitud del intervalo de confianza es $2Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$, de manera que se puede escoger el tamaño de la muestra de forma apropiada, para obtener un intervalo de longitud específica. Se pueden obtener in tervalos de confianza superiores, de una sola cola, haciendo $L = -\infty$ y reemplazando $Z_{\alpha/2}$ por Z_α ; el intervalo del $(1-\alpha)100\%$ estaría dado por $(-\infty,\ M + Z_\alpha \sigma/\sqrt{n})$. Similarmente, un intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$, inferior, estaría dado por $(M - Z_\alpha \sigma/\sqrt{n},\ \infty)$.

Ejemplo: los siguientes datos representan medidas de la porosidad de una muestra de un embarque de coke. Encuentre el intervalo de confianza del 95% para la verdadera media. Suponga que $\sigma = 1/4$.

2.16	2.07	2.34	1.97	1.97	1.90
2.19	2.23	2.15	2.47	2.31	1.94
2.31	1.86	2.25	2.14	2.15	2.16
2.30	2.48	2.11	2.15	2.24	2.04
2.21	1.91	2.01	2.09	2.07	2.25

$n = 30$, $M = 2.15$ y de la tabla de la distribución normal $Z_{\alpha/2} = 1.96$. El intervalo es $M \pm Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} = 2.15 \pm (1.96)(0.25)/\sqrt{30} =$ 2.15 ± 0.089, de manera que $L = 2.058$ y $U = 2.237$; la longitud del intervalo es de 0.179.

EL PROBLEMA DE LA VARIANCIA DESCONOCIDA: LA DISTRIBUCION "T".-

En muchas situaciones la variancia de la población no se conoce exactamente, en cuyo caso el error estandar de la media muestral no se puede determinar. Una forma de evitar esta incertidumbre es utilizar un estimador de σ^2, la variancia de la muestra S^2; si se hace ésto, en vez de tener una variable aleatoria Z se tiene:

$$T = \frac{M - \mu}{S/\sqrt{n-1}}$$

si se utiliza $\hat{S}^2$ en vez de S^2 como estimador de σ^2:

$$T = \frac{M - \mu}{\hat{S}/\sqrt{n}}$$

En Z sólo el numerador $M - \mu$ es una variable aleatoria, el denominador $\sigma/\sqrt{n}$ es una constante. En T, tanto el numerador como el denominador son variables aleatorias, de manera que, para varias muestras que den la misma M, se tendrán las mismas Z, pero distintas T.

Bajo la suposición de normalidad, la función de densidad de T está dada por la regla:

$$f(t) = G(\nu)\left\{1 + \frac{t^2}{\nu}\right\}^{(\nu+1)/2}$$

$G(\nu)$ es una constante que depende solamente del parámetro ν. La distribución T es unimodal, simétrica, en forma de campana muy parecida a la normal. Es distribución de un solo parámetro ν, llamado "grados de libertad". En la mayoría de las aplicaciones de la distribución T a problemas con una sola muestra, ν es igual a $n - 1$, uno menos que el número de observaciones independientes en la muestra. Para $\nu > 1$, la media de T es cero; para $\nu > 2$ la variancia de T es $\nu/(\nu - 2)$, o sea que a menores valores de ν, mayor variancia, Conforme aumenta ν la variancia de T se aproxima a 1.00, igual que en una distribución normal estandarizada, o sea que al aumentar el número de grados de libertad, la distribución T se aproxima a una distribución normal estandar.

El parámetro de grados de libertad refleja el hecho de que T involucra una desviación estandar muestral para estimar a σ.

La desviación estandar muestral, es la suma de las desviaciones cuadradas de la media muestral. Además se tiene que la suma de las desviaciones alrededor de la media debe ser cero. Estos dos hechos tienen una consecuencia importante. Supóngase que en una muestra $n = 4$ y que se deben adivinar las cuatro desviaciones de la media m. Para la primera desviación, se puede suponer cualquier número, por ejemplo: $d_1 = 6$. Similarmente se pueden asignar valores a dos desviaciones más, digamos $d_2 = -9$, $d_3 = -7$; sin embargo para la cuarta desviación, ya no se está en libertad de asignar cualquier número sino que su valor debe ser:

$$d_4 = 0 - d_1 - d_2 - d_3 = 0 - 6 + 9 + 7 = 10$$

O sea que, dados los valores de $n - 1$ desviaciones de la media, que pueden ser cualesquiera números, el valor de la última desviación está completamente determinado.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL CUANDO SE DESCONOCE LA VARIANCIA.-

Sea X una variable aleatoria normalmente distribuida con media μ y variancia σ^2 (desconocida). Sean una muestra aleatoria de tamaño n, M la media de la muestra y S la desviación estandar de la misma. El intervalo de confianza del $(1 - \alpha)100\%$ para μ está dado por:

$$M \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n-1}} \quad \text{o bien} \quad M \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

Este resultado se obtiene de que:

$P(-t_{\alpha/2;n-1} \leq (M - \mu)\sqrt{n-1}/S \leq t_{\alpha/2;n-1}) = 1 - \alpha$

o sea: $p(m - t_{\alpha/2,n-1}S/\sqrt{n-1} \leq \mu \leq m + t_{\alpha/2,n-1}S/\sqrt{n-1}) = 1 - \alpha$

El intervalo de confianza superior del $(1 - \alpha)100\%$ de una sola cola está dado por $(-\infty, M + t_{\alpha,n-1}S/\sqrt{n-1})$, mientras que el intervalo de confianza inferior del $(1 - \alpha)100\%$ está dado por $(M - t_{\alpha,n-1}S/\sqrt{n-1}, \infty)$. $t_{\alpha/2,n-1}$ es el fractil $1 - \alpha/2$ de la distribución T.

Ejemplo: se toma una muestra aleatoria de 16 artículos y se determina el peso en gramos de cada uno. Se encontró que la media muestral M = 282 g. y S = 9.4 g. Ya que n = 16, se trabajará con la distribución T con n - 1 = 15 grados de libertad. Para un intervalo de confianza del 95%, $1 - \alpha = 0.95$ o sea que $\alpha = 0.05$. $1 - \alpha/2 = 0.975$ que es el fractil de la distribución T, $t_{\alpha/2,n-1} = 2.131$ Entonces los límites del intervalo de confianza del 95% para la media poblacional son:

$282 \pm (2.131)(9.4/\sqrt{15}) = 282 \pm 5.17$

y el intervalo es (276.83, 287.17)

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA DIFERENCIA ENTRE MEDIAS.- A menudo en el trabajo estadístico, el interés está enfocado en la diferencia entre dos medias y nó en una sola de ellas. Por ejemplo, la diferencia en la tasa de producción de dos máquinas, la diferencia de dos métodos de trabajo, etc. Supóngase que se tienen dos poblaciones de interés, 1 y 2. Se toma una muestra de tamaño n_1 de la po--

blación 1 y una muestra independiente de tamaño n_2 de la población 2, y se toma la diferencia entre sus medias muestrales $M_1 - M_2$. Si se continuan sacando muestras de los mismos tamaños de cada una de las poblaciones y se registra la diferencia, se puede determinar la distribución muestral de ella.

$$E(M_1 - M_2) = E(M_1) - E(M_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$V(M_1 - M_2) = \sigma^2_{M_1} + \sigma^2_{M_2}$$

luego el error estandar de la diferencia es

$$\sigma_{dif} = \sqrt{\sigma^2_{M_1} + \sigma^2_{M_2}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ .$$

Se puede concluir que: si la distribución de cada población es normal, entonces la distribución de la diferencia entre medias muestrales es normal. Si n_1 y n_2 crecen infinitamente, la distribución muestral de la diferencia entre medias, se aproxima a una distribución normal, sin importar las formas de las distribuciones originales. Hasta aquí, se ha supuesto además de que la población es normal, que se conocen las variancias. Si ésto último no es cierto, se debe utilizar un estimador del error estandar. Para simplificar esta estimación, hay que suponer que las variancias de las dos poblaciones son iguales,

$$\sigma_{dif} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}} = \sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

Cuando se tienen uno o más estimadores del mismo parámetro, un estimador combinado es mejor que cualquiera de los otros tomados separadamente. Y este estimador es:

$$\text{est. } \sigma^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\text{est. } \sigma_{dif} = \sqrt{\text{est.}\sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)\left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right)}$$

con este estimador de σ_{dif}, la distribución muestral de interés es T con $\nu = n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

Cuando no se puede suponer igualdad de variancias en las poblaciones, y las muestras sean de diferente tamaño,

$$\text{est.}\sigma_{dif} = \sqrt{\text{est.}\sigma_{M_1}^2 + \text{est.}\sigma_{M_2}^2}$$

y se corrige el número de grados de libertad

$$\nu = \frac{(\text{est.}\sigma_{M_1}^2 + \text{est.}\sigma_{M_2}^2)}{(\text{est.}\sigma_{M_1}^2)/(n_1 + 1) + (\text{est.}\sigma_{M_2}^2)/(n_2 + 1)} - 2$$

con ésto se utiliza la distribución T.

En resumen: a) si se conocen las variancias de las dos poblaciones, el intervalo de confianza del $(1 - \alpha)100\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ es

$$(M_1 - M_2) \pm A\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

y A se determina de las tablas normales.

b) Si no se conocen las variancias, pero se puede suponer que son iguales, el intervalo de confianza del $(1 - \alpha)100\%$ es:

$$(M_1 - M_2) \pm A\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$$

con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad y A es el fractil $1 - (\alpha/2)$ de la distribución T.

I N T E R V A L O D E C O N F I A N Z A P A R A E L P A R A M E T R O p D E L A D I S T R I B U C I O N B I N O M I A L.- Si se efectúa un ensayo de Bernoulli n veces, y se observan m éxitos, se puede usar este resultado con el fin de obtener un intervalo de confianza para el parámetro p de las distribuciones binomial y geométrica. Este intervalo es de la forma (p_L , p_U), es decir:

$$P(p_L \leq p \leq p_U) = 1 - \alpha$$

Cuando n es grande, la variable aleatoria X = número de éxitos en n ensayos es aproximadamente normal con media np y variancia np(1 - p), por lo tanto para n grandes, la variable aleatoria

$$Z = (X - np)/\sqrt{np(1 - p)}$$

es aproximadamente normal con media cero y variancia uno, de manera que se puede formular el siguiente postulado probabilístico:

$$P(-Z_{\alpha/2} \leq (X - np)/\sqrt{np(1 - p)} \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

La expresión $-Z_{\alpha/2} \leq (X - np)/\sqrt{np(1 - p)} \leq Z_{\alpha/2}$ es equivalente a:

$$(X - np)^2/np(1 - p) \leq Z^2_{\alpha/2} \Longrightarrow (X - np)^2 \leq Z^2_{\alpha/2}np(1 - p)$$

$$X^2 - 2Xnp + n^2p^2 \leq npZ^2_{\alpha/2} - np^2Z^2_{\alpha/2}$$

$$X^2 - 2Xnp + n^2p^2 - npZ^2_{\alpha/2} + np^2Z^2_{\alpha/2} \leq 0$$

$$X^2/n - 2Xp + np^2 - pZ^2_{\alpha/2} + p^2Z^2_{\alpha/2} \leq 0$$

$$p^2(n + Z^2_{\alpha/2}) - p(2X + Z^2_{\alpha/2}) + X^2/n \leq 0$$

luego los límites p_L y p_U son las raíces de la ecuación cuadrática:

$$(n + Z^2_{\alpha/2})p^2 - (2X + Z^2_{\alpha/2})p + X^2/n = 0$$

la desigualdad se satisface cuando $p_L \leq p \leq p_U$

Ejemplo: en un experimento genético, se observó que m = 42 de n = 55 semillas resultaron tener color verde (rasgo dominante), mientras que las 13 restantes fueron de color amarillo (rasgo recesivo). Determinar un intervalo de 95% de confianza para p.

Se tiene que m = 42, n = 55 y $Z_{\alpha/2} = 1.96$, de manera que la ecuación cuadrática a resolver es:

$$58.84p^2 - 87.84p + 32.07 = 0$$

que dá como resultado $p_L = 0.637$ y $p_U = 0.856$.

Si además de n, también m y n-m son grandes, se tiene, de la fórmula para resolver la ecuación cuadrática, que aproximadamente:

$$m/n - C \leq p \leq m/n + C \quad \text{donde } C = (Z_{\alpha/2}/n)\sqrt{m(n - m)/n}$$

Ejemplo: de los primeros 3,000 bebés nacidos en la ciudad de Toluca, 1,578 fueron varones. Suponiendo que se aplique el modelo binomial, determinar un intervalo de 95% de confianza para la probabilidad p del evento nacimiento de un varón.

Aquí n, m y n-m son grandes, de manera que:

$$C = (1.96/3{,}000)\sqrt{(1{,}578)(1{,}422)/3{,}000} = 0.018$$

y el intervalo es (0.508, 0.544).

L A D I S T R I B U C I O N C H I - C U A D R A D A.-

Cuando la población de la cual se muestrea está normalmente distribuida, la distribución muestral de la variancia de la muestra es una χ^2(chi-cuadrado).

Si X está normalmente distribuida con media μ y variancia σ^2, y se toma una muestra del tamaño uno, el valor estandarizado cuadrático es:

$$Z^2 = (X - \mu)^2/\sigma^2$$

a este valor se le llama $\chi^2_{(1)}$, de manera que $\chi^2_{(1)} = Z^2$

$\chi^2_{(1)}$ es siempre una cantidad cuadrática, de manera que su rango debe estar en los reales positivos. Ya que para una variable normal estandarizada, el 68% de los casos se encuentran entre +1 y -1, para $\chi^2_{(1)}$ éste 68% se debe encontrar entre 0 y 1, y un bajo porcentaje de 1 a ∞. La distribución de esta variable es una chi-cuadrada con 1 grado de libertad. La variable:

$$\chi^2_{(2)} = Z_1^2 + Z_2^2$$

tiene distribución chi-cuadrada con 2 grados de libertad. En general para n observaciones independientes de una población normal, la suma de los cuadrados de los valores estandarizados, tiene una distribución chi-cuadrada con n grados de libertad.

$$\chi^2_{(n)} = \sum_i (X_i - \mu)^2 / \sigma^2 = \sum_i Z_i^2$$

La regla funcional para asignar una densidad de probabilidad a cada posible valor de χ^2 es:

$$f(\chi^2) = h(\nu) \left[\exp(-\chi^2/2)\right] (\chi^2)^{(\nu/2)-1}.$$

se puede ver que para especificar esta función se requiere de ν y de χ^2. Su media y variancia son:

$$E(\chi^2_{(n)}) = E(\sum_i Z_i^2) = \sum_i E(Z_i^2) = n$$

$$V(\chi^2_{(\nu)}) = 2\nu$$

Si una variable aleatoria $\chi^2_{(\nu_1)}$ tiene una distribución chi-cuadrada con ν_1 grados de libertad, y una variable aleatoria $\chi^2_{(\nu_2)}$ independiente, tiene distribución chi-cuadrada con ν_2 grados de libertad, entonces la nueva variable formada por la suma de éstas tiene distribución chi-cuadrada con $\nu_1 + \nu_2$ grados de libertad.

Recordándo que la variancia de la muestra está dada por:

$$S^2 = \sum_i (X_i - M)^2/n$$

se puede multiplicar esta variable por n/σ^2 obteniendo:

$$nS^2/\sigma^2 = \sum (X_i - M)^2/\sigma^2$$

Aplicando algunas definiciones y manipulando algebráicamente la expresión de la derecha se tiene:

$$\sum (X_i - M)^2/\sigma^2 = \sum (X_i - \mu)^2/\sigma^2 - n(M - \mu)^2/\sigma^2$$

Las expresiones del lado derecho de esta última ecuación son variables aleatorias con distribución chi-cuadrada con n y 1 grados de libertad respectivamente

$$\sum (X_i - \mu)^2/\sigma^2 = \chi^2_{(n)} \qquad (M - \mu)^2/\sigma^2/n = \chi^2_{(1)}$$

de manera que la relación nS^2/σ^2 es una variable chi-cuadrada con $n - 1$ grados de libertad. Si en vez de S^2 se usa el estimador insesgado

$$(n - 1)\hat{S}^2/\sigma^2 = \chi^2_{(n-1)}$$

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA LA VARIANCIA Y DESVIACION ESTANDAR.-

Si se tienen n observaciones independientes de una población normal, los límites del 95% de confianza para son:

$$P(a \leq (n - 1)\hat{S}^2/\sigma^2 \leq b) = 0.95$$

donde a es el fractil 0.025 y b el fractil 0.975 de la distribución chi-cuadrada con $n - 1$ grados de libertad. Este postulado es equivalente a:

$$P(a \leq (n - 1)\hat{S}^2/\sigma^2 \leq b) = P(1/a \geq \sigma^2/(n - 1)\hat{S}^2 \geq 1/b) =$$

$$P(1/b \leq \sigma^2/(n-1)\hat{S}^2 \leq 1/a) = P((n-1)\hat{S}^2/b \leq \sigma^2 \leq (n-1)\hat{S}^2/a)$$

En general el intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$ para σ^2 es:

$$\left[\frac{(n-1)\hat{S}^2}{b}, \frac{(n-1)\hat{S}^2}{a}\right]$$

donde a es el fractil $\alpha/2$ y b el fractil $1-(\alpha/2)$ de la distribución chi-cuadrada con $n-1$ grados de libertad. En términos de S^2

$$\left[\frac{nS^2}{b}, \frac{nS^2}{a}\right]$$

Tomando la raíz cuadrada de estos límites se tienen intervalos para la desviación estandar.

L A D I S T R I B U C I O N F.- A menudo se desean hacer inferencias acerca de las variancias de dos poblaciones; se usa entonces la distribución F.

Cuando se tienen dos poblaciones normales distintas, y se sacan dos muestras aleatorias independientes, la primera de la población 1, con n_1 observaciones y la segunda de la población 2, con n_2 observaciones, y se calcula el estimador insesgado de la variancia poblacional, se sabe que:

$$(n-1)\hat{S}^2/\sigma^2 = \chi^2_{(n-1)}$$

de manera que $\hat{S}_1^2 = \dfrac{\sigma_1^2\,\chi_{(\nu_1)}}{\nu_1}$ y $\hat{S}_2^2 = \dfrac{\sigma_2^2\,\chi_{(\nu_2)}}{\nu_2}$

Para cada par posible de muestras, se considera la relación $\hat{S}_1^2$ a $\hat{S}_2^2$, y se le denomina variable F.

$$F = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} = \frac{\text{est } \sigma_1^2}{\text{est } \sigma_2^2}$$

Si las variancias de las dos poblaciones son iguales, entonces:

$$F = \frac{\chi^2_{\nu_1}/\nu_1}{\chi^2_{\nu_2}/\nu_2}$$

Una variable aleatoria formada por la relación de dos variables chi-cuadradas independientes, cada una dividida entre sus grados de libertad, se dice que es una relación F y tiene una distribución F.

La función de densidad de F depende solamente de dos parámetros, ν_1 y ν_2 que se pueden considerar como los grados de libertad asociados con el numerador y el denominador de la relación F. Su rango es el de los reales positivos. Su valor esperado es $\nu_2/(\nu_2 - 2)$ siempre que $\nu > 2$.

Para ilustrar el uso de las tablas de la distribución F, considérense dos muestras aleatorias independientes, conteniendo $n_1 = 10$ y $n_2 = 6$ observaciones, respectivamente. Los grados de libertad asociados con las dos variables son $\nu_1 = 10 - 1 = 9$ y $\nu_2 = 6 - 1 = 5$. Para la relación: $F = \hat{S}_1^2/\hat{S}_2^2$ los grados de libertad deben ser 9 para el numerador y 5 para el denominador. Supóngase que F = 7.0. De las tablas de la distribución F con $\nu_1 = 9$ y $\nu_2 = 5$ y un nivel de confianza del 95%, el límite superior es 4.77, luego el valor de F excede el límite superior del intervalo. Si se desea el límite inferior, se encuentra a partir del siguiente postulado:

$$P(F_{(\nu_1,\nu_2)} \geqq C) = P(F_{(\nu_2,\nu_1)} \leqq 1/C)$$

es decir, el límite inferior se puede encontrar por medio del recí proco del valor requerido para un límite superior, con los grados de libertad del numerador y del denominador invertidos.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA RELACION DE VARIANCIAS.-

Si dos poblaciones están normalmente distribuidas, y se toman muestras independientes de cada una de ellas, de tamaños n_1 y n_2, obteniéndose como estimadores de la variancia $\hat{S}_1^2$ y $\hat{S}_2^2$, la relación:

$$F = \frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2}$$

tiene distribución F con $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$ grados de libertad, de manera que se puede hacer el siguiente postulado probabilístico:

$$P(a \leqq (\hat{S}_1^2/\sigma_1^2)/(\hat{S}_2^2/\sigma_2^2) \leqq b) = 1 - \alpha$$

donde a y b son los fractiles $\alpha/2$ y $1 - (\alpha/2)$ de la distribución F con $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$ grados de libertad. Esta expresión es equivalente a:

$$P(a\hat{S}_2^2/\hat{S}_1^2 \leqq \sigma_2^2/\sigma_1^2 \leqq b\hat{S}_2^2/\hat{S}_1^2) = 1 - \alpha$$

De manera que los límites del intervalo de $(1 - \alpha)100\%$ de confianza para σ_2^2/σ_1^2 son:

$$a\hat{S}_2^2/\hat{S}_1^2 \quad y \quad b\hat{S}_2^2/\hat{S}_1^2$$

Ejemplo: se está investigando los kilómetros por litro de gasolina, que rinden dos tipos de carros. Se supone que las poblaciones están normalmente distribuidas y se toman muestras de $n_1 = 5$ carros del primer tipo, y $n_2 = 7$ carros del segundo tipo. Las muestras se obtuvieron del inventario de la planta armadora, que se tiene para surtir a las agencias. Las variancias muestrales fueron: $S_1^2 = 4.8$ y $S_2^2 = 5.0$. Ya que los límites requieren de los estimadores insesgados, es necesario hacer la siguiente conversión:

$$\hat{S}_1^2 = (n_1/(n_1 - 1))S_1^2 = (5/4)(4.8) = 6.0$$

$$\hat{S}_2^2 = (n_2/(n_2 - 1))S_2^2 = (7/6)(5.0) = 5.83$$

En este caso, se trabaja con una distribución F con 4 y 6 grados de libertad. Para encontrar el intervalo del 95% de confianza, se deben localizar los fractiles 0.025 y 0.975 de la distribución. El fractil 0.975 es b = 6.23. El fractil 0.025 se obtiene de:

$$P(F_{(\nu_1,\nu_2)} \geq C) = 0.975 = P(F_{(\nu_2,\nu_1)} \leq 1/C)$$

de las tablas de la distribución F con 6 y 4 grados de libertad, $1/C = 9.20$, luego $C = 1/9.20$. Los límites del intervalo son: $(1/9.20)(5.83/6.0)$ y $(6.23)(5.83/6.0)$, y el intervalo es $(0.106, 6.05)$. Este intervalo es muy amplio, lo cual indica que las muestras muy pequeñas no dan una estimación muy exacta de la relación de variancias.

Es importante aclarar que ni la distribución chi-cuadrada, ni la distribución F, se pueden utilizar en forma segura para hipótesis de la variancia, a menos que la distribución de la población sea normal o el tamaño de la muestra sea muy grande.

Las distribuciones muestrales: normal, T, chi-cuadrada y F, han demostrado ser de gran utilidad en problemas de inferencia estadística. Su teoría trata con postulados del tipo "si - entonces es decir, se han introducido suposiciones importantes, de manera que la teoría dará resultados correctos, sólo cuando se satisfagan estas suposiciones, aunque desde el punto de vista práctico se pueden violar, en menor grado, en ciertas ocasiones, especialmente para grandes muestras.

Aparte del requerimiento general de muestreo aleatorio de observaciones independientes, la suposición más usual para derivar distribuciones muestrales, es que la distribución de la población sea normal (para distribuciones chi-cuadrada, T y F). De manera que la distribución normal se puede considerar como generadora de estas distribuciones.

La distribución T tiene nexos con la chi-cuadrada. Si el estadígrafo T para una sola media se puede escribir como:

$$T = \frac{(M - \mu)/\sigma}{\sqrt{\hat{S}^2/n\sigma^2}} = \frac{(M - \mu)/\sigma_M}{\sqrt{\hat{S}^2/\sigma^2}}$$

El numerador de T es una variable aleatoria normal estandarizada, y el denominador es:

$$(n - 1)\hat{S}^2/\sigma^2 = \chi^2_{(n-1)} \qquad \hat{S}^2/\sigma^2 = \chi^2_{(n-1)}/(n - 1)$$

de manera que $T = Z/\sqrt{\chi^2_{(n-1)}/(n - 1)}$

En general una variable T es la razón de una variable normal estandarizada y la raíz cuadrada de una variable chi-cuadrada dividida entre ν. Si esta variable se eleva al cuadrado, se tiene:

$$T^2 = Z^2/\chi^2/(n - 1)$$

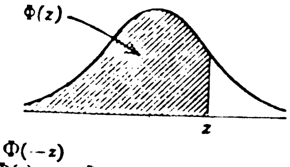
Z^2 es una variable chi-cuadrada con 1 grado de libertad, de manera que T^2 es una relación F con 1 y n - 1 grados de libertad.

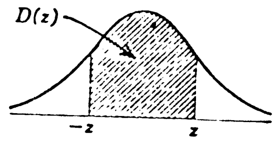
En la siguiente tabla se muestra la relación entre las distri buciones teóricas. Indica cómo depende para su derivación la distribución de la columna, de la distribución del renglón:

DISTRIBUCION	chi-cuadrada	F	T
normal	Generadora, y límite conforme $\nu \to \infty$. Se define como la suma de valores Z normales e independientes.	Generadora, siendo el numerador y el denominador valores χ^2/ν independientes.	Generadora, y forma límite conforme $\nu \to \infty$ el numerador es Z normal.
chi-cuadrada		Las variables en el numerador y el denominador son χ^2/ν independientes	El denominador es $\sqrt{\chi^2/\nu}$
F			$T^2(\nu) = F_{(1, \nu)}$

3 Distribución normal

Tabla 3a. Función de distribución (3) de la sección 8.2





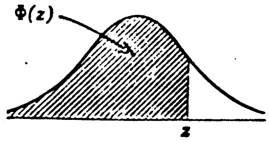
$D(z) = \Phi(z) - \Phi(-z)$

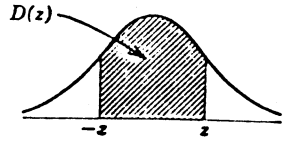
$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, $\quad \Phi(0) = 0.5$

Tablas más extensas: National Bureau of Standards (1953), Hald (1962). Indice para tablas: Greenwood and Hartley (1961) (ver el apéndice 3).

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
	0.	0.	0.		0.	0.	0.		0.	0.	0.
0.01	4960	5040	0080	0.51	3050	6950	3899	1.01	1562	8438	6875
0.02	4920	5080	0160	0.52	3015	6985	3969	1.02	1539	8461	6923
0.03	4880	5120	0239	0.53	2981	7019	4039	1.03	1515	8485	6970
0.04	4840	5160	0319	0.54	2946	7054	4108	1.04	1492	8508	7017
0.05	4801	5199	0399	0.55	2912	7088	4177	1.05	1469	8531	7063
0.06	4761	5239	0478	0.56	2877	7123	4245	1.06	1446	8554	7109
0.07	4721	5279	0558	0.57	2843	7157	4313	1.07	1423	8577	7154
0.08	4681	5319	0638	0.58	2810	7190	4381	1.08	1401	8599	7199
0.09	4641	5359	0717	0.59	2776	7224	4448	1.09	1379	8621	7243
0.10	4602	5398	0797	0.60	2743	7257	4515	1.10	1357	8643	7287
0.11	4562	5438	0876	0.61	2709	7291	4581	1.11	1335	8665	7330
0.12	4522	5478	0955	0.62	2676	7324	4647	1.12	1314	8686	7373
0.13	4483	5517	1034	0.63	2643	7357	4713	1.13	1292	8708	7415
0.14	4443	5557	1113	0.64	2611	7389	4778	1.14	1271	8729	7457
0.15	4404	5596	1192	0.65	2578	7422	4843	1.15	1251	8749	7499
0.16	4364	5636	1271	0.66	2546	7454	4907	1.16	1230	8770	7540
0.17	4325	5675	1350	0.67	2514	7486	4971	1.17	1210	8790	7580
0.18	4286	5714	1428	0.68	2483	7517	5035	1.18	1190	8810	7620
0.19	4247	5753	1507	0.69	2451	7549	5098	1.19	1170	8830	7660
0.20	4207	5793	1585	0.70	2420	7580	5161	1.20	1151	8849	7699
0.21	4168	5832	1663	0.71	2389	7611	5223	1.21	1131	8869	7737
0.22	4129	5871	1741	0.72	2358	7642	5285	1.22	1112	8888	7775
0.23	4090	5910	1819	0.73	2327	7673	5346	1.23	1093	8907	7813
0.24	4052	5948	1897	0.74	2296	7704	5407	1.24	1075	8925	7850
0.25	4013	5987	1974	0.75	2266	7734	5467	1.25	1056	8944	7887
0.26	3974	6026	2051	0.76	2236	7764	5527	1.26	1038	8962	7923
0.27	3936	6064	2128	0.77	2206	7794	5587	1.27	1020	8980	7959
0.28	3897	6103	2205	0.78	2177	7823	5646	1.28	1003	8997	7995
0.29	3859	6141	2282	0.79	2148	7852	5705	1.29	0985	9015	8029
0.30	3821	6179	2358	0.80	2119	7881	5763	1.30	0968	9032	8064
0.31	3783	6217	2434	0.81	2090	7910	5821	1.31	0951	9049	8098
0.32	3745	6255	2510	0.82	2061	7939	5878	1.32	0934	9066	8132
0.33	3707	6293	2586	0.83	2033	7967	5935	1.33	0918	9082	8165
0.34	3669	6331	2661	0.84	2005	7995	5991	1.34	0901	9099	8198
0.35	3632	6368	2737	0.85	1977	8023	6047	1.35	0885	9115	8230
0.36	3594	6406	2812	0.86	1949	8051	6102	1.36	0869	9131	8262
0.37	3557	6443	2886	0.87	1922	8078	6157	1.37	0853	9147	8293
0.38	3520	6480	2961	0.88	1894	8106	6211	1.38	0838	9162	8324
0.39	3483	6517	3035	0.89	1867	8133	6265	1.39	0823	9177	8355
0.40	3446	6554	3108	0.90	1841	8159	6319	1.40	0808	9192	8385
0.41	3409	6591	3182	0.91	1814	8186	6372	1.41	0793	9207	8415
0.42	3372	6628	3255	0.92	1788	8212	6424	1.42	0778	9222	8444
0.43	3336	6664	3328	0.93	1762	8238	6476	1.43	0764	9236	8473
0.44	3300	6700	3401	0.94	1736	8264	6528	1.44	0749	9251	8501
0.45	3264	6736	3473	0.95	1711	8289	6579	1.45	0735	9265	8529
0.46	3228	6772	3545	0.96	1685	8315	6629	1.46	0721	9279	8557
0.47	3192	6808	3616	0.97	1660	8340	6680	1.47	0708	9292	8584
0.48	3156	6844	3688	0.98	1635	8365	6729	1.48	0694	9306	8611
0.49	3121	6879	3759	0.99	1611	8389	6778	1.49	0681	9319	8638
0.50	3085	6915	3829	1.00	1587	8413	6827	1.50	0668	9332	8664

Tabla 3*a*. Función de distribución (3) de la sección 8.2 *(continuación)*





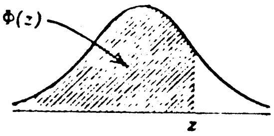
z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
	0.	0.	0.
1.51	0655	9345	8690
1.52	0643	9357	8715
1.53	0630	9370	8740
1.54	0618	9382	8764
1.55	0606	9394	8789
1.56	0594	9406	8812
1.57	0582	9418	8836
1.58	0571	9429	8859
1.59	0559	9441	8882
1.60	0548	9452	8904
1.61	0537	9463	8926
1.62	0526	9474	8948
1.63	0516	9484	8969
1.64	0505	9495	8990
1.65	0495	9505	9011
1.66	0485	9515	9031
1.67	0475	9525	9051
1.68	0465	9535	9070
1.69	0455	9545	9090
1.70	0446	9554	9109
1.71	0436	9564	9127
1.72	0427	9573	9146
1.73	0418	9582	9164
1.74	0409	9591	9181
1.75	0401	9599	9199
1.76	0392	9608	9216
1.77	0384	9616	9233
1.78	0375	9625	9249
1.79	0367	9633	9265
1.80	0359	9641	9281
1.81	0351	9649	9297
1.82	0344	9656	9312
1.83	0336	9664	9328
1.84	0329	9671	9342
1.85	0322	9678	9357
1.86	0314	9686	9371
1.87	0307	9693	9385
1.88	0301	9699	9399
1.89	0294	9706	9412
1.90	0287	9713	9426
1.91	0281	9719	9439
1.92	0274	9726	9451
1.93	0268	9732	9464
1.94	0262	9738	9476
1.95	0256	9744	9488
1.96	0250	9750	9500
1.97	0244	9756	9512
1.98	0239	9761	9523
1.99	0233	9767	9534
2.00	0228	9772	9545

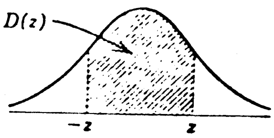
z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
	0.	0.	0.
2.01	0222	9778	9556
2.02	0217	9783	9566
2.03	0212	9788	9576
2.04	0207	9793	9586
2.05	0202	9798	9596
2.06	0197	9803	9606
2.07	0192	9808	9615
2.08	0188	9812	9625
2.09	0183	9817	9634
2.10	0179	9821	9643
2.11	0174	9826	9651
2.12	0170	9830	9660
2.13	0166	9834	9668
2.14	0162	9838	9676
2.15	0158	9842	9684
2.16	0154	9846	9692
2.17	0150	9850	9700
2.18	0146	9854	9707
2.19	0143	9857	9715
2.20	0139	9861	9722
2.21	0136	9864	9729
2.22	0132	9868	9736
2.23	0129	9871	9743
2.24	0125	9875	9749
2.25	0122	9878	9756
2.26	0119	9881	9762
2.27	0116	9884	9768
2.28	0113	9887	9774
2.29	0110	9890	9780
2.30	0107	9893	9786
2.31	0104	9896	9791
2.32	0102	9898	9797
2.33	0099	9901	9802
2.34	0096	9904	9807
2.35	0094	9906	9812
2.36	0091	9909	9817
2.37	0089	9911	9822
2.38	0087	9913	9827
2.39	0084	9916	9832
2.40	0082	9918	9836
2.41	0080	9920	9840
2.42	0078	9922	9845
2.43	0075	9925	9849
2.44	0073	9927	9853
2.45	0071	9929	9857
2.46	0069	9931	9861
2.47	0068	9932	9865
2.48	0066	9934	9869
2.49	0064	9936	9872
2.50	0062	9938	9876

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
	0.	0.	0.
2.51	0060	9940	9879
2.52	0059	9941	9883
2.53	0057	9943	9886
2.54	0055	9945	9889
2.55	0054	9946	9892
2.56	0052	9948	9895
2.57	0051	9949	9898
2.58	0049	9951	9901
2.59	0048	9952	9904
2.60	0047	9953	9907
2.61	0045	9955	9909
2.62	0044	9956	9912
2.63	0043	9957	9915
2.64	0041	9959	9917
2.65	0040	9960	9920
2.66	0039	9961	9922
2.67	0038	9962	9924
2.68	0037	9963	9926
2.69	0036	9964	9929
2.70	0035	9965	9931
2.71	0034	9966	9933
2.72	0033	9967	9935
2.73	0032	9968	9937
2.74	0031	9969	9939
2.75	0030	9970	9940
2.76	0029	9971	9942
2.77	0028	9972	9944
2.78	0027	9973	9946
2.79	0026	9974	9947
2.80	0026	9974	9949
2.81	0025	9975	9950
2.82	0024	9976	9952
2.83	0023	9977	9953
2.84	0023	9977	9955
2.85	0022	9978	9956
2.86	0021	9979	9958
2.87	0021	9979	9959
2.88	0020	9980	9960
2.89	0019	9981	9961
2.90	0019	9981	9963
2.91	0018	9982	9964
2.92	0018	9982	9965
2.93	0017	9983	9966
2.94	0016	9984	9967
2.95	0016	9984	9968
2.96	0015	9985	9969
2.97	0015	9985	9970
2.98	0014	9986	9971
2.99	0014	9986	9972
3.00	0013	9987	9973

Tabla 3*b*. Distribución normal. Valores de z para valores dados de (3) de la sección 8.2, y $D(z)$

$D(z) = \Phi(z) - \Phi(-z)$
Ejemplo. $\Phi(z) = 61\%$
para $z = 0.279$,
$D(z) = 61\%$ para $z = 0.860$

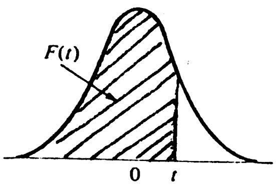




Tablas más extensas: Comrie (1949), Fisher y Yates (1957), Hald (1962), Kelley (1948) (ver el apéndice 3).

%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$
1	−2.326	0.013	41	−0.228	0.539	81	0.878	1.311
2	−2.054	0.025	42	−0.202	0.553	82	0.915	1.341
3	−1.881	0.038	43	−0.176	0.568	83	0.954	1.372
4	−1.751	0.050	44	−0.151	0.583	84	0.994	1.405
5	−1.645	0.063	45	−0.126	0.598	85	1.036	1.440
6	−1.555	0.075	46	−0.100	0.613	86	1.080	1.476
7	−1.476	0.088	47	−0.075	0.628	87	1.126	1.514
8	−1.405	0.100	48	−0.050	0.643	88	1.175	1.555
9	−1.341	0.113	49	−0.025	0.659	89	1.227	1.598
10	−1.282	0.126	50	0.000	0.674	90	1.282	1.645
11	−1.227	0.138	51	0.025	0.690	91	1.341	1.695
12	−1.175	0.151	52	0.050	0.706	92	1.405	1.751
13	−1.126	0.164	53	0.075	0.722	93	1.476	1.812
14	−1.080	0.176	54	0.100	0.739	94	1.555	1.881
15	−1.036	0.189	55	0.126	0.755	95	1.645	1.960
16	−0.994	0.202	56	0.151	0.772	96	1.751	2.054
17	−0.954	0.215	57	0.176	0.789	97	1.881	2.170
18	−0.915	0.228	58	0.202	0.806	97.5	1.960	2.241
19	−0.878	0.240	59	0.228	0.824	98	2.054	2.326
20	−0.842	0.253	60	0.253	0.842	99	2.326	2.576
21	−0.806	0.266	61	0.279	0.860	99.1	2.366	2.612
22	−0.772	0.279	62	0.305	0.878	99.2	2.409	2.652
23	−0.739	0.292	63	0.332	0.896	99.3	2.457	2.697
24	−0.706	0.305	64	0.358	0.915	99.4	2.512	2.748
25	−0.674	0.319	65	0.385	0.935	99.5	2.576	2.807
26	−0.643	0.332	66	0.412	0.954	99.6	2.652	2.878
27	−0.613	0.345	67	0.440	0.974	99.7	2.748	2.968
28	−0.583	0.358	68	0.468	0.994	99.8	2.878	3.090
29	−0.553	0.372	69	0.496	1.015	99.9	3.090	3.291
30	−0.524	0.385	70	0.524	1.036			
31	−0.496	0.399	71	0.553	1.058	99.91	3.121	3.320
32	−0.468	0.412	72	0.583	1.080	99.92	3.156	3.353
33	−0.440	0.426	73	0.613	1.103	99.93	3.195	3.390
34	−0.412	0.440	74	0.643	1.126	99.94	3.239	3.432
35	−0.385	0.454	75	0.674	1.150	99.95	3.291	3.481
36	−0.358	0.468	76	0.706	1.175	99.96	3.353	3.540
37	−0.332	0.482	77	0.739	1.200	99.97	3.432	3.615
38	−0.305	0.496	78	0.772	1.227	99.98	3.540	3.719
39	−0.279	0.510	79	0.806	1.254	99.99	3.719	3.891
40	−0.253	0.524	80	0.842	1.282			

Table II. Fractiles of the T Distribution

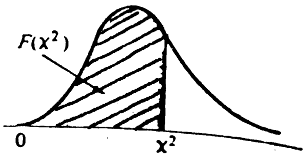


This table gives the .60, .75, .90, .95, .975, .99, .995, and .999 fractiles of the T distribution with ν degrees of freedom for $\nu = 1(1)30$, 40, 60, 120, and ∞. For $F(t) < .50$, the $F(t)$ fractile is the negative of the $1 - F(t)$ fractile.

Examples: For $\nu = 12$, the .90 fractile is 1.356, and for $\nu = 5$, the .025 fractile is -2.571.

ν	$F(t)$ .60	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.999
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	.258	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	.257	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	.257	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	.257	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	.257	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	.256	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	.256	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	.256	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	.256	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	.256	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	.256	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	.256	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	.255	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
60	.254	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
120	.254	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160
∞	.253	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Table III. Fractiles of the χ^2 Distribution



This table gives the .005, .01, .025, .05, .10, .25, .50, .75, .90, .95, .975, .99, .995, and .999 fractiles of the χ^2 distribution with ν degrees of freedom for $\nu = 1(1)30(10)100$.

Example: For $\nu = 14$, the .025 fractile is 5.62872.

ν	$F(x^2)$						
	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50
1	$392704 \cdot 10^{-10}$	$157088 \cdot 10^{-9}$	$982069 \cdot 10^{-9}$	$393214 \cdot 10^{-8}$	0.0157908	0.1015308	0.454937
2	0.0100251	0.0201007	0.0506356	0.102587	0.210720	0.575364	1.38629
3	0.0717212	0.114832	0.215795	0.351846	0.584375	1.212534	2.36597
4	0.206990	0.297110	0.484419	0.710721	1.063623	1.92255	3.35670
5	0.411740	0.554300	0.831211	1.145476	1.61031	2.67460	4.35146
6	0.675727	0.872085	1.237347	1.63539	2.20413	3.45460	5.34812
7	0.989265	1.239043	1.68987	2.16735	2.83311	4.25485	6.34581
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	3.48954	5.07064	7.34412
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	4.16816	5.89883	8.34283
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518	6.73720	9.34182
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779	7.58412	10.3410
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380	8.43842	11.3403
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	7.04150	9.29906	12.3398
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.78953	10.1653	13.3393
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675	11.0365	14.3389
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223	11.9122	15.3385
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852	12.7919	16.3381
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649	13.6753	17.3379
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509	14.5620	18.3376
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	12.4426	15.4518	19.3374
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	13.2396	16.3444	20.3372
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	14.0415	17.2396	21.3370
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.8479	18.1373	22.3369
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587	19.0372	23.3367
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	19.9393	24.3366
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919	20.8434	25.3364
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138	21.7494	26.3363
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392	22.6572	27.3363
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677	23.5666	28.3362
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992	24.4776	29.3360
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505	33.6603	39.3354
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886	42.9421	49.3349
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589	52.2938	59.3347
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290	61.6983	69.3344
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778	71.1445	79.3343
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912	80.6247	89.3342
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581	90.1332	99.3341

Table III (continued)

ν	$F(\chi^2)$ .75	.90	.95	.975	.99	.995	.999
1	1.32330	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944	10.828
2	2.77259	4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966	13.816
3	4.10835	6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381	16.266
4	5.38527	7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602	18.467
5	6.62568	9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	20.515
6	7.84080	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476	22.458
7	9.03715	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777	24.322
8	10.2188	13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550	26.125
9	11.3887	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893	27.877
10	12.5489	15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882	29.588
11	13.7007	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569	31.264
12	14.8454	18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995	32.909
13	15.9839	19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194	34.528
14	17.1170	21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193	36.123
15	18.2451	22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013	37.697
16	19.3688	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672	39.252
17	20.4887	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185	40.790
18	21.6049	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564	42.312
19	22.7178	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822	43.820
20	23.8277	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968	45.315
21	24.9348	29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010	46.797
22	26.0393	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956	48.268
23	27.1413	32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813	49.728
24	28.2412	33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585	51.179
25	29.3389	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278	52.620
26	30.4345	35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899	54.052
27	31.5284	36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449	55.476
28	32.6205	37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933	56.892
29	33.7109	39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356	58.302
30	34.7998	40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720	59.703
40	45.6160	51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659	73.402
50	56.3336	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900	86.661
60	66.9814	74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517	99.607
70	77.5766	85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215	112.317
80	88.1303	96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321	124.839
90	98.6499	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299	137.208
100	109.141	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169	149.449

This table is taken from Table 8 of the *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, by Pearson and Hartley, and is reproduced with the kind permission of E. S. Pearson and the trustees of *Biometrika*.

Table IV. **Fractiles of the F distribution**

This table gives the .95, .975, and .99 fractiles of the F distribution with ν_1 and ν_2 degrees of freedom for $\nu_1 = 1(1)10,12,15,20,24,30,40,60,120,\infty$ and $\nu_2 = 1(1)30,40,60,120,\infty$.

Example: For $\nu_1 = 8$ and $\nu_2 = 13$, the .95 fractile is 2.77.

.95 Fractiles

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	243.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Table IV (continued) .975 Fractiles

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.21	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

Table IV (continued) .99 Fractiles

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

This table is abridged from Table 18 of the *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, edited by Pearson and Hartley, and is reproduced with the kind permission of E. S. Pearson and the trustees of *Biometrika*.

Table V. Binomial Probabilities

This table gives binomial probabilities,

$$P(R = r \mid n, p) = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r},$$

for $n = 1(1)20$, $r = 0(1)n$, and $p = .05(.05).50$. For $p > .50$, take $P(r \mid n, p) = P(n - r \mid n, 1 - p)$.

Examples: $P(R = 3 \mid n = 8, p = .25) = .2076$,
and $P(R = 2 \mid n = 5, p = .60) = P(R = 3 \mid n = 5, p = .40) = .2304$.

		p									
n	*r*	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000
	1	.0500	.1000	.1500	.2000	.2500	.3000	.3500	.4000	.4500	.5000
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
	1	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000
	2	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750
	2	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750
	3	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
	1	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500
	2	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750
	3	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500
	4	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312
	1	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1562
	2	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125
	3	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125
	4	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1562
	5	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0312
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156
	1	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938
	2	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344
	3	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125
	4	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344
	5	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078
	1	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547
	2	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641
	3	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734
	4	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734
	5	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641
	6	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078

Table V (continued)

n	r	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039
	1	.2793	.3826	.3847	.3355	.2760	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312
	2	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094
	3	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188
	4	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734
	5	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188
	6	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039
9	0	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0277	.0101	.0046	.0020
	1	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0605	.0339	.0176
	2	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2162	.1612	.1110	.0703
	3	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2716	.2508	.2119	.1641
	4	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2194	.2508	.2600	.2461
	5	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1181	.1672	.2128	.2461
	6	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0424	.0743	.1160	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0098	.0212	.0407	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0035	.0083	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0020
10	0	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010
	1	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098
	2	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439
	3	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2522	.2150	.1665	.1172
	4	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2377	.2508	.2384	.2051
	5	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1536	.2007	.2340	.2461
	6	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0689	.1115	.1596	.2051
	7	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0212	.0425	.0746	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0043	.0106	.0229	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0042	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
	1	.3293	.3835	.3248	.2362	.1549	.0932	.0518	.0266	.0125	.0054
	2	.0867	.2131	.2866	.2953	.2581	.1998	.1395	.0887	.0513	.0269
	3	.0137	.0710	.1517	.2215	.2581	.2568	.2254	.1774	.1259	.0806
	4	.0014	.0158	.0536	.1107	.1721	.2201	.2428	.2365	.2060	.1611
	5	.0001	.0025	.0132	.0388	.0803	.1231	.1830	.2207	.2360	.2256
	6	.0000	.0003	.0023	.0097	.0268	.0566	.0985	.1471	.1931	.2256
	7	.0000	.0000	.0003	.0017	.0064	.0173	.0379	.0701	.1128	.1611
	8	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0037	.0102	.0234	.0462	.0806
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018	.0052	.0126	.0269
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0007	.0021	.0054
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0005
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
	1	.3413	.3766	.3012	.2062	.1267	.0712	.0368	.0174	.0075	.0029
	2	.0988	.2301	.2924	.2835	.2323	.1678	.1088	.0639	.0339	.0161
	3	.0173	.0852	.1720	.2362	.2581	.2397	.1954	.1419	.0923	.0537
	4	.0021	.0213	.0683	.1329	.1936	.2311	.2367	.2128	.1700	.1208
	5	.0002	.0038	.0193	.0532	.1032	.1585	.2039	.2270	.2225	.1934
	6	.0000	.0005	.0040	.0155	.0401	.0792	.1281	.2124	.2124	.2256

Table V (continued)

n	r	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
12	7	.0000	.0000	.0006	.0033	.0115	.0291	.0591	.1009	.1489	.1934
	8	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0078	.0199	.0420	.0762	.1208
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0048	.0125	.0277	.0537
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0025	.0068	.0161
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0029
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
13	0	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004	.0001
	1	.3512	.3672	.2774	.1787	.1029	.0540	.0259	.0113	.0045	.0016
	2	.1109	.2448	.2937	.2680	.2059	.1388	.0836	.0453	.0220	.0095
	3	.0214	.0997	.1900	.2457	.2517	.2181	.1651	.1107	.0660	.0349
	4	.0028	.0277	.0838	.1535	.2097	.2337	.2222	.1845	.1350	.0873
	5	.0003	.0055	.0266	.0691	.1258	.1803	.2154	.2214	.1989	.1571
	6	.0000	.0008	.0063	.0230	.0559	.1030	.1546	.1968	.2169	.2095
	7	.0000	.0001	.0011	.0058	.0186	.0442	.0833	.1312	.1775	.2095
	8	.0000	.0000	.0001	.0011	.0047	.0142	.0336	.0656	.1089	.1571
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0009	.0034	.0101	.0243	.0495	.0873
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0022	.0065	.0162	.0349
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0012	.0036	.0095
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
14	0	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002	.0001
	1	.3593	.3559	.2539	.1539	.0832	.0407	.0181	.0073	.0027	.0009
	2	.1229	.2570	.2912	.2501	.1802	.1134	.0634	.0317	.0141	.0056
	3	.0259	.1142	.2056	.2501	.2402	.1943	.1366	.0845	.0462	.0222
	4	.0037	.0349	.0998	.1720	.2202	.2290	.2022	.1549	.1040	.0611
	5	.0004	.0078	.0352	.0860	.1468	.1963	.2178	.2066	.1701	.1222
	6	.0000	.0013	.0093	.0322	.0734	.1262	.1759	.2066	.2088	.1833
	7	.0000	.0002	.0019	.0092	.0280	.0618	.1082	.1574	.1952	.2095
	8	.0000	.0000	.0003	.0020	.0082	.0232	.0510	.0918	.1398	.1833
	9	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0066	.0183	.0408	.0762	.1222
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0014	.0049	.0136	.0312	.0611
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0033	.0093	.0222
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0019	.0056
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0009
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001	.0000
	1	.3658	.3432	.2312	.1319	.0668	.0305	.0126	.0047	.0016	.0005
	2	.1348	.2669	.2856	.2309	.1559	.0916	.0476	.0219	.0090	.0032
	3	.0307	.1285	.2184	.2501	.2252	.1700	.1110	.0634	.0318	.0139
	4	.0049	.0428	.1156	.1876	.2252	.2186	.1792	.1268	.0780	.0417
	5	.0006	.0105	.0449	.1032	.1651	.2061	.2123	.1859	.1404	.0916
	6	.0000	.0019	.0132	.0430	.0917	.1472	.1906	.2066	.1914	.1527
	7	.0000	.0003	.0030	.0138	.0393	.0811	.1319	.1771	.2013	.1964
	8	.0000	.0000	.0005	.0035	.0131	.0348	.0710	.1181	.1647	.1964
	9	.0000	.0000	.0001	.0007	.0034	.0116	.0298	.0612	.1048	.1527
	10	.0000	.0000	.0000	.0001	.0007	.0030	.0096	.0245	.0515	.0916
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0074	.0191	.0417
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052	.0139
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0032
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

Table V (continued)

n	r	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
16	0	.4401	.1853	.0743	.0281	.0100	.0033	.0010	.0003	.0001	.0000
	1	.3706	.3294	.2097	.1126	.0535	.0228	.0087	.0030	.0009	.0002
	2	.1463	.2745	.2775	.2111	.1336	.0732	.0353	.0150	.0056	.0018
	3	.0359	.1423	.2285	.2463	.2079	.1465	.0888	.0468	.0215	.0085
	4	.0061	.0514	.1311	.2001	.2252	.2040	.1553	.1014	.0572	.0278
	5	.0008	.0137	.0555	.1201	.1802	.2099	.2008	.1623	.1123	.0667
	6	.0001	.0028	.0180	.0550	.1101	.1649	.1982	.1983	.1684	.1222
	7	.0000	.0004	.0045	.0197	.0524	.1010	.1524	.1889	.1969	.1746
	8	.0000	.0001	.0009	.0055	.0197	.0487	.0923	.1417	.1812	.1964
	9	.0000	.0000	.0001	.0012	.0058	.0185	.0442	.0840	.1318	.1746
	10	.0000	.0000	.0000	.0002	.0014	.0056	.0167	.0392	.0755	.1222
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0013	.0049	.0142	.0337	.0667
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0040	.0115	.0278
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0029	.0085
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	0	.4181	.1668	.0631	.0225	.0075	.0023	.0007	.0002	.0000	.0000
	1	.3741	.3150	.1893	.0957	.0426	.0169	.0060	.0019	.0005	.0001
	2	.1575	.2800	.2673	.1914	.1136	.0581	.0260	.0102	.0035	.0010
	3	.0415	.1556	.2359	.2393	.1893	.1245	.0701	.0341	.0144	.0052
	4	.0076	.0605	.1457	.2093	.2209	.1868	.1320	.0796	.0411	.0182
	5	.0010	.0175	.0668	.1361	.1914	.2081	.1849	.1379	.0875	.0472
	6	.0001	.0039	.0236	.0680	.1276	.1784	.1991	.1839	.1432	.0944
	7	.0000	.0007	.0065	.0267	.0668	.1201	.1685	.1927	.1841	.1484
	8	.0000	.0001	.0014	.0084	.0279	.0644	.1143	.1606	.1883	.1855
	9	.0000	.0000	.0003	.0021	.0093	.0276	.0611	.1070	.1540	.1855
	10	.0000	.0000	.0000	.0004	.0025	.0095	.0263	.0571	.1008	.1484
	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0026	.0090	.0242	.0525	.0944
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0081	.0215	.0472
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0021	.0068	.0182
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
18	0	.3972	.1501	.0536	.0180	.0056	.0016	.0004	.0001	.0000	.0000
	1	.3763	.3002	.1704	.0811	.0338	.0126	.0042	.0012	.0003	.0001
	2	.1683	.2835	.2556	.1723	.0958	.0458	.0190	.0069	.0022	.0006
	3	.0473	.1680	.2406	.2297	.1704	.1046	.0547	.0246	.0095	.0031
	4	.0093	.0700	.1592	.2153	.2130	.1681	.1104	.0614	.0291	.0117
	5	.0014	.0218	.0787	.1507	.1988	.2017	.1664	.1146	.0666	.0327
	6	.0002	.0052	.0310	.0816	.1436	.1873	.1941	.1655	.1181	.0708
	7	.0000	.0010	.0091	.0350	.0820	.1376	.1792	.1892	.1657	.1214
	8	.0000	.0002	.0022	.0120	.0376	.0811	.1327	.1734	.1864	.1669
	9	.0000	.0000	.0004	.0033	.0139	.0386	.0794	.1284	.1694	.1855
	10	.0000	.0000	.0001	.0008	.0042	.0149	.0385	.0771	.1248	.1669
	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0010	.0046	.0151	.0374	.0742	.1214
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0047	.0145	.0354	.0708

Table V (continued)

n	r	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
18	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0045	.0134	.0327
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0039	.0117
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0009	.0031
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
19	0	.3774	.1351	.0456	.0144	.0042	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000
	1	.3774	.2852	.1529	.0685	.0268	.0093	.0029	.0008	.0002	.0000
	2	.1787	.2852	.2428	.1540	.0803	.0358	.0138	.0046	.0013	.0003
	3	.0533	.1796	.2428	.2182	.1517	.0869	.0422	.0175	.0062	.0018
	4	.0112	.0798	.1714	.2182	.2023	.1491	.0909	.0467	.0203	.0074
	5	.0018	.0266	.0907	.1636	.2023	.1916	.1468	.0933	.0497	.0222
	6	.0002	.0069	.0374	.0955	.1574	.1916	.1844	.1451	.0949	.0518
	7	.0000	.0014	.0122	.0443	.0974	.1525	.1844	.1797	.1443	.0961
	8	.0000	.0002	.0032	.0166	.0487	.0981	.1489	.1797	.1771	.1442
	9	.0000	.0000	.0007	.0051	.0198	.0514	.0980	.1464	.1771	.1762
	10	.0000	.0000	.0001	.0013	.0066	.0220	.0528	.0976	.1449	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0077	.0233	.0532	.0970	.1442
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0022	.0083	.0237	.0529	.0961
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0085	.0233	.0518
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0082	.0222
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0022	.0074
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
20	0	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000	.0000
	1	.3774	.2702	.1368	.0576	.0211	.0068	.0020	.0005	.0001	.0000
	2	.1887	.2852	.2293	.1369	.0669	.0278	.0100	.0031	.0008	.0002
	3	.0596	.1901	.2428	.2054	.1339	.0716	.0323	.0123	.0040	.0011
	4	.0133	.0898	.1821	.2182	.1897	.1304	.0738	.0350	.0139	.0046
	5	.0022	.0319	.1028	.1746	.2023	.1789	.1272	.0746	.0365	.0148
	6	.0003	.0089	.0454	.1091	.1686	.1916	.1712	.1244	.0746	.0370
	7	.0000	.0020	.0160	.0545	.1124	.1643	.1844	.1659	.1221	.0739
	8	.0000	.0004	.0046	.0222	.0609	.1144	.1614	.1797	.1623	.1201
	9	.0000	.0001	.0011	.0074	.0271	.0654	.1158	.1597	.1771	.1602
	10	.0000	.0000	.0002	.0020	.0099	.0308	.0686	.1171	.1593	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0005	.0030	.0120	.0336	.0710	.1185	.1602
	12	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0039	.0136	.0355	.0727	.1201
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0045	.0146	.0366	.0739
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0049	.0150	.0370
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0049	.0148
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0046
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

This table is reproduced by permission from R. S. Burington and D. C. May, *Handbook of Probability and Statistics with Tables*. McGraw-Hill Book Company, 1953.

Table VI. Poisson Probabilities

This table gives Poisson probabilities,

$$P(R = r \mid \lambda, t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^r}{r!},$$

for $\lambda t = .1(.1)10(1)20$ and suitable values of r.

Example: $P(R = 2 \mid \lambda = 1.5, t = 5) = .0156$.

	λt									
r	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.0905	.1637	.2222	.2681	.3033	.3293	.3476	.3595	.3659	.3679
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0988	.1217	.1438	.1647	.1839
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0030	.0050	.0077	.0111	.0153
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020	.0031
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

	λt									
r	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

	λt									
r	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	.1494
2	.2700	.2681	.2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0540
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014	.0018	.0022	.0027
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

Table VI (continued)

r	λ 3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0450	.0408	.0369	.0344	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1397	.1304	.1217	.1135	.1057	.0984	.0915	.0850	.0789	.0733
2	.2165	.2087	.2008	.1929	.1850	.1771	.1692	.1615	.1539	.1465
3	.2237	.2226	.2209	.2186	.2158	.2125	.2087	.2046	.2001	.1954
4	.1734	.1781	.1823	.1858	.1888	.1912	.1931	.1944	.1951	.1954
5	.1075	.1140	.1203	.1264	.1322	.1377	.1429	.1477	.1522	.1563
6	.0555	.0608	.0662	.0716	.0771	.0826	.0881	.0936	.0989	.1042
7	.0246	.0278	.0312	.0348	.0385	.0425	.0466	.0508	.0551	.0595
8	.0095	.0111	.0129	.0148	.0169	.0191	.0215	.0241	.0269	.0298
9	.0033	.0040	.0047	.0056	.0066	.0076	.0089	.0102	.0116	.0132
10	.0010	.0013	.0016	.0019	.0023	.0028	.0033	.0039	.0045	.0053
11	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019
12	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

r	λ 4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	.0166	.0150	.0136	.0123	.0111	.0101	.0091	.0082	.0074	.0067
1	.0679	.0630	.0583	.0540	.0500	.0462	.0427	.0395	.0365	.0337
2	.1393	.1323	.1254	.1188	.1125	.1063	.1005	.0948	.0894	.0842
3	.1904	.1852	.1798	.1743	.1687	.1631	.1574	.1517	.1460	.1404
4	.1951	.1944	.1933	.1917	.1898	.1875	.1849	.1820	.1789	.1755
5	.1600	.1633	.1662	.1687	.1708	.1725	.1738	.1747	.1753	.1755
6	.1093	.1143	.1191	.1237	.1281	.1323	.1362	.1398	.1432	.1462
7	.0640	.0686	.0732	.0778	.0824	.0869	.0914	.0959	.1002	.1044
8	.0328	.0360	.0393	.0428	.0463	.0500	.0537	.0575	.0614	.0653
9	.0150	.0168	.0188	.0209	.0232	.0255	.0280	.0307	.0334	.0363
10	.0061	.0071	.0081	.0092	.0104	.0118	.0132	.0147	.0164	.0181
11	.0023	.0027	.0032	.0037	.0043	.0049	.0056	.0064	.0073	.0082
12	.0008	.0009	.0011	.0014	.0016	.0019	.0022	.0026	.0030	.0034
13	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013
14	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002

r	λ 5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	.0061	.0055	.0050	.0045	.0041	.0037	.0033	.0030	.0027	.0025
1	.0311	.0287	.0265	.0244	.0225	.0207	.0191	.0176	.0162	.0149
2	.0793	.0746	.0701	.0659	.0618	.0580	.0544	.0509	.0477	.0446
3	.1348	.1293	.1239	.1185	.1133	.1082	.1033	.0985	.0938	.0892
4	.1719	.1681	.1641	.1600	.1558	.1515	.1472	.1428	.1383	.1339
5	.1753	.1748	.1740	.1728	.1714	.1697	.1678	.1656	.1632	.1606
6	.1490	.1515	.1537	.1555	.1571	.1584	.1594	.1601	.1605	.1606
7	.1086	.1125	.1163	.1200	.1234	.1267	.1298	.1326	.1353	.1377
8	.0692	.0731	.0771	.0810	.0849	.0887	.0925	.0962	.0998	.1033
9	.0392	.0423	.0454	.0486	.0519	.0552	.0586	.0620	.0654	.0688

Table VI (continued)

r	λt 5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
10	.0200	.0220	.0241	.0262	.0285	.0309	.0334	.0359	.0386	.0413
11	.0093	.0104	.0116	.0129	.0143	.0157	.0173	.0190	.0207	.0225
12	.0039	.0045	.0051	.0058	.0065	.0073	.0082	.0092	.0102	.0113
13	.0015	.0018	.0021	.0024	.0028	.0032	.0036	.0041	.0046	.0052
14	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013	.0015	.0017	.0019	.0022
15	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009
16	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

r	λt 6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	.0022	.0020	.0018	.0017	.0015	.0014	.0012	.0011	.0010	.0009
1	.0137	.0126	.0116	.0106	.0098	.0090	.0082	.0076	.0070	.0064
2	.0417	.0390	.0364	.0340	.0318	.0296	.0276	.0258	.0240	.0223
3	.0848	.0806	.0765	.0726	.0688	.0652	.0617	.0584	.0552	.0521
4	.1294	.1249	.1205	.1162	.1118	.1076	.1034	.0992	.0952	.0912
5	.1579	.1549	.1519	.1487	.1454	.1420	.1385	.1349	.1314	.1277
6	.1605	.1601	.1595	.1586	.1575	.1562	.1546	.1529	.1511	.1490
7	.1399	.1418	.1435	.1450	.1462	.1472	.1480	.1486	.1489	.1490
8	.1066	.1099	.1130	.1160	.1188	.1215	.1240	.1263	.1284	.1304
9	.0723	.0757	.0791	.0825	.0858	.0891	.0923	.0954	.0985	.1014
10	.0441	.0469	.0498	.0528	.0558	.0588	.0618	.0649	.0679	.0710
11	.0245	.0265	.0285	.0307	.0330	.0353	.0377	.0401	.0426	.0452
12	.0124	.0137	.0150	.0164	.0179	.0194	.0210	.0227	.0245	.0264
13	.0058	.0065	.0073	.0081	.0089	.0098	.0108	.0119	.0130	.0142
14	.0025	.0029	.0033	.0037	.0041	.0046	.0052	.0058	.0064	.0071
15	.0010	.0012	.0014	.0016	.0018	.0020	.0023	.0026	.0029	.0033
16	.0004	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0010	.0011	.0013	.0014
17	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006
18	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002
19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

r	λt 7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	.0008	.0007	.0007	.0006	.0006	.0005	.0005	.0004	.0004	.0003
1	.0059	.0054	.0049	.0045	.0041	.0038	.0035	.0032	.0029	.0027
2	.0208	.0194	.0180	.0167	.0156	.0145	.0134	.0125	.0116	.0107
3	.0492	.0464	.0438	.0413	.0389	.0366	.0345	.0324	.0305	.0286
4	.0874	.0836	.0799	.0764	.0729	.0696	.0663	.0632	.0602	.0573
5	.1241	.1204	.1167	.1130	.1094	.1057	.1021	.0986	.0951	.0916
6	.1468	.1445	.1420	.1394	.1367	.1339	.1311	.1282	.1252	.1221
7	.1489	.1486	.1481	.1474	.1465	.1454	.1442	.1428	.1413	.1396
8	.1321	.1337	.1351	.1363	.1373	.1382	.1388	.1392	.1395	.1396
9	.1042	.1070	.1096	.1121	.1144	.1167	.1187	.1207	.1224	.1241
10	.0740	.0770	.0800	.0829	.0858	.0887	.0914	.0941	.0967	.0993
11	.0478	.0504	.0531	.0558	.0585	.0613	.0640	.0667	.0695	.0722

Table VI (continued)

r	λt 7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
12	.0283	.0303	.0323	.0344	.0366	.0388	.0411	.0434	.0457	.0481
13	.0154	.0168	.0181	.0196	.0211	.0227	.0243	.0260	.0278	.0296
14	.0078	.0086	.0095	.0104	.0113	.0123	.0134	.0145	.0157	.0169
15	.0037	.0041	.0046	.0051	.0057	.0062	.0069	.0075	.0083	.0090
16	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026	.0030	.0033	.0037	.0041	.0045
17	.0007	.0008	.0009	.0010	.0012	.0013	.0015	.0017	.0019	.0021
18	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
19	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0003	.0004
20	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002
21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

r	λt 8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001
1	.0025	.0023	.0021	.0019	.0017	.0016	.0014	.0013	.0012	.0011
2	.0100	.0092	.0086	.0079	.0074	.0068	.0063	.0058	.0054	.0050
3	.0269	.0252	.0237	.0222	.0208	.0195	.0183	.0171	.0160	.0150
4	.0544	.0517	.0491	.0466	.0443	.0420	.0398	.0377	.0357	.0337
5	.0882	.0849	.0816	.0784	.0752	.0722	.0692	.0663	.0635	.0607
6	.1191	.1160	.1128	.1097	.1066	.1034	.1003	.0972	.0941	.0911
7	.1378	.1358	.1338	.1317	.1294	.1271	.1247	.1222	.1197	.1171
8	.1395	.1392	.1388	.1382	.1375	.1366	.1356	.1344	.1332	.1318
9	.1256	.1269	.1280	.1290	.1299	.1306	.1311	.1315	.1317	.1318
10	.1017	.1040	.1063	.1084	.1104	.1123	.1140	.1157	.1172	.1186
11	.0749	.0776	.0802	.0828	.0853	.0878	.0902	.0925	.0948	.0970
12	.0505	.0530	.0555	.0579	.0604	.0629	.0654	.0679	.0703	.0728
13	.0315	.0334	.0354	.0374	.0395	.0416	.0438	.0459	.0481	.0504
14	.0182	.0196	.0210	.0225	.0240	.0256	.0272	.0289	.0306	.0324
15	.0098	.0107	.0116	.0126	.0136	.0147	.0158	.0169	.0182	.0194
16	.0050	.0055	.0060	.0066	.0072	.0079	.0086	.0093	.0101	.0109
17	.0024	.0026	.0029	.0033	.0036	.0040	.0044	.0048	.0053	.0058
18	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019	.0021	.0024	.0026	.0029
19	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014
20	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0005	.0006
21	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003
22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

r	λt 9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
0	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
1	.0010	.0009	.0009	.0008	.0007	.0007	.0006	.0005	.0005	.0005
2	.0046	.0043	.0040	.0037	.0034	.0031	.0029	.0027	.0025	.0023
3	.0140	.0131	.0123	.0115	.0107	.0100	.0093	.0087	.0081	.0076
4	.0319	.0302	.0285	.0269	.0254	.0240	.0226	.0213	.0201	.0189

Table VI (continued)

r	λt = 9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
5	.0581	.0555	.0530	.0506	.0483	.0460	.0439	.0418	.0398	.0378
6	.0881	.0851	.0822	.0793	.0764	.0736	.0709	.0682	.0656	.0631
7	.1145	.1118	.1091	.1064	.1037	.1010	.0982	.0955	.0928	.0901
8	.1302	.1286	.1269	.1251	.1232	.1212	.1191	.1170	.1148	.1126
9	.1317	.1315	.1311	.1306	.1300	.1293	.1284	.1274	.1263	.1251
10	.1198	.1210	.1219	.1228	.1235	.1241	.1245	.1249	.1250	.1251
11	.0991	.1012	.1031	.1049	.1067	.1083	.1098	.1112	.1125	.1137
12	.0752	.0776	.0799	.0822	.0844	.0866	.0888	.0908	.0928	.0948
13	.0526	.0549	.0572	.0594	.0617	.0640	.0662	.0685	.0707	.0729
14	.0342	.0361	.0380	.0399	.0419	.0439	.0459	.0479	.0500	.0521
15	.0208	.0221	.0235	.0250	.0265	.0281	.0297	.0313	.0330	.0347
16	.0118	.0127	.0137	.0147	.0157	.0168	.0180	.0192	.0204	.0217
17	.0063	.0069	.0075	.0081	.0088	.0095	.0103	.0111	.0119	.0128
18	.0032	.0035	.0039	.0042	.0046	.0051	.0055	.0060	.0065	.0071
19	.0015	.0017	.0019	.0021	.0023	.0026	.0028	.0031	.0034	.0037
20	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019
21	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
22	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004
23	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
24	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

r	λt = 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0010	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0037	.0018	.0008	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0102	.0053	.0027	.0013	.0006	.0003	.0001	.0001	.0000	.0000
5	.0224	.0127	.0070	.0037	.0019	.0010	.0005	.0002	.0001	.0001
6	.0411	.0255	.0152	.0087	.0048	.0026	.0014	.0007	.0004	.0002
7	.0646	.0437	.0281	.0174	.0104	.0060	.0034	.0018	.0010	.0005
8	.0888	.0655	.0457	.0304	.0194	.0120	.0072	.0042	.0024	.0013
9	.1085	.0874	.0661	.0473	.0324	.0213	.0135	.0083	.0050	.0029
10	.1194	.1048	.0859	.0663	.0486	.0341	.0230	.0150	.0095	.0058
11	.1194	.1144	.1015	.0844	.0663	.0496	.0355	.0245	.0164	.0106
12	.1094	.1144	.1099	.0984	.0829	.0661	.0504	.0368	.0259	.0176
13	.0926	.1056	.1099	.1060	.0956	.0814	.0658	.0509	.0378	.0271
14	.0728	.0905	.1021	.1060	.1024	.0930	.0800	.0655	.0541	.0387
15	.0534	.0724	.0885	.0989	.1024	.0992	.0906	.0786	.0650	.0516
16	.0367	.0543	.0719	.0866	.0960	.0992	.0963	.0884	.0772	.0646
17	.0237	.0383	.0550	.0713	.0847	.0934	.0963	.0936	.0863	.0760
18	.0145	.0256	.0397	.0554	.0706	.0830	.0909	.0936	.0911	.0844
19	.0084	.0161	.0272	.0409	.0557	.0699	.0814	.0887	.0911	.0888
20	.0046	.0097	.0177	.0286	.0418	.0559	.0692	.0798	.0866	.0888
21	.0024	.0055	.0109	.0191	.0299	.0426	.0560	.0684	.0783	.0846
22	.0012	.0030	.0065	.0121	.0204	.0310	.0433	.0560	.0676	.0769
23	.0006	.0016	.0037	.0074	.0133	.0216	.0320	.0438	.0559	.0669
24	.0003	.0008	.0020	.0043	.0083	.0144	.0226	.0328	.0442	.0557

Table VI (continued)

	λt									
r	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
25	.0001	.0004	.0010	.0024	.0050	.0092	.0154	.0237	.0336	.0446
26	.0000	.0002	.0005	.0013	.0029	.0057	.0101	.0164	.0246	.0343
27	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0034	.0063	.0109	.0173	.0254
28	.0000	.0000	.0001	.0003	.0009	.0019	.0038	.0070	.0117	.0181
29	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0011	.0023	.0044	.0077	.0125
30	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0013	.0026	.0049	.0083
31	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007	.0015	.0030	.0054
32	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0004	.0009	.0018	.0034
33	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0010	.0020
34	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0012
35	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007
36	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004
37	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
38	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
39	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

This table is reproduced by permission from R. S. Burington and D. C. May, *Handbook of Probability and Statistics with Tables*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.

Table VII. Standard Normal Density Function

This table gives values of the standard normal density function,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2},$$

for $z = 0(.01)4.29$. For $z < 0$, take $f(z) = f(-z)$.

Examples: $f(2.16) = .0387$, and $f(-1.57) = f(1.57) = .1163$.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538

Table VII (continued)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009
3.5	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3.6	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0004
3.7	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003	.0003	.0003
3.8	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
3.9	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001
4.0	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
4.1	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
4.2	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

These Tables of "Gaussian Density Function" appear in *Analysis of Decisions under Uncertainty* by Robert Schlaifer, published by McGraw-Hill Book Company, Inc., 1969. They are reproduced here by specific permission of the copyright holder, The President and Fellows of Harvard College.

Table VIII. Random Digits

10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76	80 95 90 91 17	39 29 27 49 45
37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37	20 63 61 04 02	00 82 29 16 65
08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60	15 95 33 47 64	35 08 03 36 06
99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65	88 67 67 43 97	04 43 62 76 59
12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53	98 95 11 68 77	12 17 17 68 33
66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70	65 81 33 98 85	11 19 92 91 70
31 06 01 08 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 14	86 79 90 74 39	23 40 30 97 32
85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18	73 05 38 52 47	18 62 38 85 79
63 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48	28 46 82 87 09	83 49 12 56 24
73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82	60 93 52 03 44	35 27 38 84 35
98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33	50 50 07 39 98
11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42 01	52 77 56 78 51
83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 00 78	18 47 54 06 10	68 71 17 78 17
88 68 54 02 00	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93	29 60 91 10 62
99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68	23 47 83 41 13
65 48 11 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86	40 21 81 65 44
80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 11 57 82 53	14 38 55 37 63
74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	45 52 16 42 37	96 28 60 26 55
69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03	76 62 11 39 90	94 40 05 64 18
09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22	54 38 21 45 98
91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23	37 08 92 00 48
80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40	42 05 08 23 41
44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 92 65 75	57 60 04 08 81	22 22 20 64 13
12 55 07 37 42	11 10 00 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39	28 70 72 58 15
63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82	07 20 73 17 90
61 19 69 04 46	26 45 74 77 74	51 92 43 37 29	65 39 45 95 93	42 58 26 05 27
15 47 44 52 66	95 27 07 99 53	59 36 78 38 48	82 39 61 01 18	33 21 15 94 66
94 55 72 85 73	67 89 75 43 87	54 62 24 44 31	91 19 04 25 92	92 92 74 59 73
42 48 11 62 13	97 34 40 87 21	16 86 84 87 67	03 07 11 20 29	25 70 14 66 70
23 52 37 83 17	73 20 88 98 37	68 93 59 14 16	26 25 22 96 63	05 52 28 25 62
04 49 35 24 94	75 24 63 38 24	45 86 25 10 25	61 96 27 93 35	65 33 71 24 72
00 54 99 76 54	64 05 18 81 59	96 11 96 38 96	54 69 28 23 91	23 28 72 95 29
35 96 31 53 07	26 89 80 93 54	33 35 13 54 62	77 97 45 00 24	90 10 33 93 33
59 80 80 83 91	45 42 72 68 42	83 60 94 97 00	13 02 12 48 92	78 56 52 01 06
46 05 88 52 36	01 39 09 22 86	77 28 14 40 77	93 91 08 36 47	70 61 74 29 41
32 17 90 05 97	87 37 92 52 41	05 56 70 70 07	86 74 31 71 57	85 39 41 18 38
69 23 46 14 06	20 11 74 52 04	15 95 66 00 00	18 74 39 24 23	97 11 89 63 38
19 56 54 14 30	01 75 87 53 79	40 41 92 15 85	66 67 43 68 06	84 96 28 52 07
45 15 51 49 38	19 47 60 72 46	43 66 79 45 43	59 04 79 00 33	20 82 66 95 41
94 86 43 19 94	36 16 81 08 51	34 88 88 15 53	01 54 03 54 56	05 01 45 11 76
98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07	35 44 13 18 80
33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94	37 54 87 30 43
80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98	94 62 46 11 71
79 75 24 91 40	71 96 12 82 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39	00 38 75 95 79
18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	05 45 56 14 27	77 93 89 19 36
74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21	80 81 45 17 48
54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55	36 04 09 03 24
11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40	88 46 12 33 56
48 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46	15 02 00 99 94
69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15	01 84 87 69 38

B I B L I O G R A F I A

1.- R. Winkler and W. Hays.
"Statistics, Probability, Inference and Decision"
Holt, Rinehart and Winston. 1975.

2.- Erwin Kreyszig.
"Introducción a la Estadística Matemática, Principios y Métodos".
Limusa-Wiley. 1973.

3.- Paul G. Hoel.
"Introduction to Mathematical Statistics"
Wiley International Edition. 1971.

4.- Alberto Moreno Bonett y Francisco Javier Jauffred M.
"Elementos de Probabilidad y Estadística"
Representaciones y Servicios de Ingeniería, S. A. 1976.